ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

Τμήμα Επιστημών της Αγωγής

Η ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ: ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ ΠΕΜΠΤΗΣ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Διδακτορική Διατριβή στη Μαθηματική Παιδεία

Από την

Ελένη Μιχαηλίδου

Μάιος 2004

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η Χρήση Του Γεωμετρικού Μοντέλου Της Αριθμητικής Γραμμής, Για Την Αναπαράσταση Της Ισοδυναμίας Και Πρόσθεσης Κλασμάτων: Εφαρμογή Σε Μαθητές Πέμπτης Δημοτικού

Από

Την ΕΛΕΝΗ ΜΙΧΑΗΛΙΔΟΥ

Η διατριβή αυτή υποβάλλεται ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του διδακτορικού τίτλου στη

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΑΙΔΕΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής

Μάιος 2004

Η παρούσα διδακτορική διατριβή παρουσιάστηκε δημόσια και σε πενταμελή εξεταστική επιτροπή και εγκρίθηκε στις 3 Μαΐου 2004.
Αποτελεί μέρος των υποχρεώσεων του Τμήματος Επιστημών της Αγωγής για απόκτηση διδακτορικού τίτλου στη Μαθηματική Παιδεία.

Ερευνητικός σύμβουλος: Αθανάσιος Γαγάτσης, Καθηγητής, Τμήμα Επιστημών Αγωγής Πανεπιστήμιο Κύπρου

Συμβουλευτική Επιτροπή: : Γεώργιος Φιλίππου, Καθηγητής, Τμήμα Επιστημών Αγωγής Πανεπιστήμιο Κύπρου
Κωνσταντίνος Παπαναστασίου, Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Αθανάσιος Γαγάτσης

....
Γεώργιος Φιλίππου

....
Κωνσταντίνος Παπαναστασίου

Εξεταστική Επιτροπή:

- Αθανάσιος Γαγάτσης, (Πρόεδρος)
  Καθηγητής, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου
- Γεώργιος Φιλίππου,
  Καθηγητής, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου
- Κωνσταντίνος Παπαναστασίου
  Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου
- Δέσποινα Πόταρη
  Αναπληρωτής Καθηγήτρια, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Πατρών
- Παναγιώτης Σπύρου
  Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα ερευνητική εργασία διερευνά την καταλληλότητα της αριθμητικής γραμμής ως μέσου αναπαράστασης της έννοιας του κλάσματος. Το θέμα αυτό παρουσιάζει αρκετό ερευνητικό ενδιαφέρον, αφού τα αποτελέσματα ερευνητικών εργασιών σχετικά με το ρόλο της αριθμητικής γραμμής στην κατανόηση των κλασμάτων δε συγκλίνουν.

Αρχικά, η εργασία αποδεικνύει θεωρητικά ότι η αριθμητική γραμμή αποτελεί γεωμετρικό μοντέλο το οποίο αναπαριστά το σύνολο των ρητών αριθμών. Ακολούθως, με βάση τα αποτελέσματα της έρευνας φάνηκε ότι οι μαθητές δεν έχουν κατανοήσει πλήρως την έννοια του κλάσματος, αφού η επίδοσή τους ήταν χαμηλή τόσο στην αναγνώριση της έννοιας σε ποικιλία αναπαραστάσεων, όσο και στο χειρισμό της έννοιας στο ίδιο πεδίο και στη μετάφραση από τη μία αναπαράσταση της έννοιας στην άλλη. Επίσης, φάνηκε ότι τα έργα των δοκιμίων στεγανοποιήθηκαν με κριτήριο το είδος αναπαράστασης, το είδος μετάφρασης και το είδος γνωστικού αντικειμένου το οποίο εξέταζαν, κάτι το οποίο ενισχύει την άποψη ότι οι γνώσεις των μαθητών ήταν αποσπασματικές. Αναφορικά με τα είδη μετάφρασης, φάνηκε ότι οι μαθητές δυσκολεύονταν σε κάποια είδη μετάφρασης ιδιαίτερα όταν σε αυτά εμπλέκεται η αριθμητική γραμμή. Η επίδοση των μαθητών διαφοροποιήθηκε στα διαφορετικά είδη έργων, κάτι το οποίο αποτελεί ένδειξη ότι οι μαθητές δεν έχουν συνδέσει την εννοιολογική με τη διαδικαστική γνώση των κλασμάτων, αναπτύσσοντας την δεύτερη σε βάρος της πρώτης. Το γεγονός αυτό ίσως να οφείλεται στον τρόπο με τον οποίο η διδασκαλία προσεγγίζει τους κλασματικούς αριθμούς – έμφαση στους κανόνες και αλγόριθμους και στην υποέννοια μέρος – όλο.

Οι συνεντεύξεις και τα πειράματα επικοινωνίας έδειξαν ότι η αριθμητική γραμμή μπορεί να λειτουργήσει ως μέσο διαμορφωτικής αξιολόγησης, αφού συνέβαλε στην ανίχνευση παρανοήσεων και δυσκολιών των μαθητών σχετικά με την έννοια του κλάσματος με αποτέλεσμα να αρθούν οι παρανοήσεις αυτές.

Όσον αφορά στην επίλυση προβλήματος προέκυψε ότι δεν υπήρχε στατιστικά σημαντική διαφορά ανάμεσα στην ομάδα που χρησιμοποίησε την αριθμητική γραμμή και στην ομάδα που χρησιμοποίησε όποιο τρόπο επιθυμούσε για την επίλυση προβλημάτων με κλάσματα. Σε αρκετές περιπτώσεις η αριθμητική γραμμή παρείχε οπτική βοήθεια στους μαθητές, ενώ αντίθετα, στις περιπτώσεις που οι μαθητές δε γνώριζαν πως να τη χρησιμοποιήσουν αποτέλεσε επιπρόσθετο παράγοντα δυσκολίας και νοητικού φόρτου.

Οι πιο πάνω διαπιστώσεις οδήγησαν σε προβληματισμό σχετικά με το ρόλο της διδασκαλίας στην κατανόηση των κλασμάτων. Μετά την εφαρμογή ενός διδακτικού παρεμβατικού προγράμματος φάνηκε ότι η πειραματική ομάδα, η οποία διδάχθηκε την έννοια του κλάσματος με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής είχε ψηλότερη επίδοση από την ομάδα ελέγχου η οποία διδάχθηκε την έννοια του κλάσματος μέσα από παραδοσιακές προσεγγίσεις (εμβαδόν ορθογωνίου και κύκλου, συμβολική έκφραση).

Στη Λαμπρινή και στη Φερενίκη

Η ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ, ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ: ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ ΠΕΜΠΤΗΣ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Από

Την ΕΛΕΝΗ ΜΙΧΑΗΛΙΔΟΥ

Η διατριβή αυτή υποβάλλεται ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του διδακτορικού τίτλου στη

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΑΙΔΕΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής

Μάιος 2004

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Τη συγγραφή της εργασίας αυτής έχουν κάνει δυνατή με τη συμβολή τους συγκεκριμένα άτομα τα οποία ευγνωμονώ και θεωρώ υποχρέωσή μου να τους εκφράσω τις ευχαριστίες μου.

Αρχικά, αισθάνομαι την ανάγκη να εκφράσω τις θερμές και ειλικρινείς μου ευχαριστίες στον ερευνητικό μου σύμβουλο Καθηγητή κ. Αθανάσιο Γαγάτση για τις εισηγήσεις, τις υποδείξεις και τους προβληματισμούς που ανελλιπώς πρόσφερε καθ' όλη τη διάρκεια της συγγραφής της εργασίας αυτής. Η φροντίδα, η ενθάρρυνση και το προσωπικό ενδιαφέρον με το οποίο περιέβαλε την εργασία αυτή συνέβαλαν στη διεκπεραίωσή της.

Θερμές ευχαριστίες απευθύνω και στα μέλη της συμβουλευτικής επιτροπής, Καθηγητή κ. Γιώργο Φιλίππου και Αναπληρωτή καθηγητή κ. Κωνσταντίνο Παπαναστασίου του Πανεπιστημίου Κύπρου, στην κ. Δέσποινα Πόταρη, Αναπληρωτή καθηγήτρια του Πανεπιστημίου Πατρών, καθώς και στον κ. Παναγιώτη Σπύρου, Επίκουρο καθηγητή του Πανεπιστημίου Αθηνών, για τις πολύτιμες συμβουλές και εισηγήσεις τους με στόχο τη βελτίωση της εργασίας αυτής, τόσο όσον αφορά στο θεωρητικό μέρος όσο και στο ερευνητικό μέρος της και τη στατιστική ανάλυση.

Θα ήθελα, επίσης, να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου και τις ευχαριστίες μου στην Έλενα Παπαναστασίου, Μέλος του Ειδικού Εκπαιδευτικού Προσωπικού του Τμήματος Επιστημών της Αγωγής του Πανεπιστημίου Κύπρου για την πολύτιμη βοήθειά της και τις εισηγήσεις της όσον αφορά στην οργάνωση και στη στατιστική ανάλυση των δεδομένων της έρευνας.

Οφείλω ευχαριστίες στους εκπαιδευτικούς και στους μαθητές των τεσσάρων δημοτικών σχολείων που συμμετείχαν στην έρευνα και στο διδακτικό παρεμβατικό πρόγραμμα και συνέβαλαν ουσιαστικά στην εκπλήρωση των σκοπών της εργασίας.

Θα ήθελα, επίσης, να ευχαριστήσω τις διδακτορικές φοιτήτριες Μύρια Σιακαλλή και Ρίτα Παναούρα των οποίων η ανιδιοτελής παροχή συμβουλών, ιδεών, εισηγήσεων, ερεθισμάτων και ενθάρρυνσης βελτίωσαν αισθητά το έργο μου.

Τέλος, εκφράζω την ευγνωμοσύνη μου στην οικογένειά μου για την αγάπη, την κατανόηση, την υπομονή και την αμέριστη συμπαράστασή της καθ' όλη τη διάρκεια της εργασίας μου.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Η ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ, ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ: ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ ΠΕΜΠΤΗΣ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Διατύπωση του Προβλήματος

Στη διδασκαλία των μαθηματικών χρησιμοποιούνται μοντέλα, όπως είναι η αριθμητική γραμμή, για την αναπαράσταση των διάφορων μαθηματικών εννοιών. Σύμφωνα με το Herbst (1997) η ευκλείδεια ευθεία, η οποία παρουσιάζεται στα εγχειρίδια των μαθηματικών ως γεωμετρική έννοια, χρησιμοποιείται και για την αναπαράσταση των αριθμών. Αποτελεί, δηλαδή, την αριθμητική γραμμή. Το γεωμετρικό μοντέλο της γραμμής, ως αναπαράσταση των αριθμών, είναι μια μεταφορά, διότι αποτελεί πρωταρχική έννοια της γεωμετρίας και όχι της αριθμητικής. Η διαδοχικότητα των αριθμών στην ευθεία αποτελεί γεωμετρικό αξίωμα, το οποίο συνηγορεί υπέρ της χρήσης της γραμμής για την αναπαράσταση των αριθμών, αφού με τον τρόπο αυτό διασφαλίζεται η αντιπροσώπευση όλων των αριθμών στη γραμμή.

Η χρήση της αριθμητικής γραμμής στηρίζεται στην αναλογία ανάμεσα σε δύο σχέσεις: Τη σχέση ανάμεσα σε ένα αριθμό και στο αριθμητικό σύστημα και τη σχέση ανάμεσα σε ένα σημείο και στην αριθμητική γραμμή. Ο Pimm (1987) (αναφορά στο Herbst,1997) επισημαίνει ότι η αριθμητική γραμμή παρουσιάζεται με τέτοιο τρόπο στα διδακτικά εγχειρίδια, ώστε να επιτυγχάνεται η πλήρης αντιστοιχία ανάμεσα στη γραμμή και τα στοιχεία που την αποτελούν και στους αριθμούς και τις ιδιότητές τους. Συγκεκριμένα, η αριθμητική γραμμή μπορεί να αναπαραστήσει την ακολουθία των αριθμών, να δικαιολογήσει τους κανόνες προσήμων στον πολλαπλασιασμό των ακεραίων, να αναπαραστήσει το άπειρο των αριθμών, τη μοναδικότητα των αριθμών και την πυκνότητα των ρητών αριθμών.

Οι ρητοί αριθμοί αποτελούν θεμελιώδη μαθηματική έννοια, η οποία μπορεί να αναπαρασταθεί με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής, αλλά και να εκφρασθεί με τη χρήση ποικιλίας αναπαραστάσεων όπως είναι η συμβολική έκφραση, η λεκτική έκφραση και το διάγραμμα (Ni, 2000). Αρκετές ερευνητικές εργασίες δίνουν έμφαση στα οφέλη που προκύπτουν από την προσφυγή σε ποικιλία αναπαραστάσεων για τη διδασκαλία και μάθηση των ρητών αριθμών, αλλά και των μαθηματικών εννοιών γενικότερα. Τέτοια οφέλη, σύμφωνα με την έρευνα των Keller και Hirsch (1998), αποτελούν η συγκεκριμενοποίηση μιας έννοιας με ποικιλία τρόπων και η επιλεκτική έμφαση σε μερικά από τα στοιχεία της κάθε αναπαράστασης. Οι Ainsworth, Wood και Bibby (1997) αναφέρουν ότι οι πολλαπλές αναπαραστάσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν με τέτοιο τρόπο ώστε να υλοποιηθούν διάφοροι στόχοι όπως είναι: (α) η επαφή με διαφορετικές ιδέες και διαδικασίες, (β) η αναίρεση των περιορισμών στην κατανόηση που μπορεί να επιφέρει η χρήση ενός είδους αναπαράστασης και η διασαφήνιση εννοιών και τέλος, (γ) η προώθηση της βαθύτερης κατανόησης των μαθηματικών εννοιών.

Η χρήση συνδυασμού αναπαραστάσεων για την κατανόηση μιας έννοιας θεωρείται σημαντική, αφού ένα είδος αναπαράστασης μιας έννοιας παρέχει πληροφορίες για ορισμένες πτυχές της έννοιας, χωρίς να μπορεί να την περιγράψει ολοκληρωτικά. Αντίθετα, οι διάφορες αναπαραστάσεις της έννοιας αλληλοσυμπληρώνονται (Ασβεστά, & Γαγάτσης, 1995: Dreyfus, & Eisenberg, 1996: Kaput, 1992). Επιπρόσθετα, η μετάφραση ανάμεσα στις αναπαραστάσεις μιας έννοιας αποτελεί ένδειξη κατανόησης της έννοιας. Όπως επισημαίνει ο Kaput (1987), τα μαθηματικά αποτελούν ένα επιστημονικό οικοδόμημα, που εξετάζει τη διαδικασία μετάφρασης από μια δομή σε άλλη. Η ικανότητα μετάφρασης από ένα πεδίο έκφρασης – ένα σύστημα αναπαράστασης – σε άλλο διαδραματίζει σημαντικό ρόλο τόσο για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών όσο και για την επίλυση προβλήματος (Izsàk, 2000: Janvier, 1987: Monk, & Nemirovsky, 1994: Moschkovich, 1998: Schoenfeld, Smith, & Arcavi, 1993).

Ο σημαντικός ρόλος που διαδραματίζει η χρήση αναπαραστάσεων στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών φαίνεται από το μεγάλο αριθμό ερευνητικών εργασιών, που εξετάζουν το θέμα αυτό. Οι έρευνες αυτές μπορούν να ταξινομηθούν σε τέσσερις κατηγορίες ανάλογα με το θέμα στο οποίο εξειδικεύονται: Έρευνες σχετικές με (α) τη θεωρία αναπαραστάσεων ή τις αναπαραστάσεις και τη θεωρία μάθησης (Houser, 1987: Roth, & McGinn, 1987: Von Glasserfeld, 1987), (β) τις αναπαραστάσεις και την επίλυση προβλήματος (Cifarelli, 1998: Goldin, 1998: Lesh, Post & Behr, 1987: Owens, & Clements, 1998), (γ) τις αναπαραστάσεις και τις ειδικές μαθηματικές έννοιες (Hitt, 1998: Καλδρυμίδου, & Οικονόμου, 1992: Lesh, Behr, & Post, 1987: Schoenfeld et al., 1993) και (δ) τις αναπαραστάσεις και τη μετάφραση από το ένα είδος αναπαράστασης σε άλλο (Janvier, 1987: Gagatsis, 1997: Gagatsis, Demetriou, Afantiti, Michaelidou, Panaoura, Shiakalli, & Christoforides, 1999: Lesh, Behr, & Post, 1987: Lesh, Post, & Behr, 1987: Tirosh, Graeber, Fischbein, & Wilson, 1996).

Στις κατηγορίες που εξετάζουν τις αναπαραστάσεις και τις ειδικές μαθηματικές έννοιες καθώς και τη μετάφραση από το ένα είδος αναπαράστασης σε άλλο, εντάσσονται οι έρευνες, οι οποίες εξετάζουν τη χρήση του αριθμητικής γραμμής ως αναπαράστασης των ρητών αριθμών. Τα αποτελέσματα των ερευνητικών αυτών εργασιών αναφέρονται τόσο στα θετικά αποτελέσματα που προκύπτουν από τη χρήση της αριθμητικής γραμμής όσο και στις δυσκολίες που προκαλεί η χρήση του συγκεκριμένου μοντέλου. Αρκετές έρευνες υποστηρίζουν ότι (α) η χρήση της αριθμητικής γραμμής συμβάλλει στην κατανόηση της έννοιας των αριθμών και στην ανάπτυξη της τυπικής λογικής σκέψης σε σχέση με τα κλάσματα (Keijzer, & Terwel, 2000: Keijzer, & Terwel, 2001) και (β) η αριθμητική γραμμή αποτελεί μοντέλο για τη διδασκαλία των ρητών αριθμών και αξιολογικό εργαλείο για τον εντοπισμό των παρανοήσεων των μαθητών (Ni, 2000). Σε αντίθεση με τα αποτελέσματα των πιο πάνω ερευνών, υπάρχουν έρευνες, οι οποίες έχουν εντοπίσει δυσκολίες, που αντιμετωπίζουν οι μαθητές χρησιμοποιώντας την αριθμητική γραμμή ως μοντέλο για κατανόηση των ρητών αριθμών. Οι δυσκολίες εστιάζονται στην υποδιαίρεση της αριθμητικής γραμμής και στη μετάφραση ανάμεσα στη συμβολική και εικονική αναπαράσταση των πληροφοριών της αριθμητικής γραμμής (Behr, Lesh, Post, & Silver, 1983: Bright, Behr, Post, & Wachsmuth,1988)

Ο γενικός σκοπός της παρούσας ερευνητικής εργασίας είναι να εξετάσει τη χρησιμότητα της αριθμητικής γραμμής στην κατανόηση της έννοιας του κλάσματος. Ένας πρώτος στόχος της παρούσας ερευνητικής εργασίας είναι η διερεύνηση της ικανότητας των μαθητών να αναγνωρίζουν την έννοια του κλάσματος, όταν βρίσκεται πίσω από μια ποικιλία ποιοτικά διαφορετικών αναπαραστάσεων (αριθμητική γραμμή, ευθύγραμμο τμήμα, κύκλος), να χειρίζονται ευέλικτα την έννοια του κλάσματος σε ένα πεδίο αναπαράστασης (αριθμητική γραμμή, ευθύγραμμο τμήμα, κύκλος), και να μεταφράζουν με ακρίβεια από το ένα σύστημα αναπαράστασης της έννοιας του κλάσματος στο άλλο (αριθμητική γραμμή, συμβολική έκφραση, λεκτική έκφραση). Οι τρεις αυτές προϋποθέσεις, σύμφωνα με τους Lesh, Post και Behr (1987) αποτελούν ένδειξη κατανόηση μιας έννοιας. Ένας δεύτερος στόχος είναι η διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο οι μαθητές κατανοούν και χρησιμοποιούν τις αναπαραστάσεις του κλάσματος (αριθμητική γραμμή, ευθύγραμμο τμήμα, κύκλος), τα είδη μετάφρασης (μετάφραση από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή και αντίστροφα) και τα διαφορετικά γνωστικά αντικείμενα (ισοδυναμία κλασμάτων, πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων, πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων). Δηλαδή αν έχουν αναπτύξει τις αναπαραστάσεις, τα είδη μετάφρασης και τα γνωστικά αντικείμενα ως διαφορετικές έννοιες – στεγανοποίηση – ή ως διαφορετικές οντότητες που αφορούν την ίδια έννοια. Ένας τρίτος στόχος αφορά στον εντοπισμό ειδών μετάφρασης που είναι δυσκολότερα από άλλα (μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση και στη λεκτική έκφραση και αντίστροφα). Ο τέταρτος στόχος αφορά στην ύπαρξη τυχόν διαφοροποίησης στην επίδοση των μαθητών πέμπτης τάξης δημοτικού σε σχέση με το γνωστικό αντικείμενο το οποίο εξετάζει το έργο (αναγνώριση, αναπαράσταση, ισοδυναμία, πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων, πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων). Ο πέμπτος στόχος της εργασίας αφορά στη διερεύνηση του ρόλου που διαδραματίζει η αριθμητική γραμμή στην ανίχνευση παρανοήσεων και δυσκολιών των μαθητών σε σχέση με την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος. Ο έκτος στόχος της εργασίας αφορά στο ρόλο της αριθμητικής γραμμής στην επίλυση προβλημάτων με κλάσματα. Τέλος, ο έβδομος στόχος της εργασίας αφορά εξετάζει το ρόλο της διδασκαλίας στην αποτελεσματική χρήση της αριθμητικής γραμμής ως μέσου αναπαράστασης της έννοιας του κλάσματος.

Ερευνητικά Ερωτήματα

Η παρούσα εργασία επιχειρεί να δώσει απάντηση στα πιο κάτω ερευνητικά ερωτήματα:

1. Είναι ικανοί οι μαθητές πέμπτης τάξης δημοτικού να (α) αναγνωρίζουν την έννοια του κλάσματος όταν αυτή εκφράζεται με ποικιλία διαφορετικών αναπαραστάσεων (αριθμητική γραμμή, ευθύγραμμο τμήμα, κύκλος) , (β) χειρίζονται ευέλικτα την έννοια αυτή κάνοντας μετασχηματισμούς μέσα στο ίδιο πεδίο αναπαράστασης (αριθμητική γραμμή, ευθύγραμμο τμήμα, κύκλος) και (γ) μεταφράζουν με ακρίβεια από το ένα σύστημα αναπαράστασης της έννοιας στο άλλο (μετάφραση από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή και αντίστροφα);

2. Υπάρχει μια *στεγανοποίηση*, συνολικά, των ειδών αναπαράστασης, των έργων μετάφρασης ισοδυναμίας και πρόσθεσης κλασμάτων καθώς και των έργων που εξετάζουν διαφορετικά γνωστικά αντικείμενα;

3. Υπάρχουν είδη μετάφρασης (μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση και στη λεκτική έκφραση και αντίστροφα) που θεωρούνται πιο απλά σε επίπεδο μαθητών πέμπτης τάξης δημοτικού; Υπάρχουν, δηλαδή, είδη μετάφρασης στα οποία πρέπει να επιτύχουν οι μαθητές, ώστε να είναι σε θέση να επιτύχουν σε άλλα είδη μετάφρασης;

4. Υπάρχουν γνωστικά αντικείμενα τα οποία θεωρούνται πιο απλά και γνωστικά αντικείμενα που θεωρούνται δύσκολα σε επίπεδο μαθητών πέμπτης τάξης δημοτικού (αναγνώριση κλασμάτων, ικανότητα αναπαράστασης κλασμάτων, ισοδυναμία κλασμάτων, πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων, πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων);

5. Η αριθμητική γραμμή μπορεί να αποτελέσει εργαλείο αξιολόγησης, του οποίου η χρήση μπορεί να βοηθήσει τον εκπαιδευτικό να ανιχνεύσει παρανοήσεις και δυσκολίες που έχουν οι μαθητές σχετικά με την έννοια του κλάσματος;

6. Η επίδοση των μαθητών στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων πρόσθεσης κλασμάτων διαφοροποιείται όταν χρησιμοποιούν ως βοηθητικό μέσο την αριθμητική γραμμή;

7. Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές αναφορικά με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής ως μέσου αναπαράστασης των εννοιών της ισοδυναμίας και της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερώνυμων κλασμάτων οφείλονται στην αλγοριθμική προσέγγιση των κλασμάτων κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας; Κατά συνέπεια η αριθμητική γραμμή μπορεί να αποτελέσει ένα κατάλληλο μέσο αναπαράστασης των ρητών αριθμών όταν προηγηθεί η διδασκαλία του τρόπου λειτουργίας και χρήσης της ως αναπαράστασης των ρητών αριθμών;

Σημασία της Έρευνας

Οι ρητοί αριθμοί αποτελούν μια από τις πιο σημαντικές μαθηματικές έννοιες (α) από πρακτικής άποψης, αφού η ικανότητα αποτελεσματικού χειρισμού των ρητών αριθμών βελτιώνει την ικανότητα κατανόησης και χειρισμού προβλημάτων της καθημερινής ζωής· (β) από μαθηματικής άποψης, αφού η κατανόηση των ρητών αριθμών αποτελεί το θεμέλιο πάνω στο οποίο βασίζονται οι στοιχειώδεις αλγεβρικές πράξεις (Behr et al., 1983).

Αναγνωρίζοντας τη σημασία των ρητών αριθμών ένα μεγάλο μέρος του αναλυτικού προγράμματος των δημοτικών σχολείων, στις περισσότερες χώρες, αφορά τη διδασκαλία των θετικών ρητών αριθμών (Tirosh, et al., 1996). Αρκετές ερευνητικές εργασίες εξετάζουν την κατανόηση των ρητών αριθμών από τους μαθητές (Behr, Harel, Post, & Lesh, 1992: Carpenter, Fennema, & Romberg, 1993). Σύμφωνα με τις έρευνες αυτές, παρόλο που ένα μεγάλο μέρος του αναλυτικού προγράμματος των μαθηματικών αφιερώνεται στους ρητούς αριθμούς, οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην κατανόηση των ρητών αριθμών για τους ακόλουθους λόγους: (α) οι μαθητές δεν έχουν αρκετές εμπειρίες αναφορικά με τη χρήση των κλασμάτων, σε αντίθεση με τους ακέραιους αριθμούς, στην καθημερινή ζωή (Greer, 1994), (β) αρκετοί μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν το κλάσμα ως αριθμό και τείνουν να το χειρίζονται ως δύο διαφορετικούς ακέραιους αριθμούς (Hart, 1981: Kerslake, 1986: Ni, 2000) και (γ) οι μαθητές συχνά αποδίδουν ιδιότητες των πράξεων των ακεραίων στις πράξεις με τους ρητούς αριθμούς (Bell, Fischbein, & Greer, 1984: Hiebert, & Wearne, 1986: Nesher, 1988: Owens, 1987: Sowder, 1988). Η ανάγκη κατανόησης και χειρισμού των διάφορων ερμηνειών και αναπαραστάσεων των ρητών αριθμών όπως είναι το μέρος – όλο, ο λόγος, ο τελεστής, το πηλίκο και το μέτρο αποτελεί ακόμα μια πηγή δυσκολιών για τους μαθητές (Behr, et al., 1983:

Freudenthal, 1983: Ni, 2001). Με βάση τα αποτελέσματα των πιο πάνω ερευνητικών εργασιών και τα αποτελέσματα διεθνών αξιολογήσεων φαίνεται ότι οι ρητοί αριθμοί αποτελούν μια έννοια την οποία δύσκολα κατανοούν αρκετοί μαθητές (Hiebert, 1988: Kieren, 1988: Travers, & Westbury, 1990).

Αναφορικά με το ρόλο της αριθμητικής γραμμής στη διδασκαλία των ρητών αριθμών παρουσιάζεται διχογνωμία ανάμεσα στις ερευνητικές εργασίες. Αρκετές έρευνες έχουν δείξει ότι η αριθμητική γραμμή προκαλεί επιπλέον δυσκολίες στους μαθητές αναφορικά με την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος. Οι δυσκολίες αυτές αφορούν (α) στην αναγνώριση της μονάδας στην αριθμητική γραμμή, (β) στην επίλυση προβλημάτων στα οποία οι υποδιαιρέσεις στην αριθμητική γραμμή δεν ισούνται με τον παρονομαστή του κλάσματος, (γ) στην επίλυση προβλημάτων στα οποία οι υποδιαιρέσεις της αριθμητικής γραμμής δεν είναι παράγοντες ή πολλαπλάσια του παρονομαστή του κλάσματος, καθώς και (γ) στη μετάφραση ανάμεσα στη συμβολική και εικονική αναπαράσταση των πληροφοριών της αριθμητικής γραμμής (Behr et al., 1983: Bright, et al.,1988: Michaelidou, 2003)

Αρκετές, όμως, μελέτες έχουν δείξει ότι η χρήση της αριθμητικής γραμμής, ως μέσου αναπαράστασης των ρητών αριθμών, συμβάλλει στην κατανόηση της έννοιας του αριθμού και στην ανάπτυξη της τυπικής λογικής σκέψης σε σχέση με τα κλάσματα (Keijzer, & Terwel, 2000: Keijzer, & Terwel, 2001). Επίσης, σύμφωνα με τη Ni (2000), επειδή η αριθμητική γραμμή είναι μια σημαντική αναπαράσταση των ρητών αριθμών και ο χειρισμός της αποτελεί πρόκληση για τους μαθητές, αποτελεί αναπόσπαστο μέρος των αξιολογικών δοκιμίων, όπως για παράδειγμα της Εθνικής Αξιολόγησης της Εκπαιδευτικής Προόδου στα Μαθηματικά (NAEP). Έρευνες όπως αυτές των Behr, Wachmouth, Post και Lesh (1984) και Ni (2000) έχουν δείξει ότι η αριθμητική γραμμή αποτελεί αξιολογικό εργαλείο το οποίο εντοπίζει τις παρανοήσεις των μαθητών. Αυτό οφείλεται πρωταρχικά στο ότι η αριθμητική γραμμή περιλαμβάνει παραπλανητικά στοιχεία για κάποιο μαθητή, ο οποίος έχει παρανοήσεις ή δεν έχει αναπτύξει πλήρως την έννοια των ρητών αριθμών.

Η έλλειψη εργασιών στο χώρο της κυπριακής εκπαίδευσης σχετικών με την ικανότητα των μαθητών δημοτικού να μεταφράζουν από τη μια αναπαράσταση της έννοιας του κλάσματος στην άλλη και ιδιαίτερα στην αριθμητική γραμμή, καθιστά τη διεξαγωγή μιας τέτοιας έρευνας αναγκαία. Επιπλέον, ο τρόπος διεξαγωγής της έρευνας παρουσιάζει κάποιες ιδιαιτερότητες. Δίνεται έμφαση στην ικανότητα μετάφρασης, αφού δίνεται ένα είδος αναπαράστασης μιας έννοιας και ζητείται από τους μαθητές να βρουν τα άλλα δύο είδη αναπαράστασης της ίδιας έννοιας (π. χ. δίνεται η λεκτική έκφραση για ένα ρητό αριθμό και ζητούνται η συμβολική έκφραση και η αναπαράστασή του σε αριθμητική γραμμή). Επίσης, δίνεται έμφαση στην έννοια της επικοινωνίας, αφού εφαρμόστηκε για πρώτη φορά το πείραμα επικοινωνίας σε έργα τα οποία εξετάζουν την αριθμητική γραμμή ως αναπαράσταση της ισοδυναμίας και πρόσθεσης κλασμάτων.

Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση της έννοιας του κλάσματος, η διχογνωμία των ερευνητικών εργασιών αναφορικά με το ρόλο της αριθμητικής γραμμής ως αναπαράστασης των ρητών αριθμών, καθώς και η έλλειψη εργασιών σχετικών με την ικανότητα μετάφρασης από τη μία αναπαράσταση της έννοιας του κλάσματος στην άλλη αποτελούν παράγοντες, οι οποίοι καθιστούν την παρούσα ερευνητική εργασία αναγκαία.

Ορισμοί

Η *αναπαράσταση* είναι μια οντότητα που χρησιμοποιείται ως μέσο και εργαλείο σκέψης με το οποίο το άτομο εξωτερικεύει και κάνει κατανοητές προς τα άλλα άτομα τις νοητικές του διεργασίες. Εκτός από εργαλείο σκέψης οι αναπαραστάσεις αποτελούν και επικοινωνιακό εργαλείο. Συγκεκριμένα, όταν γίνεται συζήτηση για μια έννοια με τη χρήση μιας συγκεκριμένης αναπαράστασης τότε η αναπαράσταση αυτή χρησιμοποιείται ως μέσο το οποίο θα συντονίσει τις δραστηριότητες και τις αποκλίνουσες απόψεις των ατόμων διευκολύνοντας έτσι τη ροή πληροφοριών, υλικών, διαδικασιών (Roth & McGinn, 1998).

Η έννοια της *αναπαράστασης* περιλαμβάνει τις ακόλουθες πέντε οντότητες: (α) την οντότητα που αναπαρίσταται, (β) την οντότητα; που αναπαριστά, (γ) τις συγκεκριμένες πτυχές της οντότητας προς αναπαράσταση που αναπαρίστανται, (δ) τις συγκεκριμένες πτυχές της οντότητας που αναπαριστά, οι οποίες κάνουν την αναπαράσταση και (ε) την αντιστοιχία ανάμεσα στις δύο οντότητες (Kaput, 1987, σ. 23).

Οι *εξωτερικές αναπαραστάσεις* είναι όλα τα εξωτερικά συμβολικά συστήματα, όπως για παράδειγμα, ο προφορικός και ο γραπτός λόγος, τα σύμβολα, τα σχήματα, τα διαγράμματα, τα χειριστικά μοντέλα κτλ. (Boulton - Lewis, 1998: DeLoache, Utall, & Pierroutsakos, 1998: Dufour-Janvier, Bednarz, & Belanger, 1987: Goldin, & Kaput, 1996).

Οι *εσωτερικές αναπαραστάσεις* είναι οι νοητικές εικόνες, που χρησιμοποιούνται από το άτομο για να αποδώσουν την πραγματικότητα (Dufour-Janvier et al., 1987, σ. 109).

Ο όρος *μετάφραση* αναφέρεται στις ψυχολογικές διαδικασίες, που αποσκοπούν στη μετάβαση από ένα είδος αναπαράστασης σε άλλο (Janvier, 1987, σ. 27).

Τα *έργα μετάφρασης* είναι έργα στα οποία δίνεται μια αναπαράσταση της έννοιας της ισοδυναμίας κλασμάτων ή της πρόσθεσης κλασμάτων και οι μαθητές καλούνται να μεταβούν σε μια άλλη αναπαράσταση της ίδιας έννοιας, για παράδειγμα από τη συμβολική έκφραση στη λεκτική έκφραση και στην αναπαράσταση του κλάσματος στην αριθμητική γραμμή.

Η έννοια του *γεωμετρικού μοντέλου* ορίζεται ως εξής: Έστω μια συλλογή S από σημεία, ευθείες ή σχήματα στο ν – διαστάσεων ευκλείδειο χώρο, που αναπαριστά ένα σύστημα Σ αντικειμένων, ή μια κατάσταση ή μια διαδικασία. Η συλλογή S είναι *γεωμετρικό μοντέλο του Σ*, αν οι εγγενείς γεωμετρικές ιδιότητες των στοιχείων της συλλογής S, δηλαδή οι γεωμετρικές ιδιότητες των σημείων, των ευθειών και των διαγραμμάτων της συλλογής S, ανεξάρτητα από το Σ, μας δίνουν όλες κάποια πληροφορία για το Σ, δηλαδή αντιστοιχούν σε πραγματικές ιδιότητες του συστήματος Σ (Γαγάτσης & Πατρώνης, 1993, σ. 201). Αν αυτή η συνθήκη ικανοποιείται μόνο από τις *τοπολογικές* ιδιότητες των σχημάτων της συλλογής S, τότε λέμε ότι η S είναι *γεωμετρικό μοντέλο με πλατιά (ή τοπολογική) σημασία* (Γαγάτης & Πατρώνης, 1993, σ. 201).

Η *αριθμητική γραμμή* είναι μια ευθεία με ένα διακριτό σύνολο σημείων, τα οποία δεχόμαστε ότι αντιστοιχούν στους ακέραιους ή τους ρητούς αριθμούς (Gagatsis & Patronis, 1990).

Η έννοια του *ρητού αριθμού* αποτελείται από πέντε βασικές υποέννοιες, οι οποίες σχετίζονται μεταξύ τους: (α) την υποέννοια του κλασματικού μέτρου, η οποία αντιπροσωπεύει το μέρος μιας ποσότητας σε σχέση με την ιδιαίτερη μονάδα της ποσότητας – μέρος και όλο· (β) την υποέννοια του λόγου, που ορίζει μια νέα ποσότητα ως σχέση μεταξύ άλλων ομοειδών ποσοτήτων· (γ) την υποέννοια του πηλίκου, που ορίζει το ρητό αριθμό ως αποτέλεσμα διαίρεσης δύο ακεραίων· (δ) την υποέννοια της γραμμικής συντεταγμένης, που ερμηνεύει το ρητό αριθμό ως σημείο στην ευθεία των πραγματικών αριθμών· (ε) την υποέννοια του τελεστή, που ερμηνεύει το κλάσμα ως μετασχηματισμό σε ένα σύνολο ομοειδών ποσοτήτων ή γεωμετρικών μεγεθών (Lamon,1999).

Μεταφορά γνώσης αποτελεί η χρήση προηγούμενων γνώσεων από τους μαθητές με στόχο την οικοδόμηση μαθηματικής γνώσης (Chiu, 2000). Οι μαθητές έχουν πρόσβαση στη μη τυπική και μη μαθηματική γνώση και αντλούν από αυτές έννοιες και ιδιότητες, για να ερμηνεύσουν μια νέα τυπική μαθηματική γνώση, επιδεικνύοντας έτσι μεταφορική λογική (Black, 1993: Lakoff, & Johnson, 1980: Nolder, 1991: Pimm, 1987: Presmeg, 1992) (αναφορά στο Chiu, 2000).

Η *ενόραση* αναφέρεται στο είδος εκείνο της σκέψης το οποίο αποτελείται από αντιλήψεις, τις οποίες το άτομο χρησιμοποιεί συχνά γι' αυτό είναι αυταπόδεικτες, ολιστικές και εννοιολογικές (Fischbein, 1987) (αναφορά στο Chiu, 2000). Στο ενορατικό στάδιο σκέψης το άτομο είναι γνώστης, κυρίως μέσα από τις αισθήσεις του, των πληροφοριών που προέρχονται από το περιβάλλον. Οι πληροφορίες αυτές κατηγοριοποιούνται και συσχετίζονται με άλλες πληροφορίες «αυτόματα», χωρίς το άτομο να γνωρίζει ποιες νοητικές διεργασίες χρειάστηκαν για να διεκπεραιωθεί η δραστηριότητα αυτή (Gagatsis & Patronis, 1990).

Ο όρος *στεγανοποίηση* χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία με μια στατιστική έννοια: ένα σύνολο έργων, ασκήσεων ή προβλημάτων είναι *στεγανοποιημένο* ως προς ένα άλλο αντίστοιχο σύνολο, όταν τα δύο σύνολα σχηματίζουν διαφορετικές ομαδοποιήσεις ή κλάσεις ομαδοποιήσεων στο Δενδροδιάγραμμα Ομοιότητας που προκύπτει από τη Στατιστική Συνεπαγωγική

Μέθοδο του Gras. Ο όρος *στεγανοποίηση* στην παρούσα ερευνητική εργασία δεν αναφέρεται στη σημασία που του αποδίδουν ορισμένοι ψυχολόγοι (π. χ. Karmiloff-Smith, 1992) με την οποία υπονοείται ότι δεν υπάρχει κανενός είδους σχέση ή επικοινωνία μεταξύ δύο συνόλων δεξιοτήτων, ικανοτήτων ή γνώσεων – ή «σπονδύλων» (Karmiloff-Smith, 1992).

Η *αναστοχαστική σκέψη* χαρακτηρίζεται από τη γνώση των νοητικών διεργασιών που απαιτούνται για τη διεκπεραίωση μιας δραστηριότητας (Gagatsis & Patronis, 1990). Η *αναστοχαστική σκέψη* αποτελεί διαδικασία με τα εξής στάδια:

Στάδιο 0: Αρχικές σκέψεις και αντιλήψεις για κάποιο γνωστικό πεδίο ή πρόβλημα, αποσπασματικές νοητικές εικόνες και μη συστηματικές παρατηρήσεις.

Στάδιο 1: Οργάνωση των νέων πληροφοριών σε ήδη υπάρχουσες διαισθητικές δομές, κατηγοριοποίηση παρατηρήσεων, ανάλυση του όλου σε μέρη, ανάκληση παρόμοιων παραδειγμάτων, εύρεση αντιπαραδειγμάτων, αμφισβήτηση προηγούμενων πεποιθήσεων και αντιλήψεων.

Στάδιο 2: Ανακάλυψη και μερική κατανόηση, εύρεση και αιτιολόγηση κανόνων, επεξηγήσεις λαθών, σύνθεση επιμέρους στοιχείων σε ενιαίο σύνολο, ερμηνεία και μερική αναδιοργάνωση των νέων πληροφοριών σύμφωνα με τις προηγούμενες δομές, συμπλήρωση νοητικών εικόνων και εκπόνηση σχεδίου λύσης ή απόδειξης.

Στάδιο 3: Ενδοσκόπηση, στοχασμός για την πορεία επίλυσης, τη λογική της απόδειξης και τις νοητικές δομές και διαδικασίες του λύτη. Έλεγχος των αποτελεσμάτων και εφαρμογή τους σε άλλα προβλήματα. Διερεύνηση αναλογιών και διατύπωση καινούριων ερωτημάτων.

Στάδιο 4: Πλήρης κατανόηση της υποκείμενης λογικής που διέπει το πρόβλημα και των γνωστικών δομών του λύτη. Επέκταση, μετατροπή ή και πλήρης απόρριψη των υπάρχουσων νοητικών δομών και ριζική αναδιοργάνωση των ιδεών. Διατύπωση γενικεύσεων και οικοδόμηση νέων θεωριών.

Δομή της Εργασίας

Η παρούσα εργασία αποτελείται από πέντε κεφάλαια. Το πρώτο κεφάλαιο είναι η εισαγωγή της εργασίας. Το δεύτερο κεφάλαιο αφορά στην επισκόπηση της βιβλιογραφίας. Στην επισκόπηση της βιβλιογραφίας γίνεται γενική αναφορά στις αναπαραστάσεις, στα αναμενόμενα αποτελέσματα και στις δυσκολίες που αφορούν στη χρήση των αναπαραστάσεων στη διδασκαλία των μαθηματικών και στη σημασία της ικανότητας μετάφρασης από το ένα είδος αναπαράστασης στο άλλο. Έπειτα και σε σχέση με την έννοια της αναπαράστασης, αναλύεται η έννοια του γεωμετρικού μοντέλου το οποίο ανήκει στις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά. Η αναφορά στα γεωμετρικά μοντέλα περιλαμβάνει την παρουσίαση, μέσα από ερευνητικές εργασίες, της αριθμητικής γραμμής ως γεωμετρικού μοντέλου που χρησιμοποιείται για την αναπαράσταση μαθηματικών εννοιών. Τη γενική αυτή αναφορά στις αναπαραστάσεις και στα γεωμετρικά μοντέλα ακολουθεί ειδικότερη αναφορά, μέσα από ερευνητικές εργασίες, στις αναπαραστάσεις και στα γεωμετρικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται για να εκφράσουν την έννοια του κλάσματος. Η αναφορά στα γεωμετρικά μοντέλα επικεντρώνεται στη χρήση της αριθμητικής γραμμής, ως γεωμετρικού μοντέλου που χρησιμοποιείται για την αναπαράσταση των κλασμάτων. Η επισκόπηση της βιβλιογραφίας ολοκληρώνεται με την επεξήγηση της ισοδυναμίας και πρόσθεσης κλασμάτων, αφού παρούσα εργασία εξετάζει στην ικανότητα των μαθητών να μεταφράζουν ανάμεσα στις αναπαραστάσεις των δύο αυτών γνωστικών αντικειμένων.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η μεθοδολογία της έρευνας. Συγκεκριμένα, γίνεται αναφορά στις υποθέσεις της έρευνας και στα υποκείμενα, περιγράφονται τα έργα, ο τρόπος διεξαγωγής της έρευνας για τη συλλογή ποσοτικών και ποιοτικών δεδομένων και οι στατιστικές μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν για την ανάλυση των δεδομένων.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν με βάση τη στατιστική ανάλυση. Η στατιστική ανάλυση των δεδομένων έγινε με δύο μεθόδους - με τη Συνεπαγωγική Στατιστική Μέθοδο του Gras και με το Στατιστικό Πακέτο SPSS.

Το πέμπτο κεφάλαιο περιλαμβάνει τα συμπεράσματα, που προκύπτουν με βάση τα αποτελέσματα, καθώς επίσης παρατηρήσεις και εισηγήσεις για μελλοντική έρευνα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Αναπαραστάσεις και Μαθηματικά

Οι αναπαραστάσεις ανήκουν σε δομικά πολύπλοκα συστήματα, προσωπικά ή πολιτισμικά και συμβατικά (Goldin, & Kaput, 1996). Συνοπτικά ο όρος *αναπαράσταση* ή *σύστημα αναπαράστασης* περιλαμβάνει τα εξής (Goldin, 1998, Lesh, Post, & Behr, 1987):

1. Εξωτερικές φυσικές ενσωματώσεις - οποιαδήποτε δομημένη φυσική κατάσταση ή σύνολο καταστάσεων εξωτερικών προς το άτομο, οι οποίες μπορούν να περιγραφούν με τη χρήση των Μαθηματικών ή να θεωρηθούν ως ενσωματώσεις μιας μαθηματικής έννοιας. Στην κατηγορία αυτή εντάσσονται φυσικές ενσωματώσεις όπως είναι τα χειριστικά αντικείμενα / μοντέλα και οι εικόνες ή διαγράμματα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτής της κατηγορίας αποτελεί μια αριθμητική γραμμή, η οποία εξηγεί σχέσεις σειροθέτησης ανάμεσα σε αριθμούς.
2. Εξωτερικές γλωσσικές ενσωματώσεις - δίνεται έμφαση στα συντακτικά και σημασιολογικά δομικά χαρακτηριστικά της γλώσσας, που χρησιμοποιείται για την κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων και τη συζήτηση των Μαθηματικών.
3. Τυπικές μαθηματικές κατασκευές ή συστήματα κατασκευών, που αναπαριστούν καταστάσεις μέσω της χρήσης συμβόλων, τα οποία συνήθως υπακούουν σε συγκεκριμένα αξιώματα ή είναι σύμφωνα με ακριβείς ορισμούς. Τα σύμβολα ή σημεία αφορούν τα τεχνητά σημεία που χρησιμοποιούνται για να αναπαραστήσουν κάτι. Το σύμβολο επιλέγεται αυθαίρετα ανάμεσα σε πολλές πιθανές επιλογές, για να υποδηλώσει κάτι άλλο.
4. Εσωτερικές νοητικές αναπαραστάσεις η ύπαρξη των οποίων συμπεραίνεται με βάση τη συμπεριφορά. Πρόκειται για εσωτερικές, γνωστικές διαμορφώσεις των υποκειμένων, για ατομικές εσωτερικές αναπαραστάσεις μαθηματικών ιδεών, όπως

είναι το *εμβαδόν*, οι *συναρτήσεις* κτλ. Περιλαμβάνονται, επίσης, συστήματα γνωστικής αναπαράστασης με μια ευρύτερη έννοια, ως κατασκευές που υποβοηθούν την περιγραφή των διαδικασιών μάθησης και επίλυσης προβλήματος στα Μαθηματικά.

Η πρώτη, δεύτερη και τρίτη κατηγορία αναπαραστάσεων αφορά στις εξωτερικές αναπαραστάσεις, ενώ η τέταρτη κατηγορία αφορά στις εσωτερικές - νοητικές αναπαραστάσεις (DeLoache, et al., 1998: Goldin, & Kaput, 1996: Roth, & McGinn, 1998: Seeger, 1998). Οι Goldin και Kaput διακρίνουν τα εσωτερικά από τα εξωτερικά συστήματα αναπαράστασης υποστηρίζοντας ότι «η διάκριση αυτή είναι ουσιαστικής σημασίας για την Ψυχολογία και τη μάθηση των Μαθηματικών» (Goldin & Kaput, 1996, σ. 399). Σε μερικές περιπτώσεις το άτομο εξωτερικεύει σε φυσική μορφή πράξεις που πηγάζουν από εσωτερικές δομές, ενώ σε άλλες περιπτώσεις εσωτερικεύει πράξεις μέσω της αλληλεπίδρασης με τις εξωτερικές φυσικές δομές ενός συμβολικού συστήματος διαβάζοντας και ερμηνεύοντας λέξεις και προτάσεις, ερμηνεύοντας εξισώσεις και γραφικές παραστάσεις. Πολύ συχνά οι αμφίδρομες αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στις εσωτερικές και τις εξωτερικές αναπαραστάσεις συμβαίνουν ταυτόχρονα (Goldin, & Kaput, 1996).

Η ερμηνεία των εξωτερικών αναπαραστάσεων δεν είναι αντικειμενική ή απόλυτη, αλλά εξαρτάται από τις εσωτερικές αναπαραστάσεις των ατόμων που δίνουν την ερμηνεία (Goldin & Kaput, 1996). Σύμφωνα με μια από τις βασικές αρχές του οικοδομισμού (von Glasersfeld, 1987) μια αναπαράσταση δεν αναπαριστά από μόνη της· χρειάζεται ερμηνεία και για να ερμηνευθεί πρέπει να υπάρχει το άτομο που θα την ερμηνεύσει. Το κάθε άτομο αντιλαμβάνεται και ερμηνεύει μια εξωτερική αναπαράσταση με βάση τις νοητικές αναπαραστάσεις που έχει ήδη οικοδομήσει ως αποτέλεσμα προηγούμενων γνώσεων και εμπειριών. Η ερμηνεία μπορεί να επέλθει και με το συνδυασμό επιμέρους γνωστών στοιχείων με αποτέλεσμα να οικοδομηθεί μια νέα έννοια. Υπάρχει, δηλαδή, μια αμφίδρομη σχέση αλληλεπίδρασης ανάμεσα στις εσωτερικές και τις εξωτερικές αναπαραστάσεις (Goldin, & Kaput, 1996).

Στόχοι της Χρήσης Αναπαραστάσεων στη Διδασκαλία των Μαθηματικών

Ο βασικός στόχος της χρήσης εξωτερικών αναπαραστάσεων, όπως είναι η αριθμητική γραμμή, είναι η δημιουργία πλούσιων εσωτερικών δομών για τις μαθηματικές έννοιες, αφού εξωτερικές και εσωτερικές αναπαραστάσεις βρίσκονται σε σχέση αλληλεπίδρασης (Goldin & Kaput, 1996).

Η χρήση ποικιλίας εξωτερικών αναπαραστάσεων έχει συνδεθεί με τη διαδικασία κατανόησης των μαθηματικών εννοιών. Αποτελέσματα ερευνών δείχνουν ότι η χρήση αναπαραστάσεων συμβάλλει στη σε βάθος κατανόηση και στην ευέλικτη χρήση των μαθηματικών εννοιών (Hiebert, & Carpenter, 1992: Kaput, 1989: Skemb, 1987).

Όπως επισημαίνουν οι Dufour-Janvier et al. (1987), οι αναπαραστάσεις είναι σύμφυτες με τα Μαθηματικά. Υπάρχουν αναπαραστάσεις, οι οποίες είναι τόσο στενά συνδεδεμένες με μια μαθηματική έννοια, ώστε να καθίσταται δύσκολη η κατανόηση της έννοιας, χωρίς τη χρήση των συγκεκριμένων αναπαραστάσεων. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η έννοια της συνάρτησης, η οποία συνήθως, αναπαρίσταται με τη χρήση της γραφικής παράστασης.

Περαιτέρω, οι αναπαραστάσεις αποτελούν πολλαπλές συγκεκριμενοποιήσεις της ίδιας έννοιας. Σύμφωνα με τους Dufour-Janvier et al. (1987) διαφορετικές αναπαραστάσεις εμπερικλείουν την ίδια μαθηματική έννοια ή την ίδια μαθηματική δομή. Η παρουσίαση αυτών των αναπαραστάσεων στους μαθητές έχει σκοπό τον εντοπισμό των κοινών ιδιοτήτων των διάφορων αναπαραστάσεων και την κατανόηση της έννοιας, που αποτελεί στόχο της διδασκαλίας.

Με βάση τα αποτελέσματα της έρευνας των de Jong, Ainsworth, Dobson, van der Hulst, Levonen, Reimann, Sime, van Someren, Spada και Swaak (1998) φάνηκε ότι οι αναπαραστάσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν με τέτοιο τρόπο ώστε να υλοποιηθούν διάφοροι στόχοι όπως είναι: (α) η επαφή με διαφορετικές ιδέες και διαδικασίες, (β) η αναίρεση των περιορισμών και η διασαφήνιση εννοιών και τέλος, (γ) η προώθηση της βαθύτερης κατανόησης των μαθηματικών εννοιών.

Ένα από τα κύρια πλεονεκτήματα της χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων στη διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών είναι η επαφή με διαφορετικές ιδέες και διαδικασίες. Τα διαγράμματα περιλαμβάνουν τις ίδιες πληροφορίες με τις αλγεβρικές σχέσεις, αλλά διαφέρουν σε σχέση με τις υπολογιστικές ιδιότητες (Larkin & Simon, 1987) (αναφορά στο Ainsworth et al., 1997). Τα διαγράμματα ενεργοποιούν αντιληπτικές διαδικασίες, που αφορούν την ομαδοποίηση σχετικών μεταξύ τους πληροφοριών, καθιστώντας με τον τρόπο αυτό τις διαδικασίες διερεύνησης και αναγνώρισης ευκολότερες.

Η ίδια έρευνα έχει δείξει ότι οι αναπαραστάσεις που αφορούν μαθηματικές έννοιες, όπως είναι η συνάρτηση, διαφέρουν μεταξύ τους σε σχέση με τις διαδικασίες ανάλυσής τους. Αναφορικά με την έννοια της συνάρτησης, οι πίνακες τείνουν να παρουσιάζουν τις πληροφορίες με τρόπο αναλυτικό και να επισύρουν την προσοχή στην ύπαρξη μοτίβων και κανονικοτήτων. Ένα άλλο παράδειγμα αφορά το γεγονός ότι η ποσοτική σχέση που εκφράζεται από τη συμβολική έκφραση $y = 2x + 5$ δεν κάνει και τόσο εμφανή την έννοια της μεταβολής, γεγονός που επιτυγχάνεται μέσω της γραφικής παράστασης. Κατά συνέπεια, ο συνδυασμός αναπαραστάσεων με διαφορετικές ιδιότητες συμβάλλει στη σφαιρική αντιμετώπιση των μαθηματικών εννοιών, αφού αξιοποιούνται τα πλεονεκτήματα της κάθε αναπαράστασης, ενώ παραλείπονται αδυναμίες συγκεκριμένων αναπαραστάσεων. Οι πληροφορίες που παρέχουν οι διαφορετικές αναπαραστάσεις αλληλοσυμπληρώνονται, συμβάλλοντας έτσι στην καλύτερη κατανόηση μιας έννοιας. Η συμπληρωματικότητα των πεδίων αναπαράστασης αφορά κυρίως τις ιδιότητες που χαρακτηρίζουν κάθε σύστημα αναπαράστασης. Συγκεκριμένα, ο Duval (1993) αναφέρει ότι η φύση του σημειωτικού πεδίου που επιλέγεται για την αναπαράσταση ενός περιεχομένου - αντικειμένου, έννοιας ή κατάστασης - επιβάλλει μια επιλογή σημαντικών πληροφοριακών στοιχείων του περιεχομένου της κατάστασης προς αναπαράσταση. Για παράδειγμα, η φυσική γλώσσα δεν προσφέρει τις ίδιες δυνατότητες αναπαράστασης με ένα σχήμα ή ένα διάγραμμα. Αυτό σημαίνει ότι κάθε αναπαράσταση είναι γνωστικά μερική ως προς αυτό που παριστάνει. Τα σχήματα και γενικά όλες οι αναλογικές αναπαραστάσεις παριστάνουν μόνο καταστάσεις, σχηματισμούς ή εξαγόμενα πράξεων, ενώ δεν μπορούν να αναπαραστήσουν πράξεις ή μετασχηματισμούς. Η αναπαράσταση πράξεων απαιτεί ένα πεδίο που να έχει τις ιδιότητες μιας γλώσσας, φυσικής ή αλγεβρικής. Αντίθετα, τα σχήματα επιτρέπουν την αναπαράσταση των σχέσεων που υπάρχουν ανάμεσα στα στοιχεία που συνθέτουν ένα αντικείμενο ή μια κατάσταση.

Η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων έχει ως αποτέλεσμα μια κατάσταση να διασαφηνίζεται, αφού αναιρούνται οι περιορισμοί που επιβάλλονται στην κατανόηση του μαθητή. Οι Ainsworth et al. (1997) αναφέρουν ως παράδειγμα τη χρήση μιας αναπαράστασης που στοχεύει να υποβοηθήσει την κατανόηση μιας άλλης πολυπλοκότερης ή λιγότερο οικείας αναπαράστασης. Για παράδειγμα, ένας μαθητής πιστεύει ότι μια ευθεία παράλληλη με τον άξονα x σε μια γραφική παράσταση, που απεικονίζει τη μεταβολή της ταχύτητας σε σχέση με το χρόνο, αναπαριστά ένα ακίνητο αντικείμενο ή ότι η αρνητική κλίση αναπαριστά την αντίθετη κατεύθυνση. Ο μαθητής θα αναθεωρήσει τις παρανοήσεις που έχουν δημιουργηθεί, όταν οι πληροφορίες αυτές παρουσιαστούν με τη χρήση άλλων αναπαραστάσεων.

Η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων ενισχύει τη βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Ο Kaput (1989) (αναφορά στο Ainsworth et al., 1997) υποστηρίζει ότι η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων, οι οποίες είναι συνδεδεμένες μεταξύ τους, επιτρέπει στους μαθητές να αντιληφθούν πολύπλοκες ιδέες με ένα εντελώς καινούριο τρόπο και να τις εφαρμόσουν πιο αποτελεσματικά. «Η μαθηματική γνώση μπορεί να χαρακτηριστεί ως η ικανότητα αντιστοίχισης ανάμεσα στις διαφορετικές αναπαραστάσεις» (Ainsworth et al., 1997, σ. 2).

Ένας ακόμη λόγος, ο οποίος συνηγορεί υπέρ της χρήσης ποικιλίας αναπαραστάσεων αφορά στην οικονομία επεξεργασίας, που χαρακτηρίζει ορισμένα συστήματα αναπαράστασης. Οι σχέσεις ανάμεσα σε αντικείμενα μπορούν να αναπαρασταθούν με πιο γρήγορο και πιο κατανοητό τρόπο με τη χρήση αλγεβρικών τύπων παρά με τη χρήση φράσεων της φυσικής γλώσσας. Για παράδειγμα, η διατύπωση ενός πολύπλοκου μαθηματικού τύπου θα απαιτούσε τη χρήση πολλών φράσεων της φυσικής γλώσσας (Duval, 1993).

Το γεγονός ότι η πλήρης κατανόηση ενός εννοιολογικού περιεχομένου βασίζεται στο συνδυασμό τουλάχιστον δύο πεδίων αναπαράστασης αιτιολογεί την αναγκαιότητα χρήσης ποικιλίας αναπαραστάσεων. Ο συνδυασμός χαρακτηρίζεται από την ταχύτητα και τον αυθόρμητο χαρακτήρα της γνωστικής δραστηριότητας της μετατροπής (μετάφρασης) (Duval,1993).

Οι αναπαραστάσεις χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία των μαθηματικών με στόχο να μειώσουν συγκεκριμένες μαθησιακές δυσκολίες και να κάνουν τα μαθηματικά πιο ελκυστικά και ενδιαφέροντα. Οι Ainsworth et al. (1997) αναφέρουν ότι οι συγγραφείς των βιβλίων των μαθηματικών χρησιμοποιούν τις αναπαραστάσεις εκτεταμένα με στόχο να προσφέρουν εναλλακτικούς και πιο αποδοτικούς τρόπους προσέγγισης των μαθηματικών προβλημάτων.

Η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων πρέπει να γίνεται με τρόπο ώστε να μην επιβαρύνονται τα υποκείμενα με μεγάλο κόστος νοητικής επεξεργασίας. Κατά τη διάρκεια της ενασχόλησης με τις διάφορες αναπαραστάσεις τα υποκείμενα έρχονται αντιμέτωπα με τρεις διαδικασίες. Αρχικά, πρέπει να κατανοήσουν το κάθε είδος αναπαράστασης – πρώτη διαδικασία (Ainsworth et al., 1997). Πρέπει να αντιληφθούν τον τρόπο με τον οποίο μια αναπαράσταση κωδικοποιεί και παρουσιάζει τις πληροφορίες - για παράδειγμα, στην περίπτωση της γραφικής παράστασης, τα υποκείμενα πρέπει να αντιληφθούν τι αναπαριστούν οι ευθείες, οι άξονες κτλ. Στα πλαίσια της πρώτης διαδικασίας πρέπει, επίσης, να κατανοήσουν πώς λειτουργούν τα διάφορα επιμέρους στοιχεία της αναπαράστασης.

Η δεύτερη διαδικασία αφορά στην κατανόηση της σχέσης που υπάρχει ανάμεσα στην αναπαράσταση και στην έννοια την οποία αναπαριστά (Ainsworth et al.,1997). Στο παράδειγμα με τη γραφική παράσταση τα υποκείμενα πρέπει να γνωρίζουν πότε είναι απαραίτητο να εξετάζουν την κλίση της ευθείας, την απόσταση των σημείων της ευθείας από τον άξονα του χρόνου ή την επιφάνεια κάτω από την ευθεία.

Η τρίτη διαδικασία αναφέρεται στο χειρισμό πολλαπλών αναπαραστάσεων και στους τρόπους με τους οποίους οι αναπαραστάσεις συνδέονται μεταξύ τους. Χωρίς τη διαδικασία μετάφρασης από τη μια αναπαράσταση στην άλλη, κάποιες ιδιότητες της έννοιας που εξετάζεται είναι πιθανόν να παραμείνουν ανεξερεύνητες (Ainsworth et al., 1997).

<u>Η Σημασία της Μετάφρασης στη Διδασκαλία των Μαθηματικών</u>

Η διαδικασία μετάφρασης από τη μια αναπαράσταση στην άλλη αποτελεί σημαντική πτυχή της διαδικασίας μάθησης των μαθηματικών εννοιών και της επίλυσης μαθηματικού προβλήματος (Zhang, 1997). Η μετάφραση προϋποθέτει τη δημιουργία μιας σχέσης – μιας αντιστοίχησης – από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο. Η αντιστοίχηση αυτή, σύμφωνα με τους Lesh, Post και Behr (1987) επιτυγχάνεται με τη διατήρηση των δομικών χαρακτηριστικών και του νοήματος, όπως ακριβώς συμβαίνει στη διαδικασία μετάφρασης ενός γραπτού κειμένου από μια γλώσσα σε άλλη.

Η σχέση ανάμεσα στη χρήση των αναπαραστάσεων, στην ικανότητα μετάφρασης και στην κατανόηση της έννοιας αποτέλεσε το αντικείμενο έρευνας των Lesh, Post και Behr (1987) σύμφωνα με τους οποίους όταν ένας μαθητής κατανοεί μια μαθηματική έννοια είναι σε θέση: (α) να αναγνωρίζει την έννοια που *κρύβεται* πίσω από μια ποικιλία ποιοτικά διαφορετικών αναπαραστάσεων, (β) να χειρίζεται ευέλικτα την έννοια με τη βοήθεια οποιασδήποτε αναπαράστασης και (γ) να μεταφράζει με ακρίβεια την έννοια από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο. «Η ενίσχυση της ικανότητας αυτής (μετάφραση) έχει ως αποτέλεσμα την απόκτηση και χρήση των βασικών μαθηματικών ιδεών» (Lesh, Post, & Behr, 1987, σ. 36).

Η διαδικασία μετάφρασης μπορεί να βοηθήσει τον εκπαιδευτικό να εντοπίσει τις μαθησιακές δυσκολίες κάποιου μαθητή. Οι Lesh, Post και Behr (1987) υποστηρίζουν ότι αυτό μπορεί να γίνει με τη βοήθεια έργων, τα οποία παρουσιάζουν την έννοια με τη χρήση μιας αναπαράστασης και ζητούν από το μαθητή να εκφράσει την έννοια με τη χρήση μιας άλλης αναπαράστασης.

Η ικανότητα μετάφρασης επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό την επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Χαρακτηριστικά οι Lesh et al. (1987) αναφέρουν ότι

> οι καλοί λύτες προβλήματος τείνουν να είναι ευέλικτοι όσον αφορά τη χρήση ποικιλίας σχετικών αναπαραστάσεων και χρησιμοποιούν την πιο κατάλληλη αναπαράσταση σε οποιοδήποτε σημείο της διαδικασίας επίλυσης μαθηματικού προβλήματος (σ. 38).

Η διαδικασία μετάφρασης από μια εξωτερική αναπαράσταση σε άλλη στοχεύει στην ενίσχυση της σύνδεσης ανάμεσα στα γνωστικά πεδία και τις εσωτερικές αναπαραστάσεις. Με τη σύνδεση των διαφορετικών γνωστικών πεδίων και των εσωτερικών αναπαραστάσεων, σύμφωνα με το Δημητρίου (1993), δημιουργούνται νέες νοητικές μονάδες, οι οποίες περιλαμβάνουν σχέσεις ανάμεσα στις ικανότητες και στις διαδικασίες που ανήκουν σε διαφορετικά γνωστικά πεδία. Με τον τρόπο αυτό τα υποκείμενα αναπτύσσουν ικανότητες, οι οποίες σχετίζονται με την επιτυχημένη μετάβαση από τη μια αναπαράσταση μιας έννοιας σε άλλη και συμβάλλουν στην ολοκληρωμένη κατανόηση της έννοιας και στην ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης προβλήματος.

Δυσκολίες που Προκύπτουν από τη Χρήση Εξωτερικών Αναπαραστάσεων στη Διδασκαλία των Μαθηματικών

Η χρήση των αναπαραστάσεων ως θεραπεία για τα μαθησιακά προβλήματα των υποκειμένων δεν έχει πάντα τα αναμενόμενα αποτελέσματα. Συγκεκριμένα, ο Seeger (1998) επισημαίνει ότι η χρήση των αναπαραστάσεων δημιουργεί καινούρια προβλήματα στους *αδύνατους* μαθητές, αφού χρειάζεται να αντιληφθούν τη σκοπιμότητα των αναπαραστάσεων και κατ’ επέκταση να κατανοήσουν τις μαθηματικές έννοιες μέσα από τη σύνδεσή τους με τις αναπαραστάσεις.

Χαρακτηριστική είναι η άποψη της Boulton - Lewis (1998), η οποία αναφέρει ότι η χρήση άγνωστων ή πολύπλοκων εξωτερικών αναπαραστάσεων έχει κάποιες ανεπιθύμητες συνέπειες. Συγκεκριμένα, η σύνδεση της αναπαράστασης με την έννοια προϋποθέτει κάποια νοητική διεργασία, η οποία μπορεί να επηρεάσει την κατανόηση της έννοιας. Αν η αναπαράσταση και ο τρόπος με τον οποίο λειτουργεί «δε γίνει πλήρως αντιληπτός αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα την παραγωγή λανθασμένων πληροφοριών, ενώ αν η αναπαράσταση δεν είναι αποτελεσματικά συνδεδεμένη με την έννοια τότε αυξάνονται οι νοητικές διαδικασίες και ο απαιτούμενος φόρτος μνήμης» (Boulton - Lewis, 1998, σ. 221).

Αναφορικά με τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων στη διδασκαλία των μαθηματικών η έρευνα των Van Someren, Boshuizen, de Jong και Reinmann (1998) έδειξε ότι ο συνδυασμός ποικιλίας αναπαραστάσεων στη διδασκαλία των μαθηματικών μπορεί να δημιουργήσει προβλήματα στην κατανόηση των εννοιών. Η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων δεν εξασφαλίζει θετικά αποτελέσματα , όταν δε δίνεται έμφαση στις συνδέσεις και στις σχέσεις που υπάρχουν ανάμεσα στις αναπαραστάσεις. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα οι μαθητές να οικοδομούν σχέσεις ανάμεσα στις αναπαραστάσεις οι οποίες είναι λανθασμένες και να αναπτύσσουν παρανοήσεις.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η θεωρία για το φόρτο γνωστικής επεξεργασίας την οποία προτείνει ο Sweller (1993) (αναφορά στο Boulton - Lewis, 1998) ο οποίος υποστηρίζει ότι έργα τα οποία προϋποθέτουν την εστίαση της προσοχής σε περισσότερες από μια πηγή πληροφοριών καθίστανται δύσκολα. Η θεωρία αυτή βρίσκει εφαρμογή στη μαθηματική παιδεία, αφού οι μαθητές δεν αποκομίζουν τα αναμενόμενα οφέλη, όταν οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται είναι άγνωστες και απαιτούν επιπρόσθετο φόρτο νοητικής επεξεργασίας.

Ο επιπρόσθετος φόρτος νοητικής επεξεργασίας, λοιπόν, αποτελεί μια από τις δυσκολίες που προκύπτουν από τη χρήση των αναπαραστάσεων. Η γνώση των παραγόντων που επηρεάζουν το κόστος της νοητικής επεξεργασίας που απαιτεί η χρήση κάθε αναπαράστασης είναι σημαντική, αφού καθιστά τη χρήση των αναπαραστάσεων πιο αποδοτική. Οι Ainsworth et al. (1997) έχουν εντοπίσει πέντε παράγοντες, που σχετίζονται με το κόστος επεξεργασίας που απαιτεί η χρήση ποικιλίας αναπαραστάσεων. Οι παράγοντες αυτοί αφορούν τη φύση του συστήματος αναπαράστασης και τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούνται οι αναπαραστάσεις. Οι παράγοντες που αναφέρονται στη φύση του συστήματος αναπαράστασης αφορούν (α) την ποσότητα των πληροφοριών που παρουσιάζει κάθε αναπαράσταση, (β) την ομοιότητα μεταξύ των αναπαραστάσεων και (γ) τον αριθμό των αναπαραστάσεων που πρέπει να χρησιμοποιηθούν. Οι παράγοντες που αναφέρονται στον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούνται οι αναπαραστάσεις σε ένα περιβάλλον αφορούν (α) τη μετάφραση από τη μια αναπαράσταση στην άλλη και (β) την ακολουθία ανάμεσα στις αναπαραστάσεις. Για κάθε εκπαιδευτικό στόχο οι παράγοντες αυτοί πρέπει να εξετάζονται σε σχέση με τη διαδικασία μάθησης και τους εκάστοτε μαθητές (ειδικούς, αρχάριους, παιδιά, ενήλικες).

Όπως επισημαίνει ο Seeger (1998), η εκπαιδευτική διαδικασία στην τάξη των μαθηματικών στοχεύει στη γενίκευση μέσα από τη διαδικασία της αφαίρεσης. Αν η διδασκαλία ξεκινά με την ενασχόληση με τα αντικείμενα τότε χρειάζεται αρκετός χρόνος, ώστε οι μαθητές να φτάσουν τελικά στη γενίκευση. Αν οι μαθητές δεν έχουν κάποιες προϋπάρχουσες γνώσεις αναφορικά με τις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται, τότε δημιουργούνται επιπρόσθετα εμπόδια στη μαθησιακή διαδικασία, με την έννοια ότι η δυσκολία στην κατανόηση του ρόλου που διαδραματίζει η αναπαράσταση έρχεται να προστεθεί στη δυσκολία που ήδη εμπερικλείει η κατανόηση της μαθηματικής έννοιας.

Σε άμεση συσχέτιση με τα πιο πάνω οι DeLoache et al.(1998) επισημαίνουν ότι σύμφωνα με αποτελέσματα έρευνας οι εξωτερικές αναπαραστάσεις δεν έχουν πάντοτε τα αναμενόμενα αποτελέσματα, αφού οι μαθητές δυσκολεύονται να τις κατανοήσουν και να τις χρησιμοποιήσουν αποτελεσματικά. Παρουσιάζεται το φαινόμενο της *δυϊκής αναπαράστασης*, όπου τα υποκείμενα αντιλαμβάνονται την αναπαράσταση και την έννοια που αναπαρίσταται ως δύο διαφορετικές οντότητες. Δεν είναι σίγουρο ότι τα υποκείμενα θα εντοπίσουν τη συμβολική σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην αναπαράσταση και στην έννοια. Οι αναπαραστάσεις, λοιπόν, που χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία πρέπει να είναι απλές. Όσο πιο πλούσιο είναι το περιεχόμενο μιας αναπαράστασης τόσο πιο δύσκολη είναι η διαδικασία αφαίρεσης και κατ' επέκταση η δημιουργία εσωτερικών δομών (Seeger, 1998). Στην Ιαπωνία, όπου οι μαθητές σημειώνουν εξαιρετικές επιδόσεις στα μαθηματικά, χρησιμοποιείται ένα απλό είδος χειριστικού μοντέλου καθ' όλη τη διάρκεια της φοίτησης στο δημοτικό σχολείο (DeLoache et al., 1998). Το γεγονός ότι ένα απλό χειριστικό μοντέλο χρησιμοποιείται σε διαφορετικές περιπτώσεις έχει ως αποτέλεσμα να μην προκαλεί το ενδιαφέρον των μαθητών ως αντικείμενο καθ' αυτό, αλλά να αντιμετωπίζεται ως αναπαράσταση μιας άλλης ολότητας.

Σχετικά με τις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία οι Owens και Clements (1998) αναφέρουν ότι τα ίδια χειριστικά μοντέλα μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε διαφορετικές χρονικές στιγμές και σε διαφορετικό περιεχόμενο με στόχο την ανάπτυξη διαφορετικών εννοιών. Με αυτό τον τρόπο το χειριστικό μοντέλο δεν προκαλεί το ενδιαφέρον των μαθητών ως αντικείμενο καθ' αυτό, αλλά αντιμετωπίζεται ως αναπαράσταση μιας άλλης ολότητας

Γεωμετρικά Μοντέλα: Η Περίπτωση της Αριθμητικής Γραμμής

Στις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά ανήκουν και τα γεωμετρικά μοντέλα. Ένα γεωμετρικό μοντέλο είναι μια γεωμετρική αναπαράσταση ενός προβλήματος κατάλληλη για τη λύση του και για παραπέρα μελέτη, δηλαδή μια γεωμετρική αναπαράσταση που έχει το γενεσιουργό και ευρετικό χαρακτήρα που απαιτείται για ένα μοντέλο (Γαγάτσης, & Πατρώνης, 1993). Στα ακόλουθα υποκεφάλαια αναλύεται η έννοια του γεωμετρικού μοντέλου, η σχέση του με την έννοια της αναπαράστασης και η χρήση του στη διδασκαλία των μαθηματικών και παρουσιάζεται η αριθμητική γραμμή ως ένα παράδειγμα γεωμετρικού μοντέλου που χρησιμοποιείται στα μαθηματικά.

Χρήση Γεωμετρικών Μοντέλων στη Διδασκαλία των Μαθηματικών

Σύμφωνα με το Fischbein (1987) τα άτομα χρειάζονται μια αξιόπιστη πραγματικότητα με βάση την οποία να ενεργούν. Συνεπώς, η ανάπτυξη και η χρήση λογικής σκέψης στα πλαίσια μιας εννοιολογικής δομής χρειάζονται κάποιο είδος μοντέλου επιβεβαίωσης και αξιοπιστίας, το οποίο μπορεί να παρέχει η ενορατική σκέψη. Το αυταπόδεικτο, η αμεσότητα και η ύπαρξη μιας αξιόπιστης πραγματικότητας χαρακτηρίζουν, σύμφωνα με το Fischbein (1987), την ενόραση. Τα μοντέλα αποτελούν αναπόσπαστο μέρος της ενόρασης στα μαθηματικά, αφού αρκετά από αυτά, όπως για παράδειγμα τα μοντέλα που προέρχονται από τη γεωμετρία – γεωμετρικά μοντέλα – σχετίζονται με το φυσικό χώρο παρέχοντας έτσι μια αξιόπιστη πραγματικότητα, αφού είναι ελεγχόμενη από την κιναισθητική και οπτική εμπειρία, στην οποία μπορεί να στηριχθεί το άτομο, για να κατανοήσει μια έννοια.

Ο Fischbein (1972) (αναφορά στο Gagatsis & Patronis, 1990) θεωρεί ότι η σπουδαιότερη λειτουργία ενός μοντέλου, που χρησιμοποιείται στη διδασκαλία, είναι να γεννά – να παράγει – και να αναπαριστά ένα απεριόριστο πλήθος ιδιοτήτων, ξεκινώντας από ένα περιορισμένο αριθμό στοιχείων και κανόνων συνδυασμού τους. Ένα μοντέλο είναι ένας τρόπος αναπαράστασης, αλλά μια αναπαράσταση δεν είναι μοντέλο, αν δεν έχει τον πιο πάνω γενεσιουργό χαρακτήρα. Επιπλέον, ένα μοντέλο πρέπει να έχει ευρετικό χαρακτήρα να οδηγεί, δηλαδή, εύκολα και ανεξάρτητα από το αρχικό σύστημα που αναπαριστά, σε νέες πληροφορίες σχετικά με αυτό το σύστημα.

Τα μοντέλα, που χρησιμοποιούνται στη μαθηματική παιδεία, μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες (Γαγάτσης & Πατρώνης, 1993). Οι δύο κατηγορίες έχουν τον ίδιο σκοπό: τη βελτίωση της διδασκαλίας και της μάθησης. Η διαφορά των δύο κατηγοριών έγκειται στη φύση και στη χρήση των μοντέλων της κάθε κατηγορίας.

Τα μοντέλα της πρώτης κατηγορίας είναι τα γνωστικά μοντέλα, που αναπαριστούν το ανθρώπινο μυαλό ή τη διαδικασία της μάθησης. Τα μοντέλα αυτά χρησιμοποιούνται αποκλειστικά από ερευνητές και εκπαιδευτικούς, αφού οι μαθητές δεν είναι γνώστες των νοητικών τους λειτουργιών και διαδικασιών, τουλάχιστον όπως αυτές περιγράφονται στα μοντέλα (Gagatsis & Patronis,1990).

Τα μοντέλα της δεύτερης κατηγορίας αντανακλούν τις ενορατικές διαδικασίες, που απαιτούνται για την κατανόηση του αντικειμένου προς διδασκαλία, γι’ αυτό είναι κατάλληλα για χρήση από τους μαθητές σε κάποιο στάδιο της γνωστικής τους ανάπτυξης. Τα γεωμετρικά μοντέλα και τα χειριστικά μοντέλα περιλαμβάνονται στην κατηγορία αυτή.

Ο Brousseau (1983: 1985) (αναφορά στο Gagatsis & Patronis, 1990) εξετάζει την κατασκευή και χρήση των μοντέλων μέσα στα πλαίσια τριών διαφορετικών διαδικασιών οι οποίες είναι: (α) Η *διαλεκτική της δράσης* αφορά τις αποφάσεις ενός υποκειμένου για δράση και ένα σύστημα επεξήγησης αυτών των αποφάσεων, οι οποίες παραμένουν σε άδηλο επίπεδο για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα, (β) η *διαλεκτική της διατύπωσης* αφορά την έκδηλη περιγραφή ή ανακοίνωση των αντιλήψεων του υποκειμένου και των εμπειρικών αποτελεσμάτων των διάφορων αποφάσεων και (γ) η *διαλεκτική της επικύρωσης* αφορά την απόδειξη των ισχυρισμών του υποκειμένου σε κάποιο άλλο υποκείμενο, το οποίο αποδέχεται ή απορρίπτει αυτούς τους ισχυρισμούς.

Σε καθεμιά από τις πιο πάνω διαδικασίες το υποκείμενο κατασκευάζει και χρησιμοποιεί, σε άδηλο ή έκδηλο επίπεδο, το αντίστοιχο είδος μοντέλου. Συνεπώς, υπάρχουν μοντέλα δράσης – τα οποία αρχικά βρίσκονται σε άδηλο επίπεδο στη νόηση του παιδιού, μοντέλα διατύπωσης και μοντέλα επικύρωσης, τα οποία χρησιμοποιούνται σε έκδηλο επίπεδο (Gagatsis & Patronis,1990).

Σε σχέση με τις τρεις διαδικασίες που προτείνει ο Brousseau (1983: 1985) (αναφορά στο Gagatsis & Patronis, 1990) τα γεωμετρικά μοντέλα συνήθως εμφανίζονται ως μοντέλα διατύπωσης και μοντέλα επικύρωσης.

Ως μοντέλο διατύπωσης το γεωμετρικό μοντέλο χαρακτηρίζεται από τη γλώσσα που χρησιμοποιείται για να το περιγράψει. Η γλώσσα συνδέεται με την ενορατική σκέψη, αφού περιγράφει νέες πληροφορίες για ένα σύστημα το οποίο αναπαρίσταται με τη χρήση του γεωμετρικού μοντέλου (Gagatsis & Patronis, 1990).

Ως μοντέλο επικύρωσης ένα γεωμετρικό μοντέλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επικυρώσει ευρήματα που έχουν ανακαλυφθεί από τους μαθητές μέσα από τη διαδικασία της ενόρασης (Gagatsis & Patronis, 1990).

Αναφορικά με τα μοντέλα δράσης οι Gagatsis και Patronis (1990) αναφέρουν ότι οι συγγραφείς μαθηματικών εγχειριδίων δεν παρέχουν αρκετές πληροφορίες γι’αυτά στην προσπάθειά τους να απαλλάξουν τη γνώση από στοιχεία που σχετίζονται με την ενόραση και γενικά από υποκειμενικά στοιχεία, τα οποία δεν τα θεωρούν χρήσιμα. Όμως, δεν πρέπει να παραγνωρίζεται το γεγονός ότι κάποιες από τις νοητικές εικόνες λειτουργούν ως άδηλα – ενορατικά γεωμετρικά μοντέλα, τα οποία καθοδηγούν την πορεία δράσης για την επίλυση προβλημάτων. Η ερμηνεία ενός προβλήματος με τη χρήση ενός ενορατικού γεωμετρικού μοντέλου, ενός μοντέλου δράσης, σχετίζεται με τη διαδικασία της αναστοχαστικής σκέψης, αφού περιλαμβάνει διαδικασίες όπως η διερεύνηση σχέσεων και η διατύπωση γενικεύσεων. Η χρήση ενός ενορατικού γεωμετρικού μοντέλου, δηλαδή μιας νοητικής εικόνας των μαθητών, το οποίο δεν το έχουν διδαχθεί, μετατρέπει το μοντέλο αυτό από μοντέλο δράσης σε μοντέλο επικύρωσης, το οποίο μπορεί να επικυρώσει τις λύσεις που προτείνουν για το πρόβλημα.

Η χρήση των γεωμετρικών μοντέλων μπορεί να συμβάλει στη διαδικασία μαθηματικοποίησης, ξεκινώντας από καταστάσεις και προβλήματα, που έχουν νόημα για τους μαθητές και προχωρώντας σε διαδικασίες, που προάγουν τη μοντελοποίηση, το συμβολισμό, τη γενίκευση, την αφαίρεση και την τυποποίηση. Τα γεωμετρικά μοντέλα μπορούν να συμβάλουν στην ανάπτυξη της αναστοχαστικής σκέψης με αφετηρία την ενορατική σκέψη των μαθητών (Gagatsis & Patronis, 1990: Keizjer, 2003)

Ακολούθως γίνεται αναφορά στην αριθμητική γραμμή ως μοντέλο το οποίο χρησιμοποιείται στη διδασκαλία, διότι αντανακλά ενορατικές διαδικασίες των μαθητών, αλλά και ως μοντέλο, το οποίο μπορεί να βοηθήσει τον ερευνητή να ανιχνεύσει τις νοητικές διαδικασίες των μαθητών.

<u>Η Αριθμητική Γραμμή ως Ένα Γεωμετρικό Μοντέλο στη Διδασκαλία των Μαθηματικών</u>

Με βάση την πιο κάτω εξήγηση η ευκλείδεια ευθεία αποτελεί γεωμετρικό μοντέλο το οποίο μπορεί να αναπαραστήσει τους ρητούς αριθμούς και τις ιδιότητές τους: Έστω ότι Σ είναι ο δακτύλιος των ακεραίων ή το σώμα των ρητών αριθμών – ή ένα σώμα, που περιλαμβάνει το σώμα των ρητών αριθμών – με τις εξής πράξεις: πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός και διαίρεση. Έστω ότι S είναι μια βαθμολογημένη ευθεία, δηλαδή μια ευθεία με ένα διακριτό σύνολο σημείων, τα οποία αντιστοιχούν στους ακέραιους ή τους ρητούς αριθμούς. Το γεγονός ότι το S είναι ένα γεωμετρικό μοντέλο για το Σ φαίνεται από το εξής: Υπάρχει ένας ισομορφισμός $\Sigma \rightleftarrows S$, έτσι ώστε οι πράξεις ανάμεσα στους αριθμούς, που ανήκουν στο Σ, να αντιστοιχούν στις πράξεις ανάμεσα σε προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα ή στις πράξεις ανάμεσα σε αριθμούς και προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα που ανήκουν στο S, όπως για παράδειγμα, το γινόμενο ενός αριθμού με ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα.

Η βαθμολογημένη ευθεία λειτουργεί ως ένα γεωμετρικό μοντέλο των πράξεων στο Σ ως εξής: Δίνονται δύο στοιχεία στο S, τα οποία αντιστοιχούν σε αριθμούς του Σ. Η πράξη εκτελείται γεωμετρικά στο S και το αποτέλεσμα μεταφράζεται σε αριθμό του Σ. Η διαδικασία αυτή είναι δυνατόν να θεωρείται περισσότερο επίπονη από μερικούς μαθητές σε σχέση με την εκτέλεση της πράξης στο Σ με τη βοήθεια ενός αλγόριθμου.

Η αριθμητική γραμμή διαφέρει από τα άλλα μοντέλα, που χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά, διότι: (α) Η μονάδα αναπαρίσταται από ένα μήκος και η αριθμητική γραμμή υποβάλλει την ιδέα όχι μόνο της επανάληψης της μονάδας, αλλά και της υποδιαίρεσης όλων των επαναλαμβανόμενων μονάδων – δηλαδή η αριθμητική γραμμή έχει τη μορφή χάρακα, (β) στην αριθμητική γραμμή δεν υπάρχει διαχωρισμός μεταξύ μονάδων: το μοντέλο είναι συνεχές και (γ) ένα σημείο στην αριθμητική γραμμή δεν έχει αριθμητικό νόημα μέχρι τη στιγμή που θα καθορισθεί το νόημα δύο άλλων τουλάχιστον σημείων αναφοράς (Bright et al., 1988). Αυτό σημαίνει ότι η χρήση της αριθμητικής γραμμής προϋποθέτει το συνδυασμό δύο μορφών αναπαράστασης: εικονικής και συμβολικής. Η δυσκολία χρήσης της αριθμητικής γραμμής οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στο συνδυασμό της πληροφορίας που περιέχεται σε αυτές τις δυο μορφές αναπαράστασης (Κολέζα, 2000).

Σύμφωνα με το Herbst (1997) η ευκλείδεια ευθεία, η οποία παρουσιάζεται στα εγχειρίδια των μαθηματικών ως γεωμετρική έννοια, χρησιμοποιείται και για την αναπαράσταση των αριθμών, αποτελεί, δηλαδή, την αριθμητική γραμμή. Το γεωμετρικό μοντέλο της γραμμής ως μέσο αναπαράστασης αριθμών είναι μια μεταφορά, διότι αποτελεί πρωταρχική έννοια της γεωμετρίας και όχι της αριθμητικής. Υπέρ της χρήσης της γραμμής για την αναπαράσταση των αριθμών συνηγορεί το γεωμετρικό αξίωμα, το οποίο αναφέρεται στη σειρά των σημείων στην ευθεία, κάτι το οποίο εξασφαλίζει την αντιπροσώπευση όλων των αριθμών στη γραμμή. Ο Pimm (1987) (αναφορά στο Herbst,1997) επισημαίνει ότι η αριθμητική γραμμή είναι μια μεταφορά, αφού η χρήση της στηρίζεται στην αναλογία ανάμεσα σε δύο σχέσεις: τη σχέση ανάμεσα σε ένα αριθμό και στο αριθμητικό σύστημα και τη σχέση ανάμεσα σε ένα σημείο και στην ευθεία γραμμή. Σύμφωνα με τους Tapia, Bibiloni και Tapia (1974) (αναφορά στο Herbst,1997) η αριθμητική γραμμή ως μέσο αναπαράστασης των αριθμών αποδίδει ιδιότητες του συνόλου των φυσικών αριθμών, όπως είναι το άπειρο και η μοναδικότητα του κάθε φυσικού αριθμού.

Σύμφωνα με έρευνες (English, 1985) και (Chiu, 1996: Chiu, 1998: Lakoff, 1987: Reynolds, & Schwartz, 1983) (αναφορά στο Chiu, 2000) η χρήση μεταφορών, όπως είναι η αριθμητική γραμμή, στα μαθηματικά και η μεταφορική λογική βοηθούν στην οικοδόμηση νέων εννοιών. Επίσης, με βάση τα αποτελέσματα των πιο πάνω ερευνών η μεταφορική λογική μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη σύνδεση μαθηματικών εννοιών, τη βελτίωση της ανάκλησης πληροφοριών από τη μνήμη που αφορούν σχετικές μεταξύ τους έννοιες, την ερμηνεία αναπαραστάσεων και την εκτέλεση πράξεων.

Ο Herbst (1997) εξετάζει την ευκλείδεια ευθεία ως μέσο αναπαράστασης των αριθμών. Σύμφωνα με τον Herbst (1997) η αριθμητική γραμμή έχει αναπτυχθεί με τέτοιο τρόπο στα διδακτικά εγχειρίδια, ώστε οι αριθμοί και οι ιδιότητές τους να βρίσκονται σε αντιστοιχία με τα σημεία, τα διαστήματα και τις γεωμετρικές ιδιότητες που ισχύουν στην αριθμητική γραμμή. Η αριθμητική γραμμή μπορεί να αναπαραστήσει την ακολουθία των αριθμών, να δικαιολογήσει τους κανόνες, που αφορούν τα πρόσημα στον πολλαπλασιασμό των ακεραίων και να αναπαραστήσει την πυκνότητα των ρητών αριθμών.

Η χρησιμότητα της αριθμητικής γραμμής στη διδασκαλία των μαθηματικών εξετάστηκε από τους Fueyo και Don Bushell (1998). Στη συγκεκριμένη έρευνα, οι εκπαιδευτικοί, σύμφωνα με τους Fueyo και Don Bushell, έρχονται αντιμέτωποι με δύο προκλήσεις. Η πρώτη πρόκληση αφορά τη βελτίωση της επίδοσης των μαθητών στα μαθηματικά με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής και η δεύτερη αφορά την εφαρμογή καινοτομιών, όπως είναι η διδασκαλία από τους ίδιους τους μαθητές. Η διδασκαλία από μαθητές προς μαθητές αυξάνει το διδακτικό χρόνο, αυξάνει τη συμμετοχή των μαθητών και βελτιώνει την επίδοση στα μαθηματικά μαθητών διαφορετικών επιπέδων ικανότητας.

Η έρευνα των Fueyo και Don Bushell (1998) είχε δύο στόχους. Ο πρώτος στόχος αφορούσε τη διερεύνηση της χρήσης των χειριστικών μοντέλων και συγκεκριμένα της αριθμητικής γραμμής στα μαθηματικά. Ο δεύτερος στόχος αφορούσε στην αντιμετώπιση προβλημάτων, όπως είναι η έλλειψη διδακτικού χρόνου και εξάσκησης μέσα από τη διδασκαλία από τους ίδιους τους μαθητές.

Προκειμένου να επιλυθεί το πρόβλημα της έλλειψης διδακτικού χρόνου μαθητές εξασκήθηκαν ώστε να μπορούν να διδάξουν συμμαθητές τους με τη βοήθεια της αριθμητικής γραμμής. Η έρευνα περιελάμβανε προβλήματα πρόσθεσης, στα οποία έλειπε ο ένας προσθετέος. Με βάση τα αποτελέσματα της έρευνας (Fueyo & Don Bushell, 1998) φάνηκε ότι η επίδοση των μαθητών βελτιώθηκε, όταν χρησιμοποίησαν την αριθμητική γραμμή, όταν διδάχτηκαν τη χρήση της αριθμητικής γραμμής από συμμαθητές τους και όταν και δέχτηκαν ανατροφοδότηση από τους συμμαθητές τους αναφορικά με την επιτυχία τους στη χρήση της αριθμητικής γραμμής ως αναπαράστασης της πρόσθεσης ακέραιων αριθμών.

Η σύγχρονη έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών εισηγείται η διδασκαλία: (α) να οικοδομεί πάνω στην προηγούμενη γνώση, (β) να επικεντρώνεται στα σημαντικά στοιχεία των αλγόριθμων, (γ) να παρέχει πλήρεις επεξηγήσεις, (δ) να παρουσιάζει τις έννοιες διαδοχικά, (ε) να διαχωρίζει παρόμοια μαθηματικά σύμβολα για αποφυγή παρανοήσεων και (στ) να προσφέρει ευκαιρίες για εξάσκηση (Carnine, Jones, & Dixon, 1994) (αναφορά στο Fueyo και Don Bushell, 1998). Με βάση την πιο πάνω διαπίστωση οι Fueyo και Don Bushell αναφέρουν ότι η ενασχόληση με έργα που περιλάμβαναν αριθμητικές γραμμές εξασφαλίζει την εφαρμογή των πέντε πρώτων σημείων, ενώ η διδασκαλία μαθητών από τους συνομήλικούς τους εξασφαλίζει την εφαρμογή του τελευταίου σημείου. Η χρήση των αριθμητικών γραμμών προνοούσε την ανάκληση προηγούμενης γνώσης, όπως είναι τα σύμβολα των πράξεων, η αναγνώριση των αριθμών και οι εξισώσεις. Το σημαντικό στοιχείο του προσθετέου που λείπει προστέθηκε στις ήδη υπάρχουσες γνώσεις. Τα σύμβολα της πρόσθεσης και αφαίρεσης στα δύο άκρα της αριθμητικής γραμμής βοήθησαν τους μαθητές να επιλέγουν τη σωστή κατεύθυνση κάθε φορά, ώστε να λύσουν τις εξισώσεις. Η βήμα προς βήμα διαδικασίες, που προκύπτουν από τη χρήση των αριθμητικών γραμμών και η λεπτομερής επεξήγηση του τρόπου λειτουργίας των αριθμητικών γραμμών βοήθησαν τους μαθητές, ιδιαίτερα τους «αδύνατους», να χρησιμοποιήσουν και να αξιοποιήσουν τις αριθμητικές γραμμές, για να επιλύσουν τα προβλήματα στα οποία έλειπε ο ένας προσθετέος. Με το τέλος της έρευνας τόσο οι μαθητές όσο και οι εκπαιδευτικοί εξέφρασαν την ικανοποίησή τους για τις διαδικασίες χρήσης της αριθμητικής γραμμής, αφού τις βρήκαν βοηθητικές για την επίλυση προβλημάτων στα οποία λείπει ο ένας προσθετέος, τα οποία θεωρούνται αρκετά δύσκολα προς διδασκαλία και μάθηση.

Το Γνωστικό Μοντέλο της Αριθμητικής Γραμμής

Σύμφωνα με τον Okamoto (1996) τα παιδιά δυσκολεύονται περισσότερο στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων παρά στην επίλυση ασκήσεων με πράξεις. Οι ερευνητές στην προσπάθειά τους να εξηγήσουν αυτό το φαινόμενο έχουν αναπτύξει μοντέλα αναφορικά με την ικανότητα επίλυσης λεκτικών προβλημάτων. Αυτά τα μοντέλα περιγράφουν διαδικασίες κατανόησης κειμένου και μαθηματικής λογικής και δίνουν έμφαση σε συγκεκριμένα γνωστικά αντικείμενα και στρατηγικές επίλυσης συγκεκριμένων ειδών προβλημάτων. Πρόκειται για γνωστικά μοντέλα, τα οποία βασίζονται στην υπόθεση ότι η επίλυση λεκτικών προβλημάτων προϋποθέτει (α) την κατανόηση των ποσοτικών σχέσεων, όπως αυτές περιγράφονται στο κείμενο, (β) την κατασκευή φυσικών ή νοερών αναπαραστάσεων της κατάστασης του προβλήματος και (γ) την εκτέλεση των κατάλληλων αριθμητικών πράξεων. Παρόλο που τα περισσότερα μοντέλα επικεντρώνονται στα τρία πιο πάνω σημεία, παρουσιάζουν διαφορές μεταξύ τους.

Οι διαφορές αυτές εστιάζονται στη διαφοροποιημένη έμφαση που δίνουν τα μοντέλα αυτά στη γλωσσική και μαθηματική γνώση των μαθητών. Τα μοντέλα που είναι γλωσσικά προσανατολισμένα βασίζονται στην άποψη ότι η αδυναμία στην επίλυση συγκεκριμένων τύπων προβλημάτων συνδέεται με τις δυσκολίες κατανόησης ενός κειμένου, το οποίο είναι γραμμένο σε διφορούμενη ή αφηρημένη γλώσσα, παρά με τις δυσκολίες κατανόησης των μαθηματικών εννοιών. Ο δεύτερος τύπος μοντέλων επικεντρώνεται στη μαθηματική γνώση, που απαιτείται για την επίλυση λεκτικών προβλημάτων. Η ανάπτυξη τέτοιων μοντέλων συμβάλει στην κατανόηση του τρόπου με τον οποίο οι μαθητές επιλύουν λεκτικά προβλήματα.

Ο Okamoto (1996) εισηγείται την ύπαρξη τριών αναπτυξιακών μοντέλων τα οποία αναπαριστούν τις λύσεις που προτείνουν οι μαθητές σε λεκτικά προβλήματα (Διάγραμμα 1). Σύμφωνα με τον Okamoto τα μοντέλα αυτά οικοδομούνται με βάση την υπόθεση ότι οι διαφορές, που παρουσιάζουν οι μαθητές στην επίδοσή τους αναφορικά με την επίλυση λεκτικών προβλημάτων, οφείλονται στις αναπτυξιακές διαφορές των εννοιολογικών δομών του ποσοτικού τομέα. Πρόκειται, λοιπόν, για μοντέλα, με τη χρήση των οποίων, η μαθηματική γνώση εξετάζεται ως απαραίτητη προϋπόθεση και ως πηγή δυσκολιών για την επίλυση λεκτικών προβλημάτων.

Τα συγκεκριμένα μοντέλα περιλαμβάνουν δύο λειτουργίες. Η πρώτη λειτουργία αφορά στην κατασκευή σημαντικών δικτύων, δηλαδή συνόλων με προτάσεις. Οι προτάσεις αφορούν (α) πληροφορίες για το άτομο στο οποίο αναφέρεται το πρόβλημα, (β) πληροφορίες για τα αντικείμενα που έχει το συγκεκριμένο άτομο και (γ) το στόχο του προβλήματος. Όλες αυτές οι πληροφορίες – προτάσεις συνδέονται μεταξύ τους και σχηματίζουν ένα δίκτυο. Η δεύτερη λειτουργία αφορά στην οικοδόμηση νοερών αριθμητικών γραμμών ως μοντέλων, τα οποία αναπαριστούν τα προβλήματα. Η λειτουργία αυτή χωρίζεται σε τρία επίπεδα, σε τρία μοντέλα.

Με βάση τα αποτελέσματα της έρευνας του Okamoto (1996) έχουν εντοπιστεί και μοντελοποιηθεί τρία επίπεδα γνώσης. Το πιο απλό μοντέλο αφορά μαθητές ηλικίας έξι χρονών και αναπαριστά τις νοερές αριθμητικές πράξεις ως μια σειρά νοερών αντικειμένων. Στο επίπεδο αυτό η επεξεργασία του κειμένου περιορίζεται στην κατανόηση προβλημάτων, τα οποία προσδιορίζουν την αρχική ποσότητα. Σύμφωνα με τον Case (1992) (αναφορά στο Okamoto,1996) τα παιδιά ηλικίας πέντε ως έξι χρονών αρχίζουν να οικοδομούν ένα γνωστικό σχήμα, το οποίο αξιολογεί τα μεγέθη και ένα σχήμα μέτρησης αντικειμένων. Όταν τα δύο αυτά σχήματα συντονίζονται και δημιουργείται μια διάσταση πράξεων, τα παιδιά σημειώνουν πρόοδο όσον αφορά τη λογική των ποσοτήτων του πραγματικού κόσμου. Τα εξάχρονα παιδιά οικοδομούν ένα εσωτερικό μοντέλο του αριθμητικού συστήματος, το οποίο τους επιτρέπει να αντιστοιχίζουν αντικείμενα του πραγματικού κόσμου με τα ονόματα των αριθμών και να συγκρίνουν ποσότητες ενεργοποιώντας τη μέτρηση. Το μοντέλο αυτό αποτελεί μια ευθεία νοερών αντικειμένων. Οι ποσότητες γίνονται κατανοητές ως αντικείμενα, που αναπαρίστανται νοερά σε μια διάσταση. Όσον αφορά στις πράξεις, το μοντέλο χρησιμοποιεί νοερά αντικείμενα, που έχουν διαταχθεί σε μια νοερή ευθεία. Το μοντέλο αυτό βοηθά τους μαθητές στην επίλυση προβλημάτων αλλαγής και ομαδοποίησης, όπου στην αρχική ποσότητα προστίθεται ή αφαιρείται κάποια άλλη ποσότητα. Το μονοδιάστατο αυτό μοντέλο, όμως, δε βοηθά στην επίλυση προβλημάτων σύγκρισης και εντοπισμού της διαφοράς ανάμεσα σε δύο ποσότητες, γιατί δεν έχει τη δυνατότητα να αναπαραστήσει συγκρίσεις μεγεθών σε μια μόνο διάσταση. Αυτό θα γίνει εφικτό όταν αναπτυχθεί το μοντέλο των δύο νοερών αριθμητικών γραμμών.

Το επόμενο επίπεδο του μοντέλου αφορά μαθητές ηλικίας μέχρι οχτώ χρονών και αναπαριστά τους αριθμούς ως τα αποτελέσματα χειρισμού δύο νοερών αριθμητικών γραμμών, οι οποίες συντονίζονται σε δοκιμαστική βάση. Σύμφωνα με τον Case (1992) (αναφορά στο Okamoto,1996) τα παιδιά ηλικίας εφτά και οχτώ χρονών είναι ικανά να συντονίσουν δύο διαστάσεις αναφορικά με την εκτέλεση πράξεων. Δεν είναι πλέον αναγκαίο να χειρίζονται τους αριθμούς ως νοερά αντικείμενα σε μια μόνο αριθμητική γραμμή. Περισσότερες από μια αριθμητικές γραμμές μπορούν να συντονιστούν για την επίλυση ποικιλίας καινούριων προβλημάτων. Τέτοια προβλήματα είναι προβλήματα σχέσεων μέρος – όλο, στα οποία μια αριθμητική γραμμή αναπαριστά το όλο και μια άλλη αριθμητική γραμμή αναπαριστά μέρος της αρχικής ποσότητας.

Επίσης, με τη χρήση του μοντέλου αυτού επιλύονται προβλήματα συνδυασμών, όπου είναι γνωστός ο ένας από τους δύο προσθετέους και η τελική ποσότητα. Η μια αριθμητική γραμμή αναπαριστά τους δύο δοσμένους αριθμούς και η άλλη αριθμητική γραμμή χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της διαφοράς των δύο αριθμών. Το δεύτερο μοντέλο επιτρέπει ο πρώτος προσθετέος να αναπαρασταθεί σε μια νοερή αριθμητική γραμμή και η τελική ποσότητα σε μια άλλη. Ο δεύτερος προσθετέος εντοπίζεται συμπερασματικά, όταν η τελική ποσότητα μεταφερθεί από τη δεύτερη αριθμητική γραμμή στην πρώτη και φανεί η διαφορά των δύο ποσοτήτων. Η διαδικασία της μεταφοράς μιας ποσότητας από μια αριθμητική γραμμή σε άλλη ονομάζεται *ανάκλαση*, αφού μια ποσότητα *ανακλάται* από μια αριθμητική γραμμή σε μια άλλη.

Το δεύτερο μοντέλο συμβάλει στην επίλυση προβλημάτων σύγκρισης, όπου στη μια αριθμητική γραμμή αναπαρίσταται η αρχική ποσότητα και στην άλλη αναπαρίσταται η δεύτερη ποσότητα, η οποία πρόκειται να συγκριθεί με την αρχική. Η διαφορά ανάμεσα στις δύο ποσότητες εντοπίζεται συμπερασματικά, όταν ο δεύτερος προσθετέος *ανακλάται* –καθρεφτίζεται – από τη δεύτερη αριθμητική γραμμή στην πρώτη.

Το τρίτο μοντέλο, που αφορά μαθητές ηλικίας δέκα χρονών, αναπαριστά τις αριθμητικές πράξεις ως αντικείμενα χειρισμού δύο νοερών αριθμητικών γραμμών, οι οποίες συντονίζονται με τη χρήση σαφών και λειτουργικών κανόνων. Η διαφορά ανάμεσα στο δεύτερο και τρίτο μοντέλο είναι το γεγονός ότι το τρίτο μοντέλο μπορεί να εκτελέσει αντίστροφα τις διαδικασίες ανάκλασης, όπως αυτές εκτελούνται στο δεύτερο μοντέλο. Για παράδειγμα, το τρίτο μοντέλο βοηθά στην επίλυση προβλημάτων στα οποία δίνεται μια ποσότητα, που είναι μεγαλύτερη από μια άλλη άγνωστη ποσότητα και οι μαθητές καλούνται να υπολογίσουν την άγνωστη ποσότητα. Δημιουργείται ένα δίκτυο πληροφοριών, το οποίο περιλαμβάνει τα δεδομένα του προβλήματος. Με βάση το δίκτυο αυτό οικοδομούνται νοερές αριθμητικές γραμμές. Στην πρώτη νοερή αριθμητική γραμμή αναπαρίσταται η γνωστή ποσότητα και σε μια δεύτερη νοερή αριθμητική γραμμή αναπαρίσταται η γνωστή ποσότητα μαζί με τη διαφορά των δύο ποσοτήτων. Ο στόχος, που περιλαμβάνεται στο δίκτυο, είναι η εύρεση της άγνωστης ποσότητας. Αυτό γίνεται εφικτό με την εύρεση της σχέσης, που διέπει τις δύο αριθμητικές γραμμές και τον εντοπισμό της ήδη δοσμένης διαφοράς. Ακολουθεί η αντιστροφή της σχέσης. Αρχικά το πρώτο πρόσωπο στο οποίο γίνεται αναφορά στο πρόβλημα έχει περισσότερα αντικείμενα από το δεύτερο. Γίνεται αντιστροφή και λαμβάνεται υπόψη η προοπτική του δεύτερου προσώπου, το οποίο έχει λιγότερα αντικείμενα σε σχέση με το πρώτο πρόσωπο. Η απάντηση προκύπτει μετρώντας αντίστροφα το ποσό της διαφοράς στη δεύτερη αριθμητική γραμμή.

Μέσα στα πλαίσια της έρευνας του Okamoto (1996) τα νοερά αυτά μοντέλα παρουσιάζονται ως παραγωγικά συστήματα, ως αριθμητικές γραμμές. Οι αριθμητικές γραμμές αποτελούν προσομοιώσεις των νοερών μοντέλων. Η ακρίβεια των προβλέψεων, που προκύπτουν από τις προσομοιώσεις των μοντέλων, βρίσκουν εφαρμογή στα τρία επίπεδα γνώσης του μοντέλου. Τα αποτελέσματα, που προέκυψαν από την έρευνα, ήταν συνεπή με τα τρία επίπεδα γνώσης και με τη θεωρητική ανάλυση, σύμφωνα με την οποία τα τρία επίπεδα γνώσης είναι ποιοτικά διαφορετικά και προβλέπουν τη διαφορετική απόδοση των μαθητών (Διάγραμμα 1).

Επίπεδο 1: Μονοδιάστατη νοερή γραμμή αντικειμένων

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Πρόσωπο στο οποίο γίνεται αναφορά στο πρόβλημα o↔o↔o↔o↔o↔o↔o↔o↔o↔o

Επίπεδο 2: Δύο νοερές αριθμητικές γραμμές που συντονίζονται δοκιμαστικά

Πρόσωπο 1 στο οποίο γίνεται αναφορά στο πρόβλημα 1↔2↔3↔4↔5↔6↔7↔8↔9↔10

Πρόσωπο 2 στο οποίο γίνεται αναφορά στο πρόβλημα 1↔2↔3↔4↔5↔6↔7↔8↔9↔10

ή

Πρόσωπο 1 στο οποίο γίνεται αναφορά στο πρόβλημα 1↔2↔3↔4↔5↔6↔7↔8↔9↔10

Μέτρηση 0↔1↔2↔3↔4

Επίπεδο 3: Δύο νοερές αριθμητικές γραμμές που συντονίζονται πλήρως

Πρόσωπο 1 στο οποίο γίνεται αναφορά στο πρόβλημα 1↔2↔3↔4↔5↔6↔7↔8↔9↔10

Πρόσωπο 2 στο οποίο γίνεται αναφορά στο πρόβλημα 1↔2↔3↔4↔5↔6↔7↔8↔9↔10

Διάγραμμα 1. Τα τρία επίπεδα του μοντέλου ανάπτυξης. Από «Modeling Children's understanding of quantitative Relations in texts: A developmental perspective,» του Y. Okamoto, 1996, Cognition and Instruction, σ. 417.

Αναπαραστάσεις, Ικανότητα Μετάφρασης και Ρητοί Αριθμοί

Στις έρευνες που εξετάζουν τις αναπαραστάσεις και τις μαθηματικές έννοιες εντάσσονται οι έρευνες οι οποίες εξετάζουν την ικανότητα μετάφρασης και χρήσης των αναπαραστάσεων σε σχέση με την κατανόηση των ρητών αριθμών. Συγκεκριμένα, ερευνητικές εργασίες όπως αυτές των Lesh et al. (1983), των Lesh, Post και Behr (1987) και των Lesh, Behr και Post (1987) εξετάζουν τη σχέση ανάμεσα στην κατανόηση της έννοιας των ρητών αριθμών και στην ικανότητα μετάφρασης ανάμεσα στα διάφορα είδη αναπαράστασης της έννοιας των ρητών αριθμών. Επιπρόσθετα, εντοπίζονται τα είδη μετάφρασης που δυσκολεύουν περισσότερο τους μαθητές στην επίλυση προβλημάτων με ρητούς αριθμούς. Μια άλλη ομάδα ερευνών διερευνούν τη συνεισφορά της ικανότητας μετάφρασης και της χρήσης ποικιλίας αναπαραστάσεων στην επίλυση προβλημάτων με ρητούς αριθμούς (Bezuk, & Armstrong, 1992: Brenner, Herman, Ho, & Zimmer, 1999: Middleton, van den Heuvel – Panhuizen, & Shew, 1998: Tirosh et al., 1996). Οι έρευνες των Jooste (1999), των Kamii και Clark (1995), των Murry, Olivier και De Beer (1999) και της Mack (2000) επισημαίνουν τη σύνδεση της έννοιας των αφηρημένων – συμβολικών – αναπαραστάσεων των ρητών αριθμών με αναπαραστάσεις της καθημερινής ζωής, οι οποίες πηγάζουν από τις άτυπες γνώσεις των μαθητών. Τέλος, μια άλλη ομάδα ερευνών (Luhkele, Murray, & Olivier, 1999: Newstead, & Murray, 1998: van Niekerk, Newstead, Murray, & Olivier, 1999) εξετάζει τη σειρά παρουσίασης των αναπαραστάσεων των ρητών αριθμών κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας και τις δυσκολίες σε σχέση με την κατανόηση των ρητών αριθμών, που προκύπτουν από την επιλογή της σειράς αυτής.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα έρευνας (Lesh, Landau, & Hamilton, 1983) οι μαθητές κατανοούν την έννοια των ρητών αριθμών, όταν κάνουν μεταφράσεις ανάμεσα στα διάφορα είδη αναπαράστασης της έννοιας – εικονικές παραστάσεις, λεκτική διατύπωση, σύμβολα. Προβλήματα που παρουσιάζονταν με τη χρήση χειροπιαστών μοντέλων δεν ήταν κατ' ανάγκη ευκολότερα σε σχέση με προβλήματα τα οποία παρουσιάζονταν με τη χρήση άλλων ειδών αναπαράστασης. Επίσης, φάνηκε ότι οι μαθητές χρησιμοποιούσαν διαφορετικό είδος αναπαράστασης ανάλογα με την πράξη που απαιτούσε η επίλυση του προβλήματος. Οι ερευνητές παρατήρησαν ακόμη ότι οι μαθητές δεν αναγνώριζαν το ίδιο πρόβλημα, όταν αυτό παρουσιαζόταν με διαφορετικό είδος αναπαράστασης. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να επιτυγχάνουν στην επίλυση ενός προβλήματος, το οποίο παρουσιαζόταν με ένα είδος αναπαράστασης, και να αποτυγχάνουν όταν το ίδιο πρόβλημα παρουσιαζόταν με άλλο είδος αναπαράστασης. Τέλος, φάνηκε ότι τα προβλήματα, που ζητούσαν τη μετάφραση από ένα είδος αναπαράστασης σε εικονική αναπαράσταση δυσκόλευαν περισσότερο τους μαθητές και συγκέντρωναν τα χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα ερευνών φάνηκε ότι οι μαθητές αντιμετώπιζαν δυσκολίες στη χρήση αναπαραστάσεων, για να εκφράσουν τους ρητούς αριθμούς, ενώ η ικανότητα μετάφρασης από ένα είδος αναπαράστασης των ρητών αριθμών σε άλλο φάνηκε να επηρεάζει την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων με ρητούς αριθμούς. Οι δυσκολίες αυτές ίσως να οφείλονταν στη διδασκαλία και στον τρόπο παρουσίασης της έννοιας των ρητών αριθμών στους μαθητές (Lesh, Post, & Behr,1987: Lesh, Behr, & Post,1987).

Η προβληματική που αφορά τη σχέση ανάμεσα στην ικανότητα μετάφρασης, στη χρήση αναπαραστάσεων και στην κατανόηση των ρητών αριθμών αποτέλεσε αντικείμενο έρευνας και πιο σύγχρονων εργασιών. Οι Bezuk και Armstrong (1992) κατασκεύασαν δραστηριότητες, οι οποίες βοήθησαν τους μαθητές που αντιμετώπιζαν δυσκολίες στον πολλαπλασιασμό ρητών αριθμών, να επιλύσουν προβλήματα πολλαπλασιασμού ρητών αριθμών με τη χρήση ποικιλίας αναπαραστάσεων. Με τον τρόπο αυτό έδειξαν τη σημασία της χρήσης ποικιλίας αναπαραστάσεων στην κατανόηση της έννοιας του κλάσματος.

Η έρευνα των Middleton et al. (1998) κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η χρήση αναπαραστάσεων, όπως τα χειριστικά μοντέλα – ραβδόμορφα μοντέλα – και η συσχέτισή τους με λεκτικά προβλήματα ρητών αριθμών – λεκτική έκφραση – ενίσχυσε την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων με ρητούς αριθμούς.

Οι Brenner et al. (1999) χρησιμοποίησαν την ικανότητα προσφυγής σε ποικιλία αναπαραστάσεων των ρητών αριθμών από τους μαθητές και την ικανότητα μετάφρασης από ένα είδος αναπαράστασης των ρητών αριθμών σε άλλο, για να εντοπίσουν την πιθανή αιτία αποτυχίας των αμερικανών μαθητών σε σχέση με τους ασιάτες μαθητές – Ιαπωνία, Κίνα, Ταϊβάν – στην έρευνα TIMSS 1995. Επίσης, οι πιο πάνω ερευνητές μελέτησαν τα είδη αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούνται κατά τη διδασκαλία των ρητών αριθμών σε κάθε ένα από τα τέσσερα έθνη. Με βάση τα αποτελέσματα της έρευνας, οι ασιάτες μαθητές είχαν ψηλότερα ποσοστά επιτυχίας από τους αμερικάνους μαθητές στα έργα μετάφρασης, με εξαίρεση τα έργα που περιλάμβαναν εικονικές αναπαραστάσεις, που δεν είναι αφηρημένο είδος αναπαράστασης. Στις ασιατικές χώρες χρησιμοποιείται μεγάλη ποικιλία χειριστικών μοντέλων και δίνεται έμφαση στη σύνδεσή τους με πιο αφηρημένα είδη αναπαράστασης των ρητών αριθμών. Τα αποτελέσματα αυτά, σύμφωνα με τους Brenner et al. δείχνουν την αναγκαιότητα της χρήσης ποικιλίας αναπαραστάσεων για την κατανόηση μαθηματικών εννοιών, όπως είναι οι ρητοί αριθμοί και τονίζουν τη σημασία της μετάφρασης ανάμεσα στα διαφορετικά είδη αναπαράστασης και ιδιαίτερα τη μετάβαση από τα λιγότερο αφηρημένα είδη αναπαράστασης στα περισσότερο αφηρημένα.

Στην έρευνα των Kamii και Clark (1995) φάνηκε ότι οι μαθητές αντιμετώπιζαν δυσκολίες στην κατανόηση της έννοιας της ισοδυναμίας κλασμάτων με αποτέλεσμα να αντιμετωπίζουν δυσκολίες και στις πράξεις πρόσθεσης και αφαίρεσης μη ισοδύναμων κλασμάτων. Οι δυσκολίες αυτές αποδόθηκαν κυρίως στη διδασκαλία και στη χρήση ακατάλληλων αναπαραστάσεων, οι οποίες δημιουργούν παρανοήσεις στους μαθητές. Στα συμπεράσματα της έρευνας αυτής τονίζεται η σημασία της χρήσης αναπαραστάσεων, που να έχουν νόημα για τους μαθητές και η ενθάρρυνση των μαθητών για επινόηση δικών τους αναπαραστάσεων, οι οποίες παρουσιάζουν ισοδύναμα κλάσματα. Η σημασία της σύνδεσης της έννοιας του κλάσματος με την ήδη υπάρχουσα γνώση των μαθητών και της επινόησης αναπαραστάσεων από τους μαθητές φάνηκε και στα αποτελέσματα άλλων ερευνών, που εξέταζαν την εννοιολογική και διαδικαστική γνώση των κλασμάτων σε σχέση με τη χρήση αναπαραστάσεων (Jooste, 1999: Murray, et al., 1999).

Με βάση αποτελέσματα, που προέκυψαν από την έρευνα της Mack (2000), φάνηκε ότι η χρήση της άτυπης γνώσης των μαθητών ενισχύει την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων πολλαπλασιασμού κλασμάτων. Η άτυπη γνώση των μαθητών μπορεί να εκφραστεί με τη χρήση αναπαραστάσεων, οι οποίες έχουν νόημα για τους μαθητές, όπως είναι οι αναπαραστάσεις που περιλαμβάνουν στοιχεία της καθημερινής ζωής – ιστορίες και εικόνες. Όταν γίνει η σύνδεση των πιο αφηρημένων – συμβολικών – αναπαραστάσεων των μαθηματικών εννοιών με την άτυπη γνώση των μαθητών ενισχύεται η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών.

Έρευνες που εξετάζουν τα είδη αναπαράστασης των κλασμάτων και τη σειρά παρουσίασής τους στους μαθητές κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας έχουν καταλήξει στο συμπέρασμα ότι οι δυσκολίες, που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση της έννοιας του κλάσματος και στις πράξεις κλασμάτων, οφείλονται σε μεγάλο βαθμό στην πρόωρη χρήση συμβολικών αναπαραστάσεων – σύμβολο κλάσματος, αλγόριθμοι. Οι δυσκολίες αυτές γίνονται εντονότερες λόγω της επίδρασης προηγούμενων γνώσεων, όπως είναι η έννοια των φυσικών αριθμών και οι πράξεις με φυσικούς αριθμούς (Jooste, 1999: Luhkele, et al., 1999: Murray, et al., 1999: Newstead, & Murray, 1998: Saenz – Ludlow, 1995: Tirosh, 2000: van Niekerk, et al., 1999).

Αριθμητική Γραμμή και Ρητοί Αριθμοί

Όπως έχει ήδη αναφερθεί η αριθμητική γραμμή αποτελεί γεωμετρικό μοντέλο των πράξεων στο σύνολο των ρητών αριθμών, αφού δύο αριθμοί από το σύνολο των ρητών αριθμών αντιστοιχούν σε δύο σημεία στην ευθεία, ενώ μια πράξη ανάμεσα στους δύο αριθμούς μπορεί να εκτελεσθεί γεωμετρικά στη βαθμολογημένη ευθεία και να μεταφραστεί σε αριθμό που να ανήκει στο σύνολο των ρητών αριθμών.

Η αριθμητική γραμμή αποτελεί, λοιπόν, γεωμετρικό μοντέλο το οποίο χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει τους ρητούς αριθμούς. Συγκεκριμένα, αναπαριστά την υποέννοια μέτρο (Κολέζα, 2000).

Η κεντρική εννοιολογική μεταφορά της αριθμητικής γραμμής είναι ότι οι ρητοί αριθμοί αποτελούν σημεία στη γραμμή. Σύμφωνα με τη Ni (2000) αυτή η μοντελοποίηση απεικονίζει στοιχεία της αριθμητικής γραμμής στους ρητούς αριθμούς.

Η αριθμητική γραμμή, λοιπόν, αποτελεί γεωμετρικό μοντέλο το οποίο αναπαριστά τους ρητούς αριθμούς, αφού αναπαριστά θεμελιώδεις ιδιότητες των ρητών αριθμών, όπως για παράδειγμα η πυκνότητα και το άπειρο των ρητών αριθμών. Ο Herbst (1997) αναφέρει ως παράδειγμα την εύρεση ενός αριθμού ανάμεσα στον αριθμό 3/5 και 4/5. Αν ληφθούν υπόψη τα κλάσματα που έχουν παρονομαστή ίσο με το 5, τότε δεν υπάρχει τέτοιο κλάσμα ανάμεσα στο 3/5 και στο 4/5. Αν όμως, ληφθούν υπόψη τα ισοδύναμα κλάσματα του 3/5 και 4/5, δηλαδή το 6/10 και το 8/10 αντίστοιχα, τότε εύκολα εντοπίζονται τα κλάσματα 7/10 και 8/10, τα οποία βρίσκονται στο ενδιάμεσο (Herbst,1997). Συνοπτικά, επειδή η μονάδα μέτρησης της αριθμητικής γραμμής μπορεί να διαιρείται συνεχώς σε μικρότερες μονάδες, αυτό δείχνει ότι προκύπτουν διαφορετικά ονόματα κλασμάτων, όταν διαφορετικές μονάδες καλύπτουν την ίδια απόσταση – ισοδύναμα κλάσματα (Ni, 2000).

Η διαδικασία εύρεσης ισοδύναμων κλασμάτων με μεγαλύτερους παρονομαστές επαναλαμβάνεται με στόχο την παραγωγή περισσότερων κλασμάτων, τα οποία υπάρχουν ανάμεσα στα δύο αρχικά κλάσματα. Η αριθμητική γραμμή επιλύει το πρόβλημα των ενδιάμεσων αριθμών, αφού αναπαριστά το κλάσμα ανάμεσα στα δύο αρχικά κλάσματα. Με τον τρόπο αυτό η αριθμητική γραμμή δεν είναι ένα απλό μέσο αναπαράστασης κλασματικών αριθμών, αλλά ενώνει σε ένα ενιαίο σύνολο δύο σημαντικά γνωστικά αντικείμενα, την ισοδυναμία κλασμάτων και τα κλάσματα που βρίσκονται ανάμεσα σε δύο άλλα κλάσματα (Herbst,1997). Η αναγνώριση κλασμάτων σε μια αριθμητική γραμμή προϋποθέτει την κατανόηση της ισοδυναμίας ενός πηλίκου και την κατανόηση της πυκνότητας και διαδοχικότητας των ρητών αριθμών (Ni, 2000).

Η πυκνότητα της γραμμής – μεταξύ δύο σημείων υπάρχει ένα άλλο σημείο – γίνεται πυκνότητα των ρητών αριθμών – μεταξύ δύο αριθμών υπάρχει ένας άλλος αριθμός (Ni, 2000). Η πυκνότητα αυτή παραπέμπει στην έννοια του απείρου των ρητών αριθμών. Η πυκνότητα παρουσιάζεται επαγωγικά με την επανάληψη της διαδικασίας εύρεσης ισοδύναμων κλασμάτων με μεγαλύτερους παρονομαστές και την παραγωγή περισσότερων κλασμάτων, τα οποία υπάρχουν ανάμεσα στα δύο αρχικά κλάσματα. Ο ρόλος, λοιπόν, της ευκλείδειας ευθείας στην κατασκευή της γραμμής των ρητών αριθμών είναι σημαντικός για την κατανόηση της έννοιας της πυκνότητας των ρητών αριθμών. Η ευθεία θεωρείται ως ένα συνεχές με τη βοήθεια του οποίου μπορεί να αναπαρασταθεί η πυκνότητα των ρητών αριθμών (Herbst, 1997).

Τα κλάσματα παρουσιάζονται ως μετρήσεις με διαφορετικές μονάδες. Η γραμμή των ρητών αριθμών προκύπτει από τη γραμμή των ακεραίων και η ευκλείδεια ευθεία επιτρέπει την τοποθέτηση των νέων σημείων τα οποία υποδηλώνουν διαφορετικούς ρητούς αριθμούς, ανάλογα με τη μονάδα υποδιαίρεσης (Herbst, 1997).

Επίσης, η αριθμητική γραμμή παριστάνει τους ρητούς αριθμούς ως αποστάσεις συγκεκριμένων σημείων από το σημείο μηδέν κάτι το οποίο δείχνει ότι είναι διαδοχικοί (Ni, 2000).

Μέσα στα πλαίσια των ερευνών οι οποίες εξετάζουν τις αναπαραστάσεις των ρητών αριθμών και το βαθμό στον οποίο συμβάλλουν στην κατανόηση της έννοιας των ρητών αριθμών εντάσσονται και οι έρευνες οι οποίες εξετάζουν την καταλληλότητα της αριθμητικής γραμμής ως αναπαράστασης των ρητών αριθμών. Αρκετές έρευνες έχουν εντοπίσει δυσκολίες, που αντιμετωπίζουν οι μαθητές, αναφορικά με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής ως μοντέλου για κατανόηση των ρητών αριθμών. Οι Behr et al. (1983) αναφέρουν τρία είδη δυσκολίας: (α) η επίδοση των μαθητών ήταν διαφορετική σε σχέση με την αναγνώριση της μονάδας στην αριθμητική γραμμή, (β) προβλήματα στα οποία οι υποδιαιρέσεις στην αριθμητική γραμμή δεν ισούνται με τον παρονομαστή του κλάσματος είναι δυσκολότερα σε σχέση με προβλήματα στα οποία οι υποδιαιρέσεις στην αριθμητική γραμμή ισούνται με τον παρονομαστή του κλάσματος και (γ) προβλήματα στα οποία οι υποδιαιρέσεις της αριθμητικής γραμμής δεν είναι παράγοντες ή πολλαπλάσια του παρονομαστή του κλάσματος είναι δυσκολότερα από προβλήματα στα οποία οι υποδιαιρέσεις είναι παράγοντες ή πολλαπλάσια του παρονομαστή του κλάσματος.

Η έρευνα των Behr και Bright (1984) αφορούσε τη μάθηση των κλασμάτων με τη βοήθεια της αριθμητικής γραμμής και έδειξε ότι οι μαθητές αντιμετώπιζαν σοβαρές δυσκολίες στην αναπαράσταση των κλασμάτων με τη βοήθεια της αριθμητικής γραμμής. Οι δυσκολίες αυτές αφορούσαν την ικανότητα υποδιαίρεσης της αριθμητικής γραμμής και τη μετάφραση ανάμεσα στη συμβολική και εικονική αναπαράσταση των πληροφοριών της αριθμητικής γραμμής.

Η έρευνα των Bright et al. (1988) έδειξε ότι οι διαφορές που παρουσιάζονται ανάμεσα στα είδη αναπαράστασης των ρητών αριθμών και στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής έχουν ως αποτέλεσμα οι μαθητές να δυσκολεύονται να αναπαραστήσουν ρητούς αριθμούς στην αριθμητική γραμμή. Τα διακριτά μοντέλα προσφέρουν οπτική βοήθεια στους μαθητές, αφού περιλαμβάνουν μετρήσιμα αντικείμενα. Η αριθμητική γραμμή ως συνεχές μοντέλο δεν προσφέρει τέτοια βοήθεια. Επίσης, οι Bright et al. εντόπισαν τη δυσκολία χρήσης της αριθμητικής γραμμής ως είδους αναπαράστασης των ρητών αριθμών στην έλλειψη κατανόησης του μερισμού μιας μονάδας μέτρησης στην αριθμητική γραμμή. Μετά από πειραματικές διδασκαλίες φάνηκε ότι η επίδοση των μαθητών βελτιώθηκε, όταν οι δραστηριότητες περιλάμβαναν τη σύνδεση των διαφορετικών αναπαραστάσεων – για παράδειγμα εικονικών αναπαραστάσεων - και της αριθμητικής γραμμής, για να εκφραστεί το κλάσμα ως σύγκριση μέρους - όλου.

Η έρευνα της Michaelidou (2003) εξέταζε την επίδοση των μαθητών σε έργα μετάφρασης που αφορούσαν εννοιολογική – μέρος-όλο, μέτρο, τελεστής, πηλίκο και λόγος – και διαδικαστική γνώση των κλασμάτων – πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση. Σύμφωνα με το Δενδροδιάγραμμα Ομοιότητας που προέκυψε από τη Συνεπαγωγική Στατιστική Μέθοδο του Gras, τα έργα μετάφρασης που περιλάμβαναν εικονικές αναπαραστάσεις – εμβαδόν, αριθμητική γραμμή – αποτέλεσαν ξεχωριστή ομάδα σε σχέση με τα υπόλοιπα έργα, με τα οποία δεν υπάρχουν αρκετές συνεπαγωγές. Παρατηρείται, δηλαδή, μια στεγανοποίηση των έργων αυτών. Τα έργα τα οποία περιλάμβαναν εικονικές αναπαραστάσεις συγκέντρωσαν τα χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας, ενώ τα έργα μετάφρασης από τη λεκτική στη συμβολική έκφραση και αντίστροφα συγκέντρωσαν τα ψηλότερα ποσοστά επιτυχίας. Τα αποτελέσματα αυτά δείχνουν τις αδυναμίες στην κατανόηση της εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης των κλασμάτων, αφού η ικανότητα μετάφρασης αποτελεί ένδειξη κατανόηση μιας έννοιας (Lesh et al., 1983: Lesh, Post, & Behr, 1987). Ειδικότερα, από την ομάδα των έργων που περιλάμβαναν τις εικονικές αναπαραστάσεις, τα έργα τα οποία εξέταζαν την εννοιολογική και διαδικαστική γνώση των κλασμάτων με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής συγκέντρωσαν τα χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας σε σχέση με όλα τα υπόλοιπα έργα. Τα αποτελέσματα φανερώνουν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές όταν χρησιμοποιούν την αριθμητική γραμμή για να εκφράσουν την έννοια του κλάσματος και για να εκτελέσουν πράξεις. Οι δυσκολίες αφορούσαν κυρίως τον εντοπισμό της μονάδας αναφοράς στην αριθμητική γραμμή και την αντιστοιχία του σημείου της αριθμητικής γραμμής με το σωστό κλάσμα.

Σε αντίθεση με τα αποτελέσματα των πιο πάνω ερευνών οι οποίες έχουν εντοπίσει δυσκολίες που προκύπτουν από τη χρήση της αριθμητικής γραμμής, αρκετές έρευνες έχουν δείξει ότι η χρήση της αριθμητικής γραμμής συμβάλλει στην κατανόηση της έννοιας των αριθμών και στην ανάπτυξη της τυπικής λογικής σκέψης σε σχέση με τα κλάσματα (Keijzer & Terwel, 2000: Keijzer & Terwel, 2001).

Η έρευνα των Keijzer και Terwel (2000) βασίστηκε στη δημιουργία μιας ομάδας ελέγχου, η οποία διδάχθηκε για ένα χρόνο τα κλάσματα, όπως προνοεί το υπάρχον αναλυτικό πρόγραμμα της Ολλανδίας και είχε ως επίκεντρο της διδασκαλίας την αναπαράσταση των κλασμάτων με τη βοήθεια του κύκλου. Η πειραματική ομάδα διδάχθηκε τα κλάσματα με βάση ένα νέο πειραματικό αναλυτικό πρόγραμμα το οποίο επικεντρώνεται στη χρήση της αριθμητικής γραμμής και τη θεωρεί ως το μέσο για την ανάπτυξη νοητικών μοντέλων, που συμβάλλουν στην ανάπτυξη της τυπικής λογικής αναφορικά με τα κλάσματα. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι υπάρχουν ποιοτικές διαφορές ανάμεσα στις δύο ομάδες, με την πειραματική ομάδα να υπερέχει στην κατανόηση της έννοιας του κλάσματος, στην εκτέλεση πράξεων με κλάσματα και γενικά στην κατανόηση της τυπικής γνώσης των κλασμάτων.

Η έρευνα των Keijzer και Terwel (2001) αποτέλεσε μελέτη περίπτωση μιας μαθήτριας και αφορούσε τη διδασκαλία των κλασμάτων με βάση ένα νέο πειραματικό αναλυτικό πρόγραμμα, το οποίο βασίζεται στη συζήτηση στην τάξη και στη χρήση της αριθμητικής γραμμής. Η αριθμητική γραμμή αποτελούσε το μέσο για την ανάπτυξη νοητικών μοντέλων, που συμβάλλουν στην ανάπτυξη της τυπικής λογικής αναφορικά με τα κλάσματα. Μέσα στα πλαίσια της έρευνας η μαθήτρια ασχολήθηκε αρχικά με ραβδόμορφα μοντέλα, τα οποία αποτελούνταν από ποικιλία υποδιαιρέσεων με στόχο τη μέτρηση μήκους. Ακολούθως, τόσο η μαθήτρια όσο και οι συμμαθητές της ασχολήθηκαν, με τη βοήθεια προγραμμάτων υπολογιστή, με γραμμικά μοντέλα αρίθμησης, τα οποία αποτελούνταν από ποικιλία υποδιαιρέσεων και αφορούσαν καταστάσεις της καθημερινής ζωής, όπως για παράδειγμα η γραμμική απεικόνιση της κίνησης ενός ανελκυστήρα ανάμεσα σε ορόφους μιας πολυκατοικίας, που στην ουσία αντιπροσώπευαν διαφορετικά κλάσματα σε μια αριθμητική γραμμή. Η έρευνα περιελάμβανε τέσσερα διαδοχικά στάδια: (α) την ανάπτυξη ορολογίας σχετικής με τα κλάσματα, (β) τη χρήση της αριθμητικής γραμμής για την αναπαράσταση κλασμάτων, (γ) τη σύγκριση κλασμάτων με τη βοήθεια της αριθμητικής γραμμής και (δ) την ικανότητα εκτέλεσης πράξεων με κλάσματα με τη βοήθεια της αριθμητικής γραμμής. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι η αριθμητική γραμμή, ως μέσο αναπαράστασης των κλασμάτων, εισήγαγε με φυσικό τρόπο τη μαθήτρια στην τυπική γνώση των κλασμάτων, αφού τη βοήθησε σημαντικά να κατανοήσει την ισοδυναμία των κλασμάτων, να συγκρίνει κλάσματα και να εκτελεί πράξεις με κλάσματα.

Η έρευνα της Ni (2000) εξέτασε το ρόλο της αριθμητικής γραμμής στην αξιολογική διαδικασία. Σύμφωνα με τη Ni (2000) η εκπαιδευτική αξιολόγηση εξυπηρετεί δύο κύριους στόχους: τον υπολογισμό της επίδοσης των μαθητών και τη διάγνωση των μαθησιακών τους δυσκολιών. Οι αξιολογήσεις που χρησιμοποιούνται για διαγνωστικούς σκοπούς είναι διαφορετικές από εκείνες που χρησιμοποιούνται για σκοπούς μέτρησης της επίδοσης των μαθητών. Η διαφορά τους εστιάζεται στο γεγονός ότι τα διαγνωστικά δοκίμια δε βασίζονται στην υπόθεση της ολοένα αυξανόμενης ικανότητας, αφού ο σκοπός τους δεν αφορά την εύρεση της επίδοσης των μαθητών. Ο σκοπός των διαγνωστικών δοκιμίων είναι η μοντελοποίηση των ικανοτήτων ή των γνωστικών αντικειμένων, έτσι ώστε η πρόβλεψη της προόδου των μαθητών αναφορικά με την απόκτηση γνώσεων να είναι εφικτή. Η επιτυχία ενός διαγνωστικού δοκιμίου οφείλεται στην ικανότητά του να ανιχνεύει τις παρανοήσεις των μαθητών, όταν αυτές βρίσκονται στο στάδιο αλλαγής προς το ορθό νοητικό μοντέλο σε σχέση με ένα συγκεκριμένο γνωστικό αντικείμενο.

Η Ni (2000) επισημαίνει ότι η αριθμητική γραμμή είναι μια αναπαράσταση, η οποία χρησιμοποιείται συνήθως στη διδασκαλία των μαθηματικών, για να παρουσιάσει στους μαθητές τους ρητούς αριθμούς ως διαδοχικούς αριθμούς και ως αριθμούς που τείνουν στο άπειρο. Χρησιμοποιείται για να αξιολογήσουν την κατανόηση των μαθητών όσον αφορά την υποέννοια μέτρο των ρητών αριθμών. Έρευνες (Bright, et al., 1988: Dufour-Janvier, et al., 1987: Lesh, Behr, & Post, 1987: Larson-Novillis, 1979: Niemi, 1996) (αναφορά στο Ni, 2000) έχουν δείξει ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν αρκετές δυσκολίες όταν χρησιμοποιούν την αριθμητική γραμμή ως αναπαράσταση των ρητών αριθμών. Ένα κοινό λάθος των μαθητών είναι ότι ταυτίζουν την αριθμητική γραμμή με το ευθύγραμμο τμήμα ακόμα και όταν περιλαμβάνει διαστήματα μεγαλύτερα του διαστήματος 0 ως 1. Η δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με τις αριθμητικές γραμμές απορρέει εν μέρει, από την έμφαση των διδακτικών προσεγγίσεων στην υποέννοια του ρητού αριθμού ως μέρος – όλο και στη χρήση της αναπαράστασης του εμβαδού. Οι προσεγγίσεις αυτές οδηγούν συχνά τους μαθητές σε παρανοήσεις, αφού πιστεύουν ότι ο αριθμητής και ο παρονομαστής ενός κλάσματος είναι δύο ακέραιοι αριθμοί, οι οποίοι δε συνδέονται με κάποια σχέση και αναπαριστούν δύο διαφορετικές μετρήσεις.

Στα πλαίσια της έρευνας της Ni (2000) εξετάστηκε αν η αριθμητική γραμμή μετρά την επίδοση των μαθητών – τελική αξιολόγηση – ή αν ανιχνεύει τις παρανοήσεις τους αναφορικά με την έννοια των ρητών αριθμών – διαμορφωτική αξιολόγηση. Η Ni (2000) έχει αμφιβολίες αναφορικά με το κατά πόσο η συγκεκριμένη αναπαράσταση αποτελεί ένα αξιολογικό εργαλείο, το οποίο μετρά την επίδοση των μαθητών. Προηγούμενες έρευνες (Behr, et al., 1984: Hiebert, Wearne, & Taber, 1991: Noelting, 1980: Streefland, 1991) (αναφορά στο Ni, 2000) έχουν δείξει ότι οι αριθμητικές γραμμές αποτελούν αξιολογικό εργαλείο, το οποίο είναι κατάλληλο για τον εντοπισμό των παρανοήσεων των μαθητών. Αυτό οφειλόταν στο γεγονός ότι η αριθμητική γραμμή περιλαμβάνει παραπλανητικά στοιχεία για κάποιο μαθητή, ο οποίος έχει παρανοήσεις ή δεν έχει αναπτύξει πλήρως την έννοια των ρητών αριθμών.

Με βάση τα αποτελέσματα της έρευνας της Ni (2000), φάνηκε τελικά ότι η αριθμητική γραμμή μπορούσε να εντοπίσει δυσκολίες και παρανοήσεις, που είχαν οι μαθητές αναφορικά με τους ρητούς αριθμούς και την αναπαράστασή τους με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής, παρά να μετρήσει την απόδοση των μαθητών και να τους αποδώσει βαθμολογία με βάση την ικανότητα χειρισμού της. Οι μαθητές χωρίστηκαν, με βάση την επίδοσή τους στα έργα της αριθμητικής γραμμής, σε αυτούς που χρησιμοποιούσαν την αριθμητική γραμμή για την αναγνώριση κλασμάτων σωστά και σε αυτούς που αντιμετώπιζαν δυσκολίες στη χρήση της αριθμητικής γραμμής ως αναπαράστασης των κλασμάτων. Η κυριότερη δυσκολία των μαθητών οφειλόταν στην αναγνώριση της μονάδας στην αριθμητική γραμμή. Το γεγονός αυτό οφείλεται στην αρνητική επίδραση που έχει η στρατηγική της διπλής μέτρησης, που έχουν αναπτύξει οι μαθητές, αναφορικά με τα κλάσματα. Ο διαχωρισμός των μαθητών, όπως προέκυψε με βάση την επίδοσή τους στα έργα αριθμητικών γραμμών, παρέμεινε ο ίδιος και με βάση την επίδοσή τους σε έργα που εξέταζαν τη διαδικαστική γνώση των μαθητών αναφορικά με τα κλάσματα. Συγκεκριμένα, με βάση την επίδοση στα έργα της αριθμητικής γραμμής εντοπίσθηκαν οι μαθητές που δεν είχαν κατανοήσει τη σημασία της μονάδας σε ένα κλάσμα. Με αυτό τον τρόπο εντοπίσθηκε η αιτία της αποτυχίας των μαθητών αυτών στα έργα που εξέταζαν τη διαδικαστική γνώση. Η συγκεκριμένη έρευνα κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η αριθμητική γραμμή αναπαριστά τους ρητούς αριθμούς και τις θεμελιώδεις ιδιότητές τους και κατά συνέπεια η χρήση της αριθμητικής γραμμής, ως μέσου αναπαράστασης των ρητών αριθμών, βοηθά τους μαθητές στους υπολογισμούς, τις εφαρμογές και τις επεξηγήσεις αναφορικά με τους ρητούς αριθμούς (Ni, 2000).

Ισοδυναμία και Πρόσθεση Κλασμάτων

Η ισοδυναμία και πρόσθεση κλασμάτων αποτελούν γνωστικά αντικείμενα τα οποία περιλαμβάνονται στο αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών. Πρόκειται για δύο αλληλένδετα γνωστικά αντικείμενα, αφού η κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων και ιδιαίτερα η πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων προϋποθέτει την κατανόηση της ισοδυναμίας κλασμάτων (Wu, 2002).

Ισοδυναμία Κλασμάτων

Σύμφωνα με το Wu (2002) τα ισοδύναμα κλάσματα ορίζονται ως τα κλάσματα που αντιστοιχούν στην ίδια ποσότητα, αλλά έχουν διαφορετικά ονόματα. Η ισοδυναμία δύο κλασμάτων μπορεί να αναπαρασταθεί με τη χρήση του κανόνα απαλοιφής και της συμβολικής αναπαράστασης του κλάσματος. Σύμφωνα με τον κανόνα της απαλοιφής:

$$\frac{a}{b} = \frac{axk}{bxk} = \frac{m}{n}$$

Η ισοδυναμία δύο κλασμάτων μπορεί να αναπαρασταθεί με τη χρήση των υποεννοιών του κλάσματος και με ποικιλία αναπαραστάσεων, όπως είναι το εμβαδόν του κύκλου, το οποίο αναφέρεται στην υποέννοια μέρος-όλο, και η αριθμητική γραμμή, η οποία αναφέρεται στην υποέννοια μέτρο, με στόχο την καλύτερη κατανόηση της έννοιας της ισοδυναμίας κλασμάτων από τους μαθητές (Wu, 2002). Στην αναπαράσταση του εμβαδού του κύκλου ή της αριθμητικής γραμμής επιλέγεται ένα μέρος. Για παράδειγμα, αν ο κύκλος ή η αριθμητική γραμμή έχουν *b* υποδιαιρέσεις, τότε επιλέγονται οι *α*. Σχηματίζεται, δηλαδή, το κλάσμα $α/b$. Ο κύκλος ή η αριθμητική γραμμή ξαναμοιράζονται σε ένα αριθμό m υποδιαιρέσεων, που είναι *k* φορές πολλαπλάσιο ή υποπολλαπλάσιο του *b*, χωρίς να αλλάξει η ποσότητα *α*, που έχει επιλεγεί αρχικά. Η ποσότητα *α*, υποδιαιρείται, επίσης, σε ένα αριθμό n υποδιαιρέσεων, *k* φορές πολλαπλάσιο ή υποπολλαπλάσιο του *α*. Η αρχική ποσότητα, που έχει επιλεγεί, δεν έχει αλλάξει, έχει αλλάξει, ωστόσο, το όνομα του κλάσματος, το οποίο είναι τώρα το m/n, όπου $α = mxk$ και $b = nxk$.

Σύμφωνα με τους Kamii και Clark (1995) διάφοροι ερευνητές έχουν ταυτίσει την κατανόηση των ισοδύναμων κλασμάτων με την ικανότητα των μαθητών να αποδίδουν διαφορετικά ονόματα στον ίδιο αριθμό και να αγνοούν ή να φαντάζονται διαχωριστικές γραμμές στην αριθμητική γραμμή με στόχο τον εντοπισμό ισοδύναμων κλασμάτων. Επιπλέον, η κατανόηση των ισοδύναμων κλασμάτων σχετίζεται με την πολλαπλασιαστική σκέψη και τη διατήρηση του όλου και του μέρους (Kamii & Clark, 1995).

<u>Πρόσθεση Κλασμάτων</u>

Η πρόσθεση των ακέραιων αριθμών, σύμφωνα με το Wu (2002), προϋποθέτει το συνδυασμό δύο ή περισσότερων ομάδων αντικειμένων και τη μέτρηση όλων των αντικειμένων. Αυτό δεν μπορεί να γίνει με τα κλάσματα. Η πρόσθεση κλασμάτων προϋποθέτει τη μετατροπή των παρονομαστών των κλασμάτων με βάση μια κοινή μονάδα, αφού το άθροισμα που θα προκύψει πρέπει να αναπαριστά σε ένα κλασματικό αριθμό το συνολικό αριθμό των μερών που έχουν επιλεγεί καθώς και το συνολικό αριθμό των μερών. Αυτό επιτυγχάνεται με τη βοήθεια των ισοδύναμων κλασμάτων. Βρίσκεται το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των δύο παρονομαστών, πολλαπλασιάζεται με τους αριθμητές και τους παρονομαστές και δημιουργούνται δύο ισοδύναμα με τα αρχικά κλάσματα, τα οποία τώρα έχουν κοινό παρονομαστή και εκτελείται η πρόσθεση. Η διαδικασία αυτή γίνεται όταν τα κλάσματα είναι ετερώνυμα, ενώ δε χρειάζεται να γίνει για τα ομώνυμα κλάσματα, αφού έχουν τον ίδιο παρονομαστή. Οι μαθητές χρειάζεται να προσέξουν να προσθέσουν μόνο τους αριθμητές, αφού οι παρονομαστές των δύο κλασμάτων απλά δείχνουν τον ολικό αριθμό των υποδιαιρέσεων, από τις οποίες θα επιλεγεί ένας αριθμός υποδιαιρέσεων. Η συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης είναι η εξής:

$$\frac{k}{l}+\frac{m}{n}=\frac{kn}{\ln}+\frac{lm}{\ln}=\frac{kn+lm}{\ln}$$

Το *ln* είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των *l* και *n*, ενώ *kn/ln* και *lm/ln* είναι τα ισοδύναμα κλάσματα των *k/l* και *m/n*, αντίστοιχα.

Η πρόσθεση δύο κλασμάτων μπορεί να αναπαρασταθεί με τη χρήση των υποεννοιών του κλάσματος και ποικιλίας αναπαραστάσεων, όπως είναι το εμβαδόν του κύκλου – υποέννοια μέρος-όλο – η αριθμητική γραμμή – υποέννοια μέτρο – με στόχο την καλύτερη κατανόηση της έννοιας της πρόσθεσης κλασμάτων από τους μαθητές (Wu, 2002). Με τη χρήση τέτοιων αναπαραστάσεων οι μαθητές αντιλαμβάνονται την ανάγκη εύρεσης κοινής μονάδας για την εκτέλεση της πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων. Επιπρόσθετα, αντιλαμβάνονται ότι πρέπει να προσθέσουν μόνο τους αριθμητές, αφού οι παρονομαστές των δύο κλασμάτων απλά δείχνουν τον ολικό αριθμό των υποδιαιρέσεων, από τις οποίες θα επιλεγεί ένας αριθμός υποδιαιρέσεων (Wu, 2002).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Οι Υποθέσεις της Έρευνας

Στην παρούσα ερευνητική εργασία διατυπώνονται οι παρακάτω υποθέσεις:

Υ1. Οι μαθητές πέμπτης τάξης δημοτικού δεν είναι ικανοί (α) να εκφράζουν την έννοια του κλάσματος με τη χρήση διαφορετικών πεδίων αναπαράστασης – λεκτική έκφραση, συμβολική έκφραση, αριθμητική γραμμή (β) να χειρίζονται ευέλικτα την έννοια αυτή στο ίδιο πεδίο αναπαράστασης και (γ) να μεταφράζουν με ακρίβεια από το ένα σύστημα αναπαράστασης της έννοιας στο άλλο.

Υ2. Υπάρχει μια *στεγανοποίηση*, συνολικά, (α) των ειδών αναπαράστασης, (β) των έργων μετάφρασης ισοδυναμίας και πρόσθεσης κλασμάτων, στα οποία ζητείται η μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση, σε σχέση με τα ίδια έργα στα οποία ζητείται η μετάφραση από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή και (γ) των έργων ανάλογα με το γνωστικό αντικείμενο το οποίο εξετάζουν: αναγνώριση, αναπαράσταση, ισοδυναμία και πρόσθεση κλασμάτων.

Υ3. Κάποια είδη μετάφρασης θεωρούνται πιο απλά σε επίπεδο μαθητών πέμπτης τάξης δημοτικού. Υπάρχουν, δηλαδή, είδη μετάφρασης στα οποία πρέπει να επιτύχουν οι μαθητές, ώστε να είναι σε θέση να επιτύχουν σε άλλα είδη μετάφρασης.

Υ4. Υπάρχει διαφοροποίηση στην επίδοση των μαθητών πέμπτης τάξης δημοτικού αναφορικά με το γνωστικό αντικείμενο το οποίο εξετάζει το έργο – αναπαράσταση κλασμάτων, αναγνώριση κλασμάτων, ισοδυναμία κλασμάτων, πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων, πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων.

Υ5. Η αριθμητική γραμμή αποτελεί εργαλείο διαμορφωτικής αξιολόγησης, αφού μπορεί να εντοπίσει και να υποδείξει στον εκπαιδευτικό παρανοήσεις και δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές αναφορικά με την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος.

Υ6. Η επίδοση των μαθητών στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων πρόσθεσης κλασμάτων διαφοροποιείται όταν χρησιμοποιούν ως βοηθητικό μέσο την αριθμητική γραμμή.

Υ7. Η αριθμητική γραμμή ως διδακτικό εργαλείο δημιουργεί δυσκολίες στην κατανόηση των εννοιών της ισοδυναμίας και πρόσθεσης κλασμάτων, λόγω της έμφασης στην αλγοριθμική προσέγγιση των κλασμάτων κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Κατά συνέπεια, η αριθμητική γραμμή μπορεί να αποτελέσει ένα κατάλληλο μέσο αναπαράστασης των ρητών αριθμών όταν προηγηθεί η διδασκαλία του τρόπου λειτουργίας και της χρήσης της ως αναπαράστασης των ρητών αριθμών.

Τα Υποκείμενα της Έρευνας

Στην έρευνα έλαβαν μέρος 206 μαθητές πέμπτης τάξης δημοτικού, οι οποίοι προέρχονταν από 4 δημόσια δημοτικά σχολεία της Λεμεσού. Οι ηλικίες των μαθητών κυμαίνονταν από 10 χρονών και 5 μηνών μέχρι και 11 χρονών και 4 μηνών. Τα τέσσερα δημοτικά σχολεία επιλέγηκαν με τη μέθοδο της τυχαίας δειγματοληψίας – κλήρωση – σε σύνολο 27 δημοτικών σχολείων της πόλης.

Έργα

<u>Συλλογή Ποσοτικών Δεδομένων</u>

Στην Α’ φάση της έρευνας δόθηκαν το Δοκίμιο Α, το Δοκίμιο Β, το Δοκίμιο Γ και το Δοκίμιο Δ με σκοπό τη συλλογή ποσοτικών δεδομένων.

Το Δοκίμιο Α (Παράρτημα Α) εξέταζε την εννοιολογική γνώση των μαθητών για τους ρητούς αριθμούς. Στο Δοκίμιο Α δινόταν ένα κλάσμα σε συμβολική έκφραση και οι μαθητές καλούνταν να επιλέξουν την κατάλληλη εικονική αναπαράσταση –αριθμητική γραμμή, εμβαδόν κύκλου, ευθύγραμμο τμήμα – η οποία εκφράζει το δοσμένο κλάσμα. Σκοπός των έργων ήταν είναι να διαπιστωθεί αν οι μαθητές είναι ικανοί να αναγνωρίζουν ένα κλάσμα όχι μόνο όταν αυτό εκφράζεται με τη χρήση εμβαδού κύκλου και ευθυγράμμου τμήματος, αλλά και με τη χρήση αριθμητικής γραμμής. Εξεταζόταν, δηλαδή, η ικανότητα αναγνώρισης του κλάσματος σε ποικιλία αναπαραστάσεων για να διαπιστωθεί αν πληρείται η πρώτη προϋπόθεση της υπόθεσης Υ1. Συγκεκριμένα, το Δοκίμιο Α περιλάμβανε έξι έργα αναγνώρισης κλασμάτων: τέσσερα έργα αναγνώρισης όπου ο παρονομαστής του δοσμένου κλάσματος είναι ίσος με τις υποδιαιρέσεις της αναπαράστασης – Έργα 1, 3, 4 και 5 – και δύο έργα αναγνώρισης όπου ο οι υποδιαιρέσεις της αναπαράστασης είναι διπλάσιες από τον παρονομαστή του δοσμένου κλάσματος – Έργα 2 και 6.

Το Δοκίμιο Α ολοκληρώθηκε με τέσσερα έργα αναπαράστασης κλασμάτων στα οποία οι μαθητές καλούνταν να αναπαραστήσουν κλάσματα με τη χρήση του εμβαδού κύκλου, ευθύγραμμου τμήματος και αριθμητικής γραμμής. Σκοπός των έργων αυτών ήταν να διαπιστωθεί αν οι μαθητές είναι ικανοί να αναπαριστούν ένα κλάσμα σε εμβαδόν κύκλου, σε ευθύγραμμο τμήμα και σε αριθμητική γραμμή. Εξεταζόταν, δηλαδή, η ικανότητα αναπαράστασης του κλάσματος σε διαφορετικό πεδίο κάθε φορά. Στα δύο έργα αναπαράστασης κλασμάτων – Έργα 7 και 10 – ο παρονομαστής του δοσμένου κλάσματος είναι ίσος με τις υποδιαιρέσεις των αναπαραστάσεων, σε ένα έργο αναπαράστασης κλασμάτων – Έργο 8 – οι υποδιαιρέσεις της αναπαράστασης είναι διπλάσιες από τον παρονομαστή του δοσμένου κλάσματος και σε ένα έργο αναπαράστασης – Έργο 9 – ο αριθμός των υποδιαιρέσεων της αναπαράστασης είναι ο μισός από τον παρονομαστή του δοσμένου κλάσματος.

Το Δοκίμιο Β (Παράρτημα Α) περιλάμβανε έργα χειρισμού της ισοδυναμίας κλασμάτων στο ίδιο πεδίο και έργα μετάφρασης ανάμεσα σε διάφορα είδη αναπαράστασης – συμβολική έκφραση, αριθμητική γραμμή. Συγκεκριμένα, στο Δοκίμιο Β εξεταζόταν η ικανότητα χειρισμού της έννοιας ισοδυναμίας κλασμάτων στο ίδιο πεδίο αναπαράστασης και περιλαμβάνονται πέντε έργα – Έργα 1, 4, 7, 10 – που εξετάζουν την ισοδυναμία κλασμάτων με τη χρήση αποκλειστικά συμβολικών αναπαραστάσεων (4/6 = 2/_ , 3/_ =9/24, 1/_ =25/100, 4/5= _ /25). Το Έργο 13 του Δοκιμίου Β περιλάμβανε 3 έργα σειροθέτησης κλασμάτων, εξετάζοντας την επεξεργασία της έννοιας της ισοδυναμίας κλασμάτων στο ίδιο πεδίο αναπαράστασης – συμβολική αναπαράσταση – 2/7, 5/7, 1/7 και 2/4, 2/3, 2/7 και 3/4, 2/3, 5/8. Το Δοκίμιο Β εξέταζε, ακόμη, την ικανότητα μετάφρασης και περιλάμβανε τέσσερα έργα μετάφρασης – Έργα 3, 6, 9 και 12 – όπου η αρχική αναπαράσταση – πηγή – είναι η συμβολική και η τελική αναπαράσταση – στόχος – είναι η αριθμητική γραμμή και τέσσερα έργα μετάφρασης όπου η αρχική αναπαράσταση – πηγή – είναι η αριθμητική γραμμή και η τελική αναπαράσταση – στόχος – είναι συμβολική αναπαράσταση.

Το Δοκίμιο Γ (Παράρτημα Α) περιλάμβανε έργα χειρισμού της πρόσθεσης κλασμάτων στο ίδιο πεδίο, δηλαδή το συμβολικό και έργα μετάφρασης που εξετάζουν τη διαδικαστική γνώση των μαθητών αναφορικά με τους ρητούς αριθμούς – πρόσθεση κλασμάτων. Συγκεκριμένα, το Δοκίμιο Γ εξέταζε την ικανότητα χειρισμού και επεξεργασίας της έννοιας της πρόσθεσης κλασμάτων στο ίδιο πεδίο αναπαράστασης και περιλάμβανε πέντε έργα πρόσθεσης κλασμάτων – Έργα 1, 4, 7, 10 και 13 – με τη χρήση αποκλειστικά συμβολικών αναπαραστάσεων (4/9+3/9= 1/3+1/5= 1/3+2/6= 1/5+2/6= 2/4 + 1/5 =). Επίσης το Δοκίμιο Γ εξέταζε την ικανότητα μετάφρασης και περιλαμβάνει έξι έργα μετάφρασης – Έργα 3, 5, 9, 12, 15 και 17 – όπου η αρχική αναπαράσταση – πηγή – είναι η συμβολική και η τελική αναπαράσταση – στόχος – είναι η αριθμητική γραμμή και έξι έργα μετάφρασης – Έργα 2, 5, 8, 11, 14 και 16 – όπου η αρχική αναπαράσταση – πηγή – είναι η αριθμητική γραμμή και η τελική αναπαράσταση – στόχος – είναι συμβολική αναπαράσταση.

Το Δοκίμιο Β και το Δοκίμιο Γ (Παράρτημα Α) είχαν ως στόχο τη διερεύνηση της σχέσης που υπάρχει ανάμεσα στην κατανόηση της ισοδυναμίας και της πρόσθεσης κλασμάτων και στην ικανότητα χρήσης του γεωμετρικού μοντέλου της αριθμητικής γραμμής ως μέσου αναπαράστασης των πιο πάνω γνωστικών αντικειμένων. Επίσης, αποσκοπούσαν στον εντοπισμό του βαθμού δυσκολίας των διαφορετικών ειδών μετάφρασης από μια αναπαράσταση της ισοδυναμίας και της πρόσθεσης κλασμάτων σε μια άλλη. Στο Δοκίμιο Β και στο Δοκίμιο Γ, περιλαμβάνονταν και έργα ισοδυναμίας και πρόσθεσης κλασμάτων αποκλειστικά στο συμβολικό πεδίο, τα οποία εξέταζαν αν πληρείται η δεύτερη προϋπόθεση, της πρώτης υπόθεσης Υ1, δηλαδή η ικανότητα ευέλικτου χειρισμού της έννοιας στο ίδιο πεδίο. Τα έργα μετάφρασης του Δοκιμίου Β και του Δοκιμίου Γ εξέταζαν την τρίτη προϋπόθεση της πρώτης υπόθεσης Υ1, δηλαδή την ικανότητα μετάφρασης, καθώς και τη δεύτερη, τρίτη και τέταρτη υπόθεση, Υ2, Υ3 και Υ4, οι οποίες αναφέρονται στη στεγανοποίηση των έργων, στη δυσκολία των ειδών μετάφρασης και στη δυσκολία των διαφορετικών γνωστικών αντικειμένων αντίστοιχα. Πρέπει να σημειωθεί ότι τα έργα μετάφρασης από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή, τα οποία εξέταζαν την πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων –Δοκίμιο Γ – μπορούν να θεωρηθούν και ως έργα που εξέταζαν το χειρισμό της έννοιας στο ίδιο πεδίο. Αυτό συμβαίνει, διότι η επιτυχής συμπλήρωση των έργων αυτών προϋποθέτει την κατασκευή μιας αριθμητικής γραμμής, η οποία αναπαριστά την πρόσθεση κλασμάτων που έχουν γίνει ομώνυμα και η οποία θα προκύψει από δύο άλλες αριθμητικές γραμμές οι οποίες αναπαριστούν τα ετερώνυμα κλάσματα ξεχωριστά. Ο μετασχηματισμός αυτός ανήκει στο ίδιο πεδίο, δηλαδή το πεδίο της αριθμητικής γραμμής γι'αυτό και τα συγκεκριμένα έργα εκτός από τη μετάφραση εξέταζαν και την ικανότητα ευέλικτου χειρισμού της έννοιας στο ίδιο πεδίο – δεύτερη προϋπόθεση της υπόθεσης Υ1.

Η συλλογή ποσοτικών δεδομένων ολοκληρώθηκε με τη χορήγηση του Δοκιμίου Δ (Παράρτημα Α). Το Δοκίμιο Δ περιλάμβανε τέσσερα προβλήματα πρόσθεσης κλασμάτων. Δύο από τα προβλήματα αφορούν την πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων, εμπλέκοντας με τον τρόπο αυτό και την έννοια της ισοδυναμίας κλασμάτων στο συγκεκριμένο δοκίμιο. Κατά τη διάρκεια της χορήγησης του Δοκιμίου Δ, επιλέγηκαν με τυχαία δειγματοληψία 4 από τις 8 πέμπτες τάξεις των 4 σχολείων. Οι 106 μαθητές των τάξεων αυτών κλήθηκαν να επιλύσουν τα προβλήματα με όποιο τρόπο θέλουν. Οι υπόλοιποι 100 μαθητές κλήθηκαν να επιλύσουν τα προβλήματα με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής. Με τον τρόπο αυτό εξετάστηκε αν υπάρχει διαφοροποίηση ανάμεσα στην επίδοση των μαθητών που χρησιμοποίησαν την αριθμητική γραμμή για να επιλύσουν τα προβλήματα και στην επίδοση των μαθητών που δε χρησιμοποίησαν την αριθμητική γραμμή. Τα έργα του Δοκιμίου Δ εξέταζαν την υπόθεση Υ6 με βάση την οποία η επίδοση των μαθητών στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων διαφοροποιείται όταν χρησιμοποιούν ως βοηθητικό μέσο το γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής.

<u>Οι μεταβλητές της έρευνας</u>

Δοκίμιο Α

Οι μεταβλητές του Δοκιμίου Α όταν αναφέρονται σε έργα αναγνώρισης έχουν ως αρχικό το γράμμα I το οποίο προκύπτει από τον αγγλικό όρο Identification – Identify, που σημαίνει Αναγνώριση. Αν το έργο αναφέρεται στην αναγνώριση της έννοιας του κλάσματος σε εμβαδόν κύκλου, τότε η μεταβλητή περιλαμβάνει τη λέξη Circle – κύκλος. Στην περίπτωση που το έργο αναφέρεται στην αναγνώρισης της έννοιας του κλάσματος στην αριθμητική γραμμή τότε η μεταβλητή περιλαμβάνει τα αρχικά NL που προκύπτουν από τον αγγλικό όρο Number Line – αριθμητική γραμμή. Στην περίπτωση που του έργο αναφέρεται στην αναγνώριση της έννοιας σε ευθύγραμμο τμήμα τότε η μεταβλητή περιλαμβάνει τα αρχικά LS που προκύπτουν από τον αγγλικό όρο Line Segment – Ευθύγραμμο Τμήμα. Αν οι υποδιαιρέσεις της αναπαράστασης είναι οι μισές του παρονομαστή του δοσμένου κλάσματος τότε η μεταβλητή περιλαμβάνει το γράμμα h το οποίο προέρχεται από τον αγγλικό όρο half – μισό. Αν οι υποδιαιρέσεις της αναπαράστασης είναι οι διπλάσιες του παρονομαστή του δοσμένου κλάσματος τότε η μεταβλητή περιλαμβάνει το γράμμα d το οποίο προέρχεται από τον αγγλικό όρο double – διπλάσιο. Για παράδειγμα το έργο I2dLS αναφέρεται στην αναγνώριση ενός κλάσματος σε ευθύγραμμο τμήμα, όπου οι υποδιαιρέσεις του ευθυγράμμου τμήματος είναι διπλάσιες από τον παρονομαστή του κλάσματος.

Οι μεταβλητές του Δοκιμίου Α όταν αναφέρονται σε έργα αναπαράστασης έχουν ως αρχικό το γράμμα R το οποίο προέρχεται από τον αγγλικό όρο Representation – Αναπαράσταση. Όσον αφορά στο Δοκίμιο Α οι μεταβλητές είναι οι εξής:

I1NL: Έργο 1 – Αναγνώριση κλάσματος σε αριθμητική γραμμή

I2dLS: Έργο 2 – Αναγνώριση κλάσματος σε ευθύγραμμο τμήμα του οποίου οι υποδιαιρέσεις είναι οι διπλάσιες του παρονομαστή του κλάσματος.

I2dCircle: Έργο 2 –Αναγνώριση κλάσματος σε εμβαδόν κύκλου του οποίου οι υποδιαιρέσεις είναι οι διπλάσιες του παρονομαστή του κλάσματος.

I3Circle: Έργο 3 – Αναγνώριση κλάσματος σε εμβαδόν κύκλου.

I4Circle: Έργο 4 –Αναγνώριση κλάσματος σε εμβαδόν κύκλου.

I4LS: Έργο 4 –Αναγνώριση κλάσματος σε ευθύγραμμο τμήμα.

I5Circle: Έργο 5 –Αναγνώριση κλάσματος σε εμβαδόν κύκλου.

I5NL: Έργο 5 –Αναγνώριση κλάσματος σε αριθμητική γραμμή.

I5LS: Έργο 5 –Αναγνώριση κλάσματος σε ευθύγραμμο τμήμα.

I6dLS: Έργο 6 – Αναγνώριση κλάσματος σε ευθύγραμμο τμήμα του οποίου οι υποδιαιρέσεις είναι διπλάσιες από τον παρονομαστή του κλάσματος.

R1Circle: Έργο 1 –Αναπαράσταση κλάσματος σε εμβαδόν κύκλου.

R1NL: Έργο 1 –Αναπαράσταση κλάσματος σε αριθμητική γραμμή.

R1LS: Έργο 1 –Αναπαράσταση κλάσματος σε ευθύγραμμο τμήμα.

R2dCircle: Έργο 2 –Αναπαράσταση κλάσματος σε εμβαδόν κύκλου του οποίου οι υποδιαιρέσεις είναι οι διπλάσιες του παρονομαστή του δοσμένου κλάσματος.

R2dNL: Έργο 2 –Αναπαράσταση κλάσματος σε αριθμητική γραμμή της οποίας οι υποδιαιρέσεις από το διάστημα 0 ως 1 είναι οι διπλάσιες του παρονομαστή του δοσμένου κλάσματος.

R2dLS: Έργο 2 –Αναπαράσταση κλάσματος σε ευθύγραμμο τμήμα του οποίου οι υποδιαιρέσεις είναι οι διπλάσιες του παρονομαστή του δοσμένου κλάσματος.

R3hCircle: Έργο 3 –Αναπαράσταση κλάσματος σε εμβαδόν κύκλου του οποίου οι υποδιαιρέσεις είναι οι μισές του παρονομαστή του δοσμένου κλάσματος.

R3hNL: Έργο 3 –Αναπαράσταση κλάσματος σε αριθμητικής γραμμής της οποίας οι υποδιαιρέσεις από το διάστημα 0 ως 1 είναι οι μισές του παρονομαστή του δοσμένου κλάσματος.

R3hLS: Έργο 3 –Αναπαράσταση κλάσματος σε ευθύγραμμο τμήμα του οποίου οι υποδιαιρέσεις είναι οι μισές του παρονομαστή του δοσμένου κλάσματος

R4Circle: Έργο 4 –Αναγνώριση κλάσματος σε εμβαδόν κύκλου

R4NL: Έργο 4 –Αναπαράσταση κλάσματος σε αριθμητική γραμμή

R4LS: Έργο 4 –Αναπαράσταση κλάσματος σε ευθύγραμμο τμήμα.

Δοκίμιο Β

Οι μεταβλητές του Δοκιμίου Β αναφέρονται σε έργα ισοδυναμίας κλασμάτων γι'αυτό και έχουν ως αρχικό το γράμμα Ε το οποίο προκύπτει από τον αγγλικό όρο Equivalence – Ισοδυναμία. Αν το έργο αναφέρεται σε έργο ισοδυναμίας το οποίο αφορά αποκλειστικά το συμβολικό πεδίο τότε η μεταβλητή περιλαμβάνει το γράμμα s το οποίο προκύπτει από τον αγγλικό όρο Symbolic – Συμβολικό . Στην περίπτωση που το έργο αναφέρεται στη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση τότε η μεταβλητή περιλαμβάνει το γράμμα Α, ενώ στην περίπτωση που το έργο αναφέρεται στη μετάφραση από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή τότε η μεταβλητή περιλαμβάνει το γράμμα Β. Για παράδειγμα η μεταβλητή E2A αναφέρεται σε έργο ισοδυναμίας του οποίου η επιτυχημένη συμπλήρωση προϋποθέτει τη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση. Αναφορικά με τα έργα σειροθέτησης τα αρχικά Cn δηλώνουν ότι τα κλάσματα έχουν τον ίδιο, κοινό, αριθμητή – common nominator – και τα αρχικά Cd δηλώνουν ότι τα κλάσματα έχουν ίδιο, κοινό, παρονομαστή – common denominator. Τέλος, αν το έργο σειροθέτησης περιλαμβάνει τα αρχικά nd σημαίνει ότι τα κλάσματα έχουν διαφορετικούς αριθμητές και παρονομαστές – nominator, denominator. Όσον αφορά το Δοκίμιο Β οι μεταβλητές είναι οι εξής:

E1S: Έργο 1 –Ισοδυναμία κλασμάτων σε συμβολική έκφραση.

E2A: Έργο 2 –Ισοδυναμία κλασμάτων σε μετάφραση από αριθμητική γραμμή σε συμβολική έκφραση.

E3B: Έργο 3 – Ισοδυναμία κλασμάτων σε μετάφραση από συμβολική έκφραση σε αριθμητική γραμμή.

E4S: Έργο 4 –Ισοδυναμία κλασμάτων σε συμβολική έκφραση.

E5A: Έργο 5 –Ισοδυναμία κλασμάτων σε μετάφραση από αριθμητική γραμμή σε συμβολική έκφραση.

E6B: Έργο 6 – Ισοδυναμία κλασμάτων σε μετάφραση από συμβολική έκφραση σε αριθμητική γραμμή.

E7S: Έργο 7 –Ισοδυναμία κλασμάτων σε συμβολική έκφραση.

E8A: Έργο 8 –Ισοδυναμία κλασμάτων σε μετάφραση από αριθμητική γραμμή σε συμβολική έκφραση.

E9B: Έργο 9 – Ισοδυναμία κλασμάτων σε μετάφραση από συμβολική έκφραση σε αριθμητική γραμμή.

E10S: Έργο 10 –Ισοδυναμία κλασμάτων σε συμβολική έκφραση.

E11A: Έργο 11 –Ισοδυναμία κλασμάτων σε μετάφραση από αριθμητική γραμμή σε συμβολική έκφραση.

E12B: Έργο 12 – Ισοδυναμία κλασμάτων σε μετάφραση από συμβολική έκφραση σε αριθμητική γραμμή.

E13Cd: Έργο 13 – Σειροθέτηση ομώνυμων κλασμάτων

E13Cn: Έργο 13 – Σειροθέτηση κλασμάτων με τον ίδιο αριθμητή.

E13nd: Έργο 13 – Σειροθέτηση κλασμάτων με διαφορετικό παρονομαστή και διαφορετικό αριθμητή.

Δοκίμιο Γ

Οι μεταβλητές του Δοκιμίου Γ αναφέρονται σε έργα πρόσθεσης κλασμάτων γι'αυτό και έχουν ως αρχικό το γράμμα A το οποίο προκύπτει από τον αγγλικό όρο Addition – Πρόσθεση. Αν το έργο αφορά την πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων τότε η μεταβλητή περιλαμβάνει το γράμμα o, ενώ αν το έργο αφορά την πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων τότε η μεταβλητή περιλαμβάνει το γράμμα e. Για παράδειγμα η μεταβλητή A3Bo αναφέρεται σε έργο πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων του οποίου η επιτυχημένη συμπλήρωση προϋποθέτει τη μετάφραση από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή. Όσον αφορά το Δοκίμιο Γ οι μεταβλητές είναι οι εξής:

A1So: Έργο 1 – Πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων σε συμβολική έκφραση.

A2Ao: Έργο 2 – Πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων σε μετάφραση από την αριθμητική γραμμή σε συμβολική έκφραση.

A3Bo: Έργο 3 – Πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων σε μετάφραση από τη συμβολική έκφραση σε αριθμητική γραμμή.

A4Se: Έργο 4 – Πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων σε συμβολική έκφραση

A5Ao: Έργο 5 – Πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων σε μετάφραση από την αριθμητική γραμμή σε συμβολική έκφραση.

A6Bo: Έργο 6 – Πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων σε μετάφραση από τη συμβολική έκφραση σε αριθμητική γραμμή.

A7Se: Έργο 7 – Πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων σε συμβολική έκφραση

A8Ao: Έργο 2 – Πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων σε μετάφραση από την αριθμητική γραμμή σε συμβολική έκφραση.

A9Bo: Έργο 9 – Πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων σε μετάφραση από τη συμβολική έκφραση σε αριθμητική γραμμή.

A10Se: Έργο 10 – Πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων σε συμβολική έκφραση

A11Ae: Έργο 11 – Πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων σε μετάφραση από αριθμητική γραμμή σε συμβολική έκφραση.

A12Be: Έργο 12 – Πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων σε μετάφραση από συμβολική έκφραση σε αριθμητική γραμμή.

A13Se: Έργο 13 – Πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων σε συμβολική έκφραση

A14Ae: Έργο 14 – Πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων σε μετάφραση από αριθμητική γραμμή σε συμβολική έκφραση.

A15Be: Έργο 15 – Πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων σε μετάφραση από συμβολική έκφραση σε αριθμητική γραμμή.

A16Ae: Έργο 16 – Πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων σε μετάφραση από αριθμητική γραμμή σε συμβολική έκφραση.

A17Be: Έργο 17 – Πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων σε μετάφραση από συμβολική έκφραση σε αριθμητική γραμμή.

Δοκίμιο Δ

Οι μεταβλητές του Δοκιμίου Δ αναφέρονται σε λεκτικά προβλήματα πρόσθεσης κλασμάτων γι'αυτό και έχουν ως αρχικό το γράμμα P το οποίο προκύπτει από τον αγγλικό όρο Problem – Πρόβλημα. Αν η μεταβλητή περιλαμβάνει τα αρχικά Ans, από τον αγγλικό όρο Answer – Απάντηση, σημαίνει ότι το έργο εξετάζει την απάντηση που έδωσε το υποκείμενο στο πρόβλημα. Αν η μεταβλητή περιλαμβάνει τα αρχικά Exp, από τον αγγλικό όρο Explanation – Επεξήγηση, σημαίνει ότι το έργο εξετάζει την επεξήγηση που έδωσε το υποκείμενο στο πρόβλημα στην περίπτωση των μαθητών που έλυσαν τα προβλήματα με όποιο τρόπο ήθελαν. Τέλος, αν η μεταβλητή περιλαμβάνει τα αρχικά Diagr, από τον αγγλικό όρο Diagram – Διάγραμμα, σημαίνει ότι το έργο εξετάζει την επεξήγηση που έδωσε το υποκείμενο στο πρόβλημα στην περίπτωση των μαθητών που τους ζητήθηκε να λύσουν τα προβλήματα με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής. Στην περίπτωση που το πρόβλημα είχε περισσότερα από ένα ερωτήματα τότε η μεταβλητή περιλαμβάνει το γράμμα a για το πρώτο ερώτημα, το γράμμα b για το δεύτερο ερώτημα και το γράμμα c για το τρίτο ερώτημα. Για παράδειγμα η μεταβλητή P2cDiag αναφέρεται στο τρίτο ερώτημα του λεκτικού προβλήματος και εξετάζει την επεξήγηση που δίνεται με βάση την αριθμητική γραμμή. Όσον αφορά το Δοκίμιο Δ οι μεταβλητές είναι οι εξής:

P1Ans: Πρόβλημα 1 – Απάντηση στο πρόβλημα

P1Expl: Πρόβλημα 1 – Επεξήγηση με τη χρήση οποιουδήποτε τρόπου επιλέξει το υποκείμενο.

P1Diagr: Πρόβλημα 1 – Επεξήγηση με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής.

P2aAns: Πρόβλημα 2, Ερώτημα α – Απάντηση στο πρόβλημα

P2aExp: Πρόβλημα 2, Ερώτημα α – Επεξήγηση με τη χρήση οποιουδήποτε τρόπου επιλέξει το υποκείμενο.

P2aDiag: Πρόβλημα 2, Ερώτημα α – Επεξήγηση με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής.

P2bAns: Πρόβλημα 2, Ερώτημα β – Απάντηση στο πρόβλημα

P2bExp: Πρόβλημα 2, Ερώτημα β – Επεξήγηση με τη χρήση οποιουδήποτε τρόπου επιλέξει το υποκείμενο.

P2bDiag: Πρόβλημα 2, Ερώτημα β – Επεξήγηση με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής.

P2cAns: Πρόβλημα 2, Ερώτημα γ – Απάντηση στο πρόβλημα

P2cExpl: Πρόβλημα 2, Ερώτημα γ– Επεξήγηση με τη χρήση οποιουδήποτε τρόπου επιλέξει το υποκείμενο.

P2cDiag: Πρόβλημα 2, Ερώτημα γ – Επεξήγηση με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής.

P2dAns: Πρόβλημα 2, Ερώτημα δ – Απάντηση στο πρόβλημα

P2dExp: Πρόβλημα 2, Ερώτημα δ – Επεξήγηση με τη χρήση οποιουδήποτε τρόπου επιλέξει το υποκείμενο.

P2dDiag: Πρόβλημα 2, Ερώτημα δ– Επεξήγηση με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής.

P3Ans: Πρόβλημα 3 – Απάντηση στο πρόβλημα

P3Exp: Πρόβλημα 3 – Επεξήγηση με τη χρήση οποιουδήποτε τρόπου επιλέξει το υποκείμενο.

P3Diag: Πρόβλημα 3 – Επεξήγηση με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής.

P4aAns: Πρόβλημα 4, Ερώτημα α– Απάντηση στο πρόβλημα

P4aExp: Πρόβλημα 4, Ερώτημα α – Επεξήγηση με τη χρήση οποιουδήποτε τρόπου επιλέξει το υποκείμενο.

P4aDiag: Πρόβλημα 4, Ερώτημα α – Επεξήγηση με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής.

P4bAns: Πρόβλημα 4, Ερώτημα β – Απάντηση στο πρόβλημα

P4bExp: Πρόβλημα 4, Ερώτημα β – Επεξήγηση με τη χρήση οποιουδήποτε τρόπου επιλέξει το υποκείμενο.

P4bDiag: Πρόβλημα 4, Ερώτημα β – Επεξήγηση με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής.

P4cAns: Πρόβλημα 4, Ερώτημα γ – Απάντηση στο πρόβλημα

P4cExp: Πρόβλημα 4, Ερώτημα γ – Επεξήγηση με τη χρήση οποιουδήποτε τρόπου επιλέξει το υποκείμενο.

P4cDiag: Πρόβλημα 4, Ερώτημα γ – Επεξήγηση με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής.

Κριτήρια Βαθμολόγησης

Αναφορικά με το Δοκίμιο Α βαθμολογήθηκαν με 0 οι λανθασμένες απαντήσεις στα έργα αναγνώρισης κλασμάτων και με 1 οι ορθές απαντήσεις στα έργα αναγνώρισης. Με τον ίδιο τρόπο στο Δοκίμιο Α βαθμολογήθηκαν με 0 οι λανθασμένες προσπάθειες αναπαράστασης και με 1 οι ορθές προσπάθειες αναπαράστασης των δοσμένων κλασμάτων

Στα Δοκίμια Β και Γ βαθμολογήθηκαν τα είδη μεταφράσεων με 0 αν η απάντηση ήταν λανθασμένη και με 1 αν η απάντηση ήταν σωστή. Με τον ίδιο τρόπο βαθμολογήθηκαν τα έργα που εξέταζαν την ισοδυναμία και πρόσθεση κλασμάτων στο συμβολικό πεδίο.

Τέλος, στο Δοκίμιο Δ βαθμολογήθηκαν η απάντηση και η εξήγηση που έδιναν οι μαθητές. Συγκεκριμένα, οι μαθητές οι οποίοι κλήθηκαν να χρησιμοποιήσουν την αριθμητική γραμμή βαθμολογήθηκαν με 1 αν η απάντηση που έδωσαν ήταν σωστή ή με 0 αν η απάντηση που έδωσαν ήταν λανθασμένη και βαθμολογήθηκαν με 1 αν η εξήγησή τους περιλάμβανε την ορθή χρήση της αριθμητικής γραμμής ή με 0 αν η εξήγησή τους περιλάμβανε τη λανθασμένη χρήση της αριθμητικής γραμμής ή δεν περιλάμβανε καθόλου τη χρήση της αριθμητικής γραμμής. Οι μαθητές οι οποίοι κλήθηκαν να επιλύσουν τα προβλήματα με όποιο τρόπο ήθελαν βαθμολογήθηκαν με 1 αν η απάντηση που έδωσαν ήταν σωστή ή με 0 αν η απάντηση που έδωσαν ήταν λανθασμένη και βαθμολογήθηκαν με 1 αν η εξήγησή τους ήταν ορθή –είτε χρησιμοποίησαν εξίσωση είτε κάποιο διάγραμμα – ή με 0 αν η εξήγησή τους περιλάμβανε λανθασμένη εξήγηση ή δεν περιλάμβανε καθόλου εξήγηση.

<u>Συλλογή Ποιοτικών Δεδομένων</u>

Η Β’ φάση της έρευνας περιλάμβανε τη διεξαγωγή συνεντεύξεων και πειραμάτων επικοινωνίας με στόχο τη συλλογή ποιοτικών δεδομένων. Συγκεκριμένα, πραγματοποιήθηκαν (α) συνεντεύξεις με εννιά υποκείμενα – τρία υποκείμενα με χαμηλή επίδοση, τρία υποκείμενα με μέτρια επίδοση και τρία υποκείμενα με ψηλή επίδοση – και (β) πειράματα επικοινωνίας με εννιά υποκείμενα – τρία υποκείμενα με χαμηλή επίδοση, τρία υποκείμενα με μέτρια επίδοση και τρία υποκείμενα με ψηλή επίδοση, ώστε να φανούν πιθανές διαφοροποιήσεις στη χρήση της αριθμητικής γραμμής για την επίλυση έργων ισοδυναμίας και πρόσθεσης κλασμάτων σε σχέση με την επίδοση. Πληροφορίες για την επίδοση των μαθητών, που έλαβαν μέρος στις συνεντεύξεις και στα πειράματα επικοινωνίας, δόθηκαν από τους εκπαιδευτικούς που δίδασκαν μαθηματικά στους συγκεκριμένους μαθητές. Συγκεκριμένα, οι εκπαιδευτικοί έλαβαν υπόψη τόσο την επίδοση των μαθητών στις γραπτές αξιολογήσεις, όσο και την επίδοση των μαθητών στην προφορική εργασία που γίνεται στην τάξη.

Η επιλογή διαλογικών πρακτικών, όπως η συνέντευξη και τα πειράματα επικοινωνίας στην παρούσα ερευνητική εργασία θεωρείται σκόπιμη και στηρίζεται στο γεγονός ότι ο γλωσσικός παράγοντας επηρεάζει τη γνώση και τη μάθηση, οι οποίες θεωρούνται ως κοινωνικές δραστηριότητες και ως διαδικασίες αλληλεπίδρασης. Δεν πρέπει να παραγνωρίζεται η επίδραση της γλώσσας στη διαμόρφωση της σκέψης, στην επικοινωνία και στο «να κάνεις μαθηματικά». (Clements, 2000: Vygotsky, 1981).

<u>Η Συνέντευξη</u>

Στόχος των συνεντεύξεων ήταν ο εντοπισμός των δυσκολιών που αφορούν (α) τις μεταφράσεις, που περιλαμβάνουν την αριθμητική γραμμή και (β) την ικανότητα χρήσης του γεωμετρικού μοντέλου της αριθμητικής γραμμής για την εύρεση ισοδύναμων κλασμάτων και την εκτέλεση πρόσθεσης κλασμάτων.

Κατά τη διάρκεια της συνέντευξης δόθηκε ένα δοκίμιο, που περιλάμβανε έξι έργα μετάφρασης, τα οποία εξέταζαν ισοδύναμα κλάσματα, ένα δοκίμιο το οποίο περιλάμβανε έξι έργα μετάφρασης πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων και ένα δοκίμιο το οποίο περιλάμβανε έξι έργα μετάφρασης πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων (Παράρτημα Β).

Στα τρία δοκίμια το Έργο 1 εξέταζε τη μετάφραση από τη λεκτική έκφραση, δηλαδή το πρόβλημα, στη διαγραμματική έκφραση που είναι η αριθμητική γραμμή και στη συμβολική έκφραση – εξίσωση. Τα Έργα 2 και 3 εξέταζαν τη μετάφραση από τη διαγραμματική έκφραση, δηλαδή την αριθμητική γραμμή, στη λεκτική έκφραση, που είναι το πρόβλημα και στη συμβολική έκφραση – εξίσωση. Στο Έργο 2 η αριθμητική γραμμή περιλάμβανε μόνο το διάστημα 0 ως 1. Στο Έργο 3 η αριθμητική γραμμή περιλάμβανε το διάστημα 0 ως 2, κάτι το οποίο αποτελεί παραπλανητικό στοιχείο για την επιλογή της μονάδας υποδιαίρεσης. Τα Έργα 5 και 6 εξέταζαν τη μετάφραση από τη συμβολική έκφραση, δηλαδή την εξίσωση στην αριθμητική γραμμή και στη λεκτική έκφραση. Στο Έργο 5 η αριθμητική γραμμή περιλάμβανε μόνο το διάστημα 0 ως 1, ενώ στο Έργο 6 η αριθμητική γραμμή περιλάμβανε το διάστημα 0 ως 2.

Κατά τη διάρκεια της συνέντευξης και της συμπλήρωσης Δοκιμίου Ισοδυναμίας Κλασμάτων (Παράρτημα Β) οι μαθητές κλήθηκαν να δείξουν ένα κλάσμα στην αριθμητική γραμμή, να βρουν ένα ισοδύναμο κλάσμα και να το δείξουν σε μια δεύτερη αριθμητική γραμμή. Ο ερευνητής υπέβαλε τις εξής υποβοηθητικές ερωτήσεις σε σχέση με έργα μετάφρασης από λεκτική έκφραση ή από συμβολική έκφραση:

1. Πού θα τοποθετήσουμε το κλάσμα στην αριθμητική γραμμή; (Αναμένεται ότι ο μαθητής θα σχεδιάσει τις κατάλληλες υποδιαιρέσεις στην αριθμητική γραμμή και θα δείξει με τη χρήση ενός βέλους το μήκος που αντιπροσωπεύει το δοσμένο κλάσμα).

2. Πώς πρέπει να χωριστεί η πρώτη γραμμή;

3. Από πού θα ξεκινήσει και πού θα καταλήξει το βέλος, για να δείξει το κλάσμα στην αριθμητική γραμμή;

4. Πώς θα βρούμε το ισοδύναμο κλάσμα;

5. Πώς πρέπει να χωριστεί η δεύτερη γραμμή;

6. Από πού θα ξεκινήσει και πού θα καταλήξει το βέλος, για να δείξει το ισοδύναμο κλάσμα στην αριθμητική γραμμή;

7. Να διατυπώσεις ένα πρόβλημα με βάση την ισοδυναμία που βρήκες (Η αρχική αναπαράσταση είναι η συμβολική έκφραση).

8. Να γράψεις την ισοδυναμία που βρήκες με σύμβολα (Η αρχική αναπαράσταση είναι η λεκτική έκφραση).

Στην περίπτωση που η αρχική αναπαράσταση ήταν η αριθμητική γραμμή – η ισοδυναμία κλασμάτων αναπαρίσταται με τη χρήση δύο αριθμητικών γραμμών – υποβλήθηκαν οι εξής ερωτήσεις:

1. Ποιο είναι το κλάσμα που αναπαριστά η πρώτη αριθμητική γραμμή;

2. Ποιο είναι το κλάσμα που αναπαριστά η δεύτερη αριθμητική γραμμή;

3. Τι είδους σχέση υπάρχει ανάμεσα στα δύο κλάσματα; (Τα δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα).

4. Να γράψεις την ισοδυναμία που βρήκες με σύμβολα.

5. Να διατυπώσεις ένα πρόβλημα με βάση την ισοδυναμία που βρήκες.

Κατά τη διάρκεια της συνέντευξης και της συμπλήρωσης του Δοκιμίου Πρόσθεσης Ομώνυμων Κλασμάτων (Παράρτημα Β) οι μαθητές κλήθηκαν να δείξουν την πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή. Ο ερευνητής ζήτησε από τους μαθητές να δείξουν και να περιγράψουν τον τρόπο που εργάστηκαν, για να επιλύσουν τα έργα μετάφρασης. Στην περίπτωση που η αρχική αναπαράσταση είναι η λεκτική ή η συμβολική έκφραση, ο ερευνητής υπέβαλε τις εξής υποβοηθητικές ερωτήσεις:

1. Πού θα τοποθετήσουμε το κλάσμα – πρώτο προσθετέο – στην αριθμητική γραμμή; (Αναμένεται ότι ο μαθητής θα σχεδιάσει τις κατάλληλες υποδιαιρέσεις στην αριθμητική γραμμή και θα δείξει με τη χρήση ενός βέλους το μήκος που αντιπροσωπεύει το δοσμένο κλάσμα – πρώτος προσθετέος).

2. Πώς πρέπει να χωριστεί η αριθμητική γραμμή;

3. Από πού θα ξεκινήσει και πού θα καταλήξει το βέλος, για να δείξει το πρώτο κλάσμα στην αριθμητική γραμμή;

4. Ποιο είναι το σύμβολο; (Η αρχική αναπαράσταση είναι η λεκτική έκφραση).

5. Προς ποια κατεύθυνση θα σχεδιαστεί το δεύτερο βέλος με βάση το σύμβολο;

6. Από πού θα ξεκινήσει και πού θα καταλήξει το δεύτερο βέλος;

Στην περίπτωση που η αρχική αναπαράσταση είναι η αριθμητική γραμμή – υποβλήθηκαν οι εξής ερωτήσεις:

1. Ποιο κλάσμα αναπαριστά το πρώτο βέλος;
2. Ποιο κλάσμα αναπαριστά το δεύτερο βέλος;
3. Ποιο είναι το συνολικό μήκος των δύο βελών; Ποιο κλάσμα είναι;
4. Ποια είναι η συμβολική και η λεκτική έκφραση – πρόβλημα – που αντιστοιχεί στην αναπαράσταση της αριθμητικής γραμμής;

Τέλος, στα πλαίσια της συνέντευξης και της συμπλήρωσης του Δοκιμίου Πρόσθεσης Ετερώνυμων Κλασμάτων (Παράρτημα Β) οι μαθητές κλήθηκαν να δείξουν την πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή. Ο ερευνητής ζήτησε από τους μαθητές να δείξουν και να περιγράψουν τον τρόπο που εργάστηκαν, για να επιλύσουν τα έργα μετάφρασης. Στην περίπτωση που η αρχική αναπαράσταση ήταν η λεκτική ή η συμβολική έκφραση, ο ερευνητής υπέβαλε τις εξής υποβοηθητικές ερωτήσεις:

1. Πού θα τοποθετήσουμε το κλάσμα – πρώτο προσθετέο – στην πρώτη αριθμητική γραμμή; (Αναμένεται ότι ο μαθητής θα σχεδιάσει τις κατάλληλες υποδιαιρέσεις στην αριθμητική γραμμή και θα δείξει με τη χρήση ενός βέλους το μήκος που αντιπροσωπεύει το δοσμένο κλάσμα – πρώτος προσθετέος).

2. Πώς πρέπει να χωριστεί η αριθμητική γραμμή;

3. Από πού θα ξεκινήσει και πού θα καταλήξει το βέλος, για να δείξει το πρώτο κλάσμα στην αριθμητική γραμμή;

4. Ποιο είναι το σύμβολο; (Η αρχική αναπαράσταση είναι η λεκτική έκφραση).

5. Πού θα τοποθετήσουμε το κλάσμα – δεύτερο προσθετέο – στη δεύτερη αριθμητική γραμμή; (Αναμένεται ότι ο μαθητής θα σχεδιάσει τις κατάλληλες υποδιαιρέσεις στην αριθμητική γραμμή και θα δείξει με τη χρήση ενός βέλους το μήκος που αντιπροσωπεύει το δοσμένο κλάσμα – δεύτερος προσθετέος).

6. Πώς πρέπει να χωριστεί η αριθμητική γραμμή;

7. Από πού θα ξεκινήσει και πού θα καταλήξει το βέλος, για να δείξει το δεύτερο κλάσμα στη δεύτερη αριθμητική γραμμή;

8. Πώς θα δείξουμε το άθροισμα στην τρίτη αριθμητική γραμμή;

7. Γιατί δεν μπορείς να προσθέσεις τα δύο κλάσματα με τη βοήθεια της αριθμητικής γραμμής; Τι είδους κλάσματα είναι; (Ετερώνυμα).

8. Τι πρέπει να κάνεις για να προσθέσεις τα δύο κλάσματα με τη βοήθεια της τρίτης αριθμητικής γραμμής;

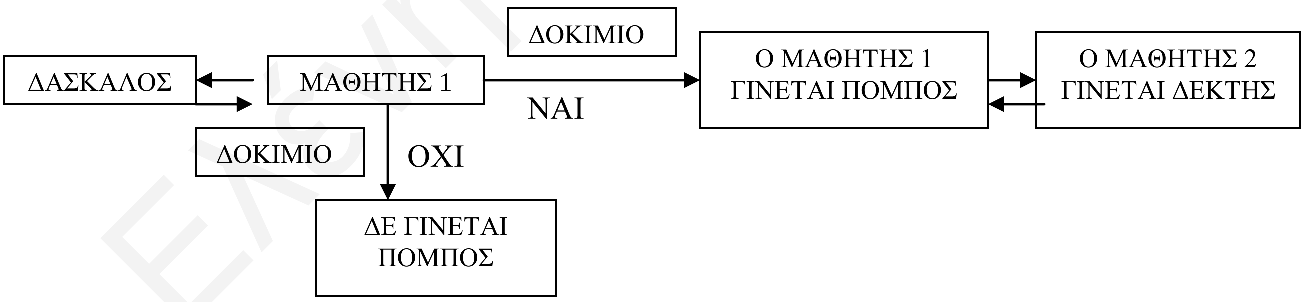
Στην περίπτωση που η αρχική αναπαράσταση είναι η αριθμητική γραμμή – υποβλήθηκαν οι εξής ερωτήσεις:

1. Ποιο κλάσμα αναπαριστά η πρώτη αριθμητική γραμμή;
2. Ποιο κλάσμα αναπαριστά η δεύτερη αριθμητική γραμμή;
3. Ποιο είναι το άθροισμα, το συνολικό μήκος των δύο βελών, όπως αναπαρίσταται στην τρίτη αριθμητική γραμμή; Ποιο κλάσμα είναι;
4. Ποια είναι η εξίσωση (συμβολική έκφραση) και ποιο το πρόβλημα (λεκτική έκφραση) που αντιστοιχούν στην αναπαράσταση της αριθμητικής γραμμής;
5. Με ποιο τρόπο αναπαραστάθηκε η πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων με τη βοήθεια της τρίτης αριθμητικής γραμμής;

Οι συνεντεύξεις σκοπό είχαν να διερευνήσουν αν ισχύει η υπόθεση Υ3, δηλαδή αν υπάρχουν είδη μετάφρασης δυσκολότερα από άλλα, καθώς και η υπόθεση Υ5, με βάση την οποία η αριθμητική γραμμή αποτελεί εργαλείο του οποίου η χρήση μπορεί να συμβάλει στον εντοπισμό παρανοήσεων και δυσκολιών των μαθητών σχετικά με την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος.

Το Πείραμα Επικοινωνίας

Στην παρούσα έρευνα χρησιμοποιήθηκε το πειραματικό μοντέλο επικοινωνίας της Weber-Kubler (1982). Η Weber-Kubler έδωσε σε μαθητές όλες τις απαραίτητες εξηγήσεις για την εκτέλεση ενός μαθηματικού έργου (Έργο Α). Στον κάθε μαθητή δόθηκε ένα δοκίμιο, που περιλαμβάνει μαθηματικά έργα ίδιας δομής και περιεχομένου με το Έργο Α. Αν ο μαθητής εκτελέσει με επιτυχία τα έργα που περιλαμβάνονται στο δοκίμιο, γίνεται πομπός και δίνει τις απαραίτητες εξηγήσεις για την εκτέλεση του Έργου Α σε ένα δεύτερο μαθητή. Ο δεύτερος μαθητής – δέκτης εκτελεί το Έργο Α. Η κατάσταση επικοινωνίας φαίνεται στο Διάγραμμα 2.



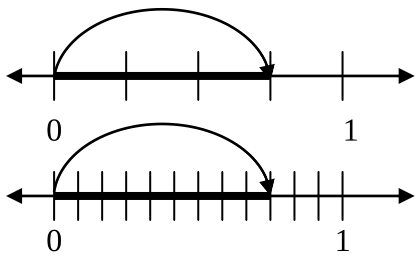
Διάγραμμα 2. Η κατάσταση επικοινωνίας.

Όπως επισημαίνει η Weber-Kubler (1982) σε μια προφορική επικοινωνία το παιδί έχει λιγότερες δυνατότητες ελέγχου των διατυπώσεών του, λιγότερες δυνατότητες να τις διαφοροποιήσει και ενδεχόμενα να τις διορθώσει. Είναι δυνατόν να παραχθούν τυχαίες διαφορές ανάμεσα σε αυτά που το παιδί θέλει να πει και σε αυτά που λέει τελικά. Μια διαδικασία γραπτής επικοινωνίας επιτρέπει να επανορθωθούν αυτές οι δυσχέρειες. Η Weber-Kubler δεν προχώρησε στη γραπτή διαδικασία, γιατί για τα παιδιά ηλικίας 12 και 14 χρόνων, που συμμετείχαν στην έρευνα, η χρήση γραπτού κειμένου παρουσιάζει δυσκολίες περισσότερο στη γραπτή σύνταξη παρά στην ανάγνωση. Οι δυσκολίες αυτές αφορούν, από τη μια, δυσκολίες έκφρασης, που παρατηρούνται συχνά, όταν οι μαθητές πρέπει να συντάξουν αυτό που μόλις εξήγησαν ή έκαναν. Για το λόγο αυτό η γραπτή έκφραση είναι για πολλούς ένα έργο με ιδιαίτερο κόστος, το οποίο είναι δυνατόν να οδηγήσει στην παράλυση της επεξεργασίας της μαθηματικής πληροφορίας. Το δεύτερο είδος δυσκολίας έγκειται στο γεγονός ότι η γραπτή διατύπωση απαιτεί μια διαφορετική οργάνωση της παρουσίασης των πληροφοριών σε σχέση με μια προφορική επικοινωνία. Είναι απαραίτητη μια γενική και ακριβής περιγραφή των αντικειμένων για τα οποία μιλούμε, ώστε να μπορούν να ανακατασκευαστούν με ακρίβεια από τη στιγμή που απουσιάζει ένα κοινό πλαίσιο ανάμεσα στον πομπό και το δέκτη.

Όπως επισημαίνει η Weber-Kubler (1982) η αλλαγή συστήματος αναπαράστασης – από το διαγραμματικό / γεωμετρικό στο λεκτικό – μέσα στα πλαίσιο ενός πειράματος επικοινωνίας έχει ως αποτέλεσμα (α) την εμφάνιση κατά τη διάρκεια της περιγραφής των πιθανών παρανοήσεων που έχουν οι πομποί και (β) τη μη αναγνώριση των παρανοήσεων αυτών από τους δέκτες κατά τη διάρκεια της ανάγνωσης του κειμένου.

Στην παρούσα ερευνητική εργασία το πείραμα επικοινωνίας πραγματοποιήθηκε για την ανακατασκευή τριών έργων (Παράρτημα Β). Το πρώτο έργο (Έργο Ε1) αφορά την εύρεση ισοδύναμου κλάσματος, ενώ τα άλλα δύο έργα (Έργα Ε1 και Ε2) αφορούν προσθέσεις με ομώνυμα και ετερώνυμα κλάσματα, αντίστοιχα. Η πραγματοποίηση του πειράματος επικοινωνίας στόχευε στην απάντηση των παρακάτω ερωτημάτων: (α) Ποια πληροφορία μεταδίδεται αναλλοίωτη ή αποκαθίσταται πλήρως; (β) Ποια πληροφορία τροποποιείται; (γ) Ποια πληροφορία αναλύεται σε επιμέρους στοιχειώδεις πληροφορίες; (δ) Ποια πληροφορία παραλείπεται;

Ο ερευνητής έδινε στο Μαθητή 1 τις απαραίτητες εξηγήσεις για την εκτέλεση του Έργου Ε1, που φαίνεται συμπληρωμένο στο Διάγραμμα 3.



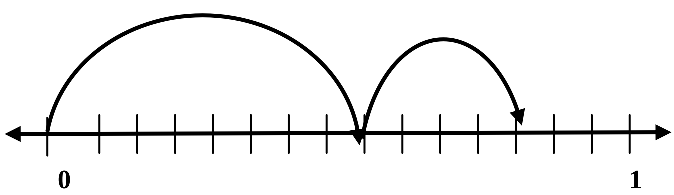
$$\frac{\square}{4} = \frac{9}{12}$$

Διάγραμμα. 3 Έργο Ε1: Χρήση της αριθμητικής γραμμής για τη συμπλήρωση της μαθηματικής πρότασης 9/12 = □ /4

Ο ερευνητής ανέφερε ότι θα σχεδιάσει μια αριθμητική γραμμή και θα τη χρησιμοποιήσει για να δείξει τη δοσμένη μαθηματική πρόταση (9/12 =□ /4) και να συμπληρώσει το κουτάκι. Οι ακριβείς οδηγίες του ερευνητή ήταν οι εξής: Θα κατασκευάσουμε δύο αριθμητικές γραμμές και θα τις χρησιμοποιήσουμε για να δείξουμε τη μαθηματική πρόταση 9/12 =□ /4 και να βρούμε την απάντηση. Σχεδιάζουμε μια ευθεία γραμμή με βέλη στα δύο άκρα. Πάνω στην ευθεία θα βάλουμε τους αριθμούς 0 και 1. Σύρουμε 13 κατακόρυφες γραμμές σε ίσες αποστάσεις. Στην πρώτη κατακόρυφη γραμμή γράφουμε το μηδέν και στην τελευταία το 1. Στην πρώτη αριθμητική γραμμή υπάρχει ένα βέλος, που ξεκινά από το 0 και καταλήγει στο 9^{ο} διάστημα από τα 12. Πρόκειται για το κλάσμα 9/12. Ο παρονομαστής του ισοδύναμου κλάσματος είναι το 4. Ψάχνουμε να βρούμε τον αριθμητή. Κατασκευάζουμε μια δεύτερη αριθμητική γραμμή και σε αυτή τοποθετούμε το διάστημα 0 ως 1. Πρέπει να χωρίσουμε διάστημα 0 ως 1 σε 4 ίσα μέρη, έτσι ώστε να βρεθεί το ισοδύναμο κλάσμα. Σύρουμε 4 κατακόρυφες διακεκομμένες γραμμές σε ίσες αποστάσεις. Παρατηρούμε ότι για κάθε 3 διαστήματα, δηλαδή για κάθε 3 δωδέκατα, αντιστοιχεί ένα καινούριο διάστημα, ένα τέταρτο. Παρατηρούμε, επίσης, ότι το βέλος καταλήγει στο τέλος του $3^{ου}$ διαστήματος από τα 4. Άρα το ισοδύναμο κλάσμα που αναζητούμε είναι το 3/4.

Αφού ο ερευνητής έδωσε στο Μαθητή 1 τις απαραίτητες οδηγίες για την εκτέλεση του Έργου Ε1, στο Μαθητή 1 χορηγήθηκε το Δοκίμιο Ε1, το οποίο περιλάμβανε 10 έργα, που είχαν την ίδια δομή και περιεχόμενο με το Έργο Ε1. Σε περίπτωση που ο Μαθητής 1 συμπλήρωνε με επιτυχία το Δοκίμιο Ε1 μετατρεπόταν σε πομπό, ο οποίος θα έδινε τις οδηγίες εκτέλεσης του Έργου Ε1 σε ένα δεύτερο μαθητή – δέκτη. Ο Μαθητής 2 κλήθηκε, στη συνέχεια, να συμπληρώσει το Δοκίμιο Ε1.

Η πιο πάνω διαδικασία ακολουθήθηκε για όλα τα έργα (Ε2 και Ε3). Αναφορικά με το Έργο Ε2, που φαίνεται συμπληρωμένο στο Διάγραμμα 4, ο ερευνητής έδωσε στο Μαθητή 1 τις απαραίτητες πληροφορίες για την εκτέλεση του έργου.

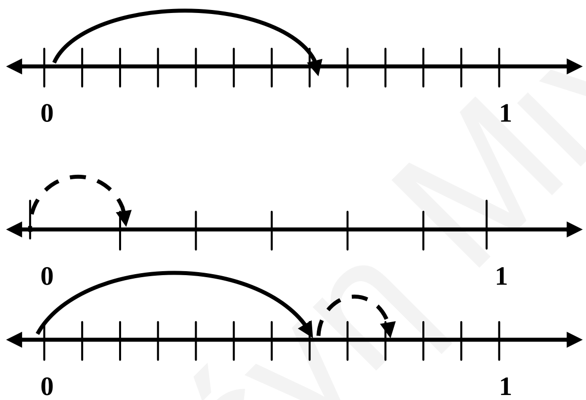


$$\frac{8}{15}+\frac{4}{15}=\square$$

Διάγραμμα.4. Έργο Ε2: Χρήση της αριθμητικής γραμμής για τη συμπλήρωση της μαθηματικής πρότασης 8/15 + 5/15= $\square$.

Οι οδηγίες, που αφορούσαν την κατασκευή της αριθμητικής γραμμής, ήταν οι ίδιες για όλα τα έργα. Σε σχέση με το Έργο Ε2 οι ακριβείς οδηγίες του ερευνητή ήταν οι εξής: Θα σχεδιάσουμε βέλη για δείξουμε ποιον αριθμό παίρνουμε αν προσθέσουμε στο 8/15, τον αριθμό 4/15. Αρχικά έχουμε 8/15. Το πρώτο βέλος θα έχει αρχή το μηδέν και θα καταλήγει στον αριθμό 8/15. Στον αριθμό αυτό προσθέτουμε τον αριθμό 4/15. Το δεύτερο βέλος θα πρέπει να ξεκινήσει από τον αριθμό 8/15, όπου κατέληξε το πρώτο βέλος και θα προχωρήσει ακόμα 4 διαστήματα. Έχουμε φτάσει στον αριθμό 12/15, ο οποίος είναι και ο αριθμός που ψάχνουμε. Στη συνέχεια, συμπληρώνουμε τη μαθηματική πρόταση.

Ο ερευνητής έδωσε τις ακόλουθες οδηγίες στο Μαθητή 1 για την εκτέλεση του Έργου Ε3, που φαίνεται συμπληρωμένο στο Διάγραμμα 5.



<u>Διάγραμμα 5.</u> Έργο Ε3: Χρήση της αριθμητικής γραμμής για τη συμπλήρωση της μαθηματικής πρότασης 7/12 + 1/6 = $\square$.

Σε σχέση με το Έργο Ε3 οι ακριβείς οδηγίες του ερευνητή ήταν οι εξής: Θα σχεδιάσουμε βέλη για δείξουμε ποιον αριθμό παίρνουμε αν προσθέσουμε στο 7/12, τον αριθμό 1/6. Έχουμε δυο αριθμητικές γραμμές. Στην πρώτη αριθμητική γραμμή σημειώνουμε το 7/12 . Το πρώτο βέλος θα έχει αρχή το μηδέν και θα καταλήγει στον αριθμό 7/12. Στη δεύτερη αριθμητική γραμμή σημειώνουμε τον αριθμό 1/6. Το πρώτο βέλος θα έχει αρχή το μηδέν και θα καταλήγει στον αριθμό 1/6. Για να μπορέσουμε να προσθέσουμε τους δύο αριθμούς πρέπει οι δύο αριθμητικές γραμμές να έχουν τον ίδιο αριθμό διαστημάτων μεταξύ του 0 και του 1. Πρέπει να βρούμε μια σχέση ανάμεσα στα διαστήματα των δύο αριθμητικών γραμμών και να κατασκευάσουμε τέτοια διαστήματα στη μια αριθμητική γραμμή, ώστε να μπορούμε να προσθέσουμε τους δύο αριθμούς. Παρατηρούμε ότι στη δεύτερη αριθμητική γραμμή αν μοιράσω τα υπάρχοντα έξι διαστήματα με κάθετα ευθύγραμμα τμήματα, τότε η αριθμητική γραμμή μοιράζεται σε 12 διαστήματα, όσα έχει δηλαδή και η πρώτη. Παρατηρούμε, επίσης, ότι ο αριθμός 1/6, ενώ καταλάμβανε ένα διάστημα, τώρα καταλαμβάνει δύο διαστήματα, που είναι τα μισά του προηγούμενου και τώρα είναι ο αριθμός 2/12. Σε μια τρίτη αριθμητική γραμμή, η οποία είναι χωρισμένη σε δωδέκατα, τοποθετώ τον πρώτο προσθετέο, δηλαδή ένα βέλος που να καλύπτει τα 7/12 και ακολούθως σχηματίζω ένα δεύτερο βέλος, το οποίο είναι διακεκομμένο, το οποία θα πρέπει να ξεκινήσει από τον αριθμό 7/12, όπου κατέληξε το πρώτο βέλος και θα προχωρήσει ακόμα 2 διαστήματα. Έχουμε φτάσει στον αριθμό 9/12, ο οποίος είναι και ο αριθμός που ψάχνουμε. Στη συνέχεια, συμπληρώνουμε τη μαθηματική πρόταση.

Τα πειράματα επικοινωνίας και η αλληλεπίδραση ανάμεσα στον ερευνητή και τους μαθητές, καθώς και ανάμεσα στους μαθητές σκοπό είχαν να εξετάσουν την υπόθεση Υ5, με βάση την οποία η αριθμητική γραμμή αποτελεί εργαλείο του οποίου η χρήση μπορεί να συμβάλει στον εντοπισμό παρανοήσεων και δυσκολιών των μαθητών σχετικά με την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος.

Οι διάλογοι που προέκυψαν στα πλαίσια των συνεντεύξεων και των πειραμάτων επικοινωνίας περιλαμβάνονται αυτούσιοι στο Παράρτημα Δ.

Διδακτική παρέμβαση

Η Γ’ φάση της έρευνας περιλάμβανε τη διδακτική παρέμβαση και προνοεί, όπως και η Α’ φάση της έρευνας, τη συλλογή ποσοτικών δεδομένων. Για να εξετασθεί η υπόθεση Υ7 δημιουργήθηκε ομάδα ελέγχου και πειραματική ομάδα η οποία θα λάμβανε μέρος σε διδακτικό παρεμβατικό πρόγραμμα. Με τη μέθοδο της τυχαίας δειγματοληψίας – κλήρωση – επιλέγηκαν 2 πέμπτες τάξεις από τις 8 πέμπτες τάξεις των σχολείων που έλαβαν μέρος στην έρευνα. Επαναλαμβάνοντας τη μέθοδο της τυχαίας δειγματοληψίας – κλήρωση – η μια τάξη αποτέλεσε την ομάδα ελέγχου η οποία περιλάμβανε 24 μαθητές και η άλλη τάξη αποτέλεσε την πειραματική ομάδα η οποία περιλάμβανε 28 μαθητές. Οι δύο ομάδες είχαν ήδη διδαχθεί την ισοδυναμία και την πρόσθεση κλασμάτων στην Δ΄τάξη. Στις δύο ομάδες χορηγήθηκαν αρχικά τα τέσσερα δοκίμια –Δοκίμιο Α, Δοκίμιο Β, Δοκίμιο Γ και Δοκίμιο Δ. Με την πάροδο δύο μηνών η ομάδα ελέγχου παρακολούθησε διδασκαλία κλασμάτων από το δάσκαλο της συγκεκριμένης τάξης. Η πορεία και το περιεχόμενο των μαθημάτων είναι αυτά που προνοούνται από το αναλυτικό πρόγραμμα. Η πειραματική ομάδα παρακολούθησε μια σειρά πέντε ογδοντάλεπτων μαθημάτων από τον ερευνητή, τα οποία έδιναν έμφαση στη χρήση της αριθμητικής γραμμής για την αναγνώριση και αναπαράσταση της έννοιας του κλάσματος, στις μεταφράσεις από τη μια αναπαράσταση της έννοιας του κλάσματος στην άλλη και στην επίλυση προβλημάτων με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής. Τα τέσσερα δοκίμια επαναχορηγήθηκαν στους μαθητές μετά την πάροδο δύο μηνών. Η συγκεκριμένη διαδικασία είχε ως σκοπό να εξετάσει την υπόθεση Υ7 με βάση την οποία η αριθμητική γραμμή ως διδακτικό εργαλείο δημιουργεί δυσκολίες στην κατανόηση των εννοιών της ισοδυναμίας και πρόσθεσης κλασμάτων, λόγω της έμφασης στην αλγοριθμική προσέγγιση των κλασμάτων κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Κατά συνέπεια αν η διδασκαλία δώσει έμφαση και στην αριθμητική γραμμή η επίδοση των μαθητών σε έργα αναγνώρισης, αναπαράστασης, ισοδυναμίας και πρόσθεσης κλασμάτων, καθώς και στην επίλυση προβλημάτων θα βελτιωθεί.

Η διδακτική παρέμβαση περιλάμβανε πέντε διδακτικές ενότητες:

1. Η ευκλείδεια ευθεία και η αριθμητική γραμμή
2. Αναγνώριση και αναπαράσταση κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή
3. Η αριθμητική γραμμή ως αναπαράσταση της ισοδυναμίας κλασμάτων
4. Η αριθμητική γραμμή ως αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων
5. Η αριθμητική γραμμή ως αναπαράσταση της πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων

Κάθε ενότητα περιλάμβανε συγκεκριμένους στόχους και δραστηριότητες οι οποίοι περιγράφονται πιο κάτω. Επιπλέον, οι δραστηριότητες περιλάμβαναν τη συμπλήρωση φύλλων εργασίας τα οποία επισυνάπτονται στο Παράρτημα Γ.

1. Η ευκλείδεια ευθεία και η αριθμητική γραμμή

Διάρκεια: 80’

Στόχοι: Οι μαθητές να είναι ικανοί να:

1. Κατασκευάζουν την ευκλείδεια ευθεία και να αναφέρουν τα βασικά χαρακτηριστικά της.
2. Κατασκευάζουν ένα ευθύγραμμο τμήμα και να αναφέρουν τα βασικά χαρακτηριστικά του.
3. Αναφέρουν ομοιότητες και διαφορές ανάμεσα στην ευθεία και στο ευθύγραμμο τμήμα.
4. Χρησιμοποιούν την ευκλείδεια ευθεία για να τοποθετήσουν τους αριθμούς σε αυτή.

5. Αναφέρουν τους τρόπους με τους οποίους τα γεωμετρικά στοιχεία της ευθείας μπορούν να αναπαραστήσουν αριθμούς.

Δραστηριότητες

1. <u>Εισαγωγή στην έννοια του ευθυγράμμου τμήματος</u>

Έγινε εισαγωγή της έννοιας σημείο και της έννοιας ευθύγραμμο τμήμα μέσα από αντικείμενα της καθημερινής ζωής. Για παράδειγμα:

(α) Σημείο: Το κέντρο του ρολογιού, μια τελεία, το αποτύπωμα της μύτης του μολυβιού.

(β) Ευθύγραμμο τμήμα: Ο πλευρές ενός πίνακα, οι πλευρές ενός φύλλου χαρτιού, οι πλευρές του θρανίου, οι ακμές ενός κουτιού. Δόθηκε έμφαση στον εντοπισμό των άκρων των ευθύγραμμων τμημάτων.

2. <u>Εισαγωγή στην ευκλείδεια ευθεία</u>

Η διδάσκουσα χρησιμοποίησε το φανελλογράφο για να κάνει εισαγωγή της έννοιας της ευθείας σε σχέση με το ευθύγραμμο τμήμα. Στο φανελλογράφο στερεώθηκε μια μάλλινη κλωστή, της οποίας τα άκρα ήταν στερεωμένα με δύο πινέζες. Η κλωστή αυτή έδωσε στους μαθητές την εικόνα του ευθύγραμμου τμήματος. Οι μαθητές αναμενόταν όπως αναφέρουν το γεωμετρικό σχήμα που είχε αναπαρασταθεί με τη βοήθεια της κλωστής και να εντοπίσουν τα άκρα του. Στη συνέχεια από τα άκρα της κλωστής αφαιρέθηκαν οι πινέζες και η κλωστή έδωσε την εικόνα της ευθείας, μιας γραμμής που μπορεί να επεκταθεί απεριόριστα και από τα δύο άκρα τα οποία δεν συναντούνται ποτέ. Ακολούθησε η κατασκευή της ευθείας και στον πίνακα όπου στα άκρα της ευθείας τοποθετήθηκαν βέλη τα οποία αναπαριστούν την απεριόριστη επέκταση της ευθείας. Δόθηκε το Φύλλο Εργασίας 1 στο οποίο μαθητές κλήθηκαν να κατασκευάσουν ευθείες και ευθύγραμμα τμήματα δοσμένου μήκους. Ακολούθησε συζήτηση στην οποία αναμενόταν οι μαθητές να αναφέρουν ομοιότητες και διαφορές της ευθείας και του ευθύγραμμου τμήματος.

3. Σχέση ευθύγραμμου τμήματος και ευθείας

Ακολούθως ζητήθηκε από τους μαθητές να αναφέρουν πόσα ευθύγραμμα τμήματα μπορούν να χωρέσουν σε μια ευθεία, σε πόσα ευθύγραμμα τμήματα μπορεί να μοιραστεί μια ευθεία, με βάση ένα δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα – Φύλλο Εργασίας 1. Οι μαθητές αναμενόταν να εργαστούν ομαδικά και να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι η ευθεία περιλαμβάνει άπειρα ευθύγραμμα τμήματα, διότι συνεχώς επεκτείνεται.

4. Ευκλείδεια ευθεία και αριθμητική γραμμή

Με βάση το Φύλλο Εργασίας 1 ζητήθηκε από τους μαθητές να τοποθετήσουν σε τέσσερις διαφορετικές ευθείες τα ευθύγραμμα τμήματα με μήκος 0, 1, 2, 3 και 4 αντίστοιχα, τα οποία να ξεκινούν πάντα από το 0. Μετά την κατασκευή των ευθυγράμμων τμημάτων οι μαθητές αναμενόταν να συγκρίνουν τους αριθμούς. Ακολούθως ζητήθηκε από τους μαθητές να τοποθετήσουν και τα τέσσερα ευθύγραμμα τμήματα στην ίδια ευθεία και να συνεχίσουν το μοτίβο. Με τον τρόπο αυτό κατασκευάστηκε η αριθμητική γραμμή.

Οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν στο ερώτημα «Γιατί η ευθεία ονομάζεται αριθμητική γραμμή;». Οι μαθητές αναμενόταν να απαντήσουν ότι η ευθεία ονομάστηκε έτσι διότι παρουσίαζε όλους τους αριθμούς σε σειρά και να αναφέρουν ότι όπως η ευθεία επεκτείνεται απεριόριστα έτσι και οι αριθμοί είναι άπειροι.

2. Αναγνώριση και αναπαράσταση κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή

Διάρκεια: 80΄

Στόχοι: Οι μαθητές να:

(α) Αναγνωρίζουν κλάσματα σε αριθμητικές γραμμές, οι οποίες περιλαμβάνουν το διάστημα 0 - 1.

(β) Αναγνωρίζουν κλάσματα σε αριθμητικές γραμμές, οι οποίες περιλαμβάνουν τα διαστήματα 0 - 2, 0 - 3 κτλ.

(γ) Αναπαριστούν κλάσματα με τη χρήση αριθμητικών γραμμών, οι οποίες περιλαμβάνουν το διάστημα 0 -1.

(δ) Αναπαριστούν κλάσματα με τη χρήση αριθμητικών γραμμών, οι οποίες περιλαμβάνουν τα διαστήματα 0 - 2, 0 - 3 κτλ.

Δραστηριότητες:

1. Σύνδεση με προηγούμενες γνώσεις.

Έγινε αναφορά στην έννοια του κλάσματος ως μέρος - όλο. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκαν αναπαραστάσεις εμβαδού για να αναπαρασταθούν γνήσια και καταχρηστικά κλάσματα. Επίσης έγινε αναφορά στη σχέση αριθμητή και παρονομαστή (π. χ 3/4 από τα 4 παίρνω τα 3).

Ακολούθησε η αναπαράσταση γνήσιων και καταχρηστικών κλασμάτων με τη χρήση εμβαδών με στόχο να συγκριθεί το μέγεθός τους με τη μονάδα. Η σύγκριση έγινε και με τη χρήση συμβόλων σε συνδυασμό με τις αναπαραστάσεις του εμβαδού καθώς και αποκλειστικά με σύμβολα.

Ακολούθως οι μαθητές κλήθηκαν να αναπαραστήσουν με τη βοήθεια ευθυγράμμων τμημάτων γνήσια και καταχρηστικά κλάσματα.

3. Κατασκευή αριθμητικής γραμμής.

Οι μαθητές κλήθηκαν να κατασκευάσουν αριθμητική γραμμή. Σε αυτή τους ζητήθηκε να τοποθετήσουν ακέραιους αριθμούς και να τους συγκρίνουν – σύγκριση των ευθύγραμμων τμημάτων. Δόθηκε έμφαση στο ότι η αριθμητική γραμμή είναι συνεχής και δεν έχει αρχή ούτε τέλος, δείχνοντας ότι οι αριθμοί είναι άπειροι. Επίσης, οι μαθητές αναμενόταν να αναφέρουν ότι για να τοποθετήσουν αριθμούς στην αριθμητική γραμμή πρέπει να οριστούν δύο τουλάχιστο σημεία για να οριστεί το ευθύγραμμο τμήμα ανάμεσά τους.

4.Εύρεση των ευθυγράμμων τμημάτων που αντιστοιχούν σε κλάσματα μικρότερα της μονάδας και σύγκρισή τους

Στο Φύλλο Εργασίας 2 οι μαθητές κλήθηκαν να αναπαραστήσουν αριθμούς μικρότερους της μονάδας σε αριθμητικές γραμμές αριθμημένες από το 0 μέχρι το 1. Αρχικά οι μαθητές αναμενόταν να κατασκευάσουν ευθύγραμμα τμήματα τα οποία να ξεκινούν την από το 0 και να μη φτάνουν το 1και να αναφέρουν ότι τα ευθύγραμμα αυτά τμήματα αναπαριστούν αριθμούς μικρότερους από το 1.

Στο ίδιο φύλλο εργασίας ζητήθηκε από τους μαθητές να επιλύσουν το ακόλουθο πρόβλημα με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής: « Ο Γιάννης, ο Μάριος και ο Νίκος είναι αθλητές μήκους. Στους αγώνες το άλμα του Γιάννη κάλυψε το ½ της αμμοδόχου, το άλμα του Μάριου κάλυψε το 1/3 και το άλμα του Νίκου τα ¾. Ποιος ήταν ο νικητής; Μπορείτε να δείξετε τα άλματα των αθλητών στην αριθμητική γραμμή;».

Οι μαθητές για να επιλύσουν το πρόβλημα έπρεπε να αναπαραστήσουν τα κλάσματα ½, 1/3, ¾ με τη βοήθεια της αριθμητικής γραμμής. Οι μαθητές αναμενόταν να αναφέρουν ότι πρόκειται για κλάσματα μικρότερα της μονάδας γι’αυτό και θα εργάζονταν στο διάστημα 0 ως 1. Επίσης, αναμενόταν όπως κατασκευάσουν τρεις αριθμητικές γραμμές που θα περιλάμβαναν το διάστημα 0 ως 1, χωρίσουν το διάστημα σε υποδιαιρέσεις ανάλογα με τον παρονομαστή του κλάσματος και επιλέξουν τα διαστήματα ανάλογα με τον αριθμητή του κλάσματος, δουλεύοντας με τρόπο ανάλογο με τον τρόπο που είχαν εργαστεί στην περίπτωση της αναπαράστασης ενός κλάσματος σε ευθύγραμμο τμήμα. Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές αναμενόταν να συγκρίνουν τα άλματα των αθλητών και να βρουν το νικητή.

4.Αναπαράσταση κλασμάτων μεγαλύτερων της μονάδας με χρήση της αριθμητικής γραμμής και σύγκρισή τους.

Στο Φύλλο εργασίας 2 οι μαθητές ασχολήθηκαν με το εξής πρόβλημα: « Μια οικογένεια καταναλώνει 2 και 1/3 λίτρα γάλακτος την Τρίτη και 16/5 του λίτρου γάλα την Τετάρτη. Ποια μέρα καταναλώνει τα περισσότερα;». Οι μαθητές αναμενόταν να λύσουν το πρόβλημα με τη χρήση δύο αριθμητικών γραμμών. Στην πρώτη περίπτωση οι μαθητές αναμενόταν να επιλέξουν τα δύο πρώτα διαστήματα ολόκληρα και το 1/3 από το τρίτο διάστημα. Αναφορικά με τη δεύτερη περίπτωση οι μαθητές αναμενόταν να αντιμετωπίσουν δυσκολίες σχετικά με την κατασκευή των υποδιαιρέσεων των διαστημάτων. Οι υποδιαιρέσεις θα ήταν πέντε λόγω του παρονομαστή του κλάσματος, αλλά αναμενόταν να υπάρξουν διαφωνίες μεταξύ των μαθητών για το μήκος του διαστήματος που θα περιλάμβανε τις πέντε υποδιαιρέσεις. Συγκεκριμένα, υπήρχε περίπτωση κάποιοι μαθητές να υποστηρίξουν ότι κάθε διάστημα -0 ως 1, 1 ως 2, 2 ως 3, 3 ως 4 – έπρεπε να περιλάμβανε πέντε υποδιαιρέσεις. Υπήρχε, όμως, περίπτωση κάποιοι μαθητές να υποστηρίξουν ότι το διάστημα από το 0 ως το 4 πρέπει να περιλαμβάνει πέντε υποδιαιρέσεις. Αναμενόταν όπως κατά τη διάρκεια της συζήτησης οι μαθητές καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι αφού η ακέραια μονάδα αποτελείται από 5/5 τότε το διάστημα 0 ως 1 πρέπει να χωριστεί σε πέμπτα. Το ίδιο έπρεπε να συμβεί και με τα άλλα διαστήματα. Με τον τρόπο αναμενόταν όπως αριθμήσουν την αριθμητική γραμμή τόσο με ακέραιους όσο και με κλάσματα και να σημειώσουν το διάστημα 16/5 και να συγκρίνουν το μικτό αριθμό 2 και 1/3 και το καταχρηστικό κλάσμα 16/5 με τη χρήση των αριθμητικών γραμμών στις οποίες θα φανεί ότι καταχρηστικό κλάσμα είναι μεγαλύτερο του μικτού αριθμού.

3.Η αριθμητική γραμμή ως αναπαράσταση της ισοδυναμίας κλασμάτων

Διάρκεια: 80΄

Στόχοι: Οι μαθητές να:

(α) Αναγνωρίζουν και αναπαριστούν με τη χρήση αριθμητικών γραμμών, που περιλαμβάνουν το διάστημα 0 ως το 1, ισοδύναμα κλάσματα

(β) Αναγνωρίζουν και αναπαριστούν με τη χρήση αριθμητικών γραμμών, που περιλαμβάνουν το διάστημα 0 ως το 2, ισοδύναμα κλάσματα

(γ) Συμπληρώνουν τους αριθμούς που λείπουν από σχέσεις ισοδυναμίας κλασμάτων, με τη βοήθεια αριθμητικών γραμμών.

Δραστηριότητες:

1. Σύνδεση με προηγούμενα

Οι μαθητές αναγνώρισαν και αναπαράστησαν δοσμένα κλάσματα – γνήσια και καταχρηστικά – σε αριθμητικές γραμμές που περιλαμβάνουν τόσο το διάστημα 0 ως 1 όσο και μεγαλύτερα διαστήματα.

2. Αφόρμηση - Επίλυση προβλήματος ισοδυναμίας κλασμάτων

Δόθηκε στους μαθητές το εξής πρόβλημα ισοδυναμίας κλασμάτων – Φύλλο εργασίας 3: « Η μητέρα έδωσε στην Ελένη και τη Μαρία από μια σοκολάτα και τους είπε να φάνε από ένα κομμάτι σήμερα και ένα κομμάτι αύριο. Είπε στην Ελένη να φάει το ½ της σοκολάτας της και στη Μαρία τα 2/4. Βοηθήστε τα δυο κορίτσια να καταλάβουν ποια θα φάει το περισσότερο χρησιμοποιώντας αριθμητικές γραμμές». Οι μαθητές αναμενόταν να αναπαράστησαν τα κλάσματα στις δύο αριθμητικές γραμμές και να παρατηρήσουν ότι τα κλάσματα αντιπροσωπεύουν την ίδια ποσότητα, είναι δηλαδή ισοδύναμα – Φύλλο εργασίας

3.Τα παιδιά αναμενόταν να εργαστούν ομαδικά για να λύσουν το πρόβλημα καθώς η διδάσκουσα άλλαζε τις πληροφορίες του προβλήματος και περιέλαβε και άλλα ισοδύναμα κλάσματα -3/6, 4/8.

Χρησιμοποιήθηκαν διαφάνειες και το ανακλαστικό διασκόπιο με στόχο την παρουσίαση των ισοδύναμων κλασμάτων σε αριθμητική γραμμή – Κάθε διαφάνεια παρουσίαζε ένα ισοδύναμο κλάσμα. Με επικάλυψη των διαφανειών όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που αντιστοιχούσαν σε ισοδύναμα κλάσματα συνέπιπταν. Οι μαθητές αναμενόταν να παρατηρήσουν ότι όλα τα ισοδύναμα κλάσματα κάλυπταν την ίδια απόσταση από το 0.

3. <u>Επίλυση προβλημάτων</u>

Δόθηκε στους μαθητές το ακόλουθο πρόβλημα – Φύλλο εργασίας 3: «Η Ελένη παίζει καλαθόσφαιρα. Την Τετάρτη πετυχαίνει 3 βολές σε σύνολο 7 βολών που ρίχνει. Αν την επόμενη μέρα έχει την ίδια επιτυχία πόσες βολές θα πετύχει αν όλες οι βολές που έριξε είναι 21;». Οι μαθητές κλήθηκαν να το επιλύσουν με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής. Σε αντίθεση με το προηγούμενο πρόβλημα οι μαθητές γνώριζαν εκ των προτέρων ότι θα εργαστούν με δύο κλάσματα ισοδύναμα, αφού αναφερόταν ότι η επιτυχία στις βολές είναι η ίδια. Αναμενόταν όπως σε μια αριθμητική γραμμή αναπαραστήσουν το κλάσμα 3/7, ενώ σε μια δεύτερη αριθμητική γραμμή στην οποία έχουν χωρίσει το διάστημα 0 ως 1 σε 21 υποδιαιρέσεις, να επιλέξουν τόσες υποδιαιρέσεις όσες να αντιστοιχούν στην απόσταση του 3/7 από το 0. Με τον τρόπο αυτό βρήκαν τον αριθμό 9/21. Με ανάλογο τρόπο αναμενόταν να εργαστούν για την επίλυση προβλημάτων στα οποία ήταν άγνωστος ο αριθμητής ή ο παρονομαστής ενός από τα ισοδύναμα κλάσματα.

Σε συζήτηση που ακολούθησε αναμενόταν να δοθεί έμφαση στο γεγονός ότι παρόλο που ένα ισοδύναμο κλάσμα προκύπτει με τον πολλαπλασιασμό τόσο του αριθμητή όσο και του παρονομαστή με τον ίδιο αριθμό, δεν είναι πολλαπλάσιο του αρχικού κλάσματος, αλλά αναπαριστά την ίδια ακριβώς ποσότητα. Η σχέση ισοδυναμίας όπως αναπαραστάθηκε από τις αριθμητικές γραμμές αναμενόταν να δώσει την ευκαιρία στους μαθητές να δουν ότι μπορεί ο αριθμητής του νέου κλάσματος που προκύπτει να είναι μικρότερος ή μεγαλύτερος από τον αριθμητή του δοσμένου κλάσματος. Όμως, αναμενόταν να φανεί στην αριθμητική γραμμή ότι όσο μεγαλύτερος ήταν ο αριθμητής και ο παρονομαστής του καινούριου κλάσματος από εκείνο του δοσμένου κλάσματος, τόσο μικρότερο ήταν το μήκος της κάθε καινούριας υποδιαίρεσης από το μήκος της αρχικής υποδιαίρεσης με στόχο η ποσότητα που αντιστοιχούσε στο αρχικό κλάσμα να παραμείνει αναλλοίωτη. Οι μαθητές αναμενόταν να παρατηρήσουν με τη βοήθεια της αριθμητικής γραμμής ότι ίσχυε και το αντίστροφο: Όσο μικρότερος ήταν ο αριθμητής και ο παρονομαστής του καινούριου κλάσματος από εκείνο του δοσμένου κλάσματος, τόσο μεγαλύτερο ήταν το μήκος της κάθε καινούριας υποδιαίρεσης από το μήκος της αρχικής υποδιαίρεσης με στόχο η ποσότητα που αντιστοιχούσε στο αρχικό κλάσμα να παραμείνει αναλλοίωτη.

4. Μεταφράσεις

Ακολούθησε η επίλυση στο Φύλλο εργασίας 3 και στον πίνακα έργων μετάφρασης στα οποία δινόταν σε συμβολική μορφή – πηγή – η σχέση ισοδυναμίας δύο κλασμάτων και οι μαθητές καλούνταν να την αναπαραστήσουν σε αριθμητικές γραμμές ή να διατυπώσουν λεκτικά προβλήματα – στόχος – τα οποία να περιλαμβάνουν τη συγκεκριμένη σχέση. Η πηγή και ο στόχος διαφοροποιούνταν συνεχώς, αφού πηγή μπορούσε να αποτελέσει η αριθμητική γραμμή και στόχο ένα λεκτικό πρόβλημα ή η συμβολική έκφραση. Συγκεκριμένα, στο Φύλλο εργασίας 3, καθώς και στον πίνακα ζητήθηκε από τους μαθητές να επιλύσουν λεκτικά προβλήματα ισοδυναμίας κλασμάτων με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής και να διατυπώσουν τη συμβολική έκφραση. Επίσης δόθηκαν αριθμητικές γραμμές οι οποίες αναπαριστούσαν ισοδυναμία κλασμάτων και ζητήθηκε από τους μαθητές όπως διατυπώσουν τη συμβολική έκφραση καθώς και λεκτικά προβλήματα με βάση τις πληροφορίες που αναπαριστούσαν οι γραμμές. Τέλος οι μαθητές κλήθηκαν να διατυπώσουν λεκτικά προβλήματα και να συμπληρώσουν αριθμητικές γραμμές για δοσμένες συμβολικές εκφράσεις – εξισώσεις. Σε κάποιες περιπτώσεις οι αριθμητικές γραμμές περιλάμβαναν διαστήματα μεγαλύτερα της μονάδας. Αναμενόταν όπως οι μαθητές μεταφράσουν ανάμεσα στις διαφορετικές αναπαραστάσεις της ισοδυναμίας κλασμάτων.

4. Η αριθμητική γραμμή ως αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων

Διάρκεια: 80΄

Στόχοι: Οι μαθητές να:

(α) Αναγνωρίζουν με τη χρήση αριθμητικών γραμμών, που περιλαμβάνουν το διάστημα 0 ως το 1, πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων

(β) Αναπαριστούν με τη χρήση αριθμητικών γραμμών, που περιλαμβάνουν το διάστημα 0 ως το 2, 3 κτλ πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων

(γ) Μεταφράζουν από λεκτικά προβλήματα πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε αριθμητικές γραμμές και συμβολικές εκφράσεις.

(δ) Μεταφράζουν από αριθμητικές γραμμές που αναπαριστούν πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων σε λεκτικά προβλήματα και συμβολικές εκφράσεις.

(ε) Μεταφράζουν από συμβολικές εκφράσεις πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε λεκτικά προβλήματα και αριθμητικές γραμμές.

Δραστηριότητες:

1. Σύνδεση με προηγούμενα

(α) Αναγνώριση και αναπαράσταση κλασμάτων σε αριθμητικές γραμμές

(β) Αναγνώριση και αναπαράσταση ισοδυναμίας κλασμάτων σε αριθμητικές γραμμές

2. Πρόβλημα πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων και επίλυσή του με τη βοήθεια της αριθμητικής γραμμής

Στους μαθητές δόθηκε το εξής πρόβλημα – Φύλλο εργασίας 4: «Ένας ποδηλάτης διανύει αρχικά το 1/5 της απόστασης και κάνει σταθμό. Ακολούθως, διανύει ακόμη 2/5 της απόστασης και σταματά για νερό. Πόση απόσταση κάλυψε;»

Οι μαθητές κλήθηκαν να αναπαραστήσουν τα δεδομένα του προβλήματος σε αριθμητική γραμμή. Αρχικά ανέφεραν ότι πρόκειται για πρόσθεση. Η συζήτηση επικεντρώθηκε στην αρίθμηση της γραμμής. Συγκεκριμένα, οι μαθητές τοποθέτησαν τους αριθμούς 0, 1, 2, και 3 και ανέφεραν ότι το διάστημα 0 ως 1 περιλαμβάνει 5/5. Χώρισαν το συγκεκριμένο διάστημα σε 5 μικρότερα ίσα διαστήματα, καθένα από τα οποία αντιστοιχούσε σε 1/5, φέροντας 4 κατακόρυφους διαχωρισμούς. Αρχικά επέλεξαν το 1/5 και ακολούθως προχώρησαν ακόμη 2/5 προς τα δεξιά. Ανέφεραν ότι συνολικά είχαν επιλέξει 3 διαστήματα, άρα η απάντηση ήταν 3/5. Στην ερώτηση αν ο ποδηλάτης είχε καλύψει όλη την απόσταση οι μαθητές απάντησαν ότι δεν είχε καλύψει όλη την απόσταση αφού, δεν είχε καλύψει τα 5/5 του δρόμου. Οι μαθητές διατύπωσαν τη συμβολική έκφραση που αντιστοιχούσε στις πληροφορίες που αναπαριστούσε η αριθμητική γραμμή: 1/5 + 2/5 =3/5.

3. <u>Μετάφραση από τη συμβολική μορφή της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε αριθμητικές γραμμές αριθμημένες ως το 1, 2,3</u>.

Δόθηκε στον πίνακα το εξής πρόβλημα πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων: «Ένα δεντράκι ψήλωσε τον πρώτο χρόνο κατά 7/10 του μέτρου. Το δεύτερο χρόνο ψήλωσε κατά 5/10 του μέτρου. Τον τρίτο χρόνο ψήλωσε ακόμη 7/10 του μέτρου. Πόσο ψήλωσε συνολικά;». Οι μαθητές αναμενόταν όπως (α) τοποθετήσουν τους αριθμούς 0,1,2 και 3 στην αριθμητική γραμμή και γνωρίζοντας ότι κάθε ακέραια μονάδα περιλαμβάνει 10/10 να χωρίσουν το κάθε διάστημα σε 10 ίσα διαστήματα, φέροντας 9 κατακόρυφους διαχωρισμούς σε κάθε περίπτωση (β) επιλέξουν τα διαστήματα που αναλογούν σε κάθε προσθετέο και να βρουν το συνολικό αριθμό των διαστημάτων που αντιστοιχεί στο άθροισμα και ο οποίος ξεπερνά την ακέραια μονάδα – 1 και 9/10.

4. Μεταφράσεις ανάμεσα στις αναπαραστάσεις της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων.

Στο Φύλλο εργασίας 4 και στον πίνακα ζητήθηκε από τους μαθητές να επιλύσουν λεκτικά προβλήματα πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής και να διατυπώσουν τη συμβολική έκφραση. Επίσης δόθηκαν αριθμητικές γραμμές οι οποίες αναπαριστούσαν πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων και ζητήθηκε από τους μαθητές όπως διατυπώσουν τη συμβολική έκφραση καθώς και λεκτικά προβλήματα με βάση τις πληροφορίες που αναπαριστούσαν οι γραμμές. Τέλος οι μαθητές κλήθηκαν να διατυπώσουν λεκτικά προβλήματα και να συμπληρώσουν αριθμητικές γραμμές για δοσμένες συμβολικές εκφράσεις – εξισώσεις. Σε κάποιες περιπτώσεις οι αριθμητικές γραμμές περιλάμβαναν διαστήματα μεγαλύτερα της μονάδας. Αναμενόταν όπως οι μαθητές μεταφράσουν ανάμεσα στις διαφορετικές αναπαραστάσεις της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων.

5. Η αριθμητική γραμμή ως αναπαράσταση της πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων

Διάρκεια: 80΄

Στόχοι: Οι μαθητές να:

(α) Αναγνωρίζουν και αναπαριστούν με τη χρήση αριθμητικών γραμμών, που περιλαμβάνουν το διάστημα 0 ως 1, πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων

(β) Αναγνωρίζουν και αναπαριστούν με τη χρήση αριθμητικών γραμμών, που περιλαμβάνουν το διάστημα 0 ως 2, 3 κτλ πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων

(γ) Μεταφράζουν από λεκτικά προβλήματα πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων σε αριθμητικές γραμμές και συμβολικές εκφράσεις.

(δ) Μεταφράζουν από αριθμητικές γραμμές που αναπαριστούν πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων σε λεκτικά προβλήματα και συμβολικές εκφράσεις.

(ε) Μεταφράζουν από συμβολικές εκφράσεις πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων σε λεκτικά προβλήματα και αριθμητικές γραμμές.

Δραστηριότητες:

1. Σύνδεση με προηγούμενα

(α) Αναγνώριση και αναπαράσταση κλασμάτων σε αριθμητικές γραμμές

(β) Αναγνώριση και αναπαράσταση ισοδυναμίας κλασμάτων σε αριθμητικές γραμμές

(γ) Αναγνώριση και αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων.

(δ) Μετάφραση ανάμεσα στις αναπαραστάσεις της ισοδυναμίας κλασμάτων

(ε) Μετάφραση ανάμεσα στις αναπαραστάσεις της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων.

2. Πρόβλημα πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων και επίλυσή του με τη βοήθεια της αριθμητικής γραμμής

Στους μαθητές δόθηκε το εξής πρόβλημα: «Ένας ποδηλάτης διανύει αρχικά το 1/2 της απόστασης και κάνει σταθμό. Ακολούθως, διανύει ακόμη 1/3 της απόστασης και σταματά για νερό. Πόση απόσταση κάλυψε;»

Οι μαθητές κλήθηκαν να αναπαραστήσουν τα δεδομένα του προβλήματος σε δύο ξεχωριστές αριθμητικές γραμμές. Αναμενόταν όπως οι μαθητές αναπαραστήσουν τους δύο προσθετέους σε ξεχωριστές αριθμητικές γραμμές, λόγω των διαφορετικών παρονομαστών, οι οποίοι προϋποθέτουν διαφορετικές υποδιαιρέσεις στην κάθε αριθμητική γραμμή. Οι μαθητές αναμενόταν όπως τοποθετήσουν τους αριθμούς 0, 1, 2, και 3 και αναφέρουν ότι το διάστημα 0 ως 1 περιλαμβάνει 2/2 και χωρίσουν το συγκεκριμένο διάστημα σε 2 μικρότερα ίσα διαστήματα, καθένα από τα οποία αντιστοιχούσε σε 1/2, φέροντας ένα κατακόρυφο διαχωρισμό. Ακολούθως, αναμενόταν να επιλέξουν το πρώτο από τα δύο διαστήματα ως την αναπαράσταση του κλάσματος ½. Η ίδια διαδικασία αναμενόταν να ακολουθηθεί και για την αναπαράσταση του κλάσματος 1/3 στη δεύτερη αριθμητική γραμμή. Οι μαθητές αναμενόταν όπως τοποθετήσουν τους αριθμούς 0, 1, 2, κτλ και αναφέρουν ότι το διάστημα 0 ως 1 περιλαμβάνει 3/3 και χωρίσουν το συγκεκριμένο διάστημα σε 3 μικρότερα ίσα διαστήματα, καθένα από τα οποία αντιστοιχούσε σε 1/3, φέροντας δύο κατακόρυφους διαχωρισμούς. Ακολούθως αναμενόταν να επιλέξουν το πρώτο από τα τρία διαστήματα ως την αναπαράσταση του κλάσματος 1/3.

Στους μαθητές δόθηκε μια τρίτη αριθμητική γραμμή στην οποία κλήθηκαν να αναπαραστήσουν την πρόσθεση των δύο ετερώνυμων κλασμάτων. Οι μαθητές αναμενόταν να εργαστούν ομαδικά και να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι με τη χρήση δύο ομώνυμων, αλλά ισοδύναμων κλασμάτων, με τα πρώτα κλάσματα, θα μπορούσε να αναπαρασταθεί η πρόσθεση στην τρίτη αριθμητική γραμμή όπως για παράδειγμα, τα κλάσματα 3/6 και 2/6 ή τα κλάσματα 6/12 και 4/12. Η δραστηριότητα ολοκληρώθηκε με συζήτηση η οποία αφορούσε την εύρεση των ομώνυμων, αλλά ισοδύναμων κλασμάτων με τα ετερώνυμα κλάσματα, και τη χρησιμοποίηση του ελάχιστου κοινού πολλαπλασίου με στόχο την εύρεση των πιο απλών ομώνυμων κλασμάτων και κατά συνέπεια τον ευκολότερο χωρισμό των διαστημάτων στις νέες υποδιαιρέσεις.

3. <u>Μεταφράσεις ανάμεσα στις αναπαραστάσεις της πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων.</u>

Στο Φύλλο εργασίας 5 και στον πίνακα ζητήθηκε από τους μαθητές να επιλύσουν λεκτικά προβλήματα πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής και να διατυπώσουν τη συμβολική έκφραση. Επίσης δόθηκαν αριθμητικές γραμμές οι οποίες αναπαριστούσαν πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων και ζητήθηκε από τους μαθητές όπως διατυπώσουν τη συμβολική έκφραση καθώς και λεκτικά προβλήματα με βάση τις πληροφορίες που αναπαριστούσαν οι γραμμές.

Τέλος οι μαθητές κλήθηκαν να διατυπώσουν λεκτικά προβλήματα και να συμπληρώσουν αριθμητικές γραμμές για δοσμένες συμβολικές εκφράσεις – εξισώσεις. Υπήρχαν και περιπτώσεις όπου οι αριθμητικές γραμμές περιλάμβαναν διαστήματα μεγαλύτερα της μονάδας. Αναμενόταν όπως οι μαθητές μεταφράσουν ανάμεσα στις διαφορετικές αναπαραστάσεις της πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων.

Με το τέλος της διδακτικής παρέμβασης οι μαθητές κλήθηκαν να αναφέρουν ομοιότητες και διαφορές ανάμεσα στην αριθμητική γραμμή και άλλες αναπαραστάσεις και να αναφέρουν λόγους για τους οποίους προτιμούσαν να χρησιμοποιήσουν ή όχι την αριθμητική γραμμή ως μέσο αναπαράστασης των κλασμάτων.

Τρόπος Διεξαγωγής της Έρευνας

Το κάθε δοκίμιο –Δοκίμιο Α, Δοκίμιο Β, Δοκίμιο Γ, Δοκίμιο Δ – χορηγήθηκαν στους μαθητές σε περιόδους διάρκειας 40 λεπτών. Τα τέσσερα δοκίμια χορηγήθηκαν με διάστημα μιας εβδομάδας ανάμεσά τους.

Ο τρόπος διεξαγωγής της έρευνας είναι αυτός που προτείνεται από τον Duval (Duval, 1987: Duval, 1993) και από τον Gagatsis (1997). Προτείνεται ένα έργο και ζητείται η μετάφρασή του σε άλλες μορφές έκφρασης. Το πειραματικό αυτό μοντέλο εφαρμόστηκε σε πρόσφατες έρευνες σχετικά με την αριθμητική γραμμή (Γαγάτσης & Παναούρα, 2000).

Ο τρόπος διεξαγωγής των συνεντεύξεων προσομοιάζει με τον τρόπο διεξαγωγής των συνεντεύξεων των De Windt – King και Goldin (2003). Πρόκειται για ημιδομημένες συνεντεύξεις στις οποίες οι μαθητές καλούνται να χειριστούν την έννοια του κλάσματος με διαφορετικές αναπαραστάσεις.

Ο τρόπος διεξαγωγής του παρεμβατικού προγράμματος το οποίο εφαρμόσθηκε στα υποκείμενα της πειραματικής ομάδας, ακολούθησε σε γενικές γραμμές την έρευνα της Novillis - Larson (2000). Στα πλαίσια της έρευνας της Novillis – Larson εφαρμόσθηκε διδακτικό παρεμβατικό πρόγραμμα με στόχο να εξακριβωθεί αν οι μαθητές σημείωσαν βελτίωση στα έργα που περιλάμβαναν την αναπαράσταση κλασμάτων σε αριθμητικές γραμμές σε σχέση με την επίδοσή τους πριν την εφαρμογή του προγράμματος. Η διδακτική παρέμβαση της παρούσας εργασίας έγινε σε τρία στάδια. Αρχικά, δόθηκαν τα τέσσερα δοκίμια – πρώτη χορήγηση –, αργότερα εφαρμόσθηκε το παρεμβατικό πρόγραμμα και τέλος δόθηκαν τα τέσσερα δοκίμια για δεύτερη φορά – δεύτερη χορήγηση. Την ομάδα ελέγχου αποτελούσαν 24 μαθητές πέμπτης τάξης, οι οποίοι παρακολούθησαν τη σειρά μαθημάτων όπως προνοείται από το αναλυτικό πρόγραμμα των Μαθηματικών αναφορικά με τα κλάσματα. Οι συγκεκριμένοι μαθητές δεν διδάχθηκαν ούτε συμμετείχαν σε δραστηριότητες στις οποίες να δίνεται περαιτέρω έμφαση στην αριθμητική γραμμή ως αναπαράσταση της έννοιας του κλάσματος. Την πειραματική ομάδα αποτελούσαν 28 μαθητές πέμπτης τάξης, οι οποίοι συμμετείχαν σε ένα διδακτικό παρεμβατικό πρόγραμμα, που έδινε έμφαση στην αριθμητική γραμμή ως αναπαράσταση της έννοιας του κλάσματος.

Τέλος, στα πλαίσια της παρούσας ερευνητικής εργασίας εφαρμόστηκε για πρώτη φορά το πείραμα επικοινωνίας της Weber-Kubler (1982) σε έργα τα οποία εξετάζουν την αριθμητική γραμμή ως αναπαράσταση της ισοδυναμίας και πρόσθεσης κλασμάτων.

Στον πίνακα που ακολουθεί (Πίνακας 1) παρουσιάζεται συνοπτικά ο πειραματικός σχεδιασμός της έρευνας. Συγκεκριμένα, ο πίνακας περιλαμβάνει τις τρεις φάσεις της έρευνας, τους τρόπους συλλογής δεδομένων και τα είδη των έργων σε αντιστοιχία με τις υποθέσεις που εξετάζουν.

Πίνακας 1

Ο Πειραματικός Σχεδιασμός της Έρευνας

ΦΑΣΗ	ΤΡΟΠΟΙ ΣΥΛΛΟΓΗΣ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ	ΕΙΔΗ ΕΡΓΩΝ	ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ
Α	**Δοκίμιο Α (Αναγνώριση κλασμάτων)**	Έργα αναγνώρισης και αναπαράστασης πολλαπλής επιλογής	Υ4 και πρώτη προϋπόθεση της Υ1,
	Δοκίμιο Β (Ισοδυναμία κλασμάτων)	Έργα ισοδυναμίας κλασμάτων στο συμβολικό πεδίο	Υ2, Υ3,Υ4 και δεύτερη προϋπόθεση της Υ1
		Έργα μετάφρασης ισοδυναμίας κλασμάτων -από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση -από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή	Υ2,Υ3,Υ4 και Τρίτη προϋπόθεση της Υ1
	Δοκίμιο Γ (Πρόσθεση ομώνυμων και ετερώνυμων κλασμάτων)	Έργα πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων στο συμβολικό πεδίο	Υ2, Υ3,Υ4 και δεύτερη προϋπόθεση της Υ1
		Έργα μετάφρασης πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων -από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση -από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή	Υ2,Υ3,Υ4 και τρίτη προϋπόθεση της Υ1
		Έργα πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων στο συμβολικό πεδίο	Υ2, Υ3,Υ4 και δεύτερη προϋπόθεση της Υ1
		Έργα μετάφρασης πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων -από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση	Υ2,Υ3,Υ4 και τρίτη προϋπόθεση της Υ1,
		-από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή	Υ2, Υ3,Υ4 και δεύτερη και τρίτη προϋπόθεση της Υ1
	Δοκίμιο Δ (Προβλήματα)	Προβλήματα	Υ6
Β	**Συνεντεύξεις**	Έργα μετάφρασης ισοδυναμίας και πρόσθεσης κλασμάτων	Υ3 Υ5
	Πειράματα Επικοινωνίας	Έργα αναγνώρισης ισοδυναμίας και πρόσθεσης κλασμάτων και περιγραφή τους	Υ5
Γ	**Διδακτική παρέμβαση σε πειραματική ομάδα και επαναχορήγηση Δοκιμίων Α, Β, Γ και Δ σε ομάδα ελέγχου και πειραματική ομάδα**	Όλα τα έργα των Δοκιμίων Α, Β, Γ και Δ	Υ7

Ανάλυση Δεδομένων

Για την ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε (α) η Συνεπαγωγική Μέθοδος του Gras και (β) το Στατιστικό Πακέτο SPSS.

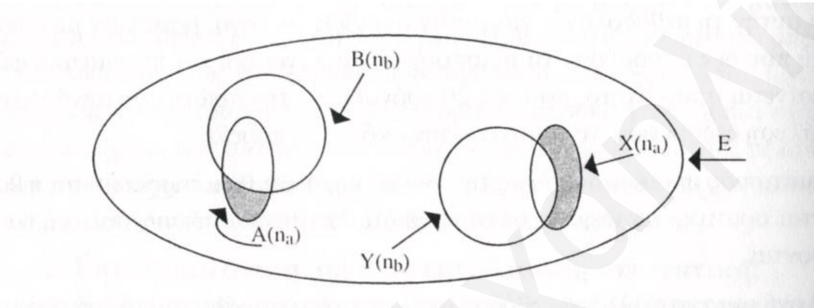
Η αναγκαιότητα χρήσης της Συνεπαγωγικής Μεθόδου του Gras φαίνεται από την παράθεση ενός προβληματισμού σχετικά με την έρευνα που διεξάγεται σε διάφορα εκπαιδευτικά θέματα. Συγκεκριμένα, ο Gras (1995) αναφέρει ότι η Συνεπαγωγική Μέθοδος αποτελεί μια μέθοδο ανάλυσης, η οποία ιεραρχεί και συνδέει παράγοντες. Η μέθοδος που προτείνει ο Gras (1995) κρίνεται κατάλληλη στην περίπτωση όπου αναζητούνται (α) οι κύριοι παράγοντες διάκρισης ως προς ένα πληθυσμό μέσω των μεταβλητών, (β) μια ομαδοποίηση των μεταβλητών, (γ) μια τυπολογία ή μια ταξινόμηση - μια ιεραρχική ταξινόμηση ομοιοτήτων και τέλος, (δ) μια συνεπαγωγή ανάμεσα στις μεταβλητές ή τις κλάσεις μεταβλητών - ένα δέντρο συνεπαγωγής ή μια ιεραρχία συνεπαγωγής κτλ.

Η συνεπαγωγική μέθοδος επιτρέπει την παρακολούθηση της γένεσης μιας ικανότητας και επιτρέπει την εύρεση αναλλοίωτων ή σταθερών στη σκέψη των υποκειμένων. Δεν πρόκειται για σχέσεις αιτιότητας, αλλά για ένα δείκτη ποιότητας που επιτρέπει τον ισχυρισμό ότι η επιτυχία σε ένα έργο συνεπάγεται την επιτυχία σε κάποιο άλλο έργο με το οποίο το πρώτο έργο συνδέεται. Κατ' αναλογία η αποτυχία σε κάποιο έργο συνεπάγεται την αποτυχία σε κάποιο άλλο έργο με το οποίο το πρώτο έργο συνδέεται (Gras, 1995).

Όπως επισημαίνει ο Gras (1995) η προβληματική που εισάγει τη συνεπαγωγική μέθοδο, στην περίπτωση που οι μεταβλητές είναι δυαδικές (ένα άτομο ικανοποιεί ή όχι μια μεταβλητή), είναι η ακόλουθη: Αν A και B είναι οι υποπληθυσμοί των υποκειμένων που έχουν ικανοποιήσει τις μεταβλητές a και b, αντίστοιχα, τίθεται το ερώτημα, *σε ποιο βαθμό μπορεί να επιβεβαιωθεί ότι «αν a τότε b» , χωρίς η συνεπαγωγή να δικαιολογείται a priori;*

Με βάση το Διάγραμμα 6 αν ACB, η πρόταση επιβεβαιώνεται. Γενικά, όμως, στις περισσότερες περιπτώσεις η τομή $A \cap \overline{B}$ είναι μη κενή. Σε αυτή την περίπτωση ο Gras (1995) θεωρεί δύο τυχαία σύνολα X και Y του E με πληθάριθμους na και nb ίσους με τους πληθάριθμους των A και B, αντίστοιχα. Τότε η πρόταση *αν α τότε β* είναι αποδεκτή σε επίπεδο εμπιστοσύνης 0,95 αν και μόνο αν:

Πιθανότητα [πληθάριθμος $(X \cap \overline{Y})$ < πληθάριθμος $(A \cap \overline{B})$] < 0,05.



<u>Διάγραμμα 6.</u> Η συνεπαγωγική μέθοδος. Από «Ανάλυση ενός ερωτηματολογίου με τη συνεπαγωγική μέθοδο,» του R. Gras, 1995, στου Α. Γαγάτση (Εκδ.), <u>Διδακτική και ιστορία των Μαθηματικών,</u> σ. 100.

Η ένδειξη συνεπαγωγής μετράει το βαθμό *έκπληξης* μπροστά στη μικρότητα του $A \cap \overline{B}$ σε σχέση με την εκ των προτέρων ανεξαρτησία και τα παρατηρούμενα αποτελέσματα.

Η συνεπαγωγική μέθοδος δίνει τα εξής διαγράμματα: (α) Συνεπαγωγικό Διάγραμμα, (β) Δενδροδιάγραμμα Ομοιότητας και (γ) Δενδροδιάγραμμα Ιεράρχησης. Στο Συνεπαγωγικό Διάγραμμα φαίνονται οι διάφορες σχέσεις συνεπαγωγής που υπάρχουν ανάμεσα στις μεταβλητές. Οι συνεπαγωγές είναι δυνατό να ισχύουν σε επίπεδο σημαντικότητας 99% ή 95%. Σε περίπτωση που παρουσιάζεται η συνεπαγωγή (Έργο1 $\longrightarrow$ Έργο 2) αυτό σημαίνει ότι η επιτυχία στο Έργο 1 συνεπάγεται την επιτυχία στο Έργο 2 και η αποτυχία στο Έργο 2 συνεπάγεται την αποτυχία στο Έργο 1. Αν το υποκείμενο επιτύχει στο Έργο 1 θα επιτύχει και στο Έργο 2, ενώ αν το υποκείμενο αποτύχει στο Έργο 2 θα αποτύχει και στο Έργο 1. Στο Δενδροδιάγραμμα Ομοιότητας φαίνονται οι σχέσεις ομοιότητας ανάμεσα στα διάφορα έργα. Έργα κατά την επίλυση των οποίων τα υποκείμενα συμπεριφέρονται με όμοιο τρόπο ομαδοποιούνται μαζί.

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από το Συνεπαγωγικό Διάγραμμα δίνουν απάντηση στην Υ2 σύμφωνα με την οποία με βάση το μαθηματικό κριτήριο της ομοιότητας υπάρχει μια *στεγανοποίηση*, συνολικά, των ειδών αναπαράστασης, των έργων μετάφρασης και των έργων ανάλογα με το γνωστικό αντικείμενο το οποίο εξετάζουν: αναγνώριση κλασμάτων, αναπαράσταση κλασμάτων, ισοδυναμία κλασμάτων και πρόσθεση κλασμάτων. Αν στο γενικό Συνεπαγωγικό Διάγραμμα δημιουργηθούν περιοχές ίδιων ειδών αναπαράστασης, έργων που αποτελούνται από ένα είδος μετάφρασης ή περιοχές έργων που αποτελούνται από έργα που εξετάζουν το ίδιο γνωστικό αντικείμενο, τότε θα επιβεβαιωθεί η υπόθεση Υ2.

Επίσης, τα αποτελέσματα που προκύπτουν με βάση το Συνεπαγωγικό Διάγραμμα δίνουν απάντηση στην υπόθεση Υ3 και στην υπόθεση Υ4, σύμφωνα με τις οποίες κάποια είδη μετάφρασης και κάποια γνωστικά αντικείμενα θεωρούνται πιο απλά σε επίπεδο μαθητών έκτης τάξης δημοτικού, δηλαδή υπάρχουν είδη μετάφρασης και γνωστικά αντικείμενα στα οποία πρέπει να επιτύχουν οι μαθητές, ώστε να είναι σε θέση να επιτύχουν σε άλλα είδη μετάφρασης και σε έργα με άλλα γνωστικά αντικείμενα αντίστοιχα.

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από το Δενδροδιάγραμμα Ομοιότητας δίνουν απάντηση στην υπόθεση Υ2, δηλαδή τη δημιουργία ξεχωριστών ομάδων έργων – στεγανοποίηση. Σε περίπτωση που η υπόθεση Υ2 επιβεβαιώνεται στο Δενδροδιάγραμμα Ομοιότητας παρατηρούνται ομαδοποιήσεις ειδών αναπαράστασης – κύκλοι, ευθύγραμμα τμήματα και αριθμητικές γραμμές. Παρατηρείται επίσης ομαδοποίηση των ειδών μετάφρασης. Η μία ομάδα περιλαμβάνει τα έργα μετάφρασης από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση τόσο στα έργα ισοδυναμίας όσο και στα έργα πρόσθεσης ενώ η δεύτερη ομάδα περιλαμβάνει τα έργα μετάφρασης από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή τόσο για τα έργα ισοδυναμίας όσο και για τα έργα πρόσθεσης κλασμάτων. Επίσης, σε περίπτωση που η υπόθεση Υ2 επιβεβαιώνεται σχηματίζονται περιοχές έργων που αποτελούνται από έργα του ίδιου γνωστικού αντικειμένου: αναγνώριση κλασμάτων, αναπαράσταση κλασμάτων, ισοδυναμία κλασμάτων και πρόσθεση κλασμάτων.

Τέλος, τα αποτελέσματα που προκύπτουν από το Δενδροδιάγραμμα Ομοιότητας δίνουν απάντηση στην έκτη και έβδομη υπόθεση, Υ6 και Υ7, σύμφωνα με τις οποίες η επίδοση των μαθητών στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων διαφοροποιείται όταν χρησιμοποιούν ως βοηθητικό μέσο το γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής και η αριθμητική γραμμή γίνεται ένα κατάλληλο μέσο αναπαράστασης της έννοιας του κλάσματος με την κατάλληλη διδακτική παρέμβαση αντίστοιχα. Με βάση το μαθηματικό κριτήριο της ομοιότητας αναμένεται να υπάρχει μια *στεγανοποίηση*, συνολικά, των ειδών αναπαράστασης, των έργων μετάφρασης και των έργων που εξετάζουν διαφορετικά γνωστικά αντικείμενα για τους μαθητές της ομάδας ελέγχου πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση και για τους μαθητές της πειραματικής ομάδας πριν τη διδακτική παρέμβαση.

Η ανάλυση των δεδομένων με τη χρήση του Στατιστικού Πακέτου SPSS - ποσοστά επιτυχίας – δίνει απάντηση στην υπόθεση Υ1 σύμφωνα με την οποία οι μαθητές δεν είναι ικανοί (α) να αναγνωρίζουν την έννοια της ισοδυναμίας και πρόσθεσης των κλασμάτων που *κρύβεται* πίσω από μια ποικιλία ποιοτικά διαφορετικών αναπαραστάσεων, (β) να χειρίζονται ευέλικτα την έννοια της ισοδυναμίας και πρόσθεσης των κλασμάτων με τη βοήθεια οποιασδήποτε αναπαράστασης και (γ) να μεταφράζουν με ακρίβεια την έννοια της ισοδυναμίας και πρόσθεσης των κλασμάτων από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο, κάτι το οποίο σύμφωνα με τους Lesh, Post και Behr (1987) αποτελεί ένδειξη κατανόηση της έννοιας.

Η χρήση του Στατιστικού Πακέτου SPSS και συγκεκριμένα της Παραγοντικής Ανάλυσης έχει σκοπό να εξετάσει τη δεύτερη υπόθεση Υ2, αφού επιχειρεί να εντοπίσει σε ποιους παράγοντες ομαδοποιούνται τα έργα έτσι ώστε να φανεί η *στεγανοποίηση*, συνολικά, των ειδών αναπαράστασης, των έργων μετάφρασης και των έργων ανάλογα με το γνωστικό αντικείμενο το οποίο εξετάζουν: αναγνώριση κλασμάτων, αναπαράσταση κλασμάτων, ισοδυναμία κλασμάτων και πρόσθεση κλασμάτων.

Επίσης, η ανάλυση των δεδομένων με τη χρήση του Στατιστικού Πακέτου SPSS σκοπό έχει να δώσει χρήσιμες πληροφορίες αναφορικά με τις υποθέσεις Υ3 και Υ4. Τα ποσοστά επιτυχίας θα επιβεβαιώσουν ή θα απορρίψουν τις υποθέσεις Υ3 και Υ4. Σύμφωνα με την υπόθεση Υ3 κάποια είδη μετάφρασης θεωρούνται πιο απλά σε επίπεδο μαθητών έκτης τάξης δημοτικού, ενώ σύμφωνα με την υπόθεση Υ4 υπάρχει διαφοροποίηση στην επίδοση των μαθητών έκτης τάξης δημοτικού αναφορικά με το γνωστικό αντικείμενο το οποίο εξετάζει το έργο – ισοδυναμία, πρόσθεση ομώνυμων, πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων αντίστοιχα.

Τέλος, οι μέσοι όροι επιτυχίας σκοπό έχουν να επιβεβαιώσουν ή να απορρίψουν τις υποθέσεις Υ6 και Υ7. Σε σχέση με την υπόθεση Υ6, οι μέσοι όροι επίδοσης των υποκειμένων που χρησιμοποίησαν την αριθμητική γραμμή στην επίλυση προβλημάτων και οι μέσοι όροι επίδοσης των υποκειμένων που έλυσαν τα προβλήματα με όποιο τρόπο ήθελαν σκοπό έχουν να εξακριβώσουν αν η επίδοση των μαθητών στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων διαφοροποιείται όταν χρησιμοποιούν ως βοηθητικό μέσο το γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής.

Αναφορικά με την υπόθεση Υ7 οι μέσοι όροι επιτυχίας της ομάδας ελέγχου και της πειραματικής ομάδας, πριν και μετά την εφαρμογή της διδακτικής παρέμβασης, σκοπό έχουν να εξακριβώσουν το αν η αριθμητική γραμμή ως διδακτικό εργαλείο δημιουργεί δυσκολίες στην κατανόηση των εννοιών της ισοδυναμίας και πρόσθεσης κλασμάτων, λόγω της έμφασης στην αλγοριθμική προσέγγιση των κλασμάτων κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Αναμένεται όπως μετά τη διδακτική παρέμβαση ο μέσος όρος επιτυχίας της πειραματικής ομάδας θα είναι ψηλότερος από εκείνο της ομάδας ελέγχου, αλλά και από το μέσο όρο της πειραματικής ομάδας πριν την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η Κατανόηση της Έννοιας του Κλάσματος

Ικανότητα Αναγνώρισης της Έννοιας του Κλάσματος σε Ποικιλία Ποιοτικά Διαφορετικών Αναπαραστάσεων

Με βάση τα αποτελέσματα του Δοκιμίου Α (Πίνακας 2) τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών στα διάφορα είδη έργων αναγνώρισης του κλάσματος διαφοροποιήθηκαν κάτι το οποίο σημαίνει ότι οι μαθητές δεν αναγνωρίζουν την έννοια του κλάσματος σε ποικιλία αναπαραστάσεων. Συγκεκριμένα, τα χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας στα έργα αναγνώρισης συγκέντρωσαν τα έργα στα οποία οι μαθητές καλούνται να αναγνωρίσουν την έννοια του κλάσματος στο ευθύγραμμο τμήμα και στην αριθμητική γραμμή (47.6% και 53.4% αντίστοιχα).

Το πιο συνηθισμένο λάθος των μαθητών – Δοκίμιο Α, Έργο 2 – ήταν η επιλογή της αριθμητικής γραμμής στην οποία παρουσιάζονται οι αριθμοί 0,1,2,3 και 4 και στην οποία το βέλος ξεκινά από το 0 και καταλήγει στο 3, ως αναπαράστασης του κλασματικού αριθμού ¾. Το είδος αυτού του λάθους δείχνει ότι η υποέννοια του κλάσματος μέρος – όλο είναι κυρίαρχη στη σκέψη των μαθητών αναφορικά με την κατανόηση των κλασμάτων. Εκλαμβάνουν την αριθμητική γραμμή ως ένα ευθύγραμμο τμήμα, μια ολότητα, από το οποίο θα επιλέξουν ένα μέρος του και όχι ως ένα συνεχές μοντέλο πάνω στο οποίο ένα σημείο δεν έχει αριθμητικό νόημα μέχρι τη στιγμή που να καθορισθεί το νόημα δύο άλλων τουλάχιστον σημείων αναφοράς. Στο συγκεκριμένο έργο η αριθμητική γραμμή αναπαριστά τον αριθμό 3 και όχι το ¾.

Ακόμα ένα λάθος, το οποίο παρουσιάστηκε κατ’ επανάληψη από μέρους των μαθητών –Δοκίμο Α, Έργο 4 – ήταν η επιλογή της αριθμητικής γραμμής που περιλαμβάνει το διάστημα 0 ως το 2 και αναπαριστά τον αριθμό 1 ¼, ως αναπαράστασης του αριθμού 2/3. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, το είδος αυτού του λάθους δείχνει ότι η υποέννοια μέρος – όλο είναι κυρίαρχη στη σκέψη των μαθητών αναφορικά με την κατανόηση των κλασμάτων. Κατά συνέπεια, καταφεύγουν στη διαδικασία της διπλής μέτρησης για να εντοπίσουν το κλάσμα χωρίς να λαμβάνουν υπόψη ότι ένα σημείο στην αριθμητική γραμμή αποκτά νόημα όταν καθορισθεί το νόημα δύο τουλάχιστον άλλων σημείων αναφοράς.

Τα ψηλότερα ποσοστά αναγνώρισης κλάσματος συγκέντρωσαν τα έργα τα οποία περιλαμβάνουν το εμβαδόν του κύκλου ως αναπαράσταση της έννοιας του κλάσματος (85.4%). Το αποτέλεσμα αυτό ήταν αναμενόμενο, λόγω της έμφασης που δίνεται στην υποέννοια μέρος – όλο τόσο κατά την εισαγωγή όσο και κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας της έννοιας του κλάσματος και την εκτεταμένη χρήση του εμβαδού κύκλου ή ορθογωνίου ως αναπαράστασης της έννοιας του κλάσματος.

Πίνακας 2

Ποσοστά Επιτυχίας των Υποκειμένων στα Έργα Αναγνώρισης της Έννοιας του Κλάσματος

Είδος έργου αναγνώρισης	Ποσοστό επιτυχίας (%)
Ευθύγραμμο τμήμα	47.6
Αριθμητική γραμμή	53.4
Εμβαδόν κύκλου	85.4

Αναφορικά με την ικανότητα αναγνώρισης της ισοδυναμίας κλασμάτων, δηλαδή τη συμπλήρωση έργων στα οποία οι υποδιαιρέσεις των αναπαραστάσεων είναι οι μισές ή οι διπλάσιες του παρονομαστή του δοσμένου κλάσματος – Δοκίμιο Α, Έργα 2 και 6 – τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών διαφοροποιήθηκαν (Πίνακας 3). Τα χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας συγκέντρωσαν τα έργα στα οποία οι μαθητές καλούνται να αναγνωρίσουν την ισοδυναμία κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή και στο ευθύγραμμό τμήμα (35.1% και 46.1% αντίστοιχα). Η αναπαράσταση της ισοδυναμίας κλασμάτων με τη χρήση του εμβαδού του κύκλου συγκέντρωσε το ψηλότερο ποσοστό επιτυχίας (61.5%). Παρατηρήθηκε ότι και στα τρία είδη έργων αναγνώρισης – αριθμητική γραμμή, ευθύγραμμο τμήμα, εμβαδόν κύκλου – τα ποσοστά επιτυχίας μειώθηκαν όταν εξετάζεται η ισοδυναμία κλασμάτων. Το αποτέλεσμα αυτό ίσως να οφείλεται στο γεγονός ότι τα έργα αυτά είναι μεγαλύτερου βαθμού δυσκολίας σε σχέση με τα υπόλοιπα έργα αναγνώρισης. Τα συγκεκριμένα έργα προϋποθέτουν μεγαλύτερο φόρτο νοητικής επεξεργασίας, αφού η επιτυχής επίλυσή τους συνδυάζει τόσο την ικανότητα χειρισμού μιας αναπαράστασης, αλλά και την ικανότητα εύρεσης ισοδύναμου κλάσματος και νέας υποδιαίρεσης της αναπαράστασης.

Πίνακας 3

Ποσοστά Επιτυχίας στα Έργα Αναγνώρισης της Ισοδυναμίας Κλασμάτων

Είδος έργου αναπαράστασης	Ποσοστό επιτυχίας (%)
Ευθύγραμμο τμήμα	35.1
Αριθμητική γραμμή	46.3
Εμβαδόν κύκλου	61.5

Οι μαθητές παρουσιάζουν δυσκολίες στα έργα αναπαράστασης της έννοιας του κλάσματος και της ισοδυναμίας κλασμάτων στα διαφορετικά πεδία αναπαράστασης και ιδιαίτερα στην αριθμητική γραμμή.

Συγκεκριμένα, με βάση τα αποτελέσματα του Δοκιμίου Α (Πίνακας 4) τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών στα έργα αναπαράστασης διέφεραν. Τα χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας συγκέντρωσαν τα έργα στα οποία οι μαθητές καλούνται να αναπαραστήσουν την έννοια του κλάσματος στην αριθμητική γραμμή και στο ευθύγραμμό τμήμα (72.2% και 68.8% αντίστοιχα). Αντίθετα, η αναπαράσταση της έννοιας του κλάσματος με τη χρήση του εμβαδού του κύκλου συγκέντρωσε το ψηλότερο ποσοστό επιτυχίας (91.7%).

Πίνακας 4

Ποσοστά Επιτυχίας στα Έργα Αναπαράστασης Κλασμάτων

Είδος έργου αναπαράστασης	Ποσοστό επιτυχίας (%)
Ευθύγραμμο τμήμα	68.8
Αριθμητική γραμμή	72.2
Εμβαδόν κύκλου	91.7

Αναφορικά με την ικανότητα αναπαράστασης της ισοδυναμίας κλασμάτων, δηλαδή τη συμπλήρωση έργων στα οποία οι υποδιαιρέσεις είναι οι μισές ή οι διπλάσιες του παρονομαστή του δοσμένου κλάσματος – Δοκίμιο Α, Έργα 8 και 9 – τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών, επίσης, διαφοροποιήθηκαν (Πίνακας 5). Τα χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας συγκέντρωσαν τα έργα στα οποία οι μαθητές καλούνται να αναπαραστήσουν την ισοδυναμία κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή και στο ευθύγραμμό τμήμα (52.9% και 54.4% αντίστοιχα). Η αναπαράσταση της ισοδυναμίας κλασμάτων με τη χρήση του εμβαδού του κύκλου συγκέντρωσε το ψηλότερο ποσοστό επιτυχίας (63.1%). Παρατηρήθηκε ότι και στα τρία είδη έργων αναπαράστασης – αριθμητική γραμμή, ευθύγραμμο τμήμα, εμβαδόν κύκλου – τα ποσοστά επιτυχίας μειώθηκαν όταν εξετάζεται η ισοδυναμία κλασμάτων. Το αποτέλεσμα αυτό ίσως να οφείλεται στο γεγονός ότι τα έργα αυτά είναι μεγαλύτερου βαθμού δυσκολίας σε σχέση με τα έργα αναπαράστασης κλασμάτων. Όπως και στην περίπτωση των έργων αναγνώρισης έτσι και τα έργα αναπαράστασης ενός ισοδύναμου κλάσματος προϋποθέτουν μεγάλο φόρτο νοητικής επεξεργασίας, αφού η επιτυχής επίλυσή τους συνδυάζει τόσο την ικανότητα χειρισμού μιας αναπαράστασης, αλλά και την ικανότητα εύρεσης ισοδύναμου κλάσματος και νέας υποδιαίρεσης της αναπαράστασης.

Τα έργα αναπαράστασης συγκεντρώνουν ψηλότερα ποσοστά επιτυχίας σε σχέση με τα έργα αναγνώρισης. Αυτό ίσως να οφείλεται στο γεγονός ότι στα έργα αναπαράστασης δεν περιλαμβάνονταν αριθμητικές γραμμές με παραπλανητικά στοιχεία (διαστήματα μεγαλύτερα από το διάστημα 0 ως 1), σε αντίθεση με τα έργα αναγνώρισης.

Πίνακας 5

Ποσοστά Επιτυχίας στα Έργα Αναπαράστασης της Ισοδυναμίας Κλασμάτων

Είδος έργου αναπαράστασης	Ποσοστό επιτυχίας (%)
Ευθύγραμμο τμήμα	54.4
Αριθμητική γραμμή	52.9
Εμβαδόν κύκλου	63.1

Ικανότητα Ευέλικτου Χειρισμού της Έννοιας του Κλάσματος σε Ένα Πεδίο Αναπαράστασης

Αναφορικά με την ευέλικτη χρήση της έννοιας σε ένα πεδίο αναπαράστασης ο Πίνακας 6 παρουσιάζει τα ποσοστά επιτυχίας στα έργα που αφορούσαν το χειρισμό της ισοδυναμίας κλασμάτων, της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων και της πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων στο ίδιο πεδίο, το συμβολικό. Στο συγκεκριμένο πίνακα περιλαμβάνεται, επίσης, το ποσοστό επιτυχίας των μαθητών στα έργα μετάφρασης από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή για την πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων. Παρόλο που πρόκειται για έργο μετάφρασης, συμπεριλήφθηκε στα έργα που εξέταζαν την ικανότητα χειρισμού της έννοιας στο ίδιο πεδίο, αφού προϋποθέτει την αναπαράσταση των δύο προσθετέων σε δύο διαφορετικές αριθμητικές γραμμές και ακολούθως την κατασκευή μιας τρίτης αριθμητικής γραμμής, η οποία να αναπαριστά τα δύο ισοδύναμα αλλά ομώνυμα κλάσματα που προκύπτουν από τα δύο αρχικά ετερώνυμα. Η κατασκευή της τρίτης γραμμής και η εύρεση της υποδιαίρεσης της, προκύπτει από τις δύο προηγούμενες αριθμητικές γραμμές. Πρόκειται, λοιπόν, για διαδικασία η οποία περιλαμβάνει μετασχηματισμούς στο ίδιο πεδίο, που στην προκειμένη περίπτωση είναι η αριθμητική γραμμή. Για το λόγο αυτό συμπεριλήφθηκε στα έργα που προϋποθέτουν μετασχηματισμούς στο ίδιο πεδίο.

Πίνακας 6

Ποσοστά επιτυχίας στα έργα που αφορούσαν το χειρισμό της έννοιας του κλάσματος στο ίδιο πεδίο.

Γνωστικό Αντικείμενο	Ποσοστό επιτυχίας στη συμβολική έκφραση
Ισοδυναμία Κλασμάτων (Συμβολική έκφραση)	82.0
Σειροθέτηση Κλασμάτων (Συμβολική έκφραση)	34.5
Πρόσθεση Ομώνυμων Κλασμάτων (Συμβολική έκφραση)	99.5
Πρόσθεση Ετερώνυμων Κλασμάτων (Συμβολική έκφραση)	56.8
Πρόσθεση Ετερώνυμων Κλασμάτων (Μετάφραση Συμβολική έκφραση – Αριθμητική γραμμή)	42.2

Χαμηλά ποσοστά συγκέντρωσαν τα έργα σειροθέτησης κλασμάτων και τα έργα πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων. Αυτό ίσως να οφείλεται στο γεγονός ότι τα έργα αυτά προϋποθέτουν μεγάλο φόρτο νοητικής επεξεργασίας. Συγκεκριμένα, η σύγκριση των κλασμάτων, ιδιαίτερα στην περίπτωση που τα κλάσματα είναι ετερώνυμα, προϋποθέτει την κατανόηση της ισοδυναμίας κλασμάτων, τη μετατροπή των ετερώνυμων κλασμάτων σε ομώνυμα και τη σειροθέτησή τους. Αναφορικά, με τα έργα πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων αυτά συγκέντρωσαν χαμηλά ποσοστά επιτυχίας, αφού προϋποθέτουν τόσο την κατανόηση της διαδικασίας της πρόσθεσης, όσο και της ισοδυναμίας κλασμάτων η οποία στοχεύει στη μετατροπή των ετερώνυμων κλασμάτων σε ομώνυμα.

Χαμηλά ποσοστά συγκέντρωσαν, επίσης, τα έργα μετάφρασης από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή αναφορικά με την πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων (42.2%). Τα έργα αυτά προϋπόθεταν μετασχηματισμούς στο ίδιο πεδίο, την αριθμητική γραμμή, κάτι το οποίο φάνηκε να δυσκολεύει τους μαθητές, αφού περιλαμβάναν την ικανότητα κατασκευής και χρήσης της αριθμητικής γραμμής, την ικανότητα αναπαράστασης κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή, την κατανόηση της έννοιας της ισοδυναμίας κλασμάτων και τη μετατροπή των ετερώνυμων σε ομώνυμα κλάσματα.

Ικανότητα Μετάφρασης από Μια Αναπαράσταση της Έννοιας σε Άλλη

Με βάση τα αποτελέσματα (Πίνακες 7, 8 και 9) φάνηκε ότι οι μαθητές δεν μεταφράζουν με ακρίβεια από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο, αλλά αντιμετωπίζουν περισσότερες δυσκολίες σε συγκεκριμένα είδη μετάφρασης.

Με βάση τα αποτελέσματα που προέκυψαν από το Δοκίμιο Β –Ισοδυναμία Κλασμάτων – το ποσοστό επιτυχίας στα έργα που περιλάμβαναν τη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική αναπαράσταση ήταν 39.8%. Τα έργα μετάφρασης από τη συμβολική αναπαράσταση στην αριθμητική γραμμή συγκέντρωσαν ποσοστό επιτυχίας 54.9% (Πίνακας 7).

Πίνακας 7

Ποσοστά Επιτυχίας των Υποκειμένων στα Έργα Μετάφρασης του Δοκιμίου Β (Ισοδυναμία κλασμάτων).

Είδος μετάφρασης	Ποσοστό επιτυχίας (%)
Αριθμητική γραμμή – Συμβολική έκφραση	39.8
Συμβολική έκφραση – Αριθμητική γραμμή	54.9

Στον Πίνακα 8 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από το Δοκίμιο Γ – Πρόσθεση Κλασμάτων. Το ποσοστό επιτυχίας στα έργα που εξέταζαν την πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων και περιλάμβαναν τη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική αναπαράσταση ήταν 52.9%. Τα έργα μετάφρασης που εξέταζαν την πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων από τη συμβολική αναπαράσταση στην αριθμητική γραμμή συγκέντρωσαν ποσοστό επιτυχίας 59.7%.

Πίνακας 8

Ποσοστά Επιτυχίας των Υποκειμένων στα Έργα Μετάφρασης του Δοκιμίου Γ (Πρόσθεση Ομώνυμων Κλασμάτων).

Είδος μετάφρασης	Ποσοστό επιτυχίας
Αριθμητική γραμμή – Συμβολική έκφραση	52.9
Συμβολική έκφραση – Αριθμητική γραμμή	59.7

Αναφορικά με την πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων (Πίνακας 9) το ποσοστό επιτυχίας στα έργα που εξέταζαν τη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική αναπαράσταση ήταν 43.2%. Τα έργα μετάφρασης που εξέταζαν τη μετάφραση από τη συμβολική αναπαράσταση στην αριθμητική γραμμή συγκέντρωσαν ποσοστό επιτυχίας 42.2%.

Πίνακας 9

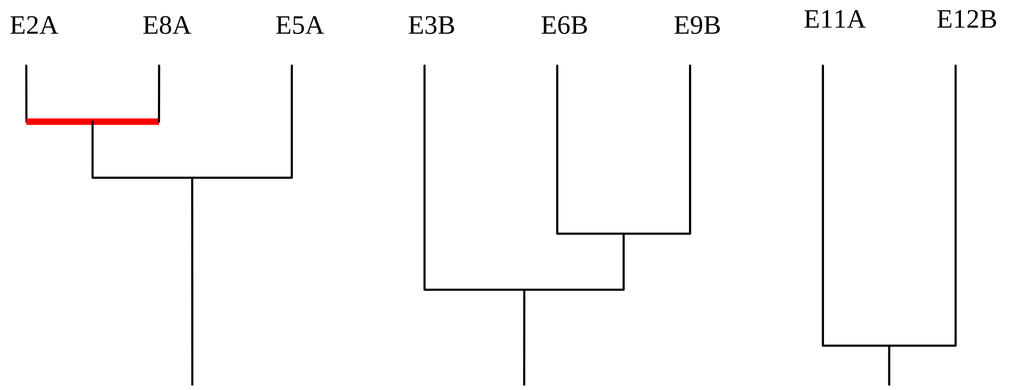
Ποσοστά Επιτυχίας των Υποκειμένων στα Έργα Μετάφρασης του Δοκιμίου Γ (Πρόσθεση Ετερώνυμων Κλασμάτων).

Είδος μετάφρασης	Ποσοστό επιτυχίας (%)
Αριθμητική γραμμή – Συμβολική έκφραση	43.2.
Συμβολική έκφραση – Αριθμητική γραμμή	42.2.

Στεγανοποίηση Έργων Μετάφρασης, Έργων που Εξετάζουν Διαφορετικό Γνωστικό Αντικείμενο και Έργων Αναπαράστασης

<u>Στεγανοποίηση των Έργων Μετάφρασης</u>

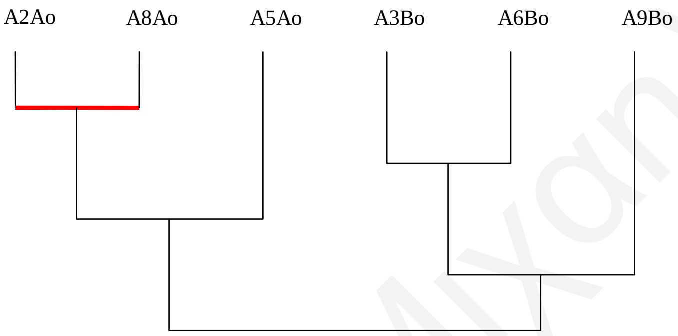
Με βάση τα αποτελέσματα που προέκυψαν από το Διάγραμμα Ομοιότητας των Έργων Μετάφρασης του Δοκιμίου Β, Διάγραμμα 7, φάνηκε ότι υπάρχει κάποια στεγανοποίηση των έργων μετάφρασης του Δοκιμίου Β, το οποίο εξετάζει την ισοδυναμία κλασμάτων. Συγκεκριμένα, παρατηρείται η δημιουργία ομάδας με έργα μετάφρασης από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή – Ε3Β, Ε9Β, Ε6Β – και ομάδας με έργα μετάφρασης από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση – Ε2Α, Ε5Α, Ε8Α. Η σχέση μεταξύ των έξι έργων είναι σημαντική. Όμως, παρόλο που η σχέση αυτή είναι σημαντική, με βάση το διάγραμμα φαίνεται ότι τα έργα μετάφρασης από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή – Ε3Β, Ε9Β, Ε6Β– καταλαμβάνουν ξεχωριστό κλάδο του δενδροδιαγράμματος σε σχέση με τα έργα μετάφρασης από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση – Ε2Α, Ε5Α, Ε8Α.



<u>Διάγραμμα 7.</u> Διάγραμμα Ομοιότητας Έργων Μετάφρασης Ισοδυναμίας Κλασμάτων (Δοκίμιο Β)

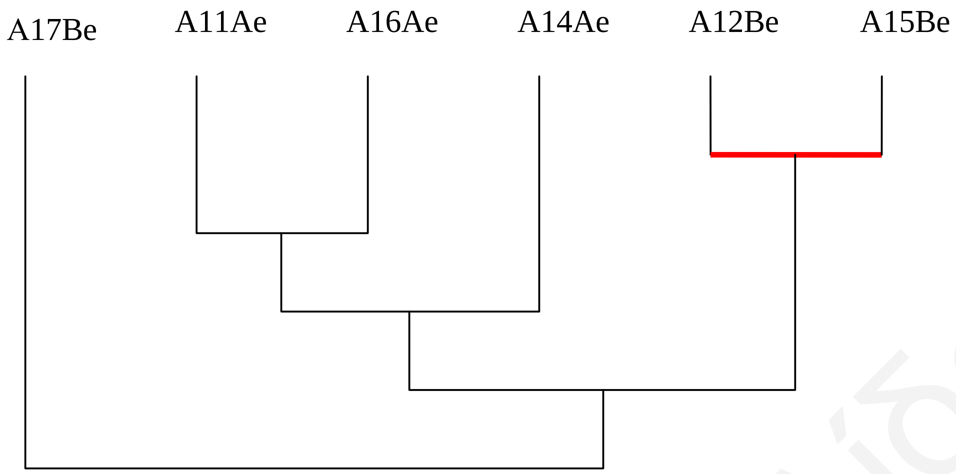
Η στεγανοποίηση των έργων μετάφρασης παρατηρήθηκε και στα έργα μετάφρασης του Δοκιμίου Γ, το οποίο εξετάζει την πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων.

Με βάση τα αποτελέσματα που προέκυψαν από το Διάγραμμα Ομοιότητας για τα Ομώνυμα Κλάσματα, Διάγραμμα 8, φάνηκε ότι η σχέση ανάμεσα στα έργα μετάφρασης από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή, A2Ao και A8Ao, είναι σημαντική. Επίσης, το διάγραμμα αποτελείται από δύο ξεχωριστούς κλάδους δημιουργώντας έτσι μια ομάδα με έργα μετάφρασης από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή – A3Bo, A6Bo, A9Bo– και μια ομάδα με έργα μετάφρασης από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση – A2Ao, A5Ao, A8Ao.



Διάγραμμα 8. Διάγραμμα Ομοιότητας για Έργα Μετάφρασης Πρόσθεσης Ομώνυμων Κλασμάτων

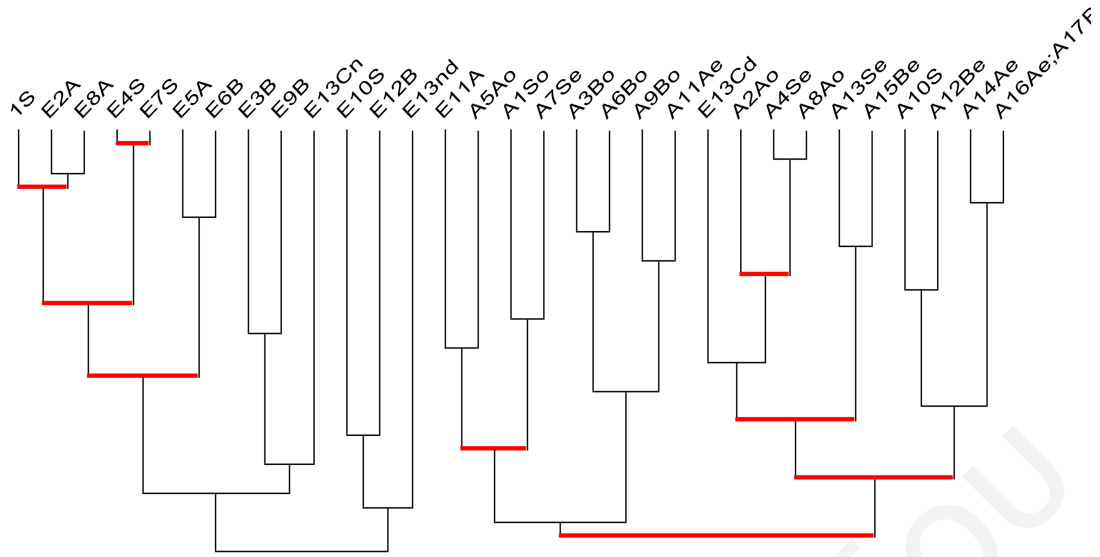
Με βάση τα αποτελέσματα που προέκυψαν από το Διάγραμμα Ομοιότητας για τα Έργα Μετάφρασης της Πρόσθεσης Ετερώνυμων Κλασμάτων, Διάγραμμα 9, φάνηκε ότι η σχέση ανάμεσα στα έργα μετάφρασης A12Be και A15Be είναι σημαντική. Τα έργα αυτά είναι έργα μετάφρασης από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή. Όπως και το Διάγραμμα Ομοιότητας για την Πρόσθεση Ομώνυμων Κλασμάτων, Διάγραμμα 12, έτσι και το Διάγραμμα Ομοιότητας για την Πρόσθεση Ετερώνυμων Κλασμάτων, Διάγραμμα 13, σχηματίζονται ξεχωριστοί κλάδοι έργων δημιουργώντας έτσι μια ομάδα στην οποία επικρατούν τα έργα μετάφρασης από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή –A11Ae, A16Ae, A14Ae – και μια ομάδα στην οποία επικρατούν τα έργα μετάφρασης από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση – A12Be, A15Be.



Διάγραμμα 9. Διάγραμμα Ομοιότητας Έργων Μετάφρασης για την Πρόσθεση Ετερώνυμων Κλασμάτων

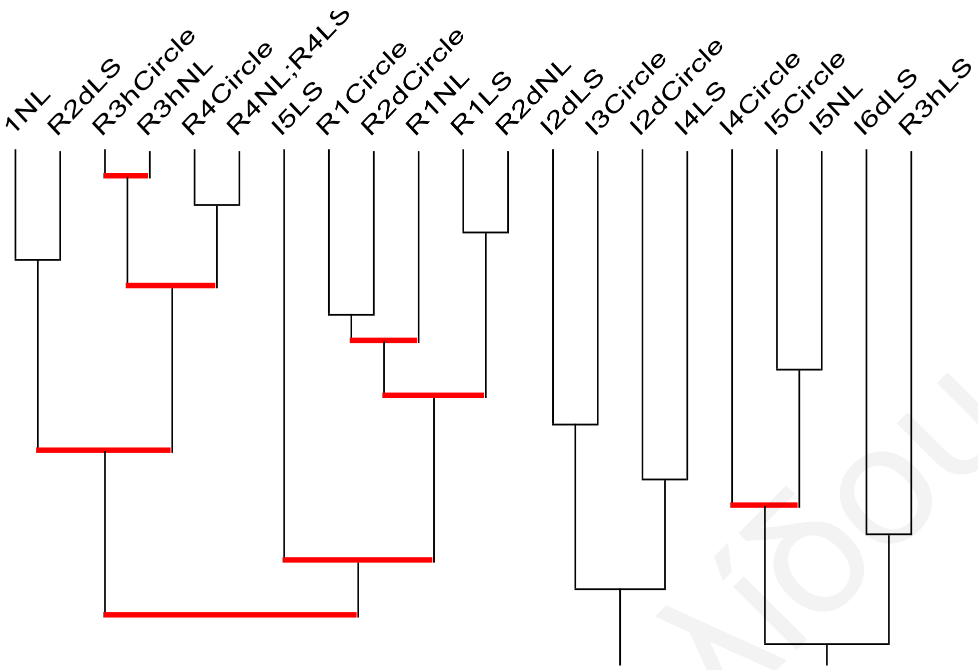
Στεγανοποίηση των Έργων Ανάλογα με το Γνωστικό Αντικείμενο που Εξετάζουν

Η στεγανοποίηση των έργων δεν αφορούσε αποκλειστικά το είδος μετάφρασης, αλλά και το είδος έργου. Με βάση το Διάγραμμα Ομοιότητας το οποίο περιλαμβάνει τα έργα των Δοκιμίων Β και Γ, Διάγραμμα 14, παρατηρήθηκε στεγανοποίηση των έργων με βάση το είδος του έργου. Ειδικότερα, παρατηρείται η δημιουργία ομάδας, η οποία περιλαμβάνει έργα ισοδυναμίας κλασμάτων –E1S, E2A, E8A, E4S, E7S, E5A, E7S, E6B, – καθώς και η δημιουργία ομάδας η οποία περιλαμβάνει κατά πλειοψηφία έργα πρόσθεσης κλασμάτων –E11A, A5Ao, A1So, A7Se, A9Bo, A3Bo, A6Bo, A9Bo, A11Ae, E13Cd, A2Ao, A4Se, A8Ao, A13Se, A15Be, A10S, A12Be, A14Ae, A16Ae, A17Be.



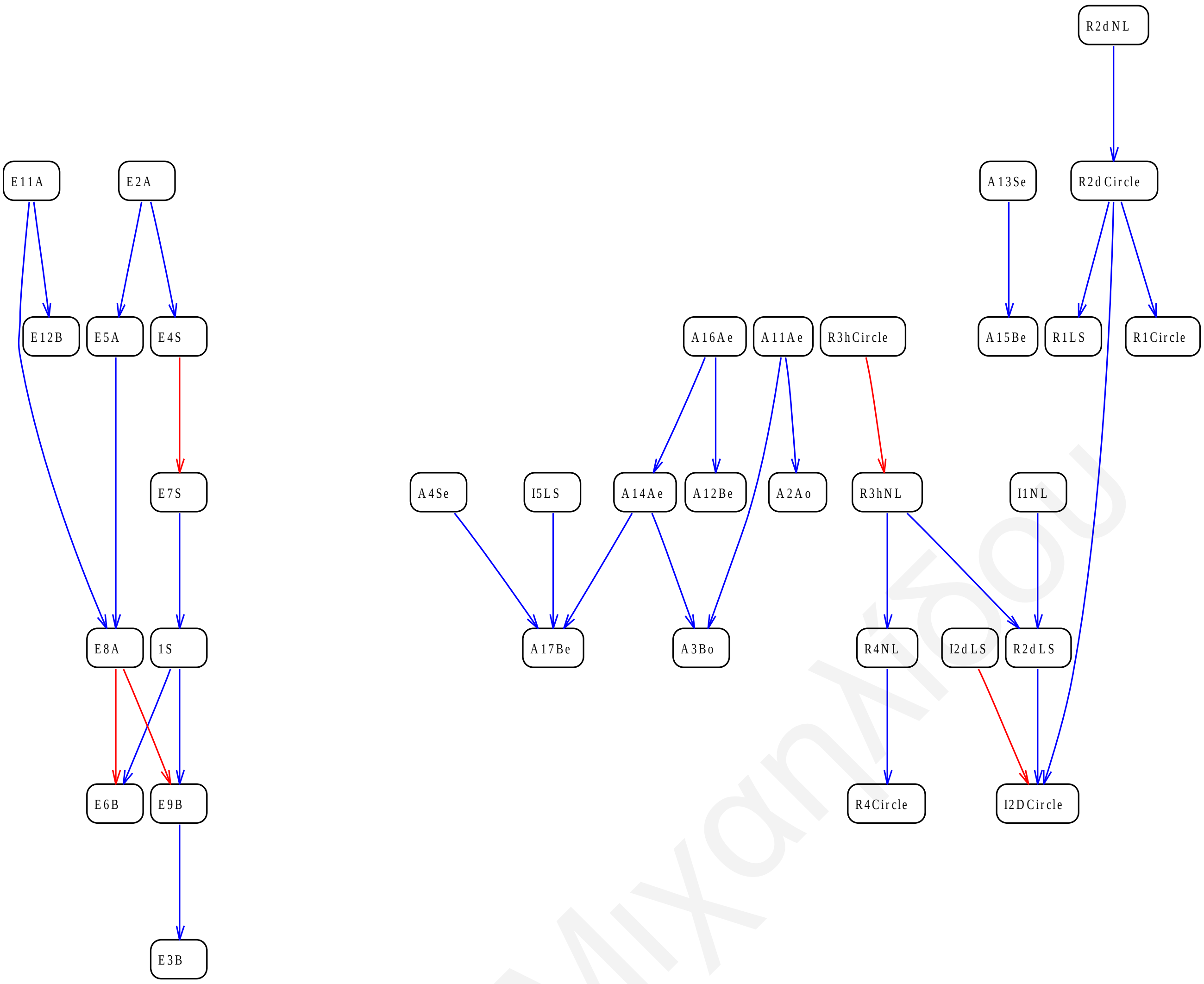
<u>Διάγραμμα 10.</u> Διάγραμμα Ομοιότητας για τα Έργα Ισοδυναμίας και Πρόσθεσης (Δοκίμιο Β και Δοκίμιο Γ).

Η στεγανοποίηση με βάση το είδος του έργου φάνηκε και στο Διάγραμμα Ομοιότητας για τα έργα το Δοκιμίου Α, Διάγραμμα 11. Στο συγκεκριμένο διάγραμμα δημιουργούνται δύο ξεχωριστές ομάδες έργων. Η μια ομάδα περιλαμβάνει τα έργα αναγνώρισης των κλασμάτων –I2dLS, I3Circle, I2dCircle, I4LS, I4Circle, I5Circle,I5NL, I6dLS, R3Hls – και η δεύτερη ομάδα περιλαμβάνει τα έργα στα οποία οι μαθητές κλήθηκαν να αναπαραστήσουν τα κλάσματα σε διαφορετικά είδη αναπαραστάσεων – R1NL, R2dLS, R3hCircle, R3hNL, R4Circle, I5LS, R1Circle, R2dCircle, R1NL, R1LS, R2NL.



Διάγραμμα 11. Διάγραμμα Ομοιότητας Έργων Αναγνώρισης και Αναπαράστασης Κλασμάτων στο ίδιο πεδίο (Δοκίμιο Α).

Τέλος, η στεγανοποίηση με βάση το είδος του έργου φάνηκε στο Γενικό Συνεπαγωγικό Διάγραμμα το οποίο περιλαμβάνει όλα τα έργα των Δοκιμίων Α, Β, Γ, Διάγραμμα 12, στο οποίο έχουν δημιουργηθεί τρεις περιοχές έργων. Συγκεκριμένα, η πρώτη περιοχή έργων αποτελείται από έργα του Δοκιμίου Β – E11A, E12B, E2A, E5A,E8A, E3B, E9B, E6B, E4S, E7S,E1S, δηλαδή έργα ισοδυναμίας κλασμάτων. Η δεύτερη περιοχή έργων αποτελείται από έργα του Δοκιμίου Γ – A3Bo, A11Ae, A2Ao, A4Se, A13Se, A15Be, A12Be, A14Ae, A16Ae, A17Be, δηλαδή έργα πρόσθεσης κλασμάτων. Τέλος η τρίτη περιοχή έργων αποτελείται από έργα του Δοκιμίου Α -I1NL, I2dLS, I2dCircle R2dLS, R4NL, R3hCircle, R3hNL, R4Circle, R1Circle, R2dNL, R2dCircle, R1LS, δηλαδή έργα αναγνώρισης και αναπαράστασης κλασμάτων.



<u>Διάγραμμα 12.</u> Συνεπαγωγικό Διάγραμμα Έργων Αναγνώρισης και Αναπαράστασης Κλασμάτων (Δοκίμιο Α), Έργων Ισοδυναμίας Κλασμάτων (Δοκίμιο Β) και Έργων Πρόσθεσης Κλασμάτων (Δοκίμιο Γ).

Η στεγανοποίηση με βάση το είδος του έργου, δηλαδή με βάση το γνωστικό αντικείμενο που εξέταζε το κάθε έργο, φάνηκε και στην παραγοντική ανάλυση των έργων των Δοκιμίων Α, Β, Γ και Δ. Με βάση τα αποτελέσματα της παραγοντικής ανάλυσης προέκυψαν οκτώ παράγοντες οι οποίοι αντιπροσωπεύουν τις σχέσεις ανάμεσα στις μεταβλητές, τα έργα δοκιμίων και επεξηγούν περίπου 56% της συνολικής διασποράς.

Ο πρώτος παράγοντας αντιπροσωπεύει τη σχέση ανάμεσα τις μεταβλητές A12Be, A5Ao, A16Ae, A15Ae, A8Ao, A11Ae, A17Be, A14Ae, A6Bo, A2Ao, A7Se, A3Bo, A10S, A13Se, A4Se, οι οποίες ανήκουν στο Δοκίμιο Γ, δηλαδή στο δοκίμιο που εξετάζει την πρόσθεση κλασμάτων. Κατά συνέπεια ο πρώτος παράγοντας σχετίζεται με την πρόσθεση κλασμάτων.

Ο δεύτερος παράγοντας αντιπροσωπεύει τη σχέση ανάμεσα τις μεταβλητές E2A, E10S, E8A, E5A, E1S, E7S, E9B, E6B, E4S, οι οποίες ανήκουν στο Δοκίμιο Β, δηλαδή στο δοκίμιο που εξετάζει την ισοδυναμία κλασμάτων. Κατά συνέπεια ο δεύτερος παράγοντας σχετίζεται με την ισοδυναμία κλασμάτων.

Ο τρίτος παράγοντας αντιπροσωπεύει τη σχέση ανάμεσα στις μεταβλητές R4nl, R4ls, R3hnl, R3hls, R2dls, R2dnl, R1ls, R1nl, I5ls, R3hcircle, R2dcircle, I4ls, οι οποίες ανήκουν στο Δοκίμιο Α, δηλαδή στο δοκίμιο που εξετάζει την ικανότητα αναγνώρισης κλασμάτων σε ποικιλία αναπαραστάσεων. Ειδικότερα, πρόκειται για τα έργα που εξετάζουν την ικανότητα αναγνώρισης και αναπαράστασης της έννοιας του κλάσματος στην αριθμητική γραμμή –nl – και στο ευθύγραμμο τμήμα –ls. Ο τρίτος παράγοντας σχετίζεται με την ικανότητα αναπαράστασης της έννοιας του κλάσματος σε ποικιλία αναπαραστάσεων και ειδικότερα στην αριθμητική γραμμή και στο ευθύγραμμο τμήμα.

Ο τέταρτος παράγοντας αντιπροσωπεύει τη σχέση ανάμεσα στις μεταβλητές P2bdiagr, P2cdiagr, P2adiagr, P2ddiagr, P4adiagr, P1diagr, P4cdiagr, P4bdiagr, P3diagr, οι οποίες ανήκουν στο Δοκίμιο Δ, δηλαδή στο δοκίμιο που περιλαμβάνει τα προβλήματα πρόσθεσης κλασμάτων. Συγκεκριμένα, πρόκειται για τα έργα που ανήκουν στο δοκίμιο στο οποίο οι μαθητές κλήθηκαν να λύσουν τα προβλήματα με τη βοήθεια της αριθμητικής γραμμής -diagr. Ο τέταρτος παράγοντας αφορά τα προβλήματα πρόσθεσης κλασμάτων τα οποία επιλύθηκαν με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής.

Ο πέμπτος παράγοντας αντιπροσωπεύει τη σχέση ανάμεσα στις μεταβλητές P4bans, P4aans, P4cexp, P3exp, P4bexp, P4aexp, οι οποίες ανήκουν στο Δοκίμιο Δ, δηλαδή στο δοκίμιο που περιλαμβάνει τα προβλήματα πρόσθεσης κλασμάτων.

Συγκεκριμένα, πρόκειται για τα προβλήματα 4 και 5, τα οποία επιλύθηκαν χωρίς τη χρήση της αριθμητικής γραμμής. Ο πέμπτος παράγοντας αφορά τα προβλήματα πρόσθεσης κλασμάτων τα οποία δεν επιλύθηκαν με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής, αλλά με τη χρήση της συμβολικής έκφρασης, δηλαδή της εξίσωσης.

Ο έκτος παράγοντας αφορά στη σχέση ανάμεσα στις μεταβλητές P2cans, P2bans, P2aans, P2dans, P2dexp και P1exp, οι οποίες ανήκουν στο Δοκίμιο Δ, δηλαδή το δοκίμιο που περιλαμβάνει τα προβλήματα. Πρόκειται για έργα που αφορούν κυρίως την ορθή διατύπωση απάντησης στο πρόβλημα 2.

Ο έβδομος παράγοντας αντιπροσωπεύει τη σχέση ανάμεσα στις μεταβλητές I3circ, I5circ, I4circ, οι οποίες ανήκουν στο Δοκίμιο Α, δηλαδή στο δοκίμιο που περιλαμβάνει τα έργα αναγνώρισης της έννοιας του κλάσματος. Πρόκειται για έργα αναγνώρισης της έννοιας του κλάσματος όταν η αναπαράσταση είναι το εμβαδόν του κύκλου.

Ο τελευταίος παράγοντας σχετίζεται με τις μεταβλητές P2exp και P2bexp. Πρόκειται για το πρόβλημα 2, τα οποίο επιλύθηκε χωρίς τη χρήση της αριθμητικής γραμμής.

Με την παραγοντική ανάλυση φάνηκε ότι οι μεταβλητές σχετίζονται με κάποιους παράγοντες με κριτήριο το γνωστικό αντικείμενο. Συγκεκριμένα, ο πρώτος, ο δεύτερος, ο τρίτος και ο έβδομος παράγοντας οι οποίοι αφορούν στην ισοδυναμία, στην πρόσθεση, στην αναπαράσταση και στην αναγνώριση κλασμάτων αντίστοιχα, αποτελούν ένδειξη ότι οι μεταβλητές των Δοκιμίων Α, Β και Γ έχουν ομαδοποιηθεί με βάση το Δοκίμιο στο οποίο ανήκουν και το γνωστικό αντικείμενο το οποίο εξετάζουν. Η στεγανοποίηση με βάση το γνωστικό αντικείμενο φάνηκε από το γεγονός ότι δεν σημειώθηκαν συσχετίσεις ανάμεσα σε μεταβλητές διαφορετικών δοκιμίων και σε ένα παράγοντα, έτσι ώστε να προκύψει παράγοντας που να σχετίζεται με μεταβλητές διαφορετικών δοκιμίων.

<u>Στεγανοποίηση Ειδών Αναπαράστασης</u>

Το Διάγραμμα Ομοιότητας των Έργων Αναγνώρισης της Έννοιας του Κλάσματος δεν έδειξε να υπάρχει στεγανοποίηση ανάμεσα στα έργα που περιλάμβαναν την ίδια αναπαράσταση. Η παραγοντική ανάλυση, όμως, έδειξε ότι ένας από τους παράγοντες, συγκεκριμένα ο τρίτος παράγοντας ο οποίος αντιπροσωπεύει τη σχέση ανάμεσα στις μεταβλητές R4nl, R4ls, R3hnl, R3hls, R2dls, R2dnl, R1ls, R1nl, I5ls, R3hcircle, R2dcircle, I4ls, σχετίζεται με την ικανότητα αναπαράστασης και την ικανότητα αναγνώρισης της έννοιας σε σε ποικιλία αναπαραστάσεων και ειδικότερα στην αριθμητική γραμμή και στο ευθύγραμμο τμήμα. Επίσης, με βάση τα αποτελέσματα της παραγοντικής ανάλυσης ένας από τους παράγοντες, ο έβδομος παράγοντας, ο οποίος αντιπροσωπεύει τη σχέση ανάμεσα στις μεταβλητές I3circ, I5circ, I4circ σχετίζεται με την ικανότητα αναγνώρισης της έννοιας του κλάσματος όταν η αναπαράσταση είναι το εμβαδόν του κύκλου. Τέλος, ο τέταρτος παράγοντας που προέκυψε με βάση την παραγοντική ανάλυση αντιπροσωπεύει τη σχέση ανάμεσα στις μεταβλητές P2bdiagr, P2cdiagr, P2adiagr, P2ddiagr, P4adiagr, P1diagr, P4cdiagr, P4bdiagr, P3diagr, οι οποίες ανήκουν στο Δοκίμιο Δ, δηλαδή στο δοκίμιο που περιλαμβάνει τα προβλήματα πρόσθεσης κλασμάτων. Συγκεκριμένα, πρόκειται για τα έργα που ανήκαν στο δοκίμιο στο οποίο οι μαθητές κλήθηκαν να λύσουν τα προβλήματα με τη βοήθεια της αριθμητικής γραμμής -diagr. Ο τέταρτος παράγοντας αφορά τα προβλήματα πρόσθεσης κλασμάτων τα οποία επιλύθηκαν με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής.

Η εξαγωγή των τριών αυτών παραγόντων έδειξε ότι ανεξάρτητα από το είδος του έργου οι γραμμικές αναπαραστάσεις, δηλαδή το ευθύγραμμο τμήμα και ιδιαίτερα η αριθμητική γραμμή σχετίζονται με διαφορετικούς παράγοντες από ότι η αναπαράσταση του κύκλου και οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση των προβλημάτων – συμβολική έκφραση, δηλαδή εξίσωση. Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ότι υπάρχει κάποια στεγανοποίηση των έργων με κριτήριο το είδος αναπαράστασης.

Διαφοροποίηση Επίδοσης στα Είδη μετάφρασης

Υπάρχουν είδη μετάφρασης που θεωρούνται πιο απλά σε επίπεδο μαθητών πέμπτης τάξης δημοτικού. Με βάση τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τα Δοκίμια και τις Συνεντεύξεις φάνηκε ότι υπάρχουν είδη μετάφρασης στα οποία πρέπει να επιτύχουν οι μαθητές, ώστε να είναι σε θέση να επιτύχουν σε άλλα είδη μετάφρασης. Τα Δοκίμια Β και Γ περιλάμβαναν μεταφράσεις από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή και αντίστροφα, ενώ οι Συνεντεύξεις περιλάμβαναν μεταφράσεις ανάμεσα στη συμβολική έκφραση, στη λεκτική έκφραση – πρόβλημα – και στην αριθμητική γραμμή.

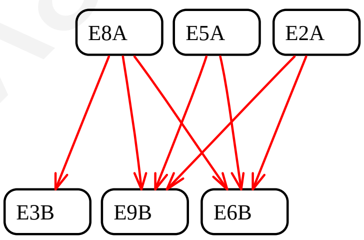
Ισοδυναμία Κλασμάτων

Δοκίμιο Β: Μεταφράσεις από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή και αντίστροφα

Με βάση το Συνεπαγωγικό Διάγραμμα για τα Έργα Μετάφρασης του Δοκιμίου Β, Διάγραμμα 13, φάνηκε ότι η μετάφραση από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή είναι πιο απλή από τη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση σε επίπεδο μαθητών πέμπτης τάξης αναφορικά με την έννοια της ισοδυναμίας κλασμάτων. Όπως φαίνεται από το Διάγραμμα 17 η επιτυχία σε έργα μετάφρασης από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση συνεπάγεται την επιτυχία σε έργα μετάφρασης από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή. Συγκεκριμένα, προκύπτει ότι η επιτυχία στο έργο Ε8Α – έργο μετάφρασης από αριθμητική γραμμή σε συμβολική έκφραση – συνεπάγεται την επιτυχία στα έργα Ε3Β, Ε9Β και Ε6Β – έργα μετάφρασης από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή. Το έργο Ε8Α είναι έργο μετάφρασης από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση και εξετάζει τη σχέση 1/3=3/9. Η επιτυχία στο έργο αυτό συνεπάγεται την επιτυχία στο έργο Ε3Β το οποίο εξετάζει ακριβώς την ίδια σχέση, 1/3=3/9, αλλά είναι έργο μετάφρασης από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή.

Η επιτυχία στο έργο Ε5Α – έργο μετάφρασης από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση – συνεπάγεται την επιτυχία στα έργα Ε9Β και Ε6Β – έργα μετάφρασης από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή. Το έργο Ε5Α είναι έργο μετάφρασης από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση και εξετάζει τη σχέση 3/5=6/10. Η επιτυχία στο έργο αυτό συνεπάγεται την επιτυχία στο έργο Ε6Β το οποίο εξετάζει ακριβώς την ίδια σχέση, 3/5=6/10, αλλά είναι έργο μετάφρασης από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή.

Τέλος, η επιτυχία στο έργο Ε2Α – έργο μετάφρασης από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση – συνεπάγεται την επιτυχία στα έργα Ε9Β και Ε6Β – έργα μετάφρασης από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή. Το έργο Ε2Α εξετάζει τη σχέση 2/5=4/10, ενώ τα έργα Ε9Β και Ε6Β εξετάζουν σχέσεις παρόμοιου βαθμού δυσκολίας, που είναι 1/5=2/10 και 3/5=6/10 αντίστοιχα.



Διάγραμμα 13. Συνεπαγωγικό Διάγραμμα Έργων Μετάφρασης Ισοδυναμίας Κλασμάτων

Τα αποτελέσματα αυτά συμφωνούν με τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών στα έργα μετάφρασης στην ισοδυναμία κλασμάτων (Πίνακας 7). Το ποσοστό επιτυχίας στα έργα που περιλάμβαναν τη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική αναπαράσταση ήταν 39.8%. Τα έργα μετάφρασης από τη συμβολική αναπαράσταση στην αριθμητική γραμμή συγκέντρωσαν ποσοστό επιτυχίας 54.9%. Οι δυσκολίες των μαθητών στα δύο είδη μετάφρασης φάνηκαν και στις συνεντεύξεις, οι οποίες περιγράφονται πιο κάτω.

<u>Συνέντευξη : Μετάφραση από Αριθμητική Γραμμή σε Συμβολική Έκφραση</u>

Η συνέντευξη με το μαθητή με την ψηλή επίδοση έδειξε ότι ο συγκεκριμένος μαθητής αρχικά προσπαθούσε να εντοπίσει τη σχέση ισοδυναμίας ανάμεσα σε δύο κλάσματα με τη βοήθεια της συμβολικής αναπαράστασης και όχι της αριθμητικής γραμμής, η οποία αναπαριστούσε τη σχέση ισοδυναμίας.

Ερευνητής: Στην άσκηση αυτή δίνονται δύο αριθμητικές γραμμές. Η μια αναπαριστά ένα αριθμό, η άλλη αναπαριστά άλλο αριθμό. Μπορείς να σκεφτείς αν υπάρχει κάποια σχέση ανάμεσα στους δύο αριθμούς;
Μαθητής: Είναι ισοδύναμα.
Ερευνητής: Γιατί; Το πρώτο ποιο κλάσμα είναι;
Μαθητής: 7/9 (ξαναμετρά)...όχι είναι το 6/8
Ερευνητής: Το δεύτερο ποιο είναι;
Μαθητής: Το ¾
Ερευνητής: Από πού καταλαβαίνεις ότι είναι ισοδύναμα;
Μαθητής: Άμα διπλασιάσουμε τα ¾ γίνεται 6/8
Ερευνητής: Να το διπλασιάσουμε. Να βάλουμε δυο φορές τα ¾. ¾ και άλλα ¾;
Μαθητής: 6/4.
Ερευνητής: 6/4..είναι ίσο με το 6/8;
Μαθητής: Εννοώ να διπλασιάσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή και θα έχουμε 6/8.
Ερευνητής: Μάλιστα. Αφού διπλασιάσαμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή τότε γιατί το 6/8 είναι ισοδύναμο με το ¾; Δεν είναι το διπλάσιο;
(Ο μαθητής σκέφτεται για αρκετή ώρα)
Ερευνητής: Πώς μπορείς να μου δείξεις ότι είναι ισοδύναμα;
(Ο μαθητής σκέφτεται για αρκετή ώρα)
Ερευνητής: Κοίταξε την αριθμητική γραμμή. Μήπως σε βοηθά;
Μαθητής: Ναι.
Ερευνητής: Γιατί;
Μαθητής: Διότι το διάστημα από το 0 ως το 6/8 είναι το ίσο με το διάστημα από το 0 ως το ¾.
Ερευνητής: Μπορείς να μου γράψεις την εξίσωση;
(Ο μαθητής γράφει ¾=6/8)

Η συνέντευξη με το μαθητή με τη μέτρια επίδοση έδειξε ότι ο συγκεκριμένος μαθητής δεν αντιμετώπιζε δυσκολίες στη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση, αφού χρησιμοποίησε με επιτυχία την αριθμητική γραμμή για να εντοπίσει τη σχέση ισοδυναμίας δύο κλασμάτων.

Ερευνητής: Σου δίνω δύο αριθμητικές γραμμές. Ποια σχέση αναπαριστούν;
Μαθητής: Είναι ισοδύναμες.
Ερευνητής: Είναι ισοδύναμες οι γραμμές;
Μαθητής: Όχι. Τα κλάσματα που δείχνουν οι γραμμές;
Ερευνητής: Γιατί;
Μαθητής: Γιατί η γραμμή που δείχνουν είναι η ίδια...η απόσταση είναι η ίδια.
Ερευνητής: Ποια απόσταση;
Μαθητής: Από το 0 ως το 6/8...και η απόσταση από το 0 ως το ¾.
Ερευνητής: Με την πρώτη ματιά μπορείς να δεις στις αριθμητικές γραμμές αν είναι ισοδύναμα;
Μαθητής: Ναι, διότι είναι ίδια η απόσταση.

Η συνέντευξη με το μαθητή με τη χαμηλή επίδοση έδειξε ότι ο συγκεκριμένος μαθητής αντιμετώπιζε δυσκολίες στη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση, αφού δεν αναγνώριζε τη σχέση ισοδυναμίας κλασμάτων όταν αυτή παρουσιάζεται στην αριθμητική γραμμή. Επίσης, δεν μπορούσε να δικαιολογήσει τη σχέση ισοδυναμίας με τη χρήση της συμβολικής έκφρασης. Τελικά αναγνώρισε τη σχέση των ισοδύναμων κλασμάτων με τη βοήθεια των αριθμητικών γραμμών.

Ερευνητής: Σου δίνω συμπληρωμένες δύο αριθμητικές γραμμές. Μπορείς να μου δείξεις ποια σχέση δείχνουν αυτές οι αριθμητικές γραμμές;
Μαθητής: (δεν απαντά)
Ερευνητής: Ποιον αριθμό μας δείχνει η πρώτη αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: 6/8 (τον γράφει).
Ερευνητής: Στη δεύτερη αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Τα ¾.
Ερευνητής: Ποια σχέση υπάρχει μεταξύ των δύο αριθμών;
Μαθητής: Είναι ισοδύναμοι. Διότι το 6 είναι το διπλάσιο του 3 και το 8 είναι το διπλάσιο του 4.
Ερευνητής: Αφού το 6 είναι το διπλάσιο του 3 και το 8 είναι το διπλάσιο του 4, τότε γιατί οι δύο αριθμοί είναι ίσοι; Μήπως το 6/8 είναι μεγαλύτερο από το ¾;
Μαθητής: Ναι είναι μεγαλύτερο.
Ερευνητής: Κοίταξε στην πρώτη αριθμητική γραμμή. Δείξε μου τον πρώτο αριθμό.
Μαθητής: (δείχνει το διάστημα από το 0 ως τα 6/8).
Ερευνητής: Κοίταξε στη δεύτερη αριθμητική γραμμή. Δείξε μου το δεύτερο αριθμό.
Μαθητής: (δείχνει το διάστημα από το 0 ως τα 3/4)
Ερευνητής: Τι έχεις να πεις για τους δύο αριθμούς;

Μαθητής: Είναι ίσοι.
Ερευνητής: Πριν μου είπες πως τα 6/8 είναι μεγαλύτερος. Αφού έχει 6 κομμάτια.
Μαθητής: Ναι, αλλά...τα 3 κομμάτια είναι μεγάλα, ενώ τα 6 είναι πιο μικρά.
Ερευνητής: Κάθε ¼ με πόσα όγδοα είναι ίσο;
Μαθητής: (κοιτάζει στην αριθμητική γραμμή) με δύο.
Ερευνητής: Κάθε 1/8 τι είναι σε σχέση με το ¼;
Μαθητής: Είναι το μισό.

Επιπλέον από τις συνεντεύξεις φάνηκε ότι η δυσκολία των μαθητών να εντοπίσουν τη μονάδα υποδιαίρεσης της αριθμητικής γραμμής τους δυσκόλευε στη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση. Συγκεκριμένα, οι τρεις μαθητές, ανεξάρτητα από την επίδοση που είχαν στα μαθηματικά, ταύτιζαν την αριθμητική γραμμή με το ευθύγραμμο τμήμα και την έννοια του κλάσματος μέρος – όλο. Θεωρούσαν ότι ολόκληρη η αριθμητική γραμμή αποτελεί το όλο γι’αυτό δυσκολεύονταν να εντοπίσουν τη μονάδα υποδιαίρεσης, αφού προχωρούσαν στη διαδικασία της διπλής μέτρησης για την εύρεση του αριθμητή και του παρονομαστή. Κατά συνέπεια στην περίπτωση που η αριθμητική γραμμή περιλάμβανε τον αριθμό 2 οι μαθητές θεωρούσαν το διάστημα 0 ως 2 ως το διάστημα στο οποίο θα εντόπιζαν τον παρονομαστή.

Η συνέντευξη με το μαθητή με την ψηλή επίδοση έδειξε ότι χρησιμοποιούσε την αριθμητική γραμμή ως ευθύγραμμο τμήμα.

Ερευνητής: Εδώ έχουμε και πάλι δύο αριθμητικές γραμμές που αναπαριστούν δύο αριθμούς. Υπάρχει σχέση ανάμεσα στους δύο αριθμούς;
Ερευνητής: Πρώτα απ’όλα ποιος είναι ο πρώτος αριθμός;
Μαθητής: Είναι τα 2/6. (Λαμβάνει υπ’ όψη του και τις υποδιαιρέσεις ως το 2 και δε σταματά ως το 1)
Ερευνητής: Ο άλλος αριθμός ποιος είναι;
Μαθητής: 6/18.
Ερενητής: Αυτό που με προβληματίζει είναι το εξής: Έχεις προσέξει τους αριθμούς στην αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Προχωρά μέχρι το 2.
Ερευνητής: Άρα αυτά που μέτρησες είναι τα 2/6 και τα 6/18;
Μαθητής: Είναι τα 2/3.
Ερευνητής: Γιατί;
(Ο Μαθητής σκέφτεται για αρκετή ώρα)

Ερευνητής: Πώς είναι χωρισμένο το πρώτο διάστημα, ως το 1;
Μαθητής: Σε τρίτα.
Ερευνητής: Πώς είναι χωρισμένο το δεύτερο διάστημα, από το 1 ως το 2;
Μαθητής: Σε τρίτα.
Ερευνητής: Τότε γιατί απάντησες 2/6;
Μαθητής: Πρόσθεσα τα τρίτα
Ερευνητής: Τα 2/6 που μου είπες είναι τα 2/6 ή τα 2/6 του 2;
Μαθητής: Τα 2/6 του 2.
Ερευνητής: Άρα ποιος αριθμός είναι;
Μαθητής: Τα 4/6..δηλαδή τα 2/3
Ερευνητής: Μπορείς να μου αριθμήσεις τη γραμμή; Να βάλεις αριθμούς σε κάθε κατακόρυφη γραμμή;
Μαθητής: Είναι σε τρίτα...άρα έχουμε 1/3, 2/3,3/3, 4/3...1 και 1/3, 1 και 2/3 και τέλος το 2.
Ερευνητής: Άρα ποιος είναι ο αριθμός εκεί που τελειώνει το βέλος;
Μαθητής: Το 2/3
Ερευνητής: Ποιος είναι ο αριθμός στην άλλη αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Είναι τα 6/9
Ερευνητής: Για να είναι σωστοί οι αριθμοί που μου είπες στην αρχή τι έπρεπε να υπάρχει στη θέση του 2 στην αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Να υπάρχει το 1.
Ερευνητής: Ποια είναι η σχέση των δυο αριθμών που βρήκες;
Μαθητής: Είναι ισοδύναμα κλάσματα.

Από τη συνέντευξη με το μαθητή με τη μέτρια επίδοση, όπως και στην περίπτωση και του μαθητή με τη ψηλή επίδοση, φάνηκε ότι ο συγκεκριμένος μαθητής ταύτιζε την αριθμητική γραμμή με το ευθύγραμμο τμήμα, γι’αυτό και δυσκολευόταν να βρει τη μονάδα υποδιαίρεσης και κατά συνέπεια να εντοπίσει τη σχέση ισοδυναμίας.

Ερευνητής: Τι δείχνουν αυτές οι δύο αριθμητικές γραμμές;
Μαθητής: Η μια δείχνει τα 2/6 και η άλλη δείχνει τα 6/18
Ερευνητής: Και τι είναι αυτά τα κλάσματα μεταξύ τους;
Μαθητής: Ισοδύναμα.
Ερευνητής: Να σε ρωτήσω κάτι. Αν δεν υπήρχαν αυτά (οι υποδιαιρέσεις ανάμεσα στο 0, 1 και 2) και υπήρχαν μόνο οι γραμμές του 0, του 1 και του 2. Πώς θα μου έλεγες ότι προχωρούν οι αριθμοί στην αριθμητική γραμμή; Τι βάζουμε κάθε φορά;
Μαθητής: Βάζω ένα ολόκληρο.
Ερευνητής: Τώρα εδώ τι βάζω;
Μαθητής: 1/3!
Ερευνητής: Ποιος είναι ο αριθμός που δείχνει η πρώτη αριθμητική γραμμή λοιπόν;
Μαθητής: Είναι τα 2/3.
Ερευνητής: Ποιος είναι ο αριθμός στην άλλη γραμμή;
Μαθητής: 6/18
Ερευνητής: Στη δεύτερη γραμμή πώς προχωρούμε;

Μαθητής: Βάζουμε 1/9.
Ερευνητής: Πόσα τέτοια κομμάτια υπάρχουν ως το 1;
Μαθητής: 9.
Ερευνητής: Ένας συμμαθητής σου μου είπε ότι ο αριθμός είναι το 6/18. Τι θα του απαντούσες;
Μαθητής: Ότι δεν προχωρούμε με δεκατα όγδοα, διότι ως το 1 θα θέλαμε 18 δεκαταόγδοα. Κάθε φορά βάζω 1/9 γι'αυτο και ως το 1 έχω 9/9.
Ερευνητής: Ποια είναι η ισοδυναμία;
Μαθητής: 2/3=6/9

Η συνέντευξη με το μαθητή με τη χαμηλή επίδοση, όπως και στην περίπτωση των δύο άλλων μαθητών, έδειξε ότι ο συγκεκριμένος μαθητής ταύτιζε την αριθμητική γραμμή με το ευθύγραμμο τμήμα, γι'αυτό και δυσκολευόταν να βρει τη μονάδα υποδιαίρεσης και κατά συνέπεια να εντοπίσει τη σχέση ισοδυναμίας.

Ερευνητής: Εδώ έχω και πάλι αριθμητικές γραμμές. Είναι συμπληρωμένες. Μπορείς να μου πεις τη σχέση που δείχνουν;
Μαθητής: Η πρώτη δείχνει τον αριθμό....είναι χωρισμένη σε έκτα.
Ερευνητής: Η άλλη πώς είναι χωρισμένη;
Μαθητής: Σε δέκατα όγδοα.
Ερευνητής: Αν έχω ένα ολόκληρο, πόσα έκτα είναι;
Μαθητής: 6.
Ερευνητής: Άρα εδώ είναι τα 6/6;
Μαθητής: Όχι.
Ερευνητής: Ποιος αριθμός είναι εκεί;
Μαθητής: Το 1.
Ερευνητής: Δηλαδή;
Μαθητής: Είναι τα 3/3.
Ερευνητής: Άρα πώς είναι χωρισμένη η αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Σε τρίτα.
Ερευνητής: Τι βάζω κάθε φορά και προχωρώ;
Μαθητής:1/3.
Ερευνητής: Ποιος αριθμός είναι εδώ;
Μαθητής: Τα 2/3.
Ερευνητής: Εδώ; (δείχνει στη δεύτερη αριθμητική γραμμή, τον αριθμό 6/9).
Μαθητής: Τα 6...
Ερευνητής: Πώς είναι χωρισμένη η αριθμητική γραμμή; Τι βάζω κάθε φορά;
Μαθητής: (Μετρά τα διαστήματα από το 0 μέχρι το 1). Είναι χωρισμένη σε ένατα. Κάθε φορά βάζω 1/9.
Ερευνητής: Άρα ποιος αριθμός είναι αυτός; (δείχνει στη δεύτερη αριθμητική γραμμή, τον αριθμό 6/9).
Μαθητής: 6/9.
Ερευνητής: Βλέποντας τις δυο αριθμητικές γραμμές, τι μπορείς να πεις για τα δύο αυτά κλάσματα;
Μαθητής: Είναι τα ίδια.

Ερευνητής: Τι έχεις να πεις για την απόσταση που καλύπτουν από το 0;
Μαθητής: Είναι η ίδια.
Ερευνητής: Άρα τα δύο κλάσματα τι είναι;
Μαθητής: Είναι ισοδύναμα.

<u>Συνέντευξη: Μετάφραση από Συμβολική Έκφραση σε Αριθμητική Γραμμή</u>

Αναφορικά με την ισοδυναμία κλασμάτων οι συνεντεύξεις έδειξαν ότι οι μαθητές δεν παρουσίαζαν ιδιαίτερες δυσκολίες στη μετάφραση από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή ούτε στην περίπτωση που η αριθμητική γραμμή περιλάμβανε το διάστημα 0 ως 1, αλλά και ούτε στην περίπτωση που η αριθμητική γραμμή περιλάμβανε το διάστημα από 0 ως 2.

Συγκεκριμένα, η συνέντευξη με το μαθητή με την ψηλή επίδοση έδειξε ότι είχε την ικανότητα να μεταφράζει από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή τόσο στην περίπτωση που η αριθμητική γραμμή περιλάμβανε το διάστημα 0 ως 1, όσο και στην περίπτωση που η αριθμητική γραμμή περιλάμβανε το διάστημα από 0 ως 2.

Ερευνητής: Τώρα σου δίνω την εξίσωση της ισοδυναμίας (1/3 =7/21). Μπορείς να δείξεις με τη βοήθεια των αριθμητικών γραμμών ότι είναι ισοδύναμα αυτά τα δύο κλάσματα;
Μαθητής: Ναι.
Ερευνητής: Τι θα κάνεις για να το δείξεις;
Μαθητής: Θα χωρίσω την πρώτη αριθμητική γραμμή σε τρίτα. (χωρίζει την πρώτη αριθμητική γραμμή σε τρίτα)
Ερευνητής: Μετά;
Μαθητής: Θα γράψω τα κλάσματα (Αριθμεί τις κατακόρυφες γραμμές : 1/3, 2/3)
Ερευνητής: Το βελάκι;
Μαθητής: Θα ξεκινά από το 0 και θα σταματά στο 1/3 (Κατασκευάζει το βελάκι).
Ερευνητής: Στην επόμενη αριθμητική γραμμή τι θα κάνεις;
Μαθητής: Θα τη χωρίσω σε εικοστά πρώτα. (τη χωρίζει σε εικοστά πρώτα αλλά δεν την αριθμεί)
Ερευνητής: Αυτό το 1/3 που έχεις βρει στην πρώτη αριθμητική γραμμή, πόσα από τα εικοστά πρώτα της δεύτερης αριθμητικής γραμμής χωρεί;
Μαθητής: 7.
Ερευνητής: Το νέο βελάκι που θα κάνεις που θα καταλήγει;
Μαθητής: Θα ξεκινά από το 0 και θα καταλήγει στο 7/21.
Ερευνητής: Ποιο διάστημα σε βοηθά πού θα καταλήξεις;
Μαθητής: Το διάστημα από το 0 ως το 1/3.

Ερευνητής: Την ίδια σχέση θέλω να τη δείξεις και με τη βοήθεια των άλλων δύο αριθμητικών γραμμών. Ποια είναι η διαφορά τώρα εδώ; (η αριθμητική γραμμή περιλαμβάνει το διάστημα από 0 ως 2).
Μαθητής: Από το 0 φτάνει μέχρι το 2.
Ερευνητής: Τι σκέφτεσαι να κάνεις;
Μαθητής: Θα χωρίσω σε τρίτα από το 0 μέχρι το 1.
Ερευνητής: Γιατί;
Μαθητής: Γιατί τα κλάσματα που γυρεύω είναι μικρότερο από το 1.
Ερευνητής: Αν τη χωρίσεις μέχρι το 2, θα αλλάξει το αποτέλεσμα;
Μαθητής. Όχι.
Ερευνητής: Σε ποιο διάστημα θα επικεντρώσεις την προσοχή σου;
Μαθητής: Από το 0 μέχρι το 1.
(Χωρίζει την επόμενη αριθμητική γραμμή σε τρίτα από το 0 ως το 1)
Ερευνητής: Το διάστημα από το 1 ως το 2 δε θα το χωρίσεις;
Μαθητής: Όχι.
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις πώς μετρούμε μετά που χωρίσαμε σε τρίτα;
Μαθητής:1/3, 2/3, 3/3 δηλαδή 1 ...
Ερευνητής: Μετά;
Μαθητής: Να το χωρίσουμε και αυτό το διάστημα σε τρίτα
(Χωρίζει το διάστημα 1 ως 2 σε τρίτα) ..έχουμε 1 και 1/3, 1 και 2/3 και το 2.
Ερευνητής: Μετά τι θα κάνουμε;
Μαθητής: Θα χωρίσω την άλλη αριθμητική γραμμή σε εικοστά πρώτα.
Ερευνητής: Από πού μέχρι πού;
Μαθητής: Από το 0 μέχρι το 1.
Ερευνητής: Τι θα γίνει με το διάστημα 1 ως 2;
Μαθητής: Θα το χωρίσω και αυτό σε εικοστά πρώτα.
(Χωρίζει τα διαστήματα 0 ως 1 και 1 ως 2 σε εικοστά πρώτα)
Ερευνητής: Τώρα από πού θα ξεκινήσει το βελάκι σου;
Μαθητής: Από το 0 μέχρι τα 7/21
Ερευνητής: Τι σε βοηθά για να δεις πού θα σταματήσει ακριβώς;
Μαθητής: Το ότι είναι ισοδύναμο με το προηγούμενο...Πρέπει να σταματήσει στο ίδιο σημείο.
Ερευνητής: Δηλαδή;
Μαθητής: Τα βελάκια θα καλύψουν την ίδια απόσταση.

Η συνέντευξη με το μαθητή με τη μέτρια επίδοση έδειξε ότι είχε την ικανότητα να μεταφράζει από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή τόσο στην περίπτωση που η αριθμητική γραμμή περιλάμβανε το διάστημα 0 ως 1, όσο και στην περίπτωση που η αριθμητική γραμμή περιλάμβανε το διάστημα από 0 ως 2.

Ερευνητής: Τώρα σου δίνω μια σχέση ανάμεσα σε δύο κλάσματα. Μπορείς να μου τη δείξεις στην αριθμητική γραμμή**;**
Μαθητής: Ναι
Ερευνητής: Τι θα κάμεις πρώτα;

Μαθητής: Θα χωρίσω την πρώτη αριθμητική γραμμή σε τρία (χωρίζει την αριθμητική γραμμή σε τρία ίσα μέρη και επιλέγει το 1/3)
Ερευνητής: Μετά;
Μαθητής: Θα χωρίσω τη δεύτερη αριθμητική γραμμή σε 21 (χωρίζει την αριθμητική γραμμή σε 21 ίσα μέρη και επιλέγει τα 7)
Ερευνητής: Πώς έχεις δείξει τώρα ότι τα δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα;
Μαθητής: Επειδή η απόσταση από το 0 είναι η ίδια.
Ερευνητής: 1/3 με πόσα εικοστά πρώτα αντιστοιχεί;
Μαθητής: Με εφτά.
Ερευνητής: Τώρα σου δίνω μια σχέση ανάμεσα σε δύο κλάσματα. Μπορείς να μου τη δείξεις στην αριθμητική γραμμή; (η αριθμητική γραμμή περιλαμβάνει το διάστημα από 0 ως 2).
Μαθητής: Ναι
Ερευνητής: Τι θα κάνεις;
Μαθητής: Θα χωρίσω την πρώτη αριθμητική γραμμή σε τρίτα και τη δεύτερη σε εικοστά πρώτα.
Ερευνητής: Πώς;
Μαθητής: Θα χωρίσω την πρώτη αριθμητική γραμμή σε τρίτα από το 0 ως το 1 και μετά σε τρίτα από το 1 ως το 2. Μετά θα χωρίσω τη δεύτερη αριθμητική γραμμή σε εικοστά πρώτα από το 0 ως το 1 και σε εικοστά πρώτα από το 1 ως το 2.
Ερευνητής: Και γιατί να μη χωρίσεις το διάστημα από το 0 ως το 2 σε εικοσιένα κομμάτια;
Μαθητής: Διότι 21/21 είναι το ως το 1.
Ερευνητής: Από πού θα δεις τι αριθμό θα βάζεις κάθε φορά για να προχωρήσεις στην αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Μου το δείχνει ο παρονομαστής του κλάσματος.
Ερευνητής: Πώς έχεις δείξει τώρα ότι τα δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα;
Μαθητής: Επειδή η απόσταση από το 0 είναι η ίδια.

Η συνέντευξη με το μαθητή με τη χαμηλή επίδοση έδειξε ότι είχε την ικανότητα να μεταφράζει από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή στην περίπτωση που η αριθμητική γραμμή περιλάμβανε το διάστημα 0 ως 1. Ωστόσο, αρχικά παρουσίαζε δυσκολίες στην περίπτωση που η αριθμητική γραμμή περιλάμβανε το διάστημα από 0 ως 2.

Ερευνητής: Εδώ σου δίνω δύο ισοδύναμα κλάσματα. Μπορείς να μου δείξεις την ισοδυναμία αυτή στις αριθμητικές γραμμές;
Μαθητής: Θα χωρίσω την πρώτη σε τρίτα...(χωρίζει το διάστημα από 0 ως 1 σε τρίτα και φέρει βέλος από το 0 ως το 1/3).
Ερευνητής: Τι θα κάνεις στην άλλη αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Θα χωρίσω σε εικοστά πρώτα...(χωρίζει το διάστημα από 0 ως 1 σε 21 ίσα διαστήματα και φέρει βέλος από το 0 ως τα 7/21).
Ερευνητής: Τι φάνηκε; Τι καλύπτουν;
Μαθητής: Την ίδια απόσταση.

Ερευνητής: Από που;
Μαθητής: Από το 0.
Ερευνητής: Την ίδια εξίσωση θέλω να μου τη δείξεις σε αυτές τις αριθμητικές γραμμές. Τι θα κάνεις; (η αριθμητική γραμμή περιλαμβάνει το διάστημα από 0 ως 2).
Μαθητής: (Προσπαθεί να χωρίσει το διάστημα από το 0 ως το 2 σε τρία ίσα μέρη και φέρει μια γραμμή ανάμεσα στο 0 και το 1).
Ερευνητής: Πώς χώρισες το διάστημα από το 0 ως το 1;
Μαθητής: Σε ..τρίτα..
Ερευνητής: Άρα το 1 πόσα τρίτα έπρεπε να έχει;
Μαθητής: 3.
Ερευνητής: Τώρα τι έχει;
Μαθητής: 2/2.
Ερευνητής: Τι θα κάνεις;
Μαθητής: Θα χωρίσω την πρώτη σε τρίτα...(χωρίζει το διάστημα από 0 ως 1 και το διάστημα από 1 ως 2 σε τρίτα και φέρει βέλος από το 0 ως το 1/3).
Ερευνητής: Τι θα κάνεις μετά;
Μαθητής: Θα χωρίσω τη δεύτερη σε εικοστά πρώτα...(χωρίζει το διάστημα από 0 ως 1 και το διάστημα από 1 ως 2 σε 21 ίσα διαστήματα και φέρει βέλος από το 0 ως τα 7/21).
Ερευνητής: Τι φαίνεται;
Μαθητής: Ότι τα δυο κλάσματα είναι ισοδύναμα.
Ερευνητής: Ποιο είναι το πιο μεγάλο, το τρίτο ή το εικοστό πρώτο;
Μαθητής: Το εικοστό πρώτο.
Ερευνητής: Δείξε μου1/21.
Μαθητής: (δείχνει το ένα εικοστό πρώτο).
Ερευνητής: Δείξε μου και το 1/3.
Μαθητής: (δείχνει το 1/3).
Ερευνητής: Άρα ποιο είναι το πιο μεγάλο;
Μαθητής: Το 1/3.
Ερευνητής: Με πόσα εικοστά πρώτα είναι ίσο;
Μαθητής: (Συγκρίνει με τα εικοστά πρώτα της δεύτερης γραμμής). Με 7.

Συνέντευξη: Μετάφραση από Λεκτική Έκφραση σε Αριθμητική Γραμμή

Η συνέντευξη με το μαθητή με την ψηλή επίδοση έδειξε ότι παρουσίαζε δυσκολίες στο χειρισμό της έννοιας του κλάσματος με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής. Οι δυσκολίες εστιάζονταν αρχικά στην αρίθμηση της γραμμής: Δε χρησιμοποιούσε το μηδέν και τα διαστήματα που κατασκεύαζε ήταν άνισα μεταξύ τους. Επίσης, ταύτιζε την αριθμητική γραμμή με το ευθύγραμμο τμήμα, γι’αυτό και δυσκολευόταν να εντοπίσει τη μονάδα υποδιαίρεσης.

Ερευνητής: Ας ξεκινήσουμε με το πρώτο πρόβλημα. Διάβασέ το.
(Ο μαθητής διαβάζει το πρόβλημα)
Ερευνητής: Να λύσεις αυτό το πρόβλημα που διάβασες. Θα σε βοηθήσουν οι αριθμητικές γραμμές. Τι σκέφτεσαι να κάνεις;
(Ο μαθητής σκέφτεται)
Ερευνητής: Ξαναδιάβασε το πρόβλημα αν θέλεις.
(Ο μαθητής διαβάζει το πρόβλημα)
Μαθητής: Θα χωρίσω τη μια αριθμητική γραμμή σε 5 κομμάτια
Ερευνητής: Τα κομμάτια που θα χωρίσεις πώς θα είναι;
Μαθητής: Πρέπει να είναι ίσα. (Χρησιμοποιεί τη ρίγα του και χωρίζει την αριθμητική γραμμή σε 5 ίσα μέρη, χωρίς να τοποθετεί όμως αριθμούς όπως το 0 στην αρχή και το 1 στο τελευταίο σημείο)
Ερευνητής: Τώρα έχεις τελειώσει με την αριθμητική γραμμή ή πρέπει να κάνεις κάτι άλλο;
Μαθητής: Τώρα θα πάρω τα 2/5.
Ερευνητής: Περίμενε. Αφού είναι αριθμητική γραμμή, τι λείπει από αυτή;
Μαθητής: Οι αριθμοί!
Ερευνητής: Ποιος θα είναι ο πρώτος αριθμός που θα βάλεις εδώ; (δείχνει την πρώτη κατακόρυφη γραμμή)
Μαθητής: Το 1/5.
Ερευνητής: Αφού θα χωριστεί σε πέμπτα η γραμμή, τότε το πρώτο διάστημα τι μήκος θα έχει;
Μαθητής: 1/5.
Ερευνητής: Άρα πώς ξεκινά η αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Με το μηδέν.
(Ο μαθητής ξεκινώντας από το 0 γράφει κάτω από κάθε διαχωριστική κάθετη γραμμή το κλάσμα που αντιστοιχεί, ενώ στην τελευταία κατακόρυφη γραμμή σημειώνει τον αριθμό 1).
Ερευνητής: Τώρα τι θα κάνεις;
Μαθητής: Θα πάρω τα 2/5
(Ο μαθητής κάνει ένα βέλος που ξεκινά από το 0 και καταλήγει στο σημείο 2/5)
Ερευνητής: Τι έχεις δείξει με αυτό;
Μαθητής: Πόση σοκολάτα έφαγε η Ελένη.
Ερευνητής: Τι σου έμεινε τώρα;
Μαθητής: Να χωρίσω σε 20 κομμάτια τη σοκολάτα της Μαρίας.
Ερευνητής: Να θυμάσαι ότι η σοκολάτα της Μαρίας είναι ....τι είναι;
Μαθητής: Η ίδια με της Ελένης.
Ερευνητής: Τι θα χρησιμοποιήσεις για να μας δείξεις το μέρος της σοκολάτας που έφαγε η Μαρία;
Μαθητής: Την άλλη αριθμητική γραμμή.
(Ο μαθητής αρχίζει να κάνει κατακόρυφους διαχωρισμούς και τοποθετεί το 0 και το 1 της νέας αριθμητικής γραμμής κάτω από το 0 και το 1 της προηγούμενης, αντίστοιχα)
Ερευνητής: Τι σκέφτεσαι να κάνεις;
Μαθητής: Για κάθε ένα πέμπτο της Ελένης, θα έχει τέσσερα κομματάκια της Μαρίας
(Ο μαθητής κάνει 20 κατακόρυφους διαχωρισμούς, αφήνοντας μεγαλύτερο διάστημα ανάμεσα στους διαχωρισμούς όταν συμπληρώνεται πέμπτο).
Ερευνητής: Εδώ γιατί αφήνεις το τελευταίο και το πρώτο από τα τέσσερα διαστήματα πιο μεγάλο;
Μαθητής: Θα τα σβήσω (σβήνει τους διαχωρισμούς του και τους ξανακάνει με τέτοιο τρόπο ώστε τα 20 διαστήματα να είναι ίσα)
Ερευνητής: Τώρα τι θα κάνεις;
Μαθητής: Θα δείξω πόσα έφαγε η Μαρία.
Ερευνητής: Πώς θα το δείξεις αυτό;

(Ο μαθητής σκέφτεται)
Ερευνητής: Ποια πληροφορία σε βοηθά από το πρόβλημα.;
Μαθητής: Ότι έχουν φάει τα ίδια. (δείχνει στη δεύτερη αριθμητική γραμμή και είναι έτοιμος να ζωγραφίσει ένα βέλος)
Ερευνητής: Από που θα ξεκινά το βέλος;
Μαθητής: Θα ξεκινά από το 0...και θα πάει μέχρι τα 8.
Ερευνητής: Γιατί ως το 8 και όχι τα 9 ας πούμε;
Τι σε βοηθά και κατάλαβες ότι θα πάρεις τα 8; Γιατί το βελάκι σου θα σταματήσει στα 8/20;
Μαθητής: Γιατί είναι ισοδύναμο με τα 2/5.
Ερευνητής: Τι σε βοήθησε και είπες ότι ο αριθμός που γυρεύουμε είναι τα 8/20; Τι σε βοηθά να δεις πού θα σταματήσεις; Εντωμεταξύ κάνε το βελάκι σου.
Μαθητής: Με βοηθούν τα 2/5 (στη δεύτερη αριθμητική γραμμή κατασκευάζει βέλος που ξεκινά από το 0 και καταλήγει στα 8/20).
Ερευνητής: Τι παρατηρείς;
Μαθητής: Ότι τα δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα.
Ερευνητής: Άρα τι σε βοήθησε να βρεις τα 8/20; Τι σε βοήθησε να δεις πού θα σταματήσεις ακριβώς;
Μαθητής: Το διάστημα μεταξύ του 0 και των 2/5.
(Ο μαθητής γράφει, επίσης, τη σχέση ισοδυναμίας που του ζητείται, 2/5=8/20)

Ο μαθητής με τη μέτρια επίδοση παρουσίαζε δυσκολίες και στη μετάφραση από το τη λεκτική έκφραση – πρόβλημα – στην αριθμητική γραμμή. Αφού αναπαριστούσε στην πρώτη αριθμητική γραμμή το πρώτο κλάσμα, προσπαθούσε να προσθέσει στο κλάσμα αυτό το δεύτερο κλάσμα το οποίο είναι ισοδύναμο με το πρώτο. Κατέληγε έτσι να αναπαραστήσει μια εξίσωση πρόσθεσης κλασμάτων, αντί μια σχέση ισοδυναμίας.

Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις τι λέει το πρόβλημα;
Μαθητής: Λέει ότι η Μαρία και η Ελένη αγόρασαν μια σοκολάτα και η Μαρία έφαγε τα 2/5 της σοκολάτας και η Ελένη την έκοψε σε είκοσι κομμάτια. Πόσα κομμάτια έφαγαν και οι ....η σοκολάτα...πόσα κομμάτια έφαγε η Ελένη;
Ερευνητής: Ποιο στοιχείο στο πρόβλημα σε βοηθά και ξέχασες να το πεις;
Μαθητής: Ότι έφαγαν την ίδια ποσότητα**.**
Ερευνητής: Εδώ σου δίνω δυο αριθμητικές γραμμές. Μπορείς να τις χρησιμοποιήσεις για να λύσεις το πιο πάνω πρόβλημα;
Μαθητής: Ναι Θα χωρίσω την πρώτη γραμμή σε πέντε κομμάτια και θα δείξω τα 2/5 που έφαγε η Μαρία.
Ερευνητής: Στην άλλη αριθμητική γραμμή τι θα κάνεις;
Μαθητής: Θα τη χωρίσω σε είκοσι κομμάτια και θα δείξω πως η Ελένη έφαγε την ίδια ποσότητα με τη Μαρία**.**
Ερευνητής: Αυτό θέλεις να δείξεις;
Μαθητής: Όχι, θα δείξω πόσα κομμάτια έφαγε η Ελένη.
(Η Μαθητής χωρίζει την πρώτη αριθμητική γραμμή σε τέσσερα μεγάλα διαστήματα και χωρίζει το κάθε διάστημα σε πέντε ίσα μέρη)

Ερευνητής: Σε πόσα κομμάτια χώρισες την αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Σε πέντε..σε τέσσερα..Σε πέντε κομμάτια...
Ερευνητής: Δε βλέπω πέντε κομμάτια.
Μαθητής: Σε τέσσερα κομμάτια.
Ερευνητής: Βλέπω και επιπλέον κομμάτια, γιατί τα έκανες; (πέντε υποδιαιρέσεις για κάθε διάστημα)
Μαθητής: Για να δείξω τα κομμάτια που έφαγε η Μαρία.
Ερευνητής: Άρα δε θα χρησιμοποιήσεις τη δεύτερη αριθμητική γραμμή. Θα το δείξεις μόνο με την πρώτη αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Ναι.
Ερευνητής: Εντάξει. Επειδή όμως είναι αριθμητική γραμμή τι χρειάζεται;
Μαθητής: Αριθμούς (Αριθμεί τα μεγάλα διαστήματα από το 0 ως το 4 και σημειώνει το 2/5 το οποίο βρίσκεται ανάμεσα στο 0 και στο 1)
Ερευνητής: Ωραία, βρήκες τα 2/5 της Ελένης. Τι θα κάνεις για τη Μαρία;
Μαθητής: Θα δείξω τα 20 κομμάτια που έφαγε η Μαρία.
Ερευνητής: Έφαγε 20 κομμάτια η Μαρία;
Μαθητής: Πόσα έκοψε από τα 20.
Ερευνητής: Πώς θα το δείξεις;
Μαθητής: Θα χρησιμοποιήσω την ίδια αριθμητική γραμμή που την αρίθμησα ως το 4 και θα δείξω στις επιπλέον γραμμές τα κομμάτια που έφαγε η Μαρία.
Ερευνητής: Μάλιστα. Πόσες ολόκληρες σοκολάτες αγόρασε η Μαρία;
Μαθητής: Μια ολόκληρη**.**
Ερευνητής: Η Ελένη, λοιπόν, αγόρασε τη σοκολάτα και έφαγε τα 2/5. Πώς θα μου δείξεις τι έφαγε η Μαρία αν προχωρήσεις στα επιπλέον;
Μαθητής: Θα ξεκινήσω και θα προχωρήσω από το 1.
Ερευνητής: Ώστε η Μαρία έφαγε περισσότερο από 1 σοκολάτα;
Μαθητής: Όχι. Αφού έφαγαν την ίδια ποσότητα**.**
Ερευνητής: Τι θα κάνεις;
Μαθητής: Να χρησιμοποιήσω την άλλη αριθμητική γραμμή;
Ερευνητής: Αν θέλεις.
Μαθητής: (Χωρίζει και τη δεύτερη αριθμητική γραμμή σε 4 ίσα διαστήματα τα οποία αριθμεί από το 0 ως το 4).
Ερευνητής: Τώρα για να μου δείξεις πόσο έφαγε η Μαρία ως πού θα φτάσεις; Αν για παράδειγμα φτάσεις εδώ πόσες σοκολάτες έφαγε η Μαρία; (δείχνει από το 0 μέχρι το 2)
Μαθητής: 2 σοκολάτες
Ερευνητής: Όμως σύμφωνα με το πρόβλημα τι έφαγε η Μαρία; Μια σοκολάτα, λιγότερο από μια ή περισσότερο από μια;
Μαθητής: Έφαγε μια ολόκληρη σοκολάτα και 9...(σκέφτεται)
Ερευνητής: Για ξαναπές μου πόσες σοκολάτες αγόρασε η Μαρία.
Μαθητής: Μια.
Ερευνητής: Σε πόσα κομμάτια την έκοψε;
Μαθητής: 20.
Ερευνητής: Και μετά;
Μαθητής: Μετά έφαγε μερικά.
Ερευνητής: Έφαγε λιγότερο από μια ή περισσότερο από μια σοκολάτα η Μαρία;
Μαθητής: Λιγότερο.
Ερευνητής: Τότε πώς θα μου δείξεις πόσο έφαγε η Μαρία**;**
Μαθητής: Θα χωρίσω από το 0 ως το 1 σε 20 κομμάτια.
Ερευνητής: Καλά, αν προχωρούσαμε και περισσότερο από τον αριθμό 1 τι θα σήμαινε;

Μαθητής: Ότι έφαγε παραπάνω από μια σοκολάτα.
Ερευνητής: Τώρα, τι θα σε βοηθήσει να βρεις πόσα έφαγε η Μαρία;
Μαθητής: Το ότι η Μαρία έφαγε την ίδια ποσότητα με την Ελένη.
Ερευνητής: Τι θα σε βοηθήσει, λοιπόν, να συμπληρώσεις το σχήμα;
Μαθητής: Στην πρώτη αριθμητική γραμμή βάλαμε τα 2/5 και θα βάλουμε αυτή τη γραμμή (εννοεί το διάστημα από το 0 ως τα 2/5) και στη δεύτερη αριθμητική γραμμή τα 2/5.
Ερευνητής: Πόσα κομματάκια βρήκες τώρα;
Μαθητής: 8.
Ερευνητής: Καλά, η μια έφαγε 2 και η άλλη 8 και τελικά έφαγαν το ίδιο;
Μαθητής: Ναι, διότι της μιας τα κομμάτια, που ήταν 5, ήταν πιο μεγάλα από τα άλλα κομμάτια που ήταν 8.
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις μια σχέση ανάμεσα στα δύο κλάσματα;
Μαθητής: Είναι ισοδύναμα. 2/5=8/20 (γράφει τη σχέση).
Ερευνητής: Κοίταξε στην αριθμητική γραμμή. Κάθε 1/5 με πόσα εικοστά αντιστοιχεί;
Μαθητής: Με 4/20.

Τέλος, ο μαθητής με τη χαμηλή επίδοση συνδύαζε τις αδυναμίες των δύο προηγούμενων και δυσκολευόταν στη μετάφραση από τη λεκτική έκφραση στην αριθμητική γραμμή. Προχωρούσε στην αρίθμηση της αριθμητικής γραμμής με τη χρήση ακέραιων αριθμών. Ταύτιζε την αριθμητική γραμμή με το ευθύγραμμο τμήμα, γι’αυτό και δυσκολευόταν να εντοπίσει τη μονάδα υποδιαίρεσης. Επίσης, παρουσίαζε δυσκολίες στη μέτρηση των διαστημάτων στην αριθμητική γραμμή, αφού μετρούσε τις κατακόρυφες διαχωριστικές γραμμές αντί ως διαστήματα.

Ερευνητής: Θα εργαστούμε μαζί για να λύσουμε το φύλλο εργασίας που έχω μπροστά σου. Ξεκίνησε με το πρώτο πρόβλημα και πες μου με δικά σου λόγια τι λέει.
Μαθητής: Κατάλαβα ότι η Ελένη και η Μαρία αγόρασαν μια σοκολάτα, το ίδιο μέγεθος και η Ελένη την έκοψε σε 5 κομμάτια, ενώ η Μαρία σε 20. Η Ελένη έφαγε τα 2/5 και έφαγαν την ίδια ποσότητα σοκολάτας.
Ερευνητής: Μας λέει τι μέρος της σοκολάτας έφαγε η Μαρία;
Μαθητής: Όχι.
Ερευνητής: Τι γνωρίζουμε μόνο για τη Μαρία;
Μαθητής: Ότι έφαγε την ίδια ποσότητα με την Ελένη.
Ερευνητής: Τι ζητά το πρόβλημα;
Μαθητής: Πόσα κομμάτια έφαγε η Μαρία.
Ερευνητής: Θα ήθελα να λύσεις το προβληματάκι με τη βοήθεια των αριθμητικών γραμμών. Γιατί έχω άραγε δύο αριθμητικές γραμμές;
Μαθητής: Η μια θα είναι για την Ελένη και η άλλη για τη Μαρία.
Ερευνητής: Τι θα κάνεις στην αριθμητική γραμμή της Ελένης;

Μαθητής: Θα τη χωρίσω σε 5 (φέρει δύο κατακόρυφες γραμμές, στη μια τοποθετεί το 0 και στην άλλη το 1 και χωρίζει το διάστημα από 0 ως 1 σε 5 ίσα μέρη).
Ερευνητής: Και τι θα δείξεις στην αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Τα 2/5 (επιλέγει τα 2/5 φέροντας βέλος από το 0 ως την τρίτη κατακόρυφη γραμμή).
Ερευνητής: Ωραία. Πώς μπορεί αυτή η αριθμητική γραμμή να μας βοηθήσει για να δούμε πόσα κομμάτια έφαγε η Μαρία;
Μαθητής: (σκέφτεται για ένα λεπτό, αλλά δεν απαντά).
Ερευνητής: Τι θα κάνεις στη δεύτερη αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Θα τη μοιράσω σε 20. (φέρει δύο κατακόρυφες γραμμές, στην πρώτη αριθμητική γραμμή τοποθετεί το 0 και στη δεύτερη το 1 και χωρίζει το διάστημα 0 ως 1 σε 20 ίσα μέρη).
Ερευνητής: Πώς θα μου δείξεις πόσα κομμάτια έφαγε η Μαρία;
Μαθητής: (σκέφτεται, δεν απαντά).
Ερευνητής: Τι ξέρεις για τη Μαρία;
Μαθητής: Ότι έφαγε την ίδια ποσότητα με την Ελένη.
Ερευνητής: Άρα τι θα κάνεις για να μου δείξεις πόσα έφαγε η Μαρία;
Μαθητής: (δεν απαντά).
Ερευνητής: Αν φανταστούμε ότι το διάστημα 0 ως το 1 στην πρώτη αριθμητική γραμμή είναι η σοκολάτα της Ελένης και ότι το διάστημα 0 ως το 1 στη δεύτερη αριθμητική γραμμή είναι η σοκολάτα της Μαρίας, πώς μπορούμε να δείξουμε την ποσότητα που έφαγε η Μαρία;
Μαθητής: Χρειάζεται να κάνω πράξεις; Δεν ξέρω τι πράξη να κάνω.
Ερευνητής: Μπορείς να μου δείξεις το μέρος της σοκολάτας που έφαγε η Ελένη;
Μαθητής: Να το (δείχνει από το την κατακόρυφη γραμμή που είναι ο αριθμός 0 ως την κατακόρυφη γραμμή που είναι το 2/5).
Ερευνητής: Άρα;
Μαθητής: Θα κάνω το ίδιο κομμάτι και για τη Μαρία (στη δεύτερη αριθμητική γραμμή κατασκευάζει βέλος το οποίο ξεκινά από το 0 και συγκρίνοντας συνεχώς με το διάστημα από το 0 ως το 2/5 το επεκτείνει ως το 8/20).
Ερευνητής: Σε ποιο κλάσμα έχεις φτάσει;
Μαθητής: Στα 8/20.
Ερευνητής: Τι είναι αυτά τα δύο κλάσματα;
Μαθητής: Ισοδύναμα.
Ερευνητής: Γράψε τη σχέση μεταξύ τους.
Μαθητής: (γράφει 2/5=8/20).
Ερευνητής: Τι μπορείς να πεις για τα κομμάτια που έκοψε η Μαρία σε σχέση με εκείνα που έκοψε η Ελένη;
Μαθητής: Είναι πιο μικρά.
Ερευνητής: Άρα τι πρέπει να κάνει για να φάει την ίδια ποσότητα με την Ελένη;
Μαθητής: Πρέπει να φάει παραπάνω από τα 2.
Ερευνητής: Πόσα κομμάτια θα φάει, λοιπόν, η Μαρία;
Μαθητής: (σκέφτεται). Από τα 20...θα φάει τα 8.
Ερευνητής: Μπορείς να μου εξηγήσεις, πώς γίνεται τα δύο κομμάτια της Ελένης να είναι η ίδια ποσότητα με τα 8 κομμάτια της Μαρίας;
Μαθητής: (δεν απαντά).
Ερευνητής: Κοίτα στην αριθμητική γραμμή για να δεις τα κομμάτια που έφαγε η Ελένη και τα κομμάτια που έφαγε η Μαρία.
Μαθητής: Η Ελένη έφαγε μόνο δύο, αλλά είναι μεγάλα. Πολύ μεγάλα. Η Μαρία έφαγε 8, αλλά είναι μικρά. Αν τα βάλεις μαζί (εννοεί τα κομμάτια της Μαρίας) θα φτάσουν εκείνα της Ελένης.

<u>**Συνέντευξη: Μετάφραση από Αριθμητική γραμμή σε Λεκτική έκφραση**</u>

Οι συνεντεύξεις έδειξαν ότι στην περίπτωση της ισοδυναμίας κλασμάτων οι μαθητές αντιμετώπιζαν δυσκολίες στα έργα μετάφρασης από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση και τέλος στη λεκτική έκφραση.

Ο μαθητής με την ψηλή επίδοση φάνηκε να μην αντιμετωπίζει δυσκολίες στη διατύπωση λεκτικού προβλήματος δοσμένης της αριθμητικής γραμμής.

Μαθητής: Είχα μια σοκολάτα και τη χώρισα σε 8 κομμάτια. Έφαγα τα 6. Ένας φίλος μου είχε την ίδια σοκολάτα με τη δική μου, αλλά τη χώρισε σε τέσσερα ίσα μέρη και έφαγε τα 3.
Ερευνητής: Άρα; Ποιο είναι το συμπέρασμα;
Μαθητής: Φάγαμε και οι δύο το ίδιο.

Ο μαθητής με την ψηλή επίδοση φάνηκε να μην αντιμετωπίζει δυσκολίες στη διατύπωση λεκτικού προβλήματος ακόμα και όταν η δοσμένη αριθμητική γραμμή περιλάμβανε το διάστημα 0 ως 2.

Μαθητής: Είχα μια μπουκάλα νερό. Από αυτή ήπια τα 2/3. Η αδελφή μου είχε την ίδια μπουκάλα και ήπιε τα 6/9. Όμως ήπιαμε την ίδια ποσότητα.

Η συνέντευξη με το μαθητή με τη μέτρια επίδοση έδειξε ότι αντιμετώπιζε δυσκολίες στη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη λεκτική έκφραση, ακόμα και μέσω της συμβολικής έκφρασης, αναφορικά με το έργο που εξέταζε την ισοδυναμία κλασμάτων. Ο συγκεκριμένος μαθητής δυσκολευόταν να τοποθετήσει τις πληροφορίες που περιλαμβάνονται στη συμβολική αναπαράσταση της σχέσης ισοδυναμίας και να διαχωρίσει τα δεδομένα από τα ζητούμενα. Έπρεπε να χρησιμοποιήσει ένα από τα δύο κλάσματα της σχέσης ισοδυναμίας και τον αριθμητή ή τον παρονομαστή του άλλου κλάσματος ως δεδομένα για να κατασκευάσει το πρόβλημα. Η διαδικασία αυτή δυσκόλευε το μαθητή με τη μέτρια επίδοση, αφού έπρεπε να χρησιμοποιήσει τόσο ένα κλασματικό αριθμό όσο και ένα τον αριθμητή ή τον παρονομαστή του ισοδύναμου κλάσματος τον οποίο και εκλάμβανε ως ακέραιο αριθμό. Η προσπάθεια, λοιπόν, του μαθητή να εντάξει σε ένα λεκτικό πρόβλημα τόσο τον κλασματικό αριθμό όσο και τον αριθμητή ή τον παρονομαστή του άλλου κλάσματος, τον οποίο και εκλαμβάνει ως ακέραιο, δείχνει ακόμη ένα είδος δυσκολίας το οποίο αντιμετώπιζε ο μαθητής.

Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις ένα πρόβλημα; (για δοσμένη αριθμητική γραμμή που περιλαμβάνει το διάστημα 0 ως 1 και αναπαριστά τη σχέση 2/3=6/9)
Μαθητής: Ο Κώστας αγόρασε 2 σοκολάτες και από τη μια έφαγε τα 2/3 και ο Μάριος αγόρασε 2 σοκολάτες και έφαγε τα 6/9 από τη μια. Πόσα έφαγε ο Μάριος;...Ο Κώστας; Πόσα έφαγε ο...;
Ερευνητής: Μήπως στα προβλήματα πρέπει να κρύψεις κάτι από τις πληροφορίες που δίνει το πρόβλημα;
Μαθητής: Ο Κώστας έφαγε τα 2/3 και ο Μάριος έφαγε...έκοψε τη σοκολάτα του σε 9 ...Αν έφαγαν την ίδια ποσότητα, πόσο έφαγε ο Μάριος;
Ερευνητής: Συνέχισε μου τώρα το πρόβλημα. Αν ο Μάριος έφαγε 6...Τι θα ρωτήσεις;
Μαθητής: Πόσα ήταν τα κομμάτια που έκοψε ο Μάριος;
Ερευνητής: Πες μου ένα πρόβλημα για τη σχέση αυτή (για δοσμένη αριθμητική γραμμή που περιλαμβάνει το διάστημα 0 ως 2 και αναπαριστά τη σχέση 1/3=7/21).
Μαθητής: Ο κύριος Αντρέας έχει στο χωράφι του 1/3 πορτοκαλιές και σε ένα άλλο περιβόλι έχει....όχι....Έχει 1/3 πορτοκαλιές και έκοψε τα 7/21 των πορτοκαλιών.
Ερευνητής: Πώς θα βρούμε τα 7/21 του 1/3;
Μαθητής: Με πολλαπλασιασμό.
Ερευνητής: Εδώ η σχέση αυτή είναι πολλαπλασιασμός;
Μαθητής: Όχι...διαίρεση
Ερευνητής: Εγώ σου δίνω τη σχέση 1/3=7/21. Είναι διαίρεση;
Μαθητής: Όχι...Η Χριστίνα και η Μαρία αγόρασαν από μια σοκολάτα. Οι σοκολάτες τους ήταν οι ίδιες. Η Μαρία έκοψε το 1/3 της σοκολάτας και η Μαρία έκοψε τη σοκολάτα της σε 21 κομμάτια. Η Μαρία έφαγε την ίδια ποσότητα με τη Χριστίνα. Πόσα κομμάτια έφαγε η Μαρία;
Ερευνητής: Για να θυμηθούμε λίγο το πρόβλημα με τα δέντρα που μου είπες. Ο κ. Μάριος έχει στο περιβόλι του δέντρα. Το 1/3 είναι πορτοκαλιές. Από τα 21 δέντρα κόβει όλες τις πορτοκαλιές. Πόσες πορτοκαλιές έκοψε;
Μαθητής: Το 1/3
Ερευνητής: Τι αριθμός είναι όμως το 1/3 του 21;
Μαθητής: 7/21.
Ερευνητής: Άρα έκοψε τα 7/21 της πορτοκαλιάς. Ένας συμμαθητής σου μου είπε ότι αφού έκοψε τα 7/21 της πορτοκαλιάς σημαίνει ότι δεν έκοψε ούτε μια ολόκληρη πορτοκαλιά.
Μαθητής: Εννοώ ότι το 1/3 του 21....είναι το 7.
Ερευνητής: Αν όλα τα δέντρα ήταν 6 πόσες ήταν οι πορτοκαλιές;
Μαθητής: 18.
Ερευνητής: Όλα τα δέντρα είναι 6.
Μαθητής: 2 πορτοκαλιές.
Ερευνητής: Αν όλα τα δέντρα ήταν 30 πόσες ήταν οι πορτοκαλιές;
Μαθητής: 10.
Ερευνητής: Αν όλα τα δέντρα ήταν 3 πόσες θα ήταν οι πορτοκαλιές;
Μαθητής: 1.

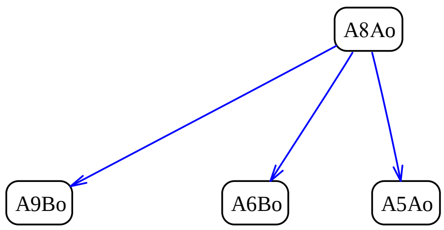
Η συνέντευξη με το μαθητή με τη χαμηλή επίδοση έδειξε ότι στη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη λεκτική έκφραση παρέλειπε να αναφέρει ότι η ποσότητα στην οποία αναφέρονται τα δύο κλάσματα είναι ακριβώς η ίδια, τόσο όταν η σχέση ισοδυναμίας αναπαριστόταν σε αριθμητική γραμμή που περιλάμβανε το διάστημα 0 ως 1, όσο και όταν η σχέση ισοδυναμίας αναπαριστόταν σε αριθμητική γραμμή που περιλάμβανε το διάστημα 0 ως 2.

Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις ένα πρόβλημα; (για δοσμένη αριθμητική γραμμή η οποία περιλαμβάνει το διάστημα 0 ως 1 και αναπαριστά τη σχέση 2/3=6/9).
Μαθητής: Είχα μια τούρτα και έφαγα τα 2/3 της. Η φίλη μου είχε την ίδια τούρτα, χώρισε την τούρτα σε ένατα....
Ερευνητής: Τι θα ρωτήσεις;
Μαθητής: Πόσα ένατα έφαγε η φίλη;
Ερευνητής: Ποια πληροφορία ξέχασες;
Μαθητής: Ότι φάγαμε το ίδιο.
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις και ένα πρόβλημα; (για δοσμένη αριθμητική γραμμή που περιλαμβάνει το διάστημα 0 ως 2 και αναπαριστά τη σχέση 1/3=7/21).
Μαθητής: Είχα μια πίτσα και τη χώρισα σε τρίτα και πήρα το 1. Μετά είχα μια άλλη και τη χώρισα σε εικοστά πρώτα. Πόσα εικοστά πρώτα έφαγα;
Ερευνητής: Τι ξέχασες να μας πεις;
Μαθητής: Ότι οι πίτσες ήταν οι ίδιες...

<u>Πρόσθεση Ομώνυμων Κλασμάτων</u>

<u>Δοκίμιο Γ: Μεταφράσεις από τη Συμβολική Έκφραση στην Αριθμητική Γραμμή και αντίστροφα</u>

Με βάση το Συνεπαγωγικό Διάγραμμα για τα Έργα Μετάφρασης του Δοκιμίου Γ, Διάγραμμα 14, φάνηκε ότι η μετάφραση από συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή είναι πιο απλή από τη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση σε επίπεδο μαθητών πέμπτης τάξης αναφορικά με την πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων. Όπως φαίνεται από το Διάγραμμα 14 η επιτυχία σε έργα μετάφρασης από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση συνεπάγεται την επιτυχία σε έργα μετάφρασης από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή. Συγκεκριμένα, το έργο Α8Αο, το οποίο είναι έργο μετάφρασης από την αριθμητική γραμμή στη συμβολικη έκφραση συνεπάγεται την επιτυχία στα έργα Α9Βο και Α6Βο, τα οποία είναι έργα μετάφρασης από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή, αλλά και στο έργο Α5Αο, το οποίο είναι έργο μετάφρασης από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση.



Διάγραμμα 14. Συνεπαγωγικό Διάγραμμα Έργων Μετάφρασης Πρόσθεσης Ομώνυμων Κλασμάτων.

Τα αποτελέσματα αυτά συμφωνούν με τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών στα έργα μετάφρασης που εξέταζαν την πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων (Πίνακας 8). Το ποσοστό επιτυχίας στα έργα που εξέταζαν την πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων και περιλάμβαναν τη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική αναπαράσταση ήταν 52.9%. Φάνηκε ότι τα έργα μετάφρασης που εξέταζαν την πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων από τη συμβολική αναπαράσταση στην αριθμητική γραμμή ήταν ευκολότερα, αφού συγκέντρωσαν ποσοστό επιτυχίας 57.9%.

Συνέντευξη: Μετάφραση από Αριθμητική Γραμμή σε Συμβολική Έκφραση

Όσον αφορά στην πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων οι συνεντεύξεις έδειξαν ότι ο μαθητής με την ψηλή επίδοση αναγνώριζε τη συγκεκριμένη έννοια στην αριθμητική γραμμή και δεν αντιμετώπιζε δυσκολίες στη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση.

Ερευνητής: Στην άσκηση αυτή σου δίνω μια αριθμητική γραμμή συμπληρωμένη και ζητώ να μου πεις την εξίσωση την οποία μας δείχνει.
Μαθητής: Εντάξει.
Ερευνητής: Τι μετράς εκεί;
Μαθητής: Πρώτα μετρώ για να δω πόσα μέρη είναι (εννοεί πόσα διαστήματα). Η εξίσωση είναι 4/9 + 3/9.
Ερευνητής: Πού καταλήγει το βέλος;
Μαθητής: Στα 7/9
Ερευνητής: Άρα ποια είναι η εξίσωση;
Μαθητής: 4/9+3/9=7/9

Η συνέντευξη με το μαθητή με τη μέτρια επίδοση έδειξε ότι δεν αντιμετώπιζε προβλήματα στη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση στο έργο που εξέταζε την πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων.

Ερευνητής: Στην άσκηση αυτή σου δίνω συμπληρωμένη μια αριθμητική γραμμή. Μπορείς να μου πεις ποια σχέση παρουσιάζει;
Μαθητής: Μπορώ να μετρήσω τα διαστήματα;
Ερευνητής: Ναι.
Μαθητής: (Μετρά και βρίσκει ότι είναι 9 διαστήματα). Έχουμε πρόσθεση. 4/9 και ακόμα 3/9.
Ερευνητής: Γράψε την εξίσωση.
Μαθητής: (Γράφει την εξίσωση 4/9+3/9=7/9)

Η συνέντευξη με το μαθητή με τη χαμηλή επίδοση έδειξε ότι δεν αντιμετώπιζε δυσκολίες στη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση στο έργο που εξέταζε την πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων.

Ερευνητής: Μπροστά σου έχεις μια αριθμητική γραμμή συμπληρωμένη. Μπορείς να μου πεις ποια εξίσωση δείχνει η γραμμή αυτή;
Μαθητής: (Σκέφτεται για ένα λεπτό περίπου χωρίς να απαντά)
Ερευνητής: Ποιο αριθμό έβαλα πρώτα;
Μαθητής: Τα 5/10.
Ερευνητής: Χώρισα τη γραμμή σε 10 κομμάτια δηλαδή;
Μαθητής: Όχι, σε 9.
Ερευνητής: Άρα ποιον αριθμό έβαλα πρώτα;
Τα 4/9.
Ερευνητής: Ωραία. Μετά;
Μαθητής: Ακόμη 3/9.
Ερευνητής: Ωραία, πού έχω φτάσει;
Μαθητής: Στα 7/9.
Ερευνητής: Γράψε την εξίσωση.
Μαθητής: (Γράφει 4/9 + 3/9=7/9).

Επιπλέον, οι συνεντεύξεις έδειξαν ότι τόσο ο μαθητής με την ψηλή επίδοση όσο ο μαθητής με τη χαμηλή επίδοση αντιμετώπιζαν δυσκολίες στη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση σε έργα πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων διότι ταύτιζαν την αριθμητική γραμμή με ευθύγραμμο τμήμα και την υποέννοια μέρος - όλο παρουσιάζοντας έτσι αδυναμίες στην αναγνώριση της μονάδας υποδιαίρεσης. Οι δυσκολίες αυτές έγιναν εμφανείς με την παρουσία στα δοκίμια αριθμητικών γραμμών, οι οποίες περιλάμβαναν και διαστήματα μεγαλύτερα από το διάστημα 0 ως 1.

Η συνέντευξη με το μαθητή με την ψηλή επίδοση έδειξε ότι χρησιμοποιούσε την αριθμητική γραμμή ως ευθύγραμμο τμήμα, όταν η αριθμητική γραμμή περιλάμβανε διαστήματα μεγαλύτερα από το διάστημα 0 ως 1. .

Ερευνητής: Στην άσκηση αυτή σου δίνω μια αριθμητική γραμμή συμπληρωμένη και ζητώ να μου πεις την εξίσωση την οποία μας δείχνει.
Μαθητής: Είναι τα 2/10... (Λαμβάνει υπ' όψη του και τις υποδιαιρέσεις ως το 2 και δε σταματά ως το 1) και το 1/10...κάνει 3/10.
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις κάτι που δεν καταλαβαίνω; Αυτός ο αριθμός ποιος είναι; (Δείχνει το 1/5).
Μαθητής: Περίμενε. Είναι σε πέμπτα που χωρίζεται! Είναι 2/5 και 1/5 κάνουν 3/5.
Ερευνητής: Ένας άλλος συμμαθητής σου που κάναμε την ίδια άσκηση επέμενε ότι είναι 2/10 και 1/10. Τι θα του απαντούσες;
Μαθητής: Ότι...τα ολόκληρα που έχουμε τα χωρίζουμε σε πέντε ίσα μέρη. Σε πέμπτα. Έχουμε 2 ολόκληρα, το κάθε ένα έχει πέμπτα. Η γραμμή είναι χωρισμένη και πάει 1/5, 2/5 ...
Ερευνητής: Άρα αφού ως 1 το ένα έχουμε 5 και ως το 2 έχουμε άλλα 5 τότε έχουμε 10.
Μαθητής: Όχι, τα πέμπτα είναι διαφορετικά από τα δέκατα. Είναι πιο μεγάλα. Έχω 2 αλλά είναι χωρισμένα το κάθε ένα σε πέμπτα.
Ερευνητής: Ένας άλλος μαθητής απάντησε ότι έχουμε τα 2/10 του 2, που κάνει 2/5 και το 1/10 του 2
που κάνει 1/5 και όλα είναι 3/5.
Μαθητής: Τα 2/10 του 2 είναι...2/10 και 2/10 δηλαδή 4/10 που είναι 2/5. Είναι σωστό αυτό που λέει.
Ερευνητής: Άρα τώρα ποιο είναι το σωστό; Να πω 2/5 μόνο ή 2/10 του 2;
Μαθητής: Είναι το ίδιο. Εξαρτάται ποιου αριθμού θα πιάσω το κομμάτι.
Ερευνητής: Ποιος αριθμός είναι αυτός; (δείχνει το 1 και 1/5)
Μαθητής: Είναι το 1 και 1/5.
Ερευνητής: Για να ήταν απλώς 2/10 και όχι 2/10 του 2, ποιος αριθμός έπρεπε να υπάρχει στη θέση του 2;
Μαθητής: Το 1.

Σε αντίθεση με το μαθητή με την ψηλή επίδοση, ο μαθητής με τη μέτρια επίδοση αναγνώρισε τη σωστή εξίσωση πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων, αφού δεν ταύτιζε την αριθμητική γραμμή με το ευθύγραμμο τμήμα, ακόμα και όταν η αριθμητική γραμμή περιλάμβανε διαστήματα μεγαλύτερα από το διάστημα 0 ως 1.

Ερευνητής: Εδώ και πάλι η αριθμητική γραμμή είναι συμπληρωμένη. Μπορείς να μου πεις ποια εξίσωση αναπαριστά;
Μαθητής:2/5+1/5=3/5
Ερευνητής: Όταν συζητούσα την ίδια άσκηση με μια συμμαθήτριά σου μου είπε ότι η εξίσωση είναι 2/10+1/10=3/10. Πώς σχολιάζεις την απάντηση αυτή;
Μαθητής: Δεν είναι σωστό...μέτρησε ως το άλλο κομμάτι (εννοεί το διάστημα από το 1 ως το 2), δηλαδή ως το 2.
Ερευνητής: Πώς θα μπορούσες να την πείσεις ότι η δική σου εξίσωση είναι η σωστή;
Μαθητής: Διότι οι γραμμές (εννοεί τα πέντε διαστήματα) πηγαίνουν ως το 1...
Ερευνητής: Πώς προχωρούμε στην αριθμητική γραμμή; Τι αριθμό βάζουμε κάθε φορά;
Μαθητής: Δεν καταλαβαίνω...
Ερευνητής: Αν σβήσουμε τις κάθετες γραμμές και μείνει μόνο αυτή που είναι για το 0, το 1 και το 2...τι αριθμό βάζω κάθε φορά; Πώς προχωρώ;
Μαθητής: Βάζεις ένα ακέραιο.
Ερευνητής: Ωραία. Στην περίπτωση αυτή τι βάζω;
Μαθητής: Βάζω 1/5.
Ερευνητής: Εδώ που είναι τα 5/5 ποιος αριθμός είναι;
Μαθητής: Το 1.
Ερευνητής: Αν προχωρούσαμε με δέκατα όπως είπε η συμμαθήτριά σου ποιος αριθμός θα ήταν εδώ;
Μαθητής: Τα 5/10
Ερευνητής: Δηλαδή;
Μαθητής: Το ½, άρα έχει κάνει λάθος η μαθήτρια.

Ο μαθητής με τη χαμηλή επίδοση αντιμετώπισε δυσκολίες στη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση, αφού δεν αναγνώρισε τη σωστή εξίσωση πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων. Ο συγκεκριμένος μαθητής χρησιμοποιούσε την αριθμητική γραμμή ως ένα ευθύγραμμο τμήμα, όταν η αριθμητική γραμμή περιλάμβανε διαστήματα μεγαλύτερα από το διάστημα 0 ως 1.

Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις τι εξίσωση δείχνει αυτή η αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: (Σκέφτεται για ένα λεπτό περίπου). 2/10 και ακόμα 1/10.
Ερευνητής: Πώς χώρισα τη γραμμή μου;

Μαθητής: Σε δέκατα.
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις ποιος αριθμός είναι αυτός;
Μαθητής: Το 1.
Ερευνητής: Μάλιστα. Αφού προχωρώ με δέκατα πόσα δέκατα πρέπει να έχει ως το 1;
Μαθητής: Δέκα.
Ερευνητής: Έχει δέκα δέκατα από εδώ ως εδώ; (δείχνει το διάστημα από το 0 ως το 1).
Μαθητής: Όχι. Έχει πέντε.
Ερευνητής: Άρα ο αριθμός 1 πόσα τέτοια κομμάτια έχει;
Μαθητής: Πέντε.
Ερευνητής: Άρα πώς χωρίσαμε την αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Σε πέμπτα.
Ερευνητής: Και πόσα τέτοια κομμάτια έχει ως το 1;
Μαθητής: Πέντε.
Ερευνητής: Άρα το 1 πώς αλλιώς μπορούμε να το πούμε;
Μαθητής: 5/5.
Ερευνητής: Άρα ως εδώ ποιος αριθμός είναι; (δείχνει από το 0 ως τα 2/5)
Μαθητής: Τα 2/5.
Ερευνητής: Άρα ποιος είναι ο αριθμός αυτός (δείχνει τα 6/5);
Μαθητής: Τα 6/5.
Ερευνητής: Είναι δηλαδή ένα ολόκληρο και...;
Μαθητής: 1/5.
Ερευνητής: Εδώ; (δείχνει τα 9/5)
Μαθητής: Τα 9/5.
Ερευνητής: Ένα ολόκληρο και ...;
Μαθητής: 4/5.
Ερευνητής: Ποιος είναι ο πιο μεγάλος, το 1 και 1/5 ή το 1 και 4/5;
Μαθητής: Το 1 και 4/5.
Ερευνητής: Τι αριθμό προσθέτω κάθε φορά και προχωρώ;
Μαθητής: Βάζεις 1/5.
Ερευνητής: Άρα ποια είναι η εξίσωση;
Μαθητής: 2/5+1/5=3/5

Συνέντευξη: Μετάφραση από Συμβολική Έκφραση σε Αριθμητική Γραμμή

Αναφορικά με την πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων οι συνεντεύξεις έδειξαν ότι οι μαθητές δεν παρουσίαζαν ιδιαίτερες δυσκολίες στη μετάφραση από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή στην περίπτωση που η αριθμητική γραμμή περιλάμβανε το διάστημα 0 ως 1. Παρουσιάζουν δυσκολίες στην περίπτωση που η αριθμητική γραμμή περιλάμβανε το διάστημα από 0 ως 2.

Συγκεκριμένα, η συνέντευξη με το μαθητή με την ψηλή επίδοση έδειξε ότι είχε την ικανότητα να μεταφράζει από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή τόσο στην περίπτωση που η αριθμητική γραμμή περιλάμβανε το διάστημα 0 ως 1, όσο και στην περίπτωση που η αριθμητική γραμμή περιλάμβανε το διάστημα από 0 ως 2.

Ερευνητής: Τώρα σου δίνω την εξίσωση (4/8 + 3/8). Μπορείς να τη δείξεις με τη βοήθεια των αριθμητικών γραμμών;
Μαθητής: Θα χωρίσω τη γραμμή σε όγδοα.
Ερευνητής: Τα διαστήματα που κάνεις τι σχέση έχουν μεταξύ τους;
Μαθητής: Είναι ίσα.
Ερευνητής: Το βέλος;
Μαθητής: Το ένα βέλος θα πάει στα 4/8 και το άλλο θα προχωρήσει ακόμα 3/8. Έχουμε 7/8.
Ερευνητής: Την ίδια εξίσωση μπορείς να τη δείξεις με τη βοήθεια αυτής της αριθμητικής γραμμής; (η αριθμητική γραμμή περιλαμβάνει το διάστημα από 0 ως 2).
Μαθητής: Θα χωρίσουμε ως τη μισή γραμμή σε όγδοα (τη χωρίζει).
Ερευνητής: Το διάστημα από 1 ως 2 δε θα το χωρίσεις;
Μαθητής: Ναι, απλώς δεν το έκανα, γιατί το αποτέλεσμα δε θα είναι μεγαλύτερο από το 1.
Ερευνητής: Πρώτα η αριθμητική γραμμή πώς ήταν χωρισμένη;
Μαθητής: Σε ακέραιες μονάδες.
Ερευνητής: Τώρα πώς θα είναι χωρισμένη;
Μαθητής: Να τη χωρίσω όλη σε όγδοα.
(Χωρίζει από το 0-2. Οχτώ ίσα διαστήματα από το 0 ως το 1 και οχτώ ίσα διαστήματα από το 1 ως το 2. Μετά αναπαριστά την εξίσωση).

Η συνέντευξη με το μαθητή με τη μέτρια επίδοση έδειξε ότι είχε την ικανότητα να μεταφράζει από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή στην περίπτωση που η αριθμητική γραμμή περιλάμβανε το διάστημα 0 ως 1. Ωστόσο, παρουσίαζε δυσκολίες στην περίπτωση που η αριθμητική γραμμή περιλάμβανε το διάστημα από 0 ως 2.

Ερευνητής: Στην άσκηση αυτή σου δίνω μια μαθηματική πρόταση και σου ζητώ να μου τη δείξεις στην αριθμητική γραμμή.
Μαθητής: Θα χωρίσω την αριθμητική γραμμή σε όγδοα, θα πάρω τα 4/8 και μετά τα 3/8.
Ερευνητής: Σε ποιον αριθμό καταλήγεις;
Μαθητής: Στα 7/8.
Ερευνητής:

Ερευνητής: Την ίδια μαθηματική πρόταση θέλω να μου την αναπαραστήσεις και σε αυτή την αριθμητική γραμμή. (η αριθμητική γραμμή περιλαμβάνει το διάστημα από 0 ως 2).
Μαθητής: Εδώ θα χωρίσω σε 4.
Ερευνητής: 4 διαστήματα από το 0 ως το 1 και 4 διαστήματα από το 1 ως το 2;
Μαθητής: Ναι. (Χωρίζει διαστήματα από το 0 ως το 1 και 4 διαστήματα από το 1 ως το 2).
Ερευνητής: Ωραία. Θέλω να ξεχάσεις ότι έκανες αυτές τις κάθετες γραμμές. Να δεις μόνο τους αριθμούς 0, 1 και 2.
Μαθητής: Κάθε φορά βάζεις ένα ακέραιο.
Ερευνητής: Τώρα όμως εσύ τι έχεις βάλει;
Μαθητής: ¼.
Ερευνητής: Κανονικά τι έπρεπε να βάζεις;
Μαθητής: 1/8.
Ερευνητής: Τι θα κάνεις τώρα;
Μαθητής: Θα μοιράσω τα τέταρτα. (Τα μοιράζει και βρίσκει πρώτα τα 4/8 μετά τα 3/8 και τέλος σημειώνει το άθροισμα, τα 7/8)
Ερευνητής: Τι λάθος είχες κάνει;
Μαθητής: Έκανα το ίδιο λάθος με τη συμμαθήτριά μου. Έπρεπε να χωρίσω σε όγδοα ως το 1 και όγδοα ως το 2.
Ερευνητής: Δηλαδή τι λάθος νομίζεις έκανε η συμμαθήτριά σου στην άσκηση αυτή;
Μαθητής: Χώρισε σε τέταρτα από το 0 ως το 1 και τέταρτα από το 1 ως το 2.
Ερευνητής: Δηλαδή ο αριθμός 1 τι αριθμός θα ήταν για τη συμμαθήτριά σου;
Μαθητής: Ο αριθμός 4/8.

Η συνέντευξη με το μαθητή με τη χαμηλή επίδοση έδειξε ότι δυσκολευόταν στη μετάφραση από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή ακόμα στην περίπτωση που η αριθμητική γραμμή περιλάμβανε το διάστημα 0 ως 1, αφού αντιμετώπιζε δυσκολίες στην κατασκευή της αριθμητικής γραμμής . Παρουσίαζε, επίσης, δυσκολίες στην περίπτωση που η αριθμητική γραμμή περιλάμβανε το διάστημα από 0 ως 2, αφού δεν εντοπίζει τη μονάδα υποδιαίρεσης.

Ερευνητής: Σου δίνω μια εξίσωση (4/8+3/8). Μπορείς να μου τη δείξεις στην αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: (κάνει 10 κατακόρυφες γραμμές και χωρίζει την αριθμητική γραμμή σε ένατα).
Ερευνητής: Μέτρησε τα διαστήματα που έκανες.
Μαθητής: Είναι 9. (Σβήνει το ένα διάστημα).
Ερευνητής: Μπορείς να μου δείξεις την εξίσωση;
Μαθητής: (Επιλέγει τα 4/8 και μετά προχωρεί ακόμη 3/8).
Ερευνητής: Ποια είναι η απάντηση;
Μαθητής: 7/8.
Ερευνητής: Μπορείς να μου δείξεις την ίδια εξίσωση και σε αυτή την αριθμητική γραμμή; (η αριθμητική γραμμή περιλαμβάνει το διάστημα 0 ως 2).

Μαθητής: (Χωρίζει το διάστημα από το 0 ως το 1 σε 8 ίσα μέρη).
Ερευνητής: Από εδώ ως εδώ (από το 1 ως το 2) τι θα κάνεις;
Μαθητής: 8 (Χωρίζει το διάστημα από το 1 ως το 2 σε 8 ίσα μέρη).
Ερευνητής: Δείξε μου την εξίσωση.
Μαθητής: (Επιλέγει τα 4/8 και μετά προχωρεί ακόμη 3/8)
Ερευνητής: Πόσα βρήκες;
Μαθητής: 7/8.
Ερευνητής: Μια συμμαθήτριά σου στην ίδια άσκηση έκανε στην αριθμητική γραμμή από το 0 ως το 1, 4 ίσα διαστήματα και από το 0 ως το 2 ακόμη 4 διαστήματα και μου είπε ότι χώρισε τη γραμμή σε όγδοα. Συμφωνείς;
Μαθητής: Όχι.
Ερευνητής: Πώς θα μπορούσες να τη διορθώσεις;
Μαθητής: Γιατί πρέπει να χωρίσουμε σε όγδοα.
Ερευνητής: Πώς θα την έπειθες;
Μαθητής: (Σκέφτεται για ένα λεπτό περίπου)
Ερευνητής: Μήπως θα μπορούσες να χρησιμοποιήσεις τον αριθμό 1 για να τη βοηθήσεις να καταλάβει;
Μαθητής: (Δεν απαντά)
Ερευνητής: Τι αριθμό έκανε ως το 1;
Μαθητής: 4.
Ερευνητής: Τι 4;
Μαθητής: 4/8...όχι εννοώ 4/4.
Ερευνητής: Κανονικά ποιος αριθμός είναι εδώ για να πούμε ότι η γραμμή έχει χωριστεί σε όγδοα.
Μαθητής: Τα 8/8.
Ερευνητής: Τι θα της έλεγες;
Μαθητής: Να κοιτάξει το 1...να είναι τα 8/8.

<u>Συνέντευξη: Μετάφραση από Λεκτική Έκφραση σε Αριθμητική Γραμμή</u>

Από τις συνεντεύξεις φάνηκε ότι στην περίπτωση της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων τα έργα μετάφρασης από τη λεκτική έκφραση στην αριθμητική γραμμή δυσκόλευαν τους μαθητές, ανεξάρτητα από την επίδοσή τους στα μαθηματικά

Συγκεκριμένα, ο μαθητής με την ψηλή επίδοση παρουσίαζε δυσκολία στη μετάφραση από τη λεκτική έκφραση στην αριθμητική γραμμή στο έργο που εξέταζε την πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων, αφού παρουσίαζε προβλήματα στην αρίθμηση της αριθμητικής γραμμής. Συγκεκριμένα, δε χρησιμοποιούσε το μηδέν στην αρίθμηση της γραμμής, τα διαστήματα που κατασκεύαζε ήταν άνισα μεταξύ τους και παρόλο που οι αριθμοί ήταν κλασματικοί αρχικά αρίθμησε τη γραμμή με τη χρήση ακέραιων αριθμών.

Ερευνητής: Ας ξεκινήσουμε με το πρώτο πρόβλημα. Διάβασέ το.
(Ο μαθητής διαβάζει το πρόβλημα)
Ερευνητής: Θέλω να λύσεις αυτό το πρόβλημα με τη βοήθεια της αριθμητικής γραμμής.
Μαθητής: Θα πούμε 2/7 και 4/7...
Ερευνητής: Πώς θα χωρίσεις την αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Θα τη χωρίσω σε 7 μέρη και θα κάνουμε μια καμπύλη γραμμή να πηγαίνει 2/7 και μετά ακόμα 4/7
(Ο μαθητής χωρίζει την αριθμητική γραμμή σε 7 ίσα μέρη και αριθμεί κάθε διάστημα με ακέραιους αριθμούς ως το 7, δηλαδή 1, 2, 3, 4, 5, 6 και 7).
Ερευνητής: Μπορείς να αριθμήσεις τη γραμμή; Με ποιον αριθμό θα ξεκινήσεις;
Μαθητής: Με το μηδέν.
Ερευνητής: Άρα ποιος αριθμός θα είναι στο τέλος των διαστημάτων που έκανες;
Μαθητής: Το 7.
Ερευνητής: Το αποτέλεσμα που θα βρεις θα πλησιάζει στο 7;
Μαθητής: Α, έκανα λάθος....πρέπει να φτάσω σε αριθμό μικρότερο του 1. Θα βάζω 1/7 (αριθμεί τη γραμμή, 0, 1/7, 2/7, 3/7, 4/7, 5/7, 6/7 και αφήνει την τελευταία κατακόρυφη γραμμή)
Ερευνητής: Ποιος αριθμός είναι εκεί;
Μαθητής: Είναι τα 7/7 ...ένα ολόκληρο. (Γράφει το αριθμό 1 στην τελευταία κατακόρυφη γραμμή).
Ερευνητής: Ένας συμμαθητής σου δεν καταλαβαίνει, γιατί χώρισες την αριθμητική γραμμή σε 7. Γιατί τη χώρισες έτσι;
Μαθητής: Γιατί τα 2/7 και τα 4/7 σημαίνει ότι είναι από 7 κομμάτια που θα πάρουμε.
Ερευνητής: Αν ένας συμμαθητής σου σε ρωτήσει γιατί έβαλες το 1 τελευταίο και όχι το 7;
Μαθητής: Γιατί και τα δύο κομμάτια του χυμού που έπιασα είναι λιγότερα από το χυμό ολόκληρο που είναι ένας. Δηλαδή και να τα πάρω τα κομμάτια αυτά, πάλι θα περισσέψει χυμός.
(Ο μαθητής κάνει μια καμπύλη γραμμή από το 0 ως τα 2/7 και μετά ακόμα μια από τα 2/7 ως τα 6/7)
Ερευνητής: Γράψε και την εξίσωση
(Ο μαθητής γράφει 2/7 + 4/7 = 6/7)
Ερευνητής: Τι βοήθησε περισσότερο, όταν έγραψες 1/7, 2/7 ως το 1 ή όταν έβαλες 1, 2, 3, 4, 5, 6 και 7.
Μαθητής: Όταν έγραψα 1/7, 2/7 ως το 1.
Ερευνητής: Γιατί;
Μαθητής: Γιατί αυτά είναι τα κομμάτια που παίρνω από το ολόκληρο.

Ο μαθητής με τη μέτρια επίδοση δεν παρουσίαζε ιδιαίτερες δυσκολίες στη μετάφραση από τη λεκτική έκφραση στην αριθμητική γραμμή. Η μόνη δυσκολία που παρουσίαζε ήταν η μέτρηση των διαστημάτων – μετρούσε τις κατακόρυφες διαχωριστικές γραμμές αντί ως διαστήματα.

Ερευνητής: Θα σου δώσω ένα φυλλάδιο με κάποιες εύκολες ασκήσεις και προβλήματα και θα προσπαθήσουμε να τα λύσουμε. Μπορείς να ξεκινήσεις με το πρώτο πρόβλημα;
Μαθητής: Το πρόβλημα λέει ότι για να φτιάξω ένα γλυκό χρησιμοποίησα 2/7 λίτρα χυμό και 4/7 λίτρα γάλα. Γυρεύω να δω πόσα λίτρα θα χρησιμοποιήσω συνολικά.
Ερευνητής: Θα ήθελα να μου λύσεις αυτό το πρόβλημα με τη βοήθεια της αριθμητικής γραμμής. Τι θα κάνεις;
Μαθητής: Θα βάλω το 0 και το 1 πάνω στην αριθμητική γραμμή και μετά θα χωρίσω σε 7 ίσα μέρη. (Ο μαθητής φέρει μια κάθετη γραμμή πάνω στην αριθμητική γραμμή και τοποθετεί εκεί το σημείο 0, ακολούθως φέρει μια άλλη κάθετη γραμμή σε κάποια απόσταση από το 0 και εκεί τοποθετεί το σημείο 1. Φέρει μετά 5 κάθετες γραμμές, αφού μετρά και τις δύο κάθετες γραμμές στο 0 και στο 1 και χωρίζει το διάστημα 0 ως 1 σε 6 ίσα μέρη).
Ερευνητής: Τι είναι αυτά τα διαστήματα;
Μαθητής: Είναι έβδομα.
Ερευνητής: Μπορείς να μου δείξεις το 1/7;
Μαθητής: (Δείχνει τη διαχωριστική κάθετη γραμμή)
Ερευνητής: Είπες ότι θα χωρίσεις τη γραμμή σε 7 ίσα μέρη. Μπορείς να μου δείξεις ένα από αυτά τα μέρη;
Μαθητής: (Δείχνει ένα από τα 6 διαστήματα)
Ερευνητής: Χρωμάτισέ το με το μολύβι σου.
Μαθητής: (Χρωματίζει με το μολύβι του ένα από τα 6 διαστήματα)
Ερευνητής: Πόσα τέτοια διαστήματα έχεις;
Μαθητής: 7.
Ερευνητής: Μπορείς να τα μετρήσεις;
Μαθητής: (Μετρά και τα βρίσκει 6). Έκανα λάθος...πρέπει να κάνω ακόμη ένα διάστημα. (Χωρίζει την αριθμητική γραμμή σε 7 ίσα διαστήματα, ενώ αφήνει το 1 τοποθετημένο στα 6/7).
Ερευνητής: Ο αριθμός 1 πόσα έβδομα έχει;
Μαθητής: 7. (Αλλάζει τη θέση του 1 και το τοποθετεί στα 7/7).
Ερευνητής: Ωραία. Πώς θα δουλέψεις τώρα για να λύσεις το πρόβλημα;
Μαθητής: Θα πάρω στην αριθμητική γραμμή τα 2/7 και μετά τα 4/7 (Κατασκευάζει βέλος από το 0 ως το 2/7 και μετά κατασκευάζει ακόμη ένα βέλος από το 2/7 προχωρώντας ακόμη 4/7).
Ερευνητής: Ποιος αριθμός είναι αυτός;
Μαθητής: Είναι τα 6/7. (Το σημειώνει στην αριθμητική γραμμή)

Τέλος, ο μαθητής με τη χαμηλή επίδοση συνδύαζε τις αδυναμίες των δύο προηγούμενων μαθητών αναφορικά με τη μετάφραση από τη λεκτική έκφραση στην αριθμητική γραμμή για το έργο πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων. Αρχικά αντιμετώπισε προβλήματα στην αρίθμηση της γραμμής. Συγκεκριμένα, στην πρώτη κατακόρυφη διαχωριστική γραμμή τοποθετούσε τον πρώτο προσθετέο. Επίσης, παρουσίαζε δυσκολίες στη μέτρηση των διαστημάτων στην αριθμητική γραμμή, αφού μετρούσε τις κατακόρυφες διαχωριστικές γραμμές αντί ως διαστήματα

Ερευνητής: Μαθητής σε αυτό το φυλλάδιο θα δουλέψουμε μαζί για να λύσουμε κάποιες ασκήσεις και κάποια εύκολα προβλήματα. Μπορείς να ξεκινήσεις με το πρώτο πρόβλημα. Διάβασέ το και πες μου με δικά σου λόγια τι λέει.
Μαθητής: Ήθελε να φτιάξει ένα γλυκό και χρησιμοποίησε τα 2/7 λίτρα χυμό. Έβαλε μέσα και 4/7 λίτρα γάλα...και μας λέει ποια ήταν η συνολική ποσότητα των υγρών που χρησιμοποίησε;
Ερευνητής: Μπορείς να μου λύσεις αυτό το πρόβλημα με τη βοήθεια της αριθμητικής γραμμής που σου δίνω;
Μαθητής: Ναι..
Ερευνητής: Τι θα κάνεις πρώτα;
Μαθητής: Θα δείξω τα 4/7.
Ερευνητής: Τι θα κάνεις πρώτα;
Μαθητής: Θα το χωρίσω σε 7 (φέρει 7 κατακόρυφους διαχωρισμούς δημιουργώντας 6 ίσα διαστήματα, αλλά δεν τοποθετεί αριθμούς).
Ερευνητής: Ωραία. Πώς ονομάζεται η γραμμή αυτή;
Μαθητής: Αριθμητική.
Ερευνητής: Άρα πρέπει να την αριθμήσουμε. Ποιον αριθμό θα τοποθετήσεις εδώ; (δείχνει την πρώτη κατακόρυφη γραμμή).
Μαθητής: (Σκέφτεται για αρκετή ώρα) Τα 2/7.
Ερευνητής: Με ποιον αριθμό θα ξεκινήσουμε;
Μαθητής: Με το 1.
Ερευνητής: Το διάστημα αυτό ποιος αριθμός είναι; (δείχνει το πρώτο διάστημα).
Μαθητής: Το 1/7.
Ερευνητής: Άρα τα 2/7 θα τοποθετηθούν πριν από το 1/7;
Μαθητής: Όχι.
Ερευνητής: Ποιος είναι ο πιο μεγάλος; Το 1 ή το 1/7;
Μαθητής: Το 1.
Ερευνητής: Άρα το 1 θα τοποθετηθεί πριν από το 1/7;
Μαθητής: Όχι.
Ερευνητής: Μπορείς να μου δείξεις το 1/7 ξανά;
Μαθητής: (δείχνει το διάστημα από το 0 μέχρι το 1/7)
Ερευνητής: Άρα ποιος αριθμός είναι εδώ; (δείχνει την πρώτη κατακόρυφη γραμμή)
Μαθητής: Το μηδέν.
Ερευνητής: Στο τέλος (δείχνει την τελευταία κατακόρυφη γραμμή) ποιος αριθμός θα είναι;
Μαθητής: Το 7.
Ερευνητής: Άρα έχουμε 7 ολόκληρα λίτρα;
Μαθητής: (Σκέφτεται)
Ερευνητής: Ποιος αριθμός είναι εδώ;
Μαθητής: Το 1/7.
Ερευνητής: Μετά;
Μαθητής: Τα 2/7.
Ερευνητής: Προχώρα.
Μαθητής: 3/7, 4/7...
Ερευνητής: Άρα εδώ ποιος αριθμός είναι;

Μαθητής: Τα 7/7.
Ερευνητής: Δηλαδή;
Μαθητής: Το 1 (Σημειώνει το 1).
Ερευνητής: Πόσα ίσα διαστήματα έχεις κάνει;
Μαθητής: 7.
Ερευνητής: Μέτρησέ τα.
Μαθητής: (Μετρά και βρίσκει 6).
Ερευνητής: Τώρα τι θα κάνεις;
Μαθητής: Θα κάνω ακόμα 1. (Φέρει ακόμη μια κατακόρυφη γραμμή και χωρίζει σε 7 ίσα διαστήματα).
Ερευνητής: Μπορείς να λύσεις το πρόβλημα τώρα;
Μαθητής: Ναι. Πρώτα θα πάω στα 2/7 και μετά ακόμα 4/7 (Αρχίζει να μετρά τις κατακόρυφες διαχωριστικές γραμμές αντί τα διαστήματα).
Ερευνητής: Μπορείς να μου δείξεις ποια είναι τα ίσα κομμάτια και ποιες οι γραμμές που χρησιμοποιήσαμε για να τα χωρίσουμε;
Μαθητής: Τούτα είναι τα κομμάτια (δείχνει τα διαστήματα) και τούτες οι γραμμές τα χωρίζουν (δείχνει τις κατακόρυφες γραμμές).
Ερευνητής: Άρα ποια θα μετρήσουμε;
Μαθητής: Τα κομμάτια. Προχωρά στα 2/7 με μια καμπύλη γραμμή) και μετά ακόμα 4/7 (κάνει μια δεύτερη καμπύλη γραμμή και προχωρεί ακόμη 4/7).
Ερευνητής: Σε ποιον αριθμό έφτασες;
Μαθητής: Στα 6/7.
Ερευνητής: Μπορείς να μου γράψεις και την εξίσωση;
Μαθητής: (Γράφει 2/7 + 4/7=6/7).

<u>Συνέντευξη: Μετάφραση από Αριθμητική γραμμή σε Λεκτική έκφραση</u>

Οι συνεντεύξεις έδειξαν ότι στην περίπτωση της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων οι μαθητές δεν αντιμετώπιζαν δυσκολίες στα έργα μετάφρασης από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση και τέλος στη λεκτική έκφραση.

Συγκεκριμένα η συνέντευξη με το μαθητή με την ψηλή επίδοση έδειξε ότι μπορούσε να διατυπώσει λεκτικά προβλήματα δοσμένων αριθμητικών γραμμών οι οποίες περιλάμβαναν το διάστημα 0 ως 1 ή το διάστημα 0 ως 2 και αναπαριστούσαν εξισώσεις πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων.

Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις ένα πρόβλημα που να ταιριάζει με την εξίσωση που έγραψες; (για δοσμένη αριθμητική γραμμή η οποία περιλαμβάνει το διάστημα 0 ως 1 και αναπαριστά τη σχέση 3/9+4/9=7/9)
Μαθητής: Ο κ. Κώστας χώρισε την τούρτα του σε 9 κομμάτια. Πήρε τα 4 κομμάτια για εκείνον και φύλαξε τα 3 για την αδελφή του. Πόσα έχουν μαζί;
Ερευνητής: Ένας συμμαθητής σου θα απαντούσε έχουν μαζί 7 και όχι 7/9. Τι θα του απαντούσες;
Μαθητής: Ότι είναι από τα 9 που πρέπει να τα πάρει.

Ερευνητής: 3 και 4 δεν κάνει 7; Έχουν μαζί 7.
Μαθητής: Επειδή είναι κομμάτια....είναι πιο μικρά από την τούρτα ολόκληρη, όχι 7 ολόκληρα.
Ερευνητής: Μπορείς να αλλάξεις την ερώτηση στο πρόβλημα ώστε να σου απαντήσει 7/9;
Μαθητής: Τι μέρος της τούρτας έφαγαν;
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις ένα πρόβλημα; (για δοσμένη αριθμητική γραμμή η οποία περιλαμβάνει το διάστημα 0 ως 2 και αναπαριστά τη σχέση 1/5+2/5=3/5)
Μαθητής: Ο φίλος μου ο Νίκος έφαγε το 1/5 μιας σοκολάτας και εγώ τα 2/5. Πόσα φάγαμε μαζί;

Η συνέντευξη με το μαθητή με τη μέτρια επίδοση έδειξε ότι μπορούσε να διατυπώσει λεκτικά προβλήματα δοσμένων αριθμητικών γραμμών οι οποίες περιλάμβαναν το διάστημα 0 ως 1 ή το διάστημα 0 ως 2 και αναπαριστούσαν εξισώσεις πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων.

Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις ένα πρόβλημα σε ένα συμμαθητή σου που για να το λύσει να χρειάζεται να χρησιμοποιήσει την εξίσωση 4/9+3/9=7/9; (για δοσμένη αριθμητική γραμμή η οποία περιλαμβάνει το διάστημα 0 ως 1 και αναπαριστά τη σχέση 3/9+4/9=7/9)
Μαθητής: Για να φτιάξω ένα γλυκό θέλω 4/9 λίτρα χυμό και 3/9 λίτρα γάλα. Πόσα είναι η συνολική ποσότητα των υγρών;
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις ένα πρόβλημα για την εξίσωση αυτή; (για δοσμένη αριθμητική γραμμή η οποία περιλαμβάνει το διάστημα 0 ως 2 και αναπαριστά τη σχέση 1/5+2/5=3/5)
Μαθητής: Από μια σοκολάτα έφαγα τη μια μέρα τα 2/5 και την άλλη μέρα έφαγα το 1/5. Πόση σοκολάτα έμεινε;
Ερευνητής: Πόση έμεινε;
Μαθητής: Τα 2/5.
Ερευνητής: Αυτή είναι η απάντηση που βρήκες όταν έγραψες την εξίσωση;
Μαθητής: Όχι. Στο πρόβλημα που είπα...Θα ρωτήσω πόσα έφαγα όλα μαζί.

Η συνέντευξη με το μαθητή με τη χαμηλή επίδοση έδειξε ότι μπορούσε να διατυπώσει λεκτικά προβλήματα δοσμένων αριθμητικών γραμμών οι οποίες περιλάμβαναν το διάστημα 0 ως 1 ή το διάστημα 0 ως 2 και αναπαριστούσαν εξισώσεις πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων.

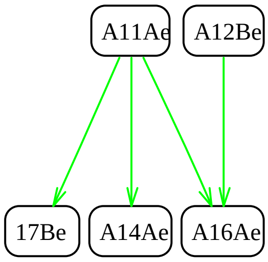
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις ένα πρόβλημα που να λύνεται με την εξίσωση αυτή; (για δοσμένη αριθμητική γραμμή η οποία περιλαμβάνει το διάστημα 0 ως 1 και αναπαριστά τη σχέση 3/9+4/9=7/9)

Μαθητής: Η μητέρα μου αγόρασε μια τούρτα που είχε τα 4/9 κομμάτια.... Έφαγα τα 3/9. Πόσα μου έμειναν;
Ερευνητής: Πόσα έμειναν;
Μαθητής: 1/9.
Ερευνητής: Η εξίσωση λέει 4/9+3/9=7/9
Μαθητής: Είναι πλην το πρόβλημα που είπα.
Ερευνητής: Πες μου ένα άλλο πρόβλημα.
Μαθητής: Είχα 4/9 της λίρας. Ο πατέρας μου έδωσε ακόμη 3/9 της λίρας. Πόσα....(σκέφτεται).
Ερευνητής: Τι θα ρωτήσεις;
Μαθητής: Πόσα ένατα της λίρας έχω τώρα;
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις και ένα πρόβλημα; (για δοσμένη αριθμητική γραμμή η οποία περιλαμβάνει το διάστημα 0 ως 2 και αναπαριστά τη σχέση 1/5+2/5=3/5)
Μαθητής: Η μητέρα μου αγόρασε τα 2/5 των βιβλίων και ο πατέρας μου το 1/5 των βιβλίων (εδώ το κλάσμα εννοείται ως μέρος διακριτού συνόλου και όχι ως το μέρος ενός αντικειμένου). Πόσα βιβλία έχω τώρα;

Πρόσθεση Ετερώνυμων Κλασμάτων

Δοκίμιο Γ: Μεταφράσεις ανάμεσα στη Συμβολική Έκφραση και στην Αριθμητικη Γραμμή

Αναφορικά με την πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων, με βάση το Διάγραμμα 15, το Συνεπαγωγικό Διάγραμμα Έργων Μετάφρασης Πρόσθεσης Ετερώνυμων Κλασμάτων, δε φάνηκε να ξεχωρίζει κανένα είδος μετάφρασης ως δυσκολότερο ή ως ευκολότερο. Συγκεκριμένα, φάνηκε ότι η επιτυχία σε έργα μετάφρασης από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση συνεπάγεται την επιτυχία σε έργα μετάφρασης από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή – η επιτυχία στο έργο A11Ae συνεπάγεται την επιτυχία στο έργο A17Be. Ισχύει, όμως και το αντίστροφο, δηλαδή η επιτυχία σε έργα μετάφρασης από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή συνεπάγεται την επιτυχία σε έργα μετάφρασης από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση - επιτυχία στο έργο A12Be συνεπάγεται την επιτυχία στο έργο A16Ae. Αυτό ίσως να οφείλεται στο γεγονός ότι και τα δύο είδη μετάφρασης εμπεριέχουν μεγάλο βαθμό δυσκολίας για τους μαθητές. Συγκεκριμένα, η μετάφραση που έχει ως πηγή τη συμβολική έκφραση και έχει ως στόχο την αριθμητική γραμμή δυσκόλεψε τους μαθητές, αφού με βάση την εξίσωση έπρεπε να αναπαραστήσουν σε μια αριθμητική γραμμή δύο ετερώνυμα κλάσματα, τα οποία αρχικά αναπαρίστανται σε δύο διαφορετικές αριθμητικές γραμμές και να τα προσθέσουν αφού πρώτα τα κάνουν ομώνυμα. Η μετάφραση που έχει ως πηγή την αριθμητική γραμμή και έχει ως στόχο τη συμβολική έκφραση δυσκόλεψε τους μαθητές, αφού έπρεπε να διατυπώσουν την εξίσωση πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων που αναπαριστούν δύο αριθμητικές γραμμές ερμηνεύοντας τα δομικά χαρακτηριστικά των γραμμών.



Διάγραμμα 15. Συνεπαγωγικό Διάγραμμα Έργων Μετάφρασης Πρόσθεσης Ετερώνυμων Κλασμάτων.

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν συμφωνούν με τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών στα έργα μετάφρασης που εξετάζουν την πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων, στα οποία είχε φανεί ότι η επίδοση των μαθητών είχε κυμανθεί στα ίδια επίπεδα, ανεξάρτητα από το είδος μετάφρασης. Αναφορικά με την πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων (Πίνακας 9) το ποσοστό επιτυχίας στα έργα που εξέταζαν τη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική αναπαράσταση ήταν 43.2%. Τα έργα μετάφρασης που εξέταζαν τη μετάφραση από τη συμβολική αναπαράσταση στην αριθμητική γραμμή συγκέντρωσαν ποσοστό επιτυχίας 42.2%.

<u>Συνέντευξη: Μετάφραση από Αριθμητική Γραμμή σε Συμβολική Έκφραση</u>

Αναφορικά με την πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων ο μαθητής με τη μέτρια επίδοση και ο μαθητής με τη χαμηλή επίδοση έδειξαν να δυσκολεύονται στη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση. Αρχικά αναγνώριζαν την εξίσωση της πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων όταν αυτή παρουσιαζόταν στην αριθμητική γραμμή, αλλά δυσκολεύονταν να μεταφράσουν τη διαδικασία επίλυσης της εξίσωσης της πρόσθεσης όπως αυτή παρουσιαζόταν στην αριθμητική γραμμή, γι'αυτό και προσπαθούσαν με διαδικασίες που ανήκουν αποκλειστικά στο συμβολικό πεδίο να επιλύσουν την εξίσωση.

Αντίθετα, ο μαθητής με την ψηλή επίδοση φάνηκε να αναγνωρίζει την πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων με τη βοήθεια της αριθμητικής γραμμής και διατύπωσε τη σωστή εξίσωση αιτιολογώντας την επιλογή του.

Ερευνητής: Σου δίνω τρεις αριθμητικές γραμμές συμπληρωμένες. Μπορείς να μου πεις ποια εξίσωση αναπαριστούν;
Μαθητής: Είναι ½ και 1/3. (Γράφει ½ +1/3=). Μετρά τα έκτα της τρίτης αριθμητικής γραμμής και συμπληρώνει την εξίσωση: ½ +1/3= 5/6
Ερευνητής: (Δείχνει στην τελευταία αριθμητική γραμμή). Αυτά τα 3/6 ποιος αριθμός είναι;
Μαθητής: Τα 3/6 είναι το ½ και είναι ισοδύναμα και τα άλλα 2/6 είναι το 1/3 και πάλι είναι ισοδύναμα. Συνολικά είναι 5/6.

Στη συνέντευξη με το μαθητή με τη μέτρια επίδοση φάνηκε αρχικά ότι ο συγκεκριμένος μαθητής αναγνώρισε τη σωστή εξίσωση πρόσθεσης που αναπαριστούσαν οι αριθμητικές γραμμές, αλλά στη συνέχεια προσπάθησε να λύσει την εξίσωση με τη χρήση του ελάχιστου κοινού πολλαπλασίου και της συμβολικής έκφρασης και όχι με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής.

Ερευνητής: Εδώ σου δίνω την αριθμητική γραμμή συμπληρωμένη. Μπορείς να μου πεις την εξίσωση;
Μαθητής: ½+1/3 (γράφει την εξίσωση).

Ερευνητής: Ξέρεις το αποτέλεσμα;
Μαθητής: 5/6.
Ερευνητής: Πώς κατέληξε σε έκτα η τρίτη αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Βρήκα το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο.
Ερευνητής: Άρα το ½ με πόσα έκτα αντιστοιχεί;
Μαθητής: (Παρατηρεί την τρίτη αριθμητική γραμμή). Με τρία.
Ερευνητής: Το 1/3 με πόσα έκτα αντιστοιχεί.
Μαθητής: (Παρατηρεί την τρίτη αριθμητική γραμμή). Με δύο.

Η συνέντευξη με το μαθητή με τη χαμηλή επίδοση έδειξε ότι ο μαθητής αναγνώρισε την εξίσωση πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή, αλλά δυσκολευόταν στην διαδικασία επίλυσης της εξίσωσης. Αρχικά κατέφυγε στο συμβολικό πεδίο έκφρασης για να επιλύσει την εξίσωση, αλλά κατέληξε στην απάντηση με τη βοήθεια της αριθμητικής γραμμής.

Ερευνητής: Σου δίνω συμπληρωμένες δύο αριθμητικές γραμμές και θέλω τους δύο αριθμούς που αναπαριστούν να τους βάλεις μαζί. Μπορείς να μου πεις την εξίσωση;
Μαθητής: ½ και ...1/3
Ερευνητής: Με τι είναι ίσα;
Μαθητής: Με 3/6 και 2/6
Ερευνητής: Πόσο κάνει;
Μαθητής: 5/6.
Ερευνητής: Ωραία. Είχαμε ½ και 1/3 να τα βάλουμε μαζί, πώς βρέθηκαν τα 3/6 και τα 2/6;
Μαθητής: (δεν απαντά).
Ερευνητής: Θα μπορούσες να προσθέσεις το ½ με το 1/3;
Μαθητής: Όχι.
Ερευνητής: Γιατί;
Μαθητής: Είναι διαφορετικά.
Ερευνητής: Σε τι διαφέρουν;
Μαθητής: Είναι διαφορετικά τα κομμάτια.
Ερευνητής: Τι πρέπει να κάνω τότε;
Μαθητής: Να τα κάνω ομώνυμα.
Ερευνητής: Τι σκέφτηκα να κάνω λοιπόν στην τρίτη αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Είπες 3/6...
Ερευνητής: Γιατί;
Μαθητής: Είναι το ½.
Ερευνητής: Τα 2/6;
Μαθητής: Το 1/3.
Ερευνητής: Σε τι κομμάτια τα μετέτρεψα όλα;
Μαθητής: Σε έκτα.
Ερευνητής: Κατάφερα να τα προσθέσω;
Μαθητής: Ναι, γιατί είχαν τον ίδιο παρονομαστή.

Η ταύτιση της αριθμητικής γραμμής με το ευθύγραμμο τμήμα και την υποέννοια μέρος – όλο και οι δυσκολίες που προκαλεί στη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση φάνηκε και από τις συνεντεύξεις που αφορούσαν την πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων. Ο μαθητής με τη μέτρια επίδοση και ο μαθητής με τη χαμηλή επίδοση αντιμετώπιζαν δυσκολίες στην αναγνώριση της πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων διότι ταύτιζαν την αριθμητική γραμμή με ευθύγραμμο τμήμα παρουσιάζοντας έτσι αδυναμίες στην αναγνώριση της μονάδας υποδιαίρεσης. Κατά συνέπεια δεν μπορούσαν να εντοπίσουν τον αριθμητή και τον παρονομαστή των προσθετέων, δηλαδή των ετερώνυμων κλασμάτων, όταν η αριθμητική γραμμή περιλάμβανε το διάστημα 0 ως 2.

Η συνέντευξη με το μαθητή με την ψηλή επίδοση έδειξε ότι δεν ταύτιζε την αριθμητική γραμμή με το ευθύγραμμο τμήμα, γι’αυτό και μπορούσε να εντοπίσει τη μονάδα υποδιαίρεσης της αριθμητικής γραμμής. Κατά συνέπεια ο συγκεκριμένος μαθητής διατύπωσε τη σωστή εξίσωση πρόσθεσης κλασμάτων.

Ερευνητής: Έχω και πάλι τρεις αριθμητικές γραμμές συμπληρωμένες. Δες ποιους αριθμούς αναπαριστούν οι πρώτες δύο αριθμητικές γραμμές και να μου τους προσθέσεις στην τελευταία αριθμητική γραμμή.
Μαθητής: ¼ και 2/5.
Ερευνητής: Ωραία.
Μαθητής: Στην τρίτη γραμμή θα κάνω 20 ίσα κομμάτια ως το 1 και μετά ακόμη 20 κομμάτια ως το 2.
Ερευνητής: Γιατί;
Μαθητής: Διότι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο του 4 και του 5 είναι το 20. Το ¼ θα γίνει 5/20 και το 2/5 θα γίνει 8/20. Μαζί κάνουν 13/20. (Χωρίζει την αριθμητική γραμμή σε 20 ίσα κομμάτια και επιλέγει πρώτα τα 5 και ύστερα τα 8).

Ο μαθητής με τη μέτρια επίδοση χρησιμοποιώντας την αριθμητική γραμμή ως ευθύγραμμο τμήμα δεν μπορούσε να εντοπίσει τη μονάδα υποδιαίρεσης, γι’αυτό και αρχικά διατύπωσε λανθασμένη εξίσωση.

Ερευνητής: Εδώ έχουμε συμπληρωμένες αριθμητικές γραμμές. Μπορείς να μου πεις ποια εξίσωση δείχνουν;
Μαθητής: 1/8 + 2/10.
Ερευνητής: Γιατί είπες 1/8;
Μαθητής: Γιατί η αριθμητική γραμμή είναι χωρισμένη σε 8 κομμάτια και πήραμε το 1.
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις ποιος αριθμός είναι εδώ; (δείχνει το 1).
Μαθητής: Το 1.
Ερευνητής: Πόσα όγδοα έχει το ένα ολόκληρο;
Μαθητής: 8.
Ερευνητής: Άρα από εδώ μέχρι εδώ έχει 8 όγδοα; (από το 0 μέχρι το 1).
Μαθητής: Όχι...είναι τέσσερα.
Ερευνητής: Πώς είναι χωρισμένη η αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: (Σκέφτεται για ένα λεπτό). Σε τεταρτα!
Ερευνητής: Πώς προχωρούμε;
Μαθητής: Με τέταρτα.
Ερευνητής: Άρα ποιος αριθμός είναι εδώ; (δείχνει το διάστημα από το 0 ως το 1 και ¼)
Μαθητής: Τα 1 και ¼..
Ερευνητής: Ποιος αριθμός είναι αυτός; (δείχνει τον αριθμό ¼).
Μαθητής: Το ¼.
Ερευνητής: Στη δεύτερη αριθμητική γραμμή, ποιος είναι ο αριθμός;
Μαθητής: Είναι τα 2/5.
Ερευνητής: Ένας συμμαθητής σου μου είπε ότι είναι τα 2/10. Γιατί μου είπε έτσι;
Μαθητής: Γιατί μέτρησε ως το 2 και όχι ως το 1 για να δει πως χωρίσαμε την αριθμητική γραμμή.
Ερευνητής: Ποιος αριθμός θα έπρεπε να ήταν εδώ αν προχωρούσαμε με δέκατα;
Μαθητής: Θα ήταν τα 5/10.
Ερευνητής: Δηλαδή;
Μαθητής: Το μισό.
Ερευνητής: Γράψε την εξίσωση.
Μαθητής: (γράφει ¼+2/5=)

Στην περίπτωση του μαθητή με τη χαμηλή επίδοση η συνέντευξη έδειξε ότι χρησιμοποιούσε την αριθμητική γραμμή ως ευθύγραμμο τμήμα δεν μπορούσε να εντοπίσει τη μονάδα υποδιαίρεσης, γι’αυτό και αρχικά διατύπωσε λανθασμένη εξίσωση.

Ερευνητής: Στην άσκηση αυτή έχουμε και πάλι συμπληρωμένες αριθμητικές γραμμές. Μπορείς να μου πεις ποια εξίσωση αναπαριστούν;
Μαθητής: 1/8 και 2/10.
Ερευνητής: Στην πρώτη αριθμητική γραμμή, εδώ που είναι ο αριθμός 1, με πόσα όγδοα είναι ίσος;

Μαθητής: Με 8.
Ερευνητής: Μέτρα, έχει 8/8 ως εδώ;
Μαθητής: Όχι έχει 4.
Ερευνητής: Τι να συμβαίνει άραγε;
Μαθητής: (δεν απαντά).
Ερευνητής: Ποιος αριθμός είναι εδώ; (από το 0 ως το ¼).
Μαθητής: Το ¼.
Ερευνητής: Ως το 1 πόσα τέταρτα έχουμε;
Μαθητής: 4.
Ερευνητής: Πώς είναι δηλαδή χωρισμένη η αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Σε όγδοα.
Ερευνητής: Άρα εδώ πρέπει να τα 8/8 (δείχνει το 1).
Μαθητής: Όχι ...εννοώ τέταρτα.
Ερευνητής: Τι βάζω κάθε φορά;
Μαθητής: ¼.
Ερευνητής: Εδώ ποιος αριθμός είναι; (δείχνει το 5/4)
Μαθητής: 5/4
Ερευνητής: Αλλιώς; Ένα ολόκληρο και ακόμα τι;
Μαθητής: 1 και ¼.
Ερευνητής: Είναι τα 5/8 εδώ (δείχνει στη θέση του 5/4), δηλαδή είναι μεγαλύτερα από τον αριθμό 1;
Μαθητής: Όχι γιατί είναι πιο μικρό.
Ερευνητής: Άρα εδώ προχωρώ βάζοντας...
Μαθητής: ¼.
Ερευνητής: Τι βάζω κάθε φορά στη δεύτερη αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Βάζω 1/5.
Ερευνητής: Άρα ποιος αριθμός είναι αυτός; (δείχνει τα 2/5).
Μαθητής: 2/5.
Ερευνητής: Για να βάλεις μαζί το ¼ και τα 2/5 στην τρίτη αριθμητική γραμμή τι θα κάνεις;
Μαθητής: (δεν απαντά).
Ερευνητής: Τι σε δυσκολεύει;
Μαθητής: Ο παρονομαστής δεν είναι ο ίδιος.
Ερευνητής: Τι θα κάνεις;
Μαθητής: Θα πρέπει να κάνω τους παρονομαστές ίσους.
Ερευνητής: Πώς θα το καταφέρεις αυτό;
Μαθητής: Υπάρχει ο αριθμός 20...το 5 πάει εκεί 4 φορές και το 4 πάει εκεί 5 φορές.
Ερευνητής: Δεν θέλω να μετρήσεις τα μέρη που χώρισα το διάστημα από το 0 ως το 1 στην τρίτη αριθμητική γραμμή. Μπορείς να μου πεις πόσα είναι;
Μαθητής: 20.
Ερευνητής: Μπορείς να γράψεις την εξίσωση;
Μαθητής: (γράφει 2/5 + ¼ = 8/20 + 5/20=13/20).
Ερευνητής: Το 5/20 με ποιο είναι ίσο;
Μαθητής: Με το ¼.
Ερευνητής: Και το 8/20;
Μαθητής: Με τα 2/5.
Ερευνητής: Δείξε μου αυτή την εξίσωση στην αριθμητική γραμμή.
Μαθητής: (φέρει βέλος από το 0 ως το τέλος των 8 διαστημάτων και μετά φέρει ακόμη ένα βέλος ως το τέλος των 13).
Ερευνητής: Πόσα βρήκες;
Μαθητής: 13/20.

Ερευνητής: Τα 5/20 (δείχνει το διάστημα από τα 8/20 ως τα 13/20) σε ποια από τις αριθμητικές γραμμές υπάρχει; Στην πρώτη ή τη δεύτερη;
Μαθητής: Στην πρώτη, είναι το ¼.
Ερευνητής: Τα 8/20;
Μαθητής: Στη δεύτερη, είναι τα 2/5, είναι ο ίδιος.
Ερευνητής: Πώς είναι δυνατό τα 2 κομμάτια να είναι τα ίδια με τα 8;
Μαθητής: Είναι τα ίδια...διότι είναι 2 πολύ μεγάλα...ενώ τα 8 είναι πολλά αλλά είναι μικρά-μικρά.

<u>Συνέντευξη: Μετάφραση από τη Λεκτική Έκφραση στην Αριθμητική Γραμμή και Αντίστροφα</u>

Σε σχεση με την πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων οι συνεντεύξεις έδειξαν ότι οι μαθητές παρουσίαζαν δυσκολίες στη μετάφραση από τη λεκτική έκφραση στην αριθμητική γραμμή ή αντίστροφα. Προσπαθούσαν να εντοπίσουν τη συμβολική έκφραση με στόχο να επιλύσουν το πρόβλημα αλγεβρικά.

Ο μαθητής με την ψηλή επίδοση ήταν ο μόνος από τους τρεις μαθητές, ο οποίος δεν αντιμετώπιζε κανένα πρόβλημα στη μετάφραση από τη λεκτική έκφραση στην αριθμητική γραμμή.

Ερευνητής: Θα δουλέψουμε μαζί σε κάποια προβλήματα και ασκήσεις. Ας ξεκινήσουμε από το πρώτο πρόβλημα. Διάβασέ το και να μου πεις με δικά σου λόγια τι λέει.
(Ο μαθητής διαβάζει το πρώτο πρόβλημα)
Μαθητής: Ήταν μια οικογένεια και ήπιε το πρωί τα 2/3 του χυμού και ¼ του χυμού το απόγευμα. Πόσο ήπιαν συνολικά;
Ερευνητής: Εγώ σου δίνω τρεις αριθμητικές γραμμές και θέλω να προσπαθήσεις να λύσεις το πρόβλημα χρησιμοποιώντας αυτές τις αριθμητικές γραμμές. Τι θα βάλω άραγε στην πρώτη;
Μαθητής: Θα βάλω τα 2/3
Ερευνητής: Στη δεύτερη;
Μαθητής: Το 1/4
Ερευνητής: Και στην τελευταία;
Μαθητής: Θα βάλω τα δύο κλάσματα μαζί για να λύσω το πρόβλημα. Θα βρω το σύνολο.
Ερευνητής: Ωραία. Ξεκίνα.
(Ο Μαθητής αναπαριστά στις δύο πρώτες αριθμητικές γραμμές τα δύο κλάσματα)
Ερευνητής: Πώς θα δουλέψεις στην πρώτη;
Μαθητής: Θα τη χωρίσω σε τρία ίσα μέρη και θα τραβήξω μια γραμμή από το 0 μέχρι και το δεύτερο κομμάτι.
Ερευνητής: Ωραία. Στη δεύτερη;
Μαθητής: Θα τη χωρίσω σε τέσσερα ίσα μέρη και θα τραβήξω μια γραμμή από το 0 μέχρι το τέταρτο κομμάτι.
Ερευνητής: Τι θα κάνουμε στην τρίτη αριθμητική γραμμή;

Μαθητής: Θα κάνουμε τα κλάσματα με τον ίδιο παρονομαστή, το 12 και θα τα προσθέσω. Το 2/3 γίνεται 8/12 και το ¼ γίνεται 3/12. (Χωρίζει την αριθμητική γραμμή σε 12 ίσα μέρη και επιλέγει πρώτα τα 8/12 και μετά τα 3/12).
Ερευνητής: Άρα πού καταλήξαμε;
Μαθητής: Στα 11/12.
Ερευνητής: Μπορείς να μου γράψεις την εξίσωση;
Μαθητής: Ναι. 2/3 +1/4=8/12 + 3/12 = 11/12

Ο μαθητής με τη μέτρια επίδοση αρχικά έδειξε να μην παρουσιάζει δυσκολίες στη μετάφραση από τη λεκτική έκφραση στην αριθμητική γραμμή, αλλά κατέφυγε στη χρήση της συμβολικής σημειολογίας για να επιλύσει την εξίσωση και όχι στην αναπαράσταση της εξίσωσης από την αριθμητική γραμμή.

Ερευνητής: Θα ασχοληθούμε με τις ασκήσεις και τα προβλήματα σε αυτό το φυλλάδιο. Ας ξεκινήσουμε με το πρώτο πρόβλημα. Διάβασέ το και πες μου με δικά σου λόγια τι λέει.
Μαθητής: Μια οικογένεια ήπιε 2/3 λίτρα χυμό το πρωί και ¼ λίτρα χυμό το απόγευμα. Πόσο ήπιαν συνολικά;
Ερευνητής: Θα ήθελα να λύσεις αυτό το πρόβλημα με τη βοήθεια των τριών αριθμητικών γραμμών που υπάρχουν. Τι νομίζεις θα κάνουμε στην πρώτη;
Μαθητής: Θα δείξουμε τα 2/3.
Ερευνητής: Στη δεύτερη;
Μαθητής: Το 1/4.
Ερευνητής: Και στην τελευταία;
Μαθητής: Το αποτέλεσμα. Πόσο κάνουν και τα δύο μαζί, 2/3 και ¼.
Ερευνητής: Ξεκίνησε με τον πρώτο αριθμό. Τι θα κάνεις;
Μαθητής: Θα χωρίσω την αριθμητική γραμμή σε τρίτα. (Φέρει πέντε κατακόρυφες γραμμές. Στην πρώτη τοποθετεί τον αριθμό 0 και στην τελευταία το 1. Το διάστημα 0 ως 1 είναι πλέον χωρισμένο σε τέσσερα ίσα μέρη).
Ερευνητής: Δείξε μου, λοιπόν, τον αριθμό 1/4.
Μαθητής: (Επιλέγει το 1/4).
Ερευνητής: Ας προχωρήσουμε στην τελευταία αριθμητική γραμμή. Τι θα κάνεις;
Μαθητής: Θα τα κάνω ομώνυμα.
Ερευνητής: Γιατί δεν μπορούμε να τα προσθέσουμε έτσι;
Μαθητής: Επειδή είναι ετερώνυμα.
Ερευνητής: Σε τι διαφέρουν δηλαδή;
Μαθητής: Οι παρονομαστές.
Ερευνητής: Πώς βλέπεις τα κομμάτια στα οποία είναι χωρισμένες οι δύο πρώτες αριθμητικές γραμμές;
Μαθητής: Δεν είναι τα ίδια. Είναι διαφορετικά τα κομμάτια.
Ερευνητής: Πώς θα προχωρήσεις;
Μαθητής: Βρίσκω το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο. Είναι το 12.
Ερευνητής: Άρα πώς θα χωρίσεις την τελευταία αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Σε 12.(Φέρει 13 κάθετες αριθμητικές γραμμές και στην πρώτη σημειώνει την αριθμό 0 ενώ στην τελευταία σημειώνει τον αριθμό 1).
Ερευνητής: Τώρα τι θα κάνεις;
Μαθητής: Θα βάλω πρώτα τα 2/3...που είναι 8/12. (Επιλέγει πρώτα τα 8/12).
Ερευνητής: Μετά;

Μαθητής: Μετά θα βάλω και το ¼ ...που είναι...
Ερευνητής: Μήπως μπορεί να σε βοηθήσει η δεύτερη αριθμητική γραμμή; Με πόσα δωδέκατα αντιστοιχεί το ¼;
Μαθητής: (Παρατηρεί το μήκος του ¼ και βρίσκει με πόσα δωδέκατα αντιστοιχεί). Αντιστοιχεί με 3/12.
Ερευνητής: Τι θα κάνουμε μετά;
Μαθητής: Θα βάλω τα 3/12 μαζί με τα 8/12.
Ερευνητής: Σε ποιο αριθμό έχεις φτάσει;
Μαθητής: Στα 11/12.
Ερευνητής: Γράψε και την εξίσωση.
Μαθητής: (Γράφει 8/12+3/12=11/12).

Η συνέντευξη με τον μαθητή με τη χαμηλή επίδοση έδειξε ότι δυσκολευόταν στη μετάφραση από τη λεκτική έκφραση στην αριθμητική γραμμή. Χρησιμοποιούσε τη συμβολική σημειολογία για να επιλύσει την εξίσωση και όχι την αναπαράσταση της εξίσωσης από την αριθμητική γραμμή. Μετάτρεπε μηχανικά τα ετερώνυμα κλάσματα σε ομώνυμα, αλλά δεν κατανοούσε ότι τα ομώνυμα κλάσματα στα οποία είχε καταλήξει ήταν ισοδύναμα με τα δύο αρχικά κλάσματα. Ο συγκεκριμένος μαθητής κατανόησε τη σχέση της ισοδυναμίας ανάμεσα στα ετερώνυμα κλάσματα και στα δύο ομώνυμα κλάσματα που προέκυψαν με τη βοήθεια της αριθμητικής γραμμής.

Ερευνητής: Θα εργαστούμε σε αυτό το φύλλο εργασίας. Θα ήθελα να ξεκινήσεις να διαβάζεις το πιο κάτω πρόβλημα και να μου πεις με δικά σου λόγια τι λέει.
Μαθητής: Λέει ότι μια οικογένεια έφαγε 2/3 του λίτρου γάλα το πρωί και ¼ του λίτρου χυμό το βράδυ. Πόσα ήπιαν συνολικά;
Ερευνητής: Θα ήθελα να μου δείξεις το πρόβλημα που διάβασες με τη βοήθεια των αριθμητικών γραμμών που σου δίνω.
Μαθητής: Στην πρώτη αριθμητική γραμμή θα κάνω τον πρώτο αριθμό και στη δεύτερη γραμμή το δεύτερο.
Ερευνητής: Στην τρίτη γραμμή;
Μαθητής: Θα τους βάλω μαζί.
Ερευνητής: Άρχισε με την πρώτη αριθμητική γραμμή. Τι θα κάνεις πρώτα;
Μαθητής: Θα τη χωρίσω σε 2..όχι...σε 3 (κατασκευάζει το διάστημα από το 0 ως το 1 και το χωρίζει σε 3 ίσα μέρη, μετά φέρει βέλος από το 0 ως το τέλος των δύο διαστημάτων και σημειώνει τον αριθμό 2/3).
Ερευνητής: Στη δεύτερη αριθμητική γραμμή τι θα κάνεις;
Μαθητής: Θα τη χωρίσω σε 4(κατασκευάζει το διάστημα από το 0 ως το 1 και το χωρίζει σε 4 ίσα μέρη, μετά φέρει βέλος από το 0 ως το τέλος του ενός διαστήματος και σημειώνει τον αριθμό 1/4).
Ερευνητής: Πώς θα μου δείξεις στην τρίτη αριθμητική γραμμή το συνολικό ποσό;
Μαθητής: (δεν απαντά).

Ερευνητής: Υπάρχει κάτι που σε δυσκολεύει;
Μαθητής: Δεν μπορώ...αυτά είναι τρίτα και αυτά τέταρτα.
Ερευνητής: Τι θα ήθελες να ήταν;
Μαθητής: Να ήταν τα ίδια.
Ερευνητής: Τι να ήταν το ίδιο;
Μαθητής: Τους παρονομαστές.
Ερευνητής: Τι μπορείς να κάνεις;
Μαθητής: Να έχουν τον ίδιο παρονομαστή;
Ερευνητής: Ποιον παρονομαστή σκέφτεσαι;
Μαθητής: Το 12, το 3 πάει 4 φορές και το 4 πάει 3 φορές.
Ερευνητής: Ποια θα είναι τα καινούρια κλάσματα;
Μαθητής: Θα είναι ίσα...
Ερευνητής: Ποιο είναι το πρώτο;
Μαθητής: Τα 8/12.
Ερευνητής: Το άλλο κλάσμα;
Μαθητής: Τα 3/12.
Ερευνητής: Γιατί μας βοηθούν τα καινούρια κλάσματα;
Μαθητής: Έχουν τον ίδιο παρονομαστή.
Ερευνητής: Την τρίτη αριθμητική γραμμή πώς θα τη χωρίσουμε;
Μαθητής: Σε δωδέκατα.
Ερευνητής: Πώς θα βάλεις τα κλάσματα μαζί;
Μαθητής: 8/12 και ακόμα 3/12 είναι 11/12 (κατασκευάζει το διάστημα 0 ως 1 και το χωρίζει σε 12 ίσα μέρη. Φέρει βέλος από το σημείο 0 ως τα 8/12 και μετά φέρει ακόμα ένα βέλος από το σημείο 8/12 ως τα 11/12 και γράφει 8/12+3/12=11/12).
Ερευνητής: Μπορείς να μου δείξεις εδώ στην τρίτη αριθμητική γραμμή με τα δωδέκατα ποιος αριθμός είναι τα 2/3;
Μαθητής: (δεν απαντά).
Ερευνητής: (δείχνει στην πρώτη αριθμητική γραμμή τα 2/3). Αυτά τα 2/3 με πόσα δωδέκατα είναι ίσα;
Μαθητής: (δείχνει από το 0 ως τα 11/12).
Ερευνητής: Τα 2/3 αντιστοιχούν με το σύνολο που βρήκαμε;
Μαθητής: Όχι..
Ερευνητής: Με πόσα δωδέκατα είναι ίσα;
Μαθητής: (δεν απαντά).
Ερευνητής: Κοιτάζοντας την εξίσωση που έγραψες με πόσα δωδέκατα είναι ίσα τα 2/3;
Μαθητής: Με 8.
Ερευνητής: Μπορείς να μου το δείξεις και στην τρίτη αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: (Δείχνει το διάστημα από το 0 ως τα 8/12).
Ερευνητής: Μπορείς να μου δείξεις και το ¼;
Μαθητής: (Δείχνει το διάστημα από το τα 8/12 ως τα 11/12).
Ερευνητής: Πόσα δωδέκατα βάλαμε δηλαδή;
Μαθητής: 3/12.

<u>Συνέντευξη: Μετάφραση από τη Συμβολική Έκφραση στην Αριθμητική Γραμμή</u>

Αναφορικά με την πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων οι συνεντεύξεις έδειξαν ότι οι μαθητές δεν παρουσίαζαν ιδιαίτερες δυσκολίες στη μετάφραση από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή στην περίπτωση που η αριθμητική γραμμή περιλάμβανε το διάστημα 0 ως 1. Παρουσίαζαν δυσκολίες στην περίπτωση που η αριθμητική γραμμή περιλάμβανε το διάστημα από 0 ως 2.

Η συνέντευξη με το μαθητή με την ψηλή επίδοση έδειξε ότι είχε αναπτύξει την ικανότητα μετάφρασης από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή, τόσο στην περίπτωση που η γραμμή περιλαμβάνει το διάστημα 0 ως 1, όσο και στην περίπτωση που η αριθμητική γραμμή περιλαμβάνει το διάστημα από 0 ως 2. Αναπαριστούσε την πρόσθεση των δύο ετερώνυμων κλασμάτων που παρουσίαζαν οι δύο πρώτες αριθμητικές γραμμές βρίσκοντας ισοδύναμα κλάσματά τους με τον ίδιο παρονομαστή, τα οποία και τοποθετούσε στην τρίτη αριθμητική γραμμή.

Ερευνητής: Σου δίνω μια εξίσωση και θέλω να μου τη λύσεις με τη βοήθεια των αριθμητικών γραμμών (οι αριθμητικές γραμμές περιλαμβάνουν το διάστημα 0 ως 1).
Μαθητής: Θα χωρίσω την πρώτη αριθμητική γραμμή σε 8 και θα πάρω τα 3, τη δεύτερη σε τρία ίσα μέρη και θα πάρω το 1 και στην τρίτη θα τα προσθέσω. (Αναπαριστά στις δύο πρώτες αριθμητικές γραμμές τους πρώτους δύο αριθμούς). Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο είναι το 24 (Χωρίζει την τελευταία αριθμητική γραμμή σε 24 ίσα μέρη από το 0 μέχρι το 1). Τώρα μετατρέπω, παίρνω πρώτα τα 8/24 και μετά τα 9/24. Σύνολο 17/24.
Ερευνητής: Την ίδια εξίσωση θέλω να τη δείξεις και σε αυτές τις αριθμητικές γραμμές (οι αριθμητικές γραμμές περιλαμβάνουν το διάστημα 0 ως 2). Τι θα κάνεις; (Ο Μαθητής σκέφτεται)
Ερευνητής: Τι σκέφτεσαι;
Μαθητής: Ότι δεν μπορώ να βάλω τα 3/8 και μετά το 1/3 μέσα στο ½.
Ερευνητής: Πού βλέπεις το ½;
Μαθητής: Α...τώρα κατάλαβα. Νόμισα ότι η αριθμητική γραμμή έφτανε ως το ½. Έχει αριθμούς ως το 2, όχι το ½.
Ερευνητής: Πώς θα χωρίσεις την αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Από το 0 ως το 1 θα τα χωρίσω σε όγδοα. Το ίδιο από το 1 ως το 2. (Το χωρίζει και επιλέγει τα 3/8)
Ερευνητής: Την άλλη αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Από το 0 ως το 1 θα τα χωρίσω σε τρίτα. Και πάλι το ίδιο από το 1 ως το 2. (Το χωρίζει και επιλέγει το 1/3).

Μαθητής: Θα χωρίσω την τρίτη αριθμητική γραμμή σε 24 διαστήματα από το 0 ως το 1 και 24 διαστήματα από το 1 ως το 2. Μετά θα πάρω τα 9/24, όπως πριν, και μετά τα 8/24, που είναι βασικά τα 3/8. Βρίσκουμε 17/24.
Ερευνητής: Αυτά τα βελάκια στην άκρη της αριθμητικής γραμμής τι σου δείχνουν;
Μαθητής: Μου δείχνουν ότι η γραμμή είναι μια ευθεία, δηλαδή δεν τελειώνει πουθενά. Συνεχίζει για πάντα και υπό το μηδέν και πάνω από το μηδέν.
Ερευνητής: Τι σου λέει αυτό για τους αριθμούς;
Μαθητής: Ότι είναι ατέλειωτοι (εννοεί ότι είναι άπειροι).
Ερευνητής: Από το 0 ως το 1 πόσα κλάσματα υπάρχουν;
Μαθητής: Άπειρα.
Ερευνητής: Γιατί;
Μαθητής: Γιατί αν πάρω δύο κλάσματα και βρω τα ισοδύναμά τους θα υπάρχει πάντα ένα κλάσμα άλλο ανάμεσά τους. Ας πούμε αν πάρω το ¼ και τα 2/4 και έχω τα ισοδύναμά τους 2/8 και 4/8 τότε υπάρχει ανάμεσα τους το κλάσμα 3/8.

Η συνέντευξη με το μαθητή με τη μέτρια επίδοση έδειξε ότι είχε αναπτύξει την ικανότητα μετάφρασης από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή, τόσο στην περίπτωση που η γραμμή περιλαμβάνει το διάστημα 0 ως 1, όσο και στην περίπτωση που η αριθμητική γραμμή περιλαμβάνει το διάστημα από 0 ως 2. Αναπαριστούσε την πρόσθεση των δύο ετερώνυμων κλασμάτων που παρουσιάζονταν στις δύο πρώτες αριθμητικές γραμμές βρίσκοντας ισοδύναμα κλάσματά τους με τον ίδιο παρονομαστή, τα οποία και τοποθετεί στην τρίτη αριθμητική γραμμή.

Ερευνητής: Εδώ έχουμε μια εξίσωση και θέλω να μου τη δείξεις πάνω στις αριθμητικές γραμμές (οι αριθμητικές γραμμές περιλαμβάνουν το διάστημα 0 ως 1).
Μαθητής: Την πρώτη γραμμή θα τη χωρίσω σε όγδοα, τη δεύτερη σε τρίτα.
Ερευνητής: Την τελευταία αριθμητική γραμμή πώς θα την χωρίσεις;
Μαθητής: Σε 24 (Την πρώτη γραμμή τη χωρίζει σε όγδοα και επιλέγει τα τρία, τη δεύτερη τη χωρίζει σε τρίτα και επιλέγει το ένα).
Ερευνητής: Τα 3/8 με πόσα εικοστά τέταρτα αντιστοιχούν;
Μαθητής: (Συγκρίνει τα εικοστά τέταρτα με τα τρία όγδοα). Με 9.
Ερευνητής: Το 1/3 με εικοστά τέταρτα αντιστοιχούν;
Μαθητής: (Συγκρίνει τα εικοστά τέταρτα με το ένα τρίτο). Με 8.
Ερευνητής: Άρα ποιο είναι το αποτέλεσμα;
Μαθητής: 17/24.
Ερευνητής: Την ίδια εξίσωση θέλω να μου τη δείξεις σε αυτές τις αριθμητικές γραμμές (οι αριθμητικές γραμμές περιλαμβάνουν το διάστημα 0 ως 2).
Μαθητής: (Χωρίζει την πρώτη αριθμητική γραμμή από το 0 ως το 1 και από το 1 ως το 2 σε όγδοα και επιλέγει τα 3/8, χωρίζει τη δεύτερη αριθμητική γραμμή από το 0 ως το 1 και από το 1 ως το 2 σε τρίτα και επιλέγει το 1/3).
Ερευνητής: Τι θα κάνεις στην τελευταία αριθμητική γραμμή;

Μαθητής: (Χωρίζει την τρίτη αριθμητική γραμμή από το 0 ως το 1 και από το 1 ως το 2 σε εικοστά τέταρτα).
Ερευνητής: Μια συμμαθήτριά σου χώρισε σε 12 ίσα διαστήματα από το 0 ως το 1 και σε 12 ίσα διαστήματα από το 1 ως το 2. Συμφωνείς;
Μαθητής: Είναι λάθος, επειδή το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο είναι το 24.
Ερευνητής: Αφού έβαλε 12 και 12. Δεν είναι όλα 24;
Μαθητής: Διότι εδώ που είναι το 1 πρέπει να έχει 24/24 και όχι 12/24. Τα 3/8 αντιστοιχούν με 9/24 και το 1/3 αντιστοιχεί με 8/24 (Συγκρίνει τα εικοστά τέταρτα με τα όγδοα και τα τρίτα).
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις και ένα πρόβλημα που να λύνεται με αυτή την εξίσωση;
Μαθητής: Εχθές έφαγα το 1/3 του κέικ και σήμερα έφαγα τα 3/8 του κέικ. Πόσο έφαγα συνολικά;
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις, τώρα που δουλέψαμε με τις αριθμητικές γραμμές, νομίζεις ότι αυτές βοηθούν όταν προσθέτεις κλάσματα;
Μαθητής: Ναι μας βοηθούν να βρίσκουμε το αποτέλεσμα πιο εύκολα.
Ερευνητής: Γιατί;
Μαθητής: Διότι βλέπουμε στο σχήμα πόσα εικοστά τέταρτα είναι 1/8 ή πόσα εικοστά τέταρτα είναι 1/3. Το ίδιο γίνεται και με άλλα κλάσματα.

Ο μαθητής με τη χαμηλή επίδοση έδειξε ότι άρχισε να αναπτύσσει την ικανότητα αναπαράστασης της πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή κατά τη διάρκεια της συνέντευξης. Κατά συνέπεια επιτύγχανε στη μετάφραση από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή, τόσο στην περίπτωση που η γραμμή περιλαμβάνει το διάστημα 0 ως 1, όσο και στην περίπτωση που η αριθμητική γραμμή περιλαμβάνει το διάστημα από 0 ως 2. Αναπαριστούσε την πρόσθεση των δύο ετερώνυμων κλασμάτων που παρουσιάζονταν στις δύο πρώτες αριθμητικές γραμμές, βρίσκοντας ισοδύναμα κλάσματά τους με τον ίδιο παρονομαστή, τα οποία και τοποθετούσε στην τρίτη αριθμητική γραμμή.

Ερευνητής: Σου δίνω αυτή την εξίσωση (3/8+1/3). Μπορείς να μου την αναπαραστήσεις στις αριθμητικές γραμμές;
Μαθητής: Πρώτα θα κάνω τα 3/8. Θα μοιράσω σε όγδοα τη γραμμή (κατασκευάζει το διάστημα από το 0 ως το 1 και το χωρίζει σε όγδοα και φέρει βέλος από το 0 ως το τέλος των πρώτων τριών διαστημάτων).
Ερευνητής: Στη δεύτερη αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Θα κάνω το 1/3 (κατασκευάζει το διάστημα από το 0 ως το 1 και το χωρίζει σε τρίτα και φέρει βέλος από το 0 ως το τέλος του πρώτου διαστήματος).
Ερευνητής: Για να τα βάλεις μαζί τι θα κάνεις;
Μαθητής: Θα βάλω το 8 και το 3 μαζί (να προσθέσει τους παρονομαστές)

Ερευνητής: Τι αποτέλεσμα θα πάρεις;
Μαθητής: 3/8 και 1/3 είναι ίσο με 4/11
Ερευνητής: Κοίταξε τις αριθμητικές γραμμές. Πώς είναι χωρισμένη η πρώτη;
Μαθητής: Σε όγδοα.
Ερευνητής: Η δεύτερη;
Μαθητής: Σε τρίτα.
Ερευνητής: Την τρίτη σε τι θα τη χωρίσεις;
Μαθητής: Σε ενδέκατα.
Ερευνητής: Μάλιστα. Δείξε πώς θα βάλεις τους δύο αριθμούς και θα τους προσθέσεις στην τρίτη γραμμή με τα ενδέκατα.
Μαθητής: (σκέφτεται για αρκετή ώρα). Δε γίνεται έτσι. Α ναι πρέπει να βρούμε τον ίδιο παρονομαστή. Να βρούμε τον αριθμό που πάει και το 3 και το 8.
Ερευνητής: Ποιος είναι;
Μαθητής: (σκέφτεται) Το 16...όχι. Το 24.
Ερευνητής: Άρα σε πόσα μέρη θα χωρίσεις την αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Σε 24 (κατασκευάζει το διάστημα από το 0 ως το 1 και το χωρίζει σε 24 ίσα μέρη).
Ερευνητής: Τώρα τι θα κάνεις;
Μαθητής: Θα κάνω τους πολλαπλασιασμούς.
Ερευνητής: Αν σου πω ότι ένας συμμαθητής σου δεν ήταν καλός στους πολλαπλασιασμούς και βρήκε ένα άλλο τρόπο να λύσει την εξίσωση βλέποντας τους αριθμούς στις δύο πρώτες αριθμητικές γραμμές, τι νομίζεις ότι έκανε;
Μαθητής: (δεν απαντά).
Ερευνητής: Κοίταξε την πρώτη αριθμητική γραμμή. Ο αριθμός που παριστάνει είναι σε όγδοα. Σε τι πρέπει να γίνει;
Μαθητής: Σε 24.
Ερευνητής: Ο αριθμός θα αλλάξει ή θα είναι και πάλι ο ίδιος;
Μαθητής: Θα είναι ίσος.
Ερευνητής: Άρα βλέποντας τον αριθμό στην πρώτη αριθμητική γραμμή σε τι μπορεί να σε βοηθήσει;
Μαθητής: Θα είναι ο ίδιος και εδώ (δείχνει στην τρίτη αριθμητική γραμμή).
Ερευνητής: Άρα τι μπορείς να κάνεις αμέσως;
Μαθητής: Να τον φέρω εδώ (στην τρίτη αριθμητική γραμμή).
Ερευνητής: Για να δούμε τι θα κάνεις.
Μαθητής: (συγκρίνει το διάστημα από το 0 ως τα 3/8 και κατασκευάζει ίσο διάστημα από το 0 ως το 9/24, φέροντας βέλος από το 0 ως το 9/24).
Ερευνητής: Άρα με πόσα εικοστά τέταρτα είναι ίσα τα 3/8;
Μαθητής: Με τα 9/24.
Ερευνητής: Τι μπορώ να κάνω για το δεύτερο αριθμό αν δεν είμαι καλός στους πολλαπλασιασμούς;
Μαθητής: Να τον φέρω και αυτόν (στην τρίτη αριθμητική γραμμή).
Ερευνητής: (συγκρίνει το διάστημα από το 0 ως το 1/3 και παρατηρεί ότι είναι ίσο με 8/24).
Μαθητής: Είναι 8/24.
Ερευνητής: Μπορείς να τα βάλεις μαζί;
Μαθητής: Ναι. (φέρει βέλος που να ξεκινά από τα 9/24 και να καταλήγει στα 17/24).
Ερευνητής: Σε ποιο αριθμό έφτασες;
Μαθητής: Στα 17/24 (αφού έχει μετρήσει).
Ερευνητής: Μπορείς να τα κάνεις και ομώνυμα για να δούμε αν συμφωνούμε;
Μαθητής: (κάνει τις πράξεις και καταλήγει στο ίδιο αποτέλεσμα, αφού δυσκολεύεται για αρκετή ώρα με τους πολλαπλασιασμούς).

Ερευνητής: Συμφωνούν τα αποτελέσματα ;
Μαθητής: Ναι, εδώ στις αριθμητικές γραμμές τα βρήκαμε.
Ερευνητής: Εδώ σου δίνω ακριβώς την ίδια εξίσωση και ζητώ να μου τη δείξεις και πάλι με τη βοήθεια των αριθμητικών γραμμών. Πριν ξεκινήσουμε θα ήθελα να σε ρωτήσω γιατί κάθε φορά δείχνεις το 1/3 σε διαφορετική γραμμή από τα 3/8;
Μαθητής: Διότι είναι διαφορετικός ο παρονομαστής...δεν μπορούμε να τους βάλουμε και τους δύο πάνω στην ίδια γραμμή. (Χωρίζει το διάστημα 0 ως 1 σε όγδοα και φέρει βέλος από το 0 ως το 3/8).
Ερευνητής: Το διάστημα 1 ως 2;
Μαθητής: (το χωρίζει σε όγδοα).
Ερευνητής: Τι θα κάνεις στη δεύτερη αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Το 1/3. (χωρίζει το διάστημα από 0 ως 1 και το διάστημα από 1 ως 2 σε τρίτα και φέρει βέλος από το 0 ως το 1/3).
Ερευνητής: Κάποιος συμμαθητής σου χώρισε στην πρώτη αριθμητική γραμμή το διάστημα από το 0 ως το 1 σε 4 ίσα μέρη και το διάστημα από το 1 ως το 2 σε άλλα 4 ίσα μέρη και είπε ότι το χώρισε σε όγδοα. Συμφωνείς;
Μαθητής: Όχι, γιατί χώρισε σε τέταρτα αντί σε όγδοα.
Ερευνητής: Τι θα κάνεις στην τρίτη αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: (δεν απαντά).
Ερευνητής: Σε πόσα μέρη να τη χωρίσουμε;
Μαθητής: Να βρούμε τον ίδιο παρονομαστή ...να τη χωρίσουμε σε 24 (χωρίζει το διάστημα από 0 ως 1 και το διάστημα από 1 ως 2 σε εικοστά τέταρτα).
Ερευνητής: Τα 3/8 με πόσα εικοστά τέταρτα είναι ίσα;
Μαθητής: Με 9.
Ερευνητής: Το 1/3;
Μαθητής: Με 8.
Ερευνητής: Δείξε, λοιπόν, την εξίσωση στην αριθμητική γραμμή.
Μαθητής: (φέρει βέλος από το 0 ως τα 9/24 και μετά φέρει ακόμα ένα βέλος από τα 9/24 ως τα 17/24).
Ερευνητής: Πού έχεις φτάσει;
Μαθητής: Στα 17/24.

Με βάση τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τα Δοκίμια και τις Συνεντεύξεις φάνηκε ότι υπάρχουν δυσκολότερα είδη μετάφρασης από άλλα. Η δυσκολία των ειδών μετάφρασης είναι συνάρτηση και του γνωστικού αντικειμένου το οποίο εξετάζεται στα έργα μετάφρασης.

Συγκεκριμένα, στα έργα ισοδυναμίας κλασμάτων φάνηκε ότι η μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη λεκτική έκφραση και από τη συμβολική έκφραση στη λεκτική έκφραση δυσκολεύουν τους μαθητές περισσότερο από τα άλλα είδη μετάφρασης. Επίσης, φάνηκε ότι η μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση είναι δυσκολότερη από τη μετάφραση από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή.

Αναφορικά με την πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων φάνηκε ότι η μετάφραση από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή είναι το δυσκολότερο είδος μετάφρασης. Αμέσως επόμενο είδος μετάφρασης σε βαθμό δυσκολίας είναι η μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση. Επίσης, φάνηκε ότι η μετάφραση από τη λεκτική έκφραση στην αριθμητική γραμμή καθώς και η μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη λεκτική έκφραση είναι τα ευκολότερα είδη μετάφρασης.

Τέλος, αναφορικά με την πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων φάνηκε ότι η μετάφραση από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή καθώς και η μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση αποτελούν τα δυσκολότερα είδη μετάφρασης. Όπως και στην πρόσθεση των ομώνυμων κλασμάτων η μετάφραση από τη λεκτική έκφραση στην αριθμητική γραμμή καθώς και η μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη λεκτική έκφραση είναι τα ευκολότερα είδη μετάφρασης.

Διαφοροποίηση της Επίδοσης στα Είδη Έργων Ανάλογα με το Γνωστικό Αντικείμενο που Εξετάζουν

Λόγω της στεγανοποίησης των έργων και της έλλειψης συνεπαγωγικών σχέσεων ανάμεσα στα έργα διαφορετικών δοκιμίων ήταν δύσκολο να εξεταστεί η διαφοροποίηση στην επίδοση των μαθητών πέμπτης τάξης αναφορικά με τα είδη έργων με τη χρήση του Συνεπαγωγικού Διαγράμματος. Συγκεκριμένα, η στεγανοποίηση των έργων αναγνώρισης, αναπαράστασης, ισοδυναμίας και πρόσθεσης κλασμάτων και η δημιουργία ξεχωριστών περιοχών έργων που περιλάμβαναν τα έργα αυτά, όπως αυτή παρουσιάζεται στο Συνεπαγωγικό Διάγραμμα, εμπόδισαν τη δημιουργία συνεπαγωγικών σχέσεων ανάμεσα στα έργα διαφορετικών δοκιμίων. Κατά συνέπεια χρησιμοποιήθηκε το στατιστικό πακέτο

SPSS για να εξετάσει τη διαφοροποίηση στην επίδοση των μαθητών στα έργα των τριών δοκιμίων.

Ο Πίνακας 10 παρουσιάζει τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών στα έργα των τριών δοκιμίων.

Πίνακας 10
Ποσοστά Επιτυχίας των Υποκειμένων στα Είδη Έργων

Είδος Έργου	Ποσοστό επιτυχίας (%)
Αναγνώριση Κλασμάτων	43.6
Αναπαράσταση Κλασμάτων	56.1
Ισοδυναμία Κλασμάτων	51.4
Πρόσθεση Ομώνυμων Κλασμάτων	59.1
Πρόσθεση Ετερώνυμων Κλασμάτων	49.7

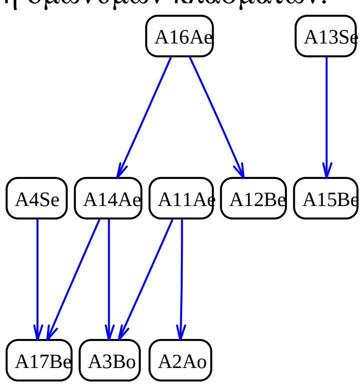
Με βάση τον Πίνακα 10 τα έργα αναγνώρισης του κλάσματος σε ποικιλία αναπαραστάσεων συγκέντρωσαν το χαμηλότερο ποσοστό επιτυχίας. Συγκεκριμένα, το ποσοστό επιτυχίας σε τουλάχιστο οκτώ από τα δέκα έργα αναγνώρισης της έννοιας του κλάσματος σε ποικιλία αναπαραστάσεων ήταν 43.6%. Το αποτέλεσμα αυτό ήταν αναμενόμενο, αφού τα έργα αναγνώρισης της έννοιας του κλάσματος περιλάμβαναν αναπαραστάσεις με παραπλανητικά στοιχεία, όπως για παράδειγμα αριθμητικές γραμμές με διαστήματα 0 ως 2, αριθμητικές γραμμές όπου οι υποδιαιρέσεις του διαστήματος 0 ως 1 ήταν οι διπλάσιες του παρονομαστή του δοσμένου κλάσματος και εμβαδόν κύκλου στο οποίο οι υποδιαιρέσεις ήταν διπλάσιες από τον παρονομαστή του δοσμένου κλάσματος. Τα έργα που εξέταζαν την ικανότητα αναπαράστασης συγκέντρωσαν μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας. Συγκεκριμένα, το ποσοστό επιτυχίας σε τουλάχιστο δέκα από τα δώδεκα έργα χειρισμού της έννοιας του κλάσματος στο ίδιο πεδίο ήταν 56.1%. Το αποτέλεσμα αυτό ίσως να οφείλεται στο γεγονός ότι τα συγκεκριμένα έργα περιλάμβαναν λιγότερα παραπλανητικά στοιχεία από τα έργα αναγνώρισης. Όπως και στην περίπτωση των έργων αναγνώρισης, έτσι και στην περίπτωση των έργων αναπαράστασης υπήρχαν αριθμητικές γραμμές όπου οι υποδιαιρέσεις του διαστήματος 0 ως 1 ήταν οι διπλάσιες ή μισές του παρονομαστή του δοσμένου κλάσματος καθώς και ευθύγραμμο τμήμα και εμβαδόν κύκλου στο οποίο οι υποδιαιρέσεις ήταν διπλάσιες ή μισές από τον παρονομαστή του δοσμένου κλάσματος. Δεν υπήρχαν όμως αριθμητικές γραμμές με διαστήματα 0 ως 2, αφού όλες οι αριθμητικές γραμμές στα έργα αναπαράστασης περιλάμβαναν το διάστημα 0 ως 1, κάτι το οποίο διευκόλυνε τους μαθητές στην αναπαράσταση του δοσμένου κλάσματος.

Τα υποκείμενα συγκέντρωσαν χαμηλά ποσοστά επιτυχίας και στα έργα ισοδυναμίας κλασμάτων. Το ποσοστό επιτυχίας σε τουλάχιστο δεκατρία από τα δεκαπέντε έργα ισοδυναμίας κλασμάτων ήταν 51.4%. Η ισοδυναμία κλασμάτων προϋποθέτει την κατανόηση της σχέσης ανάμεσα σε δύο κλάσματα τα οποία αναπαριστούν την ίδια ποσότητα, ενώ αποτελούνται από διαφορετικούς αριθμητές και παρονομαστές. Η ιδιομορφία της σχέσης αυτής ίσως να αποτέλεσε παράγοντα δυσκολίας για τους μαθητές τόσο στα έργα ισοδυναμίας στο συμβολικό πεδίο όσο και στα έργα ισοδυναμίας που περιλάμβαναν μεταφράσεις από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση και αντίστροφα.

Τα ψηλότερα ποσοστά επιτυχίας συγκέντρωσαν τα έργα πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων. Συγκεκριμένα, το ποσοστό επιτυχίας σε τουλάχιστον πέντε από τα επτά έργα πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων ήταν 59.1%. Το αποτέλεσμα αυτό ήταν αναμενόμενο, αφού τα συγκεκριμένα έργα περιλάμβαναν ομώνυμα κλάσματα και οι αριθμητικές γραμμές περιλάμβαναν το διάστημα από 0 μέχρι 1. Κατά συνέπεια τα υποκείμενα σημείωσαν μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας τόσο στο συμβολικό πεδίο όσο και στα έργα μετάφρασης.

Τέλος, χαμηλά ποσοστά επιτυχίας συγκέντρωσαν τα έργα πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων. Το ποσοστό επιτυχίας σε τουλάχιστο οκτώ από τα δέκα έργα πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων ήταν 49.7%. Το χαμηλό αυτό ποσοστό επιτυχίας ήταν αναμενόμενο, αφού τα συγκεκριμένα έργα περιλάμβαναν ετερώνυμα κλάσματα και προϋπόθεταν τη μετατροπή τους σε ομώνυμα κλάσματα, για να μπορέσει να εκτελεστεί η πράξη της πρόσθεσης στο συμβολικό πεδίο, αλλά και στα έργα μετάφρασης.

Αναφορικά με την πρόσθεση ομώνυμων και ετερώνυμων κλασμάτων στο Διάγραμμα 16, Συνεπαγωγικό διάγραμμα έργων Δοκιμίου Β', φάνηκε ότι υπάρχει διαφοροποίηση στην επίδοση των μαθητών πέμπτης τάξης αναφορικά με τα έργα πρόσθεσης ετερώνυμων και ομώνυμων κλασμάτων κάτι το οποίο συμφωνεί με τα αποτελέσματα του Πίνακα 10. Συγκεκριμένα, τα έργα που εξέταζαν την πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων φάνηκε ότι δυσκόλευαν περισσότερο τους μαθητές από ότι τα έργα που εξέταζαν την πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων. Συγκεκριμένα, φάνηκε ότι η επιτυχία στο έργο A11Ae – έργο μετάφρασης από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση το οποίο εξετάζει την πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων- συνεπάγεται την επιτυχία στο έργο A2Ao – έργο μετάφρασης από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση το οποίο εξετάζει την πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων. Επίσης, η επιτυχία στα έργα A14Ae και A11Ae – έργα μετάφρασης από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση τα οποία εξετάζουν την πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων συνεπάγεται την επιτυχία στο έργο A3Bo – έργο μετάφρασης από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή το οποίο εξετάζει την πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων.



Διάγραμμα.16. Συνεπαγωγικό Διάγραμμα Έργων Πρόσθεσης Κλασμάτων.

Η Αριθμητική Γραμμή ως Εργαλείο Διαμορφωτικής Αξιολόγησης

Για να εξετασθεί ο ρόλος της αριθμητικής γραμμής ως εργαλείου διαμορφωτικής αξιολόγησης, δηλαδή ως μέσου για την ανίχνευση της υπάρχουσας γνώσης των μαθητών και τον εντοπισμό περιοχών αδυναμίας, οργανώθηκε η Β' Φάση της έρευνας κατά τη διάρκεια της οποίας διενεργήθηκαν πειράματα επικοινωνίας και συνεντεύξεις (Παράρτημα). Όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 3, Μεθοδολογία, στα πειράματα επικοινωνίας έλαβαν μέρος ως πομποί τρεις μαθητές με ψηλή επίδοση, τρεις μαθητές με μέτρια επίδοση και τρεις μαθητές με χαμηλή επίδοση. Έτσι, για κάθε γνωστική περιοχή – ισοδυναμία κλασμάτων, πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων, πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων – αντιστοιχούσε ένας μαθητής – πομπός με ψηλή επίδοση, ένας μαθητής με μέτρια επίδοση και ένας μαθητής με χαμηλή επίδοση. Σε κάθε πομπό αντιστοιχούσαν δύο μαθητές – δέκτες, οι οποίοι είχαν παρόμοια επίδοση με τον πομπό. Στις συνεντεύξεις έλαβαν μέρος έλαβαν μέρος ως τρεις μαθητές με ψηλή επίδοση, τρεις μαθητές με μέτρια επίδοση και τρεις μαθητές με χαμηλή επίδοση. Έτσι, για κάθε γνωστική περιοχή – ισοδυναμία κλασμάτων, πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων, πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων – αντιστοιχούσε ένας μαθητής.

<u>Πειράματα επικοινωνίας</u>

Ισοδυναμία κλασμάτων

Κατά τη διάρκεια της Φάσης Α'του πειράματος επικοινωνίας τόσο ο μαθητής με τη ψηλή επίδοση όσο και ο μαθητής με τη μέτρια επίδοση, χρειάστηκε να περιγράψουν σε δύο συμμαθητές τους αντίστοιχα, δύο αριθμητικές γραμμές που αναπαριστούσαν την έννοια της ισοδυναμίας κλασμάτων. Στόχος της περιγραφής ήταν η ανακατασκευή από μέρους του δέκτη ενός έργου το οποίο περιλάμβανε την αναπαράσταση ισοδυναμίας κλάσματων με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής. Με βάση τις περιγραφές που δόθηκαν φάνηκε ότι και οι δύο μαθητές - πομποί, παρόλο που είχαν αναγνωρίσει την έννοια με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής και τη συμβολική έκφραση, ταύτιζαν την αριθμητική γραμμή με το ευθύγραμμο τμήμα, γι' αυτό και στις οδηγίες τους ζητούσαν από τους συμμαθητές τους να χωρίσουν την αριθμητική γραμμή σε ίσα μέρη – ανάλογα με τον παρονομαστή του κλάσματος. Συγκεκριμένα ο μαθητής με τη ψηλή επίδοση ανέφερε:

Πομπός: Κάνε δυο αριθμητικές γραμμές. Χώρισε τη μια σε τέταρτα και την άλλη σε δωδέκατα. Βρες ένα ισοδύναμο κλάσμα μεταξύ τους.

Επίσης, ο μαθητής με τη μέτρια επίδοση άρχισε τη δική του περιγραφή ως εξής:

Πομπός: Θα κάνουμε μια αριθμητική γραμμή και θα τη χωρίσουμε σε τέταρτα. Να πάρουμε τα ¾. Να κάνουμε ακόμη μία αριθμητική γραμμή και να τη χωρίσουμε σε δωδέκατα. Να πάρουμε τα 9/12. Βλέπεις καμιά σχέση σε αυτά τα δύο; Φαίνεται άμα κοιτάξεις.

Επιπλέον, οι δύο μαθητές – πομποί παρέλειπαν να αναφέρουν κάποια από τα βασικά κατασκευαστικά χαρακτηριστικά της αριθμητικής γραμμής όπως για παράδειγμα τα βέλη στις άκρες και τους κατακόρυφους διαχωρισμούς.

Στη Φάση Β' του πειράματος επικοινωνίας και οι δύο μαθητές αγνόησαν τις οδηγίες του ερευνητή και προχώρησαν σε περιγραφές παρόμοιες με εκείνες της πρώτης φάσης. Συγκεκριμένα, δεν ανέφεραν πληροφορίες οι οποίες διαχωρίζουν την έννοια της αριθμητικής γραμμής από το ευθύγραμμο τμήμα – βέλη στα άκρα της γραμμής, δημιουργία του ευθύγραμμου διαστήματος 0 ως 1, διαχωρισμός του διαστήματος σε ίσα μέρη. Με βάση τις περιγραφές που δόθηκαν φάνηκε ότι, όπως και στη Φάση Α' και οι δύο μαθητές, παρόλο που είχαν αναγνωρίσει ότι τα δύο κλάσματα ήταν ισοδύναμα, ταύτιζαν την αριθμητική γραμμή με το ευθύγραμμο τμήμα. Συνεπώς, στις οδηγίες τους ζητούσαν από τους συμμαθητές τους να χωρίσουν την αριθμητική γραμμή σε ίσα μέρη – ανάλογα με τον παρονομαστή του κλάσματος.

Πομπός: Κάνε μια αριθμητική γραμμή και χώρισέ τη σε τέσσερα κομμάτια. Να κάνεις 5 γραμμές. Από αυτά πάρε τα 3 κομμάτια. Τα 3 διαστήματα να πάρεις.
(Ο δέκτης κάνει 5 διαστήματα).
Πομπός: Ξανακάνε την αριθμητική γραμμή. Χώρισέ τη σε τέσσερα ίσα κομμάτια. Από αυτά ...Αρίθμησέ τα.
(Ο δέκτης αριθμεί με ακέραιους 0, 1, 2, 3...)
Πομπός: Όχι έτσι. Σβήσε τους αριθμούς. Στην πρώτη γραμμή το 0 και στην δεύτερη το 1. Όχι σβήσε το. Εννοώ στην τελευταία το 1. Από αυτά πάρε τα 3 κομμάτια. Κάνε ακόμη μια αριθμητική γραμμή και χώρισέ τη σε 12 κομμάτια, δηλαδή κάνε 13 γραμμές. Αρίθμησε όπως την προηγούμενη.
Δέκτης: Από 0 ως 1;
Πομπός: Ναι. Και πάρε τα 9. Ποια είναι η σχέση τους;

Τόσο ο μαθητής με τη ψηλή επίδοση όσο και ο μαθητής με τη μέτρια επίδοση παρέλειπαν να αναφέρουν κάποια από τα βασικά κατασκευαστικά χαρακτηριστικά της αριθμητικής γραμμής, όπως η ισότητα των διαστημάτων.

Επιπλέον, ο μαθητής με τη μέτρια επίδοση, κατά τη διάρκεια της Φάσης Β', παρέλειπε να διορθώνει κατασκευαστικά λάθη του συμμαθητή του, όπως για παράδειγμα τη δημιουργία άνισων διαστημάτων. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα οι αριθμητικές γραμμές να μην αναπαριστούν ισοδυναμία κλασμάτων. Παρόλο που οι αριθμητικές γραμμές δεν αναπαριστούσαν ισοδύναμα κλάσματα, ο μαθητής με τη μέτρια επίδοση ανέφερε ότι αναπαριστούσαν ισοδυναμία κλασμάτων και θεωρούσε την αναπαράσταση ως ικανοποιητική και την ανακατασκευή του έργου συμπληρωμένη.

Τέλος, κατά τη διάρκεια της Φάσης Α' του πειράματος επικοινωνίας, ο μαθητής με τη χαμηλή επίδοση, χρειάστηκε να περιγράψει σε ένα συμμαθητή του το διάγραμμα το οποίο αναπαριστούσε την έννοια της ισοδυναμίας κλασμάτων. Όπως και οι προηγούμενοι μαθητές, έτσι και ο συγκεκριμένος μαθητής ταύτιζε την αριθμητική γραμμή με το ευθύγραμμο τμήμα, γι' αυτό και στις οδηγίες του ζητούσε από το συμμαθητή του να χωρίσει την αριθμητική γραμμή σε ίσα μέρη – ανάλογα με τον παρονομαστή του κλάσματος.

Πομπός: Κάνε μια αριθμητική γραμμή και χώρισέ τη σε τέσσερα κομμάτια. Πιάσε τα τρία. Κάνε άλλη μια αριθμητική γραμμή και χώρισέ τη σε δώδεκα κομμάτια. Πάρε τα εννέα.

Επίσης, παρέλειπε να αναφέρει κάποια από τα βασικά κατασκευαστικά χαρακτηριστικά της αριθμητικής γραμμής όπως για παράδειγμα τα βέλη στις άκρες και τους κατακόρυφους διαχωρισμούς.

Στη Φάση Β’ του πειράματος επικοινωνίας ο μαθητής με τη χαμηλή επίδοση, όπως και οι δύο προηγούμενοι, αγνόησε τις οδηγίες του ερευνητή και προχώρησε σε περιγραφή η οποία ήταν παρόμοια με εκείνη της Φάσης Α’. Συγκεκριμένα, δεν ανέφερε πληροφορίες όπως τα βέλη στα άκρα της γραμμής, τη δημιουργία του ευθύγραμμου διαστήματος 0 ως 1 και το διαχωρισμό του διαστήματος σε ίσα μέρη. Με βάση την περιγραφή που δόθηκε φάνηκε ότι ο μαθητής με τη χαμηλή επίδοση ταύτιζε την αριθμητική γραμμή με το ευθύγραμμο τμήμα. Συνεπώς, ζητούσε από το συμμαθητή του να χωρίσει την αριθμητική γραμμή σε ίσα μέρη – ανάλογα με τον παρονομαστή του κλάσματος. Επίσης, παρέλειπε να αναφέρει κάποια από τα βασικά κατασκευαστικά χαρακτηριστικά της αριθμητικής γραμμής, όπως η ισότητα των διαστημάτων. Ο μαθητής με τη χαμηλή επίδοση όπως και μαθητής με τη μέτρια επίδοση, κατά τη διάρκεια της Φάσης Β’, παρέλειπε να διορθώνει κατασκευαστικά λάθη του συμμαθητή του, όπως για παράδειγμα τη δημιουργία άνισων διαστημάτων, με αποτέλεσμα οι αριθμητικές γραμμές να μην παρουσιάζουν ισοδυναμία κλασμάτων. Παρόλο που οι αριθμητικές γραμμές δεν παρουσίαζαν ισοδύναμα κλάσματα, ο μαθητής με τη χαμηλή επίδοση ανέφερε ότι αναπαριστούσαν ισοδυναμία κλασμάτων. Επίσης, φάνηκε και στις δύο φάσεις του πειράματος επικοινωνίας ότι ο συγκεκριμένος μαθητής παρουσίαζε δυσκολίες στην επεξήγηση και στη χρήση της σωστής ορολογίας.

Πρόσθεση Ομώνυμων Κλασμάτων

Κατά τη διάρκεια της Φάσης Α’ του πειράματος επικοινωνίας τόσο ο μαθητής με τη ψηλή επίδοση όσο και ο μαθητής με τη μέτρια επίδοση, χρειάστηκε να περιγράψουν σε δύο συμμαθητές τους αντίστοιχα ένα έργο το οποίο περιλάμβανε την αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων. Στόχος της περιγραφής ήταν η ανακατασκευή από το μαθητή δέκτη του συγκεκριμένου έργου. Με βάση τις περιγραφές που δόθηκαν φάνηκε ότι και οι δύο μαθητές παρόλο που είχαν αναγνωρίσει ότι η αριθμητική γραμμή αναπαριστούσε πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων ταύτιζαν την αριθμητική γραμμή με το ευθύγραμμο τμήμα, γι’ αυτό και στις οδηγίες τους ζητούσαν από τους συμμαθητές τους να χωρίσουν την αριθμητική γραμμή σε ίσα μέρη – ανάλογα με τον παρονομαστή του κλάσματος. Επίσης, παρέλειπαν να αναφέρουν κάποια από τα βασικά κατασκευαστικά χαρακτηριστικά της αριθμητικής γραμμής όπως για παράδειγμα τα βέλη στις άκρες, τους κατακόρυφους διαχωρισμούς καθώς και τη δημιουργία του διαστήματος 0 ως 1. Το πείραμα επικοινωνίας με το μαθητή με την ψηλή επίδοση έδειξε ότι η οδηγία για την κατασκευή στην αριθμητική γραμμή του διαστήματος 0 ως 1 βοήθησε το μαθητή – δέκτη να αντιληφθεί ότι πρέπει να προσθέσει κλασματικούς αριθμούς.

Πομπός: Κάνε μια αριθμητική γραμμή, να τη χωρίσεις σε 15 κομμάτια. Να πάρεις τα 8 από τα 15. Μετά να πάρεις ακόμη 5. Τι σου δείχνει αυτή η αριθμητική γραμμή;
Δέκτης: Πρόσθεση.
Πομπός: Ποιους προσθέτουμε;
Δέκτης: 8 + 5.
Πομπός: Όχι...είναι από το 15..
Δέκτης: Δεν έχει σχέση...είναι 8 + 5
Πομπός: Ναι. Να βάλεις 0 στην πρώτη γραμμή και 1 στην τελευταία άρα αλλάζει.
Δέκτης: Εννοείς 8/15 + 5/15 τότε. Έχουμε 13/15.

Στη Φάση Β’ του πειράματος επικοινωνίας ο μαθητής με τη ψηλή επίδοση επιχειρούσε αρχικά να παρουσιάσει την αριθμητική γραμμή ως ευθύγραμμο τμήμα και ζήτησε από το συμμαθητή του να τη διαχωρίσει σε ίσα μέρη. Όμως, χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες που του είχαν δοθεί από την περιγραφή του ερευνητή, καθώς και από το διάλογο που είχε προηγηθεί στην Α’ φάση, διαφοροποίησε την περιγραφή του και ανέφερε πληροφορίες οι οποίες διαχώριζαν την έννοια της αριθμητικής γραμμής από το ευθύγραμμο τμήμα – δημιουργία του ευθύγραμμου διαστήματος 0 ως 1, διαχωρισμός του διαστήματος σε ίσα μέρη – με αποτέλεσμα ο συμμαθητής του να αναπαραστήσει σωστά την πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων.

Πομπός: Κάνε μια αριθμητική γραμμή. Κάμε 16 γραμμές.
Δέκτης: Πώς να τη χωρίσω;
Πομπός: Σε δέκατα πέμπτα. Στην πρώτη γραμμή βάλε τον αριθμό 0 και στην τελευταία γραμμή τον αριθμό 1. Προχώρησε στα 8 κουτάκια (εννοεί διαστήματα). Μετά βάλε ακόμη 5. Τι πράξη βγαίνει;
Δέκτης: 8...(σκέφτεται για αρκετή ώρα).
Πομπός: Τα κομμάτια να δεις. Δες τα κομμάτια, αφού τα έκανες.
Δέκτης: 8/15 + 5/15 = 13/15.
Πομπός: Μπράβο. Γράψε την εξίσωση.

Στη Φάση Β’ του πειράματος επικοινωνίας ο μαθητής με τη μέτρια επίδοση ζήτησε από το συμμαθητή του να κατασκευάσει μια αριθμητική γραμμή από το 0 ως το 1, εννοώντας να κατασκευάσει μια αριθμητική γραμμή και να τοποθετήσει σε αυτή το διάστημα 0 ως 1 και να αναπαραστήσει την πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων σε αυτή.

Πομπός: Κάνε μια αριθμητική γραμμή, από το 0 ως το 1. Κάνε 15 κομμάτια ανάμεσα στο 0 και το 1. Χρωμάτισε τα 8 κομμάτια από τα 15. Ύστερα χρωμάτισε ακόμη 5. Κατάλαβες τι προσπαθούμε να δείξουμε;
Δέκτης: Πρόσθεση
Πομπός: Ναι. Έχουμε στην αρχή 8/15 και μετά;
Δέκτης: Βάζουμε ακόμη 5/15 και βρίσκουμε ... (μετρά τα διαστήματα) 13/15.

Τόσο ο μαθητής με τη ψηλή επίδοση όσο και ο μαθητής με τη μέτρια επίδοση παρέλειπαν να αναφέρουν κάποια από τα βασικά κατασκευαστικά χαρακτηριστικά της αριθμητικής γραμμής.

Τέλος, κατά τη διάρκεια της Φάσης Α’ του πειράματος επικοινωνίας, ο μαθητής με τη χαμηλή επίδοση χρειάστηκε να περιγράψει σε ένα συμμαθητή του το διάγραμμα το οποίο αναπαριστούσε την πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων. Ο συγκεκριμένος μαθητής ταύτιζε την αριθμητική γραμμή με το ευθύγραμμο τμήμα, γι’ αυτό και στις οδηγίες του ζητούσε από το συμμαθητή του να χωρίσει την αριθμητική γραμμή σε ίσα μέρη – ανάλογα με τον παρονομαστή του κλάσματος. Επίσης, παρέλειπε να αναφέρει κάποια από τα βασικά κατασκευαστικά χαρακτηριστικά της αριθμητικής γραμμής όπως για παράδειγμα τα βέλη στις άκρες και τους κατακόρυφους διαχωρισμούς. Στη Φάση Β’ του πειράματος επικοινωνίας ο μαθητής με τη χαμηλή επίδοση, δε χρησιμοποίησε πληροφορίες από τις οδηγίες του ερευνητή και προχώρησε σε περιγραφή παρόμοια με εκείνη της πρώτης φάσης. Συγκεκριμένα, δεν ανέφερε πληροφορίες οι οποίες διαχωρίζουν την έννοια της αριθμητικής γραμμής από το ευθύγραμμο τμήμα – βέλη στα άκρα της γραμμής, δημιουργία του ευθύγραμμου διαστήματος 0 ως 1, διαχωρισμός του διαστήματος σε ίσα μέρη. Όπως και στην Φάση Α’ ταύτιζε την αριθμητική γραμμή με το ευθύγραμμο τμήμα, γι’αυτό και στις οδηγίες του ζητούσε από το συμμαθητή του να χωρίσει την αριθμητική γραμμή σε ίσα μέρη – ανάλογα με τον παρονομαστή του κλάσματος. Επίσης, παρέλειπε να αναφέρει κάποια από τα βασικά κατασκευαστικά χαρακτηριστικά της αριθμητικής γραμμής, όπως η ισότητα των διαστημάτων, αφού έχοντας συνεχώς υπόψη του τη συμβολική έκφραση της πρόσθεσης στην οποία έπρεπε να καταλήξει δεν έδωσε σημασία σε κάποια σημαντικά χαρακτηριστικά της αριθμητικής γραμμής. Ο μαθητής με τη χαμηλή επίδοση, όπως και μαθητής με τη μέτρια επίδοση, κατά τη διάρκεια της Φάσης Β’, παρέλειπε να διορθώνει κατασκευαστικά λάθη του συμμαθητή του, όπως για παράδειγμα τη δημιουργία άνισων διαστημάτων. Φάνηκε και στις δύο φάσεις του πειράματος επικοινωνίας για την πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων ότι ο μαθητής με τη χαμηλή επίδοση, παρουσίαζε δυσκολίες στην επεξήγηση και στη χρήση της σωστής ορολογίας.

Πρόσθεση Ετερώνυμων Κλασμάτων

Κατά τη διάρκεια της Φάσης Α’ του πειράματος επικοινωνίας τόσο ο μαθητής με τη ψηλή επίδοση όσο και ο μαθητής με τη μέτρια επίδοση, χρειάστηκε να περιγράψουν σε δύο συμμαθητές τους αντίστοιχα τρεις αριθμητικές γραμμές που αναπαριστούσαν πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων. Με βάση τις περιγραφές που δόθηκαν φάνηκε ότι και οι δύο μαθητές ταύτιζαν την αριθμητική γραμμή με το ευθύγραμμο τμήμα, γι’αυτό και στις οδηγίες τους ζητούσαν από τους συμμαθητές τους να χωρίσουν την αριθμητική γραμμή σε ίσα μέρη – ανάλογα με τον παρονομαστή του κλάσματος.

Πομπός: Θα φτιάξεις μια αριθμητική γραμμή από το 0 μέχρι το 1 και θα τη χωρίσεις σε δύο μέρη. Τότε θα πάρεις το ένα από αυτά τα δύο. Μετά θα φτιάξεις ακόμη μια αριθμητική γραμμή και τη χωρίσεις σε τρία ίσα μέρη. Από εκεί θα πάρεις το 1/3 . Να φτιάξεις ακόμη μια αριθμητική γραμμή και να βρεις το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο του 2 και του 3. Ποιο είναι;
Δέκτης: Το 6.
Πομπός: Την τρίτη αριθμητική γραμμή να τη χωρίσεις σε έκτα. Να πάρεις το ½ και το 1/3.
(Ο δέκτης επιλέγει τα 3/6 και μετά τα 2/6).
Πομπός: Έχεις δείξει πόσα πήραμε συνολικά.
(Ο δέκτης γράφει την εξίσωση 1/2 + 1/3 = 3/6 + 2/6=5/6).

Επίσης, παρέλειπαν να αναφέρουν κάποια από τα βασικά κατασκευαστικά χαρακτηριστικά της αριθμητικής γραμμής όπως για παράδειγμα τα βέλη στις άκρες και τους κατακόρυφους διαχωρισμούς. Στη Φάση Β’ του πειράματος επικοινωνίας και οι δύο μαθητές αγνόησαν αρκετές οδηγίες του ερευνητή και προχώρησαν σε περιγραφές παρόμοιες με εκείνες της πρώτης φάσης. Συγκεκριμένα, δεν αναφέρουν πληροφορίες οι οποίες διαχωρίζουν την έννοια της αριθμητικής γραμμής από το ευθύγραμμο τμήμα –βέλη στα άκρα της γραμμής, δημιουργία του ευθύγραμμου διαστήματος 0 ως 1, διαχωρισμός του διαστήματος σε ίσα μέρη. Με βάση τις περιγραφές που δόθηκαν φάνηκε ότι και οι δύο μαθητές ταύτιζαν την αριθμητική γραμμή με το ευθύγραμμο τμήμα, γι'αυτό και στις οδηγίες του ζητούσαν από τους συμμαθητές τους να χωρίσουν την αριθμητική γραμμή σε ίσα μέρη-ανάλογα με τον παρονομαστή του κλάσματος. Επίσης, παρέλειπαν να αναφέρουν κάποια από τα βασικά κατασκευαστικά χαρακτηριστικά της αριθμητικής γραμμής, όπως η ισότητα των διαστημάτων, αφού έχοντας συνεχώς υπόψη τους τη συμβολική έκφραση της ισοδυναμίας στην οποία έπρεπε να καταλήξουν δεν έδωσαν σημασία σε κάποια σημαντικά χαρακτηριστικά της αριθμητικής γραμμής.

Ο μαθητής με τη μέτρια επίδοση διαφοροποιήθηκε από το μαθητή με τη ψηλή επίδοση, αφού κατά τη διάρκεια της πρώτης φάσης παρουσίασε δυσκολίες αναφορικά με τη γλωσσική περιγραφή των διαγραμμάτων. Για παράδειγμα ανέφερε τον αριθμό 2, ενώ εννοούσε 2/6 και τον αριθμό 3 ενώ εννοούσε τα 3/6. Οι αδυναμίες αυτές δεν παρουσιάσθηκαν κατά τη διάρκεια της Φάσης Β' του πειράματος επικοινωνίας, δηλαδή τη φάση η οποία περιλαμβάνει την περιγραφή πρώτα από μέρους του ερευνητή και μετά από μέρους του μαθητή.

Πομπός: Κάνουμε μια αριθμητική γραμμή και σε αυτή κάνουμε δύο κομμάτια. Πάρε το ένα κομμάτι. Κάνε άλλη μια αριθμητική γραμμή και χώρισέ τη σε τρία κομμάτια. Πάρε το ένα. Κάνε άλλη μια αριθμητική γραμμή και χώρισέ τη σε έξι. Πρώτα να πάρεις τα τρία κομμάτια και μετά τα δύο κομμάτια.
Ερευνητής: Τι προσπαθείς να της δείξεις Πομπός;
Πομπός: Προσπαθώ να της δείξω πώς να κάνει την πράξη ½ +1/3.
Ερευνητής: Πώς θα τη βοηθήσεις να το δείξει;
Δέκτης: Μου είπε ότι έχουμε πρώτα το ½ και μετά το 1/3. Πρέπει να τα βάλουμε μαζί στην ίδια γραμμή που χωρίσαμε σε έκτα.
Ερευνητής: Κατάλαβες γιατί σου είπε να τη χωρίσεις σε έκτα;
Δέκτης: Διότι είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο. Δεν μπορούμε να τα βάλουμε όπως είναι.
Πομπός: Όταν κάμεις τα έκτα...πάρε τα 3/6, είναι το ½. Μετά πάρε τα...2/6 (συγκρίνει με την αριθμητική γραμμή η οποία αναπαριστά το 1/3) είναι το 1/3. Βάλε τα μαζί και θα φτάσεις στα 5/6.

Τέλος, κατά τη διάρκεια της πρώτης φάσης του πειράματος επικοινωνίας, ο μαθητής με τη χαμηλή επίδοση χρειάστηκε να περιγράψει σε ένα συμμαθητή του το διάγραμμα το οποίο αναπαριστούσε την πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων. Με βάση την περιγραφή που δόθηκε φάνηκε ότι παρόλο που είχε αναγνωρίσει την έννοια με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής και τη συμβολική έκφραση, ταύτιζε την αριθμητική γραμμή με το ευθύγραμμο τμήμα, γι'αυτό και στις οδηγίες του ζητούσε από το συμμαθητή του να χωρίσει την αριθμητική γραμμή σε ίσα μέρη – ανάλογα με τον παρονομαστή του κλάσματος. Επίσης, παρέλειπε να αναφέρει κάποια από τα βασικά κατασκευαστικά χαρακτηριστικά της αριθμητικής γραμμής όπως για παράδειγμα τα βέλη στις άκρες και τους κατακόρυφους διαχωρισμούς. Στη δεύτερη φάση του πειράματος επικοινωνίας ο αδύνατος μαθητής, όπως και οι δύο προηγούμενοι, αγνόησε τις οδηγίες του ερευνητή και προχώρησε σε περιγραφή παρόμοια με εκείνη της πρώτης φάσης. Συγκεκριμένα, δεν ανέφερε πληροφορίες οι οποίες διαχωρίζουν την έννοια της αριθμητικής γραμμής από το ευθύγραμμο τμήμα – βέλη στα άκρα της γραμμής, δημιουργία του ευθύγραμμου διαστήματος 0 ως 1, διαχωρισμός του διαστήματος σε ίσα μέρη. Με βάση την περιγραφή που δόθηκε φάνηκε ότι παρόλο που ο αδύνατος μαθητής είχε αναγνωρίσει την έννοια με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής και τη συμβολική έκφραση, ταύτιζε την αριθμητική γραμμή με το ευθύγραμμο τμήμα, γι'αυτό και στις οδηγίες του ζητούσε από το συμμαθητή του να χωρίσει την αριθμητική γραμμή σε ίσα μέρη – ανάλογα με τον παρονομαστή του κλάσματος. Παρέλειπε να αναφέρει κάποια από τα βασικά κατασκευαστικά χαρακτηριστικά της αριθμητικής γραμμής, όπως η ισότητα των διαστημάτων, αφού έχοντας συνεχώς υπόψη του τη συμβολική έκφραση της ισοδυναμίας στην οποία έπρεπε να καταλήξει δεν έδωσε σημασία σε κάποια σημαντικά χαρακτηριστικά της αριθμητικής γραμμής. Ο μαθητής με τη χαμηλή επίδοση όπως και μαθητής με τη μέτρια επίδοση, κατά τη διάρκεια της Φάσης Β', παρέλειπε να διορθώνει κατασκευαστικά λάθη του συμμαθητή του, όπως για παράδειγμα τη δημιουργία άνισων διαστημάτων. Επίσης, φάνηκε και στις δύο φάσεις του πειράματος επικοινωνίας ότι ο μαθητής με τη χαμηλή επίδοση παρουσίαζε δυσκολίες στην επεξήγηση και στη χρήση της σωστής ορολογίας.

Τα πειράματα επικοινωνίας έδειξαν ότι η χρήση της αριθμητικής γραμμής ως μέσου αναπαράστασης των κλασματικών αριθμών συνέβαλε στον εντοπισμό δυσκολιών που είχαν οι μαθητές αναφορικά με την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος. Συγκεκριμένα, φάνηκε ότι η υποέννοια μέρος – όλο είναι συνεχώς παρούσα στις περιγραφές των μαθητών και φαίνεται να είναι κυρίαρχη στη σκέψη τους αναφορικά με την έννοια του κλάσματος. Το γεγονός αυτό φαίνεται να είναι το κύριο εμπόδιο στην ανάπτυξη της έννοιας της μονάδας υποδιαίρεσης του κλάσματος, κάτι το οποίο φάνηκε και στις συνεντεύξεις. Οι μαθητές όταν επιχειρούσαν να επιλύσουν έργα στα οποία η αριθμητική γραμμή περιλαμβάνει το διάστημα 0 ως 2 εξακολουθούσαν να χρησιμοποιούν τη στρατηγική της διπλής μέτρησης και να χειρίζονται το διάστημα 0 ως 2 ως το διάστημα 0 ως 1.

Συνεντεύξεις

Ισοδυναμία Κλασμάτων

Κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων ο μαθητής με τη ψηλή επίδοση έδειξε να παρουσιάζει δυσκολίες στη χρήση της αριθμητικής γραμμή ως μέσου αναπαράστασης των κλασματικών αριθμών. Αναφορικά με την αρίθμηση της γραμμής δεν τοποθετούσε το μηδέν στην αριθμητική γραμμή, διαχώριζε τη γραμμή σε άνισα διαστήματα και στην περίπτωση που το έργο περιλάμβανε το διάστημα 0 ως 2 ο μαθητής το εκλάμβανε ως το διάστημα 0 ως 1 σημειώνοντας το κλάσμα με τη στρατηγική της διπλής μέτρησης. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα ο συγκεκριμένος μαθητής να δυσκολεύεται στη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση.

Αναφορικά με την καταλληλότητα της αριθμητικής γραμμής ως αναπαράστασης της έννοιας του κλάσματος, ο μαθητής με τη ψηλή επίδοση ανέφερε ότι η αριθμητική γραμμή μπορεί να βοηθήσει στην αναγνώριση της ισοδυναμίας μεταξύ κλασμάτων, αφού παρουσιάζει τα κλάσματα ως αποστάσεις από το μηδέν, οι οποίες είναι μεταξύ τους ίσες.

Ο μαθητής με τη μέτρια επίδοση φάνηκε να δυσκολεύεται στη χρήση της αριθμητικής γραμμής ως αναπαράστασης της ισοδυναμίας κλασματικών αριθμών. Ο συγκεκριμένος μαθητής λάμβανε υπόψη τους κατακόρυφους διαχωρισμούς και όχι τα διαστήματα. Αυτό ήταν ένα αναμενόμενο λάθος, αφού η αριθμητική γραμμή συνδυάζει την αναπαράσταση των ρητών αριθμών τόσο ως σημεία πάνω στην ευθεία όσο και ως αποστάσεις από το μηδέν. Όπως και ο μαθητής με τη ψηλή επίδοση στην περίπτωση που το έργο περιλάμβανε το διάστημα 0 ως 2 ο μαθητής το εκλάμβανε ως το διάστημα 0 ως 1 σημειώνοντας το κλάσμα που με τη στρατηγική της διπλής μέτρησης. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα να δυσκολεύεται στη μετάφραση από τη λεκτική έκφραση – πρόβλημα – στην αριθμητική γραμμή και αντίστροφα.

Όσον αφορά στην καταλληλότητα της αριθμητικής γραμμής ως αναπαράστασης της ισοδυναμίας κλασμάτων, ο συγκεκριμένος μαθητής ανέφερε ότι η αριθμητική γραμμή τον βοήθησε να κατανοήσει την ισοδυναμία κλασμάτων, αφού παρουσιάζει τα ισοδύναμα κλάσματα ως ίσες αποστάσεις από το μηδέν.

Κατά τη διάρκεια της συνέντευξης ο μαθητής με τη χαμηλή επίδοση δεν μπορούσε να αιτιολογήσει την απάντηση που διατύπωσε σε συμβολική έκφραση όσον αφορά στο λεκτικό πρόβλημα. Με τη βοήθεια της αριθμητικής γραμμής, η οποία έδειχνε ότι ο αριθμός των λίγων αλλά μεγάλων σε μέγεθος διαστημάτων είναι ισοδύναμος με τον αριθμό περισσότερων αλλά μικρότερων σε μέγεθος διαστημάτων, ο συγκεκριμένος μαθητής αιτιολόγησε την απάντησή του. Επίσης, στην περίπτωση που το έργο περιλάμβανε το διάστημα 0 ως 2, ο μαθητής με τη χαμηλή επίδοση το θεωρούσε ως το διάστημα στο οποίο βρισκόταν η μονάδα υποδιαίρεσης. Συνεπώς προχωρούσε στην εύρεση του κλάσματος με τη στρατηγική της διπλής μέτρησης. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα ο μαθητής να δυσκολεύεται στη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση και αντίστροφα, καθώς και στη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη λεκτική έκφραση.

Όσον αφορά στην καταλληλότητα της αριθμητικής γραμμής ως αναπαράστασης της ισοδυναμίας κλασμάτων, ο συγκεκριμένος μαθητής ανέφερε ότι η αριθμητική γραμμή τον βοήθησε να κατανοήσει την ισοδυναμία κλασμάτων, αφού παρουσιάζει τα ισοδύναμα κλάσματα ως ίσες αποστάσεις από το μηδέν και επίσης δείχνει ότι ο αριθμός των λίγων αλλά μεγάλων σε μέγεθος διαστημάτων είναι ισοδύναμος με τον αριθμό περισσότερων αλλά μικρότερων σε μέγεθος διαστημάτων.

<u>Πρόσθεση Ομώνυμων Κλασμάτων</u>

Η συνέντευξη με το μαθητή με τη ψηλή επίδοση έδειξε ότι δυσκολευόταν να χρησιμοποιήσει την αριθμητική γραμμή ως αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων. Αρχικά προσπαθούσε να επιλύσει το λεκτικό πρόβλημα πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων αριθμώντας τη γραμμή με ακέραιους αριθμούς. Επίσης, στην περίπτωση που το έργο περιλάμβανε το διάστημα 0 ως 2, ο συγκεκριμένος μαθητής το εκλάμβανε ως το διάστημα 0 ως 1 σημειώνοντας το κλάσμα που με τη στρατηγική της διπλής μέτρησης, αφού δεν μπορούσε να εντοπίσει τη μονάδα υποδιαίρεσης. Κατά συνέπεια, ο συγκεκριμένος μαθητής αρχικά δυσκολευόταν σε είδη μετάφρασης όπως είναι η μετάφραση από τη λεκτική έκφραση –πρόβλημα – καθώς και στη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση.

Ο μαθητής με τη ψηλή επίδοση χαρακτήρισε την αριθμητική γραμμή ως κατάλληλη για την αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων, αφού παρουσιάζει τους δύο προσθετέους ξεχωριστά αλλά και το άθροισμά τους ταυτόχρονα.

Ο μαθητής με τη μέτρια επίδοση φάνηκε να δυσκολεύεται στη χρήση της αριθμητικής γραμμής ως αναπαράστασης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων. Στην προσπάθειά του να αναγνωρίσει ποιο κλάσμα αναπαριστούσε η γραμμή λάμβανε υπόψη τους κατακόρυφους διαχωρισμούς και όχι τα διαστήματα. Αυτό ήταν ένα αναμενόμενο λάθος, αφού η αριθμητική γραμμή συνδυάζει την αναπαράσταση των ρητών αριθμών τόσο ως σημεία πάνω στην ευθεία όσο και ως αποστάσεις από το μηδέν. Όπως και ο μαθητής με τη ψηλή επίδοση έτσι και ο μαθητής με τη μέτρια επίδοση στην περίπτωση που το έργο περιλάμβανε το διάστημα 0 ως 2, το εκλάμβανε ως το διάστημα 0 ως 1. Ο συγκεκριμένος μαθητής διαφοροποιήθηκε από τους υπόλοιπους, αφού στη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή η οποία περιλάμβανε το διάστημα 0 ως 2 στη συμβολική έκφραση, βρήκε τη μονάδα υποδιαίρεσης. Στο έργο μετάφρασης από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή, η οποία περιλάμβανε το διάστημα 0 ως 2, εκλάμβανε το διάστημα 0 ως 2 ως το διάστημα 0 ως 1 και προσπάθησε να τοποθετήσει τις μισές υποδιαιρέσεις στο διάστημα 0 ως 1 και τις υπόλοιπες υποδιαιρέσεις στο διάστημα από 1 ως 2. Το γεγονός αυτό είχε ως αποτέλεσμα ο μαθητής αυτός να δυσκολεύεται στη μετάφραση από τη λεκτική έκφραση – πρόβλημα – καθώς και στη μετάφραση από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή.

Σχετικά με την αριθμητική γραμμή ως αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων ο μέτριος μαθητής ανέφερε ότι η αριθμητική γραμμή μπορεί να συμβάλει στην κατανόηση της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων, αφού παρουσιάζει τους δύο προσθετέους και δείχνει αν το άθροισμα είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο της μονάδας.

Τέλος, ο μαθητής με τη χαμηλή επίδοση συνδύαζε τις δυσκολίες τόσο του μαθητή με την ψηλή επίδοση, όσο και του μαθητή με τη μέτρια επίδοση. Ο συγκεκριμένος μαθητής δυσκολευόταν να αναπαραστήσει τους προσθετέους στην αριθμητική γραμμή, αφού αρχικά τοποθέτησε ένα κάθετο διαχωρισμό και κάτω από αυτό σημείωσε τον κλασματικό αριθμό που ήταν ο πρώτος προσθετέος. Το λάθος αυτό είναι αναμενόμενο, αφού στην αριθμητική γραμμή ένας αριθμός αποκτά νόημα μόνο όταν καθορισθεί η θέση τουλάχιστον άλλων δύο αριθμών. Όπως και ο μαθητής με τη μέτρια επίδοση έτσι και ο μαθητής με τη χαμηλή επίδοση στην προσπάθεια του να αναγνωρίσει ποιο κλάσμα αναπαριστούσε η γραμμή λάμβανε υπόψη τους κατακόρυφους διαχωρισμούς και όχι τα διαστήματα. Τέλος, όπως και ο μαθητής με την ψηλή επίδοση, έτσι και ο μαθητής με τη χαμηλή επίδοση στην περίπτωση που το έργο περιλάμβανε το διάστημα 0 ως 2, το εκλάμβανε ως το διάστημα 0 ως 1. Ακολούθως εφάρμοζε τη στρατηγική της διπλής μέτρησης για να βρει το ζητούμενο κλάσμα. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα ο μαθητής με τη χαμηλή επίδοση να δυσκολεύεται στη μετάφραση από τη λεκτική έκφραση – πρόβλημα – στην αριθμητική γραμμή και αντίστροφα, καθώς και στη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση.

Όσον αφορά στην καταλληλότητα της αριθμητικής γραμμής ως αναπαράστασης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων ο συγκεκριμένος μαθητής ανέφερε ότι η αριθμητική γραμμή διευκολύνει στην εκτέλεση της συγκεκριμένης πράξης, διότι παρουσιάζει τις υποδιαιρέσεις με βάση τους παρονομαστές των κλασμάτων.

<u>Πρόσθεση Ετερώνυμων Κλασμάτων</u>

Ο μαθητής με την ψηλή επίδοση φάνηκε ότι δεν αντιμετώπιζε δυσκολίες στη χρήση της αριθμητικής γραμμής ως αναπαράστασης της πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων, αφού χρησιμοποίησε και ερμήνευσε σωστά τις πληροφορίες που του παρείχε η συγκεκριμένη αναπαράσταση – διαστήματα, βέλη, κατακόρυφοι διαχωρισμοί, αριθμοί – με αποτέλεσμα να μην αντιμετωπίζει προβλήματα σε κανένα είδος μετάφρασης.

Στην ερώτηση για την καταλληλότητα της αριθμητικής γραμμής ως αναπαράστασης της πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων, ο συγκεκριμένος μαθητής απάντησε ότι θεωρεί την αριθμητική γραμμή ως κατάλληλη αναπαράσταση, αφού χρησιμεύει στο να επιλυθούν έργα όπου οι υποδιαιρέσεις είναι διαφορετικές – έργα με ετερώνυμα κλάσματα. Σύμφωνα με το συγκεκριμένο μαθητή βλέποντας ότι οι υποδιαιρέσεις στις δύο αριθμητικές γραμμές είναι διαφορετικές παρουσιάζεται η ανάγκη να χωριστεί η αριθμητική γραμμή σε περισσότερα διαστήματα μέχρι να βρεθεί ένας κοινός αριθμός υποδιαιρέσεων. Τέλος, αναφέρθηκε στο γεγονός ότι η διαδικασία αυτή είναι η διαδικασία εύρεσης του ελάχιστου κοινού πολλαπλασίου.

Η συνέντευξη με το μαθητή με τη μέτρια επίδοση έδειξε η αριθμητική γραμμή συνέβαλε ώστε ο συγκεκριμένος μαθητής να βρει τα ισοδύναμα κλάσματα των δύο προσθετέων και να εκτελεί προσθέσεις ετερώνυμων κλασμάτων. Ο μαθητής με τη μέτρια επίδοση δυσκολευόταν στη χρήση της αριθμητικής γραμμής ως αναπαράστασης της έννοιας του κλάσματος, αφού στην περίπτωση που το έργο περιλάμβανε το διάστημα 0 ως 2, το εκλάμβανε ως το διάστημα 0 ως 1. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα να δυσκολεύεται στη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη λεκτική έκφραση και στη συμβολική έκφραση.

Αναφορικά με την καταλληλότητα της αριθμητικής γραμμής ως αναπαράστασης της πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων, ο μαθητής με τη μέτρια επίδοση ανέφερε ότι η συγκεκριμένη αναπαράσταση βοηθά στην κατανόηση της πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων γιατί παρουσιάζει τα ισοδύναμα κλάσματα και ευκολύνει έτσι τη μετατροπή των ετερώνυμων κλασμάτων σε ομώνυμα και κατά συνέπεια διευκολύνει την πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων.

Τέλος ο μαθητής με τη χαμηλή επίδοση δυσκολευόταν στη χρήση της αριθμητικής γραμμής ως αναπαράστασης της έννοιας του κλάσματος, αφού στην περίπτωση που το έργο περιλάμβανε το διάστημα 0 ως 2, το εκλάμβανε ως το διάστημα 0 ως 1. Το γεγονός αυτό είχε σαν αποτέλεσμα ο συγκεκριμένος μαθητής, όπως και ο μαθητής με τη μέτρια επίδοση, να δυσκολεύεται στη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη λεκτική έκφραση και στη συμβολική έκφραση.

Σε σχέση με τη βοήθεια που μπορεί να προσφέρει η αριθμητική γραμμή ο μαθητής με τη χαμηλή επίδοση ανέφερε ότι οι διαφορετικές υποδιαιρέσεις των αριθμητικών γραμμών δείχνουν ότι δε γίνεται να προσθέσεις κλάσματα με διαφορετικούς παρονομαστές και ότι πρέπει να μετατραπούν πρώτα σε ομώνυμα, αφού βρεθούν τα ισοδύναμά τους κλάσματα.

Ο Ρόλος της Αριθμητικής Γραμμής στην Επίλυση Προβλήματος

Για να ελεγχθεί η υπόθεση Υ6, σύμφωνα με την οποία η επίδοση των μαθητών στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων διαφοροποιείται όταν χρησιμοποιούν ως βοηθητικό μέσο το γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής, υπολογίσθηκαν οι μέσοι όροι επίδοσης των υποκειμένων στα έργα του Δοκιμίου Δ. Συγκεκριμένα, ζητήθηκε από 106 υποκείμενα να επιλύσουν τα προβλήματα πρόσθεσης κλασμάτων χρησιμοποιώντας την αριθμητική γραμμή. Σε 100 υποκείμενα ζητήθηκε να επιλύσουν τα ίδια προβλήματα, αλλά με όποιο τρόπο επιθυμούσαν. Για όλα τα υποκείμενα υπολογίσθηκε ο μέσος όρος επίδοσης στη διατύπωση της ορθής απάντησης και στην ορθή επεξήγηση. Για τους μαθητές οι οποίοι μπορούσαν να επιλέξουν όποιο τρόπο επίλυσης ήθελαν, η ορθή επεξήγηση αναφέρεται στην ορθή εξίσωση ή στην ορθή κατασκευή αριθμητικής γραμμής με στόχο την αναπαράσταση των δεδομένων του προβλήματος και επίλυσής του. Αναφορικά με τους μαθητές που έπρεπε να χρησιμοποιήσουν την αριθμητική γραμμή η ορθή επεξήγηση αναφέρεται στην ορθή κατασκευή αριθμητικής γραμμής με στόχο την αναπαράσταση των δεδομένων του προβλήματος και επίλυσής του.

Για να συγκριθεί η επίδοση των δύο ομάδων στην επίλυση προβλήματος χρησιμοποιήθηκε η Ανάλυση Διασποράς – ONEWAY ANOVA. Η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η ομάδα, η οποία έχει δύο επίπεδα: τους μαθητές οι οποίοι έλυσαν τα προβλήματα με όποιο τρόπο ήθελαν και τους μαθητές οι οποίοι έλυσαν τα προβλήματα με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής. Με βάση τον Πίνακα 11 φαίνεται ότι η διαφορά ανάμεσα στους μέσους όρους επιτυχίας των δύο ομάδων δεν είναι στατιστικά σημαντική ($p=0.944>0.005$). Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ότι η χρήση της αριθμητικής γραμμής δεν αποτελεί παράγοντα που απαραίτητα δυσκολεύει την επίλυση προβλημάτων πρόσθεσης κλασμάτων.

Πίνακας 11

Μέσος Όρος Επιτυχίας Ομάδων Μαθητών στην Επίλυση Προβλήματος

Ομάδα	Μέσος Όρος Επιτυχίας	p
Ελεύθερη Επιλογή Τρόπου Επίλυσης	8.58	0.728
Χρήση Αριθμητικής Γραμμής	8.33	

Τα υποκείμενα, τα οποία έλυσαν τα προβλήματα με όποιο τρόπο επιθυμούσαν σημειώνουν μεγαλύτερη επιτυχία στην τελική διατύπωση της απάντησης, αφού ο μέσος όρος επίδοσής τους είναι 5.29, ενώ ο μέσος όρος επίδοσης των υποκειμένων που κλήθηκαν να επιλύσουν τα προβλήματα με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής είναι 4.65 αναφορικά με την τελική διατύπωση της ορθής απάντησης. Η διαφορά μεταξύ των δύο μέσων όρων δεν είναι στατιστικά σημαντική ($p=0.102>0.005$) (Πίνακας 12).

Πίνακας 12

Μέσος Όρος Επιτυχίας Ομάδων στη Διατύπωση Απαντήσεων

Ομάδα	Μέσος Όρος Επιτυχίας στην Τελική Διατύπωση Απαντήσεων	p
Ελεύθερη Επιλογή Τρόπου Επίλυσης	5.29	0.102
Χρήση Αριθμητικής Γραμμής	4.65	

Αναφορικά με την ομάδα των υποκειμένων, τα οποία έλυσαν τα προβλήματα με όποιο τρόπο επιθυμούσαν, τα υποκείμενα που χρησιμοποίησαν την αλγεβρική έκφραση έχουν μέσο όρο επίδοσης 2.43. Τα υποκείμενα της ίδιας ομάδας, τα οποία έλυσαν τα προβλήματα επιλέγοντας την αριθμητική γραμμή έχουν μέσο όρο επίδοσης 1.83. Η διαφορά των δύο μέσων όρων είναι στατιστικά σημαντική (Πίνακας 13). Φαινομενικά, ο χαμηλός μέσος όρος επιτυχίας των υποκειμένων που χρησιμοποίησαν την αριθμητική γραμμή ίσως να οφείλεται στο γεγονός ότι δεν τη χρησιμοποιούσαν σωστά γι'αυτό και βαθμολογούνταν με 0. Το αποτέλεσμα αυτό, όμως, ίσως και να οφείλεται στο γεγονός ότι οι περισσότεροι μαθητές προτίμησαν να μη χρησιμοποιήσουν την αριθμητική γραμμή γι'αυτό και ενώ βαθμολογούνταν με 1 αν έλυναν το πρόβλημα ορθά – για παράδειγμα με τη χρήση της σωστής εξίσωσης – βαθμολογούνταν με 0 αν δε χρησιμοποιούσαν την αριθμητική γραμμή.

Πίνακας 13

Μέσος Όρος Επιτυχίας Ομάδας Ελεύθερης Επιλογής Τρόπου Επίλυσης στην Επίλυση Προβλήματος

Ομάδα Ελεύθερης Επιλογής Τρόπου Επίλυσης	Μέσος Όρος Επιτυχίας	p
Χρήση Εξίσωσης	2.43	0.017
Χρήση Αριθμητικής Γραμμής	1.83	

Διδασκαλία και Αριθμητική Γραμμή

Για να εξετασθεί η έκτη υπόθεση Υ7 οργανώθηκε παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας με τη δημιουργία ομάδας ελέγχου και πειραματικής ομάδας. Την ομάδα ελέγχου αποτελούσαν 25 μαθητές πέμπτης τάξης, οι οποίοι παρακολούθησαν τη σειρά μαθημάτων για τα κλάσματα όπως προνοείται από το αναλυτικό πρόγραμμα των Μαθηματικών. Οι συγκεκριμένοι μαθητές δεν διδάχθηκαν ούτε συμμετείχαν σε δραστηριότητες στις οποίες να δίνεται περαιτέρω έμφαση στην αριθμητική γραμμή ως αναπαράστασης της έννοιας του κλάσματος.

Την πειραματική ομάδα αποτελούσαν 28 μαθητές πέμπτης τάξης, οι οποίοι παρακολούθησαν τη σειρά μαθημάτων για τα κλάσματα όπως προνοείται από το αναλυτικό πρόγραμμα των Μαθηματικών, αλλά επιπλέον συμμετείχαν σε ένα διδακτικό παρεμβατικό πρόγραμμα, το οποίο έδινε έμφαση στην αριθμητική γραμμή ως αναπαράσταση της έννοιας του κλάσματος. Η περιγραφή του σχεδιασμού της διδακτικής παρέμβασης περιλαμβάνεται στο Κεφάλαιο 3 –Μεθοδολογία της Έρευνας.

Για να συγκριθεί η επίδοση των δύο ομάδων πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση χρησιμοποιήθηκε η ανάλυση πολλαπλής διασποράς – MANOVA. Οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι η ομάδα ελέγχου και η πειραματική ομάδα, ενώ εξαρτημένες μεταβλητές είναι η επίδοση των μαθητών σε όλα τα είδη μετάφρασης και στα γνωστικά αντικείμενα – ισοδυναμία, πρόσθεση ομώνυμων και πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων. Με την εφαρμογή της μεθόδου αυτής φάνηκε ότι υπήρχαν αρχικές διαφορές ανάμεσα στην ομάδα ελέγχου και στην πειραματική ομάδα. Κατά συνέπεια, χρησιμοποιήθηκε η ανάλυση συνδιασποράς – ANCOVA – με στόχο να εκμηδενισθούν οι αρχικές διαφορές ανάμεσα στις δύο ομάδες και να διαπιστωθεί αν υπήρξε διαφοροποίηση στην επίδοση των μαθητών των δύο ομάδων με βάση τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη δεύτερη χορήγηση των δοκιμίων. Με την εφαρμογή της ανάλυσης συνδιασποράς –ANCOVA – φάνηκε ότι οι μαθητές της πειραματικής ομάδας υπερείχαν των μαθητών της ομάδας ελέγχου, ακόμη και μετά τη στατιστική εξισορρόπηση των αρχικών διαφορών τους. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα και οι δύο ομάδες παρουσίασαν βελτίωση στην επίδοσή τους. Περισσότερη βελτίωση παρουσίασε η πειραματική ομάδα. Συγκεκριμένα, με βάση τον Πίνακα 14 ο μέσος όρος επιτυχίας σε όλα τα έργα για την πειραματική ομάδας ήταν 61.42 και ο μέσος όρος επιτυχίας της ομάδας ελέγχου ήταν 42.24. Η διαφορά μεταξύ των δύο μέσων όρων είναι σημαντική ($p= 0.000<0,5$).

Πίνακας 14

Μέσος Όρος Επιτυχίας των Υποκειμένων της Πειραματικής ομάδας και της ομάδας Ελέγχου σε Όλα τα Έργα .

Ομάδα	Μέσος όρος	p
Πειραματική Ομάδα	61.43	0.000
Ομάδα Ελέγχου	42.24	

Στα έργα μετάφρασης που εξέταζαν την ισοδυναμία κλασμάτων και την πρόσθεση ομώνυμων και ετερώνυμων κλασμάτων η πειραματική ομάδα είχε ψηλότερη επίδοση από την ομάδα ελέγχου και η διαφορά στους μέσους όρους των δύο ομάδων είναι σημαντική (Πίνακας 15).

Πίνακας 15

Μέσος Όρος Επιτυχίας των Υποκειμένων στα Έργα Μετάφρασης που Εξέταζαν την Ισοδυναμία και Πρόσθεση Κλασμάτων

Ομάδα	Είδος Μετάφρασης	Είδος Έργων	Μέσος Όρος	p
Πειραματική	Αριθμητική γραμμή-Συμβολική έκφραση	Ισοδυναμία	3.82	0.000
Ελέγχου	Αριθμητική γραμμή-Συμβολική έκφραση	Ισοδυναμία	1.68	
Πειραματική	Συμβολική έκφραση-Αριθμητική γραμμή	Ισοδυναμία	3.54	0.000
Ελέγχου	Συμβολική έκφραση-Αριθμητική γραμμή	Ισοδυναμία	1.20	
Πειραματική	Αριθμητική γραμμή-Συμβολική έκφραση	Πρόσθεση Ομώνυμων Κλασμάτων	2.79	0.000
Ελέγχου	Αριθμητική γραμμή-Συμβολική έκφραση	Πρόσθεση Ομώνυμων Κλασμάτων	1.48	
Πειραματική	Συμβολική έκφραση-Αριθμητική γραμμή	Πρόσθεση Ομώνυμων Κλασμάτων	2.57	0.000
Ελέγχου	Συμβολική έκφραση-Αριθμητική γραμμή	Πρόσθεση Ομώνυμων Κλασμάτων	1.16	0.000
Πειραματική	Αριθμητική γραμμή-Συμβολική έκφραση	Πρόσθεση Ετερώνυμων Κλασμάτων	2.50	0.006
Ελέγχου	Αριθμητική γραμμή-Συμβολική έκφραση	Πρόσθεση Ετερώνυμων Κλασμάτων	1.56	
Πειραματική	Συμβολική έκφραση-Αριθμητική γραμμή	Πρόσθεση Ετερώνυμων Κλασμάτων	2.25	0.017
Ελέγχου	Συμβολική έκφραση-Αριθμητική γραμμή	Πρόσθεση Ετερώνυμων Κλασμάτων	1.46	

Στα έργα που ανήκουν σε διαφορετικά γνωστικά αντικείμενα, δηλαδή στα έργα που εξέταζαν την ικανότητα αναγνώρισης κλασμάτων, την ικανότητα αναπαράστασης, την ισοδυναμία κλασμάτων και την πρόσθεση ομώνυμων και ετερώνυμων κλασμάτων η πειραματική ομάδα έχει ψηλότερη επίδοση από την ομάδα ελέγχου. Στις περισσότερες περιπτώσεις η διαφορά στους μέσους όρους των δύο ομάδων είναι σημαντική (Πίνακας 16).

Πίνακας 16

Μέσος Όρος Επιτυχίας των Υποκειμένων της Πειραματικής Ομάδας και της Ομάδας Ελέγχου στα Έργα που Ανήκουν σε Διαφορετικά Γνωστικά Αντικείμενα.

Ομάδα	Γνωστικό Αντικείμενο	Μέσος Όρος	p
Πειραματική	Αναγνώριση Κλασμάτων	8.75	0.00
Ελέγχου	Αναγνώριση Κλασμάτων	6.00	
Πειραματική	Αναπαράσταση Κλασμάτων	10.50	0.025
Ελέγχου	Αναπαράσταση Κλασμάτων	8.40	
Πειραματική	Ισοδυναμία Κλασμάτων	13.57	0.000
Ελέγχου	Ισοδυναμία Κλασμάτων	8.56	
Πειραματική	Πρόσθεση Ομώνυμων Κλασμάτων	6.32	0.000
Ελέγχου	Πρόσθεση Ομώνυμων Κλασμάτων	3.64	
Πειραματική	Πρόσθεση Ετερώνυμων Κλασμάτων	8.10	0.029
Ελέγχου	Πρόσθεση Ετερώνυμων Κλασμάτων	6.40	

Όσον αφορά στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων που εξετάζουν την πρόσθεση κλασμάτων τα υποκείμενα της πειραματικής ομάδας είχαν ψηλότερο μέσο όρο στη διατύπωση της απάντησης του προβλήματος σε σύγκριση με τα υποκείμενα της ομάδας ελέγχου. Τα υποκείμενα που ανήκαν στην ομάδα ελέγχου και έλυσαν τα προβλήματα με τη χρήση εξίσωσης σημείωσαν καλύτερη επίδοση σε σχέση με τα υποκείμενα της πειραματικής ομάδας τα οποία, επίσης έλυσαν τα προβλήματα με τη χρήση εξίσωσης. Τέλος, τα υποκείμενα της πειραματικής ομάδας που χρησιμοποίησαν την αριθμητική γραμμή για την επίλυση των προβλημάτων σημείωσαν καλύτερη επίδοση από τα υποκείμενα της ομάδας ελέγχου που χρησιμοποίησαν την αριθμητική γραμμή ως μέσο επίλυσης των προβλημάτων (Πίνακας 17).

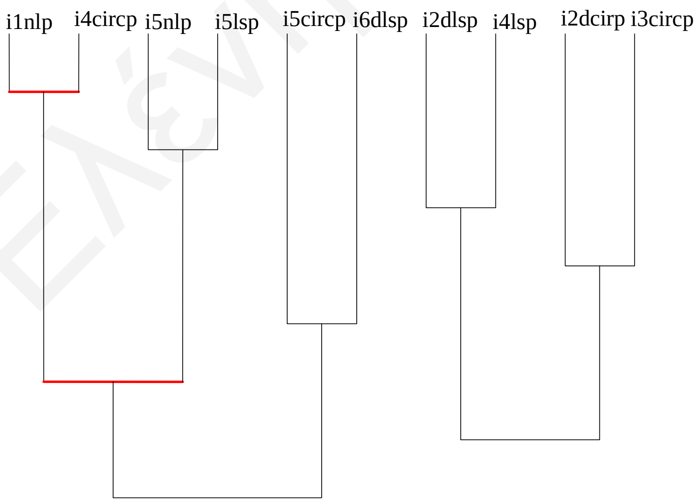
Πίνακας 17

Μέσος Όρος Επιτυχίας Υποκειμένων στα Προβλήματα Πρόσθεσης Κλασμάτων.

Ομάδα	Στάδιο επίλυσης	Μέσος Όρος	p
Ομάδα ελέγχου	Ορθή απάντηση	4.40	0.026
Πειραματική Ομάδα	Ορθή απάντηση	6.10	
Ομάδα Ελέγχου	Ορθή διαδικασία επίλυσης (εξίσωση)	1.79	0.027
Πειραματική Ομάδα	Ορθή διαδικασία επίλυσης (εξίσωση)	1.20	
Πειραματική Ομάδα	Ορθή διαδικασία επίλυσης (αριθμητική γραμμή)	6.29	0.003
Ομάδα Ελέγχου	Ορθή διαδικασία επίλυσης (αριθμητική γραμμή)	3.64	

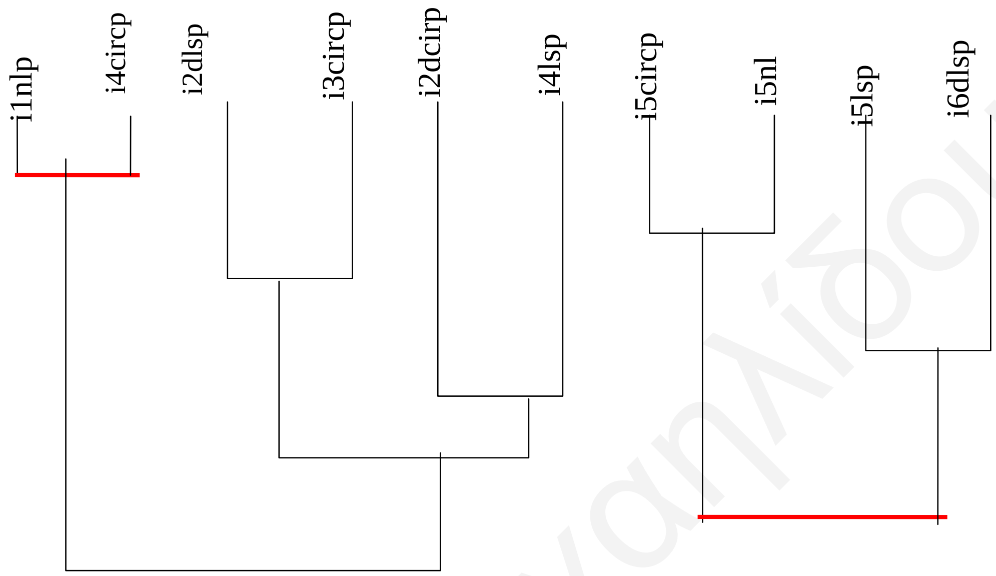
Για να εξετασθεί η προτελευταία υπόθεση χρησιμοποιήθηκε η Συνεπαγωγική Μέθοδος με στόχο να διαπιστωθεί αν κάποια από τα έργα που είχαν στεγανοποιηθεί πριν το διδακτικό παρεμβατικό πρόγραμμα δεν ήταν πλέον στεγανοποιημένα ως αποτέλεσμα της διδακτικής παρέμβασης. Συγκεκριμένα, εξετάσθηκε αν υπήρχε στεγανοποίηση έργων τόσο στην ομάδα ελέγχου όσο και στην πειραματική ομάδα πριν το παρεμβατικό πρόγραμμα. Επίσης, εξετάσθηκε κατά πόσον η στεγανοποίηση αυτή παρέμεινε αναλλοίωτη στην ομάδα ελέγχου μετά τη διδασκαλία των κλασμάτων όπως προνοείται από το αναλυτικό πρόγραμμα και στην πειραματική ομάδα μετά την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος.

Με βάση το Διάγραμμα 17, Διάγραμμα Ομοιότητας Έργων Αναγνώρισης της Έννοιας του Κλάσματος – Πρώτη Χορήγηση – φάνηκε ότι υπάρχει κάποια στεγανοποίηση των έργων, με βάση το είδος του έργου, όσον αφορά την ομάδα ελέγχου. Συγκεκριμένα, παρατηρείται η δημιουργία μιας ομάδας έργων η οποία αποτελείται από τα έργα I1nlp, I4circp. Πρόκειται για δύο έργα μικρού βαθμού δυσκολίας, αφού στην περίπτωση του πρώτου έργου η αριθμητική γραμμή περιλαμβάνει μόνο το διάστημα 0 ως 1 και οι υποδιαιρέσεις της είναι ίσες με τον παρονομαστή του δοσμένου κλάσματος, ενώ στο δεύτερο έργο οι υποδιαιρέσεις του κύκλου είναι ο αριθμός του παρονομαστή του δοσμένου κλάσματος. Παρατηρείται, επίσης, η δημιουργία μιας ομάδας έργων I1nlp, I4circp, I5nlp και I5lsp. Η πλειοψηφία των έργων αυτών εξετάζουν την αναγνώριση της έννοιας του κλάσματος σε γραμμικές αναπαραστάσεις – αριθμητική γραμμή, ευθύγραμμο τμήμα. Σχηματίστηκε, επίσης, η ομάδα των έργων I2dcircp και I3circp. Πρόκειται για έργα τα οποία εξετάζουν την αναγνώριση της έννοιας του κλάσματος στο εμβαδό του κύκλου. Ακόμη μια ομάδα έργων είναι τα έργα I2dlsp και I4lsp. Τα δύο αυτά έργα εξετάζουν την αναγνώριση της έννοιας του κλάσματος στο ευθύγραμμο τμήμα.



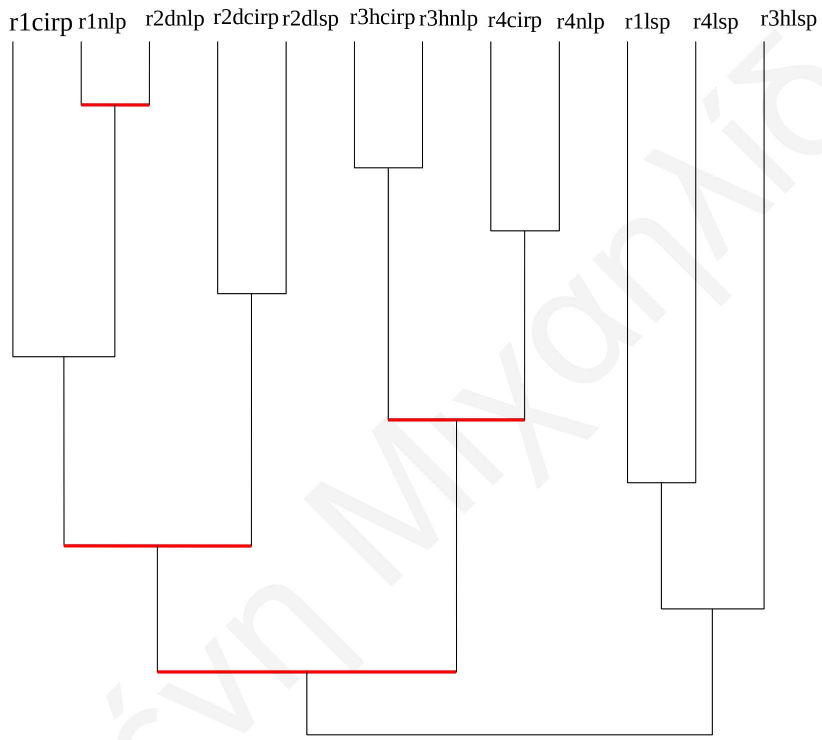
Διάγραμμα 17. Διάγραμμα Ομοιότητας Έργων Αναγνώρισης της Έννοιας του Κλάσματος – Ομάδα Ελέγχου, Πρώτη Χορήγηση.

Αναφορικά με αναγνώριση της έννοιας του κλάσματος σε ποικιλία αναπαραστάσεων, στο Διάγραμμα 18, Διάγραμμα Ομοιότητας Έργων Αναγνώρισης της Έννοιας του Κλάσματος –Πειραματική Ομάδα, Πρώτη Χορήγηση– φάνηκε ότι τα έργα δεν είχαν στεγανοποιηθεί με βάση κάποιο κριτήριο, εκτός από το έργο i5, το οποίο αφορά στην ικανότητα αναγνώρισης του ίδιου κλάσματος σε τρεις διαφορετικές αναπαραστάσεις.



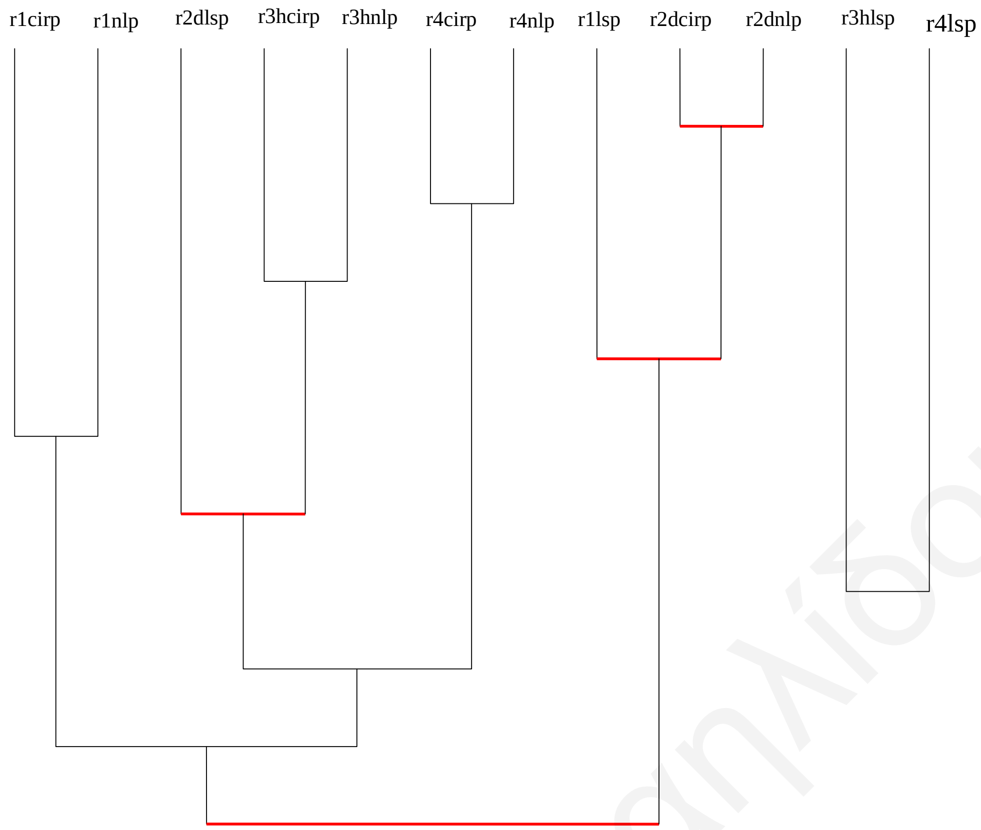
Διάγραμμα 18. Διάγραμμα Ομοιότητας Έργων Αναγνώρισης της Έννοιας του Κλάσματος για την Πειραματική Ομάδα, Πρώτη Χορήγηση.

Αναφορικά με την ικανότητα αναπαράστασης, στο Διάγραμμα 19, Διάγραμμα Ομοιότητας Έργων Αναπαράστασης της Έννοιας του Κλάσματος για την Ομάδα Ελέγχου, Πρώτη Χορήγηση – φάνηκε ότι τα έργα στεγανοποιήθηκαν περισσότερο με βάση το είδος έργου και λιγότερο με το είδος αναπαράστασης. Συγκεκριμένα ομαδοποιούνται τα έργα r1lsp, r4lsp και r3hlsp, τα οποία αφορούν το χειρισμό της έννοιας του κλάσματος με το ευθύγραμμο τμήμα. Τα υπόλοιπα έργα ομαδοποιούνται με κριτήριο το βαθμό δυσκολίας. Συγκεκριμένα ομαδοποιούνται τα έργα r1circp, r1nlp και r2dnlp. Τα πρώτα δύο έργα εξετάζουν την αναπαράσταση του ίδιου κλάσματος, ενώ το δεύτερο και το τρίτο αφορούν την αναπαράσταση της έννοιας του κλάσματος στην αριθμητική γραμμή. Ομαδοποιούνται, επίσης, τα έργα r2dcircp και r2dlsp. Πρόκειται για έργα που εξετάζουν το ίδιο κλάσμα και προϋποθέτουν την αναπαράστασή του σε εμβαδόν κύκλου και σε ευθύγραμμο τμήμα των οποίων οι υποδιαιρέσεις είναι διπλάσιες από τον παρονομαστή του κλάσματος. Ακόμη μια ομαδοποίηση που προκύπτει αφορά τα έργα r3hcirc και r3hnlp, τα οποία εξετάζουν το ίδιο κλάσμα και προϋποθέτουν την αναπαράστασή του σε εμβαδόν κύκλου και σε ευθύγραμμο τμήμα των οποίων οι υποδιαιρέσεις είναι μισές από τον παρονομαστή του κλάσματος. Τέλος, ομαδοποιούνται τα έργα r4circp και r4nlp τα οποία εξετάζουν την αναπαράσταση του ίδιου κλάσματος.



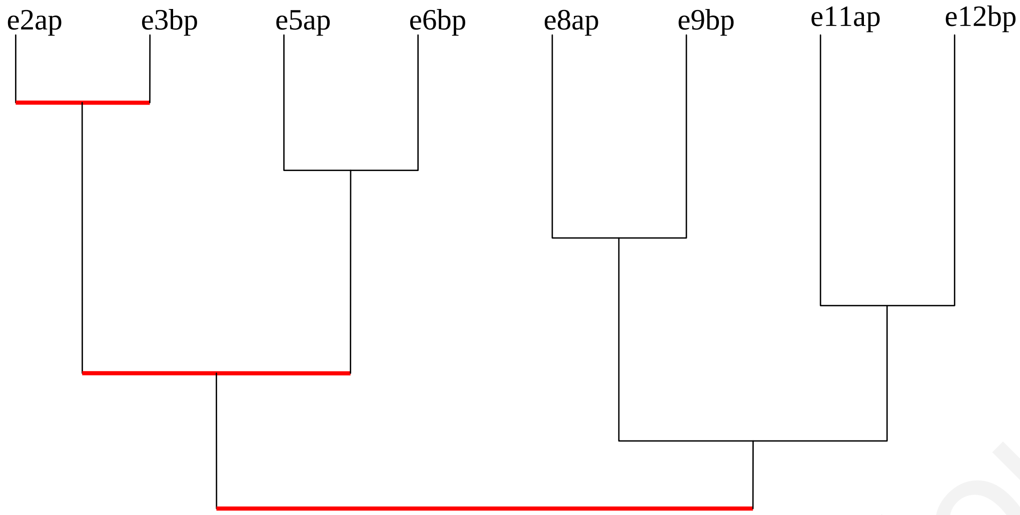
<u>Διάγραμμα 19.</u> Διάγραμμα Ομοιότητας Έργων Αναπαράστασης της Έννοιας του Κλάσματος – Ομάδα Ελέγχου, Πρώτη Χορήγηση.

Αναφορικά με την ικανότητα αναπαράστασης, στο Διάγραμμα 20, Διάγραμμα Ομοιότητας Έργων Αναπαράστασης της Έννοιας του Κλάσματος – Πειραματική Ομάδα, Πρώτη Χορήγηση – φάνηκε ότι τα έργα στεγανοποιήθηκαν με βάση το είδος έργου και όχι το είδος αναπαράστασης. Συγκεκριμένα ομαδοποιούνται τα έργα r1circp και r1nlp. Τα δύο αυτά έργα εξετάζουν την ικανότητα αναπαράστασης του ίδιου κλάσματος όταν οι υποδιαιρέσεις της δοσμένης αναπαράστασης – εμβαδόν κύκλου, διάστημα 0 ως 1 στην αριθμητική γραμμή – είναι ίσες με τον παρονομαστή του κλάσματος. Μια άλλη ομάδα έργων είναι η ομάδα που αποτελείται από τα έργα r2dnlp, r3hcircp και r3hnlp. Πρόκειται για έργα, που εξετάζουν την ικανότητα αναπαράστασης του ίδιου κλάσματος όταν οι υποδιαιρέσεις της δοσμένης αναπαράστασης –εμβαδόν κύκλου, διάστημα 0 ως 1 στην αριθμητική γραμμή – δεν είναι ίσες με τον παρονομαστή του κλάσματος, αλλά είτε είναι διπλάσιες -r2dlsp- είτε είναι οι μισές - r3hcircp και r3hnlp. Τα έργα r4circp και r4nlp αποτελούν ξεχωριστή ομάδα. Τα συγκεκριμένα έργα εξέταζαν την ικανότητα αναπαράστασης του ίδιου κλάσματος όταν οι υποδιαιρέσεις της δοσμένης αναπαράστασης –εμβαδόν κύκλου, διάστημα 0 ως 1 στην αριθμητική γραμμή – είναι ίσες με τον παρονομαστή του κλάσματος. Τα έργα r2dcircp και r3hnlp αποτελούν ξεχωριστή ομάδα. Πρόκειται για έργα τα οποία εξέταζαν την ικανότητα αναπαράστασης του ίδιου κλάσματος σε αναπαραστάσεις – εμβαδόν κύκλου, διάστημα 0 ως 1 στην αριθμητική γραμμή – των οποίων οι υποδιαιρέσεις είναι οι διπλάσιες από τον παρονομαστή του κλάσματος. Τέλος, τα έργα r4lsp και r3hlsp ομαδοποιούνται ξεχωριστά από τα άλλα έργα. Τα συγκεκριμένα έργα εξετάζουν την ικανότητα αναπαράστασης της έννοιας του κλάσματος σε ευθύγραμμο τμήμα.



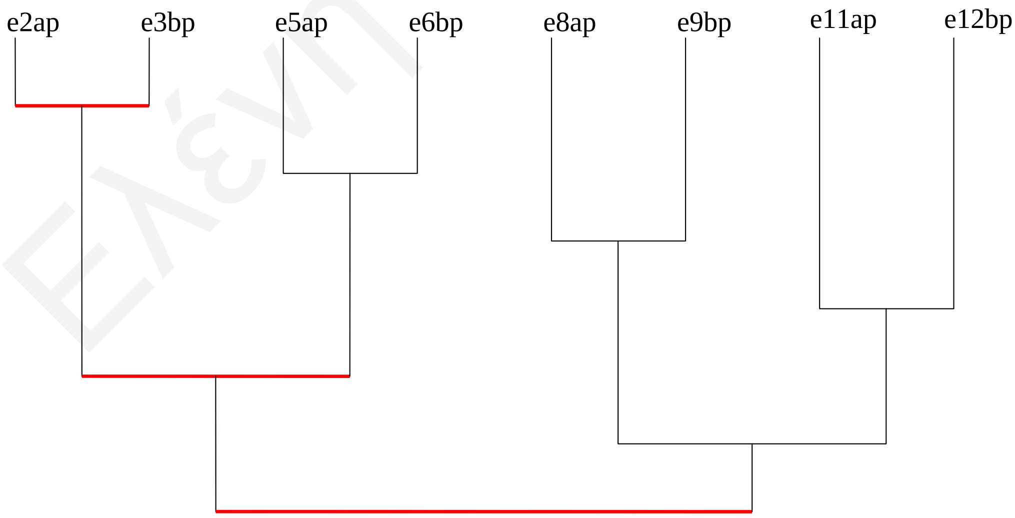
Διάγραμμα 20. Διάγραμμα Ομοιότητας Έργων Αναπαράστασης της Έννοιας του Κλάσματος για την Πειραματική Ομάδα, Πρώτη Χορήγηση.

Αναφορικά με την ομάδα ελέγχου φάνηκε ότι τα έργα μετάφρασης που εξέταζαν την ισοδυναμία κλασμάτων δεν ήταν στεγανοποιημένα, αφού στο Διάγραμμα 21, Διάγραμμα Ομοιότητας Έργων Μετάφρασης που Εξετάζουν την Έννοια της Ισοδυναμίας – Ομάδα Ελέγχου, Πρώτη Χορήγηση – δεν παρουσιάζονται περιοχές έργων μετάφρασης οι οποίες να αποτελούνται αποκλειστικά από έργα μετάφρασης από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή και αντίστροφα.



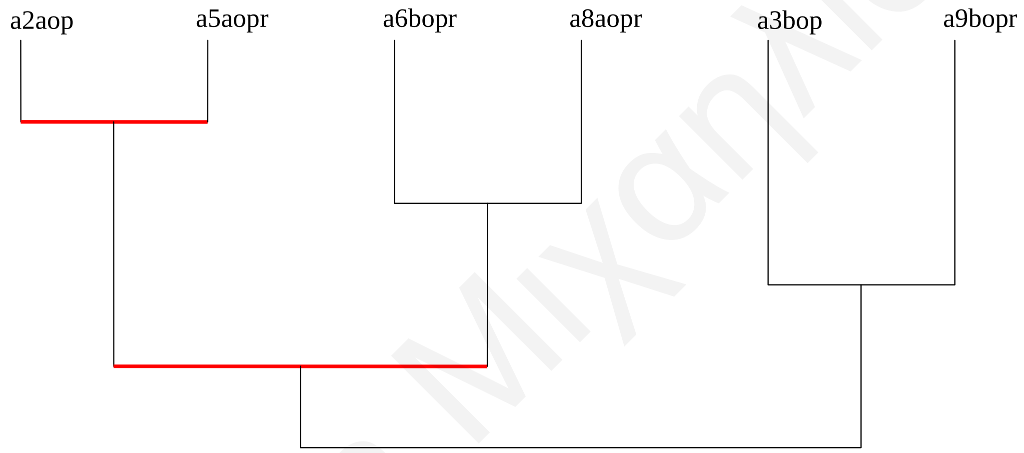
Διάγραμμα 21. Διάγραμμα Ομοιότητας για τα Έργα Μετάφρασης που Εξέταζαν την Ισοδυναμία Κλασμάτων – Ομάδα Ελέγχου, Πρώτη Χορήγηση.

Στο Διάγραμμα 22, Διάγραμμα Ομοιότητας Έργων Μετάφρασης που Εξετάζουν την Ισοδυναμία Κλασμάτων –Πειραματική Ομάδα, Πρώτη Χορήγηση – φάνηκε ότι τα έργα δεν έχουν στεγανοποιηθεί αφού στο Διάγραμμα Ομοιότητας δεν παρουσιάζονται περιοχές έργων μετάφρασης οι οποίες να αποτελούνται αποκλειστικά από έργα μετάφρασης από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή και αντίστροφα.



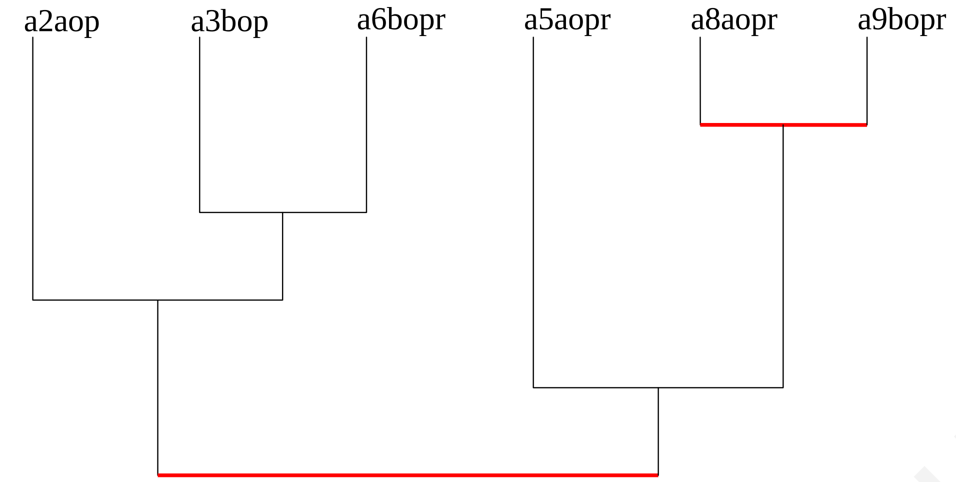
Διάγραμμα 22. Διάγραμμα Ομοιότητας των Έργων Μετάφρασης που Εξετάζουν την Έννοια της Ισοδυναμίας – Πειραματική Ομάδα, Πρώτη Χορήγηση.

Όσον αφορά στα έργα μετάφρασης που εξέταζαν την πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων φάνηκε ότι υπήρχε στεγανοποίηση για την ομάδα ελέγχου. Συγκεκριμένα, με βάση το Διάγραμμα 23, Διάγραμμα Ομαδοποίησης Έργων Μετάφρασης Πρόσθεσης Ομώνυμων Κλασμάτων –Ομάδα Ελέγχου, Πρώτη Χορήγηση – παρουσιάζεται περιοχή έργων μετάφρασης οι οποία αποτελείται στην πλειοψηφία τους από έργα μετάφρασης από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση – a2aop, a5aop, a8aop, a6bop – καθώς και περιοχή έργων μετάφρασης η οποία αποτελείται από έργα μετάφρασης από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή –a3bop, a9bop.



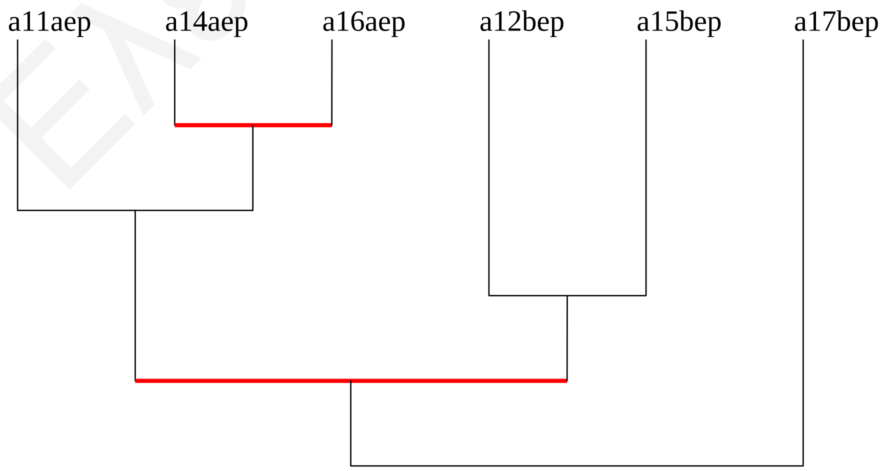
Διάγραμμα 23. Διάγραμμα Ομοιότητας Έργων Μετάφρασης που Εξετάζουν την Πρόσθεση Ομώνυμων Κλασμάτων – Ομάδα Ελέγχου, Πρώτη Χορήγηση.

Στο Διάγραμμα 24, Διάγραμμα Ομοιότητας Έργων Μετάφρασης που Εξετάζουν την Πρόσθεση Ομώνυμων Κλασμάτων –Πειραματική Ομάδα, Πρώτη Χορήγηση – φάνηκε ότι τα έργα δεν έχουν στεγανοποιηθεί αφού στο Διάγραμμα Ομοιότητας δεν παρουσιάζονται περιοχές έργων μετάφρασης οι οποίες να αποτελούνται αποκλειστικά από έργα μετάφρασης από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή και αντίστροφα.



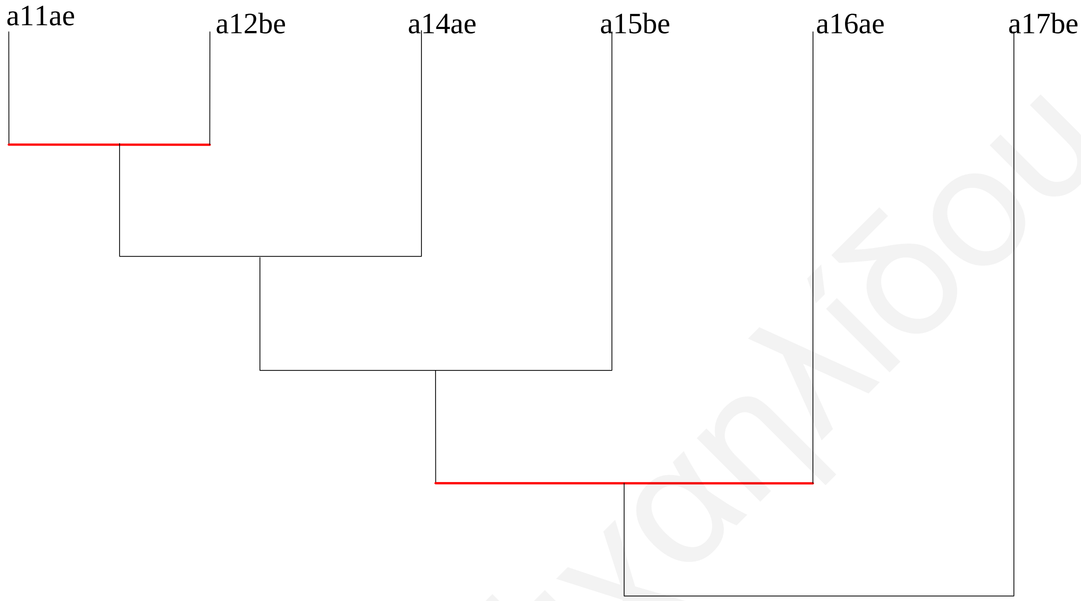
Διάγραμμα 24. Διάγραμμα Ομοιότητας των Έργων Μετάφρασης που Εξετάζουν την Πρόσθεση Ομώνυμων Κλασμάτων – Πειραματική Ομάδα, Πρώτη Χορήγηση.

Όσον αφορά στα έργα μετάφρασης που εξέταζαν την πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων φάνηκε ότι υπήρχε στεγανοποίηση για την ομάδα ελέγχου. Συγκεκριμένα, με βάση το Διάγραμμα 25, Διάγραμμα Ομαδοποίησης Έργων Μετάφρασης Πρόσθεσης Ετερώνυμων Κλασμάτων – Ομάδα Ελέγχου, Πρώτη Χορήγηση – παρουσιάζεται περιοχή έργων μετάφρασης οι οποία αποτελείται στην πλειοψηφία τους από έργα μετάφρασης από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση – a11aep, a14aep, a16aep –καθώς και περιοχή έργων μετάφρασης η οποία αποτελείται από έργα μετάφρασης από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή –a12bep, a15bep, a17bep.



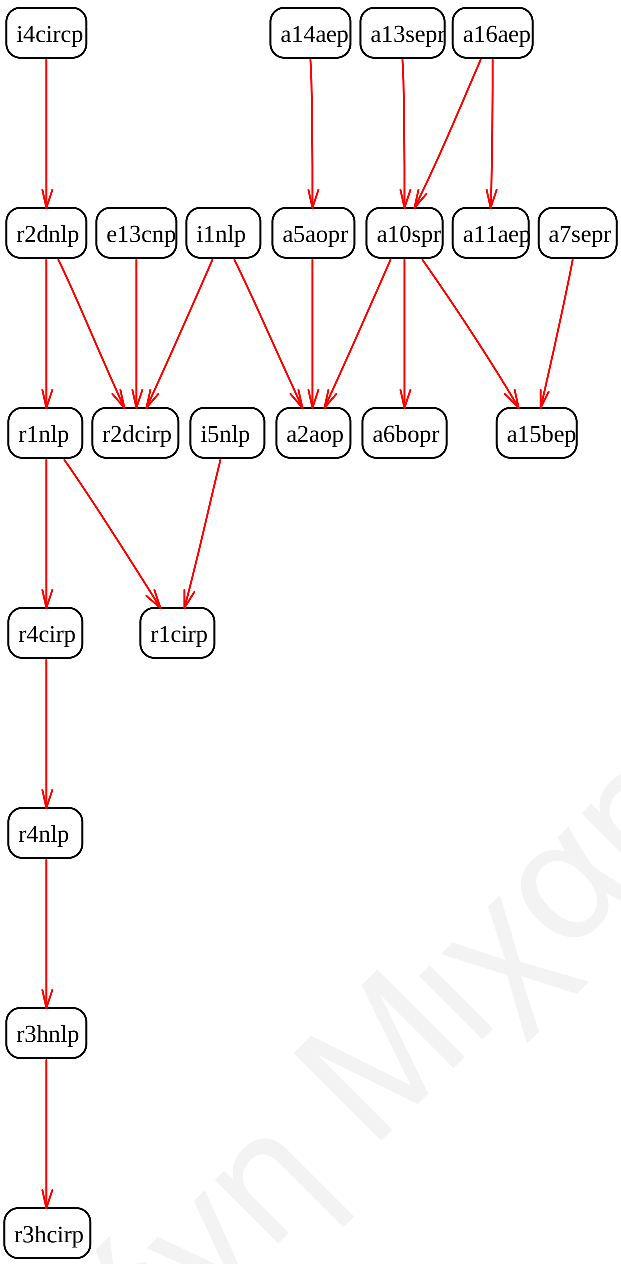
Διάγραμμα 25. Διάγραμμα Ομοιότητας Έργων Μετάφρασης που Εξετάζουν την Πρόσθεση Ετερώνυμων Κλασμάτων – Ομάδα Ελέγχου, Πρώτη Χορήγηση.

Με βάση το Διάγραμμα 26, Διάγραμμα Ομοιότητας Έργων Μετάφρασης που εξετάζουν την Πρόσθεση Ετερώνυμων κλασμάτων –Πειραματική Ομάδα, Πρώτη Χορήγηση – φάνηκε ότι τα έργα δεν έχουν στεγανοποιηθεί αφού στο Διάγραμμα Ομοιότητας δεν παρουσιάζονται περιοχές έργων μετάφρασης οι οποίες να αποτελούνται αποκλειστικά από έργα μετάφρασης από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή και αντίστροφα



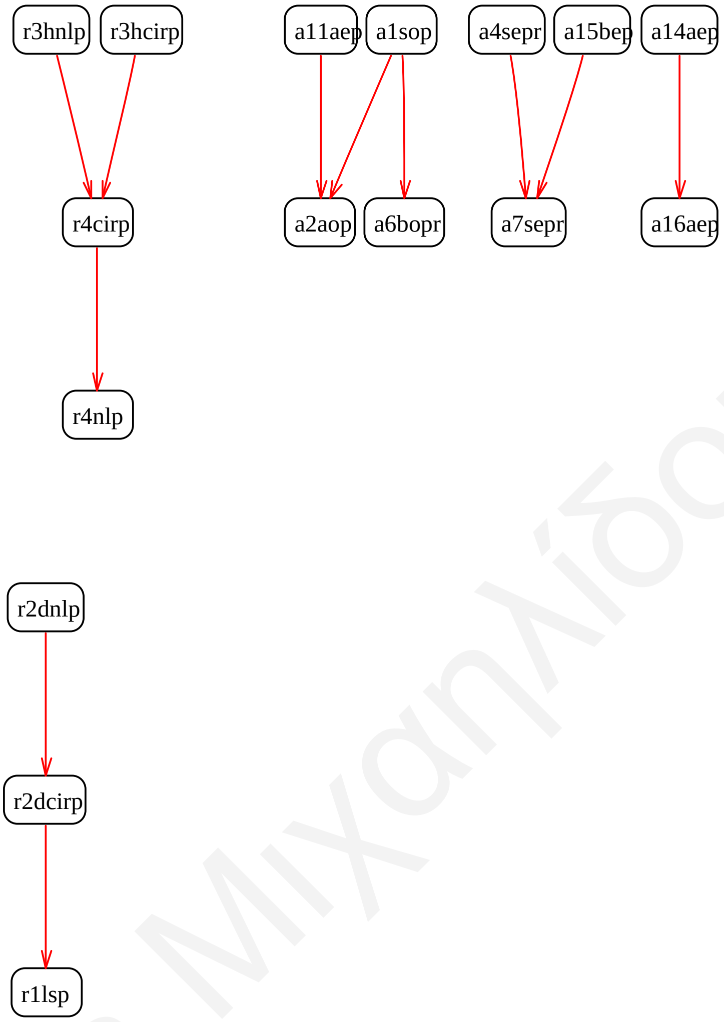
Διάγραμμα 26. Διάγραμμα Ομοιότητας Έργων Μετάφρασης που Εξετάζουν την Πρόσθεση Ετερώνυμων Κλασμάτων – Πειραματική Ομάδα, Πρώτη Χορήγηση.

Στο Διάγραμμα 27, Γενικό Συνεπαγωγικό Διάγραμμα Έργων των Δοκιμίων Α, Β και Γ – Ομάδα Ελέγχου, Πρώτη Χορήγηση – φάνηκε ότι δεν υπάρχουν αρκετές συνδέσεις ανάμεσα στα έργα των τριών δοκιμίων. Οι περισσότερες συνδέσεις παρουσιάζονται ανάμεσα στα έργα του ίδιου δοκιμίου – συνεπαγωγικές σχέσεις ανάμεσα στα έργα πρόσθεσης, συνεπαγωγικές σχέσεις ανάμεσα στα έργα αναγνώρισης και αναπαράστασης.



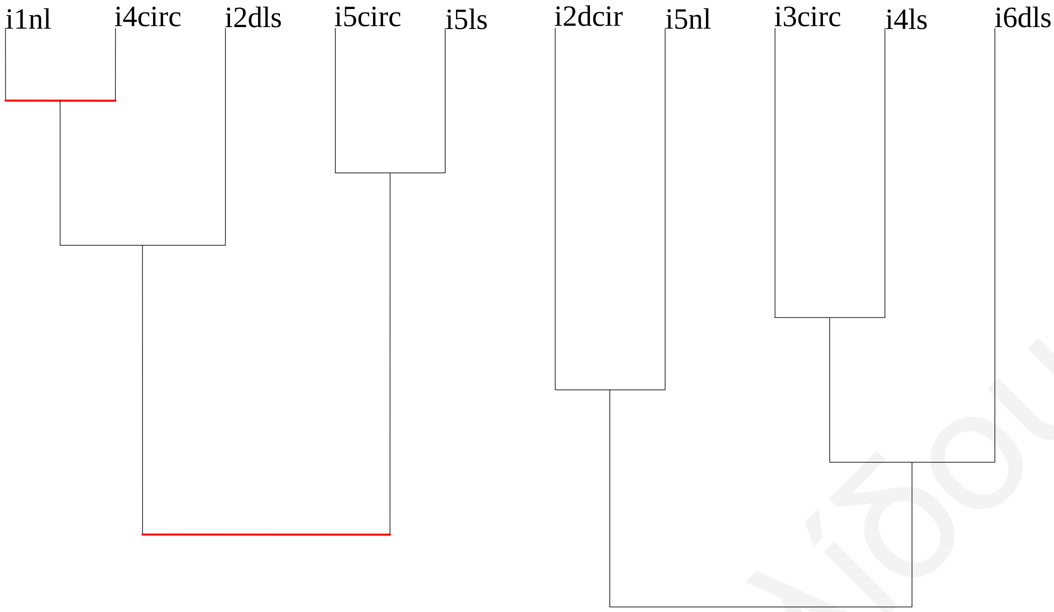
Διάγραμμα 27. Γενικό Συνεπαγωγικό Διάγραμμα Έργων των Δοκιμίων Α, Β και Γ – Ομάδα Ελέγχου, Πρώτη Χορήγηση

Στο Διάγραμμα 28, Γενικό Συνεπαγωγικό Διάγραμμα Έργων Δοκιμίων Α, Β και Γ – Πειραματική Ομάδα, Πρώτη Χορήγηση – φάνηκε ότι δεν υπάρχουν καθόλου συνδέσεις ανάμεσα στα έργα των τριών δοκιμίων. Οι περισσότερες συνδέσεις παρουσιάζονται ανάμεσα στα έργα του ίδιου δοκιμίου – συνεπαγωγικές σχέσεις ανάμεσα στα έργα πρόσθεσης, συνεπαγωγικές σχέσεις ανάμεσα στα έργα αναπαράστασης.



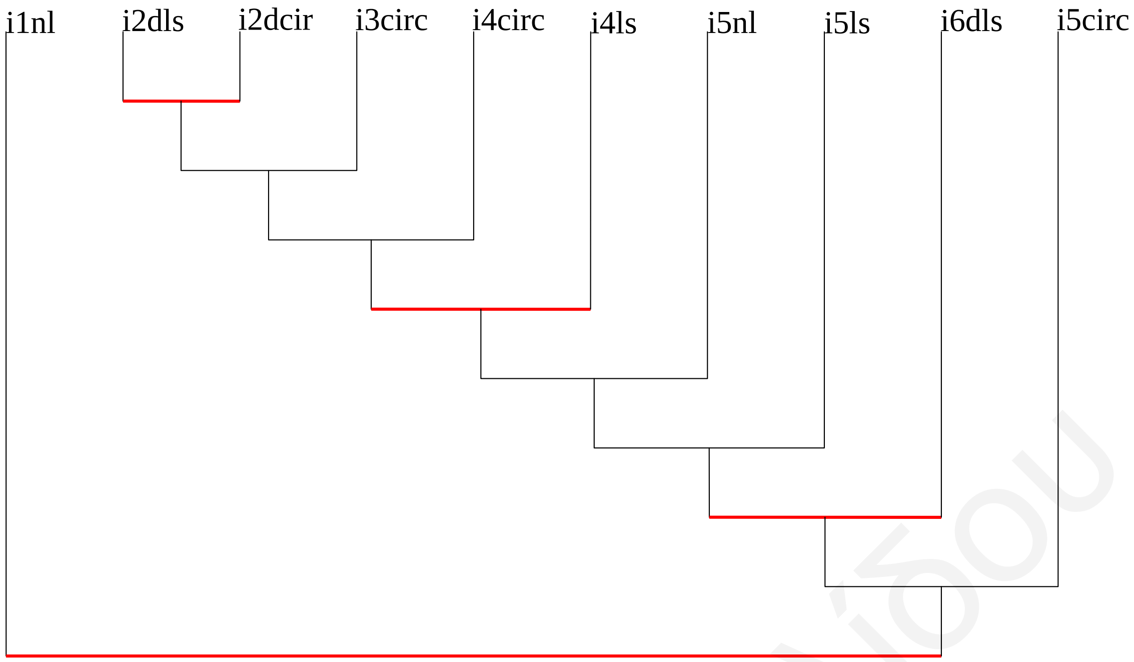
<ins>Διάγραμμα 28.</ins> Γενικό Συνεπαγωγικό Διάγραμμα Έργων των Δοκιμίων Α, Β και Γ – Πειραματική Ομάδα, Πρώτη Χορήγηση

Με βάση το Διάγραμμα 29, Διάγραμμα Ομοιότητας Έργων Αναγνώρισης της Έννοιας του Κλάσματος σε Ποικιλία Αναπαραστάσεων για την ομάδα ελέγχου – Δεύτερη Χορήγηση – φάνηκε ότι τα έργα δεν έχουν στεγανοποιηθεί, αφού στο Διάγραμμα Ομοιότητας δεν παρουσιάζονται περιοχές έργων οι οποίες να αποτελούνται αποκλειστικά από έργα αναγνώρισης της έννοιας του κλάσματος σε αριθμητική γραμμή, ευθύγραμμο τμήμα και εμβαδόν κύκλου.



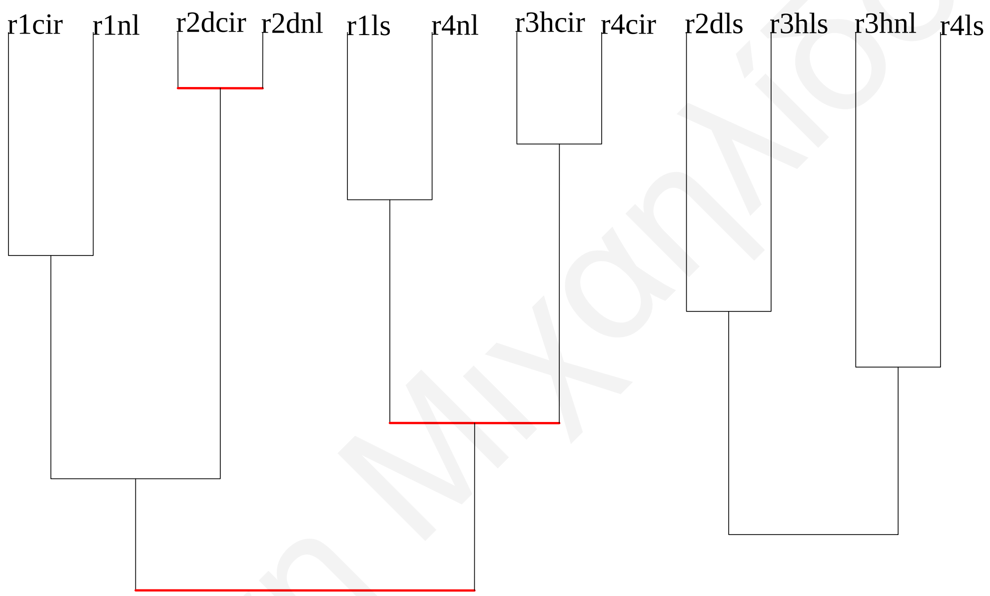
<u>Διάγραμμα 29.</u> Διάγραμμα Ομοιότητας Έργων Αναγνώρισης της Έννοιας του Κλάσματος σε Ποικιλία Αναπαραστάσεων για την ομάδα ελέγχου – Δεύτερη Χορήγηση

Με βάση το Διάγραμμα 30, Διάγραμμα Ομοιότητας Έργων Αναγνώρισης της Έννοιας του Κλάσματος σε Ποικιλία Αναπαραστάσεων για την Πειραματική ομάδα – Δεύτερη Χορήγηση – φάνηκε ότι τα έργα δεν έχουν στεγανοποιηθεί, αφού στο Διάγραμμα Ομοιότητας δεν παρουσιάζονται περιοχές έργων οι οποίες να αποτελούνται αποκλειστικά από έργα αναγνώρισης της έννοιας του κλάσματος σε αριθμητική γραμμή, ευθύγραμμο τμήμα και εμβαδόν κύκλου.



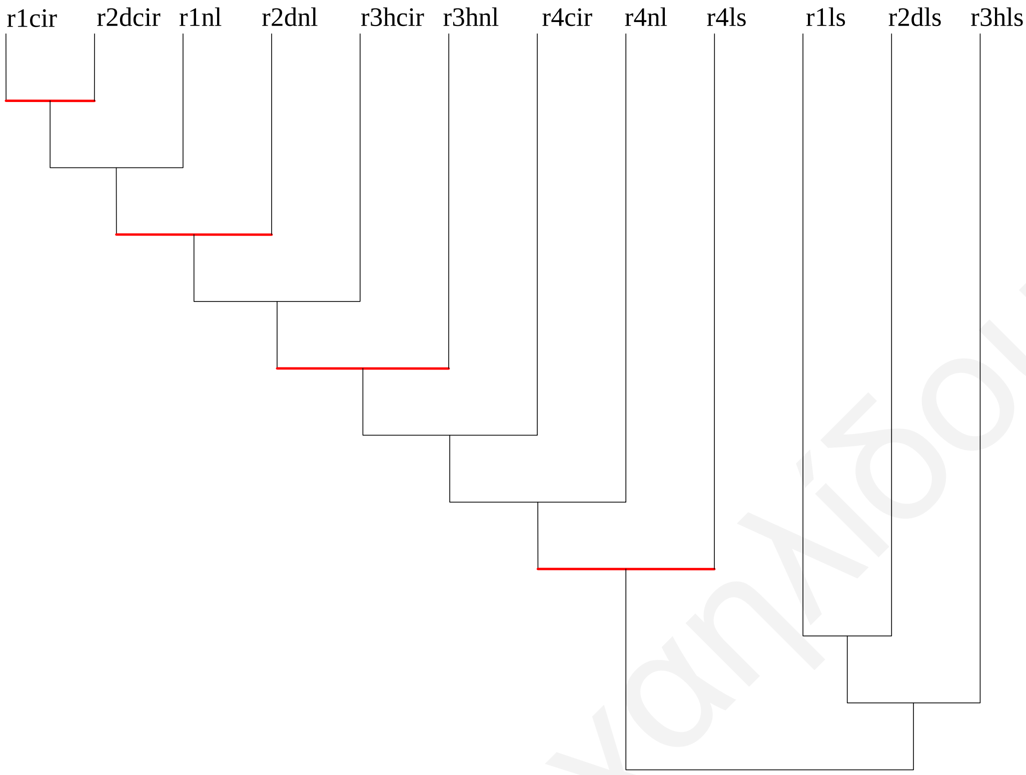
Διάγραμμα 30. Διάγραμμα Ομοιότητας Έργων που Εξετάζουν την Αναγνώριση Κλασμάτων σε ποικιλία αναπαραστάσεων για την Πειραματική Ομάδα –Δεύτερη Χορήγηση.

Στο Διάγραμμα 31 Διάγραμμα Έργων Αναπαράστασης της Έννοιας του Κλάσματος για την ομάδα ελέγχου – Δεύτερη Χορήγηση – φάνηκε ότι τα έργα έχουν στεγανοποιηθεί, αφού στο Διάγραμμα Ομοιότητας παρουσιάζονται περιοχές έργων οι οποίες αποτελούνται αποκλειστικά από έργα αναπαράστασης σε αριθμητική γραμμή, ευθύγραμμο τμήμα και εμβαδόν κύκλου. Συγκεκριμένα, παρατηρείται η δημιουργία περιοχής έργων που αποτελείται από τα έργα r2dls, r3hls, r3hnl και r4ls. Στην πλειοψηφία τους τα έργα αυτά είναι έργα που εξετάζουν την ικανότητα αναπαράστασης της έννοιας του κλάσματος σε ευθύγραμμο τμήμα –ls. Το έργο r3hnl εξετάζει την ικανότητα αναπαράστασης της έννοιας του κλάσματος σε αριθμητική γραμμή. Πρόκειται, λοιπόν, για μια περιοχή έργων τα οποία εξετάζουν την ικανότητα αναπαράστασης της έννοιας του κλάσματος σε γραμμικές αναπαραστάσεις. Το ίδιο ισχύει και για τα έργα r1ls και r4nl, αφού τα έργα αυτά εξετάζουν την ικανότητα αναπαράστασης της έννοιας του κλάσματος σε γραμμικές αναπαραστάσεις. Μια ακόμη ομάδα αποτελούν τα έργα r3hcir και r4cir τα οποία εξετάζουν την ικανότητα αναπαράστασης της έννοιας του κλάσματος σε εμβαδόν κύκλου. Τα έργα r2dcir και r2dnl ομαδοποιούνται σε ξεχωριστή ομάδα αφού εξετάζουν το ίδιο κλάσμα και η αναπαράσταση την οποία εξετάζουν υποδιαιρείται σε αριθμό διπλάσιο από τον παρονομαστή του δοσμένου κλάσματος. Τα έργα r1cir και r1nl εξέταζαν την ικανότητα αναπαράστασης του ίδιου κλάσματος στις αναπαραστάσεις εμβαδόν κύκλου και διάστημα 0 ως 1 στην αριθμητική γραμμή.



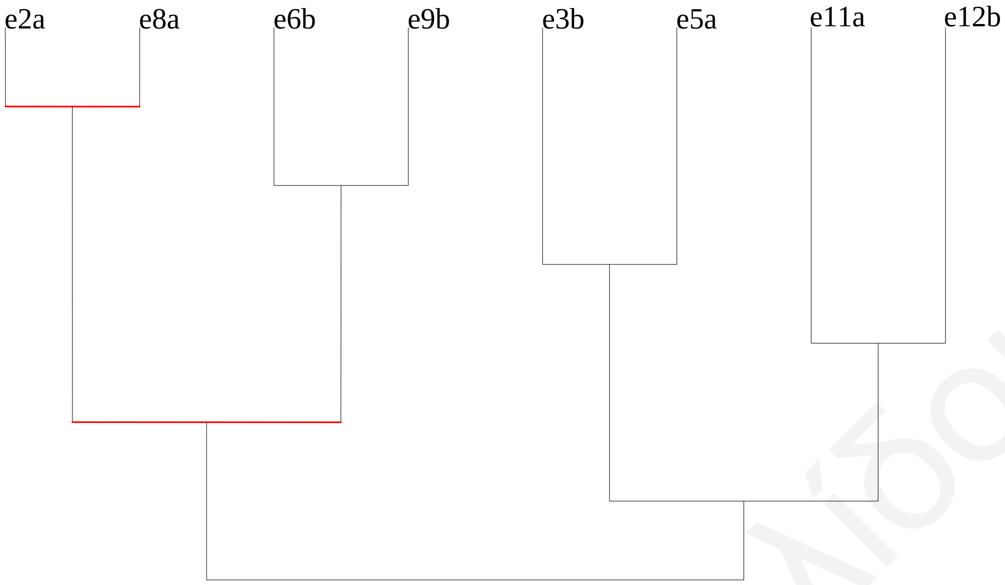
Διάγραμμα 31. Διάγραμμα Έργων Αναπαράστασης της Έννοιας του Κλάσματος για την Ομάδα Ελέγχου –Δεύτερη Χορήγηση.

Στο Διάγραμμα 32, Διάγραμμα Έργων Αναπαράστασης της Έννοιας του Κλάσματος για την Πειραματική Ομάδα –Δεύτερη Χορήγηση – φάνηκε ότι τα έργα δεν έχουν στεγανοποιηθεί με κριτήριο το είδος αναπαράστασης, αφού στο Διάγραμμα Ομοιότητας δεν παρουσιάζονται περιοχές έργων οι οποίες να αποτελούνται αποκλειστικά από έργα αναγνώρισης σε αριθμητική γραμμή, ευθύγραμμο τμήμα και εμβαδόν κύκλου, εκτός από την ομαδοποίηση των έργων r1ls, r2dls και r3hls, τα οποία εξετάζουν την ικανότητα αναπαράστασης της έννοιας του κλάσματος σε ευθύγραμμο τμήμα –ls.



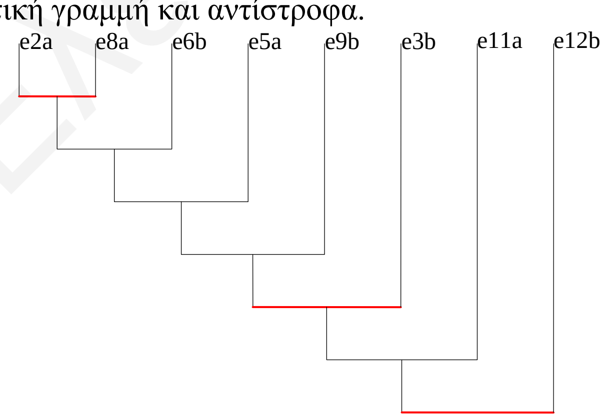
Διάγραμμα 32. Διάγραμμα Έργων Αναπαράστασης της Έννοιας του Κλάσματος στο για την Πειραματική Ομάδα –Δεύτερη Χορήγηση.

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη δεύτερη χορήγηση των δοκιμίων στα υποκείμενα της ομάδας ελέγχου έδειξαν ότι, σε αντίθεση με τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την πρώτη χορήγηση, παρατηρείται κάποια στεγανοποίηση στα έργα μετάφρασης που εξετάζουν την ισοδυναμία κλασμάτων. Συγκεκριμένα, στο Διάγραμμα 33, Διάγραμμα Έργων Μετάφρασης που Εξετάζουν την Ισοδυναμία Κλασμάτων για την Ομάδα Ελέγχου – Δεύτερη Χορήγηση – έδειξε τη δημιουργία ομάδων οι οποίες περιλαμβάνουν έργα που εξετάζουν το ίδιο είδος μετάφρασης. Ενώ δημιουργούνται δύο ομάδες, οι οποίες περιλαμβάνουν έργα μετάφρασης από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση και αντίστροφα – ομάδες με έργα e3b και e5a, καθώς και e11a και e12b – δημιουργούνται και ομάδες οι οποίες αποτελούνται αποκλειστικά από τα έργα μετάφρασης από συμβολική έκφραση σε αριθμητική γραμμή –e9b και e6b – και από έργα μετάφρασης από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση –e2a και e8a.



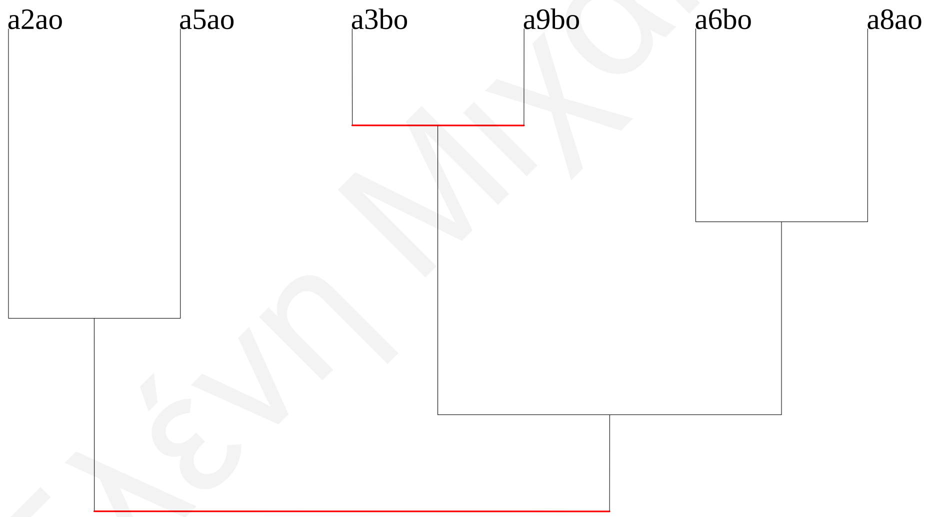
Διάγραμμα 33. Διάγραμμα Έργων Μετάφρασης που Εξετάζουν την Ισοδυναμία Κλασμάτων για την Ομάδα Ελέγχου –Δεύτερη Χορήγηση

Με βάση το Διάγραμμα 34, Διάγραμμα Ομοιότητας Έργων Μετάφρασης που εξετάζουν την ισοδυναμία κλασμάτων για την Πειραματική ομάδα – Δεύτερη Χορήγηση – φάνηκε ότι τα έργα δεν έχουν στεγανοποιηθεί αφού στο Διάγραμμα Ομοιότητας δεν παρουσιάζονται περιοχές έργων μετάφρασης οι οποίες να αποτελούνται αποκλειστικά από έργα μετάφρασης από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή και αντίστροφα.



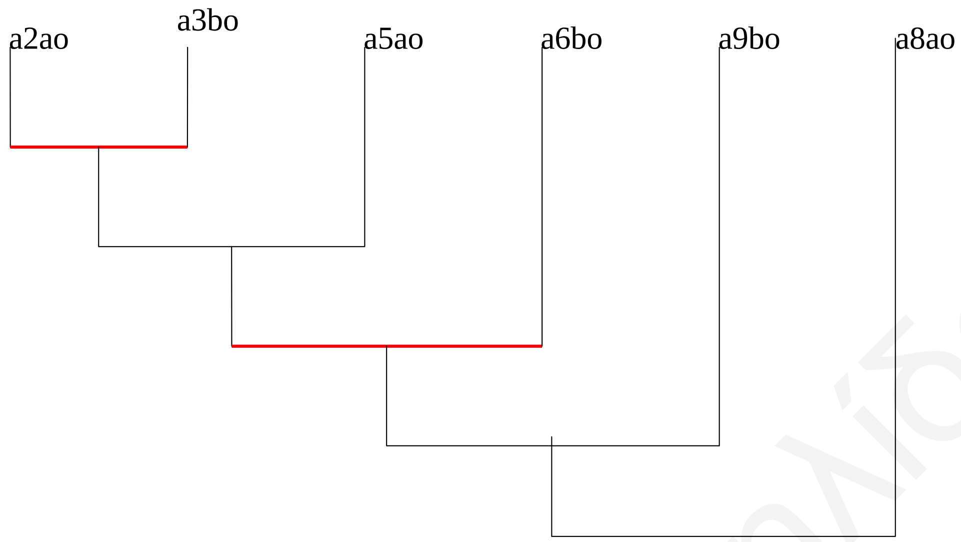
Διάγραμμα 34. Διάγραμμα Ομοιότητας Έργων Μετάφρασης που Εξετάζουν την Ισοδυναμία Κλασμάτων για την Πειραματική Ομάδα –Δεύτερη Χορήγηση.

Όπως και στην ισοδυναμία κλασμάτων, έτσι και στην πρόσθεση κλασμάτων παρατηρείται κάποια στεγανοποίηση στα έργα μετάφρασης. Συγκεκριμένα, στο Διάγραμμα 35, Διάγραμμα Έργων Μετάφρασης που Εξετάζουν την Πρόσθεση Ομώνυμων Κλασμάτων για την Ομάδα Ελέγχου –Δεύτερη Χορήγηση – έδειξε τη δημιουργία ομάδων οι οποίες περιλαμβάνουν έργα που εξετάζουν το ίδιο είδος μετάφρασης. Ενώ δημιουργείται μια ομάδα, η οποία περιλαμβάνει έργα μετάφρασης από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση και αντίστροφα –έργα a6bo και a8ao– δημιουργούνται και ομάδες οι οποίες αποτελούνται αποκλειστικά από τα έργα μετάφρασης από συμβολική έκφραση σε αριθμητική γραμμή –a3bo και a9bo – και από έργα μετάφρασης από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση –a2ao και a2ao.



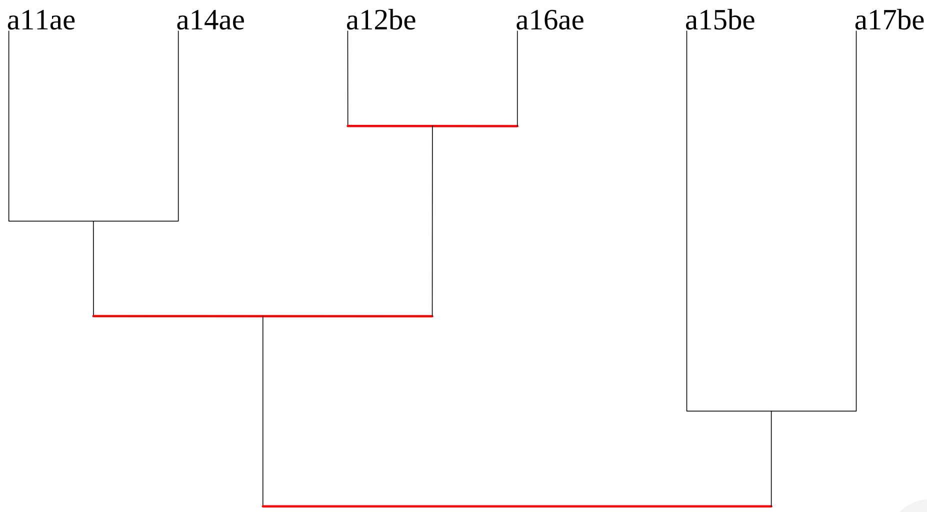
Διάγραμμα 35. Διάγραμμα Έργων Μετάφρασης που Εξετάζουν την Πρόσθεση Ομώνυμων Κλασμάτων για την Ομάδα Ελέγχου –Δεύτερη Χορήγηση

Με βάση το Διάγραμμα 36, Διάγραμμα Ομοιότητας Έργων Μετάφρασης που εξετάζουν την πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων για την πειραματική ομάδα –Δεύτερη Χορήγηση – φάνηκε ότι τα έργα δεν έχουν στεγανοποιηθεί αφού στο Διάγραμμα Ομοιότητας δεν παρουσιάζονται περιοχές έργων μετάφρασης οι οποίες να αποτελούνται αποκλειστικά από έργα μετάφρασης από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή και αντίστροφα.



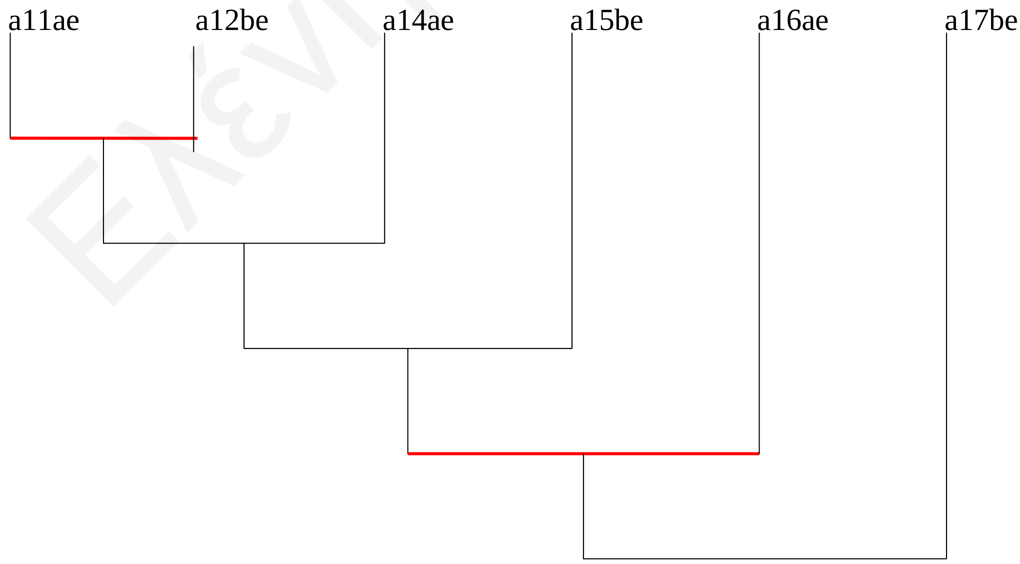
Διάγραμμα 36. Διάγραμμα Ομοιότητας Έργων Μετάφρασης που Εξετάζουν την Πρόσθεση Ομώνυμων Κλασμάτων για την Πειραματική Ομάδα –Δεύτερη Χορήγηση.

Όπως και στην πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων, έτσι και στην πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων παρατηρείται κάποια στεγανοποίηση στα έργα μετάφρασης. Συγκεκριμένα, στο Διάγραμμα 37, Διάγραμμα Έργων Μετάφρασης που Εξετάζουν την Πρόσθεση Ετερώνυμων Κλασμάτων για την Ομάδα Ελέγχου –Δεύτερη Χορήγηση – έδειξε τη δημιουργία ομάδων οι οποίες περιλαμβάνουν έργα που εξετάζουν το ίδιο είδος μετάφρασης. Ενώ δημιουργείται μια ομάδα, η οποία περιλαμβάνει έργα μετάφρασης από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση και αντίστροφα – έργα a12be και a16ae – δημιουργούνται και ομάδες οι οποίες αποτελούνται αποκλειστικά από τα έργα μετάφρασης από συμβολική έκφραση σε αριθμητική γραμμή –a15be και a17be – και από έργα μετάφρασης από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση –a11ae και a14ae.



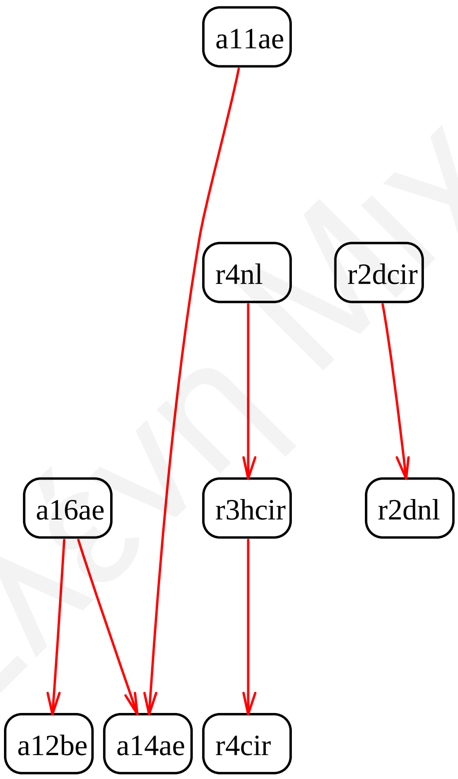
Διάγραμμα 37. Διάγραμμα Έργων Μετάφρασης που Εξετάζουν την Πρόσθεση Ετερώνυμων Κλασμάτων για την Ομάδα Ελέγχου –Δεύτερή Χορήγηση

Το Διάγραμμα 38, Διάγραμμα Ομοιότητας Έργων Μετάφρασης που εξετάζουν την πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων για την πειραματική ομάδα – Δεύτερη Χορήγηση – δείχνει ότι σε αντίθεση με τα αποτελέσματα που προέκυψαν στην πρώτη χορήγηση τα έργα δεν έχουν στεγανοποιηθεί. Στο Διάγραμμα Ομοιότητας δεν παρουσιάζονται περιοχές έργων μετάφρασης οι οποίες να αποτελούνται αποκλειστικά από έργα μετάφρασης από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή και αντίστροφα.



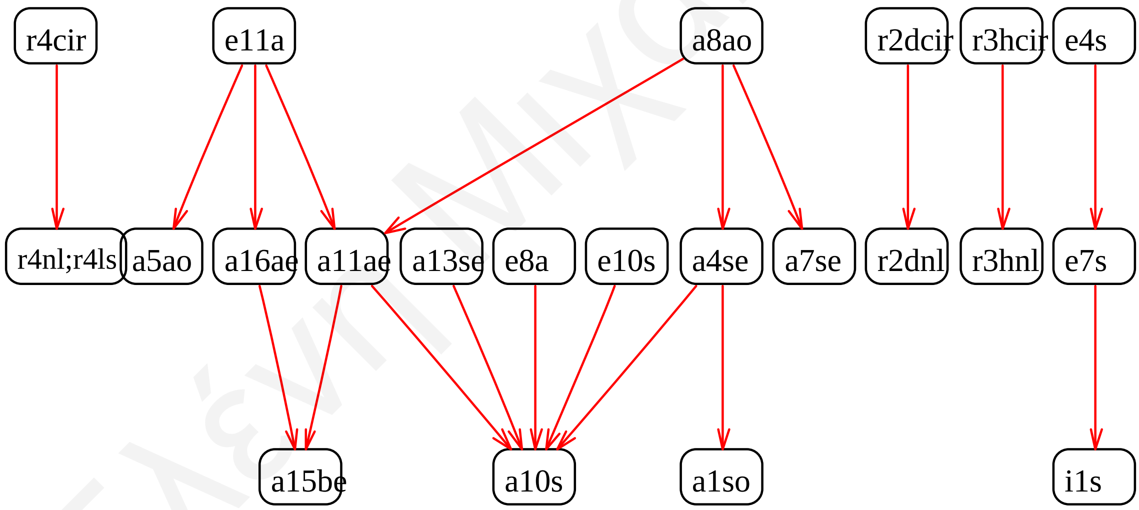
Διάγραμμα 38. Διάγραμμα Ομοιότητας Έργων Μετάφρασης που Εξετάζουν την Πρόσθεση Ετερώνυμων Κλασμάτων για την Πειραματική Ομάδα –Δεύτερη Χορήγηση.

Με βάση το Διάγραμμα 39, Γενικό Συνεπαγωγικό Διάγραμμα Έργων των Δοκιμίων Α, Β και Γ – Ομάδα Ελέγχου, Δεύτερη Χορήγηση – φάνηκε ότι και πάλι τα έργα στεγανοποιήθηκαν με βάση το γνωστικό αντικείμενο το οποίο εξέταζαν. Συγκεκριμένα, παρατηρούνται συνεπαγωγικές σχέσεις ανάμεσα στα έργα του ίδιου δοκιμίου – Δοκίμιο Γ: Έργα πρόσθεσης κλασμάτων, Δοκίμιο Α: Έργα αναπαράστασης. Σε σύγκριση με το Συνεπαγωγικό Διάγραμμα που αφορούσε τα ίδια έργα και την πρώτη χορήγηση των δοκιμίων (Διάγραμμα 31), φάνηκε ότι στο Συνεπαγωγικό Διάγραμμα που αφορά τη δεύτερη χορήγηση (Διάγραμμα 43) λιγότερα έργα συμμετέχουν στις συνεπαγωγικές αλυσίδες.



<u>Διάγραμμα 39.</u> Γενικό Συνεπαγωγικό Διάγραμμα Έργων των Δοκιμίων Α, Β και Γ –Ομάδα Ελέγχου, Δεύτερη Χορήγηση

έργα του ίδιου δοκιμίου – Δοκίμιο Γ: Έργα πρόσθεσης κλασμάτων, Δοκίμιο Α: Έργα αναπαράστασης. Ωστόσο, παρατηρούνται και συνεπαγωγικές σχέσεις ανάμεσα σε έργα που ανήκουν σε διαφορετικά δοκίμια, όπως για παράδειγμα σχέσεις ανάμεσα σε έργα ισοδυναμίας και σε έργα πρόσθεσης κλασμάτων, καθώς και σχέσεις ανάμεσα σε έργα ισοδυναμίας και σε έργα αναπαράστασης. Σε σύγκριση με το Συνεπαγωγικό Διάγραμμα (Διάγραμμα 28), που αφορούσε τα ίδια έργα και την πρώτη χορήγηση των δοκιμίων, φάνηκε ότι στο Συνεπαγωγικό Διάγραμμα που αφορά τη δεύτερη χορήγηση (Διάγραμμα 40), περισσότερα έργα συμμετέχουν στις συνεπαγωγικές αλυσίδες και παρουσιάζονται συνεπαγωγικές σχέσεις ανάμεσα σε έργα που ανήκουν σε διαφορετικά δοκίμια.



Διάγραμμα 40. Γενικό Συνεπαγωγικό Διάγραμμα Έργων των Δοκιμίων Α, Β και Γ – Ομάδα Ελέγχου, Δεύτερη Χορήγηση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η Κατανόηση της Έννοιας των Κλασμάτων

Αρκετές ερευνητικές εργασίες έχουν προσπαθήσει να προσεγγίσουν, να εξηγήσουν και να ερμηνεύσουν τον όρο «κατανόηση» με τη χρήση θεωρητικών μοντέλων. Μια τέτοια ερευνητική εργασία είναι αυτή των Lesh, Post και Behr (1987), οι οποίοι προσεγγίζουν τον όρο «κατανόηση» μέσα από την προοπτική τριών προϋποθέσεων. Σύμφωνα με αυτό το θεωρητικό μοντέλο ένα άτομο κατανοεί μια έννοια όταν αναγνωρίζει την έννοια σε ποικιλία αναπαραστάσεων, όταν χειρίζεται ευέλικτα την έννοια αυτή στο ίδιο πεδίο αναπαράστασης και τέλος όταν έχει αναπτύξει την ικανότητα μετάφρασης από τη μια αναπαράσταση της συγκεκριμένης έννοιας στην άλλη.

Εφαρμόζοντας το συγκεκριμένο θεωρητικό μοντέλο στην παρούσα ερευνητική εργασία φάνηκε ότι οι μαθητές δεν έχουν κατανοήσει πλήρως την έννοια του κλάσματος, αφού δεν πληρούν τις προϋποθέσεις του θεωρητικού μοντέλου – αναγνώριση της έννοιας του κλάσματος σε ποικιλία αναπαραστάσεων, χειρισμός της έννοιας στο ίδιο πεδίο αναπαράστασης και μετάφραση από τη μια αναπαράσταση της έννοιας του κλάσματος στην άλλη. Τα χαμηλά ποσοστά επιτυχίας στα έργα αναγνώρισης, χειρισμού της έννοιας στο ίδιο πεδίο και μετάφρασης από τη μια αναπαράσταση της έννοιας στην άλλη δείχνουν ότι οι διάφορες αναπαραστάσεις της έννοιας των κλασμάτων δεν είναι ικανοποιητικά θεμελιωμένες στα υποκείμενα, είναι τμηματικές και δε συνιστούν ενιαίο σύνολο.

Αναγνώριση της Έννοιας σε Ποικιλία Αναπαραστάσεων

Με βάση τα αποτελέσματα τα έργα αναγνώρισης της έννοιας του κλάσματος σε ποικιλία αναπαραστάσεων – έργα Δοκιμίου Α – συγκέντρωσαν χαμηλά ποσοστά επιτυχίας (Πίνακας 2). Συγκεκριμένα, τα χαμηλότερα ποσοστά συγκέντρωσαν τα έργα αναγνώρισης της έννοιας σε γραμμικές αναπαραστάσεις, όπως είναι το ευθύγραμμο τμήμα και η αριθμητική γραμμή. Τα αποτελέσματα αυτά ίσως να οφείλονται στο γεγονός ότι η διδασκαλία της έννοιας του κλάσματος έχει δώσει έμφαση στην αναγνώριση της συγκεκριμένης έννοιας με τη βοήθεια κάποιων αναπαραστάσεων, όπως είναι το εμβαδόν κύκλου ενισχύοντας την αποσπασματικότητα και τη στεγανοποίηση των γνώσεων των μαθητών όσον αφορά στην κατανόηση της έννοιας.

Οι δυσκολίες, που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην προσπάθειά τους να ερμηνεύσουν τις πληροφορίες που τους παρέχει η αριθμητική γραμμή, οφείλονται, επίσης, στο γεγονός ότι η υποέννοια του ρητού αριθμού ως μέρος-όλο, στην οποία δίνεται μεγάλη έμφαση κατά τη διάρκεια της εισαγωγής και διδασκαλίας της έννοιας του κλάσματος, είναι κυρίαρχη στη σκέψη των μαθητών. Κατά συνέπεια, οι μαθητές εκλαμβάνουν την αριθμητική γραμμή ως ένα ευθύγραμμο τμήμα, μια ολότητα, από το οποίο θα επιλέξουν ένα μέρος και όχι ως ένα συνεχές μοντέλο πάνω στο οποίο ένα σημείο δεν έχει αριθμητικό νόημα μέχρι τη στιγμή που θα καθοριστεί το νόημα δύο άλλων, τουλάχιστον, σημείων αναφοράς.

Τα αποτελέσματα αυτά συμφωνούν με τα αποτελέσματα έρευνας της Ni (2000) σύμφωνα με τα οποία οι μαθητές αντιμετώπιζαν δυσκολίες στη χρήση της αριθμητικής γραμμής ως αναπαράστασης των κλασμάτων. Η κυριότερη δυσκολία των μαθητών οφειλόταν στην αναγνώριση της μονάδας στην αριθμητική γραμμή. Το γεγονός αυτό οφείλεται στην επίδραση της υποέννοιας μέρος-όλο, η οποία συνοδεύεται από τη στρατηγική της διπλής μέτρησης, ως τη διαδικασία διατύπωσης κλασμάτων σε συμβολική έκφραση με βάση τη δοσμένη αναπαράσταση.

Είναι σημαντικό οι μαθητές να κατανοήσουν την ιδιότητα των κλασμάτων ως αριθμών που αντιπροσωπεύουν μια ποσότητα (Mack, 1990). Η υποέννοια μέρος-όλο σε συνδυασμό με τη συμβολική αναπαράσταση του κλάσματος δημιουργούν στους μαθητές την παρανόηση ότι ο κλασματικός αριθμός αποτελείται από δύο ανεξάρτητους αριθμούς και δεν αποτελεί μια συγκεκριμένη ποσότητα. Συγκεκριμένα, οι μαθητές χειρίζονται το κλάσμα 3/8 χρησιμοποιώντας εμβαδόν, το οποίο αναπαριστά την υποέννοια του μέρους-όλου. Ο αριθμός 3 αναπαριστά μια ποσότητα και ο αριθμός 8 αναπαριστά μια άλλη ποσότητα, η οποία δε συνδέεται με την πρώτη. Οι μαθητές, που έχουν αναπτύξει αυτή την παρανόηση, συχνά προσθέτουν τους αριθμητές και τους παρονομαστές των κλασμάτων, όταν εκτελούν προσθέσεις με κλασματικούς αριθμούς.

Πέραν από τον εντοπισμό της μονάδας, οι μαθητές δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν κλασματικούς αριθμούς στην αριθμητική γραμμή και στο ευθύγραμμο τμήμα λόγω του ότι δεν μπορούν να ερμηνεύσουν τις εικονικές και συμβολικές πληροφορίες, που παρέχουν οι συγκεκριμένες αναπαραστάσεις – διαστήματα, κατακόρυφες γραμμές, βέλη, αριθμοί. Αυτό οφείλεται κυρίως στην έμφαση που δίνει η διδασκαλία στη χρήση του εμβαδού ως αναπαράστασης των κλασματικών αριθμών σε βάρος άλλων αναπαραστάσεων, όπως είναι η αριθμητική γραμμή. Οι μαθητές που δεν μπορούν να ερμηνεύσουν τα δομικά στοιχεία της αριθμητικής γραμμής, τις εικονικές δηλαδή πληροφορίες, δεν αντιλαμβάνονται ότι πρέπει να μετρούν διαστήματα, για να εντοπίσουν τη θέση του κάθε αριθμού, αλλά εκλαμβάνουν τις κατακόρυφες διαχωριστικές γραμμές ως τους αριθμούς. Η δυσκολία, λοιπόν, χρήσης της αριθμητικής γραμμής οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στο συνδυασμό της πληροφορίας, που περιέχεται σε δυο μορφές αναπαράστασης – εικονική και συμβολική (Κολέζα, 2000).

Με βάση τα αποτελέσματα τα ψηλότερα ποσοστά στα έργα αναγνώρισης κλάσματος συγκέντρωσαν τα έργα τα οποία περιλαμβάνουν το εμβαδόν του κύκλου ως αναπαράσταση της έννοιας του κλάσματος (Πίνακας 2, Πίνακας 3). Το αποτέλεσμα αυτό είναι αναμενόμενο, λόγω της έμφασης που δίνεται στην υποέννοια μέρος-όλο τόσο κατά την εισαγωγή όσο και κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας της έννοιας του κλάσματος και την εκτεταμένη χρήση του εμβαδού κύκλου ή ορθογωνίου ως αναπαράστασης της έννοιας του κλάσματος (Sowder, 1992).

Οι μαθητές έχουν ψηλότερα ποσοστά επιτυχίας στα έργα αναπαράστασης (Πίνακας 4, Πίνακας 5). Αυτό ίσως να οφείλεται στο γεγονός ότι οι αριθμητικές γραμμές, που υπήρχαν στα έργα αναπαράστασης, περιλάμβαναν αποκλειστικά το διάστημα 0 ως 1 μέσα στο οποίο βρισκόταν ο κλασματικός αριθμός. Αντίθετα, στα έργα αναγνώρισης κλασμάτων υπήρχαν και παραπλανητικά έργα στα οποία οι αριθμητικές γραμμές περιλάμβαναν μεγαλύτερα διαστήματα από το διάστημα 0 ως 1, γεγονός που είχε ως αποτέλεσμα οι μαθητές να καταφεύγουν στη διαδικασία της διπλής μέτρησης, για να εντοπίσουν τον κλασματικό αριθμό, χωρίς να λαμβάνουν υπόψη την υποδιαίρεση της αριθμητικής γραμμής, τον αριθμό των διαστημάτων και την κλίμακα.

Όπως και στην περίπτωση των έργων αναγνώρισης έτσι και στην περίπτωση των έργων αναπαράστασης, τα χαμηλότερα ποσοστά συγκέντρωσαν τα έργα αναπαράστασης της έννοιας σε γραμμικές αναπαραστάσεις, όπως είναι το ευθύγραμμο τμήμα και η αριθμητική γραμμή. Τα αποτελέσματα αυτά ίσως να οφείλονται στο γεγονός ότι η διδασκαλία της έννοιας του κλάσματος έχει δώσει έμφαση στην αναγνώριση της συγκεκριμένης έννοιας με τη βοήθεια κάποιων αναπαραστάσεων, όπως είναι το εμβαδόν κύκλου. Με τον τρόπο αυτό ενισχύεται η αποσπασματικότητα και η στεγανοποίηση των γνώσεων των μαθητών όσον αφορά στην κατανόηση της έννοιας.

Οι δυσκολίες, που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην προσπάθειά τους να αναπαραστήσουν κλάσματα στην αριθμητική γραμμή, οφείλονται στο γεγονός ότι η υποέννοια του ρητού αριθμού ως μέρος-όλο, στην οποία δίνεται μεγάλη έμφαση κατά τη διάρκεια της εισαγωγής και διδασκαλίας της έννοιας του κλάσματος, είναι κυρίαρχη στη σκέψη των μαθητών. Κατά συνέπεια, οι μαθητές εκλαμβάνουν την αριθμητική γραμμή ως ένα ευθύγραμμο τμήμα, μια ολότητα, από το οποίο θα επιλέξουν ένα μέρος και όχι ως ένα συνεχές μοντέλο πάνω στο οποίο ένα σημείο δεν έχει αριθμητικό νόημα μέχρι τη στιγμή που θα καθοριστεί το νόημα δύο άλλων, τουλάχιστον, σημείων αναφοράς.

Ικανότητα Ευέλικτου Χειρισμού της Έννοιας του Κλάσματος σεΈνα Πεδίο Αναπαράστασης

Αναφορικά με τον ευέλικτο χειρισμό της έννοιας του κλάσματος σε ένα είδος αναπαράστασης, τα ψηλότερα ποσοστά συγκέντρωσαν τα έργα τα οποία εξέταζαν την πρόσθεση κλασμάτων αποκλειστικά στο συμβολικό πεδίο (Πίνακας 6). Τα ψηλά ποσοστά επιτυχίας των μαθητών στα έργα πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων και στην εύρεση ισοδύναμων κλασμάτων στο συμβολικό πεδίο ίσως να οφείλονται στην έμφαση της διδασκαλίας στην αλγοριθμική προσέγγιση της πρόσθεσης κλασμάτων σε βάρος των άλλων ειδών αναπαράστασης. Έρευνες που εξετάζουν τα είδη αναπαράστασης των κλασμάτων και τη σειρά παρουσίασής τους στους μαθητές, κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας, έχουν καταλήξει στο συμπέρασμα ότι οι δυσκολίες, που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση της έννοιας του κλάσματος και στις πράξεις κλασμάτων, οφείλονται σε μεγάλο βαθμό στην πρόωρη χρήση συμβολικών αναπαραστάσεων – σύμβολο κλάσματος, αλγόριθμοι – καθώς και στην έμφαση στην υποέννοια μέρος - όλο. Οι δυσκολίες αυτές γίνονται εντονότερες λόγω της επίδρασης προηγούμενων γνώσεων, όπως είναι η έννοια των φυσικών αριθμών και οι πράξεις με φυσικούς αριθμούς (Jooste, 1999: Karmiloff – Smith, 1992: Luhkele, et al., 1999: Murray, et al., 1999: Newstead, & Murray, 1998: Ni, 2000: Saenz – Ludlow, 1995: Tirosh, 2000: van Niekerk, et al., 1999). Η επίδραση που έχει η αλγοριθμική προσέγγιση και η μη ικανοποιητική ανάπτυξη της έννοιας της μονάδας, καθώς και οι ιδιότητες των φυσικών αριθμών ήταν ιδιαίτερα εμφανής στα αποτελέσματα που αφορούσαν στην πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων και στην ικανότητα σειροθέτησης κλασμάτων. Τα ποσοστά επιτυχίας ήταν χαμηλά, ιδιαίτερα όταν οι μαθητές καλούνταν να προσθέσουν και να σειροθετήσουν ετερώνυμα κλάσματα. Αυτά τα είδη έργων δυσκόλεψαν τους μαθητές, αφού δεν περιλάμβαναν ομώνυμα κλάσματα. Κατά συνέπεια, οι μαθητές, που δεν είχαν απομνημονεύσει τον κανόνα πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων, δεν μετέτρεπαν τα κλάσματα προς πρόσθεση σε ομώνυμα. Τα έργα σειροθέτησης συγκέντρωσαν τα χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας, ακόμα και σε σχέση με την πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων. Αυτό ίσως να οφείλεται στο γεγονός ότι το συγκεκριμένο είδος έργου δεν περιλαμβάνει πρόσθεση ομώνυμων ή ετερώνυμων κλασμάτων, όπου οι μαθητές απομνημονεύουν κανόνες. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα οι μαθητές να μην αντιλαμβάνονται ότι για να συγκριθούν τα κλάσματα έπρεπε να γίνουν ομώνυμα, αλλά τα σειροθετούσαν είτε με βάση τον παρονομαστή είτε με βάση τον αριθμητή.

Τα έργα μετάφρασης από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή, τα οποία εξέταζαν την πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων, περιλάμβαναν το χειρισμό της έννοιας στο ίδιο πεδίο, την αριθμητική γραμμή. Συγκεκριμένα, στη διαδικασία μετάφρασης από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή, για την πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων, περιλαμβάνεται και η κατασκευή μιας τρίτης αριθμητικής γραμμής, με στόχο να αναπαρασταθούν σε αυτή τα ετερώνυμα κλάσματα, που αναπαρίστανται σε δύο άλλες αριθμητικές γραμμές. Η αναπαράσταση των δύο ομώνυμων κλασμάτων, τα οποία είναι ισοδύναμα με τα δύο προηγούμενα κλάσματα, γίνεται αφού βρεθεί ο κατάλληλος αριθμός υποδιαιρέσεων για την τρίτη αριθμητική γραμμή, έτσι ώστε να μπορούν να αναπαρασταθούν σε αυτή τα νέα κλάσματα που είναι ισοδύναμα με τα προηγούμενα. Η διαδικασία αυτή, παρόλο που αποτελεί μετάφραση από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή, περιλαμβάνει το χειρισμό της έννοιας του κλάσματος στο ίδιο πεδίο, δηλαδή την αριθμητική γραμμή. Τα συγκεκριμένα έργα, σε αντίθεση με τα έργα που εξέταζαν την έννοια του κλάσματος αποκλειστικά στο συμβολικό πεδίο, συγκέντρωσαν χαμηλά ποσοστά επιτυχίας, λόγω του μεγάλου νοητικού φόρτου που απαιτούσε η επίλυσή τους. Με βάση το αποτέλεσμα αυτό, φάνηκε ότι οι μαθητές πέραν από την περίπτωση του χειρισμού της έννοιας αποκλειστικά στο συμβολικό πεδίο, αντιμετωπίζουν δυσκολίες χειρισμού της έννοιας στο ίδιο πεδίο, όταν η αναπαράσταση δεν είναι η συμβολική.

Ικανότητα Μετάφρασης από τη μια Αναπαράσταση της Έννοιας του Κλάσματος στην Άλλη

Με βάση τα αποτελέσματα φάνηκε ότι τα ποσοστά επιτυχίας στα έργα μετάφρασης, που εξέταζαν την ισοδυναμία καθώς και την πρόσθεση ομώνυμων και ετερώνυμων κλασμάτων, ήταν χαμηλά (Πίνακας 7, Πίνακας 8, Πίνακας 9).

Οι δυσκολίες, που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε σχέση με τα διαφορετικά είδη μετάφρασης, ίσως να οφείλονται στο γεγονός ότι δεν είναι εύκολο να οριστεί μια «σημασιολογική συμφωνία» μεταξύ δύο αναπαραστάσεων (Duval, 1993: Duval, 1997). Αυτό οφείλεται σε θεωρητικούς λόγους, αφού κάθε είδος αναπαράστασης δεν είναι ισοδύναμο με ένα άλλο είδος αναπαράστασης, αλλά οι διάφορες αναπαραστάσεις είναι συμπληρωματικές ως προς την έννοια που αναπαριστούν. Τα διαφορετικά είδη μετάφρασης απαιτούν διαφορετικές διαδικασίες. Η σημασιολογική ασυμφωνία αποτελεί παράγοντα, ο οποίος πιθανόν να συμβάλλει στη διαφοροποίηση των ποσοστών επιτυχίας στα διαφορετικά είδη μετάφρασης.

Η διαδικασία μετάφρασης μπορεί να βοηθήσει τον εκπαιδευτικό να εντοπίσει τις μαθησιακές δυσκολίες κάποιου μαθητή. Στην παρούσα ερευνητική εργασία και συγκεκριμένα στα Δοκίμια Β και Γ και στις συνεντεύξεις τα έργα μετάφρασης από το ένα είδος αναπαράστασης των κλασματικών αριθμών στο άλλο – συμβολική έκφραση, αριθμητική γραμμή, λεκτική έκφραση – μπορεί να συγκέντρωσαν χαμηλά ποσοστά επιτυχίας, αλλά συνέβαλαν ώστε να εντοπιστούν μαθησιακές δυσκολίες και παρανοήσεις των μαθητών σχετικά με τους κλασματικούς αριθμούς. Συγκεκριμένα, οι μεταφράσεις που είχαν ως στόχο την αριθμητική γραμμή – μεταφράσεις από τη λεκτική έκφραση στην αριθμητική γραμμή και μεταφράσεις από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή – έδειξαν την επίδραση που είχε η υποέννοια μέρος – όλο στην κατανόηση των ρητών αριθμών, την αδυναμία στην εύρεση της μονάδας υποδιαίρεσης, τη στρατηγική της διπλής μέτρησης και τη θεώρηση του αριθμητή και του παρονομαστή ως δύο ξεχωριστών ποσοτήτων που δε σχετίζονται μεταξύ τους και την αδυναμία ερμηνείας των δομικών χαρακτηριστικών της αριθμητικής γραμμής. Επίσης, οι μεταφράσεις με στόχο τη λεκτική έκφραση – μετάφραση από τη συμβολική έκφραση στη λεκτική έκφραση και μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη λεκτική έκφραση – έδειξαν ότι οι μαθητές δεν έχουν αναπτύξει πλήρως την έννοια της ισοδυναμίας κλασμάτων. Φάνηκε ότι δεν έχουν αναπτύξει την έννοια του μερισμού και την ικανότητα εύρεσης της μονάδας υποδιαίρεσης, γι' αυτό και δεν κατανοούν ότι μεγαλύτερος παρονομαστής συνεπάγεται περισσότερα κομμάτια, αλλά μικρότερα σε σχέση με την περίπτωση ενός μικρότερου παρονομαστή, ο οποίος συνεπάγεται λιγότερα κομμάτια, αλλά μεγαλύτερα. Έχει φανεί ότι η πολλαπλασιαστική σχέση στην ισοδυναμία κλασμάτων δεν έχει πλήρως οικοδομηθεί στους μαθητές, γι' αυτό και ένα συχνό λάθος, που παρουσιάζεται τόσο στις συνεντεύξεις όσο και στα έργα του Δοκιμίου Β, αφορά στο ότι οι μαθητές ονομάζουν ένα κλάσμα ως πολλαπλάσιο ενός δοσμένου κλάσματος – διπλάσιο ή τριπλάσιο – και όχι ως ισοδύναμο με ένα δοσμένο κλάσμα. Ο εντοπισμός των δυσκολιών των μαθητών αναφορικά με την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος μέσα από τα έργα μετάφρασης φάνηκε και στα αποτελέσματα έρευνας των Lesh, Post και Behr (1987), καθώς και στα αποτελέσματα της έρευνας της Ni

(2000) στα πλαίσια της οποίας τα έργα μετάφρασης περιλάμβαναν αριθμητικές γραμμές.

Η διαδικασία μετάφρασης από μια αναπαράσταση μιας μαθηματικής έννοιας σε άλλη είναι πολύ σημαντική δεξιότητα η οποία, με βάση τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας, δε φαίνεται να καλλιεργείται κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας κλασμάτων. Φαίνεται να γίνεται μια αποσπασματική προσέγγιση των διαφορετικών αναπαραστάσεων, χωρίς να δίνεται έμφαση στη μετάφραση από τη μια αναπαράσταση στην άλλη. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να ταυτίσουν μια έννοια με κάποιες μορφές αναπαράστασης – στην περίπτωση της παρούσας έρευνας οι μαθητές έχουν ταυτίσει την έννοια του κλάσματος με την υποέννοια μέρος-όλο, τη συμβολική αναπαράσταση και την αναπαράσταση του εμβαδού – γεγονός που καθιστά τη διαδικασία μετάβασης σε άλλες μορφές αναπαράστασης πολύ δύσκολη. Η έμφαση της διδασκαλίας στην υποέννοια μέρος – όλο και σε μεμονωμένες αναπαραστάσεις, όπως η συμβολική αναπαράσταση και το εμβαδόν φάνηκε και στα αποτελέσματα ερευνών σύμφωνα με τις οποίες η έμφαση της διδασκαλίας στην υποέννοια μέρος-όλο επηρεάζει την κατανόηση των υπόλοιπων υποεννοιών και αναπαραστάσεων του κλάσματος, εμποδίζοντας την οικοδόμηση μιας πλήρους γνωστικής δομής αναφορικά με την έννοια του κλάσματος (Mack, 1990: Tirosh et al. 1996).

Η έμφαση της διδασκαλίας στα δύο αυτά είδη τα έχει καταστήσει ως πρωτότυπες αναπαραστάσεις για την έννοια του κλάσματος, οι οποίες και αποτελούν τη βάση της κατανόησης των μαθητών αναφορικά με την έννοια του κλάσματος. Σύμφωνα με τους Schwarz και Hershkowitz (1999) τα πρωτότυπα είναι αναπαραστάσεις οι οποίες συνδυάζουν ένα σύνολο από χαρακτηριστικά που έχουν ψηλό βαθμό συσχέτισης με μια έννοια, κάτι το οποίο τις καθιστά ως βάση για την κατανόηση της έννοιας. Επιπλέον, οι αναπαραστάσεις αυτές λειτουργώντας ως πρωτότυπα αποτελούν τη βάση για τη δημιουργία ενός δικτύου στο οποίο περιλαμβάνονται και άλλες αναπαραστάσεις της έννοιας. Στην προκειμένη περίπτωση, οι μαθητές προσπαθούν να κατανοήσουν την έννοια του κλάσματος, αλλά και να χρησιμοποιήσουν και να ερμηνεύσουν τις υπόλοιπες αναπαραστάσεις της έννοιας με βάση τα χαρακτηριστικά δύο πρωτότυπων αναπαραστάσεων: της συμβολικής έκφρασης και του εμβαδού. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούν την αριθμητική γραμμή ως ένα όλο – σε αντιστοιχία με το εμβαδόν κύκλου – και εφαρμόζουν ιδιότητες των ακεραίων στις πράξεις με τα κλάσματα – σε αντιστοιχία με τη συμβολική έκφραση του κλάσματος, όπου θεωρούν ότι ο αριθμητής και ο παρονομαστής δε σχετίζονται. Αρκετοί μαθητές έχουν αναπτύξει, λοιπόν, ένα αρχικό επεξηγηματικό πλαίσιο το οποίο στηρίζεται στους φυσικούς αριθμούς και με βάση το οποίο το κλάσμα είναι στην ουσία δύο ανεξάρτητοι αριθμοί –ερμηνεία του συμβόλου ως δύο ανεξάρτητων αριθμών. Επίσης, αρκετοί μαθητές έχουν αναπτύξει ένα επεξηγηματικό πλαίσιο το οποίο αναφέρεται στο κλάσμα ως μέρος μιας ακέραιης μονάδας – σχέση μέρους με όλο. Οι μαθητές δεν έχουν αναπτύξει, όμως, το επεξηγηματικό πλαίσιο με βάση το οποίο το κλάσμα αντιμετωπίζεται ως αριθμός, ο οποίος αφορά τη σχέση του αριθμητή και του παρονομαστή (Σταφυλίδου & Βοσνιάδου, 2002).

Στεγανοποίηση Έργων

Με βάση τα αποτελέσματα φάνηκε ότι τα έργα των τριών δοκιμίων Δοκίμιο Α, Δοκίμιο Β και Δοκίμιο Γ είχαν στεγανοποιηθεί τόσο με κριτήριο το είδος της αναπαράστασης και το είδος της μετάφρασης όσο και με κριτήριο το είδος έργου – γνωστικό αντικείμενο, δυσκολία έργου.

Συγκεκριμένα, με βάση την παραγοντική ανάλυση φάνηκε ότι οι μεταβλητές ομαδοποιούνται σε παράγοντες, οι οποίοι αναφέρονται σε διαφορετικά είδη αναπαράστασης της έννοιας του κλάσματος – εμβαδόν, αριθμητική γραμμή και ευθύγραμμο τμήμα. Η απουσία σύνδεσης διαφορετικών μεταβλητών και η απουσία ομαδοποίησης έργων, που περιλαμβάνουν διαφορετικό είδος αναπαράστασης σε ένα παράγοντα, αποτελεί ένδειξη της απουσίας συνδέσεων ανάμεσα στις αναπαραστάσεις, που έχουν οικοδομήσει οι μαθητές αναφορικά με την έννοια του κλάσματος και ενισχύει την άποψη ότι οι γνώσεις των μαθητών για τη συγκεκριμένη έννοια είναι αποσπασματικές και δεν συνιστούν ενιαίο σύνολο.

Επίσης, με βάση τα διαγράμματα ομοιότητας φάνηκε ότι στα έργα ισοδυναμίας και πρόσθεσης κλασμάτων δημιουργούνται ξεχωριστές περιοχές, οι οποίες περιλαμβάνουν τα έργα μετάφρασης από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή και τα έργα μετάφρασης από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση, αντίστοιχα (Διάγραμμα 7, Διάγραμμα 8, Διάγραμμα 9).

Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν τα δύο είδη μετάφρασης ως δύο διαφορετικά έργα και όχι ως δύο διαφορετικές κατευθύνσεις της ίδιας διαδικασίας. Τα αποτελέσματα αυτά συμφωνούν με αποτελέσματα έρευνας (Janvier, 1987) σύμφωνα με την οποία μια διαδικασία μετάφρασης περιλαμβάνει δύο είδη αναπαράστασης, την *πηγή* (αρχική αναπαράσταση) και το *στόχο* (τελική αναπαράσταση). Για να είναι επιτυχημένη μια μετάφραση πρέπει η πηγή να μετατραπεί με βάση το στόχο. Η διαπίστωση αυτή έχει κάποιες συνέπειες για τη διδασκαλία και τονίζει τη σπουδαιότητα της διδασκαλίας και των δύο ειδών μετάφρασης, αφού σύμφωνα με ερευνητικά αποτελέσματα (Janvier, 1987) η διαδικασία μετάφρασης αναπτύσσεται αποτελεσματικότερα, όταν δίνεται έμφαση στο πέρασμα από τη μια αναπαράσταση στην άλλη και προς τις δύο κατευθύνσεις.

Η στεγανοποίηση των έργων δεν αφορούσε αποκλειστικά στο είδος αναπαράστασης και στο είδος μετάφρασης, αλλά και στο είδος έργου. Με βάση το συνεπαγωγικό διάγραμμα, το οποίο περιλαμβάνει τα έργα των Δοκιμίων Α, Β και Γ παρατηρήθηκε στεγανοποίηση των έργων με βάση το είδος του έργου (Διάγραμμα 10, 11, 12). Ειδικότερα, δημιουργήθηκε μια περιοχή με έργα ισοδυναμίας κλασμάτων, μια περιοχή έργων που περιλάμβανε κατά πλειοψηφία έργα πρόσθεσης κλασμάτων, καθώς και μια περιοχή με έργα αναγνώρισης και χειρισμού κλασμάτων στο ίδιο πεδίο.

Επιπλέον η παραγοντική ανάλυση έδειξε ότι οι μεταβλητές ομαδοποιούνται σε ξεχωριστούς παράγοντες οι οποίοι αφορούν διαφορετικά γνωστικά αντικείμενα. Συγκεκριμένα, πρόεκυψε ένας παράγοντας ο οποίος αφορούσε την ισοδυναμία κλασμάτων, ένας παράγοντας ο οποίος αφορούσε την πρόσθεση κλασμάτων, ένας παράγοντας ο οποίος αφορούσε το χειρισμό της έννοιας στο ίδιο πεδίο και την τέλος ένας παράγοντας ο οποίος αφορούσε την αναγνώριση της έννοιας.

Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ότι οι μαθητές δεν έχουν οικοδομήσει συνδέσεις ανάμεσα στην αναγνώριση, αναπαράσταση, ισοδυναμία και πρόσθεση κλασμάτων. Η ικανότητα αναγνώρισης και η αναπαράσταση αφορούν κυρίως στην εννοιολογική γνώση των κλασμάτων, ενώ η ισοδυναμία και η πρόσθεση κλασμάτων στη διαδικαστική γνώση. Η εννοιολογική γνώση αναφέρεται στην οικοδόμηση σχέσεων ανάμεσα στις ήδη υπάρχουσες γνώσεις και αναπτύσσεται με την οικοδόμηση σχέσεων ανάμεσα στις ήδη υπάρχουσες γνώσεις και στη νέα γνώση. Η διαδικαστική γνώση αποτελείται από την τυπική γλώσσα των μαθηματικών, τους κανόνες, τους αλγόριθμους και τις διαδικασίες που χρειάζονται για να επιλυθούν μαθηματικά έργα. Η μαθηματική γνώση περιλαμβάνει σχέσεις ανάμεσα στα δύο είδη γνώσης και η σύνδεση των δύο μπορεί να συμβάλει στην οικοδόμηση ολοκληρωμένων γνωστικών δομών (Hiebert,1988: Philippou & Christou, 1994). Κατά συνέπεια, η στεγανοποίηση με βάση το είδος του έργου δείχνει ότι οι μαθητές δεν έχουν οικοδομήσει συνδέσεις ανάμεσα στην εννοιολογική και τη διαδικαστική γνώση κάτι το οποίο καταδεικνύει την αποσπασματικότητα των γνώσεων των μαθητών αναφορικά με την έννοια του κλάσματος. Μάλιστα προέκυψε ότι δεν υπάρχουν συνδέσεις ανάμεσα στην ισοδυναμία κλασμάτων και στην πρόσθεση κλασμάτων – παραγοντική ανάλυση, Διάγραμμα 10, Διάγραμμα 12 – αν και η ισοδυναμία αποτελεί προϋπόθεση για την κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων.

Διαφοροποίηση της Επίδοσης Ανάλογα με το Είδος Μετάφρασης

Με βάση τα αποτελέσματα, που προέκυψαν από το Δοκίμιο Β – Ισοδυναμία Κλασμάτων, η επίδοση των μαθητών ήταν χαμηλότερη στα έργα που περιλάμβαναν τη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική αναπαράσταση σε σύγκριση με την επίδοση των μαθητών στα έργα μετάφρασης από τη συμβολική αναπαράσταση στην αριθμητική γραμμή (Διάγραμμα 9).

Αναφορικά με τα αποτελέσματα, που προέκυψαν από το Δοκίμιο Γ – Πρόσθεση Κλασμάτων η επίδοση των μαθητών ήταν ψηλότερη στα έργα πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων που περιλάμβαναν τη μετάφραση από τη συμβολική αναπαράσταση στην αριθμητική γραμμή σε σύγκριση με τα έργα πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων που εξέταζαν τη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση (Διάγραμμα 14).

Αναφορικά με την πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων η επίδοση των μαθητών στα δύο είδη μετάφρασης κυμαίνεται στα ίδια επίπεδα (Διάγραμμα 15).

Η διαφοροποίηση των ποσοστών επιτυχίας των μαθητών στα δύο αυτά είδη μετάφρασης – στο Δοκίμιο Β και στο Δοκίμιο Γ – δείχνει ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν τα δύο είδη μετάφρασης ως δύο διαφορετικά έργα και όχι ως δύο διαφορετικές κατευθύνσεις της ίδιας διαδικασίας. Η διαπίστωση αυτή έχει κάποιες συνέπειες για τη διδασκαλία τονίζοντας τη σπουδαιότητα της διδασκαλίας και των δύο ειδών μετάφρασης, αφού σύμφωνα με ερευνητικά αποτελέσματα (Janvier, 1987) η διαδικασία μετάφρασης αναπτύσσεται αποτελεσματικότερα, όταν δίνεται έμφαση στο πέρασμα από τη μια αναπαράσταση στην άλλη και προς τις δύο κατευθύνσεις.

Με βάση τα ποσοτικά και τα ποιοτικά δεδομένα που αφορούν στην ικανότητα μετάφρασης των μαθητών μπορεί να γίνει μια ομαδοποίηση των μαθητών, η οποία να παρουσιάζει την ανάπτυξη της ικανότητας μετάφρασης στο κάθε γνωστικό αντικείμενο εξελικτικά.

Ομαδοποίηση Μαθητών με Βάση την Ικανότητα Μετάφρασης

Με βάση τα αποτελέσματα, που προέκυψαν από την ανάλυση τόσο των ποσοτικών όσο και των ποιοτικών δεδομένων, φάνηκε ότι οι μαθητές μπορούν να ενταχθούν σε κατηγορίες – στάδια ανάλογα με την ικανότητα μετάφρασης από τη μια αναπαράσταση των εννοιών της ισοδυναμίας και της πρόσθεσης κλασμάτων στην άλλη.

<u>Ισοδυναμία Κλασμάτων</u>

Στάδιο 1. Οι μαθητές που ανήκουν στο στάδιο αυτό δεν έχουν την ικανότητα να μεταφράσουν από το ένα πεδίο αναπαράστασης της έννοιας της ισοδυναμίας κλασμάτων στο άλλο. Αυτό συμβαίνει, διότι δεν είναι εξοικειωμένοι με τη χρήση του μοντέλου της αριθμητικής γραμμής και δεν μπορούν να ερμηνεύσουν κάποια βασικά δομικά στοιχεία της αριθμητικής γραμμής, όπως τα διαστήματα, τις κατακόρυφες διαχωριστικές γραμμές και την κλίμακα της γραμμής. Επίσης, φάνηκε ότι δεν έχουν οικοδομήσει την έννοια της μονάδας, αφού χειρίζονται την αριθμητική γραμμή ως μια ολότητα, την ταυτίζουν με το ευθύγραμμο τμήμα και καταφεύγουν στη στρατηγική της διπλής μέτρησης, ακόμη και στις περιπτώσεις που η αριθμητική γραμμή περιλαμβάνει διαστήματα μεγαλύτερα από το διάστημα 0 ως 1.

Στάδιο 2. Οι μαθητές που περιλαμβάνονται σε αυτό το στάδιο χαρακτηρίζονται από την ικανότητα μετάφρασης από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή. Με τη βοήθεια της οπτικοποίησης, που παρέχει η αριθμητική γραμμή, μπορούν να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι τα δύο κλάσματα, που έχουν αναπαραστήσει στις αριθμητικές γραμμές, είναι ισοδύναμα, αν και αρκετές φορές χειρίζονται την αριθμητική γραμμή ως μια ολότητα, ως ένα ευθύγραμμο τμήμα επηρεαζόμενοι από την υποέννοια μέρος – όλο και συγκεκριμένα θεωρούν τα βέλη στις άκρες της αριθμητικής γραμμής ως ενδείξεις της αρχής και του τέλους του ευθύγραμμου τμήματος. Η χρήση της αριθμητικής γραμμής ως ευθύγραμμου τμήματος βοήθησε τους μαθητές με την έννοια ότι δεν ταύτιζαν τους κατακόρυφους διαχωρισμούς, που κατασκεύαζαν, με τους αριθμούς με αποτέλεσμα να λαμβάνουν υπόψη τους τα διαστήματα. Αντίθετα, στη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση οι μαθητές παρατηρώντας ότι οι αριθμοί 0 και 1 ήταν τοποθετημένοι κάτω από τους κατακόρυφους διαχωρισμούς θεωρούσαν ότι οι κατακόρυφοι διαχωρισμοί είναι οι αριθμοί και δεν λάμβαναν υπόψη τα διαστήματα και τις αποστάσεις από το 0. Επίσης, δυσκολεύονταν να τοποθετήσουν τους αριθμούς του προβλήματος ανάμεσα στο διάστημα 0 ως 1, γιατί τους θεωρούσαν ακέραιους, μεγαλύτερους της μονάδας. Τέλος, υπήρξαν μαθητές οι οποίοι κατά τη μέτρηση των διαστημάτων λάμβαναν υπόψη τους και τα διαστήματα που είχαν προηγηθεί του αριθμού 0. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να δυσκολεύονται περισσότερο στη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση, σε σχέση με τη μετάφραση από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή. Το γεγονός ότι οι μαθητές δεν έχουν πλήρως αναπτύξει την έννοια της μονάδας φάνηκε από τις δυσκολίες που αντιμετώπιζαν σε έργα μετάφρασης από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή, αφού χειρίζονταν την αριθμητική γραμμή ως μια ολότητα, την ταύτιζαν με το ευθύγραμμο τμήμα και κατάφευγαν στη στρατηγική της διπλής μέτρησης, ακόμη και στις περιπτώσεις που η αριθμητική γραμμή περιλάμβανε διαστήματα μεγαλύτερα από το διάστημα 0 ως 1.

Οι μαθητές αυτοί, όμως, αντιμετωπίζουν δυσκολίες και σε άλλα είδη μετάφρασης. Συγκεκριμένα, αντιμετωπίζουν δυσκολίες στη μετάφραση από τη λεκτική έκφραση στην αριθμητική γραμμή, αφού δεν μπορούν να αναπαραστήσουν τα δεδομένα του προβλήματος στην αριθμητική γραμμή. Σε αυτό το είδος μετάφρασης αν οι κλασματικοί αριθμοί δε δοθούν με τη συμβολική μορφή του κλάσματος, αλλά απλώς περιγραφεί η σχέση ανάμεσα στον αριθμητή και τον παρονομαστή, οι μαθητές δυσκολεύονται να τοποθετήσουν τους κλασματικούς αριθμούς, που δίνονται στο πρόβλημα, στις δύο αριθμητικές γραμμές με τέτοιο τρόπο ώστε να κατασκευάσουν τα δύο ισοδύναμα κλάσματα, αφού τους θεωρούν ως τέσσερις ξεχωριστούς ακέραιους αριθμούς. Η δυσκολία αυτή προκύπτει από τη δυσκολία εντοπισμού της μονάδας υποδιαίρεσης του κλάσματος.

Επίσης, αντιμετωπίζουν δυσκολίες στη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη λεκτική έκφραση, αφού παραλείπουν δεδομένα. Για παράδειγμα, δεν αναφέρονται στο γεγονός ότι η ποσότητα που εξετάζεται με τα ισοδύναμα κλάσματα είναι η ίδια. Επιπλέον, στην προσπάθειά τους να κατασκευάσουν ένα λεκτικό πρόβλημα αναφέρουν όλες τις πληροφορίες, χωρίς να παραλείπουν κάποια πληροφορία στην οποία να αναφέρεται η ερώτηση του λεκτικού προβλήματος.

Τέλος, όπως έχει ήδη αναφερθεί, αντιμετωπίζουν δυσκολίες στη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση, αφού δεν είναι εξοικειωμένοι με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής ως αναπαράστασης των κλασματικών αριθμών – μετρούν τις κατακόρυφες διαχωριστικές γραμμές αντί τα διαστήματα – με αποτέλεσμα σε αρκετές περιπτώσεις να καταλήγουν στην εύρεση δύο ισοδύναμων κλασμάτων τα οποία όμως δεν είναι τα ζητούμενα, αφού οι μαθητές έχουν υπολογίσει τους κατακόρυφους διαχωρισμούς και όχι τα διαστήματα. Επίσης, όπως έχει αναφερθεί, δυσκολεύονταν να τοποθετήσουν τους αριθμούς του προβλήματος ανάμεσα στο διάστημα 0 ως 1, γιατί τους θεωρούσαν ακέραιους, μεγαλύτερους της μονάδας.

Γενικά οι μαθητές που εντάσσονται στο στάδιο αυτό φαίνεται να έχουν αναπτύξει το επεξηγηματικό πλαίσιο για την έννοια του κλάσματος με βάση το οποίο το κλάσμα είναι δύο ξεχωριστοί φυσικοί αριθμοί, οι οποίοι μπορούν να βρεθούν με τη στρατηγική της διπλής μέτρησης, ανεξάρτητα από το αν η αριθμητική γραμμή περιλαμβάνει διαστήματα πέραν από το διάστημα 0 ως 1.

Στάδιο 3. Οι μαθητές της κατηγορίας αυτής είναι ικανοί να μεταφράζουν με επιτυχία από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση και αντίστροφα. Εξακολουθούν, όμως, να παρουσιάζουν τις ίδιες δυσκολίες, που παρουσιάζουν στο Στάδιο 2, όταν στη μετάφραση εμπλέκεται η λεκτική έκφραση. Αυτό συνέβαινε, γιατί θεωρούσαν τους τέσσερις αριθμούς που εμπλέκονταν στο λεκτικ πρόβλημα ως ακέραιους μεγαλύτερους της μονάδας, άρα δεν μπορούν τους τοποθετήσουν στο διάστημα 0 ως 1. Πρόκειται για μαθητές, οι οποίοι έχουν αναπτύξει το επεξηγηματικό πλαίσιο με βάση το οποίο το κλάσμα είναι μέρος της ακέραιης μονάδας.

Οι μαθητές των Σταδίων 1, 2 και 3 φάνηκε να έχουν αναπτύξει το επεξηγηματικό πλαίσιο με βάση τα οποία το κλάσμα θεωρείται ως δύο φυσικοί αριθμοί που δεν σχετίζονται και το επεξηγηματικό πλαίσιο με βάση το οποίο το κλάσμα είναι μέρος της ακέραιης μονάδας.

Στάδιο 4. Οι μαθητές, που ανήκουν στην κατηγορία αυτή, έχουν οικοδομήσει ακριβείς συνδέσεις ανάμεσα στις αναπαραστάσεις της ισοδυναμίας κλασμάτων. Έχουν δημιουργήσει μια πλήρη γνωστική δομή αναφορικά με την έννοια της ισοδυναμίας κλασμάτων, αφού μεταφράζουν με ακρίβεια από τη μια αναπαράσταση της έννοιας στην άλλη ανεξάρτητα από το ποια αναπαράσταση είναι η πηγή και ποια ο στόχος – λεκτική έκφραση, αριθμητική γραμμή, συμβολική έκφραση. Πρόκειται για μαθητές, οι οποίοι έχουν αναπτύξει πλήρως την έννοια της μονάδας, γι'αυτό και η προηγούμενη γνώση των ακέραιων αριθμών δεν επηρεάζει την ικανότητα επίλυσης λεκτικών προβλημάτων. Επιπλέον, δεν επηρεάζει την εύρεση των κλασματικών αριθμών, που είναι ισοδύναμοι, ακόμα και όταν τα προβλήματα δεν αναφέρονται ευθέως σε κλασματικούς αριθμούς, αλλά περιλαμβάνουν πληροφορίες ξεχωριστά για τον αριθμητή και ξεχωριστά για τον παρονομαστή του κλάσματος. Το γεγονός ότι έχουν αναπτύξει πλήρως την έννοια της μονάδας φάνηκε και στις μεταφράσεις από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση και αντίστροφα. Οι μαθητές δεν καταφεύγουν στη στρατηγική της διπλής μέτρησης, ακόμη και στις περιπτώσεις που η αριθμητική γραμμή περιλαμβάνει διαστήματα μεγαλύτερα από το διάστημα 0 ως 1. Συγκεκριμένα, ερμηνεύουν τα δεδομένα της αριθμητικής γραμμής και τοποθετούν τους κλασματικούς αριθμούς έχοντας σημείο αναφοράς τη θέση των αριθμών, που τους έχουν ήδη δοθεί στις αριθμητικές γραμμές. Πρόκειται για τους μαθητές, οι οποίοι έχουν αρχίσει να αναπτύσσουν το επιστημονικά ισχύον επεξηγηματικό πλαίσιο για τα κλάσματα, με βάση το οποίο ένα κλάσμα αποτελεί αριθμό, ο οποίος εκφράζει τη σχέση ανάμεσα στον αριθμητή και τον παρονομαστή.

Στο Διάγραμμα 41 φαίνεται συνοπτικά η ιεράρχηση των ειδών μετάφρασης που αφορούν την ισοδυναμία μετάφρασης. Με βάση το Διάγραμμα το δυσκολότερο είδος μετάφρασης είναι η μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη λεκτική έκφραση. Η επιτυχία σε αυτό το είδος μετάφρασης συνεπάγεται την επιτυχία στη μετάφραση από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή. Η μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση θεωρείται ευκολότερη από τα δύο άλλα είδη μετάφρασης, αλλά δυσκολεύει περισσότερο από τη μετάφραση από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή.

Αριθμητική γραμμή → **Λεκτική έκφραση**

⇓

Λεκτική έκφραση → **Αριθμητική γραμμή**

⇓

Συμβολική έκφραση → **Λεκτική έκφραση**

⇓

Λεκτική έκφραση → **Συμβολική έκφραση**

⇓

Αριθμητική γραμμή → **Συμβολική έκφραση**

⇓

Συμβολική έκφραση → **Αριθμητική γραμμή**

<u>Διάγραμμα 41.</u> Ιεράρχηση Ειδών Μετάφρασης για την Ισοδυναμία Κλασμάτων

Πρόσθεση Ομώνυμων Κλασμάτων

Στάδιο1. Οι μαθητές, που περιλαμβάνονται στο στάδιο αυτό, χαρακτηρίζονται από την ικανότητα μετάφρασης από τη λεκτική έκφραση ενός προβλήματος πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων στη συμβολική έκφραση και αντίστροφα. Το αποτέλεσμα αυτό ήταν αναμενόμενο λόγω της εξάσκησης, που γίνεται στα σχολεία, στη μετάφραση από τα απλά λεκτικά προβλήματα πρόσθεσης ακεραίων στη συμβολική έκφραση, δηλαδή την εξίσωση και αντίστροφα. Αντιμετωπίζουν όμως δυσκολίες στα άλλα είδη μετάφρασης. Συγκεκριμένα, αντιμετωπίζουν δυσκολίες στη μετάφραση από τη λεκτική έκφραση στην αριθμητική γραμμή, αφού δεν μπορούν να αποδώσουν τα δεδομένα του προβλήματος στην αριθμητική γραμμή. Ιδιαίτερες δυσκολίες παρουσιάζουν στο διαχωρισμό της αριθμητικής γραμμής σε διαστήματα και στη διαδοχική τοποθέτηση των κλασματικών αριθμών, δηλαδή των προσθετέων, στην αριθμητική γραμμή.

Επίσης, αντιμετωπίζουν δυσκολίες στη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη λεκτική έκφραση, αφού δεν αναγνωρίζουν τους κλασματικούς αριθμούς, δηλαδή τους προσθετέους, δεν εντοπίζουν τη μονάδα αναφοράς και υπολογίζουν τις κατακόρυφες διαχωριστικές γραμμές ως διαστήματα . Τέλος, αντιμετωπίζουν δυσκολίες στη μετάφραση από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή, αφού μετρούν τις κατακόρυφες διαχωριστικές γραμμές αντί τα διαστήματα.

Επίσης, φάνηκε ότι δεν έχουν οικοδομήσει την έννοια της μονάδας, αφού χειρίζονται την αριθμητική γραμμή ως μια ολότητα, την ταυτίζουν με το ευθύγραμμο τμήμα και καταφεύγουν στη στρατηγική της διπλής μέτρησης, ακόμη και στις περιπτώσεις που η αριθμητική γραμμή περιλαμβάνει διαστήματα μεγαλύτερα από το διάστημα 0 ως 1.

Στάδιο 2. Οι μαθητές, που περιλαμβάνονται σε αυτό το στάδιο, χαρακτηρίζονται από την ικανότητα μετάφρασης από τη λεκτική έκφραση ενός προβλήματος πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων στη συμβολική έκφραση και αντίστροφα. Επιπρόσθετα, χαρακτηρίζονται από την ικανότητα μετάφρασης από την συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή καθώς και από τη μετάφραση από τη λεκτική έκφραση στην αριθμητική γραμμή. Επιτυγχάνουν, δηλαδή σε έργα μετάφρασης όπου η αριθμητική γραμμή είναι ο στόχος. Με τη βοήθεια της οπτικοποίησης, που παρέχει η αριθμητική γραμμή, μπορούν να αναπαραστήσουν στις αριθμητικές γραμμές, την πρόσθεση κλασμάτων, αν και αρκετές φορές χειρίζονται την αριθμητική γραμμή ως μια ολότητα, ως ένα ευθύγραμμο τμήμα επηρεαζόμενοι από την υποέννοια μέρος – όλο. Συγκεκριμένα θεωρούν τα βέλη στις άκρες της αριθμητικής γραμμής ως ενδείξεις της αρχής και του τέλους του ευθύγραμμου τμήματος. Η χρήση της αριθμητικής γραμμής ως ευθύγραμμου τμήματος βοήθησε τους μαθητές με την έννοια ότι δε θεωρούσαν τους κατακόρυφους διαχωρισμούς, που κατασκεύαζαν, ως τους αριθμούς. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να λαμβάνουν υπόψη τους τα διαστήματα. Αντίθετα, στη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση και στη λεκτική έκφραση οι μαθητές παρατηρώντας ότι οι αριθμοί 0 και 1 ήταν τοποθετημένοι κάτω από τους κατακόρυφους διαχωρισμούς θεωρούσαν ότι οι κατακόρυφοι διαχωρισμοί είναι οι αριθμοί και δεν λάμβαναν υπόψη τα διαστήματα και τις αποστάσεις από το 0. Τέλος, υπήρξαν μαθητές οι οποίοι κατά τη μέτρηση των διαστημάτων λάμβαναν υπόψη τους και τα διαστήματα που είχαν προηγηθεί του αριθμού 0.

Επίσης, φάνηκε ότι οι μαθητές δεν έχουν οικοδομήσει την έννοια της μονάδας, αφού χειρίζονται την αριθμητική γραμμή ως μια ολότητα, την ταυτίζουν με το ευθύγραμμο τμήμα και καταφεύγουν στη στρατηγική της διπλής μέτρησης, ακόμη και στις περιπτώσεις που η αριθμητική γραμμή περιλαμβάνει διαστήματα μεγαλύτερα από το διάστημα 0 ως 1. Πρόκειται για μαθητές, οι οποίοι έχουν αναπτύξει το επεξηγηματικό πλαίσιο με βάση το οποίο το κλάσμα είναι μέρος της ακέραιης μονάδας.

Οι μαθητές των Σταδίων 1 και 2 φάνηκε να έχουν αναπτύξει το επεξηγηματικό πλαίσιο με βάση τα οποία το κλάσμα θεωρείται ως δύο φυσικοί αριθμοί που δεν σχετίζονται και το επεξηγηματικό πλαίσιο με βάση το οποίο το κλάσμα είναι μέρος της ακέραιης μονάδας.

Στάδιο 3. Οι μαθητές, που ανήκουν στην κατηγορία αυτή, έχουν οικοδομήσει ακριβείς συνδέσεις ανάμεσα στις αναπαραστάσεις της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων. Έχουν δημιουργήσει μια πλήρη γνωστική δομή αναφορικά με την πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων, αφού μεταφράζουν με ακρίβεια από τη μια αναπαράσταση στην άλλη – λεκτική έκφραση, αριθμητική γραμμή, συμβολική έκφραση. Το γεγονός ότι έχουν αναπτύξει πλήρως την έννοια της μονάδας φάνηκε και στις μεταφράσεις από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση και αντίστροφα. Οι μαθητές δεν καταφεύγουν στη στρατηγική της διπλής μέτρησης, ακόμη και στις περιπτώσεις που η αριθμητική γραμμή περιλαμβάνει διαστήματα μεγαλύτερα από το διάστημα 0 ως 1. Ερμηνεύουν τα δεδομένα της αριθμητικής γραμμής και τοποθετούν τους κλασματικούς αριθμούς έχοντας ως σημείο αναφοράς τη θέση των αριθμών που τους έχουν ήδη δοθεί στις αριθμητικές γραμμές. . Πρόκειται για τους μαθητές, οι οποίοι έχουν αρχίσει να αναπτύσσουν το επιστημονικά ισχύον επεξηγηματικό πλαίσιο για τα κλάσματα, με βάση το οποίο ένα κλάσμα αποτελεί αριθμό, ο οποίος εκφράζει τη σχέση ανάμεσα στον αριθμητή και τον παρονομαστή.

Στο Διάγραμμα 42 φαίνεται συνοπτικά η ιεράρχηση των ειδών μετάφρασης που αφορούν την πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων. Με βάση το Διάγραμμα τα δυσκολότερα είδη μετάφρασης είναι η μετάφραση από τη λεκτική έκφραση στην αριθμητική γραμμή και αντίστροφα. Η επιτυχία σε αυτά τα είδη μετάφρασης συνεπάγεται την επιτυχία στη μετάφραση από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή. Η μετάφραση από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή θεωρείται δυσκολότερη από τη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση. Η μετάφραση από τη λεκτική έκφραση στη συμβολική έκφραση και η μετάφραση από τη συμβολική έκφραση στη λεκτική έκφραση θεωρούνται ευκολότερες από τα άλλα είδη μετάφρασης.

Αριθμητική γραμμή → **Λεκτική έκφραση**

⇓

Αριθμητική γραμμή → **Συμβολική έκφραση**

⇓

Λεκτική έκφραση → **Αριθμητική γραμμή**

⇓

Συμβολική έκφραση → **Αριθμητική γραμμή**

⇓

Συμβολική έκφραση → **Λεκτική έκφραση**

⇓

Λεκτική έκφραση → **Συμβολική έκφραση**

Διάγραμμα 42. Ιεράρχηση Ειδών Μετάφρασης Πρόσθεσης Ομώνυμων Κλασμάτων

<u>Πρόσθεση Ετερώνυμων Κλασμάτων</u>

Στάδιο 1. Οι μαθητές, που περιλαμβάνονται στο στάδιο αυτό, χαρακτηρίζονται από την ικανότητα μετάφρασης από τη λεκτική έκφραση ενός προβλήματος πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων στη συμβολική έκφραση και αντίστροφα. Το αποτέλεσμα αυτό ήταν αναμενόμενο λόγω της εξάσκησης που γίνεται στα σχολεία στη μετάφραση από τα απλά λεκτικά προβλήματα πρόσθεσης ακεραίων στη συμβολική έκφραση, δηλαδή την εξίσωση και αντίστροφα. Οι μαθητές, ωστόσο, αντιμετωπίζουν δυσκολίες στα άλλα είδη μετάφρασης. Αντιμετωπίζουν δυσκολίες στη μετάφραση από τη λεκτική έκφραση στην αριθμητική γραμμή, αφού δεν μπορούν να αναπαραστήσουν τα δεδομένα του προβλήματος στην αριθμητική γραμμή. Επίσης, αντιμετωπίζουν δυσκολίες στη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη λεκτική έκφραση, αφού δεν αναγνωρίζουν τους κλασματικούς αριθμούς, δηλαδή τους προσθετέους, δεν εντοπίζουν τη μονάδα αναφοράς και υπολογίζουν τις κατακόρυφες διαχωριστικές γραμμές ως τα διαστήματα. Επιπλέον, αντιμετωπίζουν δυσκολίες στη μετάφραση από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή, αφού μετρούν τις κατακόρυφες διαχωριστικές γραμμές αντί τα διαστήματα. Επίσης, οι δυσκολίες στη μετάφραση από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή και από τη λεκτική έκφραση στην αριθμητική γραμμή εστιάζονται στο γεγονός ότι οι μαθητές δεν μπορούν να τοποθετήσουν τους προσθετέους, δηλαδή τα ετερώνυμα κλάσματα, στην ίδια αριθμητική γραμμή, ενώ γνωρίζουν τον αλγόριθμο της εύρεσης του ελάχιστου κοινού πολλαπλασίου για την μετατροπή των ετερώνυμων σε ομώνυμα κλάσματα. Επίσης, φάνηκε ότι δεν έχουν οικοδομήσει την έννοια της μονάδας, αφού χειρίζονται την αριθμητική γραμμή ως μια ολότητα, την ταυτίζουν με το ευθύγραμμο τμήμα και καταφεύγουν στη στρατηγική της διπλής μέτρησης, ακόμη και στις περιπτώσεις που η αριθμητική γραμμή περιλαμβάνει διαστήματα μεγαλύτερα από το διάστημα 0 ως 1.

Στάδιο 2. Οι μαθητές, που περιλαμβάνονται σε αυτό το στάδιο, χαρακτηρίζονται από την ικανότητα μετάφρασης από τη λεκτική έκφραση ενός προβλήματος πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων στη συμβολική έκφραση και αντίστροφα. Επίσης, χαρακτηρίζονται από την ικανότητα μετάφρασης από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση και στη λεκτική έκφραση. Επιτυγχάνουν, δηλαδή σε έργα μετάφρασης όπου η πηγή είναι η αριθμητική γραμμή, αφού διακρίνουν στις δύο διαφορετικές αριθμητικές γραμμές τους προσθετέους, δηλαδή τα δύο ετερώνυμα κλάσματα. Αντιμετωπίζουν, όμως, δυσκολίες στα άλλα είδη μετάφρασης. Συγκεκριμένα, αντιμετωπίζουν δυσκολίες στη μετάφραση από τη λεκτική έκφραση στην αριθμητική γραμμή και από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή, λόγω του ότι μετρούν τις κάθετες διαχωριστικές γραμμές ως διαστήματα. Επίσης, οι δυσκολίες στη μετάφραση από τη λεκτική έκφραση στην αριθμητική γραμμή και από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή εστιάζονται στο ότι οι μαθητές δεν μπορούν να τοποθετήσουν τους προσθετέους, δηλαδή τα ετερώνυμα κλάσματα, στην ίδια αριθμητική γραμμή, ενώ γνωρίζουν τον αλγόριθμο της εύρεσης του ελάχιστου κοινού πολλαπλασίου για τη μετατροπή των ετερώνυμων σε ομώνυμα κλάσματα. Τα έργα, που εξετάζουν τη μετάφραση από τη συμβολική και λεκτική έκφραση στην αριθμητική γραμμή, προϋποθέτουν μεγαλύτερο φόρτο νοητικής επεξεργασίας, αφού εκτός από τη μετάφραση από τη συμβολική έκφραση στις δύο αριθμητικές γραμμές, οι οποίες περιλάμβαναν τον κάθε προσθετέο ξεχωριστά, προϋποθέτουν και τον ευέλικτο χειρισμό της πρόσθεσης στο ίδιο πεδίο, την αριθμητική γραμμή. Πέραν από τη μετάφραση από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή, ακολουθούσε ο μετασχηματισμός στο ίδιο πεδίο, δηλαδή από αριθμητική γραμμή σε αριθμητική γραμμή, αφού με βάση τις δύο αριθμητικές γραμμές, που περιλάμβαναν τους δύο προσθετέους ξεχωριστά, έπρεπε να προκύψει μια τρίτη αριθμητική γραμμή, η οποία να αναπαριστά τους δύο προσθετέους μαζί με τη χρήση καινούριας υποδιαίρεσης. Το γεγονός ότι, σε σχέση με την πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων, οι μαθητές της ομάδας αυτής δεν αναγνώριζαν την ανάγκη κατασκευής μιας νέας αριθμητικής γραμμής, η οποία να περιλαμβάνει την κατάλληλη υποδιαίρεση με στόχο να αναπαρασταθούν σε αυτή ισοδύναμα κλάσματα με τα αρχικά ετερώνυμα κλάσματα, αποτελεί ένδειξη ότι δεν έχουν αναπτύξει πλήρως την έννοια της μονάδας. Κατά συνέπεια, προχωρούσαν στην πρόσθεση των αριθμητών και των παρονομαστών των ετερώνυμων κλασμάτων, γεγονός που δείχνει την επίδραση της προηγούμενης γνώσης των ακέραιων αριθμών.

Ακόμη μια ένδειξη ότι οι μαθητές της ομάδας αυτής δεν έχουν αναπτύξει την έννοια της μονάδας είναι ότι χειρίζονται την αριθμητική γραμμή ως μια ολότητα, την ταυτίζουν με το ευθύγραμμο τμήμα και καταφεύγουν στη στρατηγική της διπλής μέτρησης, ακόμη και στις περιπτώσεις που η αριθμητική γραμμή περιλαμβάνει διαστήματα μεγαλύτερα από το διάστημα 0 ως 1. Οι μαθητές των Σταδίων 1 και 2 φάνηκε να έχουν αναπτύξει το επεξηγηματικό πλαίσιο με βάση τα οποία το κλάσμα θεωρείται ως δύο φυσικοί αριθμοί που δεν σχετίζονται και το επεξηγηματικό πλαίσιο με βάση το οποίο το κλάσμα είναι μέρος της ακέραιης μονάδας.

Στάδιο 3. Οι μαθητές, που ανήκουν στην κατηγορία αυτή, έχουν οικοδομήσει ακριβείς συνδέσεις ανάμεσα στις αναπαραστάσεις της πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων. Έχουν δημιουργήσει μια πλήρη γνωστική δομή αναφορικά με την πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων, αφού μεταφράζουν με ακρίβεια από τη μια αναπαράσταση στην άλλη ανεξάρτητα από το ποια είναι η πηγή και ποια είναι ο στόχος της μετάφρασης – λεκτική έκφραση, αριθμητική γραμμή, συμβολική έκφραση.

Το γεγονός ότι έχουν αναπτύξει πλήρως την έννοια της μονάδας φάνηκε και στις μεταφράσεις από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση και αντίστροφα. Οι μαθητές δεν καταφεύγουν στη στρατηγική της διπλής μέτρησης, ακόμη και στις περιπτώσεις που η αριθμητική γραμμή περιλαμβάνει διαστήματα μεγαλύτερα από το διάστημα 0 ως 1. Συγκεκριμένα, ερμηνεύουν τα δεδομένα της αριθμητικής γραμμής και τοποθετούν τους κλασματικούς αριθμούς λαμβάνοντας υπόψη τη θέση των αριθμών που τους έχουν ήδη δοθεί στις αριθμητικές γραμμές. Ακόμη μια ένδειξη ότι οι μαθητές, που ανήκουν στην κατηγορία αυτή, έχουν αναπτύξει πλήρως την έννοια της μονάδας, είναι το γεγονός ότι στην πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων αναγνωρίζουν την ανάγκη της κατασκευής μιας νέας αριθμητικής γραμμής, η οποία να περιλαμβάνει την κατάλληλη υποδιαίρεση με στόχο να αναπαρασταθούν σε αυτή ισοδύναμα κλάσματα με τα αρχικά ετερώνυμα κλάσματα. Πρόκειται για τους μαθητές, οι οποίοι έχουν αρχίσει να αναπτύσσουν το επιστημονικά ισχύον επεξηγηματικό πλαίσιο για τα κλάσματα, με βάση το οποίο ένα κλάσμα αποτελεί αριθμό, ο οποίος εκφράζει τη σχέση ανάμεσα στον αριθμητή και τον παρονομαστή.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας φαίνεται ότι υπήρξαν μαθητές που κατέληγαν στην τελική αναπαράσταση μέσω μιας άλλης αναπαράστασης. Ειδικότερα, στην επίλυση των προβλημάτων υπήρξαν μαθητές που κατέληγαν στην αριθμητική γραμμή μέσω της αλγεβρικής έκφρασης Τα αποτελέσματα αυτά ενισχύουν την άποψη των Lesh et al. (1987) σύμφωνα με την οποία η διαδικασία μετάφρασης είναι πολυσύνθετη, με την έννοια ότι ο μαθητής μπορεί να ξεκινήσει να επιλύει μια προβληματική κατάσταση μεταφράζοντας αρχικά την κατάσταση προβλήματος σε ένα σύστημα αναπαράστασης και στη συνέχεια σε ένα δεύτερο σύστημα αναπαράστασης. Τη δυνατότητα κατάληξης στην τελική αναπαράσταση μέσω μιας άλλης αναπαράστασης εξετάζει και ο Janvier (1987), ο οποίος επισημαίνει ότι υπάρχουν εναλλακτικοί τρόποι για να επιτευχθεί μια μετάφραση.

Στο Διάγραμμα 43 φαίνεται συνοπτικά η ιεράρχηση των ειδών μετάφρασης που αφορούν την πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων. Με βάση το Διάγραμμα τα δυσκολότερα είδη μετάφρασης είναι η μετάφραση από τη λεκτική έκφραση στην αριθμητική γραμμή και αντίστροφα. Η επιτυχία σε αυτά τα είδη μετάφρασης συνεπάγεται την επιτυχία στη μετάφραση από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή. Η μετάφραση από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή θεωρείται δυσκολότερη από τη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση. Η μετάφραση από τη λεκτική έκφραση στη συμβολική έκφραση και η μετάφραση από τη συμβολική έκφραση στη λεκτική έκφραση θεωρούνται ευκολότερες από τα άλλα είδη μετάφρασης.

Λεκτική έκφραση → **Αριθμητική γραμμή**

⇓

Συμβολική έκφραση → **Αριθμητική γραμμή**

⇓

Αριθμητική γραμμή → **Λεκτική έκφραση**

⇓

Αριθμητική γραμμή → **Συμβολική έκφραση**

⇓

Συμβολική έκφραση → **Λεκτική έκφραση**

⇓

Λεκτική έκφραση → **Συμβολική έκφραση**

Διάγραμμα 43. Ιεράρχηση Ειδών Μετάφρασης για την Πρόσθεση Ετερώνυμων Κλασμάτων

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζεται συνοπτικά η ιεράρχηση των ειδών μετάφρασης σε σχέση με το γνωστικό αντικείμενο (Πίνακας 18). Με βάση τον Πίνακα 18 φαίνεται ότι ο βαθμός δυσκολίας του είδους μετάφρασης διαφοροποιείται ανάλογα με το γνωστικό αντικείμενο. Οι μαθητές που βρίσκονται στο Στάδιο 4 ή στο Στάδιο 3 επιτυγχάνουν και στις μεταφράσεις των προηγούμενων Σταδίων.

Αναφορικά με την ισοδυναμία κλασμάτων οι μαθητές των Σταδίων 1, 2 και 3 δυσκολεύονται όταν εμπλέκεται η λεκτική έκφραση στη διαδικασία μετάφρασης γι’αυτό και η επιτυχία σε μεταφράσεις όπου περιλαμβάνεται η λεκτική έκφραση αποτελούν ξεχωριστό στάδιο – Στάδιο 4.

Πίνακας 18

Ιεράρχηση των Ειδών Μετάφρασης και Γνωστικά Αντικείμενα

Στάδια	Ισοδυναμία Κλασμάτων	Πρόσθεση Ομώνυμων Κλασμάτων	Πρόσθεση Ετερώνυμων Κλασμάτων
Στάδιο 4	Αριθμητική γραμμή → Λεκτική έκφραση ⇓ Λεκτική έκφραση → Αριθμητική γραμμή ⇓ Συμβολική έκφραση → Λεκτική έκφραση ⇓ Λεκτική έκφραση → Συμβολική έκφραση ⇓		
Στάδιο 3	Αριθμητική γραμμή → Συμβολική έκφραση ⇓	Αριθμητική γραμμή → Λεκτική έκφραση ⇓ Αριθμητική γραμμή → Συμβολική έκφραση ⇓	Λεκτική έκφραση → Αριθμητική γραμμή ⇓ Συμβολική έκφραση → Αριθμητική γραμμή ⇓
Στάδιο 2	Συμβολική έκφραση → Αριθμητική γραμμή	Λεκτική έκφραση → Αριθμητική γραμμή ⇓ Συμβολική Έκφραση → Αριθμητική γραμμή ⇓	Αριθμητική γραμμή → Λεκτική έκφραση ⇓ Αριθμητική γραμμή → Συμβολική έκφραση ⇓
Στάδιο 1	Δε γίνονται μεταφράσεις	Συμβολική έκφραση → Λεκτική έκφραση ⇓ Λεκτική έκφραση → Συμβολική έκφραση	Συμβολική έκφραση → Λεκτική έκφραση ⇓ Λεκτική έκφραση → Συμβολική έκφραση

Διαφοροποίηση της Επίδοσης Ανάλογα με το Είδος του Έργου

Με βάση τα αποτελέσματα τα έργα αναγνώρισης συγκεντρώνουν το χαμηλότερο ποσοστό επιτυχίας (Πίνακας 10). Το αποτέλεσμα αυτό ήταν αναμενόμενο, αφού τα έργα αναγνώρισης της έννοιας του κλάσματος περιλάμβαναν αναπαραστάσεις με παραπλανητικά στοιχεία, όπως για παράδειγμα αριθμητικές γραμμές με διαστήματα 0 ως 2, αριθμητικές γραμμές όπου οι υποδιαιρέσεις του διαστήματος 0 ως 1 ήταν διπλάσιες από τον παρονομαστή του δοσμένου κλάσματος και εμβαδόν κύκλου στο οποίο οι υποδιαιρέσεις ήταν διπλάσιες από τον παρονομαστή του δοσμένου κλάσματος. Τα έργα, που εξετάζουν την ικανότητα αναπαράστασης, συγκεντρώνουν μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας. Το αποτέλεσμα αυτό ίσως να οφείλεται στο γεγονός ότι τα συγκεκριμένα έργα περιλάμβαναν λιγότερα παραπλανητικά στοιχεία από τα έργα αναγνώρισης. Τόσο στην περίπτωση των έργων αναγνώρισης όσο και στην περίπτωση των έργων αναπαράστασης υπήρχαν αριθμητικές γραμμές, ευθύγραμμα τμήματα και εμβαδόν κύκλου, όπου οι υποδιαιρέσεις του διαστήματος 0 ως 1 ήταν οι διπλάσιες ή μισές του παρονομαστή του δοσμένου κλάσματος. Ωστόσο, δεν υπήρχαν αριθμητικές γραμμές με διαστήματα 0 ως 2, αφού όλες οι αριθμητικές γραμμές στα έργα αναπαράστασης περιλάμβαναν το διάστημα 0 ως 1, γεγονός που διευκόλυνε τους μαθητές στην αναπαράσταση του δοσμένου κλάσματος.

Τα υποκείμενα συγκέντρωσαν χαμηλά ποσοστά επιτυχίας και στα έργα ισοδυναμίας κλασμάτων τόσο στα έργα αναγνώρισης και αναπαράστασης κλασμάτων όσο και στα έργα μετάφρασης (Πίνακας, 3, Πίνακας 5, Πίνακας 10). Η ισοδυναμία κλασμάτων προϋποθέτει την κατανόηση της σχέσης ανάμεσα σε δύο κλάσματα τα οποία αναπαριστούν την ίδια ποσότητα, ενώ αποτελούνται από διαφορετικούς αριθμητές και παρονομαστές. Η ιδιομορφία αυτής της σχέσης ίσως να αποτέλεσε παράγοντα δυσκολίας για τους μαθητές τόσο στα έργα ισοδυναμίας στο συμβολικό πεδίο όσο και στα έργα ισοδυναμίας που περιλάμβαναν μεταφράσεις από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση και αντίστροφα. Ένας παράγοντας, ο οποίος φαίνεται να συμβάλλει στην ελλιπή κατανόηση της ισοδυναμίας των κλασμάτων, είναι η αλγοριθμική προσέγγιση και η έμφαση στη διαδικαστική γνώση αναφορικά με τη διδασκαλία των κλασμάτων. Συγκεκριμένα, ένα συνηθισμένο λάθος των μαθητών είναι η εύρεση ισοδύναμων κλασμάτων και η αναφορά σε αυτά ως διπλάσια ή τριπλάσια του αρχικού κλάσματος το οποίο φανερώνει επιφανειακή κατανόηση της έννοιας του κλάσματος, καθώς και την επιρροή που έχει η προηγούμενη γνώση των ακεραίων. Σε παρόμοια αποτελέσματα κατέληξε η έρευνα των Kamii και Clark (1995) στην οποία φάνηκε ότι οι μαθητές αντιμετώπιζαν δυσκολίες στην κατανόηση της έννοιας της ισοδυναμίας κλασμάτων με αποτέλεσμα να αντιμετωπίζουν δυσκολίες και στις πράξεις πρόσθεσης και αφαίρεσης μη ισοδύναμων κλασμάτων. Οι δυσκολίες αυτές αποδόθηκαν κυρίως στη διδασκαλία και στη χρήση ακατάλληλων αναπαραστάσεων, οι οποίες δημιουργούν παρανοήσεις στους μαθητές. Στα συμπεράσματα της έρευνας αυτής τονίζεται η σημασία της χρήσης αναπαραστάσεων, που να έχουν νόημα για τους μαθητές και η ενθάρρυνση των μαθητών για επινόηση δικών τους αναπαραστάσεων, οι οποίες να παρουσιάζουν ισοδύναμα κλάσματα. Η σημασία της σύνδεσης της έννοιας του κλάσματος με την ήδη υπάρχουσα γνώση των μαθητών και της επινόησης αναπαραστάσεων από τους μαθητές φάνηκε και στα αποτελέσματα άλλων ερευνών, που εξέταζαν την εννοιολογική και διαδικαστική γνώση των κλασμάτων σε σχέση με τη χρήση αναπαραστάσεων (Jooste, 1999: Murray, Olivier, & De Beer, 1999). Τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας αναφορικά με την ισοδυναμία κλασμάτων συμφωνούν, επίσης, με τα αποτελέσματα έρευνας της Ni (2001). Με βάση τα αποτελέσματα της έρευνας (Ni, 2001) οι μαθητές σημείωσαν χαμηλά ποσοστά επιτυχίας στα έργα που εξέταζαν την ισοδυναμία κλασμάτων είτε σε αναπαραστάσεις που έδιναν έμφαση στην υποέννοια μέρος – όλο, όπως είναι το εμβαδόν κύκλου και ορθογωνίου, είτε σε αναπαραστάσεις που έδιναν έμφαση στην υποέννοια μέτρο. Ιδιαίτερα χαμηλά ποσοστά συγκέντρωσαν τα έργα, που εξέταζαν την ισοδυναμία κλασμάτων σε αναπαραστάσεις που έδιναν έμφαση στην υποέννοια μέτρο, όπως είναι η αριθμητική γραμμή. Με βάση τα αποτελέσματα αυτά η Ni (2001) είχε καταλήξει στο συμπέρασμα ότι πηγή δυσκολιών για την κατανόηση της ισοδυναμίας κλασμάτων είναι η πολλαπλασιαστική φύση της έννοιας, αλλά και η απόδοση της συγκεκριμένης έννοιας με διάφορες αναπαραστάσεις, οι οποίες προσφέρουν πληροφορίες με διαφορετικό τρόπο και απαιτούν διαφορετικούς τρόπους ερμηνείας. Η ερευνήτρια εισηγείται όπως η διδασκαλία προσπαθήσει να αναπτύξει την έννοια της ισοδυναμίας δίνοντας έμφαση σε όλες τις υποέννοιες του κλάσματος και στις αναπαραστάσεις που αναλογούν σε κάθε υποέννοια.

Τα ψηλότερα ποσοστά επιτυχίας συγκέντρωσαν τα έργα πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων (Πίνακας 10). Το αποτέλεσμα αυτό ήταν αναμενόμενο, αφού τα συγκεκριμένα έργα περιλάμβαναν ομώνυμα κλάσματα και οι αριθμητικές γραμμές στα συγκεκριμένα έργα περιλάμβαναν αποκλειστικά το διάστημα 0 μέχρι 1. Κατά συνέπεια, τα υποκείμενα σημείωσαν μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας τόσο στο συμβολικό πεδίο όσο και στα έργα μετάφρασης όσον αφορά στην πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων.

Τέλος, η επίδοση των μαθητών ήταν χαμηλή στα έργα πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων (Πίνακας 10). Το χαμηλό ποσοστό επιτυχίας ήταν αναμενόμενο, αφού τα συγκεκριμένα έργα περιλάμβαναν ετερώνυμα κλάσματα και προϋπόθεταν τη μετατροπή τους σε ομώνυμα κλάσματα, τόσο για να μπορέσει να εκτελεσθεί η πράξη της πρόσθεσης στο συμβολικό πεδίο, όσο και για να μπορέσει να αναπαρασταθεί η πρόσθεση των ετερώνυμων κλασμάτων σε αριθμητική γραμμή, όταν δίνεται η συμβολική έκφραση ή και αντίθετα – έργα μετάφρασης.

Τα αποτελέσματα αυτά σε συνδυασμό με το γεγονός ότι τα έργα είχαν στεγανοποιηθεί με βάση το γνωστικό αντικείμενο που εξέταζαν, δείχνουν ότι οι μαθητές παρουσιάζουν δυσκολίες στην κατανόηση της έννοιας του κλάσματος. Φάνηκε ότι όχι μόνο δεν υπάρχουν σχέσεις ανάμεσα στην εννοιολογική και διαδικαστική γνώση αναφορικά με τα κλάσματα, αλλά και ότι οι μαθητές είχαν ψηλότερη επίδοση στα έργα που περιλάμβαναν διαδικαστική γνώση. Η κατανόηση των μαθητών περιορίζεται στην απομνημόνευση κανόνων και αλγορίθμων, αφού όπως έχουν δείξει και τα αποτελέσματα, οι μαθητές σημείωσαν ψηλά ποσοστά επιτυχίας στα έργα που περιλάμβαναν τη διαδικαστική γνώση στα πλαίσια του συμβολικού πεδίου. Η έμφαση στη διαδικαστική γνώση, χωρίς την εννοιολογική κατανόηση, έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να εκτελούν πράξεις – πρόσθεση ομώνυμων και ετερώνυμων κλασμάτων, εύρεση ισοδύναμων κλασμάτων – μηχανικά, χωρίς να τους αποδίδουν νόημα. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα μαθητές οι οποίοι δεν μπορούσαν να επαναφέρουν από τη μνήμη τους συγκεκριμένους κανόνες και αλγόριθμους να εφαρμόζουν ιδιότητες των ακεραίων στις πράξεις με τα κλάσματα. Έτσι, στην περίπτωση της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων, η οποία ως γνωστικό αντικείμενο είναι ευκολότερη από την πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων, οι μαθητές εκτελούν μηχανικά τον αλγόριθμο της πρόσθεσης, χωρίς να αντιμετωπίζουν ιδιαίτερα προβλήματα στην εφαρμογή του. Στην περίπτωση της πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων οι μαθητές εκτελούν τον αλγόριθμο της πρόσθεσης, ωστόσο, αντιμετωπίζουν δυσκολίες, διότι η διαδικασία περιλαμβάνει τη μετατροπή των ετερώνυμων κλασμάτων σε ισοδύναμά τους ομώνυμα κλάσματα, με την εύρεση του ελάχιστου κοινού πολλαπλασίου. Η απομνημόνευση της διαδικασίας αυτής, χωρίς την εννοιολογική κατανόησή της, έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές αρκετές φορές να ξεχνούν τη διαδικασία και να υποπίπτουν σε λάθη υπολογιστικά ή λάθη που να οφείλονται στην εφαρμογή ιδιοτήτων των ακεραίων στη πρόσθεση κλασμάτων – πρόσθεση παρονομαστών. Τα αποτελέσματα αυτά συμφωνούν με αποτελέσματα ερευνών σύμφωνα με τις οποίες η αλγοριθμική προσέγγιση και η έμφαση στη διαδικαστική γνώση αναφορικά με τη διδασκαλία των κλασμάτων δημιουργεί δυσκολίες στην κατανόηση των κλασμάτων, αφού οι διαδικασίες και οι κανόνες εφαρμόζονται μηχανικά. Κατά συνέπεια, η εφαρμογή κανόνων και αλγόριθμων στους οποίους δεν έχει αποδοθεί νόημα έχει ως αποτέλεσμα την επιφανειακή κατανόηση της έννοιας του κλάσματος και τη δυσκολία στην επίλυση προβλημάτων με κλάσματα. Ακόμη έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση λαθών στην εκτέλεση πράξεων και την εφαρμογή ιδιοτήτων των ακεραίων στις πράξεις με κλάσματα (Ball, 1991: Carpenter, 1986: Philippou, & Christou, 1994: Post, & Cramer, 1989).

Οι Moss και Case (1999) αναφερόμενοι στο ρόλο της διδασκαλίας στην κατανόηση των κλασμάτων έχουν εντοπίσει περιπτώσεις στις οποίες η διδασκαλία προκαλεί δυσκολίες στην κατανόηση των κλασμάτων. Στην πρώτη περίπτωση, οι δάσκαλοι συχνά δίνουν έμφαση στη διαδικαστική γνώση των κλασμάτων σε βάρος της κατανόησης της έννοιας του κλάσματος. Στη δεύτερη περίπτωση, οι δάσκαλοι προσεγγίζουν τα κλάσματα με τον τρόπο σκέψης ενός ενήλικα και όχι ενός παιδιού, αφού δίνουν έμφαση στον τυπικό συμβολικό τρόπο παρουσίασης των κλασμάτων, όπως αυτός έχει οικοδομηθεί πλήρως σε έναν ενήλικα. Στην τρίτη περίπτωση, οι δάσκαλοι χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις στις οποίες οι κλασματικοί και ακέραιοι αριθμοί εύκολα ταυτίζονται – αναπαραστάσεις στις οποίες οι μαθητές μετρούν τον αριθμό των σκιασμένων μερών και τον ολικό αριθμό των μερών και θεωρούν τους δύο αριθμούς ως ξεχωριστές ποσότητες.

Στο Διάγραμμα 44 φαίνεται συνοπτικά η ιεράρχηση των γνωστικών αντικειμένων. Με βάση το Διάγραμμα 44 τα δυσκολότερα είδη έργων αφορούν στην αναγνώριση των κλασμάτων, στην πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων και στην ισοδυναμία κλασμάτων. Η επιτυχία σε αυτά τα έργα συνεπάγεται την επιτυχία σε έργα που θεωρούνται ευκολότερα όπως είναι η ικανότητα αναπαράστασης κλασμάτων και η πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων.

Αναγνώριση Κλασμάτων

⇓

Πρόσθεση Ετερώνυμων Κλασμάτων

⇓

Ισοδυναμία Κλασμάτων

⇓

Αναπαράσταση Κλασμάτων

⇓

Πρόσθεση Ομώνυμων Κλασμάτων

Διάγραμμα 44. Ιεράρχηση Γνωστικών Αντικειμένων

Η Αριθμητική Γραμμή ως Μέσο Διαμορφωτικής Αξιολόγησης

Με βάση τα αποτελέσματα, που προέκυψαν από τα πειράματα επικοινωνίας και τις συνεντεύξεις, έχει φανεί ότι η χρήση της αριθμητικής γραμμής συνέβαλε στην ανίχνευση και στον εντοπισμό αρκετών παρανοήσεων και δυσκολιών που είχαν οι μαθητές αναφορικά με την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος. Σε μερικές περιπτώσεις οι μαθητές με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής αντιλήφθηκαν παρανοήσεις που είχαν και ξεπέρασαν δυσκολίες που αντιμετώπιζαν σε σχέση με την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος.

Μια πρώτη δυσκολία αφορά στην αδυναμία των μαθητών να εντοπίσουν τη μονάδα αναφοράς του κλάσματος. Συγκεκριμένα, όπως φάνηκε από τα πειράματα επικοινωνίας και από τις συνεντεύξεις, οι μαθητές εκλαμβάνουν ολόκληρη την αριθμητική γραμμή ως τη μονάδα. Είναι εμφανής η επίδραση που έχει η χρήση του εμβαδού – κύκλος, ορθογώνιο – ως αναπαράσταση της έννοιας του κλάσματος στη σκέψη των μαθητών. Ως αποτέλεσμα οι μαθητές εκλαμβάνουν ολόκληρη την αριθμητική γραμμή ως τη μονάδα, χωρίς να λαμβάνουν υπόψη την αρίθμησή της και το γεγονός ότι ένας αριθμός στη γραμμή αποκτά νόημα, σε σχέση με την τοποθέτηση τουλάχιστο άλλων δύο αριθμών πάνω στη γραμμή.

Μια συνέπεια, που προκύπτει από τη χρήση του εμβαδού ως αναπαράστασης της έννοιας του κλάσματος, είναι η στρατηγική της διπλής μέτρησης. Οι μαθητές εντοπίζουν τον παρονομαστή ενός κλάσματος μετρώντας όλες τις υποδιαιρέσεις, που παρουσιάζονται σε μια αναπαράσταση και τον αριθμητή μετρώντας τις υποδιαιρέσεις, που έχουν επιλεγεί. Οι μαθητές εφαρμόζουν τη στρατηγική αυτή και στην αριθμητική γραμμή. Στις περιπτώσεις όπου στην αριθμητική γραμμή περιλαμβανόταν το διάστημα από 0 μέχρι 1, η στρατηγική της διπλής μέτρησης απέδιδε και οι μαθητές εντόπιζαν το ζητούμενο κλάσμα. Στις περιπτώσεις, όμως, που η αριθμητική γραμμή αναπαριστούσε ακέραιους αριθμούς μεγαλύτερους του 1, περιλάμβανε δηλαδή διαστήματα μεγαλύτερα του διαστήματος 0 ως 1, τότε η στρατηγική της διπλής μέτρησης οδηγούσε τους μαθητές σε λάθη. Οι μαθητές εφαρμόζοντας τη στρατηγική της διπλής μέτρησης σε αριθμητικές γραμμές που περιλάμβαναν ακέραιους αριθμούς επέλεγαν ως κλασματικούς αριθμούς μικρότερους της μονάδας, αριθμούς που στην πραγματικότητα ήταν μεγαλύτεροι της μονάδας.

Η αδυναμία εντοπισμού της μονάδας αναφοράς φάνηκε να είναι η αιτία η οποία οδηγεί αρκετές φορές τους μαθητές στην εφαρμογή ιδιοτήτων των ακέραιων αριθμών στις πράξεις με τους κλασματικούς αριθμούς. Με βάση τις συνεντεύξεις και τα πειράματα επικοινωνίας οι μαθητές οι οποίοι δυσκολεύονταν στην εύρεση της μονάδας αναφοράς εφάρμοζαν ιδιότητες των ακεραίων στην εύρεση ισοδύναμων κλασμάτων και στην πρόσθεση των ετερώνυμων κλασμάτων.

Η αριθμητική γραμμή συνέβαλε στην άρση παρανοήσεων και δυσκολιών που είχαν οι μαθητές αναφορικά με την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος και των πράξεων με κλάσματα, αφού η χρήση της είχε καταφέρει να επιφέρει γνωστική σύγκρουση σε μαθητές και κατ'επέκταση εννοιολογική αλλαγή, οι οποίοι είχαν αναπτύξει παρανοήσεις.

Συγκεκριμένα, κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων και μέσα από την αλληλεπίδραση με τον ερευνητή και τη χρήση της αριθμητικής γραμμής, μαθητές οι οποίοι είχαν αναπτύξει το επεξηγηματικό πλαίσιο του κλάσματος ως μέρος μιας ακέραιης μονάδας και εφάρμοζαν τη στρατηγική της διπλής μέτρησης, αναθεώρησαν τις απόψεις τους. Αντλώντας πληροφορίες από τις υποδιαιρέσεις της αριθμητικής γραμμής στο διάστημα 0 ως 1 και συνδυάζοντάς τις με το γεγονός ότι ο αριθμός 1 αναφέρεται στην ακέραιη μονάδα, όπου ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι ίσοι, οι μαθητές εντόπιζαν τον παρονομαστή του κλάσματος στο διάστημα 0 ως 1, ανεξάρτητα αν η αριθμητική γραμμή περιλάμβανε και μεγαλύτερα διαστήματα. Οι μαθητές που είχαν αναπτύξει το επεξηγηματικό πλαίσιο με βάση το οποίο το κλάσμα είναι μέρος μιας ακέραιης μονάδας, άρχισαν να αναπτύσσουν το επιστημονικά αποδεκτό επεξηγηματικό πλαίσιο, με βάση το οποίο το κλάσμα είναι αριθμός ο οποίος αντιπροσωπεύει τη σχέση ανάμεσα σε δύο αριθμούς.

Η οπτική βοήθεια που παρείχε σχετικά με την αναπαράσταση ισοδύναμων κλασμάτων οδήγησε τους μαθητές στο συμπέρασμα ότι μπορεί ο παρονομαστής και ο αριθμητής ενός κλάσματος να είναι μεγαλύτεροι από τον παρονομαστή και τον αριθμητή ενός άλλου κλάσματος, αλλά τα δύο κλάσματα δεν παύουν να είναι ισοδύναμα. Αυτό συμβαίνει λόγω του ότι οι υποδιαιρέσεις του κλάσματος με το μεγαλύτερο παρονομαστή είναι μικρότερες σε μήκος σε σχέση με τις υποδιαιρέσεις του κλάσματος με το μικρότερο παρονομαστή. Με τον τρόπο αυτό μαθητές, οι οποίοι θεωρούσαν το κλάσμα ως δύο ανεξάρτητους φυσικούς αριθμούς και ανέφεραν πως το ένα κλάσμα ήταν διπλάσιο ή τριπλάσιο από το άλλο κλάσμα, αναθεώρησαν τις απόψεις τους. Αναγνώρισαν τα κλάσματα ως ισοδύναμα, δηλαδή ως κλάσματα τα οποία αναφέρονται στην ίδια ποσότητα και αναπαρίστανται στην αριθμητική γραμμή ως ίσες αποστάσεις από το μηδέν.

Η αριθμητική γραμμή συνέβαλε στην άρση ακόμη μιας παρανόησης. Με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής φάνηκε ότι στην πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων μπορεί να γίνει πρόσθεση των αριθμητών, αλλά όχι των παρονομαστών, μια παρανόηση η οποία απορρέει από τις ιδιότητες των ακέραιων αριθμών. Επίσης, με τη χρήση των δύο αριθμητικών γραμμών, οι οποίες αναπαριστούσαν τον κάθε προσθετέο ξεχωριστά, λόγω των διαφορετικών υποδιαιρέσεων της κάθε αριθμητικής γραμμής, φάνηκε ότι στην πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων δεν μπορεί να εκτελεστεί η πράξη αν δεν μετατραπούν πρώτα τα ετερώνυμα κλάσματα σε ομώνυμα. Παρουσιάζεται, λοιπόν, η ανάγκη εύρεσης μιας κοινής υποδιαίρεσης με στόχο να αναπαρασταθούν και τα δύο κλάσματα στην ίδια γραμμή ώστε να εκτελεσθεί η πρόσθεση. Με τον τρόπο αυτό παρέχεται στους μαθητές απτή αιτιολόγηση της ανάγκης εύρεσης του ελάχιστου κοινού πολλαπλασίου με στόχο τη μετατροπή των ετερώνυμων σε ομώνυμα κλάσματα Τέλος, με τη βοήθεια της αριθμητικής γραμμής οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να δουν ότι τα νέα κλάσματα, που προκύπτουν, είναι ισοδύναμα των προηγούμενων κλασμάτων και όχι κλάσματα τα οποία δεν έχουν οποιαδήποτε σχέση με τα προηγούμενα.

Η χρήση, λοιπόν, της αριθμητικής γραμμής μέσα στα πλαίσια επικοινωνιακών καταστάσεων έδωσε την ευκαιρία στους μαθητές να υπερβούν τα επεξηγηματικά πλαίσια του κλάσματος ως δύο ανεξάρτητων φυσικών αριθμών και του κλάσματος ως μέρος μιας ακέραιης μονάδας και να αρχίσουν να αναπτύσσουν το επιστημονικά αποδεκτό επεξηγηματικό πλαίσιο, με βάση το οποίο το κλάσμα είναι αριθμός ο οποίος αντιπροσωπεύει τη σχέση ανάμεσα σε δύο αριθμούς.

Ο Ρόλος της Αριθμητικής Γραμμής στην Επίλυση Προβλήματος

Με βάση τα αποτελέσματα της έρευνας φάνηκε ότι δεν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές ανάμεσα στο μέσο όρο της επίδοσης των μαθητών, που χρησιμοποίησαν την αριθμητική γραμμή για την επίλυση των προβλημάτων και στο μέσο όρο της επίδοσης των μαθητών, που χρησιμοποίησαν τη συμβολική έκφραση (Πίνακας 11). Το αποτέλεσμα αυτό δεν ήταν αναμενόμενο, γιατί τα διδακτικά εγχειρίδια της πέμπτης τάξης δημοτικού δε δίνουν έμφαση στην αριθμητική γραμμή ως μέσο αναπαράστασης των κλασμάτων. Συνεπώς, οι μαθητές, που έλαβαν μέρος στην έρευνα, δεν είχαν ενασχοληθεί συστηματικά με την αριθμητική γραμμή ως μέσο αναπαράστασης κλασμάτων. Το αναμενόμενο αποτέλεσμα θα ήταν να υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές ανάμεσα στο μέσο όρο της επίδοσης των μαθητών, που χρησιμοποίησαν την αριθμητική γραμμή για την επίλυση των προβλημάτων και στο μέσο όρο της επίδοσης των μαθητών, που χρησιμοποίησαν την συμβολική έκφραση. Συγκεκριμένα, αναμενόταν ο μέσος όρος της επίδοσης των μαθητών, που χρησιμοποίησαν τη συμβολική έκφραση, να είναι ψηλότερος λόγω του ότι η αριθμητική γραμμή θα αποτελούσε επιπρόσθετο παράγοντα δυσκολίας, αφού το συγκεκριμένο μοντέλο δεν είναι αναπαράσταση, η οποία χρησιμοποιείται σε μεγάλο βαθμό στη διδασκαλία, γεγονός το οποίο το καθιστά δύσκολο προς χρήση.

Η απουσία στατιστικά σημαντικής διαφοράς ανάμεσα στο μέσο όρο της επίδοσης των μαθητών, που χρησιμοποίησαν την αριθμητική γραμμή για την επίλυση των προβλημάτων και στο μέσο όρο της επίδοσης των μαθητών, που χρησιμοποίησαν τη συμβολική έκφραση, δείχνουν ότι η αριθμητική γραμμή ως αναπαράσταση των κλασματικών αριθμών δεν αποτέλεσε κατ' ανάγκη επιπρόσθετο παράγοντα δυσκολίας αναφορικά με την επίλυση προβλημάτων, που περιλαμβάνουν κλασματικούς αριθμούς. Είναι πιθανόν η αριθμητική γραμμή να δυσκόλεψε κάποιους από τους μαθητές, αλλά και να διευκόλυνε κάποιους άλλους.

Στην περίπτωση που η χρήση της αριθμητικής γραμμής δυσκόλεψε τους μαθητές αυτό ίσως να οφείλεται σε συγκεκριμένες δυσκολίες που προκαλεί η χρήση του μοντέλου αυτού. Η έρευνα των Behr et al. (1983) εντόπισε δυσκολίες σχετικά με την αναγνώριση και αναπαράσταση των κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή: (α) δυσκολία αναγνώρισης της μονάδας στην αριθμητική γραμμή, (β) δυσκολίες που προκύπτουν όταν οι υποδιαιρέσεις στην αριθμητική γραμμή δεν ισούνται με τον παρονομαστή του κλάσματος – είναι πολλαπλάσια ή παράγοντες του παρονομαστή – και (γ) δυσκολίες που προκύπτουν όταν οι υποδιαιρέσεις της αριθμητικής γραμμής δεν είναι παράγοντες ή πολλαπλάσια του παρονομαστή του κλάσματος. Σε παρόμοια αποτελέσματα κατέληξε η έρευνα των Bright et al. (1988), η οποία έδειξε ότι οι διαφορές που παρουσιάζονται ανάμεσα στα είδη αναπαράστασης των ρητών αριθμών και στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής έχουν ως αποτέλεσμα οι μαθητές να δυσκολεύονται να αναπαραστήσουν ρητούς αριθμούς στην αριθμητική γραμμή. Τα διακριτά μοντέλα προσφέρουν οπτική βοήθεια στους μαθητές, αφού περιλαμβάνουν μετρήσιμα αντικείμενα. Η αριθμητική γραμμή, ως συνεχές μοντέλο, δεν προσφέρει τέτοια βοήθεια. Επίσης, οι Bright et al. απέδωσαν τη δυσκολία χρήσης της αριθμητικής γραμμής, ως αναπαράστασης των ρητών αριθμών, στην έλλειψη κατανόησης του μερισμού μιας μονάδας μέτρησης στην αριθμητική γραμμή. Με ανάλογο τρόπο, η έρευνα της Ni (2000) έδειξε ότι λόγω της έμφασης που δίνεται στην υποέννοια μέρος – όλο, οι μαθητές δυσκολεύονται και αποτυγχάνουν στην αναγνώριση και αναπαράσταση των κλασμάτων σε έργα τα οποία περιλαμβάνουν αριθμητικές γραμμές με διαστήματα πέραν του διαστήματος 0 ως 1. Είναι πολύ πιθανόν η χρήση της αριθμητικής γραμμής να αποτέλεσε επιπρόσθετο παράγοντα δυσκολίας για κάποιους μαθητές. Αυτό συμβαίνει λόγω του νοητικού φόρτου που προσθέτει η συγκεκριμένη αναπαράσταση στην επίλυση του προβλήματος, αφού περιλαμβάνει εξειδικευμένα κατασκευαστικά χαρακτηριστικά και συνδυάζει δύο είδη αναπαράστασης, τα σύμβολα και την εικόνα. Αυτό σημαίνει ότι η αριθμητική γραμμή απαιτεί το συνδυασμό δύο μορφών αναπαράστασης: οπτικής και συμβολικής. Η δυσκολία χρήσης της αριθμητικής γραμμής οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στο συνδυασμό της πληροφορίας, που περιέχεται σε αυτές τις δυο μορφές αναπαράστασης (Κολέζα, 2000).

Η άποψη αυτή συνδέεται με τη θεωρία για το φόρτο γνωστικής επεξεργασίας, την οποία προτείνει ο Sweller (1993) (αναφορά στο Boulton - Lewis, 1998), ο οποίος υποστηρίζει ότι έργα τα οποία προϋποθέτουν την εστίαση της προσοχής σε περισσότερες από μια πηγή πληροφοριών καθίστανται δύσκολα. Η θεωρία αυτή βρίσκει εφαρμογή στη διδασκαλία των ρητών αριθμών και γενικότερα στη μαθηματική παιδεία, αφού οι μαθητές δεν αποκομίζουν τα αναμενόμενα οφέλη, όταν οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται απαιτούν επιπρόσθετο φόρτο νοητικής επεξεργασίας. Ο φόρτος νοητικής επεξεργασίας αυξάνεται όταν η αναπαράσταση – στη συγκεκριμένη περίπτωση η αριθμητική γραμμή – είναι άγνωστη προς το μαθητή. Δημιουργούνται επιπρόσθετα εμπόδια στη μαθησιακή διαδικασία, με την έννοια ότι η δυσκολία στην κατανόηση του ρόλου που διαδραματίζει η αναπαράσταση, με την οποία οι μαθητές δεν είναι εξοικειωμένοι, έρχεται να προστεθεί στη δυσκολία που ήδη εμπερικλείει η κατανόηση της μαθηματικής έννοιας. Η συνέπεια για τη διδασκαλία είναι ότι οι μαθητές πρέπει να διδαχθούν τη χρήση του γεωμετρικού μοντέλου της αριθμητικής γραμμής, για να είναι σε θέση να το αξιοποιούν αποτελεσματικά (Ernest, 1985).

Στην περίπτωση που η αριθμητική γραμμή διευκόλυνε την επίλυση προβλήματος, αυτό ίσως να οφείλεται στο γεγονός ότι το συγκεκριμένο μοντέλο παρέχει οπτικοποίηση των δεδομένων των λεκτικών προβλημάτων και αναπαριστά τα κλάσματα και τις θεμελιώδεις ιδιότητές τους. Κατά συνέπεια η χρήση της αριθμητικής γραμμής, ως μέσου αναπαράστασης των ρητών αριθμών, βοηθά τους μαθητές στους υπολογισμούς, τις εφαρμογές και τις επεξηγήσεις αναφορικά με τους ρητούς αριθμούς (Ni, 2000).

Τα αποτελέσματα αυτά δείχνουν ότι η αριθμητική γραμμή μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη διδασκαλία ως ένα ακόμη μέσο αναπαράστασης των κλασματικών αριθμών, ιδιαίτερα όταν οι μαθητές έχουν εξοικειωθεί με τη χρήση της. Η αριθμητική γραμμή μπορεί να αποτελέσει ένα εναλλακτικό μέσο αναπαράστασης που, σύμφωνα με έρευνες, μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε συνδυασμό με τα άλλα μέσα αναπαράστασης της έννοιας του κλάσματος, όπως για παράδειγμα το εμβαδόν κύκλου και ορθογωνίου και να συμβάλει στην κατανόηση της έννοιας του κλάσματος και στην ανάπτυξη της τυπικής λογικής σκέψης αναφορικά με τα κλάσματα (Keijzer, & Terwel, 2000: Keijzer, & Terwel, 2001: Keijzer, 2003: Ni, 2000).

Αναφορικά με την ομάδα των υποκειμένων, που έλυσαν τα προβλήματα με όποιο τρόπο επιθυμούσαν, προέκυψε ότι ο μέσος όρος της επίδοσης των υποκειμένων που χρησιμοποίησαν τη συμβολική έκφραση, ήταν ψηλότερος σε σχέση με το μέσο όρο της επίδοσης των υποκειμένων της ίδιας ομάδας, τα οποία έλυσαν τα προβλήματα επιλέγοντας την αριθμητική γραμμή (Πίνακας 13). Η διαφορά των δύο μέσων όρων δεν ήταν στατιστικά σημαντική. Φαινομενικά, ο χαμηλός μέσος όρος της επίδοσης των υποκειμένων, που χρησιμοποίησαν την αριθμητική γραμμή, μπορεί να αποδοθεί στο γεγονός ότι δεν τη χρησιμοποιούσαν σωστά γι’αυτό και βαθμολογούνταν με 0. Το αποτέλεσμα αυτό, ωστόσο, ίσως και να οφείλεται στο γεγονός ότι οι περισσότεροι μαθητές προτίμησαν να μη χρησιμοποιήσουν την αριθμητική γραμμή, γι’ αυτό και ενώ βαθμολογούνταν με 1, αν έλυναν το πρόβλημα ορθά – για παράδειγμα με τη χρήση της σωστής εξίσωσης – βαθμολογούνταν με 0 αν δε χρησιμοποιούσαν την αριθμητική γραμμή.

Το αποτέλεσμα αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές δεν προτιμούν να χρησιμοποιούν την αριθμητική γραμμή για την επίλυση προβλημάτων. Το αποτέλεσμα αυτό είναι αναμενόμενο, αφού η αριθμητική γραμμή ως αναπαράσταση δε χρησιμοποιείται σε μεγάλο βαθμό στη διδασκαλία, γεγονός που την καθιστά δύσκολη προς χρήση.

Η προτίμηση των μαθητών προς τη συμβολική έκφραση ήταν αναμενόμενη λόγω του ότι η διδασκαλία δίνει έμφαση στην αλγοριθμική προσέγγιση των κλασμάτων και στη συμβολική έκφραση ως αναπαράσταση των κλασμάτων. Τα αποτελέσματα αυτά συμφωνούν με αποτελέσματα προηγούμενων ερευνών σύμφωνα με τα οποία η έμφαση της διδασκαλίας στη συμβολική έκφραση και στην αλγοριθμική προσέγγιση των κλασμάτων λειτουργεί σε βάρος της χρήσης των άλλων αναπαραστάσεων και προκαλεί δυσκολίες στις μεταφράσεις από τη μια αναπαράσταση της έννοιας του κλάσματος στην άλλη (Lesh, Behr, Post, 1987: Lesh, Post, & Behr, 1987: Moss, & Case, 1999).

Διδασκαλία και Αριθμητική Γραμμή

Προκειμένου να αξιολογηθεί η προσφορά και η καταλληλότητα της αριθμητικής γραμμής ως μοντέλου για την αναπαράσταση της έννοιας των κλασματικών αριθμών, οι μαθητές πρέπει να διδαχτούν τη χρήση του μοντέλου (Ernest, 1985).

Μέσα στα πλαίσια της πιο πάνω διαπίστωσης , οργανώθηκε παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας για τη χρήση της αριθμητικής γραμμής ως αναπαράστασης κλασματικών αριθμών και ως αναπαράστασης της ισοδυναμίας και πρόσθεσης κλασμάτων. Στόχος του παρεμβατικού προγράμματος ήταν να φανεί κατά πόσο η συστηματική διδασκαλία χρήσης της αριθμητικής γραμμής είχε θετική επίδραση στην επίδοση των μαθητών σε έργα που περιλάμβαναν την αναγνώριση κλασμάτων, την ικανότητα αναπαράστασης κλασμάτων, την ικανότητα μετάφρασης ανάμεσα στις αναπαραστάσεις της έννοιας και την αριθμητική γραμμή και τέλος την επίλυση προβλημάτων πρόσθεσης κλασμάτων.

Με βάση τα αποτελέσματα της παρούσας ερευνητικής εργασίας φάνηκε ότι οι μαθητές πέμπτης τάξης δημοτικού αντιμετώπιζαν δυσκολίες στα έργα αριθμητικής γραμμής. Ακολούθησε παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας, το οποίο έδωσε έμφαση (α) στην κατανόηση των δομικών χαρακτηριστικών της αριθμητικής γραμμής, (β) στην αριθμητική γραμμή ως αναπαράσταση της έννοιας του κλάσματος και των ιδιοτήτων της, (γ) στην αριθμητική γραμμή ως αναπαράσταση της ισοδυναμίας και πρόσθεσης κλασμάτων, (δ) στη σύγκριση της αριθμητικής γραμμής με άλλες αναπαραστάσεις κλασμάτων – εύρεση ομοιοτήτων, διαφορών – και (ε) στη μετάφραση από αριθμητική γραμμή σε άλλα είδη αναπαραστάσεων και αντίστροφα. Η εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος είχε ως αποτέλεσμα να βελτιωθεί η επίδοση των μαθητών της πειραματικής ομάδας σε όλα τα δοκίμια σε σύγκριση με την επίδοση των μαθητών της ομάδας ελέγχου (Πίνακας 14). Οι μαθητές της πειραματικής ομάδας είχαν ψηλότερη επίδοση τόσο στα διάφορα είδη μετάφρασης (Πίνακας 15) όσο και στα έργα που εξέταζαν διαφορετικά γνωστικά αντικείμενα (Πίνακας 16). Η διαφορά στους μέσους όρους των δύο ομάδων ήταν στατιστικά σημαντική.

Αναφορικά με την επίλυση προβλήματος (Πίνακας 17), τα υποκείμενα της ομάδας ελέγχου είχαν ψηλότερο μέσο όρο σε σχέση με τη διατύπωση της απάντησης σε σύγκριση με τα υποκείμενα της πειραματικής ομάδας. Αυτό ίσως να οφείλεται στο γεγονός ότι επειδή οι μαθητές της πειραματικής ομάδας είχαν κατασκευάσει την αριθμητική γραμμή και είχαν συμπληρώσει τα στοιχεία που έλειπαν, για να λύσουν το πρόβλημα, θεωρούσαν ότι είχαν διατυπώσει την απάντηση. Επιπρόσθετα, η επίδοση των μαθητών της ομάδας ελέγχου, οι οποίοι έλυσαν τα προβλήματα με τη χρήση εξίσωσης, ήταν ψηλότερη σε σχέση με την επίδοση των μαθητών της πειραματικής ομάδας, οι οποίοι επίσης έλυσαν τα προβλήματα με τη χρήση εξίσωσης. Τέλος, η επίδοση των μαθητών της πειραματικής ομάδας, που χρησιμοποίησαν την αριθμητική γραμμή για την επίλυση των προβλημάτων, ήταν ψηλότερη σε σχέση με την επίδοση των μαθητών της ομάδας ελέγχου, που χρησιμοποίησαν την αριθμητική γραμμή ως μέσο επίλυσης των προβλημάτων (Πίνακας 17).

Οι μαθητές της ομάδας ελέγχου παρακολούθησαν μαθήματα διδασκαλίας κλασμάτων σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα. Το γεγονός ότι η επίδοση των μαθητών της ομάδας ελέγχου ήταν χαμηλότερη σε σχέση με την επίδοση των μαθητών της πειραματικής ομάδας ίσως να οφείλεται στο ότι η σειρά μαθημάτων, που παρακολούθησαν οι μαθητές της ομάδας ελέγχου, περιλάμβανε την πρόωρη χρήση συμβολικών αναπαραστάσεων (σύμβολο κλάσματος, αλγόριθμοι) και έδινε έμφαση στην υποέννοια μέρος – όλο (παραδοσιακή διδασκαλία κλασμάτων) με αποτέλεσμα να αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην κατανόηση της έννοιας του κλάσματος.

Η επίδραση της διδακτικής παρέμβασης φάνηκε και από τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη Συνεπαγωγική Στατιστική Μέθοδο (Διάγραμμα Ομοιότητας). Πριν τη διδακτική παρέμβαση φάνηκε ότι στην ομάδα ελέγχου υπήρχε στεγανοποίηση των έργων με κριτήριο το είδος μετάφρασης τόσο για την πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων όσο και για την πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων (Διάγραμμα 23, Διάγραμμα 25). Επίσης, υπήρχε στεγανοποίηση των έργων με κριτήριο το είδος αναπαράστασης, όπως για παράδειγμα το εμβαδόν κύκλου και το ευθύγραμμο τμήμα (Διάγραμμα 17). Αναφορικά με την ικανότητα χειρισμού της έννοιας στο ίδιο πεδίο, τα έργα ομαδοποιήθηκαν με βάση το είδος του έργου – ομαδοποίηση των εύκολων έργων, ομαδοποίηση των έργων ανώτερου βαθμού δυσκολίας, που εξέταζαν την εύρεση νέας υποδιαίρεσης της αναπαράστασης – καθώς και με βάση το είδος της αναπαράστασης – αναπαράσταση στο ευθύγραμμο τμήμα

(Διάγραμμα 19). Τέλος, με βάση το Γενικό Συνεπαγωγικό Διάγραμμα (Διάγραμμα 27) φάνηκε ότι δεν υπήρχαν αρκετές συνδέσεις ανάμεσα στα έργα των διαφορετικών δοκιμίων γεγονός που δείχνει ότι τα έργα στεγανοποιήθηκαν με βάση το γνωστικό αντικείμενο. Οι περισσότερες συνδέσεις παρουσιάστηκαν ανάμεσα στα έργα του ίδιου δοκιμίου – συνεπαγωγικές σχέσεις ανάμεσα στα έργα πρόσθεσης, συνεπαγωγικές σχέσεις ανάμεσα στα έργα αναγνώρισης και χειρισμού της έννοιας στο ίδιο πεδίο. Η στεγανοποίηση, που προέκυψε, έδειξε ότι οι γνώσεις των μαθητών της ομάδας ελέγχου ήταν τμηματικές, ασύνδετες και δεν συνιστούσαν ενιαίο σύνολο.

Με την πάροδο των δύο μηνών και την παρακολούθηση μαθημάτων, όπως προβλέπεται στο αναλυτικό πρόγραμμα, παρατηρήθηκε και πάλι στεγανοποίηση στα έργα που συμπλήρωσαν οι μαθητές της ομάδας ελέγχου. Τα έργα που εξέταζαν την ισοδυναμία κλασμάτων, την πρόσθεση ομώνυμων και ετερώνυμων κλασμάτων είχαν στεγανοποιηθεί με κριτήριο το είδος μετάφρασης (Διαγράμμα 33, Διάγραμμα 35, Διάγραμμα 37). Επίσης, τα έργα που εξέταζαν την ικανότητα αναπαράστασης στεγανοποιήθηκαν με βάση το είδος της αναπαράστασης, αφού δημιουργήθηκαν περιοχές έργων, που αποτελούνταν αποκλειστικά από γραμμικές αναπαραστάσεις – ευθύγραμμο τμήμα, αριθμητική γραμμή – και από αναπαραστάσεις εμβαδού – κύκλος (Διάγραμμα 31). Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι τα έργα αναπαράστασης στεγανοποιούνται με διαφορετικό τρόπο από ότι είχαν ομαδοποιηθεί πριν την επαναχορήγηση των δοκιμίων. Ενώ πριν είχαν ομαδοποιηθεί με βάση το βαθμό δυσκολίας του έργου, τώρα ομαδοποιούνται με βάση το είδος της αναπαράστασης, γεγονός που καταδεικνύει τη συμβολή της παραδοσιακής διδασκαλίας των κλασμάτων στη στεγανοποίηση των ειδών αναπαράστασης, ακόμη και όταν αποτελούν διαφορετικούς τρόπους έκφρασης της ίδιας έννοιας. Επίσης, ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι τα έργα ισοδυναμίας στεγανοποιούνται με κριτήριο το είδος μετάφρασης, κάτι το οποίο δεν είχε συμβεί πριν την επαναχορήγηση των δοκιμίων. Τέλος, με βάση το Γενικό Συνεπαγωγικό Διάγραμμα Έργων των Δοκιμίων Α, Β και Γ (Διάγραμμα 39) φάνηκε ότι και πάλι, μετά την πάροδο των δύο μηνών, τα έργα στεγανοποιήθηκαν με βάση το γνωστικό αντικείμενο το οποίο εξέταζαν. Συγκεκριμένα, παρατηρούνται συνεπαγωγικές σχέσεις ανάμεσα στα έργα του ίδιου δοκιμίου – Δοκίμιο Γ: Έργα πρόσθεσης κλασμάτων, Δοκίμιο Α: Έργα χειρισμού της έννοιας στο ίδιο πεδίο. Σε σύγκριση με το Συνεπαγωγικό Διάγραμμα (Διάγραμμα 27), που αφορούσε στα ίδια έργα και στην πρώτη χορήγηση των δοκιμίων, φάνηκε ότι στο Συνεπαγωγικό Διάγραμμα (Διάγραμμα 39), που αφορά τη δεύτερη χορήγηση, λιγότερα έργα συμμετέχουν στις συνεπαγωγικές αλυσίδες. Με βάση τα πιο πάνω αποτελέσματα φάνηκε ότι μετά την παρακολούθηση μαθημάτων, όπως προνοούνται από το αναλυτικό πρόγραμμα και την εφαρμογή της παραδοσιακής διδασκαλίας των κλασμάτων, οι γνώσεις των μαθητών της ομάδας ελέγχου παρέμειναν αποσπασματικές. Επιπλέον η παρακολούθηση μαθημάτων παραδοσιακής διδασκαλίας είχε ως αποτέλεσμα να προκύψει και η στεγανοποίηση των έργων αναπαράστασης με κριτήριο το είδος αναπαράστασης και η στεγανοποίηση των έργων ισοδυναμίας με κριτήριο το είδος μετάφρασης.

Όσον αφορά στην πειραματική ομάδα, φάνηκε ότι δεν υπήρχε στεγανοποίηση με βάση οποιοδήποτε κριτήριο κατά την πρώτη χορήγηση των δοκιμίων (Διάγραμμα 20, Διάγραμμα 22, Διάγραμμα 24, Διάγραμμα 26). Εξαίρεση αποτελούν τα έργα αναπαράστασης, όπου παρουσιάστηκε μερική στεγανοποίηση, ανάλογα με το βαθμό δυσκολίας του έργου – αναπαράσταση ενός κλάσματος σε εμβαδόν κύκλου ή σε ευθύγραμμο τμήμα, των οποίων οι υποδιαιρέσεις είναι οι διπλάσιες ή οι μισές του παρονομαστή του δοσμένου κλάσματος – καθώς και στεγανοποίηση με βάση το είδος αναπαράστασης – ευθύγραμμο τμήμα (Διάγραμμα 20). Στο Γενικό Συνεπαγωγικό

Διάγραμμα Έργων των Δοκιμίων Α, Β και Γ (Διάγραμμα 28) φάνηκε ότι δεν υπάρχουν καθόλου συνδέσεις ανάμεσα στα έργα των τριών δοκιμίων. Οι περισσότερες συνδέσεις παρουσιάζονται ανάμεσα στα έργα του ίδιου δοκιμίου – συνεπαγωγικές σχέσεις ανάμεσα στα έργα πρόσθεσης, συνεπαγωγικές σχέσεις ανάμεσα στα έργα αναπαράστασης. Παρατηρήθηκε, δηλαδή, στεγανοποίηση με βάση το γνωστικό αντικείμενο. Η στεγανοποίηση που παρατηρήθηκε στην πειραματική ομάδα δεν ήταν τόσο έντονη σε σύγκριση με τη στεγανοποίηση που παρατηρήθηκε στην ομάδα ελέγχου. Το γεγονός αυτό αποτελεί ένδειξη ότι οι μαθητές της πειραματικής ομάδας, είχαν οικοδομήσει συνδέσεις ανάμεσα στις γνώσεις που είχαν για τα κλάσματα.

Σε αντίθεση με την ομάδα ελέγχου, μετά την εφαρμογή της διδακτικής παρέμβασης, στην πειραματική ομάδα δεν παρατηρήθηκε στεγανοποίηση με βάση οποιοδήποτε κριτήριο (Διάγραμμα 30, Διάγραμμα 34, Διάγραμμα 36, Διάγραμμα 38). Μόνη εξαίρεση αποτελούν τα έργα αναπαράστασης, όπου παρουσιάστηκε κάποια στεγανοποίηση με βάση το είδος αναπαράστασης – ευθύγραμμο τμήμα (Διάγραμμα 32). Τέλος, με βάση το Γενικό Συνεπαγωγικό Διάγραμμα Έργων των Δοκιμίων Α, Β και Γ (Διάγραμμα 40) φάνηκε ότι τα έργα στεγανοποιήθηκαν σε μικρότερο βαθμό με βάση το γνωστικό αντικείμενο το οποίο εξέταζαν. Παρατηρούνται συνεπαγωγικές σχέσεις ανάμεσα στα έργα του ίδιου δοκιμίου – Δοκίμιο Γ: Έργα πρόσθεσης κλασμάτων, Δοκίμιο Α: Έργα αναπαράστασης. Ωστόσο, παρατηρούνται και συνεπαγωγικές σχέσεις ανάμεσα σε έργα που ανήκουν σε διαφορετικά δοκίμια, όπως για παράδειγμα σχέσεις ανάμεσα σε έργα ισοδυναμίας και σε έργα πρόσθεσης κλασμάτων, καθώς και ανάμεσα σε έργα ισοδυναμίας και σε έργα αναπαράστασης. Με βάση τα αποτελέσματα, που προέκυψαν από τη δεύτερη χορήγηση των δοκιμίων (Διάγραμμα 40), φάνηκε ότι στις συνεπαγωγικές αλυσίδες συμμετέχουν περισσότερα έργα και παρουσιάζονται συνεπαγωγικές σχέσεις ανάμεσα σε έργα που ανήκουν σε διαφορετικά δοκίμια σε αντίθεση με τα αποτελέσματα, που προέκυψαν από την πρώτη χορήγηση των δοκιμίων (Διάγραμμα 28).

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα φάνηκε ότι μετά το παρεμβατικό πρόγραμμα διατηρήθηκαν οι υπάρχουσες συνδέσεις ανάμεσα στα διάφορα είδη έργων και δημιουργήθηκαν περισσότερες συνδέσεις ανάμεσα στα έργα των διαφορετικών δοκιμίων, δηλαδή ανάμεσα στα έργα που εξέταζαν διαφορετικά γνωστικά αντικείμενα αναφορικά με την έννοια του κλάσματος. Φάνηκε, λοιπόν, ότι οι μαθητές, με τη βοήθεια της διδασκαλίας, έχουν αναπτύξει την ικανότητα χρήσης της αριθμητικής γραμμής ως αναπαράστασης των κλασμάτων και ως μέσου ανάπτυξης του επιστημονικά αποδεκτού επεξηγηματικού πλαισίου, με βάση το οποίο το κλάσμα είναι αριθμός ο οποίος αντιπροσωπεύει τη σχέση ανάμεσα σε δύο αριθμούς.

Τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας, που αφορούν στη διδακτική παρέμβαση, συμφωνούν σε μεγάλο βαθμό με τα αποτελέσματα ερευνών στις οποίες εφαρμόστηκε διδακτική παρέμβαση (Keijzer, & Terwel, 2000: Keijzer, & Terwel, 2001, Keijzer, 2003: Novillis – Larson, 2000). Η εφαρμογή παρεμβατικών προγραμμάτων, τα οποία επικεντρώνονταν στη χρήση της αριθμητικής γραμμής, ως αναπαράστασης των κλασμάτων, είχε ως αποτέλεσμα τη βαθύτερη κατανόηση της έννοιας του κλάσματος, τη βελτίωση της ικανότητας εκτέλεσης πράξεων με κλάσματα και γενικά την κατανόηση της τυπικής γνώσης των κλασμάτων. Η επίδοση των μαθητών, που ανήκαν στις πειραματικές ομάδες, ήταν ψηλότερη σε σχέση με την επίδοση των μαθητών, που ανήκαν στις ομάδες ελέγχου και διδάσκονταν τα κλάσματα με τον παραδοσιακό τρόπο: έμφαση στο εμβαδόν κύκλου, στην υποέννοια μέρος – όλο και στη συμβολική έκφραση.

Η επιτυχία των μαθητών, που λάμβαναν μέρος σε τέτοια προγράμματα, οφείλεται στο γεγονός ότι η εφαρμογή και η οργάνωση ενός παρεμβατικού προγράμματος, το οποίο δίνει έμφαση στην αριθμητική γραμμή ως αναπαράσταση των κλασματικών αριθμών, διεξάγεται στα πλαίσια της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Παιδείας. Με βάση τις αρχές της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Παιδείας οι μαθητές οικοδομούν και κατανοούν μαθηματικές έννοιες μέσα από δραστηριότητες που έχουν νόημα γι'αυτούς. Εξάλλου, η ενασχόληση με τα μαθηματικά προέκυψε λόγω της ανάγκης αντιμετώπισης πρακτικών προβλημάτων και αργότερα τα μαθηματικά αναπτύχθηκαν ως ένα τυποποιημένο και αφηρημένο σύστημα (Keijzer, 2003). Ένα τέτοιο πρακτικό πρόβλημα αποτέλεσαν και οι ακριβείς μετρήσεις μη διακριτών ποσοτήτων, όπως ο χρόνος, το μήκος, ο όγκος κτλ. Έτσι, ενώ η ανάγκη για τη χρήση των φυσικών αριθμών προέκυψε από την ανάγκη για μέτρηση διακριτών συνόλων, η ανάγκη για ολοένα και περισσότερο ακριβείς μετρήσεις των συνεχών ποσοτήτων – μήκος, χρόνος, όγκος – οδήγησε στη χρήση των κλασμάτων Laszló (2003).

Η χρήση της αριθμητικής γραμμής, λοιπόν, ως μοντέλου των κλασματικών αριθμών μπορεί, μέσα στα πλαίσια ενός παρεμβατικού προγράμματος, να εμπλέξει τους μαθητές σε δραστηριότητες μέτρησης μεγεθών και επίλυσης προβληματικών καταστάσεων της καθημερινής ζωής – αυθεντικά μαθηματικά. Μέσα από την εμπλοκή σε τέτοιου είδους δραστηριότητες οι μαθητές χρησιμοποιούν την αριθμητική γραμμή για την αναπαράσταση κλασμάτων, αλλά και για την αναπαράσταση ισοδύναμων κλασμάτων κάτι το οποίο αποτελεί τη βάση των πράξεων με κλάσματα. Κατά συνέπεια, η διδασκαλία κλασμάτων, μέσα στα πλαίσια ενός τέτοιου προγράμματος, αποτελεί ένα τυπικό παράδειγμα διαδικασίας μαθηματικοποίησης, αφού ξεκινώντας από καταστάσεις και προβλήματα, που έχουν νόημα για τους μαθητές, προχωρεί σε διαδικασίες, που προάγουν τη μοντελοποίηση, το συμβολισμό, τη γενίκευση, την αφαίρεση και την τυποποίηση (Keijzer, 2003).

Η διδασκαλία των κλασμάτων ως διαδικασία μαθηματικοποίησης ενισχύεται με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής, γιατί η αριθμητικη γραμμή μπορεί να αποτελέσει μοντέλο διατύπωσης και επικύρωσης όπως τα περιγράφει ο Brousseau

(1983: 1985) (αναφορά στο Gagatsis & Patronis, 1990). Η διαδικασία αυτή μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές από την ενορατική σκέψη στην ανάπτυξη της αναστοχαστικής σκέψης. Ως μοντέλο διατύπωσης, η αριθμητική γραμμή χαρακτηρίζεται από τη χρήση της γλώσσας που χρησιμοποιείται για να περιγράψει νέες πληροφορίες για τα κλάσματα. Οι πληροφορίες αυτές προκύπτουν από την ερμηνεία της αριθμητικής γραμμής και των γεωμετρικών στοιχείων που την αποτελούν. Η γλώσσα χρησιμοποιείται για να περιγράψει τα γεωμετρικά στοιχεία που αποτελούν την αριθμητική γραμμή, δηλαδή την ευθεία, τα βέλη, τα σημεία και τα διαστήματα, τις σχέσεις μεταξύ των στοιχείων αυτών και την αντιστοίχησή τους με τα κλάσματα και τις ιδιότητές τους. Με αυτό τον τρόπο η γλώσσα αποτελεί το μέσο που «μεταφέρει» τις πληροφορίες, που παρέχει το μοντέλο, στο σύστημα των ρητών αριθμών, συνδέοντας έτσι την ενορατική σκέψη με την αναστοχαστική σκέψη για τα κλάσματα. Ως μοντέλο επικύρωσης, η αριθμητική γραμμή μπορεί να επικυρώσει τις γνώσεις των μαθητών αναφορικά με τα κλάσματα και τις ιδιότητές τους.

Η χρήση ενός γεωμετρικού μοντέλου, όπως είναι η αριθμητική γραμμή, παράλληλα με άλλα συστήματα αναπαράστασης, μπορεί να έχει θετικά αποτελέσματα στη διδασκαλία των ρητών αριθμών. Οι Adjiage και Pluvinage (2000) υποστηρίζουν ότι η χρήση ενός γεωμετρικού συστήματος για την αναπαράσταση των ρητών αριθμών ενδείκνυται για τρεις κυρίως λόγους:

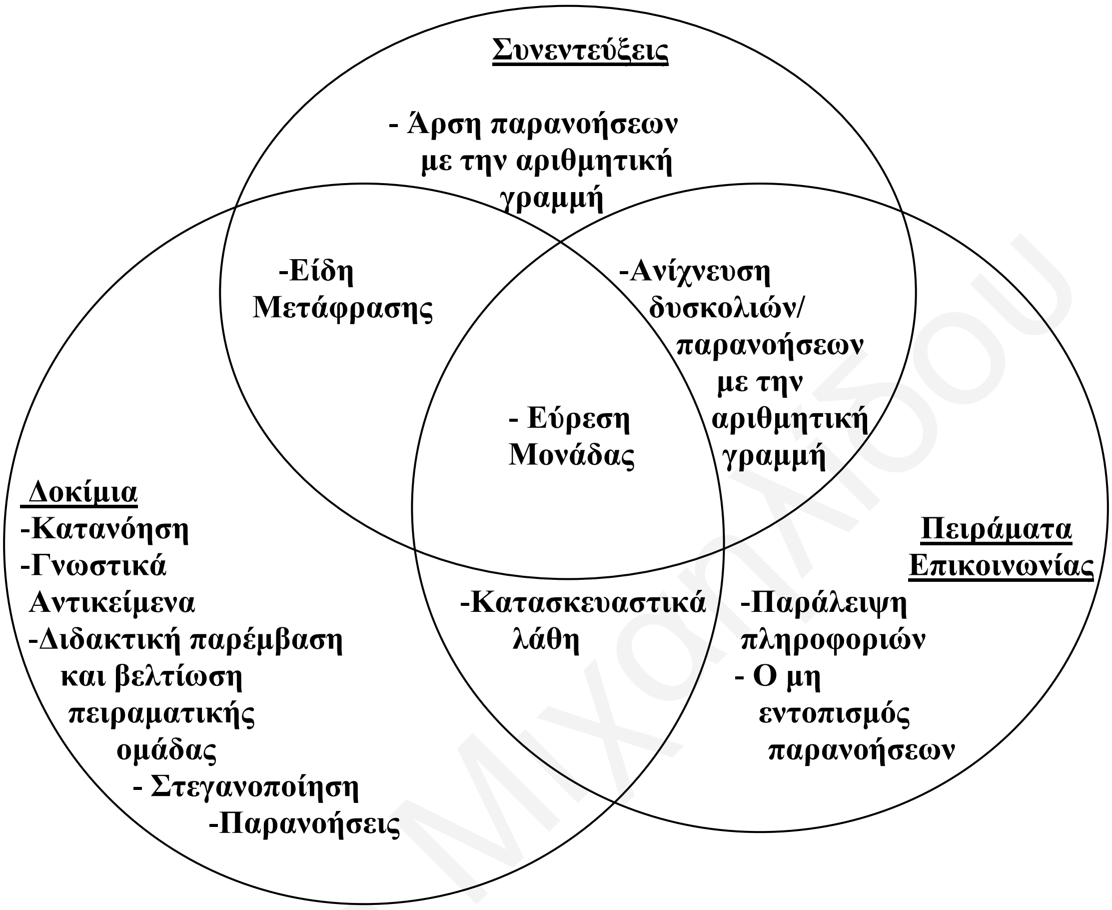
(α) Ένα γεωμετρικό σύστημα επιτρέπει τη σύνδεση των βασικών πράξεων των ρητών αριθμών – σύγκριση, ισοδυναμία – με την διαδικασία υποδιαίρεσης ενός διαστήματος, η οποία σύμφωνα με τον Ευκλείδη, αποτελεί θεμελιώδη πράξη που συνδέεται με τους ρητούς αριθμούς.

(β) Ένα γεωμετρικό σύστημα προσφέρει τη δυνατότητα συσχέτισης του ρητού αρχικά με μια πράξη και αργότερα με ένα μέτρο. Για παράδειγμα, δύο ευθύγραμμα τμήματα ή διαστήματα, τα οποία δεν έχουν το ίδιο μήκος, αλλά αναπαριστούν τον αριθμό ¾, έχουν ισότητα λόγου. Εφόσον, τα δύο ευθύγραμμα τμήματα ή διαστήματα δεν έχουν το ίδιο μήκος, το κριτήριο ισότητας εντοπίζεται στην ακολουθία των πράξεων. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, η ακολουθία των πράξεων έχει ως εξής: Υποδιαίρεση του ευθύγραμμου τμήματος σε τέσσερα ίσα διαστήματα και επιλογή τριών από αυτά. Με τον τρόπο αυτό το γεωμετρικό σύστημα δείχνει το σχηματισμό των ρητών αριθμών στο συγκεκριμένο σύστημα.

(γ) Ένα γεωμετρικό σύστημα είναι ετερογενές ως προς ένα αριθμητικό σύστημα, αφού πρόκειται για έννοια που προέρχεται από τη γεωμετρία και χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει έννοιες της αριθμητικής. Η αντιστοίχηση των ιδιοτήτων ενός τέτοιου συστήματος με τις ιδιότητες ενός αριθμητικού συστήματος καθιστά το γεωμετρικό σύστημα ως μια αναπαράσταση μεγάλης επεξηγηματικής αξίας.

Αναφορικά, λοιπόν, με τις προεκτάσεις στη διδασκαλία του κλάσματος ο Laszló (2003) αναφέρει ότι η εισαγωγή της έννοιας του κλάσματος στο σχολείο πρέπει να περιλαμβάνει την υποέννοια μέτρο και τη χρήση της αριθμητικής γραμμής ως μέσο αναπαράστασής της και όχι να δίνει αποκλειστικά έμφαση στην υποέννοια μέρος – όλο και στη διπλή μέτρηση για την εύρεση του αριθμητή και του παρονομαστή.

Συνεκτιμώντας τα αποτελέσματα όπως αυτά προέκυψαν από τα διαφορετικά μέσα συλλογής δεδομένων, φάνηκε ότι η χρήση διαφορετικών μέσων συλλογής δεδομένων έχει οδηγήσει σε κοινά ευρήματα και διαπιστώσεις, κάτι το οποίο ενισχύει την εγκυρότητά τους, αλλά και σε ευρήματα που προέκυψαν αποκλειστικά από τη χρήση ενός μέσου συλλογής δεδομένων. Στο Διάγραμμα 45 παρουσιάζονται τα διαφορετικά μέσα συλλογής δεδομένων και τα ευρήματα στα οποία έχουν καταλήξει. Συγκεκριμένα, τα δοκίμια έχουν συμβάλει στην διερεύνηση της κατανόησης των μαθητών αναφορικά με την έννοια του κλάσματος, του βαθμού δυσκολίας των γνωστικών αντικειμένων, της στεγανοποίησης των έργων και της επίδρασης της διδακτικής παρέμβασης στην επίδοση της πειραματικής ομάδας, καθώς και στον εντοπισμό παρανοήσεων αναφορικά με την έννοια του κλάσματος και τη χρήση της αριθμητικής γραμμής. Μέσα από τις συνεντεύξεις φάνηκε ότι με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής μπορούν να αρθούν παρανοήσεις που έχουν αναπτύξει οι μαθητές σχετικά με την έννοια του κλάσματος. Τα πειράματα επικοινωνίας έδειξαν ότι οι μαθητές παραλείπουν πληροφορίες και δεν εντοπίζουν παρανοήσεις των συμμαθητών τους κατά τη διάρκεια της αλληλεπίδρασης με αυτούς. Τόσο τα δοκίμια όσο και οι συνεντεύξεις έδειξαν ότι υπάρχουν ήδη μετάφρασης δυσκολότερα από τα άλλα. Στα πλαίσια της διεξαγωγής των συνεντεύξεων και των πειραμάτων επικοινωνίας φάνηκε ότι η χρήση της αριθμητικής γραμμής μπορεί να συμβάλει στην ανίχνευση παρανοήσεων και δυσκολιών που έχουν αναπτύξει οι μαθητές αναφορικά με την έννοια του κλάσματος. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τα δοκίμια και τα πειράματα επικοινωνίας έδειξαν ότι οι μαθητές υποπίπτουν σε κατασκευαστικά λάθη στην προσπάθειά τους να κατασκευάσουν αριθμητικές γραμμές, τα οποία οφείλονται στην έλλειψη διδασκαλίας της αριθμητικής γραμμής ως αναπαράστασης των κλασμάτων. Τέλος, τα αποτελέσματα, στα οποία έχουν καταλήξει όλα τα μέσα συλλογής δεδομένων οδηγούν στην κοινή διαπίστωση ότι οι μαθητές δεν έχουν οικοδομήσει την έννοια της μονάδας. Οι μαθητές έχουν αναπτύξει το επεξηγηματικό πλαίσιο του κλάσματος με βάση το οποίο θεωρούν το κλάσμα ως δύο ανεξάρτητους φυσικούς αριθμούς και το επεξηγηματικό πλαίσιο του κλάσματος με βάση το οποίο θεωρούν το κλάσμα ως μέρος μιας ακέραιης μονάδας. Δεν έχουν αναπτύξει το επιστημονικά αποδεκτό επεξηγηματικό πλαίσιο, με βάση το οποίο το κλάσμα είναι αριθμός ο οποίος αντιπροσωπεύει τη σχέση ανάμεσα σε δύο αριθμούς (Διάγραμμα 45).



Διάγραμμα 45. Ευρήματα που Προέκυψαν με τη Χρήση Διαφορετικών Μέσων Συλλογής Δεδομένων.

Συνοψίζοντας, τα συμπεράσματα στα οποία έχει καταλήξει η παρούσα έρευνα μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε συμπεράσματα τα οποία έχουν ήδη προκύψει και περιληφθεί σε προηγούμενες ερευνητικές εργασίες, αλλά και σε συμπεράσματα τα οποία αποτελούν τα καινούρια στοιχεία της παρούσας ερευνητικής εργασίας.

Τα συμπεράσματα στα οποία έχουν καταλήξει και άλλες έρευνες περιλαμβάνουν τα πιο κάτω:

1. Η έλλειψη κατανόησης των κλασμάτων από τους μαθητές φαίνεται από τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν στην αναγνώριση της έννοιας σε ποικιλία

αναπαραστάσεων, στο χειρισμό της έννοιας στο ίδιο πεδίο και στη μετάφραση από μια αναπαράσταση της έννοιας σε άλλη (Lesh, Post, & Behr, 1987).

2. Παρατηρήθηκε η διαφοροποίηση της επίδοσης των μαθητών ανάλογα με το είδος μετάφρασης, γεγονός το οποίο δείχνει ότι υπάρχουν είδη μετάφρασης τα οποία είναι δυσκολότερα από άλλα (Lesh, Post, & Behr, 1987).

3. Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές αναφορικά με την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος μπορούν να εντοπισθούν σε έργα μετάφρασης από τη μια αναπαράσταση της έννοιας του κλάσματος σε άλλη (Janvier, 1987).

4. Παρατηρήθηκε διαφοροποίηση της επίδοσης των μαθητών ανάλογα με το γνωστικό αντικείμενο, γεγονός το οποίο δείχνει ότι υπάρχουν γνωστικά αντικείμενα, όπως η πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων, τα οποία είναι ευκολότερα από άλλα, όπως είναι η ισοδυναμία κλασμάτων και η πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων (Kamii & Clark, 1995).

5. Παρατηρήθηκε η έλλειψη συνδέσεων ανάμεσα στην εννοιολογική και διαδικαστική γνώση των κλασματικών αριθμών, γεγονός το οποίο αποτελεί ένδειξη της αποσπασματικότητας των γνώσεων των μαθητών (Philippou & Christou, 1994).

6. Η επίδραση της υποέννοιας μέρος – όλο φάνηκε να είναι κυρίαρχη στη σκέψη των μαθητών αναφορικά με την κατανόηση των κλασματικών αριθμών (Lesh, Post, & Behr, 1987: Ni, 2000).

7. Οι μαθητές εφαρμόζουν ιδιότητες των ακέραιων αριθμών στις πράξεις με τους κλασματικούς αριθμούς (Moss & Case, 1999).

8. Η έμφαση της διδασκαλίας στην υποέννοια μέρος - όλο και στη συμβολική έκφραση έχει ως αποτέλεσμα τη μη ολοκληρωμένη κατανόηση της έννοιας του κλάσματος (Moss & Case, 1999).

9. Αρκετοί μαθητές έχουν αναπτύξει, λοιπόν, ένα αρχικό επεξηγηματικό πλαίσιο το οποίο στηρίζεται στους φυσικούς αριθμούς και με βάση το οποίο το

κλάσμα είναι στην ουσία δύο ανεξάρτητοι αριθμοί –ερμηνεία του συμβόλου ως δύο ανεξάρτητων αριθμών. Επίσης, αρκετοί μαθητές έχουν αναπτύξει ένα επεξηγηματικό πλαίσιο το οποίο αναφέρεται στο κλάσμα ως μέρος μιας ακέραιης μονάδας – σχέση μέρους με όλο. Οι μαθητές δεν έχουν αναπτύξει, όμως, το επεξηγηματικό πλαίσιο με βάση το οποίο το κλάσμα αντιμετωπίζεται ως αριθμός, ο οποίος αφορά τη σχέση του αριθμητή και του παρονομαστή (Σταφυλίδου & Βοσνιάδου, 2002).

10. Η εφαρμογή διδακτικών προγραμμάτων τα οποία δίνουν έμφαση στη χρήση της αριθμητικής γραμμής έχει θετικά αποτελέσματα στην κατανόηση της έννοιας του κλάσματος και στις πράξεις με κλάσματα (Keijzer, & Terwel, 2000: Keijzer, & Terwel, 2001, Keijzer, 2003: Novillis – Larson, 2000).

11. Η χρήση της αριθμητικής γραμμής βοηθά στον εντοπισμό παρανοήσεων των μαθητών αναφορικά με την έννοια του κλάσματος και τη μονάδα αναφοράς (Ni, 2000).

12. Η χρήση της αριθμητικής γραμμής συμβάλει στην κατανόηση της έννοιας του κλάσματος και στις πράξεις με κλάσματα (Keijzer, & Terwel, 2000: Keijzer, & Terwel, 2001: Ni, 2000).

Τα καινούρια στοιχεία της παρούσας εργασίας συνοψίζονται πιο κάτω:

1. Η εφαρμογή της έννοιας του γεωμετρικού μοντέλου στην αριθμητική γραμμή για την αναπαράσταση των ρητών αριθμών.

2. Η στεγανοποίηση των έργων ως μια νέα ένδειξη της έλλειψης κατανόησης. Παρατηρήθηκε στεγανοποίηση των έργων με κριτήριο το είδος αναπαράστασης, το είδος μετάφρασης και το είδος του γνωστικού αντικειμένου. Η απουσία συνεπαγωγικών σχέσεων ανάμεσα στα έργα είναι ένδειξη της αποσπασματικότητας των γνώσεων των μαθητών.

3. Παρατηρήθηκε στεγανοποίηση στην ομάδα ελέγχου τόσο κατά την πρώτη όσο και κατά τη δεύτερη χορήγηση των δοκιμίων. Το γεγονός αυτό αποτελεί

ένδειξη για το ρόλο που διαδραματίζει η διδασκαλία στην αποσπασματικότητα των γνώσεων των μαθητών αναφορικά με την έννοια του κλάσματος.

4. Η εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος είχε ως αποτέλεσμα να αρθεί η στεγανοποίηση των έργων με βάση το γνωστικό αντικείμενο, για τους μαθητές της πειραματικής ομάδας.

5. Η επίδοση στα είδη μετάφρασης διαφοροποιείται ανάλογα με το γνωστικό αντικείμενο το οποίο εξετάζουν τα συγκεκριμένα έργα.

6. Η χρήση του μοντέλου της αριθμητικής γραμμής είχε ως αποτέλεσμα την άρση παρανοήσεων που είχαν οι μαθητές αναφορικά με την έννοια του κλάσματος και την εύρεση της μονάδας.

7. Η αριθμητική γραμμή δεν αποτελεί επιπρόσθετο παράγοντα δυσκολίας στην επίλυση προβλημάτων πρόσθεσης κλασμάτων.

Στον πίνακα που ακολουθεί (Πίνακας 19) παρουσιάζονται τα ευρήματα της παρούσας εργασίας με συνοπτικό τρόπο. Τα ευρήματα έχουν κατηγοριοποιηθεί σε αυτά που επαληθεύουν ευρήματα προηγούμενων ερευνών, αλλά και σε ευρήματα που έχουν προκύψει για πρώτη φορά, γι’αυτό και καθιστούν την παρούσα ερευνητική εργασία πρωτότυπη, τόσο σε θεωρητικό όσο και πειραματικό επίπεδο.

Πίνακας 19

Τα Ευρήματα της Παρούσας Ερευνητικής Εργασίας

Ευρήματα που επαληθεύουν ευρήματα προηγούμενων ερευνών	**Ευρήματα που έχουν προκύψει για πρώτη φορά στα πλαίσια της παρούσας ερευνητικής εργασίας**	
	Θεωρητικά	**Πειραματικά**
1.Η έλλειψη κατανόησης των κλασμάτων από τους μαθητές. 2.Η διαφοροποίηση της επίδοσης των μαθητών ανάλογα με το είδος μετάφρασης. 3. Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές αναφορικά με την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος μπορούν να εντοπισθούν σε έργα μετάφρασης.. 4. Η διαφοροποίηση της επίδοσης των μαθητών ανάλογα με το γνωστικό αντικείμενο (αναγνώριση, ισοδυναμία, πρόσθεση ομώνυμων και ετερώνυμων κλασμάτων). 5. Η έλλειψη συνδέσεων ανάμεσα στην εννοιολογική και διαδικαστική γνώση των κλασματικών αριθμών. 6.Η επίδραση της υποέννοιας μέρος – όλο φάνηκε να είναι κυρίαρχη στη σκέψη των μαθητών. 7.Οι μαθητές εφαρμόζουν ιδιότητες των ακέραιων αριθμών στις πράξεις με τους κλασματικούς αριθμούς 8.Η έμφαση της διδασκαλίας στην υποέννοια μέρος - όλο και στη συμβολική έκφραση έχει ως αποτέλεσμα τη μη ολοκληρωμένη κατανόηση της έννοιας του κλάσματος. 9. Ύπαρξη επεξηγηματικού πλαισίου με βάση το οποίο το κλάσμα είναι στην ουσία δύο ανεξάρτητοι αριθμοί –ερμηνεία του συμβόλου ως δύο ανεξάρτητων αριθμών. Ύπαρξη ενός επεξηγηματικού πλαισίου το οποίο αναφέρεται στο κλάσμα ως μέρος μιας ακέραιης μονάδας – σχέση μέρους με όλο. Οι μαθητές δεν έχουν αναπτύξει, όμως, το επεξηγηματικό πλαίσιο με βάση το οποίο το κλάσμα αντιμετωπίζεται ως αριθμός, ο οποίος αφορά τη σχέση του αριθμητή και του παρονομαστή. 10.Η εφαρμογή διδακτικών προγραμμάτων τα οποία δίνουν έμφαση στη χρήση της αριθμητικής γραμμής έχει θετικά αποτελέσματα στην κατανόηση της έννοιας του κλάσματος και στις πράξεις με κλάσματα. 11.Η χρήση της αριθμητικής γραμμής βοηθά στον εντοπισμό παρανοήσεων των μαθητών αναφορικά με την έννοια του κλάσματος και τη μονάδα αναφοράς. 12.Η χρήση της αριθμητικής γραμμής συμβάλει στην κατανόηση της έννοιας του κλάσματος και στις πράξεις με κλάσματα.	1.Η έννοια του γεωμετρικού μοντέλου και η εφαρμογή του στην αριθμητική γραμμή για την αναπαράσταση κλασμάτων.	1. Η στεγανοποίηση ως μια νέα μέθοδος που δείχνει την έλλειψη κατανόησης. Η στεγανοποίηση των έργων με κριτήριο το είδος αναπαράστασης, το είδος μετάφρασης και το είδος του γνωστικού αντικειμένου. Η απουσία συνεπαγωγικών σχέσεων ανάμεσα στα έργα είναι ένδειξη της αποσπασματικότητας των γνώσεων των μαθητών αναφορικά με την έννοια του κλάσματος. 2. Η στεγανοποίηση των έργων παρατηρήθηκε στην ομάδα ελέγχου τόσο κατά την πρώτη όσο και κατά τη δεύτερη χορήγηση των δοκιμίων. Το γεγονός αυτό αποτελεί ένδειξη για το ρόλο που διαδραματίζει η διδασκαλία στην αποσπασματικότητα των γνώσεων των μαθητών αναφορικά με την έννοια του κλάσματος. 3.Η εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος είχε ως αποτέλεσμα να αρθεί η στεγανοποίηση των έργων με βάση το γνωστικό αντικείμενο, για τους μαθητές της πειραματικής ομάδας. 4.Η επίδοση στα είδη μετάφρασης διαφοροποιείται ανάλογα με το γνωστικό αντικείμενο το οποίο εξετάζουν τα συγκεκριμένα έργα. 5.Η χρήση του μοντέλου της αριθμητικής γραμμής είχε ως αποτέλεσμα την άρση παρανοήσεων που είχαν οι μαθητές αναφορικά με την έννοια του κλάσματος και την εύρεση της μονάδας. 6.Η αριθμητική γραμμή δεν αποτελεί επιπρόσθετο παράγοντα δυσκολίας στην επίλυση προβλημάτων πρόσθεσης κλασμάτων. 7. Η εφαρμογή πειραμάτων επικοινωνίας σε έργα αναγνώρισης και αναπαράστασης των κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή.

Εισηγήσεις για Μελλοντική Έρευνα

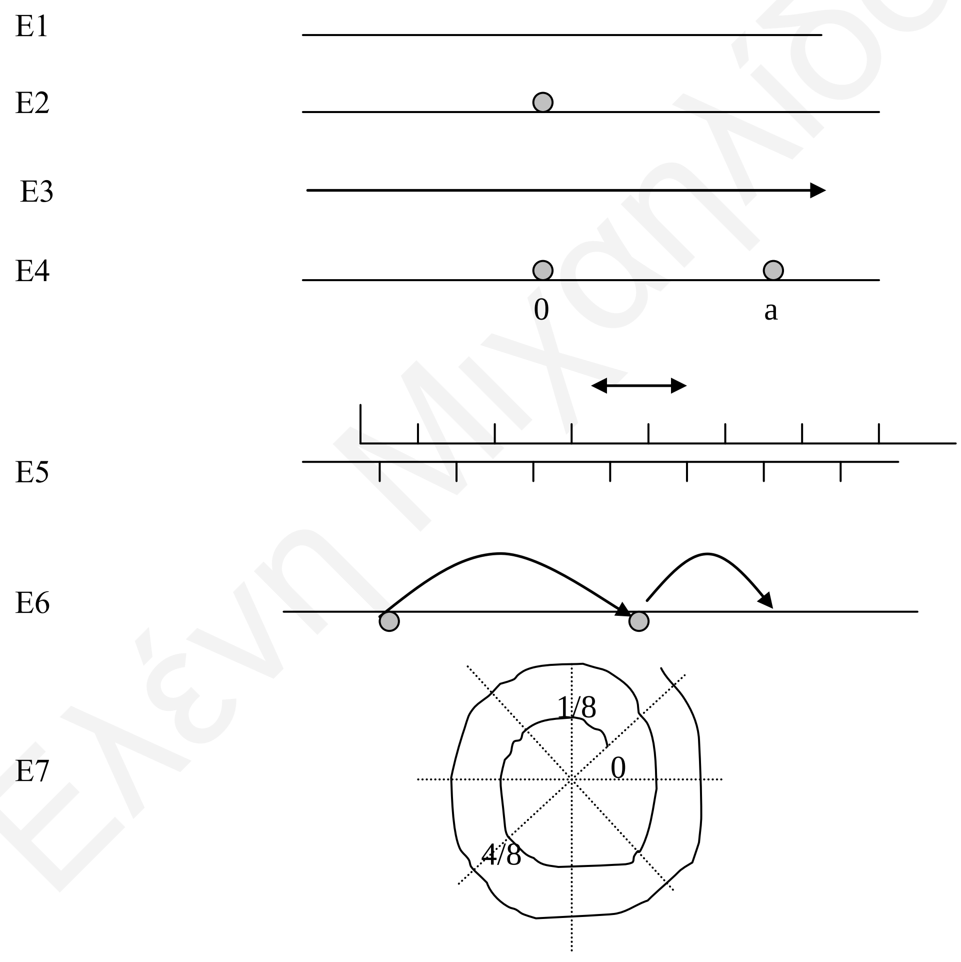
Στην παρούσα έρευνα εξετάσθηκε η κατανόηση της έννοιας των κλασμάτων από μαθητές πέμπτης τάξης δημοτικού, η στεγανοποίηση των έργων, η διαφοροποίηση της επίδοσης των μαθητών στα διάφορα είδη μετάφρασης, η διαφοροποίηση της επίδοσης των μαθητών στα διαφορετικά είδη έργων, η συμβολή της αριθμητικής γραμμής στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων που περιλαμβάνουν την πρόσθεση κλασματικών αριθμών και το κατά πόσον η δυσκολία χρήσης της αριθμητικής γραμμής οφείλεται στην έμφαση της διδασκαλίας σε άλλα είδη αναπαραστάσεων –εμβαδόν, συμβολική έκφραση – για την εισαγωγή της έννοιας του κλάσματος σε μαθητές πέμπτης τάξης.

Στα πλαίσια της έρευνας θα μπορούσαν να συμπεριληφθούν στο δείγμα μαθητές της έκτης τάξης δημοτικού με στόχο να φανεί η ανάπτυξη της έννοιας του κλάσματος εξελικτικά και η επίδραση που πιθανό να έχει η διδασκαλία στη στεγανοποίηση των έργων με την πάροδο του χρόνου.

Αναφορικά με τα έργα που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα έρευνα θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν και έργα αναπαράστασης της έννοιας του κλάσματος τα οποία να περιλαμβάνουν αριθμητικές γραμμές με διαστήματα μεγαλύτερα του διαστήματος 0 ως 1, σε αντιστοιχία με τα έργα αναγνώρισης της έννοιας του κλάσματος τα οποία περιλάμβαναν αριθμητικές γραμμές με διαστήματα μεγαλύτερα του διαστήματος 0 ως 1 και τα οποία ήταν παραπλανητικά για τους μαθητές οι οποίοι δεν είχαν αναπτύξει την έννοια της μονάδας. Με τον τρόπο αυτό η σύγκριση ανάμεσα στα έργα αναγνώρισης και στα έργα αναπαράστασης θα ήταν περισσότερο αντικειμενική.

Επιπρόσθετα, σε μελλοντική έρευνα θα μπορούσαν να περιληφθούν στα δοκίμια, έργα που αφορούν τα γνωστικά αντικείμενα του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης κλασμάτων, με στόχο να εξακριβωθεί αν η αριθμητική γραμμή ως αναπαράσταση της έννοιας του κλάσματος μπορεί να συμβάλει στην κατανόηση του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης κλασμάτων, ιδιαίτερα μετά την εφαρμογή ενός παρεμβατικού προγράμματος το οποίο θα έδινε έμφαση στην αριθμητική γραμμή ως αναπαράσταση των δύο αυτών γνωστικών αντικειμένων.

Τέλος, στα δοκίμια μιας μελλοντικής έρευνας θα μπορούσαν να συμπεριληφθούν αριθμητικές γραμμές οι οποίες παρουσιάζουν διαφορές όσον αφορά στα κατασκευαστικά τους χαρακτηριστικά, στην αρίθμηση και στο είδος της γραμμής. Για παράδειγμα θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν γραμμές από τις οποίες απουσιάζει η αρχή, γραμμές οι οποίες έχουν διαφορετικές υποδιαιρέσεις και κλίμακα, καθώς και καμπύλες γραμμές. Με αυτή η διαφοροποίηση θα μπορούσε να εξετασθεί η αλληλεπίδραση ανάμεσα στις ιδιότητες του γεωμετρικού μοντέλου και στις ιδιότητες του αριθμητικού συστήματος. Επίσης, θα μπορούσε να διερευνηθεί ο βαθμός στον οποίο οι μαθητές κατανοούν την αλληλεπίδραση αυτή, την αντιστοιχία ανάμεσα στο γεωμετρικό μοντέλο και στο αριθμητικό σύστημα και να εξετασθεί η συμβολή της αναλογικής αυτής σχέσης στην κατανόηση των ρητών αριθμών. Ο Brousseau (2003) προτείνει τη χρήση γραμμών, οι οποίες διαφέρουν ως προς τη μορφή και την αρίθμηση. Συγκεκριμένα, προτείνει τη χρήση ευθειών που δεν έχουν αρχή, που δεν έχουν αριθμηθεί ή που δεν έχουν βέλη ή αρχή (Ε1, Ε2 και Ε3 αντίστοιχα). Προτείνει, επίσης, τη χρήση γραμμών στις οποίες πρέπει να συμπληρωθούν οι αριθμοί που αντιστοιχούν σε συγκεκριμένα σημεία και οι αριθμοί που βρίσκονται ανάμεσα σε συγκεκριμένα σημεία (Ε2 και Ε4). Αναφορικά με την ικανότητα αρίθμησης και την ισότητα των διαστημάτων θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν και καμπύλες γραμμές ή σπειροειδείς γραμμές (Ε7). Σε σχέση με την ικανότητα εκτέλεσης πράξεων με τη βοήθεια της αριθμητικής γραμμής, ως αναπαράστασης των ρητών αριθμών, θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν γραμμές στις οποίες θα έχουν τοποθετηθεί βέλη και στις οποίες πρέπει να συμπληρωθούν οι αριθμοί (Ε6). Τέλος, στα πλαίσια των πράξεων με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής, θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν ζεύγη αριθμητικών γραμμών όπου η μια αριθμητική γραμμή θα αναπαριστά ένα αριθμό και η δεύτερη αριθμητική γραμμή θα αναπαριστά κάποιο άλλο. Η κατεύθυνση με την οποία θα κινούνται οι δύο αριθμητικές γραμμές θα καθορίζει και το είδος της πράξης που αναπαριστούν (Διάγραμμα 46).



Διάγραμμα 46. Είδη Αριθμητικών Γραμμών που θα μπορούσαν να Χρησιμοποιηθούν σε Μελλοντικές Έρευνες.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Adjiage, R. & Pluvinage, F. (2000). Un registre géométrique unidimensionnel pour l'expression des rationales. Recherches en Didactique des Mathématiques, 20,(1), 41-88.

Ainsworth, S.E, Wood, D.J., & Bibby, P.A. (1997). Evaluating principles for multi-representational learning environments. 7th EARLI Conference. Athens.

Ασβεστά, Α., & Γαγάτση, Α. (1995). Προβλήματα ερμηνείας και η έννοια της συνάρτησης. Στου Α. Γαγάτση (Εκδ.), Διδακτική και ιστορία των μαθηματικών (σσ. 19-38). Θεσσαλονίκη: Erasmus ICP-94-G-2011/11.

Ball, D. L. (1993). Halves, pieces, and twoths: Constructing and using representational contexts in teaching fractions. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), Rational numbers: An integration of research. (pp. 157-196). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, Associates.

Bell, A., Fischbein, E., & Greer, B. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: The effects of number size, problem structure and content. Educational Studies in Mathematics, 12, 399-420.

Bright, G., Behr, M., Post, T., & Wachsmuth, I. (1988). Identifying fractions on number lines. Journal for Research in Mathematics Education, 19(3), 215-232.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A (1983). Rational-number concepts. In R. Lesh, & M. Hamilton (Eds), Acquisition of mathematics concepts and processes (pp. 91-126). New York: Academic Press.

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, L. (1992). Rational numbers, ratio and proportion. In D.A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 296-333). New York: Macmillan

Behr, M. J., Wachsmuth, I., Post, T. R., & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical reaching experiment. Journal for Research in Mathematics Education, 15, 323-341.

Bezuk, N. S., & Armstrong, B. E. (1992). Understanding fraction multiplication. Mathematics Teacher, 85 (9), 729-733.

Boulton-Lewis, G. M. (1998). Children's strategy use and interpretation of mathematical representations. The Journal of Mathematical Behavior, 17 (2), 219-238.

Brenner, M. E., Herman, S., Ho, H., & Zimmer, J. M. (1999). Cross-national comparison of representational competence. Journal for Research in Mathematics Education, 30 (5), 541-557.

Γαγάτσης, Α., & Παναούρα, Γ. (2000). Ο ρόλος της αριθμητικής γραμμής στην επίλυση έργων πρόσθεσης και αφαίρεσης. Στων Στ. Γεωργίου, Λ. Κυριακίδη

& Κ. Χρίστου (Εκδ.), Σύγχρονη έρευνα στις επιστήμες της αγωγής (σσ. 361-368). Λευκωσία: Παιδαγωγική Εταιρεία Κύπρου.

Γαγάτσης, Α. & Πατρώνης, Τ. (1993). Η χρήση των γεωμετρικών μοντέλων στη διδασκαλία των μαθηματικών. Στου Α. Γαγάτση (Εκδ.), Θέματα διδακτικής των μαθηματικών (σσ 195-209). Θεσσαλονίκη: Α/φοι Κυριακίδη.

Carpenter, T.C., Corbitt, M.K., Kepner, H.S., Lindquist, M.N., & Reys, R.E. (1981). Decimals: Results and implications from national assessment. Arithmetic Teacher, 28, 34-37.

Carpenter, T.C., Fenemma, E., & Romberg, T. (Eds.) (1993). Rational numbers: An integration of research. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Cifarelli, V. (1998). The development of mental representations as a problem solving activity. The Journal of Mathematical Behavior, 17 (2), 238-264.

Chiu, M. M. (2000). Metaphorical reasoning: Origins, uses, development and interaction in mathematics. Retrieved December15, 2002, from Hong Kong University, Department of Educational Psychology Web Site: http://www. fed.cuhk.edu.hk/staff/paper/mmchiu/M4theory%20EJ.pdf

de Jong, T., Ainsworth, S. E., Dobson, M., van der Hulst, A., Levonen, J., Reimann, P., Sime, J.A., van Someren, M., Spada, H., & Swaak, V. (1998). Acquiring knowledge in science and mathematics: The use of multiple representations in technology-based learning environments. In M.W. van Someren, H.J.P. Boshuizen, T. de Jong, & P. Reimann (Eds), Learning with multiple representations (pp. 9-40). Oxford: Pergamon.

DeLoache, J. S., Uttal, D. H., & Pierroutsakos, S. L. (1998). The development of early symbolization: Educational implications. Learning and Instruction, 8 (4), 325-339.

De Windt – King, M. A., & Goldin, A. G. (2003). Children's visual imagery: Aspects of cognitive representation in solving problems with fractions. Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 1 (2), 1 – 43.

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1996). On different facets of mathematical thinking. In R. Stenberg, & T. Ben-Zeev (Eds.), The nature of mathematical thinking (pp.253-284). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Δημητρίου, Α. (1993). Γνωστική ανάπτυξη: Μοντέλα – μέθοδοι – εφαρμογές. Art of Text: Θεσσαλονίκη.

Dufour – Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 109-122). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Duval, R. (1987). Ο ρόλος της ερμηνείας στη μάθηση των μαθηματικών. Διάσταση, 2, 56 – 74.

Duval, R. (1993). Registres de representation semiotique et fonctionnement cognitif de la pensee. Annales de didactique et de sciences cognitives, 37-65. IREM de Strasbourg.

Duval, R (1997). La compréhension des énoncés de problème de mathématisation: de la lecture à la resolution. In D'Amore, B. & Gagatsis, A. (Eds.), Didactics of Mathematics-Technology in Education (pp. 25-46). Thessaloniki: Erasmus ICP-96-G-2011/11.

English, L. (1997). Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Ernest, P. (1985). The number line as a teaching aid. Educational Studies in Mathematics, 16 (4), 411– 424.

Fischbein, E. (1987). Intuition in science and mathematics. Dordrecht, Holland: Reidel.

Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures. Boston: D. Reidel.

Fueyo, V., & Don Bushell, Jr. (1998). Using number line procedures and peer tutoring to improve the mathematics computation of low – performing first graders. Journal of Applied Behavior Analysis, 31, 417 – 430.

Gagatsis, A. (1997). Problemi di interpretazione connessi con il concetto di funzione. La Mathematica e la sue Didattica, 2, 132-149.

Gagatsis, A., Demetriou, A., Afantiti, Th., Michaelidou, E., Panaoura, R., Shiakalli, M., & Christoforides, M. (1999). L’influenza delle rappresentazioni “semiotiche” nella risoluzione di problemi additivi. La Matematica e la sue Didattica, 2, 382-403.

Gagatsis, A., & Patronis, T. (1990). Using geometrical models in a process of reflective thinking in learning and teaching mathematics, Educational Studies in Mathematics, 21, 29-54.

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning and problem solving in mathematics. The Journal of Mathematical Behavior, 17 (2), 137-165.

Goldin, G. A., & Kaput, J. J. (1996). A joint perspective of the idea of representation in learning and doing mathematics. In von L. P. Steffe, & . . . Mahwah (Eds), Theories of mathematical learning (pp. 397-430). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Gras, R. (1995). Ανάλυση ενός ερωτηματολογίου με τη συνεπαγωγική μέθοδο. Στου Α. Γαγάτση (Εκδ.), Διδακτική και ιστορία των μαθηματικών (σσ. 97-109). Θεσσαλονίκη: Erasmus ICP-94-G-2011/11.

Hart, K.(Ed.) (1981). Childrens' understanding of mathematics: 11-16. London: Murray.

Herbst, P. (1997). The number-line metaphor in the discourse of a textbook series. For the Learning of Mathematics, 17 (3), 36 – 45.

Hiebert, J. (1988). A theory of developing competence with written mathematical symbols. Educational Studies in Mathematics, 19, 333-355.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 65-97). New York: Macmillan.

Hiebert, J., & Wearne, D. (1986). Procedures over concepts: The acquisition of decimal number knowledge. In J. Hiebert (Ed.), Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics (pp. 258-268). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. The Journal of Mathematical Behavior, 17 (1), 123-134.

Houser, N. (1987). Toward a peircean semiotic theory of learning. American Journal of Semiotic, 5 (2), 251-274.

Izsàk, A. (2000). Inscribing the winch: Mechanisms by which students develop knowledge structures for modeling the physical world with algebra. The Journal of the Learning Sciences, 9 (1), 31-74.

Jooste, Z. (1999). How grade 3 & 4 learners deal with fraction problems in context. Proceedings of the Fifth Annual Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa. Retrieved February 16, 2002, from Stellenbosch University, Faculty of Education Web Site: http://www.sun.ac.za/mathed/MALATI/ConferencePapers.htm

Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 27-32). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Καλδρυμίδου, Μ., & Οικονόμου, Α. (1992). Δεξιότητα χειρισμού γραφικών παραστάσεων αποφοίτων λυκείου. Τετράδια Διδακτικής των Μαθηματικών, 10-11, 21-43.

Kamii, C., & Clark, F. B.(1995). Equivalent fractions: Their difficulty and educational implications. Journal of Mathematical Behavior, 14, 365 – 378.

Kaput, J. J. (1987). Representation systems and mathematics. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 19-26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J.J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. In S. Wagner & S. Kieran (Eds.), Research issues in the learning and teaching of algebra (pp. 167-194). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J.J. (1992). Technology and mathematics education. In D.A. Grouws (Ed.), Handbook of research in mathematics teaching and learning (pp. 515-556). New York: Macmillan.

Karmiloff-Smith, A. (1992). Beyond modularity. MIT Press.

Keijzer, R. (2003). Teaching formal mathematics in primary education. Utrecht: CD-Beta Press.

Keijzer, R., & Terwel, J. (2000). Learning for mathematical insight: A longitudinal comparison of two dutch curricula on fractions. Annual Meeting of the American Educational Research Association. New Orleans, LA.

Keijzer, R. & Terwel, J. (2001). Audrey's acquisition of fractions: A case study into the learning of formal mathematics. Educational Studies in Mathematics, 47, 53-73.

Keller, B. A., & Hirsch, C. R. (1998). Student preferences for representations of functions. International Journal of Mathematical Education in Science & Technology, 29 (1), 1-17.

Kerslake, D. (1986). Fractions: Children's strategies and errors. Windsor, England: Nfer-Nelson.

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades (pp. 162-181). Reston, VA: NCTM; Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Κολέζα, Ε. (2000). Γνωσιολογική και διδακτική προσέγγιση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών. Αθήνα: Leader Books.

Lamon, S.J. (1999). Teaching fractions and rations for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Larson - Novillis, C. (2000). Case study of teaching fractions in fourth grade. Paper presented at the 27th Annual Conference of the Research Council on Mathematics Learning, Las Vegas, NV.

László, F. (2003). The development, and the developing of the concept of a fraction. Retrieved February 25, 2004, from The University of Exeter, Centre of innovation in mathematics teaching web site: http://www.ex.ac.uk/cimt/ijmtl/lffract.pdf.

Lesh, R., Landau, M., & Hamilton, E. (1983). Conceptual models and applied mathematical problem-solving research. In R. Lesh, & M. Hamilton (Eds), Acquisition of mathematics conceps and processes (pp. 91-126). New York: Academic Press.

Lesh, R., Behr, M., & Post, T. (1987). Rational number relations and proportions.

In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 41-58). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lukhele, R.B., Murray, H., & Olivier, A. (1999). Learners' understanding of the addition of fractions. Retrieved February 16, 2002, from Stellenbosch University, Faculty of Education Web Site: http://www.sun.ac.za/mathed/MALATI/ConferencePapers.htm

Mack, N. K (1990). Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. Journal for Research in Mathematics Education, 26 (5), 422-441.

Mack, N. K. (2000). Long term effects on building on informal knowledge in a complex content domain: The case of multiplication of fractions. Journal of Mathematical Behavior, 19 (3), 307-332.

Michaelidou, E. (2003). The articulation of different representations of the concept of fraction and the operations with fractions: A study with elementary school. In A. Gagatsis, & S. Papastavridies (Eds.), Proceedings of the 3rd Mediterranean conference on mathematical education (pp. 163 – 174). Athens: Hellenic Mathematical Society, Cyprus Mathematical Society.

Middleton, J. A., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Shew, J.A. (1998). Using bar representations as a model for connecting concepts of rational numbers. Mathematics Teaching in the Middle School, 3 (4), 302-312.

Monk, S., & Nemirovsky, R. (1994). The case of Dan: Student construction of a functional situation through visual attributes. In A. Schoenfeld, E. Dubinsky, & J. Kaput (Eds.), Research in collegiate mathematics education (Vol. 1, pp.139-168). Washington D.C: American Mathematics Association.

Moschkovich, J. (1998). Resources for refining mathematical conceptions: Case studies in learning about linear functions. The Journal of the Learning Sciences, 7 (2), 209-237.

Moss, J., & Case, R.(1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. Journal for Research in Mathematics Education, 30 (2), 122-47

Murray, H., Olivier, A., & De Beer, T. (1999). Reteaching fractions for understanding. Retrieved February 16, 2002, from Stellenbosch University, Faculty of Education Web Site: http://www.sun.ac.za/mathed/MALATI/ConferencePapers.htm

Nesher, P. (1988). Multiplicative school word problems: Theoretical approaches and empirical findings. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades (pp. 19-40). Reston, VA: NCTM; Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Newstead, K., & Murray, H. (1998). Young students' constructions of fractions. Retrieved February 16, 2002, from Stellenbosch University, Faculty of Education Web Site: http://www.sun.ac.za/mathed/MALATI/ConferencePapers.htm

Ni, Y. (2000). How Valid Is It To Use Number Lines To Measure Children's Conceptual Knowledge about Rational Number? Educational Psychology, 20 (2), 139-152.

Ni, Y. (2001). Semantic domains of rational number and the acquisition of number equivalence. Contemporary Educational Psychology, 26, 400-417.

Okamoto, Y. (1996). Modeling children's understanding of qualitative relations in texts: A developmental perspective. Cognition and Instruction, 14 (4), 409 – 440.

Owens, K. D., & Clements M. A. (1998). Representations in spatial problem solving in the classroom. The Journal of Mathematical Behavior, 17 (2), 197-218.

Philippou, G.N. & Christou, K. (1994). Prospective elementary teachers' conceptual and procedural knowledge of fractions. In J.P. Ponte & J.P. Matos (Eds.), Proceedings of the PME 18, (Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education), Vol. IV, 33-40.

Post, T., & Cramer, K. (1989). Knowledge, representation and quantitative thinking. In M. Reynolds (Ed.) Knowledge base for the beginning teacher - Special publication of the AACTE (pp. 221-231). Oxford: Pergamon Press.

Roth, W. M., & McGinn, M. K. (1998). Inscriptions: Towards a theory of representing as social practice . Review of Educational Research, 68 (1), 35-59.

Schwarz, B., & Hershkowitz, R. (1999). Prototypes: Brakes or Levers in Learning the Function Concept? The Role of Computer Tools. Journal for Research in Mathematics Education, 30, 362-89.

Schoenfeld, A. H., Smith, J., & Arcavi, A. (1993). Learning: The microgenetic analysis of one student's evolving understanding of a complex subject matter domain. In R. Glasser (Ed.), Advances in instructional psychology (Vol. 4, pp.55-175). Hillsdale, NJ: Elrbaum.

Saenz – Ludlow, A. (1994). Michael's fraction schemes. Journal for Research in Mathematics Education, 25, (1), 50-85.

Seeger, F. (1998). Representations in mathematical classroom: Reflections and constructions. In von F. Seeger, J. Voigt, & U. Waschescio (Eds.), The culture of the mathematics classroom (pp. 308 – 343). Cambridge UP.

Skemp, R. R. (1987). The psychology of learning mathematics. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Sowder, L. (1988). Children's solutions of word problem. Journal of Mathematical Behavior, *7*, 227-238.

Sowder, J. (1992). Making sense of numbers in school mathematics. In G. Leinhardt, R. Putman, & R. Hattrup (Eds.), Analysis of arithmetic for mathematics teaching. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Σταφυλίδου, Σ., & Βοσνιάδου, Σ. (2002). Πώς τα παιδιά αναπτύσσουν την έννοια του κλάσματος. Στων Α. Γαγάτση, & Γρ. Μακρίδη (Εκδ.), Πρακτικά Ε' παγκύπριου συνεδρίου μαθηματικής παιδείας και Β' συμποσίου αστροναυτικής και διαστήματος (σσ. 277-289). Πάφος: Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία.

Tirosh, D., Graeber, A. O., Fischbein, E., & Wilson, J. (1996). Using multiple representations to enhance teachers' mathematical, pedagogical and curricular knowledge of rational numbers. Retrieved January 12, 2002, from Georgia University, Department of Mathematics Education Web Site: http://jwilson.coe.uga.edu/Texts.Folder/Tirosh/Project/Project.html

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teacher's knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. Journal for Research in Mathematics Education, 31, (1), 5-25.

Travers, K.J., & Westbury, I. (1990). The IEA study of mathematics. Oxford: Pergamon Press.

Van Niekerk, T., Newstead, K., Murray, H., & Olivier, A. (1999). Successes and obstacles in the development of grade 6 learners' conceptions of fractions. Retrieved February 16, 2002, from Stellenbosch University, Faculty of Education Web Site: http://www.sun.ac.za/mathed/MALATI/ConferencePapers.htm

van Someren, M.W., Boshuizen, H.J.P., de Jong, T., & Reimann, P. (1998). Introduction. In M.W. van Someren, H.J.P. Boshuizen, T. de Jong, & P. Reimann (Eds), Learning with multiple representations (pp. 1- 5). Oxford: Pergamon.

von Glasersfeld, E. (1987). Preliminaries to any theory of representation. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 215-225). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Weber – Kubler, J. (1982). Traitement d' informations mathematiques dans une transmission orale chez des eleves de douze et quatorze ans. (These pour obtenir le grade de Doctuer de 3e cycle Specialite: Didactique des Mathematicques), L' Institut de Recherche Mathematique Avancee, L' Universite Louis Pasteur de Strasbourg.

Wu, H. (2002). Fractions. Retrieved December10, 2002, from Berkeley University, Department of Mathematics Web Site: http://www.math.berkeley.edu/~wu.

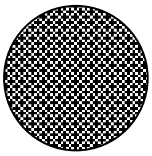
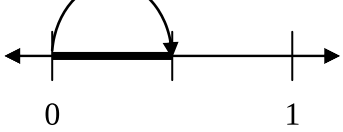
Zhang, J. (1997). The nature of external representations in problem solving. Cognitive Science, 21, 179-217.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α
ΣΥΛΛΟΓΗ ΠΟΣΟΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ - ΔΟΚΙΜΙΑ

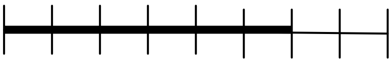
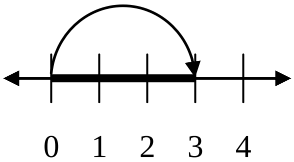
ΔΟΚΙΜΙΟ Α – Αναγνώριση κλασμάτων

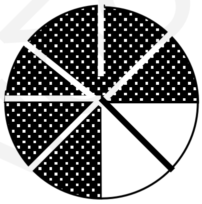
Όνομα: ________________________________ Τάξη:____ Ημερομηνία: _______

1.Βάλε σε κύκλο εκείνα τα σχεδιαγράμματα όπου το γραμμοσκιασμένο μέρος δείχνει το $\frac{1}{2}$.

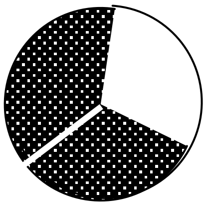
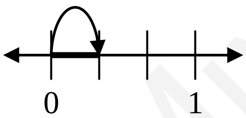



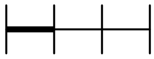
2. Βάλε σε κύκλο εκείνα τα σχεδιαγράμματα όπου το γραμμοσκιασμένο μέρος δείχνει τα $\frac{3}{4}$

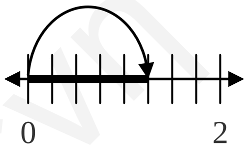


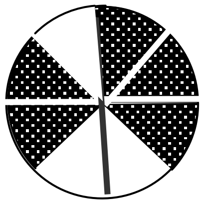
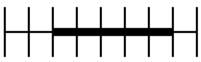
3. Βάλε σε κύκλο εκείνα τα σχεδιαγράμματα όπου το γραμμοσκιασμένο μέρος δείχνει τα $\frac{2}{3}$

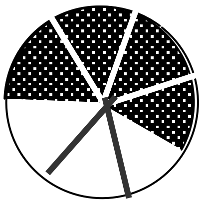
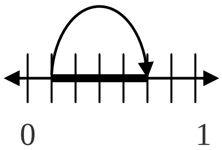


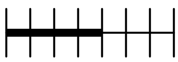
4. Βάλε σε κύκλο εκείνα τα σχεδιαγράμματα όπου το γραμμοσκιασμένο μέρος δείχνει τα $\frac{5}{8}$



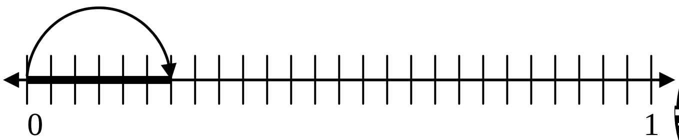



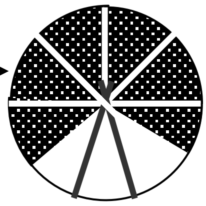
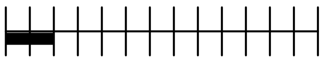
5. Βάλε σε κύκλο εκείνα τα σχεδιαγράμματα όπου το γραμμοσκιασμένο μέρος δείχνει τα $\frac{4}{7}$

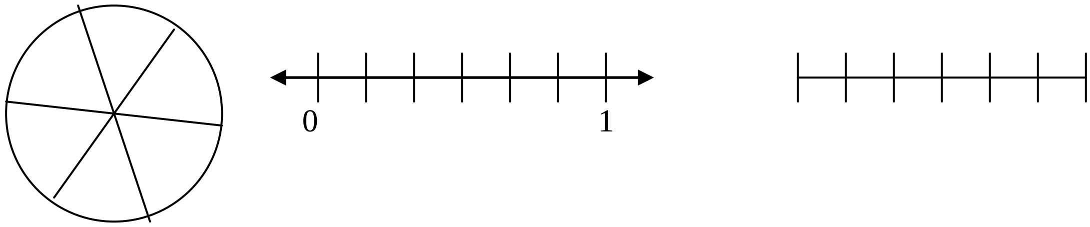


6. Βάλε σε κύκλο εκείνα τα σχεδιαγράμματα όπου το γραμμοσκιασμένο μέρος δείχνει τα $\frac{3}{13}$

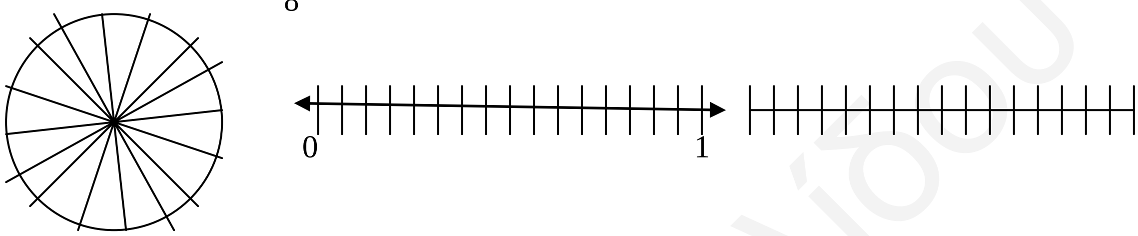


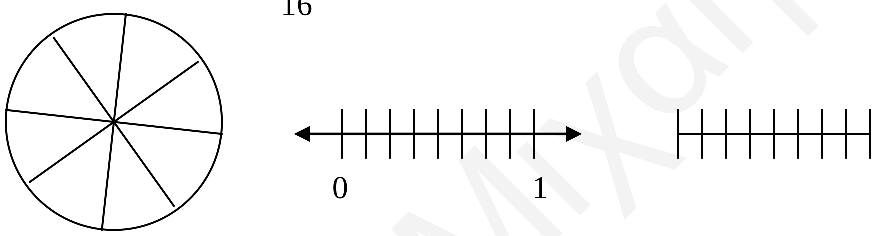
7. Δείξε το κλάσμα $\frac{5}{6}$ με τη βοήθεια των πιο κάτω σχεδιαγραμμάτων.



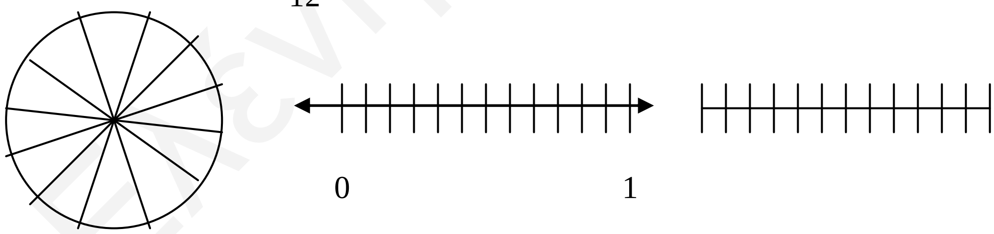
8. Δείξε το κλάσμα $\frac{7}{8}$ με τη βοήθεια των πιο κάτω σχεδιαγραμμάτων.



9. Δείξε το κλάσμα $\frac{10}{16}$ με τη βοήθεια των πιο κάτω σχεδιαγραμμάτων



10. Δείξε το κλάσμα $\frac{5}{12}$ με τη βοήθεια των πιο κάτω σχεδιαγραμμάτων



ΔΟΚΙΜΙΟ Β – Ισοδυναμία Κλασμάτων

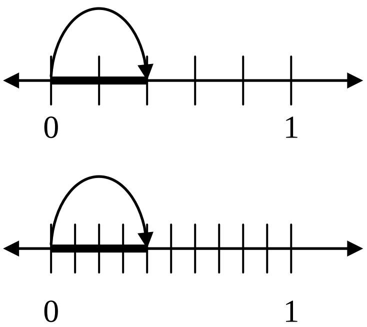
Όνομα: ________________________________ Τάξη:____ Ημερομηνία: _______

----

1. Συμπλήρωσε στο κουτάκι τον αριθμό που λείπει.

$\frac{4}{6} = \frac{2}{\square}$

2. Μπορείς να γράψεις ποιο κλάσμα δείχνουν οι δύο αριθμητικές γραμμές; Αν ναι, τότε γράψε τη σχέση που ισχύει.



Σχέση:

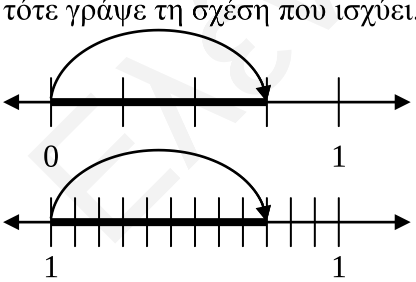
3. Δείξε στις αριθμητικές γραμμές τη σχέση που δίνεται:

$\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$

4. Συμπλήρωσε στο κουτάκι τον αριθμό που λείπει

$\frac{3}{\square} = \frac{9}{24}$

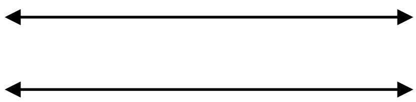
5. Μπορείς να γράψεις ποιο κλάσμα δείχνουν οι δύο αριθμητικές γραμμές; Αν ναι, τότε γράψε τη σχέση που ισχύει.



Σχέση:

6. Δείξε στις αριθμητικές γραμμές τη σχέση που δίνεται:

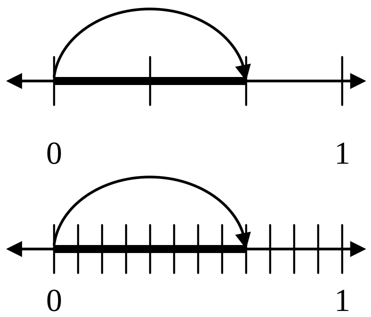
$\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$



7. Συμπλήρωσε στο κουτάκι τον αριθμό που λείπει

$\frac{\square}{4} = \frac{25}{100}$

8. Μπορείς να γράψεις ποιο κλάσμα δείχνουν οι δύο αριθμητικές γραμμές; Αν ναι, τότε γράψε τη σχέση που ισχύει.



Σχέση:

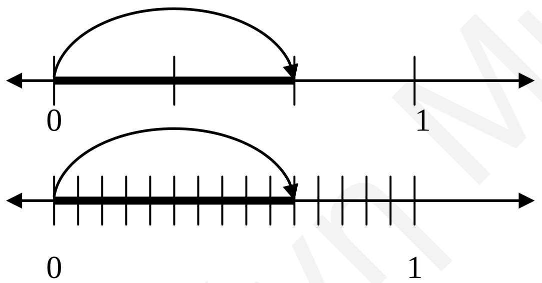
9.Δείξε στις αριθμητικές γραμμές τη σχέση που δίνεται:

$\frac{1}{5}=\frac{2}{10}$

10. Συμπλήρωσε στο κουτάκι τον αριθμό που λείπει

$\frac{4}{5}=\frac{\square}{25}$

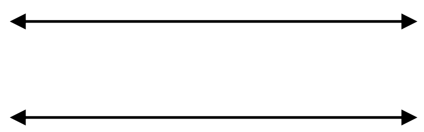
11. Μπορείς να γράψεις ποιο κλάσμα δείχνουν οι δύο αριθμητικές γραμμές; Αν ναι, τότε γράψε τη σχέση που ισχύει.



Σχέση:

12.Δείξε στις αριθμητικές γραμμές τη σχέση που δίνεται:

$\frac{1}{4}=\frac{4}{16}$



13. Σειροθέτησε τα πιο κάτω κλάσματα ξεκινώντας από το μικρότερο.

(α) $\frac{2}{7},\frac{5}{7},\frac{1}{7}$

(β) $\frac{2}{4},\frac{2}{3},\frac{2}{7}$

(γ) $\frac{3}{4},\frac{2}{3},\frac{5}{8}$

ΔΟΚΙΜΙΟ Γ –Πρόσθεση Κλασμάτων

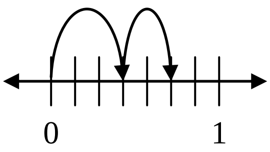
Όνομα: ________________________________ Τάξη:____ Ημερομηνία: _______

---

1. Βρες το αποτέλεσμα:

$\frac{4}{9} + \frac{3}{9} = \boxed{}$

2. Γράψε την εξίσωση που αντιστοιχεί στο πιο κάτω σχεδιάγραμμα:



Εξίσωση:

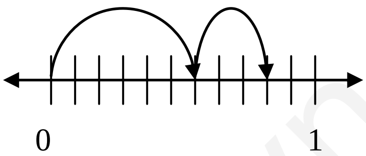
3. Δείξε στην αριθμητική γραμμή την πιο κάτω εξίσωση:

$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \boxed{}$

4. Βρες το αποτέλεσμα:

$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \boxed{}$

5. Γράψε την εξίσωση που αντιστοιχεί στο πιο κάτω σχεδιάγραμμα:



Εξίσωση:

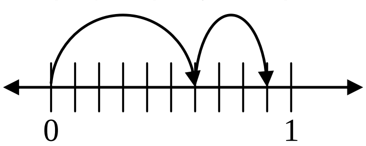
6.Δείξε στην αριθμητική γραμμή την πιο κάτω εξίσωση.

$\frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \boxed{}$

7. Βρες το αποτέλεσμα:

$\frac{1}{3} + \frac{2}{6} = \boxed{}$

8. Γράψε την εξίσωση που αντιστοιχεί στο πιο κάτω σχεδιάγραμμα:



Εξίσωση:

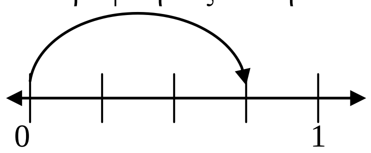
9. Δείξε στην αριθμητική γραμμή την πιο κάτω εξίσωση.

$\frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \boxed{}$

10. Βρες το αποτέλεσμα:

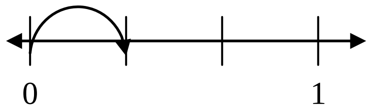
$\frac{1}{5} + \frac{2}{6} = \square$

11. Γράψε ην εξίσωση που αντιστοιχεί στο πιο κάτω σχεδιάγραμμα:



Εξίσωση:

και



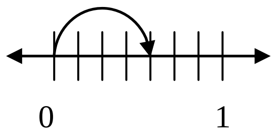
12. Δείξε στην αριθμητική γραμμή την εξίσωση που δίνεται. Λύσε την εξίσωση:

$\frac{2}{5} + \frac{4}{10} = \square$

13. Βρες το αποτέλεσμα:

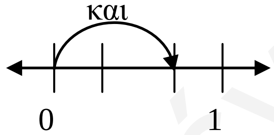
$\frac{2}{4} + \frac{1}{5} = \square$

14. Γράψε την εξίσωση που αντιστοιχεί στο πιο κάτω σχεδιάγραμμα:



Εξίσωση:

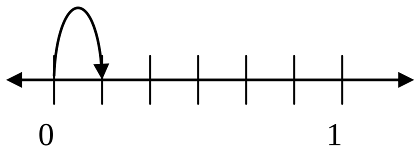
και



15. Δείξε στην αριθμητική γραμμή την εξίσωση που δίνεται.

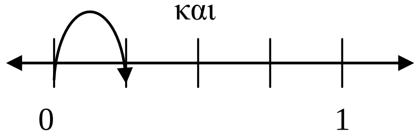
$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \square$

16. Γράψε και λύσε την εξίσωση που αντιστοιχεί στο πιο κάτω σχεδιάγραμμα:



Εξίσωση:

και



17. Δείξε στις αριθμητικές γραμμές την εξίσωση που δίνεται. Λύσε την εξίσωση:

$\frac{4}{9} + \frac{1}{3} = \square$

ΔΟΚΙΜΙΟ Δ – Προβλήματα

Όνομα: ________________________________ Τάξη:____ Ημερομηνία: _______

Λύσε τα προβλήματα με τη βοήθεια της ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ, στο χώρο που υπάρχει κάτω από κάθε πρόβλημα. Δείξε τον τρόπο που εργάστηκες, για να βρεις την απάντηση.

1. Μια μέρα ο υδράργυρος έφτασε ως τα $\frac{2}{5}$ του θερμομέτρου. Ακολούθως έκανε περισσότερη ζέστη και ο υδράργυρος ανέβηκε ακόμη $\frac{1}{5}$ του θερμομέτρου. Πόσο μέρος του θερμομέτρου κάλυψε ο υδράργυρος;

Απάντηση: ____

2. Ένα σαλιγκάρι βρίσκεται στον πυθμένα ενός δοχείου ύψους 100 cm και θέλει να βγει έξω από το δοχείο. Σε μια ώρα προχωρεί 40 cm και σταματά. Ύστερα χρειάζεται ακόμα μια ώρα για να προχωρήσει ακόμα 20 cm.

(α) Ποιο μέρος (κλάσμα) της απόστασης κάλυψε την πρώτη φορά; **Απάντηση:**

(β) Ποιο μέρος (κλάσμα) της απόστασης κάλυψε τη δεύτερη φορά; **Απάντηση:**

(γ) Ποιο μέρος (κλάσμα) της απόστασης κάλυψε συνολικά; **Απάντηση:**

(δ) Κατάφερε να βγει από το δοχείο όταν τέλειωσε τη διαδρομή του τη δεύτερη φορά; Δικαιολόγησε την απάντησή σου. **Απάντηση:**

3. Είχα μια ρίγα. Η ρίγα έσπασε στη μέση και έτσι πέταξα τη μισή. Από το μισό που μου έμεινε κόπηκε το $\frac{1}{3}$ και μου έμεινε το μεγαλύτερο κομμάτι, που είναι 12 cm. Πόσο ήταν αρχικά το μήκος της ρίγας μου;

Απάντηση: ____

4. Κατά τη διάρκεια μιας καταιγίδας ένας κεραυνός κτυπά ένα δέντρο και κόβει το $\frac{1}{3}$ του κορμού του. Το κομμάτι που κόπηκε έπεσε στο έδαφος και κόπηκε στη μέση. Την επόμενη μέρα οι δασονόμοι βρήκαν το $\frac{1}{2}$ από το κομμάτι που έπεσε και μετρώντας το βρήκαν ότι ήταν 4 μέτρα.

(α) Ποιο μέρος (κλάσμα) του κορμού του δέντρου έμεινε όρθιο; **Απάντηση:**

(β) Ποιο μέρος (κλάσμα) του κορμού του δέντρου βρήκαν οι δασονόμοι; **Απάντηση**:

(γ) Ποιο ήταν το συνολικό ύψος του κορμού του δέντρου; **Απάντηση**:

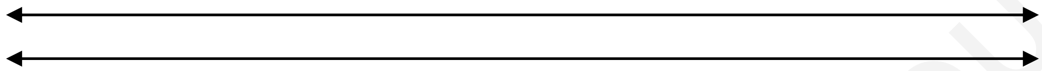
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β
ΣΥΛΛΟΓΗ ΠΟΙΟΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ – ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΕΙΣ, ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ

Συνέντευξη: Ισοδυναμία Κλασμάτων

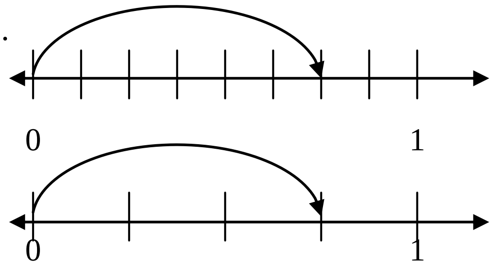
Όνομα: **Τάξη:** **Ημερομηνία:**

1. Λύσε το πιο κάτω πρόβλημα με τη βοήθεια των αριθμητικών γραμμών.

Η Ελένη και η Μαρία αγόρασαν από μια σοκολάτα. Οι σοκολάτες τους ήταν οι ίδιες. Η Ελένη έκοψε τη σοκολάτα της σε 5 κομμάτια. Έφαγε $\frac{2}{5}$ της σοκολάτας της. Η Μαρία έκοψε τη δική της σοκολάτα σε 20 κομμάτια. Η Μαρία έφαγε την ίδια ποσότητα σοκολάτας με την Ελένη. Πόσα κομμάτια έφαγε η Μαρία;



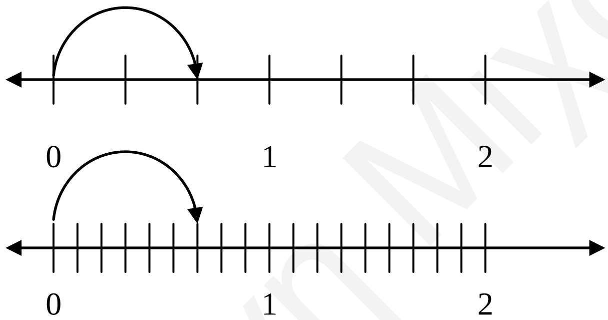
2.



Εξίσωση

Πες ένα δικό σου πρόβλημα που να ταιριάζει στην πιο πάνω εξίσωση

3.

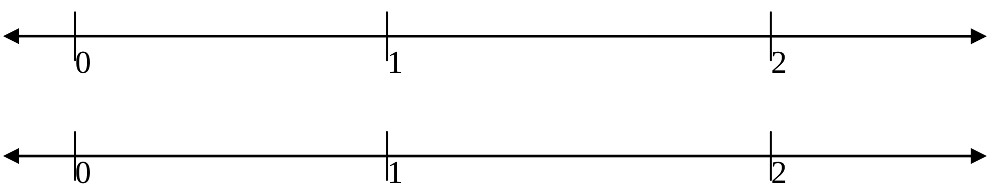


Εξίσωση:

Πες ένα πρόβλημα που να ταιριάζει στην πιο πάνω εξίσωση

4. $\frac{1}{3} = \frac{7}{21}$ Δείξε την εξίσωση με τη βοήθεια των αριθμητικών γραμμών.

5. $\frac{1}{3} = \frac{7}{21}$ Δείξε την εξίσωση με τη βοήθεια των αριθμητικών γραμμών.



<u>Συνέντευξη: Πρόσθεση Ομώνυμων Κλασμάτων</u>

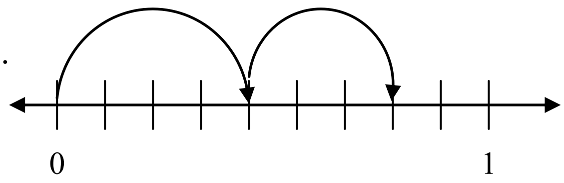
Όνομα: **Τάξη:** **Ημερομηνία:**

---

1. Λύσε το πιο κάτω πρόβλημα με τη βοήθεια της αριθμητικής γραμμής:

Για να φτιάξω ένα γλυκό χρησιμοποίησα $\frac{2}{7}$ L χυμό. Επίσης έβαλα και $\frac{4}{7}$ L γάλα. Ποια ήταν η συνολική ποσότητα υγρών που χρησιμοποίησα;

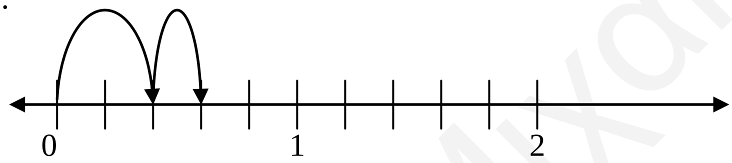
2.



Εξίσωση:

Πες ένα πρόβλημα που να ταιριάζει με την πιο πάνω εξίσωση

3.

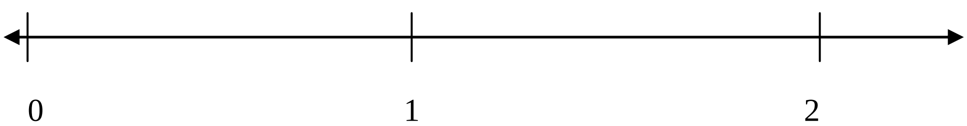


Εξίσωση

Πες ένα πρόβλημα που να ταιριάζει με την πιο πάνω εξίσωση

4. $\frac{4}{8} + \frac{3}{8} =$ Δείξε την εξίσωση με τη βοήθεια των αριθμητικών γραμμών.

5. $\frac{4}{8} + \frac{3}{8} =$ Δείξε την εξίσωση με τη βοήθεια των αριθμητικών γραμμών.

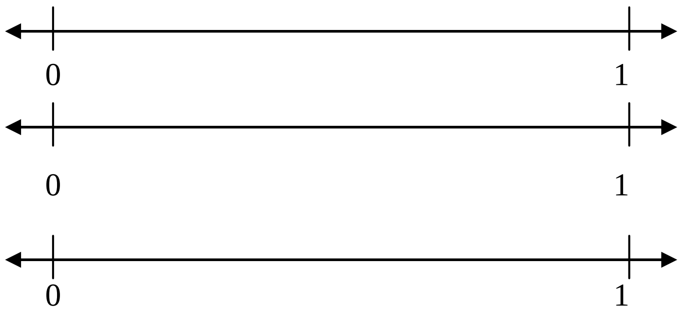


Συνέντευξη: Πρόσθεση ετερώνυμων Κλασμάτων

Όνομα: **Τάξη:** **Ημερομηνία:**

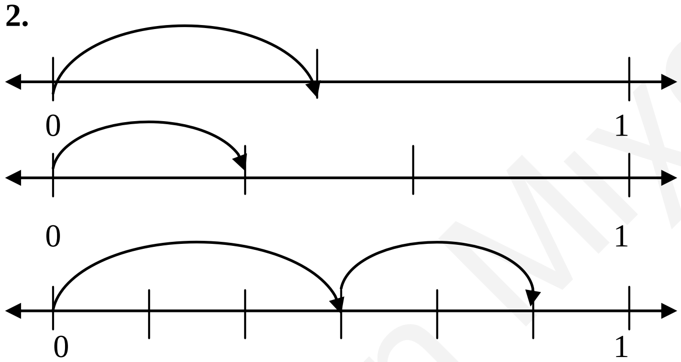
1. Λύσε το πιο κάτω πρόβλημα με τη βοήθεια της αριθμητικής γραμμής:

Μια οικογένεια ήπιε $\frac{2}{3}$ L χυμό το πρωί. Το απόγευμα ήπιε ακόμη $\frac{1}{4}$ L χυμό. Πόσο χυμό ήπιαν συνολικά τα μέλη της οικογένειας;



Εξίσωση:

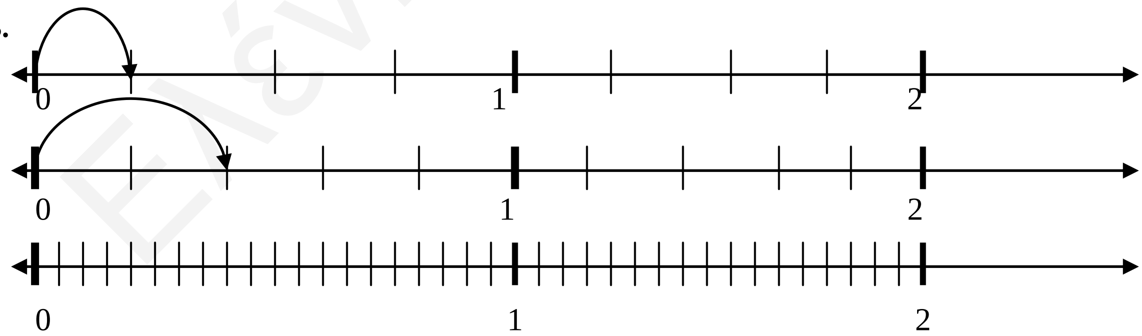
2.



Εξίσωση:

Πες ένα πρόβλημα που να ταιριάζει με την πιο πάνω εξίσωση.

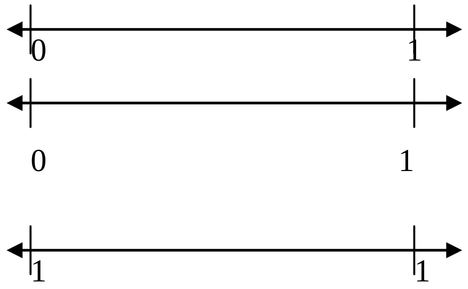
3.



Εξίσωση:

Πες ένα πρόβλημα που να ταιριάζει με την πιο πάνω εξίσωση

4. $\frac{3}{8} + \frac{1}{3} =$ Λύσε την εξίσωση με τη βοήθεια των αριθμητικών γραμμών.

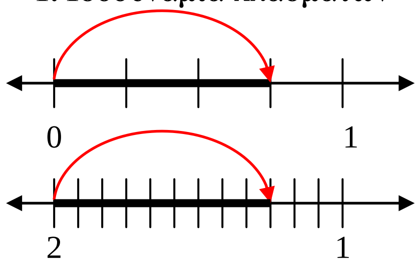


4. $\frac{3}{8} + \frac{1}{3} =$ Λύσε την εξίσωση με τη βοήθεια των αριθμητικών γραμμών.

Πες ένα πρόβλημα που να ταιριάζει με την πιο πάνω εξίσωση.

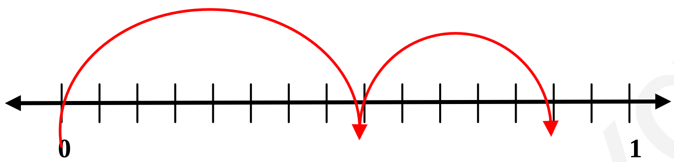
Πείραμα Επικοινωνίας

1. Ισοδυναμία κλασμάτων



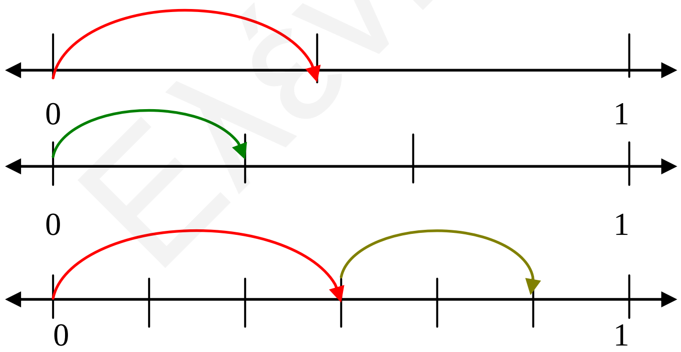
$$\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

2. Πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων



$$\frac{8}{15} + \frac{5}{15} = \frac{13}{15}$$

3. Πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ
ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

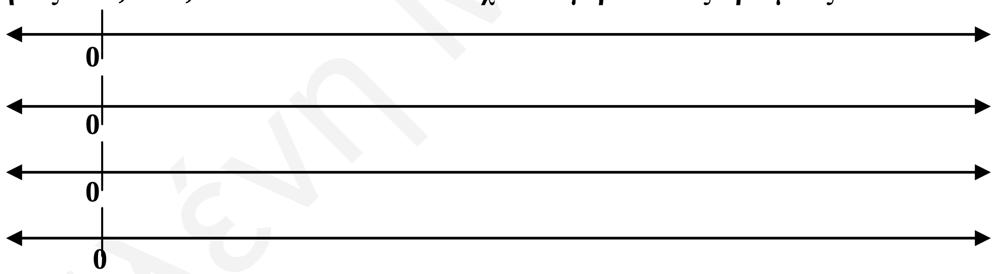
Φύλλο εργασίας 1
Ευκλείδεια ευθεία και αριθμητική γραμμή

1. Κατασκεύασε ευθείες

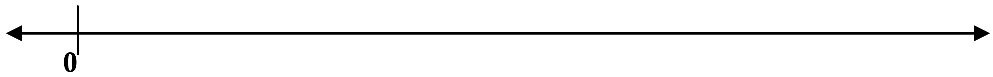
2. Κατασκεύασε ένα ευθύγραμμο τμήμα με μήκος 1 cm και ένα ευθύγραμμο τμήμα με μήκος 5 cm.

3. Πόσα ευθύγραμμα τμήματα χωρούν σε μια ευθεία; Κατασκεύασε μια ευθεία και προσπάθησε να τοποθετήσεις σε αυτή ευθύγραμμα τμήματα που να έχουν το ίδιο ή και διαφορετικό μήκος μεταξύ τους.

4. Στις πιο κάτω αριθμητικές γραμμές τοποθέτησε τα ευθύγραμμα τμήματα με μήκος 1cm, 2cm, 3 cm και 4cm αντίστοιχα. Σύγκρινε τους αριθμούς.

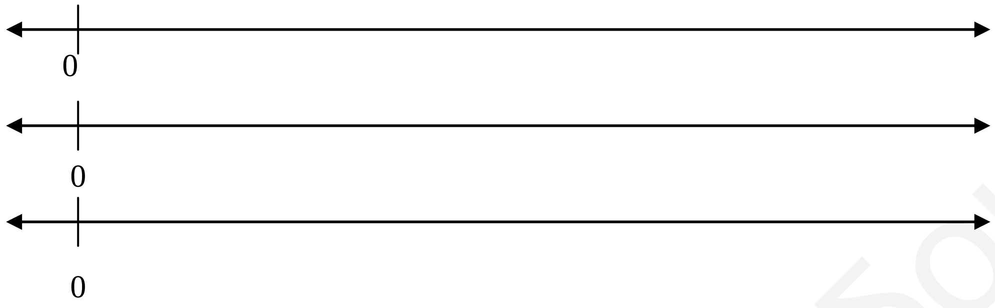


5. Τοποθέτησε στην πιο κάτω αριθμητική γραμμή τα ευθύγραμμα τμήματα με μήκος 1cm, 2cm, 3cm και 4cm αντίστοιχα.

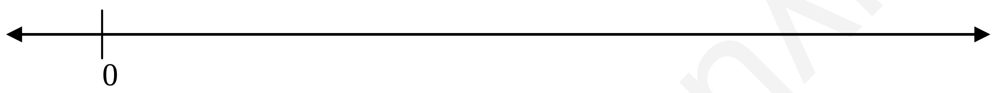


Φύλλο εργασίας 2
Έννοια του κλάσματος ως μέτρο

1. Δείξε τα κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ και $\frac{12}{5}$ στις πιο κάτω αριθμητικές γραμμές.



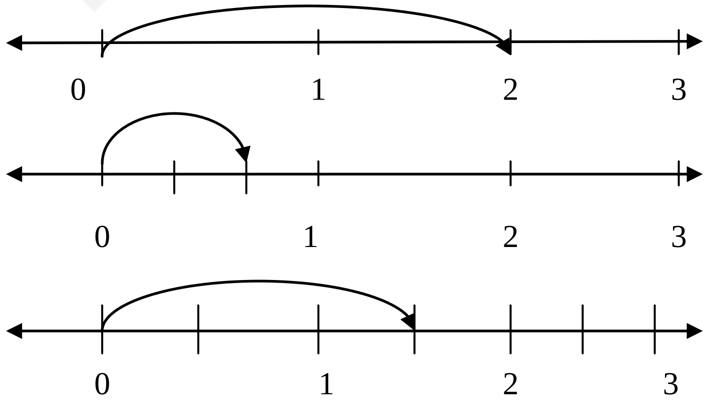
2. Δείξε τα $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ και $1\frac{3}{4}$ στην πιο κάτω αριθμητική γραμμή:



3. Λύσε το πιο κάτω πρόβλημα με τη βοήθεια της αριθμητικής γραμμής.
Ο Πομπός, ο Μάριος και ο Νίκος είναι αθλητές μήκους. Στους αγώνες το άλμα του Γιάννη κάλυψε το $\frac{1}{2}$ της αμμοδόχου, το άλμα του Μάριου κάλυψε το $\frac{1}{3}$ και το άλμα του Νίκου τα $\frac{3}{4}$. Ποιος ήταν ο νικητής; Μπορείτε να δείξετε τα άλματα των αθλητών στην αριθμητική γραμμή;

4. Λύσε το πιο κάτω πρόβλημα με τη βοήθεια της αριθμητικής γραμμής.
Μια οικογένεια καταναλώνει $2\frac{1}{3}$ λίτρα γάλακτος την Τρίτη και $\frac{16}{5}$ του λίτρου γάλα την Τετάρτη. Ποια μέρα καταναλώνει τα περισσότερα;

5. Ποια από τις αριθμητικές γραμμές δείχνει το κλάσμα $\frac{2}{3}$;



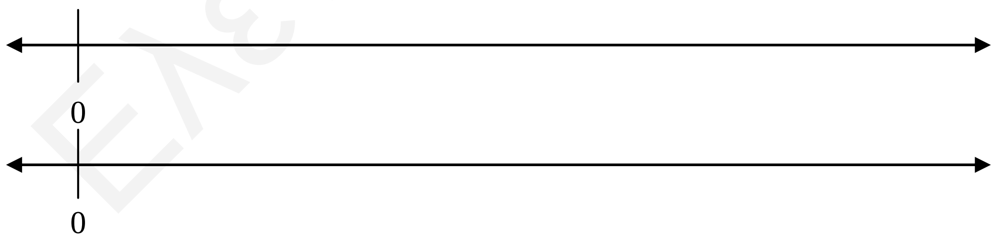
Φύλλο εργασίας 3
Ισοδυναμία κλασμάτων

1. Λύσε το πιο κάτω πρόβλημα με τη βοήθεια των αριθμητικών γραμμών.
Η μητέρα έδωσε στην Ελένη και τη Μαρία από μια σοκολάτα και τους είπε να φάνε από ένα κομμάτι σήμερα και ένα κομμάτι αύριο. Είπε στην Ελένη να φάει το $\frac{1}{2}$ της σοκολάτας της και στη Μαρία τα $\frac{2}{4}$. Βοηθήστε τα δυο κορίτσια να καταλάβουν ποια θα φάει το περισσότερο χρησιμοποιώντας αριθμητικές γραμμές»

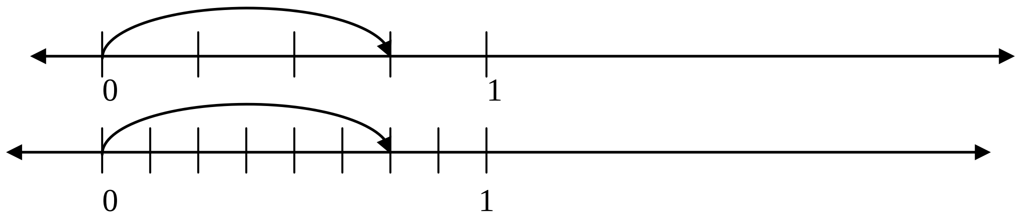
2. Λύσε το πιο κάτω πρόβλημα με τη βοήθεια των αριθμητικών γραμμών:
Η Ελένη παίζει καλαθόσφαιρα. Την Τετάρτη πετυχαίνει 3 βολές σε σύνολο 7 βολών που ρίχνει. Αν την επόμενη μέρα έχει την ίδια επιτυχία πόσες βολές θα πετύχει αν όλες οι βολές που έριξε είναι 21;

3. Γράψε ένα πρόβλημα για τη σχέση $\frac{2}{5} = \frac{4}{\square}$ και λύσε το με τη βοήθεια των αριθμητικών γραμμών.

....
....



4. Ποια σχέση αναπαριστούν οι πιο κάτω αριθμητικές γραμμές; Γράψε ένα πρόβλημα για τη σχέση αυτή.



....
....

Φύλλο εργασίας 4
Πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων

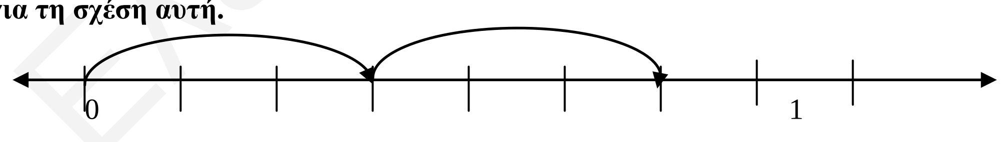
1. Λύσε το πιο κάτω πρόβλημα με τη βοήθεια της αριθμητικής γραμμής

Ένας ποδηλάτης διανύει αρχικά το $\frac{1}{5}$ της απόστασης και κάνει σταθμό. Ακολούθως, διανύει ακόμη $\frac{2}{5}$ της απόστασης και σταματά για νερό. Πόση απόσταση κάλυψε;

2. Γράψε ένα πρόβλημα για τη σχέση $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \square$ και λύσε το με τη βοήθεια των αριθμητικών γραμμών.

....
....
....
....

3. Ποια σχέση αναπαριστά η πιο κάτω αριθμητική γραμμή; Γράψε ένα πρόβλημα για τη σχέση αυτή.



....
....
....
....

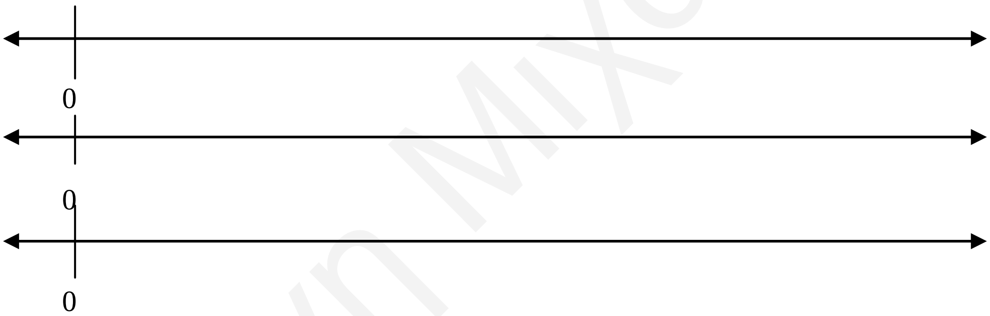
Φύλλο εργασίας 5
Πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων

1. Λύσε το πιο κάτω πρόβλημα με τη βοήθεια των αριθμητικών γραμμών

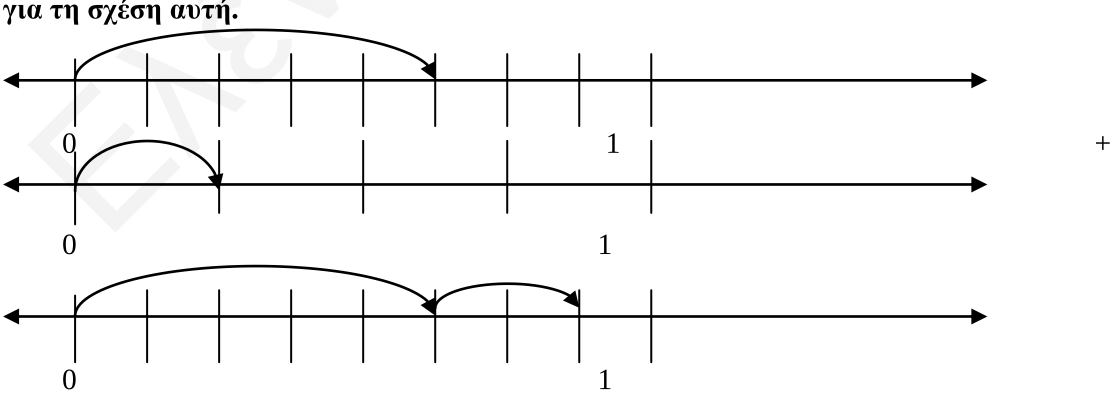
Ένας ποδηλάτης διανύει αρχικά το $\frac{1}{2}$ της απόστασης και κάνει σταθμό. Ακολούθως, διανύει ακόμη $\frac{1}{3}$ της απόστασης και σταματά για νερό. Πόση απόσταση κάλυψε;

2. Γράψε ένα πρόβλημα για τη σχέση $\frac{3}{5} + \frac{1}{2} = \square$ λύσε το με τη βοήθεια των αριθμητικών γραμμών.

....
....
....



3. Ποια σχέση αναπαριστούν οι πιο κάτω αριθμητικές γραμμές; Γράψε ένα πρόβλημα για τη σχέση αυτή.



....
....

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ
ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΑΠΟ ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΕΙΣ

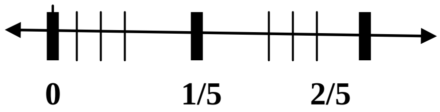
Συνέντευξη
Ισοδυναμία κλασμάτων

Συνέντευξη μαθητή με ψηλή επίδοση

1. Πρόβλημα ⟶ Αριθμητικές γραμμές

Ερευνητής: Ας ξεκινήσουμε με το πρώτο πρόβλημα. Διάβασέ το.
(Ο μαθητής διαβάζει το πρόβλημα)
Ερευνητής: Να λύσεις αυτό το πρόβλημα που διάβασες. Θα σε βοηθήσουν οι αριθμητικές γραμμές. Τι σκέφτεσαι να κάνεις;
(Ο μαθητής σκέφτεται)
Ερευνητής: Ξαναδιάβασε το πρόβλημα αν θέλεις.
(Ο μαθητής διαβάζει το πρόβλημα)
Μαθητής: Θα χωρίσω τη μια αριθμητική γραμμή σε 5 κομμάτια
Ερευνητής: Τα κομμάτια που θα χωρίσεις πώς θα είναι;
Μαθητής: Πρέπει να είναι ίσα. (Χρησιμοποιεί τη ρίγα του και χωρίζει την αριθμητική γραμμή σε 5 ίσα μέρη, χωρίς να τοποθετεί όμως αριθμούς όπως το 0 στην αρχή και το 1 στο τελευταίο σημείο)
Ερευνητής: Τώρα έχεις τελειώσει με την αριθμητική γραμμή ή πρέπει να κάνεις κάτι άλλο;
Μαθητής: Τώρα θα πάρω τα 2/5.
Ερευνητής: Περίμενε. Αφού είναι αριθμητική γραμμή, τι λείπει από αυτή;
Μαθητής: Οι αριθμοί!
Ερευνητής: Ποιος θα είναι ο πρώτος αριθμός που θα βάλεις εδώ; (δείχνει την πρώτη κατακόρυφη γραμμή)
Μαθητής: Το 1/5
Ερευνητής: Αφού θα χωριστεί σε πέμπτα η γραμμή, τότε το πρώτο διάστημα τι μήκος θα έχει;
Μαθητής: 1/5
Ερευνητής: Άρα πώς ξεκινά η αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Με το μηδέν.
(Ο μαθητής ξεκινώντας από το 0 γράφει κάτω από κάθε διαχωριστική κάθετη γραμμή το κλάσμα που αντιστοιχεί, ενώ στην τελευταία κατακόρυφη γραμμή σημειώνει τον αριθμό 1).
Ερευνητής: Τώρα τι θα κάνεις;
Μαθητής: Θα πάρω τα 2/5
(Ο μαθητής κάνει ένα βέλος που ξεκινά από το 0 και καταλήγει στο σημείο 2/5)
Ερευνητής: Τι έχεις δείξει με αυτό;
Μαθητής: Πόση σοκολάτα έφαγε η Ελένη.
Ερευνητής: Τι σου έμεινε τώρα;
Μαθητής: Να χωρίσω σε 20 κομμάτια τη σοκολάτα της Μαρίας.
Ερευνητής: Να θυμάσαι ότι η σοκολάτα της Μαρίας είναι ....τι είναι;
Μαθητής: Η ίδια με της Ελένης.
Ερευνητής: Τι θα χρησιμοποιήσεις για να μας δείξεις το μέρος της σοκολάτας που έφαγε η Μαρία;
Μαθητής: Την άλλη αριθμητική γραμμή.
(Ο μαθητής αρχίζει να κάνει κατακόρυφους διαχωρισμούς και τοποθετεί το 0 και το 1 της νέας αριθμητικής γραμμής κάτω από το 0 και το 1 της προηγούμενης, αντίστοιχα)
Ερευνητής: Τι σκέφτεσαι να κάνεις;
Μαθητής: Για κάθε ένα πέμπτο της Ελένης, θα έχει τέσσερα κομματάκια της Μαρίας

(Ο μαθητής κάνει 20 κατακόρυφους διαχωρισμούς, αφήνοντας μεγαλύτερο διάστημα ανάμεσα στους διαχωρισμούς όταν συμπληρώνεται πέμπτο π.χ



)

Ερευνητής: Εδώ γιατί αφήνεις το τελευταίο και το πρώτο από τα τέσσερα διαστήματα πιο μεγάλο;
Μαθητής: Θα τα σβήσω (σβήνει τους διαχωρισμούς του και τους ξανακάνει με τέτοιο τρόπο ώστε τα 20 διαστήματα να είναι ίσα)
Ερευνητής: Τώρα τι θα κάνεις;
Μαθητής: Θα δείξω πόσα έφαγε η Μαρία.
Ερευνητής: Πώς θα το δείξεις αυτό;
(Ο μαθητής σκέφτεται)
Ερευνητής: Ποια πληροφορία σε βοηθά από το πρόβλημα.;
Μαθητής: Ότι έχουν φάει τα ίδια. (δείχνει στη δεύτερη αριθμητική γραμμή και είναι έτοιμος να ζωγραφίσει ένα βέλος)
Ερευνητής: Από που θα ξεκινά το βέλος;
Μαθητής: Θα ξεκινά από το 0...και θα πάει μέχρι τα 8.
Ερευνητής: Γιατί ως το 8 και όχι τα 9 ας πούμε;
Τι σε βοηθά και κατάλαβες ότι θα πάρεις τα 8; Γιατί το βελάκι σου θα σταματήσει στα 8/20;
Μαθητής: Γιατί είναι ισοδύναμο με τα 2/5
Ερευνητής: Τι σε βοήθησε και είπες ότι ο αριθμός που γυρεύουμε είναι τα 8/20; Τι σε βοηθά να δεις πού θα σταματήσεις; Εντωμεταξύ κάνε το βελάκι σου.
Μαθητής: Με βοηθούν τα 2/5 (στη δεύτερη αριθμητική γραμμή κατασκευάζει βέλος που ξεκινά από το 0 και καταλήγει στα 8/20).
Ερευνητής: Τι παρατηρείς;
Μαθητής: Ότι τα δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα.
Ερευνητής: Άρα τι σε βοήθησε να βρεις τα 8/20; Τι σε βοήθησε να δεις πού θα σταματήσεις ακριβώς;
Μαθητής: Το διάστημα μεταξύ του 0 και των 2/5.
(Ο μαθητής γράφει, επίσης, τη σχέση ισοδυναμίας που του ζητείται, 2/5=8/20)

2. Αριθμητική γραμμή → Συμβολική έκφραση

2.1 Αριθμητική γραμμή από 0-1 → Εξίσωση

Ερευνητής: Στην άσκηση αυτή δίνονται δύο αριθμητικές γραμμές. Η μια αναπαριστά ένα αριθμό, η άλλη αναπαριστά άλλο αριθμό. Μπορείς να σκεφτείς αν υπάρχει κάποια σχέση ανάμεσα στους δύο αριθμούς;
Μαθητής: Είναι ισοδύναμα.
Ερευνητής: Γιατί; Το πρώτο ποιο κλάσμα είναι;
Μαθητής: 7/9 (ξαναμετρά)...όχι είναι το 6/8
Ερευνητής: Το δεύτερο ποιο είναι;
Μαθητής: Το ¾
Ερευνητής: Από πού καταλαβαίνεις ότι είναι ίσα;
Μαθητής: Άμα διπλασιάσουμε τα ¾ γίνεται 6/8
Ερευνητής: Να το διπλασιάσουμε. Να βάλουμε δυο φορές τα ¾. ¾ και άλλα ¾;
Μαθητής: 6/4.
Ερευνητής: 6/4..είναι ίσο με το 6/8
Μαθητής: Εννοώ να διπλασιάσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή και θα έχουμε 6/8.
Ερευνητής: Μάλιστα. Αφού διπλασιάσαμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή τότε γιατί το 6/8 είναι ισοδύναμο με το ¾; Δεν είναι το διπλάσιο;

(Ο μαθητής σκέφτεται για αρκετή ώρα)
Ερευνητής: Πώς μπορείς να μου δείξεις ότι είναι ισοδύναμα;
(Ο μαθητής σκέφτεται για αρκετή ώρα)
Ερευνητής: Κοίταξε την αριθμητική γραμμή. Μήπως σε βοηθά;
Μαθητής: Ναι.
Ερευνητής: Γιατί;
Μαθητής: Διότι το διάστημα από το 0 ως το 6/8 είναι το ίσο με το διάστημα από το 0 ως το ¾.
Ερευνητής: Μπορείς να μου γράψεις την εξίσωση;
(Ο μαθητής γράφει ¾=6/8)
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις ένα δικό σου πρόβλημα με αυτή την εξίσωση;
Μαθητής: Είχα μια σοκολάτα και τη χώρισα σε 8 κομμάτια. Έφαγα τα 6. Ένας φίλος μου είχε την ίδια σοκολάτα με τη δική μου, αλλά τη χώρισε σε τέσσερα ίσα μέρη και έφαγε τα 3.
Ερευνητής: Άρα; Ποιο είναι το συμπέρασμα;
Μαθητής: Φάγαμε και οι δύο το ίδιο.

2.2 Αριθμητική γραμμή 0-2 → Εξίσωση

Ερευνητής: Εδώ έχουμε και πάλι δύο αριθμητικές γραμμές που αναπαριστούν δύο αριθμούς. Υπάρχει σχέση ανάμεσα στους δύο αριθμούς;
Ερευνητής: Πρώτα απ'όλα ποιος είναι ο πρώτος αριθμός;
Μαθητής: Είναι τα 2/6. (Λαμβάνει υπ' όψη του και τις υποδιαιρέσεις ως το 2 και δε σταματά ως το 1)
Ερευνητής: Ο άλλος αριθμός ποιος είναι;
Μαθητής: 6/18.
Ερενητής: Αυτό που με προβληματίζει είναι το εξής: Έχεις προσέξει τους αριθμούς στην αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Προχωρά μέχρι το 2.
Ερευνητής: Άρα αυτά που μέτρησες είναι τα 2/6 και τα 6/18;
Μαθητής: Είναι τα 2/3.
Ερευνητής: Γιατί;
(Ο μαθητής σκέφτεται για αρκετή ώρα)
Ερευνητής: Πώς είναι χωρισμένο το πρώτο διάστημα, ως το 1;
Μαθητής: Σε τρίτα.
Ερευνητής: Πώς είναι χωρισμένο το δεύτερο διάστημα, από το 1 ως το 2;
Μαθητής: Σε τρίτα.
Ερευνητής: Τότε γιατί απάντησες 2/6;
Μαθητής: Πρόσθεσα τα τρίτα
Ερευνητής: Τα 2/6 που μου είπες είναι τα 2/6 ή τα 2/6 του 2;
Μαθητής: Τα 2/6 του 2.
Ερευνητής: Άρα ποιος αριθμός είναι;
Μαθητής: Τα 4/6..δηλαδή τα 2/3
Ερευνητής: Μπορείς να μου αριθμήσεις τη γραμμή; Να βάλεις αριθμούς σε κάθε κατακόρυφη γραμμή;
Μαθητής: Είναι σε τρίτα...άρα έχουμε 1/3, 2/3,3/3, 4/3...1 και 1/3, 1 και 2/3 και τέλος το 2.
Ερευνητής: Άρα ποιος είναι ο αριθμός εκεί που τελειώνει το βέλος;
Μαθητής: Το 2/3
Ερευνητής: Ποιος είναι ο αριθμός στην άλλη αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Είναι τα 6/9
Ερευνητής: Για να είναι σωστοί οι αριθμοί που μου είπες στην αρχή τι έπρεπε να υπάρχει στη θέση του 2 στην αριθμητική γραμμή;

Μαθητής: Να υπάρχει το 1.
Ερευνητής: Ποια είναι η σχέση των δυο αριθμών που βρήκες;
Μαθητής: Είναι ισοδύναμα κλάσματα.
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις και ένα πρόβλημα;
Μαθητής: Είχα μια μπουκάλα νερό. Από αυτή ήπια τα 2/3. Η αδελφή μου είχε την ίδια μπουκάλα και ήπιε τα 6/9. Όμως ήπιαμε την ίδια ποσότητα.

3. Συμβολική έκφραση → Αριθμητική γραμμή

3.1 Συμβολική έκφραση → Αριθμητική γραμμή 0-1

Ερευνητής: Τώρα σου δίνω την εξίσωση της ισοδυναμίας (1/3 =7/21). Μπορείς να δείξεις με τη βοήθεια των αριθμητικών γραμμών ότι είναι ισοδύναμα αυτά τα δύο κλάσματα;
Μαθητής: Ναι.
Ερευνητής: Τι θα κάνεις για να το δείξεις;
Μαθητής: Θα χωρίσω την πρώτη αριθμητική γραμμή σε τρίτα. (χωρίζει την πρώτη αριθμητική γραμμή σε τρίτα)
Ερευνητής: Μετά;
Μαθητής: Θα γράψω τα κλάσματα (Αριθμεί τις κατακόρυφες γραμμές : 1/3/, 2/3)
Ερευνητής: Το βελάκι;
Μαθητής: Θα ξεκινά από το 0 και θα σταματά στο 1/3 (Κατασκευάζει το βελάκι)
Ερευνητής: Στην επόμενη αριθμητική γραμμή τι θα κάνεις;
Μαθητής: Θα τη χωρίσω σε εικοστά πρώτα. (τη χωρίζει σε εικοστά πρώτα αλλά δεν την αριθμεί)
Ερευνητής: Αυτό το 1/3 που έχεις βρει στην πρώτη αριθμητική γραμμή, πόσα από τα εικοστά πρώτα της δεύτερης αριθμητικής γραμμής χωρεί;
Μαθητής: 7.
Ερευνητής: Το νέο βελάκι που θα κάνεις που θα καταλήγει;
Μαθητής: Θα ξεκινά από το 0 και θα καταλήγει στο 7/21.
Ερευνητής: Ποιο διάστημα σε βοηθά πού θα καταλήξεις;
Μαθητής: Το διάστημα από το 0 ως το 1/3.

3.2 Συμβολική έκφραση → Αριθμητική γραμμή 0-2

Ερευνητής: Την ίδια σχέση θέλω να τη δείξεις και με τη βοήθεια των άλλων δύο αριθμητικών γραμμών. Ποια είναι η διαφορά τώρα εδώ;
Μαθητής: Από το 0 φτάνει μέχρι το 2.
Ερευνητής: Τι σκέφτεσαι να κάνεις;
Μαθητής: Θα χωρίσω σε τρίτα από το 0 μέχρι το 1.
Ερευνητής: Γιατί;
Μαθητής: Γιατί τα κλάσματα που γυρεύω είναι μικρότερο από το 1.
Ερευνητής: Αν τη χωρίσεις μέχρι το 2, θα αλλάξει το αποτέλεσμα;
Μαθητής. Όχι.
Ερευνητής: Σε ποιο διάστημα θα επικεντρώσεις την προσοχή σου;
Μαθητής: Από το 0 μέχρι το 1.
(Χωρίζει την επόμενη αριθμητική γραμμή σε τρίτα από το 0 ως το 1)
Ερευνητής: Το διάστημα από το 1 ως το 2 δε θα το χωρίσεις;
Μαθητής: Όχι.
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις πώς μετρούμε μετά που χωρίσαμε σε τρίτα;
Μαθητής:1/3, 2/3, 3/3 δηλαδή 1 ...

Ερευνητής: Μετά;
Μαθητής: Να το χωρίσουμε και αυτό το διάστημα σε τρίτα
(Χωρίζει το διάστημα 1 ως 2 σε τρίτα) ..έχουμε 1 και 1/3, 1 και 2/3 και το 2.
Ερευνητής: Μετά τι θα κάνουμε;
Μαθητής: Θα χωρίσω την άλλη αριθμητική γραμμή σε εικοστά πρώτα.
Ερευνητής: Από πού μέχρι πού;
Μαθητής: Από το 0 μέχρι το 1.
Ερευνητής: Τι θα γίνει με το διάστημα 1 ως 2;
Μαθητής: Θα το χωρίσω και αυτό σε εικοστά πρώτα.
(Χωρίζει τα διαστήματα 0 ως 1 και 1 ως 2 σε εικοστά πρώτα)
Ερευνητής: Τώρα από πού θα ξεκινήσει το βελάκι σου;
Μαθητής: Από το 0 μέχρι τα 7/21
Ερευνητής: Τι σε βοηθά για να δεις πού θα σταματήσει ακριβώς;
Μαθητής: Το ότι είναι ισοδύναμο με το προηγούμενο...Πρέπει να σταματήσει στο ίδιο σημείο.
Ερευνητής: Δηλαδή;
Μαθητής: Τα βελάκια θα καλύψουν την ίδια απόσταση.
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις ένα πρόβλημα που να αντιστοιχεί στην ισοδυναμία αυτή;
Μαθητής: Είχα ξεκινήσει από τη Λεμεσό και πήγαινα προς τη Λευκωσία και κάλυψα το 1/3 της απόστασης. Ο φίλος μου ξεκίνησε και αυτός από τη Λεμεσό για να πάει στη Λευκωσία και κάλυψε τα 7/21 της απόστασης. Καλύψαμε την ίδια απόσταση.
Ερευνητής: Άρα βρεθήκατε....
Μαθητής: Στο ίδιο σημείο.
Ερευνητής: Οι αριθμητικές γραμμές σε βοηθούν να βρεις ισοδύναμα κλάσματα;
Μαθητής: Ναι, γιατί αρχίζουν από το ίδιο σημείο και σταματούν στο ίδιο σημείο
Ερευνητής: Τι μπορούν να σου δείξουν οι αριθμητικές γραμμές που ίσως μπορεί να μην το καταλάβεις όταν δεις δύο κλάσματα;
Μαθητής: Ότι είναι ισοδύναμα.
Ερευνητής: Τι καλύπτουν όταν ξεκινήσουν από το ίδιο σημείο;
Μαθητής: Την ίδια απόσταση.

Συνέντευξη
Ισοδυναμία κλασμάτων

Συνέντευξη μαθητή με μέτρια επίδοση

1. **Πρόβλημα ⟶ αριθμητική γραμμή**

Ερευνητής: Διάβασε το πρώτο πρόβλημα και μετά θα σου κάνω μερικές ερωτήσεις (Ο μαθητής το διαβάζει)
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις τι λέει το πρόβλημα;
Μαθητής: Λέει ότι η Μαρία και η Ελένη αγόρασαν μια σοκολάτα και η Μαρία έφαγε τα 2/5 της σοκολάτας και η Ελένη την έκοψε σε είκοσι κομμάτια. Πόσα κομμάτια έφαγαν και οι ....η σοκολάτα...πόσα κομμάτια έφαγε η Ελένη;
Ερευνητής: Ποιο στοιχείο στο πρόβλημα σε βοηθά και ξέχασες να το πεις;
Μαθητής: Ότι έφαγαν την ίδια ποσότητα.
Ερευνητής: Εδώ σου δίνω δυο αριθμητικές γραμμές. Μπορείς να τις χρησιμοποιήσεις για να λύσεις το πιο πάνω πρόβλημα;
Μαθητής: Ναι Θα χωρίσω την πρώτη γραμμή σε πέντε κομμάτια και θα δείξω τα 2/5 που έφαγε η Μαρία.
Ερευνητής: Στην άλλη αριθμητική γραμμή τι θα κάνεις;
Μαθητής: Θα τη χωρίσω σε είκοσι κομμάτια και θα δείξω πως η Ελένη έφαγε την ίδια ποσότητα με τη Μαρία.
Ερευνητής: Αυτό θέλεις να δείξεις;
Μαθητής: Όχι, θα δείξω πόσα κομμάτια έφαγε η Ελένη.
(Ο μαθητής χωρίζει την πρώτη αριθμητική γραμμή σε τέσσερα μεγάλα διαστήματα και χωρίζει το κάθε διάστημα σε πέντε ίσα μέρη)
Ερευνητής: Σε πόσα κομμάτια χώρισες την αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Σε πέντε..σε τέσσερα..Σε πέντε κομμάτια...
Ερευνητής: Δε βλέπω πέντε κομμάτια.
Μαθητής: Σε τέσσερα κομμάτια.
Ερευνητής: Βλέπω και επιπλέον κομμάτια, γιατί τα έκανες; (πέντε υποδιαιρέσεις για κάθε διάστημα)
Μαθητής: Για να δείξω τα κομμάτια που έφαγε η Μαρία.
Ερευνητής: Άρα δε θα χρησιμοποιήσεις τη δεύτερη αριθμητική γραμμή. Θα το δείξεις μόνο με την πρώτη αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Ναι.
Ερευνητής: Εντάξει. Επειδή όμως είναι αριθμητική γραμμή τι χρειάζεται;
Μαθητής: Αριθμούς (Αριθμεί τα μεγάλα διαστήματα από το 0 ως το 4 και σημειώνει το 2/5 το οποίο βρίσκεται ανάμεσα στο 0 και στο 1)
Ερευνητής: Ωραία, βρήκες τα 2/5 της Ελένης. Τι θα κάνεις για τη Μαρία;
Μαθητής: Θα δείξω τα 20 κομμάτια που έφαγε η Μαρία.
Ερευνητής: Έφαγε 20 κομμάτια η Μαρία;
Μαθητής: Πόσα έκοψε από τα 20.
Ερευνητής: Πώς θα το δείξεις;
Μαθητής: Θα χρησιμοποιήσω την ίδια αριθμητική γραμμή που την αρίθμησα ως το 4 και θα δείξω στις επιπλέον γραμμές τα κομμάτια που έφαγε η Μαρία.
Ερευνητής: Μάλιστα. Πόσες ολόκληρες σοκολάτες αγόρασε η Μαρία;
Μαθητής: Μια ολόκληρη.
Ερευνητής: Η Ελένη, λοιπόν, αγόρασε τη σοκολάτα και έφαγε τα 2/5. Πώς θα μου δείξεις τι έφαγε η Μαρία αν προχωρήσεις στα επιπλέον;
Μαθητής: Θα ξεκινήσω και θα προχωρήσω από το 1.
Ερευνητής: Ώστε η Μαρία έφαγε περισσότερο από 1 σοκολάτα;
Μαθητής: Όχι. Αφού έφαγαν την ίδια ποσότητα.
Ερευνητής: Τι θα κάνεις;
Μαθητής: Να χρησιμοποιήσω την άλλη αριθμητική γραμμή;

Ερευνητής: Αν θέλεις.
Μαθητής: (Χωρίζει και τη δεύτερη αριθμητική γραμμή σε 4 ίσα διαστήματα τα οποία αριθμεί από το 0 ως το 4).
Ερευνητής: Τώρα για να μου δείξεις πόσο έφαγε η Μαρία ως πού θα φτάσεις; Αν για παράδειγμα φτάσεις εδώ πόσες σοκολάτες έφαγε η Μαρία; (δείχνει από το 0 μέχρι το 2)
Μαθητής: 2 σοκολάτες
Ερευνητής: Όμως σύμφωνα με το πρόβλημα τι έφαγε η Μαρία; Μια σοκολάτα, λιγότερο από μια ή περισσότερο από μια;
Μαθητής: Έφαγε μια ολόκληρη σοκολάτα και 9...(σκέφτεται)
Ερευνητής: Για ξαναπές μου πόσες σοκολάτες αγόρασε η Μαρία.
Μαθητής: Μια.
Ερευνητής: Σε πόσα κομμάτια την έκοψε;
Μαθητής: 20.
Ερευνητής: Και μετά;
Μαθητής: Μετά έφαγε μερικά.
Ερευνητής: Έφαγε λιγότερο από μια ή περισσότερο από μια σοκολάτα η Μαρία;
Μαθητής: Λιγότερο.
Ερευνητής: Τότε πώς θα μου δείξεις πόσο έφαγε η Μαρία**;**
Μαθητής: Θα χωρίσω από το 0 ως το 1 σε 20 κομμάτια.
Ερευνητής: Καλά, αν προχωρούσαμε και περισσότερο από τον αριθμό 1 τι θα σήμαινε;
Μαθητής: Ότι έφαγε παραπάνω από μια σοκολάτα.
Ερευνητής: Τώρα, τι θα σε βοηθήσει να βρεις πόσα έφαγε η Μαρία;
Μαθητής: Το ότι η Μαρία έφαγε την ίδια ποσότητα με την Ελένη.
Ερευνητής: Τι θα σε βοηθήσει, λοιπόν, να συμπληρώσεις το σχήμα;
Μαθητής: Στην πρώτη αριθμητική γραμμή βάλαμε τα 2/5 και θα βάλουμε αυτή τη γραμμή (εννοεί το διάστημα από το 0 ως τα 2/5) και στη δεύτερη αριθμητική γραμμή τα 2/5.
Ερευνητής: Πόσα κομματάκια βρήκες τώρα;
Μαθητής: 8.
Ερευνητής: Καλά, η μια έφαγε 2 και η άλλη 8 και τελικά έφαγαν το ίδιο;
Μαθητής: Ναι, διότι της μιας τα κομμάτια, που ήταν 5, ήταν πιο μεγάλα από τα άλλα κομμάτια που ήταν 8.
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις μια σχέση ανάμεσα στα δύο κλάσματα;
Μαθητής: Είναι ισοδύναμα. 2/5=8/20 (γράφει τη σχέση).
Ερευνητής: Κοίταξε στην αριθμητική γραμμή. Κάθε 1/5 με πόσα εικοστά αντιστοιχεί;
Μαθητής: Με 4/20.

2. Αριθμητική γραμμή → Συμβολική σχέση

Ερευνητής: Σου δίνω δύο αριθμητικές γραμμές. Ποια σχέση αναπαριστούν;
Μαθητής: Είναι ισοδύναμες.
Ερευνητής: Είναι ισοδύναμες οι γραμμές;
Μαθητής: Όχι. Τα κλάσματα που δείχνουν οι γραμμές;
Ερευνητής: Γιατί;
Μαθητής: Γιατί η γραμμή που δείχνουν είναι η ίδια...η απόσταση είναι η ίδια.

Ερευνητής: Ποια απόσταση;
Μαθητής: Από το 0 ως το 6/8...και η απόσταση από το 0 ως το ¾.
Ερευνητής: Μπορείς να δεις στις αριθμητικές γραμμές αν είναι ισοδύναμα;
Μαθητής: Ναι, διότι είναι ίδια η απόσταση.
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις και ένα πρόβλημα για αυτή τη σχέση;
Μαθητής: Η Ελένη έφαγε τα 6/8 μιας σοκολάτας και η Μαρία έφαγε τα ¾ μιας σοκολάτας. Πόσα κομμάτια έφαγαν συνολικά;
Ερευνητής: Τι πράξη θα κάνεις για να το βρεις;
Μαθητής: Πρόσθεση.
Ερευνητής: Η σχέση που σου δίνω έχει πρόσθεση;
Μαθητής: Όχι. Να ρωτήσουμε πόσα έφαγε η Μαρία.
Ερευνητής: Πώς θα βρούμε τι έφαγε η Μαρία; Τι πρέπει να πεις άλλο στο πρόβλημα;
Μαθητής: Ότι η ποσότητα που έφαγαν είναι η ίδια.
Ερευνητής: Οι σοκολάτες που έφαγαν ήταν οι ίδιες ή ήταν διαφορετική της μιας και διαφορετική της άλλης;
Μαθητής: Ήταν οι ίδιες.

3. Αριθμητική γραμμή (αριθμημένη ως το 2) → Συμβολική έκφραση

Ερευνητής: Τι δείχνουν αυτές οι δύο αριθμητικές γραμμές;
Μαθητής: Η μια δείχνει τα 2/6 και η άλλη δείχνει τα 6/18
Ερευνητής: Και τι είναι αυτά τα κλάσματα μεταξύ τους;
Μαθητής: Ισοδύναμα.
Ερευνητής: Να σε ρωτήσω κάτι. Αν δεν υπήρχαν αυτά (οι υποδιαιρέσεις ανάμεσα στο 0, 1 και 2) και υπήρχαν μόνο οι γραμμές του 0, του 1 και του 2. Πώς θα μου έλεγες ότι προχωρούν οι αριθμοί στην αριθμητική γραμμή; Τι βάζουμε κάθε φορά;
Μαθητής: Βάζω ένα ολόκληρο.
Ερευνητής: Τώρα εδώ τι βάζω;
Μαθητής: 1/3!
Ερευνητής: Ποιος είναι ο αριθμός που δείχνει η πρώτη αριθμητική γραμμή λοιπόν;
Μαθητής: Είναι τα 2/3.
Ερευνητής: Ποιος είναι ο αριθμός στην άλλη γραμμή;
Μαθητής: 6/18
Ερευνητής: Στη δεύτερη γραμμή πώς προχωρούμε;
Μαθητής: Βάζουμε 1/9.
Ερευνητής: Πόσα τέτοια κομμάτια υπάρχουν ως το 1;
Μαθητής: 9.
Ερευνητής: Ένας συμμαθητής σου μου είπε ότι ο αριθμός είναι το 6/18. Τι θα του απαντούσες;
Μαθητής: Ότι δεν προχωρούμε με δεκαταόγδοα, διότι ως το 1 θα θέλαμε 18 δεκαταόγδοα. Κάθε φορά βάζω 1/9 γι'αυτο και ως το 1 έχω 9/9.
Ερευνητής: Ποια είναι η ισοδυναμία;
Μαθητής: 2/3=6/9
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις ένα πρόβλημα;
Μαθητής: Ο Κώστας αγόρασε 2 σοκολάτες και από τη μια έφαγε τα 2/3 και Ο μαθητής αγόρασε 2 σοκολάτες και έφαγε τα 6/9 από τη μια. Πόσα έφαγε Ο μαθητής;...Ο Κώστας; Πόσα έφαγε ο...;
Ερευνητής: Μήπως στα προβλήματα πρέπει να κρύψεις κάτι από τις πληροφορίες που δίνει το πρόβλημα;
Μαθητής: Ο Κώστας έφαγε τα 2/3 και Ο μαθητής έφαγε...έκοψε τη σοκολάτα του σε 9 ...Αν έφαγαν την ίδια ποσότητα, πόσο έφαγε Ο μαθητής;

Ερευνητής: Συνέχισε μου τώρα το πρόβλημα. Αν Ο μαθητής έφαγε 6...Τι θα ρωτήσεις;
Μαθητής: Πόσα ήταν τα κομμάτια που έκοψε Ο μαθητής;

4. Συμβολική έκφραση → Αριθμητική γραμμή

Ερευνητής: Τώρα σου δίνω μια σχέση ανάμεσα σε δύο κλάσματα. Μπορείς να μου τη δείξεις στην αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Ναι
Ερευνητής: Τι θα κάμεις πρώτα;
Μαθητής: Θα χωρίσω την πρώτη αριθμητική γραμμή σε τρία (χωρίζει την αριθμητική γραμμή σε τρία ίσα μέρη και επιλέγει το 1/3)
Ερευνητής: Μετά;
Μαθητής: Θα χωρίσω τη δεύτερη αριθμητική γραμμή σε 21 (χωρίζει την αριθμητική γραμμή σε 21 ίσα μέρη και επιλέγει τα 7)
Ερευνητής: Πώς έχεις δείξει τώρα ότι τα δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα;
Μαθητής: Επειδή η απόσταση από το 0 είναι η ίδια.
Ερευνητής: 1/3 με πόσα εικοστά πρώτα αντιστοιχεί;
Μαθητής: Με εφτά.

5. Συμβολική έκφραση → Αριθμητική γραμμή (αριθμημένη ως το 2)
Ερευνητής: Τώρα σου δίνω μια σχέση ανάμεσα σε δύο κλάσματα. Μπορείς να μου τη δείξεις στην αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Ναι
Ερευνητής: Τι θα κάνεις;
Μαθητής: Θα χωρίσω την πρώτη αριθμητική γραμμή σε τρίτα και τη δεύτερη σε εικοστά πρώτα.
Ερευνητής: Πώς;
Μαθητής: Θα χωρίσω την πρώτη αριθμητική γραμμή σε τρίτα από το 0 ως το 1 και μετά σε τρίτα από το 1 ως το 2. Μετά θα χωρίσω τη δεύτερη αριθμητική γραμμή σε εικοστά πρώτα από το 0 ως το 1 και σε εικοστά πρώτα από το 1 ως το 2.
Ερευνητής: Και γιατί να μη χωρίσεις το διάστημα από το 0 ως το 2 σε εικοσιένα κομμάτια;
Μαθητής: Διότι 21/21 είναι το ως το 1.
Ερευνητής: Από πού θα δεις τι αριθμό θα βάζεις κάθε φορά για να προχωρήσεις στην αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Μου το δείχνει ο παρονομαστής του κλάσματος.
Ερευνητής: Πώς έχεις δείξει τώρα ότι τα δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα;
Μαθητής: Επειδή η απόσταση από το 0 είναι η ίδια.
Ερευνητής: Πες μου ένα πρόβλημα για τη σχέση αυτή.
Μαθητής: Ο κύριος Αντρέας έχει στο χωράφι του 1/3 πορτοκαλιές και σε ένα άλλο περιβόλι έχει....όχι....Έχει 1/3 πορτοκαλιές και έκοψε τα 7/21 των πορτοκαλιών.
Ερευνητής: Πώς θα βρούμε τα 7/21 του 1/3;
Μαθητής: Με πολλαπλασιασμό.
Ερευνητής: Εδώ η σχέση αυτή είναι πολλαπλασιασμός;
Μαθητής: Όχι..διαίρεση
Ερευνητής: Εγώ σου δίνω τη σχέση 1/3=7/21. Είναι διαίρεση;
Μαθητής: Όχι...Η Χριστίνα και η Μαρία αγόρασαν από μια σοκολάτα. Οι σοκολάτες τους ήταν οι ίδιες. Η Μαρία έκοψε το 1/3 της σοκολάτας και η Μαρία

έκοψε τη σοκολάτα της σε 21 κομμάτια. Η Μαρία έφαγε την ίδια ποσότητα με τη Χριστίνα. Πόσα κομμάτια έφαγε η Μαρία;
Ερευνητής: Για να θυμηθούμε λίγο το πρόβλημα με τα δέντρα που μου είπες. Ο κ. Μάριος έχει στο περιβόλι του δέντρα. Το 1/3 είναι πορτοκαλιές. Από τα 21 δέντρα κόβει όλες τις πορτοκαλιές. Πόσες πορτοκαλιές έκοψε;
Μαθητής: Το 1/3
Ερευνητής: Τι αριθμός είναι όμως το 1/3 του 21;
Μαθητής: 7/21.
Ερευνητής: Άρα έκοψε τα 7/21 της πορτοκαλιάς. Ένας συμμαθητής σου μου είπε ότι αφού έκοψε τα 7/21 της πορτοκαλιάς σημαίνει ότι δεν έκοψε ούτε μια ολόκληρη πορτοκαλιά.
Μαθητής: Εννοώ ότι το 1/3 του 21....είναι το 7.
Ερευνητής: Αν όλα τα δέντρα ήταν 6 πόσες ήταν οι πορτοκαλιες;
Μαθητής: 18.
Ερευνητής: Όλα τα δέντρα είναι 6.
Μαθητής: 2 πορτοκαλιές.
Ερευνητής: Αν όλα τα δέντρα ήταν 30 πόσες ήταν οι πορτοκαλίες;
Μαθητής: 10.
Ερευνητής: Αν όλα τα δέντρα ήταν 3 πόσες θα ήταν οι πορτοκαλιές;
Μαθητής: 1.

<u>Συνέντευξη</u>
<u>Ισοδυναμία κλασμάτων</u>

<u>Συνέντευξη μαθητή με χαμηλή επίδοση</u>

1. Πρόβλημα ---------→ Αριθμητική γραμμή, εξίσωση

Ερευνητής: Θα εργαστούμε μαζί για να λύσουμε το φύλλο εργασίας που έχω μπροστά σου. Ξεκίνησε με το πρώτο πρόβλημα και πες μου με δικά σου λόγια τι λέει.
Μαθητής: Κατάλαβα ότι η Ελένη και η Μαρία αγόρασαν μια σοκολάτα, το ίδιο μέγεθος και η Ελένη την έκοψε σε 5 κομμάτια, ενώ η Μαρία σε 20. Η Ελένη έφαγε τα 2/5 και έφαγαν την ίδια ποσότητα σοκολάτας.
Ερευνητής: Μας λέει τι μέρος της σοκολάτας έφαγε η Μαρία;
Μαθητής: Όχι.
Ερευνητής: Τι γνωρίζουμε μόνο για τη Μαρία;
Μαθητής: Ότι έφαγε την ίδια ποσότητα με την Ελένη.
Ερευνητής: Τι ζητά το πρόβλημα;
Μαθητής: Πόσα κομμάτια έφαγε η Μαρία.
Ερευνητής: Θα ήθελα να λύσεις το προβληματάκι με τη βοήθεια των αριθμητικών γραμμών. Γιατί έχω άραγε δύο αριθμητικές γραμμές;
Μαθητής: Η μια θα είναι για την Ελένη και η άλλη για τη Μαρία.
Ερευνητής: Τι θα κάνεις στην αριθμητική γραμμή της Ελένης;
Μαθητής: Θα τη χωρίσω σε 5 (φέρει δύο κατακόρυφες γραμμές, στη μια τοποθετεί το 0 και στην άλλη το 1 και χωρίζει το διάστημα από 0 ως 1 σε 5 ίσα μέρη).
Ερευνητής: Και τι θα δείξεις στην αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Τα 2/5 (επιλέγει τα 2/5 φέροντας βέλος από το 0 ως την τρίτη κατακόρυφη γραμμή).
Ερευνητής: Ωραία. Πώς μπορεί αυτή η αριθμητική γραμμή να μας βοηθήσει για να δούμε πόσα κομμάτια έφαγε η Μαρία;
Μαθητής: (σκέφτεται για ένα λεπτό, αλλά δεν απαντά).
Ερευνητής: Τι θα κάνεις στη δεύτερη αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Θα τη μοιράσω σε 20. (φέρει δύο κατακόρυφες γραμμές, στην πρώτη αριθμητική γραμμή τοποθετεί το 0 και στη δεύτερη το 1 και χωρίζει το διάστημα 0 ως 1 σε 20 ίσα μέρη).
Ερευνητής: Πώς θα μου δείξεις πόσα κομμάτια έφαγε η Μαρία;
Μαθητής: (σκέφτεται, δεν απαντά).
Ερευνητής: Τι ξέρεις για τη Μαρία;
Μαθητής: Ότι έφαγε την ίδια ποσότητα με την Ελένη.
Ερευνητής: Άρα τι θα κάνεις για να μου δείξεις πόσα έφαγε η Μαρία;
Μαθητής: (δεν απαντά).
Ερευνητής: Αν φανταστούμε ότι το διάστημα 0 ως το 1 στην πρώτη αριθμητική γραμμή είναι η σοκολάτα της Ελένης και ότι το διάστημα 0 ως το 1 στη δεύτερη αριθμητική γραμμή είναι η σοκολάτα της Μαρίας, πώς μπορούμε να δείξουμε την ποσότητα που έφαγε η Μαρία;
Μαθητής: Χρειάζεται να κάνω πράξεις; Δεν ξέρω τι πράξη να κάνω.
Ερευνητής: Μπορείς να μου δείξεις το μέρος της σοκολάτας που έφαγε η Ελένη;
Μαθητής: Νά'το (δείχνει από το την κατακόρυφη γραμμή που είναι ο αριθμός 0 ως την κατακόρυφη γραμμή που είναι το 2/5)
Ερευνητής: Άρα;

Μαθητής: Θα κάνω το ίδιο κομμάτι και για τη Μαρία (στη δεύτερη αριθμητική γραμμή κατασκευάζει βέλος το οποίο ξεκινά από το 0 και συγκρίνοντας συνεχώς με το διάστημα από το 0 ως το 2/5 το επεκτείνει ως το 8/20).
Ερευνητής: Σε ποιο κλάσμα έχεις φτάσει;
Μαθητής: Στα 8/20.
Ερευνητής: Τι είναι αυτά τα δύο κλάσματα;
Μαθητής: Ισοδύναμα.
Ερευνητής: Γράψε τη σχέση μεταξύ τους.
Μαθητής: (γράφει 2/5=8/20).
Ερευνητής: Τι μπορείς να πεις για τα κομμάτια που έκοψε η Μαρία σε σχέση με εκείνα που έκοψε η Ελένη;
Μαθητής: Είναι πιο μικρά.
Ερευνητής: Άρα τι πρέπει να κάνει για να φάει την ίδια ποσότητα με την Ελένη;
Μαθητής: Πρέπει να φάει παραπάνω από τα 2.
Ερευνητής: Πόσα κομμάτια θα φάει, λοιπόν, η Μαρία;
Μαθητής: (σκέφτεται). Από τα 20...θα φάει τα 8.
Ερευνητής: Μπορείς να μου εξηγήσεις, πώς γίνεται τα δύο κομμάτια της Ελένης να είναι η ίδια ποσότητα με τα 8 κομμάτια της Μαρίας;
Μαθητής: (δεν απαντά).
Ερευνητής: Κοίτα στην αριθμητική γραμμή για να δεις τα κομμάτια που έφαγε η Ελένη και τα κομμάτια που έφαγε η Μαρία.
Μαθητής: Η Ελένη έφαγε μόνο δύο, αλλά είναι μεγάλα. Πολύ μεγάλα. Η Μαρία έφαγε 8, αλλά είναι μικρά. Αν τα βάλεις μαζί (εννοεί τα κομμάτια της Μαρίας) θα φτάσουν εκείνα της Ελένης.

2. Αριθμητική γραμμή ---------→ Εξίσωση, Πρόβλημα

Ερευνητής: Σου δίνω συμπληρωμένες δύο αριθμητικές γραμμές. Μπορείς να μου δείξεις ποια σχέση δείχνουν αυτές οι αριθμητικές γραμμές;
Μαθητής: (δεν απαντά)
Ερευνητής: Ποιον αριθμό μας δείχνει η πρώτη αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: 6/8 (τον γράφει).
Ερευνητής: Στη δεύτερη αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Τα ¾.
Ερευνητής: Ποια σχέση υπάρχει μεταξύ των δύο αριθμών;
Μαθητής: Είναι ισοδύναμοι. Διότι το 6 είναι το διπλάσιο του 3 και το 8 είναι το διπλάσιο του 4.
Ερευνητής: Αφού το 6 είναι το διπλάσιο του 3 και το 8 είναι το διπλάσιο του 4, τότε γιατί οι δύο αριθμοί είναι ίσοι; Μήπως το 6/8 είναι μεγαλύτερο από το ¾.
Μαθητής: Ναι είναι μεγαλύτερο.
Ερευνητής: Κοίταξε στην πρώτη αριθμητική γραμμή. Δείξε μου τον πρώτο αριθμό.
Μαθητής: (δείχνει το διάστημα από το 0 ως τα 6/8).
Ερευνητής: Κοίταξε στη δεύτερη αριθμητική γραμμή. Δείξε μου το δεύτερο αριθμό.
Μαθητής: (δείχνει το διάστημα από το 0 ως τα 3/4)
Ερευνητής: Τι έχεις να πεις για τους δύο αριθμούς.
Μαθητής: Είναι ίσοι.
Ερευνητής: Πριν μου είπες πως τα 6/8 είναι μεγαλύτερος. Αφού έχει 6 κομμάτια.
Μαθητής: Ναι, αλλά...τα 3 κομμάτια είναι μεγάλα, ενώ τα 6 είναι πιο μικρά.
Ερευνητής: Κάθε ¼ με πόσα όγδοα είναι ίσο;
Μαθητής: (κοιτάζει στην αριθμητική γραμμή) με δύο.

Ερευνητής: Κάθε 1/8 τι είναι σε σχέση με το ¼;
Μαθητής: Είναι το μισό.
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις ένα πρόβλημα που να λύνεται με τη σχέση που βρήκες; Δηλαδή 3/4-=6/8;
Μαθητής: (δεν απαντά)
Ερευνητής: Στο πρόβλημα που θα πεις πρέπει να λείπει κάτι το οποίο εγώ πρέπει να σκεφτώ για να βρω.
Μαθητής: Ο Ανδρέας και ο Μάριος αγόρασαν από μια σοκολάτα και ύστερα έφαγαν την ίδια ποσότητα. Ο Ανδρέας τη χώρισε σε όγδοα και ο Μάριος σε τέταρτα.
Ερευνητής: Τι άλλο θα πεις;
Μαθητής: Θα ρωτήσω για τον Ανδρέα.
Ερευνητής: Άρα τι άλλο θα αναφέρεις;
Μαθητής: (δεν απαντά)
Ερευνητής: Ας πάρουμε τις πληροφορίες μια μια. Το ότι έφαγαν την ίδια ποσότητα πού φαίνεται στην αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Οι γραμμές είναι οι ίδιες (δείχνει τις αποστάσεις από το 0 ως το 3 και από το 0 ως το 6).
Ερευνητής: Στην εξίσωση ποιος δείχνει ότι έφαγαν ίσο;
Μαθητής: Το ίσον.
Ερευνητής: Το ότι χώρισαν τις σοκολάτες τους σε τέταρτα και όγδοα που φαίνεται;
Μαθητής: Από τις αριθμητικές γραμμές, αυτή (η δεύτερη) είναι χωρισμένη σε τέταρτα και αυτή (η πρώτη) είναι χωρισμένη σε όγδοα.
Ερευνητής: Στην εξίσωση πού φαίνεται;
Μαθητής: Στους παρονομαστές.
Ερευνητής: Είπες ότι θα ρωτήσεις για τον Ανδρέα, άρα ποια πληροφορία πρέπει να πεις ακόμη;
Μαθητής: Για το Μάριο, ότι έφαγε τα 3 κομμάτια.
Ερευνητής: Ποιον αριθμό δε θα πεις;
Μαθητής: Το 6.
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις ξανά το πρόβλημα;
Μαθητής: Ο Ανδρέας και ο Μάριος αγόρασαν από μια σοκολάτα, που ήταν οι ίδιες. Ο Ανδρέας τη χώρισε σε όγδοα και ο Μάριος σε τέταρτα. Έφαγαν την ίδια ποσότητα.
Ερευνητής: Ναι;
Μαθητής: Τώρα έμεινε να πω κάτι για τον αριθμό 3.
Ερευνητής: Συμπλήρωσε το πρόβλημά σου.
Μαθητής: ...ο Μάριος έφαγε τα 3 από τα 4. Πόσα έφαγε ο Ανδρέας;

3. Αριθμητική γραμμή (αριθμημένη ως το 2) -------→ εξίσωση, πρόβλημα

Ερευνητής: Εδώ έχω και πάλι αριθμητικές γραμμές. Είναι συμπληρωμένες. Μπορείς να μου πεις τη σχέση που δείχνουν;
Μαθητής: Η πρώτη δείχνει τον αριθμό....είναι χωρισμένη σε έκτα.
Ερευνητής: Η άλλη πώς είναι χωρισμένη;
Μαθητής: Σε δέκατα όγδοα.
Ερευνητής: Αν έχω ένα ολόκληρο, πόσα έκτα είναι;
Μαθητής: 6.
Ερευνητής: Άρα εδώ είναι τα 6/6;
Μαθητής: Όχι.
Ερευνητής: Ποιος αριθμός είναι εκεί;

Μαθητής: Το 1.
Ερευνητής: Δηλαδή;
Μαθητής: Είναι τα 3/3.
Ερευνητής: Άρα πώς είναι χωρισμένη η αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Σε τρίτα.
Ερευνητής: Τι βάζω κάθε φορά και προχωρώ;
Μαθητής:1/3.
Ερευνητής: Ποιος αριθμός είναι εδώ;
Μαθητής: Τα 2/3.
Ερευνητής: Εδώ; (δείχνει στη δεύτερη αριθμητική γραμμή, τον αριθμό 6/9).
Μαθητής: Τα 6...
Ερευνητής: Πώς είναι χωρισμένη η αριθμητική γραμμή; Τι βάζω κάθε φορά;
Μαθητής: (Μετρά τα διαστήματα από το 0 μέχρι το 1). Είναι χωρισμένη σε ένατα. Κάθε φορά βάζω 1/9.
Ερευνητής: Άρα ποιος αριθμός είναι αυτός; (δείχνει στη δεύτερη αριθμητική γραμμή, τον αριθμό 6/9).
Μαθητής: 6/9.
Ερευνητής: Βλέποντας τις δυο αριθμητικές γραμμές, τι μπορείς να πεις για τα δύο αυτά κλάσματα;
Μαθητής: Είναι τα ίδια.
Ερευνητής: Τι έχεις να πεις για την απόσταση που καλύπτουν από το 0;
Μαθητής: Είναι η ίδια.
Ερευνητής: Άρα τα δύο κλάσματα τι είναι;
Μαθητής: Είναι ισοδύναμα.
Ερευνητής: Μπορείς να γράψεις τη σχέση;
Μαθητής: (γράφει 2/3=6/9).
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις ένα πρόβλημα;
Μαθητής: Είχα μια τούρτα και έφαγα τα 2/3 της. Η φίλη μου είχε την ίδια τούρτα, χώρισε την τούρτα σε ένατα....
Ερευνητής: Τι θα ρωτήσεις;
Μαθητής: Πόσα ένατα έφαγε η φίλη;
Ερευνητής: Ποια πληροφορία ξέχασες;
Μαθητής: Ότι φάγαμε το ίδιο.

4. Εξίσωση --------→ αριθμητική γραμμή

Ερευνητής: Εδώ σου δίνω δύο ισοδύναμα κλάσματα. Μπορείς να μου δείξεις την ισοδυναμία αυτή στις αριθμητικές γραμμές;
Μαθητής: Θα χωρίσω την πρώτη σε τρίτα...(χωρίζει το διάστημα από 0 ως 1 σε τρίτα και φέρει βέλος από το 0 ως το 1/3).
Ερευνητής: Τι θα κάνεις στην άλλη αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Θα χωρίσω σε εικοστά πρώτα...(χωρίζει το διάστημα από 0 ως 1 σε 21 ίσα διαστήματα και φέρει βέλος από το 0 ως τα 7/21).
Ερευνητής: Τι φάνηκε; Τι καλύπτουν;
Μαθητής: Την ίδια απόσταση.
Ερευνητής: Από πού;
Μαθητής: Από το 0.

5. Αριθμητική γραμμή (αριθμημένη ως το 2)----------→ εξίσωση, πρόβλημα

Ερευνητής: Την ίδια εξίσωση θέλω να μου τη δείξεις σε αυτές τις αριθμητικές γραμμές. Τι θα κάνεις;
Μαθητής: (Προσπαθεί να χωρίσει το διάστημα από το 0 ως το 2 σε τρία ίσα μέρη και φέρει μια γραμμή ανάμεσα στο 0 και το 1).
Ερευνητής: Πώς χώρισες το διάστημα από το 0 ως το 1;
Μαθητής: Σε ..τρίτα..
Ερευνητής: Άρα το 1 πόσα τρίτα έπρεπε να έχει;
Μαθητής: 3.
Ερευνητής: Τώρα τι έχει;
Μαθητής: 2/2.
Ερευνητής: Τι θα κάνεις;
Μαθητής: Θα χωρίσω την πρώτη σε τρίτα...(χωρίζει το διάστημα από 0 ως 1 και το διάστημα από 1 ως 2 σε τρίτα και φέρει βέλος από το 0 ως το 1/3).
Ερευνητής: Τι θα κάνεις μετά;
Μαθητής: Θα χωρίσω τη δεύτερη σε εικοστά πρώτα...(χωρίζει το διάστημα από 0 ως 1 και το διάστημα από 1 ως 2 σε 21 ίσα διαστήματα και φέρει βέλος από το 0 ως τα 7/21).
Ερευνητής: Τι φαίνεται;
Μαθητής: Ότι τα δυο κλάσματα είναι ισοδύναμα.
Ερευνητής: Ποιο είναι το πιο μεγάλο, το τρίτο ή το εικοστό πρώτο;
Μαθητής: Το εικοστό πρώτο.
Ερευνητής: Δείξε μου1/21.
Μαθητής: (δείχνει το ένα εικοστό πρώτο).
Ερευνητής: Δείξε μου και το 1/3.
Μαθητής: (δείχνει το 1/3).
Ερευνητής: Άρα ποιο είναι το πιο μεγάλο;
Μαθητής: Το 1/3.
Ερευνητής: Με πόσα εικοστά πρώτα είναι ίσο;
Μαθητής: (Συγκρίνει με τα εικοστά πρώτα της δεύτερης αριθμητικής γραμμής). Με 7.
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις και ένα πρόβλημα;
Μαθητής: Είχα μια πίτσα και τη χώρισα σε τρίτα και πήρα το 1. Μετά είχα μια άλλη και τη χώρισα σε εικοστά πρώτα. Πόσα εικοστά πρώτα έφαγα;
Ερευνητής: Τι ξέχασες να μας πεις;
Μαθητής: Ότι οι πίτσες ήταν οι ίδιες...
Ερευνητής: Να σου πω μια απάντηση που έδωσε ένας συμμαθητής σου. Έφαγα 1/21.
Μαθητής: Όχι, πρέπει να μου πει 7/21.
Ερευνητής: Μα αφού είπες ότι τη χώρισες σε εικοστά πρώτα και ρώτησες πόσα εικοστά πρώτα έφαγες. Μαντεύω ότι μπορεί να έφαγες 1/21 ή ακόμα και 3/21 ή ακόμα και 21/21.
Μαθητής: Ξέχασα να πω ότι έφαγα την ίδια ποσότητα με την άλλη πίτσα.
Ερευνητής: Μάλιστα. Μια συμμαθήτριά σου μου έδειξε στην πρώτη αριθμητική γραμμή και μου είπε ότι ο αριθμός είναι το 1/6. Συμφωνείς;
Μαθητής: Όχι.
Ερευνητής: Γιατί όχι;
Μαθητής: Διότι δεν είδε ότι είναι τρίτα.
Ερευνητής: Αυτή μετρά 1, 2, 3, 4, 5, 6. Άρα σε 6 κομμάτια είναι χωρισμένη η αριθμητική γραμμή, άρα εδώ έχουμε το 1/6.

Μαθητής: Θα της δείξω εδώ (δείχνει το 1) και θα της πω πως εδώ είναι το ολόκληρο...και είναι τα 3/3, άρα έχουμε τρίτα.
Ερευνητής: Νομίζεις ότι οι αριθμητικές γραμμές μας βοηθούν να μελετήσουμε τα ισοδύναμα κλάσματα;
Μαθητής: Ναι, γιατί το βέλος εκεί που πάει μας δείχνει ότι είναι η ίδια απόσταση. Πολλές φορές μπορείς να δεις και τα κομμάτια, αν είναι μεγάλα ή μικρά.

Συνέντευξη
Πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων

Συνέντευξη μαθητή με ψηλή επίδοση

1.Πρόβλημα → Αριθμητικές γραμμές

Ερευνητής: Ας ξεκινήσουμε με το πρώτο πρόβλημα. Διάβασέ το.
(Ο μαθητής διαβάζει το πρόβλημα)
Ερευνητής: Θέλω να λύσεις αυτό το πρόβλημα με τη βοήθεια της αριθμητικής γραμμής.
Μαθητής: Θα πούμε 2/7 και 4/7...
Ερευνητής: Πώς θα χωρίσεις την αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Θα τη χωρίσω σε 7 μέρη και θα κάνουμε μια καμπύλη γραμμή να πηγαίνει 2/7 και μετά ακόμα 4/7
(Ο μαθητής χωρίζει την αριθμητική γραμμή σε 7 ίσα μέρη και αριθμεί κάθε διάστημα με ακέραιους αριθμούς ως το 7, δηλαδή 1, 2, 3, 4, 5, 6 και 7).
Ερευνητής: Μπορείς να αριθμήσεις τη γραμμή; Με ποιον αριθμό θα ξεκινήσεις;
Μαθητής: Με το μηδέν.
Ερευνητής: Άρα ποιος αριθμός θα είναι στο τέλος των διαστημάτων που έκανες;
Μαθητής: Το 7.
Ερευνητής: Το αποτέλεσμα που θα βρεις θα πλησιάζει στο 7;
Μαθητής: Θα είναι 1/7 πριν το 7 (αριθμεί τη γραμμή, 0, 1/7, 2/7, 3/7, 4/7, 5/7, 6/7 και αφήνει την τελευταία κατακόρυφη γραμμή)
Ερευνητής: Ποιος αριθμός είναι εκεί;
Μαθητής: Είναι τα 7/7 ...ένα ολόκληρο. (Γράφει το αριθμό 1 στην τελευταία κατακόρυφη γραμμή).
Ερευνητής: Ένας συμμαθητής σου δεν καταλαβαίνει, γιατί χώρισες την αριθμητική γραμμή σε 7. Γιατί τη χώρισες έτσι;
Μαθητής: Γιατί τα 2/7 και τα 4/7 σημαίνει ότι είναι από 7 κομμάτια που θα πάρουμε.
Ερευνητής: Αν ένας συμμαθητής σου σε ρωτήσει γιατί έβαλες το 1 τελευταίο και όχι το 7;
Μαθητής: Γιατί και τα δύο κομμάτια του χυμού που έπιασα είναι λιγότερα από το χυμό ολόκληρο που είναι ένας. Δηλαδή και να τα πάρω τα κομμάτια αυτά, πάλι θα περισσέψει χυμός.
(Ο μαθητής κάνει μια καμπύλη γραμμή από το 0 ως τα 2/7 και μετά ακόμα μια από τα 2/7 ως τα 6/7)
Ερευνητής: Γράψε και την εξίσωση
(Ο μαθητής γράφει 2/7 + 4/7 = 6/7)
Ερευνητής: Τι βοήθησε περισσότερο, όταν έγραψες 1/7, 2/7 ως το 1 ή όταν έβαλες 1, 2, 3, 4, 5, 6 και 7.
Μαθητής: Όταν έγραψα 1/7, 2/7 ως το 1.
Ερευνητής: Γιατί;

Μαθητής: Γιατί αυτά είναι τα κομμάτια που παίρνω από το ολόκληρο.

2. Αριθμητική γραμμή → Συμβολική έκφραση

2.1 Αριθμητική γραμμή από 0-1 → Εξίσωση

Ερευνητής: Στην άσκηση αυτή σου δίνω μια αριθμητική γραμμή συμπληρωμένη και ζητώ να μου πεις την εξίσωση την οποία μας δείχνει.
Μαθητής: Εντάξει.
Ερευνητής: Τι μετράς εκεί;
Μαθητής: Πρώτα μετρώ για να δω πόσα μέρη είναι (εννοεί πόσα διαστήματα). Η εξίσωση είναι 4/9 + 3/9.
Ερευνητής: Πού καταλήγει το βέλος;
Μαθητής: Στα 7/9
Ερευνητής: Άρα ποια είναι η εξίσωση;
Μαθητής: 4/9+3/9=7/9
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις ένα πρόβλημα που να ταιριάζει με την εξίσωση που έγραψες;
Μαθητής: Ο κ. Κώστας χώρισε την τούρτα του σε 9 κομμάτια. Πήρε τα 4 κομμάτια για εκείνον και φύλαξε τα 3 για την αδελφή του. Πόσα έχουν μαζί;
Ερευνητής: Ένας συμμαθητής σου θα απαντούσε έχουν μαζί 7 και όχι 7/9. Τι θα του απαντούσες;
Μαθητής: Ότι είναι από τα 9 που πρέπει να τα πάρει.
Ερευνητής: 3 και 4 δεν κάνει 7; Έχουν μαζί 7.
Μαθητής: Επειδή είναι κομμάτια....είναι πιο μικρά από την τούρτα ολόκληρη, όχι 7 ολόκληρα.
Ερευνητής: Μπορείς να αλλάξεις την ερώτηση στο πρόβλημα ώστε να σου απαντήσει 7/9;
Μαθητής: Τι μέρος της τούρτας έφαγαν;

2.2 Αριθμητική γραμμή 0-2 → Εξίσωση

Ερευνητής: Στην άσκηση αυτή σου δίνω μια αριθμητική γραμμή συμπληρωμένη και ζητώ να μου πεις την εξίσωση την οποία μας δείχνει.
Μαθητής: Είναι τα 2/10... (Λαμβάνει υπ' όψη του και τις υποδιαιρέσεις ως το 2 και δε σταματά ως το 1) και το 1/10...κάνει 3/10.
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις κάτι που δεν καταλαβαίνω; Αυτός ο αριθμός ποιος είναι; (Δείχνει το 1/5).
Μαθητής: Περίμενε. Είναι σε πέμπτα που χωρίζεται! Είναι 2/5 και 1/5 κάνουν 3/5.
Ερευνητής: Ένας άλλος συμμαθητής σου που κάναμε την ίδια άσκηση επέμενε ότι είναι 2/10 και 1/10. Τι θα του απαντούσες;
Μαθητής: Ότι...τα ολόκληρα που έχουμε τα χωρίζουμε σε πέντε ίσα μέρη. Σε πέμπτα. Έχουμε 2 ολόκληρα, το κάθε ένα έχει πέμπτα. Η γραμμή είναι χωρισμένη και πάει 1/5, 2/5 ...
Ερευνητής: Άρα αφού ως 1 το ένα έχουμε 5 και ως το 2 έχουμε άλλα 5 τότε έχουμε 10.
Μαθητής: Όχι, τα πέμπτα είναι διαφορετικά από τα δέκατα. Είναι πιο μεγάλα. Έχω 2 αλλά είναι χωρισμένα το κάθε ένα σε πέμπτα.
Ερευνητής: Ένας άλλος μαθητής απάντησε ότι έχουμε τα 2/10 του 2, που κάνει 2/5 και το 1/ 10 του 2 που κάνει 1/5 και όλα είναι 3/5.
Μαθητής: Τα 2/10 του 2 είναι...2/10 και 2/10 δηλαδή 4/10 που είναι 2/5. Είναι σωστό αυτό που λέει.

Ερευνητής: Άρα τώρα ποιο είναι το σωστό; Να πω 2/5 μόνο ή 2/10 του 2;
Μαθητής: Είναι το ίδιο. Εξαρτάται ποιου αριθμού θα πιάσω το κομμάτι.
Ερευνητής: Ποιος αριθμός είναι αυτός; (δείχνει το 1 και 1/5)
Μαθητής: Είναι το 1 και 1/5.
Ερευνητής: Για να ήταν απλώς 2/10 και όχι 2/10 του 2, ποιος αριθμός έπρεπε να υπάρχει στη θέση του 2;
Μαθητής: Το 1.
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις ένα πρόβλημα;
Μαθητής: Ο φίλος μου ο Νίκος έφαγε το 1/5 μιας σοκολάτας και εγώ τα 2/5. Πόσα φάγαμε μαζί;

3. Συμβολική έκφραση ⟶ Αριθμητική γραμμή

3.1 Συμβολική έκφραση ⟶ Αριθμητική γραμμή 0-1

Ερευνητής: Τώρα σου δίνω την εξίσωση (4/8 + 3/8). Μπορείς να τη δείξεις με τη βοήθεια των αριθμητικών γραμμών;
Μαθητής: Θα χωρίσω τη γραμμή σε όγδοα.
Ερευνητής: Τα διαστήματα που κάνεις τι σχέση έχουν μεταξύ τους;
Μαθητής: Είναι ίσα.
Ερευνητής: Το βέλος;
Μαθητής: Το ένα βέλος θα πάει στα 4/8 και το άλλο θα προχωρήσει ακόμα 3/8. Έχουμε 7/8.

3.2 Συμβολική έκφραση ⟶ Αριθμητική γραμμή 0-2

Ερευνητής: Την ίδια εξίσωση μπορείς να τη δείξεις με τη βοήθεια αυτής της αριθμητικής γραμμής;
Μαθητής: Θα χωρίσουμε ως τη μισή γραμμή σε όγδοα. (τη χωρίζει)
Ερευνητής: Το διάστημα από 1 ως 2 δε θα το χωρίσεις;
Μαθητής: Ναι, γιατί το αποτέλεσμα δε θα είναι μεγαλύτερο από το 1.
Ερευνητής: Πρώτα η αριθμητική γραμμή πώς ήταν χωρισμένη;
Μαθητής: Σε ακέραιες μονάδες.
Ερευνητής: Τώρα πώς θα είναι χωρισμένη;
Μαθητής: Να τη χωρίσω όλη σε όγδοα.
(Χωρίζει από το 0-2. Οχτώ ίσα διαστήματα από το 0 ως το 1 και οχτώ ίσα διαστήματα από το 1 ως το 2. Μετά αναπαριστά την εξίσωση).
Ερευνητής: Πες μου και ένα πρόβλημα
Μαθητής: Ο κ. Στάυρος χρησιμοποίησε 4/8 του χυμού για να φτιάξει μια φρουτοσαλάτα. και του χύθηκαν τα 3/8. Πόσα έφυγαν από το κουτί του χυμού;

Συνέντευξη
Πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων

Συνέντευξη μαθητή με μέτρια επίδοση

1.Πρόβλημα -------→ αριθμητικές γραμμές

Ερευνητής: Θα σου δώσω ένα φυλλάδιο με κάποιες εύκολες ασκήσεις και προβλήματα και θα προσπαθήσουμε να τα λύσουμε. Μπορείς να ξεκινήσεις με το πρώτο πρόβλημα;
Μαθητής: Το πρόβλημα λέει ότι για να φτιάξω ένα γλυκό χρησιμοποίησα 2/7 λίτρα χυμό και 4/7 λίτρα γάλα. Γυρεύω να δω πόσα λίτρα θα χρησιμοποιήσω συνολικά.
Ερευνητής: Θα ήθελα να μου λύσεις αυτό το πρόβλημα με τη βοήθεια της αριθμητικής γραμμής. Τι θα κάνεις;
Μαθητής: Θα βάλω το 0 και το 1 πάνω στην αριθμητική γραμμή και μετά θα χωρίσω σε 7 ίσα μέρη. (Ο μαθητής φέρει μια κάθετη γραμμή πάνω στην αριθμητική γραμμή και τοποθετεί εκεί το σημείο 0, ακολούθως φέρει μια άλλη κάθετη γραμμή σε κάποια απόσταση από το 0 και εκεί τοποθετεί το σημείο 1. Φέρει μετά 5 κάθετες γραμμές, αφού μετρά και τις δύο κάθετες γραμμές στο 0 και στο 1 και χωρίζει το διάστημα 0 ως 1 σε 6 ίσα μέρη).
Ερευνητής: Τι είναι αυτά τα διαστήματα;
Μαθητής: Είναι έβδομα.
Ερευνητής: Μπορείς να μου δείξεις το 1/7;
Μαθητής: (Δείχνει τη διαχωριστική κάθετη γραμμή)
Ερευνητής: Είπες ότι θα χωρίσεις τη γραμμή σε 7 ίσα μέρη. Μπορείς να μου δείξεις ένα από αυτά τα μέρη;
Μαθητής: (Δείχνει ένα από τα 6 διαστήματα)
Ερευνητής: Χρωμάτισέ το με το μολύβι σου.
Μαθητής: (Χρωματίζει με το μολύβι του ένα από τα 6 διαστήματα)
Ερευνητής: Πόσα τέτοια διαστήματα έχεις;
Μαθητής: 7.
Ερευνητής: Μπορείς να τα μετρήσεις;
Μαθητής: (Μετρά και τα βρίσκει 6). Έκανα λάθος...πρέπει να κάνω ακόμη ένα διάστημα. (Χωρίζει την αριθμητική γραμμή σε 7 ίσα διαστήματα, ενώ αφήνει το 1 τοποθετημένο στα 6/7).
Ερευνητής: Ο αριθμός 1 πόσα έβδομα έχει;
Μαθητής: 7. (Αλλάζει τη θέση του 1 και το τοποθετεί στα 7/7).
Ερευνητής: Ωραία. Πώς θα δουλέψεις τώρα για να λύσεις το πρόβλημα;
Μαθητής: Θα πάρω στην αριθμητική γραμμή τα 2/7 και μετά τα 4/7 (Κατασκευάζει βέλος από το 0 ως το 2/7 και μετά κατασκευάζει ακόμη ένα βέλος από το 2/7 προχωρώντας ακόμη 4/7).
Ερευνητής: Ποιος αριθμός είναι αυτός;
Μαθητής: Είναι τα 6/7. (Το σημειώνει στην αριθμητική γραμμή)

2.Αριθμητική γραμμή (αριθμημένη ως το 1)------→ εξίσωση, πρόβλημα

Ερευνητής: Στην άσκηση αυτή σου δίνω συμπληρωμένη μια αριθμητική γραμμή. Μπορείς να μου πεις ποια σχέση παρουσιάζει;
Μαθητής: Μπορώ να μετρήσω τα διαστήματα;
Ερευνητής: Ναι.
Μαθητής: (Μετρά και βρίσκει ότι είναι 9 διαστήματα). Έχουμε πρόσθεση. 4/9 και ακόμα 3/9.
Ερευνητής: Γράψε την εξίσωση.
Μαθητής: (Γράφει την εξίσωση 4/9+3/9=7/9)
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις ένα πρόβλημα σε ένα συμμαθητή σου που για να το λύσει να χρειάζεται να χρησιμοποιήσει την εξίσωση 4/9+3/9=7/9 ;
Μαθητής: Για να φτιάξω ένα γλυκό θέλω 4/9 λίτρα χυμό και 3/9 λίτρα γάλα. Πόσα είναι η συνολική ποσότητα των υγρών;
Ερευνητής: Αν εγώ είχα ένα κουτί του λίτρου γάλα, θα με φτάσει;
Μαθητής: Ναι, διότι θα χρειαστείς τα 3/9 και όχι τα 9/9.
Ερευνητής: Αν είχαν μισό λίτρο γάλα θα με φτάσει για να φτιάξω το γλυκό;
Μαθητής: Ναι, διότι το μισό λίτρο γάλα είναι περίπου 5/9 και εγώ θέλω μόνο τα 3/9.

3.Αριθμητική γραμμή (αριθμημένη ως το 2) ------→ εξίσωση, πρόβλημα

Ερευνητής: Εδώ και πάλι η αριθμητική γραμμή είναι συμπληρωμένη. Μπορείς να μου πεις ποια εξίσωση αναπαριστά;
Μαθητής:2/5+1/5=3/5
Ερευνητής: Όταν συζητούσα την ίδια άσκηση με μια συμμαθήτριά σου μου είπε ότι η εξίσωση είναι 2/10+1/10=3/10. Πώς σχολιάζεις την απάντηση αυτή;
Μαθητής: Δεν είναι σωστό...μέτρησε ως το άλλο κομμάτι (εννοεί το διάστημα από το 1 ως το 2), δηλαδή ως το 2.
Ερευνητής: Πώς θα μπορούσες να την πείσεις ότι η δική σου εξίσωση είναι η σωστή;
Μαθητής: Διότι οι γραμμές (εννοεί τα πέντε διαστήματα) πηγαίνουν ως το 1...
Ερευνητής: Πώς προχωρούμε στην αριθμητική γραμμή; Τι αριθμό βάζουμε κάθε φορά;
Μαθητής: Δεν καταλαβαίνω...
Ερευνητής: Αν σβήσουμε τις κάθετες γραμμές και μείνει μόνο αυτή που είναι για το 0, το 1 και το 2...τι αριθμό βάζω κάθε φορά; Πώς προχωρώ;
Μαθητής: Βάζεις ένα ακέραιο.
Ερευνητής: Ωραία. Στην περίπτωση αυτή τι βάζω;
Μαθητής: Βάζω 1/5.
Ερευνητής: Εδώ που είναι τα 5/5 ποιος αριθμός είναι;
Μαθητής: Το 1.
Ερευνητής: Αν προχωρούσαμε με δέκατα όπως είπε η συμμαθήτριά σου ποιος αριθμός θα ήταν εδώ;
Μαθητής: Τα 5/10
Ερευνητής: Δηλαδή;
Μαθητής: Το ½, άρα έχει κάνει λάθος η μαθήτρια.
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις ένα πρόβλημα για την εξίσωση αυτή;
Μαθητής: Από μια σοκολάτα έφαγα τη μια μέρα τα 2/5 και την άλλη μέρα έφαγα το 1/5. Πόση σοκολάτα έμεινε;
Ερευνητής: Πόση έμεινε;
Μαθητής: Τα 2/5.
Ερευνητής: Αυτή είναι η απάντηση που βρήκες όταν έγραψες την εξίσωση;
Μαθητής: Όχι. Στο πρόβλημα που είπα...Θα ρωτήσω πόσα έφαγα όλα μαζί.

4. Εξίσωση -→ Αριθμητική γραμμή (αριθμημένη ως το 1), πρόβλημα

Ερευνητής: Στην άσκηση αυτή σου δίνω μια μαθηματική πρόταση και σου ζητώ να μου τη δείξεις στην αριθμητική γραμμή.
Μαθητής: Θα χωρίσω την αριθμητική γραμμή σε όγδοα, θα πάρω τα 4/8 και μετά τα 3/8.
Ερευνητής: Σε ποιον αριθμό καταλήγεις;
Μαθητής: Στα 7/8.

5. Εξίσωση -→ Αριθμητική γραμμή (αριθμημένη ως το 2), πρόβλημα
Ερευνητής: Την ίδια μαθηματική πρόταση θέλω να μου την αναπαραστήσεις και σε αυτή την αριθμητική γραμμή.
Μαθητής: Εδώ θα χωρίσω σε 4.
Ερευνητής: 4 διαστήματα από το 0 ως το 1 και 4 διαστήματα από το 1 ως το 2;
Μαθητής: Ναι. (Χωρίζει διαστήματα από το 0 ως το 1 και 4 διαστήματα από το 1 ως το 2).
Ερευνητής: Ωραία. Θέλω να ξεχάσεις ότι έκανες αυτές τις κάθετες γραμμές. Να δεις μόνο τους αριθμούς 0, 1 και 2.
Μαθητής: Κάθε φορά βάζεις ένα ακέραιο.
Ερευνητής: Τώρα όμως εσύ τι έχεις βάλει;
Μαθητής: ¼.
Ερευνητής: Κανονικά τι έπρεπε να βάζεις;
Μαθητής: 1/8.
Ερευνητής: Τι θα κάνεις τώρα;
Μαθητής: Θα μοιράσω τα τέταρτα. (Τα μοιράζει και βρίσκει πρώτα τα 4/8 μετά τα 3/8 και τέλος σημειώνει το άθροισμα, τα 7/8)
Ερευνητής: Τι λάθος είχες κάνει;
Μαθητής: Έκανα το ίδιο λάθος με τη συμμαθήτριά μου. Έπρεπε να χωρίσω σε όγδοα ως το 1 και όγδοα ως το 2.
Ερευνητής: Δηλαδή τι λάθος νομίζεις έκανε η συμμαθήτριά σου στην άσκηση αυτή;
Μαθητής: Χώρισε σε τέταρτα από το 0 ως το 1 και τέταρτα από το 1 ως το 2.
Ερευνητής: Δηλαδή ο αριθμός 1 τι αριθμός θα ήταν για τη συμμαθήτριά σου;
Μαθητής: Ο αριθμός 4/8.
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις ένα πρόβλημα;
Μαθητής: Τη μια μέρα χρησιμοποίησα 4/8 κιλά αλεύρι και την άλλη μέρα 3/8 κιλά αλεύρι για ψωμί. Πόσα κιλά χρησιμοποίησα συνολικά;
Ερευνητής: Πόσα;
Βάγιανός: 7/8
Ερευνητής: Αν αγοράσω ένα σακούλι των 2 κιλών με φτάνει;
Μαθητής: Ναι.
Ερευνητής: Αν χρησιμοποιήσω ένα σακούλι του μισού κιλού φτάνει;
Μαθητής: Όχι.
Ερευνητής: Πόσα τέτοια σακούλια πρέπει να χρησιμοποιήσω;
Μαθητής: 2.
Ερευνητής: Μια τελευταία ερώτηση. Πιστεύεις ότι η αριθμητική γραμμή βοηθά κάποιο μαθητή να προσθέσει ομώνυμα κλάσματα;

Μαθητής: Ναι, διότι μας δείχνει τους δύο αριθμούς που βάζουμε μαζί και μας δείχνει πόσα κάνουν.
Ερευνητής: Εσύ θα ξαναχρησιμοποιούσες την αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Ναι, διότι μου άρεσε εκεί που τα κλάσματα μαζί ήταν παραπάνω από το 1 και το κατάλαβα με την αριθμητική γραμμή.

Συνέντευξη
Πρόσθεση Ομώνυμων Κλασμάτων

<u>Συνέντευξη μαθητή με χαμηλή επίδοση</u>

1. Πρόβλημα ---------> αριθμητική γραμμή

Ερευνητής: Μαθητής σε αυτό το φυλλάδιο θα δουλέψουμε μαζί για να λύσουμε κάποιες ασκήσεις και κάποια εύκολα προβλήματα. Μπορείς ξεκινήσεις με το πρώτο πρόβλημα. Διάβασέ το και πες μου με δικά σου λόγια τι λέει.
Μαθητής: Ήθελε να φτιάξει ένα γλυκό και χρησιμοποίησε τα 2/7 λίτρα χυμό. Έβαλε μέσα και 4/7 λίτρα γάλα...και μας λέει ποια ήταν η συνολική ποσότητα των υγρών που χρησιμοποίησε;
Ερευνητής: Μπορείς να μου λύσεις αυτό το πρόβλημα με τη βοήθεια της αριθμητικής γραμμής που σου δίνω;
Μαθητής: Ναι..
Ερευνητής: Τι θα κάνεις πρώτα;
Μαθητής: Θα δείξω τα 4/7.
Ερευνητής: Τι θα κάνεις πρώτα;
Μαθητής: Θα το χωρίσω σε 7 (φέρει 7 κατακόρυφους διαχωρισμούς δημιουργώντας 6 ίσα διαστήματα, αλλά δεν τοποθετεί αριθμούς).
Ερευνητής: Ωραία. Πώς ονομάζεται η γραμμή αυτή;
Μαθητής: Αριθμητική.
Ερευνητής: Ποιον αριθμό θα τοποθετήσεις εδώ; (δείχνει την πρώτη κατακόρυφη γραμμή).
Μαθητής: (Σκέφτεται για αρκετή ώρα) Τα 2/7.
Ερευνητής: Με ποιον αριθμό θα ξεκινήσουμε;
Μαθητής: Με το 1.
Ερευνητής: Το διάστημα αυτό ποιος αριθμός είναι; (δείχνει το πρώτο διάστημα).
Μαθητής: Το 1/7.
Ερευνητής: Άρα τα 2/7 θα τοποθετηθούν πριν από το 1/7;
Μαθητής: Όχι.
Ερευνητής: Ποιος είναι ο πιο μεγάλος; Το 1 ή το 1/7;
Μαθητής: Το 1.
Ερευνητής: Άρα το 1 θα τοποθετηθεί πριν από το 1/7;
Μαθητής: Όχι.
Ερευνητής: Μπορείς να μου δείξεις το 1/7 ξανά;
Μαθητής: (δείχνει το διάστημα από το 0 μέχρι το 1/7)
Ερευνητής: Άρα ποιος αριθμός είναι εδώ; (δείχνει την πρώτη κατακόρυφη γραμμή)
Μαθητής: Το μηδέν.
Ερευνητής: Στο τέλος (δείχνει την τελευταία κατακόρυφη γραμμή) ποιος αριθμός θα είναι;
Μαθητής: Το 7.

Ερευνητής: Άρα έχουμε 7 ολόκληρα λίτρα;
Μαθητής: (Σκέφτεται)
Ερευνητής: Ποιος αριθμός είναι εδώ;
Μαθητής: Το 1/7.
Ερευνητής: Μετά;
Μαθητής: Τα 2/7.
Ερευνητής: Προχώρα.
Μαθητής: 3/7, 4/7...
Ερευνητής: Άρα εδώ ποιος αριθμός είναι;
Μαθητής: Τα 7/7.
Ερευνητής: Δηλαδή;
Μαθητής: Το 1 (Σημειώνει το 1).
Ερευνητής: Πόσα ίσα διαστήματα έχεις κάνει;
Μαθητής: 7.
Ερευνητής: Μέτρησέ τα.
Μαθητής: (Μετρά και βρίσκει 6).
Ερευνητής: Τώρα τι θα κάνεις;
Μαθητής: Θα κάνω ακόμα 1. (Φέρει ακόμη μια κατακόρυφη γραμμή και χωρίζει σε 7 ίσα διαστήματα).
Ερευνητής: Μπορείς να λύσεις το πρόβλημα τώρα;
Μαθητής: Ναι. Πρώτα θα πάω στα 2/7 και μετά ακόμα 4/7 (Αρχίζει να μετρά τις κατακόρυφες διαχωριστικές γραμμές αντί τα διαστήματα).
Ερευνητής: Μπορείς να μου δείξεις ποια είναι τα ίσα κομμάτια και ποιες οι γραμμές που χρησιμοποιήσαμε για να τα χωρίσουμε;
Μαθητής: Τούτα είναι τα κομμάτια (δείχνει τα διαστήματα) και τούτες οι γραμμές τα χωρίζουν (δείχνει τις κατακόρυφες γραμμές).
Ερευνητής: Άρα ποια θα μετρήσουμε;
Μαθητής: Τα κομμάτια. Προχωρά στα 2/7 με μια καμπύλη γραμμή) και μετά ακόμα 4/7 (κάνει μια δεύτερη καμπύλη γραμμή και προχωρεί ακόμη 4/7).
Ερευνητής: Σε ποιον αριθμό έφτασες;
Μαθητής: Στα 6/7.
Ερευνητής: Μπορείς να μου γράψεις και την εξίσωση;
Μαθητής: (Γράφει 2/7 + 4/7=6/7).

2. Αριθμητική γραμμή (αριθμημένη ως το 1)----------> εξίσωση, πρόβλημα

Ερευνητής: Μπροστά σου έχεις μια αριθμητική γραμμή συμπληρωμένη. Μπορείς να μου πεις ποια εξίσωση δείχνει η γραμμή αυτή;
Μαθητής: (Σκέφτεται για ένα λεπτό περίπου χωρίς να απαντά)
Ερευνητής: Ποιο αριθμό έβαλα πρώτα;
Μαθητής: Τα 5/10.
Ερευνητής: Χώρισα τη γραμμή σε 10 κομμάτια δηλαδή;
Μαθητής: Όχι, σε 9.
Ερευνητής: Άρα ποιον αριθμό έβαλα πρώτα;
Μαθητής: Τα 4/9.
Ερευνητής: Ωραία. Μετά;
Μαθητής: Ακόμη 3/9.
Ερευνητής: Ωραία, πού έχω φτάσει;
Μαθητής: Στα 7/9.

Ερευνητής: Γράψε την εξίσωση.
Μαθητής: (Γράφει (Γράφει 4/9 + 3/9=7/9.).
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις ένα πρόβλημα που να λύνεται με την εξίσωση αυτή;
Μαθητής: Η μητέρα μου αγόρασε μια τούρτα που είχε τα 4/9 κομμάτια.... Έφαγα τα 3/9. Πόσα μου έμειναν;
Ερευνητής: Πόσα έμειναν;
Μαθητής: 1/9.
Ερευνητής: Η εξίσωση λέει 4/9+3/9=7/9
Μαθητής: Είναι πλην το πρόβλημα που είπα.
Ερευνητής: Πες μου ένα άλλο πρόβλημα.
Μαθητής: Είχα 4/9 της λίρας. Ο πατέρας μου έδωσε ακόμη 3/9 της λίρας. Πόσα....(σκέφτεται).
Ερευνητής: Τι θα ρωτήσεις;
Μαθητής: Πόσα ένατα της λίρας έχω τώρα;
Ερευνητής: Προτιμάς αυτά που έχεις τώρα ή να σου δώσω μια λίρα.
Μαθητής: Μια λίρα, διότι είναι παραπάνω.
Ερευνητής: Μπορείς να μου δείξεις τη μια λίρα στην αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Δείχνει τον αριθμό 1.
Ερευνητής: Μπορείς να μου δείξεις το διάστημα που μας δείχνει το 1;
Μαθητής: (δείχνει από το 0 ως το 1).
Ερευνητής: Άρα τι φαίνεται;
Μαθητής: Ότι η μια λίρα είναι πιο μεγάλη από τα 7/9.

3. Αριθμητική γραμμή (αριθμημένη ως το 2) ---------> εξίσωση, πρόβλημα

Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις τι εξίσωση δείχνει αυτή η αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: (Σκέφτεται για ένα λεπτό περίπου). 2/10 και ακόμα 1/10.
Ερευνητής: Πώς χώρισα τη γραμμή μου;
Μαθητής: Σε δέκατα.
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις ποιος αριθμός είναι αυτός;
Μαθητής: Το 1.
Ερευνητής: Μάλιστα. Αφού προχωρώ με δέκατα πόσα δέκατα πρέπει να έχει ως το 1;
Μαθητής: Δέκα.
Ερευνητής: Έχει δέκα δέκατα από εδώ ως εδώ; (δείχνει το διάστημα από το 0 ως το 1).
Μαθητής: Όχι. Έχει πέντε.
Ερευνητής: Άρα ο αριθμός 1 πόσα τέτοια κομμάτια έχει;
Μαθητής: Πέντε.
Ερευνητής: Άρα πώς χωρίσαμε την αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Σε πέμπτα.
Ερευνητής: Και πόσα τέτοια κομμάτια έχει ως το 1;
Μαθητής: Πέντε.
Ερευνητής: Άρα το 1 πώς αλλιώς μπορούμε να το πούμε;
Μαθητής: 5/5.
Ερευνητής: Άρα ως εδώ ποιος αριθμός είναι; (δείχνει από το 0 ως τα 2/5)
Μαθητής: Τα 2/5.
Ερευνητής: Άρα ποιος είναι ο αριθμός αυτός (δείχνει τα 6/5);
Μαθητής: Τα 6/5.
Ερευνητής: Είναι δηλαδή ένα ολόκληρο και...;

Μαθητής: 1/5.
Ερευνητής: Εδώ; (δείχνει τα 9/5)
Μαθητής: Τα 9/5.
Ερευνητής: Ένα ολόκληρο και ...;
Μαθητής: 4/5.
Ερευνητής: Ποιος είναι ο πιο μεγάλος, το 1 και 1/5 ή το 1 και 4/5;
Μαθητής: Το 1 και 4/5.
Ερευνητής: Τι αριθμό προσθέτω κάθε φορά και προχωρώ;
Μαθητής: Βάζεις 1/5.
Ερευνητής: Άρα ποια είναι η εξίσωση;
Μαθητής: 2/5+1/5=3/5
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις και ένα πρόβλημα;
Μαθητής: Η μητέρα μου αγόρασε τα 2/5 των βιβλίων και ο πατέρας μου το 1/5 των βιβλίων. Πόσα βιβλία έχω τώρα;
Ερευνητής: Αν τα βιβλία που πρέπει να αγοράσεις είναι 10 και εσύ έχεις τα 3/5 των βιβλίων, πόσα βιβλία έχεις τώρα;
Μαθητής: Θα κάνω φορές...3/5 Χ 10. Κάνει 30/5.
Ερευνητής: Πόσα ολόκληρα βιβλία έχεις;
Μαθητής: 30.
Ερευνητής: Μα αφού βρήκες 30/5.
Μαθητής: 5.
Ερευνητής: Πόσα ολόκληρα βιβλία είναι ο αριθμός 30/5.
Μαθητής: 6.

4. Εξίσωση ---------> Αριθμητική γραμμή (αριθμημένη ως το 1)

Ερευνητής: Σου δίνω μια εξίσωση (4/8+3/8). Μπορείς να μου τη δείξεις στην αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: (κάνει 10 κατακόρυφες γραμμές και χωρίζει την αριθμητική γραμμή σε ένατα).
Ερευνητής: Μέτρησε τα διαστήματα που έκανες.
Μαθητής: Είναι 9. (Σβήνει το ένα διάστημα).
Ερευνητής: Μπορείς να μου δείξεις την εξίσωση;
Μαθητής: (Επιλέγει τα 4/8 και μετά προχωρεί ακόμη 3/8).
Ερευνητής: Ποια είναι η απάντηση;
Μαθητής: 7/8.

5. Εξίσωση---------> Αριθμητική γραμμή (αριθμημένη ως το 2), πρόβλημα.

Ερευνητής: Μπορείς να μου δείξεις την ίδια εξίσωση και σε αυτή την αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: (Χωρίζει το διάστημα από το 0 ως το 1 σε 8 ίσα μέρη).
Ερευνητής: Από εδώ ως εδώ (από το 1 ως το 2) τι θα κάνεις;
Μαθητής: 8 (Χωρίζει το διάστημα από το 1 ως το 2 σε 8 ίσα μέρη).
Ερευνητής: Δείξε μου την εξίσωση.
Μαθητής: (Επιλέγει τα 4/8 και μετά προχωρεί ακόμη 3/8)
Ερευνητής: Πόσα βρήκες;
Μαθητής: 7/8.
Ερευνητής: Μια συμμαθήτριά σου στην ίδια άσκηση έκανε στην αριθμητική γραμμή από το 0 ως το 1, 4 ίσα διαστήματα και από το 0 ως το 2 ακόμη 4 διαστήματα και μου είπε ότι χώρισε τη γραμμή σε όγδοα. Συμφωνείς;

Μαθητής: Όχι.
Ερευνητής: Πώς θα μπορούσες να τη διορθώσεις;
Μαθητής: Γιατί πρέπει να χωρίσουμε σε όγδοα.
Ερευνητής: Πώς θα την έπειθες;
Μαθητής: (Σκέφτεται για ένα λεπτό περίπου)
Ερευνητής: Μήπως θα μπορούσες να χρησιμοποιήσεις τον αριθμό 1 για να τη βοηθήσεις να καταλάβει;
Μαθητής: (Δεν απαντά)
Ερευνητής: Τι αριθμό έκανε ως το 1;
Μαθητής: 4.
Ερευνητής: Τι 4;
Μαθητής: 4/8...όχι εννοώ 4/4.
Ερευνητής: Κανονικά ποιος αριθμός είναι εδώ για να πούμε ότι η γραμμή έχει χωριστεί σε όγδοα.
Μαθητής: Τα 8/8.
Ερευνητής: Τι θα της έλεγες;
Μαθητής: Να κοιτάξει το 1...να είναι τα 8/8.
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις ένα πρόβλημα;
Μαθητής: Είχα μια σοκολάτα και έφαγα τα 3/8 ...
Ερευνητής: Μετά;
Μαθητής: (δεν απαντά)
Ερευνητής: Μετά τι κάνω;
Μαθητής: Τρώω τα 4/8.
Ερευνητής: Ποια θα είναι η ερώτηση;
Μαθητής: Τι μέρος της σοκολάτας έφαγα;
Ερευνητής: Την έφαγες ολόκληρη;
Μαθητής: Όχι.
Ερευνητής: Πόση έφαγες μέχρι τώρα;
Μαθητής: 3/8.
Ερευνητής: Συνολικά;
Μαθητής: 4/8.
Ερευνητής: Κοίτα στην αριθμητική γραμμή, πόσο έφαγες συνολικά;
Μαθητής: 7/8.
Ερευνητής: Άρα τι σου έμεινε για να τη φας ολόκληρη;
Μαθητής: (Δεν απαντά).
Ερευνητής: Κοίτα στην αριθμητική γραμμή. Τι σου μένει για να τη φας ολόκληρη;
Μαθητής: 1/8.
Ερευνητής: Δηλαδή σε πόσα κομμάτια έκοψες τη σοκολάτα;
Μαθητής: 2.
Ερευνητής: Αφού έφαγες όγδοα.
Μαθητής: 8.
Ερευνητής: Τη μια μέρα από τα 8 κομμάτια πόσα έφαγες;
Μαθητής: 4.
Ερευνητής: Την άλλη μέρα;
Μαθητής: 3.
Ερευνητής: Αν είχα αυτά τα δυο κλάσματα (1/2+1/3) πώς θα μπορούσα να τα βάλω μαζί στην αριθμητική γραμμή.
Μαθητής: Θα βρίσκαμε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο...που είναι το 6.
Ερευνητής: Πώς θα χώριζες την αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Σε έκτα.
Ερευνητής: Γιατί θέλησες να χωρίσεις σε έκτα;

Μαθητής: Διότι δεν είναι ίδια τα κομμάτια.
Ερευνητής: Ποιος είναι ο πιο μεγάλος; Το ½ ή το 1/3;
Μαθητής: Το 1/3.
Ερευνητής: Με πόσα έκτα είναι ίσο το ½; Κοίταξε στην αριθμητική γραμμή.
Μαθητής: Με τρία.
Ερευνητής: Το 1/3;
Μαθητής: Με 2.
Ερευνητής: Άρα ποιος είναι ο πιο μεγάλος;
Μαθητής: Το ½, χωρεί 3/6.
Ερευνητής: Σε βοήθησε η αριθμητική γραμμή να λύσεις προβληματάκια με κλάσματα;
Μαθητής: Ναι, γιατί μας δείχνει τα κομμάτια.

Συνέντευξη
Πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων

Συνέντευξη μαθητή με ψηλή επίδοση

1. Πρόβλημα -------→ αριθμητικές γραμμές, εξίσωση
Ερευνητής: Θα δουλέψουμε μαζί σε κάποια προβλήματα και ασκήσεις. Ας ξεκινήσουμε από το πρώτο πρόβλημα. Διάβασέ το και να μου πεις με δικά σου λόγια τι λέει.
(Ο μαθητής διαβάζει το πρώτο πρόβλημα)
Μαθητής: Ήταν μια οικογένεια και ήπιε το πρωί τα 2/3 του χυμού και ¼ του χυμού το απόγευμα. Πόσο ήπιαν συνολικά;
Ερευνητής: Εγώ σου δίνω τρεις αριθμητικές γραμμές και θέλω να προσπαθήσεις να λύσεις το πρόβλημα χρησιμοποιώντας αυτές τις αριθμητικές γραμμές. Τι θα βάλω άραγε στην πρώτη;
Μαθητής: Θα βάλω τα 2/3
Ερευνητής: Στη δεύτερη;
Μαθητής: Το 1/4
Ερευνητής: Και στην τελευταία;
Μαθητής: Θα βάλω τα δύο κλάσματα μαζί για να λύσω το πρόβλημα. Θα βρω το σύνολο.
Ερευνητής: Ωραία. Ξεκίνα.
(Ο μαθητής αναπαριστά στις δύο πρώτες αριθμητικές γραμμές τα δύο κλάσματα)
Ερευνητής: Πώς θα δουλέψεις στην πρώτη;
Μαθητής: Θα τη χωρίσω σε τρία ίσα μέρη και θα τραβήξω μια γραμμή από το 0 μέχρι και το δεύτερο κομμάτι.
Ερευνητής: Ωραία. Στη δεύτερη;
Μαθητής: Θα τη χωρίσω σε τέσσερα ίσα μέρη και θα τραβήξω μια γραμμή από το 0 μέχρι το τέταρτο κομμάτι.
Ερευνητής: Τι θα κάνουμε στην τρίτη αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Θα κάνουμε τα κλάσματα με τον ίδιο παρονομαστή, το 12 και θα τα προσθέσω. Το 2/3 γίνεται 8/12 και το ¼ γίνεται 3/12. (Χωρίζει την αριθμητική γραμμή σε 12 ίσα μέρη και επιλέγει πρώτα τα 8/12 και μετά τα 3/12).
Ερευνητής: Άρα πού καταλήξαμε;

Μαθητής: Στα 11/12.
Ερευνητής: Μπορείς να μου γράψεις την εξίσωση;
Μαθητής: Ναι. 2/3 +1/4=8/12 + 3/12 = 11/12

2. Αριθμητική γραμμή αριθμημένη ως το 1 -------→ εξίσωση

Ερευνητής: Σου δίνω τρεις αριθμητικές γραμμές συμπληρωμένες. Μπορείς να μου πεις ποια εξίσωση αναπαριστούν;
Μαθητής: Είναι ½ και 1/3. (Γράφει ½ +1/3=). Μετρά τα έκτα της τρίτης αριθμητικής γραμμής και συμπληρώνει την εξίσωση: ½ +1/3= 5/6
Ερευνητής: (Δείχνει στην τελευταία αριθμητική γραμμή). Αυτά τα 3/6 ποιος αριθμός είναι;
Μαθητής: Τα 3/6 είναι το ½ και είναι ισοδύναμα και τα άλλα 2/6 είναι το 1/3 και πάλι είναι ισοδύναμα. Συνολικά είναι 5/6.
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις ένα πρόβλημα για την εξίσωση αυτή;
Μαθητής: Μια οικογένεια έφαγε μισό καρπούζι μετά το μεσημεριανό της και ακόμη 1/3 μετά το δείπνο. Πόσο έφαγαν συνολικά;

3. Αριθμητική γραμμή αριθμημένη ως το 2 ---------→ εξίσωση

Ερευνητής: Έχω και πάλι τρεις αριθμητικές γραμμές συμπληρωμένες. Δες ποιους αριθμούς αναπαριστούν οι πρώτες δύο αριθμητικές γραμμές και να μου τους προσθέσεις στην τελευταία αριθμητική γραμμή.
Μαθητής: ¼ και 2/5.
Ερευνητής: Ωραία.
Μαθητής: Στην τρίτη γραμμή θα κάνω 20 ίσα κομμάτια ως το 1 και μετά ακόμη 20 κομμάτια ως το 2.
Ερευνητής: Γιατί;
Μαθητής: Διότι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο του 4 και του 5 είναι το 20. Το ¼ θα γίνει 5/20 και το 2/5 θα γίνει 8/20. Μαζί κάνουν 13/20. (Χωρίζει την αριθμητική γραμμή σε 20 ίσα κομμάτια και επιλέγει πρώτα τα 5 και ύστερα τα 8).
Ερευνητής: Άρα ποια είναι η εξίσωση;
Μαθητής: ¼ + 2/5=5/20 + 8/20= 13/20
Ερευνητής: Πες μου και ένα πρόβλημα.
Μαθητής: Μια χελώνα κάλυψε το ¼ της απόστασης για να πάει κάπου το πρωί και το απόγευμα κάλυψε άλλα 2/5 της απόστασης για να φτάσει στον προορισμό της. Πόση απόσταση κάλυψε;
Ερευνητής: Ένας συμμαθητής σου είπε ότι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο είναι το 20 και μοίρασε την αριθμητική γραμμή από το 0 μέχρι το 2 σε 20 ίσα κομμάτια. Συμφωνείς;
Μαθητής: Όχι, γιατί μετά θα έχουμε δέκατα και όχι εικοστά. Δηλαδή ως το 1 θα έχει 10 αντί 20.
Ερευνητής: Σε τι εξίσωση θα οδηγηθεί Ο μαθητής τελικά;
Μαθητής: 5/10+8/10=13/10, ενώ θα νομίζει ότι βρήκε 13/20.
Ερευνητής: Πώς προχωρούμε στην αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Βάζουμε 1/20 και όχι 1/10.
Ερευνητής: Ως εδώ ποιος αριθμός είναι;
Μαθητής: Είναι το 1.
Ερευνητής: Δηλαδή πόσα εικοστά;
Μαθητής: Είκοσι εικοστά.
Ερευνητής: Ο συμμαθητής σου σε ποιο αριθμό έφτασε;

Μαθητής: Στο μισό, όχι στο 1.

4. Εξίσωση -------→ αριθμητικές γραμμές (αριθμημένες ως το 1)

Ερευνητής: Σου δίνω μια εξίσωση και θέλω να μου τη λύσεις με τη βοήθεια των αριθμητικών γραμμών.
Μαθητής: Θα χωρίσω την πρώτη αριθμητική γραμμή σε 8 και θα πάρω τα 3, τη δεύτερη σε τρία ίσα μέρη και θα πάρω το 1 και στην τρίτη θα τα προσθέσω. (Αναπαριστά στις δύο πρώτες αριθμητικές γραμμές τους πρώτους δύο αριθμούς). Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο είναι το 24 (Χωρίζει την τελευταία αριθμητική γραμμή σε 24 ίσα μέρη από το 0 μέχρι το 1). Τώρα μετατρέπω, παίρνω πρώτα τα 8/24 και μετά τα 9/24. Σύνολο 17/24.

5. Εξίσωση -------→ αριθμητικές γραμμές (αριθμημένες ως το 2)

Ερευνητής: Την ίδια εξίσωση θέλω να τη δείξεις και σε αυτές τις αριθμητικές γραμμές. Τι θα κάνεις;
(Ο μαθητής σκέφτεται)
Ερευνητής: Τι σκέφτεσαι;
Μαθητής: Ότι δεν μπορώ να βάλω τα 3/8 και μετά το 1/3 μέσα στο ½.
Ερευνητής: Πού βλέπεις το ½;
Μαθητής: Α...τώρα κατάλαβα. Νόμισα ότι η αριθμητική γραμμή έφτανε ως το ½. Έχει αριθμούς ως το 2, όχι το ½.
Ερευνητής: Πώς θα χωρίσεις την αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Από το 0 ως το 1 θα τα χωρίσω σε όγδοα. Το ίδιο από το 1 ως το 2. (Το χωρίζει και επιλέγει τα 3/8)
Ερευνητής: Την άλλη αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Από το 0 ως το 1 θα τα χωρίσω σε τρίτα. Και πάλι το ίδιο από το 1 ως το 2. (Το χωρίζει και επιλέγει το 1/3).
Μαθητής: Θα χωρίσω την τρίτη αριθμητική γραμμή σε 24 διαστήματα από το 0 ως το 1 και 24 διαστήματα από το 1 ως το 2. Μετά θα πάρω τα 9/24, όπως πριν, και μετά τα 8/24, που είναι βασικά τα 3/8. Βρίσκουμε 17/24.
Ερευνητής: Αυτά τα βελάκια στην άκρη της αριθμητικής γραμμής τι σου δείχνουν;
Μαθητής: Μου δείχνουν ότι η γραμμή είναι μια ευθεία, δηλαδή δεν τελειώνει πουθενά. Συνεχίζει για πάντα και υπό το μηδέν και πάνω από το μηδέν.
Ερευνητής: Τι σου λέει αυτό για τους αριθμούς;
Μαθητής: Ότι είναι ατέλειωτοι (εννοεί ότι είναι άπειροι).
Ερευνητής: Από το 0 ως το 1 πόσα κλάσματα υπάρχουν;
Μαθητής: Άπειρα.
Ερευνητής: Γιατί;
Μαθητής: Γιατί αν πάρω δύο κλάσματα και βρω τα ισοδύναμά τους θα υπάρχει πάντα ένα κλάσμα άλλο ανάμεσά τους. Ας πούμε αν πάρω το ¼ και τα 2/4 και έχω τα ισοδύναμά τους 2/8 και 4/8 τότε υπάρχει ανάμεσα τους το κλάσμα 3/8.
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις ένα πρόβλημα με την εξίσωση που σου έδωσα;
Μαθητής: Από μια σοκολάτα έφαγα τη Δευτέρα τα 3/8 και μετά ακόμα 1/3.
Πόσο έφαγα συνολικά;
Ερευνητής: Εκείνος ο συμμαθητής σου που είχε κάνει λάθος στο χωρισμό της αριθμητικής γραμμής τι λάθος έκανε νομίζεις στην πρώτη αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Από το 0 ως το 1 το χώρισε σε 4 κομμάτια και από το 0 ως το 2 σε άλλα 4.
Ερευνητής: Τελικά ποιον αριθμό βρήκε αντί τα 3/8;

Μαθητής: 3/4
Ερευνητής: Μπορούσε να μου πει κάτι άλλο και να της πω είναι σωστό. Τι μπορούσε να μου πει; Τα ¾ ποιου;
Μαθητής: Τα ¾ του 2 και όχι του 1.
Ερευνητής: Τα ¾ του 2 είναι ο αριθμός 3/8;
Μαθητής: Όχι, εννοώ τα ¾ του μισού. Τα 3/8.
Ερευνητής: Ένας συμμαθητής σου έκανε την εξής πράξη: 3/8+1/3=4/11. Είναι σωστός;
Μαθητής: Όχι, διότι στην πρόσθεση δεν προσθέτουμε τους παρονομαστές και όχι τους αριθμητές.
Ερευνητής: Γιατί να μην τους προσθέσουμε;
Μαθητής: Δεν τους προσθέτουμε, γιατί μιλάμε για διαφορετικά κομμάτια.
Ερευνητής: Μήπως υπάρχει ένας τρόπος να πείσεις το συμμαθητή σου γι’αυτό που λες;
Μαθητής: Να πάρω μια σοκολάτα και να τη χωρίσω σε όγδοα και μια άλλη σε τρίτα. Να πάρω τα 3/8 και το 1/3 και να προσπαθήσω να τα ενώσω. Θα είναι διαφορετικά τα κομμάτια.
Ερευνητής: Αν είχες μόνο ένα μολύβι;
Μαθητής: Θα μπορούσα να κάνω γραμμές, σαν την αριθμητική γραμμή.
Ερευνητής: Σε τι σου χρησιμεύει μια αριθμητική γραμμή.
Μαθητής: Μας χρησιμεύει στο να λύσουμε ασκήσεις όπου τα κομμάτια είναι διαφορετικά...έτσι ώστε αν το κομμάτι είναι διαφορετικό να το δούμε και να χωρίσουμε την αριθμητική γραμμή σε περισσότερα κομμάτια μέχρι να βρούμε ένα αριθμό που να πηγαίνουν και οι δύο αριθμοί κάποιες φορές. Να βρίσκουμε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο και να βρούμε την απάντηση με ένα αριθμό.

<u>Συνέντευξη</u>
<u>Πρόσθεση Ετερώνυμων Κλασμάτων</u>

<u>Συνέντευξη μαθητή με μέτρια επίδοση</u>

1. Πρόβλημα ------> Αριθμητική γραμμή, εξίσωση

Ερευνητής: Θα ασχοληθούμε με τις ασκήσεις και τα προβλήματα σε αυτό το φυλλάδιο. Ας ξεκινήσουμε με το πρώτο πρόβλημα. Διάβασέ το και πες μου με δικά σου λόγια τι λέει.
Μαθητής: Μια οικογένεια ήπιε 2/3 λίτρα χυμό το πρωί και ¼ λίτρα χυμό το απόγευμα. Πόσο ήπιαν συνολικά;

Ερευνητής: Θα ήθελα να λύσεις αυτό το πρόβλημα με τη βοήθεια των τριών αριθμητικών γραμμών που υπάρχουν. Τι νομίζεις θα κάνουμε στην πρώτη;
Μαθητής: Θα δείξουμε τα 2/3.
Ερευνητής: Στη δεύτερη;
Μαθητής: Το 1/4.
Ερευνητής: Και στην τελευταία;
Μαθητής: Το αποτέλεσμα. Πόσο κάνουν και τα δύο μαζί, 2/3 και ¼.
Ερευνητής: Ξεκίνησε με τον πρώτο αριθμό. Τι θα κάνεις;
Μαθητής: Θα χωρίσω την αριθμητική γραμμή σε τρίτα. (Φέρει πέντε κατακόρυφες γραμμές. Στην πρώτη τοποθετεί τον αριθμό 0 και στην τελευταία το 1. Το διάστημα 0 ως 1 είναι πλέον χωρισμένο σε τέσσερα ίσα μέρη).
Ερευνητής: Δείξε μου, λοιπόν, τον αριθμό 1/4.
Μαθητής: (Επιλέγει το 1/4).
Ερευνητής: Ας προχωρήσουμε στην τελευταία αριθμητική γραμμή. Τι θα κάνεις;
Μαθητής: Θα τα κάνω ομώνυμα.
Ερευνητής: Γιατί δεν μπορούμε να τα προσθέσουμε έτσι;
Μαθητής: Επειδή είναι ετερώνυμα.
Ερευνητής: Σε τι διαφέρουν δηλαδή;
Μαθητής: Οι παρονομαστές.
Ερευνητής: Πώς βλέπεις τα κομμάτια στα οποία είναι χωρισμένες οι δύο πρώτες αριθμητικές γραμμές;
Μαθητής: Δεν είναι τα ίδια. Είναι διαφορετικά τα κομμάτια.
Ερευνητής: Πώς θα προχωρήσεις;
Μαθητής: Βρίσκω το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο. Είναι το 12.
Ερευνητής: Άρα πώς θα χωρίσεις την τελευταία αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Σε 12.(Φέρει 13 κάθετες αριθμητικές γραμμές και στην πρώτη σημειώνει την αριθμό 0 ενώ στην τελευταία σημειώνει τον αριθμό 1).
Ερευνητής: Τώρα τι θα κάνεις;
Μαθητής: Θα βάλω πρώτα τα 2/3...που είναι 8/12. (Επιλέγει πρώτα τα 8/12).
Ερευνητής: Μετά;
Μαθητής: Μετά θα βάλω και το ¼ ...που είναι...
Ερευνητής: Μήπως μπορεί να σε βοηθήσει η δεύτερη αριθμητική γραμμή; Με πόσα δωδέκατα αντιστοιχεί το ¼;
Μαθητής: (Παρατηρεί το μήκος του ¼ και βρίσκει με πόσα δωδέκατα αντιστοιχεί). Αντιστοιχεί με 3/12.
Ερευνητής: Τι θα κάνουμε μετά;
Μαθητής: Θα βάλω τα 3/12 μαζί με τα 8/12.
Ερευνητής: Σε ποιο αριθμό έχεις φτάσει;
Μαθητής: Στα 11/12.
Ερευνητής: Γράψε και την εξίσωση.
Μαθητής: (Γράφει 8/12+3/12=11/12).

2. Αριθμητική γραμμή (αριθμημένη ως το 1)------> Εξίσωση, Πρόβλημα

Ερευνητής: Εδώ σου δίνω την αριθμητική γραμμή συμπληρωμένη. Μπορείς να μου πεις την εξίσωση;
Μαθητής: ½+1/3 (γράφει την εξίσωση).
Ερευνητής: Ξέρεις το αποτέλεσμα;
Μαθητής: 5/6.
Ερευνητής: Πώς κατέληξε σε έκτα η τρίτη αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Βρήκα το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο.

Ερευνητής: Άρα το ½ με πόσα έκτα αντιστοιχεί;
Μαθητής: (Παρατηρεί την τρίτη αριθμητική γραμμή). Με τρία.
Ερευνητής: Το 1/3 με πόσα έκτα αντιστοιχεί.
Μαθητής: (Παρατηρεί την τρίτη αριθμητική γραμμή). Με δύο.
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις και ένα πρόβλημα που να αντιστοιχεί στην εξίσωση αυτή;
Μαθητής: Το πρωί ήπια ½ λίτρα γάλα. Το απόγευμα ήπια 1/3 λίτρα γάλα. Πόσα ήπια συνολικά;

3. Αριθμητική γραμμή (αριθμημένη ως το 2)------> Εξίσωση, Πρόβλημα

Ερευνητής: Εδώ έχουμε συμπληρωμένες αριθμητικές γραμμές. Μπορείς να μου πεις ποια εξίσωση δείχνουν;
Μαθητής: 1/8 + 2/10.
Ερευνητής: Γιατί είπες 1/8;
Μαθητής: Γιατί η αριθμητική γραμμή είναι χωρισμένη σε 8 κομμάτια και πήραμε το 1.
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις ποιος αριθμός είναι εδώ; (δείχνει το 1).
Μαθητής: Το 1.
Ερευνητής: Πόσα όγδοα έχει το ένα ολόκληρο;
Μαθητής: 8.
Ερευνητής: Άρα από εδώ μέχρι εδώ έχει 8 όγδοα; (από το 0 μέχρι το 1).
Μαθητής: Όχι...είναι τέσσερα.
Ερευνητής: Πώς είναι χωρισμένη η αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: (Σκέφτεται για ένα λεπτό). Σε τεταρτα!
Ερευνητής: Πώς προχωρούμε;
Μαθητής: Με τέταρτα.
Ερευνητής: Άρα ποιος αριθμός είναι εδώ; (δείχνει το διάστημα από το 0 ως το 1 και ¼)
Μαθητής: Τα 1 και ¼..
Ερευνητής: Ποιος αριθμός είναι αυτός; (δείχνει τον αριθμό ¼).
Μαθητής: Το ¼.
Ερευνητής: Στη δεύτερη αριθμητική γραμμή, ποιος είναι ο αριθμός;
Μαθητής: Είναι τα 2/5.
Ερευνητής: Ένας συμμαθητής σου μου είπε ότι είναι τα 2/10. Γιατί μου είπε έτσι;
Μαθητής: Γιατί μέτρησε ως το 2 και όχι ως το 1 για να δει πως χωρίσαμε την αριθμητική γραμμή.
Ερευνητής: Ποιος αριθμός θα έπρεπε να ήταν εδώ αν προχωρούσαμε με δέκατα;
Μαθητής: Θα ήταν τα 5/10.
Ερευνητής: Δηλαδή;
Μαθητής: Το μισό.
Ερευνητής: Γράψε την εξίσωση.
Μαθητής: (γράφει ¼+2/5=)
Ερευνητής: Ποιο είναι το πρόβλημα εδώ;
Μαθητής: Είναι ετερώνυμα. Δεν μπορώ να τα προσθέσω.
Ερευνητής: Τι έκανα άραγε στην τελευταία αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Τη χώρισες σε είκοσι κομμάτια.
Ερευνητής: Γιατί;
Μαθητής: Διότι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο είναι το 20.
Ερευνητής: Υπάρχει και κανένας άλλος αριθμός που είναι κοινό πολλαπλάσιο του 4 και του 5, εκτός από το20;

Μαθητής: Όχι.
Ερευνητής: Δεν υπάρχει άλλο πολλαπλάσιο;
Μαθητής: Δεν είπαμε ότι πολλαπλασιάσουμε το 5 με το 4 και βρίσκουμε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο;
Ερευνητής: Ναι αλλά αυτό είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο, μήπως υπάρχουν κι άλλοι αριθμοί που να είναι πολλαπλάσια του 4 και του 5;
Μαθητής: (Σκέφτεται για ένα λεπτό).
Ερευνητής: Σου δίνω τον αριθμό 40. Έλεγξέ τον.
Μαθητής: Το 4 πάει 10 φορές και το 5 πάει οχτώ φορές. Είναι κοινό πολλαπλάσιο.
Ερευνητής: Πες μου ακόμη ένα κοινό πολλαπλάσιο.
Μαθητής: Το 120.
Ερευνητής: Πόσα πολλαπλάσια νομίζεις υπάρχουν;
Μαθητής: Άπειρα.
Ερευνητής: Γιατί δεν διαλέγω ένα από αυτά για να κάνω ομώνυμα κλάσματα και διαλέγω το 20;
Μαθητής: Πρέπει να βρούμε το πιο μικρό.
Ερευνητής: Γιατί πρέπει να βρούμε το πιο μικρό;
Μαθητής: (Δεν απαντά)
Ερευνητής: Ωραία, τότε εγώ διαλέγω το 200 για να κάνω ομώνυμα.
Μαθητής: Όχι, καλύτερα με το μικρότερο πολλαπλάσιο, διότι είναι πιο εύκολο...είναι πιο περίπλοκο αλλιώς. Θα είναι και δύσκολο να χωρίσω την αριθμητική γραμμή.
Ερευνητής: Δείξε μου, λοιπόν το αποτέλεσμα στην αριθμητική γραμμή. Με πόσα εικοστά αντιστοιχεί το ¼;
Μαθητής: (Συγκρίνει το ¼ με το 1/20). Χωρεί 5 (Επιλέγει 5/20).
Ερευνητής: Τα 2/5;
Μαθητής: (Συγκρίνει τα 2/5 με το 1/20). Χωρεί 8 (Επιλέγει 8/20).
Ερευνητής: Πόσα βρίσκεις;
Μαθητής: 13/20.
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις ένα πρόβλημα;
Μαθητής: Το πρωί ¼ της ώρας και το απόγευμα τα 2/5 της ώρας. Πόση ώρα έπαιξα συνολικά;
Ερευνητής: Έπαιξες ολόκληρη την ώρα;
Μαθητής: Έπαιξα λιγότερο από μια ώρα.

4. Εξίσωση --------------> Αριθμητική γραμμή (αριθμημένη ως το 1)

Ερευνητής: Εδώ έχουμε μια εξίσωση και θέλω να μου τη δείξεις πάνω στις αριθμητικές γραμμές.
Μαθητής: Την πρώτη γραμμή θα τη χωρίσω σε όγδοα, τη δεύτερη σε τρίτα.
Ερευνητής: Την τελευταία αριθμητική γραμμή πώς θα την χωρίσεις;
Μαθητής: Σε 24 (Την πρώτη γραμμή τη χωρίζει σε όγδοα και επιλέγει τα τρία, τη δεύτερη τη χωρίζει σε τρίτα και επιλέγει το ένα).
Ερευνητής: Τα 3/8 με πόσα εικοστά τέταρτα αντιστοιχούν;
Μαθητής: (Συγκρίνει τα εικοστά τέταρτα με τα τρία όγδοα). Με 9.
Ερευνητής: Το 1/3 με εικοστά τέταρτα αντιστοιχούν;
Μαθητής: (Συγκρίνει τα εικοστά τέταρτα με το ένα τρίτο). Με 8.
Ερευνητής: Άρα ποιο είναι το αποτέλεσμα;
Μαθητής: 17/24.

5. Εξίσωση -----------> Αριθμητική γραμμή (αριθμημένη ως το 2), πρόβλημα.

Ερευνητής: Την ίδια εξίσωση θέλω να μου τη δείξεις σε αυτές τις αριθμητικές γραμμές.
Μαθητής: (Χωρίζει την πρώτη αριθμητική γραμμή από το 0 ως το 1 και από το 1 ως το 2 σε όγδοα και επιλέγει τα 3/8, χωρίζει τη δεύτερη αριθμητική γραμμή από το 0 ως το 1 και από το 1 ως το 2 σε τρίτα και επιλέγει το 1/3).
Ερευνητής: Τι θα κάνεις στην τελευταία αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: (Χωρίζει την τρίτη αριθμητική γραμμή από το 0 ως το 1 και από το 1 ως το 2 σε εικοστά τέταρτα).
Ερευνητής: Μια συμμαθήτριά σου χώρισε σε 12 ίσα διαστήματα από το 0 ως το 1 και σε 12 ίσα διαστήματα από το 1 ως το 2. Συμφωνείς;
Μαθητής: Είναι λάθος, επειδή το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο είναι το 24.
Ερευνητής: Αφού έβαλε 12 και 12. Δεν είναι όλα 24;
Μαθητής: Διότι εδώ που είναι το 1 πρέπει να έχει 24/24 και όχι 12/24. Τα 3/8 αντιστοιχούν με 9/24 και το 1/3 αντιστοιχεί με 8/24 (Συγκρίνει τα εικοστά τέταρτα με τα όγδοα και τα τρίτα).
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις και ένα πρόβλημα που να λύνεται με αυτή την εξίσωση;
Μαθητής: Εχθές έφαγα το 1/3 του κέικ και σήμερα έφαγα τα 3/8 του κέικ. Πόσο έφαγα συνολικά;
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις, τώρα που δουλέψαμε με τις αριθμητικές γραμμές, νομίζεις ότι αυτές βοηθούν όταν προσθέτεις κλάσματα;
Μαθητής: Ναι μας βοηθούν να βρίσκουμε το αποτέλεσμα πιο εύκολα.
Ερευνητής: Γιατί;
Μαθητής: Διότι βλέπουμε στο σχήμα πόσα εικοστά τέταρτα είναι 1/8 ή πόσα εικοστά τέταρτα είναι 1/3. Το ίδιο γίνεται και με άλλα κλάσματα.

<u>Συνέντευξη</u>
<u>Πρόσθεση Ετερώνυμων Κλασμάτων</u>

<u>Συνέντευξη μαθητή με χαμηλή επίδοση</u>

1.Πρόβλημα ------------> Αριθμητική γραμμή, εξίσωση.

Ερευνητής: Θα εργαστούμε σε αυτό το φύλλο εργασίας. Θα ήθελα να ξεκινήσεις να διαβάζεις το πιο κάτω πρόβλημα και να μου πεις με δικά σου λόγια τι λέει.
Μαθητής: Λέει ότι μια οικογένεια έφαγε 2/3 του λίτρου γάλα το πρωί και ¼ του λίτρου χυμό το βράδυ. Πόσα ήπιαν συνολικά;
Ερευνητής: Θα ήθελα να μου δείξεις το πρόβλημα που διάβασες με τη βοήθεια των αριθμητικών γραμμών που σου δίνω.
Μαθητής: Στην πρώτη αριθμητική γραμμή θα κάνω τον πρώτο αριθμό και στη δεύτερη γραμμή το δεύτερο.
Ερευνητής: Στην τρίτη γραμμή;
Μαθητής: Θα τους βάλω μαζί.

Ερευνητής: Άρχισε με την πρώτη αριθμητική γραμμή. Τι θα κάνεις πρώτα;
Μαθητής: Θα τη χωρίσω σε 2..όχι...σε 3 (κατασκευάζει το διάστημα από το 0 ως το 1 και το χωρίζει σε 3 ίσα μέρη, μετά φέρει βέλος από το 0 ως το τέλος των δύο διαστημάτων και σημειώνει τον αριθμό 2/3).
Ερευνητής: Στη δεύτερη αριθμητική γραμμή τι θα κάνεις;
Μαθητής: Θα τη χωρίσω σε 4(κατασκευάζει το διάστημα από το 0 ως το 1 και το χωρίζει σε 4 ίσα μέρη, μετά φέρει βέλος από το 0 ως το τέλος του ενός διαστήματος και σημειώνει τον αριθμό 1/4).
Ερευνητής: Πώς θα μου δείξεις στην τρίτη αριθμητική γραμμή το συνολικό ποσό;
Μαθητής: (δεν απαντά).
Ερευνητής: Υπάρχει κάτι που σε δυσκολεύει;
Μαθητής: Δεν μπορώ...αυτά είναι τρίτα και αυτά τέταρτα.
Ερευνητής: Τι θα ήθελες να ήταν;
Μαθητής: Να ήταν τα ίδια.
Ερευνητής: Τι να ήταν το ίδιο;
Μαθητής: Τους παρονομαστές.
Ερευνητής: Τι μπορείς να κάνεις;
Μαθητής: Να έχουν τον ίδιο παρονομαστή;
Ερευνητής: Ποιον παρονομαστή σκέφτεσαι;
Μαθητής: Το 12, το 3 πάει 4 φορές και το 4 πάει 3 φορές.
Ερευνητής: Ποια θα είναι τα καινούρια κλάσματα;
Μαθητής: Θα είναι ίσα...
Ερευνητής: Ποιο είναι το πρώτο;
Μαθητής: Τα 8/12.
Ερευνητής: Το άλλο κλάσμα;
Μαθητής: Τα 3/12.
Ερευνητής: Γιατί μας βοηθούν τα καινούρια κλάσματα;
Μαθητής: Έχουν τον ίδιο παρονομαστή.
Ερευνητής: Την τρίτη αριθμητική γραμμή πώς θα τη χωρίσουμε;
Μαθητής: Σε δωδέκατα.
Ερευνητής: Πώς θα βάλεις τα κλάσματα μαζί;
Μαθητής: 8/12 και ακόμα 3/12 είναι 11/12 (κατασκευάζει το διάστημα 0 ως 1 και το χωρίζει σε 12 ίσα μέρη. Φέρει βέλος από το σημείο 0 ως τα 8/12 και μετά φέρει ακόμα ένα βέλος από το σημείο 8/12 ως τα 11/12 και γράφει 8/12+3/12=11/12).
Ερευνητής: Μπορείς να μου δείξεις εδώ στην τρίτη αριθμητική γραμμή με τα δωδέκατα ποιος αριθμός είναι τα 2/3;
Μαθητής: (δεν απαντά).
Ερευνητής: (δείχνει στην πρώτη αριθμητική γραμμή τα 2/3). Αυτά τα 2/3 με πόσα δωδέκατα είναι ίσα;
Μαθητής: (δείχνει από το 0 ως τα 11/12).
Ερευνητής: Τα 2/3 αντιστοιχούν με το σύνολο που βρήκαμε;
Μαθητής: Όχι..
Ερευνητής: Με πόσα δωδέκατα είναι ίσα;
Μαθητής: (δεν απαντά).
Ερευνητής: Κοιτάζοντας την εξίσωση που έγραψες με πόσα δωδέκατα είναι ίσα τα 2/3;
Μαθητής: Με 8.
Ερευνητής: Μπορείς να μου το δείξεις και στην τρίτη αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: (Δείχνει το διάστημα από το 0 ως τα 8/12).
Ερευνητής: Μπορείς να μου δείξεις και το ¼;
Μαθητής: (Δείχνει το διάστημα από το τα 8/12 ως τα 11/12).

Ερευνητής: Πόσα δωδέκατα βάλαμε δηλαδή;
Μαθητής: 3/12.

2. Αριθμητική γραμμή (αριθμημένη από το 0 ως το 1) -------> εξίσωση, πρόβλημα

Ερευνητής: Σου δίνω συμπληρωμένες δύο αριθμητικές γραμμές και θέλω τους δύο αριθμούς που αναπαριστούν να τους βάλεις μαζί. Μπορείς να μου πεις την εξίσωση;
Μαθητής: ½ και ...1/3
Ερευνητής: Με τι είναι ίσα;
Μαθητής: Με 3/6 και 2/6
Ερευνητής: Πόσο κάνει;
Μαθητής: 5/6.
Ερευνητής: Ωραία. Είχαμε ½ και 1/3 να τα βάλουμε μαζί, πώς βρέθηκαν τα 3/6 και τα 2/6;
Μαθητής: (δεν απαντά).
Ερευνητής: Θα μπορούσες να προσθέσεις το ½ με το 1/3;
Μαθητής: Όχι.
Ερευνητής: Γιατί;
Μαθητής: Είναι διαφορετικά.
Ερευνητής: Σε τι διαφέρουν;
Μαθητής: Είναι διαφορετικά τα κομμάτια.
Ερευνητής: Τι πρέπει να κάνω τότε;
Μαθητής: Να τα κάνω ομώνυμα.
Ερευνητής: Τι σκέφτηκα να κάνω λοιπόν στην τρίτη αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Είπες 3/6...
Ερευνητής: Γιατί;
Μαθητής: Είναι το ½.
Ερευνητής: Τα 2/6;
Μαθητής: Το 1/3.
Ερευνητής: Σε τι κομμάτια τα μετέτρεψα όλα;
Μαθητής: Σε έκτα.
Ερευνητής: Κατάφερα να τα προσθέσω;
Μαθητής: Ναι, γιατί είχαν τον ίδιο παρονομαστή.
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις και ένα πρόβλημα με την εξίσωση ½ +1/3;
Μαθητής: Ένας πατέρας έδωσε στο ένα παιδί ½ από το χωράφι και στο άλλο παιδί το 1/3.
Ερευνητής: Τι θα ρωτήσεις έτσι ώστε αυτός που θα λύσει το πρόβλημα να χρησιμοποιήσει την εξίσωση ½ + 1/3;
Μαθητής: Πόσο μέρος του χωραφιού έδωσε;

3. Αριθμητική γραμμή (αριθμημένη ως το 2) -------> εξίσωση, πρόβλημα.

Ερευνητής: Στην άσκηση αυτή έχουμε και πάλι συμπληρωμένες αριθμητικές γραμμές. Μπορείς να μου πεις ποια εξίσωση αναπαριστούν;
Μαθητής: 1/8 και 2/10.
Ερευνητής: Στην πρώτη αριθμητική γραμμή, εδώ που είναι ο αριθμός 1, με πόσα όγδοα είναι ίσος;
Μαθητής: Με 8.
Ερευνητής: Μέτρα, έχει 8/8 ως εδώ;
Μαθητής: Όχι έχει 4.
Ερευνητής: Τι να συμβαίνει άραγε;

Μαθητής: (δεν απαντά).
Ερευνητής: Ποιος αριθμός είναι εδώ; (από το 0 ως το ¼).
Μαθητής: Το ¼.
Ερευνητής: Ως το 1 πόσα τέταρτα έχουμε;
Μαθητής: 4.
Ερευνητής: Πώς είναι δηλαδή χωρισμένη η αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Σε όγδοα.
Ερευνητής: Άρα εδώ πρέπει να τα 8/8 (δείχνει το 1).
Μαθητής: Όχι ...εννοώ τέταρτα.
Ερευνητής: Τι βάζω κάθε φορά;
Μαθητής: ¼.
Ερευνητής: Εδώ ποιος αριθμός είναι; (δείχνει το 5/4)
Μαθητής: 5/4
Ερευνητής: Αλλιώς; Ένα ολόκληρο και ακόμα τι;
Μαθητής: 1 και ¼.
Ερευνητής: Είναι τα 5/8 εδώ (δείχνει στη θέση του 5/4), δηλαδή είναι μεγαλύτερα από τον αριθμό 1;
Μαθητής: Όχι γιατί είναι πιο μικρό.
Ερευνητής: Άρα εδώ προχωρώ βάζοντας...
Μαθητής: ¼.
Ερευνητής: Τι βάζω κάθε φορά στη δεύτερη αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Βάζω 1/5.
Ερευνητής: Άρα ποιος αριθμός είναι αυτός; (δείχνει τα 2/5).
Μαθητής: 2/5.
Ερευνητής: Για να βάλεις μαζί το ¼ και τα 2/5 στην τρίτη αριθμητική γραμμή τι θα κάνεις;
Μαθητής: (δεν απαντά).
Ερευνητής: Τι σε δυσκολεύει;
Μαθητής: Ο παρονομαστής δεν είναι ο ίδιος.
Ερευνητής: Τι θα κάνεις;
Μαθητής: Θα πρέπει να κάνω τους παρονομαστές ίσους.
Ερευνητής: Πώς θα το καταφέρεις αυτό;
Μαθητής: Υπάρχει ο αριθμός 20...το 5 πάει εκεί 4 φορές και το 4 πάει εκεί 5 φορές.
Ερευνητής: Δεν θέλω να μετρήσεις τα μέρη που χώρισα το διάστημα από το 0 ως το 1 στην τρίτη αριθμητική γραμμή. Μπορείς να μου πεις πόσα είναι;
Μαθητής: 20.
Ερευνητής: Μπορείς να γράψεις την εξίσωση;
Μαθητής: (γράφει 2/5 + ¼ = 8/20 + 5/20=13/20).
Ερευνητής: Το 5/20 με ποιο είναι ίσο;
Μαθητής: Με το ¼.
Ερευνητής: Και το 8/20;
Μαθητής: Με τα 2/5.
Ερευνητής: Δείξε μου αυτή την εξίσωση στην αριθμητική γραμμή.
Μαθητής: (φέρει βέλος από το 0 ως το τέλος των 8 διαστημάτων και μετά φέρει ακόμη ένα βέλος ως το τέλος των 13).
Ερευνητής: Πόσα βρήκες;
Μαθητής: 13/20.
Ερευνητής: Τα 5/20 (δείχνει το διάστημα από τα 8/20 ως τα 13/20) σε ποια από τις αριθμητικές γραμμές υπάρχει; Στην πρώτη ή τη δεύτερη;
Μαθητής: Στην πρώτη, είναι το ¼.
Ερευνητής: Τα 8/20;

Μαθητής: Στη δεύτερη, είναι τα 2/5, είναι ο ίδιος.
Ερευνητής: Πώς είναι δυνατό τα 2 κομμάτια να είναι τα ίδια με τα 8;
Μαθητής: Είναι τα ίδια...διότι είναι 2 πολύ μεγάλα...ενώ τα 8 είναι πολλά αλλά είναι μικρά-μικρά.
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις ένα πρόβλημα με την εξίσωση;
Μαθητής: Είχα μια σοκολάτα, έφαγα πρώτα το ¼ και μετά τα 2/5. Πόση σοκολάτα έφαγα;

4. Εξίσωση ---------> αριθμητική γραμμή (αριθμημένη ως το 1)

Ερευνητής: Σου δίνω αυτή την εξίσωση (3/8+1/3). Μπορείς να μου την αναπαραστήσεις στις αριθμητικές γραμμές;
Μαθητής: Πρώτα θα κάνω τα 3/8 και θα μοιράσω τη γραμμή μοιράσω σε όγδοα (κατασκευάζει το διάστημα από το 0 ως το 1 και το χωρίζει σε όγδοα και φέρει βέλος από το 0 ως το τέλος των πρώτων τριών διαστημάτων).
Ερευνητής: Στη δεύτερη αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Θα κάνω το 1/3 (κατασκευάζει το διάστημα από το 0 ως το 1 και το χωρίζει σε τρίτα και φέρει βέλος από το 0 ως το τέλος του πρώτου διαστήματος).
Ερευνητής: Για να τα βάλεις μαζί τι θα κάνεις;
Μαθητής: Θα βάλω το 8 και το 3 μαζί (να προσθέσει τους παρονομαστές)
Ερευνητής: Τι αποτέλεσμα θα πάρεις;
Μαθητής: 3/8 και 1/3 είναι ίσο με 4/11
Ερευνητής: Κοίταξε τις αριθμητικές γραμμές. Πώς είναι χωρισμένη η πρώτη;
Μαθητής: Σε όγδοα.
Ερευνητής: Η δεύτερη;
Μαθητής: Σε τρίτα.
Ερευνητής: Την τρίτη σε τι θα τη χωρίσεις;
Μαθητής: Σε εντέκατα.
Ερευνητής: Μάλιστα. Δείξε πώς θα βάλεις τους δύο αριθμούς και θα τους προσθέσεις στην τρίτη γραμμή με τα εντέκατα.
Μαθητής: (σκέφτεται για αρκετή ώρα). Δε γίνεται έτσι. Α ναι πρέπει να βρούμε τον ίδιο παρονομαστή. Να βρούμε τον αριθμό που πάει και το 3 και το 8.
Ερευνητής: Ποιος είναι;
Μαθητής: (σκέφτεται) Το 16...όχι. Το 24.
Ερευνητής: Άρα σε πόσα μέρη θα χωρίσεις την αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Σε 24 (κατασκευάζει το διάστημα από το 0 ως το 1 και το χωρίζει σε 24 ίσα μέρη).
Ερευνητής: Τώρα τι θα κάνεις;
Μαθητής: Θα κάνω τους πολλαπλασιασμούς.
Ερευνητής: Αν σου πω ότι ένας συμμαθητής σου δεν ήταν καλός στους πολλαπλασιασμούς και βρήκε ένα άλλο τρόπο να λύσει την εξίσωση βλέποντας τους αριθμούς στις δύο πρώτες αριθμητικές γραμμές, τι νομίζεις ότι έκανε;
Μαθητής: (δεν απαντά).
Ερευνητής: Κοίταξε την πρώτη αριθμητική γραμμή. Ο αριθμός που παριστάνει είναι σε όγδοα. Σε τι πρέπει να γίνει;
Μαθητής: Σε 24.
Ερευνητής: Ο αριθμός θα αλλάξει ή θα είναι και πάλι ο ίδιος;
Μαθητής: Θα είναι ίσος.
Ερευνητής: Άρα βλέποντας τον αριθμό στην πρώτη αριθμητική γραμμή σε τι μπορεί να σε βοηθήσει;

Μαθητής: Θα είναι ο ίδιος και εδώ (δείχνει στην τρίτη αριθμητική γραμμή).
Ερευνητής: Άρα τι μπορείς να κάνεις αμέσως;
Μαθητής: Να τον φέρω εδώ (στην τρίτη αριθμητική γραμμή).
Ερευνητής: Για να δούμε τι θα κάνεις.
Μαθητής: (συγκρίνει το διάστημα από το 0 ως τα 3/8 και κατασκευάζει ίσο διάστημα από το 0 ως το 9/24, φέροντας βέλος από το 0 ως το 9/24).
Ερευνητής: Άρα με πόσα εικοστά τέταρτα είναι ίσα τα 3/8;
Μαθητής: Με τα 9/24.
Ερευνητής: Τι μπορώ να κάνω για το δεύτερο αριθμό αν δεν είμαι καλός στους πολλαπλασιασμούς;
Μαθητής: Να τον φέρω και αυτόν (στην τρίτη αριθμητική γραμμή).
Ερευνητής: (συγκρίνει το διάστημα από το 0 ως το 1/3 και παρατηρεί ότι είναι ίσο με 8/24).
Μαθητής: Είναι 8/24.
Ερευνητής: Μπορείς να τα βάλεις μαζί;
Μαθητής: Ναι. (φέρει βέλος που να ξεκινά από τα 9/24 και να καταλήγει στα 17/24).
Ερευνητής: Σε ποιο αριθμό έφτασες;
Μαθητής: Στα 17/24 (αφού έχει μετρήσει).
Ερευνητής: Μπορείς να τα κάνεις και ομώνυμα για να δούμε αν συμφωνούμε;
Μαθητής: (κάνει τις πράξεις και καταλήγει στο ίδιο αποτέλεσμα, αφού δυσκολεύεται για αρκετή ώρα με τους πολλαπλασιασμούς).
Ερευνητής: Συμφωνούν τα αποτελέσματα ;
Μαθητής: Ναι, εδώ στις αριθμητικές γραμμές τα βρήκαμε.

5. Αριθμητική γραμμή (αριθμημένη ως το 2) ----------> εξίσωση, πρόβλημα

Ερευνητής: Εδώ σου δίνω ακριβώς την ίδια εξίσωση και ζητώ να μου τη δείξεις και πάλι με τη βοήθεια των αριθμητικών γραμμών. Πριν ξεκινήσουμε θα ήθελα να σε ρωτήσω γιατί κάθε φορά δείχνεις το 1/3 σε διαφορετική γραμμή από τα 3/8;
Μαθητής: Διότι είναι διαφορετικός ο παρονομαστής...δεν μπορούμε να τους βάλουμε και τους δύο πάνω στην ίδια γραμμή. (Χωρίζει το διάστημα 0 ως 1 σε όγδοα και φέρει βέλος από το 0 ως το 3/8).
Ερευνητής: Το διάστημα 1 ως 2;
Μαθητής: (το χωρίζει σε όγδοα).
Ερευνητής: Τι θα κάνεις στη δεύτερη αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: Το 1/3. (χωρίζει το διάστημα από 0 ως 1 και το διάστημα από 1 ως 2 σε τρίτα και φέρει βέλος από το 0 ως το 1/3).
Ερευνητής: Κάποιος συμμαθητής σου χώρισε στην πρώτη αριθμητική γραμμή το διάστημα από το 0 ως το 1 σε 4 ίσα μέρη και το διάστημα από το 1 ως το 2 σε άλλα 4 ίσα μέρη και είπε ότι το χώρισε σε όγδοα. Συμφωνείς;
Μαθητής: Όχι, γιατί χώρισε σε τέταρτα αντί σε όγδοα.
Ερευνητής: Τι θα κάνεις στην τρίτη αριθμητική γραμμή;
Μαθητής: (δεν απαντά).
Ερευνητής: Σε πόσα μέρη να τη χωρίσουμε;
Μαθητής: Να βρούμε τον ίδιο παρονομαστή ...να τη χωρίσουμε σε 24 (χωρίζει το διάστημα από 0 ως 1 και το διάστημα από 1 ως 2 σε εικοστά τέταρτα).
Ερευνητής: Τα 3/8 με πόσα εικοστά τέταρτα είναι ίσα;
Μαθητής: Με 9.

Ερευνητής: Το 1/3;
Μαθητής: Με 8.
Ερευνητής: Δείξε, λοιπόν, την εξίσωση στην αριθμητική γραμμή.
Μαθητής: (φέρει βέλος από το 0 ως τα 9/24 και μετά φέρει ακόμα ένα βέλος από τα 9/24 ως τα 17/24).
Ερευνητής: Πού έχεις φτάσει;
Μαθητής: Στα 17/24.
Ερευνητής: Μπορείς να μου πεις και ένα πρόβλημα για την εξίσωση αυτή;
Μαθητής: Είχα ένα μπουκάλι χυμό. Ήπια τα 3/8 και μετά το 1/3. Πόσο ήπια;
Ερευνητής: Σήμερα Αλέξανδρε εργαστήκαμε με αριθμητικές γραμμές. Νομίζεις ότι βοηθούν;
Μαθητής: Ναι.
Ερευνητής: Γιατί;
Μαθητής: Γιατί έβλεπα τα κομμάτια πάνω στην αριθμητική γραμμή και μετά ήξερα ότι δεν μπορούσαν να τα βάλω μαζί αν δεν ήταν ίσα.
Ερευνητής: Τι έπρεπε να κάνω στα κλάσματα για να τα βάλω μαζί;
Μαθητής: Να τα κάνω ομώνυμα.

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΑΠΟ ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ

Πείραμα Επικοινωνίας

Ισοδυναμία Κλασμάτων

Μαθητές με ψηλή επίδοση

Α' Φάση

Περιγραφή πομπού:

Πομπός: Κάνε δυο αριθμητικές γραμμές. Χώρισε τη μια σε τέταρτα και την άλλη σε δωδέκατα. Βρες ένα ισοδύναμο κλάσμα μεταξύ τους.

(Ο Δέκτης κατασκευάζει τις δυο αριθμητικές γραμμές και χωρίζει τα διαστήματα από το 0 ως το 1 σε τέταρτα και δωδέκατα αντίστοιχα, αλλά δεν ξέρει πως να προχωρήσει).

Ερευνητής: Ίσως θα πρέπει να τον βοηθήσεις περισσότερο.

Πομπός: Στην πρώτη πιάσε τα ¾. Άρα ποιο θα είναι το ισοδύναμο στην άλλη γραμμή;

Δέκτης: (Συγκρίνει τις δύο γραμμές) Τα 9/12.

Πομπός: Τι έδειξες με τις αριθμητικές γραμμές;

Δέκτης: Ότι τα ¾ είναι ισοδύναμα με τα 9/12.

Β' Φάση

Περιγραφή Ερευνητή:

Ερευνητής: Θα σου περιγράψω μια διαδικασία η οποία θα σε βοηθήσει να φτάσεις σε μια σχέση. Θα προσπαθήσεις να κατασκευάσεις αυτό που θα σου περιγράψω.

Κατασκεύασε μια ευθεία γραμμή. Πρόσεξε όπως βάλεις τα βέλη της ευθείας γραμμής δεξιά και αριστερά δείχνοντας έτσι ότι συνεχίζεται. Στην ευθεία αυτή θα φέρεις δύο κατακόρυφες γραμμές. Στη μια κατακόρυφη γραμμή θα γράψεις τον αριθμό 0 και στην άλλη τον αριθμό 1. Έτσι δημιουργούμε το διάστημα 0 ως 1 και η ευθεία μας γίνεται αριθμητική γραμμή. Τα δύο βέλη δεξιά και αριστερά μας δείχνουν ότι οι αριθμοί συνεχίζονται και είναι άπειροι. Στο διάστημα 0 ως 1 θα το χωρίσεις σε τέσσερα ίσα διαστήματα φέροντας τρεις κατακόρυφες γραμμές. Θα φέρεις βέλος από το 0 ως το τέλος του 3^{ου} διαστήματος, θα επιλέξεις δηλαδή τον αριθμό ¾.

Θα κατασκευάσεις ακόμη μια ευθεία γραμμή. Πρόσεξε όπως βάλεις τα βέλη της ευθείας γραμμής δεξιά και αριστερά δείχνοντας έτσι ότι συνεχίζεται. Στην ευθεία αυτή θα φέρεις δύο κατακόρυφες γραμμές. Στη μια κατακόρυφη γραμμή θα γράψεις τον αριθμό 0 και στην άλλη τον αριθμό 1. Έτσι δημιουργούμε το διάστημα 0 ως 1 και η ευθεία μας γίνεται αριθμητική γραμμή. Τα δύο βέλη δεξιά και αριστερά μας δείχνουν ότι οι αριθμοί συνεχίζονται και είναι άπειροι. Στο διάστημα 0 ως 1 θα το χωρίσεις σε τέσσερα ίσα διαστήματα φέροντας τρεις κατακόρυφες γραμμές. Το διάστημα 0 ως 1 θα το χωρίσεις σε 12 ίσα διαστήματα φέροντας 13 κατακόρυφες γραμμές ανάμεσα στο 0 και το 1. Θα φέρεις βέλος από το 0 ως το τέλος του 9^{ου} διαστήματος, θα επιλέξεις δηλαδή τον αριθμό 9/12.

Από τις δυο αριθμητικές γραμμές φαίνεται ότι η απόσταση του βέλους από το μηδέν είναι ακριβώς η ίδια. Φαίνεται ότι ο αριθμός ¾ ισούται με τον αριθμό 9/12. Οι δυο αριθμητικές γραμμές μας δίνουν τη σχέση ¾=9/12.

Περιγραφή πομπού:

Πομπός: Κάνε μια αριθμητική γραμμή και χώρισέ τη σε τέσσερα κομμάτια. Να κάνεις 5 γραμμές. Από αυτά πάρε τα 3 κομμάτια. Τα 3 διαστήματα να πάρεις.

(Ο Κωνσαντίνος κάνει 5 διαστήματα).

Πομπός: Ξανακάνε την αριθμητική γραμμή. Χώρισέ τη σε τέσσερα ίσα κομμάτια. Από αυτά ...Αρίθμησέ τα.

(Ο Κωνσταντίνος αριθμεί με ακέραιους 0, 1, 2, 3...)

Πομπός: Όχι έτσι. Σβήσε τους αριθμούς. Στην πρώτη γραμμή το 0 και στην δεύτερη το 1. Όχι σβήσε το. Εννοώ στην τελευταία το 1. Από αυτά πάρε τα 3 κομμάτια. Κάνε ακόμη μια αριθμητική γραμμή και χώρισέ τη σε 12 κομμάτια, δηλαδή κάνε 13 γραμμές. Αρίθμησε όπως την προηγούμενη.

Δέκτης: Από 0 ως 1;

Πομπός: Ναι. Και πάρε τα 9. Ποια είναι η σχέση τους;

Δέκτης: Αυτά τα δύο; (δείχνει τις αποστάσεις του ¾ και του 9/12 από το 0 αντίστοιχα).

Πομπός: Ναι.

Δέκτης: Είναι ισοδύναμα. (γράφει τη σχέση ¾=9/12). Φαίνεται εδώ στις γραμμές.

Πείραμα Επικοινωνίας

Ισοδυναμία Κλασμάτων

Μαθητές με μέτρια επίδοση

Α' Φάση

Περιγραφή πομπού:

Πομπός: Θα κάνουμε μια αριθμητική γραμμή και θα τη χωρίσουμε σε τέταρτα. Να πάρουμε τα ¾. Να κάνουμε ακόμη μία αριθμητική γραμμή και να τη χωρίσουμε σε δωδέκατα. Να πάρουμε τα 9/12. Βλέπεις καμιά σχέση σε αυτά τα δύο; Φαίνεται άμα κοιτάξεις τις γραμμές.

Δέκτης: Είναι τα ίδια.

Πομπός: Γράψε ότι είναι ίσα.

(Ο δέκτης γράφει ¾=9/12).

Β' Φάση

Περιγραφή Ερευνητή:

Ερευνητής: Πομπός θα σου περιγράψω μια διαδικασία η οποία θα σε βοηθήσει να φτάσεις σε μια σχέση. Θα προσπαθήσεις να κατασκευάσεις αυτό που θα σου περιγράψω.

Κατασκεύασε μια ευθεία γραμμή. Πρόσεξε όπως βάλεις τα βέλη της ευθείας γραμμής δεξιά και αριστερά δείχνοντας έτσι ότι συνεχίζεται. Στην ευθεία αυτή θα φέρεις δύο κατακόρυφες γραμμές. Στη μια κατακόρυφη γραμμή θα γράψεις τον αριθμό 0 και στην άλλη τον αριθμό 1. Έτσι δημιουργούμε το διάστημα 0 ως 1 και η ευθεία μας γίνεται αριθμητική γραμμή. Τα δύο βέλη δεξιά και αριστερά μας δείχνουν ότι οι αριθμοί συνεχίζονται και είναι άπειροι. Στο διάστημα 0 ως 1 θα το χωρίσεις σε τέσσερα ίσα διαστήματα φέροντας τρεις κατακόρυφες γραμμές. Θα φέρεις βέλος από το 0 ως το τέλος του 3ου διαστήματος, θα επιλέξεις δηλαδή τον αριθμό ¾.

Θα κατασκευάσεις ακόμη μια ευθεία γραμμή. Πρόσεξε όπως βάλεις τα βέλη της ευθείας γραμμής δεξιά και αριστερά δείχνοντας έτσι ότι συνεχίζεται. Στην ευθεία αυτή θα φέρεις δύο κατακόρυφες γραμμές. Στη μια κατακόρυφη γραμμή θα γράψεις τον αριθμό 0 και στην άλλη τον αριθμό 1. Έτσι δημιουργούμε το διάστημα 0 ως 1 και η ευθεία μας γίνεται αριθμητική γραμμή. Τα δύο βέλη δεξιά και αριστερά μας δείχνουν ότι οι αριθμοί συνεχίζονται και είναι άπειροι. Στο διάστημα 0 ως 1 θα το χωρίσεις σε τέσσερα ίσα διαστήματα φέροντας τρεις κατακόρυφες γραμμές. Το διάστημα 0 ως 1 θα το χωρίσεις σε 12 ίσα διαστήματα φέροντας 13 κατακόρυφες γραμμές ανάμεσα στο 0 και το 1. Θα φέρεις βέλος από το 0 ως το τέλος του 9ου διαστήματος, θα επιλέξεις δηλαδή τον αριθμό 9/12.

Από τις δυο αριθμητικές γραμμές φαίνεται ότι η απόσταση του βέλους από το μηδέν είναι ακριβώς η ίδια. Φαίνεται ότι ο αριθμός ¾ ισούται με τον αριθμό 9/12. Οι δυο αριθμητικές γραμμές μας δίνουν τη σχέση ¾=9/12.

Περιγραφή πομπού:

Πομπός: Φτιάξε μια αριθμητική γραμμή. Τράβηξε πέντε κατακόρυφες γραμμές και βρες μου τα ¾.

Μετά φτιάξε ακόμη μια αριθμητική γραμμή. Κάνε 13 κατακόρυφες γραμμές. Στην πρώτη βάλε 0 και στην τελευταία 1 (το διάστημα από 0 μέχρι το 1 δεν είναι ίσο με το διάστημα 0 ως 1 της πρώτης αριθμητικής γραμμής). Βρες μου τα 9/12.

Βλέπουμε ότι τα ¾ είναι ισοδύναμα με τα 9/12...γιατί οι δυο αριθμητικές γραμμές βλέπουμε ότι η απόσταση τους είναι η ίδια.

Ερευνητής: Ποια απόσταση εννοείς;

Πομπός: Τα βελάκια.

Δέκτης: Πρέπει να είναι ίσα;

Ερευνητής: Βλέποντας τα βελάκια δεν φαίνεται να είναι ίσα.

Πομπός: Θα πρέπει να το ξανακάνουμε... Κάνε μια αριθμητική γραμμή και βρες μου τα ¾. Κάνε άλλη μια αριθμητική γραμμή και τράβα 13 κατακόρυφες γραμμές...το 0 να είναι κάτω από το 0 και το 1 κάτω από το 1 για να είναι τα ίδια. Τώρα βρες μου τα 9/12. Τι βλέπεις σε αυτά τα δύο;

Δέκτης: Ότι είναι ισοδύναμα.

Πομπός: Γράψε αυτά που βρήκαμε. Ότι ¾=9/12.

Πείραμα Επικοινωνίας

Ισοδυναμία κλασμάτων

Μαθητές με χαμηλή επίδοση

Α’ Φάση

Περιγραφή πομπού

Πομπός: Ξέρεις να κάνεις αριθμητική γραμμή;

Δέκτης: Εννοείς..την ίσια..Ναι

Πομπός: Κάνε μια αριθμητική γραμμή και βάλε δυο βελάκια στα άκρα της.

(Ο δέκτης βάζει δύο διαχωρισμούς στα άκρα της)

Πομπός: Βελάκια..

Δέκτης: Α, ναι, ξέρω

Πομπός: Χώρισέ τη με 13 γραμμές ίσα

Δέκτης: Να κάνω 13 γραμμές;

Πομπός: Ναι, αλλά να είναι σε ίσα κομμάτια

(Ο δέκτης κάνει τις 13 κατακόρυφες γραμμές).

Πομπός: Τώρα με μια καμπυλωτή γραμμή να πιάσεις τα 9 μέρη από τη γραμμή.

Δέκτης: Από τη γραμμή; …Τι εννοείς;

Πομπός: Από όλες τις γραμμούλες να πιάσεις τις 9 γραμμούλες. Με μια καμπυλωτή γραμμή να πιάσεις τις 9 γραμμές.

Δέκτης: Πώς…(δεν καταλαβαίνει πώς θα κάνει την καμπυλωτή γραμμή).

Πομπός: Από το 0 μέχρι το 9 κάνε μια καμπυλωτή γραμμή.

Δέκτης: Από το 0…μέχρι εδώ ..(μέχρι το $8^{ο}$ διάστημα)

Πομπός: Μετά να κάνεις άλλη αριθμητική γραμμή και να τη χωρίσεις σε 4 ίσα μέρη.

(Ο δέκτης προσπαθεί να τη χωρίσει, αλλά και πάλι τα μέρη είναι άνισα).

Πομπός: 1, 2, 3, 4 ίσα μέρη… μπράβο.

Δέκτης: Ναι

Πομπός: Τώρα η καμπυλωτή γραμμή ...τώρα που το χωρίσαμε σε τέσσερα να πιάσεις τα τρία.

Δέκτης: Ναι (Επιλέγει τα πρώτα τρία διαστήματα).

Πομπός: Άρα δείξαμε ότι 9/12=3/4. Γράψε το.

Δέκτης: Γράφει την ισοδυναμία.

<u>Φάση Β'</u>

Περιγραφή Ερευνητή:

Ερευνητής: Πομπός, θα σου περιγράψω μια διαδικασία η οποία θα σε βοηθήσει να φτάσεις σε μια σχέση. Θα προσπαθήσεις να κατασκευάσεις αυτό που θα σου περιγράψω.

Κατασκεύασε μια ευθεία γραμμή. Πρόσεξε όπως βάλεις τα βέλη της ευθείας γραμμής δεξιά και αριστερά δείχνοντας έτσι ότι συνεχίζεται. Στην ευθεία αυτή θα φέρεις δύο κατακόρυφες γραμμές. Στη μια κατακόρυφη γραμμή θα γράψεις τον αριθμό 0 και στην άλλη τον αριθμό 1. Έτσι δημιουργούμε το διάστημα 0 ως 1 και η ευθεία μας γίνεται αριθμητική γραμμή. Τα δύο βέλη δεξιά και αριστερά μας δείχνουν ότι οι αριθμοί συνεχίζονται και είναι άπειροι. Στο διάστημα 0 ως 1 θα το χωρίσεις σε τέσσερα ίσα διαστήματα φέροντας τρεις κατακόρυφες γραμμές. Θα φέρεις βέλος από το 0 ως το τέλος του $3^{ου}$ διαστήματος, θα επιλέξεις δηλαδή τον αριθμό ¾.

Θα κατασκευάσεις ακόμη μια ευθεία γραμμή. Πρόσεξε όπως βάλεις τα βέλη της ευθείας γραμμής δεξιά και αριστερά δείχνοντας έτσι ότι συνεχίζεται. Στην ευθεία αυτή θα φέρεις δύο κατακόρυφες γραμμές. Στη μια κατακόρυφη γραμμή θα γράψεις τον αριθμό 0 και στην άλλη τον αριθμό 1. Έτσι δημιουργούμε το διάστημα 0 ως 1 και η ευθεία μας γίνεται αριθμητική γραμμή. Τα δύο βέλη δεξιά και αριστερά μας δείχνουν ότι οι αριθμοί συνεχίζονται και είναι άπειροι. Στο διάστημα 0 ως 1 θα το χωρίσεις σε τέσσερα ίσα διαστήματα φέροντας τρεις κατακόρυφες γραμμές. Το διάστημα 0 ως 1 θα το χωρίσεις σε 12 ίσα διαστήματα φέροντας 13 κατακόρυφες γραμμές ανάμεσα στο 0 και το 1. Θα φέρεις βέλος από το 0 ως το τέλος του $9^{ου}$ διαστήματος, θα επιλέξεις δηλαδή τον αριθμό 9/12.

Από τις δυο αριθμητικές γραμμές φαίνεται ότι η απόσταση του βέλους από το μηδέν είναι ακριβώς η ίδια. Φαίνεται ότι ο αριθμός ¾ ισούται με τον αριθμό 9/12. Οι δυο αριθμητικές γραμμές μας δίνουν τη σχέση ¾=9/12.

Περιγραφή πομπού:

Πομπός: Ξέρεις να κάνεις αριθμητική γραμμή;

Δέκτης: Ναι

Πομπός: Κάνε μια αριθμητική γραμμή.

Πομπός: Χώρισέ τη σε 12 κομμάτια ίσα. Κάμε 13 γραμμές ίσα

Δέκτης: Να κάνω 13 γραμμές;

‘Αννα: Ναι, αλλά να είναι ίσα τα κομμάτια

Πομπός: Τώρα με μια καμπυλωτή γραμμή να πιάσεις τα 9 πρώτα μέρη.

Δέκτης: Από το 0 μέχρι τον αριθμό 9; (μέχρι το $8^{ο}$ διάστημα)

Πομπός: Ναι και τώρα κάνε μια δεύτερη αριθμητική γραμμή και χώρισε την αριθμητική γραμμή σε 4 ίσα μέρη.

Πομπός: Από τα 4 ίσα μέρη να πιάσεις τα τρία.

Πομπός: Με την καμπυλωτή γραμμή πιάσε τα τρία μέρη. Τι δείχνουν οι δύο αριθμητικές γραμμές;

Δέκτης: Τι εννοείς;

Πομπός: Κοίταξε τι πιάσαμε και στη μια και στην άλλη. Είναι οι ίδιες οι γραμμές που τραβήξαμε.

Δέκτης: Ναι...έχουν το ίδιο μάκρος.

Πομπός: Άρα δείξαμε ότι ¾=9/12.

<u>Πείραμα Επικοινωνίας</u>

<u>Πρόσθεση Ομώνυμων Κλασμάτων</u>

<u>Μαθητές με ψηλή επίδοση</u>

<u>Α’ Φάση</u>

Περιγραφή πομπού:

Πομπός: Κάνε μια αριθμητική γραμμή, να τη χωρίσεις σε 15 κομμάτια. Να πάρεις τα 8 από τα 15. Μετά να πάρεις ακόμη 5. Τι σου δείχνει αυτή η αριθμητική γραμμή;

Δέκτης: Πρόσθεση.

Πομπός: Ποιους προσθέτουμε;

Δέκτης: 8 + 5.

Πομπός: Όχι...είναι από το 15..

Δέκτης: Δεν έχει σχέση...είναι 8 + 5

Πομπός: Ναι. Να βάλεις 0 στην πρώτη γραμμή και 1 στην τελευταία άρα αλλάζει.

Δέκτης: Εννοείς 8/15 + 5/15 τότε. Έχουμε 13/15.

<u>Β’ Φάση</u>

Περιγραφή Ερευνητή

Ερευνητής: Πομπός θα σου περιγράψω μια διαδικασία η οποία θα σε βοηθήσει να φτάσεις σε μια σχέση. Θα προσπαθήσεις να κατασκευάσεις αυτό που θα σου περιγράψω.

Κατασκεύασε μια ευθεία γραμμή. Πρόσεξε όπως βάλεις τα βέλη της ευθείας γραμμής δεξιά και αριστερά δείχνοντας έτσι ότι συνεχίζεται. Στην ευθεία αυτή θα φέρεις δύο κατακόρυφες γραμμές. Στη μια κατακόρυφη γραμμή θα γράψεις τον αριθμό 0 και στην άλλη τον αριθμό 1. Έτσι δημιουργούμε το διάστημα 0 ως 1 και η ευθεία μας γίνεται αριθμητική γραμμή. Τα δύο βέλη δεξιά και αριστερά μας δείχνουν ότι οι αριθμοί συνεχίζονται και είναι άπειροι. Θέλω να φέρεις 14 κατακόρυφες γραμμές στο διάστημα 0 ως 1 για να δημιουργηθούν 15 νέα ίσα διαστήματα. Να φέρεις βέλος από το 0 και να προχωρήσεις 8 διαστήματα φτάνοντας στον αριθμό 8/15. Μετά θα φέρεις δεύτερο βέλος που να ξεκινά από το 8/15 και να προχωρήσει ακόμη 5/15 και να φτάσεις στο τέλος του 13ου διαστήματος, δηλαδή στον αριθμό 13/15. Η εξίσωση που μας δείχνει η αριθμητική γραμμή είναι 8/15+5/15=13/15.

Περιγραφή πομπού:

Πομπός: Κάνε μια αριθμητική γραμμή. Κάμε 16 γραμμές.

Δέκτης: Να τη χωρίσω σε δέκατα έκτα;

Πομπός: Ναι..όχι..όχι..σε δέκατα πέμπτα. Στην πρώτη γραμμή βάλε τον αριθμό 0 και στην τελευταία γραμμή τον αριθμό 1. Προχώρησε στα 8 κουτάκια. Μετά βάλε ακόμη 5. Τι πράξη βγαίνει;

Δέκτης: 8...(σκέφτεται για αρκετή ώρα).

Πομπός: Τα κομμάτια να δεις. Δες τα κομμάτια, αφού τα έκανες.

Δέκτης: 8/15 + 5/15 = 13/15.

Πομπός: Μπράβο. Γράψε την εξίσωση.

Πείραμα Επικοινωνίας

Πρόσθεση Ομώνυμων Κλασμάτων

Μαθητές με μέτρια επίδοση

Α' Φάση

Περιγραφή πομπού:

Πομπός: Κάνε μια αριθμητική γραμμή, από το 0 ως το 1. Κάνε 15 κομμάτια ανάμεσα στο 0 και το 1. Χρωμάτισε τα 8 κομμάτια από τα 15. Ύστερα χρωμάτισε ακόμη 5. Κατάλαβες τι προσπαθούμε να δείξουμε;

Δέκτης: Πρόσθεση

Πομπός: Ναι. Έχουμε στην αρχή 8/15 και μετά;

Δέκτης: Βάζουμε ακόμη 5/15 και βρίσκουμε ... (μετρά τα διαστήματα) 13/15.

Β' Φάση

Περιγραφή Ερευνητή: θα σου περιγράψω μια διαδικασία η οποία θα σε βοηθήσει να φτάσεις σε μια σχέση. Θα προσπαθήσεις να κατασκευάσεις αυτό που θα σου περιγράψω.

Κατασκεύασε μια ευθεία γραμμή. Πρόσεξε όπως βάλεις τα βέλη της ευθείας γραμμής δεξιά και αριστερά δείχνοντας έτσι ότι συνεχίζεται. Στην ευθεία αυτή θα φέρεις δύο κατακόρυφες γραμμές. Στη μια κατακόρυφη γραμμή θα γράψεις τον αριθμό 0 και στην άλλη τον αριθμό 1. Έτσι δημιουργούμε το διάστημα 0 ως 1 και η ευθεία μας γίνεται αριθμητική γραμμή. Τα δύο βέλη δεξιά και αριστερά μας δείχνουν ότι οι αριθμοί συνεχίζονται και είναι άπειροι. Θέλω να φέρεις 14 κατακόρυφες γραμμές στο διάστημα 0 ως 1 για να δημιουργηθούν 15 νέα ίσα διαστήματα. Να φέρεις βέλος από το 0 και να προχωρήσεις 8 διαστήματα φτάνοντας στον αριθμό 8/15. Μετά θα φέρεις δεύτερο βέλος που να ξεκινά από το 8/15 και να προχωρήσει ακόμη 5/15 και να φτάσεις στο τέλος του 13ου διαστήματος, δηλαδή στον αριθμό 13/15. Η εξίσωση που μας δείχνει η αριθμητική γραμμή είναι 8/15+5/15=13/15.

Περιγραφή πομπού:

Πομπός: Κάνε μια αριθμητική γραμμή, από το 0 ως το 1. Κάνε 15 κομμάτια ανάμεσα στο 0 και το 1. Πρόσεξε να είναι ίσα το ένα με το άλλο. Χρωμάτισε τα 8 κομμάτια από τα 15 και μετά προχώρα και χρωμάτισε ακόμα 5. Προσπαθώ να σου δείξω μια πράξη.

Δέκτης: Κατάλαβα, είναι πρόσθεση αφού προχωράς.

Πομπός: Ναι. Στην αρχή έβαλα 8/15 και μετά;

Δέκτης: Και 6/15 (Μετρά τους κατακόρυφους διαχωρισμούς.

Πομπός: Όχι έτσι. Μέτρα τις μεγάλες γραμμές όχι τις μικρές.

Δέκτης: Εντάξει. Και 5/15 και βρίσκουμε 13/15.

Πείραμα Επικοινωνίας

Πρόσθεση Ομώνυμων Κλασμάτων

Μαθητές με χαμηλή επίδοση

Α' Φάση

Περιγραφή Πομπού: Να κάμεις μια αριθμητική γραμμή. Να βάλεις τους αριθμούς. Το 0 και το 1. Να το χωρίσεις σε 15. 8 κομμάτια.

Δέκτης: 8 κομμάτια; Να πιάσω 8 κομμάτια;

Πομπός: Ναι. Και μετά ακόμη 5. Η μαθηματική εξίσωση είναι 8/15 + 5/15=13/15.

Β' Φάση

Περιγραφή Ερευνητή: Θα σου περιγράψω μια διαδικασία η οποία θα σε βοηθήσει να φτάσεις σε μια σχέση. Θα προσπαθήσεις να κατασκευάσεις αυτό που θα σου περιγράψω.

Κατασκεύασε μια ευθεία γραμμή. Πρόσεξε όπως βάλεις τα βέλη της ευθείας γραμμής δεξιά και αριστερά δείχνοντας έτσι ότι συνεχίζεται. Στην ευθεία αυτή θα φέρεις δύο κατακόρυφες γραμμές. Στη μια κατακόρυφη γραμμή θα γράψεις τον αριθμό 0 και στην άλλη τον αριθμό 1. Έτσι δημιουργούμε το διάστημα 0 ως 1 και η ευθεία μας γίνεται αριθμητική γραμμή. Τα δύο βέλη δεξιά και αριστερά μας δείχνουν ότι οι αριθμοί συνεχίζονται και είναι άπειροι. Θέλω να φέρεις 14 κατακόρυφες γραμμές στο διάστημα 0 ως 1 για να δημιουργηθούν 15 νέα ίσα διαστήματα. Να φέρεις βέλος από το 0 και να προχωρήσεις 8 διαστήματα φτάνοντας στον αριθμό 8/15. Μετά θα φέρεις δεύτερο βέλος που να ξεκινά από το 8/15 και να προχωρήσει ακόμη 5/15 και να φτάσεις στο τέλος του 13ου διαστήματος, δηλαδή στον αριθμό 13/15. Η εξίσωση που μας δείχνει η αριθμητική γραμμή είναι 8/15+5/15=13/15.

Περιγραφή Πομπού:

Πομπός: Κάνε μια αριθμητική γραμμή.

Δέκτης: Πώς;

Πομπός: Με ρίγα.

(Ο δέκτης κατασκευάζει μια αριθμητική γραμμή και τοποθετεί βέλη στο δεξί και αριστερό άκρο της).

Πομπός: Χώρισέ τη σε 15 κομμάτια.

Δέκτης: Είναι πολύ μικρή η γραμμή που έκανα..(τη σβήνει και κατασκευάζει άλλη με μεγαλύτερο μήκος και κατασκευάζει 15 ίσα διαστήματα).

Πομπός: Τώρα να βάλεις τους αριθμούς 0 και 1.

(Ο δέκτης τοποθετεί το 0 στη δεύτερη κατακόρυφη γραμμή τον αριθμό 1).

Πομπός: Όχι εκεί το 1. Στην τελευταία γραμμή. Διόρθωσέ το.

(Ο δέκτης το διορθώνει).

Πομπός: Τώρα πιάσε τα 8/15. Ξεκίνα από το 0. Εδώ (δείχνει το 0). Αρχίζω από το 0.

(Ο δέκτης βέλος το οποίο ξεκινά από το 0 και καταλήγει στα 7/15).

Πομπός: Όχι 7...πιάσε τα 8/15.

(Η Δέκτηςφέρει βέλος το οποίο ξεκινά από το 0 και καταλήγει στα 8/15).

Πομπός: Εντάξει. Τώρα πιάσε ακόμη 5/15.

(Ο δέκτης κατασκευάζει βέλος το οποίο ξεκινά από τα 8/15 και προχωρεί προς τα αριστερά).

Πομπός: Σβήσε το. Από εδώ, μπροστά να πας. (δείχνει προς τα δεξιά).

(Ο δέκτης μετρά ακόμη 4 διαστήματα προς τα δεξιά, διότι μετρά 5 κατακόρυφες διαχωριστικές γραμμές).

Πομπός: Γράψε τη μαθηματική εξίσωση : 8/15 + 5/15=13/15

Πείραμα Επικοινωνίας

Πρόσθεση Ετερώνυμων Κλασμάτων

Μαθητές με ψηλή επίδοση

Α' Φάση:

Περιγραφή Πομπού:

Πομπός: Θα φτιάξεις μια αριθμητική γραμμή από το 0 μέχρι το 1 και θα τη χωρίσεις σε δύο μέρη. Τότε θα πάρεις το ένα από αυτά τα δύο. Μετά θα φτιάξεις ακόμη μια αριθμητική γραμμή και τη χωρίσεις σε τρία ίσα μέρη. Από εκεί θα πάρεις το 1/3 . Να φτιάξεις ακόμη μια αριθμητική γραμμή και να βρεις το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο του 2 και του 3. Ποιο είναι;

Δέκτης: Το 6.

Πομπός: Την τρίτη αριθμητική γραμμή να τη χωρίσεις σε έκτα. Να πάρεις το ½ και το 1/3.

(Ο δέκτης επιλέγει τα 3/6 και μετά τα 2/6).

Πομπός: Έχεις δείξει πόσα πήραμε συνολικά.

(Ο δέκτης γράφει την εξίσωση: 1/2 + 1/3 = 3/6 + 2/6=5/6).

<u>Β’ Φάση</u>

Περιγραφή Ερευνητή:

Ερευνητής: Θα σου περιγράψω μια διαδικασία η οποία θα σε βοηθήσει να φτάσεις σε μια σχέση. Θα προσπαθήσεις να κατασκευάσεις αυτό που θα σου περιγράψω.

Κατασκεύασε μια ευθεία γραμμή. Πρόσεξε όπως βάλεις τα βέλη της ευθείας γραμμής δεξιά και αριστερά δείχνοντας έτσι ότι συνεχίζεται. Στην ευθεία αυτή θα φέρεις δύο κατακόρυφες γραμμές. Στη μια κατακόρυφη γραμμή θα γράψεις τον αριθμό 0 και στην άλλη τον αριθμό 1. Έτσι δημιουργούμε το διάστημα 0 ως 1 και η ευθεία μας γίνεται αριθμητική γραμμή. Τα δύο βέλη δεξιά και αριστερά μας δείχνουν ότι οι αριθμοί συνεχίζονται και είναι άπειροι. Στο μέσο του διαστήματος 0 ως 1 φέρω ακόμη μια κατακόρυφη γραμμή χωρίζοντας το διάστημα 0 ως 1 σε δύο νέα διαστήματα ίσα μεταξύ τους. Με βέλος που θα ξεκινά από το 0 θα προχωρήσεις και θα φτάσεις ως το ½.

Επίσης, θέλω να κατασκευάσεις ακόμη μια ευθεία γραμμή και πάλι θα προσέξεις όπως τοποθετήσεις τα βέλη δεξιά και αριστερά δείχνοντας ότι η ευθεία δεν έχει αρχή ούτε τέλος. Στην ευθεία αυτή θα φέρεις δύο κατακόρυφες γραμμές. Στη μια κατακόρυφη γραμμή θα γράψεις τον αριθμό 0 και στην άλλη τον αριθμό 1. Έτσι δημιουργούμε το διάστημα 0 ως 1 και η ευθεία μας γίνεται αριθμητική γραμμή. Τα δύο βέλη δεξιά και αριστερά μας δείχνουν ότι οι αριθμοί συνεχίζονται και είναι άπειροι. Στο διάστημα 0 ως 1 φέρω ακόμη δύο κατακόρυφες γραμμές χωρίζοντας το διάστημα 0 ως 1 σε τρία νέα διαστήματα ίσα μεταξύ τους. Με βέλος που να ξεκινά από το 0 θα προχωρήσεις και θα φτάσεις ως το 1/3.

Επίσης, θέλω να κατασκευάσεις ακόμη μια ευθεία γραμμή και πάλι θα προσέξεις όπως τοποθετήσεις τα βέλη δεξιά και αριστερά δείχνοντας ότι η ευθεία δεν έχει αρχή ούτε τέλος. Στην ευθεία αυτή θα φέρεις δύο κατακόρυφες γραμμές. Στη μια κατακόρυφη γραμμή θα γράψεις τον αριθμό 0 και στην άλλη τον αριθμό 1. Έτσι δημιουργούμε το διάστημα 0 ως 1 και η ευθεία μας γίνεται αριθμητική γραμμή. Τα δύο βέλη δεξιά και αριστερά μας δείχνουν ότι οι αριθμοί συνεχίζονται και είναι άπειροι. Στο διάστημα 0 ως 1 φέρω ακόμη δύο κατακόρυφες γραμμές χωρίζοντας το διάστημα 0 ως 1 σε τρία νέα διαστήματα ίσα μεταξύ τους. Με βέλος που να ξεκινά από το 0 θα προχωρήσεις και θα φτάσεις ως το 1/3.

Επίσης, θέλω να κατασκευάσεις μια τρίτη ευθεία γραμμή όπου και πάλι θα προσέξεις όπως τοποθετήσεις τα βέλη δεξιά και αριστερά δείχνοντας ότι η ευθεία δεν έχει αρχή ούτε τέλος. Στην ευθεία αυτή θα φέρεις δύο κατακόρυφες γραμμές. Στη μια κατακόρυφη γραμμή θα γράψεις τον αριθμό 0 και στην άλλη τον αριθμό 1. Έτσι δημιουργούμε το διάστημα 0 ως μ1 και η ευθεία μας γίνεται αριθμητική γραμμή. Τα δύο βέλη δεξιά και αριστερά μας δείχνουν ότι οι αριθμοί συνεχίζονται και είναι άπειροι.

Θέλω να προσθέσω τους δύο αριθμούς που έχω δείξει στις δύο προηγούμενες αριθμητικές γραμμές, αλλά υπάρχει δυσκολία, αφού τα δύο κλάσματα είναι ετερώνυμα. Παρατηρώντας τα διαστήματα στην πρώτη και στη δεύτερη αριθμητική γραμμή παρατηρώ ότι έχω στην πρώτη περίπτωση δεύτερα και στην δεύτερη περίπτωση τρίτα. Δεν μπορώ να χωρίσω την καινούρια αριθμητική γραμμή σε δεύτερα και ταυτόχρονα σε τρίτα Πρέπει τα κομμάτια στα οποία θα χωριστεί να είναι τα ίδια. Θα προσπαθήσω να βρω δύο κλάσματα ισοδύναμα με τα προηγούμενα που να έχουν τον ίδιο παρονομαστή για να μπορέσω να κάνω τα ίδια διαστήματα και για τους δύο αριθμούς. Έτσι θα τη χωρίσω αφού βρω το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των δύο παρονομαστών. Είναι το 6.

Στο διάστημα 0 ως 1 φέρω ακόμη πέντε κατακόρυφες γραμμές χωρίζοντας το διάστημα 0 ως 1 σε έξι νέα διαστήματα ίσα μεταξύ τους. Παρατηρώντας την πρώτη αριθμητική γραμμή βλέπω ότι το ½ είναι ίσο με τα 3/6. Με βέλος που να ξεκινά από το 0 θα προχωρήσεις και θα φτάσεις ως τα 3/6. Βλέποντας τη δεύτερη αριθμητική γραμμή παρατηρώ ότι το 1/3 είναι ίσο με τα 2/6. Έτσι στα 3/6 θα προσθέσω ακόμη 2/6. Με βέλος που να ξεκινά από τα 3/6 προχωρώ ακόμη δύο διαστήματα, ακόμη 2/6 και φτάνω στα 5/6. Η σχέση που βρίσκω είναι ότι ½+1/3=3/6+2/6=5/6.

Περιγραφή Πομπού

Πομπός: Φτιάξε μια αριθμητική γραμμή, με τα τόξα της και τράβηξε τρεις κατακόρυφες γραμμές. Στην πρώτη γραμμή γράψε τον αριθμό 0 και στην τρίτη γραμμή το 1. Χώρισέ τα σε δύο ίσα κομμάτια. Τράβηξε μια καμπύλη γραμμή και να δείξεις ότι θα το χωρίσεις σε δύο ίσα κομμάτια. Πιάσε το ένα.

Φτιάξε ακόμη μια αριθμητική γραμμή και τράβηξε τέσσερις γραμμές. Στην πρώτη γραμμή γράψε τον αριθμό 0 και στην τέταρτη το 1. Πιάσε το 1/3.

Τώρα βρίσκουμε ότι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο τους είναι το 6 και έτσι φτιάχνουμε ακόμη μια αριθμητική γραμμή. Τραβούμε 7 γραμμές. Στην πρώτη γράφουμε τον αριθμό 0 και στην έβδομη το 1. Πιάνουμε τα 3/6, που ξέρουμε ότι είναι το ½. Πιάνουμε και τα 2/6 όπου είναι το 1/3. Έτσι βρίσκουμε ... μάλλον γράφουμε ότι ½ + 1/3 =5/6.

(Ο δέκτης ακολουθεί τις οδηγίες του πομπού και κατασκευάζει τις δύο αριθμητικές γραμμές οι οποίες αναπαριστούν τα δύο ετερώνυμα κλάσματα, καθώς και την τρίτη αριθμητική γραμμή η οποία αναπαριστά τα ισοδύναμα, αλλά ομώνυμα κλάσματα).

Δέκτης: Ναι, έχεις δίκιο. Αν κοιτάξεις την τρίτη αριθμητική γραμμή έχει τα δύο κλάσματα και μπορείς να κάνεις την πρόσθεση.

Πείραμα Επικοινωνίας

Πρόσθεση Ετερώνυμων Κλασμάτων

Μαθητές με μέτρια επίδοση

Α’ Φάση

Περιγραφή πομπού:

Πομπός: Κάνουμε μια αριθμητική γραμμή και σε αυτή κάνουμε δύο κομμάτια. Πάρε το ένα κομμάτι. Κάνε άλλη μια αριθμητική γραμμή και χώρισέ τη σε τρία κομμάτια. Πάρε το ένα. Κάνε άλλη μια αριθμητική γραμμή και χώρισέ τη σε έξι. Πρώτα να πάρεις τα τρία κομμάτια και μετά τα δύο κομμάτια.

Ερευνητής: Τι προσπαθείς να της δείξεις Μαθητής;

Πομπός: Προσπαθώ να της δείξω πώς να κάνει την πράξη ½ +1/3.

Ερευνητής: Πώς θα τη βοηθήσεις να το δείξει;

Δέκτης: Μου είπε ότι έχουμε πρώτα το ½ και μετά το 1/3. Πρέπει να τα βάλουμε μαζί στην ίδια γραμμή που χωρίσαμε σε έκτα.

Ερευνητής: Κατάλαβες γιατί σου είπε να τη χωρίσεις σε έκτα;

Δέκτης: Διότι είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο. Δεν μπορούμε να τα βάλουμε όπως είναι.

Πομπός: Όταν κάμεις τα έκτα...πάρε τα 3/6, είναι το ½. Μετά πάρε τα...2/6 (συγκρίνει με την αριθμητική γραμμή η οποία αναπαριστά το 1/3) είναι το 1/3. Βάλε τα μαζί και θα φτάσεις στα 5/6.

<u>Β’ Φάση</u>

Περιγραφή ερευνητή:

Ερευνητής: Θα σου περιγράψω μια διαδικασία η οποία θα σε βοηθήσει να φτάσεις σε μια σχέση. Θα προσπαθήσεις να κατασκευάσεις αυτό που θα σου περιγράψω.

Κατασκεύασε μια ευθεία γραμμή. Πρόσεξε όπως βάλεις τα βέλη της ευθείας γραμμής δεξιά και αριστερά δείχνοντας έτσι ότι συνεχίζεται. Στην ευθεία αυτή θα φέρεις δύο κατακόρυφες γραμμές. Στη μια κατακόρυφη γραμμή θα γράψεις τον αριθμό 0 και στην άλλη τον αριθμό 1. Έτσι δημιουργούμε το διάστημα 0 ως 1 και η ευθεία μας γίνεται αριθμητική γραμμή. Τα δύο βέλη δεξιά και αριστερά μας δείχνουν ότι οι αριθμοί συνεχίζονται και είναι άπειροι. Στο μέσο του διαστήματος 0 ως 1 φέρω ακόμη μια κατακόρυφη γραμμή χωρίζοντας το διάστημα 0 ως 1 σε δύο νέα διαστήματα ίσα μεταξύ τους. Με βέλος που θα ξεκινά από το 0 θα προχωρήσεις και θα φτάσεις ως το ½.

Επίσης, θέλω να κατασκευάσεις ακόμη μια ευθεία γραμμή και πάλι θα προσέξεις όπως τοποθετήσεις τα βέλη δεξιά και αριστερά δείχνοντας ότι η ευθεία δεν έχει αρχή ούτε τέλος. Στην ευθεία αυτή θα φέρεις δύο κατακόρυφες γραμμές. Στη μια κατακόρυφη γραμμή θα γράψεις τον αριθμό 0 και στην άλλη τον αριθμό 1. Έτσι δημιουργούμε το διάστημα 0 ως 1 και η ευθεία μας γίνεται αριθμητική γραμμή. Τα δύο βέλη δεξιά και αριστερά μας δείχνουν ότι οι αριθμοί συνεχίζονται και είναι άπειροι. Στο διάστημα 0 ως 1 φέρω ακόμη δύο κατακόρυφες γραμμές χωρίζοντας το διάστημα 0 ως 1 σε τρία νέα διαστήματα ίσα μεταξύ τους. Με βέλος που να ξεκινά από το 0 θα προχωρήσεις και θα φτάσεις ως το 1/3.

Επίσης, θέλω να κατασκευάσεις μια τρίτη ευθεία γραμμή όπου και πάλι θα προσέξεις όπως τοποθετήσεις τα βέλη δεξιά και αριστερά δείχνοντας ότι η ευθεία δεν έχει αρχή ούτε τέλος. Στην ευθεία αυτή θα φέρεις δύο κατακόρυφες γραμμές. Στη μια κατακόρυφη γραμμή θα γράψεις τον αριθμό 0 και στην άλλη τον αριθμό 1. Έτσι δημιουργούμε το διάστημα 0 ως μ1 και η ευθεία μας γίνεται αριθμητική γραμμή. Τα δύο βέλη δεξιά και αριστερά μας δείχνουν ότι οι αριθμοί συνεχίζονται και είναι άπειροι.

Θέλω να προσθέσω τους δύο αριθμούς που έχω δείξει στις δύο προηγούμενες αριθμητικές γραμμές, αλλά υπάρχει δυσκολία, αφού τα δύο κλάσματα είναι ετερώνυμα. Παρατηρώντας τα διαστήματα στην πρώτη και στη δεύτερη αριθμητική γραμμή παρατηρώ ότι έχω στην πρώτη περίπτωση δεύτερα και στην δεύτερη περίπτωση τρίτα. Δεν μπορώ να χωρίσω την καινούρια αριθμητική γραμμή σε δεύτερα και ταυτόχρονα σε τρίτα Πρέπει τα κομμάτια στα οποία θα χωριστεί να είναι τα ίδια. Θα προσπαθήσω να βρω δύο κλάσματα ισοδύναμα με τα προηγούμενα που να έχουν τον ίδιο παρονομαστή για να μπορέσω να κάνω τα ίδια διαστήματα και για τους δύο αριθμούς. Έτσι θα τη χωρίσω αφού βρω το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των δύο παρονομαστών. Είναι το 6.

Στο διάστημα 0 ως 1 φέρω ακόμη πέντε κατακόρυφες γραμμές χωρίζοντας το διάστημα 0 ως 1 σε έξι νέα διαστήματα ίσα μεταξύ τους. Παρατηρώντας την πρώτη αριθμητική γραμμή βλέπω ότι το ½ είναι ίσο με τα 3/6. Με βέλος που να ξεκινά από το 0 θα προχωρήσεις και θα φτάσεις ως τα 3/6. Βλέποντας τη δεύτερη αριθμητική γραμμή παρατηρώ ότι το 1/3 είναι ίσο με τα 2/6. Έτσι στα 3/6 θα προσθέσω ακόμη 2/6. Με βέλος που να ξεκινά από τα 3/6 προχωρώ ακόμη δύο διαστήματα, ακόμη 2/6 και φτάνω στα 5/6. Η σχέση που βρίσκω είναι ότι ½+1/3=3/6+2/6=5/6.

Περιγραφή Πομπού:

Πομπός: Φτιάξε μια αριθμητική γραμμή. Χώρισέ τη σε δύο κομμάτια και πάρε το ένα. Στην πρώτη γραμμή είναι το 0 και στην τελευταία το 1.

Κάνε άλλη μια αριθμητική γραμμή. Χώρισέ τη σε τρία. Αλλά πρώτα βάλε το 0 και το 1. Σε τρίτα να χωρίσεις. Πάρε το ένα.

Κάνε άλλη μια. Χώρισέ τη σε 6, αλλά πρώτα να βάλεις το 0 και το 1. Το ½ με πόσα έκτα αντιστοιχεί;

Δέκτης: Με 3/6.

Πομπός: Το 1/3 με πόσα;

Δέκτης: 2/6.

Πομπός: Πάρε τα 3/6 και μετά τα 2/6 στη γραμμή. Κάνε την πράξη. Το ½ είναι τα 3/6, το 1/3 είναι τα 2/6. Τα βάζουμε μαζί.

Δέκτης: (αφού επιλέγει τα 3/6 και μετά προχωρεί ακόμη 2/6). Τι να γράψω;

Πομπός: Πόσα κάνουν μαζί; Η απάντηση είναι μπροστά σου. Εδώ (του δείχνει την αριθμητική γραμμή).

Δέκτης: Κάνουν 5/6.

Πομπός: Γράψε και την εξίσωση που βγαίνει.

<u>Πείραμα Επικοινωνίας</u>

<u>Πρόσθεση Ετερώνυμων Κλασμάτων</u>

<u>Μαθητές με χαμηλή επίδοση</u>

<u>Α’ Φάση</u>

Περιγραφή πομπού:

Πομπός: Κάμε μια αριθμητική γραμμή και χώρισε σε δεύτερα. Θα πιάσεις το ½. Και μετά κάνεις άλλη αριθμητική γραμμή. Θα τη χωρίσεις σε τρίτα και να πάρεις το 1/3. Να κάνεις και άλλη μια αριθμητική γραμμή και να τη χωρίσεις σε έκτα. Να πάρεις τα 5.

Ερευνητής: Τι καταφέραμε να δείξουμε με αυτές τις τρεις αριθμητικές γραμμές;

Πομπός: Τα κλάσματα που υπάρχουν στις αριθμητικές γραμμές...το ½ και το 1/3 ...στην τελευταία...(σκέφτεται).

Ερευνητής: Τι γίνεται στην τελευταία αριθμητική γραμμή;

Πομπός: Τα 5/6.

Ερευνητής: Δηλαδή;

Πομπός: Αν τα προσθέσεις το ½ και το 1/3 το αποτέλεσμα είναι 5/6.

<u>Β’ Φάση:</u>

Περιγραφή Ερευνητή:

Ερευνητής: Πομπός θα σου περιγράψω μια διαδικασία η οποία θα σε βοηθήσει να φτάσεις σε μια σχέση. Θα προσπαθήσεις να κατασκευάσεις αυτό που θα σου περιγράψω.

Κατασκεύασε μια ευθεία γραμμή. Πρόσεξε όπως βάλεις τα βέλη της ευθείας γραμμής δεξιά και αριστερά δείχνοντας έτσι ότι συνεχίζεται. Στην ευθεία αυτή θα φέρεις δύο κατακόρυφες γραμμές. Στη μια κατακόρυφη γραμμή θα γράψεις τον αριθμό 0 και στην άλλη τον αριθμό 1. Έτσι δημιουργούμε το διάστημα 0 ως 1 και η ευθεία μας γίνεται αριθμητική γραμμή. Τα δύο βέλη δεξιά και αριστερά μας δείχνουν ότι οι αριθμοί συνεχίζονται και είναι άπειροι. Στο μέσο του διαστήματος 0 ως 1 φέρω ακόμη μια κατακόρυφη γραμμή χωρίζοντας το διάστημα 0 ως 1 σε δύο νέα διαστήματα ίσα μεταξύ τους. Με βέλος που θα ξεκινά από το 0 θα προχωρήσεις και θα φτάσεις ως το ½.

Επίσης, θέλω να κατασκευάσεις ακόμη μια ευθεία γραμμή και πάλι θα προσέξεις όπως τοποθετήσεις τα βέλη δεξιά και αριστερά δείχνοντας ότι η ευθεία δεν έχει αρχή ούτε τέλος. Στην ευθεία αυτή θα φέρεις δύο κατακόρυφες γραμμές. Στη μια κατακόρυφη γραμμή θα γράψεις τον αριθμό 0 και στην άλλη τον αριθμό 1. Έτσι δημιουργούμε το διάστημα 0 ως 1 και η ευθεία μας γίνεται αριθμητική γραμμή. Τα δύο βέλη δεξιά και αριστερά μας δείχνουν ότι οι αριθμοί συνεχίζονται και είναι άπειροι. Στο διάστημα 0 ως 1 φέρω ακόμη δύο κατακόρυφες γραμμές χωρίζοντας το διάστημα 0 ως 1 σε τρία νέα διαστήματα ίσα μεταξύ τους. Με βέλος που να ξεκινά από το 0 θα προχωρήσεις και θα φτάσεις ως το 1/3.

Επίσης, θέλω να κατασκευάσεις ακόμη μια ευθεία γραμμή και πάλι θα προσέξεις όπως τοποθετήσεις τα βέλη δεξιά και αριστερά δείχνοντας ότι η ευθεία δεν έχει αρχή ούτε τέλος. Στην ευθεία αυτή θα φέρεις δύο κατακόρυφες γραμμές. Στη μια κατακόρυφη γραμμή θα γράψεις τον αριθμό 0 και στην άλλη τον αριθμό 1. Έτσι δημιουργούμε το διάστημα 0 ως 1 και η ευθεία μας γίνεται αριθμητική γραμμή. Τα δύο βέλη δεξιά και αριστερά μας δείχνουν ότι οι αριθμοί συνεχίζονται και είναι άπειροι. Στο διάστημα 0 ως 1 φέρω ακόμη δύο κατακόρυφες γραμμές χωρίζοντας το διάστημα 0 ως 1 σε τρία νέα διαστήματα ίσα μεταξύ τους. Με βέλος που να ξεκινά από το 0 θα προχωρήσεις και θα φτάσεις ως το 1/3.

Επίσης, θέλω να κατασκευάσεις μια τρίτη ευθεία γραμμή όπου και πάλι θα προσέξεις όπως τοποθετήσεις τα βέλη δεξιά και αριστερά δείχνοντας ότι η ευθεία δεν έχει αρχή ούτε τέλος. Στην ευθεία αυτή θα φέρεις δύο κατακόρυφες γραμμές. Στη μια κατακόρυφη γραμμή θα γράψεις τον αριθμό 0 και στην άλλη τον αριθμό 1. Έτσι δημιουργούμε το διάστημα 0 ως μ1 και η ευθεία μας γίνεται αριθμητική γραμμή. Τα δύο βέλη δεξιά και αριστερά μας δείχνουν ότι οι αριθμοί συνεχίζονται και είναι άπειροι.

Θέλω να προσθέσω τους δύο αριθμούς που έχω δείξει στις δύο προηγούμενες αριθμητικές γραμμές, αλλά υπάρχει δυσκολία, αφού τα δύο κλάσματα είναι ετερώνυμα. Παρατηρώντας τα διαστήματα στην πρώτη και στη δεύτερη αριθμητική γραμμή παρατηρώ ότι έχω στην πρώτη περίπτωση δεύτερα και στην δεύτερη περίπτωση τρίτα. Δεν μπορώ να χωρίσω την καινούρια αριθμητική γραμμή σε δεύτερα και ταυτόχρονα σε τρίτα Πρέπει τα κομμάτια στα οποία θα χωριστεί να είναι τα ίδια. Θα προσπαθήσω να βρω δύο κλάσματα ισοδύναμα με τα προηγούμενα για τους δύο αριθμούς. Έτσι θα τη χωρίσω αφού βρω το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των δύο παρονομαστών. Είναι το 6.

Στο διάστημα 0 ως 1 φέρω ακόμη πέντε κατακόρυφες γραμμές χωρίζοντας το διάστημα 0 ως 1 σε έξι νέα διαστήματα ίσα μεταξύ τους. Παρατηρώντας την πρώτη αριθμητική γραμμή βλέπω ότι το ½ είναι ίσο με τα 3/6. Με βέλος που να ξεκινά από το 0 θα προχωρήσεις και θα φτάσεις ως τα 3/6. Βλέποντας τη δεύτερη αριθμητική γραμμή παρατηρώ ότι το 1/3 είναι ίσο με τα 2/6. Έτσι στα 3/6 θα προσθέσω ακόμη 2/6. Με βέλος που να ξεκινά από τα 3/6 προχωρώ ακόμη δύο διαστήματα, ακόμη 2/6 και φτάνω στα 5/6. Η σχέση που βρίσκω είναι ότι ½+1/3=3/6+2/6=5/6.

Περιγραφή πομπού:

Πομπός: Να κάνεις μια αριθμητική γραμμή και να τη χωρίσεις σε τρίτα.

Ερευνητής: Σε τρίτα;

Πομπός: Όχι...εννοώ δεύτερα ... και θα πάρεις το ½. Να βάλεις το 0 στη θέση του και στην τελευταία γραμμή το 1. Τώρα πάρε το ½.

Τώρα να κάνεις ακόμη μια αριθμητική γραμμή και να τη χωρίσεις σε τέταρτα.

Ερευνητής: Σε τέταρτα;

Πομπός: Όχι, σε τρίτα. Να βάλεις το 0 και το 1.

(Ο δέκτης δημιουργεί δύο ίσα διαστήματα, ενώ ο πομπός δεν τη διορθώνει).

Ερευνητής: Πρέπει να χωριστεί σε τρίτα.

με βάση τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τις συνεντεύξεις και τα πειράματα επικοινωνίας φάνηκε ότι η αριθμητική γραμμή μπορεί να λειτουργήσει ως μέσο διαμορφωτικής αξιολόγησης, αφού σύμφωνα με τα αποτελέσματα συνέβαλε στην ανίχνευση παρανοήσεων και δυσκολιών των μαθητών αναφορικά με την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος και αρκετές φορές βοήθησε τους μαθητές να αντιληφθούν τις παρανοήσεις τους με αποτέλεσμα να αρθούν οι παρανοήσεις αυτές.

Πομπός: ...και να πάρεις το ½....όχι το 1/3. Μετά να κάνεις ακόμη μια αριθμητική γραμμή, θα τη χωρίσεις σε (σκέφτεται) σε έκτα. Να βάλεις το 0 και το 1. Πάρε το ½ και το 1/3.

Ερευνητής: Πώς θα τη βοηθήσεις για να πάρει το ½ και το 1/3;

Πομπός: Να τα βάλει μαζί.

Ερευνητής: Πώς θα τη βοηθήσεις να πάρει το ½ και το1/3 σε μια αριθμητική γραμμή που είναι χωρισμένη σε έκτα;

Πομπός: (δεν απαντά).

Ερευνητής: Το ½ με πόσα έκτα αντιστοιχεί;

Δέκτης: Με τα 3/6.

Πομπός: Με τα 3/6.

Ερευνητής: Μετά τι θα κάνει;

Πομπός: Μετά θα ενώσει και το 1/3...

Ερευνητής: Αφού η γραμμή είναι χωρισμένη σε έκτα.

Πομπός: (δεν απαντά).

Ερευνητής: Κοίταξε τη δεύτερη αριθμητική γραμμή. Μήπως μπορεί να σε βοηθήσει να δεις με πόσα έκτα αντιστοιχεί το 1/3;

Πομπός: Με 2/6. Βάλε ακόμη 2/6.

Ερευνητής: Ποια εξίσωση σου δείχνουν οι αριθμητικές γραμμές;

Πομπός: Μπορείς να γράψεις ότι ½ +1/3 =1/6 (σκέφτεται)...όχι ½ +1/3=3/6+2/6=5/6