



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ

ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΤΙΣ
ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΜΑΡΙΟΣ ΧΡ. ΠΙΤΤΑΛΗΣ

2007

ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΤΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

Μάριος Χρ. Πιττάλης

Υποβλήθηκε στο Τμήμα Επιστημών της Αγωγής
ως μέρος των απαιτήσεων για απόκτηση

Διδακτορικού Τίτλου
στη Μαθηματική Παιδεία
Πανεπιστήμιο Κύπρου
Σεπτέμβριος, 2007

ΜΑΡΙΟΣ ΧΡ. ΠΙΤΤΑΛΗΣ

© 2007

Μάριος Χρ. Πιτάλης

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ

Έγκριση Διδακτορικής Διατριβής

Με το παρόν έγγραφο πιστοποιείται ότι η διδακτορική διατριβή που ετοιμάστηκε

Από τον Μάριο Χρ. Πιττάλη

Με τίτλο Ανάπτυξη της Ικανότητας των Μαθητών στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου

Πληροί τους κανονισμούς του Πανεπιστημίου και ανταποκρίνεται στα κριτήρια ποιότητας και πρωτοτυπίας του Πανεπιστημίου

Για την απόκτηση Διδακτορικού Τίτλου στη Μαθηματική Παιδεία

Η διατριβή παρουσιάστηκε δημόσια και σε πενταμελή εξεταστική επιτροπή και εγκρίθηκε στις 21 Σεπτεμβρίου, 2007.

Ερευνητικός Σύμβουλος: Κωνσταντίνος Χρίστου, Καθηγητής
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Συμβουλευτική Επιτροπή: Αθανάσιος Γαγάτσης, Καθηγητής
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου
Δήμητρα Πίττα-Πανταζή, Επίκουρη Καθηγήτρια
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

.....
Κωνσταντίνος Χρίστου

.....
Δήμητρα Πίττα-Πανταζή

.....
Αθανάσιος Γαγάτσης

Εξεταστική Επιτροπή

Αθανάσιος Γαγάτσης (Πρόεδρος),
Καθηγητής, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου
Κωνσταντίνος Χρίστου,
Καθηγητής, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου
Δήμητρα Πίττα-Πανταζή,
Επίκουρη Καθηγήτρια, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου
Θεοδόσης Ζαχαριάδης,
Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών,
Δέσποινα Πόταρη,
Αναπληρώτρια Καθηγήτρια, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο
Πατρών

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν η ανάπτυξη ενός ενιαίου θεωρητικού μοντέλου που να περιγράφει την ανάπτυξη της ικανότητας μαθητών ηλικίας έντεκα με δεκαπέντε ετών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Το μοντέλο περιγράφει την ικανότητα στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου και τη σχέση της με την ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου (spatial ability) και αναλύει την ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου με βάση ιεραρχικά επίπεδα σκέψης.

Στην έρευνα συμμετείχαν 269 μαθητές. Για τη συλλογή των δεδομένων της εργασίας χορηγήθηκαν δύο τεστ: (α) Το πρώτο τεστ μετρούσε την ικανότητα των μαθητών αντίληψης των εννοιών του χώρου και (β) το δεύτερο την ικανότητα τους στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Στη συνέχεια πραγματοποιήθηκαν κλινικές συνεντεύξεις στις οποίες συμμετείχαν 40 μαθητές με σκοπό την περαιτέρω μελέτη του συλλογισμού των μαθητών των διαφορετικών επιπέδων σκέψης.

Τα αποτελέσματα της εργασίας έδειξαν ότι η ικανότητα των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου αναλύεται στις ακόλουθες έξι διαστάσεις: (α) «αναγνώριση και κατασκευή αναπτυγμάτων», η ικανότητά τους να αναγνωρίζουν κατά πόσον ένα ανάπτυγμα είναι σε θέση όταν διπλωθεί να κατασκευάσει ένα συγκεκριμένο στερεό και να κατασκευάζουν το ανάπτυγμα ενός στερεού, (β) «χειρισμός διαφορετικών μορφών αναπαράστασης τρισδιάστατων αντικειμένων», η ικανότητά τους να αναγνωρίζουν και να χειρίζονται διαφορετικές μορφές αναπαράστασης των στερεών, (γ) «διάταξη αντικειμένων στο χώρο», η ικανότητά τους να οικοδομούν νοερά διατάξεις τρισδιάστατων αντικειμένων στο χώρο (δ) «αναγνώριση στερεών και των συστατικών τους στοιχείων», η ικανότητά τους να αναγνωρίζουν στερεά και να αντιλαμβάνονται τα συστατικά τους στοιχεία (ε) «μέτρηση επιφάνειας και αντίληψη χωρητικότητας τρισδιάστατων αντικειμένων χωρίς τη χρήση τύπων», η ικανότητά τους να υπολογίζουν το εμβαδόν της εξωτερικής επιφάνειας των στερεών χωρίς τη χρήση τύπων και να αντιλαμβάνονται διαισθητικά τη χωρητικότητα στερεών και (στ) «συλλογισμός για σχέσεις μεταξύ στοιχείων και ιδιοτήτων στερεών», η ικανότητά τους να συγκρίνουν ιδιότητες και εξωτερικά στοιχεία των στερεών. Τα αποτελέσματα της εργασίας έδειξαν, επίσης, ότι η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου αποτελεί ισχυρό παράγοντα πρόβλεψης της ικανότητας των μαθητών στις έξι διαστάσεις της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου και ιδιαίτερα των εννοιών που ενεργοποιούν σε μεγαλύτερο βαθμό ικανότητες και δεξιότητες οπτικοποίησης.

Η ανάπτυξης της ικανότητας των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου στις ηλικίες έντεκα με δεκαπέντε ετών ακολουθεί τέσσερα ιεραρχικά επίπεδα σκέψης. Οι μαθητές του πρώτου επιπέδου σκέψης έχουν ικανοποιητική επίδοση μόνο στις έννοιες της τέταρτης διάστασης και το κύριο χαρακτηριστικό τους είναι ότι χρειάζεται να εργαστούν με κάποιο υλικό, για να απαντήσουν σε οποιοδήποτε έργο που σχετίζεται με έννοιες της γεωμετρίας του χώρου (χειριστικό επίπεδο). Οι μαθητές του δεύτερου επιπέδου έχουν πολύ καλή επίδοση στις έννοιες της τέταρτης διάστασης και ικανοποιητική επίδοση στις έννοιες της πρώτης και δεύτερης διάστασης. Κύριο χαρακτηριστικό των μαθητών αυτών είναι ότι αξιοποιούν την προϋπάρχουσα τους γνώση και κυρίως τη διαισθητική τους αντίληψη, για να επιλύσουν τα προβλήματα που προκύπτουν από τη δυσκολία χειρισμού των δισδιάστατων μορφών αναπαράστασης των στερεών (δισθητικό επίπεδο). Οι μαθητές του τρίτου επιπέδου έχουν πολύ καλή επίδοση στις έννοιες της τέταρτης, πρώτης και δεύτερης διάστασης. Διαθέτουν ανεπτυγμένη ικανότητα οπτικοποίησης των εννοιών του χώρου και αντίληψης των σχέσεων στο χώρο και για αυτό αντιλαμβάνονται σε ικανοποιητικό βαθμό διατάξεις αντικειμένων στο χώρο. Οι μαθητές του επιπέδου αυτού αναγνωρίζουν τις ιδιαιτερότητες της δισδιάστατης αναπαράστασης τρισδιάστατων και αναπτύσσουν τις κατάλληλες νοητικές εικόνες που είναι απαραίτητες για το χειρισμό εννοιών της γεωμετρίας του χώρου (αναπαραστατικό επίπεδο). Τέλος, οι μαθητές της τέταρτης κατηγορίας έχουν πολύ καλή επίδοση σε όλες της διαστάσεις της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Συσχετίζουν και οικοδομούν σε ένα ενιαίο νοητικό μοντέλο τη νοητική αναπαράσταση ενός τρισδιάστατου αντικειμένου, την εξωτερική του εικόνα, τις ιδιότητές του και τις γεωμετρικές του σχέσεις με άλλες έννοιες (συσχετιστικό επίπεδο).

ABSTRACT

The purpose of this study was to develop a unified theoretical model that describes eleven to fifteen years old students' ability in 3D geometry. The model consists of two pillars. The first pillar refers to the dimensions of students' 3D geometry ability and examines its relation with spatial ability. The second pillar describes the development of students' 3D geometry ability based on hierarchical levels of thinking.

Two hundred and sixty nine students participated in the study. Two tests were administered. The first one examined students' spatial ability and the second one examined their ability in 3D geometry. Clinical interviews were also conducted to investigate and analyze the reasoning of the students of the different levels of thinking. Forty students participated in the interviews.

The results of the study showed that students' ability in 3D geometry can be described across six dimensions based on the following factors: (a) identification and construction of nets, i.e., students' ability to decide whether a net can construct a solid when folded and to construct nets, (b) manipulation of the different representations of 3D objects, (c) spatial structuring, i.e., students' ability to manipulate 3D arrays of objects, (d) identification of solids and their elements, i.e., students' ability to identify solids in the environment or in 2d sketches and to realize their structural elements, (e) measurement of surface and volume of 3D objects, i.e., students' ability to calculate the surface and volume of 3D objects without using formulas, and (f) comparison of the elements and properties of solids, i.e., students' ability to compare the structural elements and the properties of solids. The results of the study showed also that students' spatial ability is a strong predictive factor of students' ability in 3D geometry, and especially of the factors that have the strongest relation with visualization skills. There is also a hierarchical relation between the six factors of students' ability in 3D geometry.

The results of the study described the development of students' ability in 3D geometry based on four levels of thinking. The students of the first level have a satisfactory performance only in the fourth factor. Their main characteristic is the fact they can do nothing related with 3D geometry without working or manipulating a real object (manipulative level). The students of the second level have a very good performance in the fourth the factor and satisfactory performance in the first and second factors. Their main characteristic is the fact that they take advantage of their prior knowledge and intuitive

thinking to overcome the difficulties they face to handle 2D representations of 3D objects (intuitive level). The students of the third level have a very good performance in the fourth, first and second factors and satisfactory performance in the third factor. Students' performance is related to the fact they succeed in the two of the three factors of spatial ability and as a result they can manipulate different representations of the 3D objects (representative level). Finally, the students of the fourth level have a very good performance in the six factors of the ability in 3D geometry because of their high level of thinking in the three factors of spatial ability. These students visualize 3D objects, construct and manipulate mental images based on visuo-spatial information and grasp geometrical properties in solids and in the space (relational level).

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της συμβουλευτικής επιτροπής για την πολύτιμη βοήθειά τους κατά τη διάρκεια σχεδιασμού και συγγραφής της εργασίας αυτής. Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον ερευνητικό μου σύμβουλο, Καθηγητή Κωνσταντίνο Χρίστου, για τις πολύτιμες συμβουλές του και για τις ευκαιρίες που μου παρείχε να αποκτήσω τα απαραίτητα εφόδια για τις απαιτήσεις της παρούσας εργασίας και της έρευνας γενικότερα. Η βοήθειά του ξεπερνά τα όρια της παρούσας εργασίας αφού τα τελευταία δέκα χρόνια μου έδωσε την ευκαιρία να αποκτήσω χρήσιμες ακαδημαϊκές, ερευνητικές και επαγγελματικές εμπειρίες. Ο ρόλος του ως ακαδημαϊκού συμβούλου από το πρώτο έτος εισδοχής μου στο Πανεπιστήμιο υπήρξε πολύπλευρος και υπερπολύτιμος και για αυτό θεωρώ ότι ένα απλό ευχαριστώ δεν μπορεί να εκφράσει την πραγματική μου εκτίμηση για το άτομό του και για ό,τι μου έχει προσφέρει.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω, επίσης, τα άλλα δύο μέλη της συμβουλευτικής μου επιτροπής, τον Καθηγητή Αθανάσιο Γαγάτση και την Επίκουρη Καθηγήτρια Δήμητρα Πίττα Πανταζή. Οι συμβουλές και τα σχόλιά τους αποτέλεσαν πολύτιμη ανατροφοδότηση στην όλη πορεία. Η ενθάρρυνση, ο ενθουσιασμός και η προθυμία της Δρ. Πίττα Πανταζή να μοιραστεί τις ανησυχίες και τους προβληματισμούς μου στήριξαν τα μέγιστα την προσπάθειά μου.

Θέλω να ευχαριστήσω τον πολύτιμο φίλο Νίκο Μουσουλίδη για τη βοήθεια και τη στήριξή του σε όλη τη διάρκεια της εργασίας. Η κοινή παραγωγική πορεία των τελευταίων πέντε χρόνων αποτελεί ένα από τους βασικούς παράγοντες επιτυχίας της σημερινής προσπάθειας. Εύχομαι και ελπίζω η πορεία αυτή να συνεχιστεί και να αποβεί ευεργετική και για τους δυο. Θέλω, επίσης, να ευχαριστήσω τους διευθυντές και τους εκπαιδευτικούς των σχολείων που συμμετείχαν στην έρευνα για την προθυμία τους να στηρίξουν και να βοηθήσουν την προσπάθειά μου.

Τέλος θέλω να ευχαριστήσω τη γυναίκα μου, Στέλλα, και τους γονείς μου. Θέλω να ευχαριστήσω τη Στέλλα για τη στήριξή της σε όλη την πορεία, για την ενθάρρυνσή της, την αγάπη της, την κατανόησή της και το χαμόγελό της...για τις ατέλειωτες ώρες υπομονής! Όποια ευχαριστία και να γράψω για τους γονείς μου δεν θα μπορούσε ποτέ να εκφράσει τα αισθήματά μου και την πραγματική προσφορά τους.

Στη Στέλλα και στους γονείς μου

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

	Σελίδα
Περίληψη	iv
Ευχαριστίες	viii
Κατάλογος Διαγραμμάτων	xiv
Κατάλογος Πινάκων	xvii
ΚΕΦΑΛΑΙΟ I: ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ	1
Εισαγωγή	1
Το Πρόβλημα και ο Σκοπός της Εργασίας	2
Ερευνητικά Ερωτήματα	4
Σημασία και Πρωτοτυπία της Εργασίας	5
Περιορισμοί της Εργασίας	7
Δομή Εργασίας	8
Εννοιολογικοί Ορισμοί	9
ΚΕΦΑΛΑΙΟ II: ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ	11
Εισαγωγή	11
Θεωρίες Ανάπτυξης της Γεωμετρικής Σκέψης	14
Η θεωρία του Piaget	14
Η θεωρία των van Hiele	15
Επίπεδα Γεωμετρικής Σκέψης	15
Φάσεις Διδασκαλίας	18
Κριτική στο μοντέλο van Hiele	19
Μοντέλο van Hiele στην τρισδιάστατη γεωμετρία	20
Ο ρόλος της Διαισθητικής Αντίληψης και η Θεωρία των Σχηματικών Εννοιών	23
Έννοιες Γεωμετρίας στο Χώρο	26
Δυσκολίες Μαθητών στην Αναπαράσταση Γεωμετρικών Σχημάτων	26
Διατάξεις Κύβων στο Χώρο	31
Αναπαραστάσεις Αναπτυγμάτων Στερεών Αντικειμένων	34
Αντιλήψεις Μαθητών για την Έννοια της Τομής	41
Αντιλήψεις Μαθητών για την Έννοια του Όγκου	42
Τα Συστατικά Στοιχεία του Γεωμετρικού Στερεού	44
	x

Οι Ιδιότητες του Στερεού	44
Διδασκαλία της Γεωμετρίας	45
Ικανότητα Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου	47
Νοητικές Εικόνες και Είδη Οπτικοχωρικών Αναπαραστάσεων	50
Οπτικοποίηση στη Μαθηματική Παιδεία	52
Οπτική Αντίληψη, Διαδικασίες και Ικανότητες Οπτικοποίησης	52
Δυναμικές Μορφές Οπτικοποίησης	56
Στρατηγικές Μαθητών στη Νοερή Περιστροφή Αντικειμένων	57
Ικανότητα Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου και Μαθηματικά	58
Σύνοψη	60
ΚΕΦΑΛΑΙΟ III: ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ	62
Εισαγωγή	62
Υποκείμενα	63
Εργαλεία Μέτρησης	64
Τεστ Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου	63
Αναλυτικής Περιγραφή των Έργων του Τεστ	67
Τεστ Εννοιών της Γεωμετρίας του Χώρου	70
Εγκυρότητα Εργαλείων Μέτρησης	75
Τεστ Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου	75
Τεστ Μέτρησης της Ικανότητας στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου	76
Η Παρούσα Εργασία και τα Προτεινόμενα Μοντέλα	78
Το Προτεινόμενο Μοντέλο Σύνθεσης της Ικανότητας Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου	78
Το Προτεινόμενο Μοντέλο Σύνθεσης της Ικανότητας στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου	80
Διαδικασία	85
Σχεδιασμός Κλινικών Συνεντεύξεων	88
Ανάλυση	94
Τεχνικές Ανάλυσης Ποσοτικών Δεδομένων	94
Τεχνικές Ανάλυσης Ποιοτικών Δεδομένων	95
Διόρθωση Εργαλείων Μέτρησης	97
ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV: ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	100
Εισαγωγή	100

Δομή της Ικανότητας Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου	101
Περιγραφικά Αποτελέσματα του Τεστ Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου	101
Επιβεβαίωση της Δομής της Ικανότητας Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου	107
Έλεγχος Αμεταβλητότητας Μοντέλου Ικανότητας Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου	110
Έλεγχος της Δομής της Ικανότητας στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου	113
Έλεγχος Αμεταβλητότητας Μοντέλου Ικανότητας στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου	118
Σχέση μεταξύ Ικανότητας Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου και Ικανότητας στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου	120
Επίδοση των Μαθητών στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου και στην Αντίληψη των Εννοιών του Χώρου και Διαφορές Μεταξύ των Μαθητών των Διαφορετικών Τάξεων	123
Κατηγορίες Μαθητών στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου	128
Κατηγορίες Μαθητών και Ιεραρχικά Επίπεδα Σκέψης	134
Περιγραφή Ικανοτήτων Μαθητών των Τεσσάρων Επιπέδων Σκέψης	136
Ικανότητες των Επιπέδων Σκέψης στον Παράγοντα Αναγνώριση Στερεών και των Συστατικών τους Στοιχείων	137
Ικανότητες των Επιπέδων Σκέψης στον Παράγοντα Αναγνώριση και Κατασκευή Αναπτυγμάτων	139
Ικανότητες των Επιπέδων Σκέψης στον Παράγοντα Χειρισμός Διαφορετικών Μορφών Αναπαράστασης Τρισδιάστατων Αντικειμένων	141
Ικανότητες των Επιπέδων Σκέψης στον Παράγοντα Διάταξη Αντικειμένων στο Χώρο	144
Ικανότητες των Επιπέδων Σκέψης στον Παράγοντα Μέτρηση Επιφάνειας και Χωρητικότητας Τρισδιάστατων Αντικειμένων Χωρίς τη Χρήση Τύπων	146
Ικανότητες των Επιπέδων Σκέψης στον Παράγοντα Συλλογισμός και Σχέσεις Μεταξύ Στοιχείων και Ιδιοτήτων Στερεών	148
Αναλυτική Περιγραφή Συλλογισμού των Μαθητών των Τεσσάρων Επιπέδων Σκέψης	149
Αναγνώριση και Κατασκευή Αναπτυγμάτων Τρισδιάστατων Σχημάτων	149
Χειρισμός Διαφορετικών Μορφών Αναπαράστασης Τρισδιάστατων Σχημάτων	155
Διάταξη Αντικειμένων στο Χώρο	168
Μέτρηση Επιφάνειας και Αντίληψη Χωρητικότητας Τρισδιάστατων Αντικειμένων Χωρίς τη Χρήση Τύπων	178
Συλλογισμός για Σχέσεις μεταξύ Στοιχείων και Ιδιοτήτων Στερεών	185

Αναγνώριση Στερεών και των Συστατικών τους Στοιχείων	191
ΚΕΦΑΛΑΙΟ V: ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ	193
Εισαγωγή	193
Δομή της Ικανότητας Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου	194
Δομή της Ικανότητας στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου	195
Σχέση μεταξύ Ικανότητας Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου και Ικανότητας στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου	197
Επίδοση των Μαθητών στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου και στην Αντίληψη των Εννοιών του Χώρου	198
Κατηγορίες Μαθητών στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου	200
Αναγνώριση Ιεραρχικών Επιπέδων Σκέψης	202
Συνοπτική Περιγραφή Χαρακτηριστικών των Επιπέδων Σκέψης	203
Χαρακτηριστικά Πρώτου Επιπέδου Σκέψης	203
Χαρακτηριστικά Δεύτερου Επιπέδου Σκέψης	206
Χαρακτηριστικά Τρίτου Επιπέδου Σκέψης	210
Χαρακτηριστικά Τέταρτου Επιπέδου Σκέψης	213
Περιγραφή Θεωρητικού Μοντέλου της Εργασίας	219
Πρώτος Πυλώνας του Μοντέλου	220
Δεύτερος Πυλώνας του Μοντέλου	223
ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	232
Εισαγωγή	232
Συνοπτική Περιγραφή Μοντέλου	232
Σχέση Μοντέλου με Άλλες Θεωρίες	235
Εκπαιδευτικές Εφαρμογές του Μοντέλου	236
Εισηγήσεις για Μελλοντικές Έρευνες	238
ΑΝΑΦΟΡΕΣ	240
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	256

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

	Σελ.
Διάγραμμα 2.1. Η Δομή του Θεωρητικού Υπόβαθρου	13
Διάγραμμα 2.2. Τα Έντεκα Αναπτύγματα του Κύβου	39
Διάγραμμα 2.3. Η Διάταξη των 4 στο Ανάπτυγμα του Κύβου	40
Διάγραμμα 2.4. Διαδοχικές Εικόνες Περιστροφής Κύβου	57
Διάγραμμα 3.1. Μοντέλο Ελέγχου Εγκυρότητας Τεστ Ικανότητας Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου	77
Διάγραμμα 3.2. Το Προτεινόμενο Μοντέλο της Ικανότητας Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου	79
Διάγραμμα 3.3. Το Προτεινόμενο Μοντέλο της Ικανότητας στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου	84
Διάγραμμα 3.4. Αναπτύγματα Έργων Συνέντευξης	90
Διάγραμμα 3.5. Τρεις Όψεις για Κατασκευή Στερεού στη Συνέντευξη	91
Διάγραμμα 3.6. Τα Σχήματα των Έργων Αναγνώρισης Τριγωνικών Εδρών	91
Διάγραμμα 4.1. Το Μοντέλο της Ικανότητας Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου	108
Διάγραμμα 4.2. Το Μοντέλο της Ικανότητας Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου για τους Μαθητές Δημοτικού και Γυμνασίου	112
Διάγραμμα 4.3. Το Μοντέλο της Ικανότητας στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου	117
Διάγραμμα 4.4. Το Μοντέλο της Ικανότητας στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου για τους Μαθητές του Δημοτικού και Γυμνασίου	119
Διάγραμμα 4.5. Σχέση Μεταξύ Ικανότητας Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου και των Παραγόντων της Ικανότητας στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου	122
Διάγραμμα 4.6. Σχέση Μεταξύ των Παραγόντων της Ικανότητας στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου	136
Διάγραμμα 4.7. Κατασκευή Αναπτύγματος Ορθογώνιου Παραλληλεπίπεδου	149
Διάγραμμα 4.8. Σχεδιασμός Αναπτύγματος Ορθογώνιου Παραλληλεπίπεδου από Μαθητές Τετάρτου Επιπέδου	155
Διάγραμμα 4.9. Κατασκευή Τριών Διαφορετικών Όψεων Αντικειμένου	158

Διάγραμμα 4.10. Ένωση των Τριών Όψεων για την Κατασκευή του Αντικειμένου	158
Διάγραμμα 4.11. Κατασκευές Μαθητών του Πρώτου Επιπέδου	159
Διάγραμμα 4.12. Αναγνώριση Τριγωνικών Εδρών στα Δύο Στερεά	160
Διάγραμμα 4.13. Σχεδιασμός Κύβου από τους Μαθητές του Πρώτου Επιπέδου	161
Διάγραμμα 4.14. Σχεδιασμός Κύβου από τους Μαθητές του Δεύτερου Επιπέδου	163
Διάγραμμα 4.15. Κύβοι που Μπορούν να Αφαιρεθούν από την Κατασκευή	166
Διάγραμμα 4.16. Στρατηγικές Μαθητών Πρώτου Επιπέδου στον Υπολογισμό του Αριθμού των Κύβων	170
Διάγραμμα 4.17. Στρατηγικές Μαθητών Δεύτερου Επιπέδου στον Υπολογισμό του Αριθμού των Κύβων	172
Διάγραμμα 4.18. Κύβοι που Αγνόησαν οι Μαθητές του Δεύτερου Επιπέδου στη Συμπλήρωση της Κατασκευής	172
Διάγραμμα 4.19. Στρατηγικές Μαθητών Τρίτου Επιπέδου στον Υπολογισμό του Αριθμού των Κύβων	174
Διάγραμμα 4.20. Κύβοι που Αγνόησαν οι Μαθητές του Τρίτου Επιπέδου στη Συμπλήρωση της Κατασκευής	175
Διάγραμμα 4.21. Στρατηγική Μαθητών Τετάρτου Επιπέδου στον Υπολογισμό του Αριθμού των Κύβων	176
Διάγραμμα 4.22. Πρώτη Στρατηγική Μαθητών Τετάρτου Επιπέδου για τη Συμπλήρωση του Στερεού	177
Διάγραμμα 4.23. Δεύτερη Στρατηγική Μαθητών Τετάρτου Επιπέδου για τη Συμπλήρωση του Στερεού	177
Διάγραμμα 4.24. Στρατηγική Μαθητών Δεύτερου Επιπέδου στον Υπολογισμό του Εμβαδού του Στερεού	181
Διάγραμμα 4.25. Διαχωρισμός Επιφάνειας Ορθογώνιου Παραλληλεπιπέδου σε Τρία Τμήματα	182
Διάγραμμα 4.26. Στρατηγική Μαθητών Τρίτου Επιπέδου στον Υπολογισμό του Εμβαδού Τρισδιάστατης Κατασκευής	183
Διάγραμμα 4.27. Διαχωρισμός Επιφάνειας Ορθογώνιου Παραλληλεπιπέδου σε Δύο Τμήματα	184

Διάγραμμα 4.28. Στρατηγική Μαθητών Τετάρτου Επιπέδου στον Υπολογισμό του Εμβαδού Τρισδιάστατης Κατασκευής	185
Διάγραμμα 4.29. Μετατροπή Εξαγωνικού Πρίσματος σε Ορθογώνιο Παραλληλεπίπεδο	190
Διάγραμμα 5.1. Πρώτος Πυλώνας του Μοντέλου	221

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

	Σελ.
Πίνακας 3.1. Παραδείγματα Έργων των Τεστ από το ETS kit	65
Πίνακας 3.2. Παραδείγματα Έργων των Τεστ που Αναφέρονται στον Προσανατολισμό στο Χώρο	66
Πίνακας 3.3. Παραδείγματα Έργων του Τεστ Εννοιών της Γεωμετρίας του Χώρου	71
Πίνακας 3.4. Περιγραφή Παραγόντων και Έργων Παραγόντων Ικανότητας στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου	81
Πίνακας 3.5. Έργα της Κλινικής Συνέντευξης που Αναφέρονται στον Παράγοντα Διάταξη Αντικειμένων στο Χώρο	92
Πίνακας 3.6. Έργα της Κλινικής Συνέντευξης που Αναφέρονται στον Παράγοντα Μέτρηση Επιφάνειας και Χωρητικότητας Τρισδιάστατων Αντικειμένων χωρίς τη Χρήση Τύπων	92
Πίνακας 3.7. Διόρθωση Δεδομένων Έργων Τεστ Γεωμετρίας του Χώρου	94
Πίνακας 4.1. Περιγραφικά Αποτελέσματα των Έργων του Τεστ Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου	102
Πίνακας 4.2. Συσχετίσεις Μεταξύ της Επίδοσης των Υποκειμένων στα Έργα του Τεστ Α.Ε.Χ.	104
Πίνακας 4.3. Συσχετίσεις Μεταξύ της Επίδοσης των Υποκειμένων στις Κατηγορίες του Τεστ Α.Ε.Χ.	106
Πίνακας 4.4. Τυποποιημένη Λύση Μοντέλου Α.Ε.Χ. με Παράγοντα Τρίτης Τάξης	109
Πίνακας 4.5. Δείκτες Προσαρμογής Μοντέλων μαθητών Δημοτικού και Γυμνασίου	111
Πίνακας 4.6. Τυποποιημένη Λύση Μοντέλων μαθητών Δημοτικού και Γυμνασίου	111
Πίνακας 4.7. Συσχετίσεις Μεταξύ της Επίδοσης των Υποκειμένων στα Έργα του Τεστ Ικανότητα στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου	114
Πίνακας 4.8. Συσχετίσεις μεταξύ των Παραγόντων της Ικανότητας στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου	116
Πίνακας 4.9. Δείκτες Προσαρμογής Μοντέλων ικανότητας Ε.Γ.Χ. μαθητών Δημοτικού και Γυμνασίου	118
Πίνακας 4.10. Συντελεστής Παλινδρόμησης Ικανότητας Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου στους Παράγοντες της Ικανότητας στις	

Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου	121
Πίνακας 4.11. Περιγραφικά Αποτελέσματα των Παραγόντων της Ικανότητας στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου και των παραγόντων της Ικανότητας Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου	124
Πίνακας 4.12. Μέσοι Όροι και Τυπικές Αποκλίσεις των Μαθητών των Πέντε Τάξεων στους Παράγοντες της Ικανότητας στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου και στους Παράγοντες της Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου	125
Πίνακας 4.13. Αποτελέσματα Πολλαπλής Ανάλυσης Διασποράς	126
Πίνακας 4.14. Σύγκριση της Επίδοσης των Μαθητών των Πέντε Τάξεων στους Παράγοντες της Εργασίας	127
Πίνακας 4.15. Δείκτες Προσαρμογής Μοντέλων με Διαφορετικό Αριθμό Κατηγοριών	129
Πίνακας 4.16. Μέση Τιμή Πιθανότητας Κάθε Κατηγορίας	129
Πίνακας 4.17. Ποσοστό Μαθητών στις Τέσσερις Κατηγορίες Υποκειμένων	130
Πίνακας 4.18. Μέσοι Όροι και Τυπικές Αποκλίσεις των Τεσσάρων Κατηγοριών Υποκειμένων στους Παράγοντες της Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου	132
Πίνακας 4.19. Μέσοι Όροι και Τυπικές Αποκλίσεις των Τεσσάρων Κατηγοριών Υποκειμένων στους Παράγοντες της Ικανότητας των Μαθητών στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου	133
Πίνακας 4.20. Χαρακτηριστικά των Τεσσάρων Κατηγοριών Υποκειμένων	134
Πίνακας 4.21. Επίδοση των Μαθητών των Τεσσάρων Επιπέδων Σκέψης στα Έργα του Παράγοντα Αναγνώριση Στερεών και των Συστατικών τους Στοιχείων	139
Πίνακας 4.22. Επίδοση των Μαθητών των Τεσσάρων Επιπέδων Σκέψης στα Έργα του Παράγοντα Αναγνώριση και Κατασκευή Αναπτυγμάτων Τρισδιάστατων Αντικειμένων	141
Πίνακας 4.23. Επίδοση των Μαθητών των Τεσσάρων Επιπέδων Σκέψης στα Έργα του Παράγοντα Χειρισμός Διαφορετικών Μορφών Αναπαράστασης Τρισδιάστατων Σχημάτων	143
Πίνακας 4.24. Επίδοση των Μαθητών των Τεσσάρων Επιπέδων Σκέψης στα Έργα του Παράγοντα Διάταξης Αντικειμένων στο Χώρο	145
Πίνακας 4.25. Επίδοση των Μαθητών των Τεσσάρων Επιπέδων Σκέψης στα Έργα του	

Παράγοντα Μέτρηση Επιφάνειας και Χωρητικότητας Τρισδιάστατων Αντικειμένων χωρίς τη Χρήση Τύπων	147
Πίνακας 4.26. Επίδοση των Μαθητών των Τεσσάρων Επιπέδων Σκέψης στα Έργα του Παράγοντα Συλλογισμού για Σχέσεις μεταξύ Στοιχείων και Ιδιοτήτων Στερεών	149
Πίνακας 4.27. Περιγραφή Ικανοτήτων των Μαθητών των Τεσσάρων Επιπέδων Σκέψης στον Παράγοντα Αναγνώριση και Κατασκευή Αναπτυγμάτων Τρισδιάστατων Σχημάτων	150
Πίνακας 4.28. Περιγραφή Ικανοτήτων των Μαθητών των Τεσσάρων Επιπέδων Σκέψης στον Παράγοντα Χειρισμός Διαφορετικών Μορφών Αναπαράστασης Τρισδιάστατων Αντικειμένων	156
Πίνακας 4.29. Περιγραφή Ικανοτήτων των Μαθητών των Τεσσάρων Επιπέδων Σκέψης στον Παράγοντα Διάταξη Αντικειμένων στο Χώρο	169
Πίνακας 4.30. Περιγραφή Ικανοτήτων των Μαθητών των Τεσσάρων Επιπέδων Σκέψης στον Παράγοντα Μέτρηση Επιφάνειας και Χωρητικότητας Τρισδιάστατων Αντικειμένων χωρίς της Χρήση Τύπων	179
Πίνακας 4.31. Περιγραφή Ικανοτήτων των Μαθητών των Τεσσάρων Επιπέδων Σκέψης στον Παράγοντα Συλλογισμός για Σχέσεις Μεταξύ Στοιχείων και Ιδιοτήτων Στερεών	186
Πίνακας 4.32. Περιγραφή Ικανοτήτων των Μαθητών των Τεσσάρων Επιπέδων Σκέψης στον Παράγοντα Αναγνώριση Στερεών και των Συστατικών τους Στοιχείων	192
Πίνακας 5.1. Δεύτερος Πυλώνας του Μοντέλου	225

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Εισαγωγή

Η ανάπτυξη και ο χειρισμός νοητικών αναπαραστάσεων που σχετίζονται με δισδιάστατα και τρισδιάστατα αντικείμενα αποτελεί σημαντικό παράγοντα ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης (NCTM, 2000· Presmeg, 2006). Η ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης και της τρισδιάστατης γεωμετρικής αντίληψης των μαθητών αποτελεί αναπόσπαστο στοιχείο των αναλυτικών προγραμμάτων των μαθηματικών και συνδέεται με πληθώρα καταστάσεων της καθημερινής ζωής (Clements & Sarama, 2007· Jones & Mooney, 2003). Για αυτό, σύμφωνα με το έγγραφο των Εθνικών Επιπέδων του οργανισμού National Council of Teachers of Mathematics (2000), το αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών πρέπει να περιλαμβάνει τη μελέτη των τρισδιάστατων αντικειμένων και να στοχεύει στην ανάπτυξη της ικανότητας οπτικοποίησης και αντίληψης των εννοιών του χώρου. Η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου αποτελεί σημαντική παράμετρο στη δημιουργία και κατανόηση αφηρημένων αναπαραστάσεων των σχέσεων στο χώρο και συμβάλει στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων (Hegarty & Waller, 2005· Lowrie & Kay, 2001).

Ερευνητές της μαθηματικής παιδείας υποστηρίζουν ότι η ικανότητα οπτικοποίησης των εννοιών του χώρου αποτελεί θεμελιώδη στοιχείο του γεωμετρικού συλλογισμού και της μαθηματικής σκέψης ευρύτερα (Bishop, 1980, 1989· Goldenberg, Cuoco, & Mark, 1998). Σύμφωνα με τους Lehrer, Jenkins και Osana (1998) η ανάπτυξη του συλλογισμού των μαθητών στις έννοιες του χώρου αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα πεδία έρευνας για τους ερευνητές και τους εκπαιδευτικούς. Υποστηρίζουν ότι ο συλλογισμός για τις έννοιες του χώρου αποτελεί ένα παράθυρο μελέτης και άλλων σημαντικών ικανοτήτων, όπως ο τρόπος αναπαράστασης εικόνων ή η επεξεργασία εικονικών πληροφοριών. Για αυτό, θεωρούν ότι η γεωμετρία του χώρου πρέπει να αποτελεί ένα σημαντικό συστατικό του αναλυτικού προγράμματος στα μαθηματικά και εισηγούνται τη συμπερίληψη εννοιών της τρισδιάστατης γεωμετρίας από τις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου. Όπως υποστηρίζουν και οι Bishop (1989) και Senechal (1991), η μελέτη των γεωμετρικών εννοιών βοηθά τους μαθητές να αναπαριστούν και να δίνουν νόημα στο φυσικό κόσμο που τους περιβάλλει και συμβάλει στη μετάβασή τους από το εικονικό αντιληπτικό επίπεδο στην εννοιολογική γεωμετρική αντίληψη (Küchemann & Hoyles, 2006).

Οι Battista (1990) και Hegarty και Waller (2005) υποθέτουν ότι η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου προβλέπει την επίδοση στα μαθηματικά σε μεγαλύτερο βαθμό από τη λεκτική ικανότητα. Ερευνητές υποστηρίζουν, επίσης, ότι η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου και γενικότερα οι ικανότητες/παράγοντες που σχετίζονται με την οπτικοποίηση και κατανόηση σχέσεων στο χώρο μπορούν να αναπτυχθούν μέσω κατάλληλης διδασκαλίας (Battista, Wheatley & Talsma, 1982· Ben-Chaim, Lappan & Houang, 1989· Languis, 1998· Wiedenbauer & Jansen-Osmann, in press).

Τις τελευταίες δεκαετίες παρατηρήθηκαν πολλές προσπάθειες και εισηγήσεις για την αναβάθμιση της διδασκαλίας της γεωμετρίας (Burger & Shaughnessy, 1986· Hoffer, 1981· Lehrer & Chazan, 1998· NCTM, 2000). Η θεωρία που περιγράφει την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης και αποτέλεσε τον πυρήνα των περισσότερων εισηγήσεων για τη διδασκαλία της γεωμετρίας είναι η θεωρία των Van Hiele. Η θεωρία αυτή αποτελεί ένα χρήσιμο και ευρέως αποδεκτό εργαλείο για τη διδασκαλία της γεωμετρίας που επεξηγεί τον τρόπο ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών γυμνασίου, λυκείου και τριτοβάθμιας εκπαίδευσης (Fuys, Geddes & Tischler, 1988· Van Hiele, 1999). Ερευνητικές προσπάθειες έχουν εστιαστεί στη μελέτη της θεωρίας των Van Hiele με στόχο να περιγράψουν και να προσδιορίσουν τα χαρακτηριστικά του κάθε επιπέδου για σημαντικές γεωμετρικές έννοιες (Battista, 1999· Gutierrez, Jaine, & Fortuny, 1991). Επιπρόσθετα, ο Gutierrez και οι συνεργάτες του προσπάθησαν να μεταφέρουν το μοντέλο των van Hiele στη γεωμετρία του χώρου με έμφαση στην ανάπτυξη της ικανότητας οπτικοποίησης (Gutierrez, 1992).

Το Πρόβλημα και ο Σκοπός της Εργασίας

Η ερευνητική εργασία στον τομέα της γεωμετρίας του χώρου είναι περιορισμένη (Battista, 1999) και οι περισσότερες έρευνες έχουν γίνει εδώ και αρκετές δεκαετίες (Ben-Chaim, Lappan & Houang, 1989· Chiappini & Lemut, 1992· Clements & Battista 1992,). Για αυτό δεν έχει αναπτυχθεί το κατάλληλο θεωρητικό υπόβαθρο για τη μάθηση και διδασκαλία της (Battista & Clements, 1996· Ben-Chaim, Lappan & Houang, 1985). Οι περισσότερες έρευνες επικεντρώνονται στις αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με τις αναπαραστάσεις

των στερεών στο επίπεδο (Bishop, 1980· Cooper & Sweller 1989· Lawrie, Pegg, & Gutierrez, 2002· Mitchelmore, 1980· Piaget & Inhelder, 1956).

Ως αποτέλεσμα της απουσίας ενός θεωρητικού πλαισίου το οποίο να περιγράφει αναλυτικά τη δομή και την ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου, σε πολλές χώρες η διδασκαλία της γεωμετρίας στο χώρο δεν τυγχάνει της απαραίτητης σημασίας. Θεωρείται από τους εκπαιδευτικούς και τους μαθητές ως μια ιδιαίτερα δύσκολη και σύνθετη ενότητα και έτσι αντιμετωπίζεται ως αντικείμενο δευτερεύουσας σημασίας (Clements & Sarama, 2007). Η διδασκαλία της γεωμετρίας στο χώρο περιορίζεται στην αναγνώριση και την ονομασία των στερεών και των κρίσιμων ιδιοτήτων τους. Οι δραστηριότητες που αναπτύσσονται στηρίζονται κυρίως στη χρήση των επίπεδων αναπαραστάσεων των στερεών που παρουσιάζονται στα σχολικά εγχειρίδια (Clements & Battista, 1992). Οι μαθητές επικεντρώνονται κυρίως στη μορφή του στερεού και στην απομνημόνευση του μαθηματικού ορισμού, χωρίς να αντιλαμβάνονται τις συσχετίσεις μεταξύ των ιδιοτήτων του στερεού αλλά και το ρόλο των ιδιοτήτων στη διαμόρφωση του όλου στερεού (Owens & Outhred, 2006). Οι αναπαραστάσεις, επίσης, της κάθε ομάδας στερεών στο επίπεδο παρουσιάζονται με μια συγκεκριμένη μορφή (Presmeg, 2006). Το γεγονός αυτό σχετίζεται άμεσα με τις ιδιαίτερες δυσκολίες που προκύπτουν από τις μορφές αναπαράστασης των εννοιών της γεωμετρίας στο χώρο (Parzys, 1988). Η δυσκολία αυτή σε συνδυασμό με την κυριαρχία της μορφής του στερεού στην αντίληψη των μαθητών, έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση των «πρωτοτυπικών παραδειγμάτων» (Hershkowitz et al., 1990). Για παράδειγμα, ο περιορισμένος αριθμός εμπειριών σχετικά με την αναπαράσταση του κύβου δεν επιτρέπει στους μαθητές να συνδέσουν τη νοερή του εικόνα με κρίσιμες ιδιότητες, αλλά τους οδηγεί στο να τη συσχετίσουν με μη κρίσιμες ιδιότητες, όπως ο προσανατολισμός του στερεού.

Για την ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών οι μαθητές περνούν μέσα από διαδοχικά στάδια ανάπτυξης της μαθηματικής έννοιας (Olkun, 2003). Για τη μελέτη επομένως της ανάπτυξης της σκέψης των μαθητών στη γεωμετρία του χώρου είναι αναγκαίος ο καθορισμός των σταδίων αυτών και των χαρακτηριστικών τους ώστε οι ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών και οι εκπαιδευτικοί να μπορούν να μελετήσουν την ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών στη γεωμετρία του χώρου.

Οι σύγχρονες έρευνες δεν έχουν επιτύχει να μελετήσουν ένα ευρύ φάσμα εννοιών και ικανοτήτων στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου (Battista & Clements, 1996/1998β· Ben-Chaim, Lappan & Houang, 1985· Lehrer, Jenkins & Osana, 1998· Potari & Spiliotopoulou, 1992· Wheatley & Cobb, 1990) και ούτε έχουν εξετάσει συστηματικά τη

σχέση μεταξύ της ανάπτυξης της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου και την ανάπτυξη της αντίληψης των μαθητών στις έννοιες του χώρου. Χρειάζεται, επομένως, να διερευνηθεί σε ένα ενιαίο πλαίσιο η ανάπτυξη της σκέψης των μαθητών σε διαφορετικές έννοιες της γεωμετρίας του χώρου (όπως η αναγνώριση και η μελέτη στερεών, η μελέτη των σχέσεων μεταξύ στερεών, η γραφική απεικόνιση τρισδιάστατων σχημάτων και ο χειρισμός διαφορετικών αναπαραστάσεων, η ικανότητα διάταξης/δόμησης αντικειμένων στο χώρο, η ικανότητα αναγνώρισης και κατασκευής αναπτυγμάτων, η ικανότητα υπολογισμού του όγκου και της επιφάνειας τρισδιάστατων σχημάτων), το οποίο να ενσωματώνει την επίδραση της αντίληψης των εννοιών του χώρου των μαθητών.

Σκοπός Εργασίας

Ο σκοπός της προτεινόμενης εργασίας ήταν η ανάπτυξη ενός ενιαίου θεωρητικού μοντέλου που περιγράφει την ανάπτυξη της ικανότητας μαθητών ηλικίας 11 με 15 ετών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Το μοντέλο αυτό αναφέρεται σε επίπεδα ανάπτυξης της σκέψης στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου και περιγράφει τη σχέση μεταξύ ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου και ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Συγκεκριμένα, οι στόχοι της μελέτης ήταν: (α) Η περιγραφή της ανάπτυξης της σκέψης μαθητών ηλικίας 11 με 15 ετών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου μέσω της αναγνώρισης και περιγραφής επιπέδων σκέψης, (β) η εξέταση της δομής της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου των μαθητών και η περιγραφή των θεμελιωδών συστατικών της, (γ) η εξέταση της δομής της ικανότητας των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου και η αναλυτική περιγραφή των στοιχείων που τη συνθέτουν, (δ) η μελέτη της επίδοσης των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου στο ηλικιακό εύρος 11 με 15 ετών και (ε) η εξέταση της σχέσης μεταξύ της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου των μαθητών και της ικανότητάς τους στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου.

Ερευνητικά Ερωτήματα

Τα κύρια ερευνητικά ερωτήματα της εργασίας όπως απορρέουν από το σκοπό της εργασίας ήταν:

- (α) Ποια είναι η δομή της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου μαθητών ηλικίας 11 με 15 ετών;
- (β) Ποιοι παράγοντες συνθέτουν την ικανότητα μαθητών ηλικίας 11 με 15 ετών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου;
- (γ) Ποια η σχέση μεταξύ των παραγόντων που συνθέτουν την ικανότητα των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου;
- (δ) Ποια η σχέση της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου των μαθητών με την ικανότητά τους στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου;
- (ε) Ποια είναι τα επίπεδα ανάπτυξης της σκέψης μαθητών ηλικίας 11 με 15 ετών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου και ποια τα χαρακτηριστικά των μαθητών του κάθε επιπέδου;
- (στ) Ποιοι παράγοντες της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου των μαθητών επηρεάζουν τις ικανότητες των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου και σε ποιο βαθμό;
- (ζ) Ποιες είναι οι διαφορές ανάμεσα στους μαθητές διαφορετικών ηλικιών ως προς την ικανότητάς τους στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου και στην αντίληψη των εννοιών του χώρου;

Σημασία και Πρωτοτυπία της Εργασίας

Η σημασία της παρούσας εργασίας εδράζεται στο γεγονός ότι προσπαθεί να μελετήσει την ανάπτυξη της σκέψης των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου, πεδίο το οποίο, ενώ θεωρείται από τα σημαντικότερα της μαθηματικής εκπαίδευσης λόγω της τρισδιάστατης φύσης του ανθρώπινου κόσμου, ερευνητικά έχει παραμεληθεί και αντιμετωπιστεί αποσπασματικά (Clements & Battista, 1992· Gutierrez, 1992/1996).

Χαρακτηριστικό παράδειγμα της σημαντικής έλλειψης σοβαρών ερευνητικών προσπαθειών είναι το γεγονός ότι η κυριότερη θεωρία για τη διδασκαλία της γεωμετρίας χρονολογείται εδώ και πενήντα χρόνια (Van Hiele, 1959). Η απουσία ερευνητικών εργασιών στα επιστημονικά περιοδικά αιχμής της μαθηματικής παιδείας τα τελευταία χρόνια ουδόλως αποδεικνύει ότι έχει εξαντληθεί το ερευνητικό ενδιαφέρον στο πεδίο της τρισδιάστατης γεωμετρίας, αλλά αντίθετα τονίζει την αναγκαιότητα για διεξαγωγή σοβαρών και συστηματικών ερευνών στον τομέα αυτό (Owens & Outhred, 2006). Το φαινόμενο αυτό βρίσκεται σε αντίθεση με την επισήμανση από πλήθος ερευνητών όσον

αφορά τη σημασία της τρισδιάστατης γεωμετρικής αντίληψης των μαθητών (Clements, 2007· Presmerg, 2006). Συνεπώς, η παρούσα εργασία προσπαθεί να γεφυρώσει το χάσμα μεταξύ έλλειψης σύγχρονων ερευνητικών εργασιών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου και της επισήμανσης των ερευνητών για την ανάγκη συστηματικής μελέτης της ικανότητας των μαθητών στη γεωμετρία του χώρου (NCTM, 2000).

Καινοτομία της προτεινόμενης μελέτης αποτελεί η ανάπτυξη ενός ενιαίου θεωρητικού μοντέλου για τη μάθηση στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου, το οποίο θα αποτελεί σημείο αφετηρίας για περαιτέρω ερευνητικές δραστηριότητες στο μέλλον. Το θεωρητικό πλαίσιο έλαβε υπόψη και συνδύασε τα σημαντικότερα ερευνητικά αποτελέσματα στους τομείς της ψυχολογίας και της μαθηματικής παιδείας και αναφέρεται στις κυριότερες έννοιες του αναλυτικού προγράμματος στον τομέα της γεωμετρίας στο χώρο: αναγνώριση και μελέτη στερεών, σχέσεις μεταξύ στερεών, γραφική απεικόνιση τρισδιάστατων σχημάτων και χειρισμός διαφορετικών αναπαραστάσεων, διάταξη/δόμηση αντικειμένων στο χώρο, αναγνώριση και κατασκευή αναπτυγμάτων, εκτίμηση και υπολογισμός όγκου και επιφάνειας τρισδιάστατων σχημάτων. Το μοντέλο περιγράφει την ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου μέσω της ανάλυσης των χαρακτηριστικών τεσσάρων ιεραρχικών επιπέδων σκέψης και επεξηγεί τη σημαντική επίδραση της ικανότητας αντίληψης των μαθητών των εννοιών του χώρου. Πρώτη φορά παρουσιάζεται ένα ολοκληρωμένο μοντέλο περιγραφής της ανάπτυξης της ικανότητας των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου το οποίο στηρίζεται στη μελέτη των ικανοτήτων των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας στο χώρο και όχι στην απλή μεταφορά αποτελεσμάτων της δισδιάστατης γεωμετρίας στο χώρο. Το μοντέλο αυτό θα αποτελέσει ένα χρήσιμο εργαλείο για τους ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης για περαιτέρω έρευνα με στόχο την επιβεβαίωση ή τροποποίηση του προτεινόμενου μοντέλου.

Τα αποτελέσματα της προτεινόμενης μελέτης είναι πιθανόν να έχουν, επίσης, σημαντική *πρακτική συνεισφορά* στη διδασκαλία της γεωμετρίας του χώρου στο δημοτικό και στο γυμνάσιο. Το θεωρητικό μοντέλο της εργασίας πιθανόν να προσφέρει στους μαθητές, μέσα από το σχεδιασμό της εργασίας και το θεωρητικό της υπόβαθρο, πολλαπλούς τρόπους σκέψης και στους εκπαιδευτικούς μια διαφορετική προσέγγιση για τη διερεύνηση τρισδιάστατων εννοιών και διαδικασιών. Θα αποτελεί, επίσης, ένα δυναμικό εργαλείο για τη μελέτη της ανάπτυξης της σκέψης των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Τα αποτελέσματα της εργασίας έχουν, επίσης, πρακτική αξία για την ανάπτυξη της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου των μαθητών αφού περιγράφουν με συγκεκριμένα παραδείγματα τους τρόπους με τους οποίους οι παράγοντες

της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου συμβάλουν στην κατανόηση από τους μαθητές εννοιών και διαδικασιών της γεωμετρίας του χώρου.

Περιορισμοί της Εργασίας

Ο σημαντικότερος περιορισμός της εργασίας ήταν η επιλογή των υποκειμένων της εργασίας. Τα υποκείμενα προέρχονταν μόνο από τις τάξεις Ε΄ και Στ΄ Δημοτικού και Α΄, Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου και έτσι δεν μελετήθηκε η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου σε όλο το ηλικιακό φάσμα της εκπαίδευσης. Ήταν αδύνατο στο πλαίσιο μιας διδακτορικής διατριβής να μελετηθούν μαθητές από προσχολική ηλικία μέχρι τριτοβάθμια εκπαίδευση, μελέτη που θα ήταν αναγκαία για να εξαχθούν συμπεράσματα που να ανταποκρίνονται σε όλο το φάσμα ανάπτυξης των μαθητών.

Η επιλογή των υποκειμένων της εργασίας δεν έγινε με τη χρήση τυχαίων μεθόδων δειγματοληψίας, αλλά επιλέγηκαν τμήματα στα δημοτικά και στα γυμνάσια που υπήρχε συνεργασία με τους υπεύθυνους εκπαιδευτικούς τους. Για αυτό τα αποτελέσματα της εργασίας αφορούν αποκλειστικά τα υποκείμενα που συμμετείχαν στην έρευνα και δεν μπορούν να γενικευθούν για όλους τους μαθητές της Κύπρου.

Άλλος σημαντικός περιορισμός της έρευνας ήταν το γεγονός ότι δεν πραγματοποιήθηκαν διαχρονικές μετρήσεις της ανάπτυξης της ικανότητας των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου και στις έννοιες του χώρου ώστε να μελετηθούν αναπτυξιακά μοντέλα της συμπεριφοράς των μαθητών και να διερευνηθεί ο τρόπος με τον οποίο μεταβαίνει ένας μαθητής από το ένα επίπεδο ανάπτυξης στο επόμενο. Η εργασία επικεντρώθηκε στην περιγραφή των επιπέδων σκέψης των μαθητών.

Σημαντικός, επίσης, περιορισμός της εργασίας σχετίζεται με τη διαδικασία χορήγησης των τεστ. Παρά το γεγονός ότι στον τομέα της ψυχολογίας η χορήγηση τεστ μέτρησης της ικανότητας αντίληψης των εννοιών γίνεται συνήθως μέσω της διεξαγωγής ατομικών μετρήσεων, στην παρούσα εργασία πραγματοποιήθηκαν ομαδικές χορηγήσεις γραπτών δοκιμίων λόγω του περιορισμένου χρόνου. Συνεπώς δεν υπήρχε δυνατότητα επεξήγησης των απαιτήσεων των έργων και παρουσίασης παραδειγμάτων σε κάθε μαθητή ξεχωριστά. Το γεγονός αυτό περιορίζει σε κάποιο βαθμό την αξιοπιστία την χορήγησης του τεστ μέτρησης της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου.

Δομή Εργασίας

Τα επόμενα κεφάλαια περιγράφουν αναλυτικά το θεωρητικό υπόβαθρο, τη μεθοδολογία, τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα της εργασίας. Συγκεκριμένα, το δεύτερο κεφάλαιο περιγράφει τη σχετική βιβλιογραφία που αποτέλεσε το πλαίσιο για το σχεδιασμό της εργασίας με αναφορά στις κύριες θεωρίες μάθησης στη γεωμετρία, τις έρευνες στις έννοιες της γεωμετρίας στο χώρο, τις θεωρίες οπτικοποίησης των εννοιών του χώρου στη μαθηματική παιδεία, τις έρευνες στον τομέα της ψυχολογίας για τη φύση της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου και τη σχέση μεταξύ επίδοσης στα μαθηματικά και αντίληψης των εννοιών του χώρου.

Το τρίτο κεφάλαιο περιγράφει τη μεθοδολογία με αναφορά στα υποκείμενα, στα εργαλεία μέτρησης, στα προτεινόμενα μοντέλα, στη διαδικασία διεξαγωγής της έρευνας, στο σχεδιασμό των κλινικών συνεντεύξεων και στις διαδικασίες ανάλυσης των δεδομένων. Το τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζει αναλυτικά τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση των ποσοτικών και ποιοτικών δεδομένων της εργασίας με αναφορά στον έλεγχο της εγκυρότητας των προτεινόμενων μοντέλων, στην αναγνώριση επιπέδων σκέψης και στην περιγραφή των χαρακτηριστικών και ικανοτήτων των μαθητών των διαφορετικών επιπέδων σκέψης.

Στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται συγκεντρωτική συζήτηση των αποτελεσμάτων και προσπάθεια περιγραφής σε ένα ενιαίο μοντέλο των ποσοτικών και ποιοτικών αποτελεσμάτων. Τέλος, στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της εργασίας, εισηγήσεις για πιθανές μελλοντικές ερευνητικές προσπάθειες και γίνεται συζήτηση για εκπαιδευτικές εφαρμογές των αποτελεσμάτων της εργασίας.

Αντίληψη των Εννοιών του Χώρου

Δεν υπάρχει ένα ενιαίο πλαίσιο αναφοράς για τις έννοιες του χώρου. Η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου ορίζεται συνήθως ως γνώση των εννοιών του χώρου (spatial cognition), νοημοσύνη των εννοιών του χώρου (spatial intelligence) και συλλογισμός των εννοιών του χώρου (spatial reasoning). Η οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου αναφέρεται στην επεξεργασία εικονικών και χωρικών πληροφοριών, δηλαδή πληροφοριών που η φύση τους είναι εικονική, αλλά διαθέτουν χωρικές ιδιότητες (Halpern & Collaer, 2005). Η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου ορίζεται από τους Linn και Petersen (1985) ως η νοητική διαδικασία η οποία αντιλαμβάνεται, αποθηκεύει, ανασύρει, δημιουργεί και επεξεργάζεται εικόνες που αναφέρονται στο χώρο.

Στην παρούσα εργασία με τον όρο «αντίληψη των εννοιών του χώρου» αναφερόμαστε στην πολυδιάστατη ικανότητα αναγνώρισης, επεξεργασίας, δημιουργίας, ανάκλησης και αποθήκευσης νοητικών εικόνων που αναπαριστούν και νοηματοδοτούν οπτικοχωρικές πληροφορίες ή συγκεκριμενοποιούν αφηρημένες χωρικές σχέσεις. Θεωρούμε, επίσης, ότι η ικανότητα αυτή ορίζεται μέσω διακριτών παραγόντων (Hegarty & Waller, 2005) όπως οι παράγοντες «οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου», «προσανατολισμός στο χώρο» και «σχέσεις των εννοιών του χώρου». Με τον παράγοντα «οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου» αναφερόμαστε στην ικανότητα αντίληψης φανταστικών κινήσεων στον τρισδιάστατο χώρο και στην ικανότητα νοερού χειρισμού αντικειμένων. Με τον παράγοντα «προσανατολισμός στο χώρο» αναφερόμαστε στην ικανότητα χειρισμού αλλαγών στον προσανατολισμό του οπτικού ερεθίσματος. Με τον παράγοντα «σχέσεις των εννοιών του χώρου» αναφερόμαστε στην ικανότητα νοερής περιστροφής ενός αντικειμένου στο χώρο με ταχύτητα και ακρίβεια (Hegarty & Waller, 2005).

Στην παρούσα εργασία με τον όρο ικανότητα στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου αναφερόμαστε στην ικανότητα των μαθητών να:

- (α) αναγνωρίζουν και να μελετούν στερεά, να αναγνωρίζουν τα συστατικά στοιχεία των στερεών και να συγκρίνουν τις σχέσεις μεταξύ των στοιχείων και ιδιοτήτων των στερεών (Gutierrez, 1992· Clements, Swaminathan, Hannibal & Sarama, 1999).
- (β) αναπαριστούν γραφικά τρισδιάστατα σχημάτων, να χειρίζονται και να σχεδιάζουν στερεά σε διαφορετικές προβολές, να χειρίζονται διαφορετικές αναπαραστάσεις (Parzys, 1988· Gutierrez, 1996) και να σχεδιάζουν τρισδιάστατα αντικειμένων στο χαρτί (Mitchelmore, 1980).
- (γ) δομούν/διατάσσουν αντικείμενα στο χώρο (spatial structuring), να υπολογίζουν τον αριθμό μοναδιαίων κύβων που περιέχονται σε στερεά ή σε διατάξεις κύβων στο χώρο (Clements, Battista, Arnoff, Battista, & van Auken Borrow, 1998).
- (δ) αναγνωρίζουν και να κατασκευάζουν αναπτύγματα τρισδιάστατων σχημάτων (Potari & Spiliotopoulou, 1992· Mariotti, 1989).
- (ε) εκτιμούν και υπολογίζουν χωρητικότητα/ όγκο και επιφάνεια τρισδιάστατων σχημάτων χωρίς τη χρήση τύπων (Olkun, 2003).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Εισαγωγή

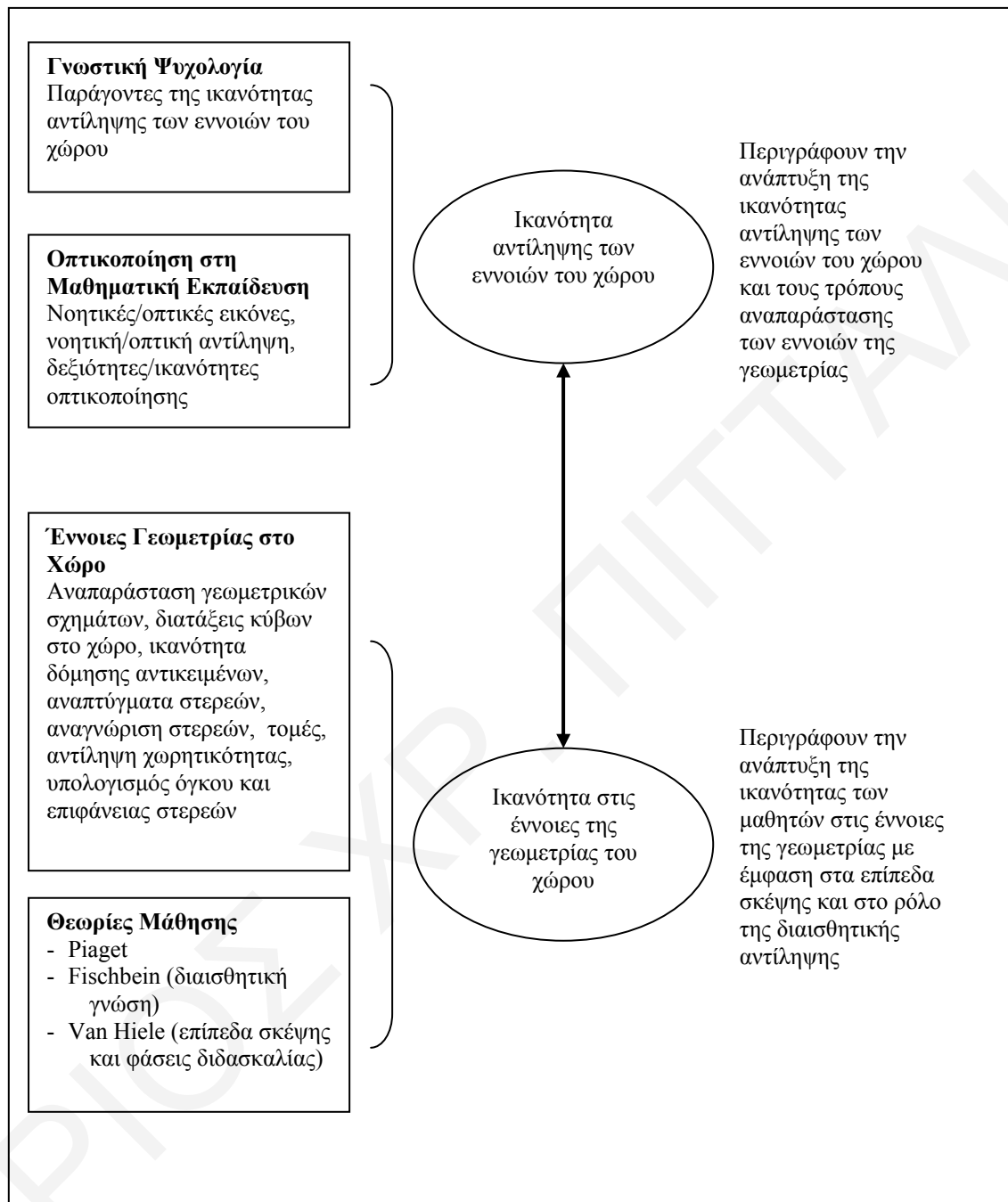
Η διδασκαλία εννοιών της γεωμετρίας του χώρου δεν λαμβάνει της απαραίτητης προσοχής τα τελευταία χρόνια σε πολλές χώρες του κόσμου (Clements 2007· Clements & Sarama 2007· Maier, 1996) και η μελέτη της ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου δεν αποτελεί τα τελευταία χρόνια σημαντικό πεδίο έρευνας στη μαθηματική εκπαίδευση. Παρόλα αυτά, διεθνείς οργανισμοί όπως το National Council of Teachers of Mathematics (2000) τονίζουν τη σημασία της διδασκαλίας των εννοιών της γεωμετρίας του χώρου και ερευνητές όπως οι Bishop (1980, 1983), Gaulin (1985), Cooper (1990) και Presmeg (1986a) υπογραμμίζουν εδώ και αρκετά χρόνια την αναγκαιότητα εστίασης της διδασκαλίας στην ανάπτυξη της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου και ιδιαίτερα διαδικασιών όπως η οπτικοποίηση και η επεξεργασία οπτικών αναπαραστάσεων και νοητικών εικόνων. Σύγχρονες έρευνες έχουν καταδείξει αρκετές από τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές (Mariotti, 1989· Owens & Outhred, 2006· Presmeg & Bergsten, 1995).

Τη βάση του θεωρητικού υπόβαθρου της εργασίας συνθέτουν ερευνητικές εργασίες (α) στον τομέα της μαθηματικής εκπαίδευσης με έμφαση στις έρευνες για την ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών σε έννοιες της γεωμετρίας του χώρου, στις θεωρίες μάθησης στη γεωμετρία, στις μελέτες για την οπτικοποίηση και την επεξεργασία των οπτικών εικόνων και (β) στον τομέα της γνωστικής ψυχολογίας με έμφαση στην έρευνα για τη φύση της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου.

Όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 2.1, το θεωρητικό υπόβαθρο της εργασίας προσπάθησε να συνθέσει ερευνητικά αποτελέσματα από τα δύο ερευνητικά πεδία, για να περιγράψει την ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών στην αντίληψη των εννοιών του χώρου και στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Περιγράφονται οι σημαντικότερες θεωρίες μάθησης στη γεωμετρία όπως η θεωρία του Piaget, η θεωρία του Fischbein για τη διαισθητική γνώση και τις σχηματικές έννοιες και αναλύεται εκτεταμένα το μοντέλο των Van Hiele που αναφέρεται σε επίπεδα σκέψης των μαθητών και φάσεις διδασκαλίας.

Δίνεται έμφαση στη μεταφορά του μοντέλου αυτού σε έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Οι θεωρίες αυτές περιγράφουν την ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας και σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα ερευνών για συγκεκριμένες έννοιες της γεωμετρίας του χώρου (όπως η αναπαράσταση των γεωμετρικών σχημάτων, οι διατάξεις κύβων στο χώρο, η ικανότητα δόμησης αντικειμένων, τα αναπτύγματα στερεών, η αναγνώριση στερεών, οι τομές στερεών και η έννοια του όγκου) συνθέτουν τις παραμέτρους της ικανότητας των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου, όπως ορίστηκε στην παρούσα εργασία.

Αξιοποιείται, επίσης, η πληθώρα των ερευνών στον τομέα της γνωστικής ψυχολογίας για την περιγραφή και τη μελέτη της φύσης της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου η οποία θεωρείται ότι επηρεάζει άμεσα την ικανότητα των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου και την ικανότητα στα μαθηματικά γενικότερα. Δίνεται έμφαση στις αναλυτικές έρευνες που αναφέρονται σε διακριτούς παράγοντες της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου καθώς επίσης και στις έρευνες στον τομέα της μαθηματικής εκπαίδευσης που αναφέρονται στην οπτικοποίηση, στις οπτικές και νοητικές αναπαραστάσεις για την επεξεργασία οπτικοχωρικών πληροφοριών και στις ικανότητες και δεξιότητες οπτικοποίησης που πρέπει να αναπτύξουν οι μαθητές. Η σύνθεση αυτών των ερευνητικών αποτελεσμάτων σκιαγραφεί την ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου ως προς τα στοιχεία που τη συνθέτουν, τα είδη αναπαραστάσεων των οπτικοχωρικών πληροφοριών και τους τρόπους επεξεργασίας τους.



Διάγραμμα 2.1. Η δομή του θεωρητικού υπόβαθρου.

Θεωρίες Ανάπτυξης της Γεωμετρικής Σκέψης

Η θεωρία του Piaget

Ο Piaget μέσα από τις έρευνες του, προτείνει μια αναπτυξιακή ανάλυση της αναπαράστασης του χώρου από τους μαθητές (Piaget & Inhelder, 1967· Piaget, Inhelder & Szeminska, 1960). Υποστηρίζει ότι οι νοερές αναπαραστάσεις που δημιουργούν οι μαθητές για το χώρο μέσα στον οποίο ενεργούν κατασκευάζονται μέσω μιας εξελικτικής οργάνωσης των κινητικών ενεργειών και των αναστοχασμών τους πάνω σε αυτές. Επομένως, η νοερή αναπαράσταση του χώρου που κατασκευάζει κάποιος μαθητής δεν αποτελεί απλώς ένα αντιληπτικό «διάβασμα» του χωρικού περιβάλλοντος, αλλά βασίζεται στις προηγούμενες ενέργειες του σε αυτό το περιβάλλον.

Η θεωρία επικεντρώνεται στην επίδραση της ηλικιακής ανάπτυξης των μαθητών, στους μετασχηματισμούς του πραγματικού χώρου σε νοερές αναπαραστάσεις και στα χαρακτηριστικά των πραγματικών αντικειμένων που παραμένουν αμετάβλητα κατά τους μετασχηματισμούς αυτούς. Διακρίνονται τρία εξελικτικά στάδια κατά τα οποία αναπτύσσεται η ικανότητα των μαθητών να κατασκευάζουν νοερές αναπαραστάσεις του χώρου που αντιλαμβάνονται. Αρχικά, οι μετασχηματισμοί των πραγματικών αντικειμένων σε νοερές αναπαραστάσεις βασίζονται στα τοπολογικά χαρακτηριστικά. Στο επόμενο στάδιο οι μαθητές είναι σε θέση να κατασκευάζουν αναπαραστάσεις που βασίζονται στις ευκλείδειες ιδιότητες των αντικειμένων, όπως είναι το μήκος των ακμών ενός στερεού και το μέτρο των γωνιών του. Το τελευταίο εξελικτικό στάδιο χαρακτηρίζεται από τον εμπλουτισμό των συσχετίσεων που ήδη έχουν αναπτύξει οι μαθητές στα προηγούμενα στάδια.

Όσον αφορά την ικανότητα σχεδιασμού αντικειμένων, οι Piaget και Inhelder (1967) θεωρούν ότι ο σχεδιασμός αποτελεί ενέργεια αναπαράστασης και όχι αντίληψης. Δηλαδή, κατά το σχεδιασμό αντικειμένων οι μαθητές αναπαριστούν γραφικά αυτό που βλέπουν και όχι αυτό που αντιλαμβάνονται εννοιολογικά. Οι δυσκολίες στο σχεδιασμό αντικειμένων είναι αποτέλεσμα της ανεπάρκειας των νοητικών μηχανισμών αναπαράστασης των εννοιών του χώρου.

Κεντρικό σημείο κριτικής της θεωρίας του Piaget είναι ότι η χρήση όρων όπως τοπολογικά χαρακτηριστικά και ευκλείδειες ιδιότητες των αντικειμένων δεν είναι

μαθηματικά ακριβής (Clements & Battista, 1992· Darke, 1982). Ερευνητές που προσπάθησαν να επαναλάβουν τα πειράματα των Piaget και Inhelder επιβεβαίωσαν σε γενικές γραμμές τα αποτελέσματά τους αν και προέκυψαν αρκετά σημεία αμφισβήτησης όπως η επικράτηση στην αρχή τοπολογικών χαρακτηριστικών.

Η Θεωρία των van Hiele

Ένα χρήσιμο και ευρέως αποδεκτό μοντέλο για τη διδασκαλία της γεωμετρίας που επεξηγεί τον τρόπο ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών είναι το μοντέλο των Van Hiele (Van Hiele, 1999). Στα τέλη της δεκαετίας του '50, οι Pierre και Dina van Hiele, ζεύγος μαθηματικών από την Ολλανδία, ανέπτυξαν μια θεωρία για την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης η οποία προσπαθεί να περιγράψει την πορεία ανάπτυξης της σκέψης των μαθητών μέσα από «επίπεδα γεωμετρικής σκέψης» και εισηγείται με ποιο τρόπο θα πρέπει να δομείται ένα μάθημα στη γεωμετρία με βάση «φάσεις διδασκαλίας». Η εργασία τους έχει χρησιμοποιηθεί εκτεταμένα σε πολλές χώρες όπως στην Ολλανδία, στην πρώην Σοβιετική Ένωση και στις Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής (Usiskin, 1982). Το μοντέλο αυτό αποτελείται από δύο μέρη: το πρώτο μέρος αναφέρεται σε «επίπεδα γεωμετρικής σκέψης» και το δεύτερο σε «φάσεις διδασκαλίας».

Επίπεδα Γεωμετρικής Σκέψης

Σύμφωνα με το μοντέλο van Hiele, υπάρχουν πέντε επίπεδα ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης (Clements & Battista, 1992):

- Επίπεδο της ολικής αντίληψης: Οι μαθητές αναγνωρίζουν και αντιλαμβάνονται τις γεωμετρικές μορφές ως ενιαίες οντότητες. Αναγνωρίζουν τα σχήματα ως οπτικές οντότητες και έτσι μπορούν να τα αναπαραστήσουν νοητικά ως οπτικές εικόνες. Για την αναγνώριση των σχημάτων χρησιμοποιούν οπτικά πρότυπα, για παράδειγμα ένας μαθητής μπορεί να υποστηρίξει ότι ένα σχήμα είναι ορθογώνιο λέγοντας ότι «μοιάζει με πόρτα». Οι μαθητές στο επίπεδο αυτό δεν έχουν συναίσθηση των γεωμετρικών ιδιοτήτων ή των χαρακτηριστικών των κλάσεων των σχημάτων. Ο συλλογισμός των μαθητών σε αυτό το επίπεδο στηρίζεται αποκλειστικά στην οπτική αντίληψη. Για παράδειγμα, διαχωρίζουν ένα σχήμα από κάποιο άλλο χωρίς να μπορούν να ονομάσουν έστω μια ιδιότητα των σχημάτων ή να κρίνουν ότι δύο σχήματα είναι ίσα γιατί «το ένα φαίνεται όπως το άλλο» (van

Hiele, 1986). Οι μαθητές αναγνωρίζουν κλάσεις σχημάτων οπτικά που έχουν το «ίδιο σχήμα». Για παράδειγμα, με τη δήλωση «αυτό το σχήμα είναι ρόμβος», ο μαθητής εννοεί ότι το σχήμα αυτό έχει τη μορφή που έχει μάθει ότι ονομάζεται ρόμβος.

- Επίπεδο της ανάλυσης: Οι μαθητές στο επίπεδο αυτό αναγνωρίζουν και διακρίνουν τα σχήματα με βάση τις ιδιότητές του. Οι μαθητές βλέπουν τα σχήματα ως ολότητες, ως ένα σύνολο ιδιοτήτων. Οι ιδιότητες κατακτώνται με πειραματικό τρόπο μέσω της παρατήρησης, μέτρησης και σχεδιασμού των σχημάτων. Οι μαθητές ανακαλύπτουν ότι κάποιοι συνδυασμοί ιδιοτήτων σχηματίζουν κλάσεις σχημάτων ενώ το ίδιο δεν ισχύει για κάποιους άλλους συνδυασμούς. Παρόλα αυτά οι μαθητές σε αυτό το επίπεδο δεν βλέπουν σχέσεις μεταξύ κλάσεων σχημάτων.
- Επίπεδο της άτυπης παραγωγικής σκέψης: Οι μαθητές σε αυτό το επίπεδο αντιλαμβάνονται πλήρως τις σχέσεις που υπάρχουν ανάμεσα στο ίδιο το σχήμα και τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των σχημάτων. Διακρίνουν τις κρίσιμες και μη ιδιότητες ενός σχήματος. Ταξινομούν σχήματα ιεραρχικά και αιτιολογούν τον τρόπο εργασίας τους. Για παράδειγμα, ένα τετράγωνο αναγνωρίζεται και ως ρόμβος γιατί μπορεί να θεωρηθεί «ως ρόμβος με επιπλέον ιδιότητες». Οι μαθητές μελετούν τις ιδιότητες κλάσεων σχημάτων και οργανώνουν τις ιδιότητες. Παρόλα αυτά οι μαθητές ακόμη δεν αντιλαμβάνονται ότι ο παραγωγικός συλλογισμός είναι η μέθοδος απόδειξης των γεωμετρικών εννοιών.
- Επίπεδο της παραγωγικής σκέψης: Οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη σημασία της παραγωγικής σκέψης και είναι σε θέση να αποδεικνύουν θεωρήματα σε ένα αξιωματικό σύστημα. Αντιλαμβάνονται τη διαφορά μεταξύ των ορισμών, των αξιωμάτων και των θεωρημάτων.
- Αυστηρό επίπεδο: Οι μαθητές κατανοούν διάφορα αξιωματικά συστήματα. Ο συλλογισμός των μαθητών στηρίζεται στην τυπική διαχείριση αξιωμάτων, ορισμών και θεωρημάτων και το αντικείμενο του συλλογισμού είναι η σχέση μεταξύ τυπικών εννοιών.

Οι Clements & Battista (1992) υποστηρίζουν την ύπαρξη ενός πιο βασικού επιπέδου, του προ-αναγνωριστικού επιπέδου με βάση τα αποτελέσματα ερευνών που έδειξαν ότι ποσοστό 9-34% μαθητών γυμνασίου δεν κατέχουν καν το οπτικό επίπεδο. Οι μαθητές που βρίσκονται στο προ-αναγνωριστικό επίπεδο αδυνατούν να αναγνωρίσουν ακόμη και βασικά σχήματα. Διαχωρίζουν τα καμπυλόγραμμα από τα ευθύγραμμα τμήματα αλλά δεν μπορούν να διαχωρίσουν σχήματα της ίδιας κλάσης. Πιθανή αιτία της αδυναμίας

τους να αναγνωρίσουν κοινά σχήματα είναι η δυσκολία να σχηματίσουν τις απαραίτητες οπτικές εικόνες.

Σύμφωνα με τη θεωρία ένας μαθητής μεταβαίνει ιεραρχικά από το ένα επίπεδο γεωμετρικής σκέψης στο επόμενο κατά τη διάρκεια της μάθησης (Gutierrez, Jaine, & Fortury, 1991). Κατά τη διαδικασία της μάθησης παρατηρούνται διακριτά άλματα που υποδεικνύουν την ύπαρξη διαφορετικών ποιοτικά επιπέδων. Ένας μαθητής για να μεταβεί σε ένα ανώτερο ιεραρχικά επίπεδο πρέπει πρώτα να έχει κατακτήσει σε υψηλό ποσοστό τα προηγούμενα επίπεδα (Hoffer, 1981). Η μετάβαση από το ένα επίπεδο στο άλλο εξαρτάται κυρίως από τις μαθησιακές του εμπειρίες και όχι από την ηλικία ή την ωρίμανση (Mason, 2005). Σημαντικό, επίσης, χαρακτηριστικό της θεωρίας είναι ότι έννοιες οι οποίες γίνονται κατανοητές σε ένα άτυπο βαθμό σε ένα επίπεδο, γίνονται πλήρως κατανοητές στο επόμενο επίπεδο. Το κάθε επίπεδο έχει τη δική του γλώσσα επικοινωνίας, τους δικούς του λεκτικούς συμβολισμούς και το δικό του σύστημα συσχέτισης των συμβόλων αυτών. Μια σχέση που θεωρείται «σωστή» σε ένα επίπεδο μπορεί να μην θεωρείται αποδεκτή στο επόμενο. Για παράδειγμα, ένας μαθητής που βρίσκεται στο επίπεδο 1 έχει διαφορετική αντίληψη για τη σχέση μεταξύ τετραγώνου και ορθογωνίου από ένα μαθητή του επιπέδου 2, και συνεπώς έχουν πρόβλημα στο να αντιληφθούν ο ένας τον άλλο.

Η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου αποτελεί σημαντικό παράγοντα ανάπτυξης σε όλα τα στάδια ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης των van Hiele. Ο Battista (1990) υποστηρίζει ότι η ανάπτυξη της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου έχει ιδιαίτερη βαρύτητα στην ανάπτυξη του γεωμετρικού συλλογισμού ιδιαίτερα για τους μαθητές που βρίσκονται στο πρώτο/οπτικό στάδιο του μοντέλου. Σε έρευνα της Ahuja (1996) φάνηκε ότι ο λόγος της μη ανάπτυξης φοιτητών παιδαγωγικού τμήματος σε ανώτερα στάδια του μοντέλου των van Hiele ήταν η έλλειψη εμπειριών σε γεωμετρικές καταστάσεις που να δίνουν έμφαση στην ανάπτυξη της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου. Οι Battista και Clements (1991) βρήκαν ότι μαθητές που βρίσκονταν στο δεύτερο/αναλυτικό στάδιο του μοντέλου είχαν ιδιαίτερες δυσκολίες στη λύση προβλήματος και στην αιτιολόγηση λόγω της αδυναμίας συντονισμού της αντίληψης τους για τις έννοιες του χώρου και της γνώσης τους για τις ιδιότητες των αντικειμένων. Για παράδειγμα, ένας μαθητής ο οποίος γνωρίζει τις ιδιότητες του ορθογωνίου αλλά χρησιμοποιεί μια συγκεκριμένη εικόνα για αυτό σε ένα συγκεκριμένο προσανατολισμό, μπορεί να οδηγηθεί σε λανθασμένα συμπεράσματα. Η περιορισμένη εμπειρία με σχήματα σε διαφορετικό προσανατολισμό, όπως παρουσιάζονται στα πλείστα σχολικά εγχειρίδια αποτελεί ανασταλτικό παράγοντα στη διαδικασία συντονισμού αντίληψης των εννοιών του

χώρου και γεωμετρικών ιδιοτήτων.

Φάσεις Διδασκαλίας

Λόγω των πιο πάνω δυσκολιών στη διδασκαλία και μάθηση δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στις φάσεις διδασκαλίας, όπως περιγράφονται από τους van Hiele (1986) και αναφέρονται στην:

- *εισαγωγή της έννοιας*, κατά την οποία γίνεται η εισαγωγή των μαθητών στην έννοια. Ο εκπαιδευτικός συζητεί με τους μαθητές για τα υλικά, το περιεχόμενο και δίνει τις απαραίτητες διευκρινήσεις. Μέσω αυτής της συζήτησης ο εκπαιδευτικός μαθαίνει πώς ερμηνεύουν οι μαθητές τους ορισμούς του προβλήματος και παρέχει τις απαραίτητες πληροφορίες για να μπορέσουν οι μαθητές να προχωρήσουν.
- *καθοδηγούμενη ανακάλυψη*, κατά την οποία οι μαθητές διερευνούν τις γεωμετρικές έννοιες μέσω καλά σχεδιασμένων καθοδηγούμενων δραστηριοτήτων. Στόχος της φάσης αυτής είναι η ενεργητική εμπλοκή των μαθητών σε διερευνητικές δραστηριότητες, για να ανακαλύψουν τις γεωμετρικές έννοιες. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι να καθοδηγήσει τους μαθητές να κάνουν τις κατάλληλες διερευνήσεις με τη βοήθεια διάφορων υλικών, για να χειριστούν έννοιες και διαδικασίες στη γεωμετρία. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να επιλέξει τα κατάλληλα υλικά και τις δραστηριότητες που να ανταποκρίνονται στους στόχους.
- *έκφραση-επεξήγηση*, κατά την οποία οι μαθητές συνειδητοποιούν τις νέες σχέσεις και επεξεργάζονται τη διαισθητική τους γνώση. Συνεπώς, στη φάση αυτή οι μαθητές αντιλαμβάνονται σαφώς τις νέες γεωμετρικές σχέσεις, τις περιγράφουν χρησιμοποιώντας τη δική τους ορολογία και μαθαίνουν βασικά στοιχεία της τυπικής ορολογίας. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι να βοηθήσει τους μαθητές να συνειδητοποιήσουν μέσω της κατάλληλης συζήτησης το αντικείμενο της μελέτης και εκμεταλλευόμενος τη φρασεολογία των μαθητών να εισάγει την κατάλληλη μαθηματική ορολογία.
- *ελεύθερη διερεύνηση* κατά την οποία οι μαθητές επιλύουν προβλήματα τα οποία απαιτούν τη σύνθεση και εφαρμογή των εννοιών και σχέσεων που οι μαθητές έχουν επεξεργαστεί στις προηγούμενες φάσεις. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι να επιλέξει τα κατάλληλα υλικά και τα προβλήματα, να δώσει τις κατάλληλες οδηγίες που θα επιτρέψουν τη χρήση διαφορετικών προσεγγίσεων και να ενθαρρύνει τους μαθητές να αναστοχαστούν για την πορεία λύσης τους και να εισαγάγει όπου χρειάζεται τους κατάλληλους όρους, έννοιες και διαδικασίες.

- *ολοκλήρωση*, κατά την οποία οι μαθητές συνοψίζουν και ολοκληρώνουν αυτά που έμαθαν, συνθέτοντας τις γνώσεις τους σε ένα ενιαίο δίκτυο που μπορούν εύκολα να περιγράψουν και να εφαρμόσουν. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι να ενθαρρύνει τους μαθητές μέσω του κατάλληλου στοχασμού να σταθεροποιήσουν τη γεωμετρική τους γνώση, με έμφαση στη χρήση των κατάλληλων μαθηματικών δομών.

Κριτική στο μοντέλο van Hiele

Το μοντέλο van Hiele έχει αποτελέσει το επίκεντρο σημαντικών ερευνητικών προσπαθειών τα τελευταία χρόνια με στόχο να περιγράψουν και να προσδιορίσουν τα χαρακτηριστικά του κάθε επιπέδου για σημαντικές γεωμετρικές έννοιες (Battista, 1999· Gutierrez, Jaine, & Fortuny, 1991· Lehrer, Jenkins & Osana, 1998). Παρόλα αυτά, οι περισσότερες έρευνες αναφέρονται στη δισδιάστατη γεωμετρία και κυρίως σε έννοιες σχετικές με τα πολύγωνα (Gutierrez, 1992).

Οι ερευνητικές αυτές προσπάθειες έχουν προσπαθήσει να απαντήσουν σε ερωτήματα που αναφέρονται σε θεμελιώδη στοιχεία του μοντέλου όπως το κατά πόσον τα επίπεδα περιγράφουν ακριβώς τη γεωμετρική σκέψη των μαθητών, κατά πόσον οι μαθητές βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο σκέψης για όλα τα αντικείμενα, κατά πόσον τα επίπεδα είναι όντως ιεραρχικά και σε ποιο επίπεδο σκέψης βρίσκονται οι μαθητές με βάση την παραδοσιακή διδασκαλία (Clements & Battista, 1992).

Αποτελέσματα ερευνητικών προσπαθειών στις Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής και σε άλλες χώρες έχουν σε γενικές γραμμές επιβεβαιώσει τη χρησιμότητα των επιπέδων σκέψης στην περιγραφή του γεωμετρικού συλλογισμού των μαθητών από το δημοτικό μέχρι την τριτοβάθμια εκπαίδευση (Burger & Shaughnessy, 1986· Fuys et al., 1988· Han, 1986· Hoffer, 1983) ενώ υπάρχουν και ερευνητικά αποτελέσματα που αμφισβητούν την επάρκεια του μοντέλου (Lehrer, Jenkins & Osana, 1998). Ο Usiskin (1982) βρήκε ότι η γεωμετρική σκέψη του 75% των μαθητών του γυμνασίου εντάσσεται στα επίπεδα σκέψης του μοντέλου. Οι Burger και Shaughnessy (1986) αναφέρουν ότι η συμπεριφορά των μαθητών από νηπιαγωγείο μέχρι την τριτοβάθμια εκπαίδευση βρίσκεται σε συμφωνία με τα επίπεδα σκέψης του μοντέλου. Στην αντίπερα όχθη, οι Lehrer, Jenkins και Osana (1998) βρήκαν ότι μαθητές που βρίσκονταν σύμφωνα με το μοντέλο στο πρώτο επίπεδο σκέψης, χρησιμοποίησαν κατά το διαχωρισμό σχημάτων στρατηγικές που παραπέμπουν στην επεξεργασία ιδιοτήτων και μη εφαρμογή ολικών αντιληπτικών στρατηγικών.

Οι έρευνες που προσπάθησαν να απαντήσουν στο κατά πόσον τα επίπεδα είναι διακριτά και στο κατά πόσον υπάρχει ασυνέχεια μεταξύ των επιπέδων δεν κατέληξαν σε σαφές συμπέρασμα. Ερευνητικές προσπάθειες της Σοβιετικής Σχολής επιβεβαίωσαν τις υποθέσεις του μοντέλου (Hoffer, 1983), ενώ άλλοι ερευνητές αναφέρουν ότι είναι πολύ δύσκολο να εντάξει κάποιος σε ένα επίπεδο τους μαθητές που βρίσκονται στο μεταβατικό στάδιο μεταξύ επιπέδων, όπως για παράδειγμα μεταξύ των επιπέδων δύο και τρία (Fuys et al., 1988· Usiskin, 1982). Οι δυσκολίες που παρατηρούνται στην κατάταξη των μαθητών αποτελούν για τους ερευνητές σημείο αμφισβήτησης της διακριτής φύσης των επιπέδων (Clements & Battista, 1992). Οι Lehrer, Jenkins και Osana (1998) θεωρούν ότι η μεγαλύτερη αδυναμία του μοντέλου είναι η έμφαση στην ασυνέχεια μεταξύ των επιπέδων. Για αυτό και σύγχρονες αντιλήψεις αναφέρονται σε «κύματα επικάλυψης» (overlapping waves), υιοθετώντας την άποψη ότι ο γεωμετρικός συλλογισμός των μαθητών λαμβάνει υπόψη στοιχεία από το κάθε επίπεδο και δεν εντάσσεται πλήρως σε ένα επίπεδο, κατακτώντας σε διαφορετικό βαθμό ικανότητες από το κάθε επίπεδο (Gutierrez & Jaime, 1998· Gutierrez, Jaime & Fortuny, 1991).

Έρευνες κατέδειξαν, επίσης, ότι φοιτητές τριτοβάθμιας εκπαίδευσης και μαθητές γυμνασίου βρίσκονταν σε διαφορετικό επίπεδο του μοντέλου για διαφορετικές έννοιες (Denis, 1987· Mayberry, 1983). Οι Burger και Shaughnessy (1986) βρήκαν, επίσης, παρόμοια αποτελέσματα και για αυτό χαρακτήρισαν τα επίπεδα ως δυναμικά αντί στατικά και με περισσότερη συνεχή αντί ασυνεχή συμπεριφορά. Οι Gutierrez και Jaime (1998) συγκρίνανε την επίδοση φοιτητών παιδαγωγικού τμήματος στη δισδιάστατη γεωμετρία, στη γεωμετρία του χώρου και στη μέτρηση. Η επίδοση των υποκειμένων στις τρεις ενότητες δεν ήταν ανεξάρτητη, αλλά ούτε και συμβατή με τις γενικές αρχές του μοντέλου. Οι ερευνητές υποστηρίζουν ότι καθώς οι μαθητές αναπτύσσονται, ο βαθμός συνοχής της ολικής ικανότητας των μαθητών στις γεωμετρικές έννοιες αυξάνεται και για αυτό και ο Fuys και οι συνεργάτες του (1988) αναφέρονται σε ένα γενικό «εν δυνάμει» επίπεδο σκέψης των μαθητών σταθερό για όλες τις έννοιες.

Μοντέλο van Hiele στην Τρισδιάστατη Γεωμετρία

Μεμονωμένες ερευνητικές προσπάθειες επιχειρήσαν να μεταφέρουν το μοντέλο των van Hiele στην τρισδιάστατη γεωμετρία (Guillen, 1996· Gutierrez, 1992· Lawrie et al., 2000,

2002· Saads & Davis, 1997β). Η πρώτη ερευνητική προσπάθεια από τον Hoffer (1981) προσπάθησε να περιγράψει αναλυτικά τα αντίστοιχα επίπεδα του μοντέλου στην τρισδιάστατη γεωμετρία με αναφορά σε αρκετές γεωμετρικές δεξιότητες σε κάθε επίπεδο όπως οπτική αντίληψη, αναπαράσταση αντικειμένων, εφαρμογή δεξιοτήτων. Αν και ο Hoffer (1981) προσπάθησε να δώσει γενική θεωρητική περιγραφή του κάθε επιπέδου, δύσκολα μπορεί να πει κάποιος ότι κατάφερε να περιγράψει την ανάπτυξη του συλλογισμού των μαθητών στη τρισδιάστατη γεωμετρία με βάση το μοντέλο των van Hiele. Ο Lunkenbein (1983) περιέγραψε τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους εργάστηκαν μαθητές με πολύεδρα, κάνοντας αντιστοίχιση του τρόπου εργασίας των μαθητών με τα πρώτα δύο επίπεδα των van Hiele. Όρισε, επίσης, με βάση την πιαζετινή αρχή της ομαδοποίησης, τρεις κατηγορίες ομαδοποίησης αντικειμένων (μη-λογική, λογικός διαχωρισμός και λογική ομαδοποίηση) οι οποίες αντιστοιχούν στα τρία πρώτα επίπεδα του μοντέλου των van Hiele. Οι Saads και Davis (1997α) ανέπτυξαν και εγκυροποίησαν ένα δοκίμιο μέτρησης της γεωμετρικής σκέψης στην τρισδιάστατη γεωμετρία με βάση το μοντέλο των van Hiele. Τα αποτελέσματά τους επιβεβαίωσαν ότι η αξιολόγηση των επιπέδων σκέψης van Hiele στην τρισδιάστατη γεωμετρία ακολουθεί την ιεραρχική δομή του μοντέλου. Σε μια άλλη εργασία, οι Saads και Davis (1997β) διαπίστωσαν ότι οι ικανότητες που συμβάλουν στη μετάβαση από ένα επίπεδο στο επόμενο του μοντέλου van Hiele, σχετίζονται άμεσα με τις ικανότητες που αναπτύσσουν την οπτική αντίληψη των μαθητών για τα στερεά

Ο Gutierrez (1992) διαχώρισε δύο πεδία έρευνας όσον αφορά τη μεταφορά του μοντέλου van Hiele στη γεωμετρία του χώρου: (α) τη χρήση του μοντέλου για την κατανόηση της ανάπτυξης της ικανότητας οπτικοποίησης των εννοιών του χώρου των μαθητών και (β) τη χρήση του μοντέλου για τη μελέτη και κατανόηση της μάθησης των μαθητών στις έννοιες της τρισδιάστατης γεωμετρίας. Ο Gutierrez (1992) θεωρεί ότι η μελέτη της ανάπτυξης της ικανότητας οπτικοποίησης των εννοιών του χώρου είναι πολύ σημαντικότερη από τη μελέτη των εννοιών της τρισδιάστατης γεωμετρίας γιατί είναι αδύνατη η μελέτη της μάθησης στην τρισδιάστατη γεωμετρία χωρίς να ληφθεί υπόψη η επίδραση της ικανότητας οπτικοποίησης των εννοιών του χώρου. Στη δική του έρευνα μελέτησε την ανάπτυξη της ικανότητας μαθητών Στ' τάξης δημοτικού σχολείου στην οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου κατά την επίλυση δραστηριοτήτων σύγκρισης ή μετακίνησης στερεών με πραγματικά αντικείμενα και με ψηφιακά αντικείμενα στον ηλεκτρονικό υπολογιστή. Πιο κάτω, περιγράφεται αναλυτικά η συμπεριφορά των μαθητών σύμφωνα με τα επίπεδα του μοντέλου των van Hiele (Gutierrez, 1992):

- Επίπεδο 1 (Αναγνώριση): Η σύγκριση των στερεών στηρίζεται στην ολική αντίληψη των σχημάτων των στερεών ή συγκεκριμένων στοιχείων (έδρες, ακμές, κορυφές) χωρίς να δίνεται σημασία σε ιδιότητες όπως μέγεθος γωνιών, μήκος ακμών ή παραλληλία εδρών. Αν παρουσιαστεί ένα τέτοιο στοιχείο στην απάντηση ενός μαθητή, ο ρόλος του είναι καθαρά οπτικός. Οι μαθητές δεν μπορούν να φανταστούν στερεά που δεν μπορούν να δουν ή τμήματα των στερεών που δεν μπορούν να δουν λόγω θέσης. Οι μαθητές μετακινούν ένα στερεό κατά τύχη, έστω και αν έχουν συγκεκριμένο σκοπό. Αν η μετακίνηση δεν παράγει το επιθυμητό αποτέλεσμα, τότε ακολουθεί μια άλλη μετακίνηση μέχρι να επιτευχθεί το τελικό αποτέλεσμα. Στο επίπεδο αυτό παρατηρείται έλλειψη συντονισμού μεταξύ της επιθυμητής μετακίνησης και της πραγματικής που επιλέγεται στην οθόνη του ηλεκτρονικού υπολογιστή, ως αποτέλεσμα της αδυναμίας του μαθητή να φανταστεί το αποτέλεσμα μιας μετακίνησης στον ηλεκτρονικό υπολογιστή.

- Επίπεδο 2 (Ανάλυση): Η σύγκριση των στερεών στηρίζεται σε μια ολική αντίληψη των στερεών ή στοιχείων τους, η οποία οδηγεί στην εξέταση των διαφορών μεταξύ συγκεκριμένων μαθηματικών ιδιοτήτων όπως μέγεθος γωνιών, μήκος ακμών ή παραλληλία εδρών. Οι εξηγήσεις των μαθητών στηρίζονται κυρίως στην παρατήρηση. Οι μαθητές είναι ικανοί να φανταστούν απλές κινήσεις στερεών, για να βρεθούν από μια συγκεκριμένη θέση σε άλλη. Οι κινήσεις δεν γίνονται τυχαία, αλλά καθορίζονται με βάση την αρχική και την τελική θέση. Δεν υπάρχει προσχεδιασμένη στρατηγική, αλλά μετά την πραγματοποίηση μιας κίνησης, γίνεται μελέτη του αποτελέσματος και σχεδιάζεται η επόμενη κίνηση για να επιτευχθεί το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Επίπεδο 3 (Άτυπο επαγωγικό): Για να εξακριβωθεί αν δύο στερεά είναι ίσα ή όχι, οι μαθητές αναλύουν μαθηματικά τα στερεά και τα στοιχεία τους πριν πραγματοποιήσουν οποιαδήποτε κίνηση του στερεού (φυσική ή νοερή). Οι απαντήσεις των μαθητών περιέχουν άτυπες αιτιολογήσεις με βάση μεμονωμένες μαθηματικές ιδιότητες των στερεών. Οι ιδιότητες των στερεών μπορεί να προκύψουν από τη μελέτη των στερεών ή να αποτελούν προϊόν της προϋπάρχουσας γνώσης. Οι μαθητές μπορούν να φανταστούν μετακινήσεις των στερεών ακόμη και σε θέσεις που δεν μπορούν να δουν και όταν πρέπει να πραγματοποιήσουν μια κίνηση του στερεού, αναλύουν την αρχική και την τελική θέση, για να καταστρώσουν ένα σχέδιο των κινήσεων. Οι αιτιολογήσεις τους για τις κινήσεις που επιλέγουν στηρίζονται σε μαθηματικές ιδιότητες ή σχέσεις μεταξύ στοιχείων της αρχικής θέσης και των αντίστοιχων στοιχείων της τελικής θέσης.

Επίπεδο 4 (Τυπικό παραγωγικό): Οι μαθητές σε αυτό το επίπεδο αναλύουν τις ιδιότητες των στερεών πριν από οποιαδήποτε επεξεργασία. Ο συλλογισμός των μαθητών στηρίζεται

στη μαθηματική δομή των στερεών ή στοιχείων τους, λαμβάνοντας υπόψη και ιδιότητες που δεν φαίνονται αλλά μπορούν να εξαχθούν από τον ορισμό ή άλλες ιδιότητες των στερεών. Οι μαθητές σε αυτό το επίπεδο έχουν αναπτυγμένη σε υψηλό επίπεδο την ικανότητα οπτικοποίησης εννοιών του χώρου. Είναι σε θέση να προσχεδιάσουν τη μετακίνηση ενός στερεού με βάση τη μαθηματική του δομή και ιδιότητες. Ο προσχεδιασμός αυτός επιτρέπει την οικονομία και ακρίβεια των κινήσεων.

Οι Gutierrez, Pegg και Lawrie (2004) περιγράφουν τα χαρακτηριστικά του μοντέλου ως προς την έννοια των πρισμάτων και των διαγωνίων. Στο πρώτο επίπεδο οι μαθητές είναι σε θέση να σχεδιάσουν τις διαγωνίους σε πρίσμα που τους δίνεται αλλά δεν είναι σε θέση να προβούν σε γενίκευση. Οι επεξηγήσεις τους αποτελούν απλή περιγραφή αυτού που σχεδίασαν. Στο δεύτερο επίπεδο οι μαθητές είναι σε θέση να συμπεράνουν τον τύπο υπολογισμού του αριθμού των διαγωνίων σε ένα n -γωνικό πρίσμα μετά που θα σχεδιάσουν και θα μετρήσουν τις διαγωνίους σε ένα αριθμό πρισμάτων. Οι αιτιολογήσεις τους στηρίζονται στη σύνοψη των δεδομένων που έχουν συγκεντρώσει. Οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν τη φόρμουλά τους για να υπολογίσουν τον αριθμό των διαγωνίων σε ένα πρίσμα. Αποδεικνύουν ότι μια υπόθεση είναι ορθή ή λανθασμένη σχεδιάζοντας ένα παράδειγμα. Στο τρίτο επίπεδο οι μαθητές μπορούν να βρουν τον τύπο υπολογισμού του αριθμού των διαγωνίων σε ένα n -γωνικό πρίσμα όπως και στο δεύτερο επίπεδο, με τη διαφορά ότι σε αυτό το επίπεδο η απόδειξη στηρίζεται σε άτυπες παραγωγικές σχέσεις που συνδέουν τα δεδομένα με την υπόθεση. Στο τέταρτο επίπεδο οι μαθητές διατυπώνουν τη φόρμουλα υπολογισμού του αριθμού των διαγωνίων σχεδιάζοντας καταρχήν συγκεκριμένα παραδείγματα και στη συνέχεια γράφοντας απόδειξη η οποία στηρίζεται σε τυπικούς παραγωγικούς συλλογισμούς.

Ο Ρόλος της Διαισθητικής Αντίληψης και η Θεωρία των Σχηματικών Εννοιών

Μαθηματικοί όπως οι Poincare και Hilbert τόνισαν τη σημασία της διαισθητικής αντίληψης στη γεωμετρία και είναι γενικά αποδεκτό ότι η διαισθητική αντίληψη αποτελεί απαραίτητο στοιχείο της μαθηματικής σκέψης (Atiyah, 2001). Εντούτοις, ο Fischbein (1994) υποστηρίζει ότι χρειάζεται περαιτέρω έρευνα για τη σχέση μεταξύ διαισθητικής, επαγωγικής και παραγωγικής προσέγγισης στα γεωμετρικά αντικείμενα. Επιπρόσθετα, οι

Fujita και Jones (2003) υποστηρίζουν ότι απουσιάζουν από τα περισσότερα αναλυτικά προγράμματα στη γεωμετρία δραστηριότητες που να αναπτύσσουν και να αξιοποιούν τη διαισθητική αντίληψη των μαθητών.

Μαθηματικοί και ερευνητές στη μαθηματική παιδεία τονίζουν το σημαντικό ρόλο της διαισθητικής αντίληψης στη γεωμετρία και τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να βοηθήσει ή να εμποδίσει την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης. Για παράδειγμα, ο Herbart (1776-1841) παρατήρησε ότι όταν κάποιος λύνει προβλήματα στη γεωμετρία είναι απαραίτητο να χρησιμοποιεί πέρα από την ικανότητα συλλογισμού και «φαντασία» (οπτική αντίληψη). Η άποψη αυτή επηρέασε τη διδασκαλία της γεωμετρίας στη Γερμανία στις αρχές του 20^{ου} αιώνα. Για παράδειγμα, ο Treutlien σχεδίασε ένα πρόγραμμα διδασκαλίας το 1911 που στόχευε στην ανάπτυξη των δεξιοτήτων οπτικής αντίληψης των μαθητών. Ο Godfrey (1910), πρωτοπόρος ερευνητής στην Αγγλία στις αρχές του 20^{ου} αιώνα υποστήριξε ότι τα μαθηματικά δεν είναι μόνο λογική αλλά και «γεωμετρική δύναμη», η «δύναμη/ικανότητα κάποιου» να έχει «γεωμετρικό μάτι», να αντιλαμβάνεται γεωμετρικές ιδιότητες χωρίς την παρουσία κάποιου σχήματος.

Επηρεασμένος από τις προσεγγίσεις αυτές, ο Fischbein (1993) υποστηρίζει ότι οι γεωμετρικές έννοιες δεν είναι όπως οι υπόλοιπες μαθηματικές έννοιες, καθώς διαθέτουν μια επιπλέον ιδιότητα, την αναπαράσταση της νοερής εικόνας του γεωμετρικού αντικειμένου. Εισάγει την ιδέα των «σχηματικών εννοιών» (figural concepts) για τη σύνδεση του γεωμετρικού αντικειμένου με τη νοερή εικόνα του. Αυτή η σύνδεση δεν είναι μια απλή σχέση, αλλά εμπεριέχει ένα σύνολο πολύπλοκων συσχετισμών ανάμεσα στα χαρακτηριστικά του γεωμετρικού σχήματος και τα χαρακτηριστικά της έννοιας, κάτι που επεξηγεί την ιδιαιτερότητα των γεωμετρικών εννοιών. Υποστηρίζει ότι το γεωμετρικό σχήμα δεν είναι μια απλή έννοια, αλλά μια έννοια που σχετίζεται με τη νοερή εικόνα της. «Κατέχει μια ιδιότητα που οι υπόλοιπες μαθηματικές έννοιες δεν κατέχουν, δηλαδή περιλαμβάνει τη νοερή αναπαράσταση της ιδιότητας του χώρου» (Fischbein, 1993, σ. 141). Ειδικότερα, η νοερή εικόνα του γεωμετρικού σχήματος πρέπει να συνδέεται με τον ορισμό του, τις απαραίτητες ιδιότητες του, προκειμένου να κατασκευαστεί η έννοια του σχήματος. Συνεπώς, ο συλλογισμός στη γεωμετρία χαρακτηρίζεται από την αλληλεπίδραση δύο συστημάτων, του σχηματικού και του εννοιολογικού, ενώ η διαδικασία οικοδόμησης σχηματικών εννοιών στο μυαλό του μαθητή χρειάζεται συστηματική διδασκαλία. Το γεγονός αυτό επεξηγεί τις ιδιαίτερες δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές όσον αφορά την αντίληψη των γεωμετρικών εννοιών (Clements & Battista, 1992· English, 1993).

Πιο πρόσφατες ερευνητικές προσπάθειες επιχειρήσαν να διευκρινίσουν το ρόλο της διαισθητικής αντίληψης, της οπτικοποίησης και των νοητικών εικόνων στη διδασκαλία και στη μάθηση της γεωμετρίας (δείτε Jones, 1998). Ο Mason (1991) εισηγείται τη χρήση διαγραμμάτων ως μέσο ενεργοποίησης της οπτικής αντίληψης και στη συνέχεια επέκτασης, ενδυνάμωσης της οπτικής αντίληψης και του μαθηματικού συλλογισμού. Οι Goldenberg, Cuoco και Mark (1998) τονίζουν την αναγκαιότητα οπτικής αντίληψης ενός σχήματος στο μυαλό του μαθητή, αντίληψης των επιμέρους στοιχείων και διατύπωση υποθέσεων για τις σχέσεις μεταξύ των επιμέρους στοιχείων, ως προαπαιτούμενη διαδικασία οποιασδήποτε μετέπειτα ενέργειας, σκιαγραφώντας ουσιαστικά το «γεωμετρικό μάτι» του Godfrey. Οι Fujita, Jones και Yamamoto (2004), συνθέτοντας τις ιδέες του Fischbein και άλλων ερευνητικών διατυπώνουν τον ορισμό «γεωμετρική διαίσθηση» (geometrical intuition) που αναφέρεται στις ικανότητες που πρέπει να κατέχει ένας μαθητής στην επίλυση προβλημάτων γεωμετρίας με επιτυχία:

- Κατασκευή και επεξεργασία γεωμετρικών σχημάτων στο μυαλό
- Αντίληψη γεωμετρικών ιδιοτήτων
- Συσχέτιση εικόνων με έννοιες και θεωρήματα στη γεωμετρία
- Λήψη απόφασης για το πού και το πώς θα ξεκινούν την επίλυση ενός προβλήματος στη γεωμετρία.

Σχετική με τη θεωρία του Fishbein για τη διαισθητική γνώση είναι η έρευνα της Hershkowitz (Hershkowitz et al., 1990) για τη διαδικασία μάθησης βασικών γεωμετρικών εννοιών. Υποστηρίζει ότι η «έννοια» πηγάζει από το μαθηματικό ορισμό και η νοερή εικόνα της έννοιας από την αναπαράσταση της στο μυαλό κάθε μαθητή. Οι άνθρωποι όταν σκέφτονται δεν χρησιμοποιούν ορισμούς των εννοιών, αλλά συνδυασμό όλων των νοητικών εικόνων και ιδιοτήτων που έχουν συνδέσει με την έννοια (Vinner & Hershkowitz, 1980).

Η γεωμετρική έννοια χαρακτηρίζεται από κρίσιμες και μη κρίσιμες ιδιότητες. Οι κρίσιμες ιδιότητες είναι οι ιδιότητες που ένα παράδειγμα της έννοιας πρέπει να έχει, ενώ οι μη κρίσιμες ιδιότητες χαρακτηρίζουν μερικά μόνο παραδείγματα εννοιών. Για παράδειγμα, ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο είναι δυνατόν να έχει τις δύο έδρες του τετράγωνα. Αυτή η ιδιότητα δεν είναι κρίσιμη, καθώς δεν είναι απαραίτητη για όλα τα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα. Από την άλλη μεριά, ο ορισμός της γεωμετρικής έννοιας έχει το ρόλο της ταξινόμησης των σχημάτων σε παραδείγματα και μη παραδείγματα της έννοιας. Η Hershkowitz τονίζει την εμφάνιση των «πρωτοτυπικών» παραδειγμάτων των

γεωμετρικών εννοιών. Συγκεκριμένα, υποστηρίζει ότι κάθε γεωμετρική έννοια έχει ένα ή περισσότερα πρωτοτυπικά παραδείγματα τα οποία κατέχουν όλες τις κρίσιμες ιδιότητες της έννοιας, αλλά ταυτόχρονα έχουν και κάποιες μη κρίσιμες, οι οποίες όμως είναι οπτικά πιο ισχυρές. Οι μαθητές τείνουν να αντιλαμβάνονται πρώτα αυτά τα πρωτοτυπικά παραδείγματα των γεωμετρικών εννοιών. Επιπλέον, τα χρησιμοποιούν ως αντιπροσωπευτικά και ως σημείο αναφοράς για να κρίνουν άλλα παραδείγματα των συγκεκριμένων εννοιών. Οι Vinner και Hershkowitz (1983) συνδέουν τέτοιου είδους κρίσεις που βασίζονται σε πρωτοτυπικά παραδείγματα με τα επίπεδα εξέλιξης της γεωμετρικής σκέψης της θεωρίας των Van Hiele. Ειδικότερα, στην περίπτωση όπου οι μαθητές αντιλαμβάνονται το πρωτοτυπικό παράδειγμα ως ολότητα και το εφαρμόζουν σε άλλα παραδείγματα, ανήκουν στο πρώτο επίπεδο ανάπτυξης. Από την άλλη μεριά, όταν οι πρωτοτυπικές κρίσεις βασίζονται στις ιδιότητες των παραδειγμάτων, το αντίστοιχο επίπεδο ανάπτυξης είναι το δεύτερο.

Έννοιες Γεωμετρίας στο Χώρο

Δυσκολίες Μαθητών στην Αναπαράσταση Γεωμετρικών Σχημάτων

Συνήθης τρόπος αξιολόγησης της ικανότητας των μαθητών στην τρισδιάστατη γεωμετρία είναι να σχεδιάσουν τη γραφική αναπαράσταση ενός αντικειμένου (Wolf, 1988). Το πρόβλημα/πρόκληση κατά τη σχεδίαση ενός αντικειμένου είναι η χρήση ενός επίπεδου χαρτιού για την αναπαράσταση του βάθους και του όγκου του τρισδιάστατου κόσμου. Τα παιδιά μικρής ηλικίας, όμως, στερούνται της ικανότητας να κατανοήσουν δισδιάστατες αναπαραστάσεις τρισδιάστατων φαινομένων γιατί απαιτείται η χρήση συμβάσεων (Bishop, 1980).

Η χρήση και η αντίληψη διαφορετικών προοπτικών ενός αντικειμένου είναι μια διαδικασία που εξελίσσεται σταδιακά. Στην ηλικία των τριών ετών, τα παιδιά είτε σχεδιάζουν είτε κατασκευάζουν με κύβους ένα τρισδιάστατο αντικείμενο, αδυνατούν να αναπαραστήσουν στο σχέδιο ή στην κατασκευή τους την τρίτη διάσταση ή την έννοια του όγκου. Τα παιδιά στην ηλικία των πέντε χρόνων μπορούν να διαχωρίσουν τα δύο συστήματα αναπαράστασης (σχέδιο/μοντέλο με κύβους) και εφαρμόζουν διαφορετικές στρατηγικές. Ένα παιδί πέντε χρόνων επιλεκτικά χρησιμοποιεί δισδιάστατες ή εικονικές

στρατηγικές για να δείξει τον όγκο ενός σπιτιού. Χρησιμοποιεί, για παράδειγμα, ένα χοντρό περίγραμμα ή διαφορετικό χρώμα για να διαχωρίσει το σπίτι από το υπόλοιπο περιβάλλον. Κατά την κατασκευή ενός μοντέλου με κύβους ενός σπιτιού, τοποθετεί τους κύβους κατά μήκος τριών αξόνων. Οι στρατηγικές αυτές είναι πολύ σημαντικές γιατί καταδεικνύουν τη συνειδητοποίηση από μέρους των παιδιών ότι προσπαθούν να βρουν διδιάστατους τρόπους για να αναπαραστήσουν τρισδιάστατα αντικείμενα (Wolf, 1988). Για παράδειγμα, ένα παιδί έξι χρόνων προσπαθεί να διαφοροποιήσει ένα κύκλο από μια σφαίρα με το κατάλληλο χρωμάτισμα.

Ο Wolf (1988) υποστηρίζει ότι παιδιά έξι χρόνων μπορούν να διαβάσουν αρκετά καλά γραφικές αναπαραστάσεις τρισδιάστατων αντικειμένων. Τα παιδιά από την ηλικία των τεσσάρων χρόνων μπορούν να χρησιμοποιήσουν εικονικές πληροφορίες, για να κατασκευάσουν ένα τρισδιάστατο αντικείμενο. Η επίδοση των παιδιών σε τέτοια έργα αυξάνεται δραματικά με την ηλικία. Παιδιά ηλικίας οκτώ χρόνων μπορούν να κάνουν την κατασκευή χωρίς να κοιτάζουν καν στην εικόνα, αξιοποιώντας προηγούμενες εμπειρίες τους ή συσχετίζοντας τα τμήματα της κατασκευής. Συνεπώς, μπορεί να λεχθεί ότι κατά μέσο όρο ένα παιδί ηλικίας 8 ετών μπορεί να συνδέσει ένα αντικείμενο με το σχέδιό του.

Οι επίπεδες αναπαραστάσεις αποτελούν την πιο συχνή μορφή αναπαράστασης γεωμετρικών αντικειμένων οι οποίες προσφέρουν στον αναγνώστη τις περισσότερες δυνατές πληροφορίες για τα χαρακτηριστικά των στερεών, αλλά είναι πολύ δύσκολοι οι αναγνώστες να τις επεξεργαστούν νοητικά (Gaulin, 1985· Gutierrez, 1992). Σύμφωνα με τον Mitchelmore (1980) οι μαθητές αλλά και οι ενήλικες αντιμετωπίζουν σοβαρά προβλήματα στην αναπαράσταση τρισδιάστατων σχημάτων όπως η δυσκολία αναπαράστασης σε ένα σχέδιο παράλληλων ευθειών στο χώρο ή ευθειών στο χώρο που τέμνονται κάθετα στο χώρο. Οι Bishop (1983) και Parzysz (1988) τονίζουν ότι η αναπαράσταση ενός τρισδιάστατου αντικειμένου σε ένα διδιάστατο σχέδιο απαιτεί την ικανότητα να προσδίδει κάποιος συμβατικότητα στο σχέδιο, διαδικασία στην οποία δεν δίνεται η απαραίτητη σημασία στη διδασκαλία. Η ικανότητα αναπαράστασης ενός αντικειμένου σχετίζεται άμεσα με τις ιδιαίτερες δυσκολίες που προκύπτουν από τις μορφές αναπαράστασης των εννοιών της γεωμετρίας στο χώρο, τόσο για τις νοητικές αναπαραστάσεις που απαιτούν όσο και για τις συγκεκριμένες μορφές αναπαράστασής τους (Gaulin, 1985· Parzysz, 1988). Σημαντικές ερευνητικές προσπάθειες έχουν καταδείξει τα ακόλουθα τρία συμπεράσματα για τις δυσκολίες αυτές: (α) Υπάρχει μια διαλεκτική σχέση μεταξύ της ανάπτυξης της ικανότητας των μαθητών στη γεωμετρία στο χώρο και στην ικανότητά τους χειρισμού αναπαραστάσεων τρισδιάστατης μορφής, (β) η ανάπτυξη της

ικανότητας των μαθητών στη γεωμετρία στο χώρο προϋποθέτει την ενασχόληση με χειριστικά μοντέλα πριν ο μαθητής είναι σε θέση να κατανοεί αφηρημένες αναπαραστάσεις των εννοιών και (γ) υπάρχει ανάγκη σαφής ερμηνείας και κατανόησης των κανόνων που χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση στο χαρτί εννοιών της γεωμετρίας στο χώρο. Για παράδειγμα, το «σχήμα» (figure) αποτελεί το γεωμετρικό αντικείμενο που ορίζεται από ένα λειτουργικό ορισμό και που αναπαρίσταται από ένα δισδιάστατο «σχέδιο» (diagram).

Ο Parzysz (1988) έχει αναγνωρίσει δύο στάδια στην ανάπτυξη της ικανότητας αναπαράστασης ενός αντικειμένου:

- Επίπεδο 1: Η αναπαράσταση «μοιάζει» όσο το δυνατό περισσότερο στο γεωμετρικό σχήμα, για παράδειγμα όσο το δυνατό ίδιες διαστάσεις.
- Επίπεδο 2: Οι διαστάσεις της αναπαράστασης είναι πολύ μικρότερες από το γεωμετρικό σχήμα.

Κατά τη μετάβαση από το ένα επίπεδο στο επόμενο παρατηρείται μια εξελικτική απώλεια πληροφοριών. Κατά τη μετάβαση από το πραγματικό γεωμετρικό σχήμα στις αναπαραστάσεις του Επιπέδου 1, μερικές ιδιότητες του σχήματος γίνονται κατανοητές μόνο λόγω της καλής διάθεσης του αναγνώστη να τις αντιληφθεί. Υπάρχει μια κατάσταση «ανοχής» μεταξύ του δημιουργού της αναπαράστασης και του αναγνώστη λόγω της κοινής γεωμετρικής τους κουλτούρας, η οποία περιλαμβάνει ένα αρχέτυπο αντικειμένων (σημείο, τρίγωνο, κύκλος, επίπεδο, πυραμίδα, κύλινδρος ...) και οποιαδήποτε αναπαράσταση συνδέεται με ένα από αυτά. Υπάρχουν, όμως, και αντικείμενα τα οποία δεν μπορούν να αναπαρασταθούν όπως η ευθεία γραμμή. Συνεπώς, για την αναπαράσταση τέτοιων σχημάτων είναι απαραίτητη η ύπαρξη κάποιων συμβατικών κανόνων.

Κατά τη μετάβαση από τις αναπαραστάσεις του Επιπέδου 1 στο Επίπεδο 2, το επίπεδο αφαίρεσης βρίσκεται σε πολύ υψηλότερο βαθμό και μερικές φορές είναι αρκετά δύσκολο για τον αναγνώστη να υποθέσει τις ιδιότητες του τρισδιάστατου αντικειμένου από το σχέδιο (Parzysz, 1988). Για παράδειγμα, είναι πολύ δύσκολο να υποθέσει ο αναγνώστης από ένα σχέδιο ότι οι διαγώνιοι της βάσης μιας τετραγωνικής πυραμίδας τέμνονται κάθετα και ότι το ύψος της πυραμίδας είναι κάθετο στο σημείο τομής των διαγωνίων.

Σημαντικός κίνδυνος κατά την ανάγνωση του «σχεδίου» ενός τρισδιάστατου αντικειμένου είναι να μην ξεχωρίσει ο μαθητής αν το «σχέδιο» αποτελεί αναπαράσταση τρισδιάστατου ή δισδιάστατου σχήματος. Ο Parzysz (1988) βρήκε ότι μαθητές Στ' τάξης

δημοτικού σχολείου αναγνώρισαν τις έδρες ενός κύβου που ήταν σχεδιασμένος σε πλάγια προβολή ως απλά παραλληλόγραμμα και όχι ως τετράγωνα. Παρόμοια προβλήματα προκύπτουν, επίσης, κατά τη διαδικασία σχεδιασμού από τους μαθητές της αναπαράστασης ενός τρισδιάστατου αντικειμένου όπου γίνεται ένας συμβιβασμός μεταξύ αυτών που γνωρίζει ο μαθητής και αυτών μπορεί να δει ο μαθητής. Ο συμβιβασμός αυτός, σύμφωνα με τον Parzysz (1988), υλοποιείται μέσω της σύνθεσης των διαφορετικών προοπτικών. Ο μαθητής σχεδιάζει πρώτα την πρόσοψη ενός αντικειμένου καθοδηγούμενος από το κύριο χαρακτηριστικό του γεωμετρικού σχήματος. Στη συνέχεια, λαμβάνοντας υπόψη άλλη προοπτική τροποποιεί το αρχικό σχέδιο γιατί συγκρούεται με τις γνώσεις που έχει για τις ιδιότητες του γεωμετρικού σχήματος μέχρι να μπορέσει να ενσωματώσει τη γνώση του σε μια ενιαία προοπτική.

Ο Mitchelmore (1980) περιγράφει τέσσερα εξελικτικά στάδια στο σχεδιασμό τρισδιάστατων αντικειμένων. Στάδιο 1: Τα σχέδια παρουσιάζουν μόνο μια όψη, θεωρώντας τα αντικείμενα ως δυσδιάστατα. Στάδιο 2: Τα σχέδια παρουσιάζουν διαφορετικές όψεις του αντικειμένου οι οποίες μπορεί να είναι ή να μην είναι ορατές, χωρίς να είναι απαραίτητο να επιδεικνύουν το βάθος του σχήματος. Στάδιο 3: Μόνο οι ορατές όψεις εμφανίζονται στο σχέδιο και το βάθος είναι εμφανές. Στάδιο 4: Σωστός σχεδιασμός των παράλληλων ευθειών και σωστή αναπαράσταση του βάθους.

Ο Gutierrez (1996) αναφέρει τους ακόλουθους τρόπους αναπαράστασης των τρισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων:

- Σχέδιο υπό προοπτική: Το σχέδιο υπό προοπτική είναι το είδος αναπαράστασης που εφαρμόζουν αυθόρμητα οι μαθητές γι' αυτό από εκπαιδευτικής άποψης διαφοροποιείται σημαντικά από τις υπόλοιπες μορφές αναπαράστασης. Η αναπαράσταση ενός αντικειμένου υπό προοπτική προϋποθέτει τη συνειδητοποίηση από το μαθητή του σημείου από το οποίο βλέπει ένα αντικείμενο και την επακόλουθη αλλαγή στο σχήμα του όταν το δει από άλλο σημείο. Η αναπαράσταση αντικειμένων υπό προοπτική απαιτεί συνειδητό συντονισμό μεταξύ του αντικειμένου και του υποκειμένου. Παιδιά ηλικίας επτά ετών συνειδητοποιούν τη διαφορά μεταξύ διαδοχικών σημείων παρατήρησης ενός αντικειμένου αλλά δεν μπορούν να φανταστούν ή να σχεδιάσουν τα αποτελέσματα αυτών των αλλαγών. Παιδιά αυτής της ηλικίας μπορούν να αναγνωρίσουν ένα σχέδιο ως αναπαράσταση ενός αντικειμένου υπό συγκεκριμένη προοπτική μόνο όταν παρουσιαστεί έτοιμο μπροστά τους. Παιδιά ηλικίας οκτώ-μισι με εννιά χρόνων μπορούν να εφαρμόσουν τους κανόνες της προοπτικής προβολής στο σχέδιό τους. Ο Mitchelmore (1980) περιγράφει αναλυτικά τα στάδια ανάπτυξης της ικανότητας των μαθητών στο χειρισμό σχεδίων υπό προοπτική.

- Σχέδιο με στρώματα: Η αναπαράσταση με στρώματα αποτελείται από ένα σύνολο οριζόντιων τομών σε συγκεκριμένα ύψη για να αποτυπωθούν οι διαφοροποιήσεις στο σχήμα από κάτω (πρώτο στρώμα) έως πάνω (τελευταίο στρώμα).
- Ορθογώνια προβολή: Το είδος αυτός προβολής χρησιμοποιείται ευρέως στο τεχνικό σχέδιο. Η αναπαράσταση αποτελείται από τρεις προβολές, την πρόσοψη, την πλάγια όψη και την κάτωψη. Με τις αναπαραστάσεις αυτές ο μαθητής μπορεί να σχηματίσει μια ολοκληρωμένη νοητική εικόνα του αντικειμένου.
- Κωδικοποιημένη ορθογώνια προβολή: Το είδος αυτός προβολής αποτελεί παραλλαγή της ορθογώνιας προβολής ώστε να αποφευχθεί η απώλεια πληροφοριών. Για το σκοπό αυτό κωδικοί ή λεκτικές πληροφορίες προστίθενται στις προβολές.
- Ισομετρική προβολή: Τα σχέδια ισομετρικής προβολής κατασκευάζονται συνήθως σε τριγωνικό πλέγμα με την παραδοχή ότι οι κορυφές του στερεού ταυτίζονται με τα σημεία του πλέγματος. Για παράδειγμα, η ισομετρική προβολή ενός κύβου αποτελείται από ένα κανονικό εξάγωνο χωρισμένο σε τρεις ίσους ρόμβους, τις τρεις ορατές έδρες του κύβου. Στην ισομετρική προβολή η ισότητα των ακμών ενός κύβου διατηρείται και στην αναπαράσταση, ενώ δεν συμβαίνει το ίδιο και με τις γωνίες, όπου στην αναπαράσταση καμία γωνία του κύβου δεν είναι 90 μοίρες. Οι τρεις άξονες, X, Ψ, Z στην ισομετρική προβολή σχηματίζουν γωνία 120 μοιρών και τα επίπεδα που είναι παράλληλα σ' αυτούς τους άξονες αναπαρίστανται σε αναλογία 1:1.
- Πλάγια προβολή: Στην πλάγια προβολή ενός στερεού στο επίπεδο μόνο η έδρα που είναι παράλληλη προς το επίπεδο προβολής και οι παράλληλες προς αυτήν έδρες διατηρούν το σχήμα και το μέγεθός τους. Οι άξονες, X, Ψ είναι σε γωνία 90 μοιρών, ενώ οι X, Z σε γωνία 45 μοιρών. Τα επίπεδα που είναι παράλληλα προς το επίπεδο X, Ψ αναπαρίστανται σε αναλογία 1:1, ενώ αυτά που είναι παράλληλα στο X, Z επίπεδο σε αναλογία 1:2. Στην πλάγια προβολή μόνο η έδρα που είναι κάθετη προς το επίπεδο προβολής και οι παράλληλες προς αυτήν διατηρούν ίδιο το σχήμα και το μέγεθος (Elsheikh, 1995).

Ο Gutierrez (1996) υποστηρίζει ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν τις περισσότερες δυσκολίες στην ισομετρική προβολή, ακολούθως στην κωδικοποιημένη ορθογώνια προβολή και τις λιγότερες στην προβολή με στρώματα. Η δυσκολία σχεδιασμού αντικειμένων σε ισομετρική προβολή πηγάζει από την αναγκαιότητα συντονισμού των διαφορετικών εδρών του σχήματος και ιδιαίτερα του συντονισμού των κάθετων τμημάτων. Σύμφωνα με τον Gutierrez (1996), υπάρχουν σημαντικές διαφορές στη δυσκολία αναπαράστασης τρισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων και στο κτίσιμο τρισδιάστατων σχημάτων με βάση δισδιάστατες αναπαραστάσεις. Στο κτίσιμο τρισδιάστατων σχημάτων

οι μαθητές αντιμετώπισαν τις περισσότερες δυσκολίες στην ανάγνωση κωδικοποιημένων ορθογώνιων προβολών, ακολούθως στην ισομετρική προβολή και τις λιγότερες στην προβολή με στρώματα.

Οι Lehrer, Jenkins και Osana (1998) εξέτασαν την ανάπτυξη της ικανότητας σχεδιασμού αντικειμένων και τη σχέση της με διάφορες παραμέτρους της οπτικοποίησης των εννοιών του χώρου. Περιγράφουν πέντε στάδια ανάπτυξης της ικανότητας σχεδιασμού ενός κύβου που ταυτίζονται με τις αντίστοιχες τάξεις του δημοτικού σχολείου:

- Επίπεδο 0: Οι μαθητές σχεδιάζουν ένα κλειστό μη-τετραγωνικό σχήμα.
- Επίπεδο 1: Σχεδιασμός μιας έδρας ενός κύβου, για παράδειγμα ένα τετράγωνο.
- Επίπεδο 2: Εμφάνιση της έννοιας του βάθους με το σχεδιασμό ενός αναπτύγματος που αποτελείται από δύο έδρες.
- Επίπεδο 3: Εμφάνιση της έννοιας του βάθους με το σχεδιασμό αναπτύγματος που αποτελείται από τρεις ή περισσότερες έδρες.
- Επίπεδο 4: Προσπάθεια σχεδιασμού ενός αντικειμένου με στοιχεία προοπτικής.
- Επίπεδο 5: Ρεαλιστική αναπαράσταση αντικειμένου υπό προοπτική.

Διατάξεις Κύβων στο Χώρο

Οι διατάξεις κύβων και συγκεκριμένα οι ορθογώνιες διατάξεις κύβων παρουσιάζονται σε μεγάλο βαθμό στα σχολικά εγχειρίδια. Για παράδειγμα, εικόνες ορθογώνιων παραλληλεπίπεδων κατασκευασμένων από μοναδιαίους κύβους χρησιμοποιούνται για την εισαγωγή των μαθητών στην έννοια του όγκου (Ben-Chaim et al. 1985). Η εύρεση του αριθμού των μοναδιαίων κύβων που μπορούν να χωρέσουν σε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο αποτελεί το γνωστικό πλαίσιο που μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν τη χωρητικότητα του στερεού και τον τρόπο υπολογισμού του όγκου του (Battista & Clements, 1998α· Geddes & Fortunato, 1993). Η ανάπτυξη της ικανότητας αυτής, όμως, είναι μια δύσκολη διαδικασία και για αυτό μαθητές γυμνασίου και λυκείου δεν έχουν ικανοποιητικά αποτελέσματα σε τέτοιου είδους προβλήματα (Battista & Clements, 1996· Ben-Chaim, Lappan & Houang, 1985).

Ερευνητικά αποτελέσματα των Olkun (2003) και Battista και Clements (1996) έδειξαν τρεις διαφορετικούς τρόπους που χρησιμοποιούν οι μαθητές στην κατασκευή ορθογώνιων παραλληλεπίπεδων από μοναδιαίους κύβους: (α) οι μαθητές λαμβάνουν

υπόψη μόνο τις έδρες των κύβων που φαίνονται και αγνοούν τους κύβους ή τις έδρες που δεν φαίνονται, (β) οι μαθητές αντιλαμβάνονται τις τρισδιάστατες ιδιότητες των κύβων και τη διαδικασία «γεμίσματος» του ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου αλλά έχουν πρόβλημα στην οργάνωση των κύβων και στη σφαιρική αντίληψη της δόμησης των κύβων και (γ) οι μαθητές αντιλαμβάνονται τους κύβους ως οργανωμένες δομές και μπορούν να υπολογίσουν τον αριθμό των κύβων που χρειάζονται με βάση στρώματα ή στήλες κύβων.

Οι Battista και Clements (1998β, 1996) εντόπισαν πέντε κατηγορίες μαθητών στον τρόπο υπολογισμού των μοναδιαίων κύβων που περιέχονται σε μια διάταξη κύβων στο χώρο:

- Κατηγορία 1: Οι μαθητές αναγνωρίζουν μια διάταξη κύβων υπό μορφή στρωμάτων. Υπολογίζουν τον αριθμό των κύβων σε ένα στρώμα και πολλαπλασιάζουν επί τον αριθμό των στρωμάτων για να βρουν τον συνολικό αριθμό των κύβων. Τα στρώματα μπορεί να είναι σε οριζόντια ή κατακόρυφη διάταξη.
- Κατηγορία 2: Οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη διάταξη των κύβων ως διαδικασία γεμίσματος και για αυτό προσπαθούν να υπολογίσουν τους εσωτερικούς και τους εξωτερικούς κύβους. Οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές ποικίλουν. Είναι δυνατό να χρησιμοποιήσουν τυχαίες στρατηγικές ή συστηματικές στρατηγικές. Για παράδειγμα, κάποιοι μαθητές βλέπουν μια διάταξη κύβων ως ένα μη-οργανωμένο σύνολο και έτσι μετρούν τους κύβους ένα προς ένα, με αποτέλεσμα τις πιο πολλές φορές να κάνουν λάθη. Μαθητές που εφαρμόζουν μια πιο συστηματική στρατηγική, προσπαθούν χωρίς επιτυχία να οργανώσουν τους κύβους σε υποσύνολα ώστε να μπορούν να έχουν μια ολική εικόνα της διάταξης.
- Κατηγορία 3: Οι μαθητές αναγνωρίζουν τη διάταξη υπό μορφή πλευρών ή εδρών. Λαμβάνουν υπόψη τους κύβους που σχηματίζουν τις έδρες της διάταξης με αποτέλεσμα συνήθως να αγνοούν τους εσωτερικούς κύβους ή να διπλομετρούν κύβους που ανήκουν σε δύο έδρες.
- Κατηγορία 4: Οι μαθητές της κατηγορίας αυτής εφαρμόζουν τυποποιημένα τον τύπο «Μήκος X Πλάτος X Ύψος», χωρίς να δείχνουν στοιχεία κατανόησης της διάταξης υπό μορφή στρωμάτων.
- Κατηγορία 5: Στην κατηγορία αυτή περιλαμβάνονται όλες οι υπόλοιπες στρατηγικές όπως ο πολλαπλασιασμός του εμβαδού μιας έδρας επί το εμβαδόν

μιας άλλης έδρας. Οι περισσότερες από αυτές τις στρατηγικές καταδεικνύουν ότι οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη διάταξη των κύβων υπό μορφή μόνο εδρών.

Τα ερευνητικά αποτελέσματα των Battista και Clements (1996) υποστηρίζουν ότι η δυσκολία των μαθητών στον υπολογισμό των κύβων που χρειάζονται για να γεμίσει ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο δεν οφείλονται ούτε στη σύγχυση των μαθητών για τις έννοιες του όγκου και του εμβαδού αλλά ούτε και στην αδυναμία κατανόησης των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούνται για απεικόνιση των διατάξεων των κύβων. Αντίθετα, οι ερευνητές υποστηρίζουν ότι το σημαντικότερο πρόβλημα είναι η μη σωστή διάταξη/δόμηση των κύβων στο χώρο. Οι Battista και Clements (1996) ορίζουν την ικανότητα «δόμησης αντικειμένων στο χώρο» (spatial structuring) ως τη νοητική διεργασία κατασκευής μιας διάταξης για ένα αντικείμενο ή σύνολο αντικειμένων. Η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει την ομαδοποίηση αντικειμένων για την κατασκευή μιας νέας μονάδας, και την κατανόηση σχέσεων μεταξύ των νέων μονάδων. Για παράδειγμα οι μαθητές κατανοούν ότι σε έναν κύβο με πλευρά 5 μονάδες, οι 25 μοναδιαίοι κύβοι που χρειάζονται για να καλυφθεί η βάση του κύβου αποτελούν μια νέα μονάδα, ένα στρώμα κύβων και ότι ο κύβος μπορεί να χωρέσει 5 τέτοια στρώματα. Οι Battista και Clements (1998β) υποστηρίζουν ότι η πηγή της αδυναμίας των μαθητών να «δομήσουν» αντικείμενα στο χώρο είναι η ανικανότητά τους να συντονίσουν και να ενσωματώσουν σε ένα ενιαίο νοητικό μοντέλο τις διαφορετικές όψεις της διάταξης. Οι Battista και Clements (1998α) και Ben-Chaim, Lappan και Houang (1985) βρήκαν τέτοια προβλήματα στο συλλογισμό μαθητών Γ΄ και Ε΄ τάξης δημοτικού και σε μαθητές λυκείου.

Η «δόμηση αντικειμένων στο χώρο» είναι μια μορφή στοχαστικής αφαίρεσης κατά την οποία το μυαλό επιλέγει, συντονίζει, ενοποιεί και καταγράφει στην εργαζόμενη μνήμη ένα σύνολο νοητικών στοιχείων ή ενεργειών. Υπάρχουν διαφορετικά επίπεδα στοχαστικής αφαίρεσης ενός στοιχείου ή ενέργειας: (α) απομόνωση του στοιχείου/ενέργειας από το περιβάλλον στο οποίο ανήκει ή πραγματοποιείται, (β) καταγραφή του στοιχείου/ενέργειας στην εργαζόμενη μνήμη ώστε να μπορεί να γίνει αναπαραγωγή χωρίς την παρουσία του αρχικού ερεθίσματος και (γ) εσωτερίκευση ώστε να μπορεί να γίνει εφαρμογή σε μια νέα προβληματική κατάσταση (Steffe & Cobb, 1988· von Glasersfeld, 1995). Η «δόμηση αντικειμένων στο χώρο» ως μια μορφή στοχαστικής αφαίρεσης εκμεταλλεύεται δομές από προηγούμενες εμπειρίες για να τις ενσωματώσει σε νέες δομές.

Οι Battista και Clements (1998β) ανέπτυξαν διδακτικό υλικό για να βοηθήσουν μαθητές Γ΄, Δ΄ και Ε΄ τάξης δημοτικού σχολείου να κατανοήσουν τις διατάξεις κύβων στο χώρο και να αναπτύξουν στρατηγικές για την επίλυση σχετικών προβλημάτων. Στις

δραστηριότητες που ανέπτυξαν ζητούνταν από τους μαθητές να προβλέψουν τον αριθμό των μοναδιαίων κύβων σε μια διάταξη και στη συνέχεια να ελέγξουν την εγκυρότητα της πρόβλεψής τους χρησιμοποιώντας συγκεκριμένα αντικείμενα, όπως κύβους και κουτιά. Η πρόβλεψη του αριθμού των κύβων που περιέχονται σε μια διάταξη και ιδιαίτερα η ασυμφωνία μεταξύ πρόβλεψης και πραγματικού αριθμού οδηγεί σε μια γνωστική σύγκρουση που ενθαρρύνει τους μαθητές να προβούν σε αναστοχασμό του τρόπου σκέψης τους με αποτέλεσμα να μπορούν να βελτιώσουν τα υφιστάμενα νοητικά τους μοντέλα (Battista, 1994) και να δομήσουν πιο σύνθετες γνωστικές δομές. Παραδείγματα τέτοιων δραστηριοτήτων είναι: (α) η πρόβλεψη του αριθμών των κύβων που μπορούν να χωρέσουν σε ένα κουτί όταν δίνεται στους μαθητές το ανάπτυγμα του κουτιού, (β) η πρόβλεψη του αριθμού διαφορετικών διατάξεων κύβων που μπορούν να χωρέσουν σε ένα συγκεκριμένο κουτί και (γ) η πρόβλεψη του αριθμού των κύβων που μπορούν να χωρέσουν σε ένα κουτί που δίνεται σε εικονική μορφή.

Αναπαραστάσεις Αναπτυγμάτων Στερεών Αντικειμένων

Αριθμός ερευνητικών εργασιών μελέτησαν τους τρόπους αναπαράστασης των αναπτυγμάτων στερεών αντικειμένων (Bourgeois, 1986· Cohen, 2003· Lawrie, Pegg & Gutierrez, 2000· Mariotti, 1989· Potari & Spiliotopoulou, 1992· Stylianou, Leikin, Silver, 1999·). Σύμφωνα με τον Mitchelmore (1980) η αναπαράσταση τρισδιάστατων αντικειμένων μέσω της κατασκευής δισδιάστατων αναπτυγμάτων αποτελεί σημαντικό παράγοντα της ικανότητας των μαθητών στις έννοιες της τρισδιάστατης γεωμετρίας και συμβάλλει στην κατανόηση των σχέσεων σε ένα αντικείμενο, τονίζοντας ότι είναι πολύ σημαντική η οπτικοποίηση διαφορετικών αναπαραστάσεων τρισδιάστατων αντικειμένων και η κατανόηση των γεωμετρικών σχέσεων ανάμεσα στα τμήματα των αντικειμένων. Η αναπαράσταση τρισδιάστατων αντικειμένων μέσω της κατασκευής αναπτυγμάτων συνδέεται με την ικανότητα σύνθεσης και ανάλυσης οπτικών εικόνων, δηλαδή την ικανότητα ανάλυσης μιας οπτικής εικόνας στα επιμέρους στοιχεία και μετά την επανασύνθεση των στοιχείων αυτών για την κατασκευή νέων εικόνων (Brown & Wheatley, 1997).

Οι Borowski και Borwein (1991) ορίζουν την έννοια του αναπτύγματος ως το διάγραμμα ενός στερεού που αποτελείται από επίπεδες αναπαραστάσεις των εδρών του στερεού σε κατάλληλη διάταξη ώστε όταν διπλωθεί το ανάπτυγμα να κατασκευαστεί το στερεό ενώ η Cohen (2003) ακολουθώντας την αντίστροφη πορεία ορίζει το ανάπτυγμα

ως το δισδιάστατο σχήμα που προκύπτει όταν ξεδιπλωθεί ένα στερεό μέχρι η επιφάνεια του να ανήκει σε ένα επίπεδο. Η ικανότητα μετάφρασης μεταξύ τρισδιάστατων αντικειμένων και δισδιάστατων αναπαραστάσεων αποτελεί σημαντική διαδικασία στη μάθηση των μαθηματικών (Stylianou, Leikin & Silver, 1999). Τα προβλήματα που αναφέρονται στην αναπαράσταση στερεών με τη χρήση αναπτυγμάτων προϋποθέτουν τη μετάφραση μεταξύ τρισδιάστατων αντικειμένων και δισδιάστατων αναπτυγμάτων μέσω της εστίασης και της μελέτης των τμημάτων του στερεού στην τρισδιάστατη αλλά και στη δισδιάστατη μορφή. Η οπτικοποίηση των αναπτυγμάτων στερεών απαιτεί την ενεργοποίηση νοητικών διεργασιών που συνήθως οι μαθητές στερούνται, αλλά μπορούν να αναπτυχθούν μέσω των κατάλληλων εμπειριών (Cohen, 2003).

Η μετατροπή ενός στερεού σε ανάπτυγμα δεν αποτελεί απλά αντιγραφή της αντίστοιχης αντιληπτικής δραστηριότητας, αλλά μια νοητική διεργασία που επεξεργάζεται νοητικές εικόνες (Cohen, 2003). Ο Piaget εξηγεί ότι η μετάβαση από την αντίληψη ενός στερεού στην αντίληψη του αναπτύγματος του, εμπλέκει τη διενέργεια της κατάλληλης νοητικής δραστηριότητας και ταυτόχρονα το συντονισμό διαφορετικών οπτικών προβολών.

Παρά τη συμπερίληψη προβλημάτων που αναφέρονται σε αναπτύγματα στα σχολικά εγχειρίδια και σε αρκετά αναλυτικά προγράμματα, μικρός αριθμός ερευνητικών προσπαθειών έχουν εστιαστεί στη μελέτη της επίδοσης μαθητών στα αναπτύγματα πολυέδρων (Mariotti, 1997· Potari & Spiliotopoulou, 1992· Stylianou, Leikin & Silver, 1999). Οι εργασίες αυτές υποδεικνύουν ότι ο συλλογισμός των μαθητών στα αναπτύγματα επηρεάζεται από την πολυπλοκότητα των γεωμετρικών σχημάτων και ότι μερικά αναπτύγματα κάποιων στερεών είναι δυσκολότερα από τα άλλα. Αν και η αιτία στη διαφοροποίηση της δυσκολίας στα έργα αναπτυγμάτων δεν είναι ξεκάθαρη, η Mariotti (1989) υποθέτει ότι η κατασκευή του σωστού αναπτύγματος ενός στερεού προϋποθέτει το συντονισμό μεταξύ της νοητικής αναπαράστασης του αντικειμένου ως σύνολο και της ανάλυσης των συστατικών στοιχείων του στερεού (έδρες, κορυφές και ακμές). Για αυτό οι μαθητές φαίνεται να έχουν μεγαλύτερη επιτυχία στην αναγνώριση αναπτυγμάτων που απαιτούν όσον το δυνατό λιγότερους μετασχηματισμούς από το στερεό στο ανάπτυγμα.

Η Mariotti (1989) υποστηρίζει την ύπαρξη δύο επιπέδων πολυπλοκότητας όσον αφορά την επεξεργασία των νοητικών εικόνων που εμπλέκονται στα αναπτύγματα: (α) Στο πρώτο επίπεδο είναι επαρκείς οι διαισθητικές αντιλήψεις των μαθητών, οι εικόνες είναι ολικές και δεν απαιτείται συντονισμός ενδιάμεσων διαδικασιών για την επίλυση ενός προβλήματος, ενώ στο (β) δεύτερο επίπεδο οι διαισθητικές αντιλήψεις των μαθητών δεν

είναι επαρκείς και απαιτείται λειτουργική οργάνωση των εικόνων για να γίνει κατανοητή η σύνθεση των μετασχηματισμών που χρειάζονται για τη μετάφραση από το στερεό στο ανάπτυγμα και αντίστροφα. Στηριζόμενη στα επίπεδα αυτά, υποστήριξε την ύπαρξη μιας ιεραρχίας δυσκολιών στην επεξεργασία νοητικών εικόνων που σχετίζονται με αναπτύγματα, ενώ οι Stylianiou, Leikin και Silver (1999) αναφέρουν ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν σοβαρές δυσκολίες όταν προσπαθούν να βρουν αναπτύγματα ενός κύβου με συστηματικό τρόπο και ότι ο αριθμός των πληροφοριών για τον τρόπο που συντονίζουν και αναλύουν τα συστατικά στοιχεία ενός στερεού όταν μετασχηματίζεται σε ανάπτυγμα και αντίστροφα είναι πολύ περιορισμένος.

Οι Lawrie, Pegg και Gutierrez (2000) εξέτασαν τις αντιλήψεις μαθητών γυμνασίου για την έννοια του αναπτύγματος και εντόπισαν τρεις κατηγορίες αντιλήψεων:

- Κατηγορία Α: Οι απαντήσεις των μαθητών που αντιλαμβάνονται το ανάπτυγμα ως μια ενιαία εικόνα. Δεν συνειδητοποιούν τη διαδικασία μετασχηματισμού του στερεού σε ανάπτυγμα και αντίστροφα ή τις ιδιότητες και τα τμήματα του στερεού. Χαρακτηριστική απάντηση μαθητών της κατηγορίας αυτής στο ερώτημα «περίγραψε σε λεπτομέρεια τι είναι το ανάπτυγμα ενός στερεού» είναι «το εξωτερικό ενός στερεού» ή «τι είναι το στερεό πριν γίνει στερεό».
- Κατηγορία Β: Οι απαντήσεις των μαθητών της κατηγορίας αυτής δείχνουν αντίληψη της διαδικασίας μετατροπής της δυσδιάστατης εικόνας σε τρισδιάστατη και αντίστροφα μέσω του διπλώματος/ξεδιπλώματος. Δεν αντιλαμβάνονται, ακόμη, όμως, τις ιδιότητες ή τα τμήματα του στερεού ή του αναπτύγματος. Χαρακτηριστική απάντηση μαθητών της κατηγορίας αυτής είναι «ένα σχέδιο του στερεού που ανοίχτηκε» ή «ο συνδυασμός των δισδιάστατων σχημάτων που χρειάζονται για να γίνει ένα τρισδιάστατο σχήμα».
- Κατηγορία Γ: Οι απαντήσεις των μαθητών της κατηγορίας αυτής συμπεριλαμβάνουν τα χαρακτηριστικά της Κατηγορίας Β και επιπρόσθετα έχουν συναίσθηση των ιδιοτήτων του στερεού. Χαρακτηριστική απάντηση μαθητών της κατηγορίας αυτής είναι: «δισδιάστατη αναπαράσταση ενός στερεού... όταν όλες οι πλευρές ενωθούν πρέπει να σχηματιστεί το στερεό γι' αυτό και τα δισδιάστατα σχήματα πρέπει να έχουν τη σωστή θέση στο ανάπτυγμα και να έχουν το σωστό μήκος».

Η πρώτη κατηγορία αντιστοιχεί στο πρώτο επίπεδο δυσκολίας της Mariotti και οι επόμενες δύο κατηγορίες στο δεύτερο επίπεδο. Οι απαντήσεις της πρώτης κατηγορίας αντιστοιχούν σύμφωνα με τους Lawrie, Pegg και Gutierrez (2000) στο εικονικό επίπεδο

του μοντέλου SOLO και στο Επίπεδο 1 του μοντέλου των van Hiele. Οι απαντήσεις των μαθητών της δεύτερης και τρίτης κατηγορίας αντιστοιχούν στο συμβολικό επίπεδο του μοντέλου SOLO, με αρκετές διαβαθμίσεις από μονοδομικές μέχρι συσχετιστικές απαντήσεις ανάλογα με το βαθμό συνειδητοποίησης της διαδικασίας μετασχηματισμού του στερεού σε ανάπτυγμα και αντίστροφα. Για παράδειγμα, η απάντηση που αναφέρεται πιο πάνω στην Κατηγορία Γ χαρακτηρίζεται ως συσχετιστική ενώ τα παραδείγματα που αναφέρονται στην Κατηγορία Β χαρακτηρίζονται ως μονοδομικές απαντήσεις. Οι απαντήσεις της Κατηγορίας Β, ως προς το επίπεδο των van Hiele, χαρακτηρίζονται ως μεταβατικό στάδιο μεταξύ των επιπέδων 1 και 2 γιατί δεν διαθέτουν κατανόηση των ιδιοτήτων των στερεών, ενώ οι απαντήσεις της Κατηγορίας Γ εντάσσονται στο επίπεδο 2.

Οι Potari και Spiliotopoulou (1992) μελέτησαν τους τρόπους σχεδιασμού αναπτυγμάτων φυσικών αντικειμένων, όπως σπιρτόκουτου και ρολού τουαλέτας, μαθητών ηλικίας 11 ετών και 9 ετών. Τα αποτελέσματά τους συγκρούονται με την άποψη του Piaget ότι οι μαθητές μόνο μετά την ηλικία των 9 ετών μπορούν να κατασκευάσουν ολοκληρωμένα αναπτύγματα στερεών, υποστηρίζοντας ότι αν και οι μαθητές μικρότερης ηλικίας αντιμετωπίζουν αρκετές δυσκολίες, είναι σε θέση να κατασκευάσουν αναπτύγματα. Σημαντικό χαρακτηριστικό των αναπτυγμάτων των μαθητών 9 ετών ήταν ότι οι διαστάσεις των αναπτυγμάτων ήταν μικρότερες από αυτές του πραγματικού αντικειμένου.

Οι Potari και Spiliotopoulou (1992) αναγνώρισαν μια ιεραρχική διαβάθμιση στα μοντέλα των μαθητών, από πιο ολιστικά σε πιο αναλυτικά μοντέλα:

- Ολιστικά μοντέλα: Τα παιδιά δυσκολεύονται να αναπαραστήσουν τις εικόνες στερεών και του αναπτύγματος τους με τη χρήση συμβατικών κανόνων. Στα σχέδιά τους δεν διακρίνονται οι πλευρές του στερεού ενώ οι διαστάσεις δεν είναι ακριβείς. Τα παιδιά που κατασκευάζουν αυτά τα μοντέλα αναπαριστούν συνήθως το ανάπτυγμα του στερεού με ένα ορθογώνιο ή με ένα παραλληλεπίπεδο με αυθαίρετες διαστάσεις. Τα ολιστικά μοντέλα μπορούν να χαρακτηριστούν ως τοπολογικά.
- Μοντέλα με στοιχεία προοπτικής: Τα παιδιά τείνουν να αναπαριστούν τα στερεά όπως είναι είτε ανοικτά υπό προοπτική. Σε αυτά τα μοντέλα συμπεριλαμβάνονται ο σχεδιασμός μιας ή δύο βάσεων του στερεού σε ορθογώνια προβολή. Για παράδειγμα, στο σχεδιασμό του αναπτύγματος του ρολού τουαλέτας σχεδιάζεται η μπροστινή ή η πισινή πλευρά της κυλινδρικής επιφάνειας.

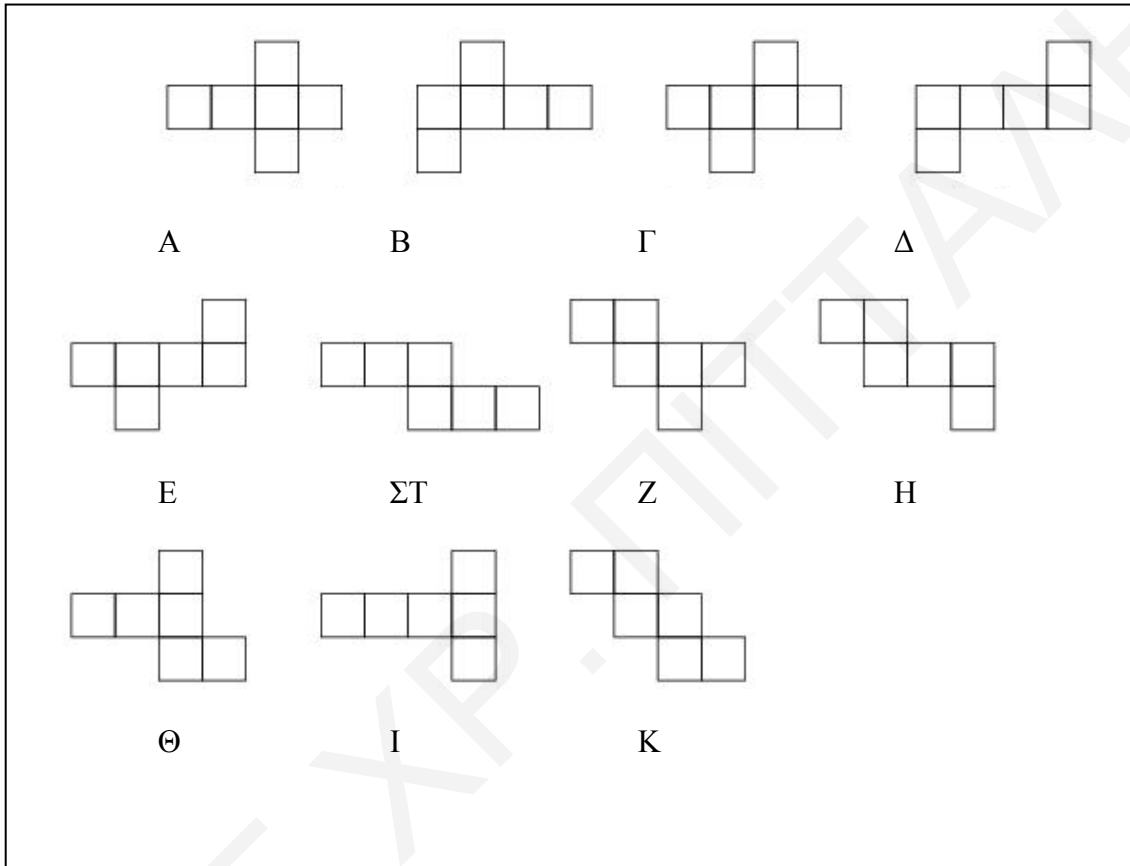
- Ελλιπή γεωμετρικά μοντέλα: Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν τα μοντέλων των μαθητών που ενώ αρχίζουν να βλέπουν το ανάπτυσμα του στερεού, λαμβάνουν υπόψη μόνο μερικά από τα στοιχεία ή τα χαρακτηριστικά του. Για παράδειγμα, στην περίπτωση του σπιρτόκουτου, κάποιες επιφάνειες παραλείπονται, ενώ το ρολό της τουαλέτας αναπαρίσταται είτε μόνο με την παράπλευρη επιφάνεια, είτε με τις δύο βάσεις αποκομμένες από την παράπλευρη επιφάνεια είτε με αυθαίρετες διαστάσεις.
- Συμπληρωμένα γεωμετρικά μοντέλα: Τα παιδιά είναι ικανά να κατασκευάσουν ένα αποδεκτό ανάπτυσμα του στερεού. Λαμβάνουν υπόψη όλα τα στοιχεία του στερεού και πώς αυτά μπορούν να αναπτυχθούν, με εξαίρεση το ρολό της τουαλέτας. Υπάρχουν, όμως, δυσκολίες στη σωστή χρήση των διαστάσεων.
- Φυσικά μοντέλα: Οι μαθητές μπορούν όχι μόνο να σχεδιάσουν το ανάπτυσμα του σπιρτόκουτου αλλά και να περιγράψουν τη διαδικασία κατασκευής του. Οι μαθητές χρησιμοποιούν τη φαντασία τους και την εμπειρία τους, για να φανταστούν πώς μπορεί να ξεδιπλωθεί ένα ρολό τουαλέτας και έτσι να κατασκευάσουν το ανάπτυσμά τους. Παρά το γεγονός ότι τα μοντέλα αυτά χαρακτηρίζονται ως φυσικά, οι μαθητές δεν εκφράζουν στις περιγραφές τους αυτή την ιδέα.

Η πλειοψηφία των μοντέλων των μαθητών και των δύο ηλικιών στο σχεδιασμό του αναπτύγματος του σπιρτόκουτου ήταν ολοκληρωμένα γεωμετρικά μοντέλα (44% και 57% αντίστοιχα), ενώ η πλειοψηφία των μοντέλων των μαθητών ηλικίας 9 ετών στο σχεδιασμό το αναπτύγματος του ρολού τουαλέτας ήταν μοντέλα με στοιχεία προοπτικής και της ηλικίας 11 ετών ήταν τα ελλιπή γεωμετρικά μοντέλα (44% και 43% αντίστοιχα).

Οι Stylianou, Leikin και Silver (1999) μελέτησαν τις στρατηγικές μαθητών Β΄ τάξης γυμνασίου στην κατασκευή αναπτύγματος κύβου όταν τους δόθηκε το ανάπτυσμα Α (δείτε Διάγραμμα 2.2), το οποίο έρευνες έχουν δείξει ότι είναι το πιο εύκολο και πιο κοντά στη διαισθητική τους αντίληψη. Οι στρατηγικές που χρησιμοποίησαν οι μαθητές διαχωρίζονται στις στρατηγικές που στηρίζονται στην επεξεργασία (α) της τρισδιάστατης μορφής του κύβου και (β) της δισδιάστατης μορφής του αναπτύγματος.

Κατά την επεξεργασία της τρισδιάστατης μορφής του κύβου οι μαθητές έδειξαν με τις κινήσεις των χεριών τους ή με τις λεκτικές επεξηγήσεις τους ότι προσπαθούσαν να κατασκευάσουν διαφορετικά αναπτύγματα μέσω του ανοίγματος του κύβου με διαφορετικούς τρόπους. Οι στρατηγικές αυτές διαχωρίζονται σε δύο υποκατηγορίες: (α) τις στρατηγικές που στηρίζονται στη δοκιμή και έλεγχο όπου οι μαθητές ξεδιπλώνουν

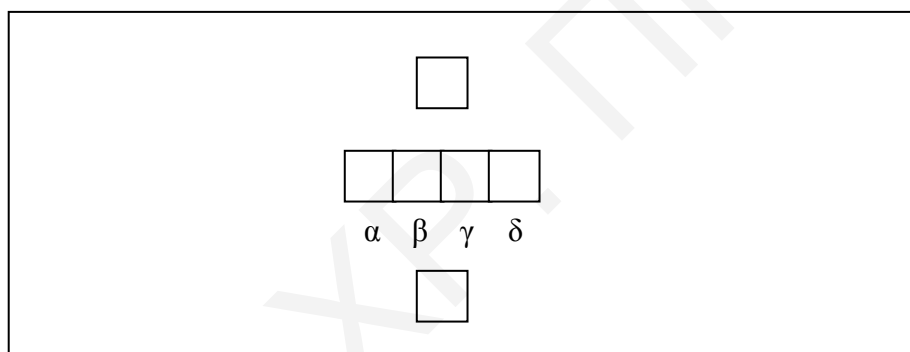
τυχαία τον κύβο και ελέγχουν αν η ενέργειά τους έχει ως αποτέλεσμα ένα νέο ανάπτυγμα και (β) τις συστηματικές στρατηγικές με βάση τις οποίες οι μαθητές είτε ορίζουν μια έδρα του κύβου ως σταθερή βάση και ξεδιπλώνουν τον κύβο, για να κατασκευάσουν ένα νέο ανάπτυγμα είτε αφαιρούν μια έδρα του κύβου σχηματίζοντας ένα ημιτελές ανάπτυγμα, για να ενώσουν με τη σειρά την έδρα που αφαίρεσαν στις υπόλοιπες έδρες του στερεού.



Διάγραμμα 2.2. Τα έντεκα αναπτύγματα του κύβου.

Κατά την επεξεργασία των δισδιάστατων μορφών του αναπτύγματος οι μαθητές εστιάζονται στην κατασκευή του αναπτύγματος σε δισδιάστατη μορφή και στη συνέχεια στη μετατροπή του αναπτύγματος σε τρισδιάστατο σχήμα. Οι μαθητές μπορούν να δουλέψουν νοερά ή με τη χρήση συγκεκριμένων υλικών. Οι στρατηγικές αυτές διαχωρίζονται σε δύο υποκατηγορίες: (α) τις στρατηγικές που στηρίζονται στη δοκιμή και έλεγχο όπου οι μαθητές σχεδιάζουν με τυχαίο τρόπο αναπτύγματα ή ενώνουν έξι τετράγωνα και ελέγχουν αν οι κατασκευές τους όταν διπλωθούν σχηματίζουν κύβο και (β) τις συστηματικές στρατηγικές όπου οι μαθητές είτε διατηρούν τέσσερα τετράγωνα ενωμένα μεταξύ τους και μετακινούν τις άλλες δύο έδρες γύρω από τον βασικό κορμό των

τεσσάρων τετραγώνων (αναπτύγματα A, B, Γ, Δ, E & I), είτε ορίζουν ένα τετράγωνο ως βάση και μετακινούν τα υπόλοιπα τετράγωνα ανάλογα, είτε ορίζουν ένα σταθερό μοτίβο τετραγώνων και προσθέτουν τα υπόλοιπα τετράγωνα γύρω από το σταθερό μοτίβο. Οι μαθητές που δούλεψαν με συστηματικό τρόπο προσπάθησαν να εντοπίσουν κάποιες κρίσιμες ιδιότητες των αναπτυγμάτων που θα τους βοηθούσαν να κατασκευάσουν με εύκολο και συστηματικό τρόπο όλα τα υπόλοιπα αναπτύγματα. Μια τέτοια στρατηγική είναι η χρήση της γραμμής των 4 (δείτε Διάγραμμα 3) όπου οι μαθητές διατηρούν τα τέσσερα τετράγωνα σταθερά σε σειρά και μετακινούν τα υπόλοιπα δύο τετράγωνα γύρω από τη σειρά. Η στρατηγική αυτή βοήθησε τους μαθητές να κατασκευάσουν τα αναπτύγματα A, B, Γ, Δ, E και I γρήγορα και εύκολα χωρίς να χρειάζεται να εξετάσουν τη μετατροπή μεταξύ δυοδιάστατης και τρισδιάστατης μορφής του κύβου. Άλλη σταθερή διάταξη που χρησιμοποίησαν οι μαθητές είναι η διάταξη των 3, όπως εμφανίζεται στα αναπτύγματα A, ΣΤ, Ζ, Η, Θ και Ι.



Διάγραμμα 2.3. Η διάταξη των 4 στο ανάπτυγμα του κύβου.

Παρά το γεγονός ότι δόθηκε στους μαθητές το ανάπτυγμα A, οι μισοί μαθητές της έρευνας κατασκεύασαν πρώτα το ανάπτυγμα A, ενισχύοντας την άποψη της Mariotti (1989) ότι το ανάπτυγμα A είναι το πιο εύκολο για τους μαθητές γιατί μπορούν να το ξεδιπλώσουν νοερά με άμεσο τρόπο. Αντίθετα τα αναπτύγματα H και K είναι τα πιο δύσκολα για τους μαθητές γιατί απαιτούνται πολλοί μετασχηματισμοί, για να κατασκευαστεί ο κύβος (Mariotti, 1989· Stylianos, Leikin & Silver, 1999).

Η Cohen (2003) διαφοροποιεί τις νοητικές διεργασίες που αναφέρονται στην οπτικοποίηση αναπτυγμάτων πολυέδρων σε σχέση με τα κυλινδροειδή αναπτύγματα (κυλίνδρου ή κώνου) γιατί στα πολύεδρα όλες οι έδρες του στερεού έχουν τον ίδιο σχήμα στο ανάπτυγμα ενώ στα κυλινδροειδή στερεά οι κυκλοειδής επιφάνειες φαίνονται εντελώς

διαφορετικά όταν ξεδιπλωθεί το ανάπτυγμα (Potari & Spiliotopoulou, 2001). Για παράδειγμα, στην έρευνα των Potari και Spiliotopoulou (1992) οι μαθητές για να κατασκευάσουν το ανάπτυγμα ενός ρολού τουαλέτας χρησιμοποίησαν στρατηγικές που δεν παρατηρούνται σε αναπτύγματα πολυέδρων όπως (α) η περιστροφή του ρολού σε ένα χαρτί για να υπολογιστεί το μήκος της περιφέρειας της βάσης, (β) η συμπίεση του ρολού μέχρι να επιπεδωθεί και στη συνέχεια ο διπλασιασμός του μήκους του επιπεδωμένου ρολού, για να υπολογιστεί το μήκος της περιφέρειας της βάσης και (γ) ο σχεδιασμός του αναπτύγματος με τη χρήση λεπτών λωρίδων ενωμένων στη μια βάση του ρολού.

Η Cohen (2003) εξετάζοντας τα αναπτύγματα κυλινδροειδών στερεών που κατασκευάζουν φοιτητές παιδαγωγικού τμήματος εντόπισε πέντε τύπους τυπικών λαθών:

- Τύπος 1, Σύγκυση μεταξύ της προοπτικής προβολής του στερεού και του αναπτύγματος: Κατασκευή της βάση του κυλίνδρου ή του κώνου με ελλείψεις αντί κύκλους, σχεδιασμός της παράπλευρης επιφάνειας ώστε να έχει το ίδιο μήκος με τη βάση.
- Τύπος 2, Ένωση της βάσης με την παράπλευρη επιφάνεια κατά μήκος γραμμής: Τα άτομα συνηθίζουν να ενώνουν την παράπλευρη επιφάνεια με τη/τις βάση/σεις κατά μήκος μιας γραμμής αντί σε ένα σημείο. Για παράδειγμα η/οι βάση/σεις υπερκαλύπτουν την παράπλευρη επιφάνεια και έτσι η γραμμή που ενώνει την/τις βάση/σεις με την παράπλευρη επιφάνεια είναι καμπύλη.
- Τύπος 3, Λάθος μορφή της ακμής που θα ενωθεί: Στην περίπτωση του κώνου η παράπλευρη επιφάνεια αναπαρίσταται με τη μορφή τριγώνου ή η ακμή της παράπλευρης επιφάνειας σχεδιάζεται ως μια καμπύλη γραμμή.
- Τύπος 4, Λανθασμένη τοποθέτηση των τμημάτων του αναπτύγματος: Η/οι βάση/σεις των στερεών τοποθετείται/ούνται σε λάθος σημείο/α της παράπλευρης επιφάνειας ή σχεδιάζονται τμήματα του στερεού χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η θέση τους όταν διπλωθεί το ανάπτυγμα.
- Τύπος 5, Άλλα λάθη: Για παράδειγμα όταν η κατασκευή του αναπτύγματος στηρίζεται στην ιδέα ότι η παράπλευρη επιφάνεια μπορεί να ξεδιπλωθεί ως αν ήταν κατασκευασμένη από ένα ευλύγιστο υλικό όπως πλαστελίνη.

Αντιλήψεις Μαθητών για την Έννοια της Τομής

Οι Lawrie, Pegg και Gutierrez (2002) εξέτασαν τις αντιλήψεις μαθητών γυμνασίου για την

έννοια της ορθής-τομής και αξιολόγησαν τις απαντήσεις των μαθητών με βάση το μοντέλο SOLO και τα επίπεδα van Hiele. Με βάση το μοντέλο SOLO οι απαντήσεις των μαθητών μπορούν να αξιολογηθούν ως μονοδομικές, πολυδομικές ή συσχετιστικές. Η πλειοψηφία των απαντήσεων των μαθητών της Α' και Β' γυμνασίου ήταν μονοδομικές ενώ των μαθητών της Γ' γυμνασίου και Α' και Β' λυκείου ήταν πολυδομικές. Τα αποτελέσματα των Lawrie, Pegg και Gutierrez (2002) για τις αντιλήψεις των μαθητών για τις τομές έδειξαν την ύπαρξη ιεραρχικών δυσκολιών στην κατανόηση της έννοιας της τομής. Οι ιεραρχικές αυτές δυσκολίες βρίσκονται σε συμφωνία με το δεύτερο επίπεδο δυσκολιών στη διαχείριση νοητικών εικόνων της Mariotti (1989).

Το κύριο χαρακτηριστικό των μονοδομικών απαντήσεων είναι ότι τομή είναι ένα κόψιμο, για παράδειγμα «κόψιμο ενός στερεού στη μέση» ή «ένα στερεό κόβεται στη μέση». Χαρακτηριστικό των πολυδομικών απαντήσεων είναι η αντίληψη ότι τομή είναι ένα κόψιμο με αναφορά στο αποτέλεσμα. Τυπική απάντηση του πολυδομικού επιπέδου είναι: «Τομή είναι αυτό που βλέπεις όταν κόψεις ένα στερεό σε δύο μέρη». Τέλος, η διαφοροποίηση των συσχετιστικών απαντήσεων είναι ότι δίνουν έμφαση στην ποιότητα του αποτελέσματος, για παράδειγμα «τομή είναι όταν κόψεις ένα στερεό στη μέση και τα δύο μέρη είναι ακριβώς τα ίδια».

Αντιλήψεις Μαθητών για την Έννοια του Όγκου

Ερευνητικές εργασίες για την αντίληψη της έννοιας του όγκου έχουν δείξει ότι οι μαθητές παραμένουν στη γνώση των αριθμητικών πράξεων υπολογισμού του όγκου ενώ αδυνατούν να αντιληφθούν τη δομή των μονάδων μέτρησης του όγκου και να οπτικοποιήσουν τη διάταξη των μονάδων σε ένα στερεό (Owens & Outhred, 2006). Οι Collis και Campbell (1986) αξιολόγησαν την ικανότητα μαθητών να υπολογίζουν τον όγκο στερεών με βάση τους τρόπους που υπολόγιζαν τους μοναδιαίους κύβους που χωρούν σε ένα στερεό υποθέτοντας ότι οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μετρούν τους κύβους αντιστοιχούν σε διαφορετικά επίπεδα στην ικανότητα αντίληψης των τριών διαστάσεων. Σε ένα πρώτο επίπεδο (το μονοδομικό με βάση το μοντέλο SOLO) οι μαθητές μετρούν τους ορατούς κύβους και δεν μπορούν να χρησιμοποιήσουν μια οργανωμένη στρατηγική για τους μη ορατούς κύβους. Σε ένα δεύτερο επίπεδο (το πολυδομικό με βάση το μοντέλο SOLO) οι μαθητές οργανώνουν τον τρόπο που μετρούν τους κύβους ομαδοποιώντας τους κύβους σε γραμμές, στήλες ή στρώματα. Με βάση τα επίπεδα αυτά, οι ερευνητές διαχώρισαν δύο απαραίτητες δεξιότητες στον υπολογισμό του όγκου ενός στερεού, την

κατανόηση των απαραίτητων αριθμητικών πράξεων και την κατανόηση της εσωτερικής δομής του στερεού. Γι' αυτό και η εύρεση του αριθμού των μοναδιαίων κύβων που μπορούν να χωρέσουν σε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο αποτελεί το γνωστικό πλαίσιο που μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν τη χωρητικότητα του στερεού και τον τρόπο υπολογισμού του όγκου του (Battista & Clements, 1998α).

Η έννοια του όγκου αποτελείται από διαφορετικές ιδιότητες και σχέσεις όπως για παράδειγμα η σύγκριση της χωρητικότητας κιβωτίων ή η μέτρηση με τη χρήση μονάδων μέτρησης (Vergnaud, 1990) και σχετίζεται με αριθμό άλλων παραγόντων όπως το σχήμα και τις γεωμετρικές ιδιότητες των αντικειμένων, τη φύση του αντικειμένου, τη μάζα και το βάρος ή το πόσο ανοικτό ή κλειστό είναι το αντικείμενο (Braine, Schauble, Kugelmass, & Winter, 1993· Potari & Spiliotopoulou, 1996). Σημαντική επίσης παράμετρος στα προβλήματα υπολογισμού όγκου είναι ο ακριβής καθορισμός του αντικειμένου που πρέπει να μετρηθεί ο όγκος του, κάτι που συνήθως παραλείπεται στη διδασκαλία με αποτέλεσμα τη δημιουργία παρανοήσεων λόγω και του διαφορετικού ορισμού του όγκου στα διάφορα αντικείμενα του αναλυτικού. Οι επιστήμονες αντιλαμβάνονται την έννοια του όγκου με συγκεκριμένο τρόπο, αλλά οι μαθητές δίνουν το δικό τους νόημα στην έννοια ανάλογα με τις εμπειρίες τους και τη φύση των προβλημάτων που επιλύουν. Για παράδειγμα, στα μαθηματικά η κύρια επικέντρωση είναι στη χρήση των κατάλληλων τύπων για τον υπολογισμό του όγκου γεωμετρικών στερεών και στις περιπτώσεις ρεαλιστικών καταστάσεων στις οποίες ζητείται η χωρητικότητα στερεών αντικειμένων δεν δίνεται η απαραίτητη έμφαση στο γεγονός ότι η χωρητικότητα του στερεού είναι ίση με τον όγκο του υγρού που μπορεί να χωρέσει στο στερεό. Αντίθετα, στην επιστήμη η έννοια του όγκου αναφέρεται κυρίως στον όγκο της ύλης των αντικειμένων ή στον όγκο που εκτοπίζεται. Γι' αυτό και οι μαθητές πρέπει να εμπλακούν σε ποικιλία καταστάσεων όπου γίνεται διαφορετική χρήση της έννοιας του όγκου ώστε να αναπτύξουν μια ολοκληρωμένη αντίληψη για την έννοια του όγκου και να μπορούν να την χειριστούν κατάλληλα στις διάφορες καταστάσεις.

Οι Potari και Spiliotopoulou (1996) εξέτασαν τις αντιλήψεις μαθητών για την έννοια του όγκου όταν ζήτησαν από τους μαθητές να εξηγήσουν τι είναι όγκος βλέποντας ένα ποτήρι άδειο και ένα ποτήρι γεμάτο νερό. Οι απαντήσεις των μαθητών εντάσσονται σε πέντε κατηγορίες: (α) όγκος είναι ο χώρος που καταλαμβάνει το αντικείμενο, (β) όγκος είναι η χωρητικότητα του αντικειμένου που εκφράστηκε με δηλώσεις όπως όγκος είναι ο όγκος του αέρα μέσα στο ποτήρι ή ο όγκος του νερού που μπορεί να χωρέσει ο ποτήρι, (γ) ο όγκος συσχετίζεται με την ύλη του αντικειμένου που εκφράστηκε με απαντήσεις όπως

«όγκος είναι το άδειο ποτήρι» ή «όγκος του ποτηριού είναι το μέρος του αέρα που καταλαμβάνει η ύλη του ποτηριού», (δ) ο όγκος συσχετίζεται με τις γεωμετρικές ιδιότητες του αντικειμένου, όπως «ο όγκος του ποτηριού είναι κυκλικός αλλά όχι πολύ μεγάλος» ή «ο όγκος του ποτηριού μοιάζει με πυραμίδα» και (ε) απαντήσεις που δεν μπορούν να ενταχθούν στις πιο πάνω κατηγορίες περιέχοντας άχρηστα στοιχεία όπως «όταν βάλουμε το ποτήρι στο ψυγείο το νερό θα παγώσει και θα μεγαλώσει ο όγκος».

Τα Συστατικά Στοιχεία του Γεωμετρικού Στερεού

Οι μαθητές μπορούν να αντιμετωπίσουν το στερεό ως μια ολότητα εστιάζοντας μόνο στη μορφή του. Επιπλέον, τα συστατικά στοιχεία του στερεού, όπως οι κορυφές, οι ακμές, οι έδρες, οι επίπεδες γωνίες, οι στερεές γωνίες, τα ύψη, το εμβαδόν και ο όγκος του, μπορεί να αποτελέσουν αντικείμενο μελέτης. Τα στοιχεία αυτά αποτελούν τα ίδια γεωμετρικές έννοιες, που θα ήταν δυνατόν να μελετηθούν και να αναλυθούν η καθεμιά ξεχωριστά. Οι έννοιες αυτές είναι δυνατόν να χαρακτηριστούν ως *μηδENO-διάστατες* (οι κορυφές), *δισδιάστατες* (οι ακμές, οι επίπεδες γωνίες και η επιφάνεια) και *τριδιάστατες* (ο όγκος και οι στερεές γωνίες). Η ταξινόμηση των γεωμετρικών αυτών εννοιών σύμφωνα με τις διαστάσεις στις οποίες αναφέρονται, σε συνδυασμό με την περαιτέρω μαθηματική τους ανάλυση, θα έκανε εμφανή την πολυπλοκότητα της μαθηματικής έννοιας του γεωμετρικού στερεού. Έτσι, για παράδειγμα, οι ακμές, από τη μια μεριά, αποτελούν συστατικά στοιχεία του στερεού, αλλά, από την άλλη, αποτελούν και συστατικά στοιχεία της γεωμετρικής έννοιας της έδρας του στερεού.

Οι Ιδιότητες του Στερεού

Οι ιδιότητες του στερεού είναι ο τρόπος με τον οποίο συσχετίζονται τα συστατικά στοιχεία του στερεού μεταξύ τους. Αυτές μπορεί να αναφέρονται στο ίδιο το στερεό ή στη σχέση του με κάποιο άλλο. Οι ιδιότητες των συστατικών στοιχείων, οι συγκριτικές σχέσεις μεταξύ ίδιων συστατικών στοιχείων και οι σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων διαφορετικών συστατικών στοιχείων χαρακτηρίζουν τη φύση των ιδιοτήτων του γεωμετρικού στερεού. Μολονότι τα είδη των συστατικών στοιχείων που αποτελούν ένα πολύεδρο γεωμετρικό στερεό είναι συγκεκριμένα, τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των συστατικών αυτών ποικίλλουν μεταξύ των διαφορετικών πολύδρων. Έτσι, ενώ κάθε πολύεδρο γεωμετρικό

στερεό αποτελείται από τα συγκεκριμένα συστατικά στοιχεία, το μέγεθος τους, το πλήθος τους αλλά και η μορφή τους αποτελούν χαρακτηριστικά που καθιστούν το κάθε πολύεδρο γεωμετρικό στερεό ξεχωριστό. Έτσι, για παράδειγμα, οι έδρες ενός πολυέδρου αποτελούν συστατικά στοιχεία του, αλλά το πλήθος τους, το μέγεθος και η μορφή της καθεμιάς έδρας είναι τα στοιχεία που διαμορφώνουν το στερεό. Οι ιδιότητες, λοιπόν, των συστατικών στοιχείων του στερεού αποτελούν και ιδιότητες του ίδιου του στερεού, με βάση τις οποίες είναι δυνατή η ταξινόμηση των διαφόρων πολυέδρων. Μελετώντας, για παράδειγμα, έναν κύβο και ένα τετράεδρο, διαπιστώνεται ότι και τα δύο στερεά έχουν ως συστατικά στοιχεία τους ακμές και, ενώ και στα δύο το μήκος όλων των ακμών κάθε στερεού είναι ίσο, το πλήθος τους στην κάθε περίπτωση είναι διαφορετικό. Παρ' όλα αυτά, οι τρεις ιδιότητες: το μέγεθος, το πλήθος και η μορφή δεν αναφέρονται σε όλα τα είδη των συστατικών στοιχείων. Έτσι, το μέγεθος αναφέρεται στις ακμές, στα ύψη, στις γωνίες (στερεές και επίπεδες), στις έδρες, στην επιφάνεια και στον όγκο. Το πλήθος ως ιδιότητα χαρακτηρίζει τις κορυφές, τις ακμές, τις έδρες, τα ύψη και τις γωνίες, ενώ, τέλος, η μορφή χαρακτηρίζει μόνο τις έδρες, και μάλιστα το σχήμα της κάθε έδρας.

Διδασκαλία της Γεωμετρίας

Η παραδοσιακή διδασκαλία της Ευκλείδιας γεωμετρίας αντιμετωπίζει το αντικείμενο της γεωμετρίας ως ένα πλήρως αξιωματικό σύστημα. Ο βασικός στόχος είναι η παραγωγή μαθητών που θα είναι ειδικοί στην παραγωγή αποδείξεων. Όμως, πολλές έρευνες (Van Hiele, 1986· Hoffer, 1981) αναφέρουν ότι πριν οι μαθητές φτάσουν στο επίπεδο αυτό θα πρέπει να έχουν κατανοήσει τα αντικείμενα της γεωμετρίας, κάτι το οποίο δεν χαρακτηρίζει τη διδασκαλία (Usiskin, 1982). Σύμφωνα με τους van Hiele (1986) στην αρχή της διδασκαλίας δεν μπορείς να ζητήσεις από τους μαθητές να σκέφτονται με λογικό τρόπο, αλλά πρέπει να τους μάθεις να σκέφτονται λογικά, κάτι το οποίο δεν μπορεί να γίνει υιοθετώντας ένα αυστηρά παραγωγικό σύστημα σκέψης. Για αυτό εισηγούνται ότι οι εκπαιδευτικοί πρέπει να χρησιμοποιούν στη διδασκαλία τους καταστάσεις που είναι οικείες στους μαθητές και να οικοδομήσουν τη γεωμετρική τους γνώση με βάση την προϋπάρχουσα τους γνώση, τη διαισθητική τους αντίληψη και τη γεωμετρική κατανόηση των αντικειμένων.

Σύμφωνα με τον Freudenthal (1971) ο αναστοχασμός των μαθητών για γεωμετρικές καταστάσεις της καθημερινής τους ζωής πρέπει να αποτελέσει ένα προεξέχον

χαρακτηριστικό της μαθηματικής τους συμπεριφοράς. Ο Freudenthal (1971) θεωρεί ότι η διδασκαλία της γεωμετρίας ασχολείται με την αντίληψη του χώρου μέσα στον οποίο ο μαθητής ζει, αναπνέει και κινείται και που καλείται να γνωρίσει, να εξερευνήσει και να κατακτήσει μέσα από την αλληλεπίδραση με τα φυσικά αντικείμενα που βρίσκονται μέσα σε αυτόν. Οι μαθητές πρέπει να αξιοποιούν στη μάθηση της γεωμετρίας τη μαθηματικοποίηση καταστάσεων της καθημερινής ζωής (Gravemeijer, 1998). Οι καθημερινές εμπειρίες των μαθητών, όταν περπατούν στο δρόμο, όταν παρατηρούν, όταν σχεδιάζουν, όταν χειρίζονται αντικείμενα, αποτελούν πολύτιμη πηγή ερεθισμάτων για ανάπτυξη της διαισθητικής αντίληψης των εννοιών του χώρου (Freudenthal, 1983).

Οι Hershkowitz, Parzysz και van Dormolen (1996) αποδίδουν εξαιρετική σημασία στην αλληλεπίδραση του μαθητή με φυσικά αντικείμενα και σχήματα κατά τη διαδικασία της μάθησης των γεωμετρικών εννοιών. Η αλληλεπίδραση του μαθητή με τα φυσικά αντικείμενα ενισχύει την κατανόηση για τον χώρο που τον περιβάλλει, την περιγραφή του, την κωδικοποίηση και την αποκωδικοποίηση ενός πλήθους οπτικών πληροφοριών. Αυτός είναι ο χώρος μέσα στον οποίο αντιμετωπίζουμε πραγματικές προβληματικές καταστάσεις - από προβλήματα της καθημερινής ζωής μέχρι προβλήματα στην αρχιτεκτονική, στην τέχνη, στη μηχανική.

Η χρήση των διδακτικών υλικών και εργαλείων αποκτά κυρίαρχο ρόλο στη διαμόρφωση του κατάλληλου πλαισίου συμφραζομένων προκειμένου να μελετηθούν οι ενέργειες και οι αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με τη γεωμετρική έννοια του γεωμετρικού στερεού. Όπως υποστηρίζει ο Bauersfeld (1995), τα διδακτικά υλικά καθαυτά και οι ιδιότητες τους δε συντελούν από μόνα τους στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των μαθητών. Αντίθετα, οι φυσικές ενέργειες των μαθητών πάνω σε αυτά, η αλληλεπίδραση μεταξύ τους αλλά και οι αναστοχαστικοί συλλογισμοί πάνω στις ενέργειες αυτές συμβάλλουν στην κατασκευή ή και ανακατασκευή νοητικών σχημάτων και λειτουργιών των μαθητών σχετικά με τη γεωμετρική έννοια του στερεού (Markopoulos & Potari, 1999, 2000). Η χρήση των κατάλληλων διδακτικών υλικών συμβάλει και στην μετάβαση από την απλή οπτική αντίληψη των σχημάτων και των αντικειμένων στην αντίληψη των γεωμετρικών ιδιοτήτων και σχέσεων των στερεών αφού όπως αναφέρουν οι Lampen και Murray (2001) υπάρχει ένα μεταβατικό στάδιο μεταξύ της οπτικής αντίληψης ενός αντικειμένου και της αντίληψης του γεωμετρικού σχήματος που αναπαριστά το αντικείμενο ως υλικό.

Οι Bruni και Seidenstein (1990) υποστηρίζουν ότι η διδασκαλία της γεωμετρίας πρέπει να ξεκινήσει από τρισδιάστατα σχήματα όπως για παράδειγμα το κτίσιμο κύβων.

Θεωρούν ότι οι μαθητές χρειάζεται να εξερευνήσουν τρισδιάστατα αντικείμενα στο δικό τους περιβάλλον ώστε να αντιληφθούν ότι τα δισδιάστατα σχήματα αποτελούν συστατικά στοιχεία των τρισδιάστατων σχημάτων. Στο πλαίσιο αυτό, ο Cooper (1990) πρότεινε ένα μοντέλο διδασκαλίας της γεωμετρίας με βάση το οποίο η διαδικασία της μάθησης στηρίζεται σε τρία επίπεδα ανάπτυξης: (α) το πειραματικό επίπεδο, όπου οι μαθητές μαθαίνουν μέσω της αλληλεπίδρασης με αντικείμενα στο δικό τους περιβάλλον, (β) το άτυπο επίπεδο, όπου συγκεκριμένα σχήματα και έννοιες αποτελούν το σημείο διερεύνησης σε ένα ενεργητικό, μη-θεωρητικό επίπεδο και (γ) το τυπικό επίπεδο, το οποίο χαρακτηρίζεται από τη συστηματική μελέτη συγκεκριμένων σχημάτων με σκοπό την ονομασία και την κατανόηση σημαντικών ιδιοτήτων.

Ο Freudenthal (1991) υποστηρίζει ότι η διερεύνηση των αντιλήψεων των μαθητών σχετικά με τη μαθηματική έννοια του γεωμετρικού στερεού προϋποθέτει την ανάπτυξη «πλούσιων» περιβαλλόντων μάθησης. Ο Freudenthal αντιτάσσει τις πλούσιες στις φτωχές γεωμετρικές δομές και προτείνει την ανάπτυξη πλούσιων πλαισίων προκειμένου να ανακαλύψουν, να κατασκευάσουν οι μαθητές τις πλούσιες αλλά και τις φτωχότερες γεωμετρικές δομές. Τα μαθηματικά, και ειδικότερα η γεωμετρία, θεωρούνται μια δραστηριότητα άμεσα συνδεδεμένη με το πλαίσιο συμφραζομένων μέσα στο οποίο εξελίσσεται. Δε νοείται καμία τέτοιου είδους δραστηριότητα εκτός ενός πλαισίου (Wedeg, 1999). Με τον όρο «πλαίσιο συμφραζομένων» (context), υιοθετώντας την πρόταση του Freudenthal, ορίζεται εκείνο το πεδίο της πραγματικότητας που αποκαλύπτεται στο μαθητή προκειμένου να μαθηματικοποιηθεί. Έτσι, η διερεύνηση των αντιλήψεων των μαθητών για τη γεωμετρική έννοια του στερεού απαιτεί την ανάπτυξη «κατάλληλου πλαισίου συμφραζομένων», προκειμένου να δραστηριοποιηθούν οι μαθητές και να αναστοχαστούν πάνω στις ενέργειες τους αυτές.

Ικανότητα Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου

Αν και έχουν χρησιμοποιηθεί αρκετοί ορισμοί για να περιγράψουν την ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου από ψυχολόγους και ερευνητές στον τομέα της μαθηματικής παιδείας, δεν υπάρχει ένας ενιαίος κοινά αποδεκτός λειτουργικός ορισμός. Συνεπώς, υπάρχουν πολλοί διαφορετικοί ορισμοί όπως γνώση των εννοιών του χώρου, νοημοσύνη των εννοιών του χώρου, συλλογισμός και αντίληψη των εννοιών του χώρου (Lohman, 1988), ενώ οι Linn και Petersen (1985) ορίζουν την ικανότητα αντίληψης των

εννοιών του χώρου ως τη νοητική διεργασία που αντιλαμβάνεται, αποθηκεύει, ανακαλεί, δημιουργεί και επεξεργάζεται οπτικοχωρικές εικόνες. Υπάρχουν, επίσης, δύο προσεγγίσεις για τη φύση της αντίληψης των εννοιών του χώρου (Quaiser-Pohl, Lehmann, & Eid, 2004). Οι ερευνητές της πρώτης προσέγγισης υποστηρίζουν ότι αποτελεί συνισταμένη αρκετών παραμέτρων όπως οι Lohman (1988), McGee (1979) και Carroll (1993), ενώ οι υποστηρικτές της δεύτερης προσέγγισης θεωρούν ότι η αντίληψη των εννοιών του χώρου είναι μια μονοδιάστατη οντότητα (Burton & Fogarty, 2003). Ερευνητές όπως οι Burton και Fogarty (2003) και Colom, Contreras, Botella και Santacreu (2001) βρήκαν ότι η αντίληψη των εννοιών του χώρου αποτελεί μια ενιαία οντότητα. Υποστηρίζουν ότι αν και έγιναν αρκετές προσπάθειες διάκρισης διαφορετικών ικανοτήτων αντίληψης εννοιών του χώρου, τα αποτελέσματα δεν είναι καθόλου πειστικά.

Οι περισσότεροι ερευνητές ορίζουν την ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου μέσω παραγόντων που προκύπτουν από μελέτες ανάλυσης παραγόντων (Linn & Peterson, 1985· McGee, 1979· Voyer, Voyer & Bryden, 1995· Hegarty & Waller, 2004). Ο McGee (1979) υποστηρίζει ότι η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου (spatial ability) αποτελείται από τουλάχιστον δύο παράγοντες, τον παράγοντα *οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου* (spatial visualization) και τον παράγοντα *προσανατολισμός στο χώρο* (spatial orientation). Οι Linn και Peterson (1985) αναγνώρισαν τρεις άλλες κατηγορίες: (1) *την αντίληψη του χώρου* (spatial perception), η ικανότητα δηλαδή προσδιορισμού σχέσεων στο χώρο με αναφορά στον προσανατολισμό του ατόμου, (2) *τη νοερή περιστροφή* (mental rotation), η ικανότητα δηλαδή γρήγορης νοερής περιστροφής δισδιάστατων και τρισδιάστατων σχημάτων, (3) *την οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου* (spatial visualization), η ικανότητα δηλαδή χειρισμού και επεξεργασίας πληροφοριών που αναφέρονται στις έννοιες του χώρου. Οι Carpenter και Just (1986) διέκριναν δύο μόνο παράγοντες, τον παράγοντα *προσανατολισμός στο χώρο* (spatial orientation) και τον παράγοντα *χειρισμός των εννοιών του χώρου* (spatial manipulation), η ικανότητα νοητικής οικοδόμησης δισδιάστατων ή τρισδιάστατων αντικειμένων. Ο Lohman (1988) με βάση αποτελέσματα μετα-ανάλυσης πρότεινε ένα μοντέλο τριών παραγόντων που περιλαμβάνει την *οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου* (Vz), τον *προσανατολισμό στο χώρο* (SO) και τον παράγοντα *σχέσεις των εννοιών του χώρου* (SR).

Ο παράγοντας «οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου» είναι ένα από τους παράγοντες που εντοπίζεται συχνότερα σε μελέτες ανάλυσης παραγόντων (Colom, Contreras, Botella, & Santacreu, 2001). Ο παράγοντας «οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου» αναφέρεται στην ικανότητα αντίληψης φανταστικών κινήσεων στον τρισδιάστατο

χώρο και στην ικανότητα νοερού χειρισμού αντικειμένων. Ο παράγοντας «οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου» διαφοροποιείται συνήθως από τον παράγοντα «προσανατολισμός στο χώρο» με βάση τις νοητικές διεργασίες που πραγματοποιούνται και τα ερεθίσματα που εμπλέκονται (McGee, 1979).

Ο παράγοντας «προσανατολισμός στο χώρο» αποτελεί ένδειξη της ικανότητας του ατόμου να χειρίζεται με άνεση αλλαγές στον προσανατολισμό του οπτικού ερεθίσματος. Στα τεστ μέτρησης του παράγοντα «προσανατολισμός στο χώρο» το υποκείμενο καλείται να φανταστεί πώς θα φαίνεται ένα σχήμα από διαφορετική προοπτική.

Ο παράγοντας «σχέσεις των εννοιών του χώρου» ορίζεται από την ταχύτητα χειρισμού οπτικών μοτίβων όπως νοερές περιστροφές και αναφέρεται στην ικανότητα νοεράς περιστροφής ενός αντικειμένου στο χώρο με ταχύτητα και ακρίβεια (Carroll, 1993). Ο παράγοντας «σχέσεις των εννοιών του χώρου» εμπλέκει τη νοερή περιστροφή ενός αντικειμένου ως ολότητα ενώ ο παράγοντας «οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου» απαιτεί τη μετακίνηση τμήματος του αντικειμένου. Ερευνητές υποστηρίζουν ότι το κρίσιμο στοιχείο που διαφοροποιεί τους παράγοντες «προσανατολισμός στο χώρο» και «σχέσεις των εννοιών του χώρου» είναι ότι στις καταστάσεις του παράγοντα «προσανατολισμός στο χώρο» καθοριστικό ρόλο διαδραματίζει ο προσανατολισμός του σώματος του παρατηρητή (McGee, 1979· Carroll, 1993).

Η ανάπτυξη της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου δεν αποτελεί συστηματικό στόχο των αναλυτικών προγραμμάτων. Συνεπώς, η ανάπτυξη της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου πραγματοποιείται άτυπα. Παρόλα αυτά, στη βιβλιογραφία υπάρχουν αρκετές ερευνητικές προσπάθειες με στόχο την ανάπτυξη της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου. Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τη βιβλιογραφία είναι συγκρουόμενα για το κατά πόσον είναι δυνατή η ανάπτυξη της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου. Αρκετές ερευνητικές προσπάθειες (Ben-Chaim et al., 1989· Burnett & Lane, 1980· Kwon, Kim & Kim, 2001· Lord, 1985· Smail, 1983) έδειξαν ότι η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου μπορεί να αναπτυχθεί μέσω κατάλληλης διδασκαλίας, για παράδειγμα με τη χρήση υλικών. Δεν είναι δυνατή, όμως, η ανάπτυξη όλων των παραγόντων της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου μέσω ενός παρεμβατικού προγράμματος. Μέχρι στιγμής μόνο συγκεκριμένοι παράγοντες της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου έχουν αναπτυχθεί μέσω συγκεκριμένων παρεμβατικών προγραμμάτων ανάλογα με το περιεχόμενό τους. Αντίθετα, οι Mendicino (1958), Myers (1958), Sedgwick (1961), Mitchelmore (1975) και Mundy (1987) δεν βρήκαν καμία βελτίωση στην ανάπτυξη της ικανότητας αντίληψης των εννοιών

του χώρου ως αποτέλεσμα συμμετοχής σε παρεμβατικό πρόγραμμα. Για αυτό αρκετοί ερευνητές τονίζουν την αναγκαιότητα περαιτέρω μελέτης και συστηματικής έρευνας (Ben-Chaim et al., 1989). Ο Mitchelmore (1975) τονίζει την αναγκαιότητα ανάπτυξης πρακτικών παρεμβατικών προγραμμάτων διδασκαλίας της γεωμετρίας και των εννοιών του χώρου και κατάλληλο έλεγχο της αποτελεσματικότητάς τους.

Η αντίληψη των εννοιών του χώρου σχετίζεται με διαφορετικά μαθησιακά στυλ. Ο Krutetskii (1976) αναγνώρισε τρία κύρια είδη μαθησιακών στυλ: αναλυτικό, γεωμετρικό και αρμονικό που περιλαμβάνει και τα δύο. Ο Brumby (1982) προσπάθησε να εντοπίσει τις γνωστικές στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές των τριών μαθησιακών στυλ. Τα αποτελέσματά επιβεβαίωσαν την ύπαρξη των τριών διαφορετικών κατηγοριών: (α) οι μαθητές που χρησιμοποιούν αναλυτικές στρατηγικές, (β) οι μαθητές που χρησιμοποιούν ολικές/γεωμετρικές στρατηγικές και (γ) οι μαθητές που χρησιμοποιούν συνδυασμό αναλυτικών και ολικών στρατηγικών. Οι μαθητές της πρώτης κατηγορίας αναλύουν αμέσως το πρόβλημα στα επιμέρους στοιχεία του και τα μελετούν βήμα προς βήμα ως αυτόνομες οντότητες. Αντίθετα, οι μαθητές της δεύτερης κατηγορίας μελετούν το πρόβλημα ως σύνολο, προσπαθούν να συσχετίσουν τα επιμέρους τμήματα και να αναλύσουν το πρόβλημα στο πλαίσιο που το περιβάλλει.

Η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου συνδέεται συχνά με την ανάπτυξη της δημιουργικότητας, όχι μόνο στην τέχνη αλλά και στα μαθηματικά και στην επιστήμη (Shepard, 1978). Για παράδειγμα, σε αρκετές περιπτώσεις ο Albert Einstein δήλωσε ότι οι λεκτικές διαδικασίες δεν διαδραμάτισαν κανένα ρόλο στη δημιουργική του σκέψη ενώ αντίθετα η ικανότητα οπτικής αντίληψης συνέβαλε στις διάφορες ανακαλύψεις. Σημαντικός αριθμός φυσικών και άλλων επιστημόνων επέδειξαν υψηλή επίδοση στην αντίληψη των εννοιών του χώρου. Η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου σχετίζεται, επίσης, με τους προικισμένους μαθητές (Webb, Lubinski & Benbow, 2007).

Νοητικές Εικόνες και Είδη Οπτικο-χωρικών Αναπαραστάσεων

Σύμφωνα με τον Kosslyn (1980) υπάρχουν τέσσερα είδη διαδικασιών που σχετίζονται με την οπτικοποίηση και τις νοητικές εικόνες: (α) Κατασκευή νοητικών εικόνων με βάση συγκεκριμένες πληροφορίες, (β) παρατήρηση της νοητικής εικόνας ώστε να μελετηθεί η θέση της και τα επιμέρους στοιχεία της, (γ) μετασχηματισμός της νοητικής εικόνας μέσω περιστροφής, μεταφοράς, ή μεγέθυνσης/σμίκρυνσης και (δ) χρήση της νοητικής εικόνας

για επίλυση προβλημάτων.

Σύγχρονα ερευνητικά αποτελέσματα στον τομέα της γνωστικής ψυχολογίας και της νευροεπιστήμης υποστηρίζουν ότι η οπτική αντίληψη δεν είναι μια γενική και ενιαία ικανότητα, αλλά αποτελείται από διακριτά και ανεξάρτητα οπτικά στοιχεία και στοιχεία που αναφέρονται στο χώρο (Farah, Hammond, Levine & Calvanio, 1988· Hegarty & Kozhevnikov, 1999· Kosslyn, 1995· Logie, 1995). Τα οπτικά στοιχεία αναφέρονται στην οπτική αναπαράσταση ενός αντικειμένου, όπως το σχήμα, το χρώμα, η φωτεινότητα. Τα στοιχεία που αναφέρονται στο χώρο περιλαμβάνουν την αναπαράσταση σχέσεων στο χώρο μεταξύ τμημάτων ενός αντικειμένου και τη θέση του αντικειμένου στο χώρο. Σχετικές έρευνες έχουν δείξει ότι τα δύο είδη στοιχείων είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους (Logie, 1995· van Garderen & Montague, 2003). Έρευνες που εξέτασαν τη σχέση μεταξύ των δύο στοιχείων έδειξαν ότι οι οπτικές εικόνες μειώνονται όταν το άτομο βλέπει ταυτόχρονα άσχετες μεταξύ τους εικόνες αλλά δεν επηρεάζονται από τη μετακίνηση του χεριού, ενώ αντίθετα τα στοιχεία που σχετίζονται με την αντίληψη του χώρου δεν επηρεάζονται από άσχετες εικόνες αλλά από τη μετακίνηση του χεριού.

Οι Hegarty και Kozhevnikov (1999) υποστηρίζουν ότι ο διαχωρισμός μεταξύ των οπτικών εικόνων και των στοιχείων που σχετίζονται με το χώρο παρουσιάζεται και σε μορφή ατομικών διαφορών μεταξύ των ατόμων. Ορισμένα άτομα είναι ιδιαίτερα καλά στην κατασκευή οπτικών εικόνων (κατασκευή ζωντανών και λεπτομερών εικόνων), ενώ άλλα άτομα έχουν ιδιαίτερα αναπτυγμένη την ικανότητα κατασκευής εικόνων που αναπαριστούν στοιχεία του χώρου (λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις μεταξύ αντικειμένων).

Η χρήση εικόνων που σχετίζονται με το χώρο φαίνεται να σχετίζεται θετικά με την επίλυση προβλήματος ενώ η χρήση οπτικών εικόνων παρουσιάζει αρνητική συσχέτιση με την επιτυχία στη λύση προβλήματος (Hegarty & Kozhevnikov, 1999). Η υπόθεση αυτή επεξηγεί γιατί αρκετές ερευνητικές προσπάθειες δεν βρήκαν σχέση μεταξύ της χρήσης οπτικο-χωρικών εικόνων και ικανότητας επίλυσης μαθηματικού προβλήματος (Kruteskii, 1976· Lean & Clements, 1981· Presmeg, 1986α, 1986β, 1992). Ο διαχωρισμός των ατόμων σε οπτικούς και λεκτικούς τύπους φαίνεται να είναι αρκετά γενικός. Φαίνεται να υπάρχουν δύο τύποι οπτικών τύπων: οι σχηματικοί τύποι που έχουν γενικά επιτυχία στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος γιατί αντιλαμβάνονται τις σχέσεις στο χώρο και οι εικονικοί τύποι που έχουν μικρότερη επιτυχία από τους σχηματικούς τύπους γιατί περιορίζονται στην αντίληψη της εικόνας που βλέπουν και δεν αντιλαμβάνονται τις χωρικές σχέσεις που συνυπάρχουν στην εικόνα (Kozhevnikov, Motes & Hegarty, 2007). Η χρήση εικόνων που αναφέρονται στο χώρο (σχηματική αντίληψη) σχετίζεται με υψηλή ικανότητα στον

παράγοντα «οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου», αλλά όχι και με υψηλή ικανότητα στον παράγοντα «σχέσεις των εννοιών του χώρου» (Hegarty & Kozhevnikov, 1999).

Οπτικοποίηση στη Μαθηματική Παιδεία

Στο πεδίο έρευνας της μαθηματικής παιδείας παρατηρήθηκαν σημαντικές προσπάθειες ανάπτυξης ενός θεωρητικού μοντέλου για την ικανότητα οπτικοποίησης (δείτε Chavez, Reys & Jones, 2005· Gutierrez, 1996, Presmeg, 1997, 2006· Wheatley, 1997· Zimmerman & Cunningham, 1991). Οι προσπάθειες αυτές, αν και έχουν αρκετά κοινά στοιχεία, έχουν αποτύχει στο να οικοδομήσουν ένα αποδεκτό θεωρητικό πλαίσιο. Το κοινό στοιχείο των προσπαθειών αυτών είναι η διαφοροποίηση του νοήματος που δίνουν σε όρους όπως «οπτικοποίηση» και «νοητικές εικόνες» (mental images) σε σχέση με γνωστικούς ψυχολόγους όπως ο Kosslyn (1980). Ο λόγος της διαφοροποίησης αυτής από τους ερευνητές της μαθηματικής παιδείας είναι ότι η χρήση σχεδίων, διαγραμμάτων, σχημάτων ή ψηφιακών αναπαραστάσεων αποτελεί αναπόσπαστο στοιχείο της μαθηματικής δραστηριότητας. Θεωρούν ότι οι νοητικές εικόνες και οι εξωτερικές αναπαραστάσεις βρίσκονται σε συνεχή αλληλεπίδραση ώστε να επιτευχθεί η απαραίτητη κατανόηση για τη λύση προβλήματος και για αυτό και οπτικοποίηση είναι το πλαίσιο στο οποίο πραγματοποιείται η αλληλεπίδραση μεταξύ νοητικών εικόνων και εξωτερικών αναπαραστάσεων (Zimmerman & Cunningham, 1991). Επιπλέον, αρκετές νοητικές εικόνες που χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά δεν βασίζονται σε εικόνες, αλλά σε διαγράμματα ή άλλους οπτικούς και συμβολικούς τρόπους αναπαράστασης πληροφοριών.

Οπτική Αντίληψη, Διαδικασίες και Ικανότητες Οπτικοποίησης

Για τη Yakimanskaya (1991), μια «εικόνα αναπαράστασης εννοιών του χώρου» (spatial image) δημιουργείται από τα συστήματα αντίληψης των σχέσεων στο χώρο του ατόμου και εκφράζεται με ποικιλία λεκτικών ή γραφικών μορφών όπως διαγράμματα, εικόνες ή σχέδια. Για αυτό οι «εικόνες αναπαράστασης εννοιών του χώρου» πρέπει να είναι δυναμικές, ευέλικτες και εύχρηστες. Η Yakimanskaya περιγράφει το συλλογισμό για τις έννοιες του χώρου (spatial thinking) ως μια μορφή νοητικής δραστηριότητας που δημιουργεί εικόνες αναπαράστασης εννοιών του χώρου και τις επεξεργάζεται ώστε να επιλύσει πρακτικά και θεωρητικά προβλήματα. Η Yakimanskaya (1991) θεωρεί ότι οι

εικόνες αναπαράστασης εννοιών του χώρου αποτελούν τους κύριους λειτουργικούς μηχανισμούς του συλλογισμού για τις έννοιες του χώρου ενώ τα γεωμετρικά αντικείμενα αποτελούν την πρώτη ύλη για τη δημιουργία εικόνων αναπαράστασης εννοιών του χώρου.

Οι Lean και Clements (1981) αναφέρουν τον όρο «νοητική αντίληψη» (mental imagery) ως τη νοητική δραστηριότητα που συμβάλλει στην αντίληψη ενός αντικειμένου χωρίς τη φυσική παρουσία του αντικειμένου, ενώ η «οπτική αντίληψη» (visual imagery) αναφέρεται στη διαδικασία όταν η νοητική αντίληψη πραγματοποιείται ως εικόνα στο μυαλό. Τέλος, ορίζουν την ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου ως την ικανότητα κατασκευής και επεξεργασίας νοητικών εικόνων στο μυαλό.

Η Presmeg (1986β) εισηγείται τον όρο «οπτική εικόνα» (visual image) ως το νοητικό σχήμα το οποίο παριστάνει οπτικές πληροφορίες ή πληροφορίες που αναφέρονται σε σχέσεις στο χώρο, με ή χωρίς την παρουσία κάποιου αντικειμένου ή άλλης εξωτερικής αναπαράστασης. Όπως και στον ορισμό της Yakimanskaya, η Presmeg θέλει να συμπεριλάβει στον ορισμό της όλες εκείνες τις εικόνες που πηγάζουν από εξωτερικά ερεθίσματα. Η Presmeg πιστεύει ότι ο ορισμός της είναι αρκετά πιο ευρύς σε σχέση με αυτούς άλλων ερευνητών όπως των Lean και Clements (1981).

Οι πιο πάνω ορισμοί από τους Yakimanskaya, Lean και Clements είναι πολύ γενικοί για αυτό και η Presmeg (1986α) προτείνει τα πιο κάτω είδη «οπτικών εικόνων»:

- Συγκεκριμένες-πραγματικές εικόνες: Αναφέρονται σε πραγματικές εικόνες αντικειμένων αποτυπωμένες στο μυαλό.
- Εικόνες μοτίβου: Εικόνες που αναπαριστούν αφηρημένες μαθηματικές σχέσεις με οπτικό τρόπο.
- Εικόνες για τύπους: Μερικοί μαθητές μπορούν να «δουν» στο μυαλό τους μαθηματικούς τύπους όπως εμφανίζονται στον πίνακα της τάξης ή σε σχολικά εγχειρίδια.
- Κινησθητικές εικόνες: Εικόνες που δημιουργούνται ή μετασχηματίζονται με τη βοήθεια φυσικών κινήσεων.
- Δυναμικές εικόνες: Εικόνες που δημιουργούνται στο μυαλό με κίνηση.

Ο Bishop (1983, 1989) μελετώντας το πρόβλημα της οπτικοποίησης υπό μια άλλη προοπτική, αναγνώρισε δύο κύριες διαδικασίες οπτικοποίησης: την ερμηνεία πληροφοριών για σχήματα (interpreting figural information - IFI) και την επεξεργασία εικονικών πληροφοριών (visual processing - VP). Η ερμηνεία πληροφοριών για σχήματα αναφέρεται στην ικανότητα κατανόησης των οπτικών αναπαραστάσεων και του

λεξιλογίου που εμπλέκεται σε γεωμετρικές καταστάσεις όπως γραφήματα και διαγράμματα. Η επεξεργασία οπτικών πληροφοριών περιλαμβάνει τη μετάφραση αφηρημένων μη οπτικών πληροφοριών σε οπτικές εικόνες, την επεξεργασία οπτικών εικόνων και το μετασχηματισμό μιας οπτικής εικόνας σε μια άλλη.

Ο Bishop (1983) αναφέρει ότι οι ορισμοί του για τις διαδικασίες οπτικοποίησης επεκτείνουν τους ορισμούς του McGee (1979) για τους παράγοντες *οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου* (spatial visualization) και *προσανατολισμός στο χώρο* (spatial orientation). Συγκεκριμένα, υποστηρίζει ότι η διαδικασία IFI επεκτείνει τον παράγοντα *προσανατολισμός στο χώρο* του McGee ώστε να ενσωματώσει γεωμετρικές και γραφικές συμβάσεις και κανόνες. Η διαδικασία VP επεκτείνει τον παράγοντα *οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου* δίνοντας έμφαση στη διαδικασία επεξεργασίας των οπτικών πληροφοριών παρά στη μορφή του ερεθίσματος. Στο ίδιο πλαίσιο, η Yakimanskaya (1991) περιγράφει δύο επίπεδα δραστηριότητας του συλλογισμού για τις έννοιες του χώρου, τη δημιουργία νοητικών εικόνων που αντιστοιχεί στη διαδικασία VP και την επεξεργασία/χειρισμό των νοητικών εικόνων που αντιστοιχεί στη διαδικασία IFI. Ο Bishop πιστεύει ότι οι δικοί του ορισμοί είναι πολύ πιο χρήσιμοι για τη μαθηματική εκπαίδευση γιατί βοηθούν τους εκπαιδευτικούς να επικεντρωθούν στην ανάπτυξη των διαδικασιών μέσω κατάλληλης εκπαίδευσης.

Ο Senechal (1991) διαχώρισε τις έννοιες «οπτικοποίηση» (visualization) και «οπτικός συλλογισμός» (visual thinking), χρησιμοποιώντας τον όρο «οπτικοποίηση» για την ικανότητα οπτικής αντίληψης στο μυαλό και τον όρο «οπτικός συλλογισμός» για να περιγράψει μια γενική ικανότητα οπτικής αντίληψης εννοιών που δεν αναφέρονται στο χώρο. Ο όρος «οπτικοποίηση» αναφέρεται σε καταστάσεις δημιουργίας οπτικών εικόνων στο μυαλό που σε κατάλληλη περίπτωση θα μπορούσαν να γίνουν με τα μάτια. Για παράδειγμα, στην ερώτηση «πόσα παράθυρα έχει το σπίτι σου» η ικανότητα «οπτικοποίησης» επιτρέπει την εικονική αναπαράσταση των παραθύρων του σπιτιού στο μυαλό. Αντίθετα, με τον όρο «οπτικός συλλογισμός» ο Senechal αναφέρεται σε καταστάσεις όπου τα άτομα κατασκευάζουν οπτικές αναλογίες/εικόνες εννοιών ή διαδικασιών που δεν σχετίζονται με οπτικά στοιχεία. Για παράδειγμα, η χρήση ενός μοντέλου εμβადού για την οπτικοποίηση της έννοιας του πολλαπλασιασμού και την κατανόηση της επιμεριστικής ιδιότητας.

Ο Gutierrez (1996) προσπάθησε να συνθέσει τα ερευνητικά αποτελέσματα των Yakimanskaya, Presmeg, McGee, Lean και Clements και άλλων ερευνητών για να προτείνει ένα ενιαίο πλαίσιο για την οπτικοποίηση στη γεωμετρία του χώρου. Σύμφωνα με

τον Gutierrez (1996), *οπτικοποίηση* στα μαθηματικά είναι ο συλλογισμός που στηρίζεται σε οπτικά στοιχεία ή στοιχεία που αναφέρονται σε σχέσεις στο χώρο, νοητικά ή φυσικά, και στοχεύει στην επίλυση προβλημάτων. Η οπτικοποίηση υλοποιείται μέσω τεσσάρων κύριων στοιχείων: τις νοητικές εικόνες, τις εξωτερικές αναπαραστάσεις, τις διαδικασίες της οπτικοποίησης και τις ικανότητες της οπτικοποίησης.

Ο Gutierrez (1996) συμφωνεί με τον ισχυρισμό της Yakimanskaya (1991) ότι οι νοητικές εικόνες αποτελούν το κύριο συστατικό της οπτικοποίησης. Ορίζει τις νοητικές εικόνες ως οποιοδήποτε είδος γνωστικής αναπαράστασης μιας μαθηματικής έννοιας ή ιδιότητας μέσω οπτικών στοιχείων ή στοιχείων που αναφέρονται σε σχέσεις στο χώρο. Ορίζει, επίσης, ως εξωτερικές αναπαραστάσεις οποιοδήποτε είδος λεκτικής ή γραφικής αναπαράστασης εννοιών ή ιδιοτήτων σε σχέση με εικόνες, σχέδια, διαγράμματα, κ.τ.λ., τα οποία συμβάλλουν στη δημιουργία ή μετασχηματισμό νοητικών εικόνων. Σύμφωνα με τον Gutierrez, οι διαδικασίες της οπτικοποίησης αποτελούν νοητικές ή φυσικές δραστηριότητες που εμπλέκουν νοητικές εικόνες. Εντοπίζει δύο κύριες διαδικασίες: (α) την *οπτική επεξεργασία πληροφοριών* με στόχο τη δημιουργία νοητικών εικόνων, που αντιστοιχεί στη διαδικασία VP του Bishop, και (β) την *ερμηνεία νοητικών εικόνων* με στόχο την παραγωγή πληροφοριών, η οποία αντιστοιχεί στη διαδικασία IFI του Bishop, ενσωματώνοντας τις τρεις υποδιαδικασίες του Kosslyn, παρατήρηση, μετασχηματισμός και χρήση της νοητικής εικόνας για επίλυση προβλημάτων.

Με βάση τα ερευνητικά αποτελέσματα της Presmeg και άλλων ερευνητών, ο Gutierrez (1996) ανέπτυξε ένα ολοκληρωμένο κατάλογο ικανοτήτων οπτικοποίησης που πρέπει να αναπτύξουν και να κατέχουν οι μαθητές στη γεωμετρία του χώρου. Μερικές από τις πιο σημαντικές ικανότητες που αναφέρει είναι:

- «ικανότητα διάκρισης αντικειμένων» (figure-ground perception), η ικανότητα του ατόμου να εντοπίζει ένα συγκεκριμένο σχήμα σε ένα πολύπλοκο περιβάλλον.
- «αντιληπτική σταθερότητα» (Perceptual constancy), η ικανότητα του ατόμου να αναγνωρίζει ότι κάποιες ιδιότητες ενός αντικειμένου είναι ανεξάρτητες του μεγέθους, χρώματος ή θέσης.
- «νοερή περιστροφή» (Mental rotation), η ικανότητα του ατόμου να παράγει δυναμικές νοερές εικόνες και να οπτικοποιεί μια διάταξη σχημάτων που βρίσκεται σε κίνηση.
- «αντίληψη θέσης στο χώρο» (Perception of spatial positions), η ικανότητα του ατόμου να αντιλαμβάνεται τη θέση ενός αντικειμένου, εικόνας ή νοητικής εικόνας στο χώρο ή σε σχέση με άλλα αντικείμενα.

- «αντίληψη σχέσεων στο χώρο» (Perception of spatial relationships), η ικανότητα του ατόμου να αντιλαμβάνεται σχέσεις στο χώρο μεταξύ αντικειμένων, εικόνων ή νοητικών εικόνων.

- η «οπτική διάκριση» (Visual discrimination), η ικανότητα σύγκρισης αντικειμένων και εικόνων και των νοερών τους εικόνων για εντοπισμό ομοιοτήτων και διαφορών.

Δυναμικές Μορφές Οπτικοποίησης

Οι δυναμικές μορφές οπτικοποίησης αποτελούν ένα δυναμικό εργαλείο που μπορούν να συμβάλουν στην περαιτέρω κατανόηση πολλών μαθηματικών εννοιών και στη λύση προβλήματος (Bodemer, Ploetzner, Feuerlein, & Spada, 2004· Goldenberg, Lewis & O'Keefe, 1992· Harel & Sowder, 1998· Lewalter, 2003· Lowe, 1999, 2003, 2004· Lowrie, 2002). Αν και πολλοί ερευνητές έχουν χρησιμοποιήσει διαφορετικούς όρους για τις δυναμικές μορφές οπτικοποίησης όπως «δυναμικός συλλογισμός», «δυναμικές εικόνες» ή «δυναμική αντίληψη» (Harel & Sowder, 1998), το νόημα όλων των όρων είναι ενιαίο και θεμελιώνεται στον ορισμό των Zazkis, Dubinsky και Dautermann (1996) για την οπτικοποίηση ως την ενέργεια παραγωγής των κατάλληλων μετασχηματισμών μεταξύ των εξωτερικών αναπαραστάσεων και του νοητικού μηχανισμού του ατόμου. Η δυναμική οπτικοποίηση αποτελεί μια τέτοια ενέργεια, με τη διαφορά ότι επεξεργάζεται εικόνες εν κινήσει στο μυαλό με αποτέλεσμα τα άτομα να μετακινούν, να μεγεθύνουν ή να περιστρέφουν αντικείμενα στην οθόνη του υπολογιστή ή στο μυαλό τους. Για παράδειγμα, η επεξεργασία ενός κύβου στο περιβάλλον ενός σύγχρονου λογισμικού που επιτρέπει τη δυναμική περιστροφή του αντικειμένου έχει ως αποτέλεσμα τη συνειδητή ανάπτυξη δυναμικών εικόνων που μπορούν να τύχουν περιστροφής στο μυαλό των μαθητών με παρόμοιο τρόπο όπως στην πραγματικότητα. Αυτό μπορεί να γίνει εφικτό με την ανάπτυξη συνδεδεμένων εικόνων του αντικειμένου όπως φαίνονται στο Διάγραμμα 2.4 (Gutierrez, 1996). Η περιστροφή του κύβου στον περιβάλλον του υπολογιστή έχει το σημαντικό πλεονέκτημα σε σχέση με την περιστροφή ενός πραγματικού αντικειμένου στο χέρι ότι η περιστροφή γίνεται με συνειδητό τρόπο καθώς ο χρήστης ελέγχει ο ίδιος την κατεύθυνση της περιστροφής και οικοδομεί διαδοχικές νοητικές εικόνες του κύβου. Αντίθετα, κατά τη χειροκίνητη περιστροφή του αντικειμένου οι κινήσεις του χεριού γίνονται με ασυνείδητο τρόπο με αποτέλεσμα να μην μπορούν να γίνουν άμεσα οι συνδέσεις μεταξύ των διαφορετικών νοητικών εικόνων.

Οι δυναμικές αναπαραστάσεις των στερεών στον υπολογιστή, μολονότι χαρακτηρίζονται και αυτές, όπως τα φυσικά δυναμικά μοντέλα, από τη δυνατότητα της δυναμικής μεταβολής των στερεών, διαφοροποιούνται όσον αφορά τις νοητικές λειτουργίες που απαιτούνται. Η χρήση των δυναμικών αναπαραστάσεων στον υπολογιστή δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να περάσουν από τις φυσικές ενέργειες σε περισσότερο νοητικές. Για παράδειγμα, ακόμα και η απλή αναγνώριση των συστατικών στοιχείων του στερεού και των ιδιοτήτων τους απαιτεί νοητικές λειτουργίες και ενέργειες πολύπλοκότερες από τις αντίστοιχες που απαιτούνται στην περίπτωση των φυσικών δυναμικών μοντέλων. Επιπλέον, τα μοντέλα που αναπτύσσονται στο περιβάλλον του υπολογιστή αποτελούν δισδιάστατες αναπαραστάσεις των γεωμετρικών στερεών και η δημιουργία των νοερών εικόνων από τους μαθητές πιθανόν απαιτεί μεγαλύτερο βαθμό αφάιρσης, καθώς απαιτείται και η κατανόηση της έννοιας της δισδιάστατης αναπαράστασης (Chiappini & Lemut, 1992· Gutierrez, 1994, 1996).



Διάγραμμα 2.4. Διαδοχικές Εικόνες Περιστροφής Κύβου

Στρατηγικές Μαθητών στη Νοερή Περιστροφή Αντικειμένων

Η Gorgorio (1998) μελέτησε τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές σε έργα περιστροφής αντικειμένων με έμφαση στην αναγνώριση οπτικών και μη στρατηγικών, σε αντίθεση με τις πλείστες έρευνες στον τομέα της μελέτης της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου που επικεντρώνονται στο διαχωρισμό μεταξύ οπτικών και μη τύπων (Kruteskii, 1976). Η Gorgorio (1998) επεκτείνοντας τη δουλειά των Burden και Coulson (1981) ανέπτυξε ένα θεωρητικό πλαίσιο για τη μελέτη των στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι μαθητές σε έργα περιστροφής αντικειμένων που αναφέρεται σε τρεις διαστάσεις: (α) τη στρατηγική δομή που σχετίζεται με την πηγή προέλευσης και την οργάνωση των πληροφοριών, (β) τη στρατηγική επεξεργασίας που σχετίζεται με τη μορφή νοητικής αναπαράστασης και (γ) τη στρατηγική προσέγγισης που αναφέρεται στην

εστίαση της προσοχή.

Για τη μελέτη της στρατηγικής δομής, χρειάζεται να αναλυθούν κατά πόσον οι μαθητές χρησιμοποιούν τις πληροφορίες που δίνονται στο έργο ή αν χρησιμοποιούν πληροφορίες από προηγούμενες εμπειρίες, αν οι μαθητές εμπλέκουν τον εαυτό τους στο πλαίσιο του προβλήματος ή όχι, αν οι μαθητές προσπαθούν να κατανοήσουν το έργο εντάσσοντας το σε ένα ρεαλιστικό πλαίσιο και οι τρόποι με τους οποίους οργανώνουν τις πληροφορίες. Για τη μελέτη της στρατηγικής επεξεργασίας χρειάζεται ανάλυση της νοητικής αναπαράστασης που χρησιμοποιούν οι μαθητές και συγκεκριμένα κατά πόσον εφαρμόζουν οπτικές ή μη στρατηγικές. Η στρατηγική επεξεργασίας ενός μαθητή μπορεί να χαρακτηριστεί ως οπτική, αν οι επεξηγήσεις που δίνει για την επίλυση του προβλήματος δείχνουν ότι έχει χρησιμοποιήσει οπτικές εικόνες ως απαραίτητο συστατικό για φτάσει στη λύση. Αντίθετα, αν οι μαθητές διευκρινίσουν ξεκάθαρα ότι δεν χρησιμοποίησαν οπτικές εικόνες αλλά λεκτικούς συλλογισμούς, τότε η στρατηγική μπορεί να χαρακτηριστεί ως μη-οπτική. Η στρατηγική προσέγγισης μπορεί να χαρακτηριστεί ως ολική όταν οι μαθητές εστιάζονται στο αντικείμενο ως ολότητα, ενώ όταν επικεντρώνονται σε τμήματα του αντικειμένου τότε η στρατηγική προσέγγισης χαρακτηρίζεται ως τμηματική.

Ικανότητα Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου και Μαθηματικά

Υπάρχει σημαντικό ερευνητικό έργο αναφορικά με τη σχέση μεταξύ της αντίληψης εννοιών του χώρου και της μαθηματικής ικανότητας (δείτε Bishop, 1980· Hazzan & Goldenberg, 1997· Presmeg, 1986β,1992· Shama & Dreyfus, 1994· Tartre, 1990· Yerushalmy and Chazan 1990· Zazkis, Dubinsky and Dautermann, 1996). Σε πολλούς τομείς των μαθηματικών είναι σημαντικό οι μαθητές να μπορούν να φανταστούν και να αναπαριστούν τρισδιάστατα αντικείμενα και να κατανοήσουν τις γεωμετρικές σχέσεις μεταξύ των επιμέρους τμημάτων των αντικειμένων (Mitchelmore, 1980). Πολλοί άνθρωποι αντιμετωπίζουν σοβαρά προβλήματα στο να χειριστούν ένα τρισδιάστατο αντικείμενο οπτικά, αν και θεωρούν την αντίστοιχη διαδικασία με δισδιάστατα αντικείμενα φυσική ενέργεια (Eisenberg & Dreyfus, 1991). Η ενασχόληση των μαθητών με εικόνες των τρισδιάστατων σχημάτων όπως παρουσιάζονται στα σχολικά εγχειρίδια συνδέεται άμεσα με τη δυσκολία αναπαράστασης των τρισδιάστατων σχημάτων με

επίπεδες αναπαραστάσεις (Orton & Frobisher, 1996). Τα προβλήματα αυτά δυστυχώς είχαν ως αποτέλεσμα την υποβάθμιση της μελέτης εννοιών της γεωμετρίας του χώρου αντί να οδηγήσουν σε περαιτέρω μελέτη των παραγόντων που οδηγούν στις δυσκολίες των μαθητών γιατί ο κόσμος στον οποίο ζουν τα παιδιά είναι εκ φύσεως τρισδιάστατος, επομένως είναι πολύ λογικό να ασχοληθεί κάποιος σοβαρά με την τρισδιάστατη γεωμετρία (Goldenberg et al., 1998).

Έρευνες όπως του Bishop (1980) των Ho και Eastman (2006), της Presmeg (1992) και των Voyer και Sullivan (2003) τονίζουν τη σημασία της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης (Bishop, 1980· Tartre, 1990· Gutiérrez, 1996). Η ανάπτυξη της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου πρέπει να αποτελέσει σημαντική παράμετρο εστίασης της μαθηματικής εκπαίδευσης λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι ερευνητικά αποτελέσματα έχουν δείξει ότι παράγοντες της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου συσχετίζονται με τη μαθηματική ικανότητα. Επομένως, η ενασχόληση των μαθητών με δραστηριότητες που στοχεύουν στην ανάπτυξη των ικανοτήτων αντίληψης των εννοιών του χώρου του μαθητών θα έχει ως επιπρόσθετο κέρδος τη μαθηματική ανάπτυξή τους (Chavez, Reys & Jones, 2005).

Οι Connor και Serbin (1985) βρήκαν ότι οι παράγοντες της οπτικοποίησης των εννοιών του χώρου και του προσανατολισμού στο χώρο μπορούν να αποτελέσουν ισχυρούς παράγοντες πρόβλεψης της μαθηματικής επίδοσης. Ερευνητικά αποτελέσματα έχουν δείξει ότι η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου σχετίζεται περισσότερο με την ικανότητα στη γεωμετρία παρά στην άλγεβρα (Bishop, 1980). Οι Πιτάλης, Μουσουλίδης και Χρίστου (2006) βρήκαν ότι η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου αποτελεί ισχυρό παράγοντα πρόβλεψης της ικανότητας στη γεωμετρία και επομένως ανάπτυξη της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου θα έχει ως αποτέλεσμα ανάπτυξη της ικανότητας στη γεωμετρία. Ο Tartre (1990) βρήκε ότι η ικανότητα προσανατολισμού στο χώρο εμπλέκεται άμεσα στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων, ενώ οι Saads και Davis (1997β) έδειξαν τη σημασία της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου και της γλωσσικής ικανότητας στη συνεχή ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης. Οι Tso και Liang (2002) βρήκαν σημαντική συσχέτιση μεταξύ της ικανότητας των μαθητών αντίληψης των εννοιών του χώρου και της γεωμετρικής του σκέψης με βάση τα επίπεδα van Hiele. Γι' αυτό, εισηγούνται ότι οι ικανότητες αντίληψης των εννοιών του χώρου αποτελούν σημαντικούς γνωστικούς παράγοντες στη μάθηση της γεωμετρίας και συνεπώς η ενσωμάτωση σχετικών δραστηριοτήτων στη διδασκαλία μπορεί να συμβάλει στη βελτίωση της γεωμετρικής σκέψης.

Σε μετα-ανάλυση που πραγματοποιήθηκε η Friedman (1995) βρήκε ότι ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ μαθηματικών και τεστ προσανατολισμού αντικειμένων στις δύο διαστάσεις είναι 0,30 ενώ ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ μαθηματικών και τεστ οπτικοποίησης των εννοιών του χώρου είναι 0,45. Ο προσανατολισμός στο χώρο έχει υψηλό συντελεστή συσχέτισης με απλά μαθηματικά υπολογισμού πράξεων (0,38) και με μαθηματικά ανώτερου επιπέδου (0,43) σε μαθητές ηλικίας 9 με 14 χρονών. Οι Πιττάλης, Μουσουλίδης και Χρίστου (2006) βρήκαν συντελεστή παλινδρόμησης 0,70 μεταξύ της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου και της ικανότητας σε έργα δισδιάστατης γεωμετρίας. Οι συντελεστές συσχέτισης είναι γενικά υψηλότεροι για τα κορίτσια, τους μαθητές μικρότερης ηλικίας (9-14 χρονών) και για τα έργα οπτικοποίησης.

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκε η επισκόπηση της βιβλιογραφίας που σχετίζεται με τις έννοιες που μελετούνται στην παρούσα εργασία. Έγινε αναφορά στις κυριότερες θεωρίες μάθησης στη γεωμετρία και αναλύθηκε η θεωρία των van Hiele με έμφαση στην προσπάθεια του Gutierrez (1992) για μεταφορά του μοντέλου ανάπτυξης της θεωρίας των van Hiele στην τρισδιάστατη γεωμετρία. Η προσπάθεια αυτή περιέγραψε την κατανόηση της ανάπτυξης της ικανότητας οπτικοποίησης των εννοιών του χώρου του μαθητών με αναφορά στην αντίληψη των στοιχείων και ιδιοτήτων των στερεών. Μελετήθηκε, επίσης, ο ρόλος της διαισθητικής αντίληψης και της θεωρίας των σχηματικών εννοιών στην αντίληψη των εννοιών της γεωμετρίας στο χώρο (Fischbein, 1993· Fujita & Jones, 2003· Jones & Mooney, 2003). Η μελέτη αυτή κατέδειξε ότι δεν υπάρχει ένα ενιαίο θεωρητικό μοντέλο που να περιγράφει την ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου, μολονότι αριθμός ερευνητικών εργασιών έχουν εντοπίσει παράγοντες που συμβάλλουν στην ανάπτυξη της ικανότητας αντίληψης εννοιών της τρισδιάστατης γεωμετρίας.

Στο δεύτερο μέρος της επισκόπησης της βιβλιογραφίας παρουσιάστηκαν αποτελέσματα ερευνητικών εργασιών που αναφέρονταν σε έννοιες της γεωμετρίας του χώρου όπως την αναπαράσταση των γεωμετρικών σχημάτων, τις διατάξεις κύβων στο χώρο, την ικανότητα δόμησης αντικειμένων, τα αναπτόγματα στερεών, την αναγνώριση στερεών και την αντίληψη του όγκου. Στόχος της μελέτης των αποτελεσμάτων αυτών ήταν

η αναγνώριση των βασικότερων εννοιών που σχετίζονται με τη γεωμετρία στο χώρο και η περιγραφή των ικανοτήτων και των δυσκολιών των μαθητών στις έννοιες αυτές.

Στη συνέχεια παρουσιάστηκαν τα αποτελέσματα ερευνών στον τομέα της ψυχολογίας που αναφέρονται στη μελέτη της φύσης και της δομής της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου. Με βάση τη μελέτη της σχετικής βιβλιογραφίας, στην παρούσα εργασία, υιοθετήθηκε το μοντέλο του Lohman (1988, 2000) ο οποίος περιγράφει την ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου με βάση τρεις παράγοντες: (α) τον παράγοντα «οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου», (β) τον παράγοντα «προσανατολισμός στο χώρο» και (γ) τον παράγοντα «σχέσεις των εννοιών του χώρου». Για την καλύτερη κατανόηση της έννοιας της οπτικοποίησης παρουσιάστηκαν τα αποτελέσματα σχετικών ερευνών στον τομέα της μαθηματικής παιδείας. Συγκεκριμένα, παρουσιάστηκαν οι ορισμοί της έννοιας της οπτικοποίησης και της οπτικής αντίληψης, οι δεξιότητες και ικανότητες οπτικοποίησης, οι μορφές οπτικών και νοητικών αναπαραστάσεων για την επεξεργασία οπτικο-χωρικών πληροφοριών και έγινε αναφορά στις μορφές δυναμικής οπτικοποίησης. Τέλος, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα ερευνών για τη σχέση μεταξύ επίδοσης στα μαθηματικά και της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου.

Με βάση την επισκόπηση της βιβλιογραφίας, αναπτύχθηκαν τα θεωρητικά μοντέλα περιγραφής της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας στο χώρο και αντίληψης των εννοιών του χώρου που παρουσιάζονται στο επόμενο κεφάλαιο, τα οποία αποτελούν το θεωρητικό υπόβαθρο της εργασίας. Η μελέτη της ανάπτυξης της ικανότητας των μαθητών σε συγκεκριμένες έννοιες της γεωμετρίας στο χώρο συνέβαλε στην ανάπτυξη του κατάλληλου θεωρητικού πλαισίου για την αναγνώριση των ικανοτήτων, των χαρακτηριστικών και των δυσκολιών των μαθητών στα γραπτά δοκίμια και στις κλινικές συνεντεύξεις που πραγματοποιήθηκαν που σχετίζονταν με την περιγραφή των χαρακτηριστικών των μαθητών των διαφορετικών επιπέδων σκέψης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται η μεθοδολογία, τα υποκείμενα της εργασίας, τα εργαλεία μέτρησης και η περιγραφή της διαδικασίας ανάπτυξής τους και οι διαδικασίες που ακολουθήθηκαν για τον έλεγχο της εγκυρότητάς τους. Γίνεται, επίσης, περιγραφή του σχεδιασμού των ημιδομημένων συνεντεύξεων και του τρόπου επιλογής των υποκειμένων που συμμετείχαν στις συνεντεύξεις. Τέλος, επεξηγούνται οι στατιστικές αναλύσεις που χρησιμοποιήθηκαν και ο τρόπος διόρθωσης των δεδομένων.

Σημαντικό πρόβλημα που απασχόλησε την παρούσα εργασία ήταν ο τρόπος μέτρησης της ικανότητας των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου και συγκεκριμένα το είδος του δοκιμίου που έπρεπε να χρησιμοποιηθεί και ο τρόπος αξιολόγησης των απαντήσεων των μαθητών. Σε παρόμοιες εργασίες έχουν εφαρμοστεί τρεις διαφορετικές μεθοδολογικές προσεγγίσεις: (α) Γραπτό τεστ με ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής στο οποίο η κάθε ερώτηση αξιολογεί συγκεκριμένο επίπεδο σκέψης των μαθητών και η κατάταξη των μαθητών γίνεται με βάση τον αριθμό των σωστών και λανθασμένων απαντήσεων που αντιστοιχούν στο κάθε επίπεδο (Usisking, 1982), (β) κλινική συνέντευξη που στηρίζεται σε σύνολο προβλημάτων και στην πραγματοποίηση ημιδομημένων συνεντεύξεων (Burger & Shaughnessy, 1986) όπου οι απαντήσεις των μαθητών αναλύονται και κατατάσσονται σε ένα επίπεδο με βάση το κυρίαρχο επίπεδο που χαρακτηρίζει το συλλογισμό των μαθητών και (γ) συνδυασμός ποσοτικών και ποιοτικών μεθόδων. Σύμφωνα με τους Tashakkori και Teddlie (2002), στις σύγχρονες κοινωνικές επιστήμες δεν αρκεί η εφαρμογή μόνο ποιοτικών ή ποσοτικών μεθόδων, αλλά είναι αναγκαία η χρήση σύνθετων ερευνητικών σχεδιασμών, για να απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα. Η ανάγκη αυτή για πιο επαρκείς και αποτελεσματικές στρατηγικές έχει οδηγήσει στην ανάπτυξη συνδυαστικών μεθοδολογικών προσεγγίσεων.

Για την υπέρβαση των πιο πάνω προβλημάτων ο σχεδιασμός της παρούσας εργασίας στηρίχτηκε στην εφαρμογή συνδυασμού ποιοτικών και ποσοτικών μεθόδων ενσωματώνοντας χορήγηση δοκιμίων και διεξαγωγή κλινικών συνεντεύξεων (Kelly & Lesh, 2000: Tashakkori & Teddlie, 2002). Η χρήση συμπληρωματικών προσεγγίσεων για

την εξέταση της ικανότητας των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου ενίσχυσε την εγκυρότητα των αποτελεσμάτων της εργασίας. Η ενσωμάτωση των δύο μεθοδολογικών προσεγγίσεων συνέβαλε στη διερεύνηση ερωτημάτων που δεν θα μπορούσαν να απαντηθούν με τη χρήση μόνο μιας μεθοδολογικής προσέγγισης. Για παράδειγμα, στην παρούσα εργασία η ποσοτική προσέγγιση χρησιμοποιήθηκε για την αναγνώριση επιπέδων σκέψης των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου και η ποιοτική προσέγγιση για τον εντοπισμό των στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι μαθητές του κάθε επιπέδου στην επίλυση των αντίστοιχων προβλημάτων.

Υποκείμενα

Τα υποκείμενα της εργασίας αποτέλεσαν μαθητές ηλικίας έντεκα με δεκαπέντε ετών. Συμμετείχαν συνολικά διακόσοι εξήντα εννέα μαθητές δημοτικού και γυμνασίου. Συγκεκριμένα, πενήντα πέντε υποκείμενα ήταν μαθητές της Ε΄ δημοτικού (έντεκα ετών), εξήντα ένας της Στ΄ δημοτικού (δώδεκα ετών), πενήντα οκτώ της Α΄ γυμνασίου (δεκατριών ετών), εξήντα τρεις της Β΄ γυμνασίου (δεκατεσσάρων ετών) και σαράντα δύο της Γ΄ γυμνασίου (δεκαπέντε ετών). Οι μαθητές του δημοτικού σχολείου προέρχονταν από δύο δημοτικά σχολεία της αστικής Λευκωσίας και οι μαθητές του γυμνασίου από ένα αστικό σχολείο της Λευκωσίας και ένα αστικό σχολείο της Λεμεσού. Η επιλογή μαθητών από τις τελευταίες τάξεις του δημοτικού και το γυμνάσιο είχε ως στόχο να εντοπίσει τις πιο σημαντικές αλλαγές στην πορεία ανάπτυξης του συλλογισμού των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου, γιατί στην ηλικία αυτή αναμένονται καθοριστικές αλλαγές στο γνωστικό σύστημα των μαθητών (Demetriou, Christou, Spanoudis & Platsidou, 2002).

Για τη διεξαγωγή των κλινικών συνεντεύξεων επιλέγησαν σαράντα υποκείμενα με βάση τα αποτελέσματα των ποσοτικών αναλύσεων. Συγκεκριμένα, με βάση τα αποτελέσματα των ποσοτικών αναλύσεων προέκυψαν τέσσερις κατηγορίες υποκειμένων. Για αυτό επιλέγηκαν δύο άτομα από κάθε κατηγορία υποκειμένων από κάθε τάξη (2 άτομα από κάθε κατηγορία \times 4 κατηγορίες \times 5 τάξεις = 40 υποκείμενα).

Εργαλεία Μέτρησης

Για τη συλλογή των δεδομένων αναπτύχθηκαν δύο τεστ. Ένα τεστ για τη μέτρηση της ικανότητας των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου και ένα τεστ για τη μέτρηση της ικανότητας των μαθητών στις έννοιες του χώρου. Η επιλογή των έργων και η δομή των δοκιμών στηρίχτηκε στο θεωρητικό πλαίσιο της εργασίας και συγκεκριμένα στα προτεινόμενα θεωρητικά μοντέλα που περιγράφονται πιο κάτω.

Τεστ Αντίληψης Εννοιών του Χώρου

Για την ανάπτυξη του δοκιμίου μέτρησης της ικανότητας εννοιών του χώρου (Δείτε Παράρτημα I) χρησιμοποιήθηκαν έργα από τα τεστ «Σύνθεση Σχημάτων» (Form-Board), «Δίπλωση Σχημάτων» (Paper-Folding), «Αναπτύγματα Σχημάτων» (Surface-Development), «Περιστροφή Καρτών» (Card-Rotation), «Σύγκριση Κύβων» (Cube-Comparison) και «Ίδια/Διαφορετικά Αντικείμενα» (Same/Different Structures), τα οποία συμπεριλαμβάνονται στο ETS kit (Ullstadius, Carlstedt, & Gustafsson, 2004; Ekstrom, French, & Harman, 1976). Χρησιμοποιήθηκαν, επίσης, έργα από το τεστ «Προσανατολισμός Αντικειμένων στο Χώρο» (Object Perspective) και «Προβολές Εικόνων» (Pictures Perspective) των Kozhevnikov και Hegarty (2001). Σύμφωνα με το Lohman (1988) τα τεστ «Σύνθεση Σχημάτων» (Form-Board), «Δίπλωση Σχημάτων» (Paper-Folding) και «Αναπτύγματα Σχημάτων» (Surface-Development) αποτελούν δείκτες του παράγοντα «Οπτικοποίηση των Εννοιών του Χώρου (Vz)» και τα τεστ «Περιστροφή Καρτών» (Card-Rotation), «Σύγκριση Κύβων» (Cube-Comparison) και «Ίδια/Διαφορετικά Αντικείμενα» (Same/Different Structures) δείκτες του παράγοντα «Σχέσεις των Εννοιών του Χώρου (SR)». Τα έργα από τα τεστ «Σύνθεση Σχημάτων» (Form-Board), «Αναπτύγματα Σχημάτων» (Surface-Development), «Ίδια/Διαφορετικά Αντικείμενα» (Same/Different Structures) και «Περιστροφή Καρτών» (Card-Rotation) τροποποιήθηκαν ώστε να είναι κατάλληλα για τους μαθητές της έρευνας, γιατί τα πρωτότυπα έργα αναπτύχθηκαν για μαθητές μεγαλύτερης ηλικίας. Ο Πίνακας 3.1 παρουσιάζει παραδείγματα από τα τεστ του ETS kit και ο Πίνακας 3.2 παραδείγματα από τα τεστ

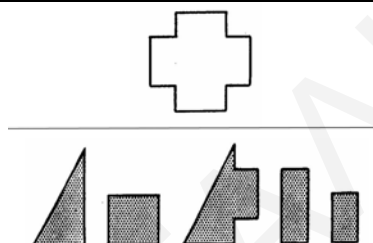
«Προσανατολισμός Αντικειμένων στο Χώρο» (Object Perspective) και «Προβολές Εικόνων» (Pictures Perspective).

Πίνακας 3.1

Παραδείγματα Έργων των Τεστ από το ETS kit

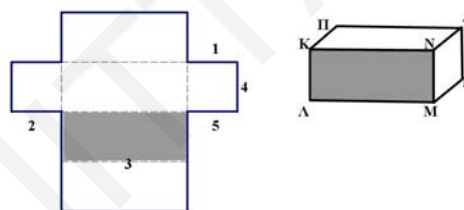
Σύνθεση Σχημάτων (4 έργα):

Ποια από τα σχήματα που βρίσκονται κάτω από τη γραμμή, όταν ενωθούν μπορούν να σχηματίσουν το αντικείμενο που βρίσκεται πάνω από τη γραμμή.



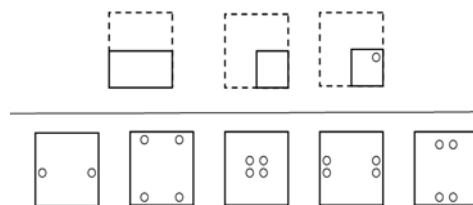
Αναπτύγματα Σχημάτων (4 έργα):

Το διάγραμμα δείχνει πώς ένα χαρτόνι μπορεί να κοπεί και να διπλωθεί ώστε να κατασκευαστεί ένα στερεό. Οι διακεκομμένες γραμμές δείχνουν σε ποια σημεία διπλώθηκε το χαρτόνι. Να σημειώσετε ποιες ακμές του στερεού αντιστοιχούν με τις αριθμημένες έδρες του αναπτύγματος.



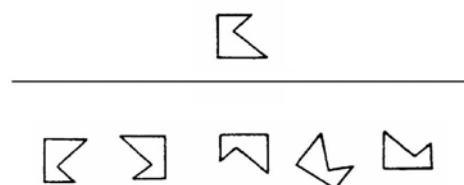
Δίπλωση Σχημάτων (4 έργα):

Το διάγραμμα παρουσιάζει με ποιο τρόπο διπλώνεται ένα φύλλο χαρτιού και σε ποιο σημείο ανοίγεται μια οπή. Ποιο σχήμα δείχνει πώς θα φαίνεται το φύλλο χαρτιού όταν ξεδιπλωθεί;



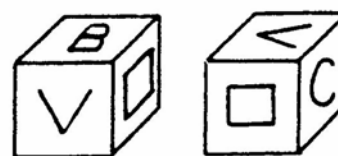
Περιστροφή Καρτών (4 έργα):

Να βρείτε ποια από τις πέντε κάρτες που βρίσκονται κάτω από την γραμμή έχει προκύψει από περιστροφή της κάρτας που βρίσκεται πάνω από τη γραμμή.



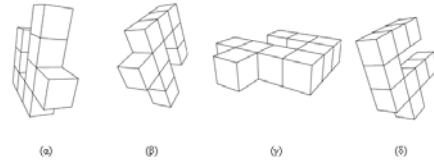
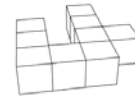
Σύγκριση Κύβων (4 έργα):

Λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι κανένας κύβος δεν έχει δύο ίδιες πλευρές, να αποφασίσετε αν τα δύο σχήματα απεικονίζουν τον ίδιο κύβο ή όχι.



Ίδια/Διαφορετικά Αντικείμενα (4 έργα):

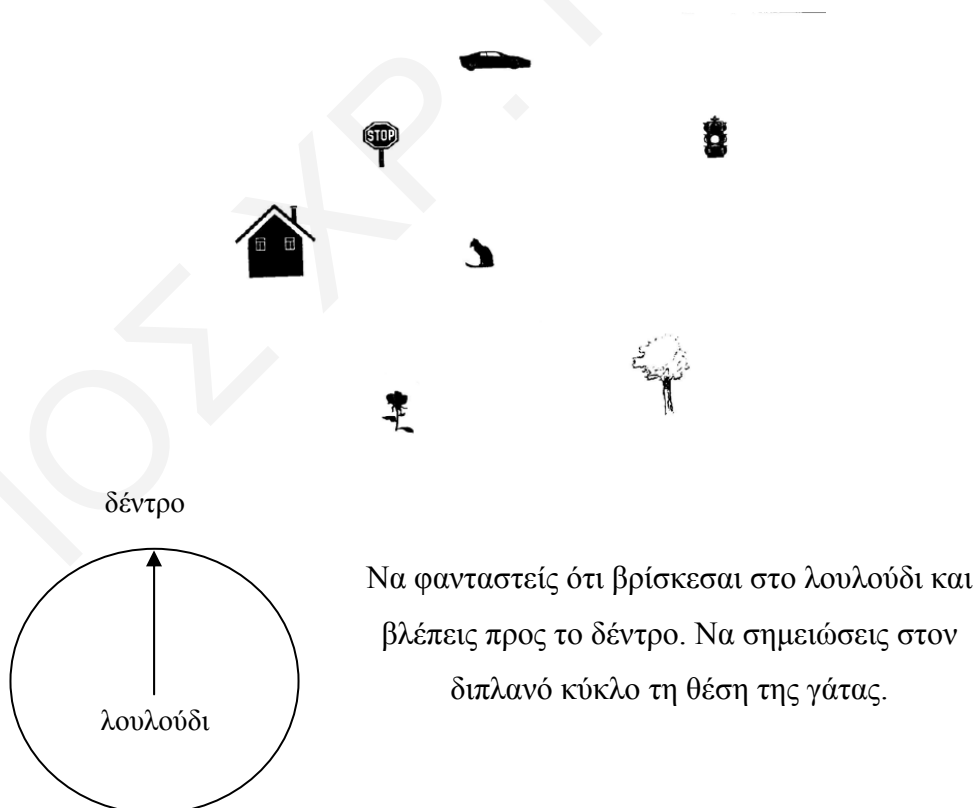
Κάτω από τη γραμμή υπάρχουν τέσσερα στερεά. Ποιο από αυτά ΔΕΝ μπορεί να προκύψει από ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ του σχήματος που βρίσκεται πάνω από τη γραμμή;



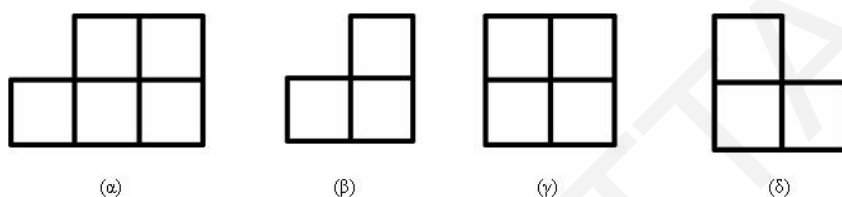
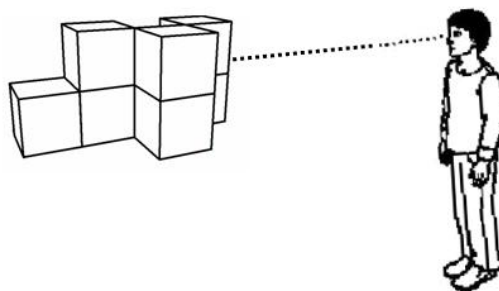
Πίνακας 3.2

Παραδείγματα Έργων των Τεστ που Αναφέρονται στον Προσανατολισμό στο Χώρο

Προσανατολισμός Αντικειμένων στο Χώρο (3 έργα)



Προβολές Εικόνων (4 έργα)



Το τεστ ήταν διαχωρισμένο σε οκτώ τμήματα. Συγκεκριμένα η δομή του τεστ ήταν η ακόλουθη: (α) Τέσσερα έργα από το τεστ «Περιστροφή Καρτών» (Card-Rotation), (β) τρία έργα από το τεστ «Προσανατολισμός Αντικειμένων στο Χώρο» (Object Perspective), (γ) τρία έργα από το τεστ «Δίπλωση Σχημάτων» (Paper-Folding), (δ) τέσσερα έργα από το τεστ «Σύγκριση Κύβων» (Cube-Comparison), (ε) τέσσερα έργα από το τεστ «Σύνθεση Σχημάτων» (Form-Board), (στ) τέσσερα έργα από το τεστ «Προβολές Εικόνων» (Pictures Perspective), (ζ) τέσσερα έργα από το τεστ «Αναπτύγματα Σχημάτων» (Surface-Development) και (η) τέσσερα έργα από το τεστ «Ίδια/Διαφορετικά Αντικείμενα» (Same/Different Structures). Έγινε προσπάθεια να συμπεριληφθεί ο ίδιος αριθμός έργων από το κάθε τεστ, αλλά στην τελική μορφή του δοκιμίου αφαιρέθηκαν ορισμένα έργα, για να περιοριστεί ο απαιτούμενος χρόνος συμπλήρωσης του δοκιμίου.

Αναλυτική Περιγραφή των Έργων του Τεστ Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου

Στα έργα του τεστ «Σύνθεση Σχημάτων» (Form-Board) παρουσιαζόταν στους μαθητές ένα σχήμα και κάτω από αυτό κάποια άλλα σχήματα. Το αρχικό σχήμα ήταν διαχωρισμένο από τα υπόλοιπα με μια γραμμή. Οι μαθητές έπρεπε να επιλέξουν τα σχήματα που βρίσκονταν κάτω από τη γραμμή τα οποία όταν ενώνονταν με κατάλληλο τρόπο

μπορούσαν να σχηματίσουν το αρχικό σχήμα. Για το κάθε έργο ήταν καθορισμένος ο αριθμός των σχημάτων που έπρεπε να ενωθούν. Ο βαθμός δυσκολίας των έργων καθοριζόταν από τον αριθμό των σχημάτων που έπρεπε να ενωθούν και από τις περιστροφές που έπρεπε να γίνουν στα σχήματα, για να μπορέσουν να ενωθούν με τρόπο ώστε να σχηματίσουν το αρχικό σχήμα (δείτε πρώτο παράδειγμα στον Πίνακα 3.1).

Στα έργα του τεστ «Δίπλωση Σχημάτων» (Paper-Folding) παρουσιάζονταν στους μαθητές ο τρόπος που διπλώθηκε ένα φύλλο χαρτιού και στη συνέχεια το σημείο όπου ανοίχτηκε μια οπή στο διπλωμένο χαρτί. Οι μαθητές καλούνταν να φανταστούν πώς θα φαινόταν το φύλλο χαρτιού, όταν ανοιγόταν. Ο βαθμός δυσκολίας των έργων εξαρτιόνταν από τον αριθμό των διπλωμάτων και τον τρόπο δίπλωσης του φύλλου χαρτιού. Για παράδειγμα, τα έργα στα οποία το δίπλωμα ήταν κατά μήκος της διαγωνίου θεωρήθηκαν πιο δύσκολα, ενώ έργα στα οποία το δίπλωμα γινόταν παράλληλα με πλευρά του χαρτιού θεωρήθηκαν πιο εύκολα (δείτε δεύτερο παράδειγμα στον Πίνακα 3.1).

Στα έργα του τεστ «Αναπτύγματα Σχημάτων» (Surface-Development) παρουσιάστηκε στους μαθητές το ανάπτυγμα ενός στερεού στο οποίο φαινόταν σε ποια σημεία έπρεπε να διπλωθεί το χαρτόνι. Οι πλευρές του αναπτύγματος ήταν αριθμημένες και οι μαθητές έπρεπε να αντιστοιχήσουν συγκεκριμένες ακμές του στερεού με τις αριθμημένες πλευρές του αναπτύγματος. Ένα τμήμα του αναπτύγματος και η αντίστοιχη έδρα του στερεού ήταν σκιασμένα. Στα έργα αυτά ο βαθμός δυσκολίας καθορίστηκε από τη γωνία δίπλωσης των εδρών του αναπτύγματος και τον αριθμό των διπλώσεων κάθε έδρας (δείτε τρίτο παράδειγμα στον Πίνακα 3.1).

Στα έργα του τεστ «Περιστροφή Καρτών» (Card-Rotation) παρουσιάστηκε στους μαθητές ένα σχήμα και κάτω από αυτό πέντε άλλα σχήματα τα οποία αποτελούσαν περιστροφή ή ανάκλαση του αρχικού σχήματος. Οι μαθητές καλούνταν να αναγνωρίσουν ποιο από τα πέντε σχήματα αποτελούσε περιστροφή του αρχικού σχήματος (δείτε τέταρτο παράδειγμα στον Πίνακα 3.1).

Στα έργα του τεστ «Σύγκριση Κύβων» (Cube-Comparison) παρουσιάστηκαν στους μαθητές δύο κύβοι. Στις έδρες των δύο κύβων υπήρχαν σύμβολα ή γράμματα και οι μαθητές κλήθηκαν να αποφασίσουν κατά πόσον ο δεύτερος κύβος μπορούσε να προκύψει από περιστροφή του πρώτου κύβου. Ο βαθμός πολυπλοκότητας των έργων καθορίστηκε από τον προσανατολισμό των σχημάτων ή γραμμμάτων στις έδρες των κύβων (δείτε πέμπτο παράδειγμα στον Πίνακα 3.1).

Στα έργα του τεστ «Ίδια/Διαφορετικά Αντικείμενα» (Same/Different Structures) παρουσιάστηκε στους μαθητές ένα τρισδιάστατο αντικείμενο και κάτω από αυτό τέσσερα

άλλα αντικείμενα. Τα τρία από αυτά είχαν τύχει περιστροφής του αρχικού σχήματος και το τέταρτο είχε μια μικρή διαφορά από το αρχικό. Οι μαθητές έπρεπε να αναγνωρίσουν το διαφορετικό σχήμα. Ο βαθμός πολυπλοκότητας των έργων καθορίστηκε από τη γωνία προβολής και περιστροφής του αντικειμένου (δείτε έκτο παράδειγμα στον Πίνακα 3.1).

Στα έργα του τεστ «Προσανατολισμός Αντικειμένων στο Χώρο» (Object Perspective) παρουσιάστηκε στους μαθητές μια διάταξη επτά αντικειμένων. Σε κάθε έργο οι μαθητές έπρεπε να φανταστούν ότι βρίσκονταν σε ένα από τα αντικείμενα (σταθερό σημείο) και βλέποντας προς ένα από τα άλλα αντικείμενα να σημειώσουν την κατεύθυνση ενός άλλου αντικειμένου (σημείο στόχος). Στους μαθητές δόθηκε ένας κύκλος όπου στο κέντρο του υπήρχε σχεδιασμένο το σταθερό σημείο και το σημείο στο οποίο κοίταζε ήταν σημειωμένο με ένα κατακόρυφο βέλος. Οι μαθητές έπρεπε να σχεδιάσουν ακόμη ένα βέλος από το κέντρο του κύκλου δείχνοντας το σημείο στόχος. Οι μαθητές δεν μπορούσαν να περιστρέψουν το φύλλο της ερώτησης (δείτε πρώτο παράδειγμα στον Πίνακα 3.2).

Στα έργα του τεστ «Προβολές Εικόνων» (Pictures Perspective) παρουσιάστηκε στους μαθητές ένα άτομο που παρατηρούσε ένα αντικείμενο που βρισκόταν ακριβώς μπροστά του. Οι μαθητές έπρεπε να αναγνωρίσουν ποια από τις τέσσερις επιλογές του έργου αντιπροσώπευε την πρόσοψη του αντικειμένου, όπως την έβλεπε το άτομο στην εικόνα. Ο βαθμός πολυπλοκότητας των έργων εξαρτιόταν από τη γωνία θέασης του ατόμου και την πολυπλοκότητα της κατασκευής.

Τεστ Εννοιών Γεωμετρίας του Χώρου

Για τη μέτρηση της ικανότητας των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου αναπτύχθηκε γραπτό τεστ το οποίο περιλάμβανε ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής και ερωτήσεις ανοικτού τύπου. Το περιεχόμενο του τεστ (δείτε Παράρτημα II) αναφερόταν στις βασικότερες έννοιες της γεωμετρίας του χώρου, με έμφαση στην αναγνώριση και στη μελέτη των ιδιοτήτων των σχημάτων, στο χειρισμό και σχεδιασμό των στερεών σε διαφορετικές προβολές, στη δόμηση των αντικειμένων στο χώρο (spatial structuring), στον υπολογισμό του αριθμού μοναδιαίων κύβων που περιέχονται σε στερεά ή σε διατάξεις κύβων στο χώρο, στην αναγνώριση και κατασκευή των αναπτυγμάτων και στην εκτίμηση και υπολογισμό της χωρητικότητας/ όγκου και επιφάνειας των τρισδιάστατων σχημάτων. Το τεστ συμπεριλάμβανε δεκαεννέα έργα.

Για την ανάπτυξη του τεστ χρησιμοποιήθηκαν (α) έργα που είχαν χρησιμοποιηθεί σε προηγούμενες έρευνες και κρίθηκαν κατάλληλα για τη μέτρηση της ικανότητας των μαθητών σε παράγοντες της γεωμετρίας στο χώρο και (β) έργα που αναπτύχθηκαν για τους σκοπούς της συγκεκριμένης εργασίας για τη μέτρηση παραγόντων για τους οποίους κρίθηκε ότι δεν υπήρχαν κατάλληλα έργα μέτρησης ή ότι τα έργα που είχαν χρησιμοποιηθεί από άλλους ερευνητές δεν ήταν κατάλληλα.

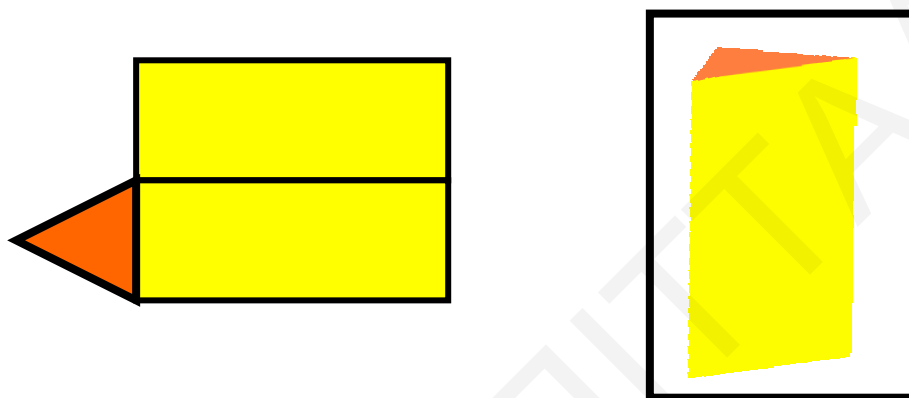
Στο τεστ συμπεριλήφθηκαν έργα που είχαν χρησιμοποιηθεί από τον Battista (1999) και αναφέρονταν (α) στον υπολογισμό των μοναδιαίων κύβων που χωρούν σε ένα κιβώτιο (δείτε τρίτο παράδειγμα στον Πίνακα 3.3) και (β) στον υπολογισμό της χωρητικότητας και της επιφάνειας κιβωτίων με βάση το ανάπτυγμά τους (δείτε πέμπτο παράδειγμα στον Πίνακα 3.3). Στο έργο υπολογισμού του αριθμού των κύβων που χωρούν σε ένα κιβώτιο παρουσιάστηκε στους μαθητές ένα κιβώτιο σχεδιασμένο σε κανονική μορφή και οι δύο έδρες του που φαίνονταν ήταν χωρισμένες σε τετράγωνα με μοναδιαίες διαστάσεις. Ζητήθηκε να υπολογιστεί ο αριθμός των μοναδιαίων κύβων που χρειάζονται, για να γεμίσει το κιβώτιο. Τα έργα αυτά αναφέρονταν στην ικανότητα διάταξης αντικειμένων στο χώρο. Στα έργα υπολογισμού της χωρητικότητας και επιφάνειας κιβωτίων με βάση το ανάπτυγμά τους, παρουσιάστηκαν στους μαθητές αναπτύγματα των οποίων οι έδρες ήταν χωρισμένες σε τετράγωνα με μοναδιαίες διαστάσεις.

Πίνακας 3.3

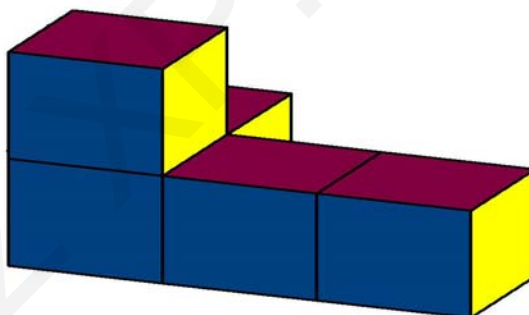
Παραδείγματα Έργων του Τεστ Εννοιών της Γεωμετρίας του Χώρου

Αναγνώριση και κατασκευή αναπτυγμάτων

Να συμπληρώσεις το πιο κάτω ανάπτυγμα, ώστε όταν διπλωθεί να κατασκευαστεί το τριγωνικό πρίσμα που φαίνεται δίπλα.



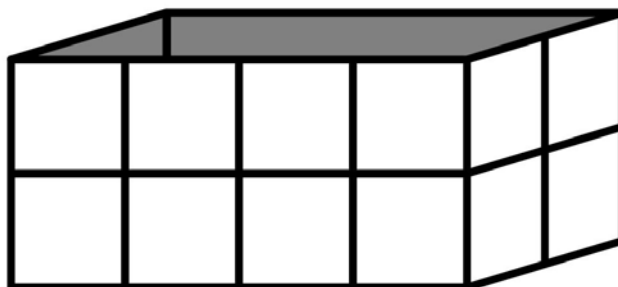
Χειρισμός διαφορετικών μορφών αναπαράστασης τρισδιάστατων αντικειμένων



Να σχεδιάσετε την πρόσοψη, την πλάγια όψη και την κάτοψη του στερεού.

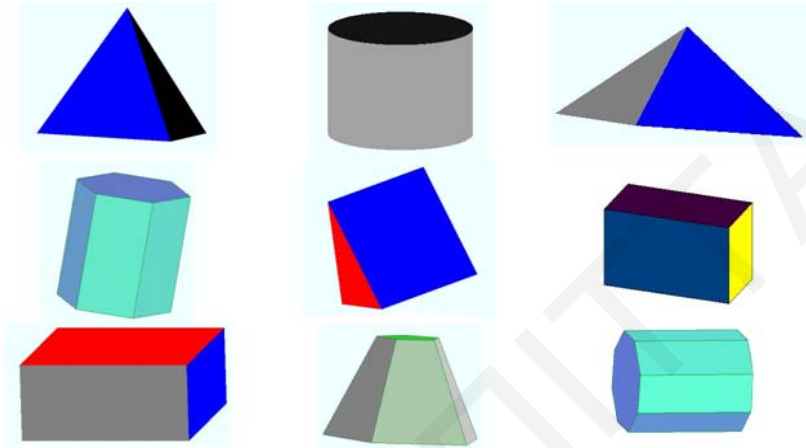
Διάταξη αντικειμένων στο χώρο

Πόσοι κύβοι χρειάζονται για να γεμίσει το κιβώτιο;

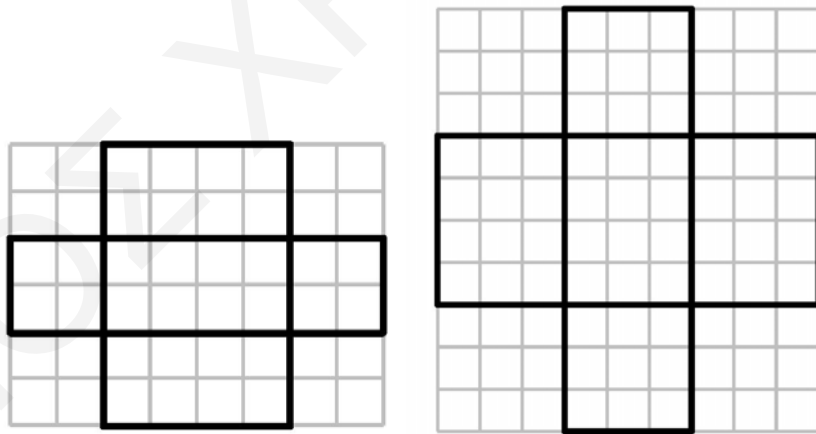


Αναγνώριση στερεών και των συστατικών τους στοιχείων

Να βάλεις σε κύκλο τα στερεά που έχουν τουλάχιστον οκτώ κορυφές.



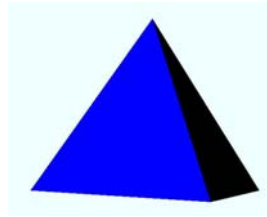
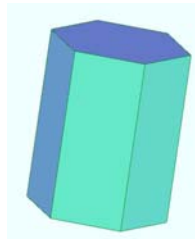
Μέτρηση επιφάνειας και χωρητικότητας τρισδιάστατων αντικειμένων



Ποιο ανάπτυγμα κατασκευάζει το κιβώτιο με τη μεγαλύτερη χωρητικότητα;

Συλλογισμός για σχέσεις μεταξύ στοιχείων στερεών και ιδιοτήτων στερεών

Στην εικόνα βλέπεις ένα πρίσμα, μια πυραμίδα και ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Να γράψεις δίπλα από κάθε πρόταση κατά πόσον είναι σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).



A/A	Πρόταση
1	Οι ακμές και των τριών στερεών είναι ευθύγραμμα τμήματα.
2	Το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο ΔΕΝ είναι ένα τετραγωνικό πρίσμα.
3	Όλες οι πυραμίδες έχουν τριγωνικές έδρες.
4	Το πρίσμα και το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχουν έδρες σχήματος ορθογωνίου.
5	Η βάση και των τριών στερεών μπορεί να είναι ένα τετράγωνο.
6	Η βάση και των τριών στερεών μπορεί να είναι ένα τρίγωνο

Τα έργα που αναπτύχθηκαν για τους σκοπούς της έρευνας και είχαν ως στόχο την αξιολόγηση της ικανότητας των μαθητών σε ένα ευρύ φάσμα ικανοτήτων και δεξιοτήτων στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου βασίστηκαν στα αποτελέσματα σχετικών ερευνητικών προσπαθειών. Αναπτύχθηκαν έργα που αναφέρονταν στις πιο κάτω έννοιες: (α) *Δυσκολία μαθητών στο χειρισμό διαφορετικών μορφών αναπαράστασης τρισδιάστατων σχημάτων* (Parzysz, 1988). Δύο έργα (δείτε έργα 4 και 15 στο Παράρτημα II) σχετίζονταν με τη μετάφραση μεταξύ διαφορετικών μορφών αναπαράστασης, όπως ο σχεδιασμός της ορθογωνίας προβολής ενός αντικειμένου με βάση την πλάγια προβολή και αντίστροφα (δείτε το δεύτερο παράδειγμα στον Πίνακα 3.3). Σε άλλο έργο (δείτε έργο 12 στο Παράρτημα II) οι μαθητές έπρεπε να αναγνωρίσουν τον αριθμό των εδρών σε σχήματα τα οποία ήταν σχεδιασμένα σε διαφανή μορφή και η γωνία θέασης μπορούσε να μερδένει τον παρατηρητή. Παρόμοια δυσκολία υπήρχε και σε έργο (δείτε έργο 14 στο Παράρτημα II) στο οποίο οι μαθητές έπρεπε να εντοπίσουν παράλληλες και κάθετες ακμές στο σχέδιο ενός κύβου. Στο έργο αυτό τα υποκείμενα έπρεπε να αναγνωρίσουν και να αποδεχτούν συγκεκριμένες συμβάσεις στο σχεδιασμό του στερεού. (β) *Αναγνώριση και κατασκευή αναπτυγμάτων* (Mariotti, 1989). Τέσσερα έργα του τεστ είχαν ως στόχο να αξιολογήσουν

την ικανότητα των μαθητών στην αναγνώριση και στην κατασκευή αναπτυγμάτων (δείτε έργα 3, 5, 8 και 10 στο Παράρτημα II). Στο πρώτο έργο παρουσιάστηκαν στους μαθητές εννέα αναπτύγματα και ζητήθηκε να αναγνωριστούν τα αναπτύγματα τα οποία όταν διπλωθούν μπορούσαν να κατασκευάσουν ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Στο δεύτερο έργο οι μαθητές έπρεπε να επιλέξουν τα δισδιάστατα σχήματα που όταν ενώνονταν θα μπορούσαν να κατασκευάσουν ένα κύλινδρο. Στο τρίτο έργο οι μαθητές έπρεπε να αναγνωρίσουν τα αναπτύγματα που όταν διπλώνονταν θα μπορούσαν να κατασκευάσουν τριγωνική πυραμίδα. Στο τέταρτο έργο παρουσιάστηκε στους μαθητές ένα ημιτελές ανάπτυγμα τριγωνικού πρίσματος και ζητήθηκε να συμπληρωθεί, ώστε να μπορεί να κατασκευάσει όταν διπλωθεί ένα τριγωνικό πρίσμα (δείτε πρώτο παράδειγμα στον Πίνακα 3.3).

(γ) *Αναγνώριση στερεών και των συστατικών τους στοιχείων* (Gutierrez, 1992). Τρία έργα (δείτε έργα 1, 16 και 19 στο Παράρτημα II) είχαν ως στόχο να αξιολογήσουν την ικανότητα των μαθητών στην αναγνώριση στερεών και των συστατικών τους στοιχείων. Για παράδειγμα, στο πρώτο έργο ζητήθηκε να αναγνωριστούν τα στερεά τα οποία δεν ήταν ορθογώνια παραλληλεπίπεδα. Στο δεύτερο έργο οι μαθητές έπρεπε να εντοπίσουν τα στερεά που είχαν τουλάχιστον οκτώ κορυφές (δείτε τέταρτο παράδειγμα στον Πίνακα 3.3). Στο τρίτο έργο οι μαθητές έπρεπε να υπολογίσουν τον αριθμό των κορυφών, εδρών και ακμών τριών πυραμίδων που ήταν σχεδιασμένες σε διαφανή προβολή και έτσι όλα τα στοιχεία τους ήταν ορατά.

(δ) *Συλλογισμός για σχέσεις μεταξύ στοιχείων και ιδιοτήτων στερεών*. Τρία έργα του τεστ (δείτε Έργο 9 και τα δύο τελευταία ερωτήματα του Έργου 19) αναφέρονταν στη σύγκριση στερεών, στη σύγκριση των εξωτερικών στοιχείων και των ιδιοτήτων των στερεών και στην εξαγωγή και εφαρμογή σχέσεων. Στο πρώτο έργο οι μαθητές έπρεπε να αποφασίσουν για την ορθότητα δηλώσεων που σχετίζονταν με τη σύγκριση των στοιχείων ή ιδιοτήτων των στερεών. Στο δεύτερο έργο οι μαθητές έπρεπε να διατυπώσουν τη σχέση μεταξύ του αριθμού των κορυφών, εδρών και ακμών στις πυραμίδες και στο τρίτο έργο να εφαρμόσουν τη σχέση αυτή σε πυραμίδα με διαφορετικό σχήμα βάσης.

(ε) *Υπολογισμός της χωρητικότητας και επιφάνειας τρισδιάστατων αντικειμένων*. Εκτός από τα έργα που είχαν χρησιμοποιηθεί από τον Battista (1999) για τον υπολογισμό της χωρητικότητας και επιφάνειας ορθογώνιων παραλληλεπίπεδων με βάση το ανάπτυγμά τους, στο τεστ συμπεριλήφθηκε ακόμη ένα έργο υπολογισμού επιφάνειας (δείτε Έργο 6 στο Παράρτημα II) και ένα έργο που αναφερόταν στον υπολογισμό χωρητικότητας (δείτε Έργο 18 στο Παράρτημα II). Στο πρώτο έργο παρουσιάστηκε στους μαθητές ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο που ήταν κατασκευασμένο από κύβους και οι μαθητές έπρεπε να υπολογίσουν πόσα τετραγωνικά εκατοστόμετρα χαρτί περιτυλίγματος χρειάζονταν, για να καλυφθεί πλήρως. Στο δεύτερο έργο οι μαθητές έπρεπε να συγκρίνουν

τη χωρητικότητα ενός ντεπόζιτου σχήματος κύβου με ένα ντεπόζιτο κυλινδρικού σχήματος. (στ) *Διάταξη αντικειμένων στο χώρο*. Εκτός από τα έργα του Battista (1999), στο τεστ συμπεριλήφθηκαν δύο έργα (δείτε ερωτήματα (α) και (β) του Έργου 7 στο Παράρτημα II) που αναφέρονταν στη διάταξη αντικειμένων στο χώρο. Στο πρώτο έργο οι μαθητές έπρεπε να υπολογίσουν το συνδυασμό κύβων και ράβδων που χρειάζονταν, για να γεμίσει ένα ανοικτό κιβώτιο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου του οποίου οι πλαϊνές έδρες ήταν ανοικτές (στο κιβώτιο υπήρχαν ήδη αντικείμενα). Στο δεύτερο έργο οι μαθητές έπρεπε να υπολογίσουν τον αριθμό κύβων που χρειάζονταν, για να γεμίσει το κιβώτιο του προηγούμενου έργου αφού αφαιρούνταν τα αντικείμενα που υπήρχαν προηγουμένως.

Ο τρόπος που έγινε ο σχεδιασμός του δοκιμίου, ο χρόνος που ήταν απαραίτητος για τη συμπλήρωσή του και η διατύπωση των ερωτημάτων είχαν ως στόχο να αναπτυχθεί ένα τεστ που να μπορούσε να δοθεί υπό μορφή γραπτού δοκιμίου σε όλες τις ηλικίες των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα.

Εγκυρότητα Εργαλείων Μέτρησης

Τεστ Μέτρησης Ικανότητας Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου

Λόγω του γεγονότος ότι τα έργα του τεστ προέρχονταν από ευρέως αποδεκτά τεστ μέτρησης των εξεταζόμενων παραγόντων της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου, πραγματοποιήθηκε επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση, για να εξεταστεί η εγκυρότητα γνώρισμα (construct validity) του τεστ. Με βάση τη βιβλιογραφία για τα τεστ που χρησιμοποιήθηκαν, έγινε έλεγχος της εγκυρότητας ενός προτεινόμενου μοντέλου με βάση το οποίο έργα από τα τεστ «Σύνθεση Σχημάτων» (Form-Board), «Δίπλωση Σχημάτων» (Paper-Folding) και «Αναπτύγματα Σχημάτων» (Surface- Development) που περιλαμβάνονται στο ETS kit of Factor-Referenced Cognitive Tests (Ekstrom et al., 1976) αποτελούν γνώρισμα του παράγοντα «Οπτικοποίηση των Εννοιών του Χώρου» και έργα από τα τεστ «Περιστροφή Καρτών» (Card Rotations) και «Σύγκριση Κύβων» (Cube Comparisons) αποτελούν γνώρισμα του παράγοντα «Σχέσεις των Εννοιών του Χώρου» αντίστοιχα.

Για τον έλεγχο της εγκυρότητας γνωρίσματος του τεστ πραγματοποιήθηκε πιλοτική χορήγηση του τεστ. Το τεστ που χρησιμοποιήθηκε στην πιλοτική χορήγηση δεν συμπεριλάμβανε έργα που αναφέρονται στον παράγοντα Προσανατολισμός στο Χώρο (SO). Τα έργα του παράγοντα αυτού προστέθηκαν κατά τη διαδικασία τελικής μορφοποίησης του δοκιμίου μετά από πιο συστηματική μελέτη ερευνητικών εργασιών που δίνουν έμφαση στη σημασία διάκρισης της ικανότητας νοερής περιστροφής αντικειμένων από τις καταστάσεις που εμπλέκεται ο προσανατολισμός του σώματος του παρατηρητή.

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης των δεδομένων της πιλοτικής χορήγησης έδειξαν, ότι η προσαρμογή του μοντέλου στα δεδομένα ήταν ικανοποιητική, επιβεβαιώνοντας τη δομή του προτεινόμενου μοντέλου ($CFI=.92$, $\chi^2=125.81$, $df=90$, $\chi^2/df=1.39$, $RMSEA=.04$). Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης έδειξαν ότι όλα τα έργα είχαν στατιστικά σημαντικές φορτίσεις στους αντίστοιχους παράγοντες, εκτός από τις φορτίσεις των έργων του τεστ «Σύγκριση Κύβων» (δείτε Διάγραμμα 3.1).

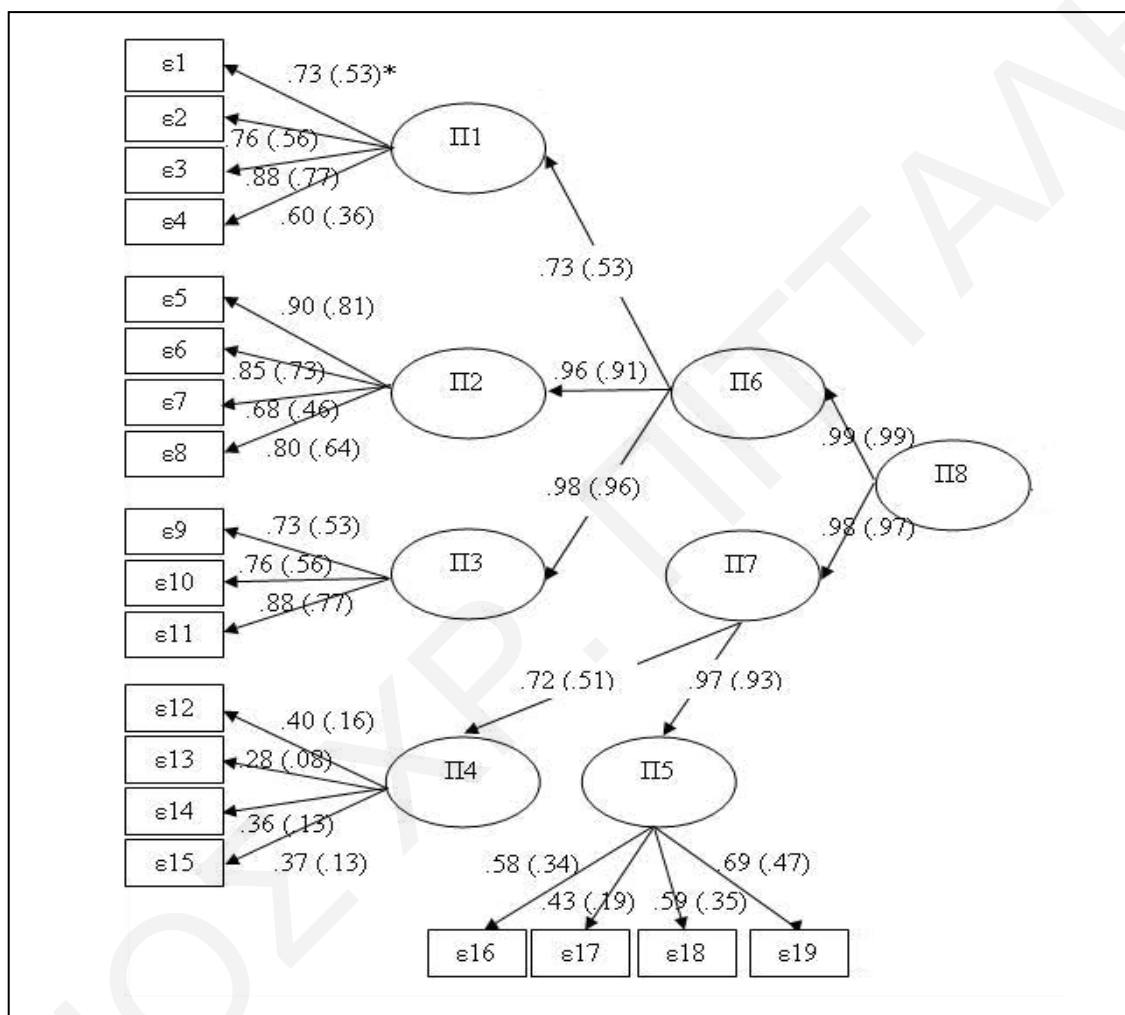
Οι χαμηλές φορτίσεις των έργων του τεστ «Σύγκριση Κύβων» σε συνδυασμό με το γεγονός ότι ο βαθμός επιτυχίας των μαθητών στα έργα αυτά ήταν ιδιαίτερα χαμηλός, αποτέλεσαν ένδειξη για την ύπαρξη πιθανόν προβλημάτων κατανόησης από τους μαθητές. Για αυτό στην χορήγηση των τεστ κατά την κύρια φάση της έρευνας δόθηκε περισσότερη σημασία στην επεξήγηση των απαιτήσεων των έργων αυτών. Για την καλύτερη μέτρηση του παράγοντα «Σχέσεις των Εννοιών του Χώρου», στην τελική μορφή του τεστ προστέθηκαν και έργα από το τεστ «Ίδιες/Διαφορετικές Κατασκευές», ώστε ο παράγοντας αυτός να αποτελεί σύνθεση τριών παραγόντων πρώτης τάξης.

Η επιβεβαίωση του μοντέλου έδειξε τα έργα του τεστ αποτελούσαν κατάλληλους δείκτες των αντίστοιχων παραγόντων. Με βάση τα αποτελέσματα αυτά θεωρήθηκε ότι η εγκυρότητα γνωρίσματος του εργαλείου μέτρησης της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου ήταν ικανοποιητική.

Τεστ Μέτρησης Ικανότητας στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου

Τα περισσότερα έργα του δοκιμίου μέτρησης της ικανότητας των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου αναπτύχθηκαν για τους σκοπούς της έρευνας. Για αυτό κρίθηκε σκόπιμο να ελεγχθεί η φαινομενική εγκυρότητα των έργων. Ζητήθηκε από δύο ερευνητές της μαθηματικής παιδείας και δύο εκπαιδευτικούς (δημοτικής και μέσης εκπαίδευσης) να αξιολογήσουν τα έργα που κατασκευάστηκαν ως προς την καταλληλότητά τους και ως

προς τον βαθμό συνάφειας με τις έννοιες και τους παράγοντες για τους οποίους αποτελούν δείκτες μέτρησης. Τα έργα τα οποία τουλάχιστον τρεις αξιολογητές θεώρησαν ως κατάλληλα δεν έτυχαν τροποποίησης, ενώ έγιναν οι απαραίτητες διορθώσεις στα έργα τα οποία τουλάχιστον δύο αξιολογητές έκριναν προβληματικά.



Σημείωση: Π1=Τεστ «Αναπτύγματα Σχημάτων», Π2=Τεστ «Σύνθεση Σχημάτων», Π3=Τεστ «Δίπλωση Σχημάτων», Π4=Τεστ «Σύγκριση Κύβων», Π5=Τεστ «Περιστροφή Καρτών», Π6=Οπτικοποίηση των Εννοιών του Χώρου, Π7=Σχέσεις των Εννοιών του Χώρου, Π8=Ικανότητα Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου, ε1-ε19 αναφέρονται στα έργα του τεστ μέτρησης της αντίληψης των εννοιών του χώρου κατά την πιλοτική φάση.

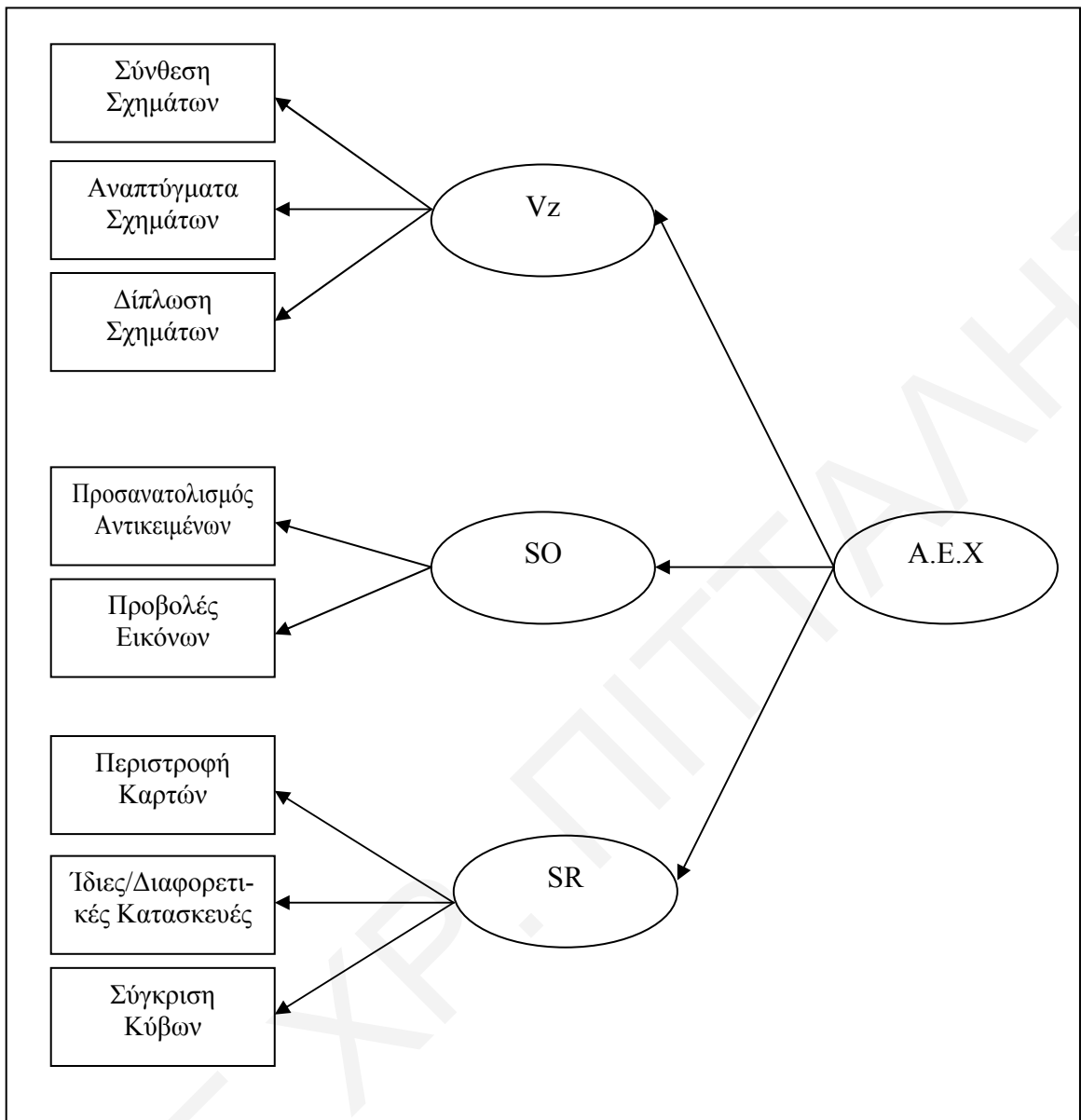
* Ο πρώτος αριθμός δείχνει το συντελεστή φόρτισης και ο αριθμός στην παρένθεση την αντίστοιχη ερμηνευμένη διασπορά (r^2).

Διάγραμμα 3.1. Μοντέλο ελέγχου εγκυρότητας γνωρίσματος τεστ ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου.

Το Προτεινόμενο Μοντέλο Σύνθεσης της Ικανότητας Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου

Στην παρούσα εργασία έγινε προσπάθεια περιγραφής της δομής της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου μαθητών Ε΄ δημοτικού μέχρι Γ΄ γυμνασίου. Για το σκοπό αυτό, ελέγχθηκε η εγκυρότητα ενός μοντέλου στο οποίο οι παράγοντες «Οπτικοποίηση των Εννοιών του Χώρου (Spatial Visualization: VZ)», «Προσανατολισμός στο Χώρο (Spatial Orientation: SO)» και «Σχέσεις των Εννοιών του Χώρου (Spatial Relations: SR)» συνθέτουν την ικανότητα Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου. Το μοντέλο αυτό στηρίχτηκε στη θεωρία του Lohman (1988), ο οποίος περιγράφει την ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου με βάση αυτούς τους τρεις παράγοντες. Παρά το γεγονός ότι στη βιβλιογραφία αναφέρεται αριθμός άλλων παραγόντων της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου, στο συγκεκριμένο μοντέλο περιλήφθηκαν μόνο οι παράγοντες «Οπτικοποίηση των Εννοιών του Χώρου», «Προσανατολισμός στο Χώρο» και «Σχέσεις των Εννοιών του Χώρου» γιατί θεωρήθηκαν ως οι πιο σημαντικοί (Colom, Contreras, Botella, & Santacreu, 2001 · Hegarty & Waller, 2004 · Zacks, Mires, Tversky & Hazeltine, 2002).

Όπως παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 3.2, με βάση το προτεινόμενο μοντέλο ο παράγοντας «Οπτικοποίηση των Εννοιών του Χώρου» σχηματίζεται από τρεις άδηλους παράγοντες πρώτης τάξης, ο παράγοντας «Προσανατολισμός στο Χώρο» από δύο άδηλους παράγοντες πρώτης τάξης και ο παράγοντας «Σχέσεις των Εννοιών του Χώρου» από τρεις άδηλους παράγοντες πρώτης τάξης, αντίστοιχα. Ο παράγοντας «Οπτικοποίηση των Εννοιών του Χώρου» σχηματίζεται από τους παράγοντες πρώτης τάξης «Σύνθεση Σχημάτων», «Αναπτύγματα Σχημάτων» και «Δίπλωση Σχημάτων». Ο παράγοντας «Προσανατολισμός στο Χώρο» σχηματίζεται από τους παράγοντες πρώτης τάξης «Προσανατολισμός Αντικειμένων στο Χώρο» και «Προβολές Εικόνων». Τέλος, ο παράγοντας «Σχέσεις των Εννοιών του Χώρου» σχηματίζεται από τους παράγοντες πρώτης τάξης «Σύγκριση Κύβων», «Περιστροφή Καρτών» και «Ίδιες/Διαφορετικές Κατασκευές». Τέλος, οι τρεις παράγοντες δεύτερης τάξης «Οπτικοποίηση των Εννοιών του Χώρου», «Προσανατολισμός στο Χώρο» και «Σχέσεις των Εννοιών του Χώρου» μπορούν να ερμηνεύσουν την επίδοσή των μαθητών στα έργα του τεστ μέτρησης της ικανότητας Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου και να συνθέσουν τον παράγοντα τρίτης τάξης «Αντίληψη των Εννοιών του Χώρου» (Spatial Ability).



Διάγραμμα 3.2. Το Προτεινόμενο μοντέλο της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου.

Οι παράγοντες που περιγράφηκαν πιο πάνω σχετίζονται με αντίστοιχες έννοιες που αναφέρονται στον τομέα της μαθηματικής εκπαίδευσης. Ο παράγοντας «Οπτικοποίηση των Εννοιών του Χώρου», για παράδειγμα, συνδέεται άμεσα με την έννοια της «οπτικοποίησης» που ορίζεται από ερευνητές ως η ικανότητα οπτικής αντίληψης στο μυαλό (Senechal, 1991), ως ο συλλογισμός που στηρίζεται σε οπτικά στοιχεία ή στοιχεία που αναφέρονται σε σχέσεις στο χώρο, νοητικά ή φυσικά, και στοχεύει στην επίλυση προβλημάτων (Gutierrez, 1996). Οι ορισμοί αυτοί ήταν αποτέλεσμα της προσπάθειας των ερευνητών της μαθηματική παιδείας να συγκεκριμενοποιήσουν και να μαθηματικοποιήσουν τον παράγοντα «Οπτικοποίηση των Εννοιών του Χώρου». Τα τεστ

που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία για τη μέτρηση του παράγοντα αυτού απαιτούσαν την ενεργοποίηση διαδικασιών που περιγράφηκαν πιο πάνω. Για παράδειγμα, στη συμπλήρωση των έργων του τεστ «Σύνθεση Σχημάτων» οι μαθητές έπρεπε να επεξεργαστούν τα σχήματα που είχαν μπροστά τους, να δημιουργήσουν τη νοητική τους εικόνα και να τα επεξεργαστούν νοερά, κάνοντας τις απαραίτητες περιστροφές στο μυαλό τους, για να αποφασίσουν ποια σχήματα και με ποιο τρόπο πρέπει να ενωθούν ώστε να κατασκευαστεί το επιθυμητό σχήμα. Συνεπώς, τα αποτελέσματα της εργασίας δεν περιγράφουν την ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου αποκλειστικά με ψυχολογικούς όρους, αλλά σε ένα ευρύτερο πλαίσιο που τυγχάνει εφαρμογής και στα μαθηματικά.

Το Προτεινόμενο Μοντέλο Σύνθεσης της Ικανότητας στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου

Με βάση την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας, η ικανότητα στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου δεν αποτελεί μια μονοδιάστατη οντότητα, αλλά συμπεριλαμβάνει διαφορετικές έννοιες και διαδικασίες, όπως η μελέτη στερεών και των μεταξύ τους σχέσεων, ο χειρισμός στερεών σε διαφορετικές προβολές και ο τρόπος αναπαράστασής τους, η ικανότητα δόμησης αντικειμένων στο χώρο, ο τρόπος υπολογισμού του εμβαδού και της χωρητικότητας τρισδιάστατων αντικειμένων και η αναγνώριση και κατασκευή αναπτυγμάτων τρισδιάστατων κατασκευών (Clements, Swaminathan, Hannibal & Sarama, 1999· Gutierrez, 1992, 1996· Mariotti, 1989· Olkun, 2003· Parzys, 1988· Potari & Spiliotopoulou, 1992). Με βάση τη σύνθεση των αποτελεσμάτων της βιβλιογραφίας, ελέγχθηκε η εγκυρότητα ενός μοντέλου με βάση το οποίο οι παράγοντες «Αναγνώριση και Κατασκευή Αναπτυγμάτων», «Χειρισμός διαφορετικών Μορφών Αναπαράστασης Τρισδιάστατων Σχημάτων», «Διάταξη Αντικειμένων στο Χώρο», «Αναγνώριση Στερεών και των Συστατικών τους Στοιχείων», «Μέτρηση Χωρητικότητας και Επιφάνειας Τρισδιάστατων Σχημάτων Χωρίς τη Χρήση Τύπων» και «Συλλογισμός για Σχέσεις μεταξύ Στοιχείων και Ιδιοτήτων Στερεών» συνθέτουν την ικανότητα των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου.

Συνεπώς, το προτεινόμενο μοντέλο περιγράφει την ικανότητα στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου με βάση αυτούς τους παράγοντες. Με βάση τη δομή του μοντέλου

(α) τα έργα που αναφέρονται στην αναγνώριση και κατασκευή αναπτυγμάτων στερεών (δείτε Έργα 1-4 στον Πίνακα 3.4) αποτελούν δείκτες του παράγοντα «Αναγνώριση και Κατασκευή Αναπτυγμάτων» (Παράγοντας 1), (β) τα έργα που αναφέρονται στο σχεδιασμό ή αναγνώριση τρισδιάστατου αντικειμένου σε διαφορετική μορφή προβολής από αυτήν με την οποία παρουσιάζεται το αντικείμενο και έργα που σχετίζονται δυσκολίες αναγνώρισης ιδιοτήτων στερεών ως αποτέλεσμα της μορφής αναπαράστασης των στερεών (Έργα 5-10 στον Πίνακα 3.3) αποτελούν δείκτες του παράγοντα «Χειρισμός Διαφορετικών Μορφών Αναπαράστασης Τρισδιάστατων Αντικειμένων» (Παράγοντας 2), (γ) τα έργα που αναφέρονται στον υπολογισμό του αριθμού μοναδιαίων κύβων που χρειάζονται για να γεμίσει ή να κατασκευασθεί ένα στερεό και έργα που αναφέρονται στο συνδυασμό διαφορετικών αντικειμένων για να γεμίσει ένα στερεό (Έργα 11-15 στον Πίνακα 4.8) αποτελούν δείκτες του παράγοντα «Διάταξη Αντικειμένων στο Χώρο» (Παράγοντας 3), (δ) τα έργα που αναφέρονται στην αναγνώριση στερεών ή συστατικών στοιχείων των στερεών όπως είναι ο αριθμός των κορυφών, των εδρών και των ακμών (Έργα 16-20) αποτελούν δείκτες του παράγοντα «Αναγνώριση Στερεών και των Συστατικών τους Στοιχείων» (Παράγοντας 4), (ε) τα έργα που αναφέρονται στον υπολογισμό της επιφάνειας και χωρητικότητας τρισδιάστατων αντικειμένων που παρουσιάζονται με διαφορετικές μορφές αναπαράστασης χωρίς τη χρήση τύπων (Έργα 21-24) αποτελούν δείκτες του παράγοντα «Μέτρηση Επιφάνειας και Χωρητικότητας Τρισδιάστατων Αντικειμένων χωρίς τη Χρήση Τύπων» (Παράγοντας 5) και (στ) τα έργα που αναφέρονται στην αναγνώριση και εφαρμογή σχέσεων και σε σχέσεις εντός ή μεταξύ στερεών (Έργα 25-27) αποτελούν δείκτες του παράγοντα «Συλλογισμός για Σχέσεις μεταξύ Στοιχείων και Ιδιοτήτων των Στερεών» (Παράγοντας 6). Η επιλογή των έργων έγινε με βάση τα αποτελέσματα σύγχρονων σχετικών ερευνών που αναφέρονται στους συγκεκριμένους παράγοντες.

Πίνακας 3.4

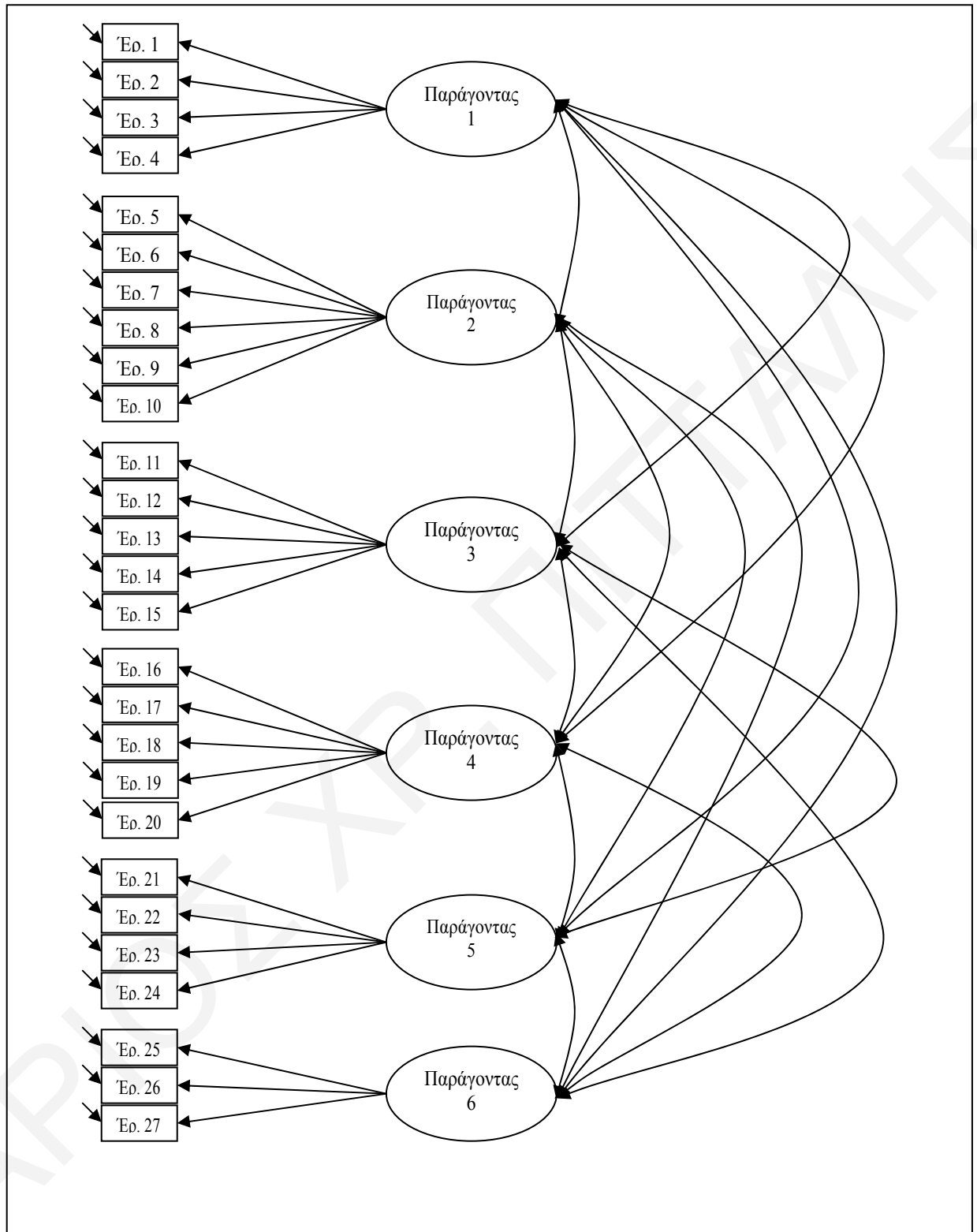
Περιγραφή Παραγόντων και Έργων Παραγόντων Ικανότητας στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου

A/A	Περιγραφή Παράγοντα	Περιγραφή Έργων Παραγόντων
Π1	Αναγνώριση και κατασκευή αναπτυγμάτων	- Έργο 1: Αναγνώριση αναπτυγμάτων ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου - Έργο 2: Επιλογή δισδιάστατων σχημάτων για κατασκευή κυλίνδρου

		<ul style="list-style-type: none"> - Έργο 3: Κατασκευή αναπτύγματος τριγωνικού πρίσματος - Έργο 4: Αναγνώριση αναπτυγμάτων πυραμίδας
Π2	Χειρισμός διαφορετικών μορφών αναπαράστασης τρισδιάστατων αντικειμένων	<ul style="list-style-type: none"> - Έργο 5: Μετάφραση ορθογωνίας προβολής σχεδιασμού αντικειμένου σε πλάγια προβολή - Έργο 6: Μετάφραση πλάγιας προβολής σχεδιασμού αντικειμένου σε ορθογωνία προβολή - Έργο 7: Αναγνώριση παράλληλων ακμών σε κύβο σχεδιασμένο σε πλάγια προβολή - Έργο 8: Αναγνώριση κάθετων ακμών σε κύβο σχεδιασμένο σε πλάγια προβολή - Έργο 9: Αναγνώριση αριθμού τριγωνικών εδρών τριγωνικής πυραμίδας που δίνεται σχεδιασμένη σε διαφανή μορφή και υπό γωνία - Έργο 10: Αναγνώριση αριθμού τριγωνικών εδρών τριγωνικού πρίσματος που δίνεται σχεδιασμένο σε διαφανή μορφή και υπό γωνία
Π3	Διάταξη αντικειμένων στο χώρο	<ul style="list-style-type: none"> - Έργο 11: Υπολογισμός αριθμού κύβων που χρειάζονται για να μετασχηματιστεί μια τρισδιάστατη κατασκευή σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο - Έργο 12: Εύρεση συνδυασμού κύβων και ορθογώνιων παραλληλεπιπέδων που χρειάζονται για να γεμίσει κιβώτιο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου (το κιβώτιο δεν είναι άδειο και είναι ανοικτό) - Έργο 13: Αριθμός κύβων που χρειάζονται για να γεμίσει κιβώτιο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου (το κιβώτιο δεν είναι άδειο και είναι ανοικτό) - Έργο 14 & 15: Αριθμός κύβων που χρειάζονται για να γεμίσει κιβώτιο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου (τα κιβώτια δίνονται σε κανονική μορφή)
Π4	Αναγνώριση στερεών και των συστατικών τους στοιχείων	<ul style="list-style-type: none"> - Έργο 16: Αναγνώριση ορθογώνιων παραλληλεπιπέδων - Έργο 17: Αναγνώριση στερεών που έχουν συγκεκριμένο αριθμό κορυφών - Έργο 18: Αναγνώριση αριθμού κορυφών πυραμίδων - Έργο 19: Αναγνώριση αριθμού εδρών πυραμίδων - Έργο 20: Αναγνώριση αριθμού ακμών πυραμίδων
Π5	Μέτρηση επιφάνειας και χωρητικότητας τρισδιάστατων	<ul style="list-style-type: none"> - Έργο 21: Υπολογισμός επιφάνειας στερεού που είναι κατασκευασμένο από κύβους - Έργο 22: Υπολογισμός επιφάνειας ορθογώνιων παραλληλεπιπέδων που δίνονται υπό μορφή ανοικτού

αντικειμένων χωρίς τη χρήση τύπων	<p>αναπτύγματος</p> <ul style="list-style-type: none"> - Έργο 23: Υπολογισμός χωρητικότητας ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων που δίνονται υπό μορφή ανοικτού αναπτύγματος - Έργο 24: Σύγκριση χωρητικότητας ντεποζίτων σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου και κυλίνδρου
Π6 Συλλογισμός για σχέσεις μεταξύ ιδιοτήτων στερεών	<ul style="list-style-type: none"> - Έργο 25: Ερωτήσεις τύπου ορθό/λάθος που αναφέρονται σε σχέσεις μεταξύ ιδιοτήτων στερεών και σχέσεις μεταξύ στερεών - Έργο 26: Αναγνώριση σχέσης μεταξύ αριθμού κορυφών, εδρών και ακμών στις πυραμίδες - Έργο 27: Εφαρμογή της σχέσης που αναφέρεται στον αριθμό των κορυφών, εδρών και ακμών στις πυραμίδες

Όπως παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 3.3, με βάση το προτεινόμενο μοντέλο οι πιο πάνω έξι παράγοντες αποτελούν διαφορετικές διαστάσεις της ικανότητας των μαθητών στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου και οι παράγοντες αυτοί αλληλοσχετίζονται μεταξύ τους. Υπόθεση του μοντέλου ήταν, επίσης, ότι τα έργα που περιγράφονται στον Πίνακα 3.3 αποτελούν κατάλληλους δείκτες μέτρησης των έξι παραγόντων.



Διάγραμμα 3.3. Το προτεινόμενο μοντέλο της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου.

Διαδικασία

Η διεξαγωγή της έρευνας πραγματοποιήθηκε σε πέντε φάσεις. Η πρώτη φάση περιλάμβανε τη μελέτη της σχετικής βιβλιογραφίας και την ανάπτυξη της αρχικής μορφής των εργαλείων. Ο στόχος της δεύτερης φάσης ήταν η προπilotική και πιλοτική χορήγηση των εργαλείων μέτρησης, για να γίνει η τελική τους διαμόρφωση. Στην τρίτη φάση έγινε η χορήγηση των τεστ στα υποκείμενα της έρευνας για τη συλλογή των ποσοτικών δεδομένων, ενώ στην τέταρτη φάση πραγματοποιήθηκαν οι κλινικές συνεντεύξεις. Στην πέμπτη φάση έγινε η τελική ανάλυση των δεδομένων και η εξαγωγή των συμπερασμάτων.

Συγκεκριμένα, η πρώτη φάση της έρευνας περιλάμβανε τις πιο κάτω δραστηριότητες:

- Έρευνα και μελέτη της βιβλιογραφίας για διαμόρφωση του θεωρητικού υπόβαθρου της εργασίας.
- Ανάπτυξη των εργαλείων μέτρησης της εργασίας με βάση τα αποτελέσματα προηγούμενων ερευνητικών προσπαθειών. Για την ανάπτυξη του τεστ μέτρησης της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου μελετήθηκαν σχετικά τεστ που αναπτύχθηκαν στον τομέα της γνωστικής ψυχολογίας. Στη συνέχεια, έγινε η επιλογή των κατάλληλων τεστ, τα οποία με βάση την επισκόπηση της βιβλιογραφίας θεωρήθηκαν οι καλύτεροι δείκτες των τριών παραγόντων που χρησιμοποιήθηκαν (Kozhevnikov & Hegarty, 2001).

Η δεύτερη φάση της εργασίας περιλάμβανε τις πιο κάτω δραστηριότητες:

- Προπilotική χορήγηση των εργαλείων μέτρησης. Πραγματοποιήθηκε προπilotική χορήγηση των δύο εργαλείων μέτρησης σε ένα τμήμα μαθητών Ε΄ τάξης δημοτικού σχολείου για να εξεταστούν: (α) δυσκολίες των μαθητών στην κατανόηση των λεκτικών στοιχείων των έργων, (β) δυσκολίες εννοιολογικής κατανόησης των έργων και (γ) ο χρόνος που ήταν απαραίτητος για να επιλυθούν τα έργα. Με βάση τα αποτελέσματα της προπilotικής χορήγησης έγιναν οι απαραίτητες διορθώσεις σε κάποια έργα στα οποία οι μαθητές αντιμετώπισαν προβλήματα κατανόησης και δεν μπόρεσαν να αντιληφθούν το ζητούμενο του έργου. Αφαιρέθηκαν, επίσης, έργα που απαιτούσαν περισσότερο από δέκα λεπτά για να επιλυθούν.
- Πιλοτική χορήγηση των εργαλείων μέτρησης: Πραγματοποιήθηκε πιλοτική χορήγηση των δύο εργαλείων μέτρησης σε 180 μαθητές της Ε΄ και της Στ΄ τάξης

του δημοτικού σχολείου. Η χορήγηση των δύο τεστ έγινε σε διαφορετικές μέρες. Στόχος της πιλοτικής χορήγησης ήταν ο έλεγχος της αξιοπιστίας και της εγκυρότητας των δύο τεστ, η εξέταση του δείκτη διάκρισης και δυσκολίας των έργων ώστε να εντοπιστούν προβληματικά έργα και να διαπιστωθεί κατά πόσον ήταν αναγκαία η συμπερίληψη νέων έργων στην τελική μορφή των τεστ. Συγκεκριμένα, όσον αφορά το τεστ μέτρησης της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου έγιναν οι πιο κάτω αλλαγές μετά την ανάλυση των αποτελεσμάτων της πιλοτικής χορήγησης: (α) Αντικατάσταση του τέταρτου έργου του τεστ «Περιστροφή Καρτών» με πιο σύνθετο έργο γιατί το ποσοστό επιτυχίας των μαθητών ήταν ιδιαίτερα ψηλό, (β) αφαίρεση των δύο πρώτων έργων του τεστ «Σύγκριση Κύβων» γιατί ο δείκτης αξιοπιστίας των έργων αυτών ήταν πολύ χαμηλός, (γ) αφαίρεση δύο έργων και προσθήκη ενός καινούριου στο τεστ «Σύνθεση Σχημάτων» γιατί το ποσοστό επιτυχίας ήταν πολύ ψηλό, (δ) προσθήκη τεσσάρων έργων του τεστ «Ίδιες/Διαφορετικές Κατασκευές», (ε) προσθήκη τριών έργων του τεστ «Προσανατολισμός Αντικειμένων στο Χώρο» και (στ) προσθήκη τεσσάρων έργων του τεστ «Προβολές Εικόνων». Οι λόγοι πραγματοποίησης των αλλαγών (δ), (ε) και (στ) επεξηγήθηκαν πιο πάνω.

Στο τεστ μέτρησης της ικανότητας των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου έγιναν οι πιο κάτω αλλαγές: (α) αλλαγή των πιθανών επιλογών στο έργο τύπου πολλαπλής επιλογής που αναφερόταν στη μετάφραση από ορθογώνια προβολή σε πλάγια προβολής γιατί το ποσοστό επιτυχίας ήταν πολύ ψηλό, (β) αλλαγή του στερεού στο έργο στο οποίο έπρεπε να υπολογιστεί το εμβαδόν της εξωτερικής επιφάνειας γιατί το ποσοστό αποτυχίας ήταν πολύ ψηλό, (γ) αλλαγή του δεύτερου μέρους του έργου που αναφερόταν στο συνδυασμό κύβων και ράβδων, για να γεμίσει ένα κιβώτιο γιατί το ποσοστό αποτυχίας ήταν πολύ ψηλό, (δ) αφαίρεση ενός έργου που αναφερόταν στον υπολογισμό του αριθμού των κορυφών, εδρών και ακμών ενός στερεού που προήλθε από ένωση άλλων στερεών γιατί κρίθηκε ότι μετρούσε την ίδια ικανότητα με τα άλλα δύο έργα αναγνώρισης του αριθμού κορυφών, εδρών και ακμών του τεστ, (ε) αφαίρεση ενός έργου που αναφερόταν στον αριθμό των τούβλων που χρησιμοποιήθηκαν για να κατασκευαστεί μια σκάλα γιατί αποφασίστηκε ότι μετρούσε την ίδια ικανότητα με άλλα τρία έργα του τεστ, (στ) αλλαγή του ζητούμενου στο έργο στο οποίο οι μαθητές έπρεπε να αναγνωρίσουν ποιο στερεό είχε συγκεκριμένο αριθμό κορυφών και συγκεκριμένο σχήμα εδρών. Το έργο τροποποιήθηκε ώστε οι μαθητές να αναγνωρίσουν τα στερεά που είχαν τουλάχιστον συγκεκριμένο αριθμό κορυφών

ανεξάρτητα από το σχήμα των εδρών. Η αλλαγή αυτή έγινε γιατί ο χαμηλός δείκτης αξιοπιστίας του έργου έδειξε ότι οι μαθητές δεν είχαν κατανοήσει το ζητούμενο. (ζ) Προσθήκη ενός έργου που αναφερόταν στην κατασκευή του αναπτύγματος τριγωνικού πρίσματος γιατί δεν υπήρχε έργο κατασκευής αναπτύγματος. (η) Προσθήκη ενός έργου που αναφερόταν στην αναγνώριση του αριθμού των τριγωνικών εδρών μιας τριγωνικής πυραμίδας και ενός τριγωνικού πρίσματος που ήταν σχεδιασμένα σε διαφανή μορφή και υπό γωνία. Η προσθήκη αυτή έγινε για να εξεταστεί ακόμη μια παράμετρος του παράγοντα «Χειρισμός Διαφορετικών Μορφών Αναπαράστασης Τρισδιάστατων Αντικειμένων».

Η τρίτη φάση της εργασίας περιλάμβανε τις πιο κάτω δραστηριότητες:

- Χορήγηση των δύο εργαλείων μέτρησης στα υποκείμενα της εργασίας. Η χορήγηση των τεστ πραγματοποιήθηκε από τον ερευνητή σε συνεργασία με τον εκπαιδευτικό του κάθε τμήματος. Πριν από τη συμπλήρωση κάθε μέρους του τεστ μέτρησης της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου προηγήθηκε επεξήγηση από τον ερευνητή των απαιτήσεων του κάθε τεστ και παρουσίαση ενός παραδείγματος. Για την παρουσίαση των παραδειγμάτων έγινε χρήση κατάλληλων εποπτικών μέσων. Για παράδειγμα, για την επεξήγηση των έργων του τεστ «Σύγκριση Κύβων» χρησιμοποιήθηκαν πραγματικοί κύβοι και για το τεστ «Αναπτύγματα Σχημάτων» έγινε επίδειξη της διαδικασίας διπλώματος ενός αναπτύγματος. Οι μαθητές που συμπλήρωναν ένα μέρος του τεστ δεν προχωρούσαν στα επόμενα μέχρι να δοθεί η κατάλληλη οδηγία. Δόθηκε στους μαθητές ο απαραίτητος χρόνος να συμπληρώσουν όλα τα έργα του κάθε μέρους πριν επεξηγηθεί το επόμενο. Για τη συμπλήρωση του κάθε τεστ δόθηκε στους μαθητές χρόνος 45 λεπτών.
- Διόρθωση των δύο τεστ, καταχώρηση των δεδομένων και στατιστική ανάλυση: Για τη διόρθωση των ερωτήσεων ανοικτού τύπου του τεστ αξιολόγησης της ικανότητας των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου αναπτύχθηκε κατάλληλος πίνακας διόρθωσης με τις πιθανές σωστές απαντήσεις. Μετά την καταχώρηση των δεδομένων έγιναν οι κατάλληλες στατιστικές αναλύσεις των ποσοτικών δεδομένων της εργασίας με βάση τα ερευνητικά ερωτήματα.

Η τέταρτη φάση της εργασίας περιλάμβανε τις πιο κάτω δραστηριότητες:

- Επιλογή των υποκειμένων για πραγματοποίηση των κλινικών συνεντεύξεων: Με βάση τα αποτελέσματα της ποσοτικής ανάλυσης έγινε επιλογή υποκειμένων για τη διεξαγωγή κλινικών συνεντεύξεων. Επιλέγηκαν δύο υποκείμενα από όλες τις

τάξεις και από όλες τις κατηγορίες υποκειμένων που προέκυψαν από την προκαταρκτική ανάλυση των ποσοτικών δεδομένων της εργασίας.

- Πραγματοποίηση κλινικών συνεντεύξεων: Οι κλινικές συνεντεύξεις πραγματοποιήθηκαν, για να μελετηθεί εκτεταμένα η ανάπτυξη του συλλογισμού των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου και για να εντοπιστούν τα λάθη και οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές στην επίλυση προβλημάτων που αναφέρονται στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Στόχος, επίσης, της διεξαγωγής των συνεντεύξεων ήταν να εντοπιστούν συγκεκριμένες ενέργειες των μαθητών στις οποίες διαδραματίζει σημαντικό ρόλο η ικανότητα των μαθητών αντίληψης των εννοιών του χώρου. Για την πραγματοποίηση των κλινικών συνεντεύξεων υιοθετήθηκε η μέθοδος της ημιδομημένης συνέντευξης. Οι μαθητές κλήθηκαν να αιτιολογήσουν τον τρόπο που σκέφτηκαν για να απαντήσουν σε συγκεκριμένα έργα του τεστ στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου και να απαντήσουν σε αριθμό καινούριων έργων. Πιο κάτω γίνεται λεπτομερής περιγραφή τα δομής της συνέντευξης.

Τέλος, η πέμπτη φάση της εργασίας περιλάμβανε την τελική ανάλυση των δεδομένων της εργασίας και την εξαγωγή των συμπερασμάτων.

Σχεδιασμός Κλινικών Συνεντεύξεων

Στόχος της διεξαγωγής των κλινικών συνεντεύξεων ήταν η διερεύνηση των τυπικών λαθών, των στρατηγικών και των τυπικών συμπεριφορών των μαθητών των διαφορετικών επιπέδων σκέψης. Για το σκοπό αυτό η επιλογή των υποκειμένων που συμμετείχαν στις κλινικές συνεντεύξεις έγινε με βάση το διαχωρισμό των υποκειμένων σε επίπεδα σκέψης. Επιλέγηκαν υποκείμενα από κάθε επίπεδο σκέψης από κάθε τάξη με βάση την επίδοσή τους στο γραπτό τεστ που αναφερόταν στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου.

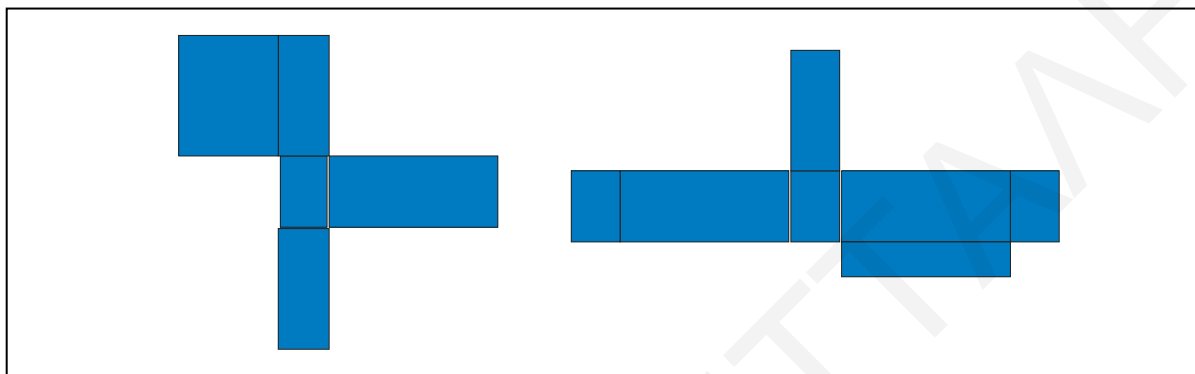
Ο σχεδιασμός των συνεντεύξεων στηρίχτηκε στους έξι παράγοντες της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου όπως παρουσιάζονται στο Προτεινόμενο Μοντέλο του Διαγράμματος 3.2. Συγκεκριμένα, στη συνέντευξη συμπεριλήφθηκαν έργα που αναφέρονται και στους έξι παράγοντες του τεστ. Ζητήθηκε από τους μαθητές να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις που είχαν δώσει σε συγκεκριμένα έργα του γραπτού τεστ. Οι μαθητές μπορούσαν να σκεφτούν για όσο χρόνο ήθελαν και να τροποποιήσουν την

αρχική τους απάντηση, αν υπήρχε ανάγκη. Σε όλα τα στάδια της συνέντευξης οι μαθητές αιτιολογούσαν την απάντησή τους. Συμπεριλήφθηκαν, ακόμη και καινούρια έργα που απαιτούσαν τη χρήση συγκεκριμένων υλικών. Πολλές διευκρινιστικές ερωτήσεις που υποβλήθηκαν στόχευαν να εξετάσουν το επίπεδο αντίληψης των εννοιών του χώρου των μαθητών.

Οι συνεντεύξεις πραγματοποιήθηκαν σε ήσυχους χώρους στα τέσσερα σχολεία της έρευνας. Οι συνεντεύξεις βιντεογραφήθηκαν χωρίς την καταγραφή των προσώπων των μαθητών. Η βιντεογράφιση κρίθηκε απαραίτητη ώστε να καταγραφούν με ακρίβεια οι επεξηγήσεις των μαθητών και να αποτυπωθούν οι κινήσεις των μαθητών σε μερικά έργα που χρησιμοποίησαν υλικά. Στην αναλυτική περιγραφή των έργων πιο κάτω αναφέρεται σε ποια έργα χρησιμοποιήθηκαν υλικά. Η διάρκεια κάθε συνέντευξης ήταν περίπου 30 λεπτά. Λόγω του ότι ήταν αδύνατη η επεξεργασία όλων των έργων της συνέντευξης στο χρονικό διάστημα των 30 λεπτών, κάθε μαθητής απαντούσε σε διαφορετικά ερωτήματα. Καταβλήθηκε προσπάθεια ώστε μαθητές όλων των επιπέδων να εργαστούν με όλα τα έργα. Ο αριθμός των έργων που επεξεργάστηκε κάθε υποκείμενο ήταν αποτέλεσμα του ρυθμού εργασίας του και της σαφήνεια των απαντήσεών του. Η σειρά ενασχόλησης με τα έργα ήταν διαφορετική για κάθε μαθητή.

Πιο κάτω γίνεται αναλυτική περιγραφή των έργων της συνέντευξης: Για τη μελέτη του συλλογισμού των μαθητών στον παράγοντα «Αναγνώριση και Κατασκευή Αναπτυγμάτων» παρουσιάστηκαν στους μαθητές τα αναπτύγματα που φαίνονται στο Διάγραμμα 3.4 και ζητήθηκε από αυτούς (α) να αποφασίσουν κατά πόσον τα αναπτύγματα αυτά, όταν διπλωθούν κατάλληλα μπορούν να κατασκευάσουν ορθογώνια παραλληλεπίπεδα, (β) να περιγράψουν τον τρόπο με τον οποίο θα δίπλωναν τα αναπτύγματα, (γ) να αποφασίσουν κατά πόσον χρειάζεται να προστεθεί ή να αφαιρεθεί ένα τμήμα από το ανάπτυγμα ώστε να μπορέσει να κατασκευαστεί το στερεό και τέλος να εντοπίσουν σε ποιο σημείο θα έπρεπε να προστεθεί ή να αφαιρεθεί το τμήμα (διαφορετικά από τα αντίστοιχα έργα του γραπτού τεστ). Στη συνέχεια, δόθηκαν στους μαθητές πλαστικά τετράγωνα, ορθογώνια και τρίγωνα (υλικό κατάλληλο για κατασκευή αναπτυγμάτων) και ζητήθηκε να κατασκευάσουν το ανάπτυγμα κύβου ή ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου. Δόθηκε οδηγία στους μαθητές να κατασκευάσουν πρώτα το ανάπτυγμα, να περιγράψουν τον τρόπο με τον οποίο θα το δίπλωναν και στη συνέχεια να ελέγξουν την ορθότητα της κατασκευής του κάνοντας τις απαραίτητες διπλώσεις. Τέλος, ζητήθηκε από μερικούς μαθητές να σχεδιάσουν το ανάπτυγμα του ορθογωνίου

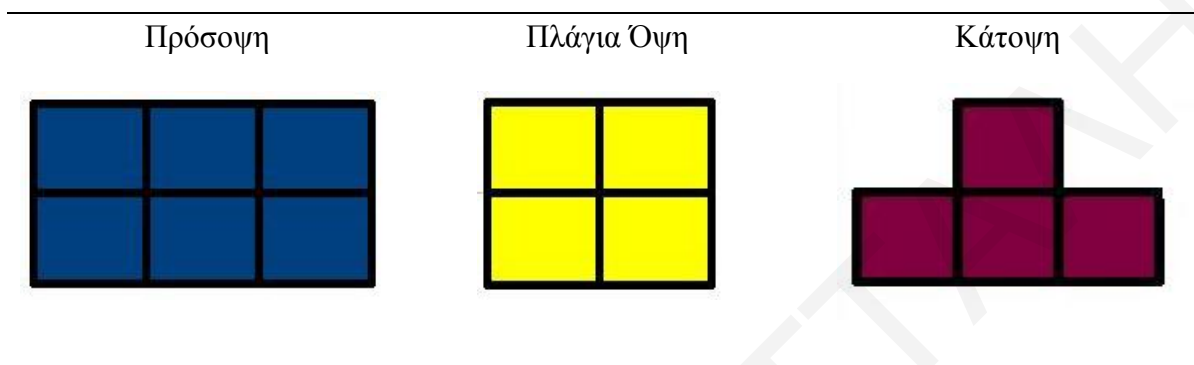
παράλληλεπιπέδου που παρουσιάζεται στον Πίνακα 3.6(α) και να αντιστοιχίσουν τετράγωνα του στερεού με τα αντίστοιχα τετράγωνα του αναπτύγματος.



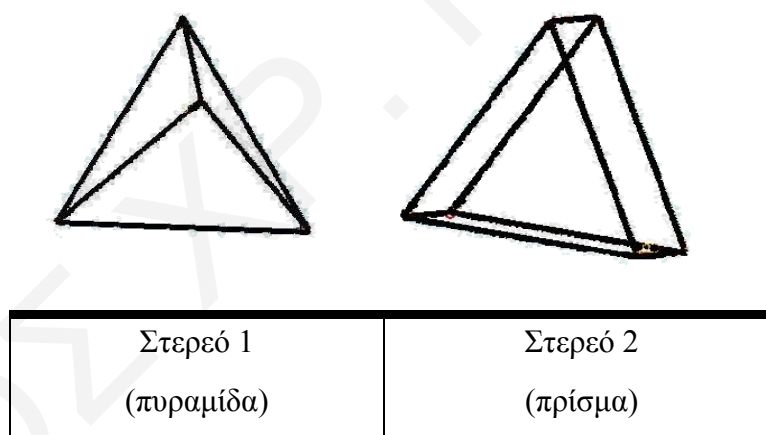
Διάγραμμα 3.4. Αναπτύγματα έργων συνέντευξης.

Για τη μελέτη του τρόπου σκέψης των μαθητών στις έννοιες του παράγοντα «Χειρισμός Διαφορετικών Μορφών Αναπαράστασης Τρισδιάστατων Αντικειμένων» χρησιμοποιήθηκαν τα ακόλουθα τρία έργα: (α) Παρουσιάστηκε στους μαθητές ένα στερεό σχεδιασμένο σε ορθογώνιο προβολή (Δείτε Διάγραμμα 3.5) και ζητήθηκε από αυτούς να το κατασκευάσουν χρησιμοποιώντας κύβους. Ζητήθηκε από τους μαθητές πριν να πάρουν στα χέρια τους τους κύβους να απαντήσουν σε ερωτήσεις όπως κατά πόσον μπορούσαν να φανταστούν το στερεό στο μυαλό τους και να περιγράψουν πώς φαίνεται, ποια όψη θα προσπαθούσαν να κατασκευάσουν πρώτη και ποια από τις τρεις όψεις θα ήταν η βάση για την κατασκευή τους. Καθώς οι μαθητές δούλευαν με τους κύβους, υποβλήθηκαν ερωτήσεις όπως με ποιο τρόπο αποφασίζουν πώς να τοποθετήσουν τον κάθε κύβο. Τέλος, με τη συμπλήρωση της εργασίας ζητήθηκε να περιγράψουν την κατασκευή χωρίς να την περιστρέφουν και να αποφασίσουν κατά πόσον μπορούσαν να αφαιρέσουν έναν κύβο από το στερεό χωρίς να αλλάξει ο τρόπος που φαίνεται. (β) Ζητήθηκε από τους μαθητές να εξηγήσουν την απάντησή τους στα Έργα 9 και 10 του γραπτού τεστ (δείτε Διάγραμμα 3.6). Να εξηγήσουν, δηλαδή, πώς υπολόγισαν τον αριθμό των τριγωνικών εδρών στα δύο σχήματα και κατά πόσον μέτρησαν τον αριθμό των εδρών ή τον γνώριζαν ή κατά πόσον τον γνώριζαν και μέτρησαν για επιβεβαίωση. (γ) Παρουσιάστηκε στους μαθητές ένας κύβος και ζητήθηκε να τον σχεδιάσουν. Ανάλογα με τον τρόπο που σχεδίασαν τον κύβο έγιναν κατάλληλες ερωτήσεις. Για παράδειγμα, κατά πόσον μπορούσαν να δουν

συγκεκριμένες ακμές (στην περίπτωση που το σχέδιο ήταν σε διαφανή μορφή) ή κατά πόσον μπορούσαν να σχεδιάσουν τις ακμές που δεν φαίνονταν (στην περίπτωση που το σχέδιο είναι σε κανονική μορφή). Ζητήθηκε, επίσης, να αναγνωρίσουν παράλληλες και κάθετες ακμές στο σχήμα, και να επεξηγήσουν γιατί κάποιες ακμές που ενώ ήταν κάθετες στο σχήμα δεν φαίνονταν να είναι.



Διάγραμμα 3.5. Τρεις όψεις για κατασκευή στερεού στη συνέντευξη.



Διάγραμμα 3.6. Τα σχήματα των έργων αναγνώρισης τριγωνικών εδρών.

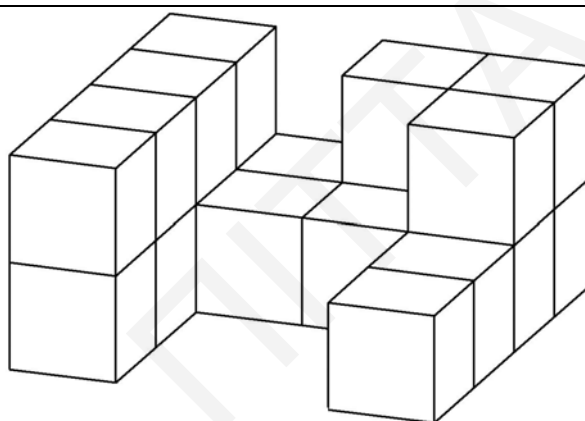
Για τη μελέτη του τρόπου σκέψης των μαθητών στις έννοιες του παράγοντα «Διάταξη Αντικειμένων στο Χώρο» ζητήθηκε από τους μαθητές να αιτιολογήσουν την απάντησή τους στα Έργα 11, 12 και 14 του γραπτού τεστ (δείτε Πίνακα 3.5). Στο Έργο 11 (δείτε Πίνακα 3.5) οι μαθητές επεξήγησαν πώς υπολόγισαν τον αριθμό των κύβων που πρέπει να προστεθούν για να κατασκευαστεί ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις 4cm x 2cm x 4cm. Στη συνέχεια, κλήθηκαν να υπολογίσουν πόσοι κύβοι θα έπρεπε επιπλέον να προστεθούν ώστε το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο να έχει διαστάσεις 4cm x 3cm x 4cm και να φανταστούν τι σχήμα θα είχε το τμήμα που έπρεπε να προστεθεί.

Στο Έργο 12, ζητήθηκε από τους μαθητές να αιτιολογήσουν γιατί απέκλεισαν τις άλλες τέσσερις επιλογές και ποιες από αυτές απέκλεισαν πρώτες. Ζητήθηκε, επίσης, να εισηγηθούν ακόμη ένα συνδυασμό κύβων και ράβδων, για να γεμίσει το κιβώτιο.

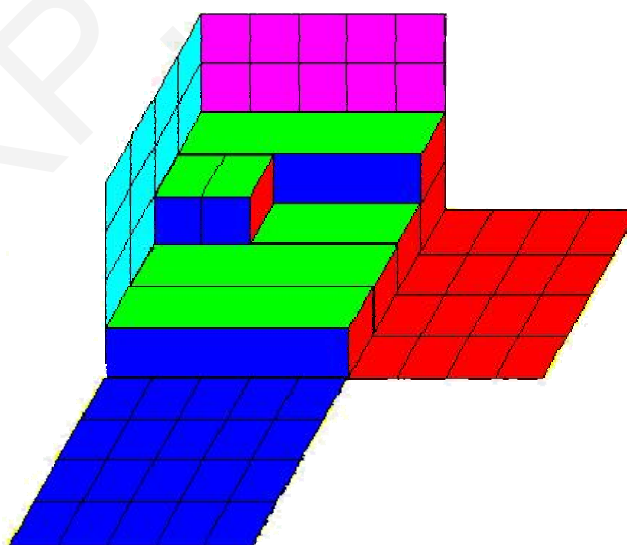
Πίνακας 3.5

Έργα της Κλινικής Συνέντευξης που Αναφέρονται στον Παράγοντα Διάταξη Αντικειμένων στο Χώρο

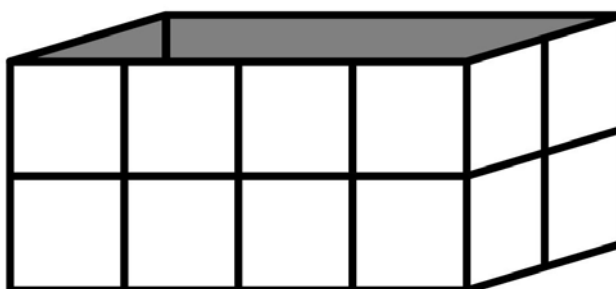
Έργο 11



Έργο 12



Έργο 14



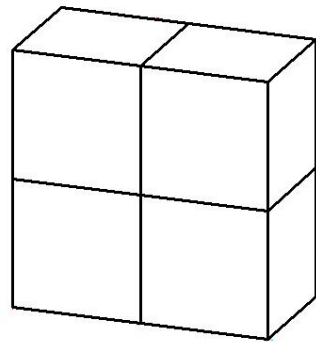
Για τη μελέτη της σκέψης των μαθητών στις έννοιες του παράγοντα «Αναγνώριση Στερεών και των Συστατικών τους Στοιχείων», ζητήθηκε από τους μαθητές να αναγνωρίσουν διαφορετικά στερεά στο περιβάλλον. Μελετήθηκαν, επίσης, οι απαντήσεις των μαθητών στα έργα του παράγοντα «Συλλογισμός για Σχέσεις μεταξύ Στοιχείων και Ιδιοτήτων Στερεών» γιατί περιείχαν και πληροφορίες για την αντίληψη των μαθητών ως προς τα στοιχεία των στερεών. Δεν δόθηκε ιδιαίτερη έμφαση στα έργα αυτού του παράγοντα γιατί δεν υπήρχαν σημαντικές διαφοροποιήσεις μεταξύ των μαθητών των διαφορετικών κατηγοριών στον παράγοντα αυτό.

Για τη μελέτη του Παράγοντα «Μέτρηση Επιφάνειας και Χωρητικότητας Τρισδιάστατων Αντικειμένων χωρίς τη Χρήση Τύπων», συμπεριλήφθηκαν στη κλινική συνέντευξη δύο έργα. Ζητήθηκε από τους μαθητές να επεξηγήσουν τον τρόπο σκέψης τους στο Έργο 21 του γραπτού τεστ (δείτε Πίνακα 3.6 (α)) στο οποίο έπρεπε να υπολογίσουν το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου και στη συνέχεια να επεξηγήσουν αν θα μπορούσαν να υπολογίσουν το εμβαδόν αυτό υπολογίζοντας το εμβαδόν τμήματος του στερεού. Ακολούθως, ζητήθηκε από τους μαθητές να υπολογίσουν το εμβαδόν ενός πραγματικού τρισδιάστατου αντικειμένου που παρουσιάστηκε μπροστά τους (δείτε Πίνακα 3.6 (β)). Το αντικείμενο ήταν κατασκευασμένο από μοναδιαίους κύβους. Στην αρχή το στερεό ήταν τοποθετημένο μπροστά από τους μαθητές, χωρίς να μπορούν να το περιστρέψουν ή να κοιτάξουν το πίσω μέρος του. Στη συνέχεια, δόθηκε άδεια στους μαθητές που είχαν σημαντικές δυσκολίες να το πιάσουν και να το περιστρέψουν.

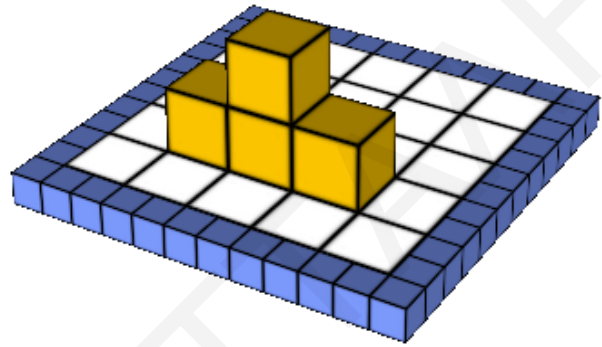
Τέλος, για τη μελέτη του τρόπου σκέψης των μαθητών στις έννοιες του παράγοντα «Συλλογισμός για Σχέσεις μεταξύ Στοιχείων και Ιδιοτήτων Στερεών» ζητήθηκε από τους μαθητές να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους στις πρώτες δύο δηλώσεις του Έργου 26 του γραπτού τεστ (δείτε έκτο παράδειγμα στον Πίνακα 3.4). Ζητήθηκε, επίσης, από τους μαθητές να συγκρίνουν στερεά όπως ένα κύβο με ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο ή ένα κύλινδρο με ένα κώνο.

Πίνακας 3.6

Έργα της Κλινικής Συνέντευξης που Αναφέρονται στον Παράγοντα Μέτρηση Επιφάνειας και Χωρητικότητας Τρισδιάστατων Αντικειμένων χωρίς τη Χρήση Τύπων



(α)



(β)

Ανάλυση

Ο σχεδιασμός διεξαγωγής της έρευνας περιλάμβανε ποιοτικές και ποσοτικές μεθόδους ενσωματώνοντας χορήγηση γραπτών τεστ και διεξαγωγή κλινικών συνεντεύξεων (Kelly & Lesh, 2000; Tashakkori & Teddlie, 2002). Συνεπώς, χρησιμοποιήθηκαν διαφορετικές τεχνικές για την ανάλυση των ποσοτικών και των ποιοτικών δεδομένων.

Τεχνικές Ανάλυσης Ποσοτικών Δεδομένων

Για την ανάλυση των ποσοτικών δεδομένων χρησιμοποιήθηκε κυρίως το λογισμικό γραμμικής δομικής ανάλυσης Mplus (Muthen & Muthen, 2004). Για να απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα της εργασίας ελέγχθηκε ο βαθμός προσαρμογής μοντέλων

επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυση (CFA: Confirmatory Factor Analysis), δομικών μοντέλων (Structural Models) και μοντέλων ανάλυσης ομάδων (Latent Class).

Για τον έλεγχο του βαθμού προσαρμογής των μοντέλων χρησιμοποιήθηκαν τρεις δείκτες (Muthen & Muthen, 2004): ο λόγος χ^2 προς τους βαθμούς ελευθερίας του μοντέλου (χ^2/df), ο δείκτης comparative fit index (CFI), και ο δείκτης RMSEA. Για να είναι αποδεκτό το μοντέλο η τιμή του λόγου χ^2/df πρέπει να είναι μικρότερη του 2, η τιμή του δείκτη CFI πρέπει να είναι μεγαλύτερη από .9 και η τιμή του RMSEA πρέπει να είναι μικρότερη του .08 (Marcoulides & Schumacker, 1996).

Για να ελεγχθεί η εγκυρότητα των εργαλείων μέτρησης και η καταλληλότητα των προτεινόμενων μοντέλων σύνθεσης της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου και της ικανότητας των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου πραγματοποιήθηκε επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση (Ullstadius, Carlstedt, & Gustafsson, 2004: Marcoulides & Schumacker, 1996). Στόχος της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης ήταν να ελεγχθεί ο βαθμός προσαρμογής των δεδομένων της εργασίας στη δομή των προτεινόμενων μοντέλων.

Η ανάλυση latent class (LCA) χρησιμοποιήθηκε για τον εντοπισμό κατηγοριών (ομάδων) μαθητών οι οποίες αντιπροσώπευαν διαφορετικά επίπεδα σκέψης. Με βάση την ανάλυση latent class ήταν δυνατή η ανίχνευση ομάδων υποκειμένων με παρόμοια συμπεριφορά (Marcoulides & Schumacker, 1996). Το λογισμικό προσέφερε τη δυνατότητα ελέγχου διαφορετικών μοντέλων διαχωρισμού των υποκειμένων σε ομάδες, επιλέγοντας το μοντέλο με τον υψηλότερο δείκτη εντροπίας και τις χαμηλότερες τιμές στους δείκτες AIC και BIC.

Ο έλεγχος της εγκυρότητας γραμμικών δομικών μοντέλων είχε ως στόχο να εξετάσει την ύπαρξη αιτιατών σχέσεων μεταξύ των παραγόντων της εργασίας. Συγκεκριμένα, ελέγχθηκε η εγκυρότητα ενός δομικού μοντέλου στο οποίο η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου αποτελούσε παράγοντα πρόβλεψης της ικανότητας των μαθητών στους έξι παράγοντες της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Ελέγχθηκε, επίσης, η σχέση μεταξύ των παραγόντων της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου.

Για την καλύτερη περιγραφή της σκέψης των μαθητών των διαφορετικών επιπέδων σκέψης χρησιμοποιήθηκαν τα αποτελέσματα των κλινικών συνεντεύξεων ώστε να αναλυθεί ο τρόπος σκέψης των μαθητών, οι στρατηγικές που χρησιμοποίησαν, οι διαδικασίες και ικανότητες οπτικοποίησης που εφάρμοσαν και οι δυσκολίες που αντιμετώπισαν. Η ανάλυση των ποιοτικών δεδομένων εμπλούτισε και συμπλήρωσε την περιγραφή των επιπέδων σκέψης όπως προέκυψαν από την ανάλυση των ποσοτικών δεδομένων.

Για την ανάλυση των ποιοτικών δεδομένων της εργασίας χρησιμοποιήθηκε η ανάλυση «Constant Comparative» (Maykut & Morehouse, 1994: Miles & Huberman, 1994). Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, το πρώτο βήμα κατά τη μελέτη των ποιοτικών δεδομένων ήταν ο εντοπισμός των μικρότερων μονάδων ανάλυσης. Στη συνέχεια, κάθε φορά που εντοπιζόταν μια νέα μονάδα ανάλυσης γινόταν σύγκριση με τις υφιστάμενες μονάδες με στόχο να τοποθετηθεί σε μια από αυτές. Αν αυτό δεν ήταν εφικτό δημιουργείτο μια νέα κατηγορία. Κατά τη διάρκεια αυτής της διαδικασίας, έγινε συνεχώς βελτίωση των μονάδων ανάλυσης και οι αρχικές κατηγορίες άλλαξαν, συγχωνεύτηκαν ή καταργήθηκαν. Νέες κατηγορίες προστέθηκαν και νέες σχέσεις εξετάστηκαν. Κατά την ανάλυση των δεδομένων ακολουθήθηκαν τέσσερα στάδια εργασίας: (α) Επαγωγική κατηγοριοποίηση των μονάδων ανάλυσης και ταυτόχρονη σύγκριση των μονάδων ανάλυσης όλων των κατηγοριών, (β) επεξεργασία των κατηγοριών και εξαγωγή κανόνων, (γ) διερεύνηση των σχέσεων και των μοτίβων συμπεριφοράς κατά μήκος των κατηγοριών και (δ) ολοκλήρωση της ανάλυσης με την περιγραφή των χαρακτηριστικών κάθε κατηγορίας (Denzin & Lincoln, 1998).

Στην παρούσα εργασία η μέθοδος αυτή χρησιμοποιήθηκε για τη μελέτη των χαρακτηριστικών των μαθητών των διαφορετικών επιπέδων σκέψης για καθένα από τους έξι παράγοντες της ικανότητας των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου ξεχωριστά. Συγκεκριμένα, για κάθε παράγοντα μελετήθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών του κάθε επιπέδου για τον εντοπισμό των μονάδων ανάλυσης. Για το σκοπό αυτό, μελετήθηκαν οι απαντήσεις του κάθε μαθητή του επιπέδου ξεχωριστά. Η μελέτη κάθε επιπρόσθετου μαθητή είχε ως αποτέλεσμα τη βελτίωση των κατηγοριών των μονάδων ανάλυσης του κάθε επιπέδου σκέψης. Αφού αναπτύχθηκαν οι κατηγορίες των μονάδων ανάλυσης για κάθε κατηγορία υποκειμένων, έγινε σύγκριση των χαρακτηριστικών των μαθητών των διαφορετικών επιπέδων, για να εντοπιστούν μοτίβα συμπεριφοράς, σχέσεις

και διαφορές. Με βάση τις συγκρίσεις αυτές έγινε η περιγραφή των χαρακτηριστικών των μαθητών των διαφορετικών επιπέδων σκέψης για τον κάθε παράγοντα ξεχωριστά.

Διόρθωση Εργαλείων Μέτρησης

Για τη διόρθωση των έργων του τεστ Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου χρησιμοποιήθηκαν διαφορετικές διαδικασίες για κάθε κατηγορία έργων. Στα έργα των τεστ «Περιστροφή Καρτών», «Σύγκριση Κύβων», «Ίδια/Διαφορετικά Αντικείμενα», «Δίπλωση Σχημάτων» και «Προβολές Εικόνων» οι ορθές απαντήσεις βαθμολογήθηκαν με μία μονάδα και οι λανθασμένες με μηδέν. Στα έργα του τεστ «Σύνθεση Σχημάτων» η πλήρης απάντηση βαθμολογήθηκε με μία μονάδα και απαντήσεις που είχαν δύο από τρία σχήματα ορθά με μισή μονάδα. Στα έργα του τεστ «Αναπτύγματα Σχημάτων» κάθε σωστή απάντηση στα τέσσερα ερωτήματα του έργου βαθμολογήθηκε με .25. Στα έργα του τεστ «Προσανατολισμός Αντικειμένων στο Χώρο» η πλήρης απάντηση βαθμολογήθηκε με μία μονάδα και απαντήσεις στις οποίες το τόξο σχεδιάστηκε στη σωστή πλευρά και είχε απόκλιση από το σωστό σημείο μέχρι 45° βαθμολογήθηκαν με μισή μονάδα. Τα έργα που αφέθηκαν κενά από τους μαθητές βαθμολογήθηκαν με μηδέν, γιατί κατά τη χορήγηση των τεστ δόθηκε στους μαθητές ο απαραίτητος χρόνος, για να συμπληρώσουν όλες τις ερωτήσεις.

Για τη διόρθωση των έργων του τεστ στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου ακολουθήθηκαν διαφορετικές διαδικασίες ανάλογα με τη φύση του έργου. Ο Πίνακας 3.7 παρουσιάζει συνοπτικά τον τρόπο διόρθωσης των έργων του τεστ και ομαδοποιεί έργα που διορθώθηκαν με τον ίδιο τρόπο. Επιπρόσθετα, παρουσιάζονται τα έργα στα οποία συγκεκριμένα λάθη κωδικοποιήθηκαν με διαφορετικό τρόπο. Στην τελική βαθμολογία όλων των έργων έγινε αναγωγή στη μονάδα. Τα έργα που αφέθηκαν κενά από τους μαθητές βαθμολογήθηκαν με μηδέν.

Πίνακας 3.7

Διόρθωση Δεδομένων Έργων Τεστ Γεωμετρίας του Χώρου

A/A Έργων	Διαδικασία Διόρθωσης	Ειδικές Κωδικοποιήσεις
1, 4, 7, 16, 17	Κάθε σωστή απάντηση βαθμολογήθηκε με μια μονάδα και για κάθε λανθασμένη επιλογή αφαιρέθηκε μια μονάδα. Βαθμολογίες που μετά την προσθαφαίρεση ήταν αρνητικές ορίστηκαν ως μηδέν.	Στο Έργο 16 καταγράφηκαν οι απαντήσεις που δήλωναν ότι ο κύβος δεν είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.
2	Απάντηση που επιλέγει ένα ορθογώνιο και δύο κύκλους βαθμολογήθηκε με μια μονάδα. Απάντηση που επιλέγει ένα ορθογώνιο και έναν κύκλο βαθμολογήθηκε με μισή μονάδα.	(α) Απαντήσεις που επιλέγουν ορθογώνιο με καμπυλωτές γωνιές για παράπλευρη επιφάνεια. (β) Απαντήσεις που επιλέγουν για βάση σχήμα οβάλ.
3	Απάντηση που σχεδιάζει ακόμη ένα ορθογώνιο και ένα τρίγωνο σε σωστές θέσεις βαθμολογήθηκε με μία μονάδα. Απάντηση που σχεδιάζει ακόμη ένα ορθογώνιο και ένα τρίγωνο σε λανθασμένη θέση βαθμολογήθηκε με μισή μονάδα.	
5	Η σωστή απάντηση βαθμολογήθηκε με μια μονάδα και η απάντηση που είχε σωστή την πρόσοψη και την κάτοψη και λανθασμένη την πλάγια όψη με μισή μονάδα.	
6	Κάθε ορθή όψη βαθμολογήθηκε με μία μονάδα.	
8	Κάθε ζεύγος κάθετων ακμών βαθμολογήθηκε με μια μονάδα.	
9, 10, 14, 15, 22, 23, 25	Σωστή απάντηση βαθμολογήθηκε με μια μονάδα και όλες οι υπόλοιπες απαντήσεις με μηδέν.	
11	Σωστή απάντηση (13 κύβοι) βαθμολογήθηκε με μια μονάδα. Οι απαντήσεις «12 κύβοι» και «14 κύβοι» βαθμολογούνται με μισή μονάδα.	
12	Η ορθή επιλογή βαθμολογήθηκε με μια μονάδα και η επιλογή που είχε τη μικρότερη απόκλιση από την ορθή βαθμολογήθηκε με μισή μονάδα.	
13	Η ορθή απάντηση (80 κύβοι) βαθμολογήθηκε με μια μονάδα και απαντήσεις στα διαστήματα 76 με 79 και 81 με 84 βαθμολογούνται με μισή μονάδα.	

18, 19, 20	Σωστή απάντηση για το κάθε στοιχείο σε κάθε πυραμίδα βαθμολογήθηκε με .33 (3 πυραμίδες κάθε φορά).
21	Σωστή απάντηση (16 τετραγωνικά) βαθμολογήθηκε με μια μονάδα. Οι απαντήσεις «14 τετραγωνικά» και «18 τετραγωνικά» βαθμολογήθηκαν με μισή μονάδα.
24	Η σωστή επιλογή βαθμολογήθηκε με μια μονάδα και η επιλογή που θεωρεί ότι τα δύο ντεπόζιτα έχουν την ίδια χωρητικότητα βαθμολογήθηκε με μισή μονάδα.
26	Σωστά διατυπωμένη σχέση βαθμολογήθηκε με μια μονάδα και απάντηση που αναφέρει την ορθή σχέση μεταξύ των δύο στοιχείων βαθμολογήθηκε με μισή μονάδα.
27	Εύρεση του σωστού αριθμού για καθένα από τα τρία στοιχεία βαθμολογήθηκε με .33.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ – ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα ποσοτικά και ποιοτικά αποτελέσματα της εργασίας, όπως προέκυψαν από τα δύο τεστ της εργασίας και των δεδομένων που προέκυψαν από τη διεξαγωγή των κλινικών συνεντεύξεων. Η δομή του κεφαλαίου αυτού αντιστοιχεί στα ερευνητικά ερωτήματα της εργασίας. Συγκεκριμένα, εξετάζεται στην αρχή η δομή της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου των μαθητών Ε΄ Δημοτικού μέχρι Γ΄ Γυμνασίου και ελέγχεται η αμεταβλητότητα του μοντέλου της δομής της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου. Στη συνέχεια, γίνεται αναφορά στους παράγοντες που συνθέτουν την ικανότητα των μαθητών Ε΄ Δημοτικού μέχρι Γ΄ Γυμνασίου στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου και στη δομή και διαφοροποίηση της ικανότητας αυτής στις διάφορες ηλικίες. Παράλληλα, εξετάζεται η σχέση μεταξύ της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου και της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Στη συνέχεια, εξετάζεται η ικανότητα των μαθητών στους παράγοντες της γεωμετρίας του χώρου και της αντίληψης των εννοιών του χώρου και γίνεται διερεύνηση των διαφορών των μαθητών των διαφορετικών τάξεων σε αυτούς τους παράγοντες.

Ακολούθως, γίνεται έλεγχος του μοντέλου διαχωρισμού των υποκειμένων της εργασίας σε κατηγορίες μαθητών με βάση την επίδοσή τους στο τεστ στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Στόχος της ανάλυσης αυτή είναι η διερεύνηση των επιπέδων ανάπτυξης της σκέψης των μαθητών Ε΄ Δημοτικού μέχρι Γ΄ Γυμνασίου στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Εξετάζεται, επίσης, η ιεραρχική δομή των παραγόντων στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου με βάση τα χαρακτηριστικά της κάθε κατηγορίας μαθητών. Τέλος, με βάση τα αποτελέσματα των κλινικών συνεντεύξεων, περιγράφονται αναλυτικά τα χαρακτηριστικά, τα τυπικά λάθη, οι στρατηγικές και οι ικανότητες των μαθητών του κάθε επιπέδου σκέψης.

Δομή της Ικανότητας Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου

Για να εξεταστεί η δομή της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου χρησιμοποιήθηκε το τεστ μέτρησης της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου. Πιο κάτω παρουσιάζονται τα περιγραφικά χαρακτηριστικά του τεστ αντίληψης των εννοιών του χώρου και στη συνέχεια ο έλεγχος του προτεινόμενου μοντέλου που έγινε με την ανάλυση της επιβεβαίωσης της δομής της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου. Τέλος, ελέγχεται η αμεταβλητότητα του μοντέλου σε μαθητές του δημοτικού σχολείου και του γυμνασίου.

Περιγραφικά Αποτελέσματα του Τεστ Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου

Ο Πίνακας 4.1 παρουσιάζει τα περιγραφικά χαρακτηριστικά του τεστ αντίληψης των εννοιών του χώρου σε κάθε κατηγορία έργων. Οι ψηλότεροι μέσοι όροι των υποκειμένων της έρευνας ήταν στα έργα των τεστ «Σύνθεση Σχημάτων» (Μ.Ο.=.727) και «Δίπλωση Σχημάτων» (Μ.Ο.=.699), ενώ οι χαμηλότεροι μέσοι όροι ήταν στα έργα των τεστ «Αναπτύγματα Σχημάτων» (Μ.Ο.=.432) και «Προσανατολισμός Αντικειμένων στο Χώρο» (Μ.Ο.=.450). Το εύρος της επίδοσης των μαθητών στα επτά είδη έργων του τεστ ήταν μια μονάδα, που δείχνει ότι υπήρχαν υποκείμενα που απάντησαν ορθά σε όλα τα έργα ενός τμήματος του τεστ και υποκείμενα που δεν απάντησαν ορθά σε κανένα έργο σε κάποιο τμήμα του τεστ. Ο Πίνακας 4.1 παρουσιάζει, επίσης, τις τιμές της λοξότητας και της κύρτωσης της επίδοσης των μαθητών στα έργα των επτά κατηγοριών. Οι τιμές αυτές ήταν μικρότερες από δύο, στοιχείο που δείχνει ότι οι μεταβλητές της επίδοσης των μαθητών στα επτά είδη έργων του τεστ αντίληψης των εννοιών του χώρου ακολουθούν την κανονική κατανομή.

Πίνακας 4.1

Περιγραφικά Αποτελέσματα των Έργων του Τεστ Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου

Τεστ	Μέσος Όρος	Τυπική Απόκλιση	Εύρος	Λοξότητα	Κύρτωση
Σύνθεση Σχημάτων (Σ.Σ.)	.727	.230	1	-.516	-.663
Αναπτύγματα Σχημάτων (Α.Σ.)	.432	.247	1	.355	-.658
Δίπλωση Σχημάτων (Δ.Σ.)	.699	.241	1	-.545	-.099
Προσανατολ. Αντικειμένων (Π.Α.)	.450	.305	1	.130	-.980
Προβολές Εικόνων (Π.Ε.)	.568	.349	1	-.032	-1.395
Σύγκριση Κύβων (Σ.Κ.)	.603	.251	1	-.259	-.676
Περιστροφή Καρτών (Π.Κ.)	.622	.251	1	-.393	-1.261
Ίδιες/Διαφ. Κατασκευές (Ι.Κ.)	.673	.322	1	-.732	-.607

Ο Πίνακας 4.2 παρουσιάζει τις συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών που χρησιμοποιήθηκαν για τον έλεγχο της εγκυρότητας του μοντέλου. Οι μεταβλητές αντιστοιχούν στα 28 έργα του τεστ αντίληψης των εννοιών του χώρου. Οι συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών των τεσσάρων έργων του τεστ «Περιστροφή Καρτών» ήταν όλες στατιστικά σημαντικές. Ιδιαίτερα υψηλή παρουσιάζεται η συσχέτιση μεταξύ του δεύτερου και τέταρτου έργου του τεστ αυτού ($r=.49, p<.01$). Το ίδιο ισχύει για τις συσχετίσεις μεταξύ των τεσσάρων έργων του τεστ «Σύνθεση Σχημάτων» (ψηλότερη συσχέτιση μεταξύ του πρώτου και τέταρτου έργου του τεστ, $r=.33, p<.01$), των τεσσάρων έργων του τεστ «Προβολές Εικόνων» (ψηλότερη συσχέτιση μεταξύ του πρώτου και τέταρτου έργου του τεστ, $r=.43, p<.01$), των τεσσάρων έργων του τεστ «Αναπτύγματα Σχημάτων» (ψηλότερη συσχέτιση μεταξύ του τρίτου και τέταρτου έργου του τεστ, $r=.61, p<.01$), των τριών έργων του τεστ «Σύγκριση Κύβων» (ψηλότερη συσχέτιση μεταξύ του πρώτου και τρίτου έργου του τεστ, $r=.30, p<.01$), των τριών έργων του τεστ «Προσανατολισμός Αντικειμένων στο Χώρο» (ψηλότερη συσχέτιση μεταξύ πρώτου και δεύτερου έργου του τεστ, $r=.26, p<.01$) και των τριών έργων του τεστ «Ίδιες/Διαφορετικές Κατασκευές» (ψηλότερη συσχέτιση μεταξύ του πρώτου και δεύτερου έργου του τεστ, $r=.63, p<.01$). Δύο από τις τρεις συσχετίσεις μεταξύ των έργων του τεστ «Δίπλωση Σχημάτων» ήταν στατιστικά

σημαντικές, με ψηλότερη τη συσχέτιση μεταξύ του πρώτου και δεύτερου έργου ($r=.26$, $p<.01$). Οι ψηλές συσχετίσεις μεταξύ των έργων του κάθε τεστ καταδεικνύουν ότι τα έργα αυτά φαίνεται να μετρούν την ίδια ικανότητα.

Πίνακας 4.2

Συσχετίσεις Μεταξύ της Επίδοσης των Υποκειμένων στα Έργα του Τεστ Α.Ε.Χ.

	Π.Κ.1	Π.Κ.2	Π.Κ.3	Π.Κ.4	Π.Α.1	Π.Α.2	Π.Α.3	Δ.Σ.1	Δ.Σ.2	Δ.Σ.3	Σ.Σ.1	Σ.Σ.2	Σ.Σ.3	Σ.Σ.4	Π.Ε.1	Π.Ε.2	Π.Ε.3	Π.Ε.4	
Π.Κ.1	1																		
Π.Κ.2	.32**	1																	
Π.Κ.3	.44**	.39**	1																
Π.Κ.4	.37**	.49**	.38**	1															
Π.Α.1	.17**	.14*	.20**	.14*	1														
Π.Α.2	.12**	.18**	.13*	.16**	.26**	1													
Π.Α.3	.21**	.09	.21**	.06	.19**	.21**	1												
Δ.Σ.1	.12*	.23**	.13*	.17**	.22**	.19**	.13*	1											
Δ.Σ.2	.24**	.16**	.12	.09	.15*	.11	.13*	.19**	1										
Δ.Σ.3	.13**	.07	.11	.05	-.01	.07	.05	.10	.15*	1									
Σ.Σ.1	.23**	.22**	.14*	.25**	.21**	.14*	.11	.09	.18**	.17**	1								
Σ.Σ.2	.06	.10	.12*	.09	.14*	.09	.00	.03	.15*	.11	.26**	1							
Σ.Σ.3	.14*	.12*	.21**	.09	.24**	.15*	.14*	.20**	.17**	.08	.30**	.29**	1						
Σ.Σ.4	.19**	.07	.18**	.15*	.10	.08	.12	.06	.05	.10	.33**	.18**	.17**	1					
Π.Ε.1	.18**	.27**	.19**	.18**	.22**	.19**	.16**	.17**	.29**	.13*	.22**	.24**	.32**	.18**	1				
Π.Ε.2	.22**	.22**	.27**	.24**	.19**	.00	.20**	.12*	.17**	.13*	.09	.12	.05	.14*	.41**	1			
Π.Ε.3	.04	.07	.15**	.10	.10	.08	.10	.01	.04	.09	.11	.10	.14*	.12*	.29**	.21**	1		
Π.Ε.4	.20**	.17**	.20**	.18**	.24**	.03	.21**	.10	.17**	.15*	.16**	.11	.23**	.10	.43**	.39**	.26**	1	
Α.Σ.1	.20**	.21**	.13*	.12*	.22**	.08	.12*	.16**	.13*	.08	.10	.10	.19**	.05	.18**	.08	.02	.09	
Α.Σ.2	.23**	.22**	.25**	.21**	.29**	.24**	.12*	.17**	.16**	.16**	.15**	.20**	.24**	.15*	.26**	.22**	.14*	.14*	
Α.Σ.3	.25**	.24**	.32**	.23**	.35**	.17**	.15*	.17**	.21**	.16**	.22**	.21**	.31**	.12	.34**	.20**	.17**	.26**	
Α.Σ.4	.24**	.28**	.34**	.28**	.34**	.23**	.21**	.24**	.29**	.18**	.18**	.24**	.34**	.12*	.38**	.27**	.18**	.31**	
Σ.Κ.1	.07	0.07	.20**	.09	.15*	.03	.05	-.15	.04	.00	.14*	.10	.09	.13*	.10	.06	.04	.06	
Σ.Κ.2	-.02	-0.00	.04	.07	-.08	-.08	.03	-.07	-.03	.03	.00	.06	.00	.10	.06	.02	.05	-.08	
Σ.Κ.3	.05	.15**	.19**	.06	.23**	.12*	.06	-.00	.07	-.08	.12	.07	.20**	.07	.14*	.06	.10	.13*	
Ι.Κ.1	.08	.10	.14*	.15**	.14*	.12*	.08	.02	.12	.08	.07	.13*	.12*	.10	.12*	.02	.03	.05	
Ι.Κ.2	.14*	.11	.07	.17**	.16**	.14*	.18**	.09	.14*	.10	.20**	.12*	.20**	.15*	.19**	.07	.09	.12*	
Ι.Κ.3	.17**	.22**	.19**	.22**	.19**	.04	.17**	.04	.21**	.08	.19**	.17**	.18**	.14*	.24**	.22**	.04	.18**	

*, $p < 0.05$; **, $p < 0.01$

	A.Σ.1	A.Σ.2	A.Σ.3	A.Σ.4	Σ.Κ.1	Σ.Κ.2	Σ.Κ.3	I.Κ.1	I.Κ.2	I.Κ.3
Π.Κ.1										
Π.Κ.2										
Π.Κ.3										
Π.Κ.4										
Π.Α.1										
Π.Α.2										
Π.Α.3										
Δ.Σ.1										
Δ.Σ.2										
Δ.Σ.3										
Σ.Σ.1										
Σ.Σ.2										
Σ.Σ.3										
Σ.Σ.4										
Π.Ε.1										
Π.Ε.2										
Π.Ε.3										
Π.Ε.4										
A.Σ.1	1									
A.Σ.2	.29**	1								
A.Σ.3	.31**	.46**	1							
A.Σ.4	.37**	.57**	.61**	1						
Σ.Κ.1	.10	.13*	.15*	.21**	1					
Σ.Κ.2	-.08	-.02	.00	.03	.22**	1				
Σ.Κ.3	.13*	.22**	.18**	.26**	.30**	.15*	1			
I.Κ.1	.08	.12*	.17**	.23**	-.03	-.04	.02	1		
I.Κ.2	.17**	.20**	.23**	.27**	-.03	-.01	.01	.63**	1	
I.Κ.3	.09	.20**	.23**	.30**	-.03	-.01	.03	.45**	.50**	1

*, $p < 0.05$: **, $p < 0.01$

Ο Πίνακας 4.3 παρουσιάζει τις συσχετίσεις μεταξύ της επίδοσης των υποκειμένων στις οκτώ κατηγορίες έργων του τεστ αντίληψης των εννοιών του χώρου. Οι υψηλότερες συσχετίσεις παρουσιάζονται μεταξύ της επίδοσης των μαθητών στα έργα των τεστ «Αναπτύγματα Σχημάτων» και «Περιστροφή Καρτών» ($r=.419, p<.01$) και της επίδοσης των μαθητών στα έργα των τεστ «Αναπτύγματα Σχημάτων» και «Προσανατολισμός Αντικειμένων στο Χώρο» ($r=.407, p<.01$). Οι μόνες συσχετίσεις που δεν ήταν στατιστικά σημαντικές ήταν οι συσχετίσεις της επίδοσης των μαθητών στα έργα του τεστ «Σύγκριση Κύβων» με την επίδοση στα έργα του τεστ «Δίπλωση Σχημάτων» και «Ίδιες/Διαφορετικές Κατασκευές». Το γεγονός ότι οι είκοσι έξι από τις είκοσι οκτώ συσχετίσεις μεταξύ της επίδοσης των υποκειμένων στις οκτώ κατηγορίες έργων του τεστ αντίληψης των εννοιών του χώρου ήταν στατιστικά σημαντικές καταδεικνύει ότι τα οκτώ τεστ φαίνεται να αποτελούν δείκτες της ίδιας ικανότητας.

Πίνακας 4.3

Συσχετίσεις Μεταξύ της Επίδοσης των Υποκειμένων στις Κατηγορίες του Τεστ Α.Ε.Χ.

	Σ.Σ.	Α.Σ.	Δ.Σ.	Π.Α.	Π.Ε.	Σ.Κ.	Π.Κ.	Ι.Κ.
Σ.Σ.	1							
Α.Σ.	.348*	1						
Δ.Σ.	.246*	.340*	1					
Π.Α.	.271*	.407*	.228*	1				
Π.Ε.	.318*	.385*	.271*	.293*	1			
Σ.Κ.	.242*	.286*	.031	.214*	.191*	1		
Π.Κ.	.303*	.419*	.274*	.295*	.344*	.211*	1	
Ι.Κ.	.282*	.383*	.212*	.278*	.290*	.106	.281*	1

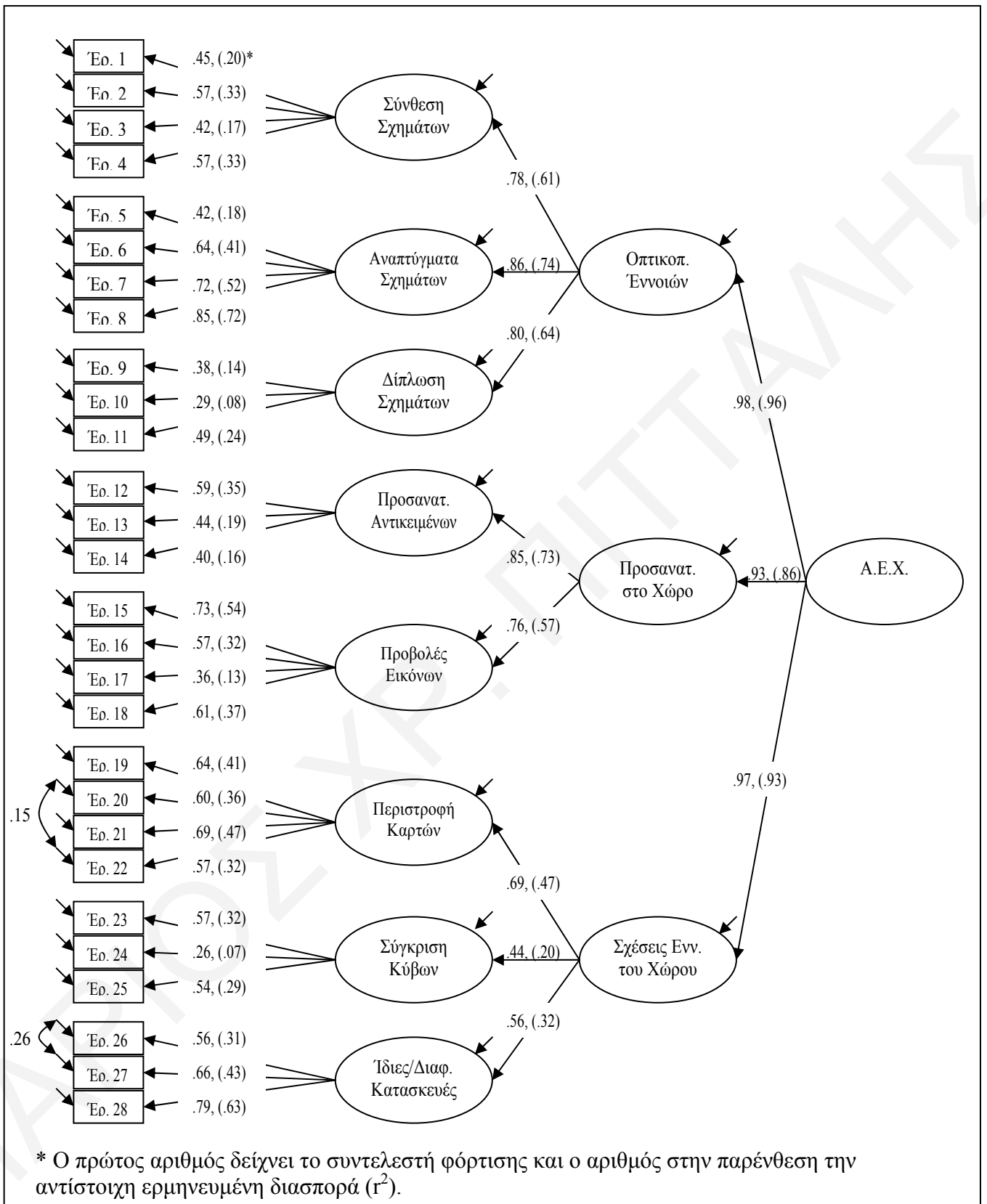
*, $p < 0.05$; **, $p < 0.01$

Ο δείκτης αξιοπιστίας του τεστ μέτρησης της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου ήταν Cronbach's Alpha=.83, ο οποίος θεωρείται πολύ ικανοποιητικός. Οι δείκτες αξιοπιστίας στις πέντε από τις οκτώ κατηγορίες έργων ξεχωριστά ήταν επίσης ικανοποιητικοί (α ίδιες κατασκευές=.77, α αναπτύγματα σχημάτων=.76, α περιστροφή καρτών=.73, α προβολές εικόνων=.67 και α σύνθεση σχημάτων=.57). Αντίθετα, οι δείκτες αξιοπιστίας των έργων των

κατηγοριών «Προσανατολισμός Αντικειμένων στο Χώρο» ($\alpha=.46$), «Σύγκριση Κύβων» ($\alpha=.46$) και «Δίπλωση Σχημάτων» ($\alpha=.38$) δεν ήταν ικανοποιητικοί. Οι χαμηλοί δείκτες αξιοπιστίας σε αυτές τις τρεις κατηγορίες έργων φαίνεται να οφείλονται στο γεγονός ότι συμπεριλήφθηκαν στο τεστ τρία μόνο έργα από κάθε κατηγορία. Με βάση το γεγονός ότι ο δείκτης Cronbach's Alpha επηρεάζεται σε σημαντικό βαθμό από το πλήθος των έργων, αποφασίστηκε ότι μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην παρούσα εργασία για τη μέτρηση παραγόντων της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου.

Επιβεβαίωση της Δομής της Ικανότητας Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου

Για να εξεταστεί η δομή της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου ελέγχθηκε η εγκυρότητα του προτεινόμενου μοντέλου που υποθέτει ότι η αντίληψη των εννοιών του χώρου είναι μια πολυδιάστατη οντότητα που αποτελείται από τρεις διακριτούς παράγοντες, τον παράγοντα «Οπτικοποίηση των Εννοιών του Χώρου» (Spatial Visualization: VZ), τον παράγοντα «Προσανατολισμός στο Χώρο» (Spatial Orientation: SO) και τον παράγοντα «Σχέσεις των εννοιών του χώρου» (Spatial Relations: SR). Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης έδειξαν ότι η προσαρμογή των δεδομένων στο προτεινόμενο μοντέλο ήταν πάρα πολύ καλή, επιβεβαιώνοντας την εγκυρότητα της δομής του μοντέλου και την καταλληλότητά του, για να περιγράψει τη δομή της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου ($CFI=.99$, $\chi^2=333.97$, $df=333$, $\chi^2/df=1.00$, $p>0.05$, $RMSEA=.003$). Όλα τα έργα είχαν στατιστικά σημαντικές φορτίσεις στους αντίστοιχους παράγοντες, όπως παρουσιάζονται στο Διάγραμμα 4.1. Η διακριτή φύση των παραγόντων επιβεβαιώνεται, επίσης, από το γεγονός ότι όλες οι παρατηρούμενες μεταβλητές φορτίζουν μόνο σε ένα παράγοντα πρώτης τάξης. Η προσαρμογή των δεδομένων στη δομή του προτεινόμενου μοντέλου επιβεβαιώνει ότι τα έργα που χρησιμοποιήθηκαν αποτελούν κατάλληλα έργα μέτρησης των άδηλων παραγόντων και ότι οι παράγοντες «Οπτικοποίηση των Εννοιών του Χώρου», «Προσανατολισμός στο Χώρο» και «Σχέσεις των Εννοιών του Χώρου» σχηματίζουν και προβλέπουν μια ανώτερη θεωρητική δομή, την ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου.



Διάγραμμα 4.1. Το μοντέλο της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου.

Πίνακας 4.4

Τυποποιημένη Λύση Μοντέλου Α.Ε.Χ. με Παράγοντα Τρίτης Τάξης

Αδηλος Παράγοντας	Συντελεστής Παλινδρόμησης Παραγόντων 1 ^{ης} Τάξης			Συντελεστής Παλινδρόμησης Παραγόντων 2 ^{ης} Τάξης	Ερμηνευ- μένη Διασπορά
	Ο.Ε.	Π.Χ.	Σ.Ε.	Α.Ε.Χ.	
<u>Παράγοντες 1^{ης} τάξης</u>					
Σύνθεση Σχημάτων	.78*				.61
Αναπτύγματα Σχημάτων	.86				.74
Δίπλωση Σχημάτων	.80				.64
Προσανατ. Αντικειμένων		.86			.73
Προβολές Εικόνων		.76			.58
Σύγκριση Κύβων			.44		.20
Περιστροφή Καρτών			.67		.45
Ίδιες/Διαφ. Κατασκευές			.56		.31
<u>Παράγοντες 2^{ης} τάξης</u>					
Οπτικοποίηση Εν. Χώρ. (Ο.Ε.)				.98	.96
Προσανατ. στο Χώρο (Π.Χ.)				.92	.85
Σχέσεις Ενν. του Χώρου (Σ.Ε.)				.97	.94

*, $p < 0.05$

Όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 4.1, η ερμηνευόμενη διασπορά των έργων ήταν ιδιαίτερα υψηλή, δείχνοντας ότι μπορεί να ερμηνεύσει τη διασπορά των παραγόντων του μοντέλου. Όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα 4.4, ο συντελεστής παλινδρόμησης όλων των παραγόντων πρώτης και δεύτερης τάξης στους αντίστοιχους παράγοντες ανώτερης τάξης ήταν σημαντικός και ιδιαίτερα υψηλός. Ο παράγοντας επίδοση στα έργα του τεστ «Αναπτύγματα Σχημάτων» έχει την υψηλότερη ικανότητα πρόβλεψης του παράγοντα

«Οπτικοποίηση των Εννοιών του Χώρου» ($r^2=.86$), ο παράγοντας επίδοση στα έργα του τεστ «Προσανατολισμός Αντικειμένων στο Χώρο» έχει την ψηλότερη ικανότητα πρόβλεψης του παράγοντα «Προσανατολισμός στο Χώρο» ($r^2=.86$) και ο παράγοντας επίδοση στα έργα του τεστ «Περιστροφή Καρτών» την ψηλότερη ικανότητα πρόβλεψης του παράγοντα «Σχέσεις των Εννοιών του Χώρου» ($r^2=.67$) αντίστοιχα. Η δομή του προτεινόμενου μοντέλου έδειξε, επίσης, ότι οι παράγοντες «Οπτικοποίηση των Εννοιών του Χώρου», «Προσανατολισμός στο Χώρο» και «Σχέσεις των Εννοιών του Χώρου» προβλέπουν σχεδόν στον ίδιο βαθμό την ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου ($r^2_{\text{Οπτικοποίηση Εννοιών}}=.96$, $r^2_{\text{Προσανατολισμός στο Χώρο}}=.85$ και $r^2_{\text{Σχέσεις των Εννοιών του Χώρου}}=.94$, αντίστοιχα).

Όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 4.1, στη δομή του μοντέλου συμπεριλαμβάνονται δύο στατιστικά σημαντικές συσχετίσεις μεταξύ του σφάλματος των δύο πρώτων έργων του τεστ Ίδιες/Διαφορετικές Κατασκευές ($r=.26$) και του σφάλματος του δεύτερου και τέταρτου έργου του τεστ «Περιστροφή Καρτών» ($r=.15$). Οι συσχετίσεις μεταξύ των σφαλμάτων έργων που ανήκουν στον ίδιο παράγοντα δείχνουν ότι τα συγκεκριμένα έργα είχαν κοινό σφάλμα στη μέτρηση λόγω του τύπου και της διαδικασίας χορήγησης του τεστ.

Έλεγχος Αμεταβλητότητας Μοντέλου Ικανότητας Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου

Για τον έλεγχο της αμεταβλητότητας του προτεινόμενου μοντέλου ελέγχθηκε η εγκυρότητά του σε διαφορετικούς πληθυσμούς (Chan & Schmitt, 2000). Συγκεκριμένα, ελέγχθηκε η εγκυρότητά του μοντέλου ξεχωριστά για τους μαθητές του δημοτικού σχολείου και ξεχωριστά για τους μαθητές του γυμνασίου. Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης έδειξαν ότι η προσαρμογή των δεδομένων των μαθητών του δημοτικού σχολείου και του γυμνασίου στο προτεινόμενο μοντέλο ήταν ικανοποιητική, επιβεβαιώνοντας ότι η δομή του μοντέλου είναι σταθερή και για τους δύο πληθυσμούς (δείτε Πίνακα 4.5). Όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 4.2, όλα τα έργα είχαν στατιστικά σημαντικές φορτίσεις στους αντίστοιχους παράγοντες και οι συντελεστές παλινδρόμησης των άδηλων παραγόντων στους αντίστοιχους παράγοντες ανώτερης τάξης ήταν στατιστικά σημαντικοί (δείτε Πίνακα 4.6).

Πίνακας 4.5

Δείκτες Προσαρμογής Μοντέλων μαθητών Δημοτικού και Γυμνασίου

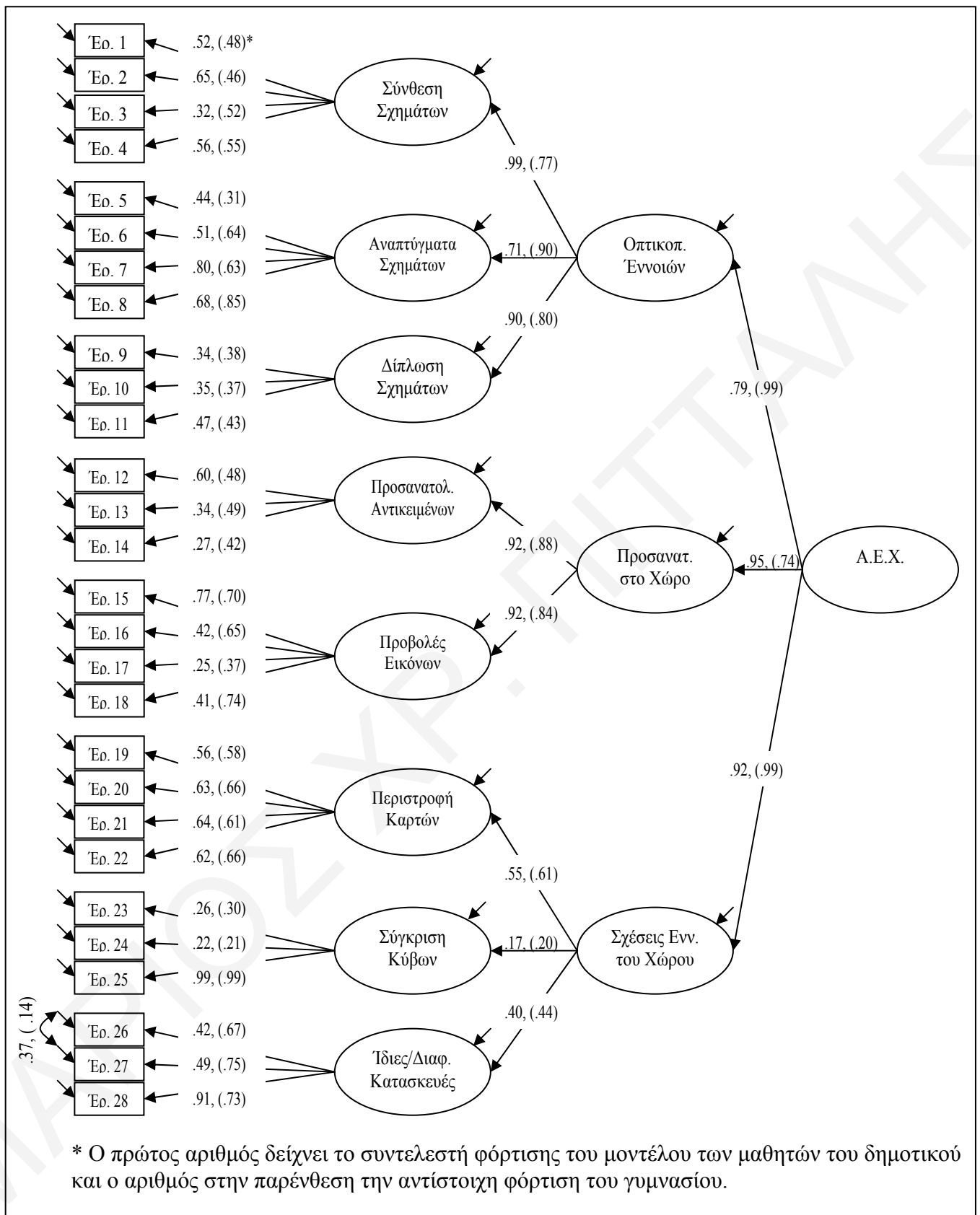
Μοντέλο	Δείκτες Προσαρμογής					
	CFI	χ^2	Df	χ^2/df	<i>p</i>	RMSEA
Δημοτικού	.92	369.22	334	1.11	>.05	.03
Γυμνασίου	.95	383.06	337	1.14	<.05	.03

Πίνακας 4.6

Τυποποιημένη Λύση Μοντέλων μαθητών Δημοτικού και Γυμνασίου

Αδελος Παράγοντας	Συντελεστής Παλινδρόμησης Παραγόντων							
	1 ^{ης} τάξης				2 ^{ης} τάξης			
	Ο.Ε.		Π.Χ.		Σ.Ε.		Α.Ε.Χ.	
	<u>Δημ.</u>	<u>Γυμ.</u>	<u>Δημ.</u>	<u>Γυμ.</u>	<u>Δημ.</u>	<u>Γυμ.</u>	<u>Δημ.</u>	<u>Γυμ.</u>
<u>Παράγοντες 1^{ης} τάξης</u>								
Σύνθεση Σχημάτων	.99*	.78						
Αναπτύγματα Σχημάτ.	.71	.90						
Δίπλωση Σχημάτων	.90	.80						
Προσανατ. Αντικειμ.			.92	.88				
Προβολές Εικόνων			.92	.84				
Σύγκριση Κύβων					.17	.20		
Περιστροφή Καρτών					.55	.61		
Ίδιες/Διαφ. Κατασκ.					.40	.44		
<u>Παράγοντες 2^{ης} τάξης</u>								
Οπτικοποίηση Εν. Χώρ.							.79	.99
Προσανατ. στο Χώρο							.95	.99
Σχέσεις Ενν. του Χώρου							.92	.74

P<0.05



Διάγραμμα 4.2. Το μοντέλο της ικανότητας A.E.X για τους μαθητές του δημοτικού και γυμνασίου.

Έλεγχος της Δομής της Ικανότητας στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου

Για να εξεταστεί η φύση της δομής της ικανότητας των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου ελέγχθηκε η εγκυρότητα του προτεινόμενου μοντέλου με βάση το οποίο η ικανότητα στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου αποτελεί σύνθεση της ικανότητας των μαθητών στους παράγοντες «Αναγνώριση και Κατασκευή Αναπτυγμάτων» (Παράγοντας 1), «Χειρισμός Διαφορετικών Μορφών Αναπαράστασης Τρισδιάστατων Αντικειμένων» (Παράγοντας 2), «Διάταξη Αντικειμένων στο Χώρο» (Παράγοντας 3), «Αναγνώριση Στερεών και των Συστατικών τους Στοιχείων» (Παράγοντας 4), «Μέτρησης Επιφάνειας και Χωρητικότητας Τρισδιάστατων αντικειμένων Χωρίς τη Χρήση Τύπων (Παράγοντας 5) και «Συλλογισμός για Σχέσεις μεταξύ Ιδιοτήτων Στερεών» (Παράγοντας 6).

Ο Πίνακας 4.7 παρουσιάζει τις συσχετίσεις μεταξύ όλων των έργων του τεστ μέτρησης της ικανότητας των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Ο δείκτης αξιοπιστίας των έργων του τεστ στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου ήταν Cronbach's Alpha=.836. Οι δείκτες αξιοπιστίας των έργων των έξι παραγόντων ξεχωριστά ήταν επίσης ικανοποιητικοί ($\alpha_{\Pi 1}=.552$, $\alpha_{\Pi 2}=.606$, $\alpha_{\Pi 3}=.577$, $\alpha_{\Pi 4}=.675$, $\alpha_{\Pi 5}=.572$ και $\alpha_{\Pi 6}=.616$).

Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης έδειξαν ότι η προσαρμογή των δεδομένων της έρευνας στη δομή του μοντέλου ήταν ικανοποιητική ($CFI=.95$, $\chi^2=375.88$, $df=301$, $\chi^2/df=1.25$, $p<0.05$, $RMSEA=.03$) και συνεπώς ότι το μοντέλο των έξι παραγόντων μπορεί να περιγράψει την ικανότητα των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Οι φορτίσεις όλων των έργων του μοντέλου στους αντίστοιχους παράγοντες ήταν σημαντικές, όπως παρουσιάζονται στο Διάγραμμα 4.3. Η διακριτή φύση των έξι παραγόντων του μοντέλου επιβεβαιώνεται από το γεγονός ότι όλες οι παρατηρούμενες μεταβλητές φορτίζουν μόνο σε ένα παράγοντα πρώτης τάξης. Η προσαρμογή των δεδομένων στη δομή του μοντέλου επιβεβαιώνει ότι τα έργα που χρησιμοποιήθηκαν αποτελούν κατάλληλα έργα μέτρησης των έξι άδηλων παραγόντων. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης έδειξαν ότι η ερμηνευόμενη διασπορά των έργων ήταν ιδιαίτερα υψηλή (δείτε Διάγραμμα 4.3), δείχνοντας ότι ερμηνεύουν τη διασπορά των παραγόντων του μοντέλου.

Πίνακας 4.7

Συσχετίσεις Μεταξύ της Επίδοσης των Υποκειμένων στα Έργα του Τεστ Ικανότητα στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου

	Έργ.1	Έργ.2	Έργ.3	Έργ.4	Έργ.5	Έργ.6	Έργ.7	Έργ.8	Έργ.9	Έργ.10	Έργ.11	Έργ.12	Έργ.13	Έργ.14	Έργ.15
Έργ.1	1														
Έργ.2	.27**	1													
Έργ.3	.21**	.21**	1												
Έργ.4	.19**	.31**	.26**	1											
Έργ.5	.18**	.23**	.20**	.19**	1										
Έργ.6	.21**	.29**	.24**	.35**	.25**	1									
Έργ.7	.23**	.20**	.15**	.22**	.24**	.23**	1								
Έργ.8	.28**	.28**	.15**	.17**	.18**	.25**	.46**	1							
Έργ.9	.08	.04	.13*	.10	.19**	.12*	.13*	.06	1						
Έργ.10	.16**	.25**	.23**	.25**	.19**	.37**	.20**	.22**	.10	1					
Έργ.11	.12*	.14*	.02	.12*	.16**	.14*	.16**	.18**	.14*	.14*	1				
Έργ.12	.21**	.20**	.16**	.23**	.09	.13*	.07	.08	.05	.16**	.20**	1			
Έργ.13	.26**	.29**	.28**	.30**	.26**	.24**	.21**	.21**	.14*	.17**	.13*	.18**	1		
Έργ.14	.21**	.36**	.22**	.29**	.28**	.32**	.30**	.24**	.15*	.26**	.23**	.25**	.26**	1	
Έργ.15	.25**	.15**	.17**	.13*	.18**	.10	.26**	.18**	.17**	.18**	.13*	.19**	.14*	.42**	1
Έργ.16	.18**	.20**	.18**	.12*	.10	.03	.15*	.16*	.02	.19**	.09	.13*	.13*	.15*	.10
Έργ.17	.19**	.25**	.18**	.22**	.14*	.25**	.23**	.29**	.10	.31**	.09	.02	.18**	.23**	.19**
Έργ.18	.19**	.23**	.15*	.16**	.15*	.35**	.23**	.28**	.19**	.24**	.12	.03	.19**	.24**	.15*
Έργ.19	.30**	.25**	.23**	.30**	.16**	.33**	.32**	.30**	.20**	.19**	.17**	.10	.17**	.31**	.13*
Έργ.20	.33**	.22**	.25**	.23**	.19**	.33**	.36**	.30**	.20**	.29**	.11	.05	.23**	.34**	.23**
Έργ.21	.12	.20**	.03	.12*	.12*	.12*	.12*	.15*	.16**	.07	.19**	.11	.11	.29**	.27**
Έργ.22	.08	.13*	.14*	.10	.12	.06	.02	.06	.11	.14*	.12	.09	.07	.13*	.03
Έργ.23	.08	.16**	.11	.12*	.14*	.20**	.24**	.20**	.14*	.11	.13*	.12	.10	.20**	.16**
Έργ.24	.09	.04	.14*	.03	.14*	.15*	.07	.18**	.04	-.04	.03	.07	.17**	.09	.03
Έργ.25	.26**	.29**	.24**	.25**	.21**	.28**	.35**	.26**	.10	.31**	.21**	.14*	.20**	.34**	.23**
Έργ.26	.19**	.23**	.18**	.22**	.20**	.22**	.19**	.18**	.13*	.25**	.18**	.15*	.19**	.32**	.19**
Έργ.27	.28**	.21**	.17**	.26**	.25**	.34**	.29**	.39**	.17**	.30**	.22**	.18**	.27**	.34**	.18**

*, $p < 0.05$: **, $p < 0.01$

	Έργ.16	Έργ.17	Έργ.18	Έργ.19	Έργ.20	Έργ.21	Έργ.22	Έργ.23	Έργ.24	Έργ.25	Έργ.26	Έργ.27
Έργ.1												
Έργ.2												
Έργ.3												
Έργ.4												
Έργ.5												
Έργ.6												
Έργ.7												
Έργ.8												
Έργ.9												
Έργ.10												
Έργ.11												
Έργ.12												
Έργ.13												
Έργ.14												
Έργ.15												
Έργ.16	1											
Έργ.17	.16**	1										
Έργ.18	.00	.26**	1									
Έργ.19	.13*	.24**	.53**	1								
Έργ.20	.17**	.28**	.52**	.44**	1							
Έργ.21	.16**	.19**	.16**	.23**	.13*	1						
Έργ.22	.01	.21**	-.04	.03	.07	.04	1					
Έργ.23	.12*	.13*	.13*	.16**	.13*	.14*	-.09	1				
Έργ.24	.15*	.06	.08	.15*	.02	.13*	.07	.07	1			
Έργ.25	.12*	.27**	.44**	.63**	.42**	.13*	.05	.20**	.03	1		
Έργ.26	.14*	.14*	.21**	.27**	.30**	.12*	.28**	.20**	.01	.34**	1	
Έργ.27	.13*	.33**	.38**	.40**	.45**	.15*	.13*	.16**	.12	.40**	.34**	1

*, $p < 0.05$; **, $p < 0.01$

Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης έδειξαν ότι οι συσχετίσεις μεταξύ όλων των παραγόντων ήταν ψηλές και στατιστικά σημαντικές (δείτε Πίνακα 4.8). Συσχετίσεις μεγαλύτερες από 0.9 παρουσιάζονται μεταξύ των παραγόντων 1 με 2 ($r=.936, p<.05$), 1 με 3 ($r=.956, p<.05$), 2 με 4 ($r=.915, p<.05$), 3 με 5 ($r=.970, p<.05$) και 4 με 6 ($r=.921, p<.05$). Οι υπόλοιπες συσχετίσεις κυμαίνονται μεταξύ 0.7 και 0.9 με εξαίρεση τις συσχετίσεις μεταξύ των παραγόντων 3 με 4 ($r=.679, p<.05$) και 5 με 6 ($r=.624, p<.05$).

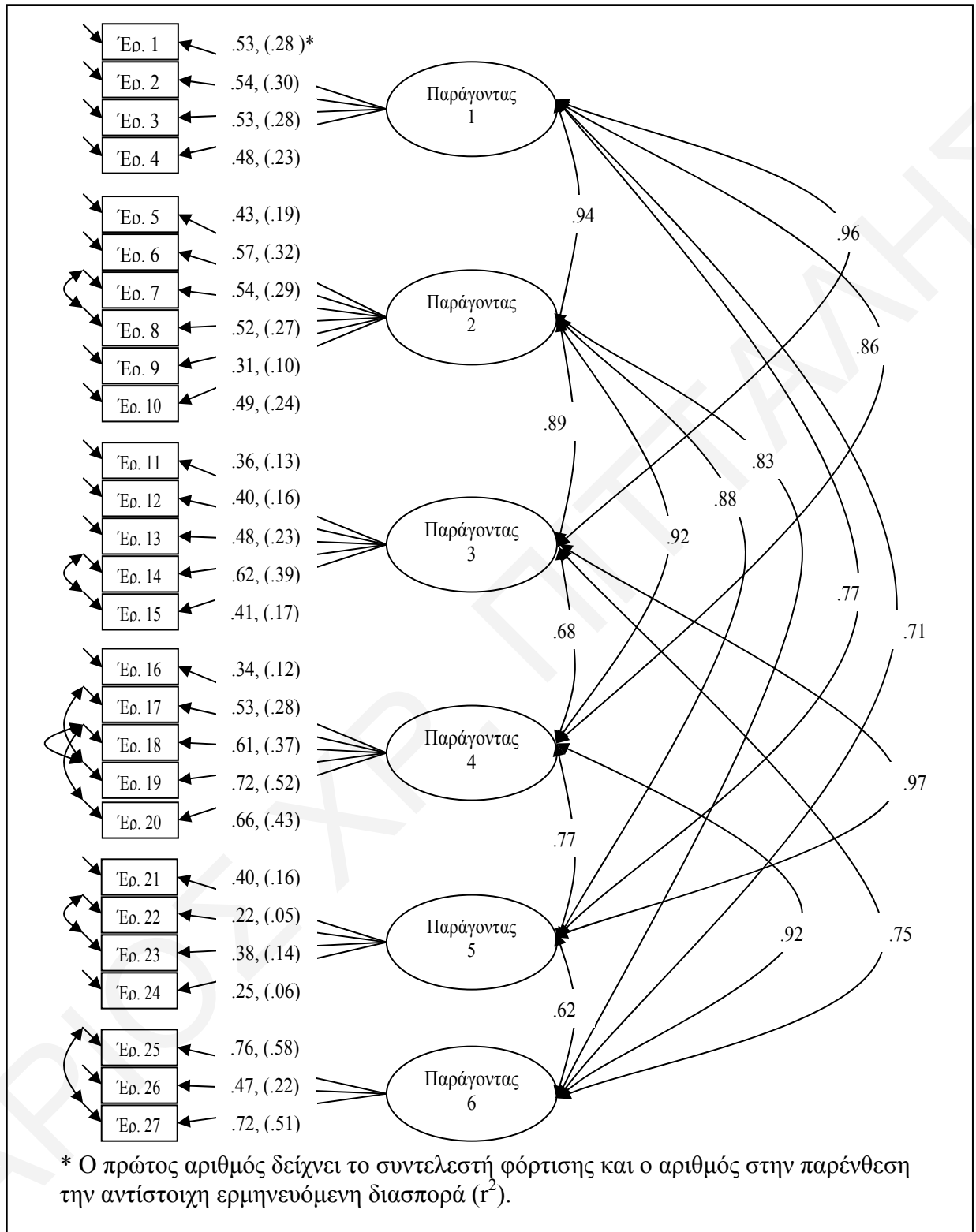
Όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 4.3, στη δομή του μοντέλου συμπεριλαμβάνονται επτά στατιστικά σημαντικές συσχετίσεις μεταξύ του σφάλματος έργων που ανήκουν στον ίδιο παράγοντα. Οι συσχετίσεις αυτές δείχνουν ότι τα συγκεκριμένα έργα είχαν κοινό σφάλμα στη μέτρηση λόγω του τύπου και της διαδικασίας χορήγησης του τεστ. Συγκεκριμένα, υπάρχει στατιστικά σημαντική συσχέτιση μεταξύ του σφάλματος των Έργων 7 και 8 ($r=.20$, ανήκουν στον Παράγοντα 2), 14 και 15 ($r=.17$, ανήκουν στον Παράγοντα 3), 17 και 19 ($r=-.10$, ανήκουν στον Παράγοντα 4), 18 και 19 ($r=.12$, ανήκουν και τα δύο στον Παράγοντα 4), 18 και 20 ($r=.16$, ανήκουν στον Παράγοντα 4), 22 και 23 ($r=-.16$, ανήκουν στον Παράγοντα 3) και των σφάλματος των Έργων 25 και 27 αντίστοιχα ($r=-.14$, ανήκουν στον Παράγοντα 6).

Πίνακας 4.8

Συσχετίσεις μεταξύ των Παραγόντων της Ικανότητας στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου

	Π1	Π2	Π3	Π4	Π5	Π6
Π1	1					
Π2	.936*	1				
Π3	.956*	.886*	1			
Π4	.860*	.915*	.679*	1		
Π5	.766*	.875*	.970*	.774*	1	
Π6	.709*	.825*	.748*	.921*	.624*	1

*, $p < 0.05$



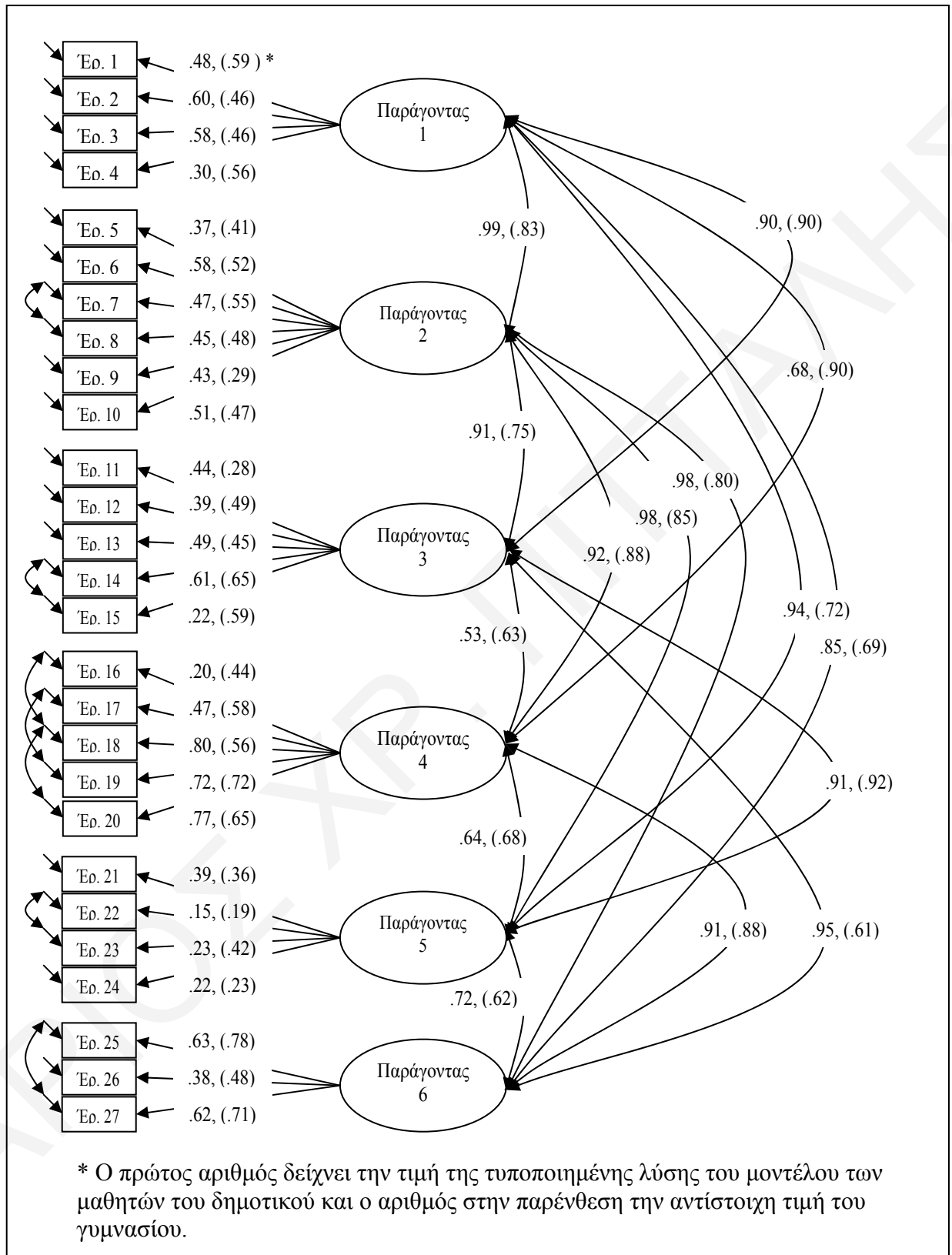
Διάγραμμα 4.3. Το μοντέλο της Ικανότητας στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου

Για τον έλεγχο της αμεταβλητότητας του προτεινόμενου μοντέλου της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου ελέγχθηκε ξεχωριστά η εγκυρότητά του μοντέλου για τους μαθητές του δημοτικού σχολείου και για τους μαθητές του γυμνασίου, ελέγχοντας έτσι την αμεταβλητότητα του μοντέλου σε μαθητές διαφορετικών ηλικιών. Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης έδειξαν ότι η προσαρμογή των δεδομένων των μαθητών του δημοτικού σχολείου και του γυμνασίου στο προτεινόμενο μοντέλο ήταν ικανοποιητική (δείτε Πίνακα 4.9). Όλα τα έργα είχαν στατιστικά σημαντικές φορτίσεις στους αντίστοιχους παράγοντες και για τους δύο πληθυσμούς, όπως παρουσιάζονται στο Διάγραμμα 4.4. Τα αποτελέσματα αυτά αποδεικνύουν ότι η δομή του μοντέλου ήταν σταθερή και για τους δύο πληθυσμούς.

Πίνακας 4.9

Δείκτες Προσαρμογής Μοντέλων ικανότητας Ε.Γ.Χ. μαθητών Δημοτικού και Γυμνασίου

Μοντέλο	Δείκτες Προσαρμογής					
	CFI	χ^2	df	χ^2/df	<i>P</i>	RMSEA
Δημοτικού	.95	334.01	301	1.11	>.05	.03
Γυμνάσιου	.90	393.06	301	1.31	<.05	.04



Διάγραμμα 4.4. Το μοντέλο της Ικανότητας Ε.Γ.Χ. για τους Μαθητές του Δημοτικού και Γυμνασίου

Σχέση μεταξύ Ικανότητας Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου και Ικανότητας στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου

Για τη διερεύνηση της σχέσης μεταξύ της ικανότητας των μαθητών αντίληψης των εννοιών του χώρου (A.E.X.) και της ικανότητάς τους στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου εξετάστηκε η εγκυρότητα δύο δομικών μοντέλων: (α) Το πρώτο μοντέλο υποθέτει ότι ο άδηλος παράγοντας τρίτης τάξης ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου αποτελεί παράγοντα πρόβλεψης των παραγόντων της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου και (β) το δεύτερο μοντέλο υποθέτει ότι οι παράγοντες της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου αποτελούν παράγοντες πρόβλεψης της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου. Τα αποτελέσματα της δομικής ανάλυσης έδειξαν ότι η προσαρμογή του πρώτου μοντέλου ήταν ικανοποιητική ($CFI=.948$, $\chi^2=1562.675$, $df=1386$, $\chi^2/df=1.127$, $RMSEA=.021$) και οι συντελεστές παλινδρόμησης της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου στους παράγοντες της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου ήταν στατιστικά σημαντικοί. Αντίθετα, τα αποτελέσματα της δομικής ανάλυσης έδειξαν ότι στο δεύτερο μοντέλο οι συντελεστές παλινδρόμησης των παραγόντων της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου στην ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου δεν ήταν στατιστικά σημαντικοί και για αυτό το μοντέλο αυτό δεν μπορούσε να γίνει αποδεκτό. Με βάση τα αποτελέσματα αυτά συμπεραίνουμε ότι η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου αποτελεί ισχυρό παράγοντα πρόβλεψης των παραγόντων της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου.

Οι συντελεστές παλινδρόμησης της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου στους παράγοντες της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου ήταν ιδιαίτερα ψηλοί (δείτε Πίνακα 4.10). Ο ψηλότερος συντελεστής παλινδρόμησης ήταν στον Παράγοντα 5 ($r=.933$, $z=3.938$, $p<0.05$). Ο συντελεστής αυτός ήταν ιδιαίτερα ψηλός και δείχνει ότι η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου μπορεί να προβλέψει σε μεγάλο βαθμό την ικανότητα των μαθητών στη μέτρηση της επιφάνειας και χωρητικότητας τρισδιάστατων αντικειμένων χωρίς τη χρήση τύπων. Το ίδιο ισχύει και για τους Παράγοντες 2 ($r=.918$, $z=3.944$, $p<0.05$), 1 ($r=.800$, $z=4.031$, $p<0.05$) και 3 ($r=.861$, $z=3.554$, $p<0.05$). Ο συντελεστής παλινδρόμησης στον Παράγοντα 6 ήταν $.719$ ($z=4.262$, $p<0.05$) και τέλος στον Παράγοντα 4 ήταν $.645$ ($r=.645$, $z=3.473$, $p<0.05$). Ο συντελεστής παλινδρόμησης ήταν μικρότερος στους Παράγοντες 6 και 4 γιατί οι ικανότητες συλλογισμού για σχέσεις μεταξύ στοιχείων και ιδιοτήτων στερεών και αναγνώρισης στερεών και των συστατικών

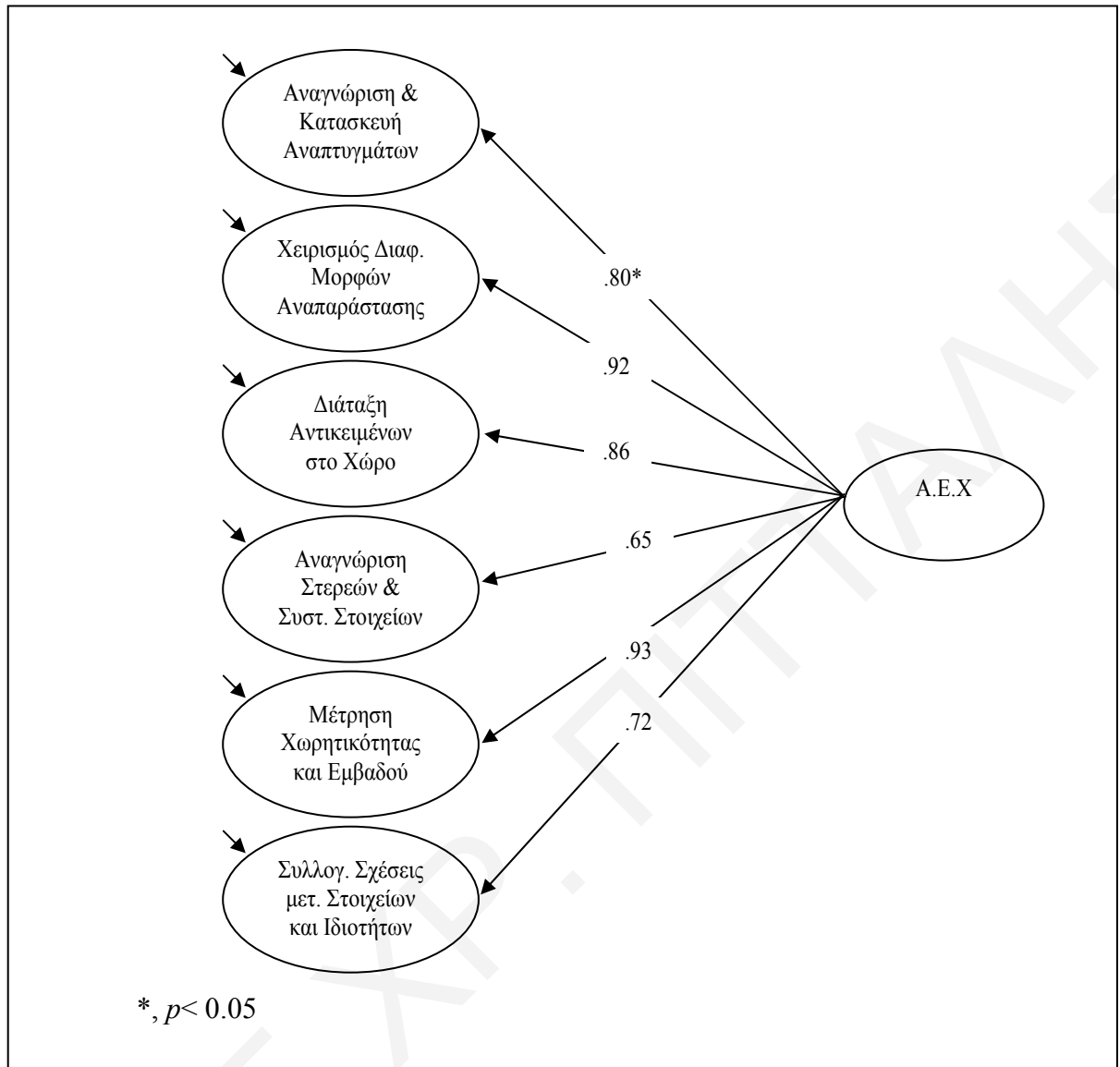
τους στοιχείων σχετίζονται και με άλλους παράγοντες πέρα από την αντίληψη των εννοιών του χώρου όπως τη γνώση των ιδιοτήτων των δισδιάστατων και τρισδιάστατων σχημάτων.

Πίνακας 4.10

Συντελεστής Παλινδρόμησης Ικανότητας Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου στους Παράγοντες της Ικανότητας στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου

Παράγοντες	Π1		Π2		Π3		Π4		Π5		Π6	
Συντελεστής παλινδρόμησης Α.Ε.Χ. στους παράγοντες της Γεωμετρίας του Χώρου	Γ	Ζ	Γ	Ζ	Γ	Ζ	Γ	Ζ	Γ	Ζ	Γ	Ζ
	.80	4.03	.92	3.94	.86	3.55	.65	3.47	.93	3.94	.72	4.26

Τα αποτελέσματα του δομικού μοντέλου έδειξαν ότι η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου αποτελεί ισχυρό παράγοντα πρόβλεψης των έξι παραγόντων της ικανότητας των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου και ότι ο συντελεστής παλινδρόμησης της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου είναι ψηλότερος στους παράγοντες που εμπλέκουν περισσότερο ικανότητες ή διαδικασίες οπτικοποίησης όπως για παράδειγμα στην αναγνώριση και κατασκευή αναπτυγμάτων, στο χειρισμό διαφορετικών μορφών αναπαράστασης τρισδιάστατων αντικειμένων, στη διάταξη αντικειμένων στο χώρο και στον υπολογισμό της επιφάνειας και χωρητικότητας τρισδιάστατων αντικειμένων χωρίς τη χρήση τύπων.



Διάγραμμα 4.5. Σχέση μεταξύ Ικανότητας Α.Ε.Χ. και των Παραγόντων της Ικανότητας στις Ε.Γ.Χ.

Επίδοση των Μαθητών στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου και στην Αντίληψη των Εννοιών του Χώρου και Διαφορές μεταξύ των Μαθητών των Διαφορετικών Τάξεων

Ο Πίνακας 4.11 παρουσιάζει τα περιγραφικά αποτελέσματα των υποκειμένων της έρευνας στους έξι παράγοντες της ικανότητας των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου και στους τρεις παράγοντες της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου. Η επίδοση των μαθητών ήταν μικρότερη από 0.50 στους τρεις από τους έξι παράγοντες της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου ($M.O_{\Pi3}=0.30$, $M.O_{\Pi5}=0.43$ και $M.O_{\Pi6}=0.36$). Σε δύο παράγοντες ο μέσος όρος της επίδοσής τους ήταν ελαφρώς μεγαλύτερος από 0.50 ($M.O_{\Pi1}=0.59$ και $M.O_{\Pi2}=0.56$), ενώ μόνο ο μέσος όρος της επίδοσης των υποκειμένων της έρευνας στον παράγοντα «αναγνώριση στερεών και των συστατικών τους στοιχείων» (Παράγοντας 4, $M.O_{\Pi4}=0.72$) ήταν μεγαλύτερος από 0.67. Συνοψίζοντας, μπορεί να λεχθεί ότι τα υποκείμενα της έρευνας είχαν καλή επίδοση μόνο στον Παράγοντα 4, ικανοποιητική επίδοση στους Παράγοντες 1 και 2 και καθόλου ικανοποιητική επίδοση στους Παράγοντες 3, 5 και 6. Οι μεγάλες τιμές της τυπικής απόκλισης και του εύρους των έξι παραγόντων υποδηλώνουν ότι δεν υπάρχει ομοιογένεια στην επίδοση των υποκειμένων. Οι τιμές της λοξότητας και κύρτωσης είναι μικρότερες από δύο, στοιχείο που δείχνει ότι η επίδοση των μαθητών στους παράγοντες της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου ακολουθεί κανονική τιμή.

Ο μέσος όρος των υποκειμένων στον παράγοντα «προσανατολισμός στον χώρο» ήταν 0.51 και στους παράγοντες «οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου» και «σχέσεις των εννοιών του χώρου» ήταν 0.62 και 0.63 αντίστοιχα. Ο μέσος όρος της συνολικής επίδοσης των μαθητών στην ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου ήταν 0.59. Η επίδοσή των μαθητών και στους τρεις παράγοντες ήταν ικανοποιητική.

Πίνακας 4.11

Περιγραφικά Αποτελέσματα των Παραγόντων της Ικανότητας στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου και των παραγόντων της Ικανότητας Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου

Παράγοντας	Μέσος Όρος	Τυπική Απόκλιση	Εύρος	Λοξότητα	Κύρτωση
Παράγοντας 1	0.59	0.28	1	-0.10	-1.08
Παράγοντας 2	0.56	0.25	1	-0.20	-0.69
Παράγοντας 3	0.40	0.29	1	0.44	-0.71
Παράγοντας 4	0.72	0.20	0.85	-0.56	-0.40
Παράγοντας 5	0.43	0.26	1	0.19	-0.53
Παράγοντας 6	0.36	0.31	1	0.46	-0.90
Οπτικοπ. Εν. Χώρ.	0.62	0.18	0.83	0.03	-0.61
Προσαν. Εν. Χώρ.	0.51	0.26	1	0.07	-0.74
Σχέσεις Εν. Χώρ	0.63	0.22	0.92	-0.06	-0.87
Αντίληψη Εν. Χώρ.	0.59	0.18	0.75	0.25	-0.78

Για να εξεταστεί κατά πόσον υπάρχουν διαφορές στην επίδοση των μαθητών των πέντε διαφορετικών τάξεων στους παράγοντες της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου και στους παράγοντες της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου πραγματοποιήθηκε πολλαπλή ανάλυση διασποράς (MANOVA). Πραγματοποιήθηκε μια ανάλυση για να εξεταστούν οι διαφορές στους παράγοντες της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου και μια ανάλυση για τις διαφορές στους παράγοντες της αντίληψης των εννοιών του χώρου. Ο Πίνακας 4.12 παρουσιάζει τους μέσους όρους και τις τυπικές αποκλίσεις των μαθητών των πέντε διαφορετικών τάξεων στους παράγοντες που αναφέρθηκαν πιο πάνω.

Πίνακας 4.12

Μέσοι Όροι και Τυπικές Αποκλίσεις των Μαθητών των Πέντε Τάξεων στους Παράγοντες της Ικανότητας στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου και στους Παράγοντες της Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου

Παράγοντας	Ε΄ τάξη		Στ΄ τάξη		Α΄ γυμν.		Β΄ γυμν.		Γ΄ γυμν.	
	Μ.Ο.	Τ.Α.	Μ.Ο.	Τ.Α.	Μ.Ο.	Τ.Α.	Μ.Ο.	Τ.Α.	Μ.Ο.	Τ.Α.
Παράγοντ. 1	0.44	0.26	0.59	0.27	0.55	0.28	0.66	0.26	0.71	0.25
Παράγοντ. 2	0.42	0.24	0.52	0.26	0.55	0.25	0.67	0.21	0.67	0.24
Παράγοντ. 3	0.25	0.22	0.38	0.29	0.37	0.26	0.50	0.29	0.51	0.31
Παράγοντ. 4	0.67	0.21	0.72	0.19	0.68	0.21	0.77	0.19	0.79	0.18
Παράγοντ. 5	0.35	0.24	0.37	0.23	0.47	0.28	0.49	0.22	0.49	0.22
Παράγοντ. 6	0.25	0.25	0.35	0.30	0.34	0.32	0.47	0.31	0.40	0.35
Οπτικ. Εν.Χ.	0.50	0.14	0.60	0.17	0.63	0.19	0.69	0.16	0.69	0.16
Πρ. Εν. Χ.	0.33	0.25	0.48	0.21	0.54	0.26	0.60	0.25	0.60	0.26
Σχ. Εν. Χ.	0.52	0.19	0.59	0.21	0.63	0.23	0.70	0.20	0.76	0.15

Τα αποτελέσματα των δύο αναλύσεων έδειξαν ότι υπάρχουν διαφορές μεταξύ των μαθητών των πέντε τάξεων που συμμετείχαν στην έρευνα στην επίδοσή τους στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου ($Pillai's F_{(4,269)}=2.80, p<0.05$) και στους παράγοντες της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου ($Pillai's F_{(4,272)}=5.69, p<0.05$). Όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.13, υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μαθητών των πέντε τάξεων στους έξι παράγοντες της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου και στους τρεις παράγοντες της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου.

Πίνακας 4.13

Αποτελέσματα Πολλαπλής Ανάλυσης Διασποράς

Πηγή Διακύμανσης	Αθροισμα Τετραγώνων	Βαθμοί Ελευθερίας	Μέσο Τετράγωνο	F	Επίπεδο Σημαντικότητας
Παράγοντας 1	2.16	4	0.54	7.64	$p<0.01$
Παράγοντας 2	2.41	4	0.60	10.63	$p<0.01$
Παράγοντας 3	2.50	4	0.62	8.26	$p<0.01$
Παράγοντας 4	0.58	4	0.14	3.73	$p<0.05$
Παράγοντας 5	1.05	4	0.26	4.09	$p<0.05$
Παράγοντας 6	1.66	4	0.42	4.43	$p<0.05$
Οπτικοπ. Εν. Χώρ.	1.33	4	0.33	12.43	$p<0.01$
Προσαν. στο Χώρο	2.72	4	0.68	11.30	$p<0.01$
Σχέσεις Εννοιών Χ.	1.86	4	0.47	11.55	$p<0.01$

Στη συνέχεια πραγματοποιήθηκε post-hoc ανάλυση, για να εντοπιστεί μεταξύ ποιων τάξεων υπάρχουν σημαντικές διαφορές στους παράγοντες της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου και στους παράγοντες της αντίληψης των εννοιών του χώρου. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.14, στον παράγοντα «αναγνώριση και κατασκευή αναπτυγμάτων τρισδιάστατων σχημάτων», η επίδοση των μαθητών της δευτέρας και τρίτης γυμνασίου ήταν στατιστικά ψηλότερη από την επίδοση των μαθητών της πέμπτης δημοτικού ($p<0.01$ και $p<0.01$, αντίστοιχα). Οι μαθητές της δευτέρας και τρίτης γυμνασίου είχαν, επίσης, στατιστικά ψηλότερη επίδοση από τους μαθητές της πέμπτης δημοτικού ($p<0.01$ και $p<0.01$, αντίστοιχα) και έκτης δημοτικού ($p<0.05$ και $p<0.05$, αντίστοιχα) στον παράγοντα «χειρισμός διαφορετικών μορφών αναπαράστασης στερεών».

Επιπρόσθετα, οι μαθητές της δευτέρας και τρίτης γυμνασίου είχαν στατιστικά ψηλότερη επίδοση από τους μαθητές της πέμπτης δημοτικού στους παράγοντες «διάταξη αντικειμένων στο χώρο» ($p<0.01$ και $p<0.01$, αντίστοιχα), «μέτρηση επιφάνειας και χωρητικότητας τρισδιάστατων αντικειμένων χωρίς τη χρήση τύπων» ($p<0.05$ και $p<0.05$, αντίστοιχα) και «συλλογισμός για σχέσεις μεταξύ στοιχείων και ιδιοτήτων στερεών» ($p<0.05$ και $p<0.05$, αντίστοιχα). Στον παράγοντα «αναγνώριση στερεών και των συστατικών τους στοιχείων»,

η επίδοση των μαθητών της τρίτης γυμνασίου ήταν στατιστικά ψηλότερη επίδοση από την επίδοση των μαθητών της πέμπτης δημοτικού ($p<0.05$ και $p<0.05$, αντίστοιχα).

Πίνακας 4.14

Σύγκριση της Επίδοσης των Μαθητών των Πέντε Τάξεων στους Παράγοντες της Εργασίας

Εξαρτημένη Μεταβλητή	Τάξη (1)	Τάξη (2)	Επίπεδο Σημαντικότητας (Scheffe test)
Παράγοντας 1	Ε΄ δημοτικού	Β΄ γυμνασίου	$p<0.01$
		Γ΄ γυμνασίου	$p<0.01$
Παράγοντας 2	Ε΄ δημοτικού	Β΄ γυμνασίου	$p<0.01$
		Γ΄ γυμνασίου	$p<0.01$
	Στ΄ δημοτικού	Β΄ γυμνασίου	$p<0.05$
		Γ΄ γυμνασίου	$p<0.05$
Παράγοντας 3	Ε΄ δημοτικού	Β΄ γυμνασίου	$p<0.01$
		Γ΄ γυμνασίου	$p<0.01$
Παράγοντας 4	Ε΄ δημοτικού	Γ΄ γυμνασίου	$p<0.05$
Παράγοντας 5	Ε΄ δημοτικού	Β΄ γυμνασίου	$p<0.05$
		Γ΄ γυμνασίου	$p<0.05$
Παράγοντας 6	Ε΄ δημοτικού	Β΄ γυμνασίου	$p<0.05$
		Γ΄ γυμνασίου	$p<0.05$
Οπτικοποίηση Εννοιών του Χώρου	Ε΄ δημοτικού	Στ΄ δημοτικού	$p<0.05$
		Α΄ γυμνασίου	$p<0.01$
	Στ΄ δημοτικού	Β΄ γυμνασίου	$p<0.05$
		Γ΄ γυμνασίου	$p<0.05$
		Β΄ γυμνασίου	$p<0.05$
		Γ΄ γυμνασίου	$p<0.05$

Προσανατολισμός στο Χώρο	Ε΄ δημοτικού	Στ΄ δημοτικού	$p < 0.05$
		Α΄ γυμνασίου	$p < 0.05$
		Β΄ γυμνασίου	$p < 0.05$
		Γ΄ γυμνασίου	$p < 0.05$
Σχέσεις των Εννοιών του Χώρου	Ε΄ δημοτικού	Α΄ γυμνασίου	$p < 0.05$
		Β΄ γυμνασίου	$p < 0.01$
		Γ΄ γυμνασίου	$p < 0.01$
	Στ΄ δημοτικού	Β΄ γυμνασίου	$p < 0.05$
		Γ΄ γυμνασίου	$p < 0.01$
Α΄ γυμνασίου	Γ΄ γυμνασίου	$p < 0.05$	

Η επίδοση των μαθητών της έκτης δημοτικού ($p < 0.05$ και $p < 0.05$, αντίστοιχα), πρώτης γυμνασίου ($p < 0.01$ και $p < 0.05$, αντίστοιχα), δευτέρας γυμνασίου ($p < 0.05$ και $p < 0.05$, αντίστοιχα) και τρίτης γυμνασίου ($p < 0.05$ και $p < 0.05$, αντίστοιχα) ήταν στατιστικά ψηλότερη από την επίδοση των μαθητών της πέμπτης δημοτικού στους παράγοντες «οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου» και «προσανατολισμός στο χώρο». Επιπρόσθετα, οι μαθητές της δευτέρας και τρίτης γυμνασίου είχαν στατιστικά ψηλότερη επίδοση από τους μαθητές της έκτης δημοτικού στον παράγοντα «οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου» ($p < 0.05$ και $p < 0.05$, αντίστοιχα). Οι μαθητές της δευτέρας ($p < 0.01$ και $p < 0.05$, αντίστοιχα) και τρίτης γυμνασίου ($p < 0.01$ και $p < 0.01$, αντίστοιχα) είχαν στατιστικά ψηλότερη επίδοση από τους μαθητές της πέμπτης και έκτης δημοτικού στον παράγοντα «σχέσεις των εννοιών του χώρου». Οι μαθητές της πρώτης γυμνασίου είχαν, επίσης, στατιστικά ψηλότερη επίδοση από τους μαθητές της πέμπτης δημοτικού ($p < 0.05$) και οι μαθητές της τρίτης γυμνασίου είχαν ψηλότερη επίδοση από τους μαθητές της πρώτης γυμνασίου ($p < 0.05$).

Κατηγορίες Μαθητών στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου

Για να εξεταστεί κατά πόσον υπάρχουν ομάδες υποκειμένων με παρόμοια συμπεριφορά ως προς την ικανότητά τους στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου πραγματοποιήθηκε ανάλυση Latent Class με βάση τη συνολική επίδοσή των μαθητών στο τεστ στις έννοιες

της γεωμετρίας του χώρου. Ελέγχθηκε διαδοχικά η εγκυρότητα τριών μοντέλων με βάση τα οποία υποθέσαμε ότι τα υποκείμενα της έρευνας μπορούν να διαχωριστούν σε τρεις, τέσσερις ή πέντε κατηγορίες υποκειμένων με παρόμοια συμπεριφορά στο τεστ στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης έδειξαν ότι το καλύτερο μοντέλο με τη μεγαλύτερη τιμή εντροπίας και τις μικρότερες τιμές στους δείκτες AIC και BIC είναι η λύση με τέσσερις κατηγορίες υποκειμένων (εντροπία=.88, AIC=-132.39 και BIC=-104.48), όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα 4.15. Η μέση τιμή πιθανότητας των υποκειμένων της κάθε κατηγορίας να ανήκουν στην κατηγορία που τους εντάσσει η ανάλυση (Average Latent Class Probabilities) με βάση το μοντέλο των τεσσάρων κατηγοριών ήταν αρκετά ικανοποιητική (δείτε Πίνακα 4.16).

Πίνακας 4.15

Δείκτες Προσαρμογής Μοντέλων με Διαφορετικό Αριθμό Κατηγοριών

Δείκτες	AIC	BIC	Εντροπία
Μοντέλο με 3 κατηγορίες	-111.82	-90.89	.64
Μοντέλο με 4 κατηγορίες	-132.39	-104.48	.88
Μοντέλο με 5 κατηγορίες	-131.25	-96.36	.85

Πίνακας 4.16

Μέση Τιμή Πιθανότητας Κάθε Κατηγορίας (Average Latent Class Probabilities)

Πιθανότητα να ανήκουν στην	Κατηγορία 1	Κατηγορία 2	Κατηγορία 3	Κατηγορία 4
Υποκ. Κατηγορίας 1	.957	0	.043	0
Υποκ. Κατηγορίας 2	0	.942	.028	.029
Υποκ. Κατηγορίας 3	.031	.032	.937	0
Υποκ. Κατηγορίας 4	0	.093	0	.907

Το ποσοστό των υποκειμένων της έρευνας που ανήκουν με βάση την ανάλυση ομάδων που πραγματοποιήθηκε στην Κατηγορία 1 ήταν 24%. Στην Κατηγορία 2 ανήκει το 33.3% των υποκειμένων, στην Κατηγορία 3 το 30.5% και στην Κατηγορία 4 το 12.2% (δείτε Πίνακα 4.17). Το ποσοστό των μαθητών που ανήκει στην κάθε κατηγορία

διαφοροποιείται ανάλογα με την τάξη των μαθητών. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.15 το 49.1% των μαθητών της Ε΄ τάξης συμπεριλαμβάνεται στην Κατηγορία 1, το 32.7% στην Κατηγορία 2, το 14.5% στην Κατηγορία 3 και μόνο το 3.6% στην Κατηγορία 4. Όσον αφορά τους μαθητές της Στ΄ τάξης, το ποσοστό των μαθητών που ανήκει στην Κατηγορία 1 περιορίζεται στο 24.6%, στην Κατηγορία 2 το 41%, στην Κατηγορία 3 το 26.2% και στην Κατηγορία 4 το 8.2%. Τα ποσοστά για τους μαθητές της Α΄ Γυμνασίου ήταν παρόμοια με τους μαθητές της Στ΄ Δημοτικού, 27.6% στην Κατηγορία 1, 34.5% στην Κατηγορία 2, 27.6% στην Κατηγορία 3 και 10.3% στην Κατηγορία 4. Το ποσοστό των μαθητών της Β΄ Γυμνασίου που ανήκει στην Κατηγορία 1 περιορίζεται στο 7.9%. Το 25.4% ανήκει στην Κατηγορία 2, το 49.2% στην Κατηγορία 3 και το 17.5% στην Κατηγορία 4. Τέλος, το 9.5% των μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου εντάσσεται στην Κατηγορία 1, 33.3% στην Κατηγορία 2, 33.3% στην Κατηγορία 3 και 23.8% των μαθητών στην Κατηγορία 4.

Πίνακας 4.17

Ποσοστό Μαθητών στις Τέσσερις Κατηγορίες Υποκειμένων

	Κατηγορία 1	Κατηγορία 2	Κατηγορία 3	Κατηγορία 4
Ε΄ Δημοτικού	49.1%	32.7%	14.5%	3.6%
Στ΄ Δημοτικού	24.6%	41%	26.2%	8.2%
Α΄ Γυμνασίου	27.6%	34.5%	27.6%	10.3%
Β΄ Γυμνασίου	7.9%	25.4%	49.2%	17.5%
Γ΄ Γυμνασίου	9.5%	33.3%	33.3%	23.8%
Σύνολο	24%	33.3%	30.5%	12.2%

Με βάση τα ποσοστά αυτά, συνεπάγεται ότι οι μαθητές της Ε΄ τάξης δημοτικού εκπροσωπούν κυρίως την Κατηγορία 1 αφού το 50% σχεδόν των υποκειμένων της εντάσσονται στην Κατηγορία 1. Οι μαθητές της Στ΄ δημοτικού και Α΄ γυμνασίου χαρακτηρίζουν κυρίως την Κατηγορία 2 ενώ σημαντικό ποσοστό των μαθητών και των δύο τάξεων εντάσσεται στην Κατηγορία 3. Οι μαθητές της Β΄ γυμνασίου εκπροσωπούν την Κατηγορία 3 με το 50% των υποκειμένων της να εντάσσονται σε αυτήν. Τέλος, οι μαθητές της Γ΄ γυμνασίου χαρακτηρίζουν τις Κατηγορίες 3 και 4 αφού το ένα τρίτο των

υποκειμένων της ανήκει στην Κατηγορία 3 και το 23.8% στην Κατηγορία 4 που είναι το μεγαλύτερο ποσοστό που ανήκει στην κατηγορία αυτή από όλες τις τάξεις.

Τα αποτελέσματα πολλαπλής ανάλυσης διασποράς έδειξαν ότι υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ της επίδοσης των μαθητών των τεσσάρων κατηγοριών και στους τρεις παράγοντες της αντίληψης των εννοιών του χώρου (Pillai's $F_{(3,273)}=19.82$, $p<0.05$) Ο Πίνακας 4.18 παρουσιάζει το μέσο όρο της επίδοσης των υποκειμένων των τεσσάρων κατηγοριών στους τρεις παράγοντες της αντίληψης των εννοιών του χώρου και στον ενιαίο παράγοντα αντίληψη των εννοιών του χώρου (A.E.X.). Ο μέσος όρος της επίδοσης της κάθε κατηγορίας και στους τρεις παράγοντες ήταν στατιστικά ψηλότερος από τον αντίστοιχο μέσο όρο της προηγούμενης κατηγορίας. Ο μέσος όρος της επίδοσης της Κατηγορίας 1 στους τρεις παράγοντες «οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου» (O.E), «προσανατολισμός στο χώρο» (Π.X.) και «σχέσεις των εννοιών του χώρου» (Σ.E) ήταν μικρότερος από 0.50 (M.O._{O.E.}=0.47, M.O._{Π.X.}=0.29 και M.O._{Σ.E.}=.042). Ο μέσος όρος της επίδοσης της Κατηγορίας 2 ήταν μικρότερος από 0.50 στον παράγοντα «προσανατολισμός στο χώρο» (M.O.=.46) και μεγαλύτερος από 0.50 στους παράγοντες «οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου» και «σχέσεις των εννοιών του χώρου» (M.O._{O.E.}=.58 και M.O._{Σ.E.}=.60). Ο μέσος όρος της Κατηγορίας 3 ήταν μεγαλύτερος από 0.67 στους παράγοντες «οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου» και «σχέσεις των εννοιών του χώρου» (M.O._{O.E.}=.70 και M.O._{Σ.E.}=.70) και μικρότερος από .67 στον παράγοντα «προσανατολισμός στο χώρο» (M.O.=.62). Τέλος, ο μέσος όρος των υποκειμένων της Κατηγορίας 4 και στους τρεις παράγοντες ήταν μεγαλύτερος από .67 (M.O._{O.E.}=.79, M.O._{Π.X.}=.82 και M.O._{Σ.E.}=.86).

Πίνακας 4.18

Μέσοι Όροι και Τυπικές Αποκλίσεις των Τεσσάρων Κατηγοριών Υποκειμένων στους Παράγοντες της Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου

Κατηγορία	Οπτικοποίηση Εννοιών του Χώρου		Προσανατολισμός στο Χώρο		Σχέσεις Εννοιών του Χώρου		Α.Ε.Χ.	
	<u>Μ.Ο.</u>	<u>Τ.Α.</u>	<u>Μ.Ο.</u>	<u>Τ.Α.</u>	<u>Μ.Ο.</u>	<u>Τ.Α.</u>	<u>Μ.Ο.</u>	<u>Τ.Α.</u>
Κατηγορία 1	0.47	0.12	0.29	0.19	0.48	0.15	0.42	0.10
Κατηγορία 2	0.58	0.13	0.46	0.21	0.60	0.19	0.55	0.12
Κατηγορία 3	0.70	0.17	0.62	0.23	0.70	0.21	0.67	0.15
Κατηγορία 4	0.79	0.12	0.82	0.18	0.86	0.16	0.82	0.12

Τα αποτελέσματα πολλαπλής ανάλυσης διασποράς έδειξαν ότι υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στην επίδοσή των μαθητών στους έξι παράγοντες της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου (Pillai's $F_{(3,269)}=23.96$, $p<0.05$) μεταξύ όλων των κατηγοριών υποκειμένων. Η επίδοση κάθε κατηγορίας υποκειμένων ήταν στατιστικά καλύτερη από την επίδοση της προηγούμενης κατηγορίας σε όλους τους παράγοντες που αναφέρθηκαν πιο πάνω. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.19, ο μέσος όρος των μαθητών της Κατηγορίας 1 ήταν μεγαλύτερος από 0.50 μόνο στον ένα από τους έξι παράγοντες (Μ.Ο._{Π4}=.513). Ο μέσος όρος των υποκειμένων της Κατηγορίας 2 ήταν μεγαλύτερος από 0.67 σε ένα παράγοντα (Μ.Ο._{Π4}=.71) και μεγαλύτερος από 0.50 σε δύο παράγοντες (Μ.Ο._{Π1}=.544 και Μ.Ο._{Π2}=.506). Ο μέσος όρος των μαθητών της Κατηγορίας 3 ήταν μικρότερος από 0.50 μόνο στον Παράγοντα 5 (Μ.Ο.=0.49), ενώ ο μέσος όρος της επίδοσης των υποκειμένων της Κατηγορία 4 ήταν μεγαλύτερος από 0.67 και στους έξι παράγοντες.

Πίνακας 4.19

Μέσοι Όροι και Τυπικές Αποκλίσεις των Τεσσάρων Κατηγοριών Υποκειμένων στους Παράγοντες της Ικανότητας των Μαθητών στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου

Κατηγορία	Π1		Π2		Π3		Π4		Π5		Π6	
	<u>M.O.</u>	<u>T.A.</u>	<u>M.O.</u>	<u>T.A.</u>	<u>M.O.</u>	<u>T.A.</u>	<u>M.O.</u>	<u>T.A.</u>	<u>M.O.</u>	<u>T.A.</u>	<u>M.O.</u>	<u>T.A.</u>
Κατηγορία 1	0.28	0.16	0.30	0.18	0.15	0.13	0.51	0.17	0.24	0.18	0.10	0.17
Κατηγορία 2	0.54	0.21	0.51	0.17	0.29	0.20	0.71	0.15	0.40	0.21	0.28	0.24
Κατηγορία 3	0.76	0.20	0.71	0.17	0.55	0.22	0.83	0.14	0.49	0.23	0.50	0.26
Κατηγορία 4	0.88	0.14	0.86	0.13	0.83	0.19	0.92	0.07	0.77	0.22	0.78	0.22

Στον Πίνακα 4.20 συνοψίζονται τα χαρακτηριστικά των τεσσάρων κατηγοριών υποκειμένων. Η επίδοση μιας κατηγορίας υποκειμένων χαρακτηρίζεται ως πολύ καλή όταν υπερβαίνει το 0.67, ικανοποιητική όταν είναι μεγαλύτερη από 0.50 και μικρότερη από 0.67 και μη επαρκής όταν είναι μικρότερη από 0.50. Οι μαθητές της Κατηγορίας 1 είχαν ικανοποιητική επίδοση μόνο στον Παράγοντα 4, ενώ η επίδοση των μαθητών αυτών δεν ήταν ικανοποιητική σε κανένα από τους τρεις παράγοντες της αντίληψης των εννοιών του χώρου. Οι μαθητές της Κατηγορία 2 είχαν πολύ καλή επίδοση στον Παράγοντα 3 και ικανοποιητική επίδοση στους Παράγοντες 1 και 2. Η επίδοσή τους στους παράγοντες «οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου» και «σχέσεις των εννοιών του χώρου» ήταν ικανοποιητική. Οι μαθητές της Κατηγορία 3 είχαν ικανοποιητική επίδοση στον Παράγοντα 3 και πολύ καλή επίδοση στους Παράγοντες 1, 2 και 4. Η επίδοσή των μαθητών της κατηγορίας αυτής στους παράγοντες «οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου» και «σχέσεις των εννοιών του χώρου» ήταν πολύ καλή και ικανοποιητική στον παράγοντα «προσανατολισμός στο χώρο». Οι μαθητές της Κατηγορίας 4 είχαν πολύ καλή επίδοση σε όλους τους παράγοντες και των δύο ικανοτήτων.

Πίνακας 4.20

Χαρακτηριστικά των Τεσσάρων Κατηγοριών Υποκειμένων

Επίπεδο Γνώσης	Κατηγορία 1	Κατηγορία 2	Κατηγορία 3	Κατηγορία 4
Πολύ καλή γνώση (Επίδοση>.67)		Π4	Π1, Π2, Π4 <i>ΟΕ, ΣΕ</i>	Π1, Π2, Π3, Π4, Π5, Π6 <i>ΟΕ, ΠΧ, ΣΕ</i>
Ικανοποιητική γνώση (.50<Επίδοση<.67)	Π4	Π1, Π2 <i>ΟΕ, ΣΕ</i>	Π3 <i>ΠΧ</i>	
Μη επαρκής γνώση (Επίδοση<.50)	Π1, Π2, Π3, Π5, Π6 <i>ΟΕ, ΠΧ, ΣΕ</i>	Π3, Π5, Π6 <i>ΠΧ</i>	Π5, Π6	

Σημείωση:

Π1: Αναγνώριση και κατασκευή αναπτυγμάτων

Π2: Χειρισμός διαφορετικών μορφών αναπαράστασης τρισδιάστατων αντικειμένων

Π3: Διάταξη αντικειμένων στο χώρο

Π4: Αναγνώριση στερεών και των συστατικών τους στοιχείων

Π5: Μέτρηση επιφάνειας και χωρητικότητας τρισδιάστατων αντικειμένων χωρίς τη χρήση τύπων

Π6: Συλλογισμός για σχέσεις μεταξύ ιδιοτήτων στερεών

ΟΕ: Οπτικοποίηση στις έννοιες του χώρου

ΠΧ: Προσανατολισμός στο χώρο

ΣΕ: Σχέσεις των εννοιών του χώρου

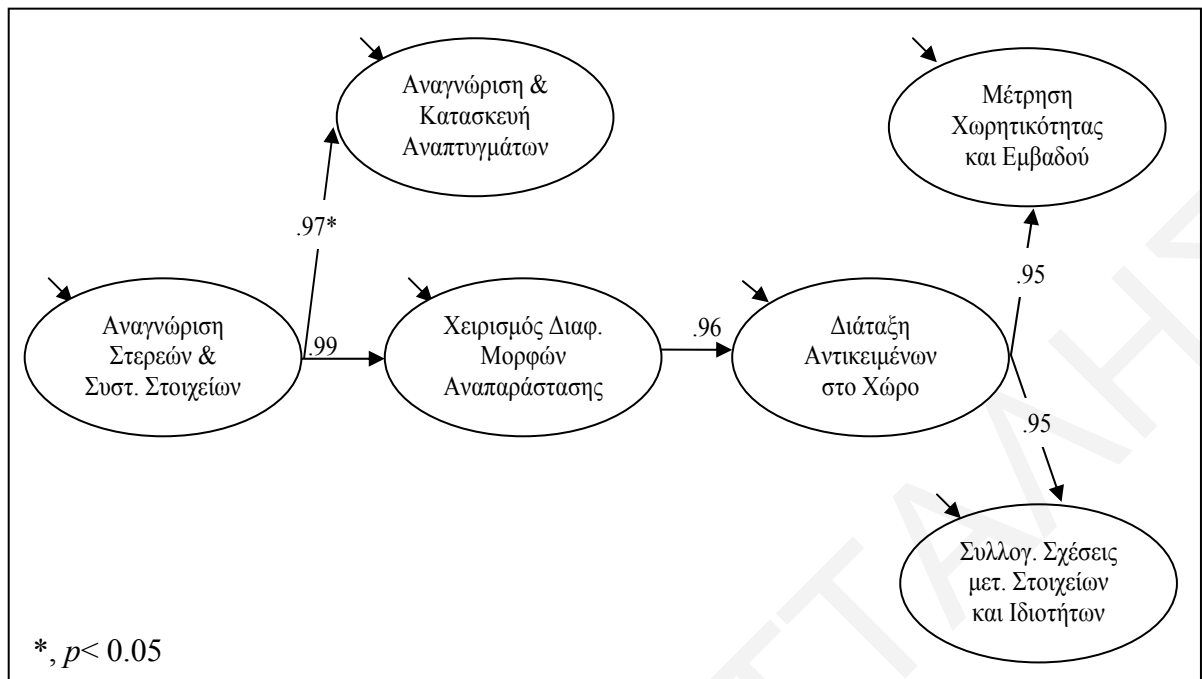
Κατηγορίες Μαθητών και Ιεραρχικά Επίπεδα Σκέψης

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης ομάδων έδειξαν την ύπαρξη τεσσάρων κατηγοριών υποκειμένων. Η πρώτη κατηγορία μαθητών είχε ικανοποιητική επίδοση μόνο στον παράγοντα αναγνώριση στερεών και των συστατικών τους στοιχείων (Π4). Το χαρακτηριστικό που διαφοροποιεί την Κατηγορία 2 από την Κατηγορία 1 είναι η επίδοση στους παράγοντες αναγνώριση και κατασκευή αναπτυγμάτων και χειρισμός διαφορετικών μορφών αναπαράστασης τρισδιάστατων αντικειμένων (Π1 & Π2). Η Κατηγορία 2 είχε ικανοποιητική επίδοση στους Παράγοντες 1 και 2, ενώ είχε πολύ καλή επίδοση στον Παράγοντα 4. Η επίδοσή των μαθητών της κατηγορίας αυτής στους άλλους τρεις παράγοντες δεν ήταν ικανοποιητική. Το στοιχείο που διαφοροποιεί την Κατηγορία 3 από

την Κατηγορία 2 είναι η επίδοση στον παράγοντα διάταξη αντικειμένων στο χώρο (Π3). Η επίδοση της Κατηγορίας 3 στον Παράγοντα 3 είναι ικανοποιητική, ενώ έχει πολύ καλή επίδοση στους Παράγοντες 1, 2 και 4. Αντίθετα, η επίδοση των μαθητών της κατηγορίας αυτής στους Παράγοντες 5 και 6 δεν ήταν ικανοποιητική. Τέλος, η Κατηγορία 4 διαφοροποιείται από την Κατηγορία 3 στους παράγοντες της μέτρηση της επιφάνειας και της χωρητικότητας τρισδιάστατων αντικειμένων χωρίς τη χρήση τύπων και του συλλογισμού για σχέσεις μεταξύ στοιχείων και ιδιοτήτων στερεών (Π5 & Π6). Η Κατηγορία αυτή είχε πολύ καλή επίδοση και στους έξι παράγοντες της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Τα στοιχεία που διαφοροποιούν τις κατηγορίες υποκειμένων μεταξύ τους υποδηλώνουν την ύπαρξη μιας ιεραρχικής σχέσης μεταξύ των κατηγοριών.

Υποθέσαμε και ελέγξαμε την εγκυρότητα ενός δομικού μοντέλου με βάση τον οποίο η επίδοση των μαθητών στον Παράγοντα 4 προβλέπει την επίδοση στους Παράγοντες 1 και 2, η επίδοση στους Παράγοντες 1 και 2 προβλέπει την επίδοση στον Παράγοντα 3 και η επίδοση στον Παράγοντα 3 προβλέπει την επίδοση στους Παράγοντες 5 και 6. Τα αποτελέσματα της δομικής ανάλυσης επιβεβαίωσαν την εγκυρότητα του προτεινόμενου μοντέλου ($CFI=.93$, $\chi^2=415.83$, $df=308$, $\chi^2/df=1.35$, $RMSEA=.04$). Οι συντελεστές παλινδρόμησης του μοντέλου ήταν στατιστικά σημαντικοί, εκτός από το συντελεστή παλινδρόμησης του Παράγοντα 1 στον Παράγοντα 3. Το Διάγραμμα 4.6 παρουσιάζει τις σχέσεις μεταξύ των παραγόντων και τους αντίστοιχους συντελεστές παλινδρόμησης. Ο συντελεστής παλινδρόμησης του Παράγοντα 4 στους Παράγοντες 1 και 2 ήταν $.97$ ($z=5.24$, $p<0.05$) και $.99$ ($z=4.74$, $p<0.05$) αντίστοιχα. Ο συντελεστής παλινδρόμησης του Παράγοντα 2 στον Παράγοντα 3 ήταν $.96$ ($z=4.43$, $p<0.05$) και οι συντελεστές παλινδρόμησης του Παράγοντα 3 στους Παράγοντες 5 και 6 ήταν $.95$ ($z=4.12$, $p<0.05$) και $.95$ ($z=5.22$, $p<0.05$) αντίστοιχα. Με βάση το μοντέλο αυτό διαφαίνεται ότι οι μαθητές κατακτούν πρώτα τις έννοιες του Παράγοντα 4, στη συνέχεια τις έννοιες των Παραγόντων 1 και 2, ακολούθως τις έννοιες του Παράγοντα 3 και στη συνέχεια τις έννοιες των Παραγόντων 5 και 6.

Η σχέση μεταξύ των παραγόντων και το γεγονός ότι η σχέση αυτή πρόεκυψε από τα χαρακτηριστικά των τεσσάρων κατηγοριών υποκειμένων αποτελούν ικανά στοιχεία, για να υποθέσουμε ότι οι τέσσερις κατηγορίες υποκειμένων αντιπροσωπεύουν τέσσερα ιεραρχικά επίπεδα σκέψης στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου.



Διάγραμμα 4.6. Σχέση μεταξύ των παραγόντων της ικανότητας στις Ε.Γ.Χ.

Περιγραφή Ικανοτήτων Μαθητών των Τεσσάρων Επιπέδων Σκέψης

Οι μαθητές του πρώτου επιπέδου μπορούν να επιτύχουν σε έργα που αναφέρονται στην αναγνώριση στερεών και στην αναγνώριση συστατικών στοιχείων των στερεών όπως να υπολογίσουν τον αριθμό των κορυφών, εδρών και ακμών ενός στερεού που υπάρχει μπροστά τους. Η αποτυχία των μαθητών του πρώτου επιπέδου στους άλλους παράγοντες φαίνεται να σχετίζεται σε μεγάλο βαθμό με το χαμηλό επίπεδο των μαθητών τους παράγοντες στη μη ανάπτυξη των παραγόντων της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου. Με βάση τα αποτελέσματα της δομικής ανάλυσης, η αντίληψη των εννοιών του χώρου αποτελεί ισχυρότατο παράγοντα πρόβλεψης των παραγόντων της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Το γεγονός ότι οι μαθητές του πρώτου επιπέδου είχαν ικανοποιητική επίδοση στον Παράγοντα 4 μπορεί να επεξηγηθεί σε ένα βαθμό από το ότι η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου είχε το μικρότερο συντελεστή παλινδρόμησης στον Παράγοντα 4 σε σχέση με τους άλλους παράγοντες.

Οι μαθητές του δεύτερου επιπέδου σκέψης είχαν πολύ καλή επίδοση στην αναγνώριση στερεών και των συστατικών τους στοιχείων και ικανοποιητική επίδοση σε έργα που αναφέρονταν στο χειρισμό διαφορετικών μορφών αναπαράστασης

τρισδιάστατων αντικειμένων και στην αναγνώριση και κατασκευή αναπτυγμάτων στερεών. Το γεγονός αυτό φαίνεται να σχετίζεται σε μεγάλο βαθμό με το ότι οι μαθητές αυτοί είχαν ικανοποιητική επίδοση στους παράγοντες οπτικοποίησης των εννοιών του χώρου και σχέσεις των εννοιών του χώρου. Οι μαθητές του τρίτου επιπέδου είχαν πολύ καλή επίδοσή τους στους Παράγοντες 1 και 2 και ικανοποιητική επίδοση στον παράγοντα δόμηση αντικειμένων στο χώρο. Η πολύ καλή επίδοση των μαθητών αυτών στους παράγοντες «οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου» και «σχέσεις των εννοιών του χώρου» και η ικανοποιητική επίδοση στον παράγοντα «προσανατολισμός στο χώρο» φαίνεται να σχετίζεται και πάλι με τις διαφορές των μαθητών του τρίτου επιπέδου με τους μαθητές του δεύτερου επιπέδου. Τέλος, οι μαθητές του τέταρτου επιπέδου είχαν ουσιαστικές διαφορές από τους μαθητές του τρίτου επιπέδου αφού είχαν πολύ καλή επίδοση και στους παράγοντες που αναφέρονται στη διάταξη αντικειμένων στο χώρο, στη μέτρηση της επιφάνειας και της χωρητικότητας τρισδιάστατων αντικειμένων χωρίς τη χρήση τύπων και στην ικανότητα συλλογισμού για σχέσεις μεταξύ στοιχείων και ιδιοτήτων στερεών. Η επίδοση των μαθητών του τετάρτου επιπέδου στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου σχετίζεται άμεσα με το μεγάλο βαθμό ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου αφού οι μαθητές του επιπέδου αυτού είχαν πολύ καλή επίδοση σε όλους τους παράγοντες της αντίληψης των εννοιών του χώρου. Πιο κάτω περιγράφονται οι ικανότητες των τεσσάρων επιπέδων σκέψης στους έξι παράγοντες της ικανότητας των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου.

Ικανότητα των Τεσσάρων Επιπέδων Σκέψης στα Έργα του Παράγοντα Αναγνώριση Στερεών και των Συστατικών τους Στοιχείων

Ο Πίνακας 4.21 παρουσιάζει συγκεντρωτικά το βαθμό επιτυχίας των μαθητών των τεσσάρων επιπέδων σκέψης στα έργα του παράγοντα «αναγνώριση στερεών και των συστατικών τους στοιχείων». Οι μαθητές του πρώτου επιπέδου σκέψης είχαν ικανοποιητική γνώση μόνο σε έργα αναγνώρισης στερεών και στον υπολογισμό του αριθμού των κορυφών στερεών που παρουσιάζονται σε διαφανή μορφή. Παρόλα αυτά, στο Έργο 15 στο οποίο οι μαθητές έπρεπε να αναγνωρίσουν τα στερεά που δεν είναι ορθογώνια παραλληλεπίπεδα (τα στερεά παρουσιάζονται σε συμπαγή μορφή), 37% των υποκειμένων του πρώτου επιπέδου θεώρησαν ότι οι κύβοι δεν είναι ορθογώνια παραλληλεπίπεδα και μόνο το 37% αναγνώρισε και τα πέντε στερεά που δεν είναι

ορθογώνια παραλληλεπίπεδα. Στο Έργο 17 στο οποίο οι μαθητές έπρεπε απλά να μετρήσουν τον αριθμό των κορυφών τριών πυραμίδων που ήταν σχεδιασμένες σε διαφανή μορφή και όλες οι κορυφές ήταν ορατές, μόνο το 48% των υποκειμένων του πρώτου επιπέδου μέτρησαν με επιτυχία τις κορυφές και των τριών πυραμίδων, ενώ το 29% δεν συμπλήρωσε τίποτα. Στα υπόλοιπα τρία έργα του παράγοντα οι μαθητές του πρώτου επιπέδου απέτυχαν. Συγκεκριμένα, το 45% των υποκειμένων ήταν σε θέση να μετρήσει τον αριθμό των εδρών κανονικής πυραμίδας, ενώ το αντίστοιχο ποσοστό για τον αριθμό των ακμών ήταν 42%. Στο Έργο 16 στο οποίο ζητείτο από τους μαθητές να αναγνωρίσουν στερεά που έχουν συγκεκριμένο αριθμό κορυφών, το γεγονός ότι τα στερεά ήταν σχεδιασμένα σε συμπαγή μορφή και κάποιες κορυφές δεν ήταν ορατές, οδήγησε το 30% των μαθητών του πρώτου επιπέδου να επιλέξει τουλάχιστον ένα λανθασμένο στερεό.

Οι μαθητές του δεύτερου επιπέδου σκέψης είχαν πολύ καλή επίδοση στην αναγνώριση στερεών (Έργο 15) και στην αναγνώριση του αριθμού των κορυφών και εδρών των πυραμίδων (Έργα 17 & 18). Παρόλα αυτά, 32% των μαθητών αυτών θεώρησαν ότι οι κύβοι δεν είναι ορθογώνια παραλληλεπίπεδα. Η επίδοσή τους στα Έργα 16 και 19 ήταν ικανοποιητική αφού στο Έργο 16 το 70% των υποκειμένων δεν αναγνώρισε τουλάχιστον ένα στερεό και στο Έργο 19 μόνο το 51% υπολόγισε τον αριθμό των ακμών και των τριών πυραμίδων.

Οι μαθητές του τρίτου και του τέταρτου επιπέδου δεν είχαν διαφοροποιήσεις στα έργα του Παράγοντα 4 αφού η επίδοσή τους και στα τέσσερα έργα ήταν πολύ καλή. Οι μαθητές των επιπέδων αυτών αναγνώρισαν στερεά και υπολόγισαν τον αριθμό των κορυφών, εδρών και ακμών στερεών που ήταν σχεδιασμένα σε διαφανή ή συμπαγή μορφή. Αξίζει να σημειωθεί ότι παρά την πολύ καλή τους επίδοση μεγάλο ποσοστό των μαθητών και των δύο ομάδων είχαν την παρανόηση ότι οι κύβοι δεν είναι ορθογώνια παραλληλεπίπεδα (35% και 35% αντίστοιχα).

Πίνακας 4.21

Επίδοση των Μαθητών των Τεσσάρων Επιπέδων Σκέψης στα Έργα του Παράγοντα Αναγνώριση Στερεών και των Συστατικών τους Στοιχείων

Επίπεδο Γνώσης	Κατηγορία 1	Κατηγορία 2	Κατηγορία 3	Κατηγορία 4
Πολύ καλή γνώση (Επίδοση>.67)		Έρ. 15, 17, 18	Έρ. 15, 16, 17, 18, 19	Έρ. 15, 16, 17, 18, 19
Ικανοποιητική γνώση (.50<Επίδοση<.67)	Έρ. 15, 17	Έρ. 16, 19		
Μη επαρκής γνώση (Επίδοση<.50)	Έρ. 16, 18, 19			

Σημείωση:

Έρ15.: Αναγνώριση ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων (τα στερεά παρουσιάζονται σε συμπαγή μορφή)

Έρ16.: Αναγνώριση στερεών που έχουν συγκεκριμένο αριθμό κορυφών (τα στερεά παρουσιάζονται σε συμπαγή μορφή)

Έρ17.: Αναγνώριση αριθμού κορυφών πυραμίδων που είναι σχεδιασμένες σε διαφανή μορφή

Έρ18.: Αναγνώριση αριθμού εδρών πυραμίδων που είναι σχεδιασμένες σε διαφανή μορφή

Έρ19.: Αναγνώριση αριθμού ακμών πυραμίδων που είναι σχεδιασμένες σε διαφανή μορφή

Ικανότητα των Τεσσάρων Επιπέδων Σκέψης στα Έργα του Παράγοντα Αναγνώριση και Κατασκευή Αναπτυγμάτων

Ο Πίνακας 4.22 παρουσιάζει συγκεντρωτικά το βαθμό επιτυχίας των μαθητών των τεσσάρων επιπέδων σκέψης στα έργα του παράγοντα αναγνώριση και κατασκευή αναπτυγμάτων. Οι μαθητές του πρώτου επιπέδου σκέψης απέτυχαν σε όλα τα έργα του παράγοντα αυτού. Επέλεξαν περισσότερα λανθασμένα παρά ορθά αναπτύγματα στο έργο αναγνώρισης αναπτυγμάτων ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου (Έργο 1). Στο έργο επιλογής των συστατικών στοιχείων αναπτύγματος κυλίνδρου (Έργο 2), το 52% των μαθητών επέλεξε ορθογώνιο με καμπυλωτές γωνίες για παράπλευρη επιφάνεια και το 30% επέλεξε ως βάσεις του κυλίνδρου σχήμα οβάλ αντί κύκλου. Το 40% των μαθητών επέλεξε τουλάχιστον ένα λανθασμένο ανάπτυγμα στο έργο αναγνώρισης αναπτυγμάτων τετραγωνικής πυραμίδας (Έργο 3) και τέλος το 47% δεν κατασκεύασε τίποτα και το 43%

κατασκεύασε ημιτελές ανάπτυγμα στο έργο κατασκευής αναπτύγματος τριγωνικού πρίσματος (Έργο 4).

Οι μαθητές του δεύτερου επιπέδου σκέψης διαφοροποιήθηκαν από τους μαθητές του πρώτου επιπέδου στο ότι είχαν πολύ καλή επίδοση στην αναγνώριση αναπτύγματος ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου και ικανοποιητική επίδοση στην ανάγνωση αναπτύγματος τετραγωνικής πυραμίδας. Παρόλα αυτά, 32% των μαθητών του επιπέδου αυτού επέλεξε τουλάχιστον ένα λανθασμένο ανάπτυγμα ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου και 40% επέλεξε τουλάχιστον ένα λανθασμένο ανάπτυγμα της τετραγωνικής πυραμίδας. Οι μαθητές του δεύτερου επιπέδου απέτυχαν στην επιλογή των συστατικών στοιχείων του αναπτύγματος του κυλίνδρου, αφού 41% επέλεξε ορθογώνιο με καμπυλωτές γωνίες για παράπλευρη επιφάνεια και 15% επέλεξε ως βάση σχήμα οβάλ αντί κύκλου. Το 12% των μαθητών δεν κατασκεύασε ανάπτυγμα και 42% κατασκεύασε ημιτελές ανάπτυγμα στο έργο κατασκευής αναπτύγματος τριγωνικού πρίσματος.

Οι μαθητές του τρίτου και τέταρτου επιπέδου διαφοροποιήθηκαν σε σημαντικό βαθμό από τους μαθητές του δεύτερου επιπέδου, αφού είχαν πολύ καλή επίδοση και στα τέσσερα έργα του παράγοντα αυτού. Παρά το ότι η επίδοση των μαθητών και των δύο επιπέδων και στα τέσσερα έργα ήταν μεγαλύτερη από .67 και θεωρείται πολύ καλή, υπήρχαν μικρές διαφορές μεταξύ των δύο επιπέδων. Το 70% των υποκειμένων του τρίτου επιπέδου επέλεξε όλα τα σωστά αναπτύγματα του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου, ενώ το αντίστοιχο ποσοστό για τους μαθητές του τέταρτου επιπέδου ήταν 90%. Το 24% των μαθητών του τρίτου επιπέδου επέλεξε ορθογώνιο με καμπυλωτές γωνίες για παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου ενώ το αντίστοιχο ποσοστό για το τέταρτο επίπεδο ήταν μόλις 9%. Το 30% του τρίτου επιπέδου και 10% του τέταρτου επιπέδου επέλεξαν τουλάχιστον ένα λανθασμένο ανάπτυγμα της τετραγωνικής πυραμίδας. Τέλος, το 21% του τρίτου επιπέδου κατασκεύασε ημιτελές ανάπτυγμα και 74% ολοκληρωμένο ανάπτυγμα τριγωνικού πρίσματος ενώ τα αντίστοιχα ποσοστά για τους μαθητές του τέταρτου επιπέδου ήταν 15% και 85% αντίστοιχα.

Πίνακας 4.22

Επίδοση των Μαθητών των Τεσσάρων Επιπέδων Σκέψης στα Έργα του Παράγοντα Αναγνώριση και Κατασκευή Αναπτύγματος Τρισδιάστατων Αντικειμένων

Επίπεδο Γνώσης	Κατηγορία 1	Κατηγορία 2	Κατηγορία 3	Κατηγορία 4
Πολύ καλή γνώση (Επίδοση>.67)		Έρ. 1	Έρ. 1, 2, 3 & 4	Έρ. 1, 2, 3 & 4
Ικανοποιητική γνώση (.50<Επίδοση<.67)		Έρ. 3		
Μη επαρκής γνώση (Επίδοση<.50)	Έρ. 1, 2, 3 & 4	Έρ. 2 & 4		

Σημείωση:

Έρ1.: Αναγνώριση αναπτύγματος ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου

Έρ2.: Επιλογή συστατικών στοιχείων αναπτύγματος κυλίνδρου

Έρ3.: Αναγνώριση αναπτύγματος τετραγωνικής πυραμίδας

Έρ4.: Κατασκευή αναπτύγματος τριγωνικού πρίσματος

Ικανότητα των Τεσσάρων Επιπέδων Σκέψης στα Έργα του Παράγοντα Χειρισμός Διαφορετικών Μορφών Αναπαράστασης Τρισδιάστατων Αντικειμένων

Ο Πίνακας 4.23 παρουσιάζει συγκεντρωτικά το βαθμό επιτυχίας των μαθητών των τεσσάρων επιπέδων σκέψης στα έργα του παράγοντα «χειρισμός διαφορετικών μορφών αναπαράστασης τρισδιάστατων αντικειμένων». Οι μαθητές του πρώτου επιπέδου σκέψης απέτυχαν στα πέντε από τα έξι έργα του παράγοντα αυτού. Δεν επέλεξαν το σωστό σχέδιο της πλάγιας προβολής που αντιστοιχεί στις τρεις όψεις της ορθογώνιας προβολής ενός τρισδιάστατου αντικειμένου (Έργο 5). Το 64% των υποκειμένων επέλεξε σχέδιο με ορθή πρόσοψη και πλάγια όψη και λανθασμένη κάτοψη και 23% επέλεξε σχέδιο με ορθή μόνο την πρόσοψη. Στο αντίστροφο έργο, στο οποίο οι μαθητές έπρεπε να σχεδιάσουν την πρόσοψη, την πλάγια όψη και την κάτοψη ενός στερεού που δινόταν σχεδιασμένο σε πλάγια προβολή, μόνο το 30% σχεδίασε ορθά την πρόσοψη και 10% την κάτοψη (Έργο 6). Το 40% των υποκειμένων του πρώτου επιπέδου αναγνώρισε ως παράλληλες ακμές που δεν ήταν μεταξύ τους παράλληλες σε κύβο που ήταν σχεδιασμένος σε πλάγια προβολή (Έργο 7), ενώ 82% των υποκειμένων δεν αναγνώρισε στο ίδιο σχήμα κάθετες ακμές (Έργο 8).

Στο Έργο 9 στο οποίο οι μαθητές έπρεπε να αναγνωρίσουν τον αριθμό των τριγωνικών εδρών τριγωνικής πυραμίδας σχεδιασμένης σε διαφανή μορφή υπό γωνία, το 30% των υποκειμένων αναγνώρισε λιγότερες από τέσσερις έδρες και το 18% περισσότερες από τέσσερις έδρες. Το 68% αναγνώρισε περισσότερες από δύο τριγωνικές έδρες και 10% λιγότερες από δύο τριγωνικές έδρες στο έργο αναγνώρισης του αριθμού των τριγωνικών εδρών τριγωνικού πρίσματος σχεδιασμένου σε διαφανή μορφή υπό γωνία (Έργο 10).

Οι μαθητές του δεύτερου επιπέδου διαφοροποιήθηκαν από τους μαθητές του πρώτου επιπέδου κυρίως στα έργα αναγνώρισης παράλληλων και κάθετων ακμών στον κύβο. Η επίδοσή τους στο έργο αναγνώρισης παράλληλων ακμών ήταν πολύ καλή αφού το 85% αναγνώρισε τουλάχιστον δύο ζεύγη παράλληλων ακμών, ενώ στο έργο αναγνώρισης κάθετων ακμών η επίδοσή τους ήταν ικανοποιητική, αφού μόνο το 41% των μαθητών δεν αναγνώρισε ακμές που τέμνονται κάθετα. Η επίδοσή τους στο έργο αναγνώρισης των τριγωνικών εδρών τριγωνικής πυραμίδας ήταν πολύ καλή αφού μόνο το 22% αναγνώρισε λιγότερες από τέσσερις έδρες και 10% περισσότερες από τέσσερις έδρες. Αντίθετα, στο έργο αναγνώρισης του αριθμού των τριγωνικών εδρών τριγωνικού πρίσματος η επίδοσή τους δεν ήταν επαρκής, αφού 63% των υποκειμένων αναγνώρισε περισσότερες από δύο τριγωνικές έδρες. Στα έργα μετάφρασης από μια μορφή αναπαράστασης σε άλλη, οι μαθητές του δεύτερου επιπέδου απέτυχαν, αφού στο Έργο 5 ποσοστό 75% επέλεξε σχέδιο με λανθασμένη κάτοψη και στο Έργο 5 ποσοστό 32% των μαθητών σχεδίασε ορθά μόνο την πλάγια όψη και 30% μόνο την κάτοψη.

Οι μαθητές του τρίτου επιπέδου διαφοροποιήθηκαν από τους μαθητές του δεύτερου επιπέδου κυρίως στα έργα μετάφρασης από μια μορφή αναπαράστασης σε άλλη και στο έργο αναγνώρισης του αριθμού των τριγωνικών εδρών τριγωνικού πρίσματος. Το 63% των υποκειμένων επέλεξε σχήμα με λανθασμένη κάτοψη στο Έργο 5. Αντίθετα, στο Έργο 6 η επίδοσή τους ήταν πολύ καλή αφού το 65% των υποκειμένων σχεδίασε ορθά την πρόσοψη, το 72% την πρόσοψη και την πλάγια όψη και 70% και τις τρεις όψεις. Η επίδοσή τους ήταν πολύ καλή και στα έργα αναγνώρισης παράλληλων και κάθετων ακμών. Το 92% των υποκειμένων αναγνώρισε τουλάχιστον δύο ζεύγη παράλληλων ακμών και μόνο 20% δεν αναγνώρισε κάθετες ακμές. Στο έργο αναγνώρισης του αριθμού των τριγωνικών εδρών τριγωνικής πυραμίδας η επίδοσή τους ήταν πολύ καλή με ποσοστό 75% των υποκειμένων να βρίσκει τη σωστή απάντηση. Τέλος, στο έργο αναγνώρισης του αριθμού των τριγωνικών εδρών τριγωνικού πρίσματος, η επίδοσή τους διαφοροποιήθηκε από την αντίστοιχη των μαθητών του δεύτερου επιπέδου αφού το 61% των υποκειμένων αναγνώρισε δύο τριγωνικές έδρες.

Οι μαθητές του τετάρτου επιπέδου διαφοροποιήθηκαν από τους μαθητές του τρίτου επιπέδου στο πρώτο έργο μετάφρασης και στο έργο αναγνώρισης του αριθμού των τριγωνικών εδρών τριγωνικού πρίσματος αφού η επίδοσή τους ήταν πολύ καλή. Το 41% των υποκειμένων βρήκε τη σωστή απάντηση στο Έργο 5 και 59% επέλεξε σχέδιο με λανθασμένη μόνο την κάτοψη. Το 91% των υποκειμένων αναγνώρισε ότι ο αριθμός των τριγωνικών εδρών στο τριγωνικό πρίσμα ήταν δύο. Η επίδοση των υποκειμένων σε όλα τα υπόλοιπα έργα του παράγοντα ήταν, επίσης, πολύ καλή. Όλα τα υποκείμενα του παράγοντα επέλεξαν τουλάχιστον δύο ζεύγη παράλληλων ακμών και 90% αναγνώρισε και τα δύο ζεύγη κάθετων ακμών.

Πίνακας 4.23

Επίδοση των Μαθητών των Τεσσάρων Επιπέδων Σκέψης στα Έργα του Παράγοντα Χειρισμός Διαφορετικών Μορφών Αναπαράστασης Τρισδιάστατων Σχημάτων

Επίπεδο Γνώσης	Κατηγορία 1	Κατηγορία 2	Κατηγορία 3	Κατηγορία 4
Πολύ καλή γνώση (Επίδοση>.67)		Έρ. 7, 9	Έρ. 6, 7, 8, 9	Έρ. 5, 6, 7, 8, 9, 10
Ικανοποιητική γνώση (.50<Επίδοση<.67)	Έρ. 9	Έρ. 8	Έρ. 5, 10	
Μη επαρκής γνώση (Επίδοση<.50)	Έρ. 5, 6, 7, 8, 10	Έρ. 5, 6, 10		

Σημείωση:

Έρ5.: Μετάφραση ορθογώνιας προβολής σχεδιασμού αντικειμένου σε πλάγια προβολή

Έρ6.: Μετάφραση πλάγιας προβολής σχεδιασμού αντικειμένου σε ορθογώνια προβολή

Έρ7.: Αναγνώριση παράλληλων ακμών σε κύβο σχεδιασμένο σε πλάγια προβολή

Έρ8.: Αναγνώριση κάθετων ακμών σε κύβο σχεδιασμένο σε πλάγια προβολή

Έρ9.: Αναγνώριση αριθμού τριγωνικών εδρών τριγωνικής πυραμίδας σχεδιασμένη σε διαφανή μορφή υπό γωνία

Έρ10.: Αναγνώριση αριθμού τριγωνικών εδρών τριγωνικού πρίσματος σχεδιασμένο σε διαφανή μορφή υπό γωνία

Ικανότητα των Τεσσάρων Επιπέδων Σκέψης στα Έργα του Παράγοντα Διάταξη Αντικειμένων στο Χώρο

Ο Πίνακας 4.24 παρουσιάζει συγκεντρωτικά το βαθμό επιτυχίας των μαθητών των τεσσάρων επιπέδων σκέψης στα έργα του παράγοντα διάταξη αντικειμένων στο χώρο. Οι μαθητές του πρώτου και δεύτερου επιπέδου σκέψης απέτυχαν σε όλα τα έργα του παράγοντα αυτού. Δεν υπήρχαν σημαντικές διαφοροποιήσεις στις ικανότητες των μαθητών του πρώτου και δεύτερου επιπέδου στα έργα του παράγοντα αυτού, αφού τα ποσοστά επιτυχίας των υποκειμένων και των δύο επιπέδων ήταν μικρότερα από 50%. Στο έργο υπολογισμού του αριθμού των κύβων που χρειάζονται για να μετασχηματιστεί μια τρισδιάστατη κατασκευή σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο (Έργο 11), 82% των υποκειμένων του πρώτου επιπέδου και 73% του δεύτερου επιπέδου βρήκαν περισσότερους ή λιγότερους κύβους. Στο έργο εύρεσης του κατάλληλου συνδυασμού κύβων και ράβδων που χρειάζονται, για να γεμίσει κιβώτιο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου (το κιβώτιο δεν ήταν άδειο και ήταν ανοικτό στα πλάγια), Έργο 12, μόνο το 13% των υποκειμένων του πρώτου επιπέδου και 24% του δεύτερου επιπέδου επέλεξε τη σωστή απάντηση. Στο Έργο 13 στο οποίο οι μαθητές έπρεπε να υπολογίσουν τον αριθμό των κύβων που χρειάζονται για να γεμίσει κιβώτιο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου (το κιβώτιο δεν ήταν άδειο και ήταν ανοικτό στα πλάγια), κανένας μαθητής του πρώτου επιπέδου και 84% του δεύτερου επιπέδου δεν υπολόγισαν τη σωστή απάντηση. Στο Έργο 14 στο οποίο οι μαθητές έπρεπε να υπολογίσουν τον αριθμό των κύβων που χρειάζονται, για να γεμίσει κιβώτιο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου που δίνεται σε κανονική μορφή, μόνο το 6% των υποκειμένων του πρώτου επιπέδου βρήκε τη σωστή απάντηση (16 κύβοι). Το 33% των υποκειμένων απάντησε «24» (πολλαπλασίασαν επί δύο τα τετράγωνα που φαίνονται), 17% απάντησε «12» (τα τετράγωνα που φαίνονται) και 10% απάντησε «8» (τα τετράγωνα της πρόσοψης). Τα αντίστοιχα ποσοστά για τους μαθητές του δεύτερου επιπέδου ήταν 31%, 14%, 4% και 17%.

Οι μαθητές του τρίτου επιπέδου διαφοροποιήθηκαν από τους μαθητές των δύο προηγούμενων επιπέδων κυρίως στο Έργο 14, αφού 65% των υποκειμένων του επιπέδου αυτού βρήκε τη σωστή απάντηση. Στα υπόλοιπα έργα του παράγοντα, τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών ήταν μεγαλύτερα από τα αντίστοιχα του δεύτερου επιπέδου, αλλά χαρακτηρίζονται ως μη ικανοποιητικά, αφού ήταν μικρότερα από 50%. Στο Έργο 11 το ποσοστό των μαθητών που υπολόγισε το σωστό αριθμό κύβων ήταν 48%, στο Έργο 12 το ποσοστό ήταν 35% και στο Έργο 13 το αντίστοιχο ποσοστό ήταν 44%.

Οι μαθητές του τέταρτου επιπέδου διαφοροποιήθηκαν σε σημαντικό βαθμό από τους μαθητές όλων των άλλων επιπέδων, αφού η επίδοσή τους ήταν πολύ καλή σε όλα τα έργα του παράγοντα. Το 79% των υποκειμένων υπολόγισε ορθά τον αριθμό των κύβων που χρειάζονται, για να μετασχηματιστεί μια τρισδιάστατη κατασκευή σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο (Έργο 11), 74% βρήκε το σωστό συνδυασμό κύβων και ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων που χρειάζονται, για να γεμίσει ένα ανοικτό κιβώτιο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου (Έργο 12) και 71% υπολόγισε ορθά τον αριθμό των κύβων που χρειάζονται, για να γεμίσει το κιβώτιο αυτό (Έργο 13). Τέλος, το 97% των υποκειμένων της τέταρτης κατηγορίας υπολόγισε ορθά τον αριθμό των κύβων που χρειάζονται για να γεμίσει κιβώτιο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου που δίνεται σε κανονική μορφή (Έργο 14).

Πίνακας 4.24

Επίδοση των Μαθητών των Τεσσάρων Επιπέδων Σκέψης στα Έργα του Παράγοντα Διάταξης Αντικειμένων στο Χώρο

Επίπεδο Γνώσης	Κατηγορία 1	Κατηγορία 2	Κατηγορία 3	Κατηγορία 4
Πολύ καλή γνώση (Επίδοση>.67)				Έρ. 11, 12, 13, 14
Ικανοποιητική γνώση (.50<Επίδοση<.67)			Έρ. 14	
Μη επαρκής γνώση (Επίδοση<.50)	Έρ. 11, 12, 13, 14	Έρ. 11, 12, 13, 14	Έρ. 11, 12, 13	

Σημείωση:

Έρ11.: Υπολογισμός αριθμού κύβων που χρειάζονται για να μετασχηματιστεί μια τρισδιάστατη κατασκευή σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο

Έρ12.: Εύρεση συνδυασμού κύβων και ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων που χρειάζονται για να γεμίσει κιβώτιο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου (το κιβώτιο δεν είναι άδειο και είναι ανοικτό)

Έρ13.: Αριθμός κύβων που χρειάζονται για να γεμίσει κιβώτιο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου (το κιβώτιο δεν είναι άδειο και είναι ανοικτό)

Έρ14.: Αριθμός κύβων που χρειάζονται για να γεμίσει κιβώτιο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου (τα κιβώτια δίνονται σε κανονική μορφή)

Ικανότητα των Τεσσάρων Επιπέδων Σκέψης στα Έργα του Παράγοντα Μέτρηση/Εκτίμηση Επιφάνειας και Χωρητικότητας Τρισδιάστατων Αντικειμένων χωρίς τη Χρήση Τύπων

Ο Πίνακας 4.25 παρουσιάζει συγκεντρωτικά το βαθμό επιτυχίας των μαθητών των τεσσάρων επιπέδων σκέψης στα έργα του παράγοντα μέτρηση/εκτίμηση επιφάνειας και χωρητικότητας τρισδιάστατων αντικειμένων χωρίς τη χρήση τύπων. Οι μαθητές του πρώτου επιπέδου σκέψης απέτυχαν σε όλα τα έργα του παράγοντα αυτού. Οι μαθητές του επιπέδου αυτού δεν υπολόγισαν το εμβαδόν ενός στερεού που ήταν κατασκευασμένο από κύβους (Έργο 20) αλλά ούτε και το εμβαδόν ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου που ήταν σχεδιασμένο σε μορφή ανοικτού αναπτύγματος (Έργο 21). Τα ποσοστά αποτυχίας των μαθητών σε αυτά τα έργα ήταν 97% και 69% αντίστοιχα. Οι μαθητές του πρώτου επιπέδου είχαν παρόμοια ποσοστά αποτυχίας και στα δύο έργα που σχετίζονταν με μέτρηση χωρητικότητας. Το ποσοστό αποτυχίας των μαθητών ήταν 66% στο Έργο 22, στο οποίο έπρεπε να υπολογίσουν τη χωρητικότητα ορθογώνιων παραλληλεπιπέδων που παρουσιάζονταν υπό μορφή ανοικτού αναπτύγματος. Στο Έργο 23, στο οποίο οι μαθητές έπρεπε να συγκρίνουν τη χωρητικότητα ντεπόζιτων σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου και κυλίνδρου (με ίσο ύψος και διάμετρο του κυλίνδρου ίση με την πλευρά της βάσης του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου), το ποσοστό αποτυχίας ήταν 76%. Το 20% των υποκειμένων θεώρησε ότι τα δύο ντεπόζιτα είχαν ίση χωρητικότητα και το 28% απάντησε ότι το κυλινδρικό ντεπόζιτο έχει μεγαλύτερη χωρητικότητα.

Οι μαθητές του δεύτερου επιπέδου διαφοροποιήθηκαν από τους μαθητές του πρώτου επιπέδου μόνο στο έργο υπολογισμού χωρητικότητας των ορθογώνιων παραλληλεπιπέδων (Έργο 22). Το ποσοστό επιτυχίας των μαθητών στο έργο αυτό ήταν 56%. Αντίθετα, στα υπόλοιπα έργα του παράγοντα η επίδοσή τους ήταν μικρότερη από .50. Στο δεύτερο έργο υπολογισμού χωρητικότητας (Έργο 23) το ποσοστό αποτυχίας των μαθητών του δεύτερου επιπέδου ήταν 52%. Συγκεκριμένα, 29% των υποκειμένων απάντησε ότι τα δύο ντεπόζιτα έχουν ίση χωρητικότητα και 11% θεώρησε ότι το κυλινδρικό ντεπόζιτο έχει μεγαλύτερη χωρητικότητα. Στα δύο έργα υπολογισμού επιφάνειας τα ποσοστά αποτυχίας των μαθητών ήταν 67% και 62% αντίστοιχα.

Οι μαθητές του τρίτου επιπέδου είχαν καλύτερη επίδοση από τους μαθητές του δεύτερου επιπέδου στα έργα μέτρησης χωρητικότητας. Το ποσοστό επιτυχίας στο έργο μέτρησης της χωρητικότητας ορθογώνιων παραλληλεπιπέδων ήταν 69% και στο έργο σύγκρισης της χωρητικότητας των δύο ντεπόζιτων 52%. Αντίθετα, στα δύο έργα μέτρησης

επιφάνειας τα ποσοστά αποτυχίας των μαθητών του τρίτου επιπέδου ήταν 66% και 62% αντίστοιχα.

Στον παράγοντα αυτό οι μαθητές του τέταρτου επιπέδου δεν είχαν πολύ καλή επίδοση σε όλα τα έργα. Η σημαντική τους διαφοροποίηση από τους μαθητές του τρίτου επιπέδου ήταν στα έργα μέτρησης επιφάνειας. Το ποσοστό επιτυχίας στο έργο υπολογισμού της επιφάνειας ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου που ήταν σχεδιασμένο υπό μορφή ανοικτού αναπτύγματος ήταν 85%, ενώ το αντίστοιχο ποσοστό στο έργο υπολογισμού της επιφάνειας στερεού που ήταν κατασκευασμένο από μικρούς κύβους ήταν 56%. Το σύνολο σχεδόν των μαθητών του επιπέδου αυτού (97%) υπολόγισε με επιτυχία τη χωρητικότητα κιβωτίου σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου και τα δύο τρίτα περίπου των μαθητών (65%) σύγκρινε με επιτυχία τη χωρητικότητα των δύο ντεποζιτών.

Πίνακας 4.25

Επίδοση των Μαθητών των Τεσσάρων Επιπέδων Σκέψης στα Έργα του Παράγοντα Μέτρηση Επιφάνειας και Χωρητικότητας Τρισδιάστατων Αντικειμένων χωρίς τη Χρήση Τύπων

Επίπεδο Γνώσης	Κατηγορία 1	Κατηγορία 2	Κατηγορία 3	Κατηγορία 4
Πολύ καλή γνώση (Επίδοση>.67)			Έρ. 22	Έρ. 21, 22
Ικανοποιητική γνώση (.50<Επίδοση<.67)		Έρ. 22	Έρ. 23	Έρ. 20, 23
Μη επαρκής γνώση (Επίδοση<.50)	Έρ. 20, 21, 22, 23	Έρ. 20, 21, 23	Έρ. 20, 21	

Σημείωση:

Έρ20.: Υπολογισμός επιφάνειας στερεού που είναι κατασκευασμένο από κύβους

Έρ21.: Υπολογισμός επιφάνειας ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων που δίνονται υπό μορφή ανοικτού αναπτύγματος

Έρ22.: Υπολογισμός χωρητικότητας ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων που δίνονται υπό μορφή ανοικτού αναπτύγματος

Έρ23.: Σύγκριση χωρητικότητας ντεπόζιτων σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου και κυλίνδρου

Ικανότητα των Τεσσάρων Επιπέδων Σκέψης στα Έργα του Παράγοντα Συλλογισμού για Σχέσεις μεταξύ Στοιχείων και Ιδιοτήτων Στερεών

Ο Πίνακας 4.26 παρουσιάζει συγκεντρωτικά το βαθμό επιτυχίας των μαθητών των τεσσάρων επιπέδων σκέψης στα έργα του παράγοντα συλλογισμός για σχέσεις μεταξύ στοιχείων και ιδιοτήτων στερεών. Οι μαθητές του πρώτου και δεύτερου επιπέδου σκέψης απέτυχαν σε όλα τα έργα του παράγοντα αυτού. Δεν κατάφερε κανένας μαθητής των επιπέδων αυτών να αναγνωρίσει και ούτε να διατυπώσει τη σχέση μεταξύ του αριθμού των κορυφών, εδρών και ακμών στις πυραμίδες παρά το ότι ζητήθηκε από αυτούς να καταγράψουν τον αριθμό των τριών αυτών στοιχείων και να υπολογίσουν το άθροισμα του αριθμού των κορυφών και των εδρών (Έργο 25). Ως εκ τούτου, δεν εφάρμοσε κανένας μαθητής του πρώτου επιπέδου τη σχέση σε πυραμίδα με άλλο σχήμα βάσης, ενώ 12% των μαθητών του δεύτερου επιπέδου παρά το ότι δεν διατύπωσε τη σχέση, την εφάρμοσε διαισθητικά (Έργο 26). Οι μαθητές των πρώτων δύο επιπέδων απέτυχαν και στο Έργο 24 στο οποίο έπρεπε να χαρακτηρίσουν δηλώσεις που αναφέρονταν σε σχέσεις μεταξύ στοιχείων και ιδιοτήτων στερεών ως ορθές ή λανθασμένες.

Οι μαθητές του τρίτου επιπέδου διαφοροποιήθηκαν από τους μαθητές των προηγούμενων επιπέδων στο Έργο 24 αφού η επίδοσή τους ήταν πολύ καλή. Οι μαθητές του τρίτου επιπέδου απάντησαν με επιτυχία σε ερωτήματα τύπου ορθό/λάθος που αναφέρονταν σε σχέσεις μεταξύ στοιχείων και ιδιοτήτων στερεών. Οι μαθητές αυτοί είχαν ικανοποιητική επιτυχία στο έργο εφαρμογής της σχέσης μεταξύ του αριθμού των ακμών, εδρών και κορυφών της πυραμίδας σε πυραμίδα με άλλο σχήμα βάσης, παρά το ότι απέτυχαν σε ποσοστό 95% να διατυπώσουν τη σχέση. Τέλος, το αντίστοιχο ποσοστό επιτυχίας των μαθητών του τετάρτου επιπέδου στη διατύπωση της σχέσης ήταν 53% και το ποσοστό επιτυχίας στην εφαρμογή της σχέσης ήταν 74%.

Πίνακας 4.26

Επίδοση των Μαθητών των Τεσσάρων Επιπέδων Σκέψης στα Έργα του Παράγοντα Συλλογισμός για Σχέσεις μεταξύ Στοιχείων και Ιδιοτήτων Στερεών

Επίπεδο Γνώσης	Κατηγορία 1	Κατηγορία 2	Κατηγορία 3	Κατηγορία 4
Πολύ καλή γνώση (Επίδοση>.67)			Έρ. 24	Έρ. 24, 26
Ικανοποιητική γνώση (.50<Επίδοση<.67)			Έρ. 26	Έρ. 25
Μη επαρκής γνώση (Επίδοση<.50)	Έρ. 24, 25, 26	Έρ. 24, 25, 26	Έρ. 25	

Σημείωση:

Έρ24.: Ερωτήματα τύπου ορθό/λάθος που αναφέρονται σε σχέσεις μεταξύ ιδιοτήτων στερεών και σχέσεις μεταξύ στερεών

Έρ25.: Αναγνώριση και διατύπωση σχέσης μεταξύ αριθμού κορυφών, εδρών και ακμών στις πυραμίδες

Έρ26.: Εφαρμογή της πιο πάνω σχέσης

Αναλυτική Περιγραφή Συλλογισμού των Μαθητών των Τεσσάρων Επιπέδων Σκέψης στους Έξι Παράγοντες της Ικανότητας στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου

Πιο κάτω γίνεται αναλυτική περιγραφή των χαρακτηριστικών των μαθητών των τεσσάρων επιπέδων σκέψης με βάση τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τις κλινικές συνεντεύξεις. Περιγράφονται αναλυτικά τα χαρακτηριστικά, οι ικανότητες, τα λάθη και οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές των τεσσάρων επιπέδων σκέψης στα έργα που αναφέρονται στους έξι παράγοντες της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου.

Αναγνώριση και Κατασκευή Αναπτυγμάτων Τρισδιάστατων Σχημάτων

Ο Πίνακας 4.27 παρουσιάζει συγκεντρωτικά τις ικανότητες των μαθητών των τεσσάρων επιπέδων σκέψης στον παράγοντα «αναγνώριση και κατασκευή αναπτυγμάτων τρισδιάστατων σχημάτων». Η περιγραφή του τρόπου σκέψης των μαθητών στηρίχτηκε στις απαντήσεις των μαθητών στα έργα της κλινικής συνέντευξης. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.27 οι μαθητές του πρώτου επιπέδου κατασκευάζουν ανάπτυγμα κύβου μόνο

όταν εργάζονται με κατάλληλο εκπαιδευτικό υλικό αναπτυγμάτων και διπλώνουν τις ακμές του αναπτύγματος τη στιγμή που το κατασκευάζουν. Οι μαθητές του δεύτερου επιπέδου συναρμολογούν ανάπτυγμα κύβου και ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου σε σχήμα σταυρού και είναι σε θέση να περιγράψουν τη διαδικασία δίπλωσης μερικών ακμών του αναπτύγματος. Οι μαθητές του τρίτου επιπέδου συναρμολογούν ανάπτυγμα κύβου και ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου, περιγράφουν τη διαδικασία δίπλωσης των εδρών του αναπτύγματος και μπορούν να επεξεργαστούν τα αναπτύγματα. Οι μαθητές αυτοί κατασκευάζουν, επίσης, ανάπτυγμα κυλίνδρου. Οι μαθητές του τέταρτου επιπέδου έχουν τις ικανότητες των μαθητών του τρίτου επιπέδου και επιπρόσθετα σχεδιάζουν αναπτύγματα ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου.

Πίνακας 4.27

Περιγραφή Ικανοτήτων των Μαθητών των Τεσσάρων Επιπέδων Σκέψης στον Παράγοντα Αναγνώριση και Κατασκευή Αναπτυγμάτων Τρισδιάστατων Σχημάτων

1° Επίπεδο	2° Επίπεδο	3° Επίπεδο	4° Επίπεδο
Κατασκευάζουν ανάπτυγμα κύβου όταν εργάζονται με κατάλληλο υλικό, κάνοντας τις απαραίτητες διπλώσεις την ίδια στιγμή	Συναρμολογούν ανάπτυγμα κύβου και ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου σε σχήμα σταυρού	Συναρμολογούν ανάπτυγμα κύβου και ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου	Συναρμολογούν αναπτύγματα κύβου και ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου
	Περιγράφουν τη διαδικασία δίπλωσης εδρών, όταν η γωνία δίπλωσης είναι 90°	Περιγράφουν τη διαδικασία δίπλωσης ενός αναπτύγματος	Περιγράφουν τη διαδικασία δίπλωσης ενός αναπτύγματος
		Επεξεργάζονται αναπτύγματα κύβου και ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου (μετασχηματίζουν υφιστάμενα, διορθώνουν λανθασμένα)	Επεξεργάζονται αναπτύγματα κύβου και ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου (μετασχηματίζουν υφιστάμενα, διορθώνουν λανθασμένα)
		Κατασκευάζουν ανάπτυγμα κυλίνδρου	Κατασκευάζουν ανάπτυγμα κυλίνδρου
			Σχεδιάζουν ανάπτυγμα ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου χωρίς τη χρήση οποιουδήποτε υλικού

Οι μαθητές του πρώτου επιπέδου δεν ανταποκρίθηκαν στις έννοιες και διαδικασίες του παράγοντα «Αναγνώριση και Κατασκευή Αναπτυγμάτων Τρισδιάστατων Αντικειμένων». Τα αποτελέσματα των κλινικών συνεντεύξεων έδειξαν ότι οι μαθητές του επιπέδου αυτού είχαν σημαντικές δυσκολίες στην κατασκευή αναπτυγμάτων και αδυνατούσαν να αντιληφθούν τον τρόπο με τον οποίο έπρεπε να διπλωθεί ένα ανάπτυγμα, για να κατασκευαστεί ένα συγκεκριμένο στερεό. Αιτία που θα μπορούσε να επεξηγήσει τις δυσκολίες των μαθητών φαίνεται να ήταν η χαμηλή ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου και συγκεκριμένα του παράγοντα «οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου». Όπως φάνηκε και στα ποσοτικά αποτελέσματα της εργασίας ο μέσος όρος των μαθητών αυτών στον παράγοντα «οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου» ήταν 0.47.

Στη διάρκεια της κλινικής συνέντευξης ζητήθηκε από τους μαθητές να κατασκευάσουν με τη βοήθεια κατάλληλου εκπαιδευτικού υλικού το ανάπτυγμα κύβου και ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου. Η οδηγία που δόθηκε ήταν να συναρμολογήσουν πρώτα το ανάπτυγμα, στη συνέχεια να περιγράψουν πώς θα το δίπλωναν και ακολούθως να το διπλώσουν. Οι οκτώ από τους δέκα μαθητές του πρώτου επιπέδου ένωσαν με τυχαίο τρόπο τετράγωνα και ορθογώνια. Οι μαθητές αυτοί, επίσης, δεν μπορούσαν να περιγράψουν τον τρόπο διπλώματος του αναπτύγματος. Στη συνέχεια, ζητήθηκε από τους μαθητές να διπλώσουν την κατασκευή τους. Καθώς οι μαθητές δίπλωναν το ανάπτυγμα, εντόπισαν ποιες έδρες έπρεπε να μετακινηθούν ή να προστεθούν ώστε να κλείσει το ανάπτυγμα. Στο τέλος, κατέληξαν να κατασκευάσουν μόνο το ανάπτυγμα κύβου σε σχήμα σταυρού. Οι μαθητές αυτοί δεν χρησιμοποίησαν κάποια στρατηγική και ούτε προσπάθησαν να οπτικοποιήσουν την κατασκευή του αναπτύγματος και τη διαδικασία δίπλωσής του.

Τα ίδια προβλήματα εντοπίστηκαν και στο έργο στο οποίο οι μαθητές έπρεπε να φανταστούν τον τρόπο που θα δίπλωνόταν ένα ανάπτυγμα ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου και να αποφασίσουν κατά πόσον κάποιες έδρες έπρεπε να μετακινηθούν ή να προστεθούν (δείτε Διάγραμμα 3.3). Οι μαθητές δεν ήταν σε θέση να οπτικοποιήσουν τη διαδικασία διπλώματος και έτσι ζήτησαν να τους δοθεί υλικό, για να κατασκευάσουν το ανάπτυγμα. Οι μαθητές δεν μπορούσαν νοερά να φανταστούν πώς έπρεπε να διπλωθεί μια έδρα όταν η γωνία δίπλωσης ήταν διαφορετική από ενενήντα μοίρες.

Οι μαθητές του επιπέδου αυτού απέτυχαν στην κατασκευή του αναπτύγματος κυλίνδρου. Ποσοστό 90% των μαθητών είχε αποτύχει στο αντίστοιχο έργο του γραπτού τεστ στο οποίο έπρεπε να επιλέξουν μεταξύ διαφορετικών δισδιάστατων σχημάτων αυτά

τα οποία όταν ενωθούν μπορούν να κατασκευάσουν κύλινδρο (δείτε το Έργο 3 στο Παράρτημα). Είχαν απαντήσει ότι κατασκευάζεται κύκλος όταν ενωθούν ένα ορθογώνιο με καμπυλωτές γωνίες και δύο κύκλοι. Στη διάρκεια της συνέντευξης, αιτιολόγησαν την απάντησή τους αναφέροντας ότι χρειάζονται οι καμπυλωτές γωνίες και ότι «ένα κανονικό ορθογώνιο δεν θα μπορούσε, όταν διπλωθεί, να κατασκευάσει κύκλο αφού έχει γωνίες».

Μαθητές 2^ο Επιπέδου

Οι μαθητές του δεύτερου επιπέδου δεν διαφοροποιήθηκαν σε σημαντικό βαθμό από τους μαθητές του πρώτου επιπέδου σκέψης ως προς την ικανότητα κατασκευής αναπτυγμάτων τρισδιάστατων αντικειμένων. Τα αποτελέσματα των κλινικών συνεντεύξεων έδειξαν ότι το κύριο πρόβλημα των μαθητών αυτού του επιπέδου ήταν η αδυναμία οπτικοποίησης της διαδικασίας διπλώματος του αναπτύγματος, με αποτέλεσμα οι μαθητές να δυσκολεύονται να αποφασίσουν νοερά κατά πόσον ένα ανάπτυγμα που κατασκευάζουν μπορεί να σχηματίσει ή όχι ένα συγκεκριμένο στερεό.

Οι μαθητές του δεύτερου επιπέδου συναρμολόγησαν με επιτυχία στη διάρκεια της συνέντευξης το ανάπτυγμα ενός κύβου (σε σχήμα σταυρού), αν και δεν ήταν σε θέση να περιγράψουν τον τρόπο με τον οποίο θα έπρεπε να κάνουν όλες τις διπλώσεις. Συνεπώς, δεν μπορούσαν να αποφασίσουν κατά πόσον οι δύο έδρες που τοποθέτησαν στα πλαϊνά του κύριου κορμού μπορούσαν να μετακινηθούν σε άλλες θέσεις. Περιέγραψαν πώς πρέπει να διπλωθούν έδρες των οποίων η γωνία δίπλωσης ήταν ενενήντα μοίρες. Στη συναρμολόγηση του αναπτύγματος του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου αντιμετώπισαν περισσότερες δυσκολίες σε σχέση με τον κύβο, με αποτέλεσμα να χρειαστεί και πάλι να διπλώσουν το ανάπτυγμά και στη συνέχεια να κάνουν διορθώσεις.

Στο δεύτερο έργο της συνέντευξης οι μαθητές έπρεπε να σκεφτούν τον τρόπο με τον οποίο έπρεπε να διπλωθεί ένα ανάπτυγμα ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου και στη συνέχεια να αποφασίσουν κατά πόσον χρειαζόταν να αφαιρεθούν ή να προστεθούν κάποιες έδρες. Οι μαθητές περιέγραψαν μόνο πώς θα διπλώνονταν δύο ή τρεις έδρες. Δεν εντόπισαν ποιες έδρες ήταν περιττές ή σε ποιες περιπτώσεις έπρεπε να προστεθούν έδρες, για να ολοκληρωθεί το ανάπτυγμα, γιατί αδυνατούσαν να κατασκευάσουν τη νοερή εικόνα του κλειστού στερεού. Η περιγραφή που έκαναν έδειξε ότι δυσκολεύονταν ιδιαίτερα στις περιπτώσεις κατά τις οποίες ήταν απαραίτητες διαδοχικές διπλώσεις εδρών.

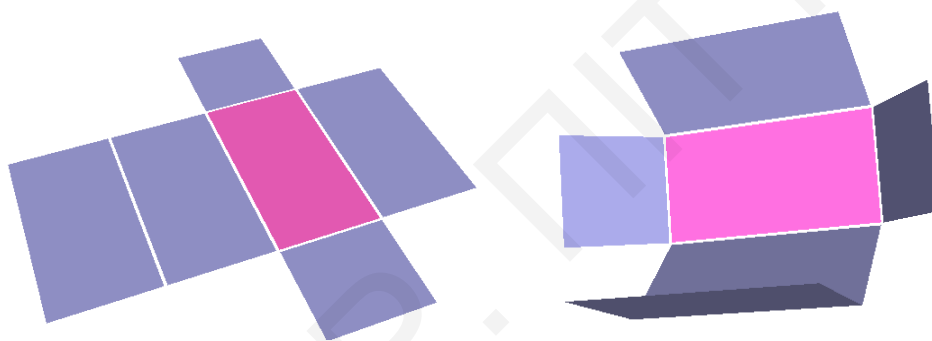
Το ποσοστό αποτυχίας των μαθητών του δεύτερου επιπέδου στο έργο κατασκευής αναπτύγματος κυλίνδρου στο γραπτό τεστ ήταν 60%. Οι αιτιολογήσεις των μαθητών στη συνέντευξη για τις επιλογές τους έδειξαν τις δυσκολίες που είχαν τόσο σε σχέση με τη δομή του κυλίνδρου όσο και σε σχέση με τις ιδιότητες δισδιάστατων σχημάτων. Για παράδειγμα, τρεις από τους οκτώ μαθητές του επιπέδου δήλωσαν ότι επέλεξαν ορθογώνιο με καμπυλωτές γωνίες για παράπλευρη έδρα, γιατί «στον κύλινδρο δεν υπάρχει ορθή γωνία» και γιατί «το άλλο έχει μύτη και δεν θα ταιριάζουν οι κύκλοι». Άλλοι δύο μαθητές δήλωσαν ότι «οπωσδήποτε πρέπει οι γωνίες να είναι στρογγυλοποιημένες, γιατί διαφορετικά δεν θα μπορεί να γίνει κύκλος».

Μαθητές 3^{ου} Επιπέδου

Ο τρόπος σκέψης των μαθητών του τρίτου επιπέδου στον παράγοντα αυτό είχε ουσιαστικές διαφορές από τον τρόπο σκέψης των μαθητών του δεύτερου επιπέδου. Οι μαθητές αυτοί κατασκεύασαν αναπτύγματα και περιέγραψαν νοερά τη διαδικασία διπλώματος των στερεών. Φαίνεται ότι η ικανότητα των μαθητών στην αντίληψη των εννοιών του χώρου είχε καταλυτικό ρόλο στην επίδοση των μαθητών στα έργα του παράγοντα που αναφέρονταν στην αναγνώριση και κατασκευή αναπτυγμάτων τρισδιάστατων αντικειμένων. Η υπόθεση αυτή στηρίχτηκε στο συλλογισμό των μαθητών στα έργα της κλινικής συνέντευξης που αναφέρονταν σε αυτό τον παράγοντα και στα ποσοτικά αποτελέσματα της εργασίας που έδειξαν ότι η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου αυτών των μαθητών ήταν ιδιαίτερα αναπτυγμένη (Μ.Ο.ΟΠΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗ=0.70).

Οι μαθητές του τρίτου επιπέδου συναρμολόγησαν με επιτυχία το ανάπτυγμα του κύβου, περιέγραψαν τον τρόπο που θα δίπλωναν το ανάπτυγμα και αιτιολόγησαν τα αναπτύγματα που με την κατάλληλη δίπλωση κατασκευάζουν κύβο. Οι μαθητές εργάστηκαν με συστηματικό τρόπο και κατασκεύασαν, επίσης, ανάπτυγμα ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου σχηματίζοντας ένα σταθερό κορμό τεσσάρων ορθογωνίων και δύο τετραγώνων. Τα δύο τετράγωνα μπορούσαν να τα μετακινήσουν σε διάφορες θέσεις που θα έδιναν ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, όπως παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 4.7. Οι μαθητές επεξήγησαν ότι τα δύο τετράγωνα (ένα αριστερά και ένα δεξιά), θα αποτελούσαν τις δύο βάσεις του στερεού.

Στην περίπτωση του έργου στο οποίο οι μαθητές έπρεπε να σκεφτούν τον τρόπο που θα διπλωθεί ένα ανάπτυγμα ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου και στη συνέχεια να αποφασίσουν κατά πόσον χρειάζεται να αφαιρεθούν ή να προστεθούν κάποιες έδρες, για να κλείσει το στερεό, οι μαθητές περιέγραψαν πώς έπρεπε να διπλωθούν τα δύο ορθογώνια παραλληλεπίπεδα και εντόπισαν ποιες έδρες έπρεπε να αφαιρεθούν ή να προστεθούν για να ολοκληρωθεί το ανάπτυγμα. Για το σκοπό αυτό διατήρησαν στο μυαλό τους μια έδρα του αναπτύγματος σταθερή και φαντάστηκαν πώς θα διπλώνονταν οι υπόλοιπες έδρες σε σχέση με τη σταθερή έδρα. Η στρατηγική αυτή τους βοήθησε σε σημαντικό βαθμό να αντιληφθούν ποιες έδρες έπρεπε να διπλωθούν διαδοχικά ώστε να ολοκληρωθεί το στερεό.

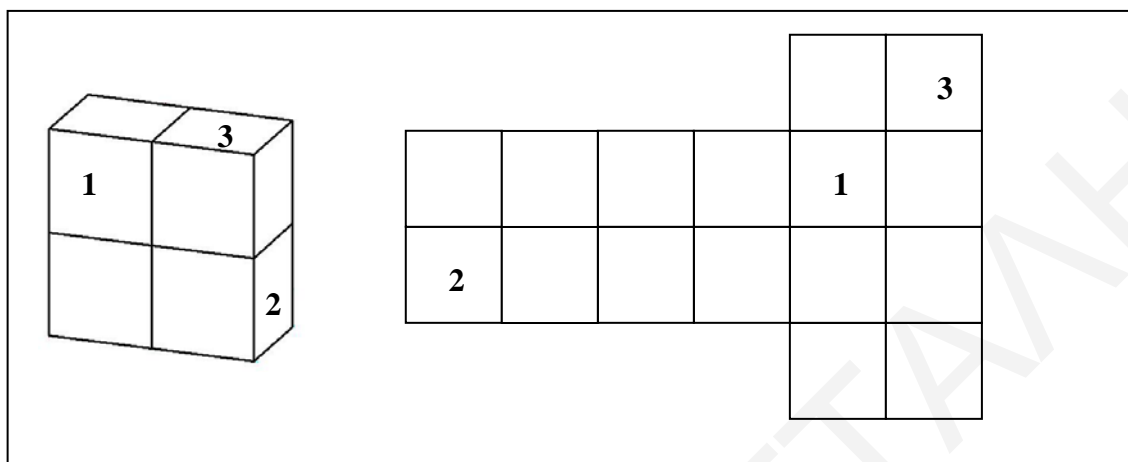


Διάγραμμα 4.7. Κατασκευή αναπτύγματος ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου.

Μαθητές 4^ο Επιπέδου

Οι μαθητές του τέταρτου επιπέδου είχαν την ικανότητα να συναρμολογήσουν διαφορετικά αναπτύγματα κύβου και ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου και να περιγράψουν με ακρίβεια τον τρόπο με τον οποίο θα έπρεπε να διπλωθούν, για να ολοκληρωθούν τα στερεά. Οι μαθητές είχαν, επίσης, την ικανότητα να εντοπίσουν ποιες διορθώσεις έπρεπε να γίνουν σε λανθασμένα αναπτύγματα ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου και να περιγράψουν πώς θα διπλωθούν τα αναπτύγματα, όταν γίνουν οι διορθώσεις. Ποσοστό 90% των μαθητών κατασκεύασαν με επιτυχία ανάπτυγμα κυλίνδρου. Οι μαθητές αυτοί, σε σχέση με τους μαθητές του τρίτου επιπέδου, σχεδίασαν στο χαρτί το ανάπτυγμα ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου που ήταν κατασκευασμένο από κύβους (δείτε σχήμα (α) στον Πίνακα 3.6) και στη συνέχεια αντιστοίχησαν συγκεκριμένα τετράγωνα του στερεού με τα

αντίστοιχα τετράγωνα του αναπτύγματος, όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 4.8, επιβεβαιώνοντας την εξαιρετική ικανότητά τους για οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου.



Διάγραμμα 4.8. Σχεδιασμός αναπτύγματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου από μαθητές τετάρτου επιπέδου.

Χειρισμός Διαφορετικών Μορφών Αναπαράστασης Τρισδιάστατων Σχημάτων

Ο Πίνακας 4.28 παρουσιάζει συγκεντρωτικά τις ικανότητες των μαθητών των τεσσάρων επιπέδων σκέψης στον παράγοντα «Χειρισμός Διαφορετικών Μορφών Αναπαράστασης Τρισδιάστατων Σχημάτων». Όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.28, οι μαθητές του πρώτου επιπέδου απέτυχαν σε όλα τα έργα του παράγοντα. Οι μαθητές του δεύτερου επιπέδου περιγράφουν γενικά μόνο ένα στερεό με βάση την ορθογώνια του προβολή, αναγνωρίζουν τον αριθμό των εδρών τρισδιάστατων σχημάτων σε συγκεκριμένες περιπτώσεις και σχεδιάζουν κύβο ακολουθώντας μια τυποποιημένη διαδικασία. Οι μαθητές του τρίτου επιπέδου κατασκευάζουν στερεό με βάση την ορθογώνια του προβολή και μπορούν να το περιγράψουν. Όταν εργάζονται με το στερεό που κατασκεύασαν, περιγράφουν πώς μπορεί να διαφοροποιηθεί η κατασκευή τους χωρίς να τροποποιηθούν οι τρεις της όψεις. Αναγνωρίζουν τον αριθμό των εδρών τρισδιάστατων σχημάτων ανεξάρτητα από τον τρόπο αναπαράστασής τους. Σχεδιάζουν κύβο σε κανονική και διαφανή μορφή και αναγνωρίζουν στο σχέδιο τους παράλληλες και κάθετες ακμές. Τέλος, αποδέχονται και αντιλαμβάνονται μερικώς τις συμβάσεις που χρησιμοποιούνται στο σχεδιασμό τρισδιάστατων αντικειμένων. Οι μαθητές του τέταρτου επιπέδου έχουν τις ικανότητες των μαθητών του τρίτου επιπέδου

και επιπλέον σκέφτονται νοερά διαφορετικά στερεά με βάση συγκεκριμένη προβολή και αποδέχονται και αντιλαμβάνονται σε μεγαλύτερο βαθμό τις συμβάσεις που χρησιμοποιούνται στην αναπαράσταση τρισδιάστατων αντικειμένων στο χαρτί.

Πίνακας 4.28

Περιγραφή Ικανοτήτων των Μαθητών των Τεσσάρων Επιπέδων Σκέψης στον Παράγοντα Χειρισμός Διαφορετικών Μορφών Αναπαράστασης Τρισδιάστατων Αντικειμένων

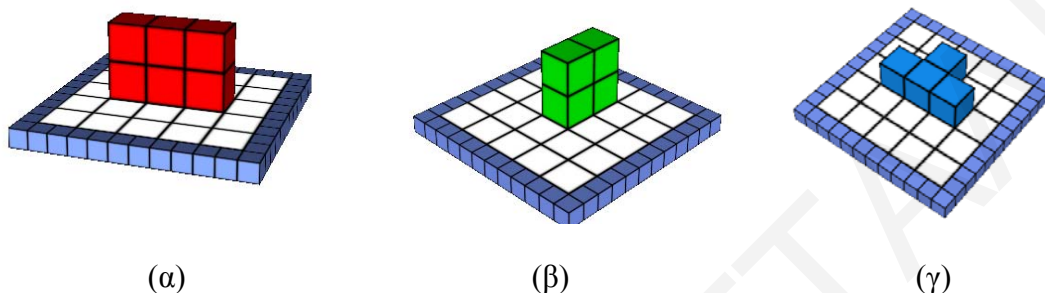
1 ^ο Επίπεδο	2 ^ο Επίπεδο	3 ^ο Επίπεδο	4 ^ο Επίπεδο
		Κατασκευάζουν στερεό με βάση την ορθογώνια προβολή	Κατασκευάζουν στερεό με βάση την ορθογώνια προβολή
	Περιγράφουν γενικά ένα στερεό με βάση την ορθογώνια προβολή	Περιγράφουν ένα στερεό με βάση την ορθογώνια προβολή	Περιγράφουν ένα στερεό με βάση την ορθογώνια προβολή
		Κατασκευάζουν διαφορετικά στερεά με βάση συγκεκριμένη ορθογώνια προβολή με πραγματικό υλικό	Σχηματίζουν νοερά διαφορετικά στερεά με βάση συγκεκριμένη ορθογώνια προβολή
	Αναγνωρίζουν τον αριθμό εδρών τρισδιάστατων σχημάτων σε συγκεκριμένες περιπτώσεις	Αναγνωρίζουν τον αριθμό εδρών τρισδιάστατων σχημάτων ανεξάρτητα από τον τρόπο αναπαράστασής τους	Αναγνωρίζουν τον αριθμό εδρών τρισδιάστατων σχημάτων ανεξάρτητα από τον τρόπο αναπαράστασής τους
	Σχεδιάζουν κύβο κατασκευάζοντας δύο τετράγωνα και ενώνουν τις αντίστοιχες κορυφές	Σχεδιάζουν κύβο σε κανονική και διαφανή μορφή	Σχεδιάζουν κύβο σε κανονική και διαφανή μορφή
		Αναγνωρίζουν παράλληλες και κάθετες ακμές στο σχέδιο κύβου	Αναγνωρίζουν παράλληλες και κάθετες ακμές στο σχέδιο κύβου
		Αποδέχονται και αντιλαμβάνονται μερικώς τις συμβάσεις που χρησιμοποιούνται για το σχεδιασμό τρισδιάστατων αντικειμένων στο χαρτί	Αντιλαμβάνονται και αποδέχονται πλήρως τις συμβάσεις που χρησιμοποιούνται για το σχεδιασμό τρισδιάστατων αντικειμένων στο χαρτί

Οι μαθητές του πρώτου επιπέδου είχαν σημαντικές δυσκολίες στις έννοιες και διαδικασίες του παράγοντα «Χειρισμός Διαφορετικών Μορφών Αναπαράστασης Τρισδιάστατων Αντικειμένων». Οι μαθητές του πρώτου επιπέδου απέτυχαν στα τρία έργα της συνέντευξης που εμπλέκουν ικανότητες του παράγοντα αυτού. Η πολύ χαμηλή αντίληψή για τις έννοιες του χώρου φαίνεται να αποτέλεσε βασική αιτία της αποτυχίας τους στα έργα αυτού του παράγοντα. Οι επεξηγήσεις των μαθητών στις ερωτήσεις που υποβλήθηκαν κατά τη διάρκεια της συνέντευξης έδειξαν ότι οι μαθητές δεν μπορούσαν να χειριστούν ή να επεξεργαστούν νοερά οπτικές εικόνες που δεν είχαν μπροστά τους.

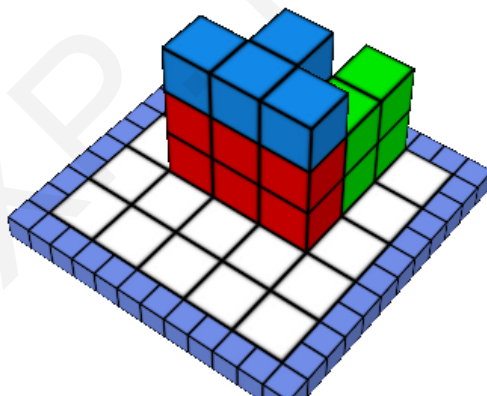
Στη συνέντευξη ζητήθηκε από τους μαθητές να περιγράψουν ένα αντικείμενο με βάση τις τρεις όψεις της ορθογωνίας προβολής (δείτε Διάγραμμα 3.4). Οι οκτώ από τους δέκα μαθητές του πρώτου επιπέδου σκέψης δεν αντιλήφθηκαν ότι οι τρεις διαφορετικές όψεις αποτελούσαν αναπαραστάσεις του ίδιου αντικείμενου. Για παράδειγμα, μαθήτρια της Ε΄ τάξης ρώτησε «Ποιο από τα τρία;». Δύο μαθητές αντί να περιγράψουν πώς θα είναι το στερεό απαρίθμησαν απλώς τον αριθμό των τετραγώνων τα οποία θεώρησαν ότι ήταν κύβοι και συμπέραναν ότι το στερεό θα αποτελείτο από τόσους κύβους όσο το άθροισμα των τετραγώνων.

Στην κατασκευή του στερεού με πραγματικούς κύβους οι επτά από τους δέκα μαθητές θεώρησαν ότι οι τρεις όψεις ήταν αυτόνομες και κατασκεύασαν τρία διαφορετικά στερεά, ένα για την πρόσοψη (Διάγραμμα 4.9 (α)), ένα για την πλάγια όψη (Διάγραμμα 4.9 (β)) και ένα για την κάτοψη (Διάγραμμα 4.9 (γ)). Στη συνέχεια τοποθέτησαν το ένα στερεό πάνω στο άλλο (δείτε Διάγραμμα 4.10). Η μεγαλύτερη δυσκολία των μαθητών ήταν να αντιληφθούν τις χωρικές σχέσεις μεταξύ των κύβων που υπάρχουν στην κάτοψη και στην πλάγια όψη. Το γεγονός αυτό τους εμπόδισε να κατασκευάσουν την πλαϊνή όψη του στερεού με τρόπο ώστε να ανταποκρίνεται και στις χωρικές σχέσεις της κάτοψης. Η διαδικασία αυτή απαιτούσε ικανοποιητική ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου και συγκεκριμένα υψηλή επίδοση στον παράγοντα «Προσανατολισμός στο Χώρο», αφού οι μαθητές έπρεπε να σκεφτούν σε κάθε περίπτωση πώς θα φαινόταν το αντικείμενο από το σημείο στο οποίο βρίσκονταν. Μετά από αρκετές επίμονες προσπάθειες, προβληματισμό και την παρέλευση αρκετού χρόνου, πέντε από τους δέκα μαθητές συνδύασαν στην ίδια κατασκευή την πρόσοψη και την πλάγια όψη. Επέμεναν, όμως, ότι οι δύο επιπλέον κύβοι που χρειαζόνταν για την πλάγια όψη έπρεπε να τοποθετηθούν στην άκρη της πρόσοψης, όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 4.11(α). Τρεις από τους μαθητές,

τοποθέτησαν έναν επιπλέον κύβο στο στερεό, όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 4.11(β) ώστε να ανταποκρίνεται στην προεξοχή που φαίνεται να υπάρχει στην κάτοψη. Οι μαθητές δεν αντιλήφθηκαν ότι η προεξοχή που φαίνεται στην κάτοψη, όταν συνδυαστεί με την εικόνα της πλάγιας όψης, αναπαριστά και τη δεξιά στήλη της πλάγιας όψης.



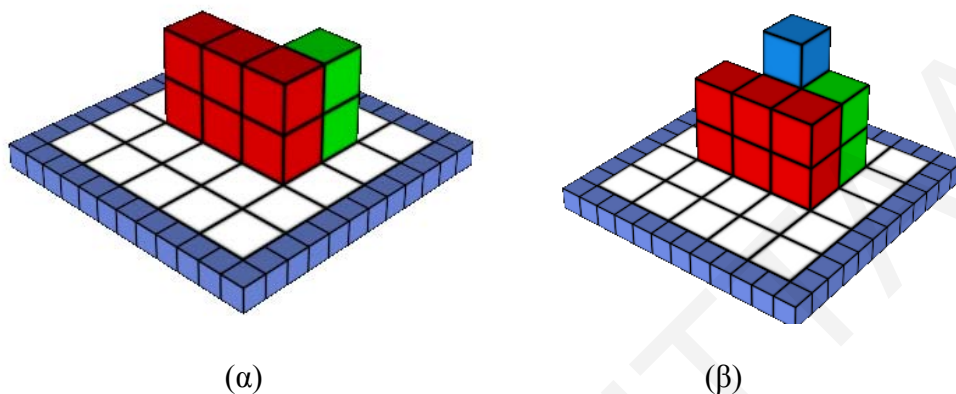
Διάγραμμα 4.9. Κατασκευή τριών διαφορετικών όψεων αντικειμένου.



Διάγραμμα 4.10. Ένωση των τριών όψεων για την κατασκευή του αντικειμένου.

Άλλο σημαντικό χαρακτηριστικό των μαθητών του πρώτου επιπέδου ήταν ότι δεν διέθεταν τους απαραίτητους μηχανισμούς ελέγχου και αυτοαξιολόγησης που θα τους βοηθούσαν να εντοπίσουν τα λάθη τους και να τα διορθώσουν. Παρά το γεγονός ότι κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων ο ερευνητής υποδείκνυε με έμμεσους τρόπους στους μαθητές ότι οι κατασκευές τους δεν ήταν σωστές και τους ενθάρρυνε να προβληματιστούν με ερωτήσεις όπως «Είσαι σίγουρος/η» ή «Προσπάθησε να δεις αν η κατασκευή σου αντιστοιχεί στις τρεις όψεις που έχεις μπροστά σου», οι μαθητές δεν αντιλήφθηκαν το λάθος. Η συμπεριφορά τους και ο τρόπος αντίδρασής τους έδειξε ότι διαισθητικά

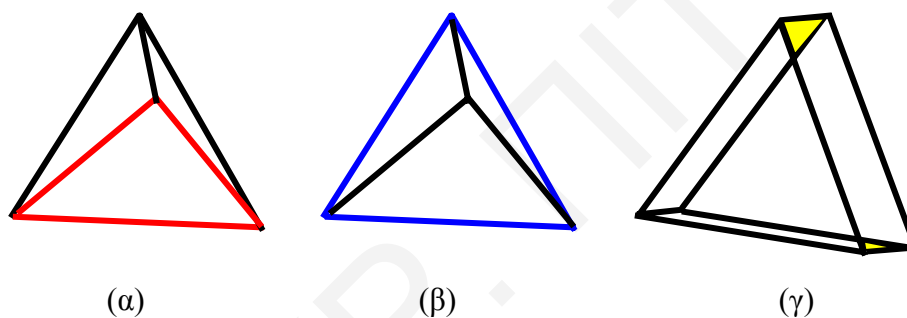
αντιλήφθηκαν ότι κάτι δεν ήταν σωστό, εγκλωβίστηκαν, όμως, στην αδυναμία συντονισμού κάτοψης και πλάγιας όψης. Αυτό ενισχύθηκε και από το γεγονός ότι η εικόνα της κάτοψης ήταν πολύ ισχυρή για τους μαθητές και σχεδόν όλοι όταν ρωτήθηκαν ποια όψη θα παρατηρούν κυρίως όταν θα εργάζονται απάντησαν «την κάτοψη».



Διάγραμμα 4.11. Κατασκευές μαθητών του πρώτου επιπέδου.

Η δυσκολία χειρισμού των διαφορετικών μορφών αναπαράστασης των τρισδιάστατων αντικειμένων διαπιστώθηκε και στα έργα στα οποία οι μαθητές έπρεπε να αναγνωρίσουν τον αριθμό των τριγωνικών εδρών μιας τριγωνικής πυραμίδας και ενός τριγωνικού πρίσματος (δείτε Διάγραμμα 3.5). Ο τρόπος παρουσίασης των στερεών (διαφανής προβολή και γωνία θέασης) μπέρδεψε τους μαθητές του πρώτου επιπέδου και απέτυχαν στα έργα αυτά. Οι εικονικές αναπαραστάσεις που είχαν μπροστά τους υπερκέρασαν την υφιστάμενη γνωσιολογική τους δομή για τα στερεά. Οι επτά από τους δέκα μαθητές απάντησαν ότι βλέπουν τρεις έδρες στην τριγωνική πυραμίδα. Χαρακτηριστική ήταν η απάντηση μαθήτριας η οποία στις ερωτήσεις του ερευνητή κατά πόσον είναι σίγουρη ή κατά πόσον υπάρχει και κάποια άλλη έδρα που δεν είναι τόσο εμφανής δήλωσε ότι «τρεις είναι οι έδρες, αυτές βλέπω, δεν υπάρχει άλλη». Οι μαθητές φάνηκε να είχαν μια διαισθητική αντίληψη ότι υπήρχε μια τέταρτη έδρα στη βάση του στερεού αλλά στο τέλος την αγνόησαν γιατί δεν ήταν σε θέση να την δουν. Τρεις μαθητές απάντησαν ότι πρέπει να υπάρχει και κάποια τέταρτη έδρα ως αποτέλεσμα της ανάγκης να στέκεται το στερεό. Ένας από αυτούς αιτιολόγησε την ύπαρξη τέταρτης έδρας αναφέροντας ότι θα υπάρχει αυτή η έδρα γιατί «πώς θα στέκεται η πυραμίδα από τις γωνίες κάτω, δεν θα υπάρχει κάτι για να στέκεται;» Το σύνολο, όμως, των μαθητών δεν έβλεπαν με ποιον τρόπο σχηματιζόταν η τέταρτη έδρα στην εικόνα που είχαν μπροστά

τους. Ήταν έκδηλη η αδυναμία τους προσανατολισμού στο χώρο, αφού δεν αντιλήφθηκαν νοερά τι θα έβλεπε κάποιος που παρατηρούσε την πυραμίδα από κάτω προς τα πάνω. Οι μαθητές δεν ήταν καθόλου σίγουροι για τις απαντήσεις τους, αφού με τις πρώτες διευκρινιστικές ερωτήσεις που τους υπέβαλλε ο ερευνητής, δεν απαντούσαν με σαφήνεια αλλά με ερωτήματα. Οι μαθητές δεν αποδέχτηκαν τις απαραίτητες συμβάσεις που ήταν αναγκαίες, για να αντιληφθεί κάποιος ένα σχήμα σε διάφανη μορφή. Η σύμβαση που έπρεπε να κάνουν οι μαθητές ήταν ότι το κόκκινο τρίγωνο που παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 4.12 αναπαριστά τη βάση της πυραμίδας. Αντίθετα, διαφάνηκε ότι οι μαθητές μπορούσαν να δουν τη βάση της πυραμίδας αλλά νόμιζαν ότι ήταν η τρίτη παράπλευρη έδρα. Αντίθετα, η έδρα που δεν ήταν εμφανής στους μαθητές ήταν η έδρα που ορίζεται από το μεγάλο τρίγωνο (δείτε μπλε τρίγωνο στο Διάγραμμα 4.12(β)).



Διάγραμμα 4.12. Αναγνώριση τριγωνικών εδρών στα δύο στερεά.

Παρόμοιες συμπεριφορές παρατηρήθηκαν και στην περίπτωση του τριγωνικού πρίσματος. Οι οκτώ μαθητές απάντησαν ότι το τριγωνικό πρίσμα είχε τρεις τριγωνικές έδρες. Υπολόγισαν ως έδρα και το μικρό τρίγωνο που σχηματίζεται από την επικάλυψη των δύο βάσεων του πρίσματος (Δείτε κίτρινο τρίγωνο στο Διάγραμμα 4.12(γ)).

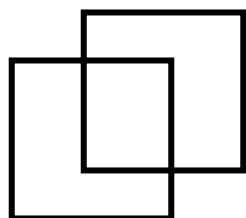
Χαρακτηριστική ήταν η απάντηση ενός μαθητή της Στ' τάξης, ο οποίος, για να πείσει για την απάντησή του, δήλωσε ότι «μπορεί να αγγίξει και τα μικρά τρίγωνα». Στις ερωτήσεις του ερευνητή κατά πόσον μπορεί κάποιος να δει τις έδρες αυτές από οπουδήποτε και αν στέκεται, δεν απάντησαν. Δύο μαθητές δήλωσαν ότι η μοναδική τριγωνική έδρα ήταν το μικρό τρίγωνο, γιατί ήταν το μοναδικό που φαινόταν ξεκάθαρα χωρίς επικαλύψεις.

Οι απαντήσεις των μαθητών του πρώτου επιπέδου σε αυτά τα έργα και ο τρόπος που αντέδρασαν στη συζήτηση που έγινε με τον ερευνητή έδειξαν ότι, πέρα από την αδυναμία αντίληψης των εννοιών του χώρου, δεν διέθεταν ούτε τις απαραίτητες «νοερές εικόνες» για τα στερεά, αλλά ούτε και τις κατάλληλες «σχηματικές έννοιες» (figural

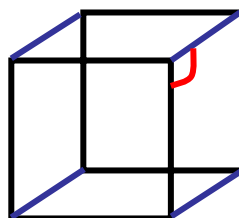
concept). Η έλλειψη νοερών εικόνων για το κάθε στερεό είχε ως αποτέλεσμα οι μαθητές να στηρίζονται κυρίως σε αυτό που έβλεπαν. Δεν ήταν σε θέση, όμως, να αντιληφθούν τις σχέσεις και τις έννοιες σε αυτό που έβλεπαν και έτσι απέτυχαν να χειριστούν τις διαφορετικές αναπαραστάσεις των στερεών.

Το πιο πάνω γεγονός επιβεβαιώθηκε και από την αδυναμία των μαθητών στο σχεδιασμό των στερεών. Οι μαθητές δεν αποδέκτηκαν ή/και χρησιμοποίησαν συμβάσεις στην αναπαράσταση των στερεών. Ζητήθηκε από αυτούς να σχεδιάσουν έναν κύβο, έχοντας μπροστά τους ένα συμπαγές μοντέλο κύβου. Οι επτά μαθητές του επιπέδου αυτού σχεδίασαν μόνο μερικά τετράγωνα ασύνδετα μεταξύ τους. Οι άλλοι τρεις σχεδίασαν κύβο ακολουθώντας μια τυπική διαδικασία, η οποία, όπως φάνηκε, αποτελούσε απλά προϊόν απομνημόνευσης γιατί δεν ήταν σε θέση να την επεξηγήσουν. Συγκεκριμένα, σχεδίασαν ένα τετράγωνο και δίπλα του ακόμη ένα τετράγωνο ώστε να επικαλύπτει σε ένα βαθμό το πρώτο (Δείτε Διάγραμμα 4.13(α)). Στη συνέχεια έφεραν πλάγιες γραμμές και ένωσαν τις αντίστοιχες κορυφές. Οι μαθητές, όμως, δεν ήταν σε θέση να εντοπίσουν ποιες ακμές και έδρες φαίνονταν στην πραγματικότητα και ποιες φαίνονταν ως αποτέλεσμα της διαφάνειας που υπήρχε στο σχεδιασμό του στερεού.

Οι μαθητές δεν ερμήνευσαν τις συμβάσεις που υπήρχαν στο σχεδιασμό των στερεών. Για παράδειγμα, όταν ρωτήθηκαν αν η γωνία που είναι σημαδεμένη με κόκκινο στο Διάγραμμα 4.13(β) ήταν ορθή, όλοι απάντησαν με βεβαιότητα ότι δεν ήταν. Όταν ζητήθηκε να επιδείξουν στον πραγματικό κύβο αυτή τη γωνία που δεν ήταν ορθή η απάντησή τους ήταν ότι όλες οι γωνίες στο στερεό ήταν ορθές. Κανένας μαθητής δεν έδωσε μια επαρκή αιτιολόγηση, αλλά ανέφεραν ότι «μερικές φορές είναι και μερικές φορές δεν είναι ορθές» ή «αν τη μετρήσουμε με άλλο μοιρογνωμόνιο μπορεί να είναι ορθή». Το αποτέλεσμα της συζήτησης ήταν να αρχίσουν να αμφιβάλλουν κατά πόσον όλες οι ακμές του κύβου τέμνονται κάθετα.



(α)



(β)

Διάγραμμα 4.13. Σχεδιασμός κύβου από τους μαθητές του πρώτου επιπέδου.

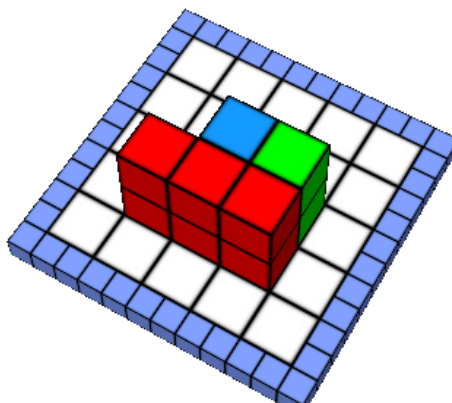
Μαθητές 2^{ου} Επιπέδου

Οι μαθητές του δεύτερου επιπέδου σκέψης είχαν, επίσης, αρκετές δυσκολίες στις έννοιες και διαδικασίες του παράγοντα «Χειρισμός Διαφορετικών Μορφών Αναπαράστασης Τρισδιάστατων Αντικειμένων». Οι μαθητές αυτοί απέτυχαν στο πρώτο έργο κατασκευής στερεού με βάση την ορθογώνια προβολή και αντιμετώπισαν αρκετές δυσκολίες στο σχεδιασμό του κύβου και στην αιτιολόγηση και ερμηνεία της διαδικασίας σχεδιασμού. Σημαντική αιτία για την αποτυχία των μαθητών και του δεύτερου επιπέδου φαίνεται να αποτέλεσε το χαμηλό επίπεδο αντίληψης των εννοιών του χώρου και κυρίως της ικανότητας προσανατολισμού στο χώρο (ο μέσος όρος των μαθητών στον παράγοντα «προσανατολισμός στο χώρο» ήταν 0.46).

Στο έργο κατασκευής στερεού με βάση την ορθογώνια προβολή του, οι μαθητές έδωσαν μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα για το αντικείμενο που θα κατασκεύαζαν. Η περιγραφή τους έδειξε ότι, σε αντίθεση με τους μαθητές του πρώτου επιπέδου, αντιλαμβάνονταν ότι οι τρεις όψεις αποτελούσαν αναπαραστάσεις του ίδιου αντικείμενου. Για παράδειγμα, μαθήτρια της Στ' τάξης ανέφερε ότι «θα φαίνεται ως ορθογώνιο, όταν το κοιτάξεις από το ένα πλάι ως τετράγωνο, από το άλλο πλάι πάλι τετράγωνο και θα εξέχει ένας κύβος». Το χαρακτηριστικό που διαφοροποίησε τους μαθητές αυτούς από τους μαθητές του πρώτου επιπέδου ήταν ότι αντιλήφθηκαν ότι οι τρεις όψεις αναπαριστούσαν το ίδιο αντικείμενο. Το πρόβλημα όμως που αντιμετώπιζαν ήταν ότι συνδύασαν μόνο τις δύο από τις τρεις όψεις στο ίδιο στερεό. Συγκεκριμένα, συνδύασαν μόνο την πρόσοψη με την πλάγια όψη. Οι μαθητές και αυτού του επιπέδου είχαν την αντίληψη ότι η πρόσοψη ενώνεται ακριβώς στην άκρη με την πλάγια όψη. Χαρακτηριστική ήταν η απάντηση μαθητή που δήλωσε ότι «δεν γίνεται, δεν μπορεί να δέσει το πάνω με την πρόσοψη και το πλάι».

Στην κατασκευή του στερεού με πραγματικούς κύβους παρατηρήθηκε η ίδια συμπεριφορά. Οι μαθητές κατασκεύασαν αντικείμενο που αντιστοιχούσε σωστά στην πρόσοψη και πλάγια όψη που δόθηκαν αλλά στην προσπάθειά τους να λάβουν υπόψη και την κάτωψη πρόσθεταν ακόμη έναν κύβο στο κέντρο της δεύτερης σειράς όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 4.14. Όταν ζητήθηκε από τους μαθητές να συγκρίνουν το στερεό που κατασκεύασαν με τις τρεις όψεις, αμφισβήτησαν την ορθότητα του έργου, υποστηρίζοντας ότι δεν ήταν δυνατόν οι τέσσερις κύβοι της πλάγιας όψης να μην βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Η επιμονή τριών μαθητών να διαφοροποιήσουν την κάτωψη, ώστε να

ανταποκρίνεται στην «προέκταση» που είχαν στο μυαλό τους, είχε ως αποτέλεσμα να κάνουν λανθασμένες κατασκευές όπως αυτήν που παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 4.14.



Διάγραμμα 4.14. Κατασκευή κύβου από τους μαθητές του δεύτερου επιπέδου.

Οι μαθητές αντιμετώπισαν σημαντική δυσκολία στην περιγραφή της κατασκευής και συγκεκριμένα να περιγράψουν τι θα έβλεπε κάποιος που παρατηρούσε το στερεό από άλλη γωνία θέασης. Στην περιγραφή τους αναπαρήγαγαν απλώς το στερεό όπως το έβλεπαν και λανθασμένα θεώρησαν ότι κάποιος που παρατηρεί το στερεό από άλλη θέση θα βλέπει κάτι αντίστοιχο με την πρόσοψη.

Οι μαθητές του δεύτερου επιπέδου διέθεταν τους απαραίτητους μηχανισμούς ελέγχου και για αυτό αντιλήφθηκαν ότι η κατασκευή τους ήταν λανθασμένη. Ο συνδυασμός, όμως, της επίγνωσης του λάθους με την αδυναμία συντονισμού και των τριών όψεων, αντί να οδηγήσει σε περαιτέρω προβληματισμό και προσπάθεια διόρθωσης, είχε ως αποτέλεσμα την αμφισβήτηση της ορθότητας του έργου. Λόγω της απουσίας μηχανισμών αυτοδιόρθωσης, όταν οι μαθητές συνέθεταν το στερεό δεν παρατηρούσαν πώς θα φαινόταν όταν το έβλεπαν ακριβώς από το πλάι ή ακριβώς από πάνω. Αντίθετα, συμπλήρωναν αυτό που είχαν στο μυαλό τους και στο τέλος έκαναν τον απαραίτητο έλεγχο. Έτσι, έφταναν πάντα στο συμπέρασμα ότι δεν μπορεί να γίνει η κατασκευή. Αν έκαναν τον απαραίτητο έλεγχο σταδιακά θα μπορούσαν να παρατηρήσουν ότι ένας κύβος που προστίθεται στη μέση της δεύτερης σειράς σχηματίζει και την πλάγια όψη και την κάτω όψη.

Η δυσκολία των μαθητών του δεύτερου επιπέδου στο χειρισμό διαφορετικών μορφών αναπαράστασης των τρισδιάστατων αντικειμένων διαφάνηκε και στα έργα αναγνώρισης του αριθμού των τριγωνικών εδρών τριγωνικής πυραμίδας και τριγωνικού πρίσματος (δείτε Διάγραμμα 3.5). Οι οκτώ από τους δέκα μαθητές δεν αναγνώρισαν στη

συγκεκριμένη αναπαράσταση της πυραμίδας τις τέσσερις έδρες. Η απάντησή τους ήταν ότι έβλεπαν τρεις έδρες και ότι υπήρχε ακόμη μια πίσω. Αιτιολόγησαν την απάντησή τους με βάση τη διαισθητική τους αντίληψη. Χαρακτηριστικές ήταν οι δηλώσεις τους: «σκέφτηκα ότι έχει ακόμη μια πίσω», «φαίνονται τρεις και μια από πίσω που δεν φαίνεται», «υπολογίζω ότι πρέπει να έχει και έδρα κάτω για να στέκεται», «υπάρχει έδρα κάτω για να στερεωθεί, διαφορετικά θα πετούσε» ή «δεν την βλέπω αλλά ξέρω ότι υπάρχει». Σε αντίθεση με τους μαθητές του πρώτου επιπέδου, οι μαθητές αυτοί ήταν πιο σίγουροι για τις απαντήσεις τους, αφού στις ερωτήσεις του ερευνητή επέμεναν στην ύπαρξη τέταρτης έδρας. Οι μαθητές αυτοί είχαν σοβαρό πρόβλημα στο να αποδεχτούν τις απαραίτητες συμβάσεις, για να αντιληφθούν το σχήμα που ήταν σε διαφανή μορφή. Δεν έβλεπαν τη βάση της πυραμίδας, αλλά νόμιζαν ότι ήταν η τρίτη παράπλευρη έδρα και δεν αντιλαμβάνονταν την έδρα που οριζόταν από το μεγάλο τρίγωνο (δείτε μπλε τρίγωνο στο Διάγραμμα 4.12). Παρόμοια συμπεριφορά παρατηρήθηκε και στην περίπτωση του τριγωνικού πρίσματος. Μόνο τέσσερις από τους δέκα μαθητές του δεύτερου επιπέδου απάντησαν ότι το τριγωνικό πρίσμα είχε δύο τριγωνικές έδρες, χωρίς να αιτιολογήσουν τι είναι το μικρό τρίγωνο που σχηματίζεται από την επικάλυψη της μπροστινής με την πισινή έδρα. Οι αιτιολογήσεις των μαθητών δεν αναφέρονταν στον τρόπο αναπαράστασης του αντικειμένου αλλά σε άσχετους λόγους, όπως το μέγεθος του τριγώνου.

Η αδυναμία των μαθητών του δεύτερου επιπέδου να αποδεχτούν και να χρησιμοποιήσουν κάποιες συμβάσεις στην αναπαράσταση των στερεών φάνηκε και στο σχεδιασμό του κύβου. Οι έξι μαθητές ακολούθησαν την τυπική διαδικασία σχεδιασμού κύβου, κατασκευάζοντας δύο τετράγωνα και ενώνοντας τις κορυφές. Οι μαθητές που εφάρμοσαν αυτή τη στρατηγική δεν παρατήρησαν τον πραγματικό κύβο που υπήρχε μπροστά τους, αλλά εφάρμοσαν τυφλά τη διαδικασία που γνώριζαν. Όταν ζητήθηκε να εξηγήσουν γιατί σχεδίασαν και ακμές που δεν φαίνονταν στον πραγματικό κύβο, απάντησαν ότι ήταν αναγκαίο να ενωθούν οι κορυφές, για να σχηματιστεί κύβος. Οι μαθητές δυσκολεύτηκαν πολύ να σχεδιάσουν κύβο χωρίς διαφάνεια. Οι υπόλοιποι μαθητές παρατήρησαν προσεκτικά το πραγματικό αντικείμενο και σχεδίασαν τον κύβο σε συμπαγή μορφή. Κανένας μαθητής δεν ερμήνευσε τη σύμβαση που υπάρχει για το σχεδιασμό των ορθών γωνιών και δεν αντιλήφθηκαν το πρόβλημα προβολής. Όταν ρωτήθηκαν κατά πόσο η γωνία που είναι σημαδεμένη με κόκκινο στο Διάγραμμα 4.13(β) ήταν ορθή, όλοι οι μαθητές απάντησαν με βεβαιότητα ότι δεν ήταν, δίνοντας αιτιολογήσεις όπως «είναι παραμορφωμένο» ή «έκανα λάθος στο σχεδιασμό επειδή το έκανα πρόχειρα, δεν ξέρω αν το έκανα με γεωμετρικά όργανα».

Μαθητές 3^{ου} Επιπέδου

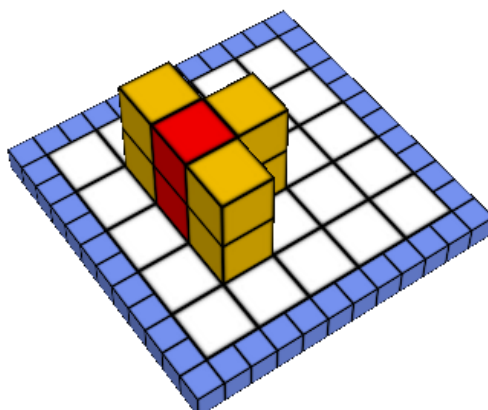
Οι μαθητές του τρίτου επιπέδου σκέψης χειρίστηκαν με αρκετή ευχέρεια τις έννοιες του παράγοντα «Χειρισμός Διαφορετικών Μορφών Αναπαράστασης Τρισδιάστατων Αντικειμένων». Η σημαντική διαφοροποίηση του επιπέδου ανάπτυξης της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου και ιδιαίτερα του παράγοντα προσανατολισμού στο χώρο φαίνεται να είχε ουσιαστική επίδραση στην ικανότητα των μαθητών να χειρίζονται διαφορετικές μορφές αναπαράστασης και να μην παρασύρονται από τις ιδιαιτερότητες της κάθε μορφής και τις συμβάσεις που προϋποθέτει.

Οι μαθητές του τρίτου επιπέδου περιέγραψαν με σχετική ακρίβεια το στερεό που έπρεπε να κατασκευάσουν με βάση τις τρεις όψεις που είχαν μπροστά τους. Οι περιγραφές τους έδειξαν, σε αντίθεση με τους μαθητές των δύο προηγούμενων επιπέδων, ότι μπορούσαν να συντονίσουν σε ικανοποιητικό βαθμό τις τρεις όψεις του στερεού. Χαρακτηριστική ήταν η περιγραφή μαθήτριας της Α΄ γυμνασίου που δήλωσε ότι «μπροστά υπάρχει ένα ορθογώνιο, στο πλάι ένα τετράγωνο, ενώ αν το κοιτάξεις από πιο ψηλά θα δεις από πάνω ένα αναποδογυρισμένο T».

Οι οκτώ από τους δέκα μαθητές του επιπέδου κατάφεραν στο τέλος να κατασκευάσουν με επιτυχία το στερεό. Τρεις από αυτούς κατασκεύασαν χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία το στερεό, παρατηρώντας προσεκτικά τις τρεις όψεις και ελέγχοντας κατά πόσον η κάθε όψη του στερεού τους ανταποκρινόταν με τα δεδομένα του έργου. Οι πέντε μαθητές κατασκεύασαν την πρόσοψη ενώνοντας έξι κύβους σε σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου και πρόσθεσαν μια στήλη από δύο κύβους στο πλάι και ακόμη ένα κύβο στη μέση της δεύτερης σειράς. Οι μαθητές διέθεταν τους απαραίτητους μηχανισμούς ελέγχου και αυτοδιόρθωσης και για αυτό αντιλήφθηκαν ότι η κατασκευή τους ήταν λανθασμένη. Η περαιτέρω προσεκτική μελέτη της κάτοψης του στερεού σε συνδυασμό με το γεγονός ότι οι μαθητές πήραν στα χέρια τους το στερεό και το τοποθέτησαν με τον κατάλληλο τρόπο μπροστά τους, τους βοήθησε να κάνουν τις απαραίτητες διορθώσεις.

Οι μαθητές περιέγραψαν σωστά τι θα έβλεπε κάποιος που παρατηρούσε το στερεό από άλλο σημείο. Σε αυτό συνέβαλε η προηγούμενη ενασχόλησή τους με το στερεό και το γεγονός ότι το είχαν περιστρέψει στα χέρια τους. Επιπρόσθετα, οι μαθητές κατάφεραν να εντοπίσουν τους κύβους που θα μπορούσαν να αφαιρεθούν από την κατασκευή, χωρίς να αλλάζουν οι τρεις όψεις. Οι μαθητές δεν κατάφεραν να εντοπίσουν τους κύβους (δείτε

κύβους με κόκκινο στο Διάγραμμα 4.15) νοερά, αλλά το πέτυχαν μετά από αρκετές περιστροφές του στερεού και ταυτόχρονη σύγκριση με τις τρεις όψεις που δόθηκαν.



Διάγραμμα 4.15. Κύβους που μπορούν να αφαιρεθούν από την κατασκευή.

Οι μαθητές του τρίτου επιπέδου αναγνώρισαν ότι η τριγωνική πυραμίδα είχε τέσσερις τριγωνικές έδρες. Διαφάνηκε, όμως, ότι η γνώση των μαθητών σχετικά με τον αριθμό των τριγωνικών εδρών τους εμπόδιζε να προσπαθήσουν να τις μετρήσουν και για αυτό οι περισσότεροι δήλωσαν ότι ήξεραν τον αριθμό των εδρών και δεν τις μέτρησαν. Τρεις μαθητές δήλωσαν ότι μπορούσαν να δουν και τις τέσσερις έδρες. Ένας μαθητής δήλωσε ότι μπορούσε να δει και τη βάση αν έφευγαν οι ενδιάμεσες γραμμές. Αντίθετα, πέντε μαθητές αιτιολόγησαν την ύπαρξη της τέταρτης έδρας χρησιμοποιώντας επιχειρήματα όπως «δεν γίνεται ένα σχήμα να μην έχει βάση», «εννοείται ότι υπάρχει, διαφορετικά δεν θα μπορούσε να στέκεται» ή «για να είναι σχήμα πρέπει να έχει βάση». Οι επτά μαθητές του τρίτου επιπέδου διαφοροποιήθηκαν από τους μαθητές του δεύτερου επιπέδου στο έργο αναγνώρισης των τριγωνικών εδρών ενός τριγωνικού πρίσματος, αφού αιτιολόγησαν τι ήταν τα μικρά τρίγωνα. Δήλωσαν ότι τα μικρά τρίγωνα ήταν αποτέλεσμα της διαφανούς προβολής που χρησιμοποιήθηκε στο σχεδιασμό και ότι αν κάποιος παρατηρούσε από άλλο σημείο το στερεό δεν θα τα έβλεπε. Αυτή η παρατήρηση αποτέλεσε ένδειξη της ικανότητας προσανατολισμού στο χώρο. Χαρακτηριστική ήταν η δήλωση ενός μαθητή ότι «το μικρό τρίγωνο το βλέπουμε, επειδή ενώνονται οι γραμμές και για αυτό θα έπρεπε να είναι διακεκομμένες».

Οι μαθητές του τρίτου επιπέδου αποδέχτηκαν τις απαραίτητες συμβάσεις στην αναπαράσταση των στερεών και συγκεκριμένα στο σχεδιασμό ενός κύβου. Οι επτά μαθητές της κατηγορίας σχεδίασαν κύβο κατασκευάζοντας δύο τετράγωνα και ενώνοντας τις αντίστοιχες κορυφές. Σε αντίθεση με τους μαθητές του δεύτερου επιπέδου, οι μαθητές αυτοί ήταν σε θέση να δείξουν ποιες ακμές φαίνονταν λόγω της διαφανούς προβολής. Οι

περισσότεροι από αυτούς σχεδίασαν στη συνέχεια επιτυχώς κύβο σε αδιαφανή μορφή. Οι μαθητές εντόπισαν και έδειξαν στο σχήμα παράλληλες ακμές και ακμές που τέμονταν κάθετα. Δύο από αυτούς αιτιολόγησαν γιατί κάποιες ορθές γωνίες του κύβου στο σχέδιο δεν ήταν. Οι υπόλοιποι ανέφεραν ότι «είναι κάθετες αλλά δεν φαίνονται» ή απέδωσαν το γεγονός σε λάθος στο σχεδιασμό υποστηρίζοντας ότι «μπορεί να σχεδιάστηκε λανθασμένα».

Μαθητές 4^ο Επιπέδου

Οι μαθητές του τέταρτου επιπέδου σκέψης χειρίστηκαν με επιτυχία τις διαφορετικές μορφές αναπαράστασης των στερεών. Σημαντικό χαρακτηριστικό που διαφοροποίησε τους μαθητές αυτούς από τους μαθητές των άλλων επιπέδων ήταν ότι αποδέχτηκαν και κατανόησαν τις απαραίτητες συμβάσεις για την ερμηνεία των ιδιοτήτων των στερεών.

Οι μαθητές του τέταρτου επιπέδου περιέγραψαν με ακρίβεια το στερεό που έπρεπε να κατασκευάσουν συνδυάζοντας τις τρεις όψεις και δίνοντας στον ερευνητή την εντύπωση ότι χωρίς να το κατασκευάσουν είχαν στο μυαλό τους μια λεπτομερή εικόνα του στερεού. Χαρακτηριστική ήταν η περίπτωση ενός μαθητή που με βάση την ορθογώνια προβολή σχεδίασε από μόνος του το στερεό σε πλάγια προβολή.

Οι μαθητές αυτοί κατασκεύασαν με επιτυχία το στερεό. Οι οκτώ από αυτούς κατασκεύασαν άμεσα το στερεό παρατηρώντας προσεκτικά τις τρεις όψεις, χωρίς να κάνουν κάποιο λάθος στη διαδικασία. Η διαδικασία που ακολούθησαν ήταν να κτίσουν ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο χρησιμοποιώντας έξι κύβους και στη συνέχεια να προσθέσουν μια στήλη δύο κύβων στο μέσο του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου. Ένας μαθητής στηρίχτηκε κυρίως στην κάτοψη και κατασκεύασε στήλες με βάση την κάτοψη τις οποίες ένωσε στη συνέχεια. Δύο μαθητές πρόσθεσαν μια στήλη από δύο κύβους στο πλάι αντί στο κέντρο, αλλά αντιλήφθηκαν αμέσως το λάθος και έκαναν την απαραίτητη διόρθωση. Κύριο χαρακτηριστικό των μαθητών ήταν ότι ήταν σε θέση να αιτιολογήσουν με ακρίβεια κάθε τους κίνηση. Οι μαθητές ήταν σίγουροι για τις ενέργειές τους. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώθηκε και από το γεγονός ότι οι μαθητές περιέγραψαν με ακρίβεια την κατασκευή τους και πώς θα έβλεπε κάποιος το στερεό που θα βρισκόταν σε οποιαδήποτε άλλη θέση. Η κατασκευή από μέρους των μαθητών μιας εσωτερικής νοερής αναπαράστασης του αντικειμένου η οποία απεικόνιζε και τις χωρικές σχέσεις μεταξύ των κύβων, διαφάνηκε επίσης από την ικανότητα των μαθητών να εντοπίσουν νοερά τους

κύβους που θα μπορούσαν να αφαιρεθούν από την κατασκευή, χωρίς να επηρεάζονται οι τρεις όψεις.

Οι μαθητές του τέταρτου επιπέδου αναγνώρισαν ότι η τριγωνική πυραμίδα είχε τέσσερις τριγωνικές έδρες και επτά από αυτούς έδειξαν πώς ορίζονται στο σχέδιο οι τέσσερις έδρες. Οι υπόλοιποι τρεις απάντησαν αμέσως ότι δεν χρειαζόταν να μετρήσουν, γιατί ήξεραν ότι η τριγωνική πυραμίδα είχε τέσσερις έδρες, υποστηρίζοντας ότι υπήρχε «και μια κάτω έδρα για να στηρίζεται το στερεό». Το υψηλό επίπεδο ικανότητας προσανατολισμού στο χώρο διαφάνηκε και στο έργο αναγνώρισης των τριγωνικών εδρών ενός τριγωνικού πρίσματος. Οι μαθητές του επιπέδου περιέγραψαν με ακρίβεια τα σημεία από τα οποία ένας παρατηρητής δεν θα έβλεπε τα μικρά τρίγωνα. Αιτιολόγησαν την ύπαρξη των μικρών τριγώνων ως αποτέλεσμα του σχεδιασμού του στερεού στο «χαρτί».

Οι μαθητές του τέταρτου επιπέδου σχεδίασαν με επιτυχία στο χαρτί ένα κύβο. Αν και οι επτά από αυτούς εφάρμοσαν την τυπική διαδικασία, σχεδιάζοντας δηλαδή δύο τετράγωνα και ενώνοντας τις αντίστοιχες κορυφές, ήταν σε θέση να σχεδιάσουν κύβο σε αδιαφανή μορφή. Όλοι οι μαθητές του επιπέδου εντόπισαν και επέδειξαν στο σχήμα παράλληλες ακμές και ακμές που τέμονταν κάθετα. Αιτιολόγησαν το γεγονός ότι κάποιες ακμές του κύβου στο σχέδιο φαίνονταν να μην τέμνονται κάθετα ως αποτέλεσμα της προβολής/σχεδιασμού του κύβου. Οι μαθητές δεν συγχύστηκαν από τις αδυναμίες της σχεδίασης και επεξήγησαν ότι αυτή ήταν η εικόνα που είχε κάποιος που στεκόταν μπροστά από τον κύβο. Ανέφεραν, επίσης, ότι κάποιος άλλος παρατηρητής με διαφορετική γωνία θέασης θα έβλεπε ότι οι συγκεκριμένες γωνίες είναι ορθές.

Διάταξη Αντικειμένων στο Χώρο

Οι ικανότητες των μαθητών των τεσσάρων επιπέδων σκέψης στις έννοιες του παράγοντα «Διάταξη Αντικειμένων στο Χώρο» παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.29. Οι μαθητές των δύο πρώτων επιπέδων αποτυγχάνουν σε όλα τα έργα του παράγοντα. Οι μαθητές του τρίτου επιπέδου είναι σε θέση να υπολογίσουν τον αριθμό των κύβων που χρειάζονται, για να γεμίσει ένα κιβώτιο. Επιπρόσθετα, οι μαθητές του τέταρτου επιπέδου υπολογίζουν τον αριθμό των κύβων που πρέπει να προστεθούν σε ένα στερεό ώστε να μετατραπεί σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο συγκεκριμένων διαστάσεων. Οι μαθητές αυτοί βρίσκουν,

επίσης, κατάλληλους συνδυασμούς κύβων και ράβδων, για να γεμίσει ένα κιβώτιο σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου.

Πίνακας 4.29

Περιγραφή Ικανοτήτων των Μαθητών των Τεσσάρων Επιπέδων Σκέψης στον Παράγοντα Διάταξη Αντικειμένων στο Χώρο

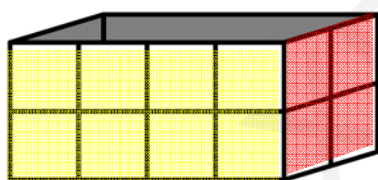
1 ^ο Επίπεδο	2 ^ο Επίπεδο	3 ^ο Επίπεδο	4 ^ο Επίπεδο
		Υπολογίζουν τον αριθμό κύβων που χρειάζονται, για να γεμίσει ένα κιβώτιο	Υπολογίζουν τον αριθμό κύβων που χρειάζονται, για να γεμίσει ένα κιβώτιο
			Υπολογίζουν τον αριθμό κύβων που πρέπει να προστεθούν σε ένα στερεό, για να μετατραπεί σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο
			Βρίσκουν τον κατάλληλο συνδυασμό κύβων και ράβδων που γεμίζουν ένα κιβώτιο. Βρίσκουν εναλλακτικούς συνδυασμούς

Μαθητές 1^{ου} Επιπέδου

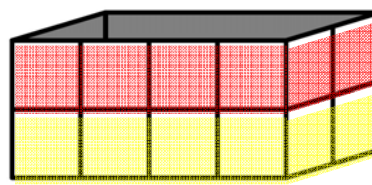
Οι μαθητές του πρώτου επιπέδου είχαν σημαντικές δυσκολίες στις έννοιες και διαδικασίες του παράγοντα «Διάταξη Αντικειμένων στο Χώρο». Οι μαθητές δεν είχαν ικανοποιητική επίδοση στα τρία έργα της συνέντευξης που σχετίζονταν με τις ικανότητες του παράγοντα αυτού. Μια πιθανή αιτία της αποτυχίας των μαθητών φαίνεται να ήταν η πολύ χαμηλή ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου και συγκεκριμένα η ανυπαρξία της ικανότητας δόμησης/διάταξης αντικειμένων στο χώρο (spatial structuring), όπως ορίζεται από τους Clements και Battista (1998).

Στο πρώτο έργο της συνέντευξης, που αναφέρεται σε αυτό τον παράγοντα οι μαθητές έπρεπε να υπολογίσουν τον αριθμό των κύβων που μπορούν να χωρέσουν σε ένα κιβώτιο (δείτε Έργο 14 στον Πίνακα 3.5). Η περιγραφή από τους μαθητές του τρόπου σκέψης τους έδειξε ότι εφάρμοσαν εντελώς λανθασμένες στρατηγικές και ότι είχαν σημαντικές δυσκολίες στο να αντιληφθούν τη διάταξη των κύβων στο χώρο. Οι κύριες στρατηγικές που χρησιμοποίησαν οι μαθητές ήταν τέσσερις: (α) Μέτρησαν τα τετράγωνα

της πρόσοψης και πολλαπλασίασαν επί τον αριθμό των τετραγώνων που φαίνονται στην πλαϊνή όψη. Το αποτέλεσμα αυτής της στρατηγικής ήταν 32 κύβοι Συγκεκριμένα, όπως παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 4.16(α), οι μαθητές βρήκαν ότι στην πρόσοψη υπάρχουν οκτώ τετράγωνα και πολλαπλασίασαν επί τέσσερα θεωρώντας ότι υπάρχουν τέσσερα στρώματα των οκτώ κύβων το καθένα. (β) Οι μαθητές που εφάρμοσαν τη δεύτερη στρατηγική μέτρησαν τον αριθμό των τετραγώνων της πρόσοψης (8), θεωρώντας ότι κάθε τετραγωνάκι αντιστοιχεί σε έναν κύβο και αγνόησαν το βάθος του στερεού. (γ) Οι μαθητές που εφάρμοσαν την τρίτη στρατηγική μέτρησαν τον αριθμό των μικρών τετραγώνων που φαίνονταν στην αναπαράσταση του στερεού και κατέληξαν στην απάντηση «12 κύβοι». (δ) Οι μαθητές που εφάρμοσαν την τέταρτη στρατηγική διαχώρισαν το στερεό σε δύο στρώματα (δείτε Διάγραμμα 4.16(β)). Βρήκαν ότι κάθε στρώμα αποτελείται από 6 κύβους (τέσσερις στην πρόσοψη και δύο στην πλάγια όψη) και κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι στο κιβώτιο χωρούσαν 12 κύβοι. Πέρα από αυτές τις τέσσερις στρατηγικές, ένας μαθητής μέτρησε όλα τα μικρά τετράγωνα που παρουσιάζονταν στο σχέδιο και πολλαπλασίασε επί δύο θεωρώντας ότι υπήρχαν δύο στρώματα των 12 κύβων στο καθένα.



(α)



(β)

Διάγραμμα 4.16. Στρατηγικές μαθητών πρώτου επιπέδου στον υπολογισμό του αριθμού των κύβων.

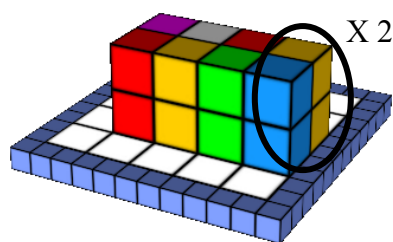
Στο δεύτερο έργο της συνέντευξης οι μαθητές έπρεπε να υπολογίσουν τον αριθμό των κύβων που χρειάζονται, για να μετασχηματιστεί μια τρισδιάστατη κατασκευή σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο συγκεκριμένων διαστάσεων (Έργο 11 στον Πίνακα 3.5). Η αποτυχία των μαθητών στο έργο αυτό ήταν καθολική. Κανένας μαθητής δεν μπόρεσε να βρει κάποιο συστηματικό τρόπο, για να μετρήσει τον αναγκαίο αριθμό κύβων. Η διαδικασία που ακολούθησαν ήταν τυχαία, γιατί προσπάθησαν να μετρήσουν τους κύβους, χωρίς να σημειώσουν από πού είχαν ξεκινήσει.

Οι μαθητές του πρώτου επιπέδου απέτυχαν και στο τρίτο έργο της συνέντευξης στο οποίο καλούνταν να βρουν τον κατάλληλο συνδυασμό κύβων και ράβδων, για να γεμίσει εντελώς ένα ανοικτό κιβώτιο σχήματος ορθογώνιο παραλληλεπίπεδου (Έργο 12 στον Πίνακα 3.5). Κανένας από τους μαθητές του επιπέδου δεν είχε συμπληρώσει το έργο αυτό στο γραπτό τεστ, αλλά ούτε και στη συνέντευξη κατάφεραν να ελέγξουν την καταλληλότητα των διαθέσιμων επιλογών, παρά τις λεπτομερείς επεξηγήσεις και διευκρινήσεις που δόθηκαν.

Μαθητές 2^ο Επιπέδου

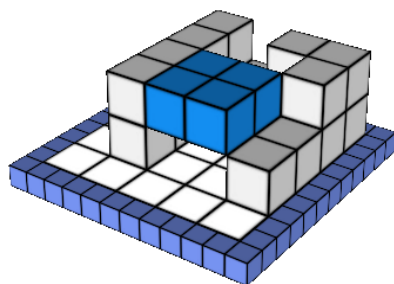
Όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.30, οι μαθητές του δεύτερου επιπέδου δεν είχαν διαφορές από τους μαθητές του πρώτου επιπέδου στις έννοιες του παράγοντα «Διάταξη Αντικειμένων στο Χώρο». Δεν είχαν ικανοποιητική επίδοση στα τρία σχετικά έργα της συνέντευξης. Η μελέτη του τρόπου σκέψης των μαθητών έδειξε ότι ένας πιθανός λόγος της αποτυχίας και αυτών των μαθητών ήταν η χαμηλή ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου και συγκεκριμένα της ικανότητας δόμησης/διάταξης αντικειμένων στο χώρο (spatial structuring).

Στο έργο υπολογισμού του αριθμού των κύβων που χρειάζονται, για να γεμίσει ένα κιβώτιο, οι περισσότεροι μαθητές εφάρμοσαν παρόμοιες στρατηγικές με αυτές των μαθητών του πρώτου επιπέδου. Μια επιπλέον λανθασμένη στρατηγική που χρησιμοποίησαν δύο μαθητές ήταν να διαχωρίσουν τον κύβο σε δέκα αντί οκτώ στήλες των δύο κύβων η καθεμιά. Παρασύρθηκαν από την πλάγια όψη του σχήματος και πρόσθεσαν ακόμη δύο στήλες στο στερεό (δείτε Διάγραμμα 4.17). Για αυτό και το τελικό τους αποτέλεσμα ήταν 20 αντί 16 κύβοι. Παρόμοια λανθασμένη στρατηγική εφάρμοσαν δύο μαθητές που θεώρησαν ότι υπήρχαν δύο στρώματα των οκτώ κύβων και πρόσθεσαν ακόμη τέσσερις κύβους για το πλάι.



Διάγραμμα 4.17. Στρατηγικές μαθητών δεύτερου επιπέδου στον υπολογισμό του αριθμού των κύβων.

Οι μαθητές του δεύτερου επιπέδου απέτυχαν και στο έργο εύρεσης του αριθμού των κύβων που χρειάζονταν, για να μετασχηματιστεί μια τρισδιάστατη κατασκευή σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο συγκεκριμένων διαστάσεων. Η αποτυχία των μαθητών οφειλόταν στο μη συστηματικό τρόπο μέτρησης των κύβων. Δεν διαχώρισαν το στερεό σε στρώματα, για να μπορέσουν να υπολογίσουν τους κύβους που χρειάζονταν, για να συμπληρωθεί κάθε στρώμα. Το συχνότερο λάθος ήταν η παράλειψη υπολογισμού των τεσσάρων κύβων του δεύτερου στρώματος των οποίων απουσίαζε η βάση (κύβοι με μπλε χρώμα στο Διάγραμμα 4.18) και έτσι βρήκαν ότι χρειάζονταν εννέα κύβοι, για να συμπληρωθεί το στερεό. Ο υπολογισμός των συγκεκριμένων κύβων ήταν πιο απαιτητική διαδικασία γιατί προϋπόθετε ότι οι μαθητές συμπληρώνουν νοερά το πρώτο στρώμα ώστε να αντιληφθούν ότι χρειάζονται ακόμη τέσσερις κύβοι για το δεύτερο στρώμα. Αντίθετα, για τον υπολογισμό των υπόλοιπων εννέα κύβων ήταν αρκετό να παρατηρήσουν την εικόνα που είχαν μπροστά τους.



Διάγραμμα 4.18. Κύβοι που αγνόησαν οι μαθητές του δεύτερου επιπέδου στη συμπλήρωση της κατασκευής.

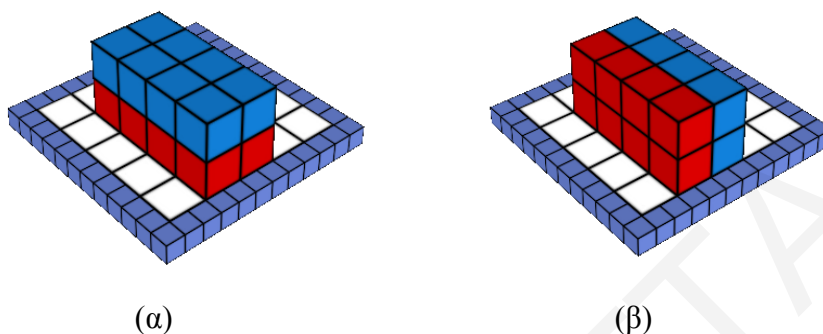
Οι μαθητές του δεύτερου επιπέδου απέτυχαν και στο έργο εύρεσης του κατάλληλου συνδυασμού κύβων και ράβδων, για να γεμίσει εντελώς ένα ανοικτό κιβώτιο σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου. Ο τρόπος που εργάστηκαν, όμως, ήταν διαφορετικός από τον τρόπο που εφάρμοσαν οι μαθητές του πρώτου επιπέδου. Οι μαθητές αυτοί παρά το γεγονός ότι είχαν επιλέξει λάθος απάντηση, είχαν κατανοήσει τα δεδομένα και τις απαιτήσεις του έργου. Η επιλογή τους ήταν λανθασμένη, γιατί εστίασαν την προσοχή τους σε περιορισμένα στοιχεία του έργου και δεν κατάφεραν να οικοδομήσουν τις απαραίτητες νοερές εικόνες. Για παράδειγμα, τέσσερις μαθητές εστίασαν την προσοχή τους στον αριθμό των κύβων που χρειαζόνταν για να συμπληρωθεί μια ράβδος και έτσι επέλεξαν την πρώτη επιλογή (9 ράβδοι και 3 κύβοι) χωρίς να ελέγξουν κατά πόσον οι εννέα ράβδοι μπορούσαν να γεμίσουν το υπόλοιπο κιβώτιο. Τρεις μαθητές επέλεξαν τη δεύτερη επιλογή (2 ράβδοι και 52 κύβοι) με την αιτιολογία ότι ήταν ο μοναδικός συνδυασμός που προνοούσε 2 ράβδους που χρειαζόνταν, για να συμπληρωθεί το τρίτο στρώμα, αγνοώντας τον αριθμό των κύβων.

Μαθητές 3^{ου} Επιπέδου

Οι οκτώ από τους δέκα μαθητές του τρίτου επιπέδου που συμμετείχαν στην κλινική συνέντευξη δεν είχαν ικανοποιητική επίδοση στις έννοιες και διαδικασίες του παράγοντα «Διάταξη Αντικειμένων στο Χώρο». Με βάση το γεγονός αυτό μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι ο παράγοντας αυτός είχε ιδιαίτερες απαιτήσεις και ότι οι μαθητές δυσκολεύτηκαν να ανταποκριθούν σε έργα που απαιτούσαν ικανότητα δόμησης/διάταξης αντικειμένων στο χώρο (spatial structuring). Οι μαθητές του επιπέδου πέτυχαν μόνο στο έργο της συνέντευξης στο οποίο έπρεπε να υπολογίσουν τον αριθμό των κύβων που χρειαζόνταν για να γεμίσει ένα κιβώτιο. Οι αιτιολογήσεις των μαθητών στα άλλα δύο έργα της συνέντευξης κατέδειξαν την αδυναμία των μαθητών να ανταποκριθούν σε έργα μεγαλύτερης γνωστικής δυσκολίας.

Οι μαθητές του επιπέδου που απάντησαν ορθά στο έργο υπολογισμού του αριθμού των κύβων που χρειαζόνταν, για να γεμίσει ένα κιβώτιο χρησιμοποίησαν κυρίως δύο στρατηγικές: (α) Τέσσερις μαθητές εφάρμοσαν την πρώτη στρατηγική διαχωρίζοντας το κιβώτιο σε δύο οριζόντια στρώματα. Υπολόγισαν τον αριθμό των κύβων του πρώτου

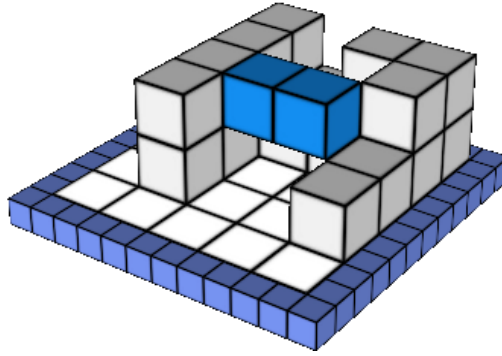
στρώματος και πολλαπλασίασαν επί δύο (Δείτε Διάγραμμα 4.19(α)). (β) Τρεις μαθητές εφάρμοσαν τη δεύτερη στρατηγική διαχωρίζοντας το κιβώτιο σε δύο κατακόρυφες στήλες, όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 4.19(β). Υπολόγισαν τον αριθμό των κύβων που χρειάστηκαν για τη μια στήλη, μετρώντας τον αριθμό των τετραγώνων που υπήρχαν στην πρόσοψη του σχήματος, και στη συνέχεια πολλαπλασίασαν επί δύο.



Διάγραμμα 4.19. Στρατηγικές μαθητών τρίτου επιπέδου στον υπολογισμό του αριθμού των κύβων.

Οι μαθητές του τρίτου επιπέδου απέτυχαν στο έργο υπολογισμού του αριθμού των κύβων που χρειάζονταν, για να μετασχηματιστεί μια τρισδιάστατη κατασκευή σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Οι απαντήσεις τους έδειξαν ότι εργάστηκαν με διαφορετικό τρόπο από τους μαθητές των προηγούμενων επιπέδων. Παρά το γεγονός ότι η αρχική τους απάντηση ήταν λανθασμένη, εντούτοις, στη διάρκεια της συνέντευξης προσπάθησαν να υπολογίσουν ξανά τον αριθμό των κύβων εφαρμόζοντας πιο συστηματικές στρατηγικές. Προσπάθησαν, για παράδειγμα, να υπολογίσουν τον αριθμό των κύβων που χρειάζονταν, για να συμπληρωθεί το πρώτο στρώμα του στερεού (τέσσερις κύβοι) και στη συνέχεια τον αριθμό των κύβων που χρειάζονταν στο δεύτερο στρώμα (εννέα κύβοι). Δύο μόνο μαθητές κατάφεραν στο τέλος να υπολογίσουν το σωστό αριθμό κύβων. Οι υπόλοιποι έξι απέτυχαν γιατί αγνόησαν τους κύβους που φαίνονται με μπλε χρώμα στο Διάγραμμα 4.20.

Υπολόγισαν μόνο τους δύο μπροστινούς κύβους του δεύτερου στρώματος γιατί τους θεώρησαν αναγκαίους, για να συμπληρωθεί η πρόσοψη. Το λάθος αυτό των μαθητών φάνηκε να σχετίζεται με τη δυσκολία των μαθητών να κατασκευάσουν νοερά την εικόνα του στερεού με συμπληρωμένο το πρώτο στρώμα. Άλλη πιθανή αιτία της αποτυχίας ήταν το γεγονός ότι οι μαθητές δεν τηρούσαν σημειώσεις κατά τη διάρκεια υπολογισμού του αριθμού των κύβων.



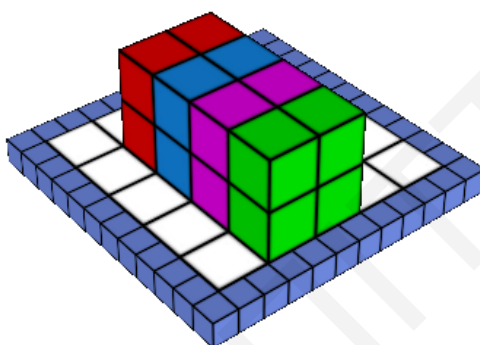
Διάγραμμα 4.20. Κύβι που αγνόησαν οι μαθητές του τρίτου επιπέδου στη συμπλήρωση της κατασκευής.

Πέντε από τους εννέα μαθητές του τρίτου επιπέδου που συμμετείχαν στη συνέντευξη εντόπισαν το σωστό συνδυασμό κύβων και ράβδων, για να γεμίσει το κιβώτιο και στη συνέχεια πρότειναν δικό τους συνδυασμό. Οι μαθητές, όμως, δεν εφάρμοσαν κάποια στρατηγική για να καταλήξουν στη σωστή απάντηση. Ξεκίνησαν να ελέγχουν την καταλληλότητα της κάθε επιλογής ξεχωριστά μέχρι να καταλήξουν στην ορθή. Συγκεκριμένα, παρά το ότι διαπίστωσαν ότι η δεύτερη επιλογή υπεργεμίζει το κιβώτιο, κανένας δεν απέκλεισε αμέσως την τρίτη επιλογή που ήταν προφανές ότι καταλάμβανε μεγαλύτερη χωρητικότητα από τη δεύτερη επιλογή. Η πορεία εργασίας των μαθητών έδειξε, επίσης, ότι οι μαθητές, για να ελέγξουν την καταλληλότητα κάθε επιλογής μετέτρεψαν τους κύβους σε ράβδους και αντίστροφα και δεν προσπάθησαν να φανταστούν πώς θα γέμιζε το κιβώτιο με κάθε συνδυασμό.

Μαθητές 4^ο Επιπέδου

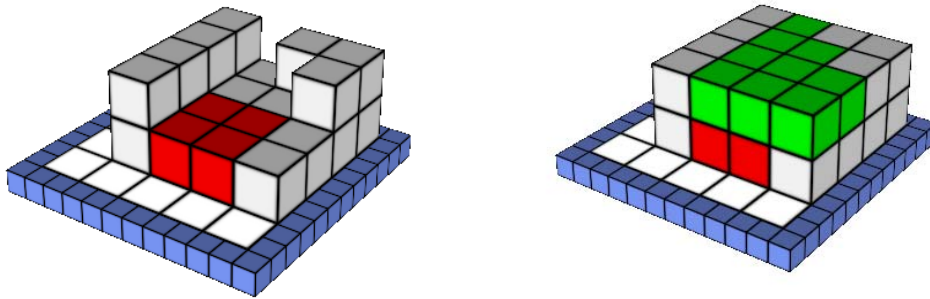
Οι μαθητές του τέταρτου επιπέδου είχαν σημαντικές διαφορές από τους μαθητές των τριών προηγούμενων επιπέδων. Οι απαντήσεις και οι αιτιολογήσεις που έδωσαν στα τρία έργα της συνέντευξης έδειξαν το ψηλό επίπεδο ικανότητάς τους στις έννοιες του παράγοντα «Διάταξη Αντικειμένων στο Χώρο». Οι στρατηγικές που εφάρμοσαν και ο τρόπος που οπτικοποίησαν τα αντικείμενα των έργων έδειξαν ότι είχαν αναπτυγμένη σε ψηλό βαθμό την ικανότητα δόμησης/διάταξης αντικειμένων στο χώρο (spatial structuring).

Οι μαθητές του τέταρτου επιπέδου ανταποκρίθηκαν με επιτυχία στις απαιτήσεις του έργου υπολογισμού του αριθμού των κύβων που χρειάζονταν, για να γεμίσει ένα κιβώτιο. Για την επίλυση του προβλήματος, οι μαθητές χρησιμοποίησαν κυρίως τις στρατηγικές που εφάρμοσαν οι μαθητές του τρίτου επιπέδου ομαδοποιώντας τους κύβους σε δύο στρώματα (οριζόντια ή κατακόρυφα). Τέσσερις μαθητές χρησιμοποίησαν μια παρόμοια στρατηγική, διαχωρίζοντας το κιβώτιο σε τέσσερα κατακόρυφα στρώματα παράλληλα προς την πλάγια όψη του κιβωτίου, αρχίζοντας από τα δεξιά προς τα αριστερά, όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 4.21.

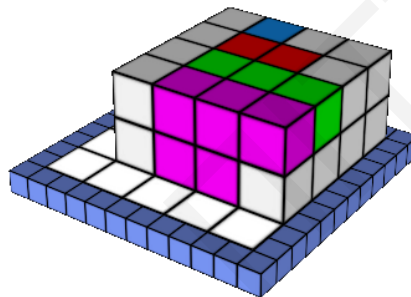


Διάγραμμα 4.21. Στρατηγική μαθητών τετάρτου επιπέδου στον υπολογισμό του αριθμού των κύβων.

Οι μαθητές του επιπέδου υπολόγισαν τον αριθμό των κύβων που χρειάζονταν, για να μετασχηματιστεί μια τρισδιάστατη κατασκευή σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο συγκεκριμένων διαστάσεων. Χρησιμοποίησαν κυρίως δύο στρατηγικές: (α) Σύμφωνα με την πρώτη στρατηγική οι μαθητές υπολόγισαν τον αριθμό των κύβων που χρειάζονταν, για να συμπληρωθεί το πρώτο στρώμα και μετά τον αντίστοιχο αριθμό για το δεύτερο στρώμα, όπως παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 4.22. (β) Οι μαθητές που εφάρμοσαν τη δεύτερη στρατηγική ξεκίνησαν το μέτρημα από πίσω προς τα μπροστά, υπολογίζοντας τον αριθμό των κύβων που χρειάζονταν για να συμπληρωθεί κάθε κατακόρυφο στρώμα του στερεού (δείτε Διάγραμμα 4.23).



Διάγραμμα 4.22. Πρώτη στρατηγική μαθητών τετάρτου επιπέδου για τη συμπλήρωση του στερεού.



Διάγραμμα 4.23. Δεύτερη στρατηγική μαθητών τετάρτου επιπέδου για τη συμπλήρωση του στερεού.

Επιπρόσθετα, οι μαθητές υπολόγισαν πόσοι ακόμη κύβοι έπρεπε να προστεθούν στο στερεό ώστε οι διαστάσεις του να γίνουν $4 \times 4 \times 3$ μονάδες. Αιτιολόγησαν την απάντησή τους αναφέροντας ότι έπρεπε να προστεθούν τέσσερις σειρές των τεσσάρων κύβων η καθεμιά ώστε να μπει ακόμη ένα στρώμα. Στην ερώτηση πώς θα φαντάζονταν αυτούς τους κύβους που έπρεπε να προστεθούν, οι μισοί από αυτούς απάντησαν ότι θα τοποθετούσαν πάνω στο υφιστάμενο στερεό ένα τετράγωνο 4×4 . Οι υπόλοιποι περιέγραψαν με περισσότερη μαθηματική ακρίβεια την προσθήκη, αναφέροντας ότι θα εφαρμόζαν στο υφιστάμενο στερεό ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο διαστάσεων $4 \times 4 \times 1$.

Οι μαθητές του τέταρτου επιπέδου επέλεξαν σε σύντομο χρονικό διάστημα τον κατάλληλο συνδυασμό κύβων και ράβδων, για να γεμίσει εντελώς ένα ανοικτό κιβώτιο σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου. Πρότειναν, επίσης, άλλους δικούς τους συνδυασμούς εξηγώντας σε κάθε περίπτωση τι μέρος του κιβωτίου γέμιζε με τους ράβδους και τι μέρος με τους κύβους. Οι μαθητές χρησιμοποίησαν διαφορετικές στρατηγικές εντοπισμού της σωστής επιλογής. Η πιο συχνή στρατηγική ήταν ο

υπολογισμός του συνδυασμού κύβων και ράβδων που χρειαζόταν, για να γεμίσει το κιβώτιο και στη συνέχεια η σύγκριση με τις επιλογές του έργου για την άμεση απόρριψη κάποιων από αυτών. Για παράδειγμα, αφού υπολόγισαν ότι χρειαζόνταν τρεις κύβοι και δέκα ράβδοι, απέκλεισαν αμέσως την πρώτη επιλογή (3 κύβοι και 9 ράβδοι) και στη συνέχεια την τρίτη (13 κύβοι και 10 ράβδοι) και πέμπτη επιλογή (4 ράβδοι και 37 κύβοι). Οι μαθητές προσπάθησαν να οικοδομήσουν μια νοερή εικόνα για το πώς θα γέμιζε το κιβώτιο με τον κάθε συνδυασμό. Τρεις μαθητές απέκλεισαν αμέσως τις επιλογές στις οποίες ο αριθμός των κύβων δεν ήταν κατά τρία μεγαλύτερος από πολλαπλάσιο του πέντε γιατί ήταν απαραίτητη η ύπαρξη τριών επιπλέον κύβων για τη συμπλήρωση της ράβδου.

*Μέτρηση Επιφάνειας και Αντίληψη Χωρητικότητας Τρισδιάστατων Αντικειμένων
Χωρίς τη Χρήση Τύπων*

Οι ικανότητες των μαθητών των τεσσάρων επιπέδων σκέψης στον παράγοντα «Μέτρηση Επιφάνειας και Αντίληψη Χωρητικότητας Τρισδιάστατων Αντικειμένων Χωρίς τη Χρήση Τύπων» με βάση τα αποτελέσματα των κλινικών συνεντεύξεων παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.30. Στο σχεδιασμό της κλινικής συνέντευξης συμπεριλήφθηκαν μόνο δύο έργα που αναφέρονταν στον υπολογισμό εμβαδού τρισδιάστατων αντικειμένων. Για αυτό, τα αποτελέσματα από τις συνεντεύξεις αναφέρονται μόνο στη μέτρηση επιφάνειας τρισδιάστατων αντικειμένων χωρίς τη χρήση τύπων. Οι μαθητές του πρώτου επιπέδου απέτυχαν σε όλα τα έργα του παράγοντα. Οι μαθητές του δεύτερου επιπέδου υπολόγισαν το εμβαδόν ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου μόνο στην περίπτωση που εργάστηκαν με πραγματικό αντικείμενο και το περίστρεφαν στα χέρια τους. Οι μαθητές του τρίτου επιπέδου υπολόγισαν με συστηματικό τρόπο το εμβαδόν ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου, ενώ οι μαθητές του τέταρτου επιπέδου υπολόγισαν επιπρόσθετα το εμβαδόν ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου και άλλων τρισδιάστατων αντικειμένων κάνοντας τους λιγότερο δυνατούς υπολογισμούς. Πιο κάτω, παρουσιάζονται αναλυτικά οι στρατηγικές, τα λάθη και οι ικανότητες των μαθητών των τεσσάρων επιπέδων.

Πίνακας 4.30

Περιγραφή Ικανοτήτων των Μαθητών των Τεσσάρων Επιπέδων Σκέψης στον Παράγοντα Μέτρηση Επιφάνειας και Αντίληψη Χωρητικότητας Τρισδιάστατων Αντικειμένων Χωρίς τη Χρήση Τύπων

1° Επίπεδο	2° Επίπεδο	3° Επίπεδο	4° Επίπεδο
	Υπολογίζουν το εμβαδόν ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου, όταν εργάζονται με το πραγματικό αντικείμενο και το περιστρέφουν στα χέρια τους	Υπολογίζουν με συστηματικό τρόπο το εμβαδόν ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου	Υπολογίζουν με συστηματικό τρόπο το εμβαδόν ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου
			Υπολογίζουν το εμβαδόν ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου πραγματοποιώντας τους λιγότερο δυνατούς υπολογισμούς
			Υπολογίζουν με συστηματικό τρόπο το εμβαδόν τρισδιάστατων κατασκευών

Μαθητές 1^{ου} Επιπέδου

Οι μαθητές του πρώτου επιπέδου απέτυχαν στις έννοιες του παράγοντα «Μέτρηση Επιφάνειας και Αντίληψη Χωρητικότητας Τρισδιάστατων Αντικειμένων Χωρίς τη Χρήση Τύπων» και συγκεκριμένα στον υπολογισμό της επιφάνειας στερεών. Οι μαθητές απέτυχαν στα δύο έργα της συνέντευξης που σχετίζονταν με τις ικανότητες του παράγοντα αυτού. Η αδυναμία οπτικοποίησης και αντίληψης της δομής των στερεών φαίνεται να αποτέλεσε σημαντικό παράγοντα της αποτυχίας των μαθητών.

Ζητήθηκε από τους μαθητές να αιτιολογήσουν την απάντησή τους στο έργο του γραπτού τεστ στο οποίο έπρεπε να υπολογίσουν το εμβαδόν ενός ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου (δείτε έργο (α) στον Πίνακα 3.6). Το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο ήταν κατασκευασμένο από τέσσερις κύβους (το μέγεθος της πλευράς κάθε κύβου ήταν μία μονάδα). Οι τέσσερις από τους δέκα μαθητές του επιπέδου υπολόγισαν μόνο τα οκτώ τετράγωνα που ήταν ορατά στο σχέδιο που είχαν μπροστά τους. Παρά τις διευκρινιστικές

ερωτήσεις, οι μαθητές δεν ήταν σε θέση να αντιληφθούν ότι υπήρχαν και άλλες έδρες που δεν φαίνονταν και έπρεπε να ληφθούν υπόψη στον υπολογισμό. Δύο μαθητές θεώρησαν ότι πέντε έδρες κάθε κύβου συνθέτουν την επιφάνεια του στερεού και για αυτό το εμβαδόν του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου ήταν είκοσι τετραγωνικές μονάδες (4 κύβοι επί 5 έδρες). Οι άλλοι τέσσερις μαθητές προσπάθησαν να υπολογίσουν το εμβαδόν του στερεού. Δεν ακολούθησαν, όμως, συστηματικό τρόπο και έτσι κατέληξαν σε λανθασμένο αποτέλεσμα. Παρά το γεγονός ότι αντιλήφθηκαν ότι υπήρχαν και άλλες έδρες που δεν ήταν ορατές στο σχέδιο του στερεού, ξεχνούσαν στη διάρκεια του μετρήματος ποια τετράγωνα καταμέτρησαν.

Το σύνολο των μαθητών του επιπέδου απέτυχε στο έργο υπολογισμού του εμβαδού μιας τρισδιάστατης κατασκευής από κύβους που παρουσιάστηκε μπροστά τους (δείτε έργο (β) στον Πίνακα 3.6). Το ίδιο συνέβηκε και όταν οι μαθητές πήραν το στερεό στα χέρια τους και είχαν τη δυνατότητα να το περιστρέψουν. Περιέστρεφαν το στερεό, αλλά δεν θυμούνταν τις μετρήσεις. Δεν μετρούσαν με συστηματικό τρόπο και έτσι κάθε τους μέτρηση έδινε διαφορετικό αποτέλεσμα.

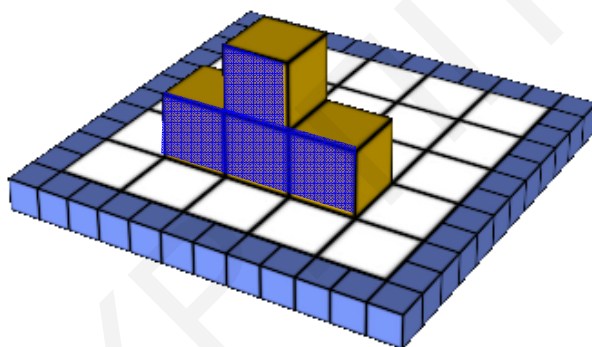
Μαθητές 2^ο Επιπέδου

Οι μαθητές του δεύτερου επιπέδου είχαν σημαντικές δυσκολίες στις έννοιες και διαδικασίες του παράγοντα «Μέτρηση Επιφάνειας και Αντίληψη Χωρητικότητας Τρισδιάστατων Αντικειμένων Χωρίς τη Χρήση Τύπων» και συγκεκριμένα στον υπολογισμό της επιφάνειας στερεών. Οι μαθητές υπολόγισαν το εμβαδόν του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου όταν εργάστηκαν με πραγματικό στερεό. Απέτυχαν νοερά να οπτικοποιήσουν τις έδρες του στερεού που δεν φαίνονταν.

Οι οκτώ από τους δέκα μαθητές του επιπέδου είχαν αποτύχει να βρουν τη σωστή απάντηση στο έργο υπολογισμού του εμβαδού ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου στο γραπτό τεστ. Όταν ζητήθηκε να επεξηγήσουν πώς έφτασαν στην απάντηση που έδωσαν, παρατηρήθηκε ότι στον υπολογισμό του εμβαδού του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου δεν έλαβαν υπόψη το εμβαδόν της έδρας που βρίσκεται απέναντι από την πρόσοψη του στερεού, όπως αυτό παρουσιάζεται στο χαρτί. Αντίθετα, αντιλήφθηκαν ότι υπήρχε έδρα απέναντι από την πλάγια πλευρά του στερεού. Στη συνέχεια, δόθηκε στους μαθητές το ίδιο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο κατασκευασμένο από πραγματικούς κύβους, για να

υπολογίσουν το εμβαδόν του. Οι μαθητές υπολόγισαν ορθά το εμβαδόν του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου που είχαν στα χέρια τους χωρίς να εφαρμόσουν κάποιο συστηματικό τρόπο. Επομένως, κανένας μαθητής δεν αντιλήφθηκε πώς θα μπορούσε κάποιος να υπολογίσει το εμβαδόν κάνοντας τους λιγότερο δυνατούς υπολογισμούς.

Οι μαθητές του δεύτερου επιπέδου είχαν παρόμοια συμπεριφορά με τους μαθητές του πρώτου επιπέδου στον υπολογισμό του εμβαδού της τρισδιάστατης κατασκευής από κύβους. Απέτυχαν να υπολογίσουν το εμβαδόν της κατασκευής που είχαν μπροστά τους και όταν τους επιτράπηκε να την πάρουν στα χέρια τους, υπολόγισαν μόνο το εμβαδόν των τριών μεγάλων επιφανειών (παρουσιάζονται με μπλε χρώμα στο Διάγραμμα 4.24). Οι μαθητές αντιλήφθηκαν ότι ο υπολογισμός τους ήταν προβληματικός, αλλά δεν κατάφεραν να υπολογίσουν το εμβαδόν της πλαϊνής επιφάνειας (με καφέ χρώμα στο Διάγραμμα 4.24).



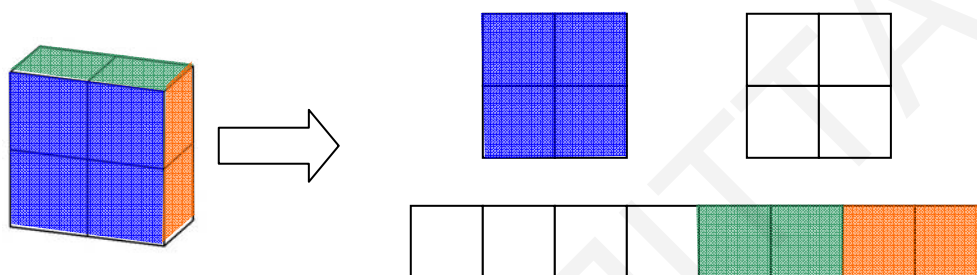
Διάγραμμα 4.24. Στρατηγική μαθητών δευτέρου επιπέδου στον υπολογισμό του εμβαδού του στερεού.

Μαθητές 3^{ου} Επιπέδου

Οι μαθητές του τρίτου επιπέδου υπολόγισαν με επιτυχία το εμβαδόν του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου και απέτυχαν στον υπολογισμό του εμβαδού της τρισδιάστατης κατασκευής (δείτε έργο (β) στον Πίνακα 3.6). Αν και οι μαθητές εργάστηκαν με την πραγματική κατασκευή, απέτυχαν να οπτικοποιήσουν το στερεό και να αντιληφθούν όλες τις έδρες του.

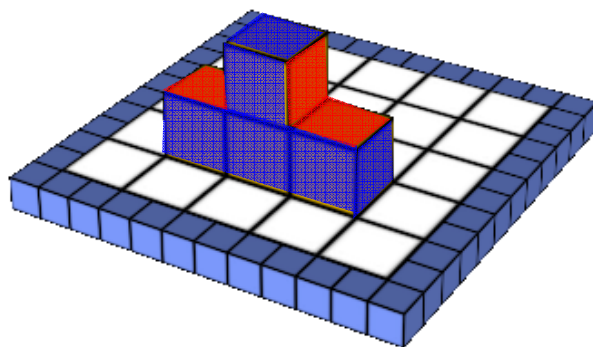
Οι επτά από τους δέκα μαθητές του επιπέδου είχαν αποτύχει να βρουν τη σωστή απάντηση στο έργο υπολογισμού του εμβαδού ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου στο γραπτό

τεστ. Στη διάρκεια της συνέντευξης προσπάθησαν να υπολογίσουν ξανά το εμβαδόν του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου. Οι τρεις από αυτούς πέτυχαν στο νέο υπολογισμό χωρίς να εφαρμόσουν κάποια στρατηγική. Οι υπόλοιποι τέσσερις μαθητές βρήκαν τη σωστή απάντηση αφού διαχώρισαν το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο σε τρία τμήματα (δείτε Διάγραμμα 4.25). Το πρώτο τμήμα ήταν η πρόσοψη, το δεύτερο τμήμα η πίσω έδρα και το τρίτο τμήμα οι πλαϊνές έδρες. Με το διαχωρισμό αυτό κατάφεραν σε σύντομο χρονικό διάστημα να βρουν τη σωστή απάντηση και να περιγράψουν πώς θα άνοιγε το στερεό, για να διαχωριστεί στα τρία τμήματα που χρησιμοποίησαν.



Διάγραμμα 4.25. Διαχωρισμός επιφάνειας ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου σε τρία τμήματα.

Οι μαθητές του τρίτου επιπέδου αντιμετώπισαν περισσότερες δυσκολίες στον υπολογισμό του εμβαδού της τρισδιάστατης κατασκευής από κύβους. Απέτυχαν να υπολογίσουν το εμβαδόν της κατασκευής που είχαν μπροστά τους ακόμη και όταν εργάστηκαν με το πραγματικό υλικό. Δεν κατάφεραν να οπτικοποιήσουν τη δομή της κατασκευής και έλαβαν υπόψη στον υπολογισμό τους μόνο την μπροστινή έδρα, την αντίστοιχή της στην πίσω πλευρά, την έδρα στην κορυφή του στερεού, τη βάση και τις δύο πλαϊνές (με μπλε χρώμα στο Διάγραμμα 4.26). Δεν αντιλήφθηκαν ότι οι έδρες που σχημάτιζαν το σταυρό στο πάνω μέρος της κατασκευής καταλάμβαναν επιφάνεια (με κόκκινο χρώμα στο Διάγραμμα 4.26). Δύο μαθητές προσπάθησαν αποτυχημένα να χρησιμοποιήσουν τον τύπο υπολογισμού του εμβαδού ορθογώνιου.

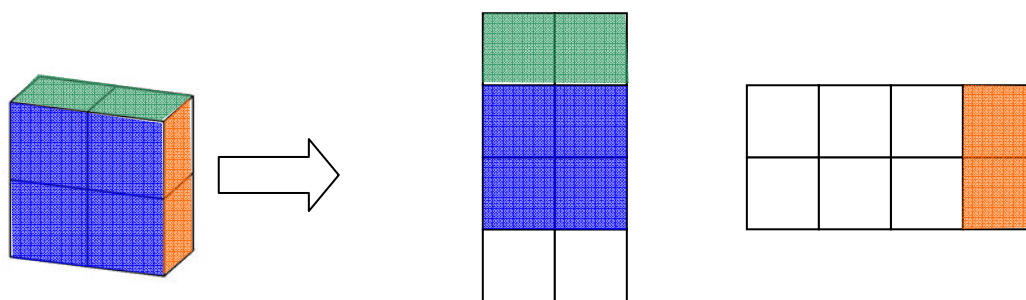


Διάγραμμα 4.26. Στρατηγική μαθητών τρίτου επιπέδου στον υπολογισμό του εμβαδού τρισδιάστατης κατασκευής.

Μαθητές 4^ο Επιπέδου

Οι μαθητές του τέταρτου επιπέδου ανταποκρίθηκαν με άριστο τρόπο στις απαιτήσεις του παράγοντα «Υπολογισμός Επιφάνειας και Εκτίμηση Χωρητικότητας Τρισδιάστατων Αντικειμένων Χωρίς τη Χρήση Τύπων». Υπολόγισαν με συστηματικό τρόπο το εμβαδόν ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου κάνοντας του λιγότερο δυνατούς υπολογισμούς και υπολόγισαν με συστηματικό τρόπο την επιφάνεια της τρισδιάστατης κατασκευής.

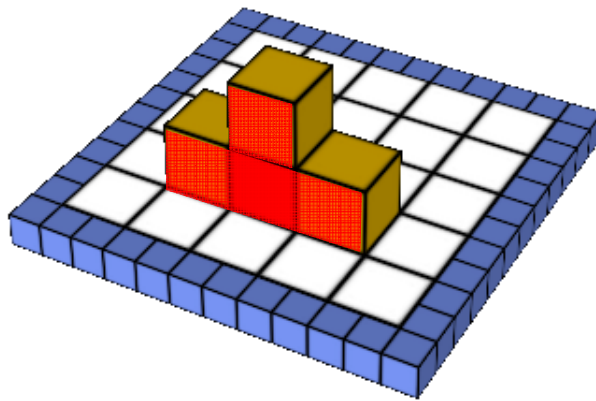
Οι οκτώ από τους δέκα μαθητές του επιπέδου υπολόγισαν σωστά το εμβαδόν του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου. Οι τέσσερις από αυτούς εφάρμοσαν τη στρατηγική των μαθητών του τρίτου επιπέδου διαχωρίζοντας την επιφάνεια του στερεού σε τρία τμήματα. Δύο μαθητές υπολόγισαν ότι χάνονται δύο έδρες από κάθε κύβο και συνεπώς αφού το στερεό αποτελείτο από τέσσερις κύβους, η συνολική επιφάνεια θα ήταν 16 τετραγωνικές μονάδες (4 κύβοι επί 4 έδρες). Δύο μαθητές διαχώρισαν την επιφάνεια του στερεού σε δύο τμήματα για να υπολογίσουν το εμβαδόν της. Το πρώτο τμήμα αποτελείτο από την μπροστινή έδρα, την πάνω έδρα και τη βάση. Το δεύτερο τμήμα αποτελείτο από την πίσω έδρα και τις τέσσερις πλαϊνές (δείτε Διάγραμμα 4.27).



Διάγραμμα 4.27. Διαχωρισμός επιφάνειας ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου σε δύο τμήματα.

Οι μαθητές κατά τη διάρκεια της κλινικής συνέντευξης ρωτήθηκαν κατά πόσον θα μπορούσαν να υπολογίσουν το εμβαδόν του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου εκτελώντας όσο το δυνατόν λιγότερους υπολογισμούς. Τέσσερις μαθητές απάντησαν ότι ήταν αρκετό να υπολογίσουν το εμβαδόν μόνο των τριών εδρών που φαίνονταν και στη συνέχεια να διπλασιάσουν το αποτέλεσμα. Τρεις μαθητές απάντησαν ότι υπήρχαν δύο έδρες με διαστάσεις δύο επί δύο μονάδες και τέσσερις έδρες με διαστάσεις δύο επί μία μονάδες. Επομένως, ήταν αρκετό να υπολογίσουν το εμβαδόν δύο εδρών (2 επί 4 τετραγωνικές μονάδες + 4 επί 2 τετραγωνικές μονάδες).

Οι μαθητές του τέταρτου επιπέδου πέτυχαν και στο έργο υπολογισμού του εμβαδού τρισδιάστατης κατασκευής από κύβους. Υπολόγισαν το εμβαδόν της κατασκευής χωρίς να την πάρουν στα χέρια τους και έκαναν όλους τους υπολογισμούς νοερά. Πέντε μαθητές διαχώρισαν νοερά την επιφάνεια του στερεού σε τρία τμήματα διαφορετικού εμβαδού το καθένα: (α) Το πρώτο τμήμα ήταν η βάση της κατασκευής, (β) το δεύτερο τμήμα ήταν η πρόσοψη της κατασκευής και η αντίστοιχη πίσω έδρα και (γ) το τρίτο τμήμα ήταν οι πλαϊνές έδρες που φαίνονται με κίτρινο χρώμα στο Διάγραμμα 4.28. Τέλος, οι δύο μαθητές που εργάστηκαν στο προηγούμενο έργο υπολογίζοντας τον αριθμό των εδρών κάθε κύβου που χάνονταν, εφάρμοσαν την ίδια στρατηγική. Υπολόγισαν ότι οι τρεις από τους τέσσερις κύβους της κατασκευής χάνουν από μια έδρα και ένας κύβος χάνει τρεις έδρες (3 κύβοι επί 5 έδρες + 1 κύβος επί 3 έδρες).



Διάγραμμα 4.28. Στρατηγική μαθητών τετάρτου επιπέδου στον υπολογισμό του εμβαδού τρισδιάστατης κατασκευής.

Συλλογισμός για Σχέσεις Μεταξύ Στοιχείων και Ιδιοτήτων Στερεών

Οι ικανότητες των μαθητών των τεσσάρων επιπέδων σκέψης στις έννοιες του παράγοντα «Συλλογισμός για Σχέσεις Μεταξύ Στοιχείων και Ιδιοτήτων Στερεών» με βάση τα αποτελέσματα των κλινικών συνεντεύξεων παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.31. Τα περισσότερα έργα της κλινικής συνέντευξης αναφέρονταν στη σύγκριση των στοιχείων και ιδιοτήτων διαφορετικών στερεών, για αυτό και οι ικανότητες που περιγράφονται επικεντρώνονται στις ομοιότητες και διαφορές μεταξύ στερεών. Το βασικό συμπέρασμα ήταν ότι οι μαθητές των πρώτων τριών επιπέδων δεν σύγκριναν τα στερεά με βάση τις ιδιότητές τους, αλλά στηρίστηκαν στην οπτική εικόνα τους και στα στοιχεία τους, όπως τον αριθμό των κορυφών, εδρών και ακμών και το σχήμα των εδρών. Συγκεκριμένα, με βάση τα αποτελέσματα οι μαθητές του πρώτου επιπέδου συγκρίνουν με επιτυχία μόνο τον κύβο και το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και αναγνωρίζουν ως μοναδική τους διαφορά ότι όλες οι έδρες του κύβου είναι τετράγωνα. Οι μαθητές του δεύτερου επιπέδου αναγνωρίζουν ομοιότητες και διαφορές μεταξύ ενός κύβου και ενός ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου και βρίσκουν διαφορές μεταξύ άλλων στερεών με βάση εξωτερικά τους χαρακτηριστικά. Οι μαθητές του τρίτου επιπέδου εντοπίζουν διαφορές μεταξύ στερεών με βάση εξωτερικά τους στοιχεία και περιγράφουν πώς ένα εξαγωνικό πρίσμα μπορεί να μετατραπεί σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Επιπρόσθετα, οι μαθητές του

τέταρτου επιπέδου εντοπίζουν και επεξηγούν διαφορές και ομοιότητες μεταξύ στερεών με βάση εξωτερικά στοιχεία και κάποιες ιδιότητες και επεξηγούν σχέσεις μεταξύ στερεών.

Πίνακας 4.31

Περιγραφή Ικανοτήτων των Μαθητών των Τεσσάρων Επιπέδων Σκέψης στον Παράγοντα Συλλογισμός για Σχέσεις Μεταξύ Στοιχείων και Ιδιοτήτων Στερεών

1 ^ο Επίπεδο	2 ^ο Επίπεδο	3 ^ο Επίπεδο	4 ^ο Επίπεδο
Αναγνωρίζουν ότι ο κύβος διαφέρει από το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο γιατί στον κύβο οι έδρες είναι τετράγωνα	Αναγνωρίζουν ότι ο κύβος διαφέρει από το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο γιατί στον κύβο οι έδρες είναι τετράγωνα	Εντοπίζουν ομοιότητες και διαφορές μεταξύ του κύβου και του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου με αναφορά σε γεωμετρικές ιδιότητες.	Εντοπίζουν ομοιότητες και διαφορές μεταξύ του κύβου και του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου με αναφορά σε γεωμετρικές ιδιότητες. Συγκρίνουν ιδιότητες των στερεών και επεξηγούν ότι ο κύβος είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο
	Αναγνωρίζουν ότι ο κύβος και το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχουν τον ίδιο αριθμό κορυφών και εδρών και ότι έχουν ορθές γωνίες	Αναγνωρίζουν ότι ο κύβος και το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχουν τον ίδιο αριθμό κορυφών και εδρών και ότι έχουν ορθές γωνίες	Αναγνωρίζουν ότι ο κύβος και το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχουν τον ίδιο αριθμό κορυφών, ακμών και εδρών και ότι έχουν ορθές γωνίες
	Αναγνωρίζουν διαφορές μεταξύ στερεών με βάση την εξωτερική τους εικόνα	Αναγνωρίζουν διαφορές μεταξύ στερεών με βάση την εξωτερική εικόνα, τον αριθμό των κορυφών και εδρών και το σχήμα των εδρών	Αναγνωρίζουν διαφορές και ομοιότητες μεταξύ στερεών με βάση τον αριθμό των κορυφών, ακμών και εδρών και το σχήμα των εδρών
		Περιγράφουν πώς ένα εξαγωνικό πρίσμα μπορεί να μετατραπεί σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο	Περιγράφουν πώς ένα εξαγωνικό πρίσμα μπορεί να μετατραπεί σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και επεξηγούν τη μεταξύ τους σχέση

Μαθητές 1^{ου} Επιπέδου

Οι μαθητές του πρώτου επιπέδου σύγκριναν με επιτυχία μόνο το στερεό του κύβου με το στερεό του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου. Για να το κάνουν, όμως, αυτό, οι μαθητές αυτοί ζήτησαν να παρατηρήσουν πραγματικά στερεά. Οι συγκρίσεις τους, όμως, αφορούσαν τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά των πραγματικών αντικειμένων που είχαν μπροστά τους και όχι τις έννοιες του κύβου και του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου.

Η διαφορά που εντόπισαν μεταξύ ενός κύβου και ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου ήταν ότι όλες οι έδρες του κύβου είχαν σχήμα τετράγωνο. Η διαφορά αυτή δεν εκφράστηκε με συγκεκριμένο τρόπο, αλλά ο ερευνητής διέκρινε αυτή τη διαισθητική γνώση σε δηλώσεις όπως «ο κύβος έχει όλα τετράγωνα» και «δεν είναι ίσες οι πλευρές του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου όπως του κύβου». Κανένας μαθητής δεν εντόπισε δύο διαφορές μεταξύ των στερεών. Τέσσερις από τους δέκα μαθητές δήλωσαν ότι δεν ξέρουν άλλη διαφορά και οι υπόλοιποι έξι ανέφεραν ασαφείς ή λανθασμένες διαφορές, όπως «ο κύβος έχει περισσότερες γωνίες και έδρες» και «ο κύβος είναι τετράγωνο ενώ το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο δεν είναι τετράγωνο».

Κανένας μαθητής δεν εντόπισε συγκεκριμένη ομοιότητα μεταξύ του κύβου και του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου. Η πλειοψηφία των ομοιοτήτων που ανέφεραν οι μαθητές ήταν ασαφείς ή αφορούσαν γενικές ιδιότητες όλων των στερεών. Για παράδειγμα, τρεις μαθητές ανέφεραν ότι «και τα δύο έχουν έδρες και ακμές» και άλλοι τρεις μαθητές ανέφεραν ότι «είναι τρισδιάστατα».

Μαθητές 2^{ου} Επιπέδου

Οι μαθητές του δεύτερου επιπέδου έκαναν συγκρίσεις μεταξύ διαφορετικών στερεών όπως κύβο με ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, πυραμίδα με ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και κώνο με κύλινδρο. Οι μαθητές εντόπισαν ομοιότητες και διαφορές στα στοιχεία του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου και του κύβου, ενώ για τα υπόλοιπα στερεά εντόπισαν διαφορές με βάση την εξωτερική οπτική τους εικόνα.

Οι σημαντικότερες διαφορές που εντόπισαν οι μαθητές μεταξύ του κύβου και του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου ήταν ότι όλες οι έδρες του κύβου ήταν τετράγωνα και ίσες μεταξύ τους. Η πρώτη διαφορά εκφράστηκε με δηλώσεις όπως «οι έδρες του κύβου είναι τετράγωνα» και «το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο αποτελείται από ορθογώνια και τετράγωνα ενώ ο κύβος μόνο από τετράγωνα». Οι υπόλοιπες διαφορές που αναγνώρισαν οι μαθητές ήταν λανθασμένες. Χαρακτηριστική ήταν η απάντηση ενός μαθητή που δήλωσε ότι «ο κύβος είναι ένα τετράγωνο που φαίνεται το ύψος του, ενώ στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, το μήκος διαφέρει από το πλάτος». Φάνηκε ότι οι μαθητές δεν είχαν ολοκληρωμένη εικόνα για τη δομή των στερεών και ιδιαίτερα για την τρισδιάστατη φύση τους.

Οι ομοιότητες που εντόπισαν οι μαθητές μεταξύ του κύβου και του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου αναφέρονταν στον αριθμό των κορυφών και εδρών των στερεών. Οι μαθητές υποστήριξαν ότι τα δύο στερεά είχαν τον ίδιο αριθμό κορυφών και εδρών και ότι διέθεταν «ορθές γωνίες», χωρίς να επεξηγήσουν σε ποιες γωνίες αναφέρονταν. Τρεις μαθητές ανέφεραν ως ομοιότητα ότι και τα δύο στερεά είχαν τετράγωνα βάσεις και ότι αν περιστραφούν πάλι θα έχουν βάση.

Οι μαθητές σύγκριναν, επίσης, τον κύλινδρο με τον κώνο. Οι μαθητές εντόπισαν μόνο διαφορές μεταξύ των δύο στερεών. Οι συγκρίσεις δεν σχετίζονταν με ιδιότητες των στερεών, αλλά με την εξωτερική οπτική τους εικόνα. Για παράδειγμα, τέσσερις μαθητές που σύγκριναν τον κύλινδρο και τον κώνο ανέφεραν ότι «η πλάγια όψη του κυλίνδρου είναι όπως αυτή του κύκλου, ενώ του κώνου όπως αυτή του τριγώνου».

Μαθητές 3^{ου} Επιπέδου

Οι μαθητές του τρίτου επιπέδου έκαναν συγκρίσεις μεταξύ διαφορετικών στερεών και εντόπισαν διαφορές μεταξύ τους με βάση την εξωτερική οπτική τους εικόνα και με βάση στοιχεία, όπως τον αριθμό των κορυφών και εδρών και το σχήμα των εδρών τους. Επιπρόσθετα, οι μαθητές του τρίτου επιπέδου περιέγραψαν πώς ένα εξαγωνικό πρίσμα μπορούσε να μετατραπεί σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

Οι δύο διαφορές που εντόπισαν οι μαθητές μεταξύ του κύβου και του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου ήταν ότι (α) οι έδρες του κύβου ήταν τετράγωνα και ίσες μεταξύ τους και (β) οι ακμές του κύβου ήταν ίσες. Οι μαθητές διατύπωσαν τις διαφορές αυτές

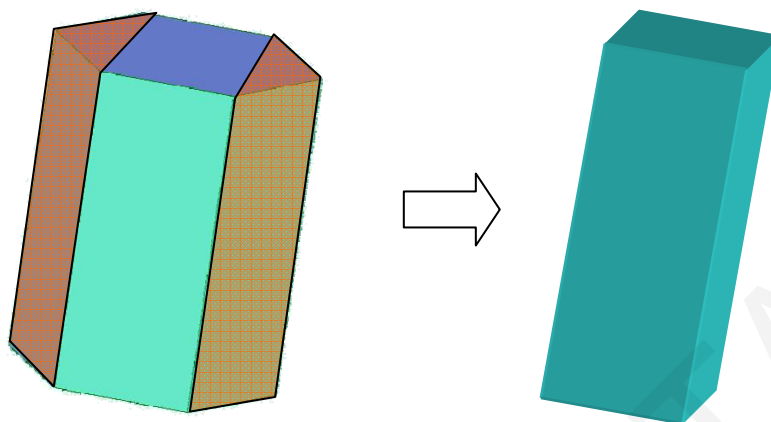
χρησιμοποιώντας σωστές μαθηματικές εκφράσεις και δεν ανέφεραν καμιά διαφορά που δεν ισχύει.

Οι ομοιότητες που εντόπισαν οι μαθητές μεταξύ του κύβου και του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου ήταν ότι τα δύο στερεά είχαν το ίδιο αριθμό κορυφών και εδρών, διέθεταν ορθές γωνίες και ότι και τα δύο στερεά ήταν πρίσματα. Οι μαθητές επεξήγησαν ότι οι ακμές και των δύο στερεών τέμνονταν κάθετα. Κανένας μαθητής του τρίτου επιπέδου δεν ανέφερε λανθασμένη ομοιότητα.

Οι μαθητές του τρίτου επιπέδου σύγκριναν, επίσης, τα πιο κάτω στερεά: (α) πρίσμα με ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, (β) πυραμίδα με ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, (γ) πυραμίδα με πρίσμα και (ε) πυραμίδα με κώνο. Οι μαθητές αυτοί αναγνώρισαν μόνο διαφορές μεταξύ των στερεών. Οι συγκρίσεις των μαθητών αναφέρονταν στην εξωτερική οπτική εικόνα των στερεών, στον αριθμό των κορυφών και εδρών των στερεών και στο σχήμα των εδρών τους. Για παράδειγμα, στη σύγκριση της πυραμίδας με το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο οι μαθητές αναφέρθηκαν στον αριθμό των κορυφών των δύο στερεών (7 στην εξαγωνική πυραμίδα και 8 στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο), στο σχήμα των εδρών τους (τριγωνικές στη συγκεκριμένη πυραμίδα και ορθογώνια στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο) και στο ότι «η πυραμίδα κλείνει πάντα με μια μύτη». Οι μαθητές ανέφεραν παρόμοιες διαφορές και στις συγκρίσεις των υπόλοιπων στερεών που αναφέρθηκαν πιο πάνω.

Όταν ζητήθηκε από τους μαθητές να αιτιολογήσουν την απόφασή τους να χαρακτηρίσουν ως λανθασμένη τη δήλωση ότι «το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο δεν είναι ένα τετραγωνικό πρίσμα», περιέγραψαν πώς θα μετέτρεπαν το εξαγωνικό πρίσμα που είχαν μπροστά τους σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, για να δείξουν ότι το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο είναι πρίσμα. Τρεις μαθητές δήλωσαν ότι θα αφαιρούσαν τις δύο εξαγωνικές βάσεις του πρίσματος και θα τις αντικαθιστούσαν με δύο τετράγωνα. Τέσσερις μαθητές ανέφεραν ότι θα έκοβαν το πρίσμα και θα αφαιρούσαν τα δύο τριγωνικά πρίσματα, όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 4.29. Οι δηλώσεις των μαθητών έδειξαν ότι, παρά το γεγονός ότι είχαν μια διαισθητική αντίληψη για την έννοια του πρίσματος, δεν ήταν σε θέση να περιγράψουν τις ιδιότητες του πρίσματος και ακόμη να διακρίνουν τις κρίσιμες του ιδιότητες. Για αυτό δεν αντιλήφθηκαν ότι η διαδικασία μετατροπής του εξαγωνικού πρίσματος σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο που περιέγραψαν, θα είχε ως αποτέλεσμα ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, οι βάσεις του, όμως, θα ήταν ορθογώνια και όχι τετράγωνα όπως του συγκεκριμένου ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου που είχαν μπροστά τους. Οι μαθητές αντί να αιτιολογήσουν ότι το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο ήταν

ένα τετραγωνικό πρίσμα με αναφορά στις ιδιότητες του πρίσματος, προσπάθησαν να δείξουν ότι το πρίσμα μπορούσε να μετατραπεί σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.



Διάγραμμα 4.29. Μετατροπή εξαγωνικού πρίσματος σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

Μαθητές 4^{ου} Επιπέδου

Οι μαθητές του τέταρτου επιπέδου εντόπισαν διαφορές και ομοιότητες μεταξύ διαφορετικών στερεών με βάση τον αριθμό των κορυφών και εδρών τους και το σχήμα των εδρών τους. Επιπρόσθετα, οι μαθητές περιέγραψαν πώς ένα εξαγωνικό πρίσμα μπορούσε να μετατραπεί σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και επεξήγησαν τη μεταξύ τους σχέση.

Οι μαθητές του τέταρτου επιπέδου, συγκρίνοντας τον κύβο με το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, εντόπισαν τις διαφορές και ομοιότητες που ανέφεραν και οι μαθητές του τρίτου επιπέδου. Επιπρόσθετα, οι μαθητές αυτοί αναφέρθηκαν περαιτέρω σε γεωμετρικές ιδιότητες των στερεών. Για παράδειγμα, δήλωσαν ότι «αν φέρουμε διαγωνίους στον κύβο θα τέμνονται κάθετα, ενώ στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο όχι» και ότι «οι γωνίες που σχηματίζονται και στα δύο στερεά εκεί που ενώνονται οι έδρες είναι ορθές». Κανένας μαθητής δεν ανέφερε λανθασμένη διαφορά ή ομοιότητα και πέντε από αυτούς επεξήγησαν γιατί ο κύβος είναι και ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Οι μαθητές αυτοί έκαναν τις συγκρίσεις που αναφέρθηκαν και στο τρίτο επίπεδο όσον αφορά τον αριθμό

των κορυφών, εδρών και το σχήμα των εδρών. Επιπρόσθετα, όμως, αναφέρθηκαν και στον αριθμό των ακμών των δύο στερεών.

Οι μαθητές του τέταρτου επιπέδου σύγκριναν, επίσης, ζευγάρια στερεών όπως τους μαθητές του τρίτου επιπέδου. Στις συγκρίσεις τους όμως αναφέρθηκαν και στον αριθμό των ακμών. Έδωσαν έμφαση, επίσης, στη σύγκριση του σχήματος των εδρών, εκμεταλλεύόμενοι τις γνώσεις τους για τα δισδιάστατα σχήματα. Αnéφεραν, για παράδειγμα, ότι οι παράπλευρες έδρες των πυραμίδων έχουν σχήμα τρίγωνο ενώ οι παράπλευρες έδρες των πρισμάτων έχουν σχήμα ορθογώνιο.

Οι μαθητές του τέταρτου επιπέδου περιέγραψαν, όπως και οι μαθητές του τρίτου επιπέδου, πώς θα μετέτρεπαν το εξαγωνικό πρίσμα που είχαν μπροστά τους σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, για να δείξουν ότι το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο είναι πρίσμα. Ούτε, όμως, αυτοί αντιλήφθηκαν ότι οι βάσεις του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου που θα σχημάτιζαν θα ήταν ορθογώνια και όχι τετράγωνα όπως του συγκεκριμένου ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου που είχαν μπροστά τους. Οι μαθητές αυτοί πέρα από διαισθητική αντίληψη για την έννοια του πρίσματος, ήταν σε θέση να αποφασίσουν κατά πόσον ένα στερεό ήταν πρίσμα ή όχι. Οι μαθητές εξήγησαν ότι το εξαγωνικό πρίσμα και το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο που είχαν μπροστά τους ήταν και τα δύο πρίσματα και ότι και τα δύο είχαν ως βάση πολύγωνο.

Αναγνώριση Στερεών και των Συστατικών τους Στοιχείων

Στον Πίνακα 4.32 παρουσιάζονται οι ικανότητες των μαθητών στις έννοιες και διαδικασίες του παράγοντα «Αναγνώριση Στερεών και των Συστατικών τους Στοιχείων» με βάση τα αποτελέσματα των κλινικών συνεντεύξεων. Όπως φαίνεται στον πίνακα, οι μαθητές και των τεσσάρων επιπέδων αναγνωρίζουν τα βασικά γεωμετρικά στερεά στο περιβάλλον. Όλοι οι μαθητές, αναγνωρίζουν τον αριθμό των εδρών και κορυφών στον κύβο και στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Επιπρόσθετα, οι μαθητές του δεύτερου, τρίτου και τέταρτου επιπέδου αναγνωρίζουν τον αριθμό των στοιχείων της πυραμίδας, ενώ οι μαθητές του τρίτου και τέταρτου επιπέδου αναγνωρίζουν και τον αριθμό των ακμών στα στερεά. Οι μαθητές του τρίτου και τέταρτου επιπέδου, αναγνωρίζουν ακόμη το σχήμα των εδρών στις πυραμίδες και στα πρίσματα. Τέλος, οι μαθητές των επιπέδων αυτών αναγνωρίζουν και

περιγράφουν τη δομή στερεών που δεν έχουν έδρες πολύγωνα, όπως του κυλίνδρου και του κώνου.

Πίνακας 4.32

Περιγραφή Ικανοτήτων των Μαθητών των Τεσσάρων Επιπέδων Σκέψης στον Παράγοντα Αναγνώριση Στερεών και των Συστατικών τους Στοιχείων

1 ^ο Επίπεδο	2 ^ο Επίπεδο	3 ^ο Επίπεδο	4 ^ο Επίπεδο
Αναγνωρίζουν κύβους, ορθογώνια παραλληλεπίπεδα, κυλίνδρους και σφαίρες στο περιβάλλον	Αναγνωρίζουν κύβους, ορθογώνια παραλληλεπίπεδα, κυλίνδρους και σφαίρες στο περιβάλλον	Αναγνωρίζουν κύβους, ορθογώνια παραλληλεπίπεδα, κυλίνδρους και σφαίρες στο περιβάλλον	Αναγνωρίζουν κύβους, ορθογώνια παραλληλεπίπεδα, κυλίνδρους, πρίσματα και σφαίρες στο περιβάλλον
Αναγνωρίζουν τον αριθμό των εδρών και κορυφών στον κύβο και στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο	Αναγνωρίζουν τον αριθμό των εδρών και κορυφών στον κύβο, στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και στην πυραμίδα	Αναγνωρίζουν τον αριθμό των εδρών, ακμών και κορυφών στον κύβο, στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και στην πυραμίδα	Αναγνωρίζουν τον αριθμό των εδρών, ακμών και κορυφών στον κύβο, στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και στην πυραμίδα
		Αναγνωρίζουν το σχήμα των εδρών πυραμίδων και πρισμάτων	Αναγνωρίζουν το σχήμα των εδρών πυραμίδων και πρισμάτων
		Αντιλαμβάνονται τη δομή του κυλίνδρου	Αντιλαμβάνονται τη δομή του κυλίνδρου και του κώνου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Εισαγωγή

Η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου αποτελεί ένα δυναμικό εργαλείο το οποίο βοηθά τους μαθητές να χειρίζονται όχι μόνο αμιγώς γεωμετρικές καταστάσεις, αλλά να αναπαριστούν και να δίνουν νόημα στο φυσικό κόσμο που τους περιβάλλει (Bishop, 1989: Senechal, 1991). Οι άνθρωποι επεξεργάζονται, για παράδειγμα, πληροφορίες που αναφέρονται στην αντίληψη του χώρου όταν οδηγούν, όταν επεξεργάζονται αντικείμενα ή όταν προσπαθούν να διευθετήσουν τα ψώνια τους στο ψυγείο. Η διαχείριση εννοιών της γεωμετρίας του χώρου αποτελεί ένα συγκεκριμένο πεδίο εφαρμογής των εννοιών του χώρου (Clements, 2007) και περιλαμβάνει ένα ευρύ σύνολο δεξιοτήτων πέρα από την αναγνώριση και το χειρισμό στερεών.

Οργανισμοί όπως το National Council of Teachers of Mathematics (2000) υποστηρίζουν ότι η οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου, η ανάπτυξη και ο χειρισμός νοητικών αναπαραστάσεων που σχετίζονται με δισδιάστατα και τρισδιάστατα αντικείμενα αποτελεί αναπόσπαστο στοιχείο της ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης (NCTM, 2000, NRC, 2001). Για αυτό, ερευνητικές προσπάθειες είχαν ως στόχο να εξετάσουν τη σχέση μεταξύ των ικανοτήτων οπτικοποίησης και της μάθησης στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου καθώς και τις γνώσεις και το συλλογισμό των μαθητών στις έννοιες του χώρου (Guillen, 1996· Gutierrez, 1996· Kwon et al., 2001· Lawrie et al., 2002· Meissner & Pinkernell, 2000· Meissner, 2001· Owens, 1999).

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν η ανάπτυξη ενός ενιαίου θεωρητικού μοντέλου που να περιγράφει την ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών ηλικίας έντεκα με δεκαπέντε ετών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Συγκεκριμένα, οι στόχοι της εργασίας ήταν (α) η εξέταση της δομής της ικανότητας των μαθητών στις έννοιες του χώρου, (β) η διερεύνηση της φύσης της ικανότητας των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου, (γ) η εξέταση της σχέσης μεταξύ της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου και των παραγόντων της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου και (δ) η αναγνώριση και η περιγραφή επιπέδων σκέψης των μαθητών στις έννοιες

της γεωμετρίας του χώρου. Σε αυτό το κεφάλαιο, γίνεται συζήτηση των αποτελεσμάτων με σκοπό να απαντηθούν τα ερωτήματα της εργασίας και στο τέλος περιγράφεται το θεωρητικό μοντέλο που προτείνει η εργασία.

Δομή της Ικανότητας Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου

Τα αποτελέσματα της εργασίας έδειξαν ότι η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου των μαθητών ηλικίας έντεκα με δεκαπέντε ετών αποτελεί μια πολυδιάστατη οντότητα. Το αποτέλεσμα αυτό βρίσκεται σε συμφωνία με τα αποτελέσματα των Lohman (1988), McGee (1979) και Carroll (1993) οι οποίοι υποστηρίζουν ότι η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου είναι μια πολυδιάστατη οντότητα και την ορίζουν βάση άλλων παραγόντων. Με βάση τα αποτελέσματα της εργασίας η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου αποτελεί σύνθεση της επίδοσης των μαθητών στις έννοιες των παραγόντων «Οπτικοποίηση των Εννοιών του Χώρου», «Προσανατολισμός των Εννοιών του Χώρου» και «Σχέσεις των Εννοιών του Χώρου». Οι παράγοντες «Οπτικοποίηση των Εννοιών του Χώρου», «Προσανατολισμός των Εννοιών του Χώρου» και «Σχέσεις των Εννοιών του Χώρου» αποτελούν τρεις διακριτές διαστάσεις της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου και προβλέπουν στον ίδιο βαθμό την ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου. Συγκεκριμένα, η ικανότητα αντίληψης των εννοιών των μαθητών περιλαμβάνει: (α) την ικανότητα αντίληψης φανταστικών κινήσεων στον τρισδιάστατο χώρο και την ικανότητα νοερού χειρισμού αντικειμένων, (β) την ικανότητα χειρισμού αλλαγών στον προσανατολισμό του οπτικού ερεθίσματος και (γ) την ικανότητα νοερής περιστροφής ενός αντικειμένου ως ολότητα στο χώρο με ταχύτητα και ακρίβεια. Παρά το γεγονός ότι οι ικανότητες αυτές ενυπάρχουν σε μαθηματικές και μη καταστάσεις της καθημερινής ζωής των μαθητών, δεν αποτελούν στόχους του σχολικού αναλυτικού προγράμματος και ούτε λαμβάνουν της απαραίτητης προσοχής από τους εκπαιδευτικούς ή τους μαθητές. Για αυτό η σημασία των αποτελεσμάτων της παρούσας εργασίας έγκειται στο γεγονός ότι το μοντέλο αυτό αναλύει, οριοθετεί, περιγράφει και επεξηγεί την αξία συγκεκριμένων ικανοτήτων που συνθέτουν την ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου και δίνει νόημα στον πολύ γενικό όρο «χωρική ικανότητα» που χρησιμοποιείται ευρέως στην εκπαίδευση. Συνεπώς, μπορεί να βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς και τους ερευνητές να αντιληφθούν με συγκεκριμένα παραδείγματα την ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου.

Δομή της Ικανότητας στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου

Με βάση τα αποτελέσματα της εργασίας η ικανότητα των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου αναλύεται σε έξι παράγοντες. Οι παράγοντες αυτοί αναφέρονται στην «Αναγνώριση και Κατασκευή Αναπτυγμάτων», στο «Χειρισμό Διαφορετικών Μορφών Αναπαράστασης Τρισδιάστατων Αντικειμένων», στη «Διάταξη Αντικειμένων στο Χώρο», στην «Αναγνώριση Στερεών και των Συστατικών τους Στοιχείων», στη «Μέτρηση Επιφάνειας και Αντίληψη Χωρητικότητας Τρισδιάστατων Αντικειμένων χωρίς τη Χρήση Τύπων» και στο «Συλλογισμό για Σχέσεις μεταξύ Στοιχείων και Ιδιοτήτων Στερεών». Ο παράγοντας «Αναγνώριση και Κατασκευή Αναπτυγμάτων» αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίζουν κατά πόσον ένα ανάπτυγμα μπορεί όταν διπλωθεί να κατασκευάσει ένα συγκεκριμένο στερεό και στην ικανότητα των μαθητών να κατασκευάζουν το ανάπτυγμα ενός στερεού ή να επιλέγουν τα δισδιάστατα σχήματα που χρειάζεται να ενωθούν, για να το κατασκευάσουν. Ο παράγοντας «Χειρισμός Διαφορετικών Μορφών Αναπαράστασης Τρισδιάστατων Αντικειμένων» αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών να χειρίζονται διαφορετικές μορφές αναπαράστασης των στερεών. Συγκεκριμένα, ο παράγοντας αναφέρεται στην επεξεργασία και μετάφραση μεταξύ διαφορετικών μορφών στερεών όπως ο σχεδιασμός ενός στερεού σε πλάγια προβολή με βάση την ορθογώνια προβολή. Ο παράγοντας αυτός σχετίζεται, επίσης, με την ικανότητα των μαθητών να αντιλαμβάνονται τη δομή των στερεών και ιδιότητές τους ανεξάρτητα από την μορφή στην οποία αναπαρίστανται. Ο παράγοντας «Διάταξη Αντικειμένων στο Χώρο» αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών να χειρίζονται νοερά διατάξεις αντικειμένων στο χώρο, για να κατασκευαστεί μια τρισδιάστατη κατασκευή ή για να γεμίσει ένα στερεό. Όταν οι μαθητές υπολογίζουν, για παράδειγμα, τον αριθμό των κύβων που χρειάζονται, για να γεμίσει ένα κιβώτιο, χρειάζεται να κάνουν νοερές διατάξεις των κύβων ώστε να διαχωρίσουν το κιβώτιο σε στρώματα και να υπολογίσουν το αριθμό των κύβων που χρειάζονται, για να συμπληρωθεί ένα στρώμα. Ο παράγοντας «Αναγνώριση Στερεών και των Συστατικών τους Στοιχείων» αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίζουν στερεά και να αντιλαμβάνονται τα συστατικά τους στοιχεία όπως ο αριθμός των κορυφών, εδρών και ακμών των στερεών. Ο παράγοντας «Μέτρηση Επιφάνειας και Αντίληψη Χωρητικότητας Τρισδιάστατων αντικειμένων Χωρίς τη Χρήση Τύπων» αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών να υπολογίζουν το εμβαδόν της εξωτερικής επιφάνειας των στερεών χωρίς τη χρήση τύπων, αλλά εφαρμόζοντας στρατηγικές διαχωρισμού της επιφάνειας του στερεού σε επιμέρους τμήματα. Ο

παράγοντας αυτός σχετίζεται, επίσης, με την ικανότητα των μαθητών να αντιλαμβάνονται διαισθητικά τη χωρητικότητα στερεών. Τέλος, ο παράγοντας «Συλλογισμός για Σχέσεις μεταξύ Στοιχείων και Ιδιοτήτων Στερεών» αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών να συγκρίνουν τα εξωτερικά στοιχεία των στερεών, όπως ο αριθμός των κορυφών, των εδρών και των ακμών και το σχήμα των εδρών. Ο παράγοντας αυτός αναφέρεται, επίσης, στην ικανότητα σύγκρισης των ιδιοτήτων των στερεών και στην εξαγωγή συμπερασμάτων για τις μεταξύ τους σχέσεις.

Τα αποτελέσματα της εργασίας έδειξαν ότι οι συσχετίσεις μεταξύ των έξι παραγόντων ήταν στατιστικά σημαντικές. Οι ψηλότερες συσχετίσεις ήταν μεταξύ των παραγόντων «Αναγνώριση και Κατασκευή Αναπτυγμάτων» και «Χειρισμός Διαφορετικών Μορφών Αναπαράστασης Τρισδιάστατων Αντικειμένων», των παραγόντων «Αναγνώριση και Κατασκευή Αναπτυγμάτων» και «Διάταξη Αντικειμένων στο Χώρο» και των παραγόντων «Διάταξη Αντικειμένων στο Χώρο» και «Μέτρηση Επιφάνειας και Χωρητικότητας Τρισδιάστατων αντικειμένων Χωρίς τη Χρήση Τύπων». Πιθανή αιτία για τις ψηλές συσχετίσεις μεταξύ των παραγόντων είναι το γεγονός ότι οι παράγοντες αυτοί σχετίζονται σε σημαντικό βαθμό με την ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου των μαθητών. Συγκεκριμένα, η επιτυχία στις έννοιες του παράγοντα «Αναγνώριση και Κατασκευή αναπτυγμάτων» προϋποθέτει ανεπτυγμένη ικανότητα οπτικοποίησης των εννοιών του χώρου γιατί απαιτεί τη νοερή επεξεργασία της διαδικασίας διπλώματος των εδρών του αναπτύγματος. Η επιτυχία στις έννοιες του παράγοντα «Χειρισμός Διαφορετικών Μορφών Αναπαράστασης Τρισδιάστατων Αντικειμένων» προϋποθέτει, επίσης, ψηλό επίπεδο ικανότητας στις έννοιες του παράγοντα «προσανατολισμός στο χώρο» γιατί είναι αναγκαίο το άτομο να αντιλαμβάνεται τις σχέσεις στο στερεό ανεξάρτητα από τη γωνία θέασης. Η ψηλή συσχέτιση μεταξύ των παραγόντων «Αναγνώριση Στερεών και των Συστατικών τους Στοιχείων» και «Συλλογισμός για τις Σχέσεις μεταξύ των Στοιχείων και Ιδιοτήτων των Στερεών» φαίνεται να οφείλεται στο γεγονός ότι η σύγκριση των στοιχείων και ιδιοτήτων των στερεών προϋποθέτει τη γνώση τους.

Τα αποτελέσματα της εργασίας έδειξαν ότι η δομή του μοντέλου της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου είναι σταθερή για τους μαθητές ηλικίας έντεκα με δεκαπέντε ετών. Παρά το γεγονός ότι υπάρχουν διαφορές μεταξύ των μαθητών των ηλικιών αυτών ως προς το επίπεδο ανάπτυξης της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου και του γενικότερου γνωστικού του συστήματος, οι διαστάσεις της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου είναι οι ίδιες για όλους τους μαθητές. Επιπρόσθετα, το

γεγονός ότι το περιεχόμενο της διδασκαλίας και η μέθοδος διδασκαλίας διαφοροποιούνται στο δημοτικό και στο γυμνάσιο, δεν φαίνεται να διαφοροποιεί τη δομή της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Οι διαφορές αυτές ενισχύουν τη σημασία και την εγκυρότητα του προτεινόμενου μοντέλου αφού αποδεικνύουν ότι η ικανότητα των μαθητών των τελευταίων τάξεων του δημοτικού και του γυμνασίου στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου αποτελεί σύνθεση των έξι διακριτών παραγόντων που αναφέρθηκαν πιο πάνω, παρά την ύπαρξη σημαντικών διαφορών σε σημαντικούς παράγοντες που καθορίζουν το επίπεδο των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου.

Σχέση μεταξύ Ικανότητας Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου και Ικανότητας στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου

Παρά το γεγονός ότι πολλοί ερευνητές υποστηρίζουν ότι η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου αποτελεί το γνωστικό εργαλείο το οποίο μπορεί να συμβάλει στη μελέτη της ανάπτυξης της σκέψης των μαθητών στα μαθηματικά και ιδιαίτερα στις γεωμετρικές έννοιες (Clements & Battista, 1992) δεν υπάρχουν συγκεκριμένες ερευνητικές εργασίες που να περιγράφουν τη συγκεκριμένη μεταξύ τους σχέση. Έτσι, σημαντικό ερευνητικό ερώτημα της παρούσας εργασίας ήταν η εξέταση της σχέσης μεταξύ της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου και της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Τα αποτελέσματα της εργασίας έδειξαν ότι η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου αποτελεί ισχυρό παράγοντα πρόβλεψης της ικανότητας των μαθητών στους έξι παράγοντες της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου.

Συγκεκριμένα, τα αποτελέσματα της εργασίας έδειξαν την ύπαρξη αιτιατής σχέσης μεταξύ των δύο ικανοτήτων. Ο συντελεστής παλινδρόμησης της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου στους παράγοντες «μέτρηση επιφάνειας και χωρητικότητα τρισδιάστατων αντικειμένων χωρίς τη χρήση τύπων» και «χειρισμός διαφορετικών μορφών αναπαράστασης τρισδιάστατων σχημάτων» ήταν μεγαλύτερος από .90. Με βάση το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου προβλέπει σε μεγάλο βαθμό την ικανότητα των μαθητών στους δύο αυτούς παράγοντες. Ο συντελεστής παλινδρόμησης της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου ήταν, επίσης, αρκετά μεγάλος στους παράγοντες «δόμηση

αντικειμένων στο χώρο» και «αναγνώριση και κατασκευή αναπτυγμάτων τρισδιάστατων σχημάτων. Τέλος, ο συντελεστής παλινδρόμησης ήταν μικρότερος στους παράγοντες «αναγνώριση στερεών και των συστατικών τους στοιχείων» και «συλλογισμός για σχέσεις μεταξύ στοιχείων και ιδιοτήτων των στερεών».

Με βάση τα αποτελέσματα του δομικού μοντέλου μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου έχει μεγαλύτερη προβλεπτική ικανότητα στους παράγοντες που ενεργοποιούν σε μεγαλύτερο βαθμό ικανότητες και δεξιότητες οπτικοποίησης. Για παράδειγμα, στις έννοιες των παραγόντων «χειρισμός διαφορετικών μορφών αναπαράστασης τρισδιάστατων αντικειμένων» και «μέτρηση επιφάνειας και χωρητικότητας τρισδιάστατων αντικειμένων χωρίς τη χρήση τύπων» είναι απαραίτητη η ικανότητα οπτικοποίησης των εννοιών του χώρου και ο προσανατολισμός των εννοιών του χώρου. Για να μπορούν οι μαθητές να αντιλαμβάνονται τις ιδιότητες των στερεών ανεξάρτητα από τη μορφή αναπαράστασης ή να αντιλαμβάνονται τις έδρες ενός αντικειμένου που δεν είναι ορατές, χρειάζεται να μπορούν νοερά να παρατηρούν ένα τρισδιάστατο αντικείμενο από οποιαδήποτε γωνία θέασης. Αντίθετα, η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου έχει μικρότερη προβλεπτική ικανότητα στους παράγοντες «αναγνώριση στερεών και των συστατικών τους στοιχείων» και «συλλογισμός για σχέσεις μεταξύ στοιχείων και ιδιοτήτων των στερεών» γιατί οι ικανότητες αυτές σχετίζονται και με άλλες παραμέτρους όπως το επίπεδο γνώσης των ιδιοτήτων των δισδιάστατων σχημάτων και η ικανότητα εντοπισμού ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ τρισδιάστατων αντικειμένων.

Επίδοση των Μαθητών στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου και στην Αντίληψη των Εννοιών του Χώρου

Τα αποτελέσματα της εργασίας έδειξαν ότι οι μαθητές αποτυγχάνουν σε έργα που αναφέρονται στους παράγοντες «διάταξη αντικειμένων στο χώρο», «μέτρηση επιφάνειας και χωρητικότητας τρισδιάστατων αντικειμένων» και «συλλογισμός για σχέσεις μεταξύ στοιχείων και ιδιοτήτων στερεών». Η επίδοση των μαθητών ήταν ικανοποιητική στους παράγοντες «αναγνώριση και κατασκευή αναπτυγμάτων τρισδιάστατων σχημάτων» και «χειρισμός διαφορετικών μορφών αναπαράστασης στερεών». Η επίδοσή τους ήταν πολύ καλή μόνο στον παράγοντα «αναγνώριση στερεών και των συστατικών τους στοιχείων».

Η αποτυχία των μαθητών στους τρεις από τους έξι παράγοντες στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου επεξηγείται σε μεγάλο βαθμό από την επίδοση των μαθητών στους παράγοντες της αντίληψης των εννοιών του χώρου. Συγκεκριμένα, το ποσοστό επιτυχίας των μαθητών ήταν μόλις 51% στον παράγοντα «προσανατολισμός στο χώρο» και 62% και 63% στους παράγοντες «οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου» και «σχέσεις των εννοιών του χώρου» αντίστοιχα. Οι έννοιες του παράγοντα «προσανατολισμός στο χώρο» εμπλέκονται σε σημαντικό βαθμό στις διαδικασίες των παραγόντων «διάταξη αντικειμένων στο χώρο», «μέτρηση επιφάνειας και χωρητικότητας τρισδιάστατων αντικειμένων» και «χειρισμός διαφορετικών μορφών αναπαράστασης στερεών» και για αυτό μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η αποτυχία των μαθητών στους παράγοντες αυτούς αποτελεί φυσικό επακόλουθο του χαμηλού ποσοστού επιτυχίας στον παράγοντα «προσανατολισμός στο χώρο».

Τα αποτελέσματα της εργασίας έδειξαν ότι υπάρχουν σημαντικές διαφορές μεταξύ των μαθητών των πέντε τάξεων στους παράγοντες της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου και στους παράγοντες της αντίληψης των εννοιών του χώρου. Οι μαθητές της τρίτης γυμνασίου είχαν ψηλότερη επίδοση από τους μαθητές της πέμπτης δημοτικού και στους έξι παράγοντες των εννοιών της γεωμετρίας του χώρου. Οι μαθητές της δευτέρας γυμνασίου δεν είχαν στατιστικά ψηλότερη επίδοση από τους μαθητές της πέμπτης δημοτικού μόνο στον παράγοντα «αναγνώριση στερεών και των συστατικών τους στοιχείων». Οι μαθητές της δευτέρας και τρίτης γυμνασίου είχαν στατιστικά ψηλότερη επίδοση από τους μαθητές της έκτης δημοτικού μόνο στον παράγοντα «χειρισμός διαφορετικών μορφών αναπαράστασης στερεών». Οι υπόλοιπες διαφορές στην επίδοση των πέντε τάξεων στους έξι παράγοντες των εννοιών του χώρου δεν ήταν στατιστικά σημαντικές.

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης έδειξαν ότι οι μαθητές των πέντε τάξεων έχουν περισσότερες διαφορές στους παράγοντες της αντίληψης των εννοιών του χώρου. Οι μαθητές της πέμπτης δημοτικού είχαν χαμηλότερη επίδοση από τους μαθητές των τεσσάρων άλλων τάξεων που συμμετείχαν στην έρευνα στους παράγοντες «οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου» και «προσανατολισμός στο χώρο». Οι μαθητές της έκτης τάξης είχαν χαμηλότερη επίδοση από τους μαθητές της δευτέρας και τρίτης γυμνασίου στον παράγοντα «οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου». Οι μαθητές της πέμπτης δημοτικού είχαν χαμηλότερη επίδοση από τους μαθητές των τριών τάξεων του γυμνασίου στον παράγοντα «σχέσεις των εννοιών του χώρου». Επιπρόσθετα, οι μαθητές της έκτης δημοτικού είχαν χαμηλότερη επίδοση από τους μαθητές της δευτέρας και τρίτης

γυμνασίου σε αυτόν τον παράγοντα και οι μαθητές της πρώτης γυμνασίου είχαν χαμηλότερη επίδοση από τους μαθητές της τρίτης γυμνασίου. Τα αποτελέσματα αυτά δείχνουν ότι οι μαθητές της πέμπτης τάξης έχουν σημαντικές διαφορές από τους μαθητές όλων των άλλων τάξεων. Το γεγονός αυτό φαίνεται να σχετίζεται με το ότι οι περισσότεροι μαθητές της ηλικίας αυτής βρίσκονται γνωστικά στο στάδιο των συγκεκριμένων λειτουργιών και έτσι αδυνατούν να επεξεργαστούν οπτικοχωρικές πληροφορίες χωρίς την παρουσία συγκεκριμένων οπτικών ερεθισμάτων. Οι μαθητές της έκτης δημοτικού και πρώτης γυμνασίου βρίσκονται στο μεταβατικό στάδιο ανάπτυξης και έτσι έχουν παρόμοια επίδοση. Οι μαθητές της δευτέρας και τρίτης γυμνασίου έχουν κατακτήσει σε σημαντικό βαθμό το στάδιο των αφηρημένων λειτουργιών και συνεπώς έχουν ψηλότερη επίδοση από τους μαθητές των προηγούμενων τάξεων. Πέρα από την Πιαζετινή ερμηνεία του γεγονότος αυτού, αποτελέσματα ερευνών από τον τομέα της γνωστικής ψυχολογίας έχουν δείξει ότι η ανάπτυξη της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου σχετίζεται σε μεγαλύτερο βαθμό με την ηλικιακή ωρίμανση παρά άλλες ικανότητες (Demetriou, Christou, Spanoudis & Platsidou, 2002). Συνεπώς, οι διαφορές υπέρ των μαθητών των μεγαλύτερων τάξεων θα μπορούσαν να επεξηγηθούν ως αποτέλεσμα της ηλικιακής ωρίμανσης. Επιπρόσθετα, ερευνητικά αποτελέσματα υποστηρίζουν ότι η αντίληψη των εννοιών του χώρου αναπτύσσεται κυρίως μέσω των εμπειριών των μαθητών στην καθημερινή ζωή όπου αναγκάζονται να ανταποκριθούν σε χωρικά ερεθίσματα και να επιλύσουν προβλήματα που απαιτούν ενεργοποίηση οπτικών εικόνων και επεξεργασία οπτικοχωρικών πληροφοριών (Hegarty, Richardson, Montello, Lovelace & Subbiah, 2002). Έτσι, διαφαίνεται ότι οι διαφορές μεταξύ των μαθητών των διαφορετικών τάξεων μπορεί να οφείλονται σε λόγους που δεν σχετίζονται με το τυπικό σχολικό περιβάλλον.

Επιπρόσθετα, η σχολική γνώση των μαθητών δεν φαίνεται να σχετίζεται άμεσα με τις διαφορές στην επίδοση των μαθητών των διαφορετικών τάξεων. Σε καμιά τάξη δεν διδάσκεται με συστηματικό τρόπο η ανάπτυξη της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Όσον αφορά τη διδασκαλία εννοιών της γεωμετρίας του χώρου, στην Ε' και Στ' δημοτικού γίνεται μελέτη συγκεκριμένων εννοιών όπως η αναγνώριση και μελέτη στερεών και η κατασκευή αναπτυγμάτων τρισδιάστατων σχημάτων. Αντίθετα, στην Α' και Γ' γυμνασίου δεν περιέχεται καμία έννοια της γεωμετρίας του χώρου στα σχολικά εγχειρίδια. Γίνεται μελέτη των ιδιοτήτων των στερεών με έμφαση στη χρήση των κατάλληλων τύπων για τον υπολογισμό του εμβαδού επιφάνειας και του όγκου των στερεών μόνο στη Β' τάξη του Γυμνασίου. Στο χρονικό διάστημα πραγματοποίησης της έρευνας δεν είχε διδαχτεί ακόμη στους μαθητές η σχετική ενότητα. Συνεπώς, δεν φαίνεται

να επηρεάζει με άμεσο τρόπο η συγκεκριμένη σχολική γνώση. Δεν μπορεί, όμως, να υποστηριχτεί ότι δεν επηρεάζει σε κάποιο βαθμό η γενική μαθηματική ικανότητα των μαθητών. Η υπόθεση αυτή δεν μπορεί να απαντηθεί με βάση τα δεδομένα της παρούσας εργασίας.

Κατηγορίες Μαθητών στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης έδειξαν ότι υπάρχουν τέσσερις κατηγορίες μαθητών με διαφορετικά χαρακτηριστικά ως προς την επίδοσή τους στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Στη συνέχεια περιγράφονται τα χαρακτηριστικά της κάθε κατηγορίας μαθητών με σκοπό να εντοπιστούν οι μεταξύ τους διαφορές.

Η πρώτη κατηγορία μαθητών είχε ικανοποιητική επίδοση στον παράγοντα «αναγνώριση στερεών και των συστατικών τους στοιχείων» και απέτυχε στους άλλους πέντε παράγοντες της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Η αποτυχία των μαθητών της κατηγορίας αυτής φαίνεται ότι σχετίζεται με το χαμηλό επίπεδο των μαθητών στην αντίληψη των εννοιών του χώρου αφού το ποσοστό επιτυχίας τους και στους τρεις παράγοντες της αντίληψης των εννοιών του χώρου ήταν μικρότερο από 50%. Οι μαθητές της δεύτερης κατηγορίας είχαν πολύ καλή επίδοση στις έννοιες του παράγοντα «αναγνώριση στερεών και των συστατικών τους στοιχείων» και ικανοποιητική επίδοση στις έννοιες των παραγόντων «αναγνώριση και κατασκευή αναπτυγμάτων» και «χειρισμός διαφορετικών μορφών αναπαράστασης στερεών». Η διαφοροποίηση στις ικανότητες των μαθητών της δεύτερης από την πρώτη κατηγορία φαίνεται να οφείλεται στο γεγονός ότι το ποσοστό επιτυχίας των μαθητών της δεύτερης κατηγορίας στους παράγοντες «οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου» και «σχέσεις των εννοιών του χώρου» ήταν ικανοποιητικό. Η τρίτη κατηγορία μαθητών είχε σημαντικές διαφορές από τη δεύτερη κατηγορία. Συγκεκριμένα, η τρίτη κατηγορία είχε πολύ καλή επίδοση στους παράγοντες «αναγνώριση στερεών και των συστατικών τους στοιχείων», «αναγνώριση και κατασκευή αναπτυγμάτων» και «χειρισμός διαφορετικών μορφών αναπαράστασης στερεών». Επιπρόσθετα, οι μαθητές της κατηγορίας αυτής είχαν ικανοποιητική επίδοση στον παράγοντα «διάταξη αντικειμένων στο χώρο». Τα χαρακτηριστικά των μαθητών της κατηγορίας αυτής φαίνεται να οφείλονται σε σημαντικό βαθμό στο γεγονός ότι το ποσοστό επιτυχίας τους στους δύο από τους τρεις παράγοντες της ικανότητας αντίληψης

των εννοιών του χώρου ήταν πολύ ψηλό και ικανοποιητικό στον τρίτο παράγοντα. Τέλος, οι μαθητές της τέταρτης κατηγορίας είχαν πολύ καλή επίδοση και στους έξι παράγοντες της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου, ως αποτέλεσμα του πολύ ψηλού ποσοστού επιτυχίας σε όλους τους παράγοντες της αντίληψης των εννοιών του χώρου.

Η πρώτη κατηγορία μαθητών αντιπροσωπεύει κυρίως τους μαθητές της πέμπτης τάξης του δημοτικού σχολείου, αφού οι μισοί σχεδόν μαθητές της πέμπτης τάξης ανήκουν στην κατηγορία αυτή. Η δεύτερη κατηγορία μαθητών αντιπροσωπεύει κυρίως τους μαθητές της έκτης δημοτικού και πρώτης γυμνασίου αφού το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών και των δύο τάξεων ανήκουν στην κατηγορία αυτή. Η τρίτη κατηγορία αντιπροσωπεύει κυρίως τους μαθητές της δευτέρας και τρίτης γυμνασίου, αφού οι μισοί μαθητές της δευτέρας γυμνασίου και το ένα τρίτο των μαθητών της τρίτης τάξης ανήκουν στην κατηγορία αυτή. Η τέταρτη κατηγορία μαθητών αντιπροσωπεύει στο μεγαλύτερο βαθμό τους μαθητές που είχαν πολύ καλή επίδοση και στους τρεις παράγοντες της αντίληψης των εννοιών του χώρου, αφού οι μισοί από αυτούς ανήκουν σε αυτή την κατηγορία.

Με βάση τα αποτελέσματα της εργασίας μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι οι μαθητές της έκτης τάξης του δημοτικού σχολείου έχουν διαφορετική συμπεριφορά από τους μαθητές της πέμπτης τάξης στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου, ενώ οι μαθητές της πρώτης γυμνασίου συμπεριφέρονται με παρόμοιο τρόπο με τους μαθητές της έκτης δημοτικού. Οι μαθητές της δευτέρας γυμνασίου έχουν διαφορετική συμπεριφορά από τους μαθητές της πρώτης γυμνασίου αλλά συμπεριφέρονται με παρόμοιο τρόπο με τους μαθητές της τρίτης γυμνασίου. Συνεπώς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι στο ηλικιακό εύρος των έντεκα με δεκαπέντε ετών υπάρχουν τρία ηλικιακά στάδια ανάπτυξης ως προς την ικανότητα στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Το πρώτο στάδιο περιλαμβάνει τους μαθητές ηλικίας έντεκα ετών, το δεύτερο στάδιο τους μαθητές της ηλικίας δώδεκα και δεκατριών ετών και το τρίτο στάδιο περιλαμβάνει τους μαθητές ηλικίας δεκατεσσάρων και δεκαπέντε ετών. Τα στάδια αυτά αντιστοιχούν με τα στάδια ανάπτυξης της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου των μαθητών όπως περιγράφονται στις θεωρίες γνωστικής ανάπτυξης των μαθητών (Piaget & Inhelder, 1967· Demetriou, Christou, Spanoudis & Platsidou, 2002).

Αναγνώριση Ιεραρχικών Επίπεδων Σκέψης

Με βάση τα χαρακτηριστικά της κάθε κατηγορίας υποκειμένων ελέγχθηκε η εγκυρότητα ενός δομικού μοντέλου με βάση το οποίο υπάρχει μια ιεραρχική σχέση μεταξύ των παραγόντων της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Με βάση τα αποτελέσματα της ανάλυσης, η επίδοση των μαθητών στον παράγοντα «αναγνώριση στερεών και των συστατικών τους στοιχείων» προβλέπει σε μεγάλο βαθμό την επίδοσή τους στους παράγοντες «αναγνώριση και κατασκευή αναπτυγμάτων» και «χειρισμός διαφορετικών μορφών αναπαράστασης στερεών». Στη συνέχεια, η επίδοση στον παράγοντα «χειρισμός διαφορετικών μορφών αναπαράστασης στερεών» προβλέπει σε μεγάλο βαθμό την επίδοσή τους στον παράγοντα «διάταξη αντικειμένων στο χώρο» και η επίδοση στον παράγοντα «διάταξη αντικειμένων στο χώρο» προβλέπει την επίδοση στους παράγοντες «μέτρηση επιφάνειας και χωρητικότητας τρισδιάστατων αντικειμένων» και «συλλογισμός για σχέσεις μεταξύ στοιχείων και ιδιοτήτων στερεών».

Τα αποτελέσματα του μοντέλου αυτού είναι σημαντικά για τουλάχιστον δύο λόγους: (α) Λαμβάνοντας υπόψη την ιεραρχική σχέση μεταξύ των παραγόντων, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι κάθε επίπεδο του μοντέλου αντιπροσωπεύει τα διακριτικά χαρακτηριστικά κάθε κατηγορίας υποκειμένων, μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι οι τέσσερις κατηγορίες μαθητών που προέκυψαν από την ανάλυση των δεδομένων εκφράζουν τέσσερα ιεραρχικά επίπεδα σκέψης στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. (β) Η ιεραρχική δομή του μοντέλου υποδηλώνει ότι οι μαθητές πρέπει πρώτα να μπορούν να αναγνωρίζουν τα στερεά και τα συστατικά τους στοιχεία, στη συνέχεια να αναγνωρίζουν και να κατασκευάζουν αναπτύγματα στερεών και να χειρίζονται διαφορετικές μορφές αναπαράστασης των στερεών. Ακολούθως, οι μαθητές αναπτύσσουν την ικανότητα διάταξης αντικειμένων στο χώρο και στο τέλος τις ικανότητες μέτρησης του εμβαδού και της χωρητικότητας τρισδιάστατων αντικειμένων και την ικανότητα συλλογισμού για σχέσεις μεταξύ των στοιχείων και ιδιοτήτων στερεών. Το μοντέλο αυτό αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο που επεξηγεί την ιεραρχική ανάπτυξη των ικανοτήτων των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου και μπορεί να αξιοποιηθεί από τους εκπαιδευτικούς για το σωστό σχεδιασμό της διδασκαλίας των εννοιών της γεωμετρίας του χώρου.

Συνοπτική Περιγραφή Χαρακτηριστικών των Επιπέδων Σκέψης

Πιο κάτω παρουσιάζονται συνοπτικά τα χαρακτηριστικά των τεσσάρων επιπέδων σκέψης με βάση τα ποσοτικά και ποιοτικά αποτελέσματα της εργασίας. Γίνεται περιγραφή των ικανοτήτων των μαθητών των τεσσάρων επιπέδων σκέψης με αναφορά στους έξι παράγοντες των εννοιών της γεωμετρίας του χώρου, στις στρατηγικές των μαθητών κάθε επιπέδου και στα τυπικά τους λάθη. Τέλος, γίνεται προσπάθεια να επεξηγηθούν οι αδυναμίες και τα λάθη των μαθητών με αναφορά στην ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου.

Χαρακτηριστικά Πρώτου Επιπέδου Σκέψης

Οι μαθητές του πρώτου επιπέδου σκέψης έχουν ικανοποιητική επίδοση μόνο στις έννοιες του παράγοντα «αναγνώριση στερεών και των συστατικών τους στοιχείων».

Συγκεκριμένα, οι μαθητές του επιπέδου αυτού αναγνωρίζουν τα βασικά γεωμετρικά στερεά, όπως τον κύβο, το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, τον κύλινδρο και τη σφαίρα στο περιβάλλον ή όταν είναι σχεδιασμένα στο χαρτί. Οι μαθητές αυτοί αναγνωρίζουν τον αριθμό των κορυφών των στερεών, αλλά έχουν σημαντικές δυσκολίες να αναγνωρίσουν τον αριθμό των εδρών των στερεών και ακόμη περισσότερο τον αριθμό των ακμών.

Οι μαθητές του πρώτου επιπέδου αποτυγχάνουν στους υπόλοιπους παράγοντες της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου που περιγράφηκαν στην παρούσα εργασία. Η αδυναμία των μαθητών αυτών να αντεπεξέλθουν στις απαιτήσεις αυτών των παραγόντων επεξηγείται ικανοποιητικά από το γεγονός ότι η ικανότητά τους αντίληψης των εννοιών του χώρου είναι περιορισμένη. Αποδεικτικό στοιχείο της αδυναμίας των μαθητών να αντιληφθούν τις έννοιες του χώρου είναι ότι απέτυχαν και στους τρεις παράγοντες της αντίληψης των εννοιών του χώρου. Η αδυναμία τους: (α) να οπτικοποιήσουν τις έννοιες του χώρου, (β) να κατασκευάσουν τις απαραίτητες νοερές αναπαραστάσεις για τα αντικείμενα στο χώρο ώστε να μπορούν να τα επεξεργαστούν, (γ) να προσανατολιστούν στο χώρο και να φανταστούν νοερά πώς θα φαίνεται ένα αντικείμενο από άλλη γωνία θέασης και (δ) να χειριστούν σχέσεις των εννοιών του χώρου

όπως να περιστρέψουν νοερά αντικείμενα, αποτελούν ανασταλτικούς παράγοντες για επιτυχία σχεδόν σε οποιαδήποτε έννοια της γεωμετρίας του χώρου.

Οι μαθητές αυτού του επιπέδου δεν μπορούν να αναγνωρίσουν τα αναπτύγματα στερεών όπως ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου και τριγωνικού πρίσματος και να κατασκευάσουν αναπτύγματα. Χαρακτηριστικό λάθος των μαθητών αυτών στην κατασκευή του αναπτύγματος κυλίνδρου είναι ότι επιλέγουν ορθογώνιο με καμπυλωτές γωνίες για παράπλευρη επιφάνεια και σχήμα οβάλ αντί κύκλο για βάσεις. Αιτιολογούν την επιλογή τους αναφέροντας ότι ένα κανονικό ορθογώνιο δεν θα μπορούσε όταν διπλωθεί να κατασκευάσει κύκλο αφού έχει γωνίες. Στην κατασκευή του αναπτύγματος τριγωνικού πρίσματος δεν συμπληρώνουν τον απαραίτητο αριθμό εδρών δείχνοντας ότι δεν γνωρίζουν τα στοιχεία του στερεού.

Οι μαθητές κατασκευάζουν το ανάπτυγμα του κύβου σε σχήμα σταυρού στην περίπτωση που εργάζονται με πραγματικό υλικό και κάνουν τις απαραίτητες διπλώσεις των εδρών την ίδια στιγμή. Οι μαθητές δεν χρησιμοποιούν συγκεκριμένη στρατηγική για την κατασκευή τους, αλλά κάνουν τις απαραίτητες διορθώσεις καθώς εργάζονται με το υλικό. Τα αποτελέσματα των κλινικών συνεντεύξεων έδειξαν ότι οι μαθητές δυσκολεύονται πάρα πολύ να οπτικοποιήσουν τον τρόπο με τον οποίο πρέπει να διπλωθεί ένα ανάπτυγμα, για να κατασκευαστεί ένα στερεό. Τις περισσότερες δυσκολίες τις αντιμετωπίζουν όταν χρειάζεται να επεξεργαστούν νοερά διαδοχικές διπλώσεις μιας έδρας.

Οι μαθητές του πρώτου επιπέδου δεν είναι σε θέση να χειριστούν διαφορετικές μορφές αναπαράστασης των τρισδιάστατων σχημάτων. Για παράδειγμα, δεν μπορούν να επιλέξουν ποιο σχέδιο σε πλάγια προβολή αντιστοιχεί στις τρεις όψεις της ορθογώνιας προβολής ενός αντικειμένου και ούτε να σχεδιάσουν την ορθογώνια προβολή ενός αντικειμένου με βάση την πλάγια του προβολή. Αποτυγχάνουν, επίσης, στην κατασκευή ενός τρισδιάστατου αντικειμένου με κύβους με βάση το σχέδιο των τριών όψεων της ορθογώνιας προβολής. Οι μαθητές δεν συνδυάζουν στην ίδια κατασκευή τις τρεις όψεις, αλλά κατασκευάζουν ένα στερεό για κάθε όψη και τις ενώνουν. Δεν διαθέτουν, επίσης, τους απαραίτητους μηχανισμούς αυτοελέγχου και αυτοδιόρθωσης ώστε να εντοπίσουν τα λάθη τους και να τα διορθώσουν.

Οι μαθητές έχουν δυσκολίες και στην αναγνώριση του αριθμού των εδρών στερεών που είναι σχεδιασμένα σε διαφανή μορφή υπό γωνία. Η συγκεκριμένη μορφή αναπαράστασης αποτελεί εμπόδιο για τους μαθητές να αναγνωρίσουν με ποιο τρόπο ορίζονται οι έδρες στο σχέδιο. Η αδυναμία τους στον προσανατολισμό στο χώρο έχει ως αποτέλεσμα να μην μπορούν να αντιληφθούν νοερά πώς θα φαίνονται τα στερεά από

διαφορετική γωνία θέασης. Χαρακτηριστικό λάθος των μαθητών είναι ότι αναγνωρίζουν στο σχέδιο μόνο τις έδρες που φαίνονται ξεκάθαρα στο σχήμα τους, ενώ δεν μπορούν να αντιληφθούν έδρες που στο εσωτερικό τους ορίζονται και άλλες έδρες ή φαίνονται άλλα ευθύγραμμα τμήματα ως αποτέλεσμα της επικάλυψης των εδρών. Για παράδειγμα, δεν αντιλαμβάνονται στην περίπτωση της τριγωνικής πυραμίδας ότι το μεγάλο εξωτερικό τρίγωνο ορίζει έδρα ή στην περίπτωση του τριγωνικού πρίσματος ότι τα τρίγωνα που σχηματίζονται λόγω της επικάλυψης των εδρών δεν είναι στην πραγματικότητα έδρες. Οι μαθητές αυτοί δεν έχουν «σχηματικές εικόνες» για τα στερεά και για αυτό προσπαθούν να αντιληφθούν τις σχέσεις και τις έννοιες με βάση αυτό που βλέπουν, χωρίς όμως επιτυχία.

Οι μαθητές αυτοί δεν αντιλαμβάνονται και ούτε αποδέχονται τις απαραίτητες συμβάσεις στο σχεδιασμό στερεών στο χαρτί και για αυτό δεν μπορούν να σχεδιάσουν έναν κύβο στο χαρτί. Η αδυναμία τους να ερμηνεύσουν τις συμβάσεις που υπάρχουν στο σχεδιασμό των στερεών έχει ως αποτέλεσμα να μην αναγνωρίζουν στο σχέδιο παράλληλες και κάθετες ακμές και να αδυνατούν να επεξηγήσουν τις απαντήσεις τους.

Οι μαθητές του πρώτου επιπέδου αποτυγχάνουν σε όλα τα έργα που σχετίζονται με την ικανότητα διάταξης αντικειμένων στο χώρο. Οι μαθητές αυτοί δεν μπορούν να υπολογίσουν τον αριθμό των κύβων που χρειάζονται, για να γεμίσει ένα κιβώτιο σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου, αποτυγχάνουν στην εύρεση του κατάλληλου συνδυασμού κύβων και ράβδων ώστε να γεμίσει ένα κιβώτιο και αδυνατούν να υπολογίσουν τον αριθμό των κύβων που πρέπει να προστεθούν σε μια κατασκευή, για να μετασχηματιστεί σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Οι μαθητές αυτοί εφαρμόζουν λανθασμένες στρατηγικές στον υπολογισμό του αριθμού των κύβων που χρειάζονται, για να γεμίσει ένα κιβώτιο. Για παράδειγμα, αντί να διαχωρίσουν το κιβώτιο σε στρώματα, μετρούν τον αριθμό των τετραγώνων της πρόσοψης ή και της πλάγιας όψης θεωρώντας ότι τα τετράγωνα αυτά εκφράζουν τη χωρητικότητα σε κύβους. Η ικανότητα διάταξης αντικειμένων στο χώρο προϋποθέτει την αντίληψη του χώρου. Οι περισσότερες δυσκολίες των μαθητών πηγάζουν από το γεγονός ότι δεν αντιλαμβάνονται στο σχέδιο την τρίτη διάσταση του στερεού με αποτέλεσμα να μην αναγνωρίζουν τα διαφορετικά στρώματα που υπάρχουν στο κιβώτιο και να μην οπτικοποιούν τη διάταξη με την οποία πρέπει να τοποθετηθούν οι κύβοι, για να συμπληρωθεί ένα στρώμα.

Οι μαθητές του πρώτου επιπέδου δεν μπορούν να υπολογίσουν το εμβαδόν της επιφάνειας και να αντιληφθούν τη χωρητικότητα τρισδιάστατων αντικειμένων χωρίς τη χρήση τύπων. Για παράδειγμα, οι μαθητές αυτοί αποτυγχάνουν (α) στον υπολογισμό της επιφάνειας και της χωρητικότητας ορθογώνιων παραλληλεπίπεδων που παρουσιάζονται

υπό μορφή ανοικτού αναπτύγματος, (β) στον υπολογισμό του εμβαδού τρισδιάστατου αντικειμένου που είναι κατασκευασμένο από κύβους, και (γ) στη σύγκριση της χωρητικότητας ντεποζιτών διαφορετικού σχήματος. Τα ποσοστά αποτυχίας των μαθητών σε αυτά τα έργα υπερβαίνουν το 67% και φτάνουν σε μερικά το 97%. Τα ποσοστά αυτά καταδεικνύουν την αδυναμία των μαθητών να οπτικοποιήσουν τη δομή και τις έδρες των στερεών ακόμη και στην περίπτωση που εργάζονται με πραγματικά αντικείμενα.. Συγκεκριμένα, οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται ότι στον υπολογισμό του εμβαδού ενός ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου πρέπει να λάβουν υπόψη τους και έδρες που δεν είναι ορατές στο σχέδιο αλλά υπάρχουν. Οι μαθητές αντιμετωπίζουν περισσότερες δυσκολίες στον υπολογισμό της επιφάνειας παρά της χωρητικότητας γιατί στη χωρητικότητα οι μαθητές καθοδηγούνται εν μέρει από τη διαισθητική τους αντίληψη.

Οι μαθητές του πρώτου επιπέδου αποτυγχάνουν στις έννοιες του παράγοντα «συλλογισμός για σχέσεις μεταξύ στοιχείων και ιδιοτήτων στερεών». Οι μαθητές αυτοί δεν μπορούν να εντοπίσουν, να διατυπώσουν και να εφαρμόσουν σχέσεις μεταξύ των στοιχείων των στερεών. Επιπρόσθετα, δεν μπορούν να αποφασίσουν κατά πόσον δηλώσεις που αναφέρονται σε συγκρίσεις ιδιοτήτων των στερεών είναι ορθές ή λανθασμένες. Οι μαθητές αναγνωρίζουν μόνο ότι ο κύβος διαφέρει από το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο γιατί στον κύβο οι έδρες είναι τετράγωνα, στην περίπτωση που παρατηρούν πραγματικά στερεά. Οι μαθητές φαίνεται να μην έχουν τις απαραίτητες γνωστικές και γνωσιολογικές δομές για να συγκρίνουν τις ιδιότητες και τα στοιχεία των στερεών ως έννοιες και όχι ως εικόνες.

Χαρακτηριστικά Δεύτερου Επιπέδου Σκέψης

Οι μαθητές του δεύτερου επιπέδου σκέψης έχουν πολύ καλή επίδοση στις έννοιες του παράγοντα «αναγνώριση στερεών και των συστατικών τους στοιχείων» και ικανοποιητική επίδοση στις έννοιες των παραγόντων «αναγνώριση και κατασκευή αναπτυγμάτων τρισδιάστατων αντικειμένων» και «χειρισμός διαφορετικών μορφών αναπαράστασης στερεών». Η ικανοποιητική επίδοση των μαθητών του δεύτερου επιπέδου στους παράγοντες «αναγνώριση και κατασκευή αναπτυγμάτων τρισδιάστατων αντικειμένων» και «χειρισμός διαφορετικών μορφών αναπαράστασης στερεών» φαίνεται να σχετίζεται με το γεγονός ότι οι μαθητές αυτοί έχουν ικανοποιητική επίδοση στους παράγοντες «οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου» και «προσανατολισμός στο χώρο».

Οι μαθητές αναγνωρίζουν τα βασικά γεωμετρικά στερεά στο περιβάλλον ή σχεδιασμένα στο χαρτί, όχι όμως το πρίσμα. Αναγνωρίζουν τον αριθμό των κορυφών και εδρών στα στερεά, κάνουν όμως λάθη στον υπολογισμό του αριθμού των ακμών. Τα λάθη στον υπολογισμό των ακμών είναι αποτέλεσμα του ότι δεν χρησιμοποιούν κάποια στρατηγική αλλά προσπαθούν να μετρήσουν τις ακμές μία προς μία και έτσι παραβλέπουν κάποιες που δεν φαίνονται στο σχέδιο.

Οι μαθητές του δεύτερου επιπέδου αναγνωρίζουν τα αναπτύγματα στερεών όπως του κύβου και του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου. Αναγνωρίζουν, επίσης, μερικά αναπτύγματα πυραμίδας και δυσκολεύονται στην αναγνώριση αυτών που απαιτούν πιο πολύπλοκο τρόπο δίπλωσης ή επιλέγουν λανθασμένα αναπτύγματα. Αποτυγχάνουν, επίσης, στην κατασκευή αναπτυγμάτων όπως στην περίπτωση του κυλίνδρου και του τριγωνικού πρίσματος. Σημαντικό ποσοστό των μαθητών επιλέγει ορθογώνιο με καμπυλωτές γωνίες για παράπλευρη επιφάνεια και σχήμα οβάλ αντί κύκλο για βάσεις και δεν συμπληρώνει τον απαραίτητο αριθμό εδρών στο τριγωνικό πρίσμα υποστηρίζοντας, όπως και οι μαθητές του πρώτου επιπέδου, ότι ένα κανονικό ορθογώνιο δεν θα μπορούσε, όταν διπλωθεί να κατασκευάσει κύκλο αφού έχει γωνίες.

Οι μαθητές αυτοί μπορούν να συναρμολογήσουν με τη βοήθεια κατάλληλου υλικού το ανάπτυγμα του κύβου και ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου, σε σχήμα σταυρού, και ακολούθως να το διπλώσουν. Δεν μπορούν, όμως, να περιγράψουν από την αρχή μέχρι το τέλος τον τρόπο με τον οποίο πρέπει να διπλωθούν τα αναπτύγματα, για να κατασκευαστούν τα στερεά. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μην μπορούν να επεξεργαστούν ή να τροποποιήσουν σε άλλη μορφή τα αναπτύγματα που κατασκευάζουν. Οι μαθητές οπτικοποιούν μόνο τη διαδικασία διπλώματος δύο ή τριών εδρών και δεν ξέρουν πώς θα προχωρήσουν όταν η γωνία δίπλωσης μιας έδρας είναι μεγαλύτερη από ενενήντα μοίρες, για να κλείσει το ανάπτυγμα.

Οι μαθητές του δεύτερου επιπέδου αναγνωρίζουν στοιχεία των στερεών ή ιδιότητες ανεξάρτητα από τη μορφή αναπαράστασης των στερεών, αλλά αποτυγχάνουν στη μετάφραση από μια μορφή αναπαράστασης σε άλλη. Για παράδειγμα, αναγνωρίζουν στο σχέδιο ενός κύβου ποιες ακμές είναι παράλληλες και τις ακμές οι οποίες τέμνονται κάθετα και βρίσκονται στην πρόσοψη του κύβου. Αντίθετα, έχουν σημαντικές δυσκολίες να αναγνωρίσουν ότι υπάρχουν ακμές, που ενώ στο χαρτί δεν σχηματίζουν ορθές γωνίες λόγω της φύσης της πλάγιας προβολής σχεδιασμού, αναπαριστούν κάθετες ακμές. Θεωρούν ότι υπάρχει πρόβλημα στο σχέδιο.

Αποτυγχάνουν στην κατασκευή ενός τρισδιάστατου αντικειμένου με κύβους με βάση το σχέδιο των τριών όψεων της ορθογώνιας προβολής παρά το γεγονός ότι αντιλαμβάνονται ότι οι τρεις όψεις αποτελούν αναπαραστάσεις του ίδιου αντικειμένου. Συνδυάζουν, μόνο τις δύο από τις τρεις όψεις στην κατασκευή τους. Η συμπεριφορά αυτή πολύ πιθανόν να οφείλεται στο γεγονός ότι δεν διαθέτουν τις απαραίτητες δεξιότητες «προσανατολισμού στο χώρο», έτσι δεν μπορούν να περιγράψουν πώς θα φαίνεται η κατασκευή τους από άλλη γωνία θέασης και συνεπώς αδυνατούν να φανταστούν ότι η εικόνα της πρόσοψης και της πλάγιας όψης της κατασκευής τους θα φαίνεται εντελώς διαφορετικά αν παρατηρήσει κάποιος την κατασκευή από πάνω. Για αυτό δεν μπορούν να συνδυάσουν τις τρεις διαφορετικές όψεις στην ίδια κατασκευή. Οι μαθητές αυτοί αντιλαμβάνονται ότι η κατασκευή τους είναι λανθασμένη, αλλά δεν μπορούν να τη διορθώσουν γιατί δεν ελέγχουν την ορθότητά της σταδιακά.

Η διαισθητική αντίληψη των μαθητών για τα στοιχεία στερεών που γνωρίζουν αρκετά καλά, όπως της πυραμίδας, τους βοηθά να αναγνωρίζουν τον αριθμό των εδρών τους ανεξάρτητα από τη μορφή αναπαράστασης, ενώ στα στερεά για τα οποία οι γνώσεις τους είναι περιορισμένες, όπως στην περίπτωση του πρίσματος, οι μαθητές αποτυγχάνουν να αναγνωρίσουν τον αριθμό των εδρών λόγω των δυσκολιών του σχήματος. Για αυτό οι απαντήσεις τους στην αναγνώριση του αριθμού των τριγωνικών εδρών μιας τριγωνικής πυραμίδας ήταν ότι βλέπουν τρεις έδρες και μια από έδρα από κάτω. Η διαισθητική τους αντίληψη για την πυραμίδα είναι ισχυρή και έτσι απαντούν με ισχυρό βαθμό αυτοπεποίθησης, παρά το γεγονός ότι δεν αντιλαμβάνονται ότι το μεγάλο εξωτερικό τρίγωνο ορίζει την τέταρτη έδρα. Στην περίπτωση του πρίσματος, για το οποίο η διαισθητική τους αντίληψη και οι γνώσεις τους είναι περιορισμένες, δεν αντιλαμβάνονται ποια τμήματα σχηματίζονται λόγω της επικάλυψης των εδρών.

Οι μαθητές του δεύτερου επιπέδου σχεδιάζουν στο χαρτί κύβο εφαρμόζοντας μια διαδικασία χωρίς εννοιολογική κατανόηση. Οι μαθητές σχεδιάζουν δύο τετράγωνα ώστε το ένα να βρίσκεται πιο πάνω και δεξιά από το άλλο και στη συνέχεια ενώνουν τις αντίστοιχες κορυφές. Δεν μπορούν, όμως, να αναγνωρίσουν ποιες ακμές φαίνονται λόγω της διαφανούς μορφής του σχεδίου τους και ούτε στη συνέχεια να σχεδιάσουν κύβο σε συμπαγή μορφή.

Οι μαθητές του δεύτερου επιπέδου αποτυγχάνουν, επίσης, σε όλα τα έργα που σχετίζονται με την ικανότητα διάταξης αντικειμένων στο χώρο. Οι μαθητές αποτυγχάνουν στον υπολογισμό του αριθμού των κύβων που χρειάζονται, για να γεμίσει ένα κιβώτιο σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου, στην εύρεση του κατάλληλου συνδυασμού

κύβων και ράβδων ώστε να γεμίσει ένα κιβώτιο και στον υπολογισμό του αναγκαίου αριθμού κύβων που πρέπει να προστεθούν σε μια κατασκευή, για να μετασχηματιστεί σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Οι μαθητές αυτοί εφαρμόζουν τις ίδιες λανθασμένες στρατηγικές με τους μαθητές του πρώτου επιπέδου στον υπολογισμό του αριθμού των κύβων που χρειάζονται, για να γεμίσει ένα κιβώτιο. Το κύριο χαρακτηριστικό των στρατηγικών που εφαρμόζουν οι μαθητές είναι ότι δεν αντιλαμβάνονται ότι η πλαϊνή πλευρά του κιβωτίου που φαίνεται στην πλάγια προβολή δείχνει την τρίτη διάσταση του στερεού. Αντίθετα, την προσμετρούν στην πρόσοψη με αποτέλεσμα, στο διαχωρισμό του κιβωτίου σε στρώματα, να υπολογίζουν λανθασμένα τους κύβους που αποτελούν το κάθε στρώμα.

Οι μαθητές του δεύτερου επιπέδου αποτυγχάνουν στον υπολογισμό του εμβαδού και στην αντίληψη της χωρητικότητας τρισδιάστατων αντικειμένων χωρίς τη χρήση τύπων. Τα ποσοστά αποτυχίας των μαθητών είναι μεγαλύτερα στις περιπτώσεις υπολογισμού εμβαδού επιφάνειας αφού αγνοούν συστηματικά το εμβαδόν της πίσω πλευράς των στερεών. Οι μαθητές αυτοί υπολογίζουν το εμβαδόν ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου μόνο όταν εργάζονται με πραγματικό αντικείμενο και το περιστρέφουν οι ίδιοι, χωρίς να ακολουθούν συγκεκριμένη στρατηγική. Διαφορετικά, δεν μπορούν να υπολογίσουν νοερά το εμβαδόν όλων των εδρών ή να διαχωρίσουν στο μυαλό τους το στερεό σε επιμέρους τμήματα. Συνεπώς, δεν μπορούν να αντιληφθούν με ποιο τρόπο θα μπορούσε να υπολογιστεί το εμβαδόν κάνοντας τους λιγότερο δυνατούς υπολογισμούς.

Οι μαθητές του δεύτερου επιπέδου έχουν αρκετές δυσκολίες στις έννοιες του παράγοντα «συλλογισμός για σχέσεις μεταξύ στοιχείων και ιδιοτήτων στερεών». Οι μαθητές αποτυγχάνουν στην αναγνώριση, τη διατύπωση και την εφαρμογή της σχέσης μεταξύ του αριθμού των κορυφών, εδρών και ακμών στις πυραμίδες. Αποτυγχάνουν, επίσης, στη λήψη απόφασης για το κατά πόσον δηλώσεις που αναφέρονται σε συγκρίσεις ιδιοτήτων των στερεών είναι ορθές ή λανθασμένες. Οι μαθητές αναγνωρίζουν ότι ο κύβος διαφέρει από το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο γιατί στον κύβο οι έδρες είναι τετράγωνα και αναγνωρίζουν ως κοινό στοιχείο των δύο στερεών ότι έχουν τον ίδιο αριθμό κορυφών και εδρών. Αναγνωρίζουν, επίσης, ότι στα δύο αυτά στερεά υπάρχουν ορθές γωνίες. Οι μαθητές αυτοί αναγνωρίζουν ακόμη διαφορές μεταξύ άλλων στερεών με βάση την εξωτερική τους εικόνα. Για παράδειγμα, συγκρίνοντας τον κύλινδρο και τον κώνο αναφέρουν ότι η πλάγια όψη του κυλίνδρου είναι όπως αυτήν του κύκλου και ότι του κώνου είναι όπως αυτήν του τριγώνου. Οι μαθητές παραμένουν στη σύγκριση μόνο των εξωτερικών χαρακτηριστικών και στοιχείων των στερεών και δεν αναφέρονται καθόλου

σε ιδιότητες. Η μελέτη των απαντήσεων των μαθητών καταδεικνύει ότι η τρισδιάστατη φύση των στερεών έχει μεγάλη επίδραση στην αντίληψη των μαθητών για αυτά και επομένως επικεντρώνουν την προσοχή τους στην εξωτερική τους εικόνα ή προσπαθούν να κάνουν συγκρίσεις με «αντίστοιχα» για αυτούς δισδιάστατα σχήματα. Η παρατήρηση αυτή σχετίζεται άμεσα με το γεγονός ότι στο πλαίσιο της τυπικής εκπαίδευσης η μελέτη των εννοιών της δισδιάστατης γεωμετρίας αποσπά το μεγαλύτερο χρόνο που αφιερώνεται για τη μελέτη εννοιών της γεωμετρίας συνολικά.

Χαρακτηριστικά Τρίτου Επιπέδου Σκέψης

Οι μαθητές του τρίτου επιπέδου σκέψης έχουν πολύ καλή επίδοση στις έννοιες των παραγόντων «αναγνώριση στερεών και των συστατικών τους στοιχείων», «αναγνώριση και κατασκευή αναπτυγμάτων τρισδιάστατων αντικειμένων» και «χειρισμός διαφορετικών μορφών αναπαράστασης στερεών». Η επίδοσή τους στις έννοιες του παράγοντα «διάταξη αντικειμένων στο χώρο» είναι ικανοποιητική και αποτυγχάνουν στους παράγοντες «μέτρηση επιφάνειας και χωρητικότητας τρισδιάστατων αντικειμένων χωρίς τη χρήση τύπων» και «συλλογισμός για σχέσεις μεταξύ στοιχείων και ιδιοτήτων στερεών». Το γεγονός ότι οι μαθητές του επιπέδου αυτού έχουν τουλάχιστον ικανοποιητική επίδοση και στους τρεις παράγοντες της αντίληψης των εννοιών του χώρου συμβάλει θετικά στο να αναγνωρίζουν και κατασκευάζουν με επιτυχία αναπτύγματα τρισδιάστατων σχημάτων, να χειρίζονται χωρίς ιδιαίτερα προβλήματα διαφορετικές μορφές αναπαράστασης τρισδιάστατων αντικειμένων και να ανταποκρίνονται σε ικανοποιητικό βαθμό στις απαιτήσεις έργων που σχετίζονται με τη διάταξη αντικειμένων στο χώρο. Αντίθετα, ούτε και οι μαθητές του τρίτου επιπέδου μπορούν να υπολογίσουν το εμβαδόν και τη χωρητικότητα τρισδιάστατων αντικειμένων. Με βάση τα στοιχεία αυτά μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι απαραίτητο οι μαθητές να έχουν πολύ υψηλό επίπεδο αντίληψης και στους τρεις παράγοντες της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου, για να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις του παράγοντα «μέτρηση επιφάνειας και αντίληψη χωρητικότητας τρισδιάστατων αντικειμένων χωρίς τη χρήση τύπων». Η ίδια υπόθεση μπορεί να υποστηριχθεί και για την επίδοση στον παράγοντα «συλλογισμός για σχέσεις μεταξύ στοιχείων και ιδιοτήτων στερεών» με τη διαφορά ότι η επιτυχία στον παράγοντα αυτό εξαρτάται και από άλλες παραμέτρους, όπως την ικανότητα αντίληψης, εκτός των εξωτερικών στοιχείων, των ιδιοτήτων των στερεών.

Οι μαθητές του τρίτου επιπέδου αναγνωρίζουν τα βασικά γεωμετρικά στερεά στο περιβάλλον ή όταν είναι σχεδιασμένα στο χαρτί. Αναγνωρίζουν τον αριθμό των κορυφών, εδρών και ακμών στον κύβο, στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, στην πυραμίδα και στο πρίσμα. Αναγνωρίζουν, επίσης, το σχήμα των εδρών στις πυραμίδες και στα πρίσματα και αντιλαμβάνονται τη δομή του κυλίνδρου.

Οι μαθητές του τρίτου επιπέδου ανταποκρίνονται με επιτυχία και στις δύο παραμέτρους του παράγοντα «αναγνώριση και κατασκευή αναπτύγματος τρισδιάστατων αντικειμένων». Συγκεκριμένα, οι μαθητές (α) αναγνωρίζουν τα αναπτύγματα στερεών όπως του κύβου, του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου και της πυραμίδας και (β) κατασκευάζουν το ανάπτυγμα κύβου, ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου και κυλίνδρου.

Οι μαθητές του τρίτου επιπέδου κατασκευάζουν διαφορετικά αναπτύγματα του κύβου και του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου και περιγράφουν τον τρόπο με τον οποίο θα τα δίπλωναν, για να σχηματιστούν τα στερεά. Αυτή η ικανότητα των μαθητών έχει ως αποτέλεσμα να επεξεργάζονται τα αναπτύγματα που κατασκευάζουν και να περιγράφουν με ποιο τρόπο θα μπορούσαν να αλλάξουν τη θέση κάποιων εδρών στο ανάπτυγμα. Για το σκοπό αυτό, οι μαθητές διατηρούν στο μυαλό τους μια έδρα σταθερή και περιγράφουν πώς θα διπλωθούν οι υπόλοιπες σε σχέση με αυτή. Με τη στρατηγική αυτή, χειρίζονται με άνεση τις περιπτώσεις που χρειάζονται διαδοχικές διπλώσεις εδρών.

Το ψηλότερο επίπεδο αντίληψης των εννοιών του χώρου των μαθητών του τρίτου επιπέδου σε σχέση με τους μαθητές του δεύτερου επιπέδου έχει ως αποτέλεσμα ουσιαστικές διαφορές στην ικανότητά τους στο χειρισμό διαφορετικών μορφών αναπαράστασης τρισδιάστατων αντικειμένων. Οι μαθητές του τρίτου επιπέδου αναγνωρίζουν τον αριθμό των εδρών των στερεών ανεξάρτητα από τη μορφή αναπαράστασης και η ισχυρή διαισθητική τους αντίληψη για τα στοιχεία κάποιων στερεών λειτουργεί ως καταλύτης στις περιπτώσεις που αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην ανάγνωση κάποιας μορφής αναπαράστασης. Επιπρόσθετα, αναγνωρίζουν ότι κάποιες παρανοήσεις που μπορούν να προκύψουν σε μερικές μορφές αναπαράστασης οφείλονται στις ιδιαιτερότητες και στις συμβάσεις που προϋποθέτει η δισδιάστατη αναπαράσταση τρισδιάστατων αντικειμένων, όπως η επικάλυψη εδρών και τμημάτων λόγω διαφάνειας.

Οι μαθητές του τρίτου επιπέδου επιτυγχάνουν στο σχεδιασμό της ορθογωνίας προβολής ενός αντικειμένου με βάση την πλάγια του προβολή και συναντούν περισσότερες δυσκολίες στην αντίστροφη διαδικασία. Κατασκευάζουν, όμως, και περιγράφουν νοερά με σχετική ακρίβεια το στερεό, παρατηρώντας μόνο τις τρεις όψεις της ορθογωνίας του προβολής. Όταν εργάζονται με πραγματικούς κύβους και περιστρέφουν

την κατασκευή μπορούν να αναγνωρίσουν ποιες αλλαγές στην κατασκευή δεν θα επηρεάσουν τις τρεις όψεις της ορθογώνιας προβολής. Οι μαθητές διαθέτουν κατάλληλους μηχανισμούς αυτοελέγχου και αυτοδιόρθωσης.

Οι μαθητές αυτοί αποδέχονται τις συμβάσεις που υπάρχουν στην αναπαράσταση στερεών στο χαρτί και σχεδιάζουν κύβο σε διαφανή και συμπαγή μορφή. Αντιλαμβάνονται ποιες ακμές και έδρες στο σχέδιό τους φαίνονται λόγω της διαφανούς προβολής και ποιες όχι. Οι μαθητές αναγνωρίζουν στο σχέδιο του κύβου παράλληλες ακμές και ακμές που τέμνονται κάθετα. Αντιμετωπίζουν, όμως, δυσκολίες στο να αιτιολογήσουν γιατί κάποιες ορθές γωνίες που υπάρχουν στον κύβο στο σχέδιο φαίνονται «παραμορφωμένες».

Οι μαθητές του τρίτου επιπέδου έχουν ικανοποιητική επίδοση στον υπολογισμό του αριθμού των κύβων που χρειάζονται, για να γεμίσει ένα κιβώτιο, αλλά αντιμετωπίζουν δυσκολίες σε πιο σύνθετα έργα που σχετίζονται με την ικανότητα διάταξης αντικειμένων στο χώρο. Συγκεκριμένα, αποτυγχάνουν στον υπολογισμό του συνδυασμού κύβων και ράβδων, για να γεμίσει ένα κιβώτιο και στην εύρεση του αριθμού των κύβων που πρέπει να προστεθούν σε μια κατασκευή ώστε να μετασχηματιστεί σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

Οι μαθητές χρησιμοποιούν δύο στρατηγικές στον υπολογισμό του αριθμού των κύβων που χρειάζονται, για να γεμίσει ένα κιβώτιο. Διαχωρίζουν το κιβώτιο σε δύο στρώματα (οριζόντια ή κατακόρυφες στήλες), υπολογίζουν τον αριθμό των κύβων που χρειάζονται, για να συμπληρωθεί ένα στρώμα και πολλαπλασιάζουν επί δύο.

Στο πιο σύνθετο έργο υπολογισμού του αριθμού των κύβων που πρέπει να προστεθούν σε μια τρισδιάστατη κατασκευή ώστε να μετασχηματιστεί σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, οι μαθητές αποτυγχάνουν γιατί δεν λαμβάνουν υπόψη κύβους για τους οποίους πρέπει να κατασκευάσουν νοερά την εικόνα άλλων στρωμάτων πάνω στα οποία θα τοποθετηθούν. Αυτή η αδυναμία οπτικοποίησης των κατασκευών και νοερής δόμησης αντικειμένων στο χώρο αποτελεί την αιτία αποτυχίας και στην εύρεση του συνδυασμού κύβων και ράβδων, για να γεμίσει ένα κιβώτιο, αφού δεν μπορούσαν να φανταστούν πώς θα γεμίσει το κιβώτιο με κάθε δυνατό συνδυασμό.

Οι μαθητές του τρίτου επιπέδου επιτυγχάνουν στην αντίληψη της χωρητικότητας τρισδιάστατων αντικειμένων και έχουν ικανοποιητική επίδοση στον υπολογισμό του εμβαδού της επιφάνειάς τους. Οι μαθητές υπολογίζουν ορθά μόνο το εμβαδόν ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου διαχωρίζοντας την επιφάνεια του στερεού σε τρία τμήματα: (α) την πρόσοψη, (β) την πίσω όψη και (γ) τις πλαϊνές έδρες. Αντιμετωπίζουν, όμως, δυσκολίες

στον υπολογισμό του εμβαδού σύνθετης τρισδιάστατης κατασκευής αφού αδυνατούν να οπτικοποιήσουν τη δομή της ακόμη και όταν εργάζονται με πραγματικό υλικό.

Οι μαθητές του τρίτου επιπέδου ανταποκρίνονται θετικά σε έργα που σχετίζονται με σχέσεις μεταξύ στοιχείων και ιδιοτήτων στερεών. Για παράδειγμα, αναγνωρίζουν ότι ο κύβος διαφέρει από το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο γιατί στον κύβο οι έδρες είναι τετράγωνα και συγκρίνουν και άλλες ιδιότητές τους. Αναγνωρίζουν, επίσης, ότι ο κύβος και το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχουν τον ίδιο αριθμό κορυφών και εδρών και ότι στα δύο στερεά υπάρχουν ορθές γωνίες. Οι μαθητές αναγνωρίζουν, επίσης, διαφορές μεταξύ στερεών με βάση την εξωτερική εικόνα, τον αριθμό των κορυφών και εδρών και το σχήμα των εδρών των στερεών. Για παράδειγμα, στη σύγκριση πυραμίδας με ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, οι μαθητές έδωσαν έμφαση στο γεγονός ότι η πυραμίδα κλείνει πάντα με μια μύτη. Οι μαθητές και αυτού του επιπέδου παραμένουν στη σύγκριση μόνο των εξωτερικών χαρακτηριστικών και στοιχείων και δεν αναφέρονται καθόλου σε ιδιότητες. Παρόλα αυτά, επιτυγχάνουν στη λήψη απόφασης για το κατά πόσον δηλώσεις που αναφέρονται σε συγκρίσεις ιδιοτήτων των στερεών είναι ορθές ή λανθασμένες στηριζόμενοι κυρίως στη διαισθητική τους αντίληψη και γνώση. Το συμπέρασμα αυτό επιβεβαιώνεται και από το γεγονός ότι ενώ αντιλαμβάνονται και εφαρμόζουν τη σχέση μεταξύ του αριθμού των κορυφών, εδρών και ακμών στις πυραμίδες, δεν μπορούν να τη διατυπώσουν.

Χαρακτηριστικά Τέταρτου Επιπέδου Σκέψης

Οι μαθητές του τέταρτου επιπέδου σκέψης έχουν πολύ καλή επίδοση σε όλους τους παράγοντες στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Οι μαθητές αυτοί αναγνωρίζουν και κατασκευάζουν αναπτύγματα τρισδιάστατων αντικειμένων, χειρίζονται με άνεση διαφορετικές αναπαραστάσεις τρισδιάστατων σχημάτων, επιλύουν προβλήματα που σχετίζονται με τη δόμηση αντικειμένων στο χώρο, αναγνωρίζουν στερεά και τα εξωτερικά τους στοιχεία, υπολογίζουν το εμβαδόν και τη χωρητικότητα στερεών χωρίς τη χρήση τύπων και συγκρίνουν σχέσεις μεταξύ στοιχείων και ιδιοτήτων στερεών. Η πολύ καλή επίδοση των μαθητών του τέταρτου επιπέδου και στους έξι παράγοντες στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου επεξηγείται σε σημαντικό βαθμό από το γεγονός ότι οι μαθητές αυτοί έχουν αναπτύξει σε ψηλό επίπεδο την ικανότητά τους στους παράγοντες «οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου», «προσανατολισμός στο χώρο» και «σχέσεις των

εννοιών του χώρου». Η δυναμική των μαθητών αυτών και η σημαντική διαφοροποίησή τους από τους μαθητές όλων των άλλων επιπέδων φαίνεται να οφείλεται στο γεγονός ότι το ψηλό επίπεδο ικανότητας και στους τρεις παράγοντες της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου υπερπολλαπλασιάζει τις ικανότητες των μαθητών. Ο συνδυασμός και των τριών ικανοτήτων αυξάνει με γεωμετρικό ρυθμό τις ικανότητες των μαθητών και τους καθιστά ποσοτικά και ποιοτικά ικανότερους από τους μαθητές των άλλων επιπέδων. Σημαντικό, επίσης, χαρακτηριστικό των μαθητών του τέταρτου επιπέδου είναι ο ψηλός βαθμός αυτοπεποίθησης και αυτεπάρκειας για τις επιλογές τους και το γεγονός ότι σε κάθε τους επιλογή υπάρχει πλήρης συνείδηση. Στις επιλογές των μαθητών αυτών περιορίζεται σημαντικά ο ρόλος της διαισθητικής αντίληψης γιατί υπερκερούν οι γνώσεις και οι ικανότητες αντίληψης των εννοιών του χώρου.

Οι μαθητές του τέταρτου επιπέδου αναγνωρίζουν κύβους, ορθογώνια παραλληλεπίπεδα, κυλίνδρους, πρίσματα και σφαίρες στο περιβάλλον ή όταν είναι σχεδιασμένα στο χαρτί. Αναγνωρίζουν τον αριθμό των κορυφών, εδρών και ακμών στον κύβο, στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, στην πυραμίδα και στο πρίσμα. Αναγνωρίζουν, επίσης, το σχήμα των εδρών στις πυραμίδες και στα πρίσματα και αντιλαμβάνονται τη δομή του κυλίνδρου και του κώνου.

Οι μαθητές του τέταρτου επιπέδου αναγνωρίζουν τα αναπτύγματα στερεών όπως του κύβου, του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου και της πυραμίδας και κατασκευάζουν το ανάπτυγμα κύβου, ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου και κυλίνδρου. Επιπρόσθετα, σχεδιάζουν το ανάπτυγμα ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου και αντιστοιχούν έδρες του στερεού με τις έδρες του αναπτύγματος. Οι μαθητές αυτοί κατασκευάζουν διαφορετικά αναπτύγματα του κύβου και του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου και περιγράφουν τον τρόπο με τον οποίο θα τα δίπλωναν και θα άλλαζαν τη θέση εδρών στο ανάπτυγμα.

Οι μαθητές του τέταρτου επιπέδου χειρίζονται χωρίς κανένα πρόβλημα διαφορετικές μορφές αναπαράστασης στερεών και για αυτό αναγνωρίζουν τον αριθμό των εδρών των στερεών ανεξάρτητα από τη μορφή αναπαράστασης. Επιτυγχάνουν στη μετάφραση μεταξύ ορθογωνίας και πλάγιας προβολής και αντίστροφα. Κατασκευάζουν, χωρίς να κάνουν λάθος, το στερεό σε σύντομο χρονικό διάστημα. Περιγράφουν νοερά με ακρίβεια το στερεό και αναγνωρίζουν ποιες αλλαγές στην κατασκευή δεν θα επηρεάσουν τις τρεις όψεις της ορθογωνίας προβολής.

Οι μαθητές αντιλαμβάνονται, αποδέχονται και επεξηγούν τις συμβάσεις που υπάρχουν στην αναπαράσταση στερεών στο χαρτί και σχεδιάζουν κύβο σε διαφανή και συμπαγή μορφή. Αιτιολογούν ποιες ακμές και έδρες στο σχέδιό τους φαίνονται λόγω της

διαφανούς προβολής και ποιες όχι, αναγνωρίζουν στο σχέδιό παράλληλες ακμές και ακμές που τέμνονται κάθετα και αιτιολογούν γιατί κάποιες ορθές γωνίες που υπάρχουν στον κύβο στο σχέδιο σχεδιάζονται με διαφορετικό τρόπο λόγω της μορφής προβολής.

Οι μαθητές του τέταρτου επιπέδου διαφοροποιούνται σε σημαντικό βαθμό από τους μαθητές των άλλων επιπέδων στις έννοιες του παράγοντα διάταξη αντικειμένων στο χώρο. Οι μαθητές αυτοί υπολογίζουν τον αριθμό των κύβων που χρειάζονται, για να γεμίσει ένα κιβώτιο χρησιμοποιώντας στρατηγικές διαχωρισμού του κιβωτίου σε στρώματα. Οι μαθητές υπολογίζουν τον αριθμό των κύβων που χρειάζονται, για να μετασχηματιστεί μια τρισδιάστατη κατασκευή σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο εφαρμόζοντας πάλι στρατηγικές συμπληρώματος των διαφορετικών στρωμάτων της κατασκευής. Οπτικοποιούν, επίσης, τη διαδικασία μετασχηματισμού της κατασκευής. Οι μαθητές του τέταρτου επιπέδου επιτυγχάνουν στο σύνθετο έργο επιλογής του κατάλληλου συνδυασμού κύβων και ράβδων, για να γεμίσει ένα ανοικτό κιβώτιο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου, οικοδομώντας νοερές εικόνες για το πώς θα γεμίσει το κιβώτιο με τον κάθε συνδυασμό.

Οι μαθητές του τέταρτου επιπέδου υπολογίζουν το εμβαδόν και τη χωρητικότητα τρισδιάστατων αντικειμένων χωρίς τη χρήση τύπων. Για παράδειγμα, υπολογίζουν με συστηματικό τρόπο το εμβαδόν ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου διαχωρίζοντας την επιφάνεια του στερεού σε δύο ή τρία τμήματα. Επιπρόσθετα, μπορούν να υπολογίσουν το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου πραγματοποιώντας τους λιγότερο δυνατούς υπολογισμούς. Μόνον οι μαθητές αυτοί υπολογίζουν, επίσης, το εμβαδόν τρισδιάστατων αντικειμένων τα οποία είναι κατασκευασμένα με κύβους, εφαρμόζοντας στρατηγικές που προϋποθέτουν οπτικοποίηση των τμημάτων του στερεού. Η δυσκολία οπτικοποίησης των τμημάτων του στερεού εστιάζεται στο γεγονός ότι χρειάζεται να φανταστούν τη δομή του στερεού από όλες τις πλευρές ώστε να επιλέξουν στρατηγική.

Οι μαθητές του τέταρτου επιπέδου διαθέτουν τις απαραίτητες ικανότητες συλλογισμού για σχέσεις μεταξύ των στοιχείων και ιδιοτήτων στερεών. Η σημαντική διαφορά τους από τους μαθητές των άλλων επιπέδων είναι ότι συγκρίνουν πέρα από τα εξωτερικά στοιχεία των στερεών και ορισμένες ιδιότητές τους. Για παράδειγμα, αναγνωρίζουν (α) ότι ο κύβος διαφέρει από το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο γιατί στον κύβο οι έδρες είναι τετράγωνα, (β) ότι τα δύο στερεά έχουν τον ίδιο αριθμό κορυφών, ακμών και εδρών και ότι υπάρχουν και στα δύο ορθές γωνίες, αλλά επεξηγούν ότι ο κύβος είναι ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Σημαντικό στοιχείο είναι, επίσης, ότι κανένας μαθητής δεν ανέφερε λανθασμένη ομοιότητα ή διαφορά μεταξύ των δύο στερεών. Οι

μαθητές και αυτού του επιπέδου περιορίζονται στη σύγκριση κυρίως των εξωτερικών χαρακτηριστικών και στοιχείων των στερεών. Μπορούν, όμως, να περιγράψουν όταν τους ζητηθεί πώς θα μετέτρεπαν ένα εξαγωνικό πρίσμα σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και να εξηγήσουν γιατί και τα δύο στερεά είναι πρίσματα. Οι μαθητές αυτοί αντιλαμβάνονται ακόμη τη σχέση μεταξύ του αριθμού των κορυφών, εδρών και ακμών στις πυραμίδες, τη διατυπώνουν και την εφαρμόζουν.

Σχέση Ικανότητας στη Δισδιάστατη Γεωμετρία με την Ικανότητα στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου

Παρά το γεγονός ότι δεν ήταν στόχος της παρούσας εργασίας η εξέταση της σχέσης μεταξύ της ικανότητας των μαθητών στη δισδιάστατη γεωμετρία με την ικανότητά τους στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου, τα αποτελέσματα των κλινικών συνεντεύξεων κατέδειξαν περιπτώσεις στις οποίες οι μαθητές απάντησαν στηριζόμενοι αποκλειστικά σε προϋπάρχουσες γνώσεις δισδιάστατης γεωμετρίας και περιπτώσεις στις οποίες οι γνώσεις αυτές αποτέλεσαν ανασταλτικό παράγοντα στη σκέψη των μαθητών. Το γενικό συμπέρασμα που μπορεί να διατυπωθεί είναι ότι δεν υπάρχει ένα γενικό γραμμικό μοντέλο μετάβασης από τη δισδιάστατη γεωμετρία στη γεωμετρία του χώρου γιατί η γεωμετρία του χώρου εμπλέκει διαφορετικές διαδικασίες οπτικοποίησης και αναπαράστασης των γεωμετρικών σχημάτων που δεν απαιτούνται στη δισδιάστατη γεωμετρία. Η επίδραση της ικανότητας των μαθητών εντοπίζεται σε μεγαλύτερο βαθμό σε ορισμένες διαστάσεις της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου όπως στην «αναγνώριση στερεών και των συστατικών τους στοιχείων» και στη «μέτρηση επιφάνειας και αντίληψη χωρητικότητας τρισδιάστατων αντικειμένων χωρίς τη χρήση τύπων». Πιο κάτω παρουσιάζεται αναλυτικά η επίδραση της ικανότητας στη δισδιάστατη γεωμετρία στις έξι διαστάσεις της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου με βάση τα αποτελέσματα των κλινικών συνεντεύξεων.

Στην αναγνώριση των στερεών και των συστατικών τους στοιχείων οι μαθητές προσπαθούν να αντιστοιχήσουν τα τρισδιάστατα σχήματα με σχήματα της επιπεδομετρίας. Για παράδειγμα, αντιστοιχούν τον κύβο με το τετράγωνο, το ορθογώνιο με το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, τον κώνο με το τρίγωνο και τη σφαίρα με τον κύκλο. Δεν φάνηκε όμως στην παρούσα εργασία να προσπαθούν να αξιοποιήσουν τις γνώσεις τους για τα δισδιάστατα σχήματα ώστε να αντιληφθούν, για παράδειγμα, τι συνέπειες έχει το ότι οι έδρες του κύβου είναι τετράγωνα στον κύβο ως ολότητα. Σε πολλές περιπτώσεις,

παρατηρήθηκε ότι η αντιστοίχιση ενός στερεού με ένα δισδιάστατο σχήμα να λειτουργεί ανασταλτικά στο να προσπαθήσει ο μαθητής να αντιληφθεί ποιες περαιτέρω ιδιότητες ή στοιχεία έχει το στερεό. Για παράδειγμα, η αντιστοίχιση του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου με το ορθογώνιο, σε μερικές περιπτώσεις διαφάνηκε ότι λειτούργησε ανασταλτικά στο να αντιληφθούν οι μαθητές ότι το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο μπορεί να έχει έδρες τριών διαφορετικών διαστάσεων. Το γεγονός, επίσης, ότι θεωρούν ότι ο κύβος αποτελεί την τρισδιάστατη μορφή του τετραγώνου λειτουργεί αρνητικά στις περιπτώσεις που προσπαθούν να κάνουν παρόμοιους συλλογισμούς για σχήματα που έχουν μόνο οπτικές ομοιότητες, όπως του τριγώνου με τον κώνο και του κύκλου με τη σφαίρα. Παρόμοια συμπεράσματα ισχύουν και για την ικανότητα συλλογισμού για σχέσεις μεταξύ στοιχείων και ιδιοτήτων στερεών. Στην παρούσα εργασία δεν διαφάνηκε προσπάθεια των μαθητών να συγκρίνουν σχέσεις και ιδιότητες στερεών με βάση τα αντίστοιχα δισδιάστατα σχήματα, αλλά ούτε και επέδειξαν οι μαθητές οποιαδήποτε εννοιολογική γνώση για τις σχέσεις μεταξύ των δισδιάστατων σχημάτων.

Η προσπάθεια μεταφοράς γνώσεων της δισδιάστατης γεωμετρίας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου φαίνεται να λειτουργεί αρνητικά στην ικανότητα χειρισμού διαφορετικών μορφών αναπαράστασης των στερεών. Ο χειρισμός διαφορετικών μορφών αναπαράστασης των στερεών προϋποθέτει την αποδοχή και χρήση συγκεκριμένων συμβάσεων οι οποίες σε μερικές περιπτώσεις συγκρούονται με τις γνώσεις των μαθητών για τα δισδιάστατα σχήματα. Για παράδειγμα, ο σχεδιασμός ενός κύβου σε πλάγια προβολή συνεπάγεται ότι η πλαϊνή όψη θα κατασκευαστεί υπό γωνία σαράντα πέντε μοιρών. Επομένως, ένας μαθητής που διαβάζει ένα κύβο σχεδιασμένο σε πλάγια προβολή αποκλειστικά με τις γνώσεις της δισδιάστατης γεωμετρίας, δεν θα αναγνωρίσει καν ότι το σχέδιο αναπαριστά κύβο. Επιπρόσθετα, στην παρούσα εργασία διαφάνηκε ότι η μεταφορά αποκλειστικά των γνώσεων της δισδιάστατης γεωμετρίας μπορεί να αποτελέσει γνωστικό εμπόδιο για την αντίληψη της τρίτης διάστασης στο χαρτί. Οι δυσκολίες αυτές εντοπίστηκαν σε πολλούς μαθητές της παρούσας εργασίας, ειδικά στους μαθητές των πρώτων δύο επιπέδων. Παρόμοιες δυσκολίες εντοπίστηκαν και στις απαντήσεις των μαθητών στα έργα του παράγοντα διάταξη αντικειμένων στο χώρο. Επιπρόσθετα, κανένας μαθητής δεν φάνηκε να μεταφέρει κατά τη διαδικασία διαχωρισμού ενός ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου σε στρώματα κύβων αντίστοιχες διαδικασίες για τον υπολογισμό εμβαδού ορθογωνίων (διαχωρισμός επιφάνειας σε στήλες ή σειρές από τετραγωνάκια μοναδιαίων διαστάσεων).

Στην αναγνώριση και κατασκευή αναπτυγμάτων η αξιοποίηση γνώσεων της δισδιάστατης γεωμετρίας φαίνεται να λειτουργεί θετικά στις περιπτώσεις όπου οι μαθητές αξιοποιούν τις γνώσεις τους για τις ιδιότητες των δισδιάστατων σχημάτων ώστε να αποφασίσουν κατά πόσον κατά τη διαδικασία διπλώματος ενός αναπτύγματος συγκεκριμένες ακμές μπορούν να ενωθούν ή όχι. Θετικά φαίνεται να λειτουργεί η αξιοποίηση των γνώσεων και διαδικασιών της δισδιάστατης γεωμετρίας και στην περίπτωση μέτρησης της επιφάνειας τρισδιάστατων αντικειμένων. Οι μαθητές αξιοποιούν τις γνώσεις τους για τον υπολογισμό του εμβαδού των επίπεδων σχημάτων στον υπολογισμό του εμβαδού της κάθε έδρας ξεχωριστά. Ορισμένοι μαθητές ανέφεραν, επίσης, ότι προσπάθησαν να διαχωρίσουν την επιφάνεια του στερεού σε γνωστά δισδιάστατα σχήματα, διαδικασία που εφαρμόζουν και για τον υπολογισμό του εμβαδού σύνθετων σχημάτων στη δισδιάστατη γεωμετρία.

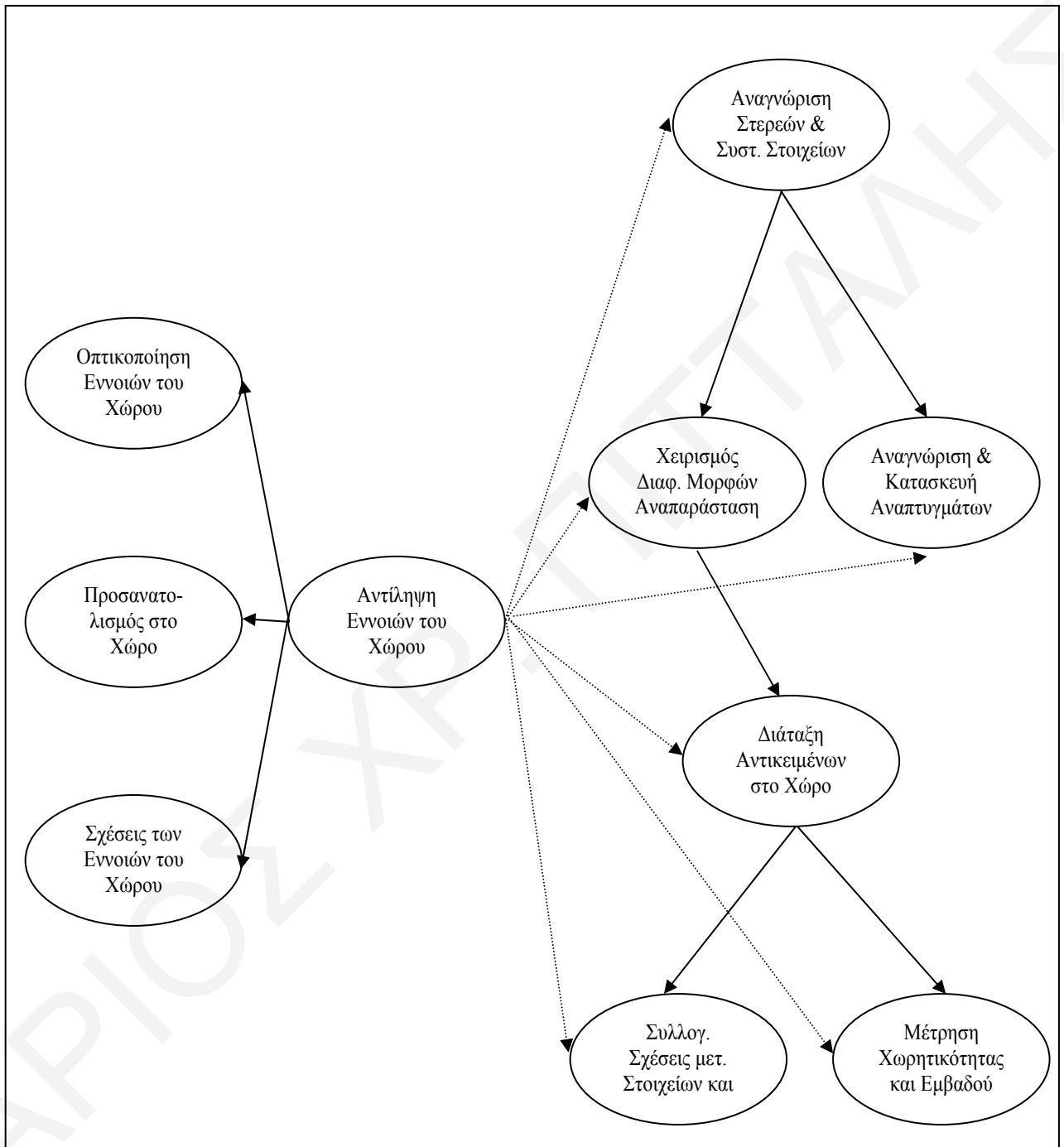
Περιγραφή Θεωρητικού Μοντέλου της Εργασίας

Σε αντίθεση με τα υφιστάμενα μοντέλα που περιγράφουν την ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών σε μια συγκεκριμένη παράμετρο της τρισδιάστατης γεωμετρίας (Battista 1999· Cohen, 2003) ή θεωριών που στηρίζονται σε μεταφορά μοντέλων της δισδιάστατης γεωμετρίας (Gutierrez, 1992), τα αποτελέσματα της παρουσίας εργασίας προτείνουν ένα μοντέλο που συνθέτει διαφορετικές διαστάσεις στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Συγκεκριμένα, το μοντέλο που αναπτύχθηκε με βάση τα αποτελέσματα της εργασίας περιλαμβάνει δύο συμπληρωματικούς πυλώνες. Ο πρώτος πυλώνας περιγράφει τη δομή της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου, τις σχέσεις μεταξύ των διαφόρων διαστάσεων της ικανότητας αυτής και το ρόλο της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου. Ο δεύτερος πυλώνας περιγράφει την ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου με βάση ιεραρχικά επίπεδα σκέψης. Η περιγραφή των χαρακτηριστικών των μαθητών των επιπέδων σκέψης στηρίζεται στις διαστάσεις της ικανότητας των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου που αναλύονται στον πρώτο πυλώνα του μοντέλου.

Με βάση τη δομή του πρώτου πυλώνα η ικανότητα στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου αναλύεται σε έξι παράγοντες. Οι παράγοντες αυτοί αναφέρονται στις κυριότερες έννοιες της γεωμετρίας του χώρου που περιέχονται στο αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών των τάξεων που συμμετέχουν στην έρευνα, όπως στην αναγνώριση και κατασκευή αναπτύγμάτων, στο χειρισμό διαφορετικών μορφών αναπαράστασης τρισδιάστατων αντικειμένων, στη διάταξη αντικειμένων στο χώρο, στην αναγνώριση στερεών και των συστατικών τους στοιχείων, στη μέτρηση επιφάνειας και χωρητικότητας τρισδιάστατων αντικειμένων χωρίς τη χρήση τύπων και στο συλλογισμό για σχέσεις μεταξύ στοιχείων και ιδιοτήτων στερεών. Οι διαστάσεις αυτές της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου δεν σχετίζονται μόνο με τις απαιτήσεις των σχολικών μαθημάτων, αλλά με πληθώρα καταστάσεων της καθημερινής ζωής των μαθητών.

Όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 5.1, υπάρχει μια ιεραρχική σχέση μεταξύ των έξι παραγόντων/διαστάσεων της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Οι μαθητές μαθαίνουν πρώτα να αναγνωρίζουν τα στερεά και τα συστατικά τους στοιχεία, όπως τον αριθμό των κορυφών, εδρών και ακμών των στερεών. Η επίδοση των μαθητών στις έννοιες αυτές προβλέπει σε μεγάλο βαθμό την ικανότητα τους να αναγνωρίζουν και να κατασκευάζουν αναπτύγματα τρισδιάστατων αντικειμένων και να χειρίζονται διαφορετικές μορφές αναπαράστασης των τρισδιάστατων σχημάτων. Η ικανότητα χειρισμού διαφορετικών μορφών αναπαράστασης των τρισδιάστατων σχημάτων αποτελεί προϋπόθεση της επιτυχίας των μαθητών στη διάταξη/δόμηση αντικειμένων στο χώρο γιατί η ικανότητα αντίληψης των ιδιοτήτων και των συμβάσεων της τρισδιάστατης αναπαράστασης των τρισδιάστατων αντικειμένων συμβάλει στην ανάπτυξη της αντίληψης της τρίτης διάστασης στη τρισδιάστατη απεικόνιση των στερεών. Η επίδοση των μαθητών σε αυτό τον παράγοντα προβλέπει σε μεγάλο βαθμό την ικανότητά τους στον υπολογισμό της επιφάνειας και χωρητικότητας τρισδιάστατων αντικειμένων χωρίς της χρήση τύπων και στην ικανότητα συλλογισμού για σχέσεις μεταξύ στοιχείων και ιδιοτήτων στερεών. Η σχέση αυτή επεξηγείται από το γεγονός ότι η διάταξη αντικειμένων στο χώρο σχετίζεται με την ικανότητα οπτικοποίησης των αντικειμένων στο χώρο και αντίληψης των χωρικών σχέσεων στις διατάξεις στο χώρο. Συγκεκριμένα οι ικανότητες αυτές σχετίζονται άμεσα με τον υπολογισμό του εμβαδού και της χωρητικότητας των στερεών ώστε οι μαθητές να αντιλαμβάνονται την ύπαρξη και το σχήμα όλων των εδρών των στερεών και επίσης με τη

συνειδητή από μέρους των μαθητών αντίληψη των στοιχείων και ιδιοτήτων των στερεών ώστε να είναι σε θέση να συγκρίνουν τις μεταξύ τους σχέσεις.



Διάγραμμα 6.1. Πρώτος πυλώνας του μοντέλου.

Η ιεραρχική σχέση μεταξύ των παραγόντων δείχνει ότι παρά το γεγονός ότι υπάρχουν έξι διακριτές διαστάσεις στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου, εντούτοις οι διαστάσεις αυτές σχετίζονται μεταξύ τους και ότι η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών σε μια από αυτές μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα τη βελτίωση της επίδοσης σε κάποια/ες

άλλη/ες διάσταση/εις. Η δομή του μοντέλου της εργασίας καταδεικνύει, επίσης, ότι κάποιες διαστάσεις της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου έχουν καταλυτικό ρόλο στην ανάπτυξη της ικανότητας στις υπόλοιπες διαστάσεις. Η ικανότητα αναγνώρισης των στερεών και των συστατικών τους στοιχείων αποτελεί ένα θεμελιώδες συστατικό για την επιτυχία στις υπόλοιπες πέντε διαστάσεις. Η ικανότητα χειρισμού διαφορετικών μορφών αναπαράστασης των στερεών και η ικανότητα αντίληψης της τρισδιάστατης φύσης των αντικειμένων σε οποιαδήποτε μορφή δισδιάστατης αναπαράστασης φαίνεται να καθορίζει σε μεγάλο βαθμό την επιτυχία στη διάταξη αντικειμένων στο χώρο, στον υπολογισμό της χωρητικότητας και επιφάνειας των τρισδιάστατων αντικειμένων και στο συλλογισμό για τις σχέσεις μεταξύ των στοιχείων και ιδιοτήτων των στερεών. Τέλος, η ικανότητα διάταξης αντικειμένων στο χώρο φαίνεται να αποτελεί προϋπόθεση της επιτυχίας στις δύο δυσκολότερες έννοιες της γεωμετρίας στο χώρο, όπως στον υπολογισμό της μέτρησης και χωρητικότητας τρισδιάστατων αντικειμένων χωρίς τη χρήση τύπων και στο συλλογισμό για τις σχέσεις μεταξύ στοιχείων και ιδιοτήτων στερεών.

Άξιο σχολιασμού είναι το γεγονός ότι τα αποτελέσματα της εργασίας έδειξαν ότι η ικανότητα στην «αναγνώριση και κατασκευή αναπτυγμάτων» δεν φαίνεται να συνδέεται άμεσα με την ικανότητα των μαθητών να υπολογίζουν το εμβαδόν της επιφάνειας των τρισδιάστατων αντικειμένων. Θεωρητικά να ανέμενες κάποιος ότι η ικανότητα κατασκευής αναπτυγμάτων προϋποθέτει την ικανότητα σύνθεσης των δισδιάστατων σχημάτων και επομένως επηρεάζει άμεσα την ικανότητα των μαθητών διαχωρισμού των αντικειμένων στις επιμέρους έδρες τους. Με βάση τις απαντήσεις των μαθητών στις συνεντεύξεις, διαφαίνεται ότι στην αναγνώριση αλλά και στην κατασκευή αναπτυγμάτων οι μαθητές καθοδηγούνται κυρίως από την ολική νοερή εικόνα του αντικειμένου στο μυαλό τους και προσπαθούν να συνθέσουν τις έδρες. Δεν προσπαθούν να διαχωρίσουν το αντικείμενο στις έδρες του και να σκεφτούν πώς θα μπορούσαν να το αναλύσουν στις έδρες του και στη συνέχεια να τις συνθέσουν, για να κατασκευάσουν το αντικείμενο.

Το μοντέλο που αναπτύχθηκε περιγράφει, επίσης, τη δομή της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου και τη σχέση της με τις διαστάσεις της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας στο χώρο. Σύμφωνα με το μοντέλο, η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου αποτελεί σύνθεση της επίδοσης των μαθητών στους παράγοντες «οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου», «προσανατολισμός στο χώρο» και «σχέσεις των εννοιών του χώρου». Οι παράγοντες αυτοί αντιπροσωπεύουν διακριτές αλλά εξίσου σημαντικές παραμέτρους της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου. Σε αντίθεση

με τα αποτελέσματα των περισσότερων ερευνητικών εργασιών που αναφέρουν απλώς ότι υπάρχει συσχέτιση μεταξύ της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου και της επίδοσης των μαθητών στα μαθηματικά ή στη γεωμετρία (Friedman, 1995), το μοντέλο της παρούσας εργασίας περιγράφει την ακριβή σχέση μεταξύ της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου και συγκεκριμένων παραγόντων της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Συγκεκριμένα, με βάση το μοντέλο της παρούσας εργασίας, η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου προβλέπει σε μεγάλο βαθμό την επίδοση των μαθητών στους έξι παράγοντες της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου, έχοντας μεγαλύτερη προβλεπτική ικανότητα στους παράγοντες που σχετίζονται σε μεγαλύτερο βαθμό με την ικανότητα οπτικοποίησης των τρισδιάστατων αντικειμένων. Το γεγονός ότι η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου αποτελεί παράγοντα πρόβλεψης της επίδοσης των μαθητών στις έξι διαστάσεις της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου καταδεικνύει ότι η ανάπτυξη της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου συμβάλει όχι μόνο στην καλύτερη αντίληψη των αντικειμένων και των χωρικών σχέσεων στο περιβάλλον, αλλά και στη βελτίωση της επίδοσης των μαθητών στις διαστάσεις της γεωμετρίας του χώρου που αναφέρθηκαν πιο πάνω. Συνεπώς, κατάλληλη διδασκαλία που θα είχε ως στόχο την ανάπτυξη της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου θα είχε ως πιθανόν συνεπακόλουθο βελτίωση της επίδοσης των μαθητών στις διαστάσεις της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Θα μπορούσε, επίσης, να υποστηριχθεί ότι η εφαρμογή ενός κατάλληλου διδακτικού προγράμματος, που θα είχε ως στόχο τη βελτίωση της ικανότητας των μαθητών στους τρεις παράγοντες της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου, πιθανόν να είχε καλύτερα αποτελέσματα από προγράμματα που θα είχαν ως στόχο τη βελτίωση της ικανότητας των μαθητών σε συγκεκριμένες έννοιες της γεωμετρίας στο χώρο. Η υπόθεση αυτή στηρίζεται στο γεγονός ότι η ανάπτυξη της ικανότητας αντίληψης των εννοιών θα βελτιώνε πιθανόν σε σημαντικό βαθμό την επίδοση των μαθητών σε όλες τις διαστάσεις της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου.

Δεύτερος Πυλώνας του Μοντέλου

Με βάση το δεύτερο πυλώνα του μοντέλου η ανάπτυξη της ικανότητας μαθητών ηλικίας έντεκα με δεκαπέντε ετών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου ακολουθεί τέσσερα ιεραρχικά στάδια. Η αναγνώριση των σταδίων αποτελεί μία από τις σημαντικότερες συνεισφορές της παρούσας εργασίας γιατί τα στάδια περιγράφουν τις ικανότητες των

μαθητών σε ένα ευρύ φάσμα εννοιών της γεωμετρίας στο χώρο. Σε αντίθεση με τις περισσότερες ερευνητικές προσπάθειες που περιγράφουν είτε κατηγορίες μαθητών με βάση τη συμπεριφορά τους σε μια συγκεκριμένη έννοια (δείτε για παράδειγμα τις κατηγορίες μαθητών του Battista (1999) για τις ορθογώνιες διατάξεις κύβων), είτε επίπεδα σκέψης σε μια έννοια (δείτε για παράδειγμα τα δύο επίπεδα της Mariotti (1989) στην αναγνώριση αναπτυγμάτων τρισδιάστατων σχημάτων), τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας δίνουν μια ολοκληρωμένη περιγραφή των χαρακτηριστικών των μαθητών του κάθε επιπέδου και ταυτόχρονα διακρίνουν τις δυσκολίες και τα ιδιαίτερα προβλήματα των μαθητών του κάθε επιπέδου. Η περιγραφή των επιπέδων θεωρείται σημαντική γιατί μπορεί να αποτελέσει το μέσο για ανάπτυξη κατάλληλων διδακτικών προγραμμάτων που θα έχουν ως στόχο την ικανοποίηση των συγκεκριμένων αναγκών των μαθητών και τον καθορισμό κατάλληλων διδακτικών στόχων για τους μαθητές του κάθε επιπέδου. Η περιγραφή των προβλημάτων των μαθητών στην παρούσα εργασία μπορεί να βοηθήσει, επίσης, στην αναγνώριση των αιτιών των σημαντικών δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη γεωμετρία στο χώρο.

Παρά το γεγονός ότι οι μαθητές ηλικίας έντεκα χρόνων (Ε΄ τάξη δημοτικού) αντιπροσωπεύουν κυρίως το πρώτο επίπεδο σκέψης, οι μαθητές ηλικίας δώδεκα και δεκατριών ετών (Στ΄ τάξη δημοτικού και Α΄ τάξη γυμνασίου) το δεύτερο επίπεδο σκέψης και οι μαθητές ηλικίας δεκατεσσάρων και δεκαπέντε ετών το τρίτο και τέταρτο επίπεδο σκέψης (Β΄ και Γ΄ γυμνασίου), τα επίπεδα σκέψης της παρούσας εργασίας δεν ακολουθούν ηλικιακή ανάπτυξη. Απεναντίας, σημαντικό ποσοστό μαθητών ηλικίας έντεκα ετών ανήκουν στο τέταρτο επίπεδο σκέψης και αντίστοιχο σημαντικό ποσοστό μαθητών ηλικίας δεκαπέντε ετών ανήκουν στο πρώτο επίπεδο. Το σημαντικό στοιχείο που φαίνεται να καθορίζει το επίπεδο σκέψης των μαθητών είναι η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η επιτυχία των μαθητών στις διαστάσεις της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου εξαρτάται από την ικανότητα των μαθητών οπτικοποίησης των εννοιών του χώρου, προσανατολισμού στο χώρο και αντίληψης των σχέσεων στο χώρο. Οι μαθητές του πρώτου επιπέδου, για παράδειγμα, δεν μπορούν να οπτικοποιήσουν τις έννοιες του χώρου, να προσανατολιστούν στο χώρο και να αντιληφθούν τις σχέσεις των εννοιών του χώρου (Δείτε Πίνακα 5.1) και έτσι αποτυγχάνουν στις πέντε από τις έξι διαστάσεις της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου.

Πίνακας 5.1

Δεύτερος Πυλώνας του Μοντέλου

1° Επίπεδο	2° Επίπεδο	3° Επίπεδο	4° Επίπεδο
Αντίληψη των Εννοιών του Χώρου			
	Ικανοποιητική οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου *	Πολύ καλή οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου	Πολύ καλή οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου
	Ικανοποιητικός χειρισμός των σχέσεων στο χώρο	Πολύ καλός χειρισμός των σχέσεων στο χώρο	Πολύ καλός χειρισμός των σχέσεων στο χώρο
		Ικανοποιητικός προσανατολισμός στο χώρο	Πολύ καλός προσανατολισμός στο χώρο
Ικανότητα στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου			
Αναγνώριση βασικών γεωμετρικών στερεών	Αναγνώριση βασικών γεωμετρικών στερεών	Αναγνώριση βασικών γεωμετρικών στερεών	Αναγνώριση βασικών γεωμετρικών στερεών
Αναγνώριση μερικών στοιχείων των στερεών	Αναγνώριση μερικών στοιχείων των στερεών	Αναγνώριση όλων των στοιχείων των στερεών	Αναγνώριση όλων των στοιχείων των στερεών
Κατασκευή αναπτύγματος στερεών μόνο όταν εργάζονται με υλικό	Αναγνώριση αναπτυγμάτων τρισδιάστατων σχημάτων που δεν απαιτούν πολύπλοκο τρόπο δίπλωσης	Αναγνώριση αναπτυγμάτων τρισδιάστατων σχημάτων	Αναγνώριση αναπτυγμάτων τρισδιάστατων σχημάτων
	Κατασκευή συγκεκριμένων μορφών αναπτυγμάτων στερεών	Κατασκευή διαφορετικών αναπτυγμάτων στερεών	Κατασκευή διαφορετικών αναπτυγμάτων στερεών
	Οπτικοποίηση της διαδικασίας διπλώματος μερικών εδρών των αναπτυγμάτων όταν η γωνία δίπλωσης είναι ενενήντα μοίρες	Οπτικοποίηση της διαδικασίας διπλώματος αναπτυγμάτων	Οπτικοποίηση της διαδικασίας διπλώματος αναπτυγμάτων
	Αναγνώριση στοιχείων των στερεών ανεξάρτητα από τη μορφή αναπαράστασης όταν διαθέτουν	Αναγνώριση στοιχείων των στερεών ανεξάρτητα από τη μορφή αναπαράστασης με τη βοήθεια της διαισθητικής τους αντίληψης	Αναγνώριση στοιχείων των στερεών ανεξάρτητα από τη μορφή αναπαράστασης με βάση την οπτικοποίηση των στερεών
		Αναγνώριση των ιδιοτήτων της δισδιάστατης αναπαράστασης	Αναγνώριση των ιδιοτήτων της δισδιάστατης αναπαράστασης τρισδιάστατων αντικειμένων, αντίληψη,

γνώσεις για το στερεό ή με βάση τη
διδασθητική τους αντίληψη

Διαδικαστικός σχεδιασμός στερεών
σε πλάγια προβολή

Υπολογισμός εμβαδού στερεών όταν
εργάζονται με πραγματικά
αντικείμενα

Σύγκριση στοιχείων κύβου και
ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου

τριδιάστατων αντικειμένων και
αποδοχή των συμβάσεων στο
σχεδιασμό στο χαρτί

Μετάφραση μιας μορφής
προβολής στερεού σε άλλη

Κατασκευή στερεού με βάση
ορθογώνια προβολή

Σχεδιασμός στερεών σε πλάγια
προβολή (διαφανή ή κανονική
μορφή)

Υπολογισμός αριθμού κύβων που
χρειάζονται για να γεμίσει ένα
κιβώτιο σχήματος ορθογώνιου
παραλληλεπίπεδου

Αντίληψη και υπολογισμός
χωρητικότητας τρισδιάστατων
αντικειμένων

Υπολογισμός εμβαδού στερεών
σχήματος ορθογώνιου
παραλληλεπίπεδου

Σύγκριση στοιχείων στερεών

αποδοχή και επεξήγηση των συμβάσεων
στο σχεδιασμό στο χαρτί

Μετάφραση μιας μορφής προβολής
στερεού σε άλλη

Κατασκευή στερεού με βάση ορθογώνια
προβολή και νοερή επεξεργασία της
κατασκευής

Σχεδιασμός στερεών σε πλάγια προβολή
(διαφανή ή κανονική μορφή)

**Αναγνώριση ιδιοτήτων στερεών
ανεξάρτητα από τη μορφή
αναπαράστασης**

Υπολογισμός αριθμού κύβων που
χρειάζονται για να γεμίσει ένα κιβώτιο
σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου

**Διάταξη τρισδιάστατων αντικειμένων
στο χώρο**

Αντίληψη και υπολογισμός χωρητικότητας
τριδιάστατων αντικειμένων

**Συστηματικός υπολογισμός εμβαδού
στερεών**

Σύγκριση στοιχείων και ιδιοτήτων κύβου
και ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου

**Σύγκριση στοιχείων και ορισμένων
ιδιοτήτων στερεών**

Αντίληψη σχέσεων μεταξύ στερεών

**Αναγνώριση και διατύπωση σχέσεων
μεταξύ στοιχείων των στερεών**

* Με έντονα γράμματα οι διαφορές του κάθε επιπέδου από το προηγούμενο

Τα αποτελέσματα της εργασίας έδειξαν, επίσης, ότι η επιτυχία των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου προϋποθέτει ψηλό επίπεδο ανάπτυξης και στους τρεις παράγοντες της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου. Οι μαθητές του τρίτου επιπέδου, για παράδειγμα, οι οποίοι έχουν ψηλό επίπεδο ανάπτυξης μόνο στους δύο από τους τρεις παράγοντες της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου, αποτυγχάνουν στις δύο από τις έξι διαστάσεις της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Αντίθετα, οι μαθητές του τέταρτου επιπέδου έχουν ψηλό επίπεδο ανάπτυξης και τους τρεις παράγοντες της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου και το γεγονός αυτό φαίνεται να έχει ως επακόλουθο την επιτυχία τους σε όλες τις διαστάσεις της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Ο συνδυασμός ψηλής επίδοσης και στους τρεις παράγοντες της αντίληψης των εννοιών του χώρου φαίνεται να επιταχύνει τη γνωστική ανάπτυξη των μαθητών και να προκαλεί ουσιαστικές και ποιοτικές αλλαγές στο γνωστικό σύστημα των μαθητών με αποτέλεσμα την επιτυχία των μαθητών σε όλες τις διαστάσεις της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Επιπρόσθετα, η γνωστική αυτή αλλαγή έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη υπεργνωστικών μηχανισμών αφού μόνο οι μαθητές του τέταρτου επιπέδου μπορούν συστηματικά να αιτιολογήσουν και να αντιληφθούν τι κάνουν και γιατί το κάνουν. Οι μαθητές του τέταρτου επιπέδου, για παράδειγμα, περιγράφουν νοερά πώς θα διαχώριζαν ένα στερεό σε επιμέρους τμήματα, για να υπολογίσουν το εμβαδόν της επιφάνειάς του γιατί αντιλαμβάνονται ότι χωρίς αυτή τη διαδικασία θα ήταν πολύ πιθανόν να μην υπολογίσουν το εμβαδόν εδρών που δεν φαίνονται.

Στον Πίνακα 5.1 γίνεται συνοπτική περιγραφή των χαρακτηριστικών των μαθητών του κάθε επιπέδου σκέψης, σύμφωνα με τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας. Οι μαθητές του πρώτου επιπέδου σκέψης, όπως φαίνεται στον Πίνακα 5.1, είναι σε θέση να αναγνωρίσουν μόνο τα στερεά και ορισμένα συστατικά τους στοιχεία όπως τον αριθμό των κορυφών και των εδρών. Το κύριο χαρακτηριστικό των μαθητών του πρώτου επιπέδου σκέψης είναι ότι χρειάζεται να εργάζονται με κάποιο υλικό, για να κάνουν ο,τιδήποτε. Είναι απαραίτητο, για παράδειγμα, να παρατηρούν το στερεό, για να υπολογίσουν τον αριθμό των κορυφών του ή να εργαστούν με κατάλληλο εκπαιδευτικό υλικό, για να κατασκευάσουν το ανάπτυσμα ενός κύβου. Οι μαθητές του επιπέδου αυτού δεν διαθέτουν ούτε τις απαραίτητες γνώσεις, αλλού ούτε και τις απαραίτητες δεξιότητες και ικανότητες οπτικοποίησης ώστε να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις των εννοιών της γεωμετρίας του χώρου. Παρά το γεγονός ότι οι μαθητές του επιπέδου αυτού φαίνεται να έχουν μια στοιχειώδη αντίληψη της τρισδιάστατης φύσης των στερεών, δεν μπορούν να

ανταποκριθούν στις υπόλοιπες έννοιες της γεωμετρίας του χώρου γιατί δεν κατανοούν και ούτε αντιλαμβάνονται την τρισδιάστατη φύση των αντικειμένων στις δισδιάστατες αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται στην εκπαίδευση. Συνεπώς, το πρώτο επίπεδο σκέψης στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως το *χειριστικό επίπεδο*, γιατί οι μαθητές χρειάζονται χειριστικά μέσα, για να εργαστούν.

Οι μαθητές του δεύτερου επιπέδου σκέψης αντιμετωπίζουν, επίσης, αρκετές δυσκολίες λόγω της δυσκολίας χειρισμού των δισδιάστατων αναπαραστάσεων των τρισδιάστατων αντικειμένων και για αυτό ανταποκρίνονται σε μεγαλύτερο βαθμό σε έργα που εμπλέκουν εργασία με πραγματικά, χειριστικά αντικείμενα. Οι μαθητές του δεύτερου επιπέδου, για παράδειγμα, υπολογίζουν το εμβαδόν ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου όταν εργάζονται με πραγματικό στερεό. Οι μαθητές, όμως, του δεύτερου επιπέδου επιλύουν αρκετά από τα προβλήματα που τους δημιουργεί η δυσκολία χειρισμού των δισδιάστατων μορφών αναπαράστασης των στερεών με τη βοήθεια της προϋπάρχουσας γνώσης τους για τα στερεά και κυρίως με τη διαισθητική τους αντίληψη. Η διαισθητική αντίληψη των εννοιών του χώρου των μαθητών του δεύτερου επιπέδου αποτελεί το κλειδί μελέτης της συμπεριφοράς τους στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Οι μαθητές αυτοί διαισθητικά αντιλαμβάνονται, για παράδειγμα, τη διαδικασία διπλώματος μερικών εδρών ενός αναπτύγματος, ή αναγνωρίζουν αναπτύγματα στερεών που δεν χρειάζονται πολλές διπλώσεις των εδρών γιατί διαισθητικά αντιλαμβάνονται κατά πόσον το ανάπτυγμα θα μπορούσε να κατασκευάσει στερεό ή αναγνωρίζουν τα στοιχεία των στερεών ανεξάρτητα από τη μορφή αναπαράστασης γιατί διαισθητικά αντιλαμβάνονται την ανάγκη ύπαρξης κάποιων στοιχείων. Συνεπώς, το δεύτερο επίπεδο σκέψης στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως το *διαισθητικό επίπεδο*, γιατί η διαισθητική αντίληψη των μαθητών αποτελεί το κριτήριο της επιτυχίας τους. Παρόλα αυτά, η διαισθητική αντίληψη των μαθητών δεν αρκεί ώστε να ανταποκριθούν σε όλες τις διαστάσεις της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου, γιατί η διαισθητική αντίληψη συμβάλει στην οπτικοποίηση των αντικειμένων, στην ανάπτυξη δηλαδή των απαραίτητων νοερών εικόνων των αντικειμένων, αλλά όχι στην αντίληψη γεωμετρικών ιδιοτήτων και σχέσεων στο χώρο. Η διαισθητική αντίληψη των μαθητών του δεύτερου επιπέδου σχετίζεται με τον ορισμό της διαισθητικής αντίληψης του Fishbein (1993) και όχι με τη «γεωμετρική διαίσθηση» των Fujita, Jones και Yamamoto (2004).

Οι μαθητές του τρίτου επιπέδου σκέψης διαφοροποιούνται σε σημαντικό βαθμό από τους μαθητές των δύο προηγούμενων επιπέδων. Οι μαθητές αυτοί έχουν ανεπτυγμένη ικανότητα οπτικοποίησης των εννοιών του χώρου και αντίληψης των σχέσεων στο χώρο

και για αυτό αντιλαμβάνονται σε ικανοποιητικό βαθμό διατάξεις αντικειμένων στο χώρο. Οι μαθητές του τρίτου επιπέδου αναγνωρίζουν αναπτύγματα τρισδιάστατων σχημάτων, κατασκευάζουν διαφορετικά αναπτύγματα στερεών και κυρίως οπτικοποιούν τη διαδικασία διπλώματος των εδρών των αναπτυγμάτων. Οι μαθητές του επιπέδου αυτού αναγνωρίζουν τις ιδιαιτερότητες της δισδιάστατης αναπαράστασης τρισδιάστατων αντικειμένων και αποδέχονται τις συμβάσεις που εφαρμόζονται στο σχεδιασμό στο χαρτί. Συνεπώς, μεταφράζουν μια μορφή προβολής ενός στερεού σε άλλη, σχεδιάζουν στερεά σε πλάγια προβολή και κατασκευάζουν στερεό με βάση την ορθογώνια του προβολή και αντιλαμβάνονται την τρίτη διάσταση στις δισδιάστατες αναπαραστάσεις των στερεών. Οι μαθητές αυτοί υπολογίζουν το εμβαδόν στερεών σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, συγκρίνουν τα στοιχεία των στερεών και ανταποκρίνονται σε απλά έργα διάταξης αντικειμένων στο χώρο όπως στον υπολογισμό του αριθμού κύβων που χρειάζονται, για να γεμίσει ένα κιβώτιο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Οι μαθητές αυτοί οπτικοποιούν τα τρισδιάστατα αντικείμενα. Δημιουργούν δηλαδή τις κατάλληλες νοητικές εικόνες που είναι απαραίτητες για το χειρισμό εννοιών στην τρισδιάστατη γεωμετρία χωρίς την παρουσία οπτικού ερεθίσματος. Οι νοητικές εικόνες, όμως, που δημιουργούν οι μαθητές του τρίτου επιπέδου δεν αποτυπώνουν γεωμετρικές ιδιότητες στο χώρο. Σε πολλές περιπτώσεις παρατηρείται ότι οι μαθητές επηρεάζονται από τη διαισθητική τους αντίληψη και έτσι επικεντρώνονται στην οπτική εικόνα και παραβλέπουν τις γεωμετρικές ιδιότητες που υπάρχουν σε αυτήν. Για τους μαθητές του τρίτου επιπέδου η ισχυρή διαισθητική αντίληψη αποτελεί μερικές φορές ανασταλτικό παράγοντα. Οι μαθητές αυτοί όταν συγκρίνουν στερεά εστιάζονται αποκλειστικά στον αριθμό των στοιχείων τους και όχι στις ιδιότητές τους. Παρά το γεγονός, επίσης, ότι η ικανότητα τους οπτικοποίησης των τρισδιάστατων αντικειμένων και αντίληψης των σχέσεων στο χώρο είναι αναπτυγμένες και συνεπώς οι μαθητές έχουν πολύ καλή εξωτερική εικόνα των τρισδιάστατων αντικειμένων, οι μαθητές εστιάζονται στην εικόνα και παραβλέπουν τις γεωμετρικές ιδιότητες των αντικειμένων και τις μεταξύ τους σχέσεις. Για παράδειγμα, στον υπολογισμό του εμβαδού της επιφάνειας ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου δεν προσπαθούν να εντοπίσουν είτε επίπεδα συμμετρίας είτε ίσες έδρες, για να κάνουν όσο το δυνατόν λιγότερους υπολογισμούς. Διαφαίνεται ότι η ικανότητα που δεν διαθέτουν οι μαθητές και πιθανότατα σχετίζεται άμεσα με την ικανότητα υπολογισμού του εμβαδού της επιφάνειας είναι η ικανότητα εντοπισμού των επιμέρους δισδιάστατων επιπέδων στο χώρο. Συγκεκριμένα, οι μαθητές δεν αναγνωρίζουν τα διαφορετικά δισδιάστατα επίπεδα που ορίζει η κάθε έδρα του τρισδιάστατου αντικειμένου και έτσι δεν μπορούν να διαχωρίσουν το στερεό στις έδρες του και να

υπολογίσουν το εμβαδόν της κάθε έδρας ξεχωριστά. Το γεγονός αυτό μπορεί να σχετίζεται σε κάποιο βαθμό με το γεγονός ότι οι μαθητές αυτοί υστερούν στην ικανότητα «προσανατολισμού στο χώρο» η οποία θα τους βοηθούσε να παρατηρήσουν νοερά την εικόνα του κάθε επιπέδου ξεχωριστά, όπως φαίνεται από πάνω προς τα κάτω. Να αντιληφθούν, δηλαδή, την κάτοψη της κάθε έδρας.

Επιπρόσθετα, παρά το γεγονός ότι οι μαθητές οπτικοποιούν τα τρισδιάστατα αντικείμενα και αντιλαμβάνονται σχέσεις στο χώρο αντιμετωπίζουν δυσκολίες στη σύνθετη διάταξη αντικειμένων στο χώρο. Δεν μπορούν, για παράδειγμα, να οπτικοποιήσουν το γέμισμα ενός κιβωτίου με κύβους και ράβδους γιατί χρειάζεται να συνθέσουν στην ίδια διάταξη τη νοητική εικόνα δύο στερεών. Το τρίτο επίπεδο μπορεί να χαρακτηριστεί ως *αναπαραστατικό*, γιατί το κύριο χαρακτηριστικό των μαθητών του επιπέδου αυτού που τους διαφοροποιεί από τους μαθητές των προηγούμενων επιπέδων είναι η ικανότητα χειρισμού των διαφορετικών αναπαραστάσεων των τρισδιάστατων αντικειμένων.

Οι μαθητές του τέταρτου επιπέδου διαφοροποιούνται από τους μαθητές των τριών προηγούμενων επιπέδων στο ότι οπτικοποιούν τα τρισδιάστατα αντικείμενα, αποτυπώνοντας ταυτόχρονα γεωμετρικές ιδιότητες. Οι μαθητές διαθέτουν πλήρη οπτική αντίληψη για τα τρισδιάστατα αντικείμενα, δημιουργούν και επεξεργάζονται χωρίς δυσκολία νοητικές εικόνες των αντικειμένων και αντιλαμβάνονται τις γεωμετρικές τους ιδιότητες. Αναγνωρίζουν, για παράδειγμα, τις ιδιότητες των στερεών ανεξάρτητα από τη μορφή αναπαράστασης. Για παράδειγμα, οι μαθητές του τέταρτου επιπέδου οπτικοποιούν τις διαγωνίους του κύβου που τέμνονται, αντιλαμβάνονται ότι τέμνονται κάθετα και αιτιολογούν με γεωμετρικούς όρους το γεγονός αυτό. Οι μαθητές αυτοί διαθέτουν υψηλή ικανότητα διάταξης αντικειμένων στο χώρο και έτσι χειρίζονται νοερά σύνθετες διατάξεις αντικειμένων στο χώρο. Η ικανότητα αυτή δείχνει ότι οι μαθητές όχι μόνο αντιλαμβάνονται την έννοια της τρίτης διάστασης στο χώρο, αλλά συνθέτουν/δομούν και οι ίδιοι τρισδιάστατες οντότητες στο χώρο. Επιπρόσθετα, κατασκευάζουν στερεό με βάση την ορθογώνια προβολή και νοερά επεξεργάζονται την κατασκευή τους, υπολογίζουν με συστηματικό τρόπο το εμβαδόν της εξωτερικής επιφάνειας στερεών, αντιλαμβάνονται σχέσεις μεταξύ στερεών και αναγνωρίζουν και διατυπώνουν σχέσεις μεταξύ στοιχείων των στερεών. Οι μαθητές συσχετίζουν και οικοδομούν σε ένα ενιαίο νοητικό μοντέλο τη νοητική αναπαράσταση ενός τρισδιάστατου αντικειμένου, την εξωτερική του εικόνα, τις ιδιότητές του, τις χωρικές του σχέσεις με άλλα αντικείμενα και τις γεωμετρικές του σχέσεις με άλλες έννοιες. Συνεπώς, το επίπεδο αυτό μπορεί να χαρακτηριστεί ως το

κατεξοχήν *συσχετιστικό επίπεδο* σκέψης. Οι μαθητές αιτιολογούν όλες τις απαντήσεις τους και το σκεπτικό τους υποδηλώνει ότι όλες οι ενέργειές τους είναι συνειδητές. Οι μαθητές του τέταρτου επιπέδου γνωρίζουν τι κάνουν και γιατί το κάνουν. Ο ρόλος της διαισθητικής αντίληψης για τους μαθητές αυτούς είναι περιορισμένος. Οι μαθητές αυτοί δεν απαντούν με βάση το τι πιστεύουν ή μπορούν να φανταστούν αλλά με βάση αυτά που μπορούν νοερά να σκεφτούν και να επεξεργαστούν και με αυτά που γνωρίζουν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Εισαγωγή

Στόχος και καινοτόμο στοιχείο της παρούσας εργασίας ήταν η ανάπτυξη και η περιγραφή ενός ενιαίου θεωρητικού μοντέλου που να περιγράφει την ικανότητα των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της εργασίας με έμφαση στην ανάλυση του θεωρητικού μοντέλου της εργασίας για τη μελέτη της ικανότητας των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Στη συνέχεια γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων της παρούσας εργασίας με άλλα θεωρητικά μοντέλα. Ακολούθως παρουσιάζονται και συζητούνται οι εκπαιδευτικές εφαρμογές του μοντέλου και τέλος γίνονται εισηγήσεις για περαιτέρω έρευνες με στόχο τη βελτίωση, την εμπάθυνση, την επέκταση και εγκυροποίηση των αποτελεσμάτων της παρούσας εργασίας.

Συνοπτική Περιγραφή Μοντέλου

Με βάση τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας η ικανότητα των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου αναλύεται σε έξι διακριτές διαστάσεις. Συγκεκριμένα, στην ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίζουν τα στερεά και τα συστατικά τους στοιχεία, όπως τον αριθμό των κορυφών, εδρών και ακμών, στην ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίζουν και να κατασκευάζουν αναπτύγματα τρισδιάστατων σχημάτων, στην ικανότητα χειρισμού διαφορετικών μορφών αναπαράστασης τρισδιάστατων αντικειμένων, στην ικανότητα διάταξης αντικειμένων στο χώρο, στην ικανότητα μέτρησης της επιφάνειας και αντίληψης της χωρητικότητας τρισδιάστατων αντικειμένων και, τέλος, στην ικανότητα συλλογισμού για σχέσεις μεταξύ των στοιχείων και ιδιοτήτων των στερεών. Τα εμπειρικά αποτελέσματα της εργασίας έδειξαν ότι υπάρχει μια ιεραρχική σχέση μεταξύ της ικανότητας των μαθητών σε αυτές τις έξι διαστάσεις. Συγκεκριμένα, οι

μαθητές μαθαίνουν πρώτα να αναγνωρίζουν τα στερεά και τα συστατικά τους στοιχεία. Η επίδοσή τους στις έννοιες αυτές προβλέπει σε μεγάλο βαθμό την ικανότητα αναγνώρισης και κατασκευής αναπτυγμάτων τρισδιάστατων αντικειμένων και την ικανότητα χειρισμού διαφορετικών μορφών αναπαράστασης των τρισδιάστατων σχημάτων. Η ικανότητα χειρισμού διαφορετικών μορφών αναπαράστασης των τρισδιάστατων σχημάτων αποτελεί ισχυρό παράγοντα πρόβλεψης της ικανότητας των μαθητών στη διάταξη αντικειμένων στο χώρο γιατί επιτρέπει στους μαθητές να αντιλαμβάνονται την τρίτη διάσταση στις δισδιάστατες αναπαραστάσεις των τρισδιάστατων αντικειμένων και επομένως να επεξεργάζονται νοερά διατάξεις τρισδιάστατων αντικειμένων στο χώρο. Τέλος, η ικανότητα διάταξης αντικειμένων στο χώρο αποτελεί ισχυρό παράγοντα πρόβλεψης της ικανότητας των μαθητών στον υπολογισμό της επιφάνειας και στην αντίληψη της χωρητικότητας τρισδιάστατων αντικειμένων χωρίς τη χρήση τύπων και στην ικανότητα συλλογισμού για σχέσεις μεταξύ στοιχείων και ιδιοτήτων στερεών.

Παρά το γεγονός ότι το μοντέλο της παρούσας εργασίας προσπάθησε να περιγράψει την ικανότητα των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου με αναφορά σε έξι διακριτές διαστάσεις, υπάρχουν και άλλες γεωμετρικές ικανότητες που δεν συμπεριλαμβάνονται στους έξι παράγοντες, όπως η αντίληψη της έννοιας της γωνίας στο χώρο, η έννοια της συμμετρίας στο χώρο και οι μετασχηματισμοί. Η μη συμπερίληψη των εννοιών αυτών στη δομή του μοντέλου οφείλεται στο γεγονός ότι ήταν η αδύνατη η μέτρηση της ικανότητας των μαθητών σε τόσες πολλές έννοιες και στο ότι δεν διδάσκονται οι έννοιες αυτές στις τάξεις Ε΄ δημοτικού μέχρι Γ΄ γυμνασίου. Αναμφίβολα, θα ήταν χρήσιμο σε μια μελλοντική εργασία να μελετηθεί η ανάπτυξη της σκέψης των μαθητών σε ένα ευρύτερο πλαίσιο εννοιών της γεωμετρίας στο χώρο.

Τα αποτελέσματα της εργασίας έδειξαν, επίσης, ότι η ικανότητα στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου εξαρτάται σε σημαντικό βαθμό από την ικανότητα των μαθητών αντίληψης των εννοιών του χώρου. Συγκεκριμένα, η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου, η οποία αποτελεί σύνθεση της επίδοσης των μαθητών στους παράγοντες «οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου», «προσανατολισμός στο χώρο» και «σχέσεις των εννοιών του χώρου», αποτελεί παράγοντα πρόβλεψης της επίδοσης των μαθητών στις έξι διαστάσεις της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Η σχέση αυτή, αν και αναμενόμενη, θεωρείται πολύ σημαντική γιατί επεξηγεί την ακριβή σχέση μεταξύ των δύο ικανοτήτων και οδηγεί στο συμπέρασμα ότι κατάλληλη διδασκαλία που θα είχε ως στόχο την ανάπτυξη της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου θα είχε ως πιθανόν

συνεπακόλουθο βελτίωση της επίδοσης των μαθητών στις διαστάσεις της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου.

Τα αποτελέσματα της εργασίας έδειξαν ότι η ανάπτυξη της ικανότητας μαθητών ηλικίας έντεκα με δεκαπέντε ετών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου ακολουθεί τέσσερα ιεραρχικά επίπεδα. Το πρώτο επίπεδο σκέψης ονομάζεται «χειριστικό» γιατί οι μαθητές του επιπέδου αυτού χρειάζονται οπωσδήποτε κάποιο χειριστικό μέσο, για να εργαστούν. Για παράδειγμα, οι μαθητές χρειάζονται να παρατηρούν ένα στερεό, για να υπολογίσουν τον αριθμό των κορυφών του και να χρησιμοποιήσουν κατάλληλο εκπαιδευτικό υλικό, για να κατασκευάσουν το ανάπτυγμα ενός κύβου. Οι μαθητές του πρώτου επιπέδου δεν αντιλαμβάνονται την τρισδιάστατη φύση των αντικειμένων στις δισδιάστατες αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται στην εκπαίδευση. Η ανεπάρκεια των μαθητών του πρώτου επιπέδου στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου φαίνεται να επεξηγείται σε σημαντικό βαθμό από το γεγονός ότι η ικανότητα των μαθητών αυτών αντίληψης των εννοιών του χώρου είναι περιορισμένη.

Το δεύτερο επίπεδο σκέψης ονομάζεται «διαισθητικό» γιατί οι μαθητές εκμεταλλεύονται τη διαισθητική τους αντίληψη για να αντιμετωπίσουν τις δυσκολίες χειρισμού των δισδιάστατων αναπαραστάσεων των τρισδιάστατων αντικειμένων. Για παράδειγμα, οι μαθητές του δεύτερου επιπέδου αντιλαμβάνονται διαισθητικά τη διαδικασία διπλώματος μερικών εδρών ενός αναπτύγματος, ή αναγνωρίζουν αναπτύγματα στερεών που δεν χρειάζονται πολλές διπλώσεις των εδρών γιατί διαισθητικά αντιλαμβάνονται κατά πόσον το ανάπτυγμα θα μπορούσε να κατασκευάσει στερεό ή αναγνωρίζουν τα στοιχεία των στερεών ανεξάρτητα από τη μορφή αναπαράστασης γιατί διαισθητικά αντιλαμβάνονται την ανάγκη ύπαρξης κάποιων στοιχείων. Η διαισθητική αντίληψη συμβάλει στην οπτικοποίηση των αντικειμένων, στην ανάπτυξη δηλαδή των απαραίτητων νοερών εικόνων των αντικειμένων, αλλά όχι στην αντίληψη γεωμετρικών ιδιοτήτων και σχέσεων στο χώρο.

Το τρίτο επίπεδο σκέψης ονομάζεται «αναπαραστατικό» γιατί οι μαθητές του επιπέδου αυτού χειρίζονται με σχετική επιτυχία τις διαφορετικές αναπαραστάσεις των τρισδιάστατων αντικειμένων. Οι μαθητές αυτοί έχουν ανεπτυγμένη ικανότητα οπτικοποίησης των εννοιών του χώρου και αντίληψης των σχέσεων στο χώρο και για αυτό αντιλαμβάνονται σε ικανοποιητικό βαθμό διατάξεις αντικειμένων στο χώρο. Για παράδειγμα, οι μαθητές του τρίτου επιπέδου αναγνωρίζουν αναπτύγματα τρισδιάστατων σχημάτων, κατασκευάζουν διαφορετικά αναπτύγματα στερεών και κυρίως οπτικοποιούν τη διαδικασία διπλώματος των εδρών των αναπτύγμάτων. Οι μαθητές του επιπέδου αυτού

αναγνωρίζουν τις ιδιαιτερότητες της δισδιάστατης αναπαράστασης τρισδιάστατων αντικειμένων και αποδέχονται τις συμβάσεις που εφαρμόζονται στο σχεδιασμό στο χαρτί. Σημαντικό χαρακτηριστικό των μαθητών του επιπέδου αυτού είναι ότι αναπτύσσουν τις κατάλληλες νοητικές εικόνες που είναι απαραίτητες για το χειρισμό εννοιών στην τρισδιάστατη γεωμετρία χωρίς την παρουσία οπτικού ερεθίσματος.

Το τέταρτο επίπεδο ονομάζεται «συσχετιστικό» γιατί οι μαθητές του επιπέδου αυτού συσχετίζουν και οικοδομούν σε ένα ενιαίο νοητικό μοντέλο τη νοητική αναπαράσταση ενός τρισδιάστατου αντικειμένου, την εξωτερική του εικόνα, τις ιδιότητές του, τις χωρικές του σχέσεις με άλλα αντικείμενα και τις γεωμετρικές του σχέσεις με άλλες έννοιες. Κύριο χαρακτηριστικό των μαθητών αυτών είναι ότι οπτικοποιούν τα τρισδιάστατα αντικείμενα, αποτυπώνοντας ταυτόχρονα γεωμετρικές ιδιότητες. Οι μαθητές διαθέτουν πλήρη οπτική αντίληψη για τα τρισδιάστατα αντικείμενα, δημιουργούν και επεξεργάζονται χωρίς δυσκολία νοητικές εικόνες των αντικειμένων και αντιλαμβάνονται τις γεωμετρικές τους ιδιότητες. Οι μαθητές αυτοί διαθέτουν υψηλή ικανότητα διάταξης αντικειμένων στο χώρο και έτσι χειρίζονται νοερά σύνθετες διατάξεις αντικειμένων στο χώρο. Η ικανότητα αυτή δείχνει ότι οι μαθητές όχι μόνο αντιλαμβάνονται την έννοια της τρίτης διάστασης στο χώρο, αλλά συνθέτουν/δομούν και οι ίδιοι τρισδιάστατες διατάξεις στο χώρο.

Σχέση Μοντέλου με Άλλες Θεωρίες

Τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας δεν μπορούν να συσχετιστούν άμεσα με άλλες θεωρίες ή μοντέλα λόγω του ότι για πρώτη φορά έγινε προσπάθεια να περιγραφεί σε ένα ενιαίο μοντέλο η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Στο προηγούμενο κεφάλαιο συζητήθηκε η συσχέτιση επιμέρους αποτελεσμάτων της παρούσας εργασίας με προηγούμενες έρευνες που έγιναν και αναφέρονταν σε μεμονωμένες έννοιες όπως η ικανότητα διάταξης τρισδιάστατων αντικειμένων στο χώρο (Battista & Clements, 1998β) και τα στάδια ανάπτυξης της ικανότητας αναγνώρισης και κατασκευής αναπτυγμάτων τρισδιάστατων αντικειμένων Mariotti (1989). Τα αποτελέσματα της εργασίας θα μπορούσαν να συσχετιστούν σε ένα γενικό επίπεδο με το μοντέλο ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης των van Hiele και ειδικότερα με το μοντέλο του Gutierrez το οποίο αποτελεί μεταφορά των επιπέδων των van Hiele στην τρισδιάστατη γεωμετρία.

Το μοντέλο που προτείνεται στην παρούσα εργασία περιγράφει την ανάπτυξη της σκέψης των μαθητών ηλικίας έντεκα με δεκαπέντε ετών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Το μοντέλο αναλύει τις διαφορετικές διαστάσεις της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου και περιγράφει την ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών μέσω της αναγνώρισης ιεραρχικών επιπέδων σκέψης. Το κοινό στοιχείο με το μοντέλο της θεωρίας των van Hiele (1959) είναι η αναφορά σε ιεραρχικά επίπεδα σκέψης στη γεωμετρία. Το μοντέλο, όμως, των van Hiele αναφέρεται αποκλειστικά στη δισδιάστατη γεωμετρία. Λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας έδειξαν ότι η ικανότητα στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου εμπλέκει νοητικές διεργασίες που αναφέρονται στην αντίληψη των εννοιών του χώρου, δεν θα ήταν έγκυρη μια σύγκριση και αντιπαραβολή των αντίστοιχων επιπέδων της παρούσας εργασίας με το μοντέλο των van Hiele.

Το μοντέλο της παρούσας εργασίας δεν θα μπορούσε να συγκριθεί συνολικά ούτε και με το μοντέλο του Gutierrez (1992), γιατί το μοντέλο του Gutierrez αναφέρεται αποκλειστικά στη μελέτη των ιδιοτήτων των στερεών με βάση τις διαδικασίες οπτικοποίησης. Συνεπώς, θα μπορούσε να γίνει σύγκριση των επιπέδων του μοντέλου της παρούσας εργασίας με το μοντέλο του Gutierrez μόνο ως προς τους παράγοντες «αναγνώριση στερεών και των συστατικών τους στοιχείων» και «συλλογισμός για σχέσεις μεταξύ στοιχείων και ιδιοτήτων στερεών». Συγκεκριμένα, τα χαρακτηριστικά των μαθητών του πρώτου και δεύτερου επιπέδου του μοντέλου της παρούσας εργασίας αντιστοιχούν με το πρώτο επίπεδο του μοντέλου του Gutierrez, ως προς τη μελέτη και αναγνώριση των ιδιοτήτων των στερεών. Οι μαθητές των επιπέδων αυτών και στα δύο μοντέλα δεν μπορούν να οπτικοποιήσουν τα στερεά και να αντιληφθούν τα στοιχεία των στερεών που δεν είναι ορατά μπροστά τους και συγκρίνουν τα στερεά μεταξύ τους με βάση την ολική τους αντίληψη για το σχήμα των στερεών. Τα χαρακτηριστικά των μαθητών του τρίτου επιπέδου της παρούσας εργασίας αντιστοιχούν με τα χαρακτηριστικά του δεύτερου επιπέδου του μοντέλου του Gutierrez. Οι μαθητές αυτοί πέρα από τη σύγκριση των στερεών με βάση την εξωτερική τους εικόνα επικεντρώνονται στη σύγκριση μεμονωμένων στοιχείων ή ιδιοτήτων όπως ο αριθμός των κορυφών, εδρών και ακμών ή το μέγεθος κάποιων γωνιών και το μήκος των ακμών. Τέλος, τα χαρακτηριστικά των μαθητών του τέταρτου επιπέδου της παρούσας εργασίας αντιστοιχούν με τα χαρακτηριστικά του τρίτου επιπέδου του Gutierrez. Οι μαθητές αυτοί αναλύουν τα στερεά με μαθηματικό τρόπο ανεξάρτητα από τη φυσική τους παρουσία. Για τη σύγκριση των στερεών, οι μαθητές αναφέρονται σε στοιχεία και ιδιότητες τα οποία μπορούν να παρατηρήσουν άμεσα ή αξιοποιούν τις προϋπάρχουσες τους γνώσεις. Τα χαρακτηριστικά

των μαθητών του τέταρτου επιπέδου του Gutierrez δεν εντοπίστηκαν στους μαθητές της παρούσας εργασίας.

Εκπαιδευτικές Εφαρμογές του Μοντέλου

Το μοντέλο της παρούσας εργασίας μπορεί να αποτελέσει σημαντικό εργαλείο για τους εκπαιδευτικούς και τους ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών. Το μοντέλο καταδεικνύει στους εκπαιδευτικούς τις σημαντικότερες διαστάσεις της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου και υπογραμμίζει ότι η ανάπτυξη της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου προϋποθέτει την ενασχόληση των μαθητών με ποικιλία δραστηριοτήτων που αναφέρονται σε όσο το δυνατόν περισσότερες έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Τα αποτελέσματα της εργασίας έδειξαν, επίσης, ότι χρειάζεται να δοθεί περισσότερη προσοχή στη διδασκαλία των εννοιών της γεωμετρίας του χώρου και ότι η ενασχόληση μόνο με την αναγνώριση στερεών δεν αρκεί για την ανάπτυξη της πολυδιάστατης ικανότητας των μαθητών.

Η ιεραρχική δομή του μοντέλου έδειξε ότι η ανάπτυξη συγκεκριμένων ικανοτήτων μπορεί να διαδραματίσει καταλυτικό ρόλο στην ανάπτυξη των υπόλοιπων διαστάσεων της ικανότητας των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Για αυτό οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να δίνουν ιδιαίτερη έμφαση στην ανάπτυξη συγκεκριμένων ικανοτήτων όπως το χειρισμό διαφορετικών μορφών αναπαράστασης των τρισδιάστατων αντικειμένων (Ainsworth, Bibby, & Wood, 2002· Ainsworth, 1999) και τη διάταξη αντικειμένων στο χώρο. Τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας καταδεικνύουν στους εκπαιδευτικούς τη σημασία της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου των μαθητών και αποδεικνύουν τη αναγκαιότητα συμπερίληψης δραστηριοτήτων ανάπτυξης της οπτικοποίησης των εννοιών του χώρου, του προσανατολισμού στο χώρο και της αντίληψης των σχέσεων στο χώρο στη διδασκαλία των μαθηματικών και γενικότερα στο σχολικό αναλυτικό πρόγραμμα. Η ανάπτυξη της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου πρέπει να γίνει με συστηματικό τρόπο μέσω του εμβολιασμού όλων των σχολικών αντικειμένων με κατάλληλες δραστηριότητες. Η ανάπτυξης της αντίληψης των εννοιών του χώρου σε ένα συστηματικό γεωμετρικό περιβάλλον μπορεί να συμβάλει, επίσης, στην αξιοποίηση της διαισθητικής αντίληψης των μαθητών για το χώρο (Fischbein, 1994). Τα αποτελέσματα της εργασίας έδειξαν ότι η διαισθητική αντίληψη των μαθητών για το χώρο

αποτελεί ένα πολυδύναμο εργαλείο το οποίο μπορεί να βοηθήσει την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης, καθιστώντας τους μαθητές ικανούς να αντιλαμβάνονται στοιχεία των στερεών χωρίς την παρουσία κάποιου ερεθίσματος. Η διαισθητική αντίληψη των μαθητών για τις έννοιες του χώρου μπορεί να αποτελέσει, όμως, ανασταλτικό παράγοντα για την περαιτέρω μελέτη και ανάλυση της δομής των τρισδιάστατων αντικειμένων. Συνεπώς, σύμφωνα με τα αποτελέσματα της εργασίας καθίσταται σημαντικός ο ρόλος του εκπαιδευτικού ώστε να εμπλέξει τους μαθητές σε διερευνητικές δραστηριότητες μελέτης των στοιχείων και ιδιοτήτων των στερεών ώστε να μην αρκестούν στις επιφανειακές γνώσεις που τους προσφέρει η διαισθητική τους αντίληψη.

Η περιγραφή των ιεραρχικών επιπέδων ανάπτυξης της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου μπορεί να αποτελέσει ένα διαγνωστικό και θεραπευτικό εργαλείο για τους εκπαιδευτικούς. Η μελέτη της συμπεριφοράς ενός μαθητή σε αυτές τις έννοιες και η σύγκριση της συμπεριφοράς του με τα χαρακτηριστικά των επιπέδων μπορεί να βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς να τον κατατάξουν σε ένα επίπεδο και έτσι να αναγνωρίσουν ευκολότερα τις αιτίες των δυσκολιών που αντιμετωπίζει. Ταυτόχρονα, η μελέτη του μοντέλου μπορεί να παρέχει στους εκπαιδευτικούς πολύτιμες πληροφορίες για την επιλογή των κατάλληλων δραστηριοτήτων που θα συμβάλουν στην υπερπήδηση των προβλημάτων που αντιμετωπίζει ο κάθε μαθητής. Στην περίπτωση, για παράδειγμα, που η συμπεριφορά ενός μαθητή δείχνει χαρακτηριστικά του πρώτου επιπέδου σκέψης, ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να δώσει έμφαση σε δραστηριότητες ανάπτυξης της ικανότητας χειρισμού των διαφορετικών μορφών αναπαράστασης των στερεών πριν προχωρήσει σε δραστηριότητες υπολογισμού του εμβαδού επιφάνειας. Χρήσιμο στοιχείο είναι, επίσης, ότι τα επίπεδα δυσκολίας διαφέρουν ουσιαστικά και επομένως ο κάθε εκπαιδευτικός έχει τη δυνατότητα να επιλέξει τις κατάλληλες δραστηριότητες για τους μαθητές του κάθε επιπέδου, δίνοντας έμφαση στις συγκεκριμένες ανάγκες τους στις έξι διαστάσεις της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας στο χώρο.

Εισηγήσεις για Μελλοντικές Έρευνες

Η παρούσα εργασία εξέτασε τη δομή της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου και αναγνώρισε έξι διαστάσεις. Λόγω της απουσίας προηγούμενων σχετικών ερευνών η ανάπτυξη του μοντέλου της παρούσας εργασίας στηρίχτηκε στη μελέτη και σύνθεση αποτελεσμάτων ερευνητικών εργασιών που πραγματοποιήθηκαν τα τελευταία τριάντα χρόνια. Για αυτό είναι αναγκαία η επανάληψη παρόμοιων εργασιών που να

μελετούν την ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου με στόχο την εγκυροποίηση των μοντέλων της παρούσας εργασίας και τη συμπερίληψη στο μοντέλο άλλων διαστάσεων, όπως αποδείξεις θεωρημάτων στερεομετρίας. Είναι αναγκαία, επίσης, η πραγματοποίηση ερευνών με στόχο την εγκυροποίηση των τεσσάρων επιπέδων σκέψης στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου.

Στην παρούσα εργασία μελετήθηκε η ανάπτυξη της σκέψης των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου μέσω της αναγνώρισης ιεραρχικών επιπέδων σκέψης. Δεν πραγματοποιήθηκε, όμως, κατάλληλο παρεμβατικό πρόγραμμα με στόχο τη μελέτη της ανάπτυξης της ικανότητας των μαθητών με βάση τα επίπεδα σκέψης του μοντέλου. Θα ήταν πολύ χρήσιμο σε μελλοντική εργασία να μελετηθεί ο τρόπος με τον οποίο μπορεί να αναπτυχθεί η ικανότητα των μαθητών στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου μέσω κατάλληλου παρεμβατικού προγράμματος. Θα ήταν χρήσιμο, επίσης, να εξεταστεί η αποτελεσματικότητα παρεμβατικού προγράμματος διδασκαλίας με τη χρήση λογισμικών γεωμετρίας του χώρου ώστε να εξεταστεί η δυνατότητα των σύγχρονων λογισμικών ανάπτυξης της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου και στην ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου (Keller, Wasburn-Moses & Hart, 2002).

Σημαντικό αντικείμενο μελέτης σύγχρονων ερευνητικών εργασιών είναι το γνωστικό στυλ των μαθητών (Blajenkova, Kozhevnikov & Motes, 2006· Kozhevnikov, Motes & Hegarty, 2007). Τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για την εξέταση της σχέσης της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου και αντίληψης των εννοιών του χώρου με το γνωστικό στυλ των μαθητών. Μελλοντική ερευνητική εργασία θα μπορούσε να εξετάσει σε ποιο βαθμό η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου και η ικανότητα στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου καθορίζει το γνωστικό στυλ των μαθητών. Θα μπορούσε να διερευνηθεί κατά πόσον μαθητές με χαμηλό επίπεδο ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου έχουν περισσότερες πιθανότητες να υιοθετούν αναλυτικό/λεκτικό στυλ μάθησης. Ενδιαφέρουσα εισήγηση για μελλοντική έρευνα σε αυτό τον τομέα θα ήταν η μελέτη της σχέσης της ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου με τους δύο οπτικούς τύπους. Οι Kozhevnikov, Motes και Hegarty (2007) βρήκαν ότι υπάρχουν δύο οπτικοί τύποι. Ο πρώτος τύπος αντιπροσωπεύει τους μαθητές με υψηλό επίπεδο ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου και ο δεύτερος τύπος τους μαθητές με χαμηλό επίπεδο ικανότητας στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου. Θα μπορούσε να μελετηθεί με ποιο τρόπο η ικανότητα στις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου σχετίζεται με τους δύο οπτικούς τύπους.

- Ahuja, O. P. (1996). An investigation in the geometric understanding among elementary preservice teachers. Paper presented at the meeting of the ERA/AARE Conference, Singapore. [On-line]. Available: <http://swin.edu.au/aare/conf96/AHUJO96.485>
- Ainsworth, S., Bibby, P. A., & Wood, D. J. (2002). Examining the effects of different multiple representational systems in learning primary mathematics. *Journal of the Learning Sciences, 11*(1), 25–62.
- Ainsworth, S. (1999). The functions of multiple representations. *Computers and Education, 33*, 131–152.
- Atiyah, M. (2001). Mathematics in the 20th Century, *Mathematics Today, 37*(2), 46-53.
- Battista, M. (1999). Fifth graders' enumeration of cubes in 3D arrays: Conceptual progress in an inquiry-Based Classroom. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(4), 417-448.
- Battista, M. T. (1990). Spatial visualization and gender differences in high school geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*, 47-60.
- Battista, M. T. (1994). On Greeno's environmental/model view of conceptual domains: A spatial/geometric perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*, 86–94.
- Battista, M. T., & Clements, D. H. (1998α). Finding the number of cubes in rectangular cube buildings. *Teaching children Mathematics, 4*(5), 258-64.
- Battista, M. T., & Clements, D.H. (1998β). Students' understanding of three-dimensional cube arrays: Findings from a research and curriculum development project. In R. Lehrer and D. Chazan, D. (Eds.), *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space* (pp. 227-248). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Battista, M., & Clements, D. H. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*, 258–292.
- Battista, M.T., & Clements, D.H. (1991). *Logo geometry*. Morristown, NJ: Silver, Burdett & Ginn.
- Battista, M.T., Wheatley, G.H., & Talsma, G. (1982). The importance of spatial visualization and cognitive development for geometry learning of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*, 332-340.

- Bauersfeld, H. (1995). The Structuring of The Structures: Development and Function of Mathematizing as a Social Practice. In L. P. Steffe & J. Gale (Eds.), *Constructivism in Education* (pp. 137-158). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Ben-Chaim, D., Lappan, G., & Houang, R. (1989). Adolescent's ability to communicate spatial information: analyzing and effecting students' performance. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 121-146.
- Ben-Chaim, D., Lappan, G., & Houang, R. (1985). Visualizing rectangular solids made of small cubes: Analyzing and effecting students' performance. *Educational Studies in Mathematics*, 16(4), 389-409.
- Bishop, A. (1980). Spatial abilities and mathematics education: A review. *Educational Studies in Mathematics*, 11(3), 257-269.
- Bishop, A. (1983). Space and geometry. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Concepts and Processes* (pp. 176-203). New York: Academic Press.
- Bishop, A. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 7-16.
- Bodemer, D., Ploetzner, R., Feuerlein, I., & Spada, H. (2004). The active integration of information during learning with dynamic and interactive visualization. *Learning and Instruction*, 14, 325-341.
- Borowski, E., & Borwein, J. (1991). *The Harper Collins Dictionary of Mathematics*. New York: Harper Collins Publishers.
- Bourgeois, R. D. (1986). Third graders' ability to associate foldout shapes with polyhedra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17(3), 222-230.
- Braine, L. G., Schauble, L., Kugelmass, S., & Winter, A. (1993). Representation of depth by children: Spatial strategies and lateral biases. *Developmental Psychology*, 29, 466-479.
- Brown, D. L., & Wheatley, G. H. (1997). Components of imagery and mathematical understanding. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 19(1), 45-70.
- Brumby, M.N. (1982). Consistent differences in cognitive styles shown for qualitative biology problem-solving. *British Journal of Educational Psychology*, 52, 244-257.
- Bruni, J., & Seidenstein, R. (1990). Geometric concepts and spatial sense. In J. N. Payne & C. C. E. Clements (Eds.), *Mathematics for the young child* (pp. 202-227). Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics
- Burden, L., & Coulson, S. (1981). *Processing of spatial tasks*. Unpublished master's thesis, Monash University, Melbourne.
- Burger, W., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17, 31-48.

- Burnet, S. A., & Lane, D. (1980). Effects of academic instruction on spatial visualization. *Intelligence*, 4, 233-242.
- Burton, L.J., & Fogarty, G., J. (2003). The factor structure of visual imagery and spatial abilities. *Intelligence*, 31, 289–318.
- Carpenter, P.A., & Just, M.A. (1986). Spatial ability: An information processing approach to psychometrics. In R.J. Sternberg (Ed.), *Advances in the Psychology of Human Intelligence*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Carroll, J. B. (1993). *Human cognitive abilities: a survey of factor analytic studies*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Chávez, Ó., Reys, R. & Jones, D. (2005). Spatial visualization: What happens when you turn it? *Mathematics Teaching in the Middle School*, 11(4), 190-196.
- Chiappini, G., & Lemut, E. (1992). Interpretation and construction of computer-mediated graphic representations for the development of spatial geometry skills. In W. Geeslin & K. Graham (Eds.), *Proceedings of the 16th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 129-136). USA.
- Clements, D. & Battista, M., Arnoff, J., Battista, K., & van Auken Borrow, K. (1998). Students' spatial structuring of 2d arrays of squares. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(5), 503-532.
- Clements, D. (2007). Curriculum research: Toward a framework for “Research-based Curricula”. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(1), 35-70.
- Clements, D. H. & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D.A.Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). New York: Macmillan.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2007). Effects of a preschool mathematics curriculum: Summative research on the Building Blocks project. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(2), 136–163.
- Clements, D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. Z., & Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 192-212.
- Cohen, N. (2003). Curved solid nets. In N. Paterman, B. J. Doughery, & J. Zillox (Eds.), *Proceedings of the 27th International Conference of Psychology in Mathematics Education* (Volume 2, pp. 229-236).
- Collis, K. F., & Campbell, K. J. (1987). Mechanisms of transition in the calculation of volume during the concrete symbolic mode. In G. Bergeron, N. Herscovics, & C.Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th International Conference of Psychology in Mathematics*

- Education* (Volume, 3, pp. 292-298).
- Colom, R., Contreras, M.J., Botella, J., & Santacreu, J. (2001). Vehicles of spatial ability. *Personality and Individual Differences*, 32, 903–912.
- Connor, J. M. & Serbin, L. A. (1985). Visual-spatial skill: Is it important for mathematics? Can it be taught? In S. F. Chipman, L. R. Brush, & D. M. Wilson (Eds.) *Women and Mathematics: Balancing the Equation* (pp. 151-174). Hillsdale, NJ: Erlbaum Associates Inc.
- Cooper, L. A. (1990). Mental representation of three dimensional objects in visual problem solving and recognition. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 16(6), 1097-1106.
- Cooper, M., & Sweller, J. (1989). Secondary school students' representations of solids. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(2), 202-212.
- Daintith, J. & Nelson, R. D. Eds. (1989). *The Penguin Dictionary of Mathematics*. London: Penguin Books.
- Darke, I. (1982). A review of research related to the topological primacy thesis. *Educational Studies in Mathematics*, 21, 238-242.
- De Villiers M.D. (1996). *Some adventures in Euclidean geometry*. Durban: University of Durban-Westville.
- Demetriou, A., Christou, C., Spanoudis, G., & Platsidou, M. (2002). The development of mental processing: Efficiency, working memory, and thinking. *Monographs of the Society of Research in Child Development* (Serial Number 267).
- Denis, L. P. (1987). Relationships between stage of cognitive development and van Hiele level of geometric thought among Puerto Rican adolescents. *Dissertation Abstracts International*, 48, 859A.
- Denzin, N. K. & Lincoln, Y. S. (Eds.) (1998a). *Collecting and interpreting qualitative materials*. Thousand Oaks, California: SAGE.
- Eisenberg, T. & Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. In Zimmerman, W. and Cunningham, S. (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 25-37). MAA Notes Number 19. Washington DC: Mathematical Association of America.
- Ekstrom, R. B., French, J. W., & Harman, H. H. (1976). *Manual for kit of factor-referenced cognitive tests*. Princeton, NJ: Educational Testing Service.
- Elsheikh, A. (1995). *An introduction to drawing for civil engineers*. London: McGraw-Hill.
- English, L. (1993). Children's strategies for solving two and three dimensional combinatorial problems. *Educational Studies in Mathematics*, 24(3), 255-273.

- Farah, M. J., Hammond, K. M., Levine, D. N., & Calvanio, R. (1988). Visual and spatial memory: Dissociable systems of representation. *Cognitive Psychology*, 20, 439–462.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139-162.
- Fischbein, E. (1994). The Interaction between the Formal, the Algorithmic and the Intuitive Components in a Mathematical Activity. In R. Biehler *et al* (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (, 231-245). Dordrecht: Reidel.
- Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics*, 3, 413-435.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, the Netherlands: Reidel.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht, the Netherlands: Reidel.
- Friedman, L. (1995). The space factor in mathematics: Gender differences. *Review of Educational Research*, 65, 22-50.
- Fujita, T. & Jones, K. (2003). The Place of Experimental Tasks in Geometry Teaching: design of the early 20th Century. *Research in Mathematics Education*, 5, 47-62.
- Fujita, T., Jones, K., & Yamamoto, S. (2004). Geometrical intuition and the learning and teaching of geometry. *Paper presented to Topic Study Group 10 (TSG10) at the 10th International Congress on Mathematical Education (ICME-10)*. Copenhagen, Denmark.
- Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). The van Hiele level of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education Monograph*, 3.
- Gaulin, C. (1985). The need for emphasizing various graphical representations of 3-dimensional shapes and relations. In L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the Ninth 9th International Conference for the PME* (Volume II, pp. 53-71), Noordwijkehout, The Netherlands,.
- Geddes, D., & Fortunato, I. (1993). Geometry: Research and classroom activities. In D. T. Owens (Ed.), *Research Ideas for the Classroom: Middle Grades Mathematics*. New York: Macmillan.
- Godfrey, C. (1910). The Board of Education Circular on the Teaching of Geometry. *Mathematical Gazette*. 5, 195-200.
- Goldenberg, E. P., Cuoco, A. A. & Mark, J. (1998). A role for geometry in general education. In R. Lehrer and D. Chazan, D. (Eds.), *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space* (pp. 3-44). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Goldenberg, E., P., (1992). Ruminations about Dynamic Imagery (and a strong plea for research). Exploiting mental imagery with computers in mathematics education. Paper

was presented at NATO Advanced Research Workshop, Oxford.

- Goldenberg, E., P., Lewis, P. and O' Keefe, J. (1992). Dynamic representation and the development of a process understanding of function. In G.Harel, & E. Dubinsky, (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. MAA Notes Number 25. Washington DC: Mathematical Association of America.
- Gorgorio, N. (1998). Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 207-231.
- Gravemeijer, K. P. (1998). From a different perspective: Building on student's informal knowledge. In R. Lehrer and D. Chazan, D. (Eds.), *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space* (pp. 45-66). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Guillen, G. (1996). Identification of Van Hiele levels of reasoning in three-dimensional geometry. In L. Puig and A. Guttierrez (Eds.) *Proceedings of the 20th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 43-50). Valencia: Universidad de Valencia.
- Gutierrez, A, Jaime, A., & Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(3), 237-251.
- Gutierrez, A. & Lawrie, C. & Pegg, J. (2004) Characterization of students' reasoning and proof abilities in 3-dimensional geometry. In M. J.Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.) *Proceedings of the 28th conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 511-518). Bergen, Norway.
- Gutiérrez, A. (1992). Exploring the links between Van Hiele levels and 3-dimensional geometry. *Structural Topology*, 18, 31-48.
- Gutierrez, A. (1994). The aspect of polyhedra as a factor influencing the students' ability for rotating them. In *New Directions in Geometry Education: Proceedings of the Third Annual Conference on Mathematics Teaching and Learning*. Queensland, Australia: The Centre for Mathematics and Science Education, Queensland University of Technology.
- Gutierrez, A. (1995). Learning Dynamic Geometry: Implementing Rotations. In A. A. diSessa, C. Hoyles, & R. Noss (Eds.), *Computers and Exploratory Learning* (pp. 276-288). Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
- Gutiérrez, A. (1996) Vizualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In L. Puig and A. Guttierrez (Eds.) *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 3-19). Valencia: Universidad de Valencia.

- Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1993). An analysis of the students' use of mental images when making or imagining movements of polyhedra. In I. Hirabayashi, et al. (Eds.), *Proceedings of the 17th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 153-160). Tsukuba, Japan.
- Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 20(2/3), 27-46.
- Gutiérrez, A., Pegg, J., & Lawrie, C. (2004). Characterization of students' reasoning and proof abilities in 3-dimensional geometry. *The 28th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp 511-518). Bergen, Norway.
- Halpern, D. F. & Collaer, M. C. (2005) Sex differences in visuospatial abilities: More than meets the eye. In Shah, P. & Miyake, A. (eds), *The Cambridge Handbook of Visuospatial Thinking*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Han, T. (1986). The effects on achievement and attitude if a standard geometry textbook and a textbook consistent with the van Hiele theory. *Dissertation Abstracts International*, 47, 3690A.
- Harel, G. & Sowder, L. (1998). Student proof schemes result from exploratory studies. In Schoenfeld, A., Kaput, J. & Dubinsky, E. (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics III* (pp. 234-282). American Mathematical Society.
- Hazzan, O. & Goldenberg, P., E. (1997). Students' understanding of the notion of function in dynamic geometry environments. *International Journal of Computers for Mathematical learning*, 1, 263-291.
- Hegarty, M., Richardson, A., Montello, D.A., Lovelace, K., & Subbiah, I. (2002). Development of self-report measure of environmental spatial ability. *Intelligence*, 30, 425-447.
- Hegarty, M. & Waller, D. A. (2005) Individual differences in spatial abilities. In Shah, P. & Miyake, A. (eds), *The Cambridge Handbook of Visuospatial Thinking*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Hegarty, M. and Kozhevnikov, M. (1999). Spatial reasoning abilities, working memory, and mechanical reasoning. In J.S. Gero and B. Tversky (eds.), *Visual and Spatial Reasoning in Design* (pp. 1-19). Sydney: Key Center of Design Computing and Cognition.
- Hegarty, M., & Waller, D. (2004). A dissociation between mental rotation and perspective-taking spatial abilities. *Intelligence*, 32, 175-191.
- Hershkowitz, R., Ben-Chaim, D., Hoyles, C., Lappan, G., Mitchelmore, M., & Vinner, S. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In P.Nesher & J.Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the*

- Psychology of Mathematics Education* (pp. 70-95). Cambridge, MA: Cambridge University Press.
- Hershkowitz, R., Parzysz, B., & Dormolen, J. van (1996). Space and shape. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 161-204). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.
- Ho, C.H., & Eastman, C. (2006). An investigation of 2d and 3d spatial and mathematical abilities. *Design Studies*, 27(4), 505-524.
- Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *Mathematics Teacher*, 74, 11-18.
- Hoffer, A. (1983). Van-hiele based research. In R.Lesh & M.Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 205-227). New York, NY: Academic Press.
- Jones, K. (1998). Deductive and intuitive approaches to solving geometrical problems. In C. Mammana and V. Villani (Eds.), *Perspective on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. Dordrecht: Kluwer.
- Jones, K., & Mooney, C. (2003). Making space for geometry in primary mathematics. In I.Thompson (Ed.), *Enhancing Primary Mathematics Teaching and Learning* (pp3-15). London: Open University Press.
- Keller, B., Wasburn-Moses, J., & Hart, E. (2002). Improving Student's Spatial Visualization Skills and Teacher's Pedagogical Content Knowledge by using On-Line Curriculum-Embedded Applets. *National Council of Teachers of Mathematics Illuminations Project*. Retrieved April 8, 2006 from: <http://illuminations.nctm.org/downloads/IsoPaperV4.pdf>
- Kelly, A. & Lesh, R. (2000). *Handbook of research design in mathematics and science education*. London: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kosslyn, S. M. (1980). *Image and mind*. London: Harvard University Press.
- Kosslyn, S. M. (1995). Mental imagery. In S. M. Kosslyn & D. N. Osherson (Eds.), *Visual cognition: An invitation to cognitive science* (Vol. 2, pp. 267–296). Cambridge, MA: MIT Press.
- Kozhevnikov, M. & Hegarty, M. (2001). A dissociation between object-manipulation and perspective-taking spatial abilities. *Memory & Cognition*, 29, 745-756.
- Kozhevnikov, M., Motes, M.A., & Hegarty, M (2007) Spatial visualization in physics problem solving. *Cognitive Science: A Multidisciplinary Journal*, 31(4), 549-579.
- Kruteskii, V.A. (1976): *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*.(Univ. of Chicago P.: Chicago, USA).
- Kwon, O.N., Kim, S.H., & Kim, Y. (2001). Enhancing spatial visualization through virtual reality on the web: Software design and impact analysis. In M. van den Heuvel-

- Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 265-272). Utrecht University: The Netherlands.
- Kóchemann, D., & Hoyles, C. (2006). Influences on students' mathematical reasoning and patterns in its development: insights from a longitudinal study with particular reference to geometry. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 4(4), pp 581 - 608.
- Lampen, E. & Murray, H. (2001). Children's intuitive knowledge of the shape and structure of three dimensional containers. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 273-280). Utrecht University: The Netherlands.
- Languis, M. L. (1998). Using knowledge of the brain in educational practice. *NASSP Bulletin*, 82, 38-47.
- Lawrie C., Pegg, J., & Gutierrez, A. (2000). Coding the nature of thinking displayed in responses on nets of solids. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 215-222). Hiroshima, Japan.
- Lawrie C., Pegg, J., & Gutierrez, A. (2002). Unpacking student meaning of cross-sections: A frame for curriculum development. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 289-296). Norwich, UK.
- Lean, G., & Clements, M. A. (1981). Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 267-299.
- Lehrer, R., & Chazan, D. (1998). *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lehrer, R., Jenkins, M., & Osana, H. (1998). Longitudinal study of children's reasoning. In R. Lehrer and D. Chazan, D. (Eds.), *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space* (pp. 137-168). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lewalter, D. (2003). Cognitive strategies for learning from static and dynamic visuals. *Learning & Instruction*, 13(2), 177-189.
- Linn, M. C., & Petersen, A. C. (1985). Emergence and characterisation of gender differences in spatial abilities: A meta-analysis. *Child Development*, 56, 1479-1498.
- Logie, R. H. (1995). *Visuo-spatial working memory*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Lohman, D. (1979). *Spatial ability: a review and reanalysis of the correlational literature*.

- (*Technical report, N. 8*). Stanford University, School of Education: Aptitude Research Project.
- Lohman, D. (1988). Spatial abilities as traits, processes and knowledge. In R. J. Sternberg (Ed.), *Advances in the psychology of human intelligence* (Vol. 4). Hillsdale, NJ: LEA.
- Lohman, D. (2000): Complex information processing. In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook of human intelligence*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Lowe, R. K. (1999). Extracting information from an animation during complex visual learning. *European Journal of Psychology of Education, 14*, 225–244.
- Lowe, R. K. (2003). Animation and learning: selective processing of information in dynamic graphics. *Learning and Instruction, 13*, 247–262.
- Lowe, R. K. (2004). Interrogation of a dynamic visualization during learning. *Learning and Instruction, 14*(3), 257–274.
- Lowrie, T. (2002). The influence of visual and spatial reasoning in interpreting simulated 3D worlds. *International Journal of Computers in Mathematical Learning, 7*(3), 301-318.
- Lunkenbein, D. (1983). Observations concerning the child's conception of space and its consequences for the teaching of geometry to younger children. In *Proceedings of the 4th International Congress on Mathematical Education* (pp. 172-174). Boston, MA: Birkhauser.
- Maier, P. H. (1996). Spatial geometry and spatial ability: How to make solid Geometry solid? In E. Cohors-Fresenborg, H.Maier, K.Reiss, G. Toerner, H. Weigand, *Proceedings of the Annual Conference of Didactics of Mathematics* (pp. 69-81).
- Marcoulides, G. A., & Schumacker, R. E. (1996). *Advanced structural equation modelling: Issues and techniques*. NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Mariotti, M. A. (1989). Mental images: some problems related to the development of solids. In G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artique (Eds.), *Proceedings of the 13rd International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 258-265). Paris, France.
- Mariotti, M.A. (1997). Justifying and proving: figural and conceptual aspects. In Hejny M. & Novotna J. (Eds), *Proceedings of the European Research Conference on Mathematical Education*, Podedbrady, Czech Republic.
- Markopoulos, C., & Potari, D. (1999). Forming relationships in three dimensional geometry through dynamic environments. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 273-280). Haifa, Israel.
- Markopoulos, C., & Potari, D. (2000). Dynamic transformations of solids in the mathematics

- education. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp.215-222). Hiroshima, Japan.
- Mason, J. (1991). Questions about Geometry. In D. Pimm & E. Love (Eds.), *Teaching and Learning School Mathematics* (pp. 77-90). Hodder and Stoughton, London.
- Mason, M. (2005). The van Hiele levels of geometric understanding. In *Professional Handbook for Teachers, Geometry: Explorations and applications* (pp. 4-8). McDougal Littell Inc. preservice teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14, 58-69.
- Mayberry, J. (1983). The van Hiele levels of geometric thought in undergraduate spatial abilities: A meta-analysis and consideration of critical variables. *Psychological Bulletin*, 117, 250-270.
- Maykut, P. & Morehouse, R. (1994). *Beginning Qualitative Research: A philosophical and practical guide*. London: The Falmer Press.
- McGee, M.G. (1979). Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences. *Psychological Bulletin*, 86(5), 889-918.
- Meissner, H. & Pinkernell, G. (2000). Spatial abilities in primary schools. *The 24th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, 287-294).
- Meissner, H. (2001). Encapsulation of a process in geometry. *The 25th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.3, 359-366).
- Mendicino, L. (1958). Mechanical reasoning and space perception: Native capacity of experience. *Personality Guidance Journal* 36, 335~338.
- Miles, M. & Huberman, M. (1994). *Qualitative data analysis*. Thousand Oaks, C.A.: Sage.
- Mitchelmore, M. C. (1980). Prediction of developmental stages in the representation of regular space figures. *Journal for Research in Mathematics Education*, 11(2), 83-93.
- Mitchelmore, M. C.(1975). The perceptual development of Jamaican students, with special reference to visualization and drawing of three-dimensional geometrical figures and effects of spatial training. (Doctoral Dissertation, Ohio State University, 1974), *Dissertation Abstracts International*, 35, 7310A.
- Mundy, J. F. (1987). Spatial training for calculus students: Sex differences in achievement and in visualization ability. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18, 126-140.
- Muthen, L. K. & Muthen, B. O. (2004). *Mplus User's Guide*. Third Edition. Los Angeles, CA: Muthen & Muthen.

- Myers, C. T. (1958). *The Effects of Training in Mechanical Drawing on Spatial Relations Test Scores as Predictors of Engineering Drawing Grades*, ETS Research Bulletin, 58-4, Educational Testing Service, Princeton, N.J.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: Va, NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics* (Rev. ed.). Reston, Va.: The Council.
- National Research Council. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. J. Kilpatrick, J. Swafford, and B. Findell (Eds). Mathematics Learning Subcommittee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: National Academy Press.
- Olkun, S. (2003). Establishing Conceptual Bases for the Measurement of Volume. *International Online Journal of Science and Mathematics Education*, 3 [Online]
<http://www.ismed.upd.edu.ph/online>
- Orton, A., & Frobisher, L. (1996). *Insights into Teaching Mathematics*. Cassell Education.
- Owens, K. & Outhred, L. (2006). The complexity of learning geometry and measurement. In A.Gutierrez & P.Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 83-116). Sense Publishers.
- Owens, K. (1999). The role of visualization in young students' learning. *The 23th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, 220-234).
- Parzysz, B. (1988). Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19(1), 79-92.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1956). *The child's conception of space*. London: Routledge & Kegan.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1967). *The child's conception of space*. New York: W. W. Norton & Co.
- Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska A. (1960) *The child's conception of geometry*. London, Routledge & Kegan.
- Potari, D., & Spiliotopoulou, V. (1992). Children's Representations of the development of solids. *For the Learning of Mathematics*, 12(1), 38-46.
- Potari, D., & Spiliotopoulou, V. (1996). Children's approaches to the concept of volume. *Science Education*, 80(3), 341-360.
- Potari, D., & Spiliotopoulou, V. (2001). Patterns in children's drawings and actions while constructing the nets of solids: the case of the conical surfaces. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 23(4).

- Presmeg, N. & Bergsten, C. (1995) Preference for visual methods: An international study. In L. Meira and D. Carraher (Eds.) *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, vol 3, pp.58-65. Recife, Brazil: Universidade Federal de Pernambuco.
- Presmeg, N. (1986 α). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6(3), 42-46.
- Presmeg, N. (1986 β). Visualization and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics*, 17, 297-311.
- Presmeg, N. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 595-610.
- Presmeg, N. (1997). Generalization using imagery in mathematics. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images* (pp. 299-312). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A.Gutierrez & P.Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 205-236). Sense Publishers.
- Presmeg, N. (1997a).
- Quaiser-Pohl, C., Lehmann, W., & Eid, M. (2004). The relationship between spatial abilities and representations of large-scale space in children-a structural equation modelling analysis. *Personality and Individual Differences*, 36, 95-107.
- Saads, S., & Davis, G. (1997 α). Visual perception and image formation in three dimensional geometry. Retrieved 20 August, 2005, from University of Southampton, Department of Education, Web-site:
<http://www.crme.soton.ac.uk/publications/gdpubs/Saads&Davis.html>
- Saads, S., & Davis, G. (1997 β). Spatial abilities, van Hiele levels and language in three dimensional geometry. In E.Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 104-111). Lahti: Finland, University of Helsinki.
- Sedgwick, L. K. (1961). *The Effect of Spatial Perception of Instruction in Descriptive Geometry*, Masters thesis, Southern Illinois University.
- Senechal, M. (1991). Visualization and visual thinking. In J.Malkevitch (Ed.), *Geometry's future* (pp. 15-21). Arlington, MA: Community Analysis Project.
- Shama, G. & Dreyfus, T. (1994). Visual, algebraic and mixed strategies in visually presented linear programming problems. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 45-70.
- Shepard, R. N. (1978). The mental image. *American Psychologist*, 125-137.

- Smail, B. (1983). Spatial visualization skills and technical drafts education. *Educational Research*, 25, 230-1.
- Steffe, L. P., & Cobb, P. (1988). *Construction of arithmetical meanings and strategies*. New York: Springer-Verlag.
- Stylianou, D. A., Leikin R., & Silver, E. A. (1999). Exploring students' solution strategies in solving a spatial visualization problem involving nets. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 241-248). Haifa, Israel.
- Tartre, L. A. (1990). Spatial orientation skill and mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(3), 216-229.
- Tashakkori, A. & Teddlie, C. (2002). *Handbook of mixed methods in social and behavioural research*. Sage Publications.
- Tso, T., & Liang, Y.N. (2002). The study of interrelationship between spatial abilities and van hiele levels of thinking in geometry of eight-grade students. *Journal of Taiwan Normal University*, 46(2).
- Ullstadius, E., Carlstedt, B., & Gustafsson, J.E. (2004). Multidimensional item analysis of ability factors in spatial test items. *Personality and Individual Differences*, 37, 1003–1012.
- Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry* (Final report of the Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry Project). Chicago, IL: University of Chicago, Department of Education.
- van Garderen, D., & Montague, M. (2003). Visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Learning Disabilities & Research*, 18, 246-254.
- Van Hiele, P. (1959/1985). The child's thought and geometry: In D.Fuys, D.Geddes, & R.Tischler (Eds.), *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele* (pp. 243-252). Brooklyn, NY: Brooklyn College, School of Education.
- Van Hiele, P. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Orlando, FL: Academic Press.
- Van Hiele, P. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics*, 5(6), 310-316.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2.3), 133-170.
- Vinner S. & Hershkowitz R. (1980). Concept Images and some common cognitive paths in the development of some simple geometric concepts. *Proceedings of the 4th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 177-184). Berkeley.

- Vinner, S., & Hershkowitz, R. (1983). On concept formation in geometry. *ZDM*, 15(1), 20-25.
- von Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning*. Washington, DC: Falmer Press.
- Voyer, D. & Sullivan, A. (2003). The relation between spatial and mathematical abilities: Potential factors underlying suppression. *International Journal of Psychology*, 38(1), 11-23.
- Voyer, D., Voyer, S., & Bryden, M. P. (1995). Magnitude of sex differences in
- Webb, R.M., Lubinski, D., & Benbow, C.P. (2007). Spatial ability: A neglected dimension in talent searches for intellectually precocious youth. *Journal of Educational Psychology*, 99, 397-420.
- Wedge, T. (1999). To know - or not to know - mathematics, that is a question of context. *Educational Studies in Mathematics*, 39(1-3) 205-227.
- Wheatley, G. H. (1997). Reasoning with images in mathematical activity. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images* (pp. 281-297). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Wheatley, G., & Cobb, P. (1990). Analysis of young children's spatial constructions. In L. P. Steffe & T. Wood (Eds.), *Transforming children's mathematics education: International perspectives* (pp.161-173). NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Wiedenbauer, G., & Jansen-Osmann, P. (in press). Manual training of mental rotation in children. *Learning and Instruction*.
- Yakimanskaya, I.S. (1991): *The development of spatial thinking in schoolchildren* ("Soviet Studies in Mathematics Education" vol. 3). (N.C.T.M.: Reston, USA).
- Yerushalmy, M. & Chazan, D. (1990). Overcoming visual obstacles with the aid of the supposer. *Educational Studies in Mathematics*, 21, 199-219.
- Zacks, J. M., Mires, J., Tversky, B., & Hazeltine, E. (2002). Mental spatial transformations of objects and perspective. *Spatial Cognition & Computation*, 2, 315-22.
- Zazkis, R., Dubinsky, E. & Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: a study of students' understanding of the group D. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 435-457.
- Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics*. Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Πιττάλης, Μ., Μουσουλίδης, Ν., & Χρίστου, Κ. (2006). Η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου ως παράγοντας πρόβλεψης της μαθηματικής ικανότητας. Στους Α. Γαγάτση, Ι. Ηλία, Α. Κουσιάππα, Μ. Μοδέστου, Ν. Μουσουλίδη & Μ.Πιττάλη (Εκδ.), *Σύγχρονη*

Έρευνα στη Μαθηματική Παιδεία (σσ. 149-158).

ΜΑΡΙΟΣ ΧΡ. ΠΙΤΤΑΛΗΣ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΜΑΡΙΟΣ ΧΡ. ΠΙΤΤΑΛΗΣ

Τεστ Αντίληψης των Εννοιών του Χώρου

ΜΑΡΙΟΣ ΧΡ. ΠΙΤΤΑΛΗΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής

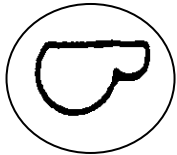
Όνομα:

Σχολείο: Τάξη:

Μέρος Α΄:

Στο μέρος αυτό δίνεται ένα σχήμα πάνω από τη γραμμή και πέντε σχήματα κάτω από τη γραμμή. Ποιο από τα σχήματα που βρίσκονται κάτω από τη γραμμή μπορεί να προκύψει από περιστροφή του σχήματος που βρίσκεται πάνω από τη γραμμή; Να το βάλεις σε κύκλο.

Παράδειγμα:



(α)



(β)



(γ)

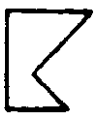


(δ)



(ε)

1.



(α)



(β)



(γ)



(δ)



(ε)

2.



(α)



(β)



(γ)



(δ)



(ε)

3.



(α)



(β)



(γ)



(δ)



(ε)

4.



(α)



(β)



(γ)



(δ)



(ε)

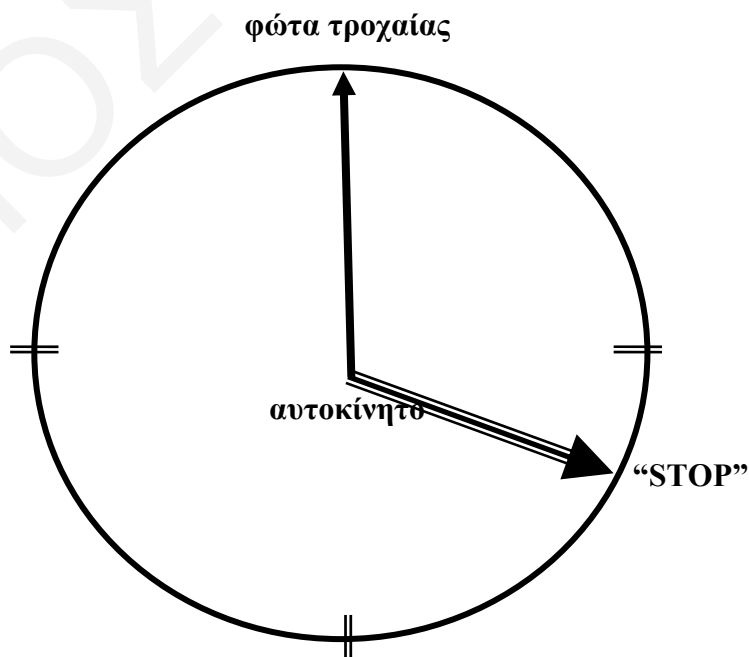
Μέρος Β΄:

Στο μέρος αυτό πρέπει να ΦΑΝΤΑΣΤΕΙΣ ότι βρίσκεσαι σε ένα από τα 7 σημεία που βρίσκονται στην εικόνα και ότι κοιτάζεις ΠΡΟΣ ένα από τα υπόλοιπα σημεία. Πρέπει να σχεδιάσεις το κατάλληλο τόξο στον κύκλο που ακολουθεί για να δείξεις τη θέση ενός αντικειμένου. Στο κέντρο του κύκλου είναι το σημείο στο οποίο βρίσκεσαι και το κατακόρυφο τόξο δείχνει το σημείο προς το οποίο κοιτάζεις.

Παράδειγμα:



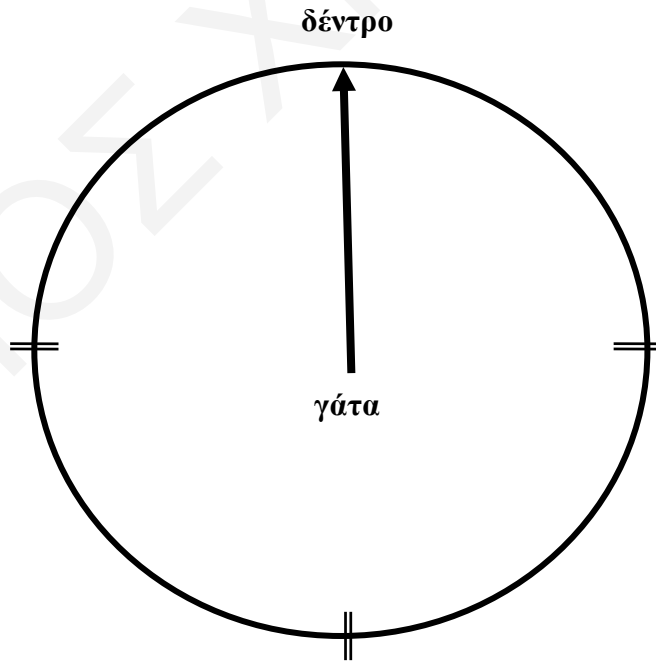
Να φανταστείς ότι βρίσκεσαι στο **ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟ** και βλέπεις προς τα **ΦΩΤΑ ΤΡΟΧΑΙΑΣ**.
Να **ΔΕΙΞΕΙΣ** πιο κάτω τη θέση του σήματος “STOP”, σχεδιάζοντας το κατάλληλο τόξο.



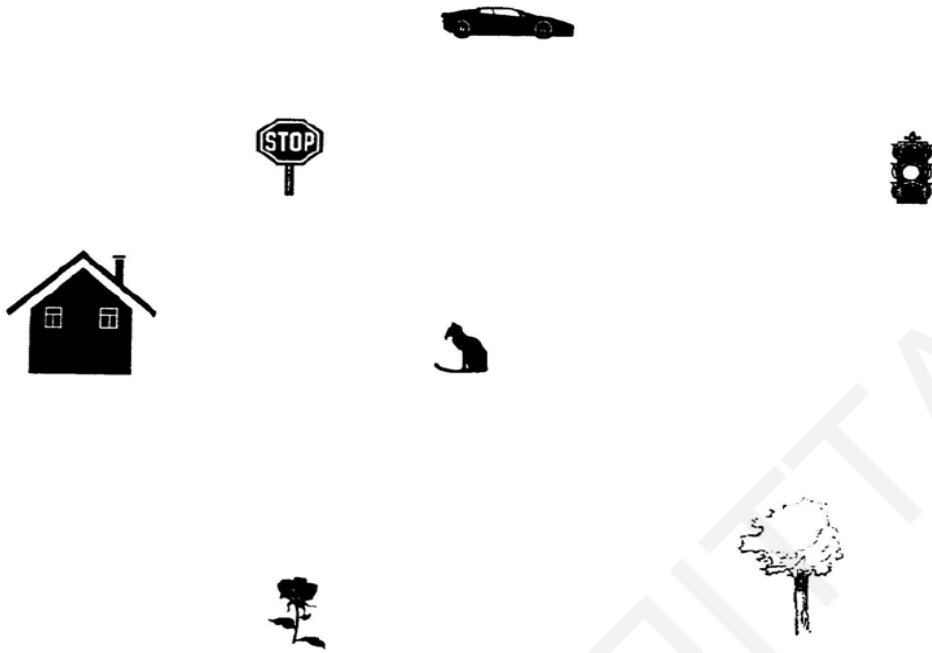
1.



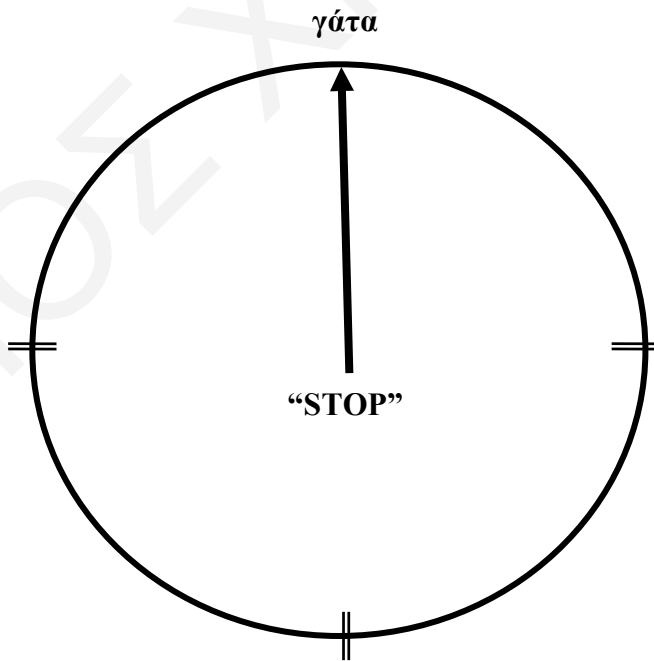
Να φανταστείς ότι βρίσκεσαι στη ΓΑΤΑ και κοιτάζεις προς το ΔΕΝΤΡΟ.
Να ΔΕΙΞΕΙΣ πιο κάτω τη θέση του ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΥ, σχεδιάζοντας το κατάλληλο τόξο.



2.



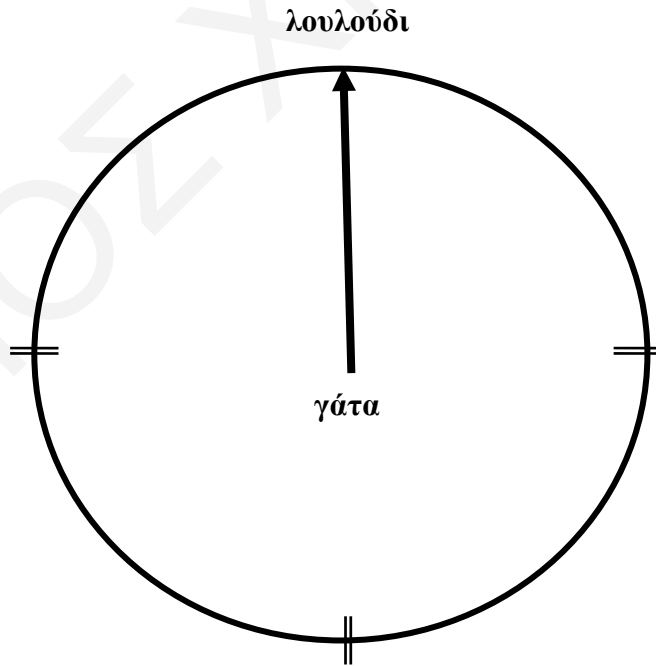
Να φανταστείς ότι βρίσκεσαι στη θέση του σήματος “STOP” και κοιτάξεις προς τη ΓΑΤΑ.
Να ΔΕΙΞΕΙΣ πιο κάτω τη θέση του ΣΠΙΤΙΟΥ, σχεδιάζοντας το κατάλληλο τόξο.



3.



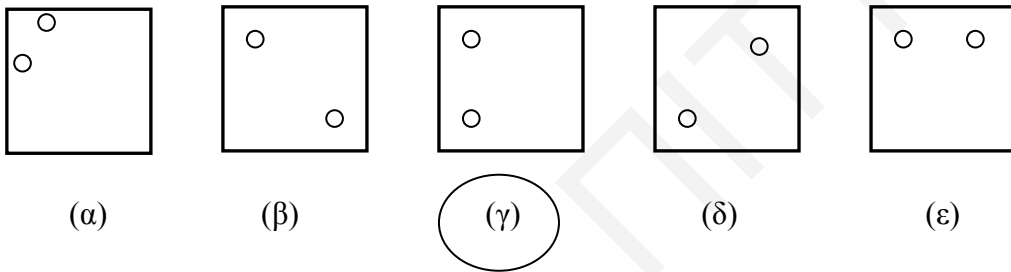
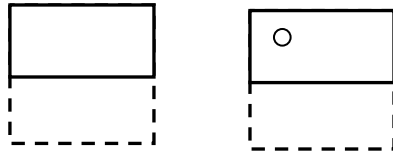
Να φανταστείς ότι βρίσκεσαι στη θέση της ΓΑΤΑΣ και κοιτάζεις προς το ΛΟΥΛΟΥΔΙ.
Να ΔΕΙΞΕΙΣ πιο κάτω τη θέση του ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΥ, σχεδιάζοντας το κατάλληλο τόξο.



Μέρος Γ΄:

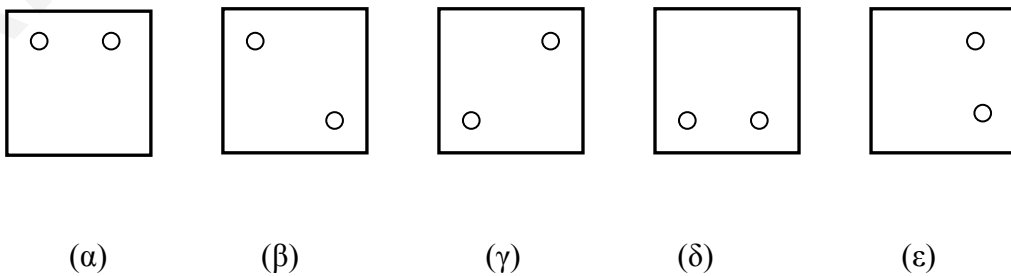
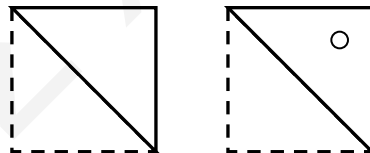
Στο μέρος αυτό παρουσιάζεται πάνω από τη γραμμή ο τρόπος με τον οποίο διπλώνεται ένα τετράγωνο χαρτόνι και η θέση στην οποία ανοίγουμε μια τρύπα όταν το χαρτόνι είναι διπλωμένο. Να βάλεις σε κύκλο το σχήμα κάτω από τη γραμμή που δείχνει πώς θα φαίνεται το χαρτόνι όταν ανοιχθεί.

Παράδειγμα:

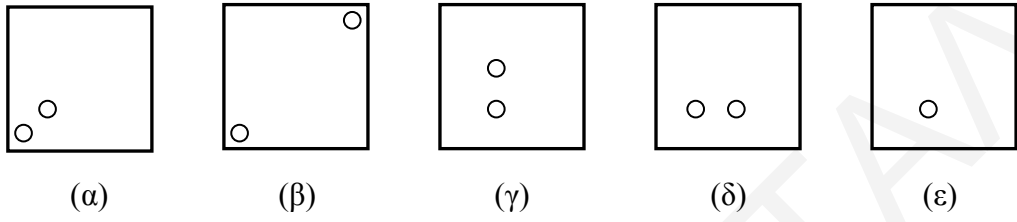
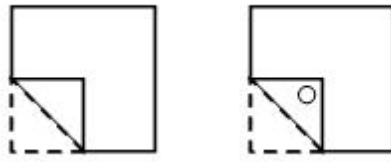


Η σωστή απάντηση στο παράδειγμα αυτό είναι το (γ).

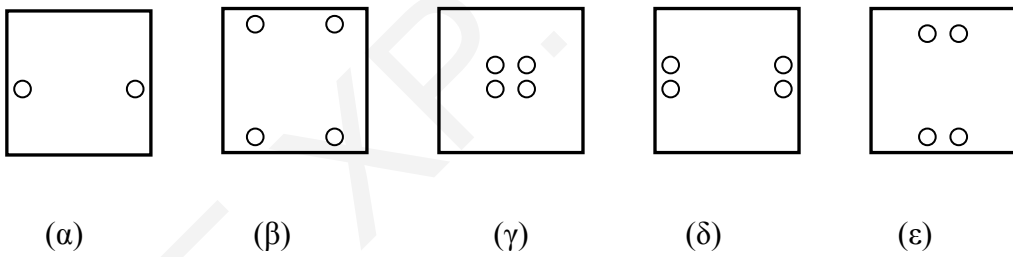
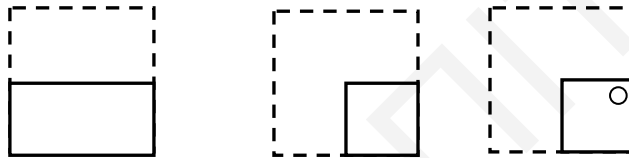
1.



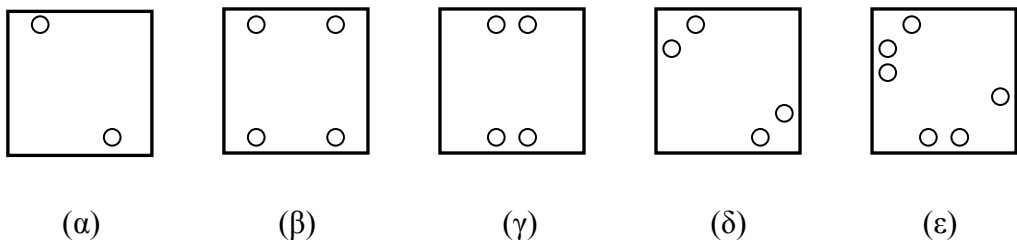
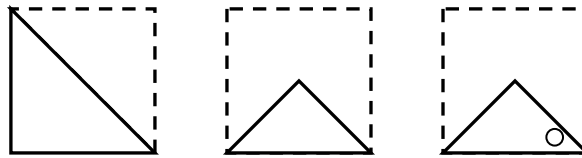
2.



3.



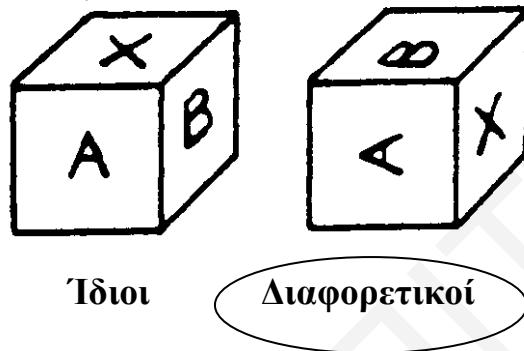
4.



Μέρος Γ΄:

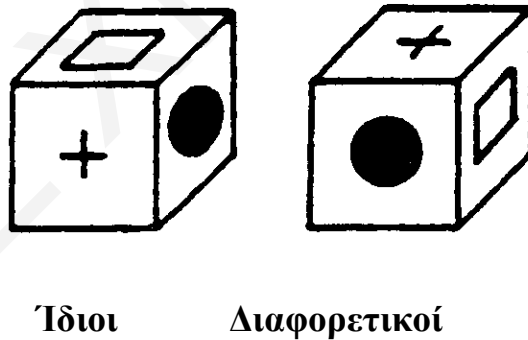
Στο μέρος αυτό δίνεται κάθε φορά ένα ζεύγος από κύβους. Σε κάθε πλευρά του κύβου υπάρχει ένα σύμβολο. Σε κάθε πλευρά υπάρχει **ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΟ** σύμβολο. Πρέπει να αποφασίσεις κατά πόσο οι κύβοι **ΜΠΟΡΕΙ** να είναι ίδιοι ή διαφορετικοί βάζοντας σε κύκλο αυτό που ταιριάζει. Οι κύβοι είναι ίδιοι αν ο ένας μπορεί να προκύψει από περιστροφή του άλλου.

Παράδειγμα:

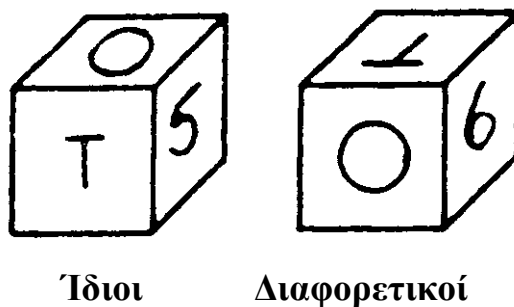


Στο παράδειγμα αυτό οι κύβοι είναι διαφορετικοί γιατί όταν περιστρέψουμε τον πρώτο κύβο προς τα αριστερά για να έχουμε το A στην ίδια θέση που είναι στο δεύτερο κύβο, το X θα βρίσκεται στην αριστερή πλευρά του A, ενώ αν ήταν οι ίδιοι θα έπρεπε να βρίσκεται στη δεξιά πλευρά του.

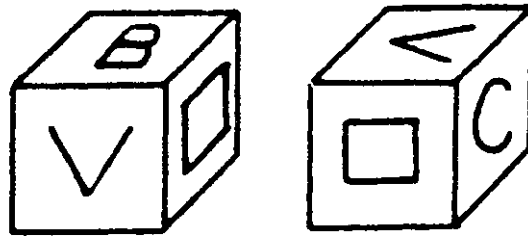
1.



2.



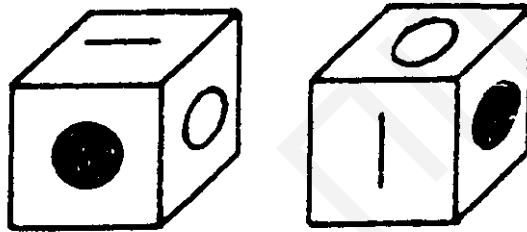
3.



Ίδιοι

Διαφορετικοί

4.



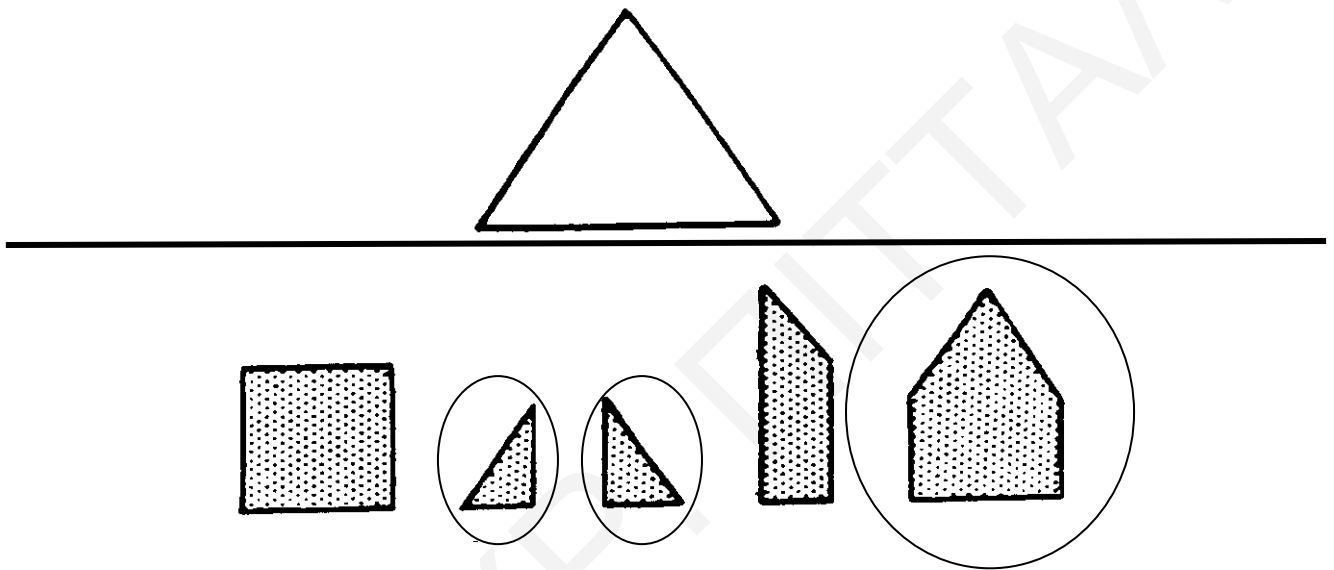
Ίδιοι

Διαφορετικοί

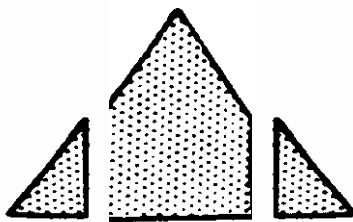
Μέρος Δ΄:

Στο μέρος αυτό υπάρχει πάνω από τη γραμμή ένα σχήμα. Να βάλεις σε κύκλο ποια από τα σχήματα που βρίσκονται κάτω από τη γραμμή πρέπει να **ΕΝΩΘΟΥΝ** ώστε να κατασκευαστεί το σχήμα που βρίσκεται πάνω από αυτή. Τα σχήματα που βρίσκονται κάτω από τη γραμμή μπορούν μόνο να **περιστραφούν**.

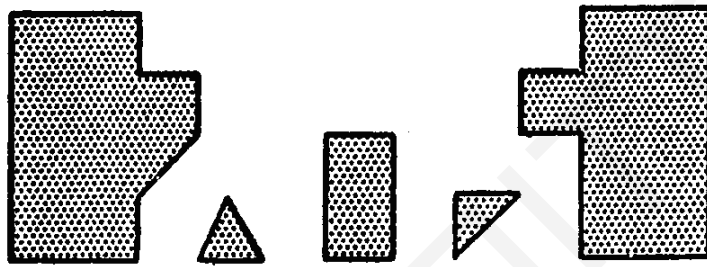
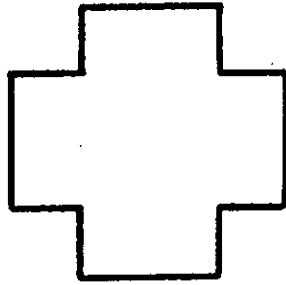
Παράδειγμα:



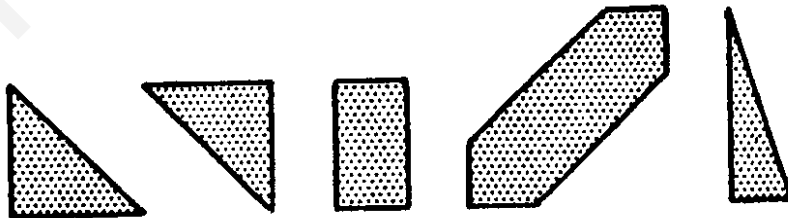
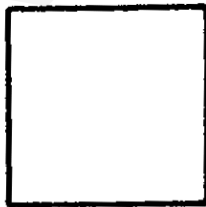
Σε αυτό το παράδειγμα χρειάζεται να ενωθούν τα τρία σχήματα που έχουν κυκλωθεί για να σχηματιστεί το τρίγωνο που βρίσκεται πάνω από τη γραμμή, όπως φαίνεται πιο κάτω:



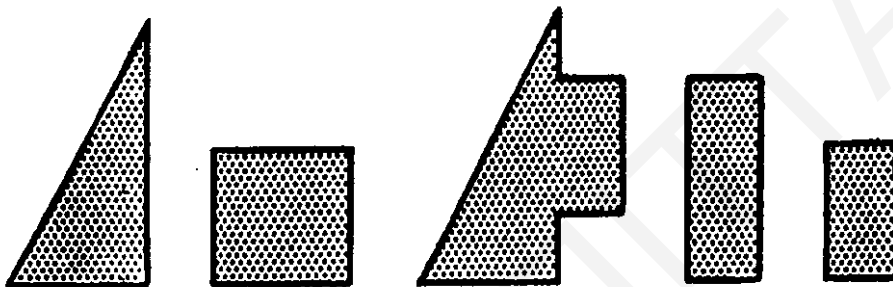
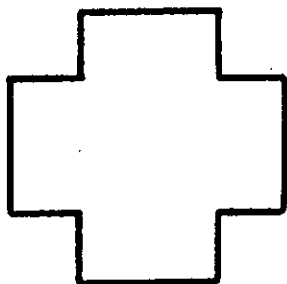
1. Για να κατασκευαστεί ο σταυρός πρέπει να ενωθούν **ΤΡΙΑ** από τα πέντε σχήματα που υπάρχουν κάτω από τη γραμμή. Βάλτε τα σχήματα αυτά σε κύκλο.



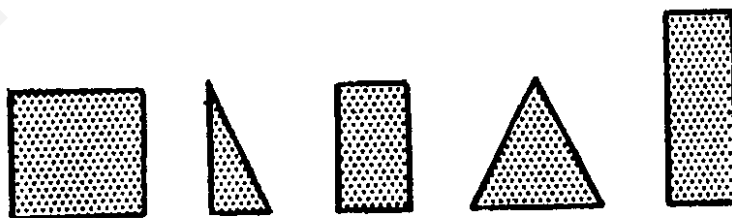
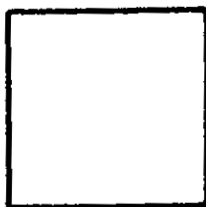
2. Για να κατασκευαστεί το τετράγωνο πρέπει να ενωθούν **ΤΡΙΑ** από τα πέντε σχήματα που υπάρχουν κάτω από τη γραμμή. Βάλτε τα σχήματα αυτά σε κύκλο.



3. Για να κατασκευαστεί ο σταυρός πρέπει να ενωθούν **ΤΡΙΑ** από τα πέντε σχήματα που υπάρχουν κάτω από τη γραμμή. Βάλτε τα σχήματα αυτά σε κύκλο.



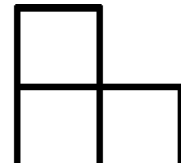
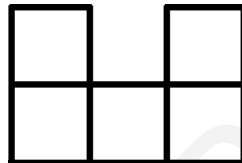
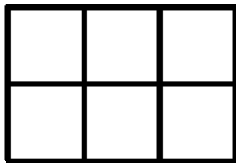
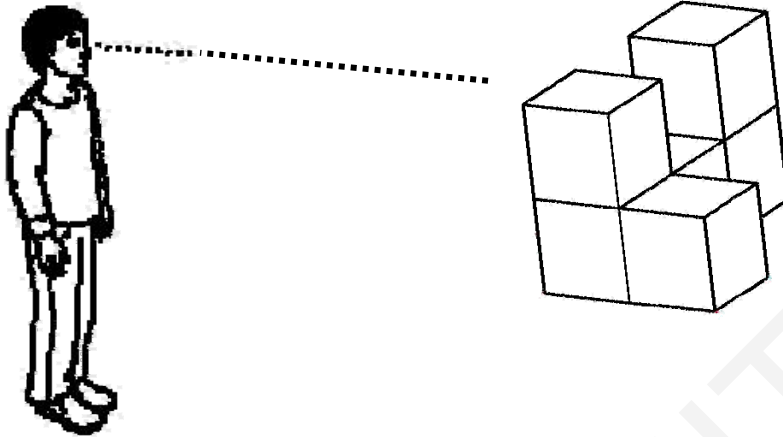
4. Για να κατασκευαστεί το τετράγωνο πρέπει να ενωθούν **ΤΡΙΑ** από τα πέντε σχήματα που υπάρχουν κάτω από τη γραμμή. Βάλτε τα σχήματα αυτά σε κύκλο.



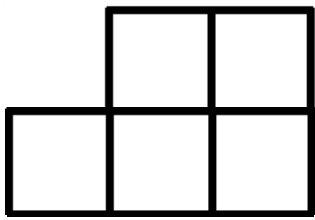
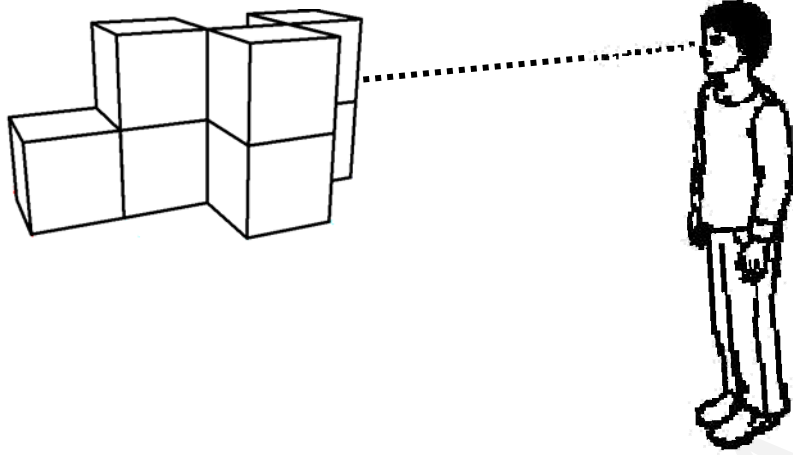
Μέρος Ε΄:

Στο μέρος αυτό παρουσιάζεται ένας άνθρωπος να κοιτάζει προς ένα στερεό. Η διακεκομμένη γραμμή δείχνει την κατεύθυνση του βλέμματός του. Οι τέσσερις εικόνες που υπάρχουν κάτω από τη γραμμή δείχνουν ποια εικόνα θα μπορούσε να έχει μπροστά του ο άνθρωπος από τη θέση που βρίσκεται. Να βάλεις σε κύκλο τη σωστή.

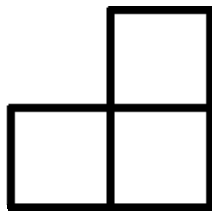
Παράδειγμα:



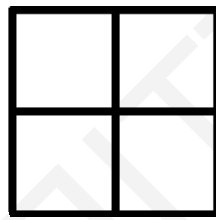
1.



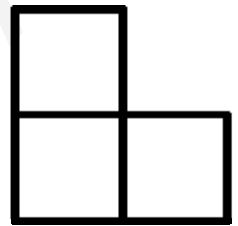
(α)



(β)

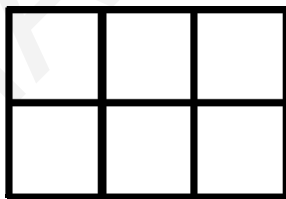
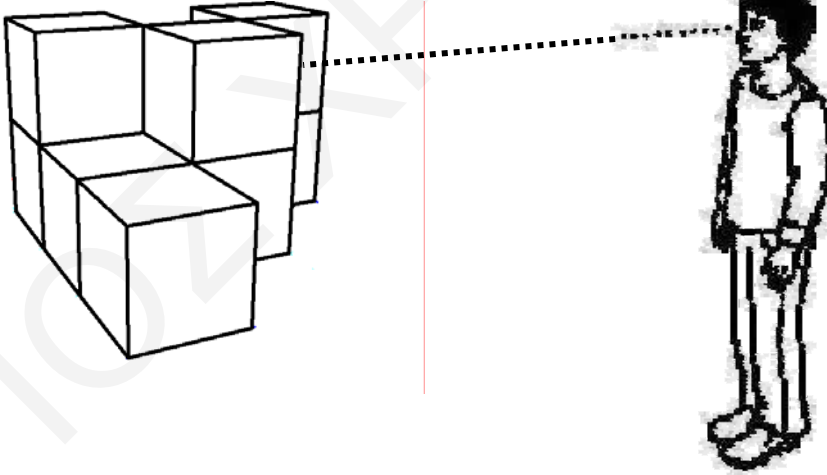


(γ)

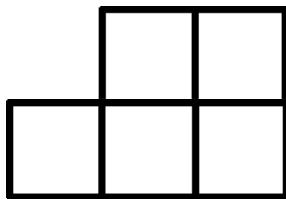


(δ)

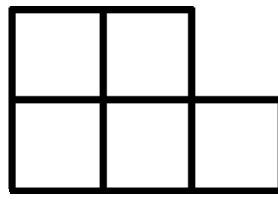
2.



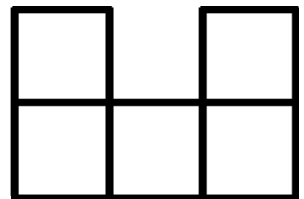
(α)



(β)

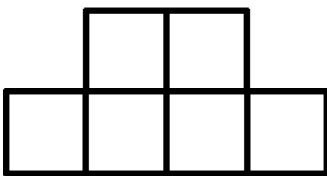
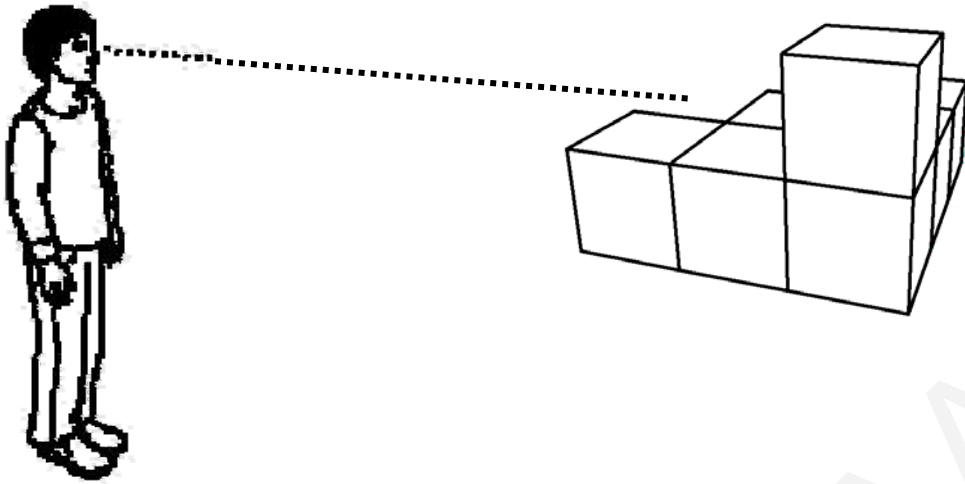


(γ)

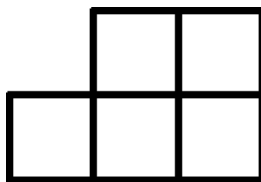


(δ)

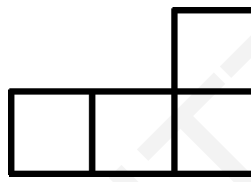
3.



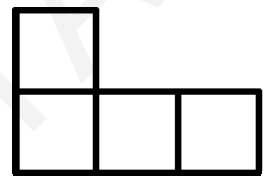
(α)



(β)

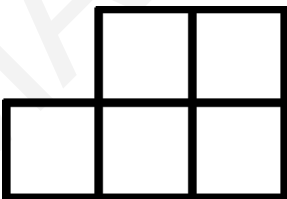
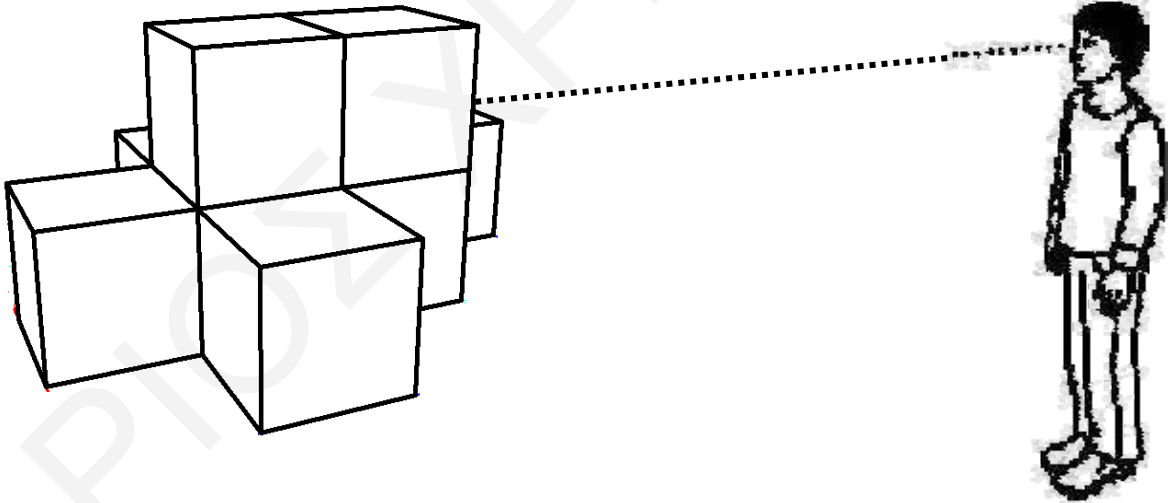


(γ)



(δ)

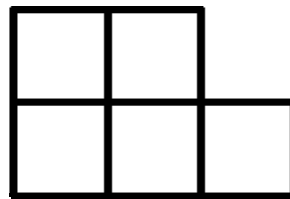
4.



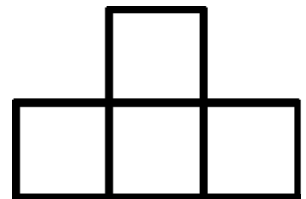
(α)



(β)



(γ)

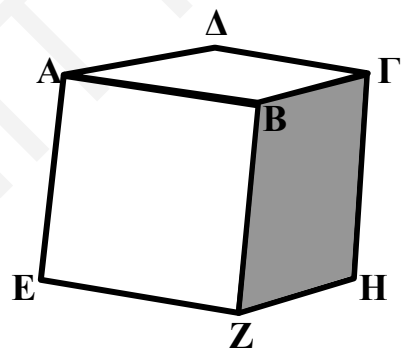
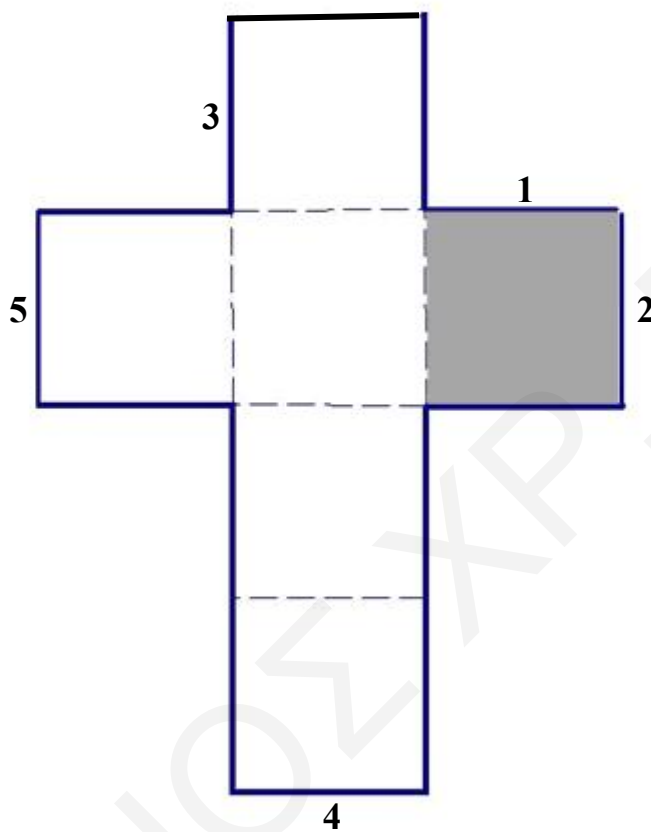


(δ)

Μέρος Στ΄:

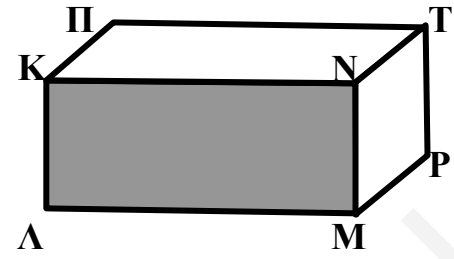
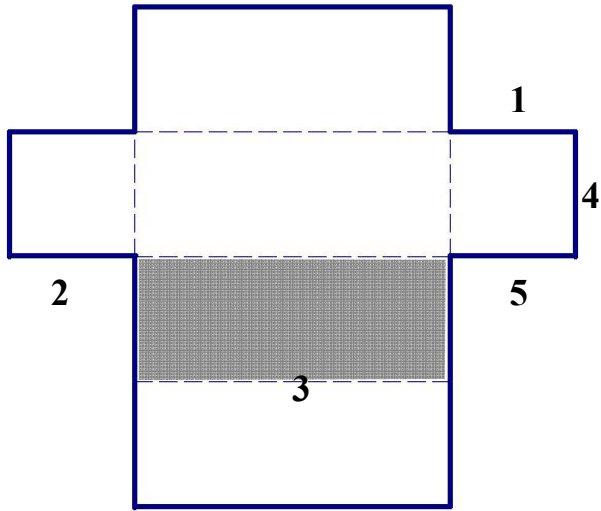
Στο μέρος αυτό παρουσιάζεται στα αριστερά ένα κομμάτι χαρτόνι το οποίο θα διπλωθεί κατά μήκος των **ΔΙΑΚΕΚΟΜΜΕΝΩΝ** γραμμών για να σχηματιστεί το στερεό που υπάρχει στα δεξιά. Στον πίνακα που υπάρχει μετά τα σχήματα να συμπληρώσεις σε ποια **ΑΚΜΗ** του στερεού αντιστοιχεί η κάθε αριθμημένη πλευρά του χαρτονιού.

Παράδειγμα:



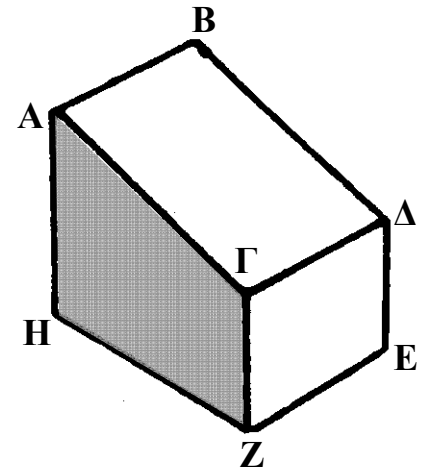
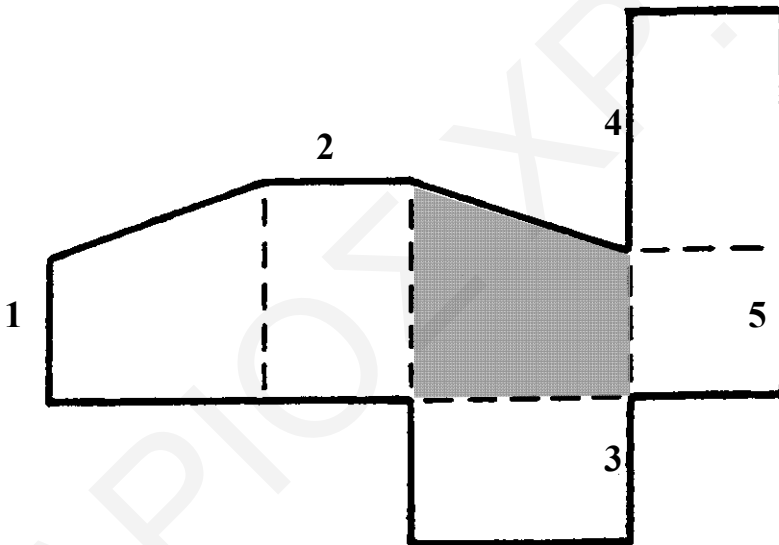
1	ΒΓ
2	ΓΗ
3	ΑΔ
4	ΔΓ
5	ΓΗ

1.



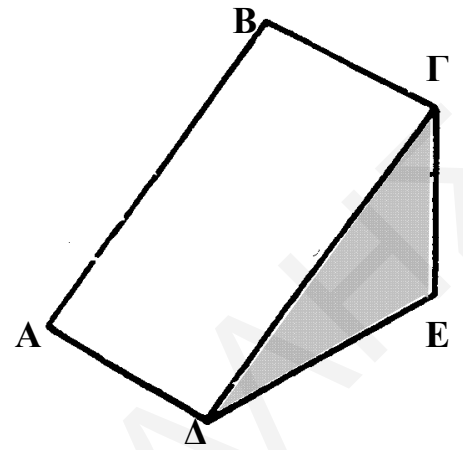
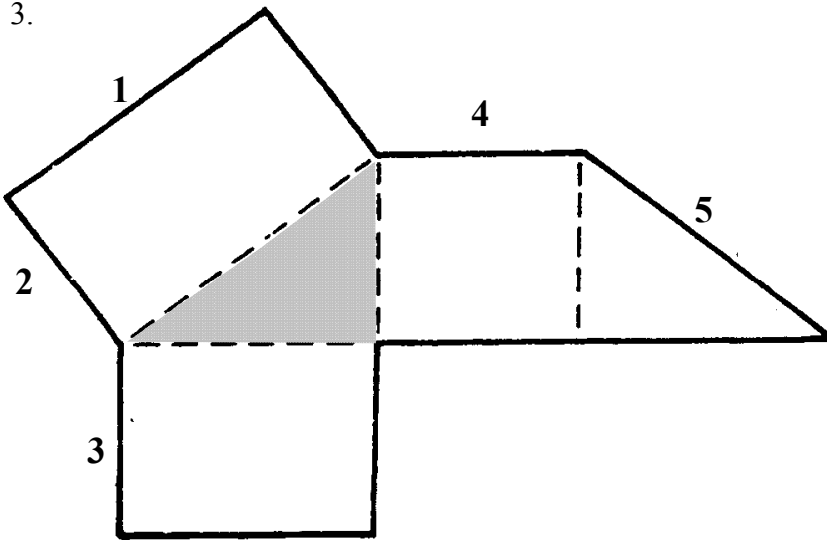
1	TP
2	
3	
4	
5	

2.



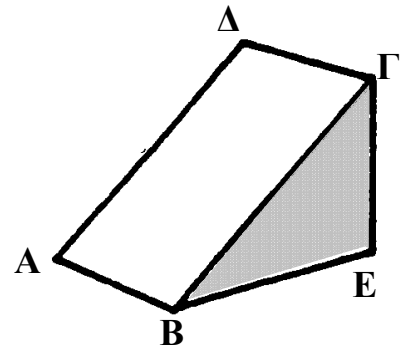
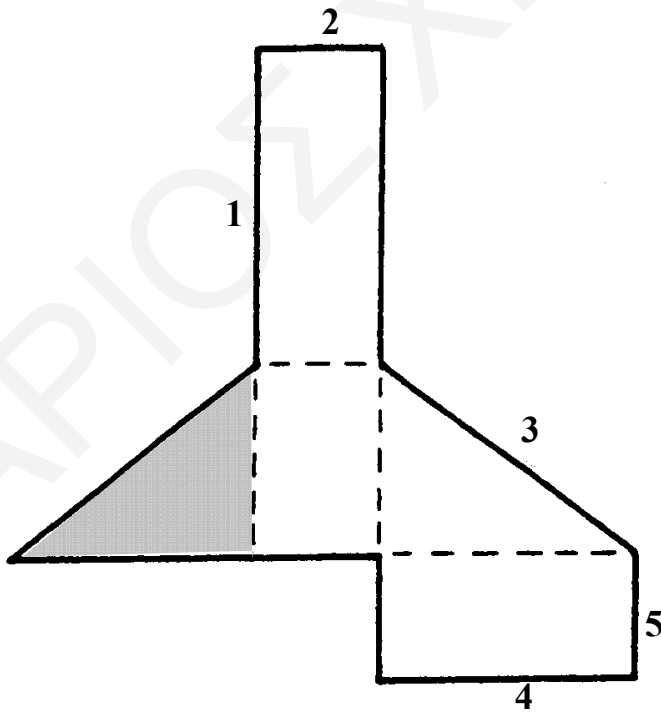
1	ΔE
2	
3	
4	
5	

3.



1	AB
2	
3	
4	
5	

4.

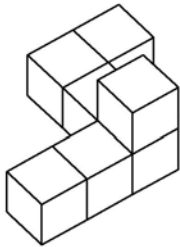
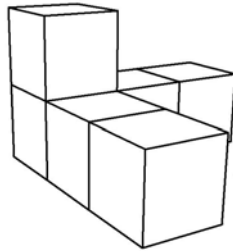


1	BΓ
2	
3	
4	
5	

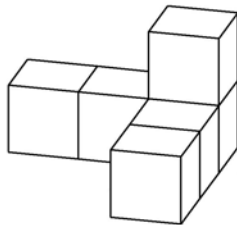
Μέρος Ζ΄:

Στο μέρος αυτό δίνεται ένα σχήμα πάνω από τη γραμμή και τέσσερα σχήματα κάτω από τη γραμμή. Ποιο από τα σχήματα που βρίσκονται κάτω από τη γραμμή ΔΕΝ μπορεί να προκύψει από ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ του σχήματος που βρίσκεται πάνω από τη γραμμή; Να το βάλεις σε κύκλο.

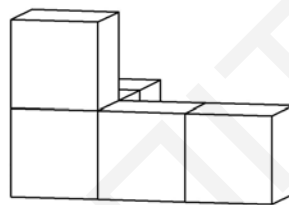
1.



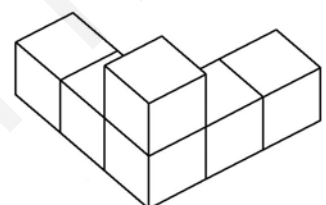
(α)



(β)

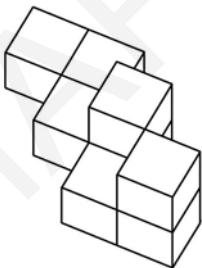
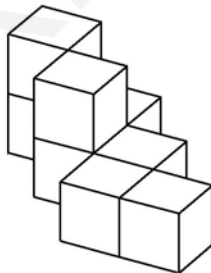


(γ)

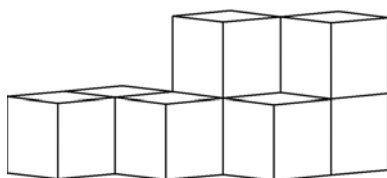


(δ)

2.



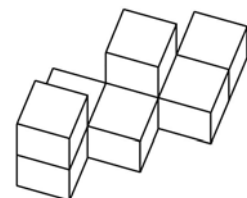
(α)



(β)

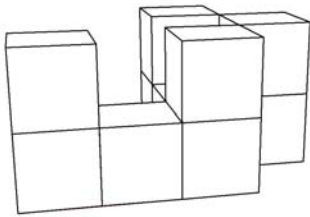
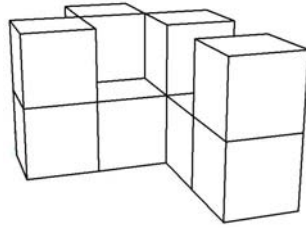


(γ)

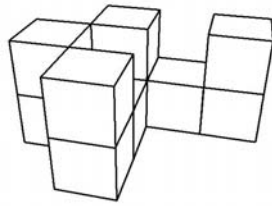


(δ)

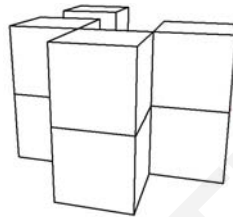
3.



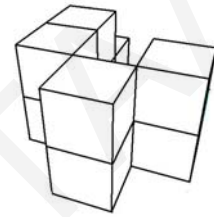
(α)



(β)

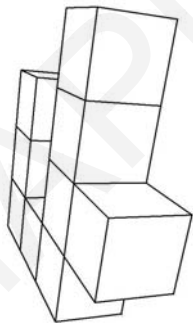
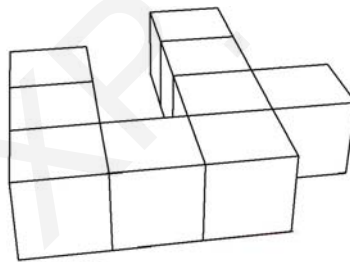


(γ)

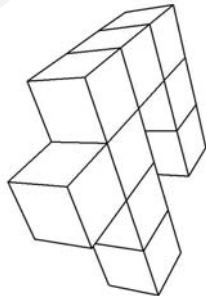


(δ)

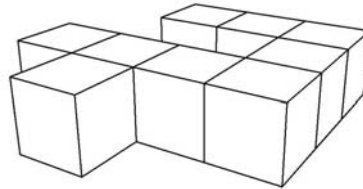
4.



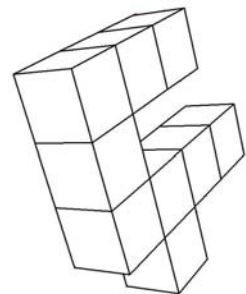
(α)



(β)



(γ)



(δ)

Τεστ στις Έννοιες της Γεωμετρίας του Χώρου

ΜΑΡΙΟΣ ΧΡ. ΠΙΤΤΑΛΗΣ

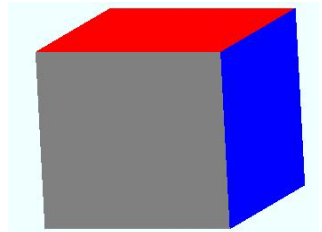
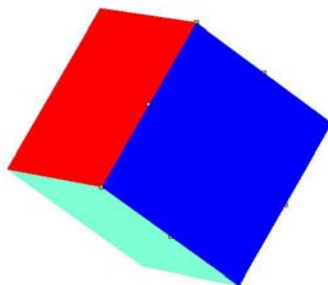
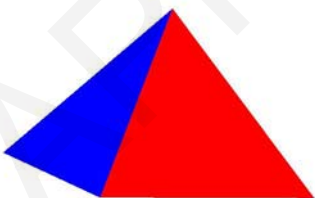
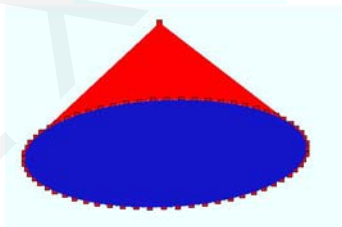
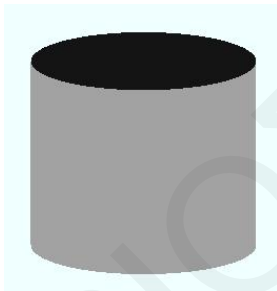
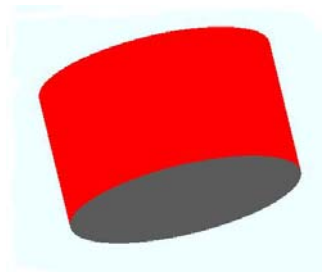
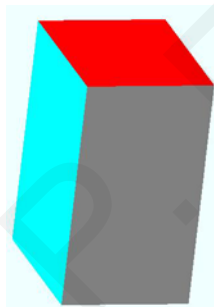
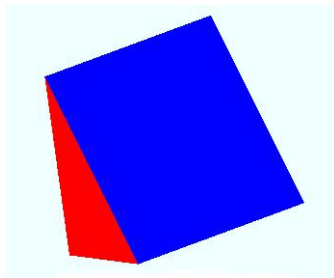
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής

Όνομα:

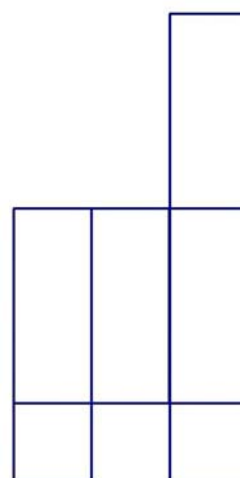
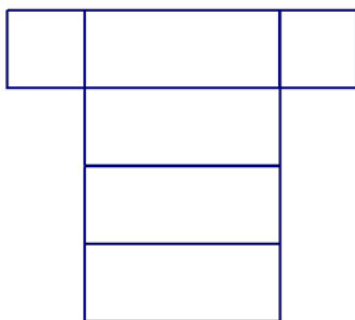
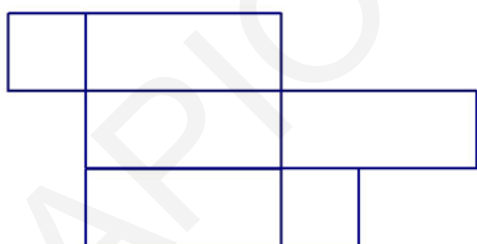
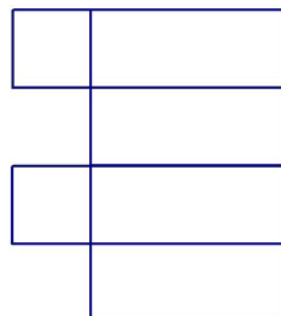
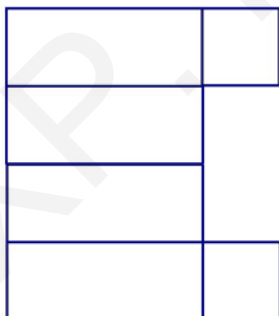
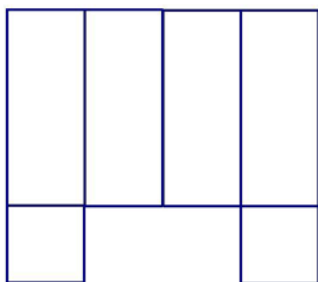
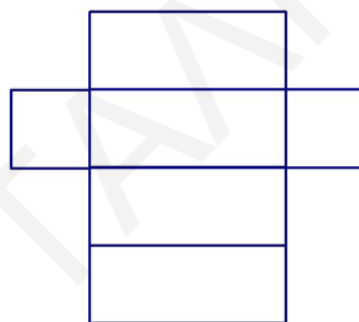
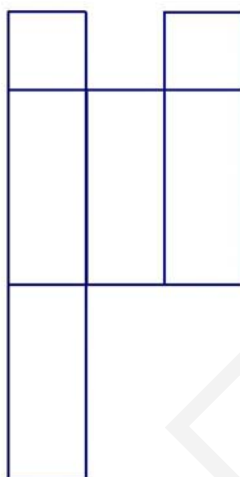
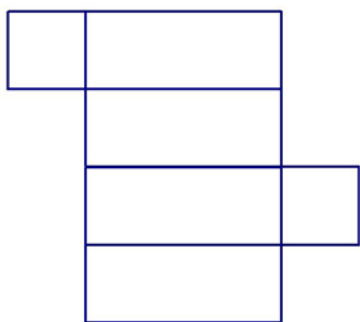
Σχολείο:

Τάξη: Ημερομηνία:

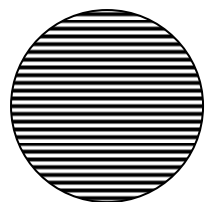
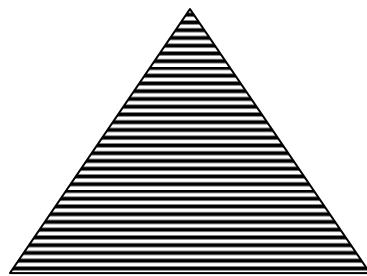
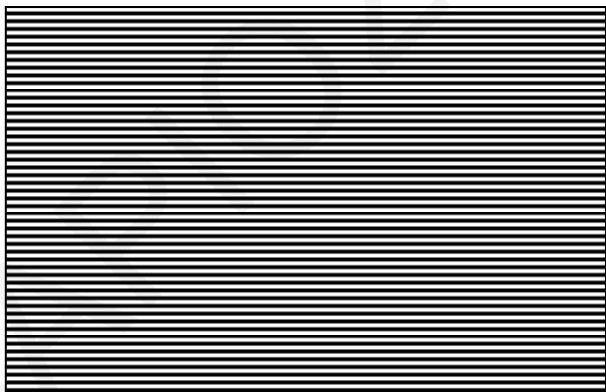
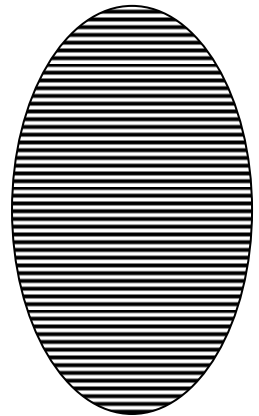
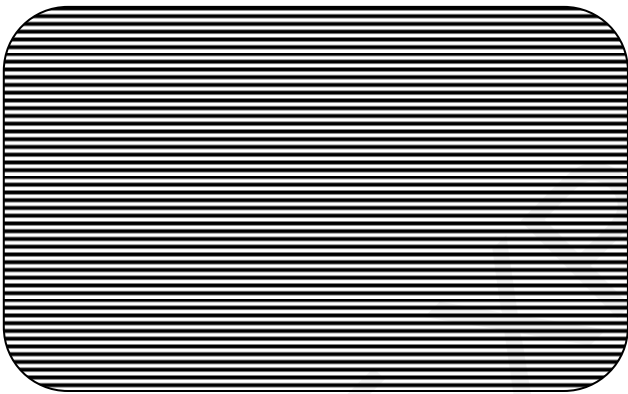
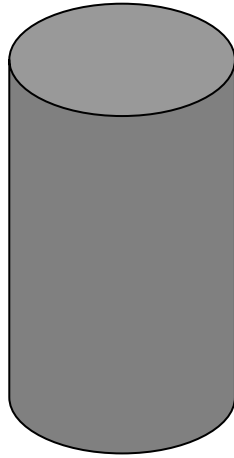
1. Πιο κάτω βλέπεις μερικά στερεά. Να βάλεις σε κύκλο αυτά που **ΔΕΝ** είναι ορθογώνια παραλληλεπίπεδα.



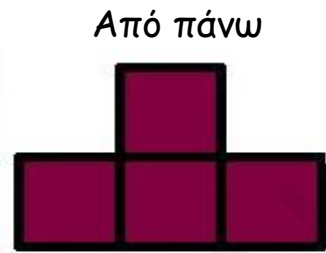
2. Να βάλεις σε κύκλο **ΤΑ** αναπτύγματα που όταν διπλωθούν μπορούν να κατασκευάσουν το πιο κάτω ορθώγωνιο παραλληλεπίπεδο.



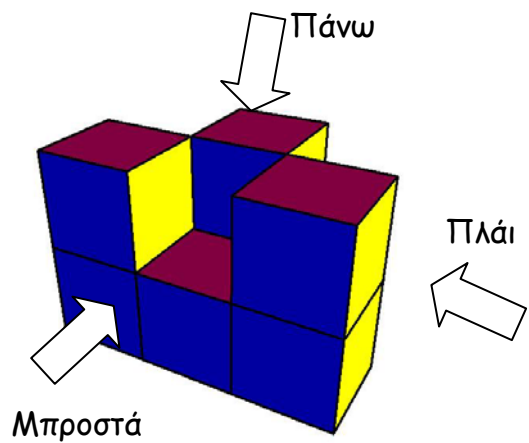
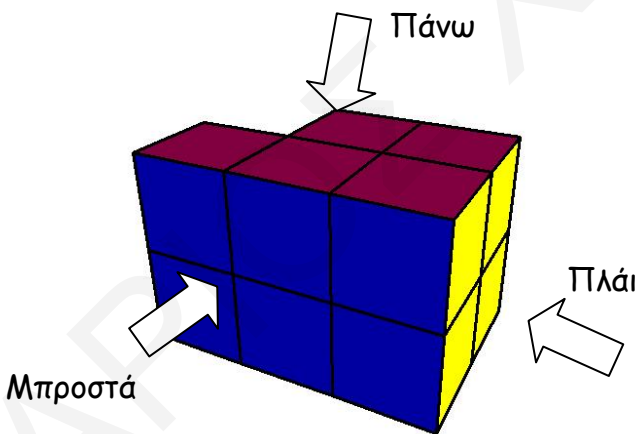
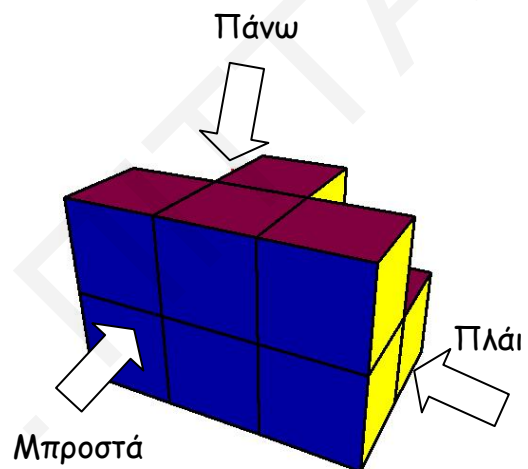
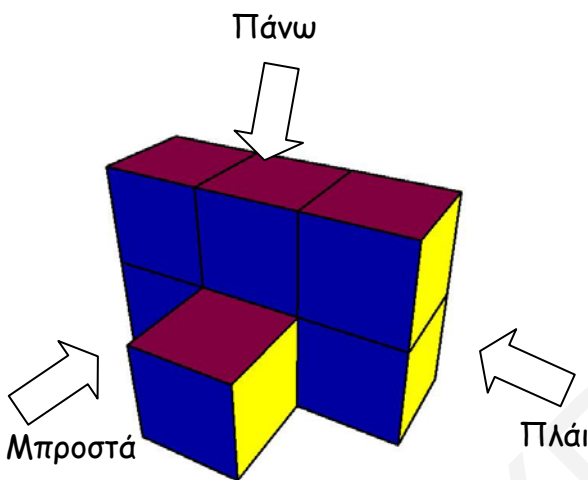
3. Να βάλεις σε κύκλο **ΤΑ** κομμάτια χαρτόνι που βρίσκονται κάτω από τη γραμμή που μπορούν όταν ενωθούν να κατασκευάσουν τον πιο κάτω κύλινδρο;



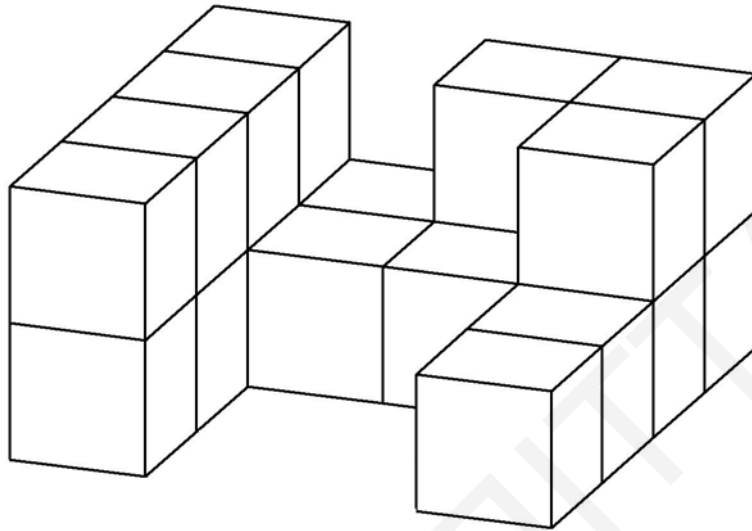
4. Ο Αλέξης σχεδίασε πώς φαίνεται ένα στερεό όταν το κοιτάζει κάποιος από μπροστά, από το πλάι και από πάνω.



Ποιο από τα πιο κάτω στερεά είναι το στερεό που σχεδίασε ο Αλέξης;

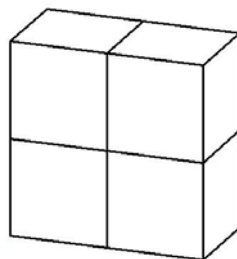


5. Το σχήμα κατασκευάστηκε με 19 κύβους διαστάσεων $1\text{cm} \times 1\text{cm} \times 1\text{cm}$. Πόσοι ακόμα κύβοι πρέπει να προστεθούν για να κατασκευαστεί ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις $4\text{cm} \times 2\text{cm} \times 4\text{cm}$;



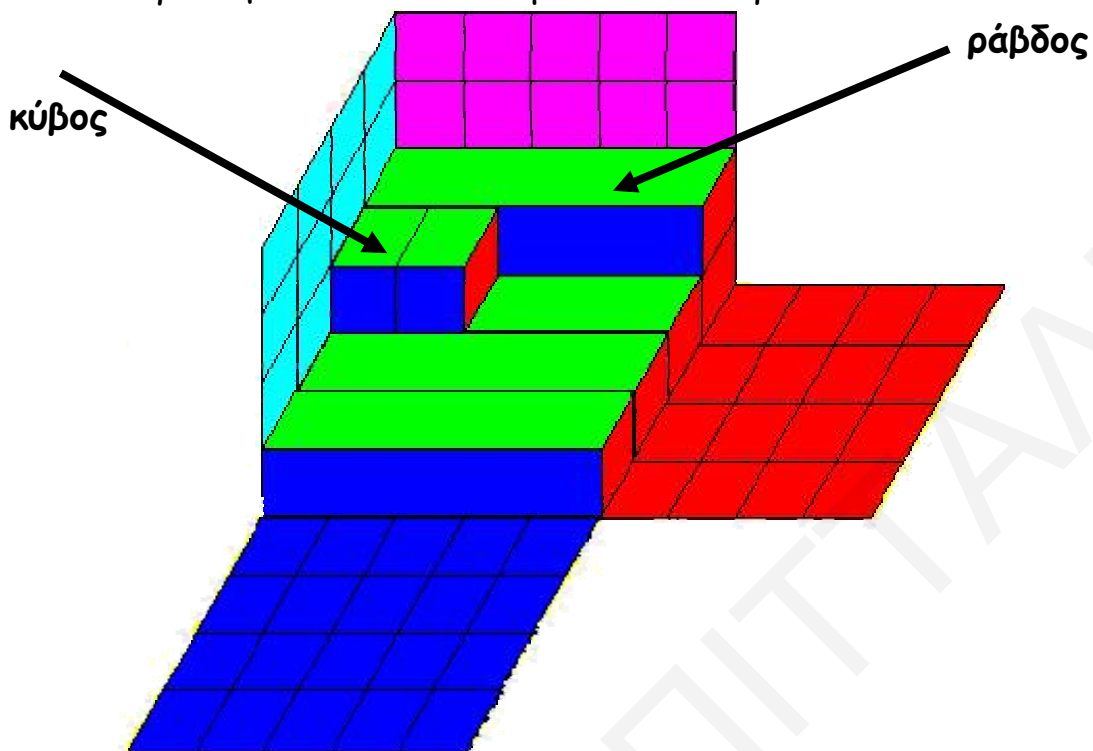
Απάντηση: κύβοι

6. Το στερεό κατασκευάστηκε με 4 κύβους διαστάσεων $1\text{cm} \times 1\text{cm} \times 1\text{cm}$. Πόσα τετραγωνικά εκατοστόμετρα χαρτί περιτυλίγματος χρειάζονται τουλάχιστον για να καλυφθεί πλήρως το στερεό;



Απάντηση: τετραγωνικά εκατοστόμετρα χαρτί

7. Στο πιο κάτω κιβώτιο τοποθετήθηκαν 5 μεταλλικοί ράβδοι σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου και 2 μεταλλικοί κύβοι.



(Α) Πόσοι ακόμα ράβδοι και κύβοι πρέπει να μπουν στο κιβώτιο, ώστε το κιβώτιο να γεμίσει εντελώς;

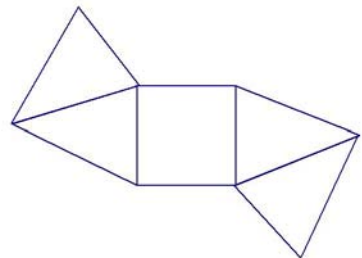
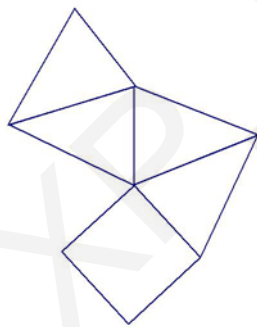
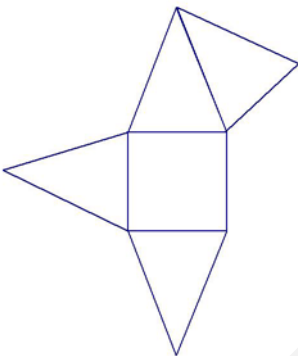
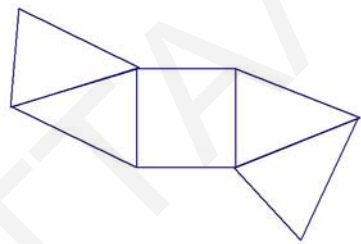
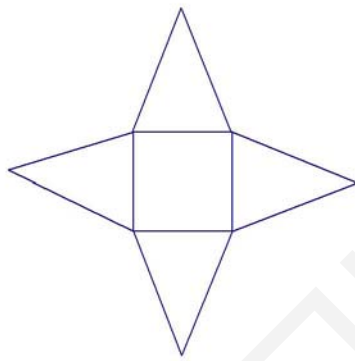
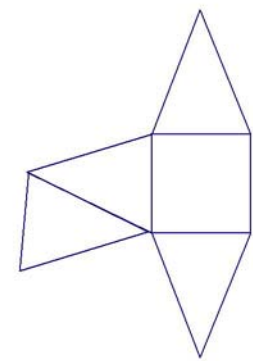
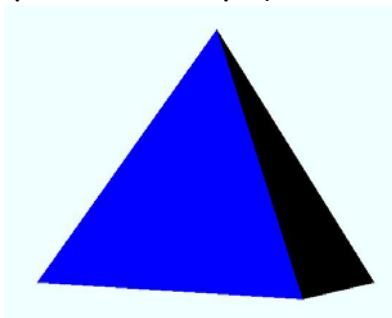
Βάλτε σε κύκλο τη σωστή απάντηση:

- | | |
|----------------------------|---------------------------|
| (α) 9 ράβδοι και 3 κύβοι | (β) 2 ράβδοι και 52 κύβοι |
| (γ) 13 κύβοι και 10 ράβδοι | (δ) 6 ράβδοι και 23 κύβοι |
| (ε) 4 ράβδοι και 37 κύβοι | |

(Β) Αν αδειάσουμε εντελώς το κιβώτιο και το γεμίσουμε μόνο με κύβους, πόσους κύβους θα χρειαστούμε για να γεμίσει εντελώς;

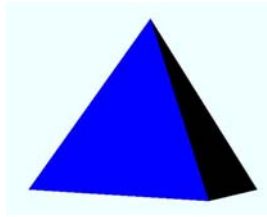
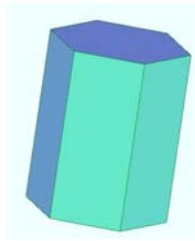
Απάντηση: κύβους

8. Να βάλεις σε κύκλο **ΤΑ** αναπτύγματα που μπορούν να κατασκευάσουν όταν διπλωθούν την πιο κάτω τετραγωνική πυραμίδα.



ΜΑΡΙΟΣ ΧΡΗΣΤΑΚΗΣ

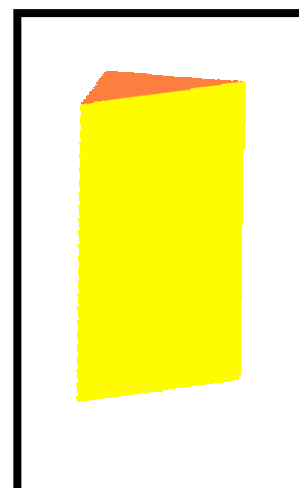
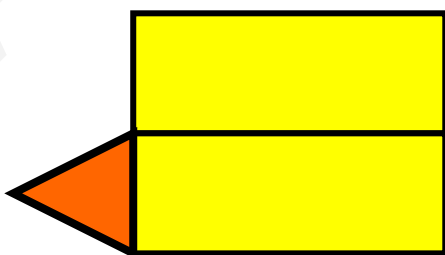
9. Πιο κάτω βλέπεις ένα πρίσμα, μια πυραμίδα και ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.



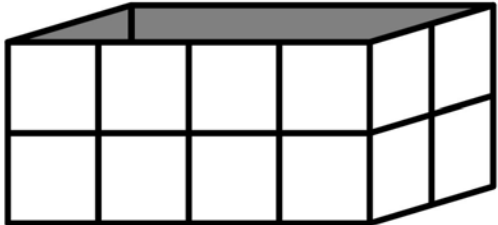
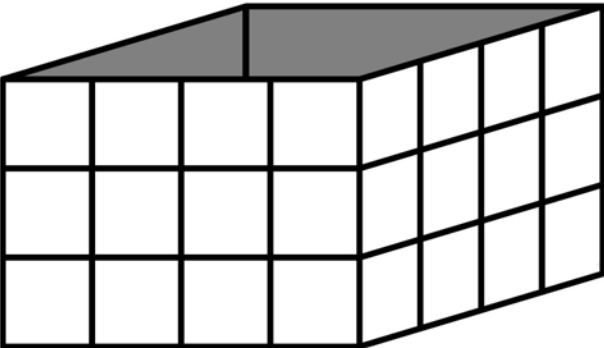
Να γράψεις δίπλα από κάθε πρόταση πιο κάτω αν είναι σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

A/A	Πρόταση	Σ ή Λ
1	Οι ακμές και των τριών στερεών είναι ευθύγραμμα τμήματα.	
2	Το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο ΔΕΝ είναι ένα τετραγωνικό πρίσμα.	
3	Όλες οι πυραμίδες έχουν τριγωνικές έδρες.	
4	Το πρίσμα και το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχουν έδρες σχήματος ορθογωνίου.	
5	Η βάση και των τριών στερεών μπορεί να είναι ένα τετράγωνο.	
6	Η βάση και των τριών στερεών μπορεί να είναι ένα τρίγωνο	

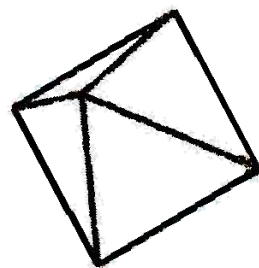
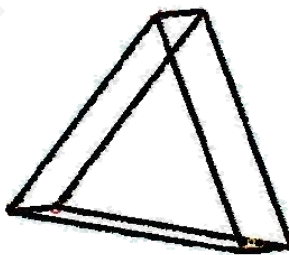
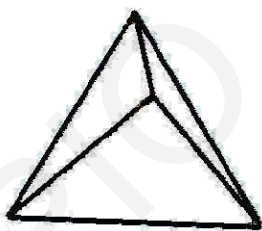
10. Να συμπληρώσεις το πιο κάτω ανάπτυγμα ώστε όταν διπλωθεί να κατασκευαστεί το τριγωνικό πρίσμα που φαίνεται δίπλα.



11. Στην πρώτη στήλη υπάρχουν κάποια κιβώτια. Να συμπληρώσεις στη δεύτερη στήλη πόσοι κύβοι χρειάζονται, για να γεμίσει το κάθε κιβώτιο.

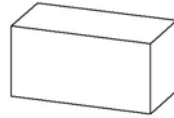
Κιβώτιο	Αριθμός κύβων
	
	

12. Πιο κάτω παρουσιάζονται τρία στερεά σε διαφανή μορφή. Να γράψεις, κάτω από κάθε στερεό, πόσες ΤΡΙΓΩΝΙΚΕΣ έδρες έχει το κάθε στερεό.

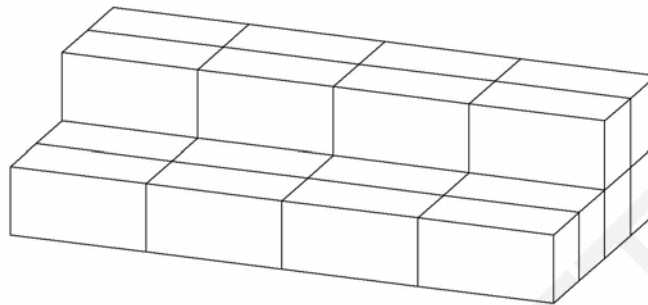


Στερεό 1 (πυραμίδα)	Στερεό 2 (πρίσμα)	Στερεό 3 (πυραμίδα)

13. Το πιο κάτω τούβλο έχει διαστάσεις 10cm X 10cm X 20cm. Τα τούβλα αυτά χρησιμοποιούνται για διάφορες κατασκευές.



Πόσα τούβλα χρησιμοποιήθηκαν για να κατασκευαστεί η σκάλα που φαίνεται πιο κάτω;



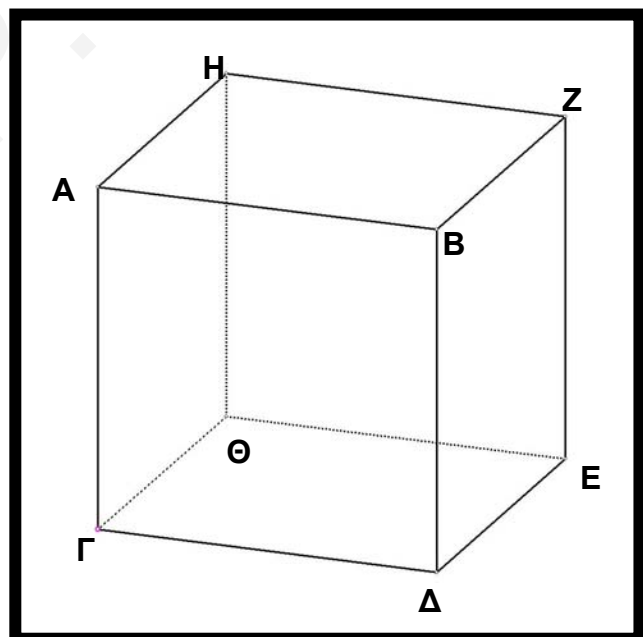
Απάντηση: τούβλα

14. Πιο κάτω υπάρχει ένας κύβος. Κάποιες ακμές είναι παράλληλες μεταξύ τους και κάποιες ακμές είναι κάθετες μεταξύ τους. Για παράδειγμα, η ακμή ΔΕ είναι παράλληλη με την ακμή ΒΖ.

i. Να γράψεις τρεις ακμές που είναι παράλληλες με την ΑΒ.

.....

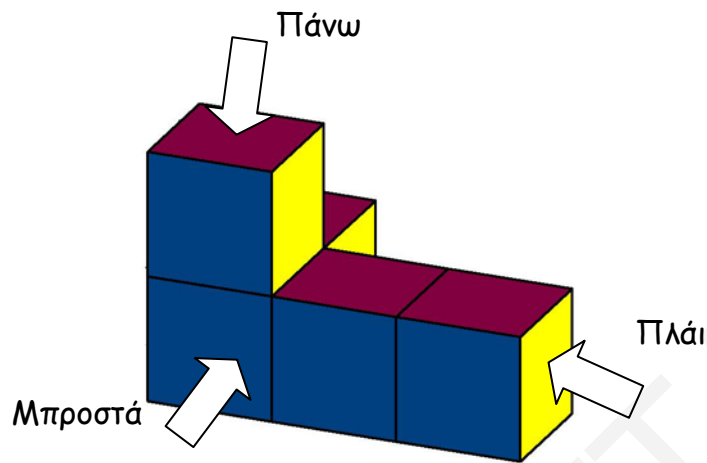
ii. Η ακμή ΑΒ είναι κάθετη με την ακμή ΑΓ. Να γράψεις ακόμη δύο ζεύγη ακμών που είναι κάθετες μεταξύ τους.



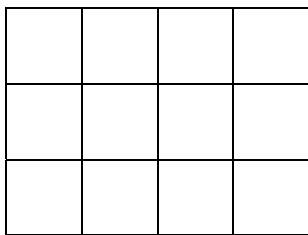
α) και

β) και

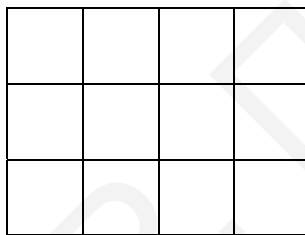
15. Το στερεό κατασκευάστηκε με 5 κύβους διαστάσεων 1cm X 1cm X 1cm. Να σχεδιάσεις στο τετραγωνισμένο χαρτί πώς θα φαίνεται το στερεό αυτό όταν το κοιτάξει κάποιος από μπροστά, από το πλάι και από πάνω.



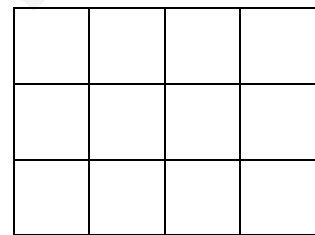
Από μπροστά



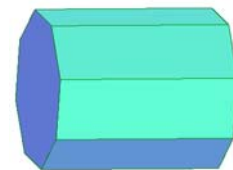
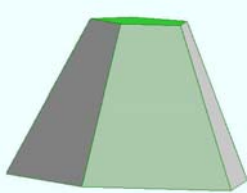
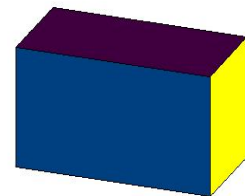
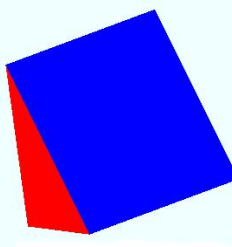
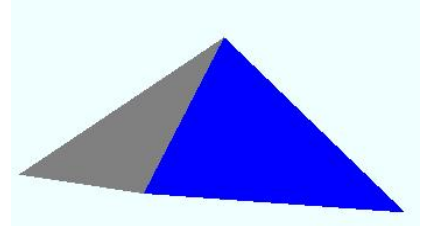
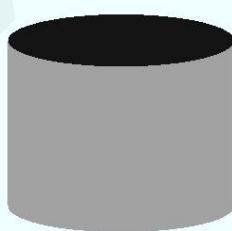
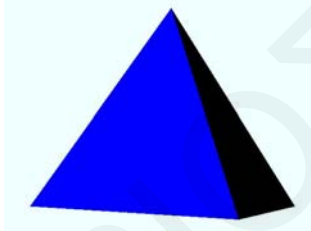
Από το πλάι



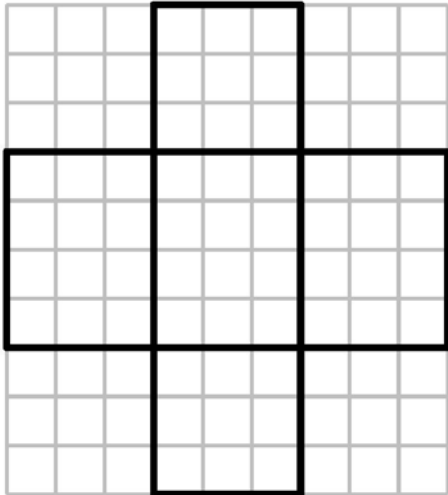
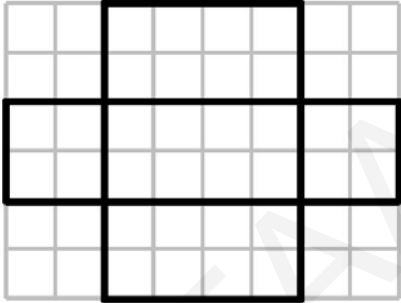
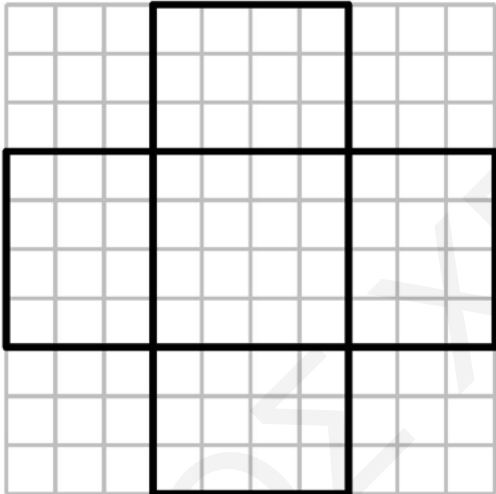
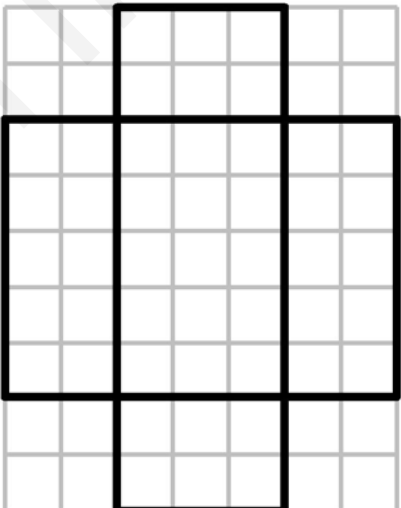
Από πάνω



16. Να βάλεις σε κύκλο **ΤΑ** στερεά που έχουν τουλάχιστον 8 κορυφές.



17. Πιο κάτω υπάρχουν αναπτύγματα διαφόρων κιβωτίων (τα κιβώτια είναι ανοικτά από πάνω).

Ανάπτυγμα Α'	Ανάπτυγμα Β'
	
Ανάπτυγμα Γ'	Ανάπτυγμα Δ'
	

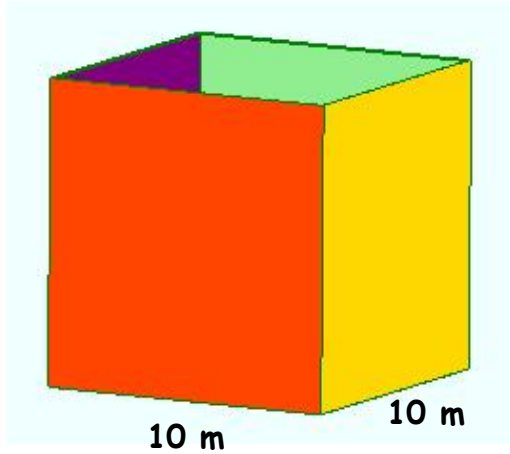
(Α) Ποιο ανάπτυγμα κατασκευάζει το κιβώτιο με τη μεγαλύτερη χωρητικότητα;

.....

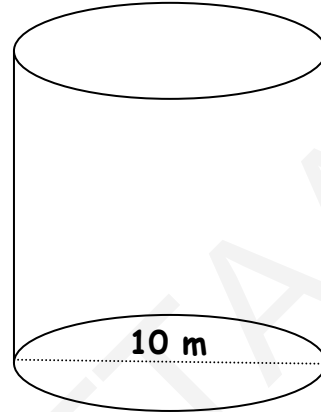
(Β) Ποιο ανάπτυγμα κατασκευάζει το κιβώτιο με τη μεγαλύτερη εξωτερική επιφάνεια;

.....

18. Πιο κάτω παρουσιάζονται δύο ντεπόζιτα. Τα δύο ντεπόζιτα έχουν το ίδιο ύψος. Το πρώτο ντεπόζιτο είναι γεμάτο με νερό. Τι θα συμβεί, αν αδειάσουμε το πρώτο ντεπόζιτο στο δεύτερο;



Πρώτο ντεπόζιτο

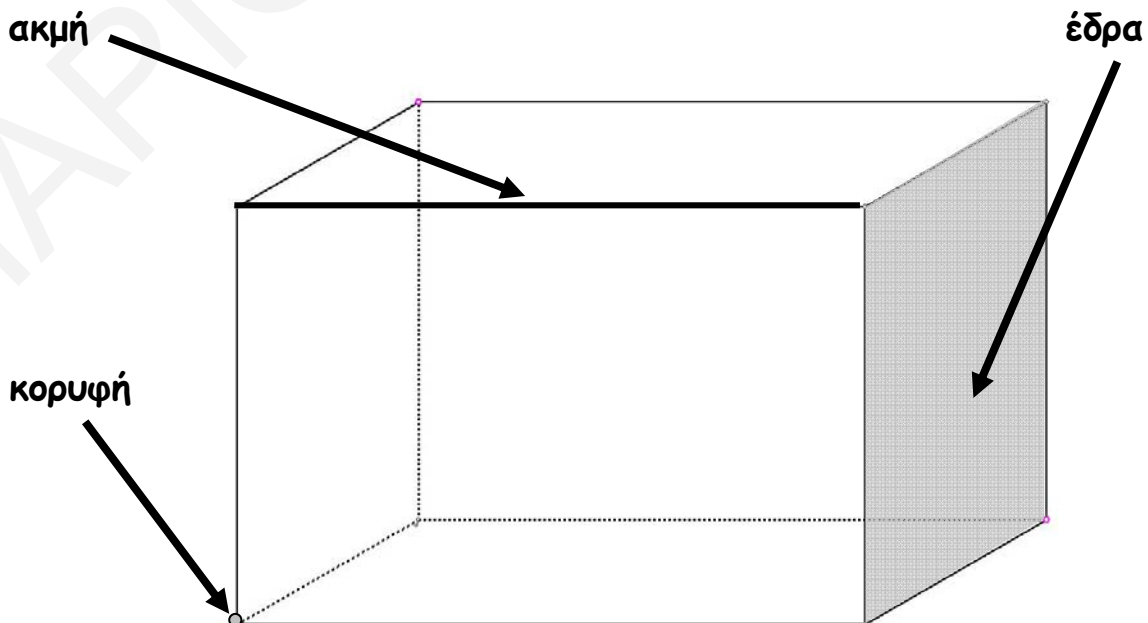


Δεύτερο ντεπόζιτο

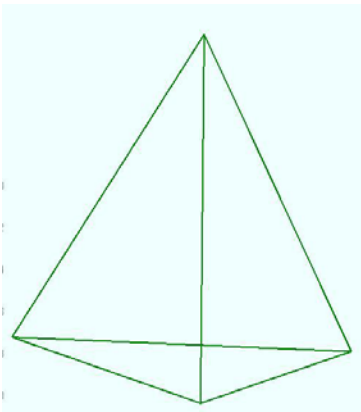
Βάλε σε κύκλο τη σωστή απάντηση:

- i. Το δεύτερο ντεπόζιτο θα γεμίσει εντελώς χωρίς να υπερχειλίσει.
- ii. Το δεύτερο ντεπόζιτο θα υπερχειλίσει.
- iii. Το δεύτερο ντεπόζιτο θα γεμίσει νερό μέχρι ένα σημείο.
- iv. Δεν μπορούμε να ξέρουμε τι θα συμβεί.

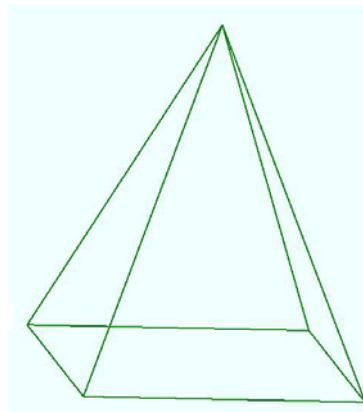
19. Στο πιο κάτω ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, τα τόξα δείχνουν μια κορυφή, μια ακμή και μια έδρα.



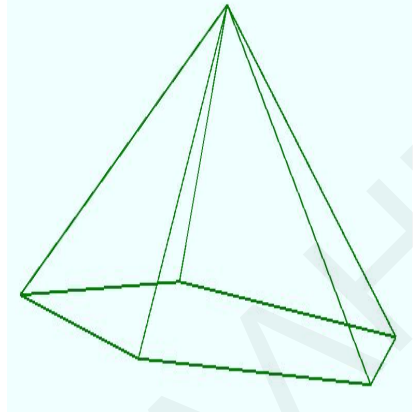
Να παρατηρήσεις τις πιο κάτω πυραμίδες και να συμπληρώσεις τον πίνακα:



Πυραμίδα 1



Πυραμίδα 2



Πυραμίδα 3

	Σχήμα Βάσης	Αριθμός κορυφών	Αριθμός εδρών	Αριθμός ακμών	Κορυφές + Έδρες
Πυραμίδα 1	Τρίγωνο				
Πυραμίδα 2	Τετράγωνο				
Πυραμίδα 3	Πεντάγωνο				

Ποια η σχέση μεταξύ αριθμού κορυφών και εδρών στις πιο πάνω πυραμίδες;

Ποια η σχέση μεταξύ αριθμού κορυφών, εδρών και ακμών στις πιο πάνω πυραμίδες;

Πόσες έδρες, κορυφές και ακμές έχει μια πυραμίδα με σχήμα βάσης οκτάγωνο;

Αριθμός εδρών:

Αριθμός κορυφών:

Αριθμός ακμών: