Πανεπιστήμιο Κύπρου

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΑΠΟ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΣΤΟ ΛΥΚΕΙΟ
ΕΝΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΑΝΔΡΕΑΣ ΦΙΛΙΠΠΟΥ

2015

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΑΠΟ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΣΤΟ ΛΥΚΕΙΟ
ΕΝΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Ανδρέας Φιλίππου

Διατριβή η οποία υποβλήθηκε προς απόκτηση
διδακτικού τίτλου σπουδών στο Τμήμα Επιστημών της
Αγωγής του Πανεπιστήμιο Κύπρου ως μέρος των
υποχρεώσεων για απόκτηση διδακτορικού τίτλου
στη Μαθηματική Παιδεία

Απρίλιος, 2015

ΣΕΛΙΔΑ ΕΓΚΥΡΟΤΗΤΑΣ

Υποψήφιος Διδάκτορας: Ανδρέας Φιλίππου

Τίτλος Διατριβής: Η Έννοια της Συνάρτησης. Μετάβαση από το Γυμνάσιο στο Λύκειο. Ένα Θεωρητικό Μοντέλο

Η παρούσα Διδακτορική Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για απόκτηση Διδακτορικού Διπλώματος στο Τμήμα Επιστημών της Αγωγής και εγκρίθηκε στις 03 / 04 / 2015 από τα μέλη της Εξεταστικής Επιτροπής.

Εξεταστική Επιτροπή:

Ερευνητικός Σύμβουλος: ____

Αθανάσιος Γαγάτσης, Καθηγητής Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Πρόεδρος Επιτροπής:

Κωνσταντίνος Χρίστου, Καθηγητής Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Μέλος Επιτροπής: ____

Δήμητρα –Πίττα-Πανταζή, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Μέλος Επιτροπής: ____

Στυλιανός Νεγρεπόντης, Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Μέλος Επιτροπής: ____

Θεοδόσης Ζαχαριάδης, Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Υπεύθυνη Δήλωση Υποψηφίου Διδάκτορα

Η παρούσα διατριβή υποβάλλεται προς συμπλήρωση των απαιτήσεων για απονομή Διδακτορικού Τίτλου του Πανεπιστημίου Κύπρου. Είναι προϊόν πρωτότυπης εργασίας αποκλειστικά δικής μου, εκτός των περιπτώσεων που ρητώς αναφέρονται μέσω βιβλιογραφικών αναφορών, σημειώσεων ή και άλλων δηλώσεων.

Ανδρέας Φιλίππου

Περίληψη

Η ικανότητα μετάφρασης από ένα σύστημα αναπαράστασης μιας έννοιας σε άλλο είναι ιδιαίτερα σημαντική για την επίλυση προβλήματος και γενικά για τη μάθηση των μαθηματικών εννοιών. Η παρούσα μελέτη ασχολείται με τη μελέτη των διαφόρων αναπαραστάσεων της έννοιας της συνάρτησης, λεκτική έκφραση, συμβολική παράσταση, γραφική παράσταση, αλγεβρική έκφραση, πίνακας τιμών και τη μετάφραση από τη μια αναπαράσταση στην άλλη και σε τέσσερις περιάγοντες όπως ο ορισμός, η ερμηνεία, η αναγνώριση, η προσέγγιση της συνάρτησης και η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων. Εξετάζεται η έννοια της συνάρτησης σε σχέση με τους διάφορους τρόπους αναπαράστασής της και η μετάφραση από το ένα πεδίο αναπαράστασης στο άλλο. Μια βασική υπόθεση αφορά στο γεγονός ότι η κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας σχετίζεται με την ικανότητα αναγνώρισης, ερμηνείας και προσέγγισης της έννοιας, όταν αυτή παρουσιάζεται με μια ποικιλία σημειωτικών αναπαραστάσεων και την ικανότητα μετάφρασης της έννοιας από το ένα πεδίο αναπαράστασης στο άλλο.

Συγκεκριμένα, εξετάζεται η σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην επιτυχία σε έργα άμεσης μετάφρασης και την επιτυχία στην επίλυση προβλημάτων, τα οποία απαιτούν τη μετάφραση ανάμεσα στα διάφορα συστήματα αναπαράστασης της έννοιας της συνάρτησης. Η κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης προϋποθέτει την ικανότητα αναγνώρισης της έννοιας, όταν αυτή παρουσιάζεται με μια ποικιλία εξωτερικών/σημειωτικών αναπαραστάσεων και την ικανότητα μετάφρασης της έννοιας από το ένα πεδίο έκφρασης στο άλλο (Lesh, Post, & Behr, 1987).

Οι βασικοί στόχοι της παρούσας εργασίας εστιάζονται στη γνωστική δομή της εννοιολογικής κατανόησης, στις ομοιότητες και διαφορές της έννοιας της συνάρτησης στο Γυμνάσου και στο Λύκειο, στις σχέσεις μεταξύ του ορισμού, της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων (αναγνώριση, μετάφραση, χειρισμός) και της λύσης προβλήματος αναφορικά με την έννοια της συνάρτησης. Θα εξεταστούν οι σχέσεις των παραγόντων της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων (αναγνώριση, μετάφραση, χειρισμός) και της ικανότητας λύσης προβλήματος, οι διαφορές στην επίδοση των μαθητών της Α’ και Β΄ Λυκείου όσον αφορά στην επίλυση έργων σχετικών με την έννοια της συνάρτησης και ο βαθμός που σχετίζεται η ηλικία των

μαθητών με την ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και την ικανότητα λύσης προβλήματος με διαφορετικά πεδία αναπαράστασης και κατά πόσο είναι δυνατός ο καθορισμός ιεραρχικών επιπέδων ανάπτυξης της ευελιξίας χρήσης των πολλαπλών αναπαραστάσεων όσον αφορά την έννοια της συνάρτησης.

Δόθηκαν δύο δοκίμια σε μαθητές τριών τάξεων μέσης εκπαίδευσης σε σχολεία της Κύπρου. Τα Δοκίμια Α και Β περιλαμβάνουν έργα άμεσης μετάφρασης από μια αναπαράσταση σε άλλη.

Με βάση τα αποτελέσματα φαίνεται ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην αναγνώριση στοιχειωδών συναρτήσεων, όταν αυτές παρουσιάζονται με διαφορετικές εξωτερικές αναπαραστάσεις. Επιπρόσθετα, φαίνεται ότι υπάρχει σχέση ανάμεσα στην ικανότητα άμεσης μετάφρασης και στην ικανότητα επίλυσης προβλήματος. Το γεγονός αυτό δηλώνει ότι η ικανότητα μετάφρασης πρέπει να συγκαταλέγεται στους παράγοντες, που επηρεάζουν τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος.

Abstract

The translation ability from a representation system of a concept to another may be very important for problem solving and in general on learning mathematical concepts. This study concerned with the study of the different representations of the concept of the function, verbal expression, symbolic representation, graph, algebraic expression, table of values and translation from one representation to another, and in four factors such as the definition, interpretation, recognition the function approach and the ability to solve problems. Addresses the meaning of the function in relation to representations of various ways and the translation from one field to another representation. A basic assumption relates to the fact that the understanding of a mathematical concept related to the ability to recognize, interpret and approach of the concept, when presented with a variety of semiotic representations and the concept of translation ability to from one representation to another field.

In particular, it examines the relationship between success in direct translation tasks and success in solving problems that require translation between the different systems of representation of the concept of the function. Understanding the concept of the function requires the recognition of the concept, when presented with a variety of external/semiotic representations and ability translation of the concept from one field to another expression (Lesh, Post, & Behr, 1987).

The main aims of this thesis are focused on cognitive structure of the conceptual understanding on the similarities and differences of the concept of function in Gymnasium and High School, in relations between the definition of flexibility on use of multiple representations (recognition, translation, and handling) and the problem solving regarding the concept of the function. We will examine the relationship of factors of the flexibility on use of multiple representations (recognition, translation, handling) and the problem solving ability, the difference in the performance of students in the first and second class in high school in terms of solving tasks on the concept of the function and the level of relating the age of the students with the flexibility on use of multiple representations and problem solving ability to with different fields of

representation and whether it is possible to define hierarchies growth of flexible use of multiple representations of the concept of the function.

Given two essays on a three-class of secondary education students in Cyprus schools. The test A and B include direct translation tasks from a representation to another. Based on the results it seems that students encounter difficulties in recognition of elementary functions when they are presented with different external representations. Additionally, it seems that there is a relationship between the direct translation ability to and the ability to problem solving. This indicates that the translation ability to should be one of the factors that influence the problem solving.

Ευχαριστίες

Η υλοποίηση της συγκεκριμένης διατριβής είναι κάτι που σχετίζεται με πολλή προσπάθεια, χρόνο και αφοσίωση, αλλά και με την εκπλήρωση των προσωπικών ερευνών που αφορούν τον τομέα της έρευνας. Κατά τη διάρκεια της περιόδου των διδακτορικών σπουδών η συμβολή πολλών σημαντικών ανθρώπων ήταν ζωτικής σημασίας. Ως εκ τούτου, το λιγότερο που μπορούσα να κάνω είναι να εκφράσω τις ευχαριστίες μου προς αυτούς μέσα από τις παρακάτω γραπτές λέξεις.

Αρχικά θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου και σύμβουλο Αθανάσιο Γαγάτση για όλη τη βοήθεια, την καθοδήγηση και την υποστήριξη. Το προσωπικό του ενδιάφερον και οι συμβουλές του ήταν καθοριστικά κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών μου. Ο Καθηγητής Αθανάσιος Γαγάτσης ακαδημαϊκός και έμπειρος ερευνητής, με την επιστημονική του κατάρτιση, αλλά και την ευχάριστη προσωπικότητα του έκανε τη συνεργασία μας μια πολύ ιδιαίτερη εμπειρία, κατά τη διάρκεια της οποίας είχα πολλές ευκαιρίες τόσο για μάθηση, για την απόκτηση πολλών εμπειριών όσο και για τη βελτίωση του εαυτού μου ως φοιτητή και ως ερευνητή.
Θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα υπόλοιπα μέλη της επιτροπής για τον χρόνου που αφιέρωσαν για να διαβάσουν, να μελετήσουν τις εργασίες μου και να μου παρέχουν καθοδήγηση. Πολλές ευχαριστίες στον Καθηγητή Κωνσταντίνο Χρίστου και την Αναπληρώτρια Καθηγήτρια κα Δήμητρα Πίττα-Πανταζή από το Τμήμα Επιστημών της Αγωγής του Πανεπιστημίου Κύπρου όπως και τον καθηγητή Στυλιανό Νεγρεπόντη και τον καθηγητή Θεοδόση Ζαχαριάδη από το Τμήμα Μαθηματικών του Καποδιστριακού Πανεπιστήμιο Αθηνών για τις χρήσιμες παρατηρήσεις και συμβουλές για τη διαμόρφωση του τελικού κειμένου της Διατριβής.
Επιπλέον, ευχαριστώ την Δρ Παρασκευή Μιχαήλ-Χρυσάνθου και την επίκουρη καθηγήτρια Ρίτα Παναούρα για τη βοήθεια και την καθοδήγησή τους σχετικά με τις στατιστικές αναλύσεις που πραγματοποιήθηκαν για τις ανάγκες της παρούσας διατριβής. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τρεις πολύ καλές συνεργάτιδες, την επίκουρη καθηγήτρια Ιλιάδα Ηλία την Δρ Ελένη Δεληγιάννη και την Στυλιάνα Νικολάου για τη βοήθειά τους και που ήταν πάντα πρόθυμες να συζητήσουν, να απαντήσουν στις ερωτήσεις μου και να ανταλλάξουν ιδέες σχετικά με το έργο μου.
Τέλος, θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στην αγαπημένη μου οικογένεια την

γυναίκα μου Αθηνά και την κόρη μου Ιωάννα που ήταν πάντοτε δίπλα μου, πιστεύαν σε μένα και με υποστήριζαν με κάθε τρόπο. Δεν θα μπορούσα, φυσικά, να ξεχάσω τη συμβολή όλων των αγαπητών φίλων και συναδέλφων οι οποίοι με ενθάρρυναν και με βοήθησαν στην συλλογή των δεδομένων της έρευνας.

Σας ευχαριστώ πολύ.

Στην οικογένεια μου

Πίνακας Περιεχομένων

ΣΕΛΙΔΑ ΕΓΚΥΡΟΤΗΤΑΣ iv

Υπεύθυνη Δήλωση Υποψηφίου Διδάκτορα v

Περίληψη vi

Abstract viii

Ευχαριστίες x

Πίνακας Περιεχομένων xiii

Κατάλογος Σχημάτων xviii

Κατάλογος Διαγραμμάτων xix

Κατάλογος Πινάκων xxvi

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι: ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ 1

Εισαγωγή 1

Το Πρόβλημα και ο Σκοπός της Έρευνας 2

Ερευνητικά Ερωτήματα 5

Σημασία και Πρωτοτυπία της Διατριβής 5

Περιορισμοί της Έρευνας 6

Δομή και Περίληψη Διατριβής 7

Λειτουργικοί Ορισμοί 9

Τι είναι αναπαράσταση; 9

Ορισμός Έννοιας (Concept Definition) 11

Μεταφράσεις (Conversions) 12

Ευελιξία μετάφρασης πολλαπλών Αναπαραστάσεων (Multiple representational flexibility) 12

Επίλυση Προβλήματος (Problem Solving) 13

Εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών (Conceptual understanding of mathematical concepts) 13

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ: ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ 14

Εισαγωγή 14

Η Έννοια της Συνάρτησης 15

Η Συνάρτηση ως Διαδικασία και ως Αντικείμενο 19

Η Εξέλιξη της Έννοιας της Συνάρτησης 20

Η Συνάρτηση τον $18^{ο}$ Αιώνα 25

Η Συνάρτηση τον $19^{ο}$ Αιώνα 27

Απεικονίσεις, Συναρτήσεις και Σχέσεις 29

Συμπεράσματα που Προκύπτουν από τη Μελέτη της Ιστορικής Εξέλιξης της Έννοιας της Συνάρτησης 33

Η Σημασία της Έννοιας της Συνάρτησης στη Μάθηση των Μαθηματικών 34

Δυσκολίες σε Σχέση με την Έννοια της Συνάρτησης 42

Ο Ρόλος των Πολλαπλών Πεδίων Αναπαράστασης στην Εννοιολογική Κατανόηση της Έννοιας της Συνάρτησης των Μαθητών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης 46

Αποτελέσματα από πειραματικές έρευνες 46

Ο ρόλος των αναπαραστάσεων στη μάθηση της συνάρτησης 47

Νοερές εικόνες ή ορισμοί; 53

Παραδείγματα μιας έννοιας 56

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ: ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 58

Εισαγωγή 58

Τα Υποκείμενα της Έρευνας 59

Διαδικασία 59

Η έννοια της Συνάρτησης στα σχολικά βιβλία 60

Ανάλυση Σχολικών Εγχειριδίων για τις Συναρτήσεις 64

Το Ερευνητικό Εργαλείο 68

Κωδικοποίηση των Μεταβλητών της Έρευνας 69

Στατιστική ανάλυση δεδομένων 70

Στατιστικό πακέτο SPSS 70

Έλεγχος Δομικών Εξισώσεων και CFA 71

Ανάλυση Ομοιότητας των μεταβλητών 73

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ 75

Εισαγωγή **75**

Η γνωστική δομή της έννοιας της συνάρτησης κατά τη μετάβαση από το Γυμνάσιο στο Λύκειο **76**

Επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση και η ανάπτυξη δομικού μοντέλου της έννοιας της συνάρτησης **76**

Τα προτεινόμενα δομικά μοντέλα 76

$1^{η}$ κατηγορία προτεινομένων δομικών μοντέλων 77

(1A) Μοντέλο με τέσσερις παράγοντες πρώτης τάξης και ένα παράγοντα δεύτερης τάξης. 77

(1B) Μοντέλο με αλληλεπιδράσεις μεταξύ των τεσσάρων παραγόντων πρώτης τάξης. 77

$2^{η}$ Κατηγορία προτεινομένων δομικών μοντέλων 82

(2A) Μοντέλο με πέντε παράγοντες πρώτης τάξης, δύο παράγοντες δεύτερης τάξης και ένα παράγοντα τρίτης τάξης 83

(2B) Μοντέλο με πέντε παράγοντες πρώτης τάξης 86

Τα Τελικά Δομικά Μοντέλα 88

$1^{η}$ Κατηγορία τελικών δομικών μοντέλων 91

(1A) Μοντέλο με τέσσερις παράγοντες πρώτης τάξης και παράγοντα δεύτερης τάξης. 91

(1B) Μοντέλο με αλληλεπιδράσεις μεταξύ των τεσσάρων παραγόντων πρώτης τάξης. 95

$2^{η}$ Κατηγορία Μοντέλων 99

(2A) Μοντέλο με πέντε παράγοντες πρώτης τάξης, δύο παράγοντες δεύτερης τάξης και ένα παράγοντα τρίτης τάξης. 99

(2B) Μοντέλο με πέντε παράγοντες πρώτης τάξης και αλληλεπιδράσεις μεταξύ των δύο παραγόντων δεύτερης τάξης. 104

Αποτελέσματα Περιγραφικής Στατιστικής Ανάλυσης **108**

Ορισμός Συνάρτησης 110

Δομή δοκιμίου ορισμού συνάρτησης 110

Αναγνώριση Συνάρτησης 115

Ερμηνεία Συνάρτησης 116

Προσέγγιση Συνάρτησης 118

Επίλυση Προβλήματος 121

Αξιοπιστία Έργων Δοκιμίου 122

Ανάλυση Ομοιότητας των Διαφόρων Διαστάσεων του Ερωτηματολογίου 125

Αναγνώριση Συναρτήσεων 126

Ορισμός Συναρτήσεων 132

Ερμηνεία Συναρτήσεων 138

Προσέγγιση Συναρτήσεων 154

Επίλυση Προβλήματος 176

Επίλυση Προβλήματος και Ερμηνεία 181

Επίλυση Προβλήματος και Προσέγγιση 192

Ερμηνεία – Προσέγγιση – Επίλυση Προβλήματος 202

Ορισμός – Αναγνώριση – Προσέγγιση 209

Ορισμός – Αναγνώριση – Επίλυση Προβλήματος 214

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ 219

Α. ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΠΙΚΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΣΕ ΑΝΤΙΠΑΡΑΘΕΣΗ ΜΕ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΦΑΙΡΙΚΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ 224

Σύντομη σύνοψη της ανάλυσης ομοιότητας 224

Ορισμός 227

Ερμηνεία 228

Αναγνώριση 229

Επίλυση Προβλήματος 230

Καταληκτικά σχόλια για τη σύγκριση 230

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ 232
Εισαγωγή 232
Βασικά Συμπεράσματα 232
Εκπαιδευτικές εφαρμογές 234
Εισηγήσεις για μελλοντικές έρευνες 236
ΑΝΑΦΟΡΕΣ 238
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι 254
Δοκίμιο Συναρτήσεων Α 254
Δοκίμιο Συναρτήσεων Β 260
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ 265
Δείκτες Ομοιότητας Διαγραμμάτων Συνεπαγωγικής Ανάλυσης 265
Αναγνώριση Συναρτήσεων 265
Ορισμός Συναρτήσεων 269
Ερμηνεία Συναρτήσεων 272
Προσέγγιση Συναρτήσεων 283
Επίλυση Προβλήματος 297
Επίλυση Προβλήματος και Ερμηνεία 299
Επίλυση Προβλήματος και Προσέγγιση 309
Ερμηνεία – Προσέγγιση – Επίλυση Προβλήματος 317
Ορισμός – Αναγνώριση – Προσέγγιση 324
Ορισμός – Αναγνώριση – Επίλυση Προβλήματος 332

Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 1. Αναλυτική συνάρτηση $f(x)=x^2-5x+6$ 23

Σχήμα 2. Αναλυτική συνάρτηση χαραγμένη με ελεύθερο τρόπο 23

Σχήμα 3. Ε – ασυνεχής συνάρτηση 24

Κατάλογος Διαγραμμάτων

Διάγραμμα 1: Μοντέλο με τέσσερις παράγοντες πρώτης τάξης και παράγοντα δεύτερης τάξης........80

Διάγραμμα 2: Μοντέλο με αλληλεπιδράσεις μεταξύ των τεσσάρων παραγόντων πρώτης τάξης........81

Διάγραμμα 3: Μοντέλο με πέντε παράγοντες πρώτης τάξης, δύο παράγοντες δεύτερης τάξης και ένα παράγοντα τρίτης τάξης 85

Διάγραμμα 4: Μοντέλο με πέντε παράγοντες πρώτης τάξης και δύο παράγοντες δεύτερης τάξης. 87

Διάγραμμα 5: Μοντέλο με τέσσερις παράγοντες πρώτης τάξης και παράγοντα δεύτερης τάξης για το συνολικό δείγμα. 92

Διάγραμμα 6: Μοντέλο με τέσσερις παράγοντες πρώτης τάξης και παράγοντα δεύτερης τάξης για το Γυμνάσιο. 93

Διάγραμμα 7: Μοντέλο με τέσσερις παράγοντες πρώτης τάξης και παράγοντα δεύτερης τάξης για το Λύκειο. 94

Διάγραμμα 8: Μοντέλο με αλληλεπιδράσεις μεταξύ των τεσσάρων παραγόντων πρώτης τάξης για το συνολικό δείγμα. 96

Διάγραμμα 9: Μοντέλο με αλληλεπιδράσεις μεταξύ των τεσσάρων παραγόντων πρώτης τάξης για το Γυμνάσιο. 97

Διάγραμμα 10: Μοντέλο με αλληλεπιδράσεις μεταξύ των τεσσάρων παραγόντων πρώτης τάξης για το Λύκειο. 98

Διάγραμμα 11: Μοντέλο με πέντε παράγοντες πρώτης τάξης, δύο παράγοντες δεύτερης τάξης και ένα παράγοντα τρίτης τάξης για το συνολικό δείγμα. 101

Διάγραμμα 12: Μοντέλο με πέντε παράγοντες πρώτης τάξης, δύο παράγοντες δεύτερης τάξης και ένα παράγοντα τρίτης τάξης για το Γυμνάσιο.........102

Διάγραμμα 13: Μοντέλο με πέντε παράγοντες πρώτης τάξης, δύο παράγοντες δεύτερης τάξης και ένα παράγοντα τρίτης τάξης για το Λύκειο. 103

Διάγραμμα 14: Μοντέλο με πέντε παράγοντες πρώτης τάξης και αλληλεπιδράσεις μεταξύ των δύο παραγόντων δεύτερης τάξης για το συνολικό δείγμα. 105

Διάγραμμα 15: Μοντέλο με πέντε παράγοντες πρώτης τάξης και αλληλεπιδράσεις μεταξύ των δύο παραγόντων δεύτερης τάξης για το Γυμνάσιο. 106

Διάγραμμα 16: Μοντέλο με πέντε παράγοντες πρώτης τάξης και αλληλεπιδράσεις μεταξύ των δύο παραγόντων δεύτερης τάξης για το Λύκειο. 107

Διάγραμμα 17: Δομή δοκιμίου ορισμού συνάρτησης 110

Διάγραμμα 18: Δομή δοκιμίου ορισμού συνάρτησης 116

Διάγραμμα 19: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά την αναγνώριση 127

Διάγραμμα 20: Διάγραμμα ομοιότητας για την Γ΄ Γυμνασίου που αφορά την αναγνώριση 129

Διάγραμμα 21: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά την αναγνώριση 130

Διάγραμμα 22: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ Λυκείου που αφορά την αναγνώριση 131

Διάγραμμα 23: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά τον ορισμό της συνάρτησης 133

Διάγραμμα 24: Διάγραμμα ομοιότητας για την Γ΄ Γυμνασίου που αφορά τον ορισμό της συνάρτησης. 134

Διάγραμμα 25: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά τον ορισμό της συνάρτησης 135

Διάγραμμα 26: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ Λυκείου που αφορά τον ορισμό της συνάρτησης 137

Διάγραμμα 27: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά την ερμηνεία της συνάρτησης με μόνο τις ορθές απαντήσεις. 141

Διάγραμμα 28: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά την ερμηνεία της συνάρτησης με μόνο ορθές απαντήσεις και επεξηγήσεις. 142

Διάγραμμα 29: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά την ερμηνεία της συνάρτησης με όλες τις μεταβλητές. 143

Διάγραμμα 30: Διάγραμμα ομοιότητας για τη Γ΄ Γυμνασίου που αφορά την ερμηνεία της συνάρτησης με μόνο τις ορθές απαντήσεις. 144

Διάγραμμα 31: Διάγραμμα ομοιότητας για τη Γ΄ Γυμνασίου που αφορά την ερμηνεία της συνάρτησης με μόνο ορθές απαντήσεις και επεξηγήσεις. 145

Διάγραμμα 32: Διάγραμμα ομοιότητας για τη Γ΄ Γυμνασίου που αφορά την ερμηνεία της συνάρτησης με όλες τις μεταβλητές. 146

Διάγραμμα 33: Διάγραμμα ομοιότητας για τη Α΄ Λυκείου που αφορά την ερμηνεία της συνάρτησης με μόνο τις ορθές απαντήσεις. 148

Διάγραμμα 34: Διάγραμμα ομοιότητας για τη Α΄ Λυκείου που αφορά την ερμηνεία της συνάρτησης με μόνο ορθές απαντήσεις και επεξηγήσεις. 149

Διάγραμμα 35: Διάγραμμα ομοιότητας για τη Α΄ Λυκείου που αφορά την ερμηνεία της συνάρτησης 150

Διάγραμμα 36: Διάγραμμα ομοιότητας για τη Β΄ Λυκείου που αφορά την ερμηνεία της συνάρτησης με μόνο τις ορθές απαντήσεις. 151

Διάγραμμα 37: Διάγραμμα ομοιότητας για τη Β΄ Λυκείου που αφορά την ερμηνεία της συνάρτησης με μόνο τις ορθές απαντήσεις και επεξηγήσεις. 152

Διάγραμμα 38: Διάγραμμα ομοιότητας για τη Β΄ Λυκείου που αφορά την ερμηνεία της συνάρτησης με όλες τις μεταβλητές. 153

Διάγραμμα 39: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά την προσέγγιση της συνάρτησης με όλες τις μεταβλητές. 156

Διάγραμμα 40: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά την προσέγγιση της συνάρτησης με μόνο τις προσεγγίσεις. 157

Διάγραμμα 41: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά τις ορθές απαντήσεις στην προσέγγιση της συνάρτησης. 159

Διάγραμμα 42: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά την επιτυχία κάθε προσέγγισης της συνάρτησης..160

Διάγραμμα 43: Διάγραμμα ομοιότητας για την Γ΄ Γυμνασίου που αφορά την προσέγγισης της συνάρτησης με όλες τις μεταβλητές. 161

Διάγραμμα 44: Διάγραμμα ομοιότητας για την Γ΄ Γυμνασίου που αφορά την προσέγγιση της συνάρτησης 163

Διάγραμμα 45: Διάγραμμα ομοιότητας για την Γ΄ Γυμνασίου που αφορά τις ορθές απαντήσεις για την προσέγγιση της συνάρτησης 164

Διάγραμμα 46: Διάγραμμα ομοιότητας για την Γ΄ Γυμνασίου που αφορά την επιτυχία για κάθε προσέγγιση. 165

Διάγραμμα 47: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά όλες τις μεταβλητές για την προσέγγιση της συνάρτησης 166

Διάγραμμα 48: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά όλες μόνο την προσέγγιση της συνάρτησης 168

Διάγραμμα 49: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά μόνο ορθές απαντήσεις για την προσέγγιση της συνάρτησης 169

Διάγραμμα 50: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά την επιτυχία κάθε προσέγγισης της συνάρτησης..169

Διάγραμμα 51: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ Λυκείου που αφορά όλες τις μεταβλητές για την προσέγγιση της συνάρτησης 171

Διάγραμμα 52: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ Λυκείου που αφορά μόνο τις μεταβλητές για την προσέγγιση της συνάρτησης 172

Διάγραμμα 53: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ Λυκείου που αφορά μόνο με ορθές απαντήσεις για την προσέγγιση της συνάρτησης 174

Διάγραμμα 54: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ Λυκείου που αφορά την επιτυχία κάθε προσέγγισης της συνάρτησης 175

Διάγραμμα 55: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά τη λύση προβλήματος 177

Διάγραμμα 56: Διάγραμμα ομοιότητας για την Γ΄ Γυμνασίου που αφορά τη λύση προβλήματος 178

Διάγραμμα 57: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά τη λύση προβλήματος 179

Διάγραμμα 58: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ Λυκείου που αφορά τη λύση προβλήματος 180

Διάγραμμα 59: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά τη λύση προβλήματος σε σχέση με την ερμηνεία 181

Διάγραμμα 60: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά όλες τις μεταβλητές με επεξηγήσεις για τη λύση προβλήματος σε σχέση με την ερμηνεία 182

Διάγραμμα 61: Διάγραμμα ομοιότητας για την Γ΄ Γυμνασίου που αφορά τη λύση προβλήματος σε σχέση με την ερμηνεία 183

Διάγραμμα 62: Διάγραμμα ομοιότητας για την Γ΄ Γυμνασίου που αφορά όλες τις μεταβλητές με επεξηγήσεις για τη λύση προβλήματος σε σχέση με την ερμηνεία 185

Διάγραμμα 63: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά τις μεταβλητές χωρίς τις μεταβλητές επεξήγησης για τη λύση προβλήματος σε σχέση με την ερμηνεία 186

Διάγραμμα 64: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά όλες τις μεταβλητές με επεξηγήσεις για τη λύση προβλήματος σε σχέση με την ερμηνεία 188

Διάγραμμα 65: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ Λυκείου που αφορά τη λύση προβλήματος σε σχέση με την ερμηνεία 189

Διάγραμμα 66: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ Λυκείου που αφορά όλες τις μεταβλητές με επεξηγήσεις για τη λύση προβλήματος σε σχέση με την ερμηνεία......191

Διάγραμμα 67: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά τη λύση προβλήματος σε σχέση με την προσέγγιση 192

Διάγραμμα 68: Διάγραμμα ομοιότητας για την Γ΄ Γυμνασίου που αφορά μόνο τις ορθές απαντήσεις για τη λύση προβλήματος σε σχέση με την προσέγγιση 193

Διάγραμμα 69: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά μόνο τις ορθές απαντήσεις για τη λύση προβλήματος σε σχέση με την προσέγγιση 195

Διάγραμμα 70: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ Λυκείου που αφορά μόνο τις ορθές απαντήσεις για τη λύση προβλήματος σε σχέση με την προσέγγιση 196

Διάγραμμα 71: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά μόνο τις ορθές...197

Διάγραμμα 72: Διάγραμμα ομοιότητας για την Γ΄ Γυμνασίου που αφορά μόνο τις ορθές απαντήσεις για τη λύση προβλήματος σε σχέση με την προσέγγιση 198

Διάγραμμα 73: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά μόνο τις ορθές απαντήσεις για τη λύση προβλήματος σε σχέση με την προσέγγιση 200

Διάγραμμα 74: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ Λυκείου που αφορά μόνο τις ορθές απαντήσεις για τη λύση προβλήματος σε σχέση με την προσέγγιση 201

Διάγραμμα 75: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά τη λύση προβλήματος σε σχέση με την προσέγγιση και ερμηνεία..203

Διάγραμμα 76: Διάγραμμα ομοιότητας για την Γ΄ Γυμνάσιου που αφορά τη λύση προβλήματος σε σχέση με την προσέγγιση και ερμηνεία..204

Διάγραμμα 77: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά τη λύση προβλήματος σε σχέση με την προσέγγιση και ερμηνεία..206

Διάγραμμα 78: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ Λυκείου που αφορά τη λύση προβλήματος σε σχέση με την προσέγγιση και ερμηνεία..207

Διάγραμμα 79: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά τον ορισμό, την αναγνώριση και την προσέγγιση της συνάρτησης 209

Διάγραμμα 80: Διάγραμμα ομοιότητας για τη Γ’ Γυμνασίου που αφορά τον ορισμό, την αναγνώριση και την προσέγγιση της συνάρτησης. 211

Διάγραμμα 81: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά τον ορισμό, την αναγνώριση και την προσέγγιση της συνάρτησης..212

Διάγραμμα 82: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ Λυκείου που αφορά τον ορισμό, την αναγνώριση και την προσέγγιση της συνάρτησης..213

Διάγραμμα 83: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά τον ορισμό, την αναγνώριση και την λύση προβλήματος 214

Διάγραμμα 84: Διάγραμμα ομοιότητας για την Γ΄ Γυμνασίου που αφορά τον ορισμό, την αναγνώριση και την λύση προβλήματος 216

Διάγραμμα 85: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά τον ορισμό, την αναγνώριση και την λύση προβλήματος..217

Διάγραμμα 86: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ Λυκείου που αφορά τον ορισμό, την αναγνώριση και την λύση προβλήματος..218

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 1: Είδη Αναπαράστασης στις Ασκήσεις Συναρτήσεων στα Σχολικά Εγχειρίδια 64

Πίνακας 2: Λειτουργία των Λεκτικών Ασκήσεων/Παραδειγμάτων 65

Πίνακας 3: Λειτουργία των Συμβολικών Ασκήσεων/Παραδειγμάτων......................... 66

Πίνακας 4: Λειτουργία των Ασκήσεων/Παραδειγμάτων με Διάγραμμα....................... 66

Πίνακας 5: Λειτουργία των Ασκήσεων/Παραδειγμάτων με Πίνακα 67

Πίνακας 6: Λειτουργία των Αλγεβρικών Ασκήσεων/Παραδειγμάτων.......................... 68

Πίνακας 7: Η κωδικοποίηση των Έργων του δοκιμίου ανά Κατηγορία....................... 69

Πίνακας 8: Οι δείκτες προσαρμογής των δομικών μοντέλων $1^{ης}$ κατηγορίας.............. 89

Πίνακας 9: Οι δείκτες προσαρμογής των δομικών μοντέλων $2^{ης}$ κατηγορίας............... 90

Πίνακας 10:   Ποσοστά επιτυχίας των έργων των δύο δοκιμίων και ο στατικός έλεγχος $\chi2$ των έργων σε σχέση με την τάξη των μαθητών. 109

Πίνακας 11: Ποσοστά επιτυχίας στα έργα ορισμού ανά τάξη 111

Πίνακας 12: Ποσοστά χρήσης αναπαράστασης για ορισμό συνάρτησης.................. 113

Πίνακας 13: Ποσοστά χρήσης αναπαράστασης για παράδειγμα ή αντιπαράδειγμα συνάρτησης. 114

Πίνακας 14:   Ποσοστά επιτυχίας στα έργα αναγνώρισης ανά τάξη 115

Πίνακας 15:   Ποσοστά επιτυχίας στα έργα ερμηνείας... 117

Πίνακας 16:   Ποσοστά επιτυχίας στα έργα προσέγγισης... 119

Πίνακας 17   Ποσοστά επιτυχίας στα έργα επίλυσης προβλήματος ανά τάξη 121

Πίνακας 18   Ποσοστά επιτυχίας στα έργα επίλυσης προβλήματος 122

Πίνακας 19: Συντελεστής Cronbach's Alpha. έργων για κάθε τάξη 123

Πίνακας 20 Πίνακας με συντελεστές Cronbach's Alpha για κάθε έργο. 124

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι:
ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Εισαγωγή

Η συνάρτηση είναι μια από τις βασικές έννοιες των μαθηματικών, που έχουν ποικιλομορφία στην ερμηνεία και τις αναπαραστάσεις της (Eisenberg, 1992). Πολύς χρόνος και προσοχή δίνεται στη διδακτική διαδικασία, όμως παραμένει μια δύσκολη έννοια. Οι μαθητές αντιμετωπίζουν πολλά εμπόδια στην προσπάθεια τους να κατανοήσουν τις συναρτήσεις. Μεταξύ αυτών είναι τα επιστημολογικά εμπόδια που προσδιορίζονται και περιγράφονται από τη Sierpinska (1992), τα οποία έχουν σχέση με τη φιλοσοφία των μαθηματικών, τις μαθηματικές μεθόδους και τα νοητικά σχήματα που συσχετίζονται με την έννοια της συνάρτησης και τη σχετικά με αυτήν ορολογία (ορισμός, αριθμός, μεταβλητή, συντεταγμένες, γραφική παράσταση της συνάρτησης). Αυτή η γνωστική ανάλυση της έννοιας της συνάρτησης συμπληρώθηκε από τα συμπεράσματα και τις προτάσεις σχετικά με τη διδασκαλία.

Μια άλλη δυσκολία στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης από τους μαθητές προέρχεται από τη διπλή φύση της. Πράγματι, η συνάρτηση μπορεί να γίνει κατανοητή με δύο ουσιαστικά διαφορετικούς τρόπους: δομικά – ως αντικείμενο και λειτουργικά – ως μια διαδικασία (Sfard, 1991). Από τη δομική άποψη, η συνάρτηση είναι ένα σύνολο διαταγμένων ζευγαριών (Kuratowski & Mostowski, 1966), και με τη λειτουργική άποψη είναι μια υπολογιστική διαδικασία ή μια καλά ορισμένη “μέθοδος από ένα σύστημα σε άλλο” (Skemp, 1971). Αυτοί οι δύο τρόποι για την κατανόηση των συναρτήσεων, αν και προφανώς δεν αποκλείει ο ένας τον άλλο, πρέπει, εντούτοις, να ολοκληρώσει ο ένας τον άλλον και να αποτελέσει μια συνεπή ενότητα – όπως τις δύο πλευρές του ίδιου νομίσματος (Sfard, 1991).

Οι Gray και Tall (1994) επισημαίνουν ότι ο συμβολισμός της συνάρτησης, παραδείγματος χάριν, $f(x) = 2x + 3$ μας παρουσιάζει δύο πράγματα συγχρόνως – πώς να υπολογίστει η τιμή της συνάρτησης για κάποιες τιμές που ορίζεται (και επομένως παρουσιάζει τη διαδικασία) και τοποθετεί ολόκληρη την έννοια της συνάρτησης για οποιοδήποτε δεδομένη τιμή (που παρουσιάζεται ως αντικείμενο). Ο συμβολισμός της συνάρτησης είναι διφορούμενος με ακόμα έναν τρόπο. Η Sierpinska (1992) υπογραμμίζει ότι η ευελιξία στην κατανόηση είναι απαραίτητη επειδή, παραδείγματος χάριν, η $f(x)$ αντιπροσωπεύει και το όνομα μιας συνάρτησης και την τιμή της συνάρτησης f. Η ερμηνεία εξαρτάται από το πλαίσιο, το οποίο μπορεί να συγχύσει ένα μη-προχωρημένο μαθητή.

Οι συνθήκες από τις οποίες εξαρτάται η επιτυχία ή η αποτυχία στη διδασκαλία μιας τέτοιας δύσκολης έννοιας έχουν ερευνηθεί. Μια από αυτές είναι αναμφισβήτητα η λεπτομερής γνώση και η κατανόηση του αντικειμένου από το δάσκαλο. Το πρόβλημα της κατανόησης για τους εν υπηρεσία καθηγητές στην έννοια της συνάρτησης έχει ερευνηθεί από την Even(1990), ο οποίος αναφέρει τις πτυχές της γνώσης των δασκάλων για τις συναρτήσεις.

Το Πρόβλημα και ο Σκοπός της Έρευνας

Η ικανότητα έκφρασης μιας ιδέας με ποικιλία τρόπων θεωρείται απόλυτα φυσική και απαραίτητη για την ανθρώπινη δημιουργία. Η χρήση ποικιλίας εξωτερικών σημειωτικών αναπαραστάσεων στη διδασκαλία και μάθηση είναι αναγκαία γιατί κάθε σημειωτικό πεδίο χαρακτηρίζεται από διαφορετικές δυνατότητες. Η όσο το δυνατό πληρέστερη κατανόηση μιας έννοιας βασίζεται στο συνδυασμό δύο τουλάχιστον πεδίων αναπαράστασης (Duval, 2002).

Τα μαθησιακά αποτελέσματα βελτιώνονται όταν οι εσωτερικές αναπαραστάσεις ενός ατόμου εμπλουτίζονται με βάση την αλληλεπίδραση τους με εξωτερικές αναπαραστάσεις.

Οι πλούσιες νοητικές αναπαραστάσεις και η δυνατότητά τους για μεταφορά από μια κατάσταση σε άλλη είναι αποτέλεσμα μιας μαθησιακής διαδικασίας που κινητοποιεί το άτομο να γνωρίζει και να χρησιμοποιεί πολλές και διαφορετικές εξωτερικές αναπαραστάσεις μιας μαθηματικής έννοιας. Τα περισσότερα σχολικά εγχειρίδια σήμερα χρησιμοποιούν ποικιλία μορφών αναπαράστασης για ενίσχυση της κατανόησης. Παρόλα αυτά συγκεκριμένες χρήσεις του συμβολισμού –οι διαδικασίες μετάφρασης – φαίνεται να αγνοούνται (Janvier, 1987).

Όλες οι πληροφορίες που πρέπει να αποθηκεύονται στον εγκέφαλο, που σημαίνει ότι όλες αυτές οι πληροφορίες πρέπει να αποθηκεύονται σε κάποιο φάκελο για να χρησιμοποιηθεί ένας γενικός όρος ο οποίος είναι στο εγκέφαλο. Αυτός ο φάκελος είναι η αναπαράσταση ενός συγκεκριμένου αντικειμένου ή συγκεκριμένου πράγματος ή συγκεκριμένης αφηρημένης έννοιας. Για να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή την αναπαράσταση για να μιλήσουμε για κάτι είτε είναι παρόν είτε όχι αυτό δείχνει αυτόματα και τον βαθμό κατανόησης που έχω για αυτό το αντικείμενο δηλαδή το τι ξέρω για αυτό το πράγμα τι κατανοώ. Άρα οι παραστάσεις είναι άμεσα συνυφασμένες με την ικανότητα μας να μπορούμε να μιλάμε για πράγματα και συνεπώς με τις γνώσεις που έχουμε για αυτά τα πράγματα (καταστάσεις, γεγονότα ή οτιδήποτε άλλο). Φαίνεται λοιπόν αμέσως ότι έχει μεγάλη σημασία στα Μαθηματικά και σημαίνει ότι πρέπει να κτίσουμε τις σωστές αναπαραστάσεις, σωστή αναπαράσταση του αριθμού, σωστές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων κλπ. Στα Μαθηματικά όλη αυτή η γνώση συνοψίζεται στον ορισμό. Στα Μαθηματικά έχουμε την δυνατότητα να έχουμε ορισμούς.

Η σημασία του ορισμού και η σημασία της αναπαραστατικής ευελιξίας είναι ένα πράγμα που μπορείς να το προσεγγίσεις από πολλές διαφορετικές πτυχές και προοπτικές. Άρα σε διαφορετικά πεδία εφαρμογής μπορείς να χρησιμοποιήσεις διαφορετικές ιδιότητες του. Αυτό το σύνολο των διαφορετικών ιδιοτήτων μπορεί κανείς να πει ότι είναι μια συγκεκριμένη αναπαράσταση από μια οπτική γωνία. Από μια άλλη οπτική γωνία μπορείς έχεις μια άλλη αναπαράσταση. Κλασικό παράδειγμα στα Μαθηματικά είναι η συνάρτηση, η οποία μπορεί να αναπαρασταθεί είτε αλγεβρικά με μια εξίσωση είτε γραφικά με ένα σχήμα, είναι μια γεωμετρική αναπαράσταση (ή εικονική αναπαράσταση), η άλλη είναι μια αλγεβρική αναπαράσταση. Επιτυχής εκμάθηση των συναρτήσεων προϋποθέτει την δυνατότητα να συνδυάσεις αυτές τις δύο διαφορετικές αναπαραστάσεις έτσι ώστε να μπορείς να αντλήσεις πληροφορίες από διαφορετικές οπτικές γωνίες και να μπορείς να τις συνδυάσεις και να δεις πως λειτουργεί μια αναπαράσταση. Αυτό εννοούμε με τον όρο αναπαραστατική ευελιξία.

Από την άλλη, ένα θέμα που λαμβάνει ιδιαίτερη προσοχή από την εκπαιδευτική κοινότητα τα τελευταία χρόνια αναφέρεται στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη μετάβασή τους από τη μια τάξη στην άλλη. Ειδικότερα όσον αφορά στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση στην έκθεση της Επιτροπής για τη Μεταρρύθμιση του Εκπαιδευτικού Συστήματος στην Κύπρο (2005) αναφέρεται ότι κατά την εφαρμογή στην πράξη του Ενιαίου Λυκείου διαπιστώθηκαν σοβαρά προβλήματα, ένα από τα οποία αφορά και τη μετάβαση από την Α΄ στη Β΄ Λυκείου. Πιθανή εξήγηση ίσως να αποτελεί το γεγονός ότι η αλλαγή πεδίων αναπαράστασης, σε συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες (συναρτήσεις), από την Α΄ Λυκείου στη Β΄ Λυκείου επηρεάζει αρνητικά την επίδοση των μαθητών. Για το λόγο αυτό, στην παρούσα έρευνα εξετάζονται μαθητές, από τη μια της Γ΄ Γυμνασίου και από την άλλη μαθητές της Α΄ και Β΄ Λυκείου.

Στην παρούσα έρευνα εξετάζεται η κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης και η σχέση της με την ικανότητα αναγνώρισης της έννοιας όταν αυτή παρουσιάζεται με μια ποικιλία διαφορετικών μορφών αναπαραστάσεων και ειδικά με την ικανότητα επίλυσης προβλήματος. Διερευνώνται, επίσης, το είδος της προσέγγισης (αλγεβρική ή γεωμετρική) που χρησιμοποιούν οι μαθητές κατά την επίλυση προβλήματος και ο τρόπος επίδρασής της στην ικανότητα εκτέλεσης έργων μετάφρασης. Επιπλέον, εξετάζεται η σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην κατανόηση της συνάρτησης με τον ορισμό της έννοιας και τα παραδείγματα συναρτήσεων. Τέλος, μελετάται ο ρόλος της επίλυσης προβλήματος στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές χρησιμοποιούν την έννοια της συνάρτησης με διάφορες μορφές αναπαράστασης για να δώσουν ορισμό και παραδείγματα αυτής. Η τελευταία αυτή παρατήρηση αποτελεί ένα πολύ σημαντικό πρωτότυπο στοιχείο της παρούσας εργασίας, διότι ο ρόλος του ορισμού και των παραδειγμάτων πάνω στον ορισμό της συνάρτησης περιλαμβάνει πολλά έργα τα οποία διατυπώνονται σε διάφορα είδη αναπαραστάσεων.

Ερευνητικά Ερωτήματα

Με βάση το σκοπό της παρούσας έρευνας διατυπώνονται τα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα :

1. Ποια είναι η δομή της εννοιολογικής κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο;

2. Ποιες οι σχέσεις μεταξύ διαφόρων διαστάσεων του μοντέλου της εννοιολογικής κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης;

3. Ποιες είναι οι ομοιότητες και διαφορές στη γνωστική δομή της εννοιολογικής κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης ανάμεσα στους μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου; (όπως αυτές φανερώνονται με τη συνεπαγωγική στατιστική ανάλυση)

4. Ποιες οι διαφορές στην επίδοση των μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου, Α΄ και Β΄ Λυκείου όσον αφορά στην επίλυση έργων σχετικών με την έννοια της συνάρτησης;

Σημασία και Πρωτοτυπία της Διατριβής

Η βασική πρωτοτυπία της παρούσας διατριβής είναι η θεμελίωση δομικών μοντέλων στα οποία εμπλέκονται διάφορες διαστάσεις της κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης. Πιο συγκεκριμένα η πρώτη διάσταση σχετίζεται με τον ορισμό και ελέγχεται στην παρούσα έρευνα με ένα σημαντικό αριθμό έργων που αφορούν είτε τον ορισμό είτε παραδείγματα συναρτήσεων ή μη συναρτήσεων είτε άμεσο έλεγχο είτε τρόπους ελέγχου για το αν αποτελεί ή δεν αποτελεί μια σχέση συνάρτηση. Ακριβώς η διάσταση αυτή του ορισμού η σημασία του οποίου έχει τονιστεί από πάρα πολλούς ερευνητές για τα Μαθηματικά δεν συναντάται σε άλλες μελέτες. Από την άλλη πλευρά οι διαστάσεις της κατανόησης αφορούν στο ρόλο των πολλαπλών αναπαραστάσεων στην μάθηση της έννοιας της συνάρτησης.

Λαμβάνοντας υπόψη το ρόλο των πολλαπλών αναπαραστάσεων στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών (NCTM, 2000), ερευνητικά ευρήματα υποδεικνύουν ότι η ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και η επίλυση προβλήματος με ποικιλία πεδίων αναπαράστασης συμβάλλουν στην εννοιολογική κατανόηση μαθηματικών εννοιών τόσο στην πρωτοβάθμια όσο και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Εντοπίζεται όμως στασιμότητα ή ακόμη και μείωση της επίδοσης των μαθητών σε έργα που εξετάζουν την ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και την επίλυση προβλήματος με πολλαπλά πεδία αναπαράστασης στην πρόσθεση κλασμάτων κατά τη μετάβαση στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Deliyianni, E., Elia, I., Gagatsis, A., & Panaoura, A., 2011), (Deliyianni, E., & Gagatsis, A., 2013). Πιθανή εξήγηση οι σημαντικές διαφορές όσον αφορά στις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται στα κυπριακά σχολικά εγχειρίδια των δύο βαθμίδων καθώς επίσης και το είδος των έργων που επιτελούνται όσον αφορά στα κλάσματα.

Το δεύτερο στοιχείο αυτής της έρευνας σχετίζεται με την ευελιξία, που αναφέρεται παραπάνω σε σχέση με τα κλάσματα, όμως το πρωτότυπο στοιχείο στην παρούσα έρευνα της αναπαραστατικής ευελιξίας αναφέρεται στο ότι πέρα από την αναγνώριση συναρτήσεων και πέρα από τις μεταφράσεις εμπλέκεται και η έννοια του ορισμού. Στην έννοια όπως αναφέρθηκε προηγούμενα στην οποία η έννοια του ορισμού έτσι όπως παρουσιάζεται στην παρούσα έρευνα παρεμβαίνουν πολλά είδη αναπαραστάσεων άρα ουσιαστικά αποτελεί μια σημαντική διάσταση της αναπαραστατικής ευελιξίας.

Πιο συγκεκριμένα η έρευνα εξέτασε τις δομικές σχέσεις μεταξύ του ορισμού, της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της επίλυσης προβλήματος της έννοιας της συνάρτησης για τη διαμόρφωση ενός δομικού μοντέλου που εντοπίζει τις σχετικές γνωστικές διαδικασίες που λαμβάνουν χώρα για την εννοιολογική κατανόηση της συγκεκριμένης έννοιας από μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου.

Περιορισμοί της Έρευνας

Υπάρχει ένας αριθμός περιορισμών ο οποίος προέκυψε από τη μεθοδολογία που χρησιμοποιείται στην παρούσα μελέτη. Η μελέτη έχει διεξαχθεί σε δημόσια σχολεία μέσης Εκπαίδευσης σε διάφορες επαρχίες σε αστικές περιοχές όπως και σε μη-αστικές περιοχές. Δεν υπήρξε οποιοδήποτε περιθώριο για τυχαία διαδικασία για την επιλογή δείγματος και η χορήγηση έχει γίνει με βάση την εθελοντική αποδοχή καθηγητών μαθηματικών, παραχωρώντας τον απαραίτητο χρόνο για τη συμμετοχή των μαθητών τους στη μελέτη.

Συνεπώς το δείγμα είναι ευκαιριακό, αφού δεν υπήρξε η δυνατότητα τυχαίας δειγματοληψίας. Το δείγμα όμως ήταν αρκετά μεγάλο.

Ο δεύτερος περιορισμός σχετίζεται με τα έργα που χρησιμοποιούνται στα δύο δοκίμια. Τα έργα που επιλέγηκαν στα δύο δοκίμια βασίστηκαν στις ασκήσεις και στα παραδείγματα που εμφανίζονται στα σχολικά βιβλία των μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου, Α΄ Λυκείου και Β΄ Λυκείου της δευτεροβάθμιας δημόσιας εκπαίδευσης στην Κύπρο. Συνεπώς, οι αναπαραστάσεις που περιλαμβάνονται στις εργασίες/στα ερωτήματα ήταν παρόμοιες με αυτές που περιέχονται στα σχολικά βιβλία (γραφική και διαγραμματική αναπαράσταση, λεκτική και συμβολική έκφραση, αναπαράσταση με πίνακα).

Ο τρίτος περιορισμός σχετίζεται με το χρόνο που απαιτήθηκε για την ολοκλήρωση των εργασιών και τον αριθμό των έργων που περιλαμβάνονται στα δοκίμια. Τα δύο δοκίμια που κατασκευάστηκαν, όπου το ένα από τα οποία περιλαμβάνει δώδεκα έργα και το δεύτερο περιλαμβάνει δεκατρία έργα, χορηγήθηκαν στους μαθητές από τους καθηγητές τους σε δύο περιόδους των 45 λεπτών. Η λύση των έργων ήταν χρονοβόρα για τους μαθητές και παρά το γεγονός ότι σε ορισμένες περιπτώσεις υπήρχε ανάγκη για περισσότερα έργα προκειμένου να εμπλουτιστούν και να περιγράφουν καλύτερα κάποιες διαστάσεις της κατανόησης της συνάρτησης, αυτό δεν κατέστη δυνατό λόγω των περιορισμών του χρόνου.

Ένας επιπλέον περιορισμός της μελέτης είναι η αδυναμία του ελέγχου της μεθόδου διδασκαλίας, η οποία χρησιμοποιήθηκε για τη συγκεκριμένη έννοια. Ωστόσο, στην Κύπρο υπάρχει ένα κοινό πρόγραμμα σπουδών, υπάρχει μόνο ένα εγχειρίδιο για τους μαθητές και οι εκπαιδευτικοί λαμβάνουν τις ίδιες οδηγίες από το Υπουργείο Παιδείας για τις μεθόδους διδασκαλίας που πρέπει να χρησιμοποιούν στην τάξη τους.

Δομή και Περίληψη Διατριβής

Ο γενικός στόχος αυτής της ερευνητικής μελέτης ήταν να ερευνηθεί η συμπεριφορά των μαθητών, των γνωστικών δομών και της επίδοση τους στις διαφορετικές πτυχές της κατανόησης της συνάρτησης.

Το πρώτο κεφάλαιο περιγράφει την εισαγωγή στην έρευνα και περιλαμβάνει την περιγραφή του προβλήματος, το σκοπό και τα ερωτήματα της έρευνας, τη σημασία και πρωτοτυπία της έρευνας, καθώς και κάποιους περιορισμούς που προκύπτουν.

Το κεφάλαιο δύο παρέχει μια επισκόπηση της βιβλιογραφίας σχετικής με αυτήν την μελέτη. Οι διαφορετικοί ορισμοί της έννοιας των αναπαραστάσεων αναλύονται και συζητούνται. Τονίζεται η σημασία των αναπαραστάσεων στη διδασκαλία και την εκμάθηση των μαθηματικών. Υπογραμμίζεται ο ρόλος των πολλαπλών αναπαραστάσεων στην εκμάθηση των εννοιών στα μαθηματικά. Παρουσιάζονται διάφορες ερευνητικές μελέτες που δείχνουν το σημαντικό ρόλο των διαφορετικών αναπαραστάσεων της συνάρτησης. Συζητούνται οι έννοιες των όρων και του ορισμού της έννοιας της συνάρτησης , καθώς επίσης και η σημασία της παρουσίασης των παραδειγμάτων για την διδασκαλία και εκμάθηση στα μαθηματικά. Επιπλέον εξετάζεται, ο ρόλος του ορισμού και των παραδειγμάτων της έννοιας στο σχηματισμό της έννοιας και στην εννοιολογική κατανόηση της συνάρτησης. Τέλος τονίζεται, η σημασία της λύσης προβλήματος στην εννοιολογική κατανόηση των συναρτήσεων.

Στο κεφάλαιο τρία εξηγείται η μεθοδολογία της έρευνας. Ειδικότερα, περιγράφονται το δείγμα της έρευνας, το ερευνητικό εργαλείο, οι μεταβλητές, οι μέθοδοι συλλογής, επεξεργασίας και ανάλυσης των δεδομένων. Επιπλέον, περιλαμβάνεται μια συνοπτική ανάλυση του κυπριακού προγράμματος σπουδών μέσα από τα εγχειρίδια μαθηματικών των Α΄ Γυμνασίου, Α΄ Λυκείου και Β΄ Λυκείου, τα όποια αναλύονται σε σχέση με τους τρόπους αναπαράστασης των συναρτήσεων.

Στο κεφάλαιο τέσσερα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας με βάση τις στατιστικές αναλύσεις που πραγματοποιήθηκαν, σε σχέση με τα ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας. Συγκεκριμένα, το κεφάλαιο αυτό περιλαμβάνει την παρουσίαση των αποτελεσμάτων της περιγραφικής στατιστικής σχετικά με την επίδοση των μαθητών στις διάφορες διαστάσεις της εννοιολογικής κατανόησης της συνάρτησης, τα δομικά μοντέλα που τεκμηριώνουν τη σημασία της ευελιξίας και της δυνατότητας επίλυσης προβλήματος και των πολλαπλών αναπαραστάσεων στην εννοιολογική κατανόηση της συνάρτησης και τις σχέσεις ομοιότητας μεταξύ των διαφόρων διαστάσεων της εννοιολογικής κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης.

Στο κεφάλαιο πέντε συζητούνται τα αποτελέσματα της μελέτης σε σχέση με τα στοιχεία του θεωρητικού πλαισίου και τα αποτελέσματα προηγούμενων σχετικών ερευνών.

Τέλος στο κεφάλαιο έξι δίνονται τα αποτελέσματα της μελέτης και παρουσιάζονται διδακτικές προτάσεις και προτάσεις για μελλοντική έρευνα.

Λειτουργικοί Ορισμοί

Τι είναι αναπαράσταση;

Η ανθρώπινη σκέψη χαρακτηρίζεται από τη χρήση πολλών ειδών αναπαράστασης για την ίδια έννοια, γεγονός που τη διαφοροποιεί τόσο από τη νοημοσύνη των ζώων όσο και από την τεχνητή νοημοσύνη. Κατά συνέπεια, η εκπαιδευτική πράξη, η οποία είναι μια από τις εκφράσεις της ανθρώπινης σκέψης, και κατ' επέκταση, η Μαθηματική Εκπαίδευση ως αναπόσπαστο μέρος της εκπαιδευτικής πράξης, χαρακτηρίζονται από τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων με στόχο την επίδοση ιδεών με διαφορετικούς τρόπους.

Οι μαθητές στα πλαίσια του μαθήματος των μαθηματικών έρχονται καθημερινά σε επαφή με μια μεγάλη ποικιλία αναπαραστάσεων. Απαραίτητες προϋποθέσεις, όμως, για την αποτελεσματική κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας αποτελούν α) η ικανότητα για αναγνώριση της έννοιας σε μία ποικιλία ποιοτικά διαφορετικών συστημάτων αναπαράστασης και β) η ικανότητα μετάφρασης της έννοιας από το ένα σύστημα στο άλλο (Α. Γαγάτσης, Μιχαηλίδου, & Σιακαλλή, 2001)

Η ανάγκη μελέτης της έννοιας της αναπαράστασης προκύπτει τόσο για πρακτικούς όσο και για θεωρητικούς λόγους (Kaput, 1985; 1987a; 1987b). Οι πρακτικοί λόγοι αναφέρονται στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη μετάφραση από τη μια αναπαράσταση στην άλλη σε σχέση με τις μαθηματικές έννοιες, καθώς και ανάμεσα στην καθημερινή εμπειρία και στα μαθηματικά. Οι θεωρητικοί λόγοι αναφέρονται στην ανάγκη για ύπαρξη ενός συστηματικού πλαισίου σε σχέση με τα διάφορα συστήματα αναπαράστασης, ώστε να μπορούν να αντιμετωπιστούν αποτελεσματικά οι πρακτικές δυσκολίες που προκύπτουν σε σχέση με την κατανόηση και τη χρήση αναπαραστάσεων.

Επιπλέον, μια άλλη σχετική δυσκολία που επισημαίνεται από την Καλδρυμίδου (Γαγάτσης κ.ά., 2001) αφορά την αρνητική τάση των μαθητών, των φοιτητών αλλά και των εκπαιδευτικών, προς τις εικονικές αναπαραστάσεις και την προτίμησή τους σε προσεγγίσεις αλγεβρικού τύπου. Οι λόγοι που σύμφωνα με την ίδια οδηγούν στη δημιουργία αυτής της δυσκολίας είναι α) γνωστικής φύσης, που αφορούν τη δυσκολία της ολιστικής και επιλεκτικής φύσης της εικόνας ως τρόπους παράστασης πληροφοριών και β) επιστημολογικής φύσης που αναφέρονται στην επιστημολογία της μαθηματικής κοινότητας και της διδακτικής των σχολικών μαθηματικών.

Ο όρος «αναπαράσταση» είναι ασαφής και ως τέτοιος επιδέχεται πολλαπλές ερμηνείες(G. Goldin & Kaput, 1996);(W. M. Roth & M. K. McGinn, 1998);(Seeger, 1998). Σύμφωνα με τους Kaput (1987a) και Goldin (1987), η έννοια της αναπαράστασης περιλαμβάνει τις ακόλουθες πέντε ολότητες: α) την έννοια που αναπαρίσταται, β) την ολότητα που αναπαριστά, γ) τις συγκεκριμένες πτυχές της ολότητας της αναπαράστασης που αναπαρίστανται, δ) τις συγκεκριμένες πτυχές της ολότητας που αναπαριστά, οι οποίες σχηματίζουν την αναπαράσταση και τέλος, ε) την αντιστοιχία ανάμεσα στις δύο ολότητες.

Οι αναπαραστάσεις θεωρούνται «σύμφυτες» με τα μαθηματικά (Dufour – Janvier et al., 1987, σ. 110; Kaput, 1987a, σ. 25). Υπάρχουν περιπτώσεις όπου οι αναπαραστάσεις είναι τόσο στενά συνδεδεμένες με μια μαθηματική έννοια, όπως για παράδειγμα η συνάρτηση και η γραφική παράσταση, ώστε είναι δύσκολο να γίνει κατανοητή η έννοια χωρίς τη χρήση της συγκεκριμένης αναπαράστασης. Σύμφωνα με τις Καλδρυμίδου και Οικονόμου (1992), κάθε αναπαράσταση δεν μπορεί να περιγράψει εξ ολοκλήρου μια έννοια γιατί δίνει πληροφορίες για ορισμένες μόνο πτυχές της. Οι διαφορετικές αναπαραστάσεις που αναφέρονται στην ίδια έννοια αλληλοσυμπληρώνονται. Γι’ αυτό το λόγο, για τη σωστή και αποτελεσματική αξιοποίηση των αναπαραστάσεων από τους μαθητές, απαραίτητες προϋποθέσεις αποτελούν η σε βάθος κατανόηση της φύσης, των χαρακτηριστικών, των δυνατοτήτων και των περιορισμών τους, η αναγνώριση των σχέσεων δομής ανάμεσα στις διάφορες αναπαραστάσεις και της αναλογίας ανάμεσα στις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται και στην έννοια προς μάθηση.

Οι μαθητές στα πλαίσια του μαθήματος των μαθηματικών έρχονται καθημερινά σε επαφή με μια μεγάλη ποικιλία αναπαραστάσεων. Απαραίτητες προϋποθέσεις, όμως, για την αποτελεσματική κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας αποτελούν α) η ικανότητα για αναγνώριση της έννοιας σε μια ποικιλία ποιοτικά διαφορετικών συστημάτων αναπαράστασης και β) η ικανότητα μετάφρασης της έννοιας από το ένα σύστημα στο άλλο

(Lesh, Post, & Behr, 1987). Η τελευταία προϋπόθεση, δηλαδή η ικανότητα μετάφρασης από το ένα σύστημα αναπαράστασης μιας έννοιας στο άλλο διαδραματίζει σημαντικό ρόλο όχι μόνο για τη μάθηση μαθηματικών εννοιών αλλά και για την επίλυση μαθηματικού προβλήματος (Janvier, 1987). Με βάση ευρήματα ερευνών, μαθητές και φοιτητές αντιμετωπίζουν αρκετές δυσκολίες σε αυτή τη διαδικασία, που επηρεάζουν τόσο τη μάθηση των μαθηματικών όσο και την επίδοση των μαθητών στην επίλυση προβλήματος. Επομένως, μια άλλη βασική επιδίωξη της διδασκαλίας μιας έννοιας πέρα από την κατανόησή της μέσα από τη δημιουργία πλούσιων και καλά οργανωμένων νοητικών αναπαραστάσεων, θα πρέπει να εστιάζεται στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να περνούν από μια αναπαράσταση σε άλλη με συνέπεια και ακρίβεια, χωρίς αντιφάσεις (Γαγάτσης, Α., Μιχαηλίδου, Ε., & Σιακαλλή, Μ., 2001).

Πέρα από τις εξωτερικές-σημειωτικές αναπαραστάσεις που αναφέρθηκαν παραπάνω και οι οποίες αφορούν όλους τους εξωτερικούς, συμβολικούς φορείς – σύμβολα, σχήματα, διαγράμματα – οι οποίοι αποσκοπούν στην εξωτερική αναπαράσταση μιας συγκεκριμένης πραγματικότητας στα μαθηματικά, στη θεωρία και στην έρευνα, γίνεται αναφορά και στον όρο των εσωτερικών αναπαραστάσεων που αφορά τα νοητικά μοντέλα ή τις εικόνες που δημιουργούν τα υποκείμενα για να αναπαραστήσουν την εξωτερική πραγματικότητα. Ανάμεσα στα δύο είδη αναπαραστάσεων υπάρχει μια αμφίδρομη σχέση αλληλεπίδρασης. Συγκεκριμένα, σε μερικές περιπτώσεις το άτομο εξωτερικεύει σε φυσική μορφή πράξεις που προέρχονται από εσωτερικές δομές ενώ σε άλλες εσωτερικεύει πράξεις μέσω της αλληλεπίδρασης με τις εξωτερικές φυσικές δομές του συμβολικού συστήματος. Κατά συνέπεια, η ερμηνεία των εξωτερικών αναπαραστάσεων και των σχέσεων αναπαράστασης διαφοροποιείται ανάλογα με τις εσωτερικές αναπαραστάσεις των ατόμων από τα οποία δίνεται η ερμηνεία (Γαγάτσης, Μιχαηλίδου, & Σιακαλλή, 2001).

Ορισμός Έννοιας (Concept Definition)

Ο ορισμός είναι η μορφή λέξεων/συμβόλων που χρησιμοποιούνται από τους δασκάλους στο μάθημα, στις σημειώσεις και στα σχολικά εγχειρίδια για να καθορίσει μια μαθηματική έννοια (Bingolbali & Monaghan, 2008). Ένα άτομο μπορεί να μάθει ένα ορισμό με απλή ανάγνωση χωρίς κατανόηση ή κατανοώντας μια έννοια και σχετίζοντας σε μεγάλο ή μικρότερο βαθμό την έννοια συνολικά.

Μεταφράσεις (Conversions)

Οι μεταφράσεις αφορούν τις μετατροπές της αναπαράστασης, που αποτελούνται από αλλαγές σε ένα αντικείμενο χωρίς να μεταβάλλεται το αντικείμενο που παρουσιάζεται. Για παράδειγμα, περνώντας από τον αλγεβρικό συμβολισμό μιας εξίσωσης στη γραφική αναπαράσταση της, μετατρέποντας μια πρόταση από τη φυσική γλώσσα σε συμβολισμό χρησιμοποιώντας γράμματα κ.λπ. (Duval, A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics, 2006).

Ευελιξία μετάφρασης πολλαπλών Αναπαραστάσεων (Multiple representational flexibility)

Αποτελεί τη δυνατότητα και την ευελιξία ανταπόκρισης για να μεταφραστούν τα νοητικά σύνολα αναπαράστασης (αναγνώριση, επεξεργασία, μετατροπή) του ίδιου μαθηματικού αντικειμένου (Elia, Gagatsis, Panaoura, & Deliyianni, 2010). Στη μελέτη αυτή ο ορισμός περιλαμβάνει την αναγνώριση και τις μετατροπές και επεκτείνεται επίσης με τη συμπερίληψη της εικόνας της έννοιας που είναι βασισμένη στον ορισμό έννοιας και τη χρήση της έννοιας (παραδείγματα).

Επίλυση Προβλήματος (Problem Solving)

«Πρόβλημα είναι μια κατάσταση στην οποία ο λύτης αναζητά, κάτι για το οποίο όε γνωρίζει αμέσως την πορεία που θα. ακολουθήσει για την ανεύρεσή του» (Burkhardt και Schoenfeld 1988. Revs κ.ά. 1989). Ένας ορισμός για την επίλυση προβλήματος παρουσιάζεται στην έκθεση του προγράμματος για τη διεθνή αξιολόγηση των μαθητών (PISA. 2003). Η επίλυση προβλήματος ορίζεται ως: «Η ικανότητα των ατόμων να χρησιμοποιούν τις γνωστικές διαδικασίες, να αντιμετωπίσουν και να επιλύσουν πραγματικές καταστάσεις με αλληλοεξαρτώμενους περιορισμούς, όπου η πορεία της /.ύσης δεν είναι άμεσα ορατή και όπου οι εμπλεκόμενες γνωστικές περιοχές που απαιτούνται για την επίλυση του προβλήματος δεν κατατάσσονται σε μια. και μοναδική περιοχή των μαθηματικών, της επιστήμης ή της ανάγνωσης» (PISA. 2003, σελ.24).

Εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών
(Conceptual understanding of mathematical concepts)

Ορίζεται σε σχέση με τα εσωτερικά δίκτυα των αναπαραστάσεων. Εμφανίζεται όταν οι αναπαραστάσεις συνδέονται με σταθερά αναπτυσσόμενα και δομημένα δίχτυα. Οι σχέσεις μεταξύ των διαφορετικών αναπαραστάσεων μπορούν να βασιστούν σε ομοιότητες, σε διαφορές ή σε συμπεριλήψεις (Hiebert, J. & Carpenter, Th. P. , 1992). Η εννοιολογική κατανόηση μπορεί να θεωρηθεί ως δίκτυο των σχέσεων μεταξύ: (α) ήδη υπάρχουσας γνώσης και πληροφορίες και (β) υπάρχουσας γνώσης και νέα γνώση (Hiebert, J., & Lefevre, P. , 1986).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ II:
ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Εισαγωγή

Η έννοια της συνάρτησης είναι θεμελιώδους σημασίας στην μάθηση των μαθηματικών (Mesa, 2004) και κατά τις τελευταίες δεκαετίες η έρευνα της εκπαιδευτικής μαθηματικής κοινότητας εστιάζεται και έχει στο επίκεντρο της την έννοια της συνάρτησης (Elia, I., Panaoura A., Gagatsis, A., Gravvani, K., & Spyrou, P., 2007). Η κατανόηση των συναρτήσεων δεν παρουσιάζεται να είναι εύκολη (Tall, 1991), ενώ οι μαθητές αντιμετωπίζουν πολλά εμπόδια όταν προσπαθούν να κατανοήσουν τις συναρτήσεις(Sajka, 2003b).

Η έννοια της σχέσης ανάμεσα σε ποσότητες είναι τόσο αρχαία όσο και τα Μαθηματικά(Ασβεστά & Γαγάτσης, 1995). Η αντίληψη μιας πολύ γενικής αντιστοιχίας ανάμεσα σε ένα ορισμένο αριθμό τιμών και άλλων τιμών φαίνεται ότι υπάρχει στον Πτολεμαίο ή στους Βαβυλωνιακούς αστρονομικούς πίνακες. Μέσα από το πέρασμα του χρόνου η έννοια της συνάρτησης εμφανίζεται με διάφορες όψεις, ορισμούς και αναπαραστάσεις, οι οποίες αντικατοπτρίζουν διαφορετικές επιστημολογικές αντιλήψεις, αφού διαφορετικά είναι τα προβλήματα, οι διαδικασίες και οι αναπαραστάσεις που τα προσδιορίζουν.

Όπως αναφέρουν οι Ασβεστά και Γαγάτσης (1995), ξεκινώντας από τον ορισμό του Bernoulli σύμφωνα με τον οποίο η συνάρτηση είναι ποσότητα αποτελούμενη από μεταβλητή και σταθερές, ακολουθεί τον 18ο αιώνα ο εξής ορισμός που δίνεται από τον

Euler: «συνάρτηση μιας μεταβλητής ποσότητας είναι εκείνη η αναλυτική έκφραση που προκύπτει από τη σύνθεση, με οποιονδήποτε τρόπο, αυτής της ποσότητας με αριθμούς ή και άλλες σταθερές ποσότητες». Οι αντιλήψεις του Cauchy (1821) για τις μεταβλητές ποσότητες και η απόδειξη του Fourier, σύμφωνα με την οποία κάθε καμπύλη μπορεί να αναπαρασταθεί από μια τριγωνομετρική σειρά, μετασχηματίζονται στον ορισμό της συνάρτησης μέσω της θεωρίας συνόλων με την αυθαίρετη αντιστοιχία (Dirichlet, 1837). Πρόκειται για αντιστοιχία που δε βασίζεται απαραίτητα σε κάποια εξάρτηση μεταξύ των x και y. Η γενική έννοια μιας συνάρτησης y μιας ανεξάρτητης μεταβλητής x ως αυθαίρετη αντιστοιχία θα επιφέρει σημαντικούς μετασχηματισμούς στην ανάπτυξη της ανάλυσης (Ασβεστά & Γαγάτσης, 1995).

Πολλά πεδία των μαθηματικών ασχολούνται άμεσα ή έμμεσα με τις συναρτήσεις. Στην περιοχή της Μαθηματικής Ανάλυσης θεωρούνται οι συναρτήσεις μας, δύο, ή n μεταβλητών, όπου εξετάζονται οι ιδιότητές τους καθώς και οι παράγωγοι τους. Οι θεωρίες των διαφορικών εξισώσεων και ολοκληρωμάτων στοχεύουν στην επίλυση των εξισώσεων στις οποίες οι άγνωστοι είναι συναρτήσεις. Η συναρτησιακή ανάλυση αναπτύσσεται σε χώρους που αποτελούνται από συναρτήσεις και οι μελέτες στην αριθμητική ανάλυση, εξετάζουν τις διαδικασίες ελέγχου των λαθών στην αξιολόγηση όλων των διαφορετικών ειδών συναρτήσεων. Άλλοι τομείς των μαθηματικών ασχολούνται με τις έννοιες που αποτελούν γενικεύσεις ή επεκτάσεις της έννοιας της συνάρτησης. Για παράδειγμα, στην Άλγεβρα εξετάζονται οι πράξεις και οι σχέσεις μεταξύ τους, στην Μαθηματική Λογική οι αναδρομικές συναρτήσεις κλπ.

Οι συναρτήσεις αποτελούν στα σχολεία της δευτεροβάθμια εκπαίδευσης θεμελιώδη έννοια στα μαθηματικά (Klein, 1908/1945) και στις πιο σύγχρονες κατευθύνσεις σπουδών αναφέρεται σαφώς η σημασία των συναρτήσεων ("*Curriculum and evaluation standards for school mathematics*", 1989).

Η Έννοια της Συνάρτησης

Η έννοια της συνάρτησης είναι ιδιαίτερα σημαντική στα μαθηματικά και τις εφαρμογές τους. Προκύπτει από τη γενική τάση των ανθρώπων να συνδέουν δύο ποσότητες, που είναι τόσο αρχαία όσο και τα μαθηματικά. Η κατανόηση των συναρτήσεων είναι αρκετά δύσκολη. Μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης αλλά και φοιτητές, σε κάθε χώρα, έχουν δυσκολίες στην εννοιολογική κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης. Η κατανόηση της έννοιας αυτής είναι ένα θέμα που συγκεντρώνει την προσοχή των εκπαιδευτικών αλλά και της μαθηματικής ερευνητικής κοινότητας γενικότερα (Sierpinska, 1992).

Ένας παράγοντας που επηρεάζει ιδιαίτερα τη μάθηση των συναρτήσεων είναι οι πολλαπλές αναπαραστάσεις που σχετίζονται με την έννοια αυτή (Hitt, 1998). Πολλοί ερευνητές (π.χ. (Monoyiou, A., & Gagatsis, A., 2008a), (Monoyiou, A., & Gagatsis, A., 2008b), (Monoyiou, 2010), (Monoyiou & Gagatsis, 2010), (Gagatsis & Shiakalli, 2004), (Mousoulides, N., & Gagatsis, A., 2004) επισήμαναν το σημαντικό ρόλο των διαφόρων αναπαραστάσεων και της μετάφρασης από μια αναπαράσταση σε άλλη στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης. Ένας σημαντικός εκπαιδευτικός στόχος στα μαθηματικά είναι οι μαθητές να είναι σε θέση να αναγνωρίζουν και να χρησιμοποιούν αποτελεσματικά διάφορες μορφές αναπαραστάσεων της ίδιας μαθηματικής έννοιας και να περνούν ευέλικτα από ένα σύστημα αναπαράστασης σε άλλο.

Δεδομένου ότι μια αναπαράσταση δεν μπορεί να περιγράψει πλήρως μια μαθηματική έννοια και ότι κάθε αναπαράσταση έχει διαφορετικά πλεονεκτήματα, η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων για την ίδια μαθηματική κατάσταση μπορεί να θεωρηθεί η βάση της μαθηματικής κατανόησης (Duval, 2002). Οι Ainsworth, Bibby και Wood (1997) αναφέρουν ότι η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν διαφορετικές ιδέες και διαδικασίες, επεκτείνει το νόημα των εννοιών και προωθεί τη βαθύτερη, εννοιολογική κατανόηση. Συνδυάζοντας διάφορες αναπαραστάσεις οι μαθητές δεν περιορίζονται από τις δυνατότητες ή τις αδυναμίες μιας συγκεκριμένης αναπαράστασης. Ο Kaput (1992) αναφέρει ότι η χρήση περισσότερων αναπαραστάσεων βοηθά τους μαθητές να αποκτήσουν μια καλύτερη εικόνα για μια μαθηματική έννοια ή κατάσταση (Γαγάτσης, Α., Μιχαηλίδου, Ε., & Σιακαλλή, Μ., 2001).

Η ικανότητα για αναγνώριση και απεικόνιση της ίδιας έννοιας με διαφορετικές αναπαραστάσεις θεωρείται προαπαιτούμενη για την κατανόηση της έννοιας (Duval, 2002; Even, 1998). Πέραν από την κατανόηση της ίδιας έννοιας σε πολλαπλά συστήματα αναπαράστασης, η ικανότητα για ευέλικτο χειρισμό της έννοιας σε αυτά τα συστήματα αναπαράστασης καθώς και η ικανότητα για μετάφραση από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο αποτελούν απαραίτητες προϋποθέσεις για εννοιολογική κατανόηση της έννοιας (Lesh, Post, & Behr, 1987) και επιτρέπουν στους μαθητές να δουν πλούσιες σχέσεις και συνδέσεις (Even R. , 1998).

Ο Duval (2002), (2006) υποστηρίζει ότι η μαθησιακή δραστηριότητα στα μαθηματικά μπορεί να αναλυθεί σε δύο τύπους μετασχηματισμών των σημειωτικών αναπαραστάσεων: τους χειρισμούς (treatments) και τις μεταφράσεις (conversions). Οι χειρισμοί αποτελούν μετασχηματισμούς των αναπαραστάσεων που λαμβάνουν χώρα μέσα στο ίδιο το σύστημα αναπαράστασης, ενώ οι μεταφράσεις αφορούν τους μετασχηματισμούς οι οποίοι περιλαμβάνουν αλλαγή του συστήματος αναπαράστασης. Σύμφωνα με τον Duval (2002) οι διάφοροι μαθηματικοί χειρισμοί εξαρτώνται από το σύστημα αναπαράστασης. Κατά τη διαδικασία μετάφρασης όλο ή μέρος του νοήματος της αρχικής αναπαράστασης διατηρείται χωρίς να μεταβάλλεται το αντικείμενο στο οποίο αναφέρεται. Η μετάφραση περιλαμβάνει δυο μορφές αναπαράστασης: την πηγή (αρχική αναπαράσταση) και το στόχο (τελική αναπαράσταση). Οι διαδικασίες μετάφρασης αναπτύσσονται αποτελεσματικότερα όταν οι μαθητές καλούνται να κάνουν μεταφράσεις. Ο Lesh και οι συνεργάτες του (1987) επισημαίνουν ότι οι χειρισμοί και οι μεταφράσεις βρίσκονται στην πραγματικότητα σε σχέση αλληλεξάρτησης. Αν και οι χειρισμοί στα πλαίσια του ίδιου συστήματος αναπαράστασης είναι πιο σημαντικοί από μαθηματικής σκοπιάς, οι μεταφράσεις είναι αποφασιστικός παράγοντας μάθησης (Duval, 2006).

Κάποιοι ερευνητές ερμηνεύουν τα λάθη των μαθητών είτε ως αποτέλεσμα των μη αποτελεσματικών χειρισμών των αναπαραστάσεων είτε της έλλειψης συντονισμού ανάμεσα στις διάφορες αναπαραστάσεις (Greeno, J. G., & Hall, R.P., 1997) (Smith, J., diSessa, A. & Roschelle, J. , 1993/1994). Οι συνηθισμένες τυπικές αναπαραστάσεις (π.χ. η συμβολική αναπαράσταση) για κάποιες μαθηματικές έννοιες, όπως η έννοια της συνάρτησης, δεν είναι αρκετές για να οικοδομήσουν οι μαθητές το νόημα και να κατακτήσουν το εύρος των εφαρμογών τους. Οι καθηγητές μαθηματικών, στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, παραδοσιακά εστιάζουν τη διδασκαλία τους στη χρήση αλγεβρικών αναπαραστάσεων για τη διδασκαλία της έννοιας της συνάρτησης (Eisenberg, T. & Dreyfus, T., 1991). Η Sfard (1992) υποστηρίζει ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να συνδυάσουν τις αλγεβρικές και γραφικές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων ενώ οι Markovits, Eylon και Bruckheimer (1986) παρατήρησαν ότι η μετάφραση από τη γραφική στην αλγεβρική μορφή είναι δυσκολότερη από την αντίθετη μετάφραση. Η Sierpinska (1992) υποστήριξε ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες όταν καλούνται να κάνουν συνδέσεις ανάμεσα στις διαφορετικές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων, στην ερμηνεία γραφικών παραστάσεων και στο χειρισμό συμβόλων που σχετίζονται με τις συναρτήσεις. Περαιτέρω, οι Aspinwall, Shaw και Presmeg (1997) επισήμαναν ότι σε μερικές περιπτώσεις οι οπτικές αναπαραστάσεις δημιουργούν γνωστικές δυσκολίες οι οποίες περιορίζουν την ικανότητα των μαθητών για μετάφραση από γραφικές σε αλγεβρικές αναπαραστάσεις (Γαγάτσης, Α., Μιχαηλίδου, Ε., & Σιακαλλή, Μ., 2001).

Πολλοί ερευνητές διερεύνησαν το σημαντικό ρόλο των συνδέσεων ανάμεσα στις διαφορετικές αναπαραστάσεις της έννοιας της συνάρτησης και την ικανότητα επίλυσης προβλήματος. Συγκεκριμένα, οι Gagatsis και Shiakalli (2004) διαπίστωσαν ότι η ικανότητα των φοιτητών να μεταφράζουν από μια αναπαράσταση της έννοιας της συνάρτησης σε μια άλλη συνδέεται άμεσα με την επιτυχία στη λύση προβλήματος. Επιπλέον, οι Elia, I., Panaoura, A., Gagatsis, A., Gravvani, K., & Spyrou, P. (2008) διαπίστωσαν ότι η αποτελεσματικότητα των μαθητών στη λύση προβλήματος μπορεί να προβλέψει την επιτυχία τους στη χρήση διαφόρων αναπαραστάσεων της έννοιας, στον ορισμό και σε παραδείγματα της έννοιας της συνάρτησης.

Σύμφωνα με τους Moschkovich, Schoenfeld και Arcavi (1993) υπάρχουν δύο διαφορετικές προσεγγίσεις-διαστάσεις μέσα από τις οποίες μπορεί να ιδωθεί η έννοια της συνάρτησης: α) η διάσταση διαδικασίας ή η αλγεβρική διάσταση και β) η διάσταση αντικειμένου ή γεωμετρική διάσταση. Σύμφωνα με την πρώτη διάσταση, οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη συνάρτηση ως μια σχέση τιμών μεταξύ των τετμημένων και τεταγμένων (x και y), αντικαθιστούν σε μια εξίσωση το x με μια τιμή και υπολογίζουν την τιμή του ψ και μπορούν ακόμη να βρουν λύση σε μια εξίσωση βρίσκοντας τις συντεταγμένες ενός σημείου της γραφικής παράστασης. Σύμφωνα με τη διάσταση αντικειμένου, οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη γραφική παράσταση της συνάρτησης ως μια οντότητα. Οι μαθητές που χρησιμοποιούν τη διάσταση αυτή, αναγνωρίζουν τη μορφή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης από τη μελέτη της συμβολικής της μορφής και κάνουν παρατηρήσεις για τις τιμές και το πρόσημο των συντελεστών της (π.χ. για την κατασκευή των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = 2x$, $g(x) = 2x + 2$) χρησιμοποιούν τη σχέση που τις συνδέει ($g(\chi) = f(\chi) + 2$) (Knuth, 2000). Στη διάσταση αντικειμένου, η συνάρτηση αντιμετωπίζεται ως μια ανεξάρτητη οντότητα με τις δικές τις ιδιότητες και συμπεριφορά. Οι συναρτήσεις μπορούν να θεωρηθούν ως αντικείμενα στα οποία διαδικασίες, όπως η σύνθεση, μπορούν να εκτελεσθούν. Κατά συνέπεια, ένα έργο στο οποίο παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων και οι μαθητές καλούνται να εξηγήσουν πώς η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης θα μπορούσε να μετασχηματιστεί για να παραγάγει τη δεύτερη γραφική παράσταση θα απαιτούσε την υιοθέτηση της διάστασης αντικειμένου. Για τους σκοπούς της έρευνας αυτής, η πρώτη προσέγγιση-διάσταση ονομάζεται αλγεβρική ενώ η δεύτερη ονομάζεται γεωμετρική.

Η Συνάρτηση ως Διαδικασία και ως Αντικείμενο

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση ως παράδειγμα, η Sfard (1991) αναλύει τη διπλή φύση των μαθηματικών εννοιών: αναγνωρίζει σε αυτές μια λειτουργική (operational) (διαδικασία) και μια δομική (structural) (αντικείμενο) όψη. Σύμφωνα με την Sfard οι έννοιες γίνονται αντιληπτές αρχικά ως διαδικασία, για παράδειγμα μέσα από υπολογιστικές διαδικασίες, και στη συνέχεια κατανοούνται ως αντικείμενο. Η δομική αντίληψη μιας έννοιας αναπτύσσεται μέσω τριών βημάτων: της εσωτερίκευσης (interiorization), της συμπύκνωσης (condensation) και της πραγμοποίησης (reification).

Κατά την εσωτερίκευση, «ο μαθητής εξοικειώνεται με τις διαδικασίες-συνήθως υπολογιστικές –που θα οδηγήσουν στη γένεση της νέας έννοιας». Κατά τη φάση της συμπύκνωσης, ο μαθητής καθίσταται «όλο και περισσότερο ικανός να σκεφθεί μια διαδικασία συνολικά, χωρίς να περάσει στις λεπτομέρειες». Στην περίπτωση της συνάρτησης, οι μαθητές βρίσκονται στη φάση της συμπύκνωσης όταν μπορούν να διερευνήσουν μια συνάρτηση, να φτιάξουν τη γραφική της παράσταση, να συγκρίνουν ή να αναγνωρίσουν συναρτήσεις.

Για παράδειγμα ενώ κάποιος μπορεί να θεωρήσει την έκφραση $3(x+5)+1$ σαν αλγόριθμο, με τον οποίο μπορεί να παραγάγει διάφορα αποτελέσματα, στη φάση της συμπύκνωσης κάποιος μπορεί επίσης να θεωρήσει την ίδια έκφραση ως αυτοτελή αριθμό (Sfard & Linchevski, 1994). Η έκφραση θεωρείται συγχρόνως η διαδικασία και το αποτέλεσμα της διαδικασίας. Οι δυσκολίες των μαθητών να κατανοήσουν ταυτόχρονα και τις δυο αυτές έννοιες μιας έκφρασης έχουν αναφερθεί ως «δίλημμα διαδικασίας-προϊόντος» («process-product dilemma») (Davis, 1975).

Γενικά η όλη διαδικασία μετάβασης από τη «λειτουργική» («operational») στη «δομική» («structural») αντίληψη μιας μαθηματικής έννοιας είναι μια διαδοχή τριών βημάτων. Πρώτα πρέπει να υπάρξει μια διαδικασία που θα εκτελεστεί από τους μαθητές σε ήδη οικεία αντικείμενα, έπειτα θα προκύψει η θεώρηση αυτής της διαδικασίας ως ένα συμπαγές και ανεξάρτητο όλο και τελικά θα αποκτηθεί η ικανότητα αντίληψης αυτής της νέας οντότητας ως ένα συνεχές αυτοτελές αντικείμενο. Ενώ η εσωτερίκευση και η συμπύκνωση είναι βαθμιαίες διαδικασίες η Sfard (1991) τις χαρακτηρίζει ως «βαθμιαίες, ποσοτικές, παρά ποιοτικές αλλαγές», η πραγματοποίηση είναι ένα ξαφνικό ποιοτικό άλμα από αυτό που αρχικά γίνεται αντιληπτό ως διαδικασία, σε ένα νοητικό αντικείμενο, μια αυτοτελής οντότητα που κατέχει ορισμένες ιδιότητες. Η πραγματοποίηση συμβαίνει όταν «μια διαδικασία σταθεροποιείται σε αντικείμενο, σε μια στατική δομή». Δεδομένου ότι η πραγματοποίηση είναι ένα δύσκολο νοητικό βήμα η (Sfard, 1991) προτείνει οι νέες έννοιες να μην εισάγονται μέσα από δομικές περιγραφές τους και οι δομικές αντιλήψεις να μην παρουσιάζονται όσο οι μαθητές μπορούν να κάνουν και χωρίς αυτές.

Η μετατροπή της έννοιας της συνάρτησης από διαδικασία σε αντικείμενο είναι ο τελικός στόχος της διδασκαλίας των συναρτήσεων στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Στην πραγματικότητα, η παρουσίαση των συναρτήσεων στα σχολικά εγχειρίδια είναι μια καταγραφή αυτής της διαδικασίας.

Η Εξέλιξη της Έννοιας της Συνάρτησης

Η έννοια της συνάρτησης σωστά θεωρείται ως μία από τα πιο σημαντικές σε όλα τα μαθηματικά. Όπως το σημείο, η γραμμή, και το επίπεδο είναι τα βασικά στοιχεία της Ευκλείδειας γεωμετρίας και είναι η κυρίαρχη θεωρία από την εποχή της Αρχαίας Ελλάδα μέχρι την σύγχρονη εποχή οι έννοιες της συνάρτησης και των παραγώγων είναι η κεντρική θεωρία στην ανάπτυξη των μαθηματικών και αποτελούν το θεμέλιο της μαθηματικής ανάλυσης.

Οι διάφοροι συγγραφείς διαφωνούν ως προς την τοποθέτηση της γένεσης της έννοιας της συνάρτησης (Man-Keung, 1996). Ο Eric Temple Bell ισχυρίζεται ότι η έννοια θα πρέπει να ήταν γνωστή στους Βαβυλώνιους (2000 π.Χ.) στη μορφή αντιστοιχίας, όπως αυτή φαίνεται στην Πλάκα 322 του Plimpton. Εκεί παρουσιάζονται σε μορφή πίνακα τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου τριγώνου και σε αντίστοιχη στήλη η τέμνουσα μιας από τις γωνιές του. Υπάρχουν ακόμα απόψεις σύμφωνα με τις οποίες η έννοια της συνάρτησης ήταν γνωστή στους αρχαίους Έλληνες στη μορφή των καμπύλων, όπως για παράδειγμα, των κανονικών τομών, των επιφανειών δευτέρου βαθμού, της σπείρας του Αρχιμήδη κ.λπ. (Kronfellner, 1995), (Γαγάτσης, Μιχαηλίδου, & Σιακαλλή, 2001).

Σύμφωνα, ωστόσο, με τους Sierpinska, (1992) και Radford, (1996), ούτε η έννοια της συνάρτησης, ούτε η έννοια της μεταβλητής ως μιας συνεχώς μεταβαλλόμενης ποσότητας, ήταν γνωστές στους αρχαίους Έλληνες, αφού η έννοια του αριθμού ήταν διακριτή. Οι περισσότεροι μελετητές συμφωνούν ότι η πρώτη προσπάθεια για μια σαφή αναφορά στην έννοια της συνάρτησης έγινε το 14^{ο} αιώνα από τον Nicole Oresme. Ο Γάλλος αυτός μαθηματικός και επίσκοπος της Lisieux περιγράφει γραφικά την εξάρτηση δύο φυσικών μεγεθών, της ταχύτητας και του χρόνου, στο έργο του *Επί της Ευρύτητας των Μορφών* (*Of the Lattitude of Forms*). Η αναφορά του στην έννοια της συνάρτησης δηλώνει:

- Ότι οι ποσοτικοί νόμοι της φύσης μπορούν να περιγραφούν μέσα από νόμους συναρτησιακής εξάρτησης.
- Ενσυνείδητη διάκριση ανάμεσα σε εξαρτημένες και ανεξάρτητες μεταβλητές.
- Γραφική αναπαράσταση της συναρτησιακής σχέσης.

Η ιδέα της έννοιας της συνάρτησης, όπως παρουσιάστηκε από τον Oresme, ήταν μια αφηρημένη έννοια εξάρτησης δύο μεγεθών. Φάνηκε, ωστόσο, μια ουσιαστική αδυναμία των μαθηματικών εργαλείων της εποχής εκείνης να περιγράψουν με αναλυτικό τρόπο την έννοια της συνάρτησης – ποιο θα μπορούσε να είναι το αποτέλεσμα της μεταβολής μιας μεταβλητής ποσότητας σε μια άλλη ποσότητα.

Επιπρόσθετη δυσκολία αποτελούσε η ετερογενής αντίληψη της έννοιας του αριθμού, όπως αυτή κληροδοτήθηκε από τους αρχαίους Έλληνες. Η διάκριση που υπήρχε στα ελληνικά Μαθηματικά, ανάμεσα σε αριθμούς και σε συνεχή μεγέθη, που δεν ήταν αριθμοί, αποτελούσε ένα ιδιαίτερα δύσκολο επιστημολογικό εμπόδιο στην αναλυτική έκφραση της συνάρτησης. Ο βαθμός επηρεασμού του Oresme από αυτή την αντίληψη φαίνεται από την επόμενη αναφορά του:

Κάθε μετρήσιμο αντικείμενο, εκτός από τους αριθμούς, γίνεται αντιληπτό ως μια συνεχής ποσότητα. Έτσι, είναι αναγκαίο να θεωρήσουμε τα σημεία, τις ευθείες, τις επιφάνειες ή τις ιδιότητές τους, διά μέσου των οποίων, όπως θα ήθελε και ο Αριστοτέλης, μπορούν κατ' αρχήν να οριστούν το μέτρον και η αναλογία.… Επομένως, κάθε «ένταση» (μεταβλητή) της οποίας οι τιμές μπορούν να ληφθούν διαδοχικά, θα πρέπει να θεωρείται ως μια ευθεία, που φέρεται κάθετα σε κάποιο ή κάποια σημεία του μεταβλητού χώρου (στο Sierpinska, 1992).

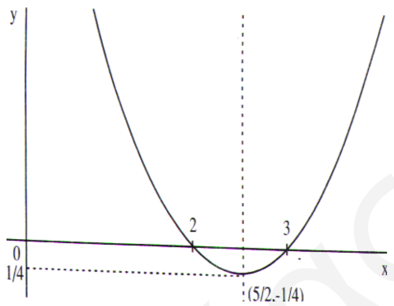
Όπως επισημαίνει ο Man-keung (1996), η φιλοσοφία των Μαθηματικών κατά την Αναγέννηση είχε ως κεντρικό στόχο τη μαθηματικοποίηση των φυσικών φαινομένων, γεγονός που ώθησε ουσιαστικά την ανάπτυξη τόσο της αριθμητικής – επέκταση και αποσαφήνιση της έννοιας του αριθμού – όσο και της συμβολικής Άλγεβρας. Χαρακτηριστικά ο Γαλιλαίος γράφει: *«Μέτρα ότι είναι μετρήσιμο και κάνε μετρήσιμο ότι δεν είναι»* (αναφορά στο Man-keung, 1996). Ακολούθησαν οι Descartes και Fermat, οι οποίοι πάντρεψαν την Άλγεβρα και τη Γεωμετρία. Ο Descartes είναι ίσως ο πρώτος που κάνει μια σαφή αναφορά στην ιδέα της συνάρτησης, χωρίς όμως να χρησιμοποιεί τον όρο συνάρτηση. Στο έργο του La Geometrie (1637) γράφει:

«Εάν τότε λάβουμε διαδοχικά ένα άπειρο πλήθος διαφορετικών τιμών της ευθείας ψ, θα πάρουμε ένα άπειρο πλήθος τιμών της ευθείας χ και κατά συνέπεια ένα άπειρο πλήθος διαφορετικών σημείων G με τη βοήθεια των οποίων μπορεί να χαραχθεί η αναμενόμενη καμπύλη» (Γαγάτσης, Α., Μιχαηλίδου, Ε., & Σιακαλλή, Μ., 2001).

Τον όρο συνάρτηση (function) χρησιμοποίησε για πρώτη φορά ο Leibniz στα 1673 στο έργο του *Methodus tangetium inverso, seu de functionibus*. Στο έργο αυτό ο όρος συνάρτηση χρησιμοποιήθηκε για την παράσταση διάφορων γεωμετρικών ποσοτήτων, που συνδέονται με ένα μεταβλητό σημείο μιας καμπύλης, όπως συντεταγμένες σημείου, κλίση της καμπύλης, ακτίνα καμπυλότητας κ.λπ. (Howard, 1990: Man-keung, 1996). Με την ίδια έννοια χρησιμοποίησε τον όρο συνάρτηση ο Bernoulli. Συγκεκριμένα, εννοούσε τη συνάρτηση ως μια έκφραση που περιέχει μια μεταβλητή και μερικές σταθερές (Howard, 1990). Χρησιμοποίησε το συμβολισμό *φχ*, χωρίς τη χρήση παρενθέσεων. Οι παρενθέσεις και το σύμβολο *f* οφείλεται στο μαθητή του Bernoulli, τον Euler (Kronfellner, 1995; Man-keung, 1996). Ο Euler στο έργο του *Introduction in Analysis Infinitorum* (1747, στο Βασάκος, 1995, σ. 242) γράφει *ότι «συνάρτηση είναι μια αναλυτική έκφραση μιας ή περισσότερων μεταβλητών συνδεδεμένων με τα σημεία της Άλγεβρας και με άλλους αριθμούς ή αμετάβλητες ποσότητες»*.

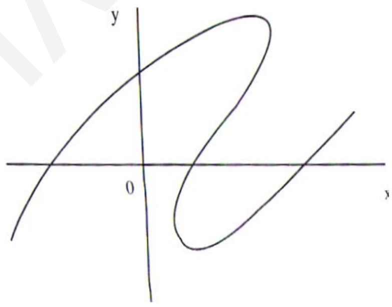
Όπως επισημαίνει ο Βασάκος (1995) αρχικά η μεταβλητή και η σταθερά δεν ήταν τίποτε περισσότερο από γεωμετρικά μεγέθη – κατά το πρότυπο του Leibniz – πάνω στα οποία μπορούν να εκτελεστούν διάφορες διαδικασίες. Ο Euler αντιλήφθηκε ότι δεν είναι σωστό να γίνεται λόγος για γράμματα – σύμβολα και αυτά να θεωρούνται ως πραγματικά γεωμετρικά αντικείμενα. Θεώρησε ότι πίσω από τα σύμβολα θα πρέπει να κρύβεται μια άλλη αφηρημένη οντότητα. Το 1775 αντικατέστησε τον αρχικό ορισμό με ένα άλλο, ελπίζοντας να απαλλαγεί από την έννοια της μεταβλητής. Σύμφωνα με τον Euler (1725) *«μια ποσότητα ονομάζεται συνάρτηση, όταν εξαρτάται από μια άλλη ποσότητα με τέτοιο τρόπο, ώστε εάν η τελευταία ποσότητα αλλάζει η πρώτη ποσότητα να αλλάζει από μόνη της»* (Βασάκος, 1995), (Γαγάτσης, Α., Μιχαηλίδου, Ε., & Σιακαλλή, Μ., 2001).

Σύμφωνα με τον Βασάκο (1995) στο νέο ορισμό ο όρος *μεταβλητή* αντικαθίσταται από το γενικότερο σε νόημα όρο *ποσότητα* και εγκαταλείπεται η ιδέα της *αναλυτικής έκφρασης* της συνάρτησης. Ενώ αρχικά για τον Euler συναρτήσεις ήταν μόνο οι αναλυτικές εκφράσεις (π.χ. $f(x) = x^2 - 5x + 6$), στη συνέχεια αποδέχθηκε την ύπαρξη συναρτήσεων που δεν έχουν συγκεκριμένη αναλυτική έκφραση, αλλά μπορούν να παρασταθούν με ένα ελεύθερο γράφημα. Συγκεκριμένα, δέχεται ότι συνάρτηση είναι μια σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών x και y, που εκφράζονται στο επίπεδο από μια καμπύλη χαραγμένη με ελεύθερο τρόπο. Στις περιπτώσεις αυτές μπορεί να λεχθεί ότι η αναλυτική έκφραση αλλάζει από σημείο σε σημείο.



(α)

Σχήμα 1. Αναλυτική συνάρτηση $f(x)=x^2-5x+6$

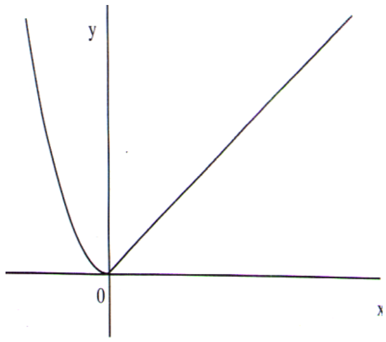


(β)

Σχήμα 2. Αναλυτική συνάρτηση χαραγμένη με ελεύθερο τρόπο

Όπως επισημαίνει ο Man-keung (1996) μέχρι τότε δε γινόταν καμιά διάκριση ανάμεσα στη συνάρτηση και την τιμή της συνάρτησης. Επιπρόσθετα, δεν είχε ξεκαθαρίσει η έννοια της συνεχούς ή ασυνεχούς συνάρτησης, όπως είναι σήμερα γνωστές. Ο Euler στο δεύτερο βιβλίο της *Εισαγωγής* του, (Book II, *Introduction in Analysis Infinitorum*), επεκτείνει την έννοια της συνάρτησης, για να περιλάβει τις *Euler – συνεχείς* συναρτήσεις, (*E-συνεχείς*). Συγκεκριμένα, ο Euler διακρίνει ως συνεχείς τις συναρτήσεις των οποίων η αναλυτική έκφραση δίνεται από ένα και μοναδικό τύπο, από τις συναρτήσεις που χαρακτηρίζονται ως ασυνεχείς, μεικτές ή ασυνήθεις. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 0 \\ x & , x > 0 \end{cases}$

χαρακτηρίζεται ως *E – ασυνεχής*. Είναι εμφανές ότι με τον όρο συνάρτηση ο Euler εννοούσε μόνο τις συνεχείς, με τη σημερινή έννοια, συναρτήσεις.



Σχήμα 3. E – ασυνεχής συνάρτηση

Ένα άλλο αδιευκρίνιστο ζήτημα, που αφορούσε στον ορισμό της συνάρτησης, ήταν η μοναδικότητα της τιμής της συνάρτησης. Ο Euler θεωρούσε τις αναλυτικές εκφράσεις που περιείχαν τετραγωνικές ρίζες ως περιπτώσεις αμφίβολων συναρτήσεων. Σχετικό με το πιο πάνω είναι το ζήτημα του πεδίου ορισμού και του πεδίου τιμών της συνάρτησης, για τα οποία την εποχή εκείνη δε γινόταν καθόλου λόγος.

Η εμφάνιση της έννοιας της συνάρτησης ως εξατομικευμένη μαθηματική οντότητα μπορεί να αποδοθεί στις απαρχές του απειροστικού λογισμού. Ο Descartes (1596-1650) αναφέρεται σαφώς ότι μια εξίσωση σε δύο μεταβλητές, που γεωμετρικά αντιπροσωπεύει μια καμπύλη, δείχνει μια εξάρτηση μεταξύ των μεταβλητών ποσοτήτων. Η ιδέα της παραγώγου ήρθε περίπου ως ένας τρόπος για την εξεύρεση της εφαπτομένης σε οποιοδήποτε σημείο της καμπύλης αυτής. Ο Descartes μελέτησε τη μεταβολή των θετικών δυνάμεων του χ, χ^2, χ^3… Η συμβολή του είναι τεράστια, αφού είναι ο πρώτος που ξέφυγε από τη στατική, αλγεβρική παράσταση μιας εξίσωσης, για να μελετήσει τη μεταβολή που υφίστανται τα μεγέθη, όταν κάποια από τις επιμέρους ποσότητες λαμβάνει διαδοχικά διαφορετικές τιμές σε ένα συνεχές διάστημα.

Ο Leibniz (1646-1716) ήταν ο πρώτος ο οποίος χρησιμοποίησε για πρώτη φορά τον όρο «συνάρτηση» το 1673. Χρησιμοποίησε τη συνάρτηση για να ορίσει, σε πολύ γενικούς όρους, την εξάρτηση γεωμετρικών μεγεθών , όπως τις εφαπτόμενες (subtangents) και κάθετες (subnormals) στην γραφική παράσταση μιας καμπύλης. Είναι αυτός που εισήγαγε τους όρους “σταθερά”, “μεταβλητή” και “παράμετρος”.

Με την ανάπτυξη της μελέτης των καμπυλών με αλγεβρικές μεθόδους, ήταν απαραίτητος ένας όρος για να παρουσιάσει τις ποσότητες που ήταν εξαρτώμενες από μία μεταβλητή μέσω μιας αναλυτικής έκφρασης. Τελικά, ο όρος “συνάρτηση” υιοθετήθηκε για το σκοπό αυτό στην αλληλογραφία που αντάλλαζαν οι Leibniz και Jean Bernoulli στο διάστημα (1667-1748) μεταξύ 1694 και 1698 (Γαγάτσης, Α., Μιχαηλίδου, Ε., & Σιακαλλή, Μ., 2001).

Ο όρος συνάρτηση δεν εμφανίζεται σε κανένα λεξικό των μαθηματικών που δημοσιεύθηκε το 1716. Δύο χρόνια μετά, όμως, ο Jean Bernoulli δημοσίευσε ένα άρθρο, το οποίο θα είχε ευρεία διάδοση, που περιέχει τον ορισμό συνάρτηση μιας μεταβλητής ως μια ποσότητα η οποία αποτελείται από τη μεταβλητή και σταθερές. Ο Euler (1707-1793), πρόσθεσε αργότερα σε μια ομιλία του τον ορισμό της αναλυτικής έκφρασης αντί της ποσότητας. Η έννοια της συνάρτησης ως εκ τούτου, εντοπίζεσαι στην πράξη με την έννοια της αναλυτικής έκφρασης. Αυτό το δημιούργημα ήταν μόλις αντιληπτό και οδήγησε σε αρκετές ασυνέπειες. Στην πραγματικότητα, η συνάρτηση θα μπορούσε να αντιπροσωπεύεται από αρκετές και διαφορετικές αναλυτικές εκφράσεις. Η σύνθεση απέδωσε επίσης σοβαρούς περιορισμούς για περιπτώσεις που θα μπορούσαν να θεωρηθούν ως συναρτήσεις. Γνωρίζοντας αυτές τις αδυναμίες ο Euler πρότεινε έναν εναλλακτικό ορισμό που δεν προκάλεσε πολλή προσοχή κατά τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Οι αναλυτικές εκφράσεις ορισμού της συνάρτησης στα μαθηματικά θα παραμείνουν αμετάβλητες για όλο το 18ο αιώνα. Τον $19^{ο}$ αιώνα, ωστόσο, η έννοια της συνάρτησης γνώρισε διαδοχικές διευρύνσεις και διευκρινίσεις που άλλαξαν τη φύση και το νόημά της.

Η Συνάρτηση τον $18^{ο}$ Αιώνα

Στον ορισμό του Euler δε γινόταν καμιά διάκριση ανάμεσα στην τιμή και τον τύπο της συνάρτησης. Ο Fourier, μελετώντας τη διάδοση της θερμότητας σε μεταλλικές ράβδους, διατύπωσε τον ισχυρισμό ότι κάθε συνάρτηση, που ορίζεται σε ένα πεπερασμένο κλειστό διάστημα από οποιοδήποτε τυχαία σχεδιασμένο γράφημα, μπορεί να αναλυθεί σε ένα άθροισμα ημιτόνων και συνημιτόνων. Συγκεκριμένα, ο Fourier ισχυρίστηκε ότι οποιαδήποτε συνάρτηση, όσο περίεργα και αν ορίζεται στο διάστημα (-π, π), μπορεί να παρασταθεί σε αυτό το διάστημα ως:

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \ ,$$

όπου *α, b* είναι κατάλληλοι πραγματικοί αριθμοί και a_n και b_n είναι οι συντελεστές, που ορίζονται από τις σχέσεις:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad , \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad \text{όπου}\ n \geq 0$$

και καλούνται, προς τιμήν του Fourier *συντελεστές του Fourier*. Ο ισχυρισμός αυτός, ο οποίος όπως απόδειξε αργότερα ο Dirichlet (1829), δεν ισχύει για κάθε συνάρτηση, οδηγεί στην παραδοχή ότι μια συνάρτηση, περιορισμένη σε κάποια περιοχή του πεδίου ορισμού της, μπορεί να παρασταθεί με περισσότερους από έναν τρόπους. Γίνεται έτσι φανερή η διάκριση ανάμεσα στην τιμή και τον τύπο της συνάρτησης (Howard, 1990: Kronfellner, 1995). Πιο κάτω φαίνεται πώς μπορεί να εκφραστεί η ακόλουθη συνάρτηση με τη βοήθεια των συντελεστών Fourier.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1} = \begin{cases} 1 & ,\mathrm{x} \in (2\mathrm{k}\pi, (2\mathrm{k}+1)\pi),\ \mathrm{k} \in \mathrm{Z} \\ -1 & ,\mathrm{x} \in ((2\mathrm{k}\text{-}1)\pi, 2k\pi),\ \mathrm{k} \in \mathrm{Z} \\ 0 & , \qquad \mathrm{x} = \mathrm{k}\pi,\ \mathrm{k} \in \mathrm{Z} \end{cases}$$

Αντίστοιχο συμπέρασμα θα μπορούσε να εξαχθεί και από το πρόβλημα της κίνησης απόσβεσης του τεντωμένου σχοινιού, που εξετάστηκε πιο πάνω. Ωστόσο, υπάρχει μια ουσιαστική διαφορά ανάμεσα στο πρόβλημα της ταλάντωσης και στο πρόβλημα της διάδοσης της θερμότητας. Από τη μια, τόσο η μορφή του σχοινιού όσο και οι γεωμετρικές του ιδιότητες είναι οπτικά εμφανείς και παρατηρήσιμες. Από την άλλη, στο πρόβλημα της διάδοσης της θερμότητας δεν υπάρχει τίποτε το γεωμετρικό και το παρατηρήσιμο. Με τον τρόπο αυτό γίνεται, στην πράξη, η αποδέσμευση της έννοιας της συνάρτησης από το γεωμετρικό της περίβλημα.

Όσον αφορά στη συνέχεια συναρτήσεων ο Fourier δεν μπόρεσε να ξεφύγει από την έννοια που προσδιόρισε ο Euler. Στο βιβλίο *του Theorie Analytique de la Chaleur* (1822) γράφει: *«Πάνω απ' όλα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η συνάρτηση f(x), στην οποία εφαρμόζεται η απόδειξη, είναι τελείως αυθαίρετη και δεν υπόκειται σε κανένα νόμο συνέχειας»*. Και συνεχίζει, *«εν γένει η συνάρτηση f(x) αντιπροσωπεύει μια ακολουθία τιμών* *ή τεταγμένων καθεμιά από τις οποίες είναι τυχαία. Δεδομένου ενός άπειρου πλήθους τιμών στην τετμημένη χ, υπάρχει ένα ίσο πλήθος τεταγμένων f(x) … Δεν υποθέτουμε ότι οι τιμές αυτές ακολουθούν τον ίδιο κοινό νόμο. Ακολουθούν η μια την άλλη με ένα τυχαίο τρόπο και κάθε μια λαμβάνεται ως να είναι μια μοναδική ποσότητα»* (στο Man-keung, 1996). Ο Fourier φαίνεται να αποδέχεται την ύπαρξη μόνο ασυνεχών συναρτήσεων. Η προσπάθεια για αποσαφήνιση της έννοιας της συνεχούς συνάρτησης θα αποτελέσει στη συνέχεια ένα βασικό άξονα στην ανάπτυξη της θεωρίας της ανάλυσης.

Η Συνάρτηση τον $19^{ο}$ Αιώνα

Ο $19^{ος}$ αιώνας χαρακτηρίζεται από μια προσπάθεια αυστηρής διατύπωσης όλων όσων είχαν διατυπωθεί μέχρι τότε στο χώρο της ανάλυσης. Οι ιδέες του Euler και οι δυναμοσειρές του Fourier είχαν ριζωθεί βαθιά στη μαθηματική πρακτική της εποχής εκείνης. Υπήρχαν όμως αρκετές ασάφειες, όπως για παράδειγμα το πρόβλημα της μοναδικότητας, η αντιστοιχία και κυρίως η συνέχεια.

Όπως επισημαίνει ο Βασάκος (1995), η προσπάθεια για αυστηρότερη διατύπωση της έννοιας της συνάρτησης και γενικότερα της ανάλυσης βαδίζει παράλληλα με την έρευνα σχετικά με τη συνέχεια των συναρτήσεων. Πρώτος ο Cauchy το 1821 στο έργο του *Cours d' Analyse* αναφέρει ότι *«η συνάρτηση f(x) θα είναι μια συνεχής συνάρτηση της μεταβλητής x ανάμεσα σε δύο προσδιορισμένα όρια εάν, για κάθε τιμή του x, ανάμεσα στα όρια αυτά, η αριθμητική τιμή της διαφοράς $f(x+\alpha) - f(x)$ μειώνεται παράλληλα με το α».* Αυτός ο τρόπος παρουσίασης της συνεχούς συνάρτησης προσομοιάζει με τη σύγχρονη αντίληψη. Στην πράξη, ωστόσο, ο Cauchy θεωρούσε μόνο ένα περιορισμένο σύνολο συναρτήσεων, που το διέκρινε σε *απλές* και *σύνθετες*. Απλές θεωρούσε τις α +χ, α –χ, αχ, α/χ, $χ^{α}$, $α^{χ}$, ημχ, συνχ, τοξσυνχ, τοξημχ και σύνθετες θεωρούσε συνθέσεις αυτών των συναρτήσεων (Βασάκος, 1995: Man-keung, 1996). Στα 1837 ο Dirichlet αποδεσμεύει την έννοια της συνέχειας από την ανάγκη ύπαρξης αναλυτικής έκφρασης. Συγκεκριμένα, αναφέρει:

«Θεωρώντας δύο σταθερές α και β και x μια μεταβλητή, που προοδευτικά μπορεί να λάβει όλες τις τιμές ανάμεσα στο α και στο β, τότε εάν σε κάθε x αντιστοιχεί ένα μοναδικό ψ με τρόπο ώστε, καθώς το x καλύπτει με συνεχή τρόπο το διάστημα από το α στο β, το ψ =

f(x) αλλάζει επίσης προοδευτικά, τότε το ψ καλείται συνεχής συνάρτηση του x στο διάστημα αυτό. Δεν είναι καθόλου απαραίτητο το ψ να εξαρτάται από το x σύμφωνα με τον ίδιο κανόνα σε όλο το διάστημα. Δε χρειάζεται κάποιος να θεωρήσει μια εξάρτηση, που εκφράζεται μέσα από μαθηματικές πράξεις. Γεωμετρικά, θεωρώντας το x και το ψ ως την τετμημένη και την τεταγμένη αντίστοιχα, μια συνεχής συνάρτηση εικονίζεται ως ένα συνεχές γράφημα» (Kronfellner, 1995).

Επιπρόσθετα, όπως αναφέρει ο Kronfellner (1995), ο Dirichlet έδειξε ότι η αναλυτική έκφραση των συναρτήσεων δε δηλώνει αυτόματα και τη συνέχειά τους. Για παράδειγμα, η ομώνυμη συνάρτηση του $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ έχει άπειρα σημεία ασυνέχειας σε οποιοδήποτε μικρό διάστημα, ενώ ταυτόχρονα μπορεί να εκφραστεί αναλυτικά ως

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{k \to \infty} \left(\cos^2(n!\,\pi\, x)\right)^k$$

Τέλος, ο Dirichlet στα 1837 σε μια προσπάθεια να δώσει έναν ορισμό της συνάρτησης αρκετά ευρύ, ώστε να περιλαμβάνει όλες τις μέχρι τότε απόψεις κατέληξε στην εξής διατύπωση:

«*Μεταβλητή είναι ένα σύμβολο που παριστάνει κάθε στοιχείο ενός συνόλου αριθμών. Αν δύο μεταβλητές συνδέονται με τέτοιο τρόπο, ώστε όποτε δίνεται μια τιμή στο χ να παίρνει αυτόματα μια τιμή και το ψ, με βάση κάποιο νόμο ή αντιστοιχία, τότε λέμε ότι το ψ είναι μια συνάρτηση (μονότιμη) του χ. Η μεταβλητή χ, της οποίας δίνουμε ό,τι τιμές θέλουμε, ονομάζεται ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ η μεταβλητή ψ, της οποίας οι τιμές εξαρτώνται από τις τιμές του χ, ονομάζεται εξαρτημένη μεταβλητή. Οι επιτρεπτές τιμές, που μπορεί να πάρει η μεταβλητή χ, αποτελούν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και οι τιμές της μεταβλητής ψ αποτελούν το πεδίο τιμών της συνάρτησης»* (Howard, 1990).

Ο Dirichlet ήταν ο πρώτος που έκανε αναφορά στην ιδέα της αντιστοιχίας στην έννοια της συνάρτησης μεταξύ δύο συνόλων πραγματικών αριθμών. Ο πιο πάνω ορισμός συναντάται ακόμα και σήμερα στα περισσότερα εγχειρίδια εισαγωγής στον απειροστικό λογισμό.

Απεικονίσεις, Συναρτήσεις και Σχέσεις

Τον 19ο αιώνα εισάγονται καινούρια μαθηματικά αντικείμενα, όπως είναι τα διανύσματα, οι πίνακες. Παράλληλα, αναπτύσσονται νέοι κλάδοι στα Μαθηματικά (τοπολογία, θεωρία μέτρου, συναρτησιακή ανάλυση), ενώ ταυτόχρονα γίνεται περαιτέρω έρευνα στην έννοια του αριθμού και ιδιαίτερα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Οι μεταβολές αυτές οδήγησαν σε γενικεύσεις αναφορικά με την έννοια της συνάρτησης. Ο Dedekind (1831-1916) έδωσε τον ακόλουθο ορισμό: «Μια απεικόνιση Φ ενός συστήματος S είναι ένας νόμος, ο οποίος προσδίδει σε κάθε στοιχείο s του S κάτι συγκεκριμένο, το οποίο καλείται εικόνα του s και το οποίο γράφεται ως Φ(S)» (στο Kronfellner, 1995). Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό το πεδίο ορισμού είναι αφηρημένο. Υπάρχει μια σαφής διάκριση ανάμεσα στη συνάρτηση (απεικόνιση) και την τιμή της (εικόνα), ωστόσο ούτε εδώ γίνεται λόγος για την έννοια του πεδίου τιμών της συνάρτησης. (Kronfellner, 1995: NCTM, 1993).

Στους ορισμούς που έδωσαν οι Dirichlet, Dedekind και Cantor, αποφεύγονται φράσεις, όπως αναλυτική έκφραση και χρησιμοποιούνται οι όροι νόμος, εξάρτηση και αντιστοιχία. Προκύπτει τότε το ζήτημα ενός πιο αυστηρού ορισμού των όρων αυτών. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήθηκε η θεωρία συνόλων, που είχε τα χαρακτηριστικά μιας αυστηρά δομημένης θεωρίας. Στα πλαίσια της θεωρίας αυτής γενικεύεται η έννοια της συνάρτησης ως μιας σχέσης συνόλων. Χαρακτηριστικά οι Bourbaki δίνουν τον πιο κάτω ορισμό (Theorie des ensembles, 1939):

Όπως επισημαίνει ο Eisenberg (1991) οι φορμαλιστικές αντιλήψεις ήταν ιδιαίτερα έντονες κατά τη δεκαετία του 1960. Κατά συνέπεια, επιφανείς μαθηματικοί, όπως οι Alder, ο Beberman, ο Beyle και άλλοι, εισηγήθηκαν την εισαγωγή του ορισμού κατά Bourbaki στα σχολικά εγχειρίδια. Τα αποτελέσματα ήταν βέβαια ολέθρια, αφού οι μαθητές δεν ήταν προετοιμασμένοι για τέτοιου είδους αφηρημένους ορισμούς.

Η εξέλιξη της συνάρτησης συνεχίστηκε. Από την έννοια της αντιστοιχίας, οι μαθηματικοί μετακινήθηκαν προς την έννοια της διμελούς σχέσης.

Αρχικά, η έννοια της συνάρτησης χρησιμοποιήθηκε για να ορίσει τις αντιστοιχίες μεταξύ γεωμετρικών οντοτήτων. Μέσω της σύνδεσής της με τη μελέτη των αναλυτικών εκφράσεων, η συνάρτηση εξασφάλισε μια θεμελιώδη θέση στην πορεία της μαθηματικής σκέψης. Αυτή η σύνδεση μεταξύ των αναλυτικών εκφράσεων και των γεωμετρικών αντικείμενων, στην πραγματικότητα, έδειξε να είναι πολύ γόνιμη και ότι ακόμα ενημερώνει την τρέχουσα μαθηματική πράξη.

Ένα βασικό ζήτημα για τη διδασκαλία και τη διαδικασία μάθησης είναι η συνεκτική κατανόηση της έννοιας. Αυτή η κατανόηση χωρίζεται σε έννοιες και διαδικασίες, και τα δύο είναι απαραίτητα για τους μαθητές προκειμένου να είναι σε θέση να αντιμετωπίσουν στη λύση προβλήματος με συναρτήσεις σε καταστάσεις με πλαίσιο στην πραγματική ζωή. Στο Πανεπιστήμιο, καθηγητές συχνά παραπονούνται ότι οι φοιτητές δεν παρουσιάζουν τις κατάλληλες δεξιότητες για την απόδειξη μια πρότασης με συναρτήσεις και ότι χρησιμοποιούν τις γραφικές παραστάσεις και εξισώσεις σαν να είναι κάποιο είδος “Ετικέτας” για τη συνάρτηση, και όχι σχήματα που παρουσιάζουν τις έννοιες και χρησιμοποιούνται για την παρουσίαση αποδείξεων (S. Bloch, 2003). Προκειμένου να είναι σε θέση να χρησιμοποιήσουν τις διάφορες μορφές των αναπαραστάσεων της συνάρτησης ως εργαλεία, προκειμένου να κατασκευάσουν μια απόδειξη, οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν τα βασικά χαρακτηριστικά της έννοιας, τις διαδικασίες που πρέπει να ακολουθούν και την χρήση των προϋποθέσεων και των περιορισμών για κάθε μορφή αναπαράστασης. Η Sajka, 2003 υποδεικνύει την επίδραση του σχολείου και της τυπικής διδασκαλίας που οδηγεί σε τυποποιημένες διαδικασίες. Σύμφωνα με μια τυπική διδασκαλία που δεν επιτρέπει την κατασκευή μια θεμελιώδους γνώσης μαθηματικών, όπου στους μαθητές δίνεται μια γραφική παράσταση μιας συνάρτησης και πρέπει να συμπεράνουν από αυτό ορισμένες ιδιότητες της συνάρτησης, ακολουθώντας μια συγκεκριμένη ειδική διαδικασία. Εξετάζεται ωστόσο ο βαθμός στον οποίο οι μαθητές είναι σε θέση να επιτύχουν αξιοποιώντας τις γνώσεις και δεξιότητες σε καταστάσεις εκτός από το πλαίσιο στο οποίο έχουν διδαχθεί ("The effect of the graphic calculator on students' solution approaches: A secondary analysis.," 2000).

Μια δυσκολία στην κατανόηση των μαθητών της έννοιας της συνάρτησης έρχεται από τη διπλή της φύση (Sajka, 2003a). Αυτή μπορεί να νοηθεί δομικά ως αντικείμενο και λειτουργικά ως μια διαδικασία (Sfard, 1991). Σύμφωνα με ανάλυση της Sfard προτείνεται ότι η συνάρτηση είναι μια έννοια που αρχικά γίνεται αντιληπτή λειτουργικά και στη συνέχεια γίνεται μετάβαση σε δομικό σχήμα (structural form) σε διάφορα στάδια. Υποστηρίζεται ότι οι συναρτήσεις λειτουργούν ως διαδικασίες υπολογισμού και ως αντικείμενα οι οποίες είναι δύο έννοιες αλληλένδετες διαστάσεις της εννοιολογικής και διαδικαστικής κατανόησης της έννοιας (Γαγάτσης, Α., Μιχαηλίδου, Ε., & Σιακαλλή, Μ., 2001).

Η επίδραση της διδασκαλίας είναι εξαιρετικά ισχυρή και η προώθηση ειδικών εργαλείων ή των διαδικασιών επιβάλλουν την ανάπτυξη ειδικών γνωστικών διαδικασιών και δομών. Για παράδειγμα έχει προταθεί ότι ένας τρόπος να βελτιώσει την κατανόηση των μαθητών σε ορισμένες μαθηματικές έννοιες θα ήταν η χρήση της τεχνολογίας για γραφικών και συμβολικών αναπαραστάσεων (Abu-Naja, 2008). Ωστόσο στην περίπτωση της συνάρτησης, μαθητές που εργάστηκαν με αριθμομηχανή γραφικών παραστάσεων, εφαρμόζουν γραφικές λύσεις προβλημάτων συχνότερα από άλλους μαθητές("The effect of the graphic calculator on students' solution approaches: A secondary analysis.," 2000), χωρίς όμως να έχουν την ίδια επίδοση, όταν παρουσιάζονται άλλες μορφές μιας συνάρτησης.

«Κάθε διδακτικό φαινόμενο περιλαμβάνει την παραγωγή, την διδασκαλία και την πρακτική για ορισμένες μαθηματικές δραστηριότητες» (Hardy, 2009, σ. 343). Ο (Bardini, C. , et al, 2004) παρουσίασε μια σύντομη επισκόπηση των σχολικών βιβλίων των μαθηματικών σε σχολεία της Αυστραλίας που είναι παρόμοιο με το προγράμματα σπουδών και σχολικών βιβλίων όσον αφορά στην παρουσίαση της έννοιας της συνάρτησης για πολλά άλλα εκπαιδευτικά συστήματα. Συνήθως, οι μαθητές εισάγονται με τυποποιημένες μορφές άμεσων και έμμεσων μορφών και κανόνων συνάρτησης, όπως $y = ax + b$ και $ax + by = c$. Ακολούθως διδάσκονται τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων, λαμβάνοντας υπόψη τις τομές με τους άξονες και τη κλίση της συνάρτησης (Γαγάτσης, Α., Μιχαηλίδου, Ε., & Σιακαλλή, Μ., 2001).

Στη συνέχεια λύνουν γραφικά απλές εξισώσεις ως προς x. Η επίλυση εξίσωσης στη συμβολική μορφή, ακολουθεί τη γραφική επίλυση. Η ειδική διδακτική διαδικασία έχει συγκεκριμένα μαθησιακά αποτελέσματα που πρέπει να αξιολογηθούν και να αναλυθούν. Οι ("Tool use and the development of the function concept: from repeated calculations to functional thinking," 2012) ισχυρίζονται ότι οι συναρτήσεις παρουσιάζονται με διαφορετικές μορφές και οι μαθητές αντιλαμβάνονται αυτές ως διαφορετικές όψεις της ίδιας μαθηματικής έννοιας γεγονός που προκαλεί μια παιδαγωγική πρόκληση για έρευνα. Η παρούσα μελέτη ερευνώντας ταυτόχρονα διαφορετικές διαστάσεις της έννοιας της συνάρτησης θα μπορούσε να προτείνει προτάσεις για το σχεδιασμό διδασκαλίας και διαδικασίες μάθησης που μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να ξεπεράσουν μια περιορισμένη αντίληψη στην έννοια της συνάρτησης.

Όπως αναφέρουν οι Ασβεστά και Γαγάτσης (1995), ξεκινώντας από τον ορισμό του Bernoulli σύμφωνα με τον οποίο η συνάρτηση είναι ποσότητα αποτελούμενη από μεταβλητή και σταθερές, ακολουθεί τον 18ο αιώνα ο εξής ορισμός που δίνεται από τον Euler: «συνάρτηση μιας μεταβλητής ποσότητας είναι εκείνη η αναλυτική έκφραση που προκύπτει από τη σύνθεση, με οποιονδήποτε τρόπο, αυτής της ποσότητας με Oresme αριθμούς ή και άλλες σταθερές ποσότητες». Οι αντιλήψεις του Cauchy (1821) για τις μεταβλητές ποσότητες και η απόδειξη του Fourier, σύμφωνα με την οποία κάθε καμπύλη μπορεί να αναπαρασταθεί από μια τριγωνομετρική σειρά, μετασχηματίζονται στον ορισμό της συνάρτησης μέσω της θεωρίας συνόλων με την αυθαίρετη αντιστοιχία (Dirichlet, 1837). Πρόκειται για αντιστοιχία που δε βασίζεται απαραίτητα σε κάποια εξάρτηση μεταξύ των x και y. Η γενική έννοια μιας συνάρτησης y μιας ανεξάρτητης μεταβλητής x ως αυθαίρετη αντιστοιχία θα επιφέρει σημαντικούς μετασχηματισμούς στην ανάπτυξη της ανάλυσης (Ασβεστά & Γαγάτσης, 1995), (Γαγάτσης, Α., Μιχαηλίδου, Ε., & Σιακαλλή, Μ., 2001).

Η έννοια της συνάρτησης είναι κεντρική στο μάθημα των Μαθηματικών και ανάγεται στη γενικότερη τάση του ανθρώπου να κάνει συσχετισμούς μεταξύ ποσοτήτων, η οποία θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι τόσο αρχαία όσο και τα ίδια τα Μαθηματικά. Τα Μαθηματικά δεν αφορούν μόνο τη μελέτη αριθμών και σχημάτων, αλλά επίσης τη μελέτη σχέσεων και κανονικοτήτων (Steen, 1990). Είναι γενικά παραδεκτό ανάμεσα στους μαθηματικούς παιδαγωγούς, ότι η συνάρτηση είναι ένα από τα σημαντικότερα θέματα, το οποίο καλούνται να αντιμετωπίσουν οι μαθητές κατά τη διάρκεια της δευτεροβάθμιας και τριτοβάθμιας εκπαίδευσής τους (Eisenberg, 1992a), (Kalchman & Case, 1998). Η συνάρτηση σαν μια μορφή σχέσης είναι βασικό στοιχείο για τα Μαθηματικά, με ευρύτατες εφαρμογές στις άλλες επιστήμες και την καθημερινή ζωή. Η έννοια της συνάρτησης «γεννήθηκε ως αποτέλεσμα μιας μακρόχρονης αναζήτησης ενός μαθηματικού μοντέλου των φυσικών φαινομένων που περιλαμβάνουν μεταβλητές ποσότητες» (Sfard, 1991).

Συμπεράσματα που Προκύπτουν από τη Μελέτη της Ιστορικής Εξέλιξης της Έννοιας της Συνάρτησης

Σύμφωνα με τη θεωρία του οικοδομισμού η γνώση επέρχεται ως αποτέλεσμα της αναδόμησής της από το μαθητή. Η παραδοχή αυτή διαγράφει κάποιες ομοιότητες ανάμεσα στην οντογένεση και τη φυλογένεση. Η μελέτη της εξελικτικής πορείας της έννοιας της συνάρτησης έχει ιδιαίτερη σημασία από τη στιγμή που παρόμοια μοτίβα ανάπτυξης συναντώνται και σε άλλες έννοιες. Είναι πολύ πιθανόν τα μοτίβα αυτά να διαγράφουν παράλληλες διδακτικές προσεγγίσεις (Kronfellner, 1995).

Όπως επισημαίνει ο Kronfellner (1995) η γενικευμένη και ασαφής παρουσίαση του ορισμού της έννοιας προηγείται της παρουσίασης ενός πιο αυστηρού και σαφούς ορισμού. Η ασαφής αυτή φάση παράγει το απαραίτητο υλικό – παραδείγματα, που στη συνέχεια μπορούν να αποτελέσουν τα δομικά υλικά ενός αυστηρότερου ορισμού. Μετά τη διατύπωση του σαφούς ορισμού, τα παραδείγματα μπορούν να ιδωθούν υπό ένα νέο, γενικευμένο πρίσμα. Ο ασαφής ορισμός, που έδωσε ο Oresme, γέννησε μια πληθώρα παραδειγμάτων από τη Γεωμετρία και τη Φυσική, που με τη σειρά τους αποτέλεσαν τα εργαλεία για την εξέλιξη της έννοιας.

Η σύγχρονη αντίληψη της έννοιας της συνάρτησης είναι καρπός μιας μακράς πορείας θέσεων και τροποποιήσεων, κατάρριψης θέσεων και εισαγωγής νέων. Ακόμα και η σύγχρονη αντίληψη υπόκειται σε μελλοντικές τροποποιήσεις. Οι τροποποιήσεις και διαφοροποιήσεις των εννοιών είναι πλήρως αιτιολογημένες. Το δεύτερο αυτό μοτίβο δηλώνει πως οι διαφοροποιήσεις στην έννοια δεν εμφανίζονται κατά τρόπο τυχαίο, αλλά είναι αποτέλεσμα μελέτης συγκεκριμένων προβλημάτων. Τα προβλήματα κίνησης του Oresme, το πρόβλημα της ταλάντωσης και το πρόβλημα της διάδοσης της θερμότητας του Fourier αποτέλεσαν σταθμό στην εξέλιξη της έννοιας της συνάρτησης (Kronfellner, 1995).

Η γενίκευση σημαίνει και τη διαφοροποίηση της οπτικής γωνίας υπό την οποία αντικρίζεται μια έννοια. Οι μεγάλες διαφοροποιήσεις στην έννοια της συνάρτησης προέκυψαν με αφορμή ερωτήματα διαφορετικής φύσης από τα προηγούμενα. Για παράδειγμα, ο ορισμός Bourbaki εισάχθηκε εξαιτίας της ανάγκης αυστηρού προσδιορισμού των νεοεισαχθέντων όρων *νόμος, εξάρτηση, αντιστοιχία*. Ακόμα, η εισαγωγή των ορισμών Euler ήταν επιβεβλημένη εξαιτίας της νεότερης αντίληψης ότι οι μεταβλητές είναι αποδεσμευμένες από οποιοδήποτε γεωμετρικό περιεχόμενο (Kronfellner, 1995), (Γαγάτσης, Α., Μιχαηλίδου, Ε., & Σιακαλλή, Μ., 2001).

Οι μαθηματικοί, από τον Euler μέχρι τον Cantor, χρησιμοποίησαν στοιχειώδεις ορισμούς για την έννοια της συνάρτησης, που ανταποκρίνονταν και επαρκούσαν στο πεδίο της μελέτης τους. Με αυτούς τους ορισμούς παρήγαγαν εντυπωσιακά Μαθηματικά. Η διατύπωση των εννοιών, ιδιαίτερα η ακρίβεια και η γενικότητα, επαρκούσαν για τη μελέτη των προβλημάτων με τα οποία ασχολήθηκαν. Ένα τέταρτο μοτίβο, λοιπόν, σύμφωνα με τον Kronfellner (1995), αποτελεί η επάρκεια του βαθμού γενικότητας και ακρίβειας των εννοιών.

Υπό το πρίσμα αυτό τίθεται το ερώτημα, μέχρι ποιο βαθμό θα πρέπει να διδάσκεται ο φορμαλιστικός ορισμός της συνάρτησης στα Μαθηματικά, όταν οι μαθητές θεωρούν ότι το μόνο που χρειάζεται είναι ο κλασικός ορισμός του Dirichlet; Όσο αυξάνεται η γενικότητα στον ορισμό οδηγούμαστε στην απώλεια επιμέρους χαρακτηριστικών της έννοιας. Για παράδειγμα, στο συνολοθεωρητικό ορισμό της συνάρτησης δεν είναι πλέον εμφανείς οι έννοιες εξάρτηση (π. χ. από μια φόρμουλα), το γράφημα της συνάρτησης, η συνέχεια, ή η μονοτονία (Kronfellner, 1995: Man-keung, 1996).

Η Σημασία της Έννοιας της Συνάρτησης στη Μάθηση των Μαθηματικών

Η κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης είναι ένα θέμα που συγκεντρώνει την προσοχή των εκπαιδευτικών, αλλά και της μαθηματικής ερευνητικής κοινότητας γενικότερα (Dubinsky & Harel, 1992; Sierpinska, 1992). Ένας παράγοντας που επηρεάζει ιδιαίτερα τη μάθηση των συναρτήσεων είναι οι πολλαπλές αναπαραστάσεις που σχετίζονται με την έννοια αυτή (Hitt, 1998). Ένας σημαντικός εκπαιδευτικός στόχος στα μαθηματικά είναι οι μαθητές να είναι σε θέση να αναγνωρίζουν και να χρησιμοποιούν αποτελεσματικά διάφορες μορφές αναπαραστάσεων της ίδιας μαθηματικής έννοιας και να περνούν ευέλικτα από ένα σύστημα αναπαράστασης σε άλλο.

Η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων έχει συνδεθεί με την πολύπλοκη διαδικασία της μάθησης στα μαθηματικά και πιο συγκεκριμένα με την καλύτερη κατανόηση από μέρους των μαθητών πολύπλοκων μαθηματικών εννοιών όπως η έννοια της συνάρτησης (Dufour-Janvier, Bednarz, & Belanger, 1987; Greeno & Hall, 1997). Δεδομένου ότι μια αναπαράσταση δεν μπορεί να περιγράψει πλήρως μια μαθηματική έννοια και ότι κάθε αναπαράσταση έχει διαφορετικά πλεονεκτήματα, η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων για την ίδια μαθηματική κατάσταση μπορεί να θεωρηθεί η βάση της μαθηματικής κατανόησης (Duval, 2002), (Γαγάτσης, Α., Μιχαηλίδου, Ε., & Σιακαλλή, Μ., 2001) .

Οι Ainsworth, Bibby και Wood (1997) αναφέρουν ότι η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν διαφορετικές ιδέες και διαδικασίες, επεκτείνει το νόημα των εννοιών και προωθεί τη βαθύτερη, εννοιολογική κατανόηση. Συνδυάζοντας διάφορες αναπαραστάσεις οι μαθητές δεν περιορίζονται από τις δυνατότητες ή τις αδυναμίες μιας συγκεκριμένης αναπαράστασης. Ο Kaput (1992) αναφέρει ότι η χρήση περισσότερων αναπαραστάσεων βοηθά τους μαθητές να αποκτήσουν μια καλύτερη εικόνα για μια μαθηματική έννοια ή κατάσταση (Γαγάτσης, Α., Μιχαηλίδου, Ε., & Σιακαλλή, Μ., 2001).

Η ικανότητα για αναγνώριση και απεικόνιση της ίδιας έννοιας με διαφορετικές αναπαραστάσεις θεωρείται προαπαιτούμενη για την κατανόηση της έννοιας (Duval, 2002; Even, 1998). Πέραν από την κατανόηση της ίδιας έννοιας σε πολλαπλά συστήματα αναπαράστασης, η ικανότητα για ευέλικτο χειρισμό της έννοιας σε αυτά τα συστήματα αναπαράστασης, καθώς και η ικανότητα για μετάφραση από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο αποτελούν απαραίτητες προϋποθέσεις για εννοιολογική κατανόηση της έννοιας (Lesh, Post, & Behr, 1987) και επιτρέπουν στους μαθητές να δουν πλούσιες σχέσεις και συνδέσεις (Even, 1998).

Κάποιοι ερευνητές ερμηνεύουν τα λάθη των μαθητών είτε ως αποτέλεσμα των μη αποτελεσματικών χειρισμών των αναπαραστάσεων, είτε της έλλειψης συντονισμού ανάμεσα στις διάφορες αναπαραστάσεις (Greeno & Hall, 1997; Smith, DiSessa, & Roschelle, 1993). Οι συνηθισμένες/τυπικές αναπαραστάσεις για κάποιες μαθηματικές έννοιες, όπως η έννοια της συνάρτησης, δεν είναι αρκετές για να οικοδομήσουν οι μαθητές το νόημα και να κατακτήσουν το εύρος των εφαρμογών τους. Οι καθηγητές μαθηματικών, στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, παραδοσιακά εστιάζουν τη διδασκαλία τους στη χρήση αλγεβρικών αναπαραστάσεων για τη διδασκαλία της έννοιας της συνάρτησης (Eisenberg & Dreyfus, 1991).

Η Sfard (1992) υποστηρίζει ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να συνδυάσουν τις αλγεβρικές και γραφικές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων ενώ οι Markovits, Eylon και

Bruckheimer (1986) παρατήρησαν ότι η μετάφραση από τη γραφική στην αλγεβρική μορφή είναι δυσκολότερη από την αντίθετη μετάφραση. Η Sierpinska (1992) υποστήριξε ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες όταν καλούνται να κάνουν συνδέσεις ανάμεσα στις διαφορετικές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων, στην ερμηνεία γραφικών παραστάσεων και στο χειρισμό συμβόλων που σχετίζονται με τις συναρτήσεις. Περαιτέρω, οι Aspinwall, Shaw και Presmeg (1997) επισήμαναν ότι σε μερικές περιπτώσεις οι οπτικές αναπαραστάσεις δημιουργούν γνωστικές δυσκολίες, οι οποίες περιορίζουν την ικανότητα των μαθητών για μετάφραση από γραφικές σε αλγεβρικές αναπαραστάσεις.

Είναι γενικά παραδεκτό ανάμεσα στους μαθηματικούς παιδαγωγούς ότι η συνάρτηση είναι ένα από τα σημαντικότερα θέματα, το οποίο καλούνται να αντιμετωπίσουν τα παιδιά κατά τη διάρκεια της δευτεροβάθμιας και τριτοβάθμιας εκπαίδευσής τους (Eisenberg, 1992; Kalchman & Case, 1998). Ο σημαντικός ρόλος που κατέχει η έννοια της συνάρτησης, η οποία αποτελεί μια έννοια με μακρόχρονη ιστορική εξέλιξη στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών, φαίνεται από το μεγάλο αριθμό ερευνητικών εργασιών που εμφανίζονται στη διεθνή βιβλιογραφία και επιχειρούν μια πολυδιάστατη μελέτη της έννοιας αυτής. Οι εργασίες θα μπορούσαν να ταξινομηθούν σε δύο τομείς ανάλογα με το θέμα στο οποίο εξειδικεύονται (Γαγάτσης, Α., Μιχαηλίδου, Ε., & Σιακαλλή, Μ., 2001).

Στον πρώτο τομέα μπορούν να ταξινομηθούν οι εργασίες που εστιάζουν την προσοχή τους στον ορισμό της συνάρτησης και στη διδακτική προσέγγιση της έννοιας. Ένας σημαντικός αριθμός εργασιών, που εμπίπτουν στον τομέα αυτό, ασχολούνται με τις αντιλήψεις των μαθητών σε σχέση με την έννοια της συνάρτησης, όπως αυτές διαμορφώνονται κατά τη διάρκεια της μαθηματικής τους παιδείας (Dubinsky & Harel, 1992; Markovitz, Eylon & Bruckheimer, 1986; Sfard, 1992: Sierpinska, 1992; Vinner & Dreyfus, 1989). Οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών είναι το αντικείμενο έρευνας των Even (1990, 1993) και Norman (1992).

Ο δεύτερος τομέας περιλαμβάνει τις εργασίες που εξετάζουν τη συνάρτηση σε σχέση με τους διάφορους τρόπους αναπαράστασής της και τη μετάβαση από το ένα πεδίο αναπαράστασης στο άλλο (Artigue, 1992; Duval, 1987; Even, 1998; Gagatsis, 1997; Hitt, 1998; Καλδρυμίδου & Οικονόμου, 1992; Kerslake, 1986). Μια συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί με τη χρήση ενός πίνακα τιμών, μιας γραφικής παράστασης, μιας αλγεβρικής έκφρασης ή μιας λεκτικής έκφρασης. Όπως επισημαίνουν οι Καλδρυμίδου και Οικονόμου (1992) κάθε αναπαράσταση παρέχει πληροφορίες για ορισμένες πτυχές της έννοιας, χωρίς να μπορεί να την περιγράψει ολοκληρωτικά. Ως παράδειγμα αναφέρεται η μετάβαση από την αλγεβρική έκφραση μιας συνάρτησης στη γραφική της παράσταση και αντίστροφα. Αυτή η μετάβαση δεν είναι μια απλή μετάφραση, όπως υποδεικνύει η Janvier (1987a), αλλά μια μεταφορά. Ένα μέρος πληροφορίας δε μετατρέπεται απλώς σε ένα άλλο συμβολικό σύστημα, αλλά αναλύεται και ως αποτέλεσμα της ανάλυσης προκύπτει νέα πληροφορία, η οποία με τη σειρά της εκφράζεται σε ένα άλλο συμβολικό σύστημα.

Οι Καλδρυμίδου και Οικονόμου (1992) προτείνουν ως παράδειγμα την εξίσωση μιας ευθείας $\alpha y + \beta x + \gamma = 0$, όπου α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί. Στην περίπτωση αυτή μια ευθεία εκφράζεται με τη χρήση μιας αλγεβρικής εξίσωσης. Ο λόγος $-\frac{\beta}{\alpha}$ παριστάνει την κλίση ή το συντελεστή κατεύθυνσης της ευθείας. Για να μετατραπεί η ευθεία σε γραφική παράσταση απαιτείται η άντληση πληροφορίας από το λόγο $-\frac{\beta}{\alpha}$, που είναι γραμμένος σε αλγεβρική έκφραση και η μετατροπή της πληροφορίας αυτής σε γραφική παράσταση της ευθείας, που θα έχει κλίση ίση με $-\frac{\beta}{\alpha}$. Δεν πρόκειται για απλή μετάφραση, όπως στην περίπτωση μετατροπής της αλγεβρικής έκφρασης $y = 3x + 1$ στη λεκτική έκφραση *το σύνολο των σημείων των οποίων η τεταγμένη ισούται με το τριπλάσιο της τετμημένης αυξημένο κατά ένα*, αλλά για μεταφορά. Όπως επισημαίνουν οι Καλδρυμίδου και Οικονόμου (1992), μια αλγεβρική έκφραση είναι αναλογική με την έννοια ότι μεταφέρει πληροφορία γραμμικά μέσω μιας ακολουθίας προτάσεων, που μπορούν να διαβαστούν η μια μετά την άλλη. Αντίθετα, η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης είναι ολιστική, αφού οι σχέσεις μεταξύ των απλών συστατικών της γραφικής παράστασης δίνονται ταυτόχρονα, με παράλληλο τρόπο και η επεξεργασία τους απαιτεί την ανάλυση του όλου και τη σύνθεση των μερών.

Η έννοια της συνάρτησης διαδραματίζει ουσιαστικό ρόλο στη μάθηση των Μαθηματικών. Σύμφωνα με τον Eisenberg (1992), *«η ανάπτυξη της έννοιας της συνάρτησης στους μαθητές θα έπρεπε να αποτελεί βασικό στόχο του αναλυτικού προγράμματος τόσο της δευτεροβάθμιας όσο και της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης»*. Η ποικιλία αναπαραστάσεων, που συνδέονται με την έννοια της συνάρτησης και οι δυσκολίες που παρουσιάζονται κατά τη διαδικασία συνδυασμού των αναπαραστάσεων μιας έννοιας, η οποία εμπλέκεται στην επίλυση προβλήματος, δυσχεραίνουν την επίτευξη του πιο πάνω στόχου (Hitt, 1998).

Αποτελέσματα ερευνών καταδεικνύουν ότι η μετάφραση από τη μια μορφή έκφρασης της έννοιας της συνάρτησης στην άλλη παρουσιάζει αρκετές δυσκολίες τόσο σε μαθητές

Γυμνασίου, σε μαθητές Λυκείου (Gagatsis, 1997: Hitt, 1998: Kerslake, 1986) και σε αποφοίτους Λυκείου (Καλδρυμίδου & Οικονόμου, 1992) όσο και σε φοιτητές Μαθηματικών και Φυσικής (Artigue, 1992; Even, 1998) και καθηγητές Μαθηματικών (Hitt, 1998). Σύμφωνα με τους Καλδρυμίδου και Οικονόμου (1992) μέρος των δυσκολιών αυτών οφείλεται στον τρόπο διδασκαλίας της έννοιας της συνάρτησης στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Το πλαίσιο μελέτης της συνάρτησης παρουσιάζεται πολύ περιορισμένο και τα προβλήματα που χρησιμοποιούνται είναι συγκεκριμένου τύπου – συνήθως καλλιεργείται η μετάβαση από την αλγεβρική έκφραση στη γραφική παράσταση. Ένας βασικός στόχος της διδασκαλίας της έννοιας της συνάρτησης πρέπει να αφορά στην ικανότητα των μαθητών να περνούν από μια αναπαράσταση σε άλλη, χωρίς να υποπίπτουν σε αντιφάσεις.

Αποτελέσματα έρευνας σχετικά με τις δυσκολίες συνδυασμού των διάφορων αναπαραστάσεων της έννοιας της συνάρτησης καταδεικνύουν την ύπαρξη συγκεκριμένων επιπέδων οικοδόμησης της έννοιας της συνάρτησης (Hitt, 1998):

Επίπεδο 1: Τα υποκείμενα έχουν ανακριβείς ιδέες για την έννοια (μη συναφές μίγμα διαφορετικών αναπαραστάσεων της έννοιας).

Επίπεδο 2: Τα υποκείμενα είναι σε θέση να εντοπίζουν διαφορετικές αναπαραστάσεις της έννοιας.

Επίπεδο 3: Τα υποκείμενα είναι σε θέση να κάνουν μετάφραση με διατήρηση του νοήματος από ένα σύστημα αναπαράστασης σε άλλο.

Επίπεδο 4: Τα υποκείμενα είναι σε θέση να συνδυάζουν δύο συστήματα αναπαράστασης.

Επίπεδο 5: Τα υποκείμενα είναι σε θέση να συνδυάζουν διάφορα συστήματα αναπαράστασης με στόχο την επίλυση προβλήματος.

Με βάση τα επίπεδα που έχουν εντοπιστεί είναι εμφανές ότι η ικανότητα μετάφρασης από ένα σύστημα αναπαράστασης σε άλλο (Επίπεδο 3) αποτελεί προϋπόθεση για το συνδυασμό διάφορων συστημάτων αναπαράστασης με στόχο την επίλυση προβλήματος (Επίπεδο 5).

Η Even (1998) εξετάζει τους παράγοντες που εμπλέκονται στη σύνδεση των διάφορων αναπαραστάσεων της έννοιας της συνάρτησης. Επικεντρώνεται στη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην ευελιξία μετάβασης από μια αναπαράσταση σε άλλη και σε άλλες πτυχές της γνώσης και κατανόησης. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα έρευνας (Even, 1998), η οποία περιλάμβανε φοιτητές Μαθηματικών, η γνώση για τις διάφορες αναπαραστάσεις δεν είναι ανεξάρτητη, αλλά συνδέεται με τη γνώση για τους διάφορους τρόπους προσέγγισης των συναρτήσεων, τη γνώση για το πλαίσιο της παρουσίασης και τη γνώση για τις υποκείμενες ιδέες.

Η γνώση μιας μαθηματικής έννοιας περιλαμβάνει τους τρόπους με τους οποίους προσεγγίζεται η έννοια. Αναφορικά με την έννοια της συνάρτησης μια ουσιαστική διάκριση σε σχέση με τις προσεγγίσεις που χρησιμοποιούνται αφορά στην ολιστική (global) προσέγγιση του τρόπου συμπεριφοράς μιας συνάρτησης και στην προσέγγιση κατά σημεία. Υπάρχουν περιπτώσεις όπου μια συνάρτηση πρέπει να αντιμετωπιστεί ολιστικά και να μελετηθεί η συμπεριφορά της (π.χ. όταν πρόκειται να κατασκευαστεί η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, που δίνεται σε συμβολική μορφή). Η κατά σημεία προσέγγιση αφορά στη μελέτη συγκεκριμένων σημείων (π. χ. εύρεση τιμών από μια δοσμένη γραφική παράσταση).

Η ευελιξία στη μετάβαση από τη μια αναπαράσταση στην άλλη συνδέεται με την ευελιξία στη χρήση διαφορετικών προσεγγίσεων όσον αφορά στις συναρτήσεις. Σύμφωνα με αποτελέσματα έρευνας (Even, 1998) υπήρχαν περιπτώσεις όπου τα υποκείμενα που χρησιμοποίησαν την κατά σημεία προσέγγιση είχαν μεγαλύτερη επιτυχία στην επίλυση προβλημάτων, που περιλάμβαναν διάφορες αναπαραστάσεις συναρτήσεων, σε σχέση με τα υποκείμενα που χρησιμοποίησαν την ολιστική προσέγγιση και αντίστροφα.

Ένα άλλος παράγοντας, σύμφωνα με την Even (1998), που σχετίζεται με το ρόλο που διαδραματίζουν οι διάφορες αναπαραστάσεις και η σύνδεση μεταξύ τους στην κατανόηση μιας έννοιας, αφορά στο συγκεκριμένο πλαίσιο παρουσίασης του προβλήματος. Για παράδειγμα, το είδος και η φύση των συναρτήσεων που εξετάζονται καθορίζουν το κατά πόσο και το πώς ο λύτης του προβλήματος χειρίζεται τις αναπαραστάσεις προκειμένου να επιλύσει το πρόβλημα. Τέλος, η ποιότητα της γνώσης των υποκείμενων ιδεών για τις συναρτήσεις που μελετώνται συνδέεται με την ικανότητα μετάφρασης από μια αναπαράσταση σε άλλη (Even, 1998), (Γαγάτσης, Α., Μιχαηλίδου, Ε., & Σιακαλλή, Μ., 2001).

Όπως έχει φανεί τρία είδη παραγόντων σχετίζονται με την ικανότητα σύνδεσης των διάφορων αναπαραστάσεων των συναρτήσεων: (α) οι διαφορετικοί τρόποι προσέγγισης των συναρτήσεων, (β) το πλαίσιο παρουσίασης και (γ) η γνώση για τις υποκείμενες ιδέες. Όπως επισημαίνει η Even (1998), είναι σημαντική η γνώση κατά πόσο οι φοιτητές Μαθηματικών, οι οποίοι θα αποτελέσουν τους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, είναι ευέλικτοι σε σχέση με τη χρήση αναπαραστάσεων και τη μετάφραση από τη μια αναπαράσταση στην άλλη, όταν μελετούν συναρτήσεις. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας τα υποκείμενα αντιμετώπισαν δυσκολίες, όταν κλήθηκαν να συνδέσουν διάφορες αναπαραστάσεις των συναρτήσεων.

Οι Mousoulides και Gagatsis (2004) διερεύνησαν την επίδοση των φοιτητών σε έργα που περιλάμβαναν κυρίως τη μετάφραση από ένα σύστημα αναπαράστασης σε άλλο της ίδιας συνάρτησης. Επικεντρώθηκαν επιπλέον στις προσεγγίσεις των φοιτητών σχετικά με τη χρήση των αναπαραστάσεων συναρτήσεων και τη σύνδεση τους με την επίλυση προβλήματος. Το πιο σημαντικό εύρημα της έρευνάς τους ήταν ο σχηματισμός δύο ανεξάρτητων ομάδων. Η πρώτη ομάδα περιλάμβανε τους φοιτητές που χρησιμοποιούσαν αλγεβρική προσέγγιση και η δεύτερη αυτούς που χρησιμοποιούσαν γεωμετρική/γραφική προσέγγιση. Οι περισσότεροι φοιτητές χρησιμοποιούσαν αλγεβρική προσέγγιση και την ακολουθούσαν με συνέπεια σε όλα τα έργα του δοκίμιο. Μόνο μερικοί φοιτητές είδαν τη συνάρτηση ως αντικείμενο (object perspective) και την προσέγγισαν ολιστικά, ως οντότητα. Επιπλέον, ένα σημαντικό αποτέλεσμα της έρευνας αυτής είναι η σχέση ανάμεσα στη γεωμετρική/γραφική προσέγγιση και την επίλυση προβλήματος.

Το εύρημα αυτό βρίσκεται σε συμφωνία με τα αποτελέσματα προηγούμενων ερευνών (Knuth, 2000) και (Moschkovich, J., Schoenfeld, A. and Arcavi, A., 1993) οι οποίες έδειξαν ότι η γεωμετρική/γραφική προσέγγιση οδηγεί τους μαθητές στο να χειρίζονται τις συναρτήσεις ως οντότητες και τους καθιστά ικανούς να βρίσκουν συνδέσεις και σχέσεις ανάμεσα στις διαφορετικές αναπαραστάσεις που περιλαμβάνονται στα προβλήματα. Συγκεκριμένα, οι φοιτητές οι οποίοι είχαν μια εννοιολογική κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης (γεωμετρική/γραφική προσέγγιση) μπορούσαν εύκολα να κατανοήσουν τις σχέσεις ανάμεσα στις συμβολικές και γραφικές αναπαραστάσεις και ήταν σε θέση να δώσουν επιτυχημένες λύσεις στα προβλήματα.

Ο Janvier (1998) εξετάζει την έννοια του *χρονικού*, η οποία λειτουργεί ως επιστημολογικό – διδακτικό εμπόδιο για την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης. Παρουσιάζει την ιδέα του *χρονικού* ως τη συχνή αιτία λαθών στην ερμηνεία ή την κατασκευή γραφικών παραστάσεων, που περιγράφουν τη σχέση ανάμεσα σε δύο μεταβλητές. Όταν η προσωρινή μεταβολή περιγράφεται από μια καμπύλη, η κατασκευή της καμπύλης υποστηρίζεται από ένα είδος νοερής δυναμικής εικόνας. Με βάση τα αποτελέσματα έρευνας (Janvier, 1998) οι περισσότεροι φοιτητές πανεπιστημίου δεν μπορούσαν να κατασκευάσουν τη σωστή γραφική παράσταση, η οποία να απεικονίζει την ταχύτητα ενός αεροπλάνου που ταξιδεύει από το Μόντρεαλ στο Παρίσι, σε σχέση με το χρόνο διάρκειας του ταξιδιού. Ποσοστό 15% των φοιτητών κατασκεύασαν τη γραφική παράσταση που απεικονίζει τη μεταβολή της ταχύτητας του αεροπλάνου κατά τη διάρκεια της συγκεκριμένης πτήσης - αυτό είναι το *χρονικό*.

Το *χρονικό* αποτελεί ένα επιστημολογικό – διδακτικό εμπόδιο, μια συστηματικά οικοδομημένη γνώση τόσο χρήσιμη, ώστε η παρουσία της στο μυαλό του λύτη τον παρασύρει να χρησιμοποιήσει τη στρατηγική που υποδηλώνει το εμπόδιο. Όταν το *χρονικό* λειτουργεί ως επιστημολογικό – διδακτικό εμπόδιο σε μια διαδικασία σκέψης, χρησιμοποιείται ένα σωστό μοτίβο λύσης σε μια ακατάλληλη περίπτωση. Το σωστό μοτίβο λύσης ή η στρατηγική προσέγγισης του ερωτήματος υποδηλώνει την ύπαρξη προηγούμενης γνώσης, που είναι αποτέλεσμα συστηματικής μάθησης. Στη συγκεκριμένη περίπτωση η νοερή αναπαράσταση της πτήσης του αεροπλάνου καθοδηγεί την κατασκευή της γραφικής παράστασης. Όταν ένα επιστημολογικό – διδακτικό εμπόδιο επεμβαίνει, το σχήμα λύσης ακολουθεί μια σωστή πορεία, η οποία, ωστόσο, απαντά άλλο ερώτημα το οποίο έχει επινοήσει ο λύτης. Αυτό είναι δυνατό να σημαίνει ότι χρησιμοποιείται ένας κανόνας, ο οποίος ήταν σωστός σε άλλο πλαίσιο. Οι διαδικασίες μετάφρασης και ερμηνείας επηρεάζονται αρνητικά από την έννοια του *χρονικού* (Janvier, 1998).

Στον δεύτερο τομέα εργασιών περιλαμβάνονται και οι εργασίες του Duval (1993), (Duval, 1987), ο οποίος τονίζει ότι η αναγνώριση της ισοδυναμίας της σημασίας δύο αναπαραστάσεων φανερώνει μια δραστηριότητα φυσικής ερμηνείας. Η δραστηριότητα της φυσικής μετάφρασης εμποδίζεται από αυτό που ο Duval ονομάζει *σημασιολογική ασυμφωνία* (Duval, 1987). Σύμφωνα με το Duval η δραστηριότητα ερμηνείας μπορεί να είναι άμεση και διαισθητική, όταν οι εκφράσεις είναι σημασιολογικά σύμφωνες. Η δραστηριότητα αυτή αποτελεί πηγή δυσκολιών όταν οι εκφράσεις, ακόμα και αν είναι ισοδύναμες, είναι μη – σύμφωνες. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η σημασιολογική ασυμφωνία κρύβει την ισοδυναμία της σημασίας, η οποία επιτρέπει το αβίαστο πέρασμα από τη μια αναπαράσταση στην άλλη. *«Αυτή η δυσκολία παραπέμπει σε μια γνωστική διάσταση ανεξάρτητη από αυτήν της εννοιολογικής πολυπλοκότητας της έννοιας που εξετάζεται»* (Duval, 1987), (Γαγάτσης, Α., Μιχαηλίδου, Ε., & Σιακαλλή, Μ., 2001).

Δυσκολίες σε Σχέση με την Έννοια της Συνάρτησης

Η κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης αποτελεί βασικό στοιχείο δεδομένο για να οργανωθεί εποικοδομητικά το σχολικό αναλυτικό πρόγραμμα της άλγεβρας. Η σημασία της συνάρτησης δημιουργεί την αδήριτη ανάγκη σαφούς και ακριβούς προσδιορισμού της, καθώς οι παρανοήσεις των μαθητών είναι πιθανόν να οδηγήσουν σε σύγχυση και αποτελέσματα αντίθετα του αναμενόμενου (Moschkovich, J., A.H. Schoenfeld, and A. Arcavi , 1993). Ο ιδιαίτερα αφηρημένος χαρακτήρας της αποτελεί παράγοντα που επισύρει πλήθος παρανοήσεων και δυσκολιών. Παρά όμως τις μεγάλες δυσκολίες κατανόησης που παρουσιάζει η έννοια στην κατανόηση από τις πρώτες κιόλας τάξεις που διδάσκεται, είναι έννοια απαραίτητη. Η έννοια, λοιπόν, της συνάρτησης είναι σημαντική και θεμελιώδης καθώς μετασχηματίζει τις απλές αντιστοιχίες των ανάλογων ποσών, τα οποία διδάσκονται στα παιδιά στη στοιχειώδη εκπαίδευση σε μια διαδικασία αλληλεξαρτήσεως και συνάφειας δύο (ή περισσότερων) μεταβλητών (Moschkovich, et al., 1993; Sfard, 1992).

Η βιβλιογραφική ανασκόπηση καταδεικνύει ότι οι δυσκολίες των μαθητών στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης είναι επιστημολογικής και διδακτικής φύσεως. Εμπλέκει τρεις διαφορετικές διαστάσεις: α) την επιστημολογική διάσταση όπως αυτή εκφράστηκε στα μαθηματικά κείμενα διάφορων μαθηματικών μέσα στην ιστορία, β) την επιστημολογία των καθηγητών των μαθηματικών και γ) τη διδακτική διάσταση, η οποία δεν αφορά μόνο στις γνώσεις των μαθητών, αλλά και στη λειτουργία του εν γένει διδακτικού συστήματος και στους περιορισμούς που βάζει (Γαγάτσης Α. , 2004). Με βάση, λοιπόν, τις παρατηρήσεις αυτές, φαίνεται εντελώς φυσικό οι μαθητές να παρουσιάζουν δυσκολίες στο χειρισμό και την εφαρμογή της έννοιας. Η συνάρτηση ως τυπική μαθηματική έννοια αποτελεί για αυτούς την κορυφή ενός παγόβουνου που κρύβει βαθιά την ιστορική πρακτική και εμπειρία που τη διαμόρφωσε.

Εκτός από τις δυο παραπάνω διαστάσεις, την επιστημολογική και τη διδακτική, ένας παράγοντας που επηρεάζει ιδιαίτερα τη μάθηση των συναρτήσεων είναι οι πολλαπλές αναπαραστάσεις που σχετίζονται με την έννοια αυτή (Hitt, 1998). Ένας σημαντικός εκπαιδευτικός στόχος στα μαθηματικά είναι οι μαθητές να είναι σε θέση να αναγνωρίζουν και να χρησιμοποιούν αποτελεσματικά διάφορες μορφές αναπαραστάσεων της ίδιας μαθηματικής έννοιας και να περνούν ευέλικτα από ένα σύστημα αναπαράστασης σε άλλο. Σύμφωνα με την Sierpinska (1992), οι μαθητές συναντούν δυσκολία στο να συνδέσουν μεταξύ τις διαφορετικές παραστάσεις των συναρτήσεων που προαναφέραμε, καθώς και να περιγράψουν προφορικά συναρτησιακές σχέσεις, να ερμηνεύσουν γραφήματα συναρτήσεων κ.λπ.

Με βάση τη διάκριση των τριών διαστάσεων, επιστημολογική, διδακτική και αναπαραστατική και την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας κατασκευάσαμε ένα κατάλογο εννιά δυσκολιών:

(α) Να κατανοήσουν ότι οι μεταβλητές δεν είναι σταθεροί αριθμοί. Κατά τον Freundenthal (1982), *μεταβλητή* σήμαινε κάτι που αλλάζει. Η συνάρτηση αρχικά δηλώνει, απαιτεί και παράγει εξάρτηση μεταξύ μεταβλητών, που συμβαίνουν στο φυσικό, κοινωνικό και πνευματικό κόσμο και μπορεί να δοθεί με τύπο, με γραφική παράσταση, με πίνακα τιμών ή με λεκτική μορφή.

(β) Να κατανοήσουν τη γλώσσα συμβολισμού των συναρτήσεων, όπως π.χ. ότι *f(x)* αντιπροσωπεύει συγχρόνως και την ονομασία της συνάρτησης και την τιμή της. Σε αυθόρμητες περιπτώσεις οι μαθητές χρησιμοποιούν διαφορετικό συμβολισμό και διαφορετική γλώσσα. Επίσης, η σκέψη που κατά πρωταρχικό τρόπο αναπτύσσεται στην άλγεβρα και αφορά στο διαχωρισμό σε σταθερές και άγνωστες ποσότητες οδηγεί στην ιδέα της εξίσωσης και όχι στη συνάρτηση (Sierpinska, 1992).

(γ) Να βρίσκουν λειτουργικές σχέσεις μεταξύ δύο μεταβλητών ποσοτήτων. Η Sierpinska (1992), αναφέρει ότι το ασυνείδητο σχήμα σκέψης που αναφέρεται στις αλλαγές του κόσμου ως φαινόμενα, χωρίς να επικεντρώνεται στο πώς τα πράγματα αλλάζουν, παραγνωρίζοντας δηλαδή τις παραμέτρους της αλλαγής, έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να βλέπουν κατά ποιοτικό τρόπο τον κόσμο χωρίς να στέκονται στις ποσοτικές σχέσεις.

(δ) Να διακρίνουν μεταξύ της χρήσης του αριθμού και της ποσότητας και να παρουσιάζουν μια σύγχυση μεταξύ συνάρτησης και σχέσης. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f: x \to f(x) = 2$ για κάποιους μαθητές δεν είναι συνάρτηση, διότι η δοθείσα αλγεβρική έκφραση δεν εξαρτάται από το x. Είναι, όμως, συνάρτηση αν δοθεί η γραφική της παράσταση που είναι ευθεία. Άρα, το ίδιο αντικείμενο μπορεί να θεωρηθεί συνάρτηση ή όχι ανάλογα με τη σημειακή του αναπαράσταση.

(ε) Να κατανοήσουν τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις. Έχουν τη λανθασμένη αντίληψη ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης πρέπει να είναι συνεχής (Kalchman & Case, 1998).

(στ) Να συνδυάζουν διαφορετικές αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης (συμβολική, γραφική, με πίνακα τιμών κ.λπ.) και να μεταβαίνουν από μια αναπαράσταση σε άλλη (Gagatsis,1997; Hitt, 1998). Κάθε αναπαράσταση παρέχει πληροφορίες για ορισμένες πτυχές της έννοιας, χωρίς να μπορεί να την περιγράψει ολοκληρωτικά. Για παράδειγμα η μετάβαση από την αλγεβρική έκφραση μιας συνάρτησης στη γραφική παράσταση και αντίστροφα. Αυτή η μετάβαση δεν είναι μια απλή μετάφραση, όπως υποδεικνύει ο Janvier (1987), αλλά μια μεταφορά. Ένα μέρος της πληροφορίας δε μετατρέπεται απλώς σε ένα άλλο συμβολικό σύστημα, αλλά αναλύεται και ως αποτέλεσμα της ανάλυσης προκύπτει νέα πληροφορία, η οποία με τη σειρά της εκφράζεται σε ένα άλλο συμβολικό σύστημα. Μια αλγεβρική έκφραση είναι αναλογική με την έννοια ότι μεταφέρει πληροφορία γραμμικά μέσω μιας ακολουθίας προτάσεων, που μπορούν να διαβαστούν η μια μετά την άλλη. Αντίθετα, η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης είναι ολιστική, αφού οι σχέσεις μεταξύ των απλών συστατικών της γραφικής παράστασης δίνονται ταυτόχρονα, με παράλληλο τρόπο και η επεξεργασία τους απαιτεί την ανάλυση του όλου και τη σύνθεση των μερών.

(ζ) Να κατανοήσουν τη συνάρτηση όχι μόνο ως διαδικασία, αλλά και ως αντικείμενο, αφού αυτό δημιουργεί προβλήματα όταν πρέπει, για παράδειγμα, να θεωρήσει ο μαθητής σύνολα συναρτήσεων.

(η) Να κατανοήσουν γιατί οι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων μεγαλύτερου του πρώτου βαθμού, είναι καμπύλες, και

(θ) Να συνδέσουν το πρόσημο σε μια αλγεβρική παράσταση με τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της γεωμετρικής της αναπαράστασης. Για παράδειγμα, σε γραμμική εξίσωση το πρόσημο του συντελεστή της ανεξάρτητης μεταβλητής οδηγεί σε συμπεράσματα για το πρόσημο της κλίσης της ευθείας και το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα xx΄ (Schoenfeld, 1990).

Λαμβάνοντας υπόψη τις πιο πάνω δυσκολίες κατανόησης της συνάρτησης, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές πρέπει να αποκτήσουν μια σαφή αντίληψη για τον ορισμό της συνάρτησης και να κατανοούν ιδιότητες ειδικών συναρτήσεων, όπως είναι οι γραμμικές συναρτήσεις, οι εκθετικές συναρτήσεις και οι συναρτήσεις δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Οι μαθητές χρειάζεται, επίσης, να μπορούν να προσδιορίζουν την κλίση, τομή με τους άξονες xx΄ και yy΄, τον υπολογισμό της εξαρτημένης μεταβλητής *y* για συγκεκριμένη τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής *x* και γενικά να αντιλαμβάνονται τη συνάρτηση (και τη γραφική της παράσταση) τόσο ως διαδικασία, όσο και ως ολότητα (Moschkovich, et al., 1993; Sfard, 1992).

Η κατάσταση φυσικά αυτή δεν είναι τόσο απλή. Έρευνες έχουν δείξει ότι τα παιδιά, πριν ακόμα ενταχθούν στο σχολικό περιβάλλον, είναι φορείς μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων με χαρακτήρα κυρίως, κοινωνικό και εμπειρικό και για να είναι σε θέση να κατακτήσουν τη νέα γνώση πρέπει να την ενσωματώσουν στην προηγούμενη γνώση. Έτσι, ο έλεγχος της προϋπάρχουσας γνώσης των μαθητών πρέπει να είναι το πρώτο βήμα κάθε διδακτικής ενότητας, ώστε να αναδεικνύονται τυχόν λανθασμένες πεποιθήσεις των μαθητών σχετικά με τα διδασκόμενα νοητικά σχήματα. Στην περίπτωση της έννοιας της συνάρτησης, η πλήρης κατανόηση προκύπτει από την απομόνωση στο ρεπερτόριο των παιδιών σχημάτων κατώτερων επιπέδων, με στόχο την ολοκλήρωση, την διαφοροποίηση και τη σύνταξή τους (Kalchman & Case, 1998). Σύμφωνα με τους ερευνητές, τα σχήματα αυτά είναι:

(α) Η κατανόηση των λειτουργικών σχέσεων μεταξύ δύο μεταβλητών ποσοτήτων. Έρευνες έχουν δείξει ότι η κατανόηση μιας και μόνο ποσοτικής μεταβλητής είναι εφικτή στην ηλικία των 6 χρόνων, ενώ η κατανόηση δύο ποσοτικών μεταβλητών, τυπικά μπορεί να επιτευχθεί στην ηλικία των 8 χρόνων. Η κατανόηση της λειτουργικής σχέσης μεταξύ δύο ποσοτικών μεταβλητών μπορεί να επιτευχθεί τυπικά στην ηλικία των 10 χρόνων.

(β) Η κατανόηση των πραγματικών αριθμών και των αριθμητικών πράξεων (π.χ. $7 + 9 - 6 = 10$). Σύμφωνα με έρευνες, η κατανόηση της πρόσθεσης και αφαίρεσης δύο φυσικών αριθμών είναι εφικτή στην ηλικία των 6 χρόνων, ενώ η κατανόηση της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης και αφαίρεσης, όπως και η κατανόηση του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης, μπορεί να επιτευχθεί στην ηλικία των 8 χρόνων. Η κατανόηση πιο σύνθετων πράξεων κάθε είδους μπορεί να επιτευχθεί στην ηλικία των 10 χρόνων.

(γ) Η κατανόηση του καρτεσιανού επιπέδου. Έρευνες έχουν δείξει ότι η κατανόηση και ο σχεδιασμός ενός άξονα αναφοράς είναι εφικτή στην ηλικία των 6 χρόνων, ενώ η κατανόηση και ο σχεδιασμός δύο αξόνων αναφοράς μπορεί να επιτευχθεί στην ηλικία των 8 χρόνων. Η κατασκευή σύνθετων σχημάτων η οποία προϋποθέτει τη χρήση δύο αξόνων αναφοράς, μπορεί να επιτευχθεί στην ηλικία των 10 χρόνων.

Με βάση τα συμπεράσματα των πιο πάνω ερευνών για τα νοητικά σχήματα των παιδιών στην έννοια της συνάρτησης, υιοθετείται η αντίληψη πως η καλύτερη ηλικία κατά την οποία τα παιδιά μπορούν να κατανοήσουν και να εισαχθούν στην έννοια της συνάρτησης είναι η ηλικία των 11-12 χρόνων. Το παιδί γύρω στα 12 χρόνια είναι ικανό για *αφαιρετική διασύνδεση*, οπότε είναι σε θέση να αναπτύξει νοητά και γνωστικά σχήματα για την έννοια της συνάρτησης. Συγκεκριμένα, μπορεί να βρίσκει λειτουργικές σχέσεις μεταξύ δύο μεταβλητών ποσοτήτων, να ερμηνεύει μια σχέση που παρουσιάζεται σε πίνακα τιμών, γράφημα ή αλγεβρική φόρμουλα και να συνδέει δύο μορφές αναπαράστασης (Kalchman & Case, 1998). Ως αποτέλεσμα, οι Kalchman και Case (1998) υποστηρίζουν ότι η διδασκαλία της έννοιας της συνάρτησης μπορεί να εισαχθεί στη δημοτική εκπαίδευση, παρά να καθυστερείται η εισαγωγή της έννοιας της συνάρτησης στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Ο Ρόλος των Πολλαπλών Πεδίων Αναπαράστασης στην Εννοιολογική Κατανόηση της Έννοιας της Συνάρτησης των Μαθητών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης

Αποτελέσματα από πειραματικές έρευνες

Ένας κεντρικός στόχος της μαθηματικής παιδείας είναι η αύξηση της ισχύος των εσωτερικών αναπαραστάσεων των μαθητών(G. Goldin & Kaput, 1996). Ισχυρό είναι το σύστημα αναπαράστασης που έχει ευρύ και ποικίλο πεδίο εφαρμογής. Ο σημαντικός ρόλος που διαδραματίζουν τα συστήματα αναπαράστασης και η αλλαγή πεδίου αναπαράστασης στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης φαίνεται από το μεγάλο αριθμό ερευνών που εξετάζουν το θέμα αυτό. Οι έρευνες σχετικά με τις αναπαραστάσεις θα μπορούσαν να ταξινομηθούν σε τέσσερις τομείς ανάλογα με το περιεχόμενό τους:

1. Έρευνες που προτείνουν μια Θεωρία Αναπαράστασης (G. A. Goldin, 1998, G.

Goldin & Kaput, 1996, J. Kaput, 1985, J. Kaput, 1987a, J. Kaput, 1987b, Karmiloff-Smith, 1992, W.M. Roth & M.K. McGinn, 1998, Glasersfeld, 1987)

2. Έρευνες που συσχετίζουν τις αναπαραστάσεις με την επίλυση προβλήματος (Cifarelli, 1998, A. Gagatsis et al., 1999, G. A. Goldin, 1987, Lesh, Post, & Behr, 1987, Owens & Clements, 1998)

3. Έρευνες που εξετάζουν τις αναπαραστάσεις σε σχέση με συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες (Ασβεστά & Γαγάτσης, 1995, Boulton-Lewis, 1998, Ασβεστά & Γαγάτσης, 1995: Boulton- Lewis, 1998: Even, 1998: Gagatsis, 1997: Hitt, 1998: Janvier, 987b: Janvier, 1987c: Janvier, 1998: Lesh, Behr & Post, 1987: Mesquita, 1998).

4. Έρευνες που εξετάζουν τις αναπαραστάσεις και την αλλαγή πεδίου αναπαράστασης (Ασβεστά & Γαγάτσης, 1995: Γαγάτσης, Κυριακίδης, Μιχαηλίδου & Σιακαλλή, 2000: Γαγάτσης & Μουγή, 2000: Γαγάτσης & Παναούρα, 2000: Duval, 1987: Janvier, 1987a: Janvier, 1987b: Lesh, Behr & Post, 1987). ("Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving," 1987), (Γαγάτσης, A., Μιχαηλίδου, E., & Σιακαλλή, M., 2001).

Ο ρόλος των αναπαραστάσεων στη μάθηση της συνάρτησης

Στην αναζήτηση καταστάσεων που μπορούν να λειτουργήσουν ως «άτυπα σημεία εκκίνησης» στα οποία θα στηριχθεί η γνωστική ανάπτυξη έχουν αναφερθεί πολλοί ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης. Μεταξύ αυτών, ο Tall (στο Bishop et al., (1996)υποστηρίζει ότι οι μαθητές πρέπει πρώτα να βιώσουν μια ποιοτική, σφαιρική, εισαγωγή στη μαθηματική έννοια, μέσα από την οποία θα προκύψει η ανάγκη για μια πιο τυπική περιγραφή της έννοιας. Η σύνδεση των πραγματικών καταστάσεων με τη γραφική τους αναπαράσταση είναι πρωταρχικός στόχος για τον Tall,. Εντούτοις, υποστηρίζει ότι η σχέση μεταξύ των γραφικών παραστάσεων και των πραγματικών φαινομένων είναι κατ' ανάγκη περιορισμένη σε μια σύντομη εισαγωγική φάση, γιατί το βάρος πρέπει να δοθεί στις συναρτήσεις και τις γραφικές παραστάσεις σε ένα καθαρά μαθηματικό πλαίσιο. Αντίθετα με τον Tall, ο Kaput (1994), δίνει μεγαλύτερη έμφαση στη σχέση μεταξύ μαθηματικών συμβολικών συστημάτων όπως είναι οι γραφικές παραστάσεις και της καθημερινής πραγματικότητας. Επισημαίνει την ύπαρξη χάσματος μεταξύ αυτού που ονομάζει «νησί των τυπικών μαθηματικών» και της «ηπειρωτικής χώρας» της πραγματικής ανθρώπινης εμπειρίας. Διευκρινίζει ότι η ύπαρξη του χάσματος οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στη διαφορά μεταξύ των μαθηματικών συναρτήσεων που ορίζονται από τους αλγεβρικούς τύπους, και των εμπειρικών συναρτήσεων που περιγράφουν τα καθημερινά φαινόμενα της ζωής. Ο Kaput (1989) υποστηρίζει επίσης ότι «δεν υπάρχει κανένα απόλυτο νόημα για τη μαθηματική λέξη συνάρτηση, αλλά μάλλον ολόκληρος νοηματικός ιστός υφασμένος από πολλές φυσικές και νοητικές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων και από σχέσεις μεταξύ αυτών των αναπαραστάσεων» Η κατανόηση της συνάρτησης, επομένως, μπορεί να επιτευχθεί μέσα από την κατανόηση των διαφόρων μορφών αναπαράστασής της, και του τρόπου περάσματος από μια μορφή αναπαράστασης σε μια άλλη, διότι «η γνωστική σύνδεση των αναπαραστάσεων δημιουργεί ένα σύνολο που είναι περισσότερο από το άθροισμα των μερών του».

Η παραδοσιακή προσέγγιση για την εισαγωγή στις αλγεβρικές εκφράσεις είναι υπολογιστική. Εντούτοις, λόγω της πολυπλοκότητας της εκτέλεσης τέτοιων υπολογισμών, αυτή η διαδικαστική όψη της συνάρτησης γρήγορα αντικαθίσταται με την άποψη της συνάρτησης ως αντικείμενο με αυτόματο πέρασμα στις εξισώσεις. Οι Schwartz και Yerushalmy (1992) θεωρούν ότι, μέσω της δυνατότητας των πολλαπλώς συνδεδεμένων αναπαραστάσεων που προσφέρει η τεχνολογία, οι μαθητές μπορούν να συνεχίσουν να βλέπουν τις αναπαραστάσεις ως διαδικασία. Οι εξισώσεις μπορούν να αντιμετωπισθούν ως σύγκριση δύο συναρτήσεων, $f(x) = g(x)$, με ανάλογη ερμηνεία των λύσεων των εξισώσεων. Η σύνδεση διαφόρων μορφών αναπαράστασης προσφέρει στους μαθητές την απαραίτητη ποιοτική και ποσοτική ανατροφοδότηση για την ενίσχυση της κατανόησης των συμβολικών χειρισμών τους.

Η συνάρτηση είναι μια από τις πιο σημαντικές έννοιες με τις οποίες έρχονται σε επαφή οι μαθητές κατά τη διάρκεια της δευτεροβάθμιας και τριτοβάθμιας εκπαίδευσής τους (Eisenberg, 1992b), (Kalchman & Case, 1998). Η σπουδαιότητά της στη διδασκαλία και στη μάθηση των μαθηματικών μπορεί να διαπιστωθεί και από τις πολυάριθμες ερευνητικές εργασίες που εξετάζουν τη συγκεκριμένη έννοια μέσα από ποικίλες διαστάσεις και προοπτικές. Οι εργασίες αυτές μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο τομείς ανάλογα με το ειδικότερο θέμα με το οποίο καταπιάνονται σε σχέση με τη συνάρτηση.

Στον πρώτο τομέα εντάσσονται οι εργασίες που επικεντρώνονται στον ορισμό της συνάρτησης και στη διδακτική προσέγγιση της έννοιας κυρίως μέσα από τις αντιλήψεις των μαθητών, όπως αυτές διαμορφώνονται στα πλαίσια της μαθηματικής τους εκπαίδευσης("The nature of the process conception of function," 1992), (Sierpinska, 1992), (Vinner & Dreyfus, 1989). Ο δεύτερος τομέας περιλαμβάνει εργασίες που διερευνούν τη συνάρτηση σε σχέση με τους διάφορους τρόπους αναπαράστασής της και τη μετάβαση από το ένα πεδίο αναπαράστασης στο άλλο (A. Gagatsis, 1997), (Hitt, 1998), (Καλδρυμίδου & Οικονόμου, 1992). Μια συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί με γραφική παράσταση, με πίνακα τιμών, με αλγεβρική (συμβολική) και λεκτική έκφραση. Όπως έχει προαναφερθεί, κάθε είδος αναπαράστασης παρέχει πληροφορίες για ορισμένες πτυχές της έννοιας χωρίς να την περιγράφει ολοκληρωτικά. Αυτό ισχύει και στην περίπτωση της συνάρτησης. Έτσι η μετάβαση από μια έκφραση σε άλλη δε θεωρείται απλή μετατροπή των πληροφοριών από ένα σύστημα σε άλλο, αλλά μεταφορά. Με άλλα λόγια, όπως ισχυρίζεται ο Janvier (1987), οι πληροφορίες που παρέχει ένα σύστημα αναπαράστασης αναλύονται, με αποτέλεσμα να προκύπτει μια νέα πληροφορία, η οποία με τη σειρά της εκφράζεται σε άλλο σύστημα αναπαράστασης. Για παράδειγμα, σύμφωνα με τις Καλδρυμίδου & Οικονόμου (1992), μια αλγεβρική έκφραση συνάρτησης είναι αναλογική μια και μεταφέρει πληροφορίες γραμμικά μέσω μιας ακολουθίας συμβόλων ενώ αντίθετα η γραφική παράσταση είναι ολιστική αφού οι σχέσεις μεταξύ των δεδομένων της δίνονται ταυτόχρονα και με παράλληλο τρόπο, και η επεξεργασία τους προϋποθέτει την ανάλυση του όλου και τη σύνθεση των μερών της.

Ευρήματα ερευνών καταδεικνύουν τη συχνή ύπαρξη δυσκολιών από τους μαθητές όσον αφορά τα τρία τελευταία επίπεδα, δηλαδή, τη μετάφραση από το ένα πεδίο αναπαράστασης της συνάρτησης στο άλλο και τη μεταξύ τους σύνδεση (A. Gagatsis, 1997), (Hitt, 1998), που εν μέρει οφείλονται στον τρόπο διδασκαλίας της έννοιας στη μέση εκπαίδευση, ο οποίος συνήθως προάγει ένα συγκεκριμένο είδος μετάφρασης συναρτήσεων (από αλγεβρική έκφραση σε γραφική παράσταση). Επιπλέον, μια άλλη σχετική δυσκολία που επισημαίνεται από την Καλδρυμίδου (1992), αφορά την αρνητική τάση των μαθητών, των φοιτητών αλλά και των εκπαιδευτικών, προς τις εικονικές αναπαραστάσεις και την προτίμησή τους σε προσεγγίσεις αλγεβρικού τύπου. Οι λόγοι που σύμφωνα με την ίδια οδηγούν στη δημιουργία αυτής της δυσκολίας είναι:

• Γνωστικής φύσης, που αφορούν τη δυσκολία της ολιστικής και επιλεκτικής φύσης της εικόνας ως τρόπου παράστασης πληροφοριών.

• Επιστημολογικής φύσης που αναφέρονται στην επιστημολογία της μαθηματικής κοινότητας και της διδακτικής των σχολικών μαθηματικών.

• Συναισθηματικής φύσης, που σχετίζονται με την αβεβαιότητα και το άγχος που αισθάνονται τα υποκείμενα όταν έρχονται αντιμέτωποι με εικονικές ή γραφικές παραστάσεις (Α. Γαγάτσης, 1995).

Επομένως, η κλασική επεξεργασία των συναρτήσεων στα σχολικά μαθηματικά δεν αρκεί ώστε να υπερπηδηθούν οι παραπάνω δυσκολίες. Η αφομοίωση της έννοιας της συνάρτησης απαιτεί πρόοδο με συνέχεια και συνέπεια από το ένα επίπεδο αντίληψης της συνάρτησης στο άλλο. Επιπλέον, προϋποθέτει την εξασφάλιση μιας καλής άρθρωσης (σπονδυλοποίηση) ή ευέλικτης ικανότητας μετάβασης ανάμεσα στα διάφορα πεδία αναπαράστασής της και άρα τον εμπλουτισμό των σχολικών βιβλίων και των διδακτικών προσεγγίσεων στα πλαίσια της μελέτης των συναρτήσεων, με μαθηματικές δραστηριότητες σε διάφορα πεδία αναπαράστασης.

Στη μαθηματική εκπαίδευση υπάρχει η τάση για χρήση ποικιλίας αναπαραστάσεων για την ίδια μαθηματική έννοια. Η ικανότητα για αναπαράσταση της ίδιας έννοιας σε διαφορετικά πεδία αναπαράστασης θεωρείται απαραίτητη προϋπόθεση για την κατανόησή της. Οι μαθητές που μπορούν να αναγνωρίζουν, να χειρίζονται την ίδια έννοια σε πολλαπλά συστήματα αναπαράστασης και να μεταφράζουν από το ένα σύστημα στο άλλο, οδηγούνται σε εννοιολογική κατανόησή της. Αυτή η ικανότητα τους επιτρέπει να ρυθμίζουν τη γνωστική τους επίδοση όταν επιλύουν μαθηματικά έργα. Συνεπώς, η σύγκριση της επίδοσης των μαθητών Α’ και Β΄ Λυκείου, σε σχέση με τη χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων για την έννοια της συνάρτησης, είναι ένα ενδιαφέρον ερευνητικό θέμα.

Μια σημαντική πτυχή της γνώσης σχετικά με μια μαθηματική έννοια αναφέρεται στους διαφορετικούς τρόπους προσέγγισης της. Όπως η Even (1998) ανέφερε πριν αρκετά χρόνια από την ικανότητα να αναγνωρίζουν και να αναπαριστούν το ίδιο αντικείμενο σε διαφορετικές αναπαραστάσεις και η ευελιξία κατά τη μετάβαση από μια αναπαράσταση στην άλλη, επιτρέπει να φανερωθούν σχέσεις και να αναπτύξουν την εννοιολογική κατανόηση της έννοιας. Η έννοιας της συνάρτησης παρουσιάζεται με μια ποικιλία αναπαραστάσεων, ενώ αρκετές αναπαραστάσεις της έννοιας προσφέρουν πληροφορίες σχετικά με ιδιαίτερες πτυχές της έννοιας χωρίς να είναι σε θέση να την περιγράψουν εντελώς (Gagatsis, A., & Shiakalli, M., 2004). Η Elia et al. (2007) δείχνουν ότι οι μαθητές πρέπει να συντονίζουν τις διάφορες αναπαραστάσεις για να χειριστούν ένα φαινόμενο που μελετούν και η κατανόηση της σχέσης μεταξύ αυτών των φαινομένων οδηγεί σε μια συνεκτική αντίληψη της συνάρτησης. Σύμφωνα με τον Rider (2004) οι μαθητές παρουσιάζουν βελτίωση στη λύση προβλήματος σχετικά με τις συναρτήσεις, κατά τη χρήση μιας πολλαπλών αναπαραστάσεων προσέγγισης. Για την πειραματική μελέτη συγκρίνει ένα παραδοσιακό αναλυτικό πρόγραμμα με άλγεβρα και μια πολυδιάστατη προσέγγιση και τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η πειραματική ομάδα παρουσίασε καλύτερες επιδόσεις από την ομάδα ελέγχου.

Πολλές μελέτες επικεντρώθηκαν στις ικανότητες των μαθητών να κάνουν τις συνδέσεις μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων των συναρτήσεων (διαγράμματα, τύπους, λεκτική περιγραφή). Οι Akkok and Tall (2002) διερευνήσαν την αναπαραστατική πολυπλοκότητα σε διαφορετικές αναπαραστάσεις σε σχέση με την έννοια της συνάρτησης. Οι Sierpinska (1992) έδειξε ότι οι μαθητές έχουν δυσκολίες στην ερμηνεία γραφημάτων και στο χειρισμό των σύμβολων που σχετίζονται με τις συναρτήσεις. Η Sfard (1992) διαπίστωσε ότι οι μαθητές είναι σε θέση να γεφυρώσουν τις αλγεβρικές και γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων. Οι Μουσουλίδης και Γαγάτσης (2004) έδειξαν ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στις ασκήσεις και προβλήματα σχετικά με τις συναρτήσεις όταν απαιτούνται συνδέσεις και τις σχέσεις μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων. Οι Ηλία et al. ("Exploring different aspects of the understanding of function: Towards a four-dimensional model," 2007) έδειξαν ότι οι μαθητές στο χειρισμό με ευελιξία διαφόρων τρόπων αναπαράστασης και οι περισσότερες αναπαραστάσεις της συνάρτησης παρουσιάζουν το φαινόμενο της στεγανοποίησης. Αυτό το φαινόμενο είναι μία ένδειξη της σύλληψης των μαθητών ότι οι διαφορετικές αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης είναι διακριτές των αυτόνομων μαθηματικών αντικειμένων και όχι διαφορετικοί τρόποι έκφρασης για το νόημα της συγκεκριμένης έννοιας.

Οι εκπαιδευτικοί παίρνουν αποφάσεις για την διδασκαλία τους μέσα σε ένα πλαίσιο, στηριζόμενοι στις γνώσεις τους σε παιδαγωγικό πλαίσιο και στις πεποιθήσεις τους (Llinares, 2000). Ένας δάσκαλος μπορεί να υπογραμμίζει την έννοια της συνάρτησης ως δραστηριότητα και υπογραμμίζοντας την έννοια της συνάρτησης ως μια αλυσίδα χειρισμών, δίνοντας περισσότερη έμφαση στην αλγεβρική μορφή και σε υπολογιστικές δραστηριότητες, ενώ άλλος δάσκαλος μπορεί να υπογραμμίσει τη συνάρτηση ως μοντέλο σε πραγματικές καταστάσεις, χρησιμοποιώντας τα διαγράμματα ("Four student teachers' pedagogical reasoning on functions," 2003)). Συνήθως σε μια τυπική προσέγγιση τα γραφήματα χρησιμοποιούνται επειδή θεωρείται ως ένας εύκολος τρόπος για να παρουσιάσουν τις συναρτήσεις, εξοικονομώντας χρόνο και αποφεύγοντας την μονοτονία των υπολογισμών (Bloch, 2003). Ακόμη συνήθως ο χειρισμός των γραφημάτων δεν φαίνεται κατάλληλος τρόπος για τη σφαιρική προσέγγιση της έννοιας. Οι Sanchez και Llinares (20ω03) πήραν συνεντεύξεις για να αντλήσουν πληροφορίες σχετικά με τις προσεγγίσεις των μαθητών για τις γνώσεις για την έννοια της συνάρτησης και τα σχήματα για τη μελέτη των σχέσεων μεταξύ των πτυχών της συνάρτησης που προκάλεσε ο τρόπος αναπαράστασης που επιλέγουν. Υπήρχαν συμμετέχοντες που τόνιζαν τη επιχειρησιακή πτυχή των συναρτήσεων και ο αλγεβρικός τρόπος αναπαράστασης. Θεωρούσαν τα διαγράμματα ως συμπλήρωμα των αλγεβρικών αναπαραστάσεων και των υπολογιστικών δραστηριοτήτων πάνω στα προβλήματα της αναγνώρισης και ερμηνείας των γραφικών παραστάσεων (Γαγάτσης, Α., Μιχαηλίδου, Ε., & Σιακαλλή, Μ., 2001).

Οι Yerushalmy, M. & Shternberg, B (2001) υποστηρίζουν ότι οι περισσότερες διδακτικές προσεγγίσεις δεν λαμβάνουν υπόψη το πέρασμα από μια μορφή αναπαράστασης σε άλλη η οποία είναι μια σύνθετη διαδικασία και σχετίζεται με τη γενίκευση της έννοιας. Για παράδειγμα, να ασχοληθεί κάποιος με συναρτήσεις με προσέγγιση σημείο προς σημείο (point wise) και να κάνει την γραφική παράσταση σε διακριτά σημεία μιας συνάρτησης, είτε επειδή μας ενδιαφέρει σε κάποια συγκεκριμένα σημεία, είτε επειδή η συνάρτηση ορίζεται σε ένα διακριτό σύνολο. Ο Even (1998), υποστηρίζει, ότι η ανάγνωση τιμών από μια συγκεκριμένη γραφική παράσταση είναι ένα παράδειγμα για μια σημείο προς σημείο (point wise) για προσέγγιση στις συναρτήσεις. Ωστόσο, υπάρχουν φορές που πρέπει να εξετάσουμε τη συνάρτηση σε ένα σφαιρικό τρόπο (global way), για παράδειγμα όταν θέλουμε να ζωγραφίσουμε (sketch) το διάγραμμα μιας συνάρτησης που δίνεται σε συμβολική μορφή, ή όταν θέλουμε να βρούμε μια συνάρτηση που ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς. Η πραγματική κατανόηση της έννοιας αποτελείται ταυτόχρονα από σημείο σε σημείο και τη σφαιρική διαδικασία .

Φαίνεται ότι πρέπει να έχουμε μια καλύτερη κατανόηση του πώς μπορεί να εισαχθούν οι συναρτήσεις (Francisco & Hahkioniemi, 2012), προκειμένου να επιτύχουμε μια πλήρη κατανόηση της έννοιας, που αφορά διαφορετικά γνωστικά σχήματα. Οι Γαγάτσης και Σιακαλλή (2004), έδειξε ότι δεν υπάρχει καμία σημαντική σχέση μεταξύ γραφικών και λεκτικών αναπαραστάσεων της έννοιας και ότι η ικανότητα να μεταφράζει από μια αναπαράσταση της έννοιας της συνάρτησης σε μια άλλη σχετίζεται με επιτυχία επίλυσης προβλημάτων. Την ίδια στιγμή οι Vinner και Dreyfus (1989) βρήκαν ότι ένας μαθητής μπορεί να γνωρίζει τον επίσημο ορισμό της συνάρτησης αλλά δεν είναι έτοιμος και δεν μπορεί να τον εφαρμόσει. Από εκπαιδευτική άποψη, πριν από τη σωστή χρήση και εφαρμογή της έννοιας, οι μαθητές πρέπει να συμπεριλαμβάνουν τη σωστή ανάπτυξη της έννοιας και τον ορισμό. Είναι σημαντικό να αναλύσει κάποιος τη σχέση μεταξύ των διαφόρων πτυχών του μαθηματικού περιεχομένου το οποίο αντιλαμβάνονται οι μαθητές. και τη διαφορετική χρήση των τρόπων αναπαράστασης στη συλλογιστική τους (Sanchez, M. V. & Llinares, S., 2003).

Νοερές εικόνες ή ορισμοί;

Στα μαθηματικά, ο ορισμός παίζει έναν εξαιρετικά σημαντικό ρόλο για την κατασκευή μιας μαθηματικής έννοιας. Η Tirosh (1999) προτείνει λόγω της επαγωγικής φύσης των μαθηματικών, ότι τα μαθηματικά στηρίζονται σε μεγάλο βαθμό σε πρωτογενείς έννοιες, αξιώματα και ορισμούς. Ένας ορισμός μιας έννοιας συλλαμβάνει και συνθέτει την ουσία και παρέχει τα εργαλεία για διάκριση μεταξύ της παρουσίας και μη-παρουσίας μια έννοιας (Tirosh, 1999) . Τους τρόπους με τον οποίο οι ορισμοί παρουσιάζονται στα σχολικά μαθηματικά ποικίλλουν σημαντικά με τον τύπο των μαθηματικών που ασχολούνται και με την ηλικία του μαθητή (Morgan, 2013).

Σε σύγκριση με άλλους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας, τα μαθηματικά είναι συνήθως θεωρείται ως ένα θέμα μεγάλης ακρίβειας με την οποία οι έννοιες μπορούν να οριστούν με ακρίβεια για να παρέχει μια σταθερή βάση για τη μαθηματική θεωρία. Οι ψυχολογικές πραγματικότητες είναι κάπως διαφορετικές. Πολλές έννοιες που έχουμε στα μαθηματικά συναντώνται σε κάποια άλλη μορφή πριν από τον επίσημο ορισμό και μια σύνθετη γνωστική δομή υπάρχει στο μυαλό του κάθε ατόμου, δίνοντας μια ποικιλία των προσωπικών νοητικών εικόνων όταν μια έννοια προβάλλεται (Tall, D. & Vinner, S., 1981).

Ο ορισμός της συνάρτησης που δίνεται από τους μαθητές μπορεί να θεωρηθεί ως ένδειξη για την κατανόηση της έννοιας και ως μια πολύτιμη πληροφορία για τα λάθη και τις παρανοήσεις. Elia et al. ("Exploring different aspects of the understanding of function: Towards a four-dimensional model," 2007).

Συμπεράσματα ερευνών έδειξαν τις δυσκολίες των μαθητών στη παρουσίαση ενός σωστού ορισμού της έννοιας της συνάρτησης. Την ίδια στιγμή, παρόλο που οι μαθητές θα μπορούσαν να δώσουν έναν σωστό ορισμό της συνάρτησης, δεν ήταν ουσιαστικά σε θέση να λύσουν προβλήματα με τη χρήση συνάρτησης. Αν και η διατύπωση επίσημων ορισμών των μαθηματικών εννοιών εισάγονται σε μαθητές λυκείου, δεν τους χρησιμοποιούν ουσιαστικά όταν τους ζητήθηκε να αναγνωρίσουν ή να κατασκευάσουν ένα μαθηματικό αντικείμενο σχετικά με την έννοια αυτή. Στην εκμάθηση των μαθηματικών, ακόμη και από μια πειραματική προοπτική, ορισμένοι κανόνες πρέπει να ακολουθούνται για λογικούς, συμβατικούς και παιδαγωγικούς λόγους (Dormolen J. & Zaslavsky O., 2003). Η σχέση μεταξύ των λέξεων και του νοήματος (Morgan, 2013), όπως αυτή εκφράζεται προτείνοντας έναν ορισμό είναι πολύ σημαντική και πρέπει να σχετίζονται με τα γνωστικά σχήματα για τη χρήση αναπαραστάσεων και της λύση προβλήματος.

Όπως ισχυρίζεται ο Bloch (2003) στη Γαλλία η διδασκαλία είναι οργανωμένη ως εξής: Πρώτον, ο δάσκαλος κάνει μια βασική εργασία στην τάξη χρησιμοποιώντας μια ποικιλία αναπαραστάσεων της έννοιας και στη συνέχεια οι μαθητές πρέπει να εκτελέσουν με την εργασία μια παρόμοια με άλλες συμβολικές αναπαραστάσεις της ίδιας έννοιας. Πράγματι, αυτή η διαδικασία δεν αναδεικνύει τη θεμελιώδη μαθηματική γνώση. Σύμφωνα με την οποία πρέπει να ενδιαφερόμαστε να δώσουμε τη δυνατότητα στους μαθητές να λειτουργήσουν ως μαθηματικοί, οι οποίοι ερευνούν και να διερευνήσουν τις μαθηματικές έννοιες. Για τα μαθηματικά, ο ορισμός που παρουσιάζεται είτε με τη χρήση μιας επίσημης δομής είτε μέσω μιας πιο διαισθητική προοπτικής έχει κύριο και συμπληρωματικό ρόλο, στην κατασκευή των μαθηματικών εννοιών, τον τρόπο σκέψης και τις αντιλήψεις. Για το λόγο αυτό η παρούσα εργασία συγκεντρώθηκε ταυτόχρονα σε ένα ολοκληρωμένο γνωστικό μοντέλο που σχηματίζεται από τον ορισμό της έννοιας, τη χρήση των διαφορετικών αναπαραστάσεων για την ίδια έννοια και την διαδικασία της λύσης προβλήματος.

Η κατανόηση του ορισμού δε διασφαλίζει ούτε υπονοεί την κατανόηση μιας έννοιας. Για να κατανοήσει κάποιος μια έννοια πρέπει να διαμορφώσει την «εικόνα της έννοιας» (concept image). Η «εικόνα» μιας έννοιας συγκροτείται από το σύνολο των «νοητικών εικόνων» (mental pictures) που έχει κάποιος για μια έννοια και από το σύνολο των ιδιοτήτων που αποδίδει στην έννοια. «Κατά συνέπεια μια γραφική παράσταση μιας συγκεκριμένης συνάρτησης και τα σύμβολα $y = f(x)$ μπορεί να περιλαμβάνονται στη «νοητική εικόνα» κάποιου για την έννοια της συνάρτησης. Εκτός από τη νοητική εικόνα μιας έννοιας, στο μυαλό ενός ατόμου μπορεί να υπάρξει ένα σύνολο ιδιοτήτων που συνδέθηκαν με την έννοια. Παραδείγματος χάριν, κάποιος μπορεί να σκεφτεί ότι οι συναρτήσεις πρέπει πάντα να ορίζονται με τη βοήθεια των αλγεβρικών εκφράσεων. Αυτό το σύνολο ιδιοτήτων μαζί με τη νοητική εικόνα θα το ονομάζουμε «εικόνα της έννοιας» (concept image) (Vinner, 1983). Δηλαδή, η «εικόνα μιας έννοιας» περιλαμβάνει όλες τις μη λεκτικές εκφράσεις της έννοιας, οπτικές αναπαραστάσεις, εντυπώσεις και εμπειρίες που δημιουργούνται στο μυαλό μας με την αναφορά του ονόματος της έννοιας (Vinner, 1992).

Ο Vinner (1983) τόνισε ότι το πρώτο πράγμα που πρέπει κάποιος να μάθει προκειμένου να κατανοήσει μια έννοια δεν είναι ο ορισμός της έννοιας, αλλά η απόκτηση εμπειρίας σε σχέση με την έννοια, η οποία και θα συμβάλει στη συγκρότηση της «εικόνας» της έννοιας. Σύμφωνα με τον Vinner κατά τη διαδικασία εκτέλεσης των γνωστικών στόχων, το μυαλό «συμβουλεύεται» περισσότερο την «εικόνα», παρά τον ορισμό της έννοιας.

Οι απόψεις του Vergnaud (1990) σχετικά με τη νοητική διαμόρφωση των μαθηματικών εννοιών, δε διαφέρουν στην ουσία από αυτές του Vinner(1983). Για να μελετήσει και να κατανοήσει τον τρόπο που οι μαθηματικές έννοιες αναπτύσσονται νοητικά μέσω της ενδοσχολικής και εξωσχολικής εμπειρίας, ο Vergnaud πρότεινε τη θεώρηση μιας έννοιας ως σύζευξη τριών συνόλων: $C = (S, I, R)$, όπου:

S: είναι το σύνολο καταστάσεων που καθιστούν την έννοια χρήσιμη και σημαντική.

I: είναι το σύνολο λειτουργικών σταθερών που μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τα άτομα για τη διερεύνηση αυτών των καταστάσεων.

R: είναι το σύνολο των συμβολικών, γλωσσικών, γραφικών ή κινητικών αναπαραστάσεων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αναπαραστήσουν τις σταθερές, τις καταστάσεις και τις διαδικασίες. Τρεις μορφές αναπαράστασης της έννοιας της συνάρτησης αναφέρονται συνήθως: η αριθμητική (χρήση πινάκων), η γεωμετρική (χρήση γραφικών παραστάσεων), και η συμβολική (χρήση εξισώσεων).

Το σύνολο των καταστάσεων που αναδεικνύουν τη σημασία και το πεδίο εφαρμογής μιας μαθηματικής έννοιας συγκροτούν αυτό που ο Freudenthal (1971) (1973) (1982) (1983) ονόμασε «φαινομενολογική πηγή» της έννοιας. Σύμφωνα με τη φαινομενολογική προσέγγιση του Freudenthal, η διδασκαλία ενός μαθηματικού αντικειμένου, για παράδειγμα μιας μαθηματικής έννοιας, πρέπει να ξεκινάει ενσωματώνοντας εκείνα τα φαινόμενα από το φυσικό κόσμο ή την καθημερινότητα, που επιδέχονται οργάνωσης μέσω της συγκεκριμένης έννοιας, η κατανόηση της οποίας αποτελεί το στόχο της διδασκαλίας. Έτσι αντί να αναζητάμε αόριστα υλικό για να παρουσιάσουμε μια δεδομένη έννοια, η διδακτική φαινομενολογία προτείνει να αναζητήσουμε και να διερευνήσουμε εκείνες τις καταστάσεις ή τα φαινόμενα που προσφέρουν στο μαθητή την ευκαιρία, μέσω της «μαθηματικοποίησης», να κατασκευάσει την επιθυμητή έννοια.

Παραδείγματα μιας έννοιας

Εκτός από τον τυπικό ορισμό μια πτυχή της έννοιας της κατανόησης αναφέρεται η χρήση παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων και στην παραγωγή Αυτές οι τρεις πτυχές - ορισμός έννοιας, η έννοια της εικόνας, καθώς και η χρήση της έννοιας - αποτελούν κατά τον Moore αυτό που αποκαλείτο ως σχήμα έννοιας-κατανόησης. Συγκεκριμένα, η χρήση του παράδειγμα που περιλαμβάνει το παράδειγμα της παραγωγής και επαλήθευσης είναι μεγάλης σημασίας για την κατανόηση μιας νέας έννοιας (Dahlberg, Randall & Housman, David, 1997). Η σημαντικότητα των παραδειγμάτων στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών έχει από καιρό αναγνωριστεί. Τα παραδείγματα αποτελούν αναπόσπαστο μέρος της μαθηματικής σκέψης, μάθησης και διδασκαλίας, ιδιαίτερα σε σχέση με τη σύλληψη, γενίκευση, αφαίρεση, επιχειρηματολογία και αναλογική σκέψη (Zodik, I., & Zaslavsky, O., 2008). Από καιρό έχει αναγνωριστεί ότι οι άνθρωποι μαθαίνουν μαθηματικά κυρίως μέσω της εμπλοκής με παραδείγματα, και όχι μέσω του τυπικού ορισμού και τις τεχνικές. Πράγματι, είναι μόνο μέσα από παραδείγματα που ορισμοί έχουν κάποιο νόημα, δεδομένου ότι οι μαθηματικοί περιγράφουν τις κατηγορίες των αντικειμένων ή των σχέσεων με τα οποία ο μαθητής θα πρέπει να εξοικειωθεί (Watson, A. & Mason, J., 2005).

Στην κατηγορία των παραδειγμάτων, περιλαμβάνονται επίσης και τα μη-παραδείγματα, τα οποία σχετίζονται με σύλληψη και τους ορισμούς, και αποσκοπούν στο να τονίσουν κρίσιμα χαρακτηριστικά μιας έννοιας καθώς και τα αντι-παραδείγματα που σχετίζονται με τις συνθήκες και τις διαψεύσεις τους. Σε ορισμένες μελέτες, τα αντι-παραδείγματα φαίνεται να είναι χρήσιμα στην εστίαση των μαθητών για το τι είναι σχετικό και τι δεν έχει σημασία. Σε άλλες μελέτες, ο ρόλος των αντι-παραδειγμάτων φαίνεται να ότι συγχύζουν τους μαθητές που δεν καταλαβαίνουν πώς ή τι αντικρούουν τα αντι-παραδείγματα (Zaslavsky, O. & Ron, G., 1998). Πολλές έρευνες ισχυρίζονται ότι τόσο τα μη-παραδείγματα όσο και τα αντι-παραδείγματα μπορούν να χρησιμεύσουν για να τονίσουν τις διακρίσεις και να εμβαθύνουν την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και αντικειμένων. Επιπλέον, ο Sowder (1980) κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η συμπερίληψη των μη-παραδείγματα έχει ένα απρόβλεπτό γνωστικό ρόλο.

Στην επίλυση προβλημάτων, ο ρόλος των παραδειγμάτων θεωρείται ζωτικής σημασίας, επειδή επιτρέπουν να εκτελέσει την εξερεύνηση και να φτάσει γενίκευση και αφαίρεση (Polya, 1945). Προσοχή δόθηκε επίσης στη δραστηριότητα της δημιουργίας των παραδειγμάτων ως ειδική περίπτωση επίλυσης του προβλήματος.

Οι Zaslavsky και Peled (1996) υποστήριξαν ότι «η κατάσταση της δημιουργίας των παραδειγμάτων μπορεί να θεωρηθεί ως μια κατάσταση επίλυσης προβλήματος, για την οποία διαφορετικοί άνθρωποι χρησιμοποιούν διαφορετικές στρατηγικές». Έτσι, τα παραδείγματα είναι ένα είδος ανοικτού προβλήματος, στο οποίο κάποιος πρέπει να αποφασίσει κατά πόσον οι απαιτούμενες συνθήκες για το παράδειγμα υπάρχουν ή όχι. Όταν το παράδειγμα δεν υπάρχει, είναι υποχρεωτικό να αιτιολογήσει, γιατί το παράδειγμα δεν υπάρχει (Antonini, 2006).

Οι οι Hazzan και Zazkis (1997). εστιάζουν στη σύγχυση που μπορεί να δημιουργηθεί στους μαθητευόμενους όταν τους ζητείται να παράγουν παραδείγματα. Οι συμμετέχοντες της έρευνας, οι οποίοι ήταν δάσκαλοι, κλήθηκαν να φτιάξουν παραδείγματα για τρία διαφορετικά ζητήματα και αναδείχτηκε η δυσκολία τους στη δημιουργία παραδειγμάτων καθώς και ο προβληματισμός τους για τις επιλογές τους. Οι ερευνητές συμπεραίνουν ότι είναι απαραίτητο να καλούνται οι μαθητές να κατασκευάζουν δικά τους παραδείγματα σε όλες τις ηλικίες και βαθμίδες εκπαίδευσης, ενώ ο εκπαιδευτικός οφείλει να τους ενθαρρύνει προς την διατύπωση απόψεων και εικασιών στην τάξη, καθώς και να αξιολογεί και να εμπλουτίζει τα παραδείγματα των μαθητών του.

Πιστεύουμε ότι εξετάζοντας παραδείγματα που παράγονται από τους συμμετέχοντες, θα εξάγουμε κάποια συμπεράσματα για τις γνώσεις τους σχετικά με τη συγκεκριμένη έννοια και θα έχουμε μια καλύτερη «πρόσβαση» στην εικόνα έννοιας τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III:
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Εισαγωγή

Η παρούσα έρευνα ερευνά τη συμπεριφορά των μαθητών, των γνωστικών δομών και της επίδοση τους στις διαφορετικές πτυχές της κατανόησης της συνάρτησης, σε σχέση με τη μετάβαση των μαθητών από το γυμνασιακό κύκλο στο λυκειακό κύκλο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζει τη μεθοδολογία της έρευνας. Περιλαμβάνει την περιγραφή των συμμετεχόντων, τη διαδικασία που ακολουθήθηκε για την ολοκλήρωση της έρευνας και την ανάλυση του περιεχόμενου των σχολικών βιβλίων των μαθηματικών, προκειμένου να διευκολυνθεί η ανάπτυξη της έρευνας. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται το κάθε έργο το οποίο αναλύεται σύμφωνα με τις γνωστικές απαιτήσεις για τη λύση του και τις αναμενόμενες αντιδράσεις των μαθητών και τη συμμετοχή τους για την επίλυση των έργων των δοκιμίων. Συνέχεια περιγράφεται ο τρόπος με τον οποίο οι απαντήσεις των μαθητών έχουν κωδικοποιηθεί και ορίζονται οι μεταβλητές της μελέτης. Επίσης, το παρόν κεφάλαιο περιλαμβάνει την περιγραφή των στατιστικών αναλύσεων που εκτελέστηκαν για τη συλλογή ποσοτικών δεδομένων.

Τα Υποκείμενα της Έρευνας

Οι συμμετέχοντες στη μελέτη είναι 750 μαθητές γυμνασίου και λυκείου από διαφορετικά σχολεία στην Κύπρο. Συγκεκριμένα συμμετείχαν 250 μαθητές που φοιτούσαν στην Γ΄ Γυμνασίου (14 – 15 ετών), 250 μαθητών που φοιτούσαν στη Α΄ Λυκείου (15 – 16 ετών) και 250 μαθητών που φοιτούσαν στη Β΄ Λυκείου (16 – 17 ετών).

Οι επιλογή των συγκεκριμένων τάξεων έγινε με σκοπό τη σύγκριση των μαθητών σε σχέση με τη μετάβαση τους από το Γυμνάσιο στο Λύκειο. Συνεπώς επιλέχθηκαν μαθητές από την τελευταία τάξη του Γυμνασίου και τις πρώτες τάξεις του Λυκείου.

Διαδικασία

Η έρευνα υλοποιήθηκε μέσα από τις ακόλουθες φάσεις:

Πρώτη φάση: Στην πρώτη φάση της έρευνας έγινε επισκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας στο χώρο της μαθηματικής παιδείας, όσον αφορά στην έννοια της συνάρτησης και την ανάπτυξη της, καθώς και στο ρόλο της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων στην έννοια της συνάρτησης.

Δεύτερη φάση: Στη δεύτερη φάση της έρευνας μελετήθηκαν τα αναλυτικά προγράμματα και τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών που χρησιμοποιούνται στη Γ' Γυμνασίου και Α' και Β΄ Λυκείου όσον αφορά στην έννοια της συνάρτησης. Με τον τρόπο αυτό θα επιτευχθεί η συλλογή πληροφοριών όσον αφορά στα διάφορα πεδία αναπαράστασης που χρησιμοποιούνται για τις έννοιες αυτές και η έμφαση που δίνεται σε κάθε ένα από αυτά. Επιπλέον, θα εντοπιστεί το είδος των έργων (αναγνώριση, μετάφραση, χειρισμός, επίλυση προβλήματος) στα οποία εμπλέκονται οι διάφορες αναπαραστάσεις.

Τρίτη φάση: Στην τρίτη φάση της έρευνας αναπτύσσονται τα μεθοδολογικά εργαλεία (δοκίμια με έργα ορισμού, αναγνώρισης, χειρισμού, μετάφρασης και επίλυσης προβλήματος για την έννοια της συνάρτησης), τα οποία θεωρούνται απαραίτητα για τη συλλογή των ποσοτικών δεδομένων της έρευνας, με βάση τη βιβλιογραφική ανασκόπηση και την ανασκόπηση των σχολικών εγχειριδίων. Στη συνέχεια θα διεξάχθηκε πιλοτική έρευνα με μαθητές από κάθε ηλικιακή ομάδα, ώστε να προκύψουν οι απαραίτητες αλλαγές στα δοκίμια και να διαμορφωθούν στην τελική τους μορφή, μετά από στατιστική ανάλυση των δεδομένων.

Τέταρτη φάση: Στην τέταρτη φάση πραγματοποιήθηκε η συλλογή των ποσοτικών δεδομένων. Συγκεκριμένα χορηγήθηκαν σε 750 μαθητές τα δύο δοκίμια (250 μαθητές Α΄ Λυκείου, 250 μαθητές Β΄ Λυκείου). Επιπλέον, διαμορφώθηκε και εφαρμόστηκε ο τρόπος διόρθωσής τους.

Πέμπτη φάση: Στην πέμπτη φάση πραγματοποιήθηκε η ανάλυση των δεδομένων της έρευνας με τη χρήση των στατιστικών πακέτων SPSS, EQS και CHIC και η διατύπωση βασικών πορισμάτων που προκύπτουν. Με την επιβεβαιωτική ανάλυση των προγραμμάτων EQS επιβεβαιώθηκε το προτεινόμενο μοντέλο όσον αφορά την έννοια της συνάρτησης. Με την ανάλυση πολλαπλών ομάδων στο ίδιο πρόγραμμα εξετάστηκαν αν οι δομικές σχέσεις του προτεινόμενου μοντέλου παραμένουν αναλλοίωτες στις δύο ηλικιακές ομάδες. Με το στατιστικό πρόγραμμα SPSS έχει γίνει σύγκριση των μέσων όρων επίδοσης στις τρεις ηλικιακές ομάδες στις διάφορες διαστάσεις κατανόησης της συγκεκριμένης έννοιας. Με τη ανάλυση ομοιότητας στο πρόγραμμα CHIC εντοπίστηκαν οι ομαδες έργων των δύο δοκιμίων τις οποίες οι μαθητές αντιμετωπίζανε με τον ίδιο τρόπο στις δύο ηλικιακές ομάδες.

Έκτη *φάση*: Στην τελευταία φάση διαμορφώθηκαν τα τελικά συμπεράσματα και διατυπώθηκαν πρακτικές εισηγήσεις.

Η έννοια της Συνάρτησης στα σχολικά βιβλία

Στην Α΄ και Β΄ Γυμνασίου παρουσιάζεται η έννοια της μεταβλητής η οποία χρησιμοποιείται για τον ορισμό και επίλυση εξίσωσης α΄ βαθμού με μια μεταβλητή (τις περισσότερες φορές αναφέρεται και ως ‘*άγνωστος’).*

Στην Γ΄ Γυμνασίου σε τρεις ενότητες παρουσιάζονται η έννοια των αλγεβρικών παραστάσεων και των πράξεων τους. Η έννοια της συνάρτησης εμφανίζεται για πρώτη φορά στην Γ΄ Γυμνασίου στην ενότητα 8 με τίτλο «Γραφικές Παραστάσεις» όπως φαίνεται παρακάτω.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8 187

§1. Συνάρτηση

Στην καθημερινή μας ζωή παρατηρούμε ότι η τιμή ενός μεγέθους εξαρτάται από την τιμή ενός άλλου. Για παράδειγμα:

(α) Το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου εξαρτάται από το μήκος της ακτίνας του.

(β) Η απόσταση που διανύει ένα αυτοκίνητο σε μια ώρα εξαρτάται από την ταχύτητα με την οποία κινείται.

(γ) Το μήκος της περιμέτρου ενός ρόμβου εξαρτάται από το μήκος της πλευράς του.

Δυο μεγέθη x και ψ που μεταβάλλονται λέγονται **μεταβλητές.** Παίρνοντας το τελευταίο παράδειγμα, αν με x παραστήσουμε το μήκος της πλευράς του ρόμβου και με ψ το μήκος της περιμέτρου του, βλέπουμε ότι ισχύει η ισότητα $ψ = 4x$. Η ισότητα $ψ = 4x$ συνδέει τις μεταβλητές x και ψ με τέτοιο τρόπο ώστε όταν δώσουμε μια τιμή στο x να παίρνουμε μια μόνο τιμή του ψ.

Μια τέτοια αντιστοιχία μεταξύ των τιμών των x και ψ λέγεται **συνάρτηση** ή η ψ είναι συνάρτηση της x.

Η μεταβλητή x λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή** γιατί μπορούμε να της δώσουμε οποιανδήποτε τιμή από ένα συγκεκριμένο σύνολο, το **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης, ενώ η μεταβλητή ψ λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή** γιατί οι τιμές που παίρνει εξαρτώνται από τις τιμές που παίρνει η ανεξάρτητη μεταβλητή x. Το σύνολο των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής λέγεται **πεδίο τιμών** της συνάρτησης.

Μια συνάρτηση δίνεται συνήθως με ένα τύπο π.χ. $ψ = 2x - 1$ ή $ψ = 4x$.

Ας πάρουμε τη συνάρτηση $ψ = 4x$ και ας δώσουμε μερικές αυθαίρετες τιμές, από το πεδίο ορισμού της, στην ανεξάρτητη μεταβλητή x.

Για $x = 1 \Rightarrow ψ = 4 \cdot 1 = 4$ Για $x = 2 \Rightarrow ψ = 4 \cdot 2 = 8$

Για $x = 3 \Rightarrow ψ = 4 \cdot 3 = 12$ Για $x = 5 \Rightarrow ψ = 4 \cdot 5 = 20$

Τα πιο πάνω αποτελέσματα μπορούμε να τα τοποθετήσουμε σ' ένα πίνακα, δηλαδή έχουμε:

x	1	2	3	5
ψ	4	8	12	20

Ο πιο πάνω πίνακας λέγεται **πίνακας αντίστοιχων τιμών** της συνάρτησης και τα ζεύγη των αντίστοιχων τιμών των μεταβλητών x και ψ γράφονται και (1,4), (2,8), (3,12), (5,20). Για να μην υπάρχει ασάφεια για το ποια από τις δύο τιμές στην παρένθεση είναι της x και ποια της ψ ορίζουμε ότι πάντα στην πρώτη θέση μπαίνει η τιμή της x και στη δεύτερη θέση η τιμή της ψ. Σ' αυτή την περίπτωση μιλούμε για **διατεταγμένο ζεύγος**, δηλαδή ζεύγος τιμών με προκαθορισμένη σειρά.

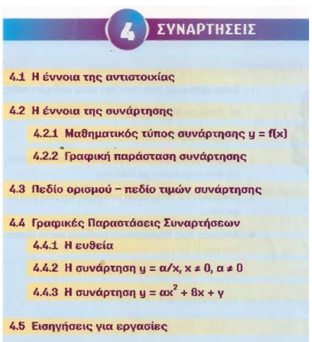
Η έννοια της συνάρτησης όπως παρουσιάζεται από το βιβλίο της Γ΄ Γυμνασίου

Στην συνέχεια της ενότητας ακολουθούν οι παράγραφοι

- Ορθογώνιο σύστημα αξόνων,
- Γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $\psi = \alpha\chi + \beta$,
- Γραφική λύση της εξίσωσης $ax + \beta = 0$,
- Γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax$,
- Ειδικές περιπτώσεις
- Συντελεστής διεύθυνσης (κλίση ευθείας)
- Παράλληλες ευθείες

Για την ενότητα αυτή αφιερώνονται συνολικά 10 περίοδοι διδασκαλίας.

Στην επόμενη ενότητα «Συστήματα Εξισώσεων» λύνονται συστήματα δύο εξισώσεων α΄ βαθμού με δύο μεταβλητές με διάφορες μεθόδους με πρώτη την γραφική μέθοδο. Στην συνέχεια δίνονται λεκτικά προβλήματα τα οποία λύνονται με συστήματα εξισώσεων. Για την ενότητα αυτή αφιερώνονται συνολικά 9 περίοδοι διδασκαλίας.



4 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

4.1 Η έννοια της αντιστοιχίας

4.2 Η έννοια της συνάρτησης

4.2.1 Μαθηματικός τύπος συνάρτησης y = f(x)

4.2.2 Γραφική παράσταση συνάρτησης

4.3 Πεδίο ορισμού – πεδίο τιμών συνάρτησης

4.4 Γραφικές Παραστάσεις Συναρτήσεων

4.4.1 Η ευθεία

4.4.2 Η συνάρτηση y = α/x, x ≠ 0, α ≠ 0

4.4.3 Η συνάρτηση $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

4.5 Εισηγήσεις για εργασίες

Στην Α΄ Λυκείου οι πρώτες ενότητες είναι επανάληψη των εννοιών που δόθηκαν στην Γ΄ Γυμνασίου που αφορούν τις γραφικές παραστάσεις. Η ενότητα 4 με τίτλο «*Συναρτήσεις*» ασχολείται με την έννοια της συνάρτησης. Δίνεται ο τυπικός ορισμός της συνάρτησης, η έννοια της γραφικής παράστασης, οι έννοιες πεδίο ορισμού, πεδίο τιμών και σύνολο τιμών και στη συνέχεια γίνεται ανάπτυξη μεθοδολογίας για την γραφική παράσταση συναρτήσεων της μορφής $f(x) = ax + \beta$, $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ και $f(x) = \frac{a}{x}$. Για την ενότητα αυτή αφιερώνονται συνολικά 16 περίοδοι διδασκαλίας.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (4) ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

4.2 Η έννοια της συνάρτησης

Αντιστοιχίες που σε κάθε στοιχείο του συνόλου αφετηρίας αντιστοιχεί μόνο ένα στοιχείο του συνόλου άφιξης τις ονομάζουμε **συναρτήσεις**.

Το σύνολο αφετηρίας σ' αυτήν την περίπτωση θα το λέμε πεδίο ορισμού.

Το σύνολο των στοιχείων του συνόλου άφιξης που αντιστοιχίζονται με στοιχεία του πεδίου ορισμού θα το λέμε πεδίο τιμών. Από το παράδειγμα της § 4.1 συνάρτηση είναι η αντιστοιχία f_2.

Η ενότητα συμπληρώνεται με μεγάλο αριθμό ασκήσεων χρησιμοποιώντας ποικιλία αναπαραστάσεων όπως συμβολικές αναπαραστάσεις, γραφήματα, πίνακες κλπ.

Στην Β΄ Λυκείου κατεύθυνσης δίνεται ξανά ο τυπικός λεκτικός και συμβολικός ορισμός της συνάρτησης και αναπτύσσονται έννοιες οπως ισότητα συναρτήσεων, πράξεις συναρτήσεων, 1-1 συναρτήσεις, αντίστροφη συνάρτηση, σύνθεση συναρτήσεων, όρια συναρτήσεων και συνέχεια συναρτήσεων. Για την ενότητα αυτή αφιερώνονται συνολικά 16 περίοδοι διδασκαλίας.

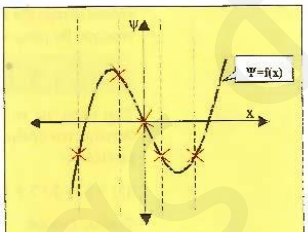
Στην Β΄ Λυκείου κοινού κορμού επαναλαμβάνονται μέρος της Α΄ Λυκείου σε απλουστευμένη μορφή, όπως γραφική παράσταση γραμμικής συνάρτησης και γραφική λύση συστημάτων.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (4) ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

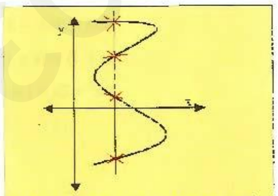
4.2.2 Γραφική παράσταση συνάρτησης

Όπως αναφέρθηκε πιο πάνω, η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο Α του ℝ είναι το σύνολο των σημείων του καρτεσιανού επιπέδου με συντεταγμένες (x, f(x)), όπου x στοιχείο του Α και f(x) το αντιστοιχό του στοιχείο στο πεδίο τιμών.

Η εξίσωση ψ = f(x) επαληθεύεται μόνο από τα ζεύγη (x, ψ), που είναι συντεταγμένες των σημείων της γραφικής παράστασής της.



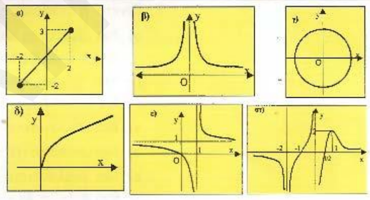
Γραφική παράσταση συνάρτησης



Η γραφική παράσταση δεν ορίζει συνάρτηση.

78

3. Να εξετάσετε ποιες από τις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις ορίζουν συνάρτηση με την ανεξάρτητη μεταβλητή να μετρείται πάνω στον οριζόντιο άξονα συντεταγμένων. Στις περιπτώσεις που ορίζεται συνάρτηση να βρείτε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της.



4. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο y = 3x + 5 και πεδίο ορισμού το σύνολο Α = {–1, 0, 2, 3, 10}. Να βρείτε το πεδίο τιμών της συνάρτησης.

5. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^3 - 2x + 1$. Να υπολογίσετε τα f(–3), f(0), f(2).

6. Να υπολογίσετε το κ, ώστε το σημείο με συντεταγμένες (2, 5) να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης που έχει τύπο $y = x^2 + κx - 1$.

7. Μια συνάρτηση f ορίζεται από τον κανόνα «Σκέψου έναν αριθμό. Πάρε το τετράγωνό του αυξημένο κατά εννέα». Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης και να υπολογίσετε τα f(-11), f(2), f(11).

8. Από τη φυσική είναι γνωστό ότι η απόσταση S που διανύει ένα κινητό είναι συνάρτηση του χρόνου t, δηλ. S = f(t). Αν η ταχύτητα του u είναι σταθερή, τότε S = u · t. Αυτοκίνητο κινείται στο δρόμο Λεμεσού – Λευκωσίας με σταθερή ταχύτητα 70 Km/h· να συμπληρώσετε τον πίνακα αντίστοιχων τιμών που ακολουθεί.

t	1h	2h	30min	2.5h
s				

Ο κανόνας της κατακορύφου και ασκήσεις που δίνονται στο βιβλίο Μαθηματικών της Α΄ Λυκείου

Ανάλυση Σχολικών Εγχειριδίων για τις Συναρτήσεις

Πιο κάτω παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης των σχολικών εγχειριδίων. Συγκεκριμένα εξετάστηκαν τόσο οι ασκήσεις όσο και τα παραδείγματα συναρτήσεων που εμφανίζονται στα βιβλία, καθώς και ο τρόπος αναπαράστασής τους.

Ο Πίνακας 1 παρουσιάζει τα ποσοστά εμφάνισης των ειδών αναπαράστασης στις ασκήσεις και τα παραδείγματα συναρτήσεων της Γ΄ Γυμνασίου, Α΄ και Β΄ Λυκείου. Το άθροισμα των ποσοστών για κάθε τάξη υπερβαίνει το 100, λόγω του ότι οι περισσότερες ασκήσεις περιλαμβάνουν περισσότερες από μια κατηγορίες. Από τον πίνακα παρατηρούμε ότι το είδος αναπαράστασης που επικρατεί είναι η συμβολική και αλγεβρική αναπαράσταση των ασκήσεων και παραδειγμάτων (ποσοστά 95,5% και 100% αντίστοιχα). Ακολουθούν η λεκτική αναπαράσταση με πολύ μικρότερο ποσοστό (12,5%), η διαγραμματική αναπαράσταση (ποσοστό 2,5%) και ο πίνακας (ποσοστό 0,8%). Αξιοσημείωτη είναι η διαφορά των ποσοστών που υπάρχει ανάμεσα στις βαθμίδες. Παρατηρούμε ότι η Γ΄ Γυμνασίου υπερέχει σε όλα τα είδη αναπαράστασης, εκτός από την περίπτωση του πίνακα όπου υπερέχει με μικρή διαφορά η Α΄ Λυκείου. Γενικά, με την αύξηση της βαθμίδας, τα ποσοστά εμφάνισης αναπαραστάσεων μειώνεται.

Πίνακας 1:

Είδη Αναπαράστασης στις Ασκήσεις Συναρτήσεων στα Σχολικά Εγχειρίδια

ΤΑΞΗ	**Λεκτική**	**Συμβολική**	**Διαγραμματική**	**Πίνακα**	**Αλγεβρικά**
Γ΄ Γυμνασίου	8,1%	83,5%	1,4%	0,3%	85,8%
Α΄ Λυκείου	4,3%	9,6%	0,9%	0,5%	11,3%
Β΄ Λυκείου	0,1%	2,8%	0,3%	0%	2,9%

Ο Πίνακας *2* παρουσιάζει τη λειτουργία των λεκτικών ασκήσεων και παραδειγμάτων συνάρτησης. Συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι οι περισσότερες λεκτικές ασκήσεις και παραδείγματα είναι έργα μετάφρασης (7,3%), ακολουθούν τα έργα χειρισμού, η επίλυση προβλήματος και τα έργα αναγνώρισης. Το μοτίβο αυτό εμφανίζεται τόσο στη Γ΄

Γυμνασίου, όσο και στην Α΄ Λυκείου. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι στη Β΄ Λυκείου εμφανίζεται μόνο 0.1% λεκτική αναπαράσταση στην επίλυση προβλήματος.

Πίνακας 2:

Λειτουργία των Λεκτικών Ασκήσεων/Παραδειγμάτων

ΤΑΞΗ	**Αναγνώριση**	**Χειρισμός**	**Μετάφραση**	**Επίλυση Προβλήματος**
Όλες οι βαθμίδες	0,8%	3,3%	7,3%	1,3%
Γ΄ Γυμνασίου	0,5%	1,6%	5%	1%
Α΄ Λυκείου	0,3%	1,6%	2,3%	0,1%
Β΄ Λυκείου	0%	0%	0%	0,1%

Ο Πίνακας 3 παρουσιάζει τη λειτουργία των συμβολικών αναπαραστάσεων σε ασκήσεις και παραδείγματα συναρτήσεων μέσα στα σχολικά εγχειρίδια της Γ΄ Γυμνασίου, Α΄ και Β΄ Λυκείου. Στην περίπτωση αυτή, παρατηρούμε ότι το μεγαλύτερο ποσοστό ασκήσεων/παραδειγμάτων με συμβολική αναπαράσταση αναφέρεται σε έργα χειρισμού (71%). Ακολουθούν τα έργα επίλυσης προβλήματος (11,5%), τα έργα αναγνώρισης (7,5%) και τέλος τα έργα μετάφρασης (6,5%). Το μοτίβο αυτό ακολουθείται από τη Γ΄ Γυμνασίου, η οποία έχει και τα μεγαλύτερα ποσοστά σε όλες τις λειτουργίες συμβολικών ασκήσεων και παραδειγμάτων. Οι τάξεις του λυκείου παρουσιάζουν πολύ μικρά ποσοστά συμβολικής αναπαράστασης, με την Α΄ Λυκείου να μην έχει κανένα έργο επίλυσης προβλήματος με συμβολική αναπαράσταση και η Β΄ Λυκείου παρουσιάζει πολύ μικρό αριθμό συμβολικών ασκήσεων/παραδειγμάτων μετάφρασης (ποσοστό 1.3%) και επίλυσης προβλήματος (ποσοστό 1,5%) μόνο.

Πίνακας 3:

Λειτουργία των Συμβολικών Ασκήσεων/Παραδειγμάτων

ΤΑΞΗ	**Αναγνώριση**	**Χειρισμός**	**Μετάφραση**	**Επίλυση Προβλήματος**
Όλες οι βαθμίδες	7,5%	71%	6,5%	11,5%
Γ΄ Γυμνασίου	7,2%	63,8%	2,8%	10%
Α΄ Λυκείου	0,3%	7,2%	2,5%	0%
Β΄ Λυκείου	0%	0%	1,3%	1,5%

Οι λειτουργίες των ασκήσεων/παραδειγμάτων συνάρτησης, που παρουσιάζονται στα σχολικά εγχειρίδια με τη χρήση διαγράμματος, παρουσιάζονται στον Πίνακας 4.

Όπως φάνηκε και από τον Πίνακας 1, η αναπαράσταση ασκήσεων και παραδειγμάτων με διάγραμμα και ο Πίνακας *4* είναι οι δύο κατηγορίες με τα χαμηλότερα ποσοστά και για τις τρεις εκπαιδευτικές βαθμίδες. Συγκεκριμένα φαίνεται από τον Πίνακας *4*, ότι η χρήση διαγράμματος σε ασκήσεις και παραδείγματα συναρτήσεων γίνεται για έργα μετάφρασης με ποσοστό 1%, για έργα επίλυσης προβλήματος με ποσοστό 0,8%, για έργα χειρισμού με ποσοστό 0,5% και για έργα αναγνώρισης με ποσοστό 0,4%. Στα ποσοστά αυτά συμβάλλει κυρίως η Γ΄ Γυμνασίου, με μόνη εξαίρεση την περίπτωση των έργων μετάφρασης, όπου η Α΄ Λυκείου παρουσιάζει ποσοστό 0,5% ασκήσεις και προβλήματα συναρτήσεων με τη χρήση διαγράμματος. Η Β΄ Λυκείου παρουσιάζει μόνο, σε ποσοστό 0.1% ασκήσεις και παραδείγματα συναρτήσεων αναγνώρισης και μετάφρασης με τη χρήση διαγραμμάτων.

Πίνακας 4:

Λειτουργία των Ασκήσεων/Παραδειγμάτων με Διάγραμμα

ΤΑΞΗ	**Αναγνώριση**	**Χειρισμός**	**Μετάφραση**	**Επίλυση Προβλήματος**
Όλες οι βαθμίδες	0,4%	0,5%	1,0%	0,8%
Γ΄ Γυμνασίου	0,1%	0,4%	0,4%	0,6%
Α΄ Λυκείου	0,1%	0,1%	0,5%	0,1%
Β΄ Λυκείου	0,1%	0%	0,1%	0%

Ο Πίνακας 5 παρουσιάζει τη λειτουργία των ασκήσεων/παραδειγμάτων με τη χρήση πίνακα. Ακόμη πιο μικρά ποσοστά παρατηρούνται στην περίπτωση των ασκήσεων/παραδειγμάτων συναρτήσεων. Ποσοστό 0.1% των έργων συνάρτησης που παρουσιάζονται με πίνακα είναι έργα αναγνώρισης και προέρχονται από τη Γ΄ Γυμνασίου. Το ίδιο συμβαίνει και στην περίπτωση των έργων χειρισμού. Ενώ τα έργα συναρτήσεων μετάφρασης και επίλυσης προβλήματος προέρχονται αποκλειστικά από την Α΄ Λυκείου. Η Β΄ Λυκείου φαίνεται ότι δεν παρουσιάζει καμία άσκηση ή παράδειγμα συνάρτησης με τη χρήση πίνακα.

Πίνακας 5:

Λειτουργία των Ασκήσεων/Παραδειγμάτων με Πίνακα

ΤΑΞΗ	**Αναγνώριση**	**Χειρισμός**	**Μετάφραση**	**Επίλυση Προβλήματος**
Όλες οι βαθμίδες	0,1%	0,1%	0,4%	0,1%
Γ΄ Γυμνασίου	0,1%	0,1%	0%	0%
Α΄ Λυκείου	0%	0%	0,4%	0,1%
Β΄ Λυκείου	0%	0%	0%	0%

Ο Πίνακας 6 παρουσιάζει τη λειτουργία των αλγεβρικών ασκήσεων και παραδειγμάτων συναρτήσεων όπως εμφανίζονται στα σχολικά εγχειρίδια της Γ΄ Γυμνασίου, Α΄ και Β΄ Λυκείου. Όλα τα παραδείγματα και ασκήσεις συναρτήσεων φαίνεται ότι έχουν αλγεβρική αναπαράσταση, με μεγαλύτερο ποσοστό τα έργα χειρισμού (79,6%), ακολουθούν τα έργα μετάφρασης (ποσοστό 10,2%), αναγνώρισης (ποσοστό 5,5%) και επίλυσης προβλήματος (4,7%) με πολύ μικρότερα ποσοστά. Και σε αυτή την περίπτωση η Γ΄ Γυμνασίου, υπερέχει έναντι των άλλων τάξεων σε όλες τις κατηγορίες λειτουργιών, ακολουθεί η Α΄ Λυκείου και ακολούθως η Β΄ Λυκείου. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι στη Β΄ Λυκείου δεν παρουσιάζεται κανένα αλγεβρικό έργο μετάφρασης.

Πίνακας 6:

Λειτουργία των Αλγεβρικών Ασκήσεων/Παραδειγμάτων

ΤΑΞΗ	**Αναγνώριση**	**Χειρισμός**	**Μετάφραση**	**Επίλυση Προβλήματος**
Όλες οι βαθμίδες	5,5%	79,6%	10,2%	4,7%
Γ΄ Γυμνασίου	4,7%	73%	6%	2%
Α΄ Λυκείου	0,8%	6,5%	2,9%	1,1%
Β΄ Λυκείου	0,1%	0%	1,3%	1,5%

Γενικά, από την ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων ως προς τις ασκήσεις και τα παραδείγματα συναρτήσεων, τις αναπαραστάσεις και τις λειτουργίες τους μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι διαφαίνεται μια υπεροχή της Γ΄ Γυμνασίου προς τις τάξεις του Λυκείου ως προς τις αναπαραστάσεις και τις λειτουργίες των αναπαραστάσεων για κάθε άσκηση/παράδειγμα. Τα χαμηλότερα ποσοστά ασκήσεων και παραδειγμάτων συναρτήσεων εμφανίζονται στη Β΄ Λυκείου, όπου σε πολλές περιπτώσεις δεν υπάρχουν καθόλου κάποιες κατηγορίες έργων.

Επίσης, φάνηκε ότι τα περισσότερα έργα συναρτήσεων είναι έργα χειρισμού. Εμφανίζονται λίγα έργα μετάφρασης και ακόμη πιο λίγα έργα αναγνώρισης και επίλυσης προβλήματος.

Το Ερευνητικό Εργαλείο

Για την εξέταση των σκοπών της έρευνας κατασκευάστηκαν δύο δοκίμια τα οποία περιλαμβάνουν έργα που μπορούν να ενταχθούν σε πέντε ομάδες. (*Πίνακας 7*). Τα δύο δοκίμια παρουσιάζονται αναλυτικά στο Παράρτημα.

1. Η πρώτη ομάδα περιλαμβάνει έργα που αναφέρονται στον ορισμό της συνάρτησης και σε παραδείγματα που δίνουν οι μαθητές για την έννοια της συνάρτησης.

2. Η δεύτερη ομάδα έργων διερευνά την ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίζουν μια συνάρτηση που δίνεται σε αλγεβρική ή γραφική αναπαράσταση.

3. Η τρίτη ομάδα περιλαμβάνει έργα που εξετάζουν την ικανότητα των μαθητών στο χειρισμό δεδομένων που παίρνουν (ερμηνεία) από μια γραφική παράταση.

4. Η τέταρτη ομάδα περιλαμβάνει έργα που εξετάζουν την ικανότητα των μαθητών να μεταφράζουν δεδομένα που παίρνουν από μια γραφική παράταση σε διαφορετικές μορφές αναπαράστασης.

5. Η πέμπτη ομάδα εξετάζει την ικανότητα των μαθητών να επιλύουν προβλήματα που περιλαμβάνουν την έννοια της συνάρτησης.

Κωδικοποίηση των Μεταβλητών της Έρευνας

Η κωδικοποίηση των έργων περιγράφεται στον ακόλουθο πίνακα. Για κάθε κατηγορία έργων χρησιμοποιούνται τα δύο πρώτα γράμματα από την αγγλική λέξη που εκφράζει την κατηγορία στην οποία εμπίπτει το κάθε έργο.

Πίνακας 7:

Η κωδικοποίηση των Έργων του δοκιμίου ανά Κατηγορία

Κατηγορία	**Κωδικοποίηση**
1. ΟΡΙΣΜΟΣ	DE (definition)
2. ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ	RE (recognition)
3. ΧΕΙΡΙΣΜΟΣ	OP (operation)
4. ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ	CO (Convention)
5. ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	PR (Problem Solving)

Στατιστική ανάλυση δεδομένων

Στατιστικό πακέτο SPSS

Το στατιστικό πακέτο SPSS χρησιμοποιήθηκε για την εξέταση των επιδόσεων των μαθητών στους διάφορους τύπους των έργων και για την εύρεση των πιθανών διαφορών μεταξύ των διαφόρων ομάδων των μαθητών.

Αρχικά, για την περιγραφική ανάλυση των δεδομένων που συλλέγηκαν με βάση τις επιδόσεις των μαθητών στα δοκίμια και βρέθηκαν τα ποσοστά επιτυχίας για κάθε είδος χρησιμοποιώντας το στατιστικό λογισμικό SPSS. Επιπλέον πραγματοποιήθηκαν αναλύσεις με πίνακες διπλής εισόδου (crosstabs) και διερευνήθηκαν περαιτέρω οι επιδόσεις τους και με ανάλυση διακύμανσης (Anova) εξετάστηκαν οι διαφορές κατά την επίδοση μεταξύ των ομάδων των μαθητών σε τρεις διαφορετικούς βαθμίδες (Γ΄ Γυμνασίου, Α΄ Λυκείου και Β΄ Λυκείου).

Στη συνέχεια, προκειμένου επιβεβαιώθηκε η δομή των γνωστικών ικανοτήτων των μαθητών στην έννοια της συνάρτησης στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, ένα μοντέλο CFA (επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης) και κατασκευάστηκε με τη χρήση του προγράμματος EQS (Bentler, 1995). Η βασιμότητα ενός μοντέλου μπορεί να προσδιοριστεί με τη χρήση των ακόλουθων μέτρων καλής προσαρμογής: $x^2/df < 1{,}95$, $CFI > 0.9$ και $RMSEA\ < 0{,}06$. Θα δοθεί έμφαση στον εντοπισμό και την επιβεβαίωση των αλληλεπιδράσεων των διαφόρων διαστάσεων:

(i) τον ορισμό της έννοιας,

(ii) την ευελιξία στη χρήση των διαφόρων τρόπων αναπαραστάσεις και

(iii) την επίλυση προβλημάτων.

Αυτός ο σχεδιασμός της έρευνας περιλαμβάνει το συνδυασμό δύο προσεγγίσεων της ποσοτικής και ποιοτικής. Στην πραγματικότητα σε ερευνητικές εργασίες, οι δύο προσεγγίσεις δεν είναι αμοιβαία αποκλειόμενες και μπορεί να χρησιμοποιηθούν σε συνδυασμό. Όπως προτείνεται από τον Smith (1975), «η ποιοτική ανάλυση ασχολείται με μορφές προγενέστερα-συνακόλουθα πρότυπα, ενώ ποσοτική ανάλυση ασχολείται με τη διάρκεια και τη συχνότητα της μορφής».

Έτσι, τα ποσοτικά δεδομένα που θα συλλέγονται από τις απαντήσεις των δοκιμίων για τη έννοια της συνάρτησης. Οι ημι-δομημένες συνεντεύξεις θα επιτρέψουν τη συλλογή των ποιοτικών δεδομένων της έρευνας. Τα δεδομένα και των δύο τύπων θα αναλυθούν με τη χρήση διαφόρων τεχνικών και στατιστικού λογισμικού. Οι ποσοτικές και ποιοτικές αναλύσεις των δεδομένων της έρευνας αυτής εξηγείται παρακάτω με πιο λεπτομερή τρόπο.

Έλεγχος Δομικών Εξισώσεων και CFA

Η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση (CFA), με τη χρήση του προγράμματος EQS, χρησιμοποιήθηκαν για τη διερεύνηση της δομικής οργάνωσης των διαφόρων διαστάσεων της σύλληψης των συναρτήσεων ***(Bentler, 1995)***.

Δομικά μοντέλα εξισώσεων (SEM) είναι μια στατιστική μεθοδολογία που κάνει ένα έλεγχο υποθέσεων (δηλαδή επιβεβαιωτική) και προσεγγίζει για την πολυπαραγοντική ανάλυση μιας δομικής θεωρίας σε κάποιο φαινόμενο ***(Byrne, 1994)***. Αυτή η θεωρία αφορά τις αιτιακές σχέσεις μεταξύ πολλών μεταβλητών (Bentler, 1988). Οι σχέσεις αυτές αντιπροσωπεύονται δομικά, δηλαδή εξισώσεων παλινδρόμησης, η οποία μπορεί να διαμορφωθεί με ένα γραφικό τρόπο μια καλύτερη σύλληψη της θεωρίας που παρουσιάζεται. Η μέθοδος SEM (Structural Equation Modeling) διαφέρει από τις πιο παραδοσιακές τεχνικές πολυμεταβλητής στατιστικής σε τουλάχιστον τρεις διαστάσεις:

(1)Με τη χρήση της ανάλυσης SEM των δεδομένων προσεγγίζεται με ένα επιβεβαιωτικό τρόπο μάλλον παρά με ένα διερευνητικό τρόπο, καθιστώντας τον έλεγχο υποθέσεων πιο προσιτό και εύκολο, σε σύγκριση με τις άλλες πολυμεταβλητές διαδικασίες.

(2)Ενώ η μέθοδος SEM δίνει τις εκτιμήσεις των σφαλμάτων μέτρησης , οι συμβατικές μέθοδοι πολυμεταβλητής δεν μπορούν να εκτιμήσουν ή να διορθώσουν αυτές τις παραμέτρους.

(3)Η μέθοδος ανάλυσης SEM περιλαμβάνει όχι μόνο παρατήρηση, αλλά και άδηλες (απαρατήρητες) μεταβλητές, ενώ οι παλαιότερες τεχνικές ενσωματώνουν μόνο παρατηρήσιμες μετρήσεις .

Η μέθοδος ανάλυσης CFA χρησιμοποιείται σε περιπτώσεις όπου ο ερευνητής έχει στόχο να εξετάσει στατιστικώς κατά πόσον ένα υποθετικό μοντέλο σύνδεσης υπάρχει μεταξύ των παρατηρούμενων μεταβλητών με υποκείμενους παράγοντες. Αυτή η εκ των προτέρων υπόθεση βασίζεται στην γνώση των σχετικών θεωριών και προηγούμενων εμπειριών εργασίες στον τομέα της μελέτης.

Η μέθοδος ανάλυσης CFA επιτρέπει στον ερευνητή να ελέγξει την υπόθεση ότι η σχέση μεταξύ των παρατηρούμενων μεταβλητών και των άδηλων υποκείμενων υπάρχει. Ο ερευνητής χρησιμοποιεί τις γνώσεις της θεωρίας, εμπειρική έρευνα , ή και τα δύο αξιώματα το πρότυπο σχέσης a priori και στη συνέχεια δοκιμάζει την υπόθεση στατιστικά. Παραδοσιακές στατιστικές μέθοδοι χρησιμοποιούν συνήθως μία στατιστική δοκιμή για να προσδιοριστεί η σημασία της ανάλυσης. Ωστόσο, Δομικών Εξισώσεων , CFA συγκεκριμένα , στηρίζεται σε αρκετές στατιστικές δοκιμές για να διαπιστωθεί η επάρκεια των προσαρμογή του μοντέλου στα δεδομένα .

Η μέθοδος chi - square test δείχνει το ποσό της διαφοράς μεταξύ των αναμενόμενων και των παρατηρούμενων πινάκων συνδιακύμανσης . Μια τιμή chi-square τιμή κοντά στο μηδέν σημαίνει μικρή διαφορά μεταξύ των αναμενόμενων και των παρατηρούμενων πινάκων συνδιακύμανσης. Επιπλέον, το επίπεδο πιθανότητας πρέπει να είναι μεγαλύτερο από 0,05, όταν η τιμή chi-square είναι κοντά στο μηδέν ***(Suhr, 2006)***.

Τα βασικά βήματα που ακολουθεί ένας ερευνητής για την εκτέλεση της ανάλυσης CFA περιγράφονται παρακάτω: Το μοντέλο καθορίζεται με βάση τη γνώση της σχετικής θεωρίας και προηγούμενη εμπειρική έρευνα. Χρησιμοποιώντας ένα λογισμικό πρόγραμμα προσαρμογής μοντέλου, όπως EQS, το μοντέλο αναλύεται έτσι ώστε να προκύπτουν οι εκτιμήσεις των παραμέτρων του μοντέλου με τα δεδομένα. Στη συνέχεια, η βασιμότητα του μοντέλου έχει δοκιμαστεί με βάση τα δεδομένα που αφορούν όλες τις μεταβλητές του μοντέλου που παρατηρήθηκαν. Η βασιμότητα ενός μοντέλου μπορεί να προσδιοριστεί με τη χρήση των ακόλουθων μέτρων καλή προσαρμογής of -fit : X , CFI και RMSEA. Οι ακόλουθες τιμές των τριών δεικτών που απαιτούνται για να ισχύει και για την υποστήριξη καλή προσαρμογή του μοντέλου: X/df<2 , CFI>0.9 , RMSEA<0,06. Εάν το μοντέλο που υποθέσαμε δεν είναι συνεπές με τα δεδομένα το μοντέλο επανακαθορίζεται με αλλαγή και αντικατάσταση και η προσαρμογή του αναθεωρημένου μοντέλου με τα ίδια δεδομένα αξιολογείται (Byrne, 1994, Kline, 1998) .

Ο αριθμός των επιπέδων ότι η λανθάνουσα παράγοντες είναι μακριά από τις παρατηρούμενες μεταβλητές καθορίζει αν ένα μοντέλο παραγόντων ονομάζεται μια πρώτης τάξης , μια δεύτερης τάξης ή υψηλότερο πρότυπο τάξης. Αντίστοιχα, το ένα επίπεδο παράγοντες απομακρύνονται από τις παρατηρούμενες μεταβλητές είναι χαρακτηρισμένα παράγοντες πρώτης τάξης ενώ τα υψηλότερης τάξης παράγοντες οι οποίοι υποτίθεται ότι αντιπροσωπεύουν τη διακύμανση και συν- διακύμανση που σχετίζονται με τα πρώτης τάξης παράγοντες που ονομάζονται παράγοντες δεύτερης τάξης . Ένα δεύτερο ή τον υψηλότερο συντελεστή ώστε να μην έχει το δικό του σύνολο των μετρούμενων μεταβλητών. Σε αυτή τη μελέτη δεύτερης τάξης μοντέλο θα πρέπει να θεωρείται .

Ανάλυση Ομοιότητας των μεταβλητών

Για την ανάλυση των δεδομένων που συλλέγονται, η στατιστική μέθοδος Gras θα πρέπει επίσης να διεξάγεται με τη χρήση του λογισμικού ηλεκτρονικών υπολογιστών που ονομάζεται CHIC (Classification Hierarchique , implicative et Cohesitive) (Bodin , Coutourier, & Gras, 2000). Αυτές οι μέθοδοι ανάλυσης καθορίζουν τις ιεραρχικές συνδέσεις ομοιότητας των μεταβλητών αντίστοιχα (Gras, 1992, 1996) . Για τις ανάγκες της παρούσας μελέτης, διαγράμματα ομοιότητας θα δημιουργηθούν από την εφαρμογή των αναλύσεων του δείγματος των μαθητών.

Η ιεραρχική ομαδοποίηση των μεταβλητών (Lerman, 1981) είναι μια μέθοδος ταξινόμησης που έχει ως στόχο να προσδιορίσει σε σύνολο V μεταβλητών, τμήματα του V, με βάση ένα αυξανόμενο τρόπο. Αυτά τα τμήματα εκπροσωπούνται σε ένα ιεραρχικά κατασκευασμένο διάγραμμα χρησιμοποιώντας ένα στατιστικό κριτήριο ομοιότητας μεταξύ των μεταβλητών . Η ομοιότητα πηγάζει από την τομή του συνόλου των μεταβλητών V με ένα σύνολο E των υποκειμένων (ή αντικείμενων). Αυτό το είδος της ανάλυσης επιτρέπει στον ερευνητή να μελετήσει και να ερμηνεύσει συστάδες των μεταβλητών όσον αφορά την τυπολογία και τη φθίνουσα ομοιότητα . Οι συστάδες σε συγκεκριμένα επίπεδα του διαγράμματος μπορούν να συγκριθούν με τις άλλες. Η συγκέντρωση μπορεί να είναι ευγνώμων προς το εννοιολογικό χαρακτήρα της κάθε ομάδας των μεταβλητών.

Ειδικότερα, η μέθοδος που χρησιμοποιείται εδώ είναι η «ανάλυση σύνδεσης πιθανότητας» (LLA) (Lerman , 1991). Η μέθοδος LLA είναι μια μεθοδολογία για την ομαδοποίηση των δεδομένων σε σημαντικές κατηγορίες και υποκατηγορίες , χρησιμοποιώντας έναν αλγόριθμο της ιεραρχικής κατάταξης. Αυτή η μέθοδος εισάγει μια βασική έννοια στη μελέτη των στατιστικών δεδομένων για τη μέτρηση της στατιστικής σχέσεις, δηλαδή η έννοια "likelihood". Ο Lerman (1991) ορίζει την έννοια likelihood", ως μέρος της έννοια της ομοιότητας.

Η ευελιξία αυτής της μεθόδου επιτρέπει λαμβάνοντας υπόψη τυχόν συνδυαστική και λογική δομή του οποίου η μέθοδος απεικόνισης που ορίζεται από μια δεδομένη περιγραφική μεταβλητή που παρέχεται.

Η κατασκευή του ιεραρχικού διαγράμματος ομοιότητας βασίζεται στην ακόλουθη διαδικασία: Δύο από τις μεταβλητές που είναι πιο παρόμοιες με τις άλλες σε σχέση με τους δείκτες ομοιότητας της μεθόδου ενώνονται μαζί σε μια ομάδα στο υψηλότερο (πρώτο) επίπεδο ομοιότητας. Στη συνέχεια, αυτή η ομάδα μπορεί να συνδέεται με μια μεταβλητή σε ένα χαμηλότερο επίπεδο ομοιότητας ή δύο άλλες μεταβλητές που συνδυάζονται μαζί και να δημιουργήσουν μια άλλη ομάδα σε χαμηλότερο επίπεδο , κλπ. Αυτή η διαδικασία ομαδοποίησης συνεχίζεται μέχρι την ομοιότητα ή τη συνοχή μεταξύ των μεταβλητών ή των ομάδων των μεταβλητών γίνεται πολύ αδύναμη . Σε αυτή την μελέτη τα διαγράμματα ομοιότητας επιτρέπουν την ρύθμιση των μεταβλητών, οι οποίες αντιστοιχούν στις απαντήσεις των μαθητών στα έργα των δοκιμίων, σε ομάδες ανάλογα με την ομοιογένεια τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της έρευνας σχετικά με την εννοιολογική κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης και η σχέση της με την ικανότητα του ορισμού, της αναγνώρισης, της ερμηνείας, της προσέγγισης της συνάρτησης, της έννοιας όταν αυτή παρουσιάζεται δια μέσου διαφορετικών μορφών αναπαραστάσεων και ειδικά με την ικανότητα επίλυσης προβλήματος. Διερευνήθηκε, επίσης, το είδος της προσέγγισης (αλγεβρική ή γεωμετρική) που χρησιμοποιούν οι μαθητές κατά την επίλυση έργων αλλά και ο τρόπος επίδρασής του στην ικανότητα εκτέλεσης έργων μετάφρασης. Επιπλέον, εξετάστηκε η σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην κατανόηση της συνάρτησης και στον ορισμό της έννοιας, στα παραδείγματα, στην ικανότητα αναγνώρισης των διαφορετικών αναπαραστάσεων της έννοιας όπως συμβολική, διαγραμματική, λεκτική και με γραφική παράσταση στην επίλυση προβλήματος. Τέλος, μελετήθηκε ο ρόλος της επίλυσης προβλήματος στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές χρησιμοποίησαν την έννοια της συνάρτησης με διάφορες μορφές αναπαράστασης για να δώσουν ορισμό και παραδείγματα αυτής.

Παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τις στατιστικές αναλύσεις των δεδομένων της παρούσας έρευνας. Η παρουσίαση των αποτελεσμάτων γίνεται με βάση τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν στην παρούσα εργασία.

Γίνεται η διερευνηση των διαστάσεων που αποτελούν την εννοιολογική κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης, όπως ο ορισμός, η ερμηνεία, η αναγνώριση, η προσέγγιση της συνάρτησης και λύση προβλήματος σε έργα με συναρτήσεις και τις επιδόσεις των μαθητών στις διαστάσεις αυτές. Προτείνονται διαφορετικές διαστάσεις σε σχέση με αυτές που προέκυψαν από προηγούμενες έρευνες Gagatsis, Monoyiou, Deliyianni, & Philippou, (2010), Monoyiou (2010), Monoyiou, A., & Gagatsis (2011). Συγκεκριμένα, εντοπίζονται οι ομοιότητες και διαφορές σε κάθε μια από τις διαστάσεις αυτές για κάθε μια από τις τρεις ηλικιακές ομάδες που μελετώνται. Εξετάζεται, δηλαδή, πώς μεταβάλλεται η κάθε διάσταση που ενδέχεται να αποτελεί την εννοιολογική κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης καθώς οι μαθητές προχωρούν σε επόμενη τάξη, κατά τη μετάβασή τους από το Γυμνάσιο στο Λύκειο.

Η γνωστική δομή της έννοιας της συνάρτησης κατά τη μετάβαση από το Γυμνάσιο στο Λύκειο

Επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση και η ανάπτυξη δομικού μοντέλου της έννοιας της συνάρτησης

Τα προτεινόμενα δομικά μοντέλα

Για να επιβεβαιωθεί η δομή των γνωστικών ικανοτήτων των μαθητών στην έννοια των συναρτήσεων στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση θα κατασκευαστούν διάφορα μοντέλα CFI επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης με τη χρήση του λογισμικού EQS Belters 1995. Τα μοντέλα αυτά μπορούμε να τα διακρίνουμε σε δύο κατηγορίες ανάλογα με τον αριθμό των παραγόντων πρώτης, δεύτερης ή τρίτης τάξης που θέλουμε να εισαγάγουμε στα μοντέλα. Οι δύο κατηγορίες, καθώς και τα αντίστοιχα προτεινόμενα μοντέλα που περιλαμβάνονται σε αυτές, περιγράφονται και επεξηγούνται παρακάτω.

$1^η$ κατηγορία προτεινομένων δομικών μοντέλων

(1Α) Μοντέλο με τέσσερις παράγοντες πρώτης τάξης και ένα παράγοντα δεύτερης τάξης.

Η πρώτη κατηγορία μοντέλων βασίζεται σε τέσσερις παράγοντες πρώτης τάξης που αντιστοιχούν στα έργα ορισμού, ερμηνείας γραφημάτων, αναγνώρισης και επίλυσης λεκτικών προβλημάτων. Οι τέσσερις αυτοί πρώτης τάξης παράγοντες διαδραματίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης. Από την μια είναι ο ορισμός, η σημασία του οποίου αναλύεται παρακάτω. Η ερμηνεία των γραφημάτων δείχνει την ικανότητα των μαθητών να αντλούν πληροφορίες από διάφορες γραφικές παραστάσεις. Η αναγνώριση συναρτήσεων είτε σε συμβολική μορφή, είτε σε μορφή γραφικής παράστασης είναι ένα πολύ βασικό στοιχείο για την κατανόηση των συναρτήσεων και αποτελεί τον τρίτο παράγοντα πρώτης τάξης. Τέλος, η επίλυση λεκτικών προβλημάτων παίζει πολύ σημαντικό ρόλο σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών και ειδικά στην περίπτωση μας στο κεφάλαιο των συναρτήσεων. Στο πρώτο μοντέλο λοιπόν, οι τέσσερις αυτοί παράγοντες πρώτης τάξης αναμένονται να φορτίζουν σε ένα παράγοντα δεύτερης τάξης, που ονομάζουμε εννοιολογική κατανόηση της συνάρτησης.

Σε αυτή την πρώτη κατηγορία μοντέλων που βασίζονται σε τέσσερις παράγοντες πρώτης τάξης, πολύ σημαντικό στοιχείο είναι να αντιληφθούμε με ποιο τρόπο οι μαθητές αντιλαμβάνονται τα διάφορα έργα και τις σχέσεις μεταξύ τους των διαφόρων διαστάσεων της κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης. Συνεπώς, σε ένα πρώτο μοντέλο (Διάγραμμα 1) μας ενδιαφέρουν οι σχέσεις μεταξύ των διαφόρων παραγόντων πρώτης τάξης ως προς την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης και σε ένα δεύτερο μοντέλο (Διάγραμμα 2) μας ενδιαφέρουν οι σχέσεις αλληλεπίδρασης μεταξύ των παραγόντων αυτών.

(1Β) Μοντέλο με αλληλεπιδράσεις μεταξύ των τεσσάρων παραγόντων πρώτης τάξης.

Το δεύτερο μοντέλο αποτελείται από τους τέσσερις παράγοντες πρώτης τάξης, όπως και στο προηγούμενο μοντέλο της κατηγορίας αυτής, όμως στο μοντέλο αυτό εξετάζονται οι σχέσεις αλληλεπίδρασης μεταξύ των τεσσάρων παραγόντων. Στο μοντέλο αυτό ότι ο ορισμός παίζει κεντρική σημασία για τους λόγους που αναλύονται παρακάτω. Συγκεκριμένα, τα πέντε έργα που αποτελούν την ομάδα των έργων ορισμού είναι τα έργα

Α1, Α2, Α3, Β1, Β2. Σε αυτά, λοιπόν, τα πέντε έργα, πέρα από την ερώτηση Α1 που προτείνεται σε λεκτική έκφραση με τη χρήση αλγεβρικών συμβόλων, περιλαμβάνονται διάφορες ασκήσεις που εμπλέκουν όλα τα είδη αναπαραστάσεων που σχετίζονται με την συνάρτηση.

Για παράδειγμα, η ερώτηση Β1 που ζητά ένα παράδειγμα είναι φανερό ότι θα εκφραστεί με στοιχεία από τη φυσική γλώσσα, καθώς και με σύμβολα εφόσον πρόκειται για ένα παράδειγμα.

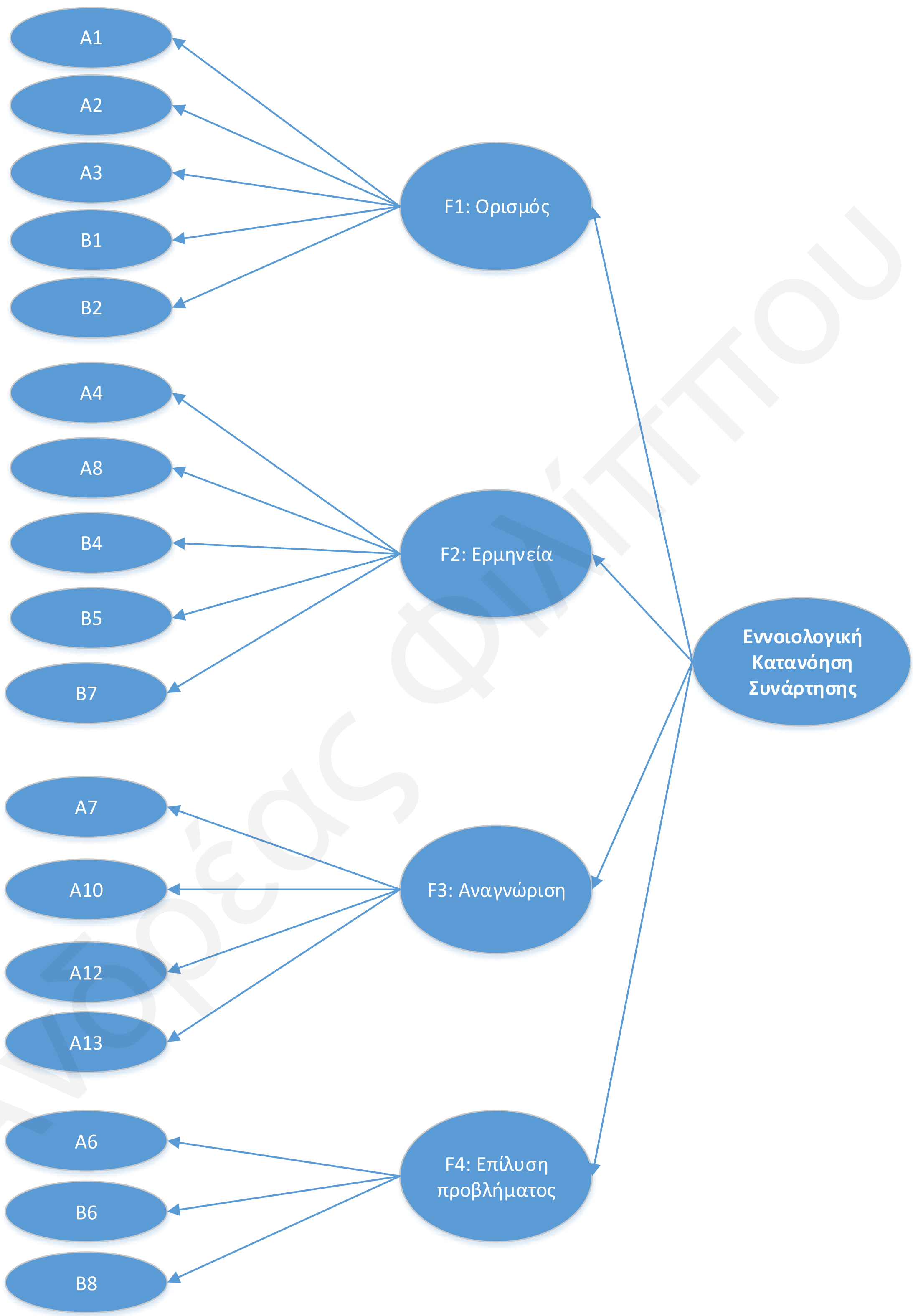
Η ερώτηση 2α ζητάει από τους μαθητές να εκφράσουν πως μπορούν να καταλάβουν πως μια γραφική παράσταση ορίζει συνάρτηση. Είναι φανερό ότι οι μαθητές δίνοντας την απάντηση πιθανόν να σχεδιάσουν κάποιες πρόχειρες γραφικές παραστάσεις για να δοκιμάσουν και να υλοποιήσουν τις σκέψεις τους, το τι δηλαδή αποτελεί συνάρτηση, ή σε αντίθετη περίπτωση ακόμα και όταν εκφράσουν αμέσως τον κανόνα της κατακόρυφης ευθείας ουσιαστικά στο μυαλό τους έχουν τη νοερή εικόνα μια γραφικής παράστασης, στην οποία κατακόρυφη ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση σε ένα μόνο σημείο (οπότε είναι συνάρτηση), ή σε δύο και περισσότερα οπότε δεν είναι συνάρτηση.

Επίσης, στην ερώτηση Β2 που ζητά να δώσουμε ένα παράδειγμα μια σχέσης που δεν παριστάνει συνάρτηση, είναι βέβαιο ότι το παράδειγμα θα δοθεί με συμβολική έκφραση. Άρα παρεμβαίνει και αυτό το πεδίο αναπαράστασης, χωρίς να αποκλείεται ότι μερικοί μαθητές θα έχουν στο μυαλό τους τη νοερή εικόνα μιας γραφικής παράστασης.

Η ερώτηση Α3 εκφράζεται καθαρά σε συμβολική έκφραση, με τη συνοδεία κάποιων λεκτικών εκφράσεων, επομένως και αυτή συνδέεται με διάφορα είδη αναπαραστάσεων. Από την άλλη μεριά, οι ερωτήσεις Β1 και η Β2 είναι συμπληρωματικές του Α μέρους του ερωτηματολογίου. Στην ερώτηση Β1 οι μαθητές πρέπει να διατυπώσουν τον ορισμό για το πώς από μια γραφική παράσταση μπορούμε να αντιληφθούμε ότι παριστάνεται συνάρτηση. Οπότε και εδώ θα εκφράσουν τη σκέψη τους είτε με συμβολική έκφραση, είτε με πιθανό σχεδιασμό μιας γραφικής παράστασης και βέβαια στο μυαλό τους έχουν τη νοερή εικόνα των γραφικών παραστάσεων. Στην ερώτηση Β2 ζητούνται παραδείγματα μιας σχέσης που παριστάνει συνάρτηση και μιας σχέσης που δεν παριστάνει συνάρτηση και εδώ θα χρησιμοποιηθούν διάφορα είδη αναπαραστάσεων.

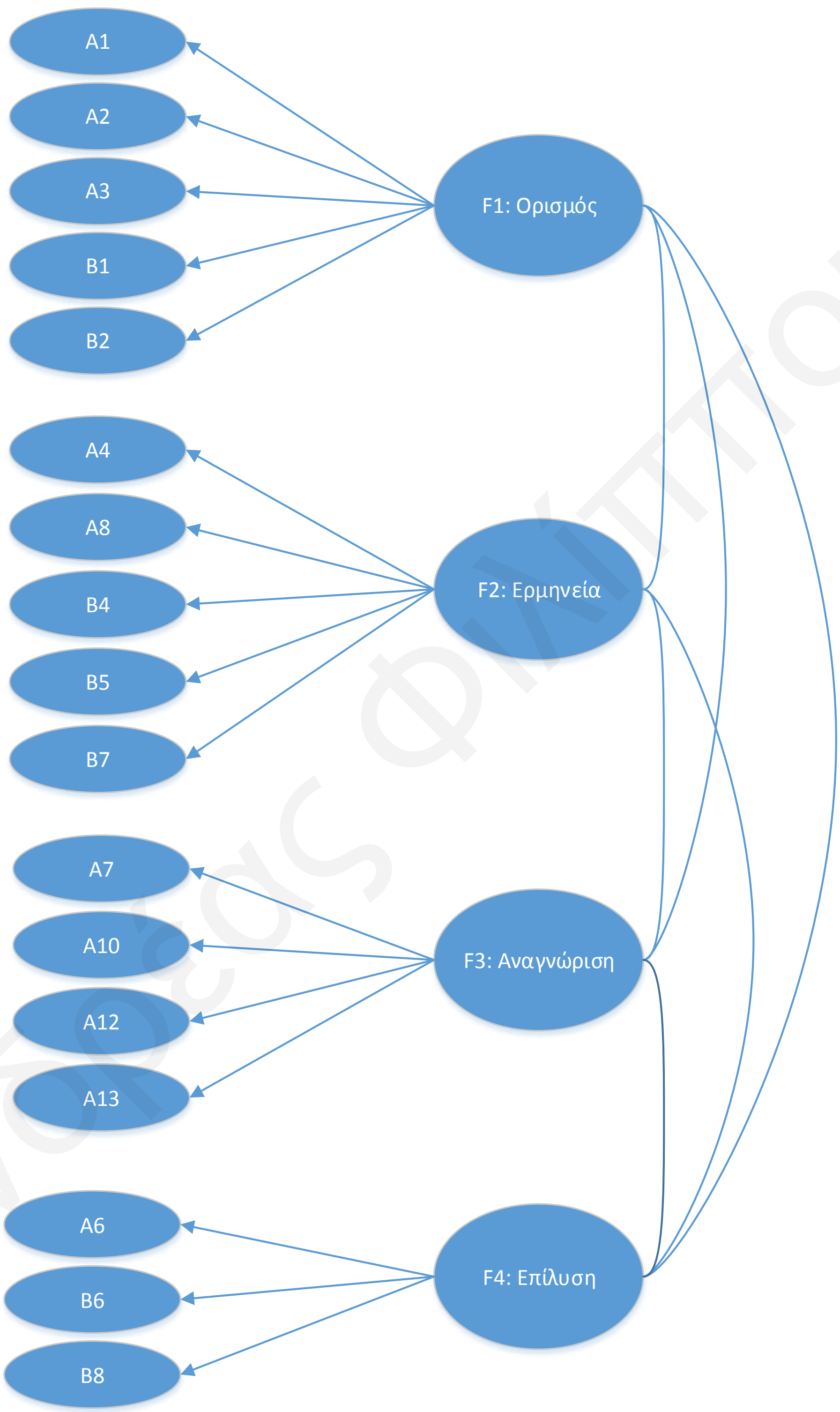
Συμπερασματικά, καταλήγουμε στο ότι αυτή η ομάδα των πέντε έργων ορισμού εκφράζεται με διάφορα είδη αναπαραστάσεων δηλαδή με συμβολική έκφραση, με γραφική αναπαράσταση και με λεκτική έκφραση. Είναι, λοιπόν, φυσιολογικό ότι η ομάδα αυτή των έργων, δηλαδή ο παράγοντας F1 που σχετίζεται με τον ορισμό, συνδέεται και με τους άλλους παράγοντες πρώτης τάξης, δηλαδή με την ερμηνεία, την αναγνώριση και την επίλυση λεκτικών προβλημάτων. Από την άλλη μεριά, τα πέντε έργα της ερμηνείας σχηματίζουν τον παράγοντα F2 – ερμηνεία, σχετίζονται με τον παράγοντα F3 – αναγνώριση, εφόσον για την αναγνώριση δίνονται διάφορα έργα σε συμβολική και γραφική παράσταση. Πιο συγκεκριμένα η A7 δίνεται σε γραφική παράσταση, η A10 σε συμβολική έκφραση, η A12 σε γραφική παράσταση και η A13 πάλι σε γραφική παράσταση. Τέλος, η ερμηνεία γραφημάτων σχετίζεται έντονα με τον παράγοντα επίλυσης λεκτικών προβλημάτων. Και αυτό διότι στην ουσία η ερμηνεία των γραφικών παραστάσεων αποτελεί ένα είδος επίλυσης έργων η οποία στηρίζεται στην ερμηνεία των γραφικών παραστάσεων. Από την άλλη πλευρά και οι παράγοντες F2 και F4 εμπλέκουν γραφικές παραστάσεις, που είναι το χαρακτηριστικό των συναρτήσεων.

Μοντέλο 1Α



Διάγραμμα 1: Μοντέλο με τέσσερις παράγοντες πρώτης τάξης και παράγοντα δεύτερης τάξης

Μοντέλο 1Β



Διάγραμμα 2: Μοντέλο με αλληλεπιδράσεις μεταξύ των τεσσάρων παραγόντων πρώτης τάξης

2η Κατηγορία προτεινομένων δομικών μοντέλων

Στη δεύτερη κατηγορία μοντέλων προτείνονται δύο δομικά μοντέλα που διαφοροποιούνται σε σχέση με τα δύο μοντέλα της προηγούμενης κατηγορίας από την εμπλοκή του παράγοντα που ονομάζονται μετάφραση (μετασχηματισμός αναπαραστάσεων). Μια βασική υπόθεση αφορά στο γεγονός ότι η κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας σχετίζεται με την ικανότητα αναγνώρισης της έννοιας, όταν αυτή παρουσιάζεται με μια ποικιλία σημειωτικών αναπαραστάσεων και την ικανότητα μετάφρασης της έννοιας από το ένα πεδίο έκφρασης στο άλλο. Συγκεκριμένα, εξετάζεται η σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην επιτυχία σε έργα άμεσης μετάφρασης και την επιτυχία στην επίλυση προβλημάτων, τα οποία απαιτούν τη μετάφραση ανάμεσα στα. διάφορα συστήματα αναπαράστασης της έννοιας της συνάρτησης. Η παρούσα έρευνα εξετάζει την ικανότητα μεταφοράς των μαθητών από αλγεβρική σε γεωμετρική αναπαράσταση συνάρτησης και αντίστροφα, καθώς και την προσέγγιση που ακολουθούν (αλγεβρική ή γεωμετρική) σε προβλήματα συναρτησιακού τύπου. (Μουσουλίδης, Ν., & Γαγάτσης, Α., 2003), (Mousoulides, N., & Gagatsis, A., 2004), (Φιλίππου, Α., Μονογυιού, Α. & Γαγάτσης, Α. , 2011)

Σε αυτά τα μοντέλα προσθέτουμε ουσιαστικά και μια πέμπτη ομάδα έργων, οι οποίες εμπλέκουν τη γεωμετρική προσέγγιση που εφαρμόζουν οι μαθητές για την επίλυση τους. Συγκεκριμένα, αυτή η κατηγορία έργων δεν περιλαμβάνει κλασικά έργα μετάφρασης, αλλά αποτελεί μια ειδική κατηγορία έργων τα οποία εξετάζουν την προσέγγιση που ακολουθούν οι μαθητές για την κατασκευή γραφικής παράστασης: την αλγεβρική και τη γεωμετρική προσέγγιση. Η μορφή και η φιλοσοφία των έργων αυτών διαφέρει από τη μορφή και φιλοσοφία των υπόλοιπων έργων του δοκιμίου της έρευνας.

Πιο συγκεκριμένα, τα έργα βασίζονται στη χάραξη μιας γραφικής παράστασης όταν δίνεται ο αλγεβρικός τύπος. Σαφώς, πρόκειται για μετασχηματισμό αναπαραστάσεων από συμβολική μορφή σε γραφική παράσταση. Η ιδιαιρετότητα αυτού του παράγοντα είναι στο ότι βασίζεται σε μια διάκριση μεταξύ δύο διαφορετικών τρόπων συμφώνα με τους οποίους γίνεται ο μετασχηματισμός αναπαραστάσεων. Πιο συγκεκριμένα αυτός ο μετασχηματισμός μπορεί να γίνεται με δύο τρόπους. Είτε με τη γεωμετρική προσέγγιση (Geometrical Approach), όπως ονομάζεται στις εργασίες των Μονογιού και Γαγάτση

(2009) και των Μουσουλίδη και Γαγάτση (2003), είτε με την αλγεβρική προσέγγιση (Point Wise approach) με άλλα λόγια προσέγγιση σημείο προς σημείο.

Εφόσον ο παράγοντας με τα έργα μεταφράσεων ή μετασχηματισμού αναπαραστάσεων εμπλέκει γραφικές παραστάσεις και αλγεβρικές εκφράσεις, αναμένεται ότι θα συσχετίζεται και με την αναγνώριση συναρτήσεων, στην οποία προτείνονται έργα και σε αλγεβρική και σε γραφική παράσταση, αλλά και με τον ορισμό, γιατί όπως εξηγήθηκε προηγουμένως ο ορισμός εμπλέκει και τα τρία είδη αναπαράστασης.

(2Α) Μοντέλο με πέντε παράγοντες πρώτης τάξης, δύο παράγοντες δεύτερης τάξης και ένα παράγοντα τρίτης τάξης

Οι παράγοντες πρώτης τάξης είναι ο ορισμός, η αναγνώριση, η ερμηνεία γραφημάτων, η επίλυση προβλημάτων και οι μεταφράσεις. Οι δύο παράγοντες δεύτερης τάξης είναι η ευελιξία επίλυσης προβλήματος και η αναπαραστατική ευελιξία. Ο παράγοντας τρίτης τάξης είναι η εννοιολογική κατανόηση της συνάρτησης.

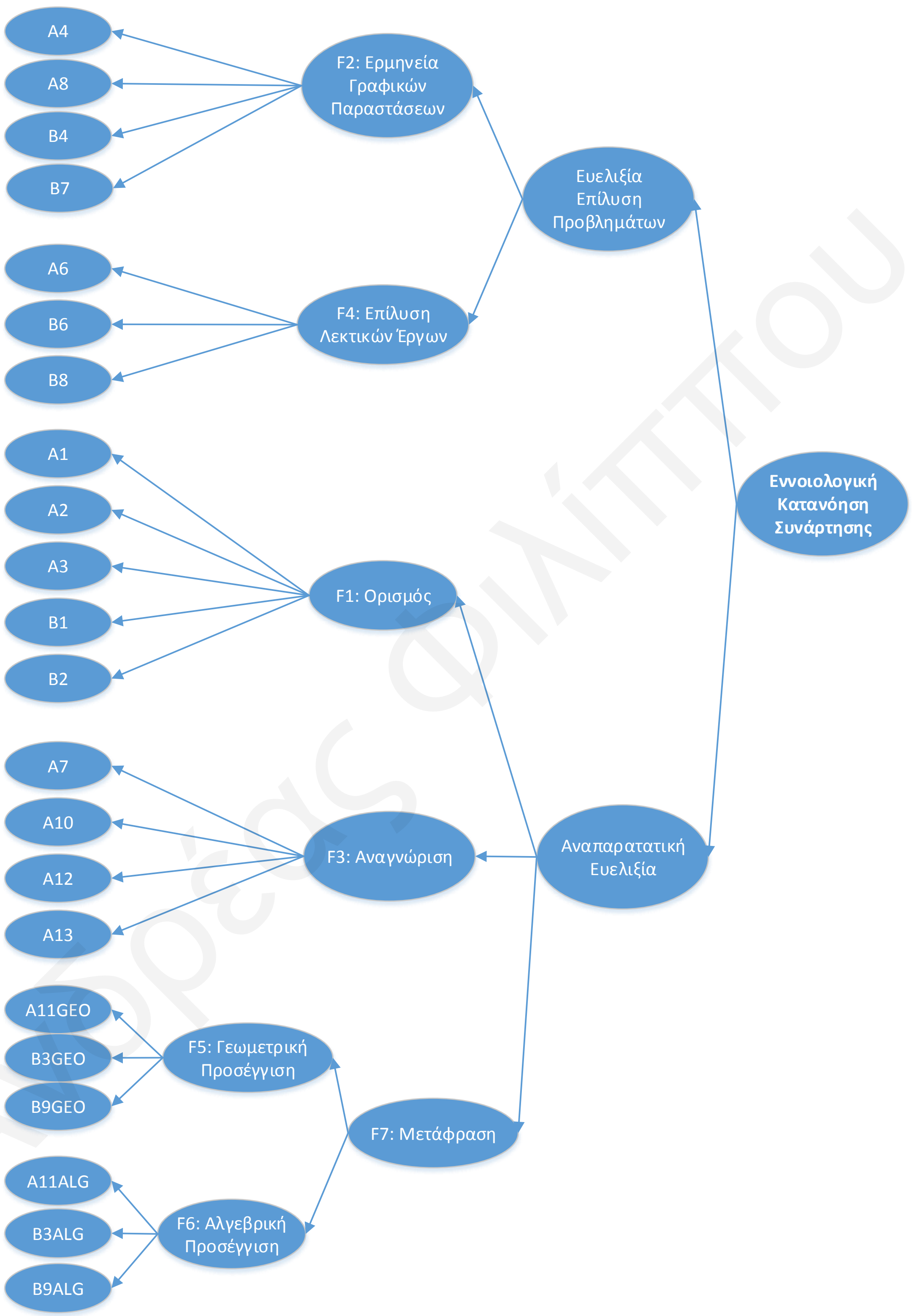
Οι τρεις παράγοντες πρώτης τάξης (ορισμός, αναγνώριση και μετάφραση) αναμένεται ότι θα φορτίζουν σε ένα παράγοντα δεύτερης τάξης που ονομάζεται αναπαραστατική ευελιξία. Βάσει ερευνών που έχουν πραγματοποιηθεί στις αναπαραστάσεις, ως αναπαραστατική ευελιξία (Deliyianni, E., Gagatsis, A., Elia, I, Panaoura, A. , in press) και (Gagatsis, A & Monoyiou, A., 2012) ορίζεται ένας παράγοντας ο οποίος αποτελείται από τρεις διαστάσεις: από την αναγνώριση όπως είναι και στην περίπτωση μας, από τη μετάφραση ή μετασχηματισμό αναπαραστάσεων όπως επίσης ισχύει και στην περίπτωση μας, και από ένα άλλον παράγοντα, ο οποίος ονομάστηκε επεξεργασίες. Στον παράγοντα αυτό γίνονταν διάφοροι μετασχηματισμοί ενός μαθηματικού αντικειμένου που παρέμενε στο ίδιο σύστημα αναπαράστασης.

Θεωρούμε ότι στην περίπτωση των συναρτήσεων επειδή οι διάφορες επεξεργασίες είτε συμβολικών εκφράσεων είτε γραφικών αναπαραστάσεων εμπλέκονται στα έργα του παράγοντα F7 μετασχηματισμός αναπαραστάσεων και με βάση όλα αναφέρθηκαν προηγούμενα για την σημασία του ορισμού και ειδικότερα για τον ορισμό της συνάρτησης, πιστεύουμε ότι η τρίτη διάσταση σε αυτό που ονομάζουμε αναπαραστατική ευελιξία για τις συναρτήσεις πρέπει να είναι ο ορισμός. Πράγματι οι Deliyianni et al. (in press) είχαν διατυπώσει για πρώτη φορά τον ορισμό της αναπαραστατικής ευελιξίας ως μια οντότητα που αποτελείται από τρεις διαστάσεις στην περίπτωση των κλασμάτων, όπου ο ορισμός του κλάσματος μπορεί να δημιουργήσει δυσκολίες στους μαθητές, ενώ από την άλλη δεν είναι σημαντικός ώστε να συνδέεται με τα άλλα είδη μετασχηματισμών αναπαραστάσεων. Στην περίπτωση μας η σημασία του ορισμού για την κατανόηση της συνάρτησης είναι κεφαλαιώδους σημασίας και όλα ξεκινούν από τον ορισμό. Από την άλλη πλευρά, όπως αναλύσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, στην πρώτη κατηγορία μοντέλων όταν μιλάμε για ορισμό έτσι όπως σε σχέση με το ορισμό προτάθηκαν στην έρευνα αυτή είναι κάτι πολύ παραπάνω από ένα απλό ορισμό, είναι μια ομάδα ασκήσεων οι οποίες εμπλέκουν την αναγνώριση συναρτήσεων σε γραφική ή σε συμβολική έκφραση και εμπλέκουν παραδείγματα στα οποία διαπιστώνεται αν ο ορισμός έχει γίνει κατανοητός άμεσα από τους μαθητές. Άρα ονομάζουμε αναπαραστατική ευελιξία την ικανότητα των μαθητών να χειρίζονται τα διάφορα είδη αναπαραστάσεων, είτε σε σχέση με τον ορισμό της συνάρτησης είτε σε σχέση με την αναγνώριση συναρτήσεων, είτε σε σχέση με μετάφραση ή μετασχηματισμό αναπαραστάσεων συναρτήσεων είτε με γεωμετρική είτε με αλγεβρική προσέγγιση.

Σε σχέση με τους άλλους δύο πρώτης τάξης παράγοντες (ερμηνεία και επίλυση προβλήματος), με βάση και την προηγούμενη ανάλυση της πρώτης κατηγορίας μοντέλων, και εδώ η ερμηνεία των γραφικών παραστάσεων συνδέεται με την επίλυση έργων. Ακολούθως, αυτοί οι δύο παράγοντες φορτίζουν σε ένα παράγοντα δεύτερης τάξης, που ανάλογα με την αναπαραστατική ευελιξία, τον ονομάζουμε ευελιξία επίλυσης προβλημάτων.

Με βάση, λοιπόν, τις έρευνες που αναφέρονται σε αναπαραστατική ευελιξία, καθώς και άλλες έρευνες που αναφέρονται σε στρατηγική ευελιξία επίλυσης προβλημάτων, ο στόχος των μοντέλων της δεύτερης αυτής κατηγορίας είναι να εμπλέξουμε και τις δύο διαστάσεις της ευελιξίας και να φανερώσουμε τη σχέση μεταξύ τους. Συνεπώς, οι δύο παράγοντες δεύτερης τάξης οι οποίοι αποτελούν δύο είδη ευελιξίας φορτίζουν σε ένα παράγοντα τρίτης τάξης ο οποίος ονομάζεται εννοιολογική κατανόηση της συνάρτησης.

Μοντέλο 2Α



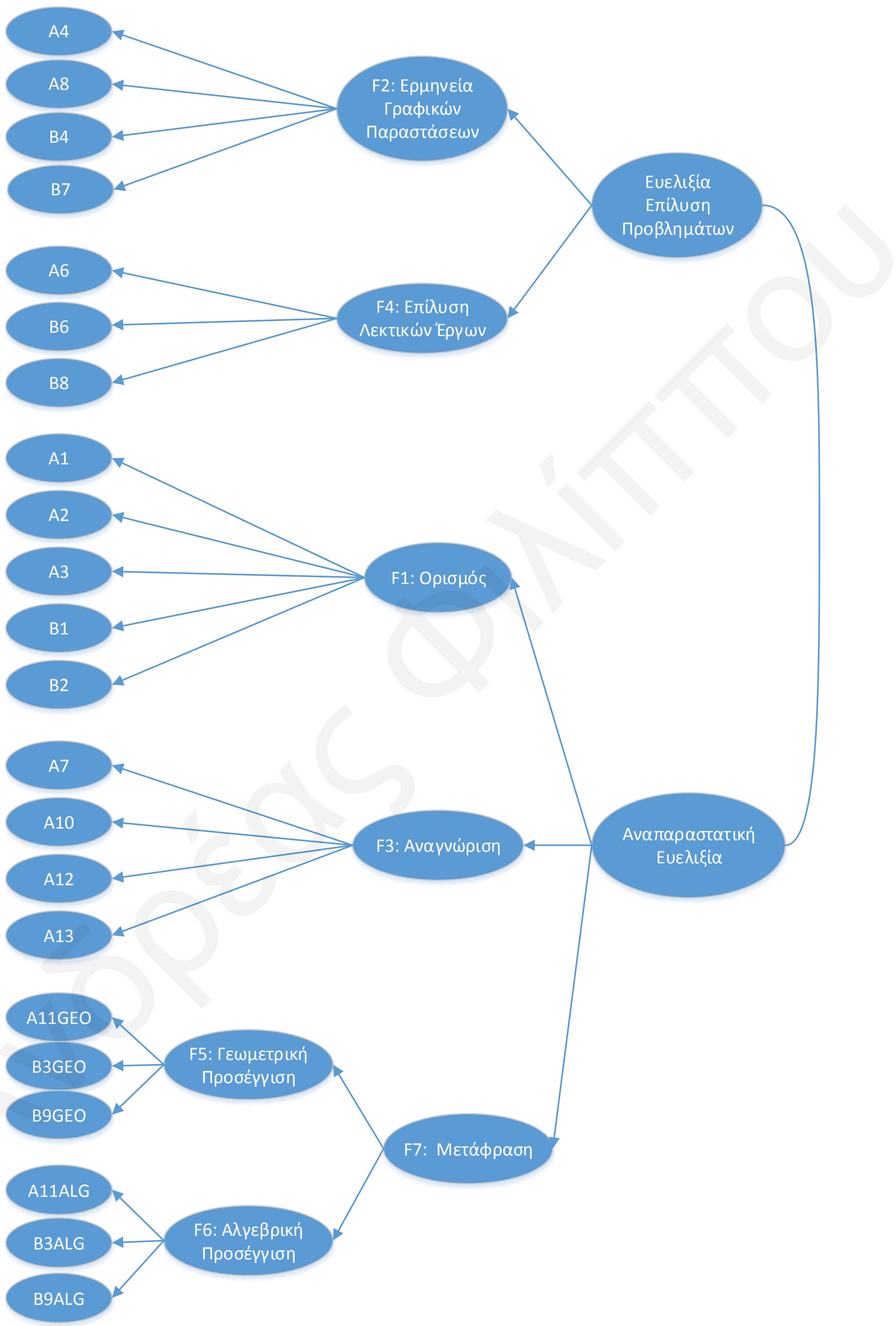
Διάγραμμα 3: Μοντέλο με πέντε παράγοντες πρώτης τάξης, δύο παράγοντες δεύτερης τάξης και ένα παράγοντα τρίτης τάξης

(2B) Μοντέλο με πέντε παράγοντες πρώτης τάξης

Οι πέντε παράγοντες πρώτης τάξης είναι ο ορισμός, η αναγνώριση, η ερμηνεία γραφημάτων, η επίλυση προβλημάτων και οι μεταφράσεις και εξετάζονται οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των δύο παραγόντων δεύτερης τάξης που είναι η ευελιξία επίλυσης προβλήματος και η αναπαραστατική ευελιξία.

Το μοντέλο αυτό περιορίζεται σε παράγοντες δεύτερης τάξης, γιατί εξετάζουμε τη συσχέτιση που υπάρχει μεταξύ των δύο παραγόντων δεύτερης τάξης που εκφράζονται με όρους ευελιξίας. Υπάρχει πολύ σημαντική συσχέτιση μεταξύ αυτών των παραγόντων. Αυτό είναι φυσιολογικό, διότι είτε την αναπαραστατική ευελιξία εξετάζουμε, είτε την ευελιξία επίλυσης λεκτικών προβλημάτων, οι αναπαραστάσεις παίζουν σημαντικό ρόλο, καθώς και ο συλλογισμός παρεμβαίνει για την επίλυση έργων είτε μετάφρασης, είτε ερμηνείας γραφικών παραστάσεων, είτε επίλυσης προβλημάτων. Για αυτό το λόγο και σε αυτό το δεύτερο μοντέλο ότι υπάρχει σχέση μεταξύ των δύο παραγόντων που αντιπροσωπεύουν την ευελιξία.

Μοντέλο 2Β



Διάγραμμα 4: Μοντέλο με πέντε παράγοντες πρώτης τάξης και δύο παράγοντες δεύτερης τάξης.

Τα Τελικά Δομικά Μοντέλα

Η εξερεύνηση της δομικής οργάνωσης της έννοιας της συνάρτησης πραγματοποιήθηκε με τη χρήση της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης (Confirmatory Factor Analysis – CFA). Η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση στοχεύει στο να ελέγξει την επάρκεια μιας θεωρητικής πρόβλεψης σχετικά με τον αριθμό των παραγόντων που βρίσκονται πίσω από ένα σύνολο μεταβλητών, και να υποστηρίξει προβλέψεις σχετικά με το ποιες μεταβλητές ‘προκαλούνται’ από ποιους παράγοντες (causation). Σε ένα μοντέλο με δομικές εξισώσεις περιλαμβάνονται δύο βασικοί τύποι στοιχείων: οι μεταβλητές και οι διαδικασίες ή οι σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών. Μια σχηματική αναπαράσταση ενός μοντέλου, παρέχει μια οπτική ερμηνεία των σχέσεων που υποθέσαμε ότι ισχύουν ανάμεσα στις μεταβλητές που μελετούμε. Η αξιοποίηση του συγκεκριμένου λογισμικού επιδίωκε στο να απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα της εργασίας και ελέγχθηκε ο βαθμός προσαρμογής μοντέλων επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης.

Χρησιμοποιήθηκαν τρεις δείκτες ελέγχου του βαθμού προσαρμογής των μοντέλων. Ο πρώτος δείκτης, σύμφωνα με τους Mouthen και Mouthen (2004), είναι ο λόγος του x^2 προς τους βαθμούς ελευθερίας του μοντέλου (x^2/df) που πρέπει να έχει τιμή μικρότερη του 2. Ο δεύτερος δείκτης είναι ο δείκτης comparative fit index (CFI), του οποίου η τιμή για να είναι αποδεκτή, πρέπει να είναι μεγαλύτερη από $.90$. Ο τρίτος είναι ο δείκτης RMSEA. που πρέπει να έχει τιμή μικρότερη του $.06$ (Marcoullides και Schumacker, 1996). Για να ελεγχθεί η εγκυρότητα και η καταλληλότητα του προτεινόμενου μοντέλου για την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης πραγματοποιήθηκε επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση (Marcoulides, G. A., & Schumacker, R. E., 1996) και (Ullstadius, E., Carlstedt, B., Gustafsson, J.E., 2004). Ο έλεγχος της εγκυρότητας γραμμικών δομικών μοντέλων στόχευε στην ανίχνευση αιτιατών σχέσεων μεταξύ των παραγόντων της έρευνας.

Μια σειρά από CFA μοντέλα σχετικά με την έννοια της συνάρτησης δοκιμάστηκαν και συγκρίθηκαν, προκειμένου να καταλήξουμε σε ένα μοντέλο που θα ταιριάζει καλύτερα στα δεδομένα από ό, τι σε άλλα μοντέλα. Αν η υπόθεση για το μοντέλο δεν είναι συνεπής με τα δεδομένα, το μοντέλο επανεξετάζεται και επανακαθορίζεται. Η εφαρμογή του αναθεωρημένου μοντέλου με το ίδια δεδομένα επαναξιολογείται (Byrne, 1994) και (Kline, 1998).

Έτσι, σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο της έρευνας εξετάστηκαν τέσσερα μοντέλα για τη δομή της έννοιας της συνάρτησης (Πίνακας 8 και Πίνακας 9), με βάση τις ιδιαιτερότητες και τις διαφοροποιήσεις που επεξηγήθηκαν για τα προτεινόμενα μοντέλα. Τα μοντέλα αυτά εξετάστηκαν τόσο για το συνολικό δείγμα, όσο και για το Γυμνάσιο και το Λύκειο ξεχωριστά, ώστε να μελετηθεί κατά πόσο η δομή αυτή παραμένει σταθερή και αναλλοίωτη και για τις δύο ηλικιακές ομάδες που μελετώνται στην έρευνα.

Πίνακας 8:

Οι δείκτες προσαρμογής των δομικών μοντέλων 1ης κατηγορίας

1η κατηγορία μοντέλων						
Μοντέλο με τέσσερις παράγοντες πρώτης τάξης (Ορισμός, Αναγνώριση, Ερμηνεία Γραφημάτων, Επίλυση Προβλημάτων) και παράγοντα δεύτερης τάξης (Εννοιολογική Κατανόηση Συνάρτησης)						
	CFA Model	df	x^2	$x^2/df < 2$	$CFI > 0.9$	$RMSEA < 0.006$
1A	Συνολικό Δείγμα	92	152,724	1,66	0,973	0,031(0,022 – 0,040)
	Γυμνάσιο	86	137,506	1,598	0,975	0,031(0,021 – 0,040)
	Λύκειο	92	149,0,38	1,619	0,973	0,031(0,022 – 0,040)
Μοντέλο με αλληλεπιδράσεις μεταξύ των τεσσάρων παραγόντων πρώτης τάξης (Ορισμός, Αναγνώριση, Ερμηνεία Γραφημάτων, Επίλυση Προβλημάτων)						
	CFA Model	df	x^2	$x^2/df < 2$	$CFI > 0.9$	$RMSEA < 0.006$
1B	Συνολικό Δείγμα	75	114,396	1,525	0,983	0,028(0,017 – 0,038)
	Γυμνάσιο	122	234,818	1,924	0,957	0,047(0,040 – 0,055)
	Λύκειο	86	128,007	1,488	0,976	0,028(0,017 – 0,037)

Πίνακας 9:

Οι δείκτες προσαρμογής των δομικών μοντέλων 2[ης] κατηγορίας

2η κατηγορία μοντέλων						
Μοντέλο με πέντε παράγοντες πρώτης τάξης (Ορισμός, Αναγνώριση, Ερμηνεία Γραφημάτων, Επίλυση Προβλημάτων, Μεταφράσεις), δύο παράγοντες δεύτερης τάξης (Ευελιξία επίλυσης προβλήματος, Αναπαραστατική Ευελιξία) και ένα παράγοντα τρίτης τάξης (Εννοιολογική Κατανόηση Συνάρτησης)						
	CFA Model	df	x^2	$x^2/df < 2$	$CFI > 0.9$	$RMSEA < 0.006$
2A	Συνολικό Δείγμα	185	344,451	1,861	0,953	0.037 (0.031–0.043)
	Γυμνάσιο	167	307,677	1,842	0,9573	0,037(0,030-0,043)
	Λύκειο	168	333,811	1,986	0,954	0,040(0,033-0,046)
Μοντέλο με πέντε παράγοντες πρώτης τάξης (Ορισμός, Αναγνώριση, Ερμηνεία Γραφημάτων, Επίλυση Προβλημάτων, Μεταφράσεις) και αλληλεπιδράσεις μεταξύ των δύο παραγόντων δεύτερης τάξης (Ευελιξία επίλυσης προβλήματος, Αναπαραστατική Ευελιξία)						
	CFA Model	df	x^2	$x^2/df < 2$	$CFI > 0.9$	$RMSEA < 0.006$
2B	Συνολικό Δείγμα	185	344,451	1,861	0,953	0,037(0,031-0,043)
	Γυμνάσιο	168	307,677	1,831	0,957	0,036(0,030-0,043)
	Λύκειο	169	333.814	1,975	0,954	0,039(0,033-0,045)

$1^{η}$ *Κατηγορία τελικών δομικών μοντέλων*

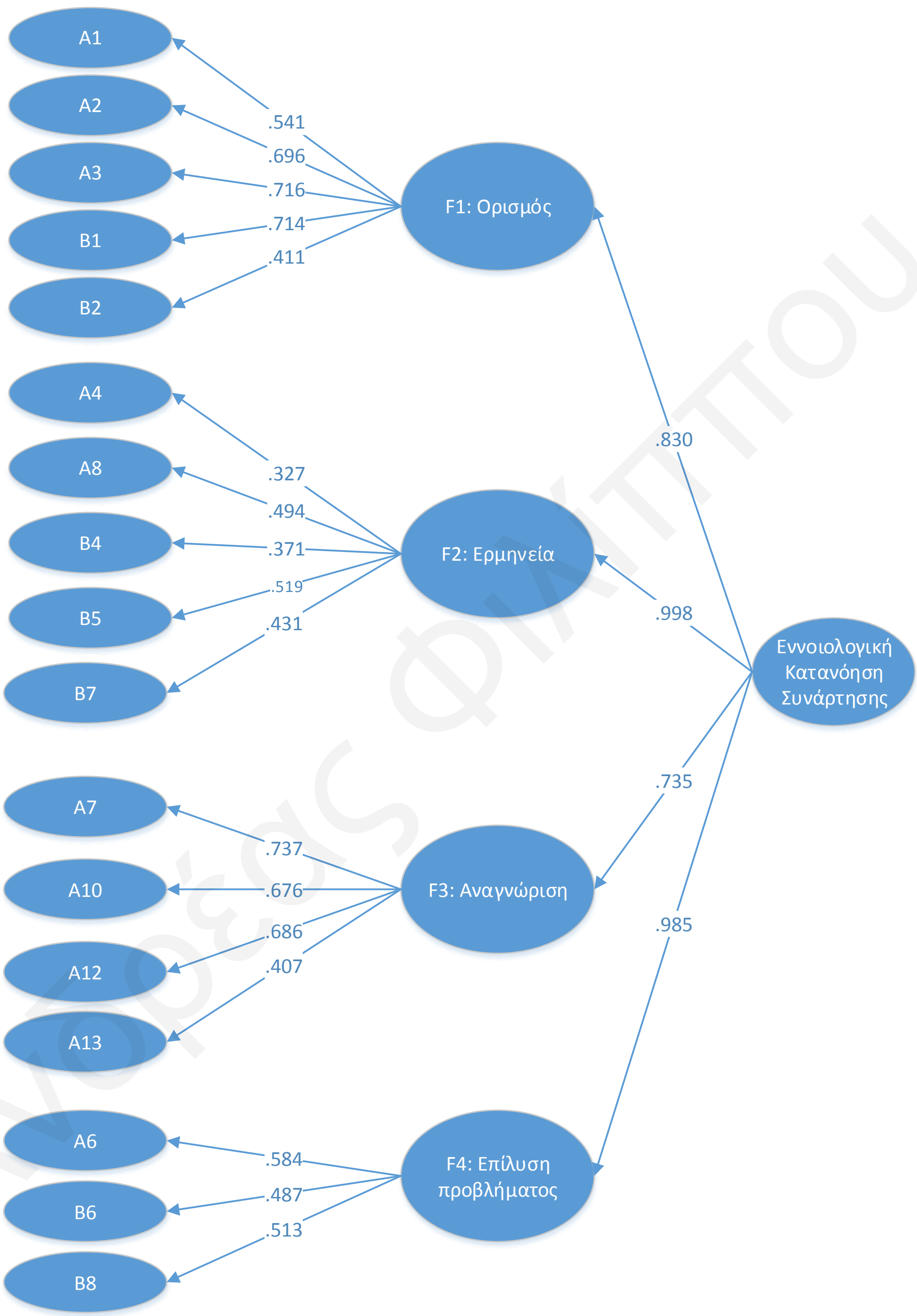
(1Α) Μοντέλο με τέσσερις παράγοντες πρώτης τάξης και παράγοντα δεύτερης τάξης.

Οι τέσσερις παράγοντες πρώτης τάξης είναι ο ορισμός, η αναγνώριση, η ερμηνεία γραφημάτων και η επίλυση προβλημάτων και ο παράγοντας δεύτερης τάξης είναι η εννοιολογική κατανόηση της συνάρτησης.

Το μοντέλο 1 αποτελεί ένα δεύτερης τάξης μοντέλο, του οποίου οι δείκτες φανερώνουν ότι το μοντέλο έχει καλή προσαρμογή στα δεδομένα [CFI= 0.973, x^2 (92) = 152.724, RMSEA= 0.031]. Συγκεκριμένα το μοντέλο αυτό αποτελείται από τέσσερις $1^{ης}$ τάξης παράγοντες με πολύ καλές φορτίσεις των έργων του τεστ σε αυτούς (όλες >0.400), με εξαίρεση δύο μόνο φορτίσεις που είναι λίγο χαμηλότερες. Ο πρώτος παράγοντας $1^{ης}$ τάξης (F1) δημιουργείται από έργα που εξετάζουν τη γνώση των μαθητών για τον ορισμό της συνάρτησης. Ο δεύτερος παράγοντας $1^{ης}$ τάξης (F2) αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών για ερμηνεία γραφημάτων, έτσι τα αντίστοιχα έργα ομαδοποιούνται στον παράγοντα αυτό. Στον τρίτο παράγοντα $1^{ης}$ τάξης (F3) φορτίζουν τα έργα που αφορούν στην αναγνώριση συναρτήσεων, ενώ στον τέταρτο παράγοντα $1^{ης}$ τάξης (F4) συγκεντρώνονται τα έργα που εξετάζουν την ικανότητα επίλυσης λεκτικών προβλημάτων των μαθητών. Οι τέσσερις αυτοί $1^{ης}$ τάξης παράγοντες φορτίζουν με εξαιρετικά ψηλές φορτίσεις (0.737-0.998) σε ένα $2^{ης}$ τάξης παράγοντα, που αντιστοιχεί στην εννοιολογική κατανόηση της συνάρτησης.

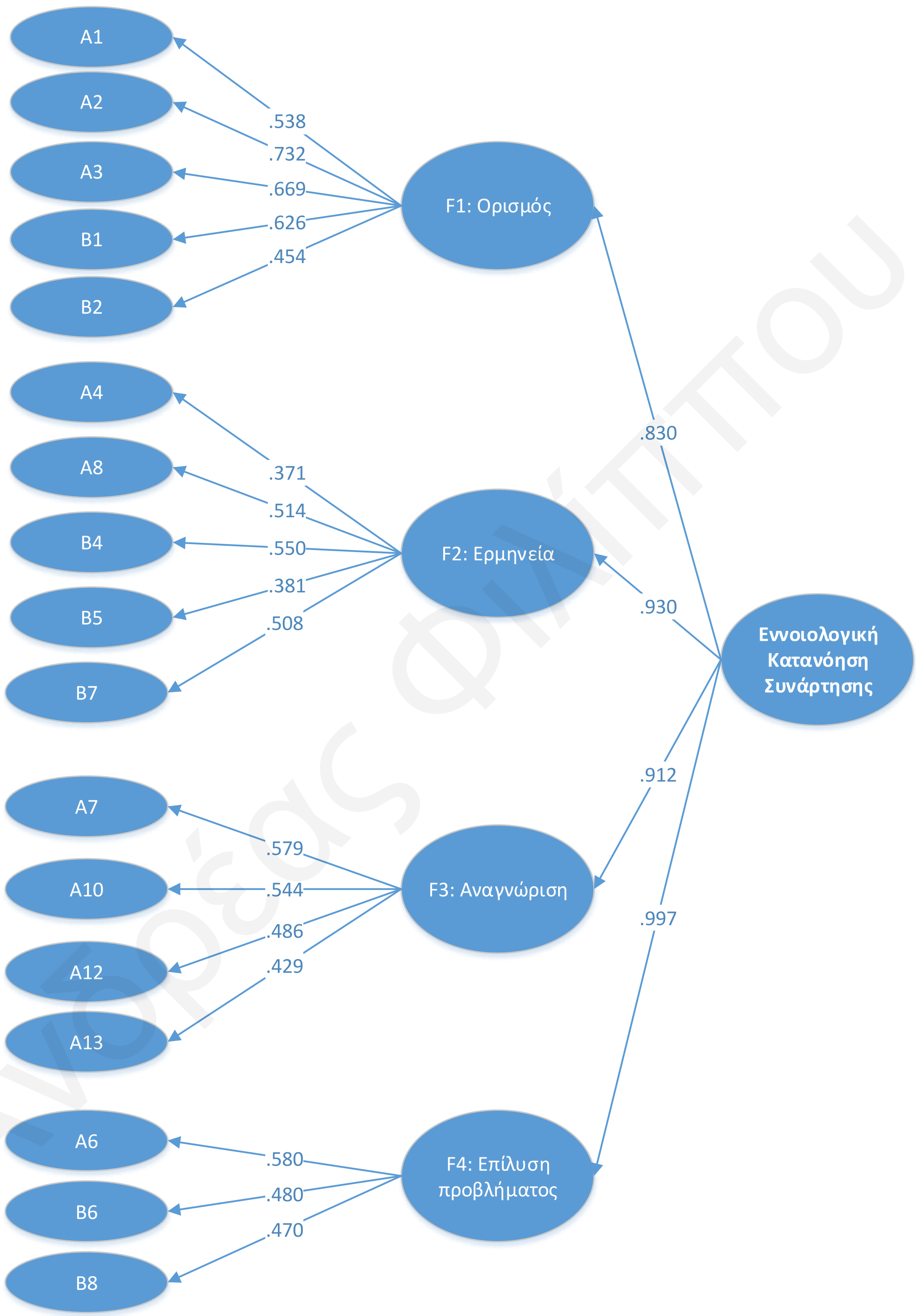
Οι ψηλές φορτίσεις όλων των παραγόντων $1^{ης}$ τάξης στον παράγοντα $2^{ης}$ τάξης φανερώνουν τη σημασία των διαφόρων διαστάσεων που αναφέρθηκαν στην εννοιολογική οικοδόμηση της έννοιας της συνάρτησης. Παρόλα αυτά η σημασία της ερμηνεία γραφημάτων, καθώς και της επίλυσης προβλημάτων αναδεικνύεται εντονότερα, αφού οι παράγοντες αυτοί παρουσιάζουν ψηλότερες φορτίσεις στον $2^{ης}$ τάξης παράγοντα, σε σχέση με τις υπόλοιπες δύο διαστάσεις.

Μοντέλο 1Α (Συνολικό Δείγμα)



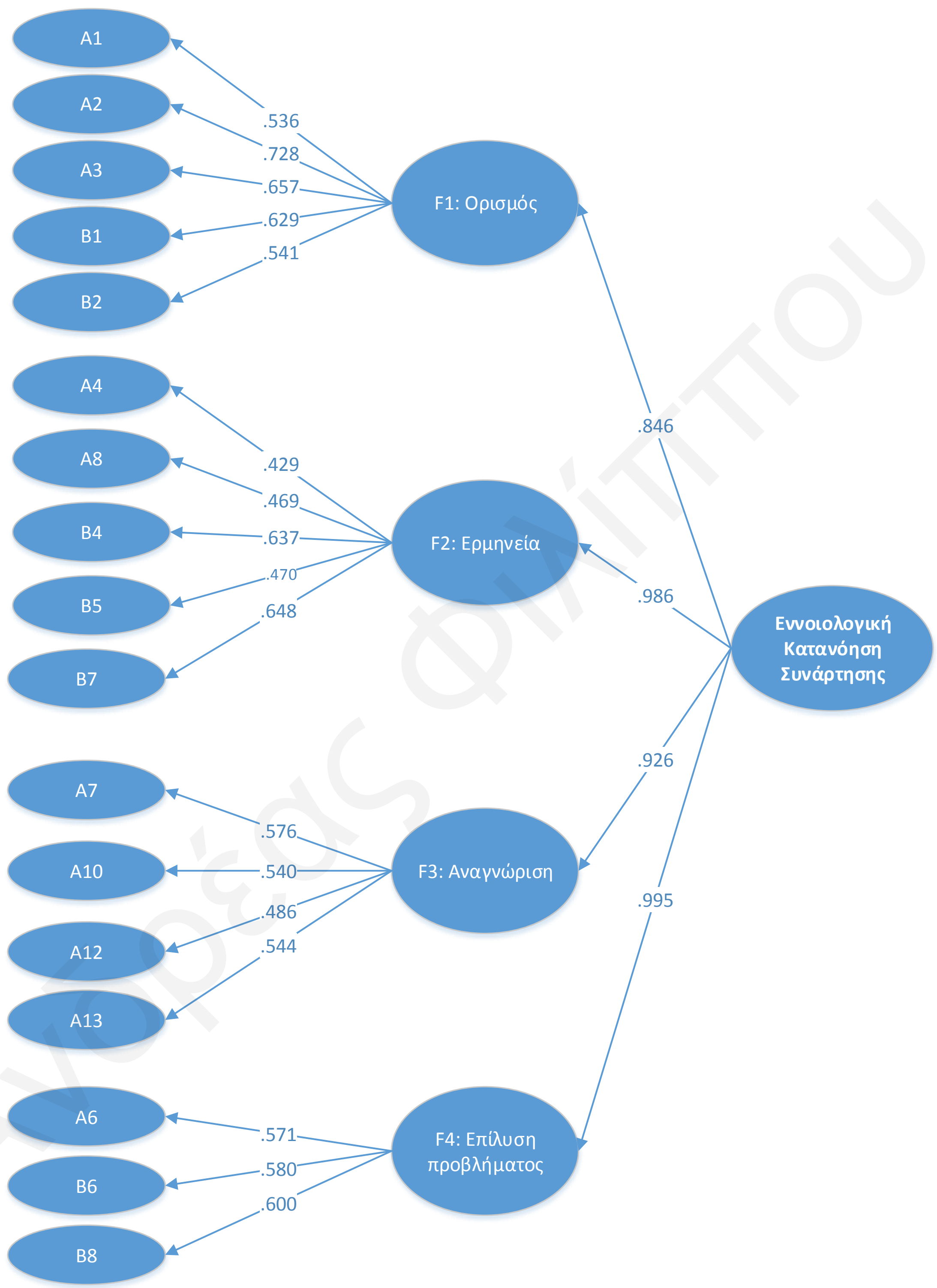
Διάγραμμα 5: Μοντέλο με τέσσερις παράγοντες πρώτης τάξης και παράγοντα δεύτερης τάξης για το συνολικό δείγμα.

Μοντέλο 1Α



Διάγραμμα 6: Μοντέλο με τέσσερις παράγοντες πρώτης τάξης και παράγοντα δεύτερης τάξης για το Γυμνάσιο.

Μοντέλο 1Α



Διάγραμμα 7: Μοντέλο με τέσσερις παράγοντες πρώτης τάξης και παράγοντα δεύτερης τάξης για το Λύκειο.

(1Β) Μοντέλο με αλληλεπιδράσεις μεταξύ των τεσσάρων παραγόντων πρώτης τάξης.

Οι τέσσερεις παράγοντες πρώτης τάξης είναι ο ορισμός, η αναγνώριση, η ερμηνεία γραφημάτων και η επίλυση προβλημάτων.

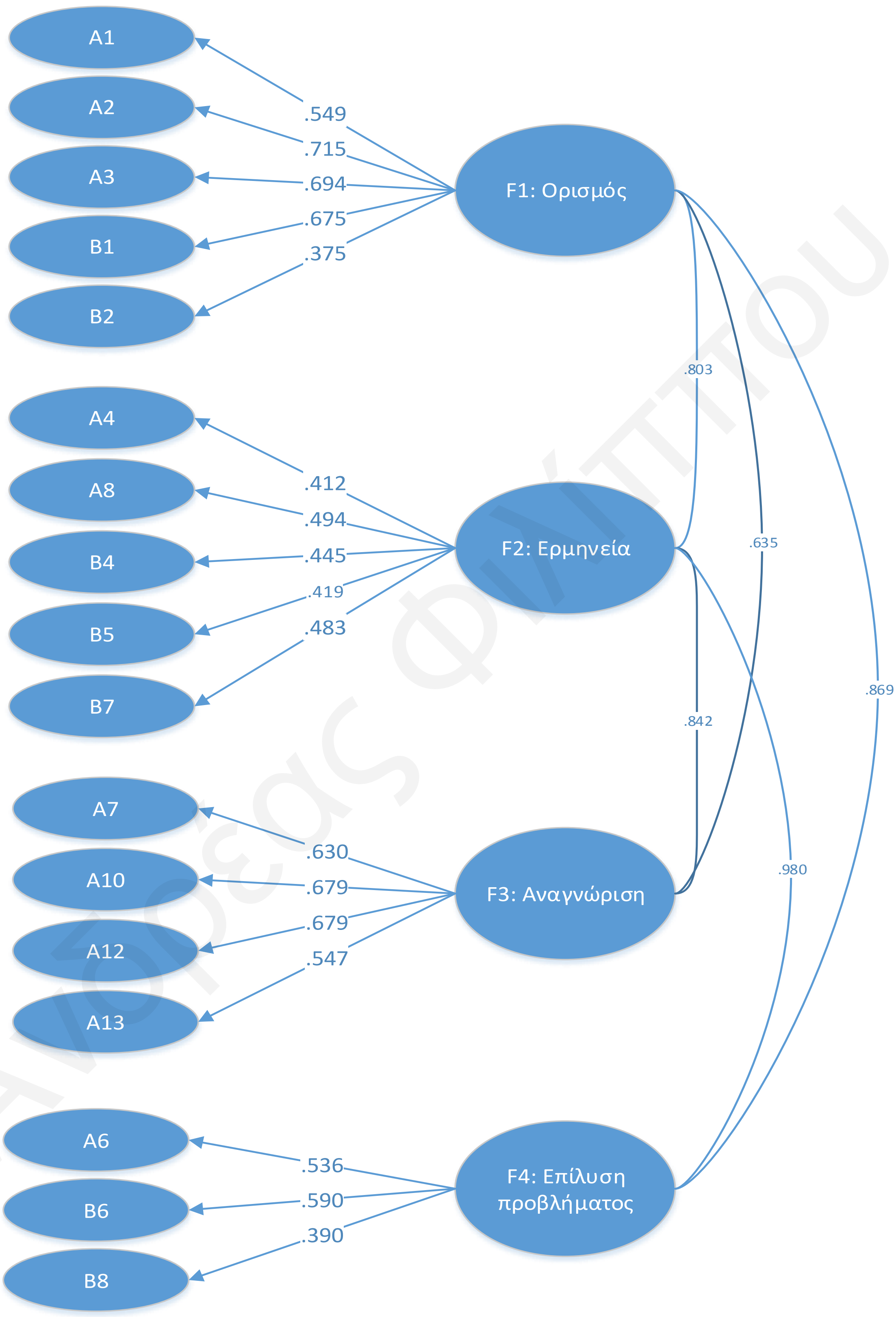
Στη συνέχεια παρουσιάζεται ένα δεύτερο μοντέλο, το οποίο παρουσιάζει ομοιότητες με το πρώτο μοντέλο, καθώς και διαφοροποιήσεις. Συγκεκριμένα, στο $2^{ο}$ μοντέλο διατηρούνται οι τέσσερις παράγοντες $1^{ης}$ τάξης. Η διαφοροποίηση έγκειται στον έλεγχο των σχέσεων αλληλεπίδρασης των παραγόντων αυτών μεταξύ τους. Η εξέταση της αλληλεπίδρασης αυτής σχετίζεται με το ότι μία σχέση αλληλεπίδρασης δείχνει ότι τα άτομα που έχουν ψηλή επίδοση σε ένα παράγοντα, διατηρούν τις ίδιες διατομικές διαφορές και στον άλλο παράγοντα. Οι δείκτες προσαρμογής δείχνουν ότι το μοντέλο αυτό έχει καλή προσαρμογή στα δεδομένα [CFI= 0.983, x^2 (75) = 114.396, RMSEA= 0.028]. Επίσης παρουσιάζονται πολύ καλές φορτίσεις των έργων του τεστ στους τέσσερις παράγοντες $1^{ης}$ τάξης (όλες>0.400).

Στατιστικά σημαντική σχέση αλληλεπίδρασης (0.803) προκύπτει μεταξύ των παραγόντων που αντιστοιχούν στον ορισμό και στην ερμηνεία γραφημάτων, που δείχνει ότι τα άτομα που μπορούν να ορίζουν τη συνάρτηση είναι την ίδια στιγμή άτομα με ψηλή επίδοση στην ικανότητα ερμηνείας των γραφημάτων. Η ικανότητα ορισμού της έννοιας έχει στατιστικά σημαντική σχέση αλληλεπίδρασης (0.635) με την αναγνώριση συναρτήσεων, καθώς και με την επίλυση λεκτικών προβλημάτων (0.869).

Συνεπώς, η ικανότητα των μαθητών να ορίζουν την έννοια της συνάρτησης φαίνεται να λειτουργεί ως ρυθμιστικός παράγοντας για τις άλλες διαστάσεις της εννοιολογικής κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης, με τις διατομικές διαφορές που παρατηρούνται στον ορισμό της έννοιας να διατηρούνται και στις άλλες διαστάσεις. Η γνώση του ορισμού φαίνεται να διαδραματίζει εντονότερο ρόλο στην επίλυση προβλημάτων, με την οποία παρουσιάζεται η ισχυρότερη σχέση αλληλεπίδρασης.

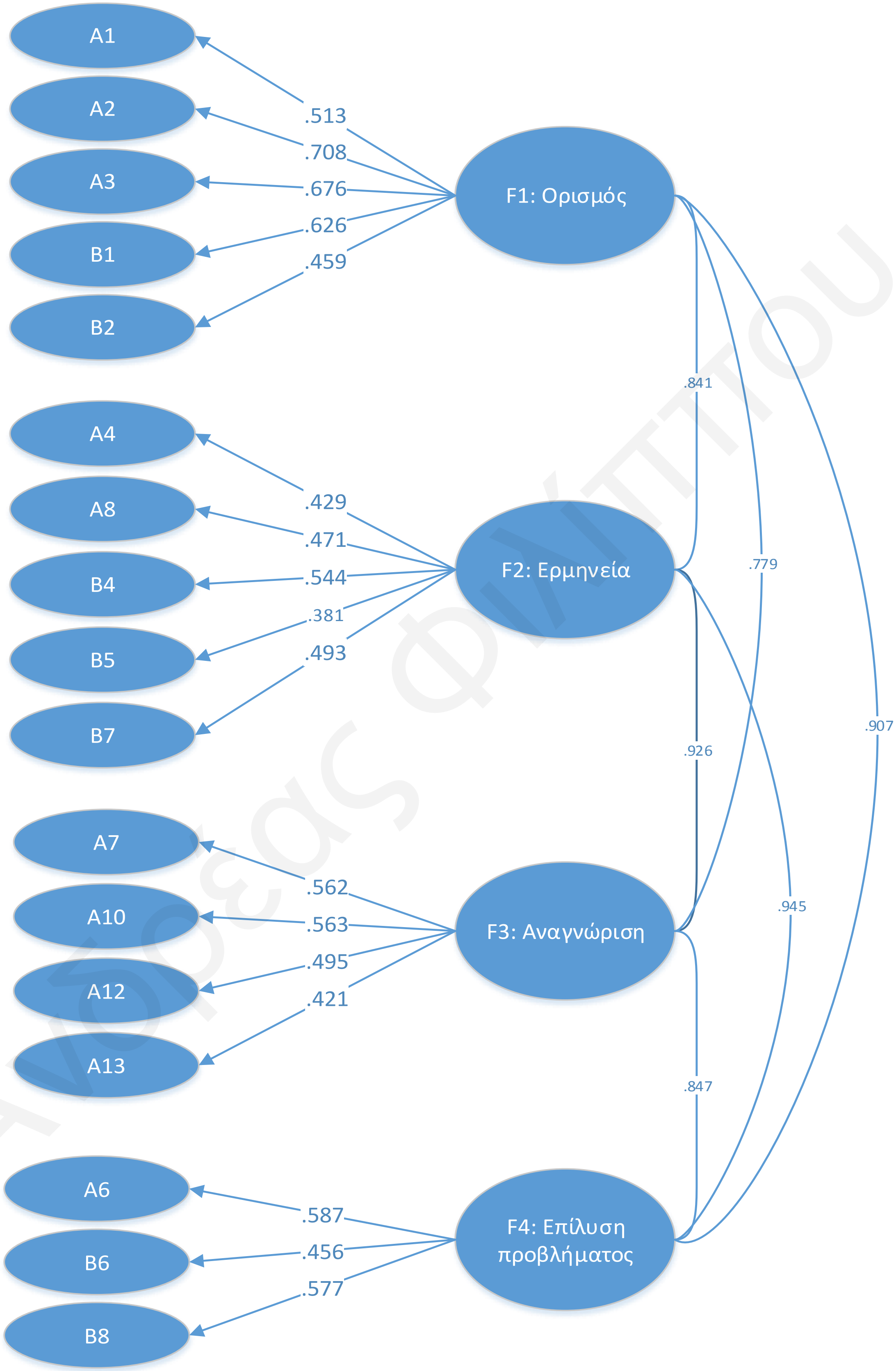
Πρόσθετα σχέση αλληλεπίδρασης προκύπτει και ανάμεσα στην ερμηνεία των γραφημάτων και την αναγνώριση (0.842), όπως και μεταξύ της ερμηνείας των γραφημάτων και της επίλυσης λεκτικών προβλημάτων (0.980). Συνεπώς, αναδεικνύεται η σημασία της ικανότητας ερμηνείας γραφημάτων και κυρίως για την επίλυση προβλημάτων συναρτήσεων, με την οποία σχηματίζει πιο έντονη αλληλεπίδραση με βάση το δείκτη που προκύπτει, σε σχέση με την αναγνώριση.

Μοντέλο 1Β



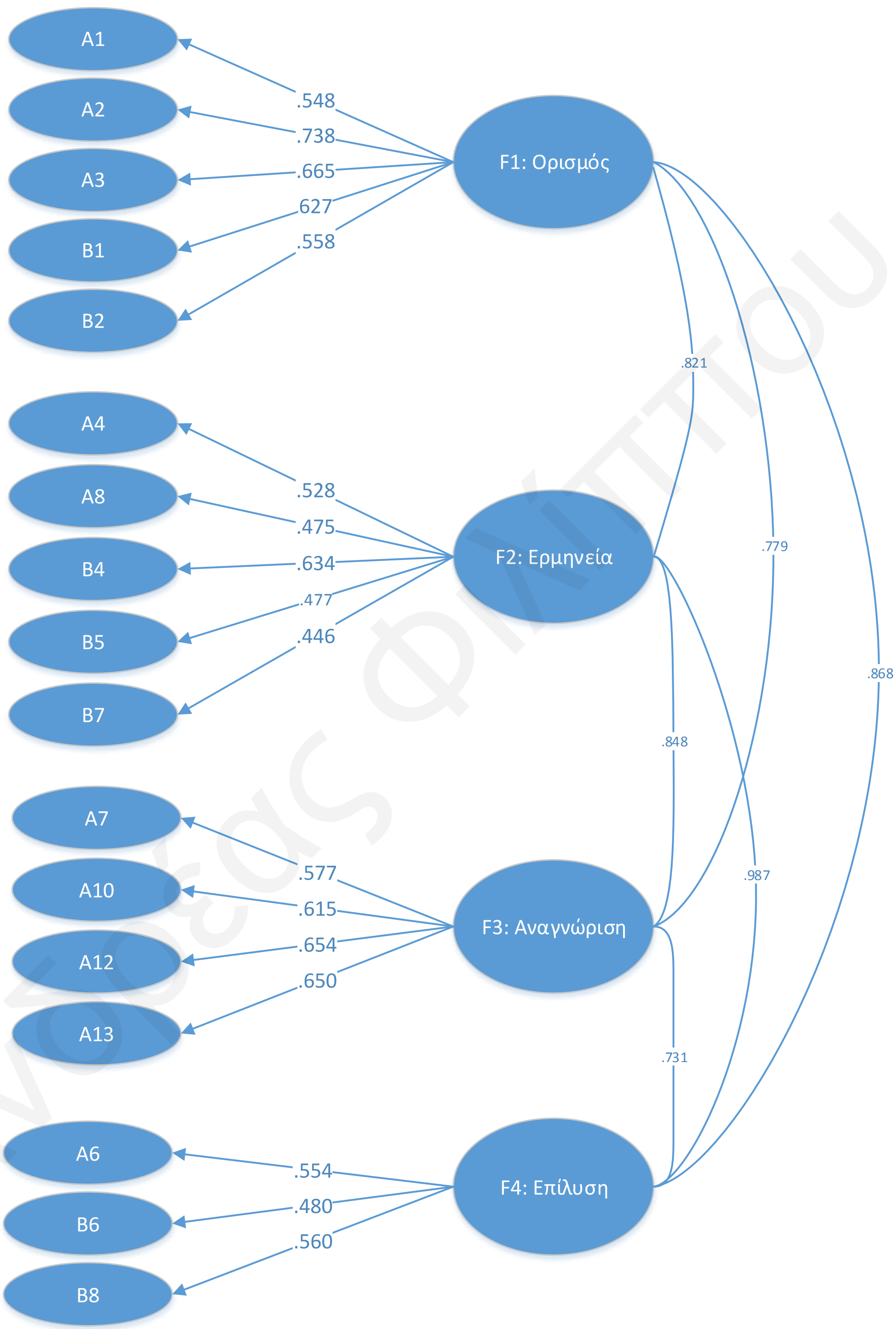
Διάγραμμα 8: Μοντέλο με αλληλεπιδράσεις μεταξύ των τεσσάρων παραγόντων πρώτης τάξης για το συνολικό δείγμα.

Μοντέλο 1Β



Διάγραμμα 9: Μοντέλο με αλληλεπιδράσεις μεταξύ των τεσσάρων παραγόντων πρώτης τάξης για το Γυμνάσιο.

Μοντέλο 1Β



Διάγραμμα 10: Μοντέλο με αλληλεπιδράσεις μεταξύ των τεσσάρων παραγόντων πρώτης τάξης για το Λύκειο.

$2^{η}$ *Κατηγορία Μοντέλων*

(2Α) Μοντέλο με πέντε παράγοντες πρώτης τάξης, δύο παράγοντες δεύτερης τάξης και ένα παράγοντα τρίτης τάξης.

Οι πέντε παράγοντες πρώτης τάξης είναι ο ορισμός, η αναγνώριση, η ερμηνεία γραφημάτων, η επίλυση προβλημάτων και οι μεταφράσεις. Οι δύο παράγοντες δεύτερης τάξης είναι η ευελιξία επίλυσης προβλήματος και η αναπαραστατική ευελιξία και ο παράγοντας τρίτης τάξης είναι η εννοιολογική κατανόηση συνάρτησης.

Το $3^{ης}$ τάξης μοντέλο αποτελείται από πέντε παράγοντες 1ης τάξης που φορτίζουν σε δύο παράγοντες 2ης τάξης και ακολούθως σχηματίζουν ένα 3ης τάξης παράγοντα. Όλα τα έργα φορτίζουν με ψηλούς δείκτες στους αντίστοιχους παράγοντες $1^{ης}$ τάξης. Το μοντέλο αυτό είναι αποδεκτό, αφού οι δείκτες δείχνουν την καλή προσαρμογή του στα δεδομένα [CFI= 0.956, x^2 (585) = 1127, RMSEA= 0.051].

Στον πρώτο παράγοντα $2^{ης}$ τάξης φορτίζουν με πολύ ψηλές φορτίσεις ο $1^{ης}$ τάξης παράγοντας που αντιστοιχεί στην ερμηνεία των γραφημάτων (0.998) και ο $1^{ης}$ τάξης παράγοντας που αναφέρεται στην επίλυση λεκτικών έργων (0.924). Συνεπώς ο παράγοντας αυτός φαίνεται να εκφράζει την ευελιξία επίλυσης προβλημάτων.

Ο δεύτερος παράγοντας $2^{ης}$ τάξης αποτελείται από τρεις παράγοντες $1^{ης}$ τάξης που αποτελούν την ικανότητα κατανόησης και διατύπωσης ορισμού για την έννοια (0.8730), την αναγνώριση (0.735) και τη μετάφραση (0.617). Ειδικότερα, ο παράγοντας για τη μετάφραση των έργων σχηματίζεται από δύο υποπαράγοντες, οι οποίοι αντανακλούν τη χρήση της γεωμετρικής και της αλγεβρικής προσέγγισης αντίστοιχα κατά την επίλυση τους. Με βάση τις φορτίσεις φαίνεται ότι η χρήση της αλγεβρικής προσέγγισης επηρεάζει σε μεγαλύτερο βαθμό την επίλυση των έργων μετάφρασης, παρά η χρήση της γεωμετρικής προσέγγισης.

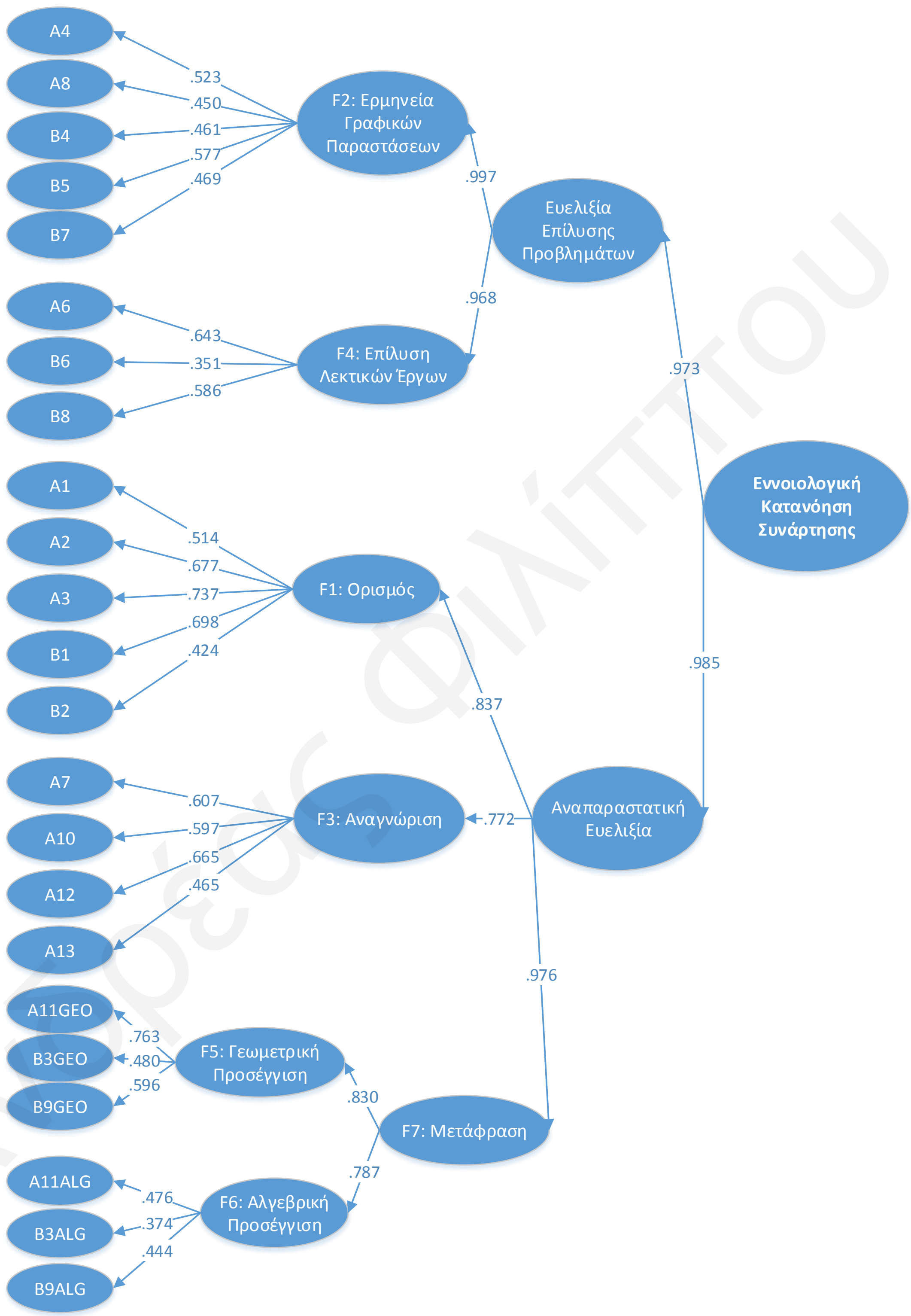
Από τις διαστάσεις που φορτίζουν σε αυτό τον παράγοντα $2^{ης}$ τάξης, ο παράγοντας αυτός μπορεί να χαρακτηριστεί ως η αναπαραστατική ευελιξία των μαθητών για την έννοια της συνάρτησης. Κοιτάζοντας τις φορτίσεις των παραγόντων $1^{ης}$ τάξης στον $2^{ης}$ τάξης παράγοντα αυτό, προκύπτει ότι ο παράγοντας που αντιστοιχεί στον ορισμό της συνάρτησης παρουσιάζει την ψηλότερη φόρτιση, σε σχέση με τους άλλους δύο παράγοντες $1^{ης}$ τάξης.

Φαίνεται, λοιπόν, η αυξημένη σημασία της γνώσης του ορισμού της συνάρτησης στην αναπαραστατική ευελιξία των μαθητών για την έννοια της συνάρτησης.

Οι δύο 2ης τάξης παράγοντες φορτίζουν στον γενικότερο παράγοντα 3ης τάξης, που εκφράζει την εννοιολογική κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης.

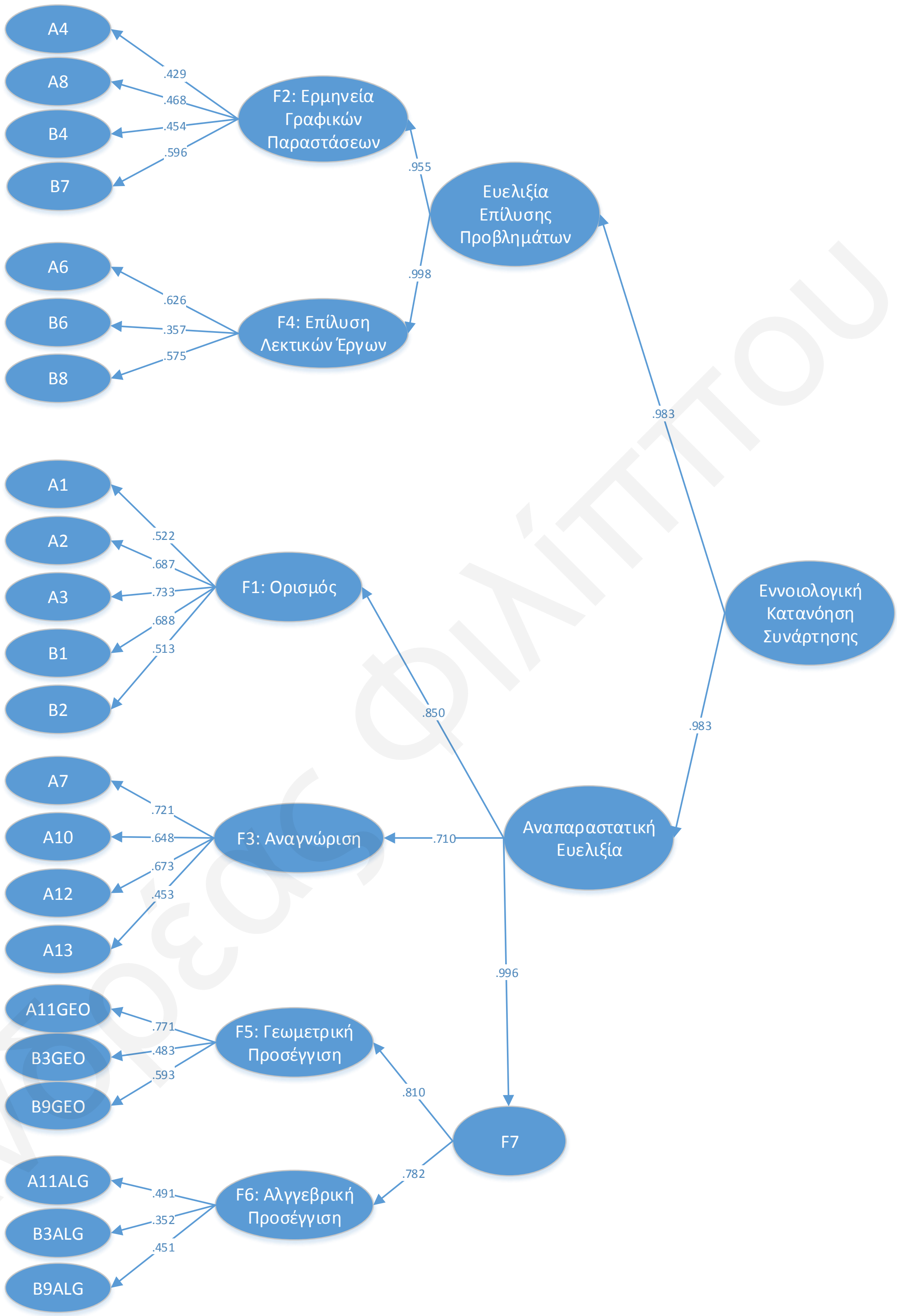
Συνεπώς, το μοντέλο αυτό δείχνει ότι η ευελιξία των μαθητών κατά την επίλυση έργων συναρτήσεων εξαρτάται από την ικανότητα τους να ερμηνεύουν γραφήματα και να επιλύουν λεκτικά προβλήματα. Επιπλέον, οι μαθητές για να αναπτύξουν την αναπαραστατική τους ευελιξία, χρειάζεται να βελτιώσουν τις γνώσεις τους για τον ορισμό της έννοιας και τις ικανότητες τους για αναγνώριση και μετάφραση της έννοιας, μέσα από την υιοθέτηση της αλγεβρικής και της γεωμετρικής προσέγγισης. Η ευελιξία κατά την επίλυση έργων συναρτήσεων και η αναπαραστατική ευελιξία των μαθητών επιτρέπει την εννοιολογική οικοδόμηση της γνώσης για την έννοια της συνάρτησης.

Μοντέλο 2Α



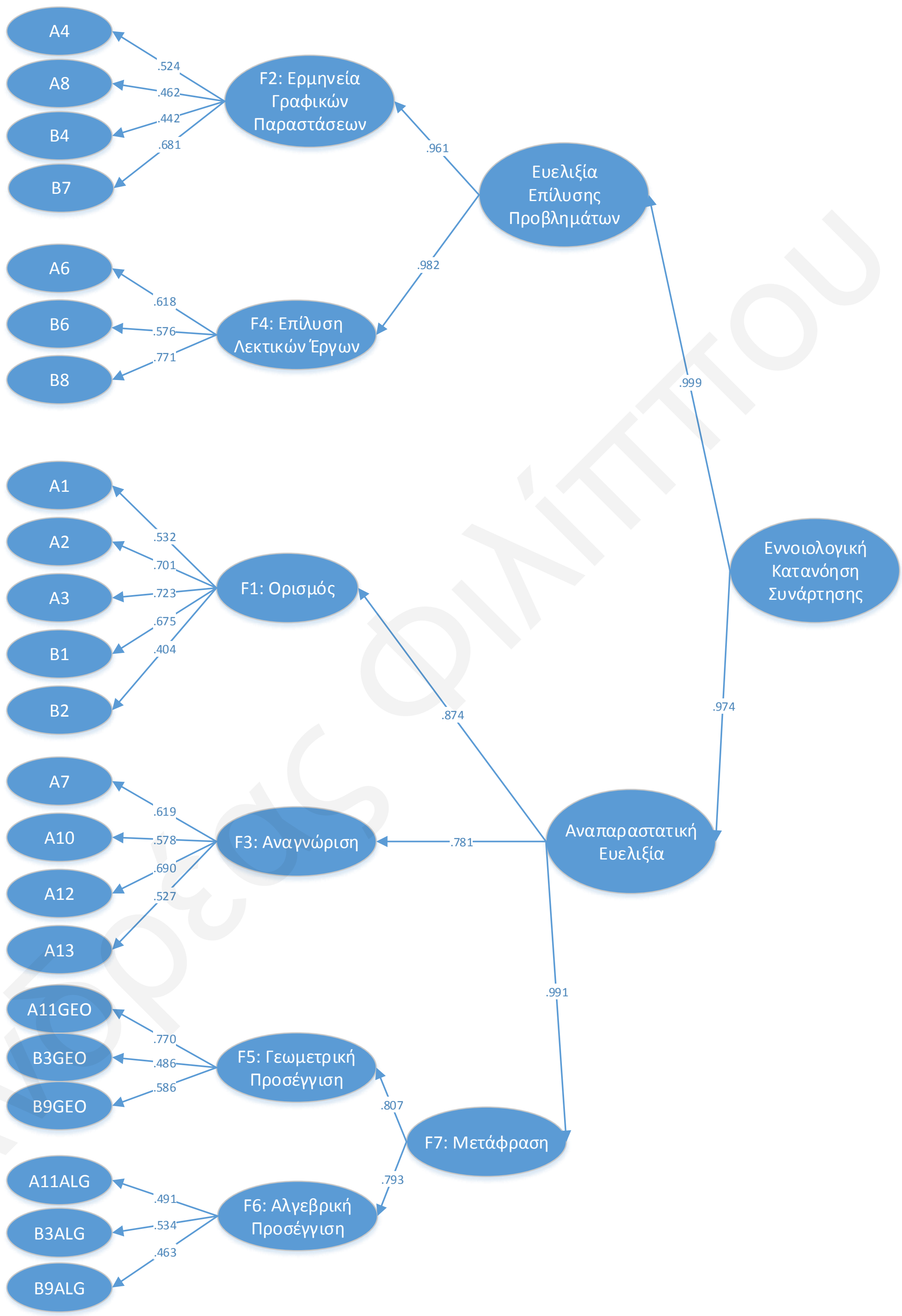
Διάγραμμα 11: Μοντέλο με πέντε παράγοντες πρώτης τάξης, δύο παράγοντες δεύτερης τάξης και ένα παράγοντα τρίτης τάξης για το συνολικό δείγμα.

Μοντέλο 2Α



Διάγραμμα 12: Μοντέλο με πέντε παράγοντες πρώτης τάξης, δύο παράγοντες δεύτερης τάξης και ένα παράγοντα τρίτης τάξης για το Γυμνάσιο.

Μοντέλο 2Α



Διάγραμμα 13: Μοντέλο με πέντε παράγοντες πρώτης τάξης, δύο παράγοντες δεύτερης τάξης και ένα παράγοντα τρίτης τάξης για το Λύκειο.

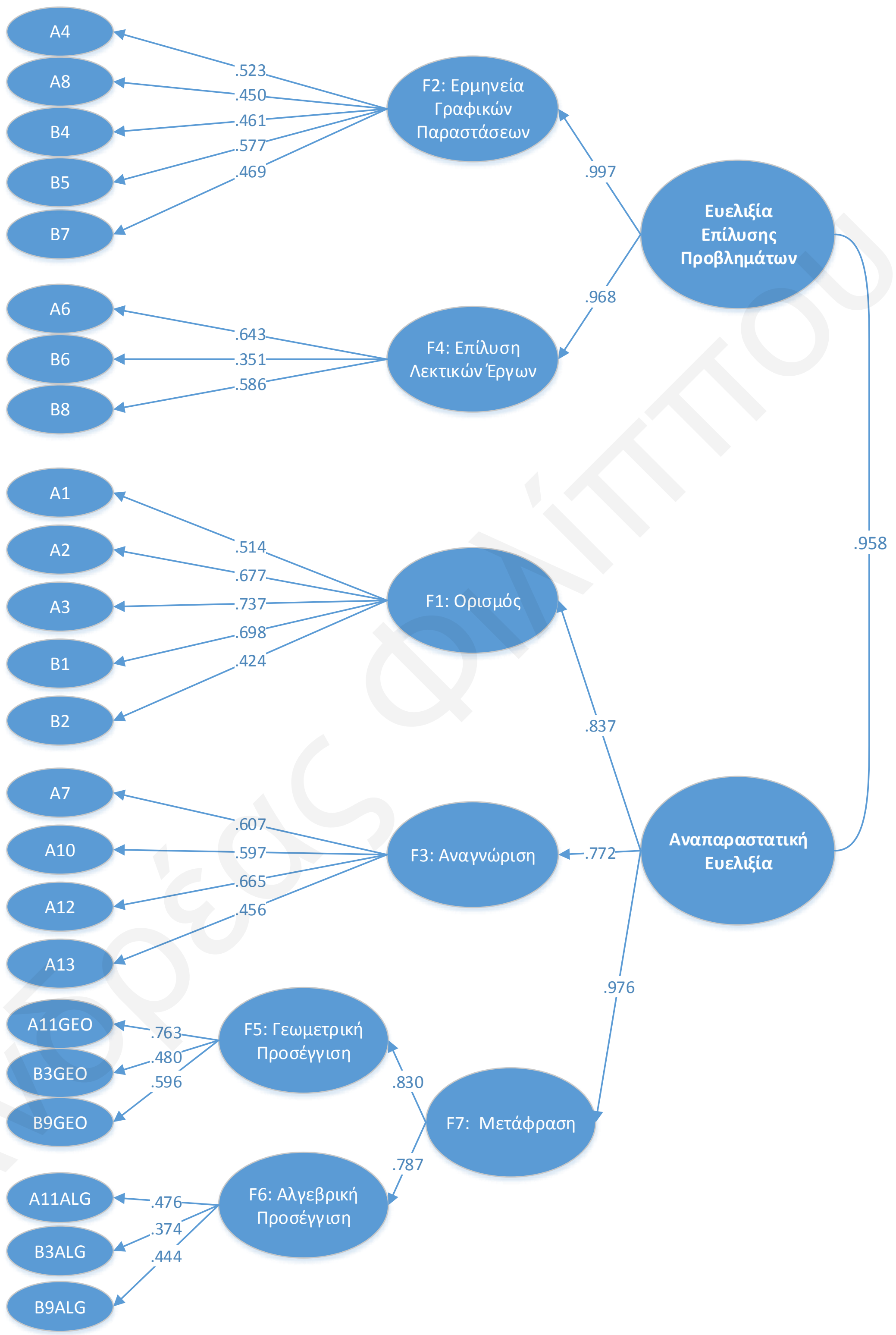
(2Β) Μοντέλο με πέντε παράγοντες πρώτης τάξης και αλληλεπιδράσεις μεταξύ των δύο παραγόντων δεύτερης τάξης.

Οι πέντε παράγοντες πρώτης τάξης είναι ο ορισμός, η αναγνώριση, η ερμηνεία γραφημάτων, η επίλυση προβλημάτων και οι μεταφράσεις και αλληλεπιδράσεις μεταξύ των δύο παραγόντων δεύτερης τάξης που είναι η ευελιξία επίλυσης προβλήματος και η αναπαραστατική ευελιξία.

Στο ακόλουθο μοντέλο διατηρούνται οι δομικές σχέσεις που προκύπτουν και στο προηγούμενο μοντέλο. Αυτό που διαφοροποιεί το νέο μοντέλο από το προηγούμενο είναι το ότι εξετάζεται η σχέση αλληλεπίδρασης μεταξύ των δύο παραγόντων $2^{ης}$ τάξης. Συνεπώς, στόχος του μοντέλου αυτού είναι να δείξει τη σχέση αλληλεπίδρασης μεταξύ της ευελιξίας στην επίλυσης προβλήματος και της αναπαραστατικής ευελιξίας για την έννοια της συνάρτησης. Οι δείκτες προσαρμογής επιτρέπουν την αποδοχή του μοντέλου, με καλή προσαρμογή στα δεδομένα [CFI= 0.9567, x^2 (576) = 1106, RMSEA= 0.050]. Οι φορτίσεις των έργων του τεστ στους τέσσερις παράγοντες $1^{ης}$ τάξης είναι ψηλές (όλες>0.400), με εξαίρεση τις φορτίσεις σε τέσσερα έργα οι οποίες είναι λίγο χαμηλότερες (>0.300).

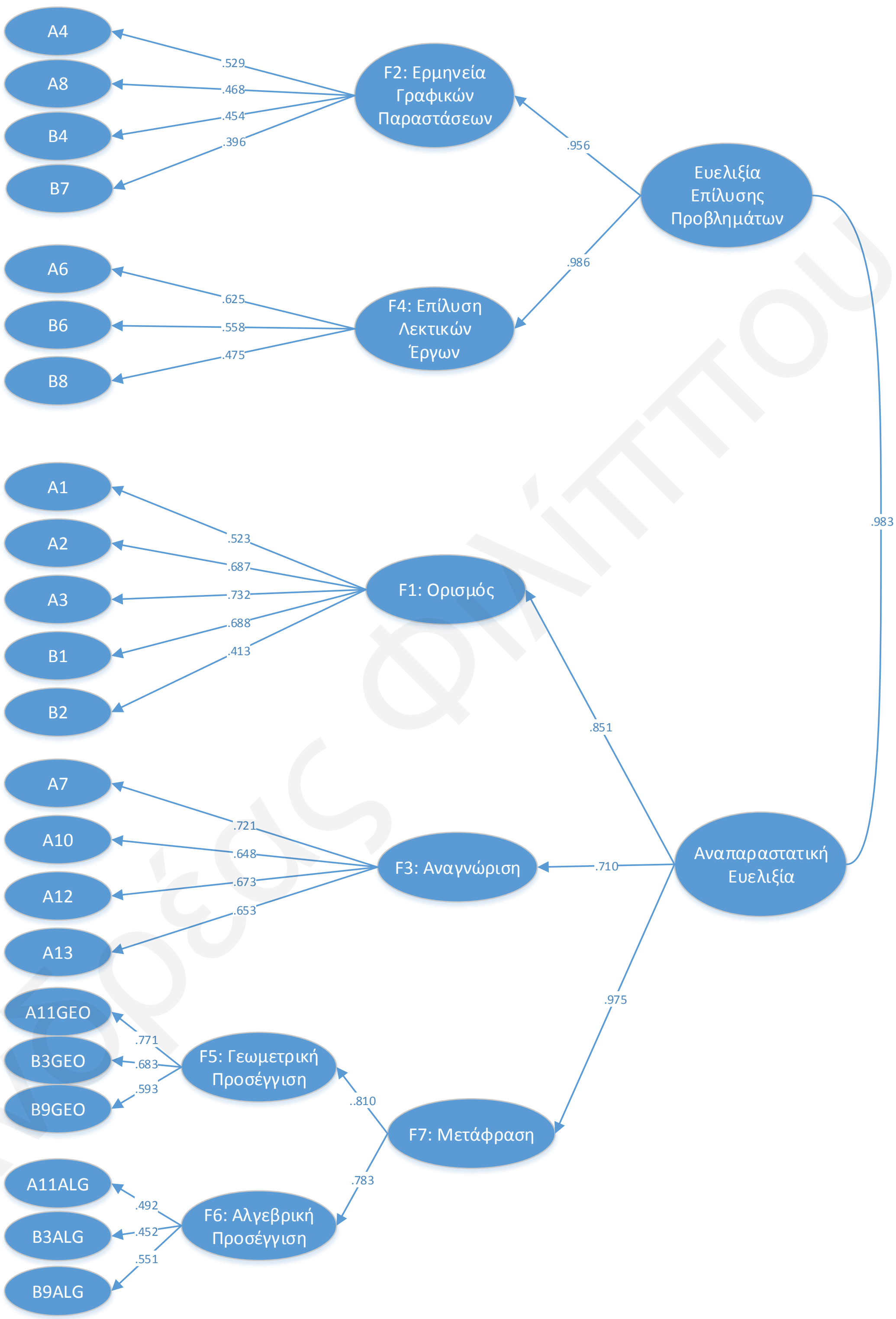
Η σχέση αλληλεπίδρασης που προκύπτει μεταξύ της ευελιξίας στην επίλυση προβλήματος και της αναπαραστατικής ευελιξίας είναι στατιστικά σημαντική και ισχυρή (0.846). Αυτό φανερώνει ότι οι μαθητές που επιδεικνύουν ευελιξία στην επίλυση προβλήματος έχουν ταυτόχρονα και αναπαραστατική ευελιξία. Συνεπώς, οι διατομικές διαφορές που παρατηρούνται στην ευελιξία στην επίλυση προβλήματος παρατηρούνται και στην αναπαραστατική ευελιξία των μαθητών.

Μοντέλο 2B



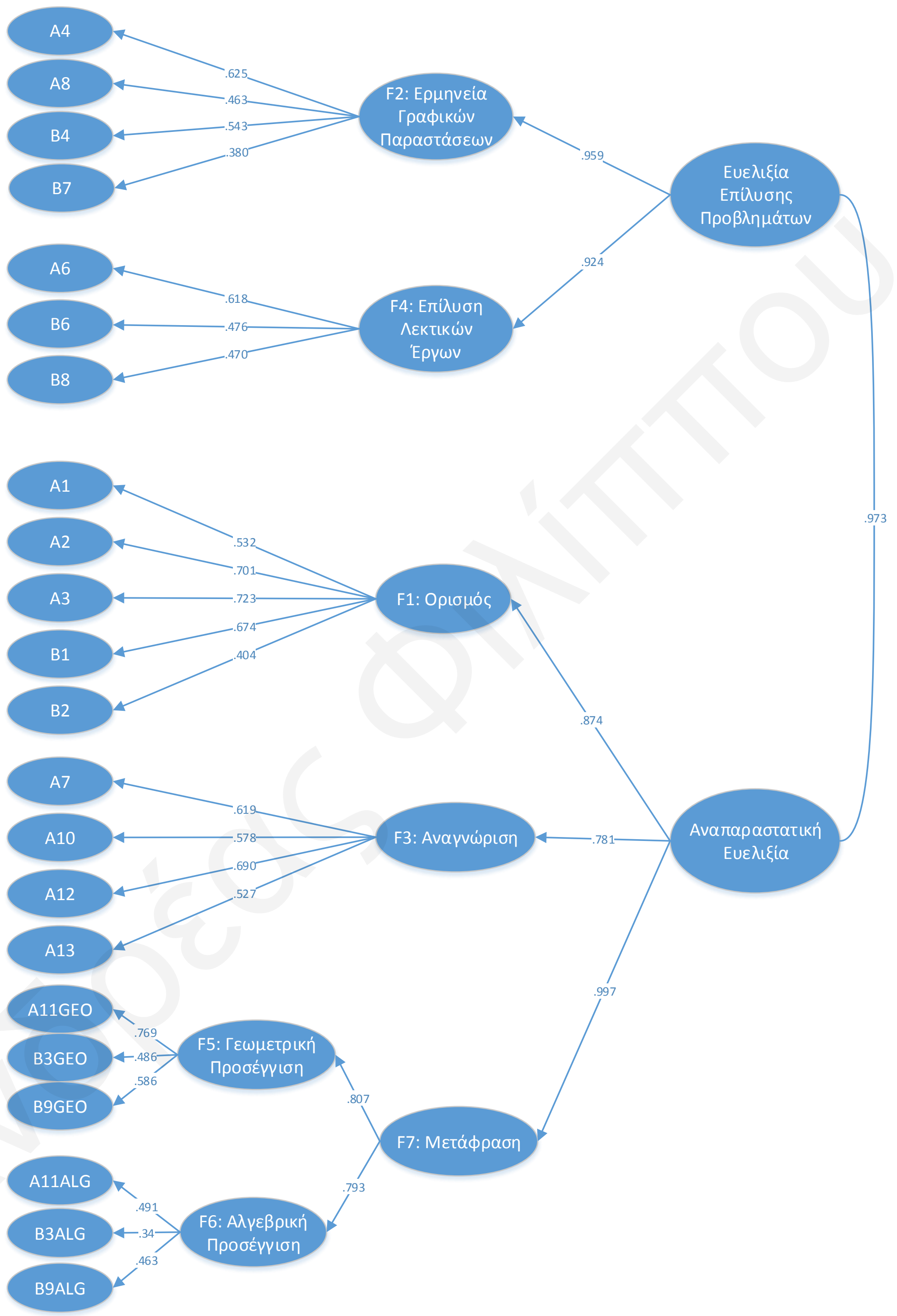
Διάγραμμα 14: Μοντέλο με πέντε παράγοντες πρώτης τάξης και αλληλεπιδράσεις μεταξύ των δύο παραγόντων δεύτερης τάξης για το συνολικό δείγμα.

Μοντέλο 2Β



Διάγραμμα 15: Μοντέλο με πέντε παράγοντες πρώτης τάξης και αλληλεπιδράσεις μεταξύ των δύο παραγόντων δεύτερης τάξης για το Γυμνάσιο.

Μοντέλο 2Β



Διάγραμμα 16: Μοντέλο με πέντε παράγοντες πρώτης τάξης και αλληλεπιδράσεις μεταξύ των δύο παραγόντων δεύτερης τάξης για το Λύκειο.

Αποτελέσματα Περιγραφικής Στατιστικής Ανάλυσης

Για την ανάλυση των δεδομένων αρχικά, υπολογίστηκαν τα ποσοστά επιτυχίας για τα έργα του δοκιμίου και χρησιμοποιήθηκε η x^2 ανάλυση μέσω του Στατιστικού Πακέτου SPSS. Συγκεκριμένα, τα ποσοστά επιτυχίας για κάθε έργο των δοκιμίων παρουσιάζονται ξεχωριστά για τους μαθητές Γ΄ Γυμνασίου, Α΄ και Β΄ Λυκείου. Επιπλέον, τα αποτελέσματα παρουσιάζονται ανά κατηγορία έργων.

Αρχικά, αναφορικά με τα αποτελέσματα για την επιτυχία των μαθητών στα έργα ορισμού συνάρτησης, παρατηρείται ότι η επίδοση των μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου είναι σαφώς χαμηλότερη από την επίδοση των μαθητών της Α΄ και Β΄ Λυκείου. Παρόλα αυτά και η επίδοση των μαθητών των δύο αυτών τάξεων δεν μπορεί να θεωρηθεί ιδιαίτερα ψηλή. Επιπλέον, από τη σύγκριση των ποσοστών των τριών τάξεων προκύπτει ότι σε κάποια έργα η επίδοση των μαθητών αυξάνεται στην επόμενη τάξη, ενώ στα υπόλοιπα έργα η επίδοση των μαθητών αυξάνεται στην Α΄ Λυκείου, ενώ μειώνεται ακολούθως στη Β΄ Λυκείου.

Πίνακας 10:

Ποσοστά επιτυχίας των έργων των δύο δοκιμίων και ο στατικός έλεγχος χ^2 των έργων σε σχέση με την τάξη των μαθητών.

Report

	Τάξη								**Pearson Chi-Square Tests**		
	Γ΄ Γυμνασίου		**Α΄ Λυκείου**		**Β΄ Λυκείου**		**Total**		**CL**		
	Mean	Std. Deviation	Mean	Std. Deviation	Mean	Std. Deviation	Mean	Std. Deviation	Chi-square	df	Sig.
A1	,151	,2392	,489	,4176	,438	,3875	,348	,3840	106,300[a]	4	,000
A2	,026	,1371	,415	,4291	,431	,4361	,272	,3998	158,951[a]	4	,000
A3	,056	,2305	,238	,4266	,331	,4721	,193	,3954	50,335	2	,000*
A4	,108	,3107	,090	,2864	,313	,4650	,154	,3617	41,635	2	,000*
A5	,151	,2397	,273	,3388	,447	,3832	,272	,3386	82,422[a]	12	,000
A6	,040	,1621	,126	,2746	,228	,3346	,120	,2676	63,620[a]	8	,000
A7	,121	,3265	,283	,4512	,325	,4698	,233	,4228	27,050	2	,000*
A8	,379	,4863	,556	,4980	,663	,4743	,517	,5001	32,541	2	,000*
A9	,194	,3963	,399	,4908	,531	,5006	,356	,4792	49,803	2	,000*
A10	,228	,2626	,350	,3025	,431	,2815	,325	,2937	61,353[a]	10	,000
A11	,022	,1455	,247	,4079	,409	,4620	,204	,3842	111,467[a]	4	,000
A12	,198	,2344	,467	,2515	,444	,2378	,359	,2723	171,299[a]	12	,000
A13	,371	,4840	,291	,4555	,444	,4984	,361	,4807	9,516	2	,009*
B1	,254	,4364	,543	,4993	,606	,4901	,450	,4979	59,395	2	,000*
B2	,108	,3107	,161	,3688	,269	,4447	,169	,3752	17,614	2	,000*
B3	,203	,3974	,271	,3757	,363	,4554	,269	,4100	63,183[a]	4	,000
B4	,177	,3494	,305	,3726	,413	,4221	,285	,3887	62,474[a]	6	,000
B5	,315	,4654	,318	,4669	,475	,5009	,358	,4797	12,953	2	,002*
B6	,052	,2219	,300	,4595	,288	,4540	,203	,4027	52,916	2	,000*
B7	,500	,5011	,372	,4845	,650	,4785	,493	,5004	28,844	2	,000*
B8	,004	,0657	,099	,2989	,244	,4307	,101	,3013	59,907	2	,000*
B9	,018	,1037	,155	,3383	,214	,3421	,119	,2870	89,907[a]	8	,000
B10	,110	,2274	,137	,2518	,266	,3631	,160	,2839	37,739[a]	4	,000
B11	,028	,1243	,119	,2475	,228	,3310	,113	,2501	63,972[a]	4	,000
B12	,001	,0131	,041	,1204	,056	,1474	,030	,1072	45,364[a]	10	,000

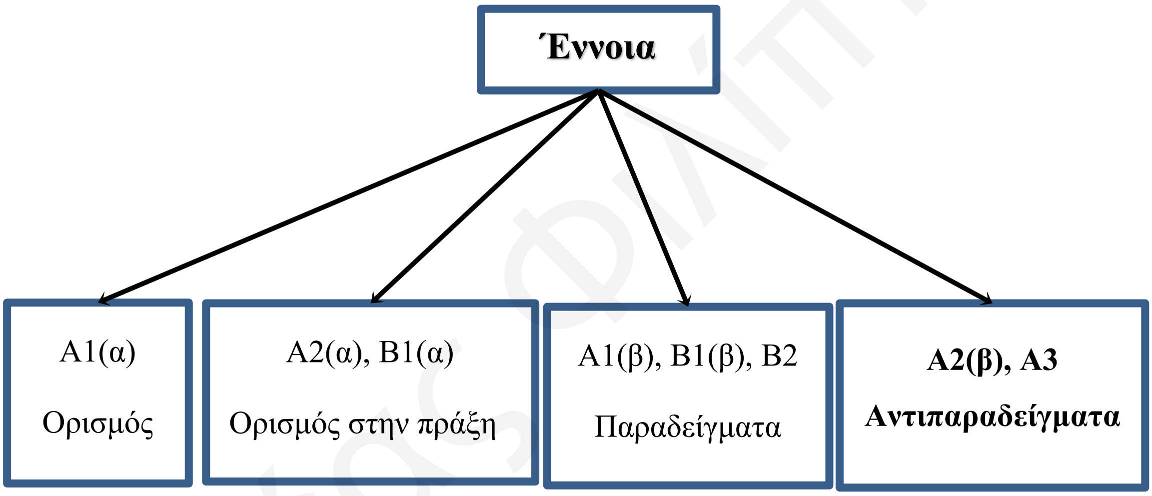
Results are based on nonempty rows and columns in each innermost subtable.

*. The Chi-square statistic is significant at the ,05 level.

Ορισμός Συνάρτησης

Τα έργα ορισμού κατηγοριοποιούνται σε τέσσερις ομάδες. Η πρώτη και η δεύτερη ομάδα αφορά το είδος του ορισμού, ενώ οι υπόλοιπες δύο ομάδες σχετίζονται με την παρουσίαση παραδειγμάτων ή αντιπαραδειγμάτων συναρτήσεων. Η κατηγοριοποίηση αυτή παρουσιάζεται στο πιο κάτω διάγραμμα.

Δομή δοκιμίου ορισμού συνάρτησης



Διάγραμμα 17: Δομή δοκιμίου ορισμού συνάρτησης

Ο Πίνακας 11 παρουσιάζει τα ποσοστά επιτυχίας στα έργα ορισμού ανά τάξη. Οι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου αντιμετωπίζουν ιδιαίτερες δυσκολίες στο να δώσουν ένα τυπικό ορισμό για τη συνάρτηση, παρουσιάζοντας ένα χαμηλό ποσοστό επιτυχίας στο συγκεκριμένο έργο (4,4%). Το ποσοστό επιτυχίας των μαθητών της Α΄ και Β΄ Λυκείου είναι ψηλότερο μεν από των μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου όμως και σε αυτές της ηλικιακές ομάδες ένα μεγάλο μέρος των μαθητών δεν είναι σε θέση να αναφέρει τι ονομάζεται συνάρτηση.

Πίνακας 11:
Ποσοστά επιτυχίας στα έργα ορισμού ανά τάξη

	Έργα	**Γ' Γυμνασίου**	**Α' Λυκείου**	**Β΄ Λυκείου**
Ορισμός	Α1(α)	4,4%	37,4%	29,8%
Παραδείγματα	Α1(β)	25,0%	59,1%	55,4%
	Β1(β)	2,0%	39,6%	42,9%
	Β2	10,8%	16,1%	44,47
Αντιπαραδείγματα	Α2β	2,8%	40,9%	39,3%
	Α3	5,6%	23,8	33,1%
Ορισμός στην πράξη	Α2(α)	2,0%	39,6%	42,9%
	Β1(α)	22,2%	51,5%	57,4%

Οι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου παρουσιάζουν έντονη απόκλιση στα έργα που τους καλούν να δώσουν παραδείγματα (Α1(β), Β1(β), Β2)και αντιπαραδείγματα (Α2(β), Α3) συνάρτησης. Παρόλο που 25% των μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου είναι σε θέση να δώσουν ένα παράδειγμα συνάρτησης δυσκολεύονται να δώσουν ένα αντιπαράδειγμα της συνάρτησης και υπάρχει ένα πολύ μικρό ποσοστό επιτυχίας στα συγκεκριμένα έργα. Το γεγονός αυτό υποδηλώνει δυσκολίες στην κατανόηση της έννοιας και αποσπασματική κατανόησή της. Ακόμη και στην περίπτωση των έργων παραδειγμάτων είναι χαρακτηριστικό το ιδιαίτερα χαμηλό ποσοστό επιτυχία στο έργο Β1(β) που αναφέρεται σε σχέση που αναπαριστά συνάρτηση (2%), κάτι που υποδεικνύει ότι ούτε στα έργα παραδειγμάτων οι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου δεν μπορούν να ανταποκριθούν με τρόπο ολοκληρωμένο.

Μικρή απόκλιση στα έργα παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων παρουσιάζουν και οι μαθητές της Α΄ και Β΄ Λυκείου. Τα ποσοστά επιτυχίας όμως των μαθητών των συγκεκριμένων τάξεων είναι ψηλότερα, με ένα μεγάλο μέρος των μαθητών της Β΄ και Γ΄ Λυκείου να είναι σε θέση να αναφέρουν παράδειγμα και αντιπαράδειγμα της συνάρτησης. Αξίζει όμως να σχολιαστεί το γεγονός ότι οι μαθητές της Β΄ Λυκείου παρουσιάζουν ομοιόμορφη συμπεριφορά όσον αφορά στην ανταπόκρισή τους στα έργα παραδειγμάτων αφού τα ποσοστά επιτυχίας και στα τρία έργα είναι περίπου τα ίδια. Οι μαθητές της Α΄ Λυκείου παρουσιάζουν μια ανομοιόμορφη ανταπόκριση στα έργα τόσο των παραδειγμάτων όσο και των αντιπαραδειγμάτων. Συγκεκριμένα, ένα μεγάλο ποσοστό των μαθητών της Α΄ Λυκείου δυσκολεύεται, όπως και οι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου να αιτιολογήσει αν θα μπορούσε να οριστεί συνάρτηση που όλες οι τιμές της να είναι ίσες μεταξύ τους. Επιπλέον, παρουσιάζουν διαφορές στο ποσοστό επιτυχίας στα δύο έργα που αναφέρονται σε αντιπαραδείγματα.

Όσον αφορά στα έργα ορισμού στην πράξη, η αρνητική δήλωση φαίνεται να δυσκόλεψε τους μικρότερους μαθητές, οι οποίοι παρουσιάζουν και πάλι μια απόκλιση μεταξύ των έργων Α2(α) και Β1(α). Οι μαθητές της συγκεκριμένης ηλικιακής ομάδας είναι σε θέση έστω και με μικρό ποσοστό επιτυχίας (22%) να εξηγήσουν τον τρόπο κατανόησης μιας γραφικής παράστασης σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων παριστάνει συνάρτηση, όμως δεν μπορούν να εξηγήσουν τον τρόπο κατανόησης μιας γραφικής παράστασης σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων που δεν παριστάνει συνάρτηση. Οι μαθητές της Α΄ και Β΄ Λυκείου, αν και φαίνεται να έχουν και αυτοί μεγαλύτερες δυσκολίες στο να εξηγήσουν τον τρόπο κατανόησης μιας γραφικής παράστασης σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων που δεν παριστάνει συνάρτηση, ανταποκρίνονται σε περίπου το ίδιο ποσοστό στα δύο έργα και ένα μεγάλο μέρος τους είναι σε θέση να εξηγήσουν τον τρόπο κατανόησης μιας γραφικής παράστασης σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων που παριστάνει ή δεν παριστάνει συνάρτηση. Αντιπαραβάλλοντας τα ποσοστά επιτυχίας των τριών ηλικιακών ομάδων στα έργα ορισμού και ορισμού στην πράξη είναι έντονη η θετικότερη ανταπόκριση των μαθητών στα τελευταία. Ένα μέρος των μαθητών και των τριών ηλικιακών ομάδων εφαρμόζοντας το θεώρημα «στην πράξη» μηχανικά αναγνωρίζουν με επιτυχία αν μια γραφική παράσταση είναι συνάρτηση ή όχι, χωρίς κατ' ανάγκη να κάνουν αντιστοίχιση με τον ακριβή ορισμό της συνάρτησης.

Στο σημείο αυτό δίνεται έμφαση στο είδος της αναπαράστασης που χρησιμοποιούν οι μαθητές είτε για να δώσουν ορισμό (Α1α, Α2α) είτε για να δώσουν παράδειγμα (Α1β) ή ένα αντιπαράδειγμα (Α2β) συνάρτησης.

Στο έργο Α1α, η μεταβλητή A1aSymb αναφέρεται σε μαθητές που έδωσαν απαντήσεις με παράδειγμα χρησιμοποιώντας συμβολική αναπαράσταση. Η χρήση της συμβολικής αναπαράστασης είναι σχεδόν ανύπαρκτη για τον ορισμό της συνάρτησης.

Η μεταβλητή A1aVerr αναφέρεται σε μαθητές που έδωσαν απαντήσεις χρησιμοποιώντας λεκτικό παράδειγμα στο ερώτημα. Παρατηρείται ότι η μαθητές της Α΄ Λυκείου έδωσαν οι περισσότεροι παράδειγμα με λεκτικό ορισμό. Οι μεταβλητές A1aDiag και A1aGraph αναφέρονται σε μαθητές που χρησιμοποιήσαν διαγραμματικό τρόπο ή γραφική παράσταση στις απαντήσεις τους. Κανένας μαθητής δεν χρησιμοποίησε αυτές τις αναπαραστάσεις στις απαντήσεις του. Παρόμοια αποτελέσματα και στις υπόλοιπες μεταβλητές. Παρατηρείται ότι στην Β΄ Λυκείου χρησιμοποιείται περισσότερο η συμβολική αναπαράσταση ενώ η χρήση της γραφικής παράστασης είναι σε χαμηλά ποσοστά και στις τρεις τάξεις.

Η ίδια κατηγοριοποίηση ως προς την αναπαράσταση χρησιμοποιήθηκε και στο έργο Α2α. Τα αποτελέσματα δείχνουν και πάλι τη χρήση κυρίως της λεκτικής αναπαράστασης για να δώσουν την έννοια, ενώ παρουσιάζονται και μικρότερα ποσοστά χρήσης των υπόλοιπων αναπαραστάσεων. Συνεπώς οι μαθητές είναι πιο ικανοί να ορίζουν την έννοια μέσω λεκτικής περιγραφής.

Πίνακας 12:

Ποσοστά χρήσης αναπαράστασης για ορισμό συνάρτησης.

	Γ' Γυμνασίου	**Α΄ Λυκείου**	**Β΄ Λυκείου**	**Σύνολο**
A1aSymb	,8%	0,0%	,6%	,5%
A1aVerr	39,5%	70,0%	58,3%	55,3%
A1aDiag	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
A1aGraph	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
A2aSymb	,8%	0,0%	3,6%	1,2%
A2aVerbal	13,7%	49,6%	45,2%	34,7%
A2aDiag	,8%	4,8%	12,5%	5,3%
A2aGraph	0,0%	0,0%	1,2%	,3%

Πιο κάτω έχει γίνει κατηγοριοποίηση με βάση την αναπαράσταση που χρησιμοποιήθηκε για να δοθεί η απάντηση στο παράδειγμα που ζητείται. Η μεταβλητή A1bEXSymb είναι για μαθητές που χρησιμοποίησαν συμβολικό παράδειγμα, η μεταβλητή A1bEXdiag είναι για μαθητές που χρησιμοποίησαν διαγραμματικό παράδειγμα, η μεταβλητή A1bEXLektiko είναι για μαθητές που χρησιμοποίησαν λεκτικό παράδειγμα, η μεταβλητή A1bEXTable είναι για μαθητές που χρησιμοποίησαν παράδειγμα με πίνακα και η μεταβλητή A1bEXGraph είναι για μαθητές που χρησιμοποίησαν παράδειγμα με γραφική παράσταση. Παρατηρείται ότι στην Β΄ Λυκείου γίνεται μεγαλύτερη χρήση της συμβολικής αναπαράστασης ενώ στην Α΄ Λυκείου γίνεται χρήση περισσότερων αναπαραστάσεων όπως των διαγραμμάτων, με λεκτική αναπαράσταση και με τη χρήση συμβόλων. Η χρήση πίνακα και γραφικής παράστασης ως παράδειγμα δίνεται από πάρα πολύ λίγους μαθητές.

Η ίδια κατηγοριοποίηση ως προς την αναπαράσταση χρησιμοποιήθηκε και στο έργο Α2β. Στη Γ΄ Γυμνασίου και Β΄ Λυκείου οι μαθητές δίνουν αντιπαράδειγμα κυρίως μέσω συμβολικής αναπαράστασης, ενώ στην Α΄ Λυκείου χρησιμοποιείται περισσότερο η διαγραμματική αναπαράσταση. Εμφανίζονται και μικρά ποσοστά των υπολοίπων ειδών αναπαράστασης.

Πίνακας 13:

Ποσοστά χρήσης αναπαράστασης για παράδειγμα ή αντιπαράδειγμα συνάρτησης.

	Γ' Γυμνασίου	Α΄ Λυκείου	Β΄ Λυκείου	Σύνολο
A1bEXSymb	19,0%	22,2%	54,8%	29,4%
A1bEXdiag	1,2%	29,6%	4,8%	12,2%
A1bEXLektiko	14,1%	16,1%	11,3%	14,1%
A1bEXTable	0,0%	0,0%	,6%	,2%
A1bEXGraph	0,0%	3,0%	1,8%	1,5%
A2bSymb	6,5%	10,4%	41,7%	17,0%
A2bDiag	1,2%	28,7%	7,1%	12,5%
A2bVerbal	3,6%	8,7%	3,6%	5,4%
A2bGraph	0,0%	6,5%	,6%	2,5%

Αναγνώριση Συνάρτησης

Πίνακας 14:

Ποσοστά επιτυχίας στα έργα αναγνώρισης ανά τάξη

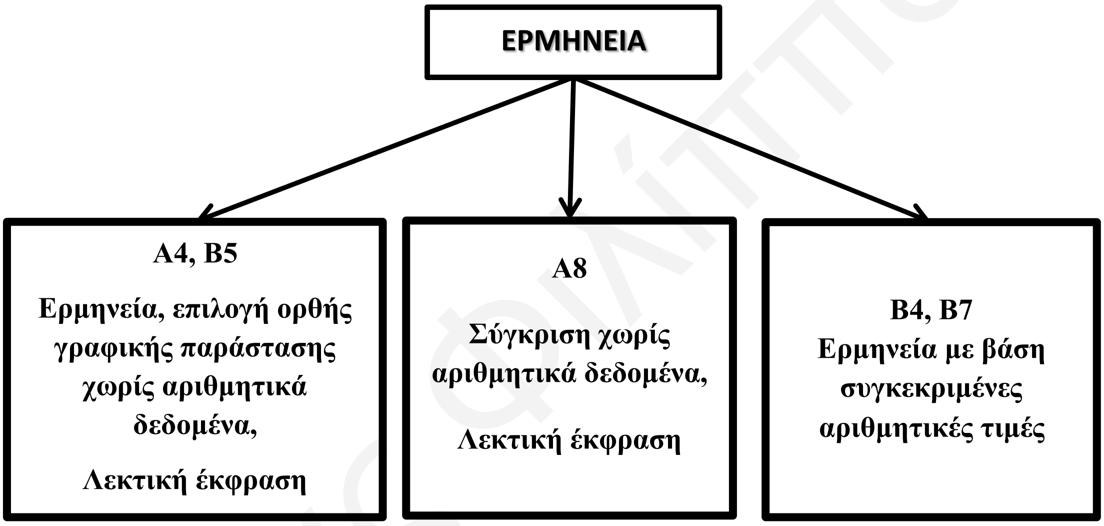
Έργα	**Γ΄ Γυμνασίου**	**Α΄ Λυκείου**	**Β΄ Λυκείου**
Α7	12,1 %	28,3 %	32,5 %
Α10	22,8 %	35,0 %	43,1 %
Α12	19,8 %	46,7 %	44,4 %
Α13	37,1 %	29,1 %	44,4 %

Η ικανότητα αναγνώρισης γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων φαίνεται να είναι κάτι που βελτιώνεται με την ηλικία. Με βάση τα ποσοστά επιτυχίας στα σχετικά έργα αυτό που προκύπτει είναι ότι υπάρχει μια φανερή αύξηση από τη Γ΄ Γυμνασίου στην Α΄ Λυκείου, η οποία συνεχίζει να παρατηρείται και μεταξύ Α΄ και Β΄ Λυκείου. Στην Β΄ Λυκείου τα ποσοστά αναγνώρισης των συναρτήσεων είτε σε αλγεβρική μορφή (Α10) είτε σε γεωμετρική μορφή (Α7, Α12, Α13) δεν παρουσιάζουν κάποια αξιοσημείωτη διαφοροποίηση. Το ποσοστό αναγνώρισης της Γ΄ Γυμνασίου στο έργο Α13 είναι μεγαλύτερο από την Α΄ Λυκείου πιθανόν λόγω του συγκεκριμένου έργου, αφού πολλά προβλήματα αυτής της μορφής χρησιμοποιούνται στην ενότητα λύσης προβλημάτων με την χρήση εξίσωσης.

Ερμηνεία Συνάρτησης

Δομή δοκιμίου ερμηνείας συνάρτησης

Τα έργα ερμηνείας κατηγοριοποιούνται με βάση τα περιεχόμενα που περιέχουν (αριθμητικά ή μη). Η κατηγοριοποίηση παρουσιάζεται στο ακόλουθο διάγραμμα.



Διάγραμμα 18: Δομή δοκιμίου ορισμού συνάρτησης

Ο Πίνακας 15 παρουσιάζει τα ποσοστά επιτυχίας στα έργα ερμηνείας. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του πίνακα Πίνακας *15* η επίδοση των μαθητών βελτιώνεται στα έργα ερμηνείας με βάση την ηλικιακή ομάδα. Για τους μαθητές της Α΄ Λυκείου εντοπίζεται μια διαφοροποίηση όσον αφορά στην ύπαρξη ή μη αριθμητικών τιμών. Στα έργα που η ερμηνεία βασίζεται σε συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές οι μαθητές της συγκεκριμένης ηλικιακής ομάδας επιτυγχάνουν καλύτερα αποτελέσματα. Οι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου δεν είναι δηλαδή ακόμη σε θέση να ερμηνεύουν γραφικές παραστάσεις χωρίς την παρουσία αριθμητικών δεδομένων, κάτι που υποδηλώνει ένα πιο πρώιμο επίπεδο ερμηνείας.

Για τους μαθητές της Α΄ και Β΄ Λυκείου η ερμηνεία δε φαίνεται να επηρεάζεται από την απουσία ή την παρουσία αριθμητικών δεδομένων. Περισσότερο αυτό που διακρίνει σε αυτές τις ηλικιακές ομάδες την επίδοσή τους είναι ο τύπος τους έργου, με το έργο που αφορούσε τη σύγκριση χωρίς αριθμητικά δεδομένα να έχει μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας σε σχέση με τα υπόλοιπα.

Σχετικά με τις επιδόσεις των μαθητών και των τριών τάξεων στα έργα ερμηνείας γραφικών παραστάσεων, η βασική παρατήρηση που προκύπτει είναι ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν μεγάλες δυσκολίες στην ερμηνεία γραφικών παραστάσεων, αφού στην πλειοψηφία των ασκήσεων επιτυγχάνουν λιγότεροι από τους μισούς μαθητές.

Πίνακας 15:

Ποσοστά επιτυχίας στα έργα ερμηνείας

	Έργα	**Γ' Γυμνασίου**	**Α' Λυκείου**	**Β΄ Λυκείου**
Ερμηνεία, επιλογή ορθής γραφικής παράστασης χωρίς αριθμητικά δεδομένα, Λεκτική έκφραση	Α4	10,5%	8,7%	29,8%
	Β5	31,5%	31,8%	47,5%
Σύγκριση χωρίς αριθμητικά δεδομένα, Λεκτική έκφραση	Α8	35,9%	53,9%	63,1%
Ερμηνεία με βάση συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές	Β4	17,7%	30,5%	41,13%
	Β7	50,0%	37,2%	65.0%

Παρατηρείται ότι οι μαθητές έχουν καλύτερες επιδόσεις όταν στα έργα περιλαμβάνονται αριθμητικά δεδομένα, παρά στις ασκήσεις όπου η ερμηνεία δε βασίζεται σε συγκεκριμένες τιμές. Επίσης οι μαθητές έχουν καλύτερες επιδόσεις στα έργα ερμηνείας χωρίς αριθμητικά δεδομένα που περιλαμβάνουν και σύγκριση γραφικών παραστάσεων, παρά στις ασκήσεις που περιλαμβάνουν μόνο ερμηνεία γραφικών παραστάσεων.

Προσέγγιση Συνάρτησης

Στον παρακάτω πίνακα αναφέρονται τα ποσοστά ανά επίπεδο για τις απαντήσεις των μαθητών σε έργα σχετικά με τον τρόπο που προσεγγίζουν μια συνάρτηση. Επιπλέον των ποσοστών που φανερώνουν την ορθότητα της απάντησης στον πίνακα περιλαμβάνονται και τα ποσοστά χρήσης είτε της αλγεβρικής είτε της γεωμετρικής προσέγγισης για την επίλυση των έργων αυτών.

Αναφορικά με την επιτυχία των μαθητών στα έργα προσέγγισης φαίνεται καταρχάς ότι η επίδοση των μαθητών αυξάνεται σε κάθε επόμενη τάξη. Η διαφορά στην επίδοση των μαθητών από την Α΄ στην Β΄ Λύκειού δεν είναι μεγάλη. Αντίθετα παρατηρούνται πολύ χαμηλές επιδόσεις από τους μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου στην πλειοψηφία των έργων της κατηγορίας αυτής.

Ακολούθως επικεντρωνόμαστε στο είδος της προσέγγισης των μαθητών για την επίλυση των συγκεκριμένων έργων. Ειδικότερα στο έργο Α11α η γεωμετρική προσέγγιση χρησιμοποιείται περισσότερο από την αλγεβρική προσέγγιση στην Α΄ και Β΄ Λυκείου. Στο Γυμνάσιο παρατηρείται το αντίθετο με την διαφορά μεταξύ των δύο προσεγγίσεων να μην είναι ιδιαίτερα μεγάλη. Ακριβώς η ίδια παρατήρηση προκύπτει και για το έργο Α11β. Στο έργο Β3α η αλγεβρική προσέγγιση χρησιμοποιείται σε μεγαλύτερο βαθμό και από τις τρεις ηλικιακές ομάδες μαθητών. Αξιοσημείωτη είναι η διαφορά στην χρήση μεταξύ των δύο προσεγγίσεων η οποία είναι σχεδόν 30% στην Γ΄ Γυμνασίου. Στο ερώτημα Β3β η χρήση της αλγεβρικής προσέγγισης υπερισχύει και πάλι για τους μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου και Β΄ Λυκείου, ενώ για την Α΄ Λυκείου παρατηρείται το αντίθετο. Για τα υποερωτήματα της άσκησης Β9 κυριαρχεί η χρήση της γεωμετρικής προσέγγισης. Είναι σημαντικό ότι όλα τα υποερωτήματα της άσκησης αυτής κανένας μαθητής Γυμνασίου δεν χρησιμοποιεί την αλγεβρική προσέγγιση, ενώ τα ποσοστά χρήσης της προσέγγισης αυτής είναι πολύ χαμηλά στην Α΄ και Β΄ Λυκείου. Από τα αποτελέσματα του πίνακα δε φαίνεται ξεκάθαρα μια σταθερή προτίμηση των μαθητών ως προς την προσέγγιση που χρησιμοποιούν. Συνεπώς η επιλογή της προσέγγισης φαίνεται να προκύπτει με βάση τις ιδιαιτερότητες του κάθε έργου και όχι με τον βαθμό εξοικείωσης ή την ικανότητα χρήσης της κάθε προσέγγισης από τους μαθητές.

Πίνακας 16:
Ποσοστά επιτυχίας στα έργα προσέγγισης

Έργο	Γ' Γυμνασίου	Α΄ Λυκείου	Β΄ Λυκείου	Σύνολο
A11a	2,0%	27,8%	43,5%	22,0%
A11aGeo	2,8%	21,3%	38,7%	18,7%
A11aAlg	,4%	17,4%	12,5%	9,6%
A11b	2,0%	20,0%	34,5%	16,9%
A11bGeo	2,8%	25,2%	38,7%	20,1%
A11bAlg	,4%	5,2%	7,1%	3,9%
B3a	19,4%	22,2%	33,9%	24,1%
B3aAlg	31,5%	27,8%	33,9%	30,8%
B3aGeo	2,4%	17,8%	24,4%	13,6%
B3b	18,5%	30,4%	35,1%	27,1%
B3bAlg	28,6%	22,2%	31,0%	26,9%
B3bGeo	2,4%	27,4%	24,4%	17,0%
B9a	1,6%	19,1%	26,8%	14,4%
B9aAlg	0,0%	9,6%	1,8%	3,9%
B9aGeo	3,2%	12,2%	36,3%	15,0%
B9b	2,0%	15,7%	27,4%	13,5%
B9bAlg	0,0%	9,1%	1,8%	3,7%
B9bGeo	3,2%	12,2%	35,1%	14,7%
B9c	1,6%	12,6%	13,7%	8,7%
B9cAlg	0,0%	7,0%	,6%	2,6%
B9cGeo	3,2%	10,9%	29,2%	12,7%
B9d	1,6%	12,6%	13,7%	8,7%
B9dAlg	0,0%	7,4%	,6%	2,8%
B9dGeo	2,8%	10,9%	28,0%	12,2%

Στον Πίνακας 16 η μεταβλητή A11a αναφέρεται στους μαθητές οι οποίοι απάντησαν σωστά στο ερώτημα α, η μεταβλητή A11b αναφέρεται στους μαθητές οι οποίοι απάντησαν σωστά στο ερώτημα β, η μεταβλητή A11aGeo αναφέρεται στους μαθητές οι οποίοι χρησιμοποίησαν γεωμετρική προσέγγιση στο α και η μεταβλητή A11bGeo αναφέρεται στους μαθητές οι οποίοι χρησιμοποίησαν γεωμετρική προσέγγιση στο β.

Η μεταβλητή A11aAlg αναφέρεται στους μαθητές οι οποίοι χρησιμοποίησαν αλγεβρική προσέγγιση στο α και η μεταβλητή A11bAlg αναφέρεται στους μαθητές οι οποίοι χρησιμοποίησαν αλγεβρική προσέγγιση στο β.

Η μεταβλητή B3a αναφέρεται στους μαθητές οι οποίοι απάντησαν σωστά στο α, η μεταβλητή B3b αναφέρεται στους μαθητές οι οποίοι απάντησαν σωστά στο β, η μεταβλητή B3aAlg αναφέρεται στους μαθητές οι οποίοι χρησιμοποίησαν αλγεβρική προσέγγιση στο α, η μεταβλητή B3bAlg αναφέρεται στους μαθητές οι οποίοι χρησιμοποίησαν αλγεβρική προσέγγιση στο β, η μεταβλητή B3aGeo αναφέρεται στους μαθητές οι οποίοι χρησιμοποίησαν γεωμετρική προσέγγιση στο α και η μεταβλητή B3bGeo αναφέρεται στους μαθητές οι οποίοι χρησιμοποίησαν γεωμετρική προσέγγιση στο β.

Η μεταβλητή B9a αναφέρεται στους μαθητές οι οποίοι απάντησαν σωστά στο ερώτημα α, η μεταβλητή B9aAlg αναφέρεται στους μαθητές οι οποίοι χρησιμοποίησαν αλγεβρική προσέγγιση, η μεταβλητή B9aGeo αναφέρεται στους μαθητές οι οποίοι χρησιμοποίησαν γεωμετρική προσέγγιση, η μεταβλητή B9b αναφέρεται στους μαθητές οι οποίοι απάντησαν σωστά στο ερώτημα β, η B9bAlg αναφέρεται στους μαθητές οι οποίοι χρησιμοποίησαν αλγεβρική προσέγγιση, η B9bGeo αναφέρεται στους μαθητές οι οποίοι χρησιμοποίησαν γεωμετρική προσέγγιση, η B9c αναφέρεται στους μαθητές οι οποίοι απάντησαν σωστά στο ερώτημα γ, η B9cAlg αναφέρεται στους μαθητές οι οποίοι χρησιμοποίησαν αλγεβρική προσέγγιση, η B9cGeo αναφέρεται στους μαθητές οι οποίοι χρησιμοποίησαν γεωμετρική προσέγγιση, η B9d αναφέρεται στους μαθητές οι οποίοι απάντησαν σωστά στο ερώτημα δ, η B9dAlg αναφέρεται στους μαθητές οι οποίοι χρησιμοποίησαν αλγεβρική προσέγγιση και η B9dGeo αναφέρεται στους μαθητές οι οποίοι χρησιμοποίησαν γεωμετρική προσέγγιση.

Επίλυση Προβλήματος

Ο Πίνακας 17 παρουσιάζει τα ποσοστά επιτυχίας στα έργα επίλυσης προβλήματος ανά τάξη.

Πίνακας 17

Ποσοστά επιτυχίας στα έργα επίλυσης προβλήματος ανά τάξη

ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ			
Έργα	**Γ΄ Γυμνασίου**	**Α΄ Λυκείου**	**Β΄ Λυκείου**
Α6	4 %	12,6 %	32,5 %
Β6	5,2 %	30,0 %	28,8 %
B6Exp	2,0%	10,9%	14,3%
Β8	0,4 %	9,9 %	24,4 %
B8Exp	0,0%	11,7%	9,5%

Για το πρώτο πρόβλημα της κατηγορίας αυτής (Α6), παρατηρείται μια αύξηση στα ποσοστά επιτυχίας σε κάθε επόμενη τάξη. Για το έργο Β6 η επίδοση των μαθητών της Α΄ Λυκείου είναι υψηλότερη από αυτή των μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου και χαμηλότερη από αυτή των μαθητών της Β΄ Λυκείου. Στο επόμενο έργο (Β8) η αύξηση των ποσοστών επιτυχίας ισχύει σε κάθε επόμενη τάξη. Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι στο συγκεκριμένο έργο δε δίνεται εξήγηση B8exp της απάντησης από κανένα μαθητή της Γ΄ Γυμνασίου, ενώ τα ποσοστά για τις υπόλοιπες δύο τάξεις είναι, επίσης, πολύ χαμηλά. Αυτό ισχύει και για την εξήγηση της απάντησης στο πρόβλημα B6exp, όπου και πάλι τα ποσοστά είναι πολύ χαμηλά και για τις τρεις ομάδες μαθητών. Το γεγονός αυτό παρουσιάζει την αδυναμία των συγκεκριμένων μαθητών στη λεκτική περιγραφή του τρόπου σκέψης τους.

Πίνακας 18

Ποσοστά επιτυχίας στα έργα επίλυσης προβλήματος

Έργο	Γ' Γυμνασίου	Α΄ Λυκείου	Β΄ Λυκείου	Σύνολο
A6i	2,0%	5,7%	14,9%	6,7%
A6ii	2,4%	12,6%	22,6%	11,3%
A6iii	4,0%	14,8%	26,8%	13,8%
A6iiiVerbal	3,2%	12,2%	11,9%	8,7%
A6iiiGraph	,4%	7,0%	16,7%	7,0%
A6iiiSymb	,4%	3,9%	3,0%	2,3%
A6vi	4,4%	15,7%	22,6%	13,2%
B6	4,8%	29,1%	27,4%	19,3%

Αξιοπιστία Έργων Δοκιμίου

Η αξιοπιστία μιας έρευνας, δηλαδή κατά πόσο οι μετρήσεις είναι απαλλαγμένες από σφάλματα, μετράται μέσω του συντελεστή α του Cronbach,ο οποίος είναι ο πιο ευρέως χρησιμοποιούμενος δείκτης αξιοπιστίας. Ουσιαστικά είναι το ποσοστό που εξηγεί ο χρησιμοποιούμενος παράγοντας έναν υποθετικό που περιλαμβάνει όλες τις πιθανές μεταβλητές. Υπολογίστηκαν λοιπόν τρείς συντελεστές α, ένας για κάθε κλίμακα μέτρησης. Πρέπει να τονισθεί ότι, για να θεωρηθεί αξιόπιστη η κλίμακα μέτρησης ενός χαρακτηριστικού, η τιμή του συντελεστή πρέπει να είναι πάνω από 0.70.

Παρατηρούμε στον Πίνακας 18 ότι ο συντελεστής Cronbach's Alpha για κάθε τάξη ξεχωριστά και για το συνολικό δείγμα είναι πάνω από 0.70 και μάλιστα με μεγάλη αξιοπιστία, αφού παίρνει τιμές μεγαλύτερες από 0.8 εκτός από την Γ΄ Γυμνασίου που είναι οριακή τιμή.

Πίνακας 19:

Συντελεστής Cronbach's Alpha. έργων για κάθε τάξη .

Reliability Statistics

	Cronbach's Alpha	Cronbach's Alpha Based on Standardized Items	N of Items
Γ΄ Γυμνασίου	,634	,678	25
Α΄ Λυκείου	,809	,825	25
Β΄ Λυκείου	,886	,893	25
Συνολικό Δείγμα	,857	,875	25

Αναλυτικά, οι συντελεστές αξιοπιστίας για κάθε έργο παρουσιάζονται στον Πίνακα 20 όπως αποτυπώθηκαν στο SPSS. Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής α του Cronbach είναι πάνω από 0.80 και μάλιστα με μεγάλη αξιοπιστία, αφού παίρνει τιμές μεγαλύτερες από 0.8 σε όλα ανεξαίρετα τα έργα.

Συμπερασματικά, έχουμε διασφαλίσει ότι οι ερωτήσεις με τις οποίες κατασκευάσαμε το ερωτηματολόγιο μετρούν τα χαρακτηριστικά για τα οποία τις έχουμε προορίσει με αρκετά υψηλή αξιοπιστία.

Πίνακας 20

Πίνακας με συντελεστές Cronbach's Alpha για κάθε έργο.

Item-Total Statistics

	Scale Mean if Item Deleted	Scale Variance if Item Deleted	Corrected Item-Total Correlation	Cronbach's Alpha if Item Deleted
A1	5,934	19,114	,431	,852
A2	6,014	18,619	,563	,847
A3	6,090	18,721	,541	,848
A4	6,123	19,630	,294	,856
A5	6,014	18,645	,669	,845
A6	6,160	19,300	,567	,849
A7	6,053	18,934	,438	,851
A8	5,777	18,593	,430	,852
A9	5,932	18,365	,517	,848
A10	5,962	19,399	,468	,851
A11	6,080	18,694	,568	,847
A12	5,927	19,515	,458	,852
A13	5,928	19,831	,150	,863
B1	5,843	18,057	,568	,846
B2	6,114	19,656	,277	,856
B3	6,018	19,033	,424	,852
B4	5,977	19,098	,345	,855
B5	5,932	19,618	,203	,861
B6	6,081	19,533	,287	,856
B7	5,799	19,172	,292	,858
B8	6,180	19,551	,404	,853
B9	6,162	19,192	,576	,849
B10	6,122	19,724	,360	,854
B11	6,168	19,445	,549	,850
B12	6,247	20,280	,428	,856

Ανάλυση Ομοιότητας των Διαφόρων Διαστάσεων του Ερωτηματολογίου

Σε αυτή την ενότητα τα δεδομένα αναλυθήκαν χρησιμοποιώντας το λογισμικό πρόγραμμα CHIC (Classification Hiérarchique, Implicative et Cohésitive) (Bodin, A., Coutourier, R., & Gras, R., 2000), η οποία παρέχει τη δυνατότητα διαμερισμού των μεταβλητών της έρευνας, ταξινόμησης των μεταβλητών αυτών και εντοπισμού συνεπαγωγής ανάμεσα στις μεταβλητές ή τις κλάσεις μεταβλητών. Ο R. Gras (Gras, R., Peter, P., Briand, H., Philippé, J., 1997), αναφέρει ότι υπάρχει ανάγκη για χρήση μιας μεθόδου ανάλυσης δεδομένων, η οποία αποτελεί ένα ακριβή μηχανισμό συλλογής και επεξεργασίας δεδομένων κατάλληλων να ενισχύσουν ή να διαψεύσουν υποθέσεις, να εξαγάγουν συμπεράσματα. Η μέθοδος που προτείνει ο Gras (Gras et al. 1997) κρίνεται κατάλληλη στην περίπτωση όπου αναζητούνται: α) οι κύριοι παράγοντες διάκρισης σε ένα πληθυσμό μέσω των μεταβλητών, β) ένας διαμερισμός των μεταβλητών, γ) μια τυπολογία ή μια ταξινόμηση- ιεραρχική ταξινόμηση ομοιοτήτων και δ) μια συνεπαγωγή ανάμεσα στις μεταβλητές ή τις κλάσεις μεταβλητών- ένα δέντρο συνεπαγωγής ή μια ιεραρχία συνεπαγωγής κτλ. Η συνεπαγωγική στατιστική αποκαλύπτει την προσανατολισμένη δυναμική ταξινόμηση των μεταβλητών με βάση δύο κριτήρια απόφασης για τον καθαρισμό της σημαντικότητας κάθε δημιουργούμενης τάξης: α) τη διάταξη συνεπαγωγής και β) τη συνοχή των τάξεων. Η θεώρηση του Gras επιτρέπει να διαπιστώσει κανείς εκτός από την ένταση της συνεπαγωγής και την ύπαρξη της προσανατολισμένης εξάρτησης μεταξύ των δύο μεταβλητών. Η στατιστική ανάλυση (Implicative Statistic Analysis) μεταξύ των μεταβλητών X και Y λαμβάνει υπόψη τη σύγκριση των συχνοτήτων ή των συντελεστών συσχέτισης, τη θετική συσχέτιση, την ομοιογένεια και τη θετικά προσανατολισμένη στατιστική εξάρτηση, κάτι περισσότερο από το δεσμό που αποκαλύπτεται με τον έλεγχο ανεξαρτησίας του test x^2 ή από τη σχέση που παρέχει η συσχέτιση.

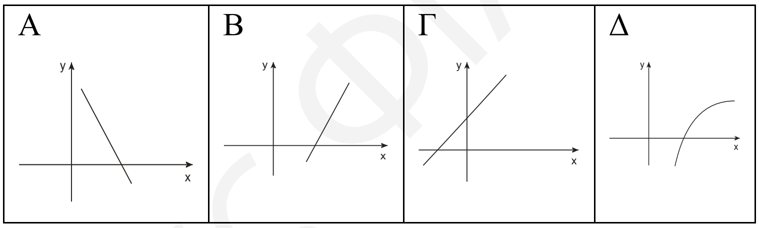
Το Διάγραμμα Ομοιότητας (Lerman, 1981) των απαντήσεων των μαθητών στα αντικείμενα του ερωτηματολογίου, κατασκευάστηκε με τη βοήθεια του λογισμικού CHIC. Το Διάγραμμα Ομοιότητας οργανώνει τις μεταβλητές της έρευνας σε ομάδες σύμφωνα με την ομοιογένεια που εμφανίζουν κατά το χειρισμό των έργων από τους μαθητές. Αυτή η ομαδοποίηση οφείλεται στον εννοιολογικό χαρακτήρα κάθε ομάδας μεταβλητών. Στην εργασία αυτή εφαρμόζουμε την μέθοδο της ομοιότητας.

Αναγνώριση Συναρτήσεων

Στη συγκεκριμένη ενότητα θα αναλύσουμε τη διάσταση της αναγνώρισης των συναρτήσεων, μέσα από τη χρήση διαγραμμάτων ομοιότητας τα οποία δημιουργήθηκαν από το δείγμα των απαντήσεων του ερωτηματολογίου. Οι διαστάσεις αυτές θα αναλυθούν για τις τρεις διαφορετικές τάξεις και επίπεδα μαθητών, δηλαδή Γ΄ Γυμνασίου, Α΄ Λυκείου και Β΄ Λυκείου, όπως επίσης και για το συνολικό δείγμα.

Για το σκοπό αυτό θα ληφθούν υπόψη οι πιο κάτω ερωτήσεις:

Α7. Παρακάτω παρουσιάζονται πέντε γραφήματα. Ποιο από αυτά θα μπορούσε να είναι το γράφημα της y=x-2 (A7); Να εξηγήσετε την απάντησή σας (A7Exp).

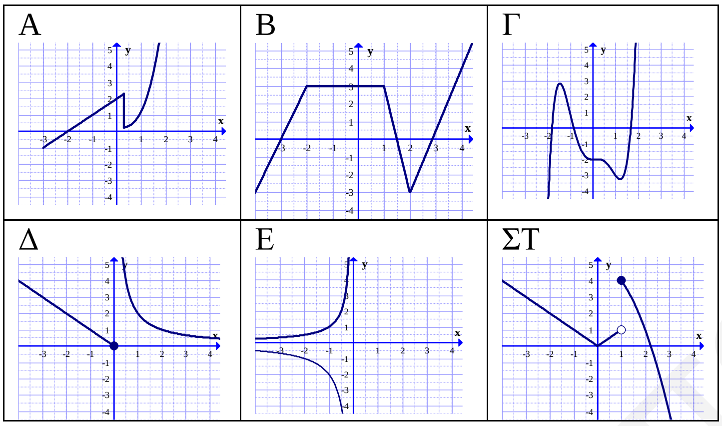


Α10. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συμβολικές εκφράσεις μπορούν να ορίσουν συναρτήσεις. Να κυκλώσετε τις σχέσεις που ορίζουν συναρτήσεις.

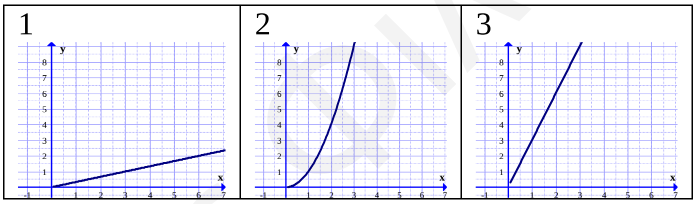
Α. $2x + y = 3, \quad x \in \mathbb{R}$ Β. $y^2 = 4x \quad x \in \mathbb{R}_+$ Γ. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \alpha\nu\ x \geq 3 \\ -x+2 & \alpha\nu\ x < 3 \end{cases}$

Δ. $y = \sqrt{x-2} + 5, \quad x \in \mathbb{R}$ Ε. $y = x^2 + 3x + 3 \quad x \in [-2, +5]$

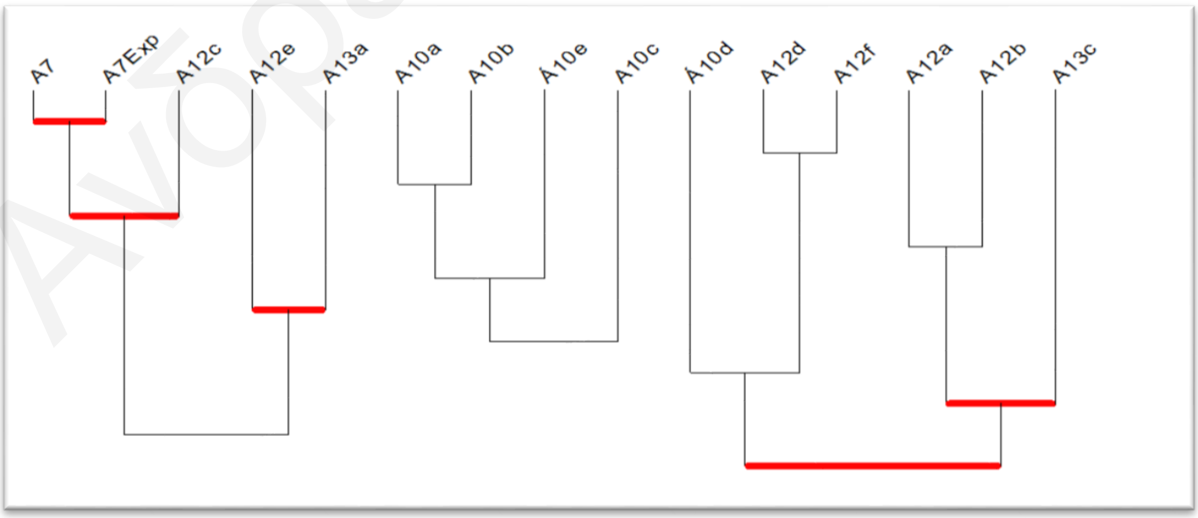
Α12. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω καμπύλες είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων.



Α13. Να βάλετε σε κύκλο τον αριθμό της γραφικής παράστασης που εκφράζει την περίμετρο ισοπλεύρου τριγώνου συναρτήσει του μήκους της πλευράς του.



I. Διάγραμμα ομοιότητας - Συνολικό Δείγμα - Αναγνώριση

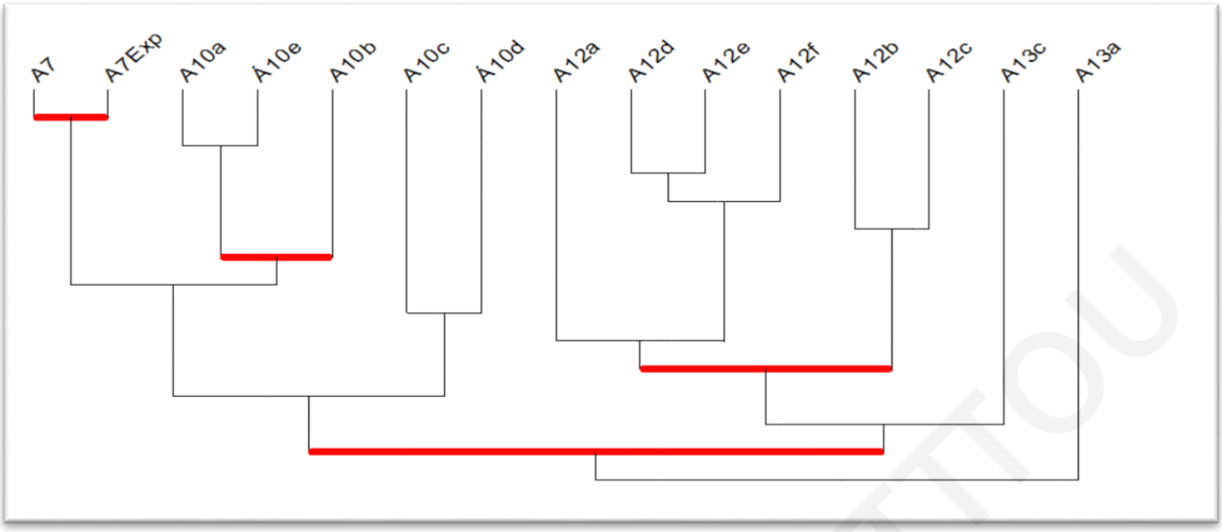


Διάγραμμα 19: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά την αναγνώριση

Δημιουργούνται τρεις ομάδες οι οποίες δε συνδέονται μεταξύ τους. Η 1η ομάδα αποτελείται από την ερώτηση 7 (Απάντηση; Α7 και Επεξήγηση; Α7Exp) η οποία συνδέεται με δύο από τα υποερωτήματα της ερώτησης 12 (Α12c και Α12e) και ένα από τα υποερωτήματα της ερώτησης 13 (Α13a). Ουσιαστικά, η πρώτη ομάδα είναι ομάδα των γραφικών αναπαραστάσεων. Είναι σημαντική η υποομάδα των έργων Α12e και Α13a, αφού η Α12e παριστάνει μια μη συνάρτηση ενώ η Α13a είναι η λανθασμένη επιλογή στην ερώτηση 13. Σημαντικό χαρακτηριστικό αυτής της 1ης ομάδας είναι το γεγονός ότι δεν αποτελεί απλή αναγνώριση μερικών από τις μεταβλητές. Η ερώτηση 7 είναι αναγνώριση μέσω μιας νοερής μετάφρασης από αλγεβρική ($y = x - 2$ π.χ. $y = 0, x = 2$) σε γραφική παράσταση, ενώ η Α13a είναι μετάφραση από λεκτική αναπαράσταση (περίμετρος ισόπλευρου τριγώνου) σε γραφική αναπαράσταση. Η 2η ομάδα αποτελείται από συμβολικές αναπαραστάσεις και περιλαμβάνει τέσσερεις από τις πέντε συμβολικές εκφράσεις της ερώτησης 10. Η 3η ομάδα είναι ομάδα γραφικών αναπαραστάσεων και συγκεκριμένα περιλαμβάνει τα 4 από τα 6 υποερωτήματα της ερώτησης 12. Με αυτήν συνδέεται η Α13c (η ορθή επιλογή της ερώτησης 13) και μια μόνο από τις επιλογές συμβολικών εκφράσεων της ερώτησης 10 (Α10d), η οποία δεν αποτελεί συνάρτηση. Παρατηρώντας το δείκτη ομοιότητας μεταξύ των μεταβλητών της 3ης ομάδας, βλέπουμε ότι ο δεσμός είναι πολύ ασθενής (Ομοιότητα: 0.0138845). Παρόλα αυτά, το κόκκινο χρώμα στη σύνδεση μας δείχνει ότι ο δεσμός αυτός είναι σημαντικός.

Οι τρεις ομάδες δεν συνδέονται μεταξύ τους. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μια στεγανοποίηση μεταξύ των τριών αυτών τύπων αναγνώρισης. Με άλλα λόγια ένας μαθητής που αναγνωρίζει μια συνάρτηση σε συμβολική έκφραση (αντίστοιχα σε συμβολική αναπαράσταση) δεν είναι υποχρεωτικό ότι θα αναγνωρίσει την ίδια συνάρτηση σε γραφική αναπαράσταση (αντίστοιχα σε συμβολική). Η στεγανοποίηση αυτή εκφράζεται με τόσο ισχυρό τρόπο αφού σχηματίζονται δύο διαφορετικές ομάδες γραφικών αναπαραστάσεων. Η 1η διαφέρει από την 3η στο ότι μερικές ερωτήσεις απαιτούν ένα είδος νοερής (ή μη) μετάφρασης μεταξύ αναπαραστάσεων. Όσον αφορά την ερώτηση 13 η επιλογή Α13b δεν εμφανίζεται στο διάγραμμα διότι ένας πολύ μικρός μονοψήφιος αριθμός μαθητών την επέλεξε. Το γεγονός αυτό ίσως να οφείλεται στο ότι η περίμετρος παραπέμπει σε γραμμική σχέση που μόνο οι ερωτήσεις Α13a και Α13c αντιστοιχούν.

II. Διάγραμμα Ομοιότητας – Γ΄ Γυμνασίου - Αναγνώριση

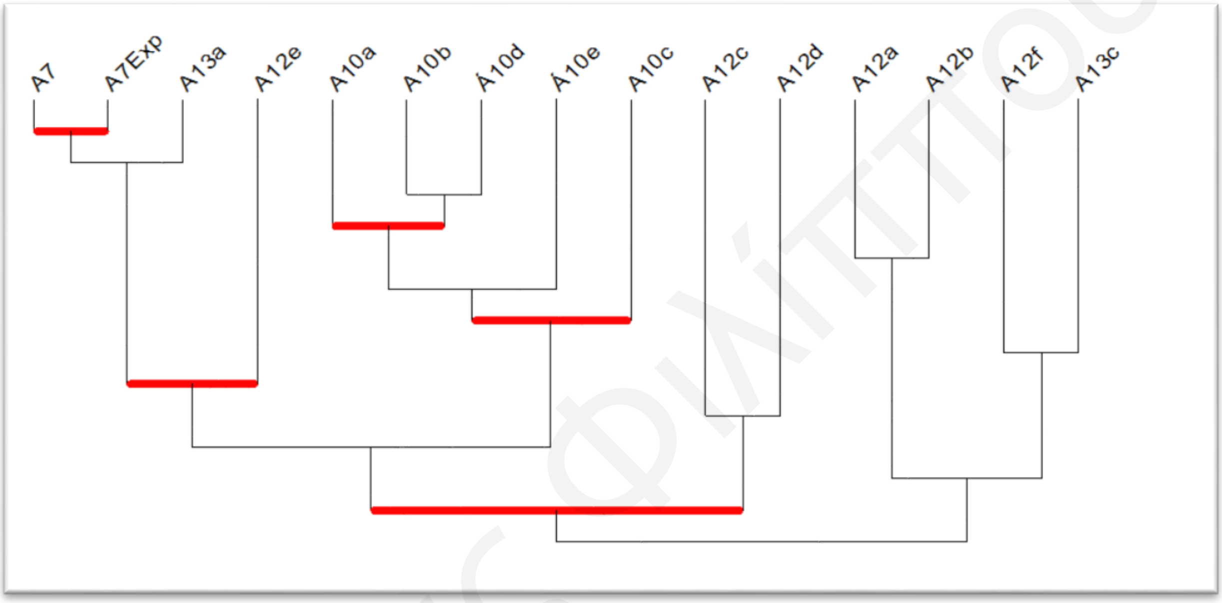


Διάγραμμα 20: Διάγραμμα ομοιότητας για την Γ΄ Γυμνασίου που αφορά την αναγνώριση

Δημιουργούνται δύο ομάδες οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ισχυρό δεσμό. Η $1^{η}$ ομάδα αποτελείται από τα πέντε υποερωτήματα της ερώτησης 10 (A10a, A10b, A10c, A10d και A10e), και συνδέεται με την ερώτηση 7 (Απάντηση; A7 και Επεξήγηση; A7Exp) η οποία αποτελεί αναγνώριση γραμμικής συνάρτησης που δίνεται με τη χρήση γραφικής αναπαράστασης. Η ομάδα αυτή αποτελεί αναγνώριση συναρτήσεων, οι οποίες δίνονται σε συμβολική μορφή. Η $2^{η}$ ομάδα αποτελεί αναγνώριση συναρτήσεων, οι οποίες δίνονται σε γραφική μορφή. Περιλαμβάνει τις έξι γραφικές παραστάσεις της ερώτησης 12 (A12a, A12b, A12c, A12d, A12e και A12f) και συνδέεται με την ορθή απάντηση της ερώτησης 13 (A13c). Όσον αφορά στην ερώτηση 13 η επιλογή A13b δεν εμφανίζεται στο διάγραμμα διότι ένας πολύ μικρός μονοψήφιος αριθμός μαθητών την επέλεξε. Το γεγονός αυτό ίσως να οφείλεται στο ότι η περίμετρος παραπέμπει σε γραμμική σχέση που μόνο οι ερωτήσεις A13a και A13c αντιστοιχούν. Η μεταβλητή A13a συνδέεται με στενό δεσμό με όλες τις υπόλοιπες. Παρόλα αυτά ο δεσμός αυτός δεν είναι το ίδιο σημαντικός με τους υπόλοιπους.

Όσον αφορά στον πληθυσμό των μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου υπάρχει μια ξεκάθαρη διάκριση δύο ομάδων, της πρώτης ομάδας (συμβολική) και της δεύτερης ομάδας (γραφική). Το ενδιαφέρον σε αυτή την περίπτωση είναι ότι οι δύο ομάδες συνδέονται με ένα στατιστικά πολύ σημαντικό τρόπο. Επομένως, η στεγανοποίηση εκφράζεται στην περίπτωση αυτή με πιο ξεκάθαρο τρόπο όσον αφορά στη σύνθεση των δύο ομάδων. Όλα τα έργα σε συμβολική έκφραση ανήκουν στην πρώτη ομάδα και όλα τα έργα σε γραφική παράσταση ανήκουν στη δεύτερη ομάδα. Όμως, οι δύο ομάδες συνολικά συνδέονται με σημαντικό δεσμό.

III. Διάγραμμα Ομοιότητας – Α΄ Λυκείου - Αναγνώριση

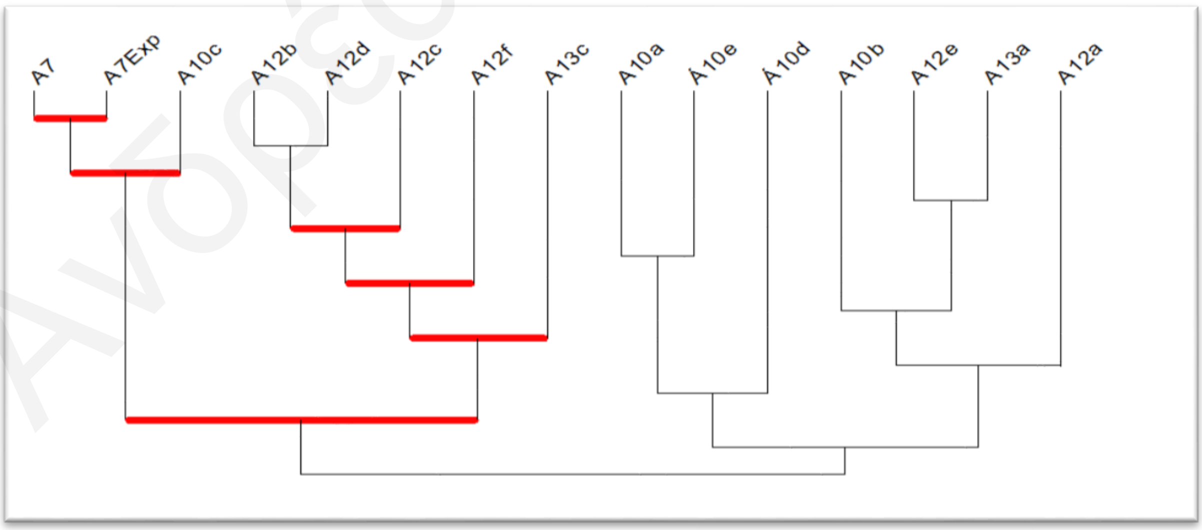


Διάγραμμα 21: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά την αναγνώριση

Δημιουργούνται δύο ομάδες οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με λιγότερο ισχυρό δεσμό. Η 1η ομάδα χωρίζεται σε τρεις υποομάδες. Η 1η υποομάδα αποτελείται από τέσσερις μεταβλητές, δύο εκ των οποίων είναι τα υποερωτήματα της ερώτησης 7 (απάντηση; A7 και επεξήγηση; A7Exp). Οι δύο αυτές μεταβλητές συνδέονται με μια από τις δύο λανθασμένες επιλογές της ερώτησης 13 (A13a). Η υποομάδα ολοκληρώνεται με ένα από τα υποερωτήματα της ερώτησης 12 (A12e), η οποία συνδέεται με τις τρεις μεταβλητές που προαναφέρθηκαν. Η υποομάδα παριστάνει αναγνώριση γραμμικής συνάρτησης μέσω γραφικών αναπαραστάσεων. Η 2η υποομάδα περιλαμβάνει τα πέντε υποερωτήματα της ερώτησης 10(A10a, A10b, A10c, A10d και A10e). Η ομάδα αυτή αποτελεί αναγνώριση συναρτήσεων, οι οποίες δίνονται σε συμβολική μορφή. Η 3η και τελευταία υποομάδα η οποία αποτελεί μέρος της 1ης ομάδας, αποτελείται από δύο εκ των έξι γραφικών παραστάσεων της ερώτησης 12(A12c, A12d) και αποτελεί αναγνώριση γραφικών αναπαραστάσεων. Οι τρεις υποομάδες συνδέονται μεταξύ τους με πολύ στενό δεσμό. Η δεύτερη ομάδα αποτελείται από τέσσερις μεταβλητές. Οι τρεις από αυτές είναι υποερωτήματα της ερώτησης 12 (Α12a, Α12b, Α12f) και η τέταρτη μεταβλητή είναι η ορθή απάντηση της ερώτησης 13 (Α13c).

Οι δύο ομάδες συνδέονται μεταξύ τους. Αυτό σημαίνει ότι ένας μαθητής που αναγνωρίζει μια συνάρτηση σε συμβολική έκφραση (αντίστοιχα σε συμβολική αναπαράσταση) ίσως μπορεί να αναγνωρίσει την ίδια συνάρτηση σε γραφική αναπαράσταση (αντίστοιχα σε συμβολική). Ο στενός δεσμός μεταξύ των τριών υποομάδων (γραφικών και συμβολικής), ενισχύει αυτή την άποψη. Η στεγανοποίηση εκφράζεται με όχι και τόσο ξεκάθαρο τρόπο, κυρίως όσον αφορά στις υποομάδες της πρώτης ομάδας, αφού δύο από αυτές είναι γραφικές αναγνωρίσεις και μια είναι συμβολική. Όσον αφορά την ερώτηση 13 η επιλογή Α13b δεν εμφανίζεται στο διάγραμμα διότι ένας πολύ μικρός μονοψήφιος αριθμός μαθητών την επέλεξε. Το γεγονός αυτό ίσως να οφείλεται στο ότι η περίμετρος παραπέμπει σε γραμμική σχέση που μόνο οι ερωτήσεις Α13a και Α13c αντιστοιχούν.

IV. Διάγραμμα Ομοιότητας - Β΄ Λυκείου - Αναγνώριση



Διάγραμμα 22: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ Λυκείου που αφορά την αναγνώριση

Στο διάγραμμα αυτό παρατηρούμε ότι δημιουργούνται δύο ομάδες. Η 1η ομάδα αποτελείται από δύο υποομάδες. Η πρώτη υποομάδα περιλαμβάνει τρεις μεταβλητές. Η ερώτηση 7 (Απάντηση; A7 και Επεξήγηση; A7Exp) συνδέεται με μία εκ των πέντε συμβολικών υποερωτημάτων της ερώτησης 10 (A10c). Η δεύτερη υποομάδα αποτελείται από πέντε μεταβλητές. Τέσσερα από τα υποερωτήματα της ερώτησης 12 (A12b, A12c, A12d και A12f), συνδέονται με την ορθή απάντηση της ερώτησης 13(A13c). Οι δύο αυτές υποομάδες που δημιουργούν στο σύνολό τους την πρώτη ομάδα, συνδέονται μεταξύ τους με πολύ στενό δεσμό. Η 2η ομάδα αποτελείται από τέσσερις από τις μεταβλητές της ερώτησης 10(A10a, A10b, A10d και A10e) και συνδέεται με μία εκ των λανθασμένων επιλογών της ερώτησης 13 (A13a) όπως επίσης και με μία γραφική αναπαράσταση της ερώτησης 12 (A12a). Οι δύο ομάδες συνδέονται μεταξύ τους με ασθενή δεσμό.

Ορισμός Συναρτήσεων

Σε αυτή την ενότητα επιθυμούμε να αναλύσουμε τη διάσταση ορισμού της συνάρτησης, μέσα από τη χρήση διαγραμμάτων ομοιότητας τα οποία εξήχθησαν από το δείγμα των απαντήσεων του ερωτηματολογίου . Οι διαστάσεις αυτές θα αναλυθούν για τρία διαφορετικά επίπεδα, Γ΄ Γυμνασίου, Α΄ Λυκείου και Β΄ Λυκείου, όπως επίσης και για το συνολικό δείγμα.

Για το σκοπό αυτό θα ληφθούν υπόψη οι πιο κάτω ερωτήσεις:

A1(α) Τι ονομάζουμε συνάρτηση; (β) Να δώσετε ένα παράδειγμα.

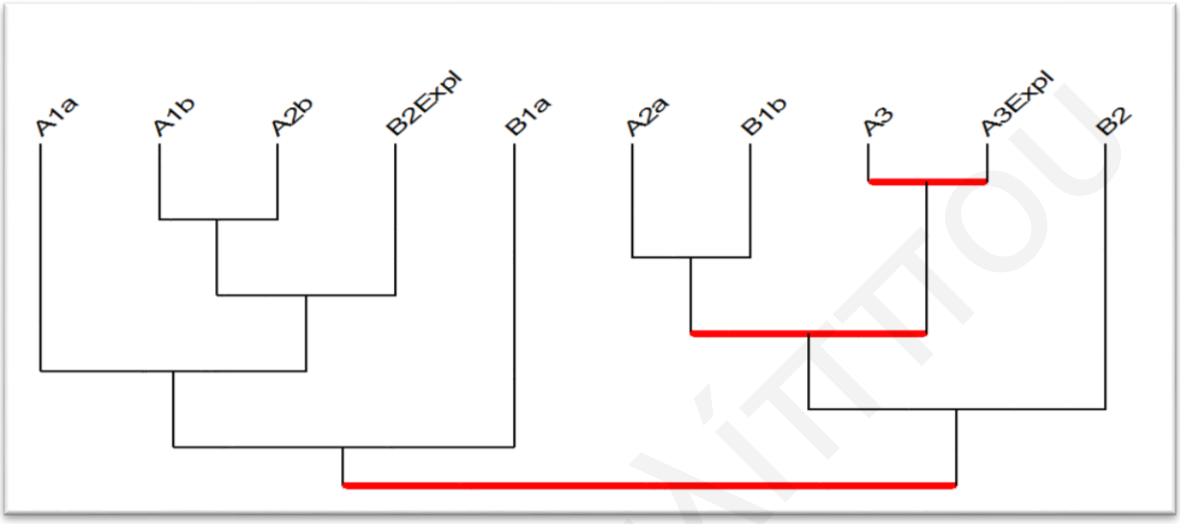
A2(α) Πώς καταλαβαίνουμε ότι μία γραφική παράσταση σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων δεν παριστάνει συνάρτηση; (β) Να δώσετε ένα παράδειγμα μιας σχέσης η οποία δεν παριστάνει συνάρτηση.

A3. Αν ισχύει $f(-4) = 2$ και $f(-4) = 0$, να εξετάσετε αν η σχέση f μπορεί να είναι συνάρτηση.

B1. (α) Πώς καταλαβαίνουμε ότι μια γραφική παράσταση σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων παριστάνει συνάρτηση; (β) Να δώσετε ένα παράδειγμα μιας σχέσης η οποία παριστάνει συνάρτηση.

B2. Θα μπορούσε να οριστεί συνάρτηση που όλες οι τιμές της να είναι ίσες μεταξύ τους; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

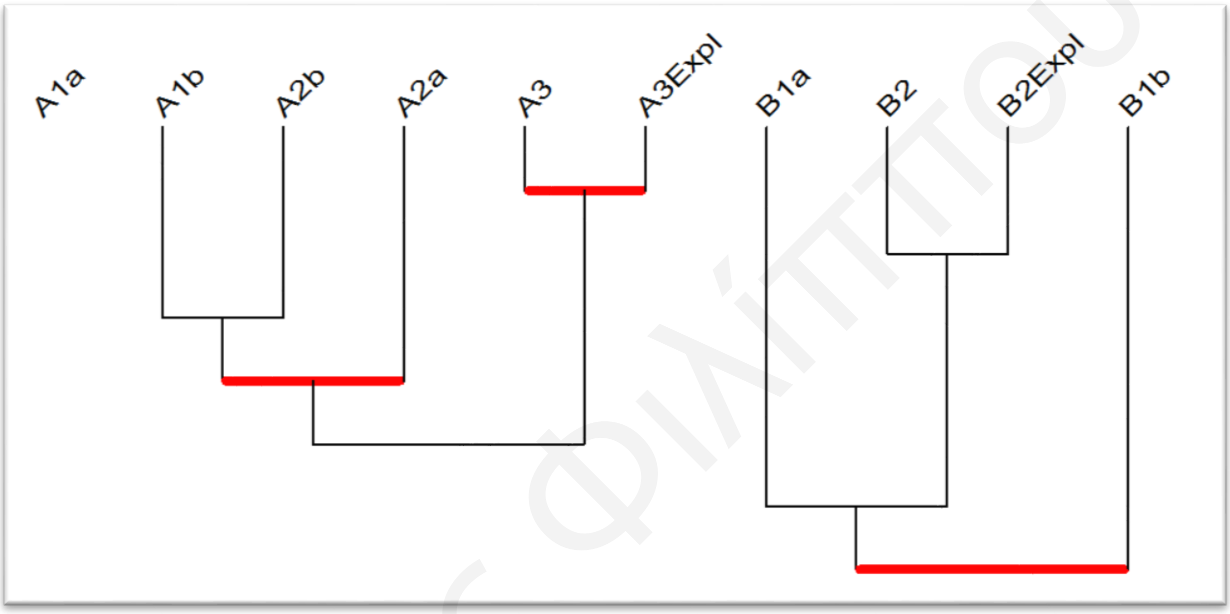
I. Διάγραμμα Ομοιότητας - Συνολικό Δείγμα - Ορισμός



Διάγραμμα 23: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά τον ορισμό της συνάρτησης

Οι ερωτήσεις που αφορούν στον τυπικό ορισμό και τα παραδείγματα σε σχέση με την έννοια της συνάρτησης και τέλος τα συγκεκριμένα παραδείγματα σχέσεων τα οποία αποτελούν ή δεν αποτελούν συνάρτηση συνδέονται, όπως είναι φυσικό, με έντονο τρόπο μεταξύ τους. Οι μεταβλητές χωρίζονται σε δύο υποομάδες, οι οποίες συνδέονται πολύ στενά μεταξύ τους. (Το κόκκινο χρώμα δείχνει ότι η σχέση είναι πολύ πιο σημαντική από τις υπόλοιπες). Παρόλο που είναι δύσκολο να γίνει σαφής εννοιολογική διάκριση μεταξύ των δύο υποομάδων, εν τούτοις μπορούμε να προσδιορίσουμε κάποιες μεταβλητές που χαρακτηρίζουν τις δύο υποομάδες. Πιο συγκεκριμένα στην $1^{η}$ ομάδα εμφανίζονται οι δύο ορισμοί A1a και B1a όπως επίσης και η μεταβλητή η οποία είναι της ίδιας φύσης με τις δύο προηγούμενες αφού απαιτείται να εξηγήσει γιατί είναι συνάρτηση με τη χρήση του ορισμού. Επιπλέον, στην ομάδα αυτή εμφανίζονται οι μεταβλητές A1b και A2b που είναι ένα παράδειγμα συνάρτησης (A1b) και ένα παράδειγμα σχέσης που δεν είναι συνάρτηση (A2b). Η $1^{η}$ ομάδα λοιπόν θεωρείται ως μια ισχυρή εννοιολογική ομάδα του ορισμού της συνάρτησης. Η $2^{η}$ ομάδα περιλαμβάνει τη σχέση μεταξύ της απάντησης και της επεξήγησης που δίνουν οι μαθητές για να αποδείξουν ότι *f(-4)=2* και *f(-4)=0* δεν είναι συνάρτηση στην ερώτηση Α3. Εμφανίζεται επίσης και η Α2a που είναι ένα είδος ορισμού για μια σχέση που δεν είναι συνάρτηση. Τέλος, εμφανίζεται το παράδειγμα Β1b και ένα πιο συγκεκριμένο παράδειγμα συνάρτησης (Β2). Το χαρακτηριστικό αυτής της 2ης ομάδας είναι η πιο έντονη παρουσία μεταβλητών που σχετίζονται με σχέσεις που δεν είναι συναρτήσεις.

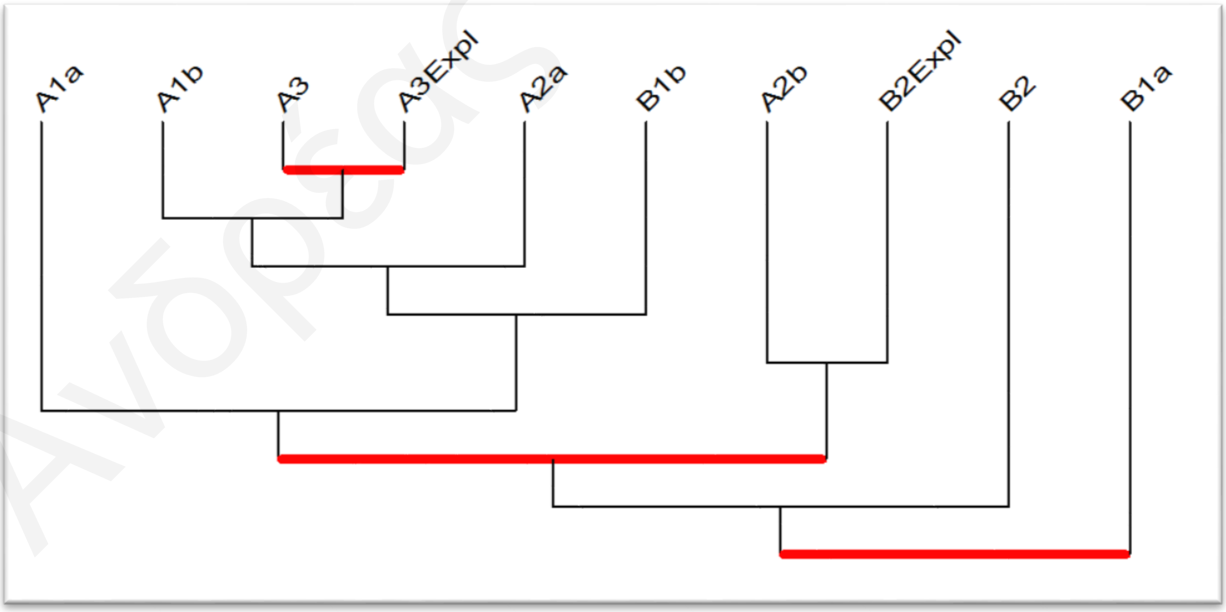
II. Διάγραμμα Ομοιότητας Γ΄ Γυμνασίου - Ορισμός



Διάγραμμα 24: Διάγραμμα ομοιότητας για την Γ΄ Γυμνασίου που αφορά τον ορισμό της συνάρτησης.

Στο διάγραμμα ομοιότητας παρατηρούμε ότι δημιουργούνται δύο ομάδες. Η 1η ομάδα περιλαμβάνει πέντε μεταβλητές. Δύο από αυτές τις μεταβλητές είναι τα υποερωτήματα της ερώτησης 2 του δοκιμίου Α (Απάντηση Α2a, Παράδειγμα Α2b). Μια τρίτη μεταβλητή είναι το παράδειγμα της ερώτησης 1, η οποία ανήκει επίσης στο δοκίμιο Α (Α1b). Τέλος, περιλαμβάνει το παράδειγμα και την επεξήγηση της ερώτησης 3 από το ίδιο δοκίμιο (Α3 και Α3Expl αντίστοιχα). Ο δεσμός μεταξύ των μεταβλητών αυτής της ομάδας είναι πολύ στενός (ομοιότητα 0.950015). Ο ορισμός στην ερώτηση 1 του πρώτου δοκιμίου (Α1a) δεν συνδέεται με καμία από τις υπόλοιπες μεταβλητές του διαγράμματος. Η 2η ομάδα περιλαμβάνει τις δύο πρώτες ερωτήσεις του δοκιμίου Β. Εμφανίζονται τέσσερις μεταβλητές, δύο εκ των οποίων είναι τα υποερωτήματα της ερώτησης 1 (Ορισμός Β1a και Παράδειγμα Β1b). Την ομάδα ολοκληρώνουν τα υποερωτήματα της ερώτησης 2 του δεύτερου δοκιμίου (B2 και B2Expl). Ο δεσμός μεταξύ αυτών των μεταβλητών δεν είναι στενός (ομοιότητα 0.225595). Εντούτοις, το κόκκινο χρώμα στη σύνδεση δηλώνει τη σημαντικότητα της σχέσης αυτής. Οι ερωτήσεις που αφορούν τον ορισμό (γενικά) και τα παραδείγματα σε σχέση με τη συνάρτηση, όπως επίσης και τα συγκεκριμένα παραδείγματα σχέσεων τα οποία αποτελούν ή όχι συνάρτηση δεν συνδέονται μεταξύ τους όπως θα ήταν αναμενόμενο. Αντίθετα, παρατηρούμε ότι οι μεταβλητές που αφορούν τον ορισμό παρουσιάζονται ξεχωριστά για κάθε ένα από τα δύο δοκίμια. Εντοπίζουμε ότι στο συγκεκριμένο διάγραμμα ομοιότητας δεν υπάρχει συνέπεια στον τρόπο με τον οποίο απαντούν οι μαθητές. Παρατηρούμε πως παρά το γεγονός ότι μπορούν να δώσουν ορισμό και παράδειγμα αντίστοιχα, εν τούτοις δεν φαίνεται να αντιλαμβάνονται την ομοιότητα των ερωτημάτων των δύο δοκιμίων (Δοκίμιο Α και Δοκίμιο Β). Αντιμετωπίζουν παρόμοια ερωτήματα αποσπασματικά γεγονός που ίσως να δείχνει πως η γνώση δεν έχει σταθεροποιηθεί.

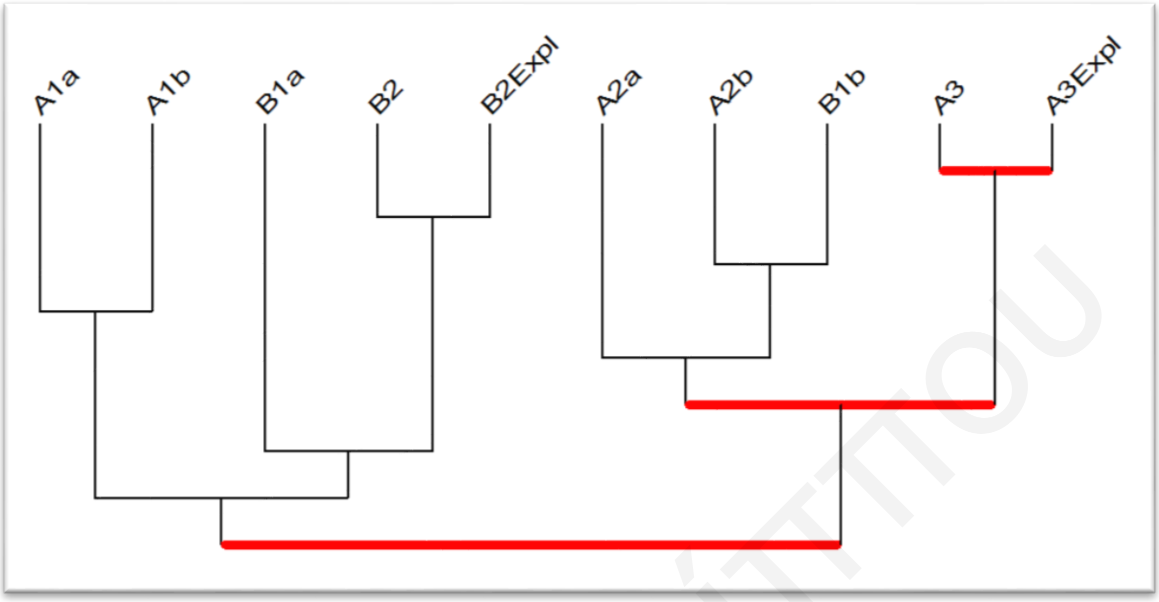
III. Διάγραμμα Ομοιότητας – Α΄ Λυκείου - Ορισμός



Διάγραμμα 25: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά τον ορισμό της συνάρτησης

Στο συγκεκριμένο διάγραμμα ομοιότητας είναι δύσκολο να διακριθούν εννοιολογικά με σαφήνεια οι δύο ομάδες. Πιο συγκεκριμένα στην 1η ομάδα εμφανίζεται ένας από τους ορισμούς A1a όπως επίσης και η μεταβλητή B2Expl η οποία είναι της ίδιας φύσης αφού απαιτείται η χρήση του ορισμού για την επεξήγηση στο ερώτημα αν μπορεί να οριστεί συνάρτηση με όλες τις τιμές τις ίσες μεταξύ τους. Επιπρόσθετα, στην ίδια ομάδα εμφανίζονται οι μεταβλητές A1b και A2b. Η A1b είναι παράδειγμα και η αποτελεί παράδειγμα σχέσης που δεν είναι συνάρτηση. Ακόμα, παρουσιάζεται η μεταβλητή A2a που αποτελεί ένα είδος ορισμού για μία σχέση που δεν αποτελεί συνάρτηση , όπως επίσης και η μεταβλητή B1b η οποία είναι παράδειγμα. Τέλος, στην ίδια ομάδα εμφανίζονται οι μεταβλητές A3 και A3Expl οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με πολύ στενό δεσμό όπως είναι φυσικό. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι μεταβλητές της πρώτης ομάδας χωρίζονται σε δύο υποομάδες. Την πρώτη υποομάδα αποτελούν οι μεταβλητές A1a, A1b, A3, A3Expl, A2a και B1b και συνδέονται μεταξύ τους με δεσμό ομοιότητας 0.675665. Τη δεύτερη υποομάδα αποτελούν οι μεταβλητές A2b και B2Expl και συνδέονται μεταξύ τους με δεσμό ομοιότητας 0.787636. Στη 2η ομάδα εμφανίζονται άλλες δύο μεταβλητές, η B2 η οποία είναι ένα πιο συγκεκριμένο παράδειγμα συνάρτησης και η B1a η οποία είναι ορισμός. Οι δύο ομάδες συνδέονται μεταξύ τους με ασθενή αλλά παρόλα αυτά σημαντικό δεσμό, πράγμα που φανερώνεται από το έντονο κόκκινο χρώμα. Οι ερωτήσεις που αφορούν τον τυπικό ορισμό και τα παραδείγματα σε σχέση με τη συνάρτηση, όπως επίσης και τα συγκεκριμένα παραδείγματα σχέσεων για τα οποία οι μαθητές της Α΄ Λυκείου καλούνται να εξετάσουν αν αποτελούν ή δεν αποτελούν συνάρτηση συνδέονται μεταξύ τους με πολύ στενό δεσμό. Οι μεταβλητές χωρίζονται σε δύο υποομάδες στενά συνδεδεμένες μεταξύ τους, πράγμα που δηλώνει μια ισχυρή εννοιολογική σχέση του ορισμού της συνάρτησης.

IV. Διάγραμμα Ομοιότητας – Β΄ Λυκείου - Ορισμός



Διάγραμμα 26: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ Λυκείου που αφορά τον ορισμό της συνάρτησης

Στο διάγραμμα ομοιότητας παρατηρούμε ότι δημιουργούνται δύο κύριες ομάδες. Η $1^{η}$ ομάδα περιλαμβάνει πέντε μεταβλητές. Δύο από αυτές τις μεταβλητές είναι τα υποερωτήματα της ερώτησης 2 του δοκιμίου Β (Β2 και Β2Expl). Δύο άλλες μεταβλητές είναι τα υποερωτήματα της ερώτησης 1, η οποίες ανήκουν στο δοκίμιο Α (Α1a και Α1b). Τέλος, περιλαμβάνει τον ορισμό της ερώτησης 1 από το δοκίμιο Β (Β1a). Η $2^{η}$ ομάδα περιλαμβάνει επίσης πέντε μεταβλητές. Δύο από αυτές είναι το παράδειγμα της ερώτησης 2 του δοκιμίου Α (Α2b), όπως επίσης και το παράδειγμα της ερώτησης 1 του δοκιμίου Β (Β1b). Επιπλέον, παρουσιάζεται η μεταβλητή Α2a που αποτελεί ένα είδος ορισμού για μία σχέση που δεν αποτελεί συνάρτηση. Τέλος, στην ίδια ομάδα εμφανίζονται οι μεταβλητές Α3 και Α3Expl οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με πολύ στενό δεσμό όπως είναι φυσικό. Η σύνδεση μεταξύ των δύο ομάδων δεν είναι στενή, αλλά είναι σημαντική.

Οι ερωτήσεις που αφορούν στο τυπικό ορισμό και τα παραδείγματα σε σχέση με τη συνάρτηση και τέλος τα συγκεκριμένα παραδείγματα σχέσεων τα οποία αποτελούν ή δεν αποτελούν συνάρτηση συνδέονται μεταξύ τους με ένα πολύ σημαντικό δεσμό. Το κόκκινο χρώμα με το οποίο φαίνεται να συνδέονται οι δύο ομάδες, δείχνει ότι η σχέση είναι πολύ σημαντική. Δεν είναι εύκολο να γίνει σαφής εννοιολογική διάκριση μεταξύ των δύο ομάδων. Παρόλα αυτά μπορούμε να προσδιορίσουμε κάποιες μεταβλητές που τις χαρακτηρίζουν. Πιο συγκεκριμένα στην $1^{η}$ ομάδα εμφανίζονται οι δύο ορισμοί Α1a και

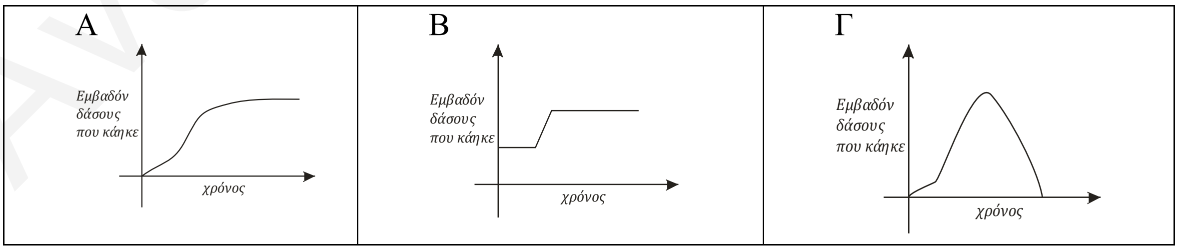
B1a όπως επίσης και η μεταβλητή η οποία είναι της ίδιας φύσης με τις δύο προηγούμενες αφού απαιτείται να εξηγήσει γιατί είναι συνάρτηση με τη χρήση του ορισμού. Επιπλέον, στη $2^{η}$ ομάδα εμφανίζονται οι μεταβλητές A1b και A2b που είναι ένα παράδειγμα συνάρτησης (A1b) και ένα παράδειγμα σχέσης που δεν είναι συνάρτηση (A2b). Οι ομάδες λοιπόν θεωρούμε πως είναι ομάδες με ισχυρούς εννοιολογικούς δεσμούς σχετικά με τον ορισμό της συνάρτησης.

Ερμηνεία Συναρτήσεων

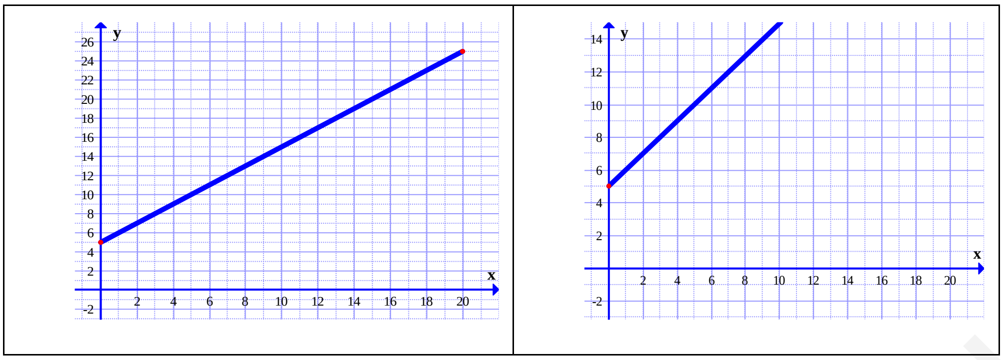
Σε αυτή την ενότητα αναλύεται την ερμηνεία της συνάρτησης, μέσα από τη χρήση διαγραμμάτων ομοιότητας τα οποία εξήχθησαν από το δείγμα των απαντήσεων του ερωτηματολογίου. Οι διαστάσεις αυτές θα αναλυθούν για τρία διαφορετικά επίπεδα, Γ΄ Γυμνασίου, Α΄ Λυκείου και Β΄ Λυκείου, όπως επίσης και για το συνολικό δείγμα.

Για το σκοπό αυτό θα ληφθούν υπόψη οι πιο κάτω ερωτήσεις:

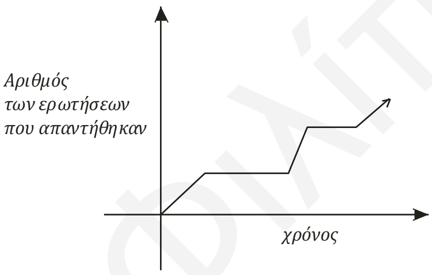
A4. Σε ένα δάσος εμφανίστηκε πυρκαγιά. Στην αρχή η πυρκαγιά προχωρούσε αργά και έκαιγε το δάσος. Στη συνέχεια όταν φύσηξε δυνατός αέρας η πυρκαγιά φούντωσε και έκαιγε το δάσος πολύ πιο γρήγορα. Μετά εμφανίστηκε η πυροσβεστική υπηρεσία και έσβησε την πυρκαγιά. Ποια από τις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις περιγράφει την πιο πάνω κατάσταση; Να εξηγήσετε την απάντηση σας.



A8. Να εξετάσετε αν τα πιο κάτω γραφήματα παριστάνουν την ίδια συνάρτηση. Να εξηγήσετε την απάντηση σας.



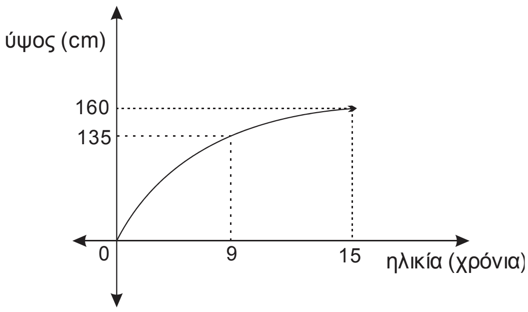
A9. Στην πιο κάτω γραφική παράσταση παρουσιάζεται ο αριθμός των απαντήσεων που δίνει συναρτήσει του χρόνου ένας μαθητής κατά την διάρκεια ενός διαγωνίσματος. Να εξηγήσετε τον τρόπο συμπεριφοράς του μαθητή με βάση τη γραφική παράσταση.



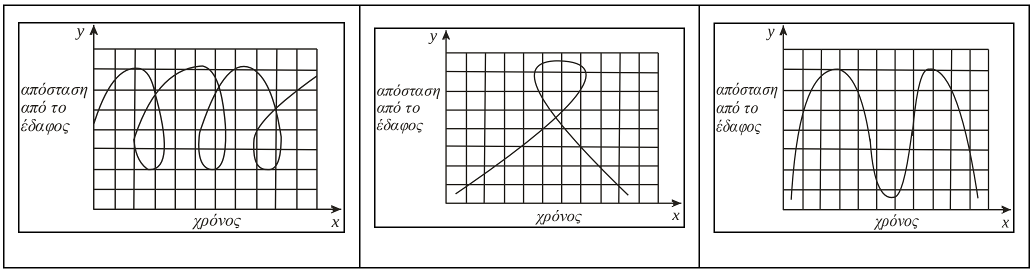
B4. Το ύψος της Παναγιώτας συναρτήσει της ηλικίας της δίνεται στο πιο κάτω διάγραμμα. Να υπολογίσετε περίπου το ύψος της Παναγιώτας στην ηλικία των:

(α) 3 χρονών (β) 10 χρονών (γ) 18 χρονών.

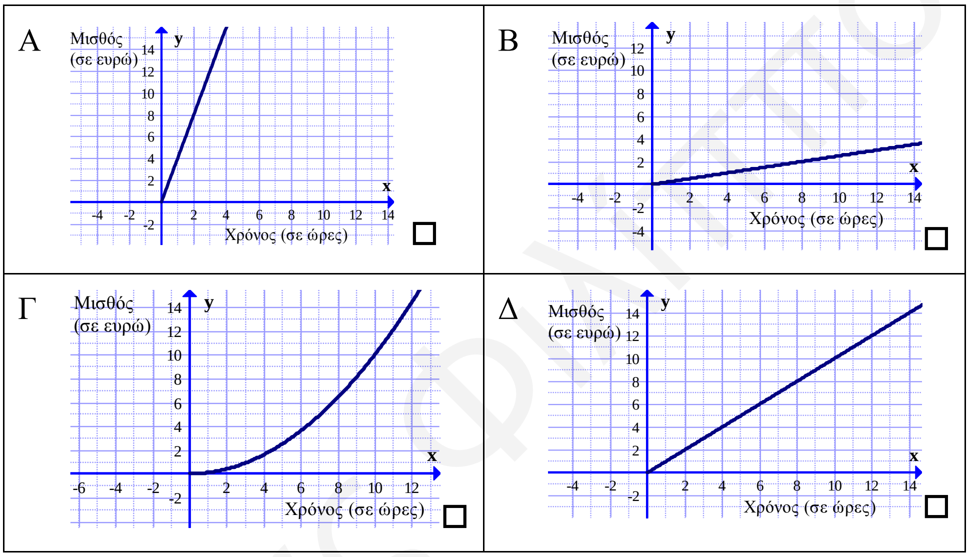
Να εξηγήσετε τον τρόπο που εργαστήκατε.



B5. Να βάλετε ☑ δίπλα από το διάγραμμα που ταιριάζει με την πρόταση: Η Μαρία πήγε στο Λούνα-Παρκ και ανέβηκε στο «μεγάλο τροχό». Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

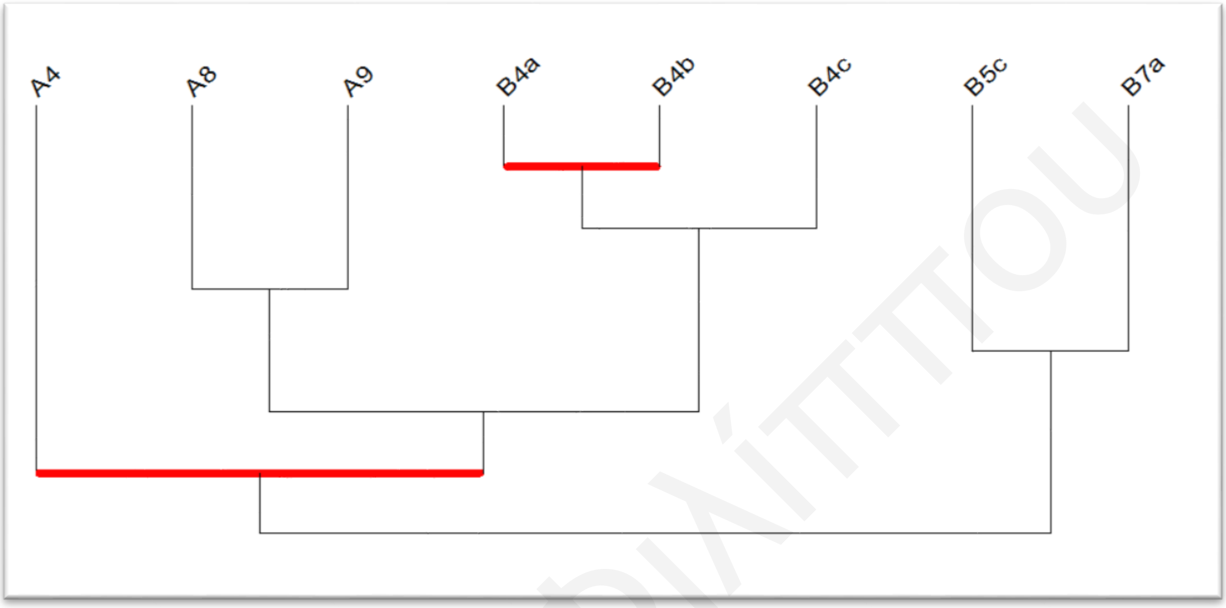


B7. Ένας ωρομίσθιος υπάλληλος πληρώνεται 4 ευρώ την ώρα. Να βάλετε ☑ στην γραφική παράσταση που είναι σωστή; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.



I. Διάγραμμα Ομοιότητας - Συνολικό Δείγμα - Ερμηνεία

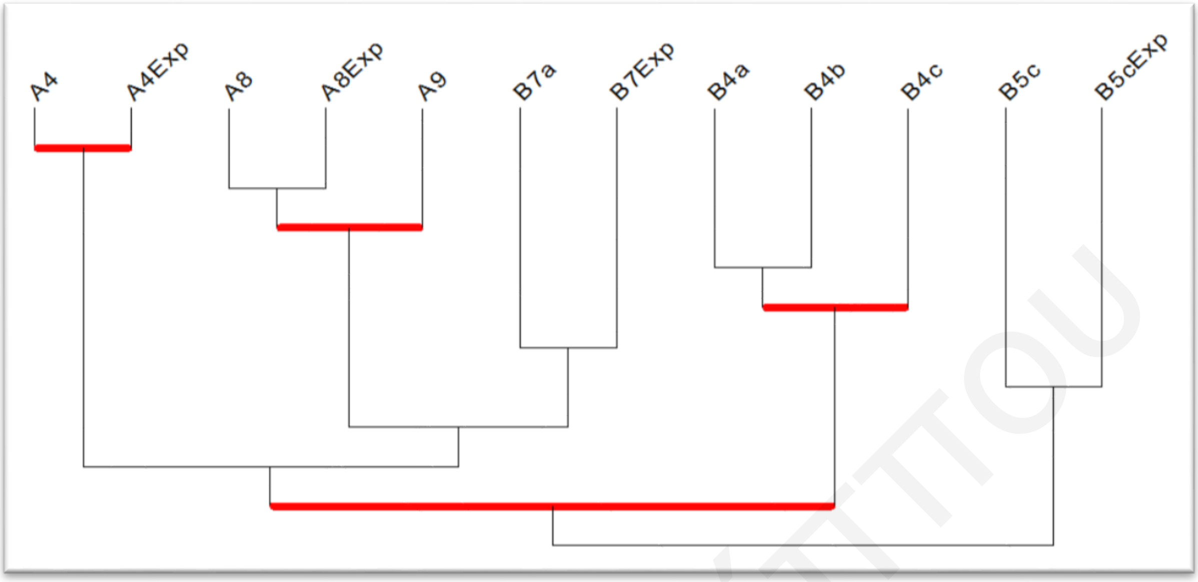
i. Μόνο Ορθές Απαντήσεις



Διάγραμμα 27: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά την ερμηνεία της συνάρτησης με μόνο τις ορθές απαντήσεις.

Δημιουργούνται δύο κύριες ομάδες, οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ισχυρό δεσμό (ομοιότητα 0.994306). Η 1η ομάδα αποτελείται από τις ορθές απαντήσεις τριών από τις ερωτήσεις του δοκιμίου Α: ερώτηση 4 (Α4), ερώτηση 8 (Α8), ερώτηση 9 (Α9). Οι δύο τελευταίες ερωτήσεις συνδέονται μεταξύ τους με ποσοστό ομοιότητας 99.9%. Στην ίδια ομάδα ανήκουν και τα τρία υποερωτήματα της ερώτησης 4 του δοκιμίου Β, πράγμα αναμενόμενο, αφού αποτελούν υποερωτήματα της ίδιας ακριβώς μορφής. Όλες οι μεταβλητές της πρώτης ομάδας συνδέονται μεταξύ τους με πολύ στενό δεσμό (ομοιότητα 0.99977). Στη 2η ομάδα ανήκουν δύο μεταβλητές του δοκιμίου Β. Η ορθή απάντηση της ερώτησης 5 (B5c), όπως επίσης και η ορθή απάντηση της ερώτησης 7 (B7a). Οι δύο αυτές μεταβλητές συνδέονται επίσης μεταξύ τους με πολύ στενό δεσμό. Τέλος, όλες οι μεταβλητές συνδέονται μεταξύ τους με δυνατή σχέση, ομοιότητας που αγγίζει το 99.4%, πράγμα που αποδεικνύει ότι οι μαθητές οι οποίοι απαντούν ορθά στα συγκεκριμένα ερωτήματα, ερμηνεύουν αντίστοιχα με τον ίδιο τρόπο τις γραφικές αναπαραστάσεις.

ii. Μόνο Ορθές Απαντήσεις και Επεξηγήσεις

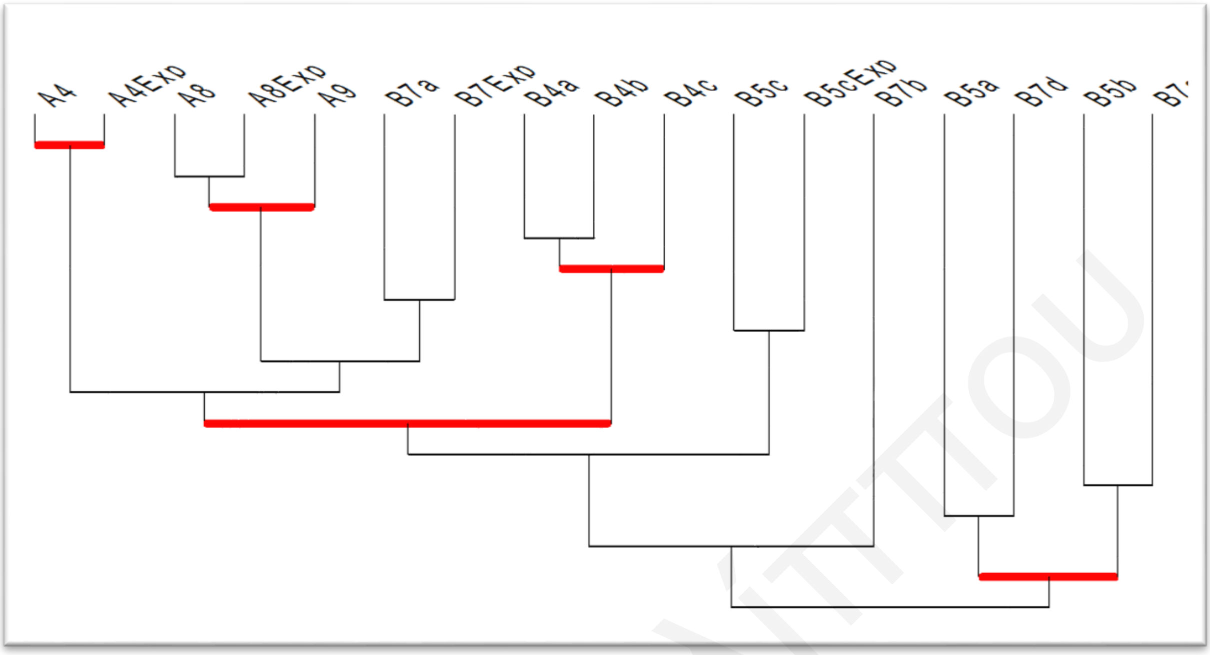


Διάγραμμα 28: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά την ερμηνεία της συνάρτησης με μόνο ορθές απαντήσεις και επεξηγήσεις.

Δημιουργούνται δύο ομάδες οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με πολύ στενό δεσμό. Η 1η ομάδα αποτελείται από δέκα μεταβλητές. Παρατηρούμε ότι δημιουργούνται μικρές υποομάδες οι οποίες κατά πλειοψηφία αποτελούνται από την ορθή απάντηση κάποιων από τα ερωτήματα μαζί με την επεξήγηση τους. Την πρώτη υποομάδα αποτελούν οι μεταβλητές της ερώτησης 4 του δοκιμίου Α, η ορθή απάντηση (A4) η οποία συνδέεται με πολύ στενό δεσμό με την επεξήγηση της (A4Exp). Η δεύτερη υποομάδα αποτελείται από τρεις μεταβλητές, την ορθή απάντηση και την επεξήγηση της ερώτησης 8 του δοκιμίου Α (A8, A8Exp), όπως επίσης και από την ορθή απάντηση της ερώτησης 9 (A9). Την τρίτη υποομάδα απαρτίζουν οι δύο μεταβλητές της ερώτησης 7 του δοκιμίου Β (Ορθή απάντηση: B7, Επεξήγηση: B7Exp). Ο δεσμός των δύο αυτών μεταβλητών ανέρχεται στο 100%, γεγονός αναμενόμενο, αφού είναι λογικό ο μαθητής ο οποίος απαντά ορθά στο ερώτημα μπορεί αντιστοίχως να εξηγήσει και την απάντησή του. Τέλος, στην τέταρτη υποομάδα ανήκουν οι τρεις μεταβλητές της ερώτησης 4 του Β δοκιμίου (B4a, B4b, B4c).

Παρατηρούμε ότι και οι τέσσερις υποομάδες συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ισχυρό δεσμό ομοιότητας (ομοιότητα 0.99). Η 2η ομάδα αποτελείται από τις δύο μεταβλητές της ερώτησης 5 του Β δοκιμίου (Ορθή Απάντηση: B5c, Επεξήγηση: B5cExp). Και οι δύο ομάδες συνδέονται μεταξύ τους με πολύ στενό δεσμό (ομοιότητα 0.99).

iii. Όλες οι μεταβλητές - Ερμηνεία



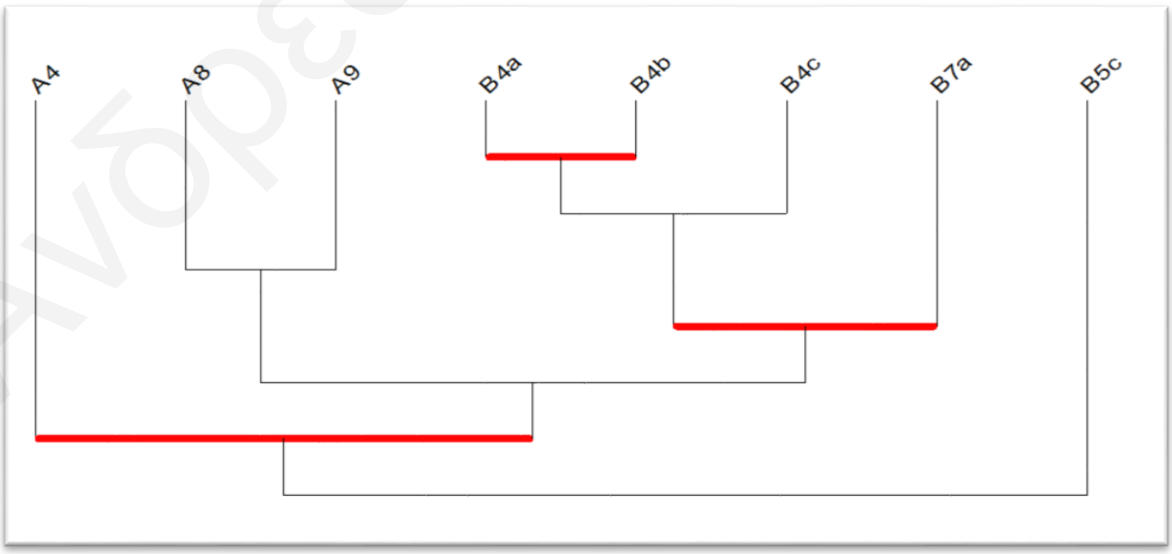
Διάγραμμα 29: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά την ερμηνεία της συνάρτησης με όλες τις μεταβλητές.

Δημιουργούνται δύο κύριες ομάδες οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με πολύ αδύνατο δεσμό (ομοιότητα 0.0415445). Την 1η ομάδα αποτελούν δεκατρείς μεταβλητές οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με πολύ στενό δεσμό (ομοιότητα 0.928687).

Την πρώτη υποομάδα απαρτίζουν οι δύο μεταβλητές της ερώτησης 4 του δοκιμίου A (απάντηση: A4, επεξήγηση: A4Exp), οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με δεσμό ομοιότητας που αγγίζει το 100%. Τη δεύτερη υποομάδα απαρτίζουν τρεις μεταβλητές, δύο εκ των οποίων είναι οι μεταβλητές της ερώτησης 8 του δοκιμίου A (απάντηση: A8, επεξήγηση: A8Exp), και η απάντηση της ερώτησης 9 του δοκιμίου A (A9). Ο δεσμός μεταξύ των μεταβλητών είναι επίσης πολύ δυνατός (ομοιότητα 1). Την τρίτη υποομάδα αποτελούν οι δύο μεταβλητές της ερώτησης 7 του δοκιμίου B (ορθή απάντηση: B7a, επεξήγηση: B7Exp). Ο δεσμός μεταξύ των δύο μεταβλητών είναι πολύ ισχυρός (ομοιότητα 1), αναδεικνύοντας και επιβεβαιώνοντας το γεγονός πως ο μαθητής ο οποίος μπορεί να διακρίνει την ορθή απάντηση, είναι ικανός να εξηγήσει και την απάντησή του. Την τέταρτη υποομάδα αποτελούν οι τρεις απαντήσεις της ερώτησης 4 του δοκιμίου B (B4a, B4b, B4c). Οι μεταβλητές ενώνονται μεταξύ τους με απόλυτο δεσμό ομοιότητας (ομοιότητα 1), γεγονός αναμενόμενο, αφού αποτελούν απαντήσεις της ίδιας ακριβώς μορφής. Την πέμπτη υποομάδα αποτελούν δύο μεταβλητές, η ορθή απάντηση της ερώτησης 5 του Β δοκιμίου και η επεξήγηση της (ορθή απάντηση: B5c, επεξήγηση: B5cExp). Ο δεσμός μεταξύ και αυτών των μεταβλητών είναι πολύ ισχυρός (ομοιότητα 1), πράγμα που επίσης αποδεικνύει την αντίληψη ότι ο μαθητής που επιλέγει την ορθή απάντηση μπορεί να εξηγήσει την επιλογή του. Οι πέντε αυτές υποομάδες συνδέονται μεταξύ τους με πολύ στενό δεσμό (ομοιότητα 0.999845). Οι δώδεκα μεταβλητές που προαναφέρθηκαν, συνδέονται με μια τελευταία μεταβλητή την B7b, η οποία είναι μια από τις λανθασμένες απαντήσεις της ερώτησης 7 του Β δοκιμίου. Ο δεσμός μεταξύ αυτής της μεταβλητής και των προαναφερθέντων, είναι επίσης δυνατός (ομοιότητα 0.928687). Η ύπαρξη αυτής της μεταβλητής στην 1η ομάδα δεν είναι αναμενόμενη, αφού σε αυτή την ομάδα συνυπάρχουν μόνο ορθές απαντήσεις με τις επεξηγήσεις τους. Τη 2η ομάδα αποτελούν τέσσερις μεταβλητές, όλες λανθασμένες επιλογές των Ερωτήσεων 5 και 7 του Β δοκιμίου (B5a, B5b, B7d, B7c). Οι δύο κύριες ομάδες συνδέονται μεταξύ τους, αλλά ο δεσμός είναι πολύ αδύναμος.

II. Διάγραμμα Ομοιότητας– Γ΄ Γυμνασίου – Ερμηνεία

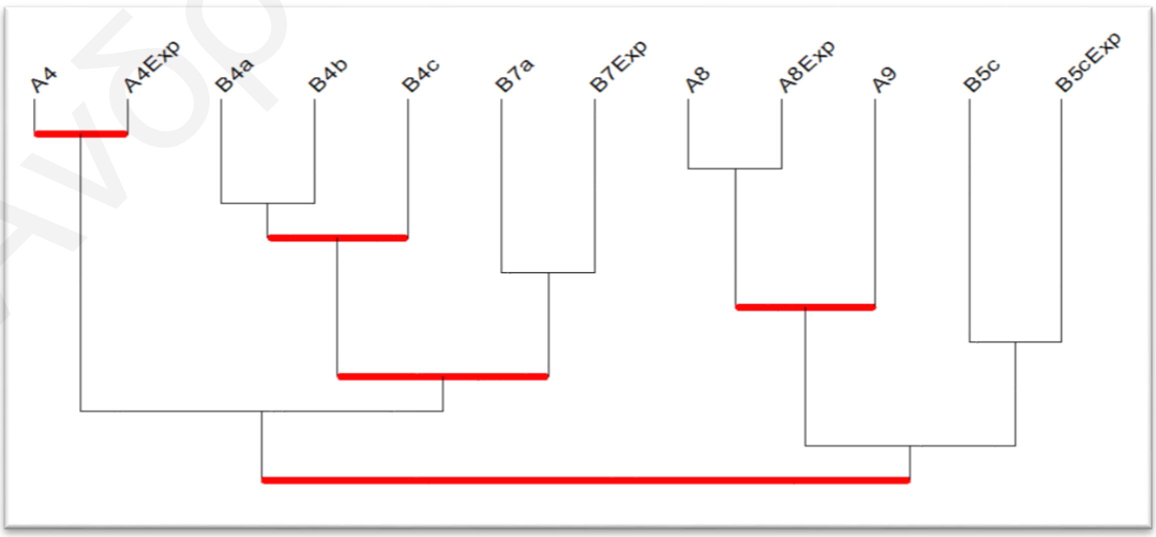
i. Μόνο Ορθές Απαντήσεις



Διάγραμμα 30: Διάγραμμα ομοιότητας για τη Γ΄ Γυμνασίου που αφορά την ερμηνεία της συνάρτησης με μόνο τις ορθές απαντήσεις.

Στο παραπάνω διάγραμμα ομοιότητας οι μεταβλητές χωρίζονται σε δύο κύριες ομάδες, οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους. Οι πρώτες επτά μεταβλητές που φαίνονται στο διάγραμμα αποτελούν την 1η ομάδα. Παρατηρούμε ότι η απάντηση της ερώτησης 8 (Α8) συνδέεται με την απάντηση της ερώτησης 9 (Α9), με πολύ στενό δεσμό, γεγονός αναμενόμενο αφού και οι δύο μεταβλητές αποτελούν αναγνώριση συνάρτησης μέσω γραφικής αναπαράστασης. Επιπλέον, τα τρία υποερωτήματα της ερώτησης 4 του Β δοκιμίου (B4a, B4b, B4c), συνδέονται μεταξύ τους με δεσμό απόλυτης ομοιότητας (ομοιότητα 1) όπως είναι λογικό, αφού αποτελούν ερωτήματα της ίδιας μορφής. Η ορθή απάντηση της ερώτησης 7 του Β δοκιμίου (B7a), η οποία αποτελεί επίσης αναγνώριση της ορθής γραφικής αναπαράστασης στην ερώτηση, συνδέεται με πολύ στενό δεσμό με τα υποερωτήματα της ερώτησης 4 του Β δοκιμίου (ομοιότητα 0.979547 και κόκκινο χρώμα στο δεσμό που τις συνδέει). Όλες οι παραπάνω μεταβλητές συνδέονται μεταξύ τους με πολύ στενό δεσμό (ομοιότητα 0.919589). Ο δεσμός αυτός αποδυναμώνεται με τη σύνδεση της ορθής απάντησης στην ερώτηση 4 του δοκιμίου Α (Α4). Παρ' όλο όμως που ο δεσμός ομοιότητας αποδυναμώνεται αισθητά (ομοιότητα 0.666517), εντούτοις το κόκκινο χρώμα στη σύνδεση αυτή προδίδει τη σημαντικότητα αυτής της σχέσης. Τέλος, τη 2η ομάδα αποτελεί μόνο μια μεταβλητή, η ορθή απάντηση στην ερώτηση 5 του δοκιμίου Β (B5c). Ο δεσμός μεταξύ των δύο ομάδων βρίσκεται κάπου στο μέσο, με ομοιότητα που φτάνει το 0.539677.

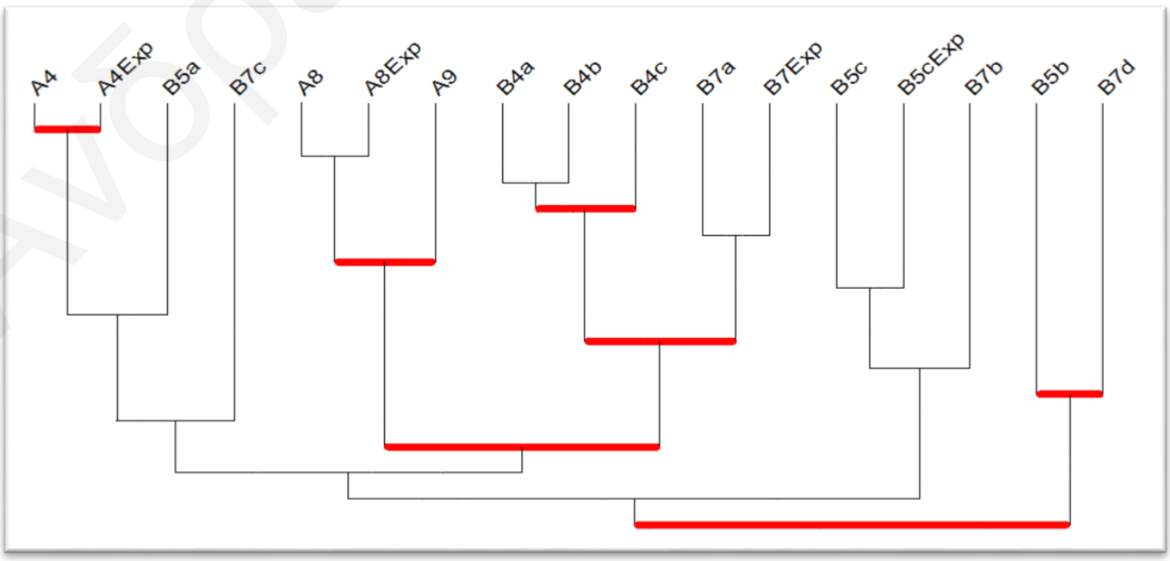
ii. Μόνο Ορθές Απαντήσεις και Επεξηγήσεις



Διάγραμμα 31: Διάγραμμα ομοιότητας για τη Γ΄ Γυμνασίου που αφορά την ερμηνεία της συνάρτησης με μόνο ορθές απαντήσεις και επεξηγήσεις.

Στο διάγραμμα αυτό παρατηρούμε ότι δημιουργούνται δύο κύριες ομάδες. Η 1^{η} ομάδα αποτελείται από εφτά μεταβλητές, μεταξύ των οποίων οι δύο μεταβλητές της ερώτησης 4 του δοκιμίου Α, οι οποίες ενώνονται μεταξύ τους με πολύ ισχυρό δεσμό (ομοιότητα 1). Τη δεύτερη υποομάδα αποτελούν οι τρεις μεταβλητές της ερώτησης 4 του δοκιμίου Β, οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με τον ισχυρότερο δεσμό (ομοιότητα 1). Η ορθή απάντηση όπως επίσης και η επεξήγηση της ερώτησης 7 του δοκιμίου Β, συνδέονται μεταξύ τους με δεσμό ομοιότητας που αγγίζει το 100%. Οι πέντε τελευταίες μεταβλητές (B4a, B4b, B4c, B7a, B7Exp) συνδέονται μεταξύ τους με πολύ στενό αλλά και ισχυρό δεσμό (ομοιότητα 0.973079 και το κόκκινο χρώμα στο δεσμό). Ο δεσμός μεταξύ όλων των μεταβλητών της $1^{\eta\varsigma}$ ομάδας είναι ισχυρός (ομοιότητα 0.897387). Η 2^{η} ομάδα αποτελείται από πέντε μεταβλητές. Την πρώτη υποομάδα αποτελούν η ορθή απάντηση και η επεξήγηση της ερώτησης 8 του δοκιμίου Α (ορθή απάντηση: Α8, επεξήγηση: A8Exp), όπως επίσης και η απάντηση στην ερώτηση 9 του δοκιμίου Α (Α9). Ο δεσμός μεταξύ των τριών αυτών μεταβλητών είναι πολύ στενός αλλά και ισχυρός (ομοιότητα 0.999788 και κόκκινο χρώμα στο δεσμό). Τη δεύτερη υποομάδα αποτελούν η ορθή απάντηση και η επεξήγηση της ερώτησης 5 του δοκιμίου Β (B5c, B5cExp). Ο δεσμός μεταξύ των μεταβλητών της δεύτερης ομάδας είναι ισχυρός (ομοιότητα 0.878247). Ο δεσμός μεταξύ των δύο κύριων ομάδων είναι στενός αλλά και πολύ ισχυρός (ομοιότητα 0.74071 και κόκκινο χρώμα στο δεσμό).

iii. Όλες οι μεταβλητές

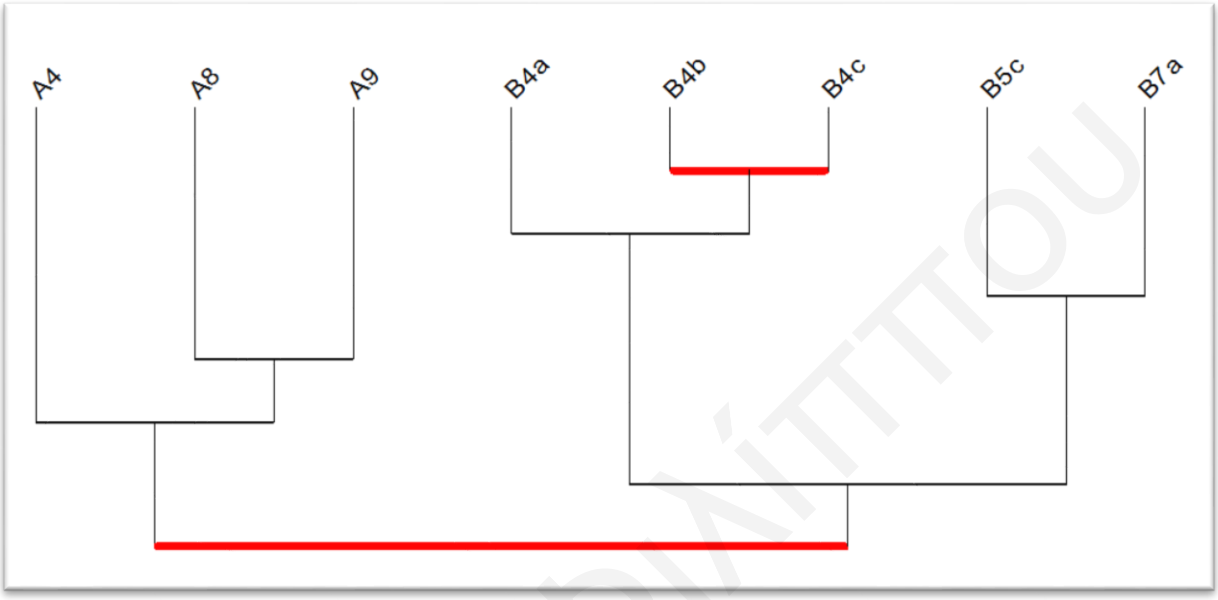


Διάγραμμα 32: Διάγραμμα ομοιότητας για τη Γ΄ Γυμνασίου που αφορά την ερμηνεία της συνάρτησης με όλες τις μεταβλητές.

Σε αυτό το διάγραμμα ο διαχωρισμός μεταξύ των ομάδων δεν είναι απόλυτα ξεκάθαρος. Παρόλα αυτά, θα μπορούσαμε να πούμε πως διακρίνονται τέσσερις κύριες ομάδες οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με πολύ σημαντικό δεσμό, λόγω του κόκκινου χρώματος που υπάρχει στη σύνδεση. Την 1η ομάδα αποτελούν τέσσερις μεταβλητές. Οι δύο πρώτες μεταβλητές είναι η απάντηση και η επεξήγηση της ερώτησης 4 του Α΄ δοκιμίου (απάντηση: A4, επεξήγηση: A4Exp). Οι τελευταίες μεταβλητές είναι δύο λανθασμένες απαντήσεις, η λανθασμένη απάντηση στην ερώτηση 5 του Β δοκιμίου (B5a), όπως επίσης και η λανθασμένη απάντηση στην ερώτηση 7 του Β΄ δοκιμίου (B7c). Ο δεσμός μεταξύ των τεσσάρων αυτών μεταβλητών είναι πολύ στενός (ομοιότητα 0.923992). Τη 2η ομάδα απαρτίζουν οκτώ μεταβλητές. Διακρίνονται τρεις υποομάδες, η πρώτη εκ των οποίων περιλαμβάνει την απάντηση και την επεξήγηση της ερώτησης 8 του δοκιμίου Α (απάντηση: A8, επεξήγηση: A8Exp), όπως επίσης και η απάντηση της ερώτησης 9 του δοκιμίου Α (A9). Ο δεσμός ανάμεσα στις τρεις αυτές μεταβλητές είναι πολύ στενός και συνάμα σημαντικός (ομοιότητα 0.999788). Η δεύτερη υποομάδα αποτελείται από τις τρεις μεταβλητές της ερώτησης 4 του δοκιμίου Β (B4a, B4b, B4c). Ο δεσμός είναι πολύ στενός , με ομοιότητα που φτάνει το 100%, πράγμα αναμενόμενο αφού και οι τρεις μεταβλητές έχουν τις ίδιες απαιτήσεις για να επιλυθούν. Οι μεταβλητές της ερώτησης 4 (B4a, B4b, B4c) συνδέονται με πολύ στενό δεσμό με τις δύο μεταβλητές της ερώτησης 7 του δοκιμίου Β (απάντηση: B7, επεξήγηση: B7Exp). Ο δεσμός αυτός είναι ισχυρός αλλά συνάμα πολύ σημαντικός (ομοιότητα 0.973079), πράγμα που καταδεικνύει η κόκκινη γραμμή που τις ενώνει. Όλες οι μεταβλητές της 2ης ομάδας συνδέονται μεταξύ τους με στενό δεσμό (ομοιότητα 0.879296 και κόκκινο χρώμα στο δεσμό που τις ενώνει). Η 3η ομάδα αποτελείται από τρεις μεταβλητές, την ορθή απάντηση και την επεξήγηση της ερώτησης 5 του Β δοκιμίου (απάντηση: B5c , επεξήγηση: B5cExp), όπως επίσης και τη λανθασμένη απάντηση της ερώτησης 7 του Β δοκιμίου (B7b). Η σύνδεση αυτή δεν είναι αναμενόμενη. Δείχνει μια ασυνέπεια στον τρόπο με τον οποίο απαντούν οι μαθητές. Την 4η ομάδα αποτελούν οι λανθασμένες απαντήσεις της ερώτησης 5 του δοκιμίου Β (B5b) και της ερώτησης 7 του Β δοκιμίου (B7d). Όλες οι ομάδες συνδέονται μεταξύ τους με αδύνατο δεσμό (ομοιότητα 0.210971). Παρόλα αυτά το κόκκινο χρώμα στο δεσμό που συνδέει τις τέσσερις ομάδες δείχνει ένα πολύ σημαντικό δεσμό.

III. Διάγραμμα Ομοιότητας– Α΄ Λυκείου – Ερμηνεία

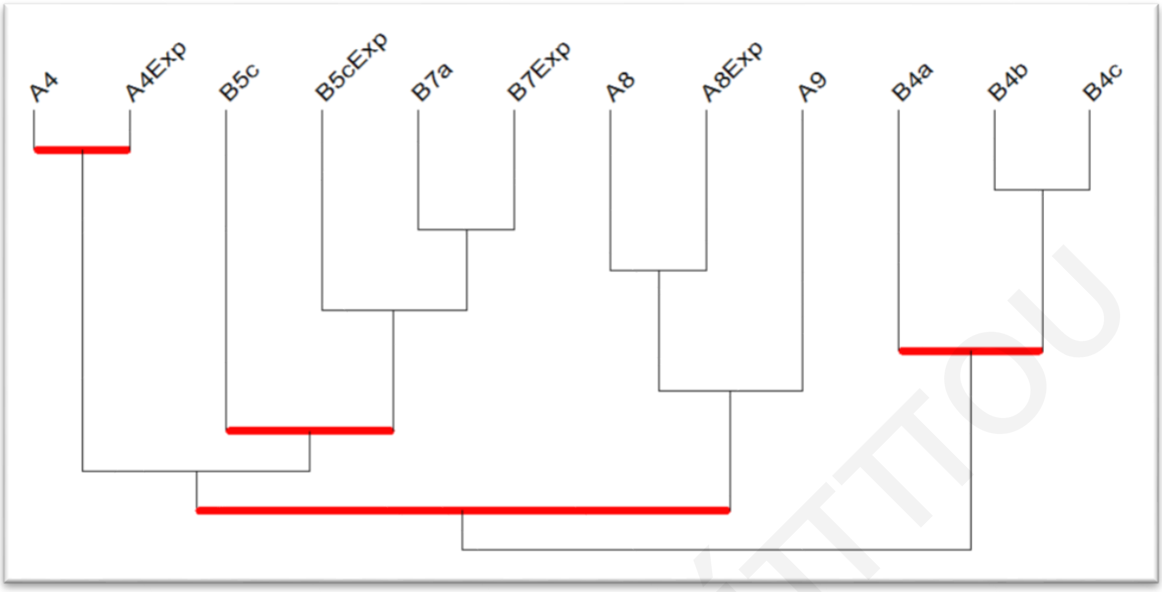
i. Μόνο Ορθές Απαντήσεις



Διάγραμμα 33: Διάγραμμα ομοιότητας για τη Α΄ Λυκείου που αφορά την ερμηνεία της συνάρτησης με μόνο τις ορθές απαντήσεις.

Οι μεταβλητές χωρίζονται σε δύο ομάδες οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με πολύ σημαντικό δεσμό, γεγονός που καταδεικνύει το κόκκινο χρώμα στο δεσμό σύνδεσης. Την 1η ομάδα αποτελούν οι απαντήσεις της ερώτησης 4, 8 και 9 του δοκιμίου Α (Α4, Α8, Α9). Οι μεταβλητές συνδέονται μεταξύ τους με το δεσμό ομοιότητας της τάξεως του 88%. Η 2η ομάδα αποτελείται από πέντε μεταβλητές, τρεις εκ των οποίων είναι τα υποερωτήματα της ερώτησης 4 του Β δοκιμίου. Οι άλλες δύο μεταβλητές που ολοκληρώνουν τη 2η ομάδα είναι η ορθή απάντηση της ερώτησης 5 του Β δοκιμίου (B5c) και η ορθή απάντηση της ερώτησης 7 του δοκιμίου Β (B7a). Οι δύο ομάδες συνδέονται μεταξύ τους με μέτριας ισχύς δεσμό (ομοιότητα 0.689546). Παρόλα αυτά το κόκκινο χρώμα που συνδέει τις δύο ομάδες δείχνει ότι ο δεσμός αυτός είναι πολύ σημαντικός.

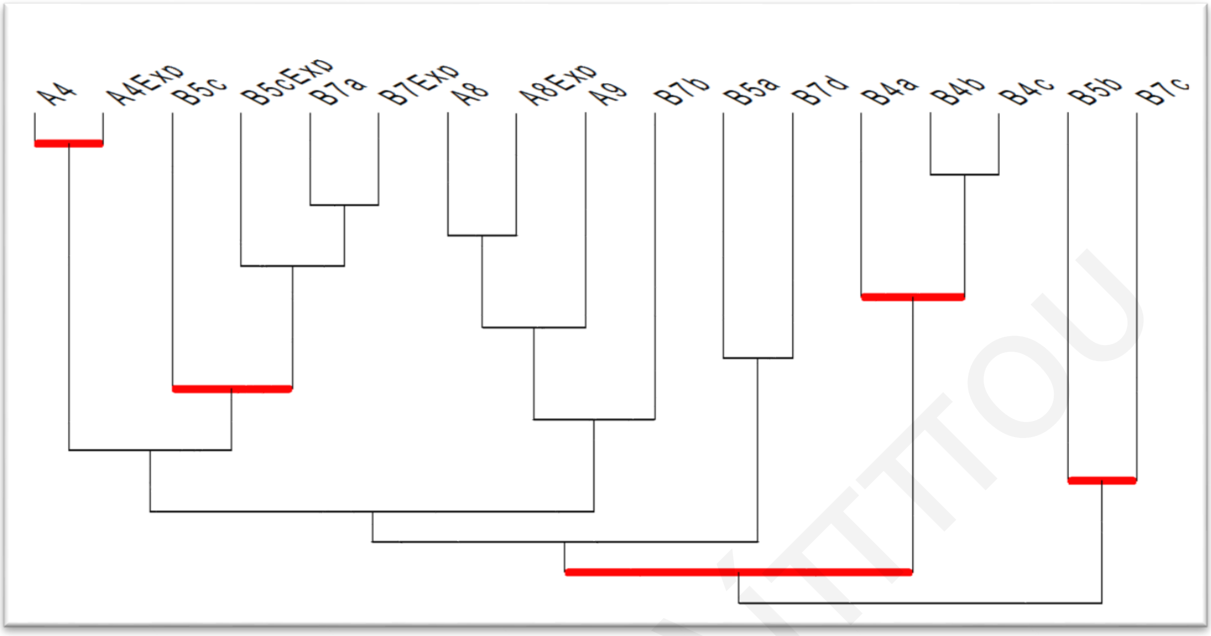
ii. Μόνο Ορθές Απαντήσεις και Επεξηγήσεις



Διάγραμμα 34: Διάγραμμα ομοιότητας για τη Α΄ Λυκείου που αφορά την ερμηνεία της συνάρτησης με μόνο ορθές απαντήσεις και επεξηγήσεις.

Οι μεταβλητές χωρίζονται σε δύο ομάδες οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους. Στην 1η ομάδα ανήκουν οι απαντήσεις τεσσάρων ερωτήσεων μαζί με τις επεξηγήσεις τους καθώς και η απάντηση στην ερώτηση 9 του δοκιμίου Α. Πιο συγκεκριμένα, στην ομάδα ανήκουν η απάντηση και η επεξήγηση στην ερώτηση 4 του Α δοκιμίου (απάντηση: Α4, επεξήγηση: Α4Exp), η ορθή απάντηση και η επεξήγηση της ερώτησης 5 του δοκιμίου Β (ορθή απάντηση: Α5c, επεξήγηση: Α5cExp), η ορθή απάντηση και η επεξήγηση της ερώτησης 8 του δοκιμίου Α (ορθή απάντηση: Α8, επεξήγηση: Α8Exp)και τέλος η απάντηση στην ερώτηση 9 του Α δοκιμίου (Α9). Ο δεσμός μεταξύ των μεταβλητών της 1ης ομάδας είναι πολύ ισχυρός (ομοιότητα 0.96841) και σημαντικός. Τη 2η ομάδα αποτελούν τα τρία υποερωτήματα της ερώτησης 4 του δοκιμίου Β (Β4a, Β4b, Β4c). Ο διαχωρισμός αυτός μεταξύ των δύο ομάδων ίσως οφείλεται στο γεγονός ότι όλα τα ερωτήματα της πρώτης ομάδας αναφέρονται σε ερωτήματα τα οποία ζητούν να βρεθεί η ορθή γραφική παράσταση ή να δοθεί εξήγηση για τη γραφική, ενώ τα υποερωτήματα της ερώτησης 4 της 2ης ομάδας απαιτούν τη χρήση της γραφικής παράστασης για εξεύρεση της απάντησης στα υποερωτήματα. Οι δύο ομάδες συνδέονται μεταξύ τους με μέτριας ισχύος δεσμό (ομοιότητα 0.607201), ο οποίος δεν είναι ιδιαίτερα σημαντικός.

iii. Όλες οι μεταβλητές

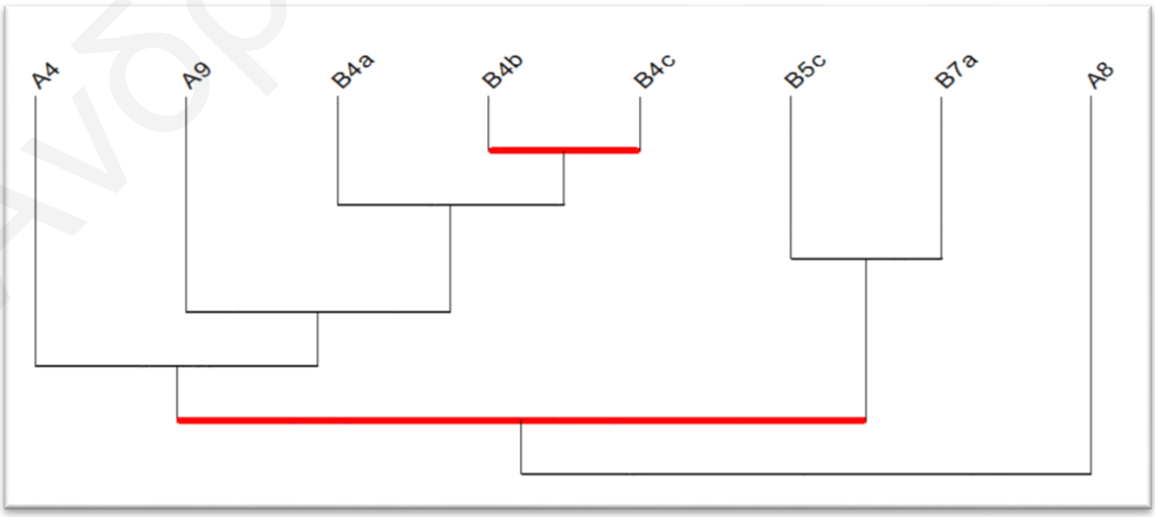


Διάγραμμα 35: Διάγραμμα ομοιότητας για τη Α΄ Λυκείου που αφορά την ερμηνεία της συνάρτησης

Σε αυτό το διάγραμμα παρατηρούμε διαχωρισμό μεταβλητών μεταξύ δύο κύριων ομάδων. Οι ομάδες αυτές συνδέονται μεταξύ τους με ασθενή δεσμό (ομοιότητα 0.187384). Την 1η ομάδα αποτελούν πολλές μικρότερες υποομάδες. Οι δύο πρώτες μεταβλητές που σχηματίζουν και την πρώτη υποομάδα, είναι η απάντηση και η επεξήγηση της ερώτησης 4 του Α δοκιμίου (απάντηση: A4, επεξήγηση: A4Exp) και ο δεσμός ομοιότητας μεταξύ τους είναι σημαντικός (ομοιότητα 1). Η δεύτερη υποομάδα περιλαμβάνει τέσσερις μεταβλητές, δύο εκ των οποίων είναι η ορθή απάντηση όπως επίσης και η επεξήγηση στην ερώτηση 5 του Β δοκιμίου (B5c, B5cExp), όπως επίσης και η ορθή απάντηση και η επεξήγηση στην ερώτηση 7 του Β δοκιμίου (B7c). Ο δεσμός μεταξύ των τεσσάρων αυτών μεταβλητών είναι πολύ στενός (ομοιότητα 0.99708). Ο διαχωρισμός αυτός των μεταβλητών είναι πολύ ενθαρρυντικός αφού η στεγανοποίηση που παρατηρείται στη συγκεκριμένη περίπτωση μας δείχνει ότι οι μαθητές οι οποίοι μπορούν να δώσουν ορθή απάντηση μπορούν αντίστοιχα να εξηγήσουν την απάντησή τους. Την τρίτη υποομάδα αποτελούν επίσης τέσσερις μεταβλητές. Οι πρώτες τρεις είναι η απάντηση και την επεξήγηση της ερώτησης 8 του δοκιμίου Α (απάντηση: A8, επεξήγηση: A8Exp), όπως επίσης και η απάντηση της ερώτησης 9 του δοκιμίου Α (A9). Η τέταρτη μεταβλητή είναι μία από τις λανθασμένες απαντήσεις στην ερώτηση 7 του Β δοκιμίου (B7b). Την τέταρτη υποομάδα αποτελούν άλλες δύο λανθασμένες απαντήσεις της ίδιας ερώτησης(B5a, B5d). Τέλος, η πέμπτη υποομάδα αποτελείται από τα τρία υποερωτήματα της ερώτησης 4 του Β δοκιμίου (B4a, B4b, B4c). Τα έργα αυτά συνδέονται μεταξύ τους με πολύ στενό δεσμό (ομοιότητα 0.999979), γεγονός που μας δείχνει ότι οι μαθητές απαντούν με τον ίδιο τρόπο σε κάθε ένα από τα υποερωτήματα της παρούσας ερώτησης. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι η ομάδα αποτελείται από τις ορθές απαντήσεις στα ερωτήματα, με εξαίρεση τρεις από τις μεταβλητές. Όλα τα έργα αυτής της ομάδας συνδέονται μεταξύ τους με πολύ στενό δεσμό (ομοιότητα 0.783887). Τη 2η ομάδα απαρτίζουν δύο μόνο μεταβλητές, οι οποίες είναι λανθασμένες απαντήσεις στην ερώτηση 5 του Β δοκιμίου, όπως επίσης και στην ερώτηση 7 του Β δοκιμίου. Η ομάδα λοιπόν αυτή θα μπορούσαμε αντίστοιχα να πούμε ότι είναι η ομάδα των λανθασμένων απαντήσεων και δεσμός μεταξύ των έργων αυτών είναι πολύ ισχυρός (ομοιότητα 0.985631). Γενικότερα, σε αυτό το διάγραμμα ομοιότητας παρατηρούμε πολύ ισχυρούς δεσμούς μεταξύ των μεταβλητών, με εξαίρεση τις δύο λανθασμένες απαντήσεις που απαρτίζουν και την 2η ομάδα, οι οποίες παρότι συνδέονται με τις υπόλοιπες, εντούτοις ο δεσμός είναι φανερά ασθενής (ομοιότητα 0.187384).

IV. Διάγραμμα Ομοιότητας – Β΄ Λυκείου – Ερμηνεία

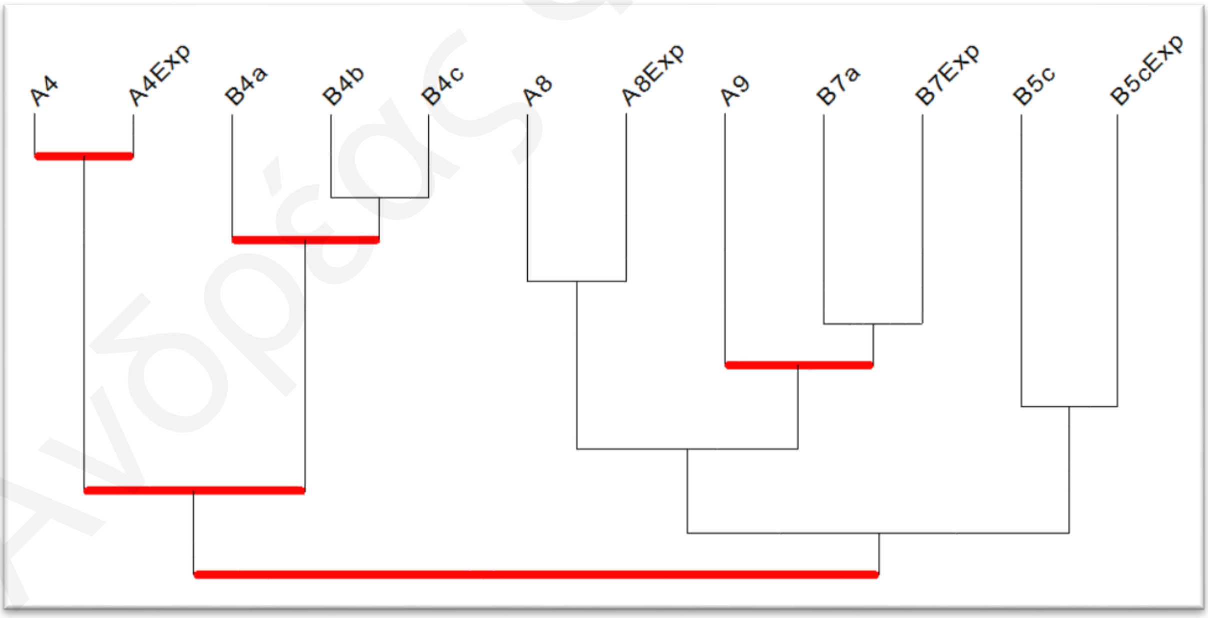
i. Μόνο Ορθές Απαντήσεις



Διάγραμμα 36: Διάγραμμα ομοιότητας για τη Β΄ Λυκείου που αφορά την ερμηνεία της συνάρτησης με μόνο τις ορθές απαντήσεις.

Οι μεταβλητές χωρίζονται σε δύο ομάδες οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ισχυρό δεσμό (ομοιότητα 0.661888). Η 1η ομάδα αποτελείται από δύο υποομάδες. Την πρώτη υποομάδα απαρτίζουν οι απαντήσεις στις ερωτήσεις 4 και 9 του δοκιμίου Α (Α4, Α9), όπως επίσης και τρία από τα υποερωτήματα της ερώτησης 4 του Β δοκιμίου (B4a, B4b, B4c). Οι μεταβλητές συνδέονται μεταξύ τους με το δεσμό ομοιότητας της τάξεως του 98%. Τη δεύτερη υποομάδα αποτελούν οι ορθές απαντήσεις στην ερώτηση 5 και 7 του Β δοκιμίου (B5c, B7a). Ο δεσμός που συνδέει τις δύο υποομάδες είναι πολύ ισχυρός (ομοιότητα 0.920166) και συνάμα σημαντικός, λόγω του κόκκινου χρώματος που παρατηρείται στην ένωση. Η 2η ομάδα αποτελείται μόνο από μία μεταβλητή, την απάντηση στην ερώτηση 8 του Α δοκιμίου. Γενικότερα παρατηρούμε πολύ ισχυρούς δεσμούς μεταξύ όλων των μεταβλητών, με εξαίρεση τη μεταβλητή Α8 όπου ο δεσμός είναι λιγότερο ισχυρός από τους υπόλοιπους.

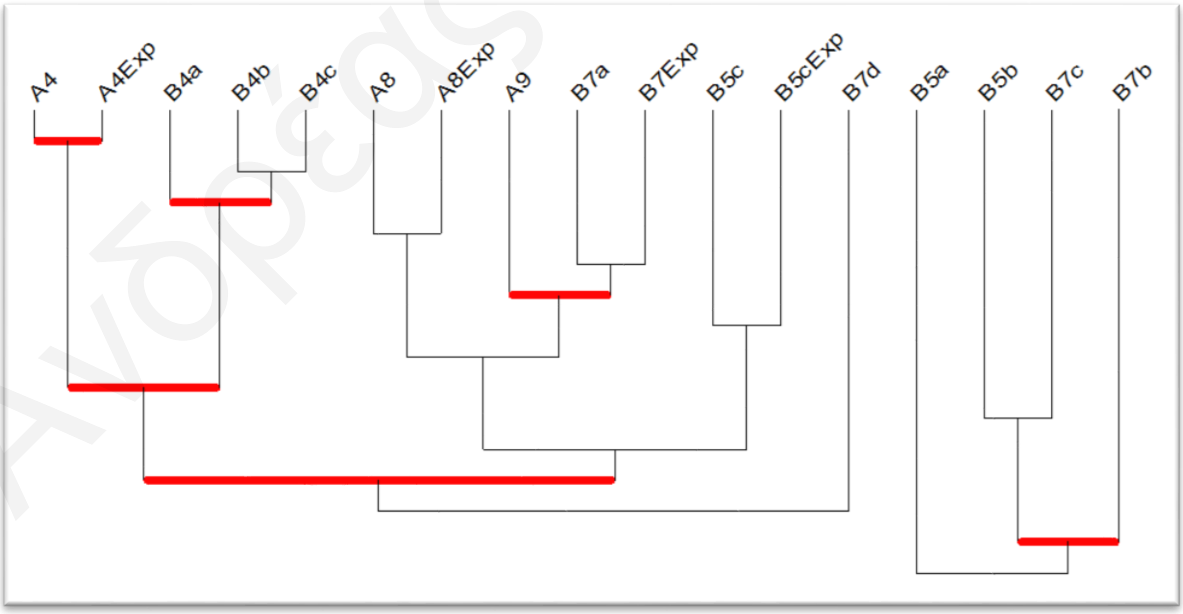
i. Μόνο Ορθές Απαντήσεις και Επεξηγήσεις



Διάγραμμα 37: Διάγραμμα ομοιότητας για τη Β΄ Λυκείου που αφορά την ερμηνεία της συνάρτησης με μόνο τις ορθές απαντήσεις και επεξηγήσεις.

Στο διάγραμμα αυτό δεν μπορούμε να διαχωρίσουμε τους δεσμούς μεταξύ των μεταβλητών σε ομάδες. Μπορούμε να διακρίνουμε όμως δύο υποομάδες, οι οποίες όμως συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ισχυρό και συνάμα σημαντικό δεσμό (ομοιότητα 0.881152). Στην πρώτη υποομάδα ανήκουν οι απαντήσεις δύο ερωτήσεων μαζί με την επεξήγηση μίας από αυτές. Πιο συγκεκριμένα, στην ομάδα ανήκουν η απάντηση και η επεξήγηση στην ερώτηση 4 του Α δοκιμίου (απάντηση: Α4, επεξήγηση: Α4Exp), όπως επίσης και τα τρία υποερωτήματα της ερώτησης 4 του Β δοκιμίου (B4a, B4b, B4c). Ο δεσμός μεταξύ των έργων αυτών είναι πολύ ισχυρός (ομοιότητα 0.973492) και σημαντικός (κόκκινο χρώμα στη σύνδεση). Τη δεύτερη υποομάδα αποτελούν η απάντηση και η επεξήγηση στην ερώτηση 8 του Α δοκιμίου (Α8, Α8Exp), η απάντηση στην ερώτηση 9 του Α δοκιμίου (Α9), η απάντηση και η επεξήγηση στην ερώτηση 7 του Β δοκιμίου (B7a, B7aExp) και τέλος η ορθή απάντηση και η επεξήγηση στην ερώτηση 5 του Β δοκιμίου (B5c, B5cExp). Ο δεσμός μεταξύ των μεταβλητών αυτών είναι ισχυρός (ομοιότητα 0.937377).

ii. Όλες οι μεταβλητές



Διάγραμμα 38: Διάγραμμα ομοιότητας για τη Β΄ Λυκείου που αφορά την ερμηνεία της συνάρτησης με όλες τις μεταβλητές.

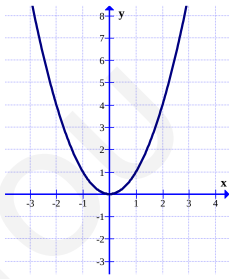
Σε αυτό το διάγραμμα παρατηρούμε διαχωρισμό μεταβλητών μεταξύ τριών κύριων ομάδων, μία εκ των οποίων δε συνδέεται με τις υπόλοιπες. Την $1^{η}$ ομάδα αποτελούν πολλές μικρότερες υποομάδες. Οι δύο πρώτες μεταβλητές που σχηματίζουν και την πρώτη υποομάδα, είναι η απάντηση και η επεξήγηση της ερώτησης 4 του Α δοκιμίου (απάντηση: Α4, επεξήγηση: Α4Exp) και ο δεσμός ομοιότητας μεταξύ τους είναι σαφέστατα ισχυρός και συνάμα σημαντικός (ομοιότητα 1). Τη δεύτερη υποομάδα αποτελούν τα τρία υποερωτήματα της ερώτησης 4 του Β δοκιμίου (B4a, B4b, B4c). Τα έργα αυτά συνδέονται μεταξύ τους με πολύ στενό δεσμό (ομοιότητα 0.999989), γεγονός που μας δείχνει ότι οι μαθητές απαντούν με τον ίδιο τρόπο σε κάθε ένα από τα υποερωτήματα της παρούσας ερώτησης. Την τρίτη υποομάδα αποτελούν η απάντηση και η επεξήγηση της ερώτησης 8 του δοκιμίου Α (απάντηση: Α8, επεξήγηση: Α8Exp), η απάντηση της ερώτησης 9 του δοκιμίου Α (Α9), η ορθή απάντηση και η επεξήγηση στην ερώτηση 7 του Β Δοκίμιο(B7a, B7aExp) και τέλος η ορθή απάντηση και η επεξήγηση στην ερώτηση 5 του Β δοκίμιο(B5c, B5cExp). Ο δεσμός που συνδέει τις τρεις αυτές υποομάδες είναι πολύ ισχυρός (ομοιότητα 0.881152) και σημαντικός. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι η ομάδα αυτή αποτελείται από τις ορθές απαντήσεις με τις επεξηγήσεις τους. Η $2^{η}$ ομάδα αποτελείται από μόνο μια μεταβλητή, τη λανθασμένη απάντηση στην ερώτηση 7 του Β δοκιμίου (B7d). Το έργο αυτό συνδέεται με την $1^{η}$ ομάδα με σχετικά ισχυρό δεσμό (ομοιότητα 0.668087). Η $3^{η}$ ομάδα περιλαμβάνει τέσσερις μεταβλητές, δύο εκ των οποίων είναι οι λανθασμένες απαντήσεις στην ερώτηση 5 του Β δοκιμίου (B5a, B5b), όπως επίσης και οι δύο λανθασμένες απαντήσεις στην ερώτηση 7 του Β δοκιμίου (B7c, B7b). Η ομάδα αυτή είναι ομάδα λανθασμένων απαντήσεων. Παρατηρούμε στεγανοποίηση σε σχέση με τις ορθές απαντήσεις-επεξηγήσεις και τις λανθασμένες απαντήσεις, αφού όπως διαφαίνεται από το διάγραμμα, οι ορθές απαντήσεις και οι επεξηγήσεις τους ομαδοποιούνται στην πρώτη ομάδα ενώ οι λανθασμένες απαντήσεις ομαδοποιούνται στη $2^{η}$ και στην $3^{η}$ ομάδα αντίστοιχα.

Προσέγγιση Συναρτήσεων

Σε αυτή την ενότητα επιθυμούμε να αναλύσουμε την προσέγγιση της συνάρτησης, μέσα από τη χρήση διαγραμμάτων ομοιότητας τα οποία εξήχθησαν από το δείγμα των απαντήσεων του ερωτηματολογίου. Οι διαστάσεις αυτές θα αναλυθούν για τρία διαφορετικά επίπεδα, Γ΄ Γυμνασίου, Α΄ Λυκείου και Β΄ Λυκείου, όπως επίσης και για το συνολικό δείγμα.

Για το σκοπό αυτό θα ληφθούν υπόψη οι πιο κάτω ερωτήσεις:

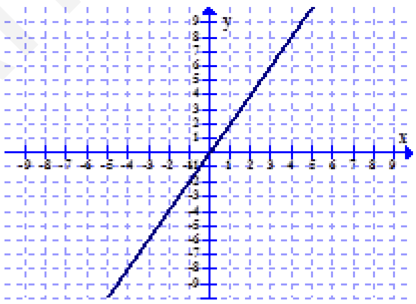
Α11. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$. Να κατασκευάσετε τις συναρτήσεις στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.



(α) $y = x^2 + 2, \quad x \in \mathbb{R}$

(β) $y = x^2 - 2, \quad x \in \mathbb{R}$

Β3. Στο διπλανό διάγραμμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 2x$. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση των:



(α) $y = 2x + 5$ και

(β) $y = 2x - 4$ Να εξηγήσετε τον τρόπο που εργαστήκατε.

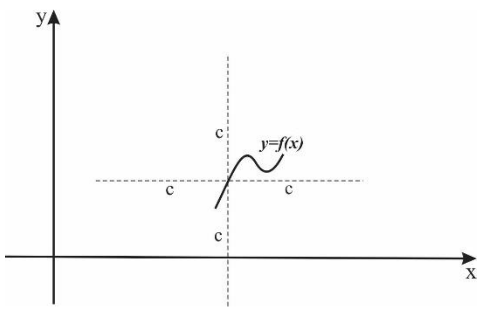
Β9. Στο διπλανό σύστημα αξόνων δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης .
Στο ίδιο σύστημα αξόνων να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

(α) $y=f(x)+c$

(β) $y=f(x)\text{-}c$

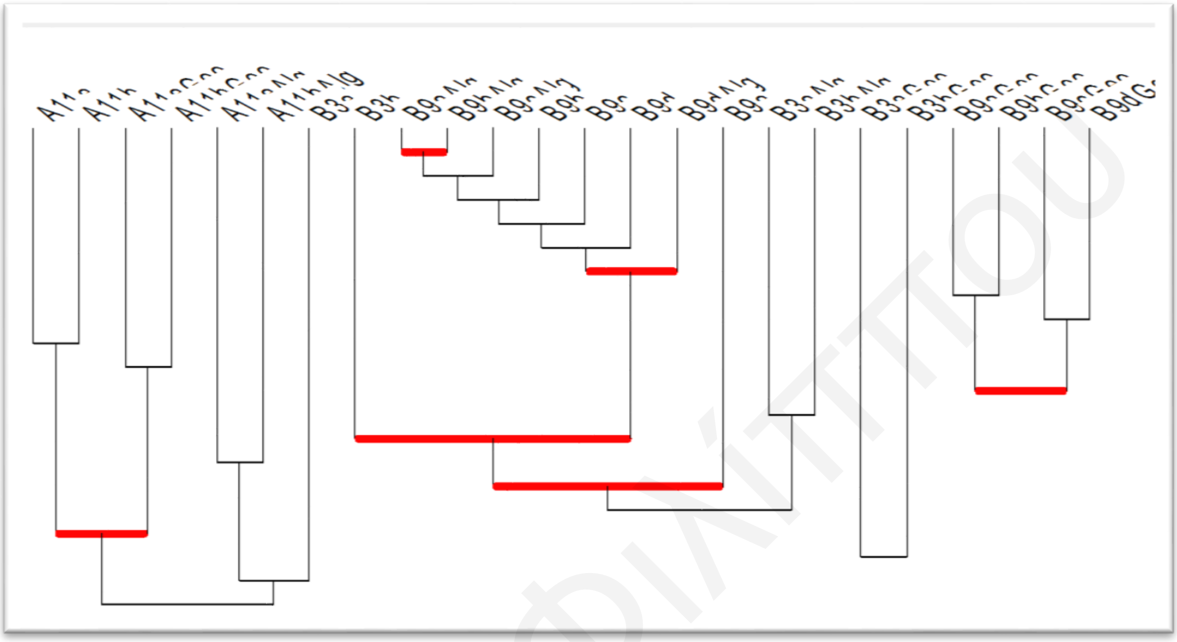
(γ) $y=f(x\text{-}c)$

(δ) $y=f(x+c)$



I. Διάγραμμα Ομοιότητας - Συνολικό Δείγμα – Προσέγγιση

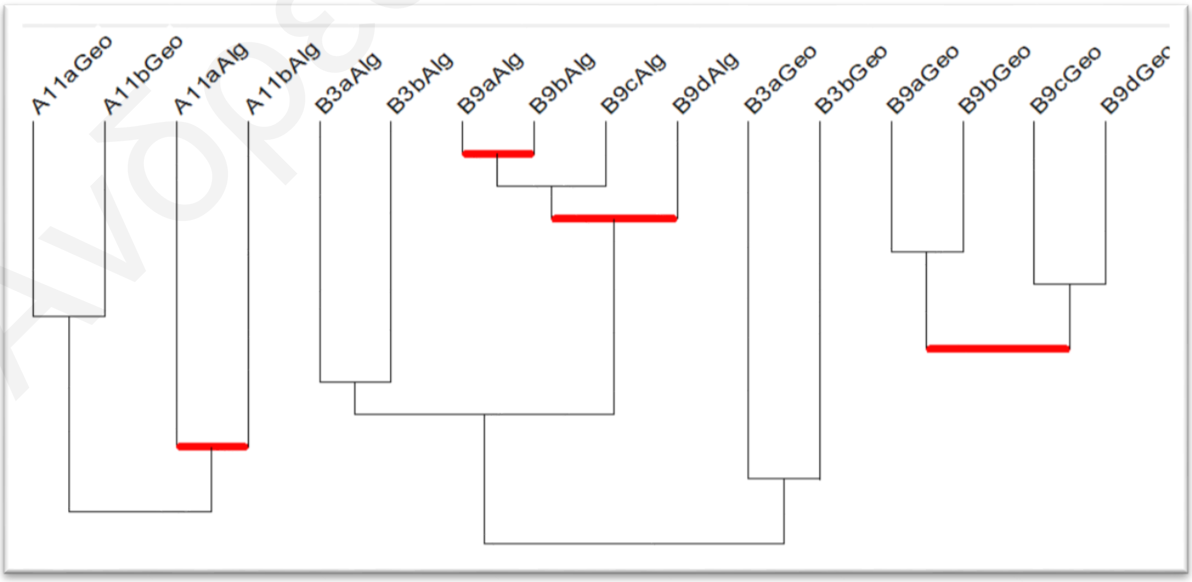
i. Όλες οι μεταβλητές – Συνολικό Δείγμα



Διάγραμμα 39: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά την προσέγγιση της συνάρτησης με όλες τις μεταβλητές.

Τα έργα σε αυτό το διάγραμμα ομοιότητας χωρίζονται σε τέσσερις ομάδες οι οποίες δεν συνδέονται μεταξύ τους. Η 1η ομάδα αποτελείται από επτά μεταβλητές, έξι εκ των οποίων είναι μεταβλητές της ερώτησης 11 του Α δοκιμίου. Η ομάδα χωρίζεται σε δύο υποομάδες. Η πρώτη υποομάδα αποτελείται από τις απαντήσεις στα υποερωτήματα της ερώτησης 11 που αναφέρεται πιο πάνω, όπως επίσης και από τις γεωμετρικές μεταβλητές της ίδιας ερώτησης. Στη δεύτερη υποομάδα ανήκουν οι δύο αλγεβρικές μεταβλητές της ίδιας ερώτησης (A11aAlg, A11bAlg), όπως επίσης και ένα από τα υποερωτήματα της ερώτησης 3 του Β δοκιμίου (B3a). Ο δεσμός μεταξύ των δύο υποομάδων είναι πολύ ασθενής (ομοιότητα 0.0146342), πράγμα το οποίο δημιουργεί στεγανοποιημένους δεσμούς μεταξύ γεωμετρικών και αλγεβρικών έργων. Αναλυτικότερα, φαίνεται ότι οι μαθητές που απαντούν σε ένα υποερώτημα αλγεβρικά συνεχίζουν με τον ίδιο τρόπο και στα υπόλοιπα υποερωτήματα. Το ίδιο συμβαίνει όταν οι μαθητές απαντούν με γεωμετρικό τρόπο. Η 2η ομάδα είναι και η μεγαλύτερη και αποτελείται από έντεκα έργα. Στην ομάδα αυτή οι δεσμοί είναι πολύ στενοί και συνάμα σημαντικοί αφού στην ομάδα αυτή παρουσιάζονται μόνο οι ορθές απαντήσεις και οι αλγεβρικές προσεγγίσεις στις ερωτήσεις 3 και 9 του Β δοκιμίου. Πιο συγκεκριμένα στην ομάδα αυτή ο δεσμός ομοιότητας αγγίζει το 0.748158. Επιπλέον, το κόκκινο χρώμα που παρατηρείται σε αρκετούς από τους δεσμούς υποδηλώνει τη σημαντικότητα στους δεσμούς μεταξύ των έργων της ομάδας αυτής. Αυτό που θα μπορούσαμε να επισημάνουμε, είναι ότι παρατηρείται στεγανοποίηση μεταξύ ορθών απαντήσεων και αλγεβρικών απαντήσεων, γεγονός που υποδηλώνει ότι στα συγκεκριμένα ερωτήματα οι μαθητές οι οποίοι δουλεύουν αλγεβρικά είναι αυτοί που απαντούν συχνότερα ορθά. Η $3^{η}$ ομάδα αποτελείται μόνο από δύο μεταβλητές. Είναι ομάδα γεωμετρικών προσεγγίσεων αφού περιλαμβάνει τις μεταβλητές B3aGeo και B3bGeo, τις γεωμετρικές δηλαδή προσεγγίσεις στην ερώτηση 3 του Β δοκιμίου. Η $4^{η}$ ομάδα αποτελείται από τέσσερις μεταβλητές οι οποίες είναι υποερωτήματα στην ερώτηση 9 του Β δοκιμίου (B9aGeo, B9bGeo, B9cGeo, B9dGeo). Η ομάδα αυτή είναι γεωμετρική και ο δεσμός με τον οποίο συνδέονται οι μεταβλητές είναι πολύ ισχυρός (ομοιότητα 0.972634) και σημαντικός (κόκκινο χρώμα στο δεσμό). Παρατηρούμε λοιπόν ακόμα ένα στεγανοποιημένο δεσμό μεταξύ των γεωμετρικών υποερωτημάτων της ίδιας ερώτησης. Πιο απλά, σε αυτή την ερώτηση, οι μαθητές οι οποίοι απαντούν στο πρώτο υποερώτημα γεωμετρικά, συνεχίζουν να εργάζονται με τον ίδιο τρόπο και στα υπόλοιπα υποερωτήματα.

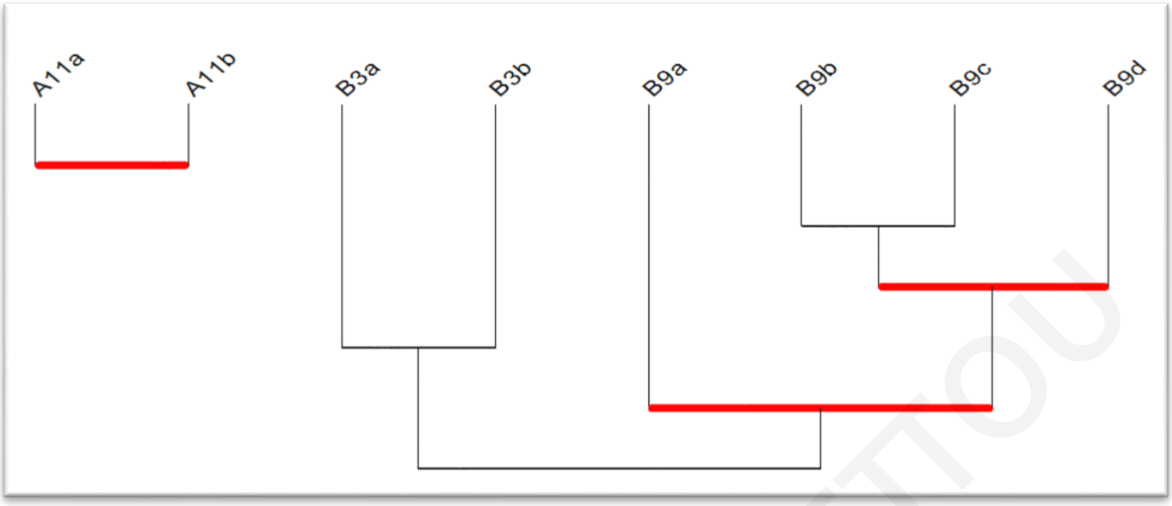
ii. Μόνο Προσεγγίσεις – Συνολικό Δείγμα



Διάγραμμα 40: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά την προσέγγιση της συνάρτησης με μόνο τις προσεγγίσεις.

Στο διάγραμμα αυτό οι μεταβλητές προσέγγισης χωρίζονται σε τρεις ομάδες οι οποίες δε συνδέονται μεταξύ τους. Η 1^{η} ομάδα χωρίζεται σε δύο υποομάδες. Στην πρώτη υποομάδα βλέπουμε τις δύο γεωμετρικές (A11aGeo, A11bGeo) και στη δεύτερη τις δύο αλγεβρικές (A11aAlg, A11bAlg) προσεγγίσεις στην ερώτηση 11 του Α δοκιμίου. Τόσο ο δεσμός μεταξύ των δύο γεωμετρικών προσεγγίσεων (ομοιότητα 0.979099), όσο και ο δεσμός μεταξύ των αλγεβρικών προσεγγίσεων (ομοιότητα 0.831846) είναι πολύ ισχυροί. Αντίθετα, ο δεσμός μεταξύ των δύο υποομάδων είναι αισθητά πιο ασθενής (ομοιότητα 0.119564), γεγονός αναμενόμενο λόγω του διαχωρισμού που υπάρχει μεταξύ αλγεβρικής και γεωμετρικής προσέγγισης. Στη 2^{η} ομάδα ανήκουν οκτώ μεταβλητές. Η ομάδα χωρίζεται σε δύο υποομάδες, μια αλγεβρική και μια γεωμετρική. Στην πρώτη υποομάδα ανήκουν οι μεταβλητές B3aAlg και B3bAlg (ομοιότητα 0.969738), όπως επίσης και οι μεταβλητές B9aAlg, B9bAlg, B9cAlg και B9dAlg (ομοιότητα 1). Οι μεταβλητές αυτές συνδέονται μεταξύ τους με πολύ στενό δεσμό (ομοιότητα 0.879017), γεγονός που δημιουργεί ένα στεγανοποιημένο δεσμό μεταξύ αλγεβρικών μεταβλητών. Η δεύτερη υποομάδα αποτελείται από τις μεταβλητές B3aGeo και B3bGeo οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με δεσμό ομοιότητας 1. Η σύνδεση μεταξύ των δύο αυτών υποομάδων είναι πολύ ασθενής (ομοιότητα 0.0204372), γεγονός που επίσης καταδεικνύει τόσο το στεγανοποιημένο δεσμό που δημιουργείται μεταξύ των αλγεβρικών μεταβλητών από τη μία, όσο και το στεγανοποιημένο δεσμό των γεωμετρικών μεταβλητών από την άλλη. Η 3^{η} ομάδα είναι ομάδα γεωμετρικών προσεγγίσεων. Αποτελείται από τις γεωμετρικές προσεγγίσεις της ερώτησης 9 του Β δοκιμίου (B9aGeo, B9bGeo, B9cGeo, B9dGeo). Ο δεσμός που συνδέει αυτές τις μεταβλητές είναι πολύ ισχυρός και σημαντικός (ομοιότητα 0.972634).

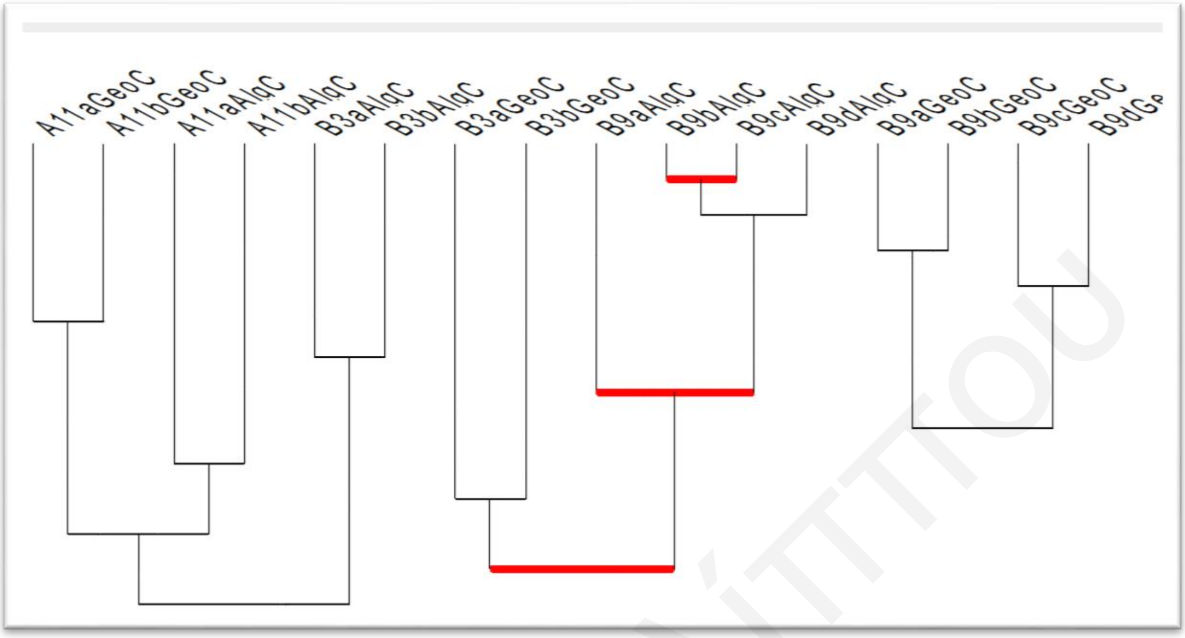
iii. Μόνο Ορθές Απαντήσεις – Συνολικό Δείγμα



Διάγραμμα 41: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά τις ορθές απαντήσεις στην προσέγγιση της συνάρτησης.

Στο διάγραμμα αυτό οι μεταβλητές χωρίζονται σε τρεις ομάδες, δύο εκ των οποίων συνδέονται μεταξύ τους. Η 1η ομάδα η οποία δεν συνδέεται με τις υπόλοιπες, αποτελείται από τις ορθές απαντήσεις στα δύο υποερωτήματα της ερώτησης 11 του δοκιμίου Α (A11a, A11b). Η σύνδεση ων δύο αυτών μεταβλητών είναι ισχυρή (ομοιότητα 0.995611) και συνάμα σημαντική. Στη 2η ομάδα ανήκουν οι δύο ορθές απαντήσεις στην ερώτηση 3 του Β δοκιμίου (B3a, B3b) και ο δεσμός που τις συνδέει είναι πολύ ισχυρός (ομοιότητα 0.871731). Στην 3η ομάδα ανήκουν οι ορθές απαντήσεις στα τέσσερα υποερωτήματα της ερώτησης 9 του Β δοκιμίου (B9a, B9b, B9c, B9d), τα οποία συνδέονται μεταξύ τους με ισχυρό αλλά και σημαντικό δεσμό (ομοιότητα 0.793921). Οι ομάδες 2 και 3 συνδέονται μεταξύ τους. Ο δεσμός αυτός όμως είναι σχεδόν αμελητέος αφού η ομοιότητα αγγίζει μόνο το 0.116846. Φαίνεται να μην υπάρχει συνέπεια στον τρόπο με τον οποίο απαντούν οι μαθητές. Ο διαχωρισμός των έργων στις τρεις ομάδες δείχνει πως οι μαθητές απαντούν αποσπασματικά για κάθε ερώτηση, αφού δεν υπάρχει κανένας δεσμός μεταξύ της ερώτησης 11 του Α δοκιμίου και των άλλων δύο ερωτημάτων. Επίσης, παρόλο που υπάρχει κάποιος δεσμός μεταξύ της ερώτησης 3 και 9 του Β δοκιμίου, εντούτοις είναι τόσο ασθενής που θα μπορούσαμε να μην τον υπολογίσουμε ως ένα δεσμό ισχυρό.

iv. Επιτυχία κάθε προσέγγισης – Συνολικό Δείγμα

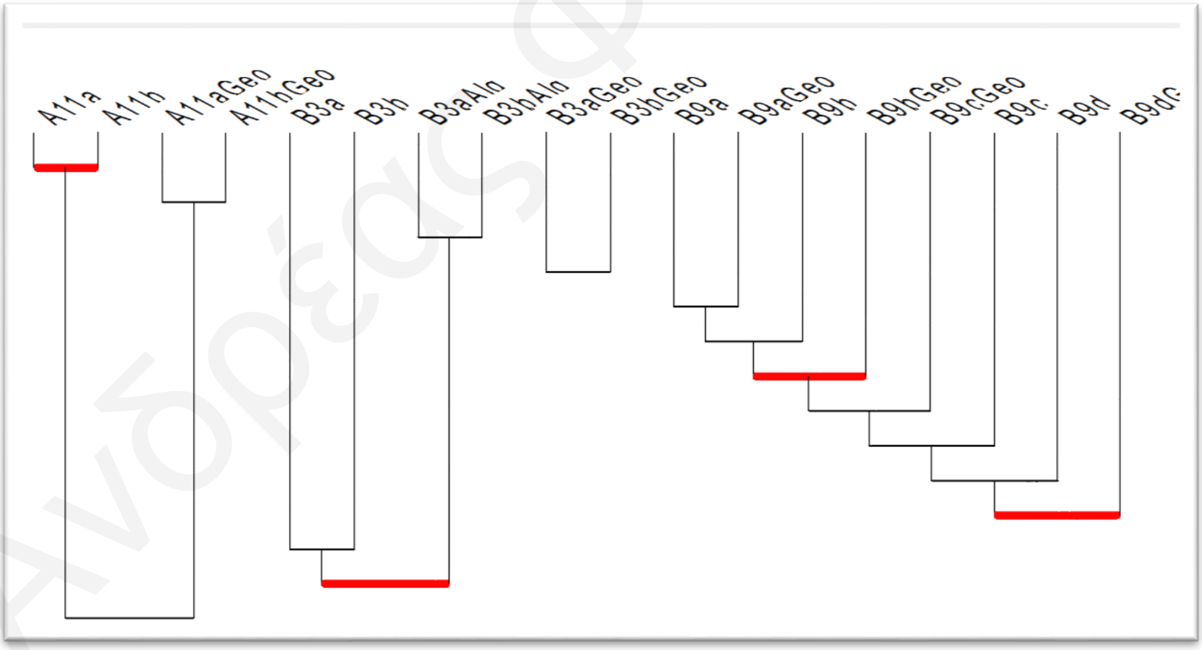


Διάγραμμα 42: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά την επιτυχία κάθε προσέγγισης της συνάρτησης

Το παραπάνω διάγραμμα ομοιότητας χωρίζεται σε τρεις ομάδες οι οποίες δεν συνδέονται μεταξύ τους. Το συγκεκριμένο διάγραμμα παρουσιάζει την αποτελεσματικότητα κάθε προσέγγισης. Πιο συγκεκριμένα, σκοπός του είναι να δείξει πόσοι από τους μαθητές που χρησιμοποίησαν αλγεβρική προσέγγιση βρήκαν και ορθή απάντηση και πόσοι από τους μαθητές που χρησιμοποίησαν γεωμετρική προσέγγιση βρήκαν αντίστοιχα ορθή απάντηση. Η 1^{η} ομάδα αποτελείται από έξι μεταβλητές οι οποίες με τη σειρά τους χωρίζονται σε τρεις υποομάδες. Η πρώτη υποομάδα αποτελείται από τα δύο υποερωτήματα της ερώτησης 11 του Α δοκιμίου, τα οποία είναι γεωμετρικά και συνδέονται μεταξύ τους με πολύ στενό δεσμό (ομοιότητα 0.961252), όπως άλλωστε θα αναμέναμε, γεγονός που δείχνει συνέπεια της γεωμετρικής προσέγγισης σε σχέση με την ορθότητα της απάντησης. Τη δεύτερη υποομάδα αποτελούν οι δύο αλγεβρικές προσεγγίσεις της ίδιας ερώτησης. Ο δεσμός που τις συνδέει είναι ισχυρός (ομοιότητα 0.740103) και δείχνει αντίστοιχα τη συνέπεια στην ορθότητα αυτών που χρησιμοποιούν αλγεβρική προσέγγιση. Οι επόμενες δύο μεταβλητές αφορούν την ερώτηση 3 του Β δοκιμίου οι οποίες είναι αλγεβρικές και συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ισχυρό δεσμό (ομοιότητα 0.936675). Η 2^{η} ομάδα αποτελείται από άλλες έξι μεταβλητές και χωρίζεται σε δύο υποομάδες. Η πρώτη υποομάδα περιλαμβάνει τις δύο γεωμετρικές προσεγγίσεις της ερώτησης 3 του Β δοκιμίου, οι οποίες συνδέονται με αρκετά στενό δεσμό (ομοιότητα 0.682393). Η δεύτερη υποομάδα περιλαμβάνει τις αλγεβρικές προσεγγίσεις των τεσσάρων υποερωτημάτων της ερώτησης 9 του Β δοκιμίου, οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ισχυρό δεσμό (ομοιότητα 0.92724). Όλες οι μεταβλητές της ομάδας αυτής συνδέονται με δεσμό σημαντικό αν λάβουμε υπόψη το κόκκινο χρώμα που διακρίνεται στο δεσμό που τις ενώνει. Η $3^{η}$ ομάδα αναφέρεται στην ερώτηση 9 του Β Δοκίμιο. Αποτελείται από τις γεωμετρικές προσεγγίσεις των τεσσάρων υποερωτημάτων της και ο δεσμός που τα συνδέει αυτά τα έργα είναι αρκετά ισχυρός (ομοιότητα 0.780043).

II. Διάγραμμα Ομοιότητας– Προσέγγιση – Γ΄ Γυμνασίου

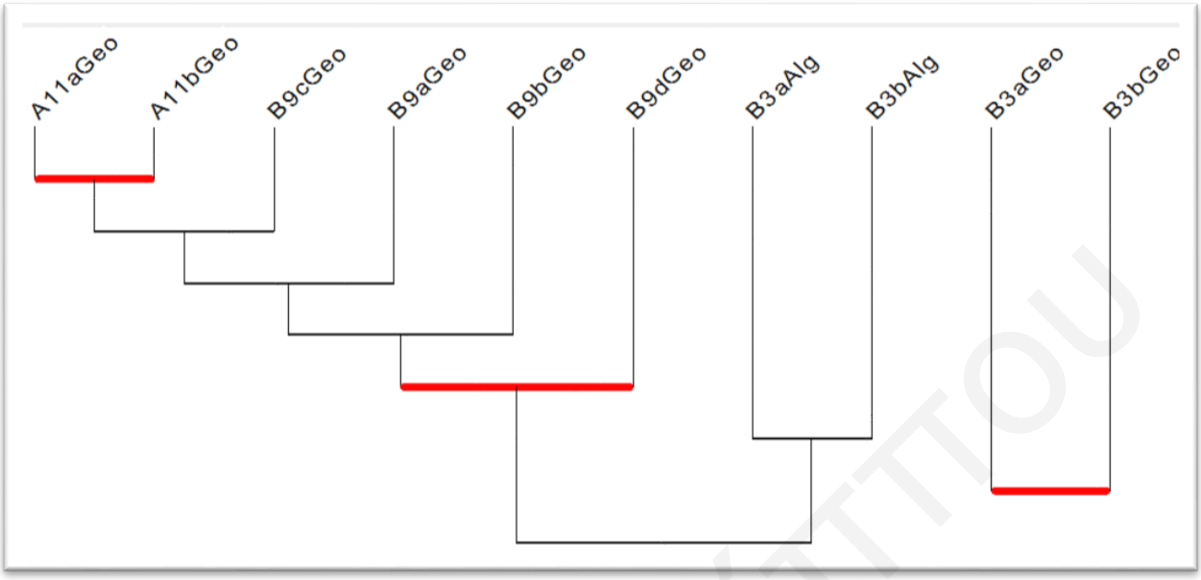
i. Όλες οι μεταβλητές



Διάγραμμα 43: Διάγραμμα ομοιότητας για την Γ΄ Γυμνασίου που αφορά την προσέγγισης της συνάρτησης με όλες τις μεταβλητές.

Στο παραπάνω διάγραμμα τα έργα χωρίζονται σε τέσσερις διαφορετικές ομάδες, οι οποίες δεν συνδέονται μεταξύ τους. Η 1η ομάδα χωρίζεται σε δύο υποομάδες. Η πρώτη υποομάδα αποτελείται από δύο μεταβλητές οι οποίες είναι οι ορθές απαντήσεις στα υποερωτήματα της ερώτησης 11 του Α δοκιμίου (A11a, A11b) και συνδέονται μεταξύ τους με τον ισχυρότερο δεσμό ομοιότητας (ομοιότητα 1). Η δεύτερη υποομάδα είναι οι γεωμετρικές προσεγγίσεις στα υποερωτήματα της ίδιας ερώτησης και συνδέονται επίσης μεταξύ τους με δεσμό ομοιότητας 100%. Οι δύο υποομάδες συνδέονται μεταξύ τους με δεσμό ομοιότητας 0.47882. Η 2η ομάδα χωρίζεται επίσης σε δύο υποομάδες. Η πρώτη υποομάδα αποτελείται από δύο μεταβλητές οι οποίες είναι οι απαντήσεις στα υποερωτήματα της ερώτησης 3 του Β δοκιμίου (B3a, B3b) και συνδέονται μεταξύ τους με πολύ στενό δεσμό (ομοιότητα 0.994243). Η δεύτερη υποομάδα είναι αλγεβρικές προσεγγίσεις στα υποερωτήματα της ίδιας ερώτησης και συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ισχυρό δεσμό ομοιότητας (ομοιότητα 1). Οι δύο υποομάδες συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ισχυρό και σημαντικό δεσμό (ομοιότητα 0.937559 και κόκκινο χρώμα στο δεσμό σύνδεσης). Θα μπορούσαμε να επισημάνουμε ότι οι αλγεβρικές προσεγγίσεις που συνδέονται με τις ορθές απαντήσεις της ίδιας ερώτησης, δημιουργούν ένα στεγανοποιημένο δεσμό ο οποίος δείχνει ότι στη συγκεκριμένη ερώτηση οι μαθητές που λύνουν αλγεβρικά έχουν και ορθά αποτελέσματα. Η 3η ομάδα αποτελείται από δύο μόνο μεταβλητές. Είναι οι γεωμετρικές προσεγγίσεις στην ερώτηση 3 του Β δοκιμίου (B3aGeo, B3bGeo) και συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ισχυρό δεσμό (ομοιότητα 1). Η ομάδα αυτή λοιπόν περιλαμβάνει έργα που οι μαθητές τα προσεγγίζουν γεωμετρικά και δείχνει ότι οι μαθητές που εργάζονται με γεωμετρικό τρόπο για την εξεύρεση λύσης στη συγκεκριμένη ερώτηση, εργάζονται με τον ίδιο τρόπο και για την επίλυση του δεύτερου υποερωτήματος της ίδιας ερώτησης. Η 4η ομάδα αποτελείται από μεταβλητές της ερώτησης 9 του Β δοκιμίου. Περιλαμβάνει τις ορθές απαντήσεις στα υποερωτήματα της ερώτησης αυτής (B9a, B9b, B9c, B9d), όπως επίσης και τις γεωμετρικές προσεγγίσεις της ίδιας ερώτησης. Ο δεσμός με τον οποίο συνδέονται όλες οι παραπάνω μεταβλητές είναι πολύ ισχυρός (ομοιότητα 1) και παράλληλα πολύ σημαντικός πράγμα που δηλώνει το κόκκινο χρώμα στο δεσμό σύνδεσης.

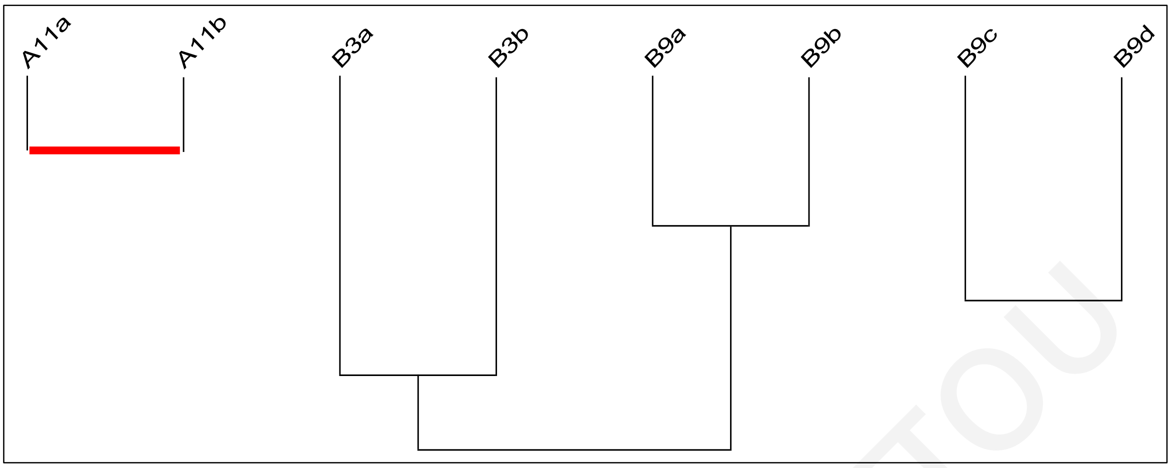
ii. Μόνο Προσεγγίσεις – Γ΄ Γυμνασίου



Διάγραμμα 44: Διάγραμμα ομοιότητας για την Γ΄ Γυμνασίου που αφορά την προσέγγιση της συνάρτησης

Στο διάγραμμα αυτό διακρίνονται τρεις κύριες ομάδες, δύο εκ των οποίων συνδέονται μεταξύ τους. Η 1η ομάδα αποτελείται από τις γεωμετρικές προσεγγίσεις των υποερωτημάτων της ερώτησης 11 του δοκιμίου Α (A11aGeo, A11bGeo) και της ερώτησης 9 του δοκιμίου Β (B9aGeo, B9bGeo, B9cGeo, B9dGeo). Ο δεσμός που συνδέει όλες τις παραπάνω μεταβλητές είναι πολύ ισχυρός (ομοιότητα 1) και σημαντικός. Διακρίνεται ένας τύπος στεγανοποίησης που συνδέει μόνο γεωμετρικές προσεγγίσεις, πράγμα που δείχνει ότι μαθητές ενεργοποιούν τις ίδιες διαδικασίες για την επίλυση των συγκεκριμένων προβλημάτων. Η 2η ομάδα είναι αλγοριθμική. Αποτελείται μόνο από δύο μεταβλητές της ερώτησης 3 του Β δοκιμίου (B3aAlg, B3bAlg), οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με πολύ στενό δεσμό ομοιότητας (ομοιότητα 1). Οι ομάδες 1 και 2 συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ισχυρό δεσμό (ομοιότητα 0.917849), πράγμα το οποίο έρχεται σε αντίθεση με όσα φαίνονται στην 1η ομάδα. Σ' αυτή την περίπτωση παρατηρούμε ασυνέπεια στον τρόπο με τον οποίο απαντούν οι μαθητές, αφού οι γεωμετρικές μεταβλητές συνδέονται με τις αλγεβρικές. Η 3η ομάδα αποτελείται από δύο μεταβλητές, τις γεωμετρικές προσεγγίσεις της ερώτησης 3 του Β δοκιμίου (B3aGeo, B3bGeo), οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ισχυρό (ομοιότητα 1) και σημαντικό δεσμό.

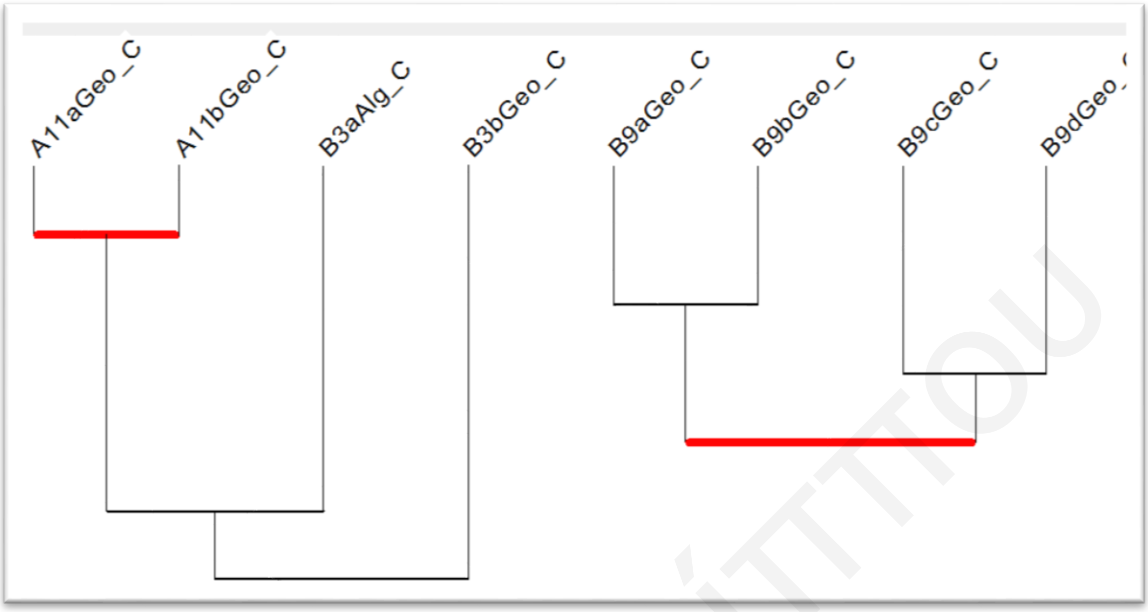
iii. Μόνο Ορθές Απαντήσεις – Γ΄ Γυμνασίου



Διάγραμμα 45: Διάγραμμα ομοιότητας για την Γ΄ Γυμνασίου που αφορά τις ορθές απαντήσεις για την προσέγγιση της συνάρτησης

Σε αυτό το διάγραμμα διακρίνονται τέσσερις ομάδες, δύο εκ των οποίων συνδέονται μεταξύ τους. Η 1η ομάδα αποτελείται από τις ορθές απαντήσεις στα δύο υποερωτήματα της ερώτησης 11 του Α δοκιμίου (A11a, A11b). Οι μεταβλητές αυτές συνδέονται μεταξύ τους με πολύ στενό και ισχυρό δεσμό (ομοιότητα 1). Η 2η ομάδα αποτελείται από τις ορθές απαντήσεις στα δύο υποερωτήματα της ερώτησης 3 του Β δοκιμίου (B3a, B3b). Οι μεταβλητές αυτές συνδέονται μεταξύ τους επίσης με πολύ στενό δεσμό (ομοιότητα 0.994243). Η 3η ομάδα αποτελείται από άλλες δύο μεταβλητές οι οποίες είναι δύο από τις ορθές απαντήσεις των τεσσάρων υποερωτημάτων στην ερώτηση 9 του Β δοκιμίου (B9a, B9b). Συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ισχυρό δεσμό (ομοιότητα 1). Η 4η ομάδα αποτελείται από τις υπόλοιπες δύο μεταβλητές της ερώτησης 9 του Β δοκιμίου (B9c, B9da). Οι μεταβλητές αυτές συνδέονται μεταξύ τους επίσης με πολύ στενό δεσμό (ομοιότητα 1). Οι ομάδες 2 και 3 συνδέονται μεταξύ τους. Παρόλα αυτά ο δεσμός αυτός είναι πολύ αδύναμος (ομοιότητα 0.0554721). Ο διαχωρισμός των υποερωτημάτων της ερώτησης 9 του Β δοκιμίου δηλώνει ότι στα διάφορα σκέλη της ίδιας ερώτησης οι μαθητές απαντούν με διαφορετικό τρόπο στα πρώτα δύο και με άλλο τρόπο στα υπόλοιπα. Γενικότερα παρατηρείται ότι οι μαθητές απαντούν αποσπασματικά για κάθε ερώτηση, χρησιμοποιώντας διαφορετικούς μηχανισμούς κάθε φορά.

iv. Επιτυχία κάθε προσέγγισης – Γ΄ Γυμνασίου

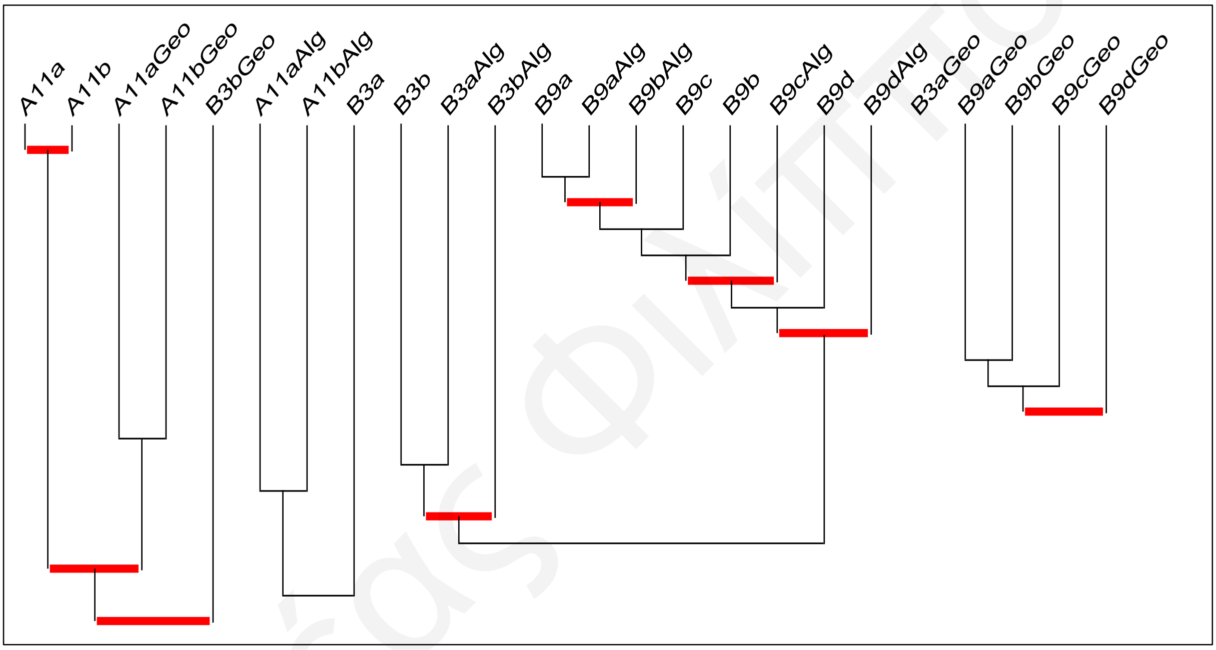


Διάγραμμα 46: Διάγραμμα ομοιότητας για την Γ΄ Γυμνασίου που αφορά την επιτυχία για κάθε προσέγγιση.

Το παραπάνω διάγραμμα ομοιότητας χωρίζεται σε δύο ομάδες οι οποίες δεν συνδέονται μεταξύ τους. Σκοπός του συγκεκριμένου διαγράμματος είναι να αναδείξει την αποτελεσματικότητα κάθε προσέγγισης. Πιο αναλυτικά, σκοπός του είναι να δείξει πόσοι από τους μαθητές γυμνασίου που χρησιμοποίησαν αλγεβρική προσέγγιση βρήκαν και ορθή απάντηση και πόσοι από τους μαθητές που χρησιμοποίησαν γεωμετρική προσέγγιση βρήκαν ορθή απάντηση. Η $1^{η}$ ομάδα αποτελείται από τέσσερις μεταβλητές οι οποίες με τη σειρά τους θα μπορούσαμε να πούμε ότι χωρίζονται σε δύο υποομάδες. Η πρώτη υποομάδα αποτελείται από τα δύο υποερωτήματα της ερώτησης 11 του Α δοκιμίου, τα οποία είναι γεωμετρικά και συνδέονται μεταξύ τους με πολύ στενό δεσμό (ομοιότητα 1), όπως άλλωστε θα αναμέναμε, γεγονός που δείχνει συνέπεια της γεωμετρικής προσέγγισης σε σχέση με την ορθότητα της απάντησης. Βλέπουμε λοιπόν ότι για πολλούς μαθητές η γεωμετρική προσέγγιση όχι μόνο χρησιμοποιήθηκε ως μέσο επίλυσης του ερωτήματος αλλά παράλληλα τους βοήθησε να βρούνε και την ορθή λύση. Στην ίδια ομάδα βλέπουμε να συνδέονται άλλα δύο έργα της ερώτησης 3 του Β δοκιμίου (B3aAlg_C, B3bGeo_C). Η σύνδεση αυτή δεν είναι αναμενόμενη αφού πρόκειται για μια γεωμετρική και μια αλγεβρική προσέγγιση. Βέβαια, ο δεσμός που συνδέει αυτά τα δύο έργα με τα υπόλοιπα έργα της ομάδας είναι πολύ ασθενής (ομοιότητα 0.063879), γεγονός που δικαιολογεί τη σύνδεση αυτή. Η $2^{η}$ ομάδα αναφέρεται στην ερώτηση 9 του Β δοκιμίου. Αποτελείται από τις γεωμετρικές προσεγγίσεις των τεσσάρων υποερωτημάτων της και ο δεσμός που τα συνδέει αυτά τα έργα είναι πολύ ισχυρός (ομοιότητα 0.999999) και συνάμα σημαντικός.

III. Διάγραμμα Ομοιότητας– Προσέγγιση – Α΄ Λυκείου

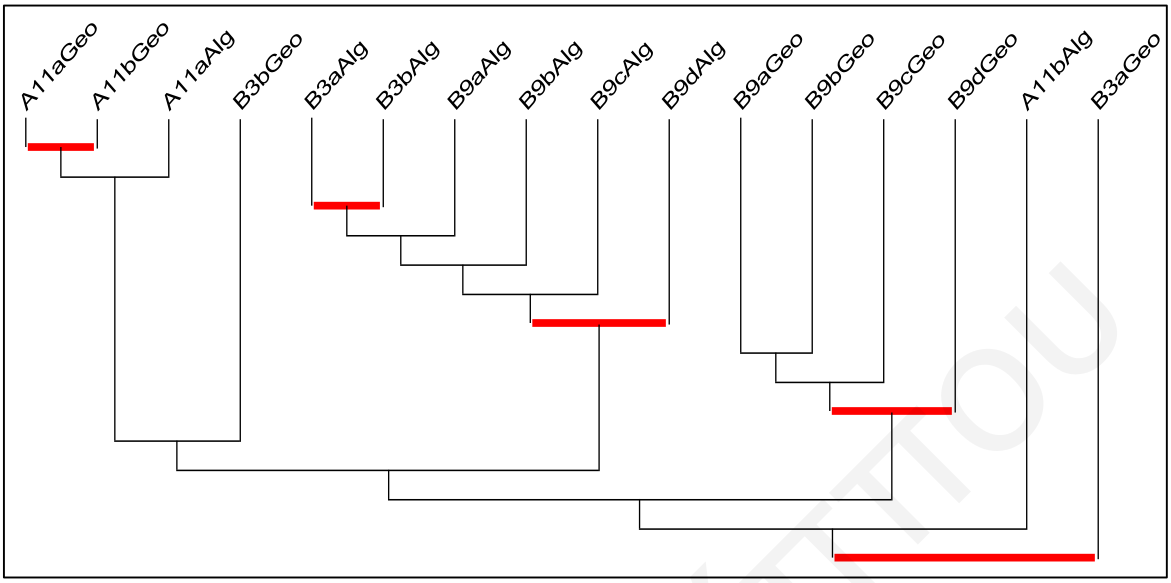
i. Όλες οι μεταβλητές



Διάγραμμα 47: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά όλες τις μεταβλητές για την προσέγγιση της συνάρτησης

Τα έργα σε αυτό το διάγραμμα ομοιότητας χωρίζονται σε τέσσερις κύριες ομάδες οι οποίες δεν συνδέονται μεταξύ τους. Η 1η ομάδα αποτελείται από πέντε μεταβλητές. Τέσσερις από αυτές σχετίζονται με την ερώτηση 11 του δοκιμίου Α. Οι μεταβλητές A11a και A11b (ομοιότητα 1) είναι οι απαντήσεις στα δύο υποερωτήματα της ερώτησης και οι μεταβλητές A11aGeo και A11bGeo (ομοιότητα 0.971174) είναι οι γεωμετρικές προσεγγίσεις τους. Όλες οι παραπάνω μεταβλητές συνδέονται μεταξύ τους με σημαντικό δεσμό ομοιότητας 0.555673. Ο στεγανοποιημένος αυτός δεσμός δηλώνει ότι οι μαθητές που λύνουν την άσκηση με γεωμετρικό τρόπο έχουν και καλύτερα αποτελέσματα. Η πέμπτη μεταβλητή που συμπληρώνει την ομάδα αυτή είναι η γεωμετρική προσέγγιση σε ένα από τα υποερωτήματα της ερώτησης 3 του Β δοκιμίου (B3bGeo), και συνδέεται με τις υπόλοιπες μεταβλητές με λιγότερο ισχυρό δεσμό (ομοιότητα 0.170301). Παρόλα αυτά ο δεσμός αυτός φαίνεται να είναι σημαντικός, πράγμα που καθιστά σαφέστατη την ανάγκη για ενδυνάμωση αυτής της σχέσης, κυρίως ανάμεσα στις μεταβλητές γεωμετρικής προσέγγισης. Τη $2^{η}$ ομάδα αποτελούν τρεις μεταβλητές. Οι δύο από αυτές είναι οι αλγοριθμικές προσεγγίσεις στα υποερωτήματα της ερώτησης 11 του Α δοκιμίου (A11aAlg, A11bAlg) και συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ισχυρό δεσμό (ομοιότητα 0.764631). Η τρίτη μεταβλητή της ομάδας είναι η απάντηση στο πρώτο υποερώτημα της ερώτησης 3 του Β δοκιμίου (B3a). Συνδέεται με τις δύο άλλες μεταβλητές με δεσμό ομοιότητας 0.395684. Η σύνδεση αυτή παρόλο που δεν είναι αμελητέα εντούτοις δεν είναι και ιδιαίτερα σημαντική. Η $3^{η}$ ομάδα είναι και η μεγαλύτερη του διαγράμματος, αφού αποτελείται από έντεκα μεταβλητές οι οποίες χωρίζονται σε δύο μικρότερες υποομάδες. Η πρώτη υποομάδα αποτελείται από το δεύτερο υποερώτημα της ερώτησης 3 του Β δοκιμίου (B3b), όπως επίσης και από τις δύο αλγεβρικές προσεγγίσεις στα δύο υποερωτήματα της ίδιας ερώτησης (B3aAlg, B3bAlg). Ενώνονται μεταξύ τους με ισχυρό δεσμό (ομοιότητα 0.740283). Η δεύτερη υποομάδα αποτελείται από τις απαντήσεις στα τέσσερα υποερωτήματα της ερώτησης 9 του δοκιμίου Β (B9a, B9b, B9c, B9d), όπως επίσης και από τις τέσσερις αλγεβρικές προσεγγίσεις της (B9aAlg, B9bAlg, B9cAlg, B9dAlg). Ο δεσμός που συνδέει τις μεταβλητές της δεύτερης υποομάδας είναι πολύ ισχυρός (ομοιότητα 1). Τέλος, ο δεσμός που συνδέει τις δύο υποομάδες είναι επίσης ισχυρός (ομοιότητα 0.621199). Η $4^{η}$ ομάδα είναι ομάδα γεωμετρικών προσεγγίσεων. Αποτελείται από τις γεωμετρικές προσεγγίσεις στα υποερωτήματα της ερώτησης 9 του Β δοκιμίου (B9aGeo, B9bGeo, B9cGeo, B9dGeo). Ο δεσμός που συνδέει τα υποερωτήματα αυτά είναι πολύ ισχυρός (ομοιότητα 1), γεγονός που δείχνει ότι οι μαθητές που λύνουν με γεωμετρική προσέγγιση ένα από τα υποερωτήματα χρησιμοποιούν την ίδια διαδικασία για τη λύση και των υπόλοιπων υποερωτημάτων. Η μεταβλητή B3aGeo δεν συνδέεται με καμία από τις υπόλοιπες μεταβλητές του διαγράμματος.

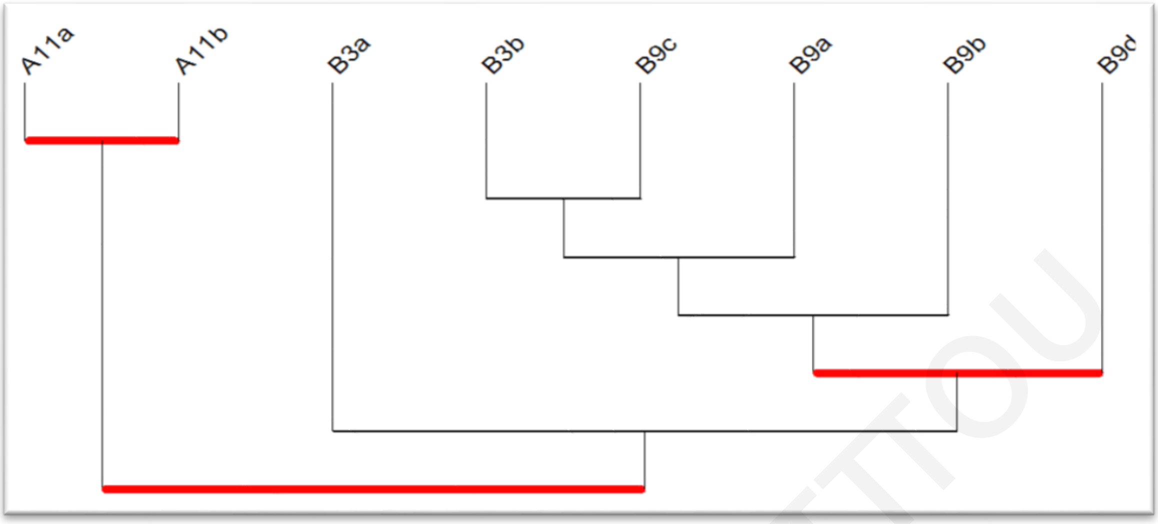
ii. Μόνο Προσεγγίσεις



Διάγραμμα 48: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά όλες μόνο την προσέγγιση της συνάρτησης

Τα έργα στο διάγραμμα αυτό ανήκουν όλα σε μια ενιαία ομάδα. Οι δεκαέξι μεταβλητές χωρίζονται σε μικρές υποομάδες οι οποίες όμως ανήκουν στην ίδια κύρια ομάδα. Η πρώτη υποομάδα αποτελείται από δύο γεωμετρικές μεταβλητές της ερώτησης 11 του δοκιμίου Α (A11aGeo, A11bGeo), οι οποίες ενώνονται μεταξύ τους με πολύ ισχυρό δεσμό (ομοιότητα 1). Η δεύτερη υποομάδα είναι αλγεβρική. Αποτελείται από τις αλγεβρικές προσεγγίσεις στα δύο υποερωτήματα της ερώτησης 3 του Β δοκιμίου (B3aAlg, B3bAlg), όπως επίσης και από τις αλγεβρικές προσεγγίσεις στα τέσσερα υποερωτήματα της ερώτησης 9 του Β δοκιμίου (B9aAlg, B9bAlg, B9cAlg, B9dAlg). Όλα τα έργα της δεύτερης υποομάδας συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ισχυρό δεσμό (ομοιότητα 1). Η τρίτη υποομάδα είναι ομάδα γεωμετρική. Αποτελείται από τις γεωμετρικές προσεγγίσεις των τεσσάρων υποερωτημάτων της ερώτησης 9 του Β δοκιμίου (B9aGeo, B9bGeo, B9cGeo, B9dGeo). Τα έργα αυτά συνδέονται μεταξύ τους με πολύ στενό δεσμό (ομοιότητα 1). Όλα τα έργα στο διάγραμμα συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ισχυρό και παράλληλα σημαντικό δεσμό (ομοιότητα 0.999413). Είναι σημαντικό να επισημάνουμε το διαχωρισμό γεωμετρικών και αλγεβρικών προσεγγίσεων στο διάγραμμα αυτό, πράγμα που δείχνει συνέπεια στον τρόπο με τον οποίο απαντούν οι μαθητές στα ερωτήματα που σχετίζονται με την προσέγγιση.

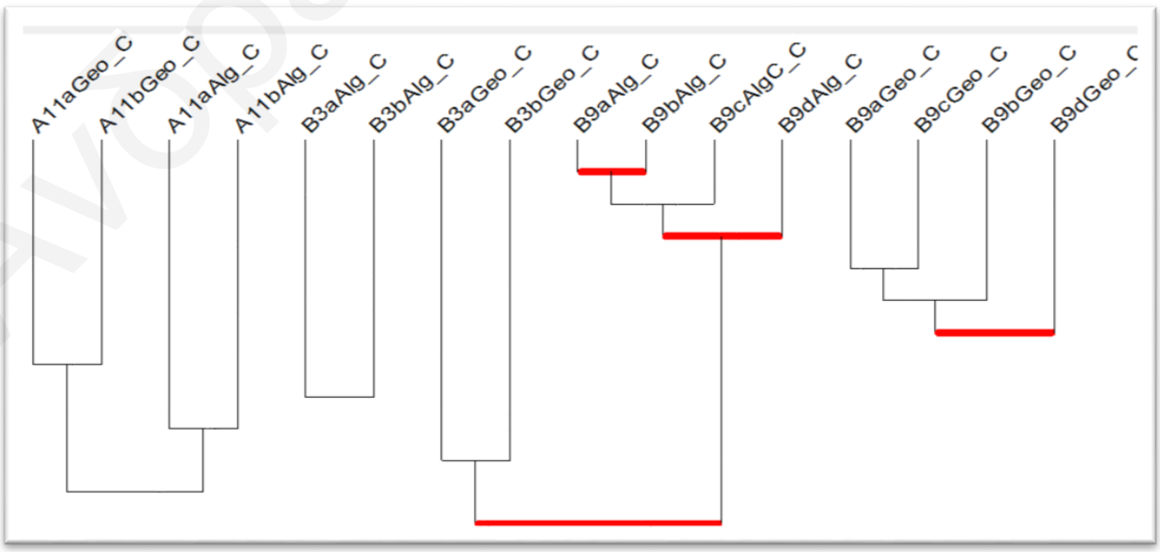
iii. Μόνο Ορθές Απαντήσεις



Διάγραμμα 49: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά μόνο ορθές απαντήσεις για την προσέγγιση της συνάρτησης

Τα έργα στο διάγραμμα αυτό δεν χωρίζονται μεταξύ τους. Παρατηρούμε μια ενιαία ομάδα στην οποία βρίσκονται όλες οι μεταβλητές. Όλες οι μεταβλητές συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ισχυρό δεσμό ομοιότητας (0.999998).

iv. Επιτυχία κάθε προσέγγισης

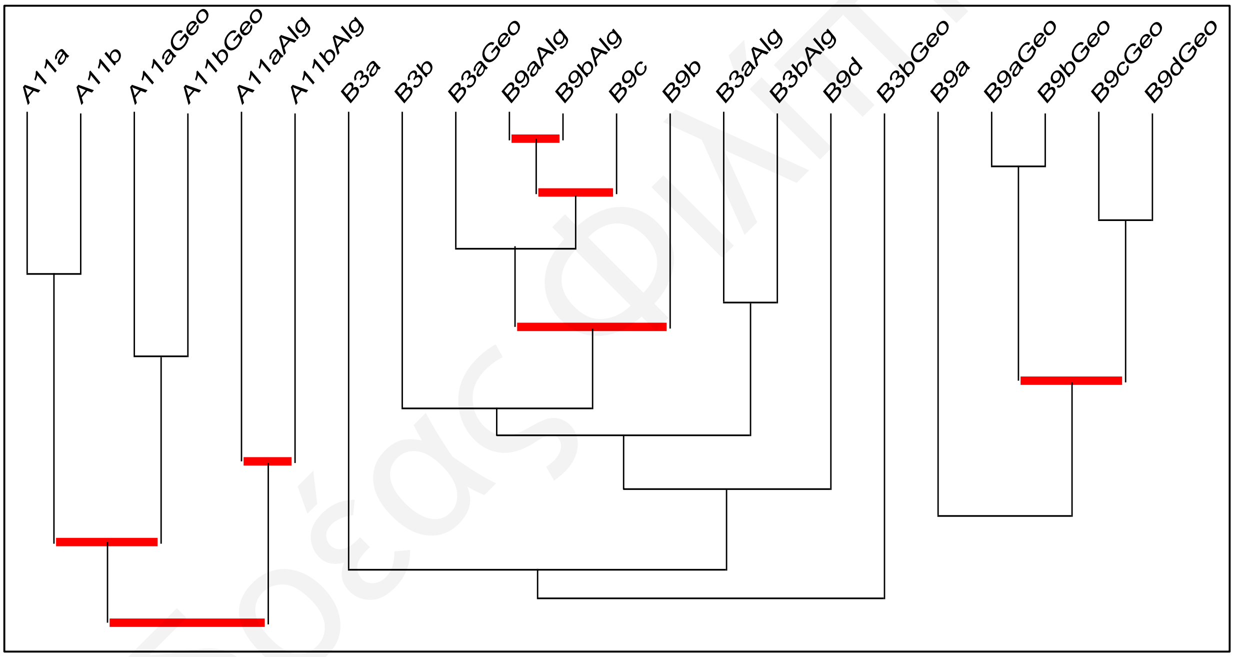


Διάγραμμα 50: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά την επιτυχία κάθε προσέγγισης της συνάρτησης

Το παραπάνω διάγραμμα ομοιότητας χωρίζεται σε τέσσερις ομάδες οι οποίες δεν συνδέονται μεταξύ τους. Σκοπός του συγκεκριμένου διαγράμματος είναι να αναδείξει την αποτελεσματικότητα κάθε προσέγγισης. Πιο αναλυτικά, σκοπός του είναι να δείξει πόσοι από τους μαθητές της Α τάξης του Λυκείου που χρησιμοποίησαν αλγεβρική προσέγγιση βρήκαν και ορθή απάντηση και πόσοι από τους μαθητές που χρησιμοποίησαν γεωμετρική προσέγγιση βρήκαν ορθή απάντηση. Η 1η ομάδα αποτελείται από τέσσερις μεταβλητές της ερώτησης 11 του Α δοκιμίου οι οποίες με τη σειρά τους θα μπορούσαμε να πούμε ότι χωρίζονται σε δύο υποομάδες. Η πρώτη υποομάδα αποτελείται από τις δύο γεωμετρικές προσεγγίσεις της ερώτησης, και συνδέονται μεταξύ τους με πολύ στενό δεσμό (ομοιότητα 0.957698), όπως άλλωστε θα αναμέναμε, γεγονός που δείχνει συνέπεια της γεωμετρικής προσέγγισης σε σχέση με την ορθότητα της απάντησης. Βλέπουμε λοιπόν ότι για πολλούς μαθητές η γεωμετρική προσέγγιση χρησιμοποιήθηκε ως μέσο εύρεσης ορθής απάντησης στο ερώτημα. Στην ίδια ομάδα βλέπουμε να συνδέονται και τα δύο αλγεβρικά έργα της ίδιας ερώτησης. Οι αλγεβρικές προσεγγίσεις συνδέονται μεταξύ τους με στενό δεσμό (ομοιότητα 0.764631). Η σύνδεση γεωμετρικών και αλγεβρικών έργων μπορεί να μην ήταν αναμενόμενη αφού πρόκειται για διαφορετικών ειδών προσεγγίσεις. Παρόλα αυτά πρόκειται για προσεγγίσεις της ίδιας ερώτησης και ίσως αυτό να δικαιολογεί το δεσμό αυτό. Βέβαια, η σύνδεση μεταξύ όλων των έργων δεν είναι ιδιαίτερα ισχυρή (ομοιότητα 0.277926). Η 2η ομάδα αναφέρεται στην ερώτηση 3 του Β δοκιμίου. Αποτελείται από τις δύο αλγεβρικές προσεγγίσεις των δύο υποερωτημάτων της και ο δεσμός που συνδέει αυτά τα έργα είναι αρκετά ισχυρός (ομοιότητα 0.764631). Η 3η ομάδα χωρίζεται σε δύο υποομάδες. Στην πρώτη υποομάδα βλέπουμε τις δύο γεωμετρικές μεταβλητές της ερώτησης 3 του Β δοκιμίου οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με μέτριο δεσμό (ομοιότητα 0.44681) ο οποίος όμως είναι σημαντικός. Η δεύτερη υποομάδα αποτελείται από τις αλγεβρικές προσεγγίσεις στα υποερωτήματα της ερώτησης 9 του Β δοκιμίου, οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ισχυρό δεσμό ομοιότητας (ομοιότητα 1). Στην ομάδα αυτή παρατηρείται σύνδεση μεταξύ γεωμετρικών και αλγεβρικών προσεγγίσεων πράγμα που δεν είναι αναμενόμενο. Βέβαια ο δεσμός που τις συνδέει δεν είναι ισχυρός (ομοιότητα 0.144728). Το κόκκινο χρώμα στη σύνδεση των μεταβλητών της ομάδας αυτής υποδηλώνει τη σημαντικότητα της σχέσης. Πιο αναλυτικά, στην ομάδα αυτή φαίνεται πως οι μαθητές οι οποίοι βρίσκουν ορθή απάντηση χρησιμοποιώντας γεωμετρική προσέγγιση στην ερώτηση Β3, χρησιμοποιούν αλγεβρική προσέγγιση για να βρούν ορθή λύση στην ερώτηση Β9. Βλέπουμε λοιπόν ότι όσο ανεβαίνουμε επίπεδο (Α΄ Λυκείου), οι μαθητές έχουν καλύτερη κατανόηση των διαφορετικών προσεγγίσεων και δεν περιορίζονται μόνο σε ένα είδος λύσης αλλά αντίθετα χρησιμοποιούν αυτό τον τρόπο που τους βολεύει καλύτερα στο κάθε ερώτημα. Η 4η ομάδα είναι ομάδα γεωμετρικών προσεγγίσεων. Αποτελείται από τα τέσσερα υποερωτήματα της ερώτησης 9 του Β δοκιμίου και ο δεσμός που τα συνδέει είναι πολύ ισχυρός (ομοιότητα 1) και συνάμα σημαντικός.

IV. Διάγραμμα Ομοιότητας – Β΄ Λυκείου – Προσέγγιση

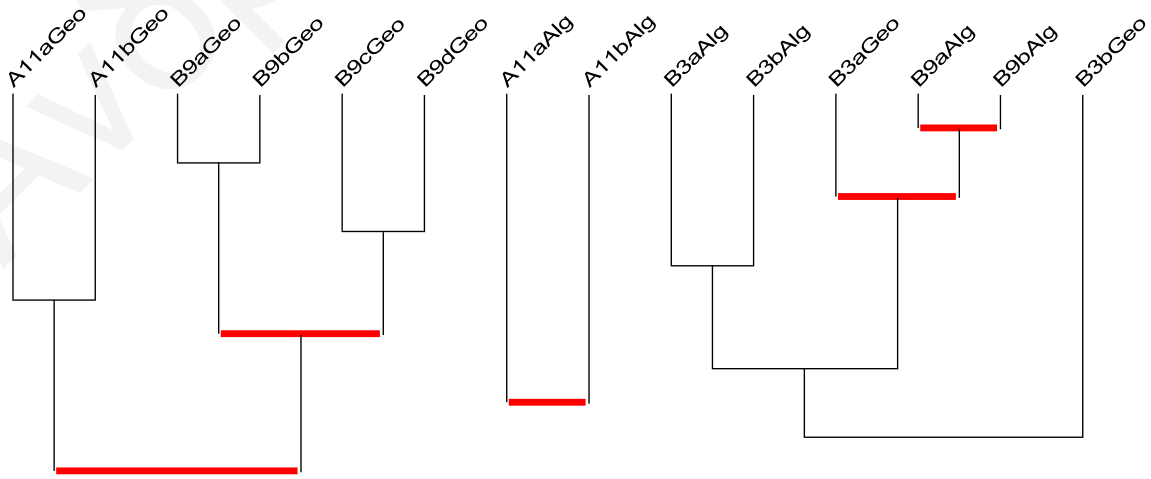
i. Διάγραμμα Ομοιότητας με όλες οι μεταβλητές



Διάγραμμα 51: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ Λυκείου που αφορά όλες τις μεταβλητές για την προσέγγιση της συνάρτησης

Στο παραπάνω διάγραμμα παρατηρούμε να σχηματίζονται τρεις κύριες ομάδες οι οποίες δεν έχουν δεσμό που να τις συνδέει. Η 1η ομάδα αποτελείται από τις απαντήσεις στα δύο υποερωτήματα της ερώτησης 11 του δοκιμίου Α (A11a, A11b), όπως επίσης και από τις αλγεβρικές (A11aAlg, A11bAlg) καθώς και τις γεωμετρικές (A11aGeo, A11bGeo) προσεγγίσεις στην ίδια ερώτηση. Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι μαθητές επιτυγχάνουν στην επίλυση της άσκησης χρησιμοποιώντας είτε αλγεβρική είτε γεωμετρική προσέγγιση. Το γεγονός ότι ξεχωρίζουν σε μικρές υποομάδες οι διαφορετικές προσεγγίσεις δείχνει συνέπεια από πλευράς των μαθητών, αφού αυτοί που απαντούν στο ένα υποερώτημα χρησιμοποιώντας γεωμετρική προσέγγιση συνεχίζουν με τον ίδιο τρόπο να εργάζονται και για την επίλυση του δεύτερου υποερωτήματος, γεγονός λογικό και αναμενόμενο αφού τα δύο υποερωτήματα είναι της ίδιας ακριβώς μορφής. Στη 2η ομάδα παρουσιάζονται μεταβλητές της ερώτησης 3 του Β δοκιμίου όπως επίσης και της ερώτησης 9 στο ίδιο δοκίμιο. Οι ορθές απαντήσεις στα υποερωτήματα της ερώτησης 3 του Β δοκιμίου (B3a, B3b) φαίνεται να σχετίζονται τόσο με την αλγεβρική προσέγγιση (B3aAlg, B3bAlg) όσο και με τη γεωμετρική (B3aGeo, B3bGeo). Το γεγονός αυτό δείχνει ότι οι μαθητές μπορούν να επιτύχουν στην ερώτηση είτε με αλγεβρική είτε με γεωμετρική προσέγγιση. Η διάκριση αυτή όμως δεν είναι τόσο ξεκάθαρη όσο στην πρώτη ομάδα, παρόλο που και σε αυτή την ερώτηση τα υποερωτήματα είναι της ίδιας μορφής. Οι ορθές απαντήσεις σε τρία από τα υποερωτήματα της ερώτησης 9 του Β δοκιμίου (B9b, B9c, B9d) ενώνονται με στην ίδια ομάδα με τις αλγεβρικές προσεγγίσεις (B9aAlg, B9bAlg). Οι υπόλοιπες αλγεβρικές προσεγγίσεις της ερώτησης δεν παρουσιάζονται στο διάγραμμα αφού αφαιρέθηκαν λόγω συχνότητας. Η 3η ομάδα περιλαμβάνει τις γεωμετρικές προσεγγίσεις στα υποερωτήματα της ερώτησης 9 του Β δοκιμίου (B9aGeo, B9bGeo, B9cGeo, B9dGeo), καθώς και την ορθή απάντηση σε ένα υποερώτημα της ίδιας ερώτησης (B9a). Ο δεσμός των ερωτημάτων αυτών είναι αρκετά ισχυρός (ομοιότητα 0.8127227), πράγμα που δείχνει ότι οι μαθητές βρίσκουν πιθανότατα πιο αποτελεσματική τη γεωμετρική προσέγγιση στη λύση αυτού του υποερωτήματος.

ii. Μόνο Προσεγγίσεις



Διάγραμμα 52: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ Λυκείου που αφορά μόνο τις μεταβλητές για την προσέγγιση της συνάρτησης

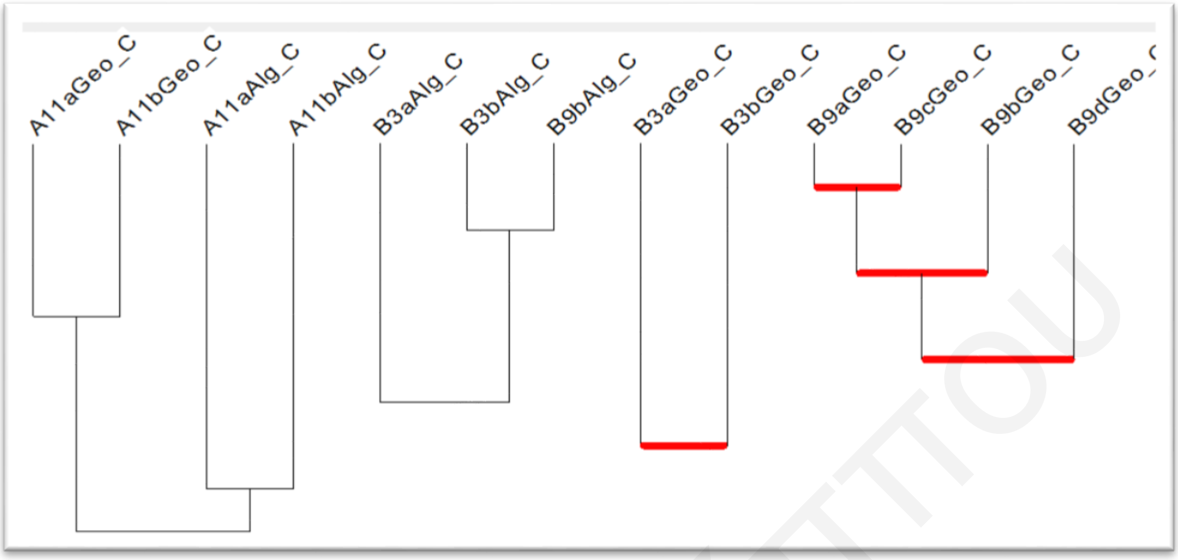
Στο διάγραμμα αυτό διακρίνονται τρεις ομάδες οι οποίες δεν συνδέονται μεταξύ τους. Η 1^{η} ομάδα αποτελείται από τις γεωμετρικές προσεγγίσεις στα υποερωτήματα δύο ερωτήσεων, της ερώτησης 11 του Α δοκιμίου (A11aGeo, A11bGeo) και της ερώτησης 9 του δοκιμίου Β (B9aGeo, B9bGeo, B9cGeo, B9dGeo). Οι προσεγγίσεις που ανήκουν στην ίδια ερώτηση ενώνονται μεταξύ τους με πολύ στενό δεσμό ομοιότητας 0.981279. Με εξίσου σημαντικό δεσμό συνδέονται και τα ερωτήματα B9aGeo, B9bGeo, B9cGeo και B9dGeo (ομοιότητα 0.979344). Όλα τα έργα σε αυτή την ομάδα ενώνονται με ασθενή (ομοιότητα 0.0735827) αλλά σημαντικό δεσμό. Η σημαντικότητα στο στεγανοποιημένο δεσμό που δημιουργείται δείχνει ότι οι μαθητές οι οποίοι χρησιμοποιούν γεωμετρική προσέγγιση για την ερώτηση Α11, χρησιμοποιούν αντίστοιχα την ίδια διαδικασία και για την επίλυση της ερώτησης Β9. Παρόλα αυτά το ποσοστό ομοιότητας είναι πολύ μικρό. Το κόκκινο χρώμα στη σύνδεση όμως καταδεικνύει την ανάγκη για ενίσχυση του δεσμού αυτού. Η 2^{η} ομάδα που δημιουργείται αποτελείται από μόνο δύο μεταβλητές και είναι ομάδα αλγεβρική. Περιλαμβάνει τις αλγεβρικές προσεγγίσεις της ερώτησης 11 του δοκιμίου Α (A11aAlg, A11bAlg). Ο δεσμός που συνδέει τις μεταβλητές αυτές είναι ισχυρός (ομοιότητα 0.871731) και σημαντικός. Στην 3^{η} ομάδα παρατηρούμε διάφορες μικρές υποομάδες οι οποίες όμως συνδέονται μεταξύ τους με πολύ στενούς δεσμούς. Οι αλγεβρικές προσεγγίσεις στην ερώτηση 3 του Β δοκιμίου (B3aAlg, B3bAlg) συνδέονται με δεσμό ομοιότητας 0.985875. Επίσης με πολύ ισχυρό και σημαντικό δεσμό βλέπουμε να συνδέονται οι αλγεβρικές προσεγγίσεις στα υποερωτήματα της ερώτησης 9 του Β δοκιμίου (B9aAlg, B9bAlg) (ομοιότητα 1). Στην ίδια ομάδα βλέπουμε και δύο γεωμετρικές μεταβλητές, μία εκ των οποίων (B3aGeo) συνδέεται με πολύ στενό δεσμό με τις δύο αλγεβρικές προσεγγίσεις της ερώτησης Β9 (ομοιότητα 0.995981). Η δεύτερη γεωμετρική μεταβλητή ανήκει επίσης στην ερώτηση 3 του Β δοκιμίου (B3bGeo) και συνδέεται με όλα τα υπόλοιπα έργα της ομάδας, με λιγότερο ισχυρό δεσμό (ομοιότητα 0.276577).

iii. Μόνο Ορθές Απαντήσεις

Διάγραμμα 53: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ Λυκείου που αφορά μόνο με ορθές απαντήσεις για την προσέγγιση της συνάρτησης

Το διάγραμμα αυτό φαίνεται να χωρίζεται σε τρεις ομάδες, δύο εκ των οποίων συνδέονται μεταξύ τους. Η $1^{η}$ ομάδα περιλαμβάνει τις δύο ορθές απαντήσεις στην ερώτηση 11 του δοκιμίου Α (A11a, A11b), πράγμα που υποδηλώνει συνέπεια από πλευράς των μαθητών οι οποίοι όταν απαντούν ορθά στο πρώτο υποερώτημα, απαντούν αντίστοιχα ορθά και στο δεύτερο, πράγμα αναμενόμενο αφού τα δύο υποερωτήματα έχουν ακριβώς τις ίδιες απαιτήσεις και βαθμό δυσκολίας. Οι μεταβλητές αυτές συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ισχυρό δεσμό (ομοιότητα 0.918337). Η $2^{η}$ ομάδα περιλαμβάνει τις δύο μεταβλητές της ερώτησης 3 του Β δοκιμίου. Οι δύο μεταβλητές συνδέονται μεταξύ τους με πολύ στενό δεσμό (ομοιότητα 0.918337). Ο δεσμός που συνδέει τις δύο ομάδες (Ομάδα 1, Ομάδα 2) είναι αρκετά ασθενής (ομοιότητα 0.0499993). Η $3^{η}$ ομάδα περιλαμβάνει όλα τα υποερωτήματα της ερώτησης 9 του Β δοκιμίου. Όλες οι μεταβλητές συνδέονται μεταξύ τους με πολύ στενό αλλά και σημαντικό δεσμό (ομοιότητα 0.748057). Το σημαντικότερο που μπορούμε να διακρίνουμε από το συγκεκριμένο διάγραμμα ομοιότητας είναι το γεγονός ότι οι τρεις ερωτήσεις δημιουργούν στεγανοποιημένους τύπους στις διαδικασίες των μαθητών. Φαίνεται λοιπόν ότι απαντούν αποσπασματικά για την κάθε ερώτηση, χρησιμοποιώντας τις ίδιες διαδικασίες για τα υποερωτήματα της κάθε μιας, πράγμα που δικαιολογεί τη δημιουργία διαφορετικών ομάδων για την κάθε μια ερώτηση.

iv. Επιτυχία κάθε προσέγγισης



Διάγραμμα 54: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ Λυκείου που αφορά την επιτυχία κάθε προσέγγισης της συνάρτησης

Το παραπάνω διάγραμμα ομοιότητας χωρίζεται σε τέσσερις ομάδες οι οποίες δεν συνδέονται μεταξύ τους. Σκοπός του συγκεκριμένου διαγράμματος είναι να αναδείξει την αποτελεσματικότητα κάθε προσέγγισης. Αναλυτικότερα, το διάγραμμα αυτό στοχεύει στο να δείξει κατά πόσο η χρήση κάποιας προσέγγισης (αλγεβρική, γεωμετρική) είχε και το επιθυμητό αποτέλεσμα, δηλαδή την εύρεση ορθής απάντησης. Η 1η ομάδα αποτελείται από τέσσερις μεταβλητές της ερώτησης 11 του Α δοκιμίου οι οποίες με τη σειρά τους θα μπορούσαμε να πούμε ότι χωρίζονται σε δύο υποομάδες. Η πρώτη υποομάδα αποτελείται από τις δύο γεωμετρικές προσεγγίσεις της ερώτησης, και συνδέονται μεταξύ τους με πολύ στενό δεσμό (ομοιότητα 0.959316), όπως άλλωστε θα αναμέναμε, γεγονός που δείχνει συνέπεια της γεωμετρικής προσέγγισης σε σχέση με την ορθότητα της απάντησης. Βλέπουμε λοιπόν ότι για πολλούς μαθητές η γεωμετρική προσέγγιση χρησιμοποιήθηκε ως μέσο εύρεσης ορθής απάντησης στο ερώτημα. Στην ίδια ομάδα βλέπουμε να συνδέονται και τα δύο αλγεβρικά έργα της ίδιας ερώτησης. Οι αλγεβρικές προσεγγίσεις συνδέονται μεταξύ τους με στενό δεσμό (ομοιότητα 0.629202). Η σύνδεση γεωμετρικών και αλγεβρικών έργων μπορεί να μην ήταν αναμενόμενη αφού πρόκειται για διαφορετικών ειδών προσεγγίσεις. Παρόλα αυτά πρόκειται για προσεγγίσεις της ίδιας ερώτησης και ίσως αυτό να δικαιολογεί το δεσμό αυτό. Βέβαια, η σύνδεση μεταξύ όλων των έργων δεν είναι ιδιαίτερα ισχυρή (ομοιότητα 0.253372). Στη 2^{η} ομάδα συναντούμε τα δύο υποερωτήματα της ερώτησης 3 του Β δοκιμίου, αλλά και ένα από τα υποερωτήματα της ερώτησης 9 του Β δοκιμίου. Και τα τρία έργα είναι αλγεβρικά και ο δεσμός που τα συνδέει είναι αρκετά ισχυρός (ομοιότητα 0.878865). Παρατηρούμε ότι οι μαθητές οι οποίοι βρίσκουν ορθή απάντηση στην ερώτηση Β3 χρησιμοποιώντας αλγεβρική προσέγγιση, χρησιμοποιούν την ίδια προσέγγιση και στην ερώτηση Β9, όμως σε αυτή την περίπτωση βρίσκουν ορθή απάντηση μόνο σε ένα από τα υποερωτήματά της. Η 3^{η} ομάδα αποτελείται από τις γεωμετρικές προσεγγίσεις στα δύο υποερωτήματα της ερώτησης 3 του Β δοκιμίου. Τα έργα αυτά ενώνονται μεταξύ τους με πολύ στενό δεσμό (ομοιότητα 1), γεγονός αναμενόμενο αφού πρόκειται για ερωτήματα της ίδιας μορφής. Φαίνεται λοιπόν ότι ο μαθητής που λύνει με γεωμετρική προσέγγιση το πρώτο υποερώτημα και βρίσκει ορθή απάντηση συνεχίζει με τον ίδιο τρόπο για την επίλυση και του δεύτερου υποερωτήματος. Η 4^{η} ομάδα είναι ομάδα γεωμετρικών προσεγγίσεων. Αποτελείται από τα τέσσερα υποερωτήματα της ερώτησης 9 του Β δοκιμίου και ο δεσμός που τα συνδέει είναι πολύ ισχυρός (ομοιότητα 0.93287) και συνάμα σημαντικός.

Επίλυση Προβλήματος

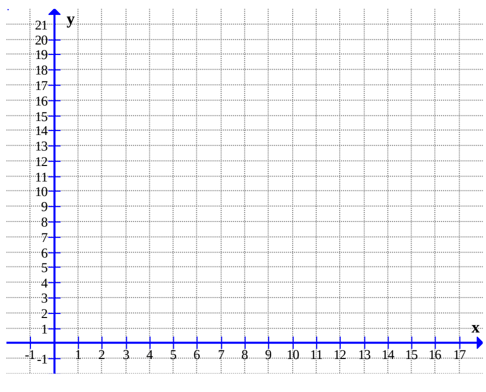
Σε αυτή την ενότητα επιθυμούμε να αναλύσουμε την επίλυση προβλημάτων της συνάρτησης, μέσα από τη χρήση διαγραμμάτων ομοιότητας τα οποία εξήχθησαν από το δείγμα των απαντήσεων του ερωτηματολογίου. Οι διαστάσεις αυτές θα αναλυθούν για τρία διαφορετικά επίπεδα, Γ΄ Γυμνασίου, Α΄ Λυκείου και Β΄ Λυκείου, όπως επίσης και για το συνολικό δείγμα.

Για το σκοπό αυτό θα ληφθούν υπόψη οι πιο κάτω ερωτήσεις:

Δοκίμιο Α – Ερώτηση 6. Ο Κωστάκης σήμερα έχει €20 και ξοδεύει €1 την ημέρα. Η αδελφή του η Ελένη έχει €8 και ξοδεύει €0,5 την ημέρα. Εάν δεν τους δώσει κάποιος άλλα λεφτά τότε:

i. Να βρείτε συναρτήσει του αριθμού x των ημερών το ποσό y των χρημάτων που θα έχει ο καθένας τους.

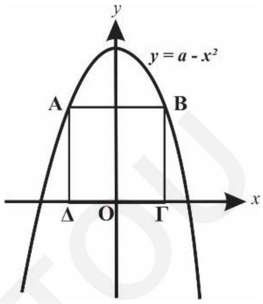
ii. Να κάνετε τη γραφική παράσταση των δύο συναρτήσεων.



iii. Μετά από πόσες ημέρες τα δύο αδέλφια θα έχουν τα ίδια χρήματα;

iv. Πόσα χρήματα θα τους έχουν μείνει;

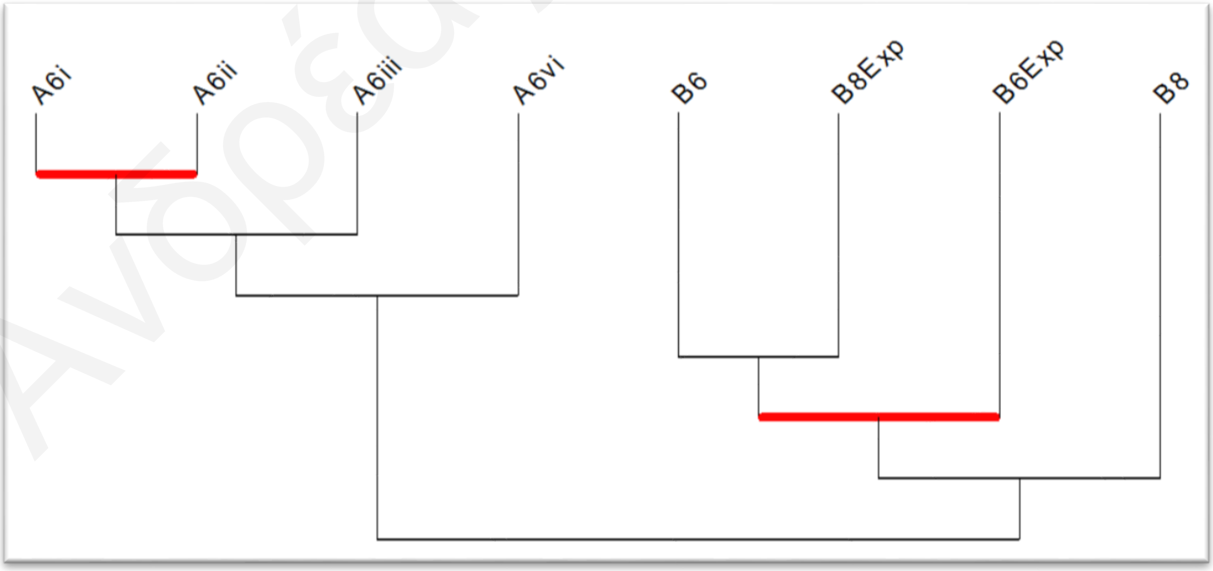
Β6. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = a - x^2$ με $a \in \mathbb{R}$. Εάν το τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ τέμνει τη γραφική παράσταση στα σημεία Α και Β και το εμβαδόν του τετραγώνου ισούται με 16, ποια είναι η τιμή του a. Να αιτιολογήσετε τον τρόπο που εργαστήκατε.



(Α) 2 (Β) 4 (Γ) 6 (Δ) 8 (Ε) 10

Β8. Εάν αντικατασταθεί το $x = 2$ στη συνάρτηση $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma,\ a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, παίρνουμε αρνητικό αποτέλεσμα. Εάν αντικαταστήσουμε το $x = 4$ παίρνουμε θετικό αποτέλεσμα. Πόσες πραγματικές ρίζες έχει η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$; Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

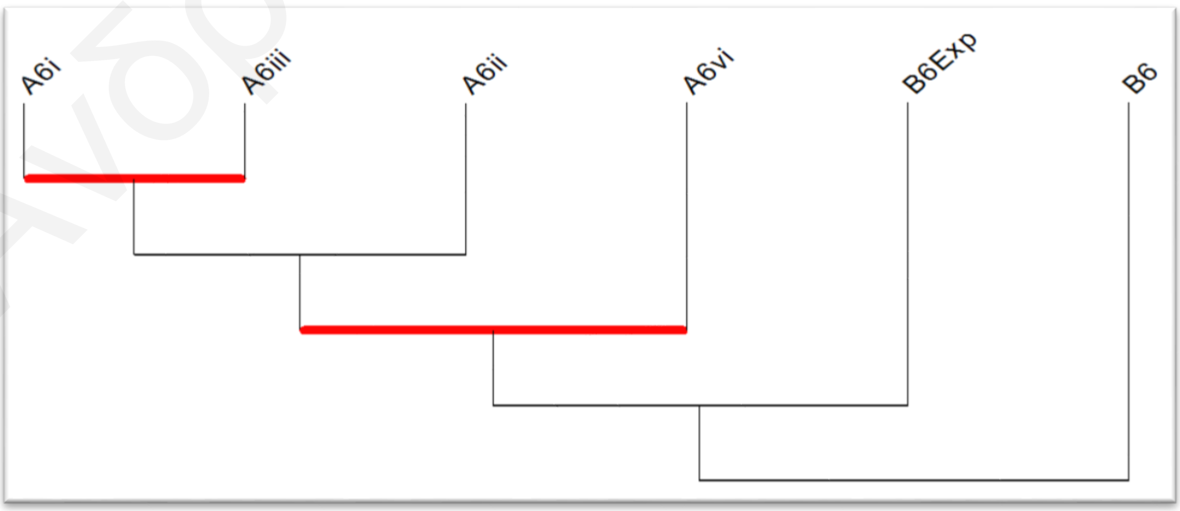
I. Διάγραμμα Ομοιότητας – Επίλυση Προβλήματος - Συνολικό Δείγμα



Διάγραμμα 55: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά τη λύση προβλήματος

Παρατηρούμε ότι σχηματίζονται δύο ομάδες που αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικά είδη συναρτήσεων. Από τη μία μεριά ($1^{η}$ ομάδα) ομαδοποιούνται όλες οι ερωτήσεις της ερώτησης 6 του Α δοκιμίου (Α6i, Α6ii, Α6iii, Α6vi) που αντιστοιχούν σε γραμμική συνάρτηση (ευθεία). Από την άλλη μεριά ($2^{η}$ ομάδα) βλέπουμε να ομαδοποιούνται τα υποερωτήματα στις ερωτήσεις 6 (Β6, Β6Exp) και 8 (Β8, Β8Exp) του Β δοκιμίου, ερωτήματα που αντιστοιχούν σε παραβολές (καμπύλες). Φαίνεται λοιπόν ότι υπάρχει μια στεγανοποίηση των ερωτημάτων σε σχέση με την ευθεία και των ερωτήσεων σε σχέση με την παραβολή. Παρόλα αυτά παρατηρούμε ότι οι δύο στεγανοποιημένες ομάδες ενώνονται μεταξύ τους με πολύ στενό τρόπο (ομοιότητα 1). Με άλλα λόγια, μπορεί οι ερωτήσεις που αφορούν την ευθεία να ομαδοποιούνται από τη μια μεριά και οι ερωτήσεις που αφορούν καμπύλη από την άλλη, ωστόσο οι δύο ομάδες μεταξύ τους έχουν πολύ στενό δεσμό (ομοιότητα 1). Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές εργάζονται με παρόμοιο τρόπο στις ερωτήσεις που αφορούν την ευθεία (αντίστοιχα στις ερωτήσεις που αφορούν την παραβολή), τελικά όμως οι δύο τρόποι εργασίας σε ευθεία και καμπύλη παρουσιάζουν μεγάλη ομοιότητα. Αυτός ο διαχωρισμός σε δύο ομάδες (με ένωση μεταξύ τους) που παρατηρείται στο συνολικό δείγμα ίσως να οφείλεται στη μεγάλη μεταβλητότητα σε σχέση με τις ικανότητες των μαθητών στα Μαθηματικά, αφού στο σύνολο του δείγματος έχουμε μαθητές Γ΄ Γυμνασίου, Α΄ και Β΄ Λυκείου θετικής κατεύθυνσης.

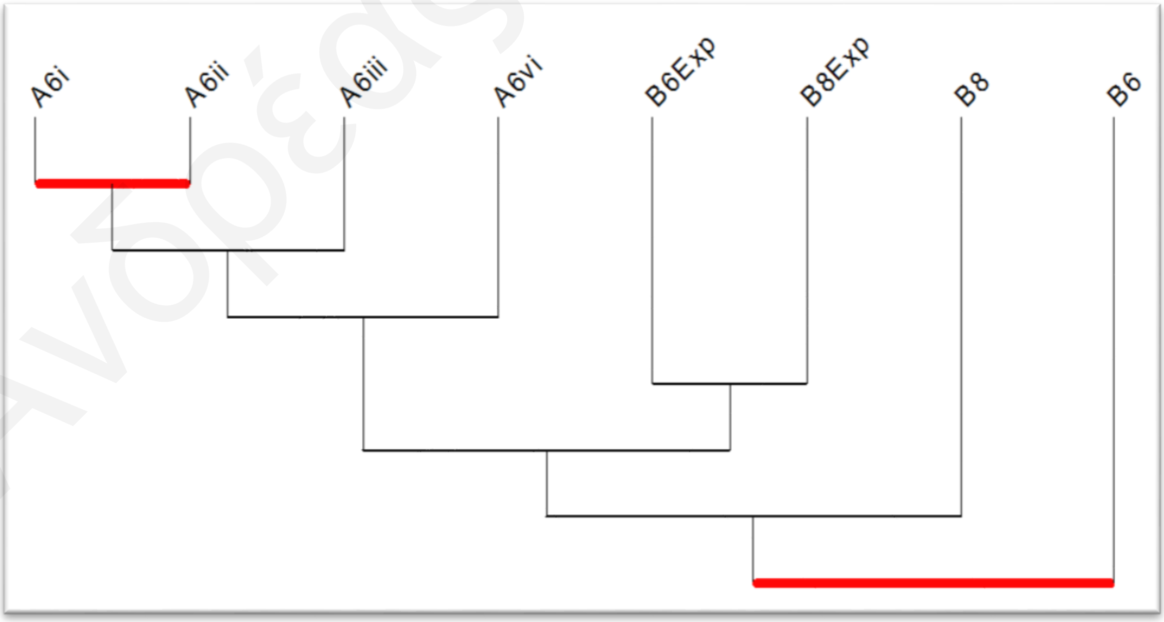
II. Διάγραμμα Ομοιότητας – Επίλυση Προβλήματος – Γ΄ Γυμνασίου



Διάγραμμα 56: Διάγραμμα ομοιότητας για την Γ΄ Γυμνασίου που αφορά τη λύση προβλήματος

Παρατηρούμε ότι σχηματίζονται δύο ομάδες που αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικά είδη συναρτήσεων. Από τη μία μεριά ($1^η$ ομάδα) ομαδοποιούνται όλες οι ερωτήσεις της ερώτησης 6 του Α δοκιμίου (A6i, A6ii, A6iii, A6vi) που αντιστοιχούν σε γραμμική συνάρτηση (ευθεία). Από την άλλη μεριά ($2^η$ ομάδα) βλέπουμε να ομαδοποιούνται τα υποερωτήματα στις ερωτήσεις 6 (B6, B6Exp) ερωτήματα που αντιστοιχούν σε παραβολές (καμπύλες). Φαίνεται λοιπόν ότι υπάρχει μια στεγανοποίηση των ερωτημάτων σε σχέση με την ευθεία και των ερωτήσεων σε σχέση με την παραβολή. Παρόλα αυτά παρατηρούμε ότι οι δύο στεγανοποιημένες ομάδες ενώνονται μεταξύ τους με στενό δεσμό (ομοιότητα 0.727543). Με άλλα λόγια, μπορεί τα υποερωτήματα που αφορούν την ευθεία να ομαδοποιούνται από τη μια μεριά και τα ερωτήματα που αφορούν καμπύλη από την άλλη, ωστόσο οι δύο ομάδες μεταξύ τους έχουν πολύ στενό δεσμό. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές εργάζονται με παρόμοιο τρόπο στις ερωτήσεις που αφορούν την ευθεία (αντίστοιχα στις ερωτήσεις που αφορούν την παραβολή), τελικά όμως οι δύο τρόποι εργασίας σε ευθεία και καμπύλη παρουσιάζουν μεγάλη ομοιότητα.

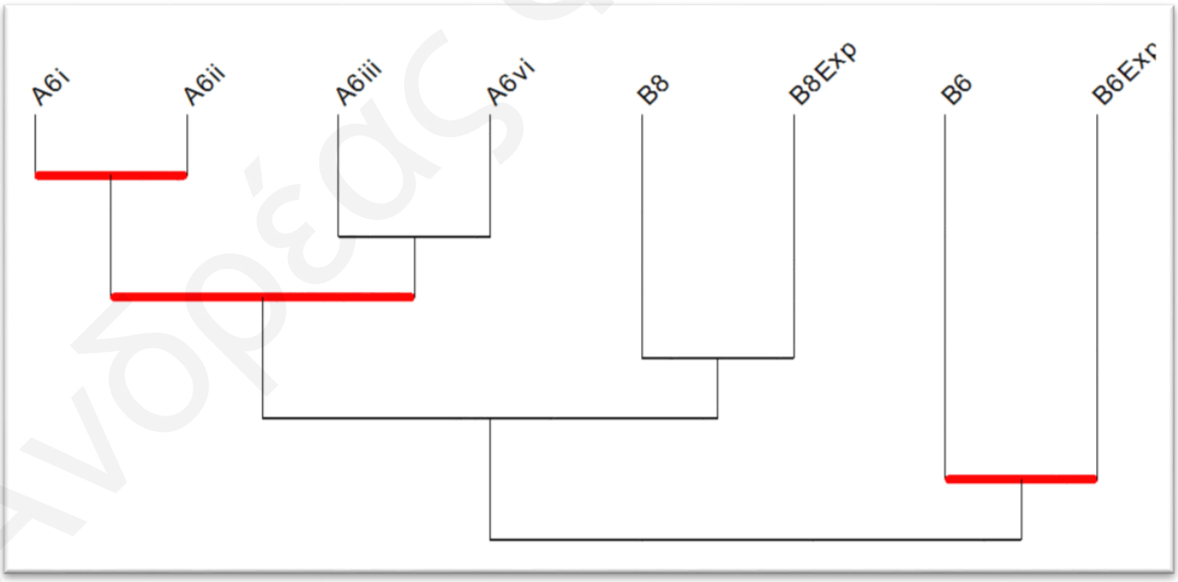
III. Διάγραμμα Ομοιότητας – Επίλυση Προβλήματος – Α΄ Λυκείου



Διάγραμμα 57: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά τη λύση προβλήματος

Στο διάγραμμα αυτό οι μεταβλητές δεν χωρίζονται σε ομάδες. Όλες οι μεταβλητές ανήκουν σε μια ενιαία ομάδα. Θα μπορούσαμε παρόλα αυτά να διακρίνουμε μικρές υποομάδες. Παρατηρούμε ότι σχηματίζονται δύο υποομάδες που αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικά είδη συναρτήσεων. Από τη μία μεριά ($1^η$ υποομάδα) ομαδοποιούνται όλα τα υποερωτήματα της ερώτησης 6 του Α δοκιμίου (Α6i, A6ii, A6iii, A6vi) που αντιστοιχούν σε γραμμική συνάρτηση (ευθεία). Από την άλλη μεριά ($2^η$ υποομάδα) βλέπουμε να ομαδοποιούνται τα υποερωτήματα στις ερωτήσεις 6 (Β6, Β6Exp) και 8 (Β8, Β8Exp) ερωτήματα που αντιστοιχούν σε παραβολές (καμπύλες). Θα μπορούσαμε να πούμε λοιπόν ότι υπάρχει μια στεγανοποίηση των ερωτημάτων σε σχέση με την ευθεία και των ερωτήσεων σε σχέση με την παραβολή. Παρόλα αυτά παρατηρούμε ότι οι δύο στεγανοποιημένες ομάδες ενώνονται μεταξύ τους με πολύ στενό (ομοιότητα 0.999749) και παράλληλα σημαντικό δεσμό.

IV. Διάγραμμα Ομοιότητας – Επίλυση Προβλήματος – Β΄ Λυκείου



Διάγραμμα 58: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ Λυκείου που αφορά τη λύση προβλήματος

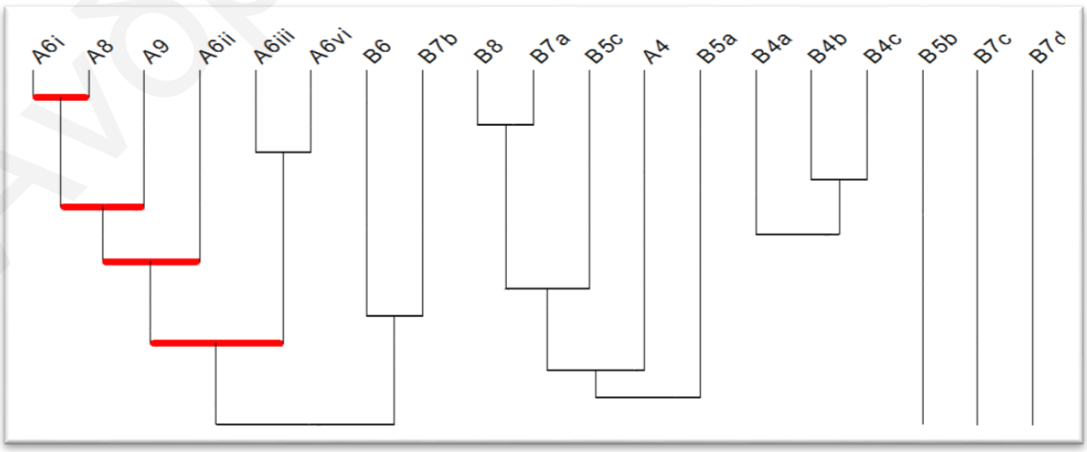
Στο διάγραμμα αυτό βλέπουμε να σχηματίζονται τρεις ομάδες που αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικά είδη συναρτήσεων. Από τη μία μεριά ($1^η$ ομάδα) ομαδοποιούνται όλες οι ερωτήσεις της ερώτησης 6 του Α δοκιμίου (Α6i, A6ii, A6iii, A6vi) που αντιστοιχούν σε γραμμική συνάρτηση (ευθεία). Από την άλλη μεριά (2η ομάδα) βλέπουμε να ομαδοποιούνται τα υποερωτήματα του έργου 8 (B8, B8Exp) ερωτήματα που αντιστοιχούν σε παραβολές (καμπύλες) και τέλος στην 3η ομάδα βλέπουμε να ομαδοποιούνται τα υποερωτήματα της ερώτησης 6 του Β δοκιμίου (B6, B6Exp) τα οποία επίσης αντιστοιχούν σε καμπύλες. Ο δεσμός που συνδέει τις δύο πρώτες ομάδες είναι πολύ ισχυρός (ομοιότητα 0.967922), ενώ ο δεσμός σύνδεσης της 3ης ομάδας με τις υπόλοιπες είναι αρκετά πιο ασθενής.

Επίλυση Προβλήματος και Ερμηνεία

Είναι σημαντικό να μελετηθεί η σχέση μεταξύ επίλυσης προβλήματος και ερμηνείας των διαγραμμάτων ομοιότητας. Πράγματι, σε ορισμένες περιπτώσεις δεν υπάρχει διακριτή διαφορά μεταξύ ενός έργου επίλυσης προβλήματος και έργου ερμηνείας. Έτσι, αναμένεται να υπάρχει μία ανάμιξη έργων επίλυσης προβλήματος και ερμηνείας.

I. Διάγραμμα Ομοιότητας – Επίλυση Προβλήματος και Ερμηνεία - Συνολικό Δείγμα

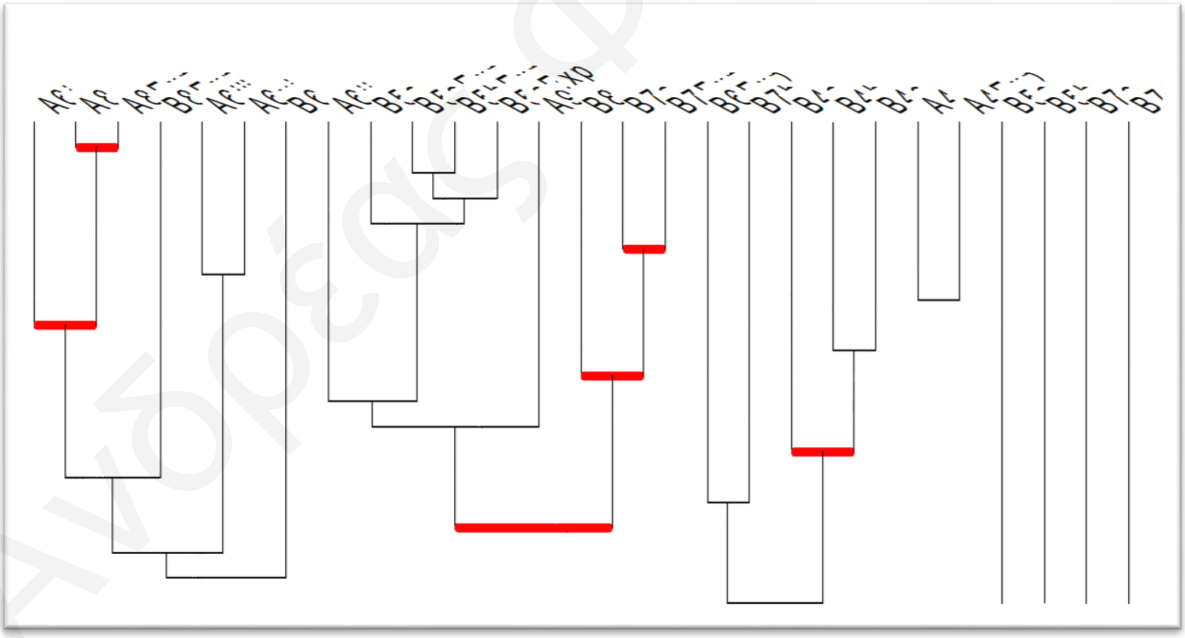
i. Ερμηνεία χωρίς τις μεταβλητές επεξήγησης



Διάγραμμα 59: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά τη λύση προβλήματος σε σχέση με την ερμηνεία

Η 1η ομάδα μπορεί να χαρακτηριστεί ως γραμμική ομάδα, δηλαδή ομάδα στην οποία όλα τα έργα που συνδέονται πλην ενός αναφέρονται σε ευθεία γραμμή. Πράγματι τα έργα A8, A9, A6 (A6i, A6ii, A6iii, A6vi) και B7b αντιστοιχούν σε ευθεία, με εξαίρεση το έργο B6. Η 2η ομάδα μπορεί να χαρακτηριστεί ως ομάδα της καμπύλης διότι όλα τα έργα πλην ενός αντιστοιχούν σε καμπύλες. Πράγματι παρατηρούμε σε αυτή την ομάδα τις μεταβλητές B8, B5c, A4 και B5a οι οποίες αντιστοιχούν σε καμπύλες, με εξαίρεση τη μεταβλητή B7a. Τέλος, η 3η ομάδα αντιστοιχεί σε τρία υποερωτήματα που ζητούν μια απλή πληροφορία που προκύπτει από μια καμπύλη. Πράγματι τα έργα B4a, B4b και B4c αναφέρονται σε τέτοιου τύπου προβλήματα. Οι τρεις ομάδες δεν συνδέονται μεταξύ τους. Με άλλα λόγια παίρνοντας συνολικά τα ερωτήματα εκείνα που εκφράζουν επίλυση προβλημάτων και ερμηνεία διαγραμμάτων, η ομάδα των ευθειών δεν συνδέεται με τις ομάδες των καμπυλών.

ii. Όλες οι μεταβλητές (με επεξηγήσεις)



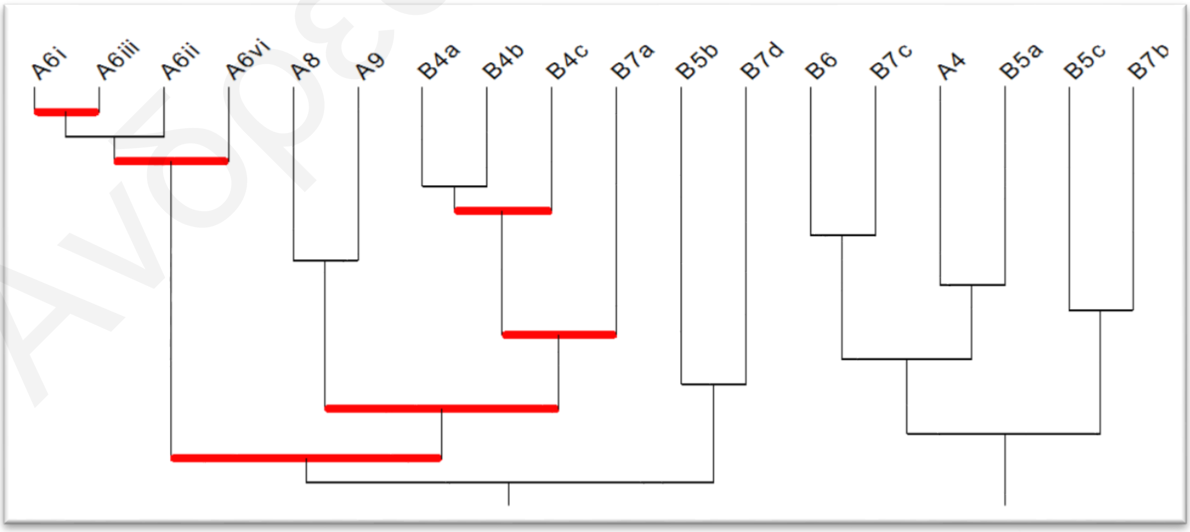
Διάγραμμα 60: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά όλες τις μεταβλητές με επεξηγήσεις για τη λύση προβλήματος σε σχέση με την ερμηνεία

Η 1η ομάδα θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως γραμμική, δηλαδή ομάδα στην οποία όλα τα έργα που συνδέονται πλην ενός αναφέρονται σε ευθεία γραμμή. Πράγματι τα έργα

A8, A8Exp και A6 (A6i, A6iii, A6vi) αντιστοιχούν σε ευθεία, με εξαίρεση τα έργα B8Exp και B6. Στη 2^{η} ομάδα βλέπουμε να αναμιγνύονται καμπύλες και ευθείες. Τα έργα B5c, B5aExp, B5bExp, B5cExp και B8 αντιστοιχούν σε καμπύλες. Οι μεταβλητές A6ii, A9, B7a και B7Exp αντιστοιχούν σε ευθείες. Στην 3^{η} ομάδα αντιστοιχούν τα τρία υποερωτήματα που ζητούν μια απλή πληροφορία που προκύπτει από μια καμπύλη. Πράγματι τα έργα B4a, B4b και B4c αναφέρονται σε τέτοιου τύπου προβλήματα. Στην ίδια ομάδα βλέπουμε άλλες δύο μεταβλητές (B6Exp,B7b) που αντιστοιχούν σε ευθείες. Τα έργα αυτά συνδέονται με τα υπόλοιπα. Παρόλα αυτά ο δεσμός που τα ενώνει είναι πολύ ασθενής (ομοιότητα 0.0620497). Την 4^{η} ομάδα απαρτίζουν δύο μόνο μεταβλητές που ανήκουν στην ερώτηση 4 του A δοκιμίου (A4, A4Exp) και συνδέονται μεταξύ τους με στενό δεσμό (ομοιότητα 0.897874). Οι τρεις ομάδες δεν συνδέονται μεταξύ τους. Στο συγκεκριμένο διάγραμμα αυτό που διακρίνουμε είναι μια ανάμιξη διαφορετικών έργων (ευθειών – καμπύλων). Η ανάμιξη αυτή ίσως να δικαιολογείται λόγω του μεγάλου πλήθους των μεταβλητών που λαμβάνουν χώρο στο συγκεκριμένο διάγραμμα.

II. Διάγραμμα Ομοιότητας – Επίλυση Προβλήματος και Ερμηνεία – Γ΄ Γυμνασίου

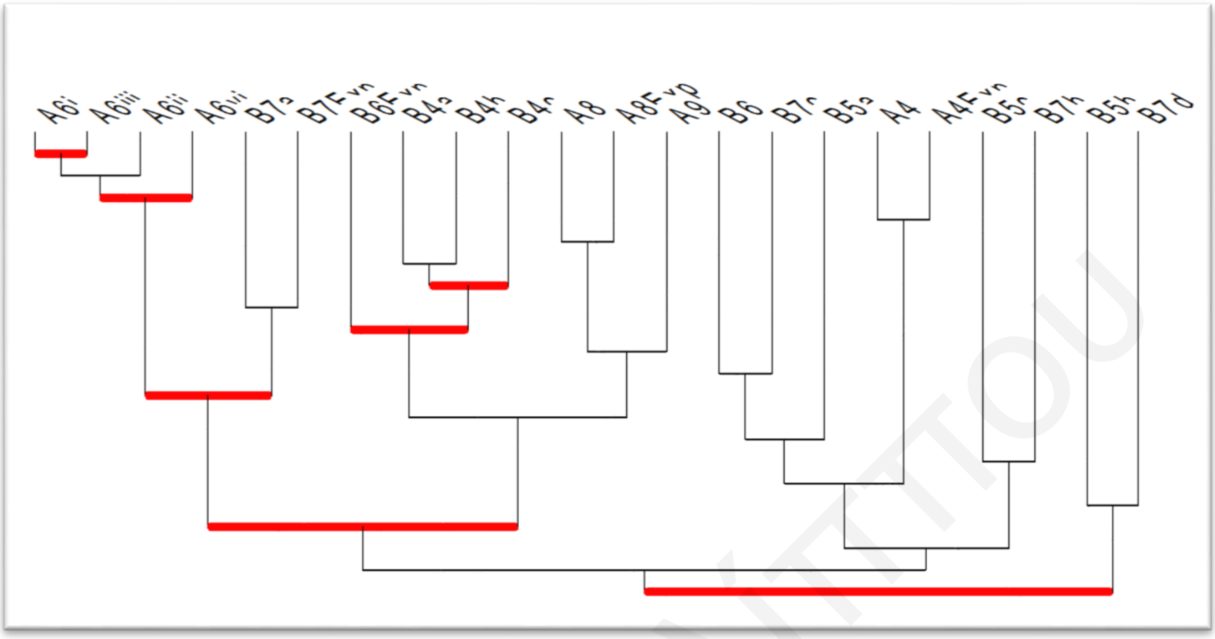
i. Ερμηνεία χωρίς τις μεταβλητές επεξήγησης (Η B8 αφαιρείται λόγω συχνότητας)



Διάγραμμα 61: Διάγραμμα ομοιότητας για την Γ΄ Γυμνασίου που αφορά τη λύση προβλήματος σε σχέση με την ερμηνεία

Στο παραπάνω διάγραμμα βλέπουμε να δημιουργούνται τρεις ομάδες οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους. Στην 1η ομάδα βλέπουμε τα τέσσερα υποερωτήματα στην ερώτηση 6 του Α δοκιμίου (A6i, A6ii, A6iii, A6vi) τα οποία αντιστοιχούν σε ευθείες και συνδέονται μεταξύ τους με πολύ στενό δεσμό (ομοιότητα 1). Στην ίδια ομάδα βλέπουμε και τις μεταβλητές A8, A9 και B7a οι οποίες επίσης αντιστοιχούν σε ευθείες. Τέλος, βλέπουμε τα τρία υποερωτήματα της ερώτησης 4 του Β δοκιμίου (B4a, B4b, B4c), τα οποία ζητούν μια απλή πληροφορία η οποία όμως προκύπτει από μια καμπύλη. Ο δεσμός που συνδέει όλα τα έργα της 1ης ομάδας είναι ισχυρός (ομοιότητα 0.737791) και ταυτόχρονα σημαντικός. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι η ομάδα αυτή είναι ομάδα των ευθειών με εξαίρεση τα τρία υποερωτήματα της ερώτησης Β4. Ο δεσμός που συνδέει τις μεταβλητές της ομάδας είναι ισχυρός (ομοιότητα 0.737791) και συνάμα σημαντικός αν λάβουμε υπόψη το κόκκινο χρώμα στο δεσμό που τις συνδέει. Η 2η ομάδα αποτελείται από δύο μεταβλητές. Η πρώτη μεταβλητή που ανήκει στην ερώτηση 5 του Β δοκιμίου αντιστοιχεί σε καμπύλη και η δεύτερη μεταβλητή η οποία ανήκει στην ερώτηση 7 του ίδιου δοκιμίου αντιστοιχεί σε ευθεία. Ο δεσμός που συνδέει τις δύο μεταβλητές είναι ισχυρός (ομοιότητα 0.931255). Στην 3η ομάδα ανήκουν έξι μεταβλητές οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με στενό δεσμό (ομοιότητα 0.740627). Η ομάδα θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως ομάδα των καμπυλών αφού όλες οι μεταβλητές που την απαρτίζουν, εκτός από μία, αντιστοιχούν σε καμπύλες. Πράγματι, οι μεταβλητές B6, B7c, A4, B5a και B5c είναι ερωτήματα στα οποία γίνεται χρήση της καμπύλης είτε για την εξεύρεση μιας πληροφορίας είτε η απάντηση στο ερώτημα αντιστοιχεί σε ευθεία. Το έργο B7b είναι το μοναδικό έργο σε αυτή την ομάδα που αντιστοιχεί σε ευθεία. Όλες οι ομάδες συνδέονται μεταξύ τους αλλά ο δεσμός που τις ενώνει είναι αρκετά ασθενής (ομοιότητα 0.668143).

ii. Όλες οι μεταβλητές (με επεξηγήσεις)

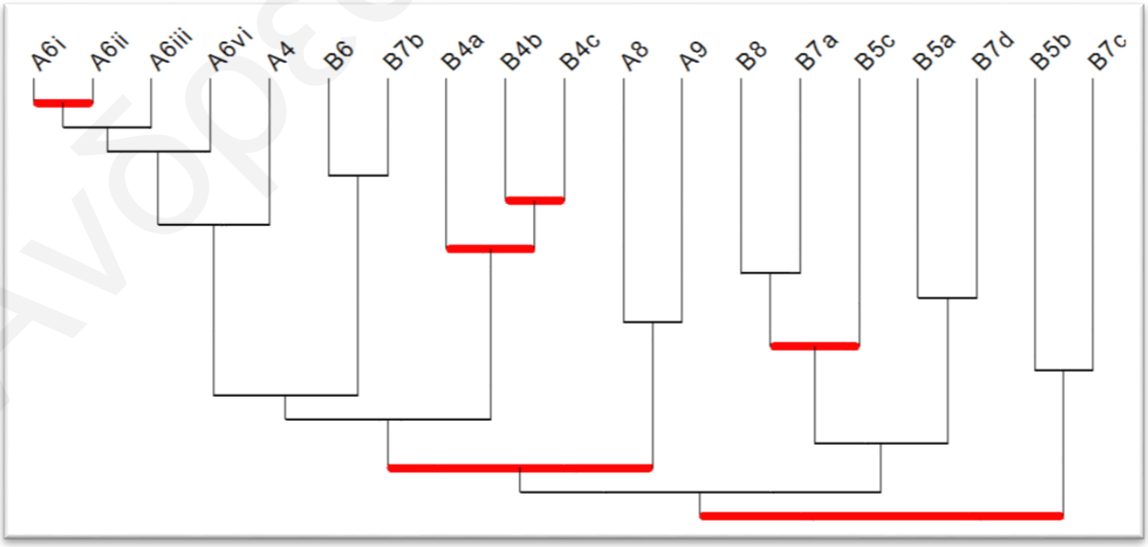


Διάγραμμα 62: Διάγραμμα ομοιότητας για την Γ΄ Γυμνασίου που αφορά όλες τις μεταβλητές με επεξηγήσεις για τη λύση προβλήματος σε σχέση με την ερμηνεία

Τα έργα σε αυτό το διάγραμμα συνδέονται μεταξύ τους με όχι και τόσο ισχυρό (ομοιότητα 0.125592) αλλά πολύ σημαντικό δεσμό. Λόγω της σημαντικότητας του δεσμού αυτού δεν θα μπορούσαμε να χωρίσουμε τα έργα σε ομάδες. Παρόλα αυτά βλέπουμε ότι δημιουργούνται υποομάδες μεταξύ των μεταβλητών διαμορφώνοντας και άλλους ισχυρούς και σημαντικούς δεσμούς. Στην πρώτη υποομάδα ανήκουν τα υποερωτήματα της ερώτησης 6 του δοκιμίου Α (Α6i, Α6ii, Α6iii, Α6vi) τα οποία ανήκουν σε ευθείες. Στην ίδια υποομάδα βλέπουμε την απάντηση όπως επίσης και την επεξήγηση στην ερώτηση 7 του Β δοκιμίου (Β7a, Β7Exp), έργα τα οποία επίσης αντιστοιχούν σε ευθείες. Οι μεταβλητές αυτές συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ισχυρό (ομοιότητα 0.998415) και σημαντικό δεσμό (κόκκινο χρώμα στο δεσμό σύνδεσης). Η δεύτερη υποομάδα είναι ομάδα των καμπυλών. Σε αυτήν ανήκουν η επεξήγηση στην ερώτηση 6 του Β δοκιμίου (Β6Exp), όπως επίσης και τα τρία υποερωτήματα της ερώτησης 4 του ίδιου δοκιμίου (Β4a, Β4b, Β4c). Ο δεσμός που τις συνδέει είναι πολύ ισχυρός (ομοιότητα 0.999998) και σημαντικός ταυτόχρονα. Στην τρίτη υποομάδα βλέπουμε άλλες τρεις μεταβλητές οι οποίες ανήκουν σε ευθείες. Η απάντηση και η επεξήγηση στην ερώτηση 8 του δοκιμίου Α (Α8, Α8Exp) όπως επίσης και η απάντηση στην ερώτηση 9 του δοκιμίου Α (Α9) είναι οι μεταβλητές που απαρτίζουν την ομάδα και συνδέονται μεταξύ τους με πολύ στενό (ομοιότητα 0.999788) και συνάμα σημαντικό δεσμό. Οι τρεις πιο πάνω υποομάδες συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ισχυρό (ομοιότητα 0.907352) και σημαντικό δεσμό. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι με εξαίρεση τη δεύτερη υποομάδα, ο δεσμός αυτός δείχνει ένα στεγανοποιημένο δεσμό μεταξύ των ευθειών. Η τέταρτη υποομάδα είναι ξεκάθαρα ομάδα των καμπυλών. Όλες οι μεταβλητές με εξαίρεση ένα έργο αντιστοιχούν σε καμπύλες. Πράγματι οι μεταβλητές B6, B7c, B5a, A4, A4Exp B5c είναι έργα τα οποία αντιστοιχούν καμπύλες, με εξαίρεση τη μεταβλητή B7b. Ο δεσμός που ενώνει τις μεταβλητές είναι ισχυρός (ομοιότητα 0.687068). Οι τέσσερις παραπάνω υποομάδες ενώνονται μεταξύ τους με σχετικά ισχυρό δεσμό (ομοιότητα 0.37335). Η πέμπτη υποομάδα αποτελείται από δύο μόνο μεταβλητές. Η μεταβλητή B5b αντιστοιχεί σε καμπύλη ενώ η μεταβλητή B7d αντιστοιχεί σε ευθεία. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, όλες οι υποομάδες συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ισχυρό δεσμό πράγμα που υποδηλώνει το κόκκινο χρώμα στο δεσμό σύνδεσης.

III. Διάγραμμα Ομοιότητας – Επίλυση Προβλήματος και Ερμηνεία – Α΄ Λυκείου

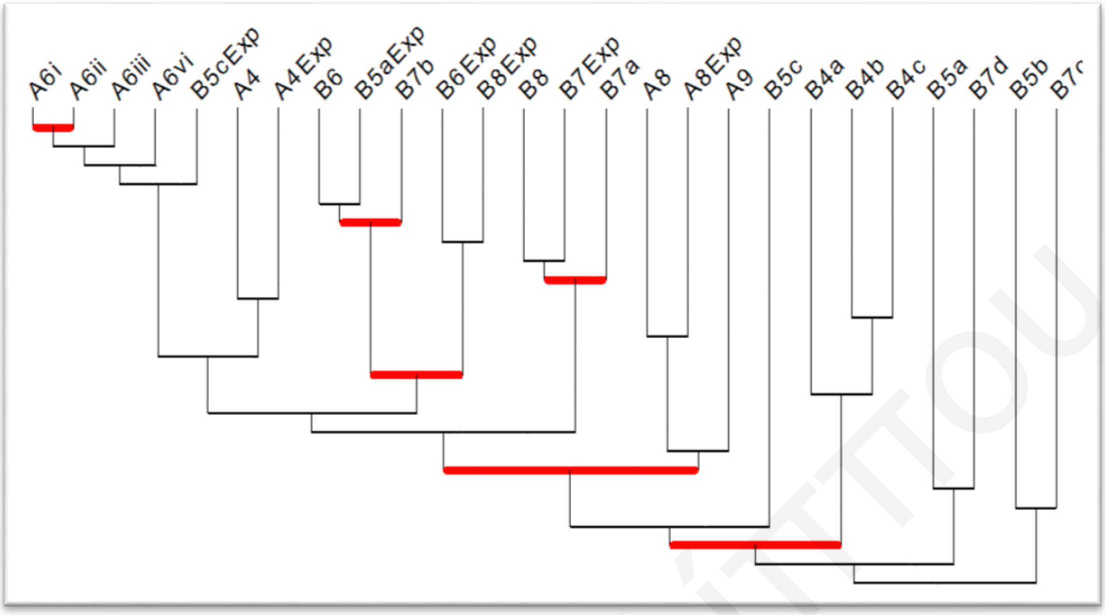
i. Ερμηνεία χωρίς τις μεταβλητές επεξήγησης



Διάγραμμα 63: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά τις μεταβλητές χωρίς τις μεταβλητές επεξήγησης για τη λύση προβλήματος σε σχέση με την ερμηνεία

Τα έργα σε αυτό το διάγραμμα συνδέονται μεταξύ τους με όχι και τόσο ισχυρό (ομοιότητα 0.149884) αλλά πολύ σημαντικό δεσμό. Λόγω της σημαντικότητας του δεσμού αυτού δεν θα μπορούσαμε να χωρίσουμε τα έργα σε ομάδες. Παρόλα αυτά βλέπουμε ότι δημιουργούνται υποομάδες μεταξύ των μεταβλητών διαμορφώνοντας και άλλους ισχυρούς και σημαντικούς δεσμούς. Στην πρώτη υποομάδα ανήκουν τα υποερωτήματα της ερώτησης 6 του δοκιμίου Α (A6i, A6ii, A6iii, A6vi) τα οποία ανήκουν σε ευθείες. Στην ίδια υποομάδα βλέπουμε την απάντηση σε ένα από τα υποερωτήματα στην ερώτηση 7 του Β δοκιμίου (B7b), έργα τα οποία επίσης αντιστοιχούν σε ευθείες. Οι μεταβλητές Α8 και Α9 ανήκουν επίσης στην ίδια ομάδα και αντιστοιχούν και αυτές σε ευθείες. Τέλος, στην ίδια ομάδα ανήκουν και κάποιες μεταβλητές οι οποίες αντιστοιχούν σε ερωτήματα που αφορούν καμπύλες. Πράγματι, οι μεταβλητές Α4, Β6, B4a, B4b, B4c ανήκουν σε καμπύλες. Οι μεταβλητές αυτές συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ισχυρό (ομοιότητα 0.925032) και σημαντικό δεσμό (κόκκινο χρώμα στο δεσμό σύνδεσης). Η δεύτερη υποομάδα είναι ομάδα στην οποία παρατηρείται μια ανάμιξη μεταξύ των μεταβλητών . Στην κατηγορία των καμπυλών βρίσκουμε τις μεταβλητές Β8, B5c και B5a και στην κατηγορία των ευθειών βρίσκουμε τις μεταβλητές B7a και B7d. Οι μεταβλητές αυτές συνδέονται μεταξύ τους με πολύ στενό δεσμό (ομοιότητα 0.929133). Τέλος στην τρίτη υποομάδα βλέπουμε άλλες δύο μεταβλητές (B5b, B7c) οι οποίες ανήκουν σε καμπύλες. Η ομάδα αυτή συνδέεται με τις υπόλοιπες με όχι ιδιαίτερα στενό (ομοιότητα 0.149884) αλλά παρόλα αυτά σημαντικό δεσμό.

ii. Όλες οι μεταβλητές (με επεξηγήσεις)

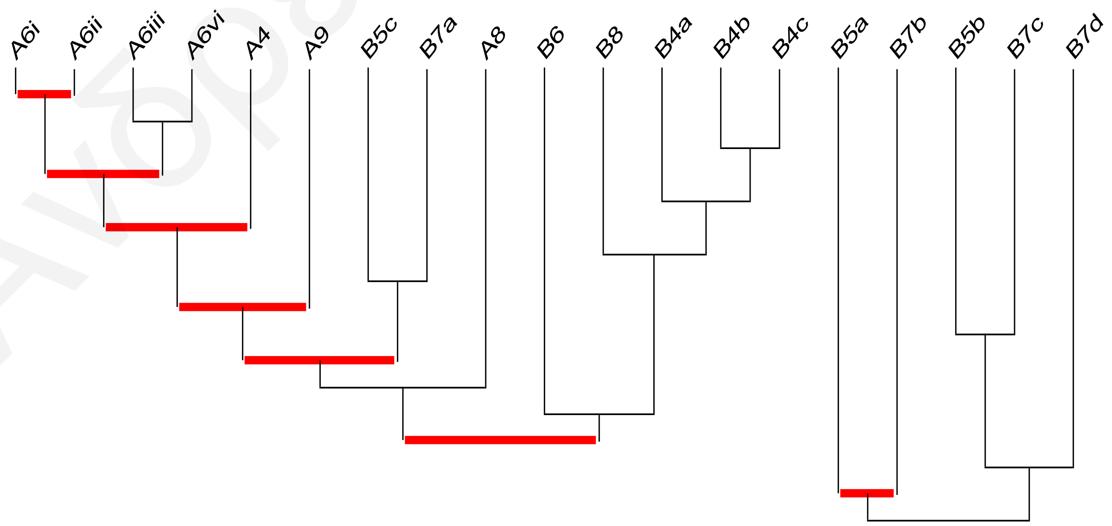


Διάγραμμα 64: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά όλες τις μεταβλητές με επεξηγήσεις για τη λύση προβλήματος σε σχέση με την ερμηνεία

Τα έργα σε αυτό το διάγραμμα χωρίζονται σε δύο ομάδες οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ασθενή δεσμό (ομοιότητα 0.0686073). Στην 1η ομάδα βλέπουμε να διαμορφώνονται πολλοί μικρότεροι δεσμοί μεταξύ των έργων δημιουργώντας σημαντικές υποομάδες. Η ανάμιξη των ευθειών και των καμπύλων είναι διακριτή σε μεγάλο βαθμό. Στην πρώτη υποομάδα ανήκουν τα υποερωτήματα της ερώτησης 6 του δοκιμίου Α (A6i, A6ii, A6iii, A6vi) τα οποία ανήκουν σε ευθείες. Στην ίδια υποομάδα βλέπουμε την επεξήγηση σε ένα από τα υποερωτήματα στην ερώτηση 5 του Β δοκιμίου (B5cExp), έργο το οποίο αντιστοιχεί σε καμπύλη. Τέλος, στην ίδια ομάδα ανήκουν άλλες δύο μεταβλητές που αφορούν καμπύλες. Πράγματι, οι μεταβλητές Α4 και Α4Exp ανήκουν σε καμπύλες. Όλες οι παραπάνω μεταβλητές συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ισχυρό δεσμό (ομοιότητα 1). Η δεύτερη υποομάδα είναι ομάδα στην οποία παρατηρείται επίσης μια ανάμιξη μεταξύ των μεταβλητών. Στην κατηγορία των καμπυλών βρίσκουμε τις μεταβλητές Β6, B5aExp και B6Exp και στην κατηγορία των ευθειών βρίσκουμε τις μεταβλητές Β7b και B8Exp. Οι μεταβλητές αυτές συνδέονται μεταξύ τους με πολύ στενό δεσμό (ομοιότητα 0.999995) και ταυτόχρονα σημαντικό δεσμό (κόκκινο χρώμα στη σύνδεση). Στην τρίτη υποομάδα βλέπουμε τρις μεταβλητές Β8, B7Exp και Β7a. Η ομάδα αυτή είναι επίσης ανάμικτη αφού η πρώτη (Β8) από αυτές τις μεταβλητές είναι καμπύλη ενώ οι άλλες δύο (B7Exp, B7a) είναι ευθείες. Η ομάδα αυτή συνδέεται με τις υπόλοιπες με ιδιαίτερα στενό (ομοιότητα 1) αλλά και πολύ σημαντικό δεσμό. Στην τέταρτη υποομάδα διακρίνουμε τρεις μεταβλητές (A8, A8Exp, A9) οι οποίες αντιστοιχούν σε ευθείες. Τα έργα αυτά συνδέονται μεταξύ τους με πολύ στενό δεσμό (ομοιότητα 0.999876). Όλες οι παραπάνω υποομάδες συνδέονται μεταξύ τους με πολύ στενό (ομοιότητα 0.999475) και ισχυρό δεσμό. Στις παραπάνω υποομάδες έρχεται να ενωθεί ακόμα μία μεταβλητή (B5c), όπως επίσης και μια πέμπτη υποομάδα (B4a, B4b, B4c). Και οι τέσσερις αυτές μεταβλητές αντιστοιχούν σε καμπύλες. Όλα τα έργα που αναφέρονται πιο πάνω ανήκουν στην 1η ομάδα και ενώνονται μεταξύ τους με πολύ στενό (ομοιότητα 0.954039) και σημαντικό δεσμό. Η 2η ομάδα αποτελείται από δύο μεταβλητές, μία εκ των οποίων αντιστοιχεί σε καμπύλη και μία σε ευθεία. Είναι και αυτή ανάμικτη ομάδα και τα δύο έργα ενώνονται μεταξύ τους με πολύ ισχυρό δεσμό (ομοιότητα 0.99775). Η 3η ομάδα είναι ομάδα καμπυλών και την αποτελούν άλλες δύο μεταβλητές (B5b, B7c) οι οποίες ενώνονται μεταξύ τους με πολύ ισχυρό δεσμό (ομοιότητα 0.985631). Τέλος, θα πρέπει να αναφέρουμε ότι η 2η ομάδα ενώνεται με την 1η με ισχυρό δεσμό (ομοιότητα 0.67914), ενώ η 3η ομάδα ενώνεται με τις δύο άλλες με πολύ ασθενή δεσμό (ομοιότητα 0.0686073).

IV. Διάγραμμα Ομοιότητας – Επίλυση Προβλήματος και Ερμηνεία – B΄ Λυκείου

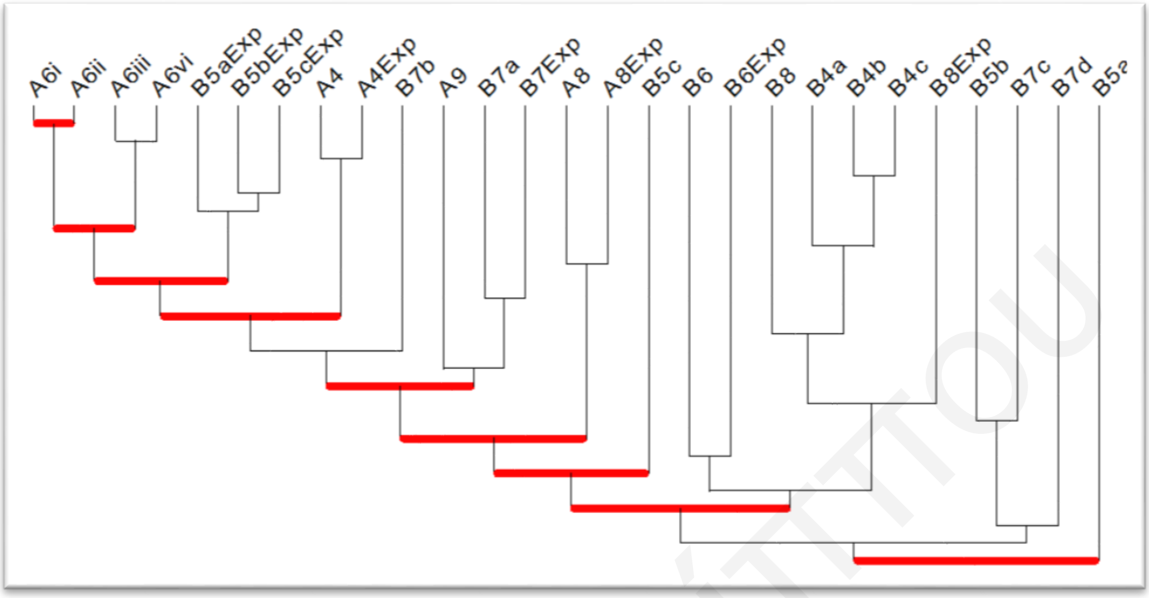
i. Ερμηνεία χωρίς τις μεταβλητές επεξήγησης



Διάγραμμα 65: Διάγραμμα ομοιότητας για την B΄ Λυκείου που αφορά τη λύση προβλήματος σε σχέση με την ερμηνεία

Τα έργα σε αυτό το διάγραμμα χωρίζονται σε δύο κύριες ομάδες οι οποίες δεν συνδέονται μεταξύ τους. Στην 1η ομάδα βλέπουμε να διαμορφώνονται δύο μικρότερες υποομάδες μεταξύ των έργων δημιουργώντας σημαντικούς δεσμούς. Στην πρώτη υποομάδα ανήκουν τα υποερωτήματα στην ερώτηση 6 του A δοκιμίου (A6i, A6ii, A6iii, A6vi) τα οποία αντιστοιχούν σε ευθείες, οι απαντήσεις στις ερωτήσεις 8 και 9 του δοκιμίου A (A8, A9), όπως επίσης και η απάντηση σε ένα από τα υποερωτήματα της ερώτησης 7 του B δοκιμίου (B7a), μεταβλητές που επίσης αντιστοιχούν σε ευθείες. Στην ίδια ομάδα παρατηρούμε όμως άλλες δύο μεταβλητές (A4, B5c) οι οποίες όμως αντιστοιχούν σε καμπύλες. Λαμβάνοντας υπόψη το πλήθος των έργων που αντιστοιχούν σε ευθείες, θα μπορούσαμε ίσως να πούμε ότι η ομάδα αυτή αποτελεί ομάδα ευθειών. Όλες οι μεταβλητές της πρώτης υποομάδας συνδέονται μεταξύ τους δημιουργώντας πολύ στενούς αλλά και ισχυρούς δεσμούς. Η δεύτερη υποομάδα είναι αναμφίβολα ομάδα των καμπύλων, αφού όλες οι μεταβλητές που εμπερικλείει είναι καμπύλες. Πράγματι τα έργα B6, B8, B4a, B4b και B4c αντιστοιχούν όλα σε καμπύλες. Οι δύο αυτές υποομάδες συνδέονται μεταξύ τους με πολύ στενό (ομοιότητα 0.849867) και ισχυρό δεσμό, δίνοντας έτσι έμφαση στους δεσμούς αυτούς. Η 2η ομάδα χωρίζεται επίσης σε δύο υποομάδες. Είναι ανάμικτη αφού περιλαμβάνει έργα ευθειών αλλά και καμπυλών. Στην πρώτη υποομάδα βλέπουμε τις μεταβλητές B5a και B7b, όπου η μια αντιπροσωπεύει καμπύλη και η άλλη ευθεία αντίστοιχα. Στη δεύτερη υποομάδα συναντούμε τα έργα B5b και B7c τα οποία αντιστοιχούν σε καμπύλες και το B7d το οποίο αντιστοιχεί σε ευθεία. Ο δεσμός που συνδέει τα έργα αυτής της ομάδας δεν είναι ιδιαίτερα ισχυρός (ομοιότητα 0.166694). Γενικότερα στο διάγραμμα αυτό δεν παρατηρούμε ξεκάθαρους στεγανοποιημένους δεσμούς, πράγμα που μας δείχνει ότι οι μαθητές που λύνουν ορθά προβλήματα ευθειών, μπορούν αντίστοιχα να λύσουν προβλήματα που αφορούν ευθείες. Θα ήταν καλό να επισημάνουμε ότι καθώς προχωρούμε από τη μία τάξη σε μια μεγαλύτερη διαπιστώνουμε ότι οι στεγανοποίηση μεταξύ ευθείας και καμπύλης περιορίζεται.

ii. Όλες οι μεταβλητές (με επεξηγήσεις)

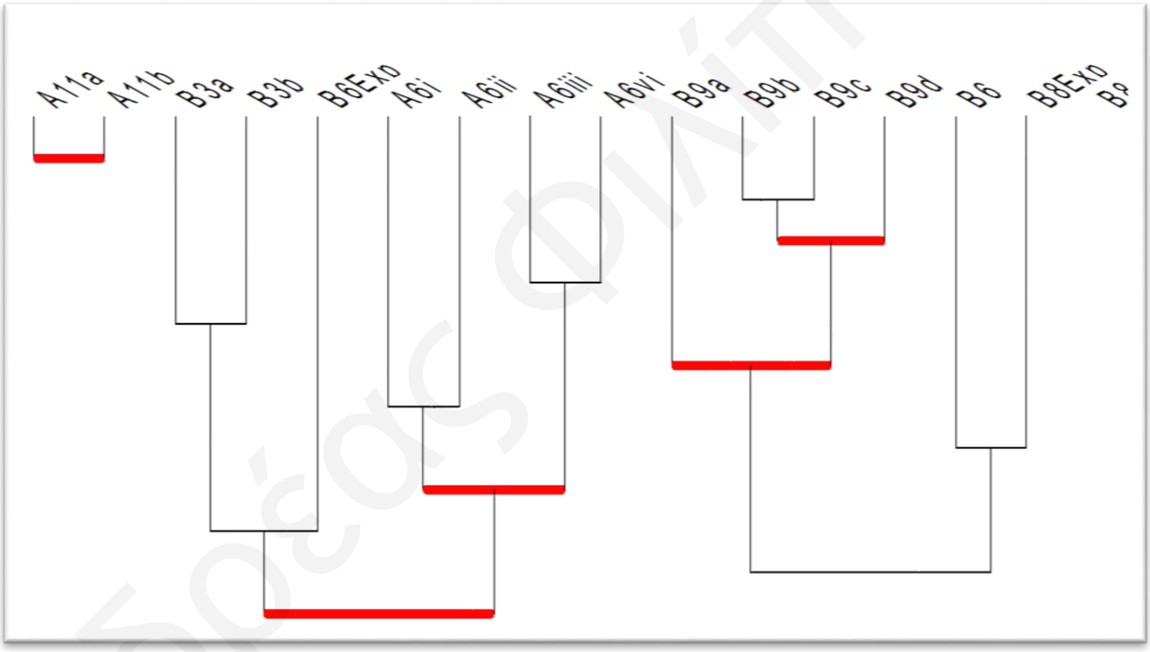


Διάγραμμα 66: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ Λυκείου που αφορά όλες τις μεταβλητές με επεξηγήσεις για τη λύση προβλήματος σε σχέση με την ερμηνεία

Τα έργα σε αυτό το διάγραμμα δεν χωρίζονται μεταξύ τους. Ο δεσμός που τις συνδέει δεν είναι πολύ ισχυρός (ομοιότητα 0.13803) αλλά φαίνεται πως είναι σημαντικός. Παρόλα αυτά μπορούμε να διακρίνουμε πολλές υποομάδες. Στην υποομάδα βλέπουμε να διαμορφώνονται πολλοί μικρότεροι δεσμοί μεταξύ των έργων δημιουργώντας σημαντικές υποομάδες. Η ανάμιξη των ευθειών και των καμπύλων είναι διακριτή σε μεγάλο βαθμό. Στην πρώτη υποομάδα ανήκουν τα υποερωτήματα της ερώτησης 6 του δοκιμίου Α (A6i, A6ii, A6iii, A6vi) τα οποία ανήκουν σε ευθείες. Στην ίδια υποομάδα βλέπουμε τις επεξηγήσεις σε τρία από τα υποερωτήματα στην ερώτηση 5 του Β δοκιμίου (B5aExp, B5bExp, B5cExp), έργα τα οποία αντιστοιχούν σε καμπύλες. Τέλος, στην ίδια ομάδα ανήκουν άλλες δύο μεταβλητές που αφορούν καμπύλες. Πράγματι, οι μεταβλητές A4 και A4Exp ανήκουν σε καμπύλες. Όλες οι παραπάνω μεταβλητές συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ισχυρό δεσμό (ομοιότητα 0.999713). Η δεύτερη υποομάδα είναι ομάδα στην οποία παρατηρούμε μόνο καμπύλες. Πράγματι οι μεταβλητές B6, B6Exp, B8, B4a, B4b, B4c, B8Exp, B5b, B7c, B5a ανήκουν σε προβλήματα που εμπίπτουν σε ερωτήματα καμπυλών, με εξαίρεση τη μεταβλητή B7d η οποία αντιστοιχεί σε ευθεία. Όλα τα έργα που αναφέρονται πιο πάνω ανήκουν στην $1^{η}$ ομάδα και ενώνονται μεταξύ τους με πολύ στενό (ομοιότητα 0.954039) και σημαντικό δεσμό.

Είναι σημαντικό να μελετηθεί η σχέση μεταξύ επίλυσης προβλήματος και προσέγγισης των διαγραμμάτων ομοιότητας. Πράγματι, σε ορισμένες περιπτώσεις δεν υπάρχει διακριτή διαφορά μεταξύ ενός έργου επίλυσης προβλήματος και προσέγγισης. Έτσι, αναμένεται να υπάρχει μία ανάμιξη έργων επίλυσης προβλήματος και προσέγγισης.

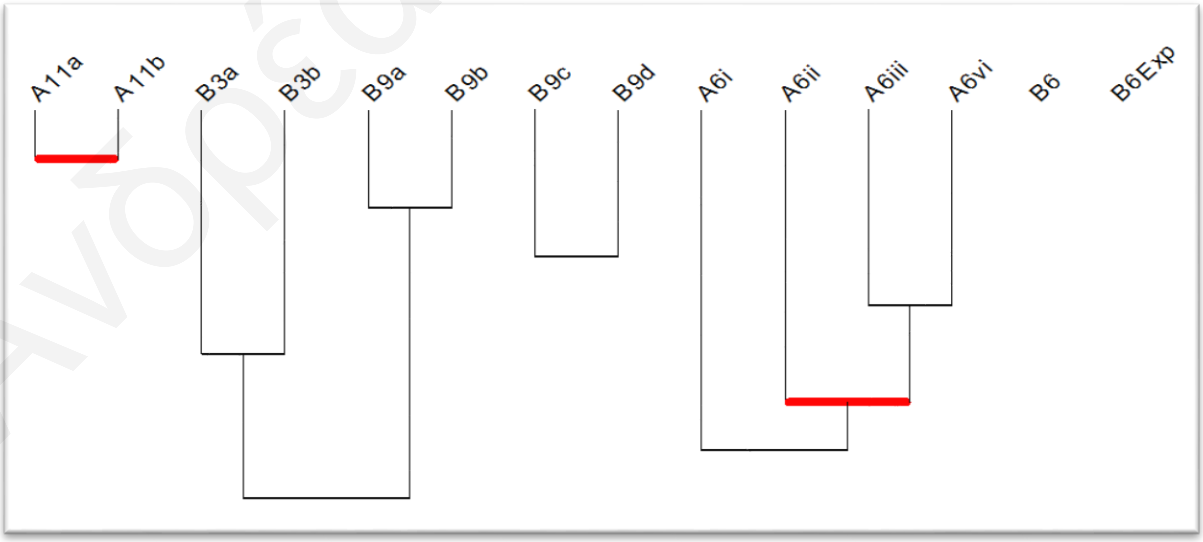
i. Διάγραμμα Ομοιότητας - Μόνο Ορθές Απαντήσεις (Συνολικό Δείγμα)



Διάγραμμα 67: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά τη λύση προβλήματος σε σχέση με την προσέγγιση

Οι μεταβλητές χωρίζονται σε δύο μεγάλες ομάδες και σε μία μικρή ομάδα η οποία δεν συνδέεται με τις υπόλοιπες. Η 1η ομάδα αποτελείται από μόνο δύο έργα, τα οποία συνδέονται μεταξύ τους με ψηλό δείκτη ομοιότητας (ομοιότητα 0.995611). Η σύνδεση αυτή είναι φυσιολογική αφού πρόκειται για δύο παραβολές. Η ομάδα αυτή λοιπόν θα μπορούσε να ονομαστεί ομάδα των παραβολών. Η 2η ομάδα αποτελείται από δύο μικρότερες υποομάδες. Η πρώτη υποομάδα αποτελείται από τις μεταβλητές B3a B3b.Ο δεσμός που τις συνδέει είναι πολύ ισχυρός (ομοιότητα 0.871731) πράγμα φυσιολογικό αφού αποτελούν τις γραφικές παραστάσεις δύο ευθειών. Με αυτές τις δύο μεταβλητές συνδέεται και η επεξήγηση (B6Exp) της ερώτησης B6 όμως ο δείκτης ομοιότητας είναι μικρότερος (ομοιότητα 0.309326). Η δεύτερη υποομάδα αποτελείται από τις τέσσερις μεταβλητές της ερώτησης 6 του δοκιμίου A. Η σύνδεση αυτή είναι απολύτως φυσιολογική αφού έχουμε πάλι δύο συναρτήσεις πρώτου βαθμού, δηλαδή ευθείες. Μπορούμε να πούμε λοιπόν ότι η ομάδα αυτή είναι ομάδα ευθειών. Τέλος, η ομάδα 3 αποτελείται από όλα τα υποερωτήματα της ερώτησης B9, που όπως φαίνεται στο σχήμα που δίνεται στους μαθητές αντιστοιχούν όλες οι καμπύλες . Από την άλλη μεριά, οι ερωτήσεις B6 και B8Exp αντιστοιχούν σε καμπύλες. Οι τρεις ομάδες δεν συνδέονται μεταξύ τους παρόλο που οι ασκήσεις της ομάδας 1 είναι ίδιας φύσης με τις ασκήσεις της πρώτης υποομάδας της $3^{ης}$ ομάδας (B9). Φαίνεται ότι η άσκηση A11 είναι πιο συγκεκριμένη για τους μαθητές εφόσον ζητούν μια γραφική παράσταση και δεν συνδέονται με την $3^{η}$ ομάδα. Το γεγονός ότι η $2^{η}$ ομάδα (ομάδα των ευθειών) δεν συνδέεται με την $1^{η}$ και την $3^{η}$ ομάδα των καμπυλών είναι φυσιολογικό και ενισχυτικό της αξιοπιστίας της έρευνας.

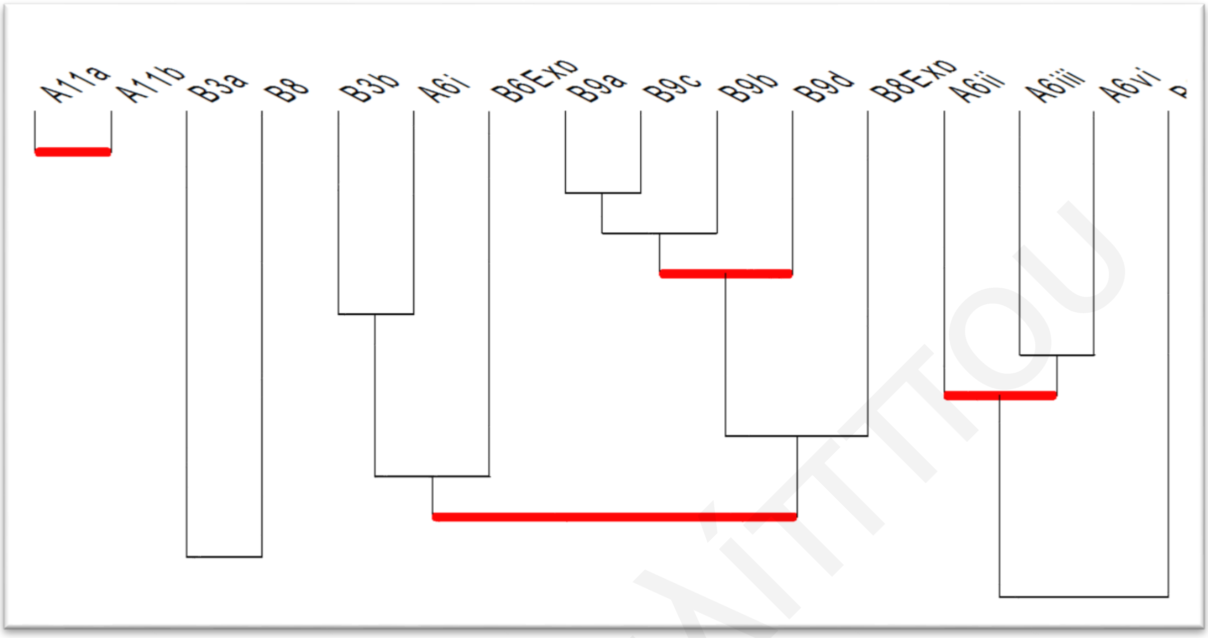
ii. Διάγραμμα Ομοιότητας - Μόνο Ορθές Απαντήσεις (Γ΄ Γυμνασίου)



Διάγραμμα 68: Διάγραμμα ομοιότητας για την Γ΄ Γυμνασίου που αφορά μόνο τις ορθές απαντήσεις για τη λύση προβλήματος σε σχέση με την προσέγγιση

Οι μεταβλητές χωρίζονται σε τέσσερις ομάδες οι οποίες δε συνδέονται μεταξύ τους. Παρουσιάζονται όμως και δύο μεταβλητές οι οποίες δε συνδέονται με κάποιο άλλο από τα έργα. Η $1^{η}$ ομάδα αποτελείται από δύο έργα (A11a, A11b), τα οποία συνδέονται μεταξύ τους με τον ψηλότερο δείκτη ομοιότητας (ομοιότητα 1). Η σύνδεση αυτή είναι απόλυτα φυσιολογική αφού πρόκειται για δύο παραβολές που ανήκουν στην ερώτηση 11 του Α Δοκίμιο. Ονομάζουμε λοιπόν την ομάδα αυτή ομάδα παραβολών. Η $2^{η}$ ομάδα αποτελείται από δύο μικρότερες υποομάδες. Η πρώτη υποομάδα απαρτίζεται από τις μεταβλητές B3a και B3b. Οι δύο αυτές μεταβλητές αποτελούν γραφικές αναπαραστάσεις δύο ευθειών, οπότε και η σύνδεσή τους είναι φυσιολογική (ομοιότητα 0.994243). Τη δεύτερη υποομάδα αποτελούν οι μεταβλητές B9a και B9b, οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με πολύ στενό δεσμό (ομοιότητα 1). Οι δύο αυτές μεταβλητές αποτελούν καμπύλες και συνδέονται με τις ευθείες B3a και B3b με πολύ ασθενή δεσμό (ομοιότητα 0.0554721).Η $3^{η}$ ομάδα αποτελείται από δύο μεταβλητές (B9c, B9d) οι οποίες είναι καμπύλες και συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ισχυρό δεσμό (ομοιότητα 1). Την $4^{η}$ ομάδα αποτελούν τα τέσσερα υποερωτήματα της ερώτησης 6 του Α δοκιμίου (A6i, A6ii, A6iii, A6vi). Δύο από τις μεταβλητές (A6iii, A6vi) συνδέονται μεταξύ τους με δεσμό πολύ ισχυρό (ομοιότητα 1). Η μεταβλητή A6ii συνδέεται με αυτές τις δύο μεταβλητές με αδύναμο δεσμό ομοιότητας. Παρόλα αυτά ο δεσμός αυτός φαίνεται πως είναι σημαντικός (κόκκινο χρώμα στη σύνδεση). Η τέταρτη μεταβλητή συνδέεται με τις τρεις μεταβλητές με πολύ ασθενή δεσμό (ομοιότητα 0.117047). Η ομάδα αυτή είναι ομάδα ευθειών, αφού και οι τέσσερις μεταβλητές είναι ευθείες. Οι μεταβλητές B6 και B6Exp δε συνδέονται μεταξύ τους με καμία άλλη μεταβλητή.

iii. Διάγραμμα Ομοιότητας - Μόνο Ορθές Απαντήσεις (Α΄ Λυκείου)

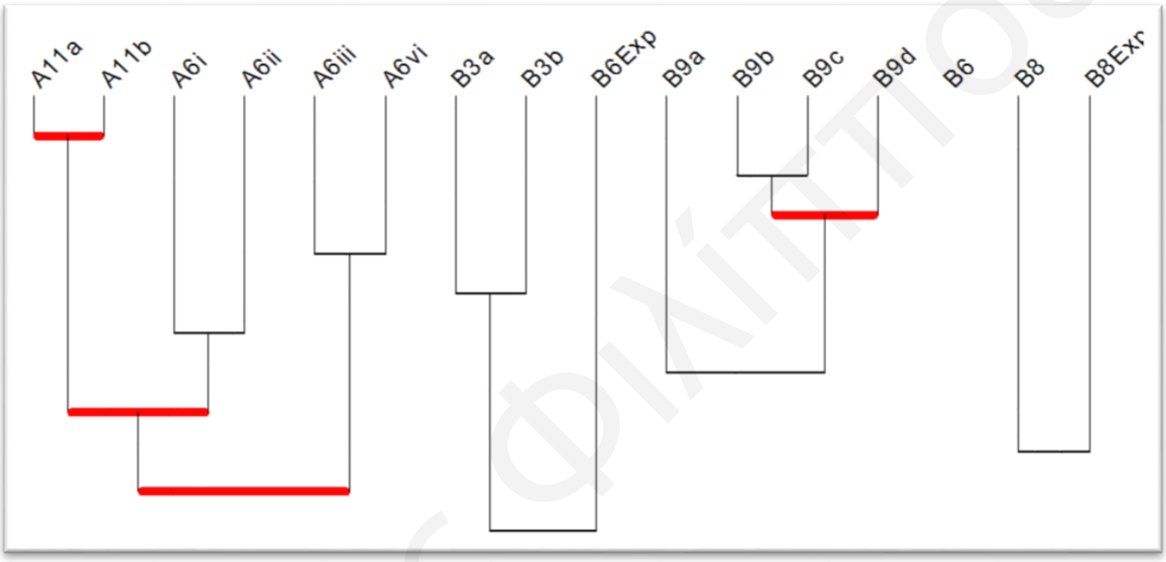


Διάγραμμα 69: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά μόνο τις ορθές απαντήσεις για τη λύση προβλήματος σε σχέση με την προσέγγιση

Τα έργα χωρίζονται σε τέσσερις μεγάλες υποομάδες οι οποίες δε συνδέονται μεταξύ τους. Η $1^{η}$ ομάδα αποτελείται από δύο μεταβλητές της ερώτησης 11 του Α δοκιμίου. Ο δεσμός ομοιότητας των μεταβλητών είναι πολύ ισχυρός (ομοιότητα 1), αφού και οι δύο είναι παραβολές. Η $2^{η}$ ομάδα αποτελείται από δύο μεταβλητές, μία ευθεία (B3a) και μία καμπύλη (B8). Παρόλο που έχουμε μια ευθεία και μια καμπύλη εντούτοις η σύνδεση αυτή εν μέρη δικαιολογείται αφού πρόκειται για ερωτήματα ίδιας μορφής. Ο δεσμός ομοιότητας δεν είναι ιδιαίτερα ισχυρός (ομοιότητα 0.330206). Η $3^{η}$ ομάδα αποτελείται από οκτώ μεταβλητές. Οι μεταβλητές αυτές χωρίζονται σε δύο υποομάδες. Την πρώτη υποομάδα αποτελούν τρεις μεταβλητές (B3b, A6i, B6Exp) οι οποίες είναι ευθείες. Τη δεύτερη υποομάδα αποτελούν πέντε μεταβλητές. Τέσσερις από αυτές είναι τα υποερωτήματα της ερώτησης 9 του Β δοκιμίου (B9a, B9b, B9c, B9d). Ο δεσμός ομοιότητας των τεσσάρων αυτών μεταβλητών είναι πολύ ισχυρός και συνάμα σημαντικός (ομοιότητα 1). Η πέμπτη μεταβλητή είναι η επεξήγηση της ερώτησης 8 του Β δοκιμίου. Συνδέεται με τις τέσσερις με τις άλλες τέσσερις μεταβλητές με πολύ στενό δεσμό (ομοιότητα 0.746731). Οι δύο αυτές υποομάδες συνδέονται μεταξύ τους με δεσμό μέτριας ισχύς (ομοιότητα 0.374831), αλλά σημαντικό.

Η 4^{η} ομάδα είναι ομάδα ευθειών. Αποτελείται από πέντε έργα, τρία από τα οποία είναι τα υποερωτήματα της ερώτησης 6 του δοκιμίου Α (Α6ii, Α6iii, Α6vi) και από την ερώτηση 6 του δοκιμίου Β. Ο δεσμός αυτός συνδέει τα τρία υποερωτήματα της ερώτησης Α6 είναι ισχυρός και σημαντικός (ομοιότητα 0.815473). Ο δεσμός που συνδέει τις τρεις αυτές μεταβλητές με τη μεταβλητή Β6 είναι αρκετά αδύναμος (ομοιότητα 0.0936004).

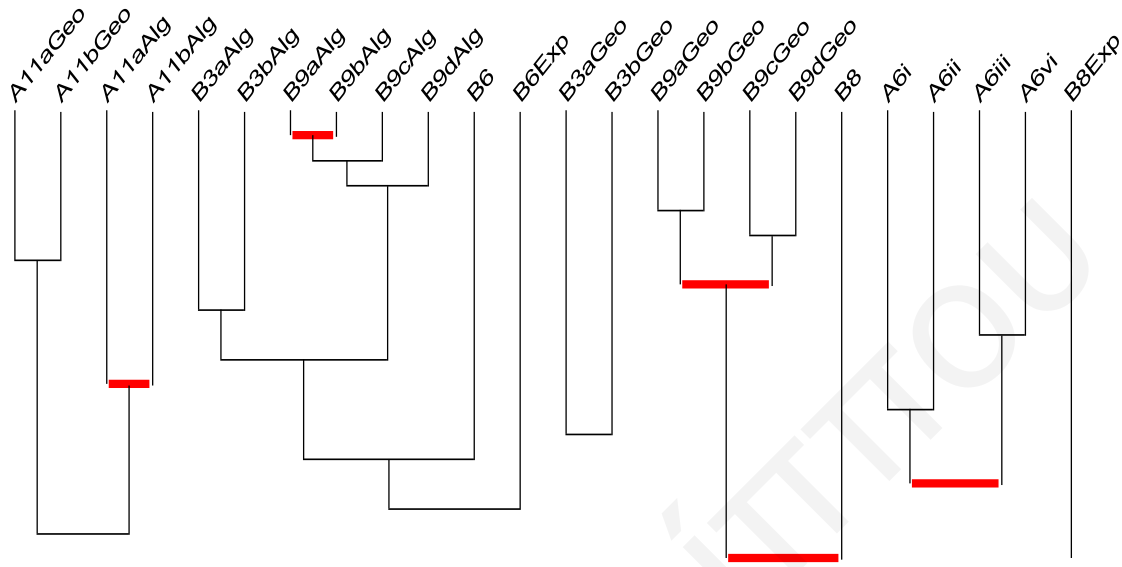
iv. Διάγραμμα Ομοιότητας - Μόνο Ορθές Απαντήσεις (Β΄ Λυκείου)



Διάγραμμα 70: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ Λυκείου που αφορά μόνο τις ορθές απαντήσεις για τη λύση προβλήματος σε σχέση με την προσέγγιση

Διακρίνονται τέσσερις ομάδες σε αυτό το διάγραμμα ομοιότητας. Η 1^{η} ομάδα περιλαμβάνει τόσο παραβολές όσο και επίλυση προβλήματος που αφορούν ευθείες. Είναι στη Β΄ Λυκείου που αρχίζει και σπάει η στεγανοποίηση καμπυλών και ευθειών. Η 2^{η} ομάδα αποτελείται από δύο ευθείες (τη μεταβλητή Β6 δεν την υπολογίζουμε αφού η σύνδεση είναι πολύ μικρή). Η 3^{η} ομάδα αποτελείται από όλα τα υποερωτήματα της Β9 που από το σχήμα φαίνεται να πρόκειται για καμπύλες. Τέλος, η 4^{η} ομάδα αποτελείται από το πρόβλημα Β8 και την επεξήγηση του. Το πρόβλημα αυτό λύνεται από τους μαθητές αυτού του επιπέδου μόνο εφόσον εφαρμόσουν γεωμετρική προσέγγιση. Παρόλα αυτά το πρόβλημα αυτό δε συνδέεται με καμία από τις προηγούμενες ομάδες.

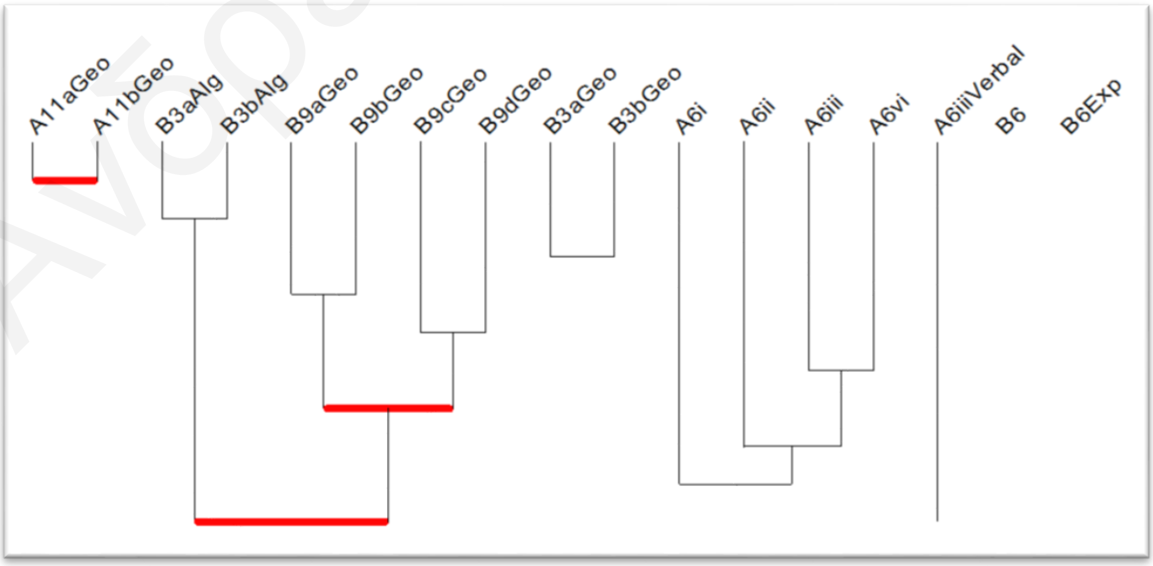
v. Διάγραμμα Ομοιότητας - Μόνο Ορθές Απαντήσεις Επίλυσης προβλήματος και Προσεγγίσεις (Συνολικό Δείγμα)



Διάγραμμα 71: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά μόνο τις ορθές

Οι μεταβλητές σε αυτό το διάγραμμα χωρίζονται σε πέντε μεγάλες ομάδες, οι οποίες δε συνδέονται μεταξύ τους. Η $1^{η}$ ομάδα αποτελείται από τέσσερις μεταβλητές και χωρίζεται σε δύο υποομάδες. Την πρώτη υποομάδα αποτελούν δύο γεωμετρικές μεταβλητές της ερώτησης 11 του δοκιμίου Α (A11aGeo, A11bGeo), οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με πολύ στενό δεσμό (ομοιότητα 0.979099). Η δεύτερη υποομάδα αποτελείται από τις μεταβλητές A11aAlg και A11bAlg. Οι μεταβλητές αυτές είναι αλγοριθμικές και συνδέονται μεταξύ τους με στενό δεσμό (ομοιότητα 0.831846). Ο διαχωρισμός που πραγματοποιείται μεταξύ αλγοριθμικών και γεωμετρικών μεταβλητών είναι αναμενόμενος. Παρόλο που οι τέσσερις μεταβλητές συνδέονται μεταξύ τους, εντούτοις η σύνδεση αυτή δεν είναι ιδιαίτερα ισχυρή (ομοιότητα 0.119564). Η $2^{η}$ ομάδα αποτελείται από οκτώ μεταβλητές και χωρίζεται σε τρεις υποομάδες. Η πρώτη υποομάδα είναι ομάδα αλγοριθμική και αποτελείται από δύο μεταβλητές της ερώτησης 3 του Β δοκιμίου (B3aAlg, B3bAlg). Η δεύτερη υποομάδα είναι επίσης αλγοριθμική και αποτελείται από τα υποερωτήματα της ερώτησης 9 του Β δοκιμίου (B9aAlg, B9bAlg, B9cAlg, B9dAlg), τα οποία συνδέονται μεταξύ τους με τον απόλυτο δεσμό ομοιότητας (ομοιότητα 1). Όπως είναι αναμενόμενο, οι δύο αυτές υποομάδες συνδέονται μεταξύ τους με ισχυρό δεσμό ομοιότητας (ομοιότητα 0.879017), αφού όλες οι μεταβλητές είναι αλγοριθμικές. Η τρίτη υποομάδα είναι η απάντηση στην ερώτηση 6 του Β δοκιμίου (B6), όπως επίσης και η επεξήγηση στην ίδια ερώτηση (B6Exp). Ο δεσμός βέβαια που συνδέει αυτές τις δύο μεταβλητές με τις υπόλοιπες μεταβλητές της ομάδας αυτής είναι σχετικά ισχυρός (ομοιότητα 0.591366). Η 3η ομάδα είναι και η μικρότερη αφού αποτελείται μόνο από δύο μεταβλητές. Είναι ομάδα γεωμετρικών μεταβλητών και αποτελείται από τα υποερωτήματα της ερώτησης 3 του Β δοκιμίου (B3aGeo, B3bGeo), τα οποία συνδέονται μεταξύ τους με δεσμό ομοιότητας 0.593113. Η 4η ομάδα αποτελείται από πέντε έργα, τέσσερα εκ των οποίων είναι γεωμετρικές μεταβλητές (B9aGeo, B9bGeo, B9cGeo, B9dGeo) που συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ισχυρό δεσμό (ομοιότητα 0.972634). Το κόκκινο χρώμα στη σύνδεση αυτών των μεταβλητών, δηλώνει και τη σημαντικότητα του δεσμού αυτού. Η πέμπτη μεταβλητή που ολοκληρώνει την αυτή την ομάδα είναι η απάντηση στην ερώτηση 8 του Β δοκιμίου. Παρόλα αυτά η σύνδεση της μεταβλητής αυτής με τις υπόλοιπες μεταβλητές της ομάδας είναι ελάχιστη (ομοιότητα 0.0948147). Η 5η ομάδα αποτελείται από τις τέσσερις μεταβλητές της ερώτησης 6 του Α δοκιμίου (A6i, A6ii, A6iii, A6vi). Η σύνδεση μεταξύ των μεταβλητών αυτών είναι απολύτως φυσιολογική αφού πρόκειται για συναρτήσεις πρώτου βαθμού (ευθείες). Τέλος, παρουσιάζεται άλλη μια μεταβλητή η οποία δεν ανήκει σε καμία ομάδα. Η μεταβλητή αυτή είναι η επεξήγηση στην ερώτηση 8 του Β δοκιμίου.

vi. Διάγραμμα Ομοιότητας - Μόνο Ορθές Απαντήσεις Επίλυσης προβλήματος και Προσεγγίσεις (Γ΄ Γυμνασίου)

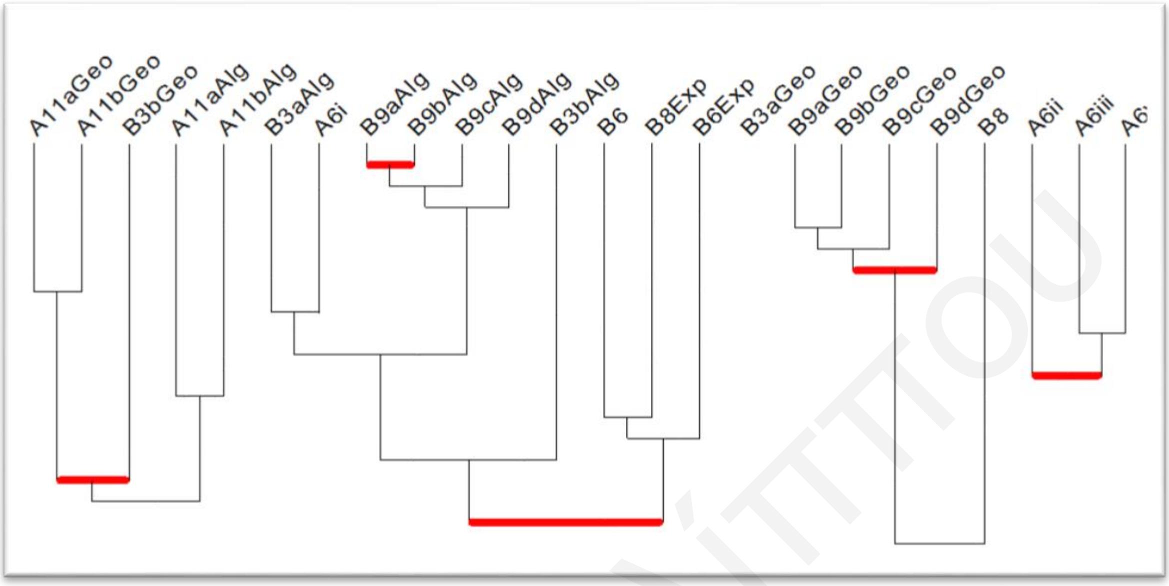


Διάγραμμα 72: Διάγραμμα ομοιότητας για την Γ΄ Γυμνασίου που αφορά μόνο τις ορθές απαντήσεις για τη λύση προβλήματος σε σχέση με την προσέγγιση

Τα έργα χωρίζονται σε τέσσερις ομάδες οι οποίες δε συνδέονται μεταξύ τους. Η $1^{η}$ ομάδα αποτελείται από δύο γεωμετρικές μεταβλητές της ερώτησης 11 του Α δοκιμίου (A11aGeo, A11bGeo), οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με πολύ στενό δεσμό (ομοιότητα 1). Η σύνδεση αυτή είναι απόλυτα φυσιολογική και αναμενόμενη, αφού πρόκειται για δύο έργα της ίδιας ερώτησης που παράλληλα είναι και γεωμετρικά. Η $2^{η}$ ομάδα αποτελείται από έξι μεταβλητές και χωρίζεται σε δύο υποομάδες. Η πρώτη υποομάδα είναι αλγεβρική. Αποτελείται από δύο έργα της ερώτησης 3 του Β δοκιμίου (B3aAlg, B3bAlg) τα οποία συνδέονται μεταξύ τους με πολύ στενό δεσμό (ομοιότητα 1). Η δεύτερη υποομάδα αποτελείται από τέσσερις μεταβλητές της ερώτησης 9 του Β δοκιμίου (B9aGeo, B9bGeo, B9cGeo, B9dGeo). Ο δεσμός μεταξύ αυτών των μεταβλητών είναι ισχυρός (ομοιότητα 0.704538) αλλά και πολύ σημαντικός αφού πρόκειται για τέσσερις γεωμετρικές μεταβλητές. Ο δεσμός που συνδέει τις δύο υποομάδες είναι σχετικά ασθενής (ομοιότητα 0.113555). Η $3^{η}$ ομάδα είναι γεωμετρική. Αποτελείται από δύο μεταβλητές της ερώτησης 3 του Β δοκιμίου (B3aGeo, B3bGeo) και ο δεσμός που τις συνδέει είναι πολύ σημαντικός (ομοιότητα 1). Η $4^{η}$ ομάδα είναι ομάδα ευθειών. Αποτελείται από τέσσερα έργα τα οποία ανήκουν στην ερώτηση 6 του Α δοκιμίου (A6i, A6ii, A6iii, A6vi). Η σύνδεση μεταξύ αυτών των μεταβλητών είναι ασθενής (ομοιότητα 0.117047), παρόλο που θα αναμέναμε να ήταν ισχυρότερη, λόγω της ομοιότητας των έργων αυτών.

Τέλος, βλέπουμε τρεις μεταβλητές, όλες εκ των οποίων δεν ανήκουν σε καμία ομάδα και δε συνδέονται με κανένα από τα έργα.

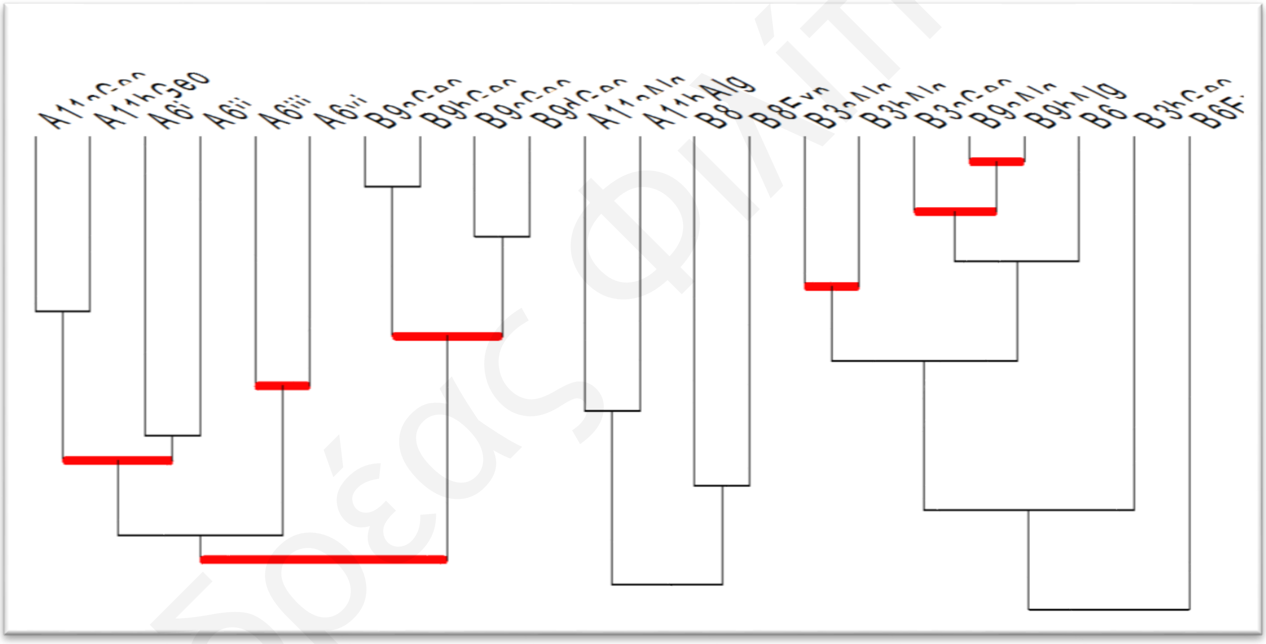
vii. Διάγραμμα Ομοιότητας - Μόνο Ορθές Απαντήσεις Επίλυσης προβλήματος και Προσεγγίσεις (Α΄ Λυκείου)



Διάγραμμα 73: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά μόνο τις ορθές απαντήσεις για τη λύση προβλήματος σε σχέση με την προσέγγιση

Τα έργα σε αυτό το διάγραμμα χωρίζονται σε τέσσερις ομάδες οι οποίες δεν ενώνονται μεταξύ τους. Η 1η ομάδα αποτελείται από πέντε μεταβλητές και χωρίζονται σε δύο υποομάδες. Η πρώτη υποομάδα αποτελείται από τρία γεωμετρικά έργα (A11aGeo, A11bGeo, B3bGeo). Η δεύτερη υποομάδα αποτελείται από δύο αλγεβρικά έργα (A11aAlg, A11bAlg). Η 2η ομάδα, που είναι και η μεγαλύτερη, αποτελείται από δέκα μεταβλητές και χωρίζεται σε δύο υποομάδες. Η πρώτη υποομάδα αποτελείται από εφτά μεταβλητές, έξι εκ των οποίων είναι αλγεβρικές. Θα μπορούσαμε λοιπόν να πούμε ότι η υποομάδα αυτή είναι αλγεβρική. Η δεύτερη υποομάδα αποτελείται από την ορθή απάντηση και την επεξήγηση στην ερώτηση 6 του Β δοκιμίου (B6, B6Exp) όπως επίσης και από την επεξήγηση στην ερώτηση 8 του Β δοκιμίου (B8Exp). Ο δεσμός που συνδέει τις δύο υποομάδες είναι σχετικά ασθενής (ομοιότητα 0.104117). Παρόλα αυτά το κόκκινο χρώμα στο δεσμό υποδηλώνει τη σημαντικότητα του δεσμού αυτού. Η 3η ομάδα αποτελείται από πέντε μεταβλητές και χωρίζεται σε δύο υποομάδες. Η πρώτη υποομάδα αποτελείται από τέσσερις μεταβλητές που ανήκουν στην ερώτηση 9 του Β δοκιμίου (B9aGeo, B9bGeo, B9cGeo,B9dGeo). Ο δεσμός σύνδεσης των μεταβλητών αυτών είναι πολύ ισχυρός (ομοιότητα 1), πράγμα αναμενόμενο αφού πρόκειται για γεωμετρικές μεταβλητές. Η δεύτερη υποομάδα αποτελείται από μία μεταβλητή, την απάντηση στην ερώτηση 8 του Β δοκιμίου (B8). Ο δεσμός σύνδεσης των δύο υποομάδων είναι πολύ ασθενής (ομοιότητα 0.0119039). Η 4η ομάδα αποτελείται από τρεις μεταβλητές. Είναι ομάδα ευθειών και περιλαμβάνει τα υποερωτήματα της ερώτησης 6 του Α δοκιμίου (A6ii, A6iii, A6vi). Ο δεσμός που συνδέει τις μεταβλητές είναι ισχυρός και συνάμα σημαντικός (ομοιότητα 0.815473). Τέλος η μεταβλητή B3aGeo δε συνδέεται με κανένα από τα έργα του διαγράμματος.

viii. Διάγραμμα Ομοιότητας - Μόνο Ορθές Απαντήσεις Επίλυσης προβλήματος και Προσεγγίσεις (Β΄ Λυκείου)



Διάγραμμα 74: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ Λυκείου που αφορά μόνο τις ορθές απαντήσεις για τη λύση προβλήματος σε σχέση με την προσέγγιση

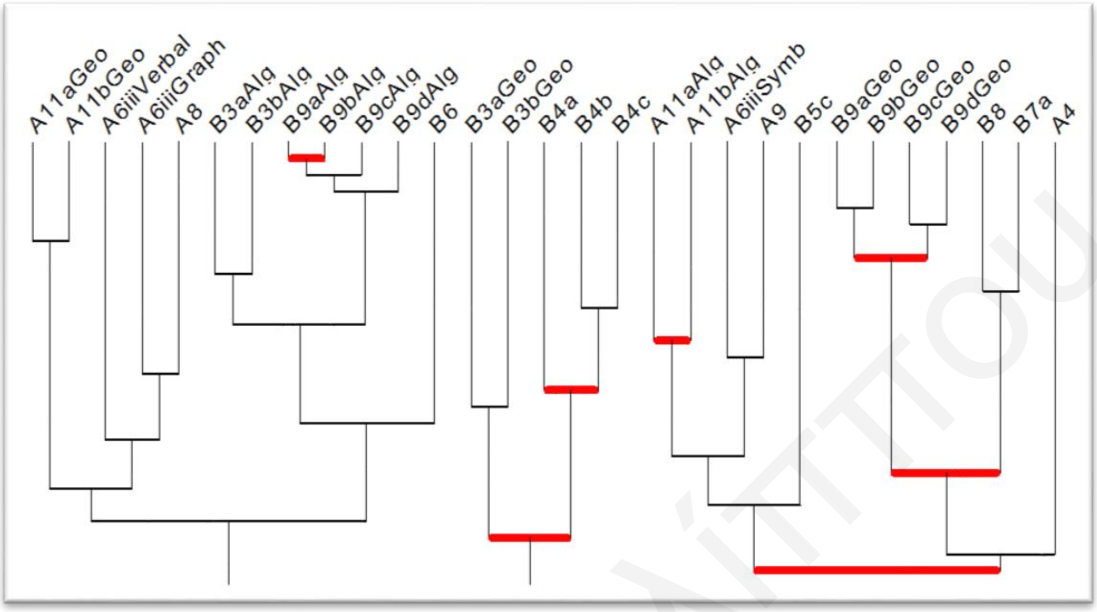
Τα έργα χωρίζονται σε τρεις κύριες ομάδες οι οποίες δε συνδέονται μεταξύ τους. Η 1η ομάδα αποτελείται από δέκα μεταβλητές και χωρίζεται σε δύο υποομάδες. Η πρώτη υποομάδα αποτελείται από έξι μεταβλητές, οι δύο εκ των οποίων είναι γεωμετρικές μεταβλητές της ερώτησης 11 του Α δοκιμίου (A11aGeo, A11bGeo). Οι υπόλοιπες τέσσερις μεταβλητές είναι τα υποερωτήματα της ερώτησης 6 του Α δοκιμίου (A6i, A6ii, A6iii, A6vi) και αποτελούν ευθείες. Η δεύτερη υποομάδα αποτελείται από τις τέσσερις μεταβλητές της ερώτησης 9 του Β δοκιμίου (B9aGeo, B9bGeo, B9cGeo, B9dGeo). Ο δεσμός μεταξύ των τεσσάρων αυτών μεταβλητών είναι πολύ ισχυρός (ομοιότητα 0.979343), πράγμα αναμενόμενο αφού πρόκειται για γεωμετρικά έργα. Ο δεσμός αυτός συνδέει τις δύο υποομάδες είναι πολύ ασθενής (ομοιότητα 0.0455607), παρόλο που φαίνεται να είναι σημαντικός. Η $2^{η}$ ομάδα αποτελείται από τέσσερις μεταβλητές και χωρίζεται σε δύο μικρές υποομάδες. Η πρώτη υποομάδα αποτελείται από δύο μεταβλητές οι οποίες είναι αλγεβρικές και ανήκουν στην ερώτηση 11 του Α δοκιμίου (A11aAlg, A11bAlg). Η δεύτερη υποομάδα αποτελείται από την απάντηση και την επεξήγηση της ερώτησης 8 του Β δοκιμίου (B8, B8Exp). Ο δεσμός που συνδέει τις δύο υποομάδες είναι πολύ ασθενής (ομοιότητα 0.0393974), πράγμα αναμενόμενο αφού πρόκειται για μία αλγεβρική υποομάδα και μία υποομάδα καμπυλών. Η $3^{η}$ ομάδα αποτελείται από οκτώ μεταβλητές. Σε αυτή την ομάδα παρατηρείται μια σχετική συνέπεια στον τρόπο με τον οποίο απαντούν οι μαθητές, αφού βλέπουμε γεωμετρικά έργα να συνδέονται με αρκετά αλγεβρικά, όπως επίσης και μεταβλητές που αντιστοιχούν σε καμπύλες. Πιο συγκεκριμένα βλέπουμε τις γεωμετρικές μεταβλητές B3aGeo και B3bGeo να συνδέονται με τις αλγεβρικές μεταβλητές B3aAlg, B3bAlg, B9aAlg και A9bAlg, όπως επίσης και με την καμπύλη στην ερώτηση 6 του Β δοκιμίου (B6, B6Exp).

Ερμηνεία – Προσέγγιση – Επίλυση Προβλήματος

Είναι σημαντικό να μελετηθεί η σχέση μεταξύ ερμηνείας, επίλυσης προβλήματος και προσέγγισης των διαγραμμάτων ομοιότητας. Πράγματι, σε ορισμένες περιπτώσεις δεν υπάρχει διακριτή διαφορά μεταξύ ενός έργου επίλυσης προβλήματος, προσέγγισης και ερμηνείας. Έτσι, αναμένεται να υπάρχει μία ανάμιξη έργων ερμηνείας, επίλυσης προβλήματος και προσέγγισης.

I. Διάγραμμα Ομοιότητας (Συνολικό Δείγμα)

Τα έργα στο παρακάτω διάγραμμα χωρίζονται σε τέσσερις ομάδες οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους, με εξαίρεση την τελευταία ομάδα η οποία δε συνδέεται με τις υπόλοιπες. Η 1η ομάδα χωρίζεται σε δύο υποομάδες. Την πρώτη υποομάδα αποτελούν οι γεωμετρικές μεταβλητές στα δύο υποερωτήματα της ερώτησης 11 του δοκιμίου Α οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ισχυρό δεσμό (ομοιότητα 0.979099).

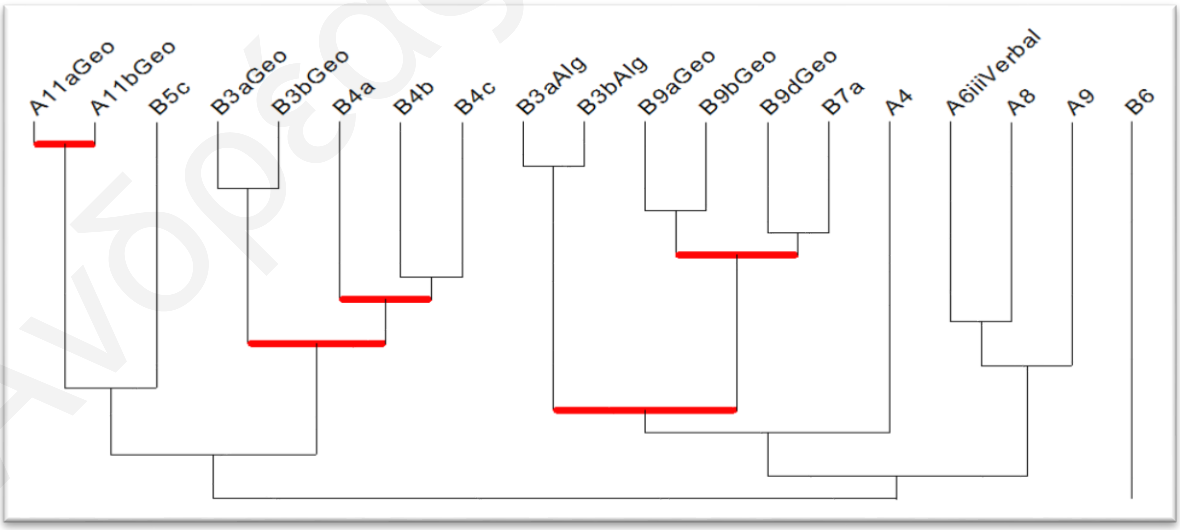


Διάγραμμα 75: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά τη λύση προβλήματος σε σχέση με την προσέγγιση και ερμηνεία

Τη δεύτερη υποομάδα αποτελούν η λεκτική και η γραφική επίλυση στο τρίτο υποερώτημα της ερώτησης 6 του Α δοκιμίου, αλλά και η απάντηση στην ερώτηση 8 του ίδιου δοκιμίου. Οι δύο υποομάδες συνδέονται μεταξύ τους με δεσμό όχι ιδιαίτερα ισχυρό (ομοιότητα 0.226873). Η 2^{η} ομάδα είναι ομάδα αλγοριθμική. Αποτελείται από τις αλγεβρικές προσεγγίσεις στα υποερωτήματα των ερωτήσεων 3 και 9 του δοκιμίου Α. Ο δεσμός σύνδεσης τόσο μεταξύ των υποερωτημάτων της μίας ερώτησης όσο και μεταξύ των υποερωτημάτων της δεύτερης ερώτησης είναι πολύ ισχυρός. Στην ίδια ομάδα συνδέεται και η απάντηση στην ερώτηση 6 του Β δοκιμίου. Ο δεσμός που συνδέει όλα τα έργα της ομάδας είναι ισχυρός (ομοιότητα 0.591366). Την 3^{η} ομάδα του διαγράμματος αποτελούν έξι μεταβλητές οι οποίες χωρίζονται σε δύο μικρότερες υποομάδες. Η πρώτη υποομάδα αποτελείται από τις γεωμετρικές προσεγγίσεις της ερώτησης 3 του Β δοκιμίου οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με ισχυρό δεσμό (ομοιότητα 0.593113). Η δεύτερη υποομάδα αποτελείται από τα τρία υποερωτήματα στην ερώτηση 4 του Β δοκιμίου και συνδέονται μεταξύ τους με ισχυρό δεσμό (ομοιότητα 0.612195). Όλα τα έργα συνδέονται μεταξύ τους με αρκετά ασθενή δεσμό (ομοιότητα 0.0280327). Οι ομάδες 1, 2 και 3 συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ασθενή δεσμό (ομοιότητα 3.56539e-09). Η 4^{η} ομάδα η οποία είναι και η μεγαλύτερη ομάδα του διαγράμματος δεν συνδέεται με τις υπόλοιπες.

Αποτελείται από δώδεκα μεταβλητές οι οποίες χωρίζονται σε δύο υποομάδες. Στην πρώτη υποομάδα συναντούμε τις δύο αλγεβρικές προσεγγίσεις στα υποερωτήματα της ερώτησης 11 του Α δοκιμίου, τη συμβολική επίλυση στο τρίτο υποερώτημα της ερώτησης 6 του δοκιμίου Α, την απάντηση στην ερώτηση 9 του δοκιμίου Α και τέλος την απάντηση στο τρίτο υποερώτημα της ερώτησης 5 του Β δοκιμίου. Οι μεταβλητές αυτές συνδέονται μεταξύ τους με σχετικά ασθενή δεσμό (ομοιότητα 0.152175). Η δεύτερη υποομάδα αποτελείται από τις γεωμετρικές προσεγγίσεις στα τέσσερα υποερωτήματα της ερώτησης 9 του Β δοκιμίου, οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ισχυρό δεσμό (ομοιότητα 0.997593) όπως άλλωστε ήταν αναμενόμενο. Στην ίδια υποομάδα συναντούμε την απάντηση στην ερώτηση 8 του Β δοκιμίου, την απάντηση σε ένα από τα υποερωτήματα της ερώτησης 7 του Β δοκιμίου αλλά και την απάντηση στην ερώτηση 4 του Α δοκιμίου. Τα έργα της δεύτερης υποομάδας συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ασθενή δεσμό (ομοιότητα 0.141237). Όλες οι μεταβλητές της 4ης ομάδας συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ασθενή δεσμό (ομοιότητα 0.0008954).

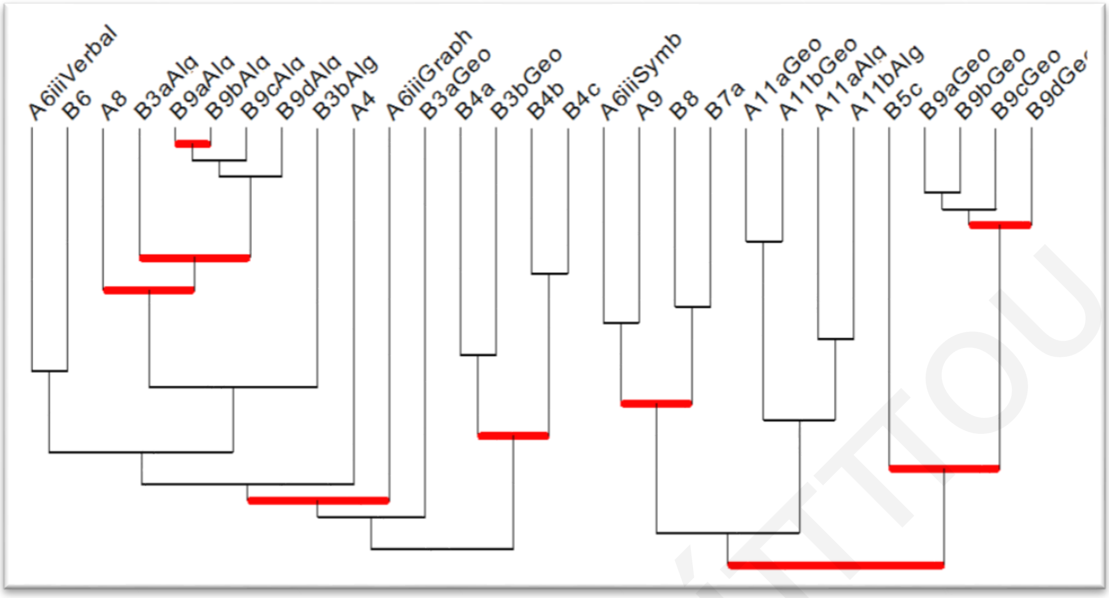
II. Διάγραμμα Ομοιότητας (Γ΄ Γυμνασίου)



Διάγραμμα 76: Διάγραμμα ομοιότητας για την Γ΄ Γυμνάσιου που αφορά τη λύση προβλήματος σε σχέση με την προσέγγιση και ερμηνεία

Το παραπάνω διάγραμμα χωρίζεται σε τέσσερις ομάδες οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους. Ο δεσμός που τις ενώνει είναι πολύ ασθενής (ομοιότητα 5.70855e-11). Η 1^{η} ομάδα αποτελείται από τρεις μεταβλητές, δύο εκ των οποίων αποτελούν τις γεωμετρικές προσεγγίσεις στα δύο υποερωτήματα της ερώτησης 11 του Α δοκιμίου και οι οποίες συνδέονται με πολύ ισχυρό δεσμό (ομοιότητα 1), όπως άλλωστε ήταν αναμενόμενο. Οι μεταβλητές αυτές αποτελούν ερωτήματα προσέγγισης. Η τρίτη μεταβλητή που συμπληρώνει την ομάδα είναι το τρίτο υποερώτημα της ερώτησης 5 του Β δοκιμίου και είναι ερώτημα που αφορά την ερμηνεία. Συνδέεται με τις υπόλοιπες με σχετικά ασθενή δεσμό (ομοιότητα 0.156906). Παρά το γεγονός ότι ο δεσμός δεν είναι ιδιαίτερα ισχυρός, εντούτοις παρατηρούμε ανάμιξη έργων προσέγγισης και ερμηνείας. Η 2^{η} ομάδα αποτελείται από ερωτήματα του Β δοκιμίου. Τα πρώτα δύο έργα είναι οι γεωμετρικές προσεγγίσεις στα υποερωτήματα της ερώτησης 3 και αποτελούν μεταβλητές που αφορούν την προσέγγιση. Τα άλλα τρία έργα της ομάδας είναι οι απαντήσεις στα τρία υποερωτήματα της ερώτησης 4 και αποτελούν μεταβλητές που αφορούν την ερμηνεία. Και σε αυτή την ομάδα λοιπόν διακρίνεται ανάμιξη έργων προσέγγισης και ερμηνείας. Οι ομάδες 1 και 2 συνδέονται μεταξύ τους, γεγονός αναμενόμενο αφού όπως έχουμε αναφέρει αποτελούν και οι δύο ομάδες στις οποίες αναμιγνύονται έργα προσέγγισης και ερμηνείας. Παρόλα αυτά ο δεσμός σύνδεσης είναι ασθενής (ομοιότητα 0.000686771). Η 3^{η} ομάδα χωρίζεται σε μικρές υποομάδες. Στην πρώτη υποομάδα συναντούμε τις αλγεβρικές προσεγγίσεις στα υποερωτήματα της ερώτησης 3 του Β δοκιμίου, οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ισχυρό δεσμό (ομοιότητα 1). Στη δεύτερη υποομάδα συναντούμε τις γεωμετρικές προσεγγίσεις σε τρία από τα υποερωτήματα της ερώτησης 9 του Β δοκιμίου. Ο δεσμός που τα συνδέει είναι πολύ ισχυρός (ομοιότητα 0.968649). Στην ίδια ομάδα συναντούμε άλλες δύο μεταβλητές, οι οποίες όμως εκφράζουν έργα ερμηνείας (B7a, A4). Παρατηρούμε λοιπόν ότι και σε αυτή την ομάδα φαίνεται να υπάρχει ανάμιξη έργων προσέγγισης και ερμηνείας, παρόλο που ξανά ο δεσμός σύνδεσής του είναι αρκετά ασθενής (ομοιότητα 0.00502087). Στην τέταρτη ομάδα συναντούμε τρεις μεταβλητές. Οι μεταβλητές των ερωτήσεων 8 και 9 του δοκιμίου Α αποτελούν έργα που αφορούν ερμηνεία. Η τρίτη μεταβλητή αποτελείται από το τρίτο υποερώτημα στην ερώτηση 6 του Α δοκιμίου και αφορά επίλυση προβλήματος. Στην ομάδα αυτή λοιπόν διακρίνουμε ανάμιξη ανάμεσα σε έργα ερμηνείας και επίλυσης προβλήματος.

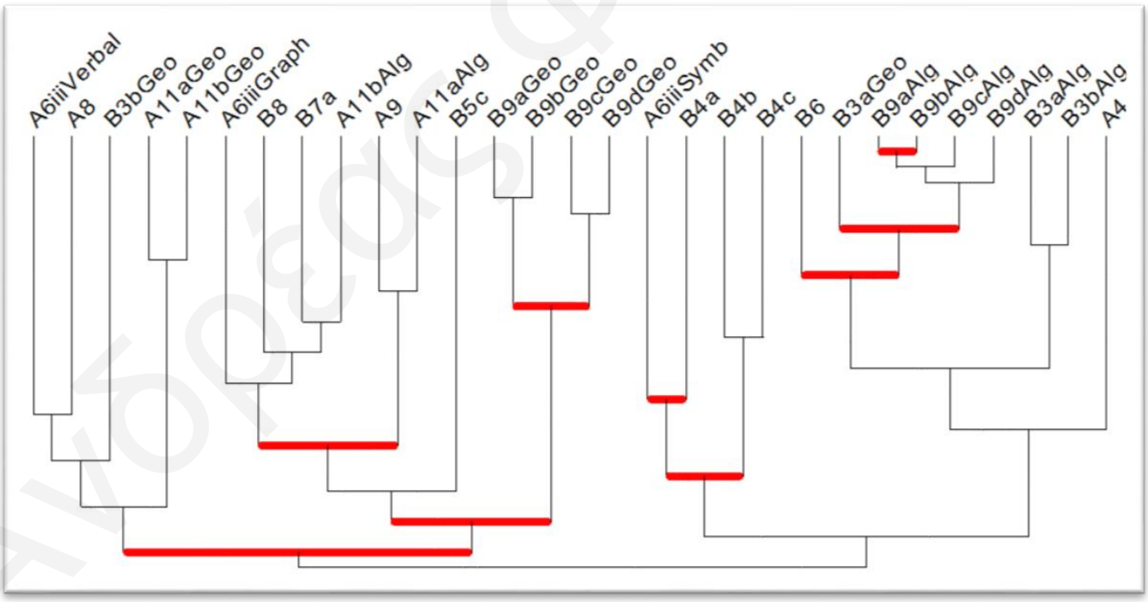
III. Διάγραμμα Ομοιότητας (Α΄ Λυκείου)



Διάγραμμα 77: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά τη λύση προβλήματος σε σχέση με την προσέγγιση και ερμηνεία

Στο διάγραμμα αυτό οι μεταβλητές χωρίζονται σε τρεις ομάδες, εκ των οποίων οι δύο πρώτες ενώνονται μεταξύ τους, σε αντίθεση με την τρίτη ομάδα η οποία δεν ενώνεται με τις υπόλοιπες. Στην πρώτη ομάδα βλέπουμε να αναμιγνύονται μεταβλητές διαφόρων απαιτήσεων. Πιο συγκεκριμένα, τα έργα τα οποία αντιστοιχούν στην ερώτηση 6 του Α δοκιμίου αφορούν την επίλυση προβλήματος. Στην ίδια ομάδα συναντούμε έργα προσέγγισης, όπως είναι όλες οι αλγοριθμικές μεταβλητές στα υποερωτήματα της ερώτησης 9 του Β δοκιμίου, όπως επίσης και η ερώτηση 6 του Β δοκιμίου. Επίσης, οι ερωτήσεις 4 και 8 του Α δοκιμίου αφορούν έργα ερμηνείας. Βλέπουμε λοιπόν πως σε αυτή την ομάδα δεν υπάρχει διάκριση μεταξύ των έργων ανάλογα με την κατηγορία στην οποία ανήκουν. Το μόνο που ίσως θα μπορούσαμε να αναφέρουμε για αυτή την ομάδα είναι ότι η πλειονότητα των μεταβλητών αντιστοιχούν σε έργα προσέγγισης. Στη δεύτερη ομάδα συναντούμε έργα προσέγγισης και ερμηνείας. Οι γεωμετρικές μεταβλητές της ερώτησης 3 του Β δοκιμίου (B3aGeo, B3bGeo) είναι μεταβλητές προσέγγισης, ενώ οι μεταβλητές που αντιστοιχούν στην ερώτηση 4 του ίδιου δοκιμίου (B4a, B4b, B4c) είναι έργα ερμηνείας. Οι πιο πάνω ομάδες συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ασθενή δεσμό (ομοιότητα 9.17793e-06). Η τρίτη ομάδα είναι και η μεγαλύτερη και χωρίζεται σε δύο μικρότερες υποομάδες. Στην πρώτη υποομάδα συναντούμε έργα επίλυσης προβλήματος, ερμηνείας αλλά και προσέγγισης. Η συμβολική μεταβλητή σε ένα από τα υποερωτήματα της ερώτησης 6 του Α δοκιμίου, όπως επίσης και η ερώτηση 8 του Β δοκιμίου αντιστοιχούν σε έργα επίλυσης προβλήματος. Η ερώτηση 9 του Α δοκιμίου όπως επίσης και μια από τις μεταβλητές της ερώτησης 7 του Β δοκιμίου ανήκουν σε έργα ερμηνείας. Τέλος, τόσο οι γεωμετρικές, όσο και οι αλγεβρικές μεταβλητές της ερώτησης 11 του Α δοκιμίου ανήκουν σε έργα προσέγγισης. Στη δεύτερη υποομάδα συναντούμε ένα έργο ερμηνείας, που ανήκει στην ερώτηση 5 του Β δοκιμίου. Τα υπόλοιπα τέσσερα έργα αντιστοιχούν στις γεωμετρικές προσεγγίσεις τις ερώτησης 9 του Β δοκιμίου. Οι δύο αυτές υποομάδες συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ασθενή δεσμό. Παρόλα αυτά όμως παρατηρούμε πως οι σχέσεις που διέπουν την ομάδα αυτή είναι πολύ σημαντικές. Σε πολλούς από τους δεσμούς αυτούς, όπως και στο δεσμό που συνδέει τις δύο κύριες υποομάδες βλέπουμε κόκκινο χρώμα, γεγονός το οποίο υποδηλώνει τη σημαντικότητα του δεσμού αυτού.

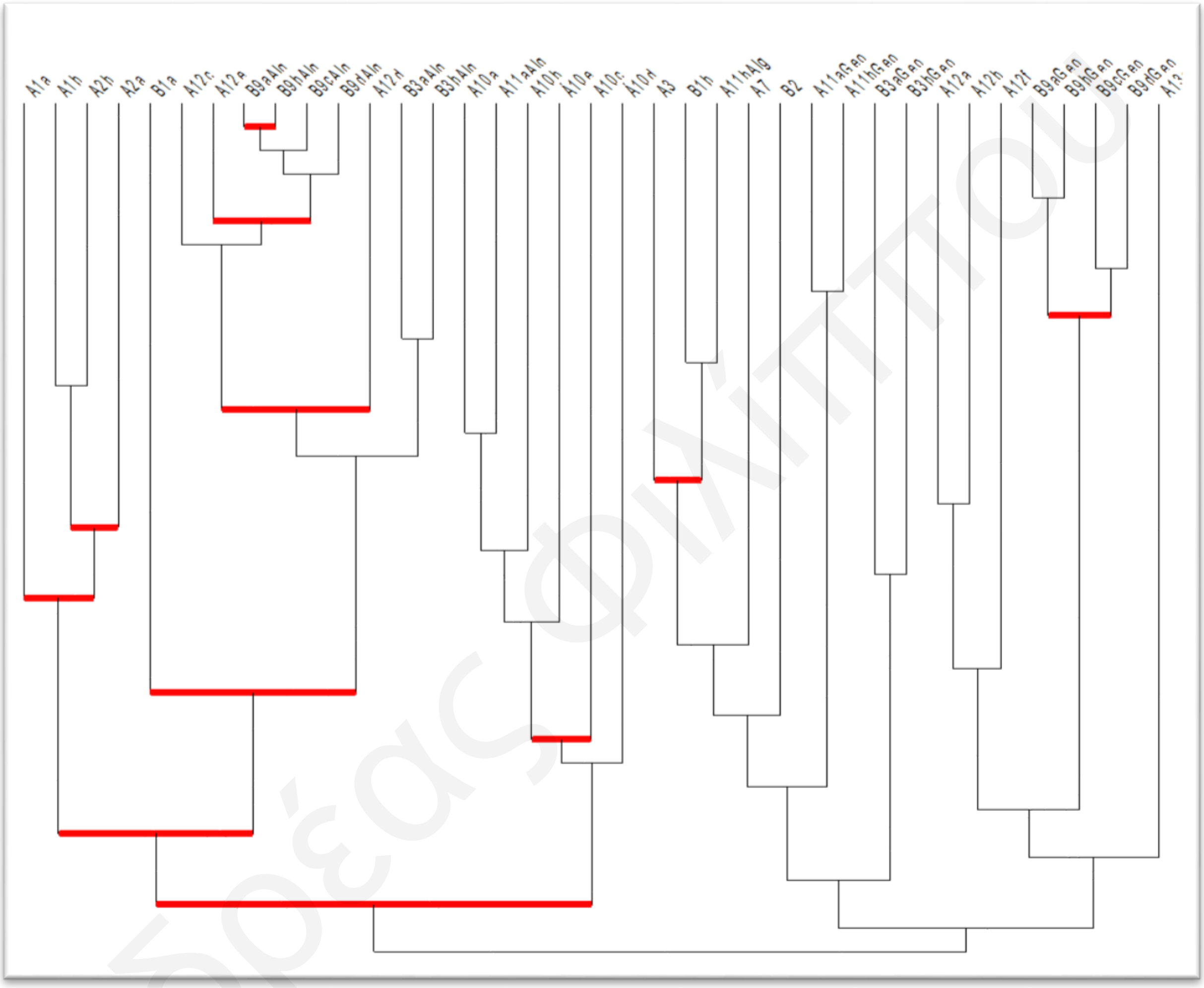
IV. Διάγραμμα Ομοιότητας (Β΄ Λυκείου)



Διάγραμμα 78: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ Λυκείου που αφορά τη λύση προβλήματος σε σχέση με την προσέγγιση και ερμηνεία

Στο παραπάνω διάγραμμα τα έργα χωρίζονται σε τρεις ομάδες οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ασθενή δεσμό (ομοιότητα 3.25784e-06). Η 1η ομάδα χωρίζεται σε δύο υποομάδες. Στην πρώτη υποομάδα παρατηρείται ανάμιξη μεταβλητών επίλυσης προβλήματος, ερμηνείας και προσέγγισης. Η μεταβλητή A6iiiVerbal αντιστοιχεί σε έργο επίλυσης προβλήματος. Η ερώτηση 8 του Α δοκιμίου (A8) αντιστοιχεί σε έργο ερμηνείας. Οι παραπάνω μεταβλητές ενώνονται μεταξύ τους με πολύ ισχυρό δεσμό (ομοιότητα 0.957569). Οι υπόλοιπες τρεις μεταβλητές (B3bGeo, A11aGeo, A11bGeo) αντιστοιχούν σε έργα προσέγγισης. Όλες οι μεταβλητές της υποομάδας αυτής ενώνονται μεταξύ τους με μέτριας ισχύς δεσμό (ομοιότητα 0.345344). Η δεύτερη υποομάδα αποτελείται κυρίως από έργα προσέγγισης. Παρόλα αυτά βλέπουμε τις μεταβλητές αυτές να συνδέονται και σε αυτή την περίπτωση με έργα ερμηνείας και επίλυσης προβλήματος. Έργα που εκφράζουν προσέγγιση είναι οι τέσσερις γεωμετρικές μεταβλητές στην ερώτηση 9 του Β δοκιμίου, όπως επίσης και οι δύο αλγοριθμικές μεταβλητές στην ερώτηση 11 του Α δοκιμίου. Θα μπορούσαμε λοιπόν να επισημάνουμε και τη σύνδεση γεωμετρικών και αλγεβρικών προσεγγίσεων. Στην ίδια υποομάδα βλέπουμε να συνδέονται τόσο δύο μεταβλητές επίλυσης προβλήματος (A6iiiGraph, B8) όσο και δύο μεταβλητές ερμηνείας (B7a, B5c). Ιδιαίτερα μεταξύ των μεταβλητών της δεύτερης υποομάδας παρατηρούνται πολύ ισχυροί και σημαντικοί δεσμοί ομοιότητας. Οι δύο υποομάδες συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ασθενή δεσμό ομοιότητας (ομοιότητα 0.00342833). Στη 2η ομάδα βλέπουμε και πάλι ανάμιξη έργων, αυτή τη φορά δύο τύπων. Αποτελείται από τέσσερις μεταβλητές, μία εκ των οποίων εκφράζουν επίλυση προβλήματος (A6iiiSymb) και οι άλλες τρεις εκφράζουν ερμηνεία (B4a, B4b, B4c). Ο δεσμός που συνδέει τις μεταβλητές αυτής της ομάδας είναι μέτριας ισχύος (ομοιότητα 0.478759). Η 3η ομάδα είναι ομάδα προσέγγισης. Σε αυτή την περίπτωση βλέπουμε όλα σχεδόν τα έργα, με εξαίρεση ένα, που εκφράζουν προσέγγιση να συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ισχυρό δεσμό (ομοιότητα 0.908908). Το μοναδικό έργο ερμηνείας (A4) που συνδέεται με αυτή την ομάδα, συνδέεται με σχετικά ισχυρό δεσμό (ομοιότητα 0.65913).

I. Διάγραμμα Ομοιότητας (Συνολικό Δείγμα)



Διάγραμμα 79: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά τον ορισμό, την αναγνώριση και την προσέγγιση της συνάρτησης

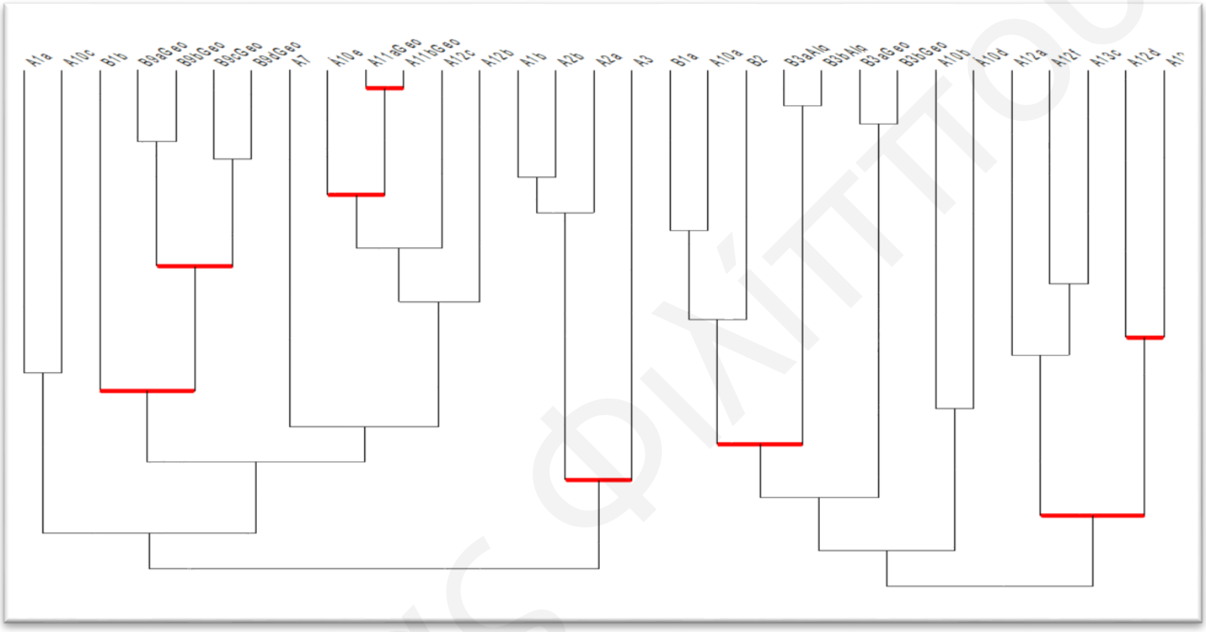
Στο Διάγραμμα 79 μελετάται το τριπλό διάγραμμα ομοιότητας ορισμός – αναγνώριση – προσέγγιση για το συνολικό δείγμα. Ουσιαστικά φαίνονται δύο μεγάλες υποομάδες που μπορεί να φαίνεται ότι συνδέονται μεταξύ τους αλλά η σχέση είναι πολύ ασθενής οπότε είναι σαν έχουμε δύο ξεχωριστές κλάσεις ομοιότητας. Στην πρώτη μεγάλη ομάδα όλες οι σχέσεις είναι σημαντικές το οποίο φαίνεται με τις πολλές κόκκινες γραμμές. Η πρώτη κλάση μπορούμε να πούμε ότι έχει τρεις υποομάδες. Στην πρώτη υποομάδα που ξεκινά από το A1α και τελειώνει στο A2α συγκεντρώνονται οι τέσσερις μεταβλητές του ορισμού. Η πρώτη υποομάδα είναι το ερώτημα που ζητά ορισμό, η δεύτερη είναι η ερώτηση που ζητά παράδειγμα, η τρίτη είναι η ερώτηση ζητά αντιπαράδειγμα και στην τέταρτη δίνεται ο ορισμός στην πράξη σύμφωνα με την κατηγοριοποίηση που έχουμε για τις σκήσεις του ορισμού. Αυτά τα έργα συνδέονται με σημαντικές σχέσεις μεταξύ τους.

Στη δεύτερη κλάση έχουμε ένα ερώτημα ορισμού, που είναι ορισμός στην πράξη με βάση την κατηγοριοποίηση, έχουμε τρεις μεταβλητές που σχετίζονται με ένα έργο αναγνώρισης και οι υπόλοιπες μεταβλητές αφορούν δύο έργα μετάφρασης το B3 και το B9 στα οποία χρησιμοποιείται η αλγεβρική προσέγγιση. Παρατηρούμε ότι και σε αυτή την κλάση οι σχέσεις είναι σημαντικές μεταξύ τους οι οποίες παρουσιάζονται από τις κόκκινες γραμμές.

Στην τρίτη κλάση έχουμε κάτι αντίστοιχο όπου συνδέεται ένα έργο αναγνώρισης που είναι το A10 με έργο μετάφρασης του A11 όπου και πάλι χρησιμοποιείται αλγεβρική προσέγγιση. Παρατηρούμε ότι αυτές οι τρείς υποομάδες συνδέονται μεταξύ τους με σημαντικές σχέσεις οπότε αυτό που φαίνεται είναι ότι ο ορισμός, η γνώση του ορισμού ή η ικανότητα να δώσουν παράδειγμα και αντιπαράδειγμα συνδέεται με τη χρήση της αλγεβρικής προσέγγισης στα έργα μετάφρασης. Αυτό φαίνεται μέσα από δύο διαστάσεις. Είτε η σχέση προκύπτει διότι ο τρόπος που ορίζουν την έννοια με τα παραδείγματα που δίνουν οι μαθητές είναι αλγεβρικής μορφής είτε η γνώση του ορισμού ευνοεί τη χρήση της αλγεβρικής αναπαράστασης και αυτό πιθανόν να προκύπτει από την επίδραση της διδασκαλίας, αφού όταν ο καθηγητής δώσει τον τυπικό ορισμό της έννοιας, δίνει μετά και ένα παράδειγμα σε μια αλγεβρική μορφή. Για αυτό ταυτίζουν τον ορισμό με την αλγεβρική αναπαράσταση της έννοιας λόγω διδασκαλίας.

Η δεύτερη κλάση συγκεντρώνει πολύ λιγότερες μεταβλητές που σχετίζονται με τον ορισμό την A3 και την B1(β) όπου είναι η ερώτηση που δίνουν παράδειγμα ή αντιπαράδειγμα οι μαθητές αντίστοιχα και βλέπουμε ότι αυτές οι δύο μεταβλητές συνδέονται σημαντικά με μια μεταβλητή που αφορά έργο μετάφρασης με χρήση αλγεβρικής προσέγγισης και πάλι. Σε επόμενα στάδια αυτής της κλάσης συγκεντρώνονται τα έργα μετάφρασης που χρησιμοποιείται γεωμετρική προσέγγιση και λιγότερες μεταβλητές που αφορούν έργα αναγνώρισης. Επίσης παρατηρούμε ότι υπάρχει στεγανοποίηση μεταξύ των δύο κλάσεων άρα η αλγεβρική προσέγγιση και η γεωμετρική προσέγγιση διακρίνονται ξεκάθαρα όπου όταν επικεντρωθούμε στην πρώτη κλάση επειδή εμάς μας ενδιαφέρει η σχέση του ορισμού φαίνεται ότι η γνώση του ορισμού συνδέεται πιο στενά με την χρήση αλγεβρικής αναπαράστασης και όχι της γεωμετρικής.

II. Διάγραμμα Ομοιότητας (Γ΄ Γυμνασίου)

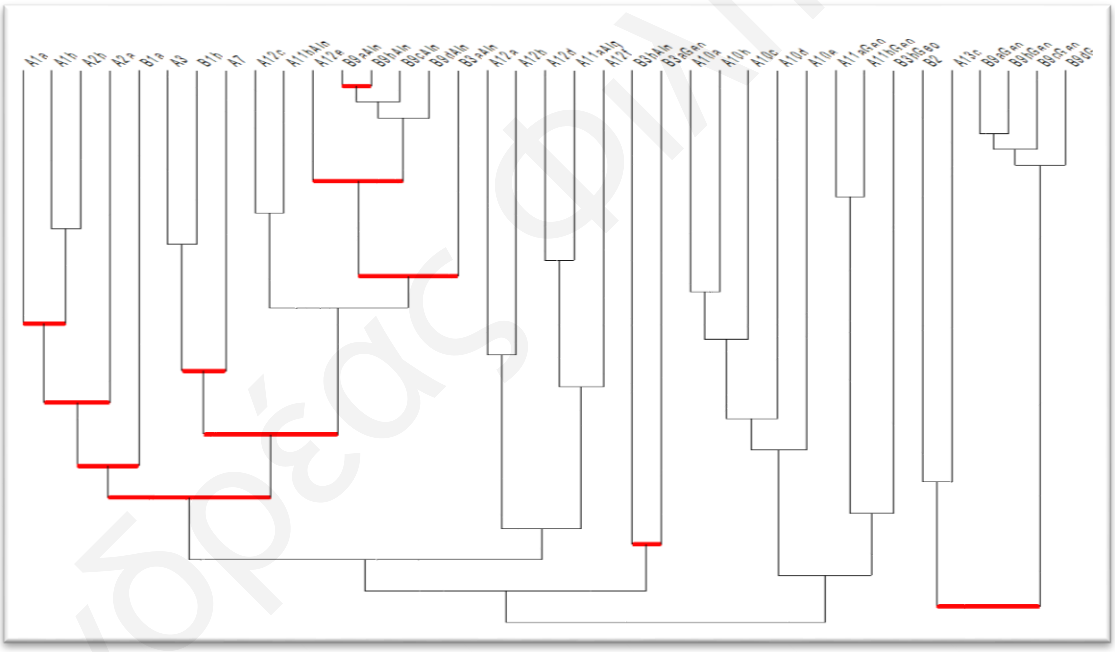


Διάγραμμα 80: Διάγραμμα ομοιότητας για τη Γ’ Γυμνασίου που αφορά τον ορισμό, την αναγνώριση και την προσέγγιση της συνάρτησης.

Είμαστε στα τριπλά ομοιότητας – αναγνώριση – προσέγγιση και είπαμε πριν για το συνολικό δείγμα ότι ο ορισμός συνδέεται με τη χρήση αλγεβρικής προσέγγισης στα έργα μετάφρασης. Τώρα αν δούμε τις τρεις τάξεις ξεχωριστά για κάποιες τάξεις ισχύει αυτό το γενικό συμπέρασμα για κάποιες όχι.

Συγκεκριμένα για την Γ΄ Γυμνασίου στο Διάγραμμα 80 πάλι βλέπουμε δύο μεγάλες κλάσεις ομοιότητας που είναι εντελώς διακριτές αυτή την φορά. Στην πρώτη έχουμε διάφορες υποομάδες οι οποίες όμως φαίνονται ότι οι σχέσεις μεταξύ τους είναι ασθενείς. Το καινούργιο που προκύπτει είναι ότι βλέπουμε μεταβλητές που αφορούν τον ορισμό να συνδέονται με την γεωμετρική προσέγγιση, για παράδειγμα η μεταβλητή Β1(β) που αφορά στο να δώσουν παράδειγμα οι μαθητές συνδέεται με σημαντική σχέση με χρήση γεωμετρικής προσέγγισης στο έργο μετάφρασης Β9. Αν πάμε στη δεύτερη κλάση ομοιότητας στην πρώτη υποομάδα που ξεκινά από τη Β1α και τελειώνει στη στη Β3βalg παρατηρούμε ότι δυο μεταβλητές που αφορούν τον ορισμό όταν τους ζητήθηκε να δώσουν ορισμό, τον δίνουν με αλγεβρική προσέγγιση, άρα υπάρχει μια συνέπεια όσον αφορά τις σχέσεις που προκύπτουν με τα έργα ορισμού, δηλαδή βλέπουμε ότι το να δώσουνε ορισμό συνδέεται περισσότερο με αλγεβρική προσέγγιση ενώ το να δώσουν παράδειγμα συνδέεται με γεωμετρική, όπου αυτό είναι πιθανόν να προκύπτει πάλι λόγω της επίδρασης της διδασκαλίας όπου το να δώσουν ορισμό δίνουν αμέσως την αλγεβρική έκφραση της συνάρτησης ενώ για να δώσουν συγκεκριμένο παράδειγμα χρησιμοποιούν γραφική παράσταση.

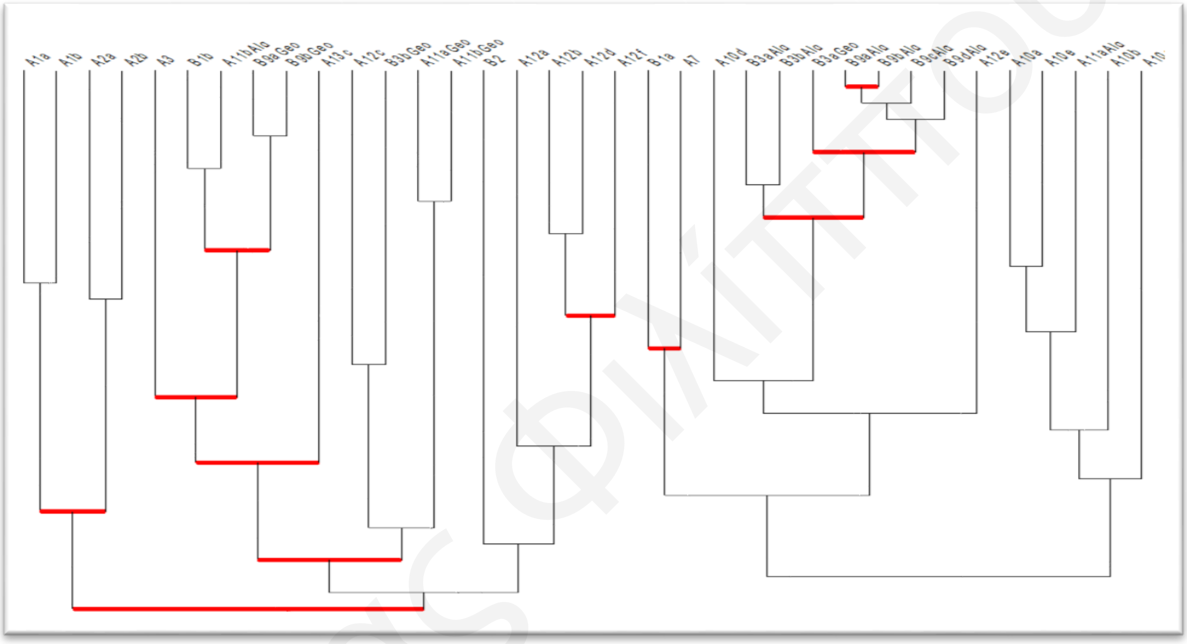
III. Διάγραμμα Ομοιότητας (Α΄ Λυκείου)



Διάγραμμα 81: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά τον ορισμό, την αναγνώριση και την προσέγγιση της συνάρτησης

Στην Α΄ Λυκείου στο Διάγραμμα 81 ξεχωρίζουμε μια μεγάλη κλάση ομοιότητας που ξεκινά από το Α1α και τελειώνει στο Β3αalg. Παρουσιάζονται πάρα πολύ σημαντικές σχέσεις για αυτό δεν θα ασχοληθούμε με τις άλλες μεταβλητές και τις άλλες σχέσεις. Από αυτή την ομάδα με τις σημαντικότερες σχέσεις διαπιστώνεται ότι σχεδόν όλες οι μεταβλητές που αφορούν τα έργα ορισμού εκτός από τη Β2 που εμφανίζεται στην τελευταία κλάση, φαίνεται ότι σχεδόν όλες οι μεταβλητές ορισμού συνδέονται μόνο με αλγεβρική προσέγγιση. Άρα ισχύει αυτό που συμβαίνει και στο συνολικό δείγμα ότι η γνώση του ορισμού στην Α΄ Λυκείου συνδέεται με χρήση αλγεβρικής προσέγγισης.

IV. Διάγραμμα Ομοιότητας (Β΄ Λυκείου)



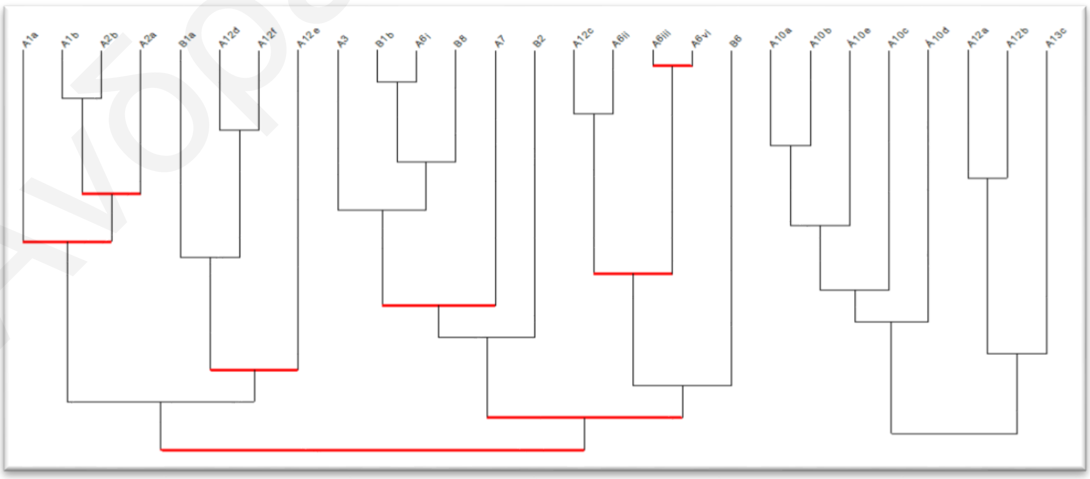
Διάγραμμα 82: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ Λυκείου που αφορά τον ορισμό, την αναγνώριση και την προσέγγιση της συνάρτησης

Στη Β΄ Λυκείου στο Διάγραμμα 82 παρατηρούμε κάτι διαφορετικό. Κάποιες μεταβλητές που αφορούν τον ορισμό είτε παράδειγμα συνδέονται τόσο με γεωμετρική όσο και αλγεβρική προσέγγιση και με σημαντικές σχέσεις ειδικότερα με την υποομάδα που ξεκινά από τη Β1β και τελειώνει στην Α13c. Επίσης, εντοπίζουμε και σχέση μεταξύ της μεταβλητής Β1α που ανήκει στη δεύτερη υποομάδα πάλι με έργα μετάφρασης που χρησιμοποιείται είτε η αλγεβρική είτε η γεωμετρική προσέγγιση. Γενικά στη Β΄ Λυκείου παρατηρούμε ένα συντονισμό μεταξύ γεωμετρικής και αλγεβρικής προσέγγισης, ενώ στις προηγούμενες τάξεις έμπαιναν σε εντελώς διακριτές ομάδες. Ενώ υπήρχε στεγανοποίηση στην Α΄ Λυκείου και στην Γ΄ Γυμνασίου όσον αφορά στη χρήση κάθε προσέγγισης. Στην Β΄ Λυκείου βλέπουμε ότι συντονίζεται κάπως η χρήση των δύο προσεγγίσεων για αυτό και τα έργα ορισμού δεν συνδέονται ξεκάθαρα μόνο με την μια ή μόνο με την άλλη. Για πρώτη φορά βλέπουμε σχέσεις του ορισμού και με τις δύο προσέγγισεις ταυτόχρονα.

Η γνώση του ορισμού στη Β΄ Λυκείου συνδέεται και με αλγεβρική όσο και με τη γεωμετρική προσέγγιση το όποιο είναι ένδειξη ότι ξεκινούν σιγά-σιγά να συντονίζουν τις γνώσεις τους και να αποκτούν αυτό που προκύπτει από τα μοντέλα ως αναπαραστατική ευελιξία η οποία αποτελείται από τη γνώση του ορισμού του, από την ικανότητα αναγνώρισης και από την ικανότητα μετάφρασης και με τις δύο προσεγγίσεις που φαίνεται ξεκάθαρα ειδικότερα στην πρώτη κλάση του διαγράμματος της Β΄ Λυκείου, εκεί που έχουμε μεταβλητές του ορισμού μαζί, μεταβλητές έργων αναγνώρισης και έργων μετάφρασης. Από όλα τα πιο πάνω φαίνεται καθαρά ο συντονισμός. Επομένως συμφωνούν όλα τα αποτελέσματα με τη δομή του μοντέλου όπου αυτές οι τρείς διαστάσεις αποτελούν σημαντικούς παράγοντες της αναπαραστατικής ευελιξίας. Είναι σημαντικό να μελετηθεί η σχέση μεταξύ ορισμού, αναγνώρισης και προσέγγισης των διαγραμμάτων ομοιότητας. Πράγματι, σε ορισμένες περιπτώσεις δεν υπάρχει διακριτή διαφορά μεταξύ ορισμού και αναγνώρισης. Έτσι, αναμένεται να υπάρχει μία ανάμιξη έργων ορισμού και αναγνώρισης.

Ορισμός – Αναγνώριση – Επίλυση Προβλήματος

I. Διάγραμμα Ομοιότητας (Συνολικό Δείγμα)



Διάγραμμα 83: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά τον ορισμό, την αναγνώριση και την λύση προβλήματος

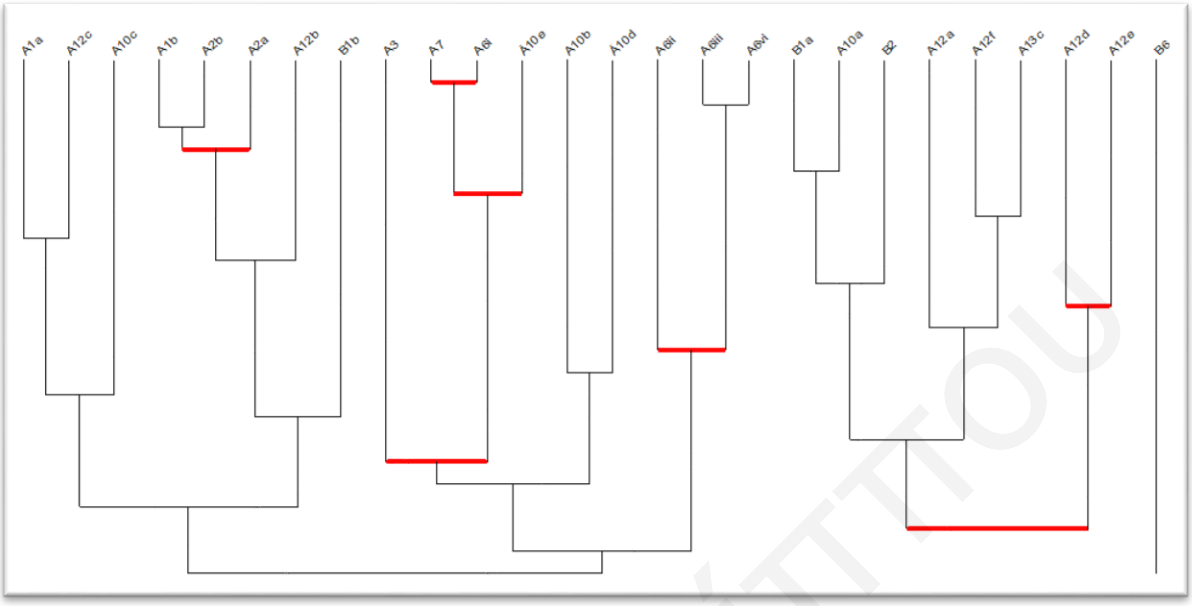
Στο Διάγραμμα 83 έχουμε το τριπλό διάγραμμα ορισμός – αναγνώριση - επίλυση προβλήματος για το συνολικό δείγμα. Βλέπουμε δύο ομάδες όπου η πρώτη περιλαμβάνει πολλές μεταβλητές και αποτελείται από τρεις υποομάδες αλλά βλέπουμε ότι στο τέλος συνδέονται με μια ισχυρή σχέση με μια κόκκινη γραμμή. Η δεύτερη ομάδα παρουσιάζει ασθενείς σχέσεις και ουσιαστικά περιλαμβάνει δύο έργα αναγνώρισης που είναι τα υποερωτήματα των διαφόρων έργων αναγνώρισης τα οποία δεν συνδέονται καθόλου με τα υπόλοιπα. Γενικά, στην πρώτη κλάση έχουμε σημαντικές σχέσεις μεταξύ ορισμού, αναγνώρισης και επίλυσης προβλήματος. Στην πρώτη υποομάδα που ξεκινά από το Α1α και τελειώνει στο Α12e παρατηρούμε τις περισσότερες μεταβλητές της άσκησης ορισμού που ουσιαστικά είναι να δώσουν ορισμό, να δώσουν παράδειγμα ή να δώσουν αντιπαράδειγμα και αυτά συνδέονται με την αναγνωρίση.

Το έργο αναγνώρισης που είναι το Α12 που είναι οι τρεις μεταβλητές που συνδέονται με τις μεταβλητές του ορισμού είναι αναγνώριση από γραφική παράσταση στην οποία χρησιμοποιείται ορισμός την πράξη. Βλέπουμε ότι οι τρεις αυτές μεταβλητές αναγνώρισης συνδέονται σε πρώτο επίπεδο με την μεταβλητή Β1α που πρέπει να δώσουν ορισμό στην πράξη και συνδέονται με τις υπόλοιπες μεταβλητές ορισμού στις οποίες περιλαμβάνεται και Α2α που επίσης είναι ορισμός στην πράξη.

Οπότε βλέπουμε την ισχυρή επίδραση του να μπορούν οι μαθητές να δώσουν ορισμό στην πράξη με την αναγνώριση συναρτήσεων όταν δίνονται μέσα από γραφική παράσταση. Αυτό συνδέεται με την ικανότητα να ορίσουν την έννοια, να δώσουν παράδειγμα ή να δώσουν αντιπαράδειγμα.

Η δεύτερη υποομάδα ξεκινά από το Α3 και τελειώνει στο Β2. Στο έργο Α3 πρέπει να απαντήσουν με ένα αντιπαράδειγμα που δίνεται, στο Β1β πρέπει να δώσουν παράδειγμα και συνδέονται με δύο έργα επίλυσης προβλήματος στα οποία κυρίαρχο ρόλο παίζει η χρήση αλγεβρικής προσέγγισης. Έπρεπε να απαντήσουν με συμβολική έκφραση είτε να επεξεργαστούν μια αλγεβρική αναπαράσταση για να αποφασίσουν αν είναι συνάρτηση ή όχι για να λύσουν το πρόβλημα. Επίσης συνδέεται με το έργο αναγνώρισης Α7 που πρέπει να συνδέσουν γραφικές παραστάσεις με μια δοσμένη αλγεβρική παράσταση οπότε βλέπουμε ουσιαστικά σε αυτήν την ομάδα τις τρεις μεταβλητές του ορισμού η Α3, η Β1β και η Β2 να συνδέονται με έργα που παρεμβαίνει άμεσα η αλγεβρική αναπαράσταση. Αυτό έρχεται να συνδεθεί με τα αποτελέσματα που περιγράφηκαν στο προηγούμενο τριπλό διάγραμμα ότι κάποιες διαστάσεις του ορισμού συνδέονται άμεσα με χρήση αλγεβρικής αναπαράστασης.

II. Διάγραμμα Ομοιότητας (Γ΄ Γυμνασίου)

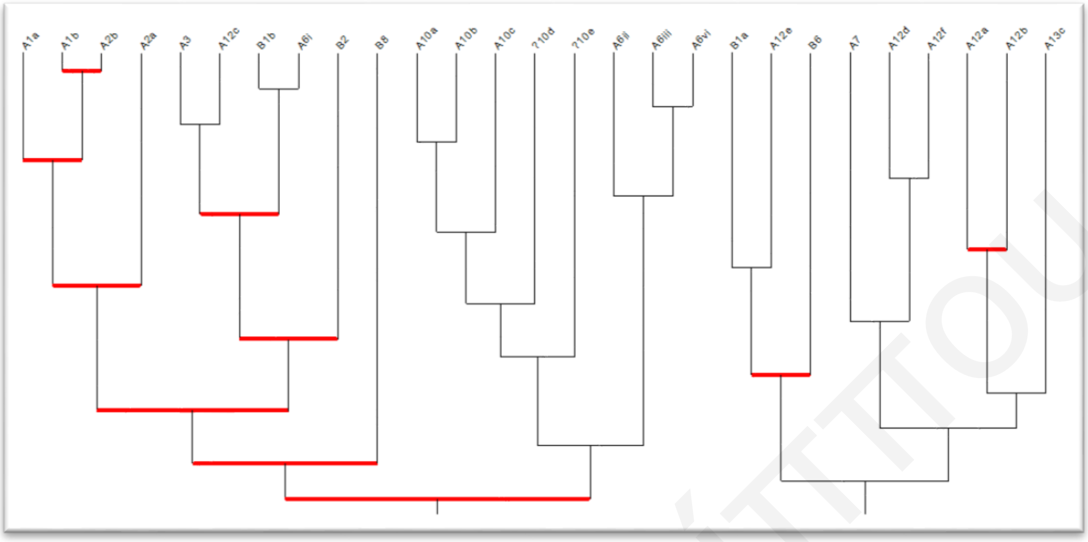


Διάγραμμα 84: Διάγραμμα ομοιότητας για την Γ΄ Γυμνασίου που αφορά τον ορισμό, την αναγνώριση και την λύση προβλήματος

Στο Γυμνάσιο παρατηρούμε να δημιουργούνται αποσπασματικές προσεγγίσεις με πιο πολλές κλάσεις ομοιότητας που παρόλο που φαίνονται ότι συνδέονται, είναι πολύ αδύνατη η σχέση που μπορούμε να θεωρήσουμε ότι σε αυτό το διάγραμμα υπάρχουν τρεις ομάδες ομοιότητας.

Προκύπτουν σε αυτή την περίπτωση αρκετές σχέσεις μεταξύ του ορισμού και της αναγνώρισης και όχι τόσο με την επίλυση προβλήματος. Φαίνεται ότι η γνώση του ορισμού βοηθά την ορθή αναγνώριση. Όσον αφορά την επίλυση προβλήματος υπάρχει μια μεταβλητή με την οποία προκύπτει σχέση και αφορά επίλυση προβλήματος με χρήση αλγεβρικής προσέγγισης. Οπότε βλέπουμε πάλι μια μικρή σχέση του ορισμού με την χρήση αλγεβρικών αναπαραστάσεων.

III. Διάγραμμα Ομοιότητας (Α΄ Λυκείου)

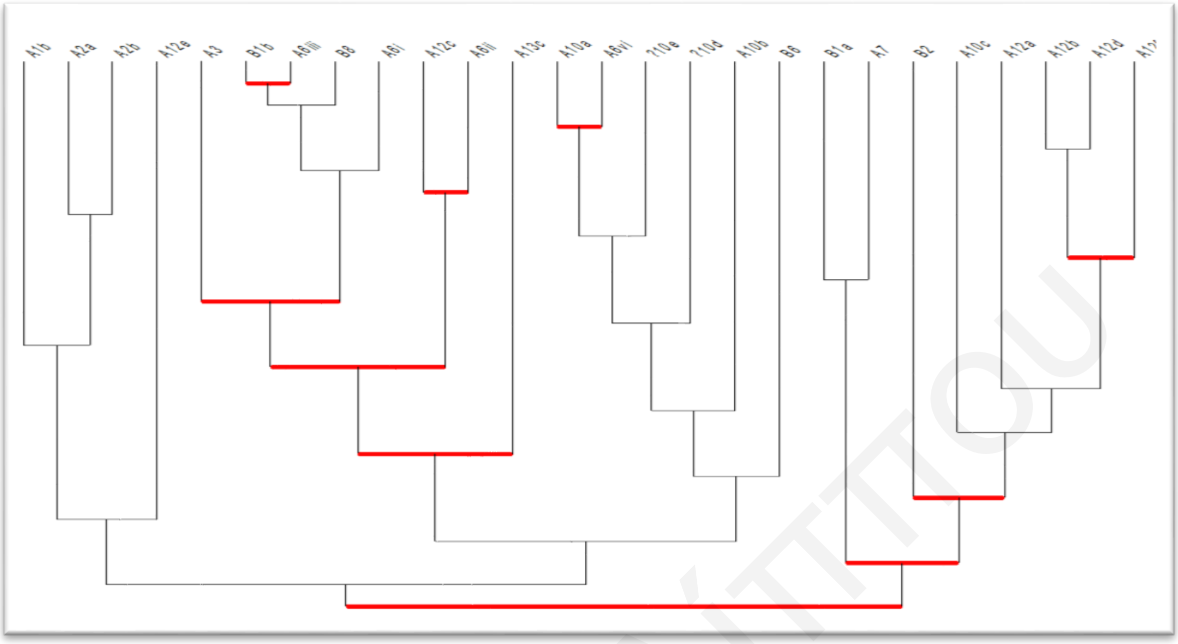


Διάγραμμα 85: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά τον ορισμό, την αναγνώριση και την λύση προβλήματος

Στην Α΄ Λυκείου φαίνεται ένας πιο συντονισμένος τρόπος αντιμετώπισης των έργων σε σχέση με την Γ΄ Γυμνασίου που χωρίζονταν σε τρεις ομάδες χωρίς σημαντικές σχέσεις.

Προκύπτουν δυο κλάσεις με σημαντικές σχέσεις. Οι παραπάνω βρίσκονται στην πρώτη κλάση από τις τρεις όπου μπαίνουν όλες οι μεταβλητές των έργων του ορισμού εκτός μίας που μπαίνει στην τελευταία κλάση και φαίνεται ότι προκύπτουν σημαντικές σχέσεις με ορθή αναγνώριση όταν δίνονται σε αλγεβρική μορφή κάποιες συναρτήσεις και με μια μεταβλητή επίλυσης προβλήματος όπου πάλι παίζει κυρίαρχο ρόλο η χρήση αλγεβρικής αναπαράστασης για να λύσουν το πρόβλημα. Επομένως στηνΑ΄ Λυκείου προκύπτει και πάλι έντονη σχέση ορισμού αναγνώρισης και κυρίως όσον αφορά αναγνώριση από αλγεβρική μορφή και χρήση αλγεβρικής προσέγγισης στην επίλυση προβλήματος.

IV. Διάγραμμα Ομοιότητας (Β΄ Λυκείου)



Διάγραμμα 86: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ Λυκείου που αφορά τον ορισμό, την αναγνώριση και την λύση προβλήματος

Στην Β΄ Λυκείου είναι φανερό ότι η συμπεριφορά των μαθητών είναι πολύ πιο συντονισμένη σε σχέση με τις άλλες δύο τάξεις αφού σχεδόν όλες οι μεταβλητές στο τέλος του διαγράμματος συνδέονται με σημαντική σχέση και προκύπτουν και περισσότερες σημαντικές σχέσεις σε σχέση με τις άλλες διατάξεις.

Συνεπως ο ορισμός στην Β΄ Λυκείου συντονίζεται με την ικανότητα αναγνώρισης και επίλυσης προβλήματος χωρίς να υπάρχουν ιδιαίτερες σχέσεις που να ευνοούν σχέση ορισμού είτε με αλγεβρική αναπαράσταση είτε με γεωμετρική. Επομένως επέρχεται ένας μεγαλύτερος συντονισμός όπως φαίνεται και από το πρώτο διάγραμμα που δείχνει ότι συντονίζουν πλέον αναπαραστατική ευελιξία, αναγνώριση και ορισμό με επίλυση προβλήματος.

Είναι σημαντικό να μελετηθεί η σχέση μεταξύ ορισμού, αναγνώρισης και επίλυσης προβλήματος των διαγραμμάτων ομοιότητας. Πράγματι, σε ορισμένες περιπτώσεις δεν υπάρχει διακριτή διαφορά μεταξύ ορισμού, αναγνώρισης και επίλυσης προβλήματος. Έτσι, αναμένεται να υπάρχει μία ανάμιξη έργων μεταξύ τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V
ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Εισαγωγή

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που προκύπτουν με βάση τα αποτελέσματα. Είναι εμφανές ότι οι μαθητές του Γυμνασίου και του Λυκείου δεν έχουν οικοδομήσει μια πλήρη νοητική αναπαράσταση σε σχέση με την έννοια της συνάρτησης. Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι οι μαθητές δεν είναι σε θέση να χειρίζονται ευέλικτα τουλάχιστον δύο διαφορετικές αναπαραστάσεις της έννοιας της συνάρτησης και να κάνουν μεταφράσεις από τη μια αναπαράσταση στην άλλη. Αντίθετα, αντιμετωπίζουν τις διαφορετικές αναπαραστάσεις της ίδιας έννοιας ως διαφορετικά έργα.

Επιπρόσθετα, έχει φανεί ότι η ικανότητα άμεσης μετάφρασης σχετίζεται με την ικανότητα επίλυσης προβλήματος, παρά το γεγονός ότι η σχέση αυτή δεν μπορεί να πάρει τη μορφή συνεπαγωγής που προκύπτει από τη συνεπαγωγική μέθοδο.

Κατά συνέπεια, η ικανότητα μετάφρασης θα πρέπει να συγκαταλέγεται στους παράγοντες που επηρεάζουν την επίλυση προβλήματος.

Η επίδοση των υποκειμένων διαφοροποιείται ανάλογα με το είδος της μετάφρασης. Επιπρόσθετα, δεν μπορεί να οριστεί σημασιολογική συμφωνία ανάμεσα σε δύο διαφορετικές αναπαραστάσεις της έννοιας της συνάρτησης. Τα αποτελέσματα αυτά ενισχύουν την άποψη ότι κάθε αναπαράσταση είναι γνωστικά μερική και κάθε είδος μετάφρασης περιλαμβάνει διαφορετικές διαδικασίες και απαιτεί διαφορετικές δεξιότητες.

Η δομή της εννοιολογικής κατανόησης της έννοιας

Το πρώτο κομμάτι της συζήτησης των αποτελεσμάτων αποσκοπεί στο να δώσει απαντήσεις στα δύο πρώτα ερευνητικά ερωτήματα:

1. Ποια είναι η δομή της εννοιολογικής κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο;

2. Ποιες οι σχέσεις μεταξύ διαφόρων διαστάσεων του μοντέλου της εννοιολογικής κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης;

Προσπαθώντας να απαντήσουμε στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα σχετικά με τη δομή της εννοιολογικής κατανόησης της συνάρτησης δοκιμάστηκαν διάφορα δομικά μοντέλα. Καταλήξαμε σε δύο κατηγορίες μοντέλων τα οποία διαφοροποιούνται ως προς τον αριθμό των παραγόντων που περιλαμβάνουν και ως προς την τάξη των μοντέλων. Στην πρώτη κατηγορία έχουμε τέσσερις παράγοντες πρώτης τάξης οι οποίοι προκύπτουν ότι είναι σημαντικές διαστάσεις της εννοιολογικής κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης. Αυτοί οι τέσσερις παράγοντες ή διαστάσεις είναι ο ορισμός της συνάρτησης, η αναγνώριση, η ερμηνεία γραφικών παραστάσεων και η επίλυση προβλήματος. Αυτοί οι τέσσερις παράγοντες φαίνεται ότι συνδέονται και εξηγούν τον παράγοντα εννοιολογική κατανόηση της συνάρτησης και αυτό φαίνεται από το πρώτο μοντέλο της πρώτης κατηγορίας.

Στο στο δεύτερο μοντέλο θέλαμε να εξετάσουμε ποιες είναι οι σχέσεις αλληλεπίδρασης μεταξύ αυτών των τεσσάρων παραγόντων που αναφέρθηκαν πιο πάνω οι οποίοι φαίνεται ότι δομούν την εννοιολογική κατανόηση της συνάρτησης. Εξετάζοντας τις σχέσεις μεταξύ των τεσσάρων διαστάσεων φαίνεται ότι ο **ορισμός** παίζει καθοριστικό ρόλο αφού σχηματίζει σχέσεις αλληλεπίδρασης με όλες τις υπόλοιπες τρεις διαστάσεις. Άρα η ικανότητα των μαθητών να ορίζουν την έννοια της συνάρτησης επηρεάζει την ικανότητά τους να αναγνωρίζουν τη συνάρτηση, να επιλύουν προβλήματα με τη χρήση συνάρτησης και να ερμηνεύουν γραφικές παραστάσεις συνάρτησης, οπότε προκύπτει ο **καθοριστικότατος ρόλος της γνώσης του ορισμού για την επιτυχία των μαθητών στις υπόλοιπες διαστάσεις της εννοιολογικής κατανόησης της συνάρτησης.** Συνεπώς, η ικανότητα των μαθητών να ορίζουν την έννοια της συνάρτησης φαίνεται να λειτουργεί ως ρυθμιστικός παράγοντας για τις άλλες διαστάσεις της εννοιολογικής κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης, με τις διατομικές διαφορές που παρατηρούνται στον ορισμό της έννοιας να διατηρούνται και στις άλλες διαστάσεις. Η γνώση του ορισμού φαίνεται να διαδραματίζει εντονότερο ρόλο στην επίλυση προβλημάτων, με την οποία παρουσιάζεται η ισχυρότερη σχέση αλληλεπίδρασης.

Ο ρόλος του ορισμού στην κατανόηση των συναρτήσεων

Στα μαθηματικά, ο ορισμός που παρουσιάζεται είτε χρησιμοποιώντας μια τυπική δομή είτε μέσω μιας πιο διαισθητικής προοπτικής έχει κύριο και συμπληρωματικό ρόλο, στην κατασκευή της μαθηματικής σκέψης και αντίληψης. Οι Vinner και Dreyfus (1989) επικεντρώνονται στην επίδραση των εικόνων, στην έννοια και στον ορισμό εννοιών. Με την πάροδο του χρόνου, οι εικόνες μπορούν να συντονίσουν με ακόμη καλύτερο τρόπο την έννοια του ορισμού, η οποία με τη σειρά της ενισχύει τη διαίσθηση και ενισχύει το συλλογισμό. Ωστόσο, ισορροπία μεταξύ των ορισμών και των εικόνων δεν πέτυχε με όλους τους μαθητές (Thompson, 1994). Στην πραγματικότητα, ο ορισμός της συνάρτησης από τους μαθητές μπορεί να θεωρηθεί ως ένδειξη της κατανόησή της για την έννοια και ως παρουσίαση των λαθών και των παρανοήσεων. Οι Ηλία, Παναούρα, Ηρακλέους και Γαγάτσης (2007) εξέτασαν τις αντιλήψεις για την έννοια της συνάρτησης με βάση τρεις μορφές προσέγγισης των μαθητών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση για το τι είναι η συνάρτηση, την ικανότητα να αναγνωρίζουν τις συναρτήσεις σε διαφορετικές μορφές αναπαράστασης και στην επίλυση προβλήματος η οποία περιλαμβάνει τη μετατροπή του από το ένα σύστημα αναπαράστασης σε άλλο. Τα ευρήματα αποκάλυψαν τις δυσκολίες των μαθητών να δώσουν ένα σωστό ορισμό για την έννοια της συνάρτησης. Ταυτόχρονα, αν οι μαθητές μπορούσαν να δώσουν ένα σωστό ορισμό της συνάρτησης, δεν ήταν ουσιαστικά σε θέση να λύσουν προβλήματα με συνάρτηση.

Από τις υπόλοιπες διαστάσεις σημαντικό ρόλο φαίνεται να διαδραματίζει και η ερμηνεία γραφημάτων αφού σχηματίζει αλληλεπιδράσεις με την αναγνώριση αλλά και με την επίλυση λεκτικών προβλημάτων οπότε με βάση το δεύτερο μοντέλο της πρώτης κατηγορίας προκύπτουν αλληλεπιδράσεις μεταξύ όλων των παραγόντων, όλων των διαστάσεων της εννοιολογικής κατανόησης της συνάρτησης με πιο σημαντικές να φαίνεται πρώτα η επίδραση του ορισμού ως προς τις υπόλοιπες και σε δεύτερο επίπεδο η επίδραση της ικανότητας για ερμηνεία γραφικών παραστάσεων ως προς τις υπόλοιπες διαστάσεις.

Προχωρώντας ένα επίπεδο παραπέρα εξετάστηκε μια δεύτερη κατηγορία μοντέλων η οποία διαφοροποιείται από την πρώτη ως προς το ότι σε αυτή τη δεύτερη κατηγορία εντάσσεται και μια ξεχωριστή ομάδα έργων την οποία ονομάζομε έργα μετάφρασης ή μετασχηματισμό αναπαραστάσεων και σε αυτή την ομάδα έργων παίζει καθοριστικό ρόλο η προσέγγιση που χρησιμοποιούν οι μαθητές για να λύσουν το πρόβλημα. Ουσιαστικά εξετάζεται εδώ η χρήση δύο προσεγγίσεων, η πρώτη είναι η αλγεβρική προσέγγιση και η δεύτερη η γεωμετρική προσέγγιση. Φαίνεται ότι οι δύο αυτές προσεγγίσεις σχηματίζουν, τον παράγοντα που αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών να μεταφράζουν ή να μετασχηματίζουν αναπαραστάσεις. Σε αυτό το μοντέλο ή στα μοντέλα της δεύτερης κατηγορίας παραμένουν οι τέσσερις παράγοντες πρώτης τάξης που υπάρχουν στα μοντέλα της πρώτης κατηγορίας εντάσσεται όμως και ο πέμπτος παράγοντας ο οποίος αφορά στη μετάφραση ή στο μετασχηματισμό αναπαραστάσεων από τους μαθητές με έμφαση στην προσέγγιση την οποία χρησιμοποιούν.

Υπάρχει ισχυρή εκτίμηση στη μαθηματική εκπαιδευτική κοινότητα ότι οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν καλύτερα μαθηματικές έννοιες που αντιμετωπίζουν όταν χειρίζονται με ευκολία μαθηματικές αναπαραστάσεις (Sierpinska, 1992). Ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά της έννοιας των συναρτήσεων είναι ότι μπορεί να αναπαρασταθεί με διάφορετικούς τρόπους (πίνακες, γραφήματα, συμβολικές εξισώσεις, λεκτικά) και μια σημαντική πτυχή της κατανόησής της είναι η ικανότητα να χρησιμοποιεί αυτές τις πολλαπλές αναπαραστάσεις και να μεταφράζει από τη μια μορφή στην άλλη (Lin, F. L., & Cooney, T. J. , 2001). Για να είναι σε θέση να χρησιμοποιούν τις διάφορες μορφές των αναπαραστάσεων ως εργαλεία προκειμένου να κατασκευάσουν μια απόδειξη, οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν τα βασικά χαρακτηριστικά της έννοιας, τις διαδικασίες που πρέπει να ακολουθήσουν, τις προϋποθέσεις και τους περιορισμούς της χρήσης κάθε μορφής αναπαράστασης.

Η άλλη διαφοροποίηση στα μοντέλα της δεύτερης κατηγορίας είναι ότι γίνεται μια προσπάθεια να ορίσουμε δύο διαστάσεις της εννοιολογικής κατανόησης της συνάρτησης ως προς την ευελιξία. Μια πρώτη διάσταση είναι η ευελιξία των μαθητών ως προς τον τρόπο που επιλύουν προβλήματα οπότε με βάση το μοντέλο το οποίο επιβεβαιώθηκε προκύπτει ότι η ευελιξία στην επίλυση προβλήματος αποτελείται από την ικανότητα των μαθητών να ερμηνεύουν παραστάσεις και να επιλύουν προβλήματα με λεκτικά έργα συνάρτησης. Η δεύτερη διάσταση που αφορά στην ευελιξία αναφέρεται στην αναπαραστατική ευελιξία των μαθητών η οποία με βάση το μοντέλο φαίνεται ότι αποτελείται από την ικανότητα των μαθητών να ορίζουν την έννοια, να την αναγνωρίζουν και από την ικανότητα τους να μεταφράζουν δηλαδή να κάνουν μετάφραση στα έργα συναρτήσεων είτε χρησιμοποιώντας αλγεβρική είτε γεωμετρική προσέγγιση. Τελικά με βάση το μοντέλο επιβεβαιώνεται ότι τόσο η αναπαραστατική ευελιξία όσο και η ευελιξία στην επίλυση προβλήματος αποτελούν δύο σημαντικές διαστάσεις της εννοιολογικής κατανόησης της συνάρτησης. Όπως και στην πρώτη κατηγορία μοντέλων έτσι και στη δεύτερη κατηγορία μοντέλων στόχος ήταν να εξετάσουμε και τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των δύο διαστάσεων ευελιξίας οπότε στο δεύτερο μοντέλο αυτής της κατηγορίας δεν υπάρχει ο τρίτης τάξης παράγοντας αλλά εξετάζεται η σχέση αλληλεπίδρασης μεταξύ της αναπαράστατικής ευελιξίας των μαθητών και της ευελιξίας τους στην επίλυση προβλήματος. Συνεπώς με βάση το μοντέλο που επιβεβαιώθηκε προέκυψε σημαντική σχέση αλληλεπίδρασης μεταξύ των δύο διαστάσεων που αναφέρονται στην ευελιξία είτε ως προς την χρήση των αναπαραστάσεων είτε ως προς την επίλυση προβλήματος, οπότε και οι δύο αυτές διαστάσεις είναι σημαντικές για την εννοιολογική κατανόηση της συνάρτησης από τους μαθητές.

Όσον αφορά στη σύγκριση μεταξύ των δύο ηλιακών ομάδων φαίνεται ότι η δομή και των τεσσάρων μοντέλων παραμένει σταθερή και για τις δύο ηλικιακές ομάδες με την δομή του μοντέλου να ισχυροποιείται όσο προχωρούμε σε πιο μεγάλες ηλικίες γιατί οι σχέσεις φαίνεται να είναι πιο σταθερές στο Λύκειο παρά στο Γυμνάσιο. Το σημαντικό όμως είναι ότι η δομή του μοντέλου παραμένει σταθερή και για τις δύο ηλιακές ομάδες.

Τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας συμφωνούν με αποτελέσματα άλλων ερευνών σχετικών με τις συναρτήσεις σύμφωνα με τα οποία η μετάφραση από τη μια μορφή αναπαράστασης της έννοιας της συνάρτησης στην άλλη παρουσιάζει αρκετές δυσκολίες τόσο σε μαθητές Γυμνασίου, μαθητές Λυκείου (Gagatsis, 1997: Hitt, 1998), αποφοίτους Λυκείου (Καλδρυμίδου & Οικονόμου, 1992) όσο και σε φοιτητές Μαθηματικών και Φυσικής (Artigue, 1992: Even, 1998) καθώς καθηγητές Μαθηματικών (Hitt, 1998).

Η γνωστική δομή της εννοιολογικής κατανόησης με βάση τη στατιστική ανάλυση ομοιότητας και τα ποσοστά επιτυχίας

Το δεύτερο μέρος της συζήτησης αφορά στο τρίτο ερευνητικό ερώτημα: Ποιες είναι οι ομοιότητες και διαφορές στη γνωστική δομή της εννοιολογικής κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης ανάμεσα στους μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου (όπως αυτές φανερώνονται με τη στατιστική ανάλυση ομοιότητας);

Α. ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΠΙΚΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΣΕ ΑΝΤΙΠΑΡΑΘΕΣΗ ΜΕ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΦΑΙΡΙΚΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

Σύντομη σύνοψη της ανάλυσης ομοιότητας

Η ανάλυση μέσω των διαγραμμάτων ομοιότητας είναι μια ανάλυση «τοπικού επίπεδου» σε αντιπαράθεση με την κατασκευή δομικών μοντέλων, που είναι ανάλυση σφαιρικού επιπέδου. Ως ανάλυση «τοπικού επίπεδου» τα συμπεράσματα που προκύπτουν είναι δύσκολο να λάβουν τη μορφή μιας γενίκευσης. Παρόλα αυτά, υπάρχουν μερικές πολύ σημαντικές διαπιστώσεις, οι οποίες μπορούν να οδηγήσουν σε επιπλέον αναλύσεις, ενώ κάποιες από αυτές δίνουν αποτελέσματα που μπορούν να συγκριθούν με αυτά της δομικής ανάλυσης. Για τους παραπάνω λόγους θεωρούμε ότι η ανάλυση ομοιότητας, καθώς και η συνεπαγωγική ανάλυση (παρόλο που δε χρησιμοποιείται στην παρούσα έρευνα), πρέπει να χρησιμοποιούνται συμπληρωματικά και βοηθητικά η μία προς την άλλη. Τα πιο χαρακτηριστικά συμπεράσματα, όπως παρατηρούνται στις αναλύσεις ομοιότητας στο συνολικό πληθυσμό, είναι τα παρακάτω.

1. Ένα πρώτο πολύ σημαντικό συμπέρασμα είναι ότι τα έργα της αναγνώρισης συναρτήσεων χωρίζονται σε 3 ομάδες, ανάλογα με το είδος της αναπαράστασης που χρησιμοποιείται στα έργα (λεκτικά, συμβολικά ή με γραφική παράσταση). Η σημασία λοιπόν του είδους αναπαράστασης με την οποία εκφράζεται ένα έργο συνάρτησης

εκφράζεται και με την στεγανοποίηση αυτών των ομάδων. Η στεγανοποίηση αυτή είναι πολύ ισχυρή στο συνολικό πληθυσμό.

2. Λιγότερο σαφείς είναι οι σχέσεις μεταξύ των έργων του ορισμού. Παρόλα αυτά στις διάφορες ομάδες που σχηματίζονται, εμφανίζεται με έντονο τρόπο μια ισχυρή εννοιολογική ομάδα του ορισμού της συνάρτησης. Μια δεύτερη ομάδα που σχηματίζεται αφορά στις σχέσεις μεταξύ απάντησης και επεξήγησης που δίνουν οι μαθητές σε συγκεκριμένα έργα.

3. Όσον αφορά στις ομάδες ομοιότητας στα έργα ερμηνείας, μπορούμε να διακρίνουμε 4 περιπτώσεις, από τις οποίες είναι σημαντικές οι δύο πρώτες:

    a. Στην πρώτη περίπτωση, όταν λαμβάνονται υπόψη μόνο οι ορθές απαντήσεις, δημιουργούνται 2 κύριες ομάδες, οι οποίες ενώνονται μεταξύ τους με πολύ ισχυρό δεσμό. Όλες οι μεταβλητές των δύο ομάδων συνδέονται μεταξύ τους με σχέση ομοιότητας που αγγίζει το 0.99.

    b. Στη δεύτερη περίπτωση που εξετάζουμε ορθές απαντήσεις, αλλά και επεξηγήσεις, δημιουργούνται και πάλι 2 ομάδες, που συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ισχυρό δεσμό (0.99).

4. Όσον αφορά στα έργα στα οποία εξετάζεται η προσέγγιση των μαθητών (γεωμετρική ή ολική προσέγγιση, σε αντιπαράθεση με την αλγεβρική ή την προσέγγιση σημείο προς σημείο), τα διαγράμματα ομοιότητας διαφέρουν από τις προηγούμενες αναλύσεις. Στην περίπτωση αυτή, όπως αναμένονταν, εμφανίζεται με έντονο τρόπο το φαινόμενο της στεγανοποίησης ανάμεσα στη γεωμετρική και αλγεβρική προσέγγιση. Πιο συγκεκριμένα στο διάγραμμα με όλες τις μεταβλητές δημιουργούνται 4 ομάδες, οι οποίες δε συνδέονται μεταξύ τους.

5. Όσον αφορά στην επίλυση προβλήματος, οδηγεί σε ένα φυσιολογικό συμπέρασμα, αφού παρατηρείται μια στεγανοποίηση σε δύο ομάδες, που αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικά είδη συναρτήσεων: από την μια μεριά έργα τα οποία αντιστοιχούν σε γραμμική συνάρτηση και από την άλλη έργα που αντιστοιχούν σε καμπύλες.

6. Η ανάλυση ομοιότητας που αφορά δύο ομάδες έργων, από τη μια των προβλημάτων και από την άλλη της ερμηνείας διαγραμμάτων, επαληθεύει προηγούμενη

παρατήρηση, δηλαδή τη στεγανοποίηση μεταξύ έργων γραμμικής συνάρτησης και έργων που αντιστοιχούν σε καμπύλες.

7. Όσον αφορά στην ανάλυση ομοιότητας μεταξύ επίλυσης προβλήματος και προσέγγισης, δεν παρατηρούνται έντονες συνδέσεις μεταξύ ομάδων. Επιπλέον, επαληθεύεται για ακόμα μια φορά η στεγανοποίηση υποομάδων που αντιστοιχούν σε διαφορετικά είδη συναρτήσεων.

8. Συγκρίνοντας την ομάδα έργων ερμηνείας, προσέγγισης και επίλυσης προβλήματος, παρατηρείται ότι υπάρχει μια ανάμειξη των παραπάνω έργων, γεγονός που είναι αναμενόμενο εφόσον δεν υπάρχει διακριτή διαφορά μεταξύ ενός έργου επίλυσης προβλήματος, προσέγγισης και ερμηνείας.

9. Στη σχέση ομοιότητας μεταξύ έργων ορισμού-αναγνώρισης-προσέγγισης, υπερισχύει ο χαρακτήρας σημαντικής σχέσης μεταξύ έργων του ορισμού.

10. Τέλος, η ανάλυση ομοιότητας στην ομάδα έργων ορισμού-αναγνώρισης-επίλυσης προβλήματος δίνει πάλι στεγανοποιημένες υποομάδες, στις οποίες φαίνονται έντονα οι σχέσεις μεταξύ έργων ορισμού και αναγνώρισης.

11. Όλες οι προηγούμενες παρατηρήσεις που ισχύουν για το σύνολο των μαθητών εμφανίζονται σε μικρότερο ή μεγαλύτερο βαθμό και στα διαγράμματα ομοιότητάς των μαθητών του Γυμνασίου και του Λυκείου. Οι διαφορές όμως αυτές είναι τοπικού επιπέδου και δεν μπορούν να ερμηνευτούν με ανάλογα τρόπο με αυτό των δομικών μοντέλων.

Β. Σύγκριση της επίδοσης των μαθητών

Στην παρούσα μελέτη εξετάζεται η χρήση των διαφόρων τρόπων αναπαράστασης στις συναρτήσεις στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Η υιοθέτηση μιας προοπτικής στις διαφορετικές βαθμίδες της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, έχουμε ως στόχο να εντοπίσουμε τις ικανότητες των μαθητών στον ορισμό συναρτήσεων, την αναγνώριση και το χειρισμό τους σε διάφορες μορφές αναπαράστασης και στην επίλυση προβλήματος, με έμφαση στο είδος της προσέγγισης που χρησιμοποιούν (αλγεβρική ή γεωμετρική).

Στο μέρος αυτό συζητούνται τα αποτελέσματα της σύγκρισης της επίδοσης των μαθητών στις διάφορες διαστάσεις της εννοιολογικής κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης που μελετήθηκαν, ως προς την ηλικιακή ομάδα. Τα αποτελέσματα αυτά απαντούν στο τέταρτο ερευνητικό ερώτημα: Ποιες οι διαφορές στην επίδοση των μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου, Α΄ και Β΄ Λυκείου όσον αφορά στην επίλυση έργων σχετικών με την έννοια της συνάρτησης;

Ορισμός

Όσον αφορά στον ορισμό της συνάρτησης στο Γυμνάσιο, το ποσοστό των μαθητών που απαντούν σωστά είναι πάρα πολύ χαμηλό. Πολύ χαμηλό το ποσοστό παρουσιάζεται και για τα παραδείγματα. Όμως πιο εύκολα μπορούν να δώσουν παραδείγματα, αντί αντιπαραδείγματα. Έτσι στο Γυμνάσιο πιο εύκολα δίνουν «ορισμό στην πράξη» , αντί τον τυπικό ορισμό. Για την Α΄ Λυκείου ένα ποσοστό μαθητών μπορούν να δίνουν ορισμούς, αλλά είναι λιγότεροι από τους μισούς. Ποιο αυξημένο είναι το ποσοστό των μαθητών που δίνουν ορισμό στην πράξη. Επίσης, φαίνεται να γεφυρώνεται η απόσταση μεταξύ απόδοσης των παραδειγμάτων και των αντιπαραδειγμάτων. Στη Β΄ Λυκείου οι περισσότεροι μαθητές δίνουν ορισμό στην πράξη (πάλι λιγότεροι από τους μισούς).

Η σύγκριση μεταξύ των ηλικιακών ομάδων μας δείχνει ότι παρουσιάζονται πολύ χαμηλές επιδόσεις της Γ΄ Γυμνασίου σε σχέση με Α΄ και Β΄ Λυκείου. Η ικανότητα για απόδοση ορισμού στην πράξη κυμαίνεται με την ηλικία και η ικανότητα απόδοσης ορισμού αυξάνεται από Γυμνάσιο προς Α΄ Λυκείου με μικρή μείωση στη Β΄ Λυκείου. Η παροχή παραδειγμάτων αυξάνεται με την ηλικία – το ίδιο και για τα αντιπαραδείγματα.

Φαίνεται καθαρά ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να ορίσουν την έννοια της συνάρτησης σε όλες τις ηλικιακές ομάδες και τους είναι πιο εύκολο να δώσουν ορισμό στην πράξη. Γενικά πιο εύκολα δίνουν παραδείγματα αντί ορισμό και τέλος πιο εύκολα δίνουν παραδείγματα, αντί αντιπαραδείγματα.

Ερμηνεία

Όσον αφορά στην ερμηνεία των συναρτήσεων γενικά το έργο Β4 έχει χαμηλότερες επιδόσεις, γιατί στην ερώτηση Β7 οι μαθητές μπορούν να περάσουν από την αλγεβρική προσέγγιση και αφού υπολογίσουν τη συνάρτηση και την ελέγχουν, ενώ στην Β4 πρέπει να βρουν το αποτέλεσμα υποχρεωτικά από τη γραφική παράσταση. Στην άσκηση Β4 η γνώση που απαιτείται είναι διαδικαστική γνώση. Η Β7 ενώ είναι άσκηση ερμηνείας, ουσιαστικά είναι άσκηση αναγνώρισης η οποία επιλύεται με την απλή αλγεβρική προσέγγιση, δηλαδή με προσέγγιση μέσω σημείων. Αντίθετα η άσκηση Β4 είναι άσκηση ερμηνείας, που όμως δεν μπορεί να απαντηθεί με κανενός είδους προσέγγιση σημείων. Οι απαντήσεις στα τρία ερωτήματα δεν μπορούν παρά να προκύψουν από μία ερμηνεία της γραφικής παράστασης (από μια γεωμετρική προσέγγιση).

Συγκρίνοντας την Α4 και Β5 μια a-priori ανάλυση θα ερμήνευε την ερώτηση Α4 ως πιο απλή, διότι αντιστοιχεί στις διάφορες φάσεις της εκφώνησης (πυρκαγιά με αργό ρυθμό/έντονη πυρκαγιά/πυρκαγιά που σβήνει). Πράγματι το σχήμα Γ αποκλείεται αμέσως γιατί δεν μπορεί να μηδενίζεται το εμβαδόν, το σχήμα Β επίσης απορρίπτεται διότι το πρώτο ευθύγραμμο τμήμα είναι παράλληλο με τον άξονα του χρόνου, ενώ στην αρχή η πυρκαγιά προχωρούσε αργά, άρα απομένει η γραφική παράσταση Α που αντιστοιχεί στην εκφώνηση της ερώτησης. Η παραπάνω όμως ανάλυση απαιτεί μεγάλη εξοικείωση με την ερμηνεία γραφικής παράστασης, που δεν αντιστοιχεί στις δεξιότητες που αναπτύσσονται από τους μαθητές.

Η ερώτηση Β5 επίσης δεν αντιστοιχεί στις δεξιότητες των μαθητών παρά οι δύο πρώτες γραφικές παραστάσεις μπορούν εύκολα να αποκλειστούν, εφόσον τμήματα της γραφικής παράστασης φαίνονται να πηγαίνουν προς τα αριστερά πράγμα που δεν είναι δυνατόν αφού ο χρόνος δεν μπορεί να «πάει προς τα πίσω» (κινείται προς την ημιευθεία των αρνητικών). Έτσι προκύπτει φυσιολογικά η απάντηση Β, γραφική παράσταση.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του Πίνακας 15 η επίδοση των μαθητών βελτιώνεται στα έργα ερμηνείας με βάση την ηλικιακή ομάδα. Για τους μαθητές της Α΄ Λυκείου εντοπίζεται μια διαφοροποίηση όσον αφορά στην ύπαρξη ή μη αριθμητικών τιμών. Στα έργα που η ερμηνεία βασίζεται σε συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές οι μαθητές της συγκεκριμένης ηλικιακής ομάδας επιτυγχάνουν καλύτερα αποτελέσματα. Οι μαθητές της

Γ΄ Γυμνασίου δεν είναι δηλαδή ακόμη σε θέση να ερμηνεύουν γραφικές παραστάσεις χωρίς την παρουσία αριθμητικών δεδομένων, κάτι που υποδηλώνει ένα πιο πρώιμο επίπεδο ερμηνείας. Για τους μαθητές της Α΄ και Β΄ Λυκείου η ερμηνεία δε φαίνεται να επηρεάζεται από την απουσία ή την παρουσία αριθμητικών δεδομένων. Περισσότερο αυτό που διακρίνει σε αυτές τις ηλικιακές ομάδες την επίδοσή τους είναι ο τύπος του έργου, με το έργο που αφορούσε τη σύγκριση χωρίς αριθμητικά δεδομένα να έχει μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας σε σχέση με τα υπόλοιπα.

Σχετικά με τις επιδόσεις των μαθητών και των τριών τάξεων στα έργα ερμηνείας γραφικών παραστάσεων, η βασική παρατήρηση που προκύπτει είναι ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν μεγάλες δυσκολίες στην ερμηνεία γραφικών παραστάσεων, αφού στην πλειοψηφία των ασκήσεων επιτυγχάνουν λιγότεροι από τους μισούς μαθητές. Παρατηρείται ότι οι μαθητές έχουν καλύτερες επιδόσεις όταν στα έργα περιλαμβάνονται αριθμητικά δεδομένα, παρά στις ασκήσεις όπου η ερμηνεία δε βασίζεται σε συγκεκριμένες τιμές. Επίσης, οι μαθητές έχουν καλύτερες επιδόσεις στα έργα ερμηνείας χωρίς αριθμητικά δεδομένα που περιλαμβάνουν και σύγκριση γραφικών παραστάσεων, παρά στις ασκήσεις που περιλαμβάνουν μόνο ερμηνεία γραφικών παραστάσεων.

Αναγνώριση

Όσον αφορά στην αναγνώριση συνάρτησης παρατηρούμε ότι και σε αυτή τη διάσταση υπάρχει αύξηση ή σταθεροποίηση ποσοστών ανάλογα με την αύξηση στη τάξη που φοιτούν. Σε όλες όμως τις περιπτώσεις λιγότεροι από τους μισούς μαθητές μπορούν να απαντήσουν σωστά στις ερωτήσεις που αφορούν αναγνώριση συνάρτησης. Το μόνο έργο που παρουσιάζει διαφορετικό αποτέλεσμα είναι το έργο Α13. Στην Α΄ Λυκείου οι μαθητές απαντούν σωστά σε μικρότερο ποσοστό. Αυτό πιθανόν να οφείλεται στο γεγονός ότι οι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου έχουν διδαχτεί γεωμετρία.

Επίλυση Προβλήματος

Για την επίλυση προβλήματος στην Γ΄ Γυμνασίου παρουσιάζονται πάρα πολύ χαμηλές επιδόσεις. Ειδικότερα στο έργο Β8 οι σωστές απαντήσεις είναι σχεδόν ανύπαρκτες και στο έργο Β6 λίγο ψηλότερες. Στην Α΄ Λυκείου επίσης παρουσιάζονται χαμηλές επιδόσεις, αλλά είναι ψηλότερες από την Γ΄ Γυμνασίου ειδικότερα στο έργο Β6. Στη Β΄ Λυκείου εξακολουθούν οι χαμηλές επιδόσεις (περίπου το 1/3 των μαθητών). Στο έργο Α6 παρουσιάζονται καλύτερες επιδόσεις.

Συνολικά παρατηρούμε ότι η επίδοση αυξάνεται με την ηλικία. Οι επιδόσεις όμως παρά την αύξηση που παρουσιάζουν παραμένουν ακόμα αρκετά χαμηλά.

Καταληκτικά σχόλια για τη σύγκριση

Έχουμε επικεντρωθεί στην ικανότητα των μαθητών να ορίζουν την έννοια της συνάρτησης, από την ικανότητά τους να χειρίζονται ευέλικτα τους διάφορους τρόπους αναπαράστασης και την ικανότητά τους για την επίλυση των προβλημάτων συνάρτησης. Τα αποτελέσματα της παρούσας μελέτης επιβεβαιώνουν προηγούμενα ευρήματα που οι μαθητές αντιμετωπίζουν πολλές δυσκολίες στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης σε διαφορετικές ηλικίες της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Sajka, 2003), (Tall, 1991). Τα ευρήματα αποκάλυψαν σοβαρές δυσκολίες των μαθητών στο να προτείνουν ένα σωστό ορισμό για τη συνάρτηση ή μια τάση να αποφύγουν να προτείνουν έναν ορισμό λόγω πιθανής πεποίθησής τους ότι οι διαισθητικές και άτυπες παρουσιάσεις και αντιλήψεις τους δεν μπορεί να είναι μέρος της μαθηματικής εκπαίδευσης. Οι δυσκολίες αυτές είναι σύμφωνες με τα ευρήματα των Elia, I., Panaoura. A, Eracleous, A. & Gagatsis, A., (2007). Αν και οι τυπικοί ορισμοί των μαθηματικών εννοιών περιλαμβάνονται στα σχολικά βιβλία της διδασκαλίας των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, οι καθηγητές των μαθηματικών δεν εστιάζονται στους ορισμούς. Αντ' αυτού, προωθούν τη χρήση των αλγοριθμικών διαδικασιών για την επίλυση των έργων, (Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingedorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D., 1996), και υποτιμούν τη λεκτική και συμβολική προσέγγιση της έννοιας (Morgan, 2013), ως αλληλένδετες διαστάσεις της έννοιας.

Φαίνεται πιο εύκολο για τους μαθητές να παρουσιάσουν ένα παράδειγμα το οποίο επεξηγεί τη μαθηματική έννοια, αντί να χρησιμοποιήσουν ένα αντιπαράδειγμα, προκειμένου να εξηγήσουν την αντίστοιχη αρνητική δήλωση. Ταυτόχρονα, είναι πιο εύκολο για αυτούς να χρησιμοποιήσουν ένα παράδειγμα για να εξηγήσουν την έννοια της συνάρτησης και όχι εξηγώντας τη διαδικασία που ακολουθούν για την κατασκευή μιας απόδειξης. Αυτό είναι πιθανώς μια συνέπεια και το αποτέλεσμα της μεθόδου των καθηγητών τους από τη χρήση παραδειγμάτων για περαιτέρω επεξήγηση μιας αφηρημένης μαθηματικής έννοιας.

Οι μαθητές πετυχαίνουν υψηλότερες επιδόσεις στο χειρισμό της έννοιας σε γραφική μορφή και μετάφραση από ένα είδος αναπαράστασης στο άλλο, αντί να αναγνωρίζουν τις συναρτήσεις σε αλγεβρικές και γραφικές μορφές. Η συμβολική εξίσωση και επίλυση ακολουθείται από γραφική εργασία (Llinares, 2000) και ίσως για αυτό το λόγο, η απόδοση σε γραφικές παραστάσεις ήταν υψηλότερη. Τέλος, τα αποτελέσματα των μαθητών στη Γ΄ Γυμνασίου της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης ήταν δραματικά αρνητικά, έτσι θα πρέπει να εξεταστεί περαιτέρω κατά πόσον η αποτελεσματικότητα της επεξεργασίας τους και η γνωστική τους ωριμότητα να μας αποτρέψει από τη διδασκαλία της συγκεκριμένης έννοιας στη συγκεκριμένη ηλικία. Παρά την τάση να χρησιμοποιείται το σπειροειδές σχήμα της ανάπτυξης των εννοιών στη διαδικασία της διδασκαλίας και το πρόγραμμα σπουδών (ΥΠΠ, 2010), πρέπει να επανεξεταστούν οι μέθοδοι διδασκαλίας που χρησιμοποιούνται στις διαφορετικές ηλικίες σύμφωνα με τις γνωστικές απαιτήσεις του κάθε έργου για κάθε ηλικία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Εισαγωγή

Τα ευρήματα της παρούσας εργασίας έχουν δείξει ότι η μαθηματική έννοια της κατανόησης της συνάρτησης μπορεί να ερμηνευθεί από ένα τετραδιάστατο μοντέλο στο οποίο περιλαμβάνεται ως αναπόσπαστο μέρος η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων μαθηματικών έργων, καθώς και η ικανότητα αναγνώρισης, ερμηνείας και ορισμού της συνάρτησης. Το μοντέλο αυτό προσφέρει ένα συγκεκριμένο πλαίσιο ερμηνείας της μαθηματικής έννοιας της συνάρτησης.

Βασικά Συμπεράσματα

Τρία είναι τα βασικά συμπεράσματα της παρούσας έρευνας.

I. Το πρώτο και βασικό συμπέρασμα είναι η σημασία του ορισμού στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης, όπως ορίζεται στην παρούσα εργασία ως ένα σύνολο ισοδύναμων εκφωνήσεων ή παραδειγμάτων. Όπως φαίνεται από τα δομικά μοντέλα που έχουν παρουσιαστεί στα αποτελέσματα, οι διατομικές διαφορές που παρατηρούνται στην ευελιξία στην επίλυση προβλήματος παρατηρούνται και στην αναπαραστατική ευελιξία των μαθητών. Αυτό φανερώνει ότι οι μαθητές που επιδεικνύουν ευελιξία στην επίλυση προβλήματος έχουν ταυτόχρονα και αναπαραστατική ευελιξία.

II. Διαπιστώνεται μεγάλη διαφορά στη σύλληψη της έννοιας της συνάρτησης ανάμεσα στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο. Όπως φαίνεται από τη σύγκριση των ποσοστών επιτυχίας, η διαφορά αυτή είναι πολύ μεγάλη. Οι διαφορές που αφορούν ειδικά σε ισοδύναμες εκφωνήσεις ή σε διάφορα παραδείγματα, δείχνει ότι οι μαθητές του Γυμνασίου έχουν στο μυαλό τους ως συνάρτηση ένα χαοτικό σύνολο από αντιλήψεις, ψευδο-ορισμούς, λανθασμένες εφαρμογές του ορισμού, καθώς και λανθασμένη χρήση αναπαραστάσεων. Πολλά από αυτά αποτελούν πιθανά γνωστικά ή επιστημολογικά εμπόδια τα οποία είναι βέβαιο ότι εμποδίζουν την ορθή σύλληψη της έννοιας της συνάρτησης και στους μαθητές Λυκείου, πιθανόν ανεξάρτητα και από τη διδασκαλία που δέχονται. Παρόλα αυτά τα διάφορα μοντέλα επαληθεύονται με την ίδια μορφή τόσο για το Γυμνάσιο όσο και για το Λύκειο. Αυτό πιθανόν να σημαίνει ότι μια διδασκαλία για την έννοια της συνάρτησης πρέπει να βασίζεται στους άξονες (παράγοντες) που αποκαλύφθηκαν στην παρούσα έρευνα.

III. Το τρίτο αφορά στον όρο ευελιξία (flexibility) που χρησιμοποιείται ευρέως στην έρευνα της μαθηματικής παιδείας δηλαδή στρατηγική ευελιξία, αναπαραστατική ευελιξία, ευελιξία επίλυσης προβλημάτων κ.λπ. Η παρούσα εργασία φανερώνει με έντονο τρόπο την ισχυρή σχέση ανάμεσα σε δύο είδη ευελιξίας, την αναπαραστατική ευελιξία και την ευελιξία επίλυσης προβλημάτων. Η σύνδεση των δύο αυτών ειδών ευελιξίας θεωρούμε ότι συμβάλλει στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης. Επιπλέον, τα δύο είδη ευελιξίας ορίζονται με συγκεκριμένο τρόπο όσον αφορά στην έννοια της συνάρτησης. Από τη μια η ευελιξία επίλυσης προβλημάτων περιλαμβάνει δύο διαστάσεις, την επίλυση λεκτικών έργων, καθώς και την ερμηνεία γραφικών αναπαραστάσεων, από την άλλη η αναπαραστατική ευελιξία ορίζεται με τη βοήθεια τριών διαστάσεων, ορισμός (σε διάφορα είδη αναπαραστάσεων), αναγνώριση (σε διάφορα είδη αναπαραστάσεων), μεταφράσεις (μέσω αλγεβρικής και γεωμετρικής προσέγγισης)

Εκπαιδευτικές εφαρμογές

Σύμφωνα με την Steele et al. (2013), συνήθως στις ΗΠΑ, ο ορισμός της έννοιας της συνάρτησης και η σύνδεση της με μια γραφική παράσταση, αναπτύσσεται στο Γυμνάσιο, ενώ η επίσημη μελέτη της συνάρτησης με έμφαση στη συμβολική και γραφική μορφή εμφανίζεται στο Λύκειο. Σύμφωνα με τους Bardini, Pierce και Stacey (2004) στην Αυστραλία στα σχολικά μαθηματικά εγχειρίδια η επίλυση μιας συμβολικής εξίσωσης ακολουθείται από γραφική λύση. Ωστόσο, μια σωστή κατανόηση της άλγεβρας απαιτεί από τους μαθητές να είναι άνετοι και με τις δύο αυτές πτυχές των συναρτήσεων (Schwartz & Yerushalmy, 1992). Είναι προφανές λοιπόν ότι η επίδραση της διδασκαλίας είναι εξαιρετικά ισχυρή και η προώθηση των ειδικών εργαλείων ή διαδικασίες ενισχύει την ανάπτυξη των συγκεκριμένων γνωστικών διεργασιών και δομών. Για παράδειγμα, έχει προταθεί ότι ένας τρόπος για να βελτιωθεί η κατανόηση των μαθητών κάποιων μαθηματικών εννοιών μπορεί να είναι η χρήση της τεχνολογίας με γραφικά και συμβολικά συστήματα (Yerushalmy, 1991).

Η εκπαιδευτική πράξη, η οποία είναι μια από τις εκφράσεις της ανθρώπινης σκέψης, χαρακτηρίζεται από τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων με στόχο την απόδοση ιδεών με διαφορετικούς τρόπους. Κατ' επέκταση, η Μαθηματική Εκπαίδευση ως αναπόσπαστο μέρος της εκπαιδευτικής πράξης, που περιλαμβάνει σύνολα ιδεών και εννοιών, αποτελεί επίσης τομέα της ανθρώπινης δραστηριότητας και σκέψης, ο οποίος χαρακτηρίζεται από τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων. Σύμφωνα με τον (Kaput J. , 1987a), τα μαθηματικά αποτελούν ένα επιστημονικό οικοδόμημα που εξετάζει τη διαδικασία της αναπαράστασης από μια δομή σε άλλη. «Μεγάλο μέρος της δουλειάς που γίνεται στα μαθηματικά επικεντρώνεται στον εντοπισμό εκείνης της δομής που τελικά διατηρείται μετά την αναπαράσταση» (Kaput, 1987a. στου Γαγάτση «Συναρτήσεις, ένα παιγνίδι αλλαγών πεδίου αναπαράστασης», 2000, σελ. 2).

Πιστεύουμε ότι δεν είναι επαρκές μόνο να περιγράφουμε τις γνώσεις των μαθητών για μία έννοια, αλλά είναι ενδιαφέρον να σχεδιάσουμε, να εφαρμόσουμε διδακτικές δραστηριότητες και να εξετάσουμε την αποτελεσματικότητα τους. Ο Brown (2009) προτείνει ότι η κατασκευή των εννοιολογικών χαρτών οι οποίοι θα επιτρέπουν στους εκπαιδευτικούς να έχουν στο μυαλό τους όλες τις απαραίτητες διαστάσεις της κατανόησης της έννοιας. Η διάκριση των διαδικασιών από την εννοιολογική κατανόηση και την έλλειψη των αλληλεξαρτήσεων μεταξύ των πτυχών, όπως ο ορισμός της έννοιας, ο χειρισμός της έννοιας και της επίλυσης προβλήματος της συνάρτησης έχει ως πιθανό αποτέλεσμα το φαινόμενο του της στεγανοποίησης (Elia, I. Gagatsis, A. & Gras, R., 2005). Έτσι, η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων, η σύνδεση, ο συντονισμός και η σύγκριση μεταξύ τους και η σχέση με τον ορισμό της έννοιας δεν πρέπει να αφεθεί στην τύχη του, αλλά θα πρέπει να διδάσκεται και να μαθαίνεται συστηματικά.

Μια παρατήρηση σχετικά με το δομικό μοντέλο 2Α αφορά στους δείκτες των παραγόντων $2^{ης}$ τάξης που σχετίζονται με την ευελιξία στην επίλυση προβλήματος και την αναπαραστατική ευελιξία. Συγκεκριμένα ο παράγοντας $2^{ης}$ τάξης που αντιπροσωπεύει την ευελιξία στην επίλυση προβλήματος φορτίζει με τον πιο ψηλό δείκτη στο Λύκειο (0.999) , ενώ στο Γυμνάσιο ο δείκτης είναι κάπως πιο χαμηλός (0.983). Όσον αφορά στους δείκτες για τον παράγοντα $2^{ης}$ τάξης που αφορά στην αναπαραστατική ευελιξία, ο δείκτης για το Γυμνάσιο (0.983) είναι ψηλότερος από αυτόν του Λυκείου (0.974). Αν αυτή η παρατήρηση επιβεβαιωθεί, είναι πολύ σημαντικό για το σχεδιασμό διδακτικών παρεμβάσεων σε Γυμνάσιο και Λύκειο, αφού παρέχει πληροφορίες για το ποιες διαστάσεις της εννοιολογικής κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης είναι πιο σημαντικές σε κάθε βαθμίδα και το πού θα πρέπει να δοθεί έμφαση στη διδασκαλία.

Συμπερασματικά, η παρούσα μελέτη μας δίνει τη δυνατότητα να γνωρίσουμε και να κατανοήσουμε πώς οι μαθητές αντιλαμβάνονται την έννοια της συνάρτησης και πως συνειδητοποιούν τα εμπόδια και τις παρανοήσεις τους. Οι μέθοδοι διδασκαλίας και το διδακτικό υλικό πρέπει να εμπλουτιστεί με την επίλυση προβλημάτων. Τα παραδείγματα που παρουσιάζονται στους μαθητές είναι δομημένα με μαθηματικό τρόπο, χρησιμοποιώντας ένα φορμαλιστικό τρόπο και δεν υπάρχουν αναφορές στην καθημερινή εμπειρία. Στο πλαίσιο της διεπιστημονικής κοινωνικής πραγματικότητας, η έννοια της συνάρτησης πρέπει να σχετίζεται με σχετικούς τομείς, όπως η φυσική, η μηχανική και η τεχνολογία.

Εισηγήσεις για μελλοντικές έρευνες

Μια πρώτη μελλοντική έρευνα θα πρέπει να έχει ως στόχο την αποσαφήνιση της αναπαραστατικής ευελιξίας και σε άλλες μαθηματικές έννοιες. Ποιες διαστάσεις παραμένουν αναλλοίωτες και γιατί;

Μια δεύτερη έρευνα θα πρέπει να αποσαφηνίσει τις διαδικασίες των μαθητών κατά την ερμηνεία των γραφικών παραστάσεων. Μπορούμε να προτείνουμε μια ταξινομία γραφικών παραστάσεων των μαθητών ανάλογα με τις δυσκολίες που τους δημιουργεί η ερμηνεία τους. Σε μια μελλοντική έρευνα θα ήταν ενδιαφέρον να διερευνηθεί ποια έργα αναγνώρισης, ερμηνείας, και προσέγγισης συμβάλλουν στην αύξηση της ικανότητας επίλυσης προβλήματος και ποια έργα ενδεχομένως παρεμποδίζουν την ανάπτυξης της ικανότητας αυτής. Στόχος της διδασκαλίας των Μαθηματικών είναι η δημιουργία πλούσιων νοητικών αναπαραστάσεων για τις διάφορες έννοιες με απώτερο σκοπό την αξιοποίησή τους για την επίλυση προβλήματος. Θα ήταν χρήσιμο να κατασκευαστούν τέτοια έργα άμεσης μετάφρασης τα οποία να συμβάλλουν στη δημιουργία δομημένων αναπαραστάσεων σχετικά με την έννοια της συνάρτησης και κατ' επέκταση στη μεγιστοποίηση της ικανότητας επίλυσης προβλήματος.

Επαληθεύτηκαν οι αλληλεξαρτήσεις μεταξύ των διαφόρων πτυχών στην κατανόηση των συναρτήσεων. Σημαντικό είναι να γίνει διαχρονική έρευνα για το πώς και πόσο αναπτύσσονται οι ικανότητες των μαθητών στον καθορισμό της έννοιας, στην αναγνώριση και το χειρισμό της έννοιας και στη μετάφραση της έννοιας από τη μία αναπαράσταση στην άλλη. Οι διαστάσεις αυτές είναι σημαντικές για την εννοιολογική κατανόηση των συναρτήσεων και ειδικά πρέπει να επικεντρωθούμε στις σχέσεις αυτών των διαστάσεων.

Χρειάζεται περισσότερη και σε βάθος έρευνα στο ρόλο και την επιρροή του ορισμού στις υπόλοιπες διαστάσεις της εννοιολογικής κατανόησης των συναρτήσεων, καθώς τα αποτελέσματά μας αποκαλύπτουν μεγάλες δυσκολίες των μαθητών σε αυτή την πτυχή της έννοιας.

Πιστεύουμε ότι απαιτείται μία έρευνα με ποιοτική προσέγγιση, για μελέτη σε βάθος των στρατηγικών και των προσεγγίσεων που χρησιμοποιούν οι μαθητές στην επίλυση προβλήματος και να δοθεί έμφαση στη διαδικασία μετάφρασης και πώς αναπτύσσεται η αναπαραστατική ευελιξία.

Πρέπει να τονιστεί η ανάγκη για έμφαση στη γνώση του ορισμού και η ανάγκη για συντονισμό των διαφόρων διαστάσεων της έννοιας της συνάρτησης και να γίνει οργανωμένος σχεδιασμός από ειδικούς διδακτικών παρεμβάσεων και καταστάσεων με στόχο την ανάπτυξη της αναπαραστατικής ευελιξίας και της ευελιξίας στην επίλυση προβλήματος. Το κεντρικό ερώτημα που παραμένει είναι πως να αναπτύξουμε τη γνώση του ορισμού των μαθητών ώστε να βελτιώσουμε και τις υπόλοιπες διαστάσεις της κατανόησης της έννοιας.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Ainsworth, S., Bibby, P.A., & Wood, D.J. (1997). Information technology and multiple representations: New opportunities - new problems. *Journal of Information Technology for Teacher Education*, *6*, 93-104.

Anderman, E., & Midgley, C. (1997). Changes in personal achievement goals and the perceived classroom goal structures across the transition to middle level schools. *Contemporary Educational Psychology, 22*, 269-298.

Anderson, L., Jacobs, J., Schramm, S., & Splittgerber, F. (2000). School transitions: Beginning of the end or a new beginning? *International Journal of Educational Research, 33,* 325-339.

Antonini, S. (2006). Graduate Students' Processes in Generating Examples of Mathematical Objects. *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)* (σσ. 57-64). Prague: In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka, & N. Stehlikova (Eds.).

Bardini, C. , et al. (2004). Teaching linear functions in context with graphics calculators: Students' responses and the impact of the approach on their use of algebraic symbols. *International Journal of Science and Matheamtics Education, 2,* 353-376.

Bentler, P. (1995). Multivariate Software Inc. Στο EQS, *EQS: Structural equations program manual.* California.

Bergeron, J. C., & Herscovics, N. (1982). Levels in the understanding of the function concept. *Proceedings of the conference on functions* (σσ. 39-46). Enschede: The Netherlands: National Institute for Curriculum.

Bishop, A. J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., & Laborte, C. (1996). *International Handbook on Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bloch, I. (2003). Teaching Functions in a Graphic milieu: What Forms of Knowledge Enable Students to Conjecture and prove? *Educational Studies in Mathematics, 52,* 3-28.

Bloch, S. (2003). Teaching linked lists and recursion without conditionals or null. *Journal of Computing Sciences in Colleges, 18*(5), 96-108.

Bodin, A., Coutourier, R., & Gras, R. (2000). CHIC: Classification Hiérarchique Implicative et Cohésive-Version sous Windows – CHIC 1.2. *Rennes: Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques.*

Boulton-Lewis, G. (1998). Children's strategy use and intapretations of mathematical representations. *Journal of Mathenutzcal Behavior, 17*, 219-239.

Brown, J. (2009). Concept maps: Implications for the teaching of function for secondary school students. . *Grossing divides: Proceedings of the 32nd annual conferences of the Mathematics Education Research Group of Australia.* (σσ. 65-72). In R. Hunter, B. Bicknell & T. Burgess (Eds.).

Byrne, B. M. (1994). *Structural equation modeling with EQS and EQS/Windows. Thousand Oaks.* CA: Sage Publications. .

Charles, R. I. (1980). Exemplification and Characterization Moves in the Classroom Teaching of Geometry Concepts. *Journal for Research in Mathematics Education, 11(1)*, σσ. 10-21.

Charles, R., Lester, F. & O΄'Daffer, P. (1987). How to Evaluate Progress in Problem Solving. *National Council of Teachers of Mathematics.*

Cifarelli, V. V. (1998). The development of mental representations as a problem solving activity. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 239-264.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingedorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 167 – 192.

Dahlberg, Randall & Housman, David. (1997). Facilitating Learning Events Through Example Generation. *Educational Studies in Mathematics, 33*, 283-299.

Davis, R. B. (1975). Cognitive Processes Involved in Solving Simple Algebraic Equations. *Journal of Children's Mathematical Behavior, 1*(3), 7-35.

Deliyianni, E., & Gagatsis, A. (2013). Tracing the development of representational flexibility and problem solving in fraction addition: A longitudinal study. *Educational Psychology, 33*(4), 427 - 442.

Deliyianni, E., Elia, I., Gagatsis, A., & Panaoura, A. (2011). Representational flexibility and problem solving in fraction addition at a point of transition from primary to secondary. *Proceedings of the Symposium "Mathematics education research at the University of Cyprus and Tel Aviv University"*, (σ. 18). Lefkosia, Cyprus.

Deliyianni, E., Gagatsis, A., Elia, I, Panaoura, A. . (in press). Representational Flexibility and Problem Solving Ability in Fraction and Decimal Number Addition: A Structural Model.

Descartes, R. (1637). *La Géométrie.*

Doorman et al. (2012, December). Tool use and the development of the function concept: from repeated calculations to functional thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education, 10*(6), 1243-1267.

Dormolen J. & Zaslavsky O. (2003). The many facets of a definitionQ The case of periodicity. *Mathematical Behavior, 22*, 91 - 106.

Dubinsky, E., & Harel, G. (1992). The nature of the process conception of function. Στο G. H. Dubinsky, *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy, MAA notes 25* (σσ. 85-106). Washington: Mathematical Association of America.

Dufour – Janvier, B. B. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In C. Janvier (Ed.), .

Duval, R. (1987). Ο ρόλος της ερμηνείας στη μάθηση των μαθηματικών. *Διάσταση, 2*, 56-74.

Duval, R. (1987). Ο ρόλος της ερμηνείας στη μάθηση των μαθηματικών. Διάσταση. *Διάσταση, 2*, 56-74.

Duval, R. (1993). Registres de representation semiotique et fonctionnement cognitif de la pensee. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, 37-65.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. *Retrieved from ERIC ED*, 466 379.

Duval, R. (2002). Representation, vision, and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic Issues for Learning. Στο Hitt (Επιμ.)., (σσ. 311-336).

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, Vol. 61, nos. 1-2, pp. 103-131.*(nos. 1-2), 103-131.

Eisenberg, T. & Dreyfus, T. (1991). On the Reluctance to Visualize in Mathematics. Στο W. &. Zimmerman, *Visualization in Teaching & Learning Mathematics* (σσ. 25-37).

Eisenberg, T. (1991). 'Functions and associated learning difficulties. Στο D. Tall, *Advanced Mathematical Thinking, Mathematics Education Library* (σσ. 140-152). Mathematics Education Library, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 140-152., Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Eisenberg, T. (1992). On the Development of a Sence for Functions. Στο E. D. Harel (Επιμ.), *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy* (σσ. 153-174). The Mathematical Association of America.

Eisenberg, T. (1992). On the development of a sense for functions. Στο G. Harel, & E. Dubinsky, *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (σσ. 153-174). Washington : MAA Notes 25.

Elia, I. Gagatsis, A. & Gras, R. (2005). Can we "trace" the phenomenon of compartmentatlization by using the implicative statistical method of analysis? An application for the concept of function. . *Third International Conference, ASI Implicative Statistical Analysis.*, (σσ. 175-185).

Elia, I., Panaoura A., Gagatsis, A., Gravvani, K., & Spyrou, P. (2007). Exploring different aspects of the understanding of function: Towards a four-dimensional model. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education.*

Elia, I., Panaoura, A., Gagatsis, A., Gravvani, K., & Spyrou, P. (2008). Exploring Different Aspects of the Understanding of Function: Toward a Four-Facet Model. Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education. 8 (1), 49-69. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 8*(1), 49-69.

Elia, I., Panaoura. A, Eracleous, A. & Gagatsis, A. (2007). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education, 5*, 533-556.

Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics, 21*(6), 521-554.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *The Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 105-121.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics, 3*, 413-435.

Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an educational task. *Dordrecht: Reidel.*.

Freudenthal, H. (1982). Variables and functions. *Workshop on Functions.* Enschede: Foundation for Curriculum Development.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: D. Reidel.

Gagatsis, A & Monoyiou, A. (2012). Les stratégies des futurs instituteurs dans la résolution de tâches sur les fonctions. Approche ponctuelle ou approche coordonnée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 115-137.

Gagatsis, A. (1997). Problemi di Interpretazione Connessi con il Concetto di Funzione. *La Mathematica e la sue Didattica*, *2*, 132-149.

Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004). Translation ability from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology, 24*(5), 645-657.

Gagatsis, A., Demetriou, A., Afantiti, T., Panaoura, R., Christoforides, M., & Siakalli, M. (1999). L'influenza delle rappresentazioni semiotiche. nella risoluzione de problemi additivi. *La matematica e la sua didattica, 3*, 382-403.

Gagatsis, A., Monoyiou, A., Deliyianni, E., & Philippou, A. (2010). Tracing 10th and 11th graders approaches in function tasks. *Acta Didactica Universitatis Comenianae – Mathematics, 10*, 51-67.

Glasersfeld, E. V. (1987). *The construction of knowledge: Contributions to conceptual semantics.* Salinas CA.

Goldin, G. & Janvier, C. (1998). Representation and the psychology of mathematics education. *Journal of Mathematics Behaviour, 17*(1), 1-4.

Goldin, G. (1987). Cognitive representational systems for mathematical problem solving. Στο C. Janvier, *Problems of representation in the teaching and learing of mathematics* (σσ. 125-145). Hillsdale: Erlbau.

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 137-165.

Goldin, G., & Kaput, J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. Στο L. P. Nesher, *Theories of Mathematical Learning* (σσ. 397-430). Mahwah: NJ: Lawrence Erlbaum.

Gras, R., Peter, P., Briand, H., Philippé, J. (1997). Implicative Statistical Analysis. (σσ. In C. Hayashi, N. Ohsumi, N. Yajima, Y. Tanaka, H. Bock, Y. Baba (Eds.). Proceedings of the 5th Conference of the International Federation of Classification Societies). In C. Hayashi, N. Ohsumi, N. Yajima, Y. Tanaka, H. Bock, Y. Baba (Eds.). Proceedings of the 5th Conference of the International Federation of Classification Societies .

Gray, E. & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: a 'proceptual' view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(2), 116-140.

Greeno, J. G., & Hall, R.P. (1997). Practicing representation: Learning with and about representational forms. *Phi Delta Kappan, 78*, 361-367.

Hazzan,O., & Zazkis, R. (1997). Constructing knowledge by constructing examples for mathematical concepts. Στο E. P. (Ed.) (Επιμ.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 4*, σσ. 299-306. Lahti, Finland: PME.

Hertzog, C. J., & Morgan, P. L. (1998). Breaking the barriers between middle school and high school: Developing a transition team for student success. *NASSP Bulletin, 82*(597), 94-98.

Hiebert, J. & Carpenter, Th. P. . (1992). Learning and teaching with understanding. Στο D. W. Grouws (Ed.), *Handbook of research in teaching and learning of mathematics* (σσ. 65-97)). New York: Macmilan.

Hiebert, J., & Lefevre, P. . (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. Στο J. &. Hiebert, *Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the Concept of Function. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 123-134.

J. Cottrill, E. Dubinsky, D. Nichols, K. Schwingendorf, K. Thomas, D. Vidakovic, Understanding the limit concept: beginning with a. (1996). Understanding the limit concept: beginning with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 167–192.

Janvier, C. (1987). Representation and understanding: The notion of function as an example. Στο N. Hillsdale, *In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (σσ. 67-71). Hillsdale: NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Janvier, C. (1998). The notion of chronicle as an epistemological obstacle to the concept of function. *Journal of Mathematical Behavior, 17,* 79-103.

Kalchman, M., & Case, R. (1998). Teaching mathematical functions in primary and middle school: An approach based on neo-Piagetian theory. *Scientia Paedagogica Experimental*, *35*(1), 7-54.

Kaput, J. (1985). Representation and problem solving: Methodological issues related to modeling. Στο E. Silver, *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (σσ. 381-398). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. (1987a). Representation systems and mathematics. Στο C. Janvier, *Problems of representation in teaching and learning mathematics* (σσ. 19-26). Hillsdale, NJ-: Erlbaum.

Kaput, J. (1987b). Toward a theory of symbol use in mathematics. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in mathematics learning and problem solving . Hillsdale, NJ: Erlbaum. Στο N. E. Problems of representation in mathematics learning and problem solving . Hillsdale, *Kaput, J. J. (1987b). Toward a theory of symbol use in mathematics. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in mathematics learning and problem solving . Hillsdale, NJ: Erlbaum.*

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. *A handbook of research on mathematics teaching and learning*, 515-556.

Kaput, J. (1994). Democratizing access to Calculus: New routes using old routes. Στο J. (.–1. Kaput, *Mathematical thinking and problem solving* (σσ. 77-156). Erlbaum: Hillsdale, NJ.

Kaput, J. J. (1989). Linking representations in the symbolic systems of algebra. Στο S. Wagner, & C. Kieran, *Research agenda for mathematics education: Research issues in the learning and teaching of algebra* (σσ. 167-194). Reston, VA: National Council.

Karmiloff-Smith, A. (1992). *Beyond modularity: A developmental perspective on cognitive science.* . MIT Press.

Katz, V. (1993). *A History of Mathematics.* New York: Harper Collins College Publishers.

Keisoglou, S., & Spyrou P. (2003). Processes of mathematization in a learning environment combining devices and computational tools, Rediconti Ricerca Mathematica. *Rediconti Ricerca Mathematica, 13*, 43-57.

Klein, F. (1908/1945). *Elementary mathematics from an advanced standpoint.* (T. E. R. Hedrick & C. A. Noble, Επιμ.) New York: Dover. (Original work published 1908).

Kleiner, I. (1989). Evolution of the Function Concept: a Brief Survey. *College Math*, 282-300.

Kline, R. B. (1998). *Principles and practice of structural equation modeling.* . NY: Guilford Press.

Knuth, J. E. (2000). Student understanding of the Cartesian Connection: An exploratory study. *Journal of Research in Mathematics Education, 31*(4), 500-508.

Kronfellner, M. (1996). The history of the concept of function and some implications for classroom teaching. In R.Calinge, *Historical research and integration with teaching* (pp. 317-321). MAA.

Kronfellner, M. (1998). *Historische Aspekte im Mathematikunterricht, Wien: Holder-Pichler-*. Wien : Holder-Pichler.

Kuratowski, K., & Mostowski, A. (1966). *Teoria mnogosci.* Warszawa, Polskie: Wydawnictwo Naukowe.

Lerman, I. C. (1981). *Classification et Analyse Ordinale des Donates,* . Paris: Dunod.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and Translations Among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving. Στο C. Janvier, *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (σσ. 33-40). Hillsdale: Erlbaum.

Lin, F. L., & Cooney, T. J. . (2001). Making sense of mathematics teacher education. (Eds.). Dordrecht: The Netherlands: Kluwer.

Llinares, S. (2000). Secondary school mathematics teacher’s professional knowledge: a case from the teaching of the concept of function. *Teachers and Teaching: theory and practice, 6*(1), 41-62.

Man-Keung, S. (1996). *The ABCD of Using History of Mathematics in the (undergraduate) Classroom.* <http://hkumath.hku.hk/~mks/ABCD.pdf>, Department of Mathematics, University of Hong Kong. 01/07/2010.

Marcoulides, G. A., & Schumacker, R. E. (1996). *Advanced structural equation modelling: Issues and techniques.* NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Mesa, V. (2004). Characterizing practices associated with functions in middle school textbooks: An empirical approach. *Educational Studies in Mathematics, 56*, 255-286.

Middleton, M., Kaplan, A., & Midgley, C. (2004). The relations among middle school students' achievement goals in math over time. *Social Psychology of Education, 7*, 289-311.

Mizelle, N., & Irvin, J. (2000). Transition from middle school to high school. *Middle School Journal, 31*(5), 57-61.

Monoyiou, A. (2010). Conceptual and Representational understanding related to the concept of function: A comparative study between Cyprus and Italy. *Phd dissertation under preparation*.

Monoyiou, A., & Gagatsis, A. (2008a). *A coordination of different representations in function problem solving*. Ανάκτηση από 11th International Congress of Mathematics Education: http://tsg.icme11.org

Monoyiou, A., & Gagatsis, A. (2008b). The stability of students' approaches in function problem solving: A coordinated and an algebraic approach. Στο A. Gagatsis, *Research in Mathematics Education* (σσ. 3-12). Nicosia: University of Cyprus.

Monoyiou, A., & Gagatsis, A. (2009). A Five-Dimensional Model for the Understanding of Function. Στο A. K. In Gagatsis (Επιμ.), *Cyprus and France Research in Mathematics Education* (σσ. 223-232). Nicosia: University of Cyprus.

Monoyiou, A., & Gagatsis, A. (2011). Pre-service teachers' approaches in function problem solving: A comparative study between Cyprus and Italy. *Quaderni di Ricerca in Didattica Mathematica*, 245-262.

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*(27), 249-266.

Morgan, C. (2013). Understanding practices in mathematics education: structure and text. *Educational Studies in Mathematics*, 1-15.

Moschkovich, J., A.H. Schoenfeld, and A. Arcavi . (1993). Aspects of understanding: multiple perspectives and representations of linear relations and connections among them. In Romberg. *T.A., E. Fennema and T.P. Carpenter (Eds.)* .

Moschkovich, J., Schoenfeld, A. and Arcavi, A. (1993). 'Aspects of understanding: On multiple perspectives and representations of linear relations, and connections among them', in T.A. Romberg, E. Fennema and T.P. Carpenter (eds.), Integrating Research on. Στο E. F. T.A. Romberg, *Integrating Research on the graphicasl Represantation of Function.* (σσ. 69-100). Erlbaum, Hillsdale: NJ.

Mousoulides, N., & Gagatsis, A. (2004). Algebraic and geometric approach in function problem solving. *28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* .

Mousoulides, N., & Gagatsis, A. (2004). Algebraic and geometric approach in function problem solving. *28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 3*, σσ. 385-392. Bergen, Norway: Bergen University College.: Bergen University College.

Mullins, E., & Irvin, J. (2000). Transition into middle school. *Middle School Journal, 31*(3), 57-60.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Owens, K., & Clements, M. A. (1998). Representations used in spatial problem solving in the classroom. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 197-218.

Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton, Princeton, NJ: Polya.

Radford, L. (1996). An Historical Incursion into the Hidden Side of the Early Development of Equations. (R. C. J. Gimenez, Επιμ.) *Arithmetics and Algebra Education*, 120 - 131.

Rider, R. (2004). *The effect of multi-representational methods on students' knowledge of function concepts in developmental college mathematics.* North Carolina State University: Doctoral Dissertation.

Roth, W. M., & McGinn, M. K. (1998). Legitimate peripheral participation in the education of researchers. Στο B. A. J. A. Malone, *Research and supervision in mathematics and science education* (σσ. 215-230). Mahwah: NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Roth, W., & McGinn, M. (1998). Inscriptions: Toward a theory of representing as social practice. *Review of educational research, 68*(1), σσ. 35-59.

Sajka, M. (2003). A secondary school student understands of the concept of function – a case study. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 229-254.

Sajka, M. (2003). A secondary school student understands of the concept of function – a case study. *Educational Studies in Mathematics, 53*, 229-254.

Sánchez, V., & Llinares, S. (2003). Four student teachers' pedagogical reasoning on functions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*(1), 5-25.

Sanchez, M. V. & Llinares, S. (2003). Four student teachers' pedagogical reasoning on functions. *Journal of Mathematics Teachers Education, 6*, 5-25.

Schwartz, J. L., & Yerushalmy, M. (1992). Getting Students to Function In and With Algebra. Στο G. H. E. Dubinski, *Learning the Concept of Function* (σσ. 281-289). The Mathematical Association of America (MAA).

Seeger, F. (1998). Representations in the mathematics classroom. Στο J. V. F. Seeger, *The culture of the mathematics classroom* (σσ. 308-344). Cambridge : Cambridge University Press.

Seidel, J. V. (1998). Qualis Research. Στο *Qualitative Data Analysis.*

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions. Educational Studies in Mathematics., *22*, σσ. 1-36.

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and pitfalls of reification. Educational Studies in Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 191-228.

Shuard, H., & Neill, H. (1977). The mathematics curriculum: From graphs to calculus. *From graphs to calculus.*

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. (E. D. Harel, Επιμ.) *Aspects of Epistemology and Pedagogy, MAA Notes, 25*, 25 - 58.

Skemp, R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics.* England: Har- mondsworth.

Smith, H. W. (1975). *Strategies of Social Research: The Methodological Imagination.* Prentice Hall: Englewood Cliffs.

Smith, J., diSessa, A. & Roschelle, J. . (1993/1994). Misconceptions reconceived: A constructivist analysis of knowledge in transition. *The Journal of the Learning Sciences*, 115-163.

Sowder, L. (1980). Concept and principle learning. Στο R. J. (Ed) (Επιμ.), *Research in mathematics education* (σσ. 244-285). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Steen, L. A. (1990). On the shoulders ofgiants. Washington: National Academy Press.

Suhr, D. (2006). Exploratory or Confirmatory Factor Analysis. *SAS Users Group International Conference* (σσ. 1 - 17). Cary: SAS Institute, Inc. .

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking,*, 3-23.

Tirosh, D. (1999). Tirosh, D. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 30*, 341-349.

Ullstadius, E., Carlstedt, B., Gustafsson, J.E. (2004). *Multidimensional item analysis of ability factors in spatial test items. Personality and Individ ual Differences.*

van Dormolen, J. & Zaslavsky, O. (2003). The many facets of a definition: the case of periodicity. *Journal of Mathematical Behavior, 22*(1), 1-106.

Van Streun, A., Harskamp, E. G., & Suhre. (2000). The effect of the graphic calculator on students' solution approaches: A secondary analysis. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 27-39.

Vergnaud, G. (1990). 'La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*, 133-170.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14*(3), 293-305.

Vinner, S. (1983). Conflicts between definitions and intuitions: the case of the tangent. *P.M.E.6.* Antwerp.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. Στο D. Tall, *Advanced Mathematical Thinking, Mathematics Education Library* (σσ. 65-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Vinner, S. (1992). The Function Concept as a Prototype for Problems in Mathematics Learning. *MAA Notes,*, 195- 214.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(4), 356-366.

Vollrath, H.-J. (1984). *Methodikd es Begriffslehrensim Mathematikunterricht.* Stuttgart: Klett.

Watson, A. & Mason, J. (2005). Enriching Student Learning: structuring tasks so as to limit possible generalisations. *Invited symposium paper presented at EARLi, University of Cyprus, August 2005*.

Yerushalmy, M. & Shternberg, B. (2001). The Roles of Representations ih School Mathematics. *A Visual Course to Functions* (σσ. 251-268). Reston, Virginia: NCTM.

Yerushalmy, M. (1991). Student perceptions of aspects of algebraic function using multiple representation software. *Journal of Computer Assisted Learning, 7*(1), 42-57.

Zaslavsky, O. & Ron, G. (1998). Students understandings of the role of counter-examples. Στο A. O. (eds.) (Επιμ.), *22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 4*, σσ. 225–232. Stellenbosch, South Africa,: University of South Africa.

Zaslavsky, O., & Peled, I. (1996). Inhibiting factors in generating examples by mathematics teachers and student-teachers: The case of binary operation. *Journal for Research in Mathematics Education, 27(1)*, 67-78.

Zodik, I., & Zaslavsky, O. (2008). Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 69*, 165–182.

Ασβεστά, Α., & Γαγάτσης, Α. (1995). Προβλήματα ερμηνείας και η έννοια της συνάρτησης. Στο Α. Γαγάτσης, *Διδακτική και ιστορία των Μαθηματικών.* Θεσσαλονίκη: ART of TEXT.

Βασάκος, Θ. (1995). Έννοια της Συνάρτησης στους Μαθητές του Λυκείου και Ενέργειες Κατανόησης – Εμπόδια που σχετίζονται με τον Ορισμό της Συνάρτησης. Στο Α. Γαγάτσης, *Διδακτική των Μαθηματικών: Θεωρία και Έρευνα* (σσ. 239-257). Θεσσαλονίκη: The Art of Text.

Γαγάτσης, Α., Μιχαηλίδου, Ε., & Σιακαλλή, Μ. (2001). *Συναρτήσεις. Ένα παιχνίδι αλλαγών πεδίου αναπαράστασης.* Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου, ERASMUS IP1.

Γαγάτσης, Α. (1995). *Διδακρική και Ιστορία των Μαθηματικών.* Θεσσαλονίκη: Συγγραφέα.

Γαγάτσης, Α. (2004). Επίλυση μαθηματικού προβλήματος, αναπαραστάσεις και εικόνες. *Σύγχρονες Τάσεις της Διδακτικής των Μαθηματικών*, 3-15.

Γαγάτσης, Α., Δεληγιάννη, Ε., Ηλία, Ι., Μονογυιού, Α., & Παναούρα, Α. (2008). Προβλήματα μάθησης στα μαθηματικά κατά τη μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο:. Λευκωσία:: Πανεπιστήμιο Κύπρου, Σχολή Κοινωνικών Επιστημών και Επιστημών τη Αγωγής.

Γαγάτσης, Α., Μιχαηλίδου, Ε., & Σιακαλλή, Μ. (2001). *Θεωρίες αναπαράστασης και μάθηση των Μαθηματικών.* Λευκωσία: ERASMUS IP1.

Καλδρυμίδου, Μ., & Οικονόμου, Α. (1992). Δεξιότητα Χειρισμού Γραφικών Παραστάσεων Αποφοίτων Λυκείου. Τετράδια Διδακτικής των Μαθηματικών. Στο *Τετράδια Διδακτικής των Μαθηματικών* (σσ. 10-11, 21-43).

Καλδρυμίδου, Μ., & Οικονόμου, Α. (1992). Δεξιότητα Χειρισμού Γραφικών Παραστάσεων Αποφοίτων Λυκείου. *Τετράδια Διδακτικής των Μαθηματικών*, 10-11, 21-43.

Καλδρυμίδου, Μ., & Οικονόμου, Α. (1992). Δεξιότητα Χειρισμού Γραφικών Παραστάσεων Αποφοίτων Λυκείου. *Τετράδια Διδακτικής των Μαθηματικών*, 10-11, 21-43.

Μουσουλίδης, Ν., & Γαγάτσης, Α. (2003). Γεωμετρική και αλγεβρική προσέγγιση επίλυσης σε αναπαραστάσεις συναρτήσεων. Στο &. Ι. Α. Γαγάτσης (Επιμ.), *Οι Αναπαραστάσεις και τα Γεωμετρικά Μοντέλα στη Μάθηση των Μαθηματικών. 1*, σσ. 311-344. Λευκωσία: Εκδόσεις Intercollege.

ΥΠΠ. (2010). *Μαθηματικών, Αναλυτικό Πρόγραμμα.* Λευκωσία, Κύπρος: Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού.

Φιλίππου, Α., Μονογυιού, Α. & Γαγάτσης, Α. . (2011). Μελέτη των προσεγγίσεων των μαθητών Α και Β Λυκείου σε έργα Συναρτήσεων. . *Πρακτικά 13ου Παγκύπριου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας και Επιστήμης* (σσ. 61-75). Λευκωσία: Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

Δοκίμιο Συναρτήσεων Α

Ερώτηση 1. (α) Τι ονομάζουμε συνάρτηση;

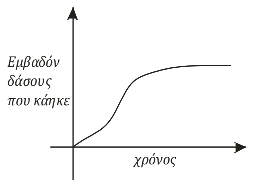
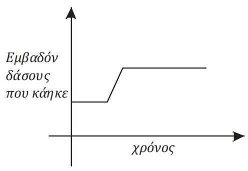
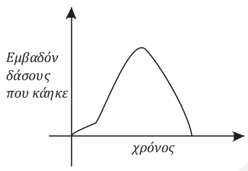
(β) Να δώσετε ένα παράδειγμα.

Ερώτηση 2. (α) Πώς καταλαβαίνουμε ότι μία γραφική παράσταση σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων **δεν** παριστάνει συνάρτηση;

(β) Να δώσετε ένα παράδειγμα μιας σχέσης η οποία **δεν** παριστάνει συνάρτηση.

Ερώτηση 3. Αν ισχύει $f(-4) = 2$ και $f(-4) = 0$, να εξετάσετε αν η σχέση f μπορεί να είναι συνάρτηση.

Ερώτηση 4. Σε ένα δάσος εμφανίστηκε πυρκαγιά. Στην αρχή η πυρκαγιά προχωρούσε αργά και έκαιγε το δάσος. Στη συνέχεια όταν φύσηξε δυνατός αέρας η πυρκαγιά φούντωσε και έκαιγε το δάσος πολύ πιο γρήγορα. Μετά εμφανίστηκε η πυροσβεστική υπηρεσία και έσβησε την πυρκαγιά. Ποια από τις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις περιγράφει την πιο πάνω κατάσταση; Να εξηγήσετε την απάντηση σας.

Α	Β	Γ	
			....

Ερώτηση 5. Να γράψετε τις συμβολικές παραστάσεις οι οποίες περιγράφουν τις παρακάτω προτάσεις:

i. Το εμβαδόν E ενός τετραγώνου σε συνάρτηση με την πλευρά του x.

ii. Ο όγκος V ενός κύβου σε συνάρτηση με την ακμή του x.

iii. Η περίμετρος Π ενός ορθογωνίου με μήκος 3 μονάδες και πλάτος χ σε συνάρτηση με το πλάτος του.

iv. Την ταχύτητα y ενός αυτοκινήτου το οποίο σε χρόνο x έκανε διάστημα 10 km σε συνάρτηση με το χρόνο.

v. Το κόστος y σε ευρώ x μονάδων ενός προϊόντος, αν η μια μονάδα έχει κόστος 5 ευρώ σε συνάρτηση με τις μονάδες.

vi. Το υπόλοιπο y του όγκου του πετρελαίου που μένει σε μια δεξαμενή αν αρχικά υπήρχαν 1000 λίτρα, τα οποία καταναλώνονται με ρυθμό 20 λίτρα την ημέρα , σε συνάρτηση με τις ημέρες x.

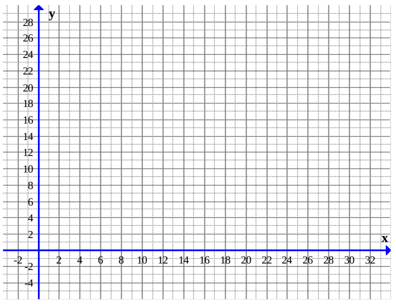
Ερώτηση 6. Ο Κωστάκης σήμερα έχει €20 και ξοδεύει €1 την ημέρα. Η αδελφή του η Ελένη έχει €15 και ξοδεύει €0,5 την ημέρα. Εάν δεν τους δώσει κάποιος άλλα λεφτά τότε:

i. Να βρείτε συναρτήσει του αριθμού *x* των ημερών το ποσό *y* των χρημάτων που θα έχει ο καθένας τους.

ii. Να κάνετε τη γραφική παράσταση των δύο συναρτήσεων.

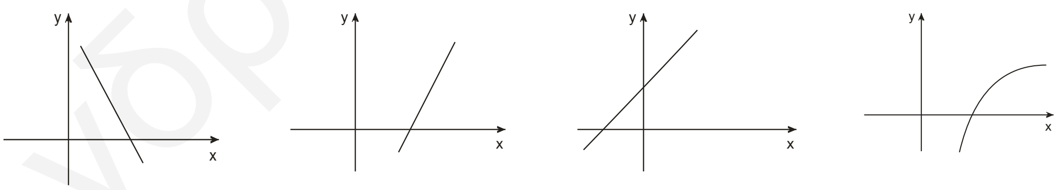
iii. Μετά από πόσες ημέρες τα δύο αδέλφια θα έχουν τα ίδια χρήματα;

iv. Πόσα χρήματα θα τους έχουν μείνει;

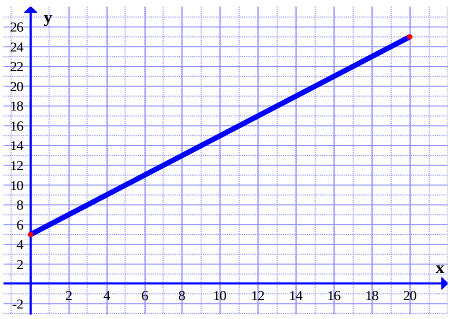


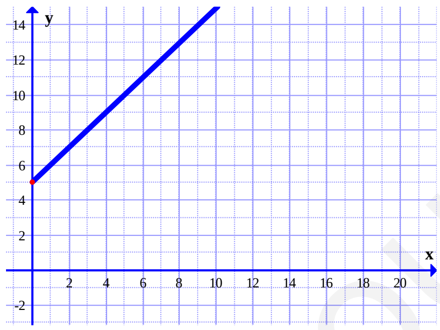
Ερώτηση 7. Παρακάτω παρουσιάζονται τέσσερα γραφήματα. Ποιο από αυτά θα μπορούσε να είναι το γράφημα της $y = x - 2$; Να εξηγήσετε την απάντηση σας.

Α Β Γ Δ

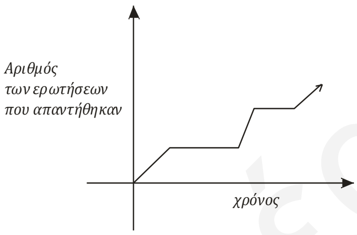


Ερώτηση 8. ***.*** Να εξετάσετε αν τα πιο κάτω γραφήματα παριστάνουν την ίδια συνάρτηση. Να εξηγήσετε την απάντηση σας.





Ερώτηση 9. Στην πιο κάτω γραφική παράσταση παρουσιάζεται ο αριθμός των απαντήσεων που δίνει συνάρτηση του χρόνου ένας μαθητής κατά τη διάρκεια ενός διαγωνίσματος. Να εξηγήσετε τον τρόπο συμπεριφοράς του μαθητή με βάση τη γραφική παράσταση.



Ερώτηση 10. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συμβολικές εκφράσεις μπορούν να ορίσουν συναρτήσεις. Να κυκλώσετε τις σχέσεις που ορίζουν συναρτήσεις.

Α. $2x + y = 3, \quad x \in \mathbb{R}$

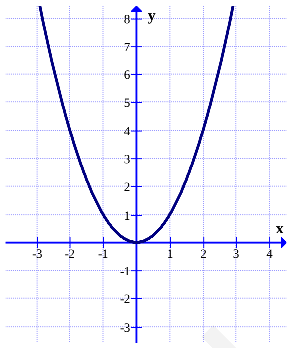
Β. $y^2 = 4x \quad x \in \mathbb{R}_+$

Γ. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \alpha\nu \ x \geq 3 \\ -x + 2 & \alpha\nu \ x < 3 \end{cases}$

Δ. $y = \sqrt{x - 2} + 5, \quad x \in \mathbb{R}$

Ε. $y = x^2 + 3x + 3 \quad x \in [-2, +5]$

Ερώτηση 11. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$.

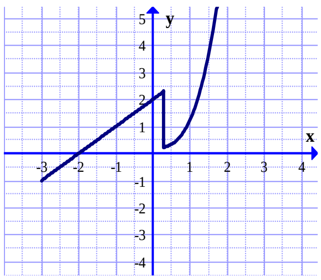
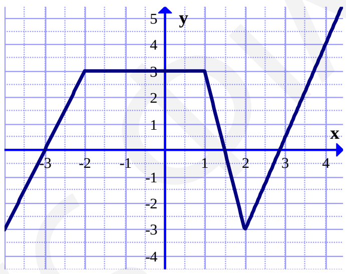
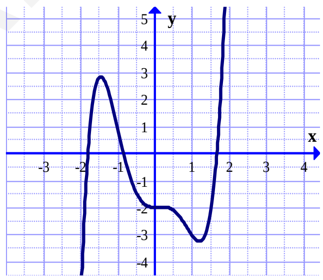
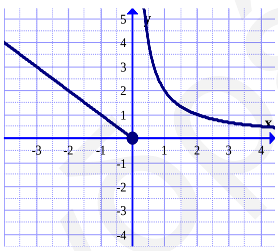
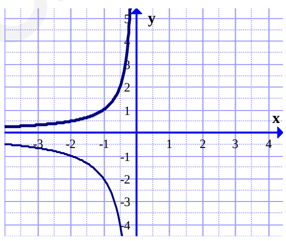
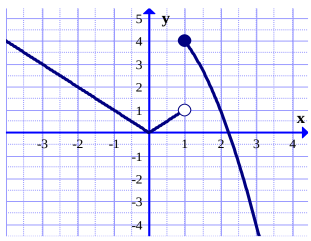


Να κατασκευάσετε τις συναρτήσεις στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

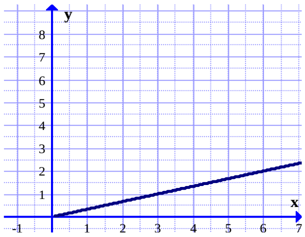
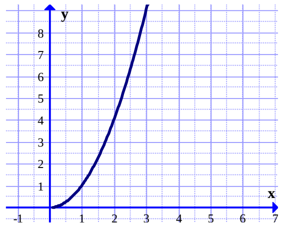
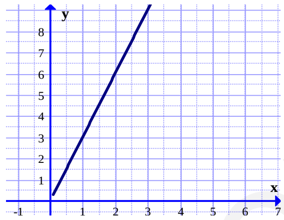
(α) $y = x^2 + 2, \quad x \in \mathbb{R}$

(β) $y = x^2 - 2, \quad x \in \mathbb{R}$

Ερώτηση 12. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω καμπύλες είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων.

Α 	Β 	Γ 
Δ 	Ε 	ΣΤ 

Ερώτηση 13. Να βάλετε σε κύκλο τον αριθμό της γραφικής παράστασης που εκφράζει την περίμετρο ισοπλεύρου τριγώνου συναρτήσει του μήκους της πλευράς του.

1	**2**	**3**
		

<u>Δοκίμιο Συναρτήσεων Β</u>

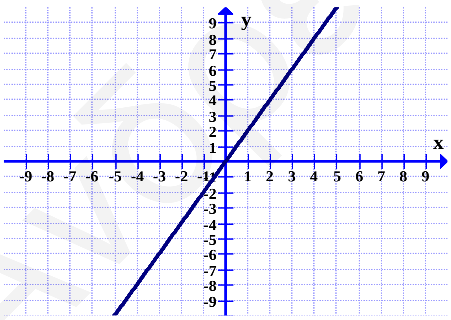
Ερώτηση 1. (α) Πώς καταλαβαίνουμε ότι μια γραφική παράσταση σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων παριστάνει συνάρτηση;

(β) Να δώσετε ένα παράδειγμα μιας σχέσης η οποία παριστάνει συνάρτηση.

Ερώτηση 2. Θα μπορούσε να οριστεί συνάρτηση που όλες οι τιμές της να είναι ίσες μεταξύ τους; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Ερώτηση 3. Στο πιο κάτω διάγραμμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\boldsymbol{y = 2x}$. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση των:

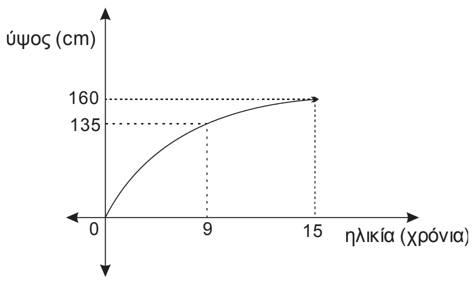
(α) $\boldsymbol{y = 2x + 5}$ και (β) $\boldsymbol{y = 2x - 4}$ Να εξηγήσετε τον τρόπο που εργαστήκατε.



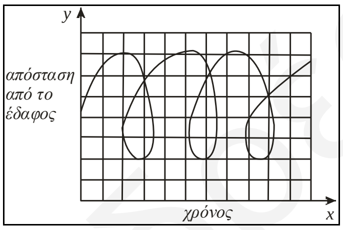
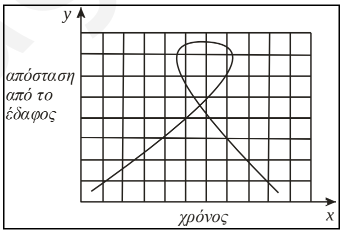
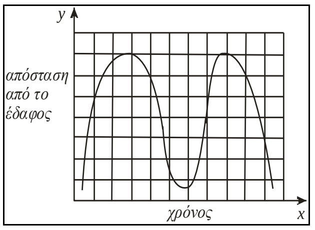
Ερώτηση 4. Το ύψος της Παναγιώτας συναρτήσει της ηλικίας της δίνεται στο πιο κάτω διάγραμμα. Να υπολογίσετε περίπου το ύψος της Παναγιώτας στην ηλικία των:

(α) 3 χρονών (β) 10 χρονών (γ) 18 χρονών.

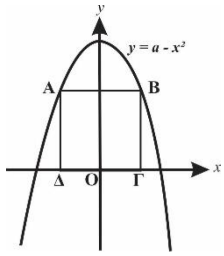
Να εξηγήσετε τον τρόπο που εργαστήκατε.

Ερώτηση 5. Να βάλετε ☑ δίπλα από το διάγραμμα που ταιριάζει με την πρόταση: Η Μαρία πήγε στο Λούνα-Παρκ και ανέβηκε στο «μεγάλο τροχό». Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

		
☐	☐	☐
…………………………..	…………………………	………………………………

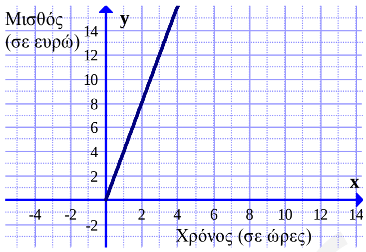
Ερώτηση 6. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\boldsymbol{y = a - x^2}$ *με* $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$. Εάν το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ τέμνει τη γραφική παράσταση στα σημεία Α και Β και το εμβαδόν του τετραγώνου ισούται με 16, ποια είναι η τιμή του a. Να αιτιολογήσετε τον τρόπο που εργαστήκατε.



(Α) 2 (Β) 4 (Γ) 6 (Δ) 8 (Ε) 10

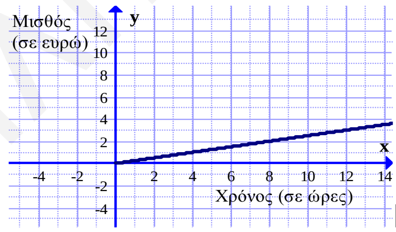
Ερώτηση 7. Ένας ωρομίσθιος υπάλληλος πληρώνεται 4 ευρώ την ώρα. Να βάλετε ☑ στη γραφική παράσταση που είναι σωστή; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Α



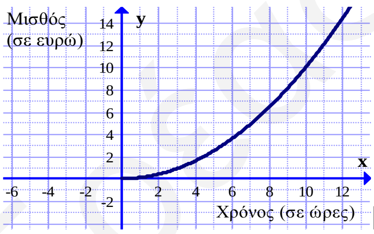
☐

Β



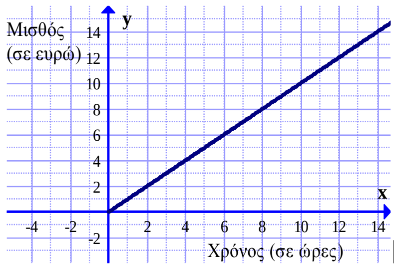
☐

Γ



☐

Δ



☐

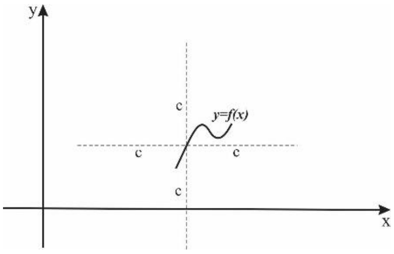
Ερώτηση 8. Εάν αντικατασταθεί το $x = 2$ στη συνάρτηση $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, παίρνουμε αρνητικό αποτέλεσμα.

Εάν αντικαταστήσουμε το $x = 4$ παίρνουμε θετικό αποτέλεσμα.

Πόσες πραγματικές ρίζες έχει η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$;

Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

Ερώτηση 9. Στο διπλανό σύστημα αξόνων δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=f(x)$.

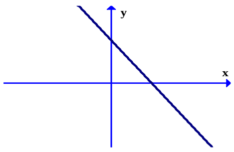
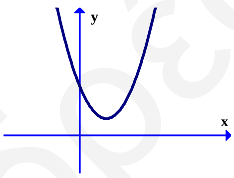


Στο ίδιο σύστημα αξόνων να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

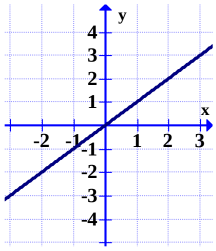
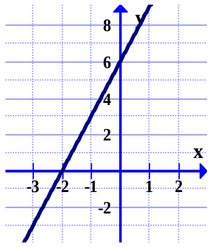
(α) $y=f(x)+c$ (β) $y=f(x)-c$

(γ) $y=f(x-c)$ (δ) $y=f(x+c)$

Ερώτηση 10. Από τις πιο κάτω συναρτήσεις, να βάλετε σε κύκλο τη συνάρτηση που αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση:

(I)		Α. $y+3x=0$ Γ. $y=-2x-3$ Ε. $y=3x+2$	Β. $y+2=3x$ Δ. $y+3x=2$
(II)		**Α.** $y=(x-1)(x-2)$ **Γ.** $y=-2x^2-3x-2$ **Ε.** $y=-2x^2-4x+3$	**Β.** $y=x^2+3$ **Δ.** $y=2x^2-4x+3$

Ερώτηση 11. Να γράψετε τις εξισώσεις των ευθειών που φαίνονται στα παρακάτω σχήματα.

	 ....

Ερώτηση 12. Σε μια εταιρεία παραγωγής ενός είδους προϊόντος υπολογίστηκε ότι το κέρδος από την πώληση των x πρώτων τεμαχίων του προϊόντος, σε ευρώ, δίνεται από τη συνάρτηση $f(x)=-(x+30)(x-50)$.

(α) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=f(x)$

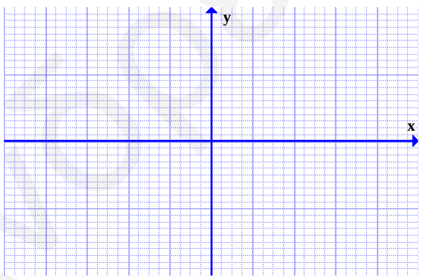
Να υπολογίσετε:

(β) Το κέρδος από την πώληση των 4 πρώτων τεμαχίων του προϊόντος.

(γ) Το κέρδος από την πώληση του 4^{ου} τεμαχίου του προϊόντος.

(δ) Να εξετάσετε αν η εταιρεία παραγωγής μπορεί να πωλήσει το προϊόν της και να μην έχει κέρδος.

(ε) Πόσα τεμάχια από το προϊόν πρέπει να παραχθούν ώστε η εταιρεία να έχει το μεγαλύτερο κέρδος από την πώληση του προϊόντος;

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ

Δείκτες Ομοιότητας Διαγραμμάτων Συνεπαγωγικής Ανάλυσης

Αναγνώριση Συναρτήσεων

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 19

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε κάθε ταξινόμηση όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας στο **Διάγραμμα 19: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά την αναγνώριση στη σελίδα 127.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 1 : (A7 A7Exp) Ομοιότητα : 0.982535

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 2 : (A12d A12f) Ομοιότητα: 0.804737

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 3 : (A10a A10b) Ομοιότητα : 0.797614

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 4 : ((A7 A7Exp) A12c) Ομοιότητα : 0.76961

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 5 : (A12a A12b) Ομοιότητα : 0.691903

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 6 : ((A10a A10b) A10e) Ομοιότητα : 0.632229

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 7 : (A12e A13a) Ομοιότητα : 0.48585

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 8 : (((A10a A10b) A10e) A10c) <u>Ομοιότητα: 0.344601</u>

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 9 : (A10d (A12d A12f)) Ομοιότητα: 0.222873

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 10 : ((A12a A12b) A13c) Ομοιότητα: 0.162024

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 11: (((A7 A7Exp) A12c) (A12e A13a)) <u>Ομοιότητα : 0.0869382</u>

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 12: ((A10d (A12d A12f)) ((A12a A12b) A13c)) <u>Ομοιότητα: 0.0138845</u>

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 20

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε κάθε ταξινόμηση όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας **Διάγραμμα 20: Διάγραμμα ομοιότητας για την Γ΄ Γυμνασίου που αφορά την αναγνώριση στη σελίδα 129.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 1 : (A10a A10e) Ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 2 : (A12d A12e) Ομοιότητα: 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 3 : ((A12d A12e) A12f) Ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 4 : (A12b A12c) Ομοιότητα : 0.999999

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 5 : ((A10a A10e) A10b) Ομοιότητα : 0.999998

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 6 : (A7 ((A10a A10e) A10b)) Ομοιότητα : 0.999994

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 7 : (A10c A10d) Ομοιότητα : 0.999981

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 8 : : (A12a ((A12d A12e) A12f)) Ομοιότητα : 0.999981

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 9 : ((A12a ((A12d A12e) A12f)) (A12b A12c)) Ομοιότητα : 0.999793

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 10 : ((A7 ((A10a A10e) A10b)) (A10c A10d)) Ομοιότητα : 0.999773

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 11 : (((A12a ((A12d A12e) A12f)) (A12b A12c)) A13c) Ομοιότητα : 0.998096

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 12 : (((A7 ((A10a A10e) A10b)) (A10c A10d)) (((A12a ((A12d A12e) A12f)) (A12b A12c)) A13c)) Ομοιότητα : 0.993046

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 13 : ((((A7 ((A10a A10e) A10b)) (A10c A10d)) (((A12a ((A12d A12e) A12f)) (A12b A12c)) A13c)) A13a) Ομοιότητα : 0.937702

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 14 : (((((A7 ((A10a A10e) A10b)) (A10c A10d)) (((A12a ((A12d A12e) A12f)) (A12b A12c)) A13c)) A13a) A13b) Ομοιότητα : 0.802975

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 21

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε κάθε ταξινόμηση όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 21: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά την αναγνώριση) στη σελίδα 130**

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 1 : (A7 A7Exp) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 2 : ((A7 A7Exp) A13a) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 3 : (A10b A10d) ομοιότητα : 0.999996

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 4 : (A10a (A10b A10d)) ομοιότητα : 0.999991

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 5 : (A12a A12b) ομοιότητα : 0.999964

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 6 : ((A10a (A10b A10d)) A10e) ομοιότητα : 0.999642

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 7 : (((A10a (A10b A10d)) A10e) A10c) ομοιότητα : 0.999348

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 8 : (A12f A13c) ομοιότητα : 0.998942

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 9 : (((A7 A7Exp) A13a) A12e) ομοιότητα : 0.996626

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 10 : (A12c A12d) ομοιότητα : 0.99642

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 11 : ((((A7 A7Exp) A13a) A12e) (((A10a (A10b A10d)) A10e) A10c)) ομοιότητα : 0.99427

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 12 : ((A12a A12b) (A12f A13c)) *<u>ομοιότητα : 0.98404</u>*

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 13 : (((((A7 A7Exp) A13a) A12e) (((A10a (A10b A10d)) A10e) A10c)) (A12c A12d)) *<u>ομοιότητα : 0.905151</u>*

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 14 : ((((((A7 A7Exp) A13a) A12e) (((A10a (A10b A10d)) A10e) A10c)) (A12c A12d)) ((A12a A12b) (A12f A13c))) *<u>ομοιότητα : 0.808391</u>*

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 22

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε κάθε ταξινόμηση όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 22: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ Λυκείου που αφορά την αναγνώριση) στη σελίδα 131**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (A7 A7Exp) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : (A12b A12d) ομοιότητα : 0.996312

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : ((A7 A7Exp) A10c) ομοιότητα : 0.995667

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (A12e A13a) ομοιότητα : 0.9951

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : ((A12b A12d) A12c) ομοιότητα : 0.989599

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (A10a A10e) ομοιότητα : 0.987497

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : (((A12b A12d) A12c) A12f) ομοιότητα : 0.98416

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : (A10b (A12e A13a)) ομοιότητα : 0.983249

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : ((((A12b A12d) A12c) A12f) A13c) ομοιότητα : 0.976708

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : ((A10b (A12e A13a)) A12a) ομοιότητα : 0.962459

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : ((A10a A10e) A10d) ομοιότητα : 0.939258

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 12 : (((A7 A7Exp) A10c) ((((A12b A12d) A12c) A12f) A13c)) ομοιότητα : 0.815454

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 13 : (((A10a A10e) A10d) ((A10b (A12e A13a)) A12a)) *ομοιότητα : 0.633268*

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 14 : ((((A7 A7Exp) A10c) ((((A12b A12d) A12c) A12f) A13c)) (((A10a A10e) A10d) ((A10b (A12e A13a)) A12a))) *ομοιότητα : 0.129216*

Ορισμός Συναρτήσεων

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 23

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση των ερωτήσεων σχετικά με τον ορισμό, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 23: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά τον ορισμό της συνάρτησης) στη σελίδα 133.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 1 : (A3 A3Expl) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 2 : (A1b A2b) ομοιότητα : 0.896969

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 3 : (A2a B1b) ομοιότητα : 0.805741

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 4 : ((A1b A2b) B2Expl) ομοιότητα : 0.766629

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 5 : ((A2a B1b) (A3 A3Expl)) ομοιότητα : 0.633749

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 6 : (A1a ((A1b A2b) B2Expl)) ομοιότητα : 0.56499

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 7 : (((A2a B1b) (A3 A3Expl)) B2) <u>ομοιότητα : 0.248784</u>

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 8 : ((A1a ((A1b A2b) B2Expl)) B1a) <u>ομοιότητα : 0.195582</u>

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 9 : (((A1a ((A1b A2b) B2Expl)) B1a) (((A2a B1b) (A3 A3Expl)) B2)) <u>ομοιότητα : 0.0263512</u>

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 24

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση των ερωτήσεων σχετικά με τον ορισμό, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 24: Διάγραμμα ομοιότητας για την Γ΄ Γυμνασίου που αφορά τον ορισμό της συνάρτησης.) στη σελίδα 134.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (A3 A3Expl) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : (B2 B2Expl) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (A1b A2b) ομοιότητα : 0.999982

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : ((A1b A2b) A2a) ομοιότητα : 0.999602

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (((A1b A2b) A2a) (A3 A3Expl)) <u>ομοιότητα : 0.950015</u>

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (B1a (B2 B2Expl)) ομοιότητα : 0.504998

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : ((B1a (B2 B2Expl)) B1b) *<u>ομοιότητα : 0.225595</u>*

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 25

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση των ερωτήσεων σχετικά με τον ορισμό, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 25: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά τον ορισμό της συνάρτησης) στη σελίδα 135.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 1 : (A3 A3Expl) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 2 : (A1b (A3 A3Expl)) ομοιότητα : 0.954704

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 3 : ((A1b (A3 A3Expl)) A2a) ομοιότητα : 0.882846

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 4 : (((A1b (A3 A3Expl)) A2a) B1b) ομοιότητα : 0.846394

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 5 : (A2b B2Expl) <u>ομοιότητα : 0.787636</u>

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 6 : (A1a (((A1b (A3 A3Expl)) A2a) B1b)) <u>ομοιότητα : 0.675665</u>

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 7 : ((A1a (((A1b (A3 A3Expl)) A2a) B1b)) (A2b B2Expl)) <u>ομοιότητα : 0.558721</u>

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : (((A1a (((A1b (A3 A3Expl)) A2a) B1b)) (A2b B2Expl)) B2) ομοιότητα : 0.234938

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 9 : ((((A1a (((A1b (A3 A3Expl)) A2a) B1b)) (A2b B2Expl)) B2) B1a) <u>ομοιότητα : 0.177228</u>

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 26

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση των ερωτήσεων σχετικά με τον ορισμό, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 26: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ Λυκείου που αφορά τον ορισμό της συνάρτησης) στη σελίδα 137.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 1 : (A3 A3Expl) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 2 : (B2 B2Expl) ομοιότητα : 0.91617

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 3 : (A2b1b) ομοιότητα : 0.870377

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 4 : (A1a1b) ομοιότητα : 0.799703

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 5 : (A2a (A2b1b)) ομοιότητα : 0.729499

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 6 : ((A2a (A2b1b)) (A3 A3Expl)) ομοιότητα : 0.559814

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 7 : (B1a (B2 B2Expl)) ομοιότητα : 0.55178

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 8 : ((A1a1b) (B1a (B2 B2Expl))) ομοιότητα : 0.286199

Ταξινόμηση στο επίπεδο : 9 : (((A1a A1b) (B1a (B2 B2Expl))) ((A2a (A2b B1b)) (A3 A3Expl))) ομοιότητα : 0.0177587

Ερμηνεία Συναρτήσεων

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 27

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση των ορθών μεταβλητών σχετικά με την ερμηνεία, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 27: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά την ερμηνεία της συνάρτησης με μόνο τις ορθές απαντήσεις.) στη σελίδα 141.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (B4a B4b) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : ((B4a B4b) B4c) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (A8 A9) ομοιότητα : 0.999999

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (B5c B7a) ομοιότητα : 0.999967

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : ((A8 A9) ((B4a B4b) B4c)) ομοιότητα : 0.99996

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (A4 ((A8 A9) ((B4a B4b) B4c))) ομοιότητα : 0.99977

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : ((A4 ((A8 A9) ((B4a B4b) B4c))) (B5c B7a)) ομοιότητα : 0.994306

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 28

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση των ορθών μεταβλητών και των επεξηγήσεων σχετικά με την ερμηνεία, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 28: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά την ερμηνεία της συνάρτησης με μόνο ορθές απαντήσεις και επεξηγήσεις.) στη σελίδα 142.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (A4 A4Exp) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : (A8 A8Exp) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : ((A8 A8Exp) A9) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (B4a B4b) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : ((B4a B4b) B4c) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (B7a B7Exp) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : (B5c B5cExp) ομοιότητα : 0.999999

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : (((A8 A8Exp) A9) (B7a B7Exp)) ομοιότητα : 0.999999

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : ((A4 A4Exp) (((A8 A8Exp) A9) (B7a B7Exp))) ομοιότητα : 0.999936

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : (((A4 A4Exp) (((A8 A8Exp) A9) (B7a B7Exp))) ((B4a B4b) B4c)) ομοιότητα : 0.999895

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : ((((A4 A4Exp) (((A8 A8Exp) A9) (B7a B7Exp))) ((B4a B4b) B4c)) (B5c B5cExp)) ομοιότητα : 0.999845

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 29

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών σχετικά με την ερμηνεία, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 29: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά την ερμηνεία της συνάρτησης με όλες τις μεταβλητές.) στη σελίδα 143.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (A4 A4Exp) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : (A8 A8Exp) ομοιότητα: 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : ((A8 A8Exp) A9) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (B4a B4b) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : ((B4a B4b) B4c) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (B7a B7Exp) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : (B5c B5cExp) ομοιότητα : 0.999999

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : (((A8 A8Exp) A9) (B7a B7Exp)) ομοιότητα : 0.999999

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : ((A4 A4Exp) (((A8 A8Exp) A9) (B7a B7Exp))) ομοιότητα : 0.999936

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : (((A4 A4Exp) (((A8 A8Exp) A9) (B7a B7Exp))) ((B4a B4b) B4c)) ομοιότητα : 0.999895

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : ((((A4 A4Exp) (((A8 A8Exp) A9) (B7a B7Exp))) ((B4a B4b) B4c)) (B5c B5cExp)) ομοιότητα : 0.999845

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 12 : (B5b B7c) ομοιότητα : 0.997476

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 13 : (B5a B7d) ομοιότητα : 0.985837

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 14 : (((((A4 A4Exp) (((A8 A8Exp) A9) (B7a B7Exp))) ((B4a B4b) B4c)) (B5c B5cExp)) B7b) ομοιότητα : 0.928687

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 15 : ((B5a B7d) (B5b B7c)) ομοιότητα: 0.92197

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 16 : ((((((A4 A4Exp) (((A8 A8Exp) A9) (B7a B7Exp))) ((B4a B4b) B4c)) (B5c B5cExp)) B7b) ((B5a B7d) (B5b B7c))) ομοιότητα : 0.0415445

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 30

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση των ορθών μεταβλητών σχετικά με την ερμηνεία, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 30: Διάγραμμα ομοιότητας για τη Γ΄ Γυμνασίου που αφορά την ερμηνεία της συνάρτησης με μόνο τις ορθές απαντήσεις.) στη σελίδα 144.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (B4a B4b) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : ((B4a B4b) B4c) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (A8 A9) ομοιότητα : 0.992883

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (((B4a B4b) B4c) B7a) ομοιότητα : 0.979547

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : ((A8 A9) (((B4a B4b) B4c) B7a)) ομοιότητα : 0.919589

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (A4 ((A8 A9) (((B4a B4b) B4c) B7a))) ομοιότητα: 0.666517

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : ((A4 ((A8 A9) (((B4a B4b) B4c) B7a))) B5c) ομοιότητα: 0.539677

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 31

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση των ορθών μεταβλητών και των επεξηγήσεων σχετικά με την ερμηνεία, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 31: Διάγραμμα ομοιότητας για τη Γ΄ Γυμνασίου που αφορά την ερμηνεία της συνάρτησης με μόνο ορθές απαντήσεις και επεξηγήσεις.) στη σελίδα 145.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (A4 A4Exp) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : (A8 A8Exp) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (B4a B4b) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : ((B4a B4b) B4c) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (B7a B7Exp) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : ((A8 A8Exp) A9) ομοιότητα : 0.999788

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : (B5c B5cExp) ομοιότητα : 0.988734

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : (((B4a B4b) B4c) (B7a B7Exp)) ομοιότητα : 0.973079

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : ((A4 A4Exp) (((B4a B4b) B4c) (B7a B7Exp))) ομοιότητα : 0.897387

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : (((A8 A8Exp) A9) (B5c B5cExp)) ομοιότητα : 0.878247

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : (((A4 A4Exp) (((B4a B4b) B4c) (B7a B7Exp))) (((A8 A8Exp) A9) (B5c B5cExp))) ομοιότητα : 0.74071

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 32

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών σχετικά με την ερμηνεία, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 32: Διάγραμμα ομοιότητας για τη Γ΄ Γυμνασίου που αφορά την ερμηνεία της συνάρτησης με όλες τις μεταβλητές.) στη σελίδα 146.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (A4 A4Exp) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : (A8 A8Exp) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (B4a B4b) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : ((B4a B4b) B4c) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (B7a B7Exp) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : ((A8 A8Exp) A9) ομοιότητα : 0.999788

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : (B5c B5cExp) ομοιότητα : 0.988734

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : ((A4 A4Exp) B5a) ομοιότητα : 0.977822

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : (((B4a B4b) B4c) (B7a B7Exp)) ομοιότητα : 0.973079

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : ((B5c B5cExp) B7b) ομοιότητα : 0.960911

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : (B5b B7d) similarite : 0.931255

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 12 : (((A4 A4Exp) B5a) B7c) ομοιότητα : 0.923992

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 13 : (((A8 A8Exp) A9) (((B4a B4b) B4c) (B7a B7Exp))) ομοιότητα : 0.879296

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 14 : ((((A4 A4Exp) B5a) B7c) (((A8 A8Exp) A9) (((B4a B4b) B4c) (B7a B7Exp)))) ομοιότητα : 0.707189

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 15 : (((((A4 A4Exp) B5a) B7c) (((A8 A8Exp) A9) (((B4a B4b) B4c) (B7a B7Exp)))) ((B5c B5cExp) B7b)) ομοιότητα : 0.458881

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 16 : ((((((A4 A4Exp) B5a) B7c) (((A8 A8Exp) A9) (((B4a B4b) B4c) (B7a B7Exp)))) ((B5c B5cExp) B7b)) (B5b B7d)) ομοιότητα : 0.210971

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 33

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση των ορθών μεταβλητών σχετικά με την ερμηνεία, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 33: Διάγραμμα ομοιότητας για τη Α΄ Λυκείου που αφορά την ερμηνεία της συνάρτησης με μόνο τις ορθές απαντήσεις.) στη σελίδα 148.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (B4b B4c) ομοιότητα : 1
Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : (B4a (B4b B4c)) ομοιότητα : 0.999979
Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (B5c B7a) ομοιότητα : 0.997748
Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (A8 A9) ομοιότητα : 0.996978
Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (A4 (A8 A9)) ομοιότητα : 0.87833
Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : ((B4a (B4b B4c)) (B5c B7a)) ομοιότητα : 0.804663
Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : ((A4 (A8 A9)) ((B4a (B4b B4c)) (B5c B7a))) ομοιότητα: 0.689546

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 34

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση των ορθών μεταβλητών και των επεξηγήσεων σχετικά με την ερμηνεία, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 34: Διάγραμμα ομοιότητας για τη Α΄ Λυκείου που αφορά την ερμηνεία της συνάρτησης με μόνο ορθές απαντήσεις και επεξηγήσεις.) στη σελίδα 149.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (A4 A4Exp) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : (B4b B4c) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (B7a B7Exp) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (A8 A8Exp) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (B5cExp (B7a B7Exp)) ομοιότητα : 0.999994

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (B4a (B4b B4c)) ομοιότητα : 0.999979

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : ((A8 A8Exp) A9) ομοιότητα : 0.999876

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : (B5c (B5cExp (B7a B7Exp))) ομοιότητα : 0.99708

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : ((A4 A4Exp) (B5c (B5cExp (B7a B7Exp)))) ομοιότητα : 0.98977

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : (((A4 A4Exp) (B5c (B5cExp (B7a B7Exp)))) ((A8 A8Exp) A9)) ομοιότητα : 0.96841

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : ((((A4 A4Exp) (B5c (B5cExp (B7a B7Exp)))) ((A8 A8Exp) A9)) (B4a (B4b B4c))) ομοιότητα : 0.607201

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 35

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών σχετικά με την ερμηνεία, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 35: Διάγραμμα ομοιότητας για τη Α΄ Λυκείου που αφορά την ερμηνεία της συνάρτησης) στη σελίδα 150.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (A4 A4Exp) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : (B4b B4c) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (B7a B7Exp) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (A8 A8Exp) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (B5cExp (B7a B7Exp)) ομοιότητα : 0.999994

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (B4a (B4b B4c)) ομοιότητα : 0.999979

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : ((A8 A8Exp) A9) ομοιότητα : 0.999876

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : (B5a B7d) ομοιότητα : 0.99775

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : (B5c (B5cExp (B7a B7Exp))) ομοιότητα : 0.99708

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : (((A8 A8Exp) A9) B7b) ομοιότητα : 0.995244

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : ((A4 A4Exp) (B5c (B5cExp (B7a B7Exp)))) ομοιότητα : 0.98977

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 12 : (B5b B7c) ομοιότητα : 0.985631

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 13 : (((A4 A4Exp) (B5c (B5cExp (B7a B7Exp)))) (((A8 A8Exp) A9) B7b)) ομοιότητα : 0.958103

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 14 : ((((A4 A4Exp) (B5c (B5cExp (B7a B7Exp)))) (((A8 A8Exp) A9) B7b)) (B5a B7d)) ομοιότητα : 0.838722

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 15 : (((((A4 A4Exp) (B5c (B5cExp (B7a B7Exp)))) (((A8 A8Exp) A9) B7b)) (B5a B7d)) (B4a (B4b B4c))) ομοιότητα : 0.783887

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 16 : ((((((A4 A4Exp) (B5c (B5cExp (B7a B7Exp)))) (((A8 A8Exp) A9) B7b)) (B5a B7d)) (B4a (B4b B4c))) (B5b B7c)) ομοιότητα : 0.187384

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 36

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση των ορθών μεταβλητών σχετικά με την ερμηνεία, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 36: Διάγραμμα ομοιότητας για τη Β΄ Λυκείου που αφορά την ερμηνεία της συνάρτησης με μόνο τις ορθές απαντήσεις.) στη σελίδα 151.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (B4b B4c) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : (B4a (B4b B4c)) ομοιότητα : 0.999989

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (B5c B7a) ομοιότητα : 0.993273

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (A9 (B4a (B4b B4c))) ομοιότητα : 0.989214

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (A4 (A9 (B4a (B4b B4c)))) ομοιότητα : 0.982249

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : ((A4 (A9 (B4a (B4b B4c)))) (B5c B7a)) ομοιότητα : 0.920166

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : (((A4 (A9 (B4a (B4b B4c)))) (B5c B7a)) A8) ομοιότητα: 0.661888

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 37

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση των ορθών μεταβλητών και των επεξηγήσεων σχετικά με την ερμηνεία, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 37: Διάγραμμα ομοιότητας για τη Β΄ Λυκείου που αφορά την ερμηνεία της συνάρτησης με μόνο τις ορθές απαντήσεις και επεξηγήσεις.) στη σελίδα 152.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (A4 A4Exp) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : (B4b B4c) ομοιότητα: 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (B4a (B4b B4c)) ομοιότητα : 0.999989

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (A8 A8Exp) ομοιότητα : 0.99992

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (B7a B7Exp) ομοιότητα : 0.999765

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (A9 (B7a B7Exp)) ομοιότητα : 0.998123

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : (B5c B5cExp) ομοιότητα : 0.992709

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : ((A8 A8Exp) (A9 (B7a B7Exp))) ομοιότητα : 0.987897

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : ((A4 A4Exp) (B4a (B4b B4c))) ομοιότητα : 0.973492

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : (((A8 A8Exp) (A9 (B7a B7Exp))) (B5c B5cExp)) ομοιότητα : 0.937377

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : (((A4 A4Exp) (B4a (B4b B4c))) (((A8 A8Exp) (A9 (B7a B7Exp))) (B5c B5cExp))) ομοιότητα : 0.881152

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 38

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών σχετικά με την ερμηνεία, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας**: (Διάγραμμα 38: Διάγραμμα ομοιότητας για τη Β΄ Λυκείου που αφορά την ερμηνεία της συνάρτησης με όλες τις μεταβλητές.) στη σελίδα 153.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (A4 A4Exp) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : (B4b B4c) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (B4a (B4b B4c)) ομοιότητα : 0.999989

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (A8 A8Exp) ομοιότητα : 0.99992

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (B7a B7Exp) ομοιότητα : 0.999765

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (A9 (B7a B7Exp)) ομοιότητα : 0.998123

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : (B5c B5cExp) ομοιότητα : 0.992709

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : ((A8 A8Exp) (A9 (B7a B7Exp))) ομοιότητα : 0.987897

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : ((A4 A4Exp) (B4a (B4b B4c))) ομοιότητα : 0.973492

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : (B5b B7c) ομοιότητα : 0.968511

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : (((A8 A8Exp) (A9 (B7a B7Exp))) (B5c B5cExp)) ομοιότητα : 0.937377

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 12 : (((A4 A4Exp) (B4a (B4b B4c))) (((A8 A8Exp) (A9 (B7a B7Exp))) (B5c B5cExp))) ομοιότητα : 0.881152

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 13 : ((((A4 A4Exp) (B4a (B4b B4c))) (((A8 A8Exp) (A9 (B7a B7Exp))) (B5c B5cExp))) B7d) ομοιότητα : 0.668087

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 14 : ((B5b B7c) B7b) ομοιότητα : 0.550351

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 15 : (B5a ((B5b B7c) B7b)) ομοιότητα : 0.114707

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 39

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών σχετικά με την προσέγγιση, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας**: (Διάγραμμα 39: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά την προσέγγιση της συνάρτησης με όλες τις μεταβλητές.) στη σελίδα 156.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (B9aAlg B9bAlg) ομοιότητα : 1
Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : ((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) ομοιότητα: 1
Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 :: (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9b) ομοιότητα : 1
Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : ((((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9b) B9c) ομοιότητα: 1
Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (((((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9b) B9c) B9d) ομοιότητα: 1
Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : ((((((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9b) B9c) B9d) B9dAlg) ομοιότητα: 1
Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : (B9aGeo B9bGeo) ομοιότητα : 1
Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : (B9cGeo B9dGeo) ομοιότητα : 0.997593
Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : (A11a A11b) ομοιότητα : 0.995611
Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : (A11aGeo A11bGeo) ομοιότητα : 0.979099
Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : ((B9aGeo B9bGeo) (B9cGeo B9dGeo)) ομοιότητα : 0.972634
Ταξινόμηση στο επίπεδο: 12 : (B3aAlg B3bAlg) ομοιότητα : 0.969738
Ταξινόμηση στο επίπεδο: 13 : (B3b ((((((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9b) B9c) B9d) B9dAlg)) ομοιότητα : 0.8933
Ταξινόμηση στο επίπεδο: 14 : (A11aAlg A11bAlg) ομοιότητα : 0.831846
Ταξινόμηση στο επίπεδο: 15 : ((B3b ((((((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9b) B9c) B9d) B9dAlg)) B9a) ομοιότητα : 0.817547
Ταξινόμηση στο επίπεδο: 16 : (((B3b ((((((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9b) B9c) B9d) B9dAlg)) B9a) (B3aAlg B3bAlg)) ομοιότητα : 0.748158
Ταξινόμηση στο επίπεδο: 17 : ((A11a A11b) (A11aGeo A11bGeo)) ομοιότητα : 0.665965
Ταξινόμηση στο επίπεδο: 18 : (B3aGeo B3bGeo) ομοιότητα : 0.593113
Ταξινόμηση στο επίπεδο: 19 : ((A11aAlg A11bAlg) B3a) ομοιότητα : 0.239248
Ταξινόμηση στο επίπεδο: 20 : (((A11a A11b) (A11aGeo A11bGeo)) ((A11aAlg A11bAlg) B3a)) ομοιότητα : 0.0146342

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 40

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών σχετικά με την προσέγγιση, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 40: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά την προσέγγιση της συνάρτησης με μόνο τις προσεγγίσεις.) στη σελίδα 157.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (B9aAlg B9bAlg) ομοιότητα: 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : ((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) ομοιότητα: 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (B9aGeo B9bGeo) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (B9cGeo B9dGeo) ομοιότητα : 0.997593

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (A11aGeo A11bGeo) ομοιότητα : 0.979099

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : ((B9aGeo B9bGeo) (B9cGeo B9dGeo)) ομοιότητα : 0.972634

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : (B3aAlg B3bAlg) ομοιότητα : 0.969738

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : ((B3aAlg B3bAlg) (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg)) ομοιότητα : 0.879017

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : (A11aAlg A11bAlg) ομοιότητα : 0.831846

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : (B3aGeo B3bGeo) ομοιότητα : 0.593113

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 12 : ((A11aGeo A11bGeo) (A11aAlg A11bAlg)) ομοιότητα: 0.119564

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 13 : (((B3aAlg B3bAlg) (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg)) (B3aGeo B3bGeo)) ομοιότητα : 0.0204372

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 41

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών σχετικά με την προσέγγιση, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 41: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά τις ορθές απαντήσεις στην προσέγγιση της συνάρτησης.) στη σελίδα 159.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (A11a A11b) ομοιότητα : 0.995611
Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : (B9b B9c) ομοιότητα : 0.963608
Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : ((B9b B9c) B9d) ομοιότητα : 0.92854
Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (B3a B3b) ομοιότητα: 0.871731
Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (B9a ((B9b B9c) B9d)) ομοιότητα : 0.793921
Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : ((B3a B3b) (B9a ((B9b B9c) B9d))) ομοιότητα : 0.116846

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 42

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση των μεταβλητών του συνολικού δείγματος σχετικά με την προσέγγιση και την ορθότητα των απαντήσεων, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 42: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά την επιτυχία κάθε προσέγγισης της συνάρτησης) στη σελίδα 160**.

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (B9bAlgC B9cAlgC) ομοιότητα: 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : ((B9bAlgC B9cAlgC) B9dAlgC) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (B9aGeoC B9bGeoC) ομοιότητα : 0.977704

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (B9cGeoC B9dGeoC) ομοιότητα : 0.967206

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (A11aGeoC A11bGeoC) ομοιότητα : 0.961252

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (B3aAlgC B3bAlgC) ομοιότητα: 0.936675

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : (B9aAlgC ((B9bAlgC B9cAlgC) B9dAlgC)) ομοιότητα : 0.92724

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : ((B9aGeoC B9bGeoC) (B9cGeoC B9dGeoC)) ομοιότητα : 0.780043

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : (A11aAlgC A11bAlgC) ομοιότητα: 0.740103

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : (B3aGeoC B3bGeoC) ομοιότητα: 0.682393

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : ((A11aGeoC A11bGeoC) (A11aAlgC A11bAlgC)) ομοιότητα : 0.233214

Ταξινόμηση στο επίπεδο 12 : ((B3aGeoC B3bGeoC) (B9aAlgC ((B9bAlgC B9cAlgC) B9dAlgC))) ομοιότητα : 0.0747505

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 13 : (((A11aGeoC A11bGeoC) (A11aAlgC A11bAlgC)) (B3aAlgC B3bAlgC)) ομοιότητα : 0.0245643

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 43

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών του Γυμνασίου σχετικά με την προσέγγιση, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας**: (Διάγραμμα 43: Διάγραμμα ομοιότητας για την Γ΄ Γυμνασίου που αφορά την προσέγγισης της συνάρτησης με όλες τις μεταβλητές.) στη σελίδα 161.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (A11a11b) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : (A11aGeo A11bGeo) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (B3aAlg B3bAlg) ομοιότητα: 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (B3aGeo B3bGeo) ομοιότητα: 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (B9a B9aGeo) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : ((B9a B9aGeo) B9b) ομοιότητα: 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : (((B9a B9aGeo) B9b) B9bGeo) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : ((((B9a B9aGeo) B9b) B9bGeo) B9cGeo) ομοιότητα: 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : (((((B9a B9aGeo) B9b) B9bGeo) B9cGeo) B9c) ομοιότητα: 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : ((((((B9a B9aGeo) B9b) B9bGeo) B9cGeo) B9c) B9d) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : (((((((B9a B9aGeo) B9b) B9bGeo) B9cGeo) B9c) B9d) B9dGeo) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 12 : (B3a B3b) ομοιότητα : 0.994243

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 13 : ((B3a B3b) (B3aAlg B3bAlg)) ομοιότητα : 0.937559

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 14 : ((A11a11b) (A11aGeo A11bGeo)) ομοιότητα : 0.47882

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 44

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση των μεταβλητών του Γυμνασίου που εκφράζουν μόνο προσεγγίσεις, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 44: Διάγραμμα ομοιότητας για την Γ΄ Γυμνασίου που αφορά την προσέγγιση της συνάρτησης) στη σελίδα 163.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (A11aGeo A11bGeo) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : (B3aAlg B3bAlg) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (B3aGeo B3bGeo) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (B9aGeo B9bGeo) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (B9c B9cGeo) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : ((B9c B9cGeo) B9dGeo) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : ((B9aGeo B9bGeo) ((B9c B9cGeo) B9dGeo)) ομοιότητα : 0.591366

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : ((B3aAlg B3bAlg) ((B9aGeo B9bGeo) ((B9c B9cGeo) B9dGeo))) ομοιότητα : 0.0659184

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 45

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση των μεταβλητών του Γυμνασίου που εκφράζουν μόνο ορθές απαντήσεις σχετικά με την προσέγγιση, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 45: Διάγραμμα ομοιότητας για την Γ΄ Γυμνασίου που αφορά τις ορθές απαντήσεις για την προσέγγιση της συνάρτησης) 164.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (A11a A11b) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : (B9a B9b) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (B9c B9d) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (B3a B3b) ομοιότητα : 0.994243

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : ((B3a B3b) (B9a B9b)) ομοιότητα : 0.0554721

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 46

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση των μεταβλητών του Γυμνασίου σχετικά με την προσέγγιση και την ορθότητα των απαντήσεων, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 46: Διάγραμμα ομοιότητας για την Γ΄ Γυμνασίου που αφορά την επιτυχία για κάθε προσέγγιση.) στη σελίδα165.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (A11aGeo_C A11bGeo_C) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : (B9aGeo_C B9bGeo_C) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (B9cGeo_C B9dGeo_C) ομοιότητα: 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : ((B9aGeo_C B9bGeo_C) (B9cGeo_C B9dGeo_C)) ομοιότητα: 0.999999

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : ((A11aGeo_C A11bGeo_C) B3aAlg_C) ομοιότητα : 0.381627

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (((A11aGeo_C A11bGeo_C) B3aAlg_C) B3bGeo_C) ομοιότητα : 0.063879

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 47

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών της Α΄ Λυκείου σχετικά με την προσέγγιση, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 47: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά όλες τις μεταβλητές για την προσέγγιση της συνάρτησης) στη σελίδα 166.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (A11a A11b) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : (B9a B9aAlg) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : ((B9a B9aAlg) B9bAlg) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (((B9a B9aAlg) B9bAlg) B9c) ομοιότητα: 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : ((((B9a B9aAlg) B9bAlg) B9c) B9b) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (((((B9a B9aAlg) B9bAlg) B9c) B9b) B9cAlg) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : ((((((B9a B9aAlg) B9bAlg) B9c) B9b) B9cAlg) B9d) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : (((((((B9a B9aAlg) B9bAlg) B9c) B9b) B9cAlg) B9d) B9dAlg) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : (B9aGeo B9bGeo) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : ((B9aGeo B9bGeo) B9cGeo) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : (((B9aGeo B9bGeo) B9cGeo) B9dGeo) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 12 : (A11aGeo A11bGeo) ομοιότητα : 0.971174

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 13 : (B3b B3aAlg) ομοιότητα : 0.931215

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 14 : (A11aAlg A11bAlg) ομοιότητα : 0.764631

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 15 : ((B3b B3aAlg) B3bAlg) ομοιότητα : 0.740283

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 16 : (((B3b B3aAlg) B3bAlg) (((((((B9a B9aAlg) B9bAlg) B9c) B9b) B9cAlg) B9d) B9dAlg)) ομοιότητα : 0.621199

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 17 : ((A11a A11b) (A11aGeo A11bGeo)) ομοιότητα : 0.555673

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 18 : ((A11aAlg A11bAlg) B3a) ομοιότητα : 0.395684

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 19 : (((A11a A11b) (A11aGeo A11bGeo)) B3bGeo) ομοιότητα : 0.170301

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 48

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση των μεταβλητών της Α΄ Λυκείου που εκφράζουν μόνο προσεγγίσεις, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 48: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά όλες μόνο την προσέγγιση της συνάρτησης) στη σελίδα 168.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (A11aGeo A11bGeo) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : ((A11aGeo A11bGeo) A11aAlg) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (B3aAlg B3bAlg) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : ((B3aAlg B3bAlg) B9aAlg) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (((B3aAlg B3bAlg) B9aAlg) B9bAlg) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : ((((B3aAlg B3bAlg) B9aAlg) B9bAlg) B9cAlg) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : (((((B3aAlg B3bAlg) B9aAlg) B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : (B9aGeo B9bGeo) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : ((B9aGeo B9bGeo) B9cGeo) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : (((B9aGeo B9bGeo) B9cGeo) B9dGeo) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : (((A11aGeo A11bGeo) A11aAlg) B3bGeo) ομοιότητα: 0.999999

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 12 : ((((A11aGeo A11bGeo) A11aAlg) B3bGeo) (((((B3aAlg B3bAlg) B9aAlg) B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg)) ομοιότητα : 0.999998

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 13 : (((((A11aGeo A11bGeo) A11aAlg) B3bGeo) (((((B3aAlg B3bAlg) B9aAlg) B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg)) (((B9aGeo B9bGeo) B9cGeo) B9dGeo)) ομοιότητα : 0.999992

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 14 : ((((((A11aGeo A11bGeo) A11aAlg) B3bGeo) (((((B3aAlg B3bAlg) B9aAlg) B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg)) (((B9aGeo B9bGeo) B9cGeo) B9dGeo)) A11bAlg) ομοιότητα : 0.999988

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 15 : (((((((A11aGeo A11bGeo) A11aAlg) B3bGeo) (((((B3aAlg B3bAlg) B9aAlg) B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg)) (((B9aGeo B9bGeo) B9cGeo) B9dGeo)) A11bAlg) B3aGeo) s ομοιότητα : 0.999413

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 49

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση των μεταβλητών της Α΄ Λυκείου σχετικά με τις μεταβλητές που εκφράζουν μόνο ορθές απαντήσεις, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 49: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά μόνο ορθές απαντήσεις για την προσέγγιση της συνάρτησης) στη σελίδα 169.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (A11a A11b) ομοιότητα: 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : (B3b B9c) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : ((B3b B9c) B9a) ομοιότητα: 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (((B3b B9c) B9a) B9b) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : ((((B3b B9c) B9a) B9b) B9d) ομοιότητα: 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (B3a ((((B3b B9c) B9a) B9b) B9d)) ομοιότητα: 0.999998

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : ((A11a A11b) (B3a ((((B3b B9c) B9a) B9b) B9d))) ομοιότητα : 0.999998

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 50

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση των μεταβλητών της Α΄ Λυκείου σχετικά με την προσέγγιση και την ορθότητα των απαντήσεων, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 50: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά την επιτυχία κάθε προσέγγισης της συνάρτησης) στη σελίδα 169.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (B9aAlg_C B9bAlg_C) ομοιότητα: 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : ((B9aAlg_C B9bAlg_C) B9cAlgC_C) ομοιότητα: 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (((B9aAlg_C B9bAlg_C) B9cAlgC_C) B9dAlg_C) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (B9aGeo_C B9cGeo_C) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : ((B9aGeo_C B9cGeo_C) B9bGeo_C) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (((B9aGeo_C B9cGeo_C) B9bGeo_C) B9dGeo_C) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : (A11aGeo_C A11bGeo_C) ομοιότητα : 0.957698

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : (B3aAlg_C B3bAlg_C) ομοιότητα: 0.877806

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : (A11aAlg_C A11bAlg_C) ομοιότητα : 0.764631

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : (B3aGeo_C B3bGeo_C) ομοιότητα : 0.44681

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : ((A11aGeo_C A11bGeo_C) (A11aAlg_C A11bAlg_C)) ομοιότητα : 0.277923

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 12 : ((B3aGeo_C B3bGeo_C) (((B9aAlg_C B9bAlg_C) B9cAlgC_C) B9dAlg_C)) : 0.144728

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 51

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών της Β΄ Λυκείου σχετικά με την προσέγγιση, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 51: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ Λυκείου που αφορά όλες τις μεταβλητές για την προσέγγιση της συνάρτησης) στη σελίδα 171.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (B9aGeo B9bGeo) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : (B9cAlg B9dAlg) ομοιότητα: 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (B9cGeo B9dGeo) ομοιότητα: 0.994437

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (B9c (B9cAlg B9dAlg)) ομοιότητα : 0.990167

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (A11a A11b) ομοιότητα : 0.988082

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (B3aAlg B3bAlg) ομοιότητα : 0.985875

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : ((B9c (B9cAlg B9dAlg)) B9d) ομοιότητα : 0.985286

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : (A11aGeo A11bGeo) ομοιότητα: 0.981279

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : ((B9aGeo B9bGeo) (B9cGeo B9dGeo)) ομοιότητα : 0.979343

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : (B9b ((B9c (B9cAlg B9dAlg)) B9d)) ομοιότητα : 0.933426

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : (B3a B3b) ομοιότητα : 0.918337

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 12 : (A11aAlg A11bAlg) ομοιότητα: 0.871731

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 13 : (B3aGeo (B9b ((B9c (B9cAlg B9dAlg)) B9d))) ομοιότητα : 0.849909

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 14 : (B9a ((B9aGeo B9bGeo) (B9cGeo B9dGeo))) ομοιότητα : 0.812727

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 15 : ((A11a A11b) (A11aGeo A11bGeo)) ομοιότητα : 0.769761

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 16 : ((B3aAlg B3bAlg) (B3aGeo (B9b ((B9c (B9cAlg B9dAlg)) B9d)))) ομοιότητα : 0.50614

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 17 : ((B3a B3b) ((B3aAlg B3bAlg) (B3aGeo (B9b ((B9c (B9cAlg B9dAlg)) B9d))))) ομοιότητα : 0.333277

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 18 : (((B3a B3b) ((B3aAlg B3bAlg) (B3aGeo (B9b ((B9c (B9cAlg B9dAlg)) B9d))))) B3bGeo) ομοιότητα: 0.0764951

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 19 : (((A11a A11b) (A11aGeo A11bGeo)) (A11aAlg A11bAlg)) ομοιότητα: 0.0239722

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 52

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση των μεταβλητών της Β΄ Λυκείου που εκφράζουν προσέγγιση, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 52: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ Λυκείου που αφορά μόνο τις μεταβλητές για την προσέγγιση της συνάρτησης) στη σελίδα 172.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (B9aAlg B9bAlg) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : (B9aGeo B9bGeo) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (B3aGeo (B9aAlg B9bAlg)) ομοιότητα : 0.995981

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (B9cGeo B9dGeo) ομοιότητα : 0.994437

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (B3aAlg B3bAlg) ομοιότητα : 0.985875

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (A11aGeo A11bGeo) ομοιότητα : 0.981279

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : ((B9aGeo B9bGeo) (B9cGeo B9dGeo)) ομοιότητα : 0.979343

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : ((B3aAlg B3bAlg) (B3aGeo (B9aAlg B9bAlg))) ομοιότητα : 0.953367

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : (A11aAlg A11bAlg) ομοιότητα : 0.871731

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : (((B3aAlg B3bAlg) (B3aGeo (B9aAlg B9bAlg))) B3bGeo) ομοιότητα : 0.276577

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : ((A11aGeo A11bGeo) ((B9aGeo B9bGeo) (B9cGeo B9dGeo))) ομοιότητα : 0.0735827

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 53

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών της Β΄ Λυκείου που εκφράζουν μόνο ορθές απαντήσεις σχετικά με την προσέγγιση, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας**:(Διάγραμμα 53: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ Λυκείου που αφορά μόνο με ορθές απαντήσεις για την προσέγγιση της συνάρτησης) στη σελίδα 174.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (A11a A11b) ομοιότητα : 0.988082

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : (B9b B9c) ομοιότητα: 0.982924

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : ((B9b B9c) B9d) ομοιότητα: 0.96614

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (B3a B3b) ομοιότητα : 0.918337

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (B9a ((B9b B9c) B9d)) ομοιότητα : 0.748057

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : ((A11a A11b) (B3a B3b)) ομοιότητα : 0.0499993

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 54

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση των μεταβλητών της Β΄ Λυκείου σχετικά με την προσέγγιση και την ορθότητα των απαντήσεων, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 54: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ Λυκείου που αφορά την επιτυχία κάθε προσέγγισης της συνάρτησης) στη σελίδα 175.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (B9aGeo_C B9cGeo_C) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : (B3bAlg_C B9bAlg_C) ομοιότητα : 0.998288

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : ((B9aGeo_C B9cGeo_C) B9bGeo_C) ομοιότητα : 0.985674

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (A11aGeo_C A11bGeo_C) ομοιότητα : 0.959316

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (((B9aGeo_C B9cGeo_C) B9bGeo_C) B9dGeo_C) ομοιότητα : 0.93287

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (B3aAlg_C (B3bAlg_C B9bAlg_C)) ομοιότητα : 0.878865

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : (B3aGeo_C B3bGeo_C) ομοιότητα : 0.745361

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : (A11aAlg_C A11bAlg_C) ομοιότητα : 0.629202

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : ((A11aGeo_C A11bGeo_C) (A11aAlg_C A11bAlg_C)) ομοιότητα : 0.253372

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 55

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών σχετικά με την επίλυση προβλήματος, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 55: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά τη λύση προβλήματος) στη σελίδα 177.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (A6i A6ii) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : ((A6i A6ii) A6iii) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (((A6i A6ii) A6iii) A6vi) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (B6 B8Exp) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : ((B6 B8Exp) B6Exp) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (((B6 B8Exp) B6Exp) B8) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : ((((A6i A6ii) A6iii) A6vi) (((B6 B8Exp) B6Exp) B8)) ομοιότητα : 1

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 56

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών σχετικά με την επίλυση προβλήματος, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 56: Διάγραμμα ομοιότητας για την Γ΄ Γυμνασίου που αφορά τη λύση προβλήματος) στη σελίδα 178.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (A6i A6iii) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : ((A6i A6iii) A6ii) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (((A6i A6iii) A6ii) A6vi) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : ((((A6i A6iii) A6ii) A6vi) B6Exp) ομοιότητα : 0.990783

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (((((A6i A6iii) A6ii) A6vi) B6Exp) B6) ομοιότητα : 0.727543

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 57

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών σχετικά με την επίλυση προβλήματος, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 57: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά τη λύση προβλήματος) στη σελίδα 179.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (A6i A6ii) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : ((A6i A6ii) A6iii) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (((A6i A6ii) A6iii) A6vi) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (B6Exp B8Exp) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : ((((A6i A6ii) A6iii) A6vi) (B6Exp B8Exp)) ομοιότητα: 0.99999

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (((((A6i A6ii) A6iii) A6vi) (B6Exp B8Exp)) B8) ομοιότητα : 0.999804

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : ((((((A6i A6ii) A6iii) A6vi) (B6Exp B8Exp)) B8) B6) ομοιότητα: 0.999749

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 58

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών σχετικά με την επίλυση προβλήματος, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 58: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ Λυκείου που αφορά τη λύση προβλήματος) στη σελίδα 180.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : (A6iii A6vi) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : ((A6i A6ii) (A6iii A6vi)) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (B8 B8Exp) ομοιότητα : 0.996952

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (((A6i A6ii) (A6iii A6vi)) (B8 B8Exp)) ομοιότητα : 0.967922

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (B6 B6Exp) ομοιότητα : 0.909465

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : ((((A6i A6ii) (A6iii A6vi)) (B8 B8Exp)) (B6 B6Exp)) ομοιότητα : 0.309891

Επίλυση Προβλήματος και Ερμηνεία

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 59

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών (πλην των επεξηγήσεων) σχετικά με την επίλυση προβλήματος και την ερμηνεία , όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 59: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά τη λύση προβλήματος σε σχέση με την ερμηνεία) στη σελίδα 181.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (A6i A8) ομοιότητα : 0.945908

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : (B8 B7a) ομοιότητα : 0.912138

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (A6iii A6vi) ομοιότητα : 0.911757

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (B4b B4c) ομοιότητα : 0.888774

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : ((A6i A8) A9) ομοιότητα : 0.720815

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (B4a (B4b B4c)) ομοιότητα : 0.612195

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : (((A6i A8) A9) A6ii) ομοιότητα : 0.596967

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : ((B8 B7a) B5c) ομοιότητα : 0.374657

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : (B6 B7b) ομοιότητα : 0.324991

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : ((((A6i A8) A9) A6ii) (A6iii A6vi)) ομοιότητα : 0.254985

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : (((B8 B7a) B5c) A4) Ταξινόμηση στο επίπεδο : 0.118843

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 12 : ((((B8 B7a) B5c) A4) B5a) ομοιότητα : 0.0299667

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 13 : (((((A6i A8) A9) A6ii) (A6iii A6vi)) (B6 B7b)) ομοιότητα : 0.0124591

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 60

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών σχετικά με την επίλυση προβλήματος και την ερμηνεία , όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 60: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά όλες τις μεταβλητές με επεξηγήσεις για τη λύση προβλήματος σε σχέση με την ερμηνεία) στη σελίδα 182.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (A8 A8Exp) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : (B5aExp B5bExp) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : ((B5aExp B5bExp) B5cExp) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (B5c ((B5aExp B5bExp) B5cExp)) ομοιότητα : 0.999999

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (B7a B7Exp) ομοιότητα : 0.987527

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (A6iii A6vi) ομοιότητα : 0.911757

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : (A4 A4Exp) ομοιότητα: 0.897874

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : (A6i (A8 A8Exp)) ομοιότητα : 0.894741

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : (B4b B4c) ομοιότητα : 0.888774

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : (B8 (B7a B7Exp)) ομοιότητα : 0.831996

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : (A6ii (B5c ((B5aExp B5bExp) B5cExp))) ομοιότητα : 0.780043

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 12 : ((A6ii (B5c ((B5aExp B5bExp) B5cExp))) A9) ομοιότητα : 0.730957

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 13 : (B4a (B4b B4c)) ομοιότητα : 0.612195

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 14 : ((A6i (A8 A8Exp)) B8Exp) ομοιότητα : 0.610687

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 15 : (B6Exp B7b) ομοιότητα : 0.556171

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 16 : (((A6ii (B5c ((B5aExp B5bExp) B5cExp))) A9) (B8 (B7a B7Exp))) ομοιότητα : 0.261638

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 17 : (((A6i (A8 A8Exp)) B8Exp) (A6iii A6vi)) ομοιότητα : 0.254985

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 18 : ((((A6i (A8 A8Exp)) B8Exp) (A6iii A6vi)) B6) ομοιότητα : 0.11162

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 19 : ((B6Exp B7b) (B4a (B4b B4c))) ομοιότητα : 0.0620497

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 61

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών σχετικά με την επίλυση προβλήματος και την ερμηνεία , όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 61: Διάγραμμα ομοιότητας για την Γ΄ Γυμνασίου που αφορά τη λύση προβλήματος σε σχέση με την ερμηνεία) στη σελίδα 183.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (A6i A6iii) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : ((A6i A6iii) A6ii) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (((A6i A6iii) A6ii) A6vi) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (B4a B4b) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : ((B4a B4b) B4c) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (B6 B7c) ομοιότητα : 0.9996

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : (A8 A9) ομοιότητα : 0.992883

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : (A4 B5a) ομοιότητα : 0.988849

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : (B5c B7b) ομοιότητα : 0.980261

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : (((B4a B4b) B4c) B7a) ομοιότητα : 0.979547

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : ((B6 B7c) (A4 B5a)) ομοιότητα: 0.973296

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 12 : (B5b B7d) ομοιότητα : 0.931255

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 13 : ((A8 A9) (((B4a B4b) B4c) B7a)) ομοιότητα : 0.919589

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 14 : (((B6 B7c) (A4 B5a)) (B5c B7b)) ομοιότητα: 0.740627

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 15 : ((((A6i A6iii) A6ii) A6vi) ((A8 A9) (((B4a B4b) B4c) B7a ομοιότητα: 0.737791

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 16 : (((((A6i A6iii) A6ii) A6vi) ((A8 A9) (((B4a B4b) B4c) B7a))) (B5b B7d)) ομοιότητα : 0.35439

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 17 : ((((((A6i A6iii) A6ii) A6vi) ((A8 A9) (((B4a B4b) B4c) B7a))) (B5b B7d)) (((B6 B7c) (A4 B5a)) (B5c B7b))) ομοιότητα : 0.0668143

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 62

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών σχετικά με την επίλυση προβλήματος και την ερμηνεία , όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 62: Διάγραμμα ομοιότητας για την Γ΄ Γυμνασίου που αφορά όλες τις μεταβλητές με επεξηγήσεις για τη λύση προβλήματος σε σχέση με την ερμηνεία) στη σελίδα 185.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (A6i A6iii) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : ((A6i A6iii) A6ii) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (((A6i A6iii) A6ii) A6vi) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (A4 A4Exp) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (A8 A8Exp) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (B4a B4b) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : ((B4a B4b) B4c) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : (B7a B7Exp) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : (B6Exp ((B4a B4b) B4c)) ομοιότητα : 0.999998

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : ((A8 A8Exp) A9) ομοιότητα : 0.999788

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : (B6 B7c) ομοιότητα : 0.9996

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 12 : ((((A6i A6iii) A6ii) A6vi) (B7a B7Exp)) ομοιότητα : 0.998415

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 13 : ((B6Exp ((B4a B4b) B4c)) ((A8 A8Exp) A9)) ομοιότητα : 0.993023

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 14 : ((B6 B7c) B5a) ομοιότητα : 0.986558

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 15 : (B5c B7b) ομοιότητα : 0.980261

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 16 : (((B6 B7c) B5a) (A4 A4Exp)) ομοιότητα : 0.93493

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 17 : (B5b B7d) ομοιότητα : 0.931255

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 18 : (((((A6i A6iii) A6ii) A6vi) (B7a B7Exp)) ((B6Exp ((B4a B4b) B4c)) ((A8 A8Exp) A9))) ομοιότητα : 0.907352

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 19 : ((((B6 B7c) B5a) (A4 A4Exp)) (B5c B7b)) ομοιότητα : 0.687068

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 20 : ((((((A6i A6iii) A6ii) A6vi) (B7a B7Exp)) ((B6Exp ((B4a B4b) B4c)) ((A8 A8Exp) A9))) ((((B6 B7c) B5a) (A4 A4Exp)) (B5c B7b))) ομοιότητα : 0.37335

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 21 : (((((((A6i A6iii) A6ii) A6vi) (B7a B7Exp)) ((B6Exp ((B4a B4b) B4c)) ((A8 A8Exp) A9))) ((((B6 B7c) B5a) (A4 A4Exp)) (B5c B7b))) (B5b B7d)) ομοιότητα: 0.125592

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 63

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών σχετικά με την επίλυση προβλήματος και την ερμηνεία , όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας**: (Διάγραμμα 63: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά τις μεταβλητές χωρίς τις μεταβλητές επεξήγησης για τη λύση προβλήματος σε σχέση με την ερμηνεία) στη σελίδα 186.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (A6i A6ii) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : ((A6i A6ii) A6iii) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (((A6i A6ii) A6iii) A6vi) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (B6 B7b) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (B4b B4c) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : ((((A6i A6ii) A6iii) A6vi) A4) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : (B4a (B4b B4c)) ομοιότητα : 0.999979

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : (B8 B7a) ομοιότητα : 0.999349

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : (B5a B7d) ομοιότητα : 0.99775

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : (A8 A9) ομοιότητα : 0.996978

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : ((B8 B7a) B5c) ομοιότητα : 0.995501

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 12 : (B5b B7c) ομοιότητα : 0.985631

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 13 : (((((A6i A6ii) A6iii) A6vi) A4) (B6 B7b)) ομοιότητα : 0.983835

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 14 : ((((((A6i A6ii) A6iii) A6vi) A4) (B6 B7b)) (B4a (B4b B4c))) ομοιότητα : 0.948043

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 15 : (((B8 B7a) B5c) (B5a B7d)) ομοιότητα : 0.929133

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 16 : (((((((A6i A6ii) A6iii) A6vi) A4) (B6 B7b)) (B4a (B4b B4c))) (A8 A9)) ομοιότητα : 0.925032

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 17 : ((((((((A6i A6ii) A6iii) A6vi) A4) (B6 B7b)) (B4a (B4b B4c))) (A8 A9)) (((B8 B7a) B5c) (B5a B7d))) ομοιότητα : 0.667325

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 18 : (((((((((A6i A6ii) A6iii) A6vi) A4) (B6 B7b)) (B4a (B4b B4c))) (A8 A9)) (((B8 B7a) B5c) (B5a B7d))) (B5b B7c)) ομοιότητα : 0.149886

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 64

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών σχετικά με την επίλυση προβλήματος και την ερμηνεία , όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας**: (Διάγραμμα 64: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά όλες τις μεταβλητές με επεξηγήσεις για τη λύση προβλήματος σε σχέση με την ερμηνεία) στη σελίδα 188.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (A6i A6ii) ομοιότητα: 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : ((A6i A6ii) A6iii) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (((A6i A6ii) A6iii) A6vi) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : ((((A6i A6ii) A6iii) A6vi) B5cExp) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (B6 B5aExp) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : ((B6 B5aExp) B7b) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : (B6Exp B8Exp) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : (B8 B7Exp) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : ((B8 B7Exp) B7a) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : (A4 A4Exp) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : (B4b B4c) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 12 : (A8 A8Exp) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 13 : (((((A6i A6ii) A6iii) A6vi) B5cExp) (A4 A4Exp)) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 14 : (((B6 B5aExp) B7b) (B6Exp B8Exp)) ομοιότητα : 0.999995

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 15 : (B4a (B4b B4c)) ομοιότητα : 0.999979

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 16 : ((((((A6i A6ii) A6iii) A6vi) B5cExp) (A4 A4Exp)) (((B6 B5aExp) B7b) (B6Exp B8Exp))) ομοιότητα : 0.999954

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 17 : (((((((A6i A6ii) A6iii) A6vi) B5cExp) (A4 A4Exp)) (((B6 B5aExp) B7b) (B6Exp B8Exp))) ((B8 B7Exp) B7a)) ομοιότητα : 0.999893

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 18 : ((A8 A8Exp) A9) ομοιότητα : 0.999876

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 19 : ((((((((A6i A6ii) A6iii) A6vi) B5cExp) (A4 A4Exp)) (((B6 B5aExp) B7b) (B6Exp B8Exp))) ((B8 B7Exp) B7a)) ((A8 A8Exp) A9)) ομοιότητα : 0.999475

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 20 : (B5a B7d) ομοιότητα : 0.99775

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 21 : (B5b B7c) ομοιότητα : 0.985631

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 22 : (((((((((A6i A6ii) A6iii) A6vi) B5cExp) (A4 A4Exp)) (((B6 B5aExp) B7b) (B6Exp B8Exp))) ((B8 B7Exp) B7a)) ((A8 A8Exp) A9)) B5c) ομοιότητα : 0.982606

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 23 : ((((((((((A6i A6ii) A6iii) A6vi) B5cExp) (A4 A4Exp)) (((B6 B5aExp) B7b) (B6Exp B8Exp))) ((B8 B7Exp) B7a)) ((A8 A8Exp) A9)) B5c) (B4a (B4b B4c))) ομοιότητα : 0.954039

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 24 : (((((((((((A6i A6ii) A6iii) A6vi) B5cExp) (A4 A4Exp)) (((B6 B5aExp) B7b) (B6Exp B8Exp))) ((B8 B7Exp) B7a)) ((A8 A8Exp) A9)) B5c) (B4a (B4b B4c))) (B5a B7d)) ομοιότητα : 0.67914

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 25 : ((((((((((((A6i A6ii) A6iii) A6vi) B5cExp) (A4 A4Exp)) (((B6 B5aExp) B7b) (B6Exp B8Exp))) ((B8 B7Exp) B7a)) ((A8 A8Exp) A9)) B5c) (B4a (B4b B4c))) (B5a B7d)) (B5b B7c)) ομοιότητα : 0.0686073

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 65

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών σχετικά με την επίλυση προβλήματος και την ερμηνεία , όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 65: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ Λυκείου που αφορά τη λύση προβλήματος σε σχέση με την ερμηνεία) στη σελίδα 189.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (A6i A6ii) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : (A6iii A6vi) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (B4b B4c) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : ((A6i A6ii) (A6iii A6vi)) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (B4a (B4b B4c)) ομοιότητα : 0.999989

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (((A6i A6ii) (A6iii A6vi)) A4) ομοιότητα : 0.999085

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : (B8 (B4a (B4b B4c))) ομοιότητα : 0.999072

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : (B5c B7a) ομοιότητα : 0.993273

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : ((((A6i A6ii) (A6iii A6vi)) A4) A9) ομοιότητα : 0.992877

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : (B5b B7c) ομοιότητα : 0.968511

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : (((((A6i A6ii) (A6iii A6vi)) A4) A9) (B5c B7a)) ομοιότητα: 0.956658

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 12 : ((((((A6i A6ii) (A6iii A6vi)) A4) A9) (B5c B7a)) A8) ομοιότητα:0.930295

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 13 : (B6 (B8 (B4a (B4b B4c)))) ομοιότητα: 0.920976

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 14 : (((((((A6i A6ii) (A6iii A6vi)) A4) A9) (B5c B7a)) A8) (B6 (B8 (B4a (B4b B4c))))) ομοιότητα: 0.849867

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 15 : ((B5b B7c) B7d) ομοιότητα: 0.645221

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 16 : (B5a B7b) ομοιότητα: 0.48588

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 17 : ((B5a B7b) ((B5b B7c) B7d)) ομοιότητα: 0.166694

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 66

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών σχετικά με την επίλυση προβλήματος και την ερμηνεία , όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας**: (Διάγραμμα 66: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ Λυκείου που αφορά όλες τις μεταβλητές με επεξηγήσεις για τη λύση προβλήματος σε σχέση με την ερμηνεία) στη σελίδα 191**.

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (A6i A6ii) ομοιότητα: 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : (A6iii A6vi) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (A4 A4Exp) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (B4b B4c) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (B5bExp B5cExp) ομοιότητα: 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (B5aExp (B5bExp B5cExp)) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : ((A6i A6ii) (A6iii A6vi)) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : (B4a (B4b B4c)) ομοιότητα : 0.999989

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : (A8 A8Exp) ομοιότητα: 0.99992

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : (((A6i A6ii) (A6iii A6vi)) (B5aExp (B5bExp B5cExp))) ομοιότητα: 0.9999

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : (B7a B7Exp) ομοιότητα : 0.999765

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 12 : ((((A6i A6ii) (A6iii A6vi)) (B5aExp (B5bExp B5cExp))) (A4 A4Exp)) ομοιότητα : 0.999713

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 13 : (B8 (B4a (B4b B4c))) ομοιότητα: 0.999072

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 14 : (((((A6i A6ii) (A6iii A6vi)) (B5aExp (B5bExp B5cExp))) (A4 A4Exp)) B7b) ομοιότητα : 0.998975

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 15 : (A9 (B7a B7Exp)) ομοιότητα: 0.998123

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 16 : ((((((A6i A6ii) (A6iii A6vi)) (B5aExp (B5bExp B5cExp))) (A4 A4Exp)) B7b) (A9 (B7a B7Exp))) ομοιότητα : 0.994377

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 17 : ((B8 (B4a (B4b B4c))) B8Exp) ομοιότητα : 0.987865

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 18 : (B5b B7c) ομοιότητα: 0.968511

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 19 : (((((((A6i A6ii) (A6iii A6vi)) (B5aExp (B5bExp B5cExp))) (A4 A4Exp)) B7b) (A9 (B7a B7Exp))) (A8 A8Exp)) ομοιότητα: 0.956918

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 20 : (B6 B6Exp) ομοιότητα : 0.909465

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 21 : ((((((((A6i A6ii) (A6iii A6vi)) (B5aExp (B5bExp B5cExp))) (A4 A4Exp)) B7b) (A9 (B7a B7Exp))) (A8 A8Exp)) B5c) ομοιότητα: 0.907551

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 22 : ((B6 B6Exp) ((B8 (B4a (B4b B4c))) B8Exp)) ομοιότητα : 0.813994

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 23 : (((((((((A6i A6ii) (A6iii A6vi)) (B5aExp (B5bExp B5cExp))) (A4 A4Exp)) B7b) (A9 (B7a B7Exp))) (A8 A8Exp)) B5c) ((B6 B6Exp) ((B8 (B4a (B4b B4c))) B8Exp))) ομοιότητα : 0.667056

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 24 : ((B5b B7c) B7d) ομοιότητα: 0.645221

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 25 : ((((((((((A6i A6ii) (A6iii A6vi)) (B5aExp (B5bExp B5cExp))) (A4 A4Exp)) B7b) (A9 (B7a B7Exp))) (A8 A8Exp)) B5c) ((B6 B6Exp) ((B8 (B4a (B4b B4c))) B8Exp))) ((B5b B7c) B7d)) ομοιότητα : 0.232261

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 26 : (((((((((((A6i A6ii) (A6iii A6vi)) (B5aExp (B5bExp B5cExp))) (A4 A4Exp)) B7b) (A9 (B7a B7Exp))) (A8 A8Exp)) B5c) ((B6 B6Exp) ((B8 (B4a (B4b B4c))) B8Exp))) ((B5b B7c) B7d)) B5a) ομοιότητα : 0.13803

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 67

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών σχετικά με την επίλυση προβλήματος και την προσέγγιση , όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 67: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά τη λύση προβλήματος σε σχέση με την προσέγγιση) στη σελίδα 192.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (A11a A11b) ομοιότητα: 0.995611

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : (B9b B9c) ομοιότητα : 0.963608

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : ((B9b B9c) B9d) ομοιότητα : 0.92854

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (A6iii A6vi) ομοιότητα : 0.911757

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (B3a B3b) ομοιότητα : 0.871731

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (B9a ((B9b B9c) B9d)) ομοιότητα : 0.793921

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : (A6i A6ii) ομοιότητα : 0.721094

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : (B6 B8Exp) ομοιότητα : 0.441616

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : ((A6i A6ii) (A6iii A6vi)) ομοιότητα : 0.350678

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : ((B3a B3b) B6Exp) ομοιότητα : 0.309326

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : ((B9a ((B9b B9c) B9d)) (B6 B8Exp)) ομοιότητα : 0.150374

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 12 : (((B3a B3b) B6Exp) ((A6i A6ii) (A6iii A6vi))) ομοιότητα : 0.0349669

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 68

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών σχετικά με την επίλυση προβλήματος και την προσέγγιση , όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 68: Διάγραμμα ομοιότητας για την Γ΄ Γυμνασίου που αφορά μόνο τις ορθές απαντήσεις για τη λύση προβλήματος σε σχέση με την προσέγγιση) στη σελίδα 193**.

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (A11a A11b) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : (B9a B9b) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (B9c B9d) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (A6iii A6vi) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (B3a B3b) ομοιότητα : 0.994243

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (A6ii (A6iii A6vi)) ομοιότητα : 0.395895

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : (A6i (A6ii (A6iii A6vi))) ομοιότητα : 0.117047

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : ((B3a B3b) (B9a B9b)) ομοιότητα : 0.0554721

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 69

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών σχετικά με την επίλυση προβλήματος και την προσέγγιση , όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 69: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά μόνο τις ορθές απαντήσεις για τη λύση προβλήματος σε σχέση με την προσέγγιση) στη σελίδα 195**.

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (A11a A11b) ομοιότητα: 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : (B9a B9c) ομοιότητα: 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : ((B9a B9c) B9b) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (((B9a B9c) B9b) B9d) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (B3b A6i) ομοιότητα : 0.959303

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (A6iii A6vi) ομοιότητα: 0.923365

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : (A6ii (A6iii A6vi)) ομοιότητα : 0.815473

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : ((((B9a B9c) B9b) B9d) B8Exp) ομοιότητα: 0.746731

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : ((B3b A6i) B6Exp) ομοιότητα : 0.691966

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : (((B3b A6i) B6Exp) ((((B9a B9c) B9b) B9d) B8Exp)) ομοιότητα: 0.374831

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : (B3a B8) ομοιότητα: 0.330206

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 12 : ((A6ii (A6iii A6vi)) B6) ομοιότητα: 0.0936004

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 70

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών σχετικά με την επίλυση προβλήματος και την προσέγγιση , όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 70: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ Λυκείου που αφορά μόνο τις ορθές απαντήσεις για τη λύση προβλήματος σε σχέση με την προσέγγιση) στη σελίδα 196**.

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (A11a A11b) ομοιότητα : 0.988082

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : (B9b B9c) ομοιότητα : 0.982924

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : ((B9b B9c) B9d) ομοιότητα : 0.96614

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (A6iii A6vi) ομοιότητα : 0.935018

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (B3a B3b) ομοιότητα : 0.918337

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (A6i A6ii) ομοιότητα : 0.778817

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : (B9a ((B9b B9c) B9d)) ομοιότητα : 0.748057

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : ((A11a A11b) (A6i A6ii)) ομοιότητα : 0.448711

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : (B8 B8Exp) ομοιότητα : 0.386594

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : (((A11a A11b) (A6i A6ii)) (A6iii A6vi)) ομοιότητα : 0.126623

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : ((B3a B3b) B6Exp) ομοιότητα : 0.0942572

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 71

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών σχετικά με την επίλυση προβλήματος και την προσέγγιση (Μόνο ορθές απαντήσεις επίλυσης προβλήματος και μόνο προσεγγίσεις) , όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 71: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά μόνο τις ορθές) στη σελίδα 197.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (B9aAlg B9bAlg) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : ((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) ομοιότητα: 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (B9aGeo B9bGeo) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (B9cGeo B9dGeo) ομοιότητα : 0.997593

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (A11aGeo A11bGeo) ομοιότητα : 0.979099

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : ((B9aGeo B9bGeo) (B9cGeo B9dGeo)) ομοιότητα : 0.972634

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : (B3aAlg B3bAlg) ομοιότητα : 0.969738

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : (A6iii A6vi) ομοιότητα : 0.911757

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : ((B3aAlg B3bAlg) (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg)) ομοιότητα : 0.879017

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : (A11aAlg A11bAlg) ομοιότητα: 0.831846

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 12 : (A6i A6ii) ομοιότητα: 0.721094

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 13 : (B3aGeo B3bGeo) ομοιότητα : 0.593113

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 14 : (((B3aAlg B3bAlg) (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg)) B6) ομοιότητα: 0.591366

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 15 : ((A6i A6ii) (A6iii A6vi)) ομοιότητα : 0.350678

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 16 : ((((B3aAlg B3bAlg) (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg)) B6) B6Exp) ομοιότητα : 0.215475

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 17 : ((A11aGeo A11bGeo) (A11aAlg A11bAlg)) ομοιότητα : 0.119564

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 18 : (((B9aGeo B9bGeo) (B9cGeo B9dGeo)) B8) ομοιότητα : 0.0948147

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 72

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών σχετικά με την επίλυση προβλήματος και την προσέγγιση (Μόνο ορθές απαντήσεις επίλυσης προβλήματος και μόνο προσεγγίσεις) , όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας**: (Διάγραμμα 72: Διάγραμμα ομοιότητας για την Γ΄ Γυμνασίου που αφορά μόνο τις ορθές απαντήσεις για τη λύση προβλήματος σε σχέση με την προσέγγιση) στη σελίδα 198.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (A11aGeo A11bGeo) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : (B3aAlg B3bAlg) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (B3aGeo B3bGeo) ομοιότητα: 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (B9aGeo B9bGeo) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (B9cGeo B9dGeo) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (A6iii A6vi) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : ((B9aGeo B9bGeo) (B9cGeo B9dGeo)) ομοιότητα: 0.704538

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : (A6ii (A6iii A6vi)) ομοιότητα : 0.395895

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : (A6i (A6ii (A6iii A6vi))) ομοιότητα : 0.117047

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : ((B3aAlg B3bAlg) ((B9aGeo B9bGeo) (B9cGeo B9dGeo))) ομοιότητα : 0.113555

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 73

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών σχετικά με την επίλυση προβλήματος και την προσέγγιση (Μόνο ορθές απαντήσεις επίλυσης προβλήματος και μόνο προσεγγίσεις) , όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 73: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά μόνο τις ορθές απαντήσεις για τη λύση προβλήματος σε σχέση με την προσέγγιση) στη σελίδα 200.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (B9aAlg B9bAlg) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : ((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (B9aGeo B9bGeo) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : ((B9aGeo B9bGeo) B9cGeo) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (((B9aGeo B9bGeo) B9cGeo) B9dGeo) ομοιότητα: 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : (A11aGeo A11bGeo) ομοιότητα : 0.971174

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : (B3aAlg A6i) ομοιότητα : 0.959313

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : (A6iii A6vi) ομοιότητα : 0.923365

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : ((B3aAlg A6i) (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg)) ομοιότητα : 0.853251

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : (A6ii (A6iii A6vi)) ομοιότητα : 0.815473

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 12 : (A11aAlg A11bAlg) ομοιότητα : 0.764631

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 13 : (B6 B8Exp) ομοιότητα : 0.693535

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 14 : ((B6 B8Exp) B6Exp) ομοιότητα : 0.426657

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 15 : (((B3aAlg A6i) (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg)) B3bAlg) ομοιότητα: 0.40569

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 16 : ((A11aGeo A11bGeo) B3bGeo) ομοιότητα : 0.316438

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 17 : (((A11aGeo A11bGeo) B3bGeo) (A11aAlg A11bAlg)) ομοιότητα : 0.148135

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 18 : ((((B3aAlg A6i) (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg)) B3bAlg) ((B6 B8Exp) B6Exp)) ομοιότητα : 0.104117

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 19 : ((((B9aGeo B9bGeo) B9cGeo) B9dGeo) B8) ομοιότητα : 0.0119039

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 74

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών σχετικά με την επίλυση προβλήματος και την προσέγγιση (Μόνο ορθές απαντήσεις επίλυσης προβλήματος και μόνο προσεγγίσεις) , όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 74: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ Λυκείου που αφορά μόνο τις ορθές απαντήσεις για τη λύση προβλήματος σε σχέση με την προσέγγιση) στη σελίδα 201.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (B9aAlg B9bAlg) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : (B9aGeo B9bGeo) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (B3aGeo (B9aAlg B9bAlg)) ομοιότητα : 0.995981

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (B9cGeo B9dGeo) ομοιότητα : 0.994437

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : ((B3aGeo (B9aAlg B9bAlg)) B6) ομοιότητα : 0.987853

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (B3aAlg B3bAlg) ομοιότητα : 0.985875

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : (A11aGeo A11bGeo) ομοιότητα : 0.981279

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : ((B9aGeo B9bGeo) (B9cGeo B9dGeo)) ομοιότητα : 0.979343

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : ((B3aAlg B3bAlg) ((B3aGeo (B9aAlg B9bAlg)) B6)) ομοιότητα : 0.938311

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : (A6iii A6vi) ομοιότητα: 0.935018

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : (A11aAlg A11bAlg) ομοιότητα : 0.871731

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 12 : (A6i A6ii) ομοιότητα : 0.778817

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 13 : ((A11aGeo A11bGeo) (A6i A6ii)) ομοιότητα : 0.604042

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 14 : (B8 B8Exp) ομοιότητα : 0.386594

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 15 : (((B3aAlg B3bAlg) ((B3aGeo (B9aAlg B9bAlg)) B6)) B3bGeo) ομοιότητα : 0.213885

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 16 : (((A11aGeo A11bGeo) (A6i A6ii)) (A6iii A6vi)) ομοιότητα: 0.17304

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 17 : ((((A11aGeo A11bGeo) (A6i A6ii)) (A6iii A6vi)) ((B9aGeo B9bGeo) (B9cGeo B9dGeo))) ομοιότητα : 0.0455607

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 18 : ((A11aAlg A11bAlg) (B8 B8Exp)) ομοιότητα: 0.0393974

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 19 : ((((B3aAlg B3bAlg) ((B3aGeo (B9aAlg B9bAlg)) B6)) B3bGeo) B6Exp) ομοιότητα : 0.0379342

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 75

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών του συνολικού δείγματος σχετικά με την ερμηνεία, την προσέγγιση και την επίλυση προβλήματος, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 75: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά τη λύση προβλήματος σε σχέση με την προσέγγιση και ερμηνεία) στη σελίδα 203.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (B9aAlg B9bAlg) ομοιότητα: 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : ((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) ομοιότητα: 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg) ομοιότητα: 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (B9aGeo B9bGeo) ομοιότητα: 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (B9cGeo B9dGeo) ομοιότητα: 0.997593

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (A11aGeo A11bGeo) ομοιότητα: 0.979099

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : ((B9aGeo B9bGeo) (B9cGeo B9dGeo)) ομοιότητα: 0.972634

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : (B3aAlg B3bAlg) ομοιότητα: 0.969738

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : (B8 B7a) ομοιότητα: 0.912138

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : (B4b B4c) ομοιότητα: 0.888774

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : ((B3aAlg B3bAlg) (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg)) ομοιότητα: 0.879017

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 12 : (A11aAlg A11bAlg) ομοιότητα: 0.831846

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 13 : (A6iiiSymb A9) ομοιότητα: 0.831396

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 14 : (A6iiiGraph A8) ομοιότητα: 0.831125

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 15 : (B4a (B4b B4c)) ομοιότητα: 0.612195

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 16 : (B3aGeo B3bGeo) ομοιότητα: 0.593113

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 17 : (((B3aAlg B3bAlg) (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg)) B6) ομοιότητα: 0.591366

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 18 : (A6iiiVerbal (A6iiiGraph A8)) ομοιότητα: 0.542059

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 19 : ((A11aAlg A11bAlg) (A6iiiSymb A9)) ομοιότητα: 0.478784

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 20 : (((B9aGeo B9bGeo) (B9cGeo B9dGeo)) (B8 B7a)) ομοιότητα: 0.45828

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 21 : ((A11aGeo A11bGeo) (A6iiiVerbal (A6iiiGraph A8))) ομοιότητα: 0.226873

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 22 : (((A11aAlg A11bAlg) (A6iiiSymb A9)) B5c) ομοιότητα: 0.152175

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 23 : (((A11aGeo A11bGeo) (A6iiiVerbal (A6iiiGraph A8))) (((B3aAlg B3bAlg) (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg)) B6)) ομοιότητα: 0.050305

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 24 : ((B3aGeo B3bGeo) (B4a (B4b B4c))) ομοιότητα: 0.0280327

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 25 : ((((B9aGeo B9bGeo) (B9cGeo B9dGeo)) (B8 B7a)) A4) ομοιότητα: 0.0141237

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 26 : ((((A11aAlg A11bAlg) (A6iiiSymb A9)) B5c) ((((B9aGeo B9bGeo) (B9cGeo B9dGeo)) (B8 B7a)) A4)) ομοιότητα: 0.0008953

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 27 : ((((A11aGeo A11bGeo) (A6iiiVerbal (A6iiiGraph A8))) (((B3aAlg B3bAlg) (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg)) B6)) ((B3aGeo B3bGeo) (B4a (B4b B4c)))) ομοιότητα : 3.56539e-09

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 76

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών του Γυμνασίου σχετικά με την ερμηνεία, την προσέγγιση και την επίλυση προβλήματος, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 76: Διάγραμμα ομοιότητας για την Γ΄ Γυμνάσιου που αφορά τη λύση προβλήματος σε σχέση με την προσέγγιση και ερμηνεία) στη σελίδα 204.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (A11aGeo A11bGeo) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : (B3aAlg B3bAlg) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (B3aGeo B3bGeo) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (B9aGeo B9bGeo) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (B9dGeo B7a) ομοιότητα : 0.988846

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : ((B9aGeo B9bGeo) (B9dGeo B7a)) ομοιότητα: 0.968649

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : (B4b B4c) ομοιότητα: 0.877806

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : (B4a (B4b B4c)) ομοιότητα: 0.66986

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : (A6iiiVerbal A8) ομοιότητα: 0.51696

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : ((B3aGeo B3bGeo) (B4a (B4b B4c))) ομοιότητα: 0.438778

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : ((A6iiiVerbal A8) A9) ομοιότητα: 0.185073

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 12 : ((A11aGeo A11bGeo) B5c) ομοιότητα: 0.156906

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 13 : ((B3aAlg B3bAlg) ((B9aGeo B9bGeo) (B9dGeo B7a))) ομοιότητα: 0.113555

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 14 : (((B3aAlg B3bAlg) ((B9aGeo B9bGeo) (B9dGeo B7a))) A4) ομοιότητα : 0.00502087

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 15 : (((A11aGeo A11bGeo) B5c) ((B3aGeo B3bGeo) (B4a (B4b B4c)))) ομοιότητα : 0.000686771

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 16 : ((((B3aAlg B3bAlg) ((B9aGeo B9bGeo) (B9dGeo B7a))) A4) ((A6iiiVerbal A8) A9)) ομοιότητα: 3.00856e-06

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 17 : ((((A11aGeo A11bGeo) B5c) ((B3aGeo B3bGeo) (B4a (B4b B4c)))) ((((B3aAlg B3bAlg) ((B9aGeo B9bGeo) (B9dGeo B7a))) A4) ((A6iiiVerbal A8) A9))) ομοιότητα: 5.70855e-11

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 77

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών του Α΄ Λυκείου σχετικά με την ερμηνεία, την προσέγγιση και την επίλυση προβλήματος, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 77: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά τη λύση προβλήματος σε σχέση με την προσέγγιση και ερμηνεία) στη σελίδα 206.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (B9aAlg B9bAlg) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : ((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (B9aGeo B9bGeo) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : ((B9aGeo B9bGeo) B9cGeo) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (((B9aGeo B9bGeo) B9cGeo) B9dGeo) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : (A11aGeo A11bGeo) ομοιότητα : 0.971174

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : (B3aAlg (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg)) ομοιότητα: 0.923716

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : (B4b B4c) ομοιότητα: 0.899803

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : (A8 (B3aAlg (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg))) ομοιότητα: 0.828002

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : (B8 B7a) ομοιότητα: 0.796064

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 12 : (A6iiiSymb A9) ομοιότητα: 0.791076

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 13 : (A11aAlg A11bAlg) ομοιότητα: 0.764631

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 14 : (B4a B3bGeo) ομοιότητα: 0.601807

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 15 : (A6iiiVerbal B6) ομοιότητα: 0.583343

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 16 : ((A8 (B3aAlg (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg))) B3bAlg) ομοιότητα: 0.40569

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 17 : ((A6iiiSymb A9) (B8 B7a)) ομοιότητα: 0.400603

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 18 : ((A11aGeo A11bGeo) (A11aAlg A11bAlg)) ομοιότητα: 0.279966

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 19 : ((B4a B3bGeo) (B4b B4c)) ομοιότητα: 0.262146

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 20 : ((A6iiiVerbal B6) ((A8 (B3aAlg (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg))) B3bAlg)) ομοιότητα: 0.221317

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 21 : (B5c (((B9aGeo B9bGeo) B9cGeo) B9dGeo)) ομοιότητα: 0.181942

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 22 : (((A6iiiVerbal B6) ((A8 (B3aAlg (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg))) B3bAlg)) A4) ομοιότητα: 0.0557469

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 23 : ((((A6iiiVerbal B6) ((A8 (B3aAlg (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg))) B3bAlg)) A4) A6iiiGraph) ομοιότητα: 0.0349738

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 24 : (((((A6iiiVerbal B6) ((A8 (B3aAlg (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg))) B3bAlg)) A4) A6iiiGraph) B3aGeo) ομοιότητα: 0.00547622

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 25 : (((A6iiiSymb A9) (B8 B7a)) ((A11aGeo A11bGeo) (A11aAlg A11bAlg))) ομοιότητα: 0.00164816

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 26 : ((((((A6iiiVerbal B6) ((A8 (B3aAlg (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg))) B3bAlg)) A4) A6iiiGraph) B3aGeo) ((B4a B3bGeo) (B4b B4c))) ομοιότητα: 9.17793e-06

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 27 : ((((A6iiiSymb A9) (B8 B7a)) ((A11aGeo A11bGeo) (A11aAlg A11bAlg))) (B5c (((B9aGeo B9bGeo) B9cGeo) B9dGeo))) ομοιότητα: 1.92591e-06

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 78

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών της Β΄ Λυκείου σχετικά με την ερμηνεία, την προσέγγιση και την επίλυση προβλήματος, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 78: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ Λυκείου που αφορά τη λύση προβλήματος σε σχέση με την προσέγγιση και ερμηνεία) στη σελίδα 207**.

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg) ομοιότητα: 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (B9aGeo B9bGeo) ομοιότητα: 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (B9cGeo B9dGeo) ομοιότητα: 0.994437

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (B3aGeo (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg)) ομοιότητα: 0.991977

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : (B3aAlg B3bAlg) ομοιότητα: 0.985875

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : (A11aGeo A11bGeo) ομοιότητα: 0.981279

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : (B6 (B3aGeo (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg))) ομοιότητα: 0.979838

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : (A9 A11aAlg) ομοιότητα : 0.979371

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : ((B9aGeo B9bGeo) (B9cGeo B9dGeo)) ομοιότητα: 0.979343

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 12 : (B7a A11bAlg) ομοιότητα: 0.976347

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 13 : (B4b B4c) ομοιότητα: 0.972873

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 14 : (B8 (B7a A11bAlg)) ομοιότητα: 0.91301

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 15 : ((B6 (B3aGeo (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg))) (B3aAlg B3bAlg)) ομοιότητα: 0.908908

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 16 : (A6iiiGraph (B8 (B7a A11bAlg))) ομοιότητα: 0.869787

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 17 : (A6iiiSymb B4a) ομοιότητα: 0.818271

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 18 : (A6iiiVerbal A8) ομοιότητα: 0.757569

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 19 : (((B6 (B3aGeo (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg))) (B3aAlg B3bAlg)) A4) ομοιότητα: 0.65913

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 20 : ((A6iiiGraph (B8 (B7a A11bAlg))) (A9 A11aAlg)) ομοιότητα: 0.626464

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 21 : ((A6iiiVerbal A8) B3bGeo) ομοιότητα: 0.504422

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 22 : ((A6iiiSymb B4a) (B4b B4c)) ομοιότητα: 0.478759

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 23 : (((A6iiiGraph (B8 (B7a A11bAlg))) (A9 A11aAlg)) B5c) ομοιότητα: 0.460055

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 24 : (((A6iiiVerbal A8) B3bGeo) (A11aGeo A11bGeo)) ομοιότητα: 0.345344

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 25 : ((((A6iiiGraph (B8 (B7a A11bAlg))) (A9 A11aAlg)) B5c) ((B9aGeo B9bGeo) (B9cGeo B9dGeo))) ομοιότητα: 0.271737

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 26 : (((A6iiiSymb B4a) (B4b B4c)) (((B6 (B3aGeo (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg))) (B3aAlg B3bAlg)) A4)) ομοιότητα: 0.0315241

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 27 : ((((A6iiiVerbal A8) B3bGeo) (A11aGeo A11bGeo)) ((((A6iiiGraph (B8 (B7a A11bAlg))) (A9 A11aAlg)) B5c) ((B9aGeo B9bGeo) (B9cGeo B9dGeo)))) ομοιότητα: 0.00342833

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 28 : (((((A6iiiVerbal A8) B3bGeo) (A11aGeo A11bGeo)) ((((A6iiiGraph (B8 (B7a A11bAlg))) (A9 A11aAlg)) B5c) ((B9aGeo B9bGeo) (B9cGeo B9dGeo)))) (((A6iiiSymb B4a) (B4b B4c)) (((B6 (B3aGeo (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg))) (B3aAlg B3bAlg)) A4))) ομοιότητα : 3.25784e-06

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 79

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών του συνολικού δείγματος σχετικά με τον ορισμό, την αναγνώριση και την προσέγγιση, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 79: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά τον ορισμό, την αναγνώριση και την προσέγγιση της συνάρτησης) στη σελίδα 209.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (B9aAlg B9bAlg) ομοιότητα: 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : ((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) ομοιότητα: 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg) ομοιότητα: 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (B9aGeo B9bGeo) similarity : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (A12e (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg)) ομοιότητα: 0.999997

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (A12c (A12e (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg))) ομοιότητα: 0.999629

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : (B9cGeo B9dGeo) ομοιότητα: 0.997593

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : (A11aGeo A11bGeo) ομοιότητα: 0.979099

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : ((B9aGeo B9bGeo) (B9cGeo B9dGeo)) ομοιότητα: 0.972634

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : (B3aAlg B3bAlg) ομοιότητα: 0.969738

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : (B1b A11bAlg) ομοιότητα: 0.956807

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 12 : (A1b A2b) ομοιότητα: 0.896969

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 13 : ((A12c (A12e (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg))) A12d) ομοιότητα: 0.844286

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 14 : (A10a A11aAlg) ομοιότητα: 0.798281

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 15 : (((A12c (A12e (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg))) A12d) (B3aAlg B3bAlg)) ομοιότητα: 0.797985

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 16 : (A3 (B1b A11bAlg)) ομοιότητα: 0.740283

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 17 : (A12a A12b) ομοιότητα: 0.691903

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 18 : ((A1b A2b) A2a) ομοιότητα: 0.686992

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 19 : ((A10a A11aAlg) A10b) ομοιότητα : 0.636189

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 20 : (B3aGeo B3bGeo) ομοιότητα: 0.593113

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 21 : (A1a ((A1b A2b) A2a)) ομοιότητα: 0.56499

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 22 : (((A10a A11aAlg) A10b) A10e) ομοιότητα: 0.502703

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 23 : ((A3 (B1b A11bAlg)) A7) ομοιότητα: 0.425102

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 24 : ((A12a A12b) A12f) ομοιότητα : 0.3487

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 25 : (B1a (((A12c (A12e (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg))) A12d) (B3aAlg B3bAlg))) ομοιότητα: 0.314057

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 26 : (((A3 (B1b A11bAlg)) A7) B2) ομοιότητα: 0.248784

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 27 : ((((A10a A11aAlg) A10b) A10e) A10c) ομοιότητα: 0.241595

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 28 : (((((A10a A11aAlg) A10b) A10e) A10c) A10d) ομοιότητα: 0.147615

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 29 : ((((A3 (B1b A11bAlg)) A7) B2) (A11aGeo A11bGeo)) ομοιότητα: 0.141

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 30 : (((A12a A12b) A12f) ((B9aGeo B9bGeo) (B9cGeo B9dGeo))) ομοιότητα: 0.080573

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 31 : ((A1a ((A1b A2b) A2a)) (B1a (((A12c (A12e (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg))) A12d) (B3aAlg B3bAlg)))) ομοιότητα: 0.0539066

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 32 : ((((A12a A12b) A12f) ((B9aGeo B9bGeo) (B9cGeo B9dGeo))) A13c) ομοιότητα: 0.00948296

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 33 : (((((A3 (B1b A11bAlg)) A7) B2) (A11aGeo A11bGeo)) (B3aGeo B3bGeo)) ομοιότητα: 0.00612379

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 34 : (((A1a ((A1b A2b) A2a)) (B1a (((A12c (A12e (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg))) A12d) (B3aAlg B3bAlg)))) (((((A10a A11aAlg) A10b) A10e) A10c) A10d)) ομοιότητα: 0.0021698

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 35 : ((((((A3 (B1b A11bAlg)) A7) B2) (A11aGeo A11bGeo)) (B3aGeo B3bGeo)) ((((A12a A12b) A12f) ((B9aGeo B9bGeo) (B9cGeo B9dGeo))) A13c)) ομοιότητα: 7.9971e-06

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 36 : ((((A1a ((A1b A2b) A2a)) (B1a (((A12c (A12e (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg))) A12d) (B3aAlg B3bAlg)))) (((((A10a A11aAlg) A10b) A10e) A10c) A10d)) ((((((A3 (B1b A11bAlg)) A7) B2) (A11aGeo A11bGeo)) (B3aGeo B3bGeo)) ((((A12a A12b) A12f) ((B9aGeo B9bGeo) (B9cGeo B9dGeo))) A13c))) ομοιότητα: 1.29662e-11

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 80

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών του Γυμνασίου σχετικά με τον ορισμό, την αναγνώριση και την προσέγγιση, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 80: Διάγραμμα ομοιότητας για τη Γ' Γυμνασίου που αφορά τον ορισμό, την αναγνώριση και την προσέγγιση της συνάρτησης) στη σελίδα 211**.

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (A11aGeo A11bGeo) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : (B3aAlg B3bAlg) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (B3aGeo B3bGeo) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (B9aGeo B9bGeo) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (B9cGeo B9dGeo) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (A1b A2b) ομοιότητα : 0.999982

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : (A10e (A11aGeo A11bGeo)) ομοιότητα : 0.999916

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : ((A1b A2b) A2a) ομοιότητα : 0.999602

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : (B1a A10a) ομοιότητα : 0.897046

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : ((A10e (A11aGeo A11bGeo)) A12c) ομοιότητα : 0.7238

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : ((B9aGeo B9bGeo) (B9cGeo B9dGeo)) ομοιότητα : 0.704538

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 12 : (A12f A13c) ομοιότητα : 0.682285

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 13 : (((A10e (A11aGeo A11bGeo)) A12c) A12b) ομοιότητα : 0.648099

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 14 : ((B1a A10a) B2) ομοιότητα : 0.504998

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 15 : (A12d A12e) ομοιότητα : 0.489163

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 16 : (A12a (A12f A13c)) ομοιότητα : 0.420401

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 17 : (A1a A10c) ομοιότητα : 0.32985

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 18 : (B1b ((B9aGeo B9bGeo) (B9cGeo B9dGeo))) ομοιότητα: 0.252539

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 19 : (A10b A10d) ομοιότητα : 0.185241

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 20 : (A7 (((A10e (A11aGeo A11bGeo)) A12c) A12b)) ομοιότητα : 0.181226

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 21 : (((B1a A10a) B2) (B3aAlg B3bAlg)) ομοιότητα: 0.12227

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 22 : ((B1b ((B9aGeo B9bGeo) (B9cGeo B9dGeo))) (A7 (((A10e (A11aGeo A11bGeo)) A12c) A12b))) ομοιότητα : 0.0718679

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 23 : (((A1b A2b) A2a) A3) ομοιότητα : 0.0272745

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 24 : ((((B1a A10a) B2) (B3aAlg B3bAlg)) (B3aGeo B3bGeo)) ομοιότητα : 0.00811194

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 25 : ((A12a (A12f A13c)) (A12d A12e)) ομοιότητα : 0.00598692

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 26 : ((A1a A10c) ((B1b ((B9aGeo B9bGeo) (B9cGeo B9dGeo))) (A7 (((A10e (A11aGeo A11bGeo)) A12c) A12b)))) ομοιότητα : 0.000541269

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 27 : (((((B1a A10a) B2) (B3aAlg B3bAlg)) (B3aGeo B3bGeo)) (A10b A10d)) ομοιότητα : 0.000241034

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 28 : (((A1a A10c) ((B1b ((B9aGeo B9bGeo) (B9cGeo B9dGeo))) (A7 (((A10e (A11aGeo A11bGeo)) A12c) A12b)))) (((A1b A2b) A2a) A3)) ομοιότητα : 5.17205e-05

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 29 : ((((((B1a A10a) B2) (B3aAlg B3bAlg)) (B3aGeo B3bGeo)) (A10b A10d)) ((A12a (A12f A13c)) (A12d A12e))) ομοιότητα: 6.75274e-08

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 81

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών της Α΄ Λυκείου σχετικά με τον ορισμό, την αναγνώριση και την προσέγγιση, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας: **(Διάγραμμα 81: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά τον ορισμό, την αναγνώριση και την προσέγγιση της συνάρτησης) στη σελίδα 212.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (B9aAlg B9bAlg) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : ((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (B9aGeo B9bGeo) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : ((B9aGeo B9bGeo) B9cGeo) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (((B9aGeo B9bGeo) B9cGeo) B9dGeo) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : (A12e (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg)) ομοιότητα : 0.998767

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : (A11aGeo A11bGeo) ομοιότητα : 0.971174

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : (A12c A11bAlg) ομοιότητα : 0.96706

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : (A1b A2b) ομοιότητα : 0.952649

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : (A3 B1b) ομοιότητα : 0.944758

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 12 : (A12d A11aAlg) ομοιότητα : 0.932292

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 13 : ((A12e (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg)) B3aAlg) ομοιότητα : 0.905572

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 14 : (A10a A10b) ομοιότητα : 0.897872

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 15 : ((A12c A11bAlg) ((A12e (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg)) B3aAlg)) ομοιότητα : 0.88546

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 16 : (A1a (A1b A2b)) ομοιότητα : 0.854855

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 17 : ((A10a A10b) A10c) ομοιότητα : 0.790577

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 18 : (A12a A12b) ομοιότητα : 0.788048

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 19 : ((A3 B1b) A7) ομοιότητα : 0.743654

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 20 : ((A12d A11aAlg) A12f) ομοιότητα : 0.709519

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 21 : ((A1a (A1b A2b)) A2a) ομοιότητα : 0.694812

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 22 : (((A10a A10b) A10c) A10d) ομοιότητα : 0.650014

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 23 : (((A3 B1b) A7) ((A12c A11bAlg) ((A12e (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg)) B3aAlg))) ομοιότητα : 0.620926

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 24 : ((((A10a A10b) A10c) A10d) A10e) ομοιότητα : 0.478706

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 25 : (((A1a (A1b A2b)) A2a) B1a) ομοιότητα : 0.463463

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 26 : (B2 A13c) ομοιότητα : 0.446737

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 27 : ((((A1a (A1b A2b)) A2a) B1a) (((A3 B1b) A7) ((A12c A11bAlg) ((A12e (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg)) B3aAlg)))) ομοιότητα : 0.362071

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 28 : ((A11aGeo A11bGeo) B3bGeo) ομοιότητα : 0.316438

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 29 : ((A12a A12b) ((A12d A11aAlg) A12f)) ομοιότητα : 0.275036

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 30 : (B3bAlg B3aGeo) ομοιότητα : 0.171151

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 31 : (((((A1a (A1b A2b)) A2a) B1a) (((A3 B1b) A7) ((A12c A11bAlg) ((A12e (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg)) B3aAlg)))) ((A12a A12b) ((A12d A11aAlg) A12f))) ομοιότητα : 0.0226239

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 32 : (((((A10a A10b) A10c) A10d) A10e) ((A11aGeo A11bGeo) B3bGeo)) ομοιότητα : 0.0197099

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 33 : ((((((A1a (A1b A2b)) A2a) B1a) (((A3 B1b) A7) ((A12c A11bAlg) ((A12e (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg)) B3aAlg)))) ((A12a A12b) ((A12d A11aAlg) A12f))) (B3bAlg B3aGeo)) ομοιότητα : 0.00180867

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 34 : ((B2 A13c) (((B9aGeo B9bGeo) B9cGeo) B9dGeo)) ομοιότητα : 0.000853054

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 35 : (((((((A1a (A1b A2b)) A2a) B1a) (((A3 B1b) A7) ((A12c A11bAlg) ((A12e (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg)) B3aAlg)))) ((A12a A12b) ((A12d A11aAlg) A12f))) (B3bAlg B3aGeo)) (((((A10a A10b) A10c) A10d) A10e) ((A11aGeo A11bGeo) B3bGeo))) ομοιότητα : 4.23446e-07

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 82

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών της Β΄ Λυκείου σχετικά με τον ορισμό, την αναγνώριση και την προσέγγιση, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας. **(Διάγραμμα 82: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ Λυκείου που αφορά τον ορισμό, την αναγνώριση και την προσέγγιση της συνάρτησης) στη σελίδα 213.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (B9aAlg B9bAlg) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : ((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) ομοιότητα : 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg) ομοιότητα: 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (B9aGeo B9bGeo) ομοιότητα: 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (B3aGeo (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg)) ομοιότητα : 0.991977

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (B1b A11bAlg) ομοιότητα: 0.986403

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : (B3aAlg B3bAlg) ομοιότητα : 0.985875

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : (A11aGeo A11bGeo) ομοιότητα : 0.981279

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : ((B3aAlg B3bAlg) (B3aGeo (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg))) ομοιότητα: 0.923492

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : (A12b A12d) ομοιότητα: 0.881365

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : ((B1b A11bAlg) (B9aGeo B9bGeo)) ομοιότητα: 0.877857

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 12 : (A10a A10e) ομοιότητα: 0.86335

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 13 : (A1a A1b) ομοιότητα: 0.799704

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 14 : (A2a A2b) ομοιότητα 0.796319

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 15 : ((A12b A12d) A12f) ομοιότητα : 0.744472

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 16 : ((A10a A10e) A11aAlg) ομοιότητα: 0.744423

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 17 : (B1a A7) ομοιότητα: 0.734789

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 18 : (A12c B3bGeo) ομοιότητα: 0.731

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 19 : (A10d ((B3aAlg B3bAlg) (B3aGeo (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg)))) ομοιότητα: 0.694384

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 20 : (A3 ((B1b A11bAlg) (B9aGeo B9bGeo))) ομοιότητα: 0.67925

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 21 : ((A10d ((B3aAlg B3bAlg) (B3aGeo (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg)))) A12e) ομοιότητα: 0.577302

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 22 : (((A10a A10e) A11aAlg) A10b) ομοιότητα: 0.519895

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 23 : (A12a ((A12b A12d) A12f)) ομοιότητα: 0.456771

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 24 : ((A3 ((B1b A11bAlg) (B9aGeo B9bGeo))) A13c) ομοιότητα: 0.400513

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 25 : ((((A10a A10e) A11aAlg) A10b) A10c) ομοιότητα: 0.398994

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 26 : ((B1a A7) ((A10d ((B3aAlg B3bAlg) (B3aGeo (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg)))) A12e)) ομοιότητα: 0.360086

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 27 : ((A1a A1b) (A2a A2b)) ομοιότητα: 0.352215

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 28 : ((A12c B3bGeo) (A11aGeo A11bGeo)) ομοιότητα : 0.350438

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 29 : (B2 (A12a ((A12b A12d) A12f))) ομοιότητα: 0.253285

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 30 : (((A3 ((B1b A11bAlg) (B9aGeo B9bGeo))) A13c) ((A12c B3bGeo) (A11aGeo A11bGeo))) ομοιότητα: 0.0839163

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 31 : (((B1a A7) ((A10d ((B3aAlg B3bAlg) (B3aGeo (((B9aAlg B9bAlg) B9cAlg) B9dAlg)))) A12e)) ((((A10a A10e) A11aAlg) A10b) A10c)) ομοιότητα: 0.0116456

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 32 : ((((A3 ((B1b A11bAlg) (B9aGeo B9bGeo))) A13c) ((A12c B3bGeo) (A11aGeo A11bGeo))) (B2 (A12a ((A12b A12d) A12f)))) ομοιότητα: 0.00895222

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 33 : (((A1a A1b) (A2a A2b)) ((((A3 ((B1b A11bAlg) (B9aGeo B9bGeo))) A13c) ((A12c B3bGeo) (A11aGeo A11bGeo))) (B2 (A12a ((A12b A12d) A12f))))) ομοιότητα: 0.000241234

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 83

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών του συνολικού δείγματος σχετικά με τον ορισμό, την αναγνώριση και την επίλυση προβλήματος, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας. **(Διάγραμμα 83: Διάγραμμα ομοιότητας για το συνολικό δείγμα που αφορά τον ορισμό, την αναγνώριση και την λύση προβλήματος) στη σελίδα 214.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (A6iii A6vi) ομοιότητα : 0.911757

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : (B1b A6i) ομοιότητα: 0.901361

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (A1b A2b) ομοιότητα : 0.896969

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (A12c A6ii) ομοιότητα : 0.807143

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (A12d A12f) ομοιότητα : 0.804737

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (A10a A10b) ομοιότητα : 0.797614

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : ((B1b A6i) B8) ομοιότητα : 0.770543

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : (A12a A12b) ομοιότητα : 0.691903

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : ((A1b A2b) A2a) ομοιότητα : 0.686992

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : (A3 ((B1b A6i) B8)) ομοιότητα : 0.636938

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : ((A10a A10b) A10e) ομοιότητα : 0.632229

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 12 : (A1a ((A1b A2b) A2a)) ομοιότητα : 0.56499

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 13 : (B1a (A12d A12f)) ομοιότητα : 0.564711

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 14 : ((A12c A6ii) (A6iii A6vi)) ομοιότητα : 0.445209

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 15 : (((A10a A10b) A10e) A10c) ομοιότητα : 0.344601

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 16 : ((A3 ((B1b A6i) B8)) A7) ομοιότητα : 0.319637

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 17 : ((((A10a A10b) A10e) A10c) A10d) ομοιότητα : 0.216423

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 18 : (((A3 ((B1b A6i) B8)) A7) B2) ομοιότητα : 0.175703

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 19 : ((A12a A12b) A13c) ομοιότητα : 0.162024

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 20 : ((B1a (A12d A12f)) A12e) ομοιότητα : 0.146029

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 21 : (((A12c A6ii) (A6iii A6vi)) B6) ομοιότητα : 0.137683

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 22 : ((A1a ((A1b A2b) A2a)) ((B1a (A12d A12f)) A12e)) ομοιότητα : 0.0063959

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 23 : ((((A3 ((B1b A6i) B8)) A7) B2) (((A12c A6ii) (A6iii A6vi)) B6)) ομοιότητα : 0.00594985

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 24 : (((((A10a A10b) A10e) A10c) A10d) ((A12a A12b) A13c)) ομοιότητα : 1.94552e-05

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 25 : (((A1a ((A1b A2b) A2a)) ((B1a (A12d A12f)) A12e)) ((((A3 ((B1b A6i) B8)) A7) B2) (((A12c A6ii) (A6iii A6vi)) B6))) ομοιότητα: 5.56156e-09

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 84

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών του Γυμνασίου σχετικά με τον ορισμό, την αναγνώριση και την επίλυση προβλήματος, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας. **(Διάγραμμα 84: Διάγραμμα ομοιότητας για την Γ΄ Γυμνασίου που αφορά τον ορισμό, την αναγνώριση και την λύση** προβλήματος**)** **στη σελίδα 216.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (A7 A6i) ομοιότητα: 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : (A6iii A6vi) ομοιότητα: 1

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (A1b A2b) ομοιότητα: 0.999982

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : ((A1b A2b) A2a) ομοιότητα: 0.999602

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (B1a A10a) ομοιότητα: 0.897046

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : ((A7 A6i) A10e) ομοιότητα : 0.684819

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : (A12f A13c) ομοιότητα : 0.682285

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : (A1a A12c) ομοιότητα : 0.570074

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : (((A1b A2b) A2a) A12b) ομοιότητα : 0.565863

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : ((B1a A10a) B2) ομοιότητα : 0.504998

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : (A12d A12e) ομοιότητα : 0.489163

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 12 : (A12a (A12f A13c)) ομοιότητα : 0.420401

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 13 : (A6ii (A6iii A6vi)) ομοιότητα : 0.395895

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 14 : (A10b A10d) ομοιότητα : 0.185241

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 15 : ((A1a A12c) A10c) ομοιότητα : 0.108801

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 16 : ((((A1b A2b) A2a) A12b) B1b) ομοιότητα : 0.0518406

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 17 : (((B1a A10a) B2) (A12a (A12f A13c))) ομοιότητα : 0.0368041

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 18 : (A3 ((A7 A6i) A10e)) ομοιότητα : 0.0268694

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 19 : ((A3 ((A7 A6i) A10e)) (A10b A10d)) ομοιότητα : 0.00295129

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 20 : (((A1a A12c) A10c) ((((A1b A2b) A2a) A12b) B1b)) ομοιότητα : 0.000178716

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 21 : ((((B1a A10a) B2) (A12a (A12f A13c))) (A12d A12e)) ομοιότητα : 3.58432e-05

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 22 : (((A3 ((A7 A6i) A10e)) (A10b A10d)) (A6ii (A6iii A6vi))) ομοιότητα : 2.57133e-06

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 23 : ((((A1a A12c) A10c) ((((A1b A2b) A2a) A12b) B1b)) (((A3 ((A7 A6i) A10e)) (A10b A10d)) (A6ii (A6iii A6vi)))) ομοιότητα : 1.40978e-11

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 85

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών της Α΄ Λυκείου σχετικά με τον ορισμό, την αναγνώριση και την επίλυση προβλήματος, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας. **(Διάγραμμα 85: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ Λυκείου που αφορά τον ορισμό, την αναγνώριση και την λύση προβλήματος) στη σελίδα 217.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (A1b A2b) ομοιότητα: 0.952649

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : (B1b A6i) ομοιότητα: 0.947626

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (A6iii A6vi) ομοιότητα : 0.923365

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (A3 A12c) ομοιότητα: 0.898427

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (A10a A10b) ομοιότητα: 0.897872

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (A1a (A1b A2b)) ομοιότητα : 0.854855

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : (A12d A12f) ομοιότητα : 0.84233

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : (A6ii (A6iii A6vi)) ομοιότητα : 0.815473

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : ((A3 A12c) (B1b A6i)) ομοιότητα : 0.796676

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : ((A10a A10b) A10c) ομοιότητα : 0.790577

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : (A12a A12b) ομοιότητα : 0.788048

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 12 : (B1a A12e) ομοιότητα: 0.777763

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 13 : ((A1a (A1b A2b)) A2a) ομοιότητα : 0.694812

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 14 : (((A10a A10b) A10c) ?10d) ομοιότητα : 0.650014

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 15 : (A7 (A12d A12f)) ομοιότητα : 0.643796

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 16 : (((A3 A12c) (B1b A6i)) B2) ομοιότητα : 0.484704

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 17 : ((((A10a A10b) A10c) ?10d) ?10e) ομοιότητα : 0.478706

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 18 : ((B1a A12e) B6) ομοιότητα: 0.432729

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 19 : ((A12a A12b) A13c) ομοιότητα : 0.346706

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 20 : (((A1a (A1b A2b)) A2a) (((A3 A12c) (B1b A6i)) B2)) ομοιότητα : 0.316496

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 21 : ((A7 (A12d A12f)) ((A12a A12b) A13c)) ομοιότητα: 0.14424

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 22 : (((((A10a A10b) A10c) ?10d) ?10e) (A6ii (A6iii A6vi))) ομοιότητα : 0.0347877

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 23 : ((((A1a (A1b A2b)) A2a) (((A3 A12c) (B1b A6i)) B2)) B8) ομοιότητα : 0.0104976

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 24 : (((B1a A12e) B6) ((A7 (A12d A12f)) ((A12a A12b) A13c))) ομοιότητα : 0.00545863

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 25 : (((((A1a (A1b A2b)) A2a) (((A3 A12c) (B1b A6i)) B2)) B8) (((((A10a A10b) A10c) ?10d) ?10e) (A6ii (A6iii A6vi)))) ομοιότητα : 1.21831e-05

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 26 : ((((((A1a (A1b A2b)) A2a) (((A3 A12c) (B1b A6i)) B2)) B8) (((((A10a A10b) A10c) ?10d) ?10e) (A6ii (A6iii A6vi)))) (((B1a A12e) B6) ((A7 (A12d A12f)) ((A12a A12b) A13c)))) ομοιότητα : 4.79518e-11

Δείκτες Ομοιότητας του Διαγράμματος 86

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι δείκτες ομοιότητας σε όλα τα επίπεδα ταξινόμησης, βάση όλων των μεταβλητών της Β΄ Λυκείου σχετικά με τον ορισμό, την αναγνώριση και την επίλυση προβλήματος, όπως φαίνονται και στο διάγραμμα ομοιότητας. **(Διάγραμμα 86: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ Λυκείου που αφορά τον ορισμό, την αναγνώριση και την λύση προβλήματος) στη σελίδα 218.**

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 1 : (B1b A6iii) ομοιότητα : 0.966801

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 2 : ((B1b A6iii) B8) ομοιότητα : 0.918219

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 3 : (A10a A6vi) ομοιότητα : 0.899406

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 4 : (A12b A12d) ομοιότητα : 0.881365

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 5 : (((B1b A6iii) B8) A6i) ομοιότητα : 0.860225

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 6 : (A12c A6ii) ομοιότητα : 0.849959

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 7 : (A2a A2b) ομοιότητα : 0.796319

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 8 : ((A10a A6vi) ?10e) ομοιότητα : 0.745374

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 9 : ((A12b A12d) A12f) ομοιότητα : 0.744472

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 10 : (B1a A7) ομοιότητα : 0.734789

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 11 : (A3 (((B1b A6iii) B8) A6i)) ομοιότητα : 0.67925

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 12 : (((A10a A6vi) ?10e) ?10d) ομοιότητα : 0.598921

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 13 : (A1b (A2a A2b)) ομοιότητα: 0.593477

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 14 : ((A3 (((B1b A6iii) B8) A6i)) (A12c A6ii)) ομοιότητα: 0.498053

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 15 : (A12a ((A12b A12d) A12f)) ομοιότητα: 0.456771

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 16 : ((((A10a A6vi) ?10e) ?10d) A10b) ομοιότητα: 0.418043

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 17 : (A10c (A12a ((A12b A12d) A12f))) ομοιότητα : 0.351591

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 18 : (((A3 (((B1b A6iii) B8) A6i)) (A12c A6ii)) A13c) ομοιότητα : 0.277756

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 19 : (((((A10a A6vi) ?10e) ?10d) A10b) B6) ομοιότητα : 0.22174

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 20 : (B2 (A10c (A12a ((A12b A12d) A12f)))) ομοιότητα : 0.179685

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 21 : ((A1b (A2a A2b)) A12e) ομοιότητα : 0.122487

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 22 : ((((A3 (((B1b A6iii) B8) A6i)) (A12c A6ii)) A13c) (((((A10a A6vi) ?10e) ?10d) A10b) B6)) ομοιότητα : 0.117844

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 23 : ((B1a A7) (B2 (A10c (A12a ((A12b A12d) A12f))))) ομοιότητα : 0.0559494

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 24 : (((A1b (A2a A2b)) A12e) ((((A3 (((B1b A6iii) B8) A6i)) (A12c A6ii)) A13c) (((((A10a A6vi) ?10e) ?10d) A10b) B6))) ομοιότητα : 0.000420348

Ταξινόμηση στο επίπεδο: 25 : ((((A1b (A2a A2b)) A12e) ((((A3 (((B1b A6iii) B8) A6i)) (A12c A6ii)) A13c) (((((A10a A6vi) ?10e) ?10d) A10b) B6))) ((B1a A7) (B2 (A10c (A12a ((A12b A12d) A12f)))))) ομοιότητα : 5.42901e-09