ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΜΙΑΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ: Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΑΡΙΣΤΟΚΛΗΣ Α. ΝΙΚΟΛΑΟΥ

2011

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΜΙΑΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ: Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Αριστοκλής Α. Νικολάου

Υποβλήθηκε στο Τμήμα Επιστημών της Αγωγής

ως μέρος των απαιτήσεων για απόκτηση

Διδακτορικού Τίτλου

στη Μαθηματική Παιδεία

Πανεπιστήμιο Κύπρου

Δεκέμβριος 2011

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ

Έγκριση Διδακτορικής Διατριβής

Με το παρόν έγγραφο πιστοποιείται ότι η διδακτορική διατριβή που ετοιμάστηκε

Από τον Αριστοκλή Α. Νικολάου

Με τίτλο Θεωρητικό Μοντέλο για την Κατανόηση Μιας Έννοιας των Μαθηματικών του Δημοτικού Σχολείου: Η Περίπτωση των Κλασμάτων

Πληροί τους κανονισμούς του Πανεπιστημίου και ανταποκρίνεται στα κριτήρια ποιότητας και πρωτοτυπίας του Πανεπιστημίου

Για την απόκτηση Διδακτορικού Τίτλου στη Μαθηματική Παιδεία

Η διατριβή παρουσιάστηκε δημόσια και σε πενταμελή εξεταστική επιτροπή και εγκρίθηκε στις 3 Νοεμβρίου 2011.

Ερευνητικός Σύμβουλος: Δήμητρα Πίττα-Πανταζή, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Συμβουλευτική Επιτροπή: Αθανάσιος Γαγάτσης, Καθηγητής
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου
Κωνσταντίνος Χρίστου, Καθηγητής
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

....
Δήμητρα Πίττα-Πανταζή

....
Αθανάσιος Γαγάτσης

....
Κωνσταντίνος Χρίστου

Εξεταστική Επιτροπή

Κωνσταντίνος Χρίστου (Πρόεδρος),
Καθηγητής, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου
Αθανάσιος Γαγάτσης,
Καθηγητής, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου
Δήμητρα Πίττα-Πανταζή,
Αναπληρώτρια Καθηγήτρια, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου
Θεοδόσης Ζαχαριάδης,
Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών,
Δέσποινα Πόταρη,
Αναπληρώτρια Καθηγήτρια, Τμήμα Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν η ανάπτυξη και ο έλεγχος θεωρητικού μοντέλου με παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση μιας έννοιας των μαθηματικών του δημοτικού σχολείου. Οι παράγοντες που υποθέτουμε με βάση το προτεινόμενο μοντέλο ότι συνθέτουν την κατανόηση είναι: ο επαγωγικός συλλογισμός, οι ορισμοί και οι μαθηματικές εξηγήσεις, η επιχειρηματολογία και η τεκμηρίωση, η αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων, οι αναπαραστάσεις, οι διασυνδέσεις και ο αναστοχασμός . Στην παρούσα έρευνα τα κλάσματα επιλέγηκαν για την εξέταση του προτεινόμενου μοντέλου. Ακόμη, σκοπός της εργασίας ήταν ο σχεδιασμός και η εφαρμογή παρεμβατικού προγράμματος για τη διδασκαλία των παραγόντων της κατανόησης με στόχο τη βελτίωση της ικανότητας των μαθητών στους παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων και της κατανόησης των κλασμάτων.

Για την υλοποίηση των στόχων της έρευνας, θεωρήθηκε απαραίτητη η ανάπτυξη και η εφαρμογή ερευνητικού σχεδίου με τα εξής στάδια: (α) κατασκευή και χορήγηση δύο δοκιμίων μέτρησης των παραγόντων σε 344 μαθητές Ε΄ και Στ΄ τάξης σε πιλοτική φάση, (β) τροποποίηση των δοκιμίων με βάση τα αποτελέσματα της πιλοτικής φάσης και χορήγησή τους σε 349 μαθητές Στ΄ τάξης που αποτέλεσαν το δείγμα στην κυρίως έρευνα (pre-test), (γ) διαμοιρασμός του δείγματος σε πειραματική ομάδα (145 μαθητές) και σε ομάδα ελέγχου (204 μαθητές) και εφαρμογή στους μαθητές της πειραματικής ομάδας των διδασκαλιών στα πλαίσια του παρεμβατικού προγράμματος, (δ) χορήγηση των δύο δοκιμίων σε όλο το δείγμα αμέσως μετά την εφαρμογή της παρέμβασης (post-test) και (ε) χορήγηση των δύο δοκιμίων τρεις μήνες μετά το πέρας της παρέμβασης (retention-test).

Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης έδειξαν ότι το προτεινόμενο μοντέλο είχε πολύ καλή προσαρμογή στα εμπειρικά δεδομένα και στις τρεις μετρήσεις. Ακόμη, η δομή του μοντέλου βρέθηκε να είναι αμετάβλητη με την πάροδο του χρόνου. Το αποτέλεσμα αυτό επιβεβαιώνει τη δομή του προτεινόμενου μοντέλου και την καταλληλότητά του για να περιγράψει την κατανόηση των κλασμάτων και επιβεβαιώνει την υπόθεσή μας ότι ο επαγωγικός συλλογισμός, οι ορισμοί και οι μαθηματικές εξηγήσεις, η επιχειρηματολογία και η τεκμηρίωση, η αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων, οι αναπαραστάσεις, οι διασυνδέσεις με τους δεκαδικούς, τα ποσοστά και τη διαίρεση και ο

αναστοχασμός είναι παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων. Ακόμη, από τη διενέργεια της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης βρέθηκε ότι όλοι οι παράγοντες είχαν σημαντική συνεισφορά στην κατανόηση των κλασμάτων με τις αναπαραστάσεις να είναι ο παράγοντας με τη μεγαλύτερη συνεισφορά. Επίσης, οι παράγοντες βρέθηκε να ερμηνεύουν ένα μεγάλο ποσοστό της διασποράς της κατανόησης των κλασμάτων, στοιχείο που φανερώνει ότι το προτεινόμενο θεωρητικό μοντέλο αποτελεί ένα αρκετά ολοκληρωμένο πλαίσιο περιγραφής της κατανόησης των κλασμάτων για τους μαθητές Στ΄ τάξης δημοτικού σχολείου.

Αναφορικά με την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος, βρέθηκε ότι είχε θετική επίδραση στην κατανόηση των κλασμάτων στο σύνολο του δείγματος. Για την εξέταση της επίδρασής του στην ικανότητα των μαθητών στους παράγοντες, έγινε πρώτα ανάλυση latent class, από την οποία προέκυψε ότι μπορούσαν να δημιουργηθούν τρεις κατηγορίες (ομάδες) μαθητών με βάση την κατανόηση των κλασμάτων στην πρώτη μέτρηση: τους μαθητές με χαμηλή κατανόηση των κλασμάτων, τους μαθητές με μέτρια κατανόηση και εκείνους με ψηλή κατανόηση των κλασμάτων. Ακολούθως, διενεργήθηκε ανάλυση ανάπτυξης για καθεμιά κατηγορία μαθητών για την ομάδα ελέγχου και την πειραματική ομάδα ξεχωριστά. Από την ανάλυση ανάπτυξης προέκυψαν κατάλληλα μοντέλα μόνο για τους μαθητές με χαμηλή κατανόηση των κλασμάτων. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος προσέδωσε στην πειραματική ομάδα ψηλότερο ρυθμό ανάπτυξης έναντι της ομάδας ελέγχου όσον αφορά στην κατανόηση των κλασμάτων, φανερώνοντας τη θετική επίδραση του παρεμβατικού προγράμματος για τους μαθητές αυτής της κατηγορίας. Ακόμη, το παρεμβατικό πρόγραμμα φαίνεται να προσέδωσε ψηλότερο ρυθμό ανάπτυξης στους μαθητές της πειραματικής ομάδας όσον αφορά στην ικανότητά τους στους ορισμούς και τις μαθηματικές εξηγήσεις, στις αναπαραστάσεις και στον αναστοχασμό, ενώ το ίδιο δεν φαίνεται να συμβαίνει για την αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων. Για τους άλλους παράγοντες δεν μπορούν να εξαχθούν ασφαλή συμπεράσματα αφού δεν προέκυψαν κατάλληλα μοντέλα τόσο για την πειραματική ομάδα όσο και για την ομάδα ελέγχου, ώστε να μπορεί να γίνει σύγκριση.

Η πρωτοτυπία της παρούσας εργασίας εστιάζεται στην ανάπτυξη και τον έλεγχο ενός νέου θεωρητικού μοντέλου των παραγόντων που συνθέτουν την κατανόηση μιας έννοιας στο επίπεδο του δημοτικού σχολείου. Τα αποτελέσματά της έχουν σημαντική συνεισφορά στην έρευνα στο αντικείμενο της μαθηματικής παιδείας και μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τους εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης για τη βελτίωση της κατανόησης των κλασμάτων.

ABSTRACT

The purpose of the present study was to develop and test a theoretical model with factors that constitute understanding of an elementary school mathematical concept. The factors that we consider to constitute understanding are: inductive reasoning, definitions and mathematical explanations, argumentation and justification, sense about the magnitude of fractions, representations, connections and reflection. In the present study, the concept of fractions was selected to test the proposed model. Additionally, in the present study we designed and implemented an intervention program aiming to teach the factors that constitute understanding of fractions in order to improve students' abilities in those factors and fraction understanding.

To fulfill the aims of the study, a research plan with the following stages was applied: (a) in the pilot phase, development and administration of the tests measuring the factors in a sample of 344 fifth and sixth grade students, (b) modification of the tests on the basis of the results of the pilot phase and administration in a sample of 349 sixth grade students (pre-test), (c) split of the sample of the main study to an experimental group (145 students) and control group (204 students) and application of the intervention only to the students of the experimental group, (d) administration of the two tests to all the sample immediately after the completion of the intervention (post-test), and (e) administration of the two tests three months after the completion of the intervention (retention-test).

The results of the confirmatory factor analysis showed that the proposed model had a very good fit to the empirical data across the three measurements. Moreover, the structure of the model was found to be immutable over time. This result confirms the structure of the proposed model and its suitability to describe fraction understanding and confirms our hypothesis that inductive reasoning, definitions and mathematical explanations, argumentation and justification, sense about the magnitude of fractions, representations, connections of fractions with decimals, percentages and division and reflection are factors that constitute fraction understanding. Additionally, the confirmatory factor analysis revealed that all factors had significant contribution towards fraction understanding, with representations having the highest contribution. Also, the factors were found to account for a large percentage of the variance of fraction understanding. This result shows that the proposed theoretical model

constitutes a comprehensive theoretical model of understanding of fractions for 6th grade primary school students.

The application of the intervention program to the experimental group had positive effects and led to an improvement of fraction understanding of the whole sample. To examine the effect of the intervention to students' ability in the factors, latent class analysis was first performed. Latent class analysis revealed three categories (groups) of students on the basis of fraction understanding in the pre-test: the first category consisted of students with low understanding of fractions, the second category of those with medium understanding of fractions, and the third category of those with high understanding of fractions. Afterwards, growth analysis was performed for each category of the control group and for each category of the experimental group separately. Growth analysis revealed that models with good fit to the empirical data could be estimated only for the students with low understanding of fractions. The results showed that the implementation of the intervention impart to the experimental group higher rate of growth compared to the control group in fraction understanding, revealing the positive impact of the intervention program to the students with low understanding of fractions. Moreover, the intervention seemed to impart higher rate of growth to the students of the experimental group in their ability in definitions and mathematical explanations, in representations and reflection, while this was not the case for the sense about the magnitude of fractions. Conclusions cannot be drawn for the other factors, since appropriate models of growth could not be estimated neither for the experimental group nor for the control group.

The uniqueness of the present study is situated in that it proposes a new theoretical model with factors that constitute understanding of an elementary school mathematical concept. Its results have implications for research in mathematics education and can be used by primary school educators in order to improve understanding of fractions.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της συμβουλευτικής επιτροπής για τη βοήθεια που μου παρείχαν κατά τη διάρκεια του σχεδιασμού, της υλοποίησης και της συγγραφής της εργασίας αυτής. Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα την ερευνητική μου σύμβουλο, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Δήμητρα Πίττα-Πανταζή για την αμέριστη συμπαράσταση και υποστήριξη. Η επικοινωνία μαζί της τα τελευταία τέσσερα χρόνια συνεχής και σχεδόν καθημερινή. Πρόθυμη να με στηρίξει και να με συμβουλεύσει κάθε στιγμή, να ακούσει τις ανησυχίες και τους προβληματισμούς μου. Την ευχαριστώ ιδιαίτερα για την ενθάρρυνση και τον ενθουσιασμό της που με κινητοποίησαν ώστε να φέρω εις πέρας την παρούσα εργασία. Σε ευχαριστώ πολύ Δήμητρα!

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ακόμη, τα άλλα δύο μέλη της συμβουλευτικής μου επιτροπής, τον Καθηγητή Κωνσταντίνο Χρίστου και τον Καθηγητή Αθανάσιο Γαγάτση. Οι συμβουλές και τα σχόλιά τους αποτέλεσαν πολύτιμη ανατροφοδότηση στην όλη πορεία. Οι συμβουλές, η υποστήριξη και τα σχόλια του Καθηγητή Κωνσταντίνου Χρίστου ιδιαίτερα αναφορικά με τη διεξαγωγή στατιστικών αναλύσεων και το μεθοδολογικό μέρος της εργασίας ήταν πολύτιμες.

Θέλω να ευχαριστήσω επίσης το φίλο Μάριο Πιττάλη για την αμέριστη βοήθεια και στήριξη που μου προσέφερε ως προς τη διεξαγωγή των στατιστικών αναλύσεων, την ερμηνεία των αποτελεσμάτων και την εξαγωγή συμπερασμάτων. Φίλε Μάριε σε ευχαριστώ θερμά για την υπομονή και τη βοήθειά σου. Θέλω, επίσης, να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τους δασκάλους της πειραματικής ομάδας που εφάρμοσαν τις διδασκαλίες του παρεμβατικού προγράμματος στις τάξεις τους. Χωρίς αυτούς η υλοποίηση της παρούσας εργασίας θα ήταν αδύνατη. Σας ευχαριστώ θερμά!

Τέλος θέλω να ευχαριστήσω τους γονείς μου, την αδελφή και τον αδελφό μου για τη στήριξη και τη συμπαράστασή τους όλα αυτά τα χρόνια, για το χαμόγελό τους ... για τις ατέλειωτες ώρες υπομονής! Όποια ευχαριστία και να γράψω για την οικογένειά μου δεν θα μπορούσε ποτέ να εκφράσει τα αισθήματά μου και την πραγματική προσφορά τους. Ιδιαίτερα για τον πατέρα μου που τόσο απρόσμενα και άδικα τον έχασα στο μέσο αυτής της προσπάθειας. Η αγάπη του, η στήριξη, ο ενθουσιασμός και η υπερηφάνεια που ένιωθε για

μένα διαδραμάτισαν καθοριστικό ρόλο στο να φέρω εις πέρας αυτή την εργασία. Γι’ αυτό του την αφιερώνω.

Σε σένα πατέρα

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Σελίδα

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Εισαγωγή

Η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών βρίσκεται στο επίκεντρο της μαθηματικής παιδείας σαν επιστημονικό αντικείμενο. Οι διαδικασίες μάθησης είναι πολύπλοκες και λαμβάνουν χώρα σε ένα πολυδιάστατο περιβάλλον, με πολλές μεταβλητές εσωτερικές και εξωτερικές προς το μαθητή να αλληλεπιδρούν και να επηρεάζουν τη διαδικασία μάθησης (Kidron, Lenfant, Bikner-Ahsbahs, Artigue, & Dreyfus, 2007).

Για τη μελέτη της μάθησης και της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών είναι αναγκαία η ύπαρξη ενός θεωρητικού πλαισίου, μιας θεωρίας που θα αποτελέσει τη βάση για να ερμηνεύσουμε τα εμπειρικά δεδομένα των ερευνών που καταπιάνονται με τη μάθηση και την κατανόηση, αλλά και για να δώσουμε εισηγήσεις για τη διδασκαλία των σχετικών εννοιών (Bergsten, 2007).

Οι θεωρίες είναι χρήσιμες γιατί κατευθύνουν το ενδιαφέρον των ερευνητών σε συγκεκριμένες σχέσεις, προσδίδουν νόημα στα μαθησιακά φαινόμενα υπό μελέτη, καθορίζουν τη σχετική σημασία των ερευνητικών ερωτημάτων. Επιπρόσθετα, παρέχουν ένα οργανωμένο πλαίσιο μελέτης των μαθησιακών φαινομένων και προωθούν μεθόδους συλλογής και οργάνωσης των δεδομένων (Sriraman & English, 2010). Σύμφωνα με τους Bikner-Ahsbahs και Prediger (2010) οι θεωρίες κατευθύνουν τις ερευνητικές πρακτικές και επηρεάζονται από αυτές. Παρέχουν τα εργαλεία για το σχεδιασμό ερευνών, τη «γλώσσα» για παρατήρηση, κατανόηση, περιγραφή, επεξήγηση και πρόβλεψη των φαινομένων της μαθηματικής παιδείας. Ταυτόχρονα, οι θεωρίες περιλαμβάνουν συγκεκριμένα είδη στόχων, ερωτημάτων, αντικειμένων, αλλά και μεθόδους διερεύνησης των φαινομένων.

Το πρόβλημα και ο Σκοπός της Εργασίας

Διάφορες θεωρίες έχουν προταθεί μέχρι στιγμής για την ανάλυση και την εξήγηση της μάθησης και της κατανόησης μαθηματικών εννοιών. Από γνωστικής σκοπιάς η θεωρία της Sfard για τη διττή φύση των μαθηματικών εννοιών (Sfard, 1991), η θεωρία APOS (Actions-Processes-Objects-Schemas) (Dubinsky, 1991), η θεωρία για τη διαδικασιοέννοια των Gray και Tall (1991, 1994). Οι πιο πάνω θεωρίες για το σχηματισμό εννοιών έχουν σαν κοινό το ότι ξεκινούν από ενέργειες σε συγκεκριμένα αντικείμενα καταλήγοντας στην αντίληψη αυτών των ενεργειών ως νοητά αντικείμενα (Pegg & Tall, 2010). Ο κύκλος της κατασκευής εννοιών έχει περιγραφεί με διαφορετικούς τρόπους: ενέργεια, διαδικασία, αντικείμενο (Dubinsky, 1991), εσωτερίκευση, συμπύκνωση, πραγμάτωση (Sfard, 1991) ή διαδικασία, διαδικασιοέννοια (Gray & Tall, 1991, 1994). Επιπρόσθετα, οι γνωστικές θεωρίες έχουν σαν κοινό ότι αρχίζουν από ένα επίπεδο σκέψης και προοδευτικά καταλήγουν σε ένα ανώτερο επίπεδο σκέψης.

Στην επιστημολογική προσέγγιση η έμφαση είναι στη δομή και τη χρήση της μαθηματικής γνώσης και στη διάχυσή της στα εκπαιδευτικά ιδρύματα. Για παράδειγμα, η θεωρία διδακτικού μετασχηματισμού (Chevallard, 1985) περιλαμβάνει τέσσερα στάδια για τη δημιουργία της υπό αναφορά μαθηματικής γνώσης (reference mathematical knowledge) που αποτελεί το επιστημολογικό μοντέλο της έρευνας.

Η θεωρία των σημειωτικών αναφέρεται στη σημασία των σημείων (signs) στη μάθηση και κατανόηση των μαθηματικών (Bloch, 2005) και σε αυτήν τονίζεται η σημασία των αναπαραστατικών συστημάτων και η σημασία της μετάφρασης από ένα είδος αναπαράστασης σε ένα άλλο (Duval, 2006).

Για τους Hiebert και Carpenter (1992) η κατανόηση μιας έννοιας επιτυγχάνεται όταν μπορεί η έννοια να αναπαρασταθεί μέσα στο ευρύτερο σύστημα αναπαραστάσεων, ο βαθμός δε της κατανόησης καθορίζεται με βάση τον αριθμό και την ένταση των συνδέσμων. Άλλοι ερευνητές αναφέρθηκαν στην σημασία παραγόντων όπως η απόδειξη (Kitcher, 1984: Polya, 1981), οι μαθηματικές εξηγήσεις (Levenson, Tsamir, & Tirosh 2007a, 2007b) και ο επαγωγικός συλλογισμός (Haverty, Koedinger, Klahr, & Alibali, 2000) στην κατανόηση των μαθηματικών.

Τα διάφορα θεωρητικά πλαίσια στο χώρο της μαθηματικής παιδείας είναι χρήσιμα γιατί προσφέρουν εναλλακτικές προοπτικές προσέγγισης των μαθησιακών φαινομένων. Ωστόσο, θεωρούμε ότι απουσιάζει εκείνη η θεωρία που να δίνει μια πιο ολοκληρωμένη περιγραφή της κατανόησης μιας έννοιας των μαθηματικών στο επίπεδο του δημοτικού σχολείου. Πιο συγκεκριμένα, φαίνεται ότι δεν έχει προταθεί μέχρι στιγμής κάποιο θεωρητικό μοντέλο που να περιλαμβάνει συνιστώσες της κατανόησης που μπορούν να μετρηθούν ποσοτικά και να διαφανεί σε ποιο βαθμό συνεισφέρει η καθεμιά στην κατανόηση. Το θεωρητικό μοντέλο που επιχειρήσαμε να διαμορφώσουμε είναι ένα βήμα προς αυτή την κατεύθυνση, έχει δηλαδή σαν στόχο τον εντοπισμό των παραγόντων που συνθέτουν την κατανόηση μιας έννοιας των μαθηματικών του δημοτικού σχολείου και το βαθμό στον οποίο ο κάθε παράγοντας συνεισφέρει στην κατανόηση. Για να το επιτύχουμε αυτό, εφαλτήριό μας ήταν η θεωρία των Sierpinska, Nnadozie και Oktaç (2002) για τη θεωρητική σκέψη και αξιοποιήσαμε τα θεωρητικά πλαίσια και τις έρευνες που έλαβαν χώρα στο αντικείμενο της μαθηματικής παιδείας αναφορικά με παράγοντες που είναι σημαντικοί για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Με την παρούσα εργασία επιχειρούμε να «αποσυνθέσουμε» την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών σε μετρήσιμους παράγοντες και αυτό θα μας επιτρέψει να αποφανθούμε κατά πόσον κάποιος μαθητής κατανοεί μια μαθηματική έννοια με βάση την ικανότητά του στους εν λόγω παράγοντες. Πρέπει να αναφερθεί ότι το θεωρητικό μοντέλο που προτείνουμε κινείται στα πλαίσια της γνωστικής προσέγγισης, της επιστημολογικής προσέγγισης και της σημειωτικής προσέγγισης και δεν περιλαμβάνει παράγοντες υπό την κοινωνική προσέγγιση ή τα συναισθήματα.

Για να επιτευχθεί κατανόηση των μαθηματικών εννοιών είναι απαραίτητη η κατάλληλη διδασκαλία που να αποσκοπεί στην καλύτερη κατανόηση. Μέχρι τώρα προτάθηκαν διδακτικές παρεμβάσεις για τη βελτίωση της κατανόησης υπό την προοπτική της κάθε θεωρίας και των διαφόρων παραγόντων που συμβάλλουν στην κατανόηση. Όσον αφορά στη θεωρία των σημειωτικών, έμφαση δίνεται στη διδασκαλία των αναπαραστάσεων (Terwel, Van Oers, van Dijk, & van den Eeden, 2009), ο Klauer προτείνει εκπαιδευτικό πρόγραμμα για τη διδασκαλία του επαγωγικού συλλογισμού (De Koning, Hamers, Sijtsma, & Vermeer, 2002: Klauer, 1992: Sanders, Phye, & Hegland, 1991: Tomic & Klauer, 1996), ενώ οι Martino και Maher (1999) αναφέρονται στη διδασκαλία της επιχειρηματολογίας και της τεκμηρίωσης. Η παρούσα εργασία αποσκοπεί στο να προτείνει συγκεκριμένο παρεμβατικό πρόγραμμα για τη βελτίωση της ικανότητας των μαθητών στους παράγοντες που θα βρεθεί ότι συνθέτουν την κατανόηση της έννοιας που θα μελετήσουμε και συνεπώς της κατανόησης.

Επιλογή Έννοιας

Από τις έννοιες του δημοτικού σχολείου, το θέμα της παρούσας διατριβής επικεντρώνεται στα κλάσματα για μια σειρά από λόγους: Κατ' αρχήν τα κλάσματα είναι μια πολύ σημαντική έννοια των μαθηματικών του δημοτικού σχολείου (Lamon, 1999: Niemi, 1996a). Ακόμη, έρευνες που έχουν γίνει σε διάφορες τάξεις του Δημοτικού σχολείου έδειξαν ότι πολλοί μαθητές παρουσιάζουν φτωχή εννοιολογική κατανόηση των κλασμάτων και δεν μπορούν να αξιολογήσουν ή να τεκμηριώσουν την επίλυση προβλημάτων που αφορούν στα κλάσματα (Behr, Harel, Post & Lesh, 1992). Συνεπώς, φαίνεται ότι τα κλάσματα παρουσιάζουν σημαντικές δυσκολίες όσον αφορά στην κατανόησή τους. Αυτός ήταν ένας δεύτερος λόγος που η παρούσα εργασία ασχολείται με την κατανόηση των κλασμάτων, καθώς τα ευρήματα της παρούσας εργασίας αναμένεται να συμβάλουν στην καλύτερη κατανόηση των κλασμάτων. Ένας τρίτος λόγος είναι ότι τα κλάσματα είναι «ευρεία» έννοια που επιτρέπει την εξέταση του προτεινόμενου μοντέλου (οι παράγοντες που θεωρούμε ότι συνθέτουν την κατανόηση είναι πολύ πιο εύκολο να μελετηθούν για τα κλάσματα παρά για οποιαδήποτε άλλη έννοια).

Ερευνητικά Ερωτήματα

Τα ερωτήματα στα οποία καλείται να απαντήσει η παρούσα διατριβή είναι τα εξής:

1. Σε ποιο βαθμό μπορεί να επιβεβαιωθεί το θεωρητικό μοντέλο που προτείνεται;
2. Πόσο συνεισφέρει ο κάθε παράγοντας στην κατανόηση των κλασματικών αριθμών;
3. Το μοντέλο παραμένει σταθερό με την πάροδο του χρόνου (στο ίδιο δείγμα μαθητών σε διαφορετικές χρονικές στιγμές);

4. Ποιες κατηγορίες μαθητών μπορούν να δημιουργηθούν με βάση την κατανόηση των κλασμάτων;
5. Οι παράγοντες καθορίζουν ιεραρχικά επίπεδα σχετικά με την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος;
6. Ποια είναι η επίδραση παρεμβατικού προγράμματος στην κατανόηση των κλασμάτων και στην ικανότητα των μαθητών σε εκείνους τους παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων;
7. Ποιος είναι ο ρυθμός ανάπτυξης της κατανόησης των κλασμάτων και της ικανότητας των μαθητών στους παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων;

Σημασία και Πρωτοτυπία της Διατριβής

Οι διάφορες θεωρίες της μαθηματικής παιδείας προσφέρουν εναλλακτικές προοπτικές προσέγγισης των μαθησιακών φαινομένων και κατανόησης των μαθηματικών εννοιών. Ωστόσο, φαίνεται ότι απουσιάζει κάποιο θεωρητικό μοντέλο που να δίνει μια πιο ολοκληρωμένη περιγραφή των παραγόντων που συνθέτουν την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Ακόμη, οι μέχρι τώρα θεωρίες αρκούνται σε ποιοτική ανάλυση της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών και απουσιάζει κάποιο θεωρητικό μοντέλο με συνιστώσες της κατανόησης που μπορούν να μετρηθούν ποσοτικά και να διαφανεί σε ποιο βαθμό η καθεμιά συνεισφέρει στην κατανόηση.

Η καινοτομία της παρούσας διατριβής εστιάζεται στην ανάπτυξη και τον έλεγχο ενός νέου θεωρητικού μοντέλου των παραγόντων που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων των μαθητών Στ΄ τάξης δημοτικού σχολείου. Το προτεινόμενο θεωρητικό μοντέλο έχει σαν αφετηρία του τη θεωρία των Sierpinska, et al. (2002) για τη θεωρητική σκέψη και συνδυάζει στοιχεία από άλλες έρευνες αναφορικά με παράγοντες που επηρεάζουν την κατανόηση των μαθηματικών κατάλληλα προσαρμοσμένα στο επίπεδο του δημοτικού σχολείου. Το θεωρητικό μοντέλο που προτείνουμε θεωρούμε ότι δίνει μια όσο το δυνατόν πιο ολοκληρωμένη περιγραφή των παραγόντων που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων (περιλαμβάνει όσο το δυνατόν περισσότερους παράγοντες στους οποίους οι μαθητές πρέπει να έχουν επαρκείς ικανότητες για να θεωρηθεί ότι κατανοούν τα κλάσματα και θεωρούμε ότι αυτοί οι παράγοντες στο σύνολό τους εξηγούν όσο το δυνατόν μεγαλύτερο ποσοστό της διασποράς της κατανόησης των κλασμάτων), κάτι που δεν έκαναν προηγούμενες θεωρίες, οι οποίες εστιάζονταν στην κατανόηση από μια προοπτική (θεωρίες υπό την γνωστική προσέγγιση, την επιστημολογική προσέγγιση, θεωρία των σημειωτικών, θεωρίες που δίνουν έμφαση σε παράγοντες όπως η απόδειξη, οι μαθηματικές εξηγήσεις ο επαγωγικός συλλογισμός, οι αναπαραστάσεις). Η σημασία της παρούσας διατριβής έγκειται στο ότι εφόσον το θεωρητικό μοντέλο που προτείνουμε επιβεβαιωθεί ότι υφίσταται, αυτό θα σημαίνει ότι για την κατανόηση των κλασμάτων θα είναι αναγκαίο οι μαθητές να αναπτύξουν όλους εκείνους τους παράγοντες που θα βρεθεί ότι συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων. Συνεπώς, τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας θα είναι χρήσιμα για τη μαθηματική κοινότητα, αφού θα δώσει πληροφορίες για τους παράγοντες που απαιτείται να αναπτύξουν οι μαθητές ώστε να κατανοούν τα κλάσματα.

Επιπρόσθετα, η σημασία της παρούσας διατριβής εστιάζεται στο ότι οι παράγοντες που θα βρεθεί ότι συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων θα μπορούν να διδαχθούν ώστε να βελτιωθεί η κατανόηση των κλασμάτων. Είναι μέσα στους στόχους της παρούσας διατριβής να προτείνει διδασκαλίες των παραγόντων που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων με απώτερο στόχο τη βελτίωση της ικανότητας των μαθητών στους συγκεκριμένους παράγοντες και συνεπώς της κατανόησης. Τα αποτελέσματα της εφαρμογής του παρεμβατικού προγράμματος μπορούν να παρέχουν εισηγήσεις για το σχεδιασμό αναλυτικών προγραμμάτων και βιβλίων μαθηματικών που θα στοχεύουν στην ανάπτυξη της κατανόησης των κλασμάτων.

Περιορισμοί της Έρευνας

Η παρούσα έρευνα είχε τον περιορισμό ότι η εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος έγινε από διαφορετικούς δασκάλους. Αυτό κρίθηκε αναγκαίο αν ληφθεί υπόψη ο αριθμός των τάξεων (οκτώ τάξεις) για την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος σε συνδυασμό με το μεγάλο αριθμό διδασκαλιών και τις συνθήκες που επικρατούν καθημερινά στα σχολεία. Ωστόσο, όπως θα παρουσιαστεί και αργότερα στο Κεφ. 3: Μεθοδολογία, έγινε εκπαίδευση των δασκάλων της πειραματικής ομάδας και παρακολουθήσεις των διδασκαλιών, ούτως ώστε να διασφαλιστεί η ομοιόμορφη και πιστή εφαρμογή των σχεδίων μαθήματος από μέρους τους.

Δομή της Εργασίας

Η παρούσα εργασία που αποσκοπεί στην ανάπτυξη και τον έλεγχο ενός νέου θεωρητικού μοντέλου με παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων στο επίπεδο του δημοτικού σχολείου και στο σχεδιασμό και την εφαρμογή παρεμβατικού προγράμματος με σκοπό τη βελτίωση της κατανόησης των κλασμάτων και της ικανότητας των μαθητών στους παράγοντες ολοκληρώνεται σε πέντε κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο έχουν παρουσιαστεί κάποια εισαγωγικά στοιχεία αναφορικά με θεωρίες κατανόησης των μαθηματικών εννοιών, αλλά και όσον αφορά στο πρόβλημα. Ακόμη, έχει περιγραφεί αναλυτικά ο σκοπός της εργασίας και η σημαντικότητα και η πρωτοτυπία της. Επιπλέον, έχουν αναφερθεί στοιχεία σχετικά με τους περιορισμούς της έρευνας, ενώ το πρώτο κεφάλαιο ολοκληρώνεται με τους εννοιολογικούς ορισμούς.

Στο δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας παρουσιάζεται εκτεταμένα η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας που σχετίζεται με τις βασικές πτυχές που μελετώνται. Αρχικά, παρουσιάζεται χαρτογράφηση των θεωριών κατανόησης και στη συνέχεια γίνεται σύντομη αναφορά σε εκείνες τις προσεγγίσεις στο πλαίσιο των οποίων κινείται το προτεινόμενο μοντέλο, ενώ γίνεται αναφορά και στα υπάρχοντα θεωρητικά μοντέλα για την κατανόηση των κλασμάτων. Γίνεται ενδελεχής αναφορά στη θεωρία των Sierpinska et al. (2002) που ήταν η αφετηρία της προσπάθειάς μας για τη διαμόρφωση του προτεινόμενου μοντέλου και ακολουθεί επεξήγηση του σκεπτικού για τη διαμόρφωση του προτεινόμενου μοντέλου. Ακολουθεί εκτενής βιβλιογραφική αναφορά σε εκείνους τους παράγοντες που θεωρούμε με βάση το προτεινόμενο μοντέλο ότι συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων, σε στοιχεία που βρέθηκαν αναφορικά με τη διδασκαλία που συντελεί στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών σε αυτούς τους παράγοντες, ενώ το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την παρουσίαση ερευνητικών αποτελεσμάτων σχετικά με τις ικανότητες και τις δυσκολίες των μαθητών όσον αφορά αυτούς τους παράγοντες.

Το τρίτο κεφάλαιο αναφέρεται στη μεθοδολογία που ακολουθήθηκε για την απάντηση των ερευνητικών ερωτημάτων. Αρχικά, παρουσιάζεται η πορεία διεξαγωγής της έρευνας με αναφορά στις διάφορες φάσεις. Στη συνέχεια, γίνεται περιγραφή του δείγματος των μαθητών που συμμετείχαν στην παρούσα έρευνα και ακολουθεί αναλυτική περιγραφή των εργαλείων μέτρησης και της βαθμολόγησης και κωδικοποίησης των απαντήσεων των μαθητών, ενώ γίνεται αναφορά και στην εγκυρότητα των εργαλείων μέτρησης. Ακολουθεί εκτενής αναφορά στο παρεμβατικό πρόγραμμα με αναλυτική περιγραφή των διδασκαλιών, ενώ γίνεται αναφορά και στη διδασκαλία των μαθητών της ομάδας ελέγχου. Το τρίτο κεφάλαιο ολοκληρώνεται με παρουσίαση των στατιστικών αναλύσεων για την ανάλυση των ποσοτικών δεδομένων.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τον έλεγχο της εφαρμογής του παρεμβατικού προγράμματος και τις συνεντεύξεις των εκπαιδευτικών της ομάδας ελέγχου και τα αποτελέσματα από τη διενέργεια των στατιστικών αναλύσεων. Τα αποτελέσματα των στατιστικών αναλύσεων παρουσιάζονται με βάση τη σειρά των ερευνητικών ερωτημάτων.

Στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται συζήτηση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν με βάση τη σειρά των ερευνητικών ερωτημάτων. Καταβάλλεται προσπάθεια αιτιολόγησης των αποτελεσμάτων και θεμελίωσής τους στα ευρήματα άλλων ερευνών.

Στο έκτο και τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της εργασίας, συζητούνται εκπαιδευτικές εφαρμογές και παρατίθενται εισηγήσεις για περαιτέρω έρευνα.

Εννοιολογικοί Ορισμοί

Για τους σκοπούς της παρούσας έρευνας θεωρούμε ότι ο όρος *κατανόηση των κλασμάτων* περιλαμβάνει τόσο την εννοιολογική κατανόηση, όσο και πτυχές διαδικαστικής κατανόησης των κλασμάτων. Για παράδειγμα, ο επαγωγικός συλλογισμός (inductive reasoning), τον οποίο θεωρούμε ως παράγοντα που συμβάλλει στην κατανόηση των κλασμάτων, περιλαμβάνει διαδικασίες, όπως π.χ. την εύρεση ομοιοτήτων και διαφορών στα αντικείμενα (διαδικαστική κατανόηση), διαδικασίες όμως που έχουν νόημα (εννοιολογική κατανόηση).

Ο *επαγωγικός συλλογισμός* ορίζεται ως η διαδικασία η οποία οδηγεί στην εξαγωγή γενικών συμπερασμάτων ή κανόνων από ειδικές περιπτώσεις (Demetriou, Doise, & van Lieshout, 1988: NCTM, 2000). Για τους σκοπούς της παρούσας έρευνας, η μέτρηση του επαγωγικού συλλογισμού έγινε επί τη βάση της εύρεσης ομοιοτήτων και διαφορών στις ιδιότητες και στις σχέσεις όπως περιγράφεται σε καθεμιά από τις έξι κατηγορίες προβλημάτων του Klauer (Klauer & Phye, 1994).

Οι *ορισμοί και οι μαθηματικές εξηγήσεις* αναφέρονται στην ικανότητα των μαθητών του δημοτικού σχολείου να «ορίσουν» και να εξηγήσουν θέματα που αφορούν στα κλάσματα χρησιμοποιώντας δικά τους λόγια και διάφορους άλλους τρόπους εξήγησης, όπως επίσης και παραδείγματα.

Η *επιχειρηματολογία και η τεκμηρίωση* αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίζουν την ορθότητα ή το εσφαλμένο μαθηματικών δηλώσεων που αφορούν στα κλάσματα, τεκμηριώνοντας ταυτόχρονα την απάντησή τους.

Η *αίσθηση για το μέγεθος* των κλασμάτων αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών να αντιλαμβάνονται πόσο μεγάλο είναι ένα κλάσμα, να τοποθετούν κλάσματα σε αριθμητική γραμμή και να συγκρίνουν κλάσματα. Για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας θεωρούμε ότι οι μαθητές είναι επαρκείς σε αυτό τον παράγοντα αν είναι σε θέση να συγκρίνουν και να σειροθετούν κλάσματα.

Η έννοια της *αναπαράστασης* επιδέχεται διάφορους ορισμούς αφού σαν έννοια είναι ασαφής και ως τέτοια επιδέχεται πολλαπλές ερμηνείες (Goldin & Kaput, 1996). Επικρατέστερος θεωρείται ο ορισμός που δίνεται από τον Kaput (1987) σύμφωνα με τον οποίο η έννοια της αναπαράστασης περιλαμβάνει τις ακόλουθες πέντε οντότητες: (α) την ολότητα που αναπαρίσταται, (β) την ολότητα που αναπαριστά, (γ) τις συγκεκριμένες πτυχές της ολότητας προς αναπαράσταση που αναπαρίστανται, (δ) τις συγκεκριμένες πτυχές της ολότητας που αναπαριστά, οι οποίες κάνουν την αναπαράσταση και (ε) την αντιστοιχία ανάμεσα στις δύο ολότητες.

Οι *διασυνδέσεις με δεκαδικούς, τα ποσοστά και τη διαίρεση* αναφέρονται στη σχέση των κλασμάτων με τους δεκαδικούς, τα ποσοστά και τη διαίρεση αριθμητής÷παρονομαστής.

Ο *αναστοχασμός* αναφέρεται στην ικανότητα του μαθητή να αιτιολογεί τον τρόπο που σκέφτεται και την απάντησή του κατά τη διάρκεια επίλυσης προβλημάτων με κλασματικούς αριθμούς, στην ικανότητά του να αιτιολογεί τη λογικότητά της απάντησής του, όπως επίσης να προβαίνει σε έλεγχο της απάντησης και επαλήθευση (Ontario Curriculum, 2005).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Εισαγωγή

Οι θεωρίες διαδραματίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στην έρευνα, αφού είναι το βασικό αποτέλεσμα της ερευνητικής δραστηριότητας (Sriraman & English, 2010) και παρέχουν τη «γλώσσα» για να περιγράψουμε και να συζητήσουμε τη μάθηση και την κατανόηση των μαθηματικών (Gellert, 2007). Όπως αναφέρει η Bergsten (2007), οι θεωρίες παρέχουν το πλαίσιο για να μελετήσουμε τα μαθησιακά φαινόμενα, να ερμηνεύσουμε δεδομένα και να καταλήξουμε σε συμπεράσματα.

Σύμφωνα με τους Arzarello, Bosch, Lenfant και Prediger (2007), υπάρχει ποικιλία θεωριών στη μαθηματική παιδεία και ασυμφωνία μεταξύ των ερευνητών ως προς το τι είναι θεωρία ή θεωρητικό πλαίσιο. Οι διάφορες θεωρίες παρέχουν εναλλακτικά και πολλές φορές συμπληρωματικά πλαίσια μελέτης και ερμηνείας της μάθησης και της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών.

Έχουν προταθεί πολλές θεωρίες μέχρι στιγμής για τη μάθηση και την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Σε αυτό το κεφάλαιο επιχειρείται σε μια πρώτη φάση χαρτογράφηση των θεωριών, ούτως ώστε να εντοπιστεί το πλαίσιο των προσεγγίσεων στο οποίο κινείται η παρούσα εργασία για τη διαμόρφωση του προτεινόμενου μοντέλου. Στη συνέχεια, γίνεται σύντομη αναφορά στα υπάρχοντα μοντέλα για την κατανόηση των κλασμάτων που ήταν η έννοια που επιλέγηκε για τη διαμόρφωση του προτεινόμενου μοντέλου. Ακολούθως, γίνεται ενδελεχής περιγραφή της θεωρίας των Sierpisnka et al. (2002) για την εννοιολογική σκέψη που ήταν η αφετηρία της προσπάθειάς μας για τη διαμόρφωση του προτεινόμενου θεωρητικού μοντέλου. Την περιγραφή της θεωρίας των Sierpinska et al. (2002) ακολουθεί εκτενής αναφορά στη διαμόρφωση του προτεινόμενου μοντέλου. Στη συνέχεια, γίνεται βιβλιογραφική ανασκόπηση των παραγόντων που θεωρούμε με βάση το προτεινόμενο μοντέλο ότι συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων (επαγωγικός συλλογισμός, ορισμοί και μαθηματικές εξηγήσεις, επιχειρηματολογία και τεκμηρίωση, αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων, αναπαραστάσεις, διασυνδέσεις με δεκαδικούς, ποσοστά και τη διαίρεση και αναστοχασμός). Ακολούθως, παρατίθενται στοιχεία για παρεμβατικά προγράμματα που στόχευαν στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών στους παράγοντες της κατανόησης και σε ερευνητικά αποτελέσματα αναφορικά με τις ικανότητες των μαθητών όσον αφορά στους παράγοντες, όπως επίσης και τις δυσκολίες σε κάθε παράγοντα.

Χαρτογράφηση Θεωριών Κατανόησης

Η μαθηματική παιδεία σαν επιστημονικό αντικείμενο είναι «διαθεματική» και δανείζεται στοιχεία και δέχεται επιρροές από άλλες επιστήμες (ψυχολογία, κοινωνιολογία, γνωστική επιστήμη, γλωσσολογία, ανθρωπολογία) (Artigue, Bartolini Bussi, Dreyfus, Gray, & Prediger, 2005). Επιπρόσθετα, χαρακτηρίζεται από πλούτο διαφορετικών θεωρητικών μοντέλων που επιχειρούν να ερμηνεύσουν τη μάθηση και κατανόηση των μαθηματικών εννοιών (Arzarello, et al., 2007: Bikner-Ahsbahs & Prediger, 2006). Σε αυτό το μέρος θα επιχειρηθεί κάποια χαρτογράφηση των πλείστων θεωριών της μαθηματικής παιδείας. Αυτό θα γίνει έτσι ώστε να διαφανεί το πλαίσιο των θεωρητικών προσεγγίσεων στο οποίο θα εστιάσουμε για τη διαμόρφωση του προτεινόμενου μοντέλου. Στη συνέχεια γίνεται σύντομη αναφορά σε καθεμιά από αυτές τις προσεγγίσεις.

Από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας, μπορεί κανείς να εντοπίσει διαφορετικές κατηγοριοποιήσεις των θεωριών της μαθηματικής παιδείας. Μια κατηγοριοποίηση είναι αυτή που προτείνεται από τη Bergsten (2007) σε γνωστική προσέγγιση, κοινωνική προσέγγιση και επιστημολογική προσέγγιση. Στη γνωστική προσέγγιση το ερευνητικό ενδιαφέρον επικεντρώνεται στις νοητικές δομές και τις διαδικασίες σκέψης που λαμβάνουν χώρα κατά τη διάρκεια της μάθησης και της κατανόησης των μαθηματικών και περιλαμβάνει μεταγνωστικές παραμέτρους. Στην κοινωνική προσέγγιση λαμβάνεται υπόψη το κοινωνικό περιβάλλον της σχολικής τάξης ή/ και άλλοι κοινωνικοί παράγοντες εξωτερικοί προς το σχολικό περιβάλλον (π.χ. κοινωνικοοικονομικό επίπεδο) που επιδρούν στη μάθηση και κατανόηση των μαθηματικών. Στην επιστημολογική προσέγγιση η έμφαση είναι στη δομή και τη χρήση της μαθηματικής γνώσης και στη διάχυσή της στα εκπαιδευτικά ιδρύματα.

Η Kidron (2005) προτείνει τρία διαφορετικά θεωρητικά πλαίσια. Σύμφωνα με τη Kidron (2005), το πρώτο είδος θεωρητικού πλαισίου αφορά το μοντέλο διαδικασίας-αντικειμένου (process-object model), το δεύτερο την εργαλειακή θεωρία (instrumentation theory) και το τρίτο τη θεωρία αφαίρεσης και σταθεροποίησης (theory of abstraction and consolidation).

Μια άλλη διάκριση των θεωρητικών πλαισίων είναι σε γενικά (global frameworks) και σε τοπικά (local frameworks) (Pegg & Tall, 2005). Τα γενικά πλαίσια μελετούν τη μακρόχρονη ανάπτυξη των νοητικών δομών του ατόμου και σε αυτά συγκαταλέγονται τα στάδια ανάπτυξης του Piaget, η θεωρία των van Hiele για τη γεωμετρική ανάπτυξη, η μετάβαση από το πραξιακό στο εικονικό και έπειτα στο συμβολικό επίπεδο που προτείνει ο Bruner και τα πέντε επίπεδα του SOLO (Structure of the Observed Learning Outcome). Η δεύτερη κατηγορία θεωριών περιλαμβάνει τις τοπικές θεωρίες ανάπτυξης εννοιών, όπως τη θεωρία APOS του Dubinsky (1991), τα στάδια για τη δημιουργία καινούριας έννοιας της Sfard (1991) (εσωτερίκευση, συμπύκνωση, πραγμάτωση), τη θεωρία των Gray και Tall (1994) (procedure-process-procept) και τα επίπεδα της ταξινομίας SOLO (unistructural-multistructural-relational-unistructural).

Η κατηγοριοποίηση των θεωριών που προτείνω στην παρούσα διατριβή (βλέπε Πίνακα 2.1) συνδυάζει στοιχεία από τις διάφορες κατηγοριοποιήσεις και περιλαμβάνει πολύ περισσότερες θεωρίες. Σύμφωνα με αυτή υπάρχουν οι ακόλουθες προσεγγίσεις: κοινωνική προσέγγιση, ανθρωπολογική/ επιστημολογική προσέγγιση, γνωστική προσέγγιση, θεωρία των σημειωτικών και άλλες προσεγγίσεις. Πρέπει να τονιστεί ότι η διάκριση μεταξύ των διαφόρων προσεγγίσεων δεν είναι απόλυτη και ότι υπάρχουν επικαλύψεις και θεωρίες που εμπίπτουν σε περισσότερες από μια προσεγγίσεις.

Πίνακας 2.1

Συγκεντρωτικός Πίνακας Θεωριών

Κοινωνική προσέγγιση	Ανθρω-πολογική προσέγγιση/ επιστημολογική προσέγγιση	Γνωστική προσέγγιση	Η θεωρία των σημειωτικών	Άλλες προσεγγίσεις
Μαθηματικές και κοινωνικο-μαθηματικές νόρμες (Cobb & Yackel, 1996: Kaldrimidou & Tzekaki, 2005: Kaldrimidou, Sakonidis & Tzekaki, 2007) Μικρο-κοινωνική προσέγγιση (ή αλληλεπιδραστική προσέγγιση) (Gellert, 2007) Μακρο-κοινωνική (ή δομική προσέγγιση) (Gellert, 2007)	Θεωρία των διδακτικών καταστάσεων (Brousseau, 1997) Θεωρία διδακτικού μετασχηματισμού (Chevallard, 1985) Η ανθρωπολογική θεωρία της διδακτικής (Bosch, Chevallard, & Gascón, 2005) Μαθηματική πραξεολογία (mathematical praxeologies) (Bosch, Chevallard, & Gascón, 2005)	Συσχετιστική κατανόηση και εργαλειακή κατανόηση (Skemp, 1976) Εννοιολογική και διαδικαστική γνώση (Hiebert & LeFevre, 1986) Εσωτερικές και εξωτερικές αναπαραστάσεις (Hiebert & Carpenter, 1992) Η θεωρία της Sfard (1991) Θεωρία APOS (Dubinsky & MacDonald, 2001) Η θεωρία των τριών κόσμων του Tall (Tall, 1994) Η θεωρία για τη διαδικασιοέννοια (Gray & Tall, 1994) Η θεωρία για την ανάπτυξη της κατανόησης στα μαθηματικά (Pirie & Kieran, 1994) Η ταξινομία SOLO (Biggs & Collis, 1991)	Η σημασία των σημείων (signs) στη μάθηση των μαθηματικών (Bloch, 2005) Αναπαραστατικά συστήματα και μετάφραση (Duval, 2006) Η σημειωτική προσέγγιση του Pierce (Bloch, 2005)	Οι μαθητές μαθαίνουν μέσα από τις εμπειρίες τους με βάση ποικιλία παραδειγμάτων (Dienes, 1960) Δεύτερης τάξης μεταβλητές και ο χώρος APC (Arzarello & Olivero, 2005) Η θεωρία των άδηλων διαισθητικών μοντέλων (Fishbein, 1987) Συναισθηματικές μεταβλητές στη μάθηση των μαθηματικών (Zan, Brown, Evans, & Hannula, 2006: Hannula, Evans, Philippou, & Zan, 2004)

Το προτεινόμενο θεωρητικό μοντέλο κινείται στα πλαίσια της γνωστικής προσέγγισης, της επιστημολογικής προσέγγισης και της θεωρίας των σημειωτικών. Στο χώρο που ακολουθεί γίνεται σύντομη αναφορά σε καθεμιά προσέγγιση και στη συμβολή της για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών.

Γνωστική Προσέγγιση

Στη γνωστική προσέγγιση η έμφαση δίνεται στον τρόπο οικοδόμησης νοητικών σχημάτων και στις διαδικασίες σκέψης που λαμβάνουν χώρα κατά τη μαθησιακή διαδικασία. Επιπρόσθετα, δίνεται έμφαση στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και στην οικοδόμηση μαθηματικών εννοιών (στον τρόπο σχηματισμού μιας μαθηματικής έννοιας και τη σύνδεσή της με προηγούμενες έννοιες). Έμφαση δίνεται και σε μεταγνωστικούς παράγοντες (Bergsten, 2007: Dreyfus & Kidron στους Prediger & Ruthven, 2007). Πιο κάτω θα γίνει σύντομη αναφορά στην εξέλιξη των θεωριών που εμπίπτουν στη γνωστική προσέγγιση κατά χρονολογική σειρά.

Οι πρώτες θεωρίες που καταπιάστηκαν με την κατανόηση στα μαθηματικά αναφέρθηκαν σε εννοιολογική και διαδικαστική γνώση. Ο Skemp (1976) αναφέρεται σε συσχετιστική κατανόηση (relational understanding) και σε εργαλειακή κατανόηση (instrumental understanding). Οι Hiebert και Lefevre (1986) αναφέρονται σε εννοιολογική (conceptual) και σε διαδικαστική (procedural) γνώση στα μαθηματικά. Οι Hiebert και Carpenter (1992) αναλύουν τη μάθηση και τη διδασκαλία με κατανόηση στα μαθηματικά. Αναφέρονται σε εσωτερικές και εξωτερικές αναπαραστάσεις και στη σχέση τους. Για τους Hiebert και Carpenter (1992) η κατανόηση μιας έννοιας επιτυγχάνεται όταν μπορεί η έννοια να αναπαρασταθεί μέσα στο ευρύτερο σύστημα αναπαραστάσεων, ο βαθμός δε της κατανόησης καθορίζεται με βάση τον αριθμό και την ένταση των συνδέσμων. Για την εννοιολογική και τη διαδικαστική γνώση υποστηρίζουν ότι χρειάζονται και οι δύο για κατανόηση στα μαθηματικά.

Οι Biggs και Collis (1991) πρότειναν ένα νεοπιαζετιανό πλαίσιο το οποίο αποκαλούν SOLO (Structure of the Observed Learning Outcome) το οποίο περιλαμβάνει στοιχεία από τις γενικές θεωρίες (global) γνωστικής ανάπτυξης (όπως τα στάδια του Piaget ή το πραξιακό – εικονικό – συμβολικό επίπεδο του Bruner) και επιπρόσθετα, από τις τοπικές θεωρίες γνωστικής ανάπτυξης περιγράφοντας τον τρόπο σχηματισμού των εννοιών για καθένα από αυτά τα γενικότερα στάδια. Οι Biggs και Collis (1991) πιστεύουν ότι το μοντέλο SOLO αποτελεί ένα πιο ολοκληρωμένο πλαίσιο γνωστικής ανάπτυξης που περιορίζει τις αδυναμίες προηγούμενων πλαισίων (γενικών και τοπικών θεωριών).

Ακολούθησαν οι θεωρίες APOS (Dubinsky, 1991), η θεωρία της Sfard (1991) και η θεωρία για τη διαδικασιοέννοια (procept theory) των Gray και Tall (1994). Και οι τρεις θεωρίες έχουν σαν κοινό ότι ξεκινούν από ενέργειες πάνω σε γνωστά αντικείμενα καταλήγοντας στην αντίληψη αυτών των ενεργειών ως νοητά αντικείμενα (Sriraman & English, 2010). Επιπρόσθετα, η θεωρία APOS και η θεωρία της Sfard (1991) έχουν σαν κοινό το ότι αναφέρονται σε κάποια στάδια προκειμένου να επιτευχθεί κατανόηση των μαθηματικών εννοιών.

Θεωρία των Σημειωτικών

Η θεωρία των σημειωτικών αναφέρεται στη σημασία των σημείων (signs) στη μάθηση και κατανόηση των μαθηματικών (Bloch, 2005). Ακόμη, τονίζεται η σημασία των αναπαραστατικών συστημάτων και η σημασία της μετάφρασης από ένα είδος αναπαράστασης σε ένα άλλο (Duval, 2006).

Σύμφωνα με τους Bosch και Chevallard, (1999) τα σημειωτικά εργαλεία είναι σημεία που επιπρόσθετα χρησιμεύουν σαν εργαλεία για να κάνει κανείς μια εργασία στα μαθηματικά. Ενέργειες σε αυτά τα εργαλεία μπορούν να δημιουργήσουν καινούρια σημεία και σε πολλές περιπτώσεις καινούριες έννοιες.

Στη σημειωτική προσέγγιση ανήκει η θεωρία του Peirce (Peirce’s semiotic approach). Το βασικό χαρακτηριστικό αυτής της θεωρίας είναι η τριαδική προσέγγιση της ερμηνείας των σημείων: ένα σημείο αποτελεί μια τριάδα που οι συνιστώσες της είναι το σημείο (που αναπαριστά), το αντικείμενο (που αναπαρίσταται), και το αναπαριστών που είναι μια κοινωνική κατασκευή που μπορεί να αναπαραστήσει το αναπαριστώμενο (το αντικείμενο). Η προσέγγιση που προτείνει ο Pierce είναι δυναμική. Επιπρόσθετα, ο Pierce κατηγοριοποιεί τα σημεία σε τρία είδη: εικόνες, δείκτες (indexes) και επιχειρήματα (arguments) (Bloch, 2005).

Η παρούσα διατριβή λαμβάνει στοιχεία από τη θεωρία των σημειωτικών για τη διαμόρφωση του προτεινόμενου μοντέλου. Συγκεκριμένα, στην παρούσα εργασία οι αναπαραστάσεις είναι ένας από τους παράγοντες που περιλήφθηκαν στο προτεινόμενο θεωρητικό μοντέλο για την κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας.

Επιστημολογική Προσέγγιση

Την επιστημολογική προσέγγιση την ενδιαφέρουν ζητήματα επιστημολογικής φύσης, όπως τι είναι τα μαθηματικά, τι είναι η μαθηματική γνώση, ποια είναι η δομή της μαθηματικής γνώσης και ασχολείται με ζητήματα χρήσης και διάχυσης της μαθηματικής γνώσης στα εκπαιδευτικά ιδρύματα (σχολεία, πανεπιστήμια, κ.ά.) (Bergsten, 2007). Στην επιστημολογική προσέγγιση ανήκει η θεωρία διδακτικού μετασχηματισμού (Chevallard, 1985). Η θεωρία του διδακτικού μετασχηματισμού περιλαμβάνει τέσσερα στάδια για τη δημιουργία της υπό αναφορά μαθηματικής γνώσης (reference mathematical knowledge): (1) την «πρωτότυπη» ή ακαδημαϊκή μαθηματική γνώση, όπως αυτή «παράγεται» από τους μαθηματικούς στα ακαδημαϊκά ιδρύματα, (2) τη μαθηματική γνώση που πρόκειται να διδαχθεί, όπως αυτή περιγράφεται στο αναλυτικό πρόγραμμα, (3) τη μαθηματική γνώση που διδάσκεται στην πραγματικότητα από τους δασκάλους των μαθηματικών, και (4) τη γνώση που μαθαίνεται από τους μαθητές. Σε αυτή τη διαδικασία διδακτικού μετασχηματισμού συμμετέχουν η μαθηματική κοινότητα, το εκπαιδευτικό σύστημα και οι σχολικές τάξεις.

Για τη διαμόρφωση του προτεινόμενου μοντέλου αξιοποιήσαμε στοιχεία από την επιστημολογική προσέγγιση και συγκεκριμένα όσον αφορά στο τι θα αποδεχθούμε ως ορισμούς και μαθηματικές εξηγήσεις και ως επιχειρηματολογία και τεκμηρίωση στο επίπεδο του δημοτικού σχολείου.

Υπάρχοντα Θεωρητικά Μοντέλα για την Κατανόηση των Κλασμάτων

Σε αυτό το μέρος γίνεται σύντομη αναφορά στα υπάρχοντα θεωρητικά μοντέλα για την κατανόηση των κλασμάτων. Η αναφορά είναι σύντομη, αφού σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν να προτείνει ένα γενικότερο θεωρητικό μοντέλο για την κατανόηση μιας έννοιας των μαθηματικών του δημοτικού σχολείου και στη συνέχεια επιλέγηκαν τα κλάσματα για την εξέταση του προτεινόμενου μοντέλου.

Διάφορα θεωρητικά μοντέλα έχουν προταθεί μέχρι στιγμής για την κατανόηση των κλασμάτων (Behr, Lesh, Post, & Silver, 1983: Kieren, 1976: Lamon, 1999: Mack, 1990: Pirie & Kieren, 1994). Ο Kieren (1976) πρότεινε μοντέλο με πέντε αλληλοσυνδεόμενες προσωπικότητες του κλάσματος: μέρος-όλο, λόγος, τελεστής, πηλίκο και μέτρηση. Αργότερα, οι Behr et al. (1983) προέκτειναν το μοντέλο του Kieren (1976) συνδέοντας τις προσωπικότητες του κλάσματος με τις πράξεις με κλάσματα. Η Mack (1990) αναφέρεται στη σημασία της άτυπης γνώσης των μαθητών για την κατανόηση των κλασματικών αριθμών. Οι Pirie και Kieren (1994) πρότειναν δυναμικό μοντέλο για την ανάπτυξη της κατανόησης στα μαθηματικά με οκτώ επίπεδα για την κατανόηση μιας έννοιας: πρωταρχική γνώση, δημιουργία εικόνας, κατοχή εικόνας, αναγνώριση ιδιοτήτων, τυπικοποίηση, παρατήρηση, δόμηση και ανακάλυψη (primitive knowing, image making, image having, property noticing, formalizing, observing, structuring, inventizing). Ακολούθως, χρησιμοποίησαν την έννοια του κλάσματος για να εξηγήσουν και να πείσουν για τα επίπεδα που πρότειναν. Η Lamon (1999) μελέτησε την κατανόηση των κλασμάτων υπό το πλαίσιο των προσωπικοτήτων του κλάσματος.

Στο μέρος που ακολουθεί γίνεται εκτενής περιγραφή της θεωρίας των Sierpinska et al. (2002) που αποτέλεσε την αφετηρία της προσπάθειάς μας για τη διαμόρφωση του προτεινόμενου μοντέλου. Η επιλογή της θεωρίας των Sierpinska et al. (2002)[1] βασίστηκε στο ότι θεωρούμε ότι δίνει μια αρκετά ολοκληρωμένη περιγραφή της εννοιολογικής σκέψης στην περιοχή της γραμμικής άλγεβρας στο επίπεδο της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης και με παρόμοιο σκεπτικό αναζητήσαμε παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση στο επίπεδο του δημοτικού σχολείου. Την περιγραφή της θεωρίας των Sierpinska et al. (2002) ακολουθεί εκτενής αναφορά στη διαμόρφωση του προτεινόμενου μοντέλου.

Η Θεωρία των Sierpinska et al. (2002)

Οι Sierpinska et al. (2002) στη θεωρία τους αναφέρονται στη θεωρητική σκέψη (theoretical thinking) των φοιτητών όσον αφορά την περιοχή της γραμμικής άλγεβρας. Σύμφωνα με τους

[1] Σε πιο πρόσφατο άρθρο τους οι Sierpinska, Bobos και Pruncut (2011) εξετάζουν την ανάπτυξη της θεωρητικής σκέψης φοιτητών που έχουν τύχει διδασκαλίας στην επίλυση ανισώσεων με απόλυτες τιμές.

Sierpinska et al. (2002), η έννοια της θεωρητικής σκέψης είχε αφετηρία την εμπειρική έρευνα στη μαθηματική σκέψη των φοιτητών. Οι ερευνητές δεν υποστηρίζουν ότι η θεωρητική σκέψη αποτελεί μια ξεχωριστή λειτουργία του ανθρώπινου οργανισμού, ούτε και προσπαθούν να ορίσουν μια «ανώτερη πνευματική λειτουργία» (higher mental function). Εκείνο το οποίο προσπαθούν να περιγράψουν είναι ένα συγκεκριμένο «θεωρητικό αντικείμενο» (theoretical object), το οποίο θεωρούν χρήσιμο ως μεθοδολογικό εργαλείο ή ως ένα «αναλυτικό εργαλείο» για την περιγραφή της εννοιολογικής σκέψης των φοιτητών. Πιστεύουμε ότι η θεωρητική σκέψη σαν τέτοια, αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο περιγραφής του τι είναι η εννοιολογική κατανόηση, για τον καλύτερο προσδιορισμό των πτυχών της εννοιολογικής κατανόησης.

Οι Sierpinska et al. (2002) ορίζουν τη θεωρητική σκέψη στον αντίποδα της πρακτικής σκέψης (practical thinking) όσον αφορά στο σκοπό, στο αντικείμενο, στα κυριότερα θέματα και στα αποτελέσματα.

Σκοπός θεωρητικής σκέψης

Η θεωρητική σκέψη είναι σκέψη «χάριν της σκέψης» (thinking for the sake of thinking), ενώ η πρακτική σκέψη είναι η σκέψη για την επιτέλεση πραγμάτων (thinking for the sake of getting things done or making things happen). Η θεωρητική σκέψη δεν στοχεύει στη λήψη αποφάσεων σχετικά με την άμεση εκτέλεση φυσικών ενεργειών, αλλά ο σκοπός της είναι η κατανόηση και ο αναστοχασμός πάνω στα πιθανά αποτελέσματα μιας ενέργειας, και όχι η εκτέλεση της ενέργειας (Sierpinska et al. 2002).

Αντικείμενο θεωρητικής σκέψης

Η πρακτική σκέψη ασχολείται με συγκεκριμένα «αντικείμενα» (πράγματα, ζητήματα, γεγονότα, ανθρώπους, φαινόμενα). Σε αντίθεση, το αντικείμενο της θεωρητικής σκέψης είναι συστήματα εννοιών (systems of concepts) (Sierpinska et al. 2002).

Κύρια ζητήματα αναφορικά με τον ορισμό της θεωρητικής σκέψης

Σημασία εννοιών

Η θεωρητική σκέψη ασχολείται με τη σημασία εννοιών, ενώ η πρακτική σκέψη ασχολείται με τη σπουδαιότητα ενεργειών (Sierpinska, 1994). Τη θεωρητική σκέψη απασχολούν ερωτήματα του τύπου: Πού βασίζεται η σημασία εννοιών; Υπάρχουν κάποιες υποθέσεις που υπονοούνται και που δεν τις γνωρίζουμε; Οι συνθήκες που θέτουμε για να ορίσουμε κάποια έννοια οδηγούν στη σημασία που θέλουμε να έχει η έννοια;

Εννοιολογικές διασυνδέσεις

Την πρακτική σκέψη την ενδιαφέρουν οι συγκεκριμένες παρά οι εννοιολογικές συνδέσεις και έτσι εστιάζει την προσοχή της σε συγκεκριμένα παραδείγματα και σε προσωπικές εμπειρίες. Αντίθετα, η θεωρητική σκέψη αποστασιοποιείται από συγκεκριμένα γεγονότα και προσωπικές εμπειρίες και προσπαθεί να μελετήσει τις σχέσεις μεταξύ εννοιών, μέσα σε ευρύτερα συστήματα που περιλαμβάνουν και άλλες έννοιες (Sierpinska et al., 2002).

Επιστημολογική εγκυρότητα και ο υποθετικός της χαρακτήρας

Η θεωρητική σκέψη απαιτεί «εννοιολογική συνοχή» και εσωτερική συνέπεια των συμβολικών συστημάτων. Μέσα σε αυτά τα πλαίσια, θα πρέπει να υπάρχει συνέπεια των υποθέσεων και των αποτελεσμάτων που πηγάζουν από αυτές τις υποθέσεις.

Η θεωρητική σκέψη, σε αντίθεση με την πρακτική σκέψη, δεν ασχολείται με τις μεμονωμένες εμπειρίες του ατόμου και ούτε την ενδιαφέρει η «αλήθεια» αναφορικά με αυτές τις μεμονωμένες εμπειρίες. Η θεωρητική σκέψη παράγει προτάσεις (propositions) υπό όρους ή υποθετικές δηλώσεις. Έτσι την ενδιαφέρει, όχι μόνο το τι φαίνεται υπό τις παρούσες συνθήκες ως εφαρμόσιμο στην καθημερινή ζωή ή ρεαλιστικό, αλλά και ότι είναι υποθετικώς δυνατό. Με αυτή τη λογική, τείνει να αναλύει όλες τις πιθανές περιπτώσεις ή συνέπειες μιας υπόθεσης, έστω και αν αυτές είναι πρακτικώς αδύνατες (Sierpinska et al., 2002).

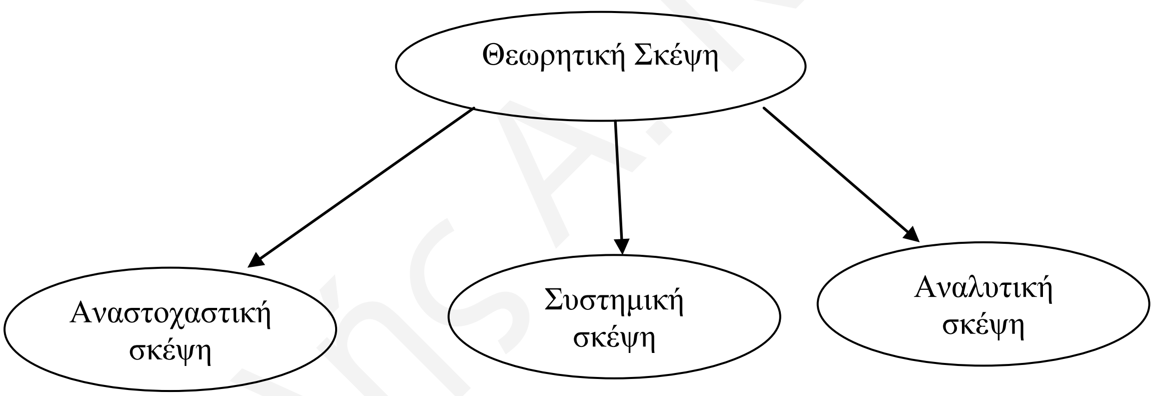
Μεθοδολογία

Η πρακτική σκέψη ασχολείται με εναλλακτικούς τρόπους εκτέλεσης μιας πράξης, σε περίπτωση που ένας από αυτούς δεν λειτουργεί. Η πρακτική σκέψη λειτουργεί σε ένα μόνο επίπεδο: εκείνο της δράσης που οι σκοποί της είναι εξωτερικοί ως προς στη σκέψη. Η θεωρητική σκέψη, από την άλλη, λειτουργεί σε δύο επίπεδα: την αιτιολόγηση αναφορικά με τις έννοιες και την αιτιολόγηση γι’ αυτή την αιτιολόγηση. Η θεωρητική σκέψη αποσκοπεί στο να κάνει ξεκάθαρη τη μεθοδολογία της. Έτσι μελετά τα διάφορα συμβολικά συστήματα και τους κανόνες και αρχές που τα διέπουν. Όπως αναφέρουν οι Sierpinska et al. (2002), η σημειογραφία χρησιμοποιείται στα διάφορα συστήματα για την έκφραση ιδεών και σχέσεων και την επίλυση προβλημάτων. Όσον αφορά στον ορισμό εννοιών, η θεωρητική σκέψη δεν ασχολείται μόνο με τη σαφήνεια, αλλά και με ζητήματα συνέπειας και «ανεξαρτησίας» των ορισμών.

Αποτελέσματα

Τα αποτελέσματα της πρακτικής σκέψης είναι εμφανή: αλλαγές σε αντικείμενα, κατασκευή καινούριου αντικειμένου, αλλαγή στη διαδοχή γεγονότων, αλλαγή στη συμπεριφορά των ατόμων κ.λπ. Αποτελέσματα της θεωρητικής σκέψης είναι οι θεωρίες και η ανάπτυξη κατάλληλης ορολογίας και σημειογραφίας γι’ αυτές τις θεωρίες.

Οι Sierpinska et al. (2002) στην προσπάθειά τους να καταγράψουν και να κωδικοποιήσουν τα χαρακτηριστικά της θεωρητικής σκέψης, πρότειναν μοντέλο με τρεις συνιστώσες της θεωρητικής σκέψης: την αναστοχαστική σκέψη, τη συστημική σκέψη και την αναλυτική σκέψη. Το μοντέλο παρουσιάζεται σχηματικά στο Διάγραμμα 2.1.



Διάγραμμα 2.1. Οι Συνιστώσες της Θεωρητικής Σκέψης Σύμφωνα με το Μοντέλο των Sierpinska et al. (2002)

Αναστοχαστική Σκέψη (reflective thinking)

Οι Sierpinska et al. (2002), αναφέρουν ότι η θεωρητική σκέψη είναι «σκέψη χάριν της σκέψης», χωρίς να έχει δηλαδή κάποιο πρακτικό όφελος και ονομάζουν αυτό το χαρακτηριστικό της θεωρητικής σκέψης «αναστοχαστική σκέψη». Η αναστοχαστική σκέψη που είναι η πρώτη συνιστώσα της θεωρητικής σκέψης αναφέρεται στην απόκτηση κριτικής διάθεσης από μέρους του ατόμου και στη διευκόλυνση περαιτέρω διερεύνησης και του αναστοχασμού. Όσον αφορά στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, η αναστοχαστική σκέψη αναφέρεται στον αναστοχασμό ως προς τη λύση του προβλήματος (απάντηση), την αναζήτηση μιας διαφορετικής και προσφορότερης προσέγγισης του προβλήματος, την εύρεση ομοιοτήτων με προηγούμενα προβλήματα (Sierpinska et al., 2011). Όπως αναφέρουν οι Sierpinska et al. (2011), η αναστοχαστική σκέψη συνιστά ακριβώς το αντίθετο της εφαρμογής μιας διαδικασίας που έχει ήδη διδαχθεί ο μαθητής για την επίλυση ενός προβλήματος και ακολούθως να ξεχνά ο μαθητής το πρόβλημα και τον τρόπο που το έλυσε. Οι μαθητές που έχουν αποκτήσει αναστοχαστική σκέψη κατά τους Sierpinska et al. (2011), είναι αυτοί που έχουν «οικοδομήσει τη γνώση» (constructed knowers) και δεν εφαρμόζουν απλώς διαδικασίες για την επίλυση ενός προβλήματος (procedural knowers).

Συστημική Σκέψη (systemic thinking)

Στη θεωρητική σκέψη η σημασία μιας έννοιας βασίζεται στις σχέσεις της με άλλες έννοιες

Κατά την εισαγωγή της ιδέας της έννοιας, ο Vygotsky (1987) τόνιζε ότι οι έννοιες αποτελούν πάντοτε μέρος του συστήματος εννοιών και ως τέτοιες δεν μπορούν να θεωρηθούν ή να εξεταστούν αποκομμένες από άλλες έννοιες. Με αυτό το σκεπτικό, η θεωρητική σκέψη εξετάζει τις σχέσεις μεταξύ των εννοιών και αποσκοπεί στη δημιουργία συστήματος εννοιών που η σημασία τους θα στηρίζεται στη σημασία άλλων εννοιών. Με άλλα λόγια κατά τους Sierpinska et al. (2002), η θεωρητική σκέψη έχει σαν στόχο τη δημιουργία θεωριών.

Η προσπάθεια των θεωρητικών είναι τα άτομα να ξεφύγουν από τα συγκεκριμένα παραδείγματα και να καταλήξουν σε γενικεύσεις. Αυτό άλλωστε είναι και η μαθηματικοποίηση: εκκινώντας από συγκεκριμένα παραδείγματα να προσπαθήσεις να εξάξεις και να δημιουργήσεις αφηρημένες μαθηματικές έννοιες.

Στη θεωρητική σκέψη η σημασία μιας έννοιας σταθεροποιείται με τους ορισμούς με τη χρήση ειδικής ορολογίας και σημειογραφίας

Για τον Vygotsky (1987), μια σημαντική συνέπεια του συστημικού χαρακτήρα των επιστημονικών εννοιών ήταν η ευαισθησία στις αντιφάσεις (contradictions). Η έννοια της αντίφασης δεν μπορεί να υπάρξει έξωθεν του συστήματος εννοιών και αποτελεί ένα είδος λογικής σχέσης μεταξύ προτάσεων. Επιπρόσθετα, η έννοια της αντίφασης προϋποθέτει τη σταθερότητα της σημασίας και αυτή η σταθερότητα επιτυγχάνεται με τη χρήση των ορισμών.

Για κάποιους ερευνητές της μαθηματικής παιδείας, αυτή η αναφορά στους ορισμούς αποτελεί τη διαχωριστική γραμμή ανάμεσα στην ανώτερη και τη στοιχειώδη μαθηματική σκέψη (Tall, 1991).

Οι συνθήκες των ορισμών είναι σε πολλές περιπτώσεις το αποτέλεσμα της κατηγοριοποίησης (classification) στο πλαίσιο των υφιστάμενων εννοιών. Θεωρούμε ότι στη θεωρητική σκέψη, η κατηγοριοποίηση είναι συστημική, δηλαδή υπάρχει κάποιο καλά καθορισμένο χαρακτηριστικό που επιτρέπει την κατηγοριοποίηση των εννοιών. Η κατηγοριοποίηση είναι συνεπώς ένα από τα χαρακτηριστικά της θεωρητικής σκέψης.

Η θεωρητική σκέψη μελετά την εσωτερική συνέπεια των συμβολικών συστημάτων

Η θεωρητική σκέψη ασχολείται με την εσωτερική συνέπεια των συμβολικών συστημάτων και την ενδιαφέρει οι ορισμοί που δίνονται να μη δημιουργούν αντιφάσεις. Ακόμη, μελετά την εγκυρότητα (validity) μιας πρότασης. Στα μαθηματικά μια πρόταση θεωρείται αληθής, αν μπορεί να αποδειχθεί σε ένα σύστημα εννοιών. Έτσι, η αποδεικτική διαδικασία (proving) είναι καθοριστικής σημασίας για τη θεωρητική σκέψη

Η εσωτερική συνέπεια μπορεί να απαιτεί την αναδόμηση των εννοιολογικών συστημάτων κατά την εισαγωγή καινούριας έννοιας

Οι θεωρίες δεν αναπτύσσονται πάντοτε με καθαρά προσθετικούς μηχανισμούς, αλλά σε πολλές περιπτώσεις απαιτείται με την εισαγωγή μιας καινούριας έννοιας αναδόμηση ολόκληρου του συστήματος (Sierpinska et al., 2002). Ένα παράδειγμα είναι η εισαγωγή των ρητών αριθμών που ανέτρεψαν ολόκληρο το οικοδόμημα το οποίο βασιζόταν έως τότε στους ακέραιους αριθμούς. Έτσι, για να διασφαλιστεί η εσωτερική συνοχή του συστήματος, έπρεπε για παράδειγμα να αποδεχθούμε ότι ο πολλαπλασιασμός δεν επιφέρει πάντοτε αύξηση, αλλά μπορεί να επιφέρει και μείωση, ανάλογα με τους εκάστοτε τελεστές.

Η θεωρητική σκέψη είναι υποθετική

Μια άλλη παράμετρος της θεωρητικής σκέψης είναι ο υποθετικός της χαρακτήρας. Αυτό σημαίνει ότι η θεωρητική σκέψη παράγει μόνο υποθετικές αλήθειες στη βάση των υποθέσεων του συστήματος. Αυτές οι υποθέσεις πρέπει να είναι πάντοτε ξεκάθαρες. Αντίθετα, η πρακτική σκέψη ασχολείται με συγκεκριμένες περιπτώσεις και προσπαθεί να γενικεύσει επί τη βάση μερικών μεμονωμένων περιπτώσεων.

Επιπρόσθετα, τη θεωρητική σκέψη, εξαιτίας του υποθετικού της χαρακτήρα, την απασχολούν όλες οι πιθανές περιπτώσεις και γι' αυτό θέτει τις ερωτήσεις γιατί; (why?) αλλά και γιατί όχι; (why not?) από τις οποίες μπορεί να δημιουργηθούν εντελώς διαφορετικές θεωρίες που αργότερα μπορεί να γίνουν αποδεκτές ή να απορριφθούν στη βάση πρακτικών ζητημάτων, ως άσχετες ή πρακτικώς ανεφάρμοστες.

Αναλυτική Σκέψη (analytic thinking)

Το μαθηματικό οικοδόμημα χαρακτηρίζεται από πλούτο αναπαραστατικών συστημάτων. Κάθε αναπαραστατικό σύστημα αποτελείται από πρωταρχικούς χαρακτήρες ή σύμβολα και ένα σύνολο κανόνων με τους οποίους συνδέονται τα στοιχεία σε σχηματισμούς με νόημα (Shoenfeld, 1992). Οι Sierpinska et al. (2002) στην τρίτη συνιστώσα της θεωρητικής σκέψης, αναφέρονται στο συμβολικό σύστημα (γι' αυτό αναφέρονται σε σύμβολα-signs). Η σχέση των συμβόλων με τη σημασία που αναπαριστούν είναι έμμεση και υπάρχει κάποια γλώσσα, κάποιοι τυπικοί κανόνες που καθορίζουν αυτή τη σχέση. Χαρακτηριστικό της θεωρητικής σκέψης κατά τους Sierpinska et al. (2002) είναι η αναλυτική προσέγγιση στα σύμβολα, την οποία ονομάζουν εν συντομία αναλυτική σκέψη.

Επιπρόσθετα, οι Sierpinska et al. (2002) αναφέρονται στη γραπτή γλώσσα (written language) και τη διαχωρίζουν από την ομιλούμενη γλώσσα, αφού όπως υποστηρίζει και ο Vygotsky (1987), η γραπτή γλώσσα απαιτεί υψηλότερο επίπεδο αφαίρεσης. Το σύστημα της γραπτής γλώσσας αποτελείται από τους γλωσσικούς χαρακτήρες (γράμματα) που συνδυάζονται μεταξύ τους δημιουργώντας λέξεις και εν συνεχεία προτάσεις, οι οποίες όμως λέξεις και προτάσεις δεν έχουν άμεση, αλλά έμμεση σχέση με το αναπαριστώμενο (εκείνο το οποίο αναπαριστούν).

Οι Sierpinska et al. (2002) διακρίνουν δύο υποκατηγορίες της αναλυτικής σκέψης: τη «γλωσσική ευαισθησία» και τη «μεταγλωσσική ευαισθησία». Η γλωσσική ευαισθησία αναφέρεται στην ευαισθησία ως προς τις τυπικές συμβολικές εκφράσεις και αφορά στην ερμηνεία αλγεβρικών εκφράσεων. Ακόμη, η γλωσσική ευαισθησία αναφέρεται στη χρήση σωστής ορολογίας. Η «μεταγλωσσική» ευαισθησία περιλαμβάνει την απόσταση συμβόλου-αντικειμένου και την ευαισθησία ως προς τη δομή και τη σύνταξη της μαθηματικής γλώσσας.

Στο Διάγραμμα 2.2. που ακολουθεί φαίνονται οι συνιστώσες της θεωρητικής σκέψης και παρατίθενται τα χαρακτηριστικά της καθεμιάς.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΣΚΕΨΗ

ΑΝΑΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ: Η θεωρητική σκέψη είναι σκέψη χάριν της σκέψης.

ΣΥΣΤΗΜΙΚΗ: Η θεωρητική σκέψη αναφέρεται σε συστήματα εννοιών, όπου η σημασία μιας έννοιας καθιερώνεται με βάση τη σχέση της με άλλες έννοιες και όχι με αντικείμενα ή γεγονότα.

ΟΡΙΣΜΟΙ: Η σημασία εννοιών σταθεροποιείται με τη χρήση ορισμών.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Η θεωρητική σκέψη ασχολείται με την εσωτερική συνέπεια των εννοιολογικών συστημάτων.

ΥΠΟΘΕΤΙΚΗ: Η θεωρητική σκέψη ασχολείται με τον υποθετικό χαρακτήρα των προτάσεων. Αποσκοπεί στο να αποκαλύψει όλες τις πιθανές περιπτώσεις και να μελετήσει όλα τα λογικά ενδεχόμενα.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ: Η θεωρητική σκέψη έχει αναλυτική προσέγγιση στα σύμβολα.

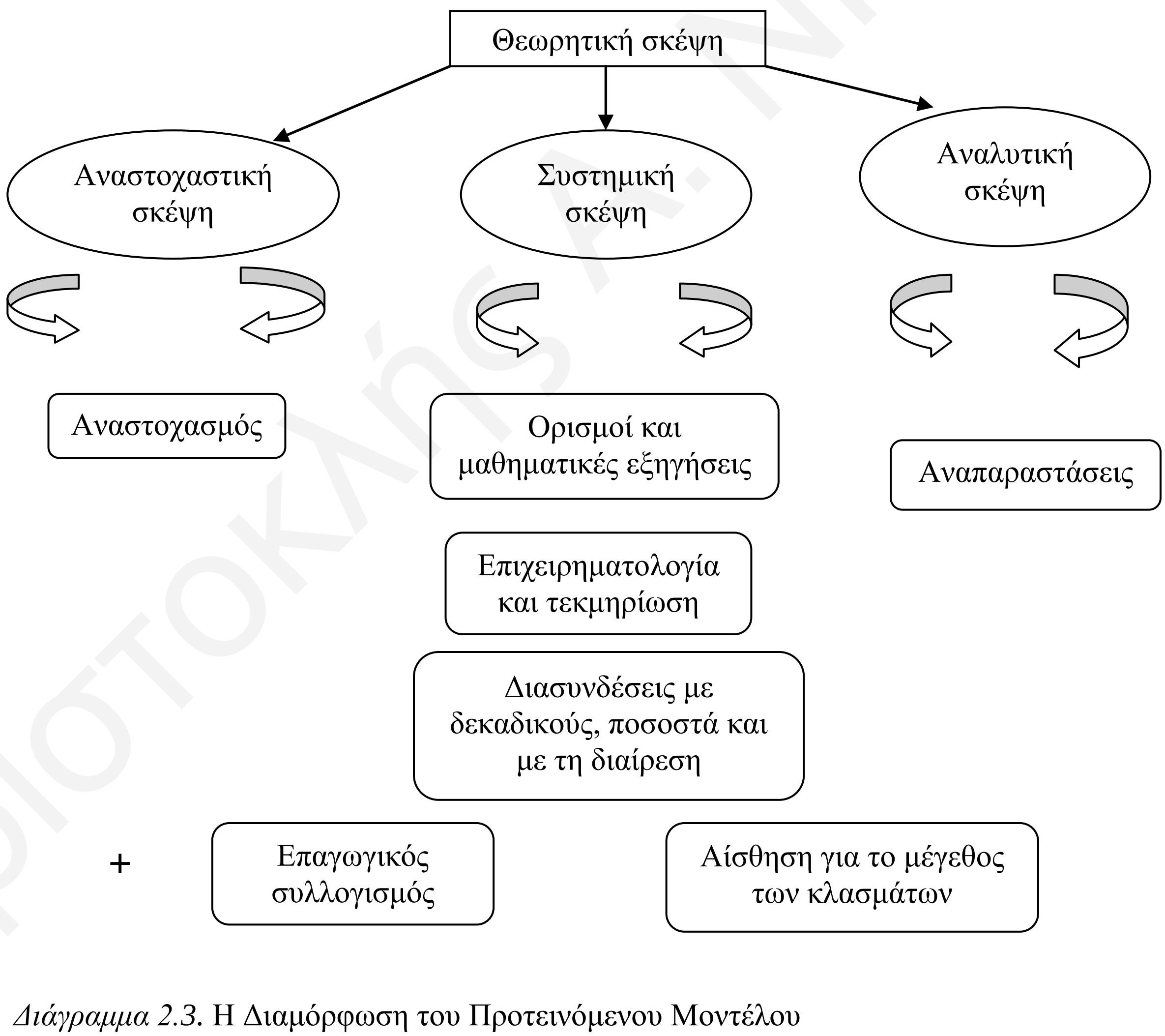
ΓΛΩΣΣΙΚΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑ
Ευαισθησία στις τυπικές συμβολικές εκφράσεις
Ευαισθησία στη χρήση σωστής ορολογίας

ΜΕΤΑΓΛΩΣΣΙΚΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑ
Απόσταση μεταξύ συμβόλου-αντικειμένου
Ευαισθησία ως προς τη δομή και τη σύνταξη της μαθηματικής γλώσσας

Διάγραμμα 2.2. Οι Συνιστώσες της Θεωρητικής Σκέψης και τα Χαρακτηριστικά Καθεμιάς.

Η Διαμόρφωση του Προτεινόμενου Μοντέλου

Αφετηρία για τη διαμόρφωση του προτεινόμενου μοντέλου αποτέλεσε η θεωρία των Sierpisnka et al. (2002). Η θεωρία των Sierpinska et al. (2002) αναφέρεται στην περιοχή της γραμμικής άλγεβρας στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Η παρούσα εργασία στοχεύει στην ανάπτυξη μοντέλου με παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση μιας έννοιας των μαθηματικών στο επίπεδο του δημοτικού σχολείου. Το σκεπτικό για τη διαμόρφωση του προτεινόμενου μοντέλου επεξηγείται παρακάτω και φαίνεται σχηματικά στο Διάγραμμα 2.3.



Διάγραμμα 2.3. Η Διαμόρφωση του Προτεινόμενου Μοντέλου

Στη θεωρία τους οι Sierpinska et al. (2002) υποστηρίζουν ότι η θεωρητική σκέψη έχει τρεις συνιστώσες: την αναστοχαστική σκέψη, τη συστημική σκέψη και την αναλυτική σκέψη. Αυτές οι τρεις συνιστώσες αποτέλεσαν την απαρχή για τη διαμόρφωση του προτεινόμενου μοντέλου, έτυχαν όμως τροποποίησης με βάση τη βιβλιογραφία, το πλαίσιο της παρούσας εργασίας και έτσι ώστε να ανταποκρίνονται στο επίπεδο των μαθητών του δημοτικού σχολείου. Η αναστοχαστική σκέψη, όπως επεξηγείται στο μοντέλο των Sierpinska et al. (2002), αναφέρεται στην απόκτηση κριτικής διάθεσης από μέρους του μαθητή που αποσκοπεί στην προώθηση της διερεύνησης και του αναστοχασμού. Ωστόσο, ο όρος αναστοχαστική σκέψη (reflective thinking) χρησιμοποιείται από διάφορους συγγραφείς και ερευνητές (Gagatsis & Patronis, 1990: Hiebert et al. 1996: Kuhn, 1989, 1999) με διαφορετική σημασία και σε διαφορετικά πλαίσια. Το μόνο σημείο στο οποίο συγκλίνουν είναι ότι θεωρούν ότι η αναστοχαστική σκέψη ταυτίζεται με τη μεταγνώση (metacognition), θέση που υιοθετούν και άλλοι ερευνητές (Forster & Taylor, 2000: Piaget, 1950: Sternberg, 1985: Vygotsky, 1962). Συνεπώς, φαίνεται ότι υπάρχει σύγκλιση ότι η αναστοχαστική σκέψη αναφέρεται στην ενημερότητα του ατόμου σχετικά με τη γνώση του, αλλά και στην ικανότητά του να ελέγχει τη γνώση του. Εκείνο που θα περιλάβουμε στη δική μας θεωρία είναι ο αναστοχασμός (reflection) και όχι η μεταγνώση, αφού η μεταγνώση περιλαμβάνει και συναισθηματικές μεταβλητές και η παρούσα εργασία εστάζεται στο πεδίο της γνωστικής προσέγγισης, της επιστημολογικής και της σημειωτικής προσέγγισης και δεν περιλαμβάνει τα συναισθήματα και το ρόλο τους στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών. Τι ακριβώς εννοούμε με τον όρο αναστοχασμός θα εξηγηθεί παρακάτω στην ανάλυση των παραγόντων που θεωρούμε ότι συνθέτουν την κατανόηση.

Η συστημική σκέψη στο μοντέλο των Sierpinska et al. (2002) αναφέρεται στη διασύνδεση εννοιών και στην ικανότητα του μαθητή να εντοπίζει σχέσεις μεταξύ των εννοιών και να εξετάζει τις έννοιες μέσα σε ευρύτερα συστήματα εννοιών. Επιπρόσθετα, στη θεωρία τους οι Sierpinska et al. (2002) θεωρούν ότι η συστημική σκέψη περιλαμβάνει τους ορισμούς, την απόδειξη και την υποθετική σκέψη. Στο προτεινόμενο θεωρητικό μοντέλο περιλάβαμε τους «ορισμούς» (παρακάτω εξηγώ τι εννοούμε με τους ορισμούς στο επίπεδο του δημοτικού σχολείου), την «επιχειρηματολογία και την τεκμηρίωση» (αντί της απόδειξης μελετούμε την επιχειρηματολογία και την τεκμηρίωση) ως παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων. Ο λόγος που περιλάβαμε την επιχειρηματολογία και την τεκμηρίωση αντί της απόδειξης είναι ότι οι μαθητές του δημοτικού σχολείου δεν είναι σε θέση να εμπλακούν σε δραστηριότητες τυπικής απόδειξης, αλλά είναι σε θέση να επιχειρηματολογήσουν και να τεκμηριώσουν όσον αφορά μαθηματικές προτάσεις (ένα είδος άτυπης απόδειξης).Επιπρόσθετα, στους παράγοντες περιλάβαμε τις διασυνδέσεις των κλασμάτων με τους δεκαδικούς και τα ποσοστά (διασυνδέσεις στο σύστημα των ρητών αριθμών) και με τη διαίρεση αριθμητής ÷ παρονομαστής.

Όσον αφορά στην αναλυτική σκέψη, η αναλυτική σκέψη στο μοντέλο των Sierpinska et al. (2002) αναφέρεται στην αναλυτική προσέγγιση στα σύμβολα και περιλαμβάνει δύο κύριες συνιστώσες, τη «γλωσσική ευαισθησία» και τη «μεταγλωσσική ευαισθησία». Εμείς, για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας δεν θα χρησιμοποιήσουμε τον όρο αναλυτική σκέψη. Στο μοντέλο μας θα περιλάβουμε τις αναπαραστάσεις, μιας και στο επίπεδο του δημοτικού σχολείου, πέρα από το συμβολικό σύστημα καθοριστικό ρόλο στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών διαδραματίζουν και άλλα αναπαραστατικά συστήματα (εικονικό και λεκτικό). Με τη συμπερίληψη των αναπαραστάσεων παίρνουμε στοιχεία από τη θεωρία των σημειωτικών για τη διαμόρφωση του προτεινόμενου μοντέλου, αφού η θεωρία των σημειωτικών τονίζει τη σημασία των σημείων (signs) και των αναπαραστατικών συστημάτων για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών.

Ακόμη, στο προτεινόμενο μοντέλο θα περιλάβουμε τον επαγωγικό συλλογισμό μιας και διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών (DeKoning et al., 2002: Klauer et al., 2002: NCTM, 2000) και την αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων, αφού θεωρήθηκε σημαντικός παράγοντας που συμβάλλει στην κατανόηση των κλασμάτων (Clarke & Roche, 2009: Post et al., 1986).

Με βάση τα παραπάνω θεωρούμε ότι οι παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων είναι:

1. Αναστοχασμός
2. Ορισμοί και μαθηματικές εξηγήσεις
3. Επιχειρηματολογία και τεκμηρίωση
4. Διασυνδέσεις με δεκαδικούς, ποσοστά και με τη διαίρεση
5. Αναπαραστάσεις
6. Επαγωγικός συλλογισμός
7. Αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων

Στο χώρο που ακολουθεί γίνεται εκτενής βιβλιογραφική αναφορά σε αυτούς τους παράγοντες με ιδιαίτερη μνεία στη σημασία τους για την κατανόηση των κλασμάτων. Ακόμη, γίνεται αναφορά στη μέτρηση αυτών των παραγόντων στα πλαίσια της παρούσας εργασίας.

Παράγοντες της Κατανόησης

Επαγωγικός Συλλογισμός

Ο επαγωγικός συλλογισμός αποτελεί μία από τις σημαντικότερες διαδικασίες της ανθρώπινης σκέψης, αφού εμπλέκεται σε πολλές σημαντικές λειτουργίες, όπως είναι η αντίληψη, η κατηγοριοποίηση, η κατανόηση, η λύση προβλήματος, η λήψη αποφάσεων, η μάθηση και η κοινωνική κατανόηση (Rips, 1990). Γενικά, ο επαγωγικός συλλογισμός ορίζεται ως η διαδικασία η οποία οδηγεί στην εξαγωγή γενικών συμπερασμάτων ή κανόνων από ειδικές περιπτώσεις (Demetriou, Doise, & van Lieshout, 1988: NCTM, 2000). Επομένως, καθιστά δυνατή την ικανότητα γενίκευσης, της οποίας ο ρόλος είναι καθοριστικός για την κατανόηση των μαθηματικών και την κατανόηση του κόσμου (Ευκλείδη, 1983: Klauer, Willmes, & Phye, 2002). Ιδιαίτερα στο επίπεδο του δημοτικού σχολείου, όπου η σκέψη των μαθητών είναι συγκεκριμένη και χρησιμοποιούν ποικιλία μέσων και υλικών, ο επαγωγικός συλλογισμός είναι βασικός αφού επιτρέπει στους μαθητές από τα συγκεκριμένα παραδείγματα να καταλήξουν σε κάποιο γενικότερο κανόνα, σε κάποιο γενικότερο συμπέρασμα (De Koning, Hamers, Sijtsma, & Vermeer, 2002). Ο επαγωγικός συλλογισμός είναι ιδιαίτερα σημαντικός για την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος, αφού οι μαθητές αναμένεται να εμπλακούν σε δραστηριότητες ισομερισμού ποσοτήτων (π.χ. σοκολάτας), επιφάνειας ή ομάδας αντικειμένων και να αντιληφθούν σταδιακά την έννοια του κλάσματος μέσα από αυτά τα επιμέρους παραδείγματα. Επιπρόσθετα, ο επαγωγικός συλλογισμός είναι πολύ σημαντικός για την εξαγωγή κανόνων αναφορικά με πράξεις με κλασματικούς αριθμούς. Για παράδειγμα, προκειμένου οι μαθητές να καταλήξουν σε ένα κανόνα για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων, εργάζονται πρώτα με υλικό κλασμάτων, καταγράφουν την κάθε περίπτωση και στη συνέχεια καταλήγουν επαγωγικά σε ένα γενικότερο κανόνα για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων.

Για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας, θεωρούμε ότι κάποιος μαθητής είναι επαρκής στον επαγωγικό συλλογισμό αν είναι σε θέση να εντοπίζει ομοιότητες, διαφορές και ομοιότητες και διαφορές (ταυτόχρονη σύζευξη των δύο) στις ιδιότητες και στις σχέσεις (Klauer, 1999). Έτσι, ο μαθητής πρέπει να είναι ικανός να επιλύει τους ακόλουθους τύπους επαγωγικών προβλημάτων: γενίκευσης, διάκρισης, αναγνώρισης σχέσεων, διαφοροποίησης σχέσεων και οικοδόμησης συστήματος (Klauer, 1999, σ. 135). Θεωρούμε ότι η ικανότητα του μαθητή να εντοπίζει ομοιότητες και διαφορές στις ιδιότητες και στις σχέσεις αποτελεί βασική προϋπόθεση για να καταλήξει σε γενίκευση από συγκεκριμένα παραδείγματα, αφού ο μαθητής θα πρέπει να έχει την ικανότητα να παρατηρήσει τις ειδικές περιπτώσεις και να εντοπίσει ομοιότητες και διαφορές μεταξύ τους για να μπορέσει στη συνέχεια επαγωγικά να καταλήξει σε ένα γενικότερο συμπέρασμα.

Αναπαραστάσεις

Οι αναπαραστάσεις είναι πολύ σημαντικές για την κατανόηση των μαθηματικών (Ainsworth, 2006: Terwel et al., 2009). Στα πλαίσια της διδασκαλίας των μαθηματικών, τα παιδιά έρχονται σε επαφή με ποικιλία αναπαραστάσεων (Γαγάτσης, Μιχαηλίδου, & Σιακαλλή, 2001). Η χρήση ποικιλίας αναπαραστάσεων για την ίδια μαθηματική έννοια είναι πολύ σημαντική για την κατανόησή της (Duval, 2002). Η Lamon (2001) αναφέρεται στην ανάγκη χρήσης διαφορετικών ειδών αναπαραστάσεων για την κατανόηση των κλασμάτων. Πέρα από την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών μέσα από την αναγνώριση και την ευέλικτη χρήση τους σε διαφορετικά συστήματα αναπαραστάσεων, βασικός στόχος της διδασκαλίας, πρέπει να είναι και η ικανότητα μετάφρασης από ένα σύστημα στο άλλο (Lesh, Post, & Behr, 1987: Seeger 1998). Ως ικανότητα «μετάφρασης» ορίζεται η ψυχολογική διαδικασία μέσω της οποίας το άτομο μεταφέρεται από ένα σύστημα αναπαράστασης σε άλλο.

Ο Janvier (1987) εξηγεί ότι η ικανότητα μετάβασης από ένα πεδίο αναπαράστασης σε άλλο είναι ιδιαίτερα σημαντική για την επίλυση μαθηματικού προβλήματος και γενικότερα για τη μάθηση των μαθηματικών εννοιών. Αυτό υποστηρίζεται και από το NCTM (2000), αφού η διαδικασία μετάφρασης παρουσιάζεται ως μια από τις προτεινόμενες διαδικασίες που συμβάλλουν στην επιτυχημένη επίλυση μαθηματικού προβλήματος.

Για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας θεωρούμε ότι για την κατανόηση των κλασμάτων απαιτείται η ικανότητα μετάφρασης σε εικονική, συμβολική και λεκτική αναπαράσταση, καθώς και η ικανότητα του μαθητή να κατασκευάζει σχέδια για να παρουσιάσει συγκεκριμένους κλασματικούς αριθμούς.

Διασυνδέσεις με Δεκαδικούς, Ποσοστά και τη Διαίρεση

Οι μαθητές αντιμετωπίζουν σοβαρές δυσκολίες στο να συνδέσουν τις διάφορες μορφές των ρητών αριθμών (Sweeny & Quinn, 2000). Πολλοί ερευνητές υποστηρίζουν ότι η ικανότητα των μαθητών να μετατρέπουν από μια μορφή ρητού σε άλλη αποτελεί ένδειξη της κατανόησης των ρητών αριθμών (Oppenheimer & Hunting, 1999). Συνεπώς, η ικανότητα μετατροπής των κλασμάτων σε δεκαδικούς και ποσοστά αποτελεί ένδειξη της κατανόησης της έννοιας του κλάσματος. Επιπρόσθετα, για την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος, θα πρέπει οι μαθητές να αντιληφθούν ότι το κλάσμα είναι διαίρεση αριθμητής ÷ παρονομαστής, να συνδέσουν δηλαδή την έννοια του κλάσματος με την έννοια της διαίρεσης (Newstead & Murray, 1998). Η σύνδεση μιας έννοιας με άλλες έννοιες θεωρείται απαραίτητη ικανότητα προκειμένου κάποιος να θεωρείται ότι κατανοεί τη συγκεκριμένη έννοια. Σε αυτό συμφωνούν αρκετοί ερευνητές (Hiebert & Lefevre, 1986: Hiebert & Carpenter, 1992: Sierpinska et al., 2002). Για παράδειγμα, οι Hiebert και Carpenter (1992) θεωρούν ότι κατανόηση στα μαθηματικά είναι η διαδικασία δημιουργίας συνδέσμων ή σχέσεων μεταξύ ήδη υφιστάμενων γνώσεων είτε μεταξύ υφιστάμενων και νεοπροσλαμβανουσών εννοιών. Αυτή η διαδικασία περιλαμβάνει την ικανότητα του μαθητή να συνδέει τις έννοιες. Για τους Hiebert και Lefevre (1986) η εννοιολογική γνώση είναι η γνώση που είναι πλούσια σε σχέσεις και μπορεί να θεωρηθεί ως ένα δίκτυο γνώσεων. Συνεπώς, η εννοιολογική κατανόηση που αποτελεί μέρος της ευρύτερης κατανόησης, αφορά στην ικανότητα του μαθητή να οικοδομεί σχέσεις μεταξύ εννοιών, π.χ. μεταξύ της έννοιας του κλάσματος και της έννοιας της διαίρεσης. Οι Sierpinska et al. (2002) θεωρούν βασικό χαρακτηριστικό της θεωρητικής σκέψης την ικανότητα σύνδεσης των εννοιών μέσα σε ένα ευρύτερο σύστημα εννοιών. Ονομάζουν μια από τις συνιστώσες της θεωρητικής σκέψης τη συστημική σκέψη.

Για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας θεωρούμε ότι κάποιος μαθητής είναι επαρκής στις διασυνδέσεις με δεκαδικούς, ποσοστά και τη διαίρεση, αν μπορεί να μετατρέπει ένα κλάσμα σε δεκαδικό και σε ποσοστό και αν μπορεί να αντιλαμβάνεται τη σχέση της έννοιας του κλάσματος με τη διαίρεση αριθμητής÷παρονομαστής (Μιχαηλίδου, 2004: Newstead & Murray, 1998: Oppenheimer & Hunting, 1999). Ακόμη, θεωρούμε ότι ο παράγοντας διασυνδέσεις με δεκαδικούς, ποσοστά και τη διαίρεση περιλαμβάνει τόσο την εννοιολογική όσο και τη διαδικαστική κατανόηση των κλασμάτων, αφού αφενός οι μαθητές συνδέουν τα κλάσματα με τις άλλες μορφές ρητών αριθμών και με την έννοια της διαίρεσης, και αφετέρου, προκειμένου να μετατρέψουν σε δεκαδικούς, ποσοστά και να συνδέσουν την έννοια του κλάσματος με τη διαίρεση αριθμητής ÷ παρονομαστής πρέπει να εμπλακούν σε διαδικασίες, διαδικασίες όμως που έχουν νόημα.

Αίσθηση για το Μέγεθος των Κλασμάτων

Η αίσθηση ενός μαθητή για το μέγεθος των κλασμάτων είναι βασική για την κατανόησή τους, αφού αν για παράδειγμα ο μαθητής δεν είναι σε θέση να αντιληφθεί ότι το κλάσμα $\frac{1}{4}$ είναι μικρότερο από το $\frac{1}{3}$, τότε είναι πολύ πιθανό να μην κατανοεί τι σημαίνουν αυτοί οι δύο κλασματικοί αριθμοί και γενικότερα τα κλάσματα. Είναι πιθανό, για παράδειγμα, ο μαθητής να θεωρεί ξεχωριστά τον αριθμητή και τον παρονομαστή του κλάσματος, χωρίς ν’ αποτελούν μια ενιαία οντότητα. Η αίσθηση του μεγέθους των κλασματικών αριθμών είναι βασική για τη σύγκριση και τη σειροθέτηση. Σύμφωνα με τους Clarke και Roche (2009), ένας σημαντικός αριθμός ερευνητών έχουν τονίσει τη σημασία του οι μαθητές να μπορούν να προσδίδουν νόημα στο μέγεθος των κλασματικών αριθμών και στις δυσκολίες που συνοδεύουν μια τέτοια προσπάθεια. Ένα συχνό αποτέλεσμα της Εθνικής Αξιολόγησης Εκπαιδευτικής Προόδου των Η.Π.Α. NAEP (Carpenter, Kepner, Corbitt, Lindquist, & Reys, 1980) υποστήριξε την υπόθεση της δυσκολίας από μέρους των μαθητών στο να κατανοήσουν το μέγεθος κλασματικών αριθμών. Εξάλλου, οι Post, Behr και Lesh (1986) κατέληξαν στο συμπέρασμα πως η αίσθηση του μεγέθους των κλασματικών αριθμών συνδέεται με την καλύτερη εννοιολογική κατανόησή τους, ενώ η Sowder (1988) παρατήρησε ότι έργα σύγκρισης και σειροθέτησης συνδέονται με την αισθητοποίηση των κλασματικών αριθμών (fractions’ number sense).

Για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας θεωρούμε ότι κάποιος μαθητής έχει αίσθηση του μεγέθους των κλασμάτων, αν είναι σε θέση να συγκρίνει και να σειροθετεί κλάσματα (Clarke & Roche, 2009). Ο παράγοντας αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων αναφέρεται τόσο στην εννοιολογική κατανόηση της έννοιας του κλάσματος, όσο και στη διαδικαστική κατανόηση, αφού ο μαθητής προκειμένου να συγκρίνει και να σειροθετήσει κλασματικούς αριθμούς απαιτείται να εφαρμόσει διαδικασίες, διαδικασίες όμως που όμως έχουν νόημα.

Ορισμοί και Μαθηματικές Εξηγήσεις

Η ικανότητα επικοινωνίας μαθηματικών εννοιών και χρήσης της γλώσσας γενικότερα, είναι πολύ σημαντική σύμφωνα με τα επίπεδα του NCTM (2000), αφού αποκαλύπτει το επίπεδο κατανόησης των μαθηματικών εννοιών. Οι μαθητές που δεν είναι σε θέση να εξηγήσουν τη σημασία συμβόλων, δεν μπορούν να θεωρηθούν «επαρκή» μέλη της μαθηματικής κοινότητας (Niemi, 1996a, Niemi, 1996b).

Οι μαθητές του δημοτικού σχολείου χρησιμοποιούν διάφορα είδη εξηγήσεων. Ένα είδος εξηγήσεων είναι οι μαθηματικές και οι πρακτικές εξηγήσεις (Levenson, Tsamir, & Tirosh 2007a, 2007b). Οι μαθηματικές εξηγήσεις βασίζονται σε μαθηματικούς ορισμούς ή σε μαθηματικές ιδιότητες που έχουν διδαχθεί οι μαθητές προηγουμένως. Συχνά, αυτές οι μαθηματικές εξηγήσεις χρησιμοποιούν μαθηματική αιτιολόγηση. Ωστόσο, οι μαθηματικές εξηγήσεις δεν είναι απαραίτητο να είναι «αυστηρές» και ολοκληρωμένες τυπικές εξηγήσεις (formal explanations). Οι τυπικές εξηγήσεις συνήθως χρησιμοποιούνται στο λύκειο και στο προπτυχιακό επίπεδο. Οι μαθηματικές εξηγήσεις μπορεί να είναι πιο κατάλληλες για τους μαθητές δημοτικού σχολείου παρά οι τυπικές εξηγήσεις. Ένα παράδειγμα μαθηματικής εξήγησης που αναφέρουν οι Levenson et al. (2007a) αφορά στην έννοια του άρτιου αριθμού. Συγκεκριμένα, η μαθηματική εξήγηση είναι ότι άρτιος (π.χ. το 14) είναι εκείνος ο αριθμός που διαιρείται με το δύο χωρίς υπόλοιπο (14÷2=7, υπόλοιπο 0) ή που μπορεί να γραφτεί σαν το άθροισμα δύο ίδιων ακέραιων αριθμών (14=7+7). Οι πρακτικές εξηγήσεις περιλαμβάνουν κάθε εξήγηση που δεν βασίζεται αποκλειστικά σε μαθηματικές έννοιες. Περιλαμβάνουν εκείνες τις εξηγήσεις που χρησιμοποιούν οπτικές αναπαραστάσεις και χειριστικά αντικείμενα, εξηγήσεις που βασίζονται σε καταστάσεις από την καθημερινή ζωή και άτυπες εξηγήσεις (informal explanations). Πρακτική εξήγηση για την έννοια του άρτιου αριθμού μπορεί να θεωρηθεί το ότι μπορούν να γίνουν ζευγαράκια χωρίς να περισσέψει κανένα (π.χ. 14 παιδιά μπορούν να κάνουν 7 ζευγαράκια χωρίς να περισσέψει κανένα παιδί) ή ότι 14 βόλοι μπορούν να κατανεμηθούν σε δύο κουτιά εξίσου χωρίς να περισσέψει κανένας (αντίστοιχο της τέλειας διαίρεσης 14÷2).

Οι μαθητές του δημοτικού σχολείου μπορούν να εξηγήσουν με λόγια, με σχέδιο, με σχέδιο και λόγια. Ακόμη, οι μαθητές του δημοτικού σχολείου μπορούν να εξηγήσουν με τη χρήση παραδειγμάτων, π.χ. στην περίπτωση που μαθητές καλούνται να πουν πότε δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα, ένας πιθανός τρόπος να το κάνουν είναι με τη χρήση παραδειγμάτων. Η χρήση παραδειγμάτων θεωρείται αποδεκτός τρόπος εξήγησης και αιτιολόγησης για τους μαθητές του δημοτικού σχολείου (Evens & Houssart, 2004), αφού σε αυτές τις ηλικίες δε θεωρείται εφικτό από τους μαθητές να δώσουν ένα γενικό κανόνα που να εξηγεί με φορμαλιστικά μαθηματικά πότε δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα. Τα παραδείγματα μπορούν να οριστούν ως «οι επιμέρους εικόνες εννοιών ή αρχών» (Watson & Mason, 2005, p. 3). Η σημασία των παραδειγμάτων (exemplars or examples) στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών είναι μεγάλη (Zazkis & Leikin, 2008). Οι Bills και Watson (2008) αναφέρονται στον ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο των παραδειγμάτων στη δημιουργία εικασιών και την εκπόνηση ορισμών. Οι Tsamir, Tirosh και Levenson (2008) αναφέρονται στο διπλό ρόλο που διαδραματίζουν τα παραδείγματα στο σχηματισμό εννοιών, αλλά και σαν «παράγωγα» της απόκτησης των εννοιών.

Για να καταλήξουμε στο τι θα αποδεχθούμε ως ορισμούς και μαθηματικές εξηγήσεις στο επίπεδο του δημοτικού σχολείου, πήραμε στοιχεία από την επιστημολογική προσέγγιση, μιας και η επιστημολογική προσέγγιση καταπιάνεται με θέματα επιστημολογικής φύσης, όπως τι είναι τα μαθηματικά και τι είναι οι ορισμοί και οι μαθηματικές εξηγήσεις (Balacheff, 2008: Goldin, 1990). Για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας, θεωρούμε ότι οι μαθητές μπορούν να ορίσουν τι είναι κλάσμα με δικά τους λόγια, με σχέδιο, με λόγια και με σχέδιο, με παραδείγματα κ.ά. (δεν θα απαιτηθεί ο αυστηρός τυπικός ορισμός που ζητείται από μεγαλύτερους μαθητές). Επιπρόσθετα, οι μαθητές θα χρειαστεί να εξηγήσουν διάφορα θέματα που αφορούν στα κλάσματα (π.χ. πότε δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα). Οι μαθητές μπορούν να εξηγήσουν με λόγια, με σχέδιο, με τη χρήση είτε πρακτικών είτε μαθηματικών εξηγήσεων και με τη χρήση παραδειγμάτων (Evens & Houssart, 2004: Levenson et al., 2007a, 2007b).

Επιχειρηματολογία και Τεκμηρίωση

Η απόδειξη είναι βασικό στοιχείο των μαθηματικών – αποτελεί τη βάση κατανόησης των μαθηματικών και είναι απαραίτητη για την ανάπτυξη, την καθιέρωση και την επικοινωνία της μαθηματικής γνώσης (Kitcher, 1984: Polya, 1981). Η κεντρική της θέση έχει οδηγήσει ερευνητές σε πολλές χώρες να τονίσουν τη σημασία της απόδειξης για τα σχολικά μαθηματικά (π.χ. Balacheff, 1988: Ball, Hoyles, Jahnke, & Movshovitz-Hadar, 2002: Healy & Hoyles, 2000: Mariotti, 2000). Στη Βόρεια Αμερική, συγκεκριμένα, η παρούσα έρευνα και εκπαιδευτική πολιτική δεν υποστηρίζει απλώς την παρουσία της απόδειξης στα σχολικά μαθηματικά, αλλά και την εμπλοκή ακόμη και μαθητών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης με δραστηριότητες απόδειξης και τον εμπλουτισμό των μαθηματικών τους εμπειριών με έργα απόδειξης (π.χ. Ball & Bass, 2003: NCTM, 2000: Schoenfeld, 1994: Yackel & Hanna, 2003). Η ιδέα της ενσωμάτωσης της απόδειξης στις εμπειρίες των μαθητών από τα πρώτα χρόνια της σχολικής τους ζωής θέτει το σημαντικό ζήτημα τι μπορεί να γίνει αποδεκτό ως απόδειξη για τους μαθητές του δημοτικού σχολείου.

Σύμφωνα με τους Harel και Sowder (1998), η απόδειξη είναι η διαδικασία που ακολουθεί το άτομο για να διαψεύσει αμφιβολίες ή να δημιουργήσει αμφιβολίες για την αλήθεια μιας δήλωσης ή ενός ισχυρισμού. Η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει δύο υπο-διαδικασίες: εξακρίβωση και πειθώ (σ. 241). Επιπρόσθετα, οι Harel και Sowder (1996, σ. 60), υποστηρίζουν ότι ο όρος απόδειξη αναφέρεται σε κάθε είδος επιχειρήματος και μπορεί να μην υποδηλώνει «μαθηματική απόδειξη». Μέσα σε αυτά τα πλαίσια, μπορεί να θεωρηθεί ότι οι μαθητές του δημοτικού σχολείου μπορούν να εμπλακούν σε ένα είδος «άτυπης απόδειξης» (informal proof) αν είναι σε θέση να επιχειρηματολογήσουν αναφορικά με μια μαθηματική δήλωση που τους δίνεται και να τεκμηριώσουν την απάντησή τους. Η τυπική απόδειξη (formal proof) που απαιτείται από μεγαλύτερους μαθητές δεν μπορεί σε καμία περίπτωση να ζητηθεί από μαθητές δημοτικού σχολείου.

Για τον καθορισμό του τι θα αποδεχθούμε ως επιχειρηματολογία και τεκμηρίωση στο επίπεδο του δημοτικού σχολείου πήραμε στοιχεία από την επιστημολογική προσέγγιση (Balacheff, 2008). Για τη μέτρηση της επιχειρηματολογίας και της τεκμηρίωσης παρουσιάζονται στους μαθητές δηλώσεις που αφορούν στα κλάσματα και οι μαθητές καλούνται να αποφασίσουν κατά πόσον η δήλωση είναι ορθή ή λανθασμένη και να τεκμηριώσουν την απάντησή τους. Όσον αφορά στο είδος της πειστικής τεκμηρίωσης που θα αποδεχθούμε, αυτό μπορεί να ποικίλλει, ανάλογα με τη δήλωση που οι μαθητές καλούνται να κρίνουν σαν ορθή ή λανθασμένη. Για παράδειγμα, στην περίπτωση της έρευνας των Evens και Houssart (2004), η πειστική τεκμηρίωση (justification) περιλάμβανε διάφορες κατηγορίες που είχαν να κάνουν με την ορθότητα ή το εσφαλμένο μιας δήλωσης για μια αριθμητική σειρά (επαναδιατύπωση και ενίσχυση, αριθμητικά παραδείγματα, τεκμηρίωση). Κατ’ ανάλογο τρόπο, θα αποδεχθούμε οποιαδήποτε πειστική τεκμηρίωση έχει σχέση με τις συγκεκριμένες δηλώσεις σχετικά με τα κλάσματα που οι μαθητές θα έχουν να κρίνουν σαν ορθές ή λανθασμένες.

Αναστοχασμός

Η ικανότητα του αναστοχασμού θεωρείται βασική δεξιότητα την οποία πρέπει να κατέχουν οι μαθητές του δημοτικού σχολείου (Ontario Curriculum, 2005). Ο αναστοχασμός έχει συμπεριληφθεί στις μαθηματικές διαδικασίες (mathematical processes) που υποστηρίζουν τη μάθηση των μαθηματικών. Στο Ontario Curriculum (2005) αναφέρονται επτά διαδικασίες που οι μαθητές χρειάζεται να αποκτήσουν και να εφαρμόσουν προκειμένου να επιτύχουν στις πέντε περιοχές των μαθηματικών. Μια από αυτές τις διαδικασίες είναι και ο αναστοχασμός.

Εξάλλου, δεν είναι τυχαίο το ότι οι Sierpinska et al. (2002) θεωρούν την αναστοχαστική σκέψη μια από τις συνιστώσες της θεωρητικής σκέψης. Η αναστοχαστική σκέψη όπως επεξηγείται στο μοντέλο των Sierpinska et al. (2002) αναφέρεται στην απόκτηση κριτικής διάθεσης από μέρους του μαθητή που αποσκοπεί στην προώθηση της διερεύνησης και του αναστοχασμού. Ένα βασικό χαρακτηριστικό της αναστοχαστικής σκέψης είναι ότι ο μαθητής αντιμετωπίζει τα προβλήματα με κριτικό και διερευνητικό πνεύμα, όπως ακριβώς ένας ερευνητής (Sierpinska et al., 2002). Η Kuhn (1989) υποστηρίζει ότι μια αντίληψη των παιδιών ως ερευνητές μπορεί να είναι προβληματική αν δεν ορίσουμε επαρκώς τι είναι η επιστημονική σκέψη. Η αντίληψή μας για τη μεταφορά παιδί – ερευνητής μπορεί να μελετηθεί σε σχέση με την επιστημονική κατανόηση. Τόσο το παιδί όσο και ο ερευνητής κατανοούν τον κόσμο μέσω της οικοδόμησης και της ανακατασκευής νοητικών μοντέλων. Η έρευνα, ωστόσο, έχει δείξει ότι ο τρόπος με τον οποίο τα νοητικά μοντέλα ή οι θεωρίες συνδυάζονται με τα εμπειρικά δεδομένα είναι διαφορετικός στο παιδί απ' ότι στον επιστήμονα-ερευνητή. Μια βασική διαφορά εντοπίζεται στο γεγονός ότι το παιδί «μπερδεύει» και δεν μπορεί να διακρίνει τα εμπειρικά δεδομένα από τη θεωρία. Σαν αποτέλεσμα, σε πολλές περιπτώσεις τα εμπειρικά δεδομένα δεν εκλαμβάνονται ανεξάρτητα από τη θεωρία, αλλά σαν επιμέρους περιπτώσεις της θεωρίας που χρησιμεύουν στο να την υπηρετούν. Από την άλλη, η θεωρία χρησιμεύει στο να εξηγεί τα δεδομένα και να τους προσδίδει νόημα. Όταν υπάρχει διάσταση των δεδομένων και της θεωρίας, τότε τα παιδιά χρησιμοποιούν διάφορους τρόπους για να τα φέρουν κοντά: είτε τροποποιώντας τη θεωρία, είτε τροποποιώντας τα εμπειρικά δεδομένα αγνοώντας μερικά ή επιλέγοντας εκείνα που εξυπηρετούν το σκοπό. Αυτή η αποτυχία διάκρισης των εμπειρικών δεδομένων και της θεωρίας που οικοδομείται, όπως επίσης και η αποτυχία «επίλυσης» των αντιφάσεων μεταξύ δεδομένων και θεωρίας αποτελεί χαρακτηριστικό των παιδιών-ερευνητών. Η Kuhn (1989) υποστηρίζει ότι εκείνο που τα παιδιά χρειάζονται ώστε να μπορούν να σκέφτονται σαν ερευνητές είναι η ικανότητά τους να σκέφτονται για τη σκέψη τους και να αναστοχάζονται.

Για τη μέτρηση του αναστοχασμού στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, θα δανειστούμε στοιχεία από τον ορισμό του αναστοχασμού στο Ontario Curriculum (2005). Στο Ontario Curriculum (2005) αναφέρεται ότι η επικοινωνία και ο αναστοχασμός κατά τη διάρκεια και μετά την επίλυση μαθηματικού προβλήματος βοηθούν τους μαθητές όχι μόνο να οικοδομήσουν και να βελτιώσουν τη σκέψη τους, αλλά και να δουν το πρόβλημα προς επίλυση από διάφορες προοπτικές. Αυτό ανοίγει το δρόμο στην αναγνώριση εύρους στρατηγικών που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη λύση ενός προβλήματος.

Θεωρούμε ότι ο αναστοχασμός περιλαμβάνει τα ακόλουθα:

α) την ικανότητα του μαθητή να αιτιολογεί τον τρόπο σκέψης του και την απάντησή του για την επίλυση ενός προβλήματος (Ontario Curriculum, 2005).

β) την ικανότητα του μαθητή να αιτιολογεί τη λογικότητα της απάντησης που έδωσε (Ontario Curriculum, 2005).

γ) την ικανότητα του μαθητή να επαληθεύει την απάντησή του (Ontario Curriculum, 2005).

Διδασκαλία που Συντελεί στην Ανάπτυξη της Ικανότητας στους Παράγοντες της Κατανόησης

Βασικός στόχος της παρούσας διατριβής είναι να προτείνει παρεμβατικό πρόγραμμα με στόχο τη βελτίωση της ικανότητας των μαθητών στους παράγοντες που θα βρεθεί ότι συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων. Έτσι, έγινε ανασκόπηση της βιβλιογραφίας για την εύρεση στοιχείων αναφορικά με παρεμβατικά προγράμματα που αποσκοπούσαν στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών στους παράγοντες που σχετίζονται με την κατανόηση των κλασμάτων. Η υπάρχουσα βιβλιογραφία αναφορικά με διδασκαλίες που αποσκοπούσαν στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών στους παράγοντες θα είναι χρήσιμη για το σχεδιασμό του παρεμβατικού προγράμματος. Από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας βρέθηκαν στοιχεία για παρεμβατικά προγράμματα για την ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών στον επαγωγικό συλλογισμό, την τεκμηρίωση, τις αναπαραστάσεις και τον αναστοχασμό. Τα στοιχεία αυτά παρουσιάζονται παρακάτω.

Διδασκαλία που Συντελεί στην Ανάπτυξη της Ικανότητας στον Επαγωγικό Συλλογισμό

Κατευθυντήρια γραμμή για τη διδασκαλία που συντελεί στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών στον επαγωγικό συλλογισμό αποτελεί το πρόγραμμα διδασκαλίας του Klauer για τον επαγωγικό συλλογισμό, καθώς χρησιμοποιήθηκε εκτεταμένα σε εκπαιδευτικές μελέτες, οι οποίες αναφέρουν σημαντικά αποτελέσματα σχετικά με την ποικιλότροπη εφαρμογή του προγράμματος σε παιδιά διάφορων ηλικιών και επιπέδων ανάπτυξης (De Koning, et al., 2002: Klauer, 1992: Sanders, Phye, & Hegland, 1991: Tomic & Klauer, 1996).

Το πρόγραμμα περιλαμβάνει 120 προβλήματα, τα οποία κατανέμονται εξίσου στους έξι βασικούς τύπους διαδικασιών επεξεργασίας πληροφοριών (γενίκευση, διάκριση, διασταυρούμενη ταξινόμηση, αναγνώριση σχέσεων, διαφοροποίηση σχέσεων και οικοδόμηση συστήματος). Το διδακτικό πρόγραμμα του Klauer ολοκληρώνεται σε 20 εικοσάλεπτα μαθήματα, όπου στο καθένα διδάσκονται 12 προβλήματα. Σε κάθε μάθημα γίνεται προσπάθεια να παρουσιαστούν δύο τουλάχιστον από τους βασικούς τύπους διαδικασιών, ενώ στα δύο τελευταία μαθήματα γίνεται εξάσκηση όλων των διαδικασιών. Ακόμη, σε κάθε μάθημα τα προβλήματα ομαδοποιούνται ανάλογα με τη διαδικασία που απαιτούν για τη λύση τους, ενώ η πολυπλοκότητα των προβλημάτων που απαιτούν την ίδια διαδικασία αυξάνει από τα αρχικά μαθήματα στα επόμενα.

Το εκπαιδευτικό πρόγραμμα του Klauer ολοκληρώνεται σε τρεις φάσεις διδασκαλίας, οι οποίες αντιστοιχούν στις τρεις φάσεις ανάπτυξης της γνώσης: στη δηλωτική γνώση, στη διαδικαστική γνώση και στη γνώση στρατηγικής. Στη φάση της δηλωτικής γνώσης ένα παιδί αναπτύσσει τη γνώση σχετικά με τους βασικούς τύπους των διαδικασιών (δομών) και πώς να αναγνωρίζει προβλήματα που έχουν αυτές τις δομές. Στο στάδιο της διαδικαστικής γνώσης υπάρχει η ανάπτυξη της αντίληψης των διαδικασιών που απαιτούνται για να χρησιμοποιηθεί η δηλωτική γνώση (με τον τύπο του επαγωγικού συλλογισμού) ως εργαλείο για τη λύση προβλημάτων. Η τρίτη φάση, η γνώση στρατηγικής, περιλαμβάνει αυθόρμητη αναγνώριση και χρήση της βασικής διαδικαστικής δομής με ποικιλία υλικών.

Στο πρόγραμμα του Klauer εφαρμόστηκαν τρεις εκπαιδευτικές μέθοδοι, η μέθοδος της λεκτικής (προφορικής) αυτοδιδασκαλίας (verbal self-instruction), η μέθοδος της καθοδηγούμενης ανακάλυψης (guided discovery) και η μέθοδος της λεκτικής έκφρασης και του αυτοαναστοχασμού (verbalization and self reflection). Οι μέθοδοι αυτές ποικίλλουν ανάλογα με το βαθμό στον οποίο ο εκπαιδευτικός ή ο μαθητής φέρουν την ευθύνη για τη λύση των προβλημάτων. Η επιλογή της μεθόδου εξαρτάται από το γνωστικό επίπεδο του μαθητή. Σχετικά πιο ικανοί μαθητές χρειάζονται λιγότερη βοήθεια στη λύση των έργων εκπαίδευσης από τα λιγότερο ικανά παιδιά, γιατί έχουν σε μεγαλύτερο βαθμό την ικανότητα να καθορίζουν τους τύπους των έργων και τις διαδικασίες λύσης που απαιτούνται στη λύση των έργων αυτών.

Το εκπαιδευτικό πρόγραμμα του Klauer εφαρμόστηκε αρχικά σε 279 παιδιά ηλικίας 7 χρόνων, τα οποία φοιτούσαν σε δημοτικά σχολεία της Γερμανίας (Klauer, 1989). Συνοπτικά, οι γνωστικοί και οι μεταγνωστικοί στόχοι του προγράμματος αναφέρονταν στην αναγνώριση από τα παιδιά ενός επαγωγικού προβλήματος, στην εφαρμογή της επαρκούς διαδικασίας λύσης ανάλογα με τον τύπο του προβλήματος και τέλος στον έλεγχο της λύσης. Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στη διδασκαλία με μεταφορά, έτσι ώστε οι μαθητές να μπορούν να εφαρμόζουν τις γνωστικές και μεταγνωστικές στρατηγικές σε οποιοδήποτε πρόβλημα επαγωγικού συλλογισμού (Klauer, Willmes, & Phye, 2002: Tomic & Klauer, 1996).

Τα αποτελέσματα του εκπαιδευτικού προγράμματος έδειξαν ότι βελτιώθηκε η ικανότητα του επαγωγικού συλλογισμού των παιδιών σε επαγωγικά έργα. Παρόλο που παρατηρήθηκε αύξηση στην επίδοση των παιδιών σε έργα που δεν απαιτούσαν επαγωγικό συλλογισμό, η αύξηση αυτή ήταν σημαντικά μικρότερη από την αύξηση της επίδοσης στα επαγωγικά έργα. Η αύξηση της επίδοσης στα μη επαγωγικά έργα προβλημάτισε ιδιαίτερα τους ερευνητές, γεγονός το οποίο επεξήγησαν με βάση τα γνωστικά και μεταγνωστικά συστατικά της λύσης προβλήματος τα οποία διδάσκονταν συνδυασμένα στο εκπαιδευτικό πρόγραμμα. Σύμφωνα με τα πορίσματα της έρευνας η θεωρία μπορεί να θεωρηθεί λειτουργικά έγκυρη (Klauer et al., 2002). Επομένως, η διδασκαλία των συγκεκριμένων στρατηγικών για τη λύση προβλημάτων επαγωγικού συλλογισμού καθιστά ικανά τα παιδιά να λύσουν επαγωγικά προβλήματα, εφόσον αναγνωρίσουν τον τύπο του προβλήματος. Η συνεισφορά της θεωρίας αυτής θεωρείται πολύ σημαντική, για το λόγο ότι παρέχει ένα εργαλείο βελτίωσης της ικανότητας του επαγωγικού συλλογισμού.

Η υπόθεση της θεωρίας του Klauer αφορά ιδιαίτερα το χώρο της εκπαιδευτικής ψυχολογίας. Για το λόγο αυτό κέντρισε το ενδιαφέρον σε πολλές έρευνες, οι οποίες σχεδιάστηκαν για να ενδυναμώσουν την ικανότητα του επαγωγικού συλλογισμού στα παιδιά. Στα εκπαιδευτικά πλαίσια για τη διδασκαλία του επαγωγικού συλλογισμού οι De Koning και Hamers (1995) έχουν αναπτύξει και προσαρμόσει τις κατευθυντήριες γραμμές του προγράμματος του Klauer, ώστε να είναι εφικτή η εφαρμογή του από τους εκπαιδευτικούς κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας στην τάξη.

Διδασκαλία που Συντελεί στην Ανάπτυξη της Ικανότητας στην Επιχειρηματολογία και την Τεκμηρίωση

Οι Martino και Maher (1999) ασχολήθηκαν με το ρόλο του εκπαιδευτικού και πιο συγκεκριμένα των ερωτήσεων που θέτει στους μαθητές και που προάγουν την ανάπτυξη της ικανότητας τεκμηρίωσης και γενίκευσης. Συμμετέχοντες στη διαχρονική δεκαετή έρευνα ήταν 150 μαθητές τετάρτης και πέμπτης τάξης δημοτικού σχολείου. Στους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα παρουσιάζονταν προβλήματα τα οποία οι μαθητές σκέφτονταν και επεξεργάζονταν στις ομάδες τους. Οι μαθητές συζητούσαν τα προβλήματα στις ομάδες τους και ευνοούνταν οι αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στους μαθητές και η ανταλλαγή απόψεων. Ο εκπαιδευτικός περιφερόταν από ομάδα σε ομάδα, άκουε τις απόψεις των μαθητών, τους προβλημάτιζε και παρείχε ανατροφοδότηση. Ακολούθως, οι μαθητές παρουσίαζαν τα αποτελέσματα της εργασίας τους και ο εκπαιδευτικός καθοδηγούσε τους μαθητές υποβάλλοντας τους κατάλληλες ερωτήσεις (questioning) που θα οδηγούσαν σε περαιτέρω προβληματισμό και σε τεκμηρίωση. Επιπρόσθετα, οι ερωτήσεις αυτές μπορούσαν να οδηγήσουν σε γενίκευση. Ακόμη, οι μαθητές με τις ερωτήσεις του δασκάλου μπορούσαν να οδηγηθούν σε συνδέσεις.

Διδασκαλία που Συντελεί στην Ανάπτυξη της Ικανότητας στις Αναπαραστάσεις

Οι Terwel et al. (2009) σε πειραματική έρευνα με μαθητές 10-11 ετών (πέμπτη τάξη) στην Ολλανδία, διερεύνησαν το ενδεχόμενο η κατασκευή αναπαραστάσεων από τους ίδιους τους μαθητές με καθοδήγηση του εκπαιδευτικού να βοηθά στην καλύτερη κατανόηση της έννοιας του ποσοστού και των γραφικών παραστάσεων. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές της πειραματικής ομάδας έπρεπε να κατασκευάσουν με τη βοήθεια συμμαθητών τους (ομαδική εργασία) και με καθοδήγηση του δασκάλου τους τις δικές τους αναπαραστάσεις για να λύσουν προβλήματα που απαιτούσαν γνώση ποσοστών και γραφικών παραστάσεων. Τα προβλήματα αφορούσαν σε καταστάσεις καθημερινής ζωής και περιλάμβαναν αναλογίες και σχέσεις σε διάφορα πλαίσια. Στους μαθητές της ομάδας ελέγχου παρουσιάστηκαν έτοιμες οι αναπαραστάσεις. Τα αποτελέσματα από την παρέμβαση έδειξαν ότι οι μαθητές της πειραματικής ομάδας απέκτησαν καλύτερη κατανόηση των ποσοστών και των γραφικών παραστάσεων και ότι ήταν σε θέση να μεταφέρουν αυτή την κατανόηση και τη γνώση και σε καινούριες καταστάσεις (καινούρια προβλήματα) (transfer). Επιπρόσθετα, οι μαθητές ήταν σε θέση να λύσουν καινούρια, πολύπλοκα μαθηματικά προβλήματα. Από την παρέμβαση ωφελήθηκαν τόσο οι μαθητές χαμηλής ικανότητας, όσο και οι μαθητές υψηλής ικανότητας.

Διδασκαλία που Συντελεί στην Ανάπτυξη της Ικανότητας στον Αναστοχασμό

Από τη μελέτη της υπάρχουσας βιβλιογραφίας βρέθηκε ένα άρθρο που αναφέρεται στην ανάπτυξη του αναστοχασμού στα μαθηματικά σε μαθητές δημοτικού σχολείου (Elbers, 2003). Ο Elbers (2003) αναφέρεται στη δουλειά του Streefland και στο άρθρο του περιγράφει επεισόδια από τη διδασκαλία μαθητών με στόχο την ανάπτυξη του συλλογικού αναστοχασμού (collective reflection). Τις διδασκαλίες πραγματοποίησε ο ίδιος ο Streefland μαζί με ένα άλλο εκπαιδευτικό πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης σε μαθητές ηλικίας 11-13 ετών. Στις διδασκαλίες οι μαθητές αντιμετωπίζονται σαν «ερευνητές» και προωθείται ο συλλογικός αναστοχασμός, οι μαθητές συνεργάζονται και καλλιεργείται μια «κοινότητα ερευνητών». Μέσα σε αυτά τα πλαίσια, οι δραστηριότητες που παρουσιάζονται στους μαθητές τους παρωθούν να σκεφτούν και να συζητήσουν. Οι μαθητές σκέφτονται για τη σκέψη τους και αναστοχάζονται. Ο εκπαιδευτικός συντονίζει τη συζήτηση στις ομάδες και στην ολομέλεια της τάξης και συμβάλλει στην οικοδόμηση της γνώσης από τους μαθητές.

Άλλες έρευνες που έγιναν είχαν σαν στόχο την ανάπτυξη της μεταγνωστικής ικανότητας. Οι Hoffman και Spatariu (2008) μελέτησαν την επίδραση των πεποιθήσεων επάρκειας και της μεταγνωστικής ικανότητας στην ικανότητα επίλυσης μαθηματικού προβλήματος. Οι συμμετέχοντες ήταν προπτυχιακοί φοιτητές ψυχολογίας. Στην πειραματική ομάδα έγινε παρέμβαση που αποσκοπούσε στην ανάπτυξη των πεποιθήσεων επάρκειας και της μεταγνωστικής ικανότητας. Για την ανάπτυξη της μεταγνωστικής ικανότητας οι συμμετέχοντες ρωτούνταν κατά πόσον έχουν λύσει παρόμοια προβλήματα, καλούνταν να εξηγήσουν τη στρατηγική που ακολούθησαν για να λύσουν το πρόβλημα, να ελέγξουν την ακρίβεια της λύσης (έλεγχος της λύσης), κατά πόσον ήταν σίγουροι για τη λύση τους, κατά πόσον υπάρχει γρηγορότερος τρόπος να λύσουν το πρόβλημα, ποια ήταν η καλύτερη μέθοδος να λύσουν το πρόβλημα.

Παρόμοια, άλλες έρευνες για τη μεταγνώση (Desoete & Roeyers, 2006: Kramarski, Mevarech, & Arami, 2002: Stillman & Galbraith, 1998) ζητούσαν από τους μαθητές να εκτιμήσουν τη δυσκολία ενός έργου, την ορθότητα της απάντησης, την προσπάθεια που απαιτείται για την εκτέλεση ενός έργου, να αναστοχαστούν ως προς τη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος και την απάντηση («Έκανα κάποιο λάθος;», «Η λύση που έδωσα έχει νόημα;»), να συνδέσουν διαφορετικά προβλήματα και να εντοπίσουν ομοιότητες και διαφορές.

Για τη διδασκαλία των πιο πάνω παραγόντων στα πλαίσια της παρούσας εργασίας αξιοποιήθηκαν στοιχεία από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση που προηγήθηκε. Συγκεκριμένα, για τη διδασκαλία που αποσκοπούσε στην ανάπτυξη της ικανότητας στον επαγωγικό συλλογισμό, έγινε διδασκαλία των προβλημάτων με βάση το εκπαιδευτικό πρόγραμμα του Klauer (γενίκευσης, διάκρισης, αναγνώρισης σχέσεων, διαφοροποίησης σχέσεων και οικοδόμησης συστήματος). Ακόμη, οι δραστηριότητες σε κάθε μάθημα είχαν αυξανόμενη δυσκολία και πολυπλοκότητα και υπήρχε διαφοροποίηση της διδασκαλίας ανάλογα με το επίπεδο των μαθητών. Όσον αφορά στη διδασκαλία για την ανάπτυξη της ικανότητας στην επιχειρηματολογία και την τεκμηρίωση, διεξαγόταν συζήτηση μεταξύ των μαθητών και υπήρχε αλληλεπίδραση μεταξύ τους. Ο εκπαιδευτικός παρείχε ανατροφοδότηση στους μαθητές και με την υποβολή κατάλληλων ερωτήσεων προβλημάτιζε τους μαθητές και κατεύθυνε τη συζήτηση (Martino & Maher, 1999). Αναφορικά με τη διδασκαλία για την ανάπτυξη της ικανότητας στις αναπαραστάσεις, υπήρχαν έργα που αφορούσαν στην κατασκευή εικονικών αναπαραστάσεων από τους ίδιους τους μαθητές για να δείξουν κλασματικούς αριθμούς (Terwel et al., 2009). Για τη διδασκαλία που αποσκοπεί στην ανάπτυξη της ικανότητας στον αναστοχασμό, οι μαθητές αντιμετωπίζονταν σαν ερευνητές και με κατάλληλες δραστηριότητες παρωθούνταν να σκεφτούν για τη σκέψη τους και να αναστοχαστούν (Elbers, 2003). Ακόμη, υπήρχαν δραστηριότητες για την ανάπτυξη αναστοχαστικών δεξιοτήτων (επεξήγηση στρατηγικής για το πρόβλημα, έλεγχος λύσης, σιγουριά για τη λύση, άλλες μέθοδοι για επίλυση του προβλήματος) όπως σε προηγούμενες έρευνες (Desoete & Roeyers, 2006: Hoffman & Spatariu, 2008: Stillman & Galbraith, 1998: Kramarski, Mevarech, & Arami, 2002).

Η γνώση των ικανοτήτων των μαθητών δημοτικού σχολείου στους παράγοντες και των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν σε κάθε παράγοντα είναι πολύ σημαντική για την ανάπτυξη εργαλείων μέτρησης των παραγόντων που σχετίζονται με την κατανόηση των κλασμάτων, αλλά και για το σχεδιασμό παρεμβατικού προγράμματος για τη βελτίωση της ικανότητας των μαθητών στους παράγοντες που θα βρεθεί ότι συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων. Από τη μελέτη της βιβλιογραφίας βρέθηκαν στοιχεία αναφορικά με τις ικανότητες και τις δυσκολίες των μαθητών στους παράγοντες που πιθανό να σχετίζονται με την κατανόηση των κλασμάτων. Παρακάτω γίνεται αναφορά στις έρευνες για κάθε παράγοντα ξεχωριστά.

Επαγωγικός Συλλογισμός

Από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας δεν βρέθηκαν έρευνες για τον επαγωγικό συλλογισμό στην περιοχή των κλασμάτων. Γι' αυτό το λόγο, θα παρατεθούν στοιχεία για τον επαγωγικό συλλογισμό στην ευρύτερη περιοχή των μαθηματικών, αλλά και μια γενικότερη εικόνα για τα ευρήματα ερευνών για τον επαγωγικό συλλογισμό, μέσα από μετα-ανάλυση 74 πειραμάτων που έλαβαν χώρα (Klauer & Phye, 2008).

Η Παπαγεωργίου (2006) στα πλαίσια της διδακτορικής της διατριβής μελέτησε τον επαγωγικό συλλογισμό με μαθητές Ε΄ τάξης και η έρευνα συνεχίστηκε όταν οι ίδιοι μαθητές φοιτούσαν στη Στ΄ τάξη. Στην εν λόγω έρευνα μελετήθηκε ο επαγωγικός συλλογισμός όσον αφορά στη θεωρία αριθμών στο δημοτικό σχολείο (ιδιότητες και σχέσεις μεταξύ των αριθμών). Τα αποτελέσματα επιβεβαίωσαν το μοντέλο του Klauer (1999) για τον επαγωγικό συλλογισμό (επιβεβαιώθηκαν και τα δύο μοντέλα: τύποι προβλημάτων επαγωγικού συλλογισμού και γνωστικές λειτουργίες που απαιτούνται για τη λύση προβλημάτων επαγωγικού συλλογισμού). Το παρεμβατικό πρόγραμμα βελτίωσε την ικανότητα επαγωγικού συλλογισμού (σημαντική βελτίωση παρουσίασαν οι μαθητές στα προβλήματα γενίκευσης, διάκρισης και διαφοροποίησης σχέσεων, ενώ στατιστικά σημαντική βελτίωση δεν φαίνεται να υπήρξε στα προβλήματα διασταυρούμενης ταξινόμησης, αναγνώρισης σχέσεων και οικοδόμησης συστήματος).

Ο Tomic (1995) αναφέρεται σε παρεμβατικό πρόγραμμα για τη βελτίωση της ικανότητας εκτέλεσης μαθηματικών έργων επαγωγικού συλλογισμού σε μαθητές τρίτης τάξης δημοτικού σχολείου. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το παρεμβατικό πρόγραμμα βελτίωσε την ικανότητα επαγωγικού συλλογισμού και τη μεταφορά αυτής της ικανότητας σε παρεμφερή προβλήματα.

Οι Klauer και Phye (2008) μετά από μια μετα-ανάλυση 74 πειραματικών ερευνών για τη βελτίωση του επαγωγικού συλλογισμού, κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η διδασκαλία του επαγωγικού συλλογισμού συμβάλλει θετικά στην ανάπτυξη της νοημοσύνης και της επίδοσης σε διάφορα γνωστικά αντικείμενα, αλλά και στην επίλυση προβλήματος. Τα αποτελέσματα της μετα-ανάλυσης αναφέρονται σε ένα ευρύ φάσμα ηλικιών και μαθητών διαφόρων γνωστικών ικανοτήτων.

Ορισμοί και Μαθηματικές Εξηγήσεις

Ο Niemi (1996a) ασχολήθηκε με την ανάπτυξη έγκυρων και αξιόπιστων εργαλείων μέτρησης και αξιολόγησης της κατανόησης στα Μαθηματικά. Ακόμη, μελέτησε την επίδραση διδακτικού προγράμματος στην ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίζουν και να χρησιμοποιούν διάφορα είδη αναπαραστάσεων, να επιλύουν μαθηματικά προβλήματα και να τεκμηριώνουν τη λύση τους και να παρέχουν μαθηματικές εξηγήσεις. Οι διδασκαλίες αφορούσαν στην περιοχή των κλασματικών αριθμών και οι συμμετέχοντες ήταν μαθητές Ε΄ τάξης δημοτικού σχολείου. Οι διδασκαλίες στους μαθητές της πειραματικής ομάδας ήταν βασισμένες στις ιδιότητες των κλασμάτων (fraction principles) και αναφέρονταν σε καταστάσεις μέτρησης. Αντίθετα, οι διδασκαλίες στους μαθητές της ομάδας ελέγχου ήταν βασισμένες στην παραδοσιακή διδασκαλία των κλασμάτων ως μέρος επιφάνειας (χρήση αναπαραστάσεων εμβαδού) και στην εφαρμογή αλγορίθμων και υπολογιστικών στρατηγικών. Για τη μέτρηση της ευχέρειας των μαθητών στις αναπαραστάσεις, την επίλυση μαθηματικού προβλήματος και τεκμηρίωση και τις μαθηματικές εξηγήσεις, ο Niemi (1996a, 1996b) ανέπτυξε κατάλληλα εργαλεία μέτρησης.

Για τη μέτρηση της ικανότητας των μαθητών στις μαθηματικές εξηγήσεις, τους έθετε το εξής σενάριο: «Φανταστείτε ότι θα παρουσιαστείτε σε ένα πρόγραμμα της τηλεόρασης και πρέπει να εξηγήσετε σε άλλους μαθητές ότι απαιτείται να γνωρίζουν οι μαθητές Ε΄ τάξης για τα κλάσματα». Στη συνέχεια, παρουσιάζονταν στους μαθητές ερωτήσεις στις οποίες έπρεπε να απαντήσουν χρησιμοποιώντας όσες περισσότερες εικόνες μπορούσαν για να εξηγήσουν την απάντησή τους. Επιπλέον, έπρεπε να εξηγήσουν με λόγια και μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν όσες εικόνες ή λόγια ήθελαν. Οι ερωτήσεις που παρουσιάζονταν στους μαθητές ήταν: «Τι είναι κλάσμα;», «Γιατί υπάρχουν δύο αριθμοί σε ένα κλάσμα;», «Πότε μπορείς να πεις ότι δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα;», «Πόσα κλάσματα υπάρχουν μεταξύ του 0 και του 1;», «Πόσα κλάσματα είναι ισοδύναμα με το $\frac{1}{2}$;» και «Ποιες άλλες σημαντικές έννοιες και αρχές πρέπει να γνωρίζουν οι μαθητές αναφορικά με τα κλάσματα;»

Για τη βαθμολόγηση των απαντήσεων των μαθητών, τέθηκαν κριτήρια σχετικά με το περιεχόμενο και την ποιότητα, τη χρήση εννοιών και ιδιοτήτων, τη χρήση διαδικασιών, τις παρανοήσεις και λάθη των μαθητών, καθώς και την ικανότητά τους να συνδέουν έννοιες, ιδιότητες, διαδικασίες και να επιχειρηματολογούν.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το διδακτικό πρόγραμμα βελτίωσε την ευχέρεια των μαθητών στις αναπαραστάσεις, την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων με κλάσματα και τεκμηρίωσης της απάντησης, την ικανότητα μαθηματικών εξηγήσεων και την ικανότητα εκτέλεσης αριθμητικών πράξεων αναφορικά με τα κλάσματα. Επιπρόσθετα, η ικανότητα αναγνώρισης και χρήσης αναπαραστάσεων μπορούσε να προβλέψει την ικανότητα επίλυσης προβλήματος και την ικανότητα μαθηματικών εξηγήσεων, με τους μαθητές με μεγαλύτερη ευχέρεια στις αναπαραστάσεις να έχουν καλύτερες επιδόσεις (Niemi, 1996a, 1996b).

Η εργασία του Niemi (1996a, 1996b) παρείχε στη μαθηματική κοινότητα έγκυρα και αξιόπιστα εργαλεία μέτρησης και αξιολόγησης της κατανόησης στα κλάσματα, σε παράγοντες της κατανόησης, όπως στις αναπαραστάσεις, την επίλυση προβλήματος και την τεκμηρίωση της απάντησης και στην ικανότητα μαθηματικών εξηγήσεων.

Όσον αφορά στην ικανότητα μαθηματικών εξηγήσεων, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι λιγότερο από 10% των μαθητών είχαν ικανοποιητική επίδοση (Niemi, 1996c). Οι μαθητές με ικανοποιητική επίδοση σύμφωνα με τον Niemi (1996c) μπορεί να θεωρηθεί ότι έχουν αποκτήσει «βαθιά κατανόηση» των κλασμάτων και μπορεί να θεωρηθούν «χαρισματικοί μαθητές». Τα αποτελέσματα της εν λόγω έρευνας φανερώνουν τις μεγάλες δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές δημοτικού σχολείου όταν πρέπει να εξηγήσουν θέματα που αφορούν στα κλάσματα. Η μεγάλη πλειοψηφία των απαντήσεων των μαθητών ήταν χαμηλής ποιότητας, δεν χρησιμοποιούσαν έννοιες ή αρχές των κλασμάτων, ούτε υπήρχε σύνδεση ιδιοτήτων και εννοιών, ενώ χαρακτηρίζονταν από πληθώρα λαθών και παρανοήσεων.

Ο Koyama (1997, 1998) εξέτασε την ικανότητα μαθητών Ε΄ τάξης δημοτικού σχολείου να εξηγήσουν θέματα που αφορούν στους κλασματικούς αριθμούς. Η έρευνα διεξήχθηκε στην Ιαπωνία. Στους μαθητές παρουσιάζονταν τα κλάσματα $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$ και $\frac{3}{4}$ και οι μαθητές καλούνταν να τα συγκρίνουν. Η σύγκριση του $\frac{4}{5}$ και του $\frac{3}{5}$ ήταν εύκολο έργο για τους μαθητές. Οι μαθητές εξηγούσαν ότι το κλάσμα $\frac{4}{5}$ είναι μεγαλύτερο αφού χωρίζω σε πέντε ίσα μέρη, αλλά στην περίπτωση του $\frac{4}{5}$ παίρνω τέσσερα κομμάτια, ενώ στην περίπτωση του $\frac{3}{5}$ τρία, άρα λιγότερα κομμάτια. Η σύγκριση των κλασμάτων με ίδιο αριθμητή και διαφορετικό παρονομαστή ήταν επίσης εύκολη υπόθεση για τους μαθητές. Αιτιολογούσαν ότι το $\frac{3}{4}$ είναι μεγαλύτερο γιατί τα κομμάτια είναι μεγαλύτερα και αφού παίρνω τον ίδιο αριθμό κομματιών, τότε το $\frac{3}{4} > \frac{3}{5}$. Ενδιαφέρον παρουσίαζε η σύγκριση του $\frac{4}{5}$ και του $\frac{3}{4}$. Όπως αναφέρει ο Koyama (1997), οι μαθητές χρησιμοποίησαν διάφορους τρόπους για να συγκρίνουν τα δύο κλάσματα: μετατροπή σε δεκαδικό και σύγκριση, πόσο χρειάζεται το κάθε κλάσμα για να συμπληρώσει μια ακέραια μονάδα, με αναπαράσταση κάθε κλάσματος ως μέρος ευθύγραμμου τμήματος, με αναπαράσταση κάθε κλάσματος ως μέρος επιφάνειας (ορθογωνίου) και με μετατροπή των δύο κλασμάτων σε ισοδύναμα κλάσματα που να είναι ομώνυμα και έπειτα σύγκρισή τους. Αυτή η εργασία τονίζει τη σημασία του να ζητούμε από τους μαθητές να κατασκευάσουν τις δικές τους αναπαραστάσεις για να εξηγήσουν.

Άλλες έρευνες που έχουν εξετάσει τις εξηγήσεις μαθητών δημοτικού σχολείου έχουν προτείνει διάφορες κατηγοριοποιήσεις των εξηγήσεων. Οι Levenson, Tsamir και Tirosh (2007a, 2007b) επικεντρώθηκαν σε δύο είδη εξηγήσεων: τις πρακτικές εξηγήσεις και τις μαθηματικές εξηγήσεις. Οι Levenson et al. (2007a) εξέτασαν τις εξηγήσεις δύο μαθητών Στ΄ τάξης όσον αφορά την κλάση ισοδυναμίας του 0. Αρχικά και οι δύο μαθητές ισχυρίστηκαν ότι το 0 δεν ήταν άρτιος ούτε περιττός. Οι συνεντεύξεις αποκάλυψαν σύγκρουση ανάμεσα στους τυπικούς ορισμούς που δίνουν οι μαθητές για τους άρτιους αριθμούς και στις εικόνες που έχουν σχηματίσει για τους άρτιους, το μηδέν και τη διαίρεση. Αυτές οι εικόνες που έχουν οι μαθητές στηρίζονται κατά τους Levenson et al. (2007a) σε πρακτικές εξηγήσεις που βασίζονται σε καταστάσεις από την καθημερινή ζωή. Ωστόσο, με τη χρήση μαθηματικών εξηγήσεων που βασίζονται σε μαθηματικές ιδιότητες, οι μαθητές ήταν σε θέση να συμπεράνουν ότι το 0 είναι άρτιος. Σε μια άλλη έρευνα οι Levenson et al. (2007b) χρησιμοποίησαν το θέμα του πολλαπλασιασμού με το 0 για να εξετάσουν τις εξηγήσεις που δίνουν μαθητές Α΄ και Β΄ τάξης δημοτικού σχολείου. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν περισσότερο μαθηματικές εξηγήσεις για να εξηγήσουν ότι το γινόμενο είναι 0. Σε πιο πρόσφατο άρθρο της η Levenson (2010) αναφέρεται στη χρήση μαθηματικών και πρακτικών εξηγήσεων όσον αφορά στην ισοδυναμία κλασμάτων. Η Levenson (2010) βρήκε ότι οι μαθητές χρησιμοποίησαν περισσότερες μαθηματικές εξηγήσεις για να εξηγήσουν την ισοδυναμία κλασμάτων (συγκεκριμένα την ισοδυναμία $\frac{1}{2} = \frac{6}{12}$). Ακόμη, στην έρευνα αυτή μελετήθηκαν και οι προτιμήσεις των μαθητών ως προς το ποιο είδος εξηγήσεων θεωρούν πιο πειστικό, ποιο είδος εξηγήσεων θα χρησιμοποιούσαν για να εξηγήσουν σε ένα φίλο τους την ισοδυναμία κλασμάτων, όπως επίσης και ποιο είδος εξηγήσεων θα ήθελαν τους δασκάλους τους να χρησιμοποιούν. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι και στις τρεις περιπτώσεις οι μαθητές δεν έδειχναν μεγαλύτερη προτίμηση ως προς ένα από τα δύο είδη εξηγήσεων.

Οι Newstead και Murray (1998) μελέτησαν την ικανότητα των μαθητών Δ΄ και Στ΄ τάξης δημοτικού σχολείου να κατασκευάζουν τις δικές τους αναπαραστάσεις για τα κλάσματα. Ανάμεσα στα ευρήματα της έρευνάς τους ήταν ότι οι μαθητές δυσκολεύονταν να εξηγήσουν τι είναι κλάσμα και ν' αντιληφθούν ότι το κλάσμα είναι σχέση δύο αριθμών. Ακόμη, δυσκολεύονταν σε πολύ μεγάλο βαθμό ν' αντιληφθούν ότι το κλάσμα είναι διαίρεση δύο ακεραίων.

Επιχειρηματολογία και Τεκμηρίωση

Εκτός από την έρευνα του Niemi (1996a, 1996b) για την τεκμηρίωση της επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων με κλάσματα, δεν φαίνεται να υπάρχουν άλλες εργασίες στο επίπεδο του δημοτικού σχολείου που να ασχολούνται με την επιχειρηματολογία και την τεκμηρίωση για τα κλάσματα. Ωστόσο, οι Evens και Houssart (2004) εξέτασαν την τεκμηρίωση μαθητών δημοτικού σχολείου όσον αφορά αριθμητική σειρά. Η παράθεση της εν λόγω εργασίας γίνεται σε αυτό το σημείο γιατί προτείνει μια πολύ χρήσιμη κατηγοριοποίηση της επιχειρηματολογίας και της τεκμηρίωσης των μαθητών για την απάντησή τους. Παρόμοια μεθοδολογία θα χρησιμοποιηθεί στην παρούσα εργασία για τη μέτρηση της επιχειρηματολογίας και της τεκμηρίωσης όσον αφορά στα κλάσματα.

Ο Niemi (1996a, 1996b) ανέπτυξε εργαλείο μέτρησης της επίλυσης προβλήματος με κλάσματα και της τεκμηρίωσης της λύσης. Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάζονταν στους μαθητές προβλήματα με κλάσματα που έπρεπε να επιλύσουν και να σχεδιάσουν εικόνες ή με λόγια να τεκμηριώσουν την απάντησή τους. Ο Niemi (1996a, 1996b) παρουσίασε μέσους όρους της επίδοσης των μαθητών στα προβλήματα, όμως δεν παρείχε στοιχεία για την επίδοση στην τεκμηρίωση, συνεπώς δεν μπορεί να γίνει συζήτηση αναφορικά με τις δυσκολίες και τις ικανότητες των μαθητών στην τεκμηρίωση.

Παρόμοια μεθοδολογία με αυτή που ακολουθήθηκε στην παρούσα εργασία ακολούθησαν οι Evens και Houssart (2004). Πιο συγκεκριμένα, παρουσίασαν σε μαθητές 11 ετών μια δήλωση για αριθμητική πρόοδο την οποία έπρεπε οι μαθητές να κρίνουν σαν ορθή ή λανθασμένη και να τεκμηριώσουν την απάντησή τους. Τα αποτελέσματα έδειξαν τη μεγάλη δυσκολία των μαθητών να αιτιολογήσουν την απάντησή τους. Παρότι πολλοί μαθητές έκριναν τη δήλωση ως ορθή που ήταν και η σωστή απάντηση, εντούτοις δεν ήταν σε θέση να τεκμηριώσουν την απάντησή τους. Οι Evens και Houssart (2004) παραθέτουν κατηγοριοποίηση της τεκμηρίωσης στις σωστές απαντήσεις. Πιο συγκεκριμένα, 17% των μαθητών τεκμηρίωσαν με επανάληψη και ενίσχυση της δήλωσης, 9% με τη χρήση παραδειγμάτων, ενώ 42% προσπάθησαν να αιτιολογήσουν την απάντησή τους με κάποιο είδος πιο πειστικής τεκμηρίωσης πέρα από την παράθεση αριθμητικών παραδειγμάτων.

Αίσθηση για το Μέγεθος των Κλασμάτων

Οι Clarke και Roche (2009) μελέτησαν την ικανότητα μαθητών Στ΄τάξης δημοτικού σχολείου στη σύγκριση κλασμάτων και τις στρατηγικές που χρησιμοποιούσαν. Αναφέρουν χαρακτηριστικά ότι η ικανότητα των μαθητών να προσδίδουν νόημα στο μέγεθος κλασματικών αριθμών αντικατοπτρίζει την κατανόησή τους. Πιο συγκεκριμένα, παρουσίασαν οκτώ ζευγάρια κλασμάτων στους μαθητές και τους ζητούσαν να βρουν ποιο είναι το μεγαλύτερο και να εξηγήσουν τον τρόπο που σκέφτηκαν. Τα οκτώ ζευγάρια ήταν ($\frac{3}{8}$ $\frac{7}{8}$), ($\frac{1}{2}$ $\frac{5}{8}$), ($\frac{4}{7}$ $\frac{4}{5}$), ($\frac{2}{4}$ $\frac{4}{8}$), ($\frac{2}{4}$ $\frac{4}{2}$), ($\frac{3}{7}$ $\frac{5}{8}$), ($\frac{5}{6}$ $\frac{7}{8}$), ($\frac{3}{4}$ $\frac{7}{9}$). Ευκολότερο έργο ήταν, όπως αναμενόταν, η σύγκριση των ομωνύμων κλασμάτων (ποσοστό επιτυχίας 77.1%), και ακολούθησαν τα ισοδύναμα κλάσματα (ποσοστό επιτυχίας 64.4%), ενώ δυσκολότερο έργο ήταν όπως αναμενόταν η σύγκριση του $\frac{3}{4}$ και του $\frac{7}{9}$ (ποσοστό επιτυχίας 10.8%), ενώ λίγο μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας είχε η σύγκριση του $\frac{5}{6}$ και του $\frac{7}{8}$ (ποσοστό επιτυχίας 14.9%). Οι Clarke και Roche (2009) αναφέρουν ότι η μεγάλη δυσκολία που συναντούν οι μαθητές στη σύγκριση του $\frac{3}{4}$ και του $\frac{7}{9}$ δεν πρέπει να μας ξαφνιάζει, αφού ακόμη και εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης συναντούν πολλές δυσκολίες στη σύγκριση αυτών των δύο κλασμάτων. Αξιοσημείωτο σύμφωνα με τους Clarke και Roche (2009) είναι ότι οι μαθητές δυσκολεύτηκαν ιδιαίτερα στη σύγκριση κλασμάτων με ίδιο αριθμητή και διαφορετικό παρονομαστή (ποσοστό επιτυχίας μόνο 37.2%).

Οι Mazzocco και Devlin (2008) μελέτησαν την ικανότητα μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, χαμηλή επίδοση στα μαθηματικά και ψηλή επίδοση στα μαθηματικά στη σειροθέτηση δεκαδικών και κλασμάτων. Οι μαθητές φοιτούσαν στην $6^{η}$, $7^{η}$ και $8^{η}$ τάξη. Τα κλάσματα είχαν παρονομαστή το 10 και το 100. Οι μαθητές $6^{ης}$ τάξης με μαθησιακές δυσκολίες είχαν μέσο όρο 5.50 (με μέγιστο το 10), αυτοί με χαμηλή επίδοση είχαν μέσο όρο 8.00 και εκείνοι με ψηλή επίδοση 8.97. Οι Mazzocco και Devlin (2008) αναφέρονται στις μεγάλες δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές με τα κλάσματα, δυσκολίες πολύ μεγαλύτερες από άλλες θεματικές περιοχές.

Άλλες έρευνες που έγιναν στο ίδιο αντικείμενο κατέδειξαν τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές να αντιληφθούν το μέγεθος των κλασμάτων (Carpenter et al., 1980). Πιο συγκεκριμένα, όταν οι μαθητές καλούνταν να εκτιμήσουν το άθροισμα $\frac{12}{13} + \frac{7}{8}$ μόνο 24% των μαθητών ηλικίας 13 ετών επέλεξε την σωστή απάντηση με την πλειοψηφία να επιλέγει σαν απάντηση το 19 ή το 21. Ακόμη και στην ηλικία των 17 ετών, μόνο 37% των μαθητών είχαν επιτυχία σε αυτό το έργο. Δεδομένου ότι οι περισσότεροι μαθητές που έδιναν λάθος απαντήσεις, πρόσθεταν ξεχωριστά τους αριθμητές και τους παρονομαστές, αυτό δείχνει ότι η πλειοψηφία των μαθητών αντιλαμβάνονταν ξεχωριστά τους αριθμητές και τους παρονομαστές, συνεπώς δεν κατανοούσαν τα κλάσματα. Εξάλλου, οι Newstead και Murray (1998) σε έρευνά τους με μαθητές Δ΄ και Στ΄ τάξης δημοτικού σχολείου βρήκαν ότι οι μαθητές είχαν πολύ χαμηλά ποσοστά επιτυχίας στη σύγκριση και τη σειροθέτηση κλασμάτων (με ίδιο αριθμητή και διαφορετικό παρονομαστή). Όπως αναμενόταν, το χαμηλότερο ποσοστό επιτυχίας είχαν οι μαθητές Δ΄ τάξης. Γενικότερα, έρευνες που έγιναν έδειξαν ότι η αίσθηση του μεγέθους των κλασμάτων και η ικανότητα εκτίμησης του πόσο μεγάλο είναι ένα κλάσμα συνδέεται με την κατανόηση των κλασμάτων (Post, Lesh, & Behr, 1986: Sowder, 1988).

Αναπαραστάσεις

Από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας, βρέθηκε πληθώρα ερευνών που ασχολήθηκαν με την ικανότητα των μαθητών δημοτικού σχολείου στις αναπαραστάσεις όσον αφορά στη θεματική περιοχή των κλασμάτων. Παρακάτω γίνεται αναφορά σε καθεμιά από αυτές τις έρευνες.

Οι Newstead και Murray (1998) εξέτασαν την ικανότητα μαθητών Δ΄ και Στ΄ τάξης δημοτικού σχολείου στο να κατασκευάζουν τις δικές τους αναπαραστάσεις για τους κλασματικούς αριθμούς. Η έρευνα είχε σαν δείγμα σχολεία στη Ν. Αφρική. Όπως αναφέρουν οι Newstead και Murray (1998) έμφαση δινόταν στο να κατασκευάζουν οι ίδιοι οι μαθητές τη μαθηματική γνώση. Η έρευνα αποκάλυψε τις παρανοήσεις των μαθητών αναφορικά με τα κλάσματα και οι μαθητές είχαν πολύ χαμηλό ποσοστό επιτυχίας όταν τους ζητούσαν να αναπαραστήσουν το κλάσμα $\frac{3}{4}$. Συγκεκριμένα, το ποσοστό επιτυχίας για τη Δ΄ τάξη ήταν 11% και για τη Στ΄ τάξη 14%. Γενικότερα, η έρευνα αποκάλυψε τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές στο να αναπαραστήσουν κλάσματα με τη χρήση εικονικών αναπαραστάσεων. Για παράδειγμα, όταν σχεδίαζαν τρίγωνο σαν το όλο και έπρεπε να το χωρίσουν σε τέσσερα ίσα μέρη και να σκιάσουν τα τρία από αυτά, οι μαθητές επηρεασμένοι από τον τρόπο που χώριζαν το ορθογώνιο και τον κύκλο σε τέσσερα ίσα μέρη, χώριζαν το τρίγωνο σε τέσσερα άνισα μέρη και σκίαζαν τρία από αυτά. Ακόμη, μερικοί μαθητές δεν αντιλαμβάνονταν ότι για να αναπαραστήσουν το κλάσμα $\frac{3}{4}$ έπρεπε να χωρίσουν την επιφάνεια σε τέσσερα ίσα μέρη και να σκιάσουν τρία από αυτά.

Ο Niemi (1996a) εξέτασε την ευχέρεια μαθητών Ε΄τάξης δημοτικού σχολείου στη χρήση αναπαραστάσεων και ανέπτυξε εργαλείο μέτρησης της ικανότητας των μαθητών στις αναπαραστάσεις όσον αφορά στα κλάσματα. Συγκεκριμένα, παρουσίαζε στους μαθητές κλάσματα ($\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{3}{2}$) σε συμβολική μορφή και οι μαθητές έπρεπε να κυκλώσουν την/τις εικονικές αναπαραστάσεις για το καθένα (μετάφραση σε εικονική αναπαράσταση). Όπως αναμενόταν, το ευκολότερο έργο αφορούσε το κλάσμα $\frac{1}{2}$ ενώ ακολουθούσαν χωρίς στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ τους τα κλάσματα $\frac{2}{4}$ και $\frac{2}{3}$. Αυτά τα δύο κλάσματα ήταν ευκολότερα από το $\frac{4}{6}$, ενώ δυσκολότερο από όλα ήταν, όπως αναμενόταν, το κλάσμα $\frac{3}{2}$. Μερικά από τα πιο πάνω έργα (μετάφραση σε εικονική αναπαράσταση) χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα έρευνα.

Ο Niemi (1996a) στη μέτρηση πριν την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος για τη βελτίωση της εννοιολογικής κατανόησης στα κλάσματα (pre-test) χρησιμοποίησε έργα αναπαραστάσεων. Σε μερικά έργα έδινε στους μαθητές κύκλους και τετράγωνα με γραμμοσκιασμένο κάποιο μέρος τους και τους ζητούσε να γράψουν το κλάσμα που παρουσίαζε το σκιασμένο μέρος, τους παρουσίαζε σχήματα τα οποία είχαν σκιασμένο κάποιο μέρος τους και τους έδινε επιλογές σε συμβολική μορφή για να κυκλώσουν το σωστό κλάσμα (μετάφραση από εικονική σε συμβολική αναπαράσταση), όπως επίσης και αριθμητικές γραμμές να κυκλώσουν το ορθό κλάσμα. Μερικά από τα έργα που αφορούσαν στη μετάφραση σε συμβολική αναπαρασταση χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία, όπως επίσης και τα έργα αναγνώρισης κλασμάτων σε αριθμητική γραμμή (στην πιλοτική φάση τα έργα που αφορούσαν αριθμητική γραμμή). Ο Niemi (1996a) αναφέρει ότι η πειραματική και η ομάδα ελέγχου δεν παρουσίασαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στα έργα αναπαραστάσεων πριν την παρέμβαση, αλλά δεν παραθέτει αποτελέσματα κατά έργο.

Ανάμεσα στα ευρήματα της έρευνας του Niemi (1996a, 1996b), είναι ότι η ευχέρεια που παρουσιάζουν οι μαθητές στις αναπαραστάσεις είναι προβλεπτικός δείκτης της ικανότητάς τους να επιλύουν μαθηματικά προβλήματα με κλάσματα και να τεκμηριώνουν τη λύση τους, όπως επίσης να παρέχουν μαθηματικές εξηγήσεις. Ακόμη, βρέθηκε ότι οι μαθητές της πειραματικής ομάδας είχαν καλύτερη επίδοση στα έργα αναπαραστάσεων που αφορούσαν αριθμητική γραμμή, ενώ η επίδοση των δύο ομάδων δεν διέφερε σημαντικά σε εκείνα τα έργα που οι αναπαραστάσεις αναφέρονταν σε μέρος ευθυγράμμου τμήματος ή μέρος επιφάνειας (αναπαραστάσεις εμβαδού).

Ο Izsák (2008) μελέτησε τις δυσκολίες που συναντούν οι εκπαιδευτικοί στο να εξηγήσουν τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων με τη χρήση εικονικών αναπαραστάσεων και την ικανότητα των μαθητών στο ίδιο θέμα. Ο O Izsák (2008) αναφέρεται στις δυσκολίες που συναντούν εκπαιδευτικοί και μαθητές και στη σημασία του να μπορούν να αιτιολογήσουν τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων με τη χρήση τριών επιπέδων μονάδων. Για παράδειγμα στον πολλαπλασιασμό $\frac{2}{3}$ x $\frac{5}{8}$ οι μαθητές πρέπει να μπορούν να αναπαραστήσουν πρώτα τα $\frac{5}{8}$ και κατόπιν τα $\frac{2}{3}$ του $\frac{5}{8}$, δηλαδή πρέπει να είναι σε θέση να δουν αυτά τα τρία επίπεδα, πρώτα το όλο, μετά τα $\frac{5}{8}$ (δεύτερο επίπεδο) και στη συνέχεια τα $\frac{2}{3}$ του $\frac{5}{8}$ (τρίτο επίπεδο).

Οι Γαγάτσης κ.ά. (2001) εξέτασαν την ικανότητα μαθητών Ε΄ τάξης δημοτικού σχολείου στο χειρισμό αναπαραστάσεων και στη μετάφραση από ένα είδος αναπαράστασης σε άλλο. Συγκεκριμένα, παρουσίαζαν στους μαθητές έργα κλασμάτων σε ένα είδος αναπαράστασης (π.χ. συμβολική μορφή) και οι μαθητές έπρεπε να βρουν το αποτέλεσμα σε συμβολική μορφή (π.χ. να προσθέσουν κλάσματα) και να μεταφράσουν στα άλλα δύο είδη αναπαράστασης (διαγραμματική έκφραση και λεκτική έκφραση). Κάτι αντίστοιχο γινόταν όταν η πηγή ήταν η διαγραμματική και η λεκτική αναπαράσταση. Τα έργα αφορούσαν την ισοδυναμία κλασμάτων και την πρόσθεση ετερωνύμων κλασμάτων. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές αντιμετώπιζαν δυσκολίες στη μετάφραση από ένα είδος αναπαράστασης σε άλλο και ότι δεν είχαν οικοδομήσει επαρκείς ικανότητες μετάφρασης.

Αναφορικά με το χειρισμό αναπαραστάσεων, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι τα παιδιά χειρίζονται τις συμβολικές αναπαραστάσεις με μεγαλύτερη επιτυχία σε σχέση με τα διαγράμματα και τις λεκτικές εκφράσεις. Αναφορικά με την ικανότητα μετάφρασης, βρέθηκε ότι, σε σχέση με την ισοδυναμία κλασμάτων, μπορούν με μεγαλύτερη ευκολία να μεταφράσουν από διάγραμμα σε συμβολική αναπαράσταση και με μικρότερη ευκολία από διάγραμμα σε λεκτική αναπαράσταση. Γενικότερα, για την ισοδυναμία κλασμάτων φαίνεται ότι οι μαθητές χειρίζονται καλύτερα τις μεταφράσεις από και σε συμβολική αναπαράσταση, ενώ τα χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας συγκεντρώνουν οι μεταφράσεις από και σε λεκτική αναπαράσταση. Το αποτέλεσμα αυτό συμφωνεί με τα αποτελέσματα της έρευνας των

Κυριακίδη, Χατζησίμου και Γραικού (2001) με βάση την οποία χαμηλότερο ποσοστό επιτυχίας συγκεντρώνει η μετάφραση από διάγραμμα σε λεκτική αναπαράσταση.

Σε σχέση με την πρόσθεση ετερωνύμων κλασμάτων, φαίνεται ότι οι μαθητές χειρίζονται με μεγαλύτερη ευκολία τη μετάφραση από διάγραμμα σε συμβολική αναπαράσταση, ενώ με μικρότερη ευκολία τη μετάφραση από λεκτική έκφραση σε διάγραμμα. Οι μαθητές χειρίζονται καλύτερα μεταφράσεις από διάγραμμα και μεταφράσεις σε συμβολική αναπαράσταση. Τα χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας συγκεντρώνουν οι μεταφράσεις από λεκτική έκφραση και οι μεταφράσεις σε διάγραμμα. Το αποτέλεσμα αυτό της έρευνας των Γαγάτση κ.ά. (2001) για την πρόσθεση ετερωνύμων κλασμάτων δεν συμφωνεί με τα αποτελέσματα της έρευνας των Lesh, Behr και Post (1987) για τους ρητούς αριθμούς, οι οποίοι κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι οι μεταφράσεις σε εικόνες είναι πιο εύκολες σε σχέση με μεταφράσεις από εικόνες.

Σε έρευνά τους οι Deliyianni, Elia, Gagatsis και Panaoura (2009) με μαθητές Ε΄και Στ΄ τάξης δημοτικού σχολείου επιβεβαίωσαν μοντέλο με παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση της πρόσθεσης κλασματικών αριθμών (fraction addition understanding). Σύμφωνα με τους Deliyianni et al., (2009) η κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων αποτελείται από την ικανότητα ευέλικτης χρήσης αναπαραστάσεων και από την ικανότητα επίλυσης προβλήματος με κλάσματα (δεύτερης τάξης παράγοντες). Η ικανότητα ευέλικτης χρήσης αναπαραστάσεων αποτελείται από την ικανότητα σε έργα αναγνώρισης ισοδύναμων κλασμάτων, την ικανότητα σε έργα με ανόμοια κλάσματα, την ικανότητα χειρισμού αναπαραστάσεων, την ικανότητα μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση και από την ικανότητα μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση. Η ικανότητα επίλυσης προβλήματος αποτελείται από την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων με διαγραμματική αναπαράσταση και από την ικανότητα επίλυσης λεκτικών προβλημάτων. Στην παρούσα εργασία παρόμοια πορεία ακολουθήθηκε για τη μέτρηση του παράγοντα «αναπαραστάσεις» (βλέπε Μεθοδολογία). Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι την ικανότητα στις αναπαραστάσεις συνιστούν η ικανότητα μετάφρασης σε συμβολική αναπαράσταση, η ικανότητα μετάφρασης σε εικονική αναπαράσταση, η ικανότητα μετάφρασης σε λεκτική αναπαράσταση και η ικανότητα των μαθητών να κατασκευάζουν τις δικές τους εικονικές αναπαραστάσεις για να δείξουν κλασματικούς αριθμούς.

Διασυνδέσεις με Δεκαδικούς, Ποσοστά και τη Διαίρεση

Οι Oppenheimer και Hunting (1999) εξέτασαν την ικανότητα μαθητών Στ΄ τάξης δημοτικού σχολείου στη μετατροπή ανάμεσα σε κλάσματα και δεκαδικούς. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές στη μετατροπή ανάμεσα στις δύο αυτές μορφές ρητών αριθμών. Ανάμεσα στις παρανοήσεις των μαθητών ήταν ότι $\frac{2}{5}$=0.25 και $\frac{1}{4}$=0.4. Οι ερευνητές συνιστούν για τη διδασκαλία τη μετατροπή σε κλάσμα με παρονομαστή το 100 που είναι η συνήθης πρακτική που εφαρμόζεται σήμερα στα σχολεία.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έκτης εθνικής αξιολόγησης της προόδου των μαθητών (NAEP) που διεξήχθηκε το 1992, μόνο το 51% των μαθητών Β΄ τάξης Γυμνασίου (eighth grade students) επέλεξαν το κλάσμα $\frac{1}{2}$ ως πλησιέστερο στο 0.52. Εξάλλου το 29% των μαθητών επέλεξε το κλάσμα $\frac{1}{50}$ ως πλησιέστερο σε αξία στο 0.52. Τα αποτελέσματα αυτά φανερώνουν τις μεγάλες δυσκολίες των μαθητών να συνδέσουν τα κλάσματα με τους δεκαδικούς αριθμούς και ότι ένα μεγάλο ποσοστό δεν μπορεί ν' αντιληφθεί τη σχέση των δύο ειδών ρητών αριθμών.

Η Μιχαηλίδου (2004) εξέτασε την ικανότητα μαθητών Ε΄ τάξης δημοτικού σχολείου να μετατρέπουν από μια μορφή ρητού σε άλλη. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι δυσκολότερα ήταν τα έργα μετατροπής από κλάσμα σε ποσοστό (ποσοστό επιτυχίας 51.0%) και από κλάσμα σε δεκαδικό (ποσοστό επιτυχίας 54.9%), ενώ ευκολότερη ήταν η μετατροπή από δεκαδικό σε ποσοστό (ποσοστό επιτυχίας 74.5%). Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι τα ποσοστά επιτυχίας στα έργα μετατροπής από μια μορφή του ρητού αριθμού στην άλλη ήταν χαμηλά. Ιδιαίτερα χαμηλά ήταν τα ποσοστά επιτυχίας όσον αφορά στις μετατροπές από κλάσμα σε ποσοστό και σε δεκαδικό.

Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε σχέση με τα διαφορετικά είδη μετατροπής, ίσως να οφείλονται στο γεγονός ότι δεν είναι εύκολο να οριστεί μια «σημασιολογική συμφωνία» μεταξύ των τριών μορφών του ρητού αριθμού (Duval, 1997). Αυτό οφείλεται σε θεωρητικούς λόγους, αφού κάθε είδος μετατροπής απαιτεί διαφορετικές διαδικασίες. Η σημασιολογική ασυμφωνία αποτελεί παράγοντα, ο οποίος πιθανόν να συμβάλλει στη διαφοροποίηση των ποσοστών επιτυχίας στα διάφορα είδη μετατροπής.

Οι δυσκολίες στις μετατροπές από μια μορφή ρητού σε άλλη αποτελούν ένδειξη ότι οι μαθητές δεν έχουν αναπτύξει την έννοια της ισοδυναμίας των ρητών αριθμών (Μιχαηλίδου, 2004). Η κατανόηση της ισοδυναμίας των ρητών αριθμών είναι απαραίτητη προϋπόθεση για την επιτυχημένη μετατροπή ανάμεσα στις τρεις μορφές του ρητού αριθμού, αφού συμβάλλει στην κατανόηση της σχέσης ανάμεσα στις τρεις μορφές. Τα αποτελέσματα της έρευνας της Μιχαηλίδου (2004) συμφωνούν με αποτελέσματα έρευνας στην οποία συνεντεύξεις με μαθητές έδειξαν ότι η έμφαση της διδασκαλίας στην αλγοριθμική προσέγγιση των ρητών αριθμών έχει αρνητικές συνέπειες στην πλήρη κατανόηση των κλασμάτων, των δεκαδικών και των ποσοστών (Gay & Aichele, 1997). Οι μαθητές παρουσίαζαν δυσκολίες και παρανοήσεις στα έργα ισοδυναμίας ρητών αριθμών της ίδιας μορφής. Κατά συνέπεια δυσκολεύονταν σε έργα τα οποία εξέταζαν τη σχέση ανάμεσα στις τρεις μορφές των ρητών αριθμών (Gay & Aichele, 1997).

Σύμφωνα με τους Thomson και Walker (1996) και Sweeny και Quinn (2000) οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην κατανόηση της ισοδυναμίας των ρητών αριθμών, λόγω του διαφορετικού συμβολισμού που χρησιμοποιείται για κάθε μορφή του ρητού αριθμού. Η δυσκολία αυτή ενισχύεται από τη μεμονωμένη διδασκαλία των τριών μορφών κάτι το οποίο έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να μην αντιλαμβάνονται ότι οι δεκαδικοί και τα ποσοστά είναι ισοδύναμα με τα κλάσματα και ότι αποτελούν εναλλακτικό τρόπο γραφής τους. Οι μαθητές συχνά καταφεύγουν στην εφαρμογή ιδιοτήτων των ακέραιων αριθμών στην προσπάθειά τους να εξηγήσουν τις σχέσεις ανάμεσα στους ρητούς αριθμούς με αποτέλεσμα να υποπίπτουν σε λάθη.

Αναφορικά με τη σχέση των κλασμάτων με τη διαίρεση ακεραίων, οι Newstead και Murray (1998) σε έρευνά τους με μαθητές Δ΄ και Στ΄ τάξης δημοτικού σχολείου βρήκαν ότι οι μαθητές δυσκολεύονταν σε πολύ μεγάλο βαθμό ν' αντιληφθούν ότι το κλάσμα είναι διαίρεση δύο ακεραίων (διαίρεση αριθμητής÷παρονομαστής) και τη σύνδεση ανάμεσα στην έννοια του κλάσματος και τη διαίρεση ακεραίων.

Από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας δεν βρέθηκαν άλλες έρευνες που να εξετάζουν αυτή τη σχέση και τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών στο να αναγνωρίσουν για παράδειγμα ότι το κλάσμα $\frac{2}{5}$ είναι το αποτέλεσμα της διαίρεσης 2÷5. Ωστόσο, όπως αναφέρουν οι Thomson και Walker (1996) οι μαθητές χρησιμοποιούν τη στρατηγική της διαίρεσης ακεραίων σε μερικές περιπτώσεις για να μετατρέψουν κλάσμα σε δεκαδικό αριθμό, π.χ. για να μετατρέψουν το κλάσμα $\frac{3}{8}$ σε δεκαδικό, μια στρατηγική είναι να εκτελέσουν τη διαίρεση 3÷8. Συνεπώς, μερικοί μαθητές αντιλαμβάνονται τη σχέση των κλασμάτων με τη διαίρεση ακεραίων σε αυτές τις περιπτώσεις.

Αναστοχασμός

Ο Elbers (2003) περιγράφει τη δουλειά του Streefland με στόχο την ανάπτυξη του συλλογικού αναστοχασμού μαθητών ηλικίας 11-13 ετών στα μαθηματικά. Τα επεισόδια που παρουσιάζει ο Elbers (2003) αναφέρονται σε διδασκαλίες που πραγματοποίησε ο ίδιος ο Streefland με ένα άλλο εκπαιδευτικό πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Στο άρθρο του Elbers (2003) παρουσιάζεται ένα πρόβλημα καθημερινής ζωής (δοσολογία φαρμάκου) που τέθηκε στους μαθητές. Στις διδασκαλίες οι μαθητές αντιμετωπίζονται σαν «ερευνητές» και προωθείται ο συλλογικός αναστοχασμός, οι μαθητές συνεργάζονται και καλλιεργείται μια «κοινότητα ερευνητών». Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές μπορούσαν να εργαστούν συλλογικά σαν μια «κοινότητα ερευνητών» και ανέπτυξαν την ικανότητα μαθηματικοποίησης ενός προβλήματος από την καθημερινή ζωή. Ακόμη, ήταν ικανοί να προτείνουν πολλαπλές λύσεις για το πρόβλημα, ανέπτυξαν τη μεταγνωστική τους ικανότητα και την ικανότητα να αιτιολογούν τις αποφάσεις τους και να πείθουν τους άλλους για τη λύση που έδωσαν.

Όσον αφορά στη μεταγνωστική ικανότητα μαθητών δημοτικού σχολείου, βρέθηκαν έρευνες που αφορούν στη μεταγνωστική ικανότητα των μαθητών στα μαθηματικά (σε αυτό το μέρος παρατίθενται κάποια στοιχεία για τη μεταγνώση, μιας κι είναι παραπλήσια έννοια προς τον αναστοχασμό) (Desoete, 2009: Desoete & Roeyers, 2006: Desoete, Roeyers, & Buysse, 2001: Lucangeli & Cornoldi, 1997). Οι έρευνες αυτές υποστηρίζουν ότι οι μεταγνωστικές μεταβλητές επηρεάζουν την επίδοση στα μαθηματικά. Πιο συγκεκριμένα, η έρευνα της Desoete (2009) έδειξε ότι η μεταγνωστική ικανότητα πρόβλεψης και αξιολόγησης της λύσης σε μαθηματικά προβλήματα σχετίζεται με τη μαθηματική επίδοση μαθητών Γ΄ τάξης δημοτικού σχολείου. Οι Desoete και Roeyers (2006) βρήκαν σχέση της μεταγνωστικής ικανότητας και της μαθηματικής επίδοσης σε δείγμα μαθητών Β΄, Γ΄ και Δ΄ τάξης δημοτικού σχολείου. Εξάλλου, οι Desoete, Roeyers και Buysse (2001) βρήκαν ότι οι μεταγνωστικές ικανότητες πρόβλεψης και αξιολόγησης της λύσης μπορούσαν να εξηγήσουν το 16% της επίδοσης στα μαθηματικά. Οι Lucangeli και Cornoldi (1997) εξέτασαν τη σχέση των διαδικασιών ελέγχου (πρόβλεψης, σχεδιασμού, παρακολούθησης και αξιολόγησης) με την επίδοση στα μαθηματικά σε μαθητές Γ΄ και Δ΄ τάξης δημοτικού σχολείου. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι διαδικασίες ελέγχου συνδέονται με την ικανότητα επίλυσης αριθμητικών και γεωμετρικών προβλημάτων. Επιπρόσθετα, σχέση μεταξύ των διαδικασιών ελέγχου και της ικανότητας στην αριθμητική φαίνεται να υπάρχει για τη Γ΄ τάξη, αλλά όχι για τη Δ΄ τάξη.

Για την ανάπτυξη εργαλείων μέτρησης των παραγόντων στα πλαίσια της παρούσας εργασίας είτε λήφθηκαν αυτούσια έργα που χρησιμοποιήθηκαν σε έρευνες που αναφέρθηκαν προηγουμένως για τη μέτρηση των αντίστοιχων παραγόντων, είτε χρησιμοποιήθηκαν παρόμοια έργα. Ακόμη, για την ανάπτυξη των εργαλείων μέτρησης, λήφθηκαν υπόψη οι ικανότητες και οι δυσκολίες των μαθητών στους παράγοντες. Έτσι, στα εργαλεία μέτρησης περιλήφθηκαν έργα σχετικά εύκολα και έργα σχετικά δύσκολα, έτσι ώστε να υπάρχει διαβάθμιση στη δυσκολία των έργων και στο δείκτη διάκρισής τους. Επιπρόσθετα, στις διδασκαλίες των παραγόντων στα πλαίσια του παρεμβατικού προγράμματος λήφθηκαν υπόψη οι ικανότητες και οι δυσκολίες των μαθητών στους παράγοντες και υπήρχαν δραστηριότητες στις οποίες μεγαλύτερο ποσοστό μαθητών μπορούσε να επιτύχει (κατάλληλες και για τους αδύνατους μαθητές) και άλλες που ήταν δυσκολότερες για τους μαθητές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Εισαγωγή

Βασικός σκοπός της ερευνητικής εργασίας ήταν η ανάπτυξη και ο έλεγχος θεωρητικού μοντέλου με παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων και ο σχεδιασμός και η εφαρμογή παρεμβατικού προγράμματος για τη βελτίωση της ικανότητας των μαθητών Στ΄ τάξης σε αυτούς τους παράγοντες.

Για τη επίτευξη του σκοπού της εργασίας, θεωρήθηκε απαραίτητη η ανάπτυξη ερευνητικού σχεδίου με κομβικά σημεία την ανάπτυξη και το έλεγχο του προτεινόμενου μοντέλου σε πιλοτική φάση, το σχεδιασμό και την εφαρμογή παρεμβατικού προγράμματος για τη βελτίωση της ικανότητας των μαθητών στους παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων και μετρήσεις των μαθητών στους παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων πριν την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος, αμέσως μετά και τρεις μήνες μετά.

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται αναλυτικά όλα τα στοιχεία που συνιστούν το σχεδιασμό του ερευνητικού μέρους της εργασίας. Αρχικά, γίνεται εκτενής αναφορά στην πορεία διεξαγωγής της έρευνας και στις διάφορες φάσεις. Ακολούθως, περιγράφεται το δείγμα της έρευνας και γίνεται αναφορά στα εργαλεία μέτρησης, στην κωδικοποίηση και βαθμολόγηση των απαντήσεων των μαθητών και στην εγκυρότητα των εργαλείων μέτρησης. Ακολουθεί παρουσίαση του παρεμβατικού προγράμματος και γίνεται αναλυτική περιγραφή των διδασκαλιών. Ακόμη, γίνεται αναφορά στις διδασκαλίες των εκπαιδευτικών της ομάδας ελέγχου και την ύλη που καλύφθηκε όσον αφορά στα κλάσματα. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την παρουσίαση των στατιστικών αναλύσεων που χρησιμοποιήθηκαν για την απάντηση των ερευνητικών ερωτημάτων.

Για την απάντηση των ερευνητικών ερωτημάτων εκπονήθηκε ερευνητικό σχέδιο. Το ερευνητικό σχέδιο περιλάμβανε διάφορες φάσεις που παρουσιάζονται συνοπτικά παρακάτω. Στη συνέχεια θα γίνει αναφορά σε κάθε φάση.

Φάσεις διεξαγωγής της έρευνας

Φάση 1: Ανασκόπηση της βιβλιογραφίας και ανάπτυξη μοντέλου με παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων.

Φάση 2: Ανάπτυξη εργαλείων μέτρησης των παραγόντων που θεωρούμε ότι συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων.

Φάση 3: Πιλοτική χορήγηση των εργαλείων μέτρησης.

Φάση 4: Στατιστική ανάλυση των δεδομένων της πιλοτικής φάσης, έλεγχος του προτεινόμενου μοντέλου και επιλογή των καταλληλότερων έργων.

Φάση 5: Διαμόρφωση του τελικού προτεινόμενου μοντέλου για την κατανόηση των κλασμάτων.

Φάση 6: Σχεδιασμός παρεμβατικού προγράμματος για τη βελτίωση της ικανότητας των μαθητών στους παράγοντες που έχει βρεθεί ότι συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων.

Φάση 7: Εκπαίδευση των εκπαιδευτικών της πειραματικής ομάδας για την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος.

Φάση 8: Μέτρηση των παραγόντων που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων πριν την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος (pre-test).

Φάση 9: Διαμοιρασμός του δείγματος σε πειραματική ομάδα και σε ομάδα ελέγχου και εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος μόνο στους μαθητές της πειραματικής ομάδας.

Φάση 10: Παρακολούθηση μαθημάτων που δίδαξαν οι εκπαιδευτικοί της πειραματικής ομάδας.

Φάση 11: Μέτρηση των παραγόντων που έχει βρεθεί ότι συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων αμέσως μετά το τέλος του παρεμβατικού προγράμματος (post-test).

Φάση 12: Συνεντεύξεις από τους εκπαιδευτικούς της ομάδας ελέγχου.

Φάση 13: Μέτρηση των ίδιων παραγόντων τρεις μήνες μετά το τέλος του παρεμβατικού προγράμματος (retention test).

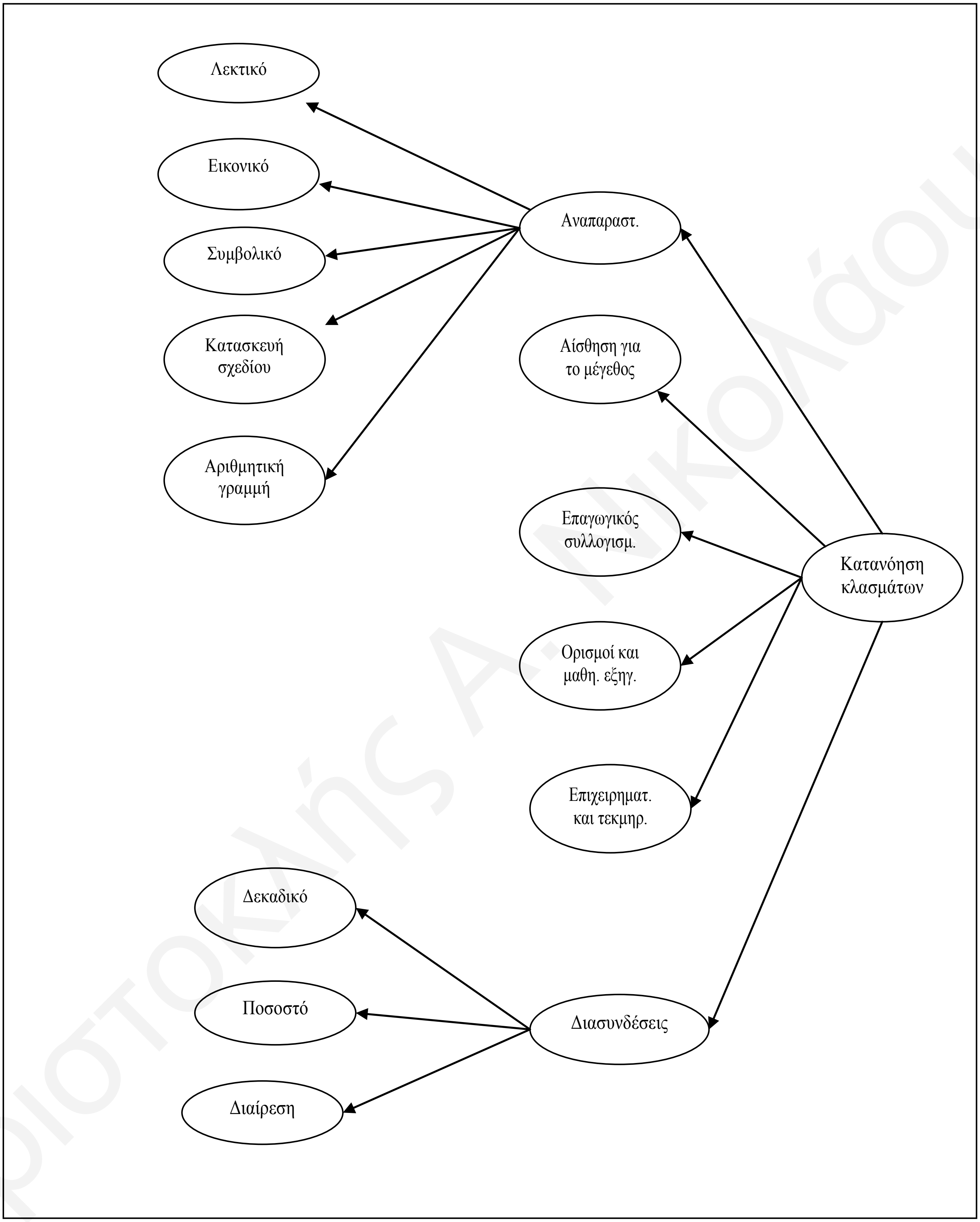
Φάση 14: Στατιστικές αναλύσεις των δεδομένων, απάντηση των ερευνητικών ερωτημάτων και εξαγωγή συμπερασμάτων.

Φάση 1: Ανασκόπηση της βιβλιογραφίας και ανάπτυξη μοντέλου με παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων.

Σε πρώτη φάση διενεργήθηκε σε βάθος μελέτη της βιβλιογραφίας για τη διαμόρφωση ενός θεωρητικού μοντέλου το οποίο να παρέχει μια όσο το δυνατόν ολοκληρωμένη περιγραφή της κατανόησης μιας έννοιας των μαθηματικών του δημοτικού σχολείου. Αφετηρία της προσπάθειάς μας ήταν η θεωρία των Sierpinska et al. (2002), ενώ έγινε σε βάθος μελέτη ερευνών που καταπιάνονται με παράγοντες που επηρεάζουν την κατανόηση μαθηματικών εννοιών (βλέπε Κεφάλαιο 2: Ανασκόπηση της Βιβλιογραφίας).

Φάση 2: Ανάπτυξη εργαλείων μέτρησης των παραγόντων που θεωρούμε ότι συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων

Μετά τη διαμόρφωση του προτεινόμενου μοντέλου, καταρτίστηκαν δύο δοκίμια με έργα για τη μέτρηση των παραγόντων που θεωρήσαμε ότι συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων. Σε αυτή τη φάση δεν περιλήφθηκε στους παράγοντες ο αναστοχασμός, κι αυτό διότι η μεταγνώση την οποία επεξεργαζόμασταν σε αυτό το στάδιο και που ήταν έννοια πλησιέστερη προς τον αναστοχασμό περιείχε συναισθηματικές μεταβλητές. Ο αναστοχασμός περιλήφθηκε στους παράγοντες που μετρήθηκαν στην κυρίως έρευνα (βλέπε Φάση 5). Το μοντέλο στην πιλοτική φάση παρουσιάζεται σχηματικά στο Διάγραμμα 3.1.



Διάγραμμα 3.1. Το Μοντέλο στην Πιλοτική Φάση

Φάση 3: Πιλοτική χορήγηση των εργαλείων μέτρησης

Πριν τη διεξαγωγή της πιλοτικής φάσης έγινε προπιλοτική φάση. Συγκεκριμένα, τα δύο δοκίμια που καταρτίστηκαν δόθηκαν σε τέσσερις δασκάλους με πείρα στη διδασκαλία των Μαθηματικών της Ε΄ και Στ΄ τάξης για να αξιολογήσουν την καταλληλότητα των έργων για τους μαθητές Ε΄ και Στ΄ τάξης (κατά πόσον οι μαθητές θα ήταν σε θέση να λύσουν τέτοια προβλήματα) και να προβούν σε σχόλια και παρατηρήσεις. Αφού λήφθηκαν υπόψη τα σχόλια και οι παρατηρήσεις των δασκάλων, τα δύο δοκίμια χορηγήθηκαν σε ένα παιδί Ε΄ τάξης και σε δύο παιδιά Στ΄ τάξης. Τα παιδιά ερωτήθηκαν για τη δυσκολία των έργων και με βάση τις απαντήσεις τους έγιναν και πάλι τροποποιήσεις και τα δύο δοκίμια χορηγήθηκαν σε δύο Στ΄ τάξεις. Με βάση τις απαντήσεις των μαθητών έγιναν οι τελικές τροποποιήσεις και καταρτίστηκαν τα δύο δοκίμια που περιγράφονται στα «Εργαλεία Μέτρησης» και τα οποία χορηγήθηκαν στην πιλοτική φάση.

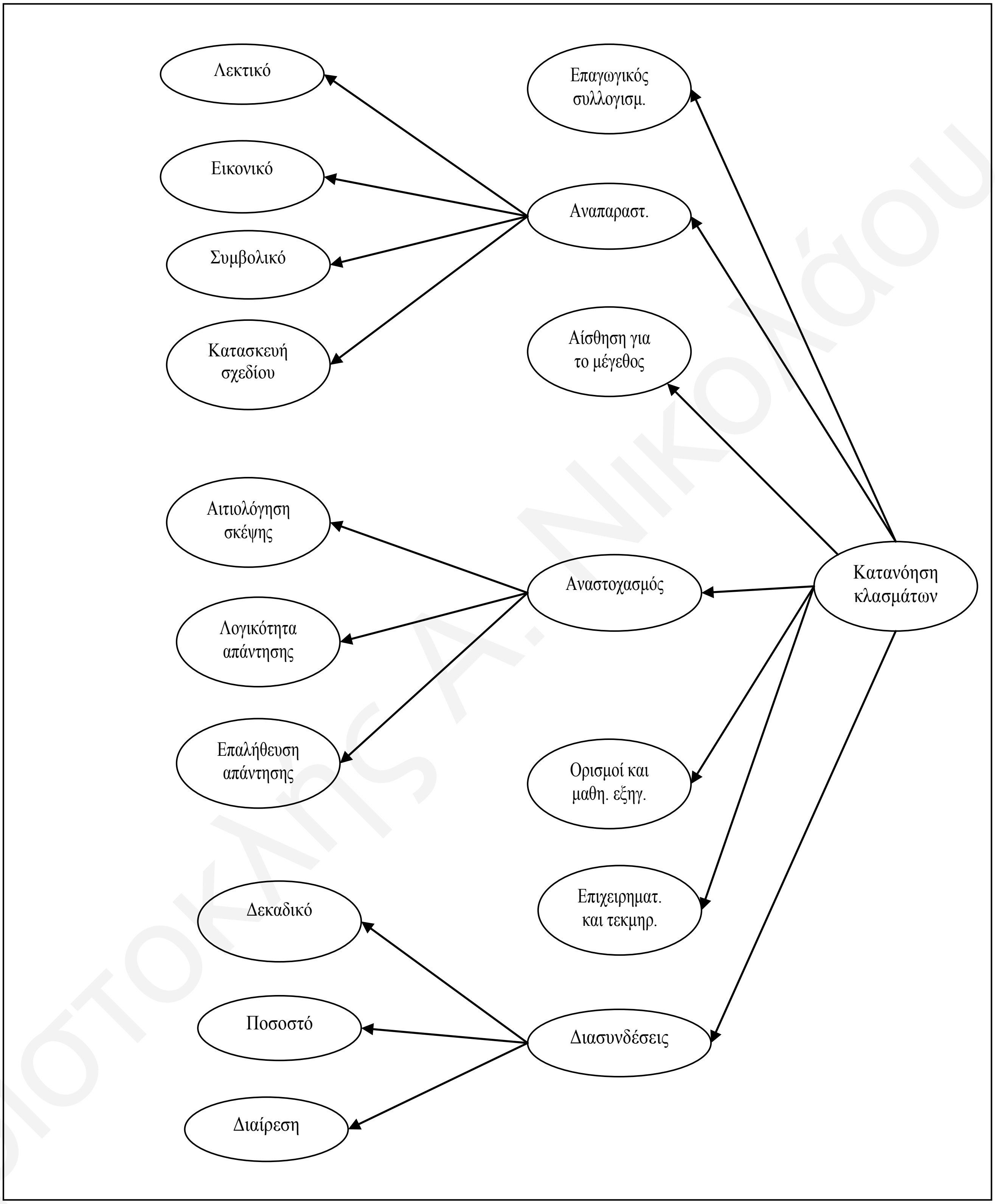
Η χορήγηση των δύο δοκιμίων στα πλαίσια της πιλοτικής φάσης έγινε προς το τέλος του σχολικού έτους 2008-2009 (Μάϊο 2009) έτσι ώστε και οι μαθητές της Ε΄ τάξης να καλύψουν τα θέματα που περιλαμβάνονταν στα δύο δοκίμια. Το δείγμα στην πιλοτική φάση αποτέλεσαν 344 μαθητές Ε΄ και Στ΄ τάξης. Πρώτα χορηγήθηκε το Δοκίμιο 1 και μετά παρέλευσης μιας βδομάδας το Δοκίμιο 2. Η χορήγηση έγινε από τους εκπαιδευτικούς των τάξεων. Όλοι οι μαθητές συμπλήρωσαν και τα δύο δοκίμια. Οι μαθητές καλούνταν να εργαστούν μόνοι τους χωρίς να ζητούν διευκρινίσεις. Ο μέγιστος χρόνος για κάθε δοκίμιο ήταν 60 λεπτά.

Φάση 4: Στατιστική ανάλυση των δεδομένων της πιλοτικής φάσης, έλεγχος του προτεινόμενου μοντέλου και επιλογή των καταλληλότερων έργων

Από τις στατιστικές αναλύσεις των δεδομένων της πιλοτικής φάσης επιβεβαιώθηκε το προτεινόμενο μοντέλο (χωρίς τον αναστοχασμό), ότι δηλαδή ο επαγωγικός συλλογισμός, οι ορισμοί και οι μαθηματικές εξηγήσεις, η επιχειρηματολογία και η τεκμηρίωση, η αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων, οι αναπαραστάσεις και οι διασυνδέσεις με δεκαδικούς, ποσοστά και τη διαίρεση είναι παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων. Τα αποτελέσματα της στατιστικής ανάλυσης επέτρεψαν την απόσυρση ακατάλληλων έργων, αλλά και την επιλογή των καταλληλότερων έργων, έτσι ώστε να χρησιμοποιηθεί ο ελάχιστος αριθμός έργων για κάθε παράγοντα (βλέπε «Εργαλεία Μέτρησης»). Ακόμη, τα αποτελέσματα από την ανάλυση των δεδομένων της πιλοτικής φάσης έδειξαν ότι η εγκυρότητα των εργαλείων μέτρησης ήταν πάρα πολύ καλή.

Φάση 5: Διαμόρφωση του τελικού προτεινόμενου μοντέλου για την κατανόηση των κλασμάτων

Στη φάση αυτή διαμορφώθηκε το τελικό μοντέλο που ελέγχθηκε στην κυρίως έρευνα. Στο τελικό μοντέλο περιλήφθηκαν οι έξι παράγοντες που βρέθηκαν στην πιλοτική φάση ότι συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων, καθώς και ο αναστοχασμός. Η συμπερίληψη του αναστοχασμού θεωρήθηκε αναγκαία, αφού με βάση τη βιβλιογραφία είναι σημαντικός παράγοντας και για να γίνει το μοντέλο μας πιο ολοκληρωμένο (απώτερος στόχος της παρούσας εργασίας είναι να προτείνει ένα όσο το δυνατόν πιο ολοκληρωμένο μοντέλο των παραγόντων που συνθέτουν την κατανόηση). Το τελικό προτεινόμενο μοντέλο φαίνεται στο Διάγραμμα 3.2.



Διάγραμμα 3.2. Το Τελικό Προτεινόμενο Μοντέλο

Φάση 6: Σχεδιασμός παρεμβατικού προγράμματος για τη βελτίωση της ικανότητας των μαθητών στους παράγοντες που έχει βρεθεί ότι συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων

Με βάση τη βιβλιογραφία σχεδιάστηκε παρεμβατικό πρόγραμμα για τη βελτίωση της ικανότητας των μαθητών στους επτά παράγοντες. Το παρεμβατικό πρόγραμμα σχεδιάστηκε με βάση κάποιες αρχές (που θα εξηγηθούν λεπτομερώς στη συνέχεια όπου θα γίνει εκτενής αναφορά στις αρχές και την οργάνωση του παρεμβατικού προγράμματος) και λάμβανε υπόψη τις ικανότητες και τις ιδιαιτερότητες των μαθητών Στ΄ τάξης στους οποίους επρόκειτο να εφαρμοστεί. Για την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος ετοιμάστηκαν σχέδια μαθήματος για τους εκπαιδευτικούς της πειραματικής ομάδας και φύλλα εργασίας για τους μαθητές.

Φάση 7: Εκπαίδευση των εκπαιδευτικών της πειραματικής ομάδας για την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος

Την παρέμβαση εφάρμοσαν οκτώ εκπαιδευτικοί Στ΄ τάξης που δίδασκαν σε οκτώ διαφορετικά σχολεία. Πριν την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος και πιο συγκεκριμένα το μήνα Σεπτέμβριο 2009 έγινε εκπαίδευση των εκπαιδευτικών, έτσι ώστε να είναι σε θέση να εφαρμόσουν σωστά την παρέμβαση.

Οι συναντήσεις για την εκπαίδευση των εκπαιδευτικών γίνονταν κατ’ ιδίαν και είχαν διάρκεια τουλάχιστον μιάμιση ώρα η καθεμιά. Συνολικά έγιναν τρεις συναντήσεις με τον κάθε εκπαιδευτικό. Στις συναντήσεις επεξηγήθηκε το περιεχόμενο και ο σκοπός της παρούσας εργασίας, όπως και ο σκοπός εφαρμογής του παρεμβατικού προγράμματος. Τα σχέδια μαθήματος δόθηκαν έτοιμα στους εκπαιδευτικούς που κλήθηκαν να τα μελετήσουν, να υποβάλουν απορίες και να ζητήσουν διευκρινίσεις. Το περιεχόμενο και οι στόχοι κάθε διδασκαλίας επεξηγήθηκαν λεπτομερώς στους εκπαιδευτικούς από τον ερευνητή. Οι εκπαιδευτικοί κλήθηκαν να εφαρμόσουν πιστά τα σχέδια μαθήματος, έτσι ώστε να διασφαλιστεί η ομοιόμορφη εφαρμογή από όλους. Ακόμη, οι εκπαιδευτικοί καλούνταν να συμπληρώσουν έντυπο στο οποίο κατέγραφαν την πορεία κάθε μαθήματος που δίδαξαν (αν όλα κύλησαν ομαλά, κατά πόσον υπήρχαν δυσκολίες στην εφαρμογή του σχεδίου μαθήματος, αν κάποια δραστηριότητα δεν έγινε, αυτά έπρεπε να δηλωθούν), την ανταπόκριση και τις δυσκολίες των μαθητών. Με τον τρόπο αυτό διασφαλιζόταν ότι όλοι οι εκπαιδευτικοί θα δίδασκαν τα ίδια μαθήματα, λαμβάνοντας όμως υπόψη τις συνθήκες που επικρατούν σε κάθε σχολείο, μιας και με βάση την εκπαιδευτική πραγματικότητα ήταν δυνατό να υπάρχουν ιδιαιτερότητες σε κάθε τάξη που θα δυσχέραιναν την πιστή εφαρμογή όλων των σχεδίων μαθήματος.

Επιπρόσθετα, στους εκπαιδευτικούς δόθηκαν τα φύλλα εργασίας με εργασίες που έπρεπε να συμπληρώσουν οι μαθητές κατά τη διάρκεια των μαθημάτων. Τα φύλλα εργασίας εξυπηρετούσαν δύο σκοπούς. Πρώτο η συμπλήρωσή τους ήταν αναγκαία για την εκπλήρωση των στόχων των διδασκαλιών και κατά δεύτερο λόγο η συμπλήρωσή τους ήταν ένδειξη ότι έγιναν οι διδασκαλίες και εφαρμόστηκαν τα σχέδια μαθήματος.

Φάση 8: Μέτρηση των παραγόντων που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων πριν την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος

Τα δύο δοκίμια που καταρτίστηκαν με βάση το τελικό μοντέλο χορηγήθηκαν στο δείγμα της κυρίως έρευνας (349 μαθητές Στ΄ τάξης) πριν την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος (pre-test). Όλοι οι μαθητές του δείγματος συμπλήρωσαν και τα δύο δοκίμια. Η χορήγηση έγινε από τους δασκάλους των τάξεων το πρώτο δεκαπενθήμερο του Οκτωβρίου 2009. Πρώτα χορηγήθηκε το Δοκίμιο 1 και μετά παρέλευσης μιας βδομάδας περίπου το Δοκίμιο 2. Οι μαθητές καλούνταν να εργαστούν μόνοι τους χωρίς να ζητούν διευκρινίσεις. Ο μέγιστος χρόνος για τη συμπλήρωση κάθε δοκιμίου ήταν 60 λεπτά.

Φάση 9: Διαμοιρασμός του δείγματος σε πειραματική ομάδα και σε ομάδα ελέγχου και εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος μόνο στους μαθητές της πειραματικής ομάδας

Μετά την πρώτη μέτρηση (pre-test), έγινε διαμοιρασμός του δείγματος σε πειραματική ομάδα και σε ομάδα ελέγχου. Συγκεκριμένα, μία τάξη από κάθε σχολείο στην οποία δίδασκαν οι εκπαιδευτικοί της πειραματικής ομάδας (συνολικά οκτώ τάξεις) αποτέλεσαν την πειραματική ομάδα και η άλλη ή οι άλλες δύο τάξεις (αναλόγως του αν το σχολείο είχε δύο ή τρεις Στ΄

τάξεις) αποτέλεσαν την ομάδα ελέγχου (συνολικά έντεκα τάξεις). Η πειραματική ομάδα περιλάμβανε 145 μαθητές και η ομάδα ελέγχου 204 μαθητές.

Στους μαθητές της πειραματικής ομάδας εφαρμόστηκε το παρεμβατικό πρόγραμμα, ενώ οι μαθητές της ομάδας ελέγχου συνέχισαν κανονικά τα μαθήματά τους με βάση το υφιστάμενο αναλυτικό πρόγραμμα.

Φάση 10: Παρακολούθηση μαθημάτων που δίδαξαν οι εκπαιδευτικοί της πειραματικής ομάδας

Κατά τη διάρκεια εφαρμογής του παρεμβατικού προγράμματος έγινε παρακολούθηση δύο διδασκαλιών που δίδαξε ο κάθε εκπαιδευτικός της πειραματικής ομάδας. Αυτό έγινε έτσι ώστε να διασφαλιστεί η εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος από όλους τους εκπαιδευτικούς της πειραματικής ομάδας. Κατά τη διάρκεια παρακολούθησης των μαθημάτων καταγράφονταν από τον ερευνητή στοιχεία που αφορούσαν την πορεία του μαθήματος, την ανταπόκριση των μαθητών, την εργασία τους στα φύλλα εργασίας, δυσκολίες που αντιμετώπισαν, καθώς και άλλες παρατηρήσεις για κάθε μάθημα. Μετά το πέρας κάθε παρακολούθησης, γινόταν συζήτηση του μαθήματος με τον εκπαιδευτικό.

Ακόμη, καθόλη τη διάρκεια εφαρμογής του παρεμβατικού προγράμματος υπήρχε τακτική και στενή επικοινωνία του ερευνητή με τους εκπαιδευτικούς, τουλάχιστον ανά δεκαπενθήμερο. Οι εκπαιδευτικοί στα πλαίσια της επικοινωνίας ενημέρωναν τον ερευνητή για την πορεία των διδασκαλιών, δυσκολίες που τυχόν αντιμετώπιζαν στην εφαρμογή των μαθημάτων, καθώς και παρατηρήσεις για τις διδασκαλίες. Η συνεχής και στενή επικοινωνία ήταν απαραίτητες για την πιστή και ομοιόμορφη εφαρμογή των σχεδίων μαθήματος.

Φάση 11: Μέτρηση των παραγόντων που έχει βρεθεί ότι συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων αμέσως μετά το τέλος του παρεμβατικού προγράμματος

Αμέσως μετά το πέρας του παρεμβατικού προγράμματος και συγκεκριμένα το πρώτο δεκαπενθήμερο του Φεβρουαρίου 2010 διενεργήθηκε δεύτερη μέτρηση (post-test) των επτά παραγόντων που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων. Πρώτα χορηγήθηκε το Δοκίμιο 1 και μετά παρέλευσης μιας βδομάδας το Δοκίμιο 2. Όλοι οι μαθητές συμπλήρωσαν και τα δύο δοκίμια.

Φάση 12: Συνεντεύξεις από τους εκπαιδευτικούς της ομάδας ελέγχου

Μετά το τέλος του παρεμβατικού προγράμματος λήφθηκαν συνεντεύξεις από τους εκπαιδευτικούς της ομάδας ελέγχου, έτσι ώστε να διαφανεί κατά πόσον είχαν παρεκκλίνει από το Α.Π. και κατά πόσον στις διδασκαλίες τους έδωσαν έμφαση στους παράγοντες που διδάσκονταν στην πειραματική ομάδα. Οι συνεντεύξεις ήταν ημιδομημένες και είχαν χρονική διάρκεια περίπου 30 λεπτά. Υπήρχαν συγκεκριμένες ερωτήσεις τις οποίες υπέβαλλε ο ερευνητής, αλλά αναλόγως των απαντήσεων των εκπαιδευτικών και της πορείας της συζήτησης, μπορούσε να υποβάλει επιπρόσθετες ερωτήσεις, να αναφερθεί σε παραδείγματα και να ζητήσει διευκρινίσεις.

Φάση 13: Μέτρηση των ίδιων παραγόντων τρεις μήνες μετά το τέλος του παρεμβατικού προγράμματος.

Τρεις μήνες μετά το πέρας του παρεμβατικού προγράμματος και συγκεκριμένα το δεύτερο δεκαπενθήμερο του Μαΐου 2010 χορηγήθηκαν τα δύο δοκίμια για να διαπιστωθεί η μονιμότητα των αποτελεσμάτων της παρέμβασης (retention test). Πρώτα χορηγήθηκε το Δοκίμιο 1 και μετά από μια βδομάδα περίπου το Δοκίμιο 2. Όλοι οι μαθητές συμπλήρωσαν και τα δύο δοκίμια.

Φάση 14: Στατιστικές αναλύσεις των δεδομένων, απάντηση των ερευνητικών ερωτημάτων και εξαγωγή συμπερασμάτων

Μετά τη συλλογή των δεδομένων έγιναν στατιστικές αναλύσεις για την απάντηση των ερευνητικών ερωτημάτων και την εξαγωγή συμπερασμάτων.

Δείγμα

Το δείγμα στην πιλοτική φάση αποτέλεσαν 344 μαθητές Ε΄και Στ΄ τάξης από 11 διαφορετικά δημοτικά σχολεία. Η επιλογή των σχολείων ήταν σκόπιμη με κριτήριο ποια σχολεία θα μπορούσαν να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις της πιλοτικής φάσης. Τα σχολεία που έλαβαν μέρος στην πιλοτική φάση προέρχονταν από όλες τις επαρχίες της ελεύθερης Κύπρου εκτός της ελεύθερης Αμμοχώστου. Ακόμη, στο δείγμα των σχολείων υπήρχαν σχολεία τόσο από αστικές, όσο και από ορεινές περιοχές.

Το δείγμα στην κυρίως έρευνα αποτέλεσαν 349 μαθητές Στ΄ τάξης από οκτώ διαφορετικά σχολεία των επαρχιών Πάφου, Λεμεσού και Λευκωσίας και σε αυτά περιλαμβάνονταν σχολεία τόσο από αστικές όσο και από ορεινές περιοχές. Η επιλογή των σχολείων ήταν σκόπιμη με κριτήριο ποιοι δάσκαλοι θα μπορούσαν να εφαρμόσουν το παρεμβατικό πρόγραμμα στις τάξεις τους. Έτσι, την πειραματική ομάδα αποτέλεσαν οι οκτώ τάξεις των δασκάλων που εφάρμοσαν το παρεμβατικό πρόγραμμα και οι υπόλοιπες 11 τάξεις την ομάδα ελέγχου. Συγκεκριμένα, στην πειραματική ομάδα υπήρχαν 145 μαθητές και στην ομάδα ελέγχου 204 μαθητές.

Θεωρούμε ότι ένα κριτήριο για το διαμοιρασμό των μαθητών σε τμήματα είναι η επίδοσή τους, συνεπώς κατά μέσο όρο οι μαθητές της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου θα είχαν περίπου την ίδια επίδοση στην κατανόηση των κλασμάτων πριν την εφαρμογή της παρέμβασης (pre-test). Η υπόθεσή μας αυτή επιβεβαιώθηκε από τα αποτελέσματα των στατιστικών αναλύσεων (βλέπε Κεφάλαιο 4: Αποτελέσματα).

Εργαλεία Μέτρησης

Για τη μέτρηση των παραγόντων που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων κατασκευάστηκε δοκίμιο, τα έργα του οποίου μοιράστηκαν σε δύο δοκίμια. Η κατασκευή δύο δοκιμίων και όχι ενός κρίθηκε επιβεβλημένη, εξαιτίας του μεγάλου αριθμού παραγόντων και του αριθμού των έργων που απαιτούνταν για τη μέτρησή τους. Στην περίπτωση χορήγησης ενός δοκιμίου, θα απαιτούνταν τουλάχιστον 120 λεπτά για τη συμπλήρωσή του με προφανή προβλήματα στη χορήγηση του δοκιμίου, στην επίδοση των μαθητών στους παράγοντες (που δεν θα ήταν η πραγματική τους ικανότητα) και στον έλεγχο του προτεινόμενου μοντέλου. Για την κατασκευή των δοκιμίων λήφθηκαν υπόψη οι ικανότητες και οι δυσκολίες των μαθητών δημοτικού σχολείου στους παράγοντες. Ακόμη, μερικά έργα λήφθηκαν αυτούσια από προηγούμενες έρευνες γιατί θεωρήσαμε ότι ήταν κατάλληλα για τη μέτρηση των σχετικών παραγόντων, ενώ τα περισσότερα έργα ήταν παρόμοια με έργα που χρησιμοποιήθηκαν σε προηγούμενες έρευνες και έτυχαν τροποποίησης ώστε να γίνουν καταλληλότερα. Όλες οι παράμετροι που λήφθηκαν υπόψη για την κατασκευή των δοκιμίων αποσκοπούσαν στο να διασφαλιστεί η εγκυρότητα και η καταλληλότητά τους.

Τα δύο δοκίμια που κατασκευάστηκαν και χορηγήθηκαν στην πιλοτική φάση (βλέπε Παράρτημα) περιλάμβαναν συνολικά 65 έργα για τη μέτρηση του επαγωγικού συλλογισμού, των ορισμών και των μαθηματικών εξηγήσεων, της επιχειρηματολογίας και της τεκμηρίωσης, της αίσθησης για το μέγεθος των κλασμάτων, των αναπαραστάσεων και των διασυνδέσεων με τους δεκαδικούς, τα ποσοστά και τη διαίρεση (δεν περιλήφθηκαν έργα για τη μέτρηση του αναστοχασμού που μετρήθηκε στην κυρίως έρευνα). Ο Πίνακας 3.1 παρουσιάζει παραδείγματα έργων για τον καθένα από τους έξι παράγοντες της πιλοτικής φάσης.

Πίνακας 3.1

Παραδείγματα Έργων για τη Μέτρηση των Έξι παραγόντων στην Πιλοτική Φάση

Επαγωγικός συλλογισμός	Συνέχισε το μοτίβο. $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{2}{12}$ $\frac{2}{24}$ ....
Ορισμοί και μαθηματικές εξηγήσεις	Φαντάσου ότι ο δάσκαλος ή η δασκάλα σου ζητούσε να εξηγήσεις σε κάποιο συμμαθητή σου γιατί τα $\frac{2}{5}$ είναι μικρότερα από τα $\frac{4}{8}$. Να εξηγήσεις στο συμμαθητή σου με όσους περισσότερους τρόπους μπορείς.
Επιχειρηματολογία και τεκμηρίωση	Όταν διπλασιάσω και τον αριθμητή και τον παρονομαστή ενός κλάσματος, τότε το κλάσμα που δημιουργώ έχει διπλάσια αξία από το αρχικό. Σ | Λ Εξήγηση: ....
Αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων	Να συγκρίνεις τα παρακάτω κλάσματα χρησιμοποιώντας τα σύμβολα > = < Α) $\frac{2}{7}$ $\frac{6}{21}$ Β) $\frac{8}{7}$ $\frac{3}{7}$ Γ) $\frac{2}{6}$ $\frac{10}{20}$
Αναπαραστάσεις	Να κάνεις κάποιο σχέδιο που να δείχνει το άθροισμα $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\nu$
Διασυνδέσεις με τους δεκαδικούς, τα ποσοστά και με τη διαίρεση	Να μετατρέψεις τα παρακάτω κλάσματα σε ποσοστά. Α) $\frac{1}{5}=$ Β) $\frac{7}{10}=$ Γ) $\frac{3}{4}=$ Δ) $\frac{13}{50}=$ Ε) $\frac{8}{25}=$

Ο διαμοιρασμός των έργων στα δύο δοκίμια έγινε με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε οι μαθητές να χρειάζονται περίπου τον ίδιο χρόνο για κάθε δοκίμιο (ο χρόνος συμπλήρωσης κάθε δοκιμίου ήταν 60 λεπτά). Συγκεκριμένα, στο πρώτο δοκίμιο υπήρχαν 20 έργα. Τα έργα 1-7 (το έργο 4 είχε δύο μέρη 4α και 4β) χρησιμοποιήθηκαν για τη μέτρηση του επαγωγικού συλλογισμού, τα έργα 8-13 για τη μέτρηση των ορισμών και των μαθηματικών εξηγήσεων και τα έργα 14-20 για τη μέτρηση της επιχειρηματολογίας και της τεκμηρίωσης.

Τα έργα για τη μέτρηση του επαγωγικού συλλογισμού αφορούσαν την εύρεση ομοιοτήτων και διαφορών στις ιδιότητες και στις σχέσεις, όπως αναφέρεται στο μοντέλο του Klauer (1999) για τον επαγωγικό συλλογισμό. Πρέπει να σημειωθεί ότι τα έργα αυτά δεν ήταν έργα που μετρούσαν άμεσα επαγωγικό συλλογισμό, αλλά έργα που απαιτούνται για την οικοδόμηση της ικανότητας επαγωγικού συλλογισμού. Και αυτό γιατί η εύρεση ομοιοτήτων και διαφορών στις ιδιότητες και στις σχέσεις είναι βασική προϋπόθεση για να σκεφτεί κάποιος μαθητής επαγωγικά και να καταλήξει σε ένα γενικότερο συμπέρασμα από τις ειδικές περιπτώσεις. Προκειμένου ο μαθητής να καταλήξει σε ένα γενικότερο κανόνα, απαιτείται πρώτα να παρατηρήσει και να εντοπίσει ομοιότητες και διαφορές στα συγκεκριμένα παραδείγματα. Συνεπώς, για την επιτυχία στον επαγωγικό συλλογισμό θα πρέπει να είναι σε θέση ο μαθητής να λύσει τους ακόλουθους τύπους προβλημάτων: γενίκευσης, διάκρισης, διασταυρούμενης ταξινόμησης, αναγνώρισης σχέσεων, διαφοροποίησης σχέσεων και οικοδόμησης συστήματος, όπως αυτά περιγράφονται στο μοντέλο του Klauer (1999) για τον επαγωγικό συλλογισμό. Τα έργα που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα έρευνα για τη μέτρηση του επαγωγικού συλλογισμού ήταν παρόμοια με τα έργα της Παπαγεωργίου (2006) και αφορούσαν την επίλυση όλων των τύπων προβλημάτων εκτός από εκείνα της διασταυρούμενης ταξινόμησης. Πιο συγκεκριμένα, τα έργα 1 και 2 αφορούσαν την ομοιότητα κλασμάτων (έργα γενίκευσης), το έργο 3 ζητούσε από τους μαθητές να βρουν ποιο κλάσμα διαφέρει από τα υπόλοιπα (έργο διάκρισης), το έργο 4 (4α και 4β) ζητούσε από τους μαθητές να συνεχίσουν μοτίβα με κλάσματα (έργα αναγνώρισης σχέσεων), στα έργα 5 και 6 παρουσιάζονταν στους μαθητές σειρές κλασμάτων και ζητείτο από αυτούς να βρουν ποιο κλάσμα πρέπει να φύγει γιατί χαλάει το μοτίβο (έργα διαφοροποίησης σχέσεων). Το έργο 7 παρουσίαζε στους μαθητές ένα πίνακα με κλάσματα, όπου υπήρχε κάποια σχέση μεταξύ των κλασμάτων σε κάθε σειρά και κάποια άλλη σχέση μεταξύ των κλασμάτων σε κάθε στήλη και οι μαθητές καλούνταν να συμπληρώσουν το άδειο κελί με το κατάλληλο κλάσμα (έργο οικοδόμησης συστήματος).

Τα έργα 8-13 για τη μέτρηση των ορισμών και των μαθηματικών εξηγήσεων είτε λήφθηκαν αυτούσια από την έρευνα του Niemi (1996a, 1996b), είτε ήταν παρόμοια με έργα που χρησιμοποιήθηκαν στην ίδια έρευνα. Πιο συγκεκριμένα, το έργο 8 ζητούσε από τους μαθητές να φανταστούν ότι έπρεπε να εξηγήσουν στους συμμαθητές τους τι είναι κλάσμα και έπρεπε να το πράξουν με όσους περισσότερους τρόπους μπορούσαν. Το ίδιο έργο χρησιμοποιήθηκε από τον Niemi (1996a, 1996b) με ελαφρώς διαφοροποιημένο σενάριο. Το έργο 9 ζητούσε από τους μαθητές να εξηγήσουν σε κάποιο συμμαθητή τους πότε δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα. Οι μαθητές μπορούσαν να εξηγήσουν με όποιο τρόπο ήθελαν. Παρόμοιο έργο χρησιμοποιήθηκε από τον Niemi (1996a, 1996b). Το έργο 10 ζητούσε από τους μαθητές να εξηγήσουν πότε δύο κλάσματα είναι ομώνυμα και το έργο 11 πότε δύο κλάσματα είναι ετερώνυμα. Το έργο 12 ζητούσε από τους μαθητές να εξηγήσουν με όσους περισσότερους τρόπους μπορούσαν γιατί τα $\frac{2}{5}$ είναι μικρότερα από τα $\frac{4}{8}$. Το έργο 13 ζητούσε από τους μαθητές να βρουν πόσα κλάσματα υπάρχουν μεταξύ του 0 και του 1 και να εξηγήσουν την απάντησή τους. Το ίδιο έργο χρησιμοποιήθηκε από τον Niemi (1996a, 1996b).

Τα έργα 14-20 για τη μέτρηση της επιχειρηματολογίας και της τεκμηρίωσης παρουσίαζαν στους μαθητές δηλώσεις που αφορούσαν στα κλάσματα και οι μαθητές καλούνταν να επιλέξουν κατά πόσον η κάθε δήλωση ήταν σωστή ή λανθασμένη και να επιχειρηματολογήσουν και να τεκμηριώσουν την απάντησή τους. Μερικά από τα έργα ήταν παρόμοια με έργα που προτάθηκαν από τη Lamon (1999) για την αιτιολόγηση με κλάσματα (reasoning with fractions), ενώ κάποια άλλα έργα ήταν παρόμοια με έργα που χρησιμοποιήθηκαν από τον Niemi (1996a, 1996b). Το έργο 14 παρουσίαζε στους μαθητές τα κλάσματα $\frac{16}{10}$ και $\frac{5}{8}$ και τους ζητούσε να αποφανθούν κατά πόσον είναι ισοδύναμα. Στο έργο 15 η δήλωση αφορούσε τι παθαίνει ένα κλάσμα όταν μεγαλώσει ο παρονομαστής με τον αριθμητή σταθερό. Παρόμοιο έργο προτάθηκε από τη Lamon (1999). Στο έργο 16 η δήλωση ήταν «Όλα τα κλάσματα είναι μικρότερα από το 1». Στο έργο 17 η δήλωση αφορούσε τι παθαίνει ένα κλάσμα όταν διπλασιάσω και τον αριθμητή και τον παρονομαστή και παρόμοιο έργο είχε προταθεί από τη Lamon (1999). Στο έργο 18 η δήλωση ήταν «Όταν ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή, τότε το κλάσμα είναι μεγαλύτερο του 1». Στο έργο 19 η δήλωση ήταν ότι 7 παιδιά πρόκειται να μοιραστούν 4 σοκολάτες και οι μαθητές έπρεπε να αποφανθούν κατά πόσον τα παιδιά θα πάρουν περισσότερη σοκολάτα όταν ο αριθμός των σοκολάτων που θα πάρουν τα παιδιά αυξηθεί. Παρόμοιο έργο είχε χρησιμοποιηθεί από τη Lamon (1999). Το έργο 20 καλούσε τα παιδιά να αποφανθούν κατά πόσον υπάρχει κάποιο κλάσμα μεταξύ του $\frac{1}{4}$ και του $\frac{1}{3}$. Παρόμοιο έργο είχε χρησιμοποιηθεί από το Niemi (1996a, 1996b), όταν ζητούσε από τα παιδιά να βρουν πόσα κλάσματα υπάρχουν μεταξύ του 0 και του 1.

Στο δεύτερο δοκίμιο υπήρχαν 45 έργα. Τα έργα 21α – 21στ και το έργο 22 χρησιμοποιήθηκαν για τη μέτρηση της αίσθησης για το μέγεθος των κλασμάτων, τα έργα 23-37 για τη μέτρηση των αναπαραστάσεων και τα έργα 38-41 για τις διασυνδέσεις των κλασμάτων με δεκαδικούς, ποσοστά και με τη διαίρεση.

Τα έργα που χρησιμοποιήθηκαν για τη μέτρηση της αίσθησης για το μέγεθος των κλασμάτων ήταν παρόμοια με έργα που χρησιμοποιήθηκαν από τους Clarke και Roche (2009) και από τη Lamon (1999). Πιο συγκεκριμένα τα έργα 21α – 21στ αφορούσαν τη σύγκριση κλασμάτων. Τα έργα αυτά περιλάμβαναν ζευγάρια κλασμάτων με ίδιο αριθμητή και διαφορετικό παρονομαστή, ισοδύναμα κλάσματα, το ένα κλάσμα καταχρηστικό και το άλλο γνήσιο και ομώνυμα κλάσματα. Επίσης, περιλάμβαναν τη σύγκριση κλασμάτων όπως του $\frac{1}{3}$ και των $\frac{3}{8}$ και των $\frac{2}{6}$ με τα $\frac{10}{20}$ (σύγκριση με το μισό). Το έργο 22 παρουσίαζε στους μαθητές τέσσερα κλάσματα και οι μαθητές καλούνταν να τα σειροθετήσουν αρχίζοντας από το μικρότερο.

Τα έργα που χρησιμοποιήθηκαν για τη μέτρηση των αναπαραστάσεων είτε λήφθηκαν αυτούσια από την έρευνα του Niemi (1996a, 1996b), είτε ήταν παρόμοια με έργα που χρησιμοποίησε ο ίδιος ερευνητής όπως επίσης και άλλοι ερευνητές (Γαγάτσης κ.ά., 2001: Deliyianni et al., 2009). Τα έργα 23, 25 και 26 ζητούσαν από τους μαθητές να βάλουν σε κύκλο το σχέδιο ή τα σχέδια που έδειχναν τα κλάσματα $\frac{4}{6}$, $\frac{2}{4}$ και $\frac{3}{2}$ αντίστοιχα (μετάφραση σε εικονική αναπαράσταση). Τα έργα αυτά λήφθηκαν αυτούσια από την έρευνα του Niemi (1996a, 1996b) γιατί κρίθηκε ότι ήταν κατάλληλα για τη μέτρηση της ικανότητας των μαθητών να μεταφράζουν από συμβολική σε εικονική αναπαράσταση. Οι εικονικές αναπαραστάσεις ήταν κύκλοι, ορθογώνια, αριθμητικές γραμμές, ευθύγραμμα τμήματα και το κλάσμα ως μέρος συνόλου. Τα έργα 24, 30, 32 και 33 ζητούσαν από τους μαθητές να γράψουν προβλήματα που να έχουν ως απάντηση είτε ένα κλάσμα, είτε με πηγή εξίσωση κλασμάτων, είτε με πηγή σχέδιο (μετάφραση σε λεκτική αναπαράσταση). Παρόμοια έργα χρησιμοποιήθηκαν από τους Γαγάτση κ.ά. (2001) και από τους Deliyianni et al. (2009) για τη μετάφραση σε λεκτική αναπαράσταση. Τα έργα 27, 31, 35 και 37 ζητούσαν από τους μαθητές να κατασκευάσουν οι ίδιοι σχέδια για να δείξουν ένα κλάσμα, με βάση εξίσωση κλασμάτων ή από λεκτικά προβλήματα με κλάσματα (κατασκευή σχεδίου από τους ίδιους τους μαθητές). Στα έργα 28α – 28ε παρουσιάζονταν στους μαθητές σχέδια και οι μαθητές έπρεπε να κυκλώσουν το κλάσμα που έδειχνε το κάθε σχέδιο (μετάφραση σε συμβολική αναπαράσταση). Τα έργα αυτά λήφθηκαν αυτούσια από την έρευνα του Niemi (1996a, 1996b) γιατί θεωρήθηκε ότι ήταν κατάλληλα για τη μέτρηση της ικανότητας των μαθητών να μεταφράζουν από εικονική σε συμβολική αναπαράσταση. Στα έργα 29α – 29γ παρουσιάζονταν στους μαθητές αριθμητικές γραμμές και οι μαθητές έπρεπε να κυκλώσουν το κλάσμα που έδειχνε τόξο πάνω στην κάθε αριθμητική γραμμή. Παρόμοια έργα χρησιμοποιήθηκαν από τον Niemi (1996a, 1996b). Στα έργα 34 και 36 παρουσιάζονταν στους μαθητές προβλήματα με κλάσματα και καλούνταν να τα λύσουν αφού πρώτα γράψουν την εξίσωση. Ο παράγοντας αναπαραστάσεις θεωρούμε ότι αποτελείται από την ικανότητα των μαθητών να μεταφράζουν σε εικονική, συμβολική και λεκτική αναπαράσταση, από την ικανότητά τους να κατασκευάζουν τα δικά τους σχέδια για κλάσματα και από την ικανότητά τους να τοποθετούν κλάσματα στην αριθμητική γραμμή.

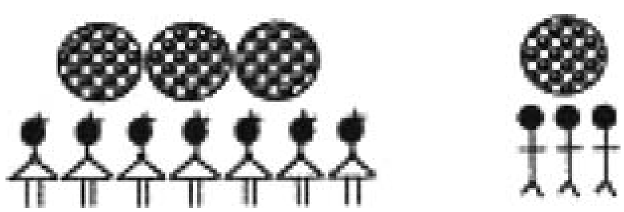
Στα έργα 38α – 38στ οι μαθητές καλούνταν να μετατρέψουν κλάσματα σε δεκαδικούς και στα έργα 39α – 39στ να μετατρέψουν κλάσματα σε ποσοστά. Στα έργα 40α – 40γ παρουσιάζονταν στους μαθητές δηλώσεις που συσχέτιζαν τα κλάσματα με τη διαίρεση αριθμητής÷παρονομαστής και οι μαθητές έπρεπε να αποφανθούν κατά πόσον η κάθε δήλωση ήταν ορθή ή λανθασμένη. Το έργο 41 ήταν πρόβλημα που για τη λύση του οι μαθητές έπρεπε να γνωρίζουν ότι το κλάσμα είναι διαίρεση αριθμητής÷παρονομαστής, π.χ. το κλάσμα $\frac{4}{7}$ ισοδυναμεί με τη διαίρεση 4÷7.

Από τις στατιστικές αναλύσεις στα δεδομένα της πιλοτικής φάσης επιβεβαιώθηκε το προτεινόμενο μοντέλο (με τους έξι παράγοντες) με την αφαίρεση μερικών έργων. Συγκεκριμένα, αφαιρέθηκαν τα έργα για την αριθμητική γραμμή (έργα 29α – 29γ), αφού ένα από αυτά είχε πολύ χαμηλή φόρτιση και με δύο έργα δεν σχηματίζεται παράγοντας. Επιπρόσθετα, αφαιρέθηκαν τρία έργα για τον επαγωγικό συλλογισμό (έργα 4β, 6 και 7), δύο έργα για τους ορισμούς και τις μαθηματικές εξηγήσεις (έργα 10 και 11), δύο έργα για την επιχειρηματολογία και την τεκμηρίωση (έργα 19 και 20), τρία έργα για την αίσθηση του μεγέθους των κλασμάτων (έργα 21α , 21γ και 21δ), ένα έργο που αφορά στη μετάφραση σε λεκτική αναπαράσταση (έργο 32), ένα έργο για τη μετάφραση σε συμβολική αναπαράσταση (έργο 28γ), τα έργα 34 και 36 όπου οι μαθητές καλούνταν να λύσουν προβλήματα με κλάσματα αφού πρώτα γράψουν την εξίσωση, ένα έργο για τη μετατροπή κλάσματος σε δεκαδικό (έργο 38στ) και ένα έργο για τη μετατροπή κλάσματος σε ποσοστό (έργο 39στ). Τα έργα αυτά αφαιρέθηκαν είτε γιατί η αφαίρεσή τους βελτίωνε τους στατιστικούς δείκτες, είτε γιατί είχαν τις χαμηλότερες φορτίσεις σε παράγοντες με περισσότερα από πέντε ή έξι έργα και έπρεπε να παραμείνουν λιγότερα έργα στα δοκίμια που θα χορηγούνταν στην κυρίως έρευνα. Συνολικά από τα δύο δοκίμια της πιλοτικής φάσης αφαιρέθηκαν 19 έργα.

Συνεπώς, από την πιλοτική φάση έμειναν 46 έργα και προστέθηκαν δέκα έργα για τον αναστοχασμό. Η συμπερίληψη του αναστοχασμού έγινε γιατί από την περαιτέρω μελέτη της βιβλιογραφίας προέκυψε ότι η συμπερίληψή του στους παράγοντες ήταν αναγκαία για να δοθεί μια πιο ολοκληρωμένη περιγραφή των παραγόντων που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων και γιατί θεωρήθηκε ότι είναι παράγοντας στον οποίο οι μαθητές πρέπει να είναι επαρκείς για να θεωρηθεί ότι κατανοούν τα κλάσματα. Ένα παράδειγμα έργου που χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση του αναστοχασμού παρουσιάζεται στον Πίνακα 3.2 που ακολουθεί.

Πίνακας 3.2

Παράδειγμα Έργου για τη Μέτρηση του Αναστοχασμού

Παράγοντας	Παραδείγματα έργων
Αναστοχασμός	Ποιοι θα πάρουν περισσότερη πίτσα, τα αγόρια ή τα κορίτσια; **Πρέπει οπωσδήποτε να εξηγήσεις τον τρόπο που σκέφτηκες για να καταλήξεις στην απάντησή σου.** 

Τα 56 έργα διαμοιράστηκαν στα δύο δοκίμια της κυρίως έρευνας έτσι ώστε οι μαθητές να χρειάζονται περίπου τον ίδιο χρόνο για τη συμπλήρωσή τους. Στο Δοκίμιο 1 περιλήφθηκαν 18 έργα και στο Δοκίμιο 2 περιλήφθηκαν 38 έργα (βλέπε Παράρτημα).

Στο Δοκίμιο 1 τα έργα 1-5 αφορούσαν τη μέτρηση του επαγωγικού συλλογισμού (Ε.Σ. 1-5)[2], τα έργα 6-9 τους ορισμούς και τις μαθηματικές εξηγήσεις (Ο.Ε.1-4), τα έργα 10-14 την επιχειρηματολογία και την τεκμηρίωση (Ε.Τ. 1-5) και τα έργα 15-18 τον αναστοχασμό (ΑΝ.ΣΚ. 1-4). Τα έργα 15-18 αφορούσαν στην ικανότητα των μαθητών να αιτιολογούν τον τρόπο που σκέφτηκαν και την απάντησή τους. Συγκεκριμένα, παρουσιάζονταν τέσσερα προβλήματα στους μαθητές και οι μαθητές καλούνταν να τα λύσουν και να εξηγήσουν τον τρόπο που σκέφτηκαν για να καταλήξουν στην απάντησή τους. Το πρόβλημα 15 λήφθηκε αυτούσιο από τη Lamon (1999), το πρόβλημα 16 χρησιμοποιήθηκε σε προηγούμενες έρευνες (Charalambous & Pitta, 2007: Davis, Hunting, & Pearn, 1993: Lamon, 1999), όπως και το πρόβλημα 17 (Charalambous & Pitta, 2007: Lamon, 1999: Marshall, 1993), ενώ το πρόβλημα 18 ήταν παρόμοιο με πρόβλημα που προτάθηκε από τη Lamon (1999).

Στο Δοκίμιο 2 τα έργα 19α – 19γ και 20 αφορούσαν την αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων (Α.Μ.Κ. 1-4), τα έργα 21-31 τις αναπαραστάσεις (έργα 21, 23 και 24 για τη μετάφραση σε εικονική αναπαράσταση (Μ.Ε. 1-3), έργα 22, 27 και 29 για τη μετάφραση σε λεκτική αναπαράσταση (Μ.Λ. 1-3), έργα 26α-26δ για τη μετάφραση σε συμβολική αναπαράσταση (Μ.Σ. 1-4), έργα 25, 28, 30 και 31 για την κατασκευή σχεδίου από τους ίδιους τους μαθητές (Κ.Σ. 1-4)), τα έργα 32-35 τις διασυνδέσεις με δεκαδικούς, ποσοστά και με τη διαίρεση (έργα 32α-32ε για τη μετατροπή κλασμάτων σε δεκαδικούς (Μ.Δ. 1-5), έργα 33α-33ε για τη μετατροπή σε ποσοστά (Μ.Π. 1-5) και τα έργα 34α-34γ και 35 για τη σχέση με τη διαίρεση ακεραίων (Δ.Α. 1-4)) και τα έργα 36-41 τον αναστοχασμό. Τα έργα που αναφέρονταν στον αναστοχασμό αφορούσαν στην ικανότητα των μαθητών να αιτιολογούν τη λογικότητα της απάντησης τους και να επαληθεύουν την απάντησή τους. Πιο συγκεκριμένα, στα έργα 36-38 (ΑΝ.ΛΟ. 1-3) παρουσιάζονταν στους μαθητές προβλήματα με κλάσματα στα οποία η εκτέλεση των πράξεων έδινε απάντηση που δεν ήταν ακέραιος αριθμός, αλλά η τελική απάντηση έπρεπε να ήταν ακέραιος αριθμός. Οι μαθητές καλούνταν να λύσουν τα προβλήματα και να εξηγήσουν την απάντησή τους (αναμενόταν από τους μαθητές να εκτελέσουν τις πράξεις και να παρατηρήσουν ότι η απάντηση έπρεπε να είναι ακέραιος αριθμός γιατί τότε η απάντηση θα στερείτο λογικότητας). Το πρόβλημα 36 αφορούσε

---

2 Κωδικοί για κάθε παράγοντα, για καλύτερη αναφορά στα αντίστοιχα έργα για τη μέτρησή τους.

διαίρεση κλασμάτων, το πρόβλημα 37 αναφερόταν στον αριθμό των μαθητών ενός σχολείου που έπρεπε να μεταφερθούν με λεωφορεία που το καθένα χωρούσε συγκεκριμένο αριθμό μαθητών και το πρόβλημα 38 ήταν και αυτό πρόβλημα διαίρεσης κλασμάτων. Στα έργα 39-41 (ΑΝ.ΕΠ. 1-3) παρουσιάζονταν στους μαθητές προβλήματα με κλάσματα και δινόταν η απάντηση (η απάντηση μπορούσε να ήταν ορθή ή λανθασμένη) και οι μαθητές καλούνταν να ελέγξουν κατά πόσον η απάντηση ήταν σωστή. Τα προβλήματα ήταν παρόμοια με προβλήματα που χρησιμοποιήθηκαν σε προηγούμενες έρευνες (Lamon, 1999: Niemi, 1996a, 1996b).

Κωδικοποίηση και Βαθμολόγηση των Απαντήσεων

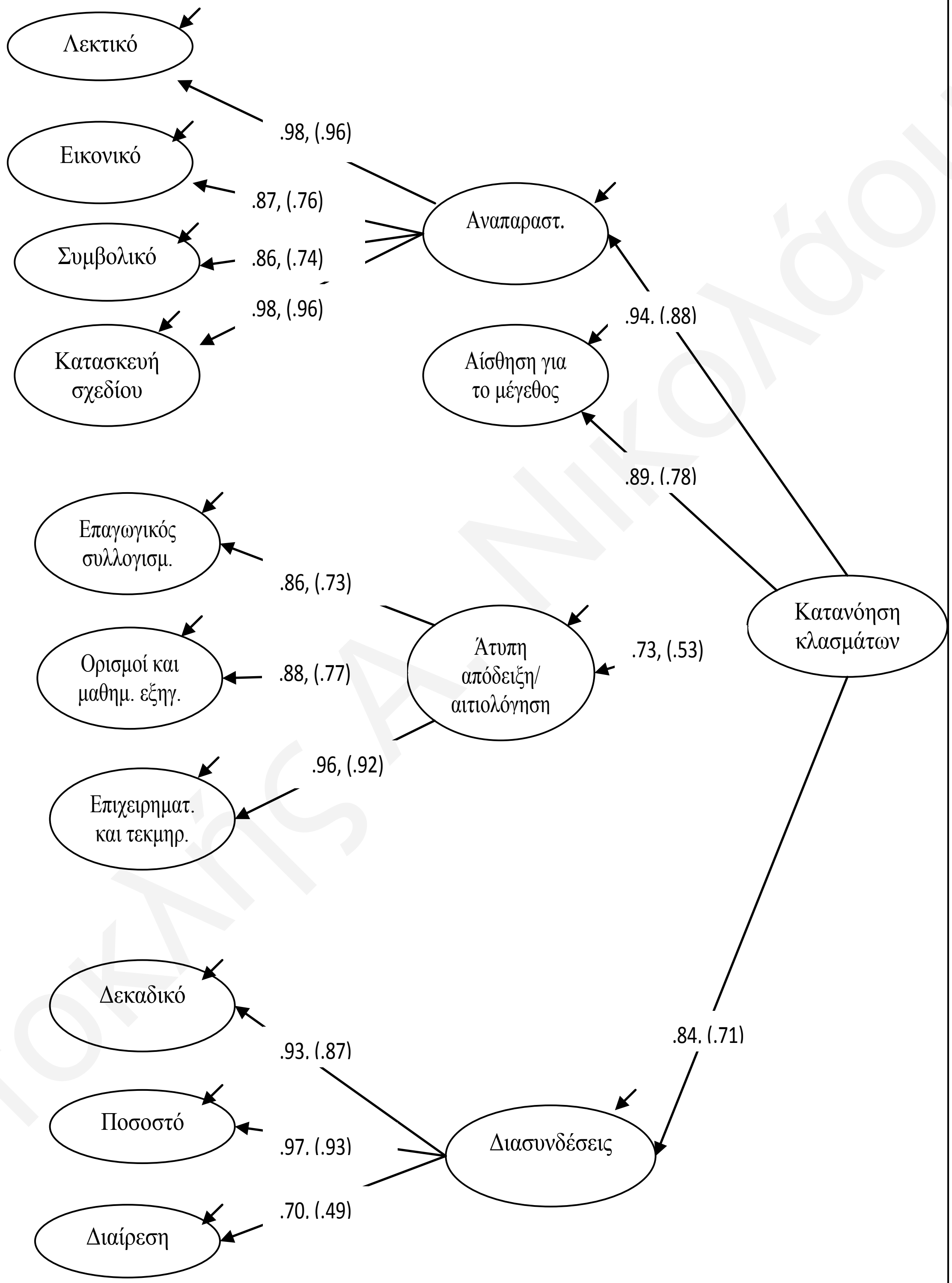
Για τη βαθμολόγηση των απαντήσεων των μαθητών έγινε πρώτα κωδικοποίησή τους (βλέπε Παράρτημα). Η κωδικοποίηση κρίθηκε αναγκαία, αφού οι απαντήσεις σε πολλά έργα δεν ήταν πλήρως ορθές ή πλήρως λανθασμένες, αλλά μπορούσαν να ήταν σε κάποιο βαθμό ορθές και ανάλογα με την ορθότητά τους να τους δίνονταν οι ανάλογες μονάδες. Η κωδικοποίηση συμφωνήθηκε από δύο ερευνητές, τον υποφαινόμενο και ακόμη ένα ερευνητή. Ακολούθως, για κάθε είδους απάντηση δόθηκε η ανάλογη βαθμολογία (βλέπε Παράρτημα). Παρακάτω γίνεται συνοπτική αναφορά στη βαθμολογία των έργων για κάθε παράγοντα.

Στα έργα για τον επαγωγικό συλλογισμό η βαθμολογία ήταν 0 ή 1 εκτός από το έργο 4 όπου 0.5 μονάδες δίνονταν στην περίπτωση που ο μαθητής συμπλήρωσε σωστά τον ένα αριθμό στο μοτίβο. Στα έργα για τους ορισμούς και τις μαθηματικές εξηγήσεις η βαθμολογία μπορούσε να κυμαίνεται από το 0 μέχρι το 1 και αυτό λόγω του ότι οι μαθητές έπρεπε να εξηγήσουν την απάντησή τους και ανάλογα με το είδος της εξήγησης δίνονταν οι ανάλογες μονάδες. Παρόμοια, για τα έργα για την επιχειρηματολογία και την τεκμηρίωση, η βαθμολογία ήταν από το 0 μέχρι το 1, ανάλογα με την πειστικότητα της τεκμηρίωσης. Το ίδιο συνέβαινε για τον αναστοχασμό, όπου δίνονταν μονάδες από το 0 μέχρι το 1 αναλόγως του κατά πόσον η σκέψη των μαθητών ήταν σωστή, αναλόγως της λογικότητας της απάντησης και της ικανότητάς τους να ελέγχουν τη λύση σε ένα πρόβλημα. Στα έργα για την αίσθηση του μεγέθους των κλασμάτων (έργα σύγκρισης ή σειροθέτησης) η βαθμολογία ήταν 0 ή 1, αφού είτε σωστή θα ήταν η σύγκριση και η σειροθέτηση των κλασμάτων, είτε λανθασμένη. Το ίδιο συνέβαινε στις διασυνδέσεις με δεκαδικούς, ποσοστά και με τη διαίρεση, αφού είτε σωστή θα ήταν η μετατροπή κλάσματος σε δεκαδικό ή ποσοστό είτε λανθασμένη. Το ίδιο ίσχυε στα έργα σύνδεσης του κλάσματος με την έννοια της διαίρεσης αριθμητής÷παρονομαστής. Όσον αφορά στα έργα των αναπαραστάσεων, σε μερικά έργα η βαθμολογία ήταν 0 ή 1, ενώ σε άλλα έργα υπήρχε διαβάθμιση από το 0 μέχρι το 1. Συγκεκριμένα, στα έργα μετάφρασης από συμβολική σε εικονική αναπαράσταση, όπου οι μαθητές έπρεπε να βάλουν σε κύκλο τις εικονικές αναπαραστάσεις που έδειχναν διάφορα κλάσματα, η βαθμολογία κυμαινόταν από 0 μέχρι 1 ανάλογα με τη διαφορά του αριθμού των σωστών εικονικών αναπαραστάσεων από τις λανθασμένες. Στα έργα που αφορούσαν μετάφραση σε λεκτική αναπαράσταση, η βαθμολογία ήταν 0 σε περίπτωση που το πρόβλημα ήταν εντελώς λανθασμένο, δίνονταν 0.5 μονάδες όταν ο μαθητής προσπαθούσε να γράψει σωστό πρόβλημα, αλλά υπήρχαν αδυναμίες στη διατύπωση του προβλήματος ή στη διατύπωση της ερώτησης και το πρόβλημα έπαιρνε 1 μονάδα όταν ήταν εντελώς σωστό από μαθηματικής και γλωσσικής άποψης και ανταποκρινόταν στο σχετικό έργο. Στα έργα όπου ο μαθητής έπρεπε να κατασκευάσει από μόνος του σχέδιο για να δείξει κλάσματα, η βαθμολογία κυμαινόταν από 0 μέχρι 1 ανάλογα με το είδος του σχεδίου. Τέλος, όσον αφορά στη μετάφραση από εικονική σε συμβολική αναπαράσταση, η βαθμολογία ήταν 0 ή 1 αν οι μαθητές έβαζαν το σωστό κλάσμα σε κύκλο ή όχι.

Εγκυρότητα Εργαλείων Μέτρησης

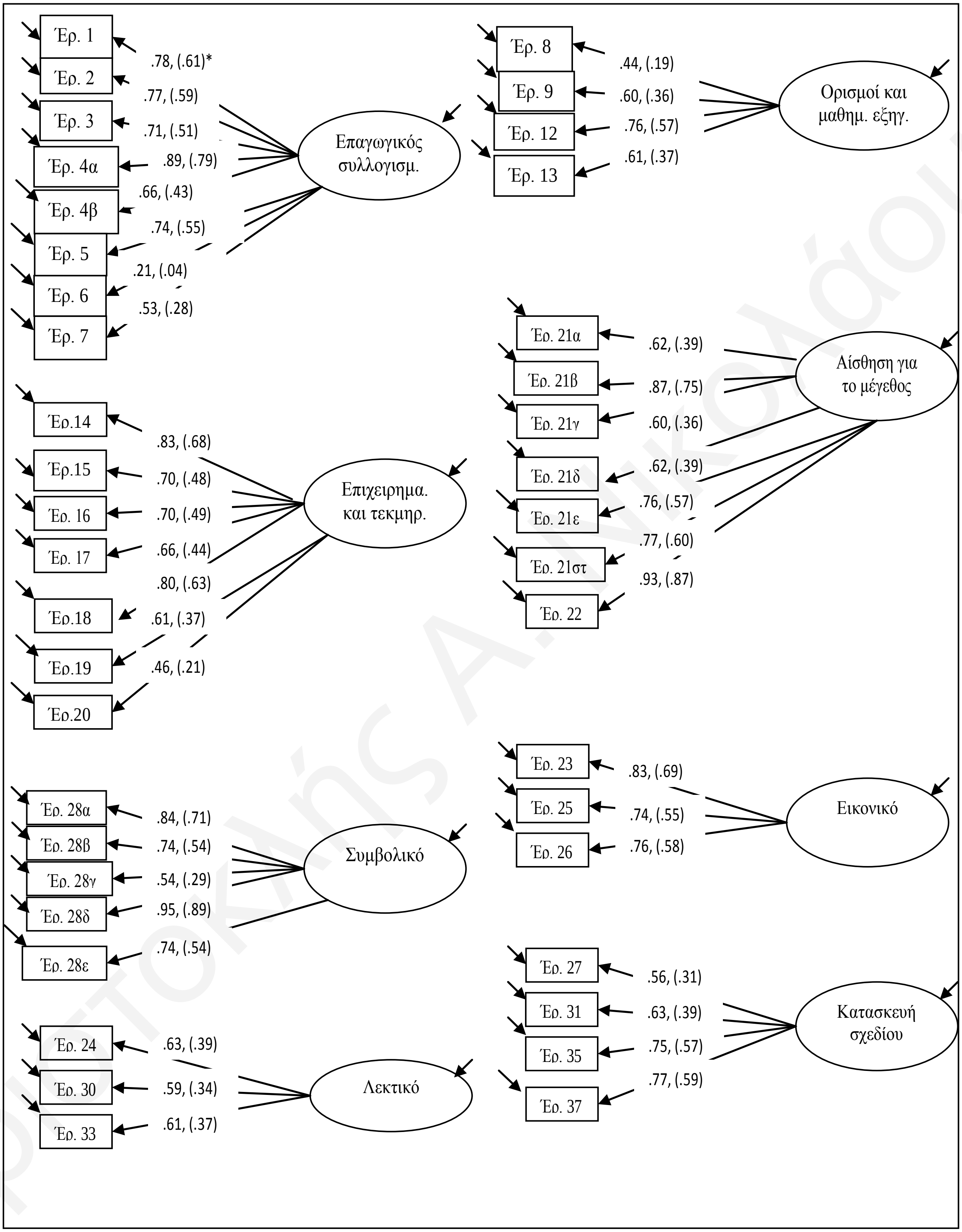
Για τον έλεγχο της εγκυρότητας των δοκιμίων μέτρησης των παραγόντων που θεωρούμε ότι συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων πραγματοποιήθηκε πιλοτική χορήγησή τους. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης των δεδομένων της πιλοτικής φάσης έδειξαν ότι η προσαρμογή του μοντέλου στα δεδομένα ήταν πολύ καλή επιβεβαιώνοντας τη δομή του προτεινόμενου μοντέλου *(CFI = .971,* x^2*=338.478, df =198,* x^2*/df =1.71,* $p<0.05$*, RMSEA = 0.045).* Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης έδειξαν ότι οκτώ έργα έπρεπε να αφαιρεθούν (ανάμεσά τους τα τρία έργα που αναφέρονταν στην αριθμητική γραμμή). Το τελικό μοντέλο με τα υπόλοιπα έργα για το οποίο έχουμε τους δείκτες που φαίνονται παρακάτω φαίνεται στο Διάγραμμα 3.3. Λόγω έλλειψης χώρου, οι φορτίσεις των έργων σε κάθε παράγοντα δεν συμπεριλήφθηκαν στο πιο πάνω διάγραμμα, αλλά παρουσιάζονται στο Διάγραμμα 3.4 που ακολουθεί.

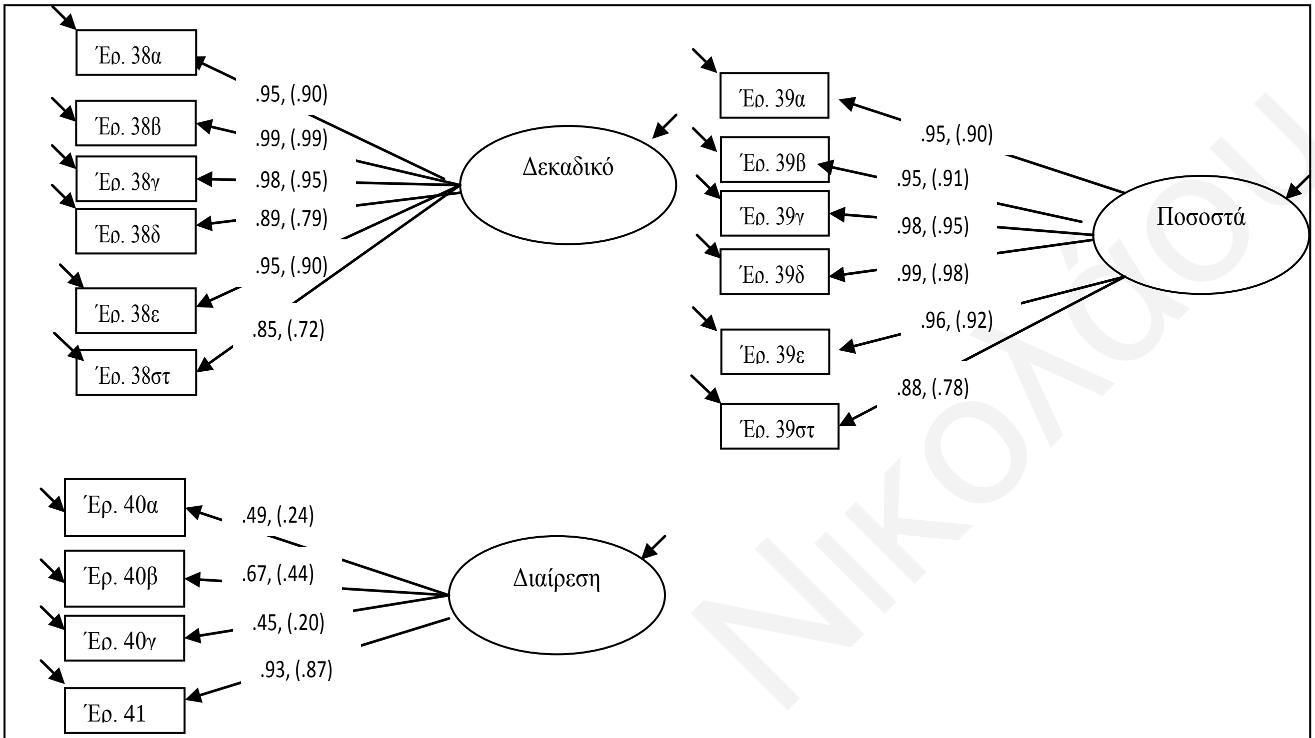
Από το Διάγραμμα 3.3, φαίνεται ότι ο επαγωγικός συλλογισμός, οι ορισμοί και οι μαθηματικές εξηγήσεις και η επιχειρηματολογία και τεκμηρίωση (πρώτης τάξης παράγοντες) συνθέτουν ένα δεύτερης τάξης παράγοντα που συνθέτει την κατανόηση των κλασμάτων. Σε αυτόν το δεύτερης τάξης παράγοντα δώσαμε το όνομα «Άτυπη απόδειξη/αιτιολόγηση» στο επίπεδο του δημοτικού σχολείου, αφού και οι τρεις παράγοντες έχουν σχέση με την αιτιολόγηση που απαιτείται από τους μαθητές του δημοτικού σχολείου, όπως και με ένα είδος άτυπης απόδειξης. Οι αναπαραστάσεις (2^{ης} τάξης παράγοντας) αποτελούνται, όπως είχαμε υποθέσει, από την ικανότητα μετάφρασης σε λεκτική, εικονική και συμβολική αναπαράσταση και από την ικανότητα των μαθητών να κατασκευάζουν δικά τους σχέδια για να αναπαραστήσουν κλασματικούς αριθμούς (1^{ης} τάξης παράγοντες). Επίσης, οι διασυνδέσεις με δεκαδικούς, ποσοστά και με τη διαίρεση (2^{ης} τάξης παράγοντας) αποτελούνται από τη σύνδεση των κλασμάτων με τους δεκαδικούς, τα ποσοστά και τη διαίρεση (1^{ης} τάξης παράγοντες), όπως επίσης είχαμε υποθέσει.



* Ο πρώτος αριθμός δείχνει το συντελεστή φόρτισης και ο αριθμός στην παρένθεση την αντίστοιχη ερμηνευμένη διασπορά (r^2).

Διάγραμμα 3.3. Το Μοντέλο που Προέκυψε από την Πιλοτική Χορήγηση των Δοκιμίων


Έρ. 1
Έρ. 2
Έρ. 3
Έρ. 4α
Έρ. 4β
Έρ. 5
Έρ. 6
Έρ. 7
.78, (.61)*
.77, (.59)
.71, (.51)
.89, (.79)
.66, (.43)
.74, (.55)
.21, (.04)
.53, (.28)
Επαγωγικός συλλογισμ.
Έρ. 8
Έρ. 9
Έρ. 12
Έρ. 13
.44, (.19)
.60, (.36)
.76, (.57)
.61, (.37)
Ορισμοί και μαθημ. εξηγ.
Έρ.14
Έρ.15
Έρ. 16
Έρ. 17
Έρ.18
Έρ.19
Έρ.20
.83, (.68)
.70, (.48)
.70, (.49)
.66, (.44)
.80, (.63)
.61, (.37)
.46, (.21)
Επιχειρημα. και τεκμηρ.
Έρ. 21α
Έρ. 21β
Έρ. 21γ
Έρ. 21δ
Έρ. 21ε
Έρ. 21στ
Έρ. 22
.62, (.39)
.87, (.75)
.60, (.36)
.62, (.39)
.76, (.57)
.77, (.60)
.93, (.87)
Αίσθηση για το μέγεθος
Έρ. 28α
Έρ. 28β
Έρ. 28γ
Έρ. 28δ
Έρ. 28ε
.84, (.71)
.74, (.54)
.54, (.29)
.95, (.89)
.74, (.54)
Συμβολικό
Έρ. 23
Έρ. 25
Έρ. 26
.83, (.69)
.74, (.55)
.76, (.58)
Εικονικό
Έρ. 24
Έρ. 30
Έρ. 33
.63, (.39)
.59, (.34)
.61, (.37)
Λεκτικό
Έρ. 27
Έρ. 31
Έρ. 35
Έρ. 37
.56, (.31)
.63, (.39)
.75, (.57)
.77, (.59)
Κατασκευή σχεδίου



* Ο πρώτος αριθμός δείχνει το συντελεστή φόρτισης και ο αριθμός στην παρένθεση την αντίστοιχη ερμηνευμένη διασπορά (r^2).

Διάγραμμα 3.4. Οι Φορτίσεις των Έργων σε Κάθε Παράγοντα στην Πιλοτική Φάση

Η επιβεβαίωση του μοντέλου έδειξε ότι τα έργα των δοκιμίων αποτελούσαν κατάλληλους δείκτες των άδηλων παραγόντων. Με βάση τα αποτελέσματα αυτά θεωρήθηκε ότι η εγκυρότητα των εργαλείων μέτρησης ήταν πολύ καλή.

Παρεμβατικό Πρόγραμμα

Το παρεμβατικό πρόγραμμα που θα εφαρμοστεί στους μαθητές της πειραματικής ομάδας έχει ως στόχο την ανάπτυξη της ικανότητάς τους στους παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων. Γι’ αυτό το λόγο, το περιεχόμενό του περιλαμβάνει δραστηριότητες (στις οποίες γίνεται αναλυτική αναφορά πιο κάτω) που αποσκοπούν στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών στον επαγωγικό συλλογισμό, τους ορισμούς και τις μαθηματικές εξηγήσεις, την επιχειρηματολογία και την τεκμηρίωση, την αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων, τις αναπαραστάσεις, τις διασυνδέσεις των κλασμάτων με τους δεκαδικούς, τα ποσοστά και με τη διαίρεση και τον αναστοχασμό. Πρέπει να αναφερθεί ότι με βάση το υφιστάμενο Α.Π. και τα βιβλία των μαθηματικών Στ΄ τάξης κάποια έμφαση δίνεται στους περισσότερους από αυτούς τους παράγοντες. Ωστόσο, η έμφαση που δίνεται στους περισσότερους παράγοντες φαίνεται να είναι μικρότερη από την έμφαση που δίνεται με βάση το παρεμβατικό πρόγραμμα της παρούσας έρευνας. Πιο συγκεκριμένα, όσον αφορά στην αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων και τις διασυνδέσεις των κλασμάτων με τους δεκαδικούς, τα ποσοστά και με τη διαίρεση, δίνεται μεγάλη έμφαση από το υφιστάμενο Α.Π. και τα βιβλία των μαθηματικών. Όσον αφορά αυτούς τους δύο παράγοντες, η έμφαση που δίνεται από το παρεμβατικό πρόγραμμα είναι παρόμοια με την έμφαση του υφιστάμενου Α.Π. και των βιβλίων μαθηματικών. Όσον αφορά στους ορισμούς και τις μαθηματικές εξηγήσεις, τις αναπαραστάσεις και τον αναστοχασμό, δίνεται κάποια έμφαση από το υφιστάμενο Α.Π. και τα βιβλία των μαθηματικών, ωστόσο η έμφαση είναι μικρότερη από την έμφαση που δίνεται με βάση το παρεμβατικό πρόγραμμα της παρούσας εργασίας. Αναφορικά με τον επαγωγικό συλλογισμό και την επιχειρηματολογία και την τεκμηρίωση, δίνεται πολύ λίγη έμφαση με βάση το υφιστάμενο Α.Π. και τα βιβλία των μαθηματικών. Όσον αφορά αυτούς τους δύο παράγοντες, το παρεμβατικό πρόγραμμα της παρούσας εργασίας δίνει πολύ μεγαλύτερη έμφαση.

Όσον αφορά στο σχεδιασμό του παρεμβατικού προγράμματος, αυτός βασίζεται σε κάποιες αρχές. Συγκεκριμένα, οι δραστηριότητες και τα προβλήματα που τίθενται στους μαθητές καταβάλλεται προσπάθεια να είναι ελκυστικά και ενδιαφέροντα και να έχουν σχέση με την καθημερινή ζωή, έτσι ώστε να προσελκύουν το ενδιαφέρον των μαθητών (Elbers, 2003). Ακόμη, καταβάλλεται προσπάθεια ώστε οι δραστηριότητες σε κάθε διδασκαλία να είναι διαβαθμισμένες από τις ευκολότερες στις δυσκολότερες (παρόμοια φιλοσοφία εφαρμόστηκε στο εκπαιδευτικό πρόγραμμα του Klauer για τον επαγωγικό συλλογισμό). Οι μαθητές εργάζονται σε κάποιες περιπτώσεις ατομικά και σε κάποιες άλλες περιπτώσεις ομαδικά και ευνοείται η συζήτηση στην ομάδα και η ανταλλαγή απόψεων (Elbers, 2003: Martino & Maher, 1999: Terwel et al., 2009). Ο εκπαιδευτικός αναμένεται να περιφέρεται από ομάδα σε ομάδα και να παρέχει ανατροφοδότηση. Μετά το πέρας της ατομικής ή της ομαδικής εργασίας αναμένεται να διεξαχθεί συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης. Οι μαθητές αναμένεται να συζητήσουν στην ολομέλεια της τάξης και ευνοείται η αλληλεπίδραση και η ανταλλαγή απόψεων (Elbers, 2003: Martino & Maher, 1999: Terwel et al., 2009). Ο εκπαιδευτικός με τις ερωτήσεις του αναμένεται να κατευθύνει τη συζήτηση και να προβληματίσει τους μαθητές (Martino & Maher, 1999). Σε όλες τις διδασκαλίες οι μαθητές καλούνται να εξηγήσουν τον τρόπο που σκέφτηκαν και να αιτιολογήσουν τις επιλογές τους.

Το παρεμβατικό πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε δέκα διδασκαλίες, τρεις από τις οποίες έχουν διάρκεια 80 λεπτά και οι υπόλοιπες επτά διάρκεια 40 λεπτά. Η εφαρμογή του θα ξεκινήσει περί τα τέλη Οκτωβρίου 2009, αμέσως μετά την πρώτη μέτρηση (pre-test) και ολοκληρώνεται σε χρονική διάρκεια δέκα περίπου εργάσιμων εβδομάδων περί τα τέλη Ιανουαρίου 2010. Οι εκπαιδευτικοί καλούνται να κάνουν μία διδασκαλία τη βδομάδα. Τα σχέδια μαθήματος όπως και τα φύλλα εργασίας στα οποία θα καταγράφουν οι μαθητές την εργασία τους θα δοθούν έτοιμα σε εκπαιδευτικούς και μαθητές αντίστοιχα.

Ο χρόνος διδασκαλίας για κάθε παράγοντα είναι περίπου ο ίδιος (2-3 μαθήματα των 40΄). Αυτό γίνεται έτσι ώστε να δίνεται περίπου η ίδια έμφαση σε κάθε παράγοντα. Το κάθε μάθημα θα στοχεύει στη διδασκαλία ενός ή και περισσότερων παραγόντων (παρακάτω γίνεται ενδελεχής περιγραφή κάθε διδασκαλίας) και θα υπάρχουν δραστηριότητες οι οποίες στοχεύουν στη διδασκαλία περισσότερων από ενός παραγόντων. Ακόμη, χρησιμοποιούνται δραστηριότητες από τα βιβλία μαθηματικών Στ΄ τάξης.

Αναλυτική Περιγραφή Διδασκαλιών

Οι δραστηριότητες που αναπτύχθηκαν στα πλαίσια της επίτευξης των στόχων του παρεμβατικού προγράμματος έχουν ένα κοινό θεματικό περιεχόμενο, ελκυστικό και ευχάριστο για τα παιδιά. Συγκεκριμένα, το σενάριο αφορά το ταξίδι του «Μαθηματικού» στη χώρα των κλασμάτων. Το ταξίδι περιλαμβάνει διάφορες δραστηριότητες και ο συμμετέχοντας πρέπει να απαντήσει σε ερωτήσεις και να λύσει κάποια προβλήματα. Αν ο συμμετέχοντας απαντήσει σε όλες τις ερωτήσεις και λύσει σωστά όλα τα προβλήματα κάθε δραστηριότητας, τότε προχωρά στην επόμενη δραστηριότητα όπου τον περιμένουν καινούριες περιπέτειες. Πιο κάτω γίνεται αναλυτική περιγραφή καθεμιάς από τις δέκα διδασκαλίες (βλέπε Παράρτημα).

Διδασκαλία 1: Διδασκαλία για την ανάπτυξη της ικανότητας στους ορισμούς, τις αναπαραστάσεις και τις διασυνδέσεις των κλασμάτων με τη διαίρεση

Στόχος της πρώτης διδασκαλίας που έχει διάρκεια 80 λεπτά είναι η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να «ορίζουν», να αναγνωρίζουν κλάσματα σε διάφορα είδη αναπαραστάσεων, να τοποθετούν κλάσματα πάνω στην αριθμητική γραμμή και να συνδέουν τα κλάσματα με την έννοια της διαίρεσης αριθμητής÷παρονομαστής.

Ως αφόρμηση, ο εκπαιδευτικός αναμένεται να αναφερθεί στο ταξίδι του Μαθηματικού στη χώρα των κλασμάτων για να κεντρίσει το ενδιαφέρον των μαθητών και να γίνουν τα μαθήματα ελκυστικά και ευχάριστα για τα παιδιά.

Στην πρώτη δραστηριότητα ο εκπαιδευτικός καλεί τους μαθητές να του πουν διάφορα κλάσματα και στη συνέχεια τους θέτει τον προβληματισμό τι είναι κλάσμα. Οι μαθητές σε πρώτο στάδιο συζητούν στις ομάδες τους και ανταλλάζουν απόψεις, ενώ ο εκπαιδευτικός περιφέρεται και παρέχει επιβράβευση και ανατροφοδότηση. Οι μαθητές καταγράφουν τις απαντήσεις τους στα φύλλα εργασίας (φυλλάδιο 1). Στη συνέχεια, οι μαθητές αναμένεται να παρουσιάσουν τα αποτελέσματα της εργασίας τους στην ολομέλεια της τάξης, όπου θα λάβει χώρα συζήτηση και οι μαθητές καλούνται να τεκμηριώσουν την απάντησή τους. Στο τέλος της συζήτησης ο εκπαιδευτικός αναμένεται να ανακεφαλαιώσει και να διασφαλίσει ότι αναφέρθηκαν όσο το δυνατό περισσότεροι ορισμοί σε σχέση με το τι είναι κλάσμα.

Σε περίπτωση που δεν έχει αναφερθεί από τους μαθητές σύνδεση του κλάσματος με τη διαίρεση αριθμητής÷παρονομαστής, τότε ο εκπαιδευτικός πρέπει να το επιτύχει αυτό. Γι’ αυτό το σκοπό μπορεί να παρουσιάσει το πρόβλημα που αναφέρεται στη Διδασκαλία 1 (βλέπε Παράρτημα).

Στη συνέχεια, οι μαθητές πρέπει να κάνουν τις σελίδες 42, 43, 44 και 45 από το Μέρος Α΄ του βιβλίου για το μαθητή της Στ΄ τάξης. Οι εργασίες στη σελ. 42 αναφέρονται στην έννοια του κλάσματος ως μέρος συνόλου, ως μέρος επιφάνειας και ως μέρος μιας ολόκληρης μονάδας (έννοια του κλάσματος). Στη σελ. 43 οι εργασίες αναφέρονται στις αναπαραστάσεις και πιο συγκεκριμένα στη μετάφραση από εικονική αναπαράσταση σε αριθμητική γραμμή, στην έννοια του κλάσματος ως μέρος ευθύγραμμου τμήματος, στην εκτίμηση του σκιασμένου μέρους σε διάφορα σχήματα (μετάφραση από εικονική σε συμβολική αναπαράσταση) και στο κλάσμα ως μέρος επιφάνειας. Οι εργασίες στη σελ. 44 αναφέρονται στο κλάσμα ως μέρος του μέτρου, μέρος του κιλού και μέρος του λίτρου. Οι εργασίες στη σελ. 45 αποσκοπούν στη σύνδεση του κλάσματος με τη διαίρεση αριθμητής÷παρονομαστής. Η συμπλήρωση αυτών των εργασιών είναι απαραίτητη τόσο για την εμπέδωση από τους μαθητές της ικανότητάς τους να ορίζουν τι είναι κλάσμα και για τη διασύνδεση με τη διαίρεση αριθμητής÷παρονομαστής, αλλά και για να αναπτυχθεί η ικανότητά τους να αναγνωρίζουν κλάσματα σε διάφορα είδη αναπαραστάσεων και να μεταφράζουν από ένα είδος αναπαράστασης σε άλλο.

Διδασκαλία 2: Διδασκαλία για την ανάπτυξη της ικανότητας διασύνδεσης των κλασμάτων με τους δεκαδικούς και τα ποσοστά

Στόχος της δεύτερης διδασκαλίας που έχει διάρκεια 40 λεπτά είναι η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να συνδέουν τα κλάσματα με τα άλλα δύο είδη ρητών αριθμών, τους δεκαδικούς και τα ποσοστά. Η δεύτερη διδασκαλία είναι συμπληρωματική της σύνδεσης με τη διαίρεση που θα γίνει στην πρώτη διδασκαλία.

Στην αρχή του μαθήματος, ο εκπαιδευτικός αναμένεται να ζητήσει από τους μαθητές να του πούνε με ποια άλλα είδη αριθμών συνδέονται τα κλάσματα (η σύνδεση μπορεί να έχει γίνει στο προηγούμενο μάθημα). Σε περίπτωση που οι μαθητές δεν μπορούν να απαντήσουν, τότε ο δάσκαλος μπορεί να ρωτήσει κατά πόσον έμαθαν κάτι άλλο που να έχει σχέση με τα κλάσματα, π.χ. κατά πόσον το $\frac{1}{4}$ μπορώ να το δείξω με κάποιο άλλο αριθμό που να έχει σχέση με το $\frac{1}{4}$. Οι μαθητές καταλήγουν με αυτό τον τρόπο στη σύνδεση των κλασμάτων με τους δεκαδικούς και τα ποσοστά.

Ακολούθως, ο εκπαιδευτικός αναμένεται να υποβάλει το ερώτημα τι είναι οι δεκαδικοί και τι είναι τα ποσοστά. Αναλόγως των δυνατοτήτων των μαθητών, οι μαθητές μπορούν να εργαστούν είτε στις ομάδες τους, είτε αναπτύσσεται συζήτηση με όλη την τάξη (με καθοδήγηση του εκπαιδευτικού) κι αυτό διότι ο ορισμός του δεκαδικού αριθμού και του ποσοστού θεωρούμε ότι είναι αρκετά δύσκολο έργο για τους μαθητές του δημοτικού σχολείου. Οι μαθητές καταγράφουν τις απαντήσεις τους στα φύλλα εργασίας (φυλλάδιο 2). Η συζήτηση αναμένεται να καταλήξει στο ότι οι δεκαδικοί αριθμοί είναι κλάσματα με παρονομαστή πολλαπλάσια του 10 (παρονομαστής 10, 100, 1000 ...) και ότι τα ποσοστά είναι ένα είδος αριθμού που ισοδυναμούν με κλάσματα που έχουν παρονομαστή το 100.

Στη συνέχεια, ο εκπαιδευτικός αναμένεται να ζητήσει από τους μαθητές να μετατρέψουν κλάσματα σε δεκαδικούς και ποσοστά και το αντίστροφο. Σε περίπτωση που οι μαθητές έχουν ξεχάσει τη σύνδεση με τους δεκαδικούς και τα ποσοστά από την Ε΄ τάξη (αυτό ήταν πολύ πιθανό ενδεχόμενο), αναμένεται να γίνει η ανάλογη υπενθύμιση από τον εκπαιδευτικό.

Ακόμη, οι μαθητές αναμένεται να κάνουν τις σελ. 88, 89, 90, 91 , 92 και 93 από το Μέρος Α΄ του βιβλίου για το μαθητή της Στ΄ τάξης. Οι εκπαιδευτικοί έχουν την ευχέρεια να επιλέξουν μερικές από τις εργασίες, που θα εξυπηρετούν καλύτερα το στόχο της σύνδεσης των κλασμάτων με τους δεκαδικούς και τα ποσοστά, κι αυτό αφού δεν θα είναι δυνατόν στο χρόνο που έχουν οι μαθητές να κάνουν όλες τις σελίδες. Οι υπόλοιπες εργασίες μπορούν να ανατεθούν σαν κατ' οίκον εργασία.

Οι σελ. 88-93 εξυπηρετούν την εμπέδωση από τους μαθητές της σύνδεσης ανάμεσα στα κλάσματα, τους δεκαδικούς και τα ποσοστά. Συγκεκριμένα, η σελ. 88 αναφέρεται στην ανακάλυψη των δεκαδικών αριθμών. Στη σελ. 89 υπάρχουν εργασίες για τη σύνδεση των κλασμάτων με τους δεκαδικούς. Στη σελ. 90 υπάρχει ο ορισμός του ποσοστού και η σύνδεση κλάσματος, δεκαδικού και ποσοστού. Ακόμη, μία εργασία ζητά τη μετατροπή από εικονική αναπαράσταση σε συμβολική και το αντίστροφο για κλάσματα, δεκαδικούς και ποσοστά. Στη σελ. 91 υπάρχει πίνακας όπου δίνεται είτε το κλάσμα, είτε ο δεκαδικός, είτε το ποσοστό και οι μαθητές πρέπει να κάνουν τις μετατροπές στα άλλα δύο είδη αριθμού. Ακόμη, υπάρχουν εργασίες σύγκρισης κλασμάτων, δεκαδικών και ποσοστών, αντίληψης του μεγέθους αυτών των αριθμών και κατανόησης από μέρους των μαθητών ότι αυτά τα τρία είδη αριθμών είναι ισοδύναμα. Οι εργασίες στη σελ. 92 αναφέρονται στην τοποθέτηση κλασμάτων, δεκαδικών και ποσοστών στην αριθμητική γραμμή, στην αναγνώριση κλασμάτων, δεκαδικών και ποσοστών ως μέρος ευθύγραμμου τμήματος και στην εκτίμηση με ποσοστό τι μέρος από κάθε σχήμα είναι σκιασμένο. Στις σελ. 92 και 93 υπάρχουν προβλήματα με ποσοστά.

Διδασκαλία 3: Διδασκαλία για την ανάπτυξη της ικανότητας στις αναπαραστάσεις και της αίσθησης για το μέγεθος των κλασμάτων

Στόχος της τρίτης διδασκαλίας που έχει διάρκεια 40 λεπτά είναι η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να αναπαριστούν κλάσματα με τη χρήση εικονικών αναπαραστάσεων και να αποκτήσουν αίσθηση του μεγέθους των κλασματικών αριθμών.

Ως αφόρμηση, ο δάσκαλος γράφει στον πίνακα το κλάσμα $\frac{7}{8}$ και καλεί τους μαθητές να κάνουν σχέδιο ή σχέδια για να δείξουν αυτό το κλάσμα. Οι μαθητές εργάζονται ατομικά και καταγράφουν την εργασία τους στα φύλλα εργασίας (φυλλάδιο 3).

Στη συνέχεια, οι μαθητές εργάζονται σε ζευγάρια. Ο ένας μαθητής αναφέρει μερικά κλάσματα και ο άλλος πρέπει να κατασκευάσει όσες περισσότερες εικονικές αναπαραστάσεις μπορεί για να τα παρουσιάσει. Μετά αλλάζουν ρόλους. Οι μαθητές καταγράφουν τις εικονικές αναπαραστάσεις στα φύλλα εργασίας (φυλλάδιο 3). Ο δάσκαλος περιφέρεται από ομάδα σε ομάδα και παρέχει ανατροφοδότηση. Ακολουθεί παρουσίαση των αποτελεσμάτων ενώπιον της τάξης και γίνεται προσπάθεια τα κλάσματα να παρουσιαστούν με όσο το δυνατόν διαφορετικές αναπαραστάσεις: κύκλος, τετράγωνο, ορθογώνιο, μέρος-όλο, αριθμητική γραμμή.

Στη δεύτερη δραστηριότητα που αφορά στην αίσθηση του μεγέθους των κλασμάτων, οι μαθητές κάνουν τις σελίδες 80 και 81 από το Μέρος Α΄ του βιβλίου για το μαθητή της Στ΄ τάξης. Οι σελίδες αναφέρονται στη σύγκριση και τη σειροθέτηση κλασμάτων. Στη σελίδα 80 η σύγκριση και η σειροθέτηση γίνεται με τη βοήθεια εικονικών αναπαραστάσεων. Στην πρώτη εργασία οι εικονικές αναπαραστάσεις για κάθε κλάσμα δίνονται έτοιμες, ενώ στη δεύτερη εργασία, υπάρχουν ορθογώνια και οι μαθητές πρέπει να χρωματίσουν το κατάλληλο μέρος για να προβούν στη σύγκριση. Στη σελ. 81 οι μαθητές πρέπει να βάλουν σε κύκλο κλάσματα μεγαλύτερα από το $\frac{1}{2}$, πρέπει να συγκρίνουν και να σειροθετήσουν κλάσματα αρχίζοντας από το μικρότερο και πρέπει να λύσουν πρόβλημα που αφορά κλάσματα.

Διδασκαλία 4: Διδασκαλία για την ανάπτυξη της ικανότητας στις αναπαραστάσεις

Η τέταρτη διδασκαλία που έχει διάρκεια 80 λεπτά έχει ως στόχο την ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να μεταφράζουν από λεκτική και συμβολική αναπαράσταση σε εικονική και αντίστροφα. Αυτή η διδασκαλία είναι συμπληρωματική προηγούμενων διδασκαλιών (διδασκαλία 1 και διδασκαλία 3) για τη διδασκαλία των αναπαραστάσεων.

Στην αφόρμηση, ο δάσκαλος αναμένεται να πληροφορήσει τους μαθητές για το περιεχόμενο του μαθήματος, ότι δηλαδή θα φτιάξουν σχέδια για εξισώσεις και προβλήματα και θα πρέπει να γράψουν προβλήματα για σχέδια και εξισώσεις.

Ο δάσκαλος γράφει την εξίσωση $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$=ν στον πίνακα και ζητά από τους μαθητές να κατασκευάσουν κάποιο σχέδιο γι' αυτή την εξίσωση (μετάφραση από συμβολική σε εικονική αναπαράσταση). Οι μαθητές καταγράφουν τη δουλειά τους στα φύλλα εργασίας (φυλλάδιο 4) και στη συνέχεια αναμένεται να παρουσιάσουν τα αποτελέσματα της εργασίας τους στην τάξη όπου και διεξάγεται συζήτηση.

Στη συνέχεια, οι μαθητές αναμένεται να σκεφτούν και να γράψουν πρόβλημα για την παραπάνω εξίσωση (μετάφραση από συμβολική σε λεκτική αναπαράσταση) (φυλλάδιο 4). Τα προβλήματα που θα γράψουν οι μαθητές συζητούνται στην τάξη ως προς το περιεχόμενο και τη λογικότητα της απάντησής τους.

Ακολούθως, ο δάσκαλος παρουσιάζει το εξής πρόβλημα στους μαθητές και οι μαθητές καλούνται να το λύσουν κάνοντας κάποιο σχέδιο (μετάφραση από λεκτική σε εικονική αναπαράσταση).

«Ο Γιώργος έφαγε το $\frac{1}{3}$ από το $\frac{1}{4}$ μιας πίτσας. Τι μέρος της πίτσας έφαγε;»

Οι μαθητές καταγράφουν την εργασία τους στα φύλλα εργασίας (φυλλάδιο 4). Εργάζονται πρώτα ατομικά και στη συνέχεια με το διπλανό τους. Μετά αναμένεται να παρουσιάσουν τη δουλειά τους στην ολομέλεια της τάξης και διεξάγεται συζήτηση.

Από τα παραπάνω, φαίνεται ότι η αφόρμηση αποσκοπεί σε μια πρώτη εξάσκηση των μαθητών στα διάφορα είδη μεταφράσεων από ένα είδος αναπαράστασης σε άλλο και στην παροχή βοήθειας από τον εκπαιδευτικό, έτσι ώστε οι μαθητές που αντιμετωπίζουν δυσκολίες να ανταποκριθούν στις δραστηριότητες που ακολουθούν.

Η πρώτη δραστηριότητα στοχεύει στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να μεταφράζουν σε συμβολική και σε εικονική αναπαράσταση. Για το σκοπό αυτό δίνονται στους μαθητές ένα πρόβλημα και μια εξίσωση (βλέπε φύλλα εργασίας, εργασία 2) και πρέπει να κατασκευάσουν εικονικές αναπαραστάσεις και να γράψουν την εξίσωση για το συγκεκριμένο πρόβλημα. Το πρόβλημα αφορά αφαίρεση κλασμάτων και η εξίσωση την πρόσθεση κλασμάτων. Οι μαθητές εργάζονται πρώτα ατομικά και στη συνέχεια συζητούν με το διπλανό τους. Μετά το τέλος της εργασίας τους παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της εργασίας τους στην τάξη. Οι μαθητές παροτρύνονται από τον εκπαιδευτικό να κατασκευάσουν περισσότερες από μία εικονικές αναπαραστάσεις για την κάθε περίπτωση.

Η δεύτερη δραστηριότητα έχει ως στόχο την ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να μεταφράζουν από εικονική σε λεκτική αναπαράσταση. Ο δάσκαλος κάνει σχέδιο στον πίνακα (βλέπε φύλλα εργασίας, εργασία 3) και ζητά από τους μαθητές να σκεφτούν και να γράψουν πρόβλημα που να λύνεται με βάση το σχέδιο. Το σχέδιο δείχνει το κλάσμα $\frac{1}{16}$ να είναι σκιασμένο με το όλο να είναι ένα τετράγωνο. Οι μαθητές αφού γράψουν πρόβλημα, παρουσιάζουν τα αποτελέσματα της εργασίας τους στην τάξη. Τα προβλήματα των μαθητών συζητούνται ως προς το περιεχόμενο και τη λογικότητά τους καθώς και ως προς την απάντησή τους. Σε περίπτωση που η απάντηση δεν είναι κλασματικός αριθμός, ο δάσκαλος αναφέρει πως η απάντηση είναι αποδεκτή, όμως οι μαθητές καλούνται να τροποποιήσουν το υφιστάμενο πρόβλημα ή να κατασκευάσουν άλλο που να έχει απάντηση κλασματικό αριθμό. Αυτή η παρατήρηση είναι σημαντική, αφού με βάση το σχέδιο μπορούν να γράψουν πρόβλημα με απάντηση ακέραιο αριθμό.

Στην τρίτη δραστηριότητα, οι μαθητές καλούνται να μεταφράσουν σε λεκτική αναπαράσταση. Συγκεκριμένα, δίνονται στους μαθητές σχέδια και εξίσώσεις (βλέπε φύλλα εργασίας, εργασία 4) και καλούνται να γράψουν προβλήματα. Οι μαθητές αφού εργαστούν είτε ατομικά, είτε σε συνεργασία παρουσιάζουν την εργασία τους στην τάξη και διεξάγεται συζήτηση. Ο δάσκαλος διασφαλίζει ότι οι μαθητές κατανοούν πότε τα προβλήματα που γράφουν είναι ορθά και κατάλληλα για την κάθε αναπαράσταση.

Διδασκαλία 5: Διδασκαλία για την ανάπτυξη της ικανότητας στον αναστοχασμό

Σκοπός των διδασκαλιών 5 και 6 είναι η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών στον αναστοχασμό. Πιο συγκεκριμένα, οι διδασκαλίες αποβλέπουν στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να επιλύουν προβλήματα με κλάσματα και να αιτιολογούν τη σκέψη τους για να λύσουν το πρόβλημα, να αιτιολογούν τη λογικότητα της απάντησής τους και να επαληθεύουν τη λύση τους. Ακόμη, η διδασκαλία 6 αποβλέπει στη σύνδεση των κλασμάτων με δεκαδικούς και ποσοστά. Για την επίτευξη των στόχων των δύο διδασκαλιών παρουσιάζονται στους μαθητές προβλήματα με κλάσματα.

Στην πέμπτη διδασκαλία που έχει διάρκεια 40 λεπτά, ως αφόρμηση, ο δάσκαλος παρουσιάζει στους μαθητές πρόβλημα που αφορά συνταγές πορτοκαλάδας (ανάμειξη ποτηριών πορτοκαλάδας και ποτηριών νερού) και τους ζητά να βρουν ποια συνταγή κάνει την πορτοκαλάδα να έχει πιο έντονη γεύση (βλέπε φύλλα εργασίας, φυλλάδιο 5, εργασία 1). Αυτό το πρόβλημα είχε χρησιμοποιηθεί σε προηγούμενες έρευνες (Charalambous & Pitta, 2007: Noelting, 1978). Σκοπός του προβλήματος που αφορά λόγους (ratio problem) είναι να προβληματίσει τους μαθητές έτσι ώστε να αναστοχαστούν.

Σε αρχικό στάδιο οι μαθητές σκέφτονται το πρόβλημα και το συζητούν στις ομάδες τους. Σε αυτό το στάδιο μπορούν να ρωτήσουν διευκρινιστικές ερωτήσεις, όπως τι σημαίνει «έντονη γεύση» πορτοκαλάδας κ.τ.λ. Κατά τη διάρκεια της συζήτησης στις ομάδες, ο δάσκαλος ζητά από τους μαθητές να εξηγήσουν τον τρόπο που σκέφτηκαν για να λύσουν το πρόβλημα και το πόσο σίγουροι νιώθουν ότι η λύση τους ήταν ορθή. Οι μαθητές συνεργάζονται και γράφουν τις απαντήσεις τους στα φύλλα εργασίας (φυλλάδιο 4).

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται οι σκέψεις των μαθητών στην ολομέλεια της τάξης. Σε περίπτωση που οι μαθητές δεν είναι σε θέση να καταλήξουν στη σωστή απάντηση, ο εκπαιδευτικός κατευθύνει κατάλληλα τη συζήτηση, έτσι που να αντιληφθούν ότι πρέπει να χρησιμοποιήσουν και τις δύο μεταβλητές (ποτήρια πορτοκαλάδας και ποτήρια νερό) για να καταλήξουν στην απάντησή τους. Καθ’ όλη τη διάρκεια της συζήτησης, οι μαθητές ενθαρρύνονται να εξηγήσουν και να αιτιολογήσουν τον τρόπο που σκέφτηκαν, κατά πόσον ακολούθησαν τη σωστή πορεία για την επίλυση του προβλήματος, τι έκαναν σωστό και τι λάθος (οι μαθητές ενθαρρύνονται να αναστοχαστούν).

Ακολούθως, ο δάσκαλος ζητά από τους μαθητές να παρουσιάσουν συνταγές για το Γιώργο και τη Μαίρη που να έχουν το ίδιο έντονη γεύση πορτοκαλάδας (υπάρχει ως εργασία στα φύλλα εργασίας). Ο δάσκαλος διευκρινίζει ότι πρέπει να βρουν συνταγές που να έχουν το ίδιο έντονη γεύση πορτοκαλάδας με το Γιώργο και συνταγές που να έχουν το ίδιο έντονη γεύση πορτοκαλάδας με τη Μαίρη. Η διευκρίνιση αυτή είναι απαραίτητη έτσι ώστε να κατανοήσουν οι μαθητές το πρόβλημα. Οι μαθητές συζητούν στις ομάδες τους και σκέφτονται για πιθανές λύσεις. Ο δάσκαλος τους προβληματίζει πόσες διαφορετικές συνταγές υπάρχουν και να εξηγήσουν την απάντησή τους.

Ακολούθως, στην ολομέλεια της τάξης κάθε ομάδα παρουσιάζει την εργασία της. Οι μαθητές αναμένεται να παρουσιάσουν τη στρατηγική και τον τρόπο που σκέφτηκαν για να λύσουν το πρόβλημα, καθώς και για το πόσες λύσεις υπάρχουν. Ακόμη, ζητείται από τους μαθητές να τεκμηριώσουν την απάντησή τους. Αναμένεται από τους μαθητές να αντιληφθούν ότι για να έχουν οι συνταγές την ίδια γεύση πορτοκαλάδας, πρέπει να έχουν την ίδια πυκνότητα, άρα οι λόγοι πρέπει να ισούνται (αναλογίες). Συνεπώς, η λύση παραπέμπει σε ισοδύναμα κλάσματα. Όσον αφορά στον αριθμό των διαφορετικών συνταγών, αναμένεται από τους μαθητές να αντιληφθούν ότι η απάντηση αφορά τον αριθμό των κλασμάτων που είναι ισοδύναμα για παράδειγμα με το $\frac{2}{5}$. Παρόλο που η λύση αναφέρεται σε άπειρο αριθμό ισοδύναμων κλασμάτων, εντούτοις, ο εκπαιδευτικός αναμένεται να προβληματίσει τους μαθητές κατά πόσον όλες οι λύσεις έχουν νόημα (λογικότητα της απάντησης). Για παράδειγμα, αν αναμείξω 2000 ποτήρια πορτοκαλάδας και 5000 ποτήρια νερό, τότε η πορτοκαλάδα έχει το ίδιο έντονη γεύση με την πορτοκαλάδα με 2 ποτήρια πορτοκαλάδας και 5 ποτήρια νερό, αλλά δεν έχει νόημα, κι ούτε είναι πρακτικώς δυνατό να έχω τέτοια ανάμειξη στην καθημερινή ζωή.

Στην επόμενη δραστηριότητα, ο δάσκαλος ζητά από τους μαθητές να μελετήσουν το πρόβλημα που παρουσιάζεται στο φυλλάδιο 4 (εργασία 2), να το λύσουν και να εξηγήσουν την απάντησή τους. Το πρόβλημα αφορά στη διαίρεση ακεραίου με κλάσμα και η απάντηση στην πράξη της διαίρεσης δεν είναι ακέραιος αριθμός. Ωστόσο, οι μαθητές πρέπει να αντιληφθούν ότι η απάντηση πρέπει να είναι ακέραιος, γιατί διαφορετικά η απάντηση δεν θα έχει νόημα (λογικότητα της απάντησης).

Αρχικά, οι μαθητές σκέφτονται το πρόβλημα, συζητούν στις ομάδες τους και καταγράφουν τις σκέψεις τους στα φύλλα εργασίας. Ο δάσκαλος περιφέρεται από ομάδα σε ομάδα και ζητά από τους μαθητές να εξηγήσουν τον τρόπο που σκέφτηκαν και κυρίως την απάντησή τους σε σχέση με το αποτέλεσμα της πράξης (διαίρεση). Σε περίπτωση που κάποιοι μαθητές δεν θυμούνται τον αλγόριθμο της διαίρεσης από την Ε΄ τάξη και θέλουν να τον χρησιμοποιήσουν, ο δάσκαλος τους τον υπενθυμίζει. Εδώ πρέπει να τονιστεί ότι το πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί και με άλλους τρόπους. Ο εκπαιδευτικός αφήνει τους μαθητές να εργαστούν με όποιο τρόπο θέλουν.

Μετά το τέλος της ομαδικής εργασίας, οι μαθητές συζητούν το πρόβλημα στην ολομέλεια της τάξης, παρουσιάζουν τη σκέψη και την απάντησή τους. Έμφαση δίνεται στο να είναι η απάντηση λογική.

Διδασκαλία 6: Διδασκαλία για την ανάπτυξη της ικανότητας στον αναστοχασμό και τις διασυνδέσεις με τους δεκαδικούς και τα ποσοστά

Η έκτη διδασκαλία έχει διάρκεια 40 λεπτά. Στην αφόρμηση παρουσιάζεται στους μαθητές πρόβλημα ανάδρομης πορείας με κλασματικούς αριθμούς (φυλλάδιο 6, εργασία 1). Σκοπός του προβλήματος είναι να εξηγήσουν και να αιτιολογήσουν οι μαθητές τον τρόπο που σκέφτηκαν και μετά το τέλος του προβλήματος να επαληθεύσουν την απάντησή τους.

Σε πρώτο στάδιο οι μαθητές σκέφτονται το πρόβλημα και συζητούν στις ομάδες τους. Ο εκπαιδευτικός καλεί τους μαθητές να εξηγήσουν τον τρόπο που σκέφτηκαν στα άλλα μέλη της ομάδας. Οι μαθητές καταγράφουν τις σκέψεις τους στα φύλλα εργασίας (φυλλάδιο 6, εργασία 1). Λόγω του ότι είναι πιθανό το πρόβλημα να είναι δύσκολο για αρκετούς μαθητές, υπάρχουν υποβοηθητικές ερωτήσεις όπως από ποια πληροφορία νομίζουν ότι πρέπει να αρχίσουν για να λύσουν το πρόβλημα και τι στρατηγική πρέπει να εφαρμόσουν. Ακόμη, κατά τη διάρκεια επίλυσης του προβλήματος οι μαθητές σκέφτονται κατά πόσον η πορεία που ακολούθησαν είναι η σωστή και αναστοχάζονται. Ο εκπαιδευτικός περιφέρεται από ομάδα σε ομάδα και παρέχει ανατροφοδότηση. Σε περίπτωση που οι μαθητές δεν μπορούν να αρχίσουν να λύνουν το πρόβλημα, ο εκπαιδευτικός αναμένεται να παρέχει νύξεις, π.χ. ότι πρέπει να αρχίσουν από τις τάπες που έμειναν στο κουτί. Με αυτό τον τρόπο τους βοηθά να αρχίσουν να λύνουν το πρόβλημα και να μπουν στην κατάλληλη διαδικασία σκέψης, έτσι ώστε να είναι σε θέση να συμμετέχουν στη συζήτηση που θα ακολουθήσει σε κατοπινό στάδιο στην ολομέλεια της τάξης. Γενικά, υπάρχει διαφοροποίηση της βοήθειας από τον εκπαιδευτικό ανάλογα με τις δυνατότητες των μαθητών.

Ακολούθως, οι μαθητές παρουσιάζουν την επίλυση του προβλήματος στην ολομέλεια της τάξης, επεξηγούν τη σκέψη τους, τη στρατηγική που εφάρμοσαν και τι πήγε σωστά ή λάθος στην πορεία επίλυσης. Οι μαθητές ανταλλάζουν απόψεις και αλληλεπιδρούν, ενώ ο εκπαιδευτικός κατευθύνει τη συζήτηση, έτσι ώστε να καλλιεργηθεί ο αναστοχασμός.

Στη συνέχεια, ο δάσκαλος τους ζητά να επαληθεύσουν την απάντησή τους. Σε περίπτωση που οι μαθητές δεν έχουν ξανακάνει κάτι παρόμοιο, το κάνουν για πρώτη φορά όλοι μαζί με το δάσκαλό τους στην ολομέλεια της τάξης.

Στην επόμενη δραστηριότητα οι μαθητές καλούνται να μελετήσουν πρόβλημα που αφορά το μήκος του βήματος ενός ελέφαντα στον Άρη και στην Αφροδίτη. Το μήκος του βήματος του ελέφαντα στους δύο πλανήτες δίνεται σαν συνάρτηση του βήματός του στη Γη (βλέπε φυλλάδιο 6, εργασία 2). Το πρόβλημα αφορά σύγκριση του βήματος του ελέφαντα στον Άρη και την Αφροδίτη και ουσιαστικά παραπέμπει σε σύγκριση του $\frac{5}{6}$ και του $\frac{7}{8}$. Οι μαθητές καλούνται να επιλύσουν το πρόβλημα και να εξηγήσουν την απάντησή τους. Επιπρόσθετα, καλούνται να επαληθεύσουν την απάντησή τους.

Οι μαθητές αρχικά σκέφτονται το πρόβλημα στις ομάδες τους και εξηγούν τον τρόπο σκέψης τους (καταγράφουν την επίλυση του προβλήματος στο φυλλάδιο 6, εργασία 2). Ο εκπαιδευτικός περιφέρεται στην τάξη και παρέχει ανατροφοδότηση και κατάλληλη βοήθεια. Οι μαθητές αν θέλουν μπορούν να δοκιμάσουν διάφορες τιμές για το μήκος του βήματος στη Γη για να καταλήξουν σε κάποιο συμπέρασμα ή μπορούν να δουλέψουν με όποιο τρόπο θέλουν.

Προτού παρουσιάσουν τα αποτελέσματα της εργασίας τους στην ολομέλεια της τάξης, ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να επαληθεύσουν την απάντησή τους. Η επαλήθευση ουσιαστικά αφορά τη σύγκριση των δύο κλασμάτων. Ακολούθως, διεξάγεται συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης και οι μαθητές παρουσιάζουν τη σκέψη τους και την επαλήθευση της απάντησης.

Στη δεύτερη δραστηριότητα, οι μαθητές καλούνται να μελετήσουν πρόβλημα με τρεις ορειβάτες που ανέβηκαν σε ορισμένο ύψος ενός βουνού (βλέπε φυλλάδιο 6, εργασία 3). Οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν στο ερώτημα ποιος από τους τρεις ορειβάτες ανέβηκε πιο ψηλά. Το πρόβλημα ουσιαστικά αφορά στη σύγκριση κλάσματος, δεκαδικού και ποσοστού και για την επίλυσή του οι μαθητές θα πρέπει να μετατρέψουν σε ένα είδος ρητού. Συνεπώς αυτό το πρόβλημα πέρα από την ανάπτυξη του αναστοχασμού αποβλέπει στις διασυνδέσεις των κλασμάτων με τους δεκαδικούς και τα ποσοστά.

Οι μαθητές συζητούν το πρόβλημα στις ομάδες τους και σκέφτονται ποια στρατηγική πρέπει να ακολουθήσουν για να το επιλύσουν. Ο δάσκαλος κατά τη διάρκεια της εργασίας των μαθητών τους παρέχει κατάλληλη ανατροφοδότηση και καθοδήγηση. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η εργασία των μαθητών σε όλη την τάξη και διεξάγεται συζήτηση.

Διδασκαλία 7: Διδασκαλία για την ανάπτυξη του επαγωγικού συλλογισμού, των μαθηματικών εξηγήσεων, της τεκμηρίωσης και του αναστοχασμού

Οι διδασκαλίες 7, 8 και 9 αποβλέπουν στην ανάπτυξη της ικανότητας του επαγωγικού συλλογισμού, των μαθηματικών εξηγήσεων, της τεκμηρίωσης και του αναστοχασμού. Η έβδομη διδασκαλία έχει διάρκεια 40 λεπτά. Το φυλλάδιο 7 έχει ως τίτλο «Στην πόλη με τα όμοια» γιατί οι δραστηριότητες θα αφορούν την εύρεση ομοιοτήτων στις ιδιότητες (προβλήματα γενίκευσης).

Στην αφόρμηση, οι μαθητές πληροφορούνται ότι σε ένα σπίτι στη χώρα των κλασμάτων συγκεντρώθηκαν αρκετά κλάσματα που έμοιαζαν σε κάτι και καλούνται να βρουν σε τι μοιάζουν (φυλλάδιο 7, εργασία 1). Ακόμη, οι μαθητές καλούνται να εξηγήσουν τη σκέψη τους (ανάπτυξη της ικανότητας των μαθηματικών εξηγήσεων). Αφού οι μαθητές καταλήξουν στο ότι η ομοιότητα είναι η ισοδυναμία των κλασμάτων, ακολούθως καλούνται να βρουν πόσα κλάσματα είναι ισοδύναμα με το $\frac{1}{3}$. Διεξάγεται συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης και ο εκπαιδευτικός καθοδηγεί τους μαθητές σε γενίκευση, ότι δηλαδή υπάρχουν άπειρα κλάσματα ισοδύναμα με το $\frac{1}{3}$. Οι μαθητές καλούνται να τεκμηριώσουν την απάντησή τους, κατά πόσον είναι σίγουροι για την απάντησή τους, σε περίπτωση που αναφέρουν συγκεκριμένο αριθμό κλασμάτων κατά πόσον υπάρχουν κι άλλα κλάσματα. Αυτή η εργασία αποσκοπεί στην ανάπτυξη της τεκμηρίωσης και του αναστοχασμού.

Στη συνέχεια, ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να συνεργαστούν, να βρουν και να γράψουν άλλα κλάσματα που να μοιάζουν σε κάτι. Οι μαθητές σκέφτονται και προτείνουν λύσεις (αναμένεται να γράψουν τα κλάσματα σε ορθογώνιο που δίνεται στο φυλλάδιο 7, εργασία 2). Στην ολομέλεια της τάξης ο εκπαιδευτικός προβληματίζει τους μαθητές κατά πόσον οι λύσεις που έδωσαν είναι σωστές και κατά πόσον υπάρχουν άλλες λύσεις. Οι μαθητές σκέφτονται για τις λύσεις των συμμαθητών τους και αναστοχάζονται.

Στην επόμενη δραστηριότητα αναφέρεται στους μαθητές ότι σε κάποιο σπίτι συγκεντρώθηκαν μερικοί άλλοι αριθμοί και ότι οι αριθμοί που μοιάζουν σε κάτι αποφάσισαν να κάνουν πάρτι στον κήπο του σπιτιού (φυλλάδιο 7, εργασία 3). Οι μαθητές πρέπει να βρουν αριθμούς που μοιάζουν σε κάτι, να τους γράψουν στον κήπο του σπιτιού και να δώσουν όνομα στην ομάδα που έφτιαξαν. Ακόμη, καλούνται να εξηγήσουν στο διπλανό τους τον τρόπο με τον οποίο επέλεξαν τους αριθμούς που μοιάζουν σε κάτι. Αυτή η δραστηριότητα έχει ως στόχο την ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να επιλύουν προβλήματα γενίκευσης και των μαθηματικών εξηγήσεων. Πιθανές απαντήσεις περιλαμβάνουν ομάδες όπως «κλάσματα», «δεκαδικοί», «ποσοστά», «ομώνυμα κλάσματα», καθώς και οποιαδήποτε άλλη ομάδα με αριθμούς που μοιράζονται κάποιο κοινό χαρακτηριστικό. Οι απαντήσεις των μαθητών ανακοινώνονται σε όλη την τάξη και διεξάγεται συζήτηση. Στη συνέχεια, οι μαθητές προβληματίζονται κατά πόσον μπορούν να φτιάξουν κάποια άλλη ομάδα. Σκέφτονται πρώτα ατομικά και στη συνέχεια σε συνεργασία με τα άλλα παιδιά της ομάδας και προτείνουν άλλη ή άλλες ομάδες.

Διδασκαλία 8: Διδασκαλία που αποσκοπεί στην ανάπτυξη του επαγωγικού συλλογισμού, των μαθηματικών εξηγήσεων, της τεκμηρίωσης και του αναστοχασμού

Η όγδοη διδασκαλία έχει διάρκεια 40 λεπτά. Το φυλλάδιο 8 έχει τίτλο «Στην πόλη με τις διαφορές και τα μοτίβα» γιατί οι δραστηριότητες έχουν στόχο την εύρεση διαφορών στις ιδιότητες και την αναγνώριση σχέσεων (συμπλήρωση μοτίβου).

Ως αφόρμηση, αναφέρεται στους μαθητές ότι σε ένα σπίτι συγκεντρώθηκαν πολλά κλάσματα για να κάνουν πάρτι. Κάποιο όμως από τα κλάσματα διέφερε από τα υπόλοιπα και έπρεπε να φύγει. Οι μαθητές καλούνται να βρουν ποιο κλάσμα έπρεπε να φύγει και να εξηγήσουν την απάντησή τους. Η αφόρμηση αποσκοπεί στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να εντοπίζουν διαφορές στις ιδιότητες (προβλήματα διάκρισης) και των μαθηματικών εξηγήσεων. Οι μαθητές εργάζονται πρώτα ατομικά και στη συνέχεια συζητούν στις ομάδες τους (φυλλάδιο 8, εργασία 1). Αναμένεται από τους μαθητές να παρατηρήσουν προσεκτικά τα κλάσματα και να αντιληφθούν ότι σε όλα τα κλάσματα ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή (καταχρηστικά κλάσματα) εκτός από το κλάσμα $\frac{8}{13}$ που είναι γνήσιο. Συνεπώς το κλάσμα που διαφέρει από τα υπόλοιπα είναι το $\frac{8}{13}$.

Στην επόμενη δραστηριότητα αναφέρεται στους μαθητές ότι τα κλάσματα $\frac{1}{9}$ και $\frac{3}{9}$ πρόκειται να παντρευτούν και θα κάνουν τόσα παιδιά όσα είναι τα κλάσματα που βρίσκονται ανάμεσά τους. Οι μαθητές πρέπει να βρουν πόσα παιδιά θα κάνουν και να εξηγήσουν την απάντησή τους (φυλλάδιο 8, εργασία 2). Ουσιαστικά, σκοπός της δραστηριότητας είναι η εύρεση του αριθμού των κλασμάτων μεταξύ του $\frac{1}{9}$ και $\frac{3}{9}$ και η ανάπτυξη της ικανότητας εξήγησης της απάντησης (μαθηματικών εξηγήσεων). Οι μαθητές πρώτα συνεργάζονται στις ομάδες τους και ακολούθως παρουσιάζουν την απάντηση και τις εξηγήσεις τους σε όλη την τάξη. Ο εκπαιδευτικός συντονίζει τη συζήτηση και προβληματίζει τους μαθητές πόσο σίγουροι είναι για τις απαντήσεις τους και κατά πόσον υπάρχουν περισσότερα ή λιγότερα κλάσματα από την απάντηση που έδωσαν (ανάπτυξη της ικανότητας του αναστοχασμού). Ένα πιθανό λάθος των μαθητών αναμένεται να είναι ότι θεωρούν ότι υπάρχει ένα μόνο κλάσμα μεταξύ του $\frac{1}{9}$ και του $\frac{3}{9}$, το κλάσμα $\frac{2}{9}$. Σε μια τέτοια περίπτωση, ο εκπαιδευτικός αναμένεται να προβληματίσει τους μαθητές κατά πόσον υπάρχουν περισσότερα κλάσματα. Οι μαθητές αναμένεται να προβληματιστούν και να καταγράψουν τις σκέψεις τους (φυλλάδιο 8, εργασία 2).

Στη δεύτερη δραστηριότητα παρουσιάζεται στους μαθητές μοτίβο και πρέπει να το συνεχίσουν (να συμπληρώσουν τους τρεις τελευταίους αριθμούς). Τα κλάσματα στο μοτίβο έχουν τον ίδιο παρονομαστή, ενώ οι αριθμητές ακολουθούν αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο το 1 και διαφορά 4 ($α_ν=α_0+(ν-1).δ$) (φυλλάδιο 8, εργασία 3). Οι μαθητές καλούνται να εξηγήσουν τον τρόπο που σκέφτηκαν. Σκοπός της δραστηριότητας είναι η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να αναγνωρίζουν σχέσεις και να εξηγούν την απάντησή τους. Οι μαθητές συζητούν στις ομάδες τους και ακολουθεί παρουσίαση των αποτελεσμάτων σε όλη την τάξη και συζήτηση. Ο δάσκαλος προβληματίζει τους μαθητές πόσα άλλα κλάσματα θα πρέπει να γράψουν για να τελειώσει το μοτίβο. Ανάλογα με τις απαντήσεις των μαθητών, ο δάσκαλος τους προβληματίζει πόσο σίγουροι είναι για την απάντηση τους, κατά πόσον υπάρχουν περισσότερα ή λιγότερα κλάσματα (ανάπτυξη της ικανότητας του αναστοχασμού) και τους καλεί να τεκμηριώσουν την απάντησή τους (ανάπτυξη της ικανότητας τεκμηρίωσης).

Διδασκαλία 9: Διδασκαλία για την ανάπτυξη του επαγωγικού συλλογισμού, των μαθηματικών εξηγήσεων και της τεκμηρίωσης

Η ένατη διδασκαλία έχει διάρκεια 40 λεπτά και περιλαμβάνει δραστηριότητες που αποσκοπούν στην αναγνώριση σχέσεων, τη διαφοροποίηση σχέσεων, τη σύζευξη της αναγνώρισης και της διαφοροποίησης σχέσεων, την ανάπτυξη των μαθηματικών εξηγήσεων και της τεκμηρίωσης.

Στην αφόρμηση, ο δάσκαλος παρουσιάζει στους μαθητές μοτίβο και τους καλεί να επιλέξουν μεταξύ τεσσάρων κλασμάτων εκείνο που συμπληρώνει το μοτίβο (φυλλάδιο 9, εργασία 1). Οι αριθμητές στο μοτίβο ακολουθούν γεωμετρική πρόοδο με πρώτο όρο το 2 και λόγο πάλι το 2 ($α_ν=2^ν$), ενώ οι παρονομαστές αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο το 5 και διαφορά 4 ($α_ν=5+4δ$). Οι μαθητές σκέφτονται το πρόβλημα πρώτα μόνοι τους και στη συνέχεια στις ομάδες τους. Ο εκπαιδευτικός παρέχει νύξεις και ανάλογη βοήθεια σε μαθητές που συναντούν μεγάλες δυσκολίες στην επίλυση του προβλήματος. Ακολουθεί συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης και προβληματισμός. Οι μαθητές καλούνται να εξηγήσουν τον τρόπο που σκέφτηκαν και την απάντησή τους.

Στην επόμενη δραστηριότητα παρουσιάζεται στους μαθητές σειρά κλασμάτων στην οποία κάποιο κλάσμα πρέπει να φύγει γιατί χαλά το μοτίβο. Οι μαθητές αναμένεται να βρουν το κλάσμα που πρέπει να φύγει (πρόβλημα διαφοροποίησης σχέσεων, φυλλάδιο 9, εργασία 2). Οι μαθητές καλούνται να βρουν τη σχέση στο μοτίβο προκειμένου να βρουν ποιο κλάσμα δεν ταιριάζει με τα υπόλοιπα. Οι αριθμητές στο μοτίβο ακολουθούν γεωμετρική πρόοδο με πρώτο όρο το 2 και λόγο πάλι το 2 ($α_ν=2^ν$) και οι παρονομαστές γεωμετρική πρόοδο με πρώτο όρο το 1 και λόγο το 3 ($α_ν=3^{ν-1}$). Οι μαθητές συζητούν το πρόβλημα στις ομάδες τους και ακολούθως παρουσιάζουν την απάντησή τους σε όλη την τάξη, όπου διεξάγεται συζήτηση. Ο εκπαιδευτικός τους καλεί να τεκμηριώσουν την απάντησή τους.

Η δεύτερη δραστηριότητα αφορά στην εύρεση ομοιότητας και διαφοράς στις σχέσεις (πρόβλημα οικοδόμησης συστήματος). Οι μαθητές πρέπει να μελετήσουν πίνακα με κλάσματα στον οποίο υπάρχει η ίδια σχέση στα κλάσματα κάθε σειράς και η ίδια, αλλά διαφορετική από την προηγούμενη σχέση μεταξύ των κλασμάτων κάθε στήλης. Οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν το άδειο κελί με το κατάλληλο κλάσμα και να τεκμηριώσουν την απάντησή τους (φυλλάδιο 9, εργασία 3). Η σχέση ανάμεσα στα κλάσματα κάθε σειράς είναι πολλαπλασιασμός του αριθμητή με το 3 και του παρονομαστή με το 2, άρα πολλαπλασιασμός του κλάσματος με το $\frac{3}{2}$, ενώ η σχέση ανάμεσα στα κλάσματα κάθε στήλης είναι η διαίρεση με το 2. Οι μαθητές σκέφτονται το πρόβλημα μόνοι τους και στη συνέχεια παρουσιάζουν τις απαντήσεις τους σε όλη την τάξη, όπου καλούνται να τεκμηριώσουν την απάντησή τους.

Διδασκαλία 10: Διδασκαλία που αποσκοπεί στην ανάπτυξη της ικανότητας τεκμηρίωσης, των μαθηματικών εξηγήσεων και του αναστοχασμού

Η δέκατη και τελευταία διδασκαλία με διάρκεια 80 λεπτά στοχεύει στην ανάπτυξη της ικανότητας τεκμηρίωσης, των μαθηματικών εξηγήσεων και του αναστοχασμού. Τίτλος του φυλλαδίου 10 είναι «Εξηγώ τη σκέψη μου και τεκμηριώνω την απάντησή μου ...»

Στην αφόρμηση ο δάσκαλος αναφέρει στους μαθητές ότι στο σημερινό μάθημα θα τους θέσει διάφορους προβληματισμούς και ότι αναμένει από αυτούς να αναπτύξουν την ικανότητα να εξηγούν τη σκέψη τους και να τεκμηριώνουν τις επιλογές τους. Στην αφόρμηση θέτει στους μαθητές τον προβληματισμό τι θα πάθει ένα κλάσμα αν μειωθεί ο παρονομαστής του και αυξηθεί ο αριθμητής του (φυλλάδιο 10, εργασία 1). Οι μαθητές έχουν να επιλέξουν μεταξύ τριών επιλογών (θα αυξηθεί, θα μειωθεί και δεν θα πάθει τίποτα, θα μείνει το ίδιο) και πρέπει οπωσδήποτε να τεκμηριώσουν την απάντησή τους. Σε πρώτη φάση, οι μαθητές σκέφτονται και συζητούν το πρόβλημα στις ομάδες τους και καταγράφουν την τεκμηρίωσή τους στα φύλλα εργασίας. Σε περίπτωση που δυσκολεύονται, ο δάσκαλος τους συστήνει να δοκιμάσουν συγκεκριμένο κλάσμα για να δουν τι παθαίνει. Ακολουθεί συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης και οι μαθητές αναφέρουν τις λύσεις τους και προσπαθούν να τις τεκμηριώσουν. Γίνεται αποδεκτή οποιαδήποτε τεκμηρίωση με τη χρήση συγκεκριμένου κλάσματος, αλλά ο δάσκαλος τους παροτρύνει να δώσουν μια πιο γενική τεκμηρίωση, σε περίπτωση που δεν έχουν καταφέρει κάτι τέτοιο. Για το σκοπό αυτό τους προβληματίζει τι παθαίνει ένα κλάσμα όταν: α) αυξάνεται μόνο ο αριθμητής του, β) μειώνεται μόνο ο παρονομαστής του, γ) να συνδυάσουν τα προηγούμενα και να σκεφτούν τι θα πάθει ένα κλάσμα αν αυξηθεί ο αριθμητής του και ταυτόχρονα μειωθεί ο παρονομαστής του. Οι μαθητές αναμένεται να βρουν πως στην περίπτωση (α) το κλάσμα αυξάνεται, στην περίπτωση (β) το κλάσμα και πάλι αυξάνεται, συνεπώς με συνδυασμό των δύο το κλάσμα σίγουρα θα αυξηθεί. Αυτά τα βήματα είναι αναγκαία για να καταλήξουν πιο εύκολα οι μαθητές σε τεκμηρίωση και σε γενίκευση.

Στην επόμενη δραστηριότητα ο δάσκαλος προβληματίζει τους μαθητές τι θα πάθει το κλάσμα $\frac{2}{3}$ αν αυξηθεί ο αριθμητής του κατά ένα και ο παρονομαστής του κατά ένα (φυλλάδιο 10, εργασία 2). Ακόμη, οι μαθητές πρέπει να τεκμηριώσουν την απάντησή τους. Οι μαθητές σκέφτονται το πρόβλημα πρώτα ατομικά και στη συνέχεια στις ομάδες τους. Ακολουθεί ανακοίνωση των αποτελεσμάτων στην ολομέλεια της τάξης και συζήτηση. Το πρόβλημα αναμένεται να καταλήξει ουσιαστικά στη σύγκριση του $\frac{2}{3}$ και του $\frac{3}{4}$ και οι μαθητές αναμένεται στο τέλος να αποφανθούν ότι το κλάσμα αυξάνεται.

Η δεύτερη δραστηριότητα αποτελεί συνέχεια της προηγούμενης και αποσκοπεί στην ανάπτυξη του αναστοχασμού και της γενίκευσης πέρα από τις μαθηματικές εξηγήσεις και την τεκμηρίωση. Συγκεκριμένα, οι μαθητές καλούνται να αποφασίσουν κατά πόσον η απάντηση στην οποία κατέληξαν στην προηγούμενη δραστηριότητα ισχύει για όλα τα κλάσματα όταν αυξάνεται ο αριθμητής τους κατά ένα και ο παρονομαστής τους κατά ένα. Οι μαθητές πρέπει να τεκμηριώσουν την απάντησή τους (φυλλάδιο 10, εργασία 3). Οι μαθητές σκέφτονται το ερώτημα και συζητούν στις ομάδες τους. Αναμένεται να δοκιμάσουν διάφορα κλάσματα και στο τέλος, παρατηρώντας τα αποτελέσματα να καταλήξουν σε ένα γενικότερο συμπέρασμα. Ο εκπαιδευτικός περνά από τις ομάδες και προβληματίζει τους μαθητές κατά πόσον το συμπέρασμα στο οποίο κατέληξαν ισχύει για όλα τα κλάσματα ή υπάρχουν περιπτώσεις κλασμάτων που ανατρέπουν το συμπέρασμά τους (σε μερικές περιπτώσεις όπου οι μαθητές δυσκολεύονται να αρχίσουν να σκέφτονται το πρόβλημα, ο εκπαιδευτικός αναμένεται να τους βοηθήσει δίνοντας κάποιο δικό του παράδειγμα). Οι μαθητές σκέφτονται κατά πόσον ο τρόπος που εργάζονται είναι σωστός και κατά πόσον υπάρχουν άλλα κλάσματα που δεν δοκίμασαν και που δεν ισχύει το συμπέρασμά τους και αναστοχάζονται. Ακόμη, προσπαθούν να καταλήξουν σε γενίκευση. Ακολουθεί συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης στην οποία ακούονται οι απόψεις των μαθητών. Ο εκπαιδευτικός παρέχει ανατροφοδότηση στις απαντήσεις των μαθητών και προβληματισμό. Σε περίπτωση που οι μαθητές καταλήξουν σε λάθος συμπεράσματα, ο εκπαιδευτικός αναμένεται να κατευθύνει τη συζήτηση, έτσι ώστε ν' αντιληφθούν τα λάθη τους. Ακόμη, σε περίπτωση που συμπεράνουν ότι τα κλάσματα αυξάνονται, ο εκπαιδευτικός αναμένεται να τους καλέσει να αποφανθούν τι ισχύει για τα καταχρηστικά κλάσματα, π.χ. το $\frac{3}{2}$, όπου σε αυτή την περίπτωση θα αντιληφθούν έπειτα από έλεγχο ότι το κλάσμα μειώνεται αντί να αυξάνεται.

Στην τελευταία δραστηριότητα που αποσκοπεί στην ανάπτυξη της τεκμηρίωσης, οι μαθητές καλούνται να αποφασίσουν κατά πόσον δήλωση για τα κλάσματα είναι ορθή ή λανθασμένη και να τεκμηριώσουν την απάντησή τους (φυλλάδιο 10, εργασία 4). Οι μαθητές σκέφτονται τη δήλωση και συζητούν στις ομάδες τους. Ακολουθεί συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης όπου τεκμηριώνουν την επιλογή τους. Ο δάσκαλος κάνει αποδεκτή οποιαδήποτε πειστική τεκμηρίωση (με επαναδιατύπωση και ενίσχυση, με παραδείγματα, με ένα γενικότερο κανόνα) αλλά προοδευτικά αναμένεται να κατευθύνει τους μαθητές να τεκμηριώσουν με τη χρήση ενός γενικότερου κανόνα.

Διδασκαλία των Μαθητών της Ομάδας Ελέγχου

Οι μαθητές της ομάδας ελέγχου αναμένεται να διδαχθούν με βάση το υφιστάμενο Α.Π. και τα βιβλία των μαθηματικών της Στ΄ τάξης. Τα βιβλία των μαθηματικών της Στ΄ τάξης μέχρι το χρονικό σημείο ολοκλήρωσης της παρέμβασης, δηλαδή τέλος Ιανουαρίου (Μέρος Α΄ και Μέρος Β΄), περιλαμβάνουν την έννοια του κλάσματος, αναπαραστάσεις, ισοδύναμα κλάσματα, σύγκριση και σειροθέτηση κλασμάτων, καταχρηστικά κλάσματα και μεικτούς αριθμούς, δεκαδικούς και ποσοστά, απλοποίηση και σύγκριση κλασμάτων, πρόσθεση και αφαίρεση ομωνύμων κλασμάτων, πρόσθεση και αφαίρεση ετερωνύμων κλασμάτων, πρόσθεση και αφαίρεση μικτών και προβλήματα με κλάσματα.

Πιο συγκεκριμένα, όσον αφορά στην έννοια του κλάσματος, υπάρχουν ασκήσεις για το κλάσμα ως μέρος του όλου, ως μέρος μιας ολόκληρης μονάδας, ως μέρος επιφάνειας και για τη σύνδεση της έννοιας του κλάσματος με τη σχέση αριθμητής÷παρονομαστής. Για τις αναπαραστάσεις, υπάρχουν ασκήσεις αναγνώρισης κλασμάτων σε εικονική μορφή, τοποθέτησης κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή και μετάφρασης από εικονική σε συμβολική αναπαράσταση. Αναφορικά με τα ισοδύναμα κλάσματα, υπάρχουν ασκήσεις εύρεσης ισοδύναμων κλασμάτων, αναγνώρισης ισοδύναμων κλασμάτων, τοποθέτησης ισοδύναμων κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή και προβλήματα με ισοδύναμα κλάσματα. Όσον αφορά στα καταχρηστικά κλάσματα και τους μικτούς αριθμούς, υπάρχει ο ορισμός του καταχρηστικού κλάσματος και του μικτού αριθμού, ασκήσεις μετατροπής μεταξύ των δύο ειδών αριθμών και σύγκρισής τους, καθώς και ασκήσεις συμπλήρωσης μοτίβων. Για τους δεκαδικούς αριθμούς και τα ποσοστά υπάρχουν ασκήσεις μετατροπής μεταξύ των τριών μορφών των ρητών αριθμών (κλάσματα, δεκαδικοί, ποσοστά), μετατροπής από εικονική σε συμβολική αναπαράσταση και το αντίστροφο, σύγκρισης ρητών αριθμών, τοποθέτησης ρητών αριθμών στην αριθμητική γραμμή, συμπλήρωσης μοτίβων και προβλήματα με ρητούς αριθμούς.

Για την απάντηση των ερευνητικών ερωτημάτων, χρησιμοποιήθηκε κυρίως η Δομική Ανάλυση Εξισώσεων (Structural Equation Modeling) με το στατιστικό πακέτο MPLUS (Muthén & Muthén, 2004). Συγκεκριμένα, για την επιβεβαίωση του προτεινόμενου μοντέλου τόσο στην πιλοτική φάση, όσο και στις διάφορες μετρήσεις της κυρίως έρευνας χρησιμοποιήθηκε η επιβεβαιωτική ανάλυση παραγόντων (Confirmatory Factor Analysis). Για τον έλεγχο του βαθμού προσαρμογής των μοντέλων χρησιμοποιήθηκαν τρεις δείκτες: ο λόγος χ^2 προς τους βαθμούς ελευθερίας του μοντέλου (χ^2/df), ο δείκτης Comparative Fit Index (CFI) και ο δείκτης RMSEA (Muthén & Muthén, 2004). Για να είναι αποδεκτό το μοντέλο η τιμή του λόγου χ^2/df πρέπει να είναι μικρότερη του 2, η τιμή του δείκτη CFI πρέπει να είναι μεγαλύτερη από 0.90 και η τιμή του RMSEA πρέπει να είναι μικρότερη του 0.06 (Marcoulides & Schumacker, 1996). Η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση χρησιμοποιήθηκε και για να βρεθεί πόσο συνεισφέρει ο κάθε παράγοντας στην κατανόηση των κλασματικών αριθμών και κατά πόσον το προτεινόμενο μοντέλο παραμένει σταθερό στο ίδιο δείγμα μαθητών σε διαφορετικές χρονικές στιγμές.

Για τη διακρίβωση του κατά πόσον η πειραματική ομάδα και η ομάδα ελέγχου συμπεριφέρονται ως ενιαίες ομάδες όσον αφορά στην κατανόηση των κλασμάτων και ποιες και πόσες κατηγορίες (ομάδες) μαθητών μπορούν να δημιουργηθούν χρησιμοποιήθηκε η ανάλυση latent class (LCA). Με βάση την ανάλυση latent class ήταν δυνατή η ανίχνευση ομάδων υποκειμένων με παρόμοια συμπεριφορά (Marcoulides & Schumacker, 1996). Η ανάλυση latent class έγινε με βάση την κατανόηση των κλασμάτων στην πρώτη μέτρηση (pre-test). Η ανάλυση latent class μπορούσε να δείξει κατά πόσον οι μαθητές της πειραματικής ομάδας συμπεριφέρονται σαν ενιαίο σύνολο ή κατά πόσον υπάρχουν ομάδες μαθητών που συμπεριφέρονται με διαφορετικό τρόπο. Το ίδιο ίσχυε για την ομάδα ελέγχου. Η εξακρίβωση αυτή ήταν αναγκαία για να διερευνηθεί κατά πόσον οι παράγοντες καθορίζουν ιεραρχικά επίπεδα σχετικά με την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος, για τη διακρίβωση του ρυθμού ανάπτυξης της κατανόησης των κλασμάτων και της ικανότητας των μαθητών στους παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων. Το λογισμικό προσέφερε τη δυνατότητα ελέγχου διαφορετικών μοντέλων διαχωρισμού των υποκειμένων σε ομάδες, επιλέγοντας το μοντέλο με τον υψηλότερο δείκτη εντροπίας και τις χαμηλότερες τιμές στους δείκτες AIC και BIC.

Για τη διακρίβωση του ρυθμού ανάπτυξης της κατανόησης των κλασμάτων και της ικανότητας των μαθητών στους παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων, χρησιμοποιήθηκε η ανάλυση ανάπτυξης (Growth Modeling). Η ανάλυση ανάπτυξης θα επιτρέψει και την εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά την αποτελεσματικότητα της παρέμβασης και την μονιμότητα των αποτελεσμάτων της παρέμβασης.

Εκτός από τη Δομική Ανάλυση Εξισώσεων εφαρμόστηκαν στα δεδομένα του δείγματος στατιστικές αναλύσεις με το στατιστικό πακέτο SPSS. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκαν στατιστικές αναλύσεις στο SPSS για να εξακριβωθεί κατά πόσον οι παράγοντες καθορίζουν ιεραρχικά επίπεδα σχετικά με την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος, για τον έλεγχο της ισοδυναμίας της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου όσον αφορά στην κατανόηση των κλασμάτων στην πρώτη μέτρηση (pre-test) και για την εξακρίβωση της επίδρασης του παρεμβατικού προγράμματος στην κατανόηση των κλασμάτων. Για την εξέταση του κατά πόσον οι παράγοντες καθορίζουν ιεραρχικά επίπεδα σχετικά με την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος βρέθηκαν μέσοι όροι και τυπικές αποκλίσεις της ικανότητας στους παράγοντες, ξεχωριστά για καθεμιά ομάδα που προέκυψε από την ανάλυση latent class και για καθεμιά από τις τρεις μετρήσεις. Για τον έλεγχο της ισοδυναμίας της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου χρησιμοποιήθηκε το κριτήριο t για ανεξάρτητα δείγματα με εξαρτημένη μεταβλητή την κατανόηση των κλασμάτων και ανεξάρτητη μεταβλητή το είδος της ομάδας (πειραματική, ελέγχου). Για την εξακρίβωση της επίδρασης του παρεμβατικού προγράμματος, εφαρμόστηκε η ανάλυση επαναλαμβανόμενων μετρήσεων (Repeated Measures) με εξαρτημένη μεταβλητή την κατανόηση των κλασμάτων και ανεξάρτητη μεταβλητή το είδος της ομάδας (πειραματική, ελέγχου) και το χρόνο των μετρήσεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μια εκτενής παρουσίαση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από τις στατιστικές αναλύσεις που διενεργήθηκαν για την απάντηση των ερευνητικών ερωτημάτων. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται με τη σειρά των ερευνητικών ερωτημάτων.

Αρχικά, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τον έλεγχο της εφαρμογής του παρεμβατικού προγράμματος (παρατηρήσεις μαθημάτων που δίδαξαν οι εκπαιδευτικοί της πειραματικής ομάδας, επικοινωνία ερευνητή με εκπαιδευτικούς πειραματικής ομάδας, έντυπα που συμπλήρωναν οι εκπαιδευτικοί της πειραματικής ομάδας, διόρθωση φύλλων εργασίας μαθητών στους οποίους εφαρμόστηκε η παρέμβαση) και τα αποτελέσματα από τις συνεντεύξεις με τους εκπαιδευτικούς της ομάδας ελέγχου. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση για τον έλεγχο του προτεινόμενου μοντέλου (Ερώτημα 1). Η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση εφαρμόστηκε τρεις φορές για τις τρεις μετρήσεις στα πλαίσια της κυρίως έρευνας (η διενέργεια τριών μετρήσεων έγινε για να ελεγχθεί η προσαρμογή του προτεινόμενου μοντέλου στα εμπειρικά δεδομένα και η καταλληλότητά του για να περιγράψει την κατανόηση των κλασμάτων, για τον έλεγχο της αποτελεσματικότητας της παρέμβασης και της σταθερότητας του προτεινόμενου μοντέλου). Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης επιτρέπουν την απάντηση και στο δεύτερο ερώτημα, πόσο συνεισφέρει ο κάθε παράγοντας στην κατανόηση των κλασματικών αριθμών, αλλά και στο τρίτο ερώτημα, κατά πόσον το προτεινόμενο μοντέλο παραμένει σταθερό με την πάροδο του χρόνου. Ακολούθως, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης latent class (LCA) για την εξακρίβωση του κατά πόσον η πειραματική ομάδα και η ομάδα ελέγχου συμπεριφέρονται ως ενιαίες ομάδες όσον αφορά στην κατανόηση των κλασμάτων και σε περίπτωση που δεν συμπεριφέρονται ως ενιαίες ομάδες, πόσες και ποιες κατηγορίες (ομάδες) μαθητών μπορούν να δημιουργηθούν (Ερώτημα 4). Η ανάλυση latent class έγινε με βάση την κατανόηση στην πρώτη μέτρηση (pre-test). Η απάντηση στο ερώτημα 4 προηγείται των ερωτημάτων 6 και 7, γιατί σε περίπτωση που η πειραματική ομάδα δεν συμπεριφερόταν σαν ενιαίο σύνολο, ξεχωριστές αναλύσεις θα έπρεπε να λάβουν χώρα για την κάθε κατηγορία μαθητών για απάντηση στα ερωτήματα 6 και 7. Το ίδιο ίσχυε και για την ομάδα ελέγχου. Για την απάντηση στο ερώτημα 5 κατά πόσον οι παράγοντες καθορίζουν ιεραρχικά επίπεδα σχετικά με την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος, βρέθηκαν μέσοι όροι και τυπικές αποκλίσεις της ικανότητας των μαθητών στους παράγοντες για καθεμιά από τις τρεις μετρήσεις. Στη συνέχεια, για την απάντηση στο ερώτημα 6 για την επίδραση του παρεμβατικού προγράμματος στην κατανόηση των κλασμάτων, έγινε πρώτα ανάλυση για επαναλαμβανόμενες μετρήσεις (Repeated Measures), έτσι ώστε να εξακριβωθεί κατά πόσον το παρεμβατικό πρόγραμμα έχει επίδραση στην κατανόηση των κλασμάτων και ακολούθως διενεργήθηκε ανάλυση ανάπτυξης (Growth Modeling) η οποία επιτρέπει την εξαγωγή συμπερασμάτων για κάθε παράγοντα ξεχωριστά. Η ανάλυση ανάπτυξης διενεργήθηκε και για την απάντηση στο ερώτημα 7 για την εξακρίβωση του ρυθμού ανάπτυξης της κατανόησης των κλασμάτων και της ικανότητας των μαθητών στους παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων. Λόγω του ότι η ανάλυση ανάπτυξης χρησιμοποιήθηκε για απάντηση και στα δύο ερωτήματα, τα αποτελέσματα για τα ερωτήματα 6 και 7 θα παρατεθούν στον ίδιο χώρο.

Έλεγχος της Εφαρμογής του Παρεμβατικού Προγράμματος και Συνεντεύξεις από τους Εκπαιδευτικούς της Ομάδας Ελέγχου

Από τις παρατηρήσεις των διδασκαλιών των εκπαιδευτικών της πειραματικής ομάδας, την επικοινωνία του ερευνητή με τους εκπαιδευτικούς, τα έντυπα τα οποία συμπλήρωναν οι εκπαιδευτικοί και την εργασία των μαθητών στα φύλλα εργασίας, διαφάνηκε ότι όλοι οι εκπαιδευτικοί της πειραματικής ομάδας εφάρμοσαν πιστά τα σχέδια μαθήματος και τις οδηγίες που τους δόθηκαν.

Από τις συνεντεύξεις με τους εκπαιδευτικούς της ομάδας ελέγχου, διαφάνηκε ότι ακολούθησαν το Α.Π., χρησιμοποίησαν τα βιβλία των μαθηματικών και δεν έδωσαν επιπρόσθετο υλικό πέρα από την ύλη των κλασμάτων που διδάσκεται. Όσον αφορά στην έμφαση στους παράγοντες, από τις συνεντεύξεις διαφάνηκε ότι οι δάσκαλοι της ομάδας ελέγχου έδωσαν έμφαση στην αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων και στις διασυνδέσεις με τους δεκαδικούς, τα ποσοστά και τη διαίρεση, αφού σε αυτούς τους δύο παράγοντες δίνεται μεγάλη έμφαση με βάση την ύλη των βιβλίων των μαθηματικών. Ακόμη, από τις συνεντεύξεις φάνηκε ότι κάποια έμφαση δόθηκε και στις αναπαραστάσεις και συγκεκριμένα στην αναγνώριση κλασμάτων σε εικονική μορφή και στη μετάφραση σε συμβολική αναπαράσταση. Ωστόσο, όσον αφορά σε αυτές τις δύο συνιστώσες των αναπαραστάσεων (μετάφραση σε εικονική αναπαράσταση και σε συμβολική αναπαράσταση), η έμφαση που δόθηκε με βάση το υφιστάμενο Α.Π. φαίνεται να ήταν μικρότερη της έμφασης που δόθηκε από την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος. Αυτό διαπιστώνεται τόσο από την ύλη των βιβλίων των μαθηματικών, όπου φαίνεται ότι η έμφαση είναι μικρότερη από την έμφαση που δόθηκε με βάση τις διδασκαλίες στα πλαίσια του παρεμβατικού προγράμματος, όσο και από τα όσα ανάφεραν οι δάσκαλοι της ομάδας ελέγχου στα πλαίσια των συνεντεύξεων. Ακόμη, φαίνεται ότι πολύ λίγη έμφαση δόθηκε στην ικανότητα των μαθητών να μεταφράζουν από εικονική σε λεκτική αναπαράσταση και από συμβολική σε λεκτική αναπαράσταση. Επίσης, με βάση το υφιστάμενο Α.Π. ζητήθηκε από τους μαθητές να δώσουν κάποιο ορισμό του τι είναι κλάσμα. Ωστόσο, η έμφαση που δόθηκε φαίνεται να ήταν μικρότερη από τη διδασκαλία του παράγοντα ορισμοί και μαθηματικές εξηγήσεις στα πλαίσια του παρεμβατικού προγράμματος που εφαρμόστηκε από τους δασκάλους της πειραματικής ομάδας. Αυτό συμπεραίνεται από τις απαντήσεις των εκπαιδευτικών της ομάδας ελέγχου στα πλαίσια των συνεντεύξεων. Καταληκτικά, φάνηκε μέσα από τις συνεντεύξεις ότι οι δάσκαλοι της ομάδας ελέγχου έδωσαν έμφαση στην πρώτη και τη δεύτερη συνιστώσα του αναστοχασμού, δηλαδή την ικανότητα αιτιολόγησης της σκέψης και της απάντησης σε προβλήματα με κλάσματα και τη λογικότητα της απάντησης. Όμως, φαίνεται ότι η έμφαση που δόθηκε ήταν μικρότερη της έμφασης που δίνεται σε αυτές τις ικανότητες από τη διδασκαλία του αναστοχασμού στα πλαίσια του υφιστάμενου παρεμβατικού προγράμματος. Αυτό συμπεραίνεται τόσο από τα όσα ανέφεραν οι δάσκαλοι της ομάδας ελέγχου στα πλαίσια των συνεντεύξεων, αλλά και με βάση την ύλη των μαθηματικών που διδάχθηκαν οι μαθητές.

Ερώτημα 1: Σε ποιο βαθμό μπορεί να επιβεβαιωθεί το θεωρητικό μοντέλο που προτείνεται;

Για να εξακριβωθεί σε ποιο βαθμό μπορεί να επιβεβαιωθεί το θεωρητικό μοντέλο που προτείνεται, διενεργήθηκε επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση. Πιο κάτω παρουσιάζονται περιγραφικά αποτελέσματα για τους παράγοντες που εξετάζεται κατά πόσον συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων και οι συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών (έργων στα δύο δοκίμια) που χρησιμοποιήθηκαν για τον έλεγχο της εγκυρότητας του μοντέλου. Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται για καθεμιά από τις τρεις μετρήσεις.

Μέτρηση Πριν την Εφαρμογή του Παρεμβατικού Προγράμματος (pre-test)

Περιγραφικά Αποτελέσματα για τους Παράγοντες που Συνθέτουν την Κατανόηση των Κλασμάτων

Ο Πίνακας 4.1.1 παρουσιάζει περιγραφικά αποτελέσματα για τους παράγοντες που θεωρούμε ότι συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων στη μέτρηση πριν την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος. Οι ψηλότεροι μέσοι όροι των υποκειμένων ήταν στον επαγωγικό συλλογισμό (Μ.Ο.= .734) και στην αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων (Μ.Ο.= .631), ενώ οι χαμηλότεροι μέσοι όροι ήταν στους ορισμούς και μαθηματικές εξηγήσεις (Μ.Ο.=.213) και στον αναστοχασμό (Μ.Ο.=.217). Ο Πίνακας 4.1 παρουσιάζει, επίσης, τις τιμές της λοξότητας και της κύρτωσης της ικανότητας των μαθητών σε καθένα από τους επτά παράγοντες. Οι τιμές αυτές ήταν μεγαλύτερες από -2 και μικρότερες από 2, στοιχείο που δείχνει ότι η ικανότητα των μαθητών σε καθένα από τους επτά παράγοντες ακολουθεί την κανονική κατανομή.

Πίνακας 4.1.1

Περιγραφικά Αποτελέσματα των Παραγόντων που Συνθέτουν την Κατανόηση των Κλασμάτων στην Πρώτη Μέτρηση (pre-test)

Παράγοντας	Μέσος Όρος	Τυπική Απόκλιση	Λοξότητα	Κύρτωση
Επαγωγικός συλλογισμός	.734	.241	-.715	-.328
Ορισμοί και μαθηματικές εξηγήσεις	.213	.205	.758	-.317
Επιχειρηματολογία και τεκμηρίωση	.305	.248	.744	-.595
Αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων	.631	.322	-.499	-.843
Αναπαραστάσεις	.535	.200	-.026	-.542
Διασυνδέσεις με τους δεκαδικούς, τα ποσοστά και τη διαίρεση	.449	.338	.294	-1.387
Αναστοχασμός	.217	.202	1.141	.672

Ο Πίνακας 4.2.1 παρουσιάζει τις συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών που χρησιμοποιήθηκαν για τον έλεγχο της εγκυρότητας του μοντέλου (βλέπε Παράρτημα). Οι μεταβλητές αντιστοιχούν στα 56 έργα των δύο δοκιμίων που χρησιμοποιήθηκαν για τη μέτρηση των παραγόντων που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων. Λόγω του ότι μερικές μεταβλητές ήταν στην κατηγορική κλίμακα, άλλες στη διατακτική κλίμακα και άλλες στην ισοδιαστημική κλίμακα, χρησιμοποιήθηκαν διαφορετικοί συντελεστές συσχέτισης. Πιο συγκεκριμένα, οι μεταβλητές που αντιστοιχούσαν στα έργα για τον επαγωγικό συλλογισμό (έργα 1-5, εκτός του έργου 4), ήταν στην κατηγορική κλίμακα. Το ίδιο συνέβαινε για τα έργα για τη μέτρηση της αίσθησης για το μέγεθος των κλασμάτων, τα έργα για τη μετάφραση από εικονική σε συμβολική αναπαράσταση και τις διασυνδέσεις των κλασμάτων με τους δεκαδικούς, τα ποσοστά και τη διαίρεση. Το έργο 4 για τη μέτρηση του επαγωγικού συλλογισμού, τα έργα για τη μέτρηση των ορισμών και των μαθηματικών εξηγήσεων, τα έργα που αφορούσαν μετάφραση σε λεκτική αναπαράσταση και εκείνα στα οποία οι μαθητές έπρεπε να κατασκευάσουν από μόνοι τους σχέδιο ανήκαν στη διατακτική κλίμακα. Τα υπόλοιπα έργα ανήκαν στην ισοδιαστημική κλίμακα. Για τις μεταβλητές που ανήκαν στην κατηγορική κλίμακα, βρέθηκε ο συντελεστής Φ του Cramer (Cramer's Φ), για εκείνες που ανήκαν στη διατακτική κλίμακα, ο συντελεστής του Spearman (Spearman's ρ), ενώ για εκείνες που ανήκαν στην ισοδιαστημική κλίμακα βρέθηκε ο συντελεστής συσχέτισης του Pearson (Pearson's r).

Από τον Πίνακα 4.2.1 φαίνεται ότι οι περισσότερες συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών των πέντε έργων για τον επαγωγικό συλλογισμό ήταν στατιστικά σημαντικές (εξαίρεση αποτέλεσαν οι συσχετίσεις μεταξύ των έργων 4 (Ε.Σ.4) και 2 (Ε.Σ.2) και μεταξύ των έργων 4 (Ε.Σ.4) και 5 (Ε.Σ.5)). Ψηλότερη βρέθηκε να είναι η συσχέτιση μεταξύ του έργου 2 (Ε.Σ.2) και του έργου 3 (Ε.Σ.3) ($\Phi=.292, p<.01$). Οι συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών των τεσσάρων έργων για τους ορισμούς και τις μαθηματικές εξηγήσεις ήταν όλες στατιστικά σημαντικές (ψηλότερη συσχέτιση μεταξύ του έργου 7 (Ο.Ε. 2) και του έργου 8 (Ο.Ε.3), $\rho=.393, p<.01$). Όσον αφορά στις συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών των πέντε έργων για την επιχειρηματολογία και την τεκμηρίωση, ήταν όλες στατιστικά σημαντικές, με ψηλότερη τη συσχέτιση μεταξύ των έργων 13 (Ε.Τ.4) και 14 (Ε.Τ.5) ($r=.481, p<.01$). Παρόμοια, για την αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων, οι συσχετίσεις ήταν όλες στατιστικά σημαντικές με ψηλότερη τη συσχέτιση μεταξύ των έργων 19β (Α.Μ.Κ.2) και 19γ (Α.Κ.Μ.3) ($\Phi=.490, p<.01$). Όσον αφορά στις αναπαραστάσεις, παρουσιάζονται οι συσχετίσεις για τις μεταβλητές που συνθέτουν τους παράγοντες πρώτης τάξης (μετάφραση σε εικονική αναπαράσταση, μετάφραση σε λεκτική αναπαράσταση, μετάφραση σε συμβολική αναπαράσταση και κατασκευή σχεδίου) και στη συνέχεια οι συσχετίσεις μεταξύ αυτών των παραγόντων πρώτης τάξης. Οι συσχετίσεις μεταξύ των τριών έργων που αφορούσαν μετάφραση σε εικονική αναπαράσταση ήταν όλες στατιστικά σημαντικές με ψηλότερη τη συσχέτιση μεταξύ των έργων 21 (Μ.Ε.1) και 23 (Μ.Ε.2) ($r=.513, p<.01$). Παρόμοια, για τα τρία έργα που αφορούσαν μετάφραση σε λεκτική αναπαράσταση, οι συσχετίσεις ήταν στατιστικά σημαντικές με ψηλότερη τη συσχέτιση μεταξύ των έργων 22 (Μ.Λ.1) και 27 (Μ.Λ.2) ($\rho=.392, p<.01$). Οι συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών των τεσσάρων έργων για τη μετάφραση σε συμβολική αναπαράσταση ήταν στατιστικά σημαντικές (ψηλότερη συσχέτιση μεταξύ των έργων 26γ (Μ.Σ.3) και 26δ (Μ.Σ.4), $\Phi=.423, p<.01$). Το ίδιο συνέβαινε για τα έργα που αφορούσαν κατασκευή σχεδίου από τους ίδιους τους μαθητές (ψηλότερη συσχέτιση μεταξύ των έργων 30 (Κ.Σ.3) και 31 (Κ.Σ.4), $\rho=.418, p<.01$). Αναφορικά με τις συσχετίσεις μεταξύ των παραγόντων πρώτης τάξης, ήταν όλες στατιστικά σημαντικές με ψηλότερη τη συσχέτιση μεταξύ της ικανότητας μετάφρασης σε λεκτική αναπαράσταση και της κατασκευής σχεδίου ($r=.558$, $p<.01$). Οι διασυνδέσεις των κλασμάτων με τους δεκαδικούς, τα ποσοστά και τη διαίρεση αποτελούνται από την ικανότητα των μαθητών να συνδέουν τα κλάσματα με τους δεκαδικούς, τα ποσοστά και τη διαίρεση (πρώτης τάξης παράγοντες). Για καθένα από αυτούς τους πρώτης τάξης παράγοντες, βρέθηκαν οι συσχετίσεις των μεταβλητών που τους συνθέτουν, αλλά και οι συσχετίσεις μεταξύ αυτών των πρώτης τάξης παραγόντων. Οι συσχετίσεις μεταξύ των πέντε έργων που αφορούσαν στη διασύνδεση με τους δεκαδικούς ήταν όλες ψηλές και στατιστικά σημαντικές με ψηλότερη τη συσχέτιση μεταξύ των έργων 32β (Μ.Δ.2) και 32γ (Μ.Δ.3) ($\Phi=.798$, $p<.01$). Παρόμοια, για τα έργα που αφορούσαν μετατροπή σε ποσοστά, οι συσχετίσεις ήταν ψηλές και στατιστικά σημαντικές (ψηλότερη συσχέτιση μεταξύ των έργων 33δ (Μ.Π.4) και 33ε (Μ.Π.5), $\Phi=.864$, $p<.01$). Το ίδιο συνέβαινε για τα έργα που αναφέρονταν στη σχέση του κλάσματος με τη διαίρεση ακεραίων (ψηλότερη συσχέτιση μεταξύ των έργων 34α (Δ.Α.1) και 34β (Δ.Α.2), $\Phi=.554$, $p<.01$). Οι συσχετίσεις μεταξύ των παραγόντων πρώτης τάξης ήταν όλες ψηλές και στατιστικά σημαντικές, με ψηλότερη τη συσχέτιση μεταξύ της ικανότητας διασύνδεσης της έννοιας του κλάσματος με τους δεκαδικούς και της διασύνδεσης με τα ποσοστά ($r=.644$, $p<.01$). Για τον αναστοχασμό, βρέθηκαν οι συσχετίσεις μεταξύ των έργων που συνθέτουν τους παράγοντες πρώτης τάξης (ικανότητα αιτιολόγησης της σκέψης, ικανότητα εξήγησης της λογικότητας της απάντησης και επαλήθευσης της απάντησης) και ακολούθως, βρέθηκαν οι συσχετίσεις μεταξύ των παραγόντων πρώτης τάξης. Οι συσχετίσεις μεταξύ των τεσσάρων έργων για την αιτιολόγηση της σκέψης ήταν όλες στατιστικά σημαντικές με ψηλότερη τη συσχέτιση μεταξύ των έργων 15 (ΑΝ.ΣΚ.1) και 16 (ΑΝ.ΣΚ.2) ($r=.437$, $p<.01$). Παρόμοια, οι συσχετίσεις μεταξύ των τριών έργων για τη λογικότητα της απάντησης ήταν στατιστικά σημαντικές (ψηλότερη συσχέτιση μεταξύ των έργων 36 (ΑΝ.ΛΟ.1) και 38 (ΑΝ.ΛΟ.3), $r=.594$, $p<.01$). Το ίδιο συνέβαινε για τα τρία έργα που αφορούσαν την επαλήθευση της απάντησης (ψηλότερη συσχέτιση μεταξύ των έργων 39 (ΑΝ.ΕΠ.1) και 40 (ΑΝ.ΕΠ.2), $r=.518$, $p<.01$). Οι συσχετίσεις μεταξύ των παραγόντων πρώτης τάξης που αποτελούν τον αναστοχασμό ήταν επίσης στατιστικά σημαντικές (ψηλότερη συσχέτιση μεταξύ της ικανότητας εξήγησης της λογικότητας της απάντησης και επαλήθευσης της απάντησης, $r=.550$, $p<.01$).

Ο Πίνακας 4.3.1 παρουσιάζει τις συσχετίσεις μεταξύ των ικανοτήτων των μαθητών στους επτά παράγοντες (επαγωγικός συλλογισμός Ε.Σ., ορισμοί/μαθηματικές εξηγήσεις Ο.Ε., επιχειρηματολογία/τεκμηρίωση Ε.Τ., αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων Α.Μ., αναπαραστάσεις ΑΝΑΠ., διασυνδέσεις με τους δεκαδικούς, τα ποσοστά και τη διαίρεση ΔΙΑΣ., αναστοχασμός ΑΝΑΣ.) που θεωρούμε ότι συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων.

Πίνακας 4.3.1

Συσχετίσεις Μεταξύ των Ικανοτήτων των Υποκειμένων στους Παράγοντες που Συνθέτουν την Κατανόηση των Κλασμάτων στην Πρώτη Μέτρηση (pre-test)

	Ε.Σ.	Ο.Ε.	Ε.Τ.	Α.Μ.	ΑΝΑΠ.	ΔΙΑΣ.	ΑΝΑΣ.
Ε.Σ.	1						
Ο.Ε.	.443**	1					
Ε.Τ.	.442**	.608**	1				
Α.Μ.	.299**	.504**	.503**	1			
ΑΝΑΠ.	.423**	.610**	.639**	.523**	1		
ΔΙΑΣ.	.400**	.522**	.557**	.516**	.630**	1	
ΑΝΑΣ.	.424**	.516**	.647**	.491**	.616**	.640**	1

**p<0.01

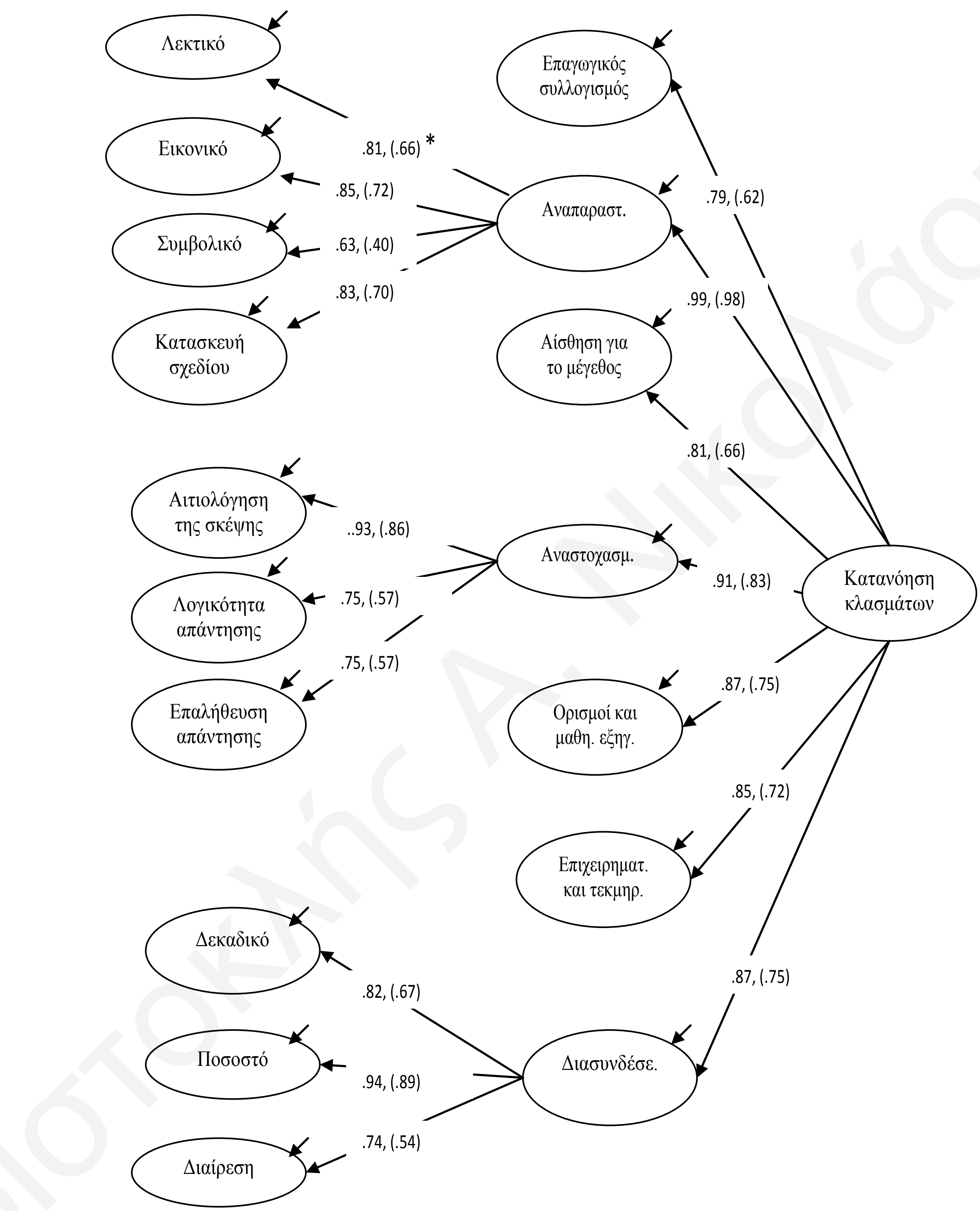
Από τον Πίνακα 4.3.1 φαίνεται ότι όλες οι συσχετίσεις είναι στατιστικά σημαντικές και οι περισσότερες από αυτές είναι αρκετά ψηλές. Οι υψηλότερες συσχετίσεις παρουσιάζονται μεταξύ της ικανότητας των μαθητών στην επιχειρηματολογία και την τεκμηρίωση και τον αναστοχασμό ($r=.647, p<.01$), μεταξύ της ικανότητας στις διασυνδέσεις και στον αναστοχασμό ($r=.640, p<.01$), και μεταξύ της ικανότητας στην επιχειρηματολογία και την τεκμηρίωση και τις αναπαραστάσεις ($r=.639, p<.01$). Το γεγονός ότι όλες οι συσχετίσεις μεταξύ της ικανότητας των μαθητών στους επτά παράγοντες ήταν στατιστικά σημαντικές και οι περισσότερες από αυτές αρκετά ψηλές, καταδεικνύει ότι οι επτά παράγοντες φαίνεται να συνθέτουν την ίδια «ανώτερη δομή».

Ο δείκτης αξιοπιστίας των δύο δοκιμίων μέτρησης των επτά παραγόντων που θεωρούμε ότι συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων ήταν Gronbach’s Alpha=0.94, ο οποίος θεωρείται πολύ ικανοποιητικός. Οι δείκτες αξιοπιστίας των έργων μέτρησης για κάθε παράγοντα ήταν $\alpha_{\text{επαγωγικός συλλογισμός}}=.53$, $\alpha_{\text{ορισμοί και μαθηματικές εξηγήσεις}}=.63$, $\alpha_{\text{επιχειρηματολογία και}}$

$_{\text{τεκμηρίωση}}$=.77, $\alpha_{\text{αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων}}$=.63, $\alpha_{\text{αναπαραστάσεις}}$=.79, $\alpha_{\text{διασυνδέσεις}}$=.92, $\alpha_{\text{αναστοχασμός}}$=.80. Οι δείκτες αξιοπιστίας για την επιχειρηματολογία και την τεκμηρίωση, τις αναπαραστάσεις, τις διασυνδέσεις και τον αναστοχασμό θεωρούνται πολύ ικανοποιητικοί (α>.70), ενώ οι δείκτες για τον επαγωγικό συλλογισμό, τους ορισμούς και τις μαθηματικές εξηγήσεις και την αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων θεωρούνται ικανοποιητικοί (α>.50). Οι χαμηλοί δείκτες αξιοπιστίας σε αυτούς τους τρεις παράγοντες φαίνεται να οφείλονται στο γεγονός ότι χρησιμοποιήθηκαν τέσσερα ή πέντε έργα για τη μέτρησή τους (ο δείκτης αξιοπιστίας Gronbach’s Alpha επηρεάζεται σε σημαντικό βαθμό από το πλήθος των έργων).

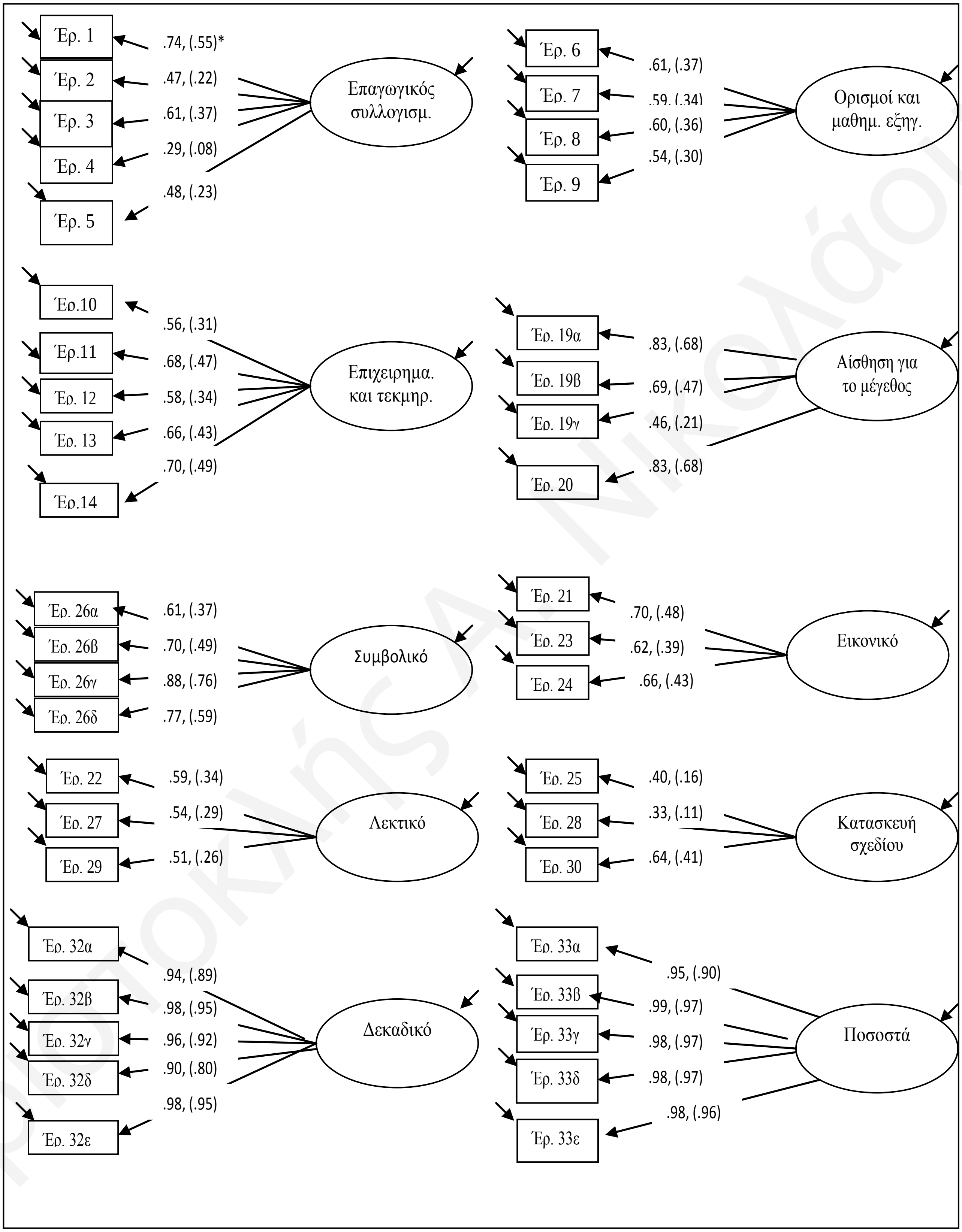
Επιβεβαίωση του Προτεινόμενου Μοντέλου

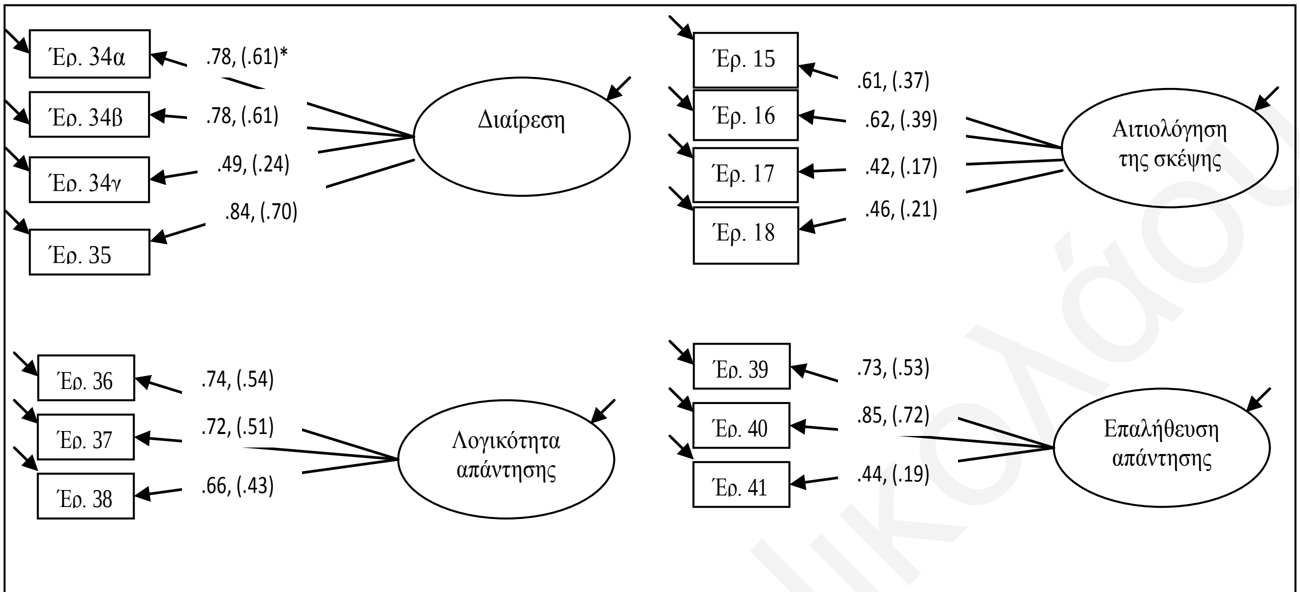
Με βάση το τελικό προτεινόμενο μοντέλο, θεωρούμε ότι οι παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων είναι ο επαγωγικός συλλογισμός, οι ορισμοί και οι μαθηματικές εξηγήσεις, η επιχειρηματολογία και η τεκμηρίωση, η αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων, οι αναπαραστάσεις, οι διασυνδέσεις με τους δεκαδικούς, τα ποσοστά και τη διαίρεση και ο αναστοχασμός. Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης έδειξαν ότι η προσαρμογή των δεδομένων στο προτεινόμενο μοντέλο ήταν πολύ καλή, επιβεβαιώνοντας την εγκυρότητα της δομής του μοντέλου και την καταλληλότητά του για να περιγράψει την κατανόηση των κλασματικών αριθμών *(CFI=.982, χ^2=244.967, df=177, χ^2/df=1.38, p<0.05, RMSEA=0.033).* Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης που φαίνονται στο Διάγραμμα 4.1.1. επιβεβαιώνουν την υπόθεση ότι ο επαγωγικός συλλογισμός, οι ορισμοί και οι μαθηματικές εξηγήσεις, η επιχειρηματολογία και η τεκμηρίωση, η αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων, οι αναπαραστάσεις, οι διασυνδέσεις με τους δεκαδικούς, τα ποσοστά και τη διαίρεση και ο αναστοχασμός είναι παράγοντες που συνθέτουν μια ανώτερη θεωρητική δομή, την κατανόηση των κλασμάτων. Ακόμη, τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης δείχνουν ότι οι αναπαραστάσεις ($2^{ης}$ τάξης παράγοντας) αποτελούνται από την ικανότητα των μαθητών να μεταφράζουν σε λεκτική αναπαράσταση, σε εικονική αναπαράσταση, σε συμβολική αναπαράσταση και από την ικανότητά τους να κατασκευάζουν σχέδια για να δείξουν κλασματικούς αριθμούς ($1^{ης}$ τάξης παράγοντες). Παρόμοια, η ικανότητα των μαθητών στις διασυνδέσεις ($2^{ης}$ τάξης παράγοντας) αποτελείται από την ικανότητά τους να μεταφράζουν από κλάσμα σε δεκαδικό, σε ποσοστό και από την ικανότητά τους να συνδέουν την έννοια του κλάσματος με τη διαίρεση ακεραίων (1ης τάξης παράγοντες). Το ίδιο ισχύει για τον αναστοχασμό (2ης τάξης παράγοντας) που αποτελείται από την ικανότητα των μαθητών να αιτιολογούν τη σκέψη και την απάντησή τους σε προβλήματα με κλάσματα, να εξηγούν τη λογικότητα της απάντησής τους και να επαληθεύουν την απάντησή τους (1ης τάξης παράγοντες). Η προσαρμογή των δεδομένων στη δομή του προτεινόμενου μοντέλου επιβεβαιώνει ότι τα έργα που χρησιμοποιήθηκαν αποτελούν κατάλληλα έργα μέτρησης των άδηλων παραγόντων. Όλα τα έργα πλην ενός (έργο 31 (Κ.Σ.4) για την κατασκευή σχεδίου) είχαν σημαντικές φορτίσεις στους αντίστοιχους παράγοντες (λόγω του μεγάλου πλήθους των έργων, οι φορτίσεις των έργων σε κάθε παράγοντα παρουσιάζονται ξεχωριστά στο Διάγραμμα 4.2.1.).



* Ο πρώτος αριθμός δείχνει το συντελεστή φόρτισης και ο αριθμός στην παρένθεση την αντίστοιχη ερμηνευμένη διασπορά (r^2)

Διάγραμμα 4.1.1. Το Μοντέλο της Κατανόησης των Κλασματικών Αριθμών Πριν την Παρέμβαση


Έρ. 1
Έρ. 2
Έρ. 3
Έρ. 4
Έρ. 5
.74, (.55)*
.47, (.22)
.61, (.37)
.29, (.08)
.48, (.23)
Επαγωγικός συλλογισμ.
Έρ. 6
Έρ. 7
Έρ. 8
Έρ. 9
.61, (.37)
.59, (.34)
.60, (.36)
.54, (.30)
Ορισμοί και μαθημ. εξηγ.
Έρ.10
Έρ.11
Έρ. 12
Έρ. 13
Έρ.14
.56, (.31)
.68, (.47)
.58, (.34)
.66, (.43)
.70, (.49)
Επιχειρημα. και τεκμηρ.
Έρ. 19α
Έρ. 19β
Έρ. 19γ
Έρ. 20
.83, (.68)
.69, (.47)
.46, (.21)
.83, (.68)
Αίσθηση για το μέγεθος
Έρ. 26α
Έρ. 26β
Έρ. 26γ
Έρ. 26δ
.61, (.37)
.70, (.49)
.88, (.76)
.77, (.59)
Συμβολικό
Έρ. 21
Έρ. 23
Έρ. 24
.70, (.48)
.62, (.39)
.66, (.43)
Εικονικό
Έρ. 22
Έρ. 27
Έρ. 29
.59, (.34)
.54, (.29)
.51, (.26)
Λεκτικό
Έρ. 25
Έρ. 28
Έρ. 30
.40, (.16)
.33, (.11)
.64, (.41)
Κατασκευή σχεδίου
Έρ. 32α
Έρ. 32β
Έρ. 32γ
Έρ. 32δ
Έρ. 32ε
.94, (.89)
.98, (.95)
.96, (.92)
.90, (.80)
.98, (.95)
Δεκαδικό
Έρ. 33α
Έρ. 33β
Έρ. 33γ
Έρ. 33δ
Έρ. 33ε
.95, (.90)
.99, (.97)
.98, (.97)
.98, (.97)
.98, (.96)
Ποσοστά



* Ο πρώτος αριθμός δείχνει το συντελεστή φόρτισης και ο αριθμός στην παρένθεση την αντίστοιχη ερμηνευμένη διασπορά (r^2).

Διάγραμμα 4.2.1. Οι Φορτίσεις των Έργων σε Κάθε Παράγοντα στη Μέτρηση Πριν την Παρέμβαση

Μέτρηση Αμέσως Μετά την Εφαρμογή του Παρεμβατικού Προγράμματος (post-test)

Περιγραφικά Αποτελέσματα για τους Παράγοντες που Συνθέτουν την Κατανόηση των Κλασμάτων

Ο Πίνακας 4.1.2 παρουσιάζει περιγραφικά αποτελέσματα για τους παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων στη μέτρηση αμέσως μετά την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος. Τα αποτελέσματα είναι παρόμοια με αυτά της μέτρησης πριν την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος, με τη διαφορά ότι οι μέσοι όροι σε όλους τους παράγοντες είναι ψηλότεροι. Πιο συγκεκριμένα, οι ψηλότεροι μέσοι όροι των υποκειμένων ήταν στον επαγωγικό συλλογισμό (Μ.Ο.= .833) και στην αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων (Μ.Ο.= .721), ενώ οι χαμηλότεροι μέσοι όροι ήταν στους ορισμούς και μαθηματικές εξηγήσεις (Μ.Ο.=.286) και στον αναστοχασμό (Μ.Ο.=.299). Ο Πίνακας 4.1.2 παρουσιάζει, επίσης, τις τιμές της λοξότητας και της κύρτωσης της ικανότητας των μαθητών σε καθένα από τους επτά παράγοντες. Οι τιμές αυτές ήταν μεγαλύτερες από -2 και μικρότερες από 2, στοιχείο που δείχνει ότι η ικανότητα των μαθητών σε καθένα από τους επτά παράγοντες ακολουθεί την κανονική κατανομή.

Πίνακας 4.1.2

Περιγραφικά Αποτελέσματα των Παραγόντων που Συνθέτουν την Κατανόηση των Κλασμάτων στη Δεύτερη Μέτρηση (post-test)

Παράγοντας	Μέσος Όρος	Τυπική Απόκλιση	Λοξότητα	Κύρτωση
Επαγωγικός συλλογισμός	.833	.212	-1.323	1.594
Ορισμοί και μαθηματικές εξηγήσεις	.286	.220	.547	-.440
Επιχειρηματολογία και τεκμηρίωση	.411	.274	.128	-1.258
Αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων	.721	.321	-.938	-.270
Αναπαραστάσεις	.561	.201	-.216	-.440
Διασυνδέσεις με τους δεκαδικούς, τα ποσοστά και τη διαίρεση	.609	.336	-.583	-1.169
Αναστοχασμός	.299	.255	-.742	-.530

Ο Πίνακας 4.2.2 παρουσιάζει τις συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών που χρησιμοποιήθηκαν για τον έλεγχο της εγκυρότητας του μοντέλου στη μέτρηση αμέσως μετά την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος (βλέπε Παράρτημα). Τα αποτελέσματα είναι παρόμοια με αυτά του Πίνακα 4.1.2 για τη μέτρηση πριν την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος. Από τον Πίνακα 4.2.2 φαίνεται ότι οι περισσότερες συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών των πέντε έργων για τον επαγωγικό συλλογισμό ήταν στατιστικά σημαντικές (εξαίρεση αποτέλεσαν οι συσχετίσεις μεταξύ των έργων 1 (Ε.Σ.1) και 3 (Ε.Σ.3) και μεταξύ των έργων 1 (Ε.Σ.1) και 4 (Ε.Σ.4)). Ψηλότερη βρέθηκε να είναι η συσχέτιση μεταξύ του έργου 1 (Ε.Σ.1) και του έργου 2 (Ε.Σ.2) ($Φ=.276, p<.01$). Οι συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών των τεσσάρων έργων για τους ορισμούς και τις μαθηματικές εξηγήσεις ήταν όλες στατιστικά σημαντικές (ψηλότερη συσχέτιση μεταξύ του έργου 7 (Ο.Ε.2) και του έργου 8 (Ο.Ε.3),

$\rho=.437, p<.01$). Όσον αφορά στις συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών των πέντε έργων για την επιχειρηματολογία και την τεκμηρίωση, ήταν όλες στατιστικά σημαντικές, με ψηλότερη τη συσχέτιση μεταξύ των έργων 12 (Ε.Τ.3) και 14 (Ε.Τ.5) ($r=.551, p<.01$). Παρόμοια, για την αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων, οι συσχετίσεις ήταν όλες στατιστικά σημαντικές με ψηλότερη τη συσχέτιση μεταξύ των έργων 19β (Α.Μ.Κ.2) και 19γ (Α.Μ.Κ.3) ($\Phi=.491, p<.01$). Όσον αφορά στις αναπαραστάσεις, θεωρούμε ότι αποτελούνται από την ικανότητα μετάφρασης σε εικονική, λεκτική και συμβολική αναπαράσταση και από την ικανότητα των μαθητών να κατασκευάζουν σχέδια για κλασματικούς αριθμούς (πρώτης τάξης παράγοντες). Βρέθηκαν πρώτα οι συσχετίσεις μεταξύ των έργων που αποτελούν τους πρώτης τάξης παράγοντες, και στη συνέχεια οι συσχετίσεις μεταξύ αυτών των πρώτης τάξης παραγόντων. Οι συσχετίσεις μεταξύ των τριών έργων για τη μετάφραση σε εικονική αναπαράσταση ήταν όλες στατιστικά σημαντικές με ψηλότερη τη συσχέτιση μεταξύ των έργων 21 (Μ.Ε.1) και 23 (Μ.Ε.2) ($r=.583, p<.01$). Για τις συσχετίσεις μεταξύ των τριών έργων που αναφέρονται στη μετάφραση σε λεκτική αναπαράσταση, ήταν όλες στατιστικά σημαντικές, με ψηλότερη τη συσχέτιση μεταξύ των έργων 22 (Μ.Λ.1) και 29 (Μ.Λ.3) ($\rho=.286, p<.01$). Παρόμοια, οι συσχετίσεις μεταξύ των τεσσάρων έργων για τη μετάφραση σε συμβολική αναπαράσταση ήταν όλες στατιστικά σημαντικές (ψηλότερη συσχέτιση μεταξύ των έργων 26γ (Μ.Σ.3) και 26δ (Μ.Σ.4), $\Phi=.434, p<.01$). Το ίδιο συνέβαινε για τα έργα που αφορούσαν κατασκευή σχεδίου από τους μαθητές για να δείξουν κλασματικούς αριθμούς (όλες οι συσχετίσεις ήταν στατιστικά σημαντικές, ψηλότερη η συσχέτιση μεταξύ των έργων 30 (Κ.Σ.3) και 31 (Κ.Σ.4), $\rho=.361, p<.01$). Οι συσχετίσεις μεταξύ των παραγόντων πρώτης τάξης ήταν επίσης όλες στατιστικά σημαντικές, με ψηλότερη τη συσχέτιση μεταξύ της ικανότητας μετάφρασης σε λεκτική αναπαράσταση και της ικανότητας κατασκευής σχεδίου ($r=.545, p<.01$). Όσον αφορά στις διασυνδέσεις, βρέθηκαν πρώτα οι συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών για κάθε παράγοντα πρώτης τάξης (διασύνδεση της έννοιας του κλάσματος με δεκαδικούς, ποσοστά και διαίρεση) και στη συνέχεια, οι συσχετίσεις μεταξύ των παραγόντων πρώτης τάξης. Για τα έργα που αφορούσαν μετατροπή κλασμάτων σε δεκαδικούς, οι συσχετίσεις ήταν όλες ψηλές και στατιστικά σημαντικές (ψηλότερη συσχέτιση μεταξύ των έργων 32β (Μ.Δ.2) και 32γ (Μ.Δ.3), $\Phi=.873, p<.01$). Το ίδιο συνέβαινε για τα έργα μετατροπής κλάσματος σε ποσοστό (όλες οι συσχετίσεις ήταν ψηλές και στατιστικά σημαντικές με ψηλότερη τη συσχέτιση μεταξύ των έργων 33δ (Μ.Π.4) και 33ε (Μ.Π.5), $\Phi=.815, p<.01$). Για τις συσχετίσεις μεταξύ των έργων που αφορούσαν στη σχέση του κλάσματος με τη διαίρεση ακεραίων, ήταν όλες στατιστικά σημαντικές, με ψηλότερη τη συσχέτιση μεταξύ των έργων 34α (Δ.Α.1) και 34β (Δ.Α.2) ($\Phi=.455$, $p<.01$). Οι συσχετίσεις μεταξύ των πρώτης τάξης παραγόντων (μετατροπή κλάσματος σε δεκαδικό και ποσοστό, σχέση με τη διαίρεση ακεραίων) ήταν επίσης όλες στατιστικά σημαντικές, με ψηλότερη τη συσχέτιση μεταξύ της μετατροπής κλάσματος σε δεκαδικό και σε ποσοστό ($r=.792$, $p<.01$). Αναφορικά με τον αναστοχασμό, παρουσιάζονται πρώτα οι συσχετίσεις μεταξύ των έργων για την αιτιολόγηση της σκέψης, για τη λογικότητα της απάντησης και την επαλήθευση της απάντησης (πρώτης τάξης παράγοντες) και ακολούθως, οι συσχετίσεις μεταξύ των πρώτης τάξης παραγόντων. Για την αιτιολόγηση της σκέψης, οι συσχετίσεις μεταξύ των τεσσάρων έργων ήταν όλες στατιστικά σημαντικές, με ψηλότερη τη συσχέτιση μεταξύ των έργων 17 (ΑΝ.ΣΚ.3) και 18 (ΑΝ.ΣΚ.4) ($r=.384$, $p<.01$). Οι συσχετίσεις μεταξύ των έργων για τη λογικότητα της απάντησης ήταν επίσης στατιστικά σημαντικές (ψηλότερη συσχέτιση μεταξύ των έργων 36 (ΑΝ.ΛΟ.1) και 38 (ΑΝ.ΛΟ.3), $r=.622$, $p<.01$) και το ίδιο συνέβαινε για τα έργα που αφορούσαν επαλήθευση της απάντησης (ψηλότερη συσχέτιση μεταξύ των έργων 39 (ΑΝ.ΕΠ.1) και 40 (ΑΝ.ΕΠ.2), $r=.655$, $p<.01$). Οι συσχετίσεις μεταξύ των παραγόντων πρώτης τάξης ήταν κι αυτές στατιστικά σημαντικές με ψηλότερη τη συσχέτιση μεταξύ της ικανότητας εξήγησης της λογικότητας της απάντησης και της επαλήθευσης της απάντησης ($r=.677$, $p<.01$).

Ο Πίνακας 4.3.2 παρουσιάζει τις συσχετίσεις μεταξύ των ικανοτήτων των μαθητών στους επτά παράγοντες (επαγωγικός συλλογισμός Ε.Σ., ορισμοί/μαθηματικές εξηγήσεις Ο.Ε., επιχειρηματολογία/τεκμηρίωση Ε.Τ., αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων Α.Μ., αναπαραστάσεις ΑΝΑΠ., διασυνδέσεις ΔΙΑΣ., αναστοχασμός ΑΝΑΣ.) που θεωρούμε ότι συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων. Από τον Πίνακα 4.3.2 φαίνεται ότι όλες οι συσχετίσεις είναι στατιστικά σημαντικές και οι περισσότερες από αυτές είναι αρκετά ψηλές. Οι υψηλότερες συσχετίσεις παρουσιάζονται μεταξύ της ικανότητας των μαθητών στις αναπαραστάσεις και τον αναστοχασμό ($r=.706$, $p<.01$), στην επιχειρηματολογία και την τεκμηρίωση και τους ορισμούς και τις μαθηματικές εξηγήσεις ($r=.696$, $p<.01$) και μεταξύ της ικανότητας στην επιχειρηματολογία και την τεκμηρίωση και τον αναστοχασμό ($r=.678$, $p<.01$). Το γεγονός ότι όλες οι συσχετίσεις μεταξύ της ικανότητας των μαθητών στους επτά παράγοντες ήταν στατιστικά σημαντικές και οι περισσότερες από αυτές αρκετά ψηλές, καταδεικνύει ότι οι επτά παράγοντες φαίνεται να συνθέτουν την ίδια «ανώτερη δομή» που θεωρούμε ότι είναι η κατανόηση των κλασμάτων.

Πίνακας 4.3.2

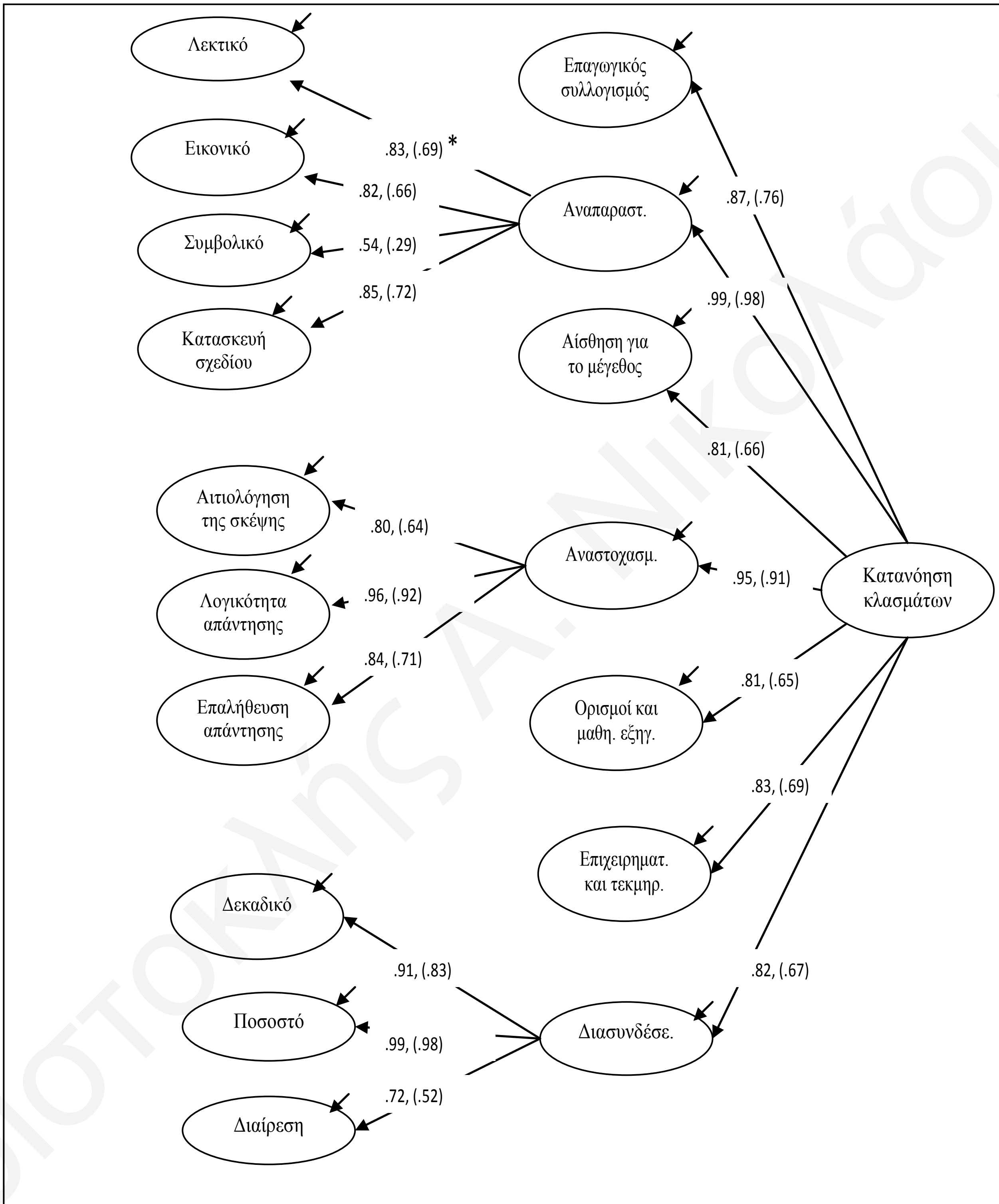
Συσχετίσεις Μεταξύ των Ικανοτήτων των Υποκειμένων στους Παράγοντες που Συνθέτουν την Κατανόηση των Κλασμάτων στη Δεύτερη Μέτρηση (post-test)

	Ε.Σ.	Ο.Ε.	Ε.Τ.	Α.Μ.	ΑΝΑΠ.	ΔΙΑΣ.	ΑΝΑΣ.
Ε.Σ.	1						
Ο.Ε.	.482**	1					
Ε.Τ.	.559**	.696**	1				
Α.Μ.	.381**	.334**	.407**	1			
ΑΝΑΠ.	.439**	.558**	.621**	.592**	1		
ΔΙΑΣ.	.427**	.413**	.500**	.535**	.662**	1	
ΑΝΑΣ.	.473**	.584**	.678**	.509**	.706**	.585**	1

**p<0.01

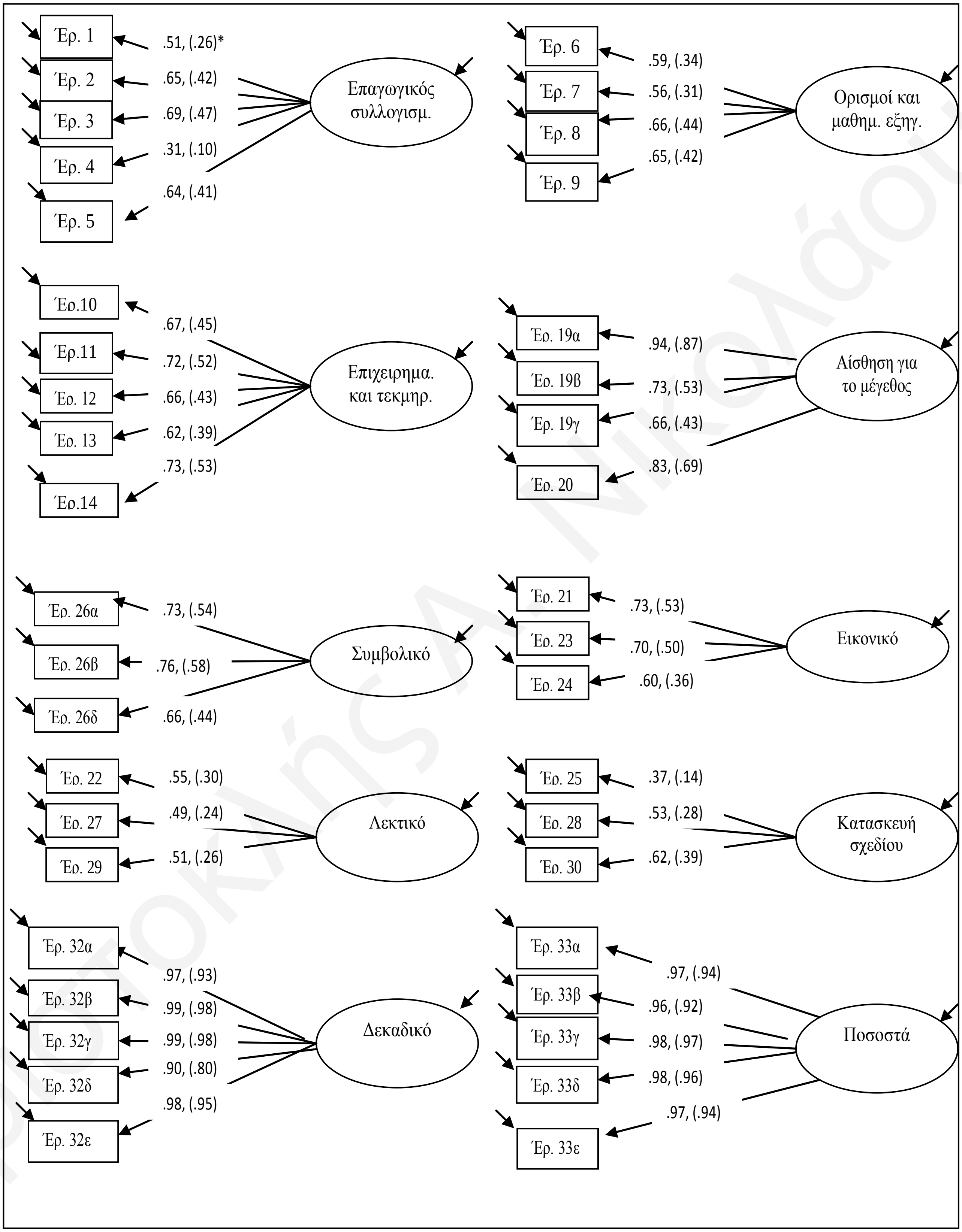
Ο δείκτης αξιοπιστίας των δύο δοκιμίων μέτρησης των επτά παραγόντων που θεωρούμε ότι συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων στη μέτρηση αμέσως μετά την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος ήταν Gronbach's Alpha=0.95, ο οποίος θεωρείται πολύ ικανοποιητικός. Οι δείκτες αξιοπιστίας των έργων μέτρησης για κάθε παράγοντα ήταν $α_{\text{επαγωγικός συλλογισμός}}$=.52, $α_{\text{ορισμοί και μαθηματικές εξηγήσεις}}$=.68, $α_{\text{επιχειρηματολογία και τεκμηρίωση}}$=.81, $α_{\text{αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων}}$=.71, $α_{\text{αναπαραστάσεις}}$=.78, $α_{\text{διασυνδέσεις}}$=.92, $α_{\text{αναστοχασμός}}$=.83. Οι δείκτες αξιοπιστίας για την επιχειρηματολογία και την τεκμηρίωση, την αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων, τις αναπαραστάσεις, τις διασυνδέσεις και τον αναστοχασμό θεωρούνται πολύ ικανοποιητικοί (α>.70), ενώ οι δείκτες για τον επαγωγικό συλλογισμό και τους ορισμούς και τις μαθηματικές εξηγήσεις θεωρούνται ικανοποιητικοί (α>.50).

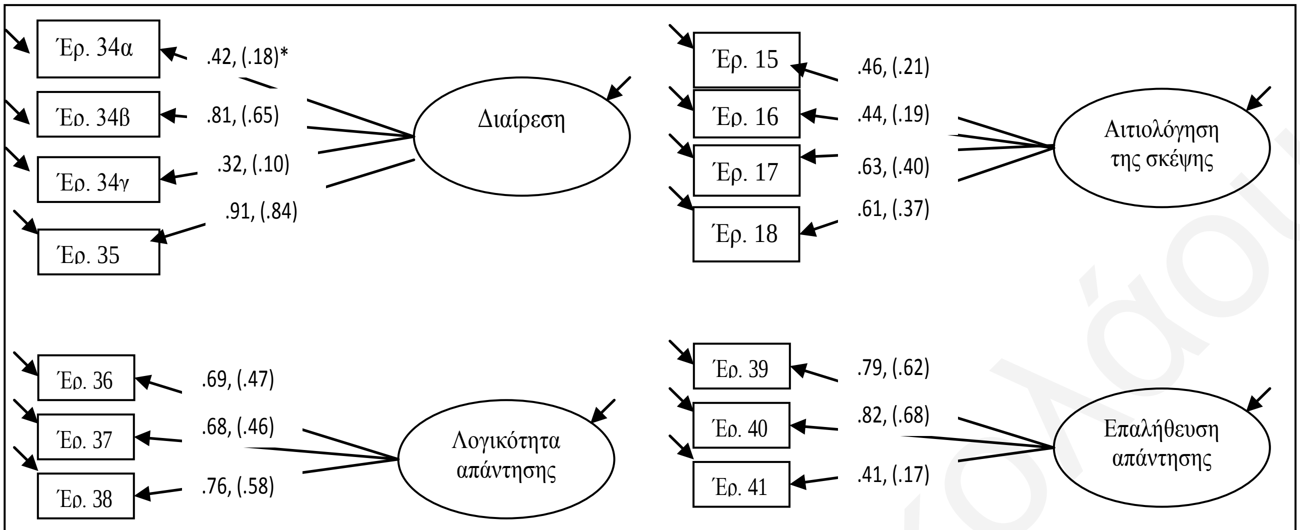
Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης για τη μέτρηση αμέσως μετά την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος ήταν παρόμοια με αυτά της μέτρησης πριν την εφαρμογή του παρεμβατικού και έδειξαν ότι η προσαρμογή των δεδομένων στο προτεινόμενο μοντέλο ήταν πολύ καλή, επιβεβαιώνοντας την εγκυρότητα της δομής του μοντέλου και την καταλληλότητά του για να περιγράψει την κατανόηση των κλασματικών αριθμών *(CFI=.971, χ^2=262.946, df=160, χ^2/df=1.64, p<0.05, RMSEA=0.043).* Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης που φαίνονται στο Διάγραμμα 4.1.2. επιβεβαιώνουν την υπόθεση ότι ο επαγωγικός συλλογισμός, οι ορισμοί και οι μαθηματικές εξηγήσεις, η επιχειρηματολογία και η τεκμηρίωση, η αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων, οι αναπαραστάσεις, οι διασυνδέσεις με τους δεκαδικούς, τα ποσοστά και τη διαίρεση και ο αναστοχασμός είναι παράγοντες που συνθέτουν μια ανώτερη θεωρητική δομή, την κατανόηση των κλασμάτων. Ακόμη, τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης δείχνουν ότι οι αναπαραστάσεις ($2^{ης}$ τάξης παράγοντας) αποτελούνται από την ικανότητα των μαθητών να μεταφράζουν σε λεκτική αναπαράσταση, σε εικονική αναπαράσταση, σε συμβολική αναπαράσταση και από την ικανότητά τους να κατασκευάζουν σχέδια για να δείξουν κλασματικούς αριθμούς ($1^{ης}$ τάξης παράγοντες). Παρόμοια, η ικανότητα των μαθητών στις διασυνδέσεις ($2^{ης}$ τάξης παράγοντας) αποτελείται από την ικανότητά τους να μεταφράζουν από κλάσμα σε δεκαδικό, σε ποσοστό και από την ικανότητά τους να συνδέουν την έννοια του κλάσματος με τη διαίρεση ακεραίων ($1^{ης}$ τάξης παράγοντες). Το ίδιο ισχύει για τον αναστοχασμό ($2^{ης}$ τάξης παράγοντας) που αποτελείται από την ικανότητα των μαθητών να αιτιολογούν τη σκέψη τους και την απάντησή τους σε προβλήματα με κλάσματα, να εξηγούν τη λογικότητα της απάντησής τους και να επαληθεύουν την απάντησή τους ($1^{ης}$ τάξης παράγοντες). Η προσαρμογή των δεδομένων στη δομή του προτεινόμενου μοντέλου επιβεβαιώνει ότι τα έργα που χρησιμοποιήθηκαν αποτελούν κατάλληλα έργα μέτρησης των άδηλων παραγόντων. Όλα τα έργα πλην δύο (έργο 31 (Κ.Σ.4) για την κατασκευή σχεδίου και έργο 26γ (Μ.Σ.3) για τη μετάφραση σε συμβολική αναπαράσταση) είχαν σημαντικές φορτίσεις στους αντίστοιχους παράγοντες (λόγω του μεγάλου πλήθους των έργων, οι φορτίσεις των έργων σε κάθε παράγοντα παρουσιάζονται ξεχωριστά στο Διάγραμμα 4.2.2.).



* Ο πρώτος αριθμός δείχνει το συντελεστή φόρτισης και ο αριθμός στην παρένθεση την αντίστοιχη ερμηνευμένη διασπορά (r^2).

Διάγραμμα 4.1.2. Το Μοντέλο της Κατανόησης των Κλασματικών Αριθμών Αμέσως Μετά την Παρέμβαση


Έρ. 1
Έρ. 2
Έρ. 3
Έρ. 4
Έρ. 5
.51, (.26)*
.65, (.42)
.69, (.47)
.31, (.10)
.64, (.41)
Επαγωγικός συλλογισμ.
Έρ. 6
Έρ. 7
Έρ. 8
Έρ. 9
.59, (.34)
.56, (.31)
.66, (.44)
.65, (.42)
Ορισμοί και μαθημ. εξηγ.
Έρ.10
Έρ.11
Έρ. 12
Έρ. 13
Έρ.14
.67, (.45)
.72, (.52)
.66, (.43)
.62, (.39)
.73, (.53)
Επιχειρημα. και τεκμηρ.
Έρ. 19α
Έρ. 19β
Έρ. 19γ
Έρ. 20
.94, (.87)
.73, (.53)
.66, (.43)
.83, (.69)
Αίσθηση για το μέγεθος
Έρ. 26α
Έρ. 26β
Έρ. 26δ
.73, (.54)
.76, (.58)
.66, (.44)
Συμβολικό
Έρ. 21
Έρ. 23
Έρ. 24
.73, (.53)
.70, (.50)
.60, (.36)
Εικονικό
Έρ. 22
Έρ. 27
Έρ. 29
.55, (.30)
.49, (.24)
.51, (.26)
Λεκτικό
Έρ. 25
Έρ. 28
Έρ. 30
.37, (.14)
.53, (.28)
.62, (.39)
Κατασκευή σχεδίου
Έρ. 32α
Έρ. 32β
Έρ. 32γ
Έρ. 32δ
Έρ. 32ε
.97, (.93)
.99, (.98)
.99, (.98)
.90, (.80)
.98, (.95)
Δεκαδικό
Έρ. 33α
Έρ. 33β
Έρ. 33γ
Έρ. 33δ
Έρ. 33ε
.97, (.94)
.96, (.92)
.98, (.97)
.98, (.96)
.97, (.94)
Ποσοστά



* Ο πρώτος αριθμός δείχνει το συντελεστή φόρτισης και ο αριθμός στην παρένθεση την αντίστοιχη ερμηνευμένη διασπορά (r^2).

Διάγραμμα 4.2.2. Οι Φορτίσεις των Έργων σε Κάθε Παράγοντα στη Μέτρηση Αμέσως Μετά την Παρέμβαση

Μέτρηση Τρεις μήνες Μετά την Εφαρμογή του Παρεμβατικού Προγράμματος (retention-test)

Περιγραφικά Αποτελέσματα για τους Παράγοντες που Συνθέτουν την Κατανόηση των Κλασμάτων

Ο Πίνακας 4.1.3 παρουσιάζει περιγραφικά αποτελέσματα για τους παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων στη μέτρηση τρεις μήνες μετά την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος. Τα αποτελέσματα είναι παρόμοια με αυτά των δύο προηγούμενων μετρήσεων. Πιο συγκεκριμένα, οι ψηλότεροι μέσοι όροι των υποκειμένων ήταν στον επαγωγικό συλλογισμό (Μ.Ο.= .817) και στην αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων (Μ.Ο.= .740), ενώ οι χαμηλότεροι μέσοι όροι ήταν στους ορισμούς και μαθηματικές εξηγήσεις (Μ.Ο.=.277) και στον αναστοχασμό (Μ.Ο.=.303). Ο Πίνακας 4.1.3 παρουσιάζει, επίσης, τις τιμές της λοξότητας και της κύρτωσης της ικανότητας των μαθητών σε καθένα από τους επτά παράγοντες. Οι τιμές αυτές ήταν μεγαλύτερες από -2 και μικρότερες από 2, στοιχείο που δείχνει ότι η ικανότητα των μαθητών σε καθένα από τους επτά παράγοντες ακολουθεί την κανονική κατανομή.

Πίνακας 4.1.3

Περιγραφικά Αποτελέσματα των Παραγόντων που Συνθέτουν την Κατανόηση των Κλασμάτων στην Τρίτη Μέτρηση (retention-test)

Παράγοντας	Μέσος Όρος	Τυπική Απόκλιση	Λοξότητα	Κύρτωση
Επαγωγικός συλλογισμός	.817	.216	-1.267	1.349
Ορισμοί και μαθηματικές εξηγήσεις	.277	.205	.358	-.938
Επιχειρηματολογία και τεκμηρίωση	.404	.259	.086	-1.280
Αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων	.740	.323	-1.048	-.045
Αναπαραστάσεις	.584	.217	-.203	-.606
Διασυνδέσεις με τους δεκαδικούς, τα ποσοστά και τη διαίρεση	.596	.354	-.428	-1.407
Αναστοχασμός	.303	.280	-.796	-.561

Ο Πίνακας 4.2.3 παρουσιάζει τις συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών που χρησιμοποιήθηκαν για τον έλεγχο της εγκυρότητας του μοντέλου στη μέτρηση τρεις μήνες μετά την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος (βλέπε Παράρτημα). Τα αποτελέσματα είναι παρόμοια με αυτά των Πινάκων 4.2.1 και 4.2.2 για τις δύο προηγούμενες μετρήσεις. Από τον Πίνακα 4.2.3 φαίνεται ότι οι περισσότερες συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών των πέντε έργων για τον επαγωγικό συλλογισμό ήταν στατιστικά σημαντικές (εξαίρεση αποτέλεσαν οι συσχετίσεις μεταξύ των έργων 3 (Ε.Σ.3) και 4 (Ε.Σ.4) και μεταξύ των έργων 2 (Ε.Σ.2) και 5 (Ε.Σ.5)). Ψηλότερη βρέθηκε να είναι η συσχέτιση μεταξύ του έργου 1 (Ε.Σ.1) και του έργου 4 (Ε.Σ.4) ($\rho=.255$, $p<.01$). Οι συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών των τεσσάρων έργων για τους ορισμούς και τις μαθηματικές εξηγήσεις ήταν όλες στατιστικά σημαντικές (ψηλότερη συσχέτιση μεταξύ του έργου 6 (Ο.Ε.1) και του έργου 7 (Ο.Ε.2), $\rho=.428$, $p<.01$). Όσον αφορά στις συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών των πέντε έργων για την επιχειρηματολογία και την τεκμηρίωση, ήταν όλες στατιστικά σημαντικές, με ψηλότερη τη συσχέτιση μεταξύ των έργων 10 (Ε.Τ.1) και 14 (Ε.Τ.5) ($r=.533, p<.01$). Παρόμοια, για την αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων, οι συσχετίσεις ήταν όλες στατιστικά σημαντικές με ψηλότερη τη συσχέτιση μεταξύ των έργων 19β (Α.Μ.Κ.2) και 19γ (Α.Μ.Κ.3) ($Φ=.536, p<.01$). Όσον αφορά στις αναπαραστάσεις, βρέθηκαν πρώτα οι συσχετίσεις μεταξύ των έργων που αποτελούν τους παράγοντες πρώτης τάξης (μετάφραση σε εικονική, λεκτική, συμβολική αναπαράσταση και κατασκευή σχεδίου) και ακολούθως, οι συσχετίσεις μεταξύ αυτών των πρώτης τάξης παραγόντων. Οι συσχετίσεις μεταξύ των τριών έργων για τη μετάφραση σε εικονική αναπαράσταση ήταν όλες στατιστικά σημαντικές, με ψηλότερη τη συσχέτιση μεταξύ των έργων 21 (Μ.Ε.1) και 23 (Μ.Ε.2) ($r=.624, p<.01$). Το ίδιο ίσχυε για τα έργα μετάφρασης σε λεκτική αναπαράσταση (ψηλότερη συσχέτιση μεταξύ των έργων 27 (Μ.Λ.2) και 29 (Μ.Λ.3), $ρ=.412, p<.01$), για τα έργα που αφορούσαν μετάφραση σε συμβολική αναπαράσταση (ψηλότερη συσχέτιση μεταξύ των έργων 26γ (Μ.Σ.3) και 26δ (Μ.Σ.4), $Φ=.387, p<.01$) και για τα έργα κατασκευής σχεδίου από τους ίδιους τους μαθητές για να δείξουν κλάσματα (ψηλότερη συσχέτιση μεταξύ των έργων 28 (Κ.Σ.2) και 30 (Κ.Σ.3), $ρ=.418, p<.01$). Οι συσχετίσεις μεταξύ των παραγόντων πρώτης τάξης ήταν επίσης στατιστικά σημαντικές με ψηλότερη τη συσχέτιση μεταξύ της ικανότητας μετάφρασης σε λεκτική αναπαράσταση και της ικανότητας κατασκευής σχεδίου ($r=.584, p<.01$). Για τις διασυνδέσεις, βρέθηκαν πρώτα οι συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών που συνθέτουν τους παράγοντες πρώτης τάξης και ακολούθως οι συσχετίσεις μεταξύ αυτών των πρώτης τάξης παραγόντων. Συγκεκριμένα, οι συσχετίσεις μεταξύ των πέντε έργων που αφορούσαν την μετατροπή κλασμάτων σε δεκαδικούς ήταν όλες στατιστικά σημαντικές με ψηλότερη τη συσχέτιση μεταξύ των έργων 32α (Μ.Δ.1) και 32β (Μ.Δ.2) ($Φ=.852, p<.01$). Το ίδιο συνέβαινε για τα έργα μετατροπής κλασμάτων σε ποσοστά (ψηλότερη συσχέτιση μεταξύ των έργων 33δ (Μ.Π.4) και 33ε (Μ.Π.5), $Φ=.870, p<.01$). Όσον αφορά στα έργα που αφορούσαν τη σχέση των κλασμάτων με τη διαίρεση αριθμητής÷παρονομαστής, όλες οι συσχετίσεις ήταν στατιστικά σημαντικές με εξαίρεση τη συσχέτιση μεταξύ των έργων 34α (Δ.Α.1) και 34γ (Δ.Α.3). Ψηλότερη βρέθηκε να είναι η συσχέτιση του έργου 34α (Δ.Α.1) και 34β (Δ.Α.2) ($Φ=.465, p<.01$). Οι συσχετίσεις μεταξύ των παραγόντων πρώτης τάξης ήταν όλες στατιστικά σημαντικές, με ψηλότερη τη συσχέτιση μεταξύ της ικανότητας των μαθητών να μετατρέπουν κλάσματα σε δεκαδικούς και της ικανότητάς τους να μετατρέπουν κλάσματα σε ποσοστά ($r=.794, p<.01$). Τέλος, όσον αφορά στον αναστοχασμό, βρέθηκαν πρώτα οι συσχετίσεις μεταξύ των έργων για την αιτιολόγηση της σκέψης και της απάντησης, για τη λογικότητα της απάντησης και την επαλήθευση της απάντησης (πρώτης τάξης παράγοντες) και ακολούθως, οι συσχετίσεις μεταξύ των πρώτης τάξης παραγόντων. Για την αιτιολόγηση της σκέψης και της απάντησης, οι συσχετίσεις μεταξύ των τεσσάρων έργων ήταν όλες στατιστικά σημαντικές, με ψηλότερη τη συσχέτιση μεταξύ των έργων 17 (ΑΝ.ΣΚ.3) και 18 (ΑΝ.ΣΚ.4) *(r=.457, p<.01).* Οι συσχετίσεις μεταξύ των έργων για τη λογικότητα της απάντησης ήταν επίσης στατιστικά σημαντικές (ψηλότερη συσχέτιση μεταξύ των έργων 36 (ΑΝ.ΛΟ.1) και 38 (ΑΝ.ΛΟ.3), *r=.679, p<.01*) και το ίδιο συνέβαινε για τα έργα που αφορούσαν επαλήθευση της απάντησης (ψηλότερη συσχέτιση μεταξύ των έργων 39 (ΑΝ.ΕΠ.1) και 40 (ΑΝ.ΕΠ.2), *r=.674, p<.01*). Οι συσχετίσεις μεταξύ των παραγόντων πρώτης τάξης ήταν κι αυτές στατιστικά σημαντικές με ψηλότερη τη συσχέτιση μεταξύ της ικανότητας εξήγησης της λογικότητας της απάντησης και της επαλήθευσης της απάντησης *(r=.686, p<.01).*

Ο Πίνακας 4.3.3 παρουσιάζει τις συσχετίσεις μεταξύ των ικανοτήτων των μαθητών στους επτά παράγοντες (επαγωγικός συλλογισμός Ε.Σ., ορισμοί/μαθηματικές εξηγήσεις Ο.Ε., επιχειρηματολογία/τεκμηρίωση Ε.Τ., αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων Α.Μ., αναπαραστάσεις ΑΝΑΠ., διασυνδέσεις ΔΙΑΣ., αναστοχασμός ΑΝΑΣ.) που θεωρούμε ότι συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων. Από τον Πίνακα 4.3.3 φαίνεται ότι όλες οι συσχετίσεις είναι στατιστικά σημαντικές και οι περισσότερες από αυτές είναι αρκετά ψηλές. Οι υψηλότερες συσχετίσεις παρουσιάζονται μεταξύ της ικανότητας των μαθητών στους ορισμούς και τις μαθηματικές εξηγήσεις και τις αναπαραστάσεις (*r=.709, p<.01*), μεταξύ της ικανότητας στις αναπαραστάσεις και τις διασυνδέσεις (*r=.703, p<.01*) και μεταξύ της ικανότητας στις αναπαραστάσεις και τον αναστοχασμό (*r=.700, p<.01*). Το γεγονός ότι όλες οι συσχετίσεις μεταξύ της ικανότητας των μαθητών στους επτά παράγοντες ήταν στατιστικά σημαντικές και οι περισσότερες από αυτές αρκετά ψηλές, καταδεικνύει ότι οι επτά παράγοντες φαίνεται να συνθέτουν την ίδια «ανώτερη δομή», που θεωρούμε ότι είναι η κατανόηση των κλασμάτων.

Πίνακας 4.3.3

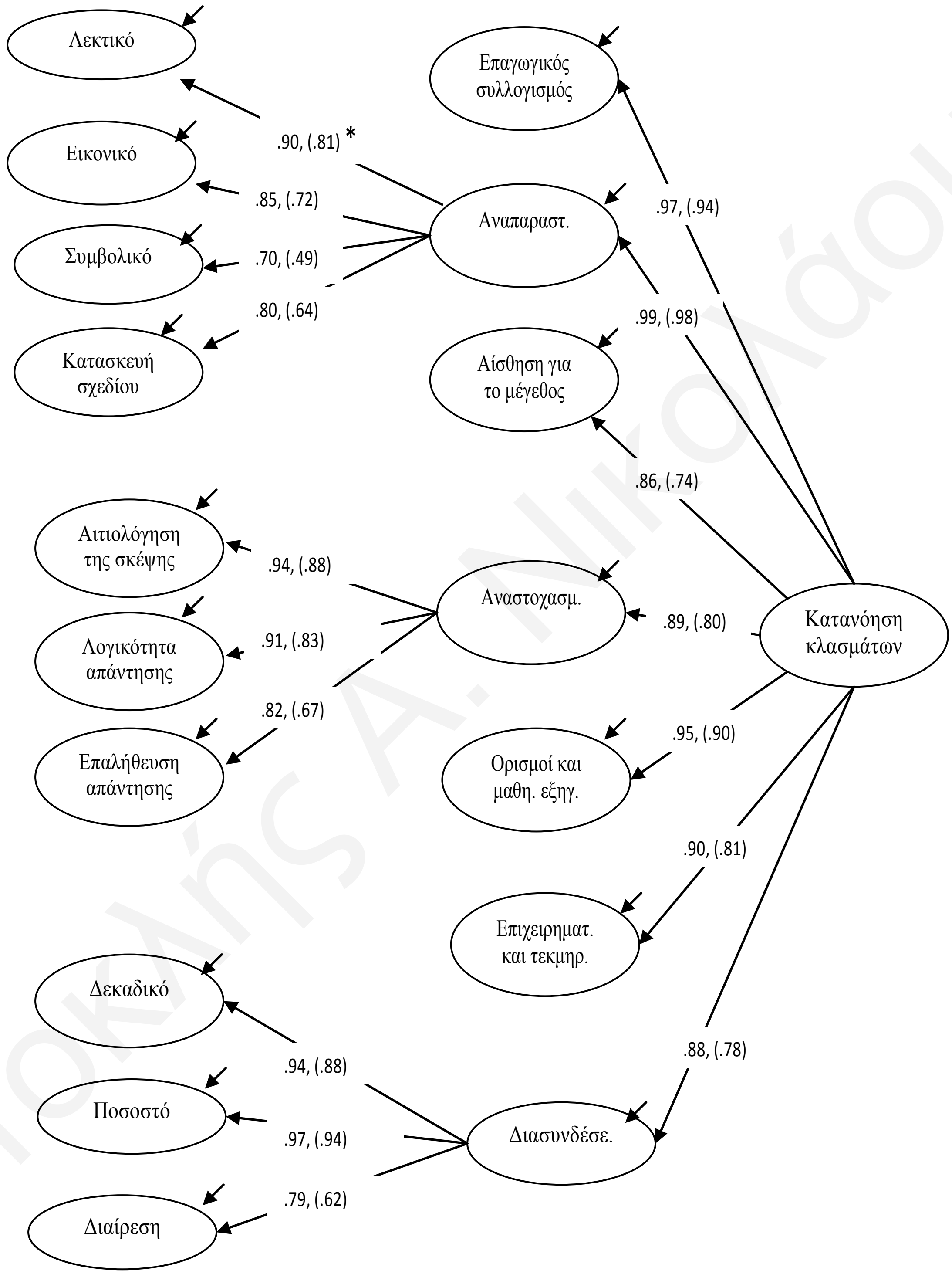
Συσχετίσεις Μεταξύ των Ικανοτήτων των Υποκειμένων στους Παράγοντες που Συνθέτουν την Κατανόηση των Κλασμάτων στη Τρίτη Μέτρηση (retention-test)

	Ε.Σ.	Ο.Ε.	Ε.Τ.	Α.Μ.	ΑΝΑΠ.	ΔΙΑΣ.	ΑΝΑΣ.
Ε.Σ.	1						
Ο.Ε.	.516**	1					
Ε.Τ.	.551**	.655**	1				
Α.Μ.	.475**	.496**	.531**	1			
ΑΝΑΠ.	.564**	.709**	.696**	.623**	1		
ΔΙΑΣ.	.511**	.574**	.658**	.569**	.703**	1	
ΑΝΑΣ.	.527**	.591**	.652**	.474**	.700**	.652**	1

**p<0.01

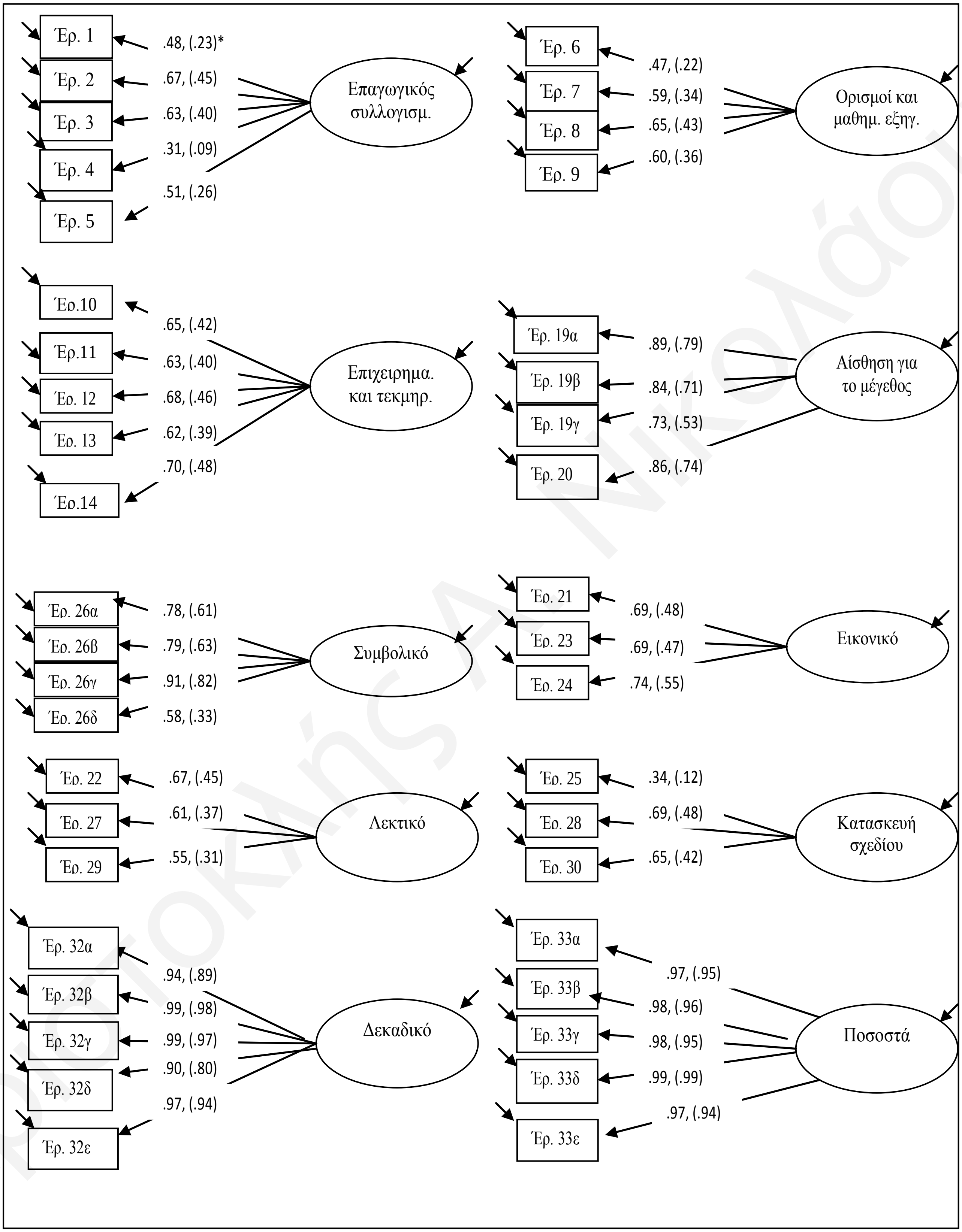
Ο δείκτης αξιοπιστίας των δύο τεστ μέτρησης των επτά παραγόντων που θεωρούμε ότι συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων στην μέτρηση τρεις μήνες μετά την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος ήταν Gronbach’s Alpha=0.96, ο οποίος θεωρείται πολύ ικανοποιητικός. Οι δείκτες αξιοπιστίας των έργων μέτρησης για κάθε παράγοντα ήταν $α_{\text{επαγωγικός συλλογισμός}}$=.50, $α_{\text{ορισμοί και μαθηματικές εξηγήσεις}}$=.63, $α_{\text{επιχειρηματολογία και τεκμηρίωση}}$=.79, $α_{\text{αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων}}$=.74, $α_{\text{αναπαραστάσεις}}$=.83, $α_{\text{διασυνδέσεις}}$=.93, $α_{\text{αναστοχασμός}}$=.87. Οι δείκτες αξιοπιστίας για την επιχειρηματολογία και την τεκμηρίωση, την αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων, τις αναπαραστάσεις, τις διασυνδέσεις και τον αναστοχασμό θεωρούνται πολύ ικανοποιητικοί (α>.70), ενώ οι δείκτες για τον επαγωγικό συλλογισμό και τους ορισμούς και τις μαθηματικές εξηγήσεις θεωρούνται ικανοποιητικοί (α>.50).

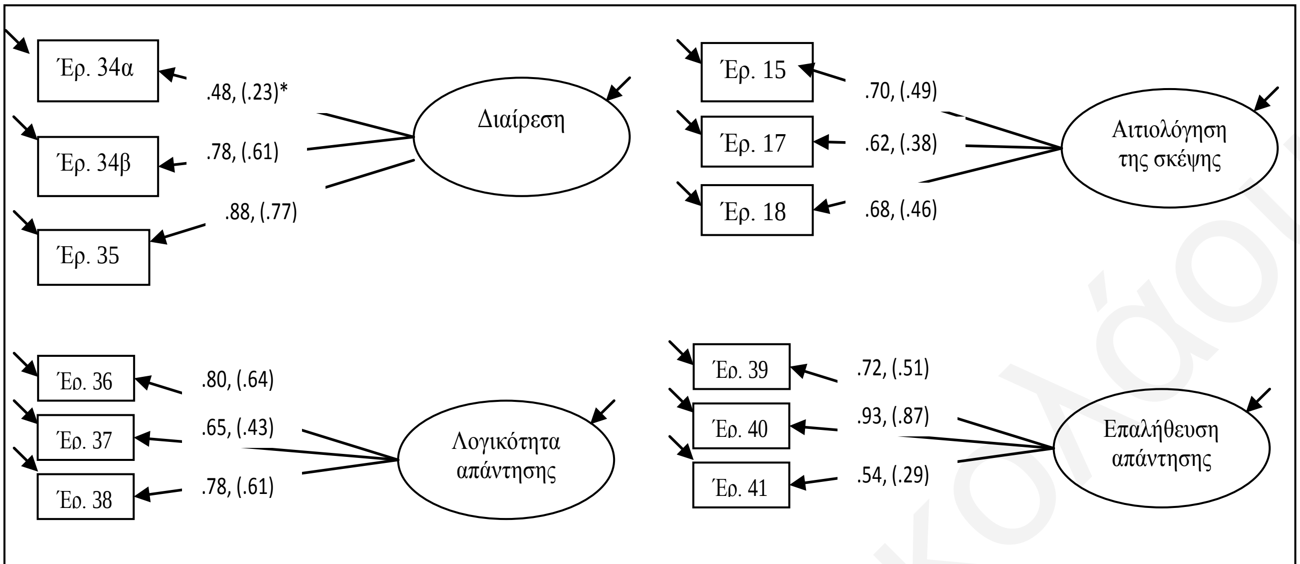
Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης για τη μέτρηση τρεις μήνες μετά την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος ήταν παρόμοια με αυτά των δύο προηγούμενων μετρήσεων και έδειξαν ότι η προσαρμογή των δεδομένων στο προτεινόμενο μοντέλο ήταν πολύ καλή, επιβεβαιώνοντας την εγκυρότητα της δομής του μοντέλου και την καταλληλότητά του για να περιγράψει την κατανόηση των κλασματικών αριθμών *(CFI=.987, χ^2=194.760, df=143, χ^2/df=1.36, p<0.05, RMSEA=0.034).* Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης που φαίνονται στο Διάγραμμα 4.1.3. επιβεβαιώνουν την υπόθεση ότι ο επαγωγικός συλλογισμός, οι ορισμοί και οι μαθηματικές εξηγήσεις, η επιχειρηματολογία και η τεκμηρίωση, η αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων, οι αναπαραστάσεις, οι διασυνδέσεις με τους δεκαδικούς, τα ποσοστά και τη διαίρεση και ο αναστοχασμός είναι παράγοντες που συνθέτουν μια ανώτερη θεωρητική δομή, την κατανόηση των κλασμάτων. Ακόμη, τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης δείχνουν ότι οι αναπαραστάσεις (2^{ης} τάξης παράγοντας) αποτελούνται από την ικανότητα των μαθητών να μεταφράζουν σε λεκτική αναπαράσταση, σε εικονική αναπαράσταση, σε συμβολική αναπαράσταση και από την ικανότητά τους να κατασκευάζουν σχέδια για να δείξουν κλασματικούς αριθμούς (1^{ης} τάξης παράγοντες). Παρόμοια, η ικανότητα των μαθητών στις διασυνδέσεις (2^{ης} τάξης παράγοντας) αποτελείται από την ικανότητά τους να μεταφράζουν από κλάσμα σε δεκαδικό, σε ποσοστό και από την ικανότητά τους να συνδέουν την έννοια του κλάσματος με τη διαίρεση ακεραίων (1^{ης} τάξης παράγοντες). Το ίδιο ισχύει για τον αναστοχασμό (2^{ης} τάξης παράγοντας) που αποτελείται από την ικανότητα των μαθητών να αιτιολογούν τη σκέψη τους και την απάντησή τους σε προβλήματα με κλάσματα, να εξηγούν τη λογικότητα της απάντησής τους και να επαληθεύουν την απάντησή τους (1^{ης} τάξης παράγοντες). Η προσαρμογή των δεδομένων στη δομή του προτεινόμενου μοντέλου επιβεβαιώνει ότι τα έργα που χρησιμοποιήθηκαν αποτελούν κατάλληλα έργα μέτρησης των άδηλων παραγόντων. Όλα τα έργα πλην τριών (έργο 16 για την αιτιολόγηση της σκέψης και της απάντησης σε προβλήματα με κλάσματα (ΑΝ.ΣΚ.2), έργο 31 για την κατασκευή σχεδίου (Κ.Σ.4) και έργο 34γ για τη σύνδεση των κλασμάτων με τη διαίρεση (Δ.Α.3) είχαν σημαντικές φορτίσεις στους αντίστοιχους παράγοντες (λόγω του μεγάλου πλήθους των έργων, οι φορτίσεις των έργων σε κάθε παράγοντα παρουσιάζονται ξεχωριστά στο Διάγραμμα 4.2.3.).



* Ο πρώτος αριθμός δείχνει το συντελεστή φόρτισης και ο αριθμός στην παρένθεση την αντίστοιχη ερμηνευόμενη διασπορά (r^2)

Διάγραμμα 4.1.3. Το Μοντέλο της Κατανόησης των Κλασματικών Αριθμών Τρεις Μήνες Μετά την Παρέμβαση


Έρ. 1
Έρ. 2
Έρ. 3
Έρ. 4
Έρ. 5
.48, (.23)*
.67, (.45)
.63, (.40)
.31, (.09)
.51, (.26)
Επαγωγικός συλλογισμ.
Έρ. 6
Έρ. 7
Έρ. 8
Έρ. 9
.47, (.22)
.59, (.34)
.65, (.43)
.60, (.36)
Ορισμοί και μαθημ. εξηγ.
Έρ.10
Έρ.11
Έρ. 12
Έρ. 13
Έρ.14
.65, (.42)
.63, (.40)
.68, (.46)
.62, (.39)
.70, (.48)
Επιχειρημα. και τεκμηρ.
Έρ. 19α
Έρ. 19β
Έρ. 19γ
Έρ. 20
.89, (.79)
.84, (.71)
.73, (.53)
.86, (.74)
Αίσθηση για το μέγεθος
Έρ. 26α
Έρ. 26β
Έρ. 26γ
Έρ. 26δ
.78, (.61)
.79, (.63)
.91, (.82)
.58, (.33)
Συμβολικό
Έρ. 21
Έρ. 23
Έρ. 24
.69, (.48)
.69, (.47)
.74, (.55)
Εικονικό
Έρ. 22
Έρ. 27
Έρ. 29
.67, (.45)
.61, (.37)
.55, (.31)
Λεκτικό
Έρ. 25
Έρ. 28
Έρ. 30
.34, (.12)
.69, (.48)
.65, (.42)
Κατασκευή σχεδίου
Έρ. 32α
Έρ. 32β
Έρ. 32γ
Έρ. 32δ
Έρ. 32ε
.94, (.89)
.99, (.98)
.99, (.97)
.90, (.80)
.97, (.94)
Δεκαδικό
Έρ. 33α
Έρ. 33β
Έρ. 33γ
Έρ. 33δ
Έρ. 33ε
.97, (.95)
.98, (.96)
.98, (.95)
.99, (.99)
.97, (.94)
Ποσοστά



* Ο πρώτος αριθμός δείχνει το συντελεστή φόρτισης και ο αριθμός στην παρένθεση την αντίστοιχη ερμηνευμένη διασπορά (r^2).

Διάγραμμα 4.2.3. Οι Φορτίσεις των Έργων σε Κάθε Παράγοντα στη Μέτρηση Τρεις Μήνες Μετά την Παρέμβαση

Ερώτημα 2: Πόσο συνεισφέρει κάθε παράγοντας στην κατανόηση των κλασματικών αριθμών;

Για την απάντηση σε αυτό το ερώτημα χρησιμοποιήθηκαν τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης για καθεμιά από τις τρεις μετρήσεις.

Μέτρηση Πριν την Εφαρμογή του Παρεμβατικού Προγράμματος

Ο Πίνακας 4.4.1 παρουσιάζει τους συντελεστές φόρτισης και την ερμηνευόμενη διασπορά για καθένα από τους παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων για τη μέτρηση πριν την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος.

Πίνακας 4.4.1.

Συντελεστές Φόρτισης και Ερμηνευόμενη Διασπορά των Παραγόντων που Συνθέτουν την Κατανόηση των Κλασμάτων στην Πρώτη Μέτρηση

Άδηλος παράγοντας	Συντελεστής Φόρτισης (r)	Ερμηνευόμενη Διασπορά (r^2)
Επαγωγικός συλλογισμός	.79**	.62
Ορισμοί και μαθηματικές εξηγήσεις	.87**	.75
Επιχειρηματολογία και τεκμηρίωση	.85**	.72
Αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων	.81**	.66
Αναπαραστάσεις	.99**	.98
Διασυνδέσεις	.87**	.75
Αναστοχασμός	.91**	.83

**p<0.01

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.4.1, οι συντελεστές φόρτισης όλων των παραγόντων στον παράγοντα ανώτερης τάξης (κατανόηση των κλασμάτων) ήταν σημαντικοί και ιδιαίτερα ψηλοί. Ιδιαίτερα ψηλός είναι ο συντελεστής φόρτισης του παράγοντα αναπαραστάσεις με ιδιαίτερα ψηλό ποσοστό συνεισφοράς στην κατανόηση των κλασματικών αριθμών (μπορεί να ερμηνεύσει το 98% της διασποράς της κατανόησης των κλασμάτων). Δεύτερος παράγοντας με μεγαλύτερη συνεισφορά είναι ο αναστοχασμός ($r=.91$, $r^2=.83$) και ακολουθούν οι ορισμοί και οι μαθηματικές εξηγήσεις και οι διασυνδέσεις με τους δεκαδικούς, τα ποσοστά και τη διαίρεση που έχουν την ίδια συνεισφορά, η επιχειρηματολογία και η τεκμηρίωση, η αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων, ενώ ο επαγωγικός συλλογισμός έχει τη μικρότερη συνεισφορά. Ωστόσο, η συνεισφορά όλων των παραγόντων είναι ψηλή ($r>.79$, $r^2>0.60$). Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης φανερώνουν τη μεγάλη σημασία των επτά παραγόντων για την κατανόηση των κλασματικών αριθμών, αλλά και ότι ερμηνεύουν ένα μεγάλο ποσοστό της διασποράς της κατανόησης των κλασμάτων.

Μέτρηση Αμέσως Μετά την Εφαρμογή του Παρεμβατικού Προγράμματος

Ο Πίνακας 4.4.2 παρουσιάζει τους συντελεστές φόρτισης και την ερμηνευόμενη διασπορά για καθένα από τους παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων για την μέτρηση αμέσως την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος.

Πίνακας 4.4.2.

Συντελεστές Φόρτισης και Ερμηνευόμενη Διασπορά των Παραγόντων που Συνθέτουν την Κατανόηση των Κλασμάτων στη Δεύτερη Μέτρηση

Άδηλος παράγοντας	Συντελεστής Φόρτισης (r)	Ερμηνευόμενη Διασπορά (r^2)
Επαγωγικός συλλογισμός	.87**	.76
Ορισμοί και μαθηματικές εξηγήσεις	.81**	.65
Επιχειρηματολογία και τεκμηρίωση	.83**	.69
Αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων	.81**	.66
Αναπαραστάσεις	.99**	.98
Διασυνδέσεις	.82**	.67
Αναστοχασμός	.95**	.91

**p<0.01

Τα αποτελέσματα είναι παρόμοια με αυτά του Πίνακα 4.4.1 για τη μέτρηση πριν την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.4.2 όλοι οι συντελεστές φόρτισης των παραγόντων στον παράγοντα ανώτερης τάξης (κατανόηση των κλασμάτων) είναι σημαντικοί και ιδιαίτερα ψηλοί. Οι αναπαραστάσεις φαίνεται να είναι ο παράγοντας με ιδιαίτερα ψηλή συνεισφορά στην κατανόηση των κλασματικών αριθμών ($r=.99$, $r^2=.98$) και ακολουθεί ο αναστοχασμός ($r=.95$, $r^2=.91$). Οι υπόλοιποι παράγοντες έχουν μεν μικρότερη συνεισφορά, όμως είναι και πάλι ψηλή ($r>.80$, $r^2>.65$). Πρέπει να τονιστεί ότι η διαφορά στη συνεισφορά μεταξύ των υπόλοιπων παραγόντων είναι σχετικά μικρή. Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης για τη δεύτερη μέτρηση φανερώνουν τη μεγάλη σημασία των επτά παραγόντων για την κατανόηση των κλασματικών αριθμών, αλλά και ότι ερμηνεύουν ένα μεγάλο ποσοστό της διασποράς της κατανόησης των κλασμάτων.

Μέτρηση Τρεις Μήνες Μετά την Εφαρμογή του Παρεμβατικού Προγράμματος

Ο Πίνακας 4.4.3 παρουσιάζει τους συντελεστές φόρτισης και την ερμηνευόμενη διασπορά για καθένα από τους παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων για την μέτρηση τρεις μήνες μετά την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος.

Πίνακας 4.4.3.

Συντελεστές Φόρτισης και Ερμηνευόμενη Διασπορά των Παραγόντων που Συνθέτουν την Κατανόηση των Κλασμάτων στην Τρίτη Μέτρηση

Άδηλος παράγοντας	Συντελεστής Φόρτισης (r)	Ερμηνευόμενη Διασπορά (r^2)
Επαγωγικός συλλογισμός	.97**	.94
Ορισμοί και μαθηματικές εξηγήσεις	.95**	.90
Επιχειρηματολογία και τεκμηρίωση	.90**	.81
Αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων	.86**	.74
Αναπαραστάσεις	.99**	.98
Διασυνδέσεις	.88**	.78
Αναστοχασμός	.89**	.80

**p<0.01

Από τον Πίνακα 4.4.3 φαίνεται ότι όλοι οι συντελεστές φόρτισης είναι σημαντικοί και ιδιαίτερα ψηλοί ($r>.86$, $r^2>.74$). Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης για την τρίτη μέτρηση φανερώνουν τη μεγάλη σημασία των επτά παραγόντων για την κατανόηση των κλασμάτων, αλλά και ότι ερμηνεύουν ένα πολύ μεγάλο ποσοστό της διασποράς της κατανόησης των κλασμάτων. Αναφορικά με τη συνεισφορά κάθε παράγοντα, οι αναπαραστάσεις, όπως και στις προηγούμενες δύο μετρήσεις είχαν τη μεγαλύτερη και ιδιαίτερα ψηλή συνεισφορά ($r=.99$, $r^2=.98$), ενώ ακολουθούν ο επαγωγικός συλλογισμός ($r=.97$, $r^2=.94$) και οι ορισμοί και οι μαθηματικές εξηγήσεις ($r=.95$, $r^2=.90$). Τη μικρότερη συνεισφορά από τους παράγοντες στην τρίτη μέτρηση είχε η αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων. Ωστόσο, η συνεισφορά αυτού του παράγοντα στην κατανόηση των κλασματικών αριθμών αν και η μικρότερη είναι ψηλή ($r=.86$, $r^2=.74$).

Ερώτημα 3: Το μοντέλο παραμένει σταθερό με την πάροδο του χρόνου;

Για να εξεταστεί η αμεταβλητότητα του μοντέλου με την πάροδο του χρόνου, χρησιμοποιήθηκαν τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης για τις τρεις μετρήσεις. Ο όρος αμεταβλητότητα ή σταθερότητα της δομής του μοντέλου αναφέρεται στο κατά πόσον οι παράγοντες πρώτης και δεύτερης τάξης που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων παραμένουν αμετάβλητοι. Από τα αποτελέσματα των τριών επιβεβαιωτικών αναλύσεων, όπως φαίνεται στα Διαγράμματα 4.1.1., 4.1.2., 4.2.1., 4.2.2., 4.3.1. και 4.3.2. προκύπτει ότι η δομή του μοντέλου παραμένει σταθερή με την πάροδο του χρόνου. Συγκεκριμένα, το μοντέλο έχει ακριβώς την ίδια δομή για τις τρεις μετρήσεις (υπάρχουν διαφορές μόνο σε ένα ή δύο έργα μεταξύ των μετρήσεων) και όπως φαίνεται στα εν λόγω διαγράμματα, όλα τα έργα είχαν στατιστικά σημαντικές φορτίσεις στους αντίστοιχους παράγοντες και οι συντελεστές φόρτισης των άδηλων παραγόντων στον παράγοντα ανώτερης τάξης (κατανόηση των κλασμάτων) ήταν στατιστικά σημαντικοί.

Ερώτημα 4: Ποιες κατηγορίες μαθητών μπορούν να δημιουργηθούν με βάση την κατανόηση των κλασμάτων;

Για να εξεταστεί κατά πόσον υπάρχουν κατηγορίες (ομάδες) υποκειμένων στην ομάδα ελέγχου και στην πειραματική ομάδα με παρόμοια συμπεριφορά ως προς την κατανόηση των κλασμάτων, πραγματοποιήθηκε ανάλυση latent class με βάση τη συνολική επίδοση των μαθητών στα δύο δοκίμια (κατανόηση των κλασμάτων) για τη μέτρηση πριν την εφαρμογή της παρέμβασης (pre-test). Η εξακρίβωση αυτή ήταν αναγκαία για τη διακρίβωση του ρυθμού ανάπτυξης της κατανόησης των κλασμάτων και της ικανότητας των μαθητών στους παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων (Ερώτημα 7), αλλά και για την εξαγωγή συμπερασμάτων αναφορικά με την αποτελεσματικότητα του παρεμβατικού προγράμματος και τη μονιμότητα των αποτελεσμάτων της παρέμβασης (Ερώτημα 6). Ελέγχθηκε διαδοχικά η εγκυρότητα τριών μοντέλων με βάση τα οποία υποθέσαμε ότι οι μαθητές της ομάδας ελέγχου και της πειραματικής ομάδας μπορούν να διαχωριστούν σε δύο, τρεις ή τέσσερις κατηγορίες με παρόμοια συμπεριφορά ως προς την ικανότητά τους στα δύο δοκίμια (κατανόηση κλασμάτων). Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται για κάθε ομάδα ξεχωριστά.

Ομάδα Ελέγχου

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το καλύτερο μοντέλο με τη μεγαλύτερη τιμή εντροπίας και τις μικρότερες τιμές στους δείκτες AIC και BIC είναι η λύση με τρεις κατηγορίες υποκειμένων (εντροπία=.811, AIC=1136.13 και BIC=1155.35), όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα 4.5. Η μέση τιμή πιθανότητας των υποκειμένων κάθε ομάδας να ανήκουν στην κατηγορία που τους εντάσσει η ανάλυση (Average Latent Class Probabilities) με βάση το μοντέλο των τριών κατηγοριών ήταν αρκετά ικανοποιητική (δείτε Πίνακα 4.6).

Πίνακας 4.5

Δείκτες Προσαρμογής Μοντέλων με Διαφορετικό Αριθμό Κατηγοριών (Ομάδα Ελέγχου)

Δείκτες	AIC	BIC	Εντροπία
Μοντέλο με 2 κατηγορίες	1145.40	1158.22	.80
Μοντέλο με 3 κατηγορίες	1136.13	1155.35	.81
Μοντέλο με 4 κατηγορίες	1140.13	1165.76	.64

Πίνακας 4.6

Μέση Τιμή Πιθανότητας Κάθε Κατηγορίας (Average Latent Class Probabilities) (Ομάδα Ελέγχου)

Πιθανότητα να ανήκουν στην	Κατηγορία 1	Κατηγορία 2	Κατηγορία 3
Υποκ. Κατηγορίας 1	.949	.051	.000
Υποκ. Κατηγορίας 2	.089	.854	.057
Υποκ. Κατηγορίας 3	.000	.079	.921

Στην Κατηγορία 1 ανήκουν 87 μαθητές, στην Κατηγορία 2 ανήκουν 49 μαθητές, ενώ στην Κατηγορία 3 ανήκουν 46 μαθητές. Ο Πίνακας 4.7 παρουσιάζει μέσους όρους και τυπικές αποκλίσεις των υποκειμένων κάθε κατηγορίας στην κατανόηση των κλασμάτων πριν την εφαρμογή της παρέμβασης.

Πίνακας 4.7

Μέσοι Όροι και Τυπικές Αποκλίσεις στην Κατανόηση των Κλασμάτων για τις Τρεις Κατηγορίες Υποκειμένων (Ομάδα Ελέγχου)

Κατηγορία	Μέσος Όρος	Τυπική Απόκλιση
Κατηγορία 1	5.95	2.00
Κατηγορία 2	12.95	1.82
Κατηγορία 3	19.91	2.27

Από τον Πίνακα 4.7 φαίνεται ότι η Κατηγορία 1 έχει τον χαμηλότερο μέσο όρο, η Κατηγορία 3 τον ψηλότερο μέσο όρο, ενώ ο μέσος όρος της Κατηγορίας 2 είναι μεταξύ των μέσων όρων των δύο ομάδων. Για να εξεταστεί κατά πόσον υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των υποκειμένων των τριών κατηγοριών ως προς την κατανόηση των κλασμάτων, έγινε ανάλυση διασποράς (One-Way ANOVA) με εξαρτημένη μεταβλητή την κατανόηση των κλασμάτων στη μέτρηση πριν την εφαρμογή της παρέμβασης και ανεξάρτητη μεταβλητή την κατηγορία στην οποία ανήκαν τα υποκείμενα της ομάδας ελέγχου. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης διασποράς έδειξαν ότι υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μαθητών των τριών κατηγοριών στην κατανόηση των κλασμάτων (Pillai's_$F_{(2,179)}=733.563$, $p<0.05$). Στη συνέχεια χρησιμοποιήθηκε το τεστ του Scheffe (Scheffe's test) για να διαπιστωθεί μεταξύ ποιων κατηγοριών υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον Πίνακα 4.8 που ακολουθεί.

Πίνακας 4.8

Διαφορές Μεταξύ των Τριών Κατηγοριών Υποκειμένων της Ομάδας Ελέγχου ως προς την Κατανόηση των Κλασμάτων

	Διαφορές Μέσων Όρων	Τυπικό Σφάλμα	p
$M.O._3$ - $M.O._1$	13.97	0.37	0.000
$M.O._3$ - $M.O._2$	6.97	0.42	0.000
$M.O._2$ - $M.O._1$	7.00	0.36	0.000

Από τον Πίνακα 4.8 φαίνεται ότι στατιστικά σημαντικές διαφορές υπάρχουν μεταξύ και των τριών κατηγοριών, με την Κατηγορία 3 να παρουσιάζει σημαντικά ψηλότερους μέσους όρους από τις άλλες δύο κατηγορίες και την Κατηγορία 2 να παρουσιάζει σημαντικά ψηλότερο μέσο όρο από την Κατηγορία 1. Συνεπώς, οι μαθητές της Κατηγορίας 3 είναι εκείνοι με ψηλή κατανόηση των κλασμάτων, εκείνοι της Κατηγορίας 2 παρουσιάζουν μέτρια κατανόηση των κλασμάτων, ενώ οι μαθητές της Κατηγορίας 1 είναι εκείνοι με χαμηλή κατανόηση των κλασμάτων.

Πειραματική Ομάδα

Τα αποτελέσματα για την πειραματική ομάδα έδειξαν ότι το καλύτερο μοντέλο με τη μεγαλύτερη τιμή εντροπίας και τις μικρότερες τιμές στους δείκτες AIC και BIC είναι η λύση με τρεις κατηγορίες υποκειμένων (εντροπία=.889, AIC=229.22 και BIC=246.74), όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα 4.9. Η μέση τιμή πιθανότητας των υποκειμένων κάθε κατηγορίας να ανήκουν στην κατηγορία που τους εντάσσει η ανάλυση (Average Latent Class Probabilities) με βάση το μοντέλο των τριών κατηγοριών ήταν αρκετά ικανοποιητική (δείτε Πίνακα 4.10).

Πίνακας 4.9

Δείκτες Προσαρμογής Μοντέλων με Διαφορετικό Αριθμό Κατηγοριών (Πειραματική Ομάδα)

Δείκτες	AIC	BIC	Εντροπία
Μοντέλο με 2 κατηγορίες	248.46	260.14	.75
Μοντέλο με 3 κατηγορίες	229.22	246.74	.89
Μοντέλο με 4 κατηγορίες*	-	-	-

*Το λογισμικό δεν μπορούσε να υπολογίσει το μοντέλο με τη λύση των 4 κατηγοριών.

Πίνακας 4.10

Μέση Τιμή Πιθανότητας Κάθε Κατηγορίας (Average Latent Class Probabilities) (Πειραματική Ομάδα)

Πιθανότητα να ανήκουν στην	Κατηγορία 1	Κατηγορία 2	Κατηγορία 3
Υποκ. Κατηγορίας 1	.942	.000	.058
Υποκ. Κατηγορίας 2	.000	.977	.023
Υποκ. Κατηγορίας 3	.034	.061	.905

Στην Κατηγορία 1 ανήκουν 61 μαθητές, στην Κατηγορία 2 ανήκουν 52 μαθητές, ενώ στην Κατηγορία 3 ανήκουν 24 μαθητές. Ο Πίνακας 4.11 παρουσιάζει μέσους όρους και τυπικές αποκλίσεις των υποκειμένων κάθε κατηγορίας στην κατανόηση των κλασμάτων πριν την εφαρμογή της παρέμβασης.

Πίνακας 4.11

Μέσοι Όροι και Τυπικές Αποκλίσεις στην Κατανόηση των Κλασμάτων για τις Τρεις Κατηγορίες Υποκειμένων (Πειραματική Ομάδα)

Κατηγορία	Μέσος Όρος	Τυπική Απόκλιση
Κατηγορία 1	5.93	1.87
Κατηγορία 2	13.64	2.02
Κατηγορία 3	21.27	1.71

Από τον Πίνακα 4.11 φαίνεται ότι τα αποτελέσματα για την πειραματική ομάδα είναι παρόμοια με αυτά της ομάδας ελέγχου. Συγκεκριμένα, η Κατηγορία 1 έχει τον χαμηλότερο μέσο όρο, η Κατηγορία 3 τον ψηλότερο μέσο όρο, ενώ ο μέσος όρος της Κατηγορίας 2 είναι μεταξύ των μέσων όρων των δύο κατηγοριών. Για να εξεταστεί κατά πόσον υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των υποκειμένων των τριών κατηγοριών ως προς την κατανόηση των κλασμάτων, έγινε ανάλυση διασποράς (One-Way ANOVA) με εξαρτημένη μεταβλητή την κατανόηση των κλασμάτων στη μέτρηση πριν την εφαρμογή της παρέμβασης και ανεξάρτητη μεταβλητή την κατηγορία στην οποία ανήκαν τα υποκείμενα της πειραματικής ομάδας. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης διασποράς έδειξαν ότι υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μαθητών των τριών κατηγοριών στην κατανόηση των κλασμάτων (Pillai's_$F_{(2,134)}$=612.174, p<0.05). Στη συνέχεια χρησιμοποιήθηκε το τεστ του Scheffe (Scheffe's test) για να διαπιστωθεί μεταξύ ποιων κατηγοριών υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον Πίνακα 4.12 που ακολουθεί.

Πίνακας 4.12

Διαφορές Μεταξύ των Τριών Κατηγοριών της Πειραματικής Ομάδας ως προς την Κατανόηση των Κλασμάτων

	Διαφορές Μέσων Όρων	Τυπικό Σφάλμα	p
$Μ.Ο._3$ - $Μ.Ο._1$	15.35	0.46	0.000
$Μ.Ο._3$ - $Μ.Ο._2$	7.63	0.47	0.000
$Μ.Ο._2$ - $Μ.Ο._1$	7.72	0.36	0.000

Από τον Πίνακα 4.12 φαίνεται ότι στατιστικά σημαντικές διαφορές υπάρχουν μεταξύ και των τριών κατηγοριών, με την Κατηγορία 3 να παρουσιάζει σημαντικά ψηλότερους μέσους όρους από τις άλλες δύο κατηγορίες και την Κατηγορία 2 να παρουσιάζει σημαντικά ψηλότερο μέσο όρο από την Κατηγορία 1. Συνεπώς, οι μαθητές της Κατηγορίας 3 είναι εκείνοι με ψηλή κατανόηση των κλασμάτων, εκείνοι της Κατηγορίας 2 παρουσιάζουν μέτρια κατανόηση των κλασμάτων, ενώ οι μαθητές της Κατηγορίας 1 είναι εκείνοι με χαμηλή κατανόηση των κλασμάτων.

Συνοψίζοντας, τα αποτελέσματα της ανάλυσης latent class για τις δύο ομάδες ήταν παρόμοια και έδειξαν ότι τόσο οι μαθητές της πειραματικής ομάδας, όσο και οι μαθητές της ομάδας ελέγχου μπορούσαν να κατηγοριοποιηθούν σε τρεις κατηγορίες: τους μαθητές με ψηλή κατανόηση των κλασμάτων, τους μαθητές με μέτρια κατανόηση των κλασμάτων και εκείνους με χαμηλή κατανόηση των κλασμάτων. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης latent class είναι αναγκαία για την απάντηση των ερευνητικών ερωτημάτων που ακολουθούν.

Ερώτημα 5: Οι παράγοντες καθορίζουν ιεραρχικά επίπεδα σχετικά με την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος;

Για την απάντηση σε αυτό το ερευνητικό ερώτημα, βρέθηκαν μέσοι όροι της ικανότητας των μαθητών στους παράγοντες για καθεμιά από τις τρεις κατηγορίες μαθητών, έτσι ώστε να διαφανεί σε ποιους παράγοντες έχουν επαρκείς ικανότητες οι μαθητές της Κατηγορίας 1 (χαμηλή κατανόηση των κλασμάτων), σε ποιους παράγοντες οι μαθητές της Κατηγορίας 2 (μέτρια κατανόηση των κλασμάτων) και σε ποιους παράγοντες οι μαθητές της Κατηγορίας 3 (ψηλή κατανόηση των κλασμάτων). Με αυτό τον τρόπο, θα μπορούσε να διαφανεί σε ποιους παράγοντες διαφοροποιούνται οι μαθητές των τριών κατηγοριών και συνεπώς κατά πόσον οι παράγοντες καθορίζουν ιεραρχικά επίπεδα αναφορικά με την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος. Τα αποτελέσματα θα παρατεθούν για καθεμιά από τις τρεις μετρήσεις ξεχωριστά.

Μέτρηση Πριν την Εφαρμογή του Παρεμβατικού Προγράμματος (pre-test)

Στον Πίνακα 4.13 που ακολουθεί φαίνονται μέσοι όροι και τυπικές αποκλίσεις της ικανότητας στους επτά παράγοντες για καθεμιά κατηγορία μαθητών στη μέτρηση πριν την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος .

Πίνακας 4.13

Μέσοι όροι και Τυπικές Αποκλίσεις της Ικανότητας των Μαθητών στους Παράγοντες για Καθεμιά Κατηγορία Μαθητών στην Πρώτη Μέτρηση

	Κατηγορία Μαθητών		
	Κατηγορία 1	Κατηγορία 2	Κατηγορία 3
Παράγοντας			
Επαγωγικός Συλλογισμός	Μ.Ο.=0.63* (Τ.Α.=0.27)	Μ.Ο.=0.79 (Τ.Α.=0.20)	Μ.Ο.=0.92 (Τ.Α.=0.12)
Ορισμοί και Μαθηματικές Εξηγήσεις	Μ.Ο.=0.11 (Τ.Α.=0.18)	Μ.Ο.=0.30 (Τ.Α.=0.21)	Μ.Ο.=0.54 (Τ.Α.=0.23)
Επιχειρηματολογία και Τεκμηρίωση	Μ.Ο.=0.18 (Τ.Α.=0.17)	Μ.Ο.=0.40 (Τ.Α.=0.26)	Μ.Ο.=0.62 (Τ.Α.=0.23)
Αίσθηση για το Μέγεθος των Κλασμάτων	Μ.Ο.=0.42 (Τ.Α.=0.29)	Μ.Ο.=0.72 (Τ.Α.=0.25)	Μ.Ο.=0.90 (Τ.Α.=0.16)
Αναπαραστάσεις	Μ.Ο.=0.48 (Τ.Α.=0.19)	Μ.Ο.=0.60 (Τ.Α.=0.16)	Μ.Ο.=0.77 (Τ.Α.=0.14)
Διασυνδέσεις	Μ.Ο.=0.22 (Τ.Α.=0.20)	Μ.Ο.=0.59 (Τ.Α.=0.23)	Μ.Ο.=0.92 (Τ.Α.=0.09)
Αναστοχασμός	Μ.Ο.=0.26 (Τ.Α.=0.26)	Μ.Ο.=0.28 (Τ.Α.=0.21)	Μ.Ο.=0.58 (Τ.Α.=0.20)

*Σε όλους τους παράγοντες η μέγιστη βαθμολογία είναι το 1.

Από τον Πίνακα 4.13 φαίνεται ότι οι μέσοι όροι των μαθητών που ανήκουν στην Κατηγορία 1 (χαμηλή κατανόηση των κλασμάτων) στους περισσότερους από τους επτά παράγοντες είναι χαμηλοί. Πιο συγκεκριμένα, οι μέσοι όροι για έξι από τους επτά παράγοντες είναι μικρότεροι από 0.5 και μόνο ο μέσος όρος της ικανότητας στον επαγωγικό συλλογισμό ξεπερνά το 0.5. Πρέπει να τονιστεί ότι ο μέσος όρος για τις αναπαραστάσεις παρότι μικρότερος από 0.5 είναι κοντά στο 0.5.

Όσον αφορά στους μαθητές της Κατηγορίας 2 (μέτρια κατανόηση των κλασμάτων), τα αποτελέσματα είναι διαφορετικά, αφού στους τέσσερις από τους επτά παράγοντες και συγκεκριμένα τον επαγωγικό συλλογισμό, την αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων, τις αναπαραστάσεις και τις διασυνδέσεις οι μέσοι όροι είναι μεγαλύτεροι από 0.5, ενώ για τους υπόλοιπους τρεις παράγοντες (αναστοχασμός, ορισμοί και μαθηματικές εξηγήσεις και επιχειρηματολογία και τεκμηρίωση) είναι μικρότεροι από το μισό. Αξίζει να σημειωθεί ότι σε όλους τους παράγοντες εκτός από τον αναστοχασμό φαίνεται ότι οι μαθητές της Κατηγορίας 2 είχαν ψηλότερους μέσους όρους από εκείνους της Κατηγορίας 1.

Όσον αφορά στους μαθητές της Κατηγορίας 3 (ψηλή κατανόηση των κλασμάτων), φαίνεται ότι σε όλους τους παράγοντες οι μέσοι όροι είναι αρκετά ψηλοί (σε όλους τους παράγοντες είναι ψηλότεροι από 0.5).

Συνοψίζοντας, η απάντηση στο ερώτημα 5 είναι καταφατική στην περίπτωση της πρώτης μέτρησης, αφού φαίνεται ότι οι παράγοντες καθορίζουν ιεραρχικά επίπεδα σχετικά με την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος. Συγκεκριμένα, αν θεωρήσουμε ότι επάρκεια σε κάποιο παράγοντα είναι μέσος όρος μεγαλύτερος από 0.5, τότε φαίνεται ότι οι μαθητές της Κατηγορίας 1 είναι επαρκείς μόνο στον επαγωγικό συλλογισμό, οι μαθητές της Κατηγορίας 2 στον επαγωγικό συλλογισμό και επιπρόσθετα στην αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων, τις αναπαραστάσεις και τις διασυνδέσεις και οι μαθητές της Κατηγορίας 3 σε όλους τους παράγοντες. Τα αποτελέσματα αυτά φαίνονται και στον Πίνακα 4.14 που ακολουθεί.

Πίνακας 4.14

Παράγοντες Στους Οποίους Είχαν Επαρκείς Ικανότητες οι Μαθητές Καθεμιάς Κατηγορίας στην Πρώτη Μέτρηση

Κατηγορία 1	Κατηγορία 2	Κατηγορία 3
Επαγωγικός Συλλογισμός	Επαγωγικός Συλλογισμός	Επαγωγικός Συλλογισμός
	Αίσθηση για το Μέγεθος των Κλασμάτων	Αίσθηση για το Μέγεθος των Κλασμάτων
	Αναπαραστάσεις	Αναπαραστάσεις
	Διασυνδέσεις	Διασυνδέσεις
		Επιχειρηματολογία και Τεκμηρίωση
		Αναστοχασμός
		Ορισμοί και Μαθηματικές Εξηγήσεις

Στον Πίνακα 4.15 που ακολουθεί φαίνονται μέσοι όροι και τυπικές αποκλίσεις της ικανότητας των μαθητών στους επτά παράγοντες στη μέτρηση αμέσως μετά την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος για καθεμιά κατηγορία μαθητών .

Πίνακας 4.15

Μέσοι όροι και Τυπικές Αποκλίσεις της Ικανότητας των Μαθητών στους Παράγοντες για Καθεμιά Κατηγορία Μαθητών στη Δεύτερη Μέτρηση

	Κατηγορία Μαθητών		
	Κατηγορία 1	Κατηγορία 2	Κατηγορία 3
Παράγοντας			
Επαγωγικός Συλλογισμός	Μ.Ο.=0.74* (Τ.Α.=0.25)	Μ.Ο.=0.88 (Τ.Α.=0.18)	Μ.Ο.=0.94 (Τ.Α.=0.12)
Ορισμοί και Μαθηματικές Εξηγήσεις	Μ.Ο.=0.27 (Τ.Α.=0.26)	Μ.Ο.=0.33 (Τ.Α.=0.21)	Μ.Ο.=0.50 (Τ.Α.=0.22)
Επιχειρηματολογία και Τεκμηρίωση	Μ.Ο.=0.28 (Τ.Α.=0.24)	Μ.Ο.=0.51 (Τ.Α.=0.26)	Μ.Ο.=0.63 (Τ.Α.=0.23)
Αίσθηση για το Μέγεθος των Κλασμάτων	Μ.Ο.=0.60 (Τ.Α.=0.33)	Μ.Ο.=0.79 (Τ.Α.=0.28)	Μ.Ο.=0.87 (Τ.Α.=0.26)
Αναπαραστάσεις	Μ.Ο.=0.47 (Τ.Α.=0.20)	Μ.Ο.=0.63 (Τ.Α.=0.20)	Μ.Ο.=0.70 (Τ.Α.=0.19)
Διασυνδέσεις	Μ.Ο.=0.49 (Τ.Α.=0.36)	Μ.Ο.=0.72 (Τ.Α.=0.32)	Μ.Ο.=0.77 (Τ.Α.=0.34)
Αναστοχασμός	Μ.Ο.=0.20 (Τ.Α.=0.19)	Μ.Ο.=0.41 (Τ.Α.=0.28)	Μ.Ο.=0.58 (Τ.Α.=0.28)

*Σε όλους τους παράγοντες η μέγιστη βαθμολογία είναι το 1.

Από τον Πίνακα 4.15 φαίνεται ότι οι μέσοι όροι των μαθητών της Κατηγορίας 1 στους περισσότερους παράγοντες είναι όπως και στην πρώτη μέτρηση χαμηλοί. Συγκεκριμένα, μόνο σε δύο από τους παράγοντες, τον επαγωγικό συλλογισμό και την αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων οι μέσοι όροι είναι μεγαλύτεροι από 0.5. Στους υπόλοιπους πέντε παράγοντες, οι μέσοι όροι είναι μικρότεροι από 0.5. Ωστόσο, αξίζει να σημειωθεί ότι όσον αφορά στις αναπαραστάσεις και τις διασυνδέσεις, οι μέσοι όροι, όπως φαίνεται και στον Πίνακα 4.15 είναι οριακά χαμηλότεροι από 0.5.

Όσον αφορά στους μαθητές που ανήκουν στην Κατηγορία 2, στους πέντε από τους επτά παράγοντες και πιο συγκεκριμένα τον επαγωγικό συλλογισμό, την αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων, τις διασυνδέσεις, τις αναπαραστάσεις και την επιχειρηματολογία και τεκμηρίωση, οι μέσοι όροι είναι μεγαλύτεροι από 0.5. Ωστόσο, αξίζει να σημειωθεί ότι όσον αφορά στην επιχειρηματολογία και την τεκμηρίωση, όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.15 ο μέσος όρος είναι οριακά μεγαλύτερος από 0.5. Στους άλλους δύο παράγοντες, δηλαδή τον αναστοχασμό και τους ορισμούς και τις μαθηματικές εξηγήσεις, οι μέσοι όροι είναι μικρότεροι από 0.5, στοιχείο που καταδεικνύει τις δυσκολίες των μαθητών με μέτρια κατανόηση των κλασμάτων σε αυτούς τους δύο παράγοντες.

Οι μαθητές της Κατηγορίας 3 παρουσίασαν μέσους όρους ψηλότερους από 0.5 σε όλους τους παράγοντες, εκτός από τους ορισμούς και τις μαθηματικές εξηγήσεις, όπου ο μέσος όρος ήταν 0.5.

Όσον αφορά στο ερώτημα κατά πόσον οι παράγοντες καθορίζουν ιεραρχικά επίπεδα σχετικά με την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος, από τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν αυτό φαίνεται να επιβεβαιώνεται για τη δεύτερη μέτρηση. Συγκεκριμένα, φαίνεται ότι οι μαθητές με χαμηλή κατανόηση των κλασμάτων έχουν επαρκείς ικανότητες μόνο στον επαγωγικό συλλογισμό και την αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων, οι μαθητές με μέτρια κατανόηση των κλασμάτων στους δύο αυτούς παράγοντες και επιπρόσθετα στις διασυνδέσεις, τις αναπαραστάσεις και την επιχειρηματολογία και την τεκμηρίωση, ενώ οι μαθητές με ψηλή κατανόηση των κλασμάτων παρουσιάζουν επαρκείς ικανότητες σε όλους τους παράγοντες. Αυτά τα αποτελέσματα φαίνονται και στον Πίνακα 4.16 που ακολουθεί.

Πίνακας 4.16

Παράγοντες Στους Οποίους Είχαν Επαρκείς Ικανότητες οι Μαθητές Καθεμιάς Κατηγορίας στη Δεύτερη Μέτρηση

Κατηγορία 1	Κατηγορία 2	Κατηγορία 3
Επαγωγικός Συλλογισμός Αίσθηση για το Μέγεθος των Κλασμάτων	Επαγωγικός Συλλογισμός Αίσθηση για το Μέγεθος των Κλασμάτων Αναπαραστάσεις Διασυνδέσεις Επιχειρηματολογία και Τεκμηρίωση	Επαγωγικός Συλλογισμός Αίσθηση για το Μέγεθος των Κλασμάτων Αναπαραστάσεις Διασυνδέσεις Επιχειρηματολογία και Τεκμηρίωση Αναστοχασμός Ορισμοί και Μαθηματικές Εξηγήσεις

Μέτρηση Τρεις μήνες Μετά την Εφαρμογή του Παρεμβατικού Προγράμματος (retention-test)

Στον Πίνακα 4.17 που ακολουθεί φαίνονται μέσοι όροι και τυπικές αποκλίσεις της ικανότητας στους επτά παράγοντες για καθεμιά κατηγορία μαθητών στη μέτρηση τρεις μήνες μετά την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος .

Πίνακας 4.17

Μέσοι όροι και Τυπικές Αποκλίσεις της Ικανότητας των Μαθητών στους Παράγοντες για Καθεμιά Κατηγορία Μαθητών στην Τρίτη Μέτρηση

	Κατηγορία Μαθητών		
	Κατηγορία 1	Κατηγορία 2	Κατηγορία 3
Παράγοντας			
Επαγωγικός Συλλογισμός	Μ.Ο.=0.71* (Τ.Α.=0.25)	Μ.Ο.=0.87 (Τ.Α.=0.17)	Μ.Ο.=0.94 (Τ.Α.=0.13)
Ορισμοί και Μαθηματικές Εξηγήσεις	Μ.Ο.=0.27 (Τ.Α.=0.25)	Μ.Ο.=0.45 (Τ.Α.=0.25)	Μ.Ο.=0.56 (Τ.Α.=0.21)
Επιχειρηματολογία και Τεκμηρίωση	Μ.Ο.=0.35 (Τ.Α.=0.27)	Μ.Ο.=0.54 (Τ.Α.=0.28)	Μ.Ο.=0.66 (Τ.Α.=0.23)
Αίσθηση για το Μέγεθος των Κλασμάτων	Μ.Ο.=0.61 (Τ.Α.=0.34)	Μ.Ο.=0.83 (Τ.Α.=0.27)	Μ.Ο.=0.92 (Τ.Α.=0.23)
Αναπαραστάσεις	Μ.Ο.=0.46 (Τ.Α.=0.20)	Μ.Ο.=0.61 (Τ.Α.=0.21)	Μ.Ο.=0.77 (Τ.Α.=0.19)
Διασυνδέσεις	Μ.Ο.=0.45 (Τ.Α.=0.36)	Μ.Ο.=0.68 (Τ.Α.=0.35)	Μ.Ο.=0.85 (Τ.Α.=0.28)
Αναστοχασμός	Μ.Ο.=0.24 (Τ.Α.=0.23)	Μ.Ο.=0.36 (Τ.Α.=0.31)	Μ.Ο.=0.59 (Τ.Α.=0.31)

*Σε όλους τους παράγοντες η μέγιστη βαθμολογία είναι το 1.

Από τον Πίνακα 4.17 φαίνεται ότι τα αποτελέσματα για τη μέτρηση τρεις μήνες μετά το πέρας της παρέμβασης είναι παρόμοια με αυτά της δεύτερης μέτρησης. Συγκεκριμένα, οι μαθητές της Κατηγορίας 1 παρουσιάζουν μέσους όρους ψηλότερους από 0.5 μόνο στον επαγωγικό συλλογισμό και την αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων. Όσον αφορά στους μαθητές της Κατηγορίας 2, στους πέντε από τους επτά παράγοντες και συγκεκριμένα τον επαγωγικό συλλογισμό, την αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων, τις αναπαραστάσεις, τις διασυνδέσεις και την επιχειρηματολογία και την τεκμηρίωση, οι μέσοι όροι είναι ψηλότεροι από 0.5. Αξίζει να σημειωθεί ότι σε αυτή τη μέτρηση, ο μέσος όρος στους ορισμούς και τις μαθηματικές εξηγήσεις είναι λίγο μικρότερος από 0.5. Οι μαθητές της Κατηγορίας 3 είχαν ψηλούς μέσους όρους σε όλους τους παράγοντες (σε όλους τους παράγοντες οι μέσοι όροι ήταν ψηλότεροι από 0.5). Τα προαναφερθέντα αποτελέσματα για την τρίτη μέτρηση φαίνονται και στον Πίνακα 4.18 που ακολουθεί.

Πίνακας 4.18

Παράγοντες Στους Οποίους Είχαν Επαρκείς Ικανότητες οι Μαθητές Καθεμιάς Κατηγορίας στην Τρίτη Μέτρηση

Κατηγορία 1	Κατηγορία 2	Κατηγορία 3
Επαγωγικός Συλλογισμός Αίσθηση για το Μέγεθος των Κλασμάτων	Επαγωγικός Συλλογισμός Αίσθηση για το Μέγεθος των Κλασμάτων Αναπαραστάσεις Διασυνδέσεις Επιχειρηματολογία και Τεκμηρίωση	Επαγωγικός Συλλογισμός Αίσθηση για το Μέγεθος των Κλασμάτων Αναπαραστάσεις Διασυνδέσεις Επιχειρηματολογία και Τεκμηρίωση Αναστοχασμός Ορισμοί και Μαθηματικές Εξηγήσεις

Συνοψίζοντας, τα αποτελέσματα των τριών μετρήσεων δείχνουν ότι οι παράγοντες της παρούσας έρευνας καθορίζουν ιεραρχικά επίπεδα σχετικά με την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές της Κατηγορίας 1 έχουν επαρκείς ικανότητες μόνο στον επαγωγικό συλλογισμό και την αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων, οι μαθητές της Κατηγορίας 2 σε αυτούς τους δύο παράγοντες και επιπρόσθετα τις αναπαραστάσεις, τις διασυνδέσεις και την επιχειρηματολογία και την τεκμηρίωση και οι μαθητές της Κατηγορίας 3 σε όλους τους παράγοντες.

Ερώτημα 6: Ποια είναι η επίδραση του παρεμβατικού προγράμματος στη βελτίωση της κατανόησης των κλασμάτων και στην ικανότητα των μαθητών στους παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων;

Ερώτημα 7: Ποιος είναι ο ρυθμός ανάπτυξης της κατανόησης των κλασμάτων και της ικανότητας των μαθητών στους παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων;

Για την εξακρίβωση της επίδρασης του παρεμβατικού προγράμματος στην κατανόηση των κλασμάτων και στην ικανότητα των μαθητών στους παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων, χρησιμοποιήθηκε η ανάλυση για επαναλαμβανόμενες μετρήσεις (Repeated Measures Analysis) και η ανάλυση ανάπτυξης (Growth Modeling). Προτού παρατεθούν τα αποτελέσματα των στατιστικών αναλύσεων, έγινε έλεγχος της ισοδυναμίας της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου πριν την εφαρμογή της παρέμβασης (pre-test). Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήθηκε το κριτήριο t για ανεξάρτητα δείγματα με εξαρτημένη μεταβλητή την κατανόηση των κλασμάτων και ανεξάρτητη μεταβλητή το είδος της ομάδας (πειραματική, ελέγχου). Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι δεν υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου στην πρώτη μέτρηση ($t=.182$, $p=.856>0.05$). Συνεπώς, η πειραματική ομάδα και η ομάδα ελέγχου ήταν ισοδύναμες ως προς την κατανόηση των κλασμάτων πριν την εφαρμογή της παρέμβασης.

Η ανάλυση για επαναλαμβανόμενες μετρήσεις είχε ως εξαρτημένη μεταβλητή την κατανόηση των κλασμάτων και ανεξάρτητες μεταβλητές το είδος της ομάδας (πειραματική, ελέγχου) και το χρόνο των μετρήσεων. Η ανάλυση για επαναλαμβανόμενες μετρήσεις έδειξε ότι υπήρχαν σημαντικές διαφορές στους μέσους όρους της κατανόησης των κλασμάτων μεταξύ των τριών μετρήσεων (Pillai's_$F_{(2,340)}=.516$, $p<0.05$) και ότι υπήρχε σημαντική αλληλεπίδραση της κατανόησης των κλασμάτων και του είδους της ομάδας (Pillai's_$F_{(2,340)}=.029$, $p<0.05$). Συνεπώς, είναι πιθανόν οι διαφορές στην κατανόηση των κλασμάτων μεταξύ των τριών μετρήσεων να οφείλονται στο είδος της παρέμβασης. Στον Πίνακα 4.19 φαίνονται οι μέσοι όροι και το τυπικό σφάλμα για την πειραματική ομάδα και την ομάδα ελέγχου για καθεμιά από τις τρεις μετρήσεις.

Πίνακας 4.19

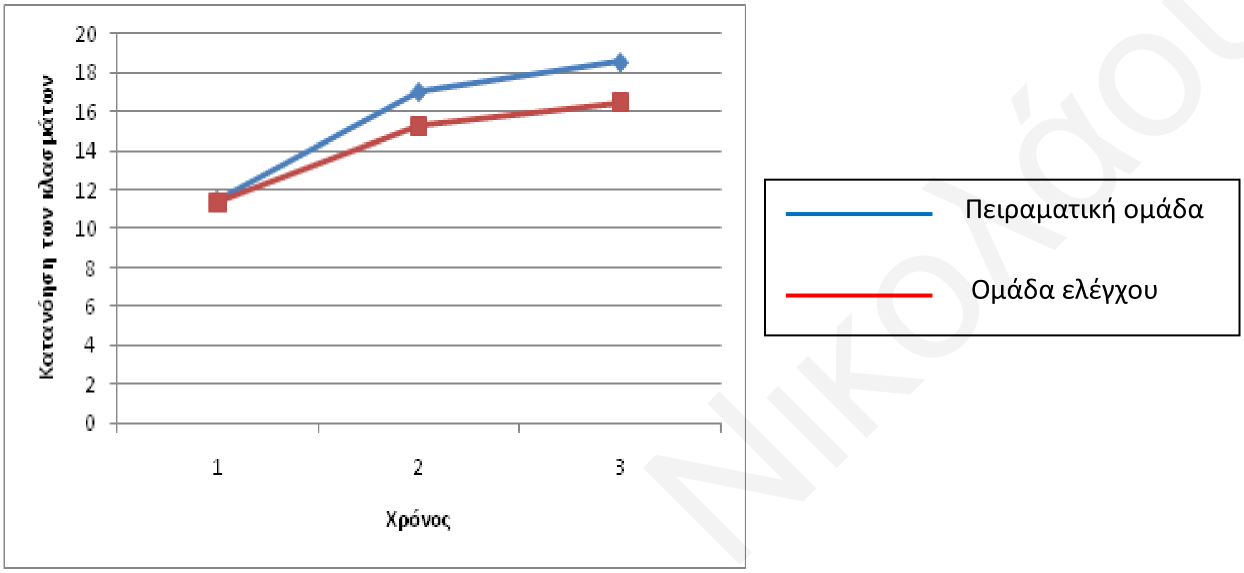
Μέσοι όροι και Τυπικό Σφάλμα της Κατανόησης των Κλασμάτων για την Πειραματική Ομάδα και την Ομάδα Ελέγχου για Καθεμιά από τις Τρεις Μετρήσεις

	Μέτρηση πριν από την παρέμβαση	Μέτρηση αμέσως μετά την παρέμβαση	Μέτρηση τρεις μήνες μετά την παρέμβαση
Πειραματική ομάδα	Μ.Ο.=11.48 (Τ.Σ.=.49)	Μ.Ο.=17.04 (Τ.Σ.=.51)	Μ.Ο.=18.56 (Τ.Σ.=.60)
Ομάδα ελέγχου	Μ.Ο.=11.37 (Τ.Σ.=.42)	Μ.Ο.=15.28 (Τ.Σ.=.44)	Μ.Ο.=16.45 (Τ.Σ.=.51)

Από τον Πίνακα 4.19 φαίνεται ότι ενώ η πειραματική ομάδα και η ομάδα ελέγχου είναι ισοδύναμες πριν την εφαρμογή της παρέμβασης, στη μέτρηση αμέσως μετά την εφαρμογή της παρέμβασης η πειραματική ομάδα παρουσιάζει σημαντικά υψηλότερο μέσο όρο και το ίδιο συμβαίνει στη μέτρηση τρεις μήνες μετά την εφαρμογή της παρέμβασης. Τα αποτελέσματα αυτά φαίνονται και στη Γραφική Παράσταση 4.1. Ακόμη, φαίνεται ότι και οι δύο ομάδες παρουσιάζουν βελτίωση στο χρονικό διάστημα από την πρώτη μέτρηση στη δεύτερη μέτρηση και από τη δεύτερη μέτρηση στην τρίτη μέτρηση. Η μεγαλύτερη βελτίωση και για τις δύο ομάδες παρατηρείται στο χρονικό διάστημα από την πρώτη στη δεύτερη μέτρηση. Με βάση αυτά τα αποτελέσματα φαίνεται ότι το παρεμβατικό πρόγραμμα επέδρασε θετικά στην κατανόηση των κλασμάτων και η εφαρμογή του είχε ως αποτέλεσμα τη βελτίωση της κατανόησης των κλασμάτων.

Γραφική Παράσταση 4.1

Η Εξέλιξη της Κατανόησης των Κλασμάτων για την Πειραματική Ομάδα και την Ομάδα Ελέγχου στο Χρονικό Διάστημα από την Πρώτη στην Τρίτη Μέτρηση



Ακολούθως, διενεργήθηκε ανάλυση ανάπτυξης για καθεμιά από τις τρεις κατηγορίες της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου (Κατηγορία 1-χαμηλή κατανόηση των κλασμάτων, Κατηγορία 2-μέτρια κατανόηση των κλασμάτων και Κατηγορία 3-ψηλή κατανόηση των κλασμάτων) που προέκυψαν από την ανάλυση latent class. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται για καθεμιά κατηγορία (Κατηγορία 1, Κατηγορία 2, Κατηγορία 3) πρώτα για την πειραματική ομάδα και ακολούθως για την ομάδα ελέγχου και αυτό για να είναι δυνατή η σύγκριση μεταξύ των μαθητών των αντίστοιχων κατηγοριών της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου (συγκρίνονται οι μαθητές της πειραματικής ομάδας με ψηλή κατανόηση των κλασμάτων με τους μαθητές της ομάδας ελέγχου με ψηλή κατανόηση των κλασμάτων, οι μαθητές της πειραματικής ομάδας με μέτρια κατανόηση των κλασμάτων με τους αντίστοιχους της ομάδας ελέγχου και οι μαθητές της πειραματικής ομάδας με χαμηλή κατανόηση των κλασμάτων με τους αντίστοιχους μαθητές της ομάδας ελέγχου).

Κατηγορία 1: Χαμηλή κατανόηση των κλασμάτων

Αρχικά, διενεργήθηκε ανάλυση ανάπτυξης για την κατανόηση των κλασμάτων για τους μαθητές της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου που ανήκουν στην Κατηγορία 1. Προτού παρατεθούν τα αποτελέσματα από την ανάλυση ανάπτυξης, παρατίθενται περιγραφικά στοιχεία για την κατανόηση των κλασμάτων για καθεμιά ομάδα. Τα στοιχεία φαίνονται στον Πίνακα 4.20 που ακολουθεί.

Πίνακας 4.20

Μέσοι όροι και Τυπικές Αποκλίσεις της Κατανόησης των Κλασμάτων των Μαθητών που Ανήκουν στην Κατηγορία 1 για την Πειραματική Ομάδα και την Ομάδα Ελέγχου για Καθεμιά από τις Τρεις Μετρήσεις

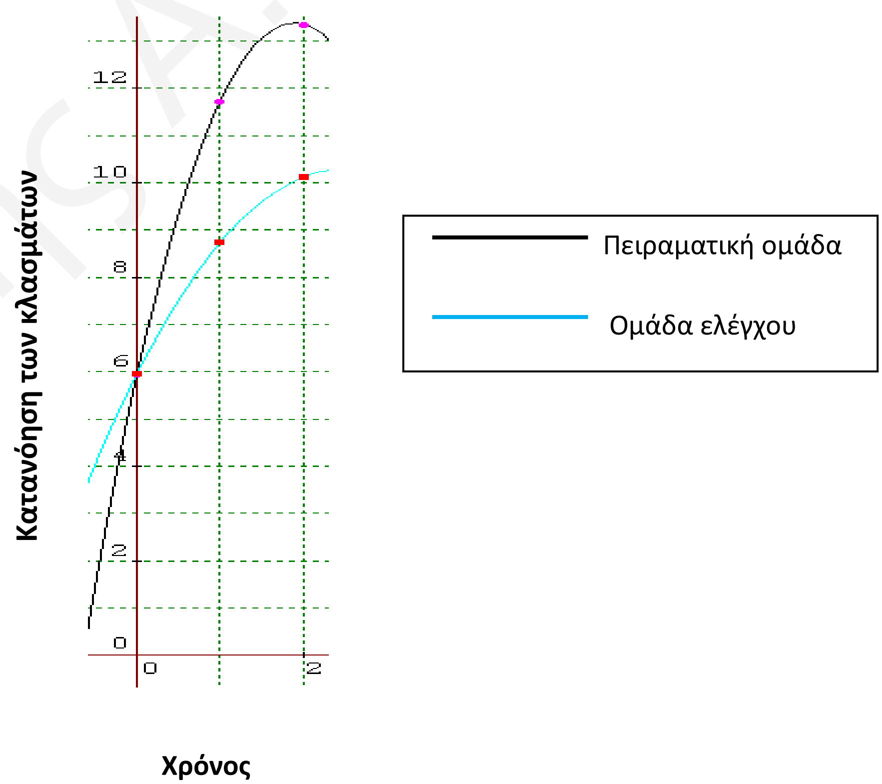
	Μέτρηση πριν από την παρέμβαση	Μέτρηση αμέσως μετά την παρέμβαση	Μέτρηση τρεις μήνες μετά την παρέμβαση
Πειραματική ομάδα	Μ.Ο.=5.93 (Τ.Α.=1.87)	Μ.Ο.=11.71 (Τ.Α.=5.10)	Μ.Ο.=13.34 (Τ.Α.=6.81)
Ομάδα ελέγχου	Μ.Ο.=5.95 (Τ.Α.=2.00)	Μ.Ο.=8.73 (Τ.Α.=5.76)	Μ.Ο.=10.12 (Τ.Α.=6.58)

Από τον Πίνακα 4.20 φαίνεται ότι ενώ στην μέτρηση πριν την εφαρμογή της παρέμβασης, οι δύο ομάδες είναι ισοδύναμες, στη δεύτερη και στην τρίτη μέτρηση η πειραματική ομάδα υπερέχει της ομάδας ελέγχου. Από την ανάλυση ανάπτυξης προέκυψαν κατάλληλα μοντέλα που περιγράφουν το ρυθμό ανάπτυξης και για τις δύο ομάδες μαθητών. Συγκεκριμένα, ο ρυθμός ανάπτυξης της κατανόησης των κλασμάτων για τους μαθητές της πειραματικής ομάδας που ανήκουν στην Κατηγορία 1 (χαμηλή κατανόηση των κλασμάτων) φαίνεται ότι εκφράζεται από μια μη γραμμική συνάρτηση (0, 0.81, 1), η οποία έχει μέση τιμή κλίσης θετική και στατιστικά σημαντική *(S=1.434, Z=9.199, CFI=1.000, RMSEA=0.000,* $\chi^2/df=0.087$*)*. Ο ρυθμός ανάπτυξης της κατανόησης των κλασμάτων για τους μαθητές της ομάδας ελέγχου που ανήκουν στην Κατηγορία 1 (χαμηλή κατανόηση των κλασμάτων) φαίνεται ότι εκφράζεται από μια μη γραμμική συνάρτηση (0, 1, 1.44), η οποία έχει μέση τιμή κλίσης θετική και στατιστικά σημαντική *(S=0.750, Z=5.586, CFI=1.000, RMSEA=0.000,* $\chi^2/df=0.030$*)*. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης ανάπτυξης φαίνονται στη Γραφική Παράσταση

4.2. Από τη Γραφική Παράσταση 4.2 και τη συνάρτηση για την πειραματική ομάδα (0, 0.81, 1) φαίνεται ότι η πειραματική ομάδα βελτιώνεται από την πρώτη στη δεύτερη μέτρηση και από τη δεύτερη στην τρίτη μέτρηση, ωστόσο μεγαλύτερη βελτίωση παρουσιάζεται στο χρονικό διάστημα από την πρώτη στη δεύτερη μέτρηση. Το ίδιο συμβαίνει και για την ομάδα ελέγχου. Από τις μέσες τιμές κλίσης των συναρτήσεων για την πειραματική ομάδα και για την ομάδα ελέγχου φαίνεται ότι η εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος προσέδωσε στην πειραματική ομάδα σχεδόν διπλάσιο ρυθμό ανάπτυξης συγκριτικά με την ομάδα ελέγχου. Από αυτό το δεδομένο, εξάγεται και το συμπέρασμα ότι το παρεμβατικό πρόγραμμα επέδρασε θετικά στη βελτίωση της κατανόησης των κλασμάτων για τους μαθητές της Κατηγορίας 1.

Γραφική Παράσταση 4.2

Ρυθμός Ανάπτυξης της Κατανόησης των Κλασμάτων για τους Μαθητές της Πειραματικής Ομάδας και της Ομάδας Ελέγχου που Ανήκουν στην Κατηγορία 1



Ακολούθως, διενεργήθηκε ανάλυση ανάπτυξης για την ομάδα ελέγχου και την πειραματική ομάδα ξεχωριστά για κάθε παράγοντα. Από την ανάλυση ανάπτυξης για την ομάδα ελέγχου προέκυψαν κατάλληλα μοντέλα που περιγράφουν το ρυθμό ανάπτυξης του επαγωγικού συλλογισμού, των ορισμών και των μαθηματικών εξηγήσεων, της αίσθησης για το μέγεθος των κλασμάτων, των αναπαραστάσεων, των διασυνδέσεων με τους δεκαδικούς, τα ποσοστά και τη διαίρεση και του αναστοχασμού. Από την ανάλυση ανάπτυξης για την πειραματική ομάδα προέκυψαν κατάλληλα μοντέλα που περιγράφουν το ρυθμό ανάπτυξης των ορισμών και των μαθηματικών εξηγήσεων, της αίσθησης για το μέγεθος των κλασμάτων, των αναπαραστάσεων και του αναστοχασμού.

Ρυθμός Ανάπτυξης του Επαγωγικού Συλλογισμού

Στον Πίνακα 4.21 παρουσιάζονται μέσοι όροι και τυπικές αποκλίσεις της ικανότητας στον επαγωγικό συλλογισμό για τους μαθητές της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου που ανήκουν στην Κατηγορία 1.

Πίνακας 4.21

Μέσοι όροι και Τυπικές Αποκλίσεις της Ικανότητας στον Επαγωγικό Συλλογισμό για τους Μαθητές της Πειραματικής Ομάδας και της Ομάδας Ελέγχου που ανήκουν στην Κατηγορία 1 για Καθεμιά από τις Τρεις Μετρήσεις

	Μέτρηση πριν από την παρέμβαση	Μέτρηση αμέσως μετά την παρέμβαση	Μέτρηση τρεις μήνες μετά την παρέμβαση
Πειραματική ομάδα	Μ.Ο.=1.68 (Τ.Α.=.69)	Μ.Ο.=2.30 (Τ.Α.=.60)	Μ.Ο.=2.01 (Τ.Α.=.57)
Ομάδα ελέγχου	Μ.Ο.=1.62 (Τ.Α.=.69)	Μ.Ο.=1.88 (Τ.Α.=.71)	Μ.Ο.=1.71 (Τ.Α.=.70)

Από τον Πίνακα 4.21 φαίνεται ότι ενώ οι δύο ομάδες είναι ισοδύναμες πριν την εφαρμογή της παρέμβασης, στη μέτρηση αμέσως μετά την παρέμβαση και στη μέτρηση τρεις μήνες μετά η πειραματική ομάδα φαίνεται να υπερέχει της ομάδας ελέγχου. Ακόμη, και οι δύο ομάδες παρουσιάζουν βελτίωση στο χρονικό διάστημα από την πρώτη στη δεύτερη μέτρηση και ακολούθως πτώση.

Για την πειραματική ομάδα δεν φαίνεται να επιβεβαιώνεται μοντέλο ανάπτυξης που να έχει καλή προσαρμογή στα εμπειρικά δεδομένα. Όσον αφορά στην ομάδα ελέγχου, ο ρυθμός ανάπτυξης της ικανότητας στον επαγωγικό συλλογισμό φαίνεται ότι εκφράζεται από μια μη γραμμική συνάρτηση (0, 0.49, 0.16), η οποία έχει μέση τιμή κλίσης αρνητική και μη σημαντική *(S=-0.049, Z=-0.324, CFI=1.000, RMSEA=0.000,* $\chi^2/df=0.766$*).* Η μέση τιμή κλίσης της συνάρτησης για τον επαγωγικό συλλογισμό δεν είναι στατιστικά σημαντική, γεγονός που φανερώνει ότι δεν υπήρξε αξιοσημείωτη μεταβολή της ικανότητας στον επαγωγικό συλλογισμό για τους μαθητές της ομάδας ελέγχου στο χρονικό διάστημα που έλαβε χώρα η παρέμβαση αλλά και τρεις μήνες μετά. Δεν μπορεί να γίνει σύγκριση με τους μαθητές της πειραματικής ομάδας γιατί δεν προέκυψε κατάλληλο μοντέλο ανάπτυξης για αυτή την ομάδα μαθητών.

Ρυθμός Ανάπτυξης των Ορισμών και των Μαθηματικών Εξηγήσεων

Στον Πίνακα 4.22 παρουσιάζονται μέσοι όροι και τυπικές αποκλίσεις της ικανότητας στους ορισμούς και τις μαθηματικές εξηγήσεις για τους μαθητές της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου που ανήκουν στην Κατηγορία 1.

Πίνακας 4.22

Μέσοι όροι και Τυπικές Αποκλίσεις της Ικανότητας στους Ορισμούς και τις Μαθηματικές Εξηγήσεις για τους Μαθητές της Πειραματικής Ομάδας και της Ομάδας Ελέγχου που ανήκουν στην Κατηγορία 1 για Καθεμιά από τις Τρεις Μετρήσεις

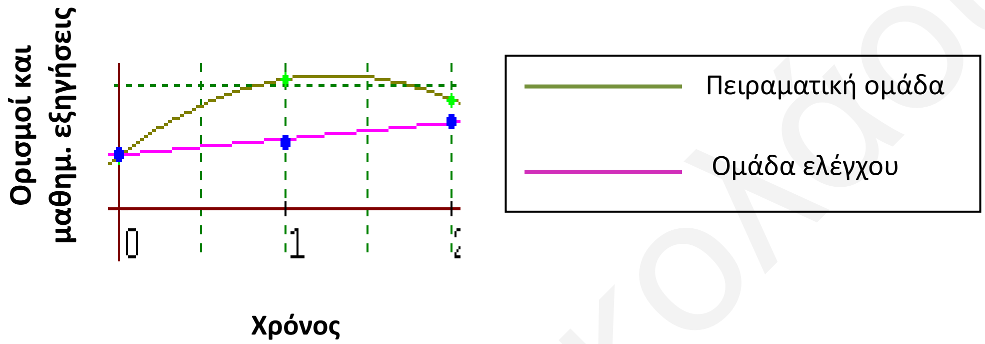
	Μέτρηση πριν από την παρέμβαση	Μέτρηση αμέσως μετά την παρέμβαση	Μέτρηση τρεις μήνες μετά την παρέμβαση
Πειραματική ομάδα	Μ.Ο.=.21 (Τ.Α.=.28)	Μ.Ο.=.52 (Τ.Α.=.42)	Μ.Ο.=.44 (Τ.Α.=.39)
Ομάδα ελέγχου	Μ.Ο.=.22 (Τ.Α.=.36)	Μ.Ο.=.27 (Τ.Α.=.39)	Μ.Ο.=.35 (Τ.Α.=.38)

Από τον Πίνακα 4.22 φαίνεται ότι ενώ οι δύο ομάδες είναι ισοδύναμες πριν την εφαρμογή της παρέμβασης, στη δεύτερη και στην τρίτη μέτρηση η πειραματική ομάδα υπερέχει της ομάδας ελέγχου.

Ο ρυθμός ανάπτυξης της ικανότητας στους ορισμούς και τις μαθηματικές εξηγήσεις για τους μαθητές της πειραματικής ομάδας που ανήκουν στην Κατηγορία 1 φαίνεται ότι εκφράζεται από μια μη γραμμική συνάρτηση (0, 0.25, 0.16), η οποία έχει μέση τιμή κλίσης θετική και στατιστικά σημαντική *(S=1.773, Z=6.484, CFI=1.000, RMSEA=0.000,* $\chi^2/df=0.447$*).* Ο ρυθμός ανάπτυξης της ικανότητας των μαθητών της ομάδας ελέγχου που ανήκουν στην Κατηγορία 1 φαίνεται ότι εκφράζεται από μια γραμμική συνάρτηση (0, 1, 2), η οποία έχει μέση τιμή κλίσης θετική και στατιστικά σημαντική *(S=0.545, Z=3.239, CFI=1.000, RMSEA=0.000,* $\chi^2/df=0.204$*).* Τα αποτελέσματα της ανάλυσης ανάπτυξης φαίνονται στη Γραφική Παράσταση 4.3. Από τη Γραφική Παράσταση 4.3 φαίνεται ότι οι μαθητές της πειραματικής ομάδας παρουσιάζουν βελτίωση από την πρώτη στη δεύτερη μέτρηση και σχετική σταθεροποίηση από τη δεύτερη στην τρίτη μέτρηση. Αντίθετα, οι μαθητές της ομάδας ελέγχου παρουσιάζουν σταθερά αυξανόμενη πρόοδο. Οι μέσες τιμές κλίσης τόσο για την πειραματική όσο και για την ομάδα ελέγχου είναι θετικές και στατιστικά σημαντικές, γεγονός που φανερώνει ότι για το χρονικό διάστημα που έλαβε χώρα η παρέμβαση και τρεις μήνες μετά, οι δύο ομάδες παρουσίασαν σημαντική βελτίωση. Η μέση τιμή κλίσης της συνάρτησης για την πειραματική ομάδα είναι υπερδιπλάσια της μέσης τιμής κλίσης για την ομάδα ελέγχου, γεγονός που δείχνει ότι η εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος είχε ως αποτέλεσμα η πειραματική ομάδα να αναπτύσσεται με ψηλότερο ρυθμό από την ομάδα ελέγχου. Συνεπώς, φαίνεται ότι το παρεμβατικό πρόγραμμα επέδρασε θετικά στη βελτίωση της ικανότητας στους ορισμούς και τις μαθηματικές εξηγήσεις για τους μαθητές της Κατηγορίας 1 (χαμηλή κατανόηση των κλασμάτων).

Γραφική Παράσταση 4.3

Ρυθμός Ανάπτυξης της Ικανότητας στους Ορισμούς και τις Μαθηματικές Εξηγήσεις για τους Μαθητές της Πειραματικής Ομάδας και της Ομάδας Ελέγχου που Ανήκουν στην Κατηγορία 1



Ρυθμός Ανάπτυξης της Επιχειρηματολογίας και της Τεκμηρίωσης

Στον Πίνακα 4.23 παρουσιάζονται μέσοι όροι και τυπικές αποκλίσεις της ικανότητας στην επιχειρηματολογία και την τεκμηρίωση για τους μαθητές της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου που ανήκουν στην Κατηγορία 1.

Πίνακας 4.23

Μέσοι όροι και Τυπικές Αποκλίσεις της Ικανότητας στην Επιχειρηματολογία και την Τεκμηρίωση για τους Μαθητές της Πειραματικής Ομάδας και της Ομάδας Ελέγχου που ανήκουν στην Κατηγορία 1 για Καθεμιά από τις Τρεις Μετρήσεις

	Μέτρηση πριν από την παρέμβαση	Μέτρηση αμέσως μετά την παρέμβαση	Μέτρηση τρεις μήνες μετά την παρέμβαση
Πειραματική ομάδα	Μ.Ο.=.50 (Τ.Α.=.53)	Μ.Ο.=1.05 (Τ.Α.=.79)	Μ.Ο.=.95 (Τ.Α.=.71)
Ομάδα ελέγχου	Μ.Ο.=.50 (Τ.Α.=.42)	Μ.Ο.=.79 (Τ.Α.=.73)	Μ.Ο.=.90 (Τ.Α.=.70)

Από τον Πίνακα 4.23 φαίνεται ότι οι δύο ομάδες είναι ισοδύναμες πριν την εφαρμογή της παρέμβασης. Στο χρονικό διάστημα που μεσολαβεί από την πρώτη στη δεύτερη μέτρηση και οι δύο ομάδες φαίνεται να παρουσιάζουν βελτίωση, με την πειραματική ομάδα να παρουσιάζει μεγαλύτερη βελτίωση και να υπερέχει της ομάδας ελέγχου. Ακολούθως, παρατηρείται μικρή μείωση της ικανότητας στην επιχειρηματολογία και την τεκμηρίωση στο χρονικό διάστημα από τη δεύτερη στην τρίτη μέτρηση για την πειραματική ομάδα και μικρή αύξηση για την ομάδα ελέγχου. Συνεπώς, φαίνεται ότι η βελτίωση της πειραματικής ομάδας ήταν σχετικά πρόσκαιρη και δεν είχε μονιμότητα. Από την ανάλυσης ανάπτυξης για τις δύο ομάδες μαθητών δεν προέκυψαν μοντέλα ανάπτυξης που να έχουν καλή προσαρμογή στα εμπειρικά δεδομένα. Συνεπώς, δεν μπορεί να γίνει σύγκριση μεταξύ των δύο ομάδων μαθητών ως προς την ικανότητά τους στην επιχειρηματολογία και την τεκμηρίωση.

Ρυθμός Ανάπτυξης της Αίσθησης για το Μέγεθος των Κλασμάτων

Στον Πίνακα 4.24 παρουσιάζονται μέσοι όροι και τυπικές αποκλίσεις της αίσθησης για το μέγεθος των κλασμάτων για τους μαθητές της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου που ανήκουν στην Κατηγορία 1.

Πίνακας 4.24

Μέσοι όροι και Τυπικές Αποκλίσεις της Αίσθησης για το Μέγεθος των Κλασμάτων για τους Μαθητές της Πειραματικής Ομάδας και της Ομάδας Ελέγχου που ανήκουν στην Κατηγορία 1 για Καθεμιά από τις Τρεις Μετρήσεις

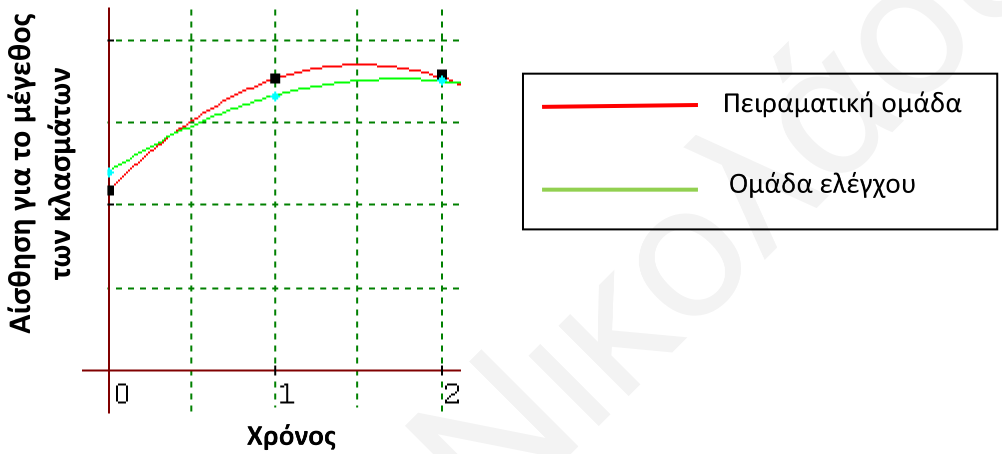
	Μέτρηση πριν από την παρέμβαση	Μέτρηση αμέσως μετά την παρέμβαση	Μέτρηση τρεις μήνες μετά την παρέμβαση
Πειραματική ομάδα	Μ.Ο.=1.09 (Τ.Α.=.79)	Μ.Ο.=1.77 (Τ.Α.=1.05)	Μ.Ο.=1.79 (Τ.Α.=1.09)
Ομάδα ελέγχου	Μ.Ο.=1.20 (Τ.Α.=.84)	Μ.Ο.=1.66 (Τ.Α.=1.04)	Μ.Ο.=1.75 (Τ.Α.=1.13)

Από τον Πίνακα 4.24 φαίνεται ότι οι δύο ομάδες είναι περίπου ισοδύναμες πριν την παρέμβαση (η ομάδα ελέγχου φαίνεται να έχει ελαφρά υπεροχή). Οι δύο ομάδες παρουσιάζουν σημαντική βελτίωση από την πρώτη στη δεύτερη μέτρηση, με τους μαθητές της πειραματικής ομάδας να παρουσιάζουν κατά τι υψηλότερο μέσο όρο σε αυτή τη μέτρηση. Στο χρονικό διάστημα από το πέρας της παρέμβασης μέχρι τρεις μήνες μετά η επίδοση των μαθητών της πειραματικής ομάδας σε αυτό τον παράγοντα φαίνεται να σταθεροποιείται, ενώ η ομάδα ελέγχου παρουσιάζει μικρή αύξηση. Στην τρίτη μέτρηση οι μαθητές των δύο ομάδων έχουν περίπου την ίδια επίδοση στην αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων.

Ο ρυθμός ανάπτυξης της αίσθησης για το μέγεθος των κλασμάτων για τους μαθητές της πειραματικής ομάδας που ανήκουν στην Κατηγορία 1 φαίνεται ότι εκφράζεται από μια μη γραμμική συνάρτηση (0, 0.81, 0.64), η οποία έχει μέση τιμή κλίσης θετική και στατιστικά σημαντική *(S=0.704, Z=4.056, CFI=1.000, RMSEA=0.000,* $\chi^2/df=0.952$*).* Ο ρυθμός ανάπτυξης της αίσθησης για το μέγεθος των κλασμάτων των μαθητών της ομάδας ελέγχου που ανήκουν στην Κατηγορία 1 φαίνεται ότι εκφράζεται από μια μη γραμμική συνάρτηση (0, 0.81,1.21), η οποία έχει μέση τιμή κλίσης θετική και στατιστικά σημαντική *(S=0.574, Z=4.026, CFI=1.000, RMSEA=0.000,* $\chi^2/df=0.030$*).* Τα αποτελέσματα φαίνονται στη Γραφική Παράσταση 4.4. Οι μέσες τιμές κλίσης και για τις δύο ομάδες είναι θετικές και στατιστικά σημαντικές, στοιχείο που φανερώνει βελτίωση των μαθητών και των δύο ομάδων ως προς την αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων. Ακόμη, οι μέσες τιμές κλίσης για τις δύο ομάδες έχουν περίπου το ίδιο μέγεθος. Συνεπώς, φαίνεται ότι παρόλο που υπάρχει βελτίωση των μαθητών της πειραματικής ομάδας, το παρεμβατικό πρόγραμμα δεν είχε σημαντική επίδραση στην αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων.

Γραφική Παράσταση 4.4

Ρυθμός Ανάπτυξης της Αίσθησης για το Μέγεθος των Κλασμάτων για τους Μαθητές της Πειραματικής Ομάδας και της Ομάδας Ελέγχου που Ανήκουν στην Κατηγορία 1



Ρυθμός Ανάπτυξης στις Αναπαραστάσεις

Στον Πίνακα 4.25 παρουσιάζονται μέσοι όροι και τυπικές αποκλίσεις της ικανότητας στις αναπαραστάσεις για τους μαθητές της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου που ανήκουν στην Κατηγορία 1.

Πίνακας 4.25

Μέσοι όροι και Τυπικές Αποκλίσεις της Ικανότητας στις Αναπαραστάσεις για τους Μαθητές της Πειραματικής Ομάδας και της Ομάδας Ελέγχου που ανήκουν στην Κατηγορία 1 για Καθεμιά από τις Τρεις Μετρήσεις

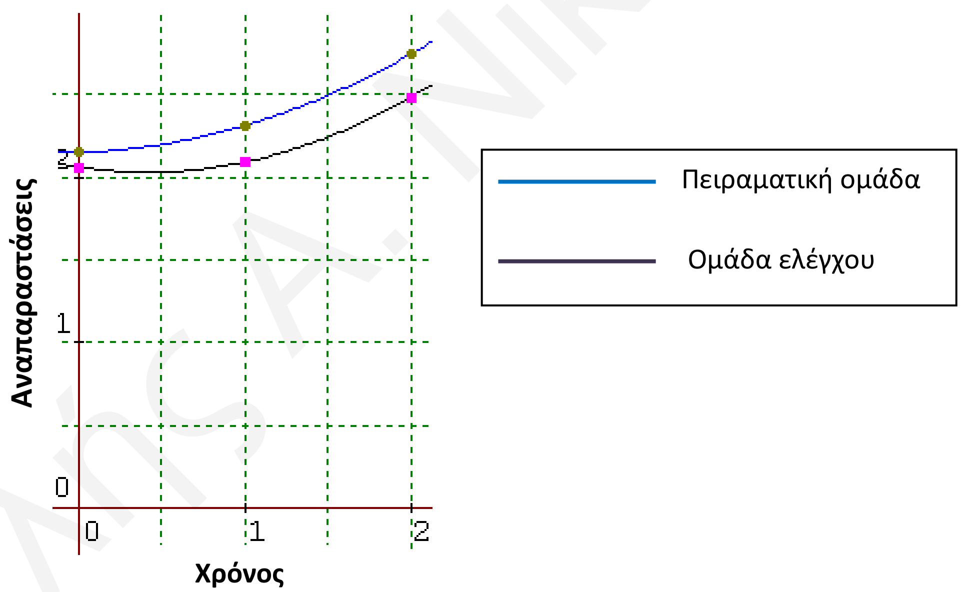
	Μέτρηση πριν από την παρέμβαση	Μέτρηση αμέσως μετά την παρέμβαση	Μέτρηση τρεις μήνες μετά την παρέμβαση
Πειραματική ομάδα	Μ.Ο.=2.15 (Τ.Α.=.83)	Μ.Ο.=2.31 (Τ.Α.=1.02)	Μ.Ο.=2.74 (Τ.Α.=1.31)
Ομάδα ελέγχου	Μ.Ο.=2.06 (Τ.Α.=.81)	Μ.Ο.=2.09 (Τ.Α.=1.03)	Μ.Ο.=2.48 (Τ.Α.=1.27)

Από τον Πίνακα 4.25 φαίνεται ότι στη μέτρηση πριν την εφαρμογή της παρέμβασης οι δύο ομάδες είναι περίπου ισοδύναμες. Στο χρονικό διάστημα που έλαβε χώρα η παρέμβαση φαίνεται ότι η πειραματική ομάδα παρουσιάζει βελτίωση, ενώ η ικανότητα στις αναπαραστάσεις των μαθητών της ομάδας ελέγχου παραμένει σταθερή. Έτσι, στη δεύτερη μέτρηση η πειραματική ομάδα παρουσιάζει υπεροχή έναντι της ομάδας ελέγχου. Στο χρονικό διάστημα από τη δεύτερη στην τρίτη μέτρηση παρατηρείται ανάπτυξη της ικανότητας στις αναπαραστάσεις και στις δύο ομάδες, με την πειραματική ομάδα να παρουσιάζει ψηλότερο μέσο όρο στην τρίτη μέτρηση.

Ο ρυθμός ανάπτυξης της ικανότητας στις αναπαραστάσεις για τους μαθητές της πειραματικής ομάδας που ανήκουν στην Κατηγορία 1 φαίνεται ότι εκφράζεται από μια μη γραμμική συνάρτηση (0, 1, 4), η οποία έχει μέση τιμή κλίσης θετική και στατιστικά σημαντική *(S=0.803, Z=4.038, CFI=1.000, RMSEA=0.000,* χ^2*/df=0.016).* Ο ρυθμός ανάπτυξης της ικανότητας των μαθητών της ομάδας ελέγχου που ανήκουν στην Κατηγορία 1 φαίνεται ότι εκφράζεται από την ίδια μη γραμμική συνάρτηση (0, 1, 4), η οποία έχει μέση τιμή κλίσης θετική και στατιστικά σημαντική *(S=0.297, Z=2.745, CFI=1.000, RMSEA=0.000,* χ^2*/df=0.416).* Τα αποτελέσματα φαίνονται στη Γραφική Παράσταση 4.5. Οι μέσες τιμές κλίσης και για τις δύο ομάδες είναι θετικές και στατιστικά σημαντικές, στοιχείο που φανερώνει ότι οι μαθητές και των δύο ομάδων βελτιώθηκαν σημαντικά ως προς την ικανότητά τους στις αναπαραστάσεις στο χρονικό διάστημα από την πρώτη στην τρίτη μέτρηση. Ωστόσο, η μέση τιμή κλίσης για την πειραματική ομάδα είναι υπερδιπλάσια της μέσης τιμής κλίσης της ομάδας ελέγχου, στοιχείο που καταδεικνύει ότι η εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος προσέδωσε στην πειραματική ομάδα υπερδιπλάσιο ρυθμό ανάπτυξης. Συνεπώς, φαίνεται ότι το παρεμβατικό πρόγραμμα επέδρασε θετικά στην ικανότητα στις αναπαραστάσεις των μαθητών που ανήκουν στην Κατηγορία 1.

Γραφική Παράσταση 4.5

Ρυθμός Ανάπτυξης της Ικανότητας στις Αναπαραστάσεις για τους Μαθητές της Πειραματικής Ομάδας και της Ομάδας Ελέγχου που Ανήκουν στην Κατηγορία 1



Ρυθμός Ανάπτυξης Στις Διασυνδέσεις Με Δεκαδικούς, Ποσοστά και Διαίρεση

Στον Πίνακα 4.26 παρουσιάζονται μέσοι όροι και τυπικές αποκλίσεις της ικανότητας στις διασυνδέσεις με τους δεκαδικούς, τα ποσοστά και τη διαίρεση για τους μαθητές της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου που ανήκουν στην Κατηγορία 1.

Πίνακας 4.26

Μέσοι όροι και Τυπικές Αποκλίσεις της Ικανότητας στις Διασυνδέσεις Με Δεκαδικούς, Ποσοστά και τη Διαίρεση για τους Μαθητές της Πειραματικής Ομάδας και της Ομάδας Ελέγχου που ανήκουν στην Κατηγορία 1 για Καθεμιά από τις Τρεις Μετρήσεις

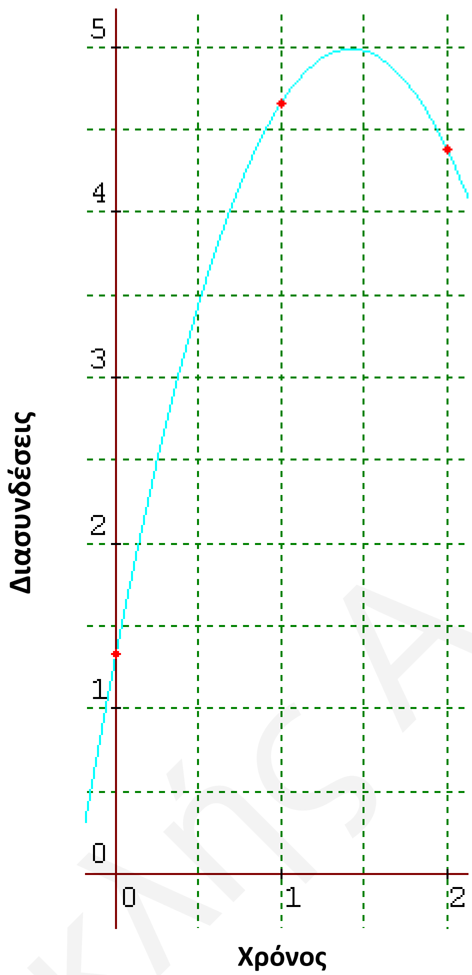
	Μέτρηση πριν από την παρέμβαση	Μέτρηση αμέσως μετά την παρέμβαση	Μέτρηση τρεις μήνες μετά την παρέμβαση
Πειραματική ομάδα	Μ.Ο.=1.30 (Τ.Α.=1.19)	Μ.Ο.=6.27 (Τ.Α.=3.69)	Μ.Ο.=6.11 (Τ.Α.=4.02)
Ομάδα ελέγχου	Μ.Ο.=1.33 (Τ.Α.=1.26)	Μ.Ο.=4.66 (Τ.Α.=4.06)	Μ.Ο.=4.38 (Τ.Α.=4.08)

Από τον Πίνακα 4.26 φαίνεται ότι ενώ οι δύο ομάδες είναι ισοδύναμες πριν την παρέμβαση, η πειραματική ομάδα υπερέχει σημαντικά της ομάδας ελέγχου τόσο στη δεύτερη όσο και στην τρίτη μέτρηση. Ακόμη, φαίνεται ότι και οι δύο ομάδες παρουσιάζουν μεγάλη βελτίωση στο χρονικό διάστημα από την πρώτη στη δεύτερη μέτρηση και στη συνέχεια, στο χρονικό διάστημα από τη δεύτερη στην τρίτη μέτρηση, σχετική σταθεροποίηση.

Για την πειραματική ομάδα δεν φαίνεται να επιβεβαιώνεται μοντέλο ανάπτυξης που να έχει καλή προσαρμογή στα εμπειρικά δεδομένα. Όσον αφορά στην ομάδα ελέγχου, ο ρυθμός ανάπτυξης της ικανότητας στις διασυνδέσεις φαίνεται ότι εκφράζεται από μια μη γραμμική συνάρτηση (0, 1, 0.64), η οποία έχει μέση τιμή κλίσης θετική και στατιστικά σημαντική *(S=0.947, Z=7.185, CFI=0.978, RMSEA=0.091,* $\chi^2/df=1.713$*)* (βλέπε Γραφική Παράσταση 4.6). Η θετική και στατιστικά σημαντική μέση τιμή κλίσης δείχνει ότι οι μαθητές της ομάδας ελέγχου με χαμηλή κατανόηση των κλασμάτων έχουν βελτιωθεί σημαντικά στο χρονικό διάστημα από την πρώτη στην τρίτη μέτρηση ως προς την ικανότητά τους να συνδέουν την έννοια του κλάσματος με τους δεκαδικούς, τα ποσοστά και την έννοια της διαίρεσης. Δεν μπορεί να γίνει σύγκριση με τους αντίστοιχους μαθητές της πειραματικής ομάδας γιατί δεν προέκυψε κατάλληλο μοντέλο που να περιγράφει το ρυθμό ανάπτυξης της ικανότητας στις διασυνδέσεις για αυτή την ομάδα μαθητών.

Γραφική Παράσταση 4.6

Ρυθμός Ανάπτυξης της Ικανότητας στις Διασυνδέσεις με τους Δεκαδικούς, τα Ποσοστά και τη Διαίρεση για τους Μαθητές της Ομάδας Ελέγχου που Ανήκουν στην Κατηγορία 1



Ρυθμός Ανάπτυξης στον Αναστοχασμό

Στον Πίνακα 4.27 παρουσιάζονται μέσοι όροι και τυπικές αποκλίσεις της ικανότητας στον αναστοχασμό για τους μαθητές της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου που ανήκουν στην Κατηγορία 1.

Πίνακας 4.27

Μέσοι όροι και Τυπικές Αποκλίσεις της Ικανότητας στον Αναστοχασμό για τους Μαθητές της Πειραματικής Ομάδας και της Ομάδας Ελέγχου που ανήκουν στην Κατηγορία 1 για Καθεμιά από τις Τρεις Μετρήσεις

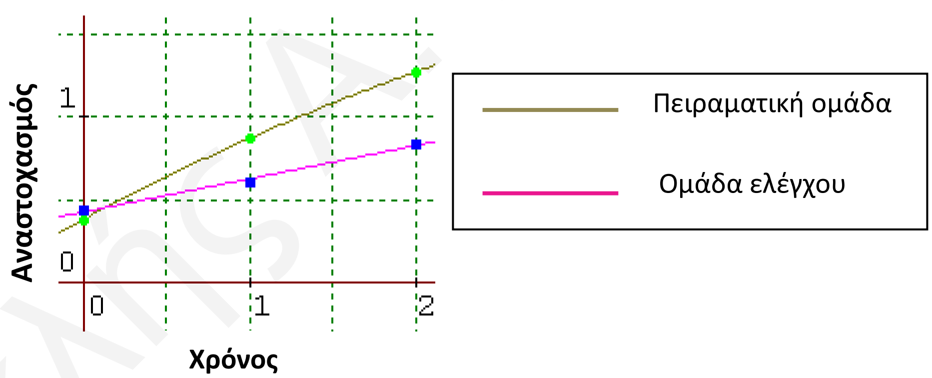
	Μέτρηση πριν από την παρέμβαση	Μέτρηση αμέσως μετά την παρέμβαση	Μέτρηση τρεις μήνες μετά την παρέμβαση
Πειραματική ομάδα	Μ.Ο.=.38 (Τ.Α.=.34)	Μ.Ο.=.87 (Τ.Α.=.89)	Μ.Ο.=1.27 (Τ.Α.=1.33)
Ομάδα ελέγχου	Μ.Ο.=.44 (Τ.Α.=.44)	Μ.Ο.=.60 (Τ.Α.=.85)	Μ.Ο.=.84 (Τ.Α.=.94)

Από τον Πίνακα 4.27 φαίνεται ότι ενώ οι δύο ομάδες είναι περίπου ισοδύναμες πριν την παρέμβαση ως προς την ικανότητά τους στον αναστοχασμό, στη μέτρηση αμέσως μετά το πέρας της παρέμβασης και στη μέτρηση τρεις μήνες μετά η πειραματική ομάδα παρουσιάζει ψηλότερο μέσο όρο από την ομάδα ελέγχου. Ακόμη, από τον Πίνακα 4.27 φαίνεται ότι και οι δύο ομάδες παρουσιάζουν συνεχή βελτίωση στο χρονικό διάστημα που μεσολάβησε από την πρώτη στη δεύτερη μέτρηση και από τη δεύτερη στην τρίτη μέτρηση.

Ο ρυθμός ανάπτυξης της ικανότητας στον αναστοχασμό για τους μαθητές της πειραματικής ομάδας που ανήκουν στην Κατηγορία 1 φαίνεται ότι εκφράζεται από μια μη γραμμική συνάρτηση (0, 1, 2.56), η οποία έχει μέση τιμή κλίσης θετική και στατιστικά σημαντική *(S=1.828, Z=6.721, CFI=0.972, RMSEA=0.094,* $\chi^2/df=1.545$*).* Ο ρυθμός ανάπτυξης της ικανότητας των μαθητών της ομάδας ελέγχου που ανήκουν στην Κατηγορία 1 φαίνεται ότι εκφράζεται από τη γραμμική συνάρτηση (0, 1, 2), η οποία έχει μέση τιμή κλίσης θετική και στατιστικά σημαντική *(S=0.572, Z=3.821, CFI=1.000, RMSEA=0.000,* $\chi^2/df=0.193$*)* (βλέπε Γραφική Παράσταση 4.7). Οι συναρτήσεις που εκφράζουν το ρυθμό ανάπτυξης και για τις δύο ομάδες μαθητών (πειραματική και ελέγχου) είναι στατιστικά σημαντικές, συνεπώς φαίνεται ότι υπήρξε βελτίωση των μαθητών της Κατηγορίας 1 στο χρονικό διάστημα από την πρώτη στην τρίτη μέτρηση ως προς την ικανότητά τους στον αναστοχασμό, τόσο για την πειραματική όσο και για την ομάδα ελέγχου. Η συνάρτηση που εκφράζει το ρυθμό ανάπτυξης για την ομάδα ελέγχου είναι γραμμική, συνεπώς φαίνεται ότι οι μαθητές της ομάδας ελέγχου παρουσιάζουν σταθερή βελτίωση στο διάστημα που μεσολάβησε μεταξύ των τριών μετρήσεων. Η μέση τιμή κλίσης της συνάρτησης για την πειραματική ομάδα είναι περίπου τριπλάσια από ότι στην ομάδα ελέγχου, στοιχείο που φανερώνει ότι η εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος προσέδωσε στην πειραματική ομάδα σχεδόν τριπλάσιο ρυθμό ανάπτυξης. Συνεπώς, φαίνεται ότι το παρεμβατικό πρόγραμμα επέδρασε θετικά στη βελτίωση της ικανότητας στον αναστοχασμό των μαθητών που ανήκουν στην Κατηγορία 1.

Γραφική Παράσταση 4.7

Ρυθμός Ανάπτυξης της Ικανότητας στον Αναστοχασμό για τους Μαθητές της Πειραματικής Ομάδας και της Ομάδας Ελέγχου που Ανήκουν στην Κατηγορία 1



<u>Κατηγορία 2: Μέτρια Κατανόηση των Κλασμάτων</u>

Προτού παρατεθούν τα αποτελέσματα από την ανάλυση ανάπτυξης για τους μαθητές με μέτρια κατανόηση των κλασμάτων (Κατηγορία 2), παρατίθενται περιγραφικά στοιχεία για την κατανόηση των κλασμάτων για τους μαθητές της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου ξεχωριστά. Τα στοιχεία φαίνονται στον Πίνακα 4.28 που ακολουθεί.

Πίνακας 4.28

Μέσοι όροι και Τυπικές Αποκλίσεις της Κατανόησης των Κλασμάτων των Μαθητών που Ανήκουν στην Κατηγορία 2 για την Πειραματική Ομάδα και την Ομάδα Ελέγχου για Καθεμιά από τις Τρεις Μετρήσεις

	Μέτρηση πριν από την παρέμβαση	Μέτρηση αμέσως μετά την παρέμβαση	Μέτρηση τρεις μήνες μετά την παρέμβαση
Πειραματική ομάδα	Μ.Ο.=13.64 (Τ.Α.=2.02)	Μ.Ο.=19.85 (Τ.Α.=5.58)	Μ.Ο.=20.02 (Τ.Α.=6.65)
Ομάδα ελέγχου	Μ.Ο.=12.95 (Τ.Α.=1.82)	Μ.Ο.=16.06 (Τ.Α.=5.09)	Μ.Ο.=18.01 (Τ.Α.=6.95)

Από τον Πίνακα 4.28 φαίνεται ότι στην πρώτη μέτρηση οι δύο ομάδες είναι περίπου ισοδύναμες (με την πειραματική ομάδα να έχει λίγο ψηλότερο μέσο όρο στην κατανόηση των κλασμάτων). Στη μέτρηση αμέσως μετά την ολοκλήρωση της παρέμβασης, η πειραματική ομάδα φαίνεται να υπερέχει της ομάδας ελέγχου και αυτή η υπεροχή διατηρείται στη μέτρηση τρεις μήνες μετά την ολοκλήρωση της παρέμβασης. Ακόμη, από τον Πίνακα 4.28 φαίνεται ότι η πειραματική ομάδα παρουσιάζει βελτίωση στο χρονικό διάστημα από την πρώτη στη δεύτερη μέτρηση και στη συνέχεια σχετική σταθεροποίηση, ενώ η ομάδα ελέγχου συνεχή βελτίωση από την πρώτη στη δεύτερη μέτρηση και από τη δεύτερη στην τρίτη μέτρηση.

Από τη διενέργεια στατιστικών αναλύσεων, δεν φαίνεται να επιβεβαιώνεται μοντέλο ανάπτυξης για την κατανόηση των κλασμάτων με καλή προσαρμογή στα εμπειρικά δεδομένα ούτε για την πειραματική ομάδα, ούτε για την ομάδα ελέγχου. Συνεπώς, δεν μπορεί να γίνει σύγκριση μεταξύ των δύο ομάδων για τους μαθητές που ανήκουν στην Κατηγορία 2. Συνεπώς, ούτε για τους παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων διενεργήθηκε η ανάλυση ανάπτυξης, μιας και δεν προέκυψε κατάλληλο μοντέλο ανάπτυξης για την κατανόηση των κλασμάτων (συνολική επίδοση στους παράγοντες). Στο χώρο που ακολουθεί θα παρατεθούν περιγραφικά στοιχεία για τους παράγοντες.

Πίνακας 4.29

Μέσοι όροι και Τυπικές Αποκλίσεις της Ικανότητας στους Παράγοντες για τους Μαθητές της Πειραματικής Ομάδας και της Ομάδας Ελέγχου που ανήκουν στην Κατηγορία 2 για Καθεμιά από τις Τρεις Μετρήσεις

Παράγοντας		Μέτρηση πριν από την παρέμβαση	Μέτρηση αμέσως μετά την παρέμβαση	Μέτρηση τρεις μήνες μετά την παρέμβαση
Επαγωγικός συλλογισμός	Πειραματική ομάδα	Μ.Ο.=1.96 (Τ.Α.=.54)	Μ.Ο.=2.54 (Τ.Α.=.47)	Μ.Ο.=2.28 (Τ.Α.=.48)
	Ομάδα ελέγχου	Μ.Ο.=2.14 (Τ.Α.=.50)	Μ.Ο.=2.40 (Τ.Α.=.53)	Μ.Ο.=2.22 (Τ.Α.=.39)
Ορισμοί και μαθηματικές εξηγήσεις	Πειραματική ομάδα	Μ.Ο.=.56 (Τ.Α.=.36)	Μ.Ο.=.94 (Τ.Α.=.46)	Μ.Ο.=.81 (Τ.Α.=.37)
	Ομάδα ελέγχου	Μ.Ο.=.54 (Τ.Α.=.42)	Μ.Ο.=.54 (Τ.Α.=.36)	Μ.Ο.=.62 (Τ.Α.=.44)
Επιχειρηματολογία και τεκμηρίωση	Πειραματική ομάδα	Μ.Ο.=1.11 (Τ.Α.=.72)	Μ.Ο.=1.92 (Τ.Α.=.82)	Μ.Ο.=1.68 (Τ.Α.=.66)
	Ομάδα ελέγχου	Μ.Ο.=.98 (Τ.Α.=.67)	Μ.Ο.=1.33 (Τ.Α.=.73)	Μ.Ο.=1.37 (Τ.Α.=.91)
Αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων	Πειραματική ομάδα	Μ.Ο.=2.08 (Τ.Α.=.63)	Μ.Ο.=2.54 (Τ.Α.=.83)	Μ.Ο.=2.80 (Τ.Α.=.84)
	Ομάδα ελέγχου	Μ.Ο.=1.94 (Τ.Α.=.79)	Μ.Ο.=2.45 (Τ.Α.=.92)	Μ.Ο.=2.72 (Τ.Α.=1.00)

Παράγοντας		Μέτρηση πριν από την παρέμβαση	Μέτρηση αμέσως μετά την παρέμβαση	Μέτρηση τρεις μήνες μετά την παρέμβαση
Αναπαραστάσεις	Πειραματική ομάδα	Μ.Ο.=3.42 (Τ.Α.=.96)	Μ.Ο.=3.96 (Τ.Α.=1.05)	Μ.Ο.=4.20 (Τ.Α.=1.35)
	Ομάδα ελέγχου	Μ.Ο.=3.30 (Τ.Α.=.77)	Μ.Ο.=3.11 (Τ.Α.=1.04)	Μ.Ο.=3.81 (Τ.Α.=1.38)
Διασυνδέσεις με δεκαδικούς, ποσοστά, διαίρεση	Πειραματική ομάδα	Μ.Ο.=6.37 (Τ.Α.=2.41)	Μ.Ο.=8.42 (Τ.Α.=3.20)	Μ.Ο.=8.01 (Τ.Α.=3.71)
	Ομάδα ελέγχου	Μ.Ο.=5.79 (Τ.Α.=2.33)	Μ.Ο.=7.31 (Τ.Α.=3.69)	Μ.Ο.=7.23 (Τ.Α.=4.19)
Αναστοχασμός	Πειραματική ομάδα	Μ.Ο.=1.08 (Τ.Α.=.92)	Μ.Ο.=2.43 (Τ.Α.=1.32)	Μ.Ο.=2.11 (Τ.Α.=1.75)
	Ομάδα ελέγχου	Μ.Ο.=1.06 (Τ.Α.=.64)	Μ.Ο.=1.45 (Τ.Α.=1.13)	Μ.Ο.=1.62 (Τ.Α.=1.39)

Από τον Πίνακα 4.29 φαίνεται ότι στους περισσότερους παράγοντες (ορισμοί και μαθηματικές εξηγήσεις, επιχειρηματολογία και τεκμηρίωση, αναπαραστάσεις, διασυνδέσεις και αναστοχασμό) η πειραματική ομάδα υπερέχει της ομάδας ελέγχου στη μέτρηση αμέσως μετά την εφαρμογή της παρέμβασης και τρεις μήνες μετά, ενώ στη μέτρηση πριν την παρέμβαση οι δύο ομάδες ήταν περίπου ισοδύναμες. Ωστόσο, πρέπει να τονιστεί ότι αυτές οι διαπιστώσεις αποτελούν ενδείξεις και δεν μπορεί να γίνει σύγκριση μεταξύ των ομάδων όπως έχει προαναφερθεί, ούτως ώστε να μπορούμε να μιλούμε για σημαντικές διαφορές. Στους άλλους δύο παράγοντες, δηλαδή στον επαγωγικό συλλογισμό και στην αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων δεν παρατηρούνται ουσιαστικές διαφορές. Ακόμη, παρατηρούμε διαφορές στους παράγοντες όσον αφορά στο αναπτυξιακό μοτίβο, σημείο στο οποίο μπορεί να διαφέρουν οι μαθητές της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου που ανήκουν στην Κατηγορία 2. Ενώ, για παράδειγμα, οι μαθητές της πειραματικής ομάδας που ανήκουν στην

Κατηγορία 2 παρουσιάζουν βελτίωση από την πρώτη στη δεύτερη μέτρηση ως προς την ικανότητά τους στον επαγωγικό συλλογισμό και στη συνέχεια μείωση από τη δεύτερη στην τρίτη μέτρηση, δεν φαίνεται να συμβαίνει το ίδιο για την ικανότητά τους στις αναπαραστάσεις, όπου παρατηρούμε συνεχή βελτίωσή τους στο χρονικό διάστημα από την πρώτη στην τρίτη μέτρηση. Ακόμη, ενώ όσον αφορά στην ικανότητα στον επαγωγικό συλλογισμό, οι μαθητές και των δύο ομάδων παρουσιάζουν το ίδιο μοτίβο εξέλιξης (βελτίωση από την πρώτη στη δεύτερη μέτρηση και έπειτα μείωση από τη δεύτερη στην τρίτη μέτρηση), δεν φαίνεται να συμβαίνει το ίδιο για την ικανότητά τους στις αναπαραστάσεις, όπου διαφέρει η εξέλιξή τους (για την πειραματική ομάδα συνεχής βελτίωση από την πρώτη στη δεύτερη μέτρηση και από τη δεύτερη στην τρίτη μέτρηση, ενώ για την ομάδα ελέγχου μείωση από την πρώτη στη δεύτερη μέτρηση και στη συνέχεια αύξηση από τη δεύτερη στην τρίτη μέτρηση). Ωστόσο, και τα προαναφερθέντα για την εξέλιξη της ικανότητας των μαθητών στους παράγοντες κατά ομάδα δεν αποτελούν συμπεράσματα και ούτε μπορούμε να αναφερθούμε σε αυτά με βεβαιότητα, αφού δεν προέκυψαν κατάλληλα μοντέλα ανάπτυξης που να περιγράφουν την εξέλιξη της ικανότητας των μαθητών της Κατηγορίας 2 σε αυτούς τους παράγοντες.

Κατηγορία 3: Ψηλή Κατανόηση των Κλασμάτων

Προτού παρατεθούν τα αποτελέσματα για την ανάλυση ανάπτυξης για τους μαθητές με ψηλή κατανόηση των κλασμάτων (Κατηγορία 3), παρατίθενται περιγραφικά στοιχεία για την κατανόηση των κλασμάτων για τους μαθητές της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου ξεχωριστά. Τα στοιχεία φαίνονται στον Πίνακα 4.30 που ακολουθεί.

Πίνακας 4.30

Μέσοι όροι και Τυπικές Αποκλίσεις της Κατανόησης των Κλασμάτων των Μαθητών που Ανήκουν στην Κατηγορία 3 για την Πειραματική Ομάδα και την Ομάδα Ελέγχου για Καθεμιά από τις Τρεις Μετρήσεις

	Μέτρηση πριν από την παρέμβαση	Μέτρηση αμέσως μετά την παρέμβαση	Μέτρηση τρεις μήνες μετά την παρέμβαση
Πειραματική ομάδα	Μ.Ο.=21.27 (Τ.Α.=1.71)	Μ.Ο.=21.28 (Τ.Α.=6.34)	Μ.Ο.=26.30 (Τ.Α.=3.29)
Ομάδα ελέγχου	Μ.Ο.=19.91 (Τ.Α.=2.27)	Μ.Ο.=20.60 (Τ.Α.=5.25)	Μ.Ο.=23.56 (Τ.Α.=7.06)

Από τον Πίνακα 4.30 φαίνεται ότι στην πρώτη μέτρηση η πειραματική ομάδα υπερέχει έναντι της ομάδας ελέγχου ως προς την κατανόηση των κλασμάτων. Στο χρονικό διάστημα που έλαβε χώρα η εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος δεν παρατηρείται μεταβολή στην κατανόηση των κλασμάτων των μαθητών της πειραματικής ομάδας, ενώ αντίθετα, οι μαθητές της ομάδας ελέγχου φαίνεται να παρουσιάζουν μικρή βελτίωση. Στη μέτρηση αμέσως μετά την παρέμβαση η πειραματική ομάδα εξακολουθεί να υπερέχει ελαφρά της ομάδας ελέγχου.Στο χρονικό διάστημα από τη δεύτερη στην τρίτη μέτρηση παρατηρείται βελτίωση τόσο στους μαθητές της πειραματικής ομάδας όσο και στους μαθητές της ομάδας ελέγχου, με τους μαθητές της πειραματικής ομάδας να παρουσιάζουν τη μεγαλύτερη βελτίωση. Στην τρίτη μέτρηση η πειραματική ομάδα παρουσιάζει υψηλότερο μέσο όρο από την ομάδα ελέγχου.

Από τη διενέργεια της ανάλυσης ανάπτυξης για την κατανόηση των κλασμάτων για τους μαθητές της Κατηγορίας 3 δεν προέκυψαν μοντέλα με καλή προσαρμογή στα δεδομένα για καμιά από τις δύο ομάδες μαθητών. Συνεπώς, δεν μπορεί να γίνει σύγκριση ανάμεσα στις δύο ομάδες μαθητών αναφορικά με την κατανόηση των κλασμάτων. Αφού δεν προέκυψαν κατάλληλα μοντέλα για την κατανόηση των κλασμάτων (συνολική επίδοση στους επτά παράγοντες), δεν διενεργήθηκε η ανάλυση ανάπτυξης ούτε για τους παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων. Στο χώρο που ακολουθεί παρατίθενται περιγραφικά στοιχεία για τους επτά παράγοντες για τους μαθητές με ψηλή κατανόηση των κλασμάτων.

Πίνακας 4.31

Μέσοι όροι και Τυπικές Αποκλίσεις της Ικανότητας στους Παράγοντες για τους Μαθητές της Πειραματικής Ομάδας και της Ομάδας Ελέγχου που ανήκουν στην Κατηγορία 3 για Καθεμιά από τις Τρεις Μετρήσεις

Παράγοντας		Μέτρηση πριν από την παρέμβαση	Μέτρηση αμέσως μετά την παρέμβαση	Μέτρηση τρεις μήνες μετά την παρέμβαση
Επαγωγικός συλλογισμός	Πειραματική ομάδα	Μ.Ο.=2.45 (Τ.Α.=.20)	Μ.Ο.=2.75 (Τ.Α.=.15)	Μ.Ο.=2.45 (Τ.Α.=.26)
	Ομάδα ελέγχου	Μ.Ο.=2.34 (Τ.Α.=.35)	Μ.Ο.=2.54 (Τ.Α.=.39)	Μ.Ο.=2.42 (Τ.Α.=.37)
Ορισμοί και μαθηματικές εξηγήσεις	Πειραματική ομάδα	Μ.Ο.=1.13 (Τ.Α.=.42)	Μ.Ο.=1.29 (Τ.Α.=.43)	Μ.Ο.=1.18 (Τ.Α.=.37)
	Ομάδα ελέγχου	Μ.Ο.=.96 (Τ.Α.=.41)	Μ.Ο.=1.04 (Τ.Α.=.50)	Μ.Ο.=1.01 (Τ.Α.=.41)
Επιχειρηματολογία και τεκμηρίωση	Πειραματική ομάδα	Μ.Ο.=2.03 (Τ.Α.=.56)	Μ.Ο.=2.45 (Τ.Α.=.54)	Μ.Ο.=2.14 (Τ.Α.=.55)
	Ομάδα ελέγχου	Μ.Ο.=1.77 (Τ.Α.=.75)	Μ.Ο.=1.95 (Τ.Α.=.82)	Μ.Ο.=1.92 (Τ.Α.=.78)
Αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων	Πειραματική ομάδα	Μ.Ο.=2.52 (Τ.Α.=.42)	Μ.Ο.=2.77 (Τ.Α.=.84)	Μ.Ο.=3.28 (Τ.Α.=.15)
	Ομάδα ελέγχου	Μ.Ο.=2.50 (Τ.Α.=.49)	Μ.Ο.=2.74 (Τ.Α.=.84)	Μ.Ο.=2.85 (Τ.Α.=.94)

Παράγοντας		Μέτρηση πριν από την παρέμβαση	Μέτρηση αμέσως μετά την παρέμβαση	Μέτρηση τρεις μήνες μετά την παρέμβαση
Αναπαραστάσεις	Πειραματική ομάδα	Μ.Ο.=4.76 (Τ.Α.=.74)	Μ.Ο.=4.12 (Τ.Α.=1.32)	Μ.Ο.=5.47 (Τ.Α.=.86)
	Ομάδα ελέγχου	Μ.Ο.=4.32 (Τ.Α.=.79)	Μ.Ο.=4.01 (Τ.Α.=.92)	Μ.Ο.=4.93 (Τ.Α.=1.45)
Διασυνδέσεις με δεκαδικούς, ποσοστά, διαίρεση	Πειραματική ομάδα	Μ.Ο.=9.91 (Τ.Α.=.84)	Μ.Ο.=8.24 (Τ.Α.=4.34)	Μ.Ο.=10.71 (Τ.Α.=.65)
	Ομάδα ελέγχου	Μ.Ο.=9.68 (Τ.Α.=.95)	Μ.Ο.=8.54 (Τ.Α.=3.45)	Μ.Ο.=8.82 (Τ.Α.=4.02)
Αναστοχασμός	Πειραματική ομάδα	Μ.Ο.=2.54 (Τ.Α.=.83)	Μ.Ο.=2.94 (Τ.Α.=1.32)	Μ.Ο.=3.56 (Τ.Α.=1.83)
	Ομάδα ελέγχου	Μ.Ο.=2.32 (Τ.Α.=.86)	Μ.Ο.=2.76 (Τ.Α.=1.39)	Μ.Ο.=3.20 (Τ.Α.=1.74)

Από τον Πίνακα 4.31 φαίνεται ότι η πειραματική ομάδα και η ομάδα ελέγχου δεν παρουσιάζουν διαφορές σε μερικούς παράγοντες (επαγωγικός συλλογισμός, ορισμοί και μαθηματικές εξηγήσεις, αναπαραστάσεις, αναστοχασμός), ενώ σε άλλους παράγοντες παρατηρούνται κάποιες διαφορές είτε στη δεύτερη μέτρηση (επιχειρηματολογία και τεκμηρίωση), είτε στην τρίτη μέτρηση (αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων, διασυνδέσεις). Αξίζει να σημειωθεί ότι όπου παρατηρούνται κάποιες διαφορές, αυτές εντοπίζονται μόνο στη μια από τις δύο μετρήσεις που ακολούθησαν την ολοκλήρωση της παρέμβασης (είτε μόνο στη δεύτερη μέτρηση, είτε μόνο στην τρίτη μέτρηση). Γενικότερα, φαίνεται από τα στοιχεία του Πίνακα 4.31 ότι το παρεμβατικό πρόγραμμα δεν είχε επίδραση στην ικανότητα στους παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων όσον αφορά στους μαθητές της Κατηγορίας 3. Ωστόσο, πρέπει να τονιστεί ότι αυτό αποτελεί απλώς εικασία και όχι εύρημα, αφού δεν μπορούν να επιβεβαιωθούν σημαντικές διαφορές για τους λόγους που έχουν προαναφερθεί (δεν προέκυψαν κατάλληλα μοντέλα ανάπτυξης για την κατανόηση των κλασμάτων για τους μαθητές της Κατηγορίας 3). Ακόμη, από τον Πίνακα 4.31 παρατηρούμε ότι υπάρχουν διαφορές στην εξέλιξη της ικανότητας των μαθητών μεταξύ των παραγόντων, ενώ διαφορές στην εξέλιξη της ικανότητας στον ίδιο παράγοντα μπορούν να εντοπιστούν και μεταξύ των μαθητών της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου. Ωστόσο, δεν μπορούμε να αναφερθούμε σε αυτές τις διαφορές με βεβαιότητα, αφού δεν προέκυψαν κατάλληλα μοντέλα ανάπτυξης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Εισαγωγή

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν η ανάπτυξη και ο έλεγχος ενός θεωρητικού μοντέλου με παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων και ο σχεδιασμός και η εφαρμογή παρεμβατικού προγράμματος για τη διδασκαλία των παραγόντων που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων με στόχο τη βελτίωσή της. Αναλυτικότερα, οι στόχοι της παρούσας εργασίας ήταν: (α) να εξεταστεί η προσαρμογή του προτεινόμενου μοντέλου στα εμπειρικά δεδομένα, (β) να βρεθεί πόσο συνεισφέρει ο κάθε παράγοντας στην κατανόηση των κλασματικών αριθμών, (γ) να εξεταστεί κατά πόσον το μοντέλο παραμένει σταθερό με την πάροδο του χρόνου, (δ) να εξακριβωθεί πόσες και ποιες ομάδες μαθητών μπορούν να δημιουργηθούν με βάση την κατανόηση των κλασμάτων, (ε) να εξεταστεί κατά πόσον οι προτεινόμενοι παράγοντες καθορίζουν ιεραρχικά επίπεδα σχετικά με την κατανόηση της έννοιας τους κλάσματος, (στ) να εξεταστεί η επίδραση του παρεμβατικού προγράμματος στη βελτίωση της κατανόησης των κλασμάτων και στην ικανότητα των μαθητών στους παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων και (ζ) να διακριβωθεί ο ρυθμός ανάπτυξης της κατανόησης των κλασμάτων και της ικανότητας των μαθητών στους παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων. Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται συζήτηση των αποτελεσμάτων με σκοπό να απαντηθούν τα ερωτήματα της εργασίας.

Το Προτεινόμενο Θεωρητικό Μοντέλο

Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης έδειξαν ότι η προσαρμογή του προτεινόμενου μοντέλου στα δεδομένα του δείγματος ήταν πολύ καλή επιβεβαιώνοντας την εγκυρότητα δομής και την καταλληλότητα του μοντέλου για να περιγράψει την κατανόηση των κλασματικών αριθμών. Η προσαρμογή του μοντέλου ήταν πολύ καλή και στις τρεις μετρήσεις της κυρίως έρευνας, δηλαδή το μοντέλο επιβεβαιώθηκε τρεις φορές. Τα αποτελέσματα επιβεβαιώνουν την υπόθεσή μας ότι ο επαγωγικός συλλογισμός, οι ορισμοί και οι μαθηματικές εξηγήσεις, η επιχειρηματολογία και η τεκμηρίωση, η αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων, οι αναπαραστάσεις, οι διασυνδέσεις των κλασμάτων με τους δεκαδικούς, τα ποσοστά και τη διαίρεση και ο αναστοχασμός είναι παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων. Επιπρόσθετα, βρέθηκε ότι οι προτεινόμενοι παράγοντες εξηγούν πολύ μεγάλο ποσοστό της διασποράς της κατανόησης των κλασμάτων. Τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας επιβεβαιώνουν τη μεγάλη σημασία καθενός από τους παράγοντες στην κατανόηση των κλασμάτων. Συνεπώς, συμπεραίνεται ότι κάποιος μαθητής για να θεωρηθεί ότι κατανοεί τα κλάσματα, θα πρέπει να είναι επαρκής στον επαγωγικό συλλογισμό, να ορίζει και να δίνει μαθηματικές εξηγήσεις σχετικά με την έννοια του κλάσματος, να επιχειρηματολογεί και να τεκμηριώνει αναφορικά με προτάσεις που αφορούν στα κλάσματα, να έχει αίσθηση του μεγέθους των κλασμάτων, να είναι επαρκής στις αναπαραστάσεις, να διασυνδέει την έννοια του κλάσματος με τους δεκαδικούς, τα ποσοστά και τη διαίρεση και να αναστοχάζεται.

Οι επτά παράγοντες που βρέθηκε στην παρούσα εργασία να συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων προσομοιάζουν με τις διαδικασίες στις οποίες πρέπει να είναι ικανοί οι μαθητές με βάση τα NCTM Standards (2000) προκειμένου να επιτύχουν στις διάφορες περιοχές των μαθηματικών. Με βάση τα NCTM Standards (2000), οι μαθητές πρέπει να είναι ικανοί να επιλύουν μαθηματικά προβλήματα και να αναστοχάζονται, να χρησιμοποιούν διάφορους τρόπους αιτιολόγησης και μαθηματικής απόδειξης, να επικοινωνούν χρησιμοποιώντας μαθηματική γλώσσα, μαθηματικά σύμβολα και άλλους τρόπους επικοινωνίας της μαθηματικής γνώσης, να διασυνδέουν τις μαθηματικές έννοιες και να χρησιμοποιούν διάφορα αναπαραστατικά συστήματα για να εκφράσουν μαθηματικές έννοιες. Οι διαδικασίες αυτές εμπεριέχονται στους παράγοντες που προτείνονται στο θεωρητικό μοντέλο της παρούσας εργασίας, ενώ το προτεινόμενο θεωρητικό μοντέλο είναι πιο ολοκληρωμένο αφού περιλαμβάνει και τον επαγωγικό συλλογισμό και την αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων.

Η συνεισφορά όλων των παραγόντων και στις τρεις μετρήσεις της κυρίως έρευνας στην κατανόηση των κλασμάτων ήταν ψηλή. Αυτό φαίνεται από το ποσοστό της διασποράς της κατανόησης των κλασμάτων που ερμηνεύεται από τον κάθε παράγοντα (στην πρώτη μέτρηση $r^2>0.62$, στη δεύτερη μέτρηση $r^2>0.65$ και στην τρίτη μέτρηση $r^2>0.74$). Τα ευρήματα αυτά φανερώνουν τη μεγάλη σημασία και των επτά παραγόντων στην κατανόηση των κλασμάτων. Όσον αφορά ποιος παράγοντας έχει τη μεγαλύτερη συνεισφορά, φαίνεται ότι και στις τρεις μετρήσεις οι αναπαραστάσεις ερμηνεύουν ένα πολύ μεγάλο ποσοστό της διασποράς της κατανόησης των κλασμάτων (r^2=0.98) και είναι ο παράγοντας με τη μεγαλύτερη συνεισφορά (r=0.99). Αυτό το εύρημα καταδεικνύει τη μεγάλη σημασία που διαδραματίζουν οι αναπαραστάσεις στην κατανόηση των κλασμάτων και την ανάγκη οι μαθητές να αποκτήσουν ευχέρεια στα διάφορα αναπαραστατικά συστήματα (συμβολικό, λεκτικό, εικονικό) και να είναι ικανοί στη μετάφραση από ένα είδος αναπαράστασης σε άλλο, αλλά και να κατασκευάζουν δικά τους σχέδια για να δείξουν κλασματικούς αριθμούς. Το αποτέλεσμα αυτό συμφωνεί με τα όσα αναφέρουν άλλοι ερευνητές στο χώρο της μαθηματικής παιδείας και αποτελέσματα άλλων ερευνών για τη σημασία των αναπαραστάσεων στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών (Ainsworth, 2006: Γαγάτσης κ.ά., 2001: Duval, 2002: Janvier, 1987: Lamon, 2001, 1999: Lesh et al., 1987: NCTM, 2000: Newstead & Murray, 1998: Niemi, 1996a, 1996b: Seeger, 1988: Terwel et al., 2009). Όσον αφορά στους υπόλοιπους παράγοντες, φαίνεται να υπάρχουν διαφοροποιήσεις μεταξύ των τριών μετρήσεων ως προς την κατάταξή τους. Ωστόσο, οι διαφορές στο ποσοστό της ερμηνευόμενης διασποράς μεταξύ των παραγόντων είναι σχετικά μικρές. Εκείνο που έχει σημασία είναι ότι ο κάθε παράγοντας ερμηνεύει ένα αρκετά μεγάλο ποσοστό της διασποράς της κατανόησης των κλασμάτων, στοιχείο που φανερώνει τη σημασία όλων των παραγόντων για την κατανόηση των κλασμάτων. Τα ευρήματα της παρούσας έρευνας για τη σημασία των πιο πάνω παραγόντων για την κατανόηση των κλασμάτων συμφωνούν με τα όσα υποστηρίζουν ερευνητές στο χώρο της μαθηματικής παιδείας και αποτελέσματα άλλων ερευνών που θεωρούν ότι οι παραπάνω παράγοντες είναι σημαντικοί για την κατανόηση μαθηματικών εννοιών. Συγκεκριμένα, οι De Koning et al. (2002), ο Klauer, (1996, 1999), οι Klauer και Phye (1994, 2008) και οι Klauer et al. (2002) αναφέρονται στη σημασία του επαγωγικού συλλογισμού στην κατανόηση των μαθηματικών. Οι Levenson et al. (2007a, 2007b), η Levenson (2010) και ο Niemi (1996a, 1996b) τονίζουν τη σημασία του να είναι σε θέση οι μαθητές δημοτικού σχολείου να ορίζουν και να δίνουν μαθηματικές εξηγήσεις αναφορικά με τα κλάσματα. Παρόμοια, οι Harel και Sowder (1996, 1998) και ο Niemi (1996a, 1996b) αναφέρονται στην ικανότητα επιχειρηματολογίας και τεκμηρίωσης προκειμένου κάποιος μαθητής να θεωρείται ότι κατανοεί τις μαθηματικές έννοιες. Οι Clarke και Roche (2009), οι Post et al. (1986) και η Sowder (1988) αναφέρονται στη σημασία της αίσθησης για το μέγεθος των κλασμάτων, ενώ στη σημασία των διασυνδέσεων των κλασμάτων με τους δεκαδικούς, τα ποσοστά και τη διαίρεση αναφέρονται η Μιχαηλίδου (2004), οι Oppenheimer και Hunting (1999), οι Sweeny και Quinn (1996) και οι Thompson και Walker (1996). Καταληκτικά, ο Elbers (2003), οι Sierpinska et al. (2002) και το Ontario Curriculum (2005) κάνουν αναφορά στη μεγάλη σημασία του αναστοχασμού προκειμένου οι μαθητές να επιτύχουν στις διάφορες περιοχές των μαθηματικών.

Όσον αφορά στην αμεταβλητότητα της δομής του προτεινόμενου μοντέλου με την πάροδο του χρόνου, βρέθηκε ότι η δομή του προτεινόμενου μοντέλου παραμένει σταθερή και στις τρεις μετρήσεις γεγονός που ενισχύει την εγκυρότητα της δομής του μοντέλου και την αξιοπιστία του, αλλά και την καταλληλότητά του να περιγράψει την κατανόηση των κλασμάτων. Το εύρημα για τη σταθερότητα του μοντέλου ενισχύει και τη σημασία των παραγόντων που προτείνονται για την εξήγηση της κατανόησης των κλασμάτων.

Τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για σκοπούς μέτρησης και αξιολόγησης της κατανόησης των κλασμάτων, αφού έχουμε αναπτύξει έγκυρο και αξιόπιστο εργαλείο μέτρησης της κατανόησης των κλασμάτων. Όπως αναφέρουν οι Marcoulides και Kyriakides (2010), η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον έλεγχο της εγκυρότητας γνωρίσματος και να αξιολογήσει σε ποιο βαθμό το όργανο μέτρησης μετρά τους άδηλους παράγοντες που προορίζεται να μετρήσει (σ. 279). Στην παρούσα έρευνα οι δείκτες προσαρμογής του μοντέλου ήταν πολύ καλοί, στοιχείο που δείχνει ότι το όργανο μέτρησης (τα δύο δοκίμια) μετρά τους άδηλους παράγοντες που θεωρείται ότι μετρά και ταυτοχρόνως παρέχει ένα μέσο για τη μέτρηση και την αξιολόγηση της κατανόησης των κλασμάτων. Παρόμοια, ο Niemi (1996a, 1996b) ανέπτυξε όργανα μέτρησης της εννοιολογικής κατανόησης των κλασμάτων. Ωστόσο, ο Niemi (1996a, 1996b) δεν επιβεβαίωσε μοντέλο με παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων, αλλά υπέθεσε ότι οι αναπαραστάσεις, οι μαθηματικές εξηγήσεις, η επίλυση προβλήματος και η τεκμηρίωση της λύσης είναι δείκτες της εννοιολογικής κατανόησης των κλασμάτων και στη συνέχεια χρησιμοποίησε αυτές τις συνιστώσες (όπως υπέθεσε της εννοιολογικής κατανόησης) για να μετρήσει την εννοιολογική κατανόηση των κλασμάτων. Η προστιθέμενη αξία της παρούσας εργασίας είναι ότι προτείνει μοντέλο με παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων και η επιβεβαίωση του μοντέλου αυτού φανερώνει ότι το όργανο που αναπτύξαμε μετρά τους άδηλους παράγοντες που προορίζεται να μετρήσει καθώς και την κατανόηση των κλασμάτων.

Από τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης επιβεβαιώνεται και η υπόθεσή μας ότι οι αναπαραστάσεις (δεύτερης τάξης παράγοντας) αποτελούνται από την ικανότητα των μαθητών να μεταφράζουν σε συμβολική, σε εικονική και σε λεκτική αναπαράσταση, αλλά και από την ικανότητά τους να κατασκευάζουν από μόνοι τους σχέδια για να δείξουν κλασματικούς αριθμούς. Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μέτρηση και την αξιολόγηση των αναπαραστάσεων, αφού τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης υποδεικνύουν ότι οι άδηλοι παράγοντες μετρούν αυτό που προορίζονται να μετρήσουν και ότι τα έργα που χρησιμοποιήθηκαν είναι κατάλληλα για τη μέτρηση των άδηλων παραγόντων (Marcoulides & Kyriakides, 2010). Ταυτόχρονα, υποδεικνύει πως για να θεωρηθεί κάποιος μαθητής επαρκής στις αναπαραστάσεις, πρέπει να είναι ικανός στη μετάφραση από ένα αναπαραστατικό σύστημα (συμβολικό, εικονικό, λεκτικό) σε άλλο και να είναι ικανός να κατασκευάζει σχέδια για κλασματικούς αριθμούς. Παρόμοια, σε έρευνά τους οι Deliyianni, et al. (2009) με μαθητές Ε΄και Στ΄ τάξης δημοτικού σχολείου επιβεβαίωσαν μοντέλο με παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση της πρόσθεσης κλασματικών αριθμών.

Παρόμοια, όσον αφορά στις διασυνδέσεις, βρέθηκε ότι αποτελούνται από την ικανότητα των μαθητών να μετατρέπουν κλάσματα σε δεκαδικούς και σε ποσοστά, αλλά και από την ικανότητά τους να συσχετίζουν την έννοια του κλάσματος με το πηλίκο αριθμητής÷παρονομαστής. Τα αποτελέσματα αυτά συμφωνούν με τα όσα υποστηρίζουν άλλοι ερευνητές για την κατανόηση των ρητών αριθμών (Newstead & Murray, 1998: Oppenheimer & Hunting, 1999: Sweeny & Quinn, 1996: Thompson & Walker, 1996) και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μέτρηση των διασυνδέσεων των κλασμάτων με τους ρητούς αριθμούς και τη διαίρεση. Όσον αφορά στον αναστοχασμό, βρέθηκε ότι η ικανότητα των μαθητών να αναστοχάζονται, αποτελείται από την ικανότητά τους να αιτιολογούν τη σκέψη τους και την απάντησή τους σε προβλήματα με κλασματικούς αριθμούς, από την ικανότητά τους να εξηγούν τη λογικότητα της απάντησής τους και να επαληθεύουν την απάντησή τους. Συνεπώς, η παρούσα εργασία φανερώνει σε ποιες συνιστώσες πρέπει να είναι ικανός κάποιος μαθητής για να θεωρηθεί επαρκής στον αναστοχασμό και ταυτόχρονα προτείνει κατάλληλα έργα για τη μέτρησή του. Τα αποτελέσματα για τον αναστοχασμό ενισχύονται από τα όσα αναφέρουν οι Zhang, Zhao και Yang (2009) για τις ικανότητες που πρέπει να έχει κάποιος μαθητής ώστε να είναι σε θέση να αναστοχάζεται.

Από τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας φαίνεται ότι οι προτεινόμενοι παράγοντες καθορίζουν ιεραρχικά επίπεδα σχετικά με την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος. Το εύρημα αυτό είναι σημαντικό αφού φανερώνει σε ποιους παράγοντες έχουν επαρκείς ικανότητες οι αδύνατοι μαθητές, οι μέτριοι μαθητές και οι πιο καλοί μαθητές και σε ποιους παράγοντες διαφοροποιείται η καθεμιά κατηγορία μαθητών από την άλλη. Έτσι φαίνεται ότι οι αδύνατοι μαθητές έχουν επαρκείς ικανότητες στον επαγωγικό συλλογισμό και την αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων. Οι μέτριοι μαθητές πέρα από την επάρκεια σε αυτούς τους δύο παράγοντες, έχουν επαρκείς ικανότητες στις διασυνδέσεις, τις αναπαραστάσεις και την επιχειρηματολογία και την τεκμηρίωση. Οι μαθητές με ψηλή κατανόηση των κλασμάτων έχουν επαρκείς ικανότητες στους πέντε παράγοντες που προαναφέρθηκαν και επιπρόσθετα στον αναστοχασμό και τους ορισμούς και τις μαθηματικές εξηγήσεις. Από τα αποτελέσματα που προαναφέρθηκαν, φαίνεται ότι ο επαγωγικός συλλογισμός και η αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων είναι οι παράγοντες στους οποίους όλοι οι μαθητές και οι αδύνατοι μπορούν να επιτύχουν, δηλαδή είναι οι πιο εύκολοι παράγοντες για τους μαθητές. Οι διασυνδέσεις, οι αναπαραστάσεις και η επιχειρηματολογία και η τεκμηρίωση είναι οι παράγοντες που μπορούν να επιτύχουν μόνο οι μέτριοι και οι καλύτεροι μαθητές, ενώ ο αναστοχασμός και οι ορισμοί και οι μαθηματικές εξηγήσεις είναι παράγοντες στους οποίους έχουν επαρκείς ικανότητες μόνο οι μαθητές με ψηλή κατανόηση των κλασμάτων, είναι δηλαδή οι δυσκολότεροι παράγοντες που διαφοροποιούν τους μαθητές με ψηλή κατανόηση των κλασμάτων από τους μέτριους και τους αδύνατους. Το εύρημα για τους ορισμούς και τις μαθηματικές εξηγήσεις συμφωνεί με τα ευρήματα του Niemi (1996c) που βρήκε ότι οι μαθητές δημοτικού σχολείου συναντούν μεγάλες δυσκολίες όταν τους ζητηθεί να εξηγήσουν θέματα που αφορούν στα κλάσματα. Ο Niemi (1996c) χαρακτηρίζει τους μαθητές με επάρκεια στις μαθηματικές εξηγήσεις ως «χαρισματικούς μαθητές» και ότι μπορεί να θεωρηθεί ότι έχουν αποκτήσει «βαθιά κατανόηση» των κλασμάτων.

Από τα αποτελέσματα της ανάλυσης για επαναλαμβανόμενες μετρήσεις για το σύνολο του δείγματος (σύνολο της πειραματικής ομάδας συγκρινόμενο με το σύνολο της ομάδας ελέγχου), προέκυψε ότι το παρεμβατικό πρόγραμμα επέδρασε θετικά στη βελτίωση της κατανόησης των κλασμάτων. Συνεπώς, φαίνεται ότι το παρεμβατικό πρόγραμμα πέτυχε σε μεγάλο βαθμό το σκοπό για τον οποίο σχεδιάστηκε και η εφαρμογή του είχε τα αναμενόμενα αποτελέσματα. Το εύρημα αυτό αποκτά ιδιαίτερη σημασία, γιατί τα κλάσματα είναι μια από τις δυσκολότερες έννοιες των μαθηματικών του δημοτικού σχολείου και είναι δύσκολο να επιτευχθεί κατανόησή τους (Behr et al., 1992: Lamon, 1999: Niemi, 1996a). Ακόμη, το εύρημα αυτό αποκτά μεγαλύτερη σημασία αν ληφθεί υπόψη το γεγονός ότι μέρος του περιεχομένου του παρεμβατικού προγράμματος και μέρος των επιμέρους στόχων του καλύφθηκαν από τους μαθητές της ομάδας ελέγχου που ακολουθούσαν το τυπικό Α.Π. Αυτό καταδεικνύει την αποτελεσματικότητα του παρεμβατικού προγράμματος τόσο από άποψη στοχοθεσίας και περιεχομένου όσο και από άποψη αρχών (ελκυστικές και ενδιαφέρουσες δραστηριότητες, διαβάθμιση από το εύκολο στο δύσκολο, συνδυασμός ατομικής εργασίας και συνεργασίας, αλληλεπίδραση και συζήτηση μεταξύ των μαθητών, προβληματισμός, παρώθηση των μαθητών να εξηγήσουν τη σκέψη τους και τις επιλογές τους).

Για να εξεταστεί η αποτελεσματικότητα του παρεμβατικού προγράμματος όσον αφορά στους παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων, διενεργήθηκε πρώτα ανάλυση latent class για την πειραματική ομάδα και την ομάδα ελέγχου ξεχωριστά. Από αυτό το είδος της ανάλυσης μπορεί να διαφανεί κατά πόσον η πειραματική ομάδα και η ομάδα ελέγχου συμπεριφέρονται ως ενιαίες ομάδες ή κατά πόσον υπάρχουν κατηγορίες (ομάδες) μαθητών που συμπεριφέρονται με διαφορετικό τρόπο. Παρόμοια στατιστική ανάλυση χρησιμοποιήθηκε και σε άλλες έρευνες για να ελεγχθεί κατά πόσον το σύνολο των μαθητών συμπεριφέρεται με ενιαίο τρόπο και σε αντίθετη περίπτωση πόσες και ποιες ομάδες (με ποια χαρακτηριστικά) μπορούν να δημιουργηθούν (Biza & Zachariades, 2010: Brown, 2000: Pitta-Pantazi, Christou, & Zachariades, 2007). Από τα αποτελέσματα της ανάλυσης latent class φάνηκε ότι τόσο οι μαθητές της πειραματικής ομάδας όσο και οι μαθητές της ομάδας ελέγχου μπορούσαν να κατηγοριοποιηθούν σε τρεις κατηγορίες (ομάδες) μαθητών: την Κατηγορία 1 με χαμηλή κατανόηση των κλασμάτων, την Κατηγορία 2 με μέτρια κατανόηση των κλασμάτων και την Κατηγορία 3 με ψηλή κατανόηση των κλασμάτων. Ακολούθως, έγινε σύγκριση μεταξύ της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου για καθεμιά κατηγορία μαθητών για να διαφανεί η αποτελεσματικότητα του παρεμβατικού προγράμματος. Για το σκοπό αυτό διενεργήθηκε ανάλυση ανάπτυξης για την κατανόηση των κλασμάτων και για κάθε παράγοντα ξεχωριστά για κάθε κατηγορία μαθητών. Από την εφαρμογή της ανάλυσης ανάπτυξης προέκυψαν μοντέλα για την κατανόηση των κλασμάτων με καλή προσαρμογή στα εμπειρικά δεδομένα μόνο για τους μαθητές της Κατηγορίας 1 (χαμηλή κατανόηση των κλασμάτων). Για τους μαθητές των άλλων δύο κατηγοριών δεν προέκυψαν κατάλληλα μοντέλα για την κατανόηση των κλασμάτων. Αυτό μπορεί να οφείλεται στο μικρό μέγεθος αυτών των κατηγοριών που επηρεάζει τα αποτελέσματα της ανάλυσης ανάπτυξης (Duncan, Duncan, Strycker, Li, & Alpert, 1999: Tanaka, 1987). Ένας άλλος λόγος μπορεί να είναι η έλλειψη «ομοιογένειας» στη συμπεριφορά των μαθητών, ούτως ώστε να προκύψουν κατάλληλα μοντέλα για το σύνολο των μαθητών των αντίστοιχων κατηγοριών. Με άλλα λόγια, μπορεί να υπάρχουν σημαντικές αποκλίσεις στις συναρτήσεις ανάπτυξης των υποκειμένων και δεν μπορεί να υπάρξει σύγκλιση σε μια ενιαία συνάρτηση (Duncan et al., 1999). Ένας τρίτος λόγος μπορεί να είναι ότι η εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος δεν προσέδωσε στους μαθητές της πειραματικής ομάδας με μέτρια ή ψηλή κατανόηση των κλασμάτων ρυθμό ανάπτυξης στην κατανόηση των κλασμάτων και στους επιμέρους παράγοντες. Το ίδιο μπορεί να συνέβηκε στους μαθητές της ομάδας ελέγχου λόγω των διδασκαλιών στα πλαίσια του υφιστάμενου Α.Π. Ωστόσο, με βάση τα υφιστάμενα δεδομένα, δεν μπορεί να αιτιολογηθεί με βεβαιότητα η αποτυχία εύρεσης κατάλληλων μοντέλων ανάπτυξης για αυτές τις κατηγορίες μαθητών. Είναι ακόμη πιθανόν, η αποτυχία εύρεσης κατάλληλων μοντέλων να οφείλεται σε άλλους λόγους που δεν είναι δυνατό να γνωρίζουμε ή σε συνδυασμό δύο ή περισσότερων από τους λόγους που προαναφέρθηκαν. Συνεπώς, δεν μπορούν να εξαχθούν ασφαλή συμπεράσματα για την αποτελεσματικότητα του παρεμβατικού προγράμματος για αυτές τις κατηγορίες μαθητών (παρόλο ότι από τα περιγραφικά στοιχεία για την Κατηγορία 2 φαίνεται υπεροχή της πειραματικής ομάδας έναντι της ομάδας ελέγχου). Συνεπώς, η συζήτηση για την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος θα περιοριστεί στους μαθητές με χαμηλή κατανόηση των κλασμάτων.

Από την ανάλυση ανάπτυξης για την κατανόηση των κλασμάτων για τους μαθητές που ανήκουν στην Κατηγορία 1 βρέθηκε ότι το παρεμβατικό πρόγραμμα προσέδωσε σχεδόν διπλάσιο ρυθμό ανάπτυξης στην πειραματική ομάδα συγκριτικά με την ομάδα ελέγχου, στοιχείο που καταδεικνύει τη θετική επίδραση του παρεμβατικού προγράμματος στη βελτίωση της κατανόησης των μαθητών αυτής της κατηγορίας. Συνεπώς, φαίνεται ότι οι μαθητές με χαμηλή κατανόηση των κλασμάτων ωφελήθηκαν από την εφαρμογή της παρέμβασης. Το εύρημα αυτό φανερώνει την αποτελεσματικότητα του παρεμβατικού προγράμματος για τους μαθητές με χαμηλή κατανόηση των κλασμάτων (σε αυτή την κατηγορία ανήκουν και μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες), αλλά και τη σημασία και τη σπουδαιότητά του, αφο ύ με την εφαρμογή του βελτιώθηκαν σε σημαντικό βαθμό, βραχυπρόθεσμα, αλλά και μακροπρόθεσμα οι αδύνατοι μαθητές. Το εύρημα για τη θετική επίδραση του παρεμβατικού προγράμματος στους μαθητές με χαμηλή κατανόηση των κλασμάτων, πέρα από την αποτελεσματικότητά του, μπορεί να αποδοθεί και στο γεγονός ότι οι αδύνατοι μαθητές έχουν μεγαλύτερα περιθώρια βελτίωσης συγκριτικά με τους υπόλοιπους μαθητές (Ding & Davison, 2005). Ακόμη, αυτό το αποτέλεσμα φανερώνει την αποτελεσματικότητα τόσο του περιεχομένου όσο και των αρχών στις οποίες βασίστηκε η παρέμβαση και που πιθανόν να ωφέλεσαν τους μαθητές με χαμηλή κατανόηση των κλασμάτων. Το γεγονός δηλαδή ότι το παρεμβατικό πρόγραμμα περιλάμβανε δραστηριότητες ελκυστικές και ενδιαφέρουσες για τους μαθητές, με διαβάθμιση από τα εύκολα στα δύσκολα, το γεγονός ότι υπήρχε συνδυασμός εξατομικευμένης και συνεργατικής μάθησης σε συνδυασμό με την αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών και τις αυξημένες ευκαιρίες για συζήτηση πιθανόν να είναι στοιχεία που οδήγησαν στη βελτίωση των μαθητών της συγκεκριμένης κατηγορίας (Ketterlin-Geller, Chard, & Fien, 2008).

Αναφορικά με τους παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων, από την ανάλυση ανάπτυξης για την πειραματική ομάδα προέκυψαν κατάλληλα μοντέλα για τους ορισμούς και τις μαθηματικές εξηγήσεις, την αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων, τις αναπαραστάσεις και τον αναστοχασμό, ενώ όσον αφορά στην ομάδα ελέγχου προέκυψαν κατάλληλα μοντέλα για τον επαγωγικό συλλογισμό, τους ορισμούς και τις μαθηματικές εξηγήσεις, την αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων, τις αναπαραστάσεις, τις διασυνδέσεις και τον αναστοχασμό. Με βάση αυτά τα δεδομένα, ήταν εφικτή η σύγκριση για εκείνους τους παράγοντες στους οποίους προέκυψαν κατάλληλα μοντέλα και για τις δύο ομάδες μαθητών, δηλαδή τους ορισμούς και τις μαθηματικές εξηγήσεις, την αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων, τις αναπαραστάσεις και τον αναστοχασμό. Για τον επαγωγικό συλλογισμό και τις διασυνδέσεις προέκυψαν κατάλληλα μοντέλα μόνο για την ομάδα ελέγχου, ενώ για την επιχειρηματολογία και την τεκμηρίωση για καμία από τις δύο ομάδες μαθητών. Η αποτυχία στην εύρεση μοντέλων ανάπτυξης πιθανόν να οφείλεται στο σχετικά μικρό μέγεθος των κατηγοριών και στο γεγονός ότι στους συγκεκριμένους παράγοντες δεν υπάρχει «ομοιογένεια» στη συμπεριφορά των μαθητών, ούτως ώστε να προκύψουν κατάλληλα μοντέλα για το σύνολο των μαθητών των αντίστοιχων ομάδων (Duncan, et al., 1999: Tanaka, 1987). Ένας άλλος πιθανός λόγος μπορεί να είναι ότι η εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος δεν προσέδωσε στους μαθητές της πειραματικής ομάδας με χαμηλή κατανόηση των κλασμάτων ρυθμό ανάπτυξης στους εν λόγω παράγοντες. Το ίδιο μπορεί να συνέβηκε στους μαθητές της ομάδας ελέγχου από την εφαρμογή των διδασκαλιών στα πλαίσια του υφιστάμενου Α.Π. Ακόμη, μπορεί να υπάρχουν και άλλοι λόγοι που δεν γνωρίζουμε ή συνδυασμός δύο ή περισσότερων από τους παραπάνω λόγους. Ωστόσο, με βάση τα υφιστάμενα δεδομένα, δεν μπορεί να αιτιολογηθεί με βεβαιότητα η αποτυχία εύρεσης κατάλληλων μοντέλων για τους εν λόγω παράγοντες και έτσι η συζήτηση θα περιοριστεί σε εκείνους τους παράγοντες όπου προέκυψαν κατάλληλα μοντέλα και για τις δύο ομάδες μαθητών.

Από τα αποτελέσματα της ανάλυσης ανάπτυξης διαφάνηκε ότι το παρεμβατικό πρόγραμμα προσέδωσε μεγαλύτερο ρυθμό ανάπτυξης στην πειραματική ομάδα συγκριτικά με την ομάδα ελέγχου όσον αφορά στην ικανότητα των μαθητών στους ορισμούς και τις μαθηματικές εξηγήσεις, στις αναπαραστάσεις και στον αναστοχασμό, ενώ όσον αφορά στην αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων, ο ρυθμός ανάπτυξης για τις δύο ομάδες μαθητών είχε περίπου το ίδιο μέγεθος. Συνεπώς, φαίνεται ότι το παρεμβατικό πρόγραμμα επέδρασε θετικά στην ικανότητα στους ορισμούς και τις μαθηματικές εξηγήσεις, τις αναπαραστάσεις και τον αναστοχασμό των αδύνατων μαθητών, ενώ κάτι τέτοιο δεν φαίνεται να συνέβηκε για την αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων. Τα ευρήματα για τη θετική επίδραση της παρέμβασης στην ικανότητα των μαθητών να ορίζουν και να δίνουν μαθηματικές εξηγήσεις, να αναπαριστούν κλάσματα και να αναστοχάζονται έχουν ιδιαίτερη βαρύτητα αν ληφθεί υπόψη το γεγονός ότι και οι μαθητές της ομάδας ελέγχου έτυχαν διδασκαλίας σε αυτούς τους παράγοντες, χωρίς όμως να δοθεί από τους δασκάλους της ομάδας ελέγχου η έμφαση που δόθηκε στην πειραματική ομάδα. Το στοιχείο αυτό ενισχύει την αποτελεσματικότητα του παρεμβατικού προγράμματος στη βελτίωση της ικανότητας των μαθητών με χαμηλή κατανόηση των κλασμάτων στους ορισμούς και τις μαθηματικές εξηγήσεις, στις αναπαραστάσεις και στον αναστοχασμό. Τα αποτελέσματα για τις αναπαραστάσεις και τον αναστοχασμό συμφωνούν με τα αποτελέσματα άλλων ερευνών στις οποίες εφαρμόστηκαν παρεμβατικά προγράμματα για τη βελτίωση στους εν λόγω παράγοντες με διαφορετική όμως στοχοθεσία, περιεχόμενο και μεθόδους ανάλυσης δεδομένων (για τις αναπαραστάσεις Terwel et a., 2009, για τον αναστοχασμό Elbers, 2003).

Αναφορικά με την αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων, βρέθηκε ότι παρόλο που υπήρξε βελτίωση στους μαθητές της πειραματικής ομάδας, εντούτοις ο ρυθμός ανάπτυξης που της προσέδωσε η εφαρμογή της παρέμβασης ήταν συγκριτικά του ίδιου μεγέθους με το ρυθμό ανάπτυξης της ομάδας ελέγχου. Το αποτέλεσμα αυτό ήταν αναμενόμενο αφού δόθηκε έμφαση και από τους δασκάλους της ομάδας ελέγχου σε αυτό τον παράγοντα που περιλαμβάνεται στο Α.Π.

Ρυθμός Ανάπτυξης της Κατανόησης των Κλασμάτων και της Ικανότητας στους Παράγοντες

Η εξακρίβωση του ρυθμού ανάπτυξης της κατανόησης των κλασμάτων και της ικανότητας στους επιμέρους παράγοντες αποκτά ιδιαίτερη σημασία, αφού παρέχει μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα της εξέλιξης της κατανόησης των κλασμάτων με την πάροδο του χρόνου. Έτσι, μας επιτρέπει να έχουμε μια δυναμική εικόνα της εξέλιξης της κατανόησης των κλασμάτων και της ικανότητας στους παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων, ενώ παρέχει και τη δυνατότητα πρόβλεψης της εξέλιξης μελλοντικά. Μέχρι σήμερα, φαίνεται ότι ο αριθμός τέτοιων ερευνών είναι μικρός, πιθανόν εξαιτίας των δυσκολιών στο σχεδιασμό και την υλοποίησή τους (Ding & Davison, 2005).

Η ανάλυση ανάπτυξης έδειξε ότι κατάλληλα μοντέλα μπορούσαν να περιγράψουν την κατανόηση των κλασμάτων μόνο για τους μαθητές της Κατηγορίας 1 (χαμηλή κατανόηση των κλασμάτων). Τα αποτελέσματα της ανάλυσης ανάπτυξης έδειξαν ότι ο ρυθμός ανάπτυξης για την πειραματική ομάδα μπορούσε να εκφραστεί από μια μη γραμμική συνάρτηση (0, 0.81, 1), με μέση τιμή κλίσης θετική και στατιστικά σημαντική *(S=1.434, Z=9.199, CFI=1.000, RMSEA=0.000,* $\chi^2/df=0.087$), ενώ για την ομάδα ελέγχου από μια μη γραμμική συνάρτηση (0, 1, 1.44), με μέση τιμή κλίσης θετική και στατιστικά σημαντική *(S=0.750, Z=5.586, CFI=1.000, RMSEA=0.000,* $\chi^2/df=0.030$*).* Οι συναρτήσεις για τις δύο ομάδες είναι παρόμοιας μορφής και μη γραμμικές και σε συνδυασμό με το θετικό και στατιστικά σημαντικό ρυθμό ανάπτυξης υποδηλώνουν ότι στα αρχικά στάδια οι δύο ομάδες παρουσιάζουν μεγαλύτερο ρυθμό ανάπτυξης που με την πάροδο του χρόνου μειώνεται. Επιπρόσθετα, και οι δύο ομάδες παρουσιάζουν σημαντική βελτίωση με την πειραματική ομάδα να αναπτύσσεται κατά μέσο όρο με σχεδόν διπλάσιο ρυθμό. Η ομοιότητα των δύο συναρτήσεων φανερώνει ότι για την κατανόηση των κλασμάτων η πειραματική ομάδα η οποία έτυχε παρέμβασης ακολουθεί παρόμοιο μοτίβο ανάπτυξης με την ομάδα ελέγχου («τυπική ομάδα») με μεγαλύτερο όμως μέσο ρυθμό ανάπτυξης. Αυτά τα αποτελέσματα μπορούν να αποδοθούν στο γεγονός ότι οι μαθητές με χαμηλή κατανόηση των κλασμάτων παρουσιάζουν στην αρχή της σχολικής χρονιάς χαμηλούς μέσους όρους και παρουσιάζουν μεγαλύτερα περιθώρια βελτίωσης συγκριτικά με τους υπόλοιπους μαθητές. Με την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος στους μαθητές της πειραματικής ομάδας και των διδασκαλιών για τα κλάσματα με βάση το υφιστάμενο Α.Π. στους μαθητές της ομάδας ελέγχου, αλλά και εξαιτίας του παράγοντα «ωριμότητα», παρατηρείται ανάπτυξη της κατανόησης των κλασμάτων και στις δύο ομάδες, όμως σταδιακά λόγω της επερχόμενης βελτίωσης στην κατανόηση των κλασμάτων παρατηρείται μείωση του ρυθμού ανάπτυξης. Η ανάπτυξη των μαθητών της ομάδας ελέγχου μπορεί να θεωρηθεί ως το συνδυασμένο αποτέλεσμα της διδασκαλίας που τυγχάνουν οι μαθητές της ομάδας ελέγχου με βάση το υφιστάμενο Α.Π. και της ωρίμανσης των γνωστικών δομών των μαθητών. Παρόμοια, για την πειραματική ομάδα, η παρατηρούμενη ανάπτυξη μπορεί να αποδοθεί στο συνδυασμένο αποτέλεσμα της εφαρμογής του παρεμβατικού προγράμματος και της ωρίμανσης των γνωστικών δομών. Η υψηλότερη μέση τιμή για το ρυθμό ανάπτυξης για την πειραματική ομάδα φανερώνει την αποτελεσματικότητα και τη θετική επίδραση του παρεμβατικού προγράμματος.

Παρόμοια αποτελέσματα για τη μορφή της συνάρτησης για την κατανόηση των κλασμάτων βρέθηκαν στη διαχρονική έρευνα για τους νέους της Αμερικής (Longitudinal Study of American Youth) όσον αφορά στην επίδοση στα μαθηματικά, όπου φάνηκε ότι η επίδοση στα μαθηματικά ακολουθεί μη γραμμική συνάρτηση με επιβραδυνόμενο ρυθμό ανάπτυξης θετικό και στατιστικά σημαντικό (Muthén & Khoo, 1998). Παρόμοια αποτελέσματα για τη μορφή της συνάρτησης και το ρυθμό ανάπτυξης βρέθηκαν και σε άλλες έρευνες (Ding & Davison, 2005: Fantuzzo, Gadsden, & McDermott, 2010).

Αναφορικά με το ρυθμό ανάπτυξης στους παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων, για την ομάδα ελέγχου βρέθηκαν κατάλληλα μοντέλα που μπορούσαν να περιγράψουν το ρυθμό ανάπτυξης για τον επαγωγικό συλλογισμό, τους ορισμούς και τις μαθηματικές εξηγήσεις, την αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων, τις αναπαραστάσεις, τις διασυνδέσεις και τον αναστοχασμό, ενώ για την πειραματική ομάδα για τους ορισμούς και τις μαθηματικές εξηγήσεις, την αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων, τις αναπαραστάσεις και τον αναστοχασμό. Σε όλους τους παράγοντες ο ρυθμός ανάπτυξης ήταν θετικός και στατιστικά σημαντικός με εξαίρεση την περίπτωση του επαγωγικού συλλογισμού για την ομάδα ελέγχου όπου η μέση τιμή του ρυθμού ανάπτυξης ήταν αρνητική και μη σημαντική. Το εύρημα αυτό φανερώνει ότι σε όλους τους προαναφερόμενους παράγοντες οι αδύνατοι μαθητές και των δύο ομάδων αναπτύχθηκαν και βελτιώθηκαν σημαντικά με εξαίρεση την περίπτωση του επαγωγικού συλλογισμού, όπου δεν παρατηρήθηκε σημαντική ανάπτυξη και βελτίωση της ικανότητας σε αυτό τον παράγοντα των μαθητών της ομάδας ελέγχου με την πάροδο του χρόνου. Το εύρημα αυτό πιθανόν να οφείλεται στην απουσία διδασκαλίας του επαγωγικού συλλογισμού σε αυτούς τους μαθητές.

Για την ομάδα ελέγχου, σε δύο από τους παράγοντες και συγκεκριμένα στους ορισμούς και τις μαθηματικές εξηγήσεις και στον αναστοχασμό, ο ρυθμός ανάπτυξης φαίνεται να εκφράζεται από μια γραμμική συνάρτηση, στοιχείο που καταδεικνύει σταθερό ρυθμό ανάπτυξης και σταθερά αυξανόμενη πρόοδο της ικανότητας των αδύνατων μαθητών της ομάδας ελέγχου σε αυτούς τους παράγοντες. Στην αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων, η μορφή της συνάρτησης ήταν παρόμοια με αυτή για την κατανόηση των κλασμάτων με υψηλό ρυθμό ανάπτυξης αρχικά και το ρυθμό ανάπτυξης να μειώνεται με την πάροδο του χρόνου. Όσον αφορά στις διασυνδέσεις, η συνάρτηση είναι μη γραμμική με αρχικά υψηλό ρυθμό ανάπτυξης που μειώνεται για να παρουσιάσει μετά από ένα σημείο αρνητικό πρόσημο με μικρό όμως μέγεθος. Αντίθετα, στην περίπτωση των αναπαραστάσεων, οι αδύνατοι μαθητές της ομάδας ελέγχου φαίνεται να παρουσιάζουν αρχικά περίπου μηδενικό ρυθμό ανάπτυξης που με την πάροδο του χρόνου παρουσιάζει αύξηση, παρατηρείται δηλαδή μια επιτάχυνση στην ανάπτυξης της ικανότητας στις αναπαραστάσεις αυτών των μαθητών.

Από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας δεν βρέθηκαν έρευνες που να εξετάζουν το ρυθμό ανάπτυξης των μαθητών στους ανωτέρω παράγοντες. Άρα, δεν είναι δυνατό να γίνει οποιαδήποτε σύγκριση των αποτελεσμάτων που βρέθηκαν στην παρούσα εργασία με άλλες έρευνες, ούτε και θεμελίωση των ευρημάτων της παρούσας εργασίας αναφορικά με το ρυθμό ανάπτυξης σε άλλες έρευνες. Ο θετικός και στατιστικά σημαντικός ρυθμός ανάπτυξης των αδύνατων μαθητών της ομάδας ελέγχου στους παράγοντες που αναφέρθηκαν σε προηγούμενη παράγραφο, πιθανόν να οφείλεται στη διδασκαλία που έτυχαν οι μαθητές της ομάδας ελέγχου σε αυτούς τους παράγοντες με βάση το υφιστάμενο Α.Π. σε συνδυασμό με την επίδραση του παράγοντα ωριμότητα ή και άλλων παραγόντων που δεν είναι δυνατόν να γνωρίζουμε. Η συνεισφορά της διδασκαλίας, του παράγοντα ωριμότητα ή και άλλων παραγόντων στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών πιθανόν να διέφερε από παράγοντα σε παράγοντα (για παράδειγμα στην ανάπτυξη ενός παράγοντα μπορεί να είχε μεγαλύτερη επίδραση η διδασκαλία, ενώ σε κάποιον άλλο παράγοντα η επίδραση της διδασκαλίας να ήταν μικρότερη). Ωστόσο, αυτό δεν είναι δυνατόν να εξαχθεί με βεβαιότητα από τη μεθοδολογία που ακολουθήθηκε στην παρούσα εργασία. Αναφορικά με τους ορισμούς και τις μαθηματικές εξηγήσεις και τον αναστοχασμό που παρουσιάζουν σταθερά αυξανόμενη πρόοδο είναι δυνατόν η διδασκαλία που έτυχαν οι μαθητές της ομάδας ελέγχου να ήταν «ομοιόμορφη» καθόλη τη διάρκεια του χρόνου. Αντίθετα, όσον αφορά στην αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων και τις διασυνδέσεις, παράγοντες στους οποίους δόθηκε μεγάλη έμφαση με βάση το υφιστάμενο Α.Π., είναι πιθανόν μεγαλύτερη έμφαση να δόθηκε στο χρονικό διάστημα που έλαβε χώρα η παρέμβαση στους μαθητές της πειραματικής ομάδας, δηλαδή στο πρώτο μισό του σχολικού έτους. Είναι δυνατόν, όμως, και σε αυτούς τους παράγοντες η έμφαση που δόθηκε να ήταν «ομοιόμορφη» καθόλη τη διάρκεια του σχολικού έτους, αλλά προς το τέλος του σχολικού έτους όπου παρατηρείται μια σχετική χαλάρωση των μαθητών να υπήρξε σταθεροποίηση της ικανότητάς τους ή και μικρή μείωση. Δηλαδή, μετά από το αρχικό στάδιο όπου η ικανότητα σε αυτούς τους παράγοντες ήταν χαμηλή και είχαν μεγαλύτερα περιθώρια βελτίωσης, με συνέπεια υψηλότερο ρυθμό ανάπτυξης, σταδιακά να επήλθε επιβράδυνση της ανάπτυξης. Αντίθετα, στις αναπαραστάσεις η διδασκαλία στους μαθητές της ομάδας ελέγχου μπορεί να ήταν εντονότερη μετά τη διενέργεια της δεύτερης μέτρησης ή ο αυξημένος ρυθμός ανάπτυξης στο δεύτερο μισό του σχολικού έτους να οφείλεται σε άλλους παράγοντες που δεν είναι δυνατόν να εξαχθούν από την παρούσα έρευνα (π.χ. η ωρίμανση για τον παράγοντα αναπαραστάσεις να επέρχεται σε εκείνο το χρονικό διάστημα).

Για το ρυθμό ανάπτυξης των αδύνατων μαθητών της πειραματικής ομάδας, φαίνεται ότι και στους τέσσερις παράγοντες όπου προέκυψαν κατάλληλα μοντέλα εκφράζεται από μη γραμμικές συναρτήσεις. Συγκεκριμένα, για τους ορισμούς και τις μαθηματικές εξηγήσεις, την αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων και τον αναστοχασμό, οι συναρτήσεις είναι παρόμοιες με αυτή για την κατανόηση των κλασμάτων, δηλαδή στα αρχικά στάδια παρουσιάζεται υψηλός ρυθμός ανάπτυξης που όμως μειώνεται με την πάροδο του χρόνου. Αντίθετα, στις αναπαραστάσεις, φαίνεται ότι στην αρχή ο ρυθμός ανάπτυξης είναι σχετικά μικρός και με την πάροδο του χρόνου αυξάνεται, παρατηρείται δηλαδή μια επιτάχυνση της ικανότητας των μαθητών στις αναπαραστάσεις.

Από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας δεν βρέθηκαν μελέτες που να εξετάζουν το ρυθμό ανάπτυξης αυτών των παραγόντων υπό την εφαρμογή παρεμβατικών προγραμμάτων. Συνεπώς, δεν μπορεί να γίνει οποιαδήποτε σύγκριση με άλλες έρευνες. Ένας παράγοντας που πρέπει να ληφθεί υπόψη για την ερμηνεία του ρυθμού ανάπτυξης των αδύνατων μαθητών της πειραματικής ομάδας στους παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων είναι η εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος. Ωστόσο, από τα δεδομένα της παρούσας έρευνας δεν μπορεί να εξαχθεί με απόλυτη βεβαιότητα η συνεισφορά αυτού του παράγοντα στο ρυθμό ανάπτυξης καθώς και άλλοι παράγοντες (π.χ. ωριμότητα) είχαν συμβολή. Παραταύτα, μπορούν να γίνουν κάποιες εικασίες, συγκρίνοντας το ρυθμό ανάπτυξης της πειραματικής ομάδας με αυτόν της ομάδας ελέγχου που εκπροσωπεί τους μαθητές μιας «κανονικής» τάξης όπου δεν έλαβε χώρα παρέμβαση.

Έτσι, όσον αφορά στους ορισμούς και τις μαθηματικές εξηγήσεις, φαίνεται ότι το παρεμβατικό πρόγραμμα κατά τη διάρκεια εφαρμογής του προσέδωσε στους μαθητές της Κατηγορίας 1 που έτυχαν παρέμβασης ρυθμό ανάπτυξης που στα αρχικά στάδια ήταν υψηλότερος από το ρυθμό ανάπτυξης των μαθητών της ομάδας ελέγχου, για να μειωθεί σταδιακά και να υπάρξει σχετική σταθεροποίηση των αδύνατων μαθητών της πειραματικής ομάδας ως προς την ικανότητά τους στους ορισμούς και τις μαθηματικές εξηγήσεις. Χωρίς την εφαρμογή της παρέμβασης, ο ρυθμός ανάπτυξης των μαθητών θα ήταν σταθερός με θετικό πρόσημο, δηλαδή οι μαθητές θα παρουσίαζαν σταθερή αύξηση στην ικανότητά τους. Φαίνεται δηλαδή ότι το παρεμβατικό πρόγραμμα είχε μεγαλύτερη επίδραση βραχυπρόθεσμα στην ικανότητα στους ορισμούς και τις μαθηματικές εξηγήσεις.

Στην περίπτωση της αίσθησης για το μέγεθος των κλασμάτων, οι συναρτήσεις για το ρυθμό ανάπτυξης των δύο ομάδων προσομοιάζουν με μέσο ρυθμό ανάπτυξης θετικό και περίπου ίδιου μεγέθους. Το αποτέλεσμα αυτό είναι αναμενόμενο αν λάβει κανείς υπόψη ότι έμφαση στον συγκεκριμένο παράγοντα δόθηκε και από τους δασκάλους της ομάδας ελέγχου που εφάρμοσαν το ισχύον Α.Π. Άρα μπορεί να ισχυριστεί κανείς ότι το παρεμβατικό πρόγραμμα επέδρασε στους αδύνατους μαθητές της πειραματικής ομάδας στον ίδιο βαθμό που θα είχε επίδραση διδασκαλία με βάση το υφιστάμενο Α.Π.

Αναφορικά με τις αναπαραστάσεις, αν συγκρίνει κανείς τη μορφή της συνάρτησης της πειραματικής ομάδας με την ομάδα ελέγχου, το αποτέλεσμα ήταν αναμενόμενο. Ο λόγος είναι ότι αν θεωρήσουμε ως μέτρο σύγκρισης την ομάδα ελέγχου όπου αρχικά παρουσιάζεται σχεδόν μηδενικός ρυθμός ανάπτυξης που με την πάροδο του χρόνου αυξάνεται, είναι αναμενόμενο και η πειραματική ομάδα να ακολουθεί παρόμοια συνάρτηση με μεγαλύτερο όμως ρυθμό ανάπτυξης τόσο σε αρχικό στάδιο όσο και με την πάροδο του χρόνου. Η εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν άλλαξε τη γενική μορφή της συνάρτησης, αλλά το μέτρο του ρυθμού ανάπτυξης.

Για τον αναστοχασμό παρατηρούμε ότι η εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος προσέδωσε στην πειραματική ομάδα ρυθμό ανάπτυξης αρχικά υψηλό που με την πάροδο του χρόνου παρουσιάζει μικρή μείωση, όμως ο ρυθμός μείωσης του ρυθμού ανάπτυξης είναι πολύ μικρός και η επιβράδυνση της ανάπτυξης της ικανότητας στον αναστοχασμό είναι πολύ μικρή με την πάροδο του χρόνου (στα χρονικά πλαίσια μέχρι τη διενέργεια της τρίτης μέτρησης ο ρυθμός ανάπτυξης για την πειραματική ομάδα συνέχιζε να είναι σημαντικά ψηλότερος από εκείνον της ομάδας ελέγχου που ήταν σταθερός). Από τα προαναφερθέντα, συνεπάγεται ότι στην περίπτωση του αναστοχασμού η εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος είχε επίδραση όχι μόνο στο ρυθμό ανάπτυξης, αλλά και στη μορφή της συνάρτησης που τον εκφράζει. Επιπρόσθετα, φαίνεται ότι στην περίπτωση του αναστοχασμού η εφαρμογή της παρέμβασης είχε μεγαλύτερη επίδραση κυρίως σε μακροπρόθεσμο ορίζοντα αν συγκριθεί με την επίδραση που είχε στην περίπτωση του παράγοντα ορισμοί και μαθηματικές εξηγήσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Εισαγωγή

Σκοπός και καινοτόμο της παρούσας εργασίας ήταν η ανάπτυξη και ο έλεγχος ενός νέου θεωρητικού μοντέλου με παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση μιας έννοιας των μαθηματικών του δημοτικού σχολείου (σε αυτή την έρευνα υπό εξέταση έννοια ήταν τα κλάσματα). Επιπρόσθετα, σκοπός ήταν ο σχεδιασμός και η εφαρμογή παρεμβατικού προγράμματος για τη διδασκαλία των παραγόντων που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων. Ακόμη, η έρευνα αποσκοπούσε στη διακρίβωση του ρυθμού ανάπτυξης των μαθητών στην κατανόηση των κλασμάτων και της ικανότητάς τους στους παράγοντες που τη συνθέτουν. Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της εργασίας με έμφαση στη σημασία του θεωρητικού μοντέλου για την κατανόηση των κλασμάτων και τη συνεισφορά του στο αντικείμενο της μαθηματικής παιδείας από θεωρητικής άποψης, ενώ γίνεται και μια προσπάθεια σύγκρισης με άλλα θεωρητικά μοντέλα. Σε ένα άλλο μέρος συζητείται η σημασία και η συνεισφορά του παρεμβατικού προγράμματος στην έρευνα στο αντικείμενο της μαθηματικής παιδείας. Στη συνέχεια, συζητούνται τα αποτελέσματα για το ρυθμό ανάπτυξης και η συμβολή τους στην έρευνα για την ανάπτυξη της κατανόησης των κλασμάτων και της ικανότητας στους επιμέρους παράγοντες που τη συνθέτουν. Ακόμη, συζητούνται τα αποτελέσματα για τον καθορισμό ιεραρχικών επιπέδων αναφορικά με την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος με βάση τους προτεινόμενους παράγοντες και θίγεται η συμβολή αυτών των αποτελεσμάτων στην έρευνα στο αντικείμενο της μαθηματικής παιδείας. Ακολούθως, παρουσιάζονται και συζητούνται εκπαιδευτικές εφαρμογές της εργασίας και τέλος γίνονται εισηγήσεις για περαιτέρω έρευνες με στόχο τη βελτίωση, την εμβάθυνση, την επέκταση και εγκυροποίηση των αποτελεσμάτων της παρούσας εργασίας.

Στην παρούσα εργασία το προτεινόμενο θεωρητικό μοντέλο επιβεβαιώθηκε σε τρεις μετρήσεις σε αρκετά ικανοποιητικό μέγεθος δείγματος μαθητών Στ΄ τάξης δημοτικού σχολείου. Επιπρόσθετα, βρέθηκε ότι εξηγεί ένα μεγάλο ποσοστό της διασποράς της κατανόησης των κλασμάτων. Αυτά τα αποτελέσματα υποδεικνύουν ότι το προτεινόμενο μοντέλο παρέχει ένα αρκετά ολοκληρωμένο πλαίσιο περιγραφής της κατανόησης των κλασμάτων για τους μαθητές Στ΄ τάξης δημοτικού σχολείου. Επιπρόσθετα, με την επιβεβαίωση του προτεινόμενου μοντέλου καταφέραμε να αποσυνθέσουμε την κατανόηση των κλασμάτων σε μετρήσιμους παράγοντες. Έτσι, θα είναι δυνατόν να αποφανθεί κάποιος κατά πόσον ένας μαθητής κατανοεί τα κλάσματα με βάση την ικανότητα και την επάρκειά του στους εν λόγω παράγοντες, αλλά και ποια η σημασία του κάθε παράγοντα στην κατανόηση των κλασματικών αριθμών (αναλόγως της συνεισφοράς του).

Αφετηρία της προσπάθειάς μας για τη διαμόρφωση του προτεινόμενου θεωρητικού μοντέλου ήταν η θεωρία των Sierpinska et al. (2002) για τη θεωρητική σκέψη. Η θεωρία που πρότειναν οι Sierpinska et al. (2002) για τη θεωρητική σκέψη ήταν μια προσπάθεια ολοκληρωμένης περιγραφής της εννοιολογικής σκέψης φοιτητών για τη γραμμική άλγεβρα. Το προτεινόμενο θεωρητικό μοντέλο περιλαμβάνει παράγοντες της κατανόησης για τους μαθητές Στ΄ τάξης δημοτικού σχολείου και στην παρούσα εργασία τα κλάσματα ήταν η έννοια που επιλέγηκε για την εξέταση του προτεινόμενου μοντέλου. Οι πέντε από τους επτά προτεινόμενους παράγοντες του θεωρητικού μοντέλου που επιβεβαιώθηκε στα πλαίσια της παρούσας εργασίας προέκυψαν από τις συνιστώσες της θεωρητικής σκέψης (αναστοχαστική σκέψη, συστημική σκέψη, αναλυτική σκέψη), όμως τροποποιήθηκαν, έτσι ώστε να ανταποκρίνονται στο επίπεδο των μαθητών Στ΄ τάξης δημοτικού σχολείου (βλέπε Διάγραμμα 2.2.). Ακόμη, περιλήφθηκαν στο προτεινόμενο μοντέλο δύο επιπρόσθετοι παράγοντες, ο επαγωγικός συλλογισμός και η αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων. Το προτεινόμενο θεωρητικό μοντέλο προσομοιάζει με το θεωρητικό μοντέλο που πρότειναν οι Sierpinska et al. (2002) για τη θεωρητική σκέψη, όμως τροποποιήθηκε, έτσι ώστε να συνάδει με το επίπεδο μαθητών Στ΄ τάξης δημοτικού σχολείου. Η επιβεβαίωση του προτεινόμενου μοντέλου στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, υποδεικνύει ότι το θεωρητικό μοντέλο των Sierpinska et al. (2002) υφίσταται ως ένα βαθμό για τους μαθητές Στ΄ τάξης δημοτικού σχολείου, με την προϋπόθεση ότι οι συνιστώσες της θεωρητικής σκέψης θα τύχουν τροποποίησης, ώστε να συμβαδίζουν με το γνωστικό επίπεδο μαθητών Στ΄ τάξης δημοτικού σχολείου. Ακόμη, προκειμένου να αξιολογηθεί και να επιτευχθεί κατανόηση των κλασμάτων, που ήταν η συγκεκριμένη έννοια που επιλέγηκε για την εξέταση του προτεινόμενου μοντέλου, θα πρέπει να περιληφθούν δύο παράγοντες, ο επαγωγικός συλλογισμός και η αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων.

Συγκρίνοντας το θεωρητικό μοντέλο της παρούσας έρευνας με άλλα θεωρητικά πλαίσια στο χώρο της μαθηματικής παιδείας (π.χ. θεωρίες υπό τη γνωστική προσέγγιση, την επιστημολογική προσέγγιση, την κοινωνική προσέγγιση, τη σημειωτική προσέγγιση κ.ά.), εντοπίζουμε τη διαφορά ότι το προτεινόμενο θεωρητικό μοντέλο προτείνει μια αρκετά ολοκληρωμένη περιγραφή της κατανόησης προτείνοντας παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση, σε αντίθεση με τα άλλα θεωρητικά πλαίσια που ερμηνεύουν την κατανόηση μαθηματικών εννοιών υπό μια προοπτική (αναγνωρίζουμε βέβαια την πολύ μεγάλη σπουδαιότητα των άλλων θεωριών για την κατανόηση των μαθηματικών). Ακόμη, ενώ άλλες θεωρίες επικεντρώνονται σε ποιοτική ανάλυση και εξήγηση της κατανόησης, η παρούσα εργασία προτείνει μια ποσοτική προσέγγιση. Η συνεισφορά της παρούσας εργασίας σε θεωρητικό επίπεδο είναι ότι προτείνει μια «διαφορετική προοπτική» για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, χωρίς ουδόλως αυτό να σημαίνει ότι αυτή η προοπτική είναι «ορθότερη» από την προοπτική άλλων θεωριών των οποίων αναγνωρίζουμε την πολύ μεγάλη σημασία στην ερμηνεία της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών. Όλες οι προοπτικές είναι χρήσιμες και έχουν τη σημασία τους για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών (Sriraman & English, 2010).

Για καλύτερη κατανόηση των όσων προαναφέρθηκαν, θα επιχειρηθεί σύγκριση με άλλη θεωρία, για παράδειγμα, με τη θεωρία της Sfard (1991). Σύμφωνα με τη Sfard (1991), για την πλήρη κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας θα πρέπει το άτομο να είναι σε θέση να την αντιληφθεί τόσο δομικά – σαν αντικείμενο, όσο και λειτουργικά – σαν διαδικασία. Αναφορικά με το σχηματισμό των εννοιών, η θεωρία της Sfard (1991) υποστηρίζει ότι προηγούνται διαδικασίες σε γνωστά αντικείμενα και αυτές οι διαδικασίες μετατρέπονται στο τέλος μέσω της πραγμάτωσης (reification) σε νέα αντικείμενα. Τα τρία στάδια ανάπτυξης μιας έννοιας σύμφωνα με τη θεωρία είναι η εσωτερίκευση, η συμπύκνωση και η πραγμάτωση. Σύμφωνα με το προτεινόμενο θεωρητικό μοντέλο, κάποιος μαθητής για να θεωρηθεί ότι κατανοεί τα κλάσματα θα πρέπει να είναι ικανός σε παράγοντες όπως ο επαγωγικός συλλογισμός, οι ορισμοί και οι μαθηματικές εξηγήσεις, η επιχειρηματολογία και η τεκμηρίωση, η αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων, οι αναπαραστάσεις, οι διασυνδέσεις με τους δεκαδικούς, τα ποσοστά και τη διαίρεση και τον αναστοχασμό. Η ικανότητα στους πιο πάνω παράγοντες περιλαμβάνει την αντίληψη των κλασμάτων τόσο δομικά όσο και λειτουργικά. Για παράδειγμα, ο ορισμός της έννοιας του κλάσματος περιλαμβάνει την αντίληψη του κλάσματος τόσο δομικά όσο και λειτουργικά. Ακόμη, η ικανότητα του μαθητή να αναγνωρίσει εικονικές αναπαραστάσεις για κάποιο κλάσμα, η ικανότητά του να γράψει πρόβλημα που να έχει ως απάντηση συγκεκριμένο κλάσμα, αλλά και η ικανότητά του να κατασκευάσει σχέδια για να δείξει κάποιο κλάσμα απαιτεί τη δομική αντίληψη του κλάσματος. Η ικανότητα του μαθητή να αντιληφθεί το κλάσμα ως διαίρεση αριθμητής ÷παρονομαστής αφορά στην αντίληψη του κλάσματος λειτουργικά (σαν διαδικασία).

Σύμφωνα με το θεωρητικό μοντέλο της παρούσας εργασίας, η ικανότητα του μαθητή στους προαναφερθέντες παράγοντες μπορεί να ποσοτικοποιηθεί και να προκύψει κάποιος βαθμός που θα αντανακλά την κατανόηση των κλασμάτων. Με αυτό τον τρόπο, θεωρούμε ότι το θεωρητικό μοντέλο που προτείνουμε δίνει μια αρκετά ολοκληρωμένη περιγραφή των παραγόντων στους οποίους πρέπει να είναι επαρκής κάποιος μαθητής για να θεωρηθεί ότι κατανοεί τα κλάσματα. Η διαφορά του προτεινόμενου μοντέλου από τη θεωρία της Sfard (1991) μπορεί να εντοπιστεί στο γεγονός ότι το προτεινόμενο θεωρητικό μοντέλο δεν αναφέρεται σε στάδια για την κατανόηση μιας έννοιας, σε αντίθεση με τη θεωρία της Sfard (1991).

Μια άλλη σύγκριση που θα επιχειρηθεί είναι με τη θεωρία που προτείνουν οι Pirie και Kieren (1994) για την ανάπτυξη της κατανόησης στα μαθηματικά. Συγκρίνοντας το προτεινόμενο θεωρητικό μοντέλο με τη θεωρία των Pirie και Kieren (1994), υπάρχει η διαφορά στην οποία προαναφέρθηκα ότι αντιμετωπίζουν την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών υπό διαφορετική προοπτική. Η θεωρία των Pirie και Kieren (1994), όπως και άλλες θεωρίες (π.χ. θεωρία APOS, θεωρία της Sfard, 1991) αναφέρονται σε επίπεδα, σε στάδια για την κατάκτηση μιας έννοιας. Αντίθετα, το προτεινόμενο θεωρητικό μοντέλο δεν αναφέρεται σε επίπεδα, ούτε και αναφέρεται σε στάδια για την κατανόηση μιας έννοιας. Το θεωρητικό μοντέλο της παρούσας εργασίας θεωρούμε ότι δίνει μια αρκετά ολοκληρωμένη περιγραφή των παραγόντων που απαιτούνται για την κατανόηση μιας έννοιας των μαθηματικών του δημοτικού σχολείου (στην προκειμένη περίπτωση των κλασμάτων). Το προτεινόμενο μοντέλο παρέχει μια εικόνα για την κατανόηση των κλασμάτων κάποιου μαθητή για κάθε χρονική στιγμή με βάση την ικανότητά του στους εν λόγω παράγοντες εκείνη τη στιγμή. Επιπρόσθετα, τα αποτελέσματα για το ρυθμό ανάπτυξης δίνουν στοιχεία για τη δυναμική εξέλιξη της κατανόησης των κλασμάτων και των παραγόντων που τη συνθέτουν με την πάροδο του χρόνου.

Συγκρίνοντας το θεωρητικό μοντέλο της παρούσας εργασίας με άλλα θεωρητικά μοντέλα που αναφέρονται στην κατανόηση της έννοιας του κλάσματος (Behr et al., 1983: Kieren, 1976: Lamon, 1999: Mack, 1990), εντοπίζουμε τη διαφορά ότι το προτεινόμενο μοντέλο προσεγγίζει την κατανόηση των κλασμάτων υπό διαφορετική προοπτική από τα άλλα θεωρητικά μοντέλα εστιάζοντας στους παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων. Για παράδειγμα, συγκρίνοντας το προτεινόμενο θεωρητικό μοντέλο με το μοντέλο του Kieren (1976), παρατηρούμε ότι ο Kieren (1976) προτείνει προσωπικότητες της έννοιας του κλάσματος, ενώ το προτεινόμενο θεωρητικό μοντέλο παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση των κλασμάτων. Ωστόσο, παρά τη διαφορετική προοπτική αντιμετώπισης της κατανόησης των κλασμάτων, αξίζει να σημειωθεί ότι σε πολλά έργα για τη μέτρηση των παραγόντων της παρούσας εργασίας περιλαμβάνονται οι προσωπικότητες του κλάσματος. Για παράδειγμα, στα έργα για τη μέτρηση της ικανότητας των μαθητών να αιτιολογούν τη σκέψη τους και την απάντησή τους σε προβλήματα με κλασματικούς αριθμούς (πρώτη συνιστώσα του αναστοχασμού), υπήρχαν οι προσωπικότητες του κλάσματος (λόγος, τελεστής, μέρος-όλο). Ακόμη, το πηλίκο περιλαμβανόταν στην ικανότητα των μαθητών να συνδέουν την έννοια του κλάσματος με τη διαίρεση αριθμητής÷παρονομαστής.

Το Παρεμβατικό Πρόγραμμα

Το παρεμβατικό πρόγραμμα που εφαρμόστηκε στην παρούσα εργασία βασίστηκε στη διδασκαλία των παραγόντων της κατανόησης με βάση το προτεινόμενο μοντέλο και είχε ως στόχο τη βελτίωση της ικανότητας των μαθητών στους παράγοντες και κατ’ επέκταση της κατανόησης των κλασμάτων (συνολικός βαθμός στους επτά παράγοντες). Τα αποτελέσματα από την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος έδειξαν ότι το παρεμβατικό πρόγραμμα επέδρασε θετικά στη βελτίωση της κατανόησης των κλασμάτων όσον αφορά στο σύνολο του δείγματος. Επιπρόσθετα, βρέθηκε ότι το παρεμβατικό πρόγραμμα είχε θετική επίδραση στη βελτίωση της κατανόησης των κλασμάτων των μαθητών με χαμηλή κατανόηση των κλασμάτων και της ικανότητάς τους στους ορισμούς και τις μαθηματικές εξηγήσεις, στις αναπαραστάσεις και στον αναστοχασμό. Αντίθετα, το παρεμβατικό πρόγραμμα δεν φαίνεται να είχε επίδραση στην αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων. Όσον αφορά στους άλλους παράγοντες δεν ήταν δυνατή η σύγκριση γιατί δεν προέκυψαν κατάλληλα μοντέλα και για τις δύο ομάδες μαθητών. Το ίδιο συνέβηκε για τους μαθητές με μέτρια και ψηλή κατανόηση των κλασμάτων και γι’ αυτό δεν μπορεί να εξεταστεί η επίδραση του παρεμβατικού προγράμματος για αυτές τις ομάδες μαθητών.

Τα θετικά αποτελέσματα από την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος υποδεικνύουν την αξία και τη συνεισφορά του στην έρευνα στο χώρο της διδακτικής των μαθηματικών. Η σημασία του παρεμβατικού προγράμματος ενισχύεται από το γεγονός ότι τα κλάσματα είναι μια δύσκολη έννοια των μαθηματικών του δημοτικού σχολείου και οι μαθητές παρουσιάζουν φτωχή εννοιολογική κατανόηση των κλασμάτων (Behr et al., 1992: Lamon, 1999: Niemi, 1996a).Τα θετικά αποτελέσματα από την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος αποκτούν ακόμη μεγαλύτερη σημασία, αφού επιτεύχθηκε βελτίωση της κατανόησης των κλασμάτων των αδύνατων μαθητών που είναι εκείνη η ομάδα μαθητών που συναντούν τις μεγαλύτερες δυσκολίες (Misquitta, 2011). Οι διδασκαλίες που προτείνονται στα πλαίσια του παρεμβατικού προγράμματος μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη βελτίωση της κατανόησης των κλασμάτων, αλλά και της ικανότητας στους επιμέρους παράγοντες όπου βρέθηκε βελτίωση.

Συγκρίνοντας το παρεμβατικό πρόγραμμα στα πλαίσια της παρούσας εργασίας με άλλα παρεμβατικά προγράμματα για τη διδασκαλία της κατανόησης των κλασμάτων ή των παραγόντων της κατανόησης, παρατηρούμε ότι το υφιστάμενο παρεμβατικό πρόγραμμα διαφέρει από αυτά ως προς τη στοχοθεσία και το περιεχόμενο. Ένα καινοτόμο στοιχείο της παρούσας εργασίας που τη διαφοροποιεί από τις άλλες εργασίες ως προς την επίδραση του παρεμβατικού προγράμματος στην κατανόηση των κλασμάτων και στους παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση είναι η εφαρμογή της ανάλυσης ανάπτυξης που επιτρέπει την εξαγωγή συμπερασμάτων αναφορικά με την εξέλιξη της κατανόησης των κλασμάτων και της ικανότητας στους επιμέρους παράγοντες, αλλά και την επίδραση του παρεμβατικού προγράμματος σε μακροπρόθεσμο ορίζοντα. Αντίθετα, στις άλλες εργασίες που αναφέρονται στην εφαρμογή παρεμβατικών προγραμμάτων εφαρμόζονται στατιστικές τεχνικές χωρίς τη δυνατότητα πρόβλεψης της εξέλιξης και της επίδρασης της παρέμβασης μακροπρόθεσμα (κριτήριο t για ανεξάρτητα και συσχετισμένα δείγματα, ανάλυση διασποράς, πολλαπλή παλινδρόμηση) (βλέπε Butler, Miller, Crehan, Babbitt, & Pierce, 2003: De Koning et al., 2002: Ketterlin-Geller, Chard, & Fien, 2008: Klauer, 1996: Klauer & Phye, 2008: Maccini, Mulchahy, & Wilson, 2007: Misquitta, 2011: Moss & Case, 1999: Niemi, 1996a, 1996b: Terwel et al., 2009). Από την ανασκόπηση της βιβιογραφίας, ελάχιστες έρευνες βρέθηκαν στις οποίες εφαρμόστηκε η ανάλυση ανάπτυξης για την εξακρίβωση της ανάπτυξης της μαθηματικής επίδοσης (Fantuzzo et al., 2010).

Ο Ρυθμός Ανάπτυξης της Κατανόησης των Κλασμάτων και των Παραγόντων που τη Συνθέτουν

Καινοτόμο στοιχείο της παρούσας εργασίας ως προς τη μεθοδολογία της είναι η εφαρμογή της ανάλυσης ανάπτυξης που επιτρέπει την εξακρίβωση της ανάπτυξης της κατανόησης των κλασμάτων και της ικανότητας στους επιμέρους παράγοντες των μαθητών Στ΄ τάξης δημοτικού σχολείου. Τα αποτελέσματα για το ρυθμό ανάπτυξης κρίνονται πολύ σημαντικά, αφού δίνουν μια δυναμική εικόνα της εξέλιξης της κατανόησης των κλασμάτων και της ικανότητας των αδύνατων μαθητών στους επιμέρους παράγοντες. Τα αποτελέσματα για την ομάδα ελέγχου αντιπροσωπεύουν τους μαθητές Στ΄ τάξης με χαμηλή κατανόηση των κλασμάτων που διδάσκονται με βάση το υφιστάμενο Α.Π. Τα αποτελέσματα για την πειραματική ομάδα αντιπροσωπεύουν τους μαθητές Στ΄ τάξης με χαμηλή κατανόηση των κλασμάτων που έτυχαν διδασκαλίας με βάση το παρεμβατικό πρόγραμμα της παρούσας εργασίας. Άλλες έρευνες που εξέτασαν το ρυθμό ανάπτυξης εστιάζουν στη γενικότερη μαθηματική επίδοση και όχι στην κατανόηση των κλασμάτων, ούτε στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών στους παράγοντες (Ding & Davison, 2005: Fantuzzo et al., 2010: Muthén & Khoo, 1998). Ακόμη, αυτές οι έρευνες αναφέρονται στο σύνολο των μαθητών και δεν διαχωρίζουν τους αδύνατους από τους μέτριους και τους πιο ικανούς μαθητές. Τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας για το ρυθμό ανάπτυξης παρέχουν χρήσιμες πληροφορίες για τη μάθηση και τη διδασκαλία των κλασμάτων των μαθητών Στ΄ τάξης με χαμηλή κατανόηση των κλασμάτων.

Με βάση τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας, φαίνεται ότι υπάρχει ιεράρχηση της κατανόησης της έννοιας του κλάσματος με βάση τους προτεινόμενους παράγοντες. Πιο συγκεκριμένα, φαίνεται ότι σε ένα πρώτο επίπεδο οι μαθητές σκέφτονται επαγωγικά και έχουν αίσθηση του μεγέθους των κλασμάτων. Σε ένα δεύτερο επίπεδο, είναι ικανοί να αναπαριστούν κλάσματα και να μεταφράζουν από ένα είδος αναπαράστασης σε άλλο, να διασυνδέουν τους κλασματικούς αριθμούς με τους δεκαδικούς, τα ποσοστά και με τη διαίρεση και να επιχειρηματολογούν και να τεκμηριώνουν. Σε ένα τρίτο επίπεδο που είναι και το ανώτερο επίπεδο ιεράρχησης με βάση τους προτεινόμενους παράγοντες, οι μαθητές είναι σε θέση να αναστοχάζονται, να ορίζουν και να δίνουν μαθηματικές εξηγήσεις αναφορικά με την έννοια του κλάσματος.

Τα αποτελέσματα για τα ιεραρχικά επίπεδα αναφορικά με την έννοια του κλάσματος κρίνονται σημαντικά, αφού δείχνουν τη δυσκολία των προτεινόμενων παραγόντων και επιπρόσθετα, ποιοι παράγοντες διαφοροποιούν τη μια κατηγορία μαθητών από την άλλη. Έτσι, φαίνεται ότι όλοι οι μαθητές μπορούν να έχουν επάρκεια στον επαγωγικό συλλογισμό και αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων. Αυτοί οι δύο παράγοντες είναι εκείνοι που με βάση τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας μπορούν να έχουν επάρκεια όλοι οι μαθητές. Σε ένα δεύτερο επίπεδο, μερικοί μαθητές επιπρόσθετα είναι σε θέση να αναπαριστούν κλάσματα και να μεταφράζουν από ένα είδος αναπαράστασης σε άλλο, να διασυνδέουν τα κλάσματα με τους δεκαδικούς, τα ποσοστά και τη διαίρεση, να επιχειρηματολογούν και να τεκμηριώνουν. Καταληκτικά, σε ένα τρίτο επίπεδο που είναι και το ανώτερο επίπεδο, οι μαθητές πέραν από τους πέντε παράγοντες που προαναφέρθηκαν, είναι σε θέση να αναστοχάζονται και να ορίζουν και να δίνουν μαθηματικές εξηγήσεις αναφορικά με την έννοια του κλάσματος. Φαίνεται ότι ο αναστοχασμός και οι ορισμοί και οι μαθηματικές εξηγήσεις είναι εκείνοι οι παράγοντες που χαρακτηρίζουν τους μαθητές που βρίσκονται στο πιο ψηλό επίπεδο αναφορικά με την κατανόηση των κλασμάτων.

Τα αποτελέσματα για τα ιεραρχικά επίπεδα που παρατίθενται σε αυτό το μέρος της διατριβής αποτελούν ουσιαστική συμβολή στην έρευνα στο αντικείμενο της μαθηματικής παιδείας. Ακόμη, παρέχουν εισηγήσεις στους εκπαιδευτικούς για τη διδασκαλία και την αξιολόγηση των κλασμάτων που συζητούνται στο μέρος που ακολουθεί.

Εκπαιδευτικές Εφαρμογές

Τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας μπορούν να τύχουν αξιοποίησης από τους εκπαιδευτικούς προκειμένου να επιτύχουν καλύτερη κατανόηση των κλασμάτων από μέρους των μαθητών. Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης υποδεικνύουν ότι οι μαθητές πρέπει να αποκτήσουν επαρκείς ικανότητες σε παράγοντες όπως ο επαγωγικός συλλογισμός, οι ορισμοί και οι μαθηματικές εξηγήσεις, η επιχειρηματολογία και η τεκμηρίωση, η αίσθηση για το μέγεθος των κλασμάτων, οι αναπαραστάσεις, οι διασυνδέσεις με τους δεκαδικούς, τα ποσοστά και τη διαίρεση και ο αναστοχασμός για να θεωρούνται ότι κατανοούν τα κλάσματα. Παρόμοια, στα NCTM Standards (2000) υποστηρίζεται πως οι μαθητές προκειμένου να επιτύχουν στις περιοχές των μαθηματικών, είναι αναγκαίο να αποκτήσουν επάρκεια σε μαθηματικές διαδικασίες όπως η επίλυση προβλήματος, η αιτιολόγηση και η απόδειξη, η επικοινωνία, οι διασυνδέσεις και οι αναπαραστάσεις.

Ακόμη, από τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης βρέθηκε ότι οι αναπαραστάσεις αποτελούνται από την ικανότητα μετάφρασης σε συμβολική, σε εικονική και σε λεκτική αναπαράσταση και από την ικανότητα των μαθητών να κατασκευάζουν σχέδια για να δείξουν συγκεκριμένους κλασματικούς αριθμούς. Παρόμοια, βρέθηκε ότι οι διασυνδέσεις αποτελούνται από την ικανότητα μετατροπής κλασμάτων σε δεκαδικούς, σε ποσοστά και από την ικανότητα διασύνδεσης της έννοιας του κλάσματος με τη διαίρεση αριθμητής ÷παρονομαστής και η ικανότητα του αναστοχασμού από την ικανότητα αιτιολόγησης της σκέψης και της απάντησης σε προβλήματα με κλάσματα, από τη λογικότητα της απάντησης και επαλήθευσης της απάντησης. Αυτά τα αποτελέσματα υποδεικνύουν στους εκπαιδευτικούς τις ικανότητες τις οποίες πρέπει να αναπτύξουν οι μαθητές προκειμένου να θεωρούνται ικανοί στις αναπαραστάσεις, στις διασυνδέσεις και στον αναστοχασμό.

Η συνεισφορά όλων των παραγόντων στην κατανόηση των κλασμάτων ήταν σημαντική, όμως οι αναπαραστάσεις είχαν τη μεγαλύτερη συνεισφορά. Η συνεισφορά κάθε παράγοντα αποτελεί και δείκτη της σημασίας που πρέπει να αποδοθεί σε αυτόν κατά τη διδασκαλία των κλασμάτων.

Οι διδασκαλίες για την ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών στους παράγοντες στα πλαίσια του υφιστάμενου παρεμβατικού προγράμματος μπορούν να τύχουν αξιοποίησης για τη βελτίωση της ικανότητας των μαθητών Στ΄ τάξης στους παράγοντες. Ιδιαίτερα για τη βελτίωση των αδύνατων μαθητών σε παράγοντες όπως οι ορισμοί και οι μαθηματικές εξηγήσεις, οι αναπαραστάσεις και ο αναστοχασμός, το παρεμβατικό πρόγραμμα ήταν αποτελεσματικό, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι δεν είναι αποτελεσματικό για τους μέτριους και τους περισσότερο ικανούς μαθητές, αφού από τα αποτελέσματα των στατιστικών αναλύσεων δεν μπορούν να εξαχθούν ασφαλή συμπεράσματα. Οι εκπαιδευτικοί στα πλαίσια της διδασκαλίας μπορούν να αξιοποιήσουν όλες τις διδασκαλίες του παρεμβατικού προγράμματος, μέρος αυτών ή μέρος των δραστηριοτήτων. Πρέπει να τονιστεί ότι τα αποτελέσματα για τους αδύνατους μαθητές είναι ιδιαίτερα σημαντικά, αφού είναι αυτή η ομάδα μαθητών που χρειάζεται περισσότερη προσοχή και μεγαλύτερη στήριξη για την κατανόηση μιας δύσκολης έννοιας όπως αυτής των κλασμάτων (Misquitta, 2011).

Τα αποτελέσματα για το ρυθμό ανάπτυξης της κατανόησης των κλασμάτων και των παραγόντων που τη συνθέτουν μπορούν να τύχουν αξιοποίησης από τους εκπαιδευτικούς, αφού παρέχουν μια εικόνα για την εξέλιξη της κατανόησης των κλασμάτων και των επιμέρους παραγόντων για τους αδύνατους μαθητές. Έτσι, οι εκπαιδευτικοί θα είναι σε θέση να γνωρίζουν πότε επέρχεται επιβράδυνση της ανάπτυξης ή πότε είναι πιο πρόσφορο το έδαφος για να επιτευχθεί επιτάχυνση. Τα αποτελέσματα για το ρυθμό ανάπτυξης παρέχουν χρήσιμες πληροφορίες στους εκπαιδευτικούς όσον αφορά ποια χρονική στιγμή είναι καταλληλότερη για να επέμβουν με στόχο τη βελτίωση της κατανόησης των κλασμάτων και της ικανότητας των αδύνατων μαθητών στους παράγοντες, αλλά και για το σχεδιασμό της διδασκαλίας τους καθόλη τη διάρκεια του σχολικού έτους.

Τα αποτελέσματα για τα ιεραρχικά επίπεδα σχετικά με την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος, υποδεικνύουν στους εκπαιδευτικούς σε ποιους από τους προτεινόμενους παράγοντες είναι επαρκείς οι αδύνατοι μαθητές, σε ποιους οι μέτριοι μαθητές και σε ποιους παράγοντες οι μαθητές που έχουν κατακτήσει ένα ανώτερο επίπεδο κατανόησης των κλασμάτων. Αυτά τα αποτελέσματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε πρώτη φάση για την αξιολόγηση των μαθητών. Συγκεκριμένα, υποδεικνύουν στους εκπαιδευτικούς σε ποιους παράγοντες αναμένεται οι μαθητές να συναντήσουν περισσότερες δυσκολίες και σε ποιους λιγότερες και ποιες μπορεί να είναι οι απαιτήσεις των εκπαιδευτικών από τους μαθητές στους εν λόγω παράγοντες, ανάλογα με την κατηγορία στην οποία ανήκουν. Επίσης, τα αποτελέσματα μπορούν να τύχουν αξιοποίησης για τον προγραμματισμό της διδασκαλίας των παραγόντων και πώς μπορούν να βελτιώσουν εκείνους τους μαθητές που παρουσιάζουν ανεπάρκεια σε συγκεκριμένους παράγοντες (αναλόγως της κατηγορίας στην οποία εντάσσονται).

Τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για σκοπούς μέτρησης και αξιολόγησης της κατανόησης των κλασμάτων, αφού έχει αναπτυχθεί έγκυρο και αξιόπιστο εργαλείο μέτρησης της κατανόησης των κλασμάτων. Επιπρόσθετα, τα έργα που χρησιμοποιήθηκαν ήταν κατάλληλα για τη μέτρηση και την αξιολόγηση των επιμέρους παραγόντων.

Εισηγήσεις για Περαιτέρω Έρευνα

Στην παρούσα εργασία επιλέγηκαν τα κλάσματα για την εξέταση του προτεινόμενου μοντέλου. Σε μια μελλοντική έρευνα το προτεινόμενο μοντέλο μπορεί να εξεταστεί και για άλλες έννοιες. Με αυτό τον τρόπο θα εξεταστεί η γενικευσιμότητα του μοντέλου σε οποιαδήποτε έννοια των μαθηματικών του δημοτικού σχολείου. Με παρόμοιο σκεπτικό, μπορούν να σχεδιαστούν και να εφαρμοστούν παρεμβατικά προγράμματα για τη διδασκαλία της κατανόησης άλλων μαθηματικών εννοιών. Αυτό θα επιτρέψει και το σχεδιασμό Α.Π. των μαθηματικών που θα προάγουν την κατανόηση και την ετοιμασία κατάλληλων σχολικών εγχειριδίων.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction*, *16*(3), 183-198. doi:10.1016/j.learninstruc.2006.03.001

Artigue, M., Bartolini Bussi, M., Dreyfus, T., Gray, E., & Prediger, S. (2007). Different theoretical perspectives and approaches in research in mathematics education. *Proceedings of the 4th Conference of the European Society of Mathematics Education* (pp. 1239-1244). Sant Feliu de Guíxols, Spain.

Arzarello, F., Bosch, M., Lenfant, A., & Prediger, S. (2007). Different theoretical perspectives in research from teaching problems to research problems. *Proceedings of the 5th Conference of the European Society of Mathematics Education* (pp. 1618-1628). Larnaka, Cyprus.

Balacheff, N. (2008). The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 501-512. DOI 10.1007/s11858-008-0103-2

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children* (pp. 216-235). Hodder and Stoughton, London.

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, W.G. Martin and D. Schifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 27–44). National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA.

Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N., & Movshovitz-Hadar, N. (2002). The teaching of proof. In L.I.Tatsien (Ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. III* (pp. 907–920). Higher Education Press, Beijing.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 296-333). New York: Macmillan.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes,* (pp. 91-126). New York: Academic Press.

Bergsten, C. (2007). How do theories influence the research on teaching and learning limits of functions? *Proceedings of the 5th Conference of the European Society of Mathematics Education* (pp. 1638-1648). Larnaka, Cyprus.

Biggs, J. B., & Collis, K. F. (1991). Multimodal Learning and the Quality of Intelligent Behavior. In Rowe H. A. H. (Ed.), *Intelligence: Reconceptualization and Measurement.* Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey.

Bikner-Ahsbahs, A., & Prediger, S. (2010). Networking of theories – An approach for exploiting the diversity of theoretical approaches. In Bharath, S. & English, L. (Eds), *Theories of Mathematics Education: Seeking New Frontiers.* Springer Heidelberg Dordrecht London New York. DOI: 10.1007/978-3-642-00742-2_46

Bikner-Ahsbahs, A., & Prediger, S. (2006). Diversity of theories in mathematics education - How can we deal with it? *International Reviews on Mathematical Education (ZDM), 38*(1), 52-57. DOI: 10.1007/BF02655905

Bills, L., & Watson, A. (2008). Editorial introduction. *Educational Studies in Mathematics, 69,* 77-79. DOI 10.1007/s10649-008-9147-z

Biza, I., & Zachariades, T. (2010). First year mathematics undergraduates' settled images of tangent line. *Journal of Mathematical Behavior, 29,* 218-229. doi:10.1016/j.jmathb.2010.11.001

Bloch, I. (2005). Conceptualization through semiotic tools in teaching/learning situations. *Paper presented at the 4th CERME Conference* (pp. 1274-1284). Sant Feliu de Guíxols, Spain.

Bosch, M., Chevallard, Y., & Gascón, J. (2005). Science or magic? The use of models and theories in didactics of mathematics. *Paper presented at the 4th CERME Conference* (pp. 1254-1263). Sant Feliu de Guíxols, Spain.

Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). The didactics of mathematics sensibility to ostensive objects. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 19*(1), 77–124.

Brousseau, G. (1997). Theory of Didactical Situations in Mathematics. *Didactique des mathématiques, 1970-1990.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Brown, R. S. (2000). Using Latent Class Analysis To Set Academic Performance Standards. *Paper Presented at the Annual Meeting of the American Research Association* (44p). New Orleans, LA.

Butler, F. M., Miller, S. P., Crehan, K., Babbitt, B., & Pierce, T. (2003). Fraction Instruction for Students with Mathematics Disabilities: Comparing Two Teaching Sequences. *Learning Disabilities Research & Practice, 18*(2), 99-111.

Carpenter, T. P., Kepner, H., Corbitt, M. K., Lindquist, M. M., & Reys, R. E. (1980). Results and implications of the Second NAEP Mathematics Assessments: Elementary school. *Arithmetic Teacher, 2*(8), 10–13.

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics, 64,* 293-316. DOI: 10.1007/s10649-006-9036-2

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Christou, C., & Papageorgiou, E. (2007). A framework of mathematics inductive reasoning. *Learning and Instruction, 17,* 55-66. doi:10.1016/j.learninstruc.2006.11.009

Clarke, D. M., & Roche, A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics, 72*(1), 127-138. DOI: 10.1007/s10649-009-9198-9

Cobb, P., & Yackel, E. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.

Davis, G., Hunting, R. P., & Pearn, C. (1993).What might a fraction mean to a child and how would a teacher know? *The Journal of Mathematical Behaviour, 12*(1), 63–76.

De Koning, E., Hamers, J. H. M., Sijtsma, K., & Vermeer, A. (2002). Teaching Inductive Reasoning in Primary Education. *Developmental Review, 22,* 211–241. doi:10.1006/drev.2002.0548

De Koning, E., & Hamers, J. H. M. (1995). *Programma Inductief Redeneren 1* [Program Inductive Reasoning I]. Utrecht: Utrecht University Press ISOR.

Deliyianni, E., Elia, I., Gagatsis, A., & Panaoura, A. (2008). The structure of fraction addition understanding: A comparison between the hierarchical clustering of variables, implicative statistical analysis and confirmatory factor analysis. *Research in Mathematics Education, Conference of five cities: Nicosia, Rhodes, Bologna, Palermo, Locarno* (pp. 23-37). School of Social Sciences and Sciences of Education, University of Cyprus, Nicosia.

Demetriou, A., Doise, W., & van Lieshout, C. F. M. (1988). *Life-Span Developmental Psychology.* England: John Wiley & Sons Ltd.

Dienes, Z. P. (1960). *Building up mathematics.* London: Hutchinson Educational Press.

Desoete, A. (2009). Metacognitive prediction and evaluation skills and mathematical learning in third-grade students. *Educational Research and Evaluation, 15*(5), 435-446.

DOI: 10.1080/13803610903444485

Desoete, A., & Roeyers, H. (2006). Metacognitive macroevaluations in mathematical problem solving. *Learning and Instruction, 16*(1), 12-25. doi:10.1016/j.learninstruc.2005.12.003

Desoete, A., Roeyers, H., & Buysse, A. (2001). Metacognition and mathematical problem solving in grade 3. *Journal of Learning Disabilities, 34*, 435–449.

Ding, C. S., & Davison, M. L. (2005). A longitudinal study for math achievement gains for initially low achieving students. *Contemporary Educational Psychology, 30,* 81-95. doi:10.1016/j.cedpsych.2004.06.002

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall, (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In Derek Holton, et al. (Eds), *The Teaching and Learning of Mathematics at the University Level: An ICMI Study* (pp. 273-280). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands.

Duncan, T. E., Duncan, S. C., Strycker, L. A., Li, F., & Alpert, A. (1999). *An Introduction to Latent Variable Growth Curve Modeling. Concepts, Issues and Applications.* Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, New Jersey.

Duval, R. (1997). La comprehension des énoncés de problem de mathématisation: de la lecture á la resolution. In D' Amore, B. & Gagatsis, A. (Eds.), *Didactics of Mathematics-Technology in Education* (pp. 25-46). Thessaloniki: Erasmus ICP-96-G-2011/11.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61,* 103-131. DOI: 10.1007/s10649-006-0400-z

Duval, R. (2002). The Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in the Learning of Mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 1*(2), 1-16.

Elbers, E. (2003). Classroom interaction as reflection: Learning and teaching mathematics in a community of inquiry. *Educational Studies in Mathematics, 54,* 77-99. DOI: 10.1023/B:EDUC.0000005211.95182.90

Ευκλείδη, Α. (1983). *Συμβολή στην ψυχολογική μελέτη του διαλογισμού με υποθετικές προτάσεις: Το είδος της άρσης στο λόγο ή στην ακολουθία και η επίδρασή του στην εξαγωγή συμπερασμάτων.* Διδακτορική διατριβή. Θεσσαλονίκη: Φιλοσοφική Σχολή Α.Π.Θ.

Evens, H., & Houssart, J. (2004). Categorizing Pupils' Written Answers to a Mathematics Test Question: "I Know but I Can't Explain". *Educational Research, 46*(3), 269-282. DOI: 10.1080/0013188042000277331

Fantuzzo, J. W., Gadsden, V. L., & McDermott, P. A. (2010). An Integrated Curriculum to Improve Mathematics, Language, and Literacy for Head Start Children. *American Educational Research Journal, 48*(3), 763-793. DOI: 10.3102/0002831210385446

Fishbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Forster, P. A., & Taylor, P. C. (2000). A multiple-perspective analysis of learning in the presence of technology. *Educational Studies in Mathematics, 42,* 35-59. DOI: 10.1023/A:1004053819533

Gagatsis, A. & Patronis, T. (1990). Using geometrical models in a process of reflective thinking in learning and teaching mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 21*, 29-54. DOI: 10.1007/BF00311014

Γαγάτσης, Α., Μιχαηλίδου, Ε., & Σιακαλλή, Μ. (2001). *Θεωρίες αναπαράστασης και μάθηση των μαθηματικών.* Λευκωσία: ERASMUS IP 1.

Gay, S. A., & Aichele, D. B. (1997). Middle school students' understanding of number sense related to percent. *School Science and Mathematics, 97*(1), 27-36. DOI: 10.1111/j.1949-8594.1997.tb17337.x

Gellert, U. (2007). Emergence or structure: A comparison of two sociological perspectives on mathematics classroom practice. *Proceedings of the 5th Conference of the European Society of Mathematics Education* (pp. 1668-1778). Larnaka, Cyprus.

Goldin, G.A. (1990). Chapter 3: Epistemology, Constructivism and Discovery Learning in Mathematics, *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph Vol. 4*, Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics (pp. 31-47+195-210). National Council of Teachers of Mathematics.

Goldin, G. A., & Kaput, J. J. (1996). A joint perspective of the idea of representation in learning and doing mathematics. In von L. P. Steffe & Mahwah (Eds.), *Theories of Mathematical Learning* (pp. 397-430). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Gray, E. & Tall, D. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 115-141.

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1991). Duality, ambiguity and flexibility in successful mathematical thinking. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the Fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2* (pp. 72-79). Assisi, Italy.

Hannula, M., Evans, J., Philippou, G., & Zan, R. (2004). Affect in Mathematics Education – Exploring Theoretical Frameworks. Research Forum. *Proceedimgs of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol I* (pp. 107-136). Bergen, Norway.

Harel, G., & Sowder, L. (1996). Classifying processes of proving. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME International Conference, 3*, 59–66.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. Schoenfeld, J. Kaput & E. Dubisnky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234-282). Providence, RI, USA: American Mathematical Society.

Haverty, L.A., Koedinger, K. R., Klahr, D., & Alibali, M .W. (2000). Solving inductive reasoning problems in mathematics: Not-so-trivial pursuit. *Cognitive Science 24*(2), 249-298.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). Proof conceptions in algebra, *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(4), 396–428.

Hiebert, J. & Carpenter, T.P. (1992). Learning and teaching with understanding. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. NCTM.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics.* Hillsdale, NJ, England: Lawrence Erlbaum Associates.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K., Human, P., Murray, H., Olivier A., & Wearne, D. (1996). Problem Solving as a Basis for Reform in Curriculum and Instruction: The Case of Mathematics. *Educational Researcher*, *25*(4), 12-21. doi: 10.3102/0013189X025004012

Hoffman, B., & Spatariu, A. (2008). The influence of self-efficacy and metacognitive prompting on math problem-solving efficiency. *Contemporary Educational Psychology, 33* (4), 875-893. doi:10.1016/j.cedpsych.2007.07.002

Izsák, A. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching Fraction Multiplication. *Cognition and Instruction, 26*(1), 95-143. DOI: 10.1080/07370000701798529

Janvier, C. (1987). Translation Processes in Mathematics Education. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 27-32). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaldrimidou, M., & Tzekaki, M. (2005). Theoretical issues in research of mathematics education: some considerations. *Proceedings of the 4th Conference of the European Society of Mathematics Education* (pp. 1244-1254). Sant Feliu de Guíxols, Spain.

Kaldrimidou, M., Sakonidis, H., & Tzekaki, M. (2005). On the nature of the mathematical knowledge under construction in the classroom. *Proceedings of the 5th Conference of the European Society of Mathematics Education* (pp. 1698-1708). Larnaka, Cyprus.

Kaput, J. J. (1987). Representation Systems and Mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 19-26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Ketterlin-Geller, L. R., Chard, D. J., & Fien, H. (2008). Making Connections in Mathematics. Conceptual Mathematics Intervention for Low-Performing Students. *Remedial and Special Education, 29*(1), 33-45. DOI: 10.1177/0741932507309711

Kidron, I. (2005). Conceptualization of the limit by means of the discrete continuous interplay: different theoretical approaches. *Proceedings of the 4th Conference of the European Society of Mathematics Education* (pp. 1295-1305). Sant Feliu de Guíxols, Spain.

Kidron, I., Lenfant, A., Bikner-Ahsbahs, A., Artigue, M., & Dreyfus, T. (2007). Social interaction in learning processes as seen by three theoretical frameworks. *Proceedings of the 5th Conference of the European Society of Mathematics Education* (pp. 1708-1725). Larnaka, Cyprus.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In R. Lesh (Ed.), *Number and Measurement: Papers from a Research Workshop ERIC/SMEAC* (pp. 101-144). Columbus, OH.

Kitcher, P. (1984). *The Nature of Mathematical Knowledge.* Oxford University Press, NewYork, NY.

Klauer, K. J. (1999). Fostering higher order reasoning skills: The case of inductive reasoning. In J. H. M. Hamers, J. E. H. Van Luit & B. Csapó (Eds.), *Teaching and learning thinking skills* (pp. 131-155). Lisse, The Netherlands: Swets & Zeitlinger.

Klauer, K. J. (1996). Teaching inductive reasoning: some theory and three experimental studies. *Learning and Instruction, 6,* 37-57.

Klauer, K. J. (1992). Teaching inductive thinking to highly able children. *European Journal for High Ability, 3,* 164-180.

Klauer, K. J. (1989). *Cognitive training for children I.* Göttingen: Hogrefe.

Klauer, K. J., & Phye, G. D. (2008). Inductive reasoning: A training approach. *Review of Educational Research, 78*(1), 85-123. DOI: 10.3102/0034654307313402

Klauer, K. J., Willmes, K., & Phye, G. D. (2002). Inducing inductive reasoning: Does it transfer to fluid intelligence? *Contemporary Educational Psychology, 27,* 1-25. doi:10.1006/ceps.2001.1079

Klauer, K. J., & Phye, G. (1994). *Cognitive training for children: A developmental program of inductive reasoning and problem solving.* Seattle: Hogrefe & Huber Publishers.

Koyama, M. (1998). Students' representations of fractions in a regular elementary school mathematics classroom. *Hiroshima Journal of Mathematics Education, 6,* 1-11.

Koyama, M. (1997). Students' representations of fractions in a regular elementary school mathematics classroom. *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 160-167). Lahti, Finland.

Kramarski, B., Mevarech, Z., & Arami, M. (2002). The effects of metacognitive instruction on solving mathematical authentic tasks. *Educational Studies in Mathematics, 49*(2), 225-250. DOI: 10.1023/A:1016282811724

Κυριακίδη, Α., Χατζησίμου, Κ., & Γραικού, Κ. (2001). Αναπαραστάσεις κλασμάτων και ο μετασχηματισμός τους από μαθητές Δημοτικού. Στων Α. Γαγάτσης, & Γ. Μακρίδης (Εκδ.), *Τέταρτο Παγκύπριο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας και Συμπόσιο Αστροναυτικής και Διαστήματος* (σσ. 237-245). Λάρνακα: Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία.

Kuhn, D. (1999). A Developmental Model of Critical Thinking. *Educational Researcher, 28* (2), 16-46.

Kuhn, D. (1989). Children and Adults as Intuitive Scientists. *Psychological Review, 96*(4), 674-689.

Lamon, S. J. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding*. Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, New Jersey.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of*

Representation in the Teaching and Learning of Mathematics (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Levenson, E. (2010). Fifth-grade students' use and preferences for mathematically and practically based explanations. *Educational Studies in Mathematics, 73,* 121-142. DOI: 10.1007/s10649-009-9208-y

Levenson, E., Tsamir, P., & Tirosh, D. (2007a). Neither even nor odd: Sixth grade students' dilemmas regarding the parity of zero. *Journal of Mathematical Behavior, 26*, 83-95. doi:10.1016/j.jmathb.2007.05.004

Levenson, E., Tsamir, P., & Tirosh, D. (2007b). First and second graders' use of mathematically-based and practically-based explanations for multiplication with zero. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 29*(2), 21–40.

Lucangeli, D., & Cornoldi, C. (1997). Mathematics and Metacognition: What is the nature of their relationship? *Mathematical Cognition, 3*(2), 121-139.

Maccini, P., Mulcahy, C. A., & Wilson, M. G. (2007). A Follow-Up of Mathematics Interventions for Secondary Students with Learning Disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice, 22*(1), 58-74.

Mack, N. K. (1990). Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 21* (1), 16-32.

Marcoulides, G. A., & Schumacker, R. E. (1996). *Advanced structural equation modeling: Issues and techniques*. NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Marshall, S.P. (1993). Assessment of rational number understanding: A schema-based approach. In T.P. Carpenter, E. Fennema, & T.A. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp. 261–288). Lawrence Erlbaum Associates, New Jersey.

Martino, A., & Maher, C. (1999). Teacher Questioning to Promote Justification and Generalization in Mathematics: What Research Practice Has Taught Us. *Journal of Mathematical Behavior, 18*(1), 53-78. doi:10.1016/S0732-3123(99)00017-6

Mazzocco, M. M. M., & Devlin, K. T. (2008). Parts and 'holes': gaps in rational number sense among children with vs. without mathematical learning disabilities. *Developmental Science, 11*(5), 681-691. DOI: 10.1111/j.1467-7687.2008.00717.x

Μιχαηλίδου, Ε. (2004). Ικανότητα μετατροπής ανάμεσα στα κλάσματα, δεκαδικούς και ποσοστά: Εφαρμογή σε μαθητές πέμπτης Δημοτικού. Στων Α. Γαγάτση, Α. Ευαγγελίδου, Ι. Ηλία, & Π. Σπύρου (Εκδ.), *Αναπαραστάσεις και μάθηση των μαθηματικών, Τόμος Ι: Επίλυση προβλημάτων, μοντέλα και συναρτήσεις* (σσ. 195-215). Λευκωσία 2004.

Misquitta, R. (2011). A Review of the Literature: Fraction Instruction for Struggling Learners in Mathematics. *Learning Disabilities Research & Practice, 26*(2), 109-119.

Moss, J. & Case, R. (1999). Developing Children's Understanding of Rational Numbers: A New Model and an Experimental Curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 122-147.

Muthén, B. O. & Khoo, S. (1998). Longitudinal studies of achievement growth using latent variable modeling. *Learning and Individual Differences, 10*(2), 73-101.

Muthén, L., & Muthén, B. (2004). *Mplus User's Guide. Third Edition.* Los Angeles, CA: Muthén & Muthén.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston: NCTM.

Newstead, K., & Murray, H. (1998). Young students' constructions of fraction. *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education.* Stellenbosch, South Africa: University of Stellenbosch.

Niemi, D. (1996a). Assessing conceptual understanding in Mathematics: Representations, Problem Solutions, Justifications and Explanations. *Journal of Educational Research, 89*(6), 351-363.

Niemi, D. (1996b). *Instructional influences on content area, explanations and representational knowledge: Evidence for the construct validity of measures of principled understanding.* National Center for Research on Evaluation, Standards, and Student Testing (CRESST). University of California, Los Angeles.

Niemi, D. (1996c). A Fraction Is Not a Piece of Pie: Assessing Exceptional Performance and Deep Understanding in Elementary School Mathematics. *Gifted Child Quarterly, 40* (2), 70-80.

Noelting, G. (1978). The development of proportional reasoning in the child and adolescent through combination of logic and arithmetic. *Proceedings of the Second PME Conference* (pp. 242–277). University of Osnabruck, West Germany.

Ontario Curriculum (2005). *Grades 1-8. Mathematics.* Ministry of Education.

Oppenheimer, L., & Hunting, R. P. (1999). Relating fractions & decimals: listening to students talk. *Mathematics Teaching in the Middle School, 4*(5), 318-321.

Panaoura, A., Gagatsis, A., Deliyianni, E., & Elia, I. (2009). The Structure of Students' Beliefs about the Use of Representations and Their Performance on the Learning of Fractions. *Educational Psychology, 29*(6), 713-728. DOI: 10.1080/01443410903229437

Παπαγεωργίου, Ε. (2006). *Ο επαγωγικός συλλογισμός στα Μαθηματικά. Σχέσεις και αλληλεπιδράσεις με γενικές ικανότητες.* Διδακτορική Διατριβή. Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Pegg, J., & Tall, D. (2010). The fundamental cycle of concept construction underlying various theoretical frameworks. In Bharath, S. & English, L. (Eds), *Theories of Mathematics Education: Seeking New Frontiers*. Springer Heidelberg Dordrecht London New York.

Pegg, J., & Tall, D. O. (2005). The fundamental cycle of concept construction underlying various theoretical frameworks. *International Reviews on Mathematical Education (ZDM), 37*(6), 468–475.

Piaget, J. (1950). *The psychology of intelligence.* London: Routledge & Kegan Paul.

Pirie, S., & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: how can we characterize it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics, 26*, 165-190.

Pitta-Pantazi, D., Christou, C., & Zachariades, T. (2007). Secondary school students' levels of understanding in computing exponents. *Journal of Mathematical Behavior, 26,* 301-311. doi:10.1016/j.jmathb.2007.11.003

Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving*. Wiley Combined Edition, New York.

Post, T., Behr, M., & Lesh, R. (1986). Research-based observations about children's learning of rational number concepts. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 8*(1), 39–48.

Prediger, S., & Ruthven, K. (2007). From teaching problems to research problems. Proposing a way of comparing theoretical approaches. *Proceedings of the 5th Conference of the European Society of Mathematics Education* (pp. 1745-1782). Larnaka, Cyprus.

Rips, L. J. (1990). Reasoning. *Annual Review of Psychology, 41,* 85-116.

Sanders, C. E., Phye, G. D., & Hegland, S. M. (1991). Inductive reasoning enhances performance on an inductive transfer task. *Paper presented at the Meeting of the American Psychological Society.* Washington, D. C.

Schoenfeld, A.H. (1994). What do we know about mathematics curricula? *Journal of Mathematical Behavior, 13,* 55–80.

Seeger, F. (1998). Representations in the Mathematical Classroom: Reflections and Constructions. In von F. Seeger, J. Voigt, & U. Waschescio (Eds.), *The Culture of the Mathematics Classroom* (pp. 308-343). Cambridge: Cambridge UP.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22,* 1-36. DOI: 10.1007/BF00302715

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics.* The Falmer Press Ltd., London.

Sierpinska, A., Bobos, G., Pruncut, A. (2011). Teaching absolute value inequalities to mature students. *Educational Studies in Mathematics, 78,* 275-305. DOI 10.1007/s10649-011-9325-2

Sierpinska, A., Nnadozie, A., & Oktaç, A. (2002). *A study of relationships between theoretical thinking and high achievement in linear algebra.* Unpublished research report. Retrieved from http://annasierpinska.wkrib.com/pdf/Sierpinska-TT-Report.pdf

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77*, 20-26.

Sowder, J. (1988). Mental computation and number comparisons: Their roles in the development of number sense and computational estimation. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 182-197). Hillsdale: NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Sriraman, B., & English, L. (2010). *Theories of Mathematics Education: Seeking New Frontiers*. Springer Heidelberg Dordrecht London New York.

Sternberg, R. (1985). *Beyond IQ: A triarchic theory of human intelligence.* Cambridge, England: Cambridge University Press.

Stillman, G. A., & Galbraith, P. L. (1998). Applying mathematics with real world connections: metacognitive characteristics of secondary students. *Educational Studies in Mathematics, 36*(2), 157-194. DOI: 10.1023/A:1003246329257

Sweeny, E., & Quinn, R. (2000). Concentration: Connecting fractions, decimals and percents. *Mathematics Teaching in the Middle School, 5*(5), 324-328.

Tall, D. (1994). Thinking through three worlds of mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4,* 281-288. Bergen, Norway.

Tall, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers, Dortrecht.

Tanaka, J. S. (1987). "How big is big enough?": Sample size and goodness of fit in structural equation models with latent variables. *Child Development, 58,* 134-146.

Terwel, J., Van Oers, B., van Dijk, I., & van den Eeden, P. (2009). Are representations to be provided or generated in primary mathematics education? Effects on transfer. *Educational Research and Evaluation, 15*(1), 25-44. DOI: 10.1080/13803610802481265

Thompson, S. C., & Walker, V. (1996). Connecting decimals and other mathematical content. *Teaching children mathematics, 8*(2), 496-502.

Tomic, W. (1995). Brief research report: Training in inductive reasoning and problem solving. *Contemporary Educational Psychology, 20,* 483-490. doi:10.1006/ceps.1995.1036

Tomic, W., & Klauer, K. J. (1996). On the effects of training inductive reasoning. How far does it transfer and how long do the effects persist? *European Journal of Psychology of Education, 11*, 283-299. DOI: 10.1007/BF03172941

Tsamir, P., Tirosh, D., & Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: the case of triangles. *Educational Studies in Mathematics, 69,* 81-95. DOI: 10.1007/s10649-008-9133-5

Vygotsky, L. (1962). *Thought and language.* Cambridge, MA: MIT Press.

Vygotsky, L.S. (1987). The Collected Works of L. S. Vygotsky. Volume 1. *Problems of General Psychology, including the volume Thinking and Speech.* Plenum Press, New York and London.

Watson, A., & Mason, J. (2005). *Mathematics as a Constructive Activity. Learners generating examples.* Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah New Jersey.

Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, W.G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 227–236). National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics, 69,* 131-148. DOI: 10.1007/s10649-008-9131-7

Zan, R., Brown, L., Evans, J., & Hannula, M. (2006). Affect in Mathematics Education: An Introduction. *Educational Studies in Mathematics, 63*(2), 113-121. DOI: 10.1007/s10649-006-9028-2

Zhang, D., Zhao, H., & Yang, H. (2009). Fostering mathematical reflective abilities through high school teaching activities. *Frontiers of Education in China, 4*(4), 541-557. DOI 10.1007/s11516-009-0030-1

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Τα Δύο δοκίμια που Χορηγήθηκαν στην Πιλοτική Φάση

Δοκίμιο 1

<u>**Δοκίμιο στα κλάσματα**</u>

Ονοματεπώνυμο: ....

Το δοκίμιο που έχεις μπροστά σου αναφέρεται στα κλάσματα. Να απαντήσεις σε όλες τις ερωτήσεις, αφού διαβάσεις πρώτα τις οδηγίες κάθε ερώτησης.

1. Σε τι μοιάζουν τα κλάσματα που βρίσκονται στο ορθογώνιο;

$\frac{1}{3} \quad \frac{7}{3} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{8}{3}$

....

....

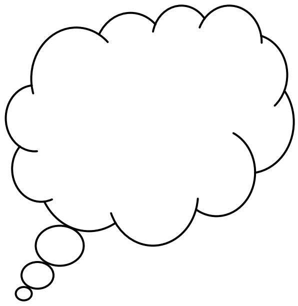
2. Από τους πιο κάτω αριθμούς, να επιλέξεις κάποιους που μοιάζουν σε κάτι. Να γράψεις τους αριθμούς που επέλεξες στο συννεφάκι και να δώσεις όνομα στην κατηγορία που έφτιαξες.

$\frac{5}{2} \quad \frac{4}{16} \quad \frac{4}{7} \quad \frac{4}{3}$

15% $\quad$ 0,3 $\quad \frac{4}{9}$

Όνομα: ………………………..

....



3. Ένα από τα πιο κάτω κλάσματα διαφέρει από τα υπόλοιπα. Να βρεις το διαφορετικό κλάσμα και να το βάλεις σε κύκλο.

$\frac{2}{7} \qquad \frac{3}{2} \qquad \frac{14}{49} \qquad \frac{10}{35} \qquad \frac{4}{14}$

4. Συνέχισε τα μοτίβα.

$\frac{2}{3}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{2}{12}$ $\frac{2}{24}$ ....

$\frac{3}{4}$ $\frac{6}{8}$ $\frac{9}{12}$ $\frac{12}{16}$ ....

5. Στην πιο κάτω σειρά υπάρχει ένα κλάσμα που χαλάει το μοτίβο. Αν φύγει αυτό το κλάσμα, θα διορθωθεί η σειρά. Να βάλεις σε κύκλο το κλάσμα που χαλάει το μοτίβο.

$\frac{39}{6}$ $\frac{33}{6}$ $\frac{27}{6}$ $\frac{21}{6}$ $\frac{13}{6}$

6. Στην πιο κάτω σειρά υπάρχει ένα κλάσμα που χαλάει το μοτίβο. Αν φύγει αυτό το κλάσμα, θα διορθωθεί η σειρά. Να βάλεις σε κύκλο το κλάσμα που χαλάει το μοτίβο.

$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{25}$

7. Να συμπληρώσεις το άδειο κουτί με το κατάλληλο κλάσμα.

$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{4}$
$\frac{1}{8}$		$\frac{9}{8}$

8. Φαντάσου ότι ο δάσκαλος ή η δασκάλα σου ζητούσε να εξηγήσεις σε κάποιο συμμαθητή σου τι είναι κλάσμα. Να εξηγήσεις στο συμμαθητή σου με όσους περισσότερους τρόπους μπορείς.

9. Φαντάσου ότι ο δάσκαλος ή η δασκάλα σου ζητούσε να εξηγήσεις σε κάποιο συμμαθητή σου πότε δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα. Μπορείς να εξηγήσεις στο συμμαθητή σου με όποιο τρόπο θέλεις.

10. Πότε λέμε ότι δύο κλάσματα είναι ομώνυμα;

11. Πότε λέμε ότι δύο κλάσματα είναι ετερώνυμα;

12. Φαντάσου ότι ο δάσκαλος ή η δασκάλα σου ζητούσε να εξηγήσεις σε κάποιο συμμαθητή σου γιατί τα $\frac{2}{5}$ είναι μικρότερα από τα $\frac{4}{8}$. Να εξηγήσεις στο συμμαθητή σου με όσους περισσότερους τρόπους μπορείς.

13. Πόσα κλάσματα υπάρχουν μεταξύ του 0 και του 1; Να εξηγήσεις την απάντησή σου.

Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να βάλεις σε κύκλο το Σ αν είναι σωστή ή το Λ αν είναι λανθασμένη. Στη συνέχεια, να εξηγήσεις τον τρόπο που σκέφτηκες για να απαντήσεις. **Πρέπει οπωσδήποτε να εξηγήσεις τον τρόπο που σκέφτηκες για να απαντήσεις.**

14. Τα κλάσματα $\frac{16}{10}$ και $\frac{5}{8}$ είναι ισοδύναμα.

Σ	Λ

Εξήγηση:
………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

15. Όταν σε ένα κλάσμα μεγαλώσω τον παρονομαστή και ο αριθμητής μείνει ο ίδιος, τότε το κλάσμα γίνεται μικρότερο.

Σ	Λ

Εξήγηση:
………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

16. Όλα τα κλάσματα είναι μικρότερα από το 1.

Σ	Λ

Εξήγηση:
………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

17. Όταν διπλασιάσω και τον αριθμητή και τον παρονομαστή ενός κλάσματος, τότε το κλάσμα που δημιουργώ έχει διπλάσια αξία από το αρχικό.

Σ	Λ

Εξήγηση: ………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

18. Όταν ο αριθμητής του κλάσματος είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή, τότε το κλάσμα είναι μεγαλύτερο του 1.

Σ	Λ

Εξήγηση: ....

....

....

19. 7 παιδιά πρόκειται να μοιραστούν 4 σοκολάτες. Αν ο αριθμός των σοκολάτων που θα μοιραστούν τα παιδιά αυξηθεί, τότε το κάθε παιδί θα πάρει περισσότερη σοκολάτα.

Σ	Λ

Εξήγηση: ....

....

....

20. Υπάρχει κάποιο κλάσμα μεταξύ του $\frac{1}{4}$ και του $\frac{1}{3}$.

Σ	Λ

Εξήγηση: ....

....

....

<u>**Δοκίμιο στα κλάσματα**</u>

Ονοματεπώνυμο: ....

Το δοκίμιο που έχεις μπροστά σου αναφέρεται στα κλάσματα. Να απαντήσεις σε όλες τις ερωτήσεις, αφού διαβάσεις πρώτα τις οδηγίες κάθε ερώτησης.

21) Να συγκρίνεις τα παρακάτω κλάσματα χρησιμοποιώντας τα σύμβολα > = <

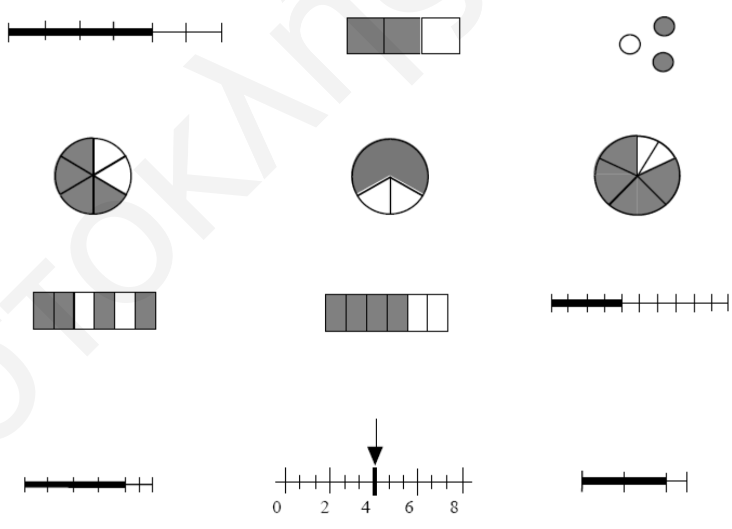
Α) $\frac{3}{7}$ $\frac{3}{9}$ Β) $\frac{2}{7}$ $\frac{6}{21}$ Γ) $\frac{1}{3}$ $\frac{3}{8}$ Δ) $\frac{5}{4}$ $\frac{8}{9}$

Ε) $\frac{8}{7}$ $\frac{3}{7}$ ΣΤ) $\frac{2}{6}$ $\frac{10}{20}$

22) Να βάλεις τα κλάσματα $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}$ σε σειρά αρχίζοντας από το μικρότερο.

....

23) Να βάλεις σε κύκλο το σχέδιο ή τα σχέδια που δείχνουν $\frac{4}{6}$



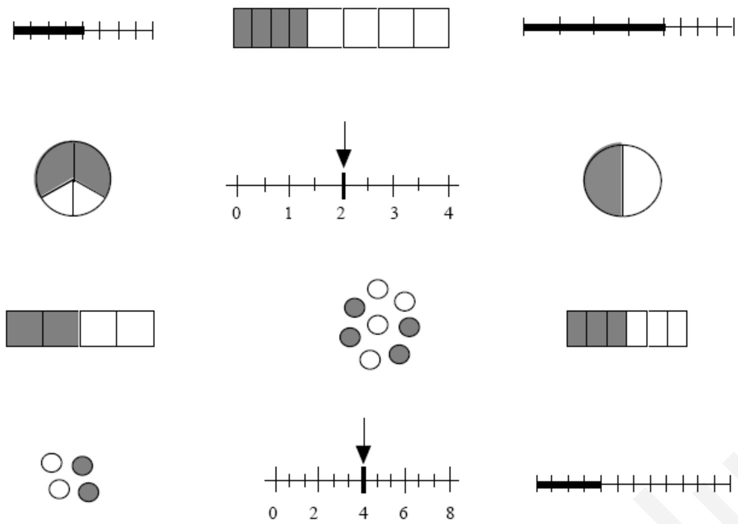
24) Να γράψεις ένα πρόβλημα που να έχει απάντηση $\frac{5}{8}$

....

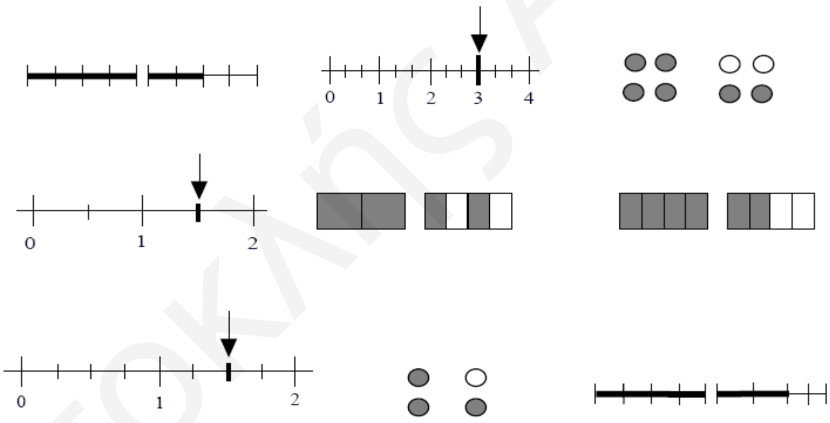
....

....

25) Να βάλεις σε κύκλο το σχέδιο ή τα σχέδια που δείχνουν $\frac{2}{4}$

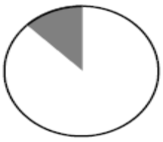


26) Να βάλεις σε κύκλο το σχέδιο ή τα σχέδια που μπορεί να δείχνουν $\frac{3}{2}$

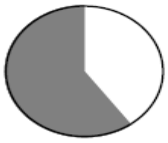


27) Να κάνεις κάποιο σχέδιο για να δείξεις το κλάσμα $\frac{5}{8}$

28) Να κυκλώσεις το κλάσμα που δείχνει καθένα από τα παρακάτω σχέδια.



$\frac{1}{9}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{3}{5}$



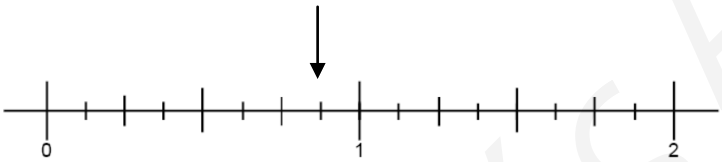
$\frac{1}{4}$ $\frac{9}{10}$ $\frac{3}{5}$

$\frac{2}{10}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{2}{3}$

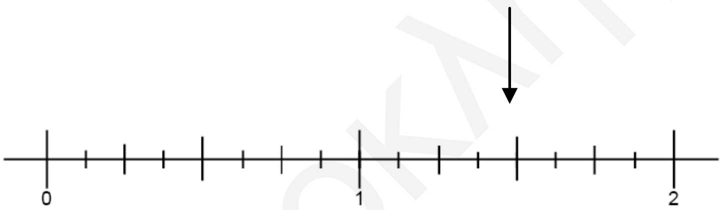
$\frac{1}{10}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{4}$

$\frac{9}{10}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{5}$

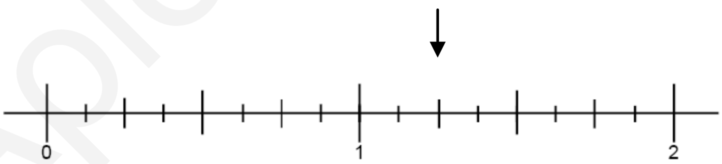
29) Να κυκλώσεις το κλάσμα που δείχνει καθεμιά από τις αριθμητικές γραμμές.



$\frac{8}{9}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{9}{10}$



$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{2}{3}$



$\frac{1}{4}$ $\frac{5}{4}$ $\frac{4}{3}$

30) Να γράψεις ένα πρόβλημα που να λύνεται με την εξίσωση $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = ν$

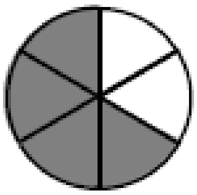
....

....

....

31) Να κάνεις κάποιο σχέδιο που να δείχνει το άθροισμα $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = ν$

32)



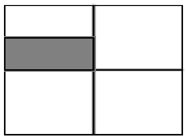
Να γράψεις ένα πρόβλημα που να λύνεται με το σχέδιο που φαίνεται πιο πάνω.

....

....

....

33)



Να γράψεις ένα πρόβλημα που να λύνεται με το σχέδιο που φαίνεται πιο πάνω.

....

....

....

34) Ο Γιώργος έχει το $\frac{1}{3}$ ενός χωραφιού και ο Νίκος το $\frac{1}{6}$ του ίδιου χωραφιού. Τι μέρος του χωραφιού έχουν και οι δύο μαζί; **Πρέπει οπωσδήποτε να γράψεις την εξίσωση.**

Εξίσωση:

Πράξεις – Απάντηση:

35) Ο Μαρίνος έφαγε το $\frac{1}{2}$ ενός γλυκίσματος και η Μαρίνα τα $\frac{3}{8}$ του ίδιου γλυκίσματος. Να κάνεις κάποιο σχέδιο για να δείξεις το κομμάτι που έφαγε το κάθε παιδί και τι μέρος του γλυκίσματος έφαγαν συνολικά.

36) Η Μαρία έφαγε το $\frac{1}{3}$ από το $\frac{1}{2}$ μιας σοκολάτας. Τι μέρος της σοκολάτας έφαγε; **Πρέπει οπωσδήποτε να γράψεις την εξίσωση.**

Εξίσωση:

Πράξεις – Απάντηση:

37) Η Νίκη έφαγε το $\frac{1}{2}$ από το $\frac{1}{4}$ μιας σοκολάτας. Να κάνεις κάποιο σχέδιο για να δείξεις τι μέρος της σοκολάτας έφαγε.

38) Να μετατρέψεις τα παρακάτω κλάσματα σε δεκαδικούς.

Α) $\frac{1}{4} =$ Β) $\frac{2}{5} =$ Γ) $\frac{3}{10} =$ Δ) $\frac{1}{20} =$

Ε) $\frac{6}{50} =$ ΣΤ) $\frac{1}{200} =$

39) Να μετατρέψεις τα παρακάτω κλάσματα σε ποσοστά.

Α) $\frac{1}{5} =$ Β) $\frac{7}{10} =$ Γ) $\frac{3}{4} =$ Δ) $\frac{13}{50} =$

Ε) $\frac{8}{25} =$ ΣΤ) $\frac{6}{200} =$

40) Να αποφασίσεις κατά πόσον οι πιο κάτω προτάσεις είναι σωστές ή λανθασμένες και να βάλεις σε κύκλο το Σ αν είναι σωστές ή το Λ αν είναι λανθασμένες.

Α) Το $\frac{2}{3}$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης του 2 διά του 3.

Σ	Λ

Β) Το $\frac{12}{7}$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης του 7 διά του 12.

Σ	Λ

Γ) Τρεις πίτσες μοιράστηκαν στα ίσα σε έξι παιδιά. Το κάθε παιδί πήρε από $\frac{3}{6}$ της πίτσας.

Σ	Λ

41) Τέσσερις μηλόπιτες μοιράστηκαν στα ίσα σε κάποια παιδιά. Αν το κάθε παιδί πήρε $\frac{4}{7}$ της μηλόπιτας, πόσα ήταν όλα τα παιδιά;

<u>**Δοκίμιο στα κλάσματα**</u>

Ονοματεπώνυμο: ………………………………………………………..

Αριθμός καταλόγου: …..

Το δοκίμιο που έχεις μπροστά σου αναφέρεται στα κλάσματα. Να απαντήσεις σε όλες τις ερωτήσεις, αφού διαβάσεις πρώτα τις οδηγίες κάθε ερώτησης.

1. Σε τι μοιάζουν τα κλάσματα που βρίσκονται στο ορθογώνιο; (Ε.Σ.1)

$\frac{1}{3}$ $\frac{7}{3}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{8}{3}$

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

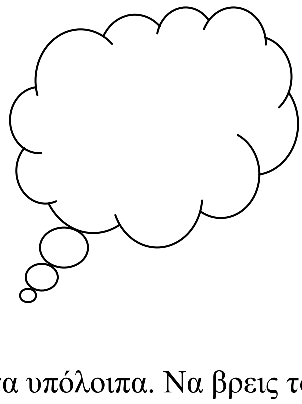
2. Από τους πιο κάτω αριθμούς, να επιλέξεις κάποιους που μοιάζουν σε κάτι. Να γράψεις τους αριθμούς που επέλεξες στο συννεφάκι και να δώσεις όνομα στην κατηγορία που έφτιαξες. (Ε.Σ.2)

$\frac{5}{2}$ $\frac{4}{16}$ $\frac{4}{7}$ $\frac{4}{3}$

15% 0,3 $\frac{4}{9}$

Όνομα: ………………………..

……………………………………………



3. Ένα από τα πιο κάτω κλάσματα διαφέρει από τα υπόλοιπα. Να βρεις το διαφορετικό κλάσμα και να το βάλεις σε κύκλο. (Ε.Σ.3)

$\frac{2}{7}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{14}{49}$ $\frac{10}{35}$ $\frac{4}{14}$

4. Συνέχισε το μοτίβο. (Ε.Σ.4)

$\frac{2}{3}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{2}{12}$ $\frac{2}{24}$ ....

5. Στην πιο κάτω σειρά υπάρχει ένα κλάσμα που χαλάει το μοτίβο. Αν φύγει αυτό το κλάσμα, θα διορθωθεί η σειρά. Να βάλεις σε κύκλο το κλάσμα που χαλάει το μοτίβο.

$\frac{39}{6}$ $\frac{33}{6}$ $\frac{27}{6}$ $\frac{21}{6}$ $\frac{13}{6}$

(Ε.Σ.5)

6. Φαντάσου ότι ο δάσκαλος ή η δασκάλα σου ζητούσε να εξηγήσεις σε κάποιο συμμαθητή σου τι είναι κλάσμα. Να εξηγήσεις στο συμμαθητή σου με όσους περισσότερους τρόπους μπορείς. (Ο.Ε.1)

7. Φαντάσου ότι ο δάσκαλος ή η δασκάλα σου ζητούσε να εξηγήσεις σε κάποιο συμμαθητή σου πότε δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα. Μπορείς να εξηγήσεις στο συμμαθητή σου με όποιο τρόπο θέλεις. (Ο.Ε.2)

8. Φαντάσου ότι ο δάσκαλος ή η δασκάλα σου ζητούσε να εξηγήσεις σε κάποιο συμμαθητή σου γιατί τα $\frac{2}{5}$ είναι μικρότερα από τα $\frac{4}{8}$. Να εξηγήσεις στο συμμαθητή σου με όσους περισσότερους τρόπους μπορείς. (Ο.Ε.3)

9. Πόσα κλάσματα υπάρχουν μεταξύ του 0 και του 1; Να εξηγήσεις την απάντησή σου. (Ο.Ε.4)

Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να βάλεις σε κύκλο το Σ αν είναι σωστή ή το Λ αν είναι λανθασμένη. Στη συνέχεια, να εξηγήσεις τον τρόπο που σκέφτηκες για να απαντήσεις. **Πρέπει οπωσδήποτε να εξηγήσεις τον τρόπο που σκέφτηκες για να απαντήσεις.**

10. Τα κλάσματα $\frac{16}{10}$ και $\frac{5}{8}$ είναι ισοδύναμα.

Σ	Λ

Εξήγηση:
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

(Ε.Τ.1)

11. Όταν σε ένα κλάσμα μεγαλώσω τον παρονομαστή και ο αριθμητής μείνει ο ίδιος, τότε το κλάσμα γίνεται μικρότερο.

(Ε.Τ.2)

Σ	Λ

Εξήγηση:
…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

12. Όλα τα κλάσματα είναι μικρότερα από το 1.

Σ	Λ

(Ε.Τ.3)

Εξήγηση:
…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

13. Όταν διπλασιάσω και τον αριθμητή και τον παρονομαστή ενός κλάσματος, τότε το κλάσμα που δημιουργώ έχει διπλάσια αξία από το αρχικό.

Σ	Λ

Εξήγηση: …………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

(Ε.Τ.4)

14. Όταν ο αριθμητής του κλάσματος είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή, τότε το κλάσμα είναι μεγαλύτερο του 1.

Σ	Λ

Εξήγηση: …………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

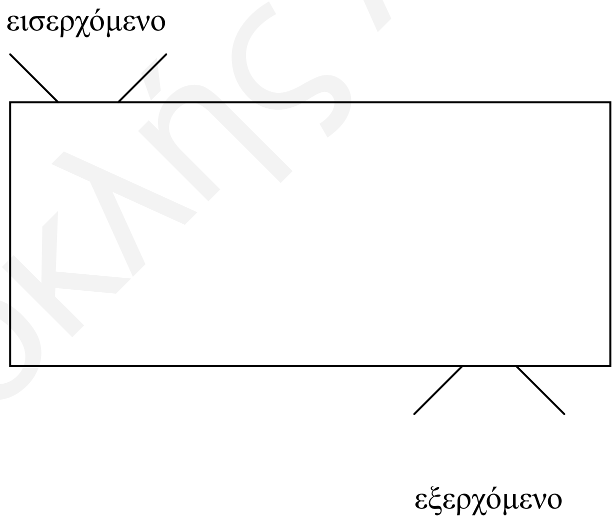
(Ε.Τ.5)

Να λύσεις τα παρακάτω προβλήματα και να εξηγήσεις τον τρόπο που σκέφτηκες για να καταλήξεις στην απάντησή σου. **Πρέπει οπωσδήποτε να εξηγήσεις τον τρόπο που σκέφτηκες για να καταλήξεις στην απάντησή σου.**

15. Ο αριθμός των γάτων σε μια περιοχή ισούται με τα $\frac{2}{3}$ του αριθμού των σκύλων. Υπάρχουν περισσότεροι σκύλοι ή γάτοι στην περιοχή; **Πρέπει οπωσδήποτε να εξηγήσεις τον τρόπο που σκέφτηκες.** (ΑΝ.ΣΚ.1)

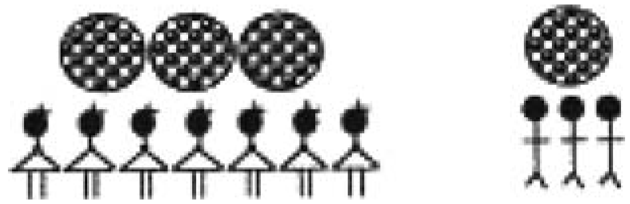
16. Η μηχανή που φαίνεται πιο κάτω δέχεται αριθμούς (εισερχόμενοι) και «βγάζει» αριθμούς (εξερχόμενοι). Η μηχανή βγάζει τα $\frac{2}{3}$ του αριθμού που της βάζεις. Αν η μηχανή βγάλει τον αριθμό 12, ποιον αριθμό της έχω βάλει; **Πρέπει οπωσδήποτε να εξηγήσεις τον τρόπο που σκέφτηκες για να καταλήξεις στην απάντησή σου.**

(ΑΝ.ΣΚ.2)



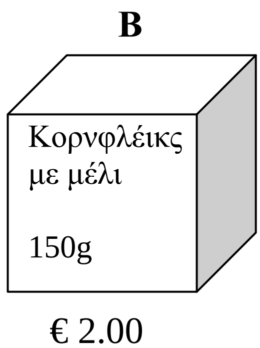
17. Ποιοι θα πάρουν περισσότερη πίτσα, τα αγόρια ή τα κορίτσια; **Πρέπει οπωσδήποτε να εξηγήσεις τον τρόπο που σκέφτηκες για να καταλήξεις στην απάντησή σου.**

(ΑΝ.ΣΚ.3)



18. Στο σούπερμαρκετ υπήρχαν 2 διαφορετικές συσκευασίες κορνφλέικς του ίδιου είδους που φαίνονται πιο κάτω. Ποια με συμφέρει να αγοράσω και γιατί; **Πρέπει οπωσδήποτε να εξηγήσεις τον τρόπο που σκέφτηκες για να καταλήξεις στην απάντησή σου.**

(ΑΝ.ΣΚ.4)



<u>Δοκίμιο στα κλάσματα</u>

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός καταλόγου: ….

Το δοκίμιο που έχεις μπροστά σου αναφέρεται στα κλάσματα. Να απαντήσεις σε όλες τις ερωτήσεις, αφού διαβάσεις πρώτα τις οδηγίες κάθε ερώτησης.

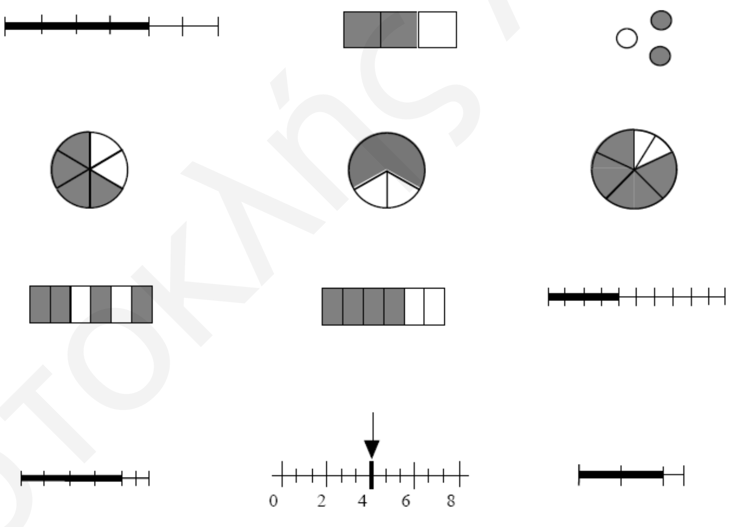
19. Να συγκρίνεις τα παρακάτω κλάσματα χρησιμοποιώντας τα σύμβολα > = <

Α) $\frac{2}{7}$ $\frac{6}{21}$ (Α.Μ.Κ.1) Β) $\frac{8}{7}$ $\frac{3}{7}$ (Α.Μ.Κ.2) Γ) $\frac{2}{6}$ $\frac{10}{20}$ (Α.Μ.Κ.3)

20. Να βάλεις τα κλάσματα $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}$ σε σειρά αρχίζοντας από το μικρότερο.

.... (Α.Μ.Κ.4)

21. Να βάλεις σε κύκλο το σχέδιο ή τα σχέδια που δείχνουν $\frac{4}{6}$



(Μ.Ε.1)

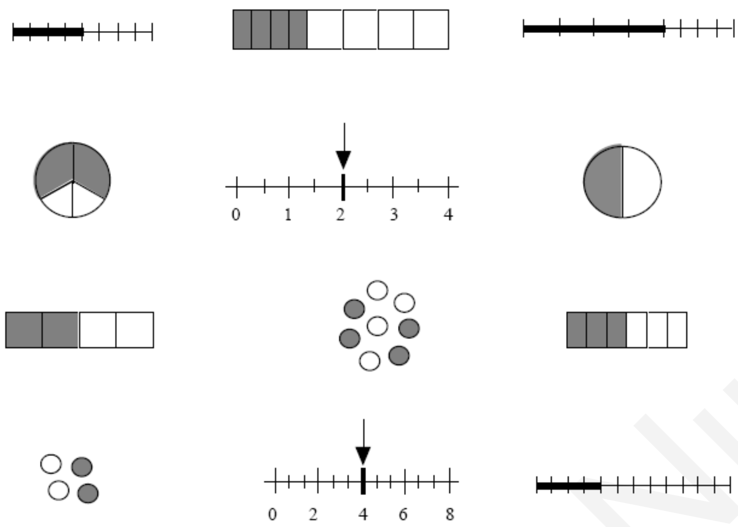
22. Να γράψεις ένα πρόβλημα που να έχει απάντηση $\frac{5}{8}$ (Μ.Λ.1)

....

....

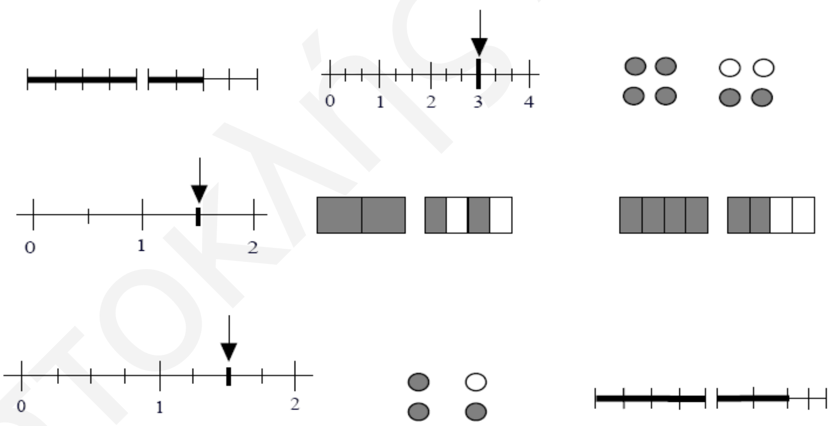
....

23. Να βάλεις σε κύκλο το σχέδιο ή τα σχέδια που δείχνουν $\frac{2}{4}$



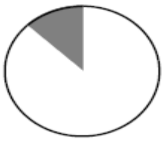
(Μ.Ε.2)

24. Να βάλεις σε κύκλο το σχέδιο ή τα σχέδια που μπορεί να δείχνουν $\frac{3}{2}$ (Μ.Ε.3)



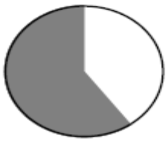
25. Να κάνεις κάποιο σχέδιο για να δείξεις το κλάσμα $\frac{5}{8}$ (Κ.Σ.1)

26. Να κυκλώσεις το κλάσμα που δείχνει καθένα από τα παρακάτω σχέδια.



(Μ.Σ.1)

$\frac{1}{9}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{3}{5}$



(Μ.Σ.2)

$\frac{1}{4}$ $\frac{9}{10}$ $\frac{3}{5}$

(Μ.Σ.3)

$\frac{1}{10}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{4}$

(Μ.Σ.4)

$\frac{9}{10}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{5}$

27. Να γράψεις ένα πρόβλημα που να λύνεται με την εξίσωση $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \nu$ (Μ.Λ.2)

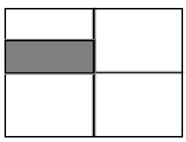
....

....

....

28. Να κάνεις κάποιο σχέδιο που να δείχνει το άθροισμα $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \nu$ (Κ.Σ.2)

29.



(Μ.Λ.3)

Να γράψεις ένα πρόβλημα που να λύνεται με το σχέδιο που φαίνεται πιο πάνω.

....

....

....

30. Ο Μαρίνος έφαγε το $\frac{1}{2}$ ενός γλυκίσματος και η Μαρίνα τα $\frac{3}{8}$ του ίδιου γλυκίσματος. Να κάνεις κάποιο σχέδιο για να δείξεις το κομμάτι που έφαγε το κάθε παιδί και τι μέρος του γλυκίσματος έφαγαν συνολικά. (Κ.Σ.3)

31. Η Νίκη έφαγε το $\frac{1}{2}$ από το $\frac{1}{4}$ μιας σοκολάτας. Να κάνεις κάποιο σχέδιο για να δείξεις τι μέρος της σοκολάτας έφαγε. (Κ.Σ.4)

32. Να μετατρέψεις τα παρακάτω κλάσματα σε δεκαδικούς. (Μ.Δ.1-5)

Α) $\frac{1}{4} =$ Β) $\frac{2}{5} =$ Γ) $\frac{3}{10} =$ Δ) $\frac{1}{20} =$ Ε) $\frac{6}{50} =$

33. Να μετατρέψεις τα παρακάτω κλάσματα σε ποσοστά. (Μ.Π.1-5)

Α) $\frac{1}{5} =$ Β) $\frac{7}{10} =$ Γ) $\frac{3}{4} =$ Δ) $\frac{13}{50} =$ Ε) $\frac{8}{25} =$

34. Να αποφασίσεις κατά πόσον οι πιο κάτω προτάσεις είναι σωστές ή λανθασμένες και να βάλεις σε κύκλο το Σ αν είναι σωστές ή το Λ αν είναι λανθασμένες. (Δ.Α.1-3)

Α) Το $\frac{2}{3}$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης του 2 διά του 3.

Σ	Λ

Β) Το $\frac{12}{7}$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης του 7 διά του 12.

Σ	Λ

Γ) Τρεις πίτσες μοιράστηκαν στα ίσα σε έξι παιδιά. Το κάθε παιδί πήρε από $\frac{3}{6}$ της πίτσας.

Σ	Λ

35. Τέσσερις μηλόπιτες μοιράστηκαν στα ίσα σε κάποια παιδιά. Αν το κάθε παιδί πήρε $\frac{4}{7}$ της μηλόπιτας, πόσα ήταν όλα τα παιδιά; (Δ.Α.4)

Να λύσεις τα παρακάτω προβλήματα και να εξηγήσεις την απάντησή σου.

36. Έχω $\frac{3}{4}$ kg μήλα και θα τα βάλω σε σακούλια που το καθένα χωρεί $\frac{1}{6}$ kg μήλα. Πόσα τέτοια σακούλια θα χρειαστώ; **Πρέπει οπωσδήποτε να εξηγήσεις την απάντησή σου.** (ΑΝ.ΛΟ.1)

37. Οι 180 μαθητές ενός σχολείου θα πάνε εκδρομή. Θα τους μεταφέρουν λεωφορεία που το καθένα χωρεί 50 μαθητές. Πόσα τέτοια λεωφορεία θα χρειαστούν; **Πρέπει οπωσδήποτε να εξηγήσεις την απάντησή σου.** (ΑΝ.ΛΟ.2)

38. Για να φτιάξω κάποιο γλυκό πρέπει να χρησιμοποιήσω $\frac{1}{10}$ L γάλα. Αν έχω στη διάθεσή μου $\frac{4}{15}$ L γάλα, τότε πόσα τέτοια γλυκά μπορώ να φτιάξω; **Πρέπει οπωσδήποτε να εξηγήσεις την απάντησή σου.** (ΑΝ.ΛΟ.3)

39. Στο παρακάτω πρόβλημα, δίνεται η απάντηση. Να ελέγξεις αν η απάντηση είναι σωστή. (ΑΝ.ΕΠ.1)

Πρόβλημα:

Βρες ένα κλάσμα που βρίσκεται μεταξύ του $\frac{1}{3}$ και του $\frac{1}{2}$.

Απάντηση: $\frac{3}{10}$

Έλεγχος της απάντησης

40. Στο παρακάτω πρόβλημα, δίνεται η απάντηση. Να ελέγξεις αν η απάντηση είναι σωστή. (ΑΝ.ΕΠ.2)

Πρόβλημα:

Θα έχεις περισσότερη γη αν έχεις τα $\frac{4}{7}$ ή τα $\frac{3}{5}$ ενός οικοπέδου;

Απάντηση: Θα έχω περισσότερη γη αν έχω τα $\frac{3}{5}$ ενός οικοπέδου.

Έλεγχος της απάντησης

41. Στο παρακάτω πρόβλημα, δίνεται η απάντηση. Να ελέγξεις αν η απάντηση είναι σωστή. (ΑΝ.ΕΠ.3)

Πρόβλημα:

Τα $\frac{3}{4}$ μιας σχολικής ορχήστρας αποτελούνται από κορίτσια. Αν υπήρχαν ακόμη 12 αγόρια, τότε ο αριθμός των αγοριών και ο αριθμός των κοριτσιών θα ήταν ίσος. Από πόσα παιδιά αποτελείται η σχολική ορχήστρα;

Απάντηση: Η σχολική ορχήστρα αποτελείται από 24 παιδιά.

Έλεγχος της απάντησης

<u>Δοκίμιο στα κλάσματα</u>

Ονοματεπώνυμο: ……………………………………………………..

Αριθμός καταλόγου: …..

Το δοκίμιο που έχεις μπροστά σου αναφέρεται στα κλάσματα. Να απαντήσεις σε όλες τις ερωτήσεις, αφού διαβάσεις πρώτα τις οδηγίες κάθε ερώτησης.

1. Σε τι μοιάζουν τα κλάσματα που βρίσκονται στο ορθογώνιο; (Ε.Σ.1)

$\frac{1}{3}$ $\frac{7}{3}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{8}{3}$

....

....

2. Από τους πιο κάτω αριθμούς, να επιλέξεις κάποιους που μοιάζουν σε κάτι. Να γράψεις τους αριθμούς που επέλεξες στο συννεφάκι και να δώσεις όνομα στην κατηγορία που έφτιαξες. (Ε.Σ.2)

$\frac{5}{2}$ $\frac{4}{16}$ $\frac{4}{7}$ $\frac{4}{3}$

15% 0,3 $\frac{4}{9}$

Όνομα: ………………………..

....

3. Ένα από τα πιο κάτω κλάσματα διαφέρει από τα υπόλοιπα. Να βρεις το διαφορετικό κλάσμα και να το βάλεις σε κύκλο. (Ε.Σ.3)

$\frac{2}{7}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{14}{49}$ $\frac{10}{35}$ $\frac{4}{14}$

4. Συνέχισε το μοτίβο. (Ε.Σ.4)

$\frac{2}{3}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{2}{12}$ $\frac{2}{24}$ ....

5. Στην πιο κάτω σειρά υπάρχει ένα κλάσμα που χαλάει το μοτίβο. Αν φύγει αυτό το κλάσμα, θα διορθωθεί η σειρά. Να βάλεις σε κύκλο το κλάσμα που χαλάει το μοτίβο.

$\frac{39}{6}$ $\frac{33}{6}$ $\frac{27}{6}$ $\frac{21}{6}$ $\frac{13}{6}$

(Ε.Σ.5)

6. Φαντάσου ότι ο δάσκαλος ή η δασκάλα σου ζητούσε να εξηγήσεις σε κάποιο συμμαθητή σου τι είναι κλάσμα. Να εξηγήσεις στο συμμαθητή σου με όσους περισσότερους τρόπους μπορείς. (Ο.Ε.1)

7. Φαντάσου ότι ο δάσκαλος ή η δασκάλα σου ζητούσε να εξηγήσεις σε κάποιο συμμαθητή σου πότε δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα. Μπορείς να εξηγήσεις στο συμμαθητή σου με όποιο τρόπο θέλεις. (Ο.Ε.2)

8. Φαντάσου ότι ο δάσκαλος ή η δασκάλα σου ζητούσε να εξηγήσεις σε κάποιο συμμαθητή σου γιατί τα $\frac{2}{5}$ είναι μικρότερα από τα $\frac{4}{8}$. Να εξηγήσεις στο συμμαθητή σου με όσους περισσότερους τρόπους μπορείς. (Ο.Ε.3)

9. Πόσα κλάσματα υπάρχουν μεταξύ του 0 και του 1; Να εξηγήσεις την απάντησή σου. (Ο.Ε.4)

Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να βάλεις σε κύκλο το Σ αν είναι σωστή ή το Λ αν είναι λανθασμένη. Στη συνέχεια, να εξηγήσεις τον τρόπο που σκέφτηκες για να απαντήσεις. **Πρέπει οπωσδήποτε να εξηγήσεις τον τρόπο που σκέφτηκες για να απαντήσεις.**

10. Τα κλάσματα $\frac{16}{10}$ και $\frac{5}{8}$ είναι ισοδύναμα.

Σ	Λ

Εξήγηση:
………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

(Ε.Τ.1)

11. Όταν σε ένα κλάσμα μεγαλώσω τον παρονομαστή και ο αριθμητής μείνει ο ίδιος, τότε το κλάσμα γίνεται μικρότερο.

(Ε.Τ.2)

Σ	Λ

Εξήγηση:
……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

12. Όλα τα κλάσματα είναι μικρότερα από το 1.

Σ	Λ

(Ε.Τ.3)

Εξήγηση:
……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

13. Όταν διπλασιάσω και τον αριθμητή και τον παρονομαστή ενός κλάσματος, τότε το κλάσμα που δημιουργώ έχει διπλάσια αξία από το αρχικό.

Σ	Λ

Εξήγηση: ……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

(Ε.Τ.4)

14. Όταν ο αριθμητής του κλάσματος είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή, τότε το κλάσμα είναι μεγαλύτερο του 1.

Σ	Λ

Εξήγηση: ……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

(Ε.Τ.5)

19. Να συγκρίνεις τα παρακάτω κλάσματα χρησιμοποιώντας τα σύμβολα > = <

Α) $\frac{2}{7}$ $\frac{6}{21}$ (Α.Μ.Κ.1)

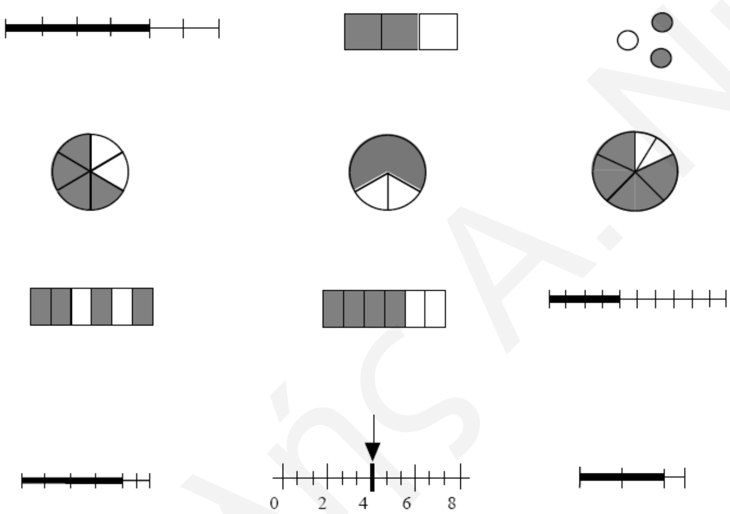
Β) $\frac{8}{7}$ $\frac{3}{7}$ (Α.Μ.Κ.2)

Γ) $\frac{2}{6}$ $\frac{10}{20}$ (Α.Μ.Κ.3)

20. Να βάλεις τα κλάσματα $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}$ σε σειρά αρχίζοντας από το μικρότερο.

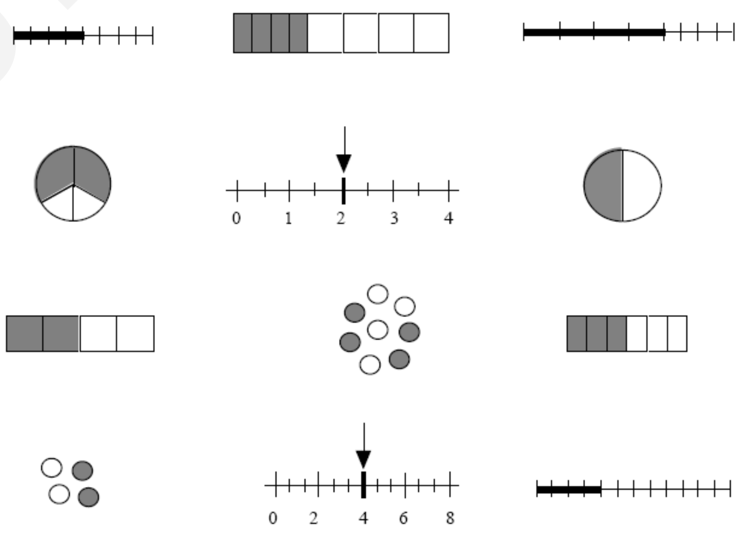
.... (Α.Μ.Κ.4)

21. Να βάλεις σε κύκλο το σχέδιο ή τα σχέδια που δείχνουν $\frac{4}{6}$



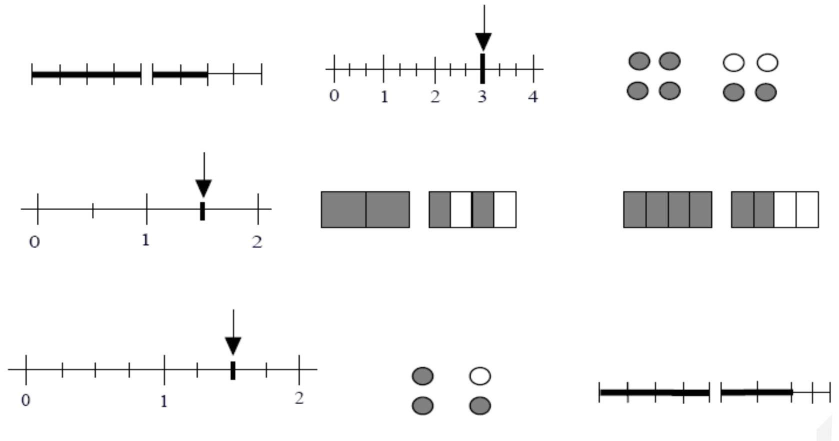
(Μ.Ε.1)

23. Να βάλεις σε κύκλο το σχέδιο ή τα σχέδια που δείχνουν $\frac{2}{4}$



(Μ.Ε.2)

24. Να βάλεις σε κύκλο το σχέδιο ή τα σχέδια που μπορεί να δείχνουν $\frac{3}{2}$ (Μ.Ε.3)



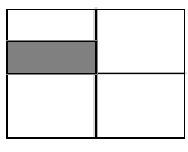
22. Να γράψεις ένα πρόβλημα που να έχει απάντηση $\frac{5}{8}$ (Μ.Λ.1)

....
....
....

27. Να γράψεις ένα πρόβλημα που να λύνεται με την εξίσωση $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\nu$ (Μ.Λ.2)

....
....
....

29.

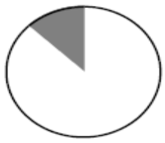


(Μ.Λ.3)

Να γράψεις ένα πρόβλημα που να λύνεται με το σχέδιο που φαίνεται πιο πάνω.

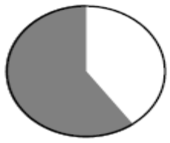
....
....
....

26. Να κυκλώσεις το κλάσμα που δείχνει καθένα από τα παρακάτω σχέδια.



(Μ.Σ.1)

$\frac{1}{9}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{3}{5}$



(Μ.Σ.2)

$\frac{1}{4}$ $\frac{9}{10}$ $\frac{3}{5}$

(Μ.Σ.3)

$\frac{1}{10}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{4}$

(Μ.Σ.4)

$\frac{9}{10}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{5}$

25. Να κάνεις κάποιο σχέδιο για να δείξεις το κλάσμα $\frac{5}{8}$ (Κ.Σ.1)

28. Να κάνεις κάποιο σχέδιο που να δείχνει το άθροισμα $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \nu$ (Κ.Σ.2)

30. Ο Μαρίνος έφαγε το $\frac{1}{2}$ ενός γλυκίσματος και η Μαρίνα τα $\frac{3}{8}$ του ίδιου γλυκίσματος. Να κάνεις κάποιο σχέδιο για να δείξεις το κομμάτι που έφαγε το κάθε παιδί και τι μέρος του γλυκίσματος έφαγαν συνολικά. (Κ.Σ.3)

31. Η Νίκη έφαγε το $\frac{1}{2}$ από το $\frac{1}{4}$ μιας σοκολάτας. Να κάνεις κάποιο σχέδιο για να δείξεις τι μέρος της σοκολάτας έφαγε. (Κ.Σ.4)

32. Να μετατρέψεις τα παρακάτω κλάσματα σε δεκαδικούς. (Μ.Δ.1-5)

Α) $\frac{1}{4} =$ Β) $\frac{2}{5} =$ Γ) $\frac{3}{10} =$ Δ) $\frac{1}{20} =$ Ε) $\frac{6}{50} =$

33. Να μετατρέψεις τα παρακάτω κλάσματα σε ποσοστά. (Μ.Π.1-5)

Α) $\frac{1}{5} =$ Β) $\frac{7}{10} =$ Γ) $\frac{3}{4} =$ Δ) $\frac{13}{50} =$ Ε) $\frac{8}{25} =$

34. Να αποφασίσεις κατά πόσον οι πιο κάτω προτάσεις είναι σωστές ή λανθασμένες και να βάλεις σε κύκλο το Σ αν είναι σωστές ή το Λ αν είναι λανθασμένες. (Δ.Α.1-3)

Α) Το $\frac{2}{3}$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης του 2 διά του 3.

Σ	Λ

Β) Το $\frac{12}{7}$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης του 7 διά του 12.

Σ	Λ

Γ) Τρεις πίτσες μοιράστηκαν στα ίσα σε έξι παιδιά. Το κάθε παιδί πήρε από $\frac{3}{6}$ της πίτσας.

Σ	Λ

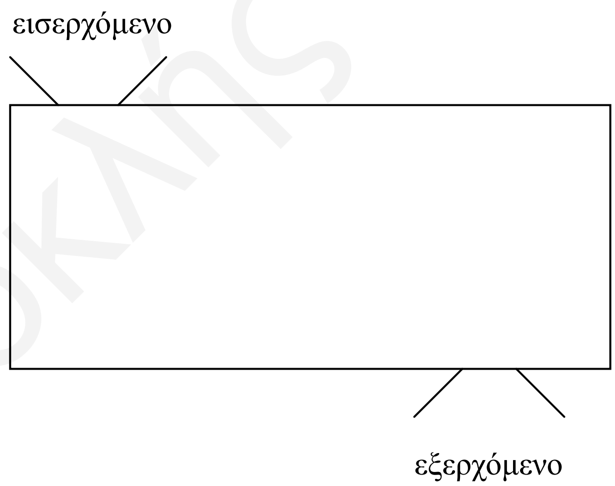
35. Τέσσερις μηλόπιτες μοιράστηκαν στα ίσα σε κάποια παιδιά. Αν το κάθε παιδί πήρε $\frac{4}{7}$ της μηλόπιτας, πόσα ήταν όλα τα παιδιά; (Δ.Α.4)

Να λύσεις τα παρακάτω προβλήματα και να εξηγήσεις τον τρόπο που σκέφτηκες για να καταλήξεις στην απάντησή σου. **Πρέπει οπωσδήποτε να εξηγήσεις τον τρόπο που σκέφτηκες για να καταλήξεις στην απάντησή σου.**

15. Ο αριθμός των γάτων σε μια περιοχή ισούται με τα $\frac{2}{3}$ του αριθμού των σκύλων. Υπάρχουν περισσότεροι σκύλοι ή γάτοι στην περιοχή; **Πρέπει οπωσδήποτε να εξηγήσεις τον τρόπο που σκέφτηκες.** (ΑΝ.ΣΚ.1)

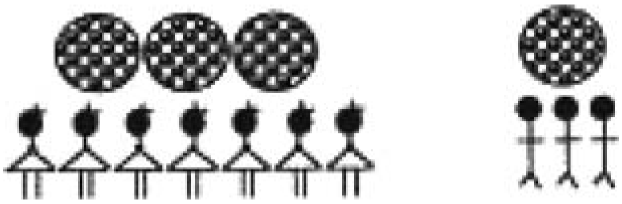
16. Η μηχανή που φαίνεται πιο κάτω δέχεται αριθμούς (εισερχόμενοι) και «βγάζει» αριθμούς (εξερχόμενοι). Η μηχανή βγάζει τα $\frac{2}{3}$ του αριθμού που της βάζεις. Αν η μηχανή βγάλει τον αριθμό 12, ποιον αριθμό της έχω βάλει; **Πρέπει οπωσδήποτε να εξηγήσεις τον τρόπο που σκέφτηκες για να καταλήξεις στην απάντησή σου.**

(ΑΝ.ΣΚ.2)



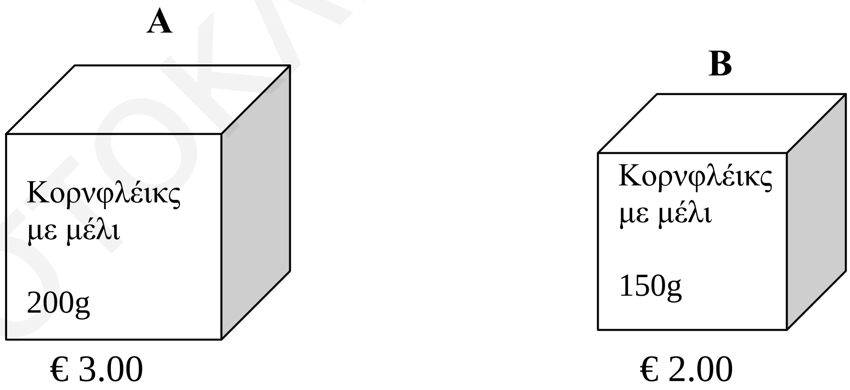
17. Ποιοι θα πάρουν περισσότερη πίτσα, τα αγόρια ή τα κορίτσια; **Πρέπει οπωσδήποτε να εξηγήσεις τον τρόπο που σκέφτηκες για να καταλήξεις στην απάντησή σου.**

(ΑΝ.ΣΚ.3)



18. Στο σούπερμαρκετ υπήρχαν 2 διαφορετικές συσκευασίες κορνφλέικς του ίδιου είδους που φαίνονται πιο κάτω. Ποια με συμφέρει να αγοράσω και γιατί; **Πρέπει οπωσδήποτε να εξηγήσεις τον τρόπο που σκέφτηκες για να καταλήξεις στην απάντησή σου.**

(ΑΝ.ΣΚ.4)



Να λύσεις τα παρακάτω προβλήματα και να εξηγήσεις την απάντησή σου.

36. Έχω $\frac{3}{4}$ kg μήλα και θα τα βάλω σε σακούλια που το καθένα χωρεί $\frac{1}{6}$ kg μήλα. Πόσα τέτοια σακούλια θα χρειαστώ; **Πρέπει οπωσδήποτε να εξηγήσεις την απάντησή σου.** (ΑΝ.ΛΟ.1)

37. Οι 180 μαθητές ενός σχολείου θα πάνε εκδρομή. Θα τους μεταφέρουν λεωφορεία που το καθένα χωρεί 50 μαθητές. Πόσα τέτοια λεωφορεία θα χρειαστούν; **Πρέπει οπωσδήποτε να εξηγήσεις την απάντησή σου.** (ΑΝ.ΛΟ.2)

38. Για να φτιάξω κάποιο γλυκό πρέπει να χρησιμοποιήσω $\frac{1}{10}$ L γάλα. Αν έχω στη διάθεσή μου $\frac{4}{15}$ L γάλα, τότε πόσα τέτοια γλυκά μπορώ να φτιάξω; **Πρέπει οπωσδήποτε να εξηγήσεις την απάντησή σου.** (ΑΝ.ΛΟ.3)

39. Στο παρακάτω πρόβλημα, δίνεται η απάντηση. Να ελέγξεις αν η απάντηση είναι σωστή. (ΑΝ.ΕΠ.1)

Πρόβλημα:

Βρες ένα κλάσμα που βρίσκεται μεταξύ του $\frac{1}{3}$ και του $\frac{1}{2}$.

Απάντηση: $\frac{3}{10}$

Έλεγχος της απάντησης

40. Στο παρακάτω πρόβλημα, δίνεται η απάντηση. Να ελέγξεις αν η απάντηση είναι σωστή. (ΑΝ.ΕΠ.2)

Πρόβλημα:

Θα έχεις περισσότερη γη αν έχεις τα $\frac{4}{7}$ ή τα $\frac{3}{5}$ ενός οικοπέδου;

Απάντηση: Θα έχω περισσότερη γη αν έχω τα $\frac{3}{5}$ ενός οικοπέδου.

Έλεγχος της απάντησης

41. Στο παρακάτω πρόβλημα, δίνεται η απάντηση. Να ελέγξεις αν η απάντηση είναι σωστή. (ΑΝ.ΕΠ.3)

Πρόβλημα:

Τα $\frac{3}{4}$ μιας σχολικής ορχήστρας αποτελούνται από κορίτσια. Αν υπήρχαν ακόμη 12 αγόρια, τότε ο αριθμός των αγοριών και ο αριθμός των κοριτσιών θα ήταν ίσος. Από πόσα παιδιά αποτελείται η σχολική ορχήστρα;

Απάντηση: Η σχολική ορχήστρα αποτελείται από 24 παιδιά.

Έλεγχος της απάντησης

Κωδικοποίηση Δοκιμίου 1

Έργο 1

1: Ο παρονομαστής είναι συνέχεια 3. (1μ)

2: Έχουν τον ίδιο παρονομαστή. (1μ)

3: Τα κλάσματα είναι ομώνυμα. (1μ)

0: Λανθασμένη απάντηση. (0μ)

Έργο 2

1: Τα κλάσματα έχουν τον ίδιο αριθμητή. (1μ)

2: Καταχρηστικά κλάσματα. (1μ)

3: Κλάσματα. (1μ)

4: Ετερώνυμα κλάσματα. (1μ)

0: Ακατάλληλο όνομα, αριθμοί στο συννεφάκι που να μην ταιριάζουν με το όνομα, άσχετοι αριθμοί στο συννεφάκι. (0μ)

9: Κανένας αριθμός στο συννεφάκι. (9)

Έργο 8

1: Με παραδείγματα. (1μ)

2: Με σχέδιο. (1μ)

3: Με λόγια. (1μ)

4: Με παραδείγματα και με σχέδιο. (2μ)

5: Με παραδείγματα και με λόγια. (2μ)

6: Με σχέδιο και με λόγια. (2μ)

7: Και με τους τρεις τρόπους. (3μ)

0: Λανθασμένη εξήγηση. (0μ)

9: Καμία εξήγηση. (9)

Έργο 9

1: Με σύμβολα και να εξηγούμε πώς βρίσκουμε ισοδύναμα κλάσματα. (1μ)

2: Με σχέδιο. (1μ)

3: Με λόγια. (1μ)

4: Με πολλά παραδείγματα. (1μ)

5: Με λόγια και με σχέδιο. (1μ)

6: Με λόγια και με παράδειγμα. (1μ)

0.5: Με ένα μόνο παράδειγμα. (0.5μ) ή όταν έχουν την ίδια αξία.

0: Λανθασμένα παραδείγματα, άλλου είδους λανθασμένη εξήγηση. (0μ)

9: Καμία εξήγηση – κενό. (9)

Έργο 10

1: Με λόγια. (1μ)

2: Με παραδείγματα. (0.5μ)

3: Με λόγια και με παραδείγματα. (1μ)

0: Λανθασμένη απάντηση. (0μ)

9: Καμία εξήγηση – κενό. (9)

Έργο 11

1: Με λόγια. (1μ)

2: Με παραδείγματα. (0.5μ)

3: Με λόγια και με παραδείγματα. (1μ)

0: Λανθασμένη απάντηση. (0μ)

9: Καμία εξήγηση – κενό. (9)

Έργο 12

1: Με σύμβολα, κάνει τα κλάσματα ομώνυμα και τα συγκρίνει. (1μ)

2: Με σχέδιο. (1μ)

3: Με σύμβολα και με σχέδιο. (2μ)

4: Σύγκριση με το μισό. (1μ)

5: Με λόγια (άλλη εξήγηση). (1μ)

6: Με λόγια και με σχέδιο. (2μ)

7: Κάνει τα κλάσματα ομώνυμα και τα συγκρίνει και με λόγια (σύγκριση με το μισό). (2μ)

8: Κάνει τα κλάσματα ομώνυμα και τα συγκρίνει και χρησιμοποιεί τα $\frac{2}{5}$ του ..., τα του $\frac{4}{8}$ του ... και συγκρίνει τα αποτελέσματα. (2μ)

0: Λανθασμένη εξήγηση. (0μ)

9: Καμία εξήγηση – κενό. (9)

10: Με σχέδιο και με σύγκριση με το μισό. (2μ)

Έργο 13

1: Σωστή απάντηση μόνο με παραδείγματα. (1μ)

2: Σωστή απάντηση μόνο με λόγια. (1μ)

3: Σωστή απάντηση με λόγια και με παραδείγματα. (2μ)

4: Λανθασμένη απάντηση μόνο με παραδείγματα. (0μ)

5: Λανθασμένη απάντηση μόνο με λόγια. (0μ)

6: Λανθασμένη απάντηση με λόγια και με παραδείγματα. (0μ)

7: Σωστή απάντηση χωρίς εξήγηση. (0.5μ)

9: Καμία εξήγηση – κενό. (9)

10: Σωστή απάντηση με «Δεν ξέρω να την εξηγήσω». (0.5μ)

11: Σωστή απάντηση με αριθμητική γραμμή. (1μ)

12: Σωστή απάντηση με λανθασμένη εξήγηση. (0.5μ)

<u>Έργο 14</u>

1: Σωστή απάντηση με σύγκριση των δύο κλασμάτων. (2μ)

2: Σωστή απάντηση με σύγκριση με την ακέραια μονάδα. (2μ)

3: Σωστή απάντηση με λόγια (το ένα κλάσμα καταχρηστικό, το άλλο όχι). (2μ)

4: Σωστή απάντηση με λανθασμένη εξήγηση. (0.5μ)

5: Λανθασμένη απάντηση με λανθασμένη εξήγηση. (0μ)

6: Σωστή απάντηση χωρίς εξήγηση. (0.5μ)

7: Λανθασμένη απάντηση χωρίς εξήγηση. (0μ)

8: Απλοποίηση κλασμάτων: το $\frac{16}{10}$ δεν διαιρείται με κάποιο αριθμό ώστε να προκύψει το $\frac{5}{8}$ (εννοεί απλοποίηση) ή όταν τα απλοποιήσεις δεν είναι ίδια (2μ).

9: Καμία απάντηση. (9)

10: Σωστή απάντηση με σύγκριση των δύο κλασμάτων και με λόγια (το ένα κλάσμα καταχρηστικό, το άλλο όχι). (3μ)

11: Σχέση αριθμητών, παρονομαστών για ισοδύναμα κλάσματα. (2μ)

12: Πολλαπλασιάζει χιαστί και βλέπει αν τα γινόμενα ισούνται. (2μ)

13: Ορθή τεκμηρίωση με την αιτιολόγηση ότι οι παρονομαστές δεν είναι πολλαπλάσια. (2μ)

15: Λανθασμένη απάντηση με ορθή εξήγηση. (1μ)

<u>Έργο 15</u>

1: Σωστή απάντηση με παράδειγμα. (2μ)

2: Σωστή απάντηση με επανάληψη της δήλωσης. (1μ)

3: Σωστή απάντηση με παράδειγμα και με λόγια. (3μ)

4: Σωστή απάντηση με λανθασμένη εξήγηση. (0.5μ)

5: Λανθασμένη απάντηση με λανθασμένη εξήγηση. (0μ)

6: Σωστή απάντηση χωρίς εξήγηση. (0.5μ)

7: Λανθασμένη απάντηση χωρίς εξήγηση. (0μ)

8: Σωστή απάντηση με σχέδιο. (2μ)

9: Καμία απάντηση. (9)

10: μικρότερα κομμάτια (ο αριθμητής μένει ο ίδιος δεν αναφέρεται στο ρόλο του παρονομαστή) (1μ)

11: Όσο μεγαλώνει ο παρονομαστής, το κλάσμα μικραίνει (χωρίς να γίνεται αναφορά στον αριθμητή). (1μ)

12: Εξήγηση με ολοκληρωμένη αναφορά στη σχέση αριθμητή και παρονομαστή. (2μ)

13: Λανθασμένη απάντηση με ορθή εξήγηση. (1μ)

Έργο 16

1: Σωστή απάντηση με παράδειγμα. (2μ)

2: Σωστή απάντηση με «Έχει κλάσματα μεγαλύτερα του 1» ή «Έχει κλάσματα που δεν είναι μικρότερα από 1». (1μ)

3: Σωστή απάντηση με παράδειγμα και με λόγια. (3μ)

4: Σωστή απάντηση με λανθασμένη εξήγηση. (0.5μ)

5: Λανθασμένη απάντηση με λανθασμένη εξήγηση. (0μ)

6: Σωστή απάντηση χωρίς εξήγηση. (0.5μ)

7: Λανθασμένη απάντηση χωρίς εξήγηση. (0μ)

9: Καμία απάντηση. (9)

10: Σωστή απάντηση «Κλάσματα μεγαλύτερα του 1 είναι τα καταχρηστικά, που μπορούν να γίνουν και μεικτοί αριθμοί». (3μ)

11: Εξήγηση με περισσότερα του ενός παραδείγματα. (2μ)

12: Υπάρχουν κλάσματα που ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή. (2μ)

Έργο 17

1: Σωστή απάντηση με παράδειγμα. (2μ)

2: Σωστή απάντηση με λόγια «ίση αξία», «ισοδύναμα», «το ίδιο, δεν θα πάθει τίποτε». (3μ)

3: Σωστή απάντηση με παράδειγμα και με λόγια (ίση αξία, ισοδύναμα). (3μ)

4: Σωστή απάντηση με λανθασμένη εξήγηση. (0.5μ)

5: Λανθασμένη απάντηση με λανθασμένη εξήγηση. (0μ)

6: Σωστή απάντηση χωρίς εξήγηση. (0.5μ)

7: Λανθασμένη απάντηση χωρίς εξήγηση. (0μ)

9: Καμία απάντηση. (9)

10: Λανθασμένη απάντηση με σωστή εξήγηση. (1μ)

12: Όσο μεγαλώνει το ένα κλάσμα μεγαλώνει και το άλλο. (1μ)

13: Με απλοποίηση, διαίρεση δια δύο βγαίνει το ίδιο. (2μ)

14: Αν πολλαπλασιάσουμε με τον ίδιο αριθμό, μένει η ίδια αξία. (3μ)

Έργο 18

1: Σωστή απάντηση με παράδειγμα. (2μ)

2: Σωστή απάντηση με επανάληψη δήλωσης. (1μ)

3: Σωστή απάντηση με παράδειγμα και με λόγια. (3μ)

4: Σωστή απάντηση με λανθασμένη εξήγηση. (0.5μ)

5: Λανθασμένη απάντηση με λανθασμένη εξήγηση. (0μ)

6: Σωστή απάντηση χωρίς εξήγηση. (0.5μ)

7: Λανθασμένη απάντηση χωρίς εξήγηση. (0μ)

8: Λανθασμένη απάντηση με σωστή εξήγηση. (1μ)

9: Καμία απάντηση. (9)

10: Εξήγηση με αναφορά ότι τότε το κλάσμα είναι καταχρηστικό και μπορεί να μετατραπεί σε μεικτό αριθμό, μεγαλύτερο της μονάδας. (3μ)

11: Όταν ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι οι ίδιοι, τότε το κλάσμα ισούται με τη μονάδα, όταν ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή, τότε το κλάσμα είναι μεγαλύτερο από μία μονάδα. (3μ)

Έργο 19

1: Σωστή απάντηση με επανάληψη φρασεολογίας, αφού είναι περισσότερες οι σοκολάτες θα πάρουν περισσότερο κομμάτι, περισσότερη σοκολάτα. (1μ)

2: Σωστή απάντηση χωρίς εξήγηση. (0.5μ)

3: Λανθασμένη απάντηση με λανθασμένη εξήγηση. (0μ)

4: Λανθασμένη απάντηση χωρίς εξήγηση. (0μ)

5: Σωστή απάντηση με λανθασμένη εξήγηση. (0.5μ)

7: Σωστή απάντηση με παράδειγμα, π.χ. αν οι σοκολάτες γίνουν 10, πόσες θα πάρει το κάθε παιδί, περισσότερες. (2μ)

8: Λανθασμένη απάντηση με σωστή εξήγηση. (1μ)

9: Καμία απάντηση.

10: Οι σοκολάτες είναι περισσότερες, τα παιδιά τα ίδια, θα πάρουν μεγαλύτερο κομμάτι. (1μ)

11: Όσο μεγαλώνει ο αριθμητής, τόσο μεγαλώνει και το κλάσμα. (1μ)

Έργο 20

1: Σωστή απάντηση με ένα παράδειγμα. (2μ)

2: Σωστή απάντηση με περισσότερα του ενός παραδείγματα. (2μ)

3: Λανθασμένη απάντηση με λανθασμένη εξήγηση. (0μ)

4: Σωστή απάντηση χωρίς εξήγηση. (0.5μ)

5: Λανθασμένη απάντηση χωρίς εξήγηση. (0μ)

6: Σωστή απάντηση με λανθασμένη εξήγηση. (0.5μ)

7: Σωστή απάντηση με «Δεν υπάρχει μόνο ένα αλλά πολλά, άπειρα κλάσματα». (3μ)

8: Καμία απάντηση και καμία εξήγηση. (9)

9: Μπορούμε τα κλάσματα να τα κάνουμε ισοδύναμα με μεγαλύτερους αριθμούς, έτσι θα δούμε πως υπάρχει ένα κλάσμα ανάμεσα. (2μ)

10: Μεταξύ του 25 (εννοεί 0.25) και του 33 (εννοεί 0.33) υπάρχουν κι άλλοι αριθμοί. (2μ)

11: Όταν τα κάνουμε εκατοστά έχουμε πολλά κλάσματα. (2μ)

12: Γιατί ανάμεσα σε οποιουσδήποτε αριθμούς υπάρχουν άλλοι αριθμοί. (2μ)

<u>Υπόλοιπα έργα</u>

1: Σωστή απάντηση.

0: Λανθασμένη απάντηση.

9: Καμία απάντηση – κενό.

Κωδικοποίηση Δοκιμίου 2

Έργα 21α – 21στ, 2, 28α – 28ε, 29α – 29γ, 38α-38στ, 39α-39στ, 40α-40γ, 41

0: Λανθασμένη απάντηση.

1: Σωστή απάντηση.

9: Καμία απάντηση.

Έργα 24, 30, 32, 33

0: Εντελώς λανθασμένο πρόβλημα, είτε σε σχέση με το έργο, είτε σε σχέση με τη διατύπωση (0μ)

0.5: Αν ο μαθητής προσπαθεί να γράψει σωστό πρόβλημα, αλλά υπάρχει αδυναμία στη διατύπωση, μπορεί να γράφει κλάσμα και να ρωτά πόσο, αντί τι μέρος, (π.χ. να έχει απάντηση 5 αντί $\frac{5}{8}$), μπορεί να υπάρχει αδυναμία στη διατύπωση της ερώτησης κ.τ.λ. Γενικά δίνεται 0.5μ στην περίπτωση που δεν είναι εντελώς ξεκάθαρο το πρόβλημα που γράφει ο μαθητής και δεν μπορεί να πάρει όλες τις μονάδες (0.5μ)

1: Το πρόβλημα είναι εντελώς σωστό από μαθηματικής και γλωσσικής άποψης και ανταποκρίνεται στο σχετικό έργο (1μ)

Έργο 23

0-7: αναλόγως του αριθμού των σωστών και λανθασμένων επιλογών (σωστές πλην λανθασμένες).

9: καμία απάντηση.

Έργο 25

0-6: αναλόγως του αριθμού των σωστών απαντήσεων και λανθασμένων επιλογών (σωστές πλην λανθασμένες).

9: καμία απάντηση.

Έργο 26

0-7 αναλόγως του αριθμού των σωστών απαντήσεων και λανθασμένων επιλογών (σωστές πλην λανθασμένες).

9: καμία απάντηση.

Έργο 27

0: Λανθασμένη απάντηση (0μ)

1: Σωστή απάντηση, το σχέδιο να είναι κύκλος (1μ)

2: Σωστή απάντηση, το σχέδιο να είναι ορθογώνιο ή τετράγωνο (1μ)

3: Σωστή απάντηση με άλλο σχέδιο (1μ)

4: Σωστή απάντηση μέρος-όλο (1μ)

9: Καμία απάντηση (9)

6: Σωστή απάντηση με δύο σχέδια σωστά, κύκλο και ορθογώνιο (1μ)

7: Σωστή απάντηση με τρία σχέδια σωστά, κύκλο, ορθογώνιο και μέρος-όλο (1μ)

8: Σωστή απάντηση με τέσσερα σχέδια σωστά, κύκλο, ορθογώνιο, μέρος-όλο και μέρος ευθυγράμμου τμήματος (1μ)

0.5: Σωστό, αλλά όχι εντελώς ξεκάθαρο σχέδιο (0.5μ)

Έργο 31

0: Λανθασμένη απάντηση (0μ)

1: Σωστή απάντηση, το σχέδιο να είναι κύκλος (1μ)

2: Σωστή απάντηση, το σχέδιο να είναι ορθογώνιο ή τετράγωνο (1μ)

3: Σωστή απάντηση με άλλο σχέδιο (1μ)

4: Σωστή απάντηση μέρος-όλο (1μ)

9: Καμία απάντηση (9)

0.5: Σωστό σχέδιο που δείχνει το άθροισμα, αλλά λάθος το σχέδιο της απάντησης (0.5μ)

0.5: Σε άλλη περίπτωση που δεν είναι εντελώς ξεκάθαρη η ορθότητα (0.5μ)

Έργο 35

0: Λανθασμένη απάντηση (0μ)

1: Σωστή απάντηση, το σχέδιο να είναι κύκλος (1μ)

2: Σωστή απάντηση, το σχέδιο να είναι ορθογώνιο ή τετράγωνο (1μ)

3: Σωστή απάντηση με άλλο σχέδιο (1μ)

4: Σωστή απάντηση μέρος-όλο (1μ)

9: Καμία απάντηση (9)

0.5: Οι μαθητές σχεδιάζουν το μέρος της σοκολάτας που έφαγε το κάθε παιδί, αλλά όχι το μέρος που έφαγαν συνολικά τα δύο παιδιά (0.5μ)

0.25: Αν σχεδίασαν σωστά το μέρος που έφαγε μόνο το ένα παιδί (0.25μ)

<u>Έργο 37</u>

0: Λανθασμένη απάντηση (0μ)

1: Σωστή απάντηση, το σχέδιο να είναι κύκλος (1μ)

2: Σωστή απάντηση, το σχέδιο να είναι ορθογώνιο ή τετράγωνο (1μ)

3: Σωστή απάντηση με άλλο σχέδιο (1μ)

4: Σωστή απάντηση μέρος-όλο (1μ)

9: Καμία απάντηση (9)

0.5: αν το σχέδιο δεν είναι εντελώς σωστό (π.χ. τα μέρη δεν είναι ακριβώς ίσα) (0.5μ)

<u>Έργα 34, 36</u>

0.5: Σωστή εξίσωση, λάθος πράξεις και απάντηση (0.5μ)

<u>Έργο 36</u>

Μερικοί μαθητές έκαναν αφαίρεση αντί πολλαπλασιασμό και έβρισκαν ορθή απάντηση.

$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$,

$\frac{1}{3} \text{x} \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

0: Λανθασμένη απάντηση (0μ)

1: Σωστή απάντηση με αφαίρεση (0μ)

2: Σωστή απάντηση με πολλαπλασιασμό (1μ)

9: Καμία απάντηση (9)

0.5: Σωστή εξίσωση, λάθος πράξεις και απάντηση ή λανθασμένη εξίσωση και σωστή απάντηση (0.5μ)

Κωδικοποίηση Δοκιμίου 1

Έργο 1

1: Ο παρονομαστής είναι συνέχεια 3. (1μ)

2: Έχουν τον ίδιο παρονομαστή. (1μ)

3: Τα κλάσματα είναι ομώνυμα. (1μ)

0: Λανθασμένη απάντηση. (0μ)

Έργο 2

1: Τα κλάσματα έχουν τον ίδιο αριθμητή. (1μ)

2: Καταχρηστικά κλάσματα. (1μ)

3: Κλάσματα. (1μ)

4: Ετερώνυμα κλάσματα. (1μ)

0: Ακατάλληλο όνομα, αριθμοί στο συννεφάκι που να μην ταιριάζουν με το όνομα, άσχετοι αριθμοί στο συννεφάκι. (0μ)

9: Κανένας αριθμός στο συννεφάκι. (9)

Έργο 4

0: Λανθασμένη απάντηση

0.5: Συμπληρώνει σωστά μόνο τον ένα αριθμό στο μοτίβο.

1: Εντελώς σωστή απάντηση.

Έργο 6

1: Με παραδείγματα. (1μ)

2: Με σχέδιο. (1μ)

3: Με λόγια. (1μ)

4: Με παραδείγματα και με σχέδιο. (2μ)

5: Με παραδείγματα και με λόγια. (2μ)

6: Με σχέδιο και με λόγια. (2μ)

7: Και με τους τρεις τρόπους. (3μ)

0: Λανθασμένη εξήγηση. (0μ)

9: Καμία εξήγηση. (9)

Έργο 7

1: Με σύμβολα και εξηγούμε πώς βρίσκουμε ισοδύναμα κλάσματα. (1μ)

2: Με σχέδιο. (1μ)

3: Με λόγια. (1μ)

4: Με πολλά παραδείγματα. (1μ)

5: Με λόγια και με σχέδιο. (1μ)

6: Με λόγια και με παράδειγμα. (1μ)

0.5: Με ένα μόνο παράδειγμα ή όταν έχουν την ίδια αξία.

0: Λανθασμένα παραδείγματα, άλλου είδους λανθασμένη εξήγηση. (0μ)

9: Καμία εξήγηση – κενό. (9)

10: Με λόγια, σχέδιο και παραδείγματα (1μ)

Έργο 8

1: Με σύμβολα, κάνει τα κλάσματα ομώνυμα και τα συγκρίνει. (1μ)

2: Με σχέδιο. (1μ)

3: Με σύμβολα και με σχέδιο. (2μ)

4: Σύγκριση με το μισό. (1μ)

5: Με λόγια (άλλη εξήγηση). (1μ)

6: Με λόγια και με σχέδιο. (2μ)

7: Κάνει τα κλάσματα ομώνυμα και τα συγκρίνει και με λόγια (σύγκριση με το μισό). (2μ)

8: Κάνει τα κλάσματα ομώνυμα και τα συγκρίνει και χρησιμοποιεί τα $\frac{2}{5}$ του ..., τα του $\frac{4}{8}$ του ... και συγκρίνει τα αποτελέσματα. (2μ)

0: Λανθασμένη εξήγηση. (0μ)

9: Καμία εξήγηση – κενό. (9)

10: Με σχέδιο και με σύγκριση με το μισό. (2μ)

11: Με σχέδιο και με σύμβολα (σύγκριση των δύο κλασμάτων). (2μ)

12: Με σύγκριση με το μισό και με τη χρήση ποσοστών. (2μ)

13: Μετατροπή σε δεκαδικό (1μ)

14: Σχέδιο, σύγκριση με το μισό, σύγκριση των κλασμάτων (3μ)

<u>Έργο 9</u>

1: Σωστή απάντηση μόνο με παραδείγματα. (1μ)

2: Σωστή απάντηση μόνο με λόγια. (1μ)

3: Σωστή απάντηση με λόγια και με παραδείγματα. (2μ)

4: Λανθασμένη απάντηση μόνο με παραδείγματα. (0μ)

5: Λανθασμένη απάντηση μόνο με λόγια. (0μ)

6: Λανθασμένη απάντηση με λόγια και με παραδείγματα. (0μ)

7: Σωστή απάντηση χωρίς εξήγηση. (0.5μ)

9: Καμία εξήγηση – κενό. (9)

10: Σωστή απάντηση με «Δεν ξέρω να την εξηγήσω». (0.5μ)

11: Σωστή απάντηση με αριθμητική γραμμή. (1μ)

12: Σωστή απάντηση με λανθασμένη εξήγηση. (0.5μ)

Έργο 10

1: Σωστή απάντηση με σύγκριση των δύο κλασμάτων. (2μ)

2: Σωστή απάντηση με σύγκριση με την ακέραια μονάδα. (2μ)

3: Σωστή απάντηση με λόγια (το ένα κλάσμα καταχρηστικό, το άλλο όχι). (2μ)

4: Σωστή απάντηση με λανθασμένη εξήγηση. (0.5μ)

5: Λανθασμένη απάντηση με λανθασμένη εξήγηση. (0μ)

6: Σωστή απάντηση χωρίς εξήγηση. (0.5μ)

7: Λανθασμένη απάντηση χωρίς εξήγηση. (0μ)

8: Απλοποίηση κλασμάτων: το $\frac{16}{10}$ δεν διαιρείται με κάποιο αριθμό ώστε να προκύψει το $\frac{5}{8}$ (εννοεί απλοποίηση) ή όταν τα απλοποιήσεις δεν είναι ίδια (2μ).

9: Καμία απάντηση. (9)

10: Σωστή απάντηση με σύγκριση των δύο κλασμάτων και με λόγια (το ένα κλάσμα καταχρηστικό, το άλλο όχι). (3μ)

11: Σχέση αριθμητών, παρονομαστών για ισοδύναμα κλάσματα. (2μ)

12: Πολλαπλασιάζει χιαστί και βλέπει αν τα γινόμενα ισούνται. (2μ)

13: Ορθή τεκμηρίωση με την αιτιολόγηση ότι οι παρονομαστές δεν είναι πολλαπλάσια. (2μ)

15: Λανθασμένη απάντηση με ορθή εξήγηση. (1μ)

16: Σωστή απάντηση με σχέδιο. (2μ)

Έργο 11

1: Σωστή απάντηση με παράδειγμα. (2μ)

2: Σωστή απάντηση με επανάληψη της δήλωσης. (1μ)

3: Σωστή απάντηση με παράδειγμα και με λόγια. (3μ)

4: Σωστή απάντηση με λανθασμένη εξήγηση. (0.5μ)

5: Λανθασμένη απάντηση με λανθασμένη εξήγηση. (0μ)

6: Σωστή απάντηση χωρίς εξήγηση. (0.5μ)

7: Λανθασμένη απάντηση χωρίς εξήγηση. (0μ)

8: Σωστή απάντηση με σχέδιο. (2μ)

9: Καμία απάντηση. (9)

10: μικρότερα κομμάτια (ο αριθμητής μένει ο ίδιος, δεν αναφέρεται στο ρόλο του παρονομαστή) (1μ)

11: Όσο μεγαλώνει ο παρονομαστής, το κλάσμα μικραίνει (χωρίς να γίνεται αναφορά στον αριθμητή). (1μ)

12: Εξήγηση με ολοκληρωμένη αναφορά στη σχέση αριθμητή και παρονομαστή. (3μ)

13: Λανθασμένη απάντηση με ορθή εξήγηση. (1μ)

14: Σωστή απάντηση με σχέδιο και με λόγια. (3μ)

15: Σωστή απάντηση πόσο θέλει να γίνει μια ακέραια μονάδα (3μ)

16: Σωστή απάντηση με μετατροπή σε ποσοστό (3μ)

<u>Έργο 12</u>

1: Σωστή απάντηση με παράδειγμα. (2μ)

2: Σωστή απάντηση με «Εχει κλάσματα μεγαλύτερα του 1» ή «Εχει κλάσματα που δεν είναι μικρότερα από 1». (1μ)

3: Σωστή απάντηση με παράδειγμα και με λόγια. (3μ)

4: Σωστή απάντηση με λανθασμένη εξήγηση. (0.5μ)

5: Λανθασμένη απάντηση με λανθασμένη εξήγηση. (0μ)

6: Σωστή απάντηση χωρίς εξήγηση. (0.5μ)

7: Λανθασμένη απάντηση χωρίς εξήγηση. (0μ)

9: Καμία απάντηση. (9)

10: Σωστή απάντηση «Κλάσματα μεγαλύτερα του 1 είναι τα καταχρηστικά, που μπορούν να γίνουν και μεικτοί αριθμοί». (3μ)

11: Εξήγηση με περισσότερα του ενός παραδείγματα. (2μ)

12: Υπάρχουν κλάσματα που ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή. (2μ)

13: Λανθασμένη απάντηση με ορθή εξήγηση (1μ)

14: Σωστή απάντηση με άλλη εξήγηση (2μ)

Έργο 13

1: Σωστή απάντηση με παράδειγμα. (2μ)

2: Σωστή απάντηση με λόγια «ίση αξία», «ισοδύναμα», «το ίδιο, δεν θα πάθει τίποτε». (3μ)

3: Σωστή απάντηση με παράδειγμα και με λόγια (ίση αξία, ισοδύναμα). (3μ)

4: Σωστή απάντηση με λανθασμένη εξήγηση. (0.5μ)

5: Λανθασμένη απάντηση με λανθασμένη εξήγηση. (0μ)

6: Σωστή απάντηση χωρίς εξήγηση. (0.5μ)

7: Λανθασμένη απάντηση χωρίς εξήγηση. (0μ)

9: Καμία απάντηση. (9)

10: Λανθασμένη απάντηση με σωστή εξήγηση. (1μ)

12: Όσο μεγαλώνει το ένα κλάσμα μεγαλώνει και το άλλο. (1μ)

13: Με απλοποίηση, διαίρεση δια δύο βγαίνει το ίδιο. (2μ)

14: Αν πολλαπλασιάσουμε με τον ίδιο αριθμό, μένει η ίδια αξία. (3μ)

15: Δεν μπορώ να διπλασιάσω αριθμητή και παρονομαστή και να βγει διπλάσια η αξία του (2μ)

16: Σωστή απάντηση με σχέδιο (2μ)

Έργο 14

1: Σωστή απάντηση με παράδειγμα. (2μ)

2: Σωστή απάντηση με επανάληψη δήλωσης. (1μ)

3: Σωστή απάντηση με παράδειγμα και με λόγια. (3μ)

4: Σωστή απάντηση με λανθασμένη εξήγηση. (0.5μ)

5: Λανθασμένη απάντηση με λανθασμένη εξήγηση. (0μ)

6: Σωστή απάντηση χωρίς εξήγηση. (0.5μ)

7: Λανθασμένη απάντηση χωρίς εξήγηση. (0μ)

8: Λανθασμένη απάντηση με σωστή εξήγηση. (1μ)

9: Καμία απάντηση. (9)

10: Εξήγηση με αναφορά ότι τότε το κλάσμα είναι καταχρηστικό και μπορεί να μετατραπεί σε μεικτό αριθμό, μεγαλύτερο της μονάδας. (3μ)

11: Όταν ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι οι ίδιοι, τότε το κλάσμα ισούται με τη μονάδα, όταν ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή, τότε το κλάσμα είναι μεγαλύτερο από μία μονάδα. (3μ)

12: Σωστή απάντηση με λόγια (2μ)

Έργα 15-18

0: Λανθασμένη απάντηση με λανθασμένη εξήγηση (0μ)

1: Σωστή απάντηση με ορθή εξήγηση (1μ)

2: Σωστή απάντηση χωρίς εξήγηση (0.25μ)

3: Σωστή απάντηση χωρίς ολοκληρωμένη εξήγηση (0.5μ)

4: Σωστή απάντηση με λανθασμένη εξήγηση (0.25μ)

5: Λανθασμένη απάντηση με σωστό τρόπο σκέψης (0.25μ)

6: Καμία απάντηση με σωστό τρόπο σκέψης (0.5μ)

Υπόλοιπα έργα

1: Σωστή απάντηση.

0: Λανθασμένη απάντηση.

9: Καμία απάντηση – κενό.

Κωδικοποίηση Δοκιμίου 2

<u>Έργα 19α – 19γ, 20, 26α – 26δ, 32α-32ε, 33α-33ε, 34α-34γ, 35</u>

0: Λανθασμένη απάντηση.

1: Σωστή απάντηση.

9: Καμία απάντηση.

<u>Έργα 22, 27, 29</u>

0: Εντελώς λανθασμένο πρόβλημα, είτε σε σχέση με το έργο, είτε σε σχέση με τη διατύπωση (0μ)

0.5: Αν ο μαθητής προσπαθεί να γράψει σωστό πρόβλημα, αλλά υπάρχει αδυναμία στη διατύπωση, μπορεί να γράφει κλάσμα και να ρωτά πόσο, αντί τι μέρος, (π.χ. να έχει απάντηση 5 αντί $\frac{5}{8}$), μπορεί να υπάρχει αδυναμία στη διατύπωση της ερώτησης κ.τ.λ. Γενικά δίνεται 0.5μ στην περίπτωση που δεν είναι εντελώς ξεκάθαρο το πρόβλημα που γράφει ο μαθητής και δεν μπορεί να πάρει όλες τις μονάδες. Αν όμως δεν γράφει καθόλου ερώτηση 0μ.

1: Το πρόβλημα είναι εντελώς σωστό από μαθηματικής και γλωσσικής άποψης και ανταποκρίνεται στο σχετικό έργο (1μ)

<u>Έργο 21</u>

0-7: αναλόγως του αριθμού των σωστών και λανθασμένων επιλογών (σωστές πλην λανθασμένες).

9: καμία απάντηση.

<u>Έργο 23</u>

0-6: αναλόγως του αριθμού των σωστών απαντήσεων και λανθασμένων επιλογών (σωστές πλην λανθασμένες).

9: καμία απάντηση.

<u>Έργο 24</u>

0-7 αναλόγως του αριθμού των σωστών απαντήσεων και λανθασμένων επιλογών (σωστές πλην λανθασμένες).

9: καμία απάντηση.

<u>Έργο 25</u>

0: Λανθασμένη απάντηση (0μ)

1: Σωστή απάντηση, το σχέδιο να είναι κύκλος (1μ)

2: Σωστή απάντηση, το σχέδιο να είναι ορθογώνιο ή τετράγωνο (1μ)

3: Σωστή απάντηση με άλλο σχέδιο (1μ)

4: Σωστή απάντηση μέρος-όλο (1μ)

9: Καμία απάντηση (9)

6: Σωστή απάντηση με δύο σχέδια σωστά, π.χ. κύκλο και ορθογώνιο (1μ)

7: Σωστή απάντηση με τρία σχέδια σωστά, κύκλο, ορθογώνιο και μέρος-όλο (1μ)

8: Σωστή απάντηση με τέσσερα σχέδια σωστά, κύκλο, ορθογώνιο, μέρος-όλο και μέρος ευθυγράμμου τμήματος (1μ)

0.5: Σωστό, αλλά όχι εντελώς ξεκάθαρο σχέδιο, π.χ. τα μέρη δεν είναι ίσα (0.5μ)

<u>Έργο 28</u>

0: Λανθασμένη απάντηση (0μ)

1: Σωστή απάντηση, το σχέδιο να είναι κύκλος (1μ)

2: Σωστή απάντηση, το σχέδιο να είναι ορθογώνιο ή τετράγωνο (1μ)

3: Σωστή απάντηση με άλλο σχέδιο (1μ)

4: Σωστή απάντηση μέρος-όλο (1μ)

9: Καμία απάντηση (9)

0.5: Σωστό σχέδιο που δείχνει το άθροισμα, αλλά λάθος το σχέδιο της απάντησης (0.5μ)

0.5: Σχέδιο του $\frac{1}{2}$ και του $\frac{1}{4}$ χωρίς το + =ν (0.5μ)

0.5: Σε άλλη περίπτωση που δεν είναι εντελώς ξεκάθαρη η ορθότητα (0.5μ)

0.5: Σχέδιο του $\frac{3}{4}$ μόνο (όχι του $\frac{1}{2}$ και του $\frac{1}{4}$) (0.5μ)

Έργο 30

0: Λανθασμένη απάντηση (0μ)

1: Σωστή απάντηση, το σχέδιο να είναι κύκλος (1μ)

2: Σωστή απάντηση, το σχέδιο να είναι ορθογώνιο ή τετράγωνο (1μ)

3: Σωστή απάντηση με άλλο σχέδιο (1μ)

4: Σωστή απάντηση μέρος-όλο (1μ)

9: Καμία απάντηση (9)

0.5: Οι μαθητές σχεδιάζουν σωστά το μέρος της σοκολάτας που έφαγε το κάθε παιδί, αλλά όχι το μέρος που έφαγαν συνολικά τα δύο παιδιά (0.5μ)

0.25: Αν σχεδίασαν σωστά το μέρος που έφαγε μόνο το ένα παιδί (0.25μ)

0.5: Αν τα σχεδίασαν όλα, αλλά χωρίς να είναι εντελώς σωστό το σχέδιο (ίσα μέρη) (0.5μ)

0.5: Αν σχεδίασαν σωστά μόνο αυτό που έφαγαν και τα δύο παιδιά (0.5μ)

Έργο 31

0: Λανθασμένη απάντηση (0μ)

1: Σωστή απάντηση, το σχέδιο να είναι κύκλος (1μ)

2: Σωστή απάντηση, το σχέδιο να είναι ορθογώνιο ή τετράγωνο (1μ)

3: Σωστή απάντηση με άλλο σχέδιο (1μ)

4: Σωστή απάντηση μέρος-όλο (1μ)

9: Καμία απάντηση (9)

0.5: αν το σχέδιο δεν είναι εντελώς σωστό (π.χ. τα μέρη δεν είναι ακριβώς ίσα) (0.5μ)

Έργα 36, 37, 38

0: Λανθασμένη απάντηση και λανθασμένη εξήγηση ή χωρίς εξήγηση (0μ)

1: Σωστή απάντηση και σωστή εξήγηση (1μ)

2: Σωστή εξήγηση, τρόπος σκέψης και πράξεις, αλλά λάθος απάντηση (λογικότητα) (0.25μ)

3: Σωστή απάντηση χωρίς εξήγηση (0.25μ)

4: Σωστή απάντηση χωρίς ολοκληρωμένη εξήγηση της απάντησης (0.5μ)

5: Σωστή εξήγηση χωρίς απάντηση (0.5μ)

6: Σωστή απάντηση με λανθασμένη εξήγηση (0.25μ)

7: Σωστός τρόπος σκέψης, αλλά λάθος στις πράξεις, δεν υπάρχει πρόβλημα ως προς τη λογικότητα της απάντησης (0.5μ)

<u>Έργα 39, 40, 41</u>

0: Λανθασμένη απάντηση χωρίς έλεγχο ή με λανθασμένο έλεγχο (0μ)

1: Σωστή απάντηση με έλεγχο (1μ)

2: Σωστή απάντηση χωρίς έλεγχο ή με λανθασμένο έλεγχο (0.25μ)

3: Σωστός έλεγχος χωρίς απάντηση (0.5μ)

4: Σωστή απάντηση χωρίς ολοκληρωμένο έλεγχο (0.5μ)

5: Λανθασμένη απάντηση με σωστό έλεγχο (0.5μ)

<u>Παρεμβατικό πρόγραμμα</u>

<u>Διδασκαλία 1 – Φύλλο εργασίας 1 (80 λεπτά)</u>

<u>Στόχοι:</u> Η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να «ορίζουν», να αναγνωρίζουν κλάσματα σε διάφορα είδη αναπαραστάσεων, να τοποθετούν κλάσματα πάνω στην αριθμητική γραμμή και να συνδέουν τα κλάσματα με την έννοια της διαίρεσης.

<u>Αφόρμηση</u>

Στη χώρα με τα κλάσματα

Ο Μαθηματικός βρήκε ένα συναρπαστικό παιχνίδι για να παίξει. Το παιχνίδι ήταν ένα ταξίδι στη χώρα των κλασμάτων! Το ταξίδι περιλάμβανε διάφορες δραστηριότητες και ο παίκτης έπρεπε να απαντήσει σε ερωτήσεις και να λύσει κάποια προβλήματα. Αν ο παίκτης απαντούσε σε όλες τις ερωτήσεις και έλυνε σωστά όλα τα προβλήματα κάθε δραστηριότητας, τότε προχωρούσε στην επόμενη δραστηριότητα όπου τον περίμεναν καινούριες περιπέτειες.

<u>Δραστηριότητα 1</u>

Ο δάσκαλος ξεκινά με την εξής πρόταση: Στη χώρα των κλασμάτων υπάρχουν πολλά κλάσματα, μπορείτε να αναφέρετε μερικά; ...

Αν σας ζητούσε κάποιος να του πείτε τι είναι κλάσμα τι θα του λέγατε;

Οι μαθητές συζητούν πρώτα στις ομάδες τους και ανταλλάζουν απόψεις. Ο δάσκαλος περιφέρεται και παρακολουθεί τη συζήτηση των μαθητών παρέχοντας επιβράβευση και κατάλληλες υποδείξεις (φύλλο εργασίας).

Ακολούθως, οι μαθητές παρουσιάζουν τα αποτελέσματα της συζήτησής τους στην τάξη. Κάθε ορισμός που είναι αποδεκτός γίνεται αποδεκτός, ενώ οι μαθητές παροτρύνονται να χρησιμοποιούν πέραν του ενός τρόπου για να εξηγήσουν (με λόγια και με σχέδιο ...). Διεξάγεται συζήτηση με όλη την τάξη και οι μαθητές καλούνται να τεκμηριώσουν την απάντησή τους. Ο δάσκαλος προβληματίζει τους μαθητές ρωτώντας τους και γιατί υπάρχουν δύο αριθμοί σε ένα κλάσμα.

Στο τέλος της συζήτησης ο δάσκαλος αναμένεται να ανακεφαλαιώσει και να διασφαλίσει ότι έχουν αναφερθεί όσο το δυνατόν περισσότεροι ορισμοί για το τι είναι κλάσμα: μέρος-όλο, μέρος αντικειμένου, αριθμός, διαίρεση, ορισμός με τη χρήση είτε μαθηματικής, είτε πρακτικής εξήγησης, ορισμός με τη χρήση σχεδίου, ορισμός με τη χρήση παραδειγμάτων.

Σε περίπτωση που δεν έχει αναφερθεί από τους μαθητές σύνδεση με τη διαίρεση, τότε ο δάσκαλος παρουσιάζει το εξής πρόβλημα στους μαθητές:

«Ο Γιώργος έχει μια πίτσα και θα τη μοιραστεί με ακόμη 5 φίλους του. Τι μέρος της πίτσας θα πάρει ο καθένας;»

Οι μαθητές αναμένεται να βρουν εύκολα την απάντηση και ο δάσκαλος θα ρωτήσει με ποια πράξη λύνεται το πρόβλημα – σύνδεση με τη διαίρεση. Οι μαθητές αναμένεται να αντιληφθούν ότι το πηλίκο που είναι κλάσμα είναι ένας αριθμός. Ακολούθως, γράφει μερικά ακόμη κλάσματα στον πίνακα και οι μαθητές αναφέρουν τις διαιρέσεις στις οποίες αντιστοιχούν (αυτό θα γίνει προηγουμένως σε περίπτωση που οι μαθητές αναφέρουν ότι το κλάσμα είναι διαίρεση στην αφόρμηση).

Οι μαθητές κάνουν τις σελίδες 42, 43, 44 και 45 από το Μέρος Α΄ του βιβλίου Μαθηματικών της Στ΄ τάξης.

Διδασκαλία 2 – Φύλλο εργασίας 2 (40 λεπτά)

Στόχοι: Οι μαθητές να συνδέουν την έννοια του κλάσματος με τις έννοιες του δεκαδικού και του ποσοστού.

Ο δάσκαλος ζητά από τους μαθητές να του πουν με ποιες άλλες έννοιες συνδέονται τα κλάσματα (σύνδεση μπορεί να είχε γίνει και στο προηγούμενο μάθημα). Ο δάσκαλος μπορεί να ρωτήσει: «Μάθατε κάτι άλλο που να έχει σχέση με τα κλάσματα; ...π.χ. το $\frac{1}{4}$ μπορώ να το δείξω με κάποιο άλλο αριθμό που να ισούται με το $\frac{1}{4}$...;» Καταλήγουμε σε πρώτη φάση σε σύνδεση με δεκαδικούς και ποσοστά.

Ο δάσκαλος ρωτά τι είναι οι δεκαδικοί και τι τα ποσοστά (φύλλο εργασίας) και αναπτύσσεται συζήτηση, η οποία καταλήγει στο ότι οι δεκαδικοί αριθμοί είναι κλάσματα με παρονομαστή πολλαπλάσια του 10 (παρονομαστής 10, 100, 1000 ...) και ότι τα ποσοστά είναι ένα είδος αριθμού που ισοδυναμούν με κλάσματα με παρονομαστή το 100 (διαφορετικό είδος αριθμού που χρησιμοποιείται ευρέως στην καθημερινή ζωή). Λόγω του ότι οι περισσότεροι μαθητές αναμένεται να έχουν ξεχάσει τη σύνδεση με τους δεκαδικούς και τα ποσοστά από την Ε΄ τάξη, αναμένεται να γίνει η ανάλογη υπενθύμιση.

Οι μαθητές κάνουν τις σελ. 88, 89, 90, 91 από το Μέρος Α΄ του βιβλίου των Μαθηματικών της Στ΄ και τις σελίδες 92, 93 αν υπάρχει χρόνος (κάποιες από αυτές τις σελίδες μπορούν να ανατεθούν σαν κατ’ οίκον εργασία).

Διδασκαλία 3 – Φύλλο εργασίας 3 (40 λεπτά)

Στόχοι: Οι μαθητές να αναπαριστούν κλάσματα με τη χρήση εικονικών αναπαραστάσεων και να αντιλαμβάνονται το μέγεθος των κλασματικών αριθμών (σύγκριση-σειροθέτηση).

Αφόρμηση

Ο δάσκαλος γράφει το κλάσμα $\frac{7}{8}$ στον πίνακα και καλεί τους μαθητές να κάνουν σχέδιο/σχέδια για να δείξουν αυτό το κλάσμα (φύλλο εργασίας).

Δραστηριότητα 1

Οι μαθητές εργάζονται σε ζευγάρια. Ο ένας μαθητής αναφέρει μερικά κλάσματα και ο άλλος κατασκευάζει όσες περισσότερες εικονικές αναπαραστάσεις μπορεί για να τα παρουσιάσει. Μετά αλλάζουν ρόλους (φύλλο εργασίας). Ο δάσκαλος περιφέρεται και παρέχει κατάλληλη ανατροφοδότηση. Ακολούθως, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα ενώπιον της τάξης. Γίνεται παρουσίαση κλασμάτων με τη χρήση όσο το δυνατόν περισσότερων αναπαραστάσεων: κύκλος, τετράγωνο, ορθογώνιο, μέρος-όλο, αριθμητική γραμμή.

Δραστηριότητα 2

Οι μαθητές κάνουν τις σελίδες 80, 81 από το Μέρος Α΄ του βιβλίου των Μαθηματικών Στ΄ τάξης.

Διδασκαλία 4 – Φύλλο εργασίας 4 (80 λεπτά)

Στόχοι: Οι μαθητές να μεταφράζουν από λεκτική και συμβολική αναπαράσταση σε εικονική και αντίστροφα.

Αφόρμηση

Ο δάσκαλος πληροφορεί τους μαθητές ότι στο σημερινό μάθημα θα φτιάξουν σχέδια για εξισώσεις και προβλήματα και θα τους ζητηθεί να γράψουν προβλήματα για σχέδια και εξισώσεις.

Ο δάσκαλος γράφει την εξίσωση $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=ν$ στον πίνακα και ζητά από τους μαθητές να κατασκευάσουν μια εικονική αναπαράσταση γι’ αυτή την εξίσωση (φύλλο εργασίας). Οι μαθητές παρουσιάζουν τα αποτελέσματα της εργασίας τους στην τάξη και διεξάγεται συζήτηση.

Στη συνέχεια, οι μαθητές σκέφτονται και γράφουν πρόβλημα για την παραπάνω εξίσωση (φύλλο εργασίας). Συζητούνται στην τάξη τα προβλήματα που έγραψαν οι μαθητές ως προς το περιεχόμενο και τη λογικότητα της απάντησής τους...

Ακολούθως, ο δάσκαλος παρουσιάζει το εξής πρόβλημα στους μαθητές και τους καλεί να το λύσουν κάνοντας κάποιο σχέδιο (φύλλο εργασίας).

«Ο Γιώργος έφαγε το $\frac{1}{3}$ από το $\frac{1}{4}$ μιας πίτσας. Τι μέρος της πίτσας έφαγε;»

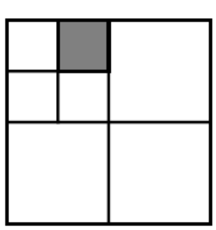
Οι μαθητές εργάζονται πρώτα ατομικά και στη συνέχεια με το διπλανό τους. Παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της δουλειάς τους στην τάξη και διεξάγεται συζήτηση.

Δραστηριότητα 1

Δίνονται στους μαθητές ένα πρόβλημα και μια εξίσωση και τους ζητείται να κατασκευάσουν εικονικές αναπαραστάσεις και να γράψουν την εξίσωση για το συγκεκριμένο πρόβλημα. Οι μαθητές εργάζονται πρώτα ατομικά και στη συνέχεια συζητούν με το διπλανό τους (φύλλο εργασίας). Παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της εργασίας τους στην τάξη ενώ οι μαθητές παροτρύνονται να κατασκευάσουν περισσότερες από μία εικονικές αναπαραστάσεις ...

Δραστηριότητα 2

Ο δάσκαλος κάνει το εξής σχέδιο στον πίνακα και ζητά από τους μαθητές να σκεφτούν και να γράψουν πρόβλημα που να λύνεται με βάση το σχέδιο (φύλλο εργασίας). Οι μαθητές σκέφτονται και παρουσιάζουν τα αποτελέσματα της εργασίας τους στην τάξη.



Συζητούνται τα προβλήματα που κατασκεύασαν οι μαθητές ως προς το περιεχόμενό τους και τη λογικότητά τους, καθώς και ως προς την απάντησή τους. Σε περίπτωση που η απάντηση δεν είναι κλασματικός αριθμός, αναφέρεται πως η απάντηση είναι αποδεκτή, όμως οι μαθητές καλούνται να τροποποιήσουν το υφιστάμενο πρόβλημα ή να κατασκευάσουν άλλο που να έχει απάντηση κλασματικό αριθμό.

<u>Δραστηριότητα 3</u>

Δίνονται στους μαθητές σχέδια και εξισώσεις και καλούνται να γράψουν προβλήματα (φύλλο εργασίας).

Διδασκαλίες 5, 6

Στόχοι: Η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να επιλύουν προβλήματα με κλάσματα, να αιτιολογούν τη σκέψη τους και την απάντησή τους, να εξηγούν τη λογικότητα της απάντησής τους και να επαληθεύουν τη λύση τους (ικανότητα του αναστοχασμού), να συνδέουν τα κλάσματα με δεκαδικούς και ποσοστά.

Διδασκαλία 5 – Φύλλο εργασίας 5 (40 λεπτά)

Αφόρμηση

Ο δάσκαλος παρουσιάζει το εξής πρόβλημα στους μαθητές:

«Ο Γιώργος και η Μαίρη ετοιμάζουν πορτοκαλάδα για το πάρτι τους. Οι ποσότητες πορτοκαλάδας και νερού φαίνονται στις συνταγές τους. Ποια συνταγή κάνει την πορτοκαλάδα να έχει πιο έντονη γεύση;»

Γιώργος: Δύο ποτήρια πορτοκαλάδας – πέντε ποτήρια νερό.

Μαίρη: Τέσσερα ποτήρια πορτοκαλάδας – οκτώ ποτήρια νερό.

Οι μαθητές σκέφτονται το πρόβλημα και ανταλλάζουν ιδέες στις ομάδες τους. Μπορούν να ρωτήσουν και να συζητήσουν διευκρινιστικές ερωτήσεις, όπως τι σημαίνει «έντονη γεύση» πορτοκαλάδας κ.τ.λ. Κατά τη διάρκεια της συζήτησης στις ομάδες, ο δάσκαλος ζητά από τους μαθητές να εξηγήσουν τον τρόπο που σκέφτονται για να λύσουν το πρόβλημα, πόσο σίγουροι νιώθουν ότι η λύση τους είναι σωστή (φύλλο εργασίας)...

Ακολούθως, το πρόβλημα συζητείται στην ολομέλεια της τάξης και ακούονται οι σκέψεις των μαθητών. Ο δάσκαλος, σε περίπτωση που οι μαθητές δεν καταλήξουν στην ορθή απάντηση, τους κατευθύνει με κατάλληλες ερωτήσεις έτσι που ν’ αντιληφθούν ότι πρέπει να χρησιμοποιήσουν και τις δύο μεταβλητές για να καταλήξουν στην απάντησή τους. Οι μαθητές ενθαρρύνονται να εξηγήσουν τον τρόπο που σκέφτηκαν και να αναστοχαστούν...

Στη συνέχεια, ο δάσκαλος ζητά από τους μαθητές να παρουσιάσουν συνταγές για το Γιώργο και τη Μαίρη που να έχουν το ίδιο έντονη γεύση πορτοκαλάδας (φύλλο εργασίας). Οι μαθητές συζητούν και σκέφτονται για πιθανές λύσεις. Ο δάσκαλος τους προβληματίζει πόσες διαφορετικές λύσεις μπορεί να υπάρχουν.

Στην ολομέλεια της τάξης συζητούν για τη στρατηγική και τον τρόπο που σκέφτηκαν για να λύσουν το πρόβλημα, καθώς και για το πόσες λύσεις υπάρχουν... μαθηματικές εξηγήσεις, τεκμηρίωση. Ακόμη, σκέφτονται κατά πόσον όλες οι λύσεις έχουν νόημα, π.χ. αν έχω 1000 ποτήρια πορτοκαλάδας και 2000 ποτήρια νερό, μαθηματικά είναι αποδεκτή, αλλά όχι για την καθημερινή ζωή.

Δραστηριότητα 1

«Ο γυμναστής του σχολείου μας παρέλαβε από τις αποθήκες του Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού σχοινί μήκους 15m. Το σχοινί αυτό θα το κόψει για να φτιάξει μικρά σχοινάκια για σκοπούς της εκγύμνασης, σχοινάκια όμως που δεν θα υπερβαίνουν σε μήκος τα $\frac{2}{3}$ m. Πόσα τέτοια σχοινάκια θα κόψει; Πρέπει οπωσδήποτε να εξηγήσεις την απάντησή σου.»

Οι μαθητές σκέφτονται και πάλι το πρόβλημα και το συζητούν στις ομάδες τους (φύλλο εργασίας). Ο δάσκαλος ζητά από τους μαθητές να εξηγήσουν τον τρόπο που σκέφτηκαν και κυρίως την απάντησή τους σε σχέση με το αποτέλεσμα της πράξης (διαίρεσης) ... Ακόμη, σε περίπτωση που οι μαθητές έχουν ξεχάσει τον αλγόριθμο της διαίρεσης από την Ε΄ τάξη, τους τον υπενθυμίζει. Οι μαθητές μπορούν να εργαστούν με όποιο τρόπο θέλουν (όχι αναγκαστικά με διαίρεση), αλλά σε κάθε περίπτωση, θα πρέπει να εξηγήσουν την απάντησή τους.

Ακολουθεί συζήτηση με την ολομέλεια της τάξης και τονίζεται η σημασία της λογικότητας της απάντησης.

Διδασκαλία 6 – Φύλλο εργασίας 6 (40 λεπτά)

Αφόρμηση

«Σε ένα κουτί υπήρχαν τάπες. Ο Στέφανος πήρε το $\frac{1}{5}$. Στη συνέχεια, ο Γρηγόρης πήρε το $\frac{1}{2}$ από τις τάπες που έμειναν. Αν στο τέλος, έμειναν 6 τάπες στο κουτί, πόσες τάπες υπήρχαν στην αρχή στο κουτί;»

Οι μαθητές σκέφτονται και συζητούν στις ομάδες τους. Ο εκπαιδευτικός καλεί και πάλι τους μαθητές να εξηγήσουν τον τρόπο που σκέφτονται και σε περίπτωση που δυσκολεύονται, από ποια πληροφορία πρέπει ν' αρχίσουν για να λύσουν το πρόβλημα ..., τι στρατηγική πρέπει να εφαρμόσουν, σε περίπτωση που προχωρούν και το λύνουν, να σκεφτούν τι πάει καλά και τι όχι (φύλλο εργασίας)... Σε περίπτωση που οι μαθητές δεν μπορούν καν να αρχίσουν να λύνουν το πρόβλημα, ο δάσκαλος παρέχει νύξεις, π.χ. ότι πρέπει να αρχίσουν από τις τάπες που έμειναν στο κουτί και έτσι τους βοηθά να αρχίσουν να το λύνουν για να μπορέσει στη συνέχεια να διεξαχθεί συζήτηση (θα υπάρξει διαφοροποίηση ανάλογα με τις δυνατότητες των μαθητών).

Ακολούθως, οι μαθητές παρουσιάζουν τα αποτελέσματα της εργασίας τους στην τάξη και εξηγούν τη στρατηγική που εφάρμοσαν, τι πήγε λάθος κατά την επίλυση του προβλήματος...

Στη συνέχεια, ο δάσκαλος τους ζητά να επαληθεύσουν την απάντησή τους (σε περίπτωση που δεν έχουν ξανακάνει κάτι τέτοιο, το κάνουν για πρώτη φορά με το δάσκαλό τους).

Δραστηριότητα 1

«Το μήκος του βήματος ενός ελέφαντα στον Άρη είναι τα $\frac{5}{6}$ του βήματός του στη Γη. Το μήκος του βήματος του ίδιου ελέφαντα στην Αφροδίτη είναι τα $\frac{7}{8}$ του βήματός του στη Γη. Πού είναι μεγαλύτερο το βήμα του ελέφαντα στον Άρη ή στην Αφροδίτη; Πρέπει οπωσδήποτε να εξηγήσεις την απάντησή σου».

Οι μαθητές σκέφτονται το πρόβλημα στις ομάδες τους και εξηγούν τον τρόπο σκέψης τους (φύλλο εργασίας). Μπορούν, αν θέλουν, να δοκιμάσουν διάφορες τιμές για το μήκος του βήματος στη Γη για να καταλήξουν σε κάποιο συμπέρασμα ή ...

Ο δάσκαλος προτού παρουσιάσουν τα αποτελέσματά τους στην ολομέλεια της τάξης ζητά από τους μαθητές να επαληθεύσουν την απάντησή τους.

Ακολούθως, γίνεται συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης και οι μαθητές εξηγούν τη σκέψη τους και παρουσιάζουν την επαλήθευση της απάντησής τους.

Δραστηριότητα 2

«Τρεις ορειβάτες αποφάσισαν να κάνουν ορειβασία. Ο πρώτος ανέβηκε σε ύψος μέχρι το 63% του ύψος του βουνού, ο δεύτερος ανέβηκε μέχρι τα $\frac{4}{7}$ του ύψους του βουνού και ο τρίτος μέχρι το 0,57 του ύψους του βουνού. Ποιος από τους τρεις ορειβάτες ανέβηκε πιο ψηλά;»

Οι μαθητές σκέφτονται το πρόβλημα στις ομάδες τους και αναλύουν τον τρόπο σκέψης τους (φύλλο εργασίας). Το πρόβλημα αυτό εκτός από την ανάπτυξη του αναστοχασμού στοχεύει και στη διασύνδεση των κλασμάτων με δεκαδικούς και ποσοστά. Ο δάσκαλος κατά τη διάρκεια της εργασίας των μαθητών στις ομάδες τους παρέχει κατάλληλη ανατροφοδότηση και καθοδήγηση.

Στη συνέχεια, οι μαθητές παρουσιάζουν τα αποτελέσματα της εργασίας τους στην τάξη και διεξάγεται συζήτηση.

Διδασκαλίες 7, 8

Στόχοι: η ανάπτυξη της ικανότητας του επαγωγικού συλλογισμού, των μαθηματικών εξηγήσεων, της τεκμηρίωσης και του αναστοχασμού.

Διδασκαλία 7 – Φύλλο εργασίας 7 (40 λεπτά)

Αφόρμηση

Σε ένα σπίτι στην χώρα των κλασμάτων συγκεντρώθηκαν αρκετά κλάσματα που μοιάζουν σε κάτι. Μπορείς να βρεις σε τι μοιάζουν;

$\frac{3}{9}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{12}{36}$
$\frac{10}{30}$	$\frac{100}{300}$	$\frac{1}{3}$

Ομοιότητα:

Να εξηγήσεις τον τρόπο που βρήκες την απάντησή σου.

(Οι μαθητές εργάζονται ατομικά-φύλλο εργασίας)

Υποβολή ερώτησης από τον εκπαιδευτικό

Μπορείτε να βρείτε πόσα κλάσματα είναι ισοδύναμα με το $\frac{1}{3}$; (φύλλο εργασίας)

(Διεξάγεται συζήτηση με όλη την τάξη).

Ο εκπαιδευτικός με τις ερωτήσεις του καθοδηγεί τους μαθητές σε γενίκευση ... ότι δηλαδή υπάρχουν άπειρα κλάσματα ισοδύναμα με το $\frac{1}{3}$. Επιπρόσθετα, οι μαθητές καλούνται να σκεφτούν για την απάντηση που έδωσαν, κατά πόσον είναι σίγουροι για την απάντησή τους, σε περίπτωση που ανέφεραν συγκεκριμένο αριθμό κλασμάτων, κατά πόσον υπάρχουν κι άλλα κλάσματα ...

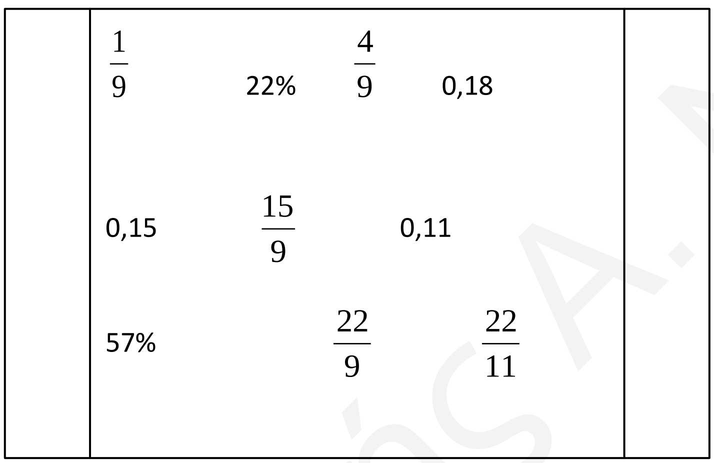
Υποβολή ερώτησης από τον εκπαιδευτικό.

Μπορείτε (σε συνεργασία) να βρείτε και να γράψετε άλλα κλάσματα που να μοιάζουν σε κάτι;

Οι μαθητές σκέφτονται και προτείνουν λύσεις (φύλλο εργασίας). Ακολούθως, στην ολομέλεια της τάξης ο δάσκαλος τους προβληματίζει κατά πόσον οι λύσεις που έδωσαν είναι σωστές, κατά πόσον υπάρχουν και άλλες λύσεις κ.τ.λ.

Δραστηριότητα 1

Σε κάποιο άλλο σπίτι συγκεντρώθηκαν μερικοί άλλοι αριθμοί.



Οι αριθμοί που μοιάζουν σε κάτι αποφάσισαν να κάνουν πάρτι στον κήπο του σπιτιού.

Να γράψεις τους αριθμούς που μοιάζουν σε κάτι στον κήπο του σπιτιού και δώσε όνομα στην ομάδα που έφτιαξες.

Όνομα:……………………………………

Να εξηγήσεις στο διπλανό σου τον τρόπο με τον οποίο επέλεξες τους αριθμούς που μοιάζουν σε κάτι.

………

………

Ακολουθεί ανακοίνωση μερικών αποτελεσμάτων και συζήτηση με όλη την τάξη...

Θα μπορούσες να φτιάξεις κάποια άλλη ομάδα;

Οι μαθητές σκέφτονται πρώτα μόνοι τους και στη συνέχεια στην ομάδα τους και προτείνουν άλλη/άλλες ομάδες (φύλλο εργασίας).

Διδασκαλία 8 – Φύλλο εργασίας 8 (40 λεπτά)

Αφόρμηση

Σε ένα σπίτι συγκεντρώθηκαν πολλά κλάσματα για να κάνουν πάρτι. Κάποιο όμως από τα κλάσματα διέφερε από τα υπόλοιπα και έπρεπε να φύγει.

$\frac{11}{9}$ $\frac{8}{13}$ $\frac{14}{12}$ $\frac{9}{8}$

$\frac{15}{9}$ $\frac{22}{11}$ $\frac{22}{9}$

Ποιο από τα κλάσματα που φαίνονται πιο πάνω νομίζεις ότι πρέπει να φύγει; Να εξηγήσεις την απάντησή σου.

....
....
....

(Οι μαθητές εργάζονται ατομικά και στη συνέχεια συζητούν στις ομάδες τους - φύλλο εργασίας)

Δραστηριότητα 1

Τα κλάσματα $\frac{1}{9}$ και $\frac{3}{9}$ μόλις παντρεύτηκαν και θα κάνουν τόσα παιδιά όσα είναι τα κλάσματα που βρίσκονται ανάμεσά τους. Άραγε θα κάνουν πολλά παιδιά; Συζήτησε με την ομάδα σου και βρες πόσα κλάσματα υπάρχουν μεταξύ του $\frac{1}{9}$ και $\frac{3}{9}$. **Θα πρέπει οπωσδήποτε να εξηγήσεις την απάντησή σου.**

....
....
....
....

Ακολουθεί και συζήτηση με όλη την τάξη. Οι μαθητές εκφράζουν τις απόψεις τους και ο εκπαιδευτικός με κατάλληλες ερωτήσεις προβληματίζει τους μαθητές ... πόσο σίγουροι είναι για την απάντησή τους, κατά πόσον υπάρχουν και άλλα κλάσματα ... ευνοείται η αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών...

<u>Δραστηριότητα 2</u>

Ο δάσκαλος ζητά από τους μαθητές να συμπληρώσουν το παρακάτω μοτίβο και να εξηγήσουν τον τρόπο που σκέφτηκαν.

$\frac{1}{4}$ $\frac{5}{4}$ $\frac{10}{4}$ $\frac{16}{4}$ $\frac{23}{4}$ ....

Οι μαθητές συζητούν στις ομάδες τους (φύλλο εργασίας) και ακολουθεί παρουσίαση των αποτελεσμάτων σε όλη την τάξη και συζήτηση. Ο δάσκαλος προβληματίζει τους μαθητές πόσα άλλα κλάσματα θα πρέπει να γράψουν για να τελειώσει το μοτίβο. Η συζήτηση καταλήγει στο ότι το μοτίβο δεν τελειώνει ποτέ γιατί υπάρχουν άπειρα κλάσματα.

Διδασκαλία 9 – Φύλλο εργασίας 9 (40 λεπτά)

Στόχοι: η ανάπτυξη της ικανότητας του επαγωγικού συλλογισμού, των μαθηματικών εξηγήσεων και της τεκμηρίωσης.

Αφόρμηση

Ο δάσκαλος παρουσιάζει το πιο κάτω μοτίβο στους μαθητές και τους ζητά να επιλέξουν εκείνο το κλάσμα που συμπληρώνει το μοτίβο.

$\frac{2}{5}$ $\quad$ $\frac{4}{9}$ $\quad$ $\frac{8}{17}$ $\quad$ $\boxed{}$ $\quad$ $\frac{32}{65}$ $\quad$ $\frac{64}{129}$

Α) $\frac{12}{34}$ $\quad$ Β) $\frac{16}{34}$ $\quad$ Γ) $\frac{16}{33}$ $\quad$ Δ) $\frac{32}{33}$

Οι μαθητές σκέφτονται το πρόβλημα πρώτα μόνοι τους και στη συνέχεια το συζητούν στις ομάδες τους. Ακολούθως, καλούνται να εξηγήσουν τον τρόπο που σκέφτηκαν (φύλλο εργασίας).

Δραστηριότητα 1

Ο δάσκαλος παρουσιάζει το πιο κάτω μοτίβο στους μαθητές και τους λέει ότι υπάρχει κάποιο κλάσμα που χαλάει το μοτίβο και πρέπει να φύγει.

$\frac{2}{1}$ $\quad$ $\frac{4}{3}$ $\quad$ $\frac{8}{9}$ $\quad$ $\frac{16}{27}$ $\quad$ $\frac{32}{243}$

Οι μαθητές συζητούν στις ομάδες τους και παρουσιάζουν τα αποτελέσματα της εργασίας τους στην τάξη. Οι μαθητές εξηγούν τον τρόπο σκέψης τους και αιτιολογούν την επιλογή τους (φύλλο εργασίας).

Δραστηριότητα 2

Ο δάσκαλος παρουσιάζει στους μαθητές τον πιο κάτω πίνακα και τους αναφέρει ότι υπάρχει η ίδια σχέση στα κλάσματα κάθε σειράς. Ακόμη, τους αναφέρει ότι υπάρχει η ίδια σχέση μεταξύ των κλασμάτων κάθε στήλης. Ο δάσκαλος ζητά από τους μαθητές να συμπληρώσουν το άδειο κελί με το κατάλληλο κλάσμα. Ακόμη, τους ζητά να τεκμηριώσουν την απάντησή τους (φύλλο εργασίας).

$\frac{2}{3}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{18}{12}$
$\frac{1}{3}$		$\frac{9}{12}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{9}{24}$

Διδασκαλία 10 – Φύλλο εργασίας 10 (80 λεπτά)

Στόχοι: η ανάπτυξη της ικανότητας τεκμηρίωσης, των μαθηματικών εξηγήσεων και του αναστοχασμού.

Αφόρμηση

Ο δάσκαλος αναφέρει στους μαθητές ότι στο σημερινό μάθημα θα τους θέσει διάφορους προβληματισμούς και ότι αναμένει από αυτούς να αναπτύξουν την ικανότητά τους να εξηγούν τη σκέψη τους και να τεκμηριώνουν τις επιλογές τους.

Ο δάσκαλος θέτει τον εξής προβληματισμό στους μαθητές:

Τι θα πάθει ένα κλάσμα αν μειωθεί ο παρονομαστής του και αυξηθεί ο αριθμητής του;

Α) θα αυξηθεί Β) θα μειωθεί Γ) δεν θα πάθει τίποτα, θα μείνει το ίδιο

Πρέπει οπωσδήποτε να τεκμηριώσεις την απάντησή σου.

Οι μαθητές σκέφτονται και συζητούν το πρόβλημα στις ομάδες τους (φύλλο εργασίας). Σε περίπτωση που δυσκολεύονται ν’ αρχίσουν, ο δάσκαλος τους λέει να δοκιμάσουν συγκεκριμένο κλάσμα για να δουν τι παθαίνει.

Ακολουθεί συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης και οι μαθητές αναφέρουν τις λύσεις τους και τις τεκμηριώνουν. Γίνεται αποδεκτή οποιαδήποτε τεκμηρίωση με τη χρήση συγκεκριμένου κλάσματος, αλλά ο δάσκαλος παροτρύνει τους μαθητές να δώσουν μια πιο γενική τεκμηρίωση, σε περίπτωση που δεν έχουν προσπαθήσει κάποιοι να κάνουν κάτι τέτοιο. Για το σκοπό αυτό τους προβληματίζει τι παθαίνει ένα κλάσμα όταν:

Α) αυξάνεται μόνο ο αριθμητής του και ο παρονομαστής του μένει ο ίδιος

Β) μειώνεται ο παρονομαστής του ενώ ο αριθμητής του μένει ο ίδιος

Γ) στη συνέχεια να συνδυάσουν τα παραπάνω και να σκεφτούν τι θα πάθει ένα κλάσμα αν αυξηθεί ο αριθμητής του και ταυτόχρονα μειωθεί ο παρονομαστής του.

Οι μαθητές αναμένεται ν’ αντιληφθούν ότι όσο αυξάνεται ο αριθμητής ενός κλάσματος με τον παρονομαστή του σταθερό, τότε το κλάσμα μεγαλώνει και όσο μειώνεται ο παρονομαστής ενός κλάσματος με τον αριθμητή του σταθερό, τότε το κλάσμα και πάλι μεγαλώνει, συνεπώς το κλάσμα σε αυτή την περίπτωση αναμένεται να μεγαλώσει.

Δραστηριότητα 1

Ο δάσκαλος προβληματίζει τους μαθητές τι θα πάθει το κλάσμα $\frac{2}{3}$ αν αυξηθεί ο αριθμητής του κατά ένα και ο παρονομαστής του κατά ένα. Οι μαθητές σκέφτονται το πρόβλημα πρώτα ατομικά και στη συνέχεια στις ομάδες τους (φύλλο εργασίας). Ακολουθεί ανακοίνωση των αποτελεσμάτων στην ολομέλεια της τάξης.

Δραστηριότητα 2

Στη συνέχεια, τίθεται το ερώτημα κατά πόσον αυτό συμβαίνει σε όλα τα κλάσματα όταν αυξάνεται ο αριθμητής τους κατά ένα και ο παρονομαστής τους κατά ένα.

Οι μαθητές σκέφτονται και συζητούν στις ομάδες τους (φύλλο εργασίας). Αναμένεται να δοκιμάσουν διάφορα κλάσματα για να καταλήξουν σε κάποιο γενικότερο συμπέρασμα. Ο δάσκαλος περνά από τις ομάδες και προβληματίζει τους μαθητές κατά πόσον το συμπέρασμα στο οποίο κατέληξαν ισχύει για όλα τα κλάσματα ή μήπως ανατρέπεται για κάποια άλλα (στις περιπτώσεις εκείνες που οι μαθητές δυσκολεύονται ν’ αρχίσουν, ο δάσκαλος μπορεί να τους βοηθήσει δίνοντας κάποιο δικό του παράδειγμα ...) Οι μαθητές σκέφτονται κατά πόσον ο τρόπος που δουλεύουν είναι σωστός, αν υπάρχουν άλλα κλάσματα που δεν δοκίμασαν και δεν ισχύει το συμπέρασμά τους ...

Ακολουθεί συζήτηση με την ολομέλεια της τάξης στην οποία ακούονται διάφορες απόψεις και ο δάσκαλος προβληματίζει τους μαθητές ...

Δραστηριότητα 3

Ο δάσκαλος ζητά από τους μαθητές να κρίνουν κατά πόσον η παρακάτω πρόταση είναι ορθή ή λανθασμένη και να τεκμηριώσουν την απάντησή τους:

Όλα τα κλάσματα που έχουν τον παρονομαστή τους μεγαλύτερο από τον αριθμητή τους είναι μικρότερα του 1.   Σ/Λ

Οι μαθητές σκέφτονται την πρόταση και συζητούν στις ομάδες τους (φύλλο εργασίας) ... Ακολουθεί συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης, όπου τεκμηριώνουν την επιλογή τους. Ο δάσκαλος προοδευτικά τους κατευθύνει να τεκμηριώσουν την απάντησή τους με ένα γενικότερο κανόνα ...

Το μαγικό ταξίδι στη χώρα των κλασμάτων

Ονοματεπώνυμο: ………………………………………………….   ***Τάξη: ……….***

Φυλλάδιο 1

Ο Μαθηματικός βρήκε ένα συναρπαστικό παιχνίδι για να παίξει. Το παιχνίδι ήταν ένα ταξίδι στη χώρα των κλασμάτων! Το ταξίδι περιλάμβανε διάφορες εργασίες και ο παίκτης έπρεπε να απαντήσει σε ερωτήσεις και να λύσει κάποια προβλήματα. Αν ο παίκτης απαντούσε σε όλες τις ερωτήσεις και έλυνε σωστά όλα τα προβλήματα κάθε εργασίας, τότε προχωρούσε στην επόμενη εργασία όπου τον περίμεναν καινούριες περιπέτειες.

<u>Εργασία</u>

Φαντάσου ότι ο δάσκαλος ή η δασκάλα σου ζητούσε να εξηγήσεις σε κάποιο συμμαθητή σου τι είναι κλάσμα. Να εξηγήσεις στο συμμαθητή σου με όσους περισσότερους τρόπους μπορείς.

………

………

………

………

Φυλλάδιο 2

Ο Μαθηματικός ενδιαφέρεται να μάθει τι είναι οι δεκαδικοί και τι τα ποσοστά. Μπορείς να τον βοηθήσεις;

Τι είναι οι δεκαδικοί;

………
………

Τι είναι τα ποσοστά;

………
………

Φυλλάδιο 3

Κάνω σχέδια ...

<u>Εργασία 1</u>

Να κάνεις όσα περισσότερα σχέδια μπορείς που να δείχνουν τα $\frac{7}{8}$

<u>Εργασία 2</u>

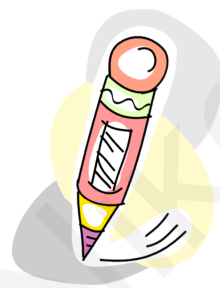
Φτιάξε όσα περισσότερα σχέδια μπορείς για να δείξεις τα κλάσματα που ανέφερε ο διπλανός σου. Γράψε δίπλα από το κάθε σχέδιο το κλάσμα που δείχνει.

Φυλλάδιο 4

Κάνω σχέδια και γράφω προβλήματα...

Εργασία 1

Να κάνεις κάποιο σχέδιο για την εξίσωση $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=v$



Να γράψεις κάποιο πρόβλημα που να λύνεται με την εξίσωση $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=v$

....

....

....

Πρόβλημα: **Ο Γιώργος έφαγε το** $\frac{1}{3}$ **από το** $\frac{1}{4}$ **μιας πίτσας. Τι μέρος της πίτσας έφαγε;**

Να κάνεις κάποιο σχέδιο γι' αυτό το πρόβλημα.

Σχέδιο

Το μαγικό ταξίδι στη χώρα των κλασμάτων

Εργασία 2

Παρακάτω σου δίνονται ένα πρόβλημα και μια εξίσωση και για το καθένα θα πρέπει να κάνεις κάποιο/κάποια σχέδιο/σχέδια και να γράψεις εξισώσεις. Προσπάθησε να κάνεις όσα περισσότερα σχέδια μπορείς.

Πρόβλημα: **Η οικογένεια της Νίκης παράγγειλε πίτσα. Η Νίκη έφαγε το $\frac{1}{2}$ της πίτσας και ο μικρότερός της αδελφός $\frac{1}{3}$ λιγότερη πίτσα από τη Νίκη. Τι μέρος της πίτσας έφαγε ο μικρότερός της αδελφός;**

Εξίσωση:

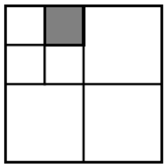
Σχέδιο / Σχέδια

Εξίσωση: $\frac{7}{12}$ **+** $\frac{1}{6}$ **=ν**

Σχέδιο / Σχέδια

Εργασία 3

Μπορείς να γράψεις πρόβλημα που να λύνεται με το παρακάτω σχέδιο;



Πρόβλημα:

………

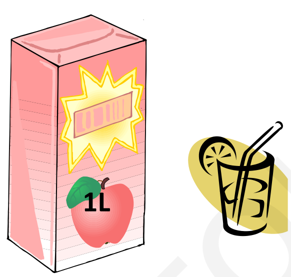
………

………

Εργασία 4

Παρακάτω σας δίνονται σχέδια και εξισώσεις και εσείς θα πρέπει να γράψετε προβλήματα γι’ αυτά.

Σχέδιο



$\frac{1}{5}$ L

Πρόβλημα

………

………

………

Το μαγικό ταξίδι στη χώρα των κλασμάτων

Εξίσωση: **2-** $\frac{2}{3}$ **=ν**

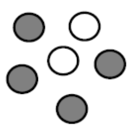
Πρόβλημα

....

....

....

Σχέδιο



Πρόβλημα

....

....

....

Εξίσωση: **2x**$\frac{2}{5}$ **=ν**

Πρόβλημα

....

....

....

Φυλλάδιο 5

Εξηγώ τον τρόπο που σκέφτηκα...

<u>Εργασία 1</u>

Να λύσεις το παρακάτω πρόβλημα. Μπορείς να συνεργαστείς με τα υπόλοιπα παιδιά στην ομάδα σου ή με το διπλανό σου. Πρέπει οπωσδήποτε να εξηγήσεις τον τρόπο που σκέφτηκες και πόσο σίγουρος νιώθεις ότι η λύση σου είναι σωστή.

«Ο Γιώργος και η Μαίρη ετοιμάζουν πορτοκαλάδα για το πάρτι τους. Οι ποσότητες πορτοκαλάδας και νερού φαίνονται στις συνταγές τους. Ποια συνταγή κάνει την πορτοκαλάδα να έχει πιο έντονη γεύση;»

Γιώργος: Δύο ποτήρια πορτοκαλάδας – πέντε ποτήρια νερό.

Μαίρη: Τέσσερα ποτήρια πορτοκαλάδας – οκτώ ποτήρια νερό.

<u>Επίλυση του προβλήματος</u>

Να εξηγήσεις τον τρόπο που σκέφτηκες

....

....

....

Πόσο σίγουρος νιώθεις ότι η λύση που έδωσες είναι σωστή;

....

....

Το μαγικό ταξίδι στη χώρα των κλασμάτων

Μπορείς να βρείς άλλες συνταγές για το Γιώργο και τη Μαίρη που να έχουν το ίδιο έντονη γεύση πορτοκαλάδας; Να εξηγήσεις τον τρόπο που σκέφτηκες.

Πόσες διαφορετικές συνταγές υπάρχουν; Εξήγησε την απάντησή σου.

<u>Εργασία 2</u>

«Ο γυμναστής του σχολείου μας παρέλαβε από τις αποθήκες του Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού σχοινί μήκους 15m. Το σχοινί αυτό θα το κόψει για να φτιάξει μικρά σχοινάκια για σκοπούς της εκγύμνασης, σχοινάκια όμως που δεν θα υπερβαίνουν σε μήκος τα $\frac{2}{3}$ m. Πόσα τέτοια σχοινάκια θα κόψει; Πρέπει οπωσδήποτε να εξηγήσεις την απάντησή σου.»

<u>Επίλυση του προβλήματος και εξήγηση της απάντησης</u>

Νομίζεις ότι η απάντηση που έδωσες είναι λογική; Να εξηγήσεις.

Το μαγικό ταξίδι στη χώρα των κλασμάτων

Φυλλάδιο 6

<u>Εργασία 1</u>

«Σε ένα κουτί υπήρχαν τάπες. Ο Στέφανος πήρε το $\frac{1}{5}$. Στη συνέχεια, ο Γρηγόρης πήρε το $\frac{1}{2}$ από τις τάπες που έμειναν. Αν στο τέλος έμειναν 6 τάπες στο κουτί, πόσες τάπες υπήρχαν στην αρχή στο κουτί;»

Από ποια πληροφορία νομίζεις ότι πρέπει ν' αρχίσεις για να λύσεις το πρόβλημα;

<u>Επίλυση του προβλήματος</u>

Τώρα που σκέφτεσαι για να λύσεις το πρόβλημα νομίζεις ότι είσαι στο σωστό δρόμο;

Τι στρατηγική εφάρμοσες για να λύσεις το πρόβλημα;

Μπορείς να επαληθεύσεις την απάντησή σου;

Το μαγικό ταξίδι στη χώρα των κλασμάτων

<u>Εργασία 2</u>

«Το μήκος του βήματος ενός ελέφαντα στον Άρη είναι τα $\frac{5}{6}$ του βήματός του στη Γη. Το μήκος του βήματος του ίδιου ελέφαντα στην Αφροδίτη είναι τα $\frac{7}{8}$ του βήματός του στη Γη. Πού είναι μεγαλύτερο το βήμα του ελέφαντα στον Άρη ή στην Αφροδίτη; Πρέπει οπωσδήποτε να εξηγήσεις την απάντησή σου».

<u>Επίλυση του προβλήματος και εξήγηση της απάντησης</u>

Επαλήθευση της απάντησης

<u>Εργασία 3</u>

«Τρεις ορειβάτες αποφάσισαν να κάνουν ορειβασία. Ο πρώτος ανέβηκε σε ύψος μέχρι το 63% του ύψος του βουνού, ο δεύτερος ανέβηκε μέχρι τα $\frac{4}{7}$ του ύψους του βουνού και ο τρίτος μέχρι το 0,57 του ύψους του βουνού. Ποιος από τους τρεις ορειβάτες ανέβηκε πιο ψηλά;»

<u>Επίλυση του προβλήματος και επεξήγηση του τρόπου σκέψης</u>

Φυλλάδιο 7

Στην πόλη με τα όμοια

Εργασία 1

Σε ένα σπίτι στην χώρα των κλασμάτων συγκεντρώθηκαν αρκετά κλάσματα που μοιάζουν σε κάτι. Μπορείς να βρεις σε τι μοιάζουν;

$\frac{3}{9}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{12}{36}$
$\frac{10}{30}$	$\frac{100}{300}$	$\frac{1}{3}$

Ομοιότητα: ....

Να εξηγήσεις πώς σκέφτηκες για να καταλήξεις στην απάντησή σου.

....

....

Μπορείς να βρεις πόσα κλάσματα είναι ισοδύναμα με το $\frac{1}{3}$**;**

Πόσο σίγουρος είσαι για την απάντησή σου; Μήπως υπάρχουν κι άλλα κλάσματα;

Το μαγικό ταξίδι στη χώρα των κλασμάτων

Εργασία 2

Σε συνεργασία με το διπλανό σου και με την ομάδα σου, να βρείτε και να γράψετε άλλα κλάσματα που να μοιάζουν σε κάτι.

Εργασία 3

Σε κάποιο άλλο σπίτι συγκεντρώθηκαν μερικοί άλλοι αριθμοί.

$\frac{1}{9}$ 22% $\frac{4}{9}$ 0,18

0,15 $\frac{15}{9}$ 0,11

57% $\frac{22}{9}$ $\frac{22}{11}$

Οι αριθμοί που μοιάζουν σε κάτι αποφάσισαν να κάνουν πάρτι στον κήπο του σπιτιού.

Να γράψεις τους αριθμούς που μοιάζουν σε κάτι στον κήπο του σπιτιού και δώσε όνομα στην ομάδα που έφτιαξες.

Όνομα: ……………………………………………………………………….

Το μαγικό ταξίδι στη χώρα των κλασμάτων

Να εξηγήσεις στο διπλανό σου τον τρόπο με τον οποίο επέλεξες τους αριθμούς που μοιάζουν σε κάτι.

……
……

Άραγε θα μπορούσες να φτιάξεις κάποια άλλη ομάδα με αριθμούς που μοιάζουν σε κάτι άλλο; Αν ναι, γράψε τους αριθμούς που επέλεξες στο ορθογώνιο και δώσε όνομα στην καινούρια ομάδα.

Όνομα: ……………………………………………………………………….

Φυλλάδιο 8

Στην πόλη με τις διαφορές και τα μοτίβα

Εργασία 1

Σε ένα σπίτι συγκεντρώθηκαν πολλά κλάσματα για να κάνουν πάρτι. Κάποιο όμως από τα κλάσματα διέφερε από τα υπόλοιπα και έπρεπε να φύγει.

$\frac{11}{9}$ $\frac{8}{13}$ $\frac{14}{12}$ $\frac{9}{8}$

$\frac{15}{9}$ $\frac{22}{11}$ $\frac{22}{9}$

Ποιο από τα κλάσματα που φαίνονται πιο πάνω νομίζεις ότι πρέπει να φύγει; Να εξηγήσεις την απάντησή σου.

....
....
....

Εργασία 2

Τα κλάσματα $\frac{1}{9}$ και $\frac{3}{9}$ μόλις παντρεύτηκαν και θα κάνουν τόσα παιδιά όσα είναι τα κλάσματα που βρίσκονται ανάμεσά τους. Άραγε θα κάνουν πολλά παιδιά; Συζήτησε με την ομάδα σου και βρες πόσα κλάσματα υπάρχουν μεταξύ του $\frac{1}{9}$ και $\frac{3}{9}$. Θα πρέπει οπωσδήποτε να εξηγήσεις την απάντησή σου.

....
....
....
....

Πόσο σίγουρος είσαι για την απάντησή σου; Άραγε υπάρχουν περισσότερα κλάσματα ή λιγότερα κλάσματα;

....

....

....

....

<u>Εργασία 3</u>

Να συμπληρώσεις το παρακάτω μοτίβο και να εξηγήσεις τον τρόπο που σκέφτηκες.

$\frac{1}{4}$ $\frac{5}{4}$ $\frac{10}{4}$ $\frac{16}{4}$ $\frac{23}{4}$ ....

<u>Τρόπος που σκέφτηκα</u>

....

....

....

Πόσα άλλα κλάσματα πρέπει να γράψεις για να «τελειώσει» το μοτίβο;

....

....

....

Το μαγικό ταξίδι στη χώρα των κλασμάτων

Φυλλάδιο 9

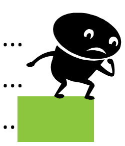
Εργασία 1

Παρατήρησε προσεκτικά το πιο κάτω μοτίβο και επέλεξε εκείνο το κλάσμα που συμπληρώνει το μοτίβο.

$\frac{2}{5}$ $\frac{4}{9}$ $\frac{8}{17}$ $\boxed{}$ $\frac{32}{65}$ $\frac{64}{129}$

Α) $\frac{12}{34}$ Β) $\frac{16}{34}$ Γ) $\frac{16}{33}$ Δ) $\frac{32}{33}$

Να εξηγήσεις τον τρόπο που σκέφτηκες για να καταλήξεις στην απάντησή σου.



....

....

....

....

Εργασία 2

Στην πιο κάτω σειρά υπάρχει ένα κλάσμα που χαλάει το μοτίβο. Αν φύγει αυτό το κλάσμα, θα διορθωθεί η σειρά. Να βάλεις σε κύκλο το κλάσμα που χαλάει το μοτίβο. Πρέπει οπωσδήποτε να αιτιολογήσεις την απάντησή σου.

$\frac{2}{1}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{8}{9}$ $\frac{16}{27}$ $\frac{32}{243}$

Αιτιολόγηση της απάντησης.

....

....

....

....

Το μαγικό ταξίδι στη χώρα των κλασμάτων

<u>Εργασία 3</u>

Στον πιο κάτω πίνακα υπάρχει η ίδια σχέση μεταξύ των κλασμάτων κάθε σειράς. Ακόμη, υπάρχει η ίδια σχέση μεταξύ των κλασμάτων κάθε στήλης. Να συμπληρώσεις το άδειο κελί με το κατάλληλο κλάσμα. Στη συνέχεια, να τεκμηριώσεις την απάντησή σου.

$\frac{2}{3}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{18}{12}$
$\frac{1}{3}$		$\frac{9}{12}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{9}{24}$

Τεκμηρίωση

....

....

....

....

Φυλλάδιο 10

Εξηγώ τη σκέψη μου και τεκμηριώνω την απάντησή μου ...

Εργασία 1

Τι θα πάθει ένα κλάσμα αν μειωθεί ο παρονομαστής του και αυξηθεί ο αριθμητής του;

Α) θα αυξηθεί Β) θα μειωθεί Γ) δεν θα πάθει τίποτα, θα μείνει το ίδιο

Πρέπει οπωσδήποτε να τεκμηριώσεις την απάντησή σου.

....

....

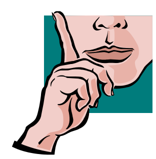
....

....

Εργασία 2

Τι θα πάθει το κλάσμα $\frac{2}{3}$ **αν αυξηθεί ο αριθμητής του κατά ένα και ο παρονομαστής του κατά ένα;**

Πρέπει οπωσδήποτε να τεκμηριώσεις την απάντησή σου.



....

....

....

....

Το μαγικό ταξίδι στη χώρα των κλασμάτων

<u>Εργασία 3</u>

Η απάντηση στην οποία καταλήξατε στην Εργασία 2 ισχύει για όλα τα κλάσματα όταν αυξάνεται ο αριθμητής τους κατά ένα και ο παρονομαστής τους κατά ένα; Πρέπει οπωσδήποτε να τεκμηριώσετε την απάντησή σας.

………

………

………

………

<u>Εργασία 4</u>

Για την παρακάτω πρόταση να βάλεις σε κύκλο το Σ αν είναι σωστή ή το Λ αν είναι λανθασμένη. Στη συνέχεια, να τεκμηριώσεις την απάντησή σου.

Όλα τα κλάσματα που έχουν τον παρονομαστή τους μεγαλύτερο από τον αριθμητή τους είναι μικρότερα του 1.

Σ	Λ

Τεκμηρίωση της απάντησης

………

………

………

………

Πίνακας 4.2.1

Συσχετίσεις Μεταξύ της Επίδοσης των Υποκειμένων στα Έργα των Δύο Δοκιμίων στη Μέτρηση Πριν την Εφαρμογή του Παρεμβατικού Προγράμματος

	Ε.Σ.1	Ε.Σ.2	Ε.Σ.3	Ε.Σ.4	Ε.Σ.5	Ο.Ε.1	Ο.Ε.2	Ο.Ε.3	Ο.Ε.4	Ε.Τ.1	Ε.Τ.2	Ε.Τ.3	Ε.Τ.4	Ε.Τ.5
Ε.Σ.1	1													
Ε.Σ.2	.24**	1												
Ε.Σ.3	.18**	.29**	1											
Ε.Σ.4	.19**	.05	.17**	1										
Ε.Σ.5	.22**	.16**	.19**	.10	1									
Ο.Ε.1	.16**	.25**	.21**	.06	.20**	1								
Ο.Ε.2	.24**	.27**	.30**	.08	.16**	.39**	1							
Ο.Ε.3	.19**	.30**	.19**	.06	.12*	.31**	.39**	1						
Ο.Ε.4	.23**	.29**	.17**	.07	.13*	.36**	.24**	.33**	1					
Ε.Τ.1	.19**	.17**	.26**	.24**	.17**	.24**	.28**	.33**	.26**	1				
Ε.Τ.2	.18**	.34**	.30**	.09	.18**	.36**	.38**	.39**	.34**	.29**	1			
Ε.Τ.3	.14*	.26**	.27**	.04	.11*	.23**	.27**	.22**	.24**	.34**	.43**	1		
Ε.Τ.4	.16**	.24**	.16**	.09	.07	.28**	.27**	.39**	.24**	.31**	.48**	.36**	1	
Ε.Τ.5	.22**	.27**	.20**	.17**	.09	.28**	.29**	.36**	.30**	.44**	.44**	.48**	.48**	1
Α.Μ.Κ.1	.20**	.24**	.20**	.11	.11*	.30**	.34**	.27**	.22**	.18**	.22**	.31**	.28**	.37**
Α.Μ.Κ.2	.02	.08	.11	.08	.02	.18**	.21**	.22**	.18**	.13*	16**	.19**	.22**	.28**
Α.Μ.Κ.3	.02	.01	0	-.03	.06	.12*	.08	.15**	.15**	.10	.03	.07	.07	.10
Α.Μ.Κ.4	.23**	.14*	.19**	.12*	.14*	.34**	.32**	.30**	.37**	.32**	.32**	.32**	.25**	.34**
Μ.Ε.1	.18**	.28**	.18**	12*	.06	.28**	.32**	.30**	.29**	.28**	.39**	.22**	.40**	.34**
Μ.Ε.2	.15**	.17**	.19**	.17**	.08	.18**	.29**	.31**	.20**	.36**	.40**	.19**	.43**	.32**
Μ.Ε.3	.23**	.21**	.20**	.20**	.12*	.22**	.30**	.28**	.30**	.27**	.32**	.27**	.28**	.34**
Μ.Λ.1	.16**	.22**	.21**	.11*	.06	.30**	.32**	.35**	.20**	.18**	.38**	.38**	.27**	.29**
Μ.Λ.2	.20**	.18**	.20**	.05	.13*	.30**	.29**	.24**	.23**	.19**	.28**	.19**	.25**	.30**
Μ.Λ.3	.17**	.17**	.11*	.13*	-.03	.22**	.22**	.33**	.24**	.16**	.22**	.15**	.23**	.25**
Μ.Σ.1	.03	.13*	.08	.06	-.06	.16**	.22**	.13*	.05	.06	.08	.15**	.17**	.03
Μ.Σ.2	-.01	.09	.22**	.07	.01	.16**	.18**	.21**	.14*	.11*	.16**	.18**	.17**	.16**
Μ.Σ.3	.08	.17**	.14*	.09	.05	.13*	.22**	.19**	.06	.19**	.16**	.11	.19**	.14*
Μ.Σ.4	.03	.04	.13*	.11*	.09	.13*	.14*	.14*	.14*	.21**	.20**	.13*	.19**	.14*

	Ε.Σ.1	Ε.Σ.2	Ε.Σ.3	Ε.Σ.4	Ε.Σ.5	Ο.Ε.1	Ο.Ε.2	Ο.Ε.3	Ο.Ε.4	Ε.Τ.1	Ε.Τ.2	Ε.Τ.3	Ε.Τ.4	Ε.Τ.5
Κ.Σ.1	.10	.15**	.20**	.22**	.13*	.22**	.21**	.11*	.19**	.11*	.18**	.18**	.11*	.18**
Κ.Σ.2	.14*	.17**	.12*	.15**	.13*	.16**	.14*	.28**	.20**	.21**	.10	.06	.07	.21**
Κ.Σ.3	.23**	.14*	.12*	.17**	.09	.27**	.26**	.26**	.27**	.25**	.26**	.18**	.27**	.33**
Κ.Σ.4	.18**	.24**	.18**	.15**	.08	.22**	.34**	.43**	.23**	.26**	.38**	.26**	.43**	.43**
Μ.Δ.1	.24**	.21**	.19**	.11*	.10	.33**	.32**	.24**	.33**	.18**	.33**	.17**	.27**	.28**
Μ.Δ.2	.21**	.10	.20**	.09	.12*	.31**	.29**	.21**	.28**	.26**	.32**	.22**	.28**	.37**
Μ.Δ.3	.25**	.19**	.18**	.11*	.18**	.33**	.36**	.30**	.29**	.25**	.35**	.20**	.29**	.38**
Μ.Δ.4	.17**	.15**	.17**	.11	.05	.30**	.25**	.15**	.26**	.24**	.34**	.17**	.22**	.27**
Μ.Δ.5	.21**	.16**	.17**	.15**	.08	.28**	.29**	.26**	.27**	.23**	.35**	.20**	.33**	.35**
Μ.Π.1	.27**	.27**	.21**	.16**	.18**	.29**	.32**	.32**	.29**	.33**	.38**	.24**	.36**	.35**
Μ.Π.2	.30**	.27**	.21**	.21**	.16**	.34**	.33**	.30**	.31**	.32**	.40**	.23**	.33**	.36**
Μ.Π.3	.26**	.30**	.23**	.14*	.17**	.36**	.35**	.29**	.30**	.30**	.37**	.21**	.38**	.35**
Μ.Π.4	.27**	.24**	.14*	.14*	.14*	.32**	.31**	.34**	.32**	.30**	.35**	.26**	.36**	.38**
Μ.Π.5	.28**	.22**	.19**	.13*	.20**	.34**	.35**	.33**	.30**	.31**	.37**	.26**	.37**	.39**
Δ.Α.1	.12*	.19**	.14*	-.03	.04	.26**	.21**	.22**	.21**	.11	.26**	.19**	.20**	.20**
Δ.Α.2	.05	.17**	.14*	.02	.11*	.20**	.18**	.21**	.14*	.12*	.29**	.19**	.22**	.22**
Δ.Α.3	.04	.11	0	-.08	.04	.15**	.08	.10	-.02	.11	.20**	.12*	.21**	.11*
Δ.Α.4	.24**	.32**	.15**	.16**	.10	.30**	.20**	.23**	.23**	.25**	.33**	.20**	.21**	.31**
ΑΝ.ΣΚ.1	.13*	.24**	.14**	.04	.04	.27**	.17**	.33**	.32**	.31**	.39**	.36**	.38**	.39**
ΑΝ.ΣΚ.2	.20**	.20**	.25**	.13*	.12*	.33**	.30**	.32**	.27**	.39**	.39**	.29**	.36**	.34**
ΑΝ.ΣΚ.3	.10	.11	.23**	.02	.05	.15**	.15**	.13*	.22**	.25**	.24**	.25**	.31**	.20**
ΑΝ.ΣΚ.4	.14**	.18**	.14*	.03	.12*	.15**	.11*	.15**	.16**	.20**	.25**	.18**	.29**	.32**
ΑΝ.ΛΟ.1	.21**	.20**	.20**	.04	.11*	.26**	.20**	.21**	.28**	.28**	.27**	.25**	.25**	.30**
ΑΝ.ΛΟ.2	.18**	.23**	.21**	.18**	.14*	.33**	.22**	.26**	.21**	.26**	.29**	.26**	.33**	.36**
ΑΝ.ΛΟ.3	.19**	.23**	.17**	.14*	.08	.22**	.21**	.24**	.23**	.23**	.24**	.22**	.33**	.33**
ΑΝ.ΕΠ.1	.20**	.28**	.18**	.01	.10	.22**	.19**	.26**	.33**	.18**	.31**	.24**	.30**	.22**
ΑΝ.ΕΠ.2	.19**	.31**	.22**	.11*	.09	.25**	.16**	.25**	.22**	.28**	.35**	.34**	.33**	.37**
ΑΝ.ΕΠ.3	.15**	.18**	.09	.03	-.01	.10	.04	.14*	.20**	.13*	.17**	.18**	.04	.09

	Α.Μ.Κ.1	Α.Μ.Κ.2	Α.Μ.Κ.3	Α.Μ.Κ.4	Μ.Ε.1	Μ.Ε.2	Μ.Ε.3	Μ.Λ.1	Μ.Λ.2	Μ.Λ.3	Μ.Σ.1	Μ.Σ.2	Μ.Σ.3	Μ.Σ.4
Α.Μ.Κ.1	1													
Α.Μ.Κ.2	.33**	1												
Α.Μ.Κ.3	.21**	.49**	1											
Α.Μ.Κ.4	.30**	.31**	.16**	1										
Μ.Ε.1	.33**	.20**	.18**	.29**	1									
Μ.Ε.2	.23**	.20**	.17**	.32**	.51**	1								
Μ.Ε.3	.31**	.20**	.09	.28**	.41**	.37**	1							
Μ.Λ.1	.27**	.22**	.07	.29**	.31**	.27**	.28**	1						
Μ.Λ.2	.28**	.16**	.08	.29**	.26**	.22**	.22**	.39**	1					
Μ.Λ.3	.25**	.20**	.09	.20**	.30**	.23**	.32**	.25**	.31**	1				
Μ.Σ.1	.15**	.11	.03	.21**	.10	.12*	.15**	.12*	.03	.04	1			
Μ.Σ.2	.09	.14*	.09	.22**	.20**	.16**	.17**	.22**	.16**	.10	.23**	1		
Μ.Σ.3	.19**	.03	.01	.14*	.20**	.15**	.14**	20**	.15**	.15**	.38**	.29**	1	
Μ.Σ.4	.10	.13*	.07	.16**	.21**	.18**	.21**	.15**	.06	.08	.18**	.30**	.42**	1
Κ.Σ.1	.14*	..07	.07	.11	.29**	.16**	.17**	.19**	.14*	.17**	.12*	.17**	.15**	.28**
Κ.Σ.2	.12*	.15**	.17**	.19**	.19**	.13*	.16**	.20**	.23**	.17**	.11*	.11*	.16**	.06
Κ.Σ.3	.27**	.11*	.12*	.29**	.38**	.32**	.30**	.34**	.40**	.32**	.19**	.14*	.16**	.20**
Κ.Σ.4	.31**	.25**	.21**	.31**	.43**	.36**	.34**	.34**	.29**	.37**	.19**	.27**	.23**	.22**
Μ.Δ.1	.32**	.24**	.19**	.25**	.35**	.31**	.35**	.23**	.23**	.29**	.12*	.15**	.14*	.23**
Μ.Δ.2	.31**	.23**	.14*	.26**	.32**	.30**	.32**	.25**	.25**	.23**	.10	.15**	.10	.19**
Μ.Δ.3	.30**	.22**	.11	.31**	.33**	.31**	.33**	.31**	.27**	.23**	.15**	.15**	.16**	.20**
Μ.Δ.4	.26**	.17**	.18**	.27**	.30**	.30**	.31**	.19**	.26**	.23**	.10	.14*	.18**	.17**
Μ.Δ.5	.33**	.29**	.19**	.28**	.37**	.30**	.32**	.33**	.28**	.26**	.16**	.18**	.14*	.17**
Μ.Π.1	.34**	.21**	.15**	.36**	.37**	.37**	.34**	.31**	.27**	.26**	.17**	.24**	.18**	.17**
Μ.Π.2	.35**	.23**	.21**	.40**	.41**	.36**	.37**	.31**	.33**	.28**	.07	.22**	.10	.23**
Μ.Π.3	.36**	.25**	.20**	.39**	.42**	.37**	.37**	.26**	.32**	.27**	.14*	.25**	.24**	.25**
Μ.Π.4	.36**	.24**	.17**	.36**	.37**	.27**	.37**	.27**	.29**	.27**	.13*	.21**	.17**	.22**
Μ.Π.5	.34**	.24**	.17**	.37**	.34**	.28**	.36**	.32**	.33**	.25**	.14**	.22**	.17**	.22**
Δ.Α.1	.20**	.11	.16**	.23**	.21**	.17**	.23**	.15**	.15**	.09	.16**	.17**	.12*	.15**
Δ.Α.2	.21**	.15**	.18**	.13*	.18**	.21**	.23**	.17**	.24**	.08	.05	.17**	.19**	.20**
Δ.Α.3	.20**	.01	.06	.12*	.11	.16**	.15**	.11*	.10	.11*	.13*	.04	.12*	.11
Δ.Α.4	.29**	.13*	.09	.22**	.29**	.25**	.36**	.19**	.22**	.18**	.03	.16**	.10	.15**
ΑΝ.ΣΚ.1	.19**	.21**	.08	.25**	.31**	.33**	.31**	.26**	.25**	.29**	.09	.07	.04	.09
ΑΝ.ΣΚ.2	.20**	.13**	.10	.34**	.29**	.33**	.25**	.18**	.15**	.30**	.11*	.18**	.09	.07

	Α.Μ.Κ.1	Α.Μ.Κ.2	Α.Μ.Κ.3	Α.Μ.Κ..4	Μ.Ε.1	Μ.Ε.2	Μ.Ε.3	Μ.Λ.1	Μ.Λ.2	Μ.Λ.3	Μ.Σ.1	Μ.Σ.2	Μ.Σ.3	Μ.Σ.4
ΑΝ.ΣΚ.3	.09	.07	-.03	.26**	.28**	.24**	.22**	.25**	.21**	.17**	.14*	.11	.07	.11
ΑΝ.ΣΚ.4	.13*	.17**	.08	.18**	.24**	.28**	.23**	.16**	.11*	.15**	.22**	.14*	.05	.12*
ΑΝ.ΛΟ.1	.29**	.17**	.11	.28**	.22**	.23**	.30**	.19**	.14*	.17**	.14*	.06	.11	.14*
ΑΝ.ΛΟ.2	.29**	.21**	.09	.26**	.21**	.22**	.29**	.35**	.29**	.22**	.11*	.17**	.11*	.14*
ΑΝ.ΛΟ.3	.30**	.19**	.13*	.28**	.24**	.20**	.23**	.29**	.16**	.12*	.16**	.14**	.15**	.11*
ΑΝ.ΕΠ.1	.12*	.17**	.14**	.17**	.26**	.21**	.31**	.14*	.18**	.18**	.09	.16**	.10	.17**
ΑΝ.ΕΠ.2	.29**	.16**	.08	.29**	.33**	.25**	.29**	.23**	.22**	.19**	.12*	.13*	.14*	.14*
ΑΝ.ΕΠ.3	.04	.07	.12*	.01	.15**	.04	.20**	-.01	.06	.09	-.02	.10	.01	.01

	Κ.Σ.1	Κ.Σ.2	Κ.Σ.3	Κ.Σ.4	Μ.Δ.1	Μ.Δ.2	Μ.Δ.3	Μ.Δ.4	Μ.Δ.5	Μ.Π.1	Μ.Π.2	Μ.Π.3	Μ.Π.4	Μ.Π.5
Κ.Σ.1	1													
Κ.Σ.2	.14*	1												
Κ.Σ.3	.22**	.25**	1											
Κ.Σ.4	.27**	.19**	.42**	1										
Μ.Δ.1	.17**	.14*	.24**	.32**	1									
Μ.Δ.2	.19**	.16**	.24**	.39**	.76**	1								
Μ.Δ.3	.14*	.17**	.27**	.43**	.70**	.80**	1							
Μ.Δ.4	.15**	.16**	.24**	.28**	.60**	.63**	.57**	1						
Μ.Δ.5	.18**	.25**	.34**	.40**	.67**	.77**	.69**	.66**	1					
Μ.Π.1	.17**	.15**	.32**	.37**	.48**	.54**	.49**	.52**	.59**	1				
Μ.Π.2	.23**	.15**	.38**	.38**	.48**	.47**	.48**	.46**	.56**	.80**	1			
Μ.Π.3	.23**	.16**	.38**	.41**	.57**	.53**	.49**	.53**	.57**	.75**	.84**	1		
Μ.Π.4	.18**	.20**	.39**	.40**	.47**	.51**	.48**	.45**	.59**	.71**	.80**	.80**	1	
Μ.Π.5	.19**	.21**	.40**	.42**	.47**	.50**	.46**	.43**	.55**	.70**	.79**	.78**	.86**	1
Δ.Α.1	.11	.09	.23**	.19**	.29**	.28**	.26**	.25**	.23**	.32**	.30**	.38**	.29**	.33**
Δ.Α.2	.11	.08	.27**	.23**	.25**	.22**	.20**	.21**	.22**	.24**	.29**	.34**	.27**	.28**
Δ.Α.3	.06	.01	.10	.22**	.20**	.20**	.17**	.14**	.19**	.15**	.20**	.30**	.24**	.21**
Δ.Α.4	.18**	.12*	.31**	.35**	.30**	.28**	.27**	.36**	.34**	.32**	.36**	.39**	.33**	.32**
ΑΝ.ΣΚ.1	.22**	.10	.27**	.32**	.24**	.22**	.20**	.33**	.22**	.29**	.35**	.33**	.37**	.33**
ΑΝ.ΣΚ.2	.24**	.13*	.25**	.34**	.29**	.39**	.32**	.34**	.33**	.38**	.40**	.37**	.35**	.37**
ΑΝ.ΣΚ.3	.07	.03	.13*	.16**	.10	.10	.12*	.10	.16**	.18**	.17**	.11	.10	.14*
ΑΝ.ΣΚ.4	.12*	.02	.16**	.17**	.12*	.06	.10	.17**	.15**	.14*	.22**	.20**	.21**	.20**
ΑΝ.ΛΟ.1	.14*	.03	.21**	.25**	.41**	.34**	.27**	.30**	.32**	.29**	.31**	.33**	.38**	.38**
ΑΝ.ΛΟ.2	.23**	.18**	.29**	.37**	.28**	.29**	.33**	.26**	.30**	.31**	.42**	.38**	.39**	.39**
ΑΝ.ΛΟ.3	.13*	.01	.23**	.37**	.28**	.25**	.28**	.25**	.33**	.30**	.32**	.35**	.32**	.35**
ΑΝ.ΕΠ.1	.20**	.08	.22**	.23**	.28**	.24**	.25**	.19**	.26**	.30**	.36**	.36**	.31**	.31**
ΑΝ.ΕΠ.2	.21**	.13*	.27**	.34**	.37**	.32**	.36**	.27**	.31**	.34**	.43**	.44**	.42**	.42**
ΑΝ.ΕΠ.3	.07	.12*	.11*	.10	.17**	.10	.06	.19**	.10	.04	.11	.14*	.14*	.17**

	Δ.Α.1	Δ.Α.2	Δ.Α.3	Δ.Α.4	ΑΝ.ΣΚ.1	ΑΝ.ΣΚ.2	ΑΝ.ΣΚ.3	ΑΝ.ΣΚ.4	ΑΝ.ΛΟ.1	ΑΝ.ΛΟ.2	ΑΝ.ΛΟ.3
Δ.Α.1	1										
Δ.Α.2	.55**	1									
Δ.Α.3	.22**	.24**	1								
Δ.Α.4	.27**	.26**	.24**	1							
ΑΝ.ΣΚ.1	.19**	.26**	.09	.26**	1						
ΑΝ.ΣΚ.2	.26**	.23**	.14*	.31**	.35**	1					
ΑΝ.ΣΚ.3	.06	0	.03	.10	.22**	.30**	1				
ΑΝ.ΣΚ.4	.13*	.17**	.05	.17**	.32**	.30**	.18**	1			
ΑΝ.ΛΟ.1	.23**	.28**	.18**	.30**	.30**	.30**	.16**	.19**	1		
ΑΝ.ΛΟ.2	.20**	.28**	.16**	.46**	.32**	.27**	.16**	.21**	.38**	1	
ΑΝ.ΛΟ.3	.24**	.23**	.19**	.38**	.21**	.21**	.13*	.36**	.59**	.38**	1
ΑΝ.ΕΠ.1	.27**	.31**	.13*	.33**	.33**	.29**	.26**	.25**	.29**	.28**	.35**
ΑΝ.ΕΠ.2	.27**	.28**	.27**	.32**	.34**	.32**	.21**	.28**	.48**	.44**	.48**
ΑΝ.ΕΠ.3	.18**	.21**	.05	.20**	.24**	.19**	.14*	.15**	.19**	.14*	.14*

	ΑΝ.ΕΠ.1	ΑΝ.ΕΠ.2	ΑΝ.ΕΠ.3
ΑΝ.ΕΠ.1	1		
ΑΝ.ΕΠ.2	.52**	1	
ΑΝ.ΕΠ.3	.40**	.38**	1

*p<0.05, **p<0.01

Κωδικοί: Ε.Σ.: Επαγωγικός Συλλογισμός, Ο.Ε.: Ορισμοί και Μαθηματικές Εξηγήσεις, Ε.Τ.: Επιχειρηματολογία και Τεκμηρίωση, Α.Μ.Κ.: Αίσθηση για το Μέγεθος των Κλασμάτων, Μ.Ε.: Μετάφραση σε Εικονική Αναπαράσταση, Μ.Λ.: Μετάφραση σε Λεκτική Αναπαράσταση, Μ.Σ.: Μετάφραση σε Συμβολική Αναπαράσταση, Κ.Σ.: Κατασκευή Σχεδίου, Μ.Δ.: Μετατροπή σε Δεκαδικό, Μ.Π.: Μετατροπή σε Ποσοστό, Δ.Α.: Διαίρεση Ακεραίων, ΑΝ.ΣΚ.: Αιτιολόγηση της Σκέψης, ΑΝ.ΛΟ.: Λογικότητα της Απάντησης, ΑΝ.ΕΠ.: Επαλήθευση της Απάντησης.

Πίνακας 4.2.2

Συσχετίσεις Μεταξύ της Επίδοσης των Υποκειμένων στα Έργα των Δύο Δοκιμίων στη Μέτρηση Αμέσως Μετά την Εφαρμογή του Παρεμβατικού Προγράμματος

	Ε.Σ.1	Ε.Σ.2	Ε.Σ.3	Ε.Σ.4	Ε.Σ.5	Ο.Ε.1	Ο.Ε.2	Ο.Ε.3	Ο.Ε.4	Ε.Τ.1	Ε.Τ.2	Ε.Τ.3	Ε.Τ.4	Ε.Τ.5
Ε.Σ.1	1													
Ε.Σ.2	.28**	1												
Ε.Σ.3	.09	.28**	1											
Ε.Σ.4	-.01	.19**	.22**	1										
Ε.Σ.5	.16**	.14*	.21**	.19**	1									
Ο.Ε.1	.19**	.38**	.23**	.21**	.17**	1								
Ο.Ε.2	.14*	.27**	.24**	.17**	.18**	.39**	1							
Ο.Ε.3	.08	.25**	.27**	.17**	.21**	.35**	.33**	1						
Ο.Ε.4	.15**	.25**	.26**	.27**	.23**	.38**	.41**	.44**	1					
Ε.Τ.1	.23**	.34**	.32**	.11	.25**	.39**	.42**	.42**	.36**	1				
Ε.Τ.2	.18**	.37**	.30**	.15**	.26**	.45**	.39**	.44**	.40**	.49**	1			
Ε.Τ.3	.20**	.29**	.22**	.21**	.20**	.35**	.32**	.42**	.42**	.45**	.48**	1		
Ε.Τ.4	.19**	.31**	.32**	.19**	.25**	.34**	.36**	.39**	.40**	.38**	.43**	.42**	1	
Ε.Τ.5	.23**	.23**	.29**	.26**	.26**	.36**	.44**	.40**	.41**	.45**	.48**	.55**	.54**	1
Α.Μ.Κ.1	.13*	.25**	.25**	.23**	.26**	.17**	.21**	.28**	.26**	.31**	.30**	.30**	.24**	.31**
Α.Μ.Κ.2	.07	.12*	.06	.06	.13*	.06	.09	.13*	.09	.09	.16**	.15**	.16**	.17**
Α.Μ.Κ.3	.04	.13*	.19**	.01	.12*	.10	.13*	.24**	.10	.18**	.19**	.18**	.18**	.11
Α.Μ.Κ.4	.09	.20**	.22**	.18**	.19**	.19**	.25**	.27**	.26**	.23**	.22**	.30**	.28**	.29**
Μ.Ε.1	.08	.19**	.20**	.20**	.10	.34**	.28**	.27**	.37**	.36**	.30**	.31**	.30**	.31**
Μ.Ε.2	.10	.15**	.18**	.12*	.21**	.26**	.30**	.25**	.32**	.30**	.28**	.29**	.37**	.39**
Μ.Ε.3	.12*	.13*	.17**	.06	.15**	.26**	.20**	.16**	.18**	.36**	.31**	.28**	.29**	.32**
Μ.Λ.1	.19**	.22**	.20**	.20**	.08	.20**	.20**	.30**	.29**	.25**	.28**	.31**	.26**	.31**
Μ.Λ.2	.11	.07	.20**	.07	.10	.16**	.27**	.25**	.26**	.13*	.20**	.23**	.19**	.24**
Μ.Λ.3	.04	.15**	.12*	.06	.14*	.25**	.27**	.24**	.31**	.26**	.21**	.33**	.26**	.33**
Μ.Σ.1	.08	.05	.04	-.08	-.02	.01	.12*	.08	.06	.10	.05	.04	.04	.16**
Μ.Σ.2	.10	.08	.08	.08	.18**	.07	.17**	.05	.07	.14*	.11	.07	.12*	.16**
Μ.Σ.3	.15**	.05	.01	0	.02	.04	-.03	.15*	.11	.15*	.04	.05	.07	.12*
Μ.Σ.4	.07	.03	.18**	-.01	.01	.04	.03	.14*	.14*	.08	-.03	-.02	.10	.07

	Ε.Σ.1	Ε.Σ.2	Ε.Σ.3	Ε.Σ.4	Ε.Σ.5	Ο.Ε.1	Ο.Ε.2	Ο.Ε.3	Ο.Ε.4	Ε.Τ.1	Ε.Τ.2	Ε.Τ.3	Ε.Τ.4	Ε.Τ.5
Κ.Σ.1	.18**	.13*	.16**	.07	.07	.23**	.13*	.20**	.10	.07	.15*	.11	.13*	.11
Κ.Σ.2	.05	.25**	.25**	.14*	.11	.24**	.30**	.28**	.27**	.24**	.25**	.23**	.30**	.26**
Κ.Σ.3	.19**	.14*	.19**	.05	.15*	.35**	.23**	.28**	.18**	.26**	.30**	.31**	.32**	.37**
Κ.Σ.4	.13*	.25**	.25**	.11	.18**	.30**	.22**	.31**	.31**	.31**	.31**	.33**	.36**	.38**
Μ.Δ.1	.11	.26**	.30**	.22**	.16**	.23**	.22**	.26**	.28**	.33**	.31**	.28**	.31**	.31**
Μ.Δ.2	.09	.26**	.24**	.20**	.14*	.20**	.21**	.26**	.26**	.34**	.30**	.25**	.23**	.28**
Μ.Δ.3	.08	.22**	.29**	.21**	.10	.19**	.19**	.24**	.27**	.31**	.29**	.22**	.24**	.26**
Μ.Δ.4	.17**	.19**	.16**	.17**	.15**	.21**	.22**	.14*	.27**	.22**	.24**	.20**	.24**	.31**
Μ.Δ.5	.11	.26**	.26**	.22**	.13*	.27**	.19**	.25**	.26**	.32**	.29**	.28**	.24**	.30**
Μ.Π.1	.15**	.23**	.22**	.12*	.13*	.24**	.27**	.31**	.30**	.42**	.34**	.31**	.31**	.37**
Μ.Π.2	.12*	.23**	.27**	.17**	.12*	.25**	.21**	.24**	.31**	.35**	.30**	.28**	.30**	.31**
Μ.Π.3	.13*	.24**	.35**	.21**	.13*	.26**	.30**	.31**	.34**	.43**	.34**	.31**	.31**	.42**
Μ.Π.4	.11	.25**	.28**	.20**	.13*	.28**	.26**	.32**	.32**	.40**	.34**	.27**	.25**	.34**
Μ.Π.5	.15**	.29**	.29**	.13*	.15**	.25**	.21**	.32**	.30**	.37**	.32**	.26**	.33**	.33**
Δ.Α.1	.10	.15**	.10	-.02	.08	.15**	.04	.09	.03	.11	.20**	.15**	.17**	.19**
Δ.Α.2	.12*	.13*	.19**	.16**	.14*	.21**	.17**	.26**	.16**	.26**	.16**	.22**	.18**	.24**
Δ.Α.3	.02	.10	.01	.07	.09	.08	.06	.05	.07	.06	.09	.12*	.05	.10
Δ.Α.4	.18**	.23**	.20**	.03	.18**	.34**	.19**	.25**	.23**	.30**	.31**	.33**	.30**	.33**
ΑΝ.ΣΚ.1	.15**	.21**	.21**	.19**	.14*	.34**	.25**	.26**	.35**	.30**	.31**	.43**	.32**	.39**
ΑΝ.ΣΚ.2	.08	.20**	.22**	.19**	.09	.17**	.21**	.29**	.32**	.27**	.33**	.25**	.26**	.31**
ΑΝ.ΣΚ.3	.23**	.17**	.19**	.12*	.17**	.32**	.22**	.34**	.30**	.40**	.42**	.39**	.36**	.33**
ΑΝ.ΣΚ.4	.12*	.21**	.27**	.14*	.17**	.20**	.22**	.33**	.32**	.33**	.34**	.30**	.37**	.32**
ΑΝ.ΛΟ.1	.12*	.23**	.23**	.07	.18**	.24**	.22**	.35**	.32**	.30**	.35**	.32**	.39**	.34**
ΑΝ.ΛΟ.2	.15*	.23**	.31**	.14*	.25**	.29**	.29**	.30**	.26**	.35**	.36**	.33**	.29**	.43**
ΑΝ.ΛΟ.3	.19**	.21**	.28**	.17**	.19**	.23**	.27**	.41**	.35**	.31**	.36**	.35**	.37**	.44**
ΑΝ.ΕΠ.1	.12*	.16**	.21**	.13*	.19**	.25**	.28**	.34**	.31**	.34**	.38**	.34**	.36**	.37**
ΑΝ.ΕΠ.2	.14*	.23**	.17**	.11	.24**	.24**	.28**	.40**	.33**	.31**	.35**	.35**	.34**	.40**
ΑΝ.ΕΠ.3	.07	.03	.06	-.08	.04	.13*	.11	.18**	.10	.23**	.18**	.23**	.11	.25**

	Α.Μ.Κ.1	Α.Μ.Κ.2	Α.Μ.Κ.3	Α.Μ.Κ.4	Μ.Ε.1	Μ.Ε.2	Μ.Ε.3	Μ.Λ.1	Μ.Λ.2	Μ.Λ.3	Μ.Σ.1	Μ.Σ.2	Μ.Σ.3	Μ.Σ.4
Α.Μ.Κ.1	1													
Α.Μ.Κ.2	.43**	1												
Α.Μ.Κ.3	.32**	.49**	1											
Α.Μ.Κ.4	.45**	.38**	.25**	1										
Μ.Ε.1	.29**	.25**	.21**	.36**	1									
Μ.Ε.2	.32**	.27**	.24**	.39**	.58**	1								
Μ.Ε.3	.24**	.25**	.16**	.31**	.38**	.41**	1							
Μ.Λ.1	.30**	.20**	.21**	.25**	,27**	.26**	.16**	1						
Μ.Λ.2	.23**	.21**	.21**	.28**	.25**	.25**	.20**	.25**	1					
Μ.Λ.3	.23**	.12*	.16**	.19**	.33**	.29**	.33**	.29**	.27**	1				
Μ.Σ.1	.17**	.14*	.17**	.18**	.12*	.20**	.11	.12*	.03	.07	1			
Μ.Σ.2	.09	.18**	.20**	.22**	.15**	.04	.18**	.04	.11	.01	.40**	1		
Μ.Σ.3	.26**	.25**	.22**	.20**	.21**	.12*	.16**	.12*	.09	.10	.42**	.27**	1	
Μ.Σ.4	.17**	.14*	.14*	.12*	.12*	.11	.15**	.11	.10	.10	.23**	.19**	.43**	1
Κ.Σ.1	.20**	.18**	.14*	.15**	.17**	.21**	.16**	.19**	.15**	.12*	.11	.07	.10	.13*
Κ.Σ.2	.28**	.21**	.19**	.29**	.24**	.20**	.22**	.20**	.34**	.23**	.18**	.16**	.13*	.14*
Κ.Σ.3	.30**	.27**	.18**	.31**	.26**	.27**	.33**	.27**	.21**	.26**	.22**	.16**	.20**	.16**
Κ.Σ.4	.30**	.18**	.20**	.36**	.46**	.28**	.45**	.28**	.29**	.28**	.12*	.20**	.21**	.20**
Μ.Δ.1	.40**	.26**	.23**	.42**	.35**	.33**	.25**	.24**	.28**	.22**	.15**	.28**	.26**	.19**
Μ.Δ.2	.37**	.19**	.20**	.34**	.33**	.31**	.27**	.22**	.25**	.22**	.17**	.20**	.27**	.18**
Μ.Δ.3	.37**	.22**	.23**	.33**	.34**	.33**	.25**	.25**	.28**	.22**	.20**	.21**	.28**	.19**
Μ.Δ.4	.32**	.20**	.14*	.31**	.29**	.29**	.23**	.23**	.27**	.24**	.18**	.21**	.23**	.14*
Μ.Δ.5	.42**	.29**	.30**	.34**	.38**	.35**	.31**	.26**	.24**	.26**	.20**	.23**	.30**	.18**
Μ.Π.1	.37**	.24**	.18**	.37**	.36**	.36**	.32**	.32**	.35**	.26**	.18**	.22**	.28**	.23**
Μ.Π.2	.42**	.27**	.25**	.31**	.37**	.36**	.29**	.29**	.30**	.23**	.11	.19**	.26**	.19**
Μ.Π.3	.46**	.32**	.25**	.39**	.42**	.37**	.30**	.31**	.35**	.28**	.16**	.26**	.28**	.20**
Μ.Π.4	.42**	.28**	.30**	.34**	.43**	.35**	.28**	.33**	.29**	.26**	.21**	.22**	.26**	.21**
Μ.Π.5	.45**	.27**	.24**	.33**	.35**	.35**	.32**	.37**	.30**	.25**	.17**	.19**	.32**	.22**
Δ.Α.1	.08	.05	.06	.09	.07	.12*	.06	.04	0	.04	.07	.09	.01	.07
Δ.Α.2	.31**	.13*	.24**	.20**	.21**	.22**	.16**	.17**	.20**	.16**	.15**	.15**	.21**	.18**
Δ.Α.3	.10	.11	.08	.11	.08	.19**	.06	.07	.16**	.15**	.07	.16**	.05	-.01
Δ.Α.4	.29**	.20**	.24**	.29**	.30**	.29**	.35**	.29**	.22**	.26**	.21**	.22**	.13*	.13*
ΑΝ.ΣΚ.1	.18**	.04	.04	.20**	.27**	.19**	.17**	.17**	.14*	.17**	.05	.05	-.01	.06
ΑΝ.ΣΚ.2	.19**	.06	.12*	.17**	.27**	.24**	.19**	.14*	.13*	.22**	-.01	.05	.10	.11

	Α.Μ.Κ.1	Α.Μ.Κ.2	Α.Μ.Κ.3	Α.Μ.Κ..4	Μ.Ε.1	Μ.Ε.2	Μ.Ε.3	Μ.Λ.1	Μ.Λ.2	Μ.Λ.3	Μ.Σ.1	Μ.Σ.2	Μ.Σ.3	Μ.Σ.4
ΑΝ.ΣΚ.3	.22**	.09	.07	.27**	.26**	.28**	.28**	.17**	.11	.08	.10	.14*	.21**	.17**
ΑΝ.ΣΚ.4	.12*	.06	.15**	.20**	.34**	.22**	.24**	.14*	.18**	.20**	.12*	.21**	.09	.16**
ΑΝ.ΛΟ.1	.32**	.21**	.25**	.36**	.35**	.30**	.37**	.26**	.24**	.29**	.08	.17**	.18**	.20**
ΑΝ.ΛΟ.2	.35**	.29**	.25**	.38**	.34**	.33**	.32**	.31**	.31**	.24**	.18**	.25**	.17**	.15**
ΑΝ.ΛΟ.3	.35**	.25**	.31**	.44**	.41**	.37**	.37**	.29**	.36**	.32**	.18**	.22**	.19**	.12*
ΑΝ.ΕΠ.1	.28**	.25**	.25**	.34**	.42**	.37**	.31**	.28**	.27**	.28**	.14*	.19**	.14*	.13*
ΑΝ.ΕΠ.2	.38**	.25**	.26**	.36**	.43**	.42**	.24**	.32**	.31**	.30**	.12*	.18**	.14*	.16**
ΑΝ.ΕΠ.3	.06	.09	.08	.11*	.19**	.38**	.20**	.03	.07	.16**	.07	.06	.02	.11

	Κ.Σ.1	Κ.Σ.2	Κ.Σ.3	Κ.Σ.4	Μ.Δ.1	Μ.Δ.2	Μ.Δ.3	Μ.Δ.4	Μ.Δ.5	Μ.Π.1	Μ.Π.2	Μ.Π.3	Μ.Π.4	Μ.Π.5
Κ.Σ.1	1													
Κ.Σ.2	.26**	1												
Κ.Σ.3	.23**	.29**	1											
Κ.Σ.4	.25**	.22**	.36**	1										
Μ.Δ.1	.15**	.29**	.35**	.41**	1									
Μ.Δ.2	.15**	.24**	.26**	.37**	.79**	1								
Μ.Δ.3	.20**	.25**	.26**	.35**	.79**	.87**	1							
Μ.Δ.4	.11	.16**	.32**	.33**	.60**	.66**	.63**	1						
Μ.Δ.5	.20**	.22**	.30**	.36**	.77**	.75**	.77**	.64**	1					
Μ.Π.1	.26**	.28**	.36**	.41**	.63**	.66**	.67**	.55**	.65**	1				
Μ.Π.2	.27**	.35**	.36**	.45**	.60**	.61**	.62**	.49**	.59**	.79**	1			
Μ.Π.3	.21**	.30**	.37**	.41**	.67**	.67**	.67**	.57**	.66**	.79**	.77**	1		
Μ.Π.4	.23**	.29**	.32**	.39**	.64**	.69**	.68**	.59**	.73**	.74**	.72**	.79**	1	
Μ.Π.5	.26**	.30**	.35**	.39**	.58**	.65**	.64**	.56**	.69**	.73**	.74**	.80**	.82**	1
Δ.Α.1	-.02	0	.17**	.16**	.13*	.13*	.06	.09	.14*	.07	.12*	.12**	.17**	.13*
Δ.Α.2	.06	.20**	.31**	.29**	.33**	.29**	.28**	.28**	.29**	.26**	.29**	.32**	.31**	.28**
Δ.Α.3	.03	.07	.19**	.16**	.15**	.10	.11	.03	.06	.17**	.17**	.14*	.09	.07
Δ.Α.4	.23**	.26**	.42**	.44**	.38**	.32**	.32**	.34**	.32**	.37**	.38**	.33**	.35**	.35**
ΑΝ.ΣΚ.1	.14*	.11	.20**	.29**	.13*	.12*	.13*	.16**	.14*	17**	.18**	.21**	.18**	.16**
ΑΝ.ΣΚ.2	.14*	.14*	.08	.27**	.18**	.16**	.16**	.11	.21**	.19**	.18**	.19**	.19**	.17**
ΑΝ.ΣΚ.3	.11	.10	.32**	.32**	.23**	.20**	.18**	.24**	.22**	.24**	.23**	.24**	.23**	.27**
ΑΝ.ΣΚ.4	.15**	.25**	.18**	.20**	.27**	.20**	.21**	.14*	.23**	.22**	.18**	.21**	.18**	.18**
ΑΝ.ΛΟ.1	.20**	.30**	.31**	.42**	.39**	.34**	.34**	.36**	.34**	.38**	.36**	.40**	.42**	42**
ΑΝ.ΛΟ.2	.21**	.24**	.41**	.47**	.46**	.39**	.41**	.40**	.44**	.47**	.43**	.48**	.46**	.45**
ΑΝ.ΛΟ.3	.23**	.33**	.27**	.50**	.44**	.37**	.41**	.31**	.44**	.40**	.39**	.41**	.44**	.42**
ΑΝ.ΕΠ.1	.23**	.26**	.31**	.34**	.33**	.26**	.28**	.29**	.31**	.29**	.25**	.34**	.32**	.31**
ΑΝ.ΕΠ.2	.19**	.30**	.30**	.40**	.40**	.37**	.36**	.34**	.38**	.35**	.31**	.41**	.40**	.39**
ΑΝ.ΕΠ.3	.12*	.13*	.16**	.08	.06	.05	.03	.05	.08	.14*	.08	.16**	.10	.09

	Δ.Α.1	Δ.Α.2	Δ.Α.3	Δ.Α.4	ΑΝ.ΣΚ.1	ΑΝ.ΣΚ.2	ΑΝ.ΣΚ.3	ΑΝ.ΣΚ.4	ΑΝ.ΛΟ.1	ΑΝ.ΛΟ.2	ΑΝ.ΛΟ.3
Δ.Α.1	1										
Δ.Α.2	.46**	1									
Δ.Α.3	.11*	.17**	1								
Δ.Α.4	.17**	.31**	.16**	1							
ΑΝ.ΣΚ.1	.17**	.15**	-.04	.28**	1						
ΑΝ.ΣΚ.2	0	.04	.05	.16**	.33**	1					
ΑΝ.ΣΚ.3	.15*	.25**	-.03	.27**	.35**	.23**	1				
ΑΝ.ΣΚ.4	.12*	.17**	.05	.22**	.27**	.22**	.38**	1			
ΑΝ.ΛΟ.1	.16**	.32**	.16**	.39**	.18**	.23**	.40**	.33**	1		
ΑΝ.ΛΟ.2	.19**	.31**	.11	.49**	.22**	.21**	.37**	.23**	.41**	1	
ΑΝ.ΛΟ.3	.21**	.32**	.16**	.44**	.29**	.35**	.34**	.34**	.62**	.47**	1
ΑΝ.ΕΠ.1	.09	.27**	.08	.44**	.24**	.26**	.41**	.33**	.47**	.36**	.54**
ΑΝ.ΕΠ.2	.15**	.31**	.11*	.36**	.26**	.25**	.30**	.29**	.55**	.46**	.58**
ΑΝ.ΕΠ.3	.04	.11*	.10	.18**	.14*	.04	.18**	.23**	.34**	.25**	.24**

	ΑΝ.ΕΠ.1	ΑΝ.ΕΠ.2	ΑΝ.ΕΠ.3
ΑΝ.ΕΠ.1	1		
ΑΝ.ΕΠ.2	.66**	1	
ΑΝ.ΕΠ.3	.33**	.32**	1

*p<0.05, **p<0.01

Κωδικοί: Ε.Σ.: Επαγωγικός Συλλογισμός, Ο.Ε.: Ορισμοί και Μαθηματικές Εξηγήσεις, Ε.Τ.: Επιχειρηματολογία και Τεκμηρίωση, Α.Μ.Κ.: Αίσθηση για το Μέγεθος των Κλασμάτων, Μ.Ε.: Μετάφραση σε Εικονική Αναπαράσταση, Μ.Λ.: Μετάφραση σε Λεκτική Αναπαράσταση, Μ.Σ.: Μετάφραση σε Συμβολική Αναπαράσταση, Κ.Σ.: Κατασκευή Σχεδίου, Μ.Δ.: Μετατροπή σε Δεκαδικό, Μ.Π.: Μετατροπή σε Ποσοστό, Δ.Α.: Διαίρεση Ακεραίων, ΑΝ.ΣΚ.: Αιτιολόγηση της Σκέψης, ΑΝ.ΛΟ.: Λογικότητα της Απάντησης, ΑΝ.ΕΠ.: Επαλήθευση της Απάντησης.

Πίνακας 4.2.3

Συσχετίσεις Μεταξύ της Επίδοσης των Υποκειμένων στα Έργα των Δύο Δοκιμίων στη Μέτρηση Τρεις Μήνες Μετά την Εφαρμογή του Παρεμβατικού Προγράμματος

	Ε.Σ.1	Ε.Σ.2	Ε.Σ.3	Ε.Σ.4	Ε.Σ.5	Ο.Ε.1	Ο.Ε.2	Ο.Ε.3	Ο.Ε.4	Ε.Τ.1	Ε.Τ.2	Ε.Τ.3	Ε.Τ.4	Ε.Τ.5
Ε.Σ.1	1													
Ε.Σ.2	.21**	1												
Ε.Σ.3	.12*	.25**	1											
Ε.Σ.4	.26**	.20**	.10	1										
Ε.Σ.5	.14*	.09	.14*	.21**	1									
Ο.Ε.1	.13*	.29**	.11	.20**	.24**	1								
Ο.Ε.2	.21**	.28**	.25**	.23**	.22**	.43**	1							
Ο.Ε.3	.11	.21**	.35**	.07	.14*	.28**	.29**	1						
Ο.Ε.4	.20**	.33**	.27**	.23**	.18**	.33**	.37**	.39**	1					
Ε.Τ.1	.15*	.26**	.35**	.20**	.27**	.32**	.40**	.46**	.33**	1				
Ε.Τ.2	.22**	.26**	.19**	.14*	.23**	.25**	.33**	.41**	.27**	.38**	1			
Ε.Τ.3	.22**	.22**	.31**	.17**	.23**	.35**	.38**	.35**	.42**	.45**	.39**	1		
Ε.Τ.4	.15**	.34**	.34**	.16**	.22**	.30**	.27**	.41**	.31**	.34**	.47**	.43**	1	
Ε.Τ.5	.19**	.33**	.33**	.22**	.26**	.34**	.40**	.42**	.37**	.53**	.43**	.52**	.41**	1
Α.Μ.Κ.1	.12*	.31**	.28**	.24**	.17**	.23**	.34**	.31**	.29**	.40**	.35**	.24**	.23**	.28**
Α.Μ.Κ.2	.18**	21**	.12	.17**	.12*	.16**	.26**	.30**	.22**	.29**	.27**	.29**	.20**	.27**
Α.Μ.Κ.3	.08	.18**	.19**	.17**	.08	.12*	.19**	.32**	.19**	.29**	.25**	.24**	.17**	.24**
Α.Μ.Κ.4	.21**	.34**	.32**	.21**	.23**	.26**	.32**	.38**	.30**	.36**	.32**	.37**	.35**	.31**
Μ.Ε.1	.18**	.26**	.30**	.25**	.21**	.30**	.39**	.47**	.34**	.38**	.34**	.35**	.29**	.29**
Μ.Ε.2	.17**	.30**	.29**	.21**	.18**	.33**	.34**	.43**	.39**	.34**	.32**	.33**	.27**	.29**
Μ.Ε.3	.18**	.33**	.32**	.19**	.17**	.28**	.38**	.45**	.46**	.34**	.32**	.48**	.32**	.32**
Μ.Λ.1	.18**	.36**	.27**	.12	.13*	.30**	.34**	.43**	.37**	.32**	.29**	.39**	.27**	.34**
Μ.Λ.2	.13*	.20**	.27**	.16**	.16**	.25**	.34**	.34**	.33**	.36**	.34**	.34**	.22**	.32**
Μ.Λ.3	.10	.13*	.23**	.12*	.15*	.20**	.31**	.31**	.26**	.23**	.36**	.32**	.27**	.21**
Μ.Σ.1	.04	.20**	.09	-.01	0	.11	.14*	.20**	.18**	.21**	.18**	.18**	.10	.20**
Μ.Σ.2	.13*	.21**	.29**	.12*	.10	.11	.23**	.25**	.24**	.24**	.21**	.23**	.28**	.17**
Μ.Σ.3	-.04	.18**	.15*	.08	.14*	.15**	.21**	.16**	.16**	.19**	.14*	.15*	.13*	.17**
Μ.Σ.4	.03	.22**	.09	.11	.09	.08	.18**	.07	.07	.12*	.20**	.02	.11*	.12*

	Ε.Σ.1	Ε.Σ.2.	Ε.Σ.3	Ε.Σ.4	Ε.Σ.5	Ο.Ε.1	Ο.Ε.2	Ο.Ε.3	Ο.Ε.4	Ε.Τ.1	Ε.Τ.2	Ε.Τ.3	Ε.Τ.4	Ε.Τ.5
Κ.Σ.1	.02	.04	.09	0	0	.14*	.15*	.19**	.19**	.10	.15**	.07	.08	.05
Κ.Σ.2	.21**	.26**	.22**	.21**	.14*	.26**	.33**	.36**	.31**	.32**	.36**	.38**	.25**	.32**
Κ.Σ.3	.16**	.13*	.21**	.25**	.21**	.22**	.42**	.34**	.26**	.41**	.33**	.30**	.19**	.27**
Κ.Σ.4	.18**	.23**	.27**	.26**	.22**	.32**	.44**	.30**	.29**	.34**	.35**	.33**	.36**	.27**
Μ.Δ.1	.18**	.34**	.28**	.21**	.14*	.34**	.37**	.44**	.37**	.44**	.42**	.44**	.38**	.41**
Μ.Δ.2	.20**	.35**	.25**	.22**	.13*	.30**	.35**	.43**	.36**	.40**	.37**	.37**	.34**	.37**
Μ.Δ.3	.16**	.37**	.25**	.19**	.11	.32**	.35**	.44**	.32**	.45**	.36**	.37**	.34**	.40**
Μ.Δ.4	.16**	.32**	.31**	.20**	.14*	.27**	.30**	.37**	.27**	.31**	.35**	.33**	.32**	.33**
Μ.Δ.5	.24**	.36**	.26**	.19**	.13*	.27**	.34**	.37**	.31**	.42**	.38**	.39**	.33**	.39**
Μ.Π.1	.17**	.35**	.35**	.19**	.17**	.30**	.41**	.41**	.38**	.42**	.38**	.40**	.39**	.45**
Μ.Π.2	.13*	.33**	.32**	.17**	.15**	.29**	.35**	.39**	.36**	.42**	.41**	.38**	.35**	.41**
Μ.Π.3	.15*	.39**	.37**	.19**	.19**	.30**	.39**	.40**	.39**	.43**	.41**	.38**	.40**	.43**
Μ.Π.4	.17**	.35**	.25**	.17**	.21**	.26**	.35**	.44**	.35**	.41**	.44**	.43**	.40**	.49**
Μ.Π.5	.15*	.30**	.32**	.15*	.17**	.24**	.32**	.37**	.36**	.40**	.41**	.38**	.36**	.43**
Δ.Α.1	-.03	.17**	.06	.15*	-.03	.14*	.14*	.14*	.21**	.15*	.07	.10	.11*	.09
Δ.Α.2	.11	.23**	.20**	.23**	.08	.17**	.27**	.27**	.17**	.23**	.21**	.22**	.26**	.26**
Δ.Α.3	-.10	.08	.10	-.01	.09	.10	.14*	.14*	.10	.21**	.17**	.10	.14*	.18**
Δ.Α.4	.10	.31**	.19**	.15*	.15*	.29**	.31**	.31**	.19**	.30**	.39**	.30**	.34**	.30**
ΑΝ.ΣΚ.1	.24**	.26**	.30**	.11*	.18**	.23**	.33**	.38**	.39**	.32**	.40**	.44**	.41**	.42**
ΑΝ.ΣΚ.2	.15*	.29**	.24**	.18**	.21**	.27**	.28**	.32**	.35**	.36**	.34**	.45**	.36**	.38**
ΑΝ.ΣΚ.3	.14*	.28**	.23**	.11	.24**	.28**	.26**	.29**	.27**	.31**	.33**	.35**	.41**	.39**
ΑΝ.ΣΚ.4	.11*	.32**	.23**	.14*	.18**	.25**	.30**	.25**	.32**	.28**	.30**	.38**	.33**	.28**
ΑΝ.ΛΟ.1	.20**	.38**	.26**	.16**	.19**	.31**	.41**	.41**	.40**	.33**	.36**	.42**	.39**	.35**
ΑΝ.ΛΟ.2	.14*	.36**	.22**	.17**	.18**	.20**	.29**	.29**	.25**	.34**	.35**	.36**	.40**	.35**
ΑΝ.ΛΟ.3	.09	.31**	.31**	.10	.11	.25**	.40**	.40**	.34**	.32**	.38**	.35**	.35**	.34**
ΑΝ.ΕΠ.1	.13*	.31**	.19**	.14*	.11	.18**	.25**	.25**	.26**	.27**	.28**	.31**	.32**	.20**
ΑΝ.ΕΠ.2	.16**	.40**	.22**	.18**	.14*	.28**	.36**	.36**	.36**	.35**	.32**	.40**	.36**	.43**
ΑΝ.ΕΠ.3	.15*	.20**	.11	.09	0	.14*	.13*	.13*	.21**	.21**	.12*	.13*	.14*	.21**

	Α.Μ.Κ.1	Α.Μ.Κ.2	Α.Μ.Κ.3	Α.Μ.Κ.4	Μ.Ε.1	Μ.Ε.2	Μ.Ε.3	Μ.Λ.1	Μ.Λ.2	Μ.Λ.3	Μ.Σ.1	Μ.Σ.2	Μ.Σ.3	Μ.Σ.4
Α.Μ.Κ.1	1													
Α.Μ.Κ.2	.46**	1												
Α.Μ.Κ.3	.35**	.54**	1											
Α.Μ.Κ.4	.40**	.45**	.36**	1										
Μ.Ε.1	.35**	.26**	.26**	.39**	1									
Μ.Ε.2	.42**	.34**	.27**	.49**	.62**	1								
Μ.Ε.3	.29**	.28**	.22**	.37**	.50**	.41**	1							
Μ.Λ.1	.32**	.27**	.23**	.41**	.35**	.37**	.44**	1						
Μ.Λ.2	.25**	.19**	.19**	.33**	.26**	.24**	.34**	.40**	1					
Μ.Λ.3	.21**	.16**	.18**	.24**	.29**	.24**	.32**	.33**	.41**	1				
Μ.Σ.1	.22**	.29**	.27**	.27**	.11	.12*	.09	.22**	.21**	.11	1			
Μ.Σ.2	.25**	.31**	.25**	.31**	.24**	.25**	.19**	.21**	.18**	.14*	.27**	1		
Μ.Σ.3	.25**	.20**	.26**	.19**	.14*	.15*	.10	.18**	.17**	.13*	.35**	.33**	1	
Μ.Σ.4	.24**	.17**	.15**	.22**	.18**	.17**	.13*	.16**	.14*	.12*	.20**	.26**	.39**	1
Κ.Σ.1	.20**	.22**	.17**	.14*	.17**	.25**	.14*	.20**	.21**	.17**	.24**	.17**	.22**	.21**
Κ.Σ.2	.34**	.33**	.23**	.36**	.31**	.32**	.39**	.34**	.33**	.33**	.25**	.26**	.15**	.14*
Κ.Σ.3	.33**	.24**	.19**	.25**	.29**	.27**	.27**	.36**	.44**	.33**	.21**	.18**	.25**	.15*
Κ.Σ.4	.25**	.26**	.26**	.26**	.41**	.35**	.36**	.31**	.34**	.35**	.11	.33**	.19**	.21**
Μ.Δ.1	.45**	.39**	.32**	.40**	.36**	.35**	.46**	.49**	.41**	.40**	.21**	.21**	.17**	.17**
Μ.Δ.2	.44**	.39**	.33**	.41**	.36**	.37**	.46**	.45**	.38**	.38**	.20**	.23**	.16**	.19**
Μ.Δ.3	.40**	.38**	.37**	.38**	.34**	.35**	.42**	.41**	.39**	.37**	.25**	.24**	.20**	.15**
Μ.Δ.4	.36**	.24**	.22**	.28**	.35**	.30**	.35**	.29**	.34**	.28**	.15*	.20**	.17**	.16**
Μ.Δ.5	.44**	.34**	.27**	.38**	.37**	.34**	.41**	.39**	.40**	.29**	.20**	.20**	.15*	.21**
Μ.Π.1	.36**	.35**	.27**	.47**	.41**	.44**	.40**	.41**	.38**	.35**	.22**	.37**	.24**	.18**
Μ.Π.2	.39**	.34**	.30**	.43**	.39**	.42**	.41**	.43**	.37**	.37**	.23**	.27**	.26**	.22**
Μ.Π.3	.45**	.37**	.29**	.45**	.42**	.44**	.43**	.44**	.41**	.39**	.20**	.26**	.22**	.20**
Μ.Π.4	.42**	.32**	.28**	.40**	.44**	.40**	.45**	.44**	.42**	.38**	.22**	.25**	.24**	.21**
Μ.Π.5	.38**	.31**	.24**	.39**	.38**	.38**	.43**	.41**	.34**	.36**	.18**	.21**	.20**	.19**
Δ.Α.1	.13*	.01	.01	.14*	.15**	.14*	.19**	.13*	.07	.11	.04	.10	.04	.14*
Δ.Α.2	.18**	.19**	.15**	.25**	.15**	.19**	.19**	.19**	.19**	.27**	.10	.17**	.17**	.20**
Δ.Α.3	.14*	.16**	.12*	.11	.10	.07	.21**	.20**	.18**	.17**	.17**	.06	.10	.04
Δ.Α.4	.30**	.24**	.17**	.25**	.29**	.29**	.29**	.33**	.35**	.33**	.18**	.26**	.18**	.13*
ΑΝ.ΣΚ.1	.20**	.20**	.24**	.33**	.36**	.32**	.34**	.39**	.29**	.36**	.14*	.12*	.10	.16**
ΑΝ.ΣΚ.2	.25**	.25**	.23**	.40**	.35**	.32**	.34**	.34**	.29**	.34**	.18**	.21**	.15*	.13*

	A.M.K.1	A.M.K.2	AM.K.3	AM.K.4	M.E.1	M.E.2	M.E.3	M.Λ.1	M.Λ.2	M.Λ.3	M.Σ.1	M.Σ.2	M.Σ.3	M.Σ.4
AN.ΣK.3	.14*	.19**	.11	.28**	.37**	.28**	.41**	.35**	.30**	.24**	.10	.22**	.13*	.21**
AN.ΣK.4	.31**	.19**	.17**	.30**	.31**	.31**	.42**	.40**	.34**	.35**	.17**	.14*	.14*	.10
AN.ΛO.1	.26**	.26**	.27**	.37**	.37**	.32**	.48**	.37**	.32**	.38**	.21**	.24**	.14*	.11
AN.ΛO.2	.23**	.20**	.24**	.31**	.24**	.20**	.37**	.37**	.37**	.38**	.16**	.24**	.24**	.14*
AN.ΛO.3	.34**	.27**	.26**	.40**	.38**	.35**	.45**	.41**	.40**	.38**	.17**	.19**	.16**	.13*
AN.EΠ.1	.22**	.21**	.17**	.23**	.28**	.28**	.34**	.30**	.33**	.28**	.14*	.16**	.11	.08
AN.EΠ.2	.30**	.28**	.20**	.34**	.34**	.38**	.51**	.43**	.39**	.31**	.21**	.20**	.16**	.17**
AN.EΠ.3	.19**	.18**	.14*	.11	.20**	.23**	.23**	.18**	.20**	.19**	.05	.06	.10	.09

	Κ.Σ.1	Κ.Σ.2	Κ.Σ.3	Κ.Σ.4	Μ.Δ.1	Μ.Δ.2	Μ.Δ.3	Μ.Δ.4	Μ.Δ.5	Μ.Π.1	Μ.Π.2	Μ.Π.3	Μ.Π.4	Μ.Π.5
Κ.Σ.1	1													
Κ.Σ.2	.22**	1												
Κ.Σ.3	.30**	.42**	1											
Κ.Σ.4	.20**	.36**	.40**	1										
Μ.Δ.1	.20**	.42**	.36**	.43**	1									
Μ.Δ.2	.20**	.37**	.36**	.42**	.85**	1								
Μ.Δ.3	.19**	.35**	.40**	.41**	.79**	.83**	1							
Μ.Δ.4	.18**	.37**	.35**	.34**	.65**	.63**	.58**	1						
Μ.Δ.5	.17**	.38**	.37**	.38**	.77**	.84**	.74**	.69**	1					
Μ.Π.1	.23**	.39**	.33**	.47**	.67**	.65**	.68**	.53**	.62**	1				
Μ.Π.2	.21**	.34**	.36**	.40**	.66**	.66**	.72**	.50**	.61**	.82**	1			
Μ.Π.3	.15**	.35**	.38**	.47**	.72**	.70**	.68**	.56**	.68**	.80**	.77**	1		
Μ.Π.4	.21**	.37**	.40**	.43**	.67**	.68**	.69**	.58**	.70**	.77**	.81**	.80**	1	
Μ.Π.5	.20**	.31**	.36**	.38**	.66**	.65**	.64**	.52**	.65**	.74**	.76**	.75**	.87**	1
Δ.Α.1	.05	.12*	.14*	.09	.23**	.24**	.20**	.14*	.24**	.21**	.27**	.22**	.23**	.19**
Δ.Α.2	.03	.18**	.21**	.24**	.40**	.35**	.36**	.28**	.37**	.41**	.37**	.41**	.35**	.32**
Δ.Α.3	.07	.11	.19**	.11	.24**	.18**	.25**	.18**	.21**	.25**	.19**	.26**	.19**	.22**
Δ.Α.4	.12*	.27**	.27**	.31**	.45**	.39**	.42**	.38**	.43**	.42**	.41**	.46**	.45**	.39**
ΑΝ.ΣΚ.1	.11	.39**	.31**	.36**	.42**	.39**	.42**	.38**	.40**	.44**	.44**	.40**	.47**	.43**
ΑΝ.ΣΚ.2	.08	.28**	.33**	.36**	.34**	.30**	.33**	.26**	.30**	.39**	.34**	.39**	.36**	.33**
ΑΝ.ΣΚ.3	.11	.28**	.20**	.30**	.29**	.24**	.23**	.21**	.23**	.28**	.26**	.26**	.31**	.21**
ΑΝ.ΣΚ.4	.14*	.27**	.23**	.28**	.35**	.32**	.35**	.25**	.30**	.35**	.33**	.38**	.35**	.29**
ΑΝ.ΛΟ.1	.19**	.38**	.28**	.33**	.49**	.45**	.46**	.41**	.40**	.50**	.44**	.46**	.42**	.41**
ΑΝ.ΛΟ.2	.22**	.33**	.38**	.31**	.42**	.35**	.40**	.33**	.36**	.42**	.43**	.43**	.39**	.40**
ΑΝ.ΛΟ.3	.21**	.31**	.33**	.30**	.49**	.44**	.45**	.45**	.46**	.47**	.48**	.52**	.46**	.46**
ΑΝ.ΕΠ.1	.14*	.29**	.28**	.26**	.37**	.35**	.37**	.34**	.34**	.33**	.32**	.36**	.28**	.30**
ΑΝ.ΕΠ.2	.28**	.42**	.32**	.28**	.48**	.49**	.44**	.44**	.48**	.46**	.45**	.45**	.42**	.43**
ΑΝ.ΕΠ.3	.08	.21**	.15*	.08	.21**	.22**	.27**	.21**	.22**	.21**	.22**	.20**	.12*	.16**

	Δ.Α.1	Δ.Α.2	Δ.Α.3	Δ.Α.4	ΑΝ.ΣΚ.1	ΑΝ.ΣΚ.2	ΑΝ.ΣΚ.3	ΑΝ.ΣΚ.4	ΑΝ.ΛΟ.1	ΑΝ.ΛΟ.2	ΑΝ.ΛΟ.3
Δ.Α.1	1										
Δ.Α.2	.47**	1									
Δ.Α.3	.07	.30**	1								
Δ.Α.4	.17**	.25**	.17**	1							
ΑΝ.ΣΚ.1	.06	.23**	.13*	.31**	1						
ΑΝ.ΣΚ.2	.13*	.21**	.22**	.27**	.42**	1					
ΑΝ.ΣΚ.3	.20**	.32**	.11	.29**	.44**	.39**	1				
ΑΝ.ΣΚ.4	.14*	.17**	.17**	.40**	.41**	.38**	.46**	1			
ΑΝ.ΛΟ.1	.16**	.24**	.20**	.45**	.47**	.34**	.43**	.49**	1		
ΑΝ.ΛΟ.2	.17**	.33**	.18**	.41**	.31**	.35**	.32**	.39**	.47**	1	
ΑΝ.ΛΟ.3	.14*	.20**	.23**	.41**	.45**	.36**	.32**	.46**	.68**	.48**	1
ΑΝ.ΕΠ.1	.16**	.21**	.27**	.43**	.34**	.39*	.28**	.52**	.44**	.41**	.54**
ΑΝ.ΕΠ.2	.24**	.29**	.27**	.45**	.40*	.39**	.40**	.52**	.61**	.54**	.62**
ΑΝ.ΕΠ.3	.22**	.18**	.18**	.20**	.30**	.22**	.31**	.31**	.31**	.24**	.25**

	ΑΝ.ΕΠ.1	ΑΝ.ΕΠ.2	ΑΝ.ΕΠ.3
ΑΝ.ΕΠ.1	1		
ΑΝ.ΕΠ.2	.67**	1	
ΑΝ.ΕΠ.3	.42**	.44**	1

*p<0.05, **p<0.01

<u>Κωδικοί:</u> Ε.Σ.: Επαγωγικός Συλλογισμός, Ο.Ε.: Ορισμοί και Μαθηματικές Εξηγήσεις, Ε.Τ.: Επιχειρηματολογία και Τεκμηρίωση, Α.Μ.Κ.: Αίσθηση για το Μέγεθος των Κλασμάτων, Μ.Ε.: Μετάφραση σε Εικονική Αναπαράσταση, Μ.Λ.: Μετάφραση σε Λεκτική Αναπαράσταση, Μ.Σ.: Μετάφραση σε Συμβολική Αναπαράσταση, Κ.Σ.: Κατασκευή Σχεδίου, Μ.Δ.: Μετατροπή σε Δεκαδικό, Μ.Π.: Μετατροπή σε Ποσοστό, Δ.Α.: Διαίρεση Ακεραίων, ΑΝ.ΣΚ.: Αιτιολόγηση της Σκέψης, ΑΝ.ΛΟ.: Λογικότητα της Απάντησης, ΑΝ.ΕΠ.: Επαλήθευση της Απάντησης.