ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΟΓΙΚΗ ΣΚΕΨΗ
ΕΝΑ ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΟ ΓΝΩΣΤΙΚΟ ΚΑΙ ΜΕΤΑΓΝΩΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Μοδεστίνα Σ. Μοδέστου

Υποβλήθηκε στο Τμήμα Επιστημών της Αγωγής
ως μέρος των υποχρεώσεων για απόκτηση
Διδακτορικού τίτλου
στη Μαθηματική Παιδεία,
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής
Πανεπιστήμιο Κύπρου
Απρίλιος, 2007

Η παρούσα διδακτορική διατριβή παρουσιάστηκε δημόσια σε πενταμελή εξεταστική επιτροπή και εγκρίθηκε στις 26 Απριλίου 2007.

Αποτελεί μέρος των υποχρεώσεων του Τμήματος Επιστημών της Αγωγής για απόκτηση διδακτορικού τίτλου στη Μαθηματική Παιδεία.

Ερευνητικός Σύμβουλος: Αθανάσιος Γαγάτσης, Καθηγητής,
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Συμβουλευτική Επιτροπή: Ανδρέας Δημητρίου, Καθηγητής,
Τμήμα Ψυχολογίας, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Δήμητρα Πίττα-Πανταζή, Επίκουρη Καθηγήτρια,
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

....

Αθανάσιος Γαγάτσης Ανδρέας Δημητρίου

....

Δήμητρα Πίττα-Πανταζή

Εξεταστική Επιτροπή:

- Κωνσταντίνος Χρίστου (Πρόεδρος),
  Καθηγητής, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου
- Αθανάσιος Γαγάτσης,
  Καθηγητής, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου
- Ανδρέας Δημητρίου,
  Καθηγητής, Τμήμα Ψυχολογίας, Πανεπιστήμιο Κύπρου
- Χαράλαμπος Λεμονίδης,
  Καθηγητής, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης,
  Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
- Δήμητρα Πίττα-Πανταζή,
  Επίκουρη Καθηγήτρια, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η θεμελιώδης σημασία της έννοιας της αναλογίας στη ζωή του ανθρώπου είχε ως αποτέλεσμα να γίνουν από πολύ νωρίς συστηματικές προσπάθειες ορισμού της (Kline, 1990). Σήμερα φαίνεται να υπάρχουν κενά στον ορισμό της ικανότητας που σχετίζεται με την εφαρμογή της έννοιας της αναλογίας και ειδικότερα της ικανότητας για μαθηματική αναλογική σκέψη (Lamon, 1999a).

Παραδοσιακά η μαθηματική αναλογική σκέψη έχει θεωρηθεί συνώνυμη με την ικανότητα επίλυσης τυπικών αναλογικών προβλημάτων (Lesh, Post & Behr, 1988; Misailidou & Williams, 2003). Έρευνες γύρω από το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας (De Bock, Verschaffel & Janssens, 1998; Modestou & Gagatsis, 2004a; Van Dooren, 2005) υποδεικνύουν ότι αυτή η θεώρηση της μαθηματικής αναλογικής σκέψης δεν μπορεί να ισχύει απόλυτα. Οι μαθητές ανεξαρτήτως ηλικίας, ενώ επιτυγχάνουν στην επίλυση τυπικών αναλογικών προβλημάτων, αποτυγχάνουν στο να τα διακρίνουν από άλλα μη αναλογικά προβλήματα (Modestou & Gagatsis, 2004b). Ως αποτέλεσμα της αποτυχίας διάκρισης των αναλογικών από τις μη αναλογικές καταστάσεις, δημιουργείται στους μαθητές μια "ψευδαίσθηση" για την ύπαρξη αναλογίας, με αποτέλεσμα να χρησιμοποιούν αναλογικές στρατηγικές για να επιλύσουν ακόμη και τα μη αναλογικά έργα.

Τα στοιχεία αυτά αποτέλεσαν τη βάση για επιβεβαίωση της ύπαρξης ενός θεωρητικού μοντέλου ερμηνείας της μαθηματικής αναλογικής σκέψης, η οποία ήταν και βασικός σκοπός της ερευνητικής εργασίας. Στα πλαίσια του μοντέλου αυτού διερευνήθηκε το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας ως αναπόσπαστο μέρος της μεταγνωστικής διάστασης της μαθηματικής αναλογικής σκέψης. Ταυτόχρονα έγινε προσπάθεια καθορισμού της φύσης του φαινομένου της ψευδαίσθησης της αναλογίας και αποτελεσματικής αντιμετώπισής του με την οργάνωση μιας κατάλληλης διδακτικής παρέμβασης, κάτι που δεν έχει επιτευχθεί μέχρι σήμερα.

Η έρευνα υλοποιήθηκε σε δύο φάσεις. Η πρώτη φάση αφορούσε στη συλλογή ποσοτικών δεδομένων κατά την οποία χορηγήθηκαν τρία διαφορετικά δοκίμια σε μαθητές της Ε' Δημοτικού μέχρι τη Γ' Γυμνασίου. Τα δοκίμια αφορούσαν στο χειρισμό αναλογικών και μη αναλογικών καταστάσεων οι οποίες παρουσιάζονταν σε διαφορετικά πλαίσια. Στη δεύτερη φάση διεξάχθηκε μια διδακτική παρέμβαση στη Στ' Δημοτικού, η οποία στόχευε στον περιορισμό του φαινομένου της ψευδαίσθησης της αναλογίας.

Τα ευρήματα έχουν επιβεβαιώσει την ύπαρξη ενός πολυδιάστατου μοντέλου ερμηνείας της μαθηματικής αναλογικής σκέψης, συνεισφέροντας στον προσδιορισμό της ίδιας της έννοιας. Στην έννοια της μαθηματικής αναλογικής σκέψης δεν περιλαμβάνεται αποκλειστικά η ικανότητα επίλυσης μαθηματικών αναλογικών έργων (μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός), αλλά και η ικανότητα χειρισμού αναλογικών καταστάσεων σε ένα πλαίσιο μη μαθηματικό (αναλογικός συλλογισμός). Αναπόσπαστο μέρος της έννοιας της μαθηματικής αναλογικής σκέψης αποτελεί και η ικανότητα καθορισμού και διάκρισης των αναλογικών χαρακτηριστικών μιας κατάστασης, συνιστώντας τη μεταγνωστική διάσταση της έννοιας. Κάτω από αυτή τη διάσταση της μετα-αναλογικής ενημερότητας εντάσσεται και μπορεί να μελετηθεί το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας.

Εκτός από το μοντέλο μαθηματικής αναλογικής σκέψης, η ερευνητική εργασία κατάφερε να καθορίσει τη φύση του εμποδίου πίσω από το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας και να δείξει ότι το εμπόδιο δεν είναι αποκλειστικά αναπτυξιακό και διδακτικό, αφού ο τρόπος που οι μαθητές χειρίζονται τα μη αναλογικά έργα δεν οφείλεται σε μια δυσκολία ή απουσία γνώσης αλλά σε μια σταθερή γνώση. Η γνώση της αναλογίας όπως αυτή παρεμβαίνει στην επίλυση των αναλογικών έργων αποτελεί επιστημολογικό εμπόδιο για την μετα-αναλογική ενημερότητα των μαθητών και άρα για την ικανότητα διάκρισης και επίλυσης μη αναλογικών έργων. Ο καθορισμός της φύσης του φαινομένου είναι καθοριστικός και για την αντιμετώπισή του, η οποία όπως φάνηκε μπορεί να επιτευχθεί μέσα από την οργάνωση και την εφαρμογή μιας κατάλληλης διδακτικής κατάστασης.

ABSTRACT

Proportionality's fundamental importance for everyday life, resulted in early systematic attempts towards the definition of the concept (Kline, 1990). Today however, gaps appear in defining those elements that are directly connected with the ability to use proportions and therefore think proportionally (Lamon, 1999a).

Traditionally, proportional thinking has been considered synonymous with the ability to solve proportional missing-value problems (Lesh, Post & Behr, 1998; Misailidou & Williams, 2003). However, research on the illusion of linearity (De Bock, Vershaffel & Janssens, 1998; Modestou & Gagatsis, 2004a; Van Dooren, 2005) suggests that this typical approach of proportional reasoning is not comprehensive. Pupils, irrespective of age, even though succeeding in solving typical proportional problems, they fail to distinguish between proportional and non-proportional situations (Modestou & Gagatsis, 2004b). As a result of this failure, an illusion of the existence of linearity is created in pupils, resulting in the use of proportional strategies for the solution of even non-proportional situations.

These facts constituted the foundation for confirming the existence of a theoretical model of interpreting the ability for proportional reasoning, which was the main purpose of this research. At the same time, this research aimed at the definition of the nature of the phenomenon of the illusion of linearity, as well as at the designation of the phenomenon as an indispensable part of the new model of proportional reasoning. Finally, an attempt has been made towards the organisation and implementation of a suitable didactic situation that would resolve in the confrontation of the illusion of linearity, something that has not been successfully achieved so far.

The research was completed in two phases. The first phase was quantitative and therefore, three different tests including analogical, proportional and non-proportional situations were administered to pupils ranging from the 5^{th} grade of primary school to the 3^{rd} grade of secondary school. In the second phase, a teaching intervention took place in the sixth grade of primary school, which aimed at the limitation of pupils' tendency to apply proportional strategies for the solution of non linear situations.

The results confirmed the existence of a multi-dimensional model of proportional thinking, contributing in this way at the definition of the concept. In this model, the dimensions of analogical reasoning, proportional reasoning and meta-analogical awareness take a constitutive part. Thus, proportional thinking does not coincide exclusively with the ability to solve proportional problems (proportional reasoning), but it also involves the

ability to handle verbal and arithmetical analogies (analogical reasoning) together with the ability to discern and solve non-proportional situations (meta-analogical awareness), which is metacognitive in nature.

This research has also succeeded in determining the nature of the phenomenon of the illusion of linearity. The obstacle behind pupils' tendency to apply proportional strategies to non proportional situations is not exclusively developmental or didactical, as it does not appear due to a lack of a specific knowledge. On the contrary, linearity constitutes an epistemological obstacle for pupils' meta-analogical awareness and therefore for their ability to handle non-proportional situations. The definition of the nature of the obstacle led to the implementation of an intervention program with a suitable didactical situation. The results of this implementation have indicated a successful way of dealing with the obstacle, as pupils managed to question the universal remedy of the linear model despite their initial difficulties.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Έχοντας μετά από τρία χρόνια ολοκληρώσει τη διδακτορική μου διατριβή θεωρώ ότι πρέπει να ευχαριστήσω τους ανθρώπους που με το δικό τους τρόπο συνέβαλαν αποφασιστικά στην διεκπεραίωση της εργασίας αυτής. Είναι με ιδιαίτερη χαρά που αφιερώνω αυτά τα λίγα λόγια σε αυτούς.

Πρώτα, θέλω να ευχαριστήσω τον ερευνητικό μου σύμβουλο Δρ. Αθανάσιο Γαγάτση για τη σημαντική βοήθεια, υποστήριξη και καθοδήγηση που μου παρείχε σε όλα τα στάδια της διδακτορικής διατριβής. Ο ενθουσιασμός και η σιγουριά του για την επιτυχία της εργασίας αποτέλεσε για μένα ένα σημαντικό και συνεχές κίνητρο.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω και στον πρόεδρο της επιτροπής μου Δρ. Κώστα Χρίστου για την κρίσιμη ανατροφοδότηση που μου παρείχε στο τελευταίο στάδιο διεξαγωγής της ερευνητικής εργασίας, η οποία οδήγησε και σε μια αναμόρφωση της όλης διατριβής. Ταυτόχρονα, θέλω να ευχαριστήσω και τα μέλη της ερευνητικής μου επιτροπής, Δρ. Ανδρέα Δημητρίου και Δρ. Δήμητρα Πίττα, για τις πολύτιμες εισηγήσεις τους και την πολύπλευρη βοήθεια που μου παρείχαν σε όλη τη διάρκεια της διδακτορικής διατριβής. Επίσης, ευχαριστώ και τον Δρ. Χαράλαμπο Λεμονίδη για όλα τα βοηθητικά του σχόλια.

Δεν μπορώ να παραλείψω στο σημείο αυτό να ευχαριστήσω και τους Δρ. Γιώργο Σπανούδη και Δρ. Λεωνίδα Κυριακίδη για το ενδιαφέρον και την αυτόβουλη εμπλοκή τους στην διδακτορική διατριβή, η συνεισφορά των οποίων αποδείχθηκε σημαντικότατη στο στάδιο της επεξεργασίας των δεδομένων. Ένα ιδιαίτερο ευχαριστώ οφείλω και στο Dr. Guy Brousseau, ο οποίος με τον ενθουσιασμό του κατάφερε να μου δείξει ότι οι ιδέες μπορούν να γίνουν πράξη.

Θέλω επίσης να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου σε όλους τους εκπαιδευτικούς και μαθητές που συμμετείχαν στην παρούσα ερευνητική εργασία, συνεισφέροντας στην επιτυχία της. Συνάμα, θέλω να ευχαριστήσω τους μεταπτυχιακούς φοιτητές του Τμήματος Επιστημών της Αγωγής για όλη τη βοήθεια που μου παρείχαν στη φάση της συλλογής των δεδομένων και ειδικότερα τους φοιτητές Κωνσταντίνο Κωνσταντίνου, Μαρία Γιάλλουρου, Άννα Αβραάμ και Μαρία Ευτύχιου.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω την οικογένεια μου και ειδικά τους γονείς μου, καθώς και μερικούς καλούς φίλους, που στάθηκαν δίπλα μου σε όλες τις δύσκολες στιγμές δίνοντάς μου δύναμη και κουράγιο να συνεχίσω.

Μοδεστίνα

Απρίλιος 2007

Στους γονείς μου,

Σοφοκλή και Θεοδώρα

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Σελίδα

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Σελίδα

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Σελίδα

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

Σελίδα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΡΕΥΝΑ

Εισαγωγή

Ο αναλογικός συλλογισμός αποτελεί έναν από τους πιο σημαντικούς μηχανισμούς της γνωστικής ανάπτυξης του ατόμου. Ως επαγωγικός μηχανισμός, σχετίζεται άμεσα με τη δημιουργία και την τροποποίηση των γνωστικών δομών του ατόμου, μέσω της αναθεώρησης των υπαρχόντων κανόνων και της δημιουργίας νέων κανόνων (Holland, Holyoak, Nisbett & Thagard, 1989). Το γεγονός αυτό καθιστά τον αναλογικό συλλογισμό αναγκαίο για την κατανόηση και ερμηνεία άγνωστων εννοιών (Richland, Morrison & Holyoak, 2006), αλλά και για την ανάπτυξη της κριτικής σκέψης και την επίλυση προβλήματος (Goswami, 1992).

Ο αναλογικός συλλογισμός, δεν μπορεί παρά να αποτελεί στοιχείο απαραίτητο και για την επιστήμη των μαθηματικών. Ήδη, ξεκινώντας από τα παλαιότερα χρόνια, ο αναλογικός συλλογισμός αποτελεί ένα σημαντικό μαθηματικό εργαλείο για το χειρισμό καταστάσεων σε διάφορα πεδία της ανθρώπινης ενασχόλησης (Freudenthal, 1973). Η φύση αυτού του «εργαλείου» έχει διπλό ρόλο. Από τη μια, χρησιμοποιώντας την αποκλειστικά αναλογική του πτυχή, μπορεί να αποτελέσει στοιχείο κλειδί στη διαχείριση προβληματικών καταστάσεων με τη μεταφορά ήδη υπάρχουσας γνώσης και δεξιοτήτων σε καινούρια έργα που παρουσιάζουν δομικές ομοιότητες με τα προηγούμενα. Από την άλλη, η μαθηματική πτυχή του αναλογικού συλλογισμού είναι απαραίτητη για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων αναλογίας, όπου πρέπει να εντοπιστεί η δομική ομοιότητα ανάμεσα στους αριθμούς και τα δεδομένα της προβληματικής κατάστασης. Αυτές οι δύο πτυχές δεν μπορεί παρά να είναι αλληλένδετες, αφού όπως τονίζει και ο Polya (1954), η ύπαρξη μαθηματικής αναλογίας (proportion) αποτελεί μια πολύ χαρακτηριστική περίπτωση ύπαρξης αναλογίας (analogy).

Στις μέρες μας δίνεται μεγάλη έμφαση στις αναλογικές σχέσεις μέσα από τα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών τόσο της Δημοτικής όσο και της Μέσης εκπαίδευσης (Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού, 1996). Η έννοια της αναλογίας υπάρχει μέσα σε όλο το μαθηματικό οικοδόμημα, ξεκινώντας από την ιδέα της μέτρησης ποσοτήτων, την έννοια των λόγων και την εφαρμογή της μεθόδου του εσωτερικού γινομένου στο δημοτικό σχολείο και επεκτείνεται στη γραμμική άλγεβρα και τη χρήση των γραμμικών μοντέλων στον απειροστικό λογισμό και τη στατιστική (Van Dooren, 2005).

Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα την κατοχύρωση των αναλογικών σχέσεων ως ενός βασικού μοντέλου μέσα από το οποίο μπορούμε εύκολα και γρήγορα να προσεγγίσουμε ποικίλες προβληματικές καταστάσεις. Στη σύγχρονη γλώσσα της άλγεβρας, το μοντέλο αυτό δεν είναι άλλο από τη γραμμική συνάρτηση $f(x) = ax$ (όπου $\alpha \neq 0$) η οποία μπορεί να περιγράψει μαθηματικά κάθε αναλογική σχέση (De Bock, Verschaffel & Janssens, 2002b). Αυτό το γραμμικό μοντέλο χρησιμοποιείται σχεδόν αυθόρμητα μέσω διάφορων μεθόδων σε όλες ανεξαιρέτως τις καταστάσεις, των οποίων η λεκτική διατύπωση προσομοιάζει με αυτήν των τυπικών αναλογικών έργων, έχοντας ταυτόχρονα ως αποτέλεσμα και τη δημιουργία πολλών λαθών. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι το γραμμικό μοντέλο είναι τόσο ισχυρό που δημιουργεί μια ψευδαίσθηση για την ύπαρξη αναλογίας, χωρίς αυτή να υπάρχει απαραίτητα σε μια προβληματική κατάσταση. Το φαινόμενο αυτό της ευρείας εφαρμογής του γραμμικού μοντέλου $f(x) = ax$ και σε μη αναλογικές καταστάσεις, αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως ψευδαίσθηση της αναλογίας («illusion of linearity») (De Bock et al., 1998), γραμμική παγίδα («linear trap») (Van Dooren, 2005), γραμμικό εμπόδιο («linear obstacle») ή γραμμική παρανόηση («linear misconception») (Freudenthal, 1973,1983).

Το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας δεν είναι πρόσφατο και ούτε αναφέρεται σε ένα συγκεκριμένο πεδίο των μαθηματικών. Χαρακτηριστικά παραδείγματα προκύπτουν μέσα από την αριθμητική, την άλγεβρα, τις πιθανότητες, τη μέτρηση στη γεωμετρία αλλά και στην καθημερινή μας επαφή με τον κόσμο με την εφαρμογή αυθόρμητων και διαισθητικών κανόνων. Η τάση των μαθητών να απαντούν, για παράδειγμα, ότι το εμβαδόν ενός τετραγώνου διπλασιάζεται όταν διπλασιαστούν οι πλευρές του, είναι αποτέλεσμα του συγκεκριμένου φαινομένου (De Bock et al., 2002b; Modestou, Gagatsis & Pitta-Pantazi, 2004; Van Dooren, 2005) και αναφέρεται για πρώτη φορά από τον Πλάτωνα στο διάλογο «Μένων», με το δούλο να δίνει ανάλογη απάντηση στο Σωκράτη όπως και οι σημερινοί μαθητές (Φράγκος, 1983). Αποτέλεσμα του φαινομένου της ψευδαίσθησης της αναλογίας είναι και οι αναλογικές απαντήσεις των μαθητών σε σταθερά προβλήματα της μορφής $f(x) = ax$: «Ένα πουκάμισο χρειάζεται 25 λεπτά για να στεγνώσει έξω στον ήλιο. Πόσο χρόνο θέλουν τρία πουκάμισα για να στεγνώσουν έξω στον ήλιο;». Σε αυτό το πρόβλημα οι μαθητές δίνουν απάντηση 75 λεπτά, επηρεαζόμενοι από τη λεκτική δομή του προβλήματος, η οποία παραπέμπει στη χρησιμοποίηση της γραμμικής συνάρτησης. Είναι λοιπόν από την αρχή φανερός ο ρόλος της γλώσσας στη δημιουργία αυτής της ψευδαίσθησης (Greer, 1997).

Φαίνεται ότι το γραμμικό μοντέλο είναι σε τέτοιο βαθμό ενσωματωμένο στον τρόπο σκέψης των μαθητών που κάποιος μπορεί πολύ εύκολα να παραπλανηθεί και να χειρίζεται κάθε αριθμητική σχέση ως αναλογική (Freudenthal, 1983), χωρίς να δίνει σημασία στην προβληματική κατάσταση και τους περιορισμούς που αυτή μπορεί να έχει. Η «ψευδαίσθηση» για την ύπαρξη αναλογίας αιτιολογεί και μη ρεαλιστικές απαντήσεις των μαθητών, οι οποίοι υποστηρίζουν τη γραμμική αύξηση του ύψους και της μάζας, ή ακόμα και την ικανότητα των αθλητών να τρέχουν με την ίδια ταχύτητα τα 100 και τα 1000 μέτρα (Verschaffel, De Corte & Lasure, 1994).

Πρόσφατα έχει γίνει μια σημαντική προσπάθεια από διάφορους ερευνητές (De Bock et al., 1998, 2002b; De Bock, Van Dooren, Janssens, & Verschaffel, 2002a; Modestou & Gagatsis, 2004a, 2006, 2007a; Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens, & Verschaffel, 2004a, 2005a), ώστε να διερευνηθεί και να αντιμετωπιστεί η τάση των μαθητών να χειρίζονται μη αναλογικά προβλήματα ως αναλογικά. Τα αποτελέσματα όλων των ερευνών συνηγορούν στο ότι το γραμμικό μοντέλο φαίνεται να είναι βαθιά ριζωμένο στη διαισθητική γνώση των μαθητών και να χρησιμοποιείται αυθόρμητα κάνοντας την αναλογική προσέγγιση φυσική και αδιαμφισβήτητη (Stavy & Tirosh, 2000; De Bock et al., 2002a). Παράλληλα, παρά τις συστηματικές προσπάθειες για αντιμετώπιση του φαινομένου με τη χρήση ποικίλων διδακτικών μέσων, όπως η παρακολούθηση μιας σειράς μαθημάτων που να έχουν ως στόχο την εννοιολογική αλλαγή, η συμπερίληψη επιπλέον στοιχείων στην επίλυση των προβλημάτων ή ακόμα και η εμπλοκή των μαθητών σε αυθεντικές προβληματικές καταστάσεις, τα αποτελέσματα δεν ήταν τα αναμενόμενα (Van Dooren, 2005).

Το γραμμικό μοντέλο είχε εδραιωθεί ως μια ασφαλής στρατηγική επίλυσης προβλημάτων, η οποία προσφέρει σιγουριά και βεβαιότητα στους μαθητές για την ορθότητα των αποτελεσμάτων της (Modestou & Gagatsis, 2004b). Τα αναλογικά λάθη των μαθητών αντιστέκονται σε κάθε προσπάθεια αντιμετώπισής τους, υποδεικνύοντας έτσι το πραγματικό μέγεθος και τη σοβαρότητα του προβλήματος της ψευδαίσθησης της αναλογίας.

Διατύπωση του Προβλήματος

Το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας δεν είναι ένα επιφανειακό και πρόσκαιρο φαινόμενο που προκύπτει ως αποτέλεσμα κάποιου πειραματικού πλαισίου ή απουσίας κάποιας βασικής γνώσης. Οι μαθητές μέσα σε μια πληθώρα διαφορετικών ερευνών που έγιναν τα τελευταία δέκα χρόνια πάνω στο φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας, παρουσιάζουν έντονα την τάση να χειρίζονται αναλογικά και τις μη αναλογικές καταστάσεις, ανεξαρτήτως ηλικίας και διδακτικών παρεμβάσεων που στοχεύουν στην αντιμετώπιση του φαινομένου (De Bock et al., 1998, 2002a, 2002b; Van Dooren, 2005). Το γεγονός αυτό υποδεικνύει ότι τα λάθη, τα οποία προκύπτουν από την εφαρμογή του αναλογικού μοντέλου σε μη αναλογικές καταστάσεις δεν είναι πρόσκαιρα, παροδικά και τυχαία. Κατ' επέκταση το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας δεν αποτελεί ένα επιφανειακό πρόβλημα που μπορεί να αντιμετωπιστεί εύκολα με τα συνήθη διδακτικά μέσα, αλλά είναι ένα επαναλαμβανόμενο φαινόμενο, το οποίο είναι αρκετά γενικό αλλά και ανθεκτικό ακόμα και στην ίδια τη διδασκαλία.

Η ουσία του προβλήματος έγκειται στο ότι δεν έχει ακόμη προσδιοριστεί η φύση του, με αποτέλεσμα να μην έχουν βρεθεί ακόμη και τα κατάλληλα μέσα για αντιμετώπισή του, αν και έχουν ήδη γίνει πολλές και διαφορετικές προσπάθειες (De Bock, Verschaffel, Janssens, Van Dooren & Claes, 2003; Van Dooren et al., 2004a) για το σκοπό αυτό. Οι πιο ευρέως αποδεκτοί λόγοι για την εμφάνιση του φαινομένου οφείλονται στις εμπειρίες που έχουν οι μαθητές μέσα στο εκπαιδευτικό σύστημα. Η εκτεταμένη και σε βάθος μελέτη των αναλογικών σχέσεων, η οποία εμφανίζεται σε διάφορες φάσεις του Αναλυτικού Προγράμματος κάθε χώρας, φαίνεται να είναι ένας από τους παράγοντες που οδηγεί στην αύξηση των αναλογικών απαντήσεων των μαθητών σε μη αναλογικά έργα (Van Dooren et al., 2005). Ταυτόχρονα προς την ίδια κατεύθυνση οδηγεί και η συνεχής επαφή των μαθητών με προβλήματα, στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη και τα οποία οι μαθητές έχουν συνδέσει με την αυτόματη εφαρμογή του αναλογικού μοντέλου (De Bock et al., 2002b), αλλά και η γενικευμένη τάση των μαθητών να χειρίζονται την επίλυση προβλήματος ως μια διαδικασία που δε σχετίζεται με τον εξωτερικό κόσμο (Verschafell et al., 2000).

Μια άλλη άποψη υποστηρίζει ότι το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας μπορεί να επεξηγηθεί από τη διαδεδομένη χρησιμότητα του αναλογικού μοντέλου σε καταστάσεις της πραγματικής ζωής, η οποία όσο αναπτύσσεται αποκτά και ένα πιο προφανές και αυταπόδεικτο κύρος, ένα διαισθητικό χαρακτήρα (De Bock et al., 2002a). Ακόμη και οι πιο στοιχειώδεις δράσεις στις οποίες εμπλέκεται ο άνθρωπος, όπως η μέτρηση αντικειμένων, ή η διατύπωση απλών αιτιωδών σχέσεων που δηλώνουν για παράδειγμα ότι όσο περισσότερο διαβάζουμε, τόσο πιο καλοί μαθητές θα γίνουμε ή όσο περισσότερο τρώμε, τόσο περισσότερο θα παχύνουμε (Tsamir, 2003), αναπόφευκτα κρύβουν πίσω τους την έννοια της αναλογίας. Αυτή η απλότητα των αναλογικών σχέσεων, αλλά και η αυτόματη ανάκληση τους στο μυαλό ως αποτελεσματικό μέσο για επίλυση μιας προβληματικής κατάστασης (Stacey, 1989), καθιστά το διαισθητικό στοιχείο ως μια αιτία πίσω από την εμφάνιση του φαινομένου της ψευδαίσθησης της αναλογίας.

Τίθεται λοιπόν το ερώτημα, αν το πρόβλημα είναι τελικά καθαρά διδακτικό, αν έχει πιο διαισθητικά ή αναπτυξιακά χαρακτηριστικά ή τέλος, αν είναι μιας άλλης εντελώς διαφορετικής φύσης που πρέπει να προσδιοριστεί με ακρίβεια. Πρόσφατα ερευνητικά δεδομένα (Modestou & Gagatsis, 2007b) φαίνεται να δίνουν απάντηση σε ένα μέρος του ερωτήματος υποδεικνύοντας προς μια κατεύθυνση εργασίας.

Συγκεκριμένα, το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας δεν μπορεί να είναι αποκλειστικά αποτέλεσμα της διδασκαλίας, αφού ακόμα και στην περίπτωση όπου οι μαθητές είχαν δεχτεί συστηματική διδασκαλία πάνω στο συγκεκριμένο θέμα για περίοδο περίπου δύο εβδομάδων με τη χρήση ποικιλίας μέσων αναπαράστασης, συνέχιζαν να εφαρμόζουν το γραμμικό μοντέλο σε προβληματικές καταστάσεις οι οποίες δεν ήταν αναλογικές (Van Dooren et al., 2004a). Παράλληλα, η τάση των μαθητών προς τη γενική χρήση του γραμμικού μοντέλου υπάρχει ανεξαρτήτως της ηλικίας τους (De Bock et al., 1998; Van Dooren, De Bock, Janssens & Verschaffel, 2005b; Μοδέστου, 2006), γεγονός που υποδεικνύει ότι η ύπαρξη του φαινομένου δεν οφείλεται στον παράγοντα ωριμότητα. Τέλος, φαίνεται να απορρίπτεται και η πλήρως διαισθητική φύση του φαινομένου, αφού πίσω από τις αναλογικές απαντήσεις των μαθητών κρύβονται πολλά και διαφορετικά λάθη, εκτός από τους διαισθητικούς κανόνες, που οδηγούν στην ίδια αναλογική απάντηση (Van Dooren, De Bock, Weyers & Verschaffel, 2004b). Κατ' επέκταση, είναι αναγκαία η ύπαρξη ενός διαφορετικού πλαισίου ερμηνείας του προβλήματος, το οποίο θα δίνει και τα απαραίτητα εφόδια για την επίλυσή του.

Μέσα σε αυτό το πλαίσιο θα καθορίζεται η φύση του φαινομένου, αλλά ταυτόχρονα θα αιτιολογούνται και τα λάθη, τα οποία προκύπτουν ως αποτέλεσμα της εμφάνισης του φαινομένου. Το διαφορετικό αυτό πλαίσιο ερμηνείας του φαινομένου της ψευδαίσθησης της αναλογίας συνίσταται στην αντιμετώπιση του γραμμικού μοντέλου ως επιστημολογικού εμποδίου για το χειρισμό μη αναλογικών καταστάσεων. Η υποστήριξη της θέσης ότι το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας οφείλεται στο επιστημολογικό εμπόδιο της αναλογίας αποτελεί ένα από τους βασικούς σκοπούς της παρούσας ερευνητικής εργασίας. Η θέση αυτή στηρίζεται στο ότι τα λάθη που εμφανίζονται ως αποτέλεσμα του φαινομένου της ψευδαίσθησης της αναλογίας δεν είναι αποτέλεσμα της απουσίας κάποιας βασικής γνώσης, η οποία μπορεί να κατακτηθεί, είτε με την πάροδο των χρόνων, είτε μέσα από την τυπική διδασκαλία. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνεται και από τις μέχρι τώρα αποτυχημένες προσπάθειες αντιμετώπισης του φαινομένου μέσα από συνήθεις μεθόδους όπως αυτές της χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων (De Bock et al., 2003) της συστηματικής τυπικής διδασκαλία πάνω στις μη αναλογικές καταστάσεις ή ακόμη και της δημιουργίας γνωστικής σύγκρουσης στους μαθητές (Van Dooren et al., 2004a).

Τα ψευδοαναλογικά λάθη φαίνεται να είναι αποτέλεσμα της εφαρμογής του γραμμικού μοντέλου. Το γραμμικό μοντέλο, όπως αυτό παρεμβαίνει στην επίλυση αναλογικών προβλημάτων, είναι στην πραγματικότητα μια γνώση, η οποία εφαρμόζεται με επιτυχία σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο και για ένα συγκεκριμένο αριθμό καταστάσεων. Η εφαρμογή όμως της γνώσης του γραμμικού μοντέλου έξω από το συγκεκριμένο πλαίσιο έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση συγκεκριμένων λαθών, τα οποία μπορούν να εντοπιστούν και να περιγραφούν (Πίνακας 1).

Η υποστήριξη της θέσης ότι το γραμμικό μοντέλο, όπως αυτό παρεμβαίνει στην επίλυση αναλογικών προβλημάτων, αποτελεί επιστημολογικό εμπόδιο προσφέρει τη θεωρητική βάση (Brousseau, 1997) για ουσιαστική και αποτελεσματική αντιμετώπιση του φαινομένου της ψευδαίσθησης της αναλογίας, κάτι που δεν έχει επιτευχθεί μέχρι σήμερα (De Bock et al., 2003, Van Dooren, 2005, Modestou & Gagatsis, 2006). Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ερευνητικά υπάρχουν στοιχεία (Brousseau, 1997; Balacheff & Leibniz, 1999; Samaniego, & Barrera, 1999; Brousseau & Gibel, 2005), τα οποία υποδεικνύουν ότι η αντιμετώπιση του προβλήματος των επιστημολογικών εμποδίων είναι δυνατή μέσα από την ενασχόληση των μαθητών με ποικίλες καταστάσεις στις οποίες η γνώση, η οποία αποτελεί εμπόδιο, να μην μπορεί να αφομοιωθεί και έτσι να αποσταθεροποιηθεί, να γίνει αναποτελεσματική, άχρηστη και τελικά να απορριφθεί.

Πίνακας 1

Χαρακτηριστικές Απαντήσεις Αποτέλεσμα του Επιστημολογικού Εμποδίου της Αναλογίας

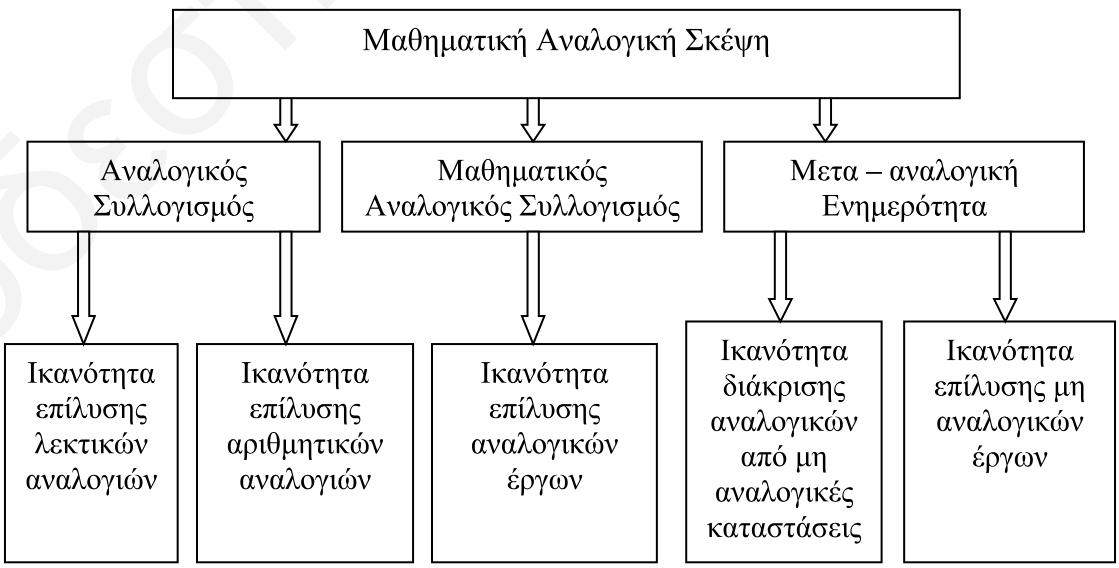
	Απαντήσεις σύμφωνα με το εμπόδιο	Διαφορετικές απαντήσεις
πεδίο αποτελεσματικότητας και καταλληλότητας του αναλογικού μοντέλου	ορθές	λανθασμένες (δε βασίζονται στην έννοια της αναλογίας)
πεδίο μη καταλληλότητας του αναλογικού μοντέλου (μη αναλογικές καταστάσεις)	λανθασμένες (βασίζονται στη χρήση του αναλογικού μοντέλου)	ορθές

Η παιδαγωγική πρακτική συνίσταται στην οργάνωση κατάλληλων διδακτικών καταστάσεων με προσεκτικά επιλεγμένα προβλήματα, που θέτουν σε αμφισβήτηση τις προϋπάρχουσες αντιλήψεις των μαθητών (Radford, Boero & Vasco, 2000). Μέσα από αυτές τις διδακτικές καταστάσεις παιγνιώδους φύσης, η καινούρια γνώση προκύπτει ως ένα αναγκαίο μέσο για την επίλυση του προβλήματος, χωρίς την άμεση εμπλοκή του δασκάλου (Brousseau, 1988).

Ο σχεδιασμός και η οργάνωση μιας τέτοιας διδακτικής κατάστασης που να στοχεύει στην αντιμετώπιση του επιστημολογικού εμποδίου της αναλογίας αποτελεί στόχο της παρούσας εργασίας. Το διαφορετικό στοιχείο της προσέγγισης αυτής σε σχέση με τις προηγούμενες προσπάθειες αντιμετώπισης του φαινομένου της ψευδαίσθησης της αναλογίας (De Bock et al., 2002a, Modestou et al, 2004; Van Dooren et al, 2004a), βρίσκεται στο ότι ο δάσκαλος δεν εμπλέκεται άμεσα στην όλη διαδικασία, παρά μόνο για να επισημοποιήσει τα ευρήματα των μαθητών. Οι μαθητές έχουν την ευθύνη για τη μάθησή τους, η οποία προκύπτει μέσα από διδακτικές καταστάσεις, οι οποίες την κάνουν και πιο μόνιμη. Ταυτόχρονα, ένα βασικό στοιχείο που διαχωρίζει αυτή την προσπάθεια αντιμετώπισης του φαινομένου από τις υπόλοιπες, είναι ο ακριβής προσδιορισμός των συνθηκών κάτω από τις οποίες είναι δυνατή η αναπαραγωγή μιας κατάστασης. Όπως αναφέρει ο Brousseau (1997), η απόκτηση μιας μαθηματικής γνώσης από τους μαθητές εξαρτάται περισσότερο μάλλον από τη συνειδητοποίηση των συνθηκών ακριβούς αναπαραγωγής μιας διδακτικής κατάστασης παρά από την επανάληψη μιας τυπικής διδασκαλίας με την οποία οι μαθητές είχαν ήδη πρόβλημα.

Παράλληλα με την αντιμετώπιση του φαινομένου της ψευδαίσθησης της αναλογίας, θεωρείται αναγκαίος και ένας επαναπροσδιορισμός του φαινομένου σε σχέση με τη μαθηματική αναλογική σκέψη. Μέχρι σήμερα διάφορες ερευνητικές εργασίες (De Bock et al., 1998, 2002b; Van Dooren, De Bock, De Bolle, Janssens & Verschaffel, 2003a; Van Dooren, De Bock, Evers, Verschaffel, 2006) εξετάζουν την ικανότητα επίλυσης αναλογικών προβλημάτων ως κάτι το διακριτό από την ικανότητα διάκρισης και επίλυσης μη αναλογικών καταστάσεων. Συνάμα υιοθετούν τη θέση ότι από τη στιγμή που το άτομο είναι ικανό να επιλύει τυπικά αναλογικά προβλήματα, τότε κατέχει και όλα τα χαρακτηριστικά της μαθηματικής αναλογικής σκέψης. Ένα άτομο με μαθηματική αναλογική σκέψη δεν μπορεί παρόλα αυτά να προσδιοριστεί απλά ως κάποιο που γνωρίζει απλά να χρησιμοποιεί τους αριθμούς ενός έργου για να επιλύει μια αναλογία (Cramer, Post, & Currier, 1993).

Στην πραγματικότητα η ικανότητα του ατόμου να διακρίνει κατά πόσο ένα πρόβλημα επιλύεται με τη χρήση μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού, προσθετικού συλλογισμού ή οποιασδήποτε άλλης αριθμητικής σχέσης είναι απαραίτητη για τη μαθηματική αναλογική σκέψη (Karplus, Pulos & Stage, 1983). Ως αποτέλεσμα, είναι αναγκαίος ο προσδιορισμός της μαθηματικής αναλογικής σκέψης με τη συμπερίληψη μιας διάστασης, η οποία έχει μεταγνωστικά χαρακτηριστικά και αφορά στην ικανότητα διάκρισης και επίλυσης μη αναλογικών καταστάσεων. Η διάσταση αυτή ορίζεται στην παρούσα εργασία, ως μετα-αναλογική ενημερότητα και διερευνάται ως μέρος ενός σφαιρικού μοντέλου ερμηνείας της μαθηματικής αναλογικής σκέψης που προτείνεται για επιβεβαίωση. Το μοντέλο αυτό χαρακτηρίζεται από τρεις διαστάσεις (Διάγραμμα 1):



Διάγραμμα 1. Προτεινόμενο μοντέλο μαθηματικής αναλογικής σκέψης.

(α) Τη διάσταση του αναλογικού συλλογισμού, η οποία αφορά στην ικανότητα των μαθητών να επιλύουν λεκτικές και αριθμητικές αναλογίες σε ένα πλαίσιο μη μαθηματικό,

(β) Τη διάσταση του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού, η οποία αφορά στην ικανότητα επίλυσης μαθηματικών αναλογικών προβλημάτων και

(γ) Τη διάσταση της μετα-αναλογικής ενημερότητας, η οποία όπως αναφέρθηκε πιο πάνω έχει μεταγνωστικά χαρακτηριστικά και αφορά στην ικανότητα διάκρισης και επίλυσης μη αναλογικών καταστάσεων.

Η σημασία των τριών διαστάσεων για την σφαιρικότερη μελέτη της μαθηματικής αναλογικής σκέψης αναλύεται εκτενέστερα πιο κάτω.

Σκοπός της Έρευνας

Ο σκοπός της έρευνας αναλύεται στις ακόλουθες συνιστώσες:

1. Να επιβεβαιώσει ένα θεωρητικό μοντέλο ερμηνείας της μαθηματικής αναλογικής σκέψης, στο οποίο εκτός από την ικανότητα επίλυσης μαθηματικών αναλογικών έργων (μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός), να περιλαμβάνεται και η ικανότητα χειρισμού λεκτικών και αριθμητικών αναλογικών σε μη μαθηματικό πλαίσιο (αναλογικός συλλογισμός), καθώς και η ικανότητα καθορισμού των χαρακτηριστικών της προβληματικής κατάστασης (μετα-αναλογική ενημερότητα).
2. Να δείξει ότι το γραμμικό μοντέλο, όπως αυτό παρεμβαίνει στην επίλυση αναλογικών προβλημάτων (μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός), αποτελεί εμπόδιο για την μετα-αναλογική ενημερότητα των μαθητών, δηλαδή την ικανότητα τους να διακρίνουν μη αναλογικά προβλήματα και να τα επιλύουν.
3. Να σχεδιάσει και να οργανώσει ένα παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας, μέσα από μία διδακτική κατάσταση, που να στοχεύει στην αντιμετώπιση του επιστημολογικού εμποδίου της αναλογίας και να καθορίσει την αποτελεσματικότητά του στην ανάπτυξη της μετα-αναλογικής ενημερότητας των μαθητών.

Ερευνητικά Ερωτήματα

Η εργασία αυτή κινείται σε τρία επίπεδα εργασίας, στο καθένα από τα οποία αναφέρεται και μία συνιστώσα του σκοπού της έρευνας. Με βάση τις τρεις συνιστώσες του σκοπού της εργασίας επιδιώκεται η απάντηση και των αντίστοιχων ερωτημάτων:

Σκοπός -1η συνιστώσα

1. Σε ποιο βαθμό μπορεί το προτεινόμενο μοντέλο να ερμηνεύσει τη μαθηματική αναλογική σκέψη;

Σκοπός -2η συνιστώσα

2. Πώς διαφοροποιείται η επίδοση των μαθητών στα έργα αναλογικού συλλογισμού, μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού καθώς και μετα-αναλογικής ενημερότητας σε σχέση με την ηλικία τους;
3. Με ποιο τρόπο διαφοροποιούνται οι στρατηγικές επίλυσης αναλογικών και μη αναλογικών προβλημάτων με βάση την ηλικία των μαθητών;
4. Η χρήση συγκεκριμένων στρατηγικών επίλυσης μαθηματικών αναλογικών προβλημάτων σχετίζεται με την ικανότητα επίλυσης έργων μετα-αναλογικής ενημερότητας;

Σκοπός -3η συνιστώσα

5. Ποια η επίδραση ενός παρεμβατικού προγράμματος διδασκαλίας με έμφαση στις συνθήκες της μάθησης πάνω στη μετα-αναλογική ενημερότητα των μαθητών;

Ειδικότερα, η διερεύνηση των ερευνητικών ερωτημάτων δύο, τρία και τέσσερα διεξάγεται για να διαπιστωθεί τυχόν ύπαρξη διαφοροποίησης στην ικανότητα των μαθητών στις τρεις διαστάσεις του προτεινόμενου μοντέλου της μαθηματικής αναλογικής σκέψης και τις αντίστοιχες συνιστώσες τους. Αυτό θα κάνει δυνατό και τον καθορισμό των χαρακτηριστικών της κάθε διάστασης. Ταυτόχρονα, αν διαπιστωθεί ότι ενώ υπάρχει διαφοροποίηση της ικανότητας για αναλογικό και μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό από μία ηλικιακή ομάδα σε άλλη, η μετα-αναλογική ενημερότητα των μαθητών παραμένει σχετικά στάσιμη, τότε θα αποδειχτεί μία από τις βασικές θέσεις της εργασίας αυτής ότι, δηλαδή το αναλογικό μοντέλο αποτελεί επιστημολογικό εμπόδιο για την επίλυση μη αναλογικών καταστάσεων και κατά συνέπεια για τη μετα-αναλογική ενημερότητα των μαθητών. Τη θέση αυτή θα ενισχύσει και η ύπαρξη σταθερότητας στις στρατηγικές επίλυσης των έργων ανεξάρτητα από το αν αυτά είναι αναλογικά ή μη αναλογικά και ανεξάρτητα από την ηλικία των μαθητών.

Σημασία του Θέματος

Με τη διεκπεραίωσή της η παρούσα εργασία στοχεύει στην ενίσχυση των ερευνητικών δεδομένων που υπάρχουν μέχρι σήμερα στη βιβλιογραφία σε σχέση με τον αναλογικό συλλογισμό και το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας σε δύο επίπεδα. Σε πρώτο επίπεδο προτείνεται ένα θεωρητικό μοντέλο ερμηνείας της μαθηματικής αναλογικής σκέψης. Μέχρι σήμερα φαίνεται να απουσιάζει ένα τέτοιο πλαίσιο που να καθορίζει με ακρίβεια εκείνα τα στοιχεία που σχετίζονται με τη μαθηματική αναλογική σκέψη του ατόμου. Αντίθετα, το πώς γίνεται αντιληπτή η έννοια της μαθηματικής αναλογικής σκέψης υποδηλώνεται έμμεσα μέσα από τα έργα που περιλαμβάνονται στις διάφορες έρευνες που ασχολούνται με το θέμα αυτό (Lesh et al., 1988; Misailidou & Williams, 2003; Nabors, 2003), αλλά και στα σχολικά εγχειρίδια (Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού, 1996). Ειδικότερα, φαίνεται να επικρατεί άδηλα η θέση σύμφωνα με την οποία η μαθηματική αναλογική σκέψη ταυτίζεται απλά με την ικανότητα επίλυσης αναλογικών έργων (Cramer et al., 1993).

Μέσα στο προτεινόμενο θεωρητικό μοντέλο περιλαμβάνεται η ικανότητα επίλυσης αναλογικών έργων ως αναγκαία πτυχή, αλλά για πρώτη φορά συνδέεται το μεταγνωστικό στοιχείο με τη μαθηματική αναλογική σκέψη, έχοντας ως αποτέλεσμα τη συμπερίληψη μιας νέας διάστασης στον ορισμό της μαθηματικής αναλογικής σκέψης. Η διάσταση αυτή αναφέρεται στην έννοια της μετα-αναλογικής ενημερότητας και αφορά στη μεταγνωστική ικανότητά του ατόμου να διακρίνει πρώτα τις αναλογικές από τις μη αναλογικές καταστάσεις και μετά να τις επιλύει, εφαρμόζοντας τις κατάλληλες στρατηγικές.

Μέσα σε αυτό το νέο πλαίσιο ερμηνείας της μαθηματικής αναλογικής σκέψης η παρούσα εργασία εξετάζει το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας όχι σε αντιπαράθεση με την ικανότητα των μαθητών για μαθηματική αναλογική σκέψη, αλλά ως αναπόσπαστο μέρος της στα πλαίσια της διάστασης της μετα-αναλογικής ενημερότητας. Μέχρι σήμερα το συγκεκριμένο φαινόμενο εξεταζόταν ως κάτι που έρχεται σε αντιδιαστολή με την ευρύτερη αναλογική σκέψη των μαθητών: οι μαθητές έχουν ψηλά ποσοστά επιτυχίας στην επίλυση αναλογικών προβλημάτων, και άρα είναι ικανοί για μαθηματική αναλογική σκέψη, αλλά πολύ χαμηλά ποσοστά στην επίλυση μη αναλογικών έργων, με αποτέλεσμα να αποτυγχάνουν (De Bock et al., 1998, 2002b; Van Dooren et al., 2003a; Van Dooren, De Bock, Evers & Verschaffel, 2006). Μια τέτοια αντιμετώπιση του θέματος παραγνωρίζει παρόλα αυτά μια θεμελιώδη πτυχή της μαθηματικής αναλογικής σκέψης, την ικανότητα ανάλυσης των ποσοτήτων στη δεδομένη κατάσταση, για να διαπιστωθεί πρώτιστα κατά πόσο υπάρχει ανάμεσά τους αναλογική σχέση (Lamon, 1999a).

Συνεπώς, η καινοτομία της παρούσας έρευνας βρίσκεται στη θεώρηση της ικανότητας διάκρισης των αναλογικών καταστάσεων από τις μη αναλογικές ως βασικής πτυχής της μαθηματικής αναλογικής σκέψης. Ένας μαθητής που πραγματικά μπορεί να σκεφτεί και να δράσει αναλογικά θα πρέπει πρώτιστα να μπορεί και να αναγνωρίσει περιπτώσεις της καθημερινής ζωής, στις οποίες η χρήση αναλογιών είναι ή όχι χρήσιμη και όχι απλά να γνωρίζει πώς να εφαρμόζει ένα αλγόριθμο.

Σε δεύτερο επίπεδο, η εργασία αυτή στοχεύει στον προσδιορισμό του φαινομένου της ψευδαίσθησης της αναλογίας, γεγονός που δεν έχει ακόμη επιτευχθεί αφού βιβλιογραφικά υπάρχουν αντικρουόμενες απόψεις γύρω από το θέμα αυτό. Συγκεκριμένα, το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας προσεγγίζεται ως αποτέλεσμα του επιστημολογικού εμποδίου της αναλογίας, αφού τα λάθη τα οποία στη βιβλιογραφία αναφέρονται ως ψευδοαναλογικά, επανεμφανίζονται τόσο στην ιστορία των μαθηματικών όσο και στη μάθηση των μαθηματικών από το ίδιο το άτομο. Η θέση αυτή προτείνεται για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία και η υποστήριξή της θα αποτελέσει ένα σημαντικό βήμα για την αντιμετώπιση του φαινομένου της ψευδαίσθησης της αναλογίας. Ο λόγος για αυτό είναι ότι πρώτιστα το εύρος και η φύση του προβλήματος θα αναγνωριστεί.

Η επαλήθευση της ερευνητικής υπόθεσης σύμφωνα με την οποία η έννοια της αναλογίας, όπως αυτή παρεμβαίνει στην επίλυση αναλογικών προβλημάτων (μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός), αποτελεί επιστημολογικό εμπόδιο για τη μετα-αναλογική ενημερότητα των μαθητών, δίνει και τα απαραίτητα μέσα για αποτελεσματική αντιμετώπιση του φαινομένου μέσα από την οργάνωση μιας κατάλληλης διδακτικής κατάστασης. Οι συνθήκες της διδακτικής κατάστασης οργανώνονται με τέτοιο τρόπο, ώστε να οδηγήσουν τους μαθητές στην απόρριψη της πανάκειας του γραμμικού μοντέλου, χωρίς την άμεση εμπλοκή του δασκάλου. Η επιτυχία της προσέγγισης αυτής είναι καθοριστική για την αντιμετώπιση του φαινομένου της ψευδαίσθησης της αναλογίας, αφού μέχρι σήμερα δεν υπάρχει στη βιβλιογραφία κάποιο ολοκληρωμένο πλαίσιο αντιμετώπισής του φαινομένου, το οποίο να συνοδεύεται παράλληλα και με τα επιθυμητά αποτελέσματα.

Παραδοχές της Έρευνας

Για να είναι δυνατή η διεκπεραίωση της παρούσας ερευνητικής εργασίας υιοθετούνται οι πιο κάτω παραδοχές:

1. Τα δοκίμια, τα οποία έχουν χορηγηθεί, μετρούν στην πραγματικότητα την ικανότητα των μαθητών για αναλογικό συλλογισμό, μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό καθώς και τη μετα-αναλογική τους ενημερότητα.
2. Οι μαθητές έχουν εργαστεί ατομικά στα δοκίμια που τους χορηγήθηκαν και η απόδοσή τους είναι αντιπροσωπευτική των δυνατοτήτων τους.
3. Οι εκπαιδευτικοί έχουν ακολουθήσει πιστά τις οδηγίες χορήγησης των δοκιμίων λόγω των σύντομων σεμιναρίων που παρακολούθησαν σχετικά με το σκεπτικό της έρευνας και δεν προέβηκαν σε ενέργειες που είτε έχουν διευκολύνει είτε έχουν δυσχεραίνει τη συμπλήρωση των δοκιμίων από τους μαθητές.
4. Οι βαθμολογίες, οι οποίες έχουν δώσει οι εκπαιδευτικοί στους μαθητές στα μαθήματα των ελληνικών και των μαθηματικών, είναι ενδεικτικές της ικανότητας των μαθητών.

Περιορισμοί της Έρευνας

Ένας από τους κύριους στόχους της παρούσας εργασίας είναι η επιβεβαίωση ενός σφαιρικού μοντέλου μαθηματικής αναλογικής σκέψης. Για την ορθή μέτρηση των τριών διαστάσεων του μοντέλου χρειάζεται ένας μεγάλος αριθμός έργων. Έτσι, κρίθηκε σκόπιμο να περιοριστεί το εύρος των έργων που αφορούν στην τρίτη διάσταση του μοντέλου για να γίνουν πιο λειτουργικά από άποψης χρόνου τα δοκίμια που χορηγήθηκαν στους μαθητές. Συνεπώς, η διερεύνηση της μετα-αναλογικής ενημερότητας των μαθητών, γίνεται κυρίως μέσα από έργα εμβαδού. Ο λόγος που προτιμήθηκαν τα έργα εμβαδού βρίσκεται στα ιστορικά-διαχρονικά χαρακτηριστικά που έχει το φαινόμενο του διπλασιασμού της πλευράς και αναλόγως του εμβαδού του τετραγώνου (Bunt, Jones & Bedient, 1988; Φράγκος, 1983), στοιχείο που θα υποστηρίξει τη θέση για ερμηνεία του αναλογικού μοντέλου ως επιστημολογικού εμποδίου.

Ορισμοί Κυριότερων Εννοιών

Αναλογικός συλλογισμός. Ο όρος αναλογικός συλλογισμός χρησιμοποιείται στη θέση του αγγλικού όρου του "analogical reasoning" που έχει ψυχολογικές διαστάσεις. Συγκεκριμένα, ο αναλογικός συλλογισμός, περιλαμβάνει τη μεταφορά δομικών πληροφοριών από ένα σύστημα (πηγή) σε ένα άλλο (στόχο). Αυτή η μεταφορά πραγματοποιείται με την εύρεση της αντιστοιχίας ανάμεσα στα δύο συστήματα (Vosniadou, 1989). Τα συστήματα αυτά μπορεί να συνιστούν έννοιες, θεωρίες ή και προβληματικές καταστάσεις, ενώ παράλληλα στις περισσότερες περιπτώσεις ανήκουν και σε εντελώς διαφορετικά πεδία, με όμοια όμως δομή.

Μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός. Ο όρος μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός χρησιμοποιείται στη θέση του αγγλικού όρου "proportional reasoning". Σύμφωνα με τους Lesh et al. (1988) ο μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός αποτελεί «μια μορφή μαθηματικού συλλογισμού η οποία περιλαμβάνει την ικανότητα ταυτόχρονης επεξεργασίας διάφορων πληροφοριών μέσα από πολλαπλές συγκρίσεις και συν-μεταβολές». Η έννοια της μαθηματικής αναλογίας περιλαμβάνει μια σχέση ισότητας ανάμεσα σε δύο λόγους (Freudenthal, 1973; Christou & Philippou, 2002) και ιστορικά θεωρείται ταυτόσημη με τη γεωμετρική αναλογία ($\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\delta}{\gamma}$).

Μετα-αναλογική ενημερότητα. Η μετα-αναλογική ενημερότητα ορίζεται σε σχέση με τη μεταγνώση και σχετίζεται με τη γνώση και τον έλεγχο των συγκεκριμένων γνωστικών διαδικασιών που αφορούν στο μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό. Ειδικότερα, αναφέρεται στην ικανότητα διάκρισης των αναλογικών από τις μη αναλογικές καταστάσεις και κατ' επέκταση στην ορθή επίλυσή τους.

Ψευδαίσθηση της αναλογίας/ Ψευδοαναλογία. Ο όρος αναφέρεται στην ευρεία εφαρμογή του αναλογικού μοντέλου σε μη αναλογικές καταστάσεις, οι οποίες έχουν πολλαπλασιαστική δομή και δημιουργώντας μια ψευδαίσθηση για την ύπαρξη αναλογίας, με αποτέλεσμα τη δημιουργία πολλών λαθών (De Bock et al., 1998). Αυτό το φαινόμενο είναι τόσο έντονο που οι μαθητές, χρησιμοποιώντας το γραμμικό μοντέλο αυθόρμητα, ακόμα και σε καταστάσεις για τις οποίες δεν είναι κατάλληλο, διακατέχονται από μία βεβαιότητα για την ορθότητα των απαντήσεών τους (De Bock et al., 2002a).

Γραμμικό μοντέλο. Ο όρος γραμμικό ή αναλογικό μοντέλο θεωρείται ταυτόσημος με τη γραμμική συνάρτηση $f(x) = ax$ (όπου $\alpha \neq 0$), η οποία μπορεί να περιγράψει μαθηματικά κάθε αναλογική σχέση (Grenier, 1999; De Bock et al., 2002b; Nabors, 2003). Όλες οι σχέσεις οι οποίες βασίζονται στο μοντέλο αυτό αναπαρίστανται γραφικά με μία ευθεία γραμμή η οποία περνά από την αρχή των αξόνων και χαρακτηρίζονται από τις σχέσεις $f(ka) = k\,f(a)$ *και* $f(a+b) = f(a) + f(b)$ (Van Dooren, 2005).

Επιστημολογικό εμπόδιο. Ο όρος "επιστημολογικό εμπόδιο" σχετίζεται με εκείνα τα «λάθη» τα οποία οφείλονται στην ίδια τη φύση του αντικειμένου και τα οποία χαρακτηρίζονται από την επανεμφάνισή τους τόσο στην ιστορία των μαθηματικών όσο και στη μάθηση των μαθηματικών από το ίδιο το άτομο. Όπως αναφέρει χαρακτηριστικά ο Brousseau (1997, σελ. 163), «τα εμπόδια τα οποία χαρακτηρίζονται ως επιστημολογικά είναι αυτά που δε μπορούν να αποφευχθούν, έχοντας καθοριστικό ρόλο στην ίδια τη μάθηση, ενώ παράλληλα μπορούν να εντοπιστούν και στην ιστορική εξέλιξη των ίδιων των εννοιών». Ένα επιστημολογικό εμπόδιο αποτελεί στην ουσία την πηγή ενός επαναλαμβανόμενου και μη τυχαίου λάθους, το οποίο εμφανίζεται όταν τα άτομα προσπαθούν να επιλύσουν ένα πρόβλημα (Radford et al., 2000).

Διδακτική κατάσταση. Ο όρος "διδακτική κατάσταση" αναφέρεται στην οργάνωση από το δάσκαλο και στην εμπλοκή των μαθητών σε μια προβληματική κατάσταση στην οποία η γνώση, η οποία αποτελεί εμπόδιο να μην μπορεί να αφομοιωθεί και έτσι να αποσταθεροποιηθεί, να γίνει αναποτελεσματική, άχρηστη και εντέλει να απορριφθεί. Η «κατάσταση» αποτελεί ένα ευρύτερο πρόβλημα, το οποίο κάνει απαραίτητη μία προσαρμογή, μία απάντηση από μέρους του μαθητή και προσδιορίζει το σύνολο των συνθηκών με τις οποίες ο μαθητής αλληλεπιδρά σε ένα συγκεκριμένο περιβάλλον και οι οποίες καθορίζουν τις δράσεις του (Brousseau, 1997). Κύριο χαρακτηριστικό της διδακτικής κατάστασης είναι η μεταβίβαση-εκχώρηση από το δάσκαλο στο μαθητή της ευθύνης για την οικοδόμηση της γνώσης, που θα έχει ως συνέπεια τη μάθηση (Brousseau & Gibel, 2005).

Δομή της Ερευνητικής Εργασίας

Η παρούσα ερευνητική πρόταση, η οποία περιλαμβάνει το σχεδιασμό και την οργάνωση μιας ερευνητικής προσπάθειας, ολοκληρώνεται σε πέντε κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο έχουν παρουσιαστεί κάποια εισαγωγικά στοιχεία σχετικά με το μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό και τη σχέση του με το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας, όπως αυτά παρατίθενται στη βιβλιογραφία. Παράλληλα, έχουν περιγραφεί αναλυτικά ο σκοπός της έρευνας, η σημασία διεξαγωγής της και τα ερευνητικά ερωτήματα.

Στο δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας παρουσιάζεται εκτεταμένα η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας που σχετίζεται με τις βασικές πτυχές που μελετώνται. Αρχικά, ορίζεται η έννοια του αναλογικού συλλογισμού κάνοντας αναφορά τόσο σε δομικές θεωρίες μάθησης (Inhelder & Piaget, 1958) όσο και σε θεωρίες επεξεργασίας πληροφοριών (Sternberg, 1977) και γίνεται μια σύντομη αναφορά στη σχέση της με τη μαθηματική ικανότητα, καλύπτοντας τη πρώτη διάσταση του προτεινόμενου προς επιβεβαίωση μοντέλου. Στη συνέχεια, γίνεται εκτενής αναφορά στη δεύτερη διάσταση του μοντέλου που αφορά στο μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό. Συγκεκριμένα, ορίζεται η έννοια του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και γίνεται αναφορά στα στάδια εξέλιξης του. Παρουσιάζονται οι στρατηγικές επίλυσης αναλογικών προβλημάτων και το πώς εμφανίζεται ο μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός στη σχολική πραγματικότητα σε σχέση ακριβώς με αυτές τις στρατηγικές και τα στάδια τα οποία πιθανόν να υποδηλώνουν. Ακολουθεί η μελέτη της τρίτης διάστασης του μοντέλου που αναφέρεται στη μετα-αναλογική ενημερότητα. Αφού οριστεί ο όρος σε σχέση με τη μεταγνώση γίνεται μια προσπάθεια συσχέτισής του με το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας. Το φαινόμενο αναλύεται εκτενώς και παρουσιάζονται ποικίλα παραδείγματα στα οποία εμφανίζεται μέσα από την αριθμητική, την άλγεβρα και τις πιθανότητες. Η ερευνητική εργασία εστιάζεται στο χώρο της μέτρησης στη γεωμετρία και σε ερευνητικά δεδομένα, συμπεριλαμβανομένου και του χώρου της κυπριακής εκπαίδευσης, που κάνουν εμφανές το πραγματικό μέγεθος του φαινομένου της ψευδαίσθησης της αναλογίας, ενώ παράλληλα δίνουν ενδείξεις για τη φύση του. Το δεύτερο κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την ανάλυση των χαρακτηριστικών και των σταδίων που εμπεριέχονται σε μια διδακτική κατάσταση, και η οποία θεωρείται ως το μέσο για αντιμετώπιση κάθε επιστημολογικού εμποδίου.

Το περιεχόμενο του τρίτου κεφαλαίου περιλαμβάνει το σχεδιασμό της έρευνας που έχει διεξαχθεί στα πλαίσια υλοποίησης των στόχων της παρούσας εργασίας. Μετά από μια σύντομη εισαγωγή, καταγράφονται όλα τα στοιχεία τα οποία σχετίζονται με τη μεθοδολογία που έχει ακολουθηθεί για τη διεξαγωγή της έρευνας. Συγκεκριμένα, παρουσιάζεται το δείγμα που έχει χρησιμοποιηθεί στην έρευνα και η διαδικασία ανάπτυξής της και περιγράφονται αναλυτικά τα έργα που χρησιμοποιήθηκαν για τη μέτρηση των ικανοτήτων των μαθητών στον αναλογικό συλλογισμό, το μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό και στη μετα-αναλογική ενημερότητα. Ακολουθεί παρουσίαση της διδακτικής κατάστασης που έχει εφαρμοστεί για αντιμετώπιση του επιστημολογικού εμποδίου της αναλογίας και περιγράφονται αναλυτικά τα τέσσερα στάδιά της. Το κεφάλαιο αυτό ολοκληρώνεται με την αναλυτική περιγραφή της στατιστικής ανάλυσης που έχει εφαρμοστεί για την εξέταση των ερευνητικών υποθέσεων, καθώς και στοιχείων που αναφέρονται στην εγκυρότητα και την αξιοπιστία των δοκιμίων.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα, τα οποία προέκυψαν από τις πιο πάνω αναλύσεις και τα οποία έχουν οργανωθεί σε τρία μέρη με βάση τα ποσοτικά ή ποιοτικά τους χαρακτηριστικά. Ταυτόχρονα, σε καθένα από τα τρία μέρη επιχειρείται μια σύνοψη και προκαταρκτική ερμηνεία των κυριοτέρων αποτελεσμάτων. Τα δύο πρώτα μέρη αφορούν την Α’ Φάση της εργασίας και σε αυτά παρουσιάζονται ποσοτικά αποτελέσματα, τα οποία αναφέρονται στην επίλυση των έργων των δοκιμίων από τους μαθητές. Συγκεκριμένα, στο πρώτο μέρος του κεφαλαίου εξετάζονται τα δύο πρώτα ερευνητικά ερωτήματα, τα οποία αναφέρονται στο βαθμό επιβεβαίωσης του προτεινόμενου μοντέλου ερμηνείας μαθηματικής αναλογικής σκέψης και στην εξέλιξη της επίδοσης των μαθητών σε έργα αναλογικού συλλογισμού, μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας. Το δεύτερο μέρος των αποτελεσμάτων είναι επίσης ποσοτικό και σχετίζεται με τις στρατηγικές επίλυσης των έργων των δοκιμίων. Συγκεκριμένα, στο μέρος αυτό εξετάζεται το πώς διαφοροποιούνται οι στρατηγικές επίλυσης των αναλογικών και των μη αναλογικών προβλημάτων από τάξη σε τάξη, καθώς και το αν η χρήση συγκεκριμένων στρατηγικών επίλυσης μαθηματικών αναλογικών προβλημάτων σχετίζεται με την ικανότητα επίλυσης έργων μετα-αναλογικής ενημερότητας. Το τρίτο και τελευταίο μέρος του κεφαλαίου των αποτελεσμάτων είναι ποιοτικό και αφορά στη Β’ φάση της ερευνητικής εργασίας και ειδικότερα την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος της διδακτικής κατάστασης. Ειδικότερα, παρουσιάζονται τα τέσσερα στάδια της εφαρμογής της θεμελιώδους κατάστασης στους μαθητές και αναλύονται στοιχεία, τα οποία σχετίζονται με την επίδραση του προγράμματος στη διαφοροποίηση της μετα-αναλογικής τους ενημερότητας.

Στο τελευταίο κεφάλαιο των συμπερασμάτων, γίνεται μια εκτενής ανάλυση των βασικότερων πορισμάτων της εργασίας, η οποία υποστηρίζεται και συνδέεται με ευρήματα άλλων ερευνών. Ταυτόχρονα, εντοπίζονται εκείνα τα σημεία της παρούσας έρευνας που αποτελούν σημαντική συμβολή στη βιβλιογραφία, ενώ συνάμα γίνονται και εισηγήσεις για περαιτέρω έρευνα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Εισαγωγή

Οι μαθητές ανεξάρτητα από την ηλικία, την καταγωγή και την επίδοσή τους έχουν βιώσει σε κάποια φάση της ζωής τους μια, μικρή ή μεγάλη, αποτυχία στα μαθηματικά (Gagatsis & Kyriakides, 2000). Έτσι, ήταν πολύ φυσικό, τόσο για τους εκπαιδευτικούς όσο και για τους ψυχολόγους, να δείξουν από πολύ νωρίς ενδιαφέρον για το συγκεκριμένο θέμα. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα τη δημιουργία πολλών θεωριών για τη φύση των λαθών στα μαθηματικά, για την ερμηνεία τους, καθώς και για πιθανούς τρόπους αντιμετώπισής τους (Radford et al., 2000; Stavy & Tirosh, 2000; Bagni, 2001).

Αρκετά λάθη στα μαθηματικά πηγάζουν από τη γενικευμένη τάση προς την εφαρμογή της γραμμικής συνάρτησης σε όλες ανεξαιρέτως τις καταστάσεις που η λεκτική τους διατύπωση προσομοιάζει με αυτή των τυπικών αναλογικών έργων (Greer, 1997). Ο λόγος βρίσκεται στο ότι οι γραμμικές σχέσεις αποτελούν ένα βασικό μοντέλο μέσα από το οποίο μπορούμε εύκολα και γρήγορα να προσεγγίσουμε τόσο πρακτικές όσο και θεωρητικές προβληματικές καταστάσεις στα μαθηματικά και την επιστήμη. Το γεγονός ακόμη, ότι η έννοια της αναλογίας συναντάται στους αρχαίους πολιτισμούς της Αιγύπτου και Βαβυλώνας αποκαλύπτει την αυξημένη σπουδαιότητά της για την καθημερινή ζωή του ανθρώπου (Γαγάτσης & Καφίδας, 1995).

Στις μέρες μας δίνεται μεγάλη έμφαση στις αναλογικές σχέσεις όπως φαίνεται από τα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών τόσο της Δημοτικής όσο και της Μέσης εκπαίδευσης (Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού, 1996). Η έννοια της αναλογίας εμφανίζεται μέσα από μια πληθώρα διαφορετικών πλαισίων, κάνοντας εμφανές ότι ο μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός δεν αποτελεί μια απόλυτη ιδέα με μονοσήμαντο νόημα (Lamon, 1999a).

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν πολλές περιγραφές οι οποίες προσπαθούν να ορίσουν την έννοια του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού. Είναι σημαντικό να διευκρινιστεί ότι οι όροι «μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός» και «αναλογικός συλλογισμός» δε χρησιμοποιούνται ως ταυτόσημοι. Ο όρος μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός χρησιμοποιείται στη θέση του αγγλικού όρου "proportional reasoning", ενώ ο αναλογικός συλλογισμός στη θέση του "analogical reasoning". Ο μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός αποτελεί «μια μορφή μαθηματικού συλλογισμού, η οποία περιλαμβάνει την ικανότητα ταυτόχρονης επεξεργασίας διαφόρων πληροφοριών μέσα από πολλαπλές συγκρίσεις και συμμεταβολές» (Lesh et al., 1988).

Ο αναλογικός συλλογισμός από την άλλη, περιλαμβάνει τη μεταφορά δομικών πληροφοριών από ένα σύστημα (πηγή) σε ένα άλλο (στόχο). Αυτή η μεταφορά πραγματοποιείται με την εύρεση της αντιστοιχίας ανάμεσα στα δύο συστήματα, τα οποία μπορεί να συνιστούν έννοιες, θεωρίες ή ακόμα και ιστορίες (Vosniadou, 1989). Οι Inhelder και Piaget (1958) θεωρούν ότι το βασικό χαρακτηριστικό του αναλογικού συλλογισμού είναι ότι εστιάζεται στην περιγραφή, πρόβλεψη και αξιολόγηση της σχέσης ανάμεσα σε δύο άλλες σχέσεις. Δηλαδή, περιλαμβάνει μια δεύτερου βαθμού σχέση και όχι απλά μια σχέση ανάμεσα σε δύο διακριτά αντικείμενα ή έννοιες. Αντίστοιχα, μπορεί να θεωρηθεί ότι ο μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός εστιάζεται σε μια δεύτερου βαθμού σχέση, η οποία περιλαμβάνει μια σχέση ισότητας ανάμεσα σε δύο λόγους (Lamon, 1999a; Christou & Philippou, 2002).

Στην παρούσα ερευνητική εργασία επιχειρείται ο καθορισμός ενός διαφορετικού πλαισίου ερμηνείας της ευρύτερης μαθηματικής σκέψης του ατόμου αναλύοντας τρεις διαστάσεις, οι οποίες αναφέρονται στην ικανότητα του ατόμου για αναλογικό συλλογισμό, για μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό και στη μετα-αναλογική του ενημερότητα. Οι τρεις αυτές διαστάσεις αποτελούν και τη βάση οργάνωσης του δεύτερου κεφαλαίου της εργασίας. Αρχικά ορίζεται η έννοια του αναλογικού συλλογισμού κάνοντας αναφορά τόσο σε δομικές θεωρίες μάθησης (Inhelder & Piaget, 1958) όσο και σε θεωρίες επεξεργασίας πληροφοριών (Sternberg, 1977) και γίνεται μια σύντομη αναφορά στη σχέση της με τη μαθηματική ικανότητα. Στη συνέχεια, γίνεται εκτενής αναφορά στη διάσταση του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού. Αρχικά παρουσιάζεται ο ορισμός της έννοιας και τα στάδια εξέλιξης του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού. Αναλύονται, οι στρατηγικές επίλυσης αναλογικών προβλημάτων και ο τρόπος με τον οποίο εμφανίζεται ο μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός στα σχολικά πλαίσια, σε σχέση ακριβώς με αυτές τις στρατηγικές και τα στάδια τα οποία πιθανόν να υποδηλώνουν.

Ακολουθεί ο ορισμός της έννοιας της μετα-αναλογικής ενημερότητας σε σχέση με τη μεταγνώση και υποστηρίζεται η σύνδεσή της με το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας. Το φαινόμενο αναλύεται εκτενώς και παρουσιάζονται ποικίλα παραδείγματα στα οποία εμφανίζεται μέσα από την αριθμητική, την άλγεβρα και τις πιθανότητες. Η ερευνητική εργασία εστιάζεται στο χώρο της μέτρησης στη γεωμετρία και σε ερευνητικά δεδομένα που παρέχουν ενδείξεις για τη φύση του φαινομένου της ψευδαίσθησης της αναλογίας. Τέλος, ορίζεται η έννοια του επιστημολογικού εμποδίου και αναλύονται τα χαρακτηριστικά στοιχεία και τα σταδία που εμπεριέχονται σε μια διδακτική κατάσταση, η οποία θεωρείται ως το μέσο για αντιμετώπιση κάθε επιστημολογικού εμποδίου.

Αναλογικός Συλλογισμός

Ο αναλογικός συλλογισμός αποτελεί έναν από τους πιο σημαντικούς μηχανισμούς της γνωστικής ανάπτυξης του ατόμου. Ως έννοια, ο αναλογικός συλλογισμός είναι άμεσα συνυφασμένος με τον επαγωγικό συλλογισμό, δηλαδή τη διαδικασία εκείνη που οδηγεί στην εξαγωγή γενικών συμπερασμάτων ή κανόνων από ειδικές περιπτώσεις (NCTM, 2000). Ο επαγωγικός συλλογισμός θεωρείται θεμελιώδης για την οργάνωση της επεξεργασίας των πληροφοριών και την αναδιάταξη της αναπαράστασης της γνώσης. Έτσι, είναι αναπόσπαστα συνδεδεμένος με τη λύση προβλήματος αλλά και την ανάπτυξη μεταγνωστικών δεξιοτήτων (Holland et al., 1989). Ιδιαίτερα ο αναλογικός συλλογισμός, ως ένας μηχανισμός επαγωγής, υποβοηθά την επίλυση προβλήματος αφού επιτρέπει τη μεταφορά ήδη υπάρχουσας γνώσης και δεξιοτήτων σε καινούριες πληροφορίες και έργα. Παράλληλα, θεωρείται απαραίτητος για τη μάθηση και την οικοδόμηση νοητικών μοντέλων (Meadows, 1993).

Ένα παράδειγμα οικοδόμησης ενός τέτοιου μοντέλου έδωσε μόλις το 2ο αιώνα π. Χ. ο Έλληνας στωικός Χρύσιππος, ο οποίος μέσω του αναλογικού συλλογισμού, χρησιμοποίησε κύματα νερού για να δείξει τη φύση του ήχου, επιλύοντας με τον τρόπο αυτό ένα σημαντικό πρόβλημα της εποχής (English, 2004). Αργότερα, ο Kekule (1865) κατάφερε να περιγράψει τη μοριακή δομή του βενζολίου βασιζόμενος στην αναλογία που παρουσίαζε με το σχήμα που δημιουργείται όταν ένα φίδι δαγκώνει την ουρά του (Goswami, 2004).

Είναι εμφανές ότι η αναλογία αποτελεί μια εννοιολογική στρατηγική μέσω της οποίας το άτομο μπορεί να ερμηνεύει και να κατανοεί άγνωστες έννοιες, αντιπαραβάλλοντας τις με έννοιες ήδη γνωστές και κατανοητές (Richland, Morrison & Holyoak, 2006). Ο αναλογικός συλλογισμός όχι μόνο συνεισφέρει στην κατανόηση νέων εννοιών, αλλά ταυτόχρονα βοηθά και στην ανάπτυξη της κριτικής σκέψης και στην επίλυση προβλήματος (Goswami, 1992).

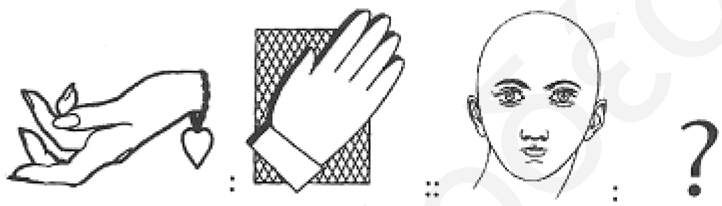
Όταν το άτομο μπορεί να αντιληφθεί ουσιαστικές διαφορές ανάμεσα σε δύο αντικείμενα ή γεγονότα, ή όταν μπορεί να συσχετίσει κάποιο χαρακτηριστικό ενός αντικειμένου ή μιας έννοιας με την τάξη στην οποία ανήκει, τότε παρουσιάζει θεμελιώδη χαρακτηριστικά αναλογικού συλλογισμού (White, Alexander & Daughery, 1998). Ουσιαστικά ο αναλογικός συλλογισμός περιλαμβάνει την αναγνώριση και μεταφορά δομικών πληροφοριών από ένα σύστημα (πηγή) σε ένα άλλο (στόχο). Αυτή η μεταφορά πραγματοποιείται με την εύρεση της αντιστοιχίας ανάμεσα στις διαδικασίες και τους μηχανισμούς που χαρακτηρίζουν τα δύο συστήματα (Vosniadou, 1989). Τα συστήματα αυτά μπορεί να συνιστούν έννοιες, θεωρίες ή και προβληματικές καταστάσεις, ενώ παράλληλα στις περισσότερες περιπτώσεις ανήκουν και σε εντελώς διαφορετικά πεδία με όμοια όμως δομή. Αυτά τα χαρακτηριστικά μπορούν να υποστηρίξουν ένα διαφορετικό ορισμό του αναλογικού συλλογισμού ως «της ικανότητας συλλογισμού με μοτίβα», η οποία περιλαμβάνει τον εντοπισμό και την αναγνώριση της επανεμφάνισης του μοτίβου ανεξάρτητα από τη διαφοροποίηση των στοιχείων που μπορεί αυτό να περιλαμβάνει (English, 2004).

Η μελέτη του αναλογικού συλλογισμού είναι δυνατή μέσα από δύο είδη έργων: τις «κλασσικές αναλογίες», που έχουν την τυπική Αριστοτελική μορφή, και τις καταστάσεις επίλυσης προβλήματος (Goswami, 1992). Στις καταστάσεις λύσης προβλήματος ο αναλογικός συλλογισμός χρησιμοποιείται για τη δημιουργία νέων κανόνων, οι οποίοι θα μπορούν να εφαρμόζονται σε ένα νέο πρόβλημα (στόχο) (Holland et al., 1989). Η δημιουργία των νέων κανόνων επιτυγχάνεται μέσω της μεταφοράς της γνώσης από ένα πεδίο που είναι κατανοητό στο γνωστικό σύστημα(πηγή), σε ένα νέο πρόβλημα (στόχο). Ο βαθμός στον οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια αναλογία εξαρτάται από την αναγνώριση και τη διαχείριση σημαντικών ομοιοτήτων ανάμεσα στο στόχο και την πηγή.

Το δεύτερο είδος έργων που αποσκοπούν στη μελέτη του αναλογικού συλλογισμού είναι οι κλασσικές αναλογίες, οι οποίες έχουν χρησιμοποιηθεί συστηματικά σε ψυχομετρικά τεστ για τη μέτρηση του δείκτη νοημοσύνης (Goswami, 1992). Περιλαμβάνουν τουλάχιστον τέσσερις έννοιες, χαρακτηριστικό των οποίων είναι ότι η ίδια σχέση που συνδέει την πρώτη με τη δεύτερη έννοια, συνδέει την τρίτη με την τέταρτη. Η μορφή των κλασσικών αναλογιών αναπαριστάται από τον τύπο Α:Β :: Γ:Δ, όπου η σχέση ανάμεσα στους όρους Α και Β πρέπει να είναι ισοδύναμη με τη σχέση ανάμεσα στους όρους Γ και Δ (Πίνακας 2).

Πίνακας 2

Παραδείγματα Λεκτικών, Εικονικών και Αριθμητικών Αναλογιών

Λεκτική αναλογία	φαγητό: σώμα :: βροχή:_________ (Goswami, 1992)
Εικονική αναλογία	 (Lamon, 1999α)
Αριθμητική αναλογία	5:125 :: 4:64 :: 2:8 :: 3:_______ (Goswami, 1992)

Θεωρίες Ανάπτυξης του Αναλογικού Συλλογισμού

Πέρα από τους βασικούς ορισμούς του αναλογικού συλλογισμού, στη βιβλιογραφία παρουσιάζονται διαφορετικές απόψεις και θεωρίες ως προς τη φύση του αναλογικού συλλογισμού και το βαθμό στον οποίο τα μικρά παιδιά είναι ικανά για κάτι τέτοιο. Οι δομικές θεωρίες ανάπτυξης του αναλογικού συλλογισμού δίνουν έμφαση στα δύο επίπεδα σχέσεων που δίνουν τη λύση σε ένα τυπικό αναλογικό έργο της μορφής Α:Β :: Γ:Δ (White et al., 1998). Οι πρώτου επιπέδου σχέσεις είναι απλούστερες και αφορούν στους πλησίον όρους, Α:Β και Γ:Δ. Αντίθετα, οι δεύτερου επιπέδου σχέσεις αφορούν στον καθορισμό κάποιου είδους δομικής ομοιότητας ανάμεσα στους πιο απομακρυσμένους όρους. Συγκεκριμένα, οι δευτέρου επιπέδου σχέσεις συνδέουν με κάποιο τρόπο τις πρώτου επιπέδου σχέσεις, δηλαδή την ομάδα Α:Β με την ομάδα Γ:Δ (Goswami, 1992).

Η πιο γνωστή δομική θεωρία ανάπτυξης του αναλογικού συλλογισμού είναι αυτή του Piaget (Inhelder & Piaget, 1958), σύμφωνα με την οποία η αναλογική σκέψη εμφανίζεται στην ηλικία των 11 με 12 ετών, δηλαδή στο στάδιο των τυπικών λειτουργιών.

Πριν από την ηλικία των 11-12 ετών το παιδί, σύμφωνα πάντα με τον Piaget, δεν είναι ικανό για αναλογικό συλλογισμό αφού δεν μπορεί να εντοπίσει δευτέρου επιπέδου σχέσεις ανάμεσα στους όρους ενός αναλογικού έργου (Goswami, 1992; Meadows, 1993).

Ένα διαφορετικό πλαίσιο μελέτης του αναλογικού συλλογισμού παρέχεται από τις θεωρίες επεξεργασίας πληροφοριών. Εδώ, δίνεται έμφαση στο πώς διεκπεραιώνεται ο αναλογικός συλλογισμός και ειδικότερα στις γνωστικές και μεταγνωστικές διαδικασίες που συνθέτουν την αναλογική διαδικασία. Σε αυτά τα πλαίσια αναπτύχθηκε από τον Sternberg (1977) η «Θεωρία των Συστατικών Στοιχείων της Αναλογικής Σκέψης». Η θεμελιώδης μονάδα της θεωρίας είναι το «συστατικό», το οποίο ορίζεται ως μια στοιχειώδης διαδικασία που δρα πάνω στις εσωτερικές αναπαραστάσεις εννοιών και αντικειμένων. Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή υπάρχουν πέντε συστατικά-διαδικασίες τα οποία λαμβάνουν χώρα στον αναλογικό συλλογισμό (Sternberg & Rifkin, 1979).

Η πρώτη διαδικασία αναφέρεται στην *κωδικοποίηση* των όρων της αναλογίας, έτσι ώστε το άτομο να μπορεί να αναγνωρίσει συγκεκριμένες ιδιότητες ή χαρακτηριστικά μίας δεδομένης κατάστασης, έννοιας ή αντικειμένου. Η κωδικοποίηση είναι δυνατή με το μετασχηματισμό των όρων της αναλογίας σε μία εσωτερική αναπαράσταση πάνω στην οποία να μπορούν να διεξαχθούν περαιτέρω μετασχηματισμοί (McConaghy & Kirby, 1987). Η δεύτερη διαδικασία αναφέρεται στην *εξαγωγή συμπερασματικών σχέσεων* μεταξύ των πρώτων όρων του έργου Α και Β. Ακολουθεί η διαδικασία της *χαρτογράφησης* όπου γίνεται ο εντοπισμός της δευτέρου επιπέδου σχέσης ανάμεσα στους όρους Α:Β και Γ:Δ. Αυτό γίνεται εφικτό με τον εντοπισμό της σχέσης μεταξύ των όρων Α και Γ (Sternberg & Rifkin, 1979). Τέλος, με τη διαδικασία της *εφαρμογής*, επιλέγεται ο καταλληλότερος όρος ο οποίος θα αποτελέσει και τη λύση του αναλογικού έργου.

Ο βαθμός στον οποίο λαμβάνουν χώρα οι πιο πάνω διαδικασίες αλλά και η ικανότητα για εφαρμογή των συστατικών στοιχείων αποτελούν σύμφωνα με τη Θεωρία των Συστατικών Στοιχείων της Αναλογικής Σκέψης, παράγοντες διαφοροποίησης της ικανότητας για αναλογικό συλλογισμό. Συγκεκριμένα, έρευνες των Sternberg και Rifkin (1979) έδειξαν ότι η διαφορά στην επίδοση σε αναλογικά έργα ανάμεσα σε ενήλικες και παιδιά, βρίσκεται στο ότι οι ενήλικες αφιέρωναν περισσότερο χρόνο στη διαδικασία της κωδικοποίησης γεγονός που σχετιζόταν με πιο αποτελεσματική διεκπεραίωση των έργων.

Παρά τις ενδείξεις των Sternberg και Rifkin (1979) καθώς και των Inhelder και Piaget (1958) για την αδυναμία παιδιών κάτω των 12 ετών για αναλογικό συλλογισμό, υπάρχουν ερευνητικά δεδομένα που εντοπίζουν το αντίθετο. Συγκεκριμένα, φαίνεται ότι τα μικρά παιδιά μπορούν να χρησιμοποιήσουν αναλογικό συλλογισμό τόσο σε έργα κλασσικών αναλογιών όσο και σε έργα επίλυσης προβλήματος όταν αντιληφθούν τη φύση των συγκεκριμένων έργων και τις σχέσεις πάνω στις οποίες βασίζονται (Meadows, 1993). Για το σκοπό αυτό, είναι αναγκαίο το περιεχόμενο του έργου να είναι κατάλληλο για την ηλικία του παιδιού ενώ ταυτόχρονα να παρουσιάζεται σε ένα γνωστό, κατανοητό και ενδιαφέρον πλαίσιο (Goswami, 1992).

Αναλογικός Συλλογισμός και Μαθηματική Ικανότητα

Ο μαθηματικός συλλογισμός θεωρείται ως η ικανότητα αντίληψης των βασικών ιδιοτήτων αντικειμένων ή συμβόλων, συσχέτισής τους με τις αφηρημένες έννοιες που φανερώνουν και αναγνώρισης και αξιοποίησης των σχέσεων και των συνδέσεων που υπάρχουν ανάμεσα στα διάφορα αντικείμενα, σύμβολα και έννοιες (English & Halford, 1995). Τα ίδια τα μαθηματικά συχνά αντιμετωπίζονται ως η «επιστήμη των μοτίβων» και κατ' επέκταση το «κάνω μαθηματικά» ως μια αναζήτηση μοτίβων και σχέσεων (Schoenfeld, 1992). Η σχέση της μαθηματικής σκέψης με τον αναλογικό συλλογισμό βρίσκεται στο ότι και τα δύο σχετίζονται με τις ικανότητες του ατόμου να αναγνωρίζει και να γενικεύει μοτίβα και σχέσεις, είτε αυτά αφορούν συγκεκριμένα αντικείμενα είτε αφορούν αφηρημένες έννοιες (Gonswami, 1992; Sternberg, 1997). Κατά συνέπεια, δε μπορεί παρά ο αναλογικός και ο μαθηματικός συλλογισμός να σχετίζονται και να συνδέονται ως γνωστικές διαδικασίες, οι οποίες είναι απαραίτητες για τη δημιουργία και την οργάνωση της εννοιολογικής γνώσης (Deal & Hardy, 2004; English, 2004).

Πρόσφατα, έγινε μια προσπάθεια διερεύνησης της σχέσης που έχει ο αναλογικός συλλογισμός με το μαθηματικό συλλογισμό χρησιμοποιώντας ως δείγμα παιδιά νηπιαγωγείου και των πρώτων τάξεων του δημοτικού σχολείου (White et al., 1998; Buehl & Alexander, 2004; Deal & Hardy, 2004). Η διαχρονική έρευνα των Buehl και Alexander (2004) έδειξε ότι υπάρχει μια αμοιβαία σχέση ανάμεσα στον αναλογικό συλλογισμό και τη μαθηματική σκέψη. Συγκεκριμένα, από τα αποτελέσματα φάνηκε ότι οι ικανότητες των μαθητών στον αναλογικό συλλογισμό συμβάλουν στην ανάπτυξη των μελλοντικών μαθηματικών τους ικανοτήτων, ερμηνεύοντας 57% της διασποράς στην απλή παλινδρομική ανάλυση. Αντίστροφα, οι μαθηματικές ικανότητες των μαθητών ερμήνευαν 77% της διασποράς των μελλοντικών αναλογικών ικανοτήτων των μαθητών.

Ανάλογα αποτελέσματα παρατηρήθηκαν και στην ερευνητική εργασία των Deal και Hardy (2004), η οποία βασίστηκε σε τρεις μελέτες περίπτωσης. Η συγκεκριμένη έρευνα έδειξε ότι για καθένα από τα τρία παιδιά, η ανάπτυξη της ικανότητάς τους για αναλογικό συλλογισμό αντικατόπτριζε ανάπτυξη της αντίστοιχης ικανότητάς τους για μαθηματικό συλλογισμό, χωρίς τα παιδιά να δεχτούν άμεση διδασκαλία στον αναλογικό συλλογισμό. Σημαντικό εύρημα των πιο πάνω ερευνών (White et al., 1998; Buehl & Alexander, 2004) μπορεί να θεωρηθεί επίσης το γεγονός ότι η εύρεση μαθηματικών μοτίβων ήταν ο κύριος συνδετικός κρίκος ανάμεσα στις δύο μορφές συλλογισμού, αναλογικού και μαθηματικού.

Στην παρούσα ερευνητική εργασία, αυτή ακριβώς η εύρεση μοτίβων θα χρησιμοποιηθεί ως ο σύνδεσμος ανάμεσα στον αναλογικό συλλογισμό και στο μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό αυτή τη φορά. Και αυτό γιατί η εύρεση του μοτίβου δε μπορεί να θεωρηθεί ότι διαφέρει από την εύρεση της δομικής ομοιότητας ανάμεσα στους όρους μιας τυπικής αναλογίας της μορφής Α:Β :: Γ:Δ. Και τα δύο συνδέονται με την εύρεση της σχέσης που υπάρχει ανάμεσα σε δύο όρους, είτε αυτοί είναι σύμβολα, είτε αντικείμενα, είτε έννοιες, και την εφαρμογή της. Αυτή η σχέση αναλογικού και μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού εντοπίζεται και από τον Polya (1954), ο οποίος τονίζει ότι η ύπαρξη μαθηματικής αναλογίας (proportion) αποτελεί μια πολύ χαρακτηριστική περίπτωση ύπαρξης αναλογίας (analogy). Αν πάρουμε για παράδειγμα τη σχέση 6:9::10:15 τότε σύμφωνα πάντα με τον Polya (1954, σελ. 15), «το σύστημα των δύο αριθμών 6 και 9 είναι ανάλογο με το σύστημα των αριθμών 10 και 15, από τη στιγμή που τα δύο συστήματα συμφωνούν ως προς το λόγο των αντίστοιχων όρων».

Η σχέση αναλογικού και μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού δεν εντοπίζεται μόνο σε επίπεδο κλασσικών έργων αναλογιών με αριθμούς. Οι Hatano και Sakakibara (2004) αναφέρουν ακριβώς ότι οι μαθητές μπορούν να επωφεληθούν από την επίλυση έργων της μορφής Α:Β :: Γ:Δ, αφού η επίλυση τυπικών μαθηματικών προβλημάτων αναλογίας βασίζεται στην ίδια λογική ανάλυση όπως και ένα κλασσικό έργο αναλογιών. Συγκεκριμένα, ο αναλογικός συλλογισμός και η ικανότητα εντοπισμού της δομικής και όχι απλά της επιφανειακής ομοιότητας που υπάρχει σε οπτικές και λεκτικές σχέσεις, θεωρείται απαραίτητη για να μπορούν οι μαθητές να αντιληφθούν όλες τις σχέσεις που υπάρχουν σε μια μαθηματική αναλογία (Lamon, 1999a). Από τις απαντήσεις των μαθητών σε μια λεκτική αναλογία μπορεί να διαπιστωθεί, αν οι μαθητές εστιάζονται σε επιφανειακές σχέσεις ή αν πραγματικά λαμβάνουν υπόψη τη δομική σχέση που υπάρχει ανάμεσα στους όρους (Goswami, 1992). Αντίστοιχα, θεωρείται ότι αν οι μαθητές έχουν την ικανότητα να εντοπίζουν τη δομική σχέση που υπάρχει ανάμεσα στους όρους μιας τέτοιας λεκτικής αναλογίας, τότε θα μπορούν και ευκολότερα να εντοπίζουν δεύτερου επιπέδου σχέσεις ανάμεσα σε αριθμητικούς λόγους και δε θα μένουν σε επιφανειακές προσθετικές σχέσεις. Το γεγονός αυτό αιτιολογεί θεωρητικά τη συμπερίληψη της διάστασης του αναλογικού συλλογισμού ως αναπόσπαστου μέρους της ερμηνείας της μαθηματικής αναλογικής σκέψης του ατόμου.

Μαθηματικός Αναλογικός Συλλογισμός

Η δεύτερη διάσταση του προτεινόμενου θεωρητικού μοντέλου της μαθηματικής αναλογικής σκέψης αναφέρεται στο μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό. Στα πλαίσια της διάστασης αυτής παρουσιάζεται αναλυτικά ο ορισμός της έννοιας της αναλογίας και στη συνέχεια παρατίθενται στρατηγικές επίλυσης μαθηματικών αναλογικών προβλημάτων. Η λεπτομερής παρουσίαση των στρατηγικών αυτών κρίνεται αναγκαία για την περαιτέρω διερεύνηση εκείνων των στρατηγικών επίλυσης μαθηματικών αναλογικών έργων που σχετίζονται με το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας και συνάμα με τη μετα-αναλογική ενημερότητα των μαθητών. Ταυτόχρονα γίνεται αναφορά στα στάδια ανάπτυξης του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού, τα οποία συνδέονται με τις στρατηγικές των έργων της διάστασης αυτής, αλλά και τις διαφορετικές ηλικιακές ομάδες μαθητών που εξετάζονται στην παρούσα εργασία. Τέλος, η παρουσίαση της υπάρχουσας κατάστασης στα σχολικά εγχειρίδια σε σχέση με την έννοια του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού θεωρείται απαραίτητη, αφού έτσι εντοπίζεται η επικρατούσα τάση να θεωρείται η μαθηματική αναλογική σκέψη ταυτόσημη της ικανότητας επίλυσης μαθηματικών αναλογικών έργων.

Ορισμός

Η έννοια της μαθηματικής αναλογίας περιλαμβάνει μια σχέση ισότητας ανάμεσα σε δύο λόγους (Lamon, 1999a; Christou & Philippou, 2002) και ιστορικά θεωρείται ταυτόσημη με τη γεωμετρική αναλογία ($\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma}$). Ένας λόγος είναι μία σχέση ανάμεσα σε δύο ποσότητες. Επομένως, η κατανόηση της αναλογίας αναφέρεται στην κατανόηση της σχέσης που υπάρχει ανάμεσα σε δύο σχέσεις (Δημητρίου, 1993).

Οι ποσότητες που περιλαμβάνονται σε κάθε μαθηματική αναλογική σχέση μεταβάλλονται πολλαπλασιαστικά. Δηλαδή, πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο παράγοντα. Έτσι, η γραφική παράσταση κάθε αναλογικής σχέσης απεικονίζει μία ευθεία γραμμή η οποία περνά από την αρχή των αξόνων. Κατ' επέκταση, η γραμμική συνάρτηση $f(x) = ax$ (όπου $\alpha \neq 0$) μπορεί να περιγράψει μαθηματικά κάθε αναλογική σχέση (De Bock et al., 2002b; Nabors, 2003; Grenier, 1999).

Ο Vergnaud (1988) μελετώντας το μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό από μια διαφορετική προοπτική, τον αντιμετωπίζει ως μέρος ενός ευρύτερου δικτύου εννοιών και γνώσεων το οποίο ορίζει ως το εννοιολογικό πεδίο των πολλαπλασιαστικών δομών. Σε αυτό, μαζί με τις γραμμικές σχέσεις, περιλαμβάνονται ο πολλαπλασιασμός, η διαίρεση, οι κλασματικοί αριθμοί, οι λόγοι, η πολυδιάστατη ανάλυση και ο διανυσματικός χώρος.

Μέσα σε αυτό το εννοιολογικό πεδίο, ο Vergnaud (1983) εισηγείται ότι υπάρχει ένα μόνο μοντέλο το οποίο εμπλέκεται στην κατανόηση απλών αναλογικών σχέσεων. Ορίζει το μοντέλο αυτό ως ισομορφισμό των μέτρων αφού για την επίλυση των προβλημάτων που περιγράφονται από το συγκεκριμένο μοντέλο οι μαθητές χρησιμοποιούν αυθόρμητα τις ισομορφικές ιδιότητες της γραμμικής συνάρτησης (Vergnaud, 1983):

$$
\begin{aligned}
&f(x+x') = f(x) + f(x') \\
&f(x-x') = f(x) - f(x') \\
&f(\lambda x) = \lambda f(x) \\
&f(\lambda x + \lambda' x') = \lambda f(x) + \lambda' f(x')
\end{aligned}
$$

Στα προβλήματα που εμπίπτουν στο μοντέλο του ισομορφισμού των μέτρων κάθε μεταβλητή παραμένει ανεξάρτητη από την άλλη, ενώ παράλληλοι μετασχηματισμοί διεξάγονται ανάμεσα στις μεταβλητές διατηρώντας τις τιμές τους ανάλογες. Οι μεταβλητές μπορούν να αναπαρασταθούν με ένα πίνακα απλής αντιστοιχίας (Διάγραμμα 2), όπου οι μετασχηματισμοί μπορούν να διεξαχθούν είτε μέσα στο ίδιο μέτρο (ποσότητα) χρησιμοποιώντας ένα αριθμητικό τελεστή (scalar operator), είτε ανάμεσα στα δύο μέτρα (ποσότητες) χρησιμοποιώντας ένα συναρτησιακό τελεστή (functional operator).

	1η ποσότητα		2η ποσότητα
$\Updownarrow$	α	$\Longleftrightarrow$	β
	γ		χ

Διάγραμμα 2. Το μοντέλο του ισομορφισμού των μέτρων για τις απλές αναλογικές σχέσεις.

Οι διαφορετικοί μετασχηματισμοί που προκύπτουν μέσα από το μοντέλο του ισομορφισμού των μέτρων το οποίο προτείνει ο Vergnaud (1983), αντιστοιχούν και σε διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης των διάφορων προβλημάτων οι οποίες αναλύονται πιο κάτω.

Στρατηγικές Επίλυσης Μαθηματικών Αναλογικών Προβλημάτων

Τα προβλήματα αναλογικού συλλογισμού διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες με βάση το είδος των συγκρίσεων που χρησιμοποιούνται κατά την επίλυσή τους. Κατά συνέπεια, οι συγκρίσεις αυτές αντανακλούν και τις στρατηγικές οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση των αναλογικών προβλημάτων. Οι συγκρίσεις αυτές δεν είναι άλλες από τους διαφορετικούς μετασχηματισμούς τους οποίους προτείνει ο Vergnaud (1983) και οποίοι είναι χαρακτηριστικοί του μοντέλου του ισομορφισμού των μέτρων.

Για παράδειγμα στο πρόβλημα «*Ο Γιώργος αγόρασε 4 καραμέλες και πλήρωσε 60σ. Η Άννα αγόρασε από το ίδιο κατάστημα 12 καραμέλες. Πόσα πλήρωσε η Άννα;*», οι δύο ποσότητες, οι καραμέλες και τα χρήματα, παραπέμπουν σε διαφορετικές συγκρίσεις και διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης του προβλήματος. Αν η σύγκριση γίνει ανάμεσα στις διαφορετικές ποσότητες που δίνονται, δηλαδή ανάμεσα στις καραμέλες και τα χρήματα (Διάγραμμα 3), τότε το έργο λύνεται με εύρεση του συναρτησιακού τελεστή (60÷4=15σ). Η στρατηγική επίλυσης του συγκεκριμένου προβλήματος με την εύρεση του συναρτησιακού τελεστή εφαρμόζεται μεταξύ των μέτρων (Karplus et al., 1983; Christou & Philippou, 2002), αφού πρώτα γίνεται σύγκριση ανάμεσα στις ποσότητες της πρώτης σχέσης, η οποία και επεκτείνεται στη συνέχεια και στη δεύτερη σχέση.

Καραμέλες		Χρήματα
4	x 15	60
12	x 15	;

Διάγραμμα 3. Επίλυση προβλήματος με την εύρεση του συναρτησιακού τελεστή.

Η δεύτερη στρατηγική επίλυσης του ίδιου προβλήματος αναφέρεται στη σύγκριση ανάμεσα στις δεδομένες ποσότητες ίδιου είδους, δηλαδή στη συγκεκριμένη περίπτωση ανάμεσα στις καραμέλες (Διάγραμμα 4), για να βρεθεί ο αριθμητικός τελεστής (12÷4=3 καραμέλες). Αυτή η στρατηγική επίλυσης του συγκεκριμένου προβλήματος, με την εύρεση του αριθμητικού τελεστή εφαρμόζεται μέσα στο ίδιο μέτρο (Karplus et al., 1983) αφού πρώτα γίνεται σύγκριση μεταξύ των δεδομένων που αφορούν στην ίδια ποσότητα και στη συνέχεια αυτή η σχέση επεκτείνεται και στα στοιχεία της δεύτερης ποσότητας.

	Καραμέλες		Χρήματα
x3	4	x3	60
	12		;

Διάγραμμα 4. Επίλυση προβλήματος με την εύρεση του αριθμητικού τελεστή.

Είναι εμφανές ότι μαθηματικά ισοδύναμα προβλήματα πιθανόν να προκαλούν και διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης (Nesher, 1988). Η επιλογή μίας από τις πιο πάνω στρατηγικές για την επίλυση ενός αναλογικού προβλήματος εξαρτάται από τη μορφή του κειμένου, το οποίο παρουσιάζει την προβληματική κατάσταση, την αριθμητική του δομή, καθώς και από τις αλληλεπιδράσεις ανάμεσα σε λεκτικές και αριθμητικές μεταβλητές (Christou & Philippou, 2002). Η παρουσία ακέραιου λόγου είτε ανάμεσα είτε μέσα στις ποσότητες, οδηγεί αντίστοιχα στην εύρεση του συναρτησιακού και του αριθμητικού τελεστή. Αν από την άλλη δεν είναι δυνατή η δημιουργία ακέραιου λόγου σε καμία από τις δύο περιπτώσεις, τότε η επίλυση του προβλήματος μπορεί να προκαλέσει ιδιαίτερες δυσκολίες, οδηγώντας τους μαθητές είτε προς τον προσθετικό συλλογισμό (Karplus et al., 1983; Tourniaire & Pulos, 1985) είτε προς άλλες στρατηγικές.

Μια πρωταρχική στρατηγική την οποία συνηθίζουν να χρησιμοποιούν οι μαθητές μικρότερης ηλικίας και η οποία έχει προσθετικά χαρακτηριστικά είναι η στρατηγική «build-up», οικοδομώ. Με βάση τη στρατηγική αυτή, οι μαθητές χρησιμοποιούν επαναλαμβανόμενη πρόσθεση για να φτάσουν στο ζητούμενο αποτέλεσμα και όχι πολλαπλασιασμό (Tourniare, 1986). Στο παράδειγμα που παρουσιάστηκε πιο πάνω οι μαθητές εκτελούν απλά την πρόσθεση 60 + 60 + 60 = 180σ για να βρουν πόσα στοιχίζει ο τριπλάσιος αριθμός καραμελών. Σε διαφορετική περίπτωση η συγκεκριμένη στρατηγική χρησιμοποιείται για να δημιουργηθεί ένας πίνακας τιμών (Διάγραμμα 5), από τον οποίο θα προκύψει και η ζητούμενη ποσότητα όταν ο μαθητής ανακαλύψει το μοτίβο που υπάρχει (Lest et al., 1988).

Καραμέλες	Χρήματα
4	60
8	120
12	*180*

Διάγραμμα 5. Επίλυση προβλήματος με τη μέθοδο «build-up».

Η εφαρμογή της στρατηγικής αυτής αν και οδηγεί σε ορθά αποτελέσματα στα πιο απλά προβλήματα, γίνεται δύσκαμπτη στα προβλήματα με μη ακέραιους λόγους (Tourniaire & Pulos, 1985) με αποτέλεσμα να προκύπτουν πολλά λάθη. Αυτό οφείλεται στο ότι με τη στρατηγική της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης ο ζητούμενος αριθμός δε προκύπτει αβίαστα μέσα στις τιμές του πίνακα όπως στην περίπτωση των προβλημάτων με ακέραιους λόγους (Διάγραμμα 5). Αν για παράδειγμα οι μαθητές είχαν να υπολογίσουν την τιμή 11 καραμελών αντί 12, όπως στο πιο πάνω πρόβλημα, η εφαρμογή της στρατηγικής της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης θα δημιουργούσε προβλήματα εκτός και αν εφαρμοζόταν σε συνδυασμό με μια άλλη στρατηγική.

Η στρατηγική της αναγωγής στη μονάδα αποτελεί μια αρκετά διαδεδομένη στρατηγική επίλυσης αναλογικών προβλημάτων ανάμεσα στους μαθητές, η οποία φαίνεται να εμφανίζεται αυθόρμητα πριν ακόμα τη διδασκαλία (Nabors, 2003). Στην περίπτωση αυτή, οι μαθητές πρέπει να αποφασίσουν ποια ποσότητα θα έχει ρόλο διαιρετή και ποια το ρόλο του διαιρετέου, καθορίζοντας με αυτό τον τρόπο το μοναδιαίο παράγοντα. Στην ουσία, το έργο τους είναι ευκολότερο αν διακρίνουν τη γνωστή από την άγνωστη ποσότητα, οπότε και η πρώτη θα έχει ρόλο διαιρέτη, ενώ η δεύτερη ρόλο διαιρετέου (Christou & Philippou, 2002). Στο πιο πάνω παράδειγμα οι μαθητές, χρησιμοποιώντας τη στρατηγική της αναγωγής στη μονάδα, εκτελούν τη διαίρεση $60 \div 4 = 15$σ, με τα δεδομένα στοιχεία, για να βρουν το κόστος της μίας καραμέλας. Στη συνέχεια για να βρουν το πόσο στοιχίζουν οι 12 καραμέλες, πολλαπλασιάζουν το 12 με το 15, που αποτελεί την τιμή της μίας καραμέλας.

Μια άλλη στρατηγική επίλυσης αναλογικών προβλημάτων, η οποία φαίνεται να βρίσκει ευρεία χρήση ειδικά στο γυμνάσιο λόγω της ταχύτητας εφαρμογής της, είναι η διαδεδομένη μέθοδος του εσωτερικού γινομένου (Karplus et al., 1983). Η στρατηγική αυτή αποτελεί ένα μνημονικό τρόπο επίλυσης αναλογικών προβλημάτων, ο οποίος φαίνεται να προσομοιάζει στην απλή μέθοδο των τριών, την οποία χρησιμοποιούσαν οι έμποροι της Ανατολής για ταχύτερους υπολογισμούς. Η ομοιότητα βρίσκεται στο μνημονικό χαρακτήρα των δύο μεθόδων καθώς και στην ταχύτητα εύρεσης του αποτελέσματος.

Παρόλα αυτά, η μέθοδος των τριών και η στρατηγική του εσωτερικού γινομένου διαφέρουν ως προς το σχηματισμό των ίσων λόγων. Συγκεκριμένα, η μέθοδος των τριών δε συνδέεται καθόλου με δύο ίσους λόγους, αφού για την επίλυση ενός έργου της μορφής «Αν p αποφέρει f , τότε τι αποφέρει το i;», πολλαπλασιάζεται η δεύτερη ποσότητα με την τρίτη και διαιρείται με την πρώτη, δηλαδή $\frac{fi}{p}$ (Joseph, 1991). Αντίθετα, η στρατηγική του εσωτερικού γινομένου έχει ως βάση της το σχηματισμό πίνακα με δύο λόγους. Ειδικότερα, με βάση τη στρατηγική του εσωτερικού γινομένου, σχηματίζονται οι δύο λόγοι, βρίσκεται το εσωτερικό γινόμενο και στη συνέχεια με διαίρεση προκύπτει η άγνωστη ποσότητα (Lamon, 1999a). Στο πιο πάνω πρόβλημα οι μαθητές σχηματίζουν απλά μια μορφή πίνακα, όπως αυτός παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 6, τοποθετώντας τα στοιχεία του προβλήματος με τον άγνωστο, πολλαπλασιάζουν χιαστή ($12x60 = 4xX$) και διαιρούν ($X = \frac{12x60}{4}$).

Καραμέλες	Χρήματα
4	60
12	x

Διάγραμμα 6. Επίλυση προβλήματος με τη μέθοδο του εσωτερικού γινομένου.

Όλες οι στρατηγικές που παρουσιάστηκαν πιο πάνω μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση μαθηματικών αναλογικών προβλημάτων. Πρέπει να σημειωθεί όμως ότι η χρήση της μίας έναντι της άλλης στρατηγικής μπορεί να αποτελέσει την ειδοποιό διαφορά για το επίπεδο αναλογικού συλλογισμού στο οποίο βρίσκεται κάθε άτομο (Baxter & Junker, 2001). Κατ’ επέκταση οι στρατηγικές επίλυσης μαθηματικών αναλογικών προβλημάτων μπορεί να θεωρηθεί ότι αντικατοπτρίζουν και διαφορετικά στάδια ανάπτυξης του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού (Tourniaire & Pulos, 1985). Άρα, αναμένεται να εντοπιστούν και διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης των μαθηματικών αναλογικών έργων, ανάμεσα στις διαφορετικές ηλικιακές ομάδων των μαθητών (δημοτικό και γυμνάσιο) που συμμετέχουν στην παρούσα εργασία.

Στάδια Ανάπτυξης Μαθηματικού Αναλογικού Συλλογισμού

Η πρόοδος που παρουσιάζουν οι μαθητές στην επίλυση μαθηματικών αναλογικών προβλημάτων μπορεί να καθοριστεί με βάση συγκεκριμένα αναπτυξιακά επίπεδα. Τα επίπεδα αυτά διακρίνονται από ποιοτικές διαφορές στις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές για την επίλυση μαθηματικών αναλογικών προβλημάτων. Παράλληλα, μέσα σε κάθε επίπεδο παρατηρούνται ποσοτικές διαφορές, οι οποίες προκύπτουν από την εδραίωση μιας στρατηγικής μέσα από την εφαρμογή της σε διαφορετικές προβληματικές καταστάσεις (Noelting, 1980). Θεμελιώδης θεωρείται η μετάβαση από τη χρήση προσθετικού συλλογισμού στη χρήση πολλαπλασιαστικού συλλογισμού, καθώς και η μετάβαση από τη χρήση συγκεκριμένων στρατηγικών σε μια πιο γενικευμένη κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης (Baxter & Junker, 2001).

Πιο κάτω παρουσιάζεται μια σύνοψη των σημαντικότερων επιπέδων, τα οποία έχουν παρατηρηθεί στην ανάπτυξη των ικανοτήτων των μαθητών για αναλογικό συλλογισμό (Lest et al., 1988; Baxter & Junker, 2001):

(Α) Στις πιο πρωταρχικές τους απαντήσεις οι μαθητές τείνουν να εκτελούν ποιοτικές συγκρίσεις ανάμεσα στους τέσσερις όρους της αναλογίας ($\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$) ή ακόμα και να αγνοούν μέρος των δεδομένων.

(Β) Οι πρώτες προσπάθειες ποσοτικοποίησης περιλαμβάνουν την εύρεση διαφορών ανάμεσα στους δεδομένους όρους ($\alpha - \beta = \gamma - \delta$) αντί κάποιων πολλαπλασιαστικών σχέσεων.

(Γ) Η πρώτη χρήση πολλαπλασιαστικού συλλογισμού βασίζεται συχνά στην αναγνώριση σχέσεων μεταξύ των δεδομένων αριθμών και στη χρήση της στρατηγικής «build-up» που έχει προθετικά χαρακτηριστικά. Τα προβλήματα στα οποία ο ένας παράγοντας είναι η μονάδα λύνονται πολύ εύκολα από τους μαθητές που βρίσκονται σε αυτό το στάδιο ανάπτυξης. Άλλα προβλήματα πιθανόν να οδηγήσουν τους μαθητές στη χρήση προσθετικών στρατηγικών επίλυσης. Ο Piaget (Inhelder & Piaget, 1958) κάνει αναφορά στο στάδιο αυτό ως προ-αναλογικό αφού οι μαθητές έχουν από τη μια τη διαίσθηση ότι υπάρχει μια διαφορά που σχετίζεται με το μέγεθος των αριθμών και ότι αυτή η διαφορά πιθανόν να είναι πολλαπλασιαστική, αλλά από την άλλη δε συνειδητοποιούν απαραίτητα την ύπαρξη σταθερής διαφοράς ανάμεσα τους όρους του κάθε λόγου.

(Δ) Οι μαθητές στο στάδιο αυτό ξεκινούν να αναγνωρίζουν ότι ενώ κάποιες ποσότητες πιθανόν να διαφοροποιούνται, οι σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων παραμένουν αμετάβλητες. Συχνά βασίζονται στη στρατηγική της αναγωγής στη μονάδα καθώς και στην εύρεση του αριθμητικού τελεστή, ενώ είναι πιθανόν να χρησιμοποιήσουν και προσθετικές στρατηγικές όταν έρθουν αντιμέτωποι με μια άγνωστη κατάσταση. Στο στάδιο αυτό οι στρατηγικές συχνά εξαρτώνται από το πλαίσιο του κάθε προβλήματος και δεν είναι γενικεύσιμες (Lest et al., 1988).

(Ε) Στο τελευταίο στάδιο ανάπτυξης του αναλογικού συλλογισμού οι μαθητές αναγνωρίζουν την αμετάβλητη φύση των σχέσεων τόσο μέσα στην ίδια ποσότητα (within), όσο και ανάμεσα στις ποσότητες (between), ενώ παράλληλα έχουν και ένα γενικό μοντέλο επίλυσης των αναλογικών προβλημάτων. Αυτό δεν υπονοεί ότι η «κατάκτηση» του αναλογικού συλλογισμού ταυτίζεται και με την εφαρμογή μιας συγκεκριμένης και σύνθετης στρατηγικής για την επίλυση όλων ανεξαιρέτως των αναλογικών προβλημάτων. Αντίθετα, χαρακτηριστικό του σταδίου αυτού είναι ένα πλούσιο ρεπερτόριο στρατηγικών από τις οποίες ο μαθητής έχει να επιλέξει την καταλληλότερη για την επίλυση του κάθε προβλήματος.

Γενικά σύμφωνα με τον Piaget (Inhelder & Piaget, 1958), ο αναλογικός συλλογισμός μπορεί να θεωρηθεί ότι αναπτύσσεται από την εφαρμογή μιας γενικευμένης προσθετικής στρατηγικής, στην εφαρμογή μιας πολλαπλασιαστικής στρατηγικής η οποία όμως δε μπορεί να εφαρμοστεί σε όλες τις περιπτώσεις, σε μια τελική διατύπωση του κανόνα των αναλογιών. Τα χαρακτηριστικά αυτά αντιστοιχούν στο προ-αναλογικό ή διαισθητικό στάδιο, στο στάδιο των συγκεκριμένων λειτουργιών και τέλος στο στάδιο των τυπικών λειτουργιών (Noelting, 1980). Το προ-αναλογικό στάδιο με την εφαρμογή της γενικευμένης προσθετικής στρατηγικής φαίνεται να είναι χαρακτηριστικό των πρώτων τάξεων του δημοτικού σχολείου, ενώ αντίστοιχα η τελική διατύπωση του κανόνα των αναλογιών, η οποία επιτυγχάνεται στο στάδιο των τυπικών λειτουργιών, χαρακτηρίζει τους μαθητές των τελευταίων τάξεων του γυμνασίου. Η μετάβαση από το ένα στάδιο στο άλλο χαρακτηρίζεται από την σταδιακή αύξηση της ικανότητας χειρισμού ενός περιορισμένου αριθμού προβληματικών καταστάσεων, η οποία στη συνέχεια επεκτείνεται και σε άλλες καταστάσεις.

Κατά τη διάρκεια των πρώτων τάξεων του δημοτικού σχολείου οι μαθητές εισάγονται στην έννοια της αναλογίας μέσα από την επίλυση απλών αναλογικών προβλημάτων που βασίζονται αρχικά στη σχέση 2:1. Στη συνέχεια και ειδικά στην Κύπρο (Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού, 1996), οι μαθητές χειρίζονται πιο συστηματικά αναλογικά έργα με τη βοήθεια του σχήματος της αναλογίας το οποίο στηρίζεται τη θεωρία σχήματος (Marshall, 1995). Χαρακτηριστικό των έργων αυτών είναι ότι επιλύονται με απλή εφαρμογή μιας πράξης (είτε πολλαπλασιασμού είτε διαίρεσης), αφού στις περισσότερες φορές ο ένας δεδομένος αριθμός είναι η μονάδα. Στη συνέχεια τα έργα γίνονται πιο σύνθετα με την εμπλοκή διαφορετικών αριθμών και οι μαθητές έρχονται σε επαφή με την έννοια της αναλογίας ως ισότητας δύο λόγων $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma}$. Προτού οι μαθητές εξοικειωθούν με συγκρίσεις και πιθανές σχέσεις που υπάρχουν ανάμεσα στις ποσότητες των δύο λόγων τους παρουσιάζεται η μέθοδος του εσωτερικού γινομένου, η οποία χρησιμοποιείται ως η εύκολη λύση για τα προβλήματα στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη.

Ο μνημονικός αυτός κανόνας αποτελεί την επικρατέστερη μέθοδο επίλυσης αναλογικών προβλημάτων όχι μόνο στα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών της Κύπρου αλλά και παγκόσμια (Christou & Philippou, 2002). Παρόλα αυτά, ερευνητικά δεδομένα δείχνουν ότι η μέθοδος αυτή σπάνια γίνεται κατανοητή από τους μαθητές (Lesh et al., 1988). Δεν προκύπτει αυθόρμητα αλλά δίνεται από τον εκπαιδευτικό και χρησιμοποιείται αλγοριθμικά από τους μαθητές για να τους βοηθήσει στην επίλυση προβλημάτων. Η απουσία εννοιολογικής κατανόησης της κατάστασης, η οποία προωθείται με την τυφλή εφαρμογή του κανόνα αυτού, οδηγεί απλά στην εφαρμογή κάποιων συντακτικών κανόνων πάνω σε τυπικό συμβολικό σύστημα (Christou & Philippou, 2002).

Συνεπώς, η ικανότητα εφαρμογής αυτής της μεθόδου σε συγκεκριμένα προβλήματα δε συνιστά αναλογικό συλλογισμό (Lamon, 1999a), αφού κάθε είδους συλλογισμού πρέπει να περιλαμβάνει συνειδητή και σκόπιμη δράση παρά την τυφλή εφαρμογή μιας διαδικασίας που θα δώσει την ορθή, σε μερικές περιπτώσεις, απάντηση. Στην περίπτωση του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού μάλιστα, η αλγοριθμική εφαρμογή της μεθόδου του εσωτερικού γινομένου μπορεί να θεωρηθεί και ότι τον παρεμποδίζει (Lesh et al., 1988). Και αυτό αφού οι μαθητές χρησιμοποιούν τη μνημονική αυτή μέθοδο μάλλον για να αποφύγουν τον αναλογικό συλλογισμό παρά για να το διευκολύνουν. Κατ' επέκταση, οι Lesh κ.ά. (1988) τονίζουν την ανάγκη ύπαρξης κάποιας ένδειξης, η οποία να υποδεικνύει ότι το παιδί μπορεί να εντοπίσει την πραγματική σχέση ανάμεσα στα δύο μέλη της εξίσωσης την οποία κατασκεύασε, για να είναι δυνατή η αναφορά στη χρήση του αναλογικού συλλογισμού.

Όπως αναφέρουν οι Karplus κ.ά. (1983), ένα άτομο το οποίο χαρακτηρίζεται από την ικανότητα να επιλύει προβλήματα χρησιμοποιώντας αναλογικό συλλογισμό θα πρέπει να είναι σε θέση να επιλέγει τις αριθμητικές συγκρίσεις (είτε μεταξύ των μέτρων είτε μέσα στο ίδιο μέτρο) που πρέπει να γίνουν καθώς και τις στρατηγικές επίλυσης του προβλήματος οι οποίες είναι οι πιο συμφέρουσες από άποψης χρόνου. Αν παρόλα αυτά ένας μαθητής επιλέγει συστηματικά μνημονικές στρατηγικές για την επίλυση των συγκεκριμένων προβλημάτων, τότε δεν μπορούν να εξαχθούν τέτοια συμπεράσματα ώστε να αποδίδουν στο μαθητή τα χαρακτηριστικά της πραγματικής χρήσης αναλογικού συλλογισμού. Αυτό μπορεί να αντιμετωπιστεί με τη χρησιμοποίηση προβλημάτων σύγκρισης, τα οποία δεν παραπέμπουν άμεσα στη χρήση κάποιου μνημονικού κανόνα αλλά προωθούν τη χρήση στρατηγικών σύγκρισης είτε ανάμεσα είτε μεταξύ των ποσοτήτων, και κατ’ επέκταση τον αναλογικό συλλογισμό.

Εκτός από τη διαφοροποίηση του πλαισίου παρουσίασης των μαθηματικών αναλογικών έργων, στοιχείο το οποίο εφαρμόζεται στην παρούσα εργασία, οι Karplus κ.ά. (1983) προτείνουν κάποια επιπλέον στοιχεία τα οποία πρέπει να διακρίνουν ένα άτομο το οποίο χαρακτηρίζεται από την ικανότητα να επιλύει προβλήματα αναλογικού συλλογισμού χωρίς να εφαρμόζει απλά ένα μνημονικό αλγοριθμικό κανόνα. Το πρώτο και σημαντικότερο στοιχείο αναφέρεται στην ικανότητα του ατόμου να διακρίνει κατά πόσο ένα πρόβλημα επιλύεται με τη χρήση αναλογικού συλλογισμού, προσθετικού συλλογισμού ή οποιασδήποτε άλλης αριθμητικής σχέσης. Όπως αναφέρει χαρακτηριστικά η Lamon (1999a), βασική προϋπόθεση για την ύπαρξη αναλογικού συλλογισμού είναι η ικανότητα ανάλυσης των ποσοτήτων στη δεδομένη κατάσταση για να διαπιστωθεί πρώτιστα κατά πόσο υπάρχει ανάμεσά τους αναλογική σχέση. Για το σκοπό αυτό οι μαθητές πρέπει να επιστρατεύουν την κοινή λογική και την εμπειρία. Ένας μαθητής που πραγματικά μπορεί να σκεφτεί και να δράσει αναλογικά θα πρέπει να αναγνωρίζει περιπτώσεις της καθημερινής ζωής στις οποίες η χρήση αναλογιών είναι ή όχι χρήσιμη και όχι να γνωρίζει απλώς πώς να εφαρμόζει ένα αλγόριθμο. Δυστυχώς τα περισσότερα σχολικά εγχειρίδια δίνουν απλώς τον ορισμό της αναλογίας και στη συνέχεια ζητούν από τους μαθητές να επιλύσουν λεκτικά προβλήματα χρησιμοποιώντας αναλογίες (Lamon, 1999a), χωρίς πρώτα να καθοδηγούν τους μαθητές, μέσα από συγκεκριμένες δραστηριότητες, στο να αντιληφθούν πότε δύο ποσότητες σχετίζονται αναλογικά (Cramer et al., 1993). Αυτή την επικρατούσα τάση να αντιμετωπίζεται η μαθηματική αναλογική σκέψη ως ταυτόσημη της ικανότητας επίλυσης τυπικών λεκτικών προβλημάτων έρχεται να ανατρέψει η παρούσα ερευνητική εργασία. Αυτό επιτυγχάνεται με την παροχή ενός θεωρητικού πλαισίου ερμηνείας της έννοιας, στο οποίο η ικανότητα καθορισμού των χαρακτηριστικών της προβληματικής κατάστασης να αποτελεί αναγκαία πτυχή μέσα από τη διάσταση της μετα-αναλογικής ενημερότητας.

Μετα-αναλογική Ενημερότητα

Όπως έχει υποστηριχθεί και αναπτυχθεί μέχρι τώρα, η ικανότητα επίλυσης τυπικών αναλογικών προβλημάτων είναι μεν απαραίτητη συνθήκη για την ύπαρξη της μαθηματικής αναλογικής σκέψης αλλά όχι και η μόνη. Βασική πτυχή της μαθηματικής αναλογικής σκέψης είναι και η ικανότητα ανάλυσης των ποσοτήτων στη δεδομένη κατάσταση για να διαπιστωθεί πρώτιστα κατά πόσο υπάρχει ανάμεσά τους αναλογική σχέση (Karplus et al., 1983; Lamon, 1999a). Αύτη η ικανότητα συνδέεται άμεσα με τη δεξιότητα αναγνώρισης και καθορισμού της προβληματικής κατάστασης, η οποία και αποτελεί την πρώτη από τέσσερις γενικές μεταγνωστικές διαδικασίες που υποβοηθούν τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος ανεξαρτήτως πλαισίου (Davidson, Deuser & Sternberg, 1994). Οι υπόλοιπες αναφέρονται σε διαδικασίες νοητικής αναπαράστασης του προβλήματος, σχεδιασμού της πορείας λύσης και αξιολόγησης της γνώσης του ατόμου που σχετίζεται με την ίδια την επίλυση προβλήματος (Davidson et al., 1994). Συνεπώς, οι μαθητές για να μπορέσουν να προχωρήσουν σε μια επιτυχημένη επίλυση κάποιου έργου θα πρέπει πρώτα να είναι σε θέση να αναγνωρίσουν και να κωδικοποιήσουν τα βασικά στοιχεία της προβληματικής κατάστασης.

Με βάση τα στοιχεία αυτά, η τάση των μαθητών να χρησιμοποιούν συστηματικά το αναλογικό μοντέλο και σε καταστάσεις για τις οποίες δεν είναι κατάλληλο, φαίνεται να συνδέεται με την απουσία της δεξιότητας αναγνώρισης και καθορισμού της προβληματικής κατάστασης και άρα μετα-αναλογικής ενημερότητας από μέρους των μαθητών. Συνεπώς, το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας και οι δυσκολίες που προκαλεί στους μαθητές η αναγνώρισή του, εντάσσονται στο προτεινόμενο μοντέλο περιγραφής του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού κάτω από τη διάσταση της μετα-αναλογικής ενημερότητας, η οποία έχει μεταγνωστικά χαρακτηριστικά. Ο όρος «μετα-αναλογική ενημερότητα» προτείνεται για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία ως αποτέλεσμα της ανάγκης σύνδεσης του φαινομένου της ψευδάισθησης της αναλογίας με την ευρύτερη μαθηματική αναλογική σκέψη. Έτσι, αν η μεταγνώση ορίζεται ως «η γνώση του ατόμου για το γνωστικό του σύστημα και ο έλεγχος που ασκεί σε αυτό» (Brown, 1987), τότε και η μετα-αναλογική ενημερότητα σχετίζεται με τη γνώση και τον έλεγχο των συγκεκριμένων γνωστικών διαδικασιών που αφορούν στον αναλογικό συλλογισμό. Πρέπει να σημειωθεί ότι ως όρος «ενημερότητα» είναι αναγκαίος για την περιγραφή της συγκεκριμένης διάστασης του μοντέλου μαθηματικής αναλογικής σκέψης, αφού αναφέρεται και στην επίγνωση εκ μέρους των μαθητών σχετικών αντιλήψεων και πιθανών ασυνεπειών που μπορεί αυτές να παρουσιάζουν (Vosniadou, Ioannides, Dimitrakopoulou & Papademetriou, 2001).

Η μεταγνώση εξετάζεται με βάση δύο διακριτές διαστάσεις της, τη γνώση του ατόμου για το γνωστικό του σύστημα, τη μεταγνωστική δηλαδή γνώση ή την αυτοαναπαράστασή του για το σύστημα, και την ικανότητα το ατόμου να αυτορρυθμίζει τις γνωστικές διαδικασίες μετά από αυτοαξιολόγηση της συμπεριφοράς του και των γνωστικών του λειτουργιών (Παναούρα, 2004). Η διάσταση της αυτορρύθμισης αποτελεί τη διαδικασία συντονισμού και ελέγχου των γνωστικών διαδικασιών από το άτομο, και συνειδητοποίησης των γνωστικών του δυνατοτήτων και περιορισμών (Παναούρα, 2003). Ο Schoenfeld (1987) δίνει σε αυτή την πτυχή της μεταγνώσης διοικητικά γνωρίσματα, αφού συνδέεται με τον έλεγχο, την επιλογή και τη χρησιμοποίηση των στρατηγικών ενεργοποίησης των γνωστικών διαδικασιών. Ο έλεγχος και η αυτορρύθμιση των γνωστικών διαδικασιών αποτελούν βασικό συστατικό της διαδικασίας λύσης προβλήματος (Silver,1987). Συνεπώς, εμπλέκονται στις διαδικασίες κωδικοποίησης της προβληματικής κατάστασης (Davidson et al., 1994), οι οποίες είναι κρίσιμες στον καθορισμό των αναλογικών ή όχι χαρακτηριστικών της.

Η σημασία της πλούσιας μεταγνωστικής γνώσης έγκειται στην αξιοποίηση της με τον καθορισμό των γνωστικών απαιτήσεων του έργου και με τη χρήση γνωστικών στρατηγικών για αντιμετώπιση των γνωστικών δυσκολιών που το άτομο έχει συναίσθηση ότι αντιμετωπίζει (Παναούρα, 2004). Παρά την ύπαρξη μιας πλούσιας μεταγνωστικής γνώσης υπάρχουν φορές που οι αποφάσεις του ατόμου ως προς την επιλογή μιας στρατηγικής δεν χαρακτηρίζονται από ευελιξία. Αυτό οφείλεται στο ότι η μεταγνωστική γνώση εμπλουτίζεται συνεχώς, αλλά παραμένει σχετικά σταθερή και παγιωμένη και δύσκολα απορρίπτεται ως λανθασμένη (Hacker, 1998).

Οι Carr και Jessup (1995), εξέτασαν ακριβώς το ρόλο που έχει μια πλούσια σε στρατηγικές μεταγνωστική γνώση στην επιλογή της κατάλληλης στρατηγικής για την επίλυση ενός προβλήματος. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι η μεταγνώση είναι σημαντική για την επιλογή και χρησιμοποίηση καινούριων στρατηγικών, οι οποίες απαιτούν προσπάθεια για την εφαρμογή τους από τους μαθητές. Από την άλλη, όταν οι στρατηγικές αυτές έχουν αυτοματοποιηθεί και καθιερωθεί τότε οι μεταγνωστικές δεξιότητες έχουν δευτερεύοντα ρόλο στην επιλογή τους για την επίλυση κάποιου μαθηματικού προβλήματος. Κατά συνέπεια, σε κάθε επίπεδο ανάπτυξης οι μαθηματικές στρατηγικές πιθανόν να απαιτούν περισσότερη ή λιγότερη μεταγνωστική γνώση ανάλογα με το βαθμό αυτοματοποίησής τους (Flavell, 1978).

Το γεγονός αυτό ενισχύει την απόδοση μεταγνωστικού χαρακτήρα στην ικανότητα διάκρισης και επίλυσης μη αναλογικών καταστάσεων αφού αυτό αιτιολογεί την συστηματική επιλογή και εφαρμογή του αναλογικού μοντέλου και άρα την εμφάνιση του φαινομένου της ψευδαίσθησης της αναλογίας. Το αναλογικό μοντέλο είναι στην πραγματικότητα μια στρατηγική, η οποία από τη στιγμή που έχει αυτοματοποιηθεί και καθιερωθεί για την επίλυση προβλημάτων συγκεκριμένης μορφής, δύσκολα απορρίπτεται ως λανθασμένη. Κατά συνέπεια, η διάσταση της μετα-αναλογικής ενημερότητας φαίνεται να συμπεριλαμβάνεται ως μία αναγκαία διάσταση στο μοντέλο ερμηνείας του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού, αφού συνδέεται με τη μεταγνωστική γνώση και με την αυτορρύθμιση, για την επιλογή της κατάλληλης στρατηγικής και την επίλυση των προβλημάτων, είτε αυτά είναι αναλογικά, είτε μη αναλογικά (Cramer et al., 1993).

Το Φαινόμενο της Ψευδαίσθησης της Αναλογίας

Η βασική γλωσσική δομή αναλογικών προβλημάτων, όπως έχει προαναφερθεί, περιλαμβάνει τέσσερις ποσότητες *(α, β, γ, δ),* από τις οποίες, στις περισσότερες περιπτώσεις οι τρεις είναι γνωστές και η μία άγνωστη, καθώς και μια ένδειξη ότι η ίδια σχέση που συνδέει το *α* με το *β* συνδέει και το *γ* με το *δ* (Behr, Harel, Post, & Lesh, 1992). Για παράδειγμα, στο πρόβλημα *«Ένας βιολιστής χρειάζεται 5 λεπτά για να εκτελέσει 2 παρτιτούρες. Πόσο χρόνο χρειάζεται για να εκτελέσει 6 παρτιτούρες ίδιας χρονικής διάρκειας;»* υπάρχει πραγματική αναλογία και η σχέση 5 x 3=15 είναι ένας σταθερός λόγος.

Υπάρχει η περίπτωση η δομή ενός προβλήματος να ανταποκρίνεται στη βασική δομή προβλημάτων αναλογίας αλλά το πρόβλημα να μην είναι αναλογικό. Στην περίπτωση αυτή το πρόβλημα θεωρείται πρόβλημα «ψευδοαναλογίας» (Verschaffel, Greer & De Corte, 2000). Για παράδειγμα, στην περίπτωση του σταθερού προβλήματος: *«Ένας βιολιστής χρειάζεται 35 λεπτά για να εκτελέσει ένα μουσικό κομμάτι. Πόσο χρόνο χρειάζονται 3 βιολιστές για να εκτελέσουν το ίδιο κομμάτι στην ίδια ορχήστρα;»,* οι μαθητές επηρεαζόμενοι από τη διατύπωση του προβλήματος απαντούν ότι οι βιολιστές χρειάζονται 3 x 35 =105 λεπτά χωρίς να υπολογίζουν ότι οι τρεις βιολιστές εκτελούν το ίδιο κομμάτι ταυτόχρονα. Η αναλογικότητα φαίνεται να είναι σε τέτοιο βαθμό ενσωματωμένη στον τρόπο σκέψης των μαθητών που κάποιος μπορεί πολύ εύκολα να παραπλανηθεί και να χειρίζεται κάθε αριθμητική σχέση ως αναλογική (Freudenthal, 1983), χωρίς να δίνει σημασία στο περιβάλλον της προβληματικής κατάστασης και στους περιορισμούς που αυτό μπορεί να έχει.

Πρόσφατες έρευνες που εξετάζουν την τάση των μαθητών να χρησιμοποιούν το γραμμικό μοντέλο σε προβληματικές καταστάσεις για τις οποίες δεν είναι κατάλληλος (De Bock et al., 2002b; Van Dooren et al., 2005a), υποστηρίζουν ότι το φαινόμενο αυτό οφείλεται εν μέρει σε ιδιομορφίες στη διατύπωση των προβλημάτων, τις οποίες οι μαθητές έχουν μάθει να συνδέουν με τον αναλογικό συλλογισμό καθ' όλη τη διάρκεια της σχολικής τους ζωής. Ο Greer (1997) ειδικότερα, αναφέρει ότι προβλήματα με πολλαπλασιαστική δομή, που με ένα επιφανειακό διάβασμα μπορεί να δημιουργήσουν την ψευδαίσθηση της ύπαρξης αναλογίας, αποτελούν πρωταρχικά παραδείγματα ακατάλληλης χρήσης του γραμμικού μοντέλου ως μια βεβιασμένη αντίδραση στη γλωσσική δομή του προβλήματος.

Αυτός ο τρόπος ερμηνείας του προβλήματος δε φαίνεται να παρέχει ένα επαρκή και ολοκληρωμένο πλαίσιο μέσα στο οποίο μπορεί να μελετηθεί το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας. Το φαινόμενο αυτό δεν προκύπτει απλά ως αντίδραση στην στερεότυπη γλωσσική διατύπωση των αναλογικών σχέσεων, τόσο σε επίπεδο μαθητή όσο και σε ιστορικό επίπεδο, όπως υποστηρίζουν οι Verschaffel κ.ά. (2000). Δεν μπορεί δηλαδή, να υιοθετηθεί η άποψη ότι η οντογένεση ανακεφαλαιώνει την φυλογένεση στην περίπτωση του τρόπου χειρισμού των μη αναλογικών σχέσεων μόνο λόγω της γλωσσικής διατύπωσης των αναλογικών προβλημάτων.

Το γραμμικό μοντέλο φαίνεται να είναι το κοινωνικό-πολιτισμικό μέσο για εισαγωγή και εν τέλει για κατάκτηση της έννοιας της συνάρτησης. Του έχει δοθεί μια ιδιαίτερη σημασία, η οποία οδηγεί στη γενίκευση της εγκυρότητάς του και σε καταστάσεις μη αναλογικές, στις οποίες είναι απλά μη εφαρμόσιμο. Φαίνεται ότι η συνεχής επιβεβαίωση της ορθότητας των απαντήσεων σε προβλήματα στα οποία εφαρμόζεται το γραμμικό μοντέλο, μπορεί να δημιουργήσει μια πολύ ισχυρή αντίληψη ότι κάθε σχέση ανάμεσα σε δύο ποσότητες είναι αναλογική και ότι η χρήση του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού αποτελεί πανάκεια για την επίλυση όλων σχεδόν των προβλημάτων (Van Dooren et al., 2004a).

Ο Freudenthal (1983), έχοντας εστιαστεί στην καταλληλότητα του γραμμικού μοντέλου ως φαινομενολογικού μέσου περιγραφής, υποδεικνύει ότι υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες αυτή η αρχική φαινομενολογία αποτυγχάνει. Η αποτυχία, η οποία συνοδεύεται με την ευρεία εφαρμογή του αναλογικού μοντέλου και σε μη αναλογικές καταστάσεις, αναφέρεται γενικότερα στη βιβλιογραφία ως ψευδαίσθηση της αναλογίας (De Bock et al., 1998). Η βιβλιογραφία παρέχει διάφορα παραδείγματα όπου παρουσιάζεται αυτό το φαινόμενο σε διαφορετικά μαθηματικά πλαίσια, όπως την αριθμητική (Verschaffel et al. 2000), την άλγεβρα (Gagatsis & Kyriakides, 2000), τη μέτρηση στη γεωμετρία (De Bock et al., 1998, 2004; Modestou & Gagatsis, 2004a) και τις πιθανότητες (Van Dooren, De Bock, Depaepe, Janssens, & Verschaffel, 2003b). Ανάλογα παραδείγματα φαίνεται να προκύπτουν και από έρευνες που ασχολούνται με την ύπαρξη διαισθητικών κανόνων στα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες (Tirosh & Stavy, 1999; Zazkis, 1999; Tsamir, 2003; Babai, Levyadun, Stavy & Tirosh, 2006). Τέτοια παραδείγματα παρουσιάζονται πιο κάτω υποστηρίζοντας τη ευρύτητα και το γενικό χαρακτήρα του φαινομένου της ψευδαίσθησης της αναλογίας, γεγονός που κάνει και επιτακτική την ανάγκη καθορισμού της φύσης τους και παροχής ενός πλαισίου για αποτελεσματική αντιμετώπισή του.

Αναλογικός Συλλογισμός, Διαισθητικοί Κανόνες και Καθημερινές Καταστάσεις

Τα τελευταία δέκα χρόνια έχουν γίνει πολλές έρευνες, τόσο στα μαθηματικά όσο και στις φυσικές επιστήμες, οι οποίες εστιάζονται στην ύπαρξη κάποιων γενικών διαισθητικών κανόνων που ερμηνεύουν τη συμπεριφορά των μαθητών σε διαφορετικά πλαίσια, με κοινά εξωτερικά χαρακτηριστικά (Stavy & Tirosh, 2000). Μέσα σε αυτά τα πλαίσια προτείνεται η ύπαρξη του διαισθητικού κανόνα “More A- More B”, ο οποίος χαρακτηρίζει τις απαντήσεις των μαθητών σε έργα σύγκρισης (Stavy & Tirosh, 1996). Συγκεκριμένα, με βάση τον κανόνα αυτό, οι μαθητές θεωρούν ότι δύο αντικείμενα ή συστήματα τα οποία διαφέρουν ως προς μια ποσότητα A θα διαφέρουν ανάλογα και ως προς μια ποσότητα B (Tirosh & Stavy, 1999). Η εφαρμογή του κανόνα αυτού δεν είναι τίποτα άλλο από μια γενικευμένη χρήση του αναλογικού συλλογισμού σε μη κατάλληλες καταστάσεις, έχοντας ως αποτέλεσμα τη δημιουργία πολλών λανθασμένων απαντήσεων.

Η γενικευμένη χρήση του αναλογικού συλλογισμού μπορεί να θεωρεί ότι προκύπτει λόγω περιορισμών στους μηχανισμούς αντιληπτικής κωδικοποίησης του άνθρωπου, με αποτέλεσμα πολλές φορές να βασίζει σχέσεις επαγωγής πάνω σε κανόνες οργανωμένους σε «προβληματικές» ιεραρχίες (Holland et al., 1989). Οι ιεραρχίες αυτές αποτελούνται από νοητικά μοντέλα, τα οποία προκύπτουν από εμπειρικούς κανόνες «συνθήκης-δράσης». Οι εμπειρικοί κανόνες έχουν τη μορφή «αν... τότε...» και έχουν ως ουσιαστική λειτουργία τους τη μοντελοποίηση του κόσμου (Holland et al., 1989) κάνοντας δυνατή την εφαρμογή διαδικασιών επαγωγικού συλλογισμού. Για παράδειγμα, καθημερινά μέσα από την εμπειρία μας τονίζουμε ότι όσο περισσότερο διαβάζουμε τόσο περισσότερα θα ξέρουμε, όσο περισσότερο τρώμε τόσο περισσότερο θα παχύνουμε, όσα περισσότερα χρήματα κερδίζουμε τόσα περισσότερα θα μπορούμε να ξοδεύουμε κ.ό.κ. (Tsamir, 2003).

Αυτοί οι εμπειρικοί-διαισθητικοί κανόνες έχουν ως αποτέλεσμα τη δημιουργία μιας «προβληματικής» ιεραρχίας νοητικών μοντέλων, η οποία είναι υπεύθυνη, μέσω διαδικασιών επαγωγικού συλλογισμού, για την αναπαράσταση και τη λανθασμένη πρόβλεψη του αποτελέσματος ανάλογων καταστάσεων σύγκρισης (Holland et al., 1989). Χαρακτηριστικό της ιεραρχίας αυτής είναι ότι αποτελείται από διάφορα επίπεδα. Στο χαμηλότερο επίπεδο βρίσκονται οι πιο εξειδικευμένοι κανόνες που αφορούν συγκεκριμένα πεδία, ενώ στα ψηλότερα επίπεδα βρίσκονται κάποιοι πιο γενικευμένοι κανόνες. Το άτομο συνήθως δείχνει προτίμηση στη χρήση των εξειδικευμένων κανόνων μέσα σε γνωστά πεδία, ενώ καταφεύγει στους πιο γενικευμένους κανόνες, όταν δεν υπάρχει κάποιος κατάλληλος εξειδικευμένος κανόνας για τη συγκεκριμένη κατάσταση (Holland et al., 1989).

Έτσι, προκύπτουν χαρακτηριστικές απαντήσεις των μαθητών, οι οποίες μπορούν να θεωρηθούν τόσο αποτέλεσμα εμπειρικών κανόνων και κατ' επέκταση «προβληματικών» ιεραρχιών όσο και ως ενδείξεις ύπαρξης του φαινομένου της ψευδαίσθησης της αναλογίας σε ένα πλαίσιο πιο ποιοτικό, από την άποψη ότι δεν απαιτούν την ύπαρξη μιας ποσοτικής απάντησης. Για παράδειγμα, στα μαθηματικά οι μαθητές έχουν την τάση να υποστηρίζουν ότι όσο μεγαλύτερα είναι τα σκέλη μίας γωνίας τόσο μεγαλύτερη θα είναι και η γωνία ή ότι μια μεγαλύτερη γραμμή θα έχει και περισσότερα σημεία (Zazkis, 1999). Σε μεγαλύτερες ηλικίες οι μαθητές πιστεύουν ότι όσες περισσότερες ευθείες περνούν από το ίδιο σημείο τόσο βαρύτερο θα είναι το σημείο (Tsamir, 2003), ή ότι κάποιος που αποταμιεύει μεγαλύτερο ποσοστό από το μισθό του θα αποταμιεύει και περισσότερα χρήματα ή ακόμη ότι όσο μεγαλύτερος είναι ένας αριθμός τόσο περισσότερους παράγοντες θα έχει (Zazkis, 1999). Παράλληλα, θεωρούν ότι ένα ορθογώνιο με μεγαλύτερη περίμετρο θα έχει και μεγαλύτερο εμβαδόν (Babai et al., 2006), ενώ το άθροισμα περισσότερων πλευρών σε ένα τυχαίο σχήμα θα είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα λιγότερων πλευρών, άσχετα με το αν φαίνεται να υπάρχει διαφορά στο μέγεθος αυτών των πλευρών (Tsamir, 2003).

Παρά την πληθώρα των ποιοτικών ενδείξεων ύπαρξης του φαινομένου της ψευδαίσθησης της αναλογίας μέσα από έρευνες που ασχολούνται με τους διαισθητικούς κανόνες, η σύνδεση του φαινομένου με τους κανόνες αυτούς ακόμη να καθοριστεί πλήρως. Και αυτό γιατί υπάρχουν στοιχεία (Van Dooren et al., 2004b), τα οποία δείχνουν ότι παρά το ότι οι απαντήσεις των μαθητών σε μη αναλογικά έργα φαίνεται να είναι συμβατές με το διαισθητικό κανόνα “More A- More B”, οι διαδικασίες συλλογισμού τους δε βασίζονται σε αυτόν. Συγκεκριμένα, σε μια ποιοτική ανάλυση των δεδομένων της πιο πάνω έρευνας εντοπίστηκαν αρκετά διαφορετικά λάθη στις απαντήσεις των μαθητών, εκτός από το γενικευμένο διαισθητικό κανόνα“More A- More B”, τα οποία οδηγούσαν στην ίδια αναλογική απάντηση.

Το φαινόμενο της Ψευδο-αναλογίας στην Αριθμητική, στην Άλγεβρα και στις Πιθανότητες

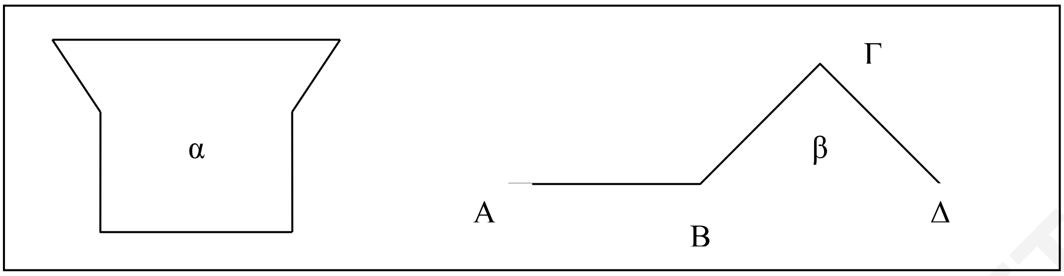
Αριθμητική. Το φαινόμενο της ψευδο-αναλογίας έχει παρατηρηθεί βιβλιογραφικά στην αριθμητική μέσα από τρία είδη ερευνών: (1) Τις έρευνες που ασχολούνται με την επίλυση ρεαλιστικών λεκτικών προβλημάτων, οπότε και το φαινόμενο προκύπτει έμμεσα, μέσα από μη-ρεαλιστικές απαντήσεις, (2) τις έρευνες που ασχολούνται με τη διερεύνηση της ικανότητας των μαθητών για μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό και (3) τις έρευνες που εστιάζονται αποκλειστικά στη συνεχή χρήση του αναλογικού μοντέλου από τους μαθητές σε καθαρά μη αναλογικά αριθμητικά προβλήματα (Van Dooren et al, 2005a). Το πρώτο είδος ερευνών (Verschaffel et al, 1994, 2000; Greer, 1997) έχει ως στόχο να διερευνήσει την «απομάκρυνση του νοήματος» από την επίλυση προβλήματος, η οποία προωθείται από τον τρόπο με τον οποίο τα προβλήματα παρουσιάζονται στα σχολικά μαθηματικά. Κατά συνέπεια, ανάμεσα σε άλλα προβλήματα οι μαθητές είχαν να αντιμετωπίσουν και προβλήματα των οποίων η λεκτική διατύπωση παρέπεμπε στη χρήση του αναλογικού μοντέλου.

Για παράδειγμα, στο πρόβλημα «*Ένας αθλητής μπορεί να τρέξει 1Km σε χρόνο 4 λεπτών. Πόσο χρόνο χρειάζεται για να τρέξει 3 Km;*», οι σωστές απαντήσεις κυμάνθηκαν από 0% σε 6% σε τέσσερις διαφορετικές έρευνες (Greer, 1997), αφού οι περισσότεροι μαθητές έδωσαν τη μη-ρεαλιστική απάντηση των 3x4=12λεπτών, αγνοώντας τον παράγοντα κούραση. Κατά ανάλογο τρόπο και με αντίστοιχα ποσοστά επιτυχίας, στο πρόβλημα *«Μία κωνική φιάλη γεμίζεται με σταθερό ρυθμό από μια βρύση. Αν το ύψος του νερού είναι 2cm μετά από 10 δευτερόλεπτα, πόσο ύψος θα έχει στα 30 δευτερόλεπτα;»* οι μαθητές αγνόησαν το γεγονός ότι το στόμιο και η βάση της φιάλης έχουν διαφορετική διάμετρο και άρα το ύψος του νερού δεν θα ανεβαίνει με τον ίδιο ρυθμό, δίνοντας έτσι την απάντηση 6cm. Οι απαντήσεις αυτές υποδεικνύουν την ανάγκη ενασχόλησης των μαθητών με αναλογικές καταστάσεις που να παρουσιάζονται σε διαφορετικά πλαίσια εκτός από το τυπικό στο οποίο δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη και το οποίο προωθεί τη χρήση μνημονικών στρατηγικών.

Την ανάγκη αυτή εντοπίζει και η Grenier (1999), η οποία υποστηρίζει ότι διαδικασίες, όπως η μέθοδος του εσωτερικού γινομένου, οι οποίες χρησιμοποιούνται από τους μαθητές για την επίλυση αναλογικών προβλημάτων δεν είναι ενδεικτικές της πραγματικής χρήσης μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού. Μέσα από τρεις προβληματικές καταστάσεις, οι οποίες δίνουν έμφαση στα μέσα αναπαράστασης που παρέχονται στους μαθητές, εξετάζει την ικανότητα των μαθητών 11 με 15 ετών να διακρίνουν το πραγματικό πεδίο εγκυρότητας του αναλογικού μοντέλου. Ταυτόχρονα, η μη αναγνώριση του συγκεκριμένου πεδίου εγκυρότητας οδηγεί στην εμφάνιση του φαινομένου της ψευδαίσθησης της αναλογίας.

Η πρώτη προβληματική κατάσταση είναι παρόμοια με αυτή που περιγράφηκε πιο πάνω και αφορά στην εύρεση του ύψους του νερού σε μία κωνική φιάλη (Διάγραμμα 7α). Συγκεκριμένα, στην περίπτωση αυτή οι μαθητές μπορούν να υπολογίσουν ορθά τον όγκο του νερού μέχρι ένα δεδομένο ύψος της φιάλης. Επεκτείνοντας το πεδίο εγκυρότητας του αναλογικού μοντέλου πέφτουν στη ψευδο-αναλογική παγίδα.

Η δεύτερη προβληματική κατάσταση αφορά στην εύρεση της απόστασης που διανύει σε συγκεκριμένες χρονικές περιόδους ένας ποδηλάτης (Διάγραμμα 7β). Στην περίπτωση αυτή οι μαθητές θεωρούν ότι ο ποδηλάτης κινείται με σταθερή ταχύτητα καθ' όλη τη διάρκεια της διαδρομής, αγνοώντας το γεγονός ότι αυτή η ταχύτητα θα είναι μικρότερη κατά τη διάρκεια της διαδρομής ΒΓ και μεγαλύτερη κατά τη διάρκεια της διαδρομής ΓΔ. Έτσι, εφαρμόζουν το γραμμικό μοντέλο αγνοώντας παράλληλα και λεκτικές ενδείξεις στο ίδιο το κείμενο που απορρίπτουν μια τέτοια εφαρμογή (όπως για παράδειγμα «μετά από 6 λεπτά ταξίδεψε 4,5Km, ενώ μετά από 22 λεπτά 15,9 Km»).



Διάγραμμα 7. Παραδείγματα έργων που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα της Grenier (1999).

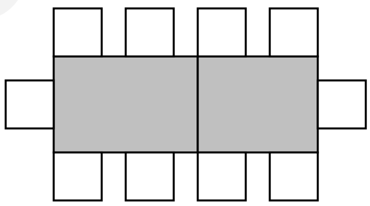
Στην τρίτη και τελευταία κατάσταση (Grenier, 1999), οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με ένα παρόμοιο με το προηγούμενο πρόβλημα (Διάγραμμα 7β), στο οποίο τώρα ένας μοτοσικλετιστής κατά τη διάρκεια της διαδρομής του κάνει ένα 15λεπτο σταθμό. Στην περίπτωση αυτή, όπου οι μαθητές έχουν να υπολογίσουν την απόσταση που διένυσε ο μοτοσικλετιστής σε σχέση με το χρόνο, αγνοούν το σταθμό που έκανε και εφαρμόζουν αδιάκριτα το γραμμικό μοντέλο.

Οι Van Dooren κ.ά. (2005a) προχωρούν σε μία πιο λεπτομερή μελέτη του φαινομένου της ψευδαίσθησης της αναλογίας στην αριθμητική, διεξάγοντας μια αναπτυξιακή έρευνα που περιλαμβάνει τάξεις από τη Γ΄ Δημοτικού μέχρι τη Β' Γυμνάσιου, στις οποίες χορηγούν δοκίμια με καθαρά αριθμητικά προβλήματα. Τα δοκίμια περιελάμβαναν οκτώ προβλήματα, δύο εκ των οποίων ήταν αναλογικά, δύο σταθερά, δύο προσθετικά και δύο της μορφής ψ=αχ+β. Ο Πίνακας 3 παρουσιάζει παραδείγματα των αριθμητικών προβλημάτων που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα των Van Dooren et al. (2005a).

Σε όλα τα προβλήματα δίνονταν οι τρεις ποσότητες και ζητούνταν η τέταρτη, οπότε δεν ήταν ευδιάκριτη η διαφοροποίηση του τρόπου με τον οποίο θα έπρεπε να λυθεί το κάθε πρόβλημα. Εφαρμόζοντας το γραμμικό μοντέλο σε όλες τις περιπτώσεις, οι μαθητές αναμενόταν ότι θα έλυναν ορθά μόνο το αναλογικό πρόβλημα (4x15=60σ). Στην περίπτωση του σταθερού προβλήματος, οι μαθητές θα έδιναν απάντηση 3x25=75 λεπτά, αντί 25 λεπτά αφού τα πουκάμισα στεγνώνουν παράλληλα. Στην περίπτωση του προσθετικού προβλήματος θα έδιναν απάντηση 2x2=4 χρονών αντί 8, αφού θα περάσουν έξι χρόνια για να γίνει 12 ετών η Άννα, οπότε αυτά τα έξι χρόνια θα πρέπει να προστεθούν στην ηλικία του Αντώνη. Τέλος, στο πρόβλημα της μορφής ψ=αχ+β, οι μαθητές παραβλέποντας τη θέση που ακυρώνεται λόγω ένωσης των τραπεζιών ήταν αναμενόμενο να δώσουν την απάντηση 5x6=60, αντί την απάντηση (6x4)+2=26 καρέκλες.

Πίνακας 3

Παραδείγματα των Έργων που Χρησιμοποιήθηκαν στην Έρευνα των Van Dooren κ.ά. (2005a)

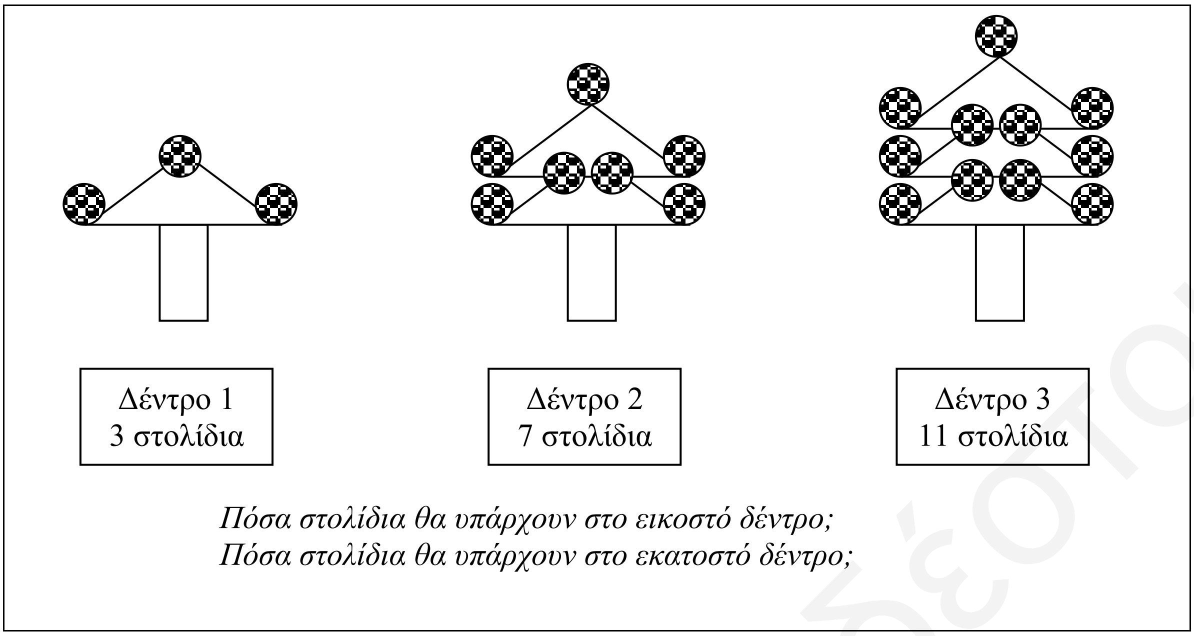
αναλογικό ψ=αχ	Ο Γιώργος αγόρασε 5 καραμέλες και πλήρωσε 15σ. Πόσα θα πληρώσει η Ελένη αν αγόρασε 20 καραμέλες;
σταθερό ψ=α	Χρειάζονται 25 λεπτά για να στεγνώσει μια μπλούζα. Πόση ώρα χρειάζεται για να στεγνώσουν τρεις μπλούζες;
προσθετικό	Σήμερα ο Αντώνης είναι 2 χρονών και η Άννα 6. Όταν η Άννα θα είναι 12 χρονών πόσων χρονών θα είναι ο Αντώνης;
ψ=αχ+β	Στο διάδρομο του σχολείου υπάρχουν 2 τραπέζια ενωμένα μεταξύ τους και 10 καρέκλες γύρω τους. Ο δάσκαλος ενώνει τώρα 6 τραπέζια. Πόσες καρέκλες χωρούν γύρω από τα τραπέζια; 

Τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης εργασίας έδειξαν ότι η ικανότητα των μαθητών στην επίλυση των αναλογικών προβλημάτων της μορφής ψ=αχ βελτιώθηκε σημαντικά κατά τη διάρκεια φοίτησής τους στο σχολείο, με τα ποσοστά επιτυχίας να ξεκινούν από το 53% στη Γ΄ Δημοτικού και να φτάνουν το 93% στη Β' Γυμνάσιου και τη μεγαλύτερη διαφοροποίηση να εμφανίζεται στην Ε' Δημοτικού. Παράλληλα, φάνηκε ότι η τάση των μαθητών προς τη γενική χρήση του γραμμικού μοντέλου αυξήθηκε με την ταυτόχρονη εμφάνιση και ενίσχυση της ικανότητας επίλυσης αναλογικών προβλημάτων. Στη Γ΄ Δημοτικού, το 30% των μη αναλογικών προβλημάτων απαντήθηκαν αναλογικά, ενώ το ποσοστό αυτό έφτασε το 51% στην Ε' Δημοτικού, για να σταθεροποιηθεί στο 22% στη Β' Γυμνάσιου. Τέλος, πρέπει να σημειωθεί ότι τα σταθερά προβλήματα μαζί με τα προβλήματα της μορφής ψ=αχ+β ήταν εκείνα που προκάλεσαν τα περισσότερα λάθη και τις περισσότερες αναλογικές απαντήσεις από τους μαθητές.

Προ-άλγεβρα και Άλγεβρα. Το φαινόμενο της ψευδοαναλογίας, όπως διαφάνηκε και από τα παραδείγματα που δόθηκαν στο πεδίο της αριθμητικής, δε περιορίζεται μόνο στη δημοτική εκπαίδευση αλλά επεκτείνεται και στη μέση εκπαίδευση. Εδώ, τα λάθη των μαθητών που σχετίζονται με τη ψευδοαναλογία, αναφέρονται συχνότερα στο πεδίο της άλγεβρας.

Στις τελευταίες τάξεις του δημοτικού καθώς και στις πρώτες τάξεις του γυμνασίου, οι μαθητές βρίσκονται στο στάδιο της προ-άλγεβρας, δηλαδή στο στάδιο μετάβασης από το περιβάλλον της αριθμητικής σε αυτό της τυπικής άλγεβρας (Linchevski, 1995). Σε αυτή την περιοχή της μάθησης των μαθηματικών οι μαθητές οικοδομούν έννοιες της άλγεβρας και δίνουν νόημα στα σύμβολα και στις πράξεις χρησιμοποιώντας τις γνώσεις τους στην αριθμητική (Kieran & Chalouh,1999). Πολλά από τα έργα με τα οποία έρχονται σε επαφή οι μαθητές σε αυτό το στάδιο αφορούν αριθμητικά μοτίβα για τα οποία καλούνται να βρουν ένα γενικό αλγεβρικό κανόνα. Η Stacey (1989) διερεύνησε ακριβώς αυτούς τους γενικούς αλγεβρικούς κανόνες τους οποίους προτείνουν μαθητές 9 με 13 ετών για να εκφράσουν αριθμητικά μοτίβα της μορφής ψ=αχ+β. Κάποια από τα μοτίβα συνοδεύονταν με μία εικονική αναπαράσταση όπως το μοτίβο των χριστουγεννιάτικων δέντρων (Διάγραμμα 8).

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι ενώ οι μαθητές προσπαθούσαν να φτάσουν στο γενικό αλγεβρικό τύπο που θα τους έδινε την απάντηση για τα στολίδια του εκατοστού δέντρου, η γενίκευση που πρότειναν ήταν πολύ απλοϊκή και σαφώς επηρεασμένη από τις ιδιότητες του γραμμικού μοντέλου. Για παράδειγμα, κάποιοι μαθητές απαντούσαν ότι το εκατοστό δέντρο θα χρειαστεί 300 στολίδια, αφού στο πρώτο δέντρο υπάρχουν τρία στολίδια [$f(ka) = kf(a)$]. Αρκετοί ήταν και οι μαθητές που φανερά επηρεασμένοι από τη ψευδαίσθηση για την ύπαρξη της αναλογίας προτιμούσαν να πολλαπλασιάσουν, για παράδειγμα, τον αριθμό των στολιδιών που υπήρχε στο 10ο δέντρο επί 10 για να βρουν τον αριθμό των στολιδιών του εκατοστού δέντρου.



Διάγραμμα 8. Το πρόβλημα των χριστουγεννιάτικων δέντρων όπως αυτό χρησιμοποιήθηκε από τη Stacey (1989).

Παρόμοια «γραμμικά λάθη» παρατηρούνται και στο χειρισμό αλγεβρικών εκφράσεων. Για παράδειγμα, πολλοί είναι οι μαθητές που θεωρούν ότι η τετραγωνική ρίζα τους αθροίσματος δύο αριθμών ισούται με το άθροισμα των τετραγωνικών ριζών τους ($\sqrt{\alpha+\beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$) (Gagatsis & Kyriakides, 2000), αφού θεωρούν ότι μπορούν να γενικεύσουν την επιμεριστική ιδιότητα όπως αυτή εφαρμόζεται στον πολλαπλασιασμό, χειριζόμενοι με τον ίδιο τρόπο τα σύμβολα «x» και «$\sqrt{\ }$». O Bagni (2001) αναφέρει χαρακτηριστικά ότι ο λόγος που υφίστανται τα λάθη αυτά βρίσκεται στο ότι οι μαθητές θεωρούν ότι ο γραμμικός μετασχηματισμός αποτελεί ιδιότητα κάθε συνάρτησης. Κατ' επέκταση, τα λάθη $(\alpha\pm\beta)^2=\alpha^2\pm\beta^2$, $(\alpha\pm\beta)^3=\alpha^3\pm\beta^3$, $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha \pm\sin\beta$, $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha \pm\cos\beta$ και $\log(\alpha\pm\beta)=\log\alpha \pm\log\beta$ προκύπτουν από την υιοθέτηση του γραμμικού μετασχηματισμού ως χαρακτηριστικού στοιχείου των συναρτήσεων $x\to x^2$, $x\to x^3$, $x\to\sin x$, $x\to\cos x$ και $x\to\log x$, αντίστοιχα.

Πιθανότητες. Πολλά από τα λάθη των μαθητών στις πιθανότητες μπορούν να αποδοθούν στην ύπαρξη του φαινομένου της ψευδαίσθησης της αναλογίας. Χαρακτηριστικό είναι εξάλλου το τυπικό λάθος των μαθητών ότι η πιθανότητα για μία τουλάχιστον επιτυχία είναι ανάλογη με τον αριθμό των δοκιμών. Κατά συνέπεια, για τους μαθητές η πιθανότητα εμφάνισης του αριθμού έξι σε μία ρίψη ζαριού είναι ίση με $\frac{1}{6}$, η πιθανότητα εμφάνισής του ίδιου αριθμού σε δύο ρίψεις $2 \text{ x } \frac{1}{6}$, σε τρεις ρίψεις $3 \text{ x } \frac{1}{6}$ κ.ό.κ. (Van Dooren, De Bock, Janssens & Verschaffel, 2005c). Αν φυσικά ίσχυε κάτι τέτοιο η πιθανότητα εμφάνισης του συγκεκριμένου αριθμού στις επτά ρίψεις θα ήταν μεγαλύτερη της μονάδας. Το πρόβλημα αυτό συνδέεται με το ιστορικό πρόβλημα του «ζαριού». Συγκεκριμένα, ο Chevalier de Mere πίστευε ότι είναι το ίδιο κερδοφόρο το να στοιχηματίσει στην εμφάνιση μίας ζαριάς με εξάρες σε 24 ρίψεις δύο ζαριών, όσο και η εμφάνιση ενός έξι σε τέσσερις ρίψεις με ένα μόνο ζάρι (Freudenthal, 1973). Και αυτό αφού θεωρούσε ότι η πιθανότητα επιτυχίας από τις τέσσερις στις 24 ρίψεις αυξάνεται έξι φορές, ενώ παράλληλα μειώνεται και έξι φορές λόγω της προσθήκης ακόμη ενός ζαριού, αφήνοντας έτσι τις ίδιες πιθανότητες επιτυχίας.

Πρόσφατα, οι Van Dooren κ.ά. (2003b) διερεύνησαν συστηματικά την παρουσία του γραμμικού μοντέλου στο πλαίσιο των πιθανοτήτων, παρέχοντας εμπειρικά δεδομένα για τη χρήση του από δύο ομάδες μαθητών, μαθητές ηλικίας 17 με 18 ετών που διδάχτηκαν το συγκεκριμένο θέμα στο σχολείο και μικρότερους μαθητές 15 και 16 ετών που δε διδάχτηκαν συστηματικά πιθανότητες. Στους μαθητές χορηγήθηκε ένα δοκίμιο με επτά έργα πολλαπλής επιλογής, τα οποία αφορούσαν ρίψεις ζαριού. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές είχαν την ικανότητα να εντοπίσουν ποια κατάσταση έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να προκύψει, ποιοτικά. Δηλαδή, εντόπιζαν ότι η πιθανότητα εμφάνισης του αριθμού έξι αυξάνεται με τον αριθμό των ρίψεων. Όμως, ταυτόχρονα ποσοτικοποιούσαν την παρατήρηση αυτή χρησιμοποιώντας το γραμμικό μοντέλο, διπλασιάζοντας για παράδειγμα, την πιθανότητα με το διπλασιασμό του αριθμού των ρίψεων. Χαρακτηριστικό είναι επίσης το γεγονός ότι αυτή η συμπεριφορά διέκρινε όλους τους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα, ακόμα και εκείνους που διδάχτηκαν συστηματικά τις πιθανότητες στο σχολείο.

Το Φαινόμενο της Ψευδαίσθησης της Αναλογίας Μέσα από τη Μέτρηση στη Γεωμετρία

Η εξέταση της μετα-αναλογικής ενημερότητας των μαθητών στην παρούσα έρευνα διεκπεραιώνεται μέσα στο χώρο της μέτρησης στη γεωμετρίας και συγκεκριμένα στη μη αναλογική συμπεριφορά του εμβαδού σε προβλήματα πολλαπλασιαστικής σύγκρισης που συνδέουν έμμεσα το εμβαδόν με το μήκος της πλευράς σχημάτων. Το θέμα αυτό δεν είναι καθόλου πρόσφατο αλλά παρόλα αυτά επίκαιρο. Εμφανίζεται τόσο στο πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου, όσο και στο «Μένωνα» του Πλάτωνα.

Στο πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου, το οποίο αποτελεί ένα από τα τρία μεγάλα άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας, δίνεται ένας κύβος ακμής α και ζητείται να βρεθεί η ακμή x ενός άλλου κύβου με διπλάσιο όγκο (Kronfellener, 2000). Μία μαρτυρία για την προέλευση του προβλήματος προέρχεται από τον Ευτόκιο, το σχολιαστή του Αρχιμήδη, ο οποίος, χωρίς να αναφέρει τις πηγές του, παραθέτει μια επιστολή του Ερατοσθένη προς τον βασιλιά Πτολεμαίο (Bunt et al., 1981). Η επιστολή αυτή αρχίζει ως

> εξής: Λέγεται ότι κάποιος αρχαίος τραγωδοποιός εισήγαγε στη σκηνή το Μίνωα, ο οποίος είχε διατάξει να κατασκευασθεί τάφος για το [γιο του] Γλαύκο και όταν αυτός πληροφορήθηκε ότι ο τάφος ήταν σε όλες του τις διαστάσεις [ακμές] εκατό πόδια, είπε: «Μικρή παράγγειλες τη χωρητικότητα του βασιλικού τάφου. Να διπλασιαστεί αυτή γρήγορα, αφού διπλασιαστεί κάθε πλευρά χωρίς, όμως, ο τάφος να χάσει το κομψό του σχήμα (Bunt et al., 1981, σελ. 109).

Φαίνεται όμως ότι ο βασιλιάς Μίνωας έκανε λάθος, υποκύπτοντας έτσι στη ψευδαίσθηση της αναλογίας. Και αυτό αφού όταν διπλασιάζονται οι πλευρές, η μεν επιφάνεια τετραπλασιάζεται, ο δε όγκος οκταπλασιάζεται. Κατά ανάλογο τρόπο, στον «Μένωνα» του Πλάτωνα ο Σωκράτης, χρησιμοποιώντας την μαιευτική μέθοδο, προσπαθεί να «ξυπνήσει» την ανάμνηση ενός δούλου για το πώς μπορεί να διπλασιάσει το εμβαδόν ενός τετράγωνου, πείθοντας έτσι το Μένων ότι η γνώση δεν διδάσκεται αλλά ενυπάρχει στο άτομο. Ο δούλος, υποκύπτοντας στη ψευδαίσθηση της αναλογίας, υποστηρίζει ότι ένα τετράγωνο διπλάσιου εμβαδού θα έχει και διπλάσιο μήκος πλευράς (Φράγκος, 1983).

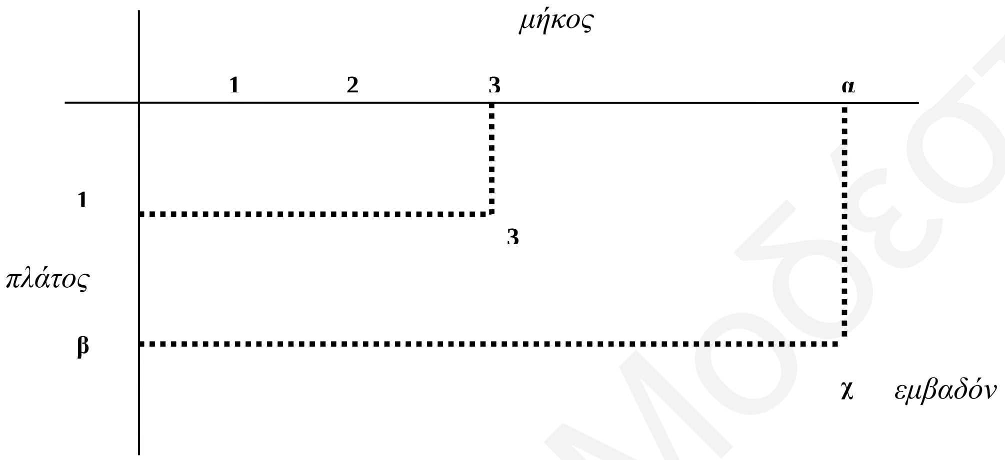
Ο Piaget (1981) διερεύνησε την ικανότητα των μαθητών για κατασκευή ενός τετραγώνου με διπλάσιο εμβαδόν από ένα δοσμένο, με βάση το στάδιο ανάπτυξης που βρίσκονταν, εφαρμόζοντας το γνωστό περιστατικό με το Μένωνα του Πλάτωνα. Συγκεκριμένα, από τα αποτελέσματα των ερευνών φάνηκε ότι στο προλογικό στάδιο (2-7 χρονών) οι μαθητές δεν ήταν σε θέση να διπλασιάσουν ούτε το μήκος της πλευράς του δοσμένου τετραγώνου. Στο στάδιο των συγκεκριμένων λειτουργιών (7-11 χρονών), οι μαθητές δεν ήταν σε θέση να διαφοροποιήσουν την αύξηση στο μήκος από την αύξηση στο εμβαδόν και αυτό γιατί δεν μπορούσαν να οικοδομήσουν τις ορθές σχέσεις ανάμεσα στο εμβαδόν και στο μήκος των πλευρών. Συγκεκριμένα, στο στάδιο αυτό σύμφωνα με τον Piaget (1981) οι μαθητές έχουν μια διαισθητική αντίληψη της έννοιας του εμβαδού, η οποία εκφράζεται σε σχέση με τις πλευρές οι οποίες το ορίζουν. Όμως, ακριβώς επειδή το εμβαδόν γίνεται αντιληπτό μέσω των πλευρών που το οριοθετούν, το γραμμικό μοντέλο είναι το επικρατέστερο στην αντίληψη των μαθητών.

Το στάδιο των συγκεκριμένων λειτουργιών, όπως αναφέρει χαρακτηριστικά ο Piaget (1981), παρέχει την πιο ξεκάθαρη παρουσίαση ενός παραδόξου – το οποίο έχει οριστεί στην παρούσα εργασία ως φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας – στο οποίο οι μαθητές έχουν εγκλειστεί μέσα σε μια αναλογική σχέση και θεωρούν ότι αν ένα τετράγωνο A^2 αντιστοιχεί σε μια πλευρά A, τότε το τετράγωνο $2A^2$ θα αντιστοιχεί σε μια πλευρά 2A. Κατά ανάλογο τρόπο, επειδή ένας κύβος με χωρητικότητα A^3 έχει μήκος ακμής A, ένας κύβος χωρητικότητας $2A^3$ θα έχει και ακμή 2A. Συνεπώς οι μαθητές στο στάδιο αυτό είτε απλά διπλασιάζουν τις πλευρές του τετραγώνου δημιουργώντας ένα νέο τετράγωνο με τετραπλάσιο τώρα εμβαδόν, είτε τοποθετούν δίπλα-δίπλα δύο τετράγωνα δημιουργώντας ένα ορθογώνιο.

Σε ένα πιο προχωρημένο επίπεδο του ίδιου σταδίου των συγκεκριμένων λειτουργιών οι μαθητές είναι σε θέση να αντιληφθούν ότι τα σχήματα που προτείνουν δεν είναι ορθά, κάνοντας κάποιες προσπάθειες για διόρθωσή τους αλλά χωρίς να έχουν το κατάλληλο αποτέλεσμα. Τέλος, στο στάδιο των τυπικών λογικών λειτουργιών (11-ενηλικίωση) ο Piaget (1981) θεωρεί ότι η πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ του μήκους και του εμβαδού ή του όγκου ενός σχήματος γίνεται κατανοητή, οπότε και οι μαθητές μπορούν να διεκπεραιώσουν με επιτυχία το έργο.

Αν και θεωρητικά, με βάση τα στάδια ανάπτυξης του Piaget (Salkind, 1997), οι μαθητές μετά τα 11 τους χρόνια, θα έπρεπε να είναι σε θέση να αντιμετωπίζουν το φαινόμενο της ψευδοαναλογίας στο χώρο της μέτρησης στη γεωμετρία, οι εμπειρίες τους με τη μεγέθυνση και τη σμίκρυνση σχημάτων δεν τους κάνουν απαραίτητα να συνειδητοποιήσουν τους διαφορετικούς ρυθμούς αύξησης του μήκους, του εμβαδού και του όγκου (De Bock et al., 2002b). Επακόλουθα, οι μαθητές έχουν μια ισχυρή τάση να αντιμετωπίζουν τις σχέσεις ανάμεσα στο μήκος και στο εμβαδόν, και στο μήκος και στον όγκο, ως γραμμικές αντί ως τετραγωνική και κυβική, αντίστοιχα. Ως αποτέλεσμα, χρησιμοποιούν το γραμμικό παράγοντα, αντί το τετράγωνό του ή τον κύβο του, για να καθορίσουν το εμβαδόν ή τον όγκο ενός σχήματος που υπόκειται σε μεγέθυνση ή σμίκρυνση.

Ο λόγος για τον οποίο συμβαίνει το γεγονός αυτό, ίσως να οφείλεται στο ότι η εύρεση του εμβαδού ή του όγκου ενός σχήματος αντιμετωπίζεται από τους μαθητές απλά ως ακόμη ένας πολλαπλασιασμός που δε διαφέρει από τις περιπτώσεις που περιγράφηκαν πιο πάνω, και οι οποίες ανήκουν στη δομή του ισομορφισμού των μέτρων. Στην πραγματικότητα όλα τα προβλήματα εμβαδού και όγκου χαρακτηρίζονται από τη συγκρότηση ενός τρίτου μέτρου (Μ3) με βάση άλλα δύο (Μ1 & Μ2) και αποτελούν μέρος της δομής του γινομένου των μέτρων (Vergnaud, 1983). Στη δομή αυτή περιλαμβάνονται τρεις μεταβλητές οπότε και δε μπορεί να αναπαρασταθεί με ένα απλό πίνακα αντιστοιχίας, όπως αυτόν που χρησιμοποιήθηκε στη περίπτωση του ισομορφισμού των μέτρων. Για το λόγο αυτό αναπαρίσταται γραφικά με πίνακα διπλής αντιστοιχίας (Διάγραμμα 9).



Διάγραμμα 9. Το μοντέλο του γινόμενου των μέτρων για το εμβαδόν.

Το διάγραμμα αντιπροσωπεύει τη διπλή αναλογία που υπάρχει ανάμεσα στο μήκος και στο εμβαδόν και στο πλάτος και στο εμβαδόν. Οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να αντιλαμβάνονται ότι, για παράδειγμα, το εμβαδόν ενός σχήματος είναι ανάλογο του μήκος του μόνο όταν το πλάτος διατηρείται σταθερό, και όμοια του πλάτους του όταν η μεταβλητή του μήκους είναι σταθερή (Vergnaud, 1997). Ο Freudenthal (1983) αναφέρει χαρακτηριστικά ότι το να αντιληφθούν οι μαθητές ότι ο πολλαπλασιασμός του μήκους με *α*, του εμβαδού με α^2 και του όγκου με α^3 συνδέεται με τον γεωμετρικό πολλαπλασιασμό με α, είναι μαθηματικά τόσο ουσιαστικό που φαινομενολογικά και διδακτικά πρέπει να τεθεί πρώτο. Το μοτίβο της συνεχούς χρήσης του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού πρέπει να διακοπεί από τους ίδιους τους μαθητές έτσι ώστε να αντιληφθούν τον πολυδιάστατο χαρακτήρα του γεωμετρικού πολλαπλασιασμού (Streefland, 1984).

Ερευνητικές εργασίες. Τα τελευταία χρόνια, έχει γίνει μια σημαντική προσπάθεια από διάφορους ερευνητές (De Bock et al., 1998, 2002a, 2002b, 2003; Van Dooren et al., 2003a; Van Dooren, 2005; Modestou & Gagatsis, 2004a, 2006) ώστε να διερευνηθεί και να αντιμετωπιστεί η τάση των μαθητών να χειρίζονται μη αναλογικά προβλήματα εμβαδού και όγκου ως αναλογικά.

Συγκεκριμένα, οι De Bock κ.ά (1998, 2002b, 2003) με μια σειρά ερευνών η οποία βασιζόταν κυρίως πάνω σε γραπτά δοκίμια τα οποία χορηγήθηκαν σε ομάδες μαθητών, διερεύνησαν την παρουσία του φαινομένου της ψευδο-αναλογίας επιχειρώντας τον περιορισμό του. Τα δοκίμια που χρησιμοποιήθηκαν στις έρευνες αυτές περιελάμβαναν τόσο αναλογικά όσο και μη αναλογικά έργα, τα οποία αφορούσαν στη σχέση ανάμεσα στο μήκος, το εμβαδόν και τον όγκο όμοιων σχημάτων που βρίσκονται είτε υπό σμίκρυνση είτε υπό μεγέθυνση (Πίνακας 4).

Πίνακας 4

Παράδειγμα των Έργων που Χρησιμοποιήθηκαν στην Έρευνα των De Bock κ.ά. (1998)

Παράδειγμα αναλογικού έργου Ένας γεωργός χρειάζεται 4 μέρες, για να σκάψει ένα αυλάκι γύρω από ένα τετράγωνο χωράφι με πλευρά 100m. Πόσες μέρες θα χρειαστεί, για να σκάψει ένα αυλάκι γύρω από ένα χωράφι ίδιου σχήματος και πλευράς 300m;
Παράδειγμα μη αναλογικού έργου Ένας γεωργός χρειάζεται περίπου 8 ώρες, για να βάλει λίπασμα σε ένα χωράφι τετράγωνου σχήματος και πλευράς 200m. Πόσες ώρες θα χρειαστεί για να λιπάνει ένα χωράφι ίδιου σχήματος και πλευράς 600m;

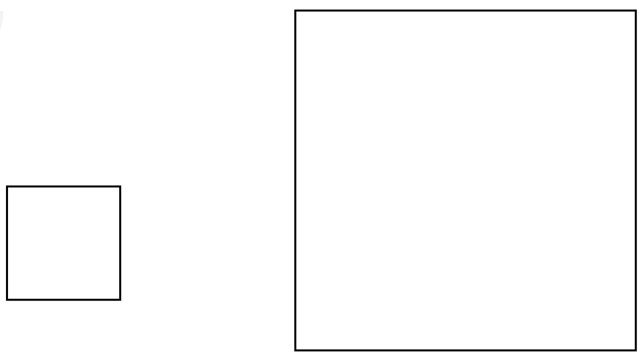
Τα έργα περιελάμβαναν διαφορετικά γεωμετρικά σχήματα (κύκλος, τετράγωνο, σφαίρα, κύβος, ακανόνιστο σχήμα) και χορηγήθηκαν σε μαθητές δύο ηλικιακών ομάδων (12-13 και 15-16 ετών). Ως προς τη διατύπωσή τους τα έργα που χρησιμοποιήθηκαν είχαν την ίδια δομή, με τρεις ποσότητες να είναι δεδομένες και την τέταρτη να ζητείται, ενώ παράλληλα συνέδεαν έμμεσα το μήκος με το εμβαδόν ή τον όγκο χωρίς να γίνεται οποιαδήποτε άμεση αναφορά σε αυτούς τους όρους.

Με τις ερευνητικές τους εργασίες οι De Bock κ.ά. (1998, 2002b, 2003), αποκάλυψαν την ύπαρξη μιας ισχυρής τάσης για γενίκευση της χρήσης του γραμμικού μοντέλου. Αυτή η τάση φάνηκε να είναι ιδιαίτερα ισχυρή ανάμεσα στους μαθητές 12 με 13 ετών, αφού τα ποσοστά των ορθών απαντήσεων στα μη αναλογικά έργα κυμαίνονταν από

2 μέχρι 7%, αλλά και πολύ σημαντική ανάμεσα στην ομάδα των μαθητών 15 και 16 ετών (17-22% ποσοστό επιτυχίας στα μη αναλογικά έργα). Τα αποτελέσματα αυτά αποτελούν σημαντικές ενδείξεις για τη φύση του φαινομένου, αφού παρά την αύξηση της ηλικίας των μαθητών η μετα-αναλογική τους ενημερότητα φαίνεται περιορισμένη. Παρόλα αυτά είναι αναγκαία μια πιο συστηματική διερεύνηση του φαινομένου, η οποία να καλύπτει ένα ευρύτερο φάσμα ηλικιών στις οποίες να εμπίπτει και η μετάβαση από το δημοτικό στο γυμνάσιο, έτσι ώστε να επιβεβαιωθεί η υπόθεση ότι το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας είναι αποτέλεσμα του επιστημολογικού εμποδίου της αναλογίας.

Η αναγνώριση του εύρους του φαινομένου της ψευδαίσθησης της αναλογίας οδήγησε τους ερευνητές προς την εύρεση κατάλληλων συνθηκών για αντιμετώπισή τού. Οι προσπάθειες για περιορισμό της ψευδαίσθησης της αναλογίας που έχουν γίνει κρύβουν πίσω τους και διαφορετική φιλοσοφία κάθε φορά. Ειδικότερα έγινε προσπάθεια αντιμετώπισης του φαινομένου με τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων (De Bock et al, 1998, 2002b, 2003; Van Dooren et al., 2005b), τη συστηματική διδασκαλία πάνω στις μη αναλογικές καταστάσεις ή ακόμη και τη δημιουργία γνωστικής σύγκρουσης στους μαθητές (De Bock et al, 2002b; Van Dooren et al., 2004a).

Η προσπάθεια των De Bock κ.ά. (1998) να βελτιώσουν τα ποσοστά των μαθητών στα μη αναλογικά έργα με τη χρήση κάποιας εικονικής αναπαράστασης, αυτοσχέδιας ή έτοιμης (Διάγραμμα 10), δεν είχε τα αναμενόμενα αποτελέσματα. Και αυτό αφού η παροχή μιας τέτοιας αναπαράστασης δεν διαφοροποίησε τη συμπεριφορά των μαθητών ως προς την επίλυση προβλήματος. Μικρή βελτίωση, της τάξης του 4%, παρατηρήθηκε όταν τα έργα συνοδεύονταν με τα αντίστοιχα γεωμετρικά σχήματα κατασκευασμένα τώρα πάνω σε τετραγωνισμένο χαρτί αντί σε λευκό (De Bock et al., 2002b), βελτίωση που όμως δεν ήταν αρκετή για να αντιμετωπιστεί το φαινόμενο.



Διάγραμμα 10 . Παράδειγμα της έτοιμης εικονικής αναπαράστασης που δόθηκε για το μη αναλογικό πρόβλημα στην έρευνα των De Bock κ.ά. (1998).

Μικρή βελτίωση στην επίδοση των μαθητών προέκυψε και από την συμπερίληψη ενός εισαγωγικού σημειώματος στην αρχή του δοκιμίου, το οποίο προειδοποιούσε τους μαθητές για το μη συνηθισμένο είδος των έργων (De Bock et al., 2002b). Παράλληλα, η επαναδιατύπωση των ίδιων προβλημάτων σε προβλήματα πολλαπλασιαστικής σύγκρισης (Πίνακας 5), αποτέλεσε σημαντική βοήθεια για αρκετούς μαθητές, αφού τα ποσοστά επιτυχίας τους αυξήθηκαν κατά 18% σε σχέση με τα προβλήματα στα οποία δίνονταν οι τρεις ποσότητες και ζητούνταν η τέταρτη.

Και στις δύο περιπτώσεις, ως μειονέκτημα των καλύτερων αποτελεσμάτων στα μη αναλογικά έργα, μειώθηκαν τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών στα αναλογικά έργα, αφού κάποιοι μαθητές άρχισαν να εφαρμόζουν μη αναλογικές μεθόδους επίλυσης και σε αυτά τα προβλήματα. Οι προειδοποιήσεις διευκόλυναν τους μαθητές στην αναγνώριση και στην επίλυση των μη αναλογικών προβλημάτων, αλλά ως αποτέλεσμα οι μαθητές άρχισαν να αμφισβητούν την ορθότητα του αναλογικού μοντέλου και σε προβλήματα για τα οποία ήταν κατάλληλο. Από αυτό γίνεται εμφανές ότι η τάση των μαθητών να γενικεύουν μαθηματικά μοντέλα δεν περιορίζεται μόνο στο γραμμικό μοντέλο. Από τη στιγμή που οι μαθητές ανακαλύπτουν τα μη αναλογικά χαρακτηριστικά κάποιων καταστάσεων, αρχίζουν να γενικεύουν αυτό το καινούριο στοιχείο και σε απλές αναλογικές καταστάσεις (De Bock et al., 2002b).

Πίνακας 5

Παράδειγμα των Έργων Σύγκρισης που Χρησιμοποιήθηκαν στην Έρευνα των De Bock κ.ά. (2002b)

Παράδειγμα αναλογικού έργου
Ένας γεωργός έσκαψε ένα αυλάκι γύρω από το χωράφι του, τετράγωνου σχήματος. Τον επόμενο μήνα πρέπει να σκάψει ένα αυλάκι γύρω από ένα άλλο χωράφι τετράγωνου πάλι σχήματος, αλλά τριπλάσιας πλευράς. Πόσο περισσότερο χρόνο θα χρειαστεί για να σκάψει το αυλάκι αυτό;
Παράδειγμα μη αναλογικού έργου
Ένας γεωργός έβαλε λίπασμα στο χωράφι του, τετράγωνου σχήματος. Αύριο πρέπει να λιπάνει ένα άλλο χωράφι ίδιου σχήματος, αλλά τριπλάσιας πλευράς. Πόσο περισσότερο χρόνο θα χρειαστεί για να λιπάνει το χωράφι;

Παρόμοια συμπεριφορά παρατηρήθηκε και στην προσπάθεια διερεύνησης της επίδρασης μιας «μεταγνωστικής» παρέμβασης πάνω στην επίδοση των μαθητών στα μη αναλογικά γεωμετρικά έργα (De Bock et al., 2002b). Στην παρέμβαση αυτή κάθε λεκτικό πρόβλημα συνοδευόταν με την απάντηση δύο διαφορετικών παιδιών για το πρόβλημα. Το ένα παιδί, μαζί με την μαθηματική πρόταση και την απάντηση που πρότεινε, εξέφραζε την κυρίαρχη «παρανόηση» -ψευδαίσθηση ότι το μήκος είναι γραμμικά ανάλογο με το εμβαδόν, ενώ το άλλο παιδί έδινε την ορθή μαθηματική πρόταση και απάντηση. Σκοπός αυτής της παρέμβασης ήταν να δημιουργηθεί μια γνωστική σύγκρουση στους μαθητές ώστε να αμφισβητήσουν την καταλληλότητα του αναλογικού μοντέλου για περιγραφή της σχέσης ανάμεσα στο μήκος και το εμβαδόν ή τον όγκο ενός σχήματος. Παρ' όλες τις προσπάθειες των ερευνητών δεν παρατηρήθηκε μια γενική θετική επίδραση της μεταγνωστικής παρέμβασης, αφού η βελτίωση της επίδοσης των μαθητών στα μη αναλογικά προβλήματα εξουδετερώθηκε από τη χαμηλότερη επίδοση στα αναλογικά έργα του δοκιμίου (De Bock et al., 2002b).

Ακόμα και η αύξηση της αυθεντικότητας του πλαισίου μέσα στο οποίο παρουσιάζεται το πρόβλημα ώστε να προσομοιάζει σε μια πραγματική κατάσταση (De Bock et al., 2003), όχι μόνο δεν έφερε τα επιθυμητά αποτελέσματα αλλά η επίδοση των μαθητών στο δοκίμιο γενικότερα, και ειδικά στα μη αναλογικά προβλήματα ήταν χαμηλότερη από προηγουμένως. Οι μαθητές μέσα από την προβληματική κατάσταση μεταφέρονται στο νησί των Λιλιπούτειων, όπου όλα τα μήκη είναι 12 φορές μικρότερα, και καλούνται να κάνουν σμικρύνσεις επίπεδων και στερεών σχημάτων, βρίσκοντας αντίστοιχα το εμβαδόν και τον όγκο τους.

Με μια καινούρια σειρά ερευνών οι Van Dooren κ.ά. (2005b) προσπάθησαν να αντιμετωπίσουν τη γενικευμένη χρήση του αναλογικού μοντέλου σε γεωμετρικά προβλήματα, προτείνοντας πιο δραστικές αλλαγές στο πειραματικό πλαίσιο. Συγκεκριμένα, η ένταξη των μαθητών, ηλικίας 11 με 12 ετών, σε μια πραγματική προβληματική κατάσταση με πραγματικά αντικείμενα και αυθεντικές δράσεις, όπου οι μαθητές καλούνταν να υπολογίσουν τα κεραμικά που χρειάζονται για να καλύψουν ένα κουκλόσπιτο, οδήγησε στην αποφυγή του γραμμικού μοντέλου και στην αύξηση των ποσοστών επιτυχίας των μαθητών (Van Dooren et al., 2005b). Παρόλα αυτά, τα αποτελέσματα ήταν μόνο παροδικά αφού οι μαθητές απέτυχαν σε ένα δοκίμιο επαναχορήγησης με μη αναλογικά έργα εμβαδού. Ο λόγος για αυτή την αποτυχία οφείλεται πιθανότατα στο ότι οι μαθητές είχαν άμεση ανατροφοδότηση για την ορθότητα της απάντησης που έδιναν στην αυθεντική κατάσταση. Το γεγονός αυτό τους έδινε την ευκαιρία να αναθεωρήσουν την απάντησή τους, αν αυτή ήταν λανθασμένη, χωρίς να φτάνουν σε κάποιο συμπέρασμα για τη σχέση μήκους και εμβαδού.

Ούτε και η εμπλοκή των μαθητών σε μια σειρά δέκα πειραματικών μαθημάτων, τα οποία είχαν ως στόχο την εννοιολογική αλλαγή (Van Dooren et al., 2004a), έφερε τα αναμενόμενα αποτελέσματα. Οι μαθητές ηλικίας 13 με 14 ετών μετά την παρέμβαση δεν ήταν σε θέση να διακρίνουν τις αναλογικές από τις μη αναλογικές καταστάσεις, με αποτέλεσμα να γενικεύουν τις μη αναλογικές στρατηγικές τις οποίες διδάχτηκαν κατά τη διάρκεια των μαθημάτων και στις αναλογικές καταστάσεις.

Η αδυναμία των πιο πάνω διδακτικών παρεμβάσεων για αντιμετώπιση του φαινομένου της ψευδαίσθησης της αναλογίας οδήγησε στη διερεύνηση των μηχανισμών που ενεργοποιούνται από τους μαθητές κατά τη διαδικασία επίλυσης μη αναλογικών προβλημάτων. Οι De Bock κ.ά. (2002a) χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της κλινικής συνέντευξης, αναγνώρισαν το ρόλο που έχουν οι διαφορετικές πτυχές της γνώσης των μαθητών και οι οποίες είναι υπεύθυνες για τις αναλογικές απαντήσεις τους σε μη αναλογικά προβλήματα. Συγκεκριμένα, από τις συνεντεύξεις διαφάνηκε ότι όχι μόνο η πεποίθηση ότι κάθε αριθμητική σχέση είναι αναλογική είναι υπεύθυνη για τις αναλογικές απαντήσεις των μαθητών σε μη αναλογικά προβλήματα, αλλά και οι διαισθητικές αντιλήψεις των μαθητών, ελλείψεις στις γεωμετρικές τους γνώσεις και κάποιες ανεπαρκείς τους στάσεις και αντιλήψεις για την επίλυση προβλήματος (De Bock et al., 2002a).

Οι Van Dooren κ.ά (2005c) σε μια μετέπειτα εργασία τους, επιχείρησαν να διευκρινίσουν περαιτέρω τους ψυχολογικούς και εκπαιδευτικούς παράγοντες, οι οποίοι βρίσκονται πίσω από την τάση των μαθητών να απαντούν αναλογικά σε μη αναλογικά προβλήματα. Συγκεκριμένα, διατείνονται ότι στοιχεία που επεξηγούν την ύπαρξη του φαινομένου της ψευδοαναλογίας υπάρχουν (1) στις εμπειρίες που αποκτούν οι μαθητές μέσα στην τάξη των μαθηματικών, (2) στη διαισθητική φύση του γραμμικού μοντέλου και (3) σε στοιχεία που σχετίζονται με τα συγκεκριμένα μαθηματικά έργα μέσα στα οποία εμφανίζεται το γραμμικό λάθος.

Από τα πιο πάνω γίνεται εμφανές ότι η ύπαρξη του φαινομένου της ψευδαίσθησης της αναλογίας δεν είναι αποτέλεσμα της διδασκαλίας ούτε και μπορεί να αντιμετωπιστεί με τα συνήθη μέσα της διδασκαλίας και την ταυτόχρονη αύξηση της ωριμότητας των μαθητών. Η αδυναμία των διδακτικών παρεμβάσεων που παρουσιάστηκαν για αντιμετώπιση του φαινομένου της ψευδαίσθησης της αναλογίας κάνει πιο επιτακτική την ανάγκη για εύρεση ενός διαφορετικού πλαισίου μέσα στο οποίο η απόρριψη της καταλληλότητας του γραμμικού μοντέλου για όλες ανεξαίρετα τις καταστάσεις θα προκύψει αυθόρμητα μέσα από τις συνθήκες του πλαισίου. Οι συνθήκες αυτές όπως έχει φανεί δεν μπορεί να περιοριστούν σε αυτές της τυπικής διδασκαλίας, με την παροχή για παράδειγμα διαφορετικών μέσων αναπαράστασης (De Bock et al, 1998, 2002b, 2003; Van Dooren et al., 2005b) ή μιας σειράς μαθημάτων πάνω στο θέμα (Van Dooren et al., 2004a). Αντίθετα, φαίνεται να προκύπτει η ανάγκη δημιουργίας και εφαρμογής μιας τέτοιας κατάστασης χαρακτηριστικό της οποίας να είναι η άμεση εμπλοκή και αποδοχή εκ μέρους των μαθητών της ευθύνης για τη μάθησή τους. Μέσα σε αυτή την κατάσταση η μαθητές θα μπορούν να αναγνωρίσουν και στη συνέχεια να προσδιορίσουν με ακρίβεια τις συνθήκες κάτω από τις οποίες εμφανίζεται το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας έτσι ώστε να το αντιμετωπίσουν.

Έρευνες στο Χώρο της Κυπριακής Εκπαίδευσης. Το θέμα της ευρείας εφαρμογής του γραμμικού μοντέλου έχει μελετηθεί εκτενώς και στην Κύπρο μέσα από τρεις μεγάλες ερευνητικές εργασίες (Modestou & Gagatsis, 2004a, 2004b, 2006, 2007a; Modestou et al., 2004; Kontoyianni et al., 2006), οι οποίες είχαν ως στόχο:

(α) τη διερεύνηση του φαινομένου,

(β) να δείξουν ότι τα λάθη, τα οποία προκύπτουν από τη μη κατάλληλη εφαρμογή του αναλογικού μοντέλου, δεν είναι τυχαία ούτε και εύκολο να αντιμετωπιστούν και

(γ) να θέσουν υπό αμφισβήτηση την καταλληλότητα και την αυθόρμητη χρήση του αναλογικού μοντέλου.

Έρευνα 1. Σκοπός της εργασίας των Μοδέστου κ. ά. (2006) και Kontoyianni κ.ά. (2006) ήταν να διερευνήσει το εύρος ύπαρξης του φαινομένου της ψευδαίσθησης της αναλογίας σε Κύπριους μαθητές γυμνασίου μέσα από την επίλυση μη αναλογικών γεωμετρικών προβλημάτων, κάνοντας ιδιαίτερη αναφορά στην επίδραση του είδους του γεωμετρικού σχήματος (τετράγωνο, ορθογώνιο, κύκλος και ακανόνιστο σχήμα), στη χρήση κάποιας αυτοσχέδιας αναπαράστασης καθώς και στις στρατηγικές επίλυσης των προβλημάτων αυτών.

Υποκείμενα της έρευνας αποτέλεσαν 268 μαθητές της Β’ τάξης και Γ’ τάξης, στους οποίους χορηγήθηκε ένα δοκίμιο που περιλάμβανε οκτώ διαφορετικά γεωμετρικά προβλήματα, τέσσερα αναλογικά (περίμετρος) και τέσσερα μη αναλογικά προβλήματα (εμβαδόν). Σε κάθε κατηγορία προβλημάτων, υπήρχε ένα πρόβλημα που αφορούσε διαφορετικό γεωμετρικό σχήμα (τετράγωνο, ορθογώνιο, κύκλος και ακανόνιστο σχήμα). Τα προβλήματα είχαν ως θέμα τη μεγέθυνση ενός γεωμετρικού σχήματος, με έμμεση αναφορά στα μεγέθη της περιμέτρου και του εμβαδού (Πίνακας 6).

Πίνακας 6

Παράδειγμα των Έργων που Χρησιμοποιήθηκαν στην Έρευνα των Μοδέστου κ.ά. (2006)

Παράδειγμα αναλογικού έργου
Στο χάρτη Α της Κύπρου, η απόσταση από τη Λευκωσία στη Λεμεσό είναι 6cm και η απόσταση από τη Λευκωσία στην Πάφο είναι 11cm. Σε ένα χάρτη Β της Κύπρου, η απόσταση από τη Λευκωσία στη Λεμεσό είναι τριπλάσια. Πόση είναι η απόσταση από τη Λευκωσία στην Πάφο στο χάρτη Β;
Παράδειγμα μη αναλογικού έργου
Στο χάρτη Α της Κύπρου, η απόσταση από τη Λευκωσία στη Λεμεσό είναι 5cm και η έκταση της Κύπρου είναι $200cm^2$. Σε ένα χάρτη Β της Κύπρου, η απόσταση από τη Λευκωσία στη Λεμεσό είναι τριπλάσια. Πόση έκταση έχει η Κύπρος στο χάρτη Β;

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η επίδοση των μαθητών και των δύο τάξεων διαφοροποιείται με βάση το είδος του έργου, το αν δηλαδή το έργο είναι αναλογικό ή μη αναλογικό. Συγκεκριμένα, η επίδοση των μαθητών στα αναλογικά προβλήματα ήταν ψηλή, με το πρόβλημα με το ακανόνιστο σχήμα να είναι δυσκολότερο τόσο για τη Β'($\overline{X}$ =0.60) όσο και για τη Γ' τάξη ($\overline{X}$ =0.73), και τα προβλήματα του κύκλου ($\overline{X\text{Β}}$ =0.81) και του τετραγώνου ($\overline{\text{ΧΓ}}$ =0.90) να είναι τα ευκολότερα για τις δύο τάξεις, αντίστοιχα. Στα μη αναλογικά προβλήματα η επίδοση των μαθητών και των δύο τάξεων ήταν πάρα πολύ χαμηλή, με το πρόβλημα ακανόνιστου σχήματος να είναι το δυσκολότερο ($\overline{X\text{Β}}$ =0.01 και $\overline{\text{ΧΓ}}$ =0.01), και τα προβλήματα του ορθογωνίου ($\overline{X\text{Β}}$ =0.13) και τετραγώνου ($\overline{\text{ΧΓ}}$ =0.07) να είναι τα ευκολότερα για τις δύο τάξεις, αντίστοιχα.

Γενικά, φάνηκε ότι το σχήμα επηρέασε την επίδοση των μαθητών ανεξάρτητα από το είδος του έργου (αναλογικό ή μη αναλογικό). Συγκεκριμένα, το δυσκολότερο πρόβλημα και για τις δύο τάξεις, τόσο στα αναλογικά όσο και στα μη αναλογικά έργα, ήταν το πρόβλημα του ακανόνιστου σχήματος, πιθανότατα λόγω της απουσίας κάποιας φόρμουλας, η οποία θα διευκόλυνε και θα κατεύθυνε τις πράξεις των μαθητών.

Η σύγκριση των επιδόσεων των μαθητών των δύο τάξεων έδειξε ότι ενώ υπήρχε στατιστικά σημαντική διαφορά στην επίδοση των μαθητών στα αναλογικά έργα ($F=11.03$; $p<.001$), με τους μαθητές της Γ' τάξης να είναι καλύτεροι από αυτούς της Β' τάξης, τέτοια διαφορά δεν υπήρχε και για τα μη αναλογικά έργα. Τα αποτελέσματα αυτά μας επιτρέπουν να συμπεράνουμε ότι ο μέσος όρος επίδοσης των μαθητών στα μη αναλογικά έργα είναι ανεξάρτητος από την τάξη στην οποία φοιτούν οι μαθητές.

Όσον αφορά στις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν οι μαθητές κατά την επίλυση των μη αναλογικών έργων εμβαδού, η πλειοψηφία των μαθητών (71%) χρησιμοποίησε συστηματικά το αναλογικό μοντέλο. Πρέπει να σημειωθεί ότι αναφορικά με την εφαρμογή της συγκεκριμένης στρατηγικής, παρατηρήθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές ανάμεσα στις δύο τάξεις ($F=20.8$; $p<0.01$), αφού περισσότεροι μαθητές της Γ' τάξης (80%) τη χρησιμοποίησαν για την επίλυση των μη αναλογικών έργων εμβαδού σε σχέση με τους μαθητές της Β' τάξης (62%).

Η χρήση αυτοσχέδιων εικονικών αναπαραστάσεων δεν επηρέασε την επίδοση των μαθητών τόσο στα αναλογικά όσο και στα μη αναλογικά προβλήματα, αφού ελάχιστοι ήταν και οι μαθητές που τις χρησιμοποίησαν. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο βαθμός στον οποίο οι μαθητές χρησιμοποίησαν τις αναπαραστάσεις ήταν συνάρτηση της τάξης στην οποία φοιτούσαν. Συνεπώς, το γεγονός ότι στη Γ΄ τάξη οι μαθητές ασχολούνται περισσότερο με τις φόρμουλες εύρεσης της περιμέτρου και του εμβαδού, οδήγησε σε μειωμένη χρήση κάποιας εικονικής αναπαράστασης σε σχέση με την Β' τάξη.

Έρευνα 2. Ο κύριος στόχος της δεύτερης μεγάλης εργασίας των Modestou & Gagatsi (2004a, 2007a) ήταν να ενισχύσει τη θέση ότι τα λάθη, τα οποία προκύπτουν από τη μη κατάλληλη εφαρμογή του αναλογικού μοντέλου, δεν είναι τυχαία ούτε και εύκολο να αντιμετωπιστούν μέσα από τη συνήθη διδασκαλία στις σχολικές τάξεις. Υποκείμενα της έρευνας αποτέλεσαν 307 μαθητές της Α' και Β' τάξης στους οποίους χορηγήθηκαν τρία διαφορετικά δοκίμια σε τρεις φάσεις.

Το πρώτο δοκίμιο (Δοκίμιο Α) χορηγήθηκε και στους 307 μαθητές του δείγματος και περιελάμβανε πέντε διαφορετικά γεωμετρικά λεκτικά προβλήματα. Από αυτά, τα δύο αφορούσαν την έννοια του όγκου, δύο την έννοια του εμβαδού και ένα την έννοια του μήκους. Όλα τα προβλήματα ήταν άμεσα προβλήματα πολλαπλασιαστικής σύγκρισης στα οποία δινόταν το εμβαδόν ή ο όγκος ενός ορθογώνιου σχήματος, παραλληλογράμμου ή παραλληλεπιπέδου αντίστοιχα, καθώς και η σχέση που το συνέδεε με το εμβαδόν ή τον όγκο του ζητούμενου σχήματος μέσω του μήκους των πλευρών του. Για παράδειγμα, το τέταρτο πρόβλημα του δοκιμίου, διατυπώθηκε ως εξής:

> *Το ψυγείο ενός εστιατόριου έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και χωρητικότητα $2m^3$. Πόση χωρητικότητα έχει το ψυγείο ενός εργοστασίου παραγωγής γάλακτος αν έχει ακριβώς διπλάσιες διαστάσεις από το ψυγείο του εστιατορίου;*

Σκοπός του συγκεκριμένου δοκιμίου ήταν να προσφέρει ενδείξεις για το βαθμό στον οποίο οι Κύπριοι μαθητές χρησιμοποιούν αναλογικό συλλογισμό κατά την επίλυση μη αναλογικών προβλημάτων εμβαδού και όγκου ορθογώνιων σχημάτων.

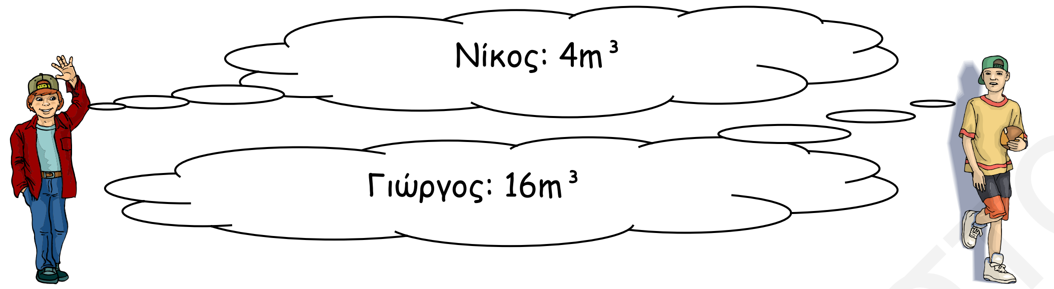
Το δεύτερο δοκίμιο (Δοκίμιο Β) χορηγήθηκε μόνο στους 157 μαθητές του δείγματος και περιελάμβανε τα ίδια πέντε γεωμετρικά λεκτικά προβλήματα του Δοκιμίου Α, αλλά με μια διαφοροποίηση στην ποσότητα των δεδομένων που δινόταν για την επίλυση του προβλήματος. Συγκεκριμένα, για κάθε πρόβλημα, επιπρόσθετα από το εμβαδόν ή τον όγκο του ορθογώνιου σχήματος και τη σχέση που το συνδέει με το εμβαδόν ή τον όγκο του ζητούμενου σχήματος, δίνονταν και οι διαστάσεις του αρχικού σχήματος. Για παράδειγμα, το πρόβλημα που παρουσιάστηκε πιο πάνω είχε ως εξής:

> *Το ψυγείο ενός εστιατορίου έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, ύψος 2m, πλάτος 1m, βάθος 1m και χωρητικότητα $2m^3$. Πόση χωρητικότητα έχει το ψυγείο ενός εργοστασίου παραγωγής γάλακτος, αν έχει ακριβώς διπλάσιες διαστάσεις από το ψυγείο του εστιατορίου;*

Σκοπός του Δοκιμίου Β ήταν να εξετάσει κατά πόσο η συμπερίληψη των διαστάσεων του σχήματος θα επηρέαζε σε τέτοιο βαθμό τους μαθητές ώστε να εκτελούν την πολλαπλασιαστική σύγκριση πρώτα με τις διαστάσεις του σχήματος και μετά να βρίσκουν το εμβαδόν ή τον όγκο του σχήματος, αντί να χρησιμοποιούν απευθείας την αναλογική σχέση ανάμεσα στο μήκος και το εμβαδόν ή τον όγκο του σχήματος.

Το τρίτο δοκίμιο (Δοκίμιο Γ) χορηγήθηκε στους υπόλοιπους 150 μαθητές του δείγματος και περιελάμβανε τα ίδια πέντε γεωμετρικά λεκτικά προβλήματα του Δοκιμίου Α αλλά με διαφορετική παρουσίαση. Συγκεκριμένα, στο Δοκίμιο Γ κάθε πρόβλημα συνοδευόταν με την απάντηση δύο «φανταστικών» παιδιών. Η μια απάντηση εκπροσωπούσε την κυρίαρχη «παρανόηση» - ψευδαίσθηση ότι το εμβαδόν και ο όγκος ενός σχήματος είναι άμεσα ανάλογα του μήκους του, ενώ η άλλη ήταν η ορθή.

Το ψυγείο ενός εστιατορίου έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και χωρητικότητα $2m^3$. Πόση χωρητικότητα έχει το ψυγείο ενός εργοστασίου παραγωγής γάλακτος, αν έχει ακριβώς διπλάσιες διαστάσεις από το ψυγείο του εστιατορίου;



Συμφωνώ με το ____________________, γιατί________________________

Κάθε μαθητής έπρεπε να γράψει τη μαθηματική πρόταση που χρησιμοποίησε κάθε «παιδί» για να φτάσει στις δοσμένες απαντήσεις και στην συνέχεια να επιλέξει τον ορθό συλλογισμό, δικαιολογώντας την απάντησή του. Το δοκίμιο αυτό χρησιμοποιήθηκε για να δώσει ακριβείς ενδείξεις για το μέγεθος και την ανθεκτικότητα του φαινομένου σε ένα περιβάλλον που προσομοιάζει με αυτό της πολλαπλής επιλογής, όπου η ορθή απάντηση έχει 50% πιθανότητα να επιλεγεί από κάθε μαθητή.

Η ανάλυση των δεδομένων αποκάλυψε το πραγματικό μέγεθος του φαινομένου της ψευδαίσθησης της αναλογίας στους Κύπριους μαθητές 12 και 13 ετών. Αν και παρατηρήθηκε μια στατιστικά σημαντική βελτίωση της επίδοσης των μαθητών στα Δοκίμια Β και Γ σε σχέση με το Δοκίμιο Α, περίπου το 70% των μαθητών επέμενε να χρησιμοποιεί συστηματικά το αναλογικό μοντέλο και για την επίλυση των μη αναλογικών προβλημάτων (Modestou et al., 2004). Συγκεκριμένα, μια πιο λεπτομερής ανάλυση των λαθών των μαθητών στα τρία δοκίμια έδειξε ότι 78% από αυτά τα λάθη οφείλονται στη μη κατάλληλη εφαρμογή του αναλογικού μοντέλου στο Δοκίμιο Α, 56.5% στο Δοκίμιο Β και 68% στο Δοκίμιο Γ.

Αξίζει να σημειωθεί ότι 30% από τα συγκεκριμένα λάθη των μαθητών στο Δοκίμιο Β, όπου δίνονταν οι διαστάσεις των σχημάτων, προέκυψαν αφού οι μαθητές είχαν υπολογίσει ορθά τις διαστάσεις των καινούριων σχημάτων και έπρεπε απλώς να εφαρμόσουν τον τύπο εύρεσης του εμβαδού ή του όγκου (Modestou & Gagatsis, 2004b). Για παράδειγμα, στο έργο που προαναφέρθηκε οι μαθητές υπολόγιζαν το ύψος (2x2m=4m), το πλάτος (2x1m=2m) και το βάθος (2x1m=2m) του καινούριου ψυγείου και στη συνέχεια έφταναν στο συμπέρασμα ότι η χωρητικότητά του θα είναι διπλάσια από του προηγούμενου (2x2m=4m).

Στο συγκεκριμένο δοκίμιο (Δοκίμιο Β) παρατηρήθηκε μικρή, αλλά σημαντική βελτίωση στην επίδοση των μαθητών Β' Γυμνασίου σε σχέση με τους μαθητές της Α' Γυμνασίου. Συγκεκριμένα, φάνηκε ότι το πλαίσιο των προβλημάτων, με την παροχή των διαστάσεων, ευνόησε τους μεγαλύτερους μαθητές, οι οποίοι δείχνοντας μεγαλύτερη ευχέρεια στη διεκπεραίωση πράξεων και εφαρμογή τύπων, είχαν καλύτερα αποτελέσματα στα μη αναλογικά έργα εμβαδού και όγκου σε σχέση με τους μικρότερους μαθητές.

Σε αντίθεση με το Δοκίμιο Β, η επίδοση των μαθητών στα μη αναλογικά έργα εμβαδού και όγκου δε διαφοροποιήθηκε με βάση την ηλικία στα Δοκίμια Α και Γ. Αυτό έδειξε ότι το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας δεν είναι πρόσκαιρο, παροδικό και τυχαίο. Αντίθετα, το γεγονός ότι οι μαθητές συνέχισαν να χρησιμοποιούν το αναλογικό μοντέλο και σε μη αναλογικές καταστάσεις, ακόμη και μετά την πάροδο ενός χρόνου διδασκαλίας, ακόμη και σε καταστάσεις όπου η ορθή απάντηση είχε 50% πιθανότητα να προκύψει, υπέδειξε το πραγματικό μέγεθος του προβλήματος. Το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας δεν αποτελεί ένα σύνηθες λάθος που μπορεί να αντιμετωπιστεί μέσα από την τυπική διδασκαλία.

Έρευνα 3. Η τρίτη ερευνητική εργασία (Modestou & Gagatsis, 2006) είχε ως στόχο να εξετάσει σε πρώτη φάση το βαθμό στον οποίο οι μαθητές χρησιμοποιούν το γραμμικό μοντέλο για την επίλυση μη αναλογικών προβλημάτων καθαρά γεωμετρικής φύσης. Σε δεύτερη φάση η ερευνητική εργασία στόχευε στη δημιουργία μιας μορφής σύγκρουσης στους μαθητές που να θέσει υπό αμφισβήτηση την καταλληλότητα και την αυθόρμητη χρήση του αναλογικού μοντέλου για όλα τα προβλήματα.

Στην έρευνα συμμετείχαν 244 μαθητές της Α' Λυκείου στους οποίους χορηγήθηκε ένα δοκίμιο με εννιά γεωμετρικά προβλήματα περιμέτρου, εμβαδού και όγκου χωρισμένα σε τρεις τριάδες. Οι μαθητές καλούνταν πρώτα να επιλύσουν ξεχωριστά τα προβλήματα κάθε τριάδας και στη συνέχεια να διαλέξουν μόνο ένα από αυτά, το οποίο να αντιπροσωπεύσει τον αριθμό που δινόταν στην αρχή κάθε τριάδας (Πίνακας 7). Στην ουσία οι μαθητές είχαν να επιλέξουν ποιο από τα τρία προβλήματα δίνει ως απάντηση το δεδομένο αριθμό (Elia, 2003).

Κάθε τριάδα έργων περιελάμβανε το ορθό, για το δεδομένο αριθμό, πρόβλημα, ένα πρόβλημα ψευδοαναλογίας, στο οποίο η εφαρμογή του αναλογικού μοντέλου θα είχε ως αποτέλεσμα το δεδομένο αριθμό και ένα αδύνατο πρόβλημα. Σε αυτό η μη αναγνώριση της απουσίας λύσης και η προσπάθεια επίλυσής του με βάση τα δεδομένα του προβλήματος θα είχε ως αποτέλεσμα το συγκεκριμένο αριθμό. Η όλη φιλοσοφία του δοκιμίου βρισκόταν στη δημιουργία στους μαθητές κάποιου είδους εσωτερικής σύγκρουσης, φέρνοντάς τους σε μια θέση όπου θα έπρεπε να διαλέξουν ένα πρόβλημα ανάμεσα σε τρία που πιθανότατα να έχουν την ίδια απάντηση. Με αυτόν το τρόπο έγινε προσπάθεια να τεθεί υπό αμφισβήτηση η καταλληλότητα του αναλογικού μοντέλου για την επίλυση όλων των προβλημάτων.

Πίνακας 7

Τα προβλήματα της πρώτης τριάδας έργων που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα των Modestou & Gagatsi (2006)

	50
Α.	Ο κ. Κώστας άδειασε όλο το νερό από μια ανοικτή δεξαμενή σχήματος κύβου γιατί θα την βάψει. Αν χρειάζεται 10 λίτρα μπογιάς για να βάψει το πάτο της δεξαμενής, πόσα λίτρα μπογιάς θα χρειαστεί συνολικά;
Β.	Ο Γιώργος μέτρησε την επιφάνεια του τετράγωνου πατώματος της τάξης του και βρήκε πως έχει εμβαδόν 25m². Το πάτωμα στην αίθουσα γυμναστικής έχει επίσης τετράγωνο σχήμα αλλά διπλάσια πλευρά από αυτό της τάξης του. Πόσο είναι το εμβαδόν του πατώματος της αίθουσας της γυμναστικής;
Γ.	Σε μία τάξη υπάρχουν δύο ορθογώνιοι πίνακες ενωμένοι μεταξύ τους (με κοινό πλάτος). Η περίμετρος του ενός ορθογωνίου πίνακα είναι 30m και του άλλου 20m. Πόσα μέτρα (m) κορδέλας χρειαζόμαστε για να πλαισιώσουμε τους ενωμένους πίνακες;

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων φάνηκε ότι ακόμα και στην ηλικία των 15 ετών περισσότερο από το $\frac{1}{3}$ των μαθητών συνεχίζει να χρησιμοποιεί τον αναλογικό συλλογισμό για την επίλυση μη αναλογικών προβλημάτων πολλαπλασιαστικής σύγκρισης, ανεξαρτήτως πλαισίου. Το γεγονός αυτό κάνει πιο ισχυρά τα ευρήματα της προηγούμενης εργασίας (Modestou & Gagatsis, 2007a) που υποστηρίζουν ότι τα συγκεκριμένα λάθη των μαθητών δεν είναι τυχαία, ούτε αποτέλεσμα της απουσίας κάποιας γνώσης.

Ταυτόχρονα, οι αποφάσεις των μαθητών για την επιλογή του αντιπροσωπευτικού προβλήματος για κάθε τριάδα έργων πάρθηκαν με συστηματικό τρόπο με βάση τις απαντήσεις που έδωσαν στα έργα. Συγκεκριμένα, φάνηκε ότι η πλειοψηφία των μαθητών που έλυσε ορθά το κατάλληλο πρόβλημα ταυτόχρονα το επέλεξε, ενώ και όσοι μαθητές εφάρμοσαν μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό στα μη αναλογικά προβλήματα ή έλυσαν τα αδύνατα προβλήματα, έπραξαν το ίδιο για τα αντίστοιχα προβλήματα. Αυτή η αναλογία που υπάρχει ανάμεσα στις λύσεις και τις επιλογές των μαθητών, έδειξε ότι για το μαθητή η αναλογική απάντηση σε ένα μη αναλογικό έργο δίνει την ίδια σιγουριά για την ορθότητα της με μια οποιαδήποτε ορθή απάντηση.

Σημαντικό είναι ακόμη και το γεγονός ότι σχεδόν το 20% από τους μαθητές που έλυσαν ορθά τα κατάλληλα για το δεδομένο αριθμό έργα, δεν τα επέλεξαν και ως τα καταλληλότερα κάθε τριάδας, αφού ήταν πιο επιρρεπείς στις λύσεις που πήραν από τα ψευδοαναλογικά και τα αδύνατα προβλήματα. Φαίνεται λοιπόν, ότι το γραμμικό μοντέλο εδραιώνεται ως μια ασφαλής στρατηγική επίλυσης προβλημάτων, η οποία δύσκολα μπορεί να αμφισβητηθεί. Το γεγονός αυτό δίνει σαφείς ενδείξεις προς τον επιστημολογικό χαρακτήρα του φαινομένου της ψευδαίσθησης της αναλογίας.

Η Αναλογία ως Επιστημολογικό Εμπόδιο;

Το λάθος και η αποτυχία των μαθητών δεν έχουν πια τον απλοποιημένο ρόλο που τους δίναμε άλλοτε. Το λάθος δεν είναι πάντα το αποτέλεσμα της άγνοιας, της αβεβαιότητας ή της τύχης, όπως ισχυρίζονται οι εμπειρικές θεωρίες μάθησης (Brousseau, 1997). Το λάθος μπορεί να είναι και το αποτέλεσμα μιας προηγουμένης γνώσης, η εφαρμογή της οποίας αν και κρίνεται ενδιαφέρουσα και επιτυχημένη σε κάποιες περιπτώσεις, σε κάποιες άλλες αποδεικνύεται λαθεμένη ή απλά μη προσαρμόσιμη.

Τα λάθη αυτά, όπως τονίζει ο Brousseau (1997), δεν είναι σποραδικά και απρόβλεπτα. Αντίθετα, είναι επαναλαμβανόμενα και επίμονα. Τα λάθη αυτού του είδους που γίνονται από το ίδιο άτομο, αλληλοσυνδέονται μεταξύ τους με ένα τρόπο σκέψης, μια χαρακτηριστική αντίληψη, μια αρχέγονη «γνώση» η εφαρμογή της οποίας είναι επιτυχημένη σε ένα συγκεκριμένο πεδίο. Δεν εξαφανίζονται όλα πλήρως και την ίδια χρονική στιγμή, αλλά αντιστέκονται και επιμένουν. Επανεμφανίζονται ακόμα και αφού το άτομο έχει απορρίψει το ελλιπές και μη αποτελεσματικό μοντέλο από το συνειδητό του γνωστικό σύστημα. Αποτελούν συστατικό στοιχείο της ήδη υπάρχουσας γνώσης του μαθητή και κατ' επέκταση συνίστανται σε εμπόδια επιστημολογικής προέλευσης (Brousseau, 1986).

Τα επιστημολογικά εμπόδια διακρίνονται από άλλα εμπόδια τα οποία σχετίζονται με το ίδιο το άτομο ή και τη διδασκαλία και τα οποία αντιστοιχούν σε εμπόδια οντογενετικής προέλευσης και διδακτικής προέλευσης (Brousseau, 1997). Τα εμπόδια οντογενετικής προέλευσης είναι δυσκολίες που οφείλονται στο άτομο και τους ατομικούς περιορισμούς, όπως για παράδειγμα, τη νευρο-φυσιολογική του κατάσταση και το αναπτυξιακό στάδιο που βρίσκεται. Τα εμπόδια διδακτικής προέλευσης είναι δυσκολίες που οφείλονται στο αναλυτικό πρόγραμμα, στις επιλογές των μαθησιακών δραστηριοτήτων, στο μοντέλο διδασκαλίας και γενικά σε παράγοντες του εκπαιδευτικού συστήματος (Radford et al., 2000).

Τα εμπόδια επιστημολογικής προέλευσης οφείλονται στην ίδια τη φύση του αντικειμένου και χαρακτηρίζονται από την επανεμφάνισή τους τόσο στην ιστορία των μαθηματικών όσο και στη μάθηση των μαθηματικών από το άτομο. Όπως αναφέρει χαρακτηριστικά ο Brousseau (1997, σελ. 163) «τα εμπόδια τα οποία χαρακτηρίζονται ως επιστημολογικά είναι αυτά που δε μπορούν και δεν πρέπει να αποφευχθούν, ακριβώς επειδή έχουν καθοριστικό ρόλο στην ίδια τη μάθηση, ενώ παράλληλα μπορούν και να εντοπιστούν στην ιστορική εξέλιξη των ίδιων των εννοιών». Ένα επιστημολογικό εμπόδιο αποτελεί στην ουσία την πηγή ενός επαναλαμβανόμενου και μη τυχαίου λάθους, το οποίο εμφανίζεται όταν τα άτομα προσπαθούν να επιλύσουν ένα πρόβλημα (Radford et al., 2000). Ειδικότερα, ένα λάθος αποτελεί επιστημολογικό εμπόδιο όταν έχει τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

- Είναι μια σταθερή γνώση ή αντίληψη και όχι μια δυσκολία ή απουσία γνώσης.
- Αυτή η γνώση λειτουργεί κατάλληλα σε ένα σύνολο καταστάσεων και για ορισμένες τιμές των μεταβλητών αυτών των καταστάσεων.
- Προσπαθώντας να προσαρμοστεί σε άλλες καταστάσεις ή σε άλλες τιμές των μεταβλητών προκαλεί ειδικά λάθη που μπορούν να παρατηρηθούν και να αναλυθούν.
- Στις καταστάσεις που ξεφεύγουν από το πεδίο εγκυρότητας της, η απόρριψή της θα στοιχίσει στο μαθητή περισσότερο από μια προσπάθεια προσαρμογής της.
- Το εμπόδιο αντιστέκεται σε περιστασιακές εμφανίσεις αντιφάσεων σε καινούριες καταστάσεις και στη βελτίωση έτσι της γνώσης. Μπορεί να ξεπεραστεί μόνο σε

> ειδικές καταστάσεις απόρριψης και αυτή η απόρριψη είναι συστατικό στοιχείο της γνώσης (Brousseau, 1986).

Από τα πιο πάνω φαίνεται ότι ένα επιστημολογικό εμπόδιο αποτελεί μέρος μιας ολοκληρωμένης γνώσης και άρα έχει την ίδια φύση με τη γνώση. Η απόρριψή του πρέπει να γίνει ανεμπόδιστα αναγκαία, κάτι που αφήνει τελικά ανεξίτηλα σημάδια στο σύστημα της γνώσης. Αυτό υποδεικνύει ότι το εμπόδιο δεν είναι απλά ένα πρόσκαιρο λάθος που οφείλεται απλά στην άγνοια του ατόμου και το οποίο μπορεί εύκολα να αντιμετωπιστεί. Μπορεί να προκύψει μέσα από κοινωνικές, πολιτιστικές ή ακόμα και οικονομικές συνθήκες, οι οποίες εντέλει πραγματώνονται σε αντιλήψεις που παραμένουν ακόμα και όταν οι αιτίες που τις προκάλεσαν πάψουν να υπάρχουν (Brousseau, 1986).

Πρέπει να σημειωθεί ότι τα επιστημολογικά εμπόδια δεν προκύπτουν από τη διατύπωση της επίσημης γνώσης από μέρους του δασκάλου αλλά από τις αναπαραστάσεις, τις οποίες ο δάσκαλος, και τελικά ο μαθητής, χρησιμοποιούν για να διασφαλίσουν τη λειτουργία και την κατανόηση αυτής της καινούριας γνώσης (Brousseau, 1997). Αυτή η κατανόηση συνδέεται άμεσα με τις συνθήκες της μάθησης και είναι αναγκαία για την εφαρμογή της επίσημης γνώσης. Κατά συνέπεια, ο μαθητής θυμάται όχι μόνο τη γνώση την οποία έχει διδαχθεί, αλλά και τις συνθήκες της μάθησης μέσα στις οποίες προέκυψε.

Για παράδειγμα, παραδοσιακά μέσα στη σχολική τάξη μια έννοια διδάσκεται μόνο στο βαθμό στον οποίο είναι χρήσιμη και αποτελεσματική, μόνο δηλαδή αν συνεισφέρει στη λύση ενός προβλήματος. Έτσι, η γνώση αντλεί τελικά το νόημά της μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα, στα οποία η εφαρμογή της είναι επιτυχημένη, και τα οποία κατ' επέκταση συνιστούν την περιοχή εφαρμογής της συγκεκριμένης γνώσης. Αυτή η περιοχή σπάνια έχει γενικό χαρακτήρα και είναι πλήρως καθορισμένη. Στην πραγματικότητα το νόημα μιας μαθηματικής γνώσης δεν καθορίζεται μόνο από το σύνολο των καταστάσεων μέσα στις οποίες αυτή η γνώση πραγματώνεται ως μια μαθηματική θεωρία, ούτε μόνο από τις καταστάσεις στις οποίες χρησιμοποιείται ως μέσο για επίλυση του προβλήματος (Brousseau, 1993).

Για το λόγο αυτό η γνώση αποκτά κάποιους περιορισμούς, συγκεκριμενοποιήσεις ακόμα και αλλοιώσεις του νοήματος. Αν χρησιμοποιηθεί με επιτυχία για αρκετό χρονικό διάστημα, τότε η γνώση παίρνει μια αξία που κάνουν τη διαφοροποίηση, γενίκευση ή απόρριψη της πολύ δύσκολη · συνίσταται δηλαδή σε επιστημολογικό εμπόδιο (Brousseau, 1986). Αυτό το επιστημολογικό εμπόδιο αντιστέκεται εκ φύσεως σε κάθε προσπάθεια απόρριψής του, αφού αποτελεί μια καλά εδραιωμένη γνώση του μαθητή, και προσπαθεί να προσαρμοστεί σε ένα πιο περιορισμένο πεδίο αλλά και να διαφοροποιηθεί στον μικρότερο δυνατό βαθμό.

Μέσα σε αυτό το πλαίσιο, τα λάθη τα οποία παρατηρούνται στο χειρισμό μη αναλογικών καταστάσεων προέρχονται από την προσπάθεια επίλυσής τους με την εφαρμογή μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού, μιας «γνώσης» η οποία είναι επιτυχημένη σε συγκεκριμένης περιπτώσεις. Φαίνεται δηλαδή ότι τα λάθη, τα οποία παρατηρούνται σε ψευδοαναλογικές καταστάσεις, προκύπτουν ως αποτέλεσμα του επιστημολογικού εμποδίου της αναλογίας, θέση η οποία και αποτελεί τη βασική υπόθεση της έρευνας αυτής. Η αναλογία είναι στην πραγματικότητα μια γνώση, η οποία εφαρμόζεται με επιτυχία σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο και για ένα συγκεκριμένο αριθμό καταστάσεων (Modestou & Gagatsis, 2007b). Η εφαρμογή της έξω από αυτό το πλαίσιο έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση συγκεκριμένων λανθασμένων απαντήσεων, οι οποίες συνοδεύονται από τη βεβαιότητα των μαθητών για την ορθότητά τους. Οι απαντήσεις αυτές είναι επαναλαμβανόμενες και καθολικές, ενώ παράλληλα αντιστέκονται σε μια ποικιλία υποστηρικτικών μέσων που στοχεύουν στην αντιμετώπιση του προβλήματος (De Bock et al., 2003). Ο μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός φαίνεται να είναι βαθιά ριζωμένος στη διαισθητική γνώση των μαθητών, κάτι που τον κάνει πολύ φυσικό, αδιαμφισβήτητο και σε κάποιο βαθμό απρόσιτο για αναστοχασμό (De Bock et al., 2002a).

Θεωρία Διδακτικών Καταστάσεων

Η αντιμετώπιση του προβλήματος των επιστημολογικών εμποδίων είναι δυνατή μέσα από την ενασχόληση των μαθητών με ποικίλες καταστάσεις στις οποίες η γνώση, η οποία αποτελεί εμπόδιο, να μην μπορεί να αφομοιωθεί και έτσι να αποσταθεροποιηθεί, να γίνει αναποτελεσματική, άχρηστη και εν τέλει να απορριφθεί. Η παιδαγωγική πρακτική συνίσταται στην οργάνωση κατάλληλων διδακτικών καταστάσεων με προσεκτικά επιλεγμένα προβλήματα, οι οποίες θα θέσουν σε αμφισβήτηση τις προϋπάρχουσες αντιλήψεις των μαθητών (Radford et al., 2000). Η διαφορά των καταστάσεων αυτών από τις συνήθεις διδακτικές παρεμβάσεις έγκειται στον ακριβή καθορισμό των συνθηκών της κατάστασης, τις οποίες ο μαθητής θα πρέπει να μπορεί να αναγνωρίσει από μόνος του και σε άλλα πλαίσια ώστε να αντιμετωπίσει το εμπόδιο.

Αν η παρουσία κάποιου επιστημολογικού εμποδίου σε ένα μαθητή σχετίζεται με μία πεποίθηση, τότε η αντιμετώπιση του εμποδίου δεν έγκειται απλά στην αντικατάσταση αυτής της πεποίθησης με μια αντίθετη. Αυτό δεν θα κάνει τίποτε άλλο από το να δημιουργήσει ένα διπλό εμπόδιο (Sierpinska, 1987). Αντίθετα, ο μαθητής θα πρέπει να αποστασιοποιηθεί από την πεποίθησή του και να την αναλύσει με μέσα πέραν αυτών που χρησιμοποιούσε μέχρι σήμερα για να επιλύσει προβλήματα. Με αυτό τον τρόπο, θα μπορέσει να αντιληφθεί τις υπονοούμενες υποθέσεις πάνω στις οποίες στηριζόταν μέχρι σήμερα καθώς και να συνειδητοποιήσει τη δυνατότητα ύπαρξης μιας εναλλακτικής υπόθεσης (Sierpinska, 1987). Φαίνεται εν τέλει ότι η αντιμετώπιση ενός επιστημολογικού εμποδίου απαιτεί το ίδιο είδος δουλειάς όπως και η κατάκτηση μιας έννοιας και αυτό δεν είναι άλλο από συνεχή αλληλεπίδραση και διαλεκτική ανάμεσα στο άτομο και το αντικείμενο της γνώσης (Brousseau, 1997).

Κατά συνέπεια, από τη στιγμή που αποδεικνύεται ότι η αναλογία και το γραμμικό μοντέλο, όπως αυτό παρεμβαίνει στην επίλυση αναλογικών καταστάσεων, αποτελεί επιστημολογικό εμπόδιο για το χειρισμό μη αναλογικών καταστάσεων, τότε μόνο μέσω της εφαρμογής μιας διδακτικής κατάστασης θα επιτευχθεί η ανατροπή του φαινομένου της ψευδαίσθησης της αναλογίας. Μέσα σε αυτή την κατάσταση ο μαθητής θα αναλάβει την ευθύνη για τη μάθησή του, συμμετέχοντας ενεργά και χωρίς την επέμβαση του δασκάλου σε όλα τα στάδια της διδακτικής κατάστασης. Μια τέτοια διδακτική κατάσταση έχει αναπτυχθεί και παρουσιάζεται εκτενώς στο επόμενο κεφάλαιο της Μεθοδολογίας. Η διδακτική κατάσταση που στοχεύει στην αντιμετώπιση του επιστημολογικού εμποδίου της αναλογίας βασίζεται στη θεωρία γύρω από τις διδακτικές καταστάσεις, τα σημαντικότερα σημεία της οποίας παρουσιάζονται στο σημείο αυτό.

Διδακτικές Καταστάσεις και Καταστάσεις «A-didactique»

Βασική θέση της θεωρίας των διδακτικών καταστάσεων είναι ότι αρκετές από τις δυσκολίες των μαθητών οφείλονται σε εγγενή χαρακτηριστικά της γνώσης και όχι τόσο στο γνωστικό επίπεδο ανάπτυξης των μαθητών. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι διδακτικές καταστάσεις να χαρακτηρίζονται από τη μεταφορά του σημείου υπό έμφαση από τη μάθηση αυτή κάθε αυτή, προς τη μελέτη των συνθηκών αυτής της μάθησης (Rouchier, 1999). Με τον όρο «κατάσταση» προσδιορίζεται το σύνολο των συνθηκών με τις οποίες ο μαθητής αλληλεπιδρά σε ένα συγκεκριμένο περιβάλλον και οι οποίες καθορίζουν τις δράσεις του (Brousseau, 1997). Η κατάσταση δε μπορεί να απομονωθεί μόνο στην δράση του υποκειμένου, ούτε μόνο στη γνώση η οποία κινητοποιεί αυτή τη δράση, αλλά αποτελεί το σύνολο των συνθηκών που δημιουργούν μια λογική σχέση ανάμεσα στα δύο. Κατ' επέκταση, η κατάσταση μπορεί να εξηγήσει το γιατί προέκυψε ένας λανθασμένος συλλογισμός, χωρίς απλά να υποδεικνύει τις ελλείψεις και τα προβλήματα στις γνώσεις του μαθητή (Brousseau & Gibel, 2005).

Μια ευρύτερη διδακτική κατάσταση χαρακτηρίζεται από εκείνες τις συνθήκες οι οποίες με έμμεσο ή με άμεσο τρόπο εκδηλώνουν την πρόθεση για διδασκαλία μιας συγκεκριμένης γνώσης (Kieran, 1998). Όταν μια κατάσταση περιλαμβάνει όλες τις απαραίτητες συνθήκες, οι οποίες επιτρέπουν στο μαθητή να οικοδομήσει μια μαθηματική γνώση χωρίς την άμεση εμπλοκή του δασκάλου, τότε η πρόθεση για διδασκαλία είναι έμμεση και η κατάσταση ορίζεται χρησιμοποιώντας το γαλλικό όρο «a-didactique» (Brousseau, 1997; Samaniego & Barrera, 1999). Το περιβάλλον μιας κατάστασης «a-didactique» είναι τέτοιο ώστε να επιτρέπει τη «φυσική» επιλογή των καλών λύσεων των μαθητών, χωρίς αυτοί να εξαρτώνται άμεσα από τις αποφάσεις του δασκάλου. Ο δάσκαλος μπορεί να δώσει την απαραίτητη αυτονομία στους μαθητές, αφού οι συνθήκες του περιβάλλοντος της κατάστασης είναι τέτοιες που δεν επιτρέπουν την επιπόλαιη αποδοχή των λανθασμένων λύσεων του προβλήματος (Arsac, Balacheff & Mante, 1992).

Κύριο χαρακτηριστικό της κατάστασης «a-didactique» είναι η εκχώρηση, η μεταβίβαση δηλαδή από το δάσκαλο στο μαθητή της ευθύνης για την οικοδόμηση της γνώσης, κάτι που θα έχει ως συνέπεια τη μάθηση. Αυτή η μεταβίβαση, όπως αναφέρουν χαρακτηριστικά οι Brousseau και Gibel (2005), βρίσκεται στην αποδοχή από μέρους του μαθητή του ρίσκου της άγνοιας του τρόπου επίλυσης ενός προβλήματος · στην αποδοχή του ρίσκου της εμπλοκής και ενασχόλησης με ένα έργο σε συνθήκες αβεβαιότητας. Για να είναι δυνατή η λειτουργία της διδακτικής κατάστασης ο μαθητής πρέπει να αποδεχτεί πρώτα την ευθύνη για την εύρεση μίας λύσης για την προβληματική κατάσταση και στη συνέχεια την ευθύνη για την εγκυρότητα αυτής της λύσης (Arsac et al., 1992).

Από τη στιγμή που ο μαθητής αποδέχεται ένα πρόβλημα ως δικό του μέχρι τη στιγμή που φτάνει στη λύση, ο δάσκαλος αποφεύγει να παρέμβει και να εισηγηθεί τη γνώση την οποία θέλει να δει να προκύπτει ως τελικό αποτέλεσμα. Ο μαθητής γνωρίζει πολύ καλά ότι το πρόβλημα έχει επιλεγεί για να τον βοηθήσει να κατακτήσει μια καινούρια γνώση, αλλά πρέπει συνάμα να γνωρίζει ότι αυτή η γνώση μπορεί να προκύψει ολοκληρωμένα από την εσωτερική λογική της κατάστασης και μπορεί να οικοδομηθεί χωρίς κάποιου είδους διδακτική παρέμβαση και αιτιολόγηση (Brousseau, 1997).

Σε κάθε ευρύτερη μαθηματική διδακτική κατάσταση διακρίνονται διάφορα στάδια διαλεκτικής αλληλεπίδρασης του μαθητή με το πρόβλημα και το κοινωνικό περιβάλλον. Σε αυτά αντιστοιχούν διάφοροι τύποι καταστάσεων, στις οποίες η υπό έμφαση γνώση μπορεί να έχει διαφορετικές λειτουργίες:

- Οι *καταστάσεις δράσης* αφορούν στις αποφάσεις που παίρνει ο μαθητής για να ενεργήσει, μέσω ενός συστήματος επεξεργασίας των αποφάσεων αυτών, το οποίο παραμένει για ένα μακρύ χρονικό διάστημα στο υποσυνείδητο ή δε διατυπώνεται ρητά, αλλά υπονοείται.
- Οι *καταστάσεις διατύπωσης* ευνοούν την προσπάθεια για ρητή περιγραφή ή ανακοίνωση προς τους άλλους των αντιλήψεων ή των αποφάσεων του υποκειμένου, χωρίς να γίνεται οποιαδήποτε συζήτηση για απόδειξη.
- Οι *καταστάσεις επικύρωσης* απαιτούν από το μαθητή να θεμελιώσει, να αποδείξει του ισχυρισμούς του και να εκφράσει σαφώς τις σχέσεις της διαδικασίας που χρησιμοποιεί για την επίλυση του προβλήματος.
- Οι *καταστάσεις επισημοποίησης* αποσκοπούν στο να δώσουν το χαρακτήρα «καθιερωμένης» γνώσης, δηλαδή γνώσης αποδεκτής από την πολιτιστική κοινότητα, σε ορισμένες από τις προσωπικές γνώσεις που χρησιμοποιήθηκαν κατά τη διάρκεια των δραστηριοτήτων των μαθητών (Brousseau, 1986).

Από τις τέσσερις αυτές καταστάσεις, στις οποίες διακρίνεται μία ευρύτερη διδακτική κατάσταση, μόνο οι καταστάσεις επισημοποίησης είναι τυπικά διδακτικές, αφού σε αυτές αναγκαίος είναι ο ρόλος του δασκάλου, ενώ οι τρεις πρώτες καταστάσεις διακρίνονται από την εκχώρηση της ευθύνης της μάθησης στους μαθητές.

Καταστάσεις Δράσης

Κατά τη διάρκεια των καταστάσεων δράσης ο μαθητής διαμορφώνει κάποιες στρατηγικές οι οποίες θα τον βοηθήσουν στην επίλυση του προβλήματος. Γενικά, μια στρατηγική υιοθετείται μετά από διαισθητική ή έλλογη απόρριψη μιας προηγούμενης στρατηγικής (Brousseau, 1997). Είναι εμφανές ότι η υιοθέτηση μιας καινούριας στρατηγικής είναι αποτέλεσμα πειραματισμού. Μια καινούρια στρατηγική γίνεται αποδεχτή ή απορρίπτεται αφού η αποτελεσματικότητά της έχει αξιολογηθεί προηγουμένως από το μαθητή, ενώ δεν αποκλείεται κάτι τέτοιο να γίνει εντελώς διαισθητικά, με τη χρήση ενός «διαισθητικού μοντέλου». Ο όρος διαισθητικό μοντέλο αναφέρεται στο σύνολο των σχέσεων ή κανόνων με βάση τις οποίες ο μαθητής λαμβάνει μη συνειδητές αποφάσεις και χωρίς να είναι σε θέση να τις διατυπώσει (Brousseau, 1997).

Αυτές οι αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στο μαθητή και στο περιβάλλον της κατάστασης συνιστούν αυτό που καλείται «διαλεκτική της δράσης» (Brousseau, 2003). Ο όρος διαλεκτική χρησιμοποιείται αφού οι στρατηγικές που χρησιμοποιούνται από το μαθητή συνιστούν με κάποιο τρόπο προτάσεις που επιβεβαιώνονται ή ακυρώνονται με πειραματισμό, μέσω μιας μορφής διαλόγου με την κατάσταση. Κατά συνέπεια, ο μαθητής λαμβάνει μιας μορφής ανατροφοδότηση από την κατάσταση όσον αφορά στην ορθότητα και στη λειτουργικότητα των στρατηγικών που χρησιμοποιεί.

Πρέπει να σημειωθεί ότι ο μαθητής αλληλεπιδρά με το περιβάλλον της κατάστασης και πειραματίζεται με αυτό όχι μόνο κατά τη διάρκεια των καταστάσεων δράσης, αλλά και κατά τη διάρκεια των άλλων δύο ειδικών διδακτικών καταστάσεων, της διατύπωσης και της επικύρωσης. Κατά συνέπεια, μπορούμε να αναφερόμαστε αντίστοιχα σε διαλεκτική της διατύπωσης και διαλεκτική της επικύρωσης, για να χαρακτηρίσουμε τις αλληλεπιδράσεις του μαθητή με το περιβάλλον των αντίστοιχων καταστάσεων.

Καταστάσεις Διατύπωσης

Σε κάθε κατάσταση διατύπωσης αναγκαία είναι η ύπαρξη ενός συστήματος πομπού-δέκτη, ώστε να είναι δυνατή η ανταλλαγή των μηνυμάτων μέσα στο περιβάλλον της κατάστασης (Brousseau, 1997). Βασική υπόθεση είναι ότι τα μηνύματα αυτά δε δρουν πάνω στο δέκτη ως περιοριστικά ή με σκοπό να τον αποδυναμώσουν, αλλά ως μέσα για παρέμβαση στο περιβάλλον της κατάστασης.

Μέσα σε αυτό το περιβάλλον, ο μαθητής υπόκειται σε δύο μορφές ανατροφοδότησης. Από τη μια δέχεται ανατροφοδότηση κατά την εφαρμογή μιας στρατηγικής από το ίδιο το περιβάλλον της κατάστασης, η οποία είναι η ίδια με αυτή που δεχόταν και κατά τη διάρκεια των καταστάσεων δράσης. Από την άλλη, κατά τη διάρκεια της διαλεκτικής της διατύπωσης ο μαθητής έχει και άμεση ανατροφοδότηση από τα άτομα με τα οποία έχει την επικοινωνία και τα οποία τον πληροφορούν αν αντιλαμβάνονται ή όχι την εισήγησή του, χωρίς όμως να την κρίνουν.

Μέσα από τις καταστάσεις διατύπωσης οι μαθητές πρέπει να καταστούν ικανοί να καθιερώσουν σταδιακά ένα κοινό κώδικα και ένα λεξιλόγιο, το οποίο όλοι να καταλαβαίνουν και το οποίο να λαμβάνει υπόψη τα αντικείμενα και τις σχέσεις της κατάστασης (Brousseau, 1997). Συνεπώς, το περιβάλλον των καταστάσεων διατύπωσης πρέπει να επιτρέπει χρήσιμους συλλογισμούς και δράσεις. Οι συλλογισμοί αυτοί είναι ημιτελείς από τυπικής άποψης, αλλά θεωρείται ότι συμπληρώνονται διαισθητικά από τις δράσεις του ατόμου μέσα στη συγκεκριμένη κατάσταση (Brousseau & Gibel, 2005).

Όσον αφορά σε αυτό το νεο-οικοδομηθέντα κώδικα, ο οποίος προκύπτει μέσα από την επικοινωνία των μαθητών, πρέπει ανά πάσα στιγμή να υπόκειται σε έλεγχο, από τους ίδιους τους μαθητές, ως προς την καταλληλότητά του, την ευκολία κατασκευής του, αλλά και ως προς το μέγεθος των μηνυμάτων που επιτρέπει να ανταλλαγούν (Brousseau, 1986). Η οικοδόμηση αυτού του κώδικα σε μια συνήθη ή τυποποιημένη γλώσσα θα κάνει δυνατή την επεξήγηση των δράσεων των μαθητών.

Καταστάσεις Επικύρωσης

Οι καταστάσεις επικύρωσης αποτελούν το τρίτο και τελευταίο στάδιο της διαλεκτικής αλληλεπίδρασης του μαθητή με το περιβάλλον. Οι αλληλεπιδράσεις του μαθητή με το περιβάλλον των καταστάσεων επικύρωσης διακρίνονται από τις διαλεκτικές των άλλων καταστάσεων και βασίζονται σε αυτές (Brousseau, 1986). Συνεπώς, η διαλεκτική επικύρωσης είναι πρώτιστα μία διαλεκτική διατύπωσης και κατά συνέπεια μία διαλεκτική δράσης.

Το παιδί, κατά την διαλεκτική της διατύπωσης, φτιάχνει δηλώσεις για τις σχέσεις που υπάρχουν μέσα στην κατάσταση. Αυτές οι δηλώσεις πρέπει να υπόκεινται σε κρίση από το συνομιλητή που δεν μπορεί να έχει απλά ρόλο αποδέκτη, όπως στην περίπτωση της διαλεκτική της διατύπωσης. Αυτό συνεπάγεται ότι κατά τη διάρκεια της διαλεκτικής της επικύρωσης ο συνομιλητής πρέπει να είναι σε θέση να παρέχει ανατροφοδότηση στο μαθητή που διεξάγει μια κρίση, να μπορεί δηλαδή να προβάλλει επιχειρήματα και να απορρίπτει μια κρίση την οποία θεωρεί λανθασμένη (Brousseau, 1997). Κατά συνέπεια, οι δύο συνομιλητές ή ομάδες συνομιλητών πρέπει να είναι σε συμμετρικές θέσεις, τόσο ως προς τις πληροφορίες τις οποίες προσλαμβάνουν, όσο και ως προς την αντίστοιχη ανατροφοδότηση.

Στις καταστάσεις επικύρωσης ο συλλογισμός στον οποίο στηρίζονται τα επιχειρήματα των μαθητών έχει καθαρά τυπική μορφή και βασίζεται σε ορθά συνδεδεμένα συμπεράσματα, τα οποία κάνουν σαφή αναφορά στα στοιχεία της κατάστασης (Brousseau, & Gibel, 2005). Όμως, δεν τίθεται ως βασική προϋπόθεση ότι αυτός ο συλλογισμός θα έχει πάντα και τα ορθά αποτελέσματα. Οι αιτιολογήσεις και τα επιχειρήματα τα οποία ένας μαθητής δίνει για να πείσει κάποιον άλλο πρέπει να προκύψουν προοδευτικά, να οικοδομηθούν να ελεγχθούν, να διατυπωθούν, να συζητηθούν και να γίνουν στο τέλος αποδεχτά χωρίς την επιβολή του άλλου. Κατ' επέκταση οι καταστάσεις επικύρωσης πρέπει να επιτρέπουν στους μαθητές να χρησιμοποιούν τη μαθηματική γνώση ως αποτελεσματικό μέσο για να πείσουν κάποιον άλλο και κατ' επέκταση τον ίδιο τους τον εαυτό, απορρίπτοντας κάθε ρητορικό μέσο απόδειξης ή αντίκρουσης ενός ισχυρισμού (Brousseau, 1997).

Καταστάσεις Επισημοποίησης

Οι καταστάσεις επισημοποίησης συνιστούν το «τυπικό» διδακτικό στοιχείο στην ευρύτερη οργάνωση της διδακτικής κατάστασης, με την άμεση εμπλοκή του δασκάλου. Είναι απολύτως απαραίτητες γιατί μέσω αυτών ο μαθητής δίνει μια υπόσταση σε αυτό που έχει παραγάγει κατά τη διάρκεια των προηγούμενων ειδικών διδακτικών καταστάσεων, σε συσχετισμό πάντα με αυτό που διαδραματίζεται στην κοινωνία (Brousseau, 2003).

Οι μαθητές, κατά την ενασχόληση τους με μια κατάσταση, πιθανόν να μη συνειδητοποιήσουν ότι έμαθαν κάτι καινούριο και να έχουν την εντύπωση ότι απλά χρησιμοποίησαν την προϋπάρχουσά τους γνώση για να επιλύσουν το πρόβλημα (Kieran, 1998). Αυτή η συνειδητοποίηση επέρχεται μέσα από τη διαδικασία της επισημοποίησης. Εδώ, η νέα γνώση θα αυτονομηθεί από τις συνθήκες από τις οποίες προέκυψε και θα μπορέσει να λειτουργήσει ανεξάρτητα από το αρχικό πλαίσιο στο οποίο εμφανίστηκε (Rouchier, 1999). Κατ' επέκταση, μια νέα μορφή συλλογισμού γίνεται κτήμα του μαθητή όταν παύσει να είναι απλά ένα μέσο για την επίλυση του προβλήματος της συγκεκριμένης κατάστασης και πάρει ένα πιο γενικό χαρακτήρα επιτρέποντας έτσι την επίλυση προβλημάτων συγκεκριμένου είδους (Brousseau & Gibel, 2005).

Περίληψη

Στο κεφάλαιο αυτό έχει παρουσιαστεί μια εκτενής ανασκόπηση της βιβλιογραφίας γύρω από τις τρεις διαστάσεις του θεωρητικού μοντέλου ερμηνείας της ευρύτερης μαθηματικής σκέψης του ατόμου, το οποίο έχει προταθεί για επιβεβαίωση. Ειδικότερα έχουν εξεταστεί διαφορετικές πτυχές γύρω από την έννοια του αναλογικού συλλογισμού, του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και της μετα-αναλογικής ενημερότητας, πτυχές οι οποίες σχετίζονται άμεσα με τα ερευνητικά ερωτήματα που έχουν τεθεί. Αρχικά έχει οριστεί η έννοια του αναλογικού συλλογισμού και έγινε αναφορά στη σχέση της με τη μαθηματική ικανότητα. Στη συνέχεια, στα πλαίσια της διάστασης του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού ορίστηκε η έννοια και καθορίστηκαν τα στάδια εξέλιξης του. Αναλύθηκαν, οι στρατηγικές επίλυσης αναλογικών προβλημάτων και ο τρόπος με τον οποίο εμφανίζεται ο μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός στα σχολικά πλαίσια, σε σχέση ακριβώς με αυτές τις στρατηγικές και τα στάδια τα οποία πιθανόν να υποδηλώνουν.

Ακολούθως έχει οριστεί η έννοια της μετα-αναλογικής ενημερότητας σε σχέση με τη μεταγνώση και υποστηρίχθηκε η σύνδεσή της με το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας. Το φαινόμενο αναλύθηκε εκτενώς και παρουσιάστηκαν ποικίλα παραδείγματα στα οποία εμφανίζεται μέσα από την αριθμητική, την άλγεβρα και τις πιθανότητες. Η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας στη διάσταση της μετα-αναλογικής ενημερότητας έχει εστιαστεί στο χώρο της μέτρησης στη γεωμετρία και σε ερευνητικά δεδομένα που παρέχουν ενδείξεις για τη φύση του φαινομένου της ψευδαίσθησης της αναλογίας. Τέλος, ορίστηκε η έννοια του επιστημολογικού εμποδίου και αναλύθηκαν τα χαρακτηριστικά στοιχεία και τα σταδία που εμπεριέχονται σε μια διδακτική κατάσταση, η οποία θεωρείται ως το μέσο για αντιμετώπιση κάθε επιστημολογικού εμποδίου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Εισαγωγή

Βασικός σκοπός της παρούσας ερευνητικής εργασίας είναι η επιβεβαίωση ενός θεωρητικού μοντέλου που αφορά στη μαθηματική αναλογική σκέψη και το οποίο θα παρέχει ένα διαφορετικό πλαίσιο ερμηνείας και αντιμετώπισης του φαινομένου της ψευδαίσθησης της αναλογίας. Συγκεκριμένα, το πιο πάνω φαινόμενο εντάσσεται ως μέρος της διάστασης της μετα-αναλογικής ενημερότητας, που λειτουργικά ορίζεται ως η ικανότητα διάκρισης αναλογικών από μη αναλογικές καταστάσεις και ταυτόχρονα συνδέεται με την ικανότητα επίλυσής τους. Το μοντέλο αυτό αιτιολογεί συνάμα την ύπαρξη του φαινόμενου της ψευδαίσθησης της αναλογίας, και άρα τη χαμηλή μετα-αναλογική ενημερότητα των μαθητών, ως αποτέλεσμα μιας άλλης διάστασης, αυτής του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού. Έτσι, δεύτερη βασική υπόθεση προς διερεύνηση είναι η θέση ότι το φαινόμενο προκύπτει ως αποτέλεσμα του επιστημολογικού εμποδίου της αναλογίας. Ταυτόχρονα, επιδιώκεται η αντιμετώπιση του εμποδίου, μέσα από την οργάνωση και την εφαρμογή μιας κατάλληλης διδακτικής κατάστασης, η οποία ως αποτέλεσμα θα έχει και τη βελτίωση της μετα-αναλογικής ενημερότητας των μαθητών

Για την επίτευξη των πιο πάνω στόχων θεωρήθηκε απαραίτητη η ανάπτυξη ενός ερευνητικού σχεδίου που να περιλαμβάνει: (α) την ανάπτυξη του εργαλείου μέτρησης της ικανότητας των μαθητών στον αναλογικό συλλογισμό, τον μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό καθώς και της μετα-αναλογικής τους ενημερότητας, και (β) το σχεδιασμό της διδακτικής παρέμβασης που θα έχει ως στόχο την αύξηση της μετα-αναλογικής ενημερότητας των μαθητών και κατά συνέπεια την αντιμετώπιση του φαινομένου της ψευδαίσθησης της αναλογίας.

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται αναλυτικά όλα τα στοιχεία που συνιστούν το σχεδιασμό του ερευνητικού μέρους της εργασίας. Αρχικά δίνονται τα ερευνητικά ερωτήματα και οι υποθέσεις της εργασίας, παρουσιάζεται συνοπτικά η διαδικασία που ακολουθήθηκε για τη διεκπεραίωσή της ερευνητικής εργασίας και περιγράφεται το δείγμα των παιδιών που λαμβάνουν μέρος στην έρευνα αυτή. Στη συνέχεια, περιγράφονται αναλυτικά όλα τα έργα που χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση των ικανοτήτων των μαθητών στον αναλογικό συλλογισμό, το μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό καθώς και της μετα-αναλογικής τους ενημερότητας. Ακολουθεί η παρουσίαση της διδακτικής κατάστασης που εφαρμόστηκε για αντιμετώπιση του επιστημολογικού εμποδίου της αναλογίας. Περιγράφονται αναλυτικά τα τέσσερα στάδια της συγκεκριμένης διδακτικής κατάστασης με τις οδηγίες που δόθηκαν στους μαθητές. Ταυτόχρονα, γίνεται λεπτομερής παρουσίαση όλων των μεταβλητών που έχουν χρησιμοποιηθεί στην έρευνα και του τρόπου κωδικοποίησής τους. Το κεφάλαιο αυτό ολοκληρώνεται με την αναλυτική περιγραφή της στατιστικής ανάλυσης που έχει εφαρμοστεί για την εξέταση των ερευνητικών υποθέσεων καθώς και στοιχείων που αναφέρονται στην εγκυρότητα και την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων του δοκιμίου.

Ερευνητικά Ερωτήματα

Η εργασία αυτή κινείται σε τρία επίπεδα εργασίας, στο καθένα από τα οποία αναφέρεται και μία συνιστώσα του σκοπού της έρευνας. Με βάση τις τρεις συνιστώσες του σκοπού της εργασίας επιδιώκεται η απάντηση και των αντίστοιχων ερωτημάτων:

Σκοπός -1η συνιστώσα

1. Σε ποιο βαθμό το προτεινόμενο μοντέλο μπορεί να ερμηνεύσει τη μαθηματική αναλογική σκέψη;

Σκοπός -2η συνιστώσα

2. Πώς διαφοροποιείται η επίδοση των μαθητών στα έργα αναλογικού συλλογισμού, μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού καθώς και μετα-αναλογικής ενημερότητας, σε σχέση με την ηλικία τους;
3. Με ποιο τρόπο διαφοροποιούνται οι στρατηγικές επίλυσης αναλογικών και μη αναλογικών προβλημάτων με βάση την ηλικία των μαθητών;
4. Η χρήση συγκεκριμένων στρατηγικών επίλυσης μαθηματικών αναλογικών προβλημάτων σχετίζεται με την ικανότητα επίλυσης έργων μετα-αναλογικής ενημερότητας;

Σκοπός -3η συνιστώσα

5. Ποια η επίδραση ενός παρεμβατικού προγράμματος διδασκαλίας με έμφαση στις συνθήκες της μάθησης πάνω στη μετα-αναλογική ενημερότητα των μαθητών;

Ερευνητικές Υποθέσεις

Με βάση τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας εργασίας αλλά και ερευνητικά δεδομένα που προκύπτουν από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας, η οποία παρουσιάστηκε εκτενώς στο Κεφαλαίο ΙΙ, διατυπώνονται οι πιο κάτω ερευνητικές υποθέσεις:

Υ1: Η μαθηματική αναλογική σκέψη των μαθητών θα ερμηνεύεται καλύτερα από ένα μοντέλο τριών διαστάσεων.

Υ2: Η εφαρμογή του γραμμικού μοντέλου, όπως αυτό παρεμβαίνει στην επίλυση αναλογικών προβλημάτων, θα αποτελέσει εμπόδιο για τη μετα-αναλογική ενημερότητα των μαθητών.

Υ3: Η επίδοση των μαθητών στα έργα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού θα παρουσιάσει διαφοροποιήσεις ως αποτέλεσμα της διδασκαλίας φτάνοντας στο πιο ψηλό της επίπεδο στη Β΄ Γυμνασίου, όπου οι μαθητές δέχονται συστηματικά διδασκαλία πάνω στις αναλογίες.

Υ4: Η επίδοση των μαθητών στα έργα μετα-αναλογικής ενημερότητας θα παραμείνει σε χαμηλά επίπεδα, ανεξάρτητα από την ηλικία των μαθητών.

Υ5: Οι στρατηγικές επίλυσης των αναλογικών και μη αναλογικών προβλημάτων θα παρουσιάσουν διαφοροποίηση ανάμεσα στο δημοτικό και το γυμνάσιο αλλά όχι ως προς το είδος του έργου.

Υ6: Η μετα-αναλογική ενημερότητα των μαθητών θα εκδηλωθεί μόνο μέσω της εκχώρησης μιας θεμελιώδους διδακτικής κατάστασης, η οποία να δίνει έμφαση στις συνθήκες της μάθησης, καθώς και στη μεταβίβαση της ευθύνης για τη μάθηση από το δάσκαλο στο μαθητή.

Η πρώτη ερευνητική υπόθεση σχετίζεται με την προσπάθεια επιβεβαίωσης ενός θεωρητικού μοντέλου ερμηνείας της μαθηματικής αναλογικής σκέψης. Κατά ανάλογο τρόπο, οι ερευνητικές υποθέσεις δύο μέχρι πέντε αντιστοιχούν στην προσπάθεια απόδειξης της θέσης ότι τα λάθη, τα οποία εμφανίζονται κατά την επίλυση των μη αναλογικών έργων, είναι αποτέλεσμα του επιστημολογικού εμποδίου της αναλογίας. Η επιβεβαίωση των υποθέσεων ότι παρά την αύξηση της επίδοσης των μαθητών στα αναλογικά έργα η μετα-αναλογική τους ενημερότητα παραμένει στάσιμη, όπως ίδιες παραμένουν και οι στρατηγικές επίλυσης των αναλογικών και μη αναλογικών έργων θα αποδείξει ότι πίσω από το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας κρύβεται ένα επιστημολογικό εμπόδιο. Τέλος, η απόδειξη της έκτης υπόθεσης θα δείξει ένα νέο και αποτελεσματικό τρόπο αντιμετώπισης του επιστημολογικού εμποδίου της αναλογίας.

Μεθοδολογία της Έρευνας

Η έρευνα έχει διεξαχθεί σε δύο φάσεις και αποτελεί συγκερασμό του ποσοτικού με το ποιοτικό στοιχείο. Η πρώτη φάση της έρευνας αποβλέπει σε μια αρχική διερεύνηση της ικανότητας των μαθητών για μαθηματική αναλογική σκέψη με βάση τις τρεις διαστάσεις του προτεινόμενου μοντέλου για μαθηματική αναλογική σκέψη, οι οποίες αναλύθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Στη δεύτερη φάση έχει οργανωθεί μια διδακτική κατάσταση η οποία εφαρμόστηκε σε τέσσερις μαθητές της Στ' Δημοτικού και η οποία στοχεύει στην αντιμετώπιση του επιστημολογικού εμποδίου της αναλογίας. Η επιτυχία της διδακτικής κατάστασης στην αντιμετώπιση του φαινομένου βρίσκεται στη συνειδητοποίηση εκ μέρους των μαθητών του ότι υπάρχουν καταστάσεις που δε λύνονται αναλογικά παρά το ότι ο τρόπος διατύπωσής τους παραπέμπει στην επίλυση με την εφαρμογή του γραμμικού μοντέλου.

Δείγμα

Το δείγμα της έρευνας περιελάμβανε 1052 μαθητές από 59 τμήματα της Ε' και Στ' τάξης δημοτικών σχολείων καθώς και της Α΄, Β΄ και Γ' τάξης γυμνασίων διαφορετικών πόλεων και επαρχιών της Κύπρου, στους οποίους και χορηγήθηκαν τα Δοκίμια Ι, ΙΙ και ΙΙΙ κατά τη διάρκεια της σχολικής χρονιάς 2005-2006. Μετά τη διόρθωση των δοκιμίων διαφάνηκε ότι από αυτά, μόνο τα 982 ήταν έγκυρα αφού πολλοί ήταν οι μαθητές, που λόγω απουσίας στη χορήγηση, δε συμπλήρωναν και τα τρία δοκίμια. Τα δεδομένα των δοκιμίων για τους 982 μαθητές του δείγματος αναλύθηκαν στη συνέχεια με τη βοήθεια του μοντέλου Rasch για να διασφαλιστεί ότι οι μαθητές εργάστηκαν με συνεπή τρόπο σε όλα τα έργα των δοκιμίων, αποκλείοντας έτσι περιπτώσεις επηρεασμού της επίδοσής τους από εξωτερικούς παράγοντες.

Από την εφαρμογή του μοντέλου προέκυψε ότι 37 μαθητές έπρεπε να αφαιρεθούν από το δείγμα αφού οι επιδόσεις τους παρουσίαζαν σχετικά μεγάλη απόκλιση από τα αποδεκτά όρια των δεικτών infit t και outfit t (-2, 2). Συγκεκριμένα, αφαιρέθηκαν επτά μαθητές από την Ε΄ Δημοτικού, οκτώ από τη Στ΄ Δημοτικού, δύο από την Α΄ Γυμνασίου, πέντε από τη Β΄ Γυμνασίου και 15 από τη Γ ΄ Γυμνασίου. Το τελικό δείγμα της Α’ φάσης της ερευνητικής εργασίας περιελάμβανε τελικά 945 μαθητές, 184 από την Ε΄ Δημοτικού, 199 από τη Στ΄ Δημοτικού, 221 από την Α΄ Γυμνασίου, 186 από τη Β΄ Γυμνασίου και 155 Γ ΄ Γυμνασίου. Σε σχέση με το φύλο, το δείγμα περιελάμβανε συνολικά 474 αγόρια και 471 κορίτσια. Ο Πίνακας 8 παρουσιάζει αναλυτικά τη κατανομή των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα με βάση την τάξη και το φύλο.

Πίνακας 8

Κατανομή των Μαθητών του Δείγματος κατά Τάξη και Φύλο

	Φύλο					
Τάξη	Αγόρια		Κορίτσια		Σύνολο	
	f	%	f	%	f	%
Ε’ Δημ.	99	53.8	85	46.2	184	19.3
Στ’ Δημ.	96	48.3	103	51.8	199	21.1
Α’ Γυμν.	115	52	106	48	221	23.4
Β’ Γυμν.	92	49.5	94	50.5	186	19.7
Γ’ Γυμν.	72	46.5	83	53.5	155	16.5
Σύνολο	474	50.2	471	49.8	945	100

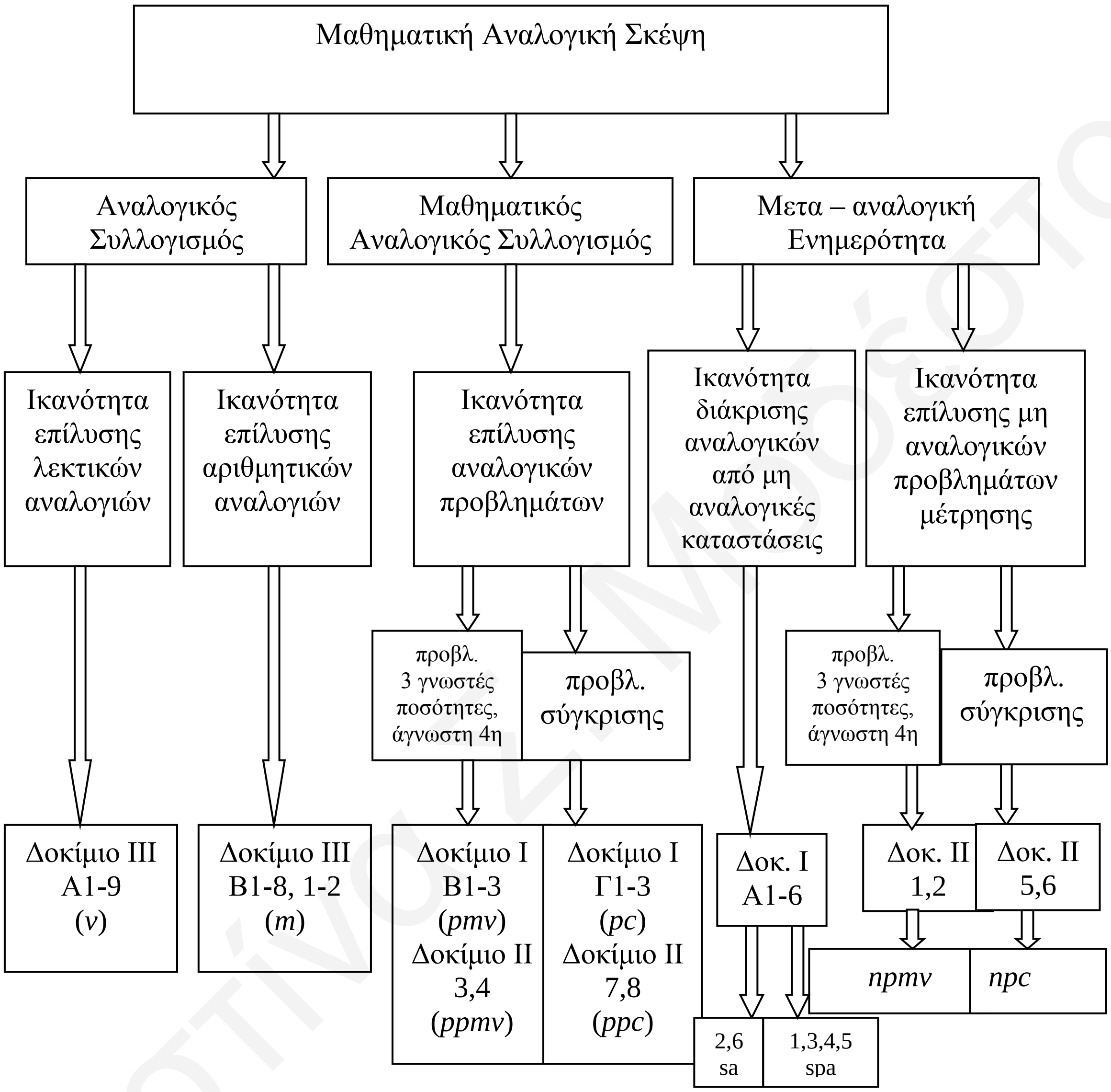
Στη δεύτερη φάση της έρευνας το δείγμα αποτελούνταν από 17 μαθητές, οι οποίοι φοιτούσαν στη Στ’ Δημοτικού κατά τη σχολική χρονιά 2006-2007. Από την τάξη αυτή επιλέγηκαν τέσσερις μαθητές διαφορετικών ικανοτήτων οι οποίοι στην πρώτη μέτρηση της μετα-αναλογικής ενημερότητας εμφάνιζαν σε μεγάλο βαθμό την τάση να επιλύουν με αναλογικές στρατηγικές τα μη αναλογικά έργα. Ο λόγος για τον οποίο επιλέγηκαν μόνο τέσσερις μαθητές βρίσκεται στο ότι με μικρό αριθμό μαθητών μπορούν πιο εύκολα να καταγραφούν και να ελεγχθούν όλες οι αλληλεπιδράσεις οι οποίες διεξάγονται ανάμεσα στα μέλη της ομάδας, ώστε να αποφευχθεί το ενδεχόμενο της αποτυχίας εκχώρησης των συνθηκών της κατάστασης στους μαθητές. Για το λόγο αυτό, επιλέγηκαν δύο αγόρια και δύο κορίτσια, των οποίων οι επιδόσεις στα μαθηματικά αντικατοπτρίζονταν από τους βαθμούς Α, Β, Β και Γ αντίστοιχα, σύμφωνα πάντα με την άποψη του εκπαιδευτικού της τάξης. Οι μαθητές αυτοί δέχτηκαν ένα παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας με την εφαρμογή της διδακτικής κατάστασης.

Ερευνητικός Σχεδιασμός

Α’ Φάση

Η πρώτη φάση της ερευνητικής εργασίας στοχεύει στη διερεύνηση των τεσσάρων πρώτων ερευνητικών ερωτημάτων που παρατέθηκαν πιο πάνω. Αυτό γίνεται εφικτό με τη μελέτη των τριών διαστάσεων του προτεινόμενου μοντέλου για τη μαθηματική αναλογική σκέψη, οι οποίες εξετάζονται με τη βοήθεια δραστηριοτήτων που προτείνονται σε τρία διακριτά δοκίμια. Το Διάγραμμα 11 παρουσιάζει αναλυτικά τις δραστηριότητες κάθε δοκιμίου, οι οποίες στοχεύουν στη μέτρηση της ικανότητας των μαθητών για αναλογικό συλλογισμό, μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό καθώς και της μετα-αναλογικής τους ενημερότητας. Παράλληλα, γίνεται μια πρώτη παρουσίαση των μεταβλητών οι οποίες χρησιμοποιούνται για κάθε ομάδα έργων που περιλαμβάνονται σε κάθε διάσταση.

Η μέτρηση της ικανότητας για αναλογικό συλλογισμό, μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό και της μετα-αναλογικής ενημερότητας των μαθητών γίνεται με βάση τις ομάδες έργων που αποτελούν τις συνιστώσες τις κάθε διάστασης και οι οποίες παρουσιάζονται στο διάγραμμα. Συγκεκριμένα, όσον αφορά στην ικανότητα για αναλογικό συλλογισμό γίνεται διακριτή μέτρηση της ικανότητας επίλυσης των λεκτικών (*v*) και των αριθμητικών (*m*) έργων. Ειδικότερα σε κάθε μια από τις κατηγορίες αυτές προκύπτουν και καινούριες ομαδοποιήσεις, οι οποίες βασίζονται στο είδος των λεκτικών και αριθμητικών έργων.



Διάγραμμα 11. Προτεινόμενο μοντέλο μαθηματικής αναλογικής σκέψης: Έργα-μεταβλητές.

Κατά ανάλογο τρόπο, στη διάσταση του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού γίνεται διακριτή μέτρηση της επίδοσης στην επίλυση άμεσων και έμμεσων αναλογικών έργων στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη ή έχουν τη μορφή σύγκρισης. Με τον ίδιο τρόπο στη διάσταση της μετα-αναλογικής ενημερότητας γίνεται η μέτρηση της ικανότητας διάκρισης αναλογικών (*sa*) από μη αναλογικές καταστάσεις (*spa*) και της ικανότητας επίλυσης μη αναλογικών έργων σύγκρισης και έργων στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη.

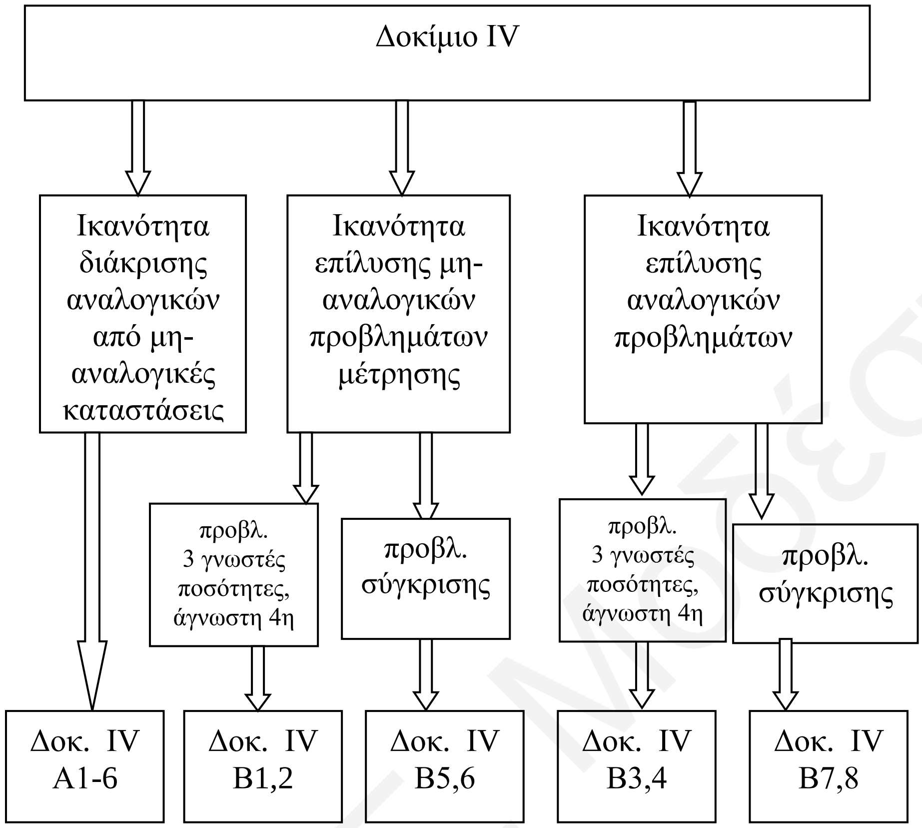
Στη συνέχεια, καταγράφονται με συστηματικό τρόπο οι στρατηγικές επίλυσης τόσο των αναλογικών όσο και των μη αναλογικών έργων. Οι στρατηγικές προκύπτουν από την ανάλυση του τρόπου με τον οποίο οι μαθητές έλυσαν το κάθε έργο και στηρίζονται σε ερευνητικά δεδομένα όπως αυτά παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο της ανασκόπησης της βιβλιογραφίας.

Β' Φάση

Η δεύτερη φάση της ερευνητικής εργασίας στοχεύει στη διερεύνηση του τελευταίου ερευνητικού ερωτήματος που παρουσιάστηκε πιο πάνω. Συγκεκριμένα, εξετάζεται η επίδραση ενός παρεμβατικού προγράμματος διδασκαλίας στην μετα-αναλογική ενημερότητα των μαθητών και κατ' επέκταση στην ικανότητα διάκρισης και επίλυσης μη αναλογικών έργων (Διάγραμμα 12).

Διάγραμμα 12. Διερεύνηση της επίδρασης του παρεμβατικού προγράμματος διδασκαλίας στην μετα-αναλογική ενημερότητα των μαθητών.

Η μέτρηση της μετα-αναλογικής ενημερότητας των μαθητών έχει γίνει με έργα τα οποία έχουν χρησιμοποιηθεί και στη Α' Φάση της ερευνητικής εργασίας και τα οποία συνθέτουν το Δοκίμιο IV. Ταυτόχρονα, έχουν συμπεριληφθεί και έργα τα οποία αφορούν στο μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό για σκοπούς παρεμβολής. Η ακριβής δομή του δοκιμίου παρουσιάζεται λεπτομερώς στο Διάγραμμα 13. Το Δοκίμιο IV έχει χορηγηθεί για 50 λεπτά στους 17 μαθητές της Στ' τάξης που αποτέλεσαν το δείγμα της Β' Φάσης της ερευνητικής εργασίας. Στη συνέχεια, από τα αποτελέσματα των μαθητών στο συγκεκριμένο δοκίμιο έχουν επιλέγεί τέσσερις μαθητές, δύο αγόρια και δύο κορίτσια διαφορετικών ικανοτήτων στα μαθηματικά, οι οποίοι παρουσίασαν σε μεγάλο βαθμό την τάση να επιλύουν αναλογικά και μη αναλογικές καταστάσεις. Συγκεκριμένα, και οι τέσσερις αυτοί μαθητές χρησιμοποίησαν αναλογικές στρατηγικές για να επιλύσουν όλα τα έμμεσα μη αναλογικά έργα, ενώ δεν κατάφεραν να διακρίνουν ότι κάποιες από τις δηλώσεις του Δοκιμίου Ι ήταν μη αναλογικές.



Διάγραμμα 13. Δομή του Δοκιμίου IV.

Οι μαθητές αυτοί αποτέλεσαν τις δύο ομάδες που συμμετείχαν στην εφαρμογή της διδακτικής κατάστασης. Η πρώτη ομάδα αποτελούνταν από τα δύο αγόρια (επίδοση Α και Β), ενώ η δεύτερη ομάδα από τα δύο κορίτσια (επίδοση Β και Γ). Στις ομάδες αυτές εφαρμόστηκαν ξεχωριστά οι καταστάσεις δράσης και διατύπωσης, ενώ στη συνέχεια οι τέσσερις μαθητές συγκεντρώθηκαν για τις καταστάσεις επικύρωσης και επισημοποίησης. Όλο το παρεμβατικό πρόγραμμα μαγνητοφωνήθηκε έτσι ώστε να γίνει δυνατή η μετέπειτα ανάλυση και αξιολόγηση των αποτελεσμάτων της διδακτικής κατάστασης. Η διδακτική κατάσταση κρίνεται επιτυχής μόνο αν διαπιστωθεί η ύπαρξη ρητών δηλώσεων εκ μέρους των μαθητών για αμφισβήτηση του αναλογικού μοντέλου, οι οποίες φυσικά θα σχετίζονται με τους κανόνες παιχνιδιού που υιοθετεί η συγκεκριμένη κατάσταση.

Διδακτική Παρέμβαση

Η διδακτική παρέμβαση στοχεύει στην αντιμετώπιση του φαινομένου της ψευδοαναλογίας, της τάσης δηλαδή των μαθητών να χειρίζονται αναλογικά και τις μη αναλογικές καταστάσεις. Η τάση αυτή σύμφωνα με τις υποθέσεις της παρούσας εργασίας, οφείλεται στο επιστημολογικό εμπόδιο της αναλογίας. Η όλη διδακτική παρέμβαση οργανώνεται γύρω από τη μη αναλογική συμπεριφορά του όγκου ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων σχημάτων σε σχέση με τη μεταβολή του μήκους της πλευράς τους.

Η παρέμβαση συνίσταται στην οργάνωση μιας διδακτικής κατάστασης, μέσα από την οποία οι μαθητές θα απορρίψουν την καταλληλότητα του αναλογικού μοντέλου για περιπτώσεις οι οποίες πληρούν κάποιες άτυπες προϋποθέσεις. Στα πλαίσια αυτής της διδακτικής κατάστασης διακρίνονται διάφορα στάδια διαλεκτικής αλληλεπίδρασης των μαθητών με το πρόβλημα και το κοινωνικό περιβάλλον, στα οποία αντιστοιχούν τέσσερις διαφορετικοί τύποι καταστάσεων: η κατάσταση δράσης, η κατάσταση διατύπωσης, η κατάσταση επικύρωσης και η κατάσταση επισημοποίησης, οι οποίες και περιγράφονται πιο κάτω. Οι τρεις πρώτες καταστάσεις έχουν τη μορφή παιχνιδιού και χαρακτηρίζονται από τη μεταβίβαση-εκχώρηση της ευθύνης της μάθησης από το δάσκαλο στο μαθητή, δίνοντας έτσι στους μαθητές αυτενέργεια και άμεση εμπλοκή στην προβληματική κατάσταση.

Κατάσταση δράσης. Οι τέσσερις μαθητές είναι χωρισμένοι σε δυάδες (αγόρια-κορίτσια) και δέχονται ανά δυάδα την εφαρμογή της κατάστασης δράσης. Η κατάσταση ξεκινά με τους δύο μαθητές να έχουν μπροστά τους κύβους Dienes και δέκα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα διαστάσεων 2cm x 3cm x 4cm, 8cm x 12cm x 16cm, 6cm x 9cm x 12cm, 4cm x 6cm x 8cm, 4cm x 6cm x 4cm, 6cm x 3cm x 4cm, 4cm x 5cm x 4cm, 2cm x 6cm x 4cm, 2cm x 6cm x 3cm, και 2cm x 3cm x 2cm. Τα σχήματα έχουν όλα το ίδιο κόκκινο χρώμα και κανένα διακριτό χαρακτηριστικό, εκτός από το αρχικό κουτί με διαστάσεις 2cm x 3cm x 4cm το οποίο έχει πράσινο χρώμα (Εικόνα 1). Οι μαθητές παίρνουν το αρχικό κουτί (διαστάσεις 2cm x 3cm x 4cm) και καλούνται να κάνουν υποθέσεις για τον αριθμό των κύβων που χωρούν σε αυτό. Πρέπει να σημειωθεί ότι πάνω στα κουτιά δεν αναγράφονται οι διαστάσεις τους και ούτε οι μαθητές μπορούν να τις μετρήσουν με χάρακα. Συνεπώς, οι μαθητές βρίσκουν την απάντηση είτε με μέτρηση του πραγματικού αριθμού των κύβων (24), είτε με κάποιο υπολογισμό, βασιζόμενοι στις διατάσεις του κουτιού τις οποίες υπολόγισαν προηγουμένως με κύβους.

Το παιχνίδι ξεκινά με τους μαθητές να παίρνουν διπλάσιους κύβους από τους αρχικούς (2x24=48) και να προσπαθούν να βρουν το κουτί στο οποίο χωρούν ακριβώς, χωρίς όμως να τους τοποθετούν μέσα στα κουτιά. Συγκεκριμένα, οι μαθητές καλούνται στην αρχή να κάνουν μια πρόβλεψη ως προς το ορθό κουτί, συγκρίνοντάς το με το αρχικό (2cm x 3cm x 4cm) και να αιτιολογήσουν την επιλογή τους. Το πιο πιθανό είναι ότι οι μαθητές στην πρώτη τους πρόβλεψη θα επιλέξουν το κουτί με διπλάσιες διαστάσεις (4cm x 6cm x 8cm). Στη συνέχεια, ελέγχουν την πρόβλεψή τους και αν αυτή είναι λανθασμένη διατυπώνουν καινούρια αιτιολογημένη υπόθεση την οποία και ελέγχουν. Αυτό συνεχίζεται μέχρι να βρουν το σωστό κουτί. Καθ' όλη τη διάρκεια του παιχνιδιού τονίζεται στους μαθητές η αναγκαιότητα αιτιολόγησης της επιλογής τους.

Εικόνα 1. Κατάσταση δράσης.

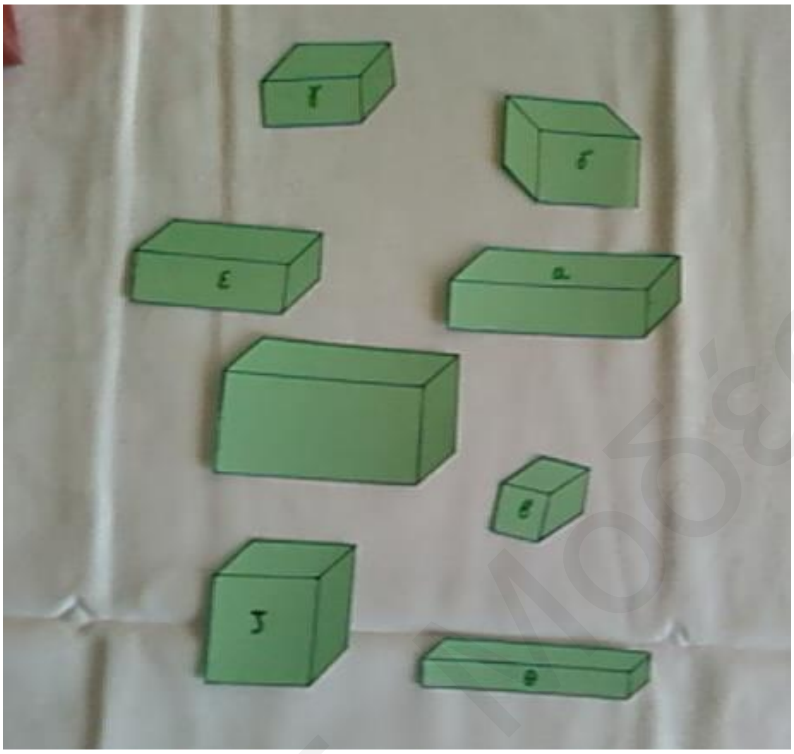
Κατάσταση διατύπωσης. Κατά τη διάρκεια της κατάστασης διατύπωσης οι μαθητές συνεχίζουν να εργάζονται σε ζευγάρια, χωρίς να έχουν οπτική επαφή, αφού μεταξύ τους υπάρχει ένα παραβάν (Εικόνα 2). Σε αυτό το παιχνίδι ο ένας από τους δύο μαθητές (Α) περνά μέσα από μία κατάσταση δράσης, όπως αυτήν που περιγράφηκε πιο πάνω, έχοντας στη διάθεσή του τετραπλάσιο αριθμό κύβων από τον αρχικό (4x24=96). Αφού επιλέξει το κατάλληλο κουτί το περιγράφει στον άλλο μαθητή της ομάδας του (Β), έτσι ώστε να το βρει και αυτός.

Πρέπει να σημειωθεί ότι και οι δύο μαθητές έχουν μπροστά τους τα ίδια κουτιά, σε διαφορετικές θέσεις. Στα μηνύματα που ανταλλάσσουν δε μπορούν να χρησιμοποιήσουν αριθμούς για να δηλώσουν τις διαστάσεις του κουτιού αλλά ούτε και τον αριθμό των κύβων. Η λύση του προβλήματος συνίσταται στη σύγκριση με το αρχικό κουτί. Η ομάδα των δύο θα θεωρείται ότι έχει κερδίσει στο παιχνίδι όταν ο μαθητής Β έχει βρει τόσο το ορθό κουτί, όσο και τους κύβους που δόθηκαν στο μαθητή Α στην αρχή. Στη συνέχεια, οι δύο μαθητές ανταλλάζουν ρόλους με τον μαθητή Β τώρα να προσπαθεί να περιγράψει στον μαθητή Α το κατάλληλο κουτί για τριπλάσιο αριθμό κύβων (3x24=72).

Εικόνα 2. Κατάσταση διατύπωσης.

Κατάσταση επικύρωσης. Κατά τη διάρκεια της κατάστασης επικύρωσης οι μαθητές πρέπει να βρεθούν σε τέτοιες συνθήκες οι οποίες να τους επιτρέπουν να κρίνουν την ορθότητα των δηλώσεων που προέκυψαν κατά τη διάρκεια της κατάστασης διατύπωσης. Λόγω της ιδιαιτερότητας της κατάστασης επικύρωσης οι δηλώσεις αυτές πρέπει να υπόκεινται σε κρίση από τους ίδιους τους μαθητές, οι οποίοι δεν μπορεί να έχουν απλά ρόλο αποδέκτη, όπως στην περίπτωση της διαλεκτικής της διατύπωσης. Κατά συνέπεια, η ειδοποιός διαφορά της κατάστασης αυτής από τις προηγούμενες δύο καταστάσεις έγκειται στην προβολή επιχειρημάτων από μέρους των μαθητών, αλλά και στην απόρριψη κρίσεων τις οποίες θεωρούν λανθασμένες.

Κατά τη διάρκεια της κατάστασης αυτής οι μαθητές οργανώνονται σε δύο ομάδες, οι οποίες έρχονται σε αντιπαράθεση με στόχο την εύρεση της σχέσης ανάμεσα στη διαφοροποίηση του αριθμού των κύβων και τη διαφοροποίηση του μήκος των πλευρών των κουτιών. Για να φτάσουν στο στάδιο της παρουσίασης και κρίσης επιχειρημάτων περνούν πρώτα από μία κατάστασης δράσης και διατύπωσης με διαφορετικούς αριθμούς από τους προηγούμενους.



Εικόνα 3. Κατάσταση επικύρωσης.

Συγκεκριμένα, στην περίπτωση αυτή παρουσιάζεται στους μαθητές μια διαφορετική ομάδα ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων, στο χώρο των δύο διαστάσεων αυτή τη φορά, τα οποία φέρουν διακριτούς αριθμούς. Ως αρχικό κουτί επιλέγεται αυτό με διαστάσεις (2 x 4 x 8). Οι διαστάσεις δε δίνονται στους μαθητές παρά μόνο η χωρητικότητά του σε αριθμό κύβων (64). Η ομάδα ορθογώνιων παραλληλεπιπέδων συμπληρώνεται με τα κουτιά Α: 2 x 4 x 8cm, Β: 2 x 2 x 2cm, Γ: 2 x 2 x 4cm, Δ: 3 x 2 x 4cm, Ε: 2 x 2 x6cm, Ζ: 4 x 2 x 4cm, Η: 1 x 4x 8cm και Θ: 1x 1 x 8cm.

Στη συνέχεια, το παιχνίδι ξεκινά με τις δύο ομάδες, των αγοριών και των κοριτσιών, να έρχονται αντιμέτωπες και να προσπαθούν να βρουν ποιο από τα κουτιά είναι κατάλληλο για αριθμό κύβων ίσο με 32, 16 και 8, που αντιστοιχούν στο $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}$ του αρχικού αριθμού των κύβων. Κάθε ομάδα έχει δικαίωμα για μία απάντηση η οποία πρέπει ταυτόχρονα να υποστηρίζεται με κατάλληλα επιχειρήματα. Η αντίπαλη ομάδα έχει το δικαίωμα να απορρίψει ως λανθασμένη την απάντηση της άλλης ομάδας, αφού υποστηρίξει πρώτα την άποψή της με επιχειρήματα διατυπώνοντας έτσι τη δική της άποψη. Κάθε σωστή και αιτιολογημένη απάντηση παίρνει μία μονάδα, ενώ μία μονάδα παίρνει η αντίπαλη ομάδα στην περίπτωση που αντέκρουσε τυχόν λανθασμένα επιχειρήματα. Νικήτρια είναι η ομάδα που θα μαζέψει τις περισσότερες μονάδες.

Το παιχνίδι έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον αφού περισσότερα από ένα κουτιά είναι ορθά για κάθε απάντηση, οπότε και είναι πιθανότερο οι ομάδες να έρθουν σε αντιπαράθεση για κάποιο αποτέλεσμα, φτάνοντας έτσι πιο εύκολα στη διατύπωση της σχέσης ανάμεσα στη διαφοροποίηση του αριθμού των κύβων και τη διαφοροποίηση του μήκος των πλευρών των κουτιών. Όταν οι δύο ομάδες φτάσουν στην από κοινού διατύπωση της πιο πάνω σχέσης, αυτή επικυρώνεται με την εφαρμογή της σε αντίστοιχα έργα όπου ο αριθμός των κύβων είναι διπλάσιος, τριπλάσιος και τετραπλάσιος του αρχικού.

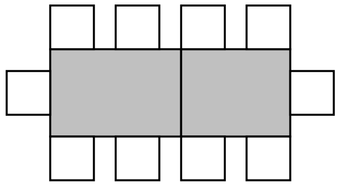
Κατάσταση επισημοποίησης. Η κατάσταση επισημοποίησης συνιστά το διδακτικό στοιχείο στην ευρύτερη οργάνωση της διδακτικής κατάστασης, με την άμεση εμπλοκή του εκπαιδευτικού, και αποτελεί το επιστέγασμα της όλης διδακτικής κατάστασης. Είναι απαραίτητη γιατί μέσω αυτής ο μαθητής θα δώσει υπόσταση σε αυτό που έχει παραγάγει κατά τη διάρκεια των προηγούμενων καταστάσεων, σε σχέση με αυτό που διαδραματίζεται στην κοινωνία (Brousseau, 2003).

Η διδασκαλία ξεκινά με την παρουσίαση του πιο κάτω προβλήματος στους μαθητές: *«Η πισίνα στο σπίτι μου έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και χωρητικότητα 48m^3 νερού. Πόση χωρητικότητα έχει το κολυμβητήριο Λευκωσίας αν έχει ακριβώς διπλάσιες διαστάσεις από την πισίνα μου;».* Οι μαθητές καλούνται να λύσουν προφορικά το πρόβλημα και να κάνουν αναφορά στην αυθόρμητη πορεία λύσης του προβλήματος που σκέφτηκαν πρωταρχικά. Στο σημείο αυτό προκύπτει ότι το γραμμικό μοντέλο δε μπορεί να εφαρμοστεί για τη λύση του συγκεκριμένου προβλήματος, αν και η διατύπωση του προβλήματος παραπέμπει σε κάτι τέτοιο.

Στη συνέχεια, δίνεται στους μαθητές μια σειρά προβλημάτων τα οποία πρέπει να λύσουν στην ομάδα τους, αφού πρώτα καθορίσουν το αν είναι αναλογικά ή μη. Τα προβλήματα που δίνονται είναι τα εξής:

- Αν 2 αυγά χρειάζονται 12 λεπτά για να βράσουν καλά, τότε πόσο χρόνο θα χρειάζονται 3 αυγά για να βράσουν στην ίδια θερμοκρασία;

- Στο διάδρομο του σχολείου υπάρχουν 2 τραπέζια ενωμένα μεταξύ τους και 10 καρέκλες γύρω τους. Ο δάσκαλος ενώνει τώρα 6 τραπέζια. Πόσες καρέκλες χωρούν γύρω από τα τραπέζια;



- Ο κ. Μάριος χρειάζεται 4 μέρες για να σκάψει ένα αυλάκι γύρω από ένα τετραγωνικό χωράφι με πλευρά 100m. Πόσες μέρες θα χρειαστεί για να σκάψει ένα αυλάκι με τριπλάσιες διαστάσεις;

Οι μαθητές, αφού λύσουν τα προβλήματα, πρέπει να αλλάξουν τη διατύπωση με τέτοιο τρόπο ώστε τα αναλογικά προβλήματα να γίνουν μη αναλογικά και αντίστροφα. Για παράδειγμα, στο πρώτο πρόβλημα που είναι μη αναλογικό οι μαθητές μπορούν να προσθέσουν ότι τα αυγά βράζουν σε ξεχωριστά μπρίκια, στο δεύτερο πρόβλημα που επίσης είναι μη αναλογικό ότι τα τραπέζια δεν είναι ενωμένα, ενώ στο τελευταίο που είναι αναλογικό ότι ο κ. Μάριος φυτεύει το χωράφι του, παραπέμποντας έτσι στην έννοια του εμβαδού.

Μέσα Συλλογής Δεδομένων

Α’ Φάση

Στην πρώτη φάση της έρευνας έχουν χορηγηθεί στους μαθητές τρία διαφορετικά δοκίμια (βλ. Παράρτημα Α-Γ) σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, τα οποία έχουν ως στόχο:

1. την αξιολόγηση της ικανότητας των μαθητών για επίλυση αναλογικών προβλημάτων καθώς και της ικανότητας διάκρισης των αναλογικών από τα μη αναλογικά προβλήματα (Δοκίμιο Ι),
2. την αξιολόγηση της ικανότητας των μαθητών για επίλυση μη αναλογικών προβλημάτων μέτρησης στη γεωμετρία (Δοκίμιο ΙΙ) και
3. την αξιολόγηση της ικανότητας των μαθητών για επίλυση αριθμητικών και λεκτικών αναλογιών (Δοκίμιο ΙΙΙ).

Δοκίμιο Ι

Το δοκίμιο για την αξιολόγηση της ικανότητας των μαθητών για επίλυση αναλογικών προβλημάτων είναι οργανωμένο σε τρεις μεγάλες ομάδες έργων (Παράρτημα Α). Η πρώτη ομάδα περιλαμβάνει έξι δηλώσεις την ορθότητα των οποίων καλούνται να κρίνουν και να αιτιολογήσουν οι μαθητές (Lamon, 1999a, 1999b). Στην περίπτωση που μια δήλωση δεν είναι ορθή οι μαθητές καλούνται να τη διορθώσουν μεταβάλλοντας μόνο έναν αριθμό. Αν κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό καλούνται να δηλώσουν το λόγο (Πίνακας 9). Συγκεκριμένα, στην πρώτη ομάδα έργων περιλαμβάνονται δύο αναλογικά έργα [ένα ορθό (Α6) και ένα που μπορεί να διορθωθεί (Α2)], δύο μη αναλογικά έργα που δε μπορούν διορθωθούν (Α1, Α4) και δύο μη αναλογικά έργα [ένα ορθό (Α5) και ένα που μπορεί να διορθωθεί (Α3)].

Πίνακας 9

Παράδειγμα Έργου υπό Μορφή Δήλωσης (Δοκίμιο Ι)

Α5. Αν ο Γιώργος είναι 12 χρονών και η Άννα 16 τότε, όταν η Άννα θα είναι 32 χρονών, ο Γιώργος θα είναι 28.

- Η δήλωση είναι Ορθή/ Λανθασμένη, γιατί..

Συμπλήρωσέ το μόνο αν επέλεξες ότι η δήλωση είναι λανθασμένη!

- Μπορεί να διορθωθεί η δήλωση αλλάζοντας ένα μόνο αριθμό; Με ποιο τρόπο; Αν όχι, εξήγησε το γιατί...

Η δεύτερη ομάδα έργων του Δοκιμίου Ι αποτελείται από τρία άμεσα προβλήματα στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη. Τα προβλήματα αυτά θεωρούνται άμεσα γιατί στην επίλυσή τους δε παρεμβαίνει οποιαδήποτε άλλη έννοια εκτός από αυτή που αναφέρεται στο κείμενο, σε αντίθεση με τα έμμεσα έργα. Τα έργα αυτά διαμορφώθηκαν πάνω σε μια ιδέα των Misailidou και Williams (2003). Συγκεκριμένα, βασίζονται σε μία συνταγή μαγειρικής για τρία άτομα, τις ποσότητες των υλικών της οποίας οι μαθητές πρέπει να διαφοροποιήσουν ώστε να γίνει κατάλληλη για τέσσερα και 12 άτομα. Ο λόγος για τον οποίο τα τρία προβλήματα παρουσιάζονται μέσα σε αυτό το πλαίσιο, βρίσκεται στο ότι με αυτόν τον τρόπο είναι πιθανότερο να χρησιμοποιηθούν και άλλες στρατηγικές για τη λύση των έργων εκτός από τη μέθοδο του εσωτερικού γινομένου. Πρέπει να σημειωθεί ότι σε δύο από τα τρία προβλήματα ο λόγος, είτε ανάμεσα στις δύο ποσότητες (Β1) των προβλημάτων, είτε μέσα σε μία ποσότητα (Β3), είναι ακέραιος, όποτε αυτά επιλύονται με τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς. Στο άλλο πρόβλημα (Β2) ο λόγος δεν είναι ακέραιος και αναμένεται να έχει αυξημένο βαθμό δυσκολίας.

Η τρίτη και τελευταία ομάδα έργων αποτελείται από επίσης τρία άμεσα προβλήματα σύγκρισης που αφορούν στη γλυκύτητα της λεμονάδας που φτιάχνουν δύο παιδιά. Τα έργα αυτά βασίζονται στα έργα τα οποία προτάθηκαν στην έρευνα των Karplus κ.ά. (1983). Χαρακτηριστικό και των τριών προβλημάτων είναι ότι στο τέλος περιλαμβάνουν μία ερώτηση που αναγκάζει τους μαθητές να μεταβάλουν ένα δεδομένο του προβλήματος, ώστε οι λεμονάδες των παιδιών να έχουν την ίδια γεύση (Πίνακας 10). Με αυτό τον τρόπο τα προβλήματα παίρνουν τη κλασσική μορφή προβλημάτων αναλογίας, όπου δίνονται οι τρεις ποσότητες και πρέπει να βρεθεί η τέταρτη, χωρίς να παραπέμπουν άμεσα στη μέθοδο του εσωτερικού γινομένου.

Πίνακας 10

Παράδειγμα Αναλογικού Έργου Σύγκρισης (Δοκίμιο Ι)

Γ1. Ο Γιάννης χρησιμοποίησε 6 κουτάλια ζάχαρη και 12 φλυντζανάκια χυμό λεμονιού, ενώ η Μαρία χρησιμοποίησε 4 κουτάλια ζάχαρη και 7 φλυντζανάκια χυμό λεμονιού.

- Ο Γιάννης / Η Μαρία έφτιαξε τη πιο γλυκιά λεμονάδα γιατί............................
- Για να έχει η λεμονάδα των δύο παιδιών την ίδια γεύση πρέπει:......................

Τέλος, όπως και με τα προβλήματα της δεύτερης ομάδας έργων, σε δύο από τα τρία προβλήματα ο λόγος είτε ανάμεσα στις δύο ποσότητες (χυμό λεμονιού – ζάχαρη) (Γ1), είτε μέσα σε μία ποσότητα (ζάχαρη) (Γ3) είναι ακέραιος, όποτε επιλύονται με τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς. Στο άλλο πρόβλημα (Γ2) ο λόγος δεν είναι ακέραιος.

Δοκίμιο ΙΙ

Το δοκίμιο για την αξιολόγηση της ικανότητας των μαθητών στην επίλυση μη αναλογικών έργων, αποτελείται από οκτώ έργα εκ των οποίων μόνο τα τέσσερα είναι μη αναλογικά, ενώ τα υπόλοιπα τέσσερα είναι αναλογικά για σκοπούς παρεμβολής (Παράρτημα Β). Όλα τα έργα σχετίζονται με μέτρηση και αφορούν μόνο στα σχήματα του τετραγώνου και του κύκλου, με έμμεση αναφορά στις έννοιες της περιμέτρου και του εμβαδού (Van Dooren et al., 2003a). Για παράδειγμα, στο δεύτερο έργο του Δοκιμίου ΙΙ: «*Χρειάζεσαι περίπου 360gr τυρί για να φτιάξεις μια πίτσα με ακτίνα 20cm. Πόσα γραμμάρια τυρί χρειάζεσαι για να φτιάξεις μια πίτσα με ακτίνα 40cm;*» γίνεται έμμεση αναφορά στην έννοια του εμβαδού, αφού ο όρος «εμβαδόν» δεν αναφέρεται στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Στα μη αναλογικά έργα υπάρχει έμμεση σύνδεση είτε της ακτίνας του κύκλου, είτε της πλευράς του τετραγώνου με το εμβαδόν του αντίστοιχου σχήματος. Κατά ανάλογο τρόπο, στα αναλογικά έργα υπάρχει έμμεση σύνδεση είτε της ακτίνας του κύκλου, είτε της πλευράς του τετραγώνου με την περίμετρο αυτή τη φορά του αντίστοιχου σχήματος.

Τα σχήματα του τετραγώνου και του κύκλου επιλέγηκαν λόγω του διαφορετικού βαθμού εξοικείωσης που είχαν οι μαθητές διαφορετικών ηλικιών με αυτά. Ειδικότερα, ενώ το τετράγωνο είναι σχήμα γνωστό σε όλους τους μαθητές ξεκινώντας από την Ε’ Δημοτικού μέχρι τη Γ’ Γυμνασίου, οι μαθητές ειδικά του δημοτικού σχολείου δεν γνωρίζουν ιδιαίτερα το σχήμα του κύκλου ούτε και τις φόρμουλες εύρεσης του εμβαδού και της περιμέτρου. Το γεγονός αυτό χρησιμοποιήθηκε εσκεμμένα για αν δείξει ότι παρά τις περισσότερες εμπειρίες των μαθητών γυμνασίου με μετρήσεις που αφορούν στο σχήμα του κύκλου, η επίδοσή τους στα μη αναλογικά έργα του κύκλου δε διαφοροποιείται από την αντίστοιχη επίδοση των μαθητών του δημοτικού σχολείου. Κάτι τέτοιο αποτελεί ταυτόχρονα ένδειξη και της επιστημολογικής φύσης τους φαινομένου της ψευδαίσθησης της αναλογίας.

Όσον αφορά στα χαρακτηριστικά των έργων, ακολουθήθηκε ο σχεδιασμός του Δοκιμίου Ι για αξιολόγηση της ικανότητας των μαθητών στο μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό. Στο δοκίμιο αυτό υπάρχουν τόσο έργα σύγκρισης (5,6,7,8) όσο και έργα στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη (1,2,3,4). Στον Πίνακα 11 παρουσιάζεται με περισσότερη λεπτομέρεια η δομή του Δοκιμίου ΙΙ ως προς το είδος του σχήματος, τα χαρακτηριστικά του έργου (αναλογικό, μη αναλογικό) και τον τρόπο παρουσίασής τους (σύγκρισης – δίνονται τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη).

Πίνακας 11

Κατηγοριοποίηση των Έργων του Δοκιμίου ΙΙ

Σχήμα	Δίνονται 3 ποσότητες και ζητείται η 4η		Σύγκρισης	
	Περίμετρος *αναλογικό*	Εμβαδόν *μη αναλογικό*	Περίμετρος *αναλογικό*	Εμβαδόν *μη αναλογικό*
Τετράγωνο	Π3	Π1	Π7	Π5
Κύκλος	Π4	Π2	Π8	Π6

Δοκίμιο ΙΙΙ

Το δοκίμιο για την αξιολόγηση της ικανότητας των μαθητών για επίλυση λεκτικών και αριθμητικών αναλογιών (αναλογικός συλλογισμός) είναι οργανωμένο σε δύο μέρη (Παράρτημα Γ). Στο πρώτο μέρος οι μαθητές καλούνται να λύσουν εννιά λεκτικές αναλογίες, οι οποίες βασίζονται στο τεστ αναλογικής σκέψης του Miller (Meagher, 2006). Στο δεύτερο μέρος οι μαθητές έχουν να αντιμετωπίσουν έργα αριθμητικών αναλογιών, τα οποία επίσης περιλαμβάνονται ως κατηγορία στο τεστ του Miller (Meagher, 2006).

Όσον αφορά στο πρώτο μέρος του δοκιμίου, το οποίο αναφέρεται σε λεκτικές αναλογίες οι μαθητές καλούνται να εντοπίσουν ότι η σχέση που συνδέει το πρώτο ζεύγος λέξεων και εφαρμόζοντάς την στο δεύτερο ζεύγος λέξεων να βρουν τη λέξη που λείπει. Για παράδειγμα, στην αναλογία «φίδι: ερπετό :: παγώνι:________» οι μαθητές πρέπει να εντοπίσουν ότι όπως το φίδι ανήκει στην κατηγορία των ερπετών, έτσι και το παγώνι ανήκει στην κατηγορία των πτηνών.

Οι λεκτικές αυτές αναλογίες οργανώθηκαν σε τρεις ευρύτερες κατηγορίες, οι οποίες αντιστοιχούν στη σημασιολογία, στην ταξινόμηση και στο συσχετισμό (Meagher, 2006). Η σημασιολογική κατηγορία της αναλογίας μπορεί να θεωρηθεί ότι περιλαμβάνει τους ορισμούς των λέξεων που χρησιμοποιούνται. Οι σχέσεις που συνδέουν το πρώτο ζεύγος λέξεων έχουν σημασιολογική υφή και είναι σχέσεις συνωνυμίας, αντίθεσης και έντασης. Στη σχέση συνωνυμίας οι όροι του πρώτου ζεύγους έχουν ίδιο ή παρόμοιο νόημα (Α1), ενώ αντίστοιχα στη σχέση αντίθεσης οι όροι έχουν αντίθετο νόημα (Α2). Όσον αφορά στη σχέση έντασης, ο ένας όρος εκφράζει σε μεγαλύτερο βαθμό ένα χαρακτηριστικό του άλλου όρου (Α3).

Η ταξινομική κατηγορία της αναλογίας ασχολείται με την ιεράρχηση λέξεων και εννοιών. Οι σχέσεις που συνδέουν το πρώτο ζεύγος λέξεων στην κατηγορία αυτή είναι σχέσεις κατηγοριοποίησης, σχηματισμού ομάδας και μέρους-όλου. Στη σχέση κατηγοριοποίησης ο ένας όρος αποτελεί ένα είδος ή παράδειγμα του άλλου (Α4). Στη σχέση σχηματισμού ομάδας και οι δύο όροι αποτελούν μέλη μιας ευρύτερης κατηγορίας (Α5). Τέλος, στη σχέση μέρος-όλο ο ένας όρος αποτελεί μέρος του άλλου (Α6).

Η κατηγορία συσχετισμού χειρίζεται σχέσεις ανάμεσα σε δύο διακριτές αλλά σχετιζόμενες έννοιες. Οι σχέσεις που συνδέουν το πρώτο ζεύγος λέξεων στην κατηγορία αυτή είναι σχέσεις χαρακτηρισμού, σειροθέτησης και σκοπού-λειτουργίας. Στη σχέση χαρακτηρισμού ο ένας όρος του ζεύγους αποτελεί ιδιότητα, χαρακτηριστικό ή περιγραφή του άλλου (Α7). Στη σχέση σειροθέτησης οι όροι βρίσκονται σε μία χρονική-σειριακή σχέση (Α8). Στη σχέση λειτουργίας ο ένας όρος δείχνει το σκοπό ή διαφορετικά τη λειτουργία του άλλου (Α9). Σε αυτή τη σχέση είναι δυνατό ακόμη, ο ένας όρος να προκαλεί ως αποτέλεσμα, να δημιουργεί ή και να χρησιμοποιεί τον άλλο.

Στο δεύτερο μέρος του δοκιμίου περιλαμβάνονται δέκα έργα αριθμητικών αναλογιών. Στα πρώτα έξι έργα οι σχέσεις ανάμεσα στους όρους είναι σχέσεις αναλογίας. Συγκεκριμένα, τέσσερα από τα έργα επιλύονται με εύρεση του ακέραιου λόγου μέσα στην πρώτη σχέση (Β1, Β2, Β4 και Β5), ενώ στα άλλα δύο έργα ο λόγος δεν είναι ακέραιος (Β3 και Β6). Στα έργα Β7 και Β8 ο ένας όρος του ζεύγους αποτελεί το τετράγωνο και το κύβο του άλλου, αντίστοιχα. Τέλος, όσον αφορά στα δύο τελευταία έργα οι μαθητές καλούνται να τα συσχετίσουν με τα προηγούμενα οκτώ και να βρουν την αναλογία που υπάρχει στη δομή τους.

Β' Φάση

Δοκίμιο IV

Στη δεύτερη φάση της ερευνητικής εργασίας χορηγήθηκε στους μαθητές το Δοκίμιο IV (βλ. Παράρτημα Δ) πριν την εφαρμογή της διδακτικής κατάστασης, για να αξιολογηθεί η μετα-αναλογική ενημερότητα των μαθητών και να επιλεγούν εκείνοι οι μαθητές που παρουσιάζουν χαμηλή ικανότητα διάκρισης των αναλογικών από τις μη αναλογικές καταστάσεις, καθώς και επίλυσης των τελευταίων. Τα έργα τα οποία συμπεριλαμβάνονται στο δοκίμιο στοχεύουν:

1. στην αξιολόγηση της ικανότητας των μαθητών για διάκριση των αναλογικών από τα μη αναλογικά προβλήματα,
2. στην αξιολόγηση της ικανότητας των μαθητών για επίλυση μη αναλογικών προβλημάτων μέτρησης και
3. στην αξιολόγηση της ικανότητας των μαθητών για επίλυση αναλογικών προβλημάτων μέτρησης.

Η συμπερίληψη και αναλογικών έργων θεωρείται αναγκαία για να αξιολογηθεί και με δεύτερο τρόπο η ικανότητα των μαθητών για διάκριση αναλογικών από μη αναλογικά έργα, μέσα από μια προβληματική κατάσταση που φαίνεται συνηθισμένη και δεν προκαλεί τους μαθητές στο να είναι ιδιαίτερα προσεκτικοί.

Ειδικότερα το Δοκίμιο IV είναι οργανωμένο σε δύο μεγάλες ομάδες έργων. Η πρώτη ομάδα αφορά στην ικανότητα διάκρισης αναλογικών από μη αναλογικές καταστάσεις και περιλαμβάνει τις ίδιες έξι δηλώσεις που περιλαμβάνονται στο Δοκίμιο I (Α1-6), την ορθότητα των οποίων καλούνται να κρίνουν και να αιτιολογήσουν οι μαθητές. Στην περίπτωση που μια δήλωση δεν είναι ορθή οι μαθητές καλούνται να τη διορθώσουν μεταβάλλοντας μόνο ένα αριθμό. Η δεύτερη ομάδα έργων (Β1-8) αφορά στην ικανότητα επίλυσης αναλογικών και μη αναλογικών προβλημάτων γεωμετρίας και περιλαμβάνει τα ίδια έργα σύγκρισης και τα έργα στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη που βρίσκονται στο Δοκίμιο II (1-8). Τα έργα παρουσιάζονται αναλυτικά στον Πίνακα 12.

Πίνακας 12

Κατηγοριοποίηση των Έργων του Δοκιμίου IV

	Δίνονται 3 ποσότητες και ζητείται η 4η		Σύγκρισης	
Σχήμα	Περίμετρος *αναλογικό*	Εμβαδόν *μη αναλογικό*	Περίμετρος *αναλογικό*	Εμβαδόν *μη αναλογικό*
Τετράγωνο	Β3	Β1	Β7	Β5
Κύκλος	Β4	Β2	Β8	Β6

Διαδικασία Χορήγησης

Α' Φάση

Τα τρία δοκίμια που έχουν χρησιμοποιηθεί στην πρώτη φάση της ερευνητικής εργασίας χορηγήθηκαν στους μαθητές σε δύο διαφορετικές φάσεις. Συγκεκριμένα, στην πρώτη φάση χορηγήθηκε το Δοκίμιο Ι και στη συνέχεια τα Δοκίμια ΙΙ και ΙΙΙ μαζί. Τα δοκίμια έχουν χορηγηθεί με διαφορά τουλάχιστον μίας εβδομάδας το ένα από το άλλο (Δοκίμιο Ι και Δοκίμια ΙΙ – ΙΙΙ). Τα δοκίμια δε χορηγήθηκαν με την ίδια σειρά, δηλαδή πρώτα το Δοκίμιο Ι και μετά τα Δοκίμια ΙΙ και ΙΙΙ, αλλά η σειρά χορήγησής τους διαφοροποιήθηκε από ομάδα σε ομάδα, έτσι ώστε να αποκλειστεί το ενδεχόμενο επηρεασμού των αποτελεσμάτων.

Για τη συμπλήρωση των δοκιμίων, δόθηκε χρόνος περίπου 50 λεπτών στους μαθητές σε κάθε χορήγηση. Οι μαθητές κλήθηκαν να επιλύσουν τα έργα ατομικά υπό μορφή διαγωνίσματος, ενώ παράλληλα τους δόθηκαν όλες οι απαραίτητες διαβεβαιώσεις για την εχεμύθεια των αποτελεσμάτων. Παράλληλα, δεν έχουν γίνει οποιεσδήποτε διευκρινήσεις πάνω στη διαδικασία λύσης των έργων των δοκιμίων, παρά μόνο επισημάνθηκε η ανάγκη οι μαθητές να είναι ιδιαίτερα προσεκτικοί στις εκφωνήσεις και τις οδηγίες που δίνονται. Τέλος, οι μαθητές δεν ενημερώθηκαν για το θέμα και το σκοπό της ερευνητικής εργασίας για να μην επηρεαστεί ο τρόπος χειρισμού των διάφορων έργων.

Οι εκπαιδευτικοί που έχουν χορηγήσει τα δοκίμια παρακολούθησαν σύντομα σεμινάρια Διδακτικής των Μαθηματικών και γνώριζαν το πλαίσιο διεξαγωγής της εργασίας καθώς και τη σημασία που είχε το να μην παρέμβουν με οποιοδήποτε τρόπο στην όλη διαδικασία. Αντίθετα, οι εκπαιδευτικοί της τάξης δε πληροφορήθηκαν για τους ειδικούς σκοπούς της εργασίας για να διασφαλιστεί η αξιοπιστία των μετρήσεων. Τέλος, οι εκπαιδευτικοί κλήθηκαν να δώσουν ένα ενδεικτικό βαθμό για τον κάθε μαθητή στα ελληνικά και στα μαθηματικά, ο οποίος και χρησιμοποιήθηκε ως εξωτερικό κριτήριο αξιολόγησης του πειραματικού πληθυσμού.

Β' Φάση

Κατά τη δεύτερη φάση της ερευνητικής εργασίας έχει χορηγηθεί στους μαθητές το Δοκίμιο IV, περίπου μία εβδομάδα πριν από την εφαρμογή της διδακτικής κατάστασης. Κατά τη διαδικασία της χορήγησης ακολουθήθηκαν όλα τα στάδια που περιγράφηκαν και στη διαδικασία χορήγησης των προηγούμενων δοκιμίων.

Διδακτική Παρέμβαση

Η διδακτική παρέμβαση, με τις τέσσερις φάσεις της διδακτικής κατάστασης όπως αυτές έχουν περιγραφεί αναλυτικά πιο πάνω, έχει πραγματοποιηθεί κατά τη διάρκεια της σχολικής χρονιάς 2006-2007 σε δύο ομάδες μαθητών των δύο ατόμων της Στ' τάξης του Ά Δημοτικού Σχολείου Γερίου. Συνολικά, η εφαρμογή της διδακτικής κατάστασης έχει χρειαστεί χρόνο επτά διδακτικών περιόδων (350 λεπτών), με τους μαθητές να εργάζονται 40 + 40 λεπτά στην κατάσταση δράσης, 40 + 40 λεπτά στην κατάσταση διατύπωσης, 40 λεπτά στην κατάσταση επικύρωσης και 80 λεπτά στην κατάσταση επισημοποίησης. Οι καταστάσεις δράσης και διατύπωσης έχουν εφαρμοστεί ξεχωριστά στις δύο ομάδες των αγοριών και των κοριτσιών, ενώ στη συνέχεια οι ομάδες αυτές συναντήθηκαν για την εφαρμογή των καταστάσεων επικύρωσης και επισημοποίησης.

Ο ρόλος του δασκάλου στις τρεις πρώτες καταστάσεις βρίσκεται στην παρουσίαση των κανόνων του παιχνιδιού και στη μεταβίβαση της ευθύνης της μάθησης στους ίδιους τους μαθητές. Άρα, ο δάσκαλος είχε περισσότερο ρόλο παρατηρητή της διαδικασίας, χωρίς να επεμβαίνει στην εργασία των μαθητών με τρόπο που να τη διευκολύνει.

Μεταβλητές

Τα έργα των δοκιμίων που έχουν παρουσιαστεί αντιστοιχούν σε συγκεκριμένες μεταβλητές με βάση τα ειδικά χαρακτηριστικά που παρουσιάζουν. Συγκεκριμένα, στην ονομασία της κάθε μεταβλητής περιλαμβάνεται το είδος του έργου, αν δηλαδή είναι αναλογικό ή μη, ο τρόπος λεκτικής παρουσίασής τους, αν δηλαδή είναι έργο σύγκρισης ή έργο στο οποίο δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη και ο αριθμός εμφάνισής του στο δοκίμιο. Έτσι, οι χαρακτήρες **p** και **pp** αναφέρονται στα αναλογικά προβλήματα (**p**roportional) του Δοκιμίου Ι και ΙΙ αντίστοιχα. Ειδικότερα ο χαρακτήρας **p** αναφέρεται στα άμεσα αναλογικά έργα, ενώ ο διπλός χαρακτήρας **pp** στα έμμεσα αναλογικά έργα. Οι χαρακτήρες **np** αναφέρονται σε μη αναλογικά προβλήματα (**n**on-**p**roportional). Στη περίπτωση αυτή δε γίνεται διάκριση σε μη αναλογικά έργα του Δοκιμίου Ι και ΙΙ γιατί όλα τα προβλήματα αυτού του είδους περιλαμβάνονται αποκλειστικά στο Δοκίμιο ΙΙ. Το γράμμα **c** υποδηλώνει ότι το έργο είναι σύγκρισης (**c**omparison), ενώ οι χαρακτήρες **mv** δείχνουν ότι στο έργο δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη (**m**issing-**v**alue). Για παράδειγμα η μεταβλητή **pc1** αναφέρεται στο πρώτο αναλογικό έργο σύγκρισης του πρώτου δοκιμίου (έργο Γ1), ενώ η μεταβλητή **npmv1** αναφέρεται στο πρώτο μη αναλογικό έργο στο οποίο δίνονται τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη (έργο 1).

Για καθένα από τα πιο πάνω έργα δημιουργείται και μια δεύτερη μεταβλητή, η οποία αφορά στη στρατηγική την οποία χρησιμοποιούν οι μαθητές για την επίλυσή τους. Διακριτό στοιχείο της μεταβλητής αυτής είναι ο χαρακτήρας **s** (**s**trategy). Για παράδειγμα, η μεταβλητή ppc3s αναφέρεται στη στρατηγική την οποία χρησιμοποιούν οι μαθητές για την επίλυση του τρίτου έργου σύγκρισης του Δοκιμίου ΙΙ (έργο 7), το οποίο είναι αναλογικό. Το είδος της στρατηγικής καθορίζεται με ένα αριθμό από το ένα μέχρι το 12 στο τέλος της μεταβλητής και αναλύεται εκτενώς στο επόμενο υποκεφάλαιο της Κωδικοποίησης.

Οι δηλώσεις οι οποίες περιλαμβάνονται στο Δοκίμιο Ι και εξετάζουν την ικανότητα διάκρισης αναλογικών από μη αναλογικές καταστάσεις, διαφοροποιούνται από τα πιο πάνω έργα με τα χαρακτηριστικά **st** (**st**atement). Οι δηλώσεις st2 και st6 είναι αναλογικές ενώ οι υπόλοιπες τέσσερις (st1, st3, st4 και st5) είναι μη αναλογικές.

Τέλος, οι λεκτικές και αριθμητικές αναλογίες που χρησιμοποιήθηκαν στο Δοκίμιο ΙΙΙ κωδικοποιήθηκαν με τα αρχικά **v** (**v**erbal) και **m** (**m**athematical), αντίστοιχα. Για παράδειγμα, η μεταβλητή v2, αναφέρεται στο δεύτερο έργο λεκτικών αναλογικών του Δοκιμίου ΙΙΙ (έργο Α2), ενώ η μεταβλητή m3 αντιστοιχεί στο τρίτο έργο μαθηματικών αναλογιών του ίδιου δοκιμίου (έργο Β3). Τα δύο τελευταία έργα μαθηματικών αναλογιών του Δοκιμίου ΙΙΙ κωδικοποιήθηκαν ως m11 και m12 αντίστοιχα, λόγω της διαφοράς που παρουσιάζουν στον τρόπο επίλυσης σε σχέση με τα υπόλοιπα έργα αριθμητικών αναλογιών.

Κωδικοποίηση

Μετά τη συλλογή των δεδομένων, οι απαντήσεις των μαθητών έχουν κωδικοποιηθεί με βάση ισοδιαστημική κλίμακα παίρνοντας τιμές 0-0.25-0.5-0.75 και 1. Μόνο οι απαντήσεις των μαθητών στα έργα των λεκτικών και αριθμητικών αναλογιών του Δοκιμίου ΙΙΙ έχοντας μορφή πολλαπλής επιλογής κωδικοποιήθηκαν σε διχοτομική κλίμακα 0-1, οπότε το 0 είναι ταυτόσημο με αποτυχία στο έργο ενώ το 1 με την επιτυχία. Ταυτόχρονα, όλες οι μεταβλητές που αφορούν στις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές για την επίλυση των έργων, είναι αλφαριθμητικές παίρνοντας τιμές από το ένα μέχρι το 12. Οι τιμές αυτές επεξηγούνται αναλυτικά στη συνέχεια.

Όσον αφορά στην κωδικοποίηση των ισοδιαστημικών μεταβλητών, αυτή γίνεται με συγκεκριμένα κριτήρια. Πιο κάτω αναφέρονται τα κριτήρια που θα χρησιμοποιηθούν για κάθε είδος έργου παίρνοντας ως βάση ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Όσον αφορά στις έξι δηλώσεις του Δοκιμίου Ι (Α1-6), αυτές έχουν κωδικοποιηθεί τόσο ως προς την ικανότητα των μαθητών να διακρίνουν αν μία δήλωση είναι ορθή ή λανθασμένη, όσο και ως προς την ικανότητά τους να διορθώνουν τη δήλωση, όταν αυτό είναι εφικτό. Για παράδειγμα, στη δεύτερη δήλωση του δοκιμίου Ι (Α2): «*Αν τρεις καραμέλες ζυγίζουν 51γρ., τότε τέσσερις καραμέλες του ίδιου είδους θα ζυγίζουν 64γρ*», οι μαθητές βαθμολογούνται με:

- 0 αν επιλέξουν ότι η δήλωση είναι ορθή,
- 0.25 αν επιλέξουν ότι η δήλωση είναι λανθασμένη αλλά δώσουν μία λανθασμένη ή άσχετη αιτιολόγηση του τύπου «Είναι λανθασμένη επειδή οι καραμέλες είναι μεγάλες/ γλυκές κλπ.»,
- 0.5 αν επιλέξουν ότι η δήλωση είναι λανθασμένη αλλά δε δώσουν καμία αιτιολόγηση,
- 0.75 αν επιλέξουν ότι η δήλωση είναι λανθασμένη αλλά στην προσπάθειά τους να δώσουν αιτιολόγηση κάνουν λάθος στις πράξεις ή δώσουν ελλιπή αιτιολόγηση και
- 1 αν επιλέξουν ότι η δήλωση είναι λανθασμένη και παρέχουν ολοκληρωμένη αιτιολόγηση.

Όσον αφορά στην ικανότητα διόρθωσης της πιο πάνω δήλωσης ακολουθείται η ίδια κωδικοποίηση με τη πιο πάνω με τους μαθητές να βαθμολογούνται με:

- 0 αν δε διορθώσουν τη δήλωση,

- 0.25 αν κάνουν κάποια απόπειρα διόρθωσης της δήλωσης αλλά αυτή δε σχετίζεται με το πλαίσιο του προβλήματος,
- 0.5 αν δηλώσουν ότι η δήλωση μπορεί να διορθωθεί χωρίς να λένε με ποιο τρόπο,
- 0.75 αν διορθώσουν τη δήλωση με αλλαγή ενός αριθμού αλλά κάνουν κάποια λάθη στις πράξεις, παρέχοντας όμως ορθή εξίσωση και
- 1 αν διορθώσουν τη δήλωση με αλλαγή ενός αριθμού παρέχοντας παράλληλα και την ορθή εξίσωση.

Τα έργα που αφορούν στην ικανότητα επίλυσης αναλογικών και μη αναλογικών καταστάσεων έχουν κωδικοποιηθεί τόσο ως προς το βαθμό επιτυχίας στην επίλυσή τους, όσο και ως προς τις στρατηγικές που χρησιμοποιούνται από τους μαθητές για το σκοπό αυτό. Πρέπει να σημειωθεί ότι η κωδικοποίηση αυτή είναι η ίδια τόσο στα έργα σύγκρισης όσο και στα έργα στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη. Για παράδειγμα, στο πρώτο έργο του Δοκιμίου ΙΙ (1), το οποίο είναι μη αναλογικό: «*Η δασκάλα έδωσε στους μαθητές ένα φυλλάδιο με εικόνες και μπογιά για να τις βάψουν. Ο Χρίστος χρησιμοποίησε 8ml μπογιάς για να βάψει το εσωτερικό μιας τετράγωνης εικόνας πλευράς 4cm. Πόση μπογιά χρησιμοποίησε ο Γιώργος για να βάψει μια μεγέθυνση της ίδιας εικόνας με πλευρά 12cm*;» οι μαθητές βαθμολογούνται με:

- 0 αν δώσουν μία εντελώς λανθασμένη απάντηση, για παράδειγμα την αναλογική (24ml),
- 0.25 αν δώσουν ελλιπή απάντηση ή εκτελέσουν μόνο τη μία από τις δύο πράξεις. Για παράδειγμα, αν βρουν ότι τα 8ml αντιστοιχούν σε $16cm^2$,
- 0.5 αν δώσουν την ορθή απάντηση (72ml), χωρίς οποιαδήποτε αιτιολόγηση,
- 0.75 αν παρουσιάσουν την ορθή μαθηματική πρόταση αλλά κάνουν κάποιο λάθος στις πράξεις και
- 1 αν δώσουν μια ορθή και αιτιολογημένη απάντηση παρουσιάζοντας την κατάλληλη μαθηματική πρόταση

Ανεξάρτητα από το αν οι μαθητές κατάφεραν να λύσουν ορθά το κάθε έργο, η στρατηγική λύσης που ακολούθησαν κωδικοποιείται σε μια αντίστοιχη για κάθε έργο μεταβλητή. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι πρώτες πέντε στρατηγικές αφορούν στην προσπάθεια των μαθητών να λύσουν αναλογικά τα προβλήματα.

- *1: Αναγωγή στη μονάδα*

Στην περίπτωση του πιο πάνω προβλήματος θα θεωρηθεί ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν τη πιο πάνω στρατηγική θεωρώντας ότι σε 1cm αντιστοιχούν 2ml, οπότε σε 12cm αντιστοιχούν 12 x 2=24ml.

- *2: Οικοδομώ (Build-up)*

Με τη στρατηγική αυτή οι μαθητές χτίζουν σταδιακά το ζητούμενο αποτέλεσμα. Έτσι, προσεγγίζοντας το πιο πάνω πρόβλημα αναλογικά μεταβαίνουν σταδιακά από τα 4 cm, στα 8 cm, στα 12 cm.

cm	ml
4	8
8	16
12	24

- *3: Εσωτερικό γινόμενο*

Οι μαθητές φτιάχνουν πίνακα με τα δεδομένα στοιχεία, πολλαπλασιάζουν χιαστή και βρίσκουν το αποτέλεσμα. Για παράδειγμα, στο πιο πάνω έργο σχηματίζουν την εξίσωση 4xA=8x12, οπότε A=$\frac{96}{4}$=12 ml.

cm	ml
4	8
12	;

- *4: Εύρεση παράγοντα ανάμεσα στα μέτρα (Συναρτησιακός Τελεστής)*

Χαρακτηριστικό της στρατηγικής αυτής είναι ότι οι μαθητές προσπαθούν να βρουν τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στις δύο διαφορετικές ποσότητες της προβληματικής κατάστασης. Στην περίπτωση του πιο πάνω παραδείγματος οι ποσότητες είναι τα ml της μπογιάς και το μήκος της πλευράς σε cm, ενώ ο παράγοντας που τις συνδέει, αναλογικά πάντα, είναι το 2 (4cm x 2= 8ml άρα 12cm x 2= 24ml).

- *5: Εύρεση παράγοντα μέσα στο ίδιο το μέτρο (Αριθμητικός Τελεστής)*

Η στρατηγική αυτή έχει κάποιες ομοιότητες με την προηγούμενη από τη άποψη ότι και σε αυτή την περίπτωση οι μαθητές προσπαθούν να βρουν το παράγοντα που συνδέει δύο δεδομένα του προβλήματος, τα οποία σε αυτή την περίπτωση ανήκουν στο ίδιο μέτρο-ποσότητα. Στο πιο πάνω παράδειγμα ο παράγοντας που συνδέει αναλογικά το μήκος της πλευράς του τετραγώνου είναι το 3 (4cm x 3 = 12cm). Άρα, ο ίδιος παράγοντας θα συνδέει και τα ml της μπογιάς (8ml x 3 = 24ml).

- *6: Προσθετικός συλλογισμός*

Οι μαθητές, οι οποίοι χρησιμοποιούν τη συγκεκριμένη στρατηγική, στη προσπάθειά τους να βρουν τη σχέση που συνδέει τις δύο ποσότητες της προβληματικής κατάστασης, κάνουν χρήση προσθετικού συλλογισμού οπότε κάνουν λόγο για διαφορά ανάμεσα στους αριθμούς. Για παράδειγμα, στο πιο πάνω έργο, η διαφορά ανάμεσα στα 4cm και 12cm είναι 8, οπότε 8ml και 8 μας δίνουν απάντηση 16 ml. Διαφορετικά, ένας μαθητής μπορεί να βρει τη διαφορά ανάμεσα στα δύο μέτρα 8ml - 4cm =4, οπότε να θεωρήσει ότι ισχύει η σχέση 12cm + 4 = 16ml.

- *7: Παρουσίαση ενός αριθμού χωρίς αιτιολόγηση*

Στην περίπτωση αυτή, υπάρχει αδυναμία διευκρίνησης της στρατηγικής την οποία χρησιμοποίησε ο μαθητής για να φτάσει στο συγκεκριμένο αποτέλεσμα, οπότε και η απάντηση του κωδικοποιείται ως απάντηση χωρίς αιτιολόγηση.

- *8: Καμία λύση*

Καταγράφεται η συγκεκριμένη στρατηγική όταν δεν υπάρχει καμία προσπάθεια από μέρους του μαθητή για να λύσει το έργο.

- *9: Ορθή επίλυση μη αναλογικού έργου με εφαρμογή γενικού κανόνα*

Οι στρατηγικές 9 και 10 χρησιμοποιούνται ως επί το πλείστον στα μη αναλογικά έργα. Στην περίπτωση της στρατηγικής 9 οι μαθητές χρησιμοποιούν το γενικό κανόνα «όταν η πλευρά διπλασιάζεται/ τριπλασιάζεται κλπ., τότε και το εμβαδόν θα τετραπλασιαστεί/ εννιαπλασιαστεί κλπ.»

- *10: Ορθή επίλυση αναλογικών ή μη αναλογικών έργων, με εύρεση πρώτα της περιμέτρου ή του εμβαδού του σχήματος, ανάλογα, και μετά εφαρμογή άμεσης αναλογίας*

Στην περίπτωση αυτή, οι μαθητές χρησιμοποιούν τα δεδομένα του προβλήματος για να βρουν το εμβαδόν ή την περίμετρο του δεδομένου σχήματος και στη συνέχεια εφαρμόζουν μία από τις 5 αναλογικές στρατηγικές που παρουσιάστηκαν για να βρουν τη λύση του προβλήματος. Για παράδειγμα στο πιο πάνω έργο σχηματίζουν πρώτα ένα πίνακα στον οποίο η μία ποσότητα είναι το εμβαδόν της εικόνας σε cm^2 και στη συνέχεια λύνουν το πρόβλημα αναλογικά.

cm^2	ml
16	8
144	;

- *11: Άλλες απαντήσεις/ στρατηγικές*

Η κατηγορία αυτή χρησιμοποιείται για εκείνες τις απαντήσεις των μαθητών που δεν μπορούν να καταχωρηθούν σε μια από τις πιο πάνω στρατηγικές. Μια τέτοια απάντηση στο πιο πάνω έργο θα ήταν για παράδειγμα η πρόσθεση όλων των δεδομένων του προβλήματος (4 + 8 + 12 = 24ml).

- *12: Διαισθητική στρατηγική*

Η συγκεκριμένη στρατηγική καταγράφεται μόνο στα αναλογικά έργα σύγκρισης του Δοκιμίου Ι (Γ1-3), τα οποία ζητούν από τους μαθητές να συγκρίνουν τη γλυκύτητα της λεμονάδας που φτιάχνουν δύο παιδιά και στη συνέχεια να αλλάξουν ένα δεδομένο του προβλήματος ώστε η λεμονάδα τους να έχει την ίδια γεύση. Οι μαθητές, οι οποίοι θεωρούν ότι τα δύο παιδιά του προβλήματος θα έχουν λεμονάδα ίδιας γεύσης μόνο αν βάζουν ακριβώς την ίδια ποσότητα ζάχαρης και χυμό λεμονιού (όση ποσότητα βάλει ο ένας- τόση και ο άλλος), θεωρείται ότι απαντούν διαισθητικά και σύμφωνα με τη συγκεκριμένη στρατηγική.

Ανάλυση Δεδομένων

Μετά τη χορήγηση και τη συλλογή των τριών δοκιμίων έχουν εφαρμοστεί διαφορετικές αναλύσεις πάνω στα δεδομένα της ερευνητικής εργασίας για να γίνει εφικτή η μελέτη των ερευνητικών ερωτημάτων που τέθηκαν. Για το σκοπό αυτό έχει χρησιμοποιηθεί το μοντέλο Rasch, ενώ παράλληλα έχει γίνει περιγραφική, συσχετιστική και παλινδρομική ανάλυση με το στατιστικό πακέτο SPSS, επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση με τη βοήθεια του προγράμματος EQS, καθώς και στατιστική συνεπαγωγική ανάλυση με το πρόγραμμα CHIC.

Συγκεκριμένα, για να ελεγχθεί η εγκυρότητα γνωρίσματος των δοκιμίων και να προσδιοριστεί η καταλληλότητα και ο βαθμός δυσκολίας των έργων πρώτα έχει χρησιμοποιηθεί το μοντέλο στατιστικής μέτρησης Rasch (Andrich, 1988) με τη χρήση του λογισμικού προγράμματος QUEST (Adams & Khoo, 1996). Η ανάλυση αφορά στο συνολικό δείγμα των 945 μαθητών για τα έργα των τριών δοκιμίων που χορηγήθηκαν στην πρώτη φάση της έρευνας.

Στη συνέχεια, έχει εφαρμοστεί παραμετρική στατιστική με τη χρήση του στατιστικού πακέτου SPSS, για την εύρεση των μέσων τιμών και τυπικών αποκλίσεων των απαντήσεων που έδωσαν οι μαθητές στα διάφορα έργα που περιλαμβάνονται στα δοκίμια, καθώς και τυχόν στατιστικά σημαντικών διαφορών ανάμεσα στις διάφορες ηλικιακές ομάδες. Η ίδια ανάλυση χρησιμοποιήθηκε για διερεύνηση των στρατηγικών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές κάθε τάξης για την επίλυση των έργων. Παράλληλα, εφαρμόστηκε η πολλαπλή παλινδρομική ανάλυση για να διερευνηθεί κατά πόσο η χρήση κάποιας αναλογικής στρατηγικής μπορεί να αποτελέσει παράγοντα πρόβλεψης της μετα-αναλογικής ενημερότητας των μαθητών.

Η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση έχει εφαρμοστεί τόσο σε ολόκληρο το δείγμα των μαθητών της Α΄ Φάσης της εργασίας (945 μαθητές), όσο και στους μαθητές κάθε κύκλου (Δημοτικό-Γυμνάσιο). Η εφαρμογή των συγκεκριμένων μεθόδων ανάλυσης είχε σκοπό την επαλήθευση του θεωρητικού μοντέλου μαθηματικής αναλογικής σκέψης τόσο στο σύνολο των μαθητών όσο και σε κάθε επίπεδο ξεχωριστά.

Για την εξέταση των προτεινόμενων μοντέλων έχει χρησιμοποιηθεί ένα διαδεδομένο πρόγραμμα δομικών μοντέλων εξίσωσης (Structural Equation Modelling – SEM), το EQS (Bentler, 1995). Για να εξακριβωθεί ο βαθμός στον οποίο το μοντέλο συμφωνεί με τα δεδομένα, εξετάστηκαν τρεις δείκτες: η αναλογία x^2 προς τους βαθμούς ελευθερίας ($\frac{x^2}{df}$), το Comparative Fit Index (CFI) και το Root Mean Square Error of Approximation (RMSEA). Είναι γενικά αποδεκτό ότι οι τιμές που καθιστούν ένα μοντέλο κατάλληλο για τα δεδομένα μιας έρευνας είναι οι ακόλουθες: $x^2/df<2$, $CFI>.9$ και $RMSEA<.05$.

Η τελευταία μέθοδος ανάλυσης που έχει εφαρμοστεί στα δεδομένα είναι η στατιστική συνεπαγωγική ανάλυση του R. Gras, με τη χρήση του λογισμικού προγράμματος CHIC (Gras, Peter, Briand & Philippe, 1997). Με την εφαρμογή αυτής της ανάλυσης γίνονται εμφανείς οι σχέσεις ομοιότητας και συνεπαγωγής μεταξύ των μεταβλητών, μέσα από τα διαγράμματα ομοιότητας και συνεπαγωγής που δημιουργούνται. Στο διάγραμμα ομοιότητας τα έργα κατανέμονται σε ομάδες ανάλογα με την ομοιογένεια με την οποία έχουν αντιμετωπιστεί από τους μαθητές. Δηλαδή, στο διάγραμμα ομοιότητας σχηματίζονται ομάδες των έργων, τα οποία οι μαθητές αντιμετωπίζουν με όμοιο τρόπο. Στα διαγράμματα συνεπαγωγής παρουσιάζονται συνεπαγωγικές σχέσεις, οι οποίες υποδεικνύουν κατά πόσο και σε ποιο βαθμό η επιτυχία σε ένα έργο ή μια ομάδα έργων συνεπάγεται την επιτυχία σε ένα άλλο σχετικό έργο ή σε μια ομάδα έργων, αντίστοιχα. Η συνεπαγωγική ανάλυση επιτρέπει τη μελέτη των σχέσεων στις διάφορες διαστάσεις του μοντέλου.

Εγκυρότητα και Αξιοπιστία

Φαινομενική Εγκυρότητα: Η φαινομενική εγκυρότητα των δοκιμίων που χορηγήθηκαν σε διαφορετικές φάσεις της παρούσας εργασίας προσδιορίστηκε από εκπαιδευτικούς, τόσο πρωτοβάθμιας όσο και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, που κατά τη στιγμή της χορήγησης ήταν υπεύθυνοι για τη διδασκαλία τάξεων που ενέπιπταν στην ηλικία που καθορίστηκε ως πληθυσμός της έρευνας.

Αρχικά στα πλαίσια σεμιναρίων Διδακτικής των Μαθηματικών με θέμα έρευνες γύρω από το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας, παρουσιάστηκαν και αναλύθηκαν οι πρώτες μορφές των δοκιμίων. Στη συνέχεια λήφθηκαν απόψεις από πέντε εκπαιδευτικούς από κάθε τάξη (Ε', Στ' Δημοτικού και Α', Β', Γ' Γυμνασίου), οι τάξεις των οποίων δεν περιλήφθηκαν ως δείγμα στην παρούσα εργασία, πάνω στην τελική μορφή των δοκιμίων. Κατά την επιλογή των εκπαιδευτικών παρουσιάστηκε προτίμηση σε αυτούς που είχαν μετεκπαίδευση και αρκετά χρόνια υπηρεσίας. Γενικά, πρέπει να σημειωθεί ότι οι εκπαιδευτικοί συμφώνησαν ότι τα δοκίμια ως σύνολο φαίνεται να μετρούν τη μαθηματική αναλογική σκέψη των μαθητών. Μερικοί εκπαιδευτικοί αν και ζήτησαν διευκρινίσεις για τα έργα που αφορούσαν στον αναλογικό συλλογισμό, βρήκαν αιτιολογημένη τη συμπερίληψή τους ως μέρος του δοκιμίου.

Αξιοπιστία. Η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από τη χορήγηση των δοκιμίων διαπιστώθηκε με τον υπολογισμό του συντελεστή Cronbach's alpa, ο οποίος αφορά στο σύνολο των έργων που χρησιμοποιήθηκαν για μέτρηση της ικανότητας των μαθητών για αναλογικό συλλογισμό, για μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό καθώς και της μετα-αναλογικής τους ενημερότητας. Ο συντελεστής Cronbach's alpa βρίσκεται σε ψηλά επίπεδα ($r = 0{,}81$), υποδεικνύοντας πως η επίδοση του κάθε μαθητή στο κάθε έργο βρίσκεται πολύ κοντά στη γενικότερη επίδοσή του. Άρα, τα έργα των τριών πρώτων δοκιμίων παρουσιάζουν πολύ μεγάλη εσωτερική ομοιογένεια.

Περίληψη

Στο κεφάλαιο αυτό έχουν παρουσιαστεί αναλυτικά όλα τα στοιχεία που συνιστούν το σχεδιασμό του ερευνητικού μέρους της εργασίας. Αρχικά, διατυπώθηκαν τα ερευνητικά ερωτήματα και οι ερευνητικές υποθέσεις και παρουσιάστηκε συνοπτικά η διαδικασία που ακολουθήθηκε για τη διεκπεραίωσή της ερευνητικής εργασίας. Στη συνέχεια καθορίστηκε το δείγμα των παιδιών που έλαβαν μέρος στην έρευνα. Ακολούθως, περιγράφηκαν αναλυτικά όλα τα έργα που έχουν χρησιμοποιηθεί για τη μέτρηση των ικανοτήτων των μαθητών στον αναλογικό συλλογισμό, το μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό καθώς και της μετα-αναλογικής τους ενημερότητας.

Λεπτομερώς παρουσιάστηκε και η διδακτική κατάσταση που έχει εφαρμοστεί για την αντιμετώπιση του επιστημολογικού εμποδίου της αναλογίας. Συγκεκριμένα, περιγράφηκαν αναλυτικά τα τέσσερα στάδια της διδακτικής παρέμβασης με τις οδηγίες που έχουν δοθεί στους μαθητές. Ταυτόχρονα, έγινε λεπτομερής παρουσίαση όλων των μεταβλητών που έχουν χρησιμοποιηθεί στην ερευνητική εργασία καθώς και του τρόπου κωδικοποίησης των έργων. Το κεφάλαιο αυτό ολοκληρώθηκε με την αναλυτική περιγραφή της στατιστικής ανάλυσης που έχει εφαρμοστεί για την εξέταση των ερευνητικών υποθέσεων και των στοιχείων που αναφέρονται στην εγκυρότητα και την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων των δοκιμίων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Εισαγωγή

Μετά τη χορήγηση και τη συλλογή των τριών δοκιμίων εφαρμόστηκαν διαφορετικές αναλύσεις πάνω στα δεδομένα της ερευνητικής εργασίας έτσι ώστε να γίνει εφικτή η μελέτη των ερευνητικών ερωτημάτων που τέθηκαν. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο Rasch ενώ παράλληλα εφαρμόστηκε περιγραφική, συσχετιστική και παλινδρομική ανάλυση με το στατιστικό πακέτο SPSS, επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση με τη βοήθεια του προγράμματος EQS, καθώς και στατιστική συνεπαγωγική ανάλυση με το πρόγραμμα CHIC.

Τα αποτελέσματα τα οποία προέκυψαν από τις πιο πάνω αναλύσεις έχουν οργανωθεί και παρουσιάζονται σε τρία μέρη με βάση τον ποσοτικό ή ποιοτικό τους χαρακτήρα. Ταυτόχρονα, σε καθένα από τα τρία μέρη επιχειρείται μια σύνοψη και προκαταρκτική ερμηνεία των κυριοτέρων αποτελεσμάτων. Τα δύο πρώτα μέρη του κεφαλαίου αυτού αφορούν στην Α’ Φάση της εργασίας και είναι ποσοτικά αφού αναφέρονται στην επίλυση των έργων των δοκιμίων από τους μαθητές. Συγκεκριμένα, στο πρώτο μέρος του κεφαλαίου εξετάζονται τα δύο πρώτα ερευνητικά ερωτήματα, τα οποία αναφέρονται στο βαθμό επιβεβαίωσης του προτεινόμενου μοντέλου ερμηνείας μαθηματικής αναλογικής σκέψης και στην εξέλιξη της επίδοσης των μαθητών σε έργα αναλογικού συλλογισμού, μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας.

Το δεύτερο μέρος των αποτελεσμάτων είναι επίσης ποσοτικό και σχετίζεται με τις στρατηγικές επίλυσης των έργων των δοκιμίων. Συγκεκριμένα, στο μέρος αυτό εξετάζεται το πώς διαφοροποιούνται οι στρατηγικές επίλυσης των αναλογικών και των μη αναλογικών προβλημάτων από τάξη σε τάξη. Ταυτόχρονα, διερευνάται η πιθανή σχέση που υπάρχει ανάμεσα σε συγκεκριμένες στρατηγικές επίλυσης μαθηματικών αναλογικών προβλημάτων και στην ικανότητα επίλυσης έργων μετα-αναλογικής ενημερότητας.

Το τρίτο και τελευταίο μέρος είναι ποιοτικό και αφορά στη Β’ Φάση της ερευνητικής εργασίας και ειδικότερα την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος της διδακτικής κατάστασης. Ειδικότερα, παρουσιάζονται τα τέσσερα στάδια της εφαρμογής της θεμελιώδους κατάστασης στους μαθητές και αναλύονται στοιχεία τα οποία σχετίζονται με την επίδραση του προγράμματος στη διαφοροποίηση της μετα-αναλογικής τους ενημερότητας.

Μέρος Α’: Ανάλυση της Επίδοσης των Μαθητών στα Έργα

Ανάπτυξη Ισοδιαστημικών Κλιμάκων - Εφαρμογή του Μοντέλου Rasch

Με την εφαρμογή του μοντέλου Rasch στις απαντήσεις των μαθητών στα έργα αναπτύχθηκαν ισοδιαστημικές κλίμακες των έργων με βάση το βαθμό δυσκολίας τους, και των απαντήσεων των μαθητών με βάση τις ικανότητες τους. Επιπλέον, η ανάλυση με το μοντέλο Rasch έδειξε την καταλληλότητα όλων των έργων για τη μέτρηση της ικανότητας των μαθητών στη μαθηματική αναλογική σκέψη. Ο Πίνακας 13 παρουσιάζει συνοπτικά τα στατιστικά στοιχεία των κλιμάκων που προέκυψαν από την ανάλυση των έργων των δοκιμίων πάνω στον αναλογικό και το μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό, καθώς και τη διάσταση της μετα-αναλογικής ενημερότητας και τις αντίστοιχες απαντήσεις των μαθητών. Η αξιοπιστία (reliability) των κλιμάκων υπολογίζεται από το δείκτη διάκρισης των έργων και το δείκτη διάκρισης των μαθητών. Οι δείκτες διάκρισης αντιπροσωπεύουν το ποσοστό της παρατηρούμενης διασποράς που θεωρείται έγκυρη (Kyriakides, Kaloyiroy & Lindsay, 2006). Η τιμή 1 υποδεικνύει μεγάλη διάκριση στην οποία η ύπαρξη λαθών είναι μικρή και η δυσκολία των έργων, καθώς και οι μετρήσεις που αφορούν στα άτομα διακρίνονται εμφανώς πάνω στην κλίμακα.

Από τον Πίνακα 13 φαίνεται ότι οι δείκτες διάκρισης για τους μαθητές και για τα έργα είναι 0.84 και 0.98, αντίστοιχα, υποδεικνύοντας ότι η αξιοπιστία της κλίμακας είναι ικανοποιητική. Παράλληλα, είναι εμφανές ότι οι τιμές των infit mean square καθώς και των outfit mean square προσεγγίζουν την μονάδα, τόσο στην περίπτωση των έργων όσο και στην περίπτωση των ατόμων. Οι τιμές αυτές υποδεικνύουν κατά πόσο η επίδοση ενός ατόμου (ή σε ένα έργο) είναι συνεπής με την επίδοση των άλλων ατόμων (ή στα άλλα έργα) και βασίζεται στις διαφορές ανάμεσα στις αναμενόμενες και παρατηρούμενες επιδόσεις (Kyriakides et al., 2006). Τα στατιστικά στοιχεία *outfit* βασίζονται αποκλειστικά σε αυτές τις διαφορές ανάμεσα στις αναμενόμενες και παρατηρούμενες επιδόσεις, ενώ στην περίπτωση υπολογισμού των στοιχείων *infit* υποβαθμίζονται οι περιπτώσεις ακραίων ατόμων και έργων. Τα έργα θεωρούνται συνήθως ότι συμφωνούν με το μοντέλο Rasch όταν η τιμή του infit mean square κυμαίνεται ανάμεσα στο 0.77-1.30 (Kyriakides et al., 2006), οπότε και η τιμή που έχει προκύψει για τα έργα του δοκιμίου (1.00) φαίνεται να ικανοποιεί το μοντέλο.

Πίνακας 13

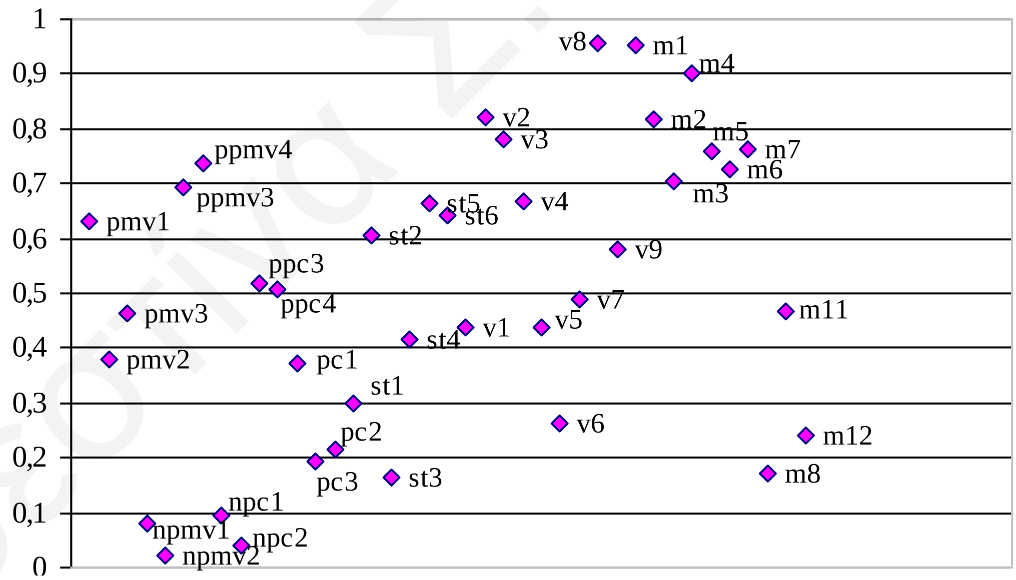
Στατιστικά Στοιχεία για τις Κλίμακες των Έργων των Δοκιμίων και των Ικανοτήτων των Μαθητών

Στατιστικά στοιχεία	
Mean (έργα)	-0.02
(άτομα)	0.00
Standard deviation (έργα)	0.93
(άτομα)	0.39
Reliability (έργα)	0.98
(άτομα)	0.84
Infit mean square (έργα)	1.00
(άτομα)	1.01
Outfit mean square (έργα)	1.05
(άτομα)	1.05
Infit t (έργα)	-0.32
(άτομα)	-0.01
Outfit t (έργα)	-0.13
(άτομα)	0.05

Οι τιμές των *infit t και outfit t* προκύπτουν αφού σταθμιστούν τα infit mean square και outfit mean square, αντίστοιχα. Αν ο μέσος όρος τους κυμαίνεται γύρω στο 0 και η τυπική απόκλιση γύρω στο 1 τότε τα δεδομένα συμφωνούν με το μοντέλο. Στην περίπτωση της ανάλυσης των δεδομένων της παρούσας ερευνητικής εργασίας, οι τιμές των infit t και outfit t προσεγγίζουν το 0 στην περίπτωση των ατόμων αλλά όχι και των έργων.

Περιγραφικά Στοιχεία Δεδομένων

Στο Διάγραμμα 14 παρουσιάζονται οι μέσοι όροι επίδοσης του συνόλου των μαθητών σε όλα τα έργα και των τριών δοκιμίων που χορηγήθηκαν. Οι τιμές των μέσων όρων κυμαίνονται μεταξύ μηδέν και ένα. αφού οι λύσεις των μαθητών στα έργα κωδικοποιήθηκαν σε ισοδιαστημική κλίμακα 0-0.25-0.50-0.75-1. Κατά συνέπεια, ο μέσος όρος επίδοσης $\bar{x} = 0.09$ που είχαν οι μαθητές στο μη αναλογικό έργο σύγκρισης (npc1), μπορεί να θεωρηθεί ότι αντιστοιχεί σε ποσοστό 9% των μαθητών οι οποίοι έλυσαν ορθά το συγκεκριμένο έργο.



Διάγραμμα 14. Επιδόσεις του συνόλου των μαθητών σε όλα τα έργα των δοκιμίων.

Όπως ήταν αναμενόμενο οι μαθητές παρουσίασαν τη χαμηλότερη επίδοση στα έμμεσα μη αναλογικά έργα npc1 ($\bar{x} = 0.09$), npc2 ($\bar{x} = 0.04$), npmv1 ($\bar{x} = 0.08$) και npmv2 ($\bar{x} = 0.02$), τα οποία ανεξαρτήτως του τρόπου παρουσίασής τους χαρακτηρίστηκαν από ομοιογένεια. Ψηλότερες επιδόσεις παρατηρήθηκαν στην πλειοψηφία των λεκτικών και μαθηματικών αναλογίων ($\bar{x} = 0.49 - 0.95$), και ειδικότερα στις λεκτικές αναλογίες v8 ($\bar{x} = 0.95$), v2 ($\bar{x} = 0.82$) και v3 ($\bar{x} = 0.78$), οι οποίες εμπίπτουν στις κατηγορίες του συσχετισμού και τις σημασιολογίας, αλλά και στις μαθηματικές αναλογίες m1 ($\bar{x} = 0.95$) και m4 ($\bar{x} = 0.90$), οι οποίες αφορούν στην εύρεση ακέραιου λόγου ανάμεσα σε δύο μέτρα (συναρτησιακός τελεστής).

Η μέση επίδοση των μαθητών στα έργα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού παρουσιάστηκε ψηλότερη από την επίδοση των μαθητών στα μη αναλογικά έργα αλλά ήταν ταυτόχρονα και χαμηλότερη από την αντίστοιχη επίδοσή τους στα έργα αναλογικού συλλογισμού. Μέσα στην ομάδα των έργων του αναλογικού συλλογισμού εμφανίστηκαν διακυμάνσεις, οι οποίες σχετίζονταν με τον τρόπο παρουσίασης των έργων. Ειδικότερα, από τα έργα αυτά οι μαθητές δυσκολεύτηκαν περισσότερο στην επίλυση του άμεσου αναλογικού έργου σύγκρισης pc2, με μη ακέραιο τελεστή ($\bar{x} = 0.19$) αλλά και στο αντίστοιχο έργο pc3 με ακέραιο αριθμητικό τελεστή ($\bar{x} = 0.22$), ενώ βρήκαν πιο εύκολα τα έμμεσα έργα ppmv3 ($\bar{x} = 0.69$) και ppmv4 ($\bar{x} = 0.74$) στα οποία δίνονταν οι τρεις ποσότητες και ζητούνταν η τέταρτη.

Λόγω του μεγάλου αριθμού των έργων (N= 39) που συμπεριλήφθηκαν στα τρία δοκίμια θεωρήθηκε σκόπιμη η διεξαγωγή μιας παραγοντικής ανάλυσης, η οποία να προτείνει πιθανές ομαδοποιήσεις των έργων αυτών σε νέες μεταβλητές. Με αυτό τον τρόπο έγινε ευκολότερη η εξαγωγή γενικών συμπερασμάτων που να βασίζονται στο είδος και στη λεκτική διατύπωση των έργων. Στην παραγοντική ανάλυση (Παράρτημα Ε) συμπεριλήφθηκαν και τα 39 έργα των δοκιμίων και από αυτή προέκυψαν 10 παράγοντες που ερμηνεύουν περίπου 51% της συνολικής διασποράς του δείγματος (Πίνακας 14).

Οι δέκα από τους 11 παράγοντες που προέκυψαν από την παραγοντική ανάλυση αποτέλεσαν τη βάση για τη δημιουργία νέων μεταβλητών. Έτσι, όλα τα έργα ομαδοποιήθηκαν σε 14 νέες μεταβλητές (Πίνακας 15), οι έξι από τις οποίες προέκυψαν από τα έργα που φόρτιζαν στους παράγοντες Π6-Π10, όπως παρουσιάζονται στον Πίνακα 14. Οι υπόλοιπες οκτώ μεταβλητές προέκυψαν από τα έργα που φόρτιζαν στους τέσσερις πρώτους παράγοντες (Π1-Π4). Τα έργα των τεσσάρων παραγόντων διακρίθηκαν σε υποομάδες με βάση τη λεκτική διατύπωση των έργων αλλά και το πλαίσιο παρουσίασής τους.

Για παράδειγμα, στον πρώτο παράγοντα φόρτιζαν όλα τα άμεσα αναλογικά έργα, στα οποία δίνονταν οι τρεις ποσότητες και ζητούνταν η τέταρτη, μαζί με τις αναλογικές δηλώσεις. Για να επιτευχθεί όμως πιο ενδελεχής μελέτη των έργων, προτιμήθηκε να δημιουργηθούν δύο μεταβλητές από τον ίδιο παράγοντα με βάση το πλαίσιο στο οποίο παρουσιάστηκαν τα έργα. Με τον ίδιο τρόπο τα έμμεσα αναλογικά και τα μη αναλογικά έργα, τα οποία αποτέλεσαν τον Παράγοντα 2 και 4 αντίστοιχα, διακρίθηκαν σε δύο μεταβλητές, στα έμμεσα έργα σύγκρισης και στα αντίστοιχα έργα στα οποία δίνονταν οι τρεις ποσότητες και ήταν άγνωστη η τέταρτη. Τέλος, οι αριθμητικές αναλογίες που αποτέλεσαν τον Παράγοντα 3, διακρίθηκαν στις μεταβλητές με ακέραιο και μη ακέραιο λόγο, αφού βιβλιογραφικά υποστηρίζεται η ύπαρξη διαφοροποίησης στο βαθμό δυσκολίας των έργων, ανάλογα με τη σχέση των αριθμών μεταξύ τους (Karplus et al, 1983).

Πίνακας 14

Παραγοντική Ανάλυση της Επίδοσης των Μαθητών σε Όλα τα Έργα των Δοκιμίων

	Παράγοντας	Χαρακτηριστική ρίζα (eigenvalue)	Ποσοστό ερμηνευόμενης Διασποράς (%)
1.	Άμεσα αναλογικά έργα με άγνωστη την 4η ποσότητα & Αναλογικές δηλώσεις	5.70	14.62
2.	Έμμεσα αναλογικά έργα	2.80	7.18
3.	Αριθμητικές αναλογίες	1.78	4.77
4.	Έμμεσα μη αναλογικά έργα	1.59	4.07
5.	Μη αναλογικές δηλώσεις	1.45	3.70
6.	Άμεσα αναλογικά έργα σύγκρισης	1.37	3.52
7.	Λεκτικές αναλογίες - Συσχετισμός	1.31	3.46
8.	Αριθμητικές αναλογίες -Δομική ομοιότητα	1.27	3.26
9.	Λεκτικές αναλογίες - Σημασιολογία	1.16	2.97
10.	Λεκτικές αναλογίες - Ταξινόμηση	1.13	2.90

Με βάση τα αποτέλεσμα της παραγοντικής ανάλυσης έξι από τις νέες μεταβλητές αυτές προέκυψαν από την ομαδοποίηση έργων αναλογικού συλλογισμού (λεκτικές και αριθμητικές αναλογίες), τέσσερις από την ομαδοποίηση έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού (άμεσων και έμμεσων), τέσσερις από την ομαδοποίηση μη αναλογικών έργων (σύγκρισης και με άγνωστη την τέταρτη ποσότητα) και οι υπόλοιπες δύο από έργα υπό μορφή δηλώσεων (αναλογικά και μη). Τέσσερα έργα (v8, m7, m8, st5) δεν περιλήφθηκαν στις νέες μεταβλητές λόγω του ότι είτε δε φόρτιζαν σε κανένα παράγοντα με τέτοιο τρόπο που εννοιολογικά να αιτιολογείται, ή απλά αποτέλεσαν από μόνες τους ένα παράγοντα. Πρέπει τέλος να σημειωθεί ότι επίδοση των μαθητών σε καθεμιά από τις 14 νέες μεταβλητές αποτέλεσε ο μέσος όρος της επίδοσης των μαθητών στα αντίστοιχα έργα που περιλάμβανε η κάθε μεταβλητή.

Πίνακας 15

Μεταβλητές που Προέκυψαν από Παραγοντική Ανάλυση σε Όλα τα Έργα των Δοκιμίων

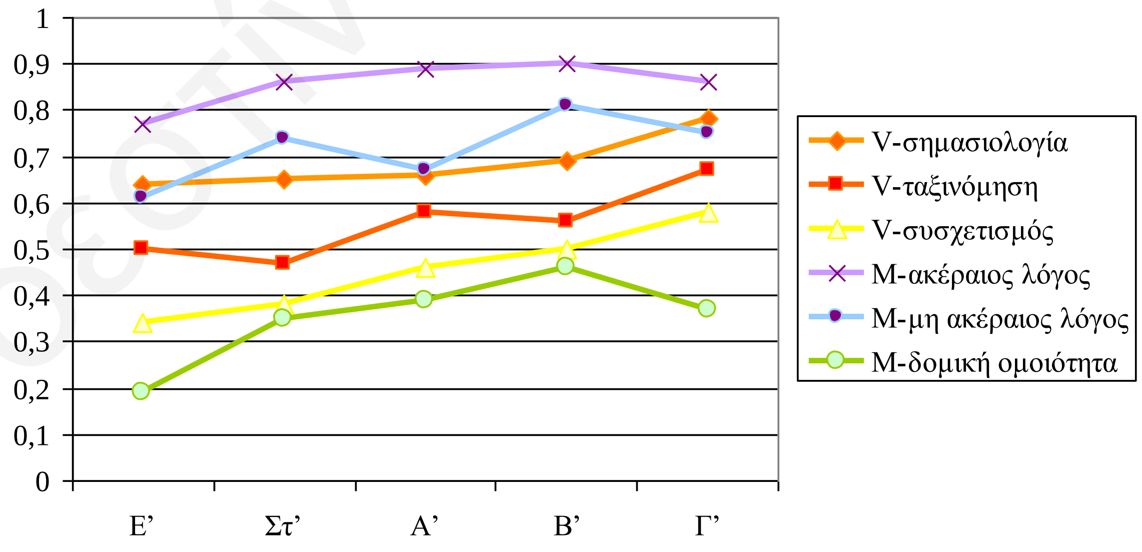
Είδος έργου	Νέα μεταβλητή	Έργα Δοκιμίου	Περιγραφή
λεκτικές αναλογίες	va	v1, v2, v3	σημασιολογία
	vb	v4,v5	ταξινόμηση
	vc	v6, v7, v9	συσχετισμός
αριθμητικές αναλογίες	ma	m1, m2, m4, m5	ακέραιος λόγος
	mb	m6, m3	μη ακέραιος λόγος
	mc	m11, m12	δομική ομοιότητα
αναλογικά έργα	pmv	pmv1, pmv2 pmv3	δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη (άμεσα)
	ppmv	ppmv3, ppmv4	δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη (έμμεσα)
	pc	pc1, pc2, pc3	σύγκρισης (άμεσα)
	ppc	ppc3, ppc4	σύγκρισης (έμμεσα)
δηλώσεις	sa	st2, st6	αναλογικές
	spa	st1, st3, st4	μη αναλογικές (λανθασμένες)
μη αναλογικά έργα	npmv	npmv1, npmv2	δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη (έμμεσα)
	npc	npc1, npc2	σύγκρισης (έμμεσα)

Επιδόσεις στις Ομάδες Έργων Κατά Τάξη

Οι μεταβλητές που προέκυψαν από την παραγοντική ανάλυση με όλα τα έργα των δοκιμίων αποτέλεσαν τη βάση για διερεύνηση της σχέσης που υπάρχει ανάμεσα στην ηλικία των μαθητών και στην αντίστοιχη επίδοσή τους σε έργα διαφορετικού είδους. Οι μεταβλητές που παρουσιάστηκαν στον Πίνακα 15 συγκεντρώθηκαν και εξετάζονται πιο κάτω σε τρεις διακριτές ομάδες που αντιστοιχούν στα έργα αναλογικού συλλογισμού, μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας.

Αναλογικός Συλλογισμός

Τα έργα που εμπίπτουν στη διάσταση του αναλογικού συλλογισμού έχουν ομαδοποιηθεί σε έξι μεταβλητές βάσει των αποτελεσμάτων της παραγοντικής ανάλυσης. Οι τρεις μεταβλητές αναφέρονται σε έργα λεκτικών αναλογιών ενώ οι υπόλοιπες τρεις σε έργα αριθμητικών αναλογιών. Ειδικότερα, οι λεκτικές αναλογίες αφορούν στις κατηγορίες της σημασιολογίας, της ταξινόμησης και του συσχετισμού. Οι αριθμητικές αναλογίες διακρίνονται σε αυτές με ακέραιο λόγο, με μη ακέραιο λόγο και τέλος σε αυτές που ζητούν από τους μαθητές να εντοπίσουν τη δομική ομοιότητα που υπάρχει σε σχέση με άλλες αναλογίες. Το Διάγραμμα 15 παρουσιάζει γραφικά τους μέσους όρους επιτυχίας των μαθητών του δείγματος κατά τάξη, στις έξι υποκατηγορίες έργων αναλογικού συλλογισμού.



Διάγραμμα 15. Μέσοι όροι επίδοσης στα έργα αναλογικού συλλογισμού κατά τάξη.

Ειδικότερα, φαίνεται ότι ο μέσος όρος της επίδοσης των μαθητών τόσο στις κατηγορίες των λεκτικών όσο και των αριθμητικών αναλογιών παρουσιάζει αύξηση, με την ταυτόχρονη αύξηση της ηλικίας των μαθητών. Για να διαπιστωθεί κατά πόσο αυτή η αύξηση στο μέσο όρο επίδοσης των μαθητών είναι στατιστικά σημαντική, πραγματοποιήθηκε πολλαπλή ανάλυση διασποράς (MANOVA) με εξαρτημένες μεταβλητές την επίδοση των μαθητών στις έξι κατηγορίες έργων αναλογικού συλλογισμού. Ανεξάρτητη μεταβλητή ήταν η τάξη στην οποία ανήκε ο κάθε μαθητής. Τα αποτελέσματα της πολλαπλής ανάλυσης διασποράς έδειξαν ότι υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές (Πίνακας 16) ανάμεσα στην επίδοση των μαθητών στις πέντε τάξεις για όλα τα είδη έργων αναλογικού συλλογισμού (Pillai's $F_{(6,935)} = 7.89$, $p < .001$).

Πίνακας 16

Σύγκριση Μέσων Όρων Επίδοσης στα Έργα Αναλογικού Συλλογισμού κατά Τάξη

Πηγή διακύμανσης	Άθροισμα τετραγώνων	Βαθμοί ελευθερίας	Μέσα τετραγώνων	F	Πιθανότητα
V-σημασιολογία	2.03	4	0.51	8.69	.000 *
V-ταξινόμηση	4.14	4	1.04	8.34	.000 *
V-συσχετισμός	5.86	4	1.47	14.81	.000 *
Μ-ακέραιος λόγος	1.87	4	0.47	9.84	.000 *
Μ-μη-ακέραιος λόγος	4.45	4	1.11	9.53	.000 *
Μ-δομική ομοιότητα	7.29	4	1.82	17.12	.000 *

* p<0.05

Μια post hoc ανάλυση (polynomial contrast) επέτρεψε να διαφανούν ακριβώς οι τάξεις ανάμεσα στις οποίες υπάρχει στατιστικά σημαντική βελτίωση με την πάροδο του χρόνου, για κάθε υποκατηγορία έργων αναλογικού συλλογισμού (Πίνακας 17). Συγκεκριμένα, όσον αφορά στην ικανότητα χειρισμού λεκτικών αναλογιών, φαίνεται ότι ο μέσος όρος της επίδοσης των μαθητών στο δημοτικό σχολείο παραμένει σχετικά στάσιμος και στις τρεις κατηγορίες λεκτικών αναλογιών χωρίς να παρουσιάζει στατιστικά σημαντική βελτίωση από την Ε' στη ΣΤ' Δημοτικού. Παρόμοια συμπεριφορά παρουσιάζει η επίδοση των μαθητών και κατά τη μετάβασή τους από την Α' στη Β' Γυμνάσιου.

Στατιστικά σημαντική βελτίωση του μέσου όρου επίδοσης των μαθητών στην επίλυση λεκτικών αναλογιών, παρατηρείται μόνο κατά τη μετάβασή τους από τη Στ' Δημοτικού στην Α' Γυμνασίου και από τη Β' Γυμνάσιου στη Γ' Γυμνασίου. Συγκεκριμένα, η βελτίωση που παρατηρείται κατά τη μετάβαση από τη Στ' Δημοτικού στην Α' Γυμνασίου αφορά μόνο στις κατηγορίες της ταξινόμησης ($t=3.24$, $p<.001$) και του συσχετισμού ($t=2.87$, $p<.005$). Οι μαθητές παρουσιάζουν στατιστικά σημαντική βελτίωση σε όλα τα είδη λεκτικών αναλογικών ($t_{va}=3.41$, $p<.001$; $t_{vb}=2.81$, $p<.005$; $t_{vc}=2.07$, $p<.05$), κατά τη μετάβαση από τη Β' Γυμνάσιου στη Γ' Γυμνασίου.

Πίνακας 17

Μέσοι Όροι Επίδοσης στα Έργα Αναλογικού Συλλογισμού κατά Τάξη

	Έργα Αναλογικού Συλλογισμού											
Τάξη	Λεκτικά (*verbal*)						Αριθμητικά (*math*)					
	σημασιολογία (va)		ταξινόμηση (vb)		συσχετισμός (vc)		ακέραιος λόγος (ma)		μη ακέραιος λόγος (mb)		δομική ομοιότητα (mc)	
	$\overline{X}$	SD	$\overline{X}$	SD	$\overline{X}$	SD	$\overline{X}$	SD	$\overline{X}$	SD	$\overline{X}$	SD
Ε'	.64	.24	.50	.35	.34	.28	.77	.27	.61	.39	.19	.27
Στ'	.65	.21	.47	.33	.38	.31	.86	.21	.74	.31	.35	.34
Α'	.66	.26	.58	.36	.46	.33	.89	.20	.67	.37	.39	.32
Β'	.69	.24	.56	.36	.50	.32	.90	.17	.81	.29	.46	.35
Γ'	.78	.24	.67	.36	.58	.32	.86	.23	.75	.33	.37	.35
Σύνολο	.68	.25	.45	.30	.67	.27	.85	.22	.54	.28	.35	.34

p<0.05

Όσον αφορά στην επίλυση αριθμητικών αναλογιών, ο μέσος όρος επίδοσης των μαθητών παρουσιάζει στατιστικά σημαντική βελτίωση κατά τη μετάβασή τους από την Ε' στη ΣΤ' Δημοτικού ($t_{ma}=3.56$, $p<.001$; $t_{mb}=3.62$, $p<.001$; $t_{mc}=5.14$, $p<.001$), στις ομάδες έργων που αφορούν ακέραιο λόγο ($\overline{X}\varepsilon = .77, \overline{X}\sigma\tau = .86$), μη ακέραιο λόγο ($\overline{X}\varepsilon = .61, \overline{X}\sigma\tau = .74$) και εύρεση της δομικής ομοιότητας ανάμεσα στα έργα

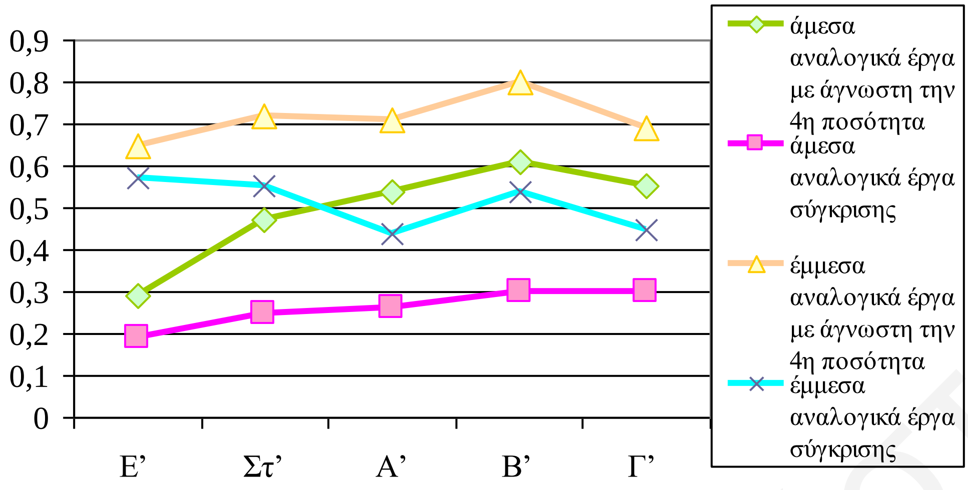
($\overline{X}\varepsilon = .19, \overline{X}\sigma\tau = .35$). Στις αριθμητικές αναλογίες με μη ακέραιο λόγο στατιστικά σημαντική βελτίωση παρατηρείται και κατά τη μετάβαση από την Στ’ Δημοτικού στην Α’ Γυμνασίου ($t_{ΣΤ-Α}$=-2.01, p<.05), καθώς και από την Α’ στη Β’ Γυμνασίου ($t_{Α-Β}$=4.15, p<.001). Τέλος, όσον αφορά στα έργα δομικής ομοιότητας, οι μαθητές παρουσιάζουν στατιστικά σημαντική αύξηση στο μέσο όρο επίδοσής τους από την Α’ στη Β’ Γυμνάσιου ($t_{Α-Β}$=2.24, p<.05), η οποία συνοδεύεται από σημαντική μείωση στη Γ’ Γυμνασίου ($t_{Β-Γ}$=-2.44, p<.05).

Μαθηματικός Αναλογικός Συλλογισμός

Τα έργα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού έχουν κατηγοριοποιηθεί σε δύο ευρύτερες ομάδες, ανάλογα με το πλαίσιο στο οποίο παρουσιάστηκαν στα συγκεκριμένα δοκίμια και διακρίνονται στα άμεσα και στα έμμεσα. Τα άμεσα έργα περιλήφθηκαν στο Δοκίμιο Ι και είχαν τη μορφή της συνταγής μαγειρικής και του ελέγχου της γλυκύτητας της λεμονάδας (Παράρτημα Α). Τα έμμεσα έργα, χρησιμοποιήθηκαν ως παρεμβολές στα μη αναλογικά έργα του Δοκιμίου ΙΙ και αφορούσαν στην εύρεση της περιμέτρου ορθογωνίων και κυκλικών σχημάτων, η οποία υποδηλωνόταν έμμεσα μέσα από λέξεις όπως για παράδειγμα περίφραξη, κορδέλα γύρω από τραπεζομάντιλο κ.ά. (Παράρτημα Β).

Στο Διάγραμμα 16 παρουσιάζονται ξεχωριστά οι μέσοι όροι για τα έργα που διατυπώθηκαν είτε ως έργα σύγκρισης είτε ως έργα στα οποία δίνονταν οι τρεις ποσότητες και ζητούνταν η τέταρτη, για κάθε μια από τις κατηγορίες των έμμεσων και άμεσων αναλογικών έργων. Συγκεκριμένα, φαίνεται ότι ο μέσος όρος της επίδοσης των μαθητών στα έργα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού παρουσιάζει διαφοροποιήσεις ανάλογα με την ηλικία των μαθητών.

Η πολλαπλή ανάλυση διασποράς (MANOVA) με εξαρτημένη μεταβλητή την επίδοση των μαθητών στις τέσσερις κατηγορίες έργων αναλογικού συλλογισμού έδειξε ότι η ύπαρξη διαφορών στην επίδοση των μαθητών στις πέντε τάξεις είναι στατιστικά σημαντική για όλα τα είδη έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού (Pillai’s $F_{(4,937)}$ = 11.52, p < .001). Αναλυτικά τα αποτελέσματα της πολλαπλής ανάλυσης της διασποράς παρουσιάζονται στον Πίνακα 18.



Διάγραμμα 16. Μέσοι όροι επίδοσης στα έργα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού κατά τάξη.

Πίνακας 18

Σύγκριση Μέσων Όρων Επίδοσης στα Έργα Μαθηματικού Αναλογικού Συλλογισμού κατά Τάξη

Πηγή διακύμανσης	Άθροισμα τετραγώνων	Βαθμοί ελευθερίας	Μέσα τετραγώνων	F	Πιθανότητα
άμεσα *4η άγνωστη*	11.24	4	2.81	26.44	.000 *
άμεσα *σύγκρισης*	1.5	4	0.38	5.50	.000 *
έμμεσα *4η άγνωστη*	2.33	4	0.58	14.32	.000 *
έμμεσα *σύγκρισης*	2.84	4	0.71	6.05	.000 *

* $p<0.05$

Στα άμεσα αναλογικά έργα καθώς και στα έμμεσα έργα στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη, υπάρχει μια βελτίωση των ποσοστών επιτυχίας με την αύξηση της ηλικίας των μαθητών, ενώ στα έμμεσα έργα σύγκρισης τα ποσοστά των μαθητών μειώνονται. Η post hoc ανάλυση (polynomial contrast) έδειξε ακριβώς τις τάξεις στις οποίες οι διαφορές που παρατηρούνται είναι στατιστικά σημαντικές (Πίνακας 19). Στα άμεσα έργα στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη παρατηρείται στατιστικά σημαντική βελτίωση των μέσων όρων επιτυχίας των μαθητών κατά τη μετάβασή τους από την Ε’($\bar{X}$ =.29) στη Στ’ Δημοτικού ($\bar{X}$ =.47) και στη συνέχεια στην Α’ ($\bar{X}$ =.54) και Β’ τάξη ($\bar{X}$ =.61) του Γυμνασίου ($t_{Ε\text{-}ΣΤ}$=5.25, $p<.001$; $t_{ΣΤ\text{-}Α}$=2.00, $p<.05$; $t_{Α\text{-}Β}$=2.43, $p<.05$). Η συμπεριφορά των μαθητών στα άμεσα αναλογικά έργα σύγκρισης είναι ανάλογη με την περίπτωση με των προηγούμενων έργων, έστω και αν τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών είναι σαφώς χαμηλότερα. Έτσι, στατιστικά σημαντική βελτίωση των μέσων όρων επιτυχίας των μαθητών παρατηρείται κατά τη μετάβαση από την Ε'($\bar{X}$ =.19) στη Στ' τάξη ($\bar{X}$ =.25) του Δημοτικού σχολείου ($t_{Ε-ΣΤ}$=4.08, p<.001) αλλά και κατά τη μετάβαση από την Α' ($\bar{X}$ =.26) στη Β' ($\bar{X}$ =.30) Γυμνασίου ($t_{Α-Β}$=2.39, p<.05) .

Πίνακας 19

Μέσοι Όροι Επίδοσης στα Έργα Μαθηματικού Αναλογικού Συλλογισμού κατά Τάξη

	Έργα Μαθηματικού Αναλογικού Συλλογισμού							
	Άμεσα				Έμμεσα			
	3 ποσότητες ζητείται η 4η (*pmv*)		Σύγκριση (*pc*)		3 ποσότητες ζητείται η 4η (*ppmv*)		Σύγκρισης (*ppc*)	
Τάξη	$\bar{X}$	SD	$\bar{X}$	SD	$\bar{X}$	SD	$\bar{X}$	SD
Ε' Δημ.	.29	.29	.19	.11	.65	.39	.57	.37
Στ' Δημ.	.47	.37	.25	.17	.72	.33	.55	.37
Α' Γυμν.	.54	.31	.26	.16	.71	.31	.44	.31
Β' Γυμν.	.61	.13	.30	.18	.80	.29	.54	.33
Γ' Γυμν.	.55	.32	.30	.18	.69	.30	.45	.33
Σύνολο	.49	.34	.26	.17	.71	.33	.51	.35

↓↑ * p<0.05

Η Στ' Δημοτικού και η Β' Γυμνασίου παραμένουν τάξεις κλειδιά για την αύξηση του μέσου όρου επίδοσης των μαθητών και στην περίπτωση των έμμεσων αναλογικών έργων. Στην περίπτωση των έμμεσων έργων στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη, παρατηρείται πάλι στατιστικά σημαντική βελτίωση των μέσων όρων επιτυχίας των μαθητών κατά τη μετάβασή τους από την Ε'($\bar{X}$ =.65) στη Στ' τάξη ($\bar{X}$ =.72) του Δημοτικού σχολείου ($t_{Ε-ΣΤ}$=2.00, p<.05), καθώς και από την Α' ($\bar{X}$ =.71) στη Β'

($\overline{X}$ =.80) Γυμνασίου ($t_{A\text{-}B}$=2.71, p<.01). Στα έμμεσα έργα σύγκρισης στατιστικά σημαντική βελτίωση των μέσων όρων επιτυχίας των μαθητών παρατηρείται μόνο ανάμεσα στην Α’ ($\overline{X}$ =.26) στη Β’ ($\overline{X}$ =.30) Γυμνασίου ($t_{A\text{-}B}$=2.39, p<.05).

Τα αποτελέσματα αυτά ως σύνολο υποδεικνύουν τον άμεσο επηρεασμό της ικανότητας επίλυσης έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού από τη διδασκαλία. Η Στ’ τάξη του δημοτικού σχολείου αλλά και Β’ Γυμνασίου δεν αποτελούν ως ηλικίες από μόνες τους σταθμό στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών για μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό, λόγω της παρουσίασης των υψηλότερων μέσων όρων επίδοσης στα συγκεκριμένα έργα. Η συστηματική διδασκαλία πάνω στην έννοια της αναλογίας, την οποία δέχονται οι μαθητές της συγκεκριμένης ηλικίας όπως αυτή καθορίζεται από το Αναλυτικό Πρόγραμμα (Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού, 1996), φαίνεται να βρίσκεται πίσω από τη σημαντική αύξηση των μέσων όρων των μαθητών των τάξεων αυτών. Το γεγονός αυτό φαίνεται να δικαιολογεί και τη στασιμότητα ή και ακόμα μείωση που παρατηρείται στους μέσους όρους επιτυχίας των μαθητών, ειδικά στα έμμεσα έργα στην Α’ (ppc: $t_{\Sigma\mathrm{T}\text{-}A}$=-3.24, p<.001) και Γ’ τάξη του Γυμνασίου (ppc: $t_{B\text{-}\Gamma}$=-2.42, p<.05; ppmv: $t_{B\text{-}\Gamma}$=-3.17, p<.01), αφού είναι τάξεις στις οποίες οι μαθητές δεν ασχολούνται συστηματικά και άμεσα με το συγκεκριμένο γνωστικό αντικείμενο. Πιο συγκεκριμένα, η μηχανική πολλές φορές εφαρμογή τυπικών στρατηγικών επίλυσης αναλογικών προβλημάτων στη Στ’ Δημοτικού και στη Β΄ Γυμνασίου έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση υψηλών ποσοστών στις τάξεις αυτές, που δεν αντιπροσωπεύουν τη πραγματική ικανότητα των μαθητών για επίλυση αυτών των προβλημάτων. Θα πρέπει να τονιστεί ότι ανάλογη διαφορά μεταξύ των μέσων όρων επιτυχίας μεταξύ μαθητών Στ΄ Δημοτικού και Γυμνασίου εμφανίζεται στην έρευνα των Γαγάτση και Καφίδα (1995), η οποία αφορά διαφορετικούς πληθυσμούς και διαφορετικά έργα.

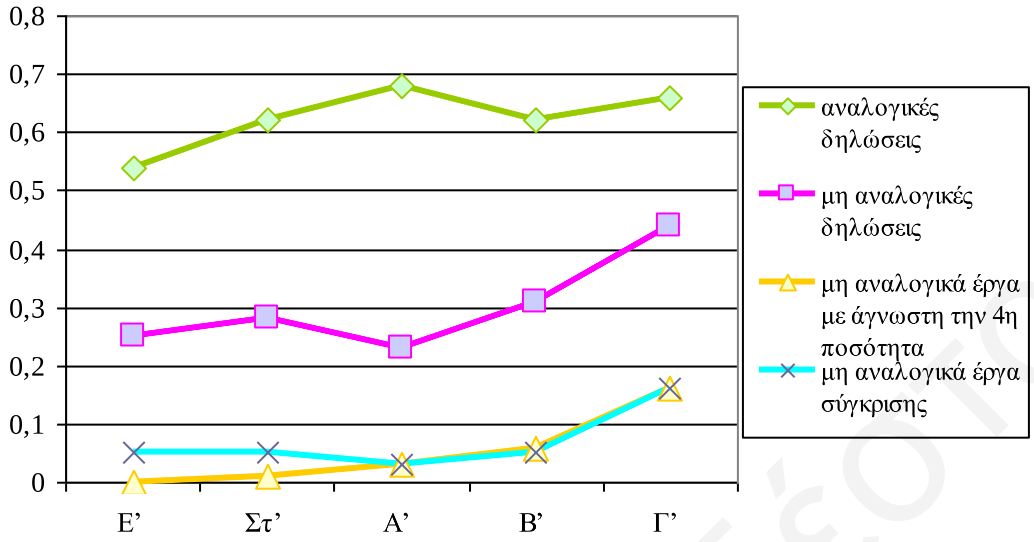
Όσον αφορά στην επίδοση των μαθητών στα έργα των διαφόρων κατηγοριών ανεξαρτήτως τάξης, διαπιστώνεται ότι τόσο ανάμεσα στα έργα της ίδιας κατηγορίας (σύγκρισης – δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη), όσο και μεταξύ κατηγοριών (άμεσα-έμμεσα) υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές. Συγκεκριμένα, οι μαθητές είχαν καλύτερη επίδοση στα έργα στα οποία δίνονταν οι τρεις ποσότητες και ήταν άγνωστη η τέταρτη σε σχέση με τα έργα σύγκρισης, τόσο στην κατηγορία των άμεσων έργων (t=21.75; p<.001), όσο και στην κατηγορία των έμμεσων (t=17.29; p<.001). Ταυτόχρονα, τα άμεσα έργα φαίνεται να προκάλεσαν περισσότερες δυσκολίες στους μαθητών ανεξαρτήτως γλωσσικής διατύπωσης, αφού τόσο στην περίπτωση των έργων σύγκρισης (t=-21.31; p<.001), όσο και στην περίπτωση των έργων στα οποία δίνονταν οι τρεις ποσότητες και ήταν άγνωστη η τέταρτη (t=-17.99; p<.001), οι μέσοι όροι επιτυχίας των μαθητών ήταν σαφώς χαμηλότεροι από τους αντίστοιχους των έμμεσων έργων.

Μετα-αναλογική Ενημερότητα

Τα έργα που εμπίπτουν στην ευρύτερη ομάδα της μετα-αναλογικής ενημερότητας διακρίνονται στις δηλώσεις, οι οποίες αποτέλεσαν μέρος του Δοκιμίου Ι και των οποίων οι μαθητές έπρεπε να καθορίσουν πρώτα τα αναλογικά ή μη χαρακτηριστικά τους και στη συνέχεια να τις διορθώσουν, και στα έμμεσα μη αναλογικά έργα εμβαδού του Δοκιμίου ΙΙ. Οι έξι δηλώσεις που περιλήφθηκαν στο Δοκίμιο Ι έχουν ομαδοποιηθεί σε δύο κατηγορίες σύμφωνα με τα αποτελέσματα της παραγοντικής ανάλυσης (Παράρτημα Ε). Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει τις αναλογικές δηλώσεις st2 και st6, ενώ η δεύτερη κατηγορία αναφέρεται στις μη αναλογικές δηλώσεις st1, st3 και st4, τις οποίες οι μαθητές έπρεπε να διορθώσουν αφού είχαν εντοπίσει τον μη αναλογικό τους χαρακτήρα. Όσον αφορά στα έμμεσα μη αναλογικά έργα εμβαδού, αυτά διακρίνονται σε δύο κατηγορίες ανάλογα με τη διατύπωσή τους, σε έργα σύγκρισης και σε έργα στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη.

Ο Πίνακας 21 και το Διάγραμμα 17 παρουσιάζουν τους μέσους όρους επιτυχίας των μαθητών του δείγματος σε όλες τις πιο πάνω κατηγορίες έργων μετα-αναλογικής ενημερότητας, τα οποία συμπεριλήφθηκαν στα Δοκίμια Ι και ΙΙ. Η απεικόνιση του Διαγράμματος 17 δείχνει ότι οι μέσοι όροι επιτυχίας των μαθητών στα μη αναλογικά έργα έχουν μικρές διαφοροποιήσεις από τάξη σε τάξη και παρουσιάζουν τη μεγαλύτερή τους αύξηση στη Γ΄ Γυμνασίου. Ειδικά στην περίπτωση των μη αναλογικών έργων, οι μέσοι όροι επίδοσης των μαθητών διατηρούνται σε χαμηλά επίπεδα από την Ε’ Δημοτικού μέχρι την Β’ Γυμνασίου, υποδεικνύοντας ότι τα έργα μετα-αναλογικής ενημερότητας διαφοροποιούνται από τα υπόλοιπα έργα αναλογικού μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού που εξετάστηκαν πριν.

Στατιστικά σημαντικές διαφοροποιήσεις στο μέσο όρο επίδοσης των μαθητών παρατηρούνται σε όλες τις κατηγορίες του Πίνακα 17 όπως φαίνεται από τα αποτελέσματα της πολλαπλής ανάλυσης διασποράς (Pillai’s $F_{(4,937)} = 13.72$, $p < .001$). Αναλυτικά τα αποτελέσματα της πολλαπλής ανάλυσης της διασποράς παρουσιάζονται στον Πίνακα 20.



Διάγραμμα 17. Μέσοι όροι επίδοσης στα έργα μετα-αναλογικής ενημερότητας, κατά τάξη.

Πίνακας 20

Σύγκριση Μέσων Όρων Επίδοσης στα Έργα Μετα-αναλογικής Ενημερότητας κατά Τάξη

Πηγή διακύμανσης	Άθροισμα τετραγώνων	Βαθμοί ελευθερίας	Μέσα τετραγώνων	F	Πιθανότητα
αναλογικές δηλώσεις	2.19	4	.55	6.35	.000 *
μη αναλογικές δηλώσεις	5.01	4	1.25	19.65	.000 *
έμμεσα *4η άγνωστη*	2.75	4	0.69	31.48	.000 *
έμμεσα *σύγκρισης*	1.80	4	0.45	16.36	.000 *

* p<0.05

Οι διαφορές που παρατηρήθηκαν κατά τη μετάβαση από τη μια τάξη στην άλλη δεν είναι όλες στατιστικά σημαντικές. Η post hoc ανάλυση (polynomial contrast) έδειξε ακριβώς τις τάξεις στις οποίες αυτές οι διαφορές αξίζουν να περαιτέρω διερεύνησης (Πίνακας 21). Στην περίπτωση των αναλογικών δηλώσεων, στατιστικά σημαντικές διαφορές στο μέσο όρο επίδοσης των μαθητών εντοπίζονται μόνο κατά τη μετάβασή τους από την Ε’($\overline{X}$ =.54) στη Στ’ τάξη ($\overline{X}$ =.62) του δημοτικού σχολείου ($t_{Ε-ΣΤ}$=2.72, p<.01.). Αντίθετα σε όλα τα μη αναλογικά έργα, στατιστικά σημαντική βελτίωση των μέσων όρων των μαθητών παρατηρείται μόνο κατά τη μετάβασή τους από τη Β’ στη Γ’ Γυμνασίου, υποδεικνύοντας ότι η μετα-αναλογική ενημερότητα των μαθητών ξεκινά να εμφανίζεται προς το τέλος του γυμνασίου.

Η μεγαλύτερη βελτίωση (npc: $t_{B\text{-}\Gamma}$=6.10, p<.001; npmv: $t_{B\text{-}\Gamma}$=3.97, p<.001) σημειώθηκε στα έμμεσα μη αναλογικά έργα σύγκρισης ($\bar{X}_B$=.05, $\bar{X}_\Gamma$=.16) και στα έργα στα οποία δίνονταν οι τρεις ποσότητες και ζητούνταν η τέταρτη ($\bar{X}_B$=.06, $\bar{X}_\Gamma$=.16), όπου οι μαθητές της Γ' Γυμνασίου είχαν σχεδόν τριπλάσιο μέσο όρο επίδοσης από τους μαθητές της Β' Γυμνασίου. Ειδικότερα, στην τελευταία κατηγορία έμμεσων μη αναλογικών έργων στα οποία δίνονταν οι τρεις ποσότητες και ζητούνταν η τέταρτη, μικρή αλλά στατιστικά σημαντική βελτίωση των μέσων όρων επιτυχίας των μαθητών παρατηρήθηκε ανάμεσα σε όλες τις τάξεις ($t_{E\text{-}\Sigma T}$=2.42, p<.05; $t_{\Sigma T\text{-}A}$=2.18, p<.05; $t_{A\text{-}B}$=1.97, p<.05). Στις μη αναλογικές δηλώσεις οι μέσοι όροι επίδοσης των μαθητών συνέχιζαν να παρουσιάζουν σημαντική βελτίωση τόσο από τη Β' ($\bar{X}$ =.31) στη Γ'($\bar{X}$ =.44) Γυμνασίου ($t_{B\text{-}\Gamma}$=4.92, p<.001), όσο και από τη Α' ($\bar{X}$ =.23) στη Β' ($\bar{X}$ =.31) Γυμνασίου ($t_{A\text{-}B}$=3.35, p<.001).

Πίνακας 21

Μέσοι Όροι Επίδοσης στα Έργα Μετα-Αναλογικής Ενημερότητας κατά Τάξη

	Έργα Μετα-αναλογικής ενημερότητας							
	Δηλώσεις				Έμμεσα			
	Αναλογικές st2, st6		Μη Αναλογικές st1,st3,st4		3 ποσότητες ζητείται η 4η (*npmv*)		Σύγκρισης (*npc*)	
Τάξη	$\bar{X}$	SD	$\bar{X}$	SD	$\bar{X}$	SD	$\bar{X}$	SD
Ε' Δημ.	.54	.31	.25	.24	0	0	.05	.13
Στ' Δημ.	.62	.30	.28	.26	.01	.79	.05	.12
Α' Γυμν.	.67	.28	.23	.24	.03	.12	.03	.11
Β' Γυμν.	.63	.31	.31	.27	.06	.17	.05	.14
Γ' Γυμν.	.66	.27	.44	.26	.16	.27	.16	.29
Σύνολο	.62	.30	.29	.26	.05	.16	.06	.17

↓↑ * p<0.05

Τέλος, ανεξάρτητα από την ηλικία των μαθητών, η επίδοσή τους στα έμμεσα μη αναλογικά έργα παρουσίασε σημαντικές διαφοροποιήσεις ανάλογα με τη λεκτική διατύπωση των έργων. Συγκεκριμένα, οι μαθητές είχαν καλύτερη επίδοση στα μη αναλογικά έργα σύγκρισης σε σχέση με τα έργα στα οποία δίνονταν οι τρεις ποσότητες και ζητούνταν η τέταρτη ($t= -3.07$; $p<.005$), γεγονός που είναι αντίθετο με τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τις επιδόσεις των μαθητών στα αντίστοιχα έμμεσα αναλογικά έργα.

Το Μοντέλο Μαθηματικής Αναλογικής Σκέψης

Με την εφαρμογή της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης έγινε προσπάθεια να αναπτυχθεί ένα θεωρητικό μοντέλο και να ελεγχθεί η εγκυρότητα του, ώστε να προσδιοριστεί η δομή και οι διαστάσεις της μαθηματικής αναλογικής σκέψης. Η βασική υπόθεση της εργασίας είναι ότι η μαθηματική αναλογική σκέψη συνίσταται από τρεις διακριτές διαστάσεις, οι οποίες αναφέρονται στην ικανότητα του ατόμου για αναλογικό συλλογισμό, μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό καθώς την μετα-αναλογική ενημερότητα.

Πριν την επιβεβαίωση του θεωρητικού αυτού μοντέλου, θεωρήθηκε σκόπιμο να ελεγχθεί κατά πόσο η μαθηματική αναλογική σκέψη μπορεί να αποτελείται είτε από μία αποκλειστικά διάσταση, είτε από δύο διαστάσεις (Πίνακας 22). Σε πρώτη φάση εξετάστηκε ένα μοντέλο μίας διάστασης, το οποίο έθετε την υπόθεση ότι οι απαντήσεις των μαθητών και στα τρία δοκίμια ερμηνεύονται από ένα παράγοντα πρώτης τάξης, ο οποίος αντιπροσωπεύει την ικανότητα των μαθητών για επίλυση αναλογικών, μαθηματικών αναλογικών και μη αναλογικών έργων. Ουσιαστικά με βάση την πρώτη υπόθεση ο παράγοντας πρώτης τάξης αποτελεί τη συνισταμένη όλων των έργων των δοκιμίων και αντιπροσωπεύει την ικανότητα για μαθηματική αναλογική σκέψη. Αυτό το μοντέλο δε συμφωνούσε με τα δεδομένα της έρευνας ($CFI=0.60$; $\frac{x^2}{df} = 8.18$; $RMSEA=0.087$) και έτσι δε θεωρήθηκε κατάλληλο για την ερμηνεία της ικανότητας για μαθηματική αναλογική σκέψη. Άρα, η υπόθεση ότι η μαθηματική αναλογική σκέψη συνίσταται από μια μόνο διάσταση δεν επαληθεύεται.

Για τη διερεύνηση της αντίστοιχης υπόθεσης ότι η μαθηματική αναλογική σκέψη συνίσταται από δύο διαστάσεις εξετάστηκε ένα μοντέλο με δύο παράγοντες πρώτης τάξης, οι οποίοι αποτέλεσαν τη συνισταμένη των αναλογικών και μη αναλογικών έργων, αντίστοιχα. Πιο συγκεκριμένα, το μοντέλο έθεσε την υπόθεση ότι οι απαντήσεις στα αναλογικά και μαθηματικά αναλογικά έργα ερμηνεύονται από ένα παράγοντα πρώτης τάξης, ενώ οι απαντήσεις στα μη αναλογικά έργα διακρίνονται από τις υπόλοιπες και ερμηνεύονται από το δεύτερο παράγοντα πρώτης τάξης. Ούτε και αυτό το μοντέλο συμφωνούσε με τα δεδομένα της έρευνας (CFI=0.70; $\frac{x^2}{df}$ = 6.54; RMSEA=0.077) και έτσι δε θεωρήθηκε κατάλληλο για την ερμηνεία της ικανότητας για μαθηματική αναλογική σκέψη. Άρα, και η υπόθεση ότι η μαθηματική αναλογική σκέψη συνίσταται από δύο διαστάσεις δεν επαληθεύεται.

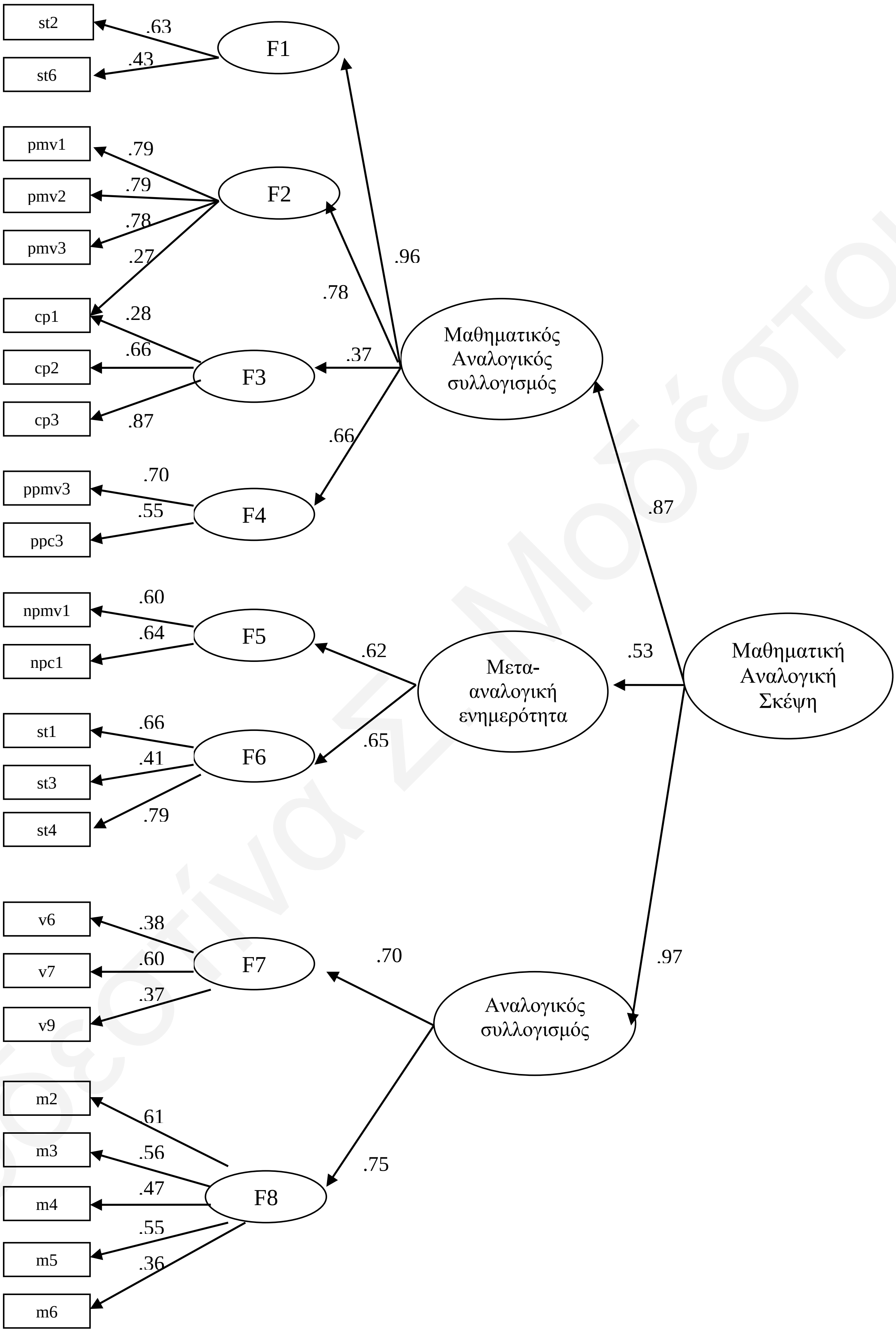
Πινάκας 22

Δείκτες Επιβεβαιωτικής Ανάλυσης για το Μοντέλο Μαθηματικής Αναλογικής Σκέψης

Μοντέλο	CFI	x^2	df	$\frac{x^2}{df}$	RMSEA
Μιας διάστασης	0.604	1858.416	227	8.18	0.087
Δύο διαστάσεων	0.699	1472.759	225	6.54	0.077
Τριών διαστάσεων	0.950	424.352	217	1.96	0.032

Έτσι, εξετάστηκε η καταλληλότητα του προτεινόμενου μοντέλου των τριών διαστάσεων για ερμηνεία της μαθηματικής αναλογικής σκέψης, όπου οι διαστάσεις της μετα-αναλογικής ενημερότητας, του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και του αναλογικού συλλογισμού τοποθετήθηκαν ως δεύτερης τάξης παράγοντες. Οι πρώτης τάξης παράγοντες χρησιμοποιήθηκαν για να ερμηνεύσουν το διαφορετικό πλαίσιο και τρόπο παρουσίασής των έργων. Το μοντέλο αυτό παρουσιάστηκε να ταιριάζει καλύτερα με τα δεδομένα της έρευνας αφού οι δείκτες του κυμάνθηκαν στα επιθυμητά πλαίσια (CFI=0.95; $\frac{x^2}{df}$ = 1.96; RMSEA=0.032). Επομένως, το συγκεκριμένο μοντέλο (Διάγραμμα 18) μπορεί να θεωρηθεί κατάλληλο για να ερμηνεύσει τη μαθηματική αναλογική σκέψη.

Από το Διάγραμμα 18 φαίνεται ότι τα έργα των τριών δοκιμίων που χορηγήθηκαν, ομαδοποιούνται σε οκτώ παράγοντες πρώτης τάξης. Οι παράγοντες αυτοί διακρίνονται μεταξύ τους τόσο με βάση το είδος των έργων, το αν δηλαδή είναι αναλογικά ή μη αναλογικά, όσο και με βάση το πλαίσιο παρουσίασής τους.



Διάγραμμα 18. Το μοντέλο μαθηματικής αναλογικής σκέψης.

Ειδικότερα, οι τέσσερις πρώτοι παράγοντες πρώτης τάξης (F1-F4) συνίστανται από έργα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού, τα οποία στη συνέχεια σχηματίζουν και τον αντίστοιχο παράγοντα δεύτερης τάξης. Συγκεκριμένα, ο πρώτος παράγοντας πρώτης τάξης F1 αποτελείται από τις αναλογικές δηλώσεις του Δοκιμίου Ι, τις οποίες οι μαθητές έπρεπε να αναγνωρίσουν ανάμεσα σε άλλες μη αναλογικές και να διορθώσουν σε περίπτωση που δεν ήταν ορθές. Ο δεύτερος παράγοντας πρώτης τάξης (F2) δημιουργείται από τα άμεσα αναλογικά έργα στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες, ενώ ο παράγοντας F3 από τα αντίστοιχα έργα σύγκρισης. Τέλος, ο παράγοντας πρώτης τάξης F4, ο οποίος αναφέρεται στο σύνολο των έμμεσων αναλογικών έργων που αφορούν στο σχήμα του ορθογωνίου, συμπληρώνει το δεύτερης τάξης παράγοντα του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού. Πρέπει να σημειωθεί ότι στο μοντέλο αυτό δεν περιλήφθηκαν έργα κύκλου, λόγω του ότι το συγκεκριμένο σχήμα δεν αποτέλεσε αντικείμενο διδασκαλίας για τους μαθητές του δημοτικού σχολείου.

Σε σχέση με τον ευρύτερο παράγοντα του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού, ο παράγοντας F2 που αναφέρεται στα έργα σύγκρισης, παρουσίασε το χαμηλότερο δείκτη φόρτισης (0.37) κυρίως λόγω της απουσίας εξοικείωσης των μαθητών με έργα αυτής της μορφής. Οι υπόλοιποι παράγοντες είχαν ψηλότερους δείκτες φόρτισης ως προς τον παράγοντα του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού (F1(0.96), F2(0.78), F4(0.66)) αφού στην πλειοψηφία τους περιελάμβαναν έργα τα οποία δίνουν τις τρεις ποσότητες και ζητούν την τέταρτη και τα οποία ήταν πιο εύκολο να τα χειριστούν οι μαθητές.

Οι παράγοντες πρώτης τάξης F5 και F6 συνίστανται από τα μη αναλογικά έργα των δοκιμίων και δημιουργούν τον παράγοντα δεύτερης τάξης που αναφέρεται στη μετα-αναλογική ενημερότητα. Συγκεκριμένα, ο παράγοντας F5 αποτελείται από τα έμμεσα μη αναλογικά έργα του Δοκιμίου ΙΙ, τα οποία αναφέρονται σε ορθογώνιο σχήμα (δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη και σύγκρισης), ενώ ο παράγοντας F6 από τις μη αναλογικές δηλώσεις του Δοκιμίου Ι. Οι φορτίσεις των δύο παραγόντων F5 (0.62) και F6 (0.65) προς τον παράγοντα της μετα-αναλογικής ενημερότητας κυμαίνονται στα ίδια επίπεδα. Αυτό αποτελεί ένδειξη του ότι η ικανότητα διάκρισης του είδους μιας κατάστασης (αναλογική ή μη αναλογική) μπορεί να προβλέψει στον ίδιο βαθμό τη μετα-αναλογική ενημερότητα, όσο και η ικανότητα επίλυσής των καταστάσεων αυτών.

Τέλος, οι εναπομείναντες δύο παράγοντες πρώτης τάξης (F7 και F8) αποτελούνται από έργα αναλογικού συλλογισμού και συνθέτουν τον τελευταίο παράγοντα δεύτερης τάξης, που αντιστοιχεί στον αναλογικό συλλογισμό, με παρόμοιους μάλιστα δείκτες φόρτισης. Ο παράγοντας F8 αφορά στις αριθμητικές αναλογίες που σχετίζονται με την εύρεση ακέραιου και μη ακέραιου λόγου (m2-m6).

Ο παράγοντας F9 συνίσταται αποκλειστικά από τις λεκτικές αναλογίες που εμπίπτουν στην υποκατηγορία του συσχετισμού (v6, v7 και v9) και η οποία αναφέρεται στην εύρεση σχέσεων ανάμεσα σε δύο διακριτές αλλά σχετιζόμενες έννοιες. Σε αυτόν τον παράγοντα δεν περιλαμβάνεται καμία λεκτική αναλογία από την ομάδα της σημασιολογίας, η οποία σχετίζεται με ορισμούς λέξεων (Meagher, 2006). Σε αυτήν περιλαμβάνονταν τα επίθετα, τα οποία είναι μεν μια πολύ σημαντική ομάδα λέξεων, ειδικά για την κατανόηση των μαθηματικών σχέσεων, αλλά έχουν μια ιδιότυπη λειτουργία. Πολλές φορές ένα επίθετο δε χαρακτηρίζει απλώς ένα ουσιαστικό (π.χ. μαύρος λύκος), αλλά αποτελεί μέρος του ορισμού μιας λογικής σχέσης ή μιας μαθηματικής έννοιας (π.χ. παράλληλες ευθείες, κάθετες ευθείες, συμπληρωματικές γωνίες κτλ.) (Gagatsis, 1982). Παράλληλα, τα επίθετα συμπεριφέρονται πότε ως λέξεις με μικρή ποσότητα πληροφορίας και πότε ως λέξεις με μεγάλη ποσότητα πληροφορίας, ανάλογα με την εμπειρία των μαθητών (Finn, 1978). Το γεγονός αυτό καθιστά προβληματική τη συμπερίληψή τους στη διάσταση του αναλογικού συλλογισμού.

Οι τρεις παράγοντες δεύτερης τάξης, οι οποίοι αντιστοιχούν στις διαστάσεις του αναλογικού συλλογισμού, του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και της μετα-αναλογικής ενημερότητας, δημιουργούν τον ευρύτερο παράγοντα τρίτης τάξης που ταυτίζεται με τη μαθηματική αναλογική σκέψη. Ο παράγοντας της μετα-αναλογικής ενημερότητας έχει το χαμηλότερο δείκτη πρόβλεψης (0.53) της μαθηματικής αναλογικής σκέψης σε σχέση με τους άλλους δύο παράγοντες του αναλογικού (0.97) και του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού (0.87).

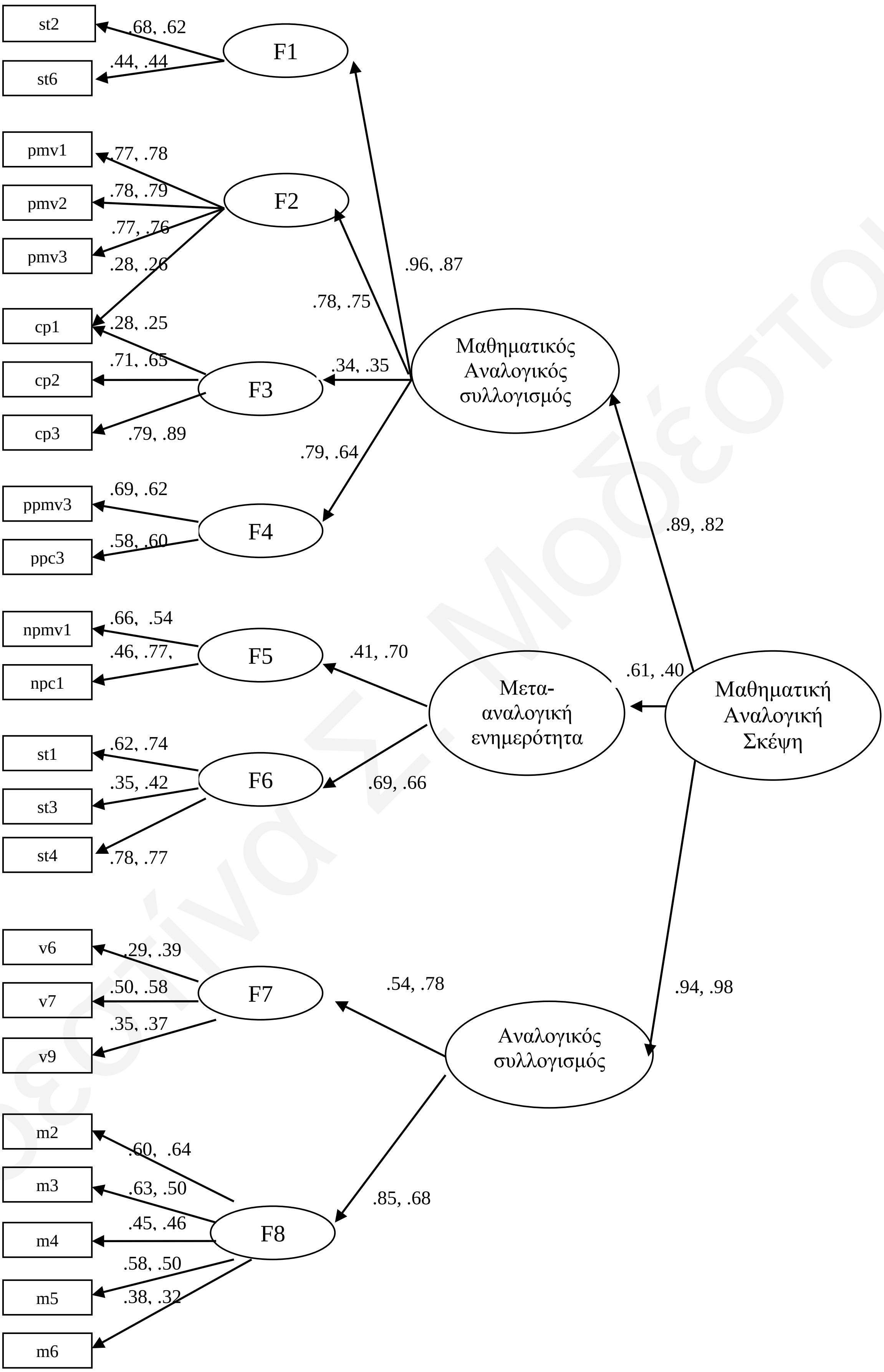
Το γεγονός αυτό καταδεικνύει ότι τα έργα μετα-αναλογικής ενημερότητας προϋποθέτουν την ενεργοποίηση διαφορετικών μηχανισμών για την επίλυσή τους, σε σχέση με τα έργα των άλλων δύο διαστάσεων, οι οποίοι δεν είναι αποκλειστικά γνωστικοί. Η θέση αυτή ενισχύεται ακόμη περισσότερο από τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών στα έργα των τριών διαστάσεων όπου στη Β’ Γυμνασίου, ενώ οι μαθητές φτάνουν στα ψηλότερα επίπεδα επιδόσεων στις διαστάσεις του αναλογικού και του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού, η επίδοσή τους στα έργα μετα-αναλογικής ενημερότητας παραμένει πολύ χαμηλή.

Διερευνώντας ακόμη περισσότερο την καταλληλότητα του συγκεκριμένου μοντέλου για ερμηνεία της μαθηματικής αναλογικής σκέψης ανάμεσα στις δύο ηλικιακές ομάδες του δημοτικού και του γυμνασίου (Πίνακας 23), φαίνεται ότι πιο πάνω μοντέλο είναι κατάλληλο τόσο για τους μαθητές γυμνασίου (CFI=0.95; $\frac{x^2}{df}$ =1.49; RMSEA=0.030) όσο και για τους μαθητές του δημοτικού (CFI=0.96; $\frac{x^2}{df}$ = 1.33; RMSEA=0.029). Το Διάγραμμα 19 παρουσιάζει τις φορτίσεις των παραγόντων στο μοντέλο μαθηματικής αναλογικής σκέψης για το δημοτικό και το γυμνάσιο. Στο μοντέλο αυτό μπορούν να εντοπιστούν μικρές διαφοροποιήσεις ανάμεσα στις δύο ηλικιακές ομάδες ως προς τις φορτίσεις των παραγόντων προς τους παράγοντες της αμέσως επόμενης τάξης. Οι διαφορές αυτές εντοπίζονται κυρίως στους παράγοντες της μετα-αναλογικής ενημερότητας και του αναλογικού συλλογισμού. Ειδικότερα στο μοντέλο που αφορά στο δημοτικό σχολείο, ο παράγοντας της μετα-αναλογικής ενημερότητας φαίνεται να ερμηνεύει μεγαλύτερο ποσοστό (61%) της διασποράς της μαθηματικής αναλογικής σκέψης σε σχέση με το αντίστοιχο μοντέλο για το γυμνάσιο (40%). Ταυτόχρονα, διαφορές ανάμεσα σε δημοτικό και γυμνάσιο παρατηρήθηκαν και σε δύο παράγοντες πρώτης τάξης που αναφέρονται στην επίλυση λεκτικών (F7) και αριθμητικών αναλογιών (F8). Συγκεκριμένα, η ικανότητα επίλυσης λεκτικών αναλογιών φαίνεται να ερμηνεύει μεγαλύτερο ποσοστό της διασποράς του παράγοντα του αναλογικού συλλογισμού στο γυμνάσιο (78%) παρά στο δημοτικό (54%). Αντίθετα, η ικανότητα επίλυσης αριθμητικών αναλογιών ερμηνεύει μεγαλύτερο ποσοστό της διασποράς του ίδιου παράγοντα στο δημοτικό σχολείο (85%) τώρα παρά στο γυμνάσιο (68%). Η ύπαρξη αυτών των διαφορών, μπορεί να ερμηνευθεί ως αποτέλεσμα των διαφορετικών εμπειριών των μαθητών αλλά και της γνωστικής τους ανάπτυξης.

Πινάκας 23

Δείκτες Επιβεβαιωτικής Ανάλυσης για το Μοντέλο Μαθηματικής Αναλογικής Σκέψης για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο

Μοντέλο	CFI	x^2	df	$\frac{x^2}{df}$	RMSEA
Σύνολο Μαθητών	0.950	424.352	217	1.96	0.032
Γυμνάσιο	0.954	322.558	217	1.49	0.030
Δημοτικό	0.956	288.889	217	1.33	0.029



Διάγραμμα 19. Το μοντέλο μαθηματικής αναλογικής σκέψης για το δημοτικό και το γυμνάσιο, αντίστοιχα.

Αποτελέσματα Συνεπαγωγικής Ανάλυσης

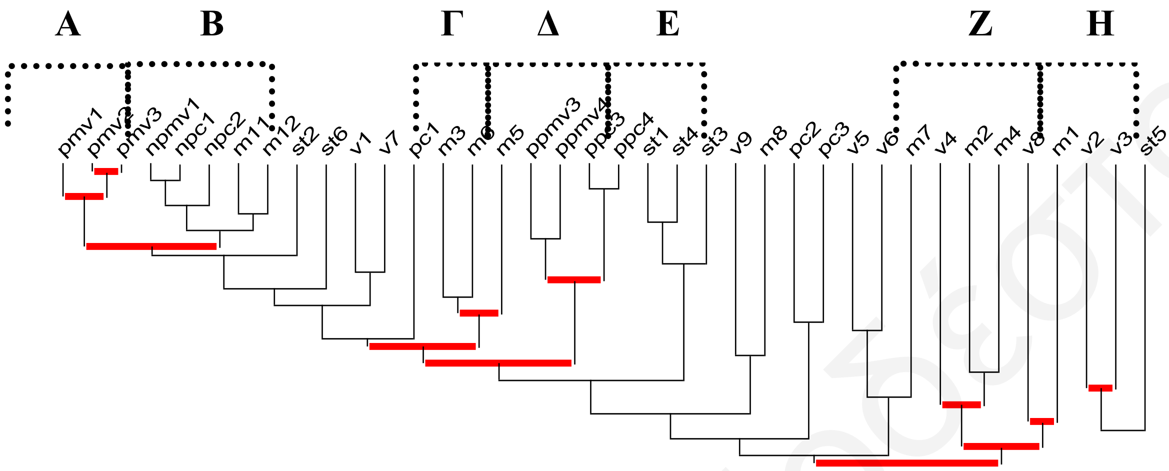
Η συνεπαγωγική ανάλυση εφαρμόστηκε στα έργα των δοκιμίων για να διερευνηθεί το πώς και από ποιους παράγοντες επηρεάζονται οι μεταξύ τους σχέσεις σε κάθε ηλικιακή ομάδα. Ταυτόχρονα, η παραγωγή διαγραμμάτων ομοιότητας και συνεπαγωγής είχε σκοπό να δώσει περισσότερες πληροφορίες ποιοτικής φύσης για τις σχέσεις που υπάρχουν ανάμεσα στα έργα, αλλά και ανάμεσα στις διαστάσεις του μοντέλου μαθηματικής αναλογικής σκέψης που προέκυψε.

Σχέσεις Ομοιότητας από την Επίλυση Όλων των Έργων των Δοκιμίων

Τα Διαγράμματα 20 και 21 παρουσιάζουν τις σχέσεις ομοιότητας ανάμεσα σε όλα τα έργα και των τριών δοκιμίων. Οι σχέσεις ομοιότητας προκύπτουν από τον τρόπο με τον οποίο συνολικά οι μαθητές δημοτικού και γυμνασίου αντιμετώπισαν τα έργα αυτά. Ο βαθμός των μαθητών στα μαθηματικά λειτούργησε ως συμπληρωματική μεταβλητή για να ερμηνεύσει τις σχέσεις ομοιότητας που προκύπτουν. Λόγω του μεγάλου αριθμού των έργων και του αυξημένου αριθμού σχέσεων που παρατηρούνται, τα έργα δε διακρίνονται σε ομάδες και υπο-ομάδες ομοιότητας. Αντίθετα, δίνεται ιδιαίτερη σημασία στα έργα που σχηματίζουν σημαντικούς κόμβους ομοιότητας, είτε αυτοί αποτελούν μέρος μιας ευρύτερης ομάδας έργων, είτε μιας μικρότερης.

Στο Δημοτικό σχολείο (Διάγραμμα 20), η ομαδοποίηση των έργων φαίνεται να γίνεται με βάση το τι εξετάζει το κάθε έργο, δηλαδή το αν εμπίπτει στη διάσταση του αναλογικού συλλογισμού, του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού ή της μετα-αναλογικής ενημερότητας, καθώς και με βάση το πλαίσιο παρουσίασης του συγκεκριμένου έργου. Από τις επτά σημαντικότερες ομάδες ομοιότητας που δημιουργούνται, οι ομάδες Α και Δ περιλαμβάνουν έργα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού, οι ομάδες Β και Ε έργα μετα-αναλογικής ενημερότητας, ενώ τα έργα των υπόλοιπων ομάδων Γ, Ζ και Η εμπίπτουν στη διάσταση του αναλογικού συλλογισμού.

Τα έργα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού διακρίνονται στις δύο ομάδες Α και Δ με βάση το πλαίσιο στο οποίο παρουσιάζονται. Ειδικότερα, η ομάδα Α περιλαμβάνει τα τρία άμεσα αναλογικά προβλήματα τα οποία περιλαμβάνονται στο Δοκίμιο Ι και στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη (pmv1, pmv2, pmv3). Ο στατιστικά σημαντικός δείκτης ομοιότητας της μονάδας (1) που χαρακτηρίζει το χειρισμό των τριών έργων από τους μαθητές του δημοτικού σχολείου υποδεικνύει ότι για τους μαθητές αυτούς τα έργα αντιμετωπίστηκαν ως ακριβώς όμοια, ανεξαρτήτως του αν ο λόγος ανάμεσα στους αριθμούς δεν ήταν ακέραιος (pmv2), ή λύνονταν με την εύρεση συναρτησιακού (pmv1) ή αριθμητικού τελεστή (pmv3).



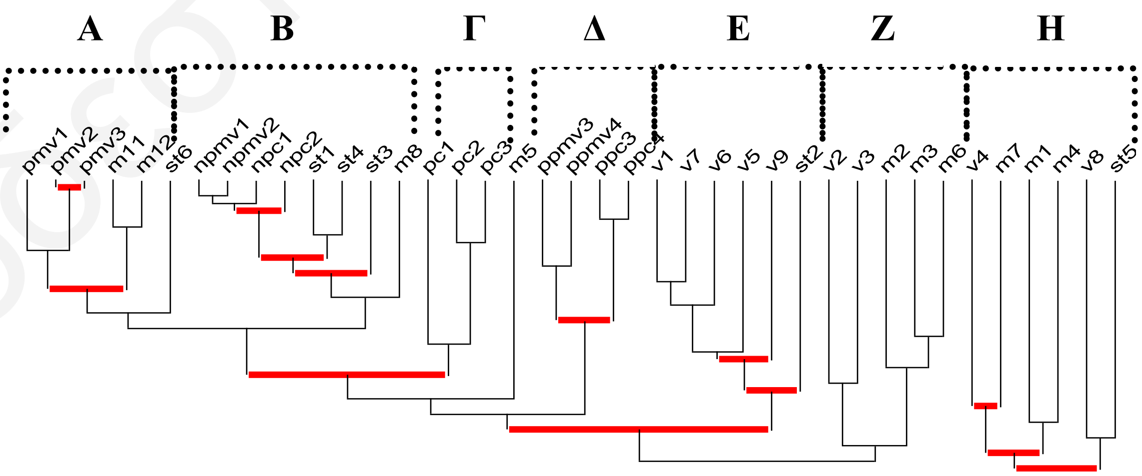
Διάγραμμα 20. Ομαδοποίηση των λύσεων όλων των έργων, όπως προέκυψαν από τους μαθητές Δημοτικού.

Η ομάδα Δ αποτελείται από τα αντίστοιχα έμμεσα αναλογικά έργα του Δοκιμίου ΙΙ, τα οποία αφορούν στην εύρεση της περιμέτρου ορθογώνιων και κυκλικών σχημάτων (ppmv3, ppmv4, ppc3, ppc4). Και σε αυτή την περίπτωση δημιουργείται ένας σημαντικός κόμβος ομοιότητας (0.9976) ανάμεσα στα έργα που υποδεικνύει ότι ο τρόπος παρουσίασης των έμμεσων αυτών έργων, είτε υπό μορφή σύγκρισης (ppc3, ppc4) είτε υπό μορφή τριών γνωστών ποσοτήτων και ζητούμενης της τέταρτης (ppmv3, ppmv4), δε διαφοροποίησε τη συμπεριφορά των μαθητών.

Τα έργα που εμπίπτουν στη διάσταση της μετα-αναλογικής ενημερότητας διακρίθηκαν και αυτά σε δύο ομάδες Β και Ε με βάση το πλαίσιο παρουσίασης των έργων. Συγκεκριμένα στην ομάδα Β περιλαμβάνονται τα έμμεσα μη αναλογικά έργα του Δοκιμίου ΙΙ (npc1, npc2, npmv1) καθώς και δύο έργα (m11, m12) που αν και περιλήφθηκαν στο Δοκίμιο ΙΙΙ για μέτρηση του αναλογικού συλλογισμού έχουν μεταγνωστικά χαρακτηριστικά, για αυτό και η θέση τους στη συγκεκριμένη ομάδα αιτιολογείται. Η ομάδα Ε αποτελείται από τις μη αναλογικές δηλώσεις του Δοκιμίου Ι (st1, st3 και st4), τις οποίες οι μαθητές πρέπει να διακρίνουν από τις υπόλοιπες αναλογικές.

Οι υπόλοιπες τρεις ομάδες Γ, Ζ και Η αποτελούνται από έργα αναλογικού συλλογισμού. Συγκεκριμένα, η ομάδα Γ συνίσταται από αποκλειστικά αριθμητικές αναλογίες (m3, m5, m6) εκ των οποίων οι δύο εμπλέκουν μη ακέραιο λόγο στην επίλυσή τους (m3, m6). Η ομοιότητα στο χειρισμό των έργων αυτών ενισχύεται από τη σημαντικότητα του κόμβου ως σύνολο (0.9857). Η ομάδα Η δημιουργείται από δύο λεκτικές αναλογίες (v2, v3), οι οποίες εμπίπτουν στη σημασιολογική κατηγορία, μαζί με τη μη αναλογική δήλωση st5. Οι δύο αυτές λεκτικές αναλογίες δημιουργούν ένα σημαντικό κόμβο ομοιότητας (0.8227). Στην ομάδα Ζ περιλαμβάνονται τόσο αριθμητικές όσο και λεκτικές αναλογίες σχηματίζοντας ένα σημαντικό κόμβο ομοιότητας που υποδεικνύει εν τέλει ότι οι αριθμητικές και οι λεκτικές αναλογίες αποτελούν δύο πλευρές του ίδιου νομίσματος. Τέλος, πρέπει να σημειωθεί ότι στο σχηματισμό όλων των ομάδων ομοιότητας, καθώς και των σημαντικών κόμβων συνεισφέρουν περισσότερο οι μαθητές με την υψηλότερη βαθμολογία στα Μαθηματικά.

Στο γυμνάσιο (Διάγραμμα 21), η ομαδοποίηση των έργων γίνεται πρώτιστα με βάση το είδος τους, το αν δηλαδή είναι αναλογικά, μη αναλογικά ή αν εμπίπτουν στη διάσταση του αναλογικού συλλογισμού. Το πλαίσιο παρουσίασης των έργων έχει δευτερεύοντα ρόλο, σε αντίθεση με το δημοτικό σχολείο (Διάγραμμα 20) και φαίνεται να επηρεάζει τους μαθητές στο χειρισμό μόνο των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού. Χαρακτηριστικό επίσης είναι το γεγονός ότι στην περίπτωση του γυμνασίου όλα τα έργα λαμβάνουν μέρος στο σχηματισμό διακριτών ομάδων. Συγκεκριμένα, δημιουργούνται επτά ομάδες ομοιότητας, εκ των οποίων οι τρεις περιλαμβάνουν έργα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού (Ομάδες Α, Γ και Δ), η μία έργα μετα-αναλογικής ενημερότητας (Ομάδα Β), και οι υπόλοιπες τρεις έργα αναλογικού συλλογισμού (Ομάδες Ε, Ζ και Η).



Διάγραμμα 21. Ομαδοποίηση των λύσεων όλων των έργων και των τριών δοκιμίων όπως προέκυψαν από τους μαθητές Γυμνασίου.

Όπως προαναφέρθηκε, τα έργα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού είναι τα μόνα που διακρίνονται στις τρεις ομάδες Α, Γ και Δ με βάση το πλαίσιο στο οποίο παρουσιάζονται. Η ομάδα Α, παραμένει αναλλοίωτη όπως και στην περίπτωση του δημοτικού σχολείου (Διάγραμμα 20) και περιλαμβάνει τα τρία άμεσα αναλογικά προβλήματα του Δοκιμίου Ι, στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη (pmv1, pmv2, pmv3). Η ομάδα αυτή συμπληρώνεται με δύο έργα αναλογικού συλλογισμού (m11, m12), τα οποία περιλαμβάνονται στο Δοκίμιο ΙΙΙ και έχουν τη μορφή αριθμητικών αναλογιών. Ανάμεσα στο έργο pmv2, όπου ο λόγος ανάμεσα στους αριθμούς δεν είναι ακέραιος, και στο έργο pmv3, το οποίο λύνεται με εύρεση αριθμητικού τελεστή, υπάρχει απόλυτη ταύτιση (δείκτης ομοιότητας=1) με τους μαθητές γυμνασίου να τα χειρίζονται, όπως και οι μαθητές δημοτικού με τον ίδιο ακριβώς τρόπο.

Η ομάδα Γ αποτελείται από τα αντίστοιχα άμεσα αναλογικά έργα σύγκρισης του Δοκιμίου Ι (pc1, pc2, pc3). Η τελευταία ομάδα έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού συνίσταται από τα έμμεσα αναλογικά έργα του Δοκιμίου ΙΙ, τα οποία αφορούν στην εύρεση της περιμέτρου ορθογώνιων και κυκλικών σχημάτων (ppmv3, ppmv4, ppc3, ppc4). Όπως και στην περίπτωση του δημοτικού σχολείου, και στο γυμνάσιο δημιουργείται ένας σημαντικός κόμβος ομοιότητας (0.9859) ανάμεσα στα τέσσερα έργα, υποδεικνύοντας ότι ο παράγοντας μάθηση δε διαφοροποίησε τη συμπεριφορά των μαθητών ως προς το χειρισμό των συγκεκριμένων έργων. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνεται και από τη μη ύπαρξη στατιστικής διαφοράς στους μέσους όρους επίδοσης των μαθητών στα συγκεκριμένα έργα από τάξη σε τάξη.

Τα έργα που εμπίπτουν στη διάσταση της μετα-αναλογικής ενημερότητας ομαδοποιούνται σε μια ενιαία ομάδα ομοιότητας (Ομάδα Β), η οποία περιλαμβάνει τόσο τα έμμεσα μη αναλογικά έργα του Δοκιμίου ΙΙ (npc1, npc2, npmv1, npmv2) όσο και τις μη αναλογικές δηλώσεις του Δοκιμίου Ι (st1, st3 και st4). Ο δείκτης ομοιότητας της μονάδας (1) που χαρακτηρίζει το χειρισμό των τεσσάρων έργων του Δοκιμίου ΙΙ, δείχνει ότι οι μαθητές γυμνασίου χειρίστηκαν τα έργα αυτά ανεξαρτήτως του αν αφορούσαν διαφορετικό σχήμα (κύκλο ή ορθογώνιο) και ανεξάρτητα από τον τρόπο παρουσίασής τους (σύγκρισης, δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη). Παράλληλα, ο σημαντικός κόμβος ομοιότητας (0.9987) που χαρακτηρίζει την ομάδα ως σύνολο, αποτελεί ένδειξη που ενισχύει τη συμπερίληψη των έργων αυτών κάτω από την ίδια διάσταση της μετα-αναλογικής ενημερότητας.

Οι υπόλοιπες τρεις ομάδες Ε, Ζ και Η αποτελούνται από έργα αναλογικού συλλογισμού. Η ομάδα Ε συνίσταται από τέσσερις λεκτικές αναλογίες (v1, v5, v6, v7, v9), οι οποίες εμπίπτουν στις κατηγορίες της σημασιολογίας (v1), της ταξινόμησης (v5, v6) και του συσχετισμού (v7, v9), σύμφωνα με το τεστ του Miller (Meagher, 2006). Το σύνολο των τεσσάρων αυτών λεκτικών αναλογιών δημιουργούν ένα σημαντικό κόμβο με δείκτη ομοιότητας 0.9562 . Η ομάδα Ε ολοκληρώνεται με την αναλογική δήλωση st2.

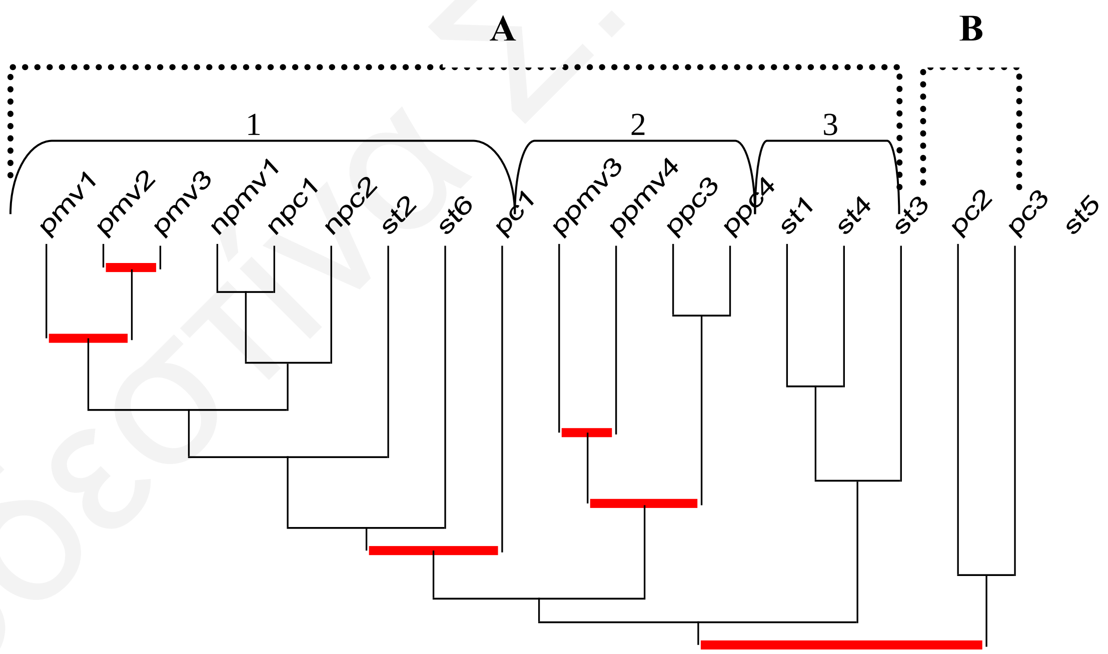
Κατά ανάλογο τρόπο, μια μη αναλογική δήλωση, η st5, συμμετέχει στη δημιουργία μιας άλλης ομάδας ομοιότητας με έργα αναλογικού συλλογισμού, της ομάδας Η. Στην ομάδα Η, όπως και στην ομάδα Ζ, περιλαμβάνονται τόσο αριθμητικές όσο και λεκτικές αναλογίες. Ειδικότερα, στην περίπτωση της ομάδας Η, όλα τα έργα σχηματίζουν ένα σημαντικό κόμβο ομοιότητας, δείχνοντας ότι οι μαθητές χειρίζονται με παρόμοιο τρόπο έργα αναλογικού συλλογισμού ανεξαρτήτως του αν παρουσιάζονται σε λεκτικό ή αριθμητικό πλαίσιο. Τέλος, όπως και στην περίπτωση του δημοτικού σχολείου, στο σχηματισμό των περισσοτέρων ομάδων ομοιότητας, καθώς και των σημαντικών κόμβων συνεισφέρουν οι μαθητές με την υψηλότερη βαθμολογία στα Μαθηματικά.

Γενικά, συγκρίνοντας τα Διαγράμματα Ομοιότητας 20 και 21 που προκύπτουν από το χειρισμό των έργων και των τριών δοκιμίων από τους μαθητές του δημοτικού και του γυμνασίου, αντίστοιχα, μπορεί να θεωρηθεί ότι η συμπεριφορά τους παραμένει αναλλοίωτη σε σχέση με τα έργα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού. Οι μαθητές ανεξαρτήτως ηλικίας επηρεάζονται από τον τρόπο παρουσίασης των έργων αυτών, με αποτέλεσμα να χειρίζονται με όμοιο τρόπο τα αναλογικά έργα που παρουσιάζονται στο ίδιο πλαίσιο. Αντίθετα, όσον αφορά στα έργα που εμπίπτουν στη διάσταση της μετα-αναλογικής ενημερότητας, ενώ οι μικρότεροι μαθητές επηρεάζονται από το πλαίσιο, διακρίνοντας τις καταστάσεις επίλυσης προβλήματος από τις δηλώσεις, οι μαθητές γυμνασίου αναγνωρίζουν ότι ανεξαρτήτως διατύπωσης, οι δύο καταστάσεις χαρακτηρίζονται από το ίδιο φαινόμενο.

Σχέσεις Ομοιότητας από την Επίλυση των Έργων Μαθηματικού Αναλογικού Συλλογισμού και Μετα-αναλογικής Ενημερότητας

Λόγω του μεγάλου αριθμού σχέσεων που παρατηρήθηκε στα Διαγράμματα 20 και 21, καθώς και της εμπλοκής διάφορων λεκτικών και αριθμητικών αναλογιών στις ομάδες ομοιότητας, θεωρήθηκε αναγκαία μια περαιτέρω ανάλυση των σχέσεων ανάμεσα στα έργα, η οποία να περιορίζεται στις δύο τελευταίες διαστάσεις. Τα Διαγράμματα 22-28 παρουσιάζουν τις σχέσεις ομοιότητας ανάμεσα στα έργα που αφορούν μόνο στις διαστάσεις του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και της μετα-αναλογικής ενημερότητας και οι οποίες προκύπτουν από τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές της τόσο της κάθε τάξης, όσο και συνολικά δημοτικού και γυμνασίου αντιμετώπισαν τα έργα αυτά. Ο βαθμός των μαθητών στα μαθηματικά μαζί με την επίδοσή τους στα έργα αναλογικού συλλογισμού λειτουργούν ως συμπληρωματικές μεταβλητές για να ερμηνεύσουν τις σχέσεις ομοιότητας που προέκυψαν. Παράλληλα, ως συμπληρωματικές μεταβλητές χρησιμοποιήθηκαν και όλες οι στρατηγικές επίλυσης των συγκεκριμένων έργων.

Στο Δημοτικό σχολείο (Διάγραμμα 22) οι απαντήσεις των μαθητών στα έργα των Δοκιμίων Ι και ΙΙ διακρίνονται σε δύο ομάδες ομοιότητας (Α και Β), που συνδέονται με σημαντικό κόμβο ομοιότητας (0.4615). Μόνο ο χειρισμός μιας μη αναλογικής δήλωσης με προσθετικά χαρακτηριστικά (st5) φαίνεται να μη μοιάζει με κανένα άλλο έργο των δύο δοκιμίων, με αποτέλεσμα να μη συνδέεται με καμία ομάδα ομοιότητας. Οι δύο ομάδες ομοιότητας διαφέρουν στο μέγεθος, με τη μεγαλύτερη από τις δύο (Ομάδα Α) να περιλαμβάνει όλα σχεδόν τα αναλογικά και μη αναλογικά έργα των δοκιμίων χωρισμένα σε τρεις ευρύτερες υποομάδες.



Διάγραμμα 22. Ομαδοποίηση των λύσεων των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας από τους μαθητές Δημοτικού.

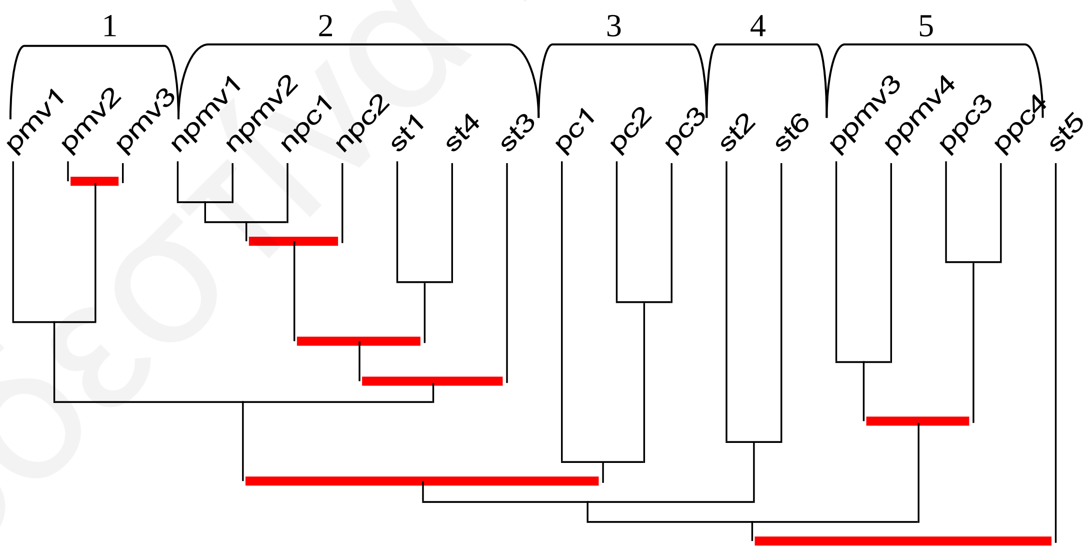
Το άλλο αντίστοιχο έργο σύγκρισης της ίδιας κατηγορίας (pc1) αποτελεί μέρος της πρώτης υποομάδας έργων της ομάδας ομοιότητας Α. Συγκεκριμένα, αυτή η υποομάδα συνίσταται από τις απαντήσεις των μαθητών του δημοτικού σχολείου στο σύνολο των άμεσων αναλογικών έργων στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη (pmv1, pmv2, pmv3), τις λύσεις στα μη αναλογικά έργα του Δοκιμίου ΙΙ (npc1, npc2, npmv1) και τις αναλογικές δηλώσεις του Δοκιμίου Ι (st2, st6). Πολύ ισχυρές φαίνεται να είναι οι σχέσεις ομοιότητας ανάμεσα στα έργα pmv1, pmv2 και pmv3, αφού ο στατιστικά σημαντικός δείκτης ομοιότητας 1 υποδεικνύει ότι υπάρχει απόλυτη ταύτιση στο χειρισμό τους από τους μαθητές του δημοτικού σχολείου, ανεξάρτητα από την ύπαρξη ακέραιου ή όχι λόγου ανάμεσα στις ποσότητες. Στη δημιουργία αυτής της ομάδας έχει συνεισφέρει περισσότερο η στρατηγική της αναγωγής στη μονάδα, η οποία φαίνεται να είναι αυτή που υποβοήθησε τους μαθητές του δημοτικού να επιλύσουν τα συγκεκριμένα προβλήματα. Αντίθετα, στην ομάδα των μη αναλογικών έργων (npc1, npc2, npmv1) συνεισφέρει περισσότερο η στρατηγική της εύρεσης του εμβαδού των σχημάτων και μετά εφαρμογή άμεσης αναλογίας.

Πολύ ισχυρές σχέσεις ομοιότητας παρατηρήθηκαν και στη δεύτερη υποομάδα έργων (Α2), η οποία σχηματίζεται από τις λύσεις των μαθητών στα έμμεσα αναλογικά έργα του Δοκιμίου ΙΙ (ppmv3, ppmv4, ppc3, ppc4) και τα οποία λειτούργησαν ως παρεμβολές στην επίλυση των μη αναλογικών έργων. Οι στατιστικά σημαντικές σχέσεις ομοιότητας αφορούν τόσο την ομάδα ως σύνολο (0.9967), όσο και αποσπασματικά (0.9996) και συγκεκριμένα τα έργα στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη (ppmv3, ppmv4). Ο σχηματισμός της ομάδας αυτής υποδεικνύει ότι οι λύσεις των μαθητών δεν επηρεάστηκαν από τον τρόπο διατύπωσης του προβλήματος, αλλά ούτε και από το γεγονός ότι τα προβλήματα αφορούσαν δύο διαφορετικά σχήματα, το τετράγωνο και τον κύκλο, για τα οποία δεν έχουν ανάλογες εμπειρίες από το σχολείο. Στο σχηματισμό της συγκεκριμένης ομάδας ομοιότητας συνείσφερε περισσότερο η εφαρμογή της στρατηγικής εύρεσης του αριθμητικού τελεστή ανάμεσα στο ίδιο μέτρο, η οποία φαίνεται να υποβοήθησε τους μαθητές ανεξαρτήτως της διατύπωσης των προβλημάτων.

Η τελευταία υποομάδα ομοιότητας (Α3), αποτελείται από τις λύσεις που έδωσαν οι μαθητές του δημοτικού σχολείου στην πλειοψηφία των μη αναλογικών δηλώσεων του Δοκιμίου Ι (st1, st3, st4), υποδεικνύοντας τον παρόμοιο χειρισμό τους. Στο σχηματισμό αυτής της σχέσης ομοιότητας για το δημοτικό σχολείο έχουν συνεισφέρει οι απαντήσεις των μαθητών με το ψηλότερο βαθμό στα μαθηματικά.

Στο γυμνάσιο (Διάγραμμα 23) οι απαντήσεις των μαθητών σε όλα τα έργα των Δοκιμίων Ι και ΙΙ ομαδοποιούνται σε μια ενιαία ομάδα ομοιότητας, που αν και χαρακτηρίζεται από χαμηλό δείκτη ομοιότητας (0.1383), δημιουργεί ένα σημαντικό κόμβο. Το μέγεθος του δείκτη ομοιότητας οφείλεται κυρίως στο χειρισμό της μη αναλογικής δήλωσης (st5), η οποία φαίνεται να διαφοροποιείται από τις άλλες μη αναλογικές δηλώσεις του Δοκιμίου Ι και να μη συμμετέχει στη δημιουργία της αντίστοιχης υποομάδας ομοιότητας.

Το σύνολο των έργων των δύο δοκιμίων ομαδοποιούνται σε πέντε υποομάδες ομοιότητας με πρώτιστο κριτήριο τον αναλογικό ή μη αναλογικό τους χαρακτήρα. Ειδικότερα, δημιουργούνται τέσσερις υποομάδες με αναλογικά έργα (υποομάδες 1, 3, 4 και 5) και μία υποομάδα με μη αναλογικά έργα (υποομάδα 2). Χαρακτηριστικό, της ομάδας των μη αναλογικών έργων (υποομάδα 2) είναι ότι σε αυτήν συγκεντρώνονται έμμεσα έργα σύγκρισης (npc1, npc2), έργα στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη (npmv1, npmv2), αλλά και όλες οι μη αναλογικές δηλώσεις του Δοκιμίου Ι (st1, st3, st4). Το γεγονός αυτό υποδεικνύει ότι οι μαθητές γυμνασίου απαντούν με παρόμοιο τρόπο σε όλα τα μη αναλογικά έργα που τους δίνονται, ανεξαρτήτως πλαισίου και τρόπου παρουσίασης. Η ομοιότητα αυτή είναι ισχυρή και σημαντική (δείκτης ομοιότητας=1) όχι μόνο στο σύνολο των έμμεσων έργων του Δοκιμίου ΙΙ (npc1, npc2, npmv1, npmv2), αλλά και στο σύνολο των μη αναλογικών έργων, συμπεριλαμβανομένων και των δηλώσεων του Δοκιμίου Ι (0.9987).



Διάγραμμα 23. Ομαδοποίηση των λύσεων των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας από τους μαθητές Γυμνασίου.

Η ομάδα των μη αναλογικών έργων συνδέεται με το σύνολο των άμεσων αναλογικών έργων του Δοκιμίου Ι στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη (pmv1, pmv2, pmv3). Σε αυτήν την υποομάδα ομοιότητας (1) πολύ ισχυρή είναι η σχέση ομοιότητας ανάμεσα στα έργα pmv2 και pmv3, αφού ο στατιστικά σημαντικός δείκτης ομοιότητας 1 υποδεικνύει ότι υπάρχει απόλυτη ταύτιση στο χειρισμό τους από τους μαθητές γυμνασίου.

Πρέπει να σημειωθεί ότι σε αντίθεση με τα μη αναλογικά έργα, στο σχηματισμό των ομάδων ομοιότητας των αναλογικών έργων σημαντικό παράγοντα διαδραμάτισε το πλαίσιο παρουσίασής τους. Όπως ήδη έχει αναφερθεί η πρώτη υποομάδα δημιουργήθηκε από τα άμεσα αναλογικά έργα του Δοκιμίου Ι στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη (pmv1, pmv2, pmv3). Η δεύτερη (υποομάδα 3) σχηματίστηκε από τις απαντήσεις των μαθητών στα αντίστοιχα αναλογικά έργα σύγκρισης του Δοκιμίου Ι (pc1, pc2, pc3) και η τρίτη (υποομάδα 4) από το χειρισμό των δύο αναλογικών δηλώσεων του ίδιου δοκιμίου (st2, st6).

Η τέταρτη υποομάδα (υποομάδα 5) δημιουργήθηκε από τις λύσεις των μαθητών στα έμμεσα αναλογικά έργα του Δοκιμίου ΙΙ (ppmv3, ppmv4, ppc3, ppc4). Στο σύνολό της η ομάδα αυτή έχει στατιστικά σημαντικό δείκτη ομοιότητας (0.9859) υποδεικνύοντας παρόμοιο χειρισμό των έργων από τους μαθητές, ανεξαρτήτως του τρόπου διατύπωσης των έργων και του γεωμετρικού σχήματος στο οποίο αναφέρονταν. Όπως και στο δημοτικό σχολείο, έτσι και στο γυμνάσιο, στο σχηματισμό της συγκεκριμένης ομάδας ομοιότητας έχει συνεισφέρει περισσότερο η εφαρμογή της στρατηγικής εύρεσης του αριθμητικού τελεστή ανάμεσα στο ίδιο μέτρο, η οποία φαίνεται να υποβοήθησε τους μαθητές να επιλύσουν όλα τα έμμεσα έργα.

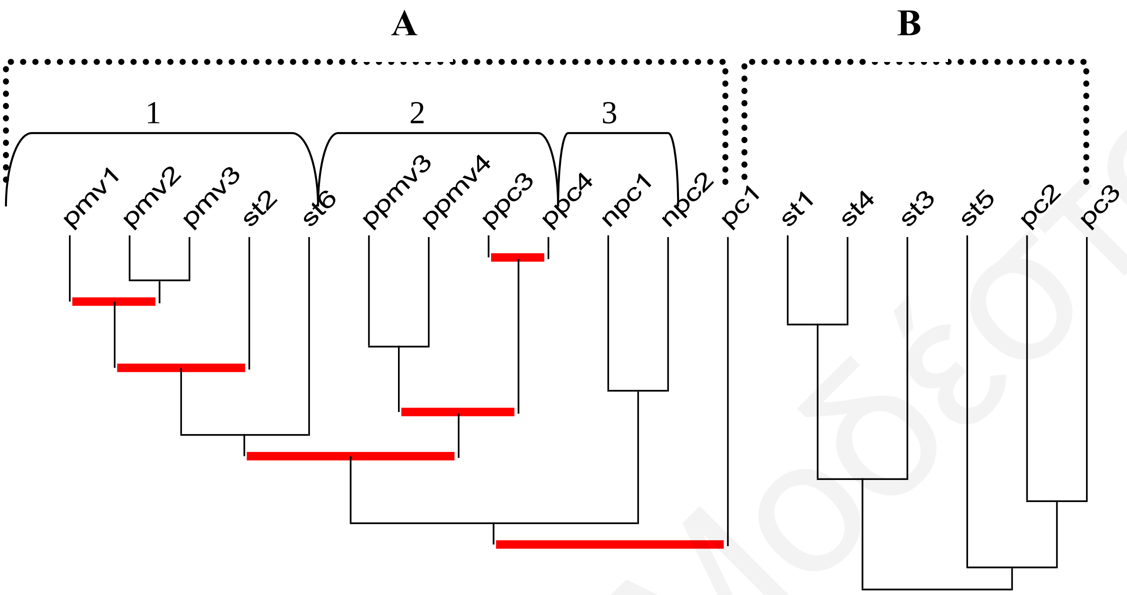
Αξίζει τέλος να σημειωθεί ότι στο σχηματισμό των υπολοίπων ομάδων ομοιότητας στο Γυμνάσιο έχουν συνεισφέρει περισσότερο οι απαντήσεις των μαθητών με το ψηλότερο βαθμό στα μαθηματικά. Εξαίρεση αποτέλεσαν μόνο οι σχέσεις ομοιότητας που δημιουργήθηκαν ανάμεσα στα μη αναλογικά έργα (npc1, npc2, npmv1, npmv2), πίσω από τις οποίες βρίσκεται ο χειρισμός του μαθηματικού αναλογικού έργου m8. Το έργο αυτό διαφέρει από τα υπόλοιπα έργα που περιλαμβάνονται στο Δοκίμιο ΙΙΙ, κάτω από τη διάσταση του αναλογικού συλλογισμού. Συγκεκριμένα, ενώ σε όλα τα υπόλοιπα έργα η σχέση που υπάρχει ανάμεσα στους δοσμένους όρους είναι αναλογική, στο έργο m8 η σχέση αυτή είναι κυβική και άρα μη αναλογική. Κατά συνέπεια, φαίνεται ότι οι μαθητές που κατάφεραν να λύσουν αυτό το μη αναλογικό έργο πιθανότατα να είχαν επιτυχία και στα μη αναλογικά έργα του Δοκιμίου ΙΙ.

Σύγκριση Δημοτικού-Γυμνασίου. Γενικά, συγκρίνοντας τα δύο διαγράμματα ομοιότητας (Διάγραμμα 22 και 23), τα οποία προέκυψαν από τις λύσεις των μαθητών του δημοτικού σχολείου και του γυμνασίου, αντίστοιχα, μπορεί να διαφανεί πρώτιστα ότι οι μαθητές γυμνασίου, σε αντίθεση με τους μικρότερους μαθητές, χειρίζονται όλα τα μη αναλογικά έργα που τους δίνονται με σχεδόν τον ίδιο τρόπο, ανεξαρτήτως πλαισίου, αν δηλαδή έχουν τη μορφή δήλωσης ή προβληματικής κατάστασης. Αντίθετα, όσον αφορά στα αναλογικά έργα, στο γυμνάσιο γίνεται μία διάκριση των υποομάδων των αναλογικών έργων ανάλογα με τον τρόπο που παρουσιάζονται στα δοκίμια, η οποία εμφανίζεται και στο δημοτικό σχολείο. Αναλλοίωτες και με στατιστικά σημαντικό δείκτη ομοιότητας, εμφανίζονται, τόσο στο δημοτικό σχολείο όσο και στο γυμνάσιο, οι υποομάδες που αφορούν στα έμμεσα αναλογικά έργα του Δοκιμίου ΙΙ (ppmv3, ppmv4, ppc3, ppc4) και τα άμεσα αναλογικά έργα του Δοκιμίου Ι στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη (pmv1, pmv2, pmv3). Παράλληλα, αναλλοίωτες, αλλά με διαφορετικές συνδέσεις μεταξύ τους, διατηρούνται οι ομάδες που αφορούν στα έμμεσα μη αναλογικά έργα (npc1, npc2, npmv1, npmv2), καθώς και τις δηλώσεις, αναλογικές (st2, st6) και μη (st1, st3, st4).

Η σχέση της δήλωσης st5 με τα υπόλοιπα έργα φαίνεται να διαφοροποιείται από το δημοτικό στο γυμνάσιο. Η συγκεκριμένη δήλωση είναι η μόνη μη αναλογική δήλωση της οποίας η διατύπωση είναι ορθή και για αυτό δεν πρέπει να διαφοροποιηθεί από τους μαθητές. Έτσι, ενώ στο δημοτικό σχολείο, το γεγονός αυτό δε φαίνεται να αναγνωρίζεται από τους μαθητές με αποτέλεσμα να μην ομαδοποιείται με κανένα έργο, στο γυμνάσιο περισσότεροι μαθητές αναγνωρίζουν τα μη αναλογικά χαρακτηριστικά της.

Τέλος, πρέπει να σημειωθεί ότι παρά το ότι οι περισσότερες ομάδες ομοιότητας παραμένουν αναλλοίωτες από το δημοτικό στο γυμνάσιο, διαφοροποιούνται οι παράγοντες οι οποίοι συνεισφέρουν στο σχηματισμό των ομάδων αυτών. Ειδικότερα, ενώ πίσω από το σχηματισμό της πλειοψηφίας των ομάδων ομοιότητας στο δημοτικό σχολείο βρίσκονται συγκεκριμένες στρατηγικές, στο γυμνάσιο φαίνεται να ευθύνεται η επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά.

Σχέσεις Ομοιότητας κατά τάξη. Στην Ε’ τάξη (Διάγραμμα 24) οι απαντήσεις των μαθητών στα έργα των Δοκιμίων Ι και ΙΙ διακρίνονται σε δύο ομάδες ομοιότητας που δε συνδέονται μεταξύ τους. Αυτή η απουσία σύνδεσης ανάμεσα στον τρόπο που απάντησαν οι μαθητές στα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας, υποδηλώνει ότι πιθανότατα οι μαθητές δεν αντιλήφθηκαν ότι ανεξαρτήτως του τρόπου παρουσίασής τους, τα έργα αφορούσαν στο ίδιο φαινόμενο.



Διάγραμμα 24. Ομαδοποίηση των λύσεων των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας από τους μαθητές της Ε’ Δημοτικού.

Η ομάδα ομοιότητας Β αποτελείται από τις λύσεις που έδωσαν οι μαθητές της Ε’ τάξης σε όλες τις μη αναλογικές δηλώσεις του Δοκιμίου Ι (st1, st3, st4, st5) υποδεικνύοντας τον παρόμοιο χειρισμό τους. Η ομάδα Β ολοκληρώνεται με τη συμπερίληψη των αναλογικών έργων σύγκρισης του ίδιου δοκιμίου (pc2, pc3), τα οποία συνδέονται με μια πολύ ασθενή σχέση ομοιότητας με τα υπόλοιπα έργα της ομάδας, ίσως λόγω του διαφορετικού τους είδους (αναλογικά) και τρόπου παρουσίασης.

Η ομάδα ομοιότητας Α αποτελείται από τρεις μικρότερες υποομάδες και είναι ισχυρότερη από την ομάδα Β με στατιστικά σημαντικές σχέσεις να υπάρχουν ανάμεσα στην επίλυση των έργων που περιλαμβάνει. Οι πρώτες δύο υποομάδες ομοιότητας αφορούν στην επίλυση αναλογικών έργων άμεσων και έμμεσων αντίστοιχα, ενώ η τρίτη υποομάδα αφορά στην επίλυση μη αναλογικών έργων σύγκρισης. Οι ομάδες ομοιότητας Α1 και Α2 που αφορούν στην επίλυση των αναλογικών έργων συνδέονται μεταξύ τους με στατιστικά σημαντική σχέση (0.9096), υποδηλώνοντας όμοιο τρόπο χειρισμού των αναλογικών έργων ανεξαρτήτως του τρόπου παρουσίασής τους.

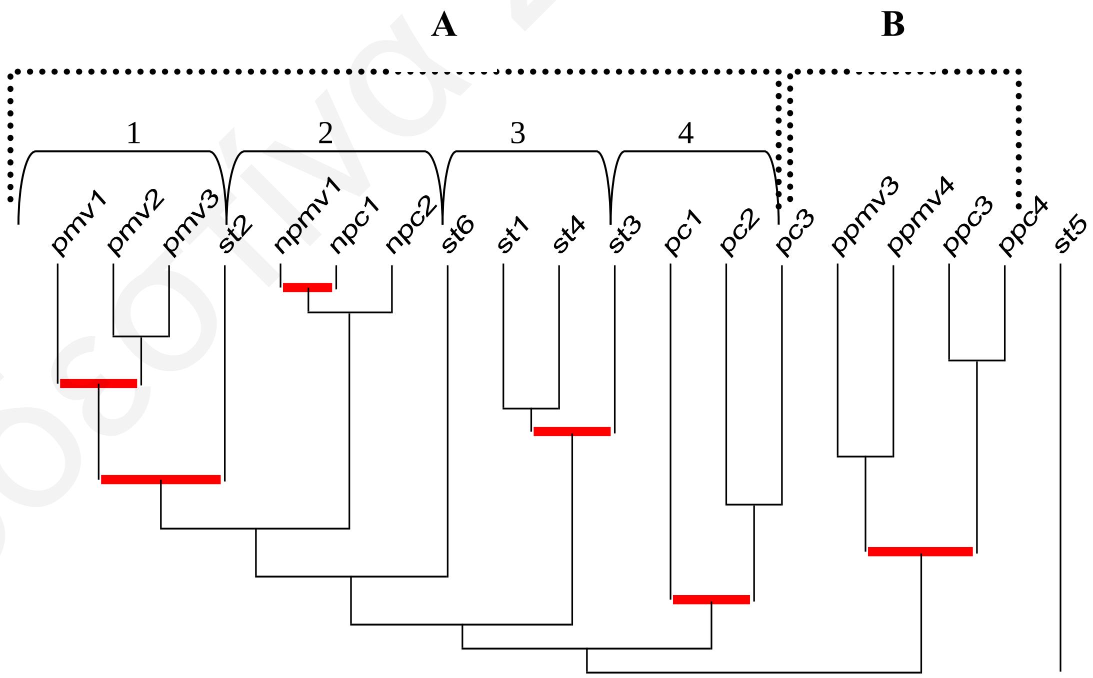
Συγκεκριμένα, από την πρώτη υποομάδα φαίνεται ότι οι μαθητές απάντησαν με εντελώς όμοιο τρόπο (0.9987) σε όλα τα έργα στα οποία δίνονταν οι τρεις ποσότητες και ζητούνταν η δεύτερη (pmv1, pmv2, pmv3), ανεξάρτητα με το αν ο λόγος ανάμεσα στις ποσότητες ήταν ακέραιος ή όχι. Αναγνωρίζοντας τα κοινά αναλογικά χαρακτηριστικά των δύο δηλώσεων του Δοκιμίου Ι (st2, st6) και μετατρέποντάς τις σε τέτοια μορφή έτσι ώστε να ζητείται η τέταρτη ποσότητα για να τις λύσουν, οι μαθητές χειρίστηκαν τις δηλώσεις αυτές ως ίδια έργα (0.9907) με τα υπόλοιπα της ομάδας.

Η δεύτερη υποομάδα σχηματίζεται από τις λύσεις των μαθητών στα αναλογικά έργα του Δοκιμίου ΙΙ (ppmv3, ppmv4, ppc3, ppc4), τα οποία λειτούργησαν και ως παρεμβολές στην επίλυση των μη αναλογικών έργων. Ο σχηματισμός της ομάδας αυτής υποδεικνύει ότι υπάρχει μια ισχυρή σχέση ομοιότητας (0.9731) στον τρόπο χειρισμού των έργων αυτών από τους μαθητές. Οι μαθητές δεν επηρεάστηκαν από τον τρόπο διατύπωσης του προβλήματος, το αν δηλαδή τα έργα είναι σύγκρισης ή δίνονται σε αυτά οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη και χρησιμοποίησαν σχεδόν όμοιο τρόπο απάντησης. Ούτε το γεγονός ότι δύο από τα έργα αφορούσαν στο σχήμα του κύκλου, το οποίο δε γνωρίζουν ιδιαίτερα οι μαθητές της Ε' τάξης, δε φαίνεται να τους επηρέασε στην επίλυση των έργων. Αντίθετα μάλιστα, η ύπαρξη του ψηλού δείκτη ομοιότητας (0.9999) ανάμεσα στα δύο έργα στα οποία δίνονταν οι τρεις ποσότητες και ζητούνταν η τέταρτη (ppc3, ppc4) και τα οποία αφορούσαν στα σχήματα του τετραγώνου και του κύκλου αντίστοιχα, υποδεικνύει ότι οι μαθητές τα χειρίστηκαν με πανομοιότυπο τρόπο ανεξαρτήτως σχήματος. Η τρίτη υποομάδα ομοιότητας Α3 δημιουργείται από τις απαντήσεις των μαθητών της Ε΄ τάξης σε έργα σύγκρισης που ως επί το πλείστον είναι μη αναλογικά.

Στο σχηματισμό των πιο πάνω ομάδων ομοιότητας έχουν συνεισφέρει διαφορετικές στρατηγικές, ανάλογα με το είδος των έργων. Ειδικότερα, στο σχηματισμό της υποομάδας ομοιότητας Α1, η οποία περιλαμβάνει τα άμεσα έργα στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη καθώς και τις δύο αναλογικές δηλώσεις (pmv1, pmv2, pmv3, st2, st6) συνεισφέρει περισσότερο η στρατηγική της αναγωγής στη μονάδα, η οποία εφαρμόστηκε από τους μαθητές ανεξαρτήτως των ποσοτήτων που εμπλέκονταν στα έργα. Η εφαρμογή της στρατηγικής του αριθμητικού τελεστή μέσα στο ίδιο μέτρο, συνεισφέρει περισσότερο στο σχηματισμό της ομάδας ομοιότητας των έμμεσων αναλογικών έργων (ppmv3, ppmv4, ppc3, ppc4), αφού φαίνεται να υποβοήθησε τους μαθητές να επιλύσουν τα έργα ανεξαρτήτως της διατύπωσης των προβλημάτων και του σχήματος στο οποίο αναφέρονταν.

Πίσω από τις ομάδες ομοιότητας που περιλαμβάνουν έργα σύγκρισης, αναλογικά και μη, βρίσκονται δύο στρατηγικές που δε συνδέονται με την ορθή επίλυση των έργων. Συγκεκριμένα, για την ομοιότητα στο χειρισμό των άμεσων αναλογικών έργων pc2 και pc3 ευθύνεται η εφαρμογή μιας διαισθητικής στρατηγικής που υποδεικνύει ότι για να υπάρχει αναλογία πρέπει όση ποσότητα έχει ο ένας τόση πρέπει να έχει και ο άλλος. Αντίστοιχα, για την ομοιότητα των μη αναλογικών έργων npc1 και npc2 ευθύνεται η χρησιμοποίηση της αναλογικής στρατηγικής του συναρτησιακού τελεστή, κάτι που υποδεικνύει την αδυναμία των μαθητών της Ε' τάξης για ορθή επίλυση των συγκεκριμένων έργων. Τέλος, πίσω από τη δημιουργία της ομάδας των μη αναλογικών δηλώσεων (st1, st3, st4, st5) βρίσκεται ο χειρισμός των λεκτικών αναλογικών έργων v1 και v5 που φαίνεται να προκάλεσε τις περισσότερες δυσκολίες στους μαθητές είτε λόγω απουσίας βασικού λεξιλογίου (σοβαρός: επιπόλαιος :: ήρεμος: ___), είτε λόγω της σύνθετης παρουσίασής τους (παιδιά: γονείς :: οικογένεια) :: (μαθητές: δάσκαλοι:: _).

Στην Στ' τάξη οι απαντήσεις των μαθητών στα έργα των Δοκιμίων Ι και ΙΙ σχηματίζουν δύο ευρύτερες ομάδες ομοιότητας, οι οποίες αντίθετα με την Ε' τάξη, συνδέονται μεταξύ τους (Διάγραμμα 25). Εξαίρεση αποτελεί ο χειρισμός μίας μη αναλογικής δήλωσης (st5), ο οποίος δε φαίνεται να σχετίζεται με κανένα από τα υπόλοιπα έργα. Το γεγονός αυτό υποδηλώνει ότι η έννοια της μαθηματικής αναλογικής σκέψης αρχίζει στην Στ' τάξη να απο-πλαισιώνεται από τον τρόπο παρουσίασής της και τα μεγέθη των ποσοτήτων.



Διάγραμμα 25. Ομαδοποίηση των λύσεων των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας από τους μαθητές της Στ' Δημοτικού.

Η μικρότερη ομάδα ομοιότητας Β σχηματίζεται από τις λύσεις των μαθητών στα έμμεσα αναλογικά έργα του Δοκιμίου ΙΙ (ppmv3, ppmv4, ppc3, ppc4). Ο σχηματισμός της ομάδας αυτής υποδεικνύει ότι υπάρχει μια ισχυρή σχέση ομοιότητας (0.9155) στον τρόπο χειρισμού των έργων από τους μαθητές, ανεξαρτήτως της διατύπωσης του προβλήματος.

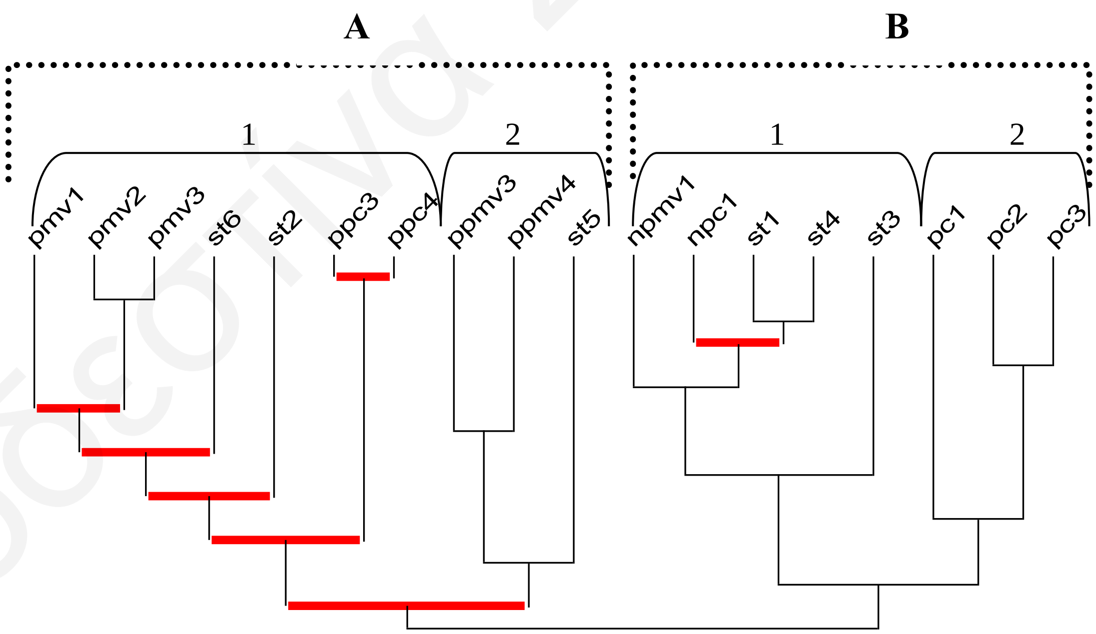
Η ομάδα ομοιότητας Α περιλαμβάνει όλες τις λύσεις των μαθητών στα έργα των Δοκιμίων Ι και ΙΙ εκτός των αναλογικών έργων του Δοκιμίου ΙΙ. Τα έργα αυτά σχηματίζουν τέσσερις μικρότερες υποομάδες ομοιότητας, οι οποίες βασίζονται είτε στο είδος του έργου (αναλογικό-μη αναλογικό) είτε στον τρόπο παρουσίασής του. Συγκεκριμένα, οι μαθητές απάντησαν με εντελώς όμοιο τρόπο (0.9998) σε όλα τα άμεσα αναλογικά έργα στα οποία δίνονταν οι τρεις ποσότητες και ζητούνταν η τέταρτη (pmv1, pmv2, pmv3). Ταυτόχρονα, υπερπηδώντας τον παράγοντα πλαίσιο οι μαθητές της Στ' τάξης αναγνώρισαν τον κοινό αναλογικό χαρακτήρα των έργων αυτών με την αναλογική δήλωση st2 και τη χειρίστηκαν με όμοιο τρόπο (0.9686), ολοκληρώνοντας έτσι την πρώτη υποομάδα ομοιότητας.

Η δεύτερη υποομάδα ομοιότητας σχηματίζεται από τις απαντήσεις των μαθητών στα μη αναλογικά έργα και είναι η ισχυρότερη από όλες τις άλλες ομάδες. Συγκεκριμένα, ο δείκτης ομοιότητας ανάμεσα στα έργα npc1 και npmv1 είναι η μονάδα (1), υποδηλώνοντας απόλυτη ταύτιση στο χειρισμό αυτών των έμμεσων μη αναλογικών έργων ανεξαρτήτως του αν είναι σύγκρισης ή έργα στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη. Η ομάδα αυτή ολοκληρώνεται με τη συμπερίληψη και του τελευταίου μη αναλογικού έργου του δοκιμίου (npc2) με το συνολικό δείκτη ομοιότητας να φτάνει στο 0.9999.

Στην τρίτη υποομάδα ομοιότητας διακρίνονται οι μη αναλογικές δηλώσεις του Δοκιμίου Ι (st1, st3, st4), με δείκτη ομοιότητας που αν και χαμηλότερος από τις προηγούμενες περιπτώσεις με μη αναλογικά έργα παραμένει πολύ υψηλός (0.994). Τέλος, η ευρύτερη ομάδα συμπληρώνεται με τα άμεσα αναλογικά έργα σύγκρισης του Δοκιμίου Ι (pc1, pc2, pc3) τα οποία σχηματίζουν την τέταρτη και τελευταία υποομάδα. Οι μαθητές της Στ' τάξης, αν και έλυσαν με παρόμοιο τρόπο (0.85) τα έργα αυτά ανεξάρτητα με το αν ο λόγος ανάμεσα στις ποσότητες είναι ακέραιος ή όχι, επηρεάστηκαν από τον τρόπο διατύπωσής τους αφού στο διάγραμμα δε συνδέονται άμεσα με άλλα αναλογικά έργα.

Στο σχηματισμό των πιο πάνω ομάδων ομοιότητας έχουν συνεισφέρει τέσσερις διαφορετικές στρατηγικές, ανάλογα με το είδος των έργων. Ειδικότερα, στο σχηματισμό της υποομάδας ομοιότητας Α1 (pmv1, pmv2, pmv3, st2) συνεισφέρει περισσότερο η στρατηγική της αναγωγής στη μονάδα, η οποία εφαρμόστηκε από τους μαθητές ανεξαρτήτως των ποσοτήτων που εμπλέκονταν στα έργα. Στην ομάδα Α2 με τα μη αναλογικά έργα συνεισφέρει περισσότερο η εφαρμογή της στρατηγικής της εύρεσης του εμβαδού των σχημάτων και μετά χρήση άμεσης αναλογίας. Η εφαρμογή της στρατηγικής του αριθμητικού τελεστή μέσα στο ίδιο μέτρο, συνεισφέρει περισσότερο στο σχηματισμό της ομάδας ομοιότητας των έμμεσων αναλογικών έργων (ppmv3, ppmv4, ppc3, ppc4), ενώ στην περίπτωση των άμεσων αναλογικών έργων σύγκρισης (pc1, pc2, pc3) συνεισφέρει περισσότερο η στρατηγική του συναρτησιακού τελεστή μέσα σε διαφορετικά μέτρα αλλά και η επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά.

Στην Α’ τάξη οι απαντήσεις των μαθητών στα έργα των Δοκιμίων Ι και ΙΙ σχηματίζουν δύο ισόρροπες ομάδες ομοιότητας, οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους (Διάγραμμα 26). Η πρώτη ομάδα (Ομάδα Α), η οποία είναι και η ισχυρότερη λόγω αριθμού στατιστικά σημαντικών σχέσεων, περιλαμβάνει τις λύσεις των μαθητών της Α’ τάξης στα αναλογικά έργα των Δοκιμίων Ι και ΙΙ. Η δεύτερη ομάδα (Ομάδα Β) χαρακτηρίζεται κυρίως από τη ύπαρξη των μη αναλογικών έργων και δηλώσεων, με εξαίρεση την παρουσία των αναλογικών έργων σύγκρισης του Δοκιμίου Ι. Κάθε μια από τις ομάδες αυτές αποτελείται από δύο μικρότερες υποομάδες έργων σύμφωνα με τις απαντήσεις των μαθητών.



Διάγραμμα 26. Ομαδοποίηση των λύσεων των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας από τους μαθητές της Α’ Γυμνασίου.

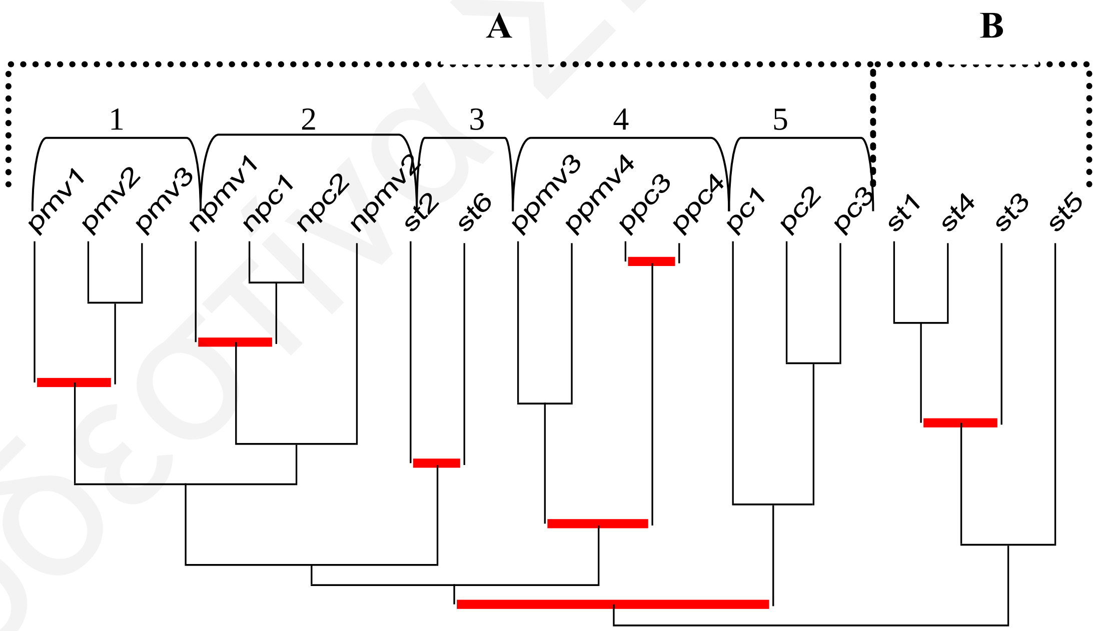
Ειδικότερα, στην ομάδα ομοιότητας Α, που αφορά στις λύσεις των μαθητών στα αναλογικά έργα, σχηματίζεται μια ευρύτερη υποομάδα (Α1) στην οποία εμπλέκονται αναλογικά πάντα έργα σε διαφορετικά πλαίσια. Συγκεκριμένα, η υποομάδα Α1 περιλαμβάνει τα άμεσα αναλογικά έργα στα οποία δίνονταν οι τρεις ποσότητες και ζητούνταν η δεύτερη (pmv1, pmv2, pmv3), τις αναλογικές δηλώσεις του Δοκιμίου Ι (st2, st6) και τα έμμεσα αναλογικά έργα σύγκρισης του Δοκιμίου ΙΙ (ppc3, ppc4). Το γεγονός αυτό υποδηλώνει ότι οι μαθητές της Α' τάξης δεν επηρεάστηκαν από τον τρόπο παρουσίασης της έννοιας της μαθηματικής αναλογικής σκέψης, αλλά αναγνώρισαν την ύπαρξή της μέσα σε διαφορετικά μαθηματικά πλαίσια.

Μέσα σε αυτή την υποομάδα οι ισχυρότερες και στατιστικά σημαντικές σχέσεις ομοιότητας εντοπίζονται ανάμεσα στα έμμεσα αναλογικά έργα σύγκρισης του Δοκιμίου ΙΙ (ppc3, ppc4), με το δείκτη ομοιότητας 0.9999 να δείχνει ίδιο τρόπο χειρισμού ανεξαρτήτως σχήματος (τετραγώνου-κύκλου). Ανάλογα, σημαντικές σχέσεις παρατηρήθηκαν ανάμεσα στα άμεσα αναλογικά έργα στα οποία δίνονταν οι τρεις ποσότητες και ζητούνταν η δεύτερη (pmv1, pmv2, pmv3), με δείκτη ομοιότητας 0.984, στις δηλώσεις (0.8959) και στην υποομάδα ως σύνολο (0.8304). Στην δεύτερη υποομάδα Α2 ομαδοποιούνται τα έμμεσα αναλογικά έργα του Δοκιμίου ΙΙ (ppmv3, ppmv4) μαζί με μια μη αναλογική δήλωση (st5) με προσθετικά χαρακτηριστικά.

Η ομάδα ομοιότητας Β δημιουργείται όπως και η πρώτη από δύο μικρότερες υποομάδες. Η πρώτη υποομάδα (Β1) συνίσταται από τις απαντήσεις που έδωσαν οι μαθητές της Α' γυμνασίου στα μη αναλογικά έργα (npc1, npmv1) του Δοκιμίου ΙΙ και στις αντίστοιχες μη αναλογικές δηλώσεις (st1, st3, st4) του Δοκιμίου Ι. Το γεγονός αυτό δείχνει ότι οι μαθητές πιθανότατα άρχισαν να αναγνωρίζουν τον κοινό μη αναλογικό χαρακτήρα των έργων. Ενισχυτικό της παρατήρησης αυτής είναι το ότι η ομοιότητα ανάμεσα στις δηλώσεις και στα έργα είναι πολύ ισχυρή (0.9996) και στατιστικά σημαντική. Η δεύτερη υποομάδα Β2 αποτελείται από τις λύσεις που έδωσαν οι μαθητές στα άμεσα αναλογικά έργα σύγκρισης (pc1, pc2, pc3) του Δοκιμίου Ι, η οποία αν και παραμένει αναλλοίωτη σε σχέση με την Στ' τάξη, δεν έχει τα ίδια επίπεδα σημαντικότητας.

Στο σχηματισμό των πιο πάνω ομάδων ομοιότητας συνεισφέρουν τρεις διαφορετικές στρατηγικές, η εφαρμογή των οποίων φαίνεται να υποβοήθησε τους μαθητές να επιλύσουν έργα με κοινά χαρακτηριστικά. Στη δημιουργία της ομάδας Β1, η οποία περιλαμβάνει τα μη αναλογικά έργα, συνεισφέρει περισσότερο η εφαρμογή της στρατηγικής της εύρεσης του εμβαδού των σχημάτων και στη συνέχεια χρήση άμεσης αναλογίας. Αντίστοιχα, στα άμεσα έργα στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη (pmv1, pmv2, pmv3), φαίνεται να είναι πιο υποβοηθητική η στρατηγική της αναγωγής στη μονάδα. Τέλος, χαρακτηριστική του σχηματισμού των ομάδων των έμμεσων αναλογικών έργων (ppmv3, ppmv4, ppc3, ppc4), όσο και των άμεσων αναλογικών έργων σύγκρισης (pc1, pc2, pc3) είναι η εφαρμογή της στρατηγικής του αριθμητικού τελεστή μέσα στο ίδιο μέτρο.

Στην Β' τάξη (Διάγραμμα 27) οι απαντήσεις των μαθητών στα έργα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας σχηματίζουν δύο ευρύτερες ομάδες ομοιότητας, οι οποίες όπως στις περιπτώσεις των τάξεων Στ' και Α' συνδέονται μεταξύ τους. Η ομάδα ομοιότητας Β σχηματίζεται από τις λύσεις των μαθητών σε όλες τις μη αναλογικές δηλώσεις του Δοκιμίου Ι (st1, st3, st4, st5), σε αντίθεση με τις προηγούμενες τάξεις, υποδεικνύοντας ότι οι μαθητές πιθανόν να ξεκίνησαν να αναγνωρίζουν τα κοινά μη αναλογικά στοιχεία των δηλώσεων αυτών, ανεξάρτητα από το αν είναι προσθετικές (st5), σταθερές (st3) ή δε βασίζονται στη λογική (st1, st4). Ειδικότερα, όσον αφορά στις τρεις πρώτες δηλώσεις της ομάδας (st1, st3, st4), οι μαθητές φαίνεται να τις χειρίζονται με πανομοιότυπο τρόπο αφού η σχέση μεταξύ τους εκτός από ισχυρή (0.9632) είναι και στατιστικά σημαντική.



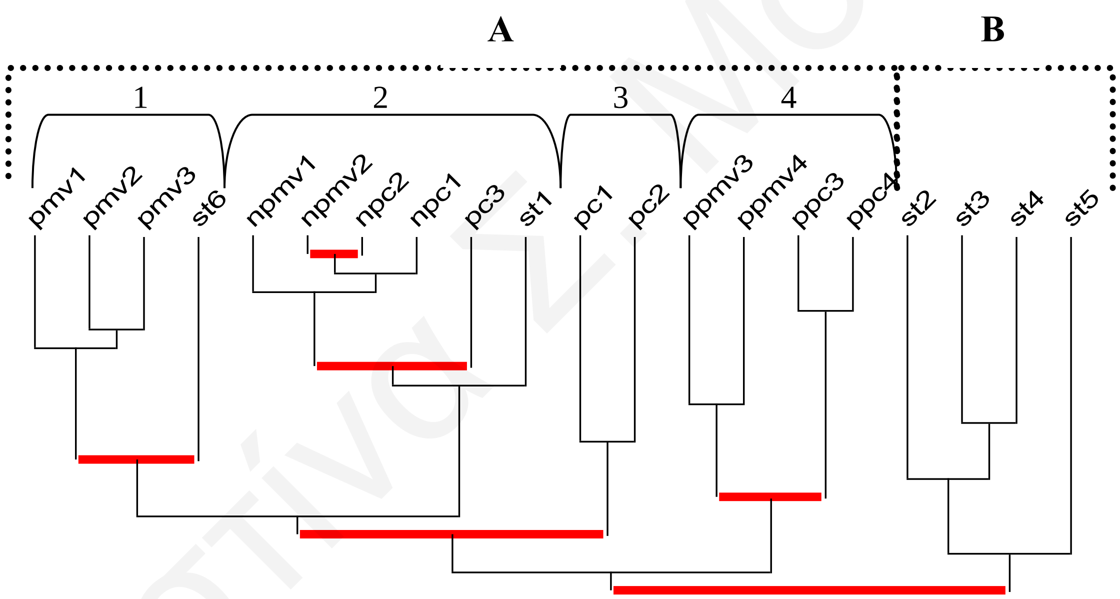
Διάγραμμα 27. Ομαδοποίηση των λύσεων των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας από τους μαθητές της Β' Γυμνασίου.

Η ομάδα ομοιότητας Α, η οποία είναι και η μεγαλύτερη, περιλαμβάνει όλες τις λύσεις των μαθητών στα έργα των Δοκιμίων Ι και ΙΙ εκτός των μη αναλογικών δηλώσεων του Δοκιμίου Ι. Τα έργα αυτά σχηματίζουν πέντε μικρότερες υποομάδες ομοιότητας, οι οποίες βασίζονται είτε στο είδος του έργου (αναλογικό-μη αναλογικό), είτε στον τρόπο παρουσίασής του. Συγκεκριμένα, οι τέσσερις υποομάδες αφορούν αναλογικά έργα και μόνο η μία μη αναλογικά έργα. Στην ομάδα με τα μη αναλογικά έργα εμπλέκονται τόσο έργα σύγκρισης (npc1, npc2), όσο και τα έργα στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη (npmv1, npmv2), υποδεικνύοντας παρόμοιο χειρισμό τους (0.9960) ανεξαρτήτως λεκτικής διατύπωσης.

Παρόμοια φαίνεται να είναι η συμπεριφορά των μαθητών στα έμμεσα αναλογικά έργα του ίδιου δοκιμίου (ppmv3, ppmv4, ppc3, ppc4) με τους μαθητές να χειρίζονται σχεδόν με απόλυτα ίδιο τρόπο τα έργα σύγκρισης (0.998) ενώ χαμηλότερη αλλά στατιστικά σημαντική ομοιότητα υπάρχει και στο χειρισμό του συνόλου των έργων (0.7470). Ο τρόπος χειρισμού των άμεσων αναλογικών έργων του Δοκιμίου Ι, φαίνεται να διαφοροποιείται σε σχέση με τα έμμεσα, αφού στην περίπτωση αυτή σχηματίζονται δύο διακριτές υποομάδες ανάλογα με το αν τα έργα είναι σύγκρισης ή αν δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη. Οι μαθητές απαντούν με παρόμοιο τρόπο (0.9776) σε όλα τα άμεσα αναλογικά έργα του Δοκιμίου Ι στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η δεύτερη (pmv1, pmv2, pmv3) συνιστώντας έτσι μια δική τους υποομάδα ομοιότητας. Μια άλλη υποομάδα ομοιότητας σχηματίζεται από τις απαντήσεις των μαθητών στα άμεσα αναλογικά έργα σύγκρισης του Δοκιμίου Ι. Αντίστοιχα οι αναλογικές δηλώσεις του Δοκιμίου Ι (st2, st6) σχηματίζουν και αυτές μια διακριτή υποομάδα με στατιστικά σημαντικό δείκτη ομοιότητας (0.8930).

Όσον αφορά στους παράγοντες που συμβάλουν στη δημιουργία των ομάδων ομοιότητας, στην περίπτωση της Β’ τάξης φαίνεται να εμπλέκεται μια πληθώρα στρατηγικών. Συγκεκριμένα, για πρώτη φορά συνεισφέρει στο σχηματισμό κάποιας ομάδας ομοιότητας η στρατηγική του εσωτερικού γινομένου. Η συμβολή της στρατηγικής αυτής αφορά στη δημιουργία της υποομάδας ομοιότητας Α1 των άμεσων αναλογικών έργων στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη (pmv1, pmv2, pmv3), και την ομάδα Α4 των έμμεσων αναλογικών έργων (ppmv3, ppmv4, ppc3, ppc4). Στη δημιουργία της ομάδας αυτής συνεισφέρει και η στρατηγική του αριθμητικού τελεστή μέσα στο ίδιο μέτρο. Η εφαρμογή της στρατηγικής του συναρτησιακού τελεστή μέσα σε διαφορετικά μέτρα είναι υπεύθυνη για το σχηματισμό της ομάδας ομοιότητας των άμεσων αναλογικών έργων σύγκρισης (pc1, pc2, pc3). Στο σχηματισμό της ομάδας Α2 των μη αναλογικών έργων (npc1, npc2, npmv1, npmv2) συνεισφέρει περισσότερο η στρατηγική της εύρεσης του εμβαδού των σχημάτων και μετά εφαρμογής άμεσης αναλογίας. Οι απαντήσεις των μαθητών με την ψηλότερη επίδοση στα μαθηματικά συνεισφέρουν στη δημιουργία της υποομάδας με τις αναλογικές δηλώσεις (st2, st6).

Στην Γ' τάξη οι απαντήσεις των μαθητών στα έργα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας σχηματίζουν δύο ομάδες ομοιότητας, οι οποίες και συνδέονται μεταξύ τους (Διάγραμμα 28). Η μικρότερη ομάδα ομοιότητας από τις δύο σχηματίζεται από τις λύσεις των μαθητών στις μη αναλογικές δηλώσεις του Δοκιμίου Ι (st3, st4, st5) εκτός της st1, η οποία για πρώτη φορά ομαδοποιείται με μια αναλογική δήλωση (st2). Η δεύτερη και μεγαλύτερη ομάδα ομοιότητας σχηματίζεται από τις απαντήσεις των μαθητών στα έργα των Δοκιμίων Ι και ΙΙ, εκτός των τεσσάρων τελευταίων δηλώσεων του Δοκιμίου Ι. Τα έργα αυτά σχηματίζουν τέσσερις μικρότερες υποομάδες ομοιότητας, οι οποίες βασίζονται είτε στο είδος του έργου είτε στον τρόπο παρουσίασής του.



Διάγραμμα 28. Ομαδοποίηση των λύσεων των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας από τους μαθητές της Γ' Γυμνασίου.

Οι τρεις υποομάδες αφορούν αποκλειστικά αναλογικά έργα, ενώ στην άλλη υποομάδα εμπλέκονται ως επί το πλείστον μη αναλογικά έργα. Στην ομάδα με τα μη αναλογικά έργα περιλαμβάνονται τόσο έργα σύγκρισης (npc1, npc2), όσο και τα έργα στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη (npmv1, npmv2). Ειδικότερα, ο δείκτης ομοιότητας ανάμεσα στα έργα npc2 και npmv2, τα οποία αφορούν στο σχήμα του κύκλου, είναι η μονάδα (1), υποδεικνύοντας απόλυτη ταύτιση στο χειρισμό τους από τους μαθητές της Γ' τάξης ανεξαρτήτως της λεκτικής διατύπωσης των έργων.

Όσον αφορά στο σχηματισμό των υποομάδων με τα αναλογικά έργα, η συμπεριφορά των μαθητών της Γ’ τάξης παρουσιάζει διαφοροποιήσεις ανάλογες με την περίπτωση της Β’ τάξης. Συγκεκριμένα, οι μαθητές φαίνεται να χειρίζονται με παρόμοιο τρόπο (0.7798) τα έργα σύγκρισης και τα έργα στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη, στην περίπτωση των έμμεσων αναλογικών έργων του Δοκιμίου ΙΙ (ppmv3, ppmv4, ppc3, ppc4). Αντίθετα, στην περίπτωση των άμεσων αναλογικών έργων σχηματίζονται δύο διακριτές υποομάδες. Οι μαθητές απαντούν με παρόμοιο τρόπο (0.8505) σε όλα τα άμεσα αναλογικά έργα του Δοκιμίου Ι στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η δεύτερη (pmv1, pmv2, pmv3), δημιουργώντας μαζί με την αναλογική δήλωση st6 μια δική τους υποομάδα ομοιότητας. Η άλλη υποομάδα ομοιότητας σχηματίζεται από τις απαντήσεις των μαθητών στα άμεσα αναλογικά έργα σύγκρισης του Δοκιμίου Ι (pc1, pc2).

Στο σχηματισμό, των περισσότερων σχέσεων ομοιότητας, όπως και στην περίπτωση των περισσοτέρων τάξεων, συνεισφέρουν κάποιες στρατηγικές, οι οποίες αποδεικνύονται υποβοηθητικές για την επίλυση συγκεκριμένων έργων. Η στρατηγική του εσωτερικού γινομένου, όπως και στη Β’ τάξη συμβάλλει στο σχηματισμό της ομάδας των άμεσων αναλογικών έργων στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη (pmv1, pmv2, pmv3), καθώς και στην ομάδα των έμμεσων αναλογικών έργων (ppmv3, ppmv4, ppc3, ppc4). Στη δημιουργία της τελευταίας συνεισφέρει και η στρατηγική του αριθμητικού τελεστή μέσα στο ίδιο μέτρο. Η εφαρμογή της στρατηγικής του συναρτησιακού τελεστή μέσα σε διαφορετικά μέτρα είναι υπεύθυνη για το σχηματισμό της ομάδας ομοιότητας των άμεσων αναλογικών έργων σύγκρισης (pc1, pc2). Στο σχηματισμό της ομάδας των μη αναλογικών έργων (npc1, npc2, npmv1, npmv2) συνεισφέρουν για πρώτη φορά δύο στρατηγικές: Η εφαρμογή του γενικού κανόνα (π.χ. το εμβαδόν τετραπλασιάζεται όταν η πλευρά διπλασιάζεται), καθώς και η εύρεση του εμβαδού των σχημάτων και στη συνέχεια η εφαρμογή άμεσης αναλογίας.

Σύγκριση αποτελεσμάτων κατά τάξη. Στα Διαγράμματα 24 μέχρι 28 εντοπίστηκαν οι σχέσεις ομοιότητας ανάμεσα στα έργα των Δοκιμίων Ι και ΙΙ, τα οποία εμπίπτουν στις διαστάσεις του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και της μετα-αναλογικής ενημερότητας, όπως αυτές προκύπτουν από τους μαθητές των πέντε τάξεων του δείγματος. Ως προς το σχηματισμό τους, το διάγραμμα της Ε’ τάξης διαφέρει σημαντικά από τα διαγράμματα των υπολοίπων τάξεων, καθώς τα έργα δημιουργούν δύο διακριτές ομάδες ομοιότητας. Οι μη αναλογικές δηλώσεις μαζί με τα άμεσα έργα σύγκρισης διαφοροποιούνται από τα υπόλοιπα έργα, υποδεικνύοντας ότι η συμπεριφορά των μικρότερων μαθητών επηρεάζεται από τον τρόπο παρουσίασης των έργων. Το φαινόμενο αυτό μπορεί να θεωρηθεί ότι εμφανίζεται σε πολύ μικρό βαθμό και στη Στ' Δημοτικού, αφού μία μη αναλογική δήλωση συνεχίζει να σχηματίζει μια διακριτή ομάδα ομοιότητας.

Ως προς το σχηματισμό των ειδικότερων ομάδων ομοιότητας, οι περισσότερες από αυτές παραμένουν αναλλοίωτες από την Ε' Δημοτικού μέχρι τη Γ' Γυμνασίου, αν και διαφοροποιούνται οι μεταξύ τους οι σχέσεις, καθώς και οι παράγοντες οι οποίοι ευθύνονται για το σχηματισμό αυτό. Αναλλοίωτες, εμφανίζονται σε όλες τις τάξεις οι ομάδες που αφορούν στα άμεσα αναλογικά έργα του Δοκιμίου Ι στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη (pmv1, pmv2, pmv3), καθώς και τα έμμεσα αναλογικά έργα του Δοκιμίου ΙΙ (ppmv3, ppmv4, ppc3, ppc4). Ειδικότερα, στο σχηματισμό τους συνεισφέρουν περισσότερο η στρατηγική της αναγωγής στη μονάδα και της εύρεσης του αριθμητικού τελεστή στην Ε' και ΣΤ' Δημοτικού και Α' Γυμνασίου, αντίστοιχα, ενώ στις δύο τελευταίες τάξεις του γυμνασίου υπεύθυνη για το σχηματισμό και των δύο ομάδων ομοιότητας είναι η στρατηγική του εσωτερικού γινομένου.

Αναλλοίωτη παρουσιάζεται και η ομάδα των άμεσων αναλογικών έργων σύγκρισης (pc1, pc2, pc3), για το σχηματισμό της οποίας όμως ευθύνονται διαφορετικοί παράγοντες. Συγκεκριμένα, η ομοιότητα στο χειρισμό των πιο πάνω έργων στην Ε' Δημοτικού έγκειται στην εφαρμογή μιας διαισθητικής στρατηγικής, σύμφωνα με την οποία δύο ποσά είναι ανάλογα όταν περιλαμβάνουν ακριβώς τις ίδιες ποσότητες. Στη Στ' Δημοτικού συνεισφέρει περισσότερο στο σχηματισμό της συγκεκριμένης ομάδας ομοιότητας η επίδοση των μαθητών, ενώ και στις τρεις τάξεις του γυμνασίου πίσω από αυτή την ομοιότητα βρίσκεται η εφαρμογή του συναρτησιακού τελεστή ανάμεσα στις ποσότητες.

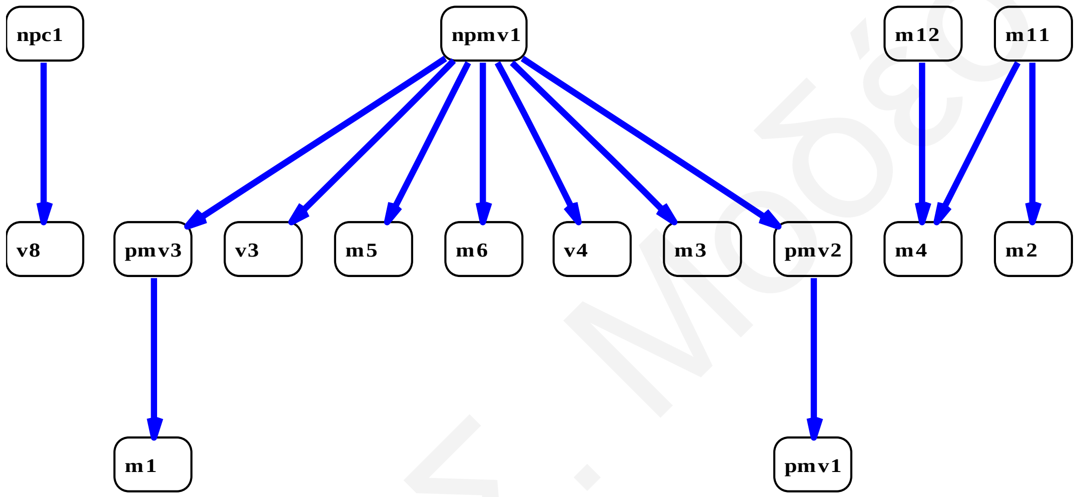
Στο σχηματισμό της ομάδας των έμμεσων μη αναλογικών έργων, η οποία ολοκληρώνει τις ομάδες ομοιότητας που παραμένουν αναλλοίωτες από την Έ Δημοτικού στη Γ' Γυμνασίου, συνεισφέρει ως επί το πλείστον η στρατηγική της εύρεσης του εμβαδού των σχημάτων και εφαρμογή άμεσης αναλογίας. Η εφαρμογή της συγκεκριμένης στρατηγικής φαίνεται να είναι υπεύθυνη για το σχηματισμό της ομάδας ομοιότητας των μη αναλογικών έργων στη Στ' Δημοτικού, Α' και Β' Γυμνασίου. Στη Γ' Γυμνασίου, οι μαθητές συνεχίζουν να χρησιμοποιούν τη πιο πάνω στρατηγική, αλλά η ομοιότητα στις απαντήσεις τους ερμηνεύεται και από τη εφαρμογή του γενικού κανόνα, όπου οι μαθητές αυτόματα τετραπλασιάζουν το εμβαδόν όταν διπλασιαστεί η πλευρά. Η μόνη διαφοροποίηση στις στρατηγικές που ευθύνονται για την ομοιότητα στο χειρισμό των μη αναλογικών έργων, προκύπτει στην Ε’ τάξη όπου για αυτήν ευθύνεται η χρησιμοποίηση της αναλογικής στρατηγικής του συναρτησιακού τελεστή, γεγονός που υποδεικνύει την αδυναμία των μαθητών της Ε’ τάξης για ορθή επίλυση των συγκεκριμένων έργων.

Οι δηλώσεις μπορούν να θεωρηθούν ως η μόνη κατηγορία έργων που παρουσιάζουν διαφοροποιήσεις στις μεταξύ τους σχέσεις, από τάξη σε τάξη. Και οι τέσσερις μη αναλογικές δηλώσεις (st1, st3, st4, st5) σχηματίζουν μια ενιαία ομάδα ομοιότητας μόνο στην Ε’ Δημοτικού και στη Β’ Γυμνάσιου, με τη διαφορά ότι στην Ε’ Δημοτικού οι δηλώσεις αυτές δε συνδέονται με τα υπόλοιπα έργα των δοκιμίων. Στις τάξεις αυτές ομαδοποιούνται σε μια διακριτή ομάδα ομοιότητας και οι δύο αναλογικές δηλώσεις του Δοκιμίου Ι (st2, st6). Στις υπόλοιπες τάξεις παρατηρούνται ομάδες ομοιότητας που προκύπτουν από συνδυασμούς αναλογικών και μη αναλογικών δηλώσεων με συνηθέστερη την ομάδα st1, st3, st4, η οποία αποτελείται από μη αναλογικές δηλώσεις που πρέπει να διορθωθούν. Κοινό χαρακτηριστικό όλων αυτών των ομάδων είναι ότι οφείλουν την ομοιότητα στο χειρισμό των έργων πρώτιστα στη γενικότερη επίδοση των μαθητών καθώς και στην επίδοσή τους σε κάποια λεκτική αναλογία.

Σχέσεις Συνεπαγωγής από την Επίλυση Όλων των Έργων των Δοκιμίων

Τα διάγραμματα συνεπαγωγής, τα οποία παρουσιάζονται πιο κάτω, δίνουν σχηματικά τις σχέσεις συνεπαγωγής που υπάρχουν ανάμεσα στα έργα των τριών δοκιμίων που χορηγήθηκαν και οι οποίες προκύπτουν από τον τρόπο με τον οποίο επίλυσαν τα συγκεκριμένα έργα οι μαθητές του Δημοτικού και του Γυμνασίου. Λόγω του μεγάλου αριθμού του δείγματος που αποτελεί την κάθε ομάδα ($N_{Δ}$=391, $N_{Γ}$=569) για την ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της εντροπίας. Στα δύο συνεπαγωγικά διαγράμματα που παρουσιάζονται πιο κάτω (Διαγράμματα 29 και 30) εντοπίζονται οι ευθείες και αντιθετο-αντίστροφες σχέσεις συνεπαγωγής που υπάρχουν ανάμεσα στο χειρισμό των έργων αναλογικού συλλογισμού, μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας από τους μαθητές. Δηλαδή, ισχύει η ευθεία σχέση p => q, όπου η επιτυχία σε ένα έργο συνεπάγεται την επιτυχία σε κάποιο άλλο. Παράλληλα, ισχύει και η αντίστροφη συνεπαγωγή μεταξύ των αρνήσεων των προτάσεων, όπου Όχι q => Όχι p και άρα η αποτυχία στο δεύτερο έργο συνεπάγεται την αποτυχία στο πρώτο έργο.

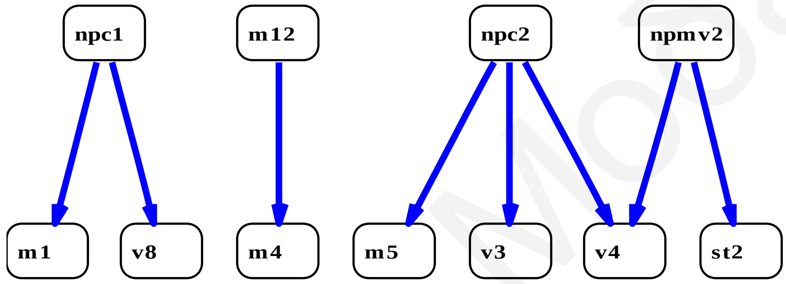
Το Διάγραμμα 29 παρουσιάζει τις ευθείες και αντιθετο-αντίστροφες σχέσεις συνεπαγωγής που προκύπτουν από το χειρισμό όλων των έργων των δοκιμίων από τους μαθητές του δημοτικού σχολείου ως σύνολο. Παρατηρούνται τρεις συνεπαγωγικές αλυσίδες, οι οποίες χαρακτηρίζονται από ένα κοινό στοιχείο: την ύπαρξη ενός μεταγνωστικού έργου στην κορυφή τους. Στις πρώτες δύο αλυσίδες το έργο αυτό είναι μη αναλογικό, ενώ στην τρίτη αλυσίδα τα έργα εμπίπτουν στη διάσταση του αναλογικού συλλογισμού (m11, m12) αλλά η επίλυσή τους απαιτεί μεταγνωστικές δεξιότητες.



Διάγραμμα 29. Σχέσεις συνεπαγωγής με εντροπία ανάμεσα στις λύσεις όλων των έργων από τους μαθητές Δημοτικού.

Στην πρώτη συνεπαγωγική αλυσίδα η επιτυχής επίλυση του έμμεσου μη αναλογικού έργου σύγκρισης npc1, το οποίο αναφέρεται σε ορθογώνιο σχήμα, συνεπάγεται την κατά 95% ορθή επίλυση της λεκτικής αναλογίας v8 (μεσημέρι: απόγευμα :: Πέμπτη :______). Κατά ανάλογο τρόπο, στη δεύτερη συνεπαγωγική αλυσίδα, η επιτυχής επίλυση του αντίστοιχου μη αναλογικού έργου npmv1, συνδέεται με ένα αριθμό τόσο λεκτικών (v3, v4), αριθμητικών αναλογιών (m3, m5, m6), αλλά και αναλογικών έργων (pmv3, pmv2, pmv1) που παρουσιάζονται στο ίδιο πλαίσιο (δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη). Στην τρίτη αλυσίδα παρουσιάζονται σχέσεις συνεπαγωγής αποκλειστικά ανάμεσα σε αριθμητικές αναλογίες (m11, m12 -> m4, m2). Τέλος, η αδυναμία των μαθητών να επιλύσουν τα έργα αναλογικού συλλογισμού που παρουσιάζονται στο διάγραμμα, συνεπάγεται και ταυτόχρονη αδυναμία τους να χειριστούν τα έργα μετα-αναλογικής ενημερότητας (npc1, npmv1).

Στο γυμνάσιο (Διάγραμμα 30) οι συνεπαγωγικές σχέσεις ανάμεσα στα έργα των δοκιμίων έχουν ανάλογη μορφή με αυτή στο δημοτικό σχολείο. Συγκεκριμένα, δημιουργούνται τέσσερις συνεπαγωγικές αλυσίδες στην κορυφή των οποίων βρίσκονται έργα που εμπίπτουν στη διάσταση της μετα-αναλογικής ενημερότητας. Στο τέλος των συνεπαγωγικών αυτών αλυσίδων βρίσκονται μια αναλογική δήλωση (st2), καθώς και λεκτικές και αριθμητικές αναλογίες, οι οποίες αποδείχτηκαν η ευκολότερη μορφή έργων για τους μαθητές. Η αποτυχία των μαθητών να επιλύσουν τις συγκεκριμένες αναλογίες (m1, v8, m5, v3, v4) που παρουσιάζονται στο διάγραμμα, συνεπάγεται και αντίστοιχη αδυναμία τους να χειριστούν τα μη αναλογικά έργα (npc1, npc2, npmv2).



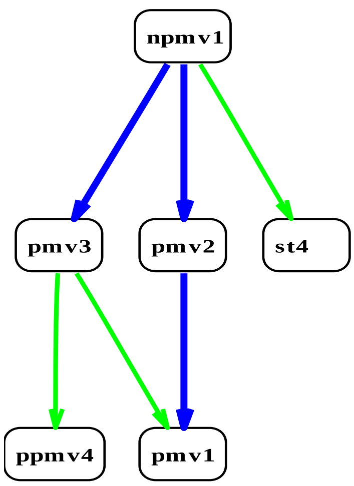
Διάγραμμα 30. Σχέσεις συνεπαγωγής με εντροπία ανάμεσα στις λύσεις όλων των έργων από τους μαθητές Γυμνασίου.

Σχέσεις Συνεπαγωγής από την Επίλυση των Έργων Μαθηματικού Αναλογικού Συλλογισμού και Μετα-αναλογικής Ενημερότητας

Τα πιο κάτω διαγράμματα συνεπαγωγής παρουσιάζουν τις σχέσεις συνεπαγωγής που υπάρχουν ανάμεσα στα έργα που εμπίπτουν στις διαστάσεις της μετα-αναλογικής ενημερότητας και του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού, και οι οποίες είναι αποτέλεσμα του χειρισμού των έργων από διαφορετικές ομάδες μαθητών κάθε φορά. Συγκεκριμένα, παρουσιάζονται συνεπαγωγικά διαγράμματα τόσο για το δημοτικό σχολείο και το γυμνάσιο, όσο και κάθε τάξη ξεχωριστά. Για κάθε ομάδα μαθητών παρουσιάζονται τρία διαγράμματα, το πρώτο εκ των οποίων προέκυψε από ανάλυση με τη μέθοδο της εντροπίας και τα άλλα δύο με τη κλασσική μέθοδο. Ειδικότερα, στο πρώτο διάγραμμα κάθε τριάδας (μέθοδος εντροπίας) παρουσιάζονται οι ευθείες και αντιθετο-αντίστροφες σχέσεις συνεπαγωγής που υπάρχουν ανάμεσα στο χειρισμό των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας από τους μαθητές. Όσον αφορά στα δύο τελευταία διαγράμματα κάθε ομάδας, οι σχέσεις συνεπαγωγής είναι μόνο ευθείες και άρα έχουν μόνο μία κατεύθυνση. Συνεπώς, η επιτυχία σε ένα έργο συνεπάγεται την επιτυχία σε κάποιο άλλο, σε επίπεδο σημαντικότητας 99% και 95% αντίστοιχα.

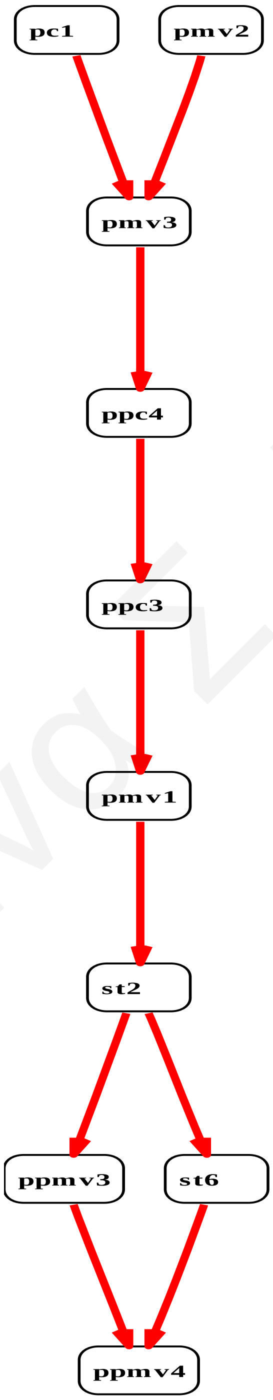
Το Διάγραμμα 31 παρουσιάζει τις ευθείες και αντιθετο-αντίστροφες σχέσεις συνεπαγωγής που υπάρχουν ανάμεσα στο χειρισμό των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας από τους μαθητές του δημοτικού σχολείου ως σύνολο. Χαρακτηριστικό του συγκεκριμένου διαγράμματος είναι ότι αποτελείται από μόνο μία συνεπαγωγική αλυσίδα, η οποία αναφέρεται πρώτιστα σε έργα στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη, είτε αυτά είναι άμεσα (pmv2, pmv3, pmv1), είτε έμμεσα (npmv1, ppmv4). Με μπλε χρώμα παρουσιάζεται η κύρια αλυσίδα συνεπαγωγής σε επίπεδο σημαντικότητας 95%, όπου η επιτυχία των μαθητών στο δύσκολο μη αναλογικό έργο npmv1 συνεπάγεται επιτυχία στα άμεσα αναλογικά έργα pmv2, pmv3 και pmv1.

Αντίστροφα, αποτυχία στην επίλυση του ευκολότερου αναλογικού έργου pmv1, το οποίο αφορά στην εύρεση συναρτησιακού τελεστή με ακέραιο λόγο, συνεπάγεται αποτυχία τόσο στην επίλυση του αντίστοιχου έργου με ακέραιο λόγο (pmv2) όσο και στο έμμεσο μη αναλογικό έργο npmv1. Η αλυσίδα συνεπαγωγής ολοκληρώνεται με την εμφάνιση στατιστικά σημαντικών σχέσεων (με πράσινο χρώμα) σε επίπεδο σημαντικότητας 90%. Από αυτές ιδιαίτερα σημαντική είναι η σύνδεση μιας μη αναλογικής δήλωσης (st4) με το μη αναλογικό έργο npmv1, όπου αποτυχία στον καθορισμό του μη αναλογικού της χαρακτήρα συνεπάγεται και αποτυχία στην επίλυση του συγκεκριμένου έργου.



Διάγραμμα 31. Σχέσεις συνεπαγωγής με εντροπία ανάμεσα στις λύσεις των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας από τους μαθητές Δημοτικού.

Το Διάγραμμα 32 παρουσιάζει τις σχέσεις συνεπαγωγής μίας κατεύθυνσης, που υπάρχουν σε επίπεδο σημαντικότητας 99% όσον αφορά στο χειρισμό των έργων των Δοκιμίων Ι και ΙΙ από τους μαθητές του δημοτικού σχολείου ως σύνολο. Στην περίπτωση αυτή, σχηματίζονται δύο συνεπαγωγικές αλυσίδες έργων με βάση το είδος των έργων, σε αντίθεση με το Διάγραμμα 31 όπου τα έργα σχημάτισαν μια ενιαία συνεπαγωγική αλυσίδα.

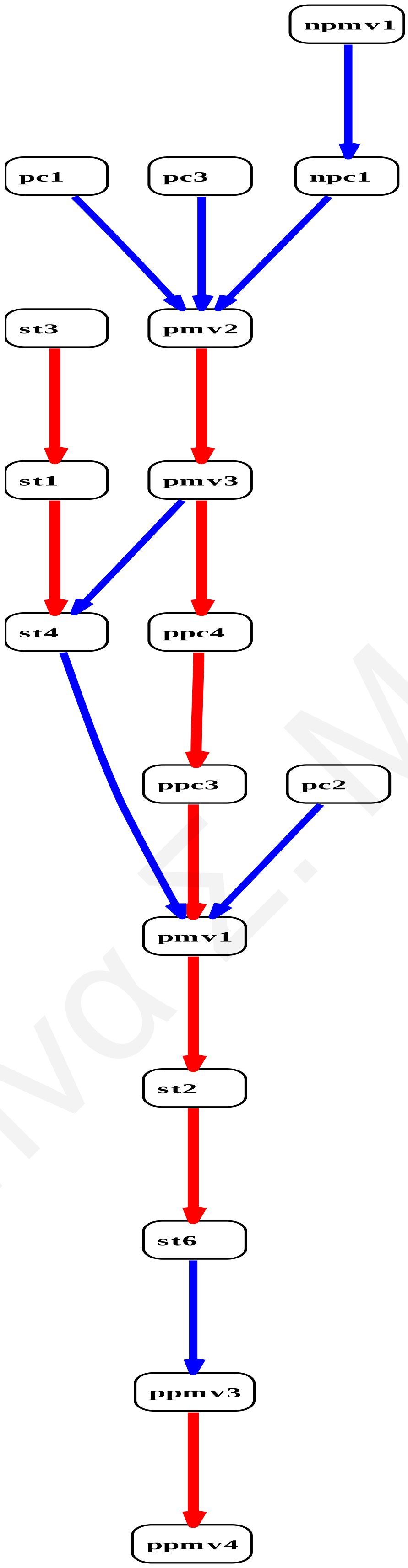


Διάγραμμα 32. Σχέσεις συνεπαγωγής 99% ανάμεσα στις λύσεις των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας από τους μαθητές Δημοτικού.

Η πρώτη συνεπαγωγική αλυσίδα αφορά αποκλειστικά τα αναλογικά έργα και των δύο δοκιμίων ανεξαρτήτως του πλαισίου στο οποίο παρουσιάζονται. Σε αυτή, τα δυσκολότερα έργα είναι δύο άμεσα αναλογικά έργα του Δοκιμίου Ι, ένα έργο σύγκρισης (pc1) και ένα έργο στο οποίο δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη (pmv2). Ειδικότερα, η αυξημένη δυσκολία του έργου pmv2 μπορεί να αιτιολογηθεί αν ληφθεί υπόψη ότι αφορά στην εύρεση μη ακέραιου λόγου ανάμεσα στις ποσότητες. Επιτυχία στα δύο αυτά έργα συνεπάγεται ταυτόχρονα και γραμμική επιτυχία στα άλλα δύο άμεσα αναλογικά έργα στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη (pmv3, pmv1), καθώς και στα έμμεσα αναλογικά έργα σύγκρισης του Δοκιμίου ΙΙ (ppc4, ppc3).

Η συνεπαγωγική αλυσίδα ολοκληρώνεται με τις αναλογικές δηλώσεις και τα έμμεσα αναλογικά έργα του Δοκιμίου ΙΙ στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη (ppmv3, ppmv4), τα οποία φαίνεται να ήταν τα ευκολότερα για τους μαθητές του δημοτικού σχολείου. Η δεύτερη συνεπαγωγική αλυσίδα σχηματίζεται από τις μη αναλογικές δηλώσεις του Δοκιμίου Ι. Συγκεκριμένα, επιτυχία στην αναγνώριση του της σταθερής δήλωσης (st3) συνεπάγεται επιτυχία στο χειρισμό της δήλωσης (st1) και κατά συνέπεια της δήλωσης (st4), οι οποίες έχουν και οι δύο μη ρεαλιστικό χαρακτηριστικά.

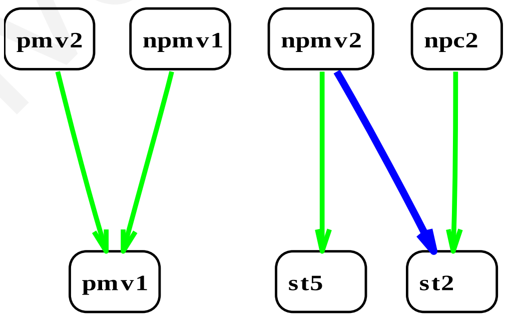
Μελετώντας τις σχέσεις που υπάρχουν ανάμεσα στο χειρισμό των ίδιων έργων από τους ίδιους μαθητές του δημοτικού σχολείου σε επίπεδο σημαντικότητας 95% (Διάγραμμα 33), φαίνεται ότι σε αυτήν την περίπτωση όλα τα έργα δημιουργούν μια ενιαία συνεπαγωγική αλυσίδα. Έτσι, αν και τα μη αναλογικά έργα σχηματίζουν δύο περιφερειακές αλυσίδες συνεπαγωγής (st3, st1, st4 και npmv1, npc1), οι αλυσίδες αυτές συνδέονται με τη βασική συνεπαγωγική αλυσίδα που δημιουργείται από τα αναλογικά έργα. Δυσκολότερα από όλα τα έργα της συνεπαγωγικής αλυσίδας είναι τα έμμεσα μη αναλογικά έργα του Δοκιμίου ΙΙ (npmv1, npc1), καθώς και τα άμεσα αναλογικά έργα σύγκρισης του Δοκιμίου Ι (pc1, pc3), επιτυχία στα οποία συνεπάγεται επιτυχία και στα υπόλοιπα αναλογικά έργα. Ταυτόχρονα, ευκολότερα παραμένουν τα έμμεσα αναλογικά έργα του Δοκιμίου ΙΙ στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη (ppmv3, ppmv4).



Διάγραμμα 33. Σχέσεις συνεπαγωγής 95% ανάμεσα στις λύσεις των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας από τους μαθητές Δημοτικού.

Το Διάγραμμα 34 παρουσιάζει τις ευθείες και αντιθετο-αντίστροφες σχέσεις συνεπαγωγής που υπάρχουν ανάμεσα στο χειρισμό των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας από τους μαθητές του γυμνασίου ως σύνολο. Το διάγραμμα αποτελείται από δύο διακριτές συνεπαγωγικές αλυσίδες έργων, οι οποίες αποτελούνται από τόσο αναλογικά όσο και μη αναλογικά έργα. Συγκεκριμένα, η πρώτη αλυσίδα συνεπαγωγής αποτελείται από τρία έργα στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη. Από αυτά τα δυσκολότερα είναι το έμμεσο μη αναλογικό έργο ορθογωνίου npmv1, καθώς και το άμεσο αναλογικό έργο pmv2 στο οποίο ο λόγος δεν είναι ακέραιος. Επιτυχία στα έργα αυτά συνεπάγεται επιτυχία στο έργο pmv1, το οποίο είναι άμεσο αναλογικό έργο με ακέραιο συναρτησιακό τελεστή, αλλά και αντίστροφα, αποτυχία στο συγκεκριμένο έργο συνεπάγεται και αποτυχία στα έργα npmv1 και pmv2 σε επίπεδο σημαντικότητας 90%.

Η δεύτερη συνεπαγωγική αλυσίδα αποτελείται από έργα, τα οποία εμπεριέχονται στη διάσταση της μετα-αναλογικής ενημερότητας εκτός από ένα, το οποίο είναι αναλογικό (st2). Ειδικότερα, η επιτυχία στα έμμεσα μη αναλογικά έργα κύκλου, ανεξαρτήτως τρόπου παρουσίασης (npmv2, npc2), συνδέεται με την επιτυχία στο χειρισμό των δηλώσεων st2 και st5. Αντίστροφα, η αποτυχία των μαθητών να διακρίνουν ότι οι συγκεκριμένες δηλώσεις είναι αναλογική και μη αναλογική αντίστοιχα, συνδέεται με αποτυχία στο χειρισμό των έργων npmv2 και npc2.

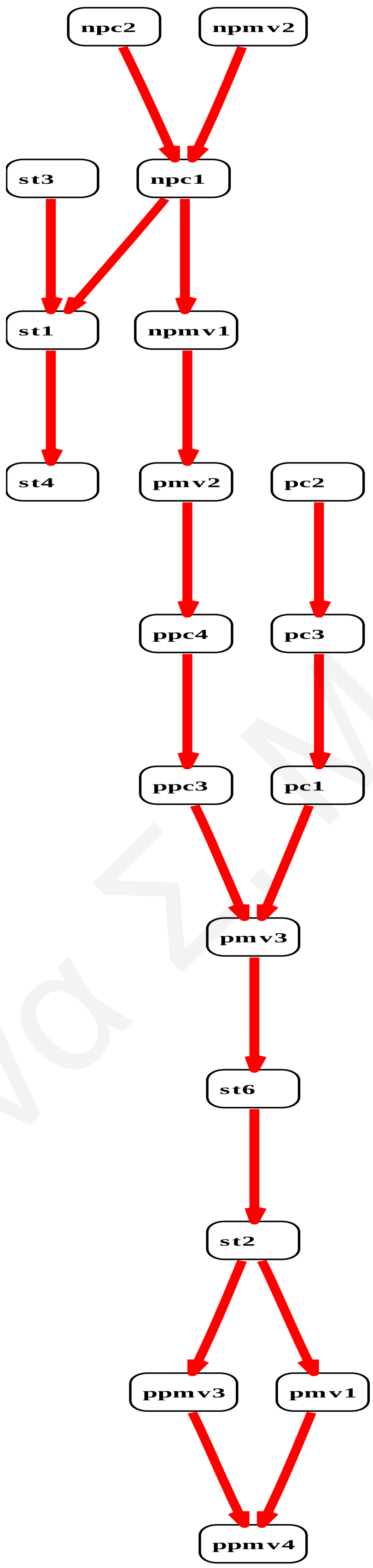


Διάγραμμα 34. Σχέσεις συνεπαγωγής με εντροπία ανάμεσα στις λύσεις των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας από τους μαθητές Γυμνασίου.

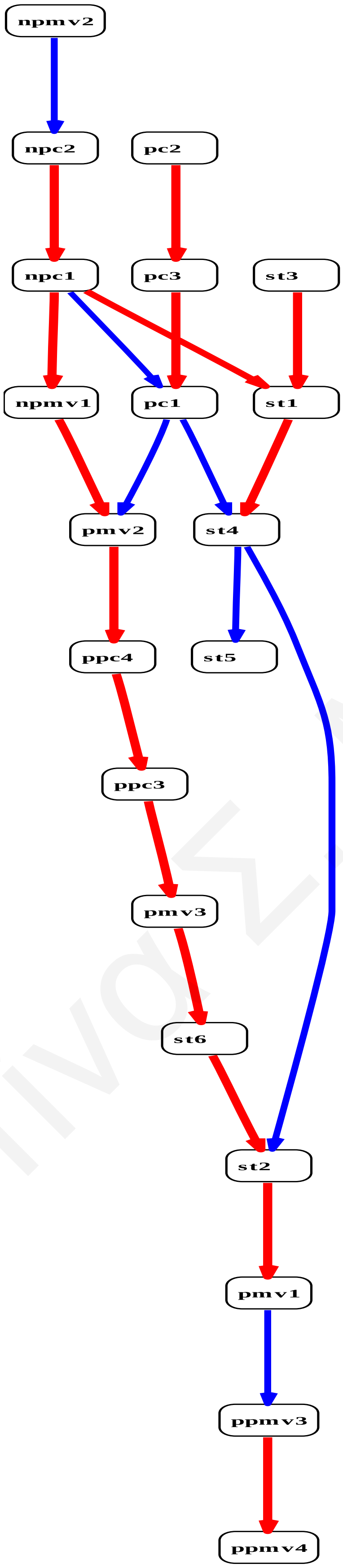
Το Διάγραμμα 35 παρουσιάζει τις σχέσεις συνεπαγωγής μίας κατεύθυνσης, που υπάρχουν σε επίπεδο σημαντικότητας 99% όσον αφορά στο χειρισμό των έργων των Δοκιμίων Ι και ΙΙ από τους μαθητές Γυμνασίου. Στην περίπτωση αυτή, όλα τα έργα ομαδοποιούνται σε μία ενιαία συνεπαγωγική αλυσίδα με κάποιες διακλαδώσεις λόγω πλαισίου παρουσίασης. Συγκεκριμένα, η επιτυχία των μαθητών στα έμμεσα μη αναλογικά έργα κύκλου (npmv2, npc2), φαίνεται να συνεπάγεται επιτυχία, σε επίπεδο σημαντικότητας 99%, και στα υπόλοιπα μη αναλογικά έργα, τόσο ορθογωνίου (npmv1, npc1), όσο και στις μη αναλογικές δηλώσεις st1 και st4. Ειδικότερα, το σύνολο των μη αναλογικών δηλώσεων st3, st1 και st4 φαίνεται να σχηματίζει μια διακριτή συνεπαγωγική αλυσίδα, η οποία συνδέεται με τη βασική μόνο μέσα από τη δήλωση st1 που αφορά σε μη ρεαλιστικές καταστάσεις.

Γενικά, από το Διάγραμμα συνεπαγωγής 35 φαίνεται ότι η επιτυχής επίλυση των μη αναλογικών έργων των δοκιμίων συνεπάγεται και επιτυχή επίλυση των αναλογικών έργων, πρώτιστα των έμμεσων αναλογικών έργων του Δοκιμίου ΙΙ (ppc3, ppc4, ppmv1, ppmv2), αλλά και των αναλογικών δηλώσεων (st2, st6) καθώς και των άμεσων αναλογικών έργων του Δοκιμίου Ι στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη (pmv2, pmv3, pmv1). Ταυτόχρονα με την επιτυχή επίλυση των έργων αυτών συνδέονται και τα άμεσα αναλογικά έργα σύγκρισης (pc2, pc3, pc1), το οποία προκαλώντας αρκετές δυσκολίες στους μαθητές, απομακρύνονται λίγο από τη βασική συνεπαγωγική αλυσίδα, σχηματίζοντας μια διακλάδωση.

Οι σχέσεις που παρατηρήθηκαν στο χειρισμό των έργων από τους μαθητές γυμνασίου σε επίπεδο σημαντικότητας 99% παραμένουν και σε επίπεδο σημαντικότητας 95% (Διάγραμμα 36). Το διάγραμμα αυτό εμπλουτίζεται από την άποψη του αριθμού των σχέσεων συνεπαγωγής, αφού οι διακλαδώσεις από τη βασική αλυσίδα συνεπαγωγής δεν είναι τόσο διακριτές και περισσότερα έργα συνδέονται μεταξύ τους. Σημαντικό είναι το γεγονός ότι στη συνεπαγωγική αλυσίδα των μη αναλογικών δηλώσεων περιλαμβάνεται αυτή τη φορά όλες οι μη αναλογικές δηλώσεις του Δοκιμίου Ι, συμπεριλαμβανομένης της st5. Ταυτόχρονα, σημαντική μπορεί να θεωρηθεί η σχέση συνεπαγωγής ανάμεσα στην μη αναλογική, και μη ρεαλιστική δήλωση st4 και στην αναλογική δήλωση st2, όπου επιτυχία στην πρώτη συνεπάγεται επιτυχία στη δεύτερη, σε επίπεδο σημαντικότητας 95%.



Διάγραμμα 35. Σχέσεις συνεπαγωγής 99% ανάμεσα στις λύσεις των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας από τους μαθητές Γυμνασίου.

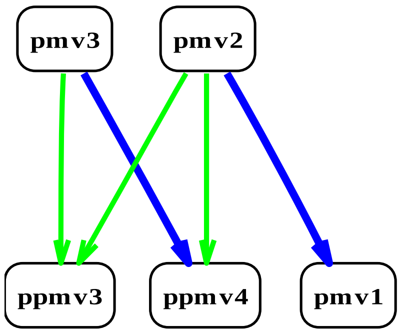


Διάγραμμα 36. Σχέσεις συνεπαγωγής 95% ανάμεσα στις λύσεις των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας από τους μαθητές Γυμνασίου.

Σύγκριση Δημοτικού – Γυμνασίου. Από τα διαγράμματα συνεπαγωγής δημοτικού και γυμνασίου μπορεί να διαφανεί σε πρώτο επίπεδο μια διαφορά ως προς τον αριθμό των σχέσεων που υπάρχουν ανάμεσα στα έργα, αλλά και ως προς το είδος των έργων που περιλαμβάνονται στις συνεπαγωγικές αλυσίδες. Συγκεκριμένα, στα συνεπαγωγικά διαγράμματα του δημοτικού σχολείου περιλαμβάνονται ως επί το πλείστον αναλογικά έργα, με τα μη αναλογικά να εμφανίζονται στη συνεπαγωγική αλυσίδα 95%, που προκύπτει με την κλασσική ανάλυση. Στο αντίστοιχο διάγραμμα με εντροπία περιλαμβάνονται έργα μόνο ενός είδους, στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη, γεγονός που υποδεικνύει τον επηρεασμό των μαθητών από το πλαίσιο παρουσίασης των έργων.

Αντίθετα, στα τρία διαγράμματα συνεπαγωγής του γυμνασίου εντοπίζονται σχέσεις τόσο ανάμεσα σε έργα διαφορετικού είδους (αναλογικά και μη αναλογικά) όσο και ανάμεσα σε έργα που διαφέρουν ως προς το πλαίσιο παρουσίασης και τη γλωσσική διατύπωση. Αυτό αποτελεί υποστηρικτικό στοιχείο προηγούμενων αποτελεσμάτων που υποδεικνύει ότι η μετα-αναλογική ενημερότητα των μαθητών αρχίσει να αναπτύσσεται προς το τέλος του γυμνασίου.

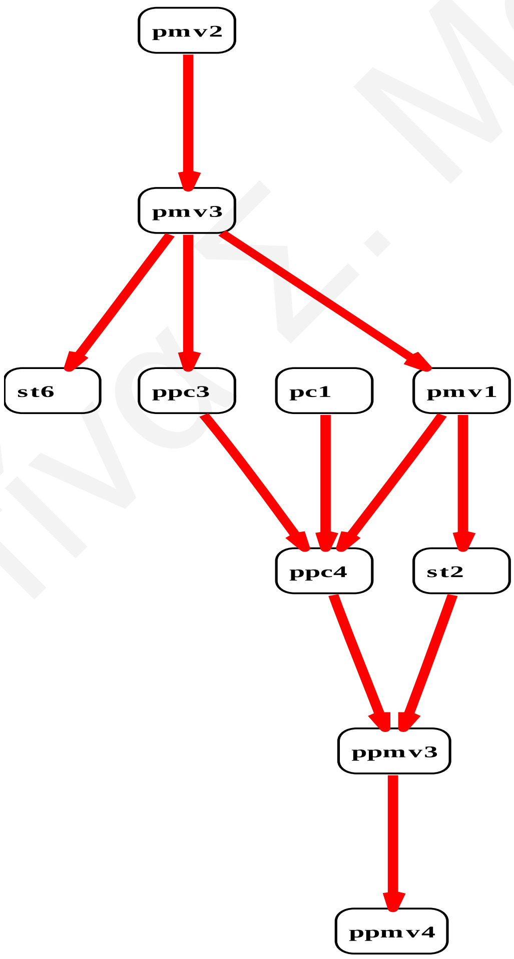
Σχέσεις συνεπαγωγής κατά τάξη. Οι ευθείες και αντιθετο-αντίστροφες σχέσεις συνεπαγωγής που προκύπτουν από το χειρισμό των έργων του Δοκιμίου Ι και ΙΙ από τους μαθητές της Ε’ τάξης, αφορούν αποκλειστικά έργα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και ειδικότερα τα έργα στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη (Διάγραμμα 37).



Διάγραμμα 37. Σχέσεις συνεπαγωγής με εντροπία ανάμεσα στις λύσεις των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας από τους μαθητές της Ε’ Δημοτικού.

Τα έργα του Δοκιμίου Ι, τα οποία λύνονται είτε με την εύρεση αριθμητικού τελεστή (pmv3) είτε αφορούν εύρεση μη ακέραιου λόγου (pmv2), είναι τα δυσκολότερα για τους μαθητές της Ε' τάξης. Επιτυχία στα έργα αυτά συνεπάγεται και επιτυχία, με πιθανότητα 95% (μπλε βέλος) και 90% (πράσινο βέλος) στο αντίστοιχο έργο του ίδιου δοκιμίου με εύρεση συναρτησιακού τελεστή (pmv1), καθώς και στα δύο έμμεσα έργα του Δοκιμίου ΙΙ (ppmv3, ppmv4). Αντίστροφα, η αποτυχία στα τρία αυτά έργα, είναι αλληλένδετη με αντίστοιχη αποτυχία στα δύο προηγούμενα και δυσκολότερα έργα pmv2 και pmv3.

Το Διάγραμμα 38 παρουσιάζει τις ευθείες σχέσεις συνεπαγωγής που υπάρχουν σε επίπεδο σημαντικότητας 99%, όσον αφορά στο χειρισμό των έργων των Δοκιμίων Ι και ΙΙ από τους μαθητές της Ε' τάξης του δημοτικού σχολείου.

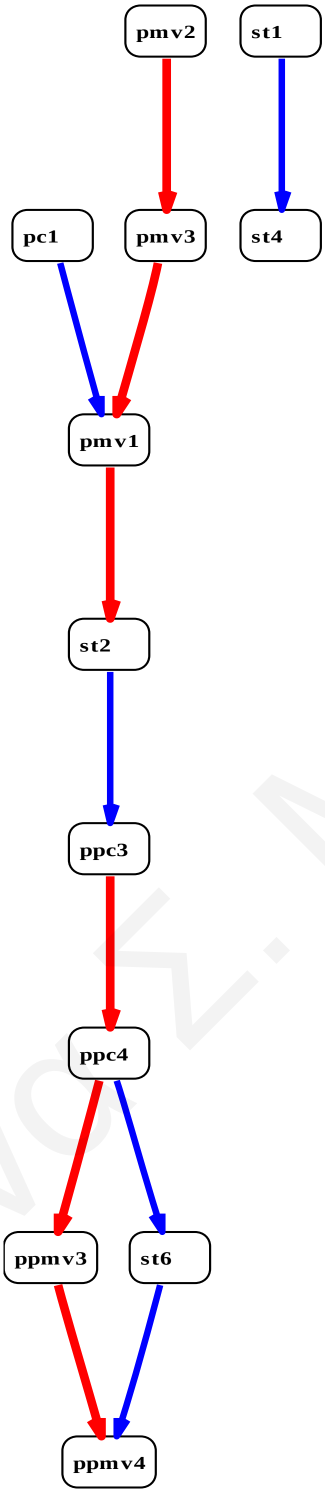


Διάγραμμα 38: Σχέσεις συνεπαγωγής 99% ανάμεσα στις λύσεις των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας από τους μαθητές της Ε' Δημοτικού.

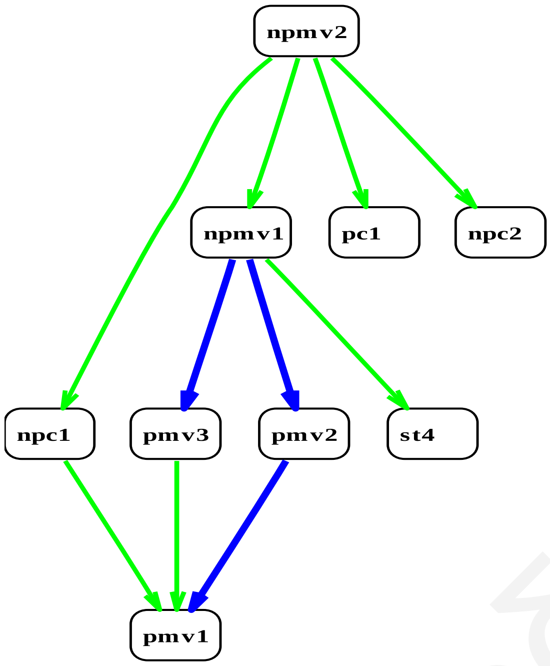
Χαρακτηριστικό του Διαγράμματος 38 είναι ότι συνίσταται από αποκλειστικά έργα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού, τα οποία και ομαδοποιούνται σε μία ενιαία αλυσίδα συνεπαγωγής, ανεξαρτήτως του πλαισίου στο οποίο παρουσιάζονται. Η αλυσίδα αυτή παρουσιάζει πολλές διακλαδώσεις και συνδέσεις ανάμεσα σε αναλογικά έργα που παρουσιάζονται σε διαφορετικά πλαίσια, γεγονός που ενισχύει τη συμπερίληψή τους κάτω από την ίδια διάσταση. Τις περισσότερες δυσκολίες στους μικρότερους μαθητές φαίνεται να προκάλεσε το έργο του Δοκιμίου Ι, το οποίο αφορά στην εύρεση μη ακέραιου λόγου (pmv2), και στο οποίο δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη. Η επιτυχία στην επίλυση του έργου αυτού από τους μαθητές συνεπάγεται και γραμμική επιτυχία και στα υπόλοιπα αναλογικά έργα των δοκιμίων με ακέραιο λόγο, με ευκολότερο το έργο κύκλου του Δοκιμίου ΙΙ (ppmv4).

Με τη διερεύνηση των σχέσεων συνεπαγωγής που υπάρχουν ανάμεσα στο χειρισμό των ίδιων έργων από τους ίδιους μαθητές σε επίπεδο σημαντικότητας 95%, η κύρια αλυσίδα συνεπαγωγής διαφοροποιείται (Διάγραμμα 39). Συγκεκριμένα, ενώ περιλαμβάνονται τα ίδια αναλογικά έργα σε αυτήν, η αλυσίδα συνεπαγωγής παίρνει ένα πιο γραμμικό σχήμα με τα έργα να σειροθετούνται και η επιτυχία σε ένα μόνο έργο να συνεπάγεται επιτυχία σε άλλο. Παρόλα αυτά, σχετικά σταθερή παραμένει η θέση των έργων που προκάλεσαν τις περισσότερες δυσκολίες στους μαθητές. Ταυτόχρονα, σε μια δεύτερη αλυσίδα συνεπαγωγής περιλαμβάνονται μόνο μη αναλογικές δηλώσεις, που αφορούν σε μη ρεαλιστικές καταστάσεις. Συγκεκριμένα, η επιτυχία των μαθητών να διακρίνουν το είδος της δήλωσης st1 συνεπάγεται κατά 95% επιτυχία στο χειρισμό της αντίστοιχης δήλωσης st4, οι οποίες αναφέρονται σε μη ρεαλιστικές καταστάσεις.

Στη Στ’ τάξη (Διάγραμμα 40), οι ευθείες και αντιθετο-αντίστροφες σχέσεις συνεπαγωγής που προκύπτουν εμπλέκουν τόσο αναλογικά όσο και μη αναλογικά έργα, τα οποία παρουσιάζονται σε διαφορετικά πλαίσια. Συγκεκριμένα, στην ενιαία αλυσίδα συνεπαγωγής που σχηματίζεται η κυριότερη σχέση που δημιουργείται σε επίπεδο σημαντικότητας 95% αφορά έργα στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη, με το δυσκολότερο έμμεσο μη αναλογικό npmv1 να συνεπάγεται επιτυχία στα τρία αναλογικά έργα του Δοκιμίου Ι (pmv2, pmv3, pmv1). Στην αλυσίδα συνεπαγωγής με επίπεδο σημαντικότητας 90% εμπλέκονται όλα τα υπόλοιπα έμμεσα μη αναλογικά έργα αλλά και η μη αναλογική δήλωση st4, δημιουργώντας και τις περισσότερες δυσκολίες στους μαθητές. Έτσι, τυχόν αποτυχία των μαθητών να χειριστούν τα ευκολότερα αναλογικά έργα των δοκιμίων συνεπάγεται και αποτυχία στο χειρισμό των μη αναλογικών έργων.



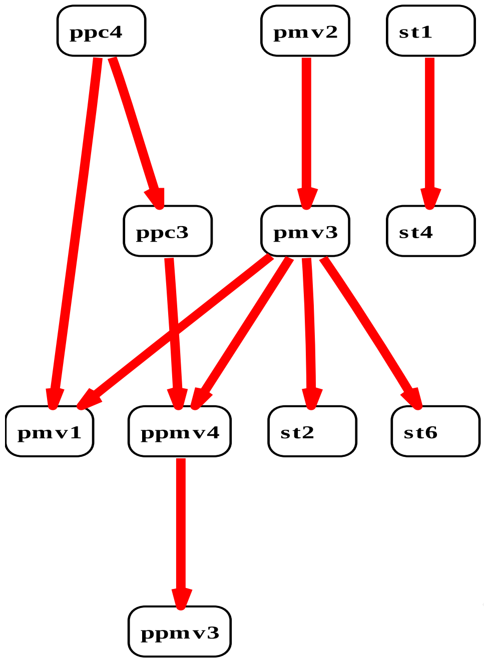
Διάγραμμα 39. Σχέσεις συνεπαγωγής 95% ανάμεσα στις λύσεις των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας από τους μαθητές της Ε' Δημοτικού.



Διάγραμμα 40. Σχέσεις συνεπαγωγής με εντροπία ανάμεσα στις λύσεις των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας από τους μαθητές της Στ’ Δημοτικού.

Η ανάλυση των λύσεων των μαθητών της Στ’ τάξης με την κλασσική μέθοδο συνεπαγωγής έδωσε ένα διάγραμμα που στην πλειοψηφία του αποτελείται από αναλογικά έργα. Ειδικότερα, το Διάγραμμα 41 αποτελείται από δύο αλυσίδες συνεπαγωγής. Η μικρότερη από τις δύο (st1 -> st4) συνίσταται από δύο μη αναλογικές δηλώσεις, οι οποίες έχουν ως κοινό χαρακτηριστικό το μη ρεαλιστικό τους χαρακτήρα (αριθμός αδερφών και ύψος). Η μεγαλύτερη αλυσίδα μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από δύο υπο-αλυσιδές οι οποίες όμως συνδέονται σε κάποια σημεία. Συγκεκριμένα, φαίνεται ότι βασικό κριτήριο σχηματισμού των δύο αυτών υπο-αλυσίδων είναι το είδος των έργων που τις αποτελούν.

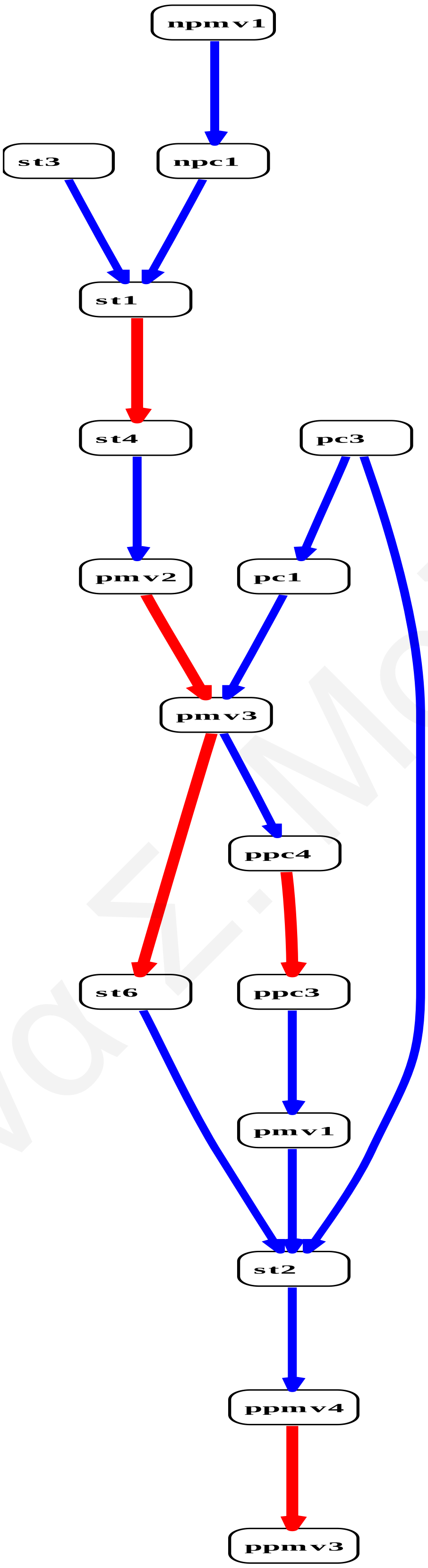
Ειδικότερα, η πρώτη σχηματίζεται από όλα τα έμμεσα αναλογικά έργα του Δοκιμίου ΙΙ (ppc3, ppc4, ppmv4, ppmv3), ανεξαρτήτως τρόπου παρουσίασης. Η δεύτερη υπο-αλυσίδα σχηματίζεται από έργα στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη, ανεξαρτήτως του αν είναι άμεσα (pmv2, pmv3, pmv1) ή έμμεσα (ppmv4, ppmv3), καθώς και τις δύο αναλογικές δηλώσεις του Δοκιμίου Ι (st2, st6). Κοινό σημείο και των δύο υπο-αλυσίδων αυτών, οι οποίες συνδέονται για να σχηματίσουν μια ενιαία συνεπαγωγική αλυσίδα των αναλογικών έργων είναι τα έμμεσα αναλογικά έργα του Δοκιμίου ΙΙ (ppmv4, ppmv3), τα οποία ήταν και τα ευκολότερα για τους μαθητές της Στ΄ τάξης.



Διάγραμμα 41. Σχέσεις συνεπαγωγής 99% ανάμεσα στις λύσεις των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας από τους μαθητές της Στ' Δημοτικού.

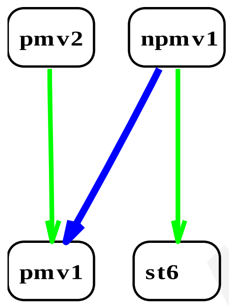
Μελετώντας τις σχέσεις που υπάρχουν ανάμεσα στο χειρισμό των ίδιων έργων από τους ίδιους μαθητές της Στ' τάξης σε επίπεδο σημαντικότητας 95%, φαίνεται ότι σε αυτήν την περίπτωση (Διάγραμμα 42) εμπλέκονται όχι μόνο τα αναλογικά έργα αλλά και η πλειοψηφία των μη αναλογικών δηλώσεων του Δοκιμίου Ι (st3, st1, st4), καθώς και τα δύο έμμεσα μη αναλογικά έργα ορθογωνίου του Δοκιμίου ΙΙ (npmv1, npc1), με τα τελευταία έργα να είναι τα δυσκολότερα για τους μαθητές. Ευκολότερα παραμένουν τα έμμεσα αναλογικά έργα του Δοκιμίου ΙΙ στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη (ppmv3, ppmv4).

Τέλος, χαρακτηριστική σε σχέση με τη προηγούμενη συνεπαγωγική αλυσίδα (Διάγραμμα 41) φαίνεται να είναι η θέση των αναλογικών δηλώσεων st2 και st6. Ειδικότερα, ενώ σε επίπεδο σημαντικότητας 99% τα δύο αυτά έργα αποτελούν απλά το τελευταίο σημείο κάποιας αλυσίδας συνεπαγωγής, σε επίπεδο σημαντικότητας 95% κατέχουν κομβική θέση, συνδέοντας αναλογικά έργα διαφορετικού είδους, άμεσα (pmv1) με έμμεσα (ppmv4) και σύγκρισης (pc3)με έργα στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη (ppmv4).



Διάγραμμα 42. Σχέσεις συνεπαγωγής 95% ανάμεσα στις λύσεις των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας από τους μαθητές της Στ’ Δημοτικού.

Οι ευθείες και αντιθετο-αντίστροφες σχέσεις που παρουσιάζονται στο Διάγραμμα 43 και οι οποίες προκύπτουν από την ενασχόληση των μαθητών της Α’ Γυμνασίου με τα έργα των Δοκιμίων Ι και ΙΙ είναι περιορισμένες σε αριθμό. Στο συγκεκριμένο διάγραμμα συνεπαγωγής εμπλέκονται μόνο τέσσερα έργα, χαρακτηριστικό των οποίων είναι η κοινή διατύπωση – δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη. Ακόμα και στην περίπτωση της αναλογικής δήλωσης st6 μπορεί να θεωρηθεί ότι αυτή η διατύπωση υπάρχει, αφού έστω και αν δίνονται και οι τέσσερις ποσότητες ο μαθητής πρέπει να διαπιστώσει την ορθότητα της δήλωσης με το να θεωρήσει το ένα δεδομένο ως άγνωστο.

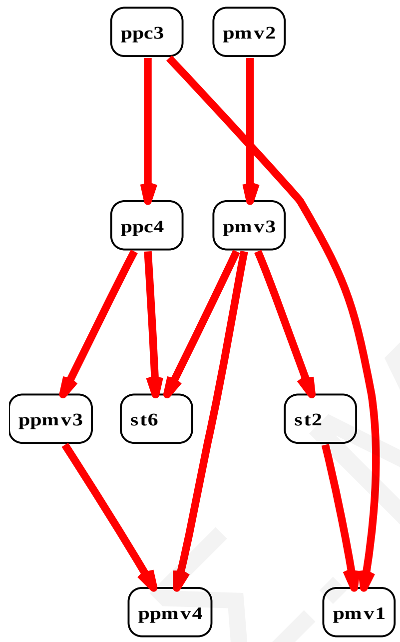


Διάγραμμα 43. Σχέσεις συνεπαγωγής με εντροπία ανάμεσα στις λύσεις των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας από τους μαθητές της Α’ Γυμνασίου.

Δυσκολότερα για τους μαθητές ήταν το έμμεσο μη αναλογικό έργο ορθογωνίου (npmv1) καθώς και το άμεσο αναλογικό έργο με μη ακέραιο λόγο (pmv2). Η επιτυχία στα έργα αυτά συνδέεται με επιτυχία και στο άμεσο αναλογικό έργο με συναρτησιακό τελεστή (pmv1), καθώς και στην αναλογική δήλωση (st6). Αντίστροφα, η αποτυχία των μαθητών της Α’ Γυμνασίου να χειριστούν τα δύο ευκολότερα αυτά έργα είναι αλληλένδετη με ανάλογη αποτυχία στα δυσκολότερα έργα pmv2 και npmv1.

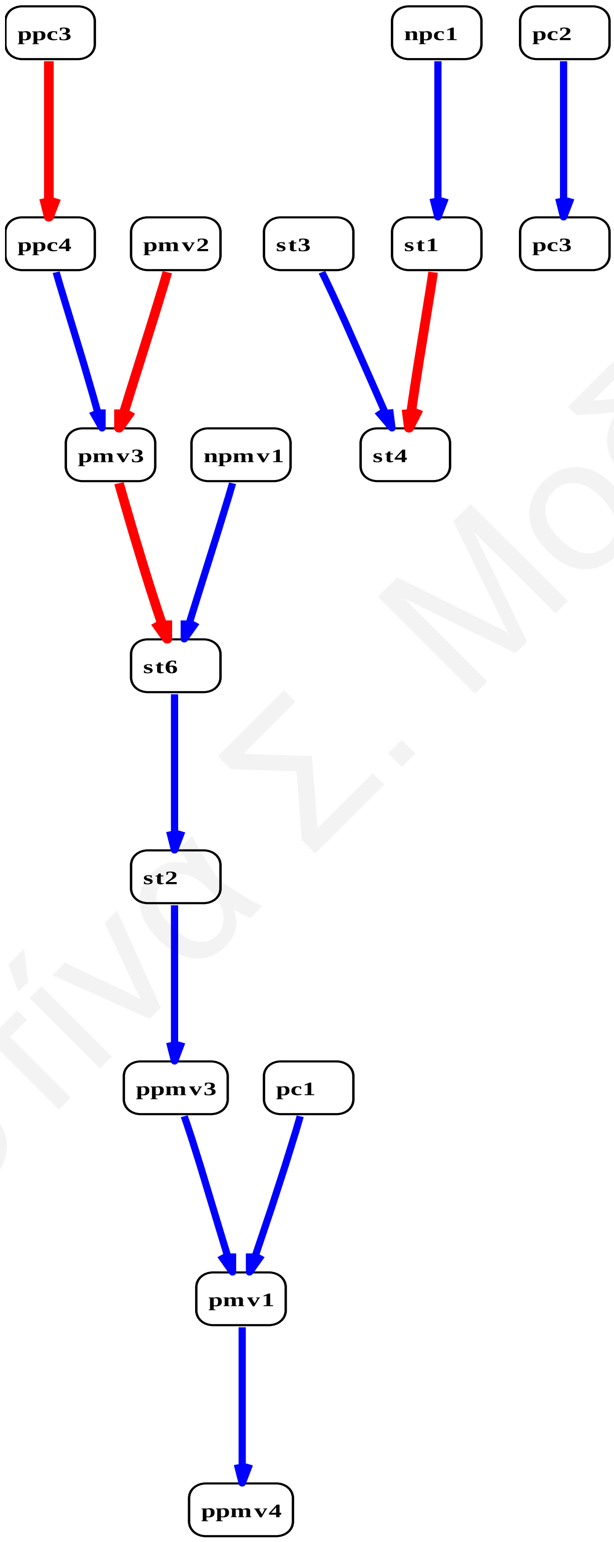
Το Διάγραμμα 44 παρουσιάζει μόνο τις ευθείες σχέσεις συνεπαγωγής που υπάρχουν σε επίπεδο σημαντικότητας 99%, ανάμεσα στις λύσεις των μαθητών της Α΄ Γυμνασίου. Στην περίπτωση αυτή προκύπτουν περισσότερες σχέσεις με την εμπλοκή αρκετών έργων. Τα έργα αυτά είναι στην πλειοψηφία τους αναλογικά και σχηματίζουν μια διακριτή συνεπαγωγική αλυσίδα από τα δύο μη αναλογικά έργα, που εμπλέκονται στο διάγραμμα και τα οποία σχηματίζουν μια δεύτερη μικρότερη αλυσίδα σχέσεων.

Η μη αναλογική αλυσίδα αποτελείται από τις μη αναλογικές δηλώσεις st1 και st4, οι οποίες έχουν ως κοινό στοιχείο τα μη ρεαλιστικά τους χαρακτηριστικά. Η αναλογική αλυσίδα συνίσταται από όλα τα άμεσα αναλογικά έργα του Δοκιμίου Ι, εκτός των έργων σύγκρισης, τα έμμεσα αναλογικά έργα του Δοκιμίου ΙΙ καθώς και τις δύο αναλογικές δηλώσεις του Δοκιμίου Ι. Χαρακτηριστικό της συγκεκριμένης αλυσίδας συνεπαγωγής είναι η παρουσία αυξημένου αριθμού συνεπαγωγικών σχέσεων ανάμεσα σε έργα που παρουσιάζονται σε διάφορα πλαίσια, υποδηλώνοντας την ενεργοποίηση παρόμοιων μηχανισμών για την επίλυσή τους.



Διάγραμμα 44. Σχέσεις συνεπαγωγής 99% ανάμεσα στις λύσεις των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας από τους μαθητές της Α’ Γυμνασίου.

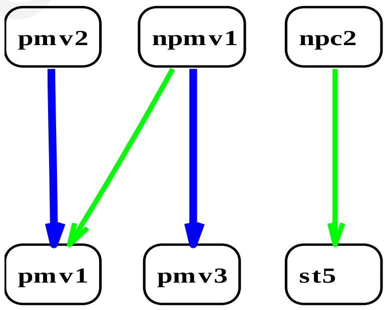
Σε επίπεδο σημαντικότητας 95%, διατηρούνται οι σχέσεις συνεπαγωγής οι οποίες παρατηρήθηκαν στο προηγούμενο συνεπαγωγικό διάγραμμα, ενώ παράλληλα οι αλυσίδες συνεπαγωγής εμπλουτίζονται με την εμφάνιση καινούριων έργων (Διάγραμμα 45). Εδώ, παρουσιάζονται τρεις αλυσίδες συνεπαγωγής, οι δύο εκ των οποίων αφορούν στην πλειοψηφία τους αναλογικά έργα και η άλλη μη αναλογικά. Η πρώτη αλυσίδα συνεπαγωγής (ppc3 -> ... -> ppmv4) αποτελείται από τα ίδια αναλογικά έργα τα οποία συνιστούσαν την αναλογική αλυσίδα σε επίπεδο σημαντικότητας 99%, με την επιπλέον συμπερίληψη του έμμεσου μη αναλογικού έργου ορθογωνίου (npmv1). Ταυτόχρονα, σε επίπεδο σημαντικότητας 95%, δημιουργείται μια δεύτερη αναλογική συνεπαγωγική αλυσίδα, η οποία αποτελείται από αποκλειστικά έργα σύγκρισης (pc2, pc3). Ειδικότερα τα έργα αυτά λόγω της ιδιαιτερότητας στο πλαίσιο παρουσίασής τους φαίνεται να αντιμετωπίστηκαν διαφορετικά από τους μαθητές της Α’ Γυμνασίου, με αποτέλεσμα να μη συνδέονται με σχέσεις συνεπαγωγής με τα υπόλοιπα αναλογικά έργα.



Διάγραμμα 45. Σχέσεις συνεπαγωγής 95% ανάμεσα στις λύσεις των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας από τους μαθητές της Α’ Γυμνασίου.

Τέλος, το Διάγραμμα 45 ολοκληρώνεται με τη συνεπαγωγική αλυσίδα των μη αναλογικών έργων, στην οποία περιλαμβάνεται η πλειοψηφία των μη αναλογικών δηλώσεων του Δοκιμίου Ι (st1, st3, st4). Η επιτυχής αναγνώριση των μη αναλογικών χαρακτηριστικών των έργων αυτών συνδέεται με την επίλυση του μη αναλογικού έργου σύγκρισης npc1. Έτσι, όσοι μαθητές έλυσαν επιτυχώς το συγκεκριμένο έργο npc1 κατά 95% κατάφεραν να χειριστούν ορθά και τις δηλώσεις st1 και st4.

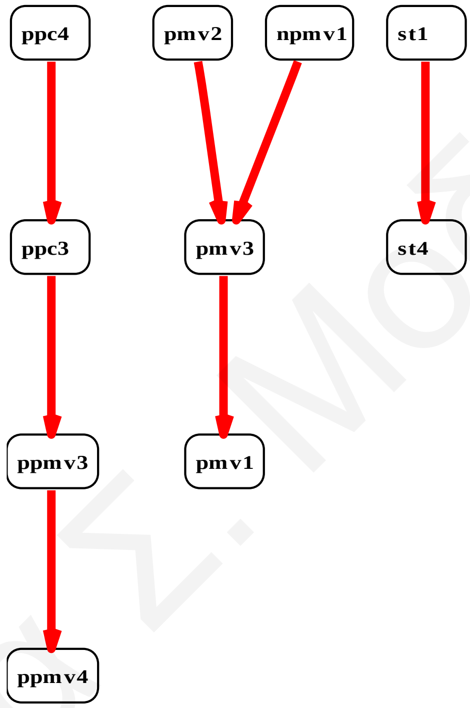
Το Διάγραμμα 46 παρουσιάζει τις ευθείες και αντιθετο-αντίστροφες σχέσεις συνεπαγωγής που προκύπτουν από το χειρισμό των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας από τους μαθητές της Β' Γυμνασίου. Το διάγραμμα αποτελείται από δύο διακριτές συνεπαγωγικές αλυσίδες έργων, η μία εκ των οποίων συνίσταται από αποκλειστικά μη αναλογικά έργα, ενώ στην άλλη οι συνεπαγωγικές σχέσεις δημιουργούνται ανάμεσα σε τόσο αναλογικά όσο και σε μη αναλογικά έργα. Συγκεκριμένα, χαρακτηριστικό αυτής της τελευταίας αλυσίδας συνεπαγωγής είναι ότι αποτελείται από τέσσερα έργα, τρία αναλογικά και ένα μη αναλογικό, στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη. Από αυτά τα δυσκολότερα είναι το έμμεσο μη αναλογικό έργο ορθογωνίου npmv1, καθώς και το άμεσο αναλογικό έργο pmv2 με μη ακέραιο λόγο. Επιτυχία στα έργα αυτά συνδέεται με επιτυχία στα έργα pmv1 και pmv3, τα οποία είναι άμεσα αναλογικά έργα με ακέραιο συναρτησιακό και αριθμητικό τελεστή, αντίστοιχα. Αντίστροφα, αποτυχία στα έργα pmv1 και pmv3 συνεπάγεται και αποτυχία στα έργα pmv2 και npmv1, σε επίπεδο σημαντικότητας 95%.



Διάγραμμα 46. Σχέσεις συνεπαγωγής με εντροπία ανάμεσα στις λύσεις των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας από τους μαθητές της Β' Γυμνασίου.

Η δεύτερη αλυσίδα συνεπαγωγής αποτελείται από δύο μη αναλογικά έργα, τα οποία παρουσιάζονται σε διαφορετικά δοκίμια μέσα από διαφορετικά πλαίσια. Η επιτυχία στο έμμεσο μη αναλογικά έργο σύγκρισης που αφορά στο σχήμα του κύκλου (npc2), συνδέεται με την επιτυχία στο χειρισμό της μη αναλογικής δήλωσης st5. Αντίστροφα, η αποτυχία των μαθητών να διακρίνουν ότι η συγκεκριμένη δήλωση είναι μη αναλογική, αλλά ορθά διατυπωμένη, συνδέεται με αποτυχία στο χειρισμό του έργου npc2.

Οι ευθείες σχέσεις συνεπαγωγής που προκύπτουν από τις λύσεις των μαθητών της Β' Γυμνασίου και οι οποίες παρουσιάζονται στο Διάγραμμα 47, κάνουν για πρώτη φορά ευδιάκριτο το σχηματισμό τριών αλυσίδων συνεπαγωγής με βάση αυτή τη φορά όχι τα αναλογικά ή μη αναλογικά χαρακτηριστικά των έργων αλλά το πλαίσιο παρουσίασής τους.

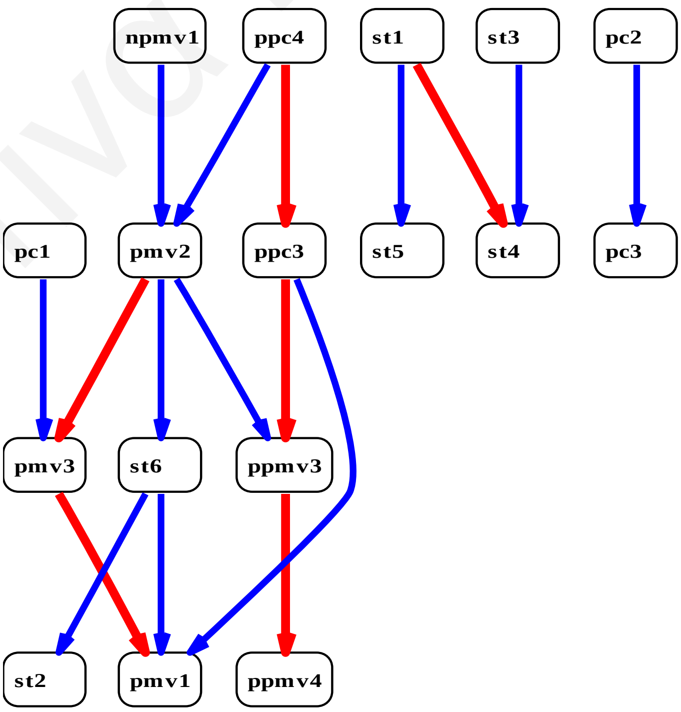


Διάγραμμα 47. Σχέσεις συνεπαγωγής 99% ανάμεσα στις λύσεις των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας από τους μαθητές της Β' Γυμνασίου.

Η πρώτη αλυσίδα συνεπαγωγής αποτελείται αποκλειστικά από τα έμμεσα αναλογικά έργα του Δοκιμίου ΙΙ, τα οποία αφορούν στην εύρεση της περιμέτρου ορθογωνίων και κυκλικών σχημάτων. Δυσκολότερο από τα έργα αυτά είναι το έργο σύγκρισης που αφορά στο κυκλικό σχήμα (ppc4), ενώ αντίστοιχα το ευκολότερο έργο για τους μαθητές της Β' Γυμνασίου είναι το αντίστοιχο έργο στο οποίο δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη (ppmv4). Η δεύτερη αλυσίδα συνεπαγωγής αποτελείται από τα τρία έργα του Δοκιμίου Ι στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη (pmv2, pmv3, pmv1), με την επιτυχία στο έργο pmv2 με μη ακέραιο λόγο, μαζί με την επιτυχία στο μη αναλογικό έργο npmv1 να συνδέεται με επιτυχία στα έργα pmv1 και pmv3. Τέλος, η τρίτη αλυσίδα συνεπαγωγής συνίσταται από δύο μη αναλογικές δηλώσεις του Δοκιμίου Ι, οι οποίες έχουν ως κοινό χαρακτηριστικό το μη ρεαλιστικό στοιχείο, όπου η επιτυχία στη st1 συνεπάγεται κατά 99% και επιτυχία στη δήλωση st4.

Οι συνεπαγωγικές αλυσίδες που προέκυψαν από το χειρισμό των έργων από τους μαθητές της Β' Γυμνασίου σε επίπεδο σημαντικότητας 99%, διατηρούνται και σε επίπεδο σημαντικότητας 95% (Διάγραμμα 48). Ειδικότερα, οι δύο συνεπαγωγικές αλυσίδες που αφορούσαν στα έμμεσα αναλογικά έργα του Δοκιμίου ΙΙ (ppc4, ppc3, ppmv3, ppmnv4), καθώς και τα αναλογικά έργα του Δοκιμίου Ι (pmv2, pmv3, pmv1), συνεχίζουν να υφίστανται αλλά συνδέονται τώρα μεταξύ τους με συνεπαγωγικές σχέσεις σε επίπεδο σημαντικότητας 95%. Σε αυτή την αλυσίδα συνεπαγωγής που αφορά πρώτιστα στα αναλογικά έργα, εμπλέκονται και οι δύο αναλογικές δηλώσεις του Δοκιμίου ΙΙ (st2, st6).

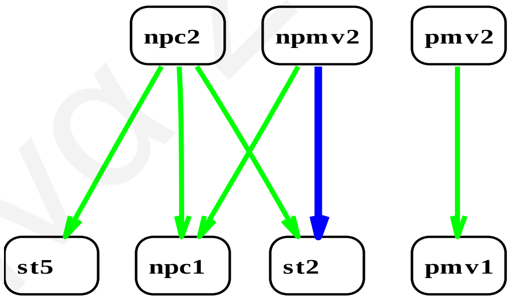
Στο Διάγραμμα 48, εμφανίζεται και μία δεύτερη αναλογική συνεπαγωγική αλυσίδα, η οποία αποτελείται αποκλειστικά από έργα σύγκρισης (pc2, pc3) που δε συνδέονται με σχέσεις συνεπαγωγής με τα υπόλοιπα αναλογικά έργα. Η τελευταία αλυσίδα συνεπαγωγής εμφανίζεται και σε επίπεδο σημαντικότητας 99% και αφορά στη σχέση ανάμεσα στις μη αναλογικές δηλώσεις st1 και st4. Σε αυτή την περίπτωση όμως εμπλουτίζεται και περιλαμβάνει σχέσεις συνεπαγωγής ανάμεσα σε όλες τις μη αναλογικές δηλώσεις του Δοκιμίου Ι.



Διάγραμμα 48. Σχέσεις συνεπαγωγής 95% ανάμεσα στις λύσεις των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας από τους μαθητές της Β' Γυμνασίου.

Οι ευθείες και αντιθετο-αντίστροφες σχέσεις που παρουσιάζονται στο Διάγραμμα 49 και οι οποίες προκύπτουν από την ενασχόληση των μαθητών της Γ’ Γυμνασίου με τα έργα των Δοκιμίων Ι και ΙΙ, διακρίνουν τα έργα σε δύο συνεπαγωγικές αλυσίδες. Η πρώτη αλυσίδα συνεπαγωγής, η οποία είναι και η ευρύτερη από τις δύο, αφορά πρώτιστα έργα τα οποία εμπεριέχονται στη διάσταση της μετα-αναλογικής ενημερότητας, με ένα από αυτά να είναι αναλογικό (δήλωση st2). Ειδικότερα, η επιτυχία στα έμμεσα μη αναλογικά έργα που αφορούν στο σχήμα του κύκλου, ανεξαρτήτως τρόπου παρουσίασης (npmv2, npc2), συνδέεται με την επιτυχία στο χειρισμό των δηλώσεων st2 και st5, καθώς και του έμμεσου μη αναλογικού έργου σύγκρισης για ορθογώνιο σχήμα (npc1). Αντίστροφα, η αποτυχία των μαθητών είτε να επιλύσουν το τελευταίο έργο npc1, είτε να διακρίνουν ότι οι δηλώσεις st2 και st5 είναι αναλογική και μη αναλογική αντίστοιχα, συνδέεται με αποτυχία στο χειρισμό των έργων npmv2 και npc2.

Η δεύτερη αλυσίδα συνεπαγωγής αποτελείται από μόνο δύο άμεσα αναλογικά έργα (pmv2, pmv1). Επιτυχία στο άμεσο αναλογικό έργο pmv2, στο οποίο ο λόγος δεν είναι ακέραιος συνεπάγεται επιτυχία στο έργο pmv1, το οποίο είναι άμεσο αναλογικό έργο με ακέραιο συναρτησιακό τελεστή. Αντίστροφα, αποτυχία στο συγκεκριμένο έργο (pmv1) συνεπάγεται και αποτυχία στο έργο pmv2 σε επίπεδο σημαντικότητας 90%.

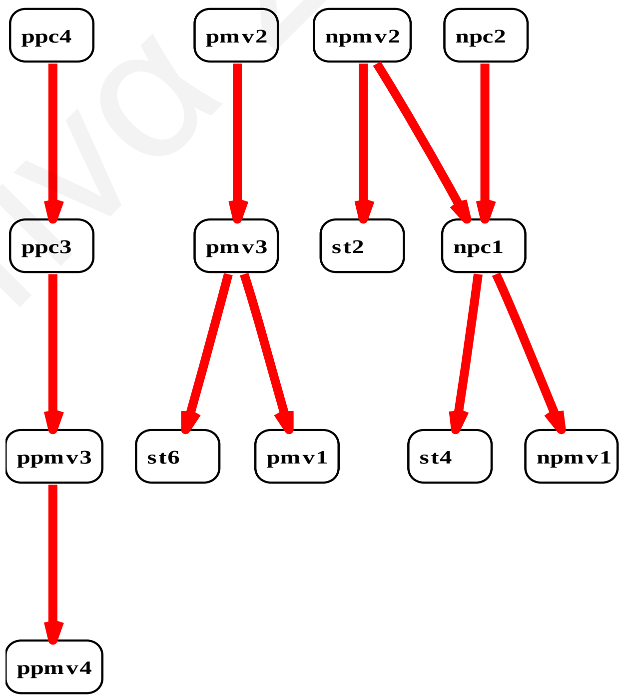


Διάγραμμα 49. Σχέσεις συνεπαγωγής με εντροπία ανάμεσα στις λύσεις των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας από τους μαθητές της Γ’ Γυμνασίου.

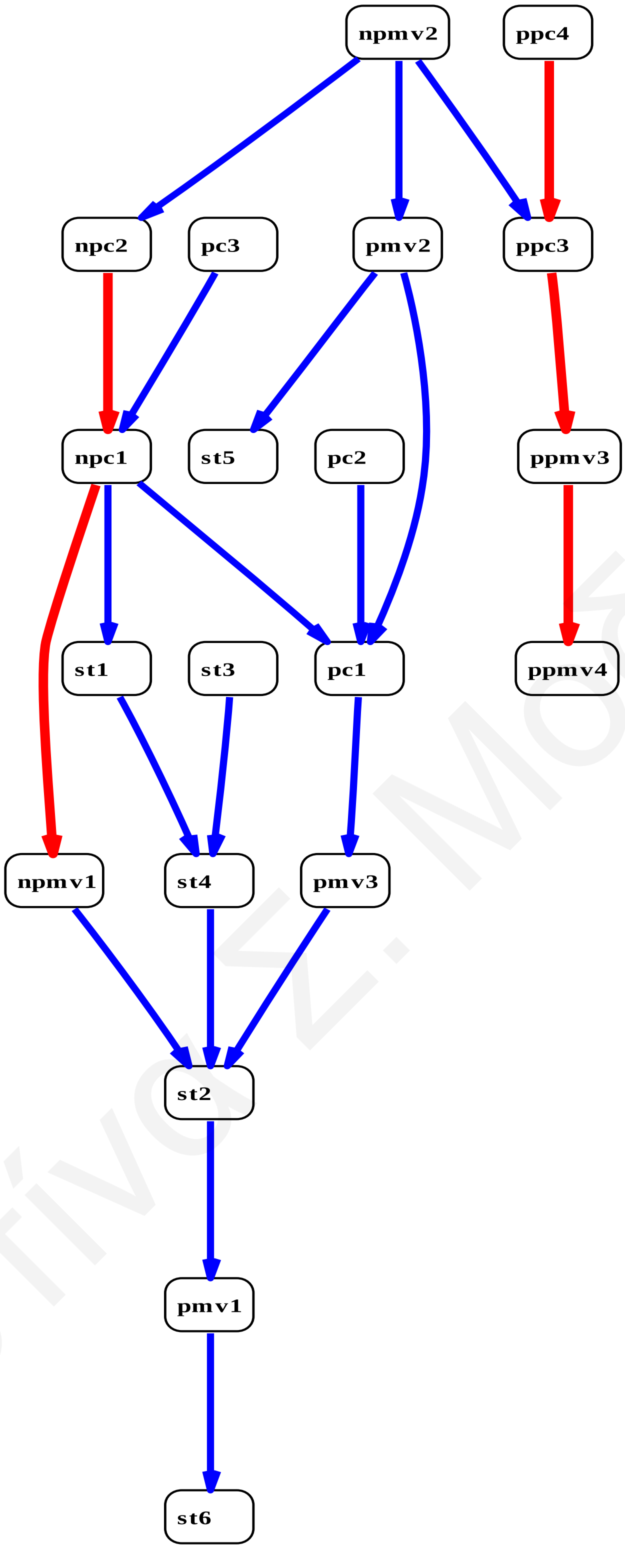
Το πλαίσιο παρουσίασης των έργων φαίνεται να επεμβαίνει όπως και στην περίπτωση της Β’ Γυμνασίου, στο σχηματισμό των ευθέων σχέσεων συνεπαγωγής που προκύπτουν από τις λύσεις των μαθητών της Γ’ Γυμνασίου. Συγκεκριμένα, η πρώτη αλυσίδα συνεπαγωγής δημιουργείται στο Διάγραμμα 50, όπως και στη Β’ Γυμνασίου, αποτελείται από όλα τα έμμεσα αναλογικά έργα του Δοκιμίου ΙΙ, τα οποία αφορούν στην εύρεση της περιμέτρου ορθογωνίων και κυκλικών σχημάτων. Δυσκολότερο από τα έργα αυτά είναι το έργο σύγκρισης που αφορά στο κυκλικό σχήμα (ppc4), ενώ το ευκολότερο έργο για τους μαθητές της Β’ Γυμνασίου είναι το αντίστοιχο έργο στο οποίο δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη (ppmv4).

Η δεύτερη αλυσίδα συνεπαγωγής αποτελείται από τα τρία έργα του Δοκιμίου Ι στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη (pmv2, pmv3, pmv1), με την επιτυχία στο έργο pmv2, το οποίο αφορά στην εύρεση μη ακέραιου λόγου, να συνδέεται με επιτυχία στα έργα pmv1 και pmv3, τo οποία είναι άμεσα αναλογικά έργα με ακέραιο συναρτησιακό και αριθμητικό τελεστή, αντίστοιχα. Στο τέλος αυτής της αλυσίδας βρίσκεται και η αναλογική δήλωση st6, η οποία συνδέεται με σχέσεις συνεπαγωγής με τα προηγούμενα άμεσα αναλογικά έργα.

Τέλος, η τρίτη αλυσίδα συνεπαγωγής συνίσταται από όλα τα έμμεσα μη αναλογικά έργα του Δοκιμίου ΙΙ, με τα δυσκολότερα να αφορούν στο σχήμα του κύκλου, ανεξαρτήτως τρόπου παρουσίασης (npmv2, npc2). Ο επιτυχής χειρισμός των έργων αυτών συνεπάγεται για τους μαθητές της Γ’ Γυμνασίου και επιτυχή χειρισμό των αντίστοιχων μη αναλογικών έργων σε ορθογώνιο σχήμα (npmv1, npc1), ενώ παράλληλα συνδέεται με την επιτυχία στο χειρισμό των επίσης μη αναλογικών δηλώσεων st2 και st4.



Διάγραμμα 50. Σχέσεις συνεπαγωγής 99% ανάμεσα στις λύσεις των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας από τους μαθητές της Γ’ Γυμνασίου.



Διάγραμμα 51. Σχέσεις συνεπαγωγής 95% ανάμεσα στις λύσεις των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας από τους μαθητές της Γ' Γυμνασίου.

Σε επίπεδο σημαντικότητας 95% (Διάγραμμα 51) όλα τα έργα των Δοκιμίων Ι και ΙΙ εμπλέκονται σε μία ενιαία αλυσίδα συνεπαγωγής, σχηματίζοντας ευθείες σχέσεις συνεπαγωγής με βάση τις απαντήσεις των μαθητών της Γ' Γυμνασίου. Ειδικότερα, η συνεπαγωγική αλυσίδα η οποία αποτελείται αποκλειστικά από τα έμμεσα αναλογικά έργα του Δοκιμίου ΙΙ (ppc4 -> ppc3 -> ppmv3 -> ppmv4), συνεχίζει να υφίσταται σε επίπεδο σημαντικότητας 99%, όπως και στο Διάγραμμα 53. Αντίστοιχα, στο ίδιο επίπεδο σημαντικότητας συνεχίζει να υφίσταται και η αλυσίδα συνεπαγωγής των έμμεσων μη αναλογικών έργων του ίδιου Δοκιμίου (npc2 -> npc1 -> npmv1). Η μόνη διαφορά είναι ότι και στις δύο αυτές περιπτώσεις οι συνεπαγωγικές αλυσίδες που περιγράφηκαν αποτελούν διακλαδώσεις της ευρύτερης αλυσίδας συνεπαγωγής, στην οποία περιλαμβάνονται όλα τα έργα των δύο δοκιμίων, ανεξαρτήτως του είδους και του πλαισίου παρουσίασής τους.

Σύγκριση αποτελεσμάτων κατά τάξη. Μελετώντας τα Διαγράμματα Συνεπαγωγής 37 - 51 μπορεί να εντοπιστεί μια σταδιακή αύξηση του αριθμού των σχέσεων που παρουσιάζονται στην αλυσίδες συνεπαγωγής με τη συμπερίληψη ολοένα και περισσότερων μη αναλογικών έργων. Ειδικότερα, όσον αφορά στα διαγράμματα με εντροπία, η βασική διαφορά εντοπίζεται στις σχέσεις συνεπαγωγής που παρατηρούνται στην Ε' Δημοτικού και οι οποίες αφορούν αποκλειστικά στα αναλογικά έργα. Αντίθετα, στις υπόλοιπες τέσσερις τάξεις η επίλυση των μη αναλογικών έργων που προκάλεσε τις περισσότερες δυσκολίες στους μαθητές, συνοδευόταν με ταυτόχρονη επίλυση των αντίστοιχων αναλογικών έργων. Αντίστροφα, η μη επίλυση των αναλογικών έργων ήταν συνώνυμη με αδυναμία επίλυσης των μη αναλογικών.

Στα διαγράμματα συνεπαγωγής που προέκυψαν με τη κλασσική μέθοδο, σε επίπεδο σημαντικότητας 99%, μόνο στη Γ' Γυμνασίου εμπλέκεται ένας σημαντικός αριθμός μη αναλογικών έργων. Τα έργα αυτά όμως δε συνδέονται με τη επίλυση των αναλογικών έργων σχηματίζοντας κατά συνέπεια μια διακριτή αλυσίδα συνεπαγωγής. Στις υπόλοιπες τάξεις εμφανίζονται μόνο οι μη αναλογικές δηλώσεις, οι οποίες πάλι δε σχετίζονται με τα υπόλοιπα αναλογικά έργα. Εξαίρεση αποτελεί και πάλι η Ε' Δημοτικού, στο διάγραμμα συνεπαγωγής της οποίας δεν εμφανίζεται κανένα μη αναλογικό έργο, υποδεικνύοντας την αδυναμία των μαθητών για χειρισμό των μη αναλογικών έργων. Αυτό επιβεβαιώνεται και από τα μηδενικά ποσοστά επιτυχίας στα συγκεκριμένα έργα.

Σε επίπεδο σημαντικότητας 95%, οι μη αναλογικές καταστάσεις, είτε υπό μορφή δηλώσεων είτε υπό μορφή έργων, περιλαμβάνονται στις αλυσίδες συνεπαγωγής. Αυτά τα μη αναλογικά έργα διακρίνονται από τα υπόλοιπα αναλογικά στις πρώτες τέσσερις τάξεις, ενώ εμφανίζονται σε μια ενιαία αλυσίδα συνεπαγωγής στη Γ’ Γυμνασίου, έχοντας μάλιστα σημαντική θέση αφού η επιτυχία σε αυτά συνεπάγεται επιτυχία στα υπόλοιπα αναλογικά έργα. Το γεγονός ενισχύει και τα προηγούμενα αποτελέσματα που δείχνουν ότι η διάσταση της μετα-αναλογικής ενημερότητας ξεκινά να ισχυροποιείται προς το τέλος του Γυμνασίου.

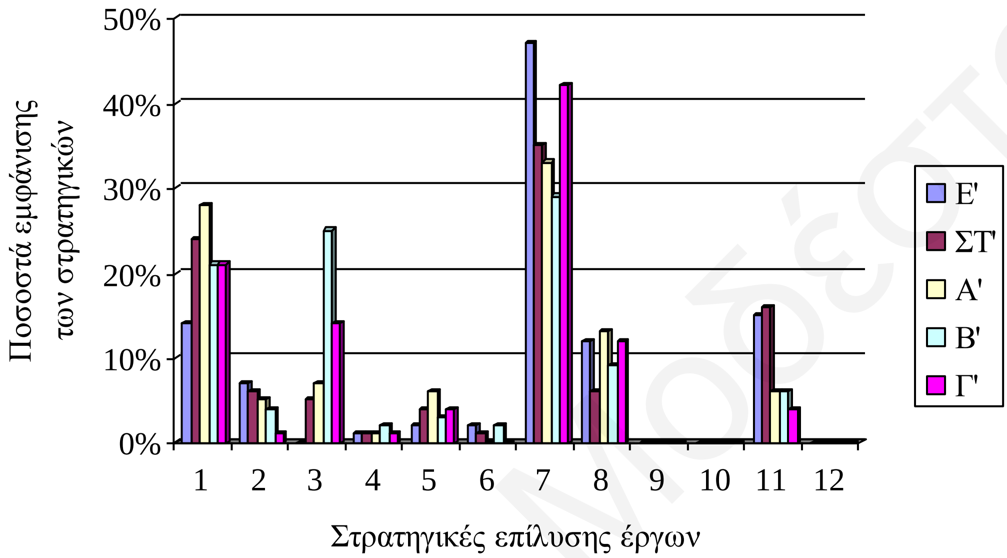
Μέρος Β’: Ανάλυση των Στρατηγικών Επίλυσης των Έργων

Περιγραφικά Στοιχεία Στρατηγικών

Πίσω από την επίλυση των έργων των Δοκιμίων κρύβεται η εφαρμογή μιας στρατηγικής, η οποία σε κάποιες περιπτώσεις είναι επιτυχής ενώ σε κάποιες άλλες αποτυγχάνει. Στα Διαγράμματα 52 μέχρι 57 που ακολουθούν, παρουσιάζονται τα ποσοστά χρήσης της κάθε στρατηγικής σε κάθε ομάδα έργων, όπως αυτές παρουσιάστηκαν στον Πίνακα 15. Τα ποσοστά αυτά παρουσιάζονται κατά τάξη, για να διαπιστωθεί κατά πόσο η εφαρμογή μιας συγκεκριμένης στρατηγικής είναι αποτέλεσμα όχι μόνο του είδους του έργου στο οποίο εφαρμόζεται, αλλά και της ηλικίας των μαθητών που την εφαρμόζουν.

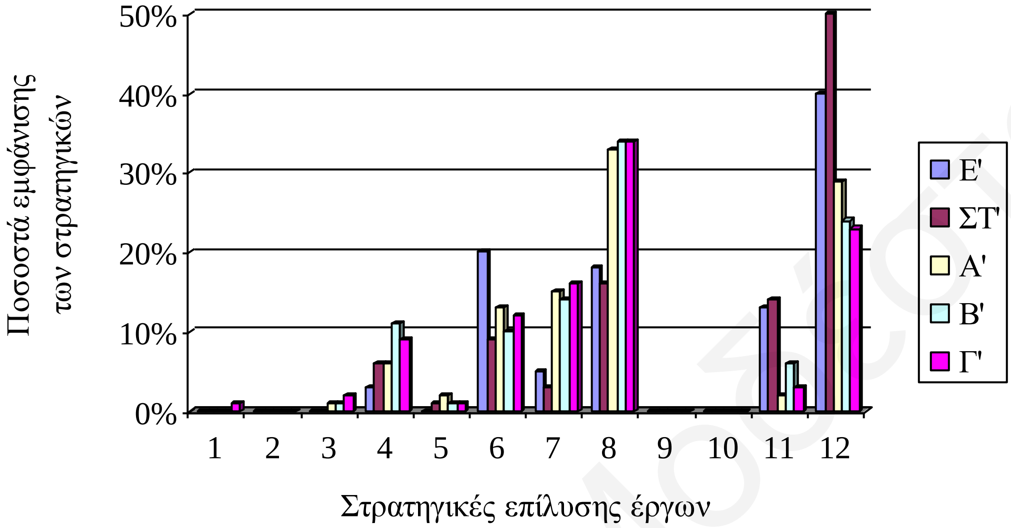
Αναλογικά Έργα

Το Διάγραμμα 52 παρουσιάζει τα ποσοστά εμφάνισης των διάφορων στρατηγικών κατά την επίλυση των άμεσων αναλογικών έργων στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη. Στην περίπτωση των έργων αυτών, η πλειοψηφία των μαθητών (29-47%), ανεξαρτήτως ηλικίας, δε καταγράφει τον τρόπο επίλυσης των έργων παρά μόνο δίνει μια απάντηση χωρίς αιτιολόγηση (στρατηγική 7). Ιδιαίτερη προτίμηση παρουσιάζει από όλους τους μαθητές και η στρατηγική της αναγωγής στη μονάδα (στρατηγική 1), με τους μαθητές της Α’ Γυμνασίου να έχουν το ψηλότερο ποσοστό εφαρμογής της (28%). Πολύ δημοφιλής ανάμεσα στους μαθητές της Β’ (25%) και Γ’ Γυμνασίου (14%) είναι η στρατηγική του εσωτερικού γινομένου (στρατηγική 3), γεγονός που αιτιολογείται από τη συστηματική διδασκαλία της στη Β’ Γυμνασίου. Παράλληλα, η στρατηγική αυτή δεν εμφανίζεται καθόλου στην Ε’ Δημοτικού. Τέλος, αρκετά ψηλό ήταν το ποσοστό των απαντήσεων των μαθητών, ειδικά της Ε’ (15%) και Στ’ Δημοτικού (16%) που δε μπορούσαν να καταχωρηθούν σε συγκεκριμένες κατηγορίες (στρατηγική 11), ενώ στα ίδια επίπεδα (10%) κυμάνθηκε και η απουσία οποιασδήποτε προσπάθειας λύσης των έργων από τους μαθητές (στρατηγική 8).



Διάγραμμα 52. Ποσοστά χρήσης της κάθε στρατηγικής, κατά τάξη, όπως προκύπτουν από την επίλυση άμεσων αναλογικών έργων στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη.

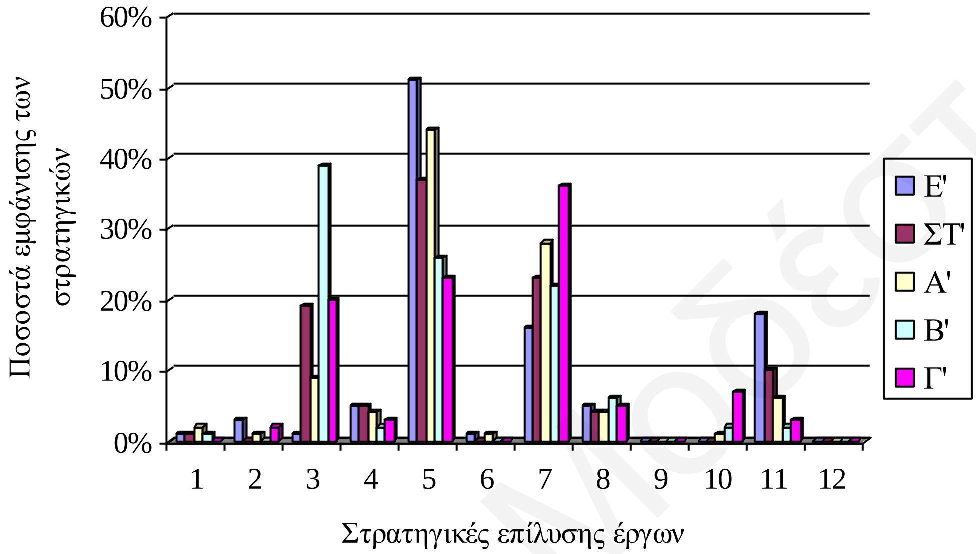
Τα έργα σύγκρισης προκάλεσαν τις περισσότερες δυσκολίες στους μαθητές. Επακόλουθο αυτού ήταν να προκύψουν και πολλές στρατηγικές, οι οποίες κάθε άλλο παρά υποβοηθητικές ήταν για την επίλυση των έργων αυτών (Διάγραμμα 53). Οι στρατηγικές αυτές ήταν όμοιες ανεξαρτήτως της ηλικίας των μαθητών, με μόνη διαφοροποίηση στο ποσοστό εμφάνισής τους. Η πλειοψηφία των μαθητών, ειδικά στην Ε’ (40%) και Στ’ τάξη (50%) του δημοτικού σχολείου έδειξε προτίμηση στην εφαρμογή μιας διαισθητικής στρατηγικής (στρατηγική 12) σύμφωνα με την οποία δύο ποσά είναι ανάλογα όταν είναι και ίσα. Σύμφωνα με τη στρατηγική αυτή, οι μαθητές πρότειναν ότι οι λεμονάδες των δύο παιδιών θα έχουν την ίδια γεύση μόνο αν έχουν ακριβώς την ίδια ποσότητα ζάχαρης και χυμού λεμονιού. Ταυτόχρονα, στην Ε’ Δημοτικού πολλοί ήταν οι μαθητές (20%) που κατέφυγαν σε μια προσθετική στρατηγική (στρατηγική 6) για να επιλύσουν τα αναλογικά έργα σύγκρισης, ενώ ένα 13% χρησιμοποίησε στρατηγικές που δεν μπορούν να καταχωρηθούν (στρατηγική 11). Στο Γυμνάσιο περίπου το 33% των μαθητών βρήκε τα συγκεκριμένα έργα σύγκρισης πολύ δύσκολα και δεν έδωσε καμία απάντηση (στρατηγική 8), ενώ το 15% των μαθητών της ίδιας ομάδας αρκέστηκε απλά στην παρουσίαση ενός αριθμού χωρίς αιτιολόγηση (στρατηγική 7).



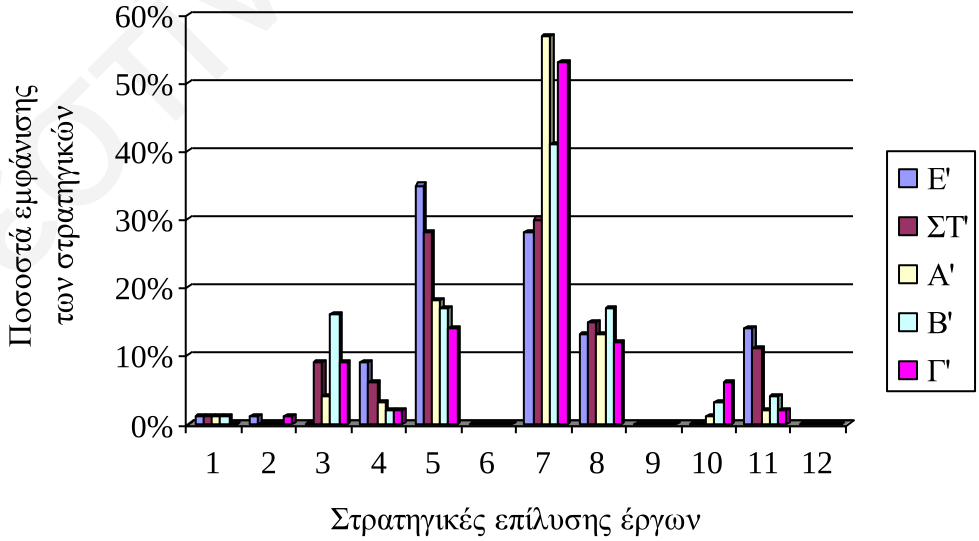
Διάγραμμα 53. Ποσοστά χρήσης της κάθε στρατηγικής, κατά τάξη, όπως προκύπτουν από την επίλυση άμεσων αναλογικών έργων σύγκρισης.

Στα έμμεσα αναλογικά έργα (Διάγραμμα 54) στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη, οι μαθητές έδειξαν ιδιαίτερη προτίμηση στην εφαρμογή των στρατηγικών του εσωτερικού γινομένου (στρατηγική 3), της εύρεσης του αριθμητικού τελεστή (στρατηγική 5), αλλά και της παρουσίασης ενός αριθμού χωρίς αιτιολόγηση (στρατηγική 7). Ειδικότερα, η πλειοψηφία των μαθητών της Ε' (51%) και Στ' Δημοτικού (37%), χρησιμοποίησε τη στρατηγική της εύρεσης του αριθμητικού τελεστή μέσα στο ίδιο μέτρο για να επιλύσει τα έμμεσα αυτά έργα. Στο γυμνάσιο οι μαθητές διαφοροποιήθηκαν με τους περισσότερους μαθητές της Α' (28%) και Γ' Γυμνασίου (36%) να παρουσιάζουν ένα αριθμό χωρίς αιτιολόγηση και τους μαθητές της Β' Γυμνασίου να δείχνουν σαφή προτίμηση (39%) προς τη στρατηγική του εσωτερικού γινομένου.

Στα έμμεσα αναλογικά έργα σύγκρισης (Διάγραμμα 55) παρατηρήθηκαν οι ίδιες στρατηγικές επίλυσης όπως και στα αντίστοιχα έργα όπου δίνονταν οι τρεις ποσότητες και ζητούνταν οι τέταρτη. Στην περίπτωση όμως αυτή μειώθηκαν κατά πολύ τα ποσοστά εμφάνισης των στρατηγικών του εσωτερικού γινομένου (στρατηγική 3) και της εύρεσης του αριθμητικού τελεστή (στρατηγική 5), με ταυτόχρονη αύξηση των ποσοστών εμφάνισης μιας απάντησης χωρίς αιτιολόγηση (στρατηγική 7). Συγκεκριμένα, το ποσοστό των μαθητών που απλά έδωσε ένα αριθμό για απάντηση ήταν 28% για την Ε’ Δημοτικού, 30% για τη Στ’ Δημοτικού, 57% για την Α’ Γυμνασίου, 41% για την Β’ Γυμνασίου και 53% για την Γ’ Γυμνασίου. Ταυτόχρονα περίπου το 15% των μαθητών κάθε τάξης δεν έδωσε καμία απάντηση στα συγκεκριμένα έργα.



Διάγραμμα 54. Ποσοστά χρήσης της κάθε στρατηγικής, κατά τάξη, όπως προκύπτουν από την επίλυση έμμεσων αναλογικών έργων στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη.

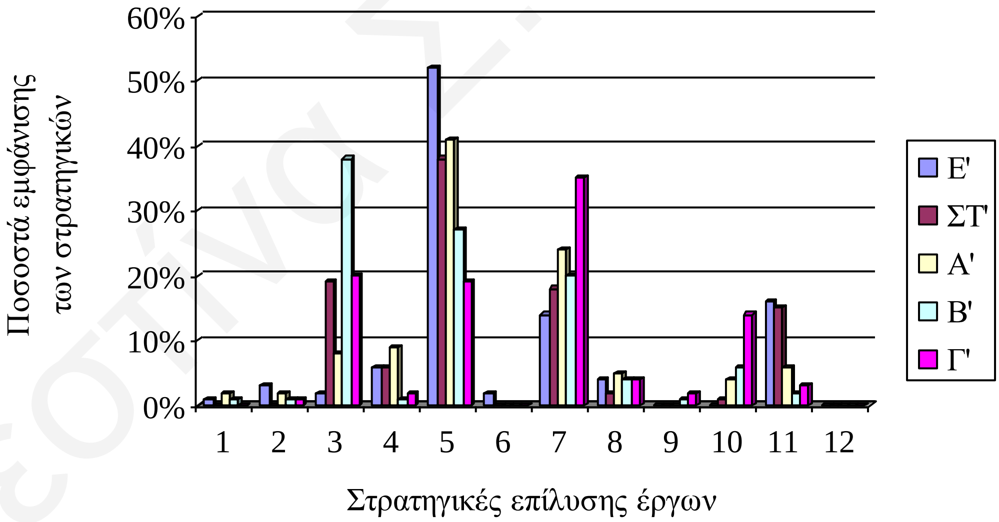


Διάγραμμα 55. Ποσοστά χρήσης της κάθε στρατηγικής, κατά τάξη, όπως προκύπτουν από την επίλυση έμμεσων αναλογικών έργων σύγκρισης.

Μη Αναλογικά Έργα

Στα δύο διαγράμματα που ακολουθούν (Διάγραμμα 56 και 57) παρουσιάζονται τα ποσοστά εμφάνισης των στρατηγικών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές για την επίλυση των έμμεσων μη αναλογικών έργων. Οι στρατηγικές που χρησιμοποιήθηκαν και στις δύο περιπτώσεις, τόσο των έργων στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες όσο και των έργων σύγκρισης, είναι αντίστοιχες με τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν οι μαθητές στα έμμεσα αναλογικά έργα. Το γεγονός αυτό υποδεικνύει την αδυναμία των μαθητών να διακρίνουν τα μη αναλογικά χαρακτηριστικά των καταστάσεων αυτών, εφαρμόζοντας ακριβώς τις ίδιες στρατηγικές επίλυσης όπως και στην περίπτωση των αναλογικών έργων.

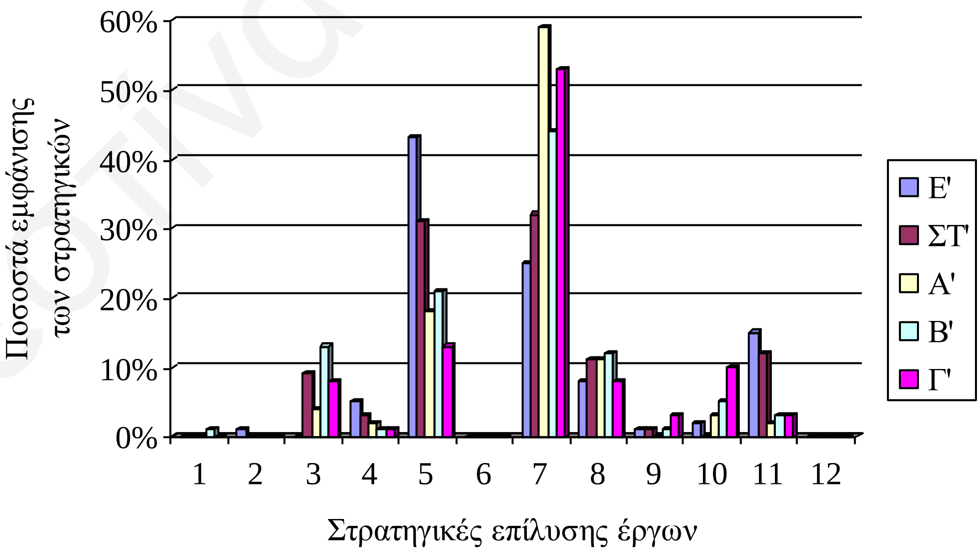
Η μόνη διαφοροποίηση που παρατηρείται στη χρήση των στρατηγικών είναι η εμφάνιση ειδικά στη Γ' Γυμνασίου, των στρατηγικών 9 και 10 που οδηγούν στην ορθή επίλυση των μη αναλογικών έργων, με εφαρμογή του γενικού κανόνα ή με εύρεση του εμβαδού του σχήματος και μετά εφαρμογή άμεσης αναλογίας, αντίστοιχα. Για το λόγο αυτό, αιτιολογούνται και τα υψηλότερα ποσοστά των μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου στα μη αναλογικά έργα σε σχέση με τους μικρότερους μαθητές.



Διάγραμμα 56. Ποσοστά χρήσης της κάθε στρατηγικής, κατά τάξη, όπως προκύπτουν από την επίλυση έμμεσων μη αναλογικών έργων στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη.

Ειδικότερα όσον αφορά στα έμμεσα μη αναλογικά έργα στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη, οι μαθητές της Ε' (52%) και Στ' (38%) Δημοτικού αλλά και της Α' Γυμνασίου (41%) δείχνουν προτίμηση στην εφαρμογή της αναλογικής στρατηγικής της εύρεσης του αριθμητικού τελεστή μέσα στο ίδιο μέτρο (στρατηγική 5). Οι μαθητές της Β' Γυμνασίου συνεχίζουν να χρησιμοποιούν συστηματικά τη στρατηγική του εσωτερικού γινομένου (38%), ενώ πολύ ψηλά παραμένουν και τα ποσοστά των μαθητών που επιλέγουν απλά να δώσουν μια απάντηση χωρίς αιτιολόγηση (στρατηγική 7). Τέλος, στις τρεις τελευταίες τάξεις του γυμνασίου οι μαθητές ξεκινούν να εφαρμόζουν τη στρατηγική της εύρεσης του εμβαδού του σχήματος και μετά εφαρμογή άμεσης αναλογίας (στρατηγική 10), με το ψηλότερο ποσοστό εμφάνισης της συγκεκριμένης στρατηγικής να εμφανίζεται στη Γ' Γυμνασίου (14%).

Στα έμμεσα μη αναλογικά σύγκρισης (Διάγραμμα 57) κυριαρχούν δύο στρατηγικές επίλυσης, οι οποίες διακρίνονται με βάση την ηλικία των μαθητών. Στο δημοτικό σχολείο οι περισσότεροι μαθητές (Ε:43%, Στ:31%) επιλέγουν την αναλογική στρατηγική της εύρεσης του αριθμητικού τελεστή μέσα στο ίδιο μέτρο (στρατηγική 5), ενώ και στις τρεις τάξεις του γυμνασίου (Α:59%, Β:44%, Γ:53%) η πλειοψηφία των μαθητών παρουσιάζει ως λύση των έργων ένα αριθμό χωρίς αιτιολόγηση (στρατηγική 7). Όπως και στην περίπτωση των έμμεσων μη αναλογικών έργων στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη, στη Γ' Γυμνασίου εμφανίζονται αρκετοί μαθητές (10%), οι οποίοι εφαρμόζουν τη στρατηγική της εύρεσης του εμβαδού του σχήματος και μετά άμεση αναλογία (στρατηγική 10) έχοντας έτσι και ορθά αποτελέσματα.



Διάγραμμα 57. Ποσοστά χρήσης της κάθε στρατηγικής, κατά τάξη, όπως προκύπτουν από την επίλυση έμμεσων μη αναλογικών έργων σύγκρισης.

Γενικά, από τα ποσοστά εμφάνισης των στρατηγικών επίλυσης των έργων και των τριών δοκιμίων μπορεί να διαφανεί ότι το είδος του έργου, το αν δηλαδή το έργο είναι αναλογικό ή μη αναλογικό δεν αποτελεί παράγοντα διαφοροποίησης των στρατηγικών που επιλέγουν να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές. Το γεγονός αυτό αποτελεί ένδειξη της αδυναμίας των μαθητών να διακρίνουν τα χαρακτηριστικά της προβληματικής κατάστασης και κατά συνέπεια να επιλέξουν την κατάλληλη στρατηγική. Το σκηνικό αυτό διαφοροποιείται σε μικρό βαθμό στη Γ’ Γυμνασίου με την εμφάνιση της στρατηγικής της εύρεσης πρώτα της περιμέτρου ή του εμβαδού του σχήματος, ανάλογα με το αν το έργο είναι αναλογικό ή μη αναλογικό, και μετά της εφαρμογής άμεσης αναλογίας. Η στρατηγική αυτή προσφέρει δυνατότητες άμεσης μοντελοποίησης της προβληματικής κατάστασης, καθοδηγώντας τους μαθητές προς την ορθή επίλυση των μη αναλογικών έργων.

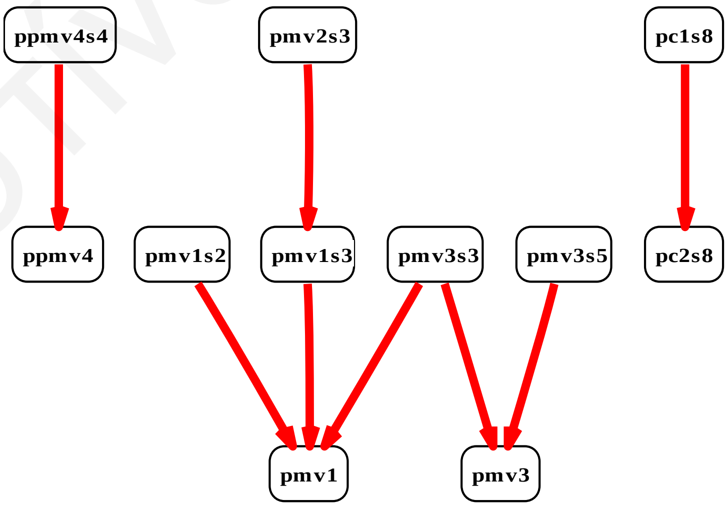
Αν και οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές δε διαφοροποιούνται με βάση το είδος του έργου, παρουσιάζουν διαφοροποίηση ανάλογη τόσο του πλαισίου μέσα στο οποίο παρουσιάζονται τα έργα, αλλά και της λεκτικής τους διατύπωσης. Οι μαθητές επιλέγουν διαφορετικές στρατηγικές για την επίλυση των αναλογικών έργων ανάλογα με το αν το έργο είναι άμεσο ή έμμεσο, αλλά και ανάλογα με το αν το έργο είναι σύγκρισης ή αν δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη. Πιο έντονες είναι οι διαφορές μέσα στο πλαίσιο των άμεσων αναλογικών έργων αφού στην περίπτωση αυτή παρουσιάζονται εντελώς διαφορετικές στρατηγικές, με τους μαθητές να δυσκολεύονται ιδιαίτερα στα έργα σύγκρισης και να καταφεύγουν σε πιο διαισθητικές στρατηγικές. Αντίθετα, στα έμμεσα αναλογικά έργα οι μαθητές δείχνουν προτίμηση σε κοινές στρατηγικές (εύρεση εσωτερικού γινομένου, αριθμητικού τελεστή) αλλά με διαφορετική συχνότητα ανάλογα με τη λεκτική διατύπωση του έργου.

Αποτελέσματα Συνεπαγωγικής Ανάλυσης

Σχέσεις Συνεπαγωγής Ανάμεσα στις Στρατηγικές Επίλυσης των Έργων και τα Ίδια τα Έργα

Τα συνεπαγωγικά Διαγράμματα 58-64 παρουσιάζουν τις σχέσεις που υπάρχουν ανάμεσα στις στρατηγικές επίλυσης των έργων που εμπίπτουν στις διαστάσεις του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και της μετα-αναλογικής ενημερότητας, και την επιτυχία ή αποτυχία στα συγκεκριμένα έργα, για διαφορετικές ομάδες μαθητών. Τα συνεπαγωγικά Διαγράμματα 58 και 59 αφορούν στους μαθητές του δημοτικού σχολείου και του γυμνασίου, αντίστοιχα, ενώ τα Διαγράμματα 60 - 64 παρουσιάζουν τις πιο πάνω σχέσεις για κάθε μια από τις πέντε τάξεις του δείγματος ξεχωριστά. Όλα τα διαγράμματα έχουν προκύψει από ανάλυση με τη μέθοδο της εντροπίας σε επίπεδο σημαντικότητας 99%, όπου ισχύουν τόσο οι ευθείες σχέσεις (p => q), όσο και οι αντιθετο-αντίστροφες (Όχι q => Όχι p).

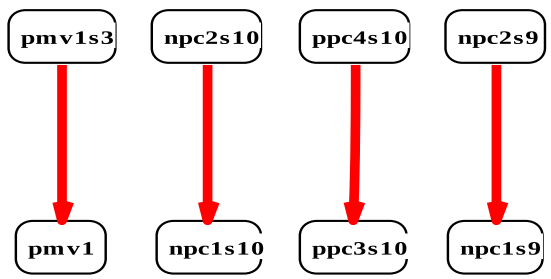
Στην ομάδα μαθητών του δημοτικού σχολείου, εντοπίζονται σχέσεις συνεπαγωγής μόνο ανάμεσα σε έργα αναλογικού συλλογισμού και τις αντίστοιχες στρατηγικές τους (Διάγραμμα 58). Παράλληλα, χαρακτηριστικές είναι και οι συνεπαγωγικές σχέσεις ανάμεσα σε όμοιες στρατηγικές εφαρμοζόμενες σε διαφορετικά έργα. Συγκεκριμένα, φαίνεται ότι η αδυναμία των μαθητών να δώσουν οποιαδήποτε απάντηση στο πρώτο άμεσο έργο σύγκρισης έχει ως αποτέλεσμα και ανάλογη αντιμετώπιση του δεύτερου αντίστοιχου έργου (pc1s8 -> pc2s8), το οποίο είναι δυσκολότερο λόγω της απουσίας ακέραιου λόγου. Κατά ανάλογο τρόπο, οι μαθητές χαρακτηρίζονται από κάποια συστηματικότητα ως προς την εφαρμογή της στρατηγικής του εσωτερικού γινομένου στα άμεσα αναλογικά έργα στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη. Η εφαρμογή της συγκεκριμένης στρατηγικής στο δυσκολότερο έργο με μη ακέραιο λόγο συνεπάγεται και την εφαρμογή της στο πιο εύκολο έργο με ακέραιο συναρτησιακό τελεστή (pmv2s3 -> pmv1s3).



Διάγραμμα 58. Σχέσεις συνεπαγωγής με εντροπία ανάμεσα στις στρατηγικές επίλυσης των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας και τα αντίστοιχα έργα, από τους μαθητές Δημοτικού.

Όσον αφορά στις σχέσεις στρατηγικών και έργων, φαίνεται ότι η επιλογή εφαρμογής της στρατηγικής του συναρτησιακού τελεστή ανάμεσα σε δύο ποσότητες, οδηγεί κατά 99% σε ορθή επίλυση του έμμεσου αναλογικού προβλήματος του Δοκιμίου ΙΙ που αναφέρεται στο σχήμα του κύκλου (ppmv4s4 -> ppmv4). Αντίστροφα, η αποτυχία των μαθητών να επιλύσουν το συγκεκριμένο έργο συνοδεύεται και με απουσία εφαρμογής της στρατηγικής του συναρτησιακού τελεστή. Η εφαρμογή δύο διαφορετικών στρατηγικών συνεπάγεται και ορθή επίλυση των άμεσων αναλογικών έργων, στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη. Στο πρώτο έργο pmv1, με ακέραιο συναρτησιακό τελεστή, η επιτυχία είναι αποτέλεσμα της εφαρμογής της στρατηγικής του εσωτερικού γινομένου και της στρατηγικής built-up (οικοδομώ). Στο τρίτο έργο pmv3, με ακέραιο αριθμητικό τελεστή, η επιτυχία είναι αποτέλεσμα της εφαρμογής της στρατηγικής τόσο του αριθμητικού τελεστή όσο και του εσωτερικού γινομένου.

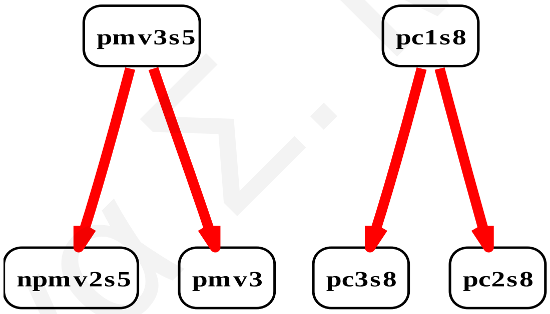
Στο γυμνάσιο, σε αντίθεση με το δημοτικό σχολείο, οι σχέσεις συνεπαγωγής ανάμεσα στις στρατηγικές εντοπίζονται τόσο σε αναλογικά έργα όσο και σε μη αναλογικά έργα (Διάγραμμα 59). Συγκεκριμένα, η εφαρμογή του γενικού κανόνα ότι το εμβαδόν τετραπλασιάζεται/ εννιαπλασιάζεται κλπ. όταν η πλευρά διπλασιάζεται/ τριπλασιάζεται κλπ. στο έμμεσο μη αναλογικό έργο κύκλου (npc2s9), συνεπάγεται κατά 99% εφαρμογή του ίδιου κανόνα και στο αντίστοιχο έργο ορθογωνίου (npc1s9). Κατά ανάλογο τρόπο, η εύρεση του εμβαδού και μετά εφαρμογή άμεσης αναλογίας ανάμεσα στις ποσότητες στο ίδιο έργο κύκλου (npc2s10), συνδέεται με την εφαρμογή της ίδιας στρατηγικής στο αντίστοιχο μη αναλογικό έργο ορθογωνίου (npc2s10). Με την ίδια σχέση συνεπαγωγής συνδέονται τα αντίστοιχα έμμεσα αναλογικά έργα σύγκρισης του ίδιου Δοκιμίου (ppc4s10 -> ppc3s10). Όσον αφορά στις σχέσεις ανάμεσα σε στρατηγικές και έργα, στο γυμνάσιο εντοπίζεται μόνο μία και αφορά στο πρώτο άμεσο αναλογικό έργο στο οποίο δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη. Η επιτυχία στο έργο αυτό είναι αποτέλεσμα της εφαρμογής της στρατηγικής του εσωτερικού γινομένου (pmv1s3 -> pmv1).



Διάγραμμα 59. Σχέσεις συνεπαγωγής με εντροπία ανάμεσα στις στρατηγικές επίλυσης των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας και τα αντίστοιχα έργα, από τους μαθητές Γυμνασίου.

Σχέσεις συνεπαγωγής κατά τάξη. Οι αλυσίδες συνεπαγωγής που προκύπτουν από την ανάλυση των στρατηγικών επίλυσης των έργων στην Ε’ Δημοτικού συνδέουν ως επί το πλείστον αναλογικά έργα (Διάγραμμα 60). Στην πρώτη αλυσίδα συνεπαγωγής η επιλογή της στρατηγικής του αριθμητικού τελεστή συνεπάγεται επιτυχία στην επίλυση του τρίτου άμεσου αναλογικού έργου pmv3, με ακέραιο λόγο μέσα στην ίδια ποσότητα. Ταυτόχρονα, η επιλογή της συγκεκριμένης στρατηγικής στο πιο πάνω έργο, οδηγεί κατά 99% σε εφαρμογή της αντίστοιχης στρατηγικής σε ένα μη αναλογικό έργο, χωρίς τα επιθυμητά αποτελέσματα (pmv3s5 -> npmv2s5).

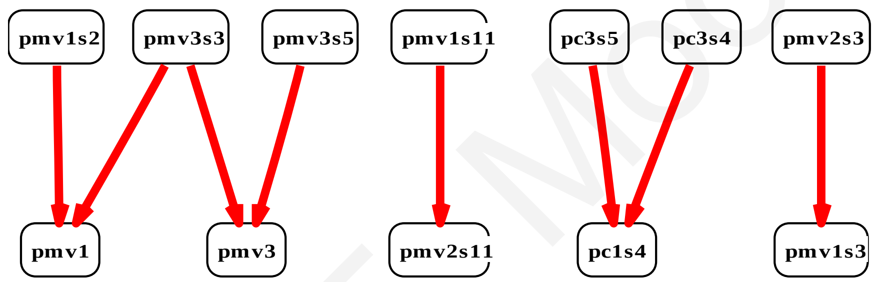
Χαρακτηριστικό της δεύτερης αλυσίδας συνεπαγωγής είναι η εμφάνιση μίας στρατηγικής σε όμοια αναλογικά έργα σύγκρισης, τα οποία προκάλεσαν και τις περισσότερες δυσκολίες στους μαθητές. Συγκεκριμένα, φαίνεται ότι η αδυναμία των μαθητών να δώσουν οποιαδήποτε απάντηση στο πρώτο άμεσο έργο σύγκρισης, το οποίο είναι ευκολότερο από τα υπόλοιπα, έχει ως αποτέλεσμα και ανάλογη αντιμετώπιση του δεύτερου και τρίτου αντίστοιχου έργου (pc1s8 -> pc2s8, pc1s8 -> pc3s8).



Διάγραμμα 60. Σχέσεις συνεπαγωγής με εντροπία ανάμεσα στις στρατηγικές επίλυσης των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας και τα αντίστοιχα έργα, από τους μαθητές της Ε’ Δημοτικού.

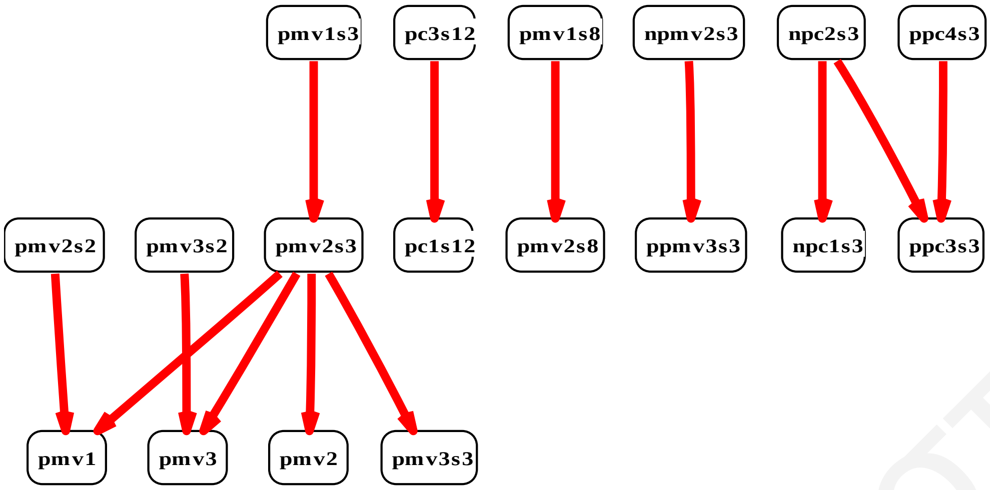
Στο Διάγραμμα 61 εντοπίζονται τέσσερις συνεπαγωγής αλυσίδες, οι οποίες αφορούν αποκλειστικά στρατηγικές και έργα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού, όπως αυτά επιλύθηκαν από τους μαθητές της Στ’ Δημοτικού. Η πρώτη συνεπαγωγική αλυσίδα αποτελείται από σχέσεις ανάμεσα σε άμεσα αναλογικά έργα και τις στρατηγικές επίλυσής τους. Συγκεκριμένα, στο πρώτο έργο pmv1, με ακέραιο συναρτησιακό τελεστή, η επιτυχία είναι αποτέλεσμα της εφαρμογής της στρατηγικής built-up (οικοδομώ). Στο τρίτο έργο pmv3, με ακέραιο αριθμητικό τελεστή αυτή τη φορά, η επιτυχία είναι αποτέλεσμα της εφαρμογής της στρατηγικής τόσο του αριθμητικού τελεστή όσο και του εσωτερικού γινομένου.

Στις άλλες τρεις αλυσίδες συνεπαγωγής οι σχέσεις εντοπίζονται στην εφαρμογή της ίδιας στρατηγικής σε διαφορετικά έργα με κοινά χαρακτηριστικά. Έτσι, η εφαρμογή μιας τυχαίας και μη ορθής στρατηγικής στο ευκολότερο άμεσο αναλογικό έργο, συνεπάγεται κατά 99% χρήση της ίδιας στρατηγικής στο αντίστοιχο έργο με μη ακέραιο λόγο ανάμεσα στις ποσότητες (pmv1s11 -> pmv2s11). Ταυτόχρονα, η επιλογή της στρατηγικής του αριθμητικού (pc3s5) ή συναρτησιακού τελεστή (pc3s4) στο τρίτο έργο σύγκρισής, συνδέεται με αντίστοιχη επιλογή της στρατηγικής του συναρτησιακού τελεστή στο πρώτο έργο σύγκρισης (pc1s4) του Δοκιμίου Ι. Η τελευταία αλυσίδα συνεπαγωγής συνδέει την ίδια στρατηγική του εσωτερικού γινομένου, όπως αυτή χρησιμοποιείται σε δύο άμεσα αναλογικά έργα στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη (pmv2s3 -> pmv1s3).



Διάγραμμα 61. Σχέσεις συνεπαγωγής με εντροπία ανάμεσα στις στρατηγικές επίλυσης των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας και τα αντίστοιχα έργα, από τους μαθητές της Στ' Δημοτικού.

Στην Α' Γυμνασίου παρατηρείται μια αύξηση στις σχέσεις συνεπαγωγής που εμφανίζονται, σε σχέση με τις δύο τάξεις του δημοτικού σχολείου (Διάγραμμα 62). Κύριο χαρακτηριστικό των σχέσεων αυτών είναι η εμπλοκή της στρατηγικής του εσωτερικού γινομένου σε διαφορετικές αλυσίδες, οι οποίες αφορούν στην επίλυση έργων που εμφανίζονται σε διαφορετικά πλαίσια. Συγκεκριμένα, στην πρώτη αλυσίδα συνεπαγωγής η στρατηγική του εσωτερικού γινομένου αφορά στην επίλυση άμεσων αναλογικών έργων στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη. Η εφαρμογή της στρατηγικής αυτής συνεπάγεται και κατά 99% την ορθή επίλυση των αντίστοιχων έργων. Κατά ανάλογο τρόπο, οι δύο τελευταίες αλυσίδες συνεπαγωγής συνδέουν τη χρήση της στρατηγικής του εσωτερικού γινομένου σε έμμεσα έργα στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη και σύγκρισης, αντίστοιχα, ανεξάρτητα από το αν τα έργα αυτά είναι αναλογικά ή μη αναλογικά.

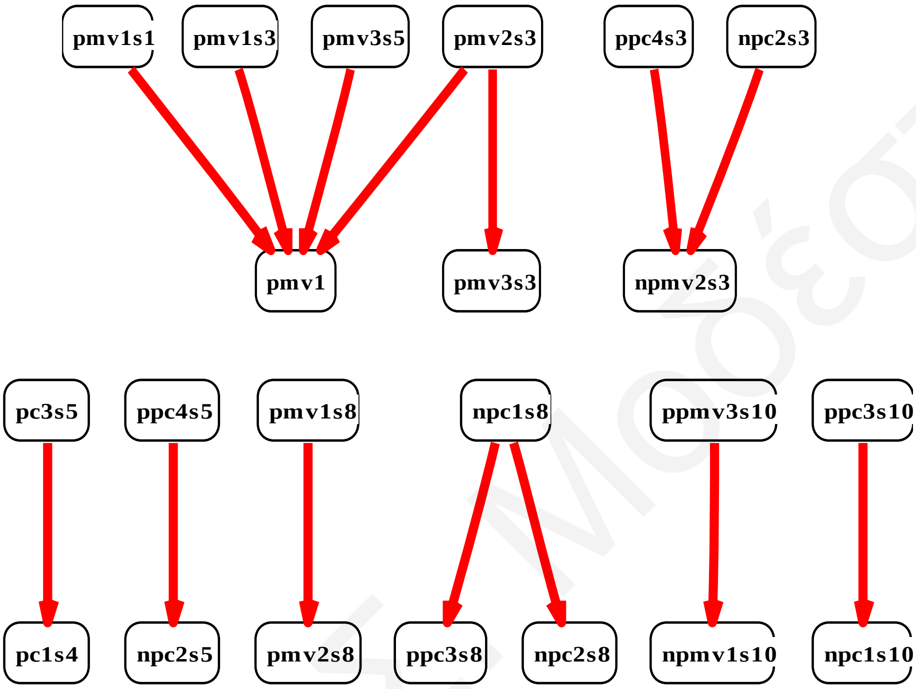


Διάγραμμα 62. Σχέσεις συνεπαγωγής με εντροπία ανάμεσα στις στρατηγικές επίλυσης των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας και τα αντίστοιχα έργα, από τους μαθητές της Α' Γυμνασίου.

Στο διάγραμμα συνεπαγωγής της Α' Γυμνασίου εμφανίζονται ακόμα δύο αλυσίδες, οι οποίες αφορούν στρατηγικές που δε συνδέονται με επιτυχή επίλυση των αντίστοιχων έργων. Ειδικότερα, η εφαρμογή μιας διαισθητικής στρατηγικής - η οποία υποδεικνύει ότι δύο ποσά είναι ανάλογα μόνο όταν είναι και ίσα - στο άμεσο αναλογικό έργο σύγκρισης με ακέραιο αριθμητικό τελεστή, συνδέεται με εφαρμογή της ίδιας στρατηγικής στο αντίστοιχο έργο με ακέραιο συναρτησιακό τελεστή (pc3s8 -> pc1s8). Τέλος, η αδυναμία των μαθητών να δώσουν οποιαδήποτε απάντηση στο άμεσο έργο σύγκρισης με ακέραιο συναρτησιακό τελεστή, έχει ως αποτέλεσμα και ανάλογη αντιμετώπιση του δεύτερου αντίστοιχου έργου με μη ακέραιο λόγο ανάμεσα στις ποσότητες (pc1s8 -> pc2s8).

Οι σχέσεις συνεπαγωγής που εντοπίζονται στο Διάγραμμα 63 αφορούν στην πλειοψηφία τους όμοιες στρατηγικές επίλυσης διαφορετικών έργων, από τους μαθητές της Β' Γυμνασίου. Μόνο μία αλυσίδα συνεπαγωγής συνδέει τις στρατηγικές με την επιτυχή επίλυση κάποιου έργου. Συγκεκριμένα, φαίνεται ότι είτε η εφαρμογή της στρατηγικής της αναγωγής στη μονάδα, είτε η στρατηγική του εσωτερικού γινομένου οδηγούν στην ίδια επιτυχημένη επίλυση του άμεσου αναλογικού έργου με ακέραιο συναρτησιακό τελεστή (pmv1s1, pmv1s3 -> pmv1).

Το ενδιαφέρον και διαφορετικό στοιχείο του διαγράμματος αυτού με τα διαγράμματα των προηγούμενων τάξεων, είναι ότι για πρώτη φορά συνδέονται όμοιες στρατηγικές εφαρμοζόμενες σε αναλογικά και μη αναλογικά έργα. Το σημαντικό στοιχείο σε αυτή τη σύνδεση είναι ότι η στρατηγική στο αναλογικό έργο βρίσκεται στο πρώτο μέρος της συνεπαγωγής και άρα συνεπάγεται την εφαρμογή της ίδιας στρατηγικής στο μη αναλογικό έργο. Στην περίπτωση των στρατηγικών του εσωτερικού γινομένου (ppc4s3 -> npmv2s3) και της εύρεσης του αριθμητικού τελεστή (ppc4s5 -> npc2s5), η επιτυχής εφαρμογή τους σε ένα αναλογικό έργο συνεπάγεται κατά 99% την εφαρμογή τους σε ένα μη αναλογικό έργο, με ακριβώς τα αντίθετα αποτελέσματα.

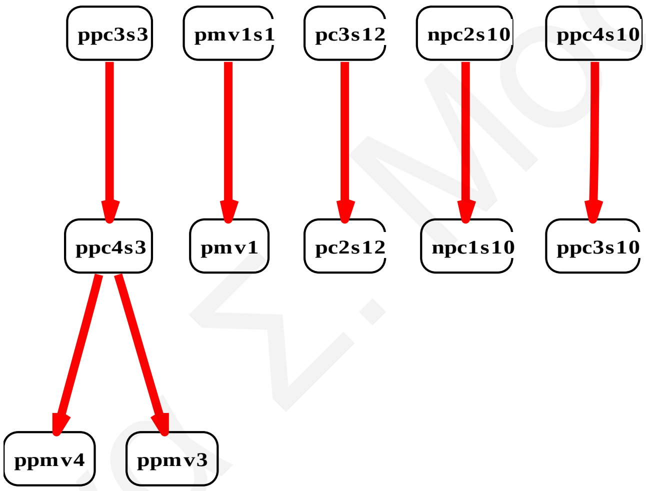


Διάγραμμα 63. Σχέσεις συνεπαγωγής με εντροπία ανάμεσα στις στρατηγικές επίλυσης των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας και τα αντίστοιχα έργα, από τους μαθητές της Β’ Γυμνασίου.

Στην περίπτωση της στρατηγικής της εύρεσης της περιμέτρου ή του εμβαδού του σχήματος και μετά εφαρμογής άμεσης αναλογίας, η ύπαρξη συνεπαγωγής ανάμεσα σε αναλογικό και μη αναλογικό έργο οδηγεί σε επιτυχημένα αποτελέσματα. Χαρακτηριστικό των δύο συνεπαγωγικών αλυσίδων που βασίζονται σε αυτή τη στρατηγική είναι το ότι διακρίνονται με βάση το πλαίσιο παρουσίασης του έργου, αν δηλαδή είναι σύγκρισης (ppc3s10 ->npc1s10) ή αν δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη (ppmv3s10 ->npmv1s10).

Το διάγραμμα συνεπαγωγής της Β’ Γυμνασίου ολοκληρώνεται με δύο αλυσίδες συνεπαγωγής, οι οποίες αναφέρονται στην αδυναμία των μαθητών να επιλύσουν τα έργα. Στις αλυσίδες αυτές τα έργα διακρίνονται με βάση το πλαίσιο παρουσίασής τους σε άμεσα (pmv1s8 -> pmv2s8) και έμμεσα έργα, με την αλυσίδα συνεπαγωγής των έμμεσων έργων να περιλαμβάνει τόσο αναλογικά όσο και μη αναλογικά έργα (npc1s8 -> ppc3s8, npc2s8).

Στο συνεπαγωγικό διάγραμμα της Γ' Γυμνασίου (Διάγραμμα 64) παρουσιάζονται πέντε αλυσίδες συνεπαγωγής, οι οποίες συνδέουν στρατηγικές επίλυσης έργων ίδιου είδους. Οι δύο πρώτες αλυσίδες συνεπαγωγής αφορούν στην επιτυχημένη επίλυση αναλογικών έργων. Ειδικότερα, η εφαρμογή της στρατηγικής του εσωτερικού γινομένου στα δύο έμμεσα αναλογικά έργα σύγκρισης του Δοκιμίου ΙΙ συνεπάγεται κατά 99% και επιτυχημένη επίλυση των αντίστοιχων έργων του ίδιου δοκιμίου, στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη. Παράλληλα, η χρήση της στρατηγικής της αναγωγής στη μονάδα στο άμεσο αναλογικό έργο με ακέραιο συναρτησιακό τελεστή, έχει ως αποτέλεσμα και την ορθή επίλυση του συγκεκριμένου έργου (pmv1s1-> pmv1).



Διάγραμμα 64. Σχέσεις συνεπαγωγής με εντροπία ανάμεσα στις στρατηγικές επίλυσης των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας και τα αντίστοιχα έργα, από τους μαθητές της Γ' Γυμνασίου.

Η τρίτη αλυσίδα συνεπαγωγής χαρακτηρίζεται από την εφαρμογή της διαισθητικής στρατηγικής, σύμφωνα με τη οποία δύο ποσά είναι ανάλογα όταν είναι και ίσα, σε δύο άμεσα αναλογικά έργα σύγκρισης (pc3s12 -> pc2s12). Η χρήση της συγκεκριμένης στρατηγικής στο έργο με ακέραιο αριθμητικό τελεστή που είναι ευκολότερο, συνεπάγεται και τη χρήση της στο έργο με μη ακέραιο λόγο, αλλά και αντίστροφα, η αποφυγή της διαισθητικής στρατηγικής στο τελευταίο και δυσκολότερο έργο, συνεπάγεται και αποφυγή της στο ευκολότερο.

Οι δύο τελευταίες αλυσίδες συνεπαγωγής αφορούν στη στρατηγική της εύρεσης του εμβαδού ή της περιμέτρου του σχήματος και μετά εφαρμογής άμεσης αναλογίας, αντίστοιχα. Ειδικότερα, στην τέταρτη αλυσίδα σχέσεων η συγκεκριμένη στρατηγική αφορά μόνο σε μη αναλογικά έργα και στην έννοια του εμβαδού (npc2s10 -> npc1s10), ενώ στην πέμπτη συνεπαγωγική αλυσίδα διακρίνονται μόνο αναλογικά έργα τα οποία αφορούν την έννοια της περιμέτρου (ppc4s10 -> ppc3s10).

Σύγκριση αποτελεσμάτων. Μελετώντας τα Διαγράμματα συνεπαγωγής 58 – 64 ως σύνολο, μπορεί να διαπιστωθεί μια σταδιακή αύξηση στις σχέσεις συνεπαγωγής που παρουσιάζονται ανάμεσα στις στρατηγικές και τα έργα, η οποία είναι αντίστοιχη της αύξησης της ηλικίας των μαθητών, με εξαίρεση τη Γ’ Γυμνασίου. Ενώ στις δύο τάξεις του δημοτικού σχολείου οι αλυσίδες συνεπαγωγής είναι περιορισμένες και αναφέρονται σε σχέσεις μόνο ανάμεσα στις στρατηγικές επίλυσης των αναλογικών έργων, στο γυμνάσιο οι σχέσεις εμπλουτίζονται τόσο με τη συμπερίληψη μη αναλογικών στρατηγικών όσο και αναλογικών στρατηγικών σε μη αναλογικά έργα.

Ειδικότερα, πρωτεύων ρόλο στην επίλυση των αναλογικών έργων από τη Στ’ Δημοτικού μέχρι τη Γ’ Γυμνασίου έχει η στρατηγική εύρεσης του εσωτερικού γινομένου. Παράλληλα, οι μαθητές χαρακτηρίζονται από συστηματικότητα ως προς την εφαρμογή της, αφού δημιουργούνται αλυσίδες συνεπαγωγής όπου η συγκεκριμένη στρατηγική εμφανίζεται ως μέσο επίλυσης της πλειοψηφίας των αναλογικών έργων, ανεξαρτήτως του πλαισίου παρουσίασης καθώς και της λεκτικής τους διατύπωσης. Στην Ε’ Δημοτικού, η στρατηγική της εύρεσης του εσωτερικού γινομένου δεν εμφανίζεται αφού οι μαθητές δεν την έχουν ακόμη διδαχτεί. Οι μικρότεροι μαθητές φαίνεται να βασίζονται περισσότερο στην εύρεση του αριθμητικού τελεστή μέσα στο ίδιο μέτρο, η οποία συνεχίζει να εμφανίζεται και στις υπόλοιπες τάξεις.

Στην Α’ και Β’ Γυμνασίου παρατηρούνται για πρώτη φορά σχέσεις συνεπαγωγής ανάμεσα σε όμοιες στρατηγικές εφαρμοζόμενες σε αναλογικά και μη αναλογικά έργα. Στην Α’ Γυμνασίου οι σχέσεις αυτές αφορούν αποκλειστικά στις αναλογικές στρατηγικές, ενώ στην Β’ Γυμνασίου εμπλέκονται και μη αναλογικές στρατηγικές. Το σημαντικό στοιχείο σε αυτή την περίπτωση είναι ο επηρεασμός ακόμα και αυτής της ηλικίας των μαθητών ως προς την επιλογή της στρατηγικής επίλυσης των μη αναλογικών έργων από τον αντίστοιχο χειρισμό ανάλογων αναλογικών έργων. Κατά κύριο λόγο η επιλογή αυτή οδηγεί τους μαθητές και σε λανθασμένα αποτελέσματα, με εξαίρεση την εφαρμογή τη στρατηγικής της εύρεσης της περιμέτρου του σχήματος και μετά εφαρμογής άμεσης αναλογίας, η οποία καθοδηγεί τους μαθητές προς την ορθή επίλυση των μη αναλογικών έργων. Το γεγονός αυτό υποδεικνύει την περιορισμένη ικανότητα που έχουν οι μαθητές των δύο πρώτων τάξεων του γυμνασίου στο να αναγνωρίσουν το αν μια προβληματική κατάσταση χαρακτηρίζεται από αναλογικά στοιχειά και άρα μπορεί ή όχι να επιλυθεί με την εφαρμογή του γραμμικού μοντέλου. Αντίθετα, στη Γ' Γυμνασίου η ικανότητα αυτή φαίνεται να ενισχύεται αφού οι επιλογές των μαθητών ως προς την επίλυση των μη αναλογικών έργων δεν επηρεάζονται από αλλά αναλογικά έργα αλλά από τα αντίστοιχα μη αναλογικά.

Πρόβλεψη της Μετα-Αναλογικής Ενημερότητας Μέσω Στρατηγικών

Τα διαγράμματα συνεπαγωγής, τα οποία προέκυψαν από τη συνεπαγωγική μέθοδο ανάλυσης, έδωσαν σαφή στοιχεία για τη σχέση τόσο ανάμεσα στις διάφορες στρατηγικές επίλυσης των έργων (αναλογικών και μη αναλογικών) όσο και ανάμεσα στις στρατηγικές και την επίλυση των ίδιων των έργων. Σε ένα μετέπειτα στάδιο η εφαρμογή της ανάλυσης της πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης έκανε δυνατό να διαφανεί κατά πόσο η εφαρμογή μιας συγκεκριμένης στρατηγικής επίλυσης μπορεί να προβλέψει την επιτυχή επίλυση συγκεκριμένων έργων. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η δυνατότητα πρόβλεψης της επίδοσης των μαθητών στην επίλυση των μη αναλογικών έργων που εμπίπτουν στη διάσταση της μετα-αναλογικής ενημερότητας, δεδομένης της εφαρμογής συγκεκριμένων στρατηγικών επίλυσης των αναλογικών έργων.

Η εφαρμογή της συγκεκριμένης ανάλυσης έδειξε ότι η εφαρμογή της στρατηγικής της εύρεσης της περιμέτρου στα έμμεσα αναλογικά έργα και μετά εφαρμογή άμεσης αναλογίας ανάμεσα στην περίμετρο και στην πλευρά του σχήματος (Στρατηγική 10) ερμηνεύει κατά 33% ($F=471.81$, $p<.001$) τη διασπορά της επίδοσης των μαθητών στα μη αναλογικά έργα. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι η Στρατηγική 10 προσφέρει δυνατότητες άμεσης μοντελοποίησης της προβληματικής κατάστασης και άρα καθοδηγεί τους μαθητές προς την ορθή επίλυση τόσο των αναλογικών όσο και των μη αναλογικών έργων. Κατά συνέπεια, οι μαθητές οι οποίοι κατασκευάζουν ένα σχέδιο για να επιλύσουν τα αναλογικά έργα τα οποία αναφέρονται στην περίμετρο των σχημάτων, χρησιμοποιούν στη συνέχεια με επιτυχία την αντίστοιχη στρατηγική για την επίλυση των μη αναλογικών έργων. Το γεγονός αυτό τους επιτρέπει να δουν για παράδειγμα ότι όταν η πλευρά του σχήματος θα διπλασιαστεί το εμβαδόν του θα τετραπλασιαστεί κ.ό.κ.

Για την εφαρμογή της διδακτικής κατάστασης χρησιμοποιήθηκε η Στ’2 τάξη του Α’ Δημοτικού Σχολείου Γερίου, στους 17 μαθητές της οποίας χορηγήθηκε το Δοκίμιο IV (Παράρτημα). Στο δοκίμιο αυτό περιλήφθηκαν έμμεσα μη αναλογικά έργα - καθώς και αναλογικά για σκοπούς περισπασμού - τα οποία αφορούσαν στις έννοιες του εμβαδού και της περιμέτρου, αντίστοιχα. Παράλληλα, περιλήφθηκαν και αντίστοιχα έργα υπό τη μορφή δηλώσεων. Έχοντας ως βάση την επίδοση όλων των μαθητών της συγκεκριμένης τάξης στο Δοκίμιο IV, επιλέγηκαν τέσσερις μαθητές (δύο αγόρια και δύο κορίτσια) οι οποίοι ικανοποιούσαν τα ακόλουθα κριτήρια:

- Δεν κατάφεραν να επιλύσουν ορθά κανένα έμμεσο μη αναλογικό έργο εμβαδού από τα τέσσερα έργα τα οποία περιλαμβάνονταν στο δοκίμιο.
- Για την επίλυση των τεσσάρων πιο πάνω έργων χρησιμοποίησαν αναλογικές στρατηγικές τις οποίες παρουσίασαν γραπτώς στο δοκίμιό τους, χωρίς να παραθέσουν απλά μια αριθμητική απάντηση χωρίς αιτιολόγηση.
- Απότυχαν στον καθορισμό του χαρακτήρα (αναλογικές - μη αναλογικές) των δηλώσεων του δοκιμίου.

Παράλληλα, έγινε προσπάθεια οι μαθητές αυτοί να διαφοροποιούνται ως προς την επίδοσή τους στα μαθηματικά για να διαφανεί η πραγματική επίδραση της διδακτικής κατάστασης. Τις δύο ομάδες των παιδιών που συμμετείχαν στην εφαρμογή της διδακτικής κατάστασης αποτέλεσαν ο Σάββας (επίδοση Α) με τον Αντρέα (επίδοση Β) και η Μαρίλια (επίδοση Γ) με τη Βλαδιμήρα (επίδοση Β).

Η διδακτική κατάσταση ξεκίνησε με την ομάδα των αγοριών οι οποίοι πέρασαν μέσα από τις καταστάσεις δράσης και διατύπωσης σε διαφορετικό χρόνο από τα κορίτσια. Ακολούθησε η ομάδα των δύο κοριτσιών, η οποία είχε ανάλογο πρόγραμμα με τα αγόρια. Στη συνέχεια οι δύο ομάδες συναντήθηκαν για την ολοκλήρωση του προγράμματος με τη διεξαγωγή των καταστάσεων επικύρωσης και θέσμισης-επισημοποίησης της γνώσης. Πιο κάτω παρατίθενται αναλυτικά όλα τα στάδια της διδακτικής κατάστασης και γίνεται μια προσπάθεια ερμηνείας των δράσεων των μαθητών με βάση το πλαίσιο της παρούσας ερευνητικής εργασίας.

Κατάσταση Δράσης (1)

Τα δύο αγόρια κάθονται σε δύο απέναντι θρανία έχοντας μπροστά τους κύβους Dienes και τα εννιά κόκκινα κουτιά και το ένα πράσινο κουτί, τα οποία κατασκευάστηκαν για τους σκοπούς της διδακτικής κατάστασης. Ταυτόχρονα, ενημερώνονται ότι επιλέγηκαν τυχαία για να παίξουν ένα παιχνίδι με κύβους και κουτιά, η επιτυχία του οποίου βασίζεται σε κάποιους βασικούς κανόνες οι οποίοι θα παρουσιάζονται κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού και θα πρέπει να τηρούνται.

*Δάσκαλος (Δ)***:** *Πάρτε μπροστά σας το πράσινο κουτάκι* (διαστάσεις 2x3x4) *και προσπαθήστε να μαντέψετε πόσους κύβους χωρεί μέσα. Πόσους κύβους χρειάζεται για να γεμίσει πλήρως;*

Σάββας (Σ): 32 κύβους

Δ: Πώς το σκέφτηκες;

Σ: 32 γιατί μπορεί να χωρεί τέσσερις σειρές και 2 προς τα πάνω.

Ο μαθητής στο σημείο αυτό κάνει σωστή εκτίμηση του μήκους του κουτιού (4cm) αλλά θεωρεί ότι το κουτί έχει τετράγωνη βάση. Οπότε το εμβαδόν της βάσης είναι 4 x 4 =16 cm^2 και άρα το κουτί χωρεί 2 x 16 = 32 cm^3, αφού έχει υπολογίσει ορθά το ύψος του κουτιού.

Αντρέας (Α): Συμφωνώ και εγώ. Είναι 32 γιατί έχει τέσσερις σειρές προς τα κάτω και δύο προς τα πάνω.

Δ: Τι εννοείτε όταν λέτε ότι έχει τέσσερις σειρές προς τα κάτω;

Σ: Έχει 16 η βάση και από πάνω του άλλους 16 (κύβους).

Α: Ναι 16 από πάνω και 16 από κάτω.

Δ: Δοκιμάστε το.

(Ξεκινούν και γεμίζουν το πράσινο κουτί)

Δ: Αν μπορείτε σε κάποια στιγμή να υπολογίσετε πόσους κύβους χωρεί μέσα το κουτί δε χρειάζεται να το γεμίσετε εντελώς.

Α και Σ (ταυτόχρονα): Είναι 24, γιατί γεμίζουν τρεις σειρές από τέσσερις και από πάνω μπαίνει ακόμα μια σειρά (δηλαδή ακόμα 12).

Οι μαθητές στο σημείο αυτό δεν γεμίζουν όλο το κουτί με κύβους. Αντίθετα, τοποθετούν όσους κύβους χρειάζεται για να υπολογίσουν το μήκος, το πλάτος και το ύψος του κουτιού και κάνουν στη συνέχεια τους υπολογισμούς τους έχοντας ως βάση το εμβαδόν της επιφάνειας του κουτιού.

Δ: Ωραία! Σας δίνω τώρα 48 κύβους...

Α: ...δηλαδή τους διπλάσιους...

Δ: Ακριβώς! Διαλέξτε ποιο από τα κόκκινα κουτιά χωρεί μέσα ακριβώς αυτούς τους 48 κύβους, χωρίς να τους βάλετε μέσα. Μπορείτε να έχετε μπροστά σας το πράσινο κουτί.

(Και οι δύο παίρνουν το κουτί με διαστάσεις 4 x 5 x 4)

Σ: Στο ύψος είναι διπλάσιο αυτό το κουτί αλλά στη χωρητικότητα δεν είναι ακριβώς διπλάσιο, δηλαδή το μέσα, το εμβαδόν δεν είναι διπλάσιο.

Ο Σάββας φαίνεται να μην έχει κάνει σαφή διάκριση μεταξύ των εννοιών του εμβαδού της βάσης και του όγκου, δηλαδή της χωρητικότητας του κουτιού σε κύβους.

Δ: Δοκιμάστε το.

(ξεκινούν και το γεμίζουν)

Α: (χωρίς να το γεμίσει πλήρως) Χωρεί περίπου 60.

Ο Αντρέας προχωρεί από μόνος του σε μια προσεγγιστική εκτίμηση των κύβων που χωρούν στα κουτιά γεγονός που του επιτρέπει πιο εύκολα να απορρίπτει πιθανές επιλογές.

Σ: Είναι 64. Η βάση χωρεί 16...

Α: Όχι η βάση χωρεί 20. Έχει 5 σειρές από 4 κύβους.

(Ο Σάββας τοποθετεί ακόμα ένα κύβο προς το ύψος του κουτιού χωρίς να το συμπληρώσει εντελώς)

Σ: Μέχρι τη μέση είναι 40 κύβοι.

Α: Όλοι είναι 80.

Α και Σ : Δεν είναι σωστό. Έπρεπε να ήταν 48.

Δ: Διαλέξτε άλλο κουτί κι έχετε μπροστά σας το πράσινο. Συγκρίνετε τα κουτιά μεταξύ τους.

Α: (Παίρνει ένα κουτί και τοποθετεί μέσα το πράσινο). Το χωρεί δύο φορές αλλά περισσεύει και χώρος.

Σ: Το βρήκα! Το εμβαδόν του είναι διπλάσιο. Έχει διπλάσιο μήκος αλλά το ύψος και το πλάτος του είναι το ίδιο.

Στο σημείο αυτό ο Σάββας έστω και άτυπα, κάνει το πρώτο βήμα για αμφισβήτηση της θέσης ότι όταν διπλασιάζεται ο όγκος ή το εμβαδόν διπλασιάζονται και όλες οι διαστάσεις του σχήματος. Παρόλα αυτά έχει ακόμη συγκεχυμένες τις έννοιες του εμβαδού και του όγκου.

Δ: Αντρέα δοκίμασέ το κι εσύ...

Α: (Τοποθετεί το πράσινο κουτί μέσα στο κόκκινο). Το χωρεί δύο φορές.

Σ: Χωρεί 48 κύβους. Έχει 4 στο πλάτος και 24 στη βάση και ακόμα τόσους από πάνω.

Στη συνέχεια οι μαθητές οδηγούνται στο παιχνίδι της κατάστασης διατύπωσης και τους ανάλογους κανόνες του.

Κατάσταση Διατύπωσης (1)

Δ: Ωραία! Τώρα θα παίξουμε ένα διαφορετικό παιχνίδι. Ο καθένας θα έχει μπροστά του αυτά τα κουτιά (τα κόκκινα και το πράσινο) αλλά όχι τους κύβους. Θα βάλω μπροστά σας ένα παραβάν έτσι ώστε ο ένας να μη βλέπει τον άλλο. Θα πω στο Σάββα ένα αριθμό κύβων, θα βρει ποιο κουτί τους χωρεί και μετά θα το περιγράψει στον Αντρέα. Σάββα, θα πρέπει να βρεις ένα τρόπο να το περιγράψεις στον Αντρέα χωρίς να του πεις τον αριθμό των κύβων που χωρεί αλλά ούτε και να χρησιμοποιήσεις τις λέξεις μεγάλο, ψηλό, κοντό, χαμηλό, λεπτό κόκ. Μετά θα κάνεις ακριβώς το ίδιο και εσύ Αντρέα. Τώρα μπορείς να κάνεις όποιες ερωτήσεις θέλεις στο Σάββα.

Ο εκπαιδευτικός γράφει τον αριθμό 96 σε ένα κομμάτι χαρτί και το δείχνει στο Σάββα. Ο Σάββας προσπαθεί να βρει τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στο 24 και στο 96 και στη συνέχεια να εντοπίσει το αντίστοιχο κόκκινο κουτί.

Σ: (χαμηλόφωνα)...είναι το τετραπλάσιο (το 96 από το 24).

Κάνοντας τους δικούς του υπολογισμούς ο Σάββας περνά επιτυχώς μέσα από μία κατάσταση δράσης και βρίσκει το ορθό κουτί (4x4x6). Για το σκοπό αυτό τοποθετεί το πράσινο κουτί μέσα στο κόκκινο για να βρει ποιο χωρεί ακριβώς τέσσερις φορές. Στη συνέχεια ξεκινά να το περιγράφει στον Αντρέα.

Σ: Οι κύβοι του κόκκινου είναι... Ου! (Θυμάται τον κανόνα του παιχνιδιού). Το πλάτος του κόκκινου είναι το τετραπλάσιο από το πλάτος του πράσινου...

(Ο Αντρέας δοκιμάζει και συγκρίνει τα κουτιά...)

Σ: Το μήκος του τετραγώνου είναι τέσσερις φορές πιο μεγάλο από το πλάτος του.

Στο σημείο αυτό γίνεται παρέμβαση από τον εκπαιδευτικό γιατί οι δύο μαθητές έχουν διαφορετική αναπαράσταση της έννοιας του μήκους. Ενώ ο Αντρέας χρησιμοποιεί ορθά την έννοια, ο Σάββας φαίνεται να έχει συγκεχυμένες τις έννοιες του μήκους, του πλάτους και του ύψους. Για το σκοπό αυτό κατασκευάζεται στον πίνακα ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο πάνω στο οποίο ορίζονται με τη βοήθεια μιας εικονικής αναπαράστασης οι έννοιες του μήκους, του πλάτους και του ύψους για να διευκολυνθεί η επικοινωνία ανάμεσα στους δύο μαθητές. Δυσκολίες παρόλα αυτά συνεχίζουν να υπάρχουν στην επικοινωνία ανάμεσα στους δύο μαθητές καθώς ο Σάββας χρησιμοποιεί τον όρο ‘τετράγωνο’ στη θέση του όρου ‘κουτί’.

Σ: Το μήκος του τετραγώνου (κουτί) είναι τέσσερις φορές πιο μεγάλο από το μήκος του πράσινου. Όχι περίμενε... είναι δύο φορές πιο μεγάλο.

Α: Ποιο τετράγωνο;

Σ: Το κόκκινο. Και το πλάτος του κόκκινου είναι το ίδιο με το μήκος του πράσινου.

(Ο Αντρέας δοκιμάζει και συγκρίνει τα κουτιά...)

Σ: Το εμβαδόν του κόκκινου.... Όχι το ύψους του είναι ...τέσσερις φορές... όχι... δύο φορές μεγαλύτερο από το ύψος του πράσινου.

Α: (μετά από δοκιμές) Το βρήκα! (το δείχνει)

Δ: Πόσους κύβους χωρεί;

Α: Χωρεί... 2 φορές μέσα το πράσινο το κουτί άρα 24 και 24...48 και ακόμα 48 από πάνω... 96. Έχει διπλάσιο το ύψος.

Ο εκπαιδευτικός γράφει τον αριθμό 72 σε ένα κομμάτι χαρτί και το δείχνει στον Αντρέα. Ο Αντρέας προσπαθεί να βρει τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στο 24 και στο 72 και στη συνέχεια να εντοπίσει το αντίστοιχο κόκκινο κουτί.

Α: (χαμηλόφωνα)...3 φορές το 24 κάνει 72.

Ο Αντρέας στη συνέχεια δυσκολεύεται πολύ να εντοπίσει το ορθό κουτί το οποίο χωρεί τους 72 κύβους. Αρχικά, επιλέγει το κουτί με διαστάσεις 12 x 9 x 6, προσέχοντας η κάθε διάσταση του κόκκινου κουτιού να είναι τριπλάσια από το αντίστοιχο μέγεθος του πράσινου κουτιού. Με αυτό τον τρόπο δείχνει τον επηρεασμό της πορείας λύσης που επέλεξε από το αναλογικό γραμμικό μοντέλο: Ο αριθμός κύβων που έχει μπροστά του είναι τριπλάσιος από τον αρχικό και για αυτό πρέπει να επιλέξει το κουτί που έχει όλες του τις διαστάσεις τριπλάσιες από τις διαστάσεις του αρχικού πράσινου κουτιού.

Ακολούθως, ο Αντρέας δοκιμάζει την επιλογή του με τους κύβους Dienes, η οποία και απορρίπτεται ως μη κατάλληλη αφού πριν ακόμη συμπληρώσει τη βάση του κουτιού ξεπερνά τους 72 κύβους. Βγάζοντας ένα επιφώνημα απογοήτευσης... Ουφ!... ξεκινά ξανά έχοντας μπροστά του το αρχικό πράσινο κουτί. Στη συνέχεια παίρνει ένα ένα τα υπόλοιπα κόκκινα κουτιά και δοκιμάζει να δει πόσες φορές χωρεί μέσα σε αυτά το αρχικό πράσινο κουτί, στρατηγική που εφάρμοσε και στο προηγούμενο παιχνίδι. Με τον τρόπο αυτό βρίσκει το ορθό κουτί (6x3x4) και αρχίζει να το περιγράφει στο Σάββα. Πρέπει να σημειωθεί ότι παρά το χρόνο που πήρε στον Αντρέα να βρει το ορθό κουτί για τους 72 κύβους, το περιέγραψε στο Σάββα με μεγάλη ευκολία και σε ελάχιστο χρόνο, πρώτιστα λόγω της ικανότητας χειρισμού συγκεκριμένων εννοιών.

Α: Το κόκκινο κουτί έχει το ίδιο μήκος και το ίδιο πλάτος με το πράσινο. Μόνο το ύψος του είναι τριπλάσιο από του πράσινου.

Σ: (ξεκινά και δοκιμάζει τα κουτιά)

Α: Μόνο το ύψος του είναι τριπλάσιο από του πράσινου.

Ο Αντρέας παρά την αρχική του δυσκολία ως προς την επιλογή του ορθού κουτιού για τους 72 κύβους, πρώτιστα λόγω της εμφάνισης της ψευδαίσθησης της αναλογίας, φαίνεται έστω και ασυνείδητα να τονίζει το τριπλασιασμό μόνο της μίας πλευράς για την επιλογή του κατάλληλου κουτιού από το Σάββα, και κατ’ επέκταση για τον τριπλασιασμό του αρχικού αριθμού των κύβων. Η παρατήρηση αυτή θεωρείται ιδιαίτερα κρίσιμη για την περαιτέρω εξέλιξη της διδακτικής κατάστασης αφού μπορεί να αποτελέσει έναυσμα για αμφισβήτηση του γραμμικού μοντέλου.

Σ: Ξέρω ποιο είναι!

Ο Σάββας βρίσκει το κόκκινο κουτί με μεγάλη ευκολία. Στη συνέχεια τοποθετεί μέσα σε αυτό το πράσινο κουτί και υπολογίζει ότι χωρεί μέσα 3 φορές.

Σ: Χρειαζόμαστε 72 κύβους...

Κατάσταση Δράσης (2)

Δάσκαλος: Έχετε μπροστά σας δύο πράσινα κουτιά (διαστάσεις 2x3x4)*, από ένα ο καθένας. Θέλω να κάνετε υποθέσεις για το πόσους κύβους χωρούν. Δοκιμάστε!*

Οι μαθήτριες διστάζουν πολύ να ξεκινήσουν, αλλά η Βλαδιμήρα βοηθά το παιχνίδι κάνοντας την πρώτη υπόθεση (έστω και εσφαλμένη).

Βλαδιμήρα (Β): 40 κύβους

Δ: Πώς το σκέφτηκες;

Β: Εδώ θα έχει 2 (στο ύψος), εδώ 5 (στο μήκος) και εδώ 4 (στο πλάτος).

Δ: Μαρίλια;

Μαρίλια (Μ): ...

Δ: Εντάξει... Δοκιμάστε το να δούμε τι βγαίνει. Αν θέλετε δε χρειάζεται να γεμίσετε όλο το κουτί με κύβους.

Στο σημείο αυτό παρουσιάζεται το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο σχήμα που ήδη υπάρχει στον πίνακα από τη συνάντηση με τον Αντρέα και το Σάββα και διευκρινίζονται οι έννοιες του μήκους, του πλάτους και του ύψους. Οι μαθήτριες ξεκινούν να γεμίζουν το πράσινο κουτί με κύβους αλλά σταματούν προτού να το γεμίσουν πλήρως.

Μ: θα έχει ύψος 2... και τέσσερις στο μήκος και τρεις στο πλάτος...

Δ: Άρα...

Μ: 12 μέσα... από κάτω... στο εμβαδόν...

Β: Όλοι θα είναι 24... (χωρίς να το έχει γεμίσει πλήρως)

Μ: Ναι θα έχει τους ίδιους (12) και από πάνω...

Δ: Ωραία! Τώρα θέλω να σκεφτείτε και να ψάξετε να βρείτε ποιο κουτί από τα κόκκινα χωρεί 48 κύβους, χωρίς να τους βάλετε μέσα.

Οι μαθήτριες δυσκολεύονται στο να πάρουν κάποια απόφαση και ο εκπαιδευτικός τους παροτρύνει να βρουν τη σχέση ανάμεσα στον αριθμό των κύβων του πράσινου κουτιού και στον αριθμό των κύβων που γυρεύουν.

Μ: Α! Ναι... είναι διπλάσιοι.

(Οι μαθήτριες ξεκινούν και συγκρίνουν τα κόκκινα κουτιά με το πράσινο κουτί)

Μ: Νομίζω είναι αυτό... (δείχνει το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις 6x4x4)

Δ: Γιατί;

Μ: Έχει διπλάσιο πλάτος... διπλάσιο ύψος... το μήκος του είναι το ίδιο.

Β: Εγώ νομίζω ότι αυτό (δείχνει το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις 8x6x4)... γιατί αυτό θα είναι 4 (δείχνει το ύψος), αυτό 6 (δείχνει το πλάτος) και αυτό 8(δείχνει το μήκος). Όλα είναι διπλάσια!

Και οι δύο μαθήτριες παρουσιάζουν από πολύ νωρίς ενδείξεις εμφάνισης του φαινομένου της ψευδαίσθησης της αναλογίας, αφού για τους διπλάσιους κύβους επιλέγουν κουτιά που έχουν είτε και τις δύο είτε και τις τρεις διαστάσεις διπλάσιες από το αρχικό κουτί.

Δ: Δοκιμάστε το... η καθεμία το δικό της κουτί.

Μ: Το πλάτος και το μήκος είναι 24... και επί 2 από πάνω 48.

Δ: Πρόσεξε πόσες φορές μπαίνει το 24 από πάνω...

Μ: (Τοποθετεί κύβους προς το ύψος και κάνει υπολογισμούς)...24 και 24... 48 και ακόμα 24... εεε.. 72 και 24...96... Είναι παραπάνω.

Β: Εμένα είναι 6 και 8 (οι διαστάσεις της βάσης)...χωρεί 48 αλλά έχει και 4 (σειρές στο ύψος) από πάνω...Δε γίνεται...

Μετά την αποτυχημένη τους προσπάθεια τα κορίτσια δοκιμάζουν ξανά με άλλα κουτιά. Αυτή τη φορά επιλέγουν το ορθό κουτί και εντοπίζουν τη διαφοροποίηση-διπλασιασμό μόνο της μιας πλευράς για να διπλασιαστεί η χωρητικότητα του κουτιού σε κύβους.

Μ: (δείχνει ένα άλλο κουτί) Το πλάτος είναι το ίδιο, το μήκος διπλασιάστηκε... και μετά 4 επί 6... 24 και επί 2...48.

Β: (κρατά το ίδιο κουτί με τη Μαρίλια)Το ύψος είναι το ίδιο, το πλάτος είναι το ίδιο. Άλλαξε το μήκος....6 επί 4... 24 και επί το ύψος 48.

Κατάσταση Διατύπωσης (2)

Δ: Ωραία! Τώρα θα παίξουμε ένα παιχνίδι. Θα πω στον καθένα ένα αριθμό κύβων. Για παράδειγμα θα πω στη Μαρίλια τον αριθμό 200. Η Μαρίλια πρέπει να βρει ποιο κουτί *χωρεί τους κύβους αυτούς και να σου το περιγράψει Βλαδιμήρα, χωρίς να σου πει τον αριθμό που έχω πει εγώ Μαρίλια, εσύ δε μπορείς να χρησιμοποιήσεις τις λέξεις μεγάλο, μικρό, ψηλό, κοντό κλπ. για να περιγράψεις το κουτί στη Βλαδιμήρα. Βλαδιμήρα, αν θέλεις να ρωτήσεις κάτι τη Μαρίλια κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού μπορείς. Μπροστά σας θα έχετε όλα αυτά τα κουτιά (τα κόκκινα και το πράσινο) αλλά δε θα βλέπετε η μια την άλλη. Όταν τελειώσει η Μαρίλια θα κάνουμε ακριβώς το ίδιο και με τη Βλαδιμήρα.*

Ο εκπαιδευτικός γράφει τον αριθμό 96 σε ένα κομμάτι χαρτί και το δείχνει στη Μαρίλια. Η Μαρίλια προσπαθεί να βρει τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στο 24 και στο 96 και στη συνέχεια να εντοπίσει το αντίστοιχο κόκκινο κουτί. Η πρώτη απόπειρα την οδηγεί στο κουτί με διπλάσιο μήκος, πλάτος και ύψος από το αρχικό (8x6x4).

Μ: (Σκέφτεται δυνατά) Πρέπει να βρω ένα κουτί που το χωρεί 4 φορές...

Η Μαρίλια εντοπίζει εύκολα ότι ο καινούριος αριθμός κύβων είναι τετραπλάσιος από τον αρχικό αλλά δυσκολεύεται στο αν εντοπίσει το κατάλληλο κουτί. Μετά από αρκετές προσπάθειες, οι οποίες συνοδεύονταν από την τοποθέτηση του αρχικού πράσινου κουτιού μέσα στα κόκκινα, η Μαρίλια βρίσκει το ορθό κουτί και το περιγράφει στη Βλαδιμήρα.

Μ: Το ύψος του είναι επί δύο...

Β: Ποιου;

Μ: Του κόκκινου... Το ύψος του κόκκινου είναι διπλάσιο από του πράσινου.

Μ: Το πλάτος του είναι διπλάσιο...

Β: Του κόκκινου από το πράσινο;

Μ: Ναι...

Η Βλαδιμήρα στο σημείο αυτό έχει αποκλείσει όλες τις υπόλοιπες επιλογές της και κατέληξε μόνο σε μία, στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις 8x6x4. Οι πληροφορίες που πήρε από τη Μαρίλια την οδήγησαν σε λανθασμένο αποτέλεσμα αφού η Μαρίλια χρησιμοποιούσε τις έννοιες του μήκους και του πλάτους ως ταυτόσημες. Το γεγονός αυτό δεν επέτρεψε στη Βλαδιμήρα να διακρίνει και κατ' επέκταση να συγκρίνει το μήκος του κόκκινου κουτιού με το πλάτος του πράσινου, οπότε το παιχνίδι δεν ολοκληρώνεται με επιτυχία. Η Μαρίλια ξεκινά ξανά την περιγραφή:

Μ: Το μήκος του είναι επί δύο...

Β: (Η Βλαδιμήρα ξεκινά να αντιδρά...) Ποιο... ποιου; (Εννοεί ποιου κουτιού)

Μ: Περίμενε...Το μήκος του κόκκινου είναι δύο φορές το μήκος... όχι το πλάτος του πράσινου.

Μ: (βλέπει στον πίνακα τα στοιχεία για το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο) Το ύψος του κόκκινου είναι το διπλάσιο...

Μετά τα καινούρια στοιχεία η Βλαδιμήρα εύκολα βρίσκει το ορθό κουτί. Τοποθετεί μέσα σε αυτό το αρχικό πράσινο κουτί και υπολογίζει ότι χωρεί 4 φορές...

Β: 24 και 24... 48 και 24... 72 και 24... 96.

Ο εκπαιδευτικός γράφει τον αριθμό 72 σε ένα κομμάτι χαρτί και το δείχνει στη Βλαδιμήρα. Η Βλαδιμήρα εύκολα βρίσκει ότι το 72 είναι το τριπλάσιο του 24 και προσπαθεί να βρει το κατάλληλο κουτί. Η πρώτη απόπειρα, φανερά επηρεασμένη από το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας, την οδηγεί στο κουτί με τριπλάσιο μήκος, πλάτος και ύψος από το αρχικό (12x9x6). Τοποθετεί μέσα στο κόκκινο κουτί το πράσινο και υπολογίζει ότι το χωρεί 27 φορές. Έτσι το απορρίπτει. Μετά από αρκετές προσπάθειες καταλήγει στο ορθό κουτί και το περιγράφει στη Μαρίλια. Εντοπίζει, ταυτόχρονα, όπως και στην περίπτωση των αγοριών, τη διαφοροποίηση μόνο της μίας πλευράς.

Β: Έχει ίδιο πλάτος και ίδιο μήκος... το ύψος του είναι τριπλάσιο.

Η Μαρίλια εύκολα καταλήγει στα δύο ορθογώνια παραλληλεπίπεδα με τριπλάσιο ύψος (4x3x6 και 4x4x6) και συγκρίνοντάς τα με το αρχικό κουτί βρίσκει το ορθό. Στη συνέχεια τοποθετεί το αρχικό πράσινο κουτί στην εξωτερική πλευρά του κόκκινου (στο ύψος) και κάνει τους υπολογισμούς της

Μ: 24 και 24... 48 και 24... 72. Χωρεί 72 κύβους!

Β: Σωστά!

Κατάσταση Επικύρωσης

Κατά τη διάρκεια της κατάστασης επικύρωσης οι δύο ομάδες μαθητών, του Αντρέα και του Σάββα και της Βλαδιμήρας και της Μαρίλιας ήρθαν αντιμέτωπες σε ένα παιχνίδι με ορθογώνια παραλληλεπίπεδα σχήματα, στο χώρο των δύο διαστάσεων αυτή τη φορά. Σκοπός του παιχνιδιού ήταν οι μαθητές να εντοπίσουν ποιο από τα οκτώ κουτιά είναι κατάλληλο για αριθμό κύβων ίσο με 32, 16 και 8. Οι αριθμοί αυτοί αντιστοιχούν στο

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ του αρχικού αριθμού των κύβων (64), ο οποίος ήταν το μόνο δεδομένο στοιχείο για τους μαθητές. Κάθε ομάδα είχε δικαίωμα για μία απάντηση την οποία έπρεπε να υποστηρίζει με κατάλληλα επιχειρήματα. Η αντίπαλη ομάδα είχε το δικαίωμα να απορρίψει ως λανθασμένη την απάντηση της άλλης ομάδας, διατυπώνοντας τη δική της άποψη. Κάθε σωστή και αιτιολογημένη απάντηση έπαιρνε μία μονάδα, ενώ νικήτρια αναδείχτηκε η ομάδα των μαθητών που μάζεψε τις περισσότερες μονάδες.

Δ: Αυτή τη φορά θα παίξουμε ένα διαφορετικό παιχνίδι, με τα σχήματα που έχετε μπροστά σας, τα αγόρια ενάντια στα κορίτσια. Το μόνο δεδομένο που θα σας πω είναι ότι αυτό το κουτί (8x4x2) χωρεί 64 κύβους. Στη συνέχεια θα σας πω ένα άλλο αριθμό κύβων και πρέπει στην ομάδα σας να βρείτε ποιο κουτί τους χωρεί αλλά λέγοντας και γιατί. Κάθε ορθή απάντηση παίρνει ένα βαθμό. Αν θέλετε μπορείτε να διαφωνήσετε με την αντίπαλη ομάδα. Είμαστε έτοιμοι; Τα καταλάβαμε;

Όλοι: Ναι.

Δ: Ωραία ξεκινούμε με τον αριθμό 32. Ποιο κουτί χωρεί 32 κύβους;

Τα παιδιά βλέπουν τα σχήματα και ξεκινούν να συζητούν μεταξύ τους. Η πρώτη ομάδα που αποφασίζει είναι τα αγόρια.

Α: Εμείς νομίζουμε ότι είναι το Ζ(4x4x2) γιατί η πλευρά αυτή είναι η ίδια με αυτή την πλευρά (δείχνει το πλάτος των σχημάτων) και η πλευρά αυτή είναι η μισή αυτής της πλευράς (δείχνει το πλάτος των σχημάτων).

Σ: Ναι... Το πλάτος είναι ακριβώς το ίδιο... Μόνο αυτή η πλευρά του μήκους είναι η μισή του.

Μ: Συμφωνούμε κι εμείς... υπάρχει ακόμα ένα...

Β: Ναι το Α(8x2x2)...γιατί το ύψος είναι το ίδιο...

Μ: Όχι το ύψος (του αρχικού) είναι το διπλάσιο από το ύψος του Α .

Β: Το μήκος είναι το ίδιο... και το πλάτος είναι το ίδιο.

Δ: Ωραία! Είμαστε 1-1. Να πάμε σε κάτι πιο δύσκολο. Ποιο κουτί χωρεί 16 κύβους;

Ο Αντρέας παίρνει και πάλι πρώτος το λόγο...

Α: Είναι το Γ(4x2x2)... Το χωρεί τέσσερις φορές μέσα στο αρχικό...

Μ-Β: Συμφωνούμε κι εμείς...

Δ: Εμένα όμως δε με πείθει καμία από τις δύο ομάδες γιατί δε χρησιμοποίησε επιχειρήματα...

Α: Αφού είναι το ¼... (ο Αντρέας επιμένει)

Μ: Ναι, αλλά γιατί;

Β: Γιατί το μήκος είναι τετραπλάσιο... (εννοεί το μήκος του αρχικού σχήματος)

Στο σημείο αυτό οι μαθητές ξεχνούν την ομάδα τους και εμπλέκονται σε μία συζήτηση μεταξύ τους χωρίς να εκπροσωπούν είτε τα αγόρια είτε τα κορίτσια αλλά την προσωπική τους άποψη.

Α: Δεν είναι τετραπλάσιο... Δες... (Ο Αντρέας τοποθετεί το σχήμα Γ πάνω από το αρχικό κουτί αντιπαραβάλλοντας τις διαστάσεις των δύο).

Β: Ναι... το μήκος είναι το διπλάσιο (το μήκος του αρχικού από το μήκος του σχήματος Γ) και το πλάτος είναι το διπλάσιο.

Σ: Διαφωνώ. Το πλάτος είναι τούτο εδώ (δείχνει το πλάτος στο σχήμα) και δεν είναι το διπλάσιο, είναι το ίδιο. Είναι το ύψος διπλάσιο!

Α: Ναι! Έχουμε διπλάσιο μήκος, διπλάσιο ύψος και το κουτί (το σχήμα Γ) μπαίνει 4 φορές μέσα!

Δ: Έχει κάποιο άλλο κουτί που είναι κατάλληλο για τους 16 κύβους;

Μ: Νομίζω το Β (2x2x2) γιατί...

Α: Δεν είναι το Β αφού το Γ είναι πιο μεγάλο του!

Σ: Εγώ πιστεύω είναι το Η (8x2x1) γιατί το ύψος του είναι τετραπλάσιο, το μήκος του είναι το ίδιο και το πλάτος του το ίδιο.

Δ: Ωραία...Ποιο κουτί χωρεί τώρα το 8 κύβους;

Α: Εύκολο. Είναι το Β (2x2x2) γιατί το χωρεί 2 φορές μέσα στο Γ που το χωρεί 4 φορές στο μεγάλο κουτί... Άρα το Β μπαίνει 8 φορές μέσα.

Σ: Το πλάτος είναι το ίδιο, το ύψος είναι διπλάσιο και το μήκος είναι τετραπλάσιο... 2x4=8…

Δ: Μπράβο!

Α: Ποιος νίκησε;

Δ: Έτσι όπως το παίξατε το παιχνίδι μάλλον κανένας... αν και τα αγόρια συμμετείχαν περισσότερο.

Κατά τη διάρκεια της κατάστασης επικύρωσης οι μαθητές ανακάλεσαν στη μνήμη τους ορισμένες από τις ενέργειες που εφάρμοσαν στην κατάσταση διατύπωσης και ήταν επιτυχημένες. Αυτές δεν είναι άλλες από τις περιπτώσεις όπου τόνιζαν τη διαφοροποίηση μόνο της μίας πλευράς του κουτιού, η οποία σχετιζόταν και με ανάλογη αλλαγή της χωρητικότητάς του σε κύβους. Αυτές τους οι παρατηρήσεις τους βοήθησαν να εντοπίσουν και να επικυρώσουν τη σχέση ανάμεσα στη διαφοροποίηση της πλευράς και στη διαφοροποίηση του όγκου του σχήματος, θέτοντας τα πρώτα θεμέλια για αμφισβήτηση του γραμμικού μοντέλου.

Πρέπει τέλος να σημειωθεί ότι η ομάδα των αγοριών, η οποία έλυσε ευκολότερα τα προβλήματα επικοινωνίας που προέκυψαν κατά τη διάρκεια της κατάστασης διατύπωσης, μπορούσε πολύ πιο εύκολα να χειριστεί τις καινούριες καταστάσεις και να επιχειρηματολογήσει υπέρ της άποψής της. Ταυτόχρονα, μπορεί να θεωρηθεί ότι αυτή η διαφορά που παρατηρήθηκε κατά τη διάρκεια της κατάστασης επικύρωσης, αλλά και κατά τη διάρκεια των άλλων δύο καταστάσεων ίσων να οφείλεται στη διαφορετική επίδοση που έχει κάθε μαθητής στα μαθηματικά και η οποία συνδέεται και με το ανάλογο μαθηματικό υπόβαθρο.

Κατάσταση Επισημοποίησης

Κατά τη διάρκεια της κατάστασης επισημοποίησης γίνεται μια προσπάθεια θέσμισης και γενίκευσης της γνώσης με τη μεταφορά της σε ένα διαφορετικό πλαίσιο. Το πλαίσιο αυτό συνίσταται από τα συνήθη λεκτικά έργα με τα οποία έρχονται καθημερινά αντιμέτωποι οι μαθητές και τα οποία έχουν ταυτίσει με την εφαρμογή συγκεκριμένων στρατηγικών επίλυσης.

Η κατάσταση ξεκινά με την παρουσίαση του πιο κάτω προβλήματος στους μαθητές: *«Η πισίνα στο σπίτι μου έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και χωρητικότητα 48m³ νερού. Πόση χωρητικότητα έχει το κολυμβητήριο Λευκωσίας αν έχει ακριβώς διπλάσιες διαστάσεις από την πισίνα μου;».* Οι μαθητές καλούνται να λύσουν προφορικά το πρόβλημα και να κάνουν αναφορά στην αυθόρμητη πορεία λύσης του προβλήματος που σκέφτηκαν πρωταρχικά.

Ο Αντρέας διαβάζει δυνατά το πρόβλημα και αμέσως, πριν προλάβει ακόμα να ολοκληρώσει την ερώτηση ακούγεται η πρώτη απάντηση, η οποία όπως αναμενόταν ήταν και αναλογική.

Σ: 96...

Α: 96 m³

Δ: Ωραία... Όλοι αμέσως σκεφτήκαμε το 96. Για ποιο λόγο;

Μ: Έχει το διπλάσιο...

Σ: Όχι διαφωνώ! Επειδή θα είναι και το μήκος και το πλάτος διπλάσιο... Άρα θα είναι επί 4!

Α: Και το ύψος θα είναι διπλάσιο...

Σ: Α ναι! Άρα θα είναι επί 6.

Μ-Β: Ναι συμφωνούμε και εμείς!

Στο σημείο αυτό οι μαθητές έστω κι αν όχι εντελώς ορθά δείχνουν να χρησιμοποιούν μέρος της γνώσης που θεωρήθηκε απαραίτητη για να αντεπεξέλθουν στην κατάσταση διατύπωσης, αλλά και η οποία χρησιμοποιήθηκε προηγούμενα στην κατάσταση επικύρωσης. Και οι τέσσερις συμφωνούν ότι η χωρητικότητα της πισίνας αποκλείεται να είναι διπλάσια από τη στιγμή που διπλασιάζονται όλες οι διαστάσεις, γεγονός που είναι ιδιαίτερα σημαντικό, έστω και αν συνδέουν τη διαφοροποίηση των διαστάσεων με προσθετική παρά με πολλαπλασιαστική σχέση.

Δ: Πάρτε το κουτί αυτό που χωρεί 48 κύβους και προσπαθήστε να φανταστείτε στο μυαλό σας το κουτί με διπλάσιες διαστάσεις...

Οι μαθητές χρησιμοποιώντας αυτή τη στρατηγική φτάνουν εύκολα στην ορθή απάντηση αφού σχηματίζουν στο μυαλό τους τη βάση με τέσσερα κουτιά και από πάνω τοποθετούν (νοητικά) ακόμη τέσσερα. Πρέπει παρόλα αυτά να σημειωθεί ότι σε πρώτη φάση εστιάζονται στο εμβαδόν αντί στη χωρητικότητα και τον όγκο. Στη συνέχεια όμως εντοπίζουν ότι το εμβαδόν της βάσης θα τετραπλασιαστεί και στη συνέχεια θα διπλασιαστεί, φτάνοντας η χωρητικότητα να είναι οκτώ φορές μεγαλύτερη από την αρχική.

Δ: Αν διπλασιαστεί μόνο το πλάτος, η χωρητικότητα γίνεται...

Όλοι: διπλάσια

Δ: Διπλασιάζεται και το μήκος...

Όλοι: ξαναδιπλασιάζεται, οπότε είναι 4 φορές μεγαλύτερη

Δ: και το ύψος...

Όλοι: ξαναδιπλασιάζεται... έτσι 4 x2=8

Δ: Τώρα διαβάστε το επόμενο πρόβλημα και πέστε μου τι είναι το πρώτο πράγμα που σκέφτεστε για να το λύσετε...

«*Αν 2 αυγά χρειάζονται 12 λεπτά για να βράσουν καλά, τότε πόσο χρόνο θα χρειάζονται 3 αυγά για να βράσουν στην ίδια θερμοκρασία;*». Το πρόβλημα που έχουν να αντιμετωπίσουν τώρα οι μαθητές, έχει διαφορετική φύση από το προηγούμενο αφού είναι μεν ανεξάρτητο από τη διδακτική κατάσταση αλλά παράλληλα επιστρατεύει και την ανάγκη εφαρμογής της κοινής λογικής για την επίλυσή του. Ο Αντρέας και η Βλαδιμήρα φαίνεται να έχουν αυτή τη «κοινή λογική», ενώ ο Σάββας χρησιμοποιεί τεχνικές αυτοματισμού και δίνει και πάλι μια αναλογική απάντηση.

Σ: 12 διά 2 κάνει 6 και επί 3... 18

Β: Ναι αλλά τα αυγά βράζουν μαζί... Είναι 12 τα λεπτά.

Α: Σωστά είναι στο ίδιο...

Δ: Ωραία... Βλέπω κάποιοι δεν έπεσαν στην παγίδα. Πάμε στο επόμενο...

«Στο διάδρομο του σχολείου υπάρχουν 2 τραπέζια ενωμένα μεταξύ τους και 10 καρέκλες γύρω τους. Ο δάσκαλος ενώνει τώρα 6 τραπέζια. Πόσες καρέκλες χωρούν γύρω από τα τραπέζια»

Μ: 26...

Α: Ναι... Βάλαμε 6 τραπέζια από 4 καρέκλες, 24 και δύο στις άκρες... 26.

Δ: Πώς θα μπορούσε να σκεφτεί διαφορετικά κάποιος για αυτό το πρόβλημα...

Α: Θα έλεγε ότι για 2 τραπέζια θέλω 10 καρέκλες. Άρα 5 καρέκλες για το καθένα. 6 φορές το 5, 30 καρέκλες!

Δ: Μπράβο! Οι περισσότεροι θα το έλυναν με αυτό τον τρόπο και όχι με το σωστό. Μπορείτε να αλλάξετε λίγο το πρόβλημα για να είναι η απάντησή του 30 καρέκλες;

Α: Αν 2 τραπέζια χωρούν 10 καρέκλες γύρω τους πόσες καρέκλες χωρούν 6 τραπέζια;

Δ: Δηλαδή τι αλλάξαμε;

Μ: το «ενωμένα»!

Δ: Ωραία! Αν δεν ήταν ενωμένα τα τραπέζια θα χωρούσαν τις 30 καρέκλες!

Το έργο αυτό δε χαρακτηριζόταν από κοινά στοιχεία με τη διδακτική κατάσταση. Παρόλα αυτά όλοι οι μαθητές κατάφεραν να διακρίνουν το μη αναλογικό του χαρακτήρα, συνεχίζοντας να παρέχουν ενδείξεις για την επιτυχία της όλης διδακτικής κατάστασης. Για να εξεταστεί κατά πόσο αυτή η ικανότητα ήταν επηρεασμένη από τη θεματική του παρεμβατικού προγράμματος δόθηκε στη συνέχεια ένα αναλογικό έργο στους μαθητές.

Δ: Πάμε στο επόμενο πρόβλημα...

«Ο κ. Μάριος χρειάζεται 4 μέρες για να σκάψει ένα αυλάκι γύρω από ένα τετραγωνικό χωράφι με πλευρά 100m. Πόσες μέρες θα χρειαστεί για να σκάψει ένα αυλάκι για χωράφι με τριπλάσιες διαστάσεις;»

Α: 12 μέρες;

Σ: 12 μέρες

Μ: Γιατί τριπλασιάζεται...

Α: Ναι... η πλευρά του είναι 100m μετά θα γίνει 300m και θα κάνουμε επί 3. Άρα 3 φορές το 4, 12 μέρες.

Δ: Γιατί θα κάνουμε επί 3 αυτή τη φορά;

Α: Επειδή θα σκάψει γύρω-γύρω.

Σ: Στην περίμετρο...

Δ: Μπράβο! Θα σας κάνω μία μικρή αλλαγή στο πρόβλημα και να μου πείτε αν θα αλλάξει κάτι.

«Ο κ. Μάριος χρειάζεται 4 μέρες για να φυτέψει ένα τετραγωνικό χωράφι με πλευρά 100m. Πόσες μέρες θα χρειαστεί για να φυτέψει ένα χωράφι με τριπλάσιες διαστάσεις;»

Β: Τώρα θα πάμε στο εμβαδόν.

Α: Σχηματίζονται 9 κομμάτια από 4 μέρες το καθένα...

Σ: 9x4=36 μέρες.

Δ: Μπράβο!

Οι μαθητές στο έργο αυτό όχι μόνο δεν επηρεάστηκαν από το μη αναλογικό είδος των προηγούμενων έργων αλλά διέκριναν τα αναλογικά του χαρακτηριστικά και το έλυσαν ορθά. Ταυτόχρονα, η ικανότητα των μαθητών να εντοπίσουν την αλλαγή στο έργο με τη διαφοροποίηση μόνο μιας λέξης (εμβαδόν) επιβεβαιώνει την επιτυχία της διδακτικής κατάστασης και την ενίσχυση της μετα-αναλογικής ενημερότητας των μαθητών.

Η Διδακτική Κατάσταση ως Συνάρτηση της Διαδικασίας Εκχώρησης

Η καταλληλότητα και η επιτυχία της συγκεκριμένης διδακτικής κατάστασης έγκειται στο ότι επιτεύχθηκε η εκχώρησή της στους μαθητές, οι οποίοι κατάφεραν να δράσουν, να συζητήσουν και να κινητοποιηθούν προς το επιθυμητό αποτέλεσμα μέσα από τα τέσσερα στάδια διαλεκτικής αλληλεπίδρασης. Η εκχώρηση αυτή δεν έγινε αυτόματα από τη πρώτη φάση της κατάστασης δράσης αλλά εμφανίστηκε σε διάφορα επίπεδα, τα οποία έκαναν δυνατή και τη σταδιακή αμφισβήτηση του αναλογικού μοντέλου. Στο πρώτο επίπεδο, το οποίο εμφανίστηκε κατά τη διάρκεια της κατάστασης δράσης, οι μαθητές εξέλαβαν τη διδακτική κατάσταση ως ένα παιχνίδι με κουτιά και κύβους στο οποίο απλά πρέπει να υπολογίζουν πόσους κύβους χωρεί το κάθε κουτί.

Στο δεύτερο επίπεδο επιτεύχθηκε η εκχώρηση της προτίμησης (Brousseau, 1997), με τους μαθητές να έχουν πλέον συνειδητοποιήσει ποιο είναι το επιθυμητό αποτέλεσμα και να προσπαθούν να βρουν το κατάλληλο κουτί για τους διπλάσιους κύβους. Αυτή τους η προσπάθεια χαρακτηρίστηκε έντονα από το στοιχείο της τύχης αφού κάποιοι επέλεγαν αυθαίρετα τα κουτιά και έλεγχαν την επιλογή τους. Η εκχώρηση της προτίμησης παρατηρήθηκε κυρίως προς το τέλος της κατάστασης δράσης αλλά και σε μερικές περιπτώσεις και κατά τη διάρκεια της κατάστασης διατύπωσης, όπου οι μαθητές μη μπορώντας να διατυπώσουν κάποια άλλη σχέση εκτός από την αναλογική κατέφευγαν στην τύχη.

Η εμφάνιση της τάσης των μαθητών να επιλέγουν κουτιά με διπλάσιες διαστάσεις όταν διπλασιαζόταν ο αριθμός των κύβων αποτελεί πρώτη ένδειξη της μετάβασης των μαθητών στο επόμενο επίπεδο εκχώρησης της κατάστασης, αυτό της αιτιακής σχέσης (Brousseau, 1993). Οι μαθητές θεωρούν την επιλογή τους (διπλάσιες διαστάσεις) ως μια εκλογή ανάμεσα σε διαφορετικές δυνατότητες, η οποία βασίζεται σε μια αιτία (διπλάσιοι κύβοι), η οποία στη συνέχεια απορρίπτεται ως λανθασμένη λόγω των συνθηκών του περιβάλλοντος της κατάστασης (Arsac et al., 1992). Σταδιακά οι μαθητές βλέποντας την αποτυχία αυτής της σχέσης αιτίας-αποτελέσματος εντοπίζουν εκείνες τις ενέργειές τους οι οποίες κατά τη φάση της κατάστασης διατύπωσης ήταν καταλληλότερες από άλλες. Αυτές δεν είναι άλλες από την επιλογή των κουτιών με διαφοροποίηση μόνο της μίας διάστασης.

Η διάκριση εκείνων των χαρακτηριστικών που είχαν οι επιτυχείς καταστάσεις διατύπωσης από τις οποίες πέρασαν οι μαθητές, τους έφερε στο τέταρτο επίπεδο της εκχώρησης, η οποία παρατηρήθηκε κατά τη διάρκεια της κατάστασης επικύρωσης. Οι μαθητές, λόγω ακριβώς της επίτευξης της εκχώρησης πρόβλεψης, μπορούσαν να προβλέψουν τη σχέση ανάμεσα στην απόφαση και το αποτέλεσμα χωρίς να είναι ανάγκη να επιβεβαιώσουν το αποτέλεσμά τους με τη μέτρηση κύβων. Έχοντας απορρίψει τη γραμμική σχέση ανάμεσα στη μεταβολή των διαστάσεων και τον όγκο, μπόρεσαν πολύ εύκολα να εντοπίσουν ποιο από τα κουτιά δύο διαστάσεων ήταν κατάλληλο για το $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ του αρχικού αριθμού των κύβων.

Η ολοκλήρωση της διδακτικής κατάστασης και η πλήρης εκχώρηση της στους μαθητές εμφανίστηκε στη φάση της επισημοποίησης με την ενασχόληση των μαθητών με καινούριες καταστάσεις (Brousseau, 1993). Οι μαθητές επιδεικνύοντας συνείδηση της δυνατότητας αναπαραγωγής των συνθηκών της κατάστασης και σε διαφορετικά πλαίσια αναγνώρισαν ότι και στην καθημερινή ζωή υπάρχουν καταστάσεις, οι οποίες φαίνεται να είναι αναλογικές, αλλά στην πραγματικότητα δεν είναι. Κατά συνέπεια, μπόρεσαν και εντόπισαν εκείνες τις συνθήκες που πιθανόν να διαφοροποιούν μια αναλογική από μια μη αναλογική κατάσταση, υποδεικνύοντας την επιτυχή ολοκλήρωση της διδακτικής κατάστασης.

Η συμβολή της εφαρμογής της διδακτικής κατάστασης φαίνεται και μπορεί να αναλυθεί σε δύο διαστάσεις. Από τη μια έγινε φανερό ότι όταν επιτευχθεί η εκχώρηση μιας διδακτικής κατάστασης στους μαθητές είναι δυνατή η υπέρβαση του επιστημολογικού εμποδίου. Το γεγονός αυτό θεωρείται σημαντικό από μόνο του αν ληφθούν υπόψη οι διάφορες αποτυχημένες προσπάθειες διδακτικής παρέμβασης στο θέμα αυτό που αναφέρονται από τη βιβλιογραφία (De Bock et al, 1998, 2002b, 2003; Van Dooren et al., 2004a, 2005b). Από την άλλη, ένα βασικό στοιχείο που διαχωρίζει την παρέμβαση αυτή από τις άλλες είναι ο ακριβής προσδιορισμός των συνθηκών κάτω από τις οποίες είναι δυνατή η αναπαραγωγή μιας κατάστασης.

Οι μαθητές μέσα στα πλαίσια της διδακτικής κατάστασης που εφαρμόστηκε, και ειδικά μέσα από τις καταστάσεις διατύπωσης και επικύρωσης, συνειδητοποίησαν τις συγκεκριμένες συνθήκες κάτω από τις οποίες εμφανίζεται το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας. Αυτό έκανε πιο εύκολη την αντιμετώπιση των προβλημάτων που εμφανίζονται ως αποτέλεσμα του φαινομένου, αφού οι μαθητές ήταν σε θέση να διακρίνουν εκείνα τα στοιχεία τα οποία είναι χαρακτηριστικά των μη αναλογικών καταστάσεων και οδηγούν στη λανθασμένη χρήση του αναλογικού μοντέλου. Ο προσδιορισμός των συνθηκών εμφάνισης του φαινομένου της ψευδαίσθησης της αναλογίας από τους ίδιους τους μαθητές είναι κάτι που επιτυγχάνεται για πρώτη φορά. Οι προηγούμενες προσπάθειες αντιμετώπισης του φαινομένου (De Bock et al, 1998, 2002b, 2003; Van Dooren et al., 2004a, 2005b), εστιάστηκαν στην απόρριψη της πανάκειας του γραμμικού μοντέλου, αλλά απέτυχαν στο να αυξήσουν την ικανότητα καθορισμού της φύσης της προβληματικής κατάστασης από τους μαθητές. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα την εφαρμογή μη αναλογικών στρατηγικών σε αναλογικά έργα ή αναλογικών στρατηγικών σε μη αναλογικά έργα (De Bock et al, 2002b; Van Dooren et al., 2004a). Κατά συνέπεια φαίνεται ότι η απόκτηση μιας μαθηματικής γνώσης από τους μαθητές εξαρτάται περισσότερο από τη συνειδητοποίηση των συνθηκών ακριβούς αναπαραγωγής μιας διδακτικής κατάστασης, παρά από την επανάληψη μιας τυπικής διδασκαλίας με την οποία οι μαθητές έχουν ήδη πρόβλημα (Brousseau, 1997).

Περίληψη

Στο κεφάλαιο αυτό έχουν παρουσιαστεί αναλυτικά όλα τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση των δεδομένων και τα οποία επιτρέπουν την παροχή απάντησης στα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν. Τα αποτελέσματα έχουν παρουσιαστεί σε τρία μέρη τα οποία αναφέρονται στην ικανότητα επίλυσης των έργων από τους μαθητές, στις στρατηγικές επίλυσης των συγκεκριμένων έργων, καθώς και στο παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας με την εφαρμογή της διδακτικής κατάστασης.

Το κυριότερο εύρημα της παρούσας εργασίας έγκειται στην επιβεβαίωση ενός θεωρητικού μοντέλου ερμηνείας της μαθηματικής αναλογικής σκέψης του ατόμου. Το μοντέλο αυτό χαρακτηρίζεται από τρεις διαστάσεις, οι οποίες αντιστοιχούν στην ικανότητα του ατόμου να επιλύσει και ανάλογα έργα. Οι διαστάσεις αυτές αναφέρονται στον αναλογικό συλλογισμό, στο μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό και στη μετα-αναλογική ενημερότητα.

Η διερεύνηση της εξελικτικής πορείας της επίδοσης των μαθητών στα έργα αναλογικού συλλογισμού, μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετα-αναλογικής ενημερότητας επέτρεψε στη συνέχεια τον καθορισμό της φύσης των τριών διαστάσεων του μοντέλου και των παραγόντων που τις επηρεάζουν. Η μελέτη αυτής της πτυχής των διαστάσεων του μοντέλου μαθηματικής αναλογικής σκέψης έκανε δυνατή και την επιβεβαίωση της υπόθεσης για «λειτουργία» του γραμμικού μοντέλου ως επιστημολογικού εμποδίου. Οι μαθητές παρά τη σχετική πρόοδο που παρουσίαζαν από τάξη σε τάξη στα έργα αναλογικού και μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού, είχαν σταθερούς και πολύ χαμηλούς μέσους όρους επίδοσης στα έργα μετα-αναλογικής ενημερότητας. Αυτό επέτρεψε να διαφανεί η ύπαρξη ενός επίμονου και επαναλαμβανόμενου εμποδίου που δυσχεραίνει την προσπάθεια των μαθητών να διακρίνουν και να χειριστούν μη αναλογικές καταστάσεις, επεμβαίνοντας έτσι στην μετα-αναλογική τους ενημερότητα.

Η σε βάθος μελέτη των σχέσεων ανάμεσα στα έργα που καθορίζουν την κάθε διάσταση του μοντέλου μαθηματικής αναλογικής σκέψης έδειξε ότι παρά τη διαφοροποίηση της επίδοσης των μαθητών, ως συνάρτηση της ηλικίας τους, υπάρχουν κάποιες ομάδες έργων που παραμένουν σταθερές και αναλλοίωτες. Η ύπαρξη του αναλλοίωτου στοιχείου υπέδειξε όμοιο χειρισμό των έργων από τους μαθητές για τον οποίο ευθύνονταν διαφορετικές στρατηγικές στο δημοτικό και στο γυμνάσιο.

Διαφορετικές στρατηγικές παρατηρήθηκαν και στην επίλυση έργων που παρουσιάστηκαν σε διαφορετικό πλαίσιο. Οι μαθητές επέλεξαν διαφορετικές στρατηγικές για την επίλυση των έργων ανάλογα με το αν το έργο ήταν άμεσο ή έμμεσο, αλλά και ανάλογα με το αν το έργο ήταν σύγκρισης ή αν δίνονταν οι τρεις ποσότητες και ήταν άγνωστη η τέταρτη. Σε αντίθεση με το πλαίσιο παρουσίασης, το είδος του έργου, το αν δηλαδή το έργο ήταν αναλογικό ή μη αναλογικό, δεν αποτέλεσε παράγοντα διαφοροποίησης των στρατηγικών επίλυσης. Το αποτέλεσμα αυτό αποτελεί ακόμα μία επιβεβαίωση της αδυναμίας των μαθητών να διακρίνουν τις αναλογικές από τις μη αναλογικές καταστάσεις, και κατά συνέπεια της ύπαρξης του επιστημολογικού εμποδίου της αναλογίας.

Η εκχώρηση της διδακτικής κατάστασης στους μαθητές έδειξε έναν πιθανό τρόπο αμφισβήτησης του επιστημολογικού εμποδίου της αναλογίας. Οι μαθητές παρά τις αρχικές τους δυσκολίες έκαναν δική τους τη διδακτική κατάσταση, εργάστηκαν σε αυτή και αλληλεπίδρασαν μεταξύ τους. Η διδακτική κατάσταση κατάφερε να λειτουργήσει χωρίς να έχει παρουσιαστεί με κλασσικό τρόπο διδασκαλίας από το δάσκαλο. Ως αποτέλεσμα οι μαθητές συνειδητοποίησαν την ύπαρξη καθημερινών καταστάσεων ή μαθηματικών καταστάσεων στα σχολικά βιβλία, οι οποίες φαίνεται να είναι αναλογικές αλλά στην πραγματικότητα δεν είναι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Εισαγωγή

Οι διάφορες ερευνητικές προσπάθειες προσδιορισμού του φαινόμενου της ψευδαίσθησης της αναλογίας έχουν επισημάνει την ύπαρξή του (De Bock et al., 2003; Modestou & Gagatsis, 2006; Van Dooren, 2005), αλλά δε συμφωνούν στη φύση του εμποδίου που σχετίζεται με αυτό, ούτε προτείνουν ένα σφαιρικό μοντέλο ερμηνείας του. Η παρούσα ερευνητική εργασία προσπάθησε να καλύψει το κενό που υπήρχε στο χώρο αυτό με την παρουσίαση ενός πολυδιάστατου μοντέλου ερμηνείας της μαθηματικής αναλογικής σκέψης. Στα πλαίσια του μοντέλου αυτού διερευνήθηκε το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας ως αναπόσπαστο μέρος της μεταγνωστικής διάστασης της μαθηματικής αναλογικής σκέψης. Ταυτόχρονα έγινε προσπάθεια καθορισμού της φύσης του φαινομένου της ψευδαίσθησης της αναλογίας και αποτελεσματικής αντιμετώπισής του με την οργάνωση μιας κατάλληλης παρέμβασης.

Τα ευρήματα που έχουν προκύψει από την εργασία αυτή έχουν επιβεβαιώσει την ύπαρξη ενός μοντέλου ερμηνείας της μαθηματικής αναλογικής σκέψης, συνεισφέροντας στον προσδιορισμό της ίδιας της έννοιας. Στην έννοια της μαθηματικής αναλογικής σκέψης δεν περιλαμβάνεται αποκλειστικά η ικανότητα επίλυσης μαθηματικών αναλογικών έργων (μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός), αλλά και η ικανότητα χειρισμού αναλογικών καταστάσεων σε ένα πλαίσιο μη μαθηματικό (αναλογικός συλλογισμός). Αναπόσπαστο μέρος της έννοιας της μαθηματικής αναλογικής σκέψης αποτελεί και η ικανότητα καθορισμού και διάκρισης των αναλογικών χαρακτηριστικών μιας κατάστασης, συνιστώντας τη μεταγνωστική διάσταση της έννοιας. Κάτω από αυτή τη διάσταση της μετα-αναλογικής ενημερότητας εντάσσεται και μπορεί να μελετηθεί το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας.

Εκτός από το μοντέλο μαθηματικής αναλογικής σκέψης η ερευνητική εργασία κατάφερε να καθορίσει τη φύση του προβλήματος πίσω από το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας και να δείξει ότι το πρόβλημα δεν είναι αποκλειστικά αναπτυξιακό και διδακτικό, αφού ο τρόπος που οι μαθητές χειρίζονται τα μη αναλογικά έργα δεν οφείλεται σε μια δυσκολία ή απουσία γνώσης αλλά σε μια σταθερή γνώση. Η γνώση της αναλογίας όπως αυτή παρεμβαίνει στην επίλυση των αναλογικών έργων αποτελεί επιστημολογικό εμπόδιο για την μετα-αναλογική ενημερότητα των μαθητών και άρα για την ικανότητα διάκρισης και επίλυσης μη αναλογικών έργων. Ο καθορισμός της φύσης του φαινομένου είναι καθοριστικός και για την αντιμετώπισή του, η οποία μπορεί να επιτευχθεί μέσα από την οργάνωση και την εφαρμογή μιας κατάλληλης διδακτικής κατάστασης.

Το Μοντέλο Μαθηματικής Αναλογικής Σκέψης

Τα ευρήματα της παρούσας εργασίας έχουν δείξει ότι η μαθηματική αναλογική σκέψη μπορεί να ερμηνευθεί από ένα τρισδιάστατο μοντέλο στο οποίο περιλαμβάνεται ως αναπόσπαστο μέρος η ικανότητα επίλυσης αναλογικών και μαθηματικών αναλογικών έργων, καθώς και η ικανότητα διάκρισης και επίλυσης μη αναλογικών έργων. Το μοντέλο αυτό προσφέρει ένα συγκεκριμένο πλαίσιο ερμηνείας της μαθηματικής αναλογικής σκέψης, το οποίο λαμβάνει υπόψη βιβλιογραφικά δεδομένα (Karplus et al, 1983; Cramer et al., 1993; Lamon, 1999a) που τονίζουν την ανάγκη διαφοροποίησης της θεώρησης της μαθηματικής αναλογικής σκέψης ως ταυτόσημης με την ικανότητα επίλυσης μαθηματικών αναλογικών έργων. Η θέση των Karplus κ.ά. (1983) αλλά και της Lamon (1999a) ότι η ικανότητα του ατόμου να διακρίνει κατά πόσο ένα πρόβλημα επιλύεται με τη χρήση μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού, προσθετικού συλλογισμού ή οποιασδήποτε άλλης αριθμητικής σχέσης είναι απαραίτητη για τη μαθηματική αναλογική σκέψη, ικανοποιείται με τη συμπερίληψη στο μοντέλο της διάστασης της μετα-αναλογικής ενημερότητας.

Η διάσταση της μετα-αναλογικής ενημερότητας περιλαμβάνει έργα που προϋποθέτουν για την επίλυσή τους ενεργοποίηση μηχανισμών που δεν είναι αποκλειστικά γνωστικοί. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνει το μεταγνωστικό χαρακτήρα της διάστασης αυτής, αφού πρώτιστα συνδέεται με τη δεξιότητα αναγνώρισης και καθορισμού της φύσης και των χαρακτηριστικών της προβληματικής κατάστασης. Η δεξιότητα αυτή αποτελεί την πρώτη από τέσσερις μεταγνωστικές διαδικασίες που υποβοηθούν τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος (Davidson et al., 1994).

Η συμπερίληψη της διάστασης της μετα-αναλογικής ενημερότητας στο μοντέλο ερμηνείας της μαθηματικής αναλογικής σκέψης ανατρέπει τα σύγχρονα ερευνητικά δεδομένα που έφεραν την ικανότητα επίλυσης μη αναλογικών έργων σε αντιδιαστολή με την ικανότητα επίλυσης αναλογικών έργων (De Bock et al., 1998; De Bock et al., 2002b; Van Dooren et al., 2003a; Van Dooren et al., 2006). Το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας επαναπροσδιορίζεται σε σχέση με την ικανότητα των μαθητών για μαθηματική αναλογική σκέψη. Συγκεκριμένα, το φαινόμενο αυτό φαίνεται να οφείλεται και στη περιορισμένη μετα-αναλογική ενημερότητα των μαθητών, η οποία αρχίζει να εμφανίζεται μόνο προς το τέλος της υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Ταυτόχρονα, η ανάπτυξη της μετα-αναλογικής ενημερότητας είναι κάτι δύσκολο να επιτευχθεί, αφού σε αυτήν παρεμβαίνει το επιστημολογικό εμπόδιο της αναλογίας που δυσχεραίνει την προσπάθεια των μαθητών να διακρίνουν τις μη αναλογικές από τις αναλογικές καταστάσεις.

Η δεύτερη διάσταση που περιλαμβάνεται στο μοντέλο ερμηνείας της μαθηματικής αναλογικής σκέψης αφορά στην έννοια του αναλογικού συλλογισμού. Συγκεκριμένα, η ικανότητα των μαθητών να επιλύουν τυπικές λεκτικές και αριθμητικές αναλογίες της μορφής Α:Β :: Γ:Δ αποτελεί ένα από τους βασικούς ρυθμιστές της μαθηματικής αναλογικής τους σκέψης. Η θέση αυτή ενισχύει τα αποτελέσματα της έρευνας των Deal και Hardy (2004), η οποία έδειξε ότι η ανάπτυξη της ικανότητάς για αναλογικό συλλογισμό αντικατοπτρίζει ανάπτυξη της αντίστοιχης ικανότητας για μαθηματικό συλλογισμό.

Οι μαθητές φαίνεται να χρησιμοποιούν παρόμοια λογική ανάλυση για την επίλυση έργων της μορφής Α:Β :: Γ:Δ όπως και για την επίλυση τυπικών μαθηματικών προβλημάτων αναλογίας (Hatano & Sakakibara, 2004). Από τη στιγμή που είναι ικανοί να εντοπίσουν τη δομική ομοιότητα ανάμεσα σε λεκτικές και αριθμητικές σχέσεις, μπορούν ευκολότερα να αντιληφθούν και τις σχέσεις που υπάρχουν σε μια μαθηματική αναλογία (Lamon, 1999a). Ο εντοπισμός της δομικής ομοιότητας που υπάρχει ανάμεσα στους όρους τυπικών αναλογιών παραπέμπει σε δεύτερου επιπέδου σχέσεις και άρα στην ικανότητα των μαθητών να μη μένουν σε επιφανειακές προσθετικές σχέσεις, παρουσιάζοντας έτσι μαθηματική αναλογική σκέψη.

Τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας καθορίζουν με περισσότερη λεπτομέρεια τη σχέση ανάμεσα στην επίλυση έργων αναλογικού συλλογισμού και τη μαθηματική αναλογική σκέψη εντοπίζοντας εκείνες τις αναλογίες που δε συνεισφέρουν στην ερμηνεία της μαθηματικής αναλογικής σκέψης. Οι αναλογίες αυτές αφορούν στην ομάδα της σημασιολογίας, η οποία σχετίζεται με ορισμούς λέξεων και συγκεκριμένα με σχέσεις συνωνυμίας, αντίθεσης και έντασης (Meagher, 2006). Στην ομάδα αυτή περιλαμβάνονται και λέξεις που αφορούν επίθετα, τα οποία αποτελούν μια πολύ σημαντική ομάδα λέξεων, ειδικά για την κατανόηση των μαθηματικών σχέσεων. Η ιδιότυπη όμως λειτουργία τους στη γλώσσα, όπου ένα επίθετο μπορεί να χαρακτηρίζει ένα ουσιαστικό αλλά και να αποτελεί μέρος του ορισμού μιας λογικής σχέσης ή μιας μαθηματικής έννοιας (Gagatsis, 1982), περιορίζει τη δυνατότητα χρήσης τους ως μέρος της διάστασης του αναλογικού συλλογισμού.

Η τελευταία διάσταση του μοντέλου μαθηματικής αναλογικής σκέψης είναι η διάσταση που έχει ταυτιστεί τα τελευταία χρόνια με την ίδια την μαθηματική αναλογική σκέψη (Lest et al., 1988; Baxter & Junker, 2001; Misailidou & Williams, 2003), οπότε η αναγκαιότητά της για την ερμηνεία της μαθηματικής αναλογικής σκέψης είναι κάτι περισσότερο από αιτιολογημένη. Μέσα στα πλαίσια της διάστασης του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού επιβεβαιώθηκε η αναγκαιότητα χρήσης έργων που να παρουσιάζονται όχι μόνο μέσω της τυπικής μορφής όπου δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη, αλλά και υπό μορφή σύγκρισης. Την ανάγκη αυτή εντοπίζουν και οι Karplus κ.ά. (1983), σύμφωνα με τους οποίους η χρήση καταστάσεων που να προωθούν την εφαρμογή στρατηγικών σύγκρισης είτε ανάμεσα είτε μεταξύ των ποσοτήτων, συνδέεται με την ύπαρξη μαθηματικής αναλογικής σκέψης, αφού οι καταστάσεις αυτές δεν παραπέμπουν άμεσα στη συστηματική εφαρμογή μνημονικών στρατηγικών.

Οι Διαστάσεις του Μοντέλου Μαθηματικής Αναλογικής Σκέψης στο Δημοτικό και το Γυμνάσιο

Αναλογικός Συλλογισμός

Οι τρεις διαστάσεις του μοντέλου της μαθηματικής αναλογικής σκέψης και ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές χειρίζονται τα έργα της κάθε διάστασης δε διαφοροποιούνται με τον ίδιο τρόπο από την μια ηλικιακή ομάδα στην άλλη. Το γεγονός αυτό υποδεικνύει ότι οι τρεις διαστάσεις επηρεάζονται από διαφορετικούς παράγοντες και έχουν διαφορετική φύση. Η σταδιακή αύξηση της επίδοσης των μαθητών τόσο στα λεκτικά όσο και στα αριθμητικά έργα αναλογικού συλλογισμού από το δημοτικό στο γυμνάσιο, προσδίδει στη διάσταση αυτή ένα εξελικτικό χαρακτήρα.

Η ικανότητα για αναλογικό συλλογισμό παρουσίασε μεγαλύτερη αύξηση σε δύο ομάδες μαθητών οι οποίες διαφοροποιήθηκαν με βάση το είδος του έργου. Συγκεκριμένα, σημαντική αύξηση της επίδοσης των μαθητών στις λεκτικές αναλογίες παρατηρήθηκε στην Α’ και Γ’ Γυμνασίου, καθώς και της αντίστοιχης επίδοσής τους στις αριθμητικές αναλογίες στη Στ’ Δημοτικού και Β’ Γυμνασίου. Τα στοιχεία αυτά συμφωνούν με τις καμπύλες ανάπτυξης της ποσοτικής-συσχετικής ικανότητας, που προέκυψαν από έρευνες στα εξειδικευμένα δομικά συστήματα (ΕΔΟΣ), σύμφωνα με τις οποίες οι ηλικίες των 11 και 14 χρόνων είναι ηλικίες αναμενόμενων αλλαγών (Δημητρίου, 1993). Σύμφωνα με το Δημητρίου (1993), οι περίοδοι της ηλικίας που συμπίπτουν με τις αλλαγές αυτές συνήθως θεωρούνται ως φάσεις κατά τις οποίες συμβαίνει μια επιτάχυνση της ανάπτυξης. Αυτό αιτιολογεί και την ύπαρξη σημαντικών αυξήσεων στην επίδοση των μαθητών κατά την επίλυση έργων αναλογικού συλλογισμού στις δύο ηλικιακές ομάδες.

Μαθηματικός Αναλογικός Συλλογισμός

Η επίδοση των μαθητών στα έργα της διάστασης του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού δεν παρουσιάζει ανάλογες διαφοροποιήσεις σε σχέση με την ηλικία των μαθητών, όπως στην περίπτωση της διάστασης του αναλογικού συλλογισμού. Ενώ η επίδοση των μαθητών στην επίλυση έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού φαίνεται να αυξάνεται με την αύξηση της ηλικίας τους, οι μέσοι όροι επίδοσης των μαθητών στην Α’ και Γ’ Γυμνασίου μειώνονται σημαντικά σε σχέση με τις επιδόσεις τους στη Στ’ Δημοτικού και τη Β’ Γυμνασίου, αντίστοιχα. Ανάλογη διαφορά μεταξύ των μέσων όρων επιτυχίας των μαθητών της Στ΄ Δημοτικού και Α’ Γυμνασίου έχει εμφανιστεί και στην έρευνα των Γαγάτση και Καφίδα (1995), ενώ το φαινόμενο αυτό της μείωσης των μέσων όρων επιτυχίας σε συγκεκριμένες ηλικιακές ομάδες ταυτίζεται στη βιβλιογραφία με τη καμπύλη U, λόγω του σχήματος που έχει η γραμμή που αναπαριστά γραφικά τους μέσους όρους επίδοσης (Van Dooren et al., 2005a).

Αυτή η μείωση των μέσων όρων επίδοσης των μαθητών στην Α’ και Γ’ Γυμνασίου είναι αιτιολογημένη, αν ληφθεί υπόψη ότι στις δύο προηγούμενες τάξεις οι μαθητές ήταν δέκτες συστηματικής διδασκαλίας πάνω στις αναλογίες (Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού, 1996). Πιο συγκεκριμένα η μηχανική εφαρμογή τυπικών στρατηγικών επίλυσης αναλογικών προβλημάτων στη Στ' Δημοτικού και στη Β΄ Γυμνασίου φαίνεται να έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση υψηλών ποσοστών στις τάξεις αυτές που δεν αντιπροσωπεύουν την πραγματική τους ικανότητα για επίλυση των προβλημάτων αυτών. Τα αποτελέσματα αυτά πιστοποιούν με τον καλύτερο δυνατό τρόπο ότι η διδασκαλία των μαθηματικών δεν αποτελεί μια απλή σχέση μεταφοράς από το δάσκαλο στο μαθητή. Οι μαθητές της Α' και της Γ' Γυμνασίου λησμονούν σε κάποιο βαθμό τις στρατηγικές που τους παρουσιάστηκαν κατά τη διδασκαλία και εφαρμόζουν νέες ή τις ίδιες στρατηγικές με διαφορετικό τρόπο υποπίπτοντας σε λάθη. Κατ' επέκταση είναι εμφανές ότι η διάσταση αυτή του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού χαρακτηρίζεται από διδακτικές επιδράσεις και επιρροές.

Ο τρόπος χειρισμού των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού διαφορετικών πλαισίων παρέμεινε αναλλοίωτος σε δημοτικό και γυμνάσιο, παρά την ύπαρξη διαφορών στις στρατηγικές επίλυσης των έργων της διάστασης αυτής. Οι μαθητές τόσο στο δημοτικό όσο και στο γυμνάσιο χειρίστηκαν με μεγαλύτερη ευκολία τα έργα στα οποία δίνονταν οι τρεις ποσότητες και ζητούνταν η τέταρτη, ενώ αντιμετώπισαν δυσκολίες στα έργα σύγκρισης. Οι δυσκολίες στα έργα σύγκρισης ήταν αναμενόμενες, αφού υπάρχουν βιβλιογραφικά δεδομένα (Karplus et al., 1983) τα οποία υποδεικνύουν ανάλογες δυσκολίες στο χειρισμό τους από μαθητές της ίδιας ηλικίας. Από την άλλη, μόνο σε ελάχιστες περιπτώσεις μέσα από τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών κάθε τάξης, οι μαθητές έρχονται σε επαφή με έργα αυτού του είδους (Christou & Philippou, 2002). Το γεγονός αυτό ενισχύει τον επηρεασμό της διάστασης του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού από τη διδασκαλία.

Η συστηματικότητα στο χειρισμό των μαθηματικών αναλογικών έργων, παρά τη διαφοροποίηση που παρατηρείται στους μέσους όρους επίδοσης των μαθητών κατά τάξη, εντοπίστηκε και από το σχηματισμό συγκεκριμένων ομάδων ομοιότητας, οι οποίες παρέμειναν αναλλοίωτες από το δημοτικό στο γυμνάσιο. Πίσω από αυτές τις σταθερές ομάδες ομοιότητας βρίσκονται διαφορετικοί παράγοντες, οι οποίοι συνεισφέρουν στο σχηματισμό τους. Οι παράγοντες αυτοί δεν είναι άλλοι από τις στρατηγικές επίλυσης των έργων. Συγκεκριμένα, στο δημοτικό σχολείο οι στρατηγικές της αναγωγής στη μονάδα και της εύρεσης του αριθμητικού τελεστή φαίνεται να ευθύνονται για το σχηματισμό των αναλλοίωτων ομάδων, ενώ στο γυμνάσιο οι αντίστοιχες στρατηγικές είναι αυτές του εσωτερικού γινομένου και της εύρεσης του συναρτησιακού τελεστή. Η εμφάνιση των στρατηγικών αυτών ενισχύει το διδακτικό χαρακτήρα της διάστασης του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού, καθώς αποτελούν αντίστοιχο αντικείμενο διδασκαλίας στο δημοτικό και το γυμνάσιο (Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού, 1996). Τα ευρήματα αυτά είναι σύμφωνα και με ερευνητικά δεδομένα (Nabors, 2003; Lamon, 1999a) όπου από τη μια η στρατηγική της αναγωγής στη μονάδα παρουσιάζεται ως μια στρατηγική επίλυσης αναλογικών προβλημάτων που μπορεί να εμφανιστεί ακόμα και πριν από τη διδασκαλία, και άρα χαρακτηρίζει τους μαθητές του δημοτικού σχολείου, και από την άλλη η στρατηγική του εσωτερικού γινομένου βρίσκει ευρεία χρήση ειδικά στο γυμνάσιο λόγω του μνημονικού της χαρακτήρα και της ταχύτητας εφαρμογής της.

Εκτός από τη διαφοροποίηση των στρατηγικών επίλυσης των μαθηματικών ανάμεσα σε δημοτικό και γυμνάσιο, η οποία μπορεί να θεωρηθεί ότι αντικατοπτρίζει και διαφορετικά στάδια ανάπτυξης του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού (Tourniaire & Pulos, 1985), έντονη υπήρξε και η διαφοροποίηση των στρατηγικών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές με βάση το πλαίσιο παρουσίασης των αναλογικών έργων. Οι μαθητές επέλεξαν διαφορετικές στρατηγικές για την επίλυση των αναλογικών έργων ανάλογα με το αν το έργο είναι άμεσο ή έμμεσο, αλλά και ανάλογα με το αν το έργο είναι σύγκρισης ή αν δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη.

Μετα-αναλογική Ενημερότητα

Στη διάσταση της μετα-αναλογικής ενημερότητας οι μαθητές επέδειξαν τελείως διαφορετική συμπεριφορά ως προς την επίλυση των έργων που περιλαμβάνονταν σε αυτή, σε σχέση με τα έργα των άλλων δύο διαστάσεων. Συγκεκριμένα, η επίδοσή τους στα έργα μέτρησης ήταν ιδιαίτερα χαμηλή και ειδικά στο δημοτικό σχολείο οι μαθητές παρουσιάστηκαν ανέτοιμοι να χειριστούν έργα αυτού του είδους. Η ικανότητα χειρισμού μη αναλογικών έργων άρχισε να εμφανίζεται μόνο προς το τέλος της υποχρεωτικής εκπαίδευσης, με μικρούς μέσους όρους επίδοσης ($\overline{X}$ =.16). Τα αποτελέσματα αυτά επιβεβαιώνονται από προηγούμενες έρευνες στο χώρο της ψευδαίσθησης της αναλογίας σύμφωνα με τις οποίες μόνο περίπου το ¼ των μαθητών καταφέρνει να επιλύσει μη αναλογικά έργα μέτρησης στην ηλικία των 15 με 16 ετών (De Bock, 2002b; Modestou et al., 2004, Van Dooren et al, 2005b). Το γεγονός αυτό αποτελεί παράλληλα υποστηρικτικό στοιχείο που επιβεβαιώνει την υπόθεση ότι πίσω από το συγκεκριμένο φαινόμενο δεν κρύβεται ένα σύνηθες λάθος αλλά ένα επιστημολογικό εμπόδιο.

Σημαντικό στοιχείο της παρούσας ερευνητικής εργασίας αποτελεί ο εντοπισμός μιας συγκεκριμένης στρατηγικής, η οποία σχετίζεται με την αύξηση της επίδοσης των μαθητών της τελευταίας τάξης του γυμνασίου στα μη αναλογικά έργα. Η στρατηγική της έμμεσης επίλυσης του προβλήματος με την εύρεση πρώτα του εμβαδού του σχήματος και μετά την εφαρμογή αναλογίας πρόσφερε δυνατότητες άμεσης μοντελοποίησης, καθοδηγώντας έτσι τους μαθητές προς την ορθή επίλυση της προβληματικής κατάστασης. Η σημασία της στρατηγικής αυτής ενισχύεται και από το γεγονός ότι η εφαρμογή της σε αναλογικά έργα περιμέτρου μπορεί να προβλέψει κατά 33% την επίδοση στα αντίστοιχα μη αναλογικά έργα εμβαδού, τη στιγμή που κάτι τέτοιο δεν υφίσταται για τυπικές στρατηγικές όπως αυτή του εσωτερικού γινομένου.

Παρόλα αυτά, το είδος του έργου, το αν δηλαδή το έργο ήταν αναλογικό ή μη αναλογικό, δεν αποτέλεσε παράγοντα διαφοροποίησης των στρατηγικών που επέλεξε να χρησιμοποιήσει η πλειοψηφία των μαθητών. Η αναλογικότητα φάνηκε να είναι σε τέτοιο βαθμό ενσωματωμένη στον τρόπο σκέψης των μαθητών που τους έκανε να χειρίζονται κάθε αριθμητική σχέση ως αναλογική (Freudenthal, 1983). Οι περισσότεροι μαθητές χρησιμοποίησαν τις ίδιες αναλογικές στρατηγικές που εφάρμοσαν στα αναλογικά έργα, και στα μη αναλογικά έργα, υποδεικνύοντας την αδυναμία διάκρισης των χαρακτηριστικών της προβληματικής κατάστασης. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνει παράλληλα και την κυρίαρχη θέση στη βιβλιογραφία που θέλει τους μαθητές να υποκύπτουν στο φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας και να αντιμετωπίζουν τις σχέσεις ανάμεσα στο μήκος και στο εμβαδόν, καθώς και στο μήκος και στον όγκο, ως γραμμικές (De Bock et al, 1998; Modestou & Gagatsis, 2004b; Van Dooren, 2005).

Η επίδοση των μαθητών στη διάκριση των μη αναλογικών έργων υπό μορφή δηλώσεων ήταν καλύτερη σε σχέση με τα μη αναλογικά έργα που αναφέρονταν στην έννοια του εμβαδού. Τα έργα υπό μορφή δηλώσεων, τα οποία πρώτη φορά έχουν χρησιμοποιηθεί σε έρευνα που σχετίζεται με το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας, αν και παρέπεμπαν στη χρήση του αναλογικού μοντέλου, επέτρεπαν πιο εύκολα την ανατροπή της ψευδαίσθησης με τη χρήση της "κοινής λογικής". Έτσι, ήταν πολύ πιο εύκολο για τους μαθητές να αντιληφθούν την απουσία ύπαρξης αναλογικής σχέσης σε μια δήλωση που η ορθότητά της μπορούσε να κριθεί με βάση εμπειρίες της καθημερινής ζωής, παρά σε ένα έργο που η επίλυσή του απαιτούσε σε κάποιο βαθμό γνώσεις γεωμετρίας. Το γεγονός αυτό υποδεικνύει την αναγκαιότητα συμπερίληψης έργων της συγκεκριμένης μορφής σε κάθε προσπάθεια που σχετίζεται με το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας και στοχεύει στην ανάπτυξη της μετα-αναλογικής ενημερότητας των μαθητών.

Η παρούσα ερευνητική εργασία έδειξε ότι το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας και η τάση των μαθητών να εφαρμόζουν το γραμμικό μοντέλο σε μη αναλογικές καταστάσεις δεν είναι ένα λάθος που εμφανίζεται σποραδικά. Οι μαθητές ανεξαρτήτως ηλικίας δυσκολεύτηκαν να χειριστούν μη αναλογικά έργα τα οποία παρουσιάστηκαν σε διαφορετικά πλαίσια και με διαφορετική λεκτική διατύπωση. Εμφάνισαν αδυναμία να διακρίνουν τις μη αναλογικές δηλώσεις από τις αναλογικές, κάτι που μπορούσε εύκολα να καθοριστεί με βάση εμπειρίες της καθημερινής ζωής, ενώ εμφάνισαν έντονα την τάση να επιλύουν αναλογικά τα έμμεσα μη αναλογικά έργα, χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες αναλογικές στρατηγικές που εφάρμοσαν σε αναλογικά έργα. Τα ευρήματα αυτά ενισχύουν τη θέση ότι η ψευδαίσθηση της αναλογίας είναι ένα επαναλαμβανόμενο, καθολικό και επίμονο φαινόμενο το οποίο εμφανίζεται ανεξαρτήτως πλαισίου (Modestou & Gagatsis, 2007a).

Η επανεμφάνιση των ίδιων λαθών τόσο στη μάθηση των μαθηματικών από το άτομο (Modestou & Gagatsis, 2006) όσο στην ιστορία των μαθηματικών, με το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου και το «Μένωνα» του Πλάτωνα (Kronfellener, 2000; Φράγκος, 1983), συνηγορούν στη θεώρηση του γραμμικού αναλογικού μοντέλου ως επιστημολογικού εμποδίου, γεγονός που αποτελεί σημαντική συνεισφορά της παρούσας ερευνητικής εργασίας. Στη συμπεριφορά των μαθητών διακρίνονται όλα τα χαρακτηριστικά της έννοιας του επιστημολογικού εμποδίου όπως αυτά αναφέρονται από τον Brousseau (1986). Τα λάθη τα οποία εμφανίζονται στα μη αναλογικά έργα δεν είναι αποτέλεσμα μιας δυσκολίας ή της απουσίας γνώσεων εκ μέρους των μαθητών. Οι μαθητές με το πέρασμα από τη μια τάξη στην άλλη είναι φυσικό να ενισχύουν το γνωστικό τους υπόβαθρο στα μαθηματικά και δυσκολίες που αντιμετώπιζαν στα 11 τους χρόνια να μην υφίστανται στα 15 τους. Κάτι τέτοιο δε συμβαίνει όμως και με τα λάθη που προκύπτουν κατά την επίλυση των μη αναλογικών έργων.

Οι μαθητές ανεξαρτήτως ηλικίας και της συστηματικής ενασχόλησής τους σε συγκεκριμένες τάξεις με θέματα όπως οι αναλογίες και η Ευκλείδεια γεωμετρία (Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού, 1996), συνεχίζουν να εμφανίζουν τα ίδια λάθη σε ένα ποσοστό που ξεπερνά το 85%. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η συμπεριφορά των μαθητών της Β’ Γυμνασίου, οι οποίοι ενώ λόγω της διδασκαλίας που δέχονταν τη συγκεκριμένη περίοδο πάνω στις αναλογίες, είχαν τους ψηλότερους μέσους όρους επίδοσης στα αναλογικά έργα, η αντίστοιχη επίδοσή τους στα έργα μετα-αναλογικής ενημερότητας μόλις που έφτανε το 6%. Η επίδοση της Β’ Γυμνασίου, δηλαδή, δε διέφερε σε τίποτα από την αντίστοιχη επίδοση των μαθητών του δημοτικού σχολείου που είχαν σαφώς χαμηλότερη επίδοση στα έργα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού.

Αυτό το «παράδοξο» προκύπτει λόγω του ότι πίσω από τα λάθη των μαθητών στις μη αναλογικές καταστάσεις βρίσκεται στην πραγματικότητα μια γνώση, η οποία εφαρμόζεται με επιτυχία σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο και για ένα συγκεκριμένο αριθμό καταστάσεων. Η γνώση αυτή δεν είναι άλλη από την έννοια του γραμμικού αναλογικού μοντέλου με όλο το σύνολο των στρατηγικών που την υποστηρίζουν. Χωρίς την έννοια της αναλογίας και του γραμμικού αναλογικού μοντέλου οι μαθητές δε θα ήταν σε θέση να επιλύσουν τα έργα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού που περιλαμβάνονταν στα δοκίμια.

Εφαρμόζοντας ταυτόχρονα τη συγκεκριμένη γνώση και έξω από το πλαίσιο των έργων της διάστασης του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού, οι μαθητές κατέληγαν αυτόματα σε συγκεκριμένες λανθασμένες απαντήσεις, οι οποίες μπορούσαν να προβλεφθούν (Brousseau, 1997). Χαρακτηριστικό είναι εξάλλου και το γεγονός ότι οι μαθητές εφάρμοζαν τις ίδιες αναλογικές στρατηγικές ανεξάρτητα από το είδος του έργου, αφού το επιστημολογικό εμπόδιο της αναλογίας παρέμβαινε στην πορεία λύσης των μη αναλογικών έργων δυσχεραίνοντάς τη. Επιβεβαιώνεται λοιπόν ότι το γραμμικό αναλογικό μοντέλο αποτελεί την πηγή ενός επαναλαμβανόμενου και μη τυχαίου λάθους, το οποίο εμφανίζεται όταν τα άτομα προσπαθούν να επιλύσουν ένα μη αναλογικό πρόβλημα.

Ο καθορισμός της φύσης του προβλήματος της ψευδαίσθησης της αναλογίας έκανε εφικτή και την αντιμετώπισή του, αφού δεν αποτελεί ένα σύνηθες λάθος που μπορεί να αντιμετωπιστεί μέσα από την τυπική διδασκαλία. Η σύνδεση του φαινομένου με την έννοια του επιστημολογικού εμποδίου υπέδειξε την ανάγκη ενασχόλησης των μαθητών με μια τέτοια κατάσταση στην οποία η γνώση, η οποία αποτελεί εμπόδιο, να μην μπορεί να αφομοιωθεί και έτσι να αποσταθεροποιηθεί, να γίνει αναποτελεσματική, άχρηστη και εν τέλει να απορριφθεί (Brousseau & Gibel, 2005). Αυτό επιτεύχθηκε με την οργάνωση μιας κατάλληλης διδακτικής κατάστασης, η οποία σκοπό είχε να θέσει υπό αμφισβήτηση την καταλληλότητα του γραμμικού μοντέλου για όλες τις καταστάσεις που πληρούν κάποια άτυπα κριτήρια.

Η διδακτική αυτή κατάσταση κρίνεται σημαντική αφού ενισχύει τις προσπάθειες αντιμετώπισης του φαινομένου της ψευδαίσθησης της αναλογίας που δεν είχαν τα αναμενόμενα αποτέλεσμα (De Bock et al., 1998, 2002b; Van Dooren et al., 2004a; 2005b). Προσφέρει έτσι μια νέα προσέγγιση εργασίας, η οποία συνεισφέρει στην αμφισβήτηση του επιστημολογικού εμποδίου της αναλογίας δίνοντας έμφαση στις συνθήκες της μάθησης και στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να διακρίνουν εκείνα τα στοιχεία τα οποία είναι χαρακτηριστικά των μη αναλογικών καταστάσεων. Δεν επικεντρώνεται μόνο στην απόρριψη της καταλληλότητας του γραμμικού μοντέλου μέσω της χρήσης ποικιλίας αναπαραστατικών μέσων, συστηματικής διδασκαλίας ή της δημιουργίας κάποιου είδους γνωστικής σύγκρουσης (De Bock et al., 2002b, 2003; Van Dooren et al., 2004a, 2005b). Όπως αναφέρει χαρακτηριστικά ο Brousseau (1997) η απόκτηση μιας μαθηματικής γνώσης από τους μαθητές εξαρτάται περισσότερο από τη συνειδητοποίηση των συνθηκών ακριβούς αναπαραγωγής μιας διδακτικής κατάστασης, παρά από την επανάληψη μιας τυπικής διδασκαλίας με την οποία οι μαθητές έχουν πρόβλημα.

Η καταλληλότητα και η επιτυχία της συγκεκριμένης διδακτικής κατάστασης έγκειται στο ότι οι μαθητές, δέχτηκαν να πάρουν το ρίσκο της άγνοιας του τρόπου επίλυσης του προβλήματος με τα κουτιά και τους κύβους και εμπλάκηκαν με το έργο σε συνθήκες αβεβαιότητας (Brousseau & Gibel, 2005). Παράλληλα σημαντικό είναι το γεγονός ότι επιτεύχθηκε η εκχώρησή της στους μαθητές, οι οποίοι κατάφεραν να δράσουν, να συζητήσουν και να κινητοποιηθούν προς το επιθυμητό αποτέλεσμα μέσα από τα τέσσερα στάδια διαλεκτικής αλληλεπίδρασης, πράγμα που κατέστησε δυνατή και την επιτυχημένη λειτουργία της. Η εκχώρηση αυτή δεν έγινε αυτόματα από τη πρώτη φάση της κατάστασης δράσης, αλλά εμφανίστηκε σε διάφορα επίπεδα, τα οποία έκαναν δυνατή και τη σταδιακή αμφισβήτηση του γραμμικού μοντέλου.

Οι μαθητές μέσα από τις συνθήκες της διδακτικής κατάστασης είδαν αβίαστα ότι κάθε επιλογή τους, η οποία βασιζόταν στο ότι η διαφοροποίηση του μήκους όλων των πλευρών ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου έχει ως αποτέλεσμα τη γραμμική διαφοροποίηση του όγκου του, είναι αποτυχημένη. Το γεγονός αυτό τους έκανε να εντοπίσουν και να συγκρατήσουν εκείνες τις ενέργειές τους, οι οποίες ήταν λειτουργικές, απορρίπτοντας έτσι τη γραμμική σχέση ανάμεσα στη μεταβολή των διαστάσεων και τον όγκο. Πέρα από το συγκεκριμένο πλαίσιο διεξαγωγής της, η διδακτική κατάσταση κρίνεται επιτυχημένη, αφού οι μαθητές επιδεικνύοντας συνείδηση της δυνατότητας αναπαραγωγής των συνθηκών της κατάστασης και σε διαφορετικά πλαίσια, αναγνώρισαν ότι και στην καθημερινή ζωή υπάρχουν καταστάσεις, οι οποίες φαίνεται να είναι αναλογικές αλλά στην πραγματικότητα δεν είναι.

Εισηγήσεις για Μελλοντική Έρευνα

Τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας μπορούν να αποτελέσουν έναυσμα για περαιτέρω ερευνητική δραστηριότητα σε δύο βασικές διαστάσεις, που σχετίζονται με το μοντέλο ερμηνείας της μαθηματικής αναλογικής σκέψης και με το σχεδιασμό της διδακτικής κατάστασης για αντιμετώπιση του επιστημολογικού εμποδίου της αναλογίας. Συγκεκριμένα, η περαιτέρω διερεύνηση του μοντέλου μαθηματικής αναλογικής σκέψης θεωρείται απαραίτητη δεδομένων των αποτελεσμάτων πρόσφατων ερευνών στο χώρο της ψυχολογίας (Demetriou & Kazi, 2006), οι οποίες είχαν ως στόχο τον καθορισμό της συνεισφοράς της μετα-ενημερότητας στο σχηματισμό της νοημοσύνης (g). Σύμφωνα με τα στοιχεία αυτά η νοημοσύνη (g) περιλαμβάνει τουλάχιστον τρία είδη διαδικασιών, οι οποίες αντιστοιχούν στην ικανότητα επεξεργασίας και αναπαραστατική ικανότητα του ατόμου, σε επαγωγικές διαδικασίες που σχετίζονται με την επίλυση προβλήματος και στην μετα-ενημερότητα (Demetriou & Kazi, 2006). Οι διαδικασίες που αφορούν τη διάσταση της μετα-ενημερότητας φάνηκε να συνδέονται και να καθρεφτίζουν πτυχές των δύο άλλων διαστάσεων του g. Το γεγονός αυτό υποδεικνύει την ανάγκη διερεύνησης της ύπαρξης πιθανών αλληλεπιδράσεων ανάμεσα στις τρεις διαστάσεις του μοντέλου μαθηματικής αναλογικής σκέψης που έχει αναπτυχθεί, οι οποίες ίσως να προσδίδουν και ένα πιο κυκλικό χαρακτήρα στο μοντέλο.

Ταυτόχρονα, σημαντική είναι η διαχρονική διερεύνηση του μοντέλου μαθηματικής αναλογικής σκέψης, η οποία θα δώσει στοιχεία για τις τρεις διαστάσεις σε διαφορετικά στάδια ανάπτυξης. Ειδικότερα, ακολουθώντας τον ίδιο πληθυσμό από το δημοτικό, στο γυμνάσιο και στο λύκειο θα εντοπιστεί κατά πόσο μία διάσταση ερμηνεύει με διαφορετικό τρόπο και σε διαφορετικό βαθμό τη μαθηματική αναλογική σκέψη, ανάλογα με την ηλικία στην οποία βρίσκεται το άτομο. Αυτή η επέκταση της έρευνας κρίνεται αναγκαία μετά από πρόσφατα ευρήματα (Modestou, Elia, Gagatsis, & Spanoudes, 2007), τα οποία υποδεικνύουν αύξηση της μετα-αναλογικής ενημερότητας των μαθητών στο λύκειο, ενώ παράλληλα θα έχει και άμεσες επιπτώσεις στη διδασκαλία και στα σχολικά εγχειρίδια.

Συνάμα μια έρευνα αυτού του εύρους, η οποία μελετά τη μετάβαση ανάμεσα σε διαφορετικά στάδια ανάπτυξης, θα επιτρέψει να διαφανεί το πώς εξελίσσεται η μετα-αναλογική ενημερότητα των μαθητών μέσα σε κάθε στάδιο. Η παράλληλη διερεύνηση της μετα-αναλογικής ενημερότητας με την ευρύτερη μετα-ενημερότητα των μαθητών θα δείξει κατά πόσο η ανάπτυξη της μετα-αναλογικής ενημερότητας ακολουθεί την ίδια κυκλική διαδικασία μέσα σε κάθε στάδιο ανάπτυξης, όπως στην περίπτωση της γενικότερης μετα-ενημερότητας: περιορισμένη, ασαφής στην αρχή και επηρεασμένη από το περιεχόμενο, και πιο ευρεία και ακριβής στη συνέχεια, επικεντρωμένη σε διαδικασίες (Demetriou & Kazi, 2006).

Τέλος, είναι πολύ σημαντικό να διερευνηθεί και η καταλληλότητα μιας νέας διδακτικής κατάστασης για αντιμετώπιση του επιστημολογικού εμποδίου της αναλογίας στο χώρο της επιπεδομετρίας. Αυτό θα επιτρέψει και την εφαρμογή της κατάστασης μέσα στα πλαίσια μιας τυπικής σχολικής τάξης κάτι που δεν είναι εφικτό στην περίπτωση της στερεομετρίας, λόγω του υπερβολικού χρόνου προετοιμασίας που απαιτείται από τον εκπαιδευτικό. Μια τέτοια πιθανή επιτυχία θα ενισχύσει το έργο του εκπαιδευτικού στην αντιμετώπιση του επιστημολογικού εμποδίου της αναλογίας, αλλά και θα υποβοηθήσει την ανάπτυξη της μαθηματικής αναλογικής σκέψης των μαθητών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

Γαγάτσης Α., & Καφίδας, Α. (1995). Λάθη μαθητών δημοτικού και γυμνασίου σε προβλήματα αναλογιών. Στου Α. Γαγάτση (Επ. Εκδ.), *Διδακτική και ιστορία των μαθηματικών* (σελ. 67-94). Θεσσαλονίκη: ERASMUS.

Δημητρίου, Π. Α. (1993). *Γνωστική ανάπτυξη: Μοντέλα – μέθοδοι – εφαρμογές*. Θεσσαλονίκη: ART of TEXT.

Μοδέστου, Μ. (2006). Η αναλογία ($f(x) = ax$) ως επιστημολογικό εμπόδιο; Στους Α. Γαγάτση, Ι. Ηλία, Α. Κουσιάππα, Μ. Μοδέστου, Ν. Μουσουλίδη & Μ. Πιττάλη (Επ. Εκδ.), *Σύγχρονη έρευνα στη μαθηματική παιδεία* (σελ. 215-225). Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Παναούρα, Ρ. (2003). Η έννοια της μεταγνώσης στη διδασκαλία των μαθηματικών. Στους Τ. Τριανταφυλλίδη, Κ. Χατζηκυριάκου, Π. Πολίτη & Α. Χρονάκη (Επ. Εκδ.), *Διδακτική των μαθηματικών και πληροφορική στην εκπαίδευση: Πρακτικά 6ου Πανελλήνιου Συνεδρίου* (σελ. 216-221). Βόλος: Ελλάδα.

Παναούρα, Ρ. (2004). Η μεταγνωστική ικανότητα των παιδιών στα μαθηματικά. Στους Α. Γαγάτση, Α. Ευαγγελίδου, Ι. Ηλία & Π. Σπύρου (Επ. Εκδ.), *Αναπαραστάσεις και μάθηση των μαθηματικών* (Τόμος 1, σελ. 3-19). Λευκωσία: Intercollege.

Παπαναστασίου, Κ. (1996). *Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας*. Λευκωσία: Έκδοση συγγραφέα.

Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού. (1996). *Αναλυτικά προγράμματα δημοτικής εκπαίδευσης*. Λευκωσία: Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού.

Φράγκος, Π. Χ. (1983). *Παιδαγωγικές έρευνες και εφαρμογές*. Θεσσαλονίκη: University Studio Press.

Ξενόγλωσση

Adams, R.J., & Khoo, S.T. (1996). *Quest: The interactive test analysis system*. Camberwell, Victoria: ACER.

Andrich, D. (1988). A general form of Rasch's extended logistic model for partial credit scoring. *Applied Measurement in Education*, *1* (4), 363-378.

Arsac, G., Balacheff, N., & Mante, M. (1992). Teacher's role and reproducibility of didactical situations. *Educational Studies in Mathematics*, *23*, 5-29.

Babai, R., Levyadun, T., Stavy, R., & Tirosh, D. (2006). Intuitive rules in science and mathematics: a reaction time study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *37* (8), 913-924.

Bagni, T. G. (2001). An investigation of some misconceptions in high schools students' mistakes. In A. Gagatsi (Ed.), *Learning in mathematics and science & Educational technology*, 3-24. Nicosia: Cyprus.

Balacheff, N., & Leibniz, L. (1999). Is argumentation an obstacle? Invitation to a debate. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, *3*, 2-8.

Baxter, P. G., & Junker, B. (2001). *Designing cognitive- developmental assessments: A case study in proportional reasoning.* Paper presented at the Annual Meeting of the National Council of Measurement in Education, Seattle: USA. Retrieved April 23rd from http://www.stat.cmu.edu/~brian/rpm/baxterjunkerncme.pdf

Bentler, M. P. (1995). *EQS structural equations program manual*. Encino, CA: Multivariate Software Inc.

Bodin, A., Coutourier, R., & Gras, R. (2000). *CHIC : Classification hierarchique implicative et cohesitive-Version sous Windows – CHIC 1.2.* Rennes: Association pour le Recherché en Didactique des Mathematiques.

Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33 – 115.

Brousseau, G. (1988). Une expérience d' épistémologie sur l' enseignement des décimax [in Greek]. *Diastasi*, *2*, 59-75.

Brousseau, G. (1993). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques [in Greek]. In A. Gagatsis (Ed.), *Topics in mathematics education* (pp. 61-134). Thessalonici: Kyriakides Publications.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics* (N. Balacheff, M. Cooper, R Sutherland & V. Warfielf, Eds & Transl.). Mathematics Education Library (Vol. 19). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (1999). Research in mathematics education: Observation… and mathematics. In I. Schwank (Ed.), *Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education: Vol. 1*. (pp. 34-48). Osnabrueck: Research Institute for Mathematics Education.

Brousseau, G. (2003). L’ enseignement de la géometrie élémentaire en tant que modéle de l’ éspace [in Greek]. In A. Gagatsis (Ed.), *Readings in didactics of geometr*y (pp. 77-91). Nicosia: University of Cyprus.

Brousseau, G., & Gibel, P. (2005). Didactical handling of students’ reasoning processes in problem solving situations. *Educational Studies in Mathematics*, *59*, 13-58.

Brown, A. (1987). Metacognition, executive control, self regulation and other more mysterious mechanisms. In F. Weinert, & R. Kluwe (Eds.), *Metacognition, motivation and understanding* (pp.65-115). London: Lawrence Erlbaum Associates.

Buehl, M. M., & Alexander, P. A. (2004). Longitudinal and cross-cultural trends in young children’s analogical and mathematical reasoning abilities. In L. D. English (Ed.), *Mathematical and analogical reasoning of young learners* (pp.47-73). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Bunt, N. H. L., Jones, S. P., & Bedient, D. J. (1981). *The historical roots of elementary mathematics* [in Greek]. Athens: Pneumatic.

Carr, M., & Jessup, L. D. (1995). Cognitive and metacognitive predictors of mathematics strategy use. *Learning and Individual Differences*, *7* (3), 235-247.

Christou, C., & Philippou, G. (2002). Mapping and development of intuitive proportional thinking. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 321-336.

Correia de Sa, C. (2000). Theory of proportion and the geometry of areas. In J. Fauvel & J. v. Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (pp.276-279). Dordrecht: Kluwer.

Cramer, K., Post, T., & Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: Research implications. In D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp. 159-178). New York: Macmillan.

Davidson, E. J., Deuser, R., & Sternberg, J. R. (1994). The role of metacognition in problem solving. In Metcalfe, J. & Shimamura, P. A. (Eds.), *Metacognition: Knowing about knowing* (pp. 207-226).

Deal, D., & Hardy, S. (2004). Portraying mathematical and analogical reasoning in the young: Three case studies. In L. D. English (Ed.), *Mathematical and analogical reasoning of young learners* (pp. 97-125). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2002a). Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors. *Educational Studies in Mathematics*, *50*, 311-314.

De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics*, *35*, 65-85.

De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (2002b). The effects of different problem presentations and formulations on the illusion of linearity in secondary school students. *Mathematical Thinking and Learning*, *4*(1), 65-89.

De Bock, D., Verschaffel, L., Janssens, D., Van Dooren, W., & Claes, K. (2003). Do realistic contexts and graphical representations always have a beneficial impact on students' performance? Negative evidence from a study on modelling non-linear geometry problems. *Learning and Instruction*, *13*(4), 441-463.

Demetriou, A., & Kazi, S. (2006). Self-awareness in g (with processing efficiency and reasoning). *Intelligence, 34*, 297-317.

Elia, I. (2003). The influence of the Didactical Contract on problem solving: Matching usual word problems with given problems. In A. Gagatsis & S. Papastavridis (Eds.), *Proceedings of the 3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education* (pp. 235-246). Athens: Greece.

English, L. D. (2004). Mathematical and analogical reasoning in early childhood. In L. D. English (Ed.), *Mathematical and analogical reasoning of young Learners* (pp.1-22). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

English, L. D., & Halford G. S. (1995). *Mathematics education: Models and processes.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Finn, P., (1978). Word frequency, information theory, and cloze performance: A transfer theory of processing in reading. *Bibliography Reading Research, 13* (4), 508-537.

Flavell, J. H. (1978). Metacognitive development. In J. M. Scadura & C.J. Brainerd (Eds.), *Structural /Process theories of complex human behavior*, (pp. 213-246). The Netherlands: Sijthoff and Noordhoff.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

Gagatsis, A. (1982). Discrimination des scores au test de closure et évaluation de la compréhension des textes mathématiques. (Thèse de Doctorat). Strasbourg: IREM - Université Louis Pasteur.

Gagatsis, A., & Kyriakides, L. (2000). Teachers’ attitudes towards their pupils’ mathematical errors. *Educational Research and Evaluation*, *6* (1), 24-58.

Gagatsis, A., & Lambis, S. (1997). The originality of students solutions: The case of proportion. In A. Gagatsis (Ed.), *Didactics of mathematics – Technology in education* (pp. 69-94). Thessaloniki: ERASMUS.

Gras, R., Peter, P., Briand, H., & Philippe, J. (1997). Implicative Statistical Analysis. In C. Hayashi, N. Ohsumi, N. Yajima, Y. Tanaka, H. Bock, & Y. Baba (Eds.), *Proceedings of the 5th Conference of the International Federation of Classification Societies* (Vol. 2, pp. 412-419). Tokyo, Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.

Greer, B. (1997). Modelling reality in mathematics classroom: the case of word problems. *Learning and Instruction*, *7*(4), 293-307.

Grenier, D. (1999). The use of didactic concepts in an analysis of problems of proportionality. In A. Gagatsis (Ed.), *A multidimensional approach to learning in mathematics and science* (pp. 37-51). Nicosia: Intercollege press.

Goswami, U. (1992). *Analogical reasoning in children*. *Essays in developmental psychology series.* UK: Lawrence Erlbaum Associates.

Goswami, U. (2004). Commentary: Analogical reasoning and mathematical development. In L. D. English (Ed.), *Mathematical and analogical reasoning of young learners* (pp. 169-186). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hacker, D. (1998). Definitions and empirical foundations. In D. Hacker, J. Dunlosky, & A. Graesser (Eds.), *Metacognition in education theory and practice* (pp. 1-23). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hatano, G., & Sakakibara, T. (2004). Commentary: Toward a cognitive-sociocultural psychology of mathematical and analogical reasoning development. In L. D. English (Ed.), *Mathematical and analogical reasoning of young learners* (pp.187-213). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Holland, H. J., Holyoak, J. K, Nisbett, E., & R., Thagard, R. P. (1989). *Induction: Processes of inference learning and discovery*. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.

Inhelder, B., & Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence*. New York: Basic Books.

Joseph, G. (1991). *The crest of the peacock: Non-European roots of mathematics*. London: Penguin Books.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, K. E. (1983). Proportional reasoning of early adolescents. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and process* (pp. 45-90). New York: Academic Press.

Kieran, C. (1998). Complexity and Insight: A review of theory of didactical situations in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 29* (5), 595-601.

Kieran, C. & Chalouh, L. (1999). Prealgebra: The transition from arithmetic to algebra. In B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking. Grades K-12. Readings from NCTM'S school-based journals and other publications*, 59-70, Reston, Va.: NCTM.

Kline, M. (1990). *Mathematical thought from ancient to modern times* (Vol. 1). New York: Oxford University Press.

Kontoyianni, K., Modestou, M., Erodotou, M., Ioannou, P., Constandinides, A., Parisinos, M. & Gagatsis, A. (2006). Improper proportional reasoning: A comparative study in high school. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 465-462). Prague: Czech Republic.

Kronfellener, M. (2000). Intertwining a mathematical topic with other (non-) mathematical topics: A duplication of the cube. In J. Fauvel & J. v. Maanen (Eds.), *History in mathematics education: the ICMI study* (pp. 265-269). Dordrecht: Kluwer.

Kyriakides, L. Kaloyiroy, C., & Lindsay, G. (2006). An analysis of the revised Olweus bully/victim questionnaire using the Rasch measurement model. *British Journal of Educational Psychology*, *76*, 781-801.

Lamon, J. S. (1999a). *Teaching fractions and ratios for understanding*: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, J. S. (1999b). *More: In depth discussion of the reasoning activities in "Teaching fractions and ratios for understanding"*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93- 118). NCTM: Lawrence Erlbaum Associates.

Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: A definition of pre-algebra. *Journal of Mathematical Behaviour*, *13,* 113-120.

Marshall, S. P. (1995). *Schemas in problem solving*. New York: Cambridge University Press.

McConaghy, J. & Kirby, H. N. (1987). Analogical reasoning and ability level: An examination of R. J. Sternberg's componential method. *Intelligence*, *11*, 137-159.

Meadows, S. (1993). *The child as a thinker: The development and acquisition of cognition in childhood*. London: Routledge.

Meagher, D. (2006). *Harcourt assessment report: Introduction to the Miller analogies test*. Retrieved March 7, 2006, from http://harcourtassessment.com/hai/Images/pdf/assessmentReports/MillerWhitepaper.pdf

Misailidou, C., & Williams, J. (2003). Diagnostic assessment of children's proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behaviour*, *22*, 335-368.

Modestou, M., Elia, I., Gagatsis, A., & Spanoudes, G. (2007). Problem solving in geometry: The case of the illusion of proportionality. *Proceedings of the 5th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (in press). Larnaka: Cyprus.

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2004a). Students' improper proportional reasoning: A multidimensional statistical analysis. In D. De Bock, M. Isoda, J. A. G. Cruz, A. Gagatsis & E. Simmt (Eds.), *Proceedings of ICME 10 – Topic Study Group 2: New developments and trends in secondary mathematics education* (pp. 87-94). Copenhagen: Denmark.

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2004b). Linear or not linear? Students' improper proportional reasoning. In G. Makrides, A. Gagatsis & K. Nicolaou (Eds.), *Proceedings of the CASTME International and CASTME Europe Conference* (pp. 21-33). Nicosia: Cyprus.

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2006). Can the spontaneous and uncritical application of the linear model be questioned? In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 169-176). Prague: Czech Republic.

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2007a). Students' improper proportional reasoning: A result of the epistemological obstacle of "linearity". *Educational Psychology, 27* (1), 75-92.

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2007b). Le difficoltà degli studenti nel ragionamento proporzionale costituiscono un ostacolo didattico, di sviluppo o epistemologico? *La matematica e la sua didattica, 21* (2), in press.

Modestou, M., Gagatsis, A., Pitta-Pantazi, D. (2004). Students' improper proportional reasoning: The case of area and volume of rectangular figures. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 345-352). Bergen: Norway.

Nabors, K. W. (2003). From fractions to proportional reasoning: a cognitive schemes of operation approach. *Journal of Mathematical Behavior*, *22*, 133-179.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Nesher, P. (1988). Multiplicative school problems: Theoretical approaches and empirical findings. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 19- 40). NCTM: Lawrence Erlbaum Associates.

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part 1 – Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, *11*, 217-253.

Piaget, J., Barbel, I, Szeminska, A. (1981). *The child's conception of geometry*. New York: W· W· Norton & Company.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics*. New Jersey: Princeton University Press.

Radford, L., Boero, P., & Vasco, C. (2000). Epistemological assumptions framing interpretations of students understanding of mathematics. In J. Fauvel & J. v. Maanen (Eds.), *History in mathematics education: the ICMI study* (pp. 162- 167). Dordrecht: Kluwer.

Richland, E. L., Morrison, G. R. & Holyoak, J. K. (2006). Children's development of analogical reasoning: Insights from scene analogy problems. *Journal of Experimental Child Psychology*, *94* (3), 249-273.

Rouchier, A. (1999). Recent trends in the theory of didactical situations. In I. Schwank (Ed.), *Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education: Vol. 2*. (pp. 275-284). Osnabrueck: Research Institute for Mathematics Education.

Salkind, J. N. (1997). *Theories of human development* [in Greek]. Athens: Patakis Publications.

Samaniego, A. H. F., & Barrera, S. V. (1999). *Brousseau in action: Didactical situation for learning how to graph functions*. Retrieved on August 13, 2005, form http://www.atcminc.com/mPublications/EP/EPATCM99/ ATCMP020/ PAPER/paper.pdf

Schoenfeld, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 189-215). London: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, *18*, 371-397.

Silver, A. E. (1987). Foundations of cognitive theory and research for mathematics problem solving. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 33-60). London: Lawrence Erlbaum Associates.

Singer-Freeman, E. K., & Goswami, U. (2001). Does half a pizza equal half a box of chocolates? Proportional matching in an analogy task. *Cognitive Development*, *16*, 811-829.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*, 147-164.

Stavy, R., & Tirosh, D. (1996). Intuitive rules in mathematics and science: The case of "The more A- the more B". *International Journal of Science Education*, *18* (6), 652-667.

Stavy, R., & Tirosh, D. (2000). *How students' (mis-)understand science and mathematics: Intuitive rules*. New York: Teachers College Press.

Sternberg, R. J. (1977). *Intelligence, information processing and analogical reasoning*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Sternberg, R. J. (1999).The nature of mathematical reasoning. In L. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (pp. 37-44). Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Sternberg, R. J., & Rifkin, B. (1979). The development of analogical reasoning processes. *Journal of Experimental Child Psychology*, *27*, 195-232.

Streefland, L. (1984). Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process (Towards…a theory). *Educational Studies in Mathematics*, *15,* 327-348.

Tirosh, D. (2003). Using the intuitive rule more A- more B for predicting and analysing students' solutions in geometry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 34* (5), 639-650.

Tirosh, D., & Stavy, R. (1999). Intuitive rules: A way to explain and predict students' reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 38,* 51-66.

Tourniaire, F. (1986). Proportions in elementary school. *Educational Studies in Mathematics, 17,* 401-412.

Tourniare, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics, 16,* 181-204.

Van de Brink, J., & Streefland, L. (1979). Young children (6-8) ratio and proportion. *Education Studies in Mathematics, 10,* 403-420.

Van Dooren, W. (2005). *The linear imperative. A search for the roots and an evaluation of the impact of the over-use of linearity*. Belgium: Katholieke Universiteit Leuven.

Van Dooren, W., De Bock, D., De Bolle, E., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2003a). Secondary school students' improper proportional reasoning: The role of direct versus indirect measures. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 2,* 1-18.

Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2003b). The illusion of linearity: expanding the evidence towards probabilistic reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 53,* 113-138.

Van Dooren, W., De Bock, D., Evers, M., & Verschaffel, L. (2006). Pupils'over-use of proportionality on missing value problems: How numbers may change solutions. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 5, 305-312). Prague: Czech Republic.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2004a). Remedying secondary school students' illusion of linearity: a teaching experiment aiming at conceptual change. *Learning and Instruction, 14,* 485-501.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005a). Ups and downs' is students' over-reliance on proportional methods. *Cognition and Instruction, 23* (1), 57-86.

Van Dooren, W., De Bock, D, Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005b). Students' over-reliance on linearity: A scholastic effect. In W. Van Dooren, (Ed.), *The linear imperative. A search for the roots and an evaluation of the impact of the over-use of linearity* (pp. 59-72). Belgium: Katholieke Universiteit Leuven.

Van Dooren, W., De Bock, D, Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005c). Students' over-use of linearity: A quest for its roots and an evaluation of its impact. In W. Van Dooren, (Ed.), *The linear imperative. A search for the roots and an evaluation of the impact of the over-use of linearity* (pp. 143-170). Belgium: Katholieke Universiteit Leuven.

Van Dooren, W., De Bock, D., Weyers, D., & Verschaffel, L. (2004b). The predictive power of intuitive rules: A critical analysis of the impact of "More A – more B" and "Same A- same B". *Educational Studies in Mathematics*, *56*, 179-207.

Verschaffel L., De Corte E., & Lasure S. (1994). Realistic considerations in mathematical modelling of school arithmetic problems. *Learning and Instruction.* 4, 273 – 294.

Verschaffel L., Greer B., De Corte E. (2000). *Making sense of word problems*. Exton, P.A.: Swets & Zeitlinger.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and process* (pp.127-174). Academic Press.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 141-161). NCTM: Lawrence Erlbaum Associates.

Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. At T. Nunes, & P. Bryant (Eds.), *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective* (5-28). U.K.: Psychology Press.

Vosniadou, S. (1989). Analogical reasoning as a mechanism in knowledge acquisition: a developmental perspective. In S. Vosniadou & A. Ortony (Eds.), *Similarity and analogical reasoning* (pp. 413-437). Cambridge: Cambridge University Press.

Vosniadou, S., Ioannides, C., Dimitrakopoulou A., & Papademetriou, E., (2001). Designing learning environments to promote conceptual change in science. *Learning and Instruction*, *11*, 381-419.

White, S. C., Alexander, P. A., & Daugherty, M. (1998). The relationship between young children's analogical reasoning and mathematical learning. *Mathematical Cognition*, *4* (2), 103-123.

Zazkis, R. (1999). Intuitive rules in number theory: Example of "The more of A, the more of B" rule implementation. *Educational Studies in Mathematics*, *40*, 197-209.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Δοκίμιο Ι

I

Όνομα:____

Τάξη:________________________Ημερομηνία___________________

Σχολείο:____

Α. Πιο κάτω δίνονται 6 δηλώσεις. Διάβασέ τις προσεκτικά και αποφάσισε αν είναι ορθές ή λανθασμένες. <u>Εξήγησε το πώς έφτασες σε αυτή την απόφαση</u>.

Στην περίπτωση που μία δήλωση είναι λανθασμένη, διόρθωσέ την αλλάζοντας <u>μόνο ένα</u> αριθμό. Αν δεν μπορεί να διορθωθεί εξήγησε γιατί.

1. Αν ένα αγόρι έχει 2 αδερφές, τότε 2 αγόρια θα έχουν 4 αδερφές.

Η δήλωση είναι Ορθή/ Λανθασμένη, γιατί...
....
....

Συμπλήρωσέ το μόνο αν επέλεξες ότι η δήλωση είναι λανθασμένη!

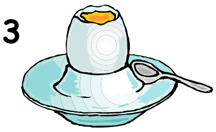
Μπορεί να διορθωθεί η δήλωση αλλάζοντας ένα μόνο αριθμό; Με ποιο τρόπο; Αν όχι εξήγησε το γιατί...
....
....

2. Αν 3 καραμέλες ζυγίζουν 51γρ., τότε 4 καραμέλες του ίδιου είδους θα ζυγίζουν 64γρ.

Η δήλωση είναι Ορθή/ Λανθασμένη, γιατί...
....
....

Συμπλήρωσέ το μόνο αν επέλεξες ότι η δήλωση είναι λανθασμένη!

Μπορεί να διορθωθεί η δήλωση αλλάζοντας ένα μόνο αριθμό; Με ποιο τρόπο; Αν όχι εξήγησε το γιατί...
....
....



3. Αν 2 αυγά χρειάζονται 12 λεπτά για να βράσουν καλά, τότε 3 αυγά θα χρειάζονται 18 λεπτά.

Η δήλωση είναι Ορθή/ Λανθασμένη, γιατί...
....
....

Συμπλήρωσέ το μόνο αν επέλεξες ότι η δήλωση είναι λανθασμένη!

Μπορεί να διορθωθεί η δήλωση αλλάζοντας ένα μόνο αριθμό; Με ποιο τρόπο; Αν όχι εξήγησε το γιατί...
....
....

4. Αν ένα αγόρι 9 ετών έχει ύψος 1,23m, τότε στα 18 του χρόνια θα έχει ύψος 2,46m.

Η δήλωση είναι Ορθή/ Λανθασμένη, γιατί...
....
....

Συμπλήρωσέ το μόνο αν επέλεξες ότι η δήλωση είναι λανθασμένη!

Μπορεί να διορθωθεί η δήλωση αλλάζοντας ένα μόνο αριθμό; Με ποιο τρόπο; Αν όχι εξήγησε το γιατί...
....
....

5. Αν ο Γιώργος είναι 12 χρονών και η Άννα 16, τότε όταν η Άννα θα είναι 32 χρονών ο Γιώργος θα είναι 28.

Η δήλωση είναι Ορθή/ Λανθασμένη, γιατί...
....
....

Συμπλήρωσέ το μόνο αν επέλεξες ότι η δήλωση είναι λανθασμένη!

Μπορεί να διορθωθεί η δήλωση αλλάζοντας ένα μόνο αριθμό; Με ποιο τρόπο; Αν όχι εξήγησε το γιατί...
....
....

6. Αν μια οικογένεια καταναλώνει κατά μέσο όρο 3 λίτρα γάλα κάθε δύο μέρες τότε το μήνα Απρίλιο θα καταναλώσει κατά μέσο όρο 45 λίτρα γάλα.

Η δήλωση είναι Ορθή/ Λανθασμένη, γιατί...
....
....

Συμπλήρωσέ το μόνο αν επέλεξες ότι η δήλωση είναι λανθασμένη

Μπορεί να διορθωθεί η δήλωση αλλάζοντας ένα μόνο αριθμό; Με ποιο τρόπο; Αν όχι εξήγησε το γιατί..
....
....

Β. Πιο κάτω δίνεται μια συνταγή για ζεστή κρέμα σοκολάτας για 3 άτομα:

120 γρ. σοκολάτα κουβερτούρα
9 κουταλιές κρέμα γάλακτος
3 κρόκοι αυγών
4 κουταλιές λικέρ καφέ
5 κουταλιές ζάχαρη

Η μητέρα θέλει να φτιάξει την κρέμα για την οικογένειά μας που αποτελείται από τέσσερα άτομα.

1. Πόσες κουταλιές κρέμας γάλακτος θα χρειαστεί;

Δείξε τον τρόπο που εργάζεσαι με μια <u>μαθηματική πρόταση</u> ή με όποιο άλλο τρόπο θεωρείς κατάλληλο.

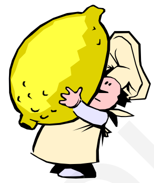
2. Πόσες κουταλιές ζάχαρη θα χρειαστεί;

3. Το Σάββατο έχουμε πάρτι στο σπίτι και ετοιμάζουμε τραπέζι για 12 άτομα. Για γλυκό θα φτιάξουμε τη ζεστή κρέμα σοκολάτας.

   Πόσες κουταλιές λικέρ καφέ θα χρειαστούμε;

Γ. Ο Γιάννης και η Μαρία φτιάχνουν λεμονάδα χρησιμοποιώντας ζάχαρη και χυμό λεμονιού. Διάλεξε ποιο από τα δύο παιδιά έχει φτιάξει τη πιο γλυκιά λεμονάδα σε κάθε περίπτωση. Δικαιολόγησε την απάντησή σου.

Στη συνέχεια άλλαξε μόνο ένα από τα δεδομένα έτσι ώστε η λεμονάδα των δύο παιδιών να έχει την ίδια γεύση.



1. **Ο Γιάννης χρησιμοποίησε 6 κουτάλια ζάχαρη και 12 φλυντζανάκια χυμό λεμονιού ενώ η Μαρία χρησιμοποίησε 4 κουτάλια ζάχαρη και 7 φλυντζανάκια χυμό λεμονιού.**

   Ο Γιάννης / Η Μαρία έφτιαξε τη πιο γλυκιά λεμονάδα γιατί.................................
   ....
   ....

   Για να έχει η λεμονάδα των δύο παιδιών την ίδια γεύση πρέπει:..........................
   ....
   ....

2. **Ο Γιάννης χρησιμοποίησε 3 κουτάλια ζάχαρη και 5 φλυντζανάκια χυμό λεμονιού ενώ η Μαρία χρησιμοποίησε 7 κουτάλια ζάχαρη και 11 φλυντζανάκια χυμό λεμονιού.**

   Ο Γιάννης / Η Μαρία έφτιαξε τη πιο γλυκιά λεμονάδα γιατί.................................
   ....
   ....

   Για να έχει η λεμονάδα των δύο παιδιών την ίδια γεύση πρέπει:..........................
   ....
   ....

3. **Ο Γιάννης χρησιμοποίησε 12 κουτάλια ζάχαρη και 16 φλυντζανάκια χυμό λεμονιού ενώ η Μαρία χρησιμοποίησε 4 κουτάλια ζάχαρη και 6 φλυντζανάκια χυμό λεμονιού.**

   Ο Γιάννης / Η Μαρία έφτιαξε τη πιο γλυκιά λεμονάδα γιατί.................................
   ....
   ....

   Για να έχει η λεμονάδα των δύο παιδιών την ίδια γεύση πρέπει:..........................
   ....
   ....

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Δοκίμιο ΙΙ

ΙΙ

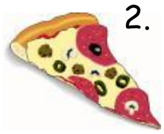
Όνομα:____

Τάξη:____________________Ημερομηνία________________

Σχολείο:______________________________________

Διάβασε και λύσε προσεκτικά τα πιο κάτω προβλήματα, δικαιολογώντας την απάντησή σου με μια μαθηματική πρόταση ή με όποιο άλλο τρόπο θεωρείς κατάλληλο.

1. Η δασκάλα έδωσε στους μαθητές ένα φυλλάδιο με εικόνες και μπογιά για να τις βάψουν. Ο Χρίστος χρησιμοποίησε 8ml μπογιάς για να βάψει το εσωτερικό μιας τετράγωνης εικόνας πλευράς 4cm. Πόση μπογιά χρησιμοποίησε ο Γιώργος για να βάψει μια μεγέθυνση της ίδιας εικόνας με πλευρά 12cm;



2. Χρειάζεσαι περίπου 360g τυρί για να φτιάξεις μια πίτσα με ακτίνα 20cm. Πόσα γραμμάρια τυρί χρειάζεσαι για να φτιάξεις μια πίτσα με ακτίνα 40cm;

3. Ένα συνεργείο οικοδόμων χρειάζεται 5 μέρες για να περιφράξει με τσιμέντο ένα οικόπεδο τετράγωνου σχήματος με πλευρά 60m. Πόσες μέρες θα χρειαστεί το ίδιο συνεργείο για να περιφράξει ένα κτήμα ίδιου σχήματος με πλευρά 180m;

4. Ένα πλοιάριο χρειάζεται 6 ώρες για να πάρει βαρκάδα τουρίστες γύρω από ένα νησί με ακτίνα 36Km. Πόσες ώρες χρειάζεται το ίδιο πλοιάριο για να εκτελέσει αντίστοιχο δρομολόγιο γύρω από ένα νησί με ακτίνα 72Km, αν κινείται με την ίδια ταχύτητα;

5. Η κ. Γιάννα κάνει ανακαίνιση στο σπίτι της και έτσι έβαλε νέα πλακάκια στο γραφείο της, τετράγωνου σχήματος και πλευράς 4m. Χρειάστηκε 120 πλακάκια. Υπολόγισε ότι χρειάζεται 240 πλακάκια ίδιου μεγέθους για να ανακαινίσει και το σαλόνι, ίδιου σχήματος και πλευράς 8m. Είναι αρκετά τα πλακάκια που παράγγειλε για το σαλόνι;

   - Αν όχι, πόσα πλακάκια θα έπρεπε να είχε παραγγείλει;

6. Ο κ. Αντρέας, που είναι κηπουρός, χρειάστηκε 60 κομμάτια γρασίδι για να καλύψει τον κυκλικό κόμβο Λατσιών, ακτίνας 5m. Ανέλαβε να καλύψει με γρασίδι και τον κυκλικό κόμβο Γερμασόγειας που έχει ακτίνα 10m. Για τον σκοπό αυτό υπολόγισε ότι χρειάζεται 120 κομμάτια από γρασίδι. Είναι αρκετό το γρασίδι που θα παραγγείλει ο κ. Αντρέας;

   - Αν όχι, πόσα κομμάτια γρασίδι πρέπει να παραγγείλει;

7. Η κ. Άννα είναι ράπτρια. Χρειάζεται 5 λεπτά για να ράψει κορδέλα γύρω από μία τετράγωνη πετσέτα πλευράς 30cm. Υπολόγισε ότι χρειάζεται 30 λεπτά για να ράψει την ίδια κορδέλα γύρω από ένα τραπεζομάντιλο ίδιου σχήματος και πλευράς 180cm. Είναι σωστοί οι υπολογισμοί της κ. Άννας;

   - Αν όχι, πόσο χρόνο χρειάζεται για το τραπεζομάντιλο;

8. Ένας ζαχαροπλάστης χρειάζεται συνήθως 60ml σαντιγί για να γαρνίρει την περιφέρεια μιας συνηθισμένης τούρτας με ακτίνα 12cm. Σήμερα έχει μια παραγγελία για πάρτι και πρέπει να κατασκευάσει την ίδια τούρτα με ακτίνα 36cm. Έτσι, ετοίμασε 180ml από την ίδια σαντιγί για να γαρνίρει την τούρτα του πάρτι. Είναι αρκετή η σαντιγί που ετοίμασε ο ζαχαροπλάστης;

   - Αν όχι, πόση θα έπρεπε να είχε ετοιμάσει;

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

Δοκίμιο ΙΙΙ

III

Α. Τα προβλήματα που ακολουθούν έχουν σκοπό να εξετάσουν πως σχετίζονται μεταξύ τους οι λέξεις. Στο καθένα από τα προβλήματα οι λέξεις θα σου δίνονται σε δύο ή περισσότερα ζεύγη. Να έχεις υπόψη σου ότι οι δύο λέξεις ενός ζευγαριού χωρίζονται μεταξύ τους με δύο τελείες, δηλ. : Για παράδειγμα, οι λέξεις

ΔΙΨΑ:ΝΕΡΟ

είναι ένα ζευγάρι. Ένα ζευγάρι λέξεων χωρίζεται από ένα άλλο ζευγάρι με τέσσερις τελείες. Παρακάτω φαίνονται δύο ζευγάρια.

ΔΙΨΑ:ΝΕΡΟ :: ΠΕΙΝΑ:ΦΑΓΗΤΟ

Εσύ πρέπει να βρίσκεις τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στις λέξεις του ενός ζευγαριού ώστε να συμπληρώσεις τα κενά που υπάρχουν στα άλλα ζευγάρια. Για το κάθε κενό θα σου δίνονται πάντα τρεις λέξεις. Εσύ θα πρέπει να διαλέγεις κάθε φορά ποια λέξη από τις τρεις ταιριάζει καλύτερα στο κενό. Θα σημειώνεις την απάντηση σου βάζοντας σε κύκλο τη λέξη που διάλεξες. Πρόσεξε να βάζεις ένα κύκλο κάθε φορά.

Παράδειγμα 1:

ΜΟΛΥΒΙ:ΚΑΣΕΤΙΝΑ :: ΠΟΥΚΑΜΙΣΟ:_______________

ΚΡΕΜΑΣΤΡΑ
ΒΑΛΙΤΣΑ
ΝΤΟΥΛΑΠΑ

Παράδειγμα 2:

ΨΩΜΙ:ΜΑΧΑΙΡΙ :: _____________:_____________

ΠΛΑΣΤΙΚΟ	ΨΑΛΙΔΙ
ΥΦΑΣΜΑ	ΜΕΛΑΝΙ
ΞΥΛΟ	ΞΥΡΑΦΙ

Παρακαλώ γύρισε σελίδα

1. ΣΟΒΑΡΟΣ:ΕΠΙΠΟΛΑΙΟΣ :: ΗΡΕΜΟΣ: ________________

ΗΣΥΧΟΣ
ΤΑΡΑΓΜΕΝΟΣ
ΑΚΙΝΗΤΟΣ

2. ΕΞΥΠΝΟΣ:ΕΥΦΥΗΣ :: _____________ : ΠΑΝΟΥΡΓΟΣ

ΠΟΝΗΡΟΣ
ΑΦΕΛΗΣ
ΕΙΛΙΚΡΙΝΗΣ

3. ΠΟΤΑΜΟΣ:ΡΥΑΚΙ :: ΒΟΥΝΟ : _________________

ΠΕΔΙΑΔΑ
ΔΡΟΜΟΣ
ΛΟΦΟΣ

4. ΓΡΙΠΗ:ΑΣΘΕΝΕΙΑ :: ΣΟΚΟΛΑΤΙΝΑ: ________________

ΜΑΥΡΗ
ΓΛΥΚΟ
ΤΑΡΤΑ

5. (ΠΑΙΔΙΑ:ΓΟΝΕΙΣ :: ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ) :: (ΜΑΘΗΤΕΣ:ΔΑΣΚΑΛΟΙ ::_______)

ΒΑΘΜΟΙ
ΠΑΙΔΕΙΑ
ΜΑΘΗΜΑ

6. ΕΙΚΟΝΑ:ΖΩΓΡΑΦΙΚΗ :: ΛΕΞΗ :__________________

ΧΑΡΤΙ
ΟΜΙΛΙΑ
ΛΟΓΟΤΕΧΝΙΑ

7. ΜΕΛΑΝΙ:ΠΕΝΑ :: ΜΠΟΓΙΑ:_________________

ΧΡΩΜΑ
ΒΟΥΡΤΣΑ
ΧΑΡΤΙ

8. ΜΕΣΗΜΕΡΙ:ΑΠΟΓΕΥΜΑ :: ΠΕΜΠΤΗ :_______________

ΤΡΙΤΗ
ΤΕΤΑΡΤΗ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ

9. ΚΡΕΒΑΤΙ:ΥΠΝΟΣ :: ________________:________________

ΧΑΡΤΙ	ΒΙΒΛΙΟ
ΤΡΑΠΕΖΙ	ΒΡΟΧΗ
ΝΕΡΟ	ΦΑΓΗΤΟ

Β. Παρακάτω σου δίνονται διάφορες σχέσεις με αριθμούς. Εσύ πρέπει να βρεις τη σχέση που υπάρχει στο πρώτο ζευγάρι των αριθμών για να την εφαρμόσεις στο δεύτερο ώστε να συμπληρώσεις το κενό. Πρέπει να συμπληρώσεις στο κενό τον αριθμό που ταιριάζει, διαλέγοντας από τους τρεις αριθμούς που βρίσκονται στην παρένθεση.

Παράδειγμα

1 → 2

3 → ---- (4, 5, 6)

Η απάντηση είναι το 6.
Πρόσεξε να υποδηλώνεις ένα νούμερο την κάθε φορά.

1) 6 → 12

8 → ---- (4, 14, 16)

2) 3 → 9

6 → ---- (12, 18, 24)

3) 6 → 8

9 → ---- (12, 18, 27)

4) 6 ⟶ 3

8 ⟶ ---- (2, 4, 16)

5) 3 ⟶ 1

6 ⟶ ---- (2, 3, 9)

6) 6 ⟶ 4

9 ⟶ ---- (1, 3, 6)

7) 6 ⟶ 36

8 ⟶ ---- (38, 64, 72)

8) 3 ⟶ 27

4 ⟶ ---- (12, 28, 64)

Ποιο από τα παραπάνω προβλήματα <u>που έλυσες</u> έχει την ίδια αριθμητική σχέση με τα προβλήματα που ακολουθούν:

1) 48 ⟶ 16

15 ⟶ 5

Απάντηση: Το πρόβλημα________________________________

2) 24 ⟶ 16

12 ⟶ 8

Απάντηση: Το πρόβλημα ________________________________

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ

Δοκίμιο IV

Όνομα:____

Τάξη:_________________________Ημερομηνία___________________

Σχολείο:____

Α. Πιο κάτω δίνονται 6 δηλώσεις. Διάβασέ τις προσεκτικά και αποφάσισε αν είναι ορθές ή λανθασμένες. <u>Εξήγησε το πώς έφτασες σε αυτή την απόφαση</u>.

Στην περίπτωση που μία δήλωση είναι λανθασμένη, διόρθωσέ την αλλάζοντας <u>μόνο ένα</u> αριθμό. Αν δεν μπορεί να διορθωθεί εξήγησε γιατί.

1. **Αν ένα αγόρι έχει 2 αδερφές, τότε 2 αγόρια θα έχουν 4 αδερφές.**

   Η δήλωση είναι Ορθή/ Λανθασμένη, γιατί...
   ....
   ....

   Συμπλήρωσέ το μόνο αν επέλεξες ότι η δήλωση είναι λανθασμένη!

   Μπορεί να διορθωθεί η δήλωση αλλάζοντας ένα μόνο αριθμό; Με ποιο τρόπο; Αν όχι εξήγησε το γιατί..
   ....
   ....

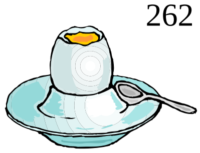
2. **Αν 3 καραμέλες ζυγίζουν 51γρ., τότε 4 καραμέλες του ίδιου είδους θα ζυγίζουν 64γρ.**

   Η δήλωση είναι Ορθή/ Λανθασμένη, γιατί...
   ....
   ....

   Συμπλήρωσέ το μόνο αν επέλεξες ότι η δήλωση είναι λανθασμένη!

   Μπορεί να διορθωθεί η δήλωση αλλάζοντας ένα μόνο αριθμό; Με ποιο τρόπο; Αν όχι εξήγησε το γιατί..
   ....
   ....

3. Αν 2 αυγά χρειάζονται 12 λεπτά για να βράσουν καλά, τότε 3 αυγά θα χρειάζονται 18 λεπτά.



Η δήλωση είναι Ορθή/ Λανθασμένη, γιατί..
....
....

Συμπλήρωσέ το μόνο αν επέλεξες ότι η δήλωση είναι λανθασμένη!

Μπορεί να διορθωθεί η δήλωση αλλάζοντας ένα μόνο αριθμό; Με ποιο τρόπο; Αν όχι εξήγησε το γιατί...
....
....

4. Αν ένα αγόρι 9 ετών έχει ύψος 1,23m, τότε στα 18 του χρόνια θα έχει ύψος 2,46m.

Η δήλωση είναι Ορθή/ Λανθασμένη, γιατί..
....
....

Συμπλήρωσέ το μόνο αν επέλεξες ότι η δήλωση είναι λανθασμένη!

Μπορεί να διορθωθεί η δήλωση αλλάζοντας ένα μόνο αριθμό; Με ποιο τρόπο; Αν όχι εξήγησε το γιατί...
....
....

5. Αν ο Γιώργος είναι 12 χρονών και η Άννα 16, τότε όταν η Άννα θα είναι 32 χρονών ο Γιώργος θα είναι 28.

Η δήλωση είναι Ορθή/ Λανθασμένη, γιατί..
....
....

Συμπλήρωσέ το μόνο αν επέλεξες ότι η δήλωση είναι λανθασμένη!

Μπορεί να διορθωθεί η δήλωση αλλάζοντας ένα μόνο αριθμό; Με ποιο τρόπο; Αν όχι εξήγησε το γιατί...
....
....

6. **Αν μια οικογένεια καταναλώνει κατά μέσο όρο 3 λίτρα γάλα κάθε δύο μέρες τότε το μήνα Απρίλιο θα καταναλώσει κατά μέσο όρο 45 λίτρα γάλα.**

   Η δήλωση είναι Ορθή/ Λανθασμένη, γιατί……………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………………

   Συμπλήρωσέ το μόνο αν επέλεξες ότι η δήλωση είναι λανθασμένη

   Μπορεί να διορθωθεί η δήλωση αλλάζοντας ένα μόνο αριθμό; Με ποιο τρόπο; Αν όχι εξήγησε το γιατί……………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………………

B. Διάβασε και λύσε προσεκτικά τα πιο κάτω προβλήματα, δικαιολογώντας την απάντησή σου με μια μαθηματική πρόταση ή με όποιο άλλο τρόπο θεωρείς κατάλληλο.

1. Η δασκάλα έδωσε στους μαθητές ένα φυλλάδιο με εικόνες και μπογιά για να τις βάψουν. Ο Χρίστος χρησιμοποίησε 8ml μπογιάς για να βάψει το εσωτερικό μιας τετράγωνης εικόνας πλευράς 4cm. Πόση μπογιά χρησιμοποίησε ο Γιώργος για να βάψει μια μεγέθυνση της ίδιας εικόνας με πλευρά 12cm;

____

____

____

2. Χρειάζεσαι περίπου 360g τυρί για να φτιάξεις μια πίτσα με ακτίνα 20cm. Πόσα γραμμάρια τυρί χρειάζεσαι για να φτιάξεις μια πίτσα με ακτίνα 40cm;

____

____

____

3. Ένα συνεργείο οικοδόμων χρειάζεται 5 μέρες για να περιφράξει με τσιμέντο ένα οικόπεδο τετράγωνου σχήματος με πλευρά 60m. Πόσες μέρες θα χρειαστεί το ίδιο συνεργείο για να περιφράξει ένα κτήμα ίδιου σχήματος με πλευρά 180m;

4. Ένα πλοιάριο χρειάζεται 6 ώρες για να πάρει βαρκάδα τουρίστες γύρω από ένα νησί με ακτίνα 36Km. Πόσες ώρες χρειάζεται το ίδιο πλοιάριο για να εκτελέσει αντίστοιχο δρομολόγιο γύρω από ένα νησί με ακτίνα 72Km, αν κινείται με την ίδια ταχύτητα;

5. Η κ. Γιάννα κάνει ανακαίνιση στο σπίτι της και έτσι έβαλε νέα πλακάκια στο γραφείο της, τετράγωνου σχήματος και πλευράς 4m. Χρειάστηκε 120 πλακάκια. Υπολόγισε ότι χρειάζεται 240 πλακάκια ίδιου μεγέθους για να ανακαινίσει και το σαλόνι, ίδιου σχήματος και πλευράς 8m. Είναι αρκετά τα πλακάκια που παράγγειλε για το σαλόνι;

   - Αν όχι, πόσα πλακάκια θα έπρεπε να είχε παραγγείλει;

6. Ο κ. Αντρέας, που είναι κηπουρός, χρειάστηκε 60 κομμάτια γρασίδι για να καλύψει τον κυκλικό κόμβο Λατσιών, ακτίνας 5m. Ανέλαβε να καλύψει με γρασίδι και τον κυκλικό κόμβο Γερμασόγειας που έχει ακτίνα 10m. Για τον σκοπό αυτό υπολόγισε ότι χρειάζεται 120 κομμάτια από γρασίδι. Είναι αρκετό το γρασίδι που θα παραγγείλει ο κ. Αντρέας;

   - Αν όχι, πόσα κομμάτια γρασίδι πρέπει να παραγγείλει;

7. Η κ. Άννα είναι ράπτρια. Χρειάζεται 5 λεπτά για να ράψει κορδέλα γύρω από μία τετράγωνη πετσέτα πλευράς 30cm. Υπολόγισε ότι χρειάζεται 30 λεπτά για να ράψει την ίδια κορδέλα γύρω από ένα τραπεζομάντιλο ίδιου σχήματος και πλευράς 180cm. Είναι σωστοί οι υπολογισμοί της κ. Άννας;

   - Αν όχι, πόσο χρόνο χρειάζεται για το τραπεζομάντιλο;

8. Ένας ζαχαροπλάστης χρειάζεται συνήθως 60ml σαντιγί για να γαρνίρει την περιφέρεια μιας συνηθισμένης τούρτας με ακτίνα 12cm. Σήμερα έχει μια παραγγελία για πάρτι και πρέπει να κατασκευάσει την ίδια τούρτα με ακτίνα 36cm. Έτσι, ετοίμασε 180ml από την ίδια σαντιγί για να γαρνίρει την τούρτα του πάρτι. Είναι αρκετή η σαντιγί που ετοίμασε ο ζαχαροπλάστης;

   - Αν όχι, πόση θα έπρεπε να είχε ετοιμάσει;

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε

Αποτελέσματα Παραγοντικής Ανάλυσης

Έργα	Παράγοντες									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
st1pa					.789					
st2a	.500									
st3pa					.620					
st4pa					.778					
st5pa										
st6a	.473									
pmv1	.775									
pmv2	.817									
pmv3	.796									
pc1						.388				
pc2						.825				
pc3						.829				
ppmv3			.310	.603						
ppmv4			.373	.585						
npmv1		.543								
npmv2		.737								
ppc3				.843						
ppc4				.843						
npc1		.750								
npc2		.793								
v1									-.517	
v2									.738	
v3									.655	
v4										.385

v5				.582
v6			.523	.333
v7			.598	
v8				
v9			.631	
m1	.435			
m2	.695			
m3	.642			
m4	.542			
m5	.506			
m6	.394			
m7				
m8		.476		
m11		.495		
m12		.680		