ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ

Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ – ΕΝΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Νικόλαος Γιασουμής

Διατριβή η οποία υποβλήθηκε προς απόκτηση διδακτορικού τίτλου σπουδών στο Πανεπιστήμιο Κύπρου

Μάιος 2015

ΣΕΛΙΔΑ ΕΓΚΥΡΟΤΗΤΑΣ

Υποψήφιος Διδάκτορας: Νικόλαος Γιασουμής

Τίτλος Διατριβής: Η Διδασκαλία της Έννοιας του Ορίου – Ένα Θεωρητικό Μοντέλο

Η παρούσα Διδακτορική Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για απόκτηση Διδακτορικού Διπλώματος στο Τμήμα Επιστημών της Αγωγής και εγκρίθηκε στις …………………………….(ημερομηνία) από τα μέλη της Εξεταστικής Επιτροπής.

Εξεταστική Επιτροπή:

Ερευνητικός Σύμβουλος: Κωνσταντίνος Χρίστου, Καθηγητής

Πρόεδρος Επιτροπής: Δήμητρα – Πίττα Πανταζή, Αν. Καθηγήτρια

Εσωτερικό Μέλος Επιτροπής: Αθανάσιος Γαγάτσης, Καθηγητής

Εξωτερικό Μέλος Επιτροπής: Θεοδόσης Ζαχαριάδης, Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Εξωτερικό Μέλος Επιτροπής: Χαράλαμπος Σακονίδης, Καθηγητής, Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥ ΔΙΔΑΚΤΟΡΑ

Η παρούσα διατριβή υποβάλλεται προς συμπλήρωση των απαιτήσεων για απονομή Διδακτορικού Τίτλου του Πανεπιστημίου Κύπρου. Είναι προϊόν πρωτότυπης εργασίας αποκλειστικά δικής μου, εκτός των περιπτώσεων που ρητώς αναφέρονται μέσω βιβλιογραφικών αναφορών, σημειώσεων ή και άλλων δηλώσεων.

Νικόλαος Γιασουμής

……………………..

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν η ανάπτυξη ενός θεωρητικού μοντέλου το οποίο περιγράφει τον τρόπο σκέψης των μαθητών για την έννοια του ορίου συνάρτησης. Το μοντέλο βασίστηκε στο μοντέλο της Sierpinska κ. α. (2002) και εμπλουτίστηκε με τα χαρακτηριστικά του τρόπου σκέψης και των διαδικασιών που χρησιμοποιούν οι μαθητές για την κατανόηση πολύπλοκων εννοιών, όπως αναφέρονται σε διάφορες τοπικές θεωρίες των μαθηματικών, όπως η θεωρία APOS, η θεωρία των Tall και των συνεργατών του (2004), η θεωρία της εννοιολογικής αλλαγής (Vosniadou, & Vamvakoussi, 2004) και η θεωρία της πραγμάτωσης (Reification Theory) της Sfard (1991) . Η έρευνα αποσκοπούσε επίσης στην επίδραση της τεχνολογίας στην ανάπτυξη της θεωρητικής σκέψης των μαθητών της Β′ Λυκείου για την έννοια του ορίου, στην ύπαρξη διακριτών ομάδων μαθητών οι οποίες αντιπροσωπεύουν τα διαφορετικά είδη θεωρητικής σκέψης και στην ερμηνεία του συλλογισμού των μαθητών σε έργα υπολογισμού του ορίου συνάρτησης με βάση τα είδη σκέψης που προέκυψαν από το μοντέλο. Για το σκοπό αυτό αναπτύχθηκε και αξιολογήθηκε παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας της έννοιας του ορίου με την ενσωμάτωση της τεχνολογίας.

Η έρευνα στηρίχθηκε και σχεδιάστηκε με βάση την κυκλική δομή ανάπτυξης ερευνών. Συνολικά σχεδιάστηκαν τρεις ερευνητικοί κύκλοι.. Στον πρώτο κύκλο συμμετείχαν 52 μαθητές, οι 15 μαθητές αποτελούσαν την πειραματική ομάδα και οι 37 μαθητές την ομάδα ελέγχου και εφαρμόστηκε παρεμβατική διδασκαλία (10 μαθήματα των 45 λεπτών). Στην πειραματική ομάδα χρησιμοποιήσαμε μαθηματικά εφαρμογίδια, ενώ στην ομάδα ελέγχου οι μαθητές εργάστηκαν στις ίδιες δραστηριότητες με την πειραματική ομάδα, με την διαφορά ότι οι δραστηριότητες ήταν προσαρμοσμένες σε περιβάλλον παραδοσιακής διδασκαλίας. Στο δεύτερο κύκλο συμμετείχαν 225 μαθητές, οι 35 αποτελούσαν την πειραματική ομάδα και οι 190 την ομάδα ελέγχου και εφαρμόστηκε παρεμβατική διδασκαλία (10 μαθήματα των 45 λεπτών). Στην πειραματική ομάδα χρησιμοποιήθηκαν μαθηματικά εφαρμογίδια αλλά διαφοροποιήθηκε η διδακτική προσέγγιση μετά από την πρώτη εφαρμογή κατά τον πρώτο κύκλο διεξαγωγής της έρευνας. Στην ομάδα ελέγχου δεν

χρησιμοποιήθηκαν οι ίδιες δραστηριότητες με αυτές της πειραματικής ομάδας, όπως είχε γίνει στον πρώτο κύκλο. Στον τρίτο κύκλο συμμετείχαν 42 μαθητές οι οποίοι αποτελούσαν την πειραματική ομάδα και εφαρμόστηκε παρεμβατική διδασκαλία (7 μαθήματα των 45 λεπτών). Οι δραστηριότητες του τρίτου παρεμβατικού προγράμματος διδασκαλίας ήταν διαφορετικές από αυτές που χρησιμοποιήθηκαν στους δύο πρώτους κύκλους διεξαγωγής της έρευνας. Η παρέμβαση περιορίστηκε στη μελέτη του ορίου συνάρτησης $f(x)$ όταν το x τείνει σε αριθμό. Σε κάθε κύκλο χορηγήθηκε δοκίμιο αξιολόγησης πριν από και μετά την παρεμβατική διδασκαλία. Στον τρίτο κύκλο μετά την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων πραγματοποιήθηκαν κλινικές συνεντεύξεις. Τα δεδομένα που συλλέχθηκαν αναλύθηκαν με εξειδικευμένες στατιστικές αναλύσεις.

Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης, η οποία πραγματοποιήθηκε στο δεύτερο κύκλο διεξαγωγής της έρευνας, έδειξαν ότι το προτεινόμενο μοντέλο παρέχει ένα ολοκληρωμένο πλαίσιο περιγραφής της κατανόησης της έννοιας του ορίου συνάρτησης. Η επιβεβαίωση του μοντέλου δίνει τη δυνατότητα ανάλυσης της θεωρητικής σκέψης των μαθητών για την έννοια του ορίου συνάρτησης σε δύο μετρήσιμους παράγοντες, την αναλυτική – συστημική σκέψη και την αναστοχαστική σκέψη, με την αναλυτική – συστημική σκέψη να επηρεάζει περισσότερο την θεωρητική σκέψη των μαθητών για την έννοια του ορίου συνάρτησης.

Εντοπίστηκαν τρεις κατηγορίες μαθητών, οι μαθητές της πρώτης κατηγορίας οι οποίοι είχαν χαμηλές επιδόσεις στα έργα και των δύο παραγόντων του μοντέλου ανάπτυξης της θεωρητικής σκέψης των μαθητών για την έννοια του ορίου συνάρτησης. Οι μαθητές της δεύτερης κατηγορίας είχαν μεσαίες επιδόσεις στα έργα του παράγοντα αναλυτική – συστημική σκέψη, αλλά όμως χαμηλές επιδόσεις στα έργα του παράγοντα αναστοχαστική σκέψη. Στην τρίτη κατηγορία συναντούμε τους μαθητές με τις ψηλότερες επιδόσεις στα έργα του παράγοντα αναλυτική – συστημική σκέψη. Οι επιδόσεις τους στα έργα του παράγοντα αναστοχαστική σκέψη είναι ελαφρώς καλύτερες από τις επιδόσεις τους στις δύο πρώτες κατηγορίες.

Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι η ομάδα των μαθητών που παρακολούθησε το παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας, κατά την διάρκεια του δεύτερου κύκλου διεξαγωγής της έρευνας, είχε σαφώς καλύτερα αποτελέσματα και στους δύο παράγοντες του μοντέλου ανάπτυξης της θεωρητικής σκέψης για την έννοια του ορίου συνάρτησης. Οι καλύτερες επιδόσεις των μαθητών ειδικά στα έργα του παράγοντα αναλυτική – συστημική σκέψη, φαίνεται να οφείλεται στη χρήση της τεχνολογίας κατά την διάρκεια του παρεμβατικού προγράμματος διδασκαλίας. Αυτό επιβεβαιώνει τον ισχυρισμό ότι η τεχνολογία έχει θετική επίδραση στη διδασκαλία και μάθηση μαθηματικών εννοιών.

ABSTRACT

The purpose of this study was to develop a theoretical model describing the theoretical thinking of students about the limit concept. The model was based on Sierpinska's et. al. (2002) model and enriched with the characteristics of thinking and procedures used by the students to understand complex concepts, as reported in various local theories. The research study also aimed to verify the effect of technology in the development of theoretical thinking of students on the limit concept. The existence of distinct groups of students was also explored. Each group of students was hypothesized to represent different kinds of theoretical, based on the kinds of thinking that emerged from students' work on tasks that involved the limit of functions.

The study was conducted in three cycles. The first cycle involved 52 students, 15 students were involved in the experimental group and 37 students in the control group. The students in the experimental group attended a teaching program on the limit concept consisting of 10 lessons. In the second cycle 225 students were involved, 35 in the experimental group and 190 in the control group. The students in the experimental group also attended a new teaching program consisting of 10 lessons. The new teaching program differs from the previous one, in the teaching approaches used in integrating the technology for the teaching on the limit concept. In the third cycle 42 students were involved. All of them were involved in the experimental group. They attended a teaching program on the limit concept consisting of 7 lessons. The teaching program was modified accordingly in such a way to study the limit concept, including the approach of limit as an independed variable of a function approaches a real number. A pretest and a posttest were administered to the students before and after the intervention program in all three cycles of the study. In the third circle interviews were conducted after the analysis of the data collected.

The results of the confirmatory factor analysis, as it was conducted during the second cycle, showed that the theoretical proposed model provided a comprehensive framework describing the understanding of the limit concept. The confirmation of the model provided the basis for the examination of the theoretical thinking of students in two measurable factors, the analytical - systemic thinking and the reflective thinking.

The analytical - systemic thinking was more influential on the way that students perceive the theoretical aspects of the limit concept. Specifically, the results showed that the group of students attended the intervention program had significantly better results in both factors of the model of theoretical thinking, the analytic – systemic one and the reflective. Furthermore the results showed that the integration of technology in the intervention program enhanced the theoretical understanding of students.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της συμβουλευτικής επιτροπής που βοήθησαν σημαντικά και ουσιαστικά για τη διεκπεραίωση της εργασίας αυτής. Ιδιαίτερα θέλω να ευχαριστήσω τον ερευνητικό μου σύμβουλο Καθηγητή Κωνσταντίνο Χρίστου, για τις πολύτιμες συμβουλές του και την πραγματική συμπαράσταση του όλο αυτό το χρονικό διάστημα που συνεργαστήκαμε. Η συνεργασία αυτή είναι επιστέγασμα μιας πολύχρονης συνεργασίας η οποία άρχισε με την εγγραφή μου στο Πανεπιστήμιο Κύπρου ως μεταπτυχιακού φοιτητή πριν από 15 χρόνια. Η συνεργασία μας σίγουρα δεν τερματίζεται στο σημείο αυτό. Ευχαριστώ επίσης τα άλλα δύο μέλη της συμβουλευτικής μου επιτροπής με τα οποία είχα μια πολύ εποικοδομητική συνεργασία και των οποίων οι συμβουλές και οι παρατηρήσεις ήταν πολύ ουσιαστικές.

Θερμές ευχαριστίες θα ήθελα να εκφράσω στο εξωτερικό μέλος της επιτροπής μου, Καθηγητή Θεοδόση Ζαχαριάδη με τον οποίο είχα ουσιαστική συνεργασία όλα αυτά τα χρόνια. Οι δικές του γνώσεις αλλά και οι ουσιαστικές και εποικοδομητικές παρατηρήσεις και υποδείξεις με βοήθησαν στη βελτίωση της εργασίας μου.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους συναδέλφους καθηγητές και καθηγήτριες των μαθηματικών που αφιέρωσαν από το διδακτικό τους χρόνο για να μπορέσω να εφαρμόσω το παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας αλλά και για τη χορήγηση των δοκιμίων μέτρησης. Ιδιαίτερα θα ήθελα να ευχαριστήσω το Δρ. Μάριο Πιττάλη, μέλος του Ειδικού Εκπαιδευτικού Προσωπικού του Τμήματος Επιστημών της Αγωγής, για τις πολύ σημαντικές συμβουλές και εισηγήσεις του οι οποίες διαδραμάτισαν σημαντικό ρόλο στο στάδιο της επεξεργασίας των δεδομένων μου.

Τέλος ένα μεγάλο ευχαριστώ το οφείλω στην οικογένεια μου που στάθηκε δίπλα μου και έδειξε κατανόηση έτσι ώστε να μπορέσω να πραγματοποιήσω και αυτό το στόχο στη ζωή μου.

Στη σύζυγο μου Ελπίδα

Και στα δίδυμα μου αγόρια Μηνά και Χαράλαμπο

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Εισαγωγή

Η έννοια του ορίου διαδραματίζει ένα πολύ σημαντικό ρόλο στα μαθηματικά και είναι μια ιδιαίτερα δύσκολη έννοια αντιπροσωπευτική του είδους των νοητικών διεργασιών που απαιτούνται στα ανώτερα μαθηματικά. Από τη στιγμή που ο Ισαάκ Νεύτων και ο Gottfried W. Leibniz διατύπωσαν τις έννοιες της ανάλυσης τον 17^{ο} αιώνα, η έννοια του ορίου έχει θεωρηθεί ως μία από τις θεμελιώδεις έννοιες στα μαθηματικά. Κατέχει δεσπόζουσα θέση (Cotrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf, Thomas και Vidakovic, 1996) στην κατανόηση των ανώτερων μαθηματικών, γιατί υπεισέρχεται στο σύνολο της Μαθηματικής Ανάλυσης ως θεμέλιο της θεωρίας των διαδοχικών προσεγγίσεων, της συνέχειας, του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού (Ferrini-Mundy & Lauten, 1993; Tall, 1992).

Η διδασκαλία και η μάθηση της έννοιας του ορίου ήταν και είναι αντικείμενο επιστημονικών ερευνών (Cornu, 1983, 1991; Davis & Vinner, 1986; Li & Tall, 1993; Sierpinska, 1987; Williams, 1991, 2001). Η αναγκαιότητα της διδασκαλίας της ανάλυσης στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, ήταν αντικείμενο συζήτησης για πολλά χρόνια, λόγω της θεωρητικής φύσης του αντικειμένου και των αντιλήψεων για τις γνωστικές ικανότητες των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Ferrini-Mundy & Guadard, 1992). Ήδη από το 1928 ο Toeplitz είχε εισηγηθεί την αφαίρεση της έννοιας της ανάλυσης από τα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών, νοουμένου ότι οι εκπαιδευτικοί δεν θα έδιναν το θεωρητικό υπόβαθρο της έννοιας και θα παρέμεναν στη ρουτινοποίηση της ανάλυσης. Το θέμα της ρουτινοποίησης, όπως και της αναντιστοιχίας μεταξύ θεωρητικής γνώσης και γνωστικών ικανοτήτων των μαθητών, στη διδασκαλία των εννοιών της ανάλυσης και της έννοιας του ορίου αποτέλεσε το αντικείμενο πολλών ερευνών της μαθηματικής παιδείας. (Artigue, 1997; Harel, Selden & Selden 2006; Tall 1991a). Συγκεκριμένα, διαπιστώθηκε ότι πράγματι οι μαθητές γενικά οικοδομούν τεχνικές ρουτίνας και δεξιότητες χειρισμού και δεν κατανοούν εννοιολογικά τις θεωρητικές έννοιες της ανάλυσης (Berry & Nyman, 2003; Ervynck, 1981; Sierpinska, 1987; Robert, 1982; Davis & Vinner, 1986). Οι Asiala, Dubinsky και Schwingendorf (1997) αναφέρουν ότι αρκετοί ερευνητές έχουν εντοπίσει ότι οι μαθητές δεν κατανοούν πλήρως την έννοια της συνάρτησης και τείνουν να βασίζονται στην ανάγκη χρήσης αλγεβρικών τύπων, με τρόπο πολλές φορές μη κατανοητό, με αποτέλεσμα οι μαθητές να αντιλαμβάνονται τα μαθηματικά ως ένα αλγοριθμικό σύστημα κανόνων και διαδικασιών (Parameswaran, 2007).

Ταυτόχρονα, πολλές έρευνες έχουν δείξει την αναντιστοιχία των διαδικαστικών μεθόδων και των αντιληπτικών ικανοτήτων των μαθητών. Είναι γνωστό ότι η ανάλυση είναι πλούσια σε έννοιες οι οποίες χρειάζονται αφαιρετική σκέψη. Αυτό προϋποθέτει ψηλό επίπεδο εννοιολογικής κατανόησης, αλλά οι μαθητές είναι πολύ δύσκολο να αντεπεξέλθουν (Parameswaran, 2007). Οι Ferrini-Mundy και Graham (1991) υποστηρίζουν ότι η αντιληπτική ικανότητα των μαθητών στις θεμελιώδεις έννοιες της ανάλυσης είναι πολύ περιορισμένη. Συγκεκριμένα οι μαθητές δεν έχουν καθόλου διαίσθηση σχετικά με αυτές τις έννοιες και τις διαδικασίες της ανάλυσης. Οι μαθητές επιμελώς μιμούνται τις διαδικασίες που ακολουθήθηκαν στα παραδείγματα και καταβάλλουν προσπάθειες να προσαρμόσουν την προηγούμενη γνώση των διαδικασιών, που πολλές φορές απόκτησαν μέσω μνημονικών κανόνων, στα νέα δεδομένα. Η αλγοριθμική αυτή προσέγγιση των εννοιών της ανάλυσης μέσω διαχρονικών πρακτικών των εκπαιδευτικών οδηγεί σε αντιλήψεις για τη διδασκαλία και τη φύση των μαθηματικών των οποίων η αλλαγή είναι πολύ δύσκολη (Cornu, 1991).

Λαμβάνοντας υπόψη τις πάγιες αντιλήψεις για αλγοριθμική προσέγγιση των εννοιών της ανάλυσης, ο Tall (1996) τόνισε ότι το πρόβλημα της σύγχρονης διδασκαλίας της ανάλυσης στο επίπεδο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης βρίσκεται ακριβώς στο πλαίσιο της αλγοριθμικής και εννοιολογικής-δομικής κατανόησης των εννοιών που περιλαμβάνονται στο αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών. Πολλές έρευνες της μαθηματικής παιδείας υποστηρίζουν ότι η κατανόηση της ανάλυσης προϋποθέτει κάτι περισσότερο από την απλή γνώση των ορισμών, συμβόλων, γεγονότων και απλών μνημονικών διαδικασιών (Kaput, 1994; Robert & Speer, 2002; Gray & Tall, 1994). Η πλήρης κατανόηση, υποστηρίζουν, περιλαμβάνει τη χρήση διαδικασιών-εννοιών ως αποτέλεσμα της ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης. Ουσιαστικά απαιτείται από τους μαθητές η αναδιατύπωση ορισμών, η κατανόηση των συμβόλων, η παραγωγή εννοιών μέσω επίλυσης προβλημάτων και η συνόψιση θεωρημάτων με συστηματικό τρόπο. Με αυτό τον τρόπο η ανάλυση δεν θα αποτελεί για τους μαθητές ένα κλειστό σύστημα κανόνων αλλά μια δυναμική οικοδόμηση γνώσεων, εννοιών και διαδικασιών η οποία αιτιολογείται από τη θεωρητική ανάπτυξη της σκέψης που έχει υπόβαθρο τη λογική αναπαραγωγή ή ανακάλυψη της μαθηματικής σκέψης (Dubinsky, 1994; Tall, 1992).

Η έννοια του ορίου κατέχει σημαντική θέση αποτελεί θεμελιώδη γνώση για τη διδασκαλία του λογισμού και την εισαγωγή της ανάλυσης, όπως επισημαίνουν αρκετοί ερευνητές (Artigue, 2000; Bezuidenhout, 2001; Cornu, 1991; Dorier, 1995). Ο Cornu (1991) απηχεί αυτό το αίσθημα δηλώνοντας ότι το όριο κατέχει κεντρικό ρόλο ο οποίος διαπερνά το σύνολο της μαθηματικής ανάλυσης και ως εκ τούτου αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο στην οικοδόμηση της μαθηματικής σκέψης ως θεωρητικής γνώσης. Για παράδειγμα, η κατανόηση του τυπικού ορισμού του ορίου είναι από τη μια το σημείο εκκίνησης για την ανάπτυξη με τυπικών αποδεικτικών τεχνικών, που είναι απαραίτητες για την μετάβαση των μαθητών στην αφηρημένη σκέψη. Ο Tall (1992) σημείωσε ότι η ικανότητα να σκέφτεσαι αφηρημένα είναι προϋπόθεση για την μετάβαση σε προχωρημένη μαθηματική σκέψη και ο Ervynck (1981) θεωρεί την έννοια του ορίου ως το μέσο για να μπορέσουν οι μαθητές να αναπτύξουν την ικανότητα να σκέφτονται αφηρημένα.

Με βάση τη σημασία της έννοιας του ορίου εκτεταμένη έρευνα έχει διεξαχθεί σχετικά με την αποτελεσματικότητα της διαισθητικής κατανόησης της έννοιας του ορίου από τους μαθητές και κατά πόσο η διαισθητική, επαγωγική προσέγγιση της έννοιας του ορίου συμβάλλει στην ανάπτυξη της θεωρητικής σκέψης (Bezuidenhout, 2001; Cornu, 1991; Dorier, 1995; Monaghan, 1991). Στην έρευνα αυτή γίνεται συνειδητή προσπάθεια να προσδιοριστούν τα χαρακτηριστικά της θεωρητικής σκέψης των μαθητών σχετικά με την ανάπτυξη της έννοιας του ορίου και η αποτελεσματικότητα της διαισθητικής αντίληψης του ορίου μέσω λογισμικών δυναμικής έννοιας στην ανάπτυξη της θεωρητικής σκέψης στα μαθηματικά.

Διατύπωση του Προβλήματος

Η πλειοψηφία των ερευνών σχετικά με την έννοια του ορίου ασχολείται με τις άτυπες αντιλήψεις των μαθητών και επικεντρώνονται στις παρανοήσεις των μαθητών (Juter, 2007). Αντίθετα δεν υπάρχουν πολλές έρευνες οι οποίες να ασχολούνται με την εννοιολογική έννοια του ορίου και επομένως δεν ασχολούνται με τον τυπικό ορισμό του ορίου και τον τρόπο κατανόησης του από τους μαθητές. Ο τυπικός ορισμός του ορίου αναμφισβήτητα σχετίζεται με τη θεωρητική προσέγγιση και πρωτίστως με την εννοιολογική κατανόηση της έννοιας. Οι έρευνες που έχουν γίνει και έχουν ως αποτέλεσμα τις παιδαγωγικές προσεγγίσεις για τον τρόπο διδασκαλίας της έννοιας του ορίου (Gass, 1992; Steinmetz, 1977), δεν προσφέρουν τεκμηρίωση για το πώς οι μαθητές αιτιολογούν και πώς αντιλαμβάνονται τον τυπικό ορισμό του ορίου.

Η δυσκολία στη διδασκαλία του ορίου οφείλεται από τη μια στην πολυπλοκότητα της έννοιας και από την άλλη στο γεγονός ότι κατά τη διδασκαλία του ορίου οι γνωστικές λειτουργίες που απαιτούνται για την κατανόηση της έννοιας δεν προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό της ίδιας της έννοιας (Davis & Vinner, 1986; Sierpinska, 1987). Σύμφωνα με τους Fischbein, Jehiam, και Cohen (1995), κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο δεν δίνεται έμφαση στο γεγονός ότι τα μαθηματικά είναι ένα σώμα γνώσεων που χαρακτηρίζεται από τη συνοχή και τη πολύ καλή οργάνωσή του. Επιπρόσθετα, φαίνεται ότι κατά τη διδασκαλία δίνεται λιγότερη έμφαση στην απόκτηση στοιχείων για την ανάπτυξη της θεωρητικής γνώσης.

Η θεωρητική σκέψη αποτελεί αναγκαίο και απαραίτητο στοιχείο στην οικοδόμηση της έννοιας του ορίου. Οι μαθητές είναι ικανοί να υπολογίζουν όρια, αλλά δεν οικοδομούν εννοιολογικά την έννοια του ορίου (Bezuidenhout, 2001). Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τόσο η διδασκαλία όσο και η γνώση που αποκτούν οι μαθητές για την έννοια του ορίου στηρίζεται σε μεγάλο βαθμό στην απομνημόνευση μεμονωμένων διαδικασιών και δεν δίνεται έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση των διαδικασιών και του τυπικού ορισμού του ορίου (Bezuidenhout, 2001). Όπως επισημαίνει ο Bezuidenhout (2001) μια τέτοια κατάσταση είναι δυνατό να οφείλεται κυρίως στην εκμάθηση και διδακτική προσέγγιση που δίνει έμφαση κατά τη διδασκαλία πολλών εννοιών του αναλυτικού προγράμματος στις αλγοριθμικές πτυχές των μαθητών και συγκεκριμένα της ανάλυσης. Επιπλέον, οι στερεότυπες ασκήσεις που είναι ένα χαρακτηριστικό αρκετών διδακτικών εγχειριδίων και της παραδοσιακής διδασκαλίας συχνά ενθαρρύνουν την εργαλειακή προσέγγιση, παρά μια σχεσιακή κατανόηση των εννοιών των μαθηματικών και του μαθηματικού λογισμού.

Λαμβάνοντας υπόψη το διαδικαστικό προσανατολισμό ορισμένων διδακτικών εγχειριδίων, αιτιολογείται η αδυναμία των μαθητών να συγχέουν τις δεξιότητες χειρισμού με την πραγματική κατανόηση του περιεχομένου του λογισμού. Σύμφωνα με τον Cornu (1981) η έννοια του ορίου είναι για τους πιο πολλούς μαθητές το πρώτο κεφάλαιο στο οποίο τα μαθηματικά δεν περιορίζονται σε πεπερασμένους υπολογισμούς αλλά δίνουν σαφείς επεξηγήσεις σε προβλήματα μη πεπερασμένων ποσοτήτων και επομένως αποτελεί το θεμέλιο για όλες τις έννοιες του Απειροστικού Λογισμού.

Πολλές έρευνες επίσης εξέτασαν τη δυνατότητα των διδακτικών πρακτικών κατά τη διδασκαλία της έννοιας του ορίου και συγκεκριμένα διερεύνησαν τις προοπτικές οπτικοποίησης της έννοιας του ορισμού του ορίου μέσω λογισμικών δυναμικής άλγεβρας (Kidron & Zehavi, 2002; Trouche & Guin ,1996; Parks, 1995). Τα λογισμικά της δυναμικής άλγεβρας σε συνδυασμό με τις τυποποιημένες διδακτικές προσεγγίσεις της έννοιας του ορίου έχουν προσδώσει στη διδασκαλία του ορίου μια νέα διάσταση που περιγράφεται ως δυναμική προσέγγιση. Στηριζόμενοι στη δυναμική διάσταση της διδασκαλίας των μαθηματικών και πιο ειδικά της έννοιας του ορίου, πολλοί ερευνητές μελέτησαν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη μετακίνηση από τη δυναμική αντίληψη της έννοιας του ορίου στην τυπική μέσω του θεωρητικού ορισμού (Tall, 1992).

Οι Artique (1992) και Davis και Vinner (1986), υποστηρίζουν ότι είναι αναγκαία η δυναμική αντίληψη της έννοιας του ορίου και είναι απαραίτητη για την κατανόηση της έννοιας του ορίου, χωρίς να εξετάσουν κατά πόσο δημιουργείται χάσμα μεταξύ της δυναμικής αντίληψης και της θεωρητικής προσέγγισης. Η Sfard (1987) επισημαίνει ότι στη βιβλιογραφία υπάρχει γενική συμφωνία στο ότι η δυναμική προσέγγιση πρέπει να προηγηθεί της ανάπτυξης δομικών εννοιών ή εννοιών αντικειμένων. Εντούτοις, όσον αφορά τη σχέση μεταξύ της δυναμικής προσέγγισης και της τυπικής κατανόησης της έννοιας του ορίου υπάρχουν δύο διαφορετικές απόψεις, όπως επισημαίνουν οι Cottrill κ. ά. (1996).

Οι Cottrill κ. ά.(1996) υποστηρίζουν ότι η συνήθης άτυπη, δυναμική αντίληψη των τιμών μιας συνάρτησης που πλησιάζουν μια οριακή τιμή καθώς οι τιμές στο πεδίο ορισμού πλησιάζουν μια σταθερή ποσότητα είναι πιο περίπλοκη από όσο ίσως έχει θεωρηθεί. Είναι όχι μόνο μια μοναδική διαδικασία, αλλά ένα συντονισμένο ζευγάρι διαδικασιών το οποίο είναι, στην πραγματικότητα, ένα σχήμα. Η δόμηση αυτού του σχήματος είναι αναγκαία για την κατανόηση της έννοιας του ορίου. Από την άλλη, εικάζεται ότι η εννοιολογική προσέγγιση δεν είναι το αποτελέσματα μια γραμμικής σχέσης μεταξύ της δυναμικής και της τυπικής κατανόησης της έννοιας του ορίου. Οι Cottrill κ. ά.(1996) υποστηρίζουν ότι ο λόγος για τον οποίο η έννοια του ορίου δημιουργεί δυσκολίες στους πιο πολλούς μαθητές είναι οι απαιτήσεις της δόμησης του σχήματος μαζί με την ανάγκη για χρήση ποσοδεικτών και όχι ο τυπικός ορισμός του ορίου.

Η εννοιολογική προσέγγιση της έννοιας του ορίου είναι αρκετά δύσκολη λόγω της πολυπλοκότητας της ίδιας της έννοιας αλλά και του τρόπου διδασκαλίας και εκμάθησης της έννοιας. Χρειάζεται επομένως να διερευνηθούν τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα της θεωρητικής σκέψης που πρέπει να αναπτύξουν οι μαθητές ώστε να κατανοήσουν την έννοια του ορίου (ε – δ τυπικός ορισμός του ορίου, χρήση ποσοδεικτών, γλώσσα που χρησιμοποιείται στον ορισμό αλλά και στην ερμηνεία αποτελεσμάτων). Πέραν από αυτό, για να εξεταστεί, η εννοιολογική και η δυναμική αντίληψη του ορίου προϋποθέτει την διασαφήνιση του όρου της θεωρητικής σκέψης που συνάδει οπωσδήποτε με την ανωτέρου επιπέδου σκέψη που χαρακτηρίζει την μαθηματική επιστήμη. Παράλληλα, στην έρευνα αυτή γίνεται προσπάθεια καθορισμού ενός θεωρητικού μοντέλου μαθηματικής σκέψης το οποίο θα περιλαμβάνει και τη διδακτική προσέγγιση της έννοιας του ορίου περιλαμβανομένης της έννοιας της δυναμικής προσέγγισης. Η περιγραφή της θεωρητικής σκέψης στηρίζεται σε προηγούμενα μοντέλα ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης (Dubinsky, 1991; Sfard, 1991; Asiala et. All, 1996; Tall, 2004; Sierpinska, 2005) και επιχειρείται η εμπειρική τεκμηρίωση των χαρακτηριστικών της.

Σκοπός Εργασίας

Οι δυσκολίες των μαθητών στην κατανόηση του ορίου μπορούν να συνοψιστούν στο γεγονός ότι η διδασκαλία του ορίου επικεντρώνεται κυρίως στη διαδικασία εύρεσης και υπολογισμού παρά στη θεωρητική κατανόηση της έννοιας (Parameswaran, 2007). Η έννοια του ορίου είναι πρωτίστως μια θεωρητική έννοια και επομένως η διδασκαλία των ορίων δεν μπορεί να εξαντλείται στην εκμάθηση αλγοριθμικών προσεγγίσεων. Ο καθορισμός της θεωρητικής σκέψης που απαιτείται για την εννοιολογική προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών γενικότερα και του ορίου ειδικότερα δεν έχει αποσαφηνιστεί. Σκοπός της παρούσας μελέτης είναι να καθορίσει, με βάση την υπάρχουσα βιβλιογραφία, τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα της θεωρητικής σκέψης που πρέπει να αναπτύξουν οι μαθητές ώστε να κατανοήσουν την έννοια του ορίου. Συγκεκριμένα οι στόχοι της έρευνας είναι οι πιο κάτω:
(α) η ανάπτυξη ενός μοντέλου θεωρητικής σκέψης που συμβάλλει στην κατανόηση του ορίου από μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης,
(β) η επιβεβαίωση και η αξιολόγηση του μοντέλου αυτού με εμπειρικά δεδομένα από μαθητές της Β΄ Λυκείου,
(γ) ο ρόλος της σύγχρονης τεχνολογίας στην ανάπτυξη της έννοιας του ορίου και η αλληλεπίδραση της τεχνολογίας με το προτεινόμενο μοντέλο θεωρητικής σκέψης,
(δ) η ανάπτυξη και αξιολόγηση ενός παρεμβατικού προγράμματος διδασκαλίας της έννοιας του ορίου με βάση το προτεινόμενο μοντέλο θεωρητικής σκέψης και της ενσωμάτωσης της τεχνολογίας.

Ερευνητικά Ερωτήματα

Τα κύρια ερευνητικά ερωτήματα όπως απορρέουν από το σκοπό της εργασίας ήταν:

(α) Ποια τα γνωρίσματα που χαρακτηρίζουν τη θεωρητική σκέψη των μαθητών όσον αφορά την κατανόηση της έννοιας του ορίου;

(β) Ποια είναι η επίδραση της τεχνολογίας στην ανάπτυξη της θεωρητικής σκέψης των μαθητών για την έννοια του ορίου;

(γ) Υπάρχουν διακριτές ομάδες μαθητών οι οποίες αντιπροσωπεύουν τα διαφορετικά είδη θεωρητικής σκέψης;

(δ) Πως ερμηνεύεται ο συλλογισμός των μαθητών σε έργα υπολογισμού του ορίου συνάρτησης, με βάση τα είδη σκέψης που προέκυψαν από το μοντέλο;

Σημασία και Πρωτοτυπία της Εργασίας

Η διδασκαλία της έννοιας του ορίου και γενικότερα η διδασκαλία της ανάλυσης στο λύκειο εμπεριέχουν από τη φύση τους αφηρημένη και θεωρητική σκέψη. Η Θεωρητική σκέψη είναι το ειδικό και μοναδικό χαρακτηριστικό των ανώτερων μαθηματικών και ο σκοπός της διδασκαλίας τους στο λύκειο έχει ακριβώς αυτό το νόημα: να δοθεί στους μαθητές να γνωρίσουν και να αναπτύξουν την θεωρητική σκέψη. Η διδασκαλία του ορίου, όπως γίνεται σήμερα, αρχίζει με επαγωγική σκέψη και πιο συγκεκριμένα με πινακοποίηση τιμών που τείνουν σε έναν συγκεκριμένο αριθμό. Στη συνέχεια δίνεται στους μαθητές ο ε-δ ορισμός του ορίου, και η εξάσκηση των μαθητών σε αλγοριθμικές προσεγγίσεις του υπολογισμού ορίων αλγεβρικών παραστάσεων. Η μετάβαση από την επαγωγική στη θεωρητική προσέγγιση, φαίνεται να παρουσιάζει πολλά προβλήματα και δυσκολίες στην εννοιολογική κατανόηση της έννοιας του ορίου, όπως δείχνουν τα αποτελέσματα πολλών ερευνών (Cottrill et al.,1996). Ταυτόχρονα, η έρευνα έχει τεκμηριώσει ότι χωρίς την ανάπτυξη της θεωρητικής σκέψης δεν είναι δυνατόν οι μαθητές να κατανοήσουν πλήρως τις έννοιες της ανάλυσης, εφόσον στηρίζονται στις βασικές έννοιες του ορίου. Παρόλα αυτά, η ανάπτυξη της θεωρητικής σκέψης δεν μπορεί να οικοδομηθεί και να συνάδει με τις γνωστικές ικανότητες των μαθητών, όταν πολλά από τα χαρακτηριστικά της δεν περιγράφονται με σαφήνεια και λεπτομέρεια.

Πολλοί ερευνητές έχουν επιχειρήσει κατά καιρούς να περιγράψουν διάφορα μοντέλα θεωρητικής προσέγγισης των ανώτερων μαθηματικών και να τα εφαρμόσουν σε τάξεις του λυκείου και κυρίως σε φοιτητές των μαθηματικών σχολών (Maharaj, 2010; Sierpinska, Bobos, & Pruncut, 2011; Sierpinska et al., 2002; Zachariades, Christou, & Papageorgiou, 2002). Τα μοντέλα αυτά στηρίζονται σε τοπικές θεωρίες μάθησης και δεν γίνεται προσπάθεια ένταξής τους σε ένα γενικότερο πλαίσιο θεωρητικής σκέψης. Η καινοτομία της προτεινόμενης μελέτης εστιάζεται στην ανάπτυξη ενός θεωρητικού μοντέλου για τη μάθηση και τη διδασκαλία της έννοιας του ορίου. Το μοντέλο στηρίζεται στις θεωρητικές προσεγγίσεις που έχουν αναπτυχθεί τα τελευταία χρόνια και συνδυάζει τα σημαντικότερα ερευνητικά αποτελέσματα της μαθηματικής παιδείας. Παράλληλα, στο μοντέλο αυτό γίνεται προσπάθεια να συμπεριληφθούν στοιχεία από την ενσωμάτωση της εκπαιδευτικής τεχνολογίας στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Στην παρούσα εργασία θα χρησιμοποιηθεί ως θεωρητικό πλαίσιο η θεωρία της Sierpinska (2002) σχετικά με τη θεωρητική σκέψη. Στο πλαίσιο της θεωρητικής σκέψης, όπως αναπτύχθηκε από τη Sierpinska, συζητούνται και ομαδοποιούνται τα ουσιώδη χαρακτηριστικά του τρόπου σκέψης και των διαδικασιών που χρησιμοποιούν οι μαθητές για την κατανόηση πολύπλοκων εννοιών, όπως αναφέρονται σε διάφορες τοπικές θεωρίες των μαθηματικών, όπως η θεωρία APOS, η θεωρία των Tall και των συνεργατών, η θεωρία της εννοιολογικής αλλαγής (Vosniadou, & Vamvakoussi, 2004) και η θεωρία της πραγμάτωσης (Reification Theory) της Sfard (1991). Βασικός στόχος της έρευνας αυτής, όπως έχει ήδη αναφερθεί, είναι η πρόταση ενός θεωρητικού μοντέλου με τέτοιο τρόπο ώστε να ανταποκρίνεται και να ερμηνεύει τον τρόπο σκέψης των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων σχετικών με την έννοια του ορίου. Ταυτόχρονα, το μοντέλο θα προσφέρει τη δυνατότητα στους εκπαιδευτικούς να οργανώνουν τη διδασκαλία της έννοιας του ορίου με τρόπο που οι μαθητές να αναπτύσσουν εννοιολογική κατανόηση της έννοιας. Ταυτόχρονα, το θεωρητικό μοντέλο θα ενσωματώσει στοιχεία από τη σύγχρονη τεχνολογία τα οποία θα ενισχύουν την κατανόηση της έννοιας του ορίου στα διάφορα επίπεδα θεωρητικής σκέψης.

Ο σχεδιασμός της εργασίας στηρίχθηκε στις αρχές και κατευθυντήριες γραμμές σχεδιασμού και επανασχεδιασμού ερευνών που αφορούν τις επιστήμες της εκπαίδευσης (Shavelson et al., 2003). Βασικά στηρίχθηκε στην κυκλική δομή ανάπτυξης ερευνών όπου αρχικά καθορίζονται τα ερευνητικά ερωτήματα και γίνεται η ανασκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας, Στη συνέχεια σχεδιάζεται και εκτελείται η παρεμβατική διδασκαλία. Μετά την αξιολόγηση της και την ανάλυση των αποτελεσμάτων της πρώτης παρέμβασης επανασχεδιάζεται η έρευνα και ακολουθεί δεύτερη παρέμβαση, νέα αξιολόγηση και ούτω καθεξής.

Περιορισμοί της Εργασίας

Περιορισμός της έρευνας αποτελεί το γεγονός ότι η επιλογή του δείγματος δεν ήταν τυχαία. Τα υποκείμενα προέρχονται από συγκεκριμένα τμήματα της Β′ Λυκείου τα οποία παρακολουθούν μαθηματικά κατεύθυνσης. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η μελέτη των χαρακτηριστικών γνωρισμάτων της θεωρητικής σκέψης που πρέπει να αναπτύξουν οι μαθητές ώστε να κατανοήσουν την έννοια του ορίου να μελετηθεί σε ένα περιορισμένο πληθυσμό. Συγκεκριμένα η επιλογή των υποκειμένων έγινε σε σχολεία στα οποία υπήρχε η σύμφωνη γνώμη των εκπαιδευτικών που διδάσκουν στα συγκεκριμένα τμήματα της Β′ Λυκείου.

Δομή της Εργασίας

Στα κεφάλαια που ακολουθούν περιγράφεται αναλυτικά το θεωρητικό υπόβαθρο, η μεθοδολογία, τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα της εργασίας. Συγκεκριμένα, στο δεύτερο κεφάλαιο περιγράφεται η σχετική βιβλιογραφία η οποία αποτέλεσε το πλαίσιο για το σχεδιασμό της εργασίας. Το κεφάλαιο αναφέρεται αρχικά σε γενικές θεωρίες μάθησης, θεωρητικές προσεγγίσεις και θεωρητικά μοντέλα γύρω από την απόκτηση της εννοιών της ανάλυσης αλλά και της έννοιας του ορίου. Στη συνέχεια γίνεται ανασκόπηση της βιβλιογραφίας σχετικά με την έννοια του ορίου και τα προβλήματα διδασκαλίας και μάθησης που αφορούν στην έννοια του ορίου. Στη συνέχεια θα μελετηθούν έρευνες στο πεδίο της μαθηματικής παιδείας με στόχο τον εντοπισμό των παρανοήσεων και παρερμηνειών που δημιουργούνται μέσα από τη διδασκαλία της έννοιας του ορίου και ποια τα επιστημολογικά εμπόδια ως προς την απόκτηση της θεωρητικής σκέψης για το όριο. Τέλος θα γίνει ανασκόπηση της βιβλιογραφίας γύρω από το ρόλο της τεχνολογίας στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών και πως η χρήση της τεχνολογίας μπορεί να βοηθήσει στην ανάπτυξη της θεωρητικής σκέψης των μαθητών.

Στο τρίτο κεφάλαιο περιγράφεται η μεθοδολογία με αναφορά στα υποκείμενα, στα εργαλεία μέτρησης, στα προτεινόμενα μοντέλα, στη διαδικασία διεξαγωγής της έρευνας, στο σχεδιασμό των κλινικών συνεντεύξεων και στις διαδικασίες ανάλυσης των δεδομένων.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση των ποσοτικών και ποιοτικών δεδομένων της εργασίας με αναφορά στον έλεγχο της εγκυρότητας των προτεινόμενων μοντέλων.

Στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται συγκεντρωτική συζήτηση των αποτελεσμάτων και προσπάθεια περιγραφής ενός ενιαίου μοντέλου των ποσοτικών και ποιοτικών αποτελεσμάτων και παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της εργασίας, εισηγήσεις για πιθανές μελλοντικές ερευνητικές προσπάθειες και γίνεται συζήτηση για εκπαιδευτικές εφαρμογές των αποτελεσμάτων της εργασίας.

Εννοιολογικοί Ορισμοί Κυριότερων Εννοιών

Θεωρητική Γνώση

Στην παρούσα εργασία η *θεωρητική γνώση* ορίζεται με βάση τον αξιωματικό ορισμό που δίνουν στη θεωρία τους, οι Sierpinska et all. (2002). Συγκεκριμένα θεωρούν ότι η θεωρητική γνώση στοχεύει στη γνώση και όχι στους λόγους για τους οποίους κάποια πράγματα γίνονται ή κάνουν τα πράγματα να γίνουν. Η θεωρητική γνώση έχει ως στόχο την κατανόηση εμπειριών και τον προβληματισμό σχετικά με τα πιθανά αποτελέσματα μιας δράσης. Έχει ως επίκεντρο την επιστημολογική εγκυρότητα μέσα από την εννοιολογική συνοχή αλλά και την εσωτερική συνοχή των συστημάτων και των συμβολικών αναπαραστάσεων. Το θεωρητικό μοντέλο των Sierpinska et all. (2002) αναφέρεται στην *αναστοχαστική*, στην *συστημική* και την *αναλυτική* σκέψη.

Η *αναστοχαστική σκέψη* είναι η σκόπιμη σκέψη η οποία στοχεύει στο να ενισχύσει την σε βάθος κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Είναι αποτέλεσμα αναστοχασμού του ατόμου πάνω σε υφιστάμενες τεχνικές με σκοπό τη γενίκευση σε μια ενιαία θεωρητική βάση. Περιλαμβάνει το στοιχείο της αναδιοργάνωσης της γνώσης, όπως περιγράφεται στη θεωρία των γνωστικών αλλαγών (Merenluoto & Lehtinen, 2004; Vamvakoussi & Vosniadou, 2007).

Η *συστημική σκέψη* είναι η σκέψη που αναφέρεται σε συστήματα εννοιών, όπου η κατανόηση μιας έννοιας βασίζεται στις σχέσεις της με άλλες έννοιες (Sierpinska et all., 2002). Ο Vygotsky (1987) επισημαίνει ότι οι έννοιες είναι μέρος ενός συστήματος εννοιών. Οι έννοιες έχουν διαφορετική σχέση με το υπό μελέτη αντικείμενο όταν είναι εκτός ενός συστήματος από ότι όταν είναι μέρος του συστήματος.

Τέλος η *αναλυτική σκέψη* είναι η σκέψη που αναφέρεται στην ανάπτυξη ειδικών αναπαραστατικών συστημάτων. Παίρνει τα σημειακά συστήματα ως αντικείμενο στοχασμού και επινοήσεων (Sierpinska et all., 2005). Αναφέρεται στις ευαισθησίες, στις τυπικές συμβολικές σημάνσεις και στην εξειδικευμένη ορολογία καθώς και στη δομή και τη λογική της μαθηματικής γλώσσας (Sierpinska et all., 2002).

Νοητικές Κατασκευές

Στην παρούσα εργασία όταν μιλάμε για νοητικές κατασκευές αναφερόμαστε στις νοητικές κατασκευές όπως αυτές αναφέρονται στη θεωρία APOS.

Συγκεκριμένα όταν μιλάμε για *Δράση (Action)* εννοούμε το μετασχηματισμό εκείνο ο οποίος αποτελεί την αντίδραση του υποκειμένου σε κάποιο ερέθισμα το οποίον το λαμβάνει ως εξωτερικό.

Όταν αναφερόμαστε σε *Διεργασία (Process)*, εννοούμε την εσωτερίκευση μιας δράσης όταν το άτομο στοχάζεται πάνω στη δράση αυτή. Στη φάση αυτή η δράση γίνεται μέρος του ατόμου και το άτομο αποκτά έλεγχο πάνω της.

Όταν αναφερόμαστε σε *Αντικείμενο (Object),* εννοούμε την ενθυλάκωση των διεργασιών σε αντικείμενο. Συγκεκριμένα το άτομο στοχάζεται πάνω στις λειτουργίες που εφαρμόζονται σε μία συγκεκριμένη διεργασία, ενημερώνεται για τη διεργασία αυτή ως μία ολότητα, αντιλαμβάνεται ποιοι μετασχηματισμοί μπορούν να ενεργήσουν στη διεργασία αυτή και κατασκευάζει κατάλληλους μετασχηματισμούς και σκέφτεται πάνω στη διεργασία αυτή συνολικά ως ένα αυτόνομο αντικείμενο.

Τέλος όταν αναφερόμαστε σε *Σχήμα (Schema),* μιλάμε για διεργασίες και ήδη κατασκευασμένα αντικείμενα που μπορούν να συνδεθούν με διαφορετικούς τρόπους.

Δυναμική Αντίληψη

Στην παρούσα εργασία όταν αναφερόμαστε στην δυναμική αντίληψη μαθηματικών εννοιών εννοούμαι τον τρόπο με τον οποίο προσεγγίζουμε μαθηματικές έννοιες και συγκεκριμένα έννοιες της Ανάλυσης, μέσω των ηλεκτρονικών συστημάτων άλγεβρας αλλά και των άλλων λογισμικών δυναμικής έννοιας.

Ορισμός του Ορίου

Στην παρούσα εργασία όταν μιλάμε για τον ορισμό του ορίου εννοούμαι τον *τυπικό ορισμό του ορίου* δηλαδή:

Έστω μια συνάρτηση $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow f(A)$ είναι μια πραγματική συνάρτηση και έστω x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού A της f. Θα λέμε ότι η f έχει όριο στο σημείο x_0 τον αριθμό l όταν μπορούμε να βρούμε πάντοτε μια «περιοχή» του σημείου x_0 τέτοια ώστε όλες οι τιμές του $f(x)$ που αντιστοιχούν στη συγκεκριμένη περιοχή να βρίσκονται «εγκλωβισμένες οσοδήποτε κοντά θέλουμε» σε μια «περιοχή» του αριθμού l.

Συμβολικά γράφουμε:

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Θα

λέμε ότι η f έχει στο x_0 όριο $l \in \mathbb{R}$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος, ώστε για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, με $0 < |x - x_0| < \delta$, να ισχύει:
$|f(x) - l| < \varepsilon$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Εισαγωγή

Η έννοια του ορίου είναι μια από τις θεμελιώδεις έννοιες όχι μόνο στην κατανόηση εννοιών της ανάλυσης αλλά και στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και της μαθηματικής αυστηρότητας (Ferrini-Mundy & Lauten 1993; Tall 1992). Οι έννοιες της ανάλυσης εμπεριέχουν την έννοια του ορίου, όπως το άθροισμα σειρών, η συνέχεια συναρτήσεων, η παράγωγος αλλά και το ολοκλήρωμα. Το όριο συνάρτησης είναι από τις δύσκολες μαθηματικές έννοιες που συναντούν οι μαθητές στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και είναι το πρώτο κεφάλαιο του λογισμού το οποίο αντιμετωπίζουν οι μαθητές που είναι ποιοτικά διαφορετικό από την άλγεβρα (Cornu, 1991). Πολλές διεθνείς έρευνες, όπως έχει ήδη αναφερθεί, έχουν διεξαχθεί στα πλαίσια της Μαθηματικής Παιδείας σχετικά με την έννοια του ορίου. Οι έρευνες αυτές επικεντρώνονται στις αντιλήψεις των μαθητών (Tall & Vinner, 1981; Cornu, 1981; Sierpinska, 1987), στα επιστημολογικά ζητήματα από τη φύση της ίδιας της έννοιας του ορίου (Cornu, 1991; Sierpinska, 1985; Job & Schneider, 2007) και τα αποτελέσματα των διδακτικών προσεγγίσεων που χρησιμοποιούνται κατά τη διδασκαλία του ορίου (Robinet, 1983; Trouche, 1996; Schneider, 2001).

Στα πλαίσια αυτής της βιβλιογραφικής επισκόπησης θα γίνει μια σύντομη αναφορά στα ευρήματα προηγούμενων ερευνών σχετικά με την έννοια του ορίου, τις αναπαραστάσεις, τον τρόπο και τα προβλήματα διδασκαλίας και μάθησης της έννοιας του ορίου, τις παρανοήσεις και τις παρερμηνείες που προκύπτουν στη σκέψη των μαθητών, ως αποτέλεσμα της μη εννοιολογικής κατανόησης της έννοιας του ορίου και της έλλειψης ανάπτυξης της θεωρητικής σκέψης. Γίνεται επίσης αναφορά στα αποτελέσματα ερευνών σχετικά με τον ρόλο της τεχνολογίας στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών και πώς η χρήση της τεχνολογίας συμβάλλει στη δυναμική προσέγγιση της έννοιας του ορίου και πώς η δυναμική αυτή προσέγγιση είναι δυνατό να οδηγήσει στην ανάπτυξη της θεωρητικής γνώσης των μαθητών.

Η βιβλιογραφική επισκόπηση θα επικεντρωθεί στα θεωρητικά μοντέλα που έχουν ήδη αναπτυχθεί και που στηρίζονται κυρίως στην ανάπτυξη της θεωρητικής σκέψης. Η έμφαση στα θεωρητικά μοντέλα σκέψης είναι απαραίτητη από τη φύση της έρευνας αυτής, εφόσον βασικός στόχος της έρευνας είναι η πρόταση για ένα μοντέλο θεωρητικής σκέψης που είναι χρήσιμο για την εννοιολογική κατανόηση των μαθητών της έννοιας του ορίου. Στην αρχή γίνεται αναφορά στην έννοια του ορίου και στη συνέχεια στις αναπαραστάσεις και το όριο, τα επιστημολογικά εμπόδια και στην ενσωμάτωση των σύγχρονων τεχνολογιών. Τέλος γίνεται αναφορά στα θεωρητικά μοντέλα και τις θεωρητικές προσεγγίσεις με ιδιαίτερη αναφορά στη θεωρία της εννοιολογικής αλλαγής, στη θεωρία APOS, στη θεωρία των τριών κόσμων του Tall, στη θεωρία της πραγμάτωσης της Sfard και στη θεωρητική γνώση της Sierpinska.

Η Έννοια του Ορίου

Η έννοια του ορίου είναι από τα θέματα τα οποία έχουν ερευνηθεί εκτεταμένα από μαθηματικούς παιδαγωγούς (Cornu, 1983, 1991; Davis & Vinner, 1986; Li & Tall, 1993; Sierpinska, 1987; Williams, 1991, 2001) και έχουν καταγραφεί προσεγγίσεις μέσω των οποίων επιχειρείται να επεξηγηθεί ο τρόπος με τον οποίον οι μαθητές αντιλαμβάνονται την έννοια του ορίου (Vinner, 1983; Tall & Vinner; 1981; Cornu, 1983; Cottrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf, Thomas & Vidakovic, 1996; Williams, 1991, 2001) . Συγκεκριμένα ο Cornu (1983) αναφέρεται στο όριο ως φράγμα το οποίο δεν μπορεί να ξεπεραστεί, οι Tall και Schwarzeenberger, (1978) στο όριο ως κάτι το οποίο δεν μπορούμε να πλησιάσουμε ενώ οι Tall και Vinner, (1981) αναφέρονται στο όριο ως κίνηση. Η Robert (1982) ερεύνησε τα διαφορετικά πρότυπα που μπορούν να έχουν οι μαθητές για την έννοια του ορίου ακολουθίας. Παρά το γεγονός ότι έχει δοθεί στους μαθητές ο τυπικός ορισμός της έννοιας, όταν τους ζητηθεί να την περιγράψουν, ενεργούν ως να μην τους έχει δοθεί και έχουν την τάση να αναφέρονται σε προηγούμενες εμπειρίες τους. Υπάρχουν όμως και μαθητές οι οποίοι εισηγούνται δικά τους πρότυπα τα οποία θυμίζουν τα στοιχειώδη πρότυπα της έννοιας, αλλά όμως φαίνεται ότι ανακαλούνται εντελώς αυθόρμητα, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση των ακολουθιών, αν αντιμετωπιστούν στατικά, αναφέρουν ότι οι τελικές τιμές έχουν πάντα την ίδια τιμή. Οι Elia κ. ά. (2009), επισημαίνουν ότι η πλειοψηφία των μαθητών δεν είναι σε θέση να εξηγήσουν τι είναι το όριο συνάρτησης ούτε με τη χρήση του ορισμού αλλά ούτε και με τη χρήση συγκεκριμένων παραδειγμάτων, ένδειξη της αδυναμίας τους να αντιληφθούν την έννοια του ορίου.

Η διδασκαλία των πλείστων μαθηματικών εννοιών δεν ξεκινά από το μηδέν. Στην περίπτωση του ορίου, πριν από την εισαγωγή της έννοιας του ορίου, ο μαθητής έχει ήδη μια διαισθητική επαφή με το όριο, μια σειρά από εικόνες που αφορούν την έννοια του ορίου και ένα ορισμένο αριθμό ιδεών οι οποίες προέρχονται από την καθημερινή του εμπειρία, όπως την καθομιλούμενη σημασία των όρων που χρησιμοποιούνται (Cornu 1981, 1983). Οι αντιλήψεις των μαθητών γύρω από μια έννοια και οι οποίες δημιουργούνται πριν από τη διδασκαλία της έννοιας, περιγράφονται ως άτυπες αντιλήψεις (Cornu 1981, 1983). Οι μαθητές δεν διορθώνουν πάντοτε (αν είναι λανθασμένες) τις αυθόρμητες αντιλήψεις, κατά τη διάρκεια της διαδικασίας της μάθησης. Οι αντιλήψεις των μαθητών αναμειγνύονται με τη νέα γνώση, τροποποιούνται, αναπροσαρμόζονται, έτσι ώστε να σχηματίσουν τις προσωπικές τους αντιλήψεις (Cornu 1991). Στην περίπτωση της έννοιας του ορίου, φαίνεται ότι οι λέξεις «τείνει» και «όριο» έχουν την ίδια σημασία για τους μαθητές πριν από την οποιαδήποτε μορφή διδασκαλίας της έννοιας του ορίου (Schwarzenberger & Tall, 1978). Οι μαθητές συνεχίζουν να βασίζονται σε αυτές τις έννοιες και μετά τη διδασκαλία του τυπικού ορισμού του ορίου. Όταν έχουν να υπολογίσουν το όριο μίας συνάρτησης δίνουν διαφορετικές ερμηνείες στη λέξη τείνει. Άλλοτε την ερμηνεύουν ως «να πλησιάζει οσοδήποτε κοντά», ή ως «να πλησιάζει οσοδήποτε κοντά χωρίς όμως ποτέ να μπορεί να φτάσει το όριο» ή ακόμη «να πλησιάζει οσοδήποτε κοντά και να φτάνει το όριο» (Cornu 1991). Από τη άλλη πλευρά, οι μαθητές ερμηνεύουν την έννοια του ορίου ως κάτι το οποίο προσεγγίζουν χωρίς όμως να μπορούν να το φτάσουν, ή ως κάτι το αξεπέραστο και το οποίο είναι αδύνατο να φτάσουν ή ως ένα σημείο το οποίο πλησιάζουν χωρίς να το φτάνουν ή ως ένα σημείο το οποίο πλησιάζουν και το οποίο φτάνουν, μπορεί όμως να ερμηνευθεί και ως ένα ελάχιστο ή ένα μέγιστο. Επίσης, το ερμηνεύουν και ως ένα άνω φράγμα ή ένα κάτω φράγμα ή ότι πλησιάζουν στο τέλος (Cornu 1991). Οι Tall και Vinner (1981) επισημαίνουν ότι οι αυθόρμητες αντιλήψεις των μαθητών για μια έννοια και η προσπάθεια από πλευράς μαθητών της τυποποίησης, αρκετές φορές οδηγούν σε μια σφαιρική ιδέα της έννοιας χωρίς να υπεισέρχονται σε λεπτομέρειες που αφορούν την έννοια και η εικόνα την οποία δημιουργούν για την έννοια περιλαμβάνει παράγοντες οι οποίοι είναι σε αντίθετες κατευθύνσεις.

Η Sierpinska (1985) συνδέει άμεσα, τη δυσκολία των μαθητών να αντιληφθούν εννοιολογικά τη διαδικασία υπολογισμού του ορίου, με τις αντιλήψεις τους για την έννοια του απείρου. Ερευνητές, όπως οι Cornu (1980) Sierpinska (1990) και Szydlik (2000), επισημαίνουν ότι ένα μεγάλο ποσοστό των μαθητών οι οποίοι έχουν μία, στατική αντίληψη των μαθηματικών είναι ικανοί να ασχοληθούν μόνο με συγκεκριμένους υπολογισμούς οι οποίοι έχουν προηγηθεί. Οι μαθητές μπορεί να ερμηνεύσουν μια τέτοια στατική αντίληψη του ορίου ότι είναι ενδεικτική μιας πρώτης αντίληψης της έννοιας του ορίου ή ότι αντιλαμβάνεται το όριο ως μία δράση. Για παράδειγμα, οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι το όριο μιας συνάρτησης στο α είναι ίσο με την αριθμητική τιμή της συνάρτησης στο α, ή την τιμή της συνάρτησης σε ένα σημείο πολύ κοντά στο α - πάντα υπό τον όρο ότι υπάρχει ένας συγκεκριμένος τύπος για τον υπολογισμό αυτών των τιμών. Η πρώτη αντίληψη του μαθητή διαφέρει από μία δράση όταν ο μαθητής μπορεί να αξιολογήσει πολλές τιμές ή μόνο μία πριν φθάσει σε κάποιο συμπέρασμα για το όριο. Ο Bezuidenhout (2001) επισημαίνει ότι αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα πλείστα μαθηματικά εγχειρίδια τα οποία χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία εννοιών της ανάλυσης περιέχουν στερεότυπες ασκήσεις και αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να έχουν αναπτύξει δεξιότητες εκτέλεσης πράξεων στον υπολογισμό του ορίου συνάρτησης με αποτέλεσμα να μην κατανοούν την έννοια του ορίου και να μην αναφέρονται στον ορισμό και στις ιδιότητες του ορίου όταν υπολογίζουν το όριο συνάρτησης. Οι μαθητές που αντιλαμβάνονται στατικά την έννοια του ορίου ασχολούνται συνήθως μόνο με τον υπολογισμό του ορίου μιας συνάρτησης σε συγκεκριμένο σημείο, υπολογίζοντας την αριθμητική τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό ή σε σημείο που βρίσκεται πολύ κοντά σε αυτό, χρησιμοποιώντας τον τύπο της συνάρτησης (Cottrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf, Thomas and Vidakovic 1996).

Ο Cornu (1981) επισημαίνει ότι η έννοια ορίου για τους περισσότερους σπουδαστές, είναι το πρώτο θέμα στο οποίο τα Μαθηματικά δεν περιορίζονται σε έναν πεπερασμένο υπολογισμό που δίνει μια καθοριστική απάντηση. Σύμφωνα με τους Cottrill κ.ά. (1996) μια υπολογιστική διαδικασία η οποία χρειάζεται πεπερασμένο πλήθος βημάτων, μπορεί να γίνει αντιληπτή μόνον μέσω μιας διεργασίας κατανόησης. Μία δράση μπορεί να εκτελεστεί εξωτερικά, δηλαδή, το άτομο σκέφτεται με βάση τον ορισμό, ο υπολογισμός δεν εκτελείται στην πραγματικότητα αλλά όμως θεωρείται ότι εκτελείται. Στην περίπτωση του υπολογισμού του ορίου συνάρτησης όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή τείνει σε ένα αριθμό «α» και άτομο δεν μπορεί να προχωρήσει πέραν από τον υπολογισμό ενός πεπερασμένου πλήθους τιμών της συνάρτησης σε σημεία κοντά στο «α», τότε διαθέτει μια σύλληψη δράσης μιας μεταβλητής που προσεγγίζει μια σταθερή ποσότητα, η οποία δεν έχει εσωτερικευθεί σε μία διαδικασία. Ο Cotrill κ.ά. (1996), υποστηρίζουν ότι η έννοια του ορίου δεν είναι μια απλή διαδικασία άλλα ένα πιο πολύπλοκο σχήμα. Στη διαδικασία αυτή εμπλέκονται ένα ζεύγος διεργασιών, όπου οι τιμές τις οποίες προσεγγίζει το όριο μιας συνάρτησης γίνονται αντιληπτές ως τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής, οι οποίες πλησιάζουν ένα συγκεκριμένο σημείο. Η κατασκευή αυτού του σχήματος είναι πολύ σημαντική για την κατανόηση της έννοιας του ορίου. Ο Cotrill κ.ά. (1996) εικάζουν ότι η έννοια του ορίου καθίσταται απρόσιτη για τους περισσότερους μαθητές λόγω των απαιτήσεων της κατασκευής ενός τέτοιου σχήματος σε συνδυασμό με την εξειδικευμένη χρήση ποσοδεικτών, όπως τους συναντούμε στον τυπικό ορισμό του ορίου.

Ανατρέχοντας στη βιβλιογραφία διαπιστώνεις ότι υπάρχει γενική συμφωνία στο ότι η διαδικασία ή οι λειτουργικές συλλήψεις πρέπει να προηγηθούν της ανάπτυξης δομικών εννοιών ή εννοιών αντικειμένων (Sfard, 1988). Η διαδικασία κατανόησης του ορίου αναφέρεται και ως δυναμικό μοντέλο του ορίου (Tall, 1992). Ενώ η δυναμική αντίληψη του ορίου οικοδομείται σχετικά εύκολα από τους μαθητές (Tall, 1981, 1992), υπάρχει μεγάλη δυσκολία στη μεταφορά από τη δυναμική προσέγγιση στον τυπικό ορισμό του ορίου (Ervynck, 1981, Williams, 1991, 2001). Υπάρχουν μαθητές, οι οποίοι έχουν αποκτήσει τη δυναμική αντίληψη της έννοιας του ορίου, οι οποίοι πιστεύουν ότι το όριο είναι κάτι το απλησίαστο, ή ότι επιτυγχάνεται μόνο στο άπειρο (Tall, 1992, Williams,2001, Mamona-Downs, 1990). Η συνήθης άτυπη, δυναμική αντίληψη των τιμών μιας συνάρτησης που πλησιάζουν μια οριακή τιμή καθώς οι τιμές στο πεδίο ορισμού πλησιάζουν μια σταθερή ποσότητα είναι πιο περίπλοκη από όσο ίσως ένα άτομο μπορεί να ισχυριστεί. Δεν είναι μια απλή διαδικασία, αλλά ένα συντεταγμένο ζεύγος διαδικασιών το οποίο στην πραγματικότητα είναι ένα σχήμα. Με βάση τη θεωρία APOS, και με βάση την πιο πάνω υπόθεση, το σχήμα δύο συντεταγμένων διαδικασιών (καθώς $x \to a, f(x) \to L$) αναδημιουργείται, για να πάρουμε μια διαδικασία που περιγράφεται ως $0 < |x - a| < \delta$ *συνεπάγεται* $|f(x) - L| < \varepsilon$. Αυτή είναι μια (νοητική) διαδικασία με την έννοια της μετάβασης από την υπόθεση στο συμπέρασμα. Στη συνέχεια, η διαδικασία ενσωματώνεται σε ένα αντικείμενο και μπορεί να εφαρμοσθεί ως ένα ποσοτικοποιημένο σχήμα δύο επιπέδων (για όλα τα *ε υπάρχει δ τέτοιο ώστε ...*) (Cottrill et all, 1996).

Σύμφωνα με τον Tall (1980), οι μαθητές, οι οποίοι διδάχτηκαν αρχικά τα όρια με ένα καθαρά άτυπο τρόπο και ο τυπικός ορισμός δόθηκε πολύ αργότερα, είχαν κατακτήσει μια απεικόνιση της έννοιας του ορίου πολύ νωρίτερα από τον τυπικό ορισμό του ορίου. Έτσι συγκεκριμένες ιδιότητες οι οποίες εξυπακούονται και οι οποίες δεν είναι μέρος του ορισμού της έννοιας του ορίου γίνονται μέρος της απεικόνισης της έννοιας του ορίου. Αυτό έχει να κάνει με τις νοητικές εικόνες μίας έννοιας τις οποίες το άτομο έχει σχηματίσει (Vinner, 1975). Οι μαθητές, όταν έχουν να μελετήσουν το όριο συνάρτησης σε συγκεκριμένη τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής της συνάρτησης, φαντάζονται ότι η μεταβλητή μπορεί να γίνει τόσο μικρή όσο αυτοί θέλουν, χωρίς να συνδέουν με προηγούμενες γνώσεις που έχουν για την οριακή τιμή μιας ποσότητας ή τι σημαίνει μια ποσότητα μικραίνει συνεχώς (Cornu, 1983, 1991). Σύμφωνα με τον Tall, η γλώσσα που χρησιμοποιούμε στην τάξη οδηγεί στην υποκειμενική αντίληψη των μεταβλητών που τείνουν στο μηδέν, όταν παίρνουν αυθαίρετα πολύ μικρές τιμές.

Ο Ervynck (1981) υποστηρίζει ότι, ύστερα από ένα ολοκληρωμένο πρόγραμμα διδασκαλίας εννοιών της ανάλυσης οι περισσότεροι μαθητές αποκτούν μία λιγότερο αυστηρή αντίληψη της έννοιας του ορίου, ενώ ελάχιστοι είναι αυτοί που αποκτούν την αυστηρά μαθηματική αντίληψη της έννοιας του ορίου. Παρόλα αυτά, για τους πλείστους μαθητές αυτή η όχι τόσο αυστηρά μαθηματική αντίληψη της έννοιας του ορίου μπορεί να είναι επαρκής στην αντιμετώπιση ασκήσεων και υπάρχει και η άποψη ότι τέτοια άτυπα μοντέλα αναφορικά με το όριο που είναι δυνατό να οδηγήσουν σε τέτοιες παρανοήσεις ώστε να δημιουργούν προβλήματα και σε άλλες μαθηματικές έννοιες αλλά και στη μαθησιακή διαδικασία (Tall, 1980).

Αναπαραστάσεις και Όριο

Βασικό χαρακτηριστικό της ανθρώπινης σκέψης είναι η ικανότητα έκφρασης μιας ιδέας με πολλούς τρόπους. Η ανθρώπινη σκέψη χαρακτηρίζεται από τη χρήση πολλών ειδών αναπαραστάσεων για την ίδια έννοια. Αυτό που διαφοροποιεί την ανθρώπινη σκέψη, δεν είναι μόνο η ικανότητα χρήσης της γλώσσας ως μορφής επικοινωνίας, αλλά και η προσφυγή σε πολλά συστήματα αναπαράστασης .

Η πρόοδος των γνώσεων συνοδεύεται από την δημιουργία και την ανάπτυξη νέων, ειδικών σημειωτικών συστημάτων που συνυπάρχουν και λειτουργούν παράλληλα με το πρώτο σύστημα, αυτό της φυσικής γλώσσας (Gagatsis et al., 1999).

Η εκπαιδευτική πράξη, είναι μια από τις εκφράσεις της ανθρώπινης σκέψης και χαρακτηρίζεται από τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων με στόχο την απόδοση ιδεών με διαφορετικούς τρόπους. Έτσι η Μαθηματική Εκπαίδευση, ως αναπόσπαστο μέρος της εκπαιδευτικής πράξης, αποτελεί επίσης τομέα της ανθρώπινης δραστηριότητας και σκέψης, ο οποίος χαρακτηρίζεται από τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων. «Μεγάλο μέρος της δουλειάς που γίνεται στα μαθηματικά επικεντρώνεται στον εντοπισμό εκείνης της δομής που τελικά διατηρείται μετά την αναπαράσταση» (Kaput, 1987α, σ.23). Το βασικό πρόβλημα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές είναι η μετάφραση από τη μια μορφή αναπαράστασης στην άλλη σε σχέση με τις μαθηματικές έννοιες, αλλά επίσης και ανάμεσα στη καθημερινή εμπειρία και στα Μαθηματικά. Μιλώντας για μετάφραση εννοούμε «τις ψυχολογικές διαδικασίες που εμπλέκονται στη μετάβαση από τη μια μορφή αναπαράστασης στην άλλη (για παράδειγμα από την εξίσωση στην γραφική παράσταση)» (Janvier, 1987α, σ.27).

Η μαθηματική εκπαίδευση χαρακτηρίζεται από τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων, γιατί οι αναπαραστάσεις είναι σύμφυτες με τα μαθηματικά (Dufour et al., 1987; Nitsch et al., 2014; Gagatsis, & Panaoura, 2014). Ο σημαντικός ρόλος που διαδραματίζει η χρήση συστημάτων αναπαράστασης και η αλλαγή πεδίου αναπαράστασης στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης, έχει προκαλέσει πολλές συζητήσεις και έρευνες τα τελευταία χρόνια στη μαθηματική εκπαιδευτική κοινότητα (Sierpinska, 1992; Lesh, Behr, & Post, 1987; Gagatsis, Christou, & Elia, 2004; κ.ά.). Το 2000 το National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) πρόσθεσε την αναπαράσταση στα “Principles and Standards of School Mathematics”, λόγω της αυξανόμενης σημασίας της στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών ενώ αρχικά, το 1989, είχε θεωρηθεί ως μέρος της επικοινωνίας. Ο βασικός στόχος της χρήσης εξωτερικών αναπαραστάσεων είναι η δημιουργία πλούσιων εσωτερικών δομών για τις μαθηματικές έννοιες, αφού εξωτερικές και εσωτερικές αναπαραστάσεις βρίσκονται σε σχέση αλληλεπίδρασης (Goldin & Kaput, 1996). Δηλαδή, οι εξωτερικές αναπαραστάσεις επηρεάζουν τις εσωτερικές, ενώ αυτές με τη σειρά τους βρίσκουν τη φυσική τους έκφραση – υλοποίηση (instantiation) μέσω των εξωτερικών. Είναι σημαντικό οι εξωτερικές αναπαραστάσεις, που χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία, να σχετίζονται με τις προηγούμενες γνώσεις και εμπειρίες των μαθητών, να σχετίζονται με τις ήδη υπάρχουσες εσωτερικές αναπαραστάσεις. Είναι πιθανόν να υπάρχει χάσμα ανάμεσα στις εξωτερικές αναπαραστάσεις, τις οποίες καλούνται να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές, και στην αναπαράσταση που έχουν οι ίδιοι δημιουργήσει για την κατάσταση του προβλήματος ως αποτέλεσμα προσωπικών βιωμάτων και προηγούμενων εμπειριών (DeLoache et al.,1998; Dufour-Janvier et al., 1987; Von Clasersfeld,1987b).

Οι Coldin και Kaput (1996) υποστηρίζουν ότι η χρήση της έννοιας της αναπαράστασης μας επιτρέπει να περιγράψουμε με λεπτομέρεια τι μπορούν και τι δεν μπορούν να κάνουν οι μαθητές και να συζητήσουμε ποιες ικανότητες επιδιώκουμε να αναπτύξουν. Επιπρόσθετα, οι αναπαραστάσεις μας παρέχουν τη δυνατότητα για λεπτομερή ανάλυση δομικών ιδιοτήτων που θεωρούνται σημαντικές στα μαθηματικά, καθώς επίσης τη συζήτηση αναφορικά με τα αποτελέσματα που οφείλονται στο μέσο που χρησιμοποιείται για τη παρουσίαση των εξωτερικών αναπαραστάσεων και για την επίλυση προβλήματος (Janvier, 1987a). Όσο και αν το πέρασμα αυτό φαίνεται φυσικό σε μερικές περιπτώσεις, ώστε να χαρακτηρίζεται ως φυσική ερμηνεία (Duval, 1987), στα μαθηματικά αποτελεί μια από τις σημαντικότερες δυσκολίες επίλυσης μαθηματικού προβλήματος (Ασβεστά & Γαγάτσης, 1995, Gagatsis,1997, Janvier, 1987a, Janvier, 1987b, Lesh και άλλοι.,1987a). Η διαδικασία μετάφρασης από μια εξωτερική αναπαράσταση σε άλλη στοχεύει στην ενίσχυση των συνδέσεων ανάμεσα στα γνωστικά πεδία και τις εσωτερικές αναπαραστάσεις.

Ο Tall (1995f), αναφέρεται στη χρήση των αναπαραστάσεων στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση με στόχο να βοηθήσουν ουσιαστικά τους μαθητές να κατανοήσουν μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες, να προβληματιστούν, να σκεφτούν και να οδηγηθούν σε εικασίες, να καταλάβουν ιδέες που κρύβονται μέσα σε τυπικές αποδείξεις.

Επιστημολογικά Εμπόδια

Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με το όριο είναι αντικείμενο ερευνών στη μαθηματική εκπαίδευση. Αρκετοί ερευνητές (Hitt & Lara-Chavez, 1999, Fischbein, 2001, Mammona-Downs, 2001, Przenioslo, 2004, Hitt, 2006, Hah Roh, 2008) έχουν τεκμηριώσει την αυθόρμητη αναπαράσταση του ορίου από τους μαθητές, ενώ άλλοι ερευνητές διατυπώνουν τα ευρήματά τους στη βάση γνωστικών και επιστημολογικών εμποδίων (Sierpinska, 1985, Davis and Vinner, 1986, Sierpinska, 1987, Sierpinska, 1990, Cornu, 1991).

Ο Bachelar (1938) θεωρεί ότι τα επιστημολογικά εμπόδια εμφανίζονται λόγω της φύσης των ίδιων των μαθηματικών εννοιών. Υποστηρίζει λοιπόν ότι η επιστημονική γνώση δεν δομείται με μια συνεχή διαδικασία, αλλά προκύπτει από απόρριψη προηγούμενων μορφών γνώσης. Συγκεκριμένα, όταν έχουν να αντιμετωπίσουμε τη νέα γνώση, η οποία πιθανόν να έρχεται σε αντίθεση με την προϋπάρχουσα γνώση έχουν την τάση να καταστρέφουν τις προϋπάρχουσες λανθασμένες ιδέες. Όταν η γνώση λειτουργεί αποδοτικά σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο μίας ορισμένης γνωστικής περιοχής και ουσιαστικά εδραιώνεται ως γνώση, αλλά αποτυγχάνει να εδραιωθεί σε κάποιο άλλο πλαίσιο και δημιουργεί αντιφάσεις, τότε παρουσιάζονται επιστημολογικά εμπόδια (Brousseau, 1983). Έτσι παρουσιάζεται η αναγκαιότητα η αρχική γνώση, η οποία είναι ανεπαρκής και λανθασμένη να αντικατασταθεί μέσα στο νέο πλαίσιο που έχει δημιουργηθεί έτσι ώστε να είναι λειτουργική και ωφέλιμη. Με αυτό τον τρόπο γίνεται προσπάθεια να ξεπεραστεί το εμπόδιο και η όλη διαδικασία είναι ουσιαστικό μέρος της ίδιας της γνώσης (Brousseau, 1983). .

Οι πηγές των δυσκολιών των μαθητών σχετικά με το όριο έχουν αναζητηθεί στις λογικές περιπλοκές του ορισμού του ορίου (Dubinsky & Yiparaki, 2000), όπως και στη γλώσσα και στις σημειωτικές αναπαραστάσεις (Monaghan, 1991, Richard, 2004, Hähkiöniemi, 2006). Ερευνητές προσπάθησαν να αξιοποιήσουν τη συσσωρευμένη γνώση σχετικά με την εκμάθηση του ορίου και να πειραματιστούν με την ανάπτυξη στρατηγικών διδασκαλίας, για να βοηθήσουν τους μαθητές να ξεπεράσουν ορισμένα από τα επιστημολογικά εμπόδια ή κοινές παρανοήσεις (Tall & Schwarzenberger, 1978, Mammona-Downs, 2001, Kidron & Zehavi, 2002, Przenioslo, 2004, Grugnetti et al., 2006).

Τα επιστημολογικά εμπόδια τα οποία οφείλονται στην ίδια τη φύση της έννοιας του ορίου και προκύπτουν από την ιστορική εξέλιξη της έννοιας του ορίου, περιγράφονται από τον Cornu (1991). Σύμφωνα με το Cornu (1991) τα επιστημολογικά εμπόδια διακρίνονται με βάση την ιστορική ανάπτυξη της έννοιας του ορίου σε εκείνα τα οποία έχουν να κάνουν με την αποτυχία της σύνδεσης της γεωμετρίας με τους αριθμούς, σε εκείνα τα οποία σχετίζονται με την ιδέα του απείρως μεγάλου και του απείρως μικρού και στα εμπόδια τα οποία σχετίζονται με το κατά πόσον επιτυγχάνεται το όριο ή όχι. Στην περίπτωση των εμποδίων τα οποία έχουν να κάνουν με την αποτυχία της σύνδεσης της γεωμετρίας με τους αριθμούς η έννοια της εξάντλησης φαίνεται εξαιρετικά κοντά στην έννοια του ορίου. Η μέθοδος της εξάντλησης είναι ουσιαστικά μια γεωμετρική μέθοδος που επιτρέπει την απόδειξη αποτελεσμάτων χωρίς να πρέπει να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα του απείρου. Εφαρμόζεται σε γεωμετρικά μεγέθη αλλά όχι σε αριθμούς. Δεν υπάρχει καμία μεταφορά από τα γεωμετρικά σχήματα σε μια καθαρά αριθμητική ερμηνεία, οπότε η έννοια του ορίου αριθμών απουσιάζει. Η γεωμετρική ερμηνεία και η επιτυχία της στην επίλυση των συναφών προβλημάτων, φαίνεται ότι προκάλεσε ένα εμπόδιο που απέτρεψε τη μετάβαση στην έννοια του αριθμητικού ορίου. Ως προς τα εμπόδια τα οποία σχετίζονται με την ιδέα του απείρως μεγάλου και του απείρως μικρού, ιστορικά παρατηρούμε ότι η έννοια του ορίου συνδέεται με την υπόθεση για την ύπαρξη απείρως μικρών ποσοτήτων που είναι σχεδόν μηδέν, χωρίς να έχουν ένα συγκεκριμένο «προσδιορίσιμο» μέγεθος. Μέσα από μια ελεύθερη προσέγγιση της έννοιας του απείρως μικρού, ο Euler θεώρησε ότι είναι μία ποσότητα η οποία ανάλογα με το που χρησιμοποιείται μπορεί να είναι ίση με μηδέν. Τέλος στην περίπτωση των εμποδίων τα οποία σχετίζονται με το κατά πόσο επιτυγχάνεται το όριο ή όχι, μέσα από μία ιστορική αναδρομή γύρω από την έννοια του ορίου, θα δούμε ότι ένα από τα σημεία συζήτησης ήταν, κατά πόσο το όριο επιτυγχάνεται ή όχι. Ο Robins (1697-1751) υποστήριξε ότι δίνεται στο όριο η ονομασία έσχατο μέγεθος, το οποίο μια μεταβλητή μπορεί να προσεγγίσει όσο πολύ εμείς θέλουμε, αλλά με το οποίο ποτέ δεν μπορεί να γίνει απολύτως ίση. Ο D’Almbert (1717-1783) υποστήριξε έντονα ότι μια ποσότητα δεν θα έπρεπε ποτέ να γίνει ίση με το όριο της, συγκεκριμένα εξέφρασε τη θέση ότι το όριο δεν συμπίπτει ποτέ, ή δεν γίνεται ποτέ ίσο με την ποσότητα της οποίας είναι το όριο, αλλά πλησιάζει πάντα και μπορεί να διαφέρει από αυτήν τόσο λίγο όσο κάποιος επιθυμεί.

Η Sierpinska(1985) μέσα από την μελέτη των άτυπων αντιλήψεων των μαθητών για το όριο και το άπειρο διέκρινε τα επιστημολογικά εμπόδια που σχετίζονται με την έννοια του ορίου στα ευρετικού τύπου εμπόδια, στα οποία υπάρχει έλλειψη μαθηματικής αυστηρότητας και τα αυστηρού τύπου εμπόδια, στα οποία υπάρχει είτε υπερβολική αυστηρότητα ή αυστηρότητα στραμμένη σε λανθασμένη κατεύθυνση. Στην περίπτωση των εμποδίων που ανήκουν στην κατηγορία ευρετικού τύπου, όταν έχουμε να βρούμε το όριο και μιλάμε για την κίνηση προς το όριο, αυτό δεν έχει να κάνει με κάποια μαθηματική πράξη ή διαδικασία. Διακρίνουμε τα εμπόδια αυτά σε ευρετικά στατικά εμπόδια όπου ο υπολογισμός του ορίου είναι ξένος προς την ιδέα της κίνησης, συγκεκριμένα υπολογίζοντας το όριο, υπολογίζουμε μία προσέγγιση του και σε ευρετικά κινητικά εμπόδια, ο υπολογισμός του ορίου έχει άμεση σχέση με την κίνηση προς το όριο, δηλαδή υπολογίζοντας το όριο είναι ως να υπολογίζω κάτι το οποίον πλησιάζω στο άπειρο. Στην περίπτωση των εμποδίων που ανήκουν στην κατηγορία των αυστηρού τύπου εμποδίων διακρίνουμε τα εμπόδια τύπου Ευδόξου και τα εμπόδια τύπου Fermat. Στα εμπόδια τύπου Ευδόξου στον υπολογισμό του ορίου, η κίνηση προς το όριο είναι μία αυστηρή αποδεικτική μέθοδος και όχι μία μαθηματική διαδικαστική πράξη. Αυτό το βλέπουμε στον τυπικό ορισμό του ορίου. Στα εμπόδια τύπου Fermat, στον υπολογισμό του ορίου η κίνηση προς το όριο είναι μια μαθηματική διαδικασία που χαρακτηρίζεται από τη συσχέτιση αριθμών με τις μεταβλητές και την παράλειψη των αριθμητικών τιμών που είναι αμελητέες σε σχέση με κάποιες άλλες.

Η Artique(1998), αναφέρεται στα επιστημολογικά εμπόδια και επισημαίνει ότι μπορούν να αντιμετωπιστούν με την απόκτηση επαρκών γνώσεων γύρω από την ιστορική εξέλιξη των εννοιών και σε συνδυασμό με τις διδακτικές προσεγγίσεις που θα ακολουθηθούν κατά την διδασκαλία των εννοιών. Όσον αφορά την έννοια του ορίου, η Artique (1998) σημειώνει ότι οι απόψεις των ερευνητών που ασχολήθηκαν με τα επιστημολογικά εμπόδια συγκλίνουν. Επισημαίνουν το εμπόδιο κατά το οποίο το όριο ως η τελική ή η ανυπέρβλητη κατάληξη μιας διαδικασίας, προκαλεί έντονες αντιλήψεις, όπως ότι θεωρείται το όριο ως φράγμα ή ως ο τελευταίος όρος μιας διαδικασίας ή τείνει να περιορίσει τη σύγκληση στη μονότονη σύγκληση. Επίσης αυτό το οποίο έχει να κάνει με την υπεργενίκευση των ιδιοτήτων των πεπερασμένων διαδικασιών στις άπειρες διαδικασίες σύμφωνα με την αρχή του συνεχούς, όπως δόθηκε από τον Leibniz. Και τέλος εμπόδια στα οποία υπερισχύουν οι γεωμετρικές μορφές έναντι των αλγεβρικών που εμπλέκονται στη διαδικασία του ορίου.

Ενσωμάτωση Σύγχρονων Τεχνολογιών

Οι ραγδαίες αλλαγές των τελευταίων δεκαετιών σε θέματα Τεχνολογιών Πληροφορικής και Επικοινωνιών (ΤΠΕ) έχουν αλλάξει ριζικά τη ζωή των ανθρώπων στις μεταβιομηχανικές κοινωνίες. Οι αλλαγές αυτές περιλαμβάνουν την ανάπτυξη και την ταχεία εξάπλωση των ηλεκτρονικών υπολογιστών, των πολυμέσων, την ανάπτυξη του διαδικτύου, τη τεχνητή νοημοσύνη και τη συνεχή εκθετική ανάπτυξη των εφαρμογών των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Καθεμιά από αυτές τις εξελίξεις έχει αντίκτυπο σε όλα τα επίπεδα της ανθρώπινης ζωής - για τους τρόπους διαπροσωπικής επικοινωνίας, την εργασία, τις δραστηριότητες αναψυχής, την κατανάλωση, τις δομές των οργανώσεων, την αγοράς εργασίας, την αντιληπτική ικανότητα για την απόκτηση των γνώσεων, τη μάθηση - και επομένως τον τρόπο ζωής μας και την ταυτότητά μας (Aviram, 2000).

Στον εκπαιδευτικό κόσμο, εκτός από τα προηγμένα πανεπιστημιακά μαθήματα και τα προγράμματα επαγγελματικής κατάρτισης, το κυρίαρχο όραμα έρχεται σε αντίθεση με εκείνο των επαγγελματιών. Το τι επιδιώκει η μαθηματική παιδεία και ειδικότερα η γενική μαθηματική παιδεία, τόσο στο σχολείο όσο και στο πανεπιστήμιο, δεν είναι μια αποτελεσματική μαθηματική πρακτική με τη βοήθεια των διαθέσιμων εργαλείων, αλλά να ασχολείται με τη μεταβίβαση των αξιών της μαθηματικής κουλτούρας. Οι αξίες αυτής της κουλτούρας είναι κοινωνικές αξίες και όπως όλες οι κοινωνικές αξίες έχουν ένα σταθερό πυρήνα που τείνει να διαμορφώσει τις σχέσεις μας με τον κόσμο που μας περιβάλλει (Abric, 1987).

Η Artigue (2000), υποστηρίζει ότι αυτές οι αξίες καθορίστηκαν μέσα από την ιστορία σε περιβάλλοντα φτωχά όσον αφορά την τεχνολογία και έρχονται με πολύ αργούς ρυθμούς σε συμφωνία με την εξέλιξη των μαθηματικών πρακτικών μέσα στο νέο περιβάλλον της εξέλιξης της τεχνολογίας. Το βασικό ζητούμενο από τα λογισμικά και τα υπολογιστικά εργαλεία είναι να μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως παιδαγωγικά εργαλεία για την απόκτηση μαθηματικών γνώσεων οι οποίες μπορεί να εμφανίστηκαν πολύ πριν από την εμφάνιση των εργαλείων αυτών. Τα εργαλεία αυτά έχουν θέσει επίσης ως στόχο να βοηθήσουν στην αντιμετώπιση ανεπαρκειών στην διδασκαλία, πρακτικές οι οποίες έχουν να κάνουν είτε με μαθήματα υπό μορφή διαλέξεων, είτε μαθήματα τα οποία οδηγούν αποκλειστικά στη διαδικαστική μάθηση των μαθηματικών δεξιοτήτων.

Η Artigue (2002) καθόρισε ένα θεωρητικό πλαίσιο για την αξιοποίηση των ηλεκτρονικών συστημάτων άλγεβρας στην διαδικασία της μάθησης. Η προσέγγιση άλλων μοντέλων στηρίζεται στις αρχές του οικοδομισμού. Η ίδια υποστηρίζει ότι είναι πιο λογικό να στηρίξει το πλαίσιο της πάνω σε ανθρωπολογικές και κοινωνικοπολιτισμικές προσεγγίσεις, λόγω του ρόλου που διαδραματίζουν τα μαθησιακά εργαλεία στα μαθηματικά.

Στο τομέα της εκπαίδευσης, η ανθρωπολογική προσέγγιση μοιράζεται με τις κοινωνικοπολιτισμικές προσεγγίσεις (Sierpinska and Lerman, 1996) το όραμα ότι τα μαθηματικά θεωρούνται ότι είναι αποτέλεσμα ανθρώπινων δραστηριοτήτων. Ο μαθηματικός τρόπος σκέψης και τα αποτελέσματα που εξάγονται θεωρείται ότι εξαρτώνται από το κοινωνικό και το πολιτιστικό περιβάλλον μέσα στο οποίο αναπτύσσονται. Κατά συνέπεια, τα μαθηματικά αντικείμενα δεν είναι απόλυτα αντικείμενα, αλλά οντότητες που προκύπτουν από τις δραστηριότητες των δεδομένων θεσμών. Κάθε κοινωνική ή πολιτιστική δραστηριότητα εκτελείται μέσα σε ένα θεσμό όπως για παράδειγμα την οικογένεια. Οι διδακτικοί θεσμοί είναι οι θεσμοί οι οποίοι είναι αφιερωμένοι στην εκ προθέσεως μαθητεία σε ειδικές γνωστικές περιοχές. Αναφορικά δε με τα αντικείμενα της γνώσης τα οποία είναι απαραίτητα, ο κάθε διδακτικός θεσμός αναπτύσσει συγκεκριμένες πρακτικές και αυτό οδηγεί σε ειδικούς κανόνες και οράματα αναφορικά με τη γνώση ή την κατανόηση του ενός ή του άλλου αντικειμένου. Για να μπορέσει κάποιος να αναλύσει τη ζωή ενός μαθηματικού αντικειμένου μέσα σε ένα θεσμό και για να μπορέσει να αντιληφθεί το νόημα του θεσμού, γνωρίζοντας και κατανοώντας το συγκεκριμένο αντικείμενο, θα πρέπει να αναγνωρίσει και να αναλύσει τις πρακτικές οι οποίες φέρνουν το αντικείμενο στο προσκήνιο. Οι πρακτικές αυτές ή «πραξεολογίες», όπως ονομάζονται στην προσέγγιση του Chevallard, περιγράφονται από τέσσερεις συνιστώσες: ένα είδος εργασίας στην οποία το αντικείμενο είναι ενσωματωμένο, οι τεχνικές που χρησιμοποιούνται για την επίλυση αυτού του είδους δραστηριοτήτων, την «τεχνολογία» δηλαδή ο λόγος που χρησιμοποιείται προκειμένου να επεξηγήσει αλλά και να αιτιολογήσει αυτές τις τεχνικές και τη θεωρεία η οποία παρέχει μια διαρθρωτική βάση για καθαρά τεχνολογικούς λόγους και μπορεί να θεωρηθεί ως η τεχνολογία της τεχνολογίας.

Η ανθρωπολογική προσέγγιση ανοίγει ένα πολύπλοκο κόσμο του οποίου η "οικονομία" υπακούει σε νόμους που διαδραματίζουν ουσιαστικό ρόλο στην πραγματική παραγωγή των μαθηματικών γνώσεων, καθώς και στην εκμάθηση των μαθηματικών. Μια παραδοσιακή οικοδομηστική προσέγγιση αποτελεί εμπόδιο στο να αντιληφθούμε αυτή την πολυπλοκότητα και για να προχωρήσουμε σε μια πιο λεπτομερή μελέτη. Ο Lagrange (2000) τόνισε ότι μια λεπτομερής μελέτη είναι απαραίτητη και ότι η εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών προϋποθέτει μελέτη μέσα από πρακτικές όπου η τεχνική εργασία διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο και οι οποίες βοηθούν στην κατασκευή μαθηματικών αντικειμένων και στη σύνδεση μεταξύ τους.

Η τεχνολογική εξέλιξη έχει ανατρέψει αυτή την οικονομία και την παραδοσιακή ισορροπία που υπήρχε μεταξύ των εννοιολογικών και τεχνικών εργασιών , και τη διαλεκτική αλληλεπίδραση μεταξύ των " φαινομενικών " και "μη - φαινομενικών " αντικειμένων της μαθηματικής δραστηριότητας (Bosch and Chevallard , 1999) . Η τεχνολογία προσφέρει τη δυνατότητα της μεγάλης μείωσης του κόστους εκτέλεσης για παράδειγμα, εργασιών ρουτίνας. Οι τεχνικές οι οποίες είναι όργανα της τεχνολογίας των υπολογιστών έχουν αλλάξει, και αυτό αλλάζει τόσο τη ρεαλιστική όσο και την επιστημονική αξία τους . Οι μαθηματικές ανάγκες των τεχνικών αλλάζουν επίσης: οι νέες ανάγκες που θα προκύψουν , θα συνδέονται με την εφαρμογή των υπολογιστών στην απόκτηση μαθηματικής γνώσης όπου εμπλέκονται και τα συστήματα αναπαράστασης (Balacheff , 1994). Οι ανάγκες αυτές δεν είναι εύκολο να αναγνωριστούν εάν η μαθηματική δραστηριότητα συνδέεται μόνο με το καθαρά τεχνολογικό κομμάτι και οι μαθηματικές ανάγκες του τεχνικού έργου δεν λαμβάνονται σοβαρά υπόψη. Φαίνεται ότι η ανθρωπολογική προσέγγιση προσκομίζει ένα αποτελεσματικό πλαίσιο για την αμφισβήτηση αυτών των αλλαγών και των πιθανών τους συνεπειών στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών.

Βασικά στην ανθρωπολογική πρέπει να αντιληφθούμε τη σημασία του «οργάνου». Το όργανο διαχωρίζεται από το αντικείμενο, υλικά ή συμβολικά, πάνω στο οποίο βασίζεται και για το οποίο χρησιμοποιείται ο όρος τεχνικό αντικείμενο (artefact). Ένα όργανο είναι μια μικτή οντότητα, της οποίας το ένα μέρος της είναι τεχνικό αντικείμενο και το άλλο μέρος της είναι γνωστικό σχήμα, τα οποία το καθιστούν ως όργανο. Για κάθε ένα συγκεκριμένο άτομο τα τεχνικά αντικείμενα αρχικά δεν έχουν καμία αξία. Μετεξελίσσονται σε όργανα μέσω της διαδικασίας της γένεσης (instrumental genesis), η οποία εμπλέκει την κατασκευή προσωπικών σχημάτων ή γενικότερα την οικειοποίηση γενικών σχημάτων που προϋπάρχουν. Η διαδικασία της γένεσης λειτουργεί σε δύο κατευθύνσεις. Αρχικά στρέφεται προς την κατεύθυνση των τεχνικών αντικειμένων, όπου τη φορτώνει σταδιακά με δυνατότητες τις οποίες μετατρέπει τελικά για ειδική χρήση, διαδικασία η οποία ονομάζεται μετασχηματισμός των εργαλείων (instrumentalisation). Ακολούθως η διαδικασία της γένεσης κατευθύνεται προς το αντικείμενο, όπου οδηγείται στην ανάπτυξη ή την πίστωση των συστημάτων με κατάλληλες δράσεις οι οποίες σταδιακά διαμορφώνονται ως τεχνικές που επιτρέπουν μια αποτελεσματική ανταπόκριση σε δεδομένα έργα. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται ανάπτυξη γνωστικών σχημάτων (instrumentation). Προκειμένου να κατανοήσουμε και να προωθήσουμε τη διαδικασία της γένεσης στους μαθητές θα πρέπει να προσδιοριστούν οι περιορισμοί που απορρέουν από το ίδιον το όργανο και ειδικότερα από το είδος του οργάνου με το οποίον ασχολούμαστε και υπάρχουν δύο είδη περιορισμών, οι περιορισμοί που έχουν να κάνουν με τις εντολές και αυτοί που είναι οργανωτικής φύσεως. Αυτά προκύπτουν από εσωτερικούς περιορισμούς και περιορισμούς διασύνδεσης (Balacheff, 1994). Είναι επίσης αναγκαίο να προσδιορίσουμε τους νέους στόχους που προσφέρονται από τη συγκεκριμένη διαδικασία.

Αρκετές μελέτες στη μαθηματική παιδεία και επιστήμη επικεντρώθηκαν στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές αλλά και οι καθηγητές των μαθηματικών οι οποίοι ασχολούνται με την έννοια του ορίου (Barbe, Bosch, Espinoza & Gascon, 2005, Huillet, 2007). Από την άλλη πλευρά μαθηματικοί παιδαγωγοί επισημαίνουν το πώς μπορεί να βελτιωθεί η εννοιολογική κατανόηση μαθηματικών εννοιών με τη χρήση της τεχνολογίας (Trouche, 2004, Lagrange, Artigue, Laborde & Trouche, 2003).

Η χρήση των ηλεκτρονικών συστημάτων άλγεβρας (CAS – computer algebra system) στη διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών είναι για πολλά χρόνια αντικείμενο έρευνας. Οι έρευνες αυτές υποστηρίζουν ότι τα ηλεκτρονικά συστήματα άλγεβρας μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να διερευνήσουν έννοιες και προβλήματα μέσα από διαφορετικές μορφές αναπαραστάσεων (Porzio, 1999; Kaput, 1996). Μέσα από τη χρήση των ηλεκτρονικών συστημάτων άλγεβρας, οι εκπαιδευτικοί έχουν την ευκαιρία να βοηθήσουν τους μαθητές να αντιληφθούν τις μαθηματικές έννοιες, να μάθουν στρατηγικές και να οικοδομήσουν αφηρημένες αλγεβρικές δομές (Arnold, 2004). Επιπλέον, τα ηλεκτρονικά συστήματα άλγεβρας αποτελούν κίνητρο για τους μαθητές, για να εστιάσουν την προσοχή τους στην ερμηνεία και αναπαράσταση μαθηματικών εννοιών και όχι στην εφαρμογή και εκτέλεση διαφόρων διαδικασιών (Arnold, 2004; Pierce and Stacey, 2007).

Η χρήση της τεχνολογίας σε συνδυασμό με τη χρήση συγκεκριμένων λογισμικών προγραμμάτων τα οποία εκτελούν εσωτερικά κάποιες διαδικασίες, βοηθούν τους μαθητές να αποκτήσουν τις ιδιότητες ενός αντικειμένου πριν, κατά ή και μετά την μελέτη της διαδικασίας ως διαδικασίας και όχι να πρέπει να ενθυλακώσουν πρώτα τη διαδικασία (Tall, 1992).

Η χρήση εργαλείων μάθησης είναι σημαντική στις μαθησιακές δραστηριότητες. Υποστηρίζουν και ενισχύουν τις ικανότητες μάθησης, προβάλλοντας τις διάφορες πτυχές μέσα από τις οποίες μπορεί να εξεταστεί ένα μαθηματικό αντικείμενο. Για παράδειγμα ένα δυναμικό λογισμικό άλγεβρας μπορεί να συνδυάσει την οπτικοποίηση με τα μαθηματικά σύμβολα. Σύμφωνα με τον Tall (2000), ένα μεγάλο μέρος του εγκεφάλου ασχολείται με την αντίληψη και κατασκευή εικόνων, υπάρχουν επίσης τεράστιες περιοχές του φλοιού οι οποίες είναι εύπλαστες και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για μια ποικιλία δραστηριοτήτων όπως οι πολλαπλές διεργασίες οι οποίες εμπλέκονται όταν σκεφτόμαστε μαθηματικά.

Τέτοιες αναπαραστάσεις παρέχουν ένα ισχυρό περιβάλλον μάθησης για τα μαθηματικά και μέσα από την κατάλληλη καθοδήγηση μπορούμε να εντρυφήσουμε εννοιολογικά στις μαθηματικές ιδέες. Στην πραγματικότητα τα σύμβολα μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως γνωστικοί άξονες εννοιών για να σκεφτόμαστε μαθηματικά. Ο Tall (1993) υποστηρίζει ότι οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές απελευθερώνουν τους μαθητές από την τυραννία να πρέπει να ενσωματώσουν την διαδικασία πριν ακόμη αποκτήσουν μια έννοια των ιδιοτήτων του αντικειμένου που μελετούν. Με την χρήση των λογισμικών τα οποία διεξαγάγουν τις διεργασίες εσωτερικά, είναι εφικτό πλέον για τους μαθητές να εξερευνήσουν τις ιδιότητες του αντικειμένου που παράγεται από τη διαδικασία, πριν, μετά ή κατά τη μελέτη της ίδιας της έννοιας.

Μελέτες έχουν δείξει ότι η τεχνολογία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βοηθήσει τους μαθητές να αντιληφθούν έννοιες της ανάλυσης και να τις συνδέσουν μέσα από πολλαπλές αναπαραστάσεις (Cooley, 1997, Estes, 1990, Heid, 1988, Porzio, 1994, Tall, 1994). Ερευνητές προτείνουν όπως δοθεί περισσότερη έμφαση στο ρόλο της οπτικοποίησης εννοιών της ανάλυσης (Dreyfus, 1990, Eisenberg και Dreyfus, 1991, Ferrini-Mundy και Graham, 1991, Tall, 1991, Vinner, 1989, Zimmerman, 1991). Οι εισηγήσεις αυτές υποστηρίζονται και από την θεωρεία του Mayer (2009) για τη πολυμεσική μάθηση, η οποία υποστηρίζει ότι έχουμε δύο διαφορετικά κανάλια για την επεξεργασία πληροφοριών, το λεκτικό / ακουστικό κανάλι και το οπτικό / εικονογραφικό κανάλι. Η μάθηση αρχικά απαιτεί την ανάπτυξη δεσμών μεταξύ των συστατικών στοιχείων της εικονογραφικής γνώσης έτσι ώστε να δημιουργηθεί ένα συνεκτικό εικονογραφικό μοντέλλο. Σύμφωνα με τον Mayer (2009), έναν αποφαστικό βήμα περιλαμβάνει την αλλαγή από το να έχουμε δύο ξεχωριστές αναπαραστάσεις – το εικονογραφικό μοντέλο και το λεκτικό μοντέλο – να έχουμε ένα αναβαθμισμένο μοντέλο στο οποίο τα αντίστοιχα στοιχεία και σχέσεις από το ένα μοντέλο θα αναπαρίστανται στο άλλο. Αυτή η διαδικασία αντανακλά την επιτομή του νοήματος, επειδή ο μαθητής πρέπει να επικεντρωθεί στην βασική δομή των εικονογραφικών και λεκτικών αναπαραστάσεων. Με τον ίδιο τρόπο, επειδή η καθεμιά από τις κύριες αναπαραστάσεις τις οποίες συναντούμε στα σχολικά μαθηματικά – γραφικές, αριθμητικές, αλγεβρικές και λεκτικές – έχουν χαρακτηριστικά τα οποία δίνουν έμφαση σε διαφορετικές και συμπληρωματικές πληροφορίες (Ainsworth, 1999, Brenner et al., 1997, Goldin, 2002, Kaput, 1989). Σύμφωνα με τους Ainsworth, Bibby, & Wood (1997) μια αναπαράσταση μπορεί να βοηθήσει στην ερμηνεία άλλων αναπαραστάσεων επειδή κατά την διαδικασία σύνδεσης των αναπαραστάσεων είναι πιο πιθανόν οι μαθητές να βελτιώσουν και να τροποποιήσουν τις αντιλήψεις τους. Στην περίπτωση του ορίου, οι γραφικές αναπαραστάσεις της έννοιας του ορίου θα μπορούσαν να βοηθήσουν στον να αντιληφθούν καλύτερα τον τυπικό λεκτικό/αλγεβρικό ορισμό του. Αυτό είναι ένα παράδειγμα του πως ένα δυναμικό λογισμικό μπορεί να είναι ευεργετικό. Δύο προηγούμενες μελέτες καταδεικνύουν ότι τα δυναμικά λογισμικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να βοηθήσουν τους μαθητές να αναπτύξουν ένα συνεπές εικονογραφικό μοντέλο του τυπικού ορισμού του ορίου και να βελτιώσουν το εικονογραφικό τους μοντέλο με τη βοήθεια των λεκτικών αναπαραστάσεων. Οι Kidron και Zehavi (2002) χρησιμοποίησαν το δυναμικό λογισμικό Mathematica για γραφικές παραστάσεις, για να εισάξουν σε μαθητές τον τυπικό ορισμό του ορίου ακολουθίας και του ορίου συνάρτησης μέσω των σειρών Taylor και του θεωρήματος του υπολοίπου του Lagrange. Η Parks (1995), η οποία χρησιμοποίησε τις δυναμικές δυνατότητες του Mathematica για να εισάξει τον τυπικό ορισμό του ορίου συνάρτησης αντί του ορίου ακολουθίας, επισημαίνει ότι η μάθηση ενισχύεται όταν βασικές πληροφορίες αναπαριστούνται στην εικονική (εικονογραφική) μορφή τους και όχι μόνο στην συμβολική μορφή (Plass et al., 2009, σελ. 41). Την άποψη τους αυτή οι Plass και άλλοι (2009) την στηρίζουν στην θεωρία των γνωστικών φορτίων η οποία υποστηρίζει ότι η επεξεργασία των απεικονίσεων απαιτεί λιγότερη νοητική προσπάθεια από την επεξεργασία περιγραφικών πληροφοριών, επειδή οι λέξεις και τα σύμβολα πρέπει να ερμηνευθούν πρώτα και στη συνέχεια να ενσωματωθούν με άλλες πληροφορίες (σελ. 41). Η θεωρία της πολυμεσικής μάθησης όπως και οι έρευνες των Parks (1995) και Kidron και Zehavi (2002) υποστηρίζουν ότι τα δυναμικά λογισμικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν την οπτική αλλά και την λεκτική αναπαράσταση του τυπικού ορισμού του ορίου.

Η ανθρωπολογική προσέγγιση στη διδακτική δεν έχει αναπτύξει τα κατάλληλα εργαλεία σχετικά με την ανάπτυξη γνωστικών σχημάτων, δεδομένου ότι έχει αναπτυχθεί με αναφορά στα παραδοσιακά περιβάλλοντα τάξης μόνο. Στον ερευνητικό τομέα της γνωστικής εργονομίας (η οποία υιοθετεί επίσης μία ανθρωπολογική οπτική) εντοπίζονται προσεγγίσεις για την υποστήριξη των απόψεων σχετικά με ανάπτυξη γνωστικών σχημάτων (Verillon & Rabardel, 1995). Οι ερευνητές στον τομέα αυτό χρησιμοποιούνται για να εργάζονται πάνω σε επαγγελματικές διαδικασίες μάθησης που λαμβάνουν χώρα σε τεχνολογικά πολύπλοκα περιβάλλοντα, για παράδειγμα, η εκπαίδευση των πιλότων του αεροπλάνου, και έχουν αναπτύξει κατάλληλα εννοιολογικά εργαλεία για την μελέτη αυτών των τύπων των μαθησιακών διαδικασιών.

Ηλεκτρονικά συστήματα άλγεβρας, όπως το Derive, το Mathematica, το Maple ή το MuPAD, αλλά και δυναμικά λογισμικά γεωμετρίας όπως το Geometer's Sketchpad ή το Cabri Geometry είναι ισχυρά τεχνολογικά εργαλεία για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Πολλά ερευνητικά αποτελέσματα δείχνουν ότι αυτά τα λογισμικά πακέτα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να ενθαρρύνουν την ανακάλυψη και τον πειραματισμό στην τάξη, αλλά και τα χαρακτηριστικά των απεικονίσεων που παρέχουν μπορούν να χρησιμοποιηθούν αποτελεσματικά στη διδασκαλία για να οδηγήσουν σε εικασίες (Lavicza 2006, Kreis 2004). Το δυναμικό λογισμικό ανοικτού κώδικα, για μαθηματικά, GeoGebra (Hohenwarter και Preiner 2007), προσπαθεί να συνδυάσει την ευκολία στη χρήση ενός δυναμικού λογισμικού γεωμετρίας, με τις δυνατότητες ενός ηλεκτρονικού συστήματος άλγεβρας.

Θεωρητικά Μοντέλα

Η ανάπτυξη των Μαθηματικών γίνεται στον εγκέφαλο του ανθρώπου. Για να ενεργοποιηθεί μία δομή με πολύπλοκες δραστηριότητες που λαμβάνουν χώρα ταυτόχρονα, έτσι ώστε να παραχθεί διαδοχική σκέψη με ένα συνεκτικό τρόπο, χρειάζεται ένας συγκεκριμένος μηχανισμός. Η βασική ιδέα, σύμφωνα με τον Crick (1994), είναι ότι κατά την αρχική επεξεργασία λειτουργούν παράλληλα διαφορετικές δραστηριότητες. Στην συνέχεια εμφανίζονται ως ένα ή και περισσότερα στάδια όπου υπάρχει δυσχέρεια στην επεξεργασία των πληροφοριών. Ταυτόχρονα ο εγκέφαλος μπορεί να χειριστεί μόνον ένα αντικείμενο ή έστω μερικά. Αυτό επιτυγχάνεται από το προσωρινό φιλτράρισμα των πληροφοριών οι οποίες απορρέουν από τα αντικείμενα που δεν παρακολουθούνται. Στη συνέχεια το σύστημα μεταφέρει την προσοχή αστραπιαία στο επόμενο αντικείμενο και ούτω καθεξής, γι’ αυτό και επιβάλλεται μεγάλη συγκέντρωση.

Για να χειριστούμε την πολυπλοκότητα της ακολουθίας των δραστηριοτήτων καταφεύγουμε στις επαναλήψεις και στην εξάσκηση με αποτέλεσμα αυτές να γίνονται ρουτίνα και να επιτυγχάνονται με την ελάχιστη ενσυνείδητη σκέψη. Αυτό ελευθερώνει την ενσυνείδητη μνήμη να επικεντρωθεί σε άλλα στοιχεία (Skemp, 1979). Για παράδειγμα, χρησιμοποιώντας τα διάφορα εργαλεία οι τεχνικές γίνονται μέρος υποσυνείδητων διεργασιών, ενώ το άτομο μπορεί να εστιαστεί σε πιο χρηστικά ή αισθητικά ζητήματα. Παρά το γεγονός ότι η επανάληψη και η εσωτερίκευση των διαδικασιών είχαν θεωρηθεί ως ένα ουσιαστικό μέρος της μαθησιακής διαδικασίας στα μαθηματικά, για δεκαετίες είναι γνωστό ότι δεν βοηθούν στο να υπάρξει ουσιαστική πρόοδος ως προς την κατανόηση μαθηματικών σχέσεων (Thorndike, 1922, Brownell, 1935). Είναι πολύ σημαντικό να τονιστεί ότι αν αυτός ο τρόπος χρησιμοποιηθεί αποκλειστικά και μόνον, τότε μπορεί να οδηγήσει σε μια διαδικαστική σκέψη με αποτέλεσμα να μην υπάρχει η αναγκαία ευελιξία για τη λύση νέων προβλημάτων (Schoenfeld, 1992).

Ο Piaget αναφέρεται σε τρία είδη αφαιρετικής σκέψης. Όταν ενεργεί σε αντικείμενα στον εξωτερικό κόσμο, τότε αρχικά μιλά για *εμπειρική αφαίρεση*, όπου το επίκεντρο είναι τα ίδια τα αντικείμενα και η γνώση απορρέει από τις ιδιότητες των αντικειμένων (Beth & Piaget, 1966). Όταν η έμφαση είναι στις δράσεις τότε οδηγούμαστε στην *ψευδο-εμπειρική αφαίρεση* η οποία εξάγει ιδιότητες οι οποίες εισάγονται λόγω της ενέργειας των θεμάτων πάνω στα αντικείμενα (Piaget, 1985). Περαιτέρω κατασκευές μπορούν στην συνέχεια να ολοκληρωθούν λόγω της *ανακλαστικής αφαίρεσης* χρησιμοποιώντας υπάρχουσες δομές για την κατασκευή νέων παρατηρώντας τις σκέψεις και αφαιρώντας από αυτές. Με αυτό τον τρόπο τα μαθηματικά στο σύνολο τους μπορούν να θεωρηθούν από την πλευρά της κατασκευής δομών ως μαθηματικές οντότητες που μετακινούνται από το ένα επίπεδο στο άλλο. Η λειτουργία αυτών των οντοτήτων γίνεται με τη σειρά της ένα αντικείμενο της θεωρίας και αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να φτάσουμε σε δομές οι οποίες εναλλάξ δομούνται ή δομούν ισχυρότερες δομές (Piaget, 1972).

Οι Heid (1988), Kidron και Zehavi (2002) και Kidron (2003), επισημαίνουν τις δυσκολίες στο να αντιληφθούν οι μαθητές την έννοια του ορίου, ειδικότερα την τάση να προσδιορίσουν την έννοια του ορίου ως μια διαδικασία και όχι ως ένα αριθμό, εστιάζοντας στο « πλησιάζει οσοδήποτε κοντά» και όχι στο «ο αριθμός τον οποίο προσεγγίζει».

Ο Arcavi (2003) επεσήμανε τη γνωστική δυσκολία η οποία προκύπτει από την ανάγκη να επιτευχθεί ευέλικτη και έγκυρη μετάφραση από την οπτική στην αναλυτική αναπαράσταση αλλά και αντίστροφα της ίδιας κατάστασης, η οποία αποτελεί τον πυρήνα της κατανόησης σε μεγάλο μέρος των μαθηματικών. Την σημασία της ευελιξίας στην οικοδόμηση συνδέσεων μεταξύ διαφορετικών μαθηματικών πεδίων επισημαίνουν και οι Dana Picard και Kidron (2008). Ο Duval (2006) επισημαίνει ότι η κατανόηση των μαθηματικών ξεκινά όταν αρχίσουν να συντονίζονται τα διαφορετικά πεδία. Ο Duval προτείνει ένα πλαίσιο το οποίο λαμβάνει υπόψη τους επιστημολογικούς περιορισμούς της συγκεκριμένης μαθηματικής δραστηριότητας και τις γνωστικές λειτουργίες της σκέψης. Τονίζει επίσης ότι η μαθηματική σκέψη συχνά απαιτεί την παράλληλη ενεργοποίηση δύο ή και τριών μαθηματικών πεδίων, ακόμα και όταν χρησιμοποιείται εξωτερικά μόνο ένα, ή κρίνεται επαρκές από μαθηματικής άποψης. Επισημαίνεται ότι ορισμένες από τις γνωστικές δυσκολίες οι οποίες συνοδεύουν την έννοια του ορίου μπορεί να συσχετίζονται με την αλληλεπίδραση της οπτικής διαίσθησης και της τυπικής αιτιολόγησης.

Θεωρητικές Προσεγγίσεις

Οι θεωρίες μάθησης ασχολούνται με το πώς οι άνθρωποι μαθαίνουν και τα στάδια μέσα από τα οποία περνούν μέχρι να αποκτήσουν τη γνώση. Στόχος μιας θεωρίας μάθησης είναι η ανακάλυψη εκείνων των διαδρόμων που θα οδηγήσουν στη βαθύτερη και ουσιαστικότερη κατανόηση εννοιών. Ουσιαστικά οι θεωρίες μάθησης στοχεύουν στη βελτίωση της εκπαίδευσης και των εκπαιδευτικών εμπειριών, προκειμένου να βοηθήσουν τους μαθητές, μέσα από τα στάδια απόκτησης των γνώσεων που αναπτύσσει η θεωρία, να αποκτήσουν τη γνώση πιο γρήγορα. Οι Dubinsky και McDonald (2002), επικεντρώθηκαν στο πώς μια θεωρία μάθησης για τα μαθηματικά μπορεί να βοηθήσει στο να κατανοήσουμε τη διαδικασία απόκτησης της γνώσης, δίνοντας εξηγήσεις για τα φαινόμενα που μπορούμε να παρατηρήσουμε σε μαθητές οι οποίοι προσπαθούν να οικοδομήσουν τον δικό τους τρόπο αντίληψης μαθηματικών εννοιών.

Σύμφωνα με τον Dubinksy, υπάρχουν έξι βασικά χαρακτηριστικά σε μια θεωρία μάθησης. Πρώτον η θεωρία μάθησης υποστηρίζει την πρόβλεψη, πράγμα που σημαίνει ότι αν συμβαίνει ένα γεγονός, τότε ένα άλλο γεγονός θα συμβεί ως αποτέλεσμα του πρώτου. Η σχέση μεταξύ των γεγονότων είναι άμεσα συνδεδεμένη με τις διδακτικές πρακτικές που ακολουθούνται. Μια θεωρία μάθησης θα πρέπει επίσης να διαθέτει επεξηγηματική ισχύ, να εφαρμόζεται σε ένα ευρύ φάσμα εμπειριών, να μπορεί να βοηθήσει στην οργάνωση του πώς πρέπει να σκεφτόμαστε μέσα από τις διδακτικές εμπειρίες που αποκτώνται, να χρησιμεύσει ως εργαλείο για την οργάνωση των δεδομένων και να παρέχει μια γλώσσα επικοινωνίας σχετικά με τη μάθηση.

Μέσα στα πλαίσια της ανασκόπησης της σχετικής βιβλιογραφίας για τον τρόπο ανάπτυξης της θεωρητικής σκέψης του ατόμου σε μαθηματικές έννοιες παρατίθενται στοιχεία από τη θεωρία της εννοιολογικής αλλαγής, την θεωρία APOS, τη θεωρία των τριών κόσμων του Tall, τη θεωρία της πραγμάτωσης της Sfard και της θεωρητικής γνώσης της Sierpinska.

Η Θεωρία της Εννοιολογικής Αλλαγής

Ο όρος εννοιολογική αλλαγή εισήχθηκε από τον Thomas Kuhn (1962), για να υποδείξει ότι οι έννοιες που ενσωματώνονται σε μιαν επιστημονική θεωρία αλλάζουν νόημα, όταν η θεωρία αλλάξει. Η προσέγγιση της εννοιολογικής αλλαγής εμφανίστηκε σε δύο διαφορετικούς ερευνητικούς τομείς, στον τομέα της επιστημονικής εκπαίδευσης και στο τομέα της γνωστικής – εξελικτικής ψυχολογίας (Vosniadou, 1999). Ερευνητές και στους δύο τομείς επενδύουν στην επιστημονική αλλαγή, σύμφωνα με τον Kuhn (1970), ως πηγή υποθέσεων για το πώς οι έννοιες μεταβάλλονται κατά τη διάρκεια της διαδικασίας ανάπτυξης τους και κατά τη διαδικασία της μάθησης.

Η θεωρία της εννοιολογικής αλλαγής εξετάζει τη διαδικασία απόκτησης της γνώσης και ιδιαίτερα σε καταστάσεις στις οποίες η προηγούμενη γνώση είναι ασυμβίβαστη με τη νέα. Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή, οι μαθητές, στην προσπάθειά τους να κατανοήσουν τον κόσμο γύρω τους, δημιουργούν μια θεωρία πλαίσιο (Vosniadou, & Brewer, 1992; Vosniadou, 1994). Η θεωρία αυτή δεν είναι μια τυπική θεωρία, είναι ένα επεξηγηματικό πλαίσιο που έχει δημιουργηθεί στα αρχικά στάδια και αποτελείται από οντολογικές και επιστημολογικές προϋποθέσεις δομημένο σε ένα συνεκτικό πυρήνα. Οι προϋποθέσεις αυτές επηρεάζονται από την καθημερινή εμπειρία. Στις πιο πολλές περιπτώσεις, οι μαθητές δεν γνωρίζουν τον έλεγχο των περιορισμών αυτών των προϋποθέσεων ως προς την ερμηνεία τους από το στάδιο της λήψης των πληροφοριών μέχρι και του σταδίου της εννοιολογικής κατανόησης τους.

Αυτή η θεωρία πλαίσιο, μέσα από την καθημερινή και πολιτιστική εμπειρία, προκαλεί κάποιες συγκεκριμένες θεωρίες (Vosniadou & Brewer, 1992, Vosniadou, 1994). Οι πεποιθήσεις οι οποίες αποτελούν μια συγκεκριμένη θεωρία, ενεργούν ως ένα δευτεροβάθμιο επίπεδο περιορισμών στη διαδικασία απόκτησης της γνώσης. Αυτές οι πεποιθήσεις και οι προϋποθέσεις οι οποίες τις προκαλούν είναι διαισθητική γνώση με την ερμηνεία που έδωσε στην έννοια ο Fischbein (1987).

Πολλές φορές, οι υπάρχουσες προϋποθέσεις και πεποιθήσεις επηρεάζουν την απόκτηση νέων γνώσεων και προκαλούν γνωστικά προβλήματα. Η θεωρία της εννοιολογικής αλλαγής προσπαθεί να ερμηνεύσει ακριβώς αυτά τα προβλήματα. Σε πολλές περιπτώσεις, οι νέες πληροφορίες δεν είναι συμβατές με τις υπάρχουσες προϋποθέσεις και τις πεποιθήσεις των μαθητών. Σε αυτές τις περιπτώσεις, η απόκτηση νέων πληροφοριών χρειάζεται μια ριζική αναθεώρηση της προηγούμενης γνώσης. Στην πραγματικότητα, χρειάζεται μια ριζική εννοιολογική αλλαγή που είναι μια δύσκολη και χρονοβόρα διαδικασία κατά τη διάρκεια της μάθησης. Συνήθως, οι πεποιθήσεις των μαθητών, λόγω και της διαισθητικής φύσης τους είναι πολύ ισχυρές και συνεπής. Κατά συνέπεια, μερικές από τις αποτυχίες που συμβαίνουν στη μαθησιακή διαδικασία δημιουργούν παρανοήσεις που λαμβάνουν χώρα κατά ένα όχι αυθαίρετο τρόπο. Το συνθετικό μοντέλο αποτελείται από αυτού του είδους τις παρανοήσεις. Ο όρος μοντέλο χρησιμοποιείται για τα νοητικά μοντέλα, τα οποία είναι μια νοητική αναπαράσταση που παράγονται από ένα άτομο κατά τη διάρκεια των γνωστικών λειτουργιών που λαμβάνουν χώρα, όταν αντιμετωπίζει μια προβληματική κατάσταση. Ειδικά, το συνθετικό μοντέλο είναι ένα μοντέλο που αποκαλύπτει παρανοήσεις των μαθητών, όταν αυτοί προσπαθούν να συμβιβάσουν τις νέες πληροφορίες με την αρχική επεξηγηματική θεωρία. Αυτά τα μοντέλα είναι ένα μίγμα των υφιστάμενων πεποιθήσεων των ατόμων και της επιστημονικής γνώσης σχετικά με την ίδια έννοια. Στην πραγματικότητα, οι μαθητές δημιουργούν συνθετικά μοντέλα στην προσπάθειά τους να αφομοιώσουν τις νέες πληροφορίες στην υπάρχουσα γνωστική τους βάση, αν και είναι ασυμβίβαστες (Vosniadou & Brewer, 1992, Vosniadou, 1994). Παράδειγμα ενός τέτοιου συνθετικού μοντέλου, στην περίπτωση των μαθηματικών , είναι το μοντέλο ενός κλάσματος ως μέρους της μονάδας όπου "τα περισσότερα μέρη σημαίνουν μικρότερη αξία" (Stafylidou & Vosniadou, 2004).

Η θεωρία της εννοιολογικής αλλαγής έχει ήδη εφαρμοστεί σε μεγάλο αριθμό περιπτώσεων στον τομέα της μάθησης των επιστημών. Επιπλέον, πρόσφατες μελέτες διερευνούν την εννοιολογική αλλαγή στη διαδικασία της μάθησης μαθηματικών εννοιών. Τέτοιες έρευνες αναφέρονται στην έννοια του αριθμού (Merenluoto &

Lehtinen, 2002), στη μετάβαση από ένα σύνολο αριθμών σε μια επέκταση του (π.χ. από φυσικούς αριθμούς σε κλάσματα ή ρητούς αριθμούς) (Stafylidou & Vosniadou, 2004, Vamvakoussi & Vosniadou, 2002, 2004a, 2004b), στο ποσοστό (Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens, Verschaffel, 2004) στο άπειρο (Hannula, Markku, Maijala, Pehkonen, & Soro, 2002, Tirosh & Tsamir, 2004) και στην εφαπτομένη καμπύλης (Biza, Souyoul, & Zachariades, 2005) . Πολλοί άλλοι ερευνητές έχουν διερευνήσει τις προηγούμενες αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με μαθηματικές έννοιες και την ασυμβατότητα μεταξύ των εννοιών με την αντίστοιχη τυπική γνώση.

Ο Fischbein (1987) μίλησε για τις διαισθήσεις και τις επιπτώσεις τους στη μαθηματική λογική, ο Vergnaud (1988, 1990) αναφέρεται στην ύπαρξη πεπλεγμένων μαθηματικών εννοιών και θεωρημάτων τα οποία λειτουργούν ως σταθερές και τα αποκάλεσε έννοιες εν δράσει και θεωρήματα εν δράσει, ο Cornu (1991) περιέγραψε τις αυθόρμητες αντιλήψεις πριν από την τυπική σκέψη, οι Stavy και Tirosh (2000) ανέπτυξαν τη θεωρία των διαισθητικών κανόνων. Η προσέγγιση της εννοιολογικής αλλαγής δεν αντιβαίνει τις παραπάνω θεωρίες, αλλά προσφέρει μια κοινωνική προοπτική κονστρουκτιβισμού και προσπαθεί να παρέχει, μεταξύ άλλων, μαθητοκεντρικές επεξηγήσεις για την απόκτηση γνώσεων, σχετικά αντίθετων μαθηματικών εννοιών και να προειδοποιήσει τους μαθητές ως προς τη χρήση των μηχανισμών προσθετικής αξίας στις περιπτώσεις αυτές (Βοσνιάδου, 2004).

Η Θεωρία APOS

Η θεωρία APOS (Action – Process – Object – Schema) είναι μια κοντρουκτιβιστική θεωρία η οποία εστιάζεται στις νοητικές κατασκευές των ατόμων στη μαθηματική γνώση και στους νοητικούς μηχανισμούς που παράγουν τις κατασκευές αυτές μέσα στο κοινωνικό πλαίσιο. Κύρια πηγή της θεωρίας αυτής είναι η επιστημολογία της μάθησης του Piaget από την νηπιακή ηλικία στην εφηβεία (Beth & Piaget, 1966) και η προσπάθεια της εφαρμογής του μηχανισμού της στοχαστικής αφαίρεσης στην εκμάθηση μαθηματικών εννοιών σε προχωρημένη μαθηματική σκέψη. Οι Asiala και άλλοι (1996) περιγράφουν τη μαθηματική γνώση με τον ακόλουθο τρόπο: Η μαθηματική γνώση ενός ατόμου είναι η τάση του ατόμου να ανταποκρίνεται σε αντιληπτές καταστάσεις μαθηματικών προβλημάτων αντανακλώντας στα προβλήματα και στη λύση τους σε ένα κοινωνικό πλαίσιο και κατασκευάζοντας και ανακατασκευάζοντας μαθηματικές δράσεις, διαδικασίες και αντικείμενα οργανώνοντας τα σε σχήματα τα οποία χρησιμοποιεί στην αντιμετώπιση αυτών των καταστάσεων.

Η δράση, η διαδικασία, το αντικείμενο και το σχήμα είναι οι νοητικές κατασκευές τις οποίες το άτομο οικοδομεί μέσω των μηχανισμών της ανακλαστικής αφαίρεσης. Ο Dubinsky (1991) και οι Asiala και άλλοι (1996) προσδιόρισαν έξη είδη ανακλαστικής αφαίρεσης στην ανώτερη μαθηματική εκπαίδευση. Αυτά είναι: η εσωτερίκευση (interiorization), ο συντονισμός (coordination), η αντιστροφή (reversal), η ενθυλάκωση (encapsulation), η θεματοποίηση (thematization), και η γενίκευση (generalization).

Η θεωρία APOS του Dubinsky και των συνεργατών του, εμμένει στην αρχή ότι υπάρχει στενή σχέση μεταξύ της φύσης μιας μαθηματικής έννοιας και της ανάπτυξή της στο μυαλό του ατόμου (Piaget, 1970, σ. 13.). Υποστηρίζει ότι η απόκτηση της γνώσης συνίσταται στην ικανότητα του ατόμου να κάνει νοητικές κατασκευές με σκοπό να αντιμετωπίσει μαθηματικές καταστάσεις. Συχνά οι κατασκευές αυτές απαιτούν την επανακατασκευή ή την υπενθύμιση κάποιας προηγούμενης κατασκευής. Η πραγματική εξέλιξη στην ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης δεν έρχεται απλώς με νέες κατασκευές που προκύπτουν από απλές βελτιώσεις παλαιότερων και μπορούν να αντιμετωπίσουν πιο ευέλικτα μία ομάδα παρόμοιων καταστάσεων. Αντίθετα, η εξέλιξη πραγματοποιείται όταν οι νέες κατασκευές, αν και διατηρούν σημεία ομοιότητας με τις προηγούμενες, διαφέρουν σε επίπεδο πολυπλοκότητας. Αυτή η ιδέα σχετίζεται με τη γνωστή διχοτόμηση του Piaget για την *αφομοίωση* και *συμμόρφωση* (assimilation and accommodation (Piaget 1972)).

Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τη θεωρία APOS, η κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας ξεκινά με τη *δράση (action)* πάνω σε φυσικά και νοητικά αντικείμενα, που έχουν από πριν κατασκευαστεί. Στη συνέχεια, οι δράσεις με τη σειρά τους *εσωτερικεύονται (interiorized)* σε *διεργασίες (processes)* οι οποίες μετέπειτα *ενθυλακώνονται (encapsulated)* σε *αντικείμενα (objects)*. Τα αντικείμενα, αντιστρόφως, μπορούν να *από-ενθυλακωθούν (de-encapsulated)* πάλι πίσω στις διεργασίες από τις οποίες προέρχονται. Τέλος διεργασίες και αντικείμενα οργανώνονται σε *σχήματα (schemas)*.

Παρακάτω παρατίθεται μια σύντομη περιγραφή των νοητικών αυτών κατασκευών:

Δράση (action): Ένας μετασχηματισμός ονομάζεται δράση όταν αποτελεί την αντίδραση του υποκειμένου σε κάποιο ερέθισμα που το λαμβάνει ως εξωτερικό. Για παράδειγμα, ένας μαθητής ο οποίος χρειάζεται μια σαφή παράσταση για να σκεφτεί το όριο μιας συνάρτησης, $\lim_{x\to\alpha} f(x)$, και ο οποίος μπορεί να εκτελέσει πολύ περισσότερες πράξεις από το να αντικαταστήσει τη μεταβλητή x στη συνάρτηση $f(x)$ με έναν αριθμό πολύ κοντά στο α και να κάνει τις πράξεις, θεωρείται ότι έχει κατανόηση τύπου δράσης, της έννοιας του ορίου μιας συνάρτησης.

Διεργασία (process): Όταν το άτομο στοχάζεται πάνω σε μια δράση και τη εσωτερικεύει, τότε η δράση γίνεται μέρος του ατόμου το οποίο αποκτά έλεγχο πάνω της. Για παράδειγμα, ένα άτομο το οποίο έχει αντιληπτική ικανότητα σε επίπεδο διεργασίας της έννοιας του ορίου, $\lim_{x\to\alpha} f(x)$, θα οικοδομήσει μια νοητική διαδικασία για τις τιμές της μεταβλητής x που είναι πολύ κοντά στη τιμή α και θα σκεφτεί με βάση τις τιμές εισόδου, ενδεχομένως απροσδιόριστα, τους μετασχηματισμούς αυτών των τιμών έτσι ώστε να έχουμε τις τιμές εξόδου.

Αντικείμενο (object): Όταν το άτομο στοχάζεται πάνω στις λειτουργίες που εφαρμόζονται σε μία συγκεκριμένη διεργασία, καθίσταται ενήμερο για αυτή τη διεργασία, ως μία ολότητα, αντιλαμβάνεται ποιοι μετασχηματισμοί (δράσεις ή διεργασίες) μπορούν να ενεργήσουν σε αυτή και είναι πραγματικά ικανό να κατασκευάσει κατάλληλους μετασχηματισμούς και να σκεφτεί πάνω σε αυτή τη διεργασία συνολικά ως ένα αυτόνομο αντικείμενο. Στην περίπτωση αυτή οι διεργασίες ενθυλακώνονται σε αντικείμενο.

Στις περιπτώσεις που μία δράση ή μία διεργασία έχει ήδη ενθυλακωθεί σε ένα αντικείμενο παρουσιάζεται συχνά η ανάγκη της αντίστροφης διαδικασίας που είναι η από-ενθυλάκωση του αντικειμένου πίσω στη διεργασία, από την οποία προήλθε, με σκοπό να χρησιμοποιηθούν οι ιδιότητες του στη διαχείριση του. Για παράδειγμα, στη περίπτωση της έννοιας του ορίου συνάρτησης ένα άτομο μπορεί να αντιμετωπίσει καταστάσεις που απαιτούν να εφαρμόσει διάφορες δράσεις ή και διαδικασίες. Αυτές μπορεί να περιέχουν κατανόηση της διαδικασίας κατά την οποία εμπλέκονται δύο συναρτήσεις έτσι ώστε να παραχθεί μια νέα συνάρτηση, όπως όταν έχουμε το $\lim_{x\to 4^+}\frac{4-x}{|4-x|}$ ή το $\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{\eta\mu x}\right)$. Προκειμένου να υπολογίσει κάποιος το πλευρικό όριο της νέας συνάρτησης η διεργασία πρέπει να ενθυλακωθεί και να μετατραπεί σε αντικείμενο.

Σχήμα (schema): Είναι οι διεργασίες και τα ήδη κατασκευασμένα αντικείμενα που μπορούν να συνδεθούν με διαφορετικούς τρόπους. Για παράδειγμα, δύο ή περισσότερες διεργασίες μπορούν να συντονιστούν μέσω μιας σύνθεσης ή διεργασίες και αντικείμενα μπορούν να συσχετιστούν χάρη στην ιδιότητα επίδρασης του ενός πάνω στο άλλο. Μια συλλογή δράσεων, διεργασιών και αντικειμένων μπορεί να οργανωθεί με δομημένο τρόπο σε ένα σχήμα το οποίο να έχει τη δυνατότητα να περιέχει προηγούμενα κατασκευασμένα σχήματα. Τα ίδια τα σχήματα μπορούν να θεωρηθούν ως αντικείμενα και να ενταχθούν σε πιο σύνθετες δομές όπως τα «υψηλού επιπέδου» σχήματα. Για παράδειγμα, η συνεκτικότητα μπορεί να βρίσκεται στην κατανόηση ότι για να προσδιοριστεί το όριο μιας συνάρτησης, $\lim_{x\to\alpha} f(x)$, πρέπει να ληφθούν υπόψη οι τιμές δεξιά και αριστερά του αριθμού α, οι αντίστοιχες τιμές εξόδου και ο τρόπος μετατροπής από τιμές εισόδου σε τιμές εξόδου.

Οι Asiala, και άλλοι (1996) προτείνουν ένα πλαίσιο βασισμένο στη θεωρία APOS το οποίο αποτελείται από τρεις συνιστώσες, τη θεωρητική ανάλυση, την εκπαιδευτική επεξεργασία και την παρατήρηση και αιτιολόγηση της μάθησης των μαθητών. Το πλαίσιο αυτό μπορεί να αξιοποιηθεί για έρευνα και ανάπτυξη αναλυτικών προγραμμάτων σπουδών. Με βάση το πλαίσιο αυτό, η θεωρητική ανάλυση εμφανίζεται να σχετίζεται με τη γνώση των ερευνητών για την έννοια η οποία είναι υπό μελέτη αλλά και τις γνώσεις τους για τη θεωρία APOS. Η συγκεκριμένη θεωρητική ανάλυση βοηθά στην πρόβλεψη των νοητικών δομών οι οποίες απαιτούνται για τη μάθηση της έννοιας. Για μια συγκεκριμένη μαθηματική έννοια, η θεωρητική ανάλυση ενημερώνει το σχεδιασμό και την εφαρμογή της διδασκαλίας, καθοδηγεί τη συλλογή και ανάλυση των δεδομένων και τον σχεδιασμό και εφαρμογή της διδασκαλίας και με αυτό τον τρόπο οδηγούνται στη διαμόρφωση της αρχικής θεωρητικής ανάλυσης της υπό μελέτη μαθηματικής έννοιας.

Ο Maharaj (2010) χρησιμοποίησε το πλαίσιο της θεωρίας APOS για να διερευνήσει το πώς αντιλαμβάνονται οι φοιτητές την έννοια του ορίου συνάρτησης. Τα ευρήματα της έρευνάς του επιβεβαιώνουν ότι η έννοια του ορίου είναι μια από τις έννοιες στις οποίες οι φοιτητές δυσκολεύονται να αντιληφθούν και σημειώνει ότι είναι πιθανόν λόγω του γεγονότος ότι πολλοί φοιτητές δεν έχουν τις απαραίτητες νοητικές δομές στο επίπεδο των διαδικασιών, των αντικειμένων και των σχημάτων.

Οι Τρεις Κόσμοι του Tall της Διεργασίας – Έννοιας (procept)

Η μακροχρόνια κατασκευή της μαθηματικής γνώσης χρησιμοποιεί τη δύναμη του βιολογικού εγκεφάλου, με τη συμβολή του μέσω της αντίληψης, της παραγωγής μέσω της δράσης και την εσωτερική δύναμη του προβληματισμού για την εκ νέου συναρμολόγηση ιδεών σε χρησιμοποιήσιμες νοητικές δομές. Ο Tall (2004) υπέθεσε ότι η μαθηματική σκέψη εξελίσσεται μέσα από τρεις αλληλένδετους ψυχικούς κόσμους των μαθηματικών, το καθένα με το δικό του ιδιαίτερο τρόπο για την ανάπτυξη πιο εξελιγμένων προσεγγίσεων.

Ο πρώτος κόσμος τον οποίο ονομάζει, Ενσαρκωμένο – Εννοιολογικό, είναι βασισμένος στα αντικείμενα σε ένα εννοιολογικά ενσωματωμένο κόσμο, ο οποίος αντανακλά στις έννοιες της παρατήρησης, της περιγραφής, του ορισμού και της εξαγωγής ιδιοτήτων οι οποίες οικοδομούνται από το νοητικό πείραμα στην Ευκλείδεια απόδειξη. Αναπτύσσεται μέσα από τις αντιλήψεις του ατόμου για τον κόσμο και αποτελείται από τη γνώση του ατόμου για πράγματα που τα οποία αντιλαμβάνεται και αισθάνεται, όχι μόνο στο φυσικό τους περιβάλλον αλλά και στο δικό του νοητικό κόσμο.

Ο δεύτερος κόσμος, τον οποίο ονομάζει διαδικαστικό – συμβολικό κόσμο, συμπιέζει τις δράσεις – σχήματα σε νοητές έννοιες οι οποίες λειτουργούν διττά και ως διαδικασία και ως έννοια. Αρχίζοντας από δράσεις οι οποίες είναι ενσωματωμένες σε έννοιες, με τη χρήση συμβόλων, το άτομο μεταβαίνει εύκολα από τις διαδικασίες (κάνω μαθηματικά) στις έννοιες (σκέφτομαι μαθηματικά).

Ο τρίτος κόσμος, τον οποίο ονομάζει Τυπικό – Αξιωματικό, είναι βασισμένος στις ιδιότητες ενός φορμαλιστικού – αξιωματικού κόσμου ο οποίος εστιάζεται στην οικοδόμηση αξιωματικών συστημάτων βασισμένων σε τυπικούς ορισμούς και συνολοθεωρητικές αποδείξεις. Οι προηγούμενες εμπειρίες του ατόμου επαναφέρονται και λειτουργούν όχι μέσα από γνωστά αντικείμενα εμπειρικά, αλλά με αξιώματα που έχουν διατυπωθεί προσεκτικά για να καθορίσουν τις μαθηματικές δομές διακρίνοντας τις ιδιότητες τους. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τα αξιώματα και τις αποδειχθείσες προτάσεις αποδεικνύονται νέες προτάσεις κ.ο.κ. Έτσι οικοδομείται ο αξιωματικός κόσμος που αποτελεί και το ανώτερο στάδιο της μαθηματικής σκέψης.

Οι δύο πρώτοι κόσμοι κυριαρχούν στην πρωτοβάθμια και τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση αντίστοιχα. Ο αξιωματικός τρόπος σκέψης αρχίζει να διαμορφώνεται στο Λύκειο και ολοκληρώνεται στο Πανεπιστήμιο.

Οι Gray και Tall (2002) παρουσιάζουν την ιδέα ότι υπάρχουν τρεις (ίσως και τέσσερεις) ριζικά διαφορετικοί τύποι αντικειμένων, εκείνα τα οποία προκύπτουν από την εμπειρική αφαίρεση (κατά την έννοια του Piaget) με την οποία έχει ως στόχο τη μελέτη των αντικειμένων και την ανακάλυψη των ιδιοτήτων τους, εκείνα τα οποία απορρέουν από αυτό που ονομάζει ο Piaget ψευδο-εμπειρική αφαίρεση, εστιάζοντας σε δράσεις (όπως το να μάθουν να μετρούν) τις οποίες συμβολίζουμε και συμπιέζουμε νοητικά σε έννοιες (όπως ο αριθμός) και αυτά τα οποία απορρέουν από τη μελέτη των ιδιοτήτων και των λογικών εκπτώσεων οι οποίες προκύπτουν από αυτά που έχουν βρεθεί στην σύγχρονη φορμαλιστική προσέγγιση για τα μαθηματικά. Ο Piaget διατύπωσε επίσης τη θεωρία της αναστοχαστικής αφαίρεσης (η οποία είναι ουσιαστικά μια πιο εξελιγμένη έκδοση της ψευδό-εμπειρικής αφαίρεσης) όπου η έμφαση δίνεται σε δράσεις σε νοητικά αντικείμενα τα οποία είναι ρουτίνας, στη συνέχεια γίνονται αντιληπτά ως διαδικασίες και θεωρούνται ως νοητικά αντικείμενα σε υψηλότερο επίπεδο.

Οι Gray και Tall (1994) υιοθετούν τον όρο διεργασία (process) διαχωρίζοντας τον από τον όρο διαδικασία (procedure) με την έννοια ότι η διεργασία έχει ένα γενικό χαρακτήρα και συγκεκριμένο σκοπό και δεν ασχολείται με την συγκεκριμένη μέθοδο που θα ακολουθηθεί για την επίτευξη του ενώ η διαδικασία αναφέρεται στον συγκεκριμένο αλγόριθμο που θα χρησιμοποιηθεί για την πραγματοποίηση του στόχου μιας διεργασίας.

Όπως και σε άλλες θεωρίες οι Gray & Tall διακρίνουν στα μαθηματικά τη διεργασία, που αναφέρεται στην υλοποίηση ενός συνόλου ενεργειών πάνω σε αντικείμενα, από την έννοια που αφορά τα μαθηματικά αντικείμενα και τις μεταξύ τους σχέσεις. Αυτό που επειχειρούν οι Gray & Tall (1994) είναι μια ερμηνεία του τρόπου με τον οποίο οι διεργασίες μεταβάλλονται σε έννοιες και αντίστροφα. Για την επίτευξη του στόχου αυτού αναδεικνύεται η σημασία του μαθηματικού συμβολισμού. Στην πράξη, το ίδιο σύμβολο εκφράζει άλλοτε μία διεργασία και άλλοτε μία έννοια, δηλαδή με την ίδια μαθηματική έκφραση να δηλώνεται, ταυτόχρονα, μία πράξη αλλά και το αποτέλεσμα της (Gray & Tall, 1994). Για παράδειγμα στην περίπτωση του ορίου, ο συμβολισμός $\lim_{x \to a} f(x)$ εκφράζει ταυτόχρονα τη διεργασία υπολογισμού του αντίστοιχου ορίου αλλά και το αποτέλεσμα του υπολογισμού (Gray & Tall, 1994).

Η διαφορετική ερμηνεία του ίδιου συμβολισμού αποτελεί ισχυρό εργαλείο για τα μαθηματικά αφού επιτυγχάνει να περικλείει στην ίδια έκφραση διαφορετικά νοήματα ενώ αποδεικνύεται ταυτόχρονα και σημαντική πηγή δυσκολιών για τους μαθητές. Οι δεξιοτέχνες της μαθηματικής σκέψης χρησιμοποιούν το συμβολισμό ανάλογα με τις ανάγκες του προβλήματος που αντιμετωπίζουν, άλλοτε ως διεργασίας και άλλοτε ως έννοιας και ακριβώς στο σημείο αυτό έγκειται και η ικανότητα της μαθηματικής σκέψης τους. Ανάλογα με τις μαθηματικές ικανότητές του το άτομο μπορεί με ευελιξία να αναλύει και να ανασυνθέτει το ίδιο αντικείμενο σε διαφορετικές διαδικασίες. Για να εξηγήσουν αυτό το φαινόμενο οι Gray & Tall , δημιούργησαν τον όρο διεργασία – έννοια (procept) από τον συνδυασμό των λέξεων **pro**cess (διεργασία) και con**cept** (έννοια). Σκοπός ήταν να περιγράψουν το μείγμα της διεργασίας και της αντίστοιχης έννοιας οι οποίες χρησιμοποιούν κοινό συμβολισμό. Μια στοιχειώδη διεργασία – έννοια (elementary procept) αποτελείται από τρία συστατικά τη διεργασία (process) που παράγει ένα μαθηματικό αντικείμενο (object), το αντικείμενο και το σύμβολο (symbol) που χρησιμοποιείται για να αποδώσει άλλοτε τη διεργασία και άλλοτε το αντικείμενο. Επειδή το ίδιο αντικείμενο μπορεί να αποδοθεί με διαφορετικούς συμβολισμούς ως διεργασία – έννοια ορίζεται μια συλλογή από στοιχειώδεις διεργασίες – έννοιες που αντιστοιχούν στο ίδιο αντικείμενο. Για παράδειγμα η διεργασία – έννοια του αριθμού 6 μπορεί να είναι η διεργασία αρίθμησης μέχρι το 6 αλλά και διάφορες άλλες διεργασίες όπως $3+3, 4+2, 2+4, 2\cdot 3, 8-2$ κ. ά. Που αποτελούν ισοδύναμες στοιχειώδεις διεργασίες – έννοιες που ανήκουν στην ίδια «κλάση ισοδυναμίας» που καλείται η διεργασία – έννοια του 6 (Gray & Tall, 1994). Ο πλήρης συμβολισμός του ορίου ο οποίος είναι διεργασία - έννοια προκαλεί διαφορετικά νοητικά σχήματα τα οποία οδηγούν σε διαφορετικές αντιλήψεις ή νοητικά μοντέλα τα οποία οικοδομούν οι μαθητές για την έννοια του ορίου. Οι αντιλήψεις αυτές περιλαμβάνουν έννοιες όπως το όριο είναι ένα σύνορο, οι συναρτήσεις δεν μπορούν να πλησιάσουν το όριο τους ή ότι το όριο είναι μια δυναμική προσέγγιση σημείων ή αριθμών τα οποία πλησιάζουν σε ένα οριακό σημείο ή αριθμό.

Μετά από τον ορισμό της διεργασίας έννοιας (procept) οι Gray & Tall (1994) μίλησαν για σκέψη με διεργασίες – έννοιες (proceptual thinking) η οποία ορίζεται ως η ικανότητα του ατόμου να χειρίζεται το συμβολισμό ευέλικτα, άλλοτε ως διαδικασία και άλλοτε ως έννοια, αλλάζοντας με άνεση διαφορετικούς συμβολισμούς για το ίδιο αντικείμενο. Αντίθετα η διαδικαστική σκέψη (procedural thinking) των μαθηματικών αναφέρεται στην υλοποίηση ενός συνόλου ενεργειών πάνω σε αντικείμενα και στο περιορισμό της εστίασης στο συσχετισμό δεδομένων και ζητούμενων σε μια διαδικασία.

Η Θεωρία της Πραγμάτωσης (Reification Theory) – Anna Sfard

Ο Γάλλος μαθηματικός Poincare (1952) έγραψε, προφανώς λόγω απόγνωσης: «Ένα γεγονός πρέπει να μας εκπλήσσει, ή μάλλον να μας είχε καταπλήξει, αν δεν ήμασταν πάρα πολύ εξοικειωμένοι με αυτό. Πως γίνεται να υπάρχουν άνθρωποι που να μην αντιλαμβάνονται τα μαθηματικά; Αν η επιστήμη επικαλείται μόνο τους κανόνες της λογικής, αυτούς που είχαν γίνει δεκτοί από καλοσχηματισμένα μυαλά, πώς συμβαίνει να υπάρχουν τόσοι πολλοί άνθρωποι που να είναι εντελώς αδιαπέραστοι σε αυτούς» (σελ. 49);

Η Sfard (1991), επισημαίνει ότι στα μαθηματικά υπάρχουν πολύ περισσότερα από τους απλούς κανόνες της λογικής. Αν θέλουμε να βάλουμε το δάκτυλο επί τον τύπο των ήλων θα πρέπει να θέσουμε στον εαυτό μας τις βασικές επιστημολογικές ερωτήσεις που αφορούν την φύση της μαθηματικής γνώσης.

Η θεωρία πραγμάτωσης της Sfard (1991) είναι βασισμένη στο δυϊσμό των μαθηματικών εννοιών. Η ιδιαιτερότητα της μαθηματικής σκέψης διερευνάται μέσα από τις επιστημολογικές και τις οντολογικές της δομές. Τα δομικά στοιχεία των μαθηματικών μπορεί να δηλωθούν ως «έννοιες», εάν η αναφορά γίνεται ως προς την τυπική μορφή των μαθηματικών ιδεών. Εάν όμως μελετούνται ως μια θεωρητική δομή του συνόλου των εσωτερικών αναπαραστάσεων της μαθηματικής ιδέας, τότε θα δηλώνονται ως «αντιλήψεις» (Sfard, 1991). Και άλλοι ερευνητές (Piaget, 1970, Henrici, 1974, Dubinski, 1986, Dubinsky & Schwingendorf, 1990b, Sfard, 1987, 1988b, 1991, Harel & Kaput, 1991) έχουν παρατηρήσει μέσα από ερευνητικά δεδομένα αυτό το δυϊσμό στη διαδικασία της μαθηματικής σκέψης. Αρκετές έννοιες αρχικά γίνονται αντιληπτές ως διεργασίες (processes) και στη συνέχεια ως αντικείμενα (objects).

Η Sfard (1991), αναφέρει ότι, οι μαθηματικοί συνήθως μιλούν για ένα συγκεκριμένο σύμπαν το οποίο καταλαμβάνεται από ορισμένα αντικείμενα. Τα αντικείμενα αυτά έχουν συγκεκριμένα χαρακτηριστικά και υποβάλλονται σε συγκεκριμένες διεργασίες οι οποίες διέπονται από καλά ορισμένους κανόνες. Όταν περιγράφουν τις ιδιότητες των συνόλων ή των αριθμών είναι ως να ακούς ένα ερευνητή να μιλά για τα μόρια και τους κρυστάλλους. Είναι πολύ σημαντικό να γνωρίζουμε τους κανόνες οι οποίοι διέπουν μια έννοια και όχι τόσο η φιλοσοφική σκοπιά της έννοιας ως έννοιας. Για παράδειγμα, όταν μελετούμε την έννοια της συνάρτησης, η συνάρτηση μπορεί να οριστεί όχι μόνο ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών, αλλά ως μία συγκεκριμένη διαδικασία υπολογισμών ή ως μέθοδος μετάβασης από ένα σύστημα σε άλλο (Skemp, 1971). Η δομική αντίληψη εννοιών είναι στατική, στιγμιαία και συνολική, ενώ η λειτουργική αντίληψη εννοιών είναι δυναμική, έχει συνέχεια και είναι λεπτομερής. Η διπλή φύση των μαθηματικών δομών παρουσιάζεται όχι μόνο στη λεκτική περιγραφή μαθηματικών εννοιών, αλλά και μέσα από τα διάφορα είδη των συμβολικών αναπαραστάσεων (Sfard, 1991).

Σύμφωνα με τη θεωρία πραγμάτωσης της Sfard (1991) η διαδικασία μάθησης διαμορφώνεται μέσα από τρία στάδια, το στάδιο της *εσωτερίκευσης (interiorization)*, το στάδιο της *συμπύκνωσης (condensation)* και το στάδιο της *πραγμάτωσης (reification)*. Στο στάδιο της εσωτερίκευσης οι μαθητές εξοικειώνονται με την εκτέλεση της διεργασίας η οποία στη συνέχεια θα οδηγήσει σε μια νέα έννοια. Οι διεργασίες είναι πράξεις που λαμβάνουν χώρα σε μαθηματικά αντικείμενα κατώτερου επιπέδου. Στο τέλος όμως ο μαθητής αποκτά τις δεξιότητες εκείνες που του επιτρέπουν να εκτελεί τις διεργασίες αυτές. Το στάδιο της συμπύκνωσης είναι το στάδιο κατά το οποίο μακροσκελής σειρές από πράξεις συμπιέζονται σε πιο διαχειρίσιμες μονάδες. Σε αυτό το στάδιο το άτομο αποκτά δεξιότητες και είναι ικανότερο να μελετά μια διεργασία στο σύνολο της χωρίς να νοιώθει την ανάγκη να μπαίνει στις λεπτομέρειες της. Το στάδιο της συμπύκνωσης διαρκεί όσο μια νέα οντότητα παραμένει συνδεδεμένη σε μια συγκεκριμένη διεργασία. Όταν το άτομο καταστεί ικανό να αντιλαμβάνεται την έννοια ως ένα πλήρες ανεπτυγμένο αντικείμενο τότε μπορούμε να πούμε ότι η διαδικασία έχει πραγματωθεί. Έτσι το στάδιο της πραγμάτωσης ορίζεται ως μια οντολογική μετατόπιση, μια ξαφνική ικανότητα να βλέπει κάτι οικείο κάτω από ένα εντελώς νέο πρίσμα. Στο στάδιο της εσωτερίκευσης αλλά και στο στάδιο της συμπύκνωσης διενεργούνται σταδιακά περισσότερο ποσοτικές παρά ποιοτικές αλλαγές, ενώ η πραγμάτωση είναι ένα στιγμιαίο κβαντικό άλμα, όπου η διεργασία σταθεροποιείται ως αντικείμενο σε μια στατική δομή.

Θεωρητική Γνώση - A. Sierpinska

Ο Boero (1997) και οι συνεργάτες του έχουν εμπνευστή τον ορισμό που έχουν δώσει για την θεωρητική γνώση, από τον χαρακτηρισμό που έδωσε ο Vygotsky (1987) στις επιστημονικές έννοιες τις οποίες διαχώρισε σε έννοιες συγκροτημένες σε εννοιολογικά συστήματα τα οποία εκφράζονται από δηλώσεις ή συμβολικά, καθώς και από αυτές οι οποίες σχηματίζονται στο ανθρώπινο μυαλό, με βάση την συγκεκριμενοποίηση από τις γενικές δηλώσεις. Επίσης έχουν αποδεκτή την άποψη του Vygotsky, ότι η θεωρητική σκέψη δεν αναπτύσσεται αυθόρμητα στα παιδιά ως ένα τελευταίο στάδιο της γνωστικής ανάπτυξης τους, αλλά απαιτεί ειδική καλλιέργεια.

Οι Sierpinska, Nnadozie και Okta (2002), υποστηρίζουν ότι η κοινωνία και ο πολιτισμός δεν είναι ένας παράγοντας που επηρεάζει την ανάπτυξη του ατόμου αλλά είναι ένας παράγοντας με τον οποίο αλληλεπιδρά το άτομο. Η κοινωνία, υποθέτουν, είναι αναδυόμενη μέσα από τις πολλές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των συμμετεχόντων και όχι μια υπεροντότητα η οποία προσδίδει στις ιστορικά αναπτυγμένες μορφές δραστηριοτήτων, όπως υποστηρίζει ο Dayvod (1990) στην διαλεκτική υλιστική φιλοσοφία που ανάπτυξε. Θεωρούν επίσης ότι το κοινωνικό – πολιτικό περιβάλλον έπαιξε ένα σημαντικό ρόλο στην κατανόηση της θεωρητικής σκέψης. Θέλουν να τονίσουν επίσης τη στάση του ατόμου ως θεωρητικού στοχαστή, ανεξάρτητου και κριτικού στην οικοδόμηση της γνώσης, το οποίο του επιτρέπει να υπερπηδήσει τις νοητικές συνήθειες, οι οποίες τον έχουν επηρεάσει, λόγω της ιστορικής ανάπτυξης των κοινωνικών δραστηριοτήτων.

Οι Sierpinska, Nnadozie και Okta (2002), απορρίπτουν την υπόθεση του διαλεκτικού υλισμού η οποία υποστηρίζει ότι όλες οι μορφές γνώσης (συμπεριλαμβανομένης και της θεωρητικής γνώση) είναι μια αναγκαία ιστορική συνέπεια της δουλειάς που γίνεται για την παραγωγή υλικού. Επειδή ο άνθρωπος δεν είναι ένα καθαρά φυσικό ον, αλλά ένα κοινωνικό ον μέλος της ανθρώπινης κοινωνίας, η παραγωγική δραστηριότητα του ανθρώπου έχει ένα οικουμενικό χαρακτήρα, κάτι που απουσιάζει από την παραγωγική δραστηριότητα των ζώων (Davydov 1990, με αναφορά στους Marx και Engels). Για να μπορέσει ο άνθρωπος να τροποποιήσει τη φύση, θα πρέπει να είναι ικανός να αναπαράγει τα φυσικά φαινόμενα. Λόγω του οικουμενικού χαρακτήρα αυτής της αναπαραγωγής αυτό προϋποθέτει την κατανόηση των συνθηκών κάτω από τις οποίες συμβαίνει και οδηγεί στην αναγνώριση, με την έννοια της ανακάλυψης, των νόμων και των μηχανισμών της φύσης. Αυτό θα δεσμεύει τη θεωρητική γνώση.

Οι Sierpinska et al. (2002) υποστηρίζουν ότι η θεωρητική γνώση είναι εφικτό να συμβεί μόνο σε άτομα τα οποία έχουν αποφασίσει να σταματήσουν προσωρινά να δοκιμάζουν να αλλάξουν την φύση και ασχολούνται αντί αυτού με την αμφισβήτηση αυτής της δράσης και των βασικών πεποιθήσεων και παραδοχών. Πιστεύουν ότι στην ανάπτυξη της θεωρητικής γνώσης η γλώσσα έχει μια αυτόνομη υπόσταση ως αντικείμενο δημιουργίας και αντανάκλασης. Για να αντιληφθεί κάποιος μια μαθηματική θεωρία χρειάζεται τόσο τη πρακτική γνώση όσο και τη θεωρητική γνώση. Μέσα από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας υποστηρίζουν ότι κάποιος πρέπει να είναι ικανός χειριστής της πρακτικής γνώσης προκειμένου να είναι ικανός να μπορεί να σκέπτεται θεωρητικά. Η πρακτική γνώση είναι η υποδομή η οποία δίνει υπόσταση στη θεωρητική γνώση και χωρίς αυτή χάνει την επιστημολογική της σημασία. Λόγω αυτού του γεγονότος η πρακτική γνώση είναι ένα επιστημολογικό εμπόδιο, είναι ένα γνωστικό αλλά και πολιτιστικό φαινόμενο το οποίο συναντούμε στη πορεία εξέλιξης συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών, την ίδια ώρα που αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της οικοδόμησης της μαθηματικής γνώσης (Sierpinska, 1990, 1992, 1994). Η Sierpinska (1994) υποστηρίζει ότι η θεωρητική γνώση ασχολείται με την ερμηνεία των εννοιών, σε αντίθεση με την πρακτική γνώση που ασχολείται με την σημασία των ενεργειών.

Οι Sierpinska et al. (2002) μέσα από εμπειρική έρευνα στον τρόπο ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης των μαθητών, έχουν δώσει ένα αξιωματικό ορισμό στην θεωρητική γνώση. Υποστηρίζουν ότι η θεωρητική γνώση δεν υφίσταται ως ξεχωριστή λειτουργία του ανθρώπινου οργανισμού (όπως η όραση ή ο μεταβολισμός). Σε καμία περίπτωση δεν κάνουν προσπάθεια να περιγράψουν μια «ανώτερη πνευματική λειτουργία» της θεωρητικής γνώσης. Θέτουν δε ως αξίωμα ένα συγκεκριμένο θεωρητικό εργαλείο το οποίο θεωρούν χρήσιμο ως μεθοδολογικό εργαλείο ή αναλυτικό μέσο. Ειδικότερα αυτό σημαίνει ότι ο ορισμός της θεωρητικής γνώσης δεν μπορεί να αντικρουστεί με την εμπειρική έρευνα. Από την άλλη και τα αποτελέσματα από οποιαδήποτε εμπειρική έρευνα για τη θεωρητική γνώση πρέπει να σχετίζονται με ένα υποθετικό ορισμό για τη θεωρητική γνώση.

Όπως αναφέρουν οι Sierpinska et al. (2002) η θεωρητική γνώση στοχεύει στη γνώση ενώ η πρακτική γνώση στοχεύει στους λόγους για τους οποίους κάποια πράγματα γίνονται ή κάνουν τα πράγματα να γίνουν. Η θεωρητική γνώση δεν έχει ως στόχο τη λήψη αποφάσεων που αφορούν άμεση φυσική δράση, αλλά την κατανόηση εμπειριών, τον προβληματισμό σχετικά με τα πιθανά αποτελέσματα και όχι την ανάληψη δράσης. Η θεωρητική γνώση έχει ως επίκεντρο την επιστημολογική εγκυρότητα μέσα από την εννοιολογική συνοχή αλλά και την εσωτερική συνοχή των συστημάτων και των συμβολικών αναπαραστάσεων. Έχοντας επίγνωση της απόστασης της θεωρητικής γνώσης από την εμπειρία, η θεωρητική γνώση δεν έχει καμιά αξίωση να επιβεβαιώσει την αλήθεια γύρω από τις εμπειρίες. Η θεωρητική γνώση παράγει προτάσεις οι οποίες αποτελούν υποθετικές δηλώσεις. Είναι πολύ σημαντικό για τη θεωρητική γνώση να κάνει όσο το δυνατό πιο σαφείς υποθέσεις σε αυτές τις αναφορές. Επιπλέον η θεωρητική γνώση ασχολείται όχι μόνο με αυτό που είναι εμφανίζεται ως εύλογο ή ρεαλιστικό, αλλά και με ότι είναι υποθετικά δυνατό. Αυτό οδηγεί στην ανάλυση όλων των λογικά πιθανών υποθέσεων ή των συνεπειών μιας υπόθεσης έστω και αν πρακτικά είναι αδύνατο.

Από την άλλη πλευρά η θεωρητική γνώση λειτουργεί σε δύο επίπεδα. Επιχειρηματολογεί για τις έννοιες αλλά και για την ίδια την επιχειρηματολογία. Σκοπεύει σε μια σαφή διατύπωση της μεθοδολογίας της. Ειδικότερα, ασχολείται με τις συμβολικές αναπαραστάσεις και τις μορφές των γραφικών αναπαραστάσεων καθώς και με τους κανόνες, τις αρχές αλλά και την εγκυρότητα που τις χαρακτηρίζει. Επιδιώκει να έχει σημειώσεις που να μπορούν να εφαρμοστούν για να εκφράσουν ιδέες και σχέσεις σε πολλές γνωστικές περιοχές και όχι μόνο σε ad hoc σύμβολα, διαφορετικών για την επίλυση κάθε συγκεκριμένου προβλήματος. Στον καθορισμό των εννοιών, η θεωρητική γνώση ασχολείται όχι μόνο με την σαφήνεια και την μη – ασάφεια, αλλά ακόμη με τα θέματα της συνάφειας και της ανεξαρτησίας από τις ορισμένες συνθήκες.

Σύμφωνα με τη Sierpinska (2005), η θεωρητική σκέψη αποτελείται από την αναστοχαστική, τη συστημική και την αναλυτική σκέψη.

Η αναστοχαστική σκέψη είναι η σκόπιμη σκέψη η οποία στοχεύει στο να ενισχύσει την σε βάθος κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Η αναστοχαστική σκέψη ερμηνεύεται στην παρούσα έρευνα ως η κατανόηση των διαφορετικών μορφών ορίων (όριο που τείνει σε αριθμό και όριο που τείνει στο άπειρο), όπως περιγράφονται στο αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών, και αναμένεται ότι οι μαθητές/τριες που επιδεικνύουν αναστοχαστική σκέψη έχουν την ικανότητα να συμμετέχουν στην οικοδόμηση νοήματος της έννοιας, το οποίο απαιτεί συνεχείς επεξηγήσεις και αιτιολογήσεις. Η κατάκτηση της αναστοχαστικής σκέψης, σε σχέση με την έννοια του ορίου, είναι αποτέλεσμα αναστοχασμού του ατόμου πάνω σε υφιστάμενες τεχνικές με σκοπό τη γενίκευση σε μία ενιαία θεωρητική βάση. Η δημιουργία μίας ενιαίας θεωρίας στην κατανόηση της έννοιας του ορίου δεν είναι το αποτέλεσμα των υφιστάμενων γνωστικών δομών των μαθητών, αλλά περιλαμβάνει κυρίως το στοιχείο της αναδιοργάνωσης της γνώσης τους, όπως περιγράφεται στη θεωρία των γνωστικών αλλαγών (Merenluoto & Lehtinen, 2004; Vamvakoussi & Vosniadou, 2007).

Η συστημική σκέψη είναι η σκέψη που αναφέρεται σε συστήματα εννοιών. Έτσι το νόημα του ορίου βασίζεται στις σχέσεις μεταξύ διαφόρων εννοιών του ορίου και καθορίζεται με τη ξεκάθαρη διατύπωση του ορισμού και των ιδιοτήτων των ορίων. Η απουσία της ικανότητας για κατανόηση των ιδιοτήτων της έννοιας του ορίου επεξηγεί τις δυσκολίες των μαθητών σε προβλήματα ορίων (Fischbein et al., 1995). Όταν οι μαθητές καλούνται να αποδώσουν το νόημα, για παράδειγμα του ορίου συνάρτησης, σπάνια σκέφτονται τον ορισμό του ορίου και προσπαθούν να ακολουθήσουν μηχανικές διαδικασίες. Συχνά, επίσης, ανακαλούν παραδείγματα και όπως είναι φυσικό αυτό δεν τους επιτρέπει να γενικεύσουν. Οι συνθήκες ενός ορισμού είναι μερικές φορές το αποτέλεσμα μίας διαδικασίας κατηγοριοποίησης. Αυτή η κατηγοριοποίηση είναι συστημική, δηλαδή έχει πολύ ξεκάθαρα διατυπωμένα χαρακτηριστικά. Επομένως οι μαθητές που εμφανίζουν συστημική σκέψη μπορούν να δώσουν σαφείς ορισμούς για την έννοια του ορίου.

Η αναλυτική σκέψη αναφέρεται στην ανάπτυξη ειδικών αναπαραστατικών συστημάτων, όπως συμβόλων, πινάκων και εξειδικευμένης ορολογίας. Οι μαθηματικές έννοιες φαίνεται να αναπτύσσονται ταυτόχρονα με τις μεθόδους αναπαράστασης και τους χειρισμούς των συμβόλων (Sirotic & Zarkis, 2004). Όταν τα σύμβολα μεταφράζονται μέσα από τη σχέση τους με άλλα σύμβολα, τότε η ερμηνεία που τους δίνεται βασίζεται σε συγκεκριμένες και σαφείς συμβάσεις και όχι σε κάποια φυσική ομοιότητα μεταξύ συμβόλων και αντικειμένων. Όπως αναφέρει η Sierpinska κ. .άλ. (2002), η αναλυτική προσέγγιση των συμβόλων είναι απόλυτα σχετική με την κατανόηση της γραμμικής άλγεβρας, διότι η γραμμική άλγεβρα μπορεί να αντιμετωπιστεί ως η μαθηματική γλώσσα όπου το ίδιο πράγμα μπορεί να αποδοθεί με πολλούς και διαφορετικούς τρόπους.

Επίλογος

Σκοπός της έρευνας μας είναι να προτείνουμε ένα θεωρητικό μοντέλο διδασκαλίας εκμάθησης και ανάπτυξης εννοιών της ανάλυσης σε μαθητές λυκείου. Το προτεινόμενο μοντέλο είναι βασισμένο στη μοντέλο ανάπτυξης της θεωρητικής σκέψης που έγινε από τη Sierpinska με σχετικές διαφοροποιήσεις με στόχο τον εμπλουτισμό του από τα χαρακτηριστικά στοιχεία και τις διαδικασίες του τρόπου σκέψης και των διαδικασιών που χρησιμοποιούν οι μαθητές για την κατανόηση πολύπλοκων εννοιών, όπως αναφέρονται σε διάφορες τοπικές θεωρίες των μαθηματικών, όπως η θεωρία APOS, η θεωρία των Tall και των συνεργατών του (2004) και η θεωρία της πραγμάτωσης (Reification Theory) της Sfard (1991).

Στον πίνακα 2.1 συνοψίζονται τα χαρακτηριστικά του θεωρητικού μοντέλου της Sierpinska.

Θεωρητικό Μοντέλο Sierpinska	
Αναλυτική	Στοχεύει στην αναλυτική προσέγγιση συμβόλων και στην ανάπτυξη ειδικών αναπαραστατικών συστημάτων και εξειδικευμένης ορολογίας.
Συστημική	Στοχεύει στη γνώση γύρω από συστήματα εννοιών όπου η σημασία μιας έννοιας είναι βασισμένη πάνω στις σχέσεις της με άλλες έννοιες και όχι με άλλα αντικείμενα ή γεγονότα..
Αναστοχαστική	Στοχεύει στη σκέψη για χάρη της σκέψης. Είναι η σκόπιμη σκέψη η οποία στοχεύει στο να ενισχύσει την σε βάθος κατανόηση των μαθηματικών εννοιών.

Πίνακας 2.1

Στον πίνακα 2.2 συνοψίζονται τα χαρακτηριστικά της θεωρίας APOS.

Θεωρία APOS	
Δράση	Είναι η αντίδραση ενός ατόμου σε κάποιο ερέθισμα όταν το εκλαμβάνει ως εξωτερικό.
Διεργασία	Το άτομο στοχάζεται πάνω σε μία δράση και την εσωτερικεύει, με αποτέλεσμα να αποκτά έλεγχο πάνω της.
Αντικείμενο	Το άτομο στοχάζεται πάνω στις λειτουργίες που εφαρμόζονται σε μία συγκεκριμένη διεργασία ως μία ολότητα, αντιλαμβάνεται ποιοι μετασχηματισμοί μπορούν να ενεργήσουν σε αυτή και καθίσταται ικανό να κατασκευάσει κατάλληλους μετασχηματισμούς και να σκεφτεί πάνω σε αυτή τη διεργασία συνολικά ως ένα αυτόνομο αντικείμενο.
Σχήμα	Είναι οι διεργασίες και τα ήδη κατασκευασμένα αντικείμενα που μπορούν να συνδεθούν με διαφορετικούς τρόπους

Πίνακας 2.2

Στον πίνακα 2.3 συνοψίζονται τα χαρακτηριστικά της θεωρίας των τριών κόσμων του Tall.

Θεωρία των Τριών Κόσμων του Tall	
Ενσαρκωμένος - Εννοιολογικός	Βασίζεται στις ανθρώπινες αντιλήψεις και δράσεις στο πλαίσιο του πραγματικού κόσμου. Ο κόσμος αυτός δεν περιορίζεται μόνο στο πραγματικό, αλλά επεκτείνεται στις αντίστοιχες νοητικές κατασκευές που προκύπτουν από αφαίρεση, πάντα όμως παραμένει συνδεδεμένος με τη δράση και τα αποτελέσματα των αισθήσεων από τα οποία προέρχεται.
Διαδικαστικός – Συμβολικός	Αξιοποιεί το ρόλο των συμβόλων στην αριθμητική, στην άλγεβρα και στη συμβολική ανάλυση συνδυάζοντας τη διπλή τους υπόσταση, ως διαδικασία και ως έννοια (διαδικασιοέννοια-procept). Πρόκειται για τον κόσμο της επεξεργασίας και διαχείρισης συμβόλων.
Τυπικός – Αξιωματικός	Είναι εκείνος ο κόσμος που προσεγγίζει τα μαθηματικά με τον τυπικό τρόπο. Ξεκινάει από πρωταρχικές έννοιες και επιλεγμένα αξιώματα και με λογικά συμπεράσματα οδηγείται στην απόδειξη. Στο κόσμο αυτό οι προτάσεις είναι αληθείς, γιατί μπορούν να αποδειχθούν με βάση τα αξιώματα και τα ήδη αποδειχθέντα θεωρήματα.

Πίνακας 2.3

Τέλος στον πίνακα 2.4 συνοψίζονται τα χαρακτηριστικά της θεωρίας της πραγμάτωσης (Reification theory) της Sfard.

Θεωρία της Πραγμάτωσης Sfard	
Στάδιο της Εσωτερίκευσης	Το άτομο εξοικειώνεται με την εκτέλεση μίας διεργασίας η οποία στη συνέχεια θα οδηγήσει σε μία νέα έννοια
Στάδιο της Συμπύκνωσης	Το άτομο αποκτά δεξιότητες και αντιμετωπίζει μία έννοια στην ολότητα της. Μακροσκελής σειρές από πράξεις συμπιέζονται σε πιο διαχειρίσιμες μονάδες.
Στάδιο της Πραγμάτωσης	Είναι το σημείο εκείνο κατά το οποίο αρχίζει η εσωτερίκευση εννοιών ανωτέρου επιπέδου. Είναι μία οντολογική στροφή όπου το άτομο βλέπει γνωστές έννοιες κάτω από ένα νέο πρίσμα. Διάφορες αναπαραστάσεις μίας έννοιας ενωποιούνται σημασιολογικά και δημιουργείται μία νέα οντότητα η οποία αποσπάται από τη διαδικασία από την οποία έχει παραχθεί και αποκτά δική της οντότητα.

Πίνακας 2.4

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφεται η μεθοδολογία, τα υποκείμενα της εργασίας, τα μέσα συλλογής δεδομένων και η διαδικασία κατασκευής των δοκιμίων. Στη συνέχεια αναλύεται ο σχεδιασμός των συνεντεύξεων και των έργων που κατασκευάστηκαν για τις συνεντεύξεις. Γίνεται επίσης αναφορά των στατιστικών αναλύσεων που πραγματοποιήθηκαν, του τρόπου βαθμολόγησης-διόρθωσης των δοκιμίων και παρουσίαση των αναλύσεων των δεδομένων της πιλοτικής χορήγησης των δοκιμίων. Στην αρχή του κεφαλαίου, παρουσιάζεται το προτεινόμενο μοντέλο ως μια σύνθεση των μέχρι σήμερα ερευνητικών συζητήσεων για την ανάπτυξη της θεωρητικής σκέψης σε σχέση με την ανάπτυξη των ικανοτήτων των μαθητών να αντιληφθούν εννοιολογικά τις έννοιες των ανώτερου επιπέδου μαθηματικών.

Μεθοδολογία

Ο σχεδιασμός ερευνών που αφορούν την εκπαίδευση έχει ως στόχο την ανάπτυξη, τη δομική εφαρμογή και τη διάχυση καινοτόμων πρακτικών, έτσι ώστε να γίνει εφικτό να αλλάξουν οι υφιστάμενες δομές διδασκαλίας και μάθησης να γίνουν πιο λειτουργικές ή αν είναι λειτουργικές να γίνουν άριστες (Kelly, 2003). Ο ανοικτός χαρακτήρας του σχεδιασμού των ερευνών μαζί με τους εσωτερικούς περιορισμούς της ίδιας της έρευνας είναι στη διάθεση των αυξανόμενων αναγκών της κοινωνίας και της εκπαιδευτικής κοινότητας οι οποίοι μπορούν να δώσουν προσθετική αξία στη διαδικασία και να εκμεταλλευτούν του πλεονεκτήματος των νέων τεχνολογιών και της έκρηξης της επιστημονικής γνώσης (Kelly, et al, 2014).
Τόσο ο σχεδιασμός των ερευνών όσο και των πειραματικών διδασκαλιών επιχειρείται μέσα από ένα δυναμικό και καινοτόμο εκπαιδευτικό περιβάλλον

(Brown, 1992). Ανάλογα με την έμφαση που θα έχει μία έρευνα, ένας σχεδιασμός χαρακτηρίζεται ως επαναληπτικός, ως παρεμβατικός, ως επικεντρωμένος σε διαδικασίες, ως συνεργατικός, ως πολυεπίπεδος, ως προσαρμοσμένος ανάλογα με την ωφελιμότητα του ή και ως κατευθυνόμενος από κάποια θεωρία (Cobb et al., 2003). Οι μελέτες σχεδιασμού χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι δίνουν έμφαση στον επαναληπτικό σχεδιασμό της έρευνας με μία αλληλένδετη κυκλική διαδικασία σχεδιασμού – ανάλυσης δεδομένων – επανασχεδιασμού (Cobb et al., 2003). Όπως επισημαίνουν οι Cobb κ. ά. (2003) είναι επικεντρωμένες στη διαδικασία, δηλαδή επιδιώκουν να εντοπίσουν τόσο μεμονωμένα όσο και συνολικά τον τρόπο μάθησης αφού κατανοήσουν διαφορετικά πρότυπα για τη διδασκαλία και τη μάθηση και την επίδραση των εκπαιδευτικών αντικειμένων στη διδασκαλία και τη μάθηση. Λειτουργούν παρεμβατικά στο να ελέγξουν τη θεωρία και την επίδραση των εκπαιδευτικών αντικειμένων σχεδιάζοντας και τροποποιώντας εφαρμογές από την καθημερινότητα. Είναι δομημένες συνεργατικά επειδή στηρίζονται στις γνώσεις και τη συνεργασία των εμπλεκομένων. Συχνά είναι πολυεπίπεδες στο ότι συνδέουν τις πρακτικές της τάξης με εκδηλώσεις ή δομές του σχολείου και της κοινωνίας γενικότερα. Είναι προσανατολισμένες προς την κατεύθυνση της βελτίωσης της αποτελεσματικότητας των εκπαιδευτικών εργαλείων με στόχο την υποστήριξη της διδασκαλίας και της μάθησης. Τέλος είναι καθοδηγούμενες από τη θεωρία με την έννοια ότι δοκιμάζονται μέσα από την κυκλική δομή ανάπτυξης σχεδιασμού – ανάλυσης – επανασχεδιασμού, των διδακτικών δραστηριοτήτων και αντικειμένων.

Ο σχεδιασμός της εργασίας στηρίχθηκε στις αρχές και κατευθυντήριες γραμμές σχεδιασμού και επανασχεδιασμού ερευνών που αφορούν τις επιστήμες της εκπαίδευσης (Shavelson et al., 2003). Βασικά στηρίχθηκε στην κυκλική δομή ανάπτυξη ερευνών όπου αρχικά καθορίζονται τα ερευνητικά ερωτήματα και γίνεται η ανασκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας, Στη συνέχεια σχεδιάζεται και εκτελείται η παρεμβατική διδασκαλία. Μετά την αξιολόγηση της και την ανάλυση των αποτελεσμάτων της πρώτης παρέμβασης επανασχεδιάζεται η έρευνα και ακολουθεί δεύτερη παρέμβαση, νέα αξιολόγηση και ούτω καθεξής. Ο Frechtling (1998) ονομάζει αυτή την ερευνητική μεθοδολογία ως «Πειράματα Σχεδιασμού» επειδή ο στόχος της έρευνας είναι τα υποκείμενα της ίδιας της έρευνας, των οποίων ερευνάται ο τρόπος σκέψης τους, και με βάση τις ανάγκες τους, θα πρέπει να αποκαλυφθούν τα ερευνητικά αντικείμενα μέσα από μία διαδικασία που περιλαμβάνει μια σειρά από επαναλαμβανόμενους κύκλους δοκιμών και αναθεωρήσεων. Στο σχεδιασμό της έρευνας, η θεωρία λειτουργεί σε δύο διαφορετικές κατευθύνσεις, προς την κατεύθυνση της θεωρίας της μάθησης όπως την θεωρεί ο ερευνητής και η κατεύθυνση της παραγωγής της θεωρίας μέσα από τη διαδικασία του σχεδιασμού της έρευνας (Kelly, et al, 2014).

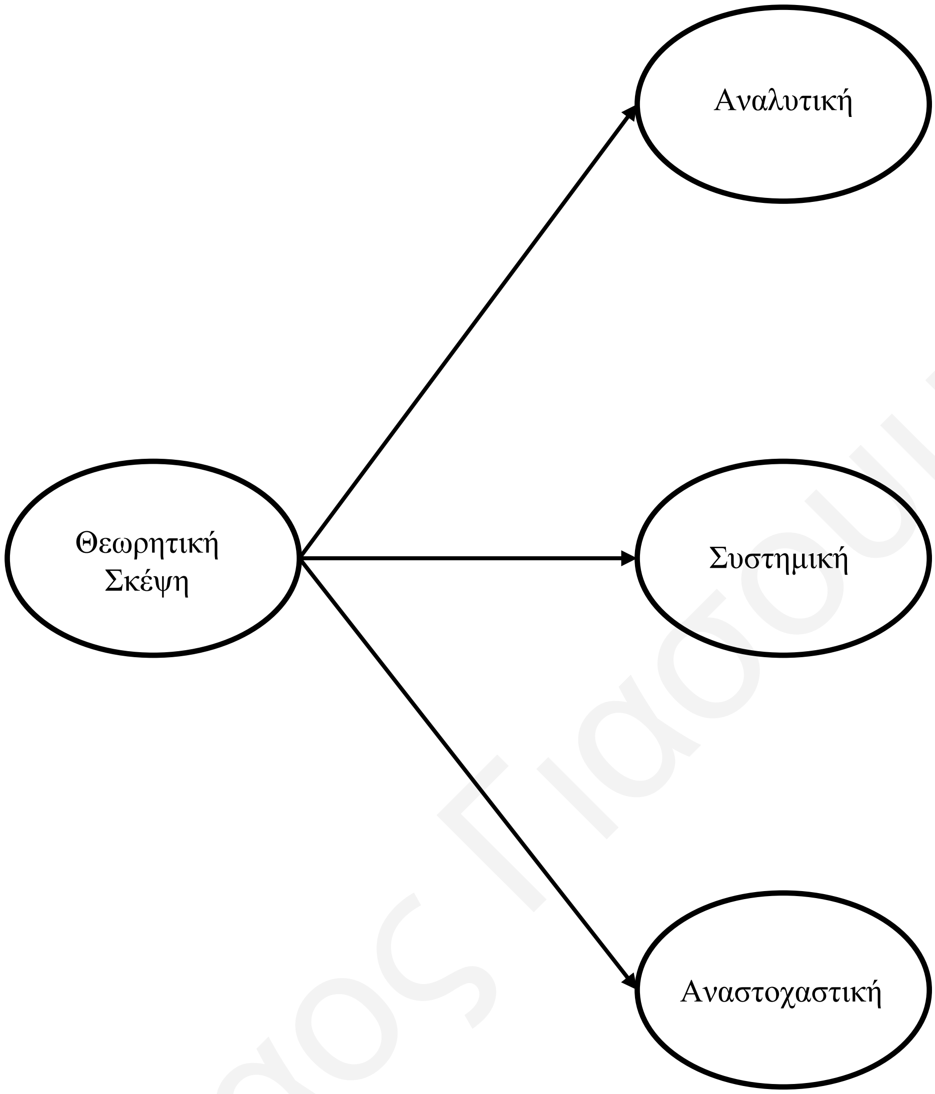
Η αξιολόγηση είναι ένα βασικό σημείο συζήτησης σε έρευνες αυτού του τύπου (Lobato, 2014; Cobb & Gravemeijer, 2014; Rasmussen & Stephan, 2014; Lesh, Kelly, & Yoon, 2014). Η αξιολόγηση δεν απευθύνεται σε μία αθροιστική έννοια της μάθησης, αλλά για να δείξει τις επιπτώσεις στη δεδομένη στιγμή (Bannan - Ritland, 2003). Η Lesh και οι συνεργάτες της, υποστηρίζουν για δεκαετίες ότι η αξιολόγηση πρέπει να επιστρέφει πίσω στο μαθητή την ευθύνη για να μπορεί να τεκμηριωθεί η ανάπτυξη ενός προγράμματος και να βρεθεί η χρυσή τομή της δομής του προγράμματος (Lesh & Lamon, 1992; Lesh et al. 2000).

Προτεινόμενο Μοντέλο Θεωρητικής Σκέψης

Για τη διεκπεραίωση της έρευνας έγινε ενδελεχής ανασκόπηση της βιβλιογραφίας με ιδιαίτερη αναφορά στις θεωρίες μάθησης των μαθηματικών εννοιών. Στην ανασκόπηση της βιβλιογραφίας έγινε ιδιαίτερη αναφορά στα θεωρητικά μοντέλα, όπως αυτά διαμορφώνονται τόσο από τα ερευνητικά αποτελέσματα στο τομέα της μαθηματικής παιδείας όσο και από τη θεωρητική και φιλοσοφική προσέγγιση σχετικά με την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης (Sierpinska et al., 2002; Tall, 2004; Dubinsky et al, 2001; Sfard, 1991). Στα δεδομένα αυτά έχει βασιστεί η δομή της έρευνας και το προτεινόμενο μοντέλο θεωρητικής σκέψης που πιθανόν να συμβάλει στην κατανόηση της έννοιας του ορίου. Στηρίζεται στο μοντέλο θεωρητικής σκέψης της Sierpinska et al. (2002) με την προσαρμογή του στην έννοια του ορίου και τη διαφοροποίηση των λειτουργιών-στοιχείων της αναλυτικής, συστημικής και αναστοχαστικής σκέψης που περιγράφονται από τη Sierpinska και τους συνεργάτες της (2002).

Βασικός στόχος της έρευνας ήταν η παρουσίαση ενός μοντέλου διδασκαλίας, εκμάθησης και ανάπτυξης εννοιών της ανάλυσης σε μαθητές του λυκείου. Το προτεινόμενο μοντέλο αποτελεί μια σύνθεση των σχετικών θεωριών που κατά καιρούς έχουν προταθεί από διάφορους ερευνητές (Ferrini-Mundy & Lauten 1993; Tall 1992; Cornu, 1991; Artique, 2000, 2003) και στηρίζεται, όπως έχει αναφερθεί, στην ορολογία και περιγραφή που έγινε από τη Sierpinska. Η ανάπτυξη της θεωρητικής σκέψης από την Sierpinska δίνει τη δυνατότητα επέκτασης των διαδικασιών που προτείνει και με σχετικές διαφοροποιήσεις είναι δυνατό να αποτελεί ένα συνοπτικό, ευέλικτο και εύκολα εφαρμόσιμο μοντέλο διδασκαλίας. Ταυτόχρονα αποτελεί και ένα μέτρο γνωριμίας με τις δυσκολίες των μαθητών που συναντούν στη διδασκαλία εννοιών της Ανάλυσης με στόχο, φυσικά, τη δημιουργία κατάλληλων διδακτικών προσεγγίσεων. Η διαφοροποίηση του θεωρητικού τρόπου σκέψης της Sierpinska έγινε με στόχο να εμπλουτιστεί το μοντέλο με τα χαρακτηριστικά του τρόπου σκέψης και των διαδικασιών που χρησιμοποιούν οι μαθητές για την κατανόηση πολύπλοκων εννοιών, όπως αναφέρονται σε διάφορες τοπικές θεωρίες των μαθηματικών, όπως η θεωρία APOS, η θεωρία των Tall και των συνεργατών του (2004), η θεωρία της εννοιολογικής αλλαγής (Vosniadou, & Vamvakoussi, 2004) και η θεωρία της πραγμάτωσης (Reification Theory) της Sfard (1991).

Το προτεινόμενο μοντέλο έχει εμπλουτιστεί με την εισαγωγή της τεχνολογίας ως ένα μέσο προσέγγισης της αφηρημένης σκέψης, που είναι απαραίτητη για την εννοιολογική κατανόηση της έννοιας του ορίου. Η ενσωμάτωση της σύγχρονης τεχνολογίας (υπολογιστές και tablets) προσδίδουν την δυναμική διάσταση της διδασκαλίας και μέσω της δυναμικής διάστασης εικάζεται ότι είναι πιο εύκολο να οδηγηθεί ο μαθητής στην τυπική, αφηρημένη έννοια του ορίου. Ταυτόχρονα, το μοντέλο που προτείνεται είναι ευέλικτο ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για άλλες έννοιες των μαθηματικών και ειδικότερα της Ανάλυσης οι οποίες στηρίζονται στη θεωρητική προσέγγιση της διδασκαλίας του ορίου. Το μοντέλο παρουσιάζεται στο διάγραμμα 3.1.



Διάγραμμα 3.1 Το Προτεινόμενο Μοντέλο Ανάπτυξης της Θεωρητικής Σκέψης

Ο παράγοντας Αναλυτική Σκέψη, σύμφωνα με την Sierpinska (2002) στοχεύει στην αναλυτική προσέγιση συμβόλων και στην ανάπτυξη ειδικών αναπαραστατικών συστημάτων. Αντίστοιχα η Sfard (1991) στο στάδιο της εσωτερίκευσης υποστηρίζει ότι το άτομο εξοικειώνεται με την εκτέλεση της διεργασίας η οποία στη συνέχεια θα οδηγήσει σε μία νέα έννοια. Ο Dubinsky και οι συνεργάτες του (1991) όταν αναφέρονται στη δράση ως ένα από τα στάδια κατανόησης μαθηματικών εννοιών σημειώνουν ότι είναι η πρώτη αντίδραση του ατόμου σε ένα ερέθισμα ως να είναι μία φυσική αντίδραση ή η ανάκληση εννοιών. Ο Tall (2004) ο οποίος υπέθεσε ότι η μαθηματική σκέψη εξελίσσεται μέσα από τρεις αλληλένδετους ψυχικούς κόσμους, στο πρώτο κόσμο τον οποίο ονομάζει Ενσαρκωμένο – Εννοιολογικό, αναφέρει ότι αυτός βασίζεται στις ανθρώπινες αντιλήψεις και δράσεις στο πλαίσιο του πραγματικού κόσμου.

Ο παράγοντας Συστημική Σκέψη, συνδέεται με τον ομώνυμο παράγοντα όπως ορίζεται στο μοντέλο ανάπτυξης της θεωρητικής σκέψης της Sierpinska (2002), όπου μία έννοια είναι βασισμένη πάνω στις σχέσεις της με άλλες έννοιες και όχι πάνω στις σχέσεις της με άλλα αντικείμενα ή γεγονότα. Η Sfard (1991) από την δική της σκοπιά αναφέρεται στο στάδιο της συμπύκνωσης ως το στάδιο κατά το οποίο μακροσκελής σειρές από πράξεις συμπιέζονται σε πιο διαχειρίσιμες μονάδες. Σύμφωνα με τον Tall (2004) ο Διαδικαστικός – Συμβολικός κόσμος είναι ο κόσμος της επεξεργασίας και διαχείρισης συμβόλων. Βασικά αξιοποιείται ο ρόλος των συμβόλων στην Αριθμητική, στην Άλγεβρα και την συμβολική Ανάλυση συνδυάζοντας τη διπλή τους υπόσταση, ως διαδικασία και ως έννοια (procept). Η θεωρία APOS των Dubinsky κ. αλ. (1991), αναφέρεται στη διεργασία ως την διαδικασία κατά την οποία το άτομο στοχάζεται πάνω σε μία δράση την οποία εσωτερικεύει και αποκτά έλεγχο πάνω της.

Τέλος ο παράγοντας Αναστοχαστική Σκέψη συνδέεται άμεσα με τον ομώνυμο παράγοντα του μοντέλου της Sierpinska (2002), ο οποίος στοχεύει στη σκέψη για χάρη της σκέψης. Είναι η σκόπιμη σκέψη η οποία στοχεύει στο να ενισχύσει στην σε βάθος κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Ο Tall (2004) στον Τυπικό – Αξιωματικό κόσμο στην προσέγγιση των μαθηματικών με ένα τυπικό τρόπο, ξεκινάει από πρωταρχικές έννοιες και επιλεγμένα αξιώματα και με λογικά συμπεράσματα οδηγείται στην απόδειξη. Ο Dubinsky (1991), αναφέρει ότι όταν το άτομο στοχάζεται πάνω στις λειτουργίες οι οποίες εφαρμόζονται σε μία συγκεκριμένη διεργασία ως μία ολότητα, αντιλαμβάνεται ποιοι μετασχηματισμοί μπορούν να ενεργήσουν σε αυτή και καθίσταται ικανό να κατασκευάσει κατάλληλους μετασχηματισμούς και να σκεφτεί πάνω σε αυτή τη διεργασία συνολικά ως ένα αυτόνομο αντικείμενο. Το στάδιο της πραγμάτωσης, όπως αναφέρει η Sfard (1991) στη ομώνυμη θεωρία, είναι το σημείο εκείνο κατά το οποίο αρχίζει η εσωτερίκευση εννοιών ανωτέρου επιπέδου. Είναι μία οντολογική στροφή όπου το άτομο βλέπει γνωστές έννοιες κάτω από ένα νέο πρίσμα. Διάφορες αναπαραστάσεις μίας έννοιας ενωποιούνται σημασιολογικά και δημιουργείται μία νέα οντότητα η οποία αποσπάται από τη διαδικασία από την οποία έχει παραχθεί.

Διαδικασία

Η έρευνα αυτή πραγματοποιήθηκε σε πέντε φάσεις. Η πρώτη φάση αφορά στη μελέτη της σχετικής βιβλιογραφίας και στην κατασκευή των εργαλείων μέτρησης με βάση τις σχετικές έρευνες καθώς και στο σχεδιασμό του παρεμβατικού προγράμματος διδασκαλίας της έννοιας του ορίου.

Στη δεύτερη φάση της εργασίας οργανώθηκε το πρώτο παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας. Ταυτόχρονα έγινε η χορήγηση των δοκιμίων μέτρησης. Στην φάση αυτή έλαβαν μέρος δύο ομάδες μαθητών από τρεις διαφορετικές τάξεις. Η μια τάξη ήταν η πειραματική ομάδα και οι άλλες δύο αποτελούν την ομάδα ελέγχου. Στην πειραματική ομάδα συμμετείχαν 15 υποκείμενα και στην ομάδα ελέγχου 37. Όλοι οι μαθητές φοιτούσαν στη Β′ Λυκείου και παρακολουθούσαν μαθηματικά κατεύθυνσης. Στην πειραματική ομάδα χρησιμοποιήσαμε κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας μαθηματικά εφαρμογίδια, ενώ στην ομάδα ελέγχου η διδασκαλία των ίδιων εννοιών έγινε με παραδοσιακή διδασκαλία. Συγκεκριμένα τόσο στην πειραματική ομάδα όσο και στην ομάδα ελέγχου χρησιμοποιήθηκαν οι ίδιες δραστηριότητες με τη μόνη διαφορά ότι οι δραστηριότητες στην ομάδα ελέγχου ήταν κατάλληλα προσαρμοσμένες σε περιβάλλον παραδοσιακής διδασκαλίας.

Αρχικά χορηγήθηκε το αρχικό δοκίμιο αξιολόγησης (παράρτημα Α) πριν από την παρεμβατική διδασκαλία. Στη συνέχεια έγινε η παρεμβατική διδασκαλία για δέκα μαθήματα των 45 λεπτών. Στο τέλος της παρεμβατικής διδασκαλίας χορηγήθηκε το τελικό δοκίμιο αξιολόγησης (παράρτημα Α), το οποίο ήταν το ίδιο με το αρχικό. Μετά τη χορήγηση ακολούθησε η διόρθωση των δοκιμίων αξιολόγησης.

Στη συνέχεια ακολούθησαν η καταχώρηση των δεδομένων και οι κατάλληλες στατιστικές αναλύσεις των ποσοτικών δεδομένων.

Στην τρίτη φάση οργανώθηκε το δεύτερο παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας. Σε αυτή την φάση έλαβαν μέρος συνολικά 225 μαθητές διαφορετικοί από τα υποκείμενα της πρώτης φάσης. Οι 35 μαθητές, οι οποίοι προέρχονταν από δύο τμήματα του ίδιου σχολείου, αποτελούσαν την πειραματική ομάδα και οι 190 μαθητές, οι οποίοι προέρχονταν από 13 τμήματα από διαφορετικά σχολεία , την ομάδα ελέγχου. Τα δοκίμια αξιολόγησης που χορηγήθηκαν στην δεύτερη φάση ήταν τα ίδια με αυτά που χρησιμοποιήθηκαν στην πρώτη φάση, όπως και οι δραστηριότητες που χρησιμοποιήθηκαν στο παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας στην πειραματική ομάδα. Στην πειραματική ομάδα χρησιμοποιήσαμε κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας μαθηματικά εφαρμογίδια. Στην ομάδα ελέγχου η διδασκαλία των ίδιων εννοιών έγινε με παραδοσιακή διδασκαλία, με την διαφορά ότι αυτή τη φορά δεν χρησιμοποιήθηκαν οι ίδιες δραστηριότητες μα αυτές της πειραματικής ομάδας, όπως έγινε στην δεύτερη φάση της έρευνας.

Αρχικά χορηγήθηκε το αρχικό δοκίμιο αξιολόγησης (παράρτημα Α) πριν από την παρεμβατική διδασκαλία. Στη συνέχεια έγινε η παρεμβατική διδασκαλία για δέκα μαθήματα των 45 λεπτών. Στο τέλος της παρεμβατικής διδασκαλίας χορηγήθηκε το τελικό δοκίμιο αξιολόγησης (παράρτημα Α). Μετά τη χορήγηση ακολούθησε η διόρθωση των δοκιμίων αξιολόγησης. Στη συνέχεια ακολούθησαν η καταχώρηση των δεδομένων και οι κατάλληλες στατιστικές αναλύσεις των ποσοτικών δεδομένων.

Στην τέταρτη φάση της εργασίας οργανώθηκε το τρίτο παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας με βάση τα αποτελέσματα και τις παρατηρήσεις από το παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας της τρίτης φάσης διεξαγωγής της έρευνας αλλά και τα αποτελέσματα του δοκιμίου αξιολόγησης. Οι δραστηριότητες του τρίτου παρεμβατικού προγράμματος διδασκαλίας ήταν διαφορετικές από αυτές που χρησιμοποιήθηκαν στις δύο προηγούμενες φάσεις. Στη φάση αυτή συμμετείχαν 42 νέοι μαθητές από δύο τμήματα του ιδίου σχολείου και αποτέλεσαν την νέα πειραματική ομάδα. Στον επανασχεδιασμό του παρεμβατικού έγινε προσπάθεια να προσεγγιστεί αρχικά η έννοια του ορίου μέσα από την εισαγωγή στις άπειρες διαδικασίες. Η παρέμβαση περιορίστηκε στη μελέτη του ορίου συνάρτησης $f(x)$ όταν το x τείνει σε αριθμό. Στο δοκίμιο αξιολόγησης το οποίο χορηγήθηκε πριν από το παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας (παράρτημα Γ) διατηρήθηκε ο βασικός κορμός των έργων που χρησιμοποιήθηκαν στο δοκίμιο αξιολόγησης το οποίο χορηγήθηκε στις δύο προηγούμενες φάσεις και προστέθηκαν νέα έργα με βάση την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων. Στο δοκίμιο αξιολόγησης το οποίο χορηγήθηκε μετά το τέλος του παρεμβατικού προγράμματος διδασκαλίας (παράρτημα Ε) έγιναν μερικές αλλαγές. Όλες οι αλλαγές που έγιναν τόσο στο παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας όσο και στο δοκίμιο αξιολόγησης αναλύονται πιο κάτω στην περιγραφή του παρεμβατικού προγράμματος διδασκαλίας και των εργαλείων μέτρησης. Η παρεμβατική διδασκαλία αποτελείτο από επτά μαθήματα των 45 λεπτών. Στο τέλος της παρέμβασης χορηγήθηκε το δοκίμιο αξιολόγησης. Μετά τη χορήγηση ακολούθησε η διόρθωση των δοκιμίων αξιολόγησης. Στη συνέχεια ακολούθησαν η καταχώρηση των δεδομένων και οι κατάλληλες στατιστικές αναλύσεις των ποσοτικών δεδομένων.

Στη φάση αυτή έγινε και η επιλογή των υποκειμένων που θα συμμετείχαν στις κλινικές συνεντεύξεις. Επιλέγηκαν 8 συνολικά υποκείμενα και από τις τρεις κατηγορίες υποκειμένων που προέκυψαν από την προκαταρκτική ανάλυση των δεδομένων. Τα υποκείμενα επιλέχθηκαν με βάση τις απαντήσεις τους που έδωσαν στο τελικό δοκίμιο αξιολόγησης της έρευνας. Με βάση αυτές τις απαντήσεις δομήθηκαν και οι κλινικές συνεντεύξεις. Οι συνεντεύξεις είχα διάρκεια περίπου 20 λεπτών για κάθε υποκείμενο. Τα ερωτήματα στηρίζονται στα σημεία που επισημάνθηκα μέσα από την ποιοτική αξιολόγηση των ερωτηματολογίων του κάθε υποκειμένου ξεχωριστά. Στόχος ήταν να επεξηγήσουν τα υποκείμενα την απάντηση που έδωσαν σε συγκεκριμένα έργα του δοκιμίου, αλλά και να επεξηγήσουν τον τρόπο με τον οποίο σκέφτηκαν να καταλήξουν στην απάντηση τους σε αυτά τα έργα του δοκιμίου, τα οποία κρίναμε ότι ήθελαν περαιτέρω διερεύνησης.

Τέλος στην πέμπτη και τελευταία φάση πραγματοποιήθηκε η τελική ανάλυση των δεδομένων που περισυλλέγησαν από τα 52 υποκείμενα που συμμετείχαν στη δεύτερη φάση διεξαγωγής της έρευνας, τα 225 υποκείμενα που συμμετείχαν στην τρίτη φάση διεξαγωγής της έρευνας και τα 42 υποκείμενα που συμμετείχαν στην τέταρτη φάση διεξαγωγής της έρευνας και η εξαγωγή συμπερασμάτων.

Κύκλοι Έρευνας

Η έρευνα αυτή στηρίχθηκε και σχεδιάστηκε με βάση την κυκλική δομή ανάπτυξης ερευνών. Συνολικά σχεδιάστηκαν τρεις ερευνητικοί κύκλοι.

Στον πρώτο κύκλο της έρευνας περιλαμβάνονται οι δύο πρώτες φάσεις πραγματοποίησης της εργασίας. Μετά από την μελέτη της σχετικής βιβλιογραφίας κατασκευάστηκε το δοκίμιο αξιολόγησης και σχεδιάστηκε και οργανώθηκε το παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας. Στην συνέχεια χορηγήθηκε το δοκίμιο αξιολόγησης και πραγματοποιήθηκε το παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας. Μετά το τέλος του παρεμβατικού προγράμματος διδασκαλίας χορηγήθηκε εκ νέου το δοκίμιο αξιολόγησης. Με το τέλος της δεύτερης χορήγησης του δοκιμίου αξιολόγηση της έρευνας πραγματοποιήθηκε επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση και ελέγχθηκε η εγκυρότητα και αξιοπιστία του προτεινόμενου μοντέλου.

Στον δεύτερο κύκλο περιλαμβάνεται η τρίτη φάση διεξαγωγής της έρευνας. Χορηγήθηκε το ίδιο δοκίμιο αξιολόγησης της έρευνας το οποίο χρησιμοποιήθηκε στο πρώτο κύκλο διεξαγωγής της έρευνας, αλλά σε μεγαλύτερο πληθυσμό μαθητών (διαφορετικό από τον πληθυσμό του πρώτου κύκλου). Το δοκίμιο χορηγήθηκε πριν από και μετά το παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας. Στο παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας χρησιμοποιήθηκαν τα ίδια έργα τα οποία χρησιμοποιήθηκαν και στον πρώτο κύκλο, με τη διαφορά ότι επανασχεδιάστηκε η μέθοδος της παρέμβασης. Στη συνέχεια έγινε επανέλεγχος της εγκυρότητας και αξιοπιστίας του μοντέλου θεωρητικής σκέψης για την έννοια του ορίου συνάρτησης. Ελέγχθηκε ο ρόλος της σύγχρονης τεχνολογίας στην ανάπτυξη της έννοιας του ορίου συνάρτησης και η αλληλεπίδραση της τεχνολογίας στη θεωρητική σκέψη που πρέπει να αναπτύξουν οι μαθητές ώστε να κατανοήσουν την έννοια του ορίου.

Τέλος στον τρίτο κύκλο διεξαγωγής της έρευνας έγινε επανασχεδιασμός τόσο του δοκιμίου αξιολόγησης της έρευνας όσο και του παρεμβατικού προγράμματος διδασκαλίας, όπως περιγράφονται στην τέταρτη φάση διεξαγωγής της έρευνας. Χορηγήθηκε δοκίμιο αξιολόγησης πριν από και μετά την παρεμβατική διδασκαλία, ακολούθησαν οι κατάλληλες στατιστικές αναλύσεις και με βάση τα αποτελέσματα των στατιστικών αναλύσεων και την κατηγοριοποίηση των μαθητών από την ανάλυση latent class, που πραγματοποιήθηκε στον δεύτερο κύκλο διεξαγωγής της έρευνας, οργανώθηκαν κλινικές συνεντεύξεις των υποκειμένων και έγινε ανάλυση των αποτελεσμάτων.

Παρεμβατικό Πρόγραμμα Διδασκαλίας

Υφιστάμενο Πρόγραμμα Διδασκαλίας

Οι μαθητές της Β′ Λυκείου οι οποίοι παρακολουθούν μαθηματικά κατεύθυνσης, με βάση το αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών, διδάσκονται την έννοια του ορίου συνάρτησης, αφού έχει προηγηθεί η διδασκαλία της έννοιας της πραγματικής συνάρτησης.

Αρχικά, οι μαθητές διδάσκονται την έννοια του ορίου συνάρτησης για $x \to +\infty$ ή $x \to -\infty$. Γίνεται διδασκαλία για υπολογισμό του ορίου συνάρτησης, όταν το $x \to +\infty$ ή όταν το $x \to -\infty$. Η διδασκαλία αυτή γίνεται με τη συμπλήρωση πίνακα τιμών της συνάρτησης ή από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Στη συνέχεια, οι μαθητές εφαρμόζουν σε απλές συναρτήσεις τον αυστηρό μαθηματικό ορισμό του ορίου για συνάρτηση $f/\ [\beta, +\infty)$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \alpha \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0\ \exists\, M \epsilon\, \mathbb{R}^+ :\ \forall x > M \;\Rightarrow\; |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

Δηλαδή, όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f πλησιάζουν όσο θέλουμε μια τιμή $\alpha \in \mathbb{R}$, καθώς οι τιμές του x γίνονται μεγαλύτερες μιας κατάλληλης τιμής $M \epsilon\, \mathbb{R}^+$, τότε λέμε ότι το όριο της f είναι το α, όταν το x τείνει στο $+\infty$ και γράφουμε: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \alpha$. Στη φάση αυτή οι μαθητές οδηγούνται σε μια διαισθητική σύλληψη της έννοιας του ορίου μέσα από παραδείγματα. Η χρήση γραφικών παραστάσεων είναι απαραίτητη σε όλες τις περιπτώσεις.

Η διδασκαλία των ιδιοτήτων των ορίων, ακολουθεί τον ορισμό του ορίου, και με βάση τις ιδιότητες των ορίων οι μαθητές διατυπώνουν και εφαρμόζουν τις ιδιότητες από τη μια και από την άλλη επιλύουν ασκήσεις και προβλήματα στα οποία χρησιμοποιούν τις ιδιότητες των ορίων. Παράλληλα, ζητείται από τους μαθητές να διακρίνουν πότε μια πράξη μεταξύ των συμβόλων $+\infty, -\infty$ και πραγματικών αριθμών ονομάζεται «επιτρεπτή» και πότε «μη επιτρεπτή» και οι μαθητές εφαρμόζουν κατάλληλες τεχνικές ώστε να «άρουν» απροσδιοριστίες. Τέλος, οι μαθητές μελετούν το όριο συνάρτησης, όταν το $x \to \xi, \xi \epsilon \mathbb{R}$. Συγκεκριμένα, ορίζουν την έννοια του «πλευρικού ορίου» συνάρτησης για $x \to \xi^{+}$ και $x \to \xi^{-}, \xi \epsilon \mathbb{R}$ και υπολογίζουν πλευρικά όρια συναρτήσεων με χρήση πίνακα τιμών, γραφικών παραστάσεων και με τη χρήση των ιδιοτήτων των ορίων. Αναγνωρίζουν κατά πόσο μια συνάρτηση για $x \to \xi, \xi \epsilon \mathbb{R}$ και το υπολογίζουν. Οι μαθητές αναγνωρίζουν, επίσης, τις περιπτώσεις στις οποίες:

- υπάρχει το $\lim_{x \to \xi} f(x)$ και είναι πραγματικός αριθμός
- υπάρχει το $\lim_{x \to \xi} f(x)$ και είναι $+\infty$ ή $-\infty$
- δεν υπάρχει το $\lim_{x \to \xi} f(x)$

Για τις πολυωνυμικές συναρτήσεις οι μαθητές διδάσκονται ότι ισχύει $\lim_{x \to \xi} f(x) = f(\xi)$. Τέλος ζητείται από τους μαθητές να αποδεικνύουν και να εφαρμόζουν ότι $\lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$.

Παρεμβατικό Πρόγραμμα Διδασκαλίας

Πρώτος Κύκλος Διεξαγωγής της Έρευνας

Το πρώτο παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας εφαρμόστηκε μόνο στην πειραματική ομάδα κατά την δεύτερη φάση διεξαγωγής της έρευνας και σχεδιάστηκε με βάση το προτεινόμενο μοντέλο θεωρητικής σκέψης. Για το σκοπό αυτό, γίνεται στη συνέχεια συχνή αναφορά των δραστηριοτήτων στα ουσιαστικά στοιχεία του προτεινόμενου μοντέλου. Στην ομάδα ελέγχου δόθηκαν τα ίδια φύλλα εργασίας τα οποία είχα δοθεί και στην πειραματική ομάδα, αλλά προσαρμοσμένα έτσι ώστε να μπορούν να απαντηθούν χωρίς να χρειάζεται η χρήση της τεχνολογίας.

Οι μαθητές της πειραματικής ομάδας δούλευαν ο καθένας στο δικό του ηλεκτρονικό υπολογιστή και μπορούσαν να συνεργαστούν και με άλλους συμμαθητές τους. Ακολουθούσαν τις οδηγίες των δραστηριοτήτων των φύλλων εργασίας και ο διδάσκων επιτηρούσε τη διαδικασία και παρενέβαινε όταν το έκρινε σκόπιμο ή όταν οι μαθητές ζητούσαν διευκρινίσεις. Οι παρεμβάσεις γίνονταν σε ατομικό επίπεδο ή αν κρινόταν σκόπιμο στην ολομέλεια της τάξης. Στο τέλος κάθε δραστηριότητας συζητούνταν τα αποτελέσματα και οι παρατηρήσεις των μαθητών στην ολομέλεια της τάξης.

Οι μαθητές αρχικά είχαν διδαχθεί το όριο, όταν η μεταβλητή τείνει σε πραγματικό αριθμό και τις ιδιότητες των ορίων και στη συνέχεια το όριο συνάρτησης, όταν η μεταβλητή τείνει στο άπειρο. Η όλη εργασία των μαθητών της πειραματικής ομάδας έγινε με βάση τη χρήση του λογισμικού, ώστε να φανεί η συμβολή της δυναμικής προσέγγισης στην ανάπτυξη της θεωρητικής σκέψης.

Συγκεκριμένα, το πρώτο μάθημα περιλάμβανε δύο δραστηριότητες οι οποίες στόχο είχαν την σε βάθος κατανόηση της έννοιας του ορίου τόσο με τη χρήση γραφικών παραστάσεων όσο και με τη χρήση πίνακα τιμών σε συνδυασμό με τη γραφική παράσταση. Με τη χρήση εφαρμογιδίου διερεύνησαν το όριο συνάρτησης, όταν η τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής τείνει να γίνει ίση με συγκεκριμένο αριθμό. Μελέτησαν τη συμπεριφορά της γραφικής παράστασης συνάρτησης, όταν η τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής τείνει να γίνει ίση με μια συγκεκριμένη τιμή x_0, η οποία ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, και όταν η τιμή x_0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της. Στη συνέχεια μελέτησαν τη συμπεριφορά της ίδιας συνάρτησης στο x_0 με τη βοήθεια και του αντίστοιχου πίνακα τιμών.

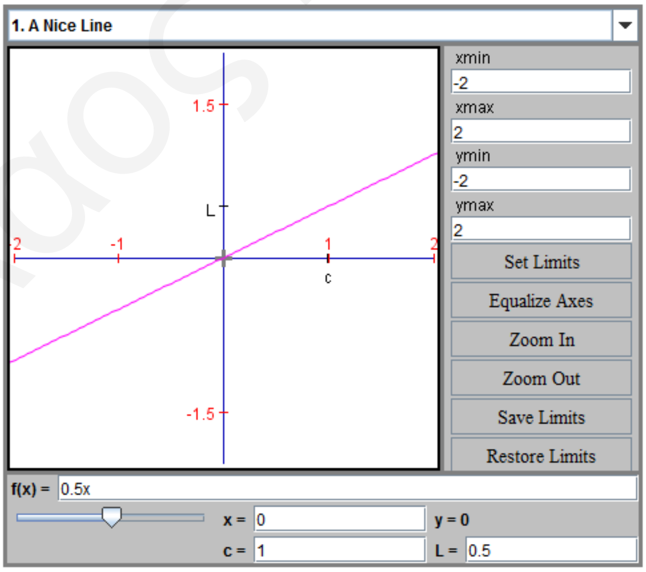
Πίνακας 3.1

Παραδείγματα Έργων του Πρώτου Μαθήματος του Παρεμβατικού Προγράμματος Διδασκαλίας

Όριο Συνάρτησης στο $x_0 \epsilon \mathbb{R}$

Να μπείτε στην ιστοσελίδα http://www.calculusapplets.com/ και να ανοίξετε το εφαρμογίδιο " Informal view of limits".

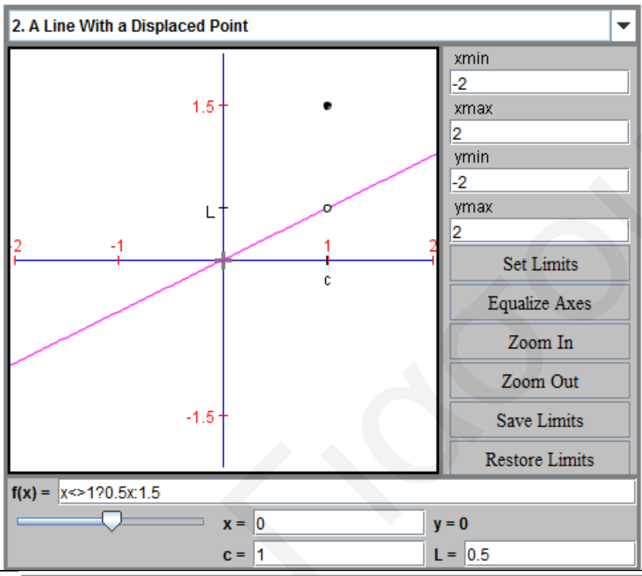
- Στην οθόνη σας βλέπετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0{,}5x$. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, σύμφωνα με τη γραφική παράσταση που βλέπετε στην οθόνη σας και ποιο είναι το αντίστοιχο πεδίο τιμών; ……………………………………………………………………
  Να επιλέξετε το δρομέα δίπλα από το x και να δώσετε διάφορες τιμές στο x. Τι παρατηρείτε για τις αντίστοιχες τιμές του y όσο το x πλησιάζει την τιμή 1, τόσο από τιμές μεγαλύτερες από το 1 όσο και από τιμές μικρότερες από το 1;
  ……………………………………………………………………………………
  Ποια τιμή παίρνει το y όταν το x τείνει να γίνει ίσο με 1;

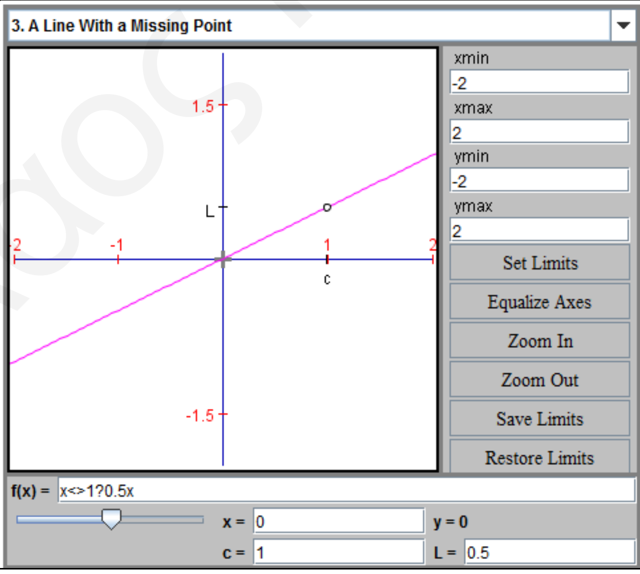


- Να ανοίξετε τη λίστα επιλογών και να επιλέξετε τη δεύτερη συνάρτηση. Στην οθόνη σας βλέπετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0{,}5x$. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, σύμφωνα με τη γραφική παράσταση που βλέπετε στην οθόνη σας και ποιο το αντίστοιχο πεδίο τιμών;

Να επιλέξετε το δρομέα δίπλα από το x και να δώσετε διάφορες τιμές στο x. Τι παρατηρείτε για τις αντίστοιχες τιμές του y όσο το x πλησιάζει την τιμή 1, τόσο από τιμές μεγαλύτερες από το 1, όσο και από τιμές μικρότερες από το 1; Ποια τιμή παίρνει το y, όταν το x τείνει να γίνει ίσο με 1;

……………………………………………………………………………..





- Με βάση τις παρατηρήσεις σας στα τρία προηγούμενα παραδείγματα, τι παρατηρείτε για την τιμή της $f(x)$, όταν το x τείνει να γίνει ίσο με 1;

………………………………………………………………………………………

Το δεύτερο μάθημα περιλάμβανε τέσσερεις δραστηριότητες οι οποίες στόχο είχαν τη διερεύνηση διαφορετικών μορφών ορίων και τη ξεκάθαρη διατύπωση του πλευρικού ορίου συνάρτησης. Οι μαθητές διερεύνησαν την έννοια του πλευρικού ορίου συνάρτησης, όταν η τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής τείνει να γίνει ίση με συγκεκριμένο αριθμό. Μελέτησαν το πλευρικό όριο συνάρτησης χρησιμοποιώντας συγκεκριμένα εφαρμογίδια (http://www.calculusapplets.com/,) όταν η τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής τείνει να γίνει ίση με μια συγκεκριμένη τιμή x_0 η οποία ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης και όταν η τιμή x_0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

Στο τρίτο μάθημα μελέτησαν τον ε – δ ορισμό του ορίου. Το εφαρμογίδιο (http://www.calculusapplets.com/) το οποίο χρησιμοποίησαν τους επέτρεπε να δουν πώς η συνάρτηση προσεγγίζει συγκεκριμένη αριθμητική τιμή, όταν η τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής x ανήκει σε συγκεκριμένη ζώνη τιμών γύρω από την τιμή x_0.

Πίνακας 3.2

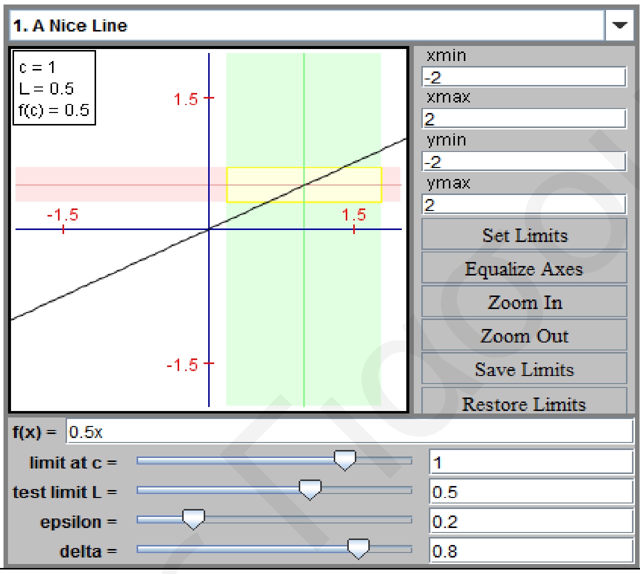
Παραδείγματα Έργων του Δεύτερου Μαθήματος του Παρεμβατικού Προγράμματος Διδασκαλίας

Ορισμός του Ορίου Συνάρτησης στο $x_0 \epsilon \mathbb{R}$
Να μπείτε στην ιστοσελίδα http://www.calculusapplets.com/ και να ανοίξετε το εφαρμογίδιο “ Formal definition of limits”. • Στην οθόνη σας βλέπετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0{,}5x$. Θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο της συνάρτησης f και να ελέγξουμε αν είναι ίσο με 0,5 όταν το x τείνει στο 1. Η κατακόρυφη στήλη περιλαμβάνει τα σημεία εκείνα των οποίων οι τετμημένες απέχουν απόσταση δ από το x_0. Η οριζόντια στήλη περιλαμβάνει τα σημεία εκείνα των οποίων οι τεταγμένες απέχουν απόσταση ε από το L. Το ερώτημα που θα πρέπει να απαντήσουν οι μαθητές αφορά τις συγκεκριμένες τιμές του ε και κατά πόσον μπορούν να βρούμε τιμές για το δ, τέτοιες ώστε το μέρος της συνάρτησης που βρίσκεται μέσα στην κατακόρυφη στήλη να παραμένει και εντός της οριζόντιας στήλης. Να επιλέξετε τον δρομέα ε και να δώσετε διάφορες τιμές στο ε. Στην

συνέχεια να επιλέξετε το δρομέα δ και να δώσετε διάφορες τιμές στο δ. Τι παρατηρείτε για το πλάτος της κατακόρυφης και της οριζόντιας στήλης για τις διάφορες τιμές των ε και δ;

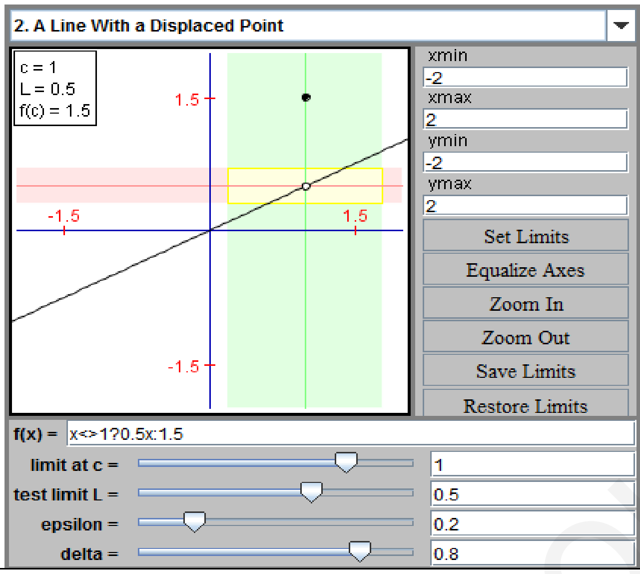
…………………………………………………………………………

Τι πρέπει να συμβαίνει για το πλάτος των δύο στηλών έτσι ώστε να προσεγγίσουμε την τιμή 0,5 για το L, όταν το x τείνει στο 1;



- Να ανοίξετε την λίστα επιλογών και να επιλέξετε τη δεύτερη συνάρτηση. Στην οθόνη σας βλέπετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0{,}5x$. Να επιλέξετε τον δρομέα ε και να δώσετε διάφορες τιμές στο ε. Στη συνέχεια να επιλέξετε το δρομέα δ και να δώσετε διάφορες τιμές στο δ. Τι πρέπει να συμβαίνει για το πλάτος των δύο στηλών έτσι ώστε να προσεγγίσουμε την τιμή 0,5 για το L, όταν το x τείνει στο 1;

…………………………………………………………………………………



- Να ανοίξετε τη λίστα επιλογών και να επιλέξετε την τρίτη συνάρτηση. Στην οθόνη σας βλέπετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0{,}5x$.
  Να επιλέξετε τον δρομέα ε και να δώσετε διάφορες τιμές στο ε. Στη συνέχεια να επιλέξετε το δρομέα δ και να δώσετε διάφορες τιμές στο δ.
  Τι πρέπει να συμβαίνει για το πλάτος των δύο στηλών έτσι ώστε να προσεγγίσουμε την τιμή 0,5 για το L όταν το x τείνει στο 1;

  ……………………………………………………………………………………

Στο τέταρτο μάθημα χορηγήθηκε στους μαθητές φύλλο εργασίας (παράρτημα Β) με τρεις δραστηριότητες εμπέδωσης, οι οποίες, επίσης, ανταποκρίνονται στο προτεινόμενο μοντέλο θεωρητικής σκέψης. Στις δύο πρώτες δραστηριότητες οι μαθητές καλούνται να υπολογίσουν το όριο συνάρτησης, εφόσον υπάρχει, για συγκεκριμένες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής x, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης. Στην τρίτη δραστηριότητα οι μαθητές καλούνται να υπολογίσουν τις τιμές μιας παραμέτρου, για τις οποίες υπάρχει το όριο μιας συνάρτησης Οι δύο πρώτες δραστηριότητες ανταποκρίνονται στην αναλυτική σκέψη και η τρίτη στην αναστοχαστική σκέψη.

Στο πέμπτο μάθημα τα υποκείμενα μελέτησαν τις ιδιότητες των ορίων, όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή τείνει σε πραγματικό αριθμό. Δόθηκε φύλλο εργασίας (παράρτημα Β) με δραστηριότητες εμπέδωσης οι οποίες στόχο είχαν να μπορούν να υπολογίσουν οι μαθητές το όριο συναρτήσεων χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορίων.

Στο έκτο μάθημα οι μαθητές διερεύνησαν το όριο συνάρτησης, όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή τείνει σε συγκεκριμένο αριθμό και η συνάρτηση τείνει στο άπειρο. Το εφαρμογίδιο (http://www.calculusapplets.com/, Limits at Infinity) που χρησιμοποίησαν τους επέτρεπε να μελετήσουν τα πλευρικά όρια διαφορετικών συναρτήσεων για συγκεκριμένη τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής και να καταλήξουν σε συμπεράσματα για το όριο της συνάρτησης εκεί και όπου υπήρχε. Οι δραστηριότητες που χρησιμοποιήθηκαν ήταν δομημένες με τρόπο ώστε οι μαθητές μέσα από τη μελέτη της γραφικής παράστασης που επέλεγαν, να αντιληφθούν την έννοια του μη πεπερασμένου ορίου για μια δεδομένη τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής.

Στο έβδομο μάθημα δόθηκαν δραστηριότητες εμπέδωσης (παράρτημα Β). Στο όγδοο μάθημα παρέμβασης διερευνήθηκε το όριο συνάρτησης, όταν η τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής τείνει στο άπειρο. Η δραστηριότητα που χρησιμοποιήθηκε ήταν δομημένη με βάση την αναλυτική σκέψη. Με τη βοήθεια εφαρμογιδίου (ΨΕΠ, Η έννοια του ορίου συνάρτησης, υποενότητα 1.2) τα υποκείμενα μελέτησαν το όριο διαφόρων συναρτήσεων, όταν η τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής αυξανόταν απεριόριστα ή μειωνόταν απεριόριστα, μελετώντας τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων και του αντίστοιχου πίνακα τιμών. Στη συνέχεια, οι μαθητές κατέγραφαν τις παρατηρήσεις του και κατέληγαν στα δικά τους συμπεράσματα.

Στο ένατο μάθημα παρέμβασης μελέτησαν τις ιδιότητες των ορίων όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή τείνει στο άπειρο. Χρησιμοποίησαν συγκεκριμένο εφαρμογίδιο (ΨΕΠ, Η έννοια του ορίου συνάρτησης, υποενότητα 2.1), για να διερευνήσουν το όριο της συνάρτησης, η οποία αναπαριστούσε το άθροισμα, τη διαφορά και το γινόμενο δύο άλλων δεδομένων συναρτήσεων, μελετώντας τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις τους.

Τέλος, στο δέκατο μάθημα μελέτησαν το όριο της συνάρτησης $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$, όταν το x τείνει να γίνει ίσο με μηδέν. Συγκεκριμένα, με τη χρήση του εφαρμογιδίου (http://www.calculusapplets.com/,) μελέτησαν τη συμπεριφορά της συνάρτησης

$f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$, όταν το x πλησίαζε να γίνει ίσο με μηδέν τόσο από τιμές μικρότερες από το μηδέν όσο και από τιμές μεγαλύτερες από το μηδέν. Οι μαθητές είχαν την ευκαιρία, μελετώντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αλλά και του αντίστοιχου πίνακα τιμών, να καταγράφουν τις παρατηρήσεις τους.

Δεύτερος Κύκλος Διεξαγωγής της Έρευνας

Το δεύτερο παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλία ήταν το ίδιο με το παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας το οποίο έγινε στη δεύτερη φάση διεξαγωγής της έρευνας. Στην ομάδα ελέγχου της τρίτης φάσης δεν δόθηκαν ειδικά φύλλα εργασίας. Οι διδάσκοντες στα 13 τμήματα τα οποία συμμετέχουν στην έρευνα, ακολούθησαν τον δικό τους προγραμματισμό για την διδασκαλία της έννοιας του ορίου συνάρτησης με βάση τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας.

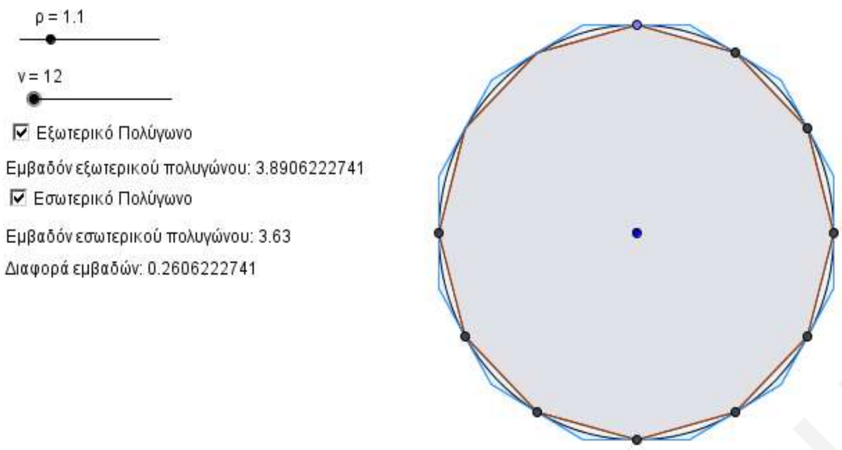
Τρίτος Κύκλος Διεξαγωγής της Έρευνας

Ο σχεδιασμός του τρίτου παρεμβατικού προγράμματος διδασκαλίας έγινε μετά από τη μελέτη των αποτελεσμάτων της παρεμβατικής διδασκαλίας στο προηγούμενο στάδιο της έρευνας. Στόχος του τρίτου σχεδιασμού ήταν να προσεγγίσουμε αρχικά την έννοια του ορίου συνάρτησης μέσα από τις άπειρες διαδικασίες και στη συνέχεια να προχωρήσουμε στον ορισμό και τις ιδιότητες του ορίου. Σε αυτή την φάση έγιναν επτά παρεμβατικές διδασκαλίες (παράρτημα Δ). Στο πρώτο μάθημα τα υποκείμενα είχαν μια πρώτη επαφή με τις άπειρες διαδικασίες. Διερεύνησαν τον τρόπο υπολογισμού του εμβαδού κύκλου, χρησιμοποιώντας μαθηματικό εφαρμογίδιο (Kyklos.ggb), όπου είχαν τη δυνατότητα να υπολογίζουν το εμβαδό εγγεγραμμένου και περιγεγραμμένου κανονικού ν-γώνου και τη διαφορά των δύο εμβαδών σε κάθε περίπτωση. Με αυτό τον τρόπο μπορούσαν να παρατηρήσουν ότι μέσα από αυτή τη διαδικασία και όταν ο αριθμός των πλευρών των δύο πολυγώνων αυξανόταν απεριόριστα προσέγγιζαν το εμβαδό του κύκλου.

Πίνακας 3.3

Παραδείγματα Έργων που Δόθηκαν στο Πρώτο Μάθημα του Τρίτου Παρεμβατικού Προγράμματος Διδασκαλίας

Εμβαδόν κύκλου - Εισαγωγή στις Άπειρες Διαδικασίες
Πρόβλημα: Πως μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν ενός κύκλου με ακτίνα $\boldsymbol{R = 1}$;   …………………………………………………………………………………………   Ε1: Τι σημαίνει ότι ένα τρίγωνο έχει εμβαδόν ίσο με 4,5;   Ε2: Να βρείτε γεωμετρικά σχήματα των οποίων το εμβαδόν μπορεί να υπολογιστεί με την προηγούμενη μέθοδο.   Ε3: Μπορούμε να χωρίσουμε τον κύκλο σε σχήματα των οποίων τα εμβαδά μπορούμε να υπολογίσουμε;   Ε4: Με ποιο τρόπο είναι δυνατόν να συνδέσουμε το εμβαδόν του κύκλου με τα εμβαδά πολυγώνων;   Να κατασκευάσετε δυο τετράγωνα: Ένα εγγεγραμμένο και ένα περιγεγραμμένο στον κύκλο.   Προσπαθήστε να απαντήσετε στην ερώτηση χρησιμοποιώντας το εφαρμογίδιο «kyklos».   Στο εφαρμογίδιο μπορούμε να δούμε τον κύκλο.   Οι δύο δρομείς μεταβάλλουν την ακτίνα ρ του κύκλου και το πλήθος ν των πλευρών του κανονικού εγγεγραμμένου και του κανονικού περιγεγραμμένου πολυγώνου στον κύκλο.   Εμφανίζονται τα εμβαδά αυτών των πολυγώνων και η διαφορά τους.



Ε5: Ποια σχέση υπάρχει μεταξύ του εμβαδού E του κύκλου και των εμβαδών των δύο αυτών τετραγώνων;

Ε6: Ποια είναι η διαφορά των εμβαδών των δύο τετραγώνων;

Ε7: Μέσω ποιας διαδικασίας είναι δυνατόν να πετύχουμε καλύτερη προσέγγιση του E;

Ε8: Να συμπληρώσετε το πιο κάτω πίνακα:

ν	Εμβαδόν Εγγεγραμμένου ν-γώνου	Εμβαδόν Περιγεγραμμένου ν-γώνου	Διαφορά των εμβαδών μικρότερη ή ίση από
4			
6			
8			
10			
12			
			0,09
	3,1 …	3,1 …	
			0,009
	3,14 …	3,14 ….	
			0,0009
	3,141 …	3,141 …	
			0,00009

E9: Υπάρχει κάποιο βήμα στη διαδικασία αυτή κατά την οποία το περιγεγραμμένο και το εγγεγραμμένο πολύγωνο θα έχουν το ίδιο εμβαδόν με εκείνο του κύκλου;

E10: Θα τερματιστεί αυτή η διαδικασία;

E11: Ποιον αριθμό πλησιάζει η διαφορά των εμβαδών;

E12: Πόσο κοντά στον αριθμό αυτό μπορεί να φτάσει η διαφορά των εμβαδών;

E13: Πόσο κοντά στο εμβαδόν του κύκλου μπορούμε να φτάσουμε;

Στο δεύτερο μάθημα διερεύνησαν τον ε – δ ορισμό του ορίου συνάρτησης, όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή τείνει σε συγκεκριμένο αριθμό. Συγκεκριμένα, οι μαθητές χρησιμοποίησαν μαθηματικό εφαρμογίδιο (limit_mathima_2) με το οποίο μελέτησαν τη μέση ταχύτητα κινητού και κατέγραφαν τα δεδομένα, παρατηρώντας τη γραφική παράσταση που αναπαριστούσε τη μέση ταχύτητα. Η δραστηριότητα έχει ως στόχο να οδηγήσει τους μαθητές στη ξεκάθαρη διατύπωση του ορισμού του ορίου συνάρτησης, όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή τείνει σε ένα συγκεκριμένο αριθμό.

Πίνακας 3.4

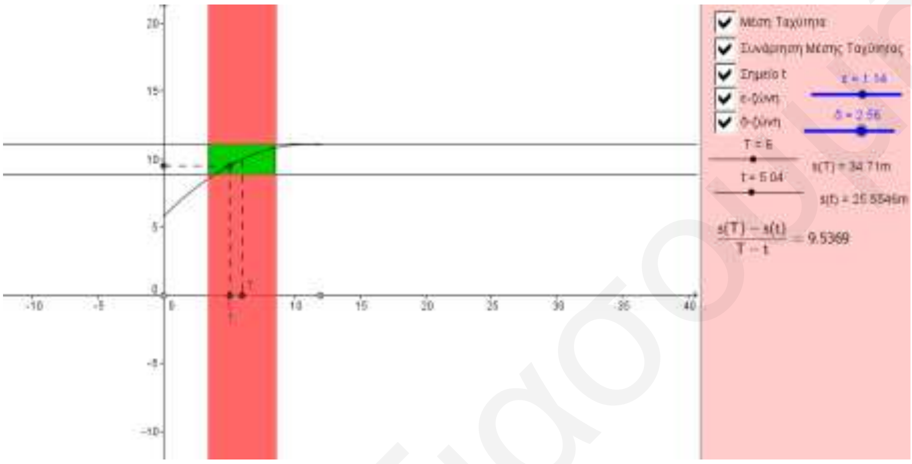
Παραδείγματα Έργων του Δεύτερου Μαθήματος του Τρίτου Παρεμβατικού Προγράμματος Διδασκαλίας

Εισαγωγή στο όριο συνάρτησης σε σημείο

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Μια κάμερα καταγράφει έναν αγώνα των $\boldsymbol{100m}$.
Με ποιο τρόπο θα μπορούσαν τα δεδομένα της κάμερας να μας βοηθήσουν στον υπολογισμό της ταχύτητας ενός αθλητή κατά τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{T = 6sec}$;

- Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «limit_mathima_2». Στο περιβάλλον αυτό μπορούμε να έχουμε τα δεδομένα της κάμερας.

- Όταν αλλάζουμε τις τιμές του t αλλάζουν και οι τιμές του *s(t)* που δίνουν την απόσταση που έχει καλύψει ο αθλητής έως τη χρονική στιγμή *t*.
- Το *t* μπορεί να πλησιάσει το *T* από μικρότερες και από μεγαλύτερες τιμές.
- Να εμφανίσετε τη μέση ταχύτητα $U(t) = \frac{s(T)-s(t)}{T-t}$ στο διάστημα που ορίζουν τα t και T.



E1: Να συμπληρώσετε τα κενά στον παρακάτω πίνακα.

t	$\frac{s(T)-s(t)}{T-t}$	t	$\frac{s(T)-s(t)}{T-t}$
4		8	
5		7	
5,5		6,5	
5,8		6,3	
5,9		6,1	
5,93		6,07	
5,95		6,03	
5,99		6,01	
5,995		6,005	
5,999		6,001	
5,9999		6,0001	
5,99999		6,00001	

E2: Ποιον αριθμό πλησιάζει η μέση ταχύτητα καθώς το t πλησιάζει το $T = 6sec$;

- Να εμφανίσετε τη συνάρτηση της μέσης ταχύτητας και να επιβεβαιώσετε γραφικά την απάντησή σας.

E3: Ποια νομίζετε ότι είναι η ταχύτητα του αθλητή τη χρονική στιγμή $T = 6sec$;

- Να εμφανίσετε την $\varepsilon - \zeta ώ\nu\eta$. Τα σημεία της $\varepsilon - \zeta ώ\nu\eta\varsigma$ έχουν τεταγμένη μεγαλύτερη από $L - \varepsilon$ και μικρότερη από $L + \varepsilon$.
- Να μετακινήστε το t έτσι ώστε το σημείο $(t, U(t))$ να βρεθεί στην $\varepsilon - \zeta ώ\nu\eta$ και να παρατηρήσετε τις τιμές της μέσης ταχύτητας.

E4: Για ποιες τιμές του t το σημείο $(t, U(t))$ ανήκει στην $\varepsilon - \zeta ώ\nu\eta$ για $\varepsilon = 0{,}8$

- Να εμφανίσετε την $\delta - \zeta ώ\nu\eta$. Τα σημεία που ανήκουν στη $\delta - \zeta ώ\nu\eta$ έχουν τετμημένη μεγαλύτερη του $T - \delta$ και μικρότερη του $T + \delta$. Με πράσινο χρωματίζονται τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται ταυτόχρονα στην $\varepsilon - \zeta ώ\nu\eta$ και στη $\delta - \zeta ώ\nu\eta$. Τα σημεία της $\delta - \zeta ώ\nu\eta\varsigma$ που είναι εκτός της $\varepsilon - \zeta ώ\nu\eta\varsigma$ χρωματίζονται με κόκκινο.

E5: Να προσπαθήσετε να βρείτε ένα δ τέτοιο ώστε να μην υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης στην κόκκινη περιοχή.

E6: Να μειώσετε το ε σε 0,5 και να βρείτε κατάλληλο δ ώστε τα σημεία $(t, U(t))$ να μην βρίσκονται στην κόκκινη περιοχή.

E7: Εάν $\varepsilon = 0{,}05$ μπορείτε να βρείτε δ με την παραπάνω ιδιότητα;

- Μπορείτε να εμφανίσετε το παράθυρο μεγέθυνσης. Μπορεί να σας βοηθήσει ώστε να δείτε σε μια μικρή περιοχή γύρω από το σημείο $(6{,}10)$.

E8: Εάν το ε μικρύνει κι άλλο θα μπορούμε πάντα να βρούμε δ με την παραπάνω ιδιότητα;

E9: Να συμπληρώσετε τα κενά της παρακάτω πρότασης με τα κατάλληλα χρώματα ώστε να εκφράζει το συμπέρασμα της E8.

"Για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε η συνάρτηση να μην βρίσκεται στην ……….………. περιοχή."

E10: Να συμπληρώσετε τα κενά ώστε η παρακάτω πρόταση να αποδίδει το συμπέρασμα της E8.

Τα ………..……….. μπορούν να είναι όσο κοντά θέλουμε στο ……..…… αρκεί τα ………..…. να είναι κατάλληλα κοντά στο ……..………… και διαφορετικά του ……..…….

Ε11: Να προσπαθήσετε να διατυπώσετε το συμπέρασμα της Ε8, χρησιμοποιώντας μαθηματικά σύμβολα.

Στο τρίτο μάθημα δόθηκε στα υποκείμενα φύλλο εργασίας με δραστηριότητες εμπέδωσης. Οι δραστηριότητες είχαν ως στόχο την αναλυτική προσέγγιση του συμβόλου του ορίου και την κατανόηση διαφορετικών μορφών ορίων.

Στο τέταρτο μάθημα τα υποκείμενα διερεύνησαν την έννοια του πλευρικού ορίου συνάρτησης, χρησιμοποιώντας μαθηματικό εφαρμογίδιο (ΨΕΠ – πλευρικό όριο συνάρτησης – υποενότητα 1.1). Οι δραστηριότητες οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν ήταν δομημένες με βάση τόσο την αναστοχαστική όσο και την αναλυτική σκέψη. Μετά το πέρας της διερεύνησης δόθηκαν δραστηριότητες εμπέδωσης.

Στο πέμπτο μάθημα διερεύνησαν τις ιδιότητες των ορίων. Δόθηκαν ασκήσεις εμπέδωσης δομημένες με βάση το μοντέλο θεωρητικής σκέψης της Sierpinska.

Στα επόμενα δύο μαθήματα οι μαθητές ασχολήθηκαν αποκλειστικά με ασκήσεις εμπέδωσης.

Εργαλεία Μέτρησης

Για τους σκοπούς της έρευνας και μετά από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας και τη διαμόρφωση του προτεινόμενου μοντέλου της έρευνας κατασκευάστηκε το δοκίμιο αξιολόγησης της έρευνας το οποίο αποτελείται από 25 έργα. Οι ερωτήσεις ανταποκρίνονται στο προτεινόμενο μοντέλο. Συγκεκριμένα πέντε έργα (2, 5α, 5β, 7α και 7β) είχαν ως στόχο να ελέγξουν την ικανότητα των μαθητών στην αναστοχαστική σκέψη, έξι έργα (1α, 1β, 1γ, 1δ, 6 και 7γ) στη συστημική σκέψη και δεκατέσσερα έργα (3α, 3β, 3γ, 3δ, 3ε, 3στ, 3ζ, 3η, 4α, 4β, 4γ, 4δ, 4ε και 4στ) στην αναλυτική σκέψη. Στον πίνακα 3.6 δίνονται παραδείγματα των έργων που χρησιμοποιήθηκαν στο δοκίμιο αξιολόγησης της δεύτερης και της τρίτης φάσης διεξαγωγής της έρευνας.

Τα έργα τα οποία έχουν επιλεγεί για να αξιολογήσουν την αναλυτική σκέψη των μαθητών ελέγχουν αν οι μαθητές είναι ικανοί να διαβάσουν γραφικές παραστάσεις και να υπολογίσουν από τη γραφική παράσταση το όριο της συνάρτησης που αναπαριστάνεται για διάφορες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής. Βασικά στόχος είναι να ελεγχθεί αν οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι με την διεργασία υπολογισμού του ορίου συνάρτησης έτσι ώστε να οδηγηθούν στην έννοια του ορίου συνάρτησης. Για να αξιολογηθεί η συστημική σκέψη των μαθητών επιλέγηκαν έργα στα οποία θα πρέπει μέσα από την ερμηνεία δεδομένων να ελεγχθεί αν οι μαθητές είναι σε θέση να συνδέσουν την έννοια του ορίου με άλλες έννοιες και αν είναι σε θέση να επεξεργαστούν και να διαχειριστούν σύμβολα και να ερμηνεύουν τα αποτελέσματα στα οποία καταλήγουν. Τέλος τα έργα τα οποία έχουν επιλεγεί για να αξιολογήσουν την αναστοχαστική σκέψη των μαθητών έχουν ως στόχο να ελέγξουν την σε βάθος κατανόηση της έννοιας του ορίου. Συγκεκριμένα στα έργα αυτά οι μαθητές θα πρέπει να συνδέσουν το όριο συνάρτησης με την έννοια του απείρου, να ερμηνεύσουν μία γραφική παράσταση όχι διαισθητικά αλλά αφού συνδέσουν εννοιολογικά το όριο το οποίο έχουν να υπολογίσουν με την αντίστοιχη γραφική παράσταση. Ελέγχουν αν οι μαθητές είναι ικανοί να στοχαστούν πάνω στις λειτουργίες οι οποίες εφαρμόζονται στον υπολογισμό του ορίου.

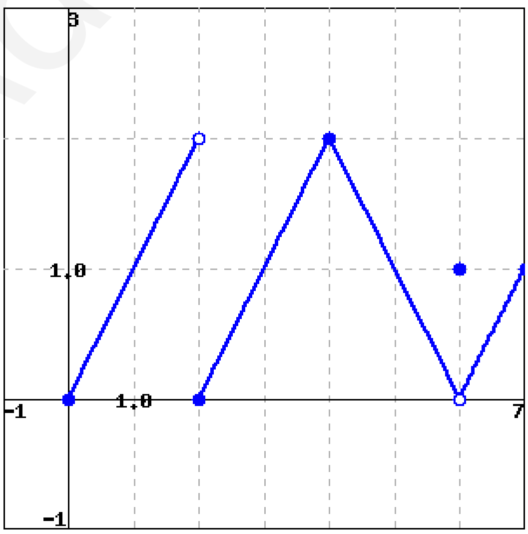
Πίνακας 3.5

Παραδείγματα Έργων του Δοκιμίου Αξιολόγησης που Χορηγήθηκε στη Δεύτερη και Τρίτη Φάση Διεξαγωγής της Έρευνας

1. Στις πιο κάτω προτάσεις να βάλετε σε κύκλο το **Σ** αν η πρόταση είναι ορθή ή το **Λ** αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α) Το όριο μιας συνάρτησης είναι ένας αριθμός τον οποίον η συνάρτηση δεν μπορεί να φτάσει.	**Σ**	**Λ**
β) Το όριο περιγράφει πως η συνάρτηση $y = f(x)$ παίρνει μια τιμή όταν το x πλησιάζει ένα συγκεκριμένο σημείο.	**Σ**	**Λ**
γ) Το όριο είναι ένας αριθμός τον οποίο η συνάρτηση πλησιάζει αλλά δεν μπορεί να τον φτάσει.	**Σ**	**Λ**
δ) Το όριο είναι μια προσεγγιστκή τιμή, η οποία μπορεί να είναι τόσο ακριβής όσο εμείς θέλουμε.	**Σ**	**Λ**

3.



Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης που βλέπετε πιο πάνω να απαντήσετε τα πιο κάτω ερωτήματα:

α) Το όριο της συνάρτησης στο $x=0$ είναι: ……………………………………

β) Το όριο της συνάρτησης στο $x=1$ είναι: ……………………………………

γ) Το όριο της συνάρτησης στο $x=2$ είναι: ……………………………………

δ) Το όριο της συνάρτησης στο $x=3$ είναι: ……………………………………

ε) Το όριο της συνάρτησης στο $x=4$ είναι: ……………………………………

στ) Το όριο της συνάρτησης στο $x=5$ είναι: ……………………………………

ζ) Το όριο της συνάρτησης στο $x=6$ είναι: ……………………………………

η) Το όριο της συνάρτησης στο $x= -1$ είναι: ……………………………………

Το ίδιο δοκίμιο χρησιμοποιήθηκε τόσο πριν από το παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας όσο και μετά το παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας.

Στον σχεδιασμό της έρευνας στην τέταρτη φάση, χρησιμοποιήθηκαν τα περισσότερα από τα έργα που συμπεριλαμβάνονται στο δοκίμιο που χορηγήθηκε κατά την δεύτερη και τρίτη φάση διεξαγωγής της έρευνας . Κατασκευάστηκαν δύο δοκίμια. Το πρώτο δοκίμιο που κατασκευάστηκε αποτελείτο από 25 έργα και χορηγήθηκε πριν από το παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας. Τα έργα 1α, 1β, 1γ, 1δ, είναι τα ίδια με το δοκίμιο αξιολόγησης της έρευνας που χορηγήθηκε κατά την δεύτερη και τρίτη φάση διεξαγωγής της έρευνας, τα έργα 2 και 3 είναι νέα, τα έργα 4α, 4β, 4γ, 4δ, 4ε, 4στ, 4ζ, 4η, είναι τα ίδια με τα έργα 3α, 3β, 3γ, 3δ, 3ε, 3στ, 3ζ, 3η, του δοκιμίου που χορηγήθηκε κατά την δεύτερη και τρίτη φάση διεξαγωγής της έρευνας, τα έργα 5α, 5β, 5γ, 5δ, 5ε και 5στ είναι τα ίδια με τα έργα 4α, 4β, 4γ, 4δ, 4ε και 4στ του δοκιμίου που χορηγήθηκε κατά την δεύτερη και τρίτη φάση διεξαγωγής της έρευνας όπως και τα έργα 6α, 6β είναι τα αντίστοιχα 5α και 5β του δοκιμίου που χορηγήθηκε κατά την δεύτερη και τρίτη φάση διεξαγωγής της έρευνας όπως και τα έργα 7α , 7β και 7γ είναι επίσης τα ίδια. Το έργο 6 του δοκιμίου που χορηγήθηκε κατά την δεύτερη και τρίτη φάση διεξαγωγής της έρευνας δεν χρησιμοποιήθηκε. Συγκεκριμένα τέσσερα έργα (6α, 6β , 7α και 7β) είχαν ως στόχο να ελέγξουν την ικανότητα των μαθητών στην αναστοχαστική σκέψη, πέντε έργα (1α, 1β, 1γ, 1δ και 7γ) στη συστημική σκέψη και δεκαέξι έργα (2, 3, 4α, 4β, 4γ, 4δ, 4ε, 4στ, 4ζ, 4η, 5α, 5β, 5γ, 5δ, 5ε και 5στ) στην αναλυτική σκέψη. Στον πίνακα 3.6 δίνονται παραδείγματα των έργων που χρησιμοποιήθηκαν στο δοκίμιο αξιολόγησης της τέταρτης φάσης διεξαγωγής της έρευνας.

Πίνακας 3.6

Παραδείγματα Έργων του Δοκιμίου Αξιολόγησης που Χορηγήθηκε στη Τέταρτη Φάση Διεξαγωγής της Έρευνας

---

2. Στον πίνακα τιμών δίνονται οι τιμές του x και οι αντίστοιχες τιμές του $f(x)$ για μια συγκεκριμένη συνάρτηση.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
$-0{,}1$	$-0{,}0544$
$-0{,}01$	$-0{,}00506$
$-0{,}001$	$0{,}0008269$
$-0{,}0001$	$-0{,}00003056$
$-0{,}00001$	$0{,}0000003575$
$-0{,}000001$	$-0{,}00000049994$
$-0{,}0000001$	$0{,}0000000421$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
$0{,}1$	$-0{,}0544$
$0{,}01$	$-0{,}00506$
$0{,}001$	$0{,}0008269$
$0{,}0001$	$-0{,}00003056$
$0{,}00001$	$0{,}0000003575$
$0{,}000001$	$-0{,}00000049994$
$0{,}0000001$	$0{,}0000000421$

Όταν το x πλησιάζει το 0, υπάρχει κάποια τιμή στην οποία πλησιάζει το $f(x)$;

7. (α) Να εξηγήσετε τι αντιλαμβάνεστε όταν βλέπετε την μαθηματική έκφραση: $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$.

(β) Πρέπει να ορίζεται η συνάρτηση στο x=1 για να έχει όριο;

(γ) Πρέπει το $f(1) = 3$ ή όχι;

Το δεύτερο δοκίμιο είχε μερικές διαφορές από το πρώτο και χορηγήθηκε μετά το πέρας του παρεμβατικού προγράμματος διδασκαλίας. Τα έργα 1α, 1β, 1γ, 1δ, 2, 3, 4α, 4β, 4γ, 4δ, 4ε, 4στ, 4ζ, 4η, 5α, 5β, 5γ, 5δ, 5ε και 5στ ήταν τα ίδια με τα αντίστοιχα έργα του αρχικού δοκιμίου που χορηγήθηκε στον επανασχεδιασμό της έρευνας. Τα έργα 6α, 6β, 6γ είναι τα ίδια με τα έργα 7α , 7β και 7γ του αρχικού δοκιμίου που χορηγήθηκε στον επανασχεδιασμό και τα έργα 7, 8 και 9 είναι νέα έργα. Συγκεκριμένα δύο έργα (6α και 6β) είχαν ως στόχο να ελέγξουν την ικανότητα των μαθητών στην αναστοχαστική σκέψη, εφτά έργα (1α, 1β, 1γ, 1δ, 6γ, 8 και 9) στη συστημική σκέψη και δεκαεφτά έργα (2, 3, 4α, 4β, 4γ, 4δ, 4ε, 4στ, 4ζ, 4η, 5α, 5β, 5γ, 5δ, 5ε, 5στ και 7) στην αναλυτική σκέψη. Τα έργα των δοκιμίων φαίνονται στο παράρτημα.

Ανάλυση των Δεδομένων

Ο σχεδιασμός διεξαγωγής της έρευνας περιελάμβανε ποιοτικές και ποσοτικές μεθόδους ενσωματώνοντας χορήγηση γραπτών δοκιμίων και διεξαγωγή κλινικών συνεντεύξεων (Kelly & Lesh, 2000: Tashakori & Teddie, 2002). Με βάση αυτά τα δεδομένα, χρησιμοποιήθηκαν διαφορετικές τεχνικές για την ανάλυση των ποσοτικών και των ποιοτικών δεδομένων.

Για την ανάλυση των ποσοτικών δεδομένων χρησιμοποιήθηκε κυρίως το λογισμικό γραμμικής δομικής ανάλυσης Mplus (Muthen & Muthen, 2004). Για να απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα της εργασίας ελέγχθηκε ο βαθμός προσαρμογής μοντέλων επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης (CFA: Confirmatory Factor Analysis), δομικών μοντέλων (Structural models) και μοντέλων ανάλυσης ομάδων (Latent Class).

Για τον έλεγχο του βαθμού προσαρμογής του μοντέλου χρησιμοποιήθηκαν τρεις δείκτες (Muthen & Muthen, 2004): ο λόγος x^2 προς τους βαθμούς ελευθερίας του μοντέλου (x^2/df), ο δείκτης comparative fit index (CFI), και ο δείκτης RMSEA. Για να είναι αποδεκτό το μοντέλο η τιμή του λόγου (x^2/df) πρέπει να είναι μικρότερη από 2, η τιμή του δείκτη CFI πρέπει να είναι μεγαλύτερη από $.9$ και η τιμή του δείκτη RMSEA πρέπει να είναι μικρότερη από $.08$ (Marcoulides & Schumacker, 1996).

Η ανάλυση latent class (LCA) χρησιμοποιήθηκε για τον εντοπισμό κατηγοριών (ομάδων) μαθητών που αντιπροσώπευαν διαφορετικά επίπεδα σκέψης. Με βάση την ανάλυση latent Class ήταν δυνατή η ανίχνευση ομάδων υποκειμένων με παρόμοια συμπεριφορά (Marcoulides & Schumacker, 1996). Το λογισμικό προσέφερε τη δυνατότητα ελέγχου διαφορετικών μοντέλων διαχωρισμού των υποκειμένων σε ομάδες, επιλέγοντας το μοντέλο με τον υψηλότερο δείκτη εντροπίας και τις χαμηλότερες τιμές στους δείκτες AIC και BIC.

Χρησιμοποιήθηκε επίσης το στατιστικό πακέτο SPSS όπου έγιναν στατιστικές αναλύσεις στα δεδομένα του δείγματος. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκαν αναλύσεις για τα περιγραφικά αποτελέσματα (μέσος όρος, τυπική απόκλιση) για τους παράγοντες οι οποίοι διαμορφώθηκαν από το μοντέλο μας και από τις συσχετίσεις μεταξύ των έργων του κάθε παράγοντα, για τους παράγοντες σε σχέση με το είδος της ομάδας (πειραματική ομάδα, ομάδα ελέγχου) στην οποία ανήκαν τα υποκείμενα της έρευνας και σε σχέση με την κατηγορία που δημιουργήθηκε μέσα από την ανάλυση latent class. Για να εξεταστεί κατά πόσον υπάρχουν διαφορές στην επίδοση των μαθητών της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου στους παράγοντες του μοντέλου, πραγματοποιήθηκε πολλαπλή ανάλυση διασποράς (MANOVA).

Για την καλύτερη περιγραφή της σκέψης των μαθητών χρησιμοποιήθηκαν τα αποτελέσματα των κλινικών συνεντεύξεων ώστε να αναλυθεί ο τρόπος σκέψης των μαθητών. Η ανάλυση των ποιοτικών δεδομένων εμπλούτισε και συμπλήρωσε την περιγραφή των παραγόντων της θεωρητικής σκέψης ως προς τον τρόπο αντίληψης της έννοιας του ορίου, όπως προέκυψαν από την ποσοτική ανάλυση των δεδομένων.

Για την διόρθωση των έργων των δοκιμίων αξιολόγησης τα οποία χορηγήθηκαν στον πρώτο και δεύτερο κύκλο και πριν από τη παρεμβατική διδασκαλία του τρίτου κύκλου διεξαγωγής της έρευνας, οι ορθές απαντήσεις δηλώνονται με 1 και οι λανθασμένες με 0. Αν ένα υποκείμενο έδινε απάντηση που δεν ήταν ολοκληρωμένη, για παράδειγμα ορθή απάντηση αλλά λανθασμένη αιτιολόγηση, επίσης δηλώνεται με 0. Για τη διόρθωση των έργων του δοκιμίου αξιολόγησης το οποίο χορηγήθηκε μετά την παρεμβατική διδασκαλία του τρίτου κύκλου διεξαγωγής της έρευνας, οι ορθές απαντήσεις δηλώνονται με 2 και οι λανθασμένες με 0. Αν ένα υποκείμενο έδινε μερική απάντηση τότε δηλώνεται με 1.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Εισαγωγή

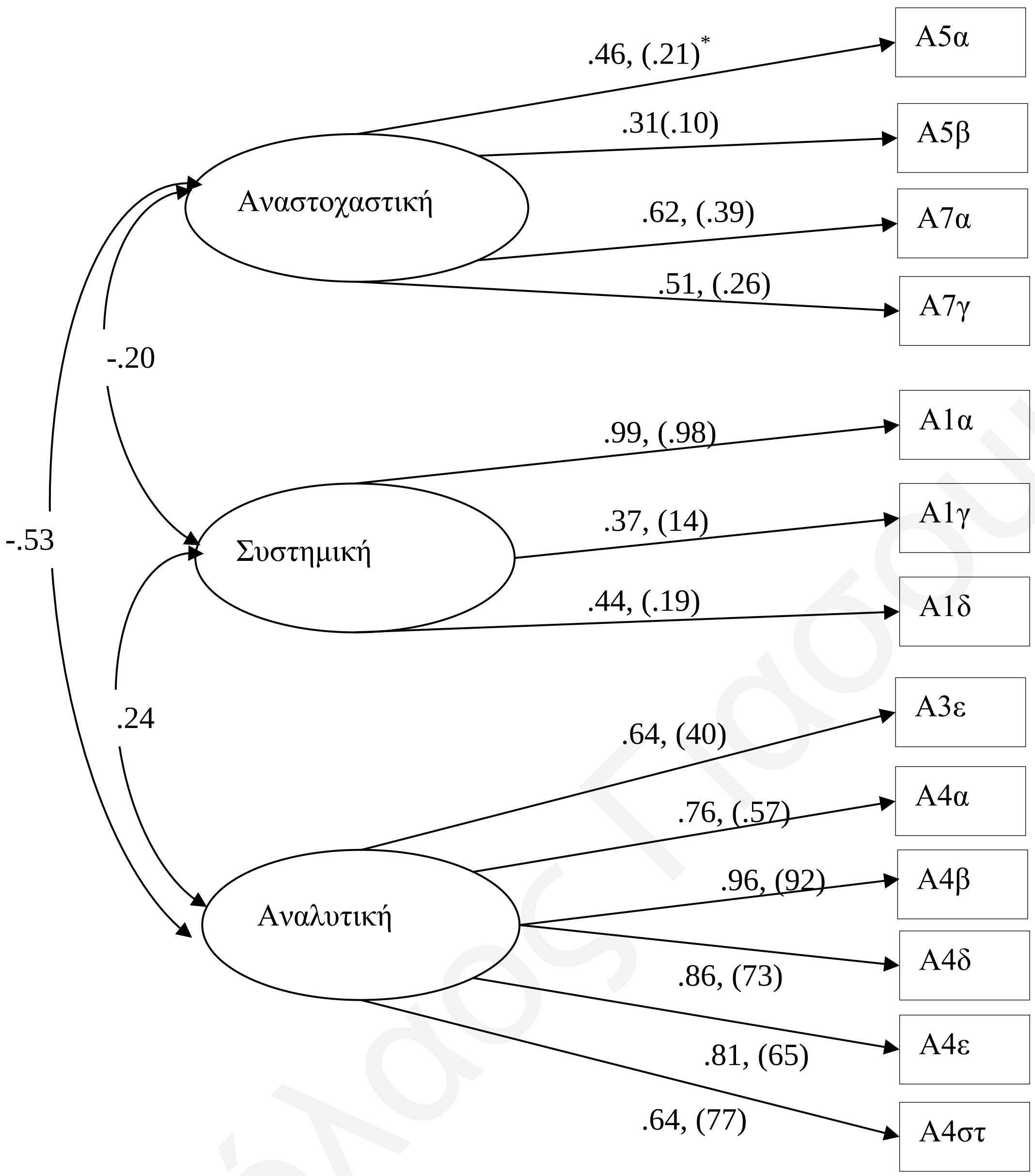
Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα ποσοτικά και ποιοτικά αποτελέσματα της έρευνας σχετικά με την θεωρητική σκέψη των μαθητών. Τα αποτελέσματα οργανώθηκαν, σύμφωνα με τον σχεδιασμό της έρευνας, σε τρεις κύκλους. Σε κάθε κύκλο η παρουσίαση των αποτελεσμάτων ακολουθεί τη σειρά των ερευνητικών ερωτημάτων. Στην αρχή κάθε κύκλου εξετάζεται η δομή του προτεινόμενου μοντέλου ανάπτυξης της θεωρητικής σκέψης των μαθητών της Β′ Λυκείου που παρακολουθούν μαθηματικά κατεύθυνσης. Στη συνέχεια, σε κάθε κύκλο εξετάζεται η αποτελεσματικότητα του παρεμβατικού προγράμματος, όπως διαφοροποιείται κάθε φορά. Ταυτόχρονα, κατά τη διαδικασία του δεύτερου κύκλου έγινε διαχωρισμός ομάδων σύμφωνα με τα αποτελέσματα του πρώτου κύκλου και με βάση τις ομάδες που σχηματίστηκαν συζητείται η εφαρμογή του προτεινόμενου μοντέλου.

Πρώτος Κύκλος Έρευνας

Χαρακτηριστικά Γνωρίσματα της Θεωρητικής Σκέψης για την Έννοια του Ορίου

Βασικός στόχος της έρευνας ήταν η περιγραφή ενός μοντέλου με τα βασικά χαρακτηριστικά της θεωρητικής σκέψης. Στον πρώτο κύκλο της έρευνας κατασκευάστηκε το δοκίμιο με βάση τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα του προτεινόμενου μοντέλου. Επομένως, σε πρώτο στάδιο ήταν επιβεβλημένη η εγκυρότητα και η αξιοπιστία των έργων του δοκιμίου και εν γένει ο έλεγχος της εγκυρότητας του προτεινόμενου μοντέλου που υποθέτει ότι η θεωρητική σκέψη αποτελείται από τρεις διακριτούς παράγοντες: την αναστοχαστική σκέψη, τη συστημική σκέψη και την αναλυτική σκέψη. Σε δεύτερο στάδιο έπρεπε να ελεγχθεί ο ρόλος της σύγχρονης τεχνολογίας στην ανάπτυξη της έννοιας του ορίου.

Χρησιμοποιήθηκε το δοκίμιο μέτρησης (παράρτημα Α), το οποίο χορηγήθηκε πριν από και μετά την παρεμβατική διδασκαλία. Χορηγήθηκε τόσο στην πειραματική ομάδα (15 υποκείμενα) όσο και στην ομάδα ελέγχου (37 υποκείμενα). Πραγματοποιήθηκε επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση (CFA – Confirmatory Factor Analysis). Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης, έδειξαν ότι τρεις παράγοντες, η αναστοχαστική σκέψη, η συστημική σκέψη και η αναλυτική σκέψη, είναι δυνατόν να διαμορφώσουν την επίδοση των υποκειμένων στα έργα που εξετάζονται. Επίσης έδειξε ότι οι παράγοντες του μοντέλου συνάδουν με τα δεδομένα της παρούσας έρευνας και επιβεβαιώνουν την καταλληλότητα του παραγοντικού μοντέλου (CFI=0.953, x^2= 74,52, df= 61, x^2/df=1.22, RMSEA=0.06). Στο διάγραμμα 4.1 φαίνεται το μοντέλο το οποίο περιγράφει καλύτερα το προτεινόμενο μοντέλο. Όλα τα έργα είχαν στατιστικά σημαντικές φορτίσεις στους αντίστοιχους παράγοντες όπως παρουσιάζονται στο διάγραμμα 4.1. Συγκεκριμένα, η προσαρμογή των δεδομένων στη δομή του προτεινόμενου μοντέλου επιβεβαιώνει ότι τα έργα που χρησιμοποιήθηκαν αποτελούν κατάλληλα έργα μέτρησης των άδηλων παραγόντων και ότι οι τρεις παράγοντες, η αναστοχαστική σκέψη, η συστημική σκέψη και η αναλυτική σκέψη αναπαριστούν τρεις διαφορετικούς παράγοντες του τρόπου σκέψης των υποκειμένων ώστε να κατανοήσουν την έννοια του ορίου.



* Ο πρώτος αριθμός δείχνει το συντελεστή φόρτισης και ο αριθμός στην παρένθεση την αντίστοιχη ερμηνευμένη διασπορά (r^2)

Διάγραμμα 4.1 Το μοντέλο της θεωρητικής σκέψης για την έννοια του ορίου με βάση τα αποτελέσματα του πρώτου κύκλου της έρευνας

Ποια η Επίδραση της Τεχνολογίας στην Ανάπτυξη της Θεωρητικής Σκέψης των Μαθητών για την Έννοια του Ορίου

Για να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα μεταξύ πειραματικής ομάδας και ομάδας ελέγχου πραγματοποιήθηκε πολλαπλή ανάλυση διασποράς (MANOVA), στην οποία η επίδοση των υποκειμένων στα έργα των τριών κατηγοριών, αναστοχαστική σκέψη, συστημική σκέψη και αναλυτική σκέψη, στο δοκίμιο αξιολόγησης που χορηγήθηκε πριν από την παρεμβατική διδασκαλία χρησιμοποιήθηκαν ως εξαρτημένες μεταβλητές. Η ανάλυση έδειξε ότι δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των δύο ομάδων ως προς τους τρεις παράγοντες της θεωρητικής σκέψης (Pillai's_$F_{(1.66)} = 0.145, \underline{p} > 0.05$).

Για να εξεταστεί η επίδραση του παρεμβατικού προγράμματος διδασκαλίας στα αποτελέσματα της έρευνας διενεργήθηκε πολλαπλή ανάλυση διασποράς (MANCOVA). Τα αποτελέσματα της ανάλυσης έδειξαν ότι υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά στα έργα που χαρακτηρίστηκαν ως αναλυτική σκέψη (Pillai's_$F_{(1.50)} = 4.42, \underline{p} < 0.05$), για την πειραματική ομάδα, ενώ δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά για την ομάδα ελέγχου στα έργα που χαρακτηρίστηκαν ως αναστοχαστική σκέψη, στα έργα που χαρακτηρίστηκαν ως συστημική σκέψη και στα έργα που χαρακτηρίστηκαν ως αναλυτική σκέψη.

Ο πίνακας 4.1 παρουσιάζει τους μέσους όρους και τις τυπικές αποκλίσεις των μαθητών των δύο ομάδων στους παράγοντες οι οποίοι συνθέτουν την θεωρητική σκέψη για την έννοια του ορίου συνάρτησης. Λαμβάνοντας υπόψη ότι η αναλυτική σκέψη στοχεύει στην αναλυτική προσέγγιση συμβόλων και στη ανάπτυξη ειδικών αναπαραστατικών συστημάτων και εξειδικευμένης ορολογίας, φαίνεται ότι η χρήση της σύγχρονης τεχνολογίας κατά την διάρκεια του παρεμβατικού προγράμματος διδασκαλίας, έχει συμβάλει θετικά πολύ περισσότερο τους μαθητές της πειραματικής ομάδας στον να αποκτήσουν την αναλυτική σκέψη, ως ένα σημαντικό παράγοντα της θεωρητικής σκέψης για την έννοια του ορίου. Οι μαθητές της ομάδας ελέγχου, οι οποίοι διδάχθηκαν με την παραδοσιακή μέθοδο διδασκαλίας φαίνεται ότι υστερούν και στους τρεις παράγοντες ανάπτυξης της θεωρητικής σκέψης για την έννοια του ορίου συνάρτησης.

Πίνακας 4.1

Μέσοι Όροι και Τυπικές Αποκλίσεις των Μαθητών των Δύο Ομάδων στους Παράγοντες του Προτεινόμενου Μοντέλου

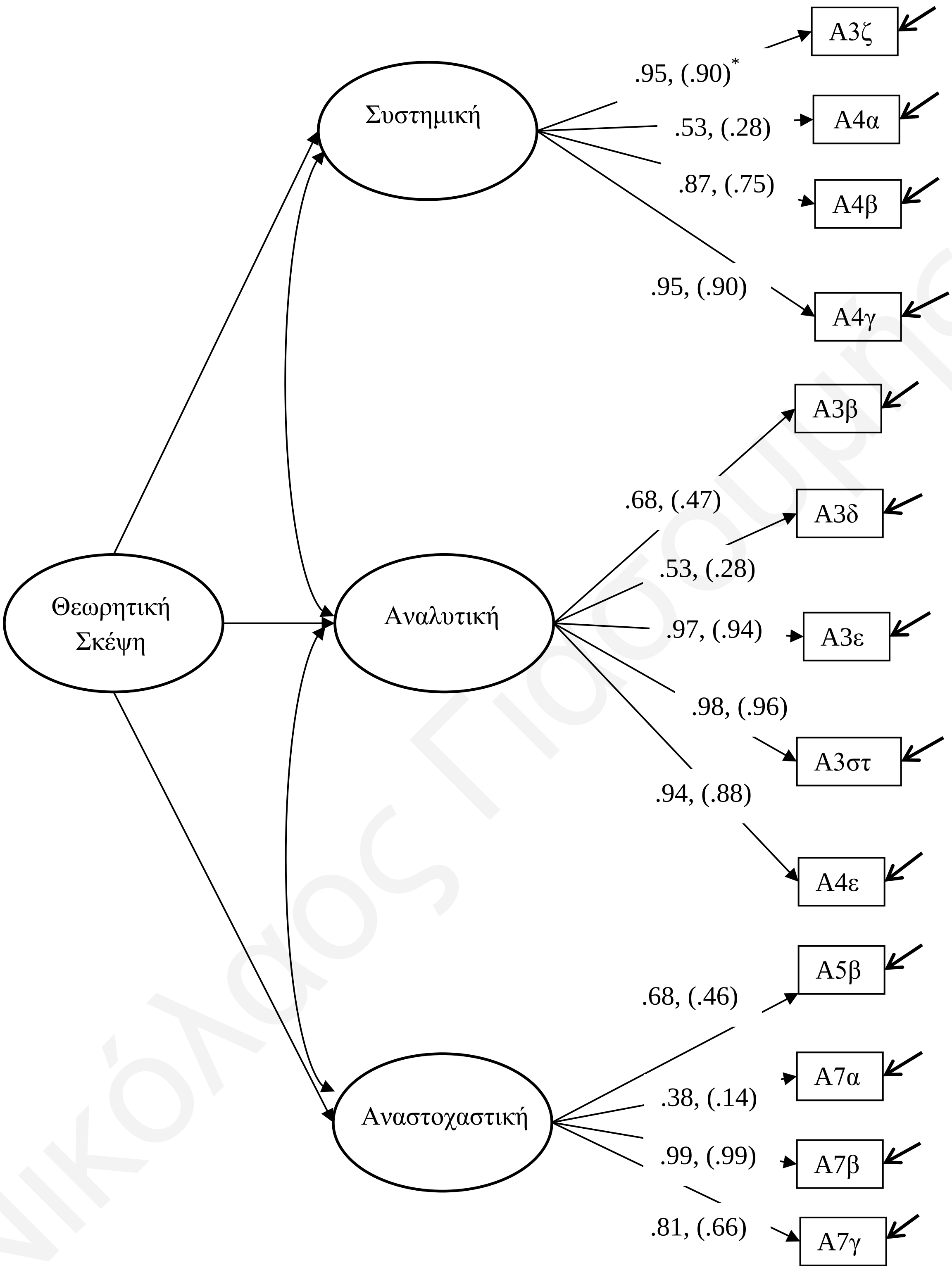
	Πειραματική Ομάδα (Αρχικό)		Ομάδα Ελέγχου (Αρχικό)		Πειραματική Ομάδα (Τελικό)		Ομάδα Ελέγχου (Τελικό)	
	Μ.Ο.	Τ.Α.	Μ.Ο.	Τ.Α.	Μ.Ο.	Τ.Α.	Τελικό	Τ.Α.
Αναστοχαστική	0.383	0.26	0.338	0.27	0.617	0.26	0.568	0.30
Συστημική	0.667	0.21	0.546	0.24	0.600	0.20	0.486	0.19
Αναλυτική	0.481	0.29	0.463	0.30	0.762	0.19	0.598	0.27

Δεύτερος Κύκλος Έρευνας

Χαρακτηριστικά Γνωρίσματα της Θεωρητικής Σκέψης για την Έννοια του Ορίου

Στο δεύτερο κύκλο της έρευνας χορηγήθηκε το δοκίμιο αξιολόγησης σε μεγαλύτερο πληθυσμό (35 υποκείμενα πειραματική ομάδα και 190 ομάδα ελέγχου) με στόχο να επανελεγχθεί η εγκυρότητα και η αξιοπιστία του μοντέλου θεωρητικής σκέψης για την έννοια του ορίου συνάρτησης. Το δοκίμιο αξιολόγησης ήταν το ίδιο με το δοκίμιο που χρησιμοποιήθηκε στον πρώτο κύκλο διεξαγωγής της έρευνας. Στο παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας έγιναν μικρές αλλαγές ως προς τον τρόπο που θα χρησιμοποιούνταν τα εφαρμογίδια στο παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας. Η ομάδα ελέγχουν στον δεύτερο κύκλο διεξαγωγής της έρευνας δούλεψε με τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας και μάθησης. Ο κάθε διδάσκοντας χρησιμοποίησε τα δικά του φύλλα εργασίας και το σχολικό εγχειρίδιο, σε αντίθεση με την ομάδα ελέγχου στον πρώτο κύκλο η οποία χρησιμοποίησε τα ίδια φύλλα εργασίας με την αντίστοιχη πειραματική ομάδα. Για να επανεξεταστούν τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα της θεωρητικής σκέψης που πρέπει να αναπτύξουν οι μαθητές ώστε να κατανοήσουν την έννοια του ορίου, ελέγχθηκε η εγκυρότητα του μοντέλου που υποθέτει ότι η θεωρητική σκέψη αποτελείται από τρεις διακριτούς παράγοντες, την αναστοχαστική σκέψη, την συστημική σκέψη και την αναλυτική σκέψη. Χρησιμοποιήθηκε το δοκίμιο μέτρησης (παράρτημα Α), το οποίο χορηγήθηκε πριν από και μετά την παρεμβατική διδασκαλία, τόσο στην πειραματική ομάδα (35 υποκείμενα), όσο και στην ομάδα ελέγχου (190 υποκείμενα).

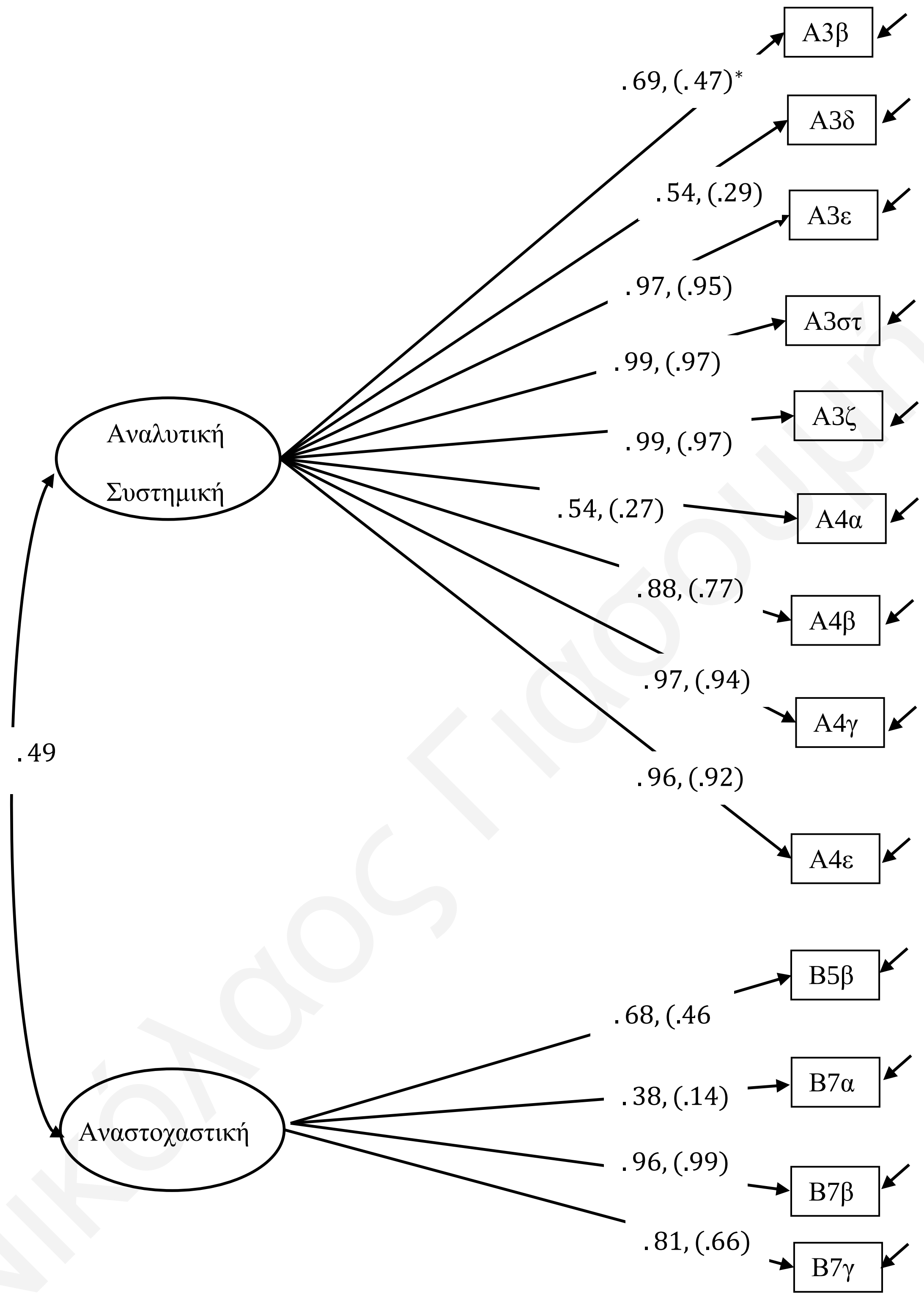
Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης, επιβεβαιώνουν την εγκυρότητα και την καταλληλότητα του μοντέλου ανάπτυξης της θεωρητικής σκέψης για την έννοια του ορίου συνάρτησης (CFI=.99, $x^2 = 141.10$, df = 62, $x^2/df = 2.28$, $p > 0.05$, $RMSEA = .011$). Όλα τα έργα είχαν στατιστικά σημαντικές φορτίσεις στους αντίστοιχους παράγοντες όπως παρουσιάζονται στο διάγραμμα 4.2. Η προσαρμογή των δεδομένων στη δομή του μοντέλου της θεωρητικής σκέψης επιβεβαιώνει ότι τα έργα μέτρησης που χρησιμοποιήθηκαν αποτελούν κατάλληλα έργα μέτρησης των άδηλων παραγόντων και ότι οι τρεις παράγοντες, η αναστοχαστική σκέψη, η συστημική σκέψη και η αναλυτική σκέψη αναπαριστούν τρεις διαφορετικούς παράγοντες του τρόπου σκέψης των υποκειμένων ώστε να κατανοήσουν την έννοια του ορίου. Παρά το γεγονός ότι οι δείκτες δείχνουν ικανοποιητική προσαρμογή του προτεινόμενου μοντέλου, η ψηλή συσχέτιση μεταξύ των παραγόντων αναλυτική σκέψη και συστημική σκέψη φαίνεται ότι είναι ένας παράγοντας. Το γεγονός αυτό οδήγησε στο να γίνει έλεγχος προσαρμογής για μοντέλο με δύο παράγοντες, τον παράγοντα αναλυτική – συστημική σκέψη και τον παράγοντα αναστοχαστική σκέψη. Επιπλέον ο τρόπος προσέγγισης της έννοιας του ορίου στο σχολικό εγχειρίδιο, όπου η έννοια του ορίου αντιμετωπίζεται διαδικαστικά και όχι μέσα από την θεωρητική δομή της έννοιας και χωρίς θεωρητικές αποδείξεις, καθώς και των διδακτικών προσεγγίσεων που ακολουθούνται με τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας, ήταν ένας επιπλέον λόγος, όπως εξεταστούν τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα της θεωρητικής σκέψης που πρέπει να αναπτύξουν οι μαθητές ελέγχοντας την εγκυρότητα ενός μοντέλου με δύο παράγοντες, την αναλυτική – συστημική σκέψη και την αναστοχαστική σκέψη. Χρησιμοποιήθηκε το δοκίμιο μέτρησης (παράρτημα Α), το οποίο χορηγήθηκε πριν από και μετά την παρεμβατική διδασκαλία, τόσο στην πειραματική ομάδα (35 υποκείμενα), όσο και στην ομάδα ελέγχου (190 υποκείμενα).



* Ο πρώτος αριθμός δείχνει το συντελεστή φόρτισης και ο αριθμός στην παρένθεση την αντίστοιχη ερμηνευμένη διασπορά (r^2)

Διάγραμμα 4.2 Το μοντέλο της θεωρητικής σκέψης για την έννοια του ορίου με βάση τα αποτελέσματα του δεύτερου κύκλου (πριν την παρέμβαση)

Για να ελεγχθεί η εγκυρότητα ενός μοντέλου το οποίο υποθέτει ότι η θεωρητική σκέψη της έννοιας του ορίου αποτελείται από δύο διακριτούς παράγοντες, τον παράγοντα αναλυτική – συστημική σκέψη και τον παράγοντα αναστοχαστική σκέψη πραγματοποιήθηκε επιβεβαιωτικλή παραγοντική ανάλυση.Τα αποτελέσματα της ανάλυσης, έδειξαν ότι οι δύο παράγοντες, η αναλυτική - συστημική σκέψη και η αναστοχαστική σκέψη, είναι δυνατόν να διαμορφώσουν την επίδοση των υποκειμένων στα έργα που εξετάζονται. Επίσης έδειξε ότι οι παράγοντες του μοντέλου συνάδουν με τα δεδομένα της παρούσας έρευνας και επιβεβαιώνουν την καταλληλότητα του παραγοντικού μοντέλου για να περιγράψει τη δομή της θεωρητικής σκέψης της έννοιας του ορίου (CFI=.99, $x^2 = 148.47$, df = 64, x^2/df $= 2.32$, $p > 0.05$, $RMSEA = .007$). Όλα τα έργα είχαν στατιστικά σημαντικές φορτίσεις στους αντίστοιχους παράγοντες, όπως παρουσιάζονται στο Διάγραμμα 4.3. Η προσαρμογή των δεδομένων στη δομή του προτεινόμενου μοντέλου επιβεβαιώνει ότι τα έργα μέτρησης που χρησιμοποιήθηκαν αποτελούν κατάλληλα έργα μέτρησης των άδηλων παραγόντων και ότι ο παράγοντας αναλυτική – συστημική σκέψη και ο παράγοντας αναστοχαστική σκέψη σχηματίζουν και προβλέπουν μια ανώτερη θεωρητική δομή την θεωρητική σκέψη της έννοιας του ορίου συνάρτησης.



*Ο πρώτος αριθμός δείχνει το συντελεστή φόρτισης και ο αριθμός στη παρένθεση την αντίστοιχη ερμηνευμένη διασπορά (r^2).

Διάγραμμα 4.3 Το μοντέλο, με δύο παράγοντες, της θεωρητικής σκέψης για την έννοια του ορίου με βάση τα αποτελέσματα του δεύτερου κύκλου (πριν την παρέμβαση)

Ο πίνακας 4.2 παρουσιάζει τις συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών που χρησιμοποιήθηκαν για τον έλεγχο της εγκυρότητας του μοντέλου. Οι μεταβλητές αντιστοιχούν στα 13 από τα έργα του δοκιμίου αξιολόγησης το οποίο χορηγήθηκε πριν από το παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας του δεύτερου κύκλου διεξαγωγής της έρευνας. Οι συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών των έργων του δοκιμίου αξιολόγησης το οποίο χορηγήθηκε πριν από το παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας του δεύτερου κύκλου διεξαγωγής της έρευνας, ήταν όλες στατιστικά σημαντικές. Συγκεκριμένα οι συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών των οκτώ έργων (Α3β, Α3δ, Α3στ, Α3ζ, Α4α, Α4β, Α4γ και Α4ε) τα οποία αφορούν τον παράγοντα αναλυτική – συστημική σκέψη, είναι όλες στατιστικά σημαντικές. Ιδιαίτερα ψηλή παρουσιάζεται η συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών των έργων Α3στ και Α3ζ που αφορούν την αναλυτική - συστημική σκέψη ($r = .874, p < 0.01$). Στα έργα αυτά οι μαθητές είχαν να υπολογίσουν το όριο μίας συνάρτησης, της οποίας δεν γνώριζαν τον τύπο, χρησιμοποιώντας την γραφική παράσταση της συνάρτησης. Στο έργο Α3στ η αριθμητική τιμή της συνάρτησης ήταν ίση με το όριο της συνάρτησης όταν το x τείνει στην τιμή αυτή, ενώ στο έργο Α3ζ, το όριο ήταν διαφορετικό από την αριθμητική τιμή της συνάρτησης. Αναφορικά με τις συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών των τεσσάρων έργων (Α5β, Α7α, Α7β και Α7γ) που αφορούν την αναστοχαστική σκέψη είναι στατιστικά σημαντικές αλλά με χαμηλότερες συσχετίσεις. Από αυτές την ψηλότερη συσχέτιση έχουν οι μεταβλητές των έργων Α5β και Α7β ($r = .396, p < 0.01$).

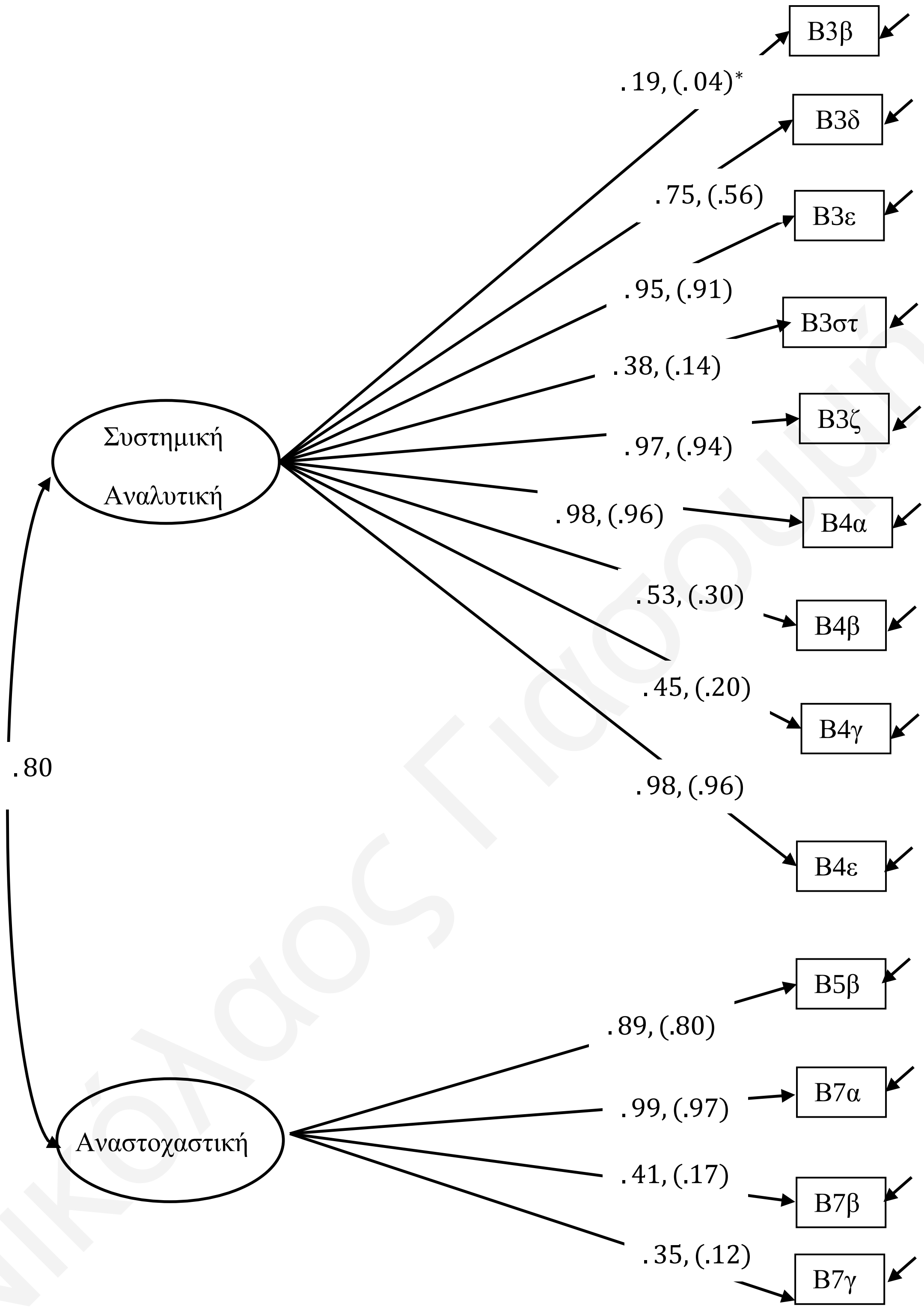
Πίνακας 4.2

Συσχετίσεις Μεταξύ της Επίδοσης των Υποκειμένων στα Έργα του Αρχικού Δοκιμίου Αξιολόγησης της Θεωρητικής Σκέψης της Έννοιας του Ορίου Συνάρτησης

	Α3β	Α3δ	Α3ε	Α3στ	Α3ζ	Α4α	Α4β	Α4γ	Α4ε	Α5β	Α7α	Α7β	Α7γ
Α3β	1												
Α3δ	,186**	1											
Α3ε	,339**	,091	1										
Α3στ	,429**	,135*	,838**	1									
Α3ζ	,393**	,087	,856**	,874**	1								
Α4α	,200**	,232**	,234**	,242**	,271**	1							
Α4β	,505**	,086	,484**	,470**	,441**	,210*	1						
Α4γ	,360**	,160*	,565**	,648**	,559**	,186**	,677**	1					
Α4ε	,349**	,119	,573**	,579**	,568**	,238**	,668**	,824**	1				
Α5β	,094	,224**	,040	,131	,090	,172**	,082	,063	,036	1			
Α7α	,095	,128	,045	,080	,082	,065	,084	,012	,002	,237**	1		
Α7β	,254**	,255**	,171*	,237**	,196**	,215**	,109	,124	,127	,396**	,103	1	
Α7γ	,138*	,198**	,137*	,196**	,157*	,136*	,142*	,151*	,126	,349**	,147*	,487**	1

*, $p < 0.05$: **, $p < 0.01$

Για τον έλεγχο αμεταβλητότητας του προτεινόμενου μοντέλου ελέγχθηκε η εγκυρότητα του στον ίδιο πληθυσμό (συνολικά 225 υποκείμενα, 35 υποκείμενα αποτελούν την πειραματική ομάδα και 190 υποκείμενα την ομάδα ελέγχου) αλλά με βάση τα δεδομένα του δοκιμίου αξιολόγησης το οποίο χορηγήθηκε μετά το τέλος του παρεμβατικού προγράμματος διδασκαλίας του δεύτερου κύκλου διεξαγωγής της έρευνας. Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης έδειξαν ότι η προσαρμογή των δεδομένων της δεύτερης μέτρησης στο προτεινόμενο μοντέλο ήταν ικανοποιητική (CFI=.98, $x^2 = 194.19$, df = 77, $x^2/df = 2.52$, $p > 0.05$, $RMSEA = .00$). Όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 4.4, όλα τα έργα είχαν στατιστικά σημαντικές φορτίσεις στους αντίστοιχους παράγοντες. Πριν από το παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας, ο βαθμός συσχέτισης των δύο παραγόντων του μοντέλου ανάπτυξης της θεωρητικής σκέψης των μαθητών για την έννοια του ορίου, του παράγοντα αναλυτική – συστημική σκέψη και του παράγοντα αναστοχαστική σκέψη, ήταν μέτριος (.49). Μετά το παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας ο βαθμός συσχέτισης των δύο παραγόντων έγινε πολύ ισχυρός (.80), στοιχείο το οποίο δηλώνει ότι οι δύο παράγοντες, ο παράγοντας αναλυτική – συστημική σκέψη και ο παράγοντας αναστοχαστική σκέψη, είναι πολύ στενά συνδεδεμένοι.



*Ο πρώτος αριθμός δείχνει το συντελεστή φόρτισης και ο αριθμός στη παρένθεση την αντίστοιχη ερμηνευμένη διασπορά (r^2).

Διάγραμμα 4.4. Το μοντέλο, με δύο παράγοντες, της θεωρητικής σκέψης για την έννοια του ορίου με βάση τα αποτελέσματα του δεύτερου κύκλου (μετά την παρέμβαση)

Ο πίνακας 4.3 παρουσιάζει τις συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών που χρησιμοποιήθηκαν για τον έλεγχο της εγκυρότητας του μοντέλου το οποίο αποτελείται από δύο παράγοντες. Οι μεταβλητές αντιστοιχούν στα 13 από τα έργα του δοκιμίου αξιολόγησης της έννοιας του ορίου συνάρτησης, το οποίο χορηγήθηκε μετά το παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας. Οι συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών των έργων του τελικού δοκιμίου αξιολόγησης της θεωρητικής σκέψης της έννοιας του ορίου συνάρτησης ήταν όλες στατιστικά σημαντικές. Ιδιαίτερα ψηλή παρουσιάζεται η συσχέτιση μεταξύ των έργων Β3ζ και Β4α που αφορούν την αναλυτική – συστημική σκέψη($r = .829, p < 0.01$). Στα έργα αυτά οι μαθητές είχαν δεδομένη τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, δεν γνώριζαν τον τύπο της συνάρτησης και είχαν να υπολογίσουν το όριο της συνάρτησης για συγκεκριμένες τιμές του x. Στο έργο Β3ζ είχαν να υπολογίσουν το όριο της συνάρτησης σε σημείο όπου η αριθμητική τιμή της συνάρτησης δεν ήταν ίση με το όριο της συνάρτησης στο σημείο αυτό ενώ στο έργο Β4α είχαν να υπολογίσουν το όριο συνάρτησης στο άκρο του πεδίου ορισμού της.

Πίνακας 4.3

Συσχετίσεις Μεταξύ της Επίδοσης των Υποκειμένων στα Έργα του Τελικού Δοκιμίου Αξιολόγησης της Θεωρητικής Σκέψης της Έννοιας του Ορίου Συνάρτησης

	B3β	B3δ	B3ε	B3στ	B3ζ	B4α	B4β	B4γ	B4ε	B5β	B7α	B7β	B7γ
B3β	1												
B3δ	,034	1											
B3ε	,035	,594**	1										
B3στ	,031	,147*	,122	1									
B3ζ	-,040	,436**	,724**	,153*	1								
B4α	,007	,404**	,733**	,089	,829**	1							
B4β	,091	,084	,109	,280**	,119	,088	1						
B4γ	-,014	,220**	,253**	,110	,210**	,225**	,149*	1					
B4ε	,062	,355**	,462**	,139*	,460**	,490**	,203**	,174**	1				
B5β	,089	,412**	,508**	,508**	,417**	,466**	-,018	,170*	,602**	1			
B7α	,096	,309**	,486**	,486**	,452**	,525**	,100	,147*	,731**	,638**	1		
B7β	-,059	,107	,175**	,175**	,139*	,222**	,043	,132*	,160*	,149*	,121	1	
B7γ	,138*	,044	,113	,113	,119	,110	,004	,043	,166*	,150*	,211**	,101	1

*, $p < 0.05$: **, $p < 0.01$

Ποια η Επίδραση της Τεχνολογίας στην Ανάπτυξη της Θεωρητικής Σκέψης των Μαθητών για την Έννοια του Ορίου

Για να εξεταστεί κατά πόσον υπάρχουν διαφορές στην επίδοση των μαθητών της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου στους παράγοντες αναλυτική – συστημική σκέψη και αναστοχαστική σκέψη στην αντίληψη της έννοιας του ορίου, πραγματοποιήθηκε πολλαπλή ανάλυση διασποράς (MANOVA). Η ανάλυση πραγματοποιήθηκε με βάση τα δεδομένα του δοκιμίου αξιολόγησης το οποίο χορηγήθηκε πριν από το παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας του δεύτερου κύκλου διεξαγωγής της έρευνας.

Ο πίνακας 4.4 παρουσιάζει τους μέσους όρους και τις τυπικές αποκλίσεις των μαθητών των δύο ομάδων στους παράγοντες οι οποίοι συνθέτουν την θεωρητική σκέψη για την έννοια του ορίου συνάρτησης.

Πίνακας 4.4

Μέσοι Όροι και Τυπικές Αποκλίσεις των Μαθητών των Δύο Ομάδων στους Παράγοντες της Αναλυτικής – Συστημικής Σκέψης και της Αναστοχαστικής Σκέψης στην Αντίληψη της Έννοιας του Ορίου στην Χορήγηση του Δοκιμίου Πριν Από την Παρεμβατική Διδασκαλία

Παράγοντας	Πειραματική Ομάδα		Ομάδα Ελέγχου	
	Μ.Ο.	Τ.Α.	Μ.Ο.	Τ.Α.
Αναλυτική - Συστημική	0,3365	0,29457	0,5287	0,31726
Αναστοχαστική	0,0381	0,10760	0,1298	0,26470

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης έδειξαν ότι υπάρχουν διαφορές μεταξύ των μαθητών της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου στην επίδοση τους στην έννοια του ορίου (Pillai's_$F_{(6.324)} = 0.054, \underline{p} < 0.05$). Όπως φαίνεται στο πίνακα 4.5, υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μαθητών της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου στους δύο παράγοντες που συνθέτουν την θεωρητική σκέψη για την έννοια του ορίου συνάρτησης. Ο μέσος όρος της ομάδας ελέγχου στα έργα τα οποία αφορούν την αναλυτική – συστημική σκέψη υπερβαίνει τον αντίστοιχο μέσο όρο της πειραματικής ομάδας, όπως και ο μέσος όρος της ομάδας ελέγχου στα έργα τα οποία αφορούν την αναστοχαστική σκέψη υπερβαίνει τον αντίστοιχο μέσο όρο της πειραματικής ομάδας.

Πίνακας 4.5

Αποτελέσματα Πολλαπλής Ανάλυσης Διασποράς

Πηγή Διακύμανσης	Άθροισμα Τετραγώνων	Βαθμοί Ελευθερίας	Μέσο Τετράγωνο	F	Επίπεδο Σημαντικότητας
Αναλυτική - Συστημική	1,091	1	1,091	11,07	p<0,01
Αναστοχαστική	0,249	1	0,249	4,06	p<0,05

Για να εξεταστεί η επίδραση του παρεμβατικού προγράμματος διδασκαλίας στα αποτελέσματα της έρευνας διενεργήθηκε πολλαπλή ανάλυση συνδιασποράς (MANCOVA). Τα αποτελέσματα της ανάλυσης έδειξαν ότι δεν υπάρχουν διαφορές μεταξύ των μαθητών της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου στην επίδοση τους στην έννοια του ορίου (Pillai's_$F_{(1.624)} = 0.199, \underline{p} > 0.05$).

Ο πίνακας 4.6 παρουσιάζει τους μέσους όρους και τις τυπικές αποκλίσεις των μαθητών των δύο ομάδων στους δύο παράγοντες του θεωρητικού μοντέλου.

Πίνακας 4.6

Μέσοι Όροι και Τυπικές Αποκλίσεις των Μαθητών των Δύο Ομάδων στους Παράγοντες της Αναλυτικής – Συστημικής Σκέψης και της Αναστοχαστικής Σκέψης στην Αντίληψη της Έννοιας του Ορίου .

Παράγοντας	Πειραματική Ομάδα		Ομάδα Ελέγχου	
	Μ.Ο.	Τ.Α.	Μ.Ο.	Τ.Α.
Αναλυτική - Συστημική	0,5566	0,22866	0,5222	0,25222
Αναστοχαστική	0,5786	0,26961	0,5500	0,29903

Όπως φαίνεται στον πίνακα 4.6, υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μαθητών της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου στους παράγοντες οι οποίοι συνθέτουν την θεωρητική σκέψη για την έννοια του ορίου συνάρτησης. Μετά την παρεμβατική διδασκαλία η διαφορά που υπήρχε κατά την αρχική μέτρηση απαλείφθηκε. Ο μέσος όρος της πειραματικής ομάδας στα έργα τα οποία αφορούν την αναλυτική – συστημική σκέψη υπερβαίνει τον αντίστοιχο μέσο όρο της ομάδας ελέγχου ($\text{ΜΟ}_{\text{ΠΟ}}$=0,5566, $\text{ΜΟ}_{\text{ΟΕ}}$=0,5222), όπως και ο μέσος όρος της πειραματικής ομάδας στα έργα τα οποία αφορούν την αναστοχαστική σκέψη υπερβαίνει τον αντίστοιχο μέσο όρο της ομάδας ελέγχου ($\text{ΜΟ}_{\text{ΠΟ}}$=0,5786, $\text{ΜΟ}_{\text{ΟΕ}}$=0,55).

Ύπαρξη Διακριτών Ομάδων Μαθητών οι Οποίες Αντιπροσωπεύουν τα Διαφορετικά Είδη Θεωρητικής Σκέψης

Για να εξεταστεί κατά πόσον υπάρχουν ομάδες υποκειμένων με παρόμοια συμπεριφορά ως προς τις ικανότητες τους πραγματοποιήθηκε ανάλυση Latent Class με βάση τη συνολική επίδοση των μαθητών στο δοκίμιο αξιολόγησης. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης έδειξαν ότι δημιουργείται ένα μοντέλο με τρεις κατηγορίες υποκειμένων (εντροπία= .92, AIC= -145.05 και BIC= -97.22). Η μέση τιμή πιθανότητας των υποκειμένων της κάθε κατηγορίας να ανήκουν στην κατηγορία που τους εντάσσει η ανάλυση (Average Latent Class Probabilities) με βάση το μοντέλο που δημιουργήθηκε, με τρεις κατηγορίες, ήταν αρκετά ικανοποιητική (δείτε Πίνακα 4.7).

Πίνακας 4.7

Μέση Τιμή Πιθανότητας Κάθε Κατηγορίας (Average Latent Class Probabilities)

Πιθανότητα να ανήκουν στην	Κατηγορία 1	Κατηγορία 2	Κατηγορία 3
Υποκ. Κατηγορίας 1	.944	.056	0
Υποκ. Κατηγορίας 2	.020	.920	.060
Υποκ. Κατηγορίας 3	0	.008	.992

Το ποσοστό των υποκειμένων της έρευνας που ανήκουν με βάση την ανάλυση ομάδων που πραγματοποιήθηκε στην Κατηγορία 1 ήταν 28% (64 υποκείμενα), στην Κατηγορία 2 ήταν 23% (52 υποκείμενα) και στην Κατηγορία 3 ήταν 49% (109 υποκείμενα).

Τα αποτελέσματα πολλαπλής ανάλυσης διασποράς έδειξαν ότι υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ της επίδοσης των μαθητών των τριών κατηγοριών στους παράγοντες αναλυτική – συστημική σκέψη και αναστοχαστική σκέψη οι οποίοι συνθέτουν το μοντέλο ανάπτυξης της θεωρητικής σκέψης για την έννοια του ορίου συνάρτησης. Ο πίνακας 4.8 παρουσιάζει τους μέσους όρους και τις τυπικές αποκλίσεις της επίδοσης των υποκειμένων των τριών κατηγοριών στους δύο παράγοντες του μοντέλου ανάπτυξης της θεωρητικής σκέψης της έννοιας του ορίου συνάρτησης.

Πίνακας 4.8

Μέσοι Όροι και Τυπικές Αποκλίσεις των Τριών Κατηγοριών Υποκειμένων στους Παράγοντες της Θεωρητικής Σκέψης της Έννοιας του Ορίου Συνάρτησης

Κατηγορία	Αναλυτική - Συστημική		Αναστοχαστική	
	Μ.Ο.	Τ.Α.	Μ.Ο.	Τ.Α.
Κατηγορία 1	.07	.088	.06	.163
Κατηγορία 2	.43	.098	.06	.158
Κατηγορία 3	.79	.090	.18	.306

Οι μαθητές που ανήκουν στην κατηγορία 1, τόσο στον παράγοντα αναλυτική – συστημική σκέψη όσο και στον παράγοντα αναστοχαστική σκέψη είχαν τις χαμηλότερες επιδόσεις.

Οι μαθητές της κατηγορίας 1, οι οποίοι αποτυγχάνουν στα έργα της αναλυτικής – συστημικής σκέψης, φαίνεται να αντιμετωπίζουν δυσκολίες στο να συνδέσουν την αλγοριθμική προσέγγιση υπολογισμού του ορίου συνάρτησης, με τον υπολογισμό του ορίου για διάφορες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής, όταν είναι δεδομένη η γραφική παράσταση της συνάρτησης. Αυτό έχει να κάνει με τη διαδικαστική αντίληψη της συνάρτησης. Βλέπουν την παράσταση ως ολότητα και ερμηνεύουν λάθος αυτό που διαβάζουν στη γραφική παράσταση. Η αρνητική εικόνα που παρουσιάζουν στα έργα της αναστοχαστικής σκέψης, φαίνεται να οφείλεται στο γεγονός ότι αντιμετωπίζουν δυσκολίες στο να συνδέσουν το όριο μιας συνάρτησης με το πότε ορίζεται μία συνάρτηση.

Στην κατηγορία 2 ανήκουν οι μαθητές με μεσαίες επιδόσεις στα έργα της αναλυτικής – συστημικής σκέψης, αλλά εξακολουθούν να έχουν πολύ χαμηλές επιδόσεις στα έργα της αναστοχαστικής σκέψης. Φαίνεται ότι ενώ αρχικά βλέπουν τη γραφική παράσταση ως ένα αντικείμενο καταλήγουν σε λάθος (διαβάζουν λάθος τη γραφική παράσταση). Στην συνέχεια όμως αντιλαμβάνονται την ορθή απάντηση μέσω της διαδικαστικής αντίληψης της συνάρτησης, έτσι είναι εφικτό να αιτιολογήσουν ορθά την απάντηση τους μέσω της γραφικής παράστασης. Ένα άλλο χαρακτηριστικό στοιχείο των μαθητών που κατατάσσονται στην κατηγορία 2, είναι ότι ενώ απαντούν ορθά με βάση τη γραφική παράσταση δεν μπορούν να το αποδείξουν με μαθηματικούς όρους.

Τέλος στην κατηγορία 3 κατατάσσονται οι μαθητές οι οποίοι είχαν τις ψηλότερες επιδόσεις τόσο στα έργα του παράγοντα αναλυτική – συστημική σκέψη, όσο και στα έργα του παράγοντα αναστοχαστική σκέψη. Η επίδοση των μαθητών στα έργα του παράγοντα αναστοχαστική σκέψη είναι μεν καλύτερη από τις άλλες ομάδες αλλά παραμένει χαμηλή σε αντίθεση με την επίδοση στον παράγοντα αναλυτική – συστημική σκέψη η οποία είναι υψηλή. Είναι οι μαθητές οι οποίοι δεν έχουν μείνει μόνο στη διαδικαστική αντίληψη της έννοιας του ορίου, αλλά έχουν αναπτύξει και την εννοιολογική κατανόηση της έννοιας του ορίου. Στο σημείο αυτό φαίνεται η συνεισφορά του δυναμικού μοντέλου ανάπτυξης της θεωρητικής σκέψης μέσα από την χρήση της τεχνολογίας κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας της έννοιας του ορίου συνάρτησης.

Τρίτος Κύκλος Έρευνας

Πως Ερμηνεύεται ο Συλλογισμός των Μαθητών σε Έργα Υπολογισμού του Ορίου Συνάρτησης με Βάση τα Είδη Σκέψης που Προέκυψαν από το Μοντέλο

Στον τρίτο κύκλο διεξαγωγής της έρευνας έγινε επανασχεδιασμός του παρεμβατικού προγράμματος διδασκαλίας. Η παρέμβαση περιορίστηκε στη μελέτη του ορίου συνάρτησης όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή τείνει σε πραγματικό αριθμό. Το δοκίμιο αξιολόγησης στο βασικό του κορμό ήταν το ίδιο με το δοκίμιο που χορηγήθηκε στους δύο προηγούμενους κύκλους. Οι αλλαγές ήταν προς την κατεύθυνση του υπολογισμού του ορίου συνάρτησης όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή τείνει σε πραγματικό αριθμό. Το δοκίμιο αξιολόγησης δόθηκε πριν από την παρεμβατική διδασκαλία του τρίτου κύκλου διεξαγωγής της έρευνας. Μετά το παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας και την προκαταρκτική μελέτη των αποτελεσμάτων του δοκιμίου αξιολόγησης το οποίο χορηγήθηκε πριν από την παρεμβατική διδασκαλία, έγιναν αλλαγές σε ορισμένα από τα έργα του δοκιμίου. Το νέο δοκίμιο χορηγήθηκε μετά το πέρας της παρεμβατικής διδασκαλίας. Με βάση τα αποτελέσματα ποσοτικά και ποιοτικά του δοκιμίου αξιολόγησης το οποίο δόθηκε μετά το τέλος της παρεμβατικής διδασκαλίας, και για να μελετηθεί ο συλλογισμός των μαθητών σε έργα υπολογισμού του ορίου συνάρτησης με βάση τα είδη σκέψης που προέκυψαν από το μοντέλο, οργανώθηκαν κλινικές συνεντεύξεις. Τα υποκείμενα τα οποία έλαβαν μέρος στις κλινικές συνεντεύξεις επελέγησαν με κριτήριο τις απαντήσεις τους στο δοκίμιο αξιολόγησης της έρευνας το οποίο χορηγήθηκε μετά το τέλος του παρεμβατικού προγράμματος διδασκαλίας.

Ο πίνακας 4.9 παρουσιάζει τα περιγραφικά στατιστικά του δοκιμίου αξιολόγησης το οποίο χορηγήθηκε πριν από το παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας και του δοκιμίου αξιολόγησης που χορηγήθηκε μετά το παρεμβατικό πρόγραμμα στα 42 υποκείμενα τα οποία αποτελούσαν την πειραματική ομάδα της τελευταίας φάσης διεξαγωγής της έρευνας (τα έργα με πρόθεμα Α, είναι έργα του δοκιμίου που χορηγήθηκε πριν από το παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας και με πρόθεμα Β, τα έργα του δοκιμίου που χορηγήθηκε μετά την παρεμβατική διδασκαλία).

Πίνακας 4.9

Περιγραφικά Χαρακτηριστικά Δοκιμίων Αξιολόγησης Τρίτου Κύκλου

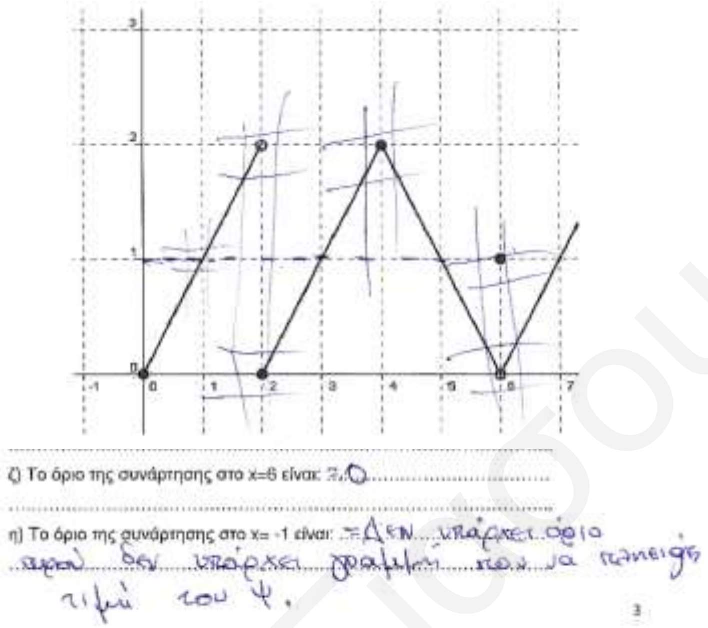
Έργο	Μ.Ο	Τ.Α.
Α4β	,595	,4968
Α4δ	,524	,5055
Α4ε	,571	,5009
Α4στ	,548	,5038
Α4ζ	,476	,5055
Α5α	,643	,4850
Α5γ	,024	,1543
Α5ε	,524	,5055
Α6β	,476	,5055
Α7α	,143	,3542
Α7γ	,524	,5055
Β4β	1,381	,6228
Β4δ	1,381	,5824
Β4ε	1,524	,5055
Β4στ	1,429	,5903
Β4ζ	,690	,7486
Β5α	1,405	,5868
Β5γ	1,095	,7905
Β5ε	1,381	,6608
Β6α	1,381	,7636
Β6β	,548	,5038
Β6γ	,786	,4153

Πιο κάτω παρατίθενται χαρακτηριστικά αποσπάσματα συνεντεύξεων των μαθητών.

Ο μαθητής Μ1 στην ερώτηση 4η όπου είχε να υπολογίσει το όριο της συνάρτησης στο $x = -1$, απάντησε ότι δεν υπάρχει το όριο αφού δεν υπάρχει γραμμή που να πλησιάζει τιμή του y όπως φαίνεται και στην εικόνα 4.1.

Ερευνητής (Ε): Στο $x = 6$ υπάρχει το όριο και είναι 0 και υπάρχει και γραμμή, δηλαδή είναι προϋπόθεση να υπάρχει γραμμή για να υπάρχει το όριο;

Μαθητής (1) (Μ1): Ναι υπάρχει το όριο, δηλαδή κουκκίδα γεμισμένη, δηλαδή παίρνει εκείνη την τιμή.



Εικόνα 4.1. Η απάντηση του μαθητή Μ1 στο ερώτημα 4γ

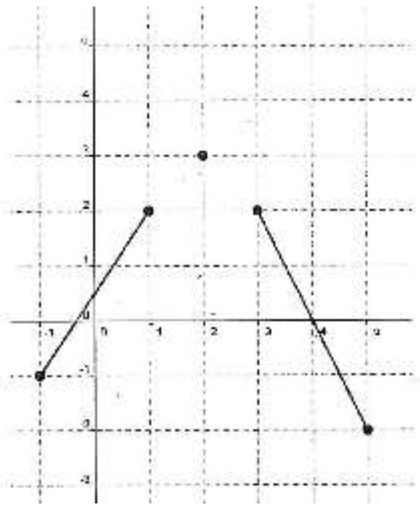
Παρατίθεται επίσης η απάντηση του μαθητή Μ1 στην ερώτηση 5γ όπου είχε να υπολογίσει το όριο της συνάρτησης στο $x = 2$ και απάντησε ότι δεν υπάρχει όριο αφού δεν υπάρχει γραμμή στη γραφική παράσταση, όπως φαίνεται στην εικόνα 4.2.

Ε: Υπάρχει ή δεν υπάρχει το όριο στο $x = 2$;

Μ1: Ναι και είναι 3

Ε: Ποια είναι η προϋπόθεση για να υπάρχει το όριο;

Μ1: Δεν ξέρω.



γ) Το όριο της συνάρτησης στο x=2 είναι: ...Δεν.....υπάρχει όριο
...αφού.....δεν υπάρχει γραμμή στην γραφική παράσταση
δ) Το όριο της συνάρτησης στο x=3 είναι: ...2..... για x που πλησιάζει
......το......3...το....f...πλησιάζει....στο 2..........

Ο μαθητής Μ1, μέσα από τις απαντήσεις του φαίνεται ότι ενώ διαβάζει σωστά τη γραφική παράσταση δεν μπορεί να αιτιολογήσει την απάντηση του. Υστερεί στην ορθή χρήση μαθηματικής ορολογίας στην ερμηνεία της γραφικής παράστασης και υποστήριξης της απάντησης του. Φαίνεται ότι ο μαθητής αυτός μπορεί να ερμηνεύει γραφικές παραστάσεις δηλαδή χωρίς να μπορεί να αιτιολογεί την σκέψη του, βρίσκεται δηλαδή στο στάδιο της αναλυτικής – συστημικής σκέψης χωρίς να το έχει κατακτήσει στην ολότητα του, αλλά ούτε μπορεί να προχωρήσει στη σε βάθος κατανόηση της έννοιας του ορίου, άρα δεν μπορεί να αναπτύξει την αναστοχαστική σκέψη

Οι μαθητές με μεσαίες επιδόσεις στα έργα των δοκιμίων αξιολόγησης, φαίνεται ότι ενώ αρχικά βλέπουν τη γραφική παράσταση ως ένα αντικείμενο, στη συνέχεια αντιλαμβάνονται το λάθος τους. Αυτό έχει να κάνει όχι μόνο με την γνώση την οποία έχουν κατακτήσει αλλά και με το γεγονός ότι οι μαθητές υστερούν στον τρόπο έκφρασης τους. Όταν θα πρέπει να αιτιολογήσουν λεκτικά την απάντηση τους δεν είναι πάντοτε ικανοί να εκφραστούν ορθά χρησιμοποιώντας την ενδεδειγμένη μαθηματική ορολογία. Χαρακτηριστική είναι η απάντηση του μαθητή (Μ2) στο πιο κάτω απόσπασμα:

Ε: Στην ερώτηση 4α, έχεις να υπολογίσεις το όριο της συνάρτηση στο $x = 0$ και έδωσες την απάντηση 0^+, $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ (εικόνα 4.2). Πως αντιλαμβάνεσαι το 0^+ ,τι εννοείς λέγοντας 0^+.

Μ2: 0^+….. από τη δεξιά πλευρά, δηλαδή των θετικών, δηλαδή $0{,}001$, προς το θετικό ημιάξονα, τείνει οσοδήποτε κοντά σε αυτό το κομματάκι.

Ε: Είπες ότι είναι 0^+ επειδή τείνει δεξιά.

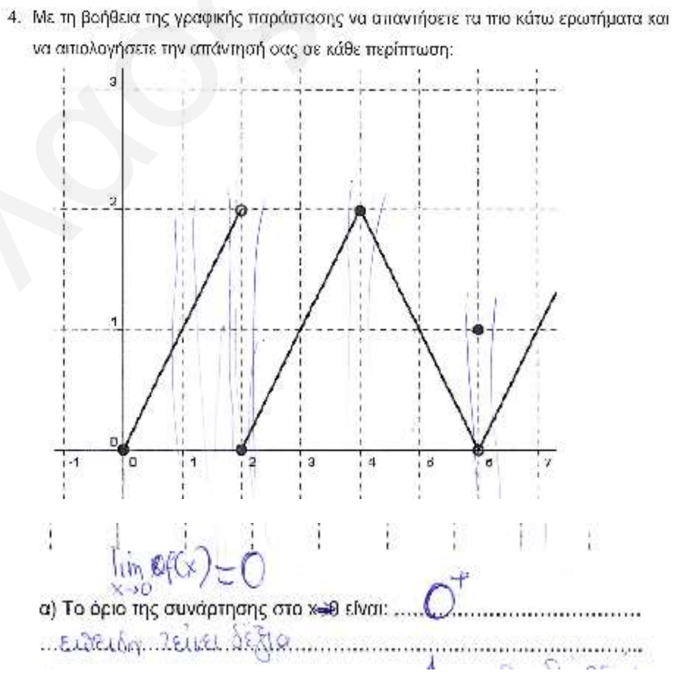
Μ2. Επειδή από τη γραφική παράσταση παίρνει τιμές μόνο δεξιά δηλαδή $0{,}1$, από θετικές τιμές στο δεξιό τμήμα.

Ε: Τι σημαίνει όριο όταν το x τείνει στο 0 και τι όταν τείνει στο 0^+.

Μ2. Όταν το x τείνει στο 0^+ παίρνει τις θετικές τιμές του 0 δηλαδή $0{,}0001$…Όταν τείνει στο 0 σημαίνει ότι παίρνει τιμές και από 0^+ και από 0^-.

Ε: Εδώ που λέγεις ότι υπάρχει το όριο στο 0, εγώ ισχυρίζομαι ότι στο 0 δεν υπάρχει διότι παίρνει τιμές μόνο από τη μια πλευρά.

Μ2: Εγώ έλεγξα αν υπάρχει από τα δεξιά, το αρνητικό δεν το πιάνει διότι έτσι λέει η γραφική παράσταση.



Εικόνα 4.3. Η απάντηση του μαθητή (Μ2) στην ερώτηση 4α.

Ε: Στην ερώτηση 5γ έχεις να υπολογίσεις το όριο της συνάρτησης στο $x = 2$ και απάντησες ότι δεν υπάρχει (εικόνα 4.4). Πως αντιλαμβάνεσαι ότι δεν υπάρχει συνάρτηση στο $x = 2$;

Μ2: Βασικά το κατάλαβα από τη γραφική παράσταση, απλώς υπάρχει ένα σημείο.

Ε: Το οποίο σημείο τι είναι, πως προέκυψε;

Μ2: Όταν βάλω στη συνάρτηση το $x = 2$ βγάζω $y = 3$

Ε: Υπάρχει ή όχι συνάρτηση εκεί;

Μ2: Πιθανότατα να είχα κάνει λάθος.

Ε: Στην Ερώτηση 5α, όπου έχεις να υπολογίσεις το όριο της συνάρτησης στο $x = -1$, είπες ότι τείνει δεξιά, άρα $\lim_{x \to -1} f(x) = -1$. Πως υπολόγισες το όριο στο $x = -1$;

Μ2: Υπάρχει συνάρτηση, δεν έλεγξα τα πλευρικά όρια, τείνει δεξιά, όπως το 0^+ που είδαμε πιο πάνω (στην ερώτηση 4).

Ε: Τείνει δεξιά, δηλαδή αποκλίνει

Μ2: Δεν αποκλίνει, παίρνει τιμές από τη δεξιά πλευρά.

Ε: Όταν λες τείνει δεξιά ή αριστερά, τι σημαίνει για σένα αυτό.

Μ2: Πλησιάζει οσοδήποτε στις τιμές αυτές.

Ε: Εγώ αντιλαμβάνομαι ότι ξεκινά από ένα σημείο και πάει δεξιότερα του σημείου αυτού.

Μ2: Παίρνει τις τιμές δεξιότερα.

Ε: Όταν τείνει αριστερά τι σημαίνει.

Μ2: Δεν παίρνει τιμές από αριστερά.

Ε: Στο $x = 5$ υπάρχει το όριο ή όχι;

Μ2: Υπάρχει συνάρτηση και υπάρχει και το όριο.

Ε: Στόχος είναι να υπάρχει συνάρτηση;

Απ. Βασικά το όριο είναι κάτι το οποίο εμείς το προσεγγίζουμε.

Ε: Στην ερώτηση 5, όταν το x τείνει στο -1 έβαλες -1^+, ενώ στο 4α έβαλες 0, είναι κάτι διαφορετικό;

Μ2: Βασικά οι δύο περιπτώσεις μοιάζουν μεταξύ τους, είναι οι ίδιες οι περιπτώσεις. Έτσι δεν είναι το τυπικό να το γράφουμε;

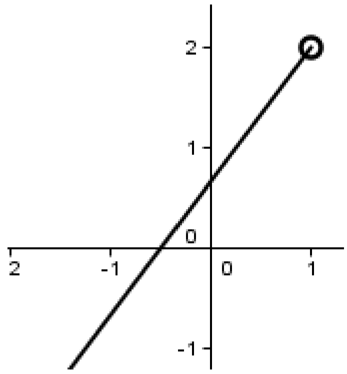
Ε: Στο $5\sigma\tau$, όταν το x τείνει στο 5 είπες ότι ελέγχεις το όριο στο 5^-, έχεις μόνο στο 5^- όριο ή το όριο υπάρχει όταν τείνει στο 5;

Μ2: Στο 5^{-} έχω αρνητικές τιμές, όταν το όριο τείνει στο 5 θα παίρνει αρνητικές στο 5.

Ε: Όταν το x τείνει στο 1, υπάρχει το όριο και γιατί;

Μ2: Επειδή το κυκλάκι είναι μαύρο και παίρνει τη τιμή.

Ε: Στο σχήμα που σου δίνω το $\lim_{x \to 1} f(x)$ υπάρχει;



Μ2: Υπάρχει το όριο, αλλά δεν πιάνει την τιμή του 2.

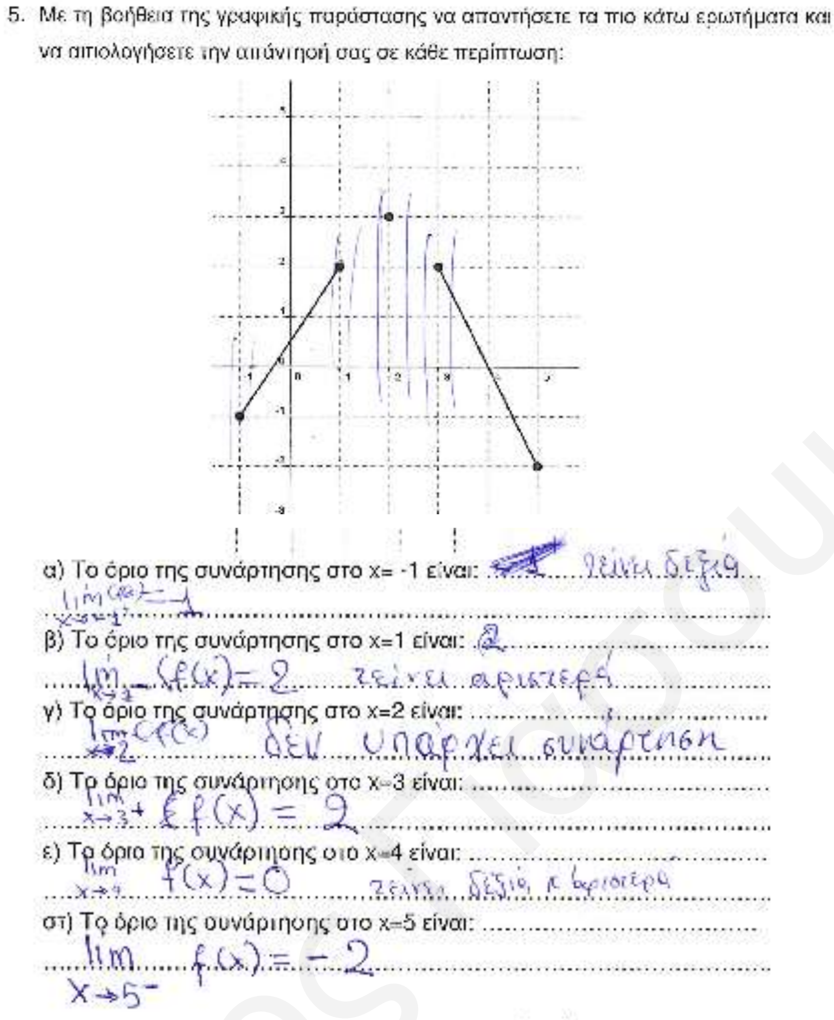
Ε: Ποιος δεν πιάνει την τιμή 2, το όριο;

Μ2: Όχι η συνάρτηση δεν είναι 2.

Ε: Το όριο πόσο είναι;

Μ2: Είναι 2 αλλά το $f(1) \neq 2$.

Ο μαθητής Μ2, μέσα από τις απαντήσεις του φαίνεται ότι είναι ικανός να μεταφράζει σωστά τις γραφικές παραστάσεις και να υπολογίζει το όριο της συνάρτησης για τις διάφορες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής. Ενώ αρχικά δεν αιτιολογεί πλήρως την απάντηση του, μέσα από την συζήτηση αιτιολογεί ορθά και εκεί που αμφισβητούσε την ορθότητα των απαντήσεων του έρχεται να επανορθώσει. Ο μαθητής Μ2 φαίνεται να έχει αναπτύξει την αναλυτική – συστημική σκέψη, αλλά το ότι αμφισβητεί σε κάποιο σημείο την απάντηση που έχει δώσει, υποδηλώνει ότι δεν έχει κατανοήσει σε βάθος την έννοια του ορίου, χαρακτηριστικό στοιχείο του γεγονότος ότι δεν έχει αναπτύξει την αναστοχαστική σκέψη.



5. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να απαντήσετε τα πιο κάτω ερωτήματα και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση:

α) Το όριο της συνάρτησης στο x= -1 είναι: τείνει δεξιά
$\lim_{x\to -1^+} f(x) = -1$

β) Το όριο της συνάρτησης στο x=1 είναι: 2
$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$ τείνει αριστερά

γ) Το όριο της συνάρτησης στο x=2 είναι:
$\lim_{x\to 2} f(x)$ δεν υπάρχει συνάρτηση

δ) Το όριο της συνάρτησης στο x=3 είναι:
$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 2$

ε) Το όριο της συνάρτησης στο x=4 είναι:
$\lim_{x\to 4} f(x) = 0$ τείνει δεξιά κ αριστερά

στ) Το όριο της συνάρτησης στο x=5 είναι:
$\lim_{x\to 5^-} f(x) = -2$

Εικόνα 4.4. Η απάντηση του μαθητή (Μ2) στην ερώτηση 5.

Επίσης οι μαθητές με μεσαίες επιδόσεις απαντούν ορθά με βάση την γραφική παράσταση, δεν μπορούν να το αποδείξουν με μαθηματικούς όρους. Χαρακτηριστική είναι η συνέντευξη του μαθητή Μ3:

Ε: Στην ερώτηση 5α, όπου έχει να υπολογίσεις το όριο της συνάρτησης στο $x = -1$, απάντησες -1^+, $\lim_{x\to -1^+} f(x) = -1$. Γιατί -1;

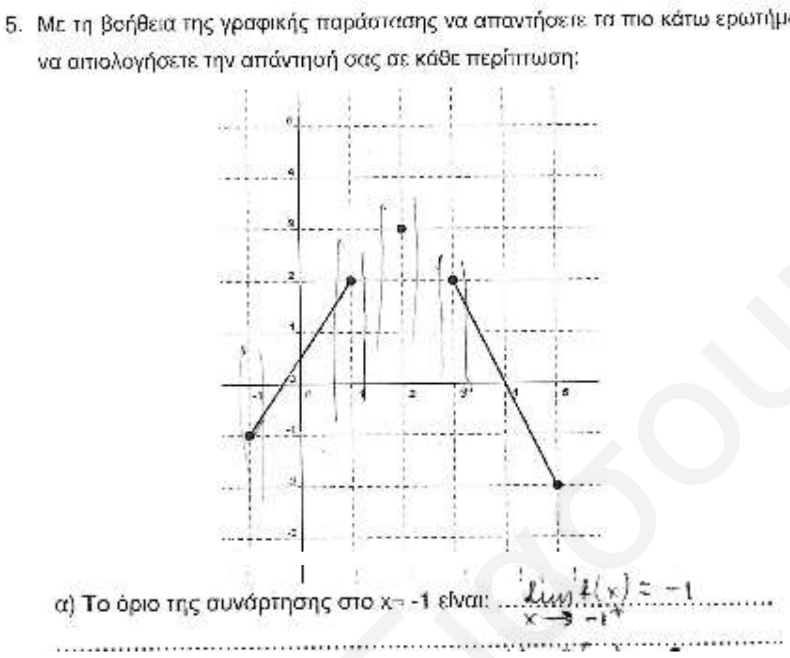
Μ3: Πλησιάζοντας το -1 από τα θετικά, δηλαδή από τιμές μεγαλύτερες από το -1 έχω ότι το y τείνει στο -1.

Ε: Στο $x = 1$ τι παρατηρούμε;

Μ3: Όταν πλησιάζω το $x = 1$ το y τείνει στο 2.

Ε: Ενώ στο 2;

Μ3: Δεν υπάρχει το όριο, γιατί πλησιάζοντας το 2 και από τιμές μικρότερες αλλά και από τιμές μεγαλύτερες δεν έχω συνάρτηση αλλά έχω μόνο μια τελεία στο 2.



Εικόνα 4.4. Απάντηση του μαθητή Μ3

Ο τρόπος με τον οποίο απαντά ο μαθητής Μ3, δείχνει ότι έχει αναπτύξει την αναλυτική – συστημική σκέψη, αλλά το γεγονός ότι δεν αποδίδει την απάντηση του με μαθηματικούς όρους επιβεβαιώνει ότι δεν έχει αναπτύξει την αναστοχαστική σκέψη, βασικά δεν έχει κατανοήσει σε βάθος την έννοια του ορίου αλλά και δεν την έχει συνδέσει με άλλες μαθηματικές έννοιες, όπως για παράδειγμα η ύπαρξη του μεμονωμένου σημείου στη συγκεκριμένη γραφική παράσταση και αν έχει σημασία να υπολογίσω το όριο της συνάρτηση στο σημείο αυτό.

Τέλος οι μαθητές με τις ψηλότερες επιδόσεις στα έργα και των δύο παραγόντων δεν έχουν μείνει μόνο στη διαδικαστική αντίληψη της έννοιας του ορίου, αλλά έχουν αναπτύξει και την εννοιολογική κατανόηση της έννοιας του ορίου. Χαρακτηριστική είναι η συνέντευξη του μαθητή Μ4:

Ε: Στην ερώτηση 4α, έχεις να υπολογίσεις το όριο της συνάρτησης στο $x = 0$ και έδωσες την απάντηση 0 από τα δεξιά. Πως αντιλαμβάνεσαι το 0 από τα δεξιά;

M4: Από τα θετικά, εννοώ από το θετικό άξονα είναι 0.

Ε: Στην ερώτηση 4δ έχεις να υπολογίσεις το όριο της συνάρτησης στο $x = 3$ και είπες ότι είναι 1 και από τις δύο πλευρές. Τι σημαίνει 1 και από τις δύο πλευρές;

M4: Και από τον θετικό άξονα και από τον αρνητικό.

Ε:Στο 3 έχεις αρνητικές τιμές για το x;

M4: Είναι 1 και από τις δύο πλευρές.

Ε: Τι εννοείς και από τις δύο πλευρές;

M4: Και από τον θετικό άξονα και από τον αρνητικό άξονα.

Ε: Εννοείς $-3, +3$ ή $3^-, 3^+$;

M4: 3^-

Ε: Τι σημαίνει 3^-;

M4: Πλησιάζει το 3 από τους αρνητικούς αριθμούς.

Ε: Δηλαδή από το $-10, -5\ , -4$, ...;

M4: ……………….

Ε: Είσαι πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών και λέγεις ότι πλησιάζεις το 3^-

M4: Ένα κομμάτι με μικρότερους αριθμούς.

Ε: Όλοι οι αριθμοί που είναι μικρότεροι του 3;

M4: Κοντά στο 3 μόνο, πολύ κοντά στο 3.

Ε: Επανέρχομαι στο πρώτο μου ερώτημα, τι σημαίνει για σένα είναι μηδέν από δεξιά;

M4: Όταν πηγαίνεις από τους θετικούς αριθμούς στο σημείο που σου λέει.

Ε: Ενώ και από τις δύο πλευρές;

M4: Και από τους θετικούς και τους αρνητικούς.

Ε: Στην ερ. 4α υπήρχε περίπτωση να είναι μηδέν από τα αριστερά;

M4: Όχι διότι η συνάρτηση ξεκινά από το μηδέν.

Ε: Στο 4δ τι εννοείς και από τις δύο πλευρές.

M4: Εννοώ ότι πάει στο 3 από τους αρνητικούς αριθμούς

Ε: Έχουμε στο 3 αρνητικούς αριθμούς;

M4: Όχι δεν έχουμε αρνητικούς.

Ε: Πως συμβολίζω ότι πάει στο 3 από τα αριστερά;

M4: 3^-

Ε: Τι σημαίνει 3^{-}, πες μου ένα αριθμό.

Μ4: 2,99

Ε: Ενώ για το 3^{+}.

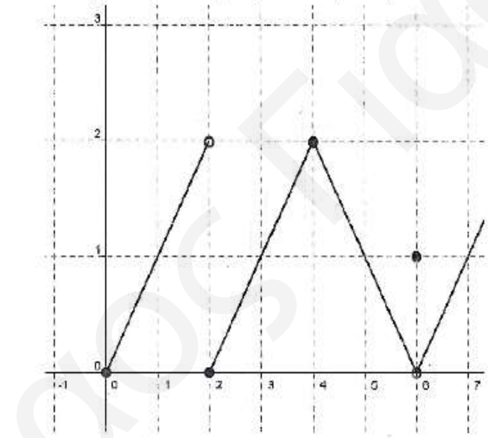
Μ4: 3,01

Ε: Λέγεις ότι το όριο είναι ίσο με 1, γιατί;

Μ4: Διότι η τιμή που θα πάρει η συνάρτηση για αριθμούς μικρότερους από το 3 είναι 1 και αριθμούς μεγαλύτερους από το 3 πάλιν είναι στο 1.

Ε: Ενώ όταν το x τείνει στο 2 τι παρατηρείς, γιατί δεν υπάρχει το όριο;

Μ4: Όταν πάει από αριθμούς μεγαλύτερους από το 2, επειδή έχει δύο σημεία, το 2 και το 0 δεν συμφωνεί…, όταν πας από τους μεγαλύτερους του 2 είναι το 0 ενώ από μεγαλύτερους του 2 είναι το 2, άρα δεν συμφωνούν.


4. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να απαντήσετε τα πιο κάτω ερωτήματα και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση:

α) Το όριο της συνάρτησης στο x=0 είναι: 0 ....

β) Το όριο της συνάρτησης στο x=1 είναι: 1 ....

γ) Το όριο της συνάρτησης στο x=2 είναι: ....

δ) Το όριο της συνάρτησης στο x=3 είναι: 1 ....

ε) Το όριο της συνάρτησης στο x=4 είναι: 2 ....

στ) Το όριο της συνάρτησης στο x=5 είναι: 1 ....

ζ) Το όριο της συνάρτησης στο x=6 είναι: 0 ....

η) Το όριο της συνάρτησης στο x= -1 είναι: ....

Εικόνα 4.6. Απάντηση του μαθητή Μ4

Ο μαθητής Μ4, φαίνεται ότι είναι σε θέση να μεταφράζει ορθά τις γραφικές παραστάσεις και να τις συνδέει με την έννοια του ορίου, χαρακτηριστικό στοιχείο ότι έχει αναπτύξει την αναλυτική – συστημική σκέψη για την έννοια του ορίου. Επίσης το γεγονός ότι μέσα από τις απαντήσεις του φαίνεται ότι έχει προχωρήσει σε βάθος κατανόηση της έννοιας του ορίου υποδηλώνει ότι έχει αναπτύξει την αναστοχαστική σκέψη για την έννοια του ορίου. Το παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας φαίνεται να έχει βοηθήσει στην ανάπτυξη της θεωρητικής σκέψης των μαθητών και επιβεβαιώνετε η θετική επίδραση της χρήσης της τεχνολογίας στη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Εισαγωγή

Η έννοια του ορίου διαδραματίζει ένα πολύ σημαντικό ρόλο στα μαθηματικά. Κατέχει δεσπόζουσα θέση (Cotrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf, Thomas και Vidakovic, 1996) στην κατανόηση των ανώτερων μαθηματικών, γιατί υπεισέρχεται στο σύνολο της Μαθηματικής Ανάλυσης ως θεμέλιο της θεωρίας των διαδοχικών προσεγγίσεων, της συνέχειας, του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού (Ferrini-Mundy & Lauten, 1993; Tall, 1992).

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν η ανάπτυξη ενός θεωρητικού μοντέλου που να περιγράφει την θεωρητική σκέψη στην έννοια του ορίου συνάρτησης, των μαθητών της Β′ Λυκείου με κατεύθυνση μαθηματικά. Συγκεκριμένα οι στόχοι της εργασίας ήταν (α) η ανάπτυξη ενός μοντέλου θεωρητικής σκέψης που να συμβάλλει στην κατανόηση του ορίου από μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, (β) η επιβεβαίωση και η αξιολόγηση του μοντέλου αυτού με εμπειρικά δεδομένα από μαθητές της Β΄ Λυκείου, (γ) η επίδραση της τεχνολογίας στην ανάπτυξη της θεωρητικής σκέψης των μαθητών για την έννοια του ορίου και (δ) η ανάπτυξη και αξιολόγηση ενός παρεμβατικού προγράμματος διδασκαλίας της έννοιας του ορίου με βάση το προτεινόμενο μοντέλο θεωρητικής σκέψης και της ενσωμάτωσης της τεχνολογίας. Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της εργασίας με έμφαση στην ανάλυση του θεωρητικού μοντέλου της εργασίας για την θεωρητική σκέψη του μαθητή για την έννοια του ορίου συνάρτησης. Στην συνέχεια παρουσιάζονται και συζητούνται εκπαιδευτικές εφαρμογές του μοντέλου και τέλος γίνονται εισηγήσεις για περαιτέρω έρευνες με στόχο τη βελτίωση και την επέκταση των αποτελεσμάτων της παρούσας εργασίας.

Συνοπτική Περιγραφή Μοντέλου

Τα αποτελέσματα της εργασίας έδειξαν ότι η θεωρητική σκέψη των μαθητών στην έννοια του ορίου συνάρτησης αναλύεται σε δύο παράγοντες, στην αναλυτική – συστημική σκέψη και την αναστοχαστική σκέψη. Ο παράγοντας αναλυτική – συστημική σκέψη, όπως προκύπτει από τα δεδομένα της έρευνας, αφορά στην ικανότητα των μαθητών να μπορούν να χρησιμοποιούν πολλαπλές αναπαραστάσεις συμβολισμούς και ορολογίες και να υπολογίζουν το όριο συνάρτησης όταν είναι δεδομένη η γραφική παράσταση της συνάρτησης. Το μοντέλο αυτό διαφέρει από το μοντέλο ανάπτυξης της θεωρητικής γνώσης της Sierpinska και των συνεργατών της (2002). Στο μοντέλο ανάπτυξης της θεωρητικής σκέψης για την έννοια του ορίου συνάρτησης ο παράγοντας αναλυτική – συστημική σκέψη παρουσιάζεται ως ένας και όχι ως δύο διαφορετικοί παράγοντες όπως είναι στο μοντέλο της Sierpinska. Η ενοποίηση των δύο παραγόντων μάλλον οφείλεται στο περιεχόμενο της διδασκαλίας του ορίου στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, όπου υπάρχει παντελής σχεδόν έλλειψη θεωρίας και αποδείξεων, από το σχολικό εγχειρίδιο, με αποτέλεσμα οι μαθητές να οδηγούνται στη απόκτηση της γνώσης μέσα από την οπτικοποίηση της έννοιας του ορίου και την ανάπτυξη ειδικών αναπαραστατικών συστημάτων. Η απουσία του τυπικού ορισμού και θεωρητικών αποδείξεων, στοιχεία που ενδεχομένως θα οδηγούσαν στη σαφή διάκριση της αναλυτικής και της συστημικής σκέψης, φαίνεται ότι οδήγησαν σε αυτή την ενοποίηση. Η ποιοτική ανάλυση έδειξε ότι οι ερωτήσεις που περιλαμβάνονται στον ενιαίο παράγοντα μπορούν να χωριστούν σε δύο ομάδες. Η μια ομάδα αποτελείται από τις ερωτήσεις που η εικόνα παρουσιάζει κάποια κανονικότητα, όπως π.χ. στην περίπτωση συνέχειας στο συγκεκριμένο σημείο. Σε αυτές τις περιπτώσεις ο εντοπισμός του ορίου είναι διαισθητικά ευκολότερος. Η δεύτερη ομάδα αποτελείται από τις ερωτήσεις που παρουσιάζουν κάτι διαφορετικό, όπως π.χ. μεμονωμένα σημεία, προσέγγιση στο συγκεκριμένο σημείο μόνο από την μια πλευρά, ασυνέχεια κ.α. Σε αυτές τις περιπτώσεις απαιτείται υψηλότερη διαίσθηση και μεγαλύτερη ικανότητα «διαβάσματος» του γραφήματος. Αυτό ενισχύεται και με τα ποιοτικά δεδομένα, όπου μαθητές οι οποίοι απάντησαν σωστά σε αυτές τις ερωτήσεις μπορούσαν στη διάρκεια της συνέντευξης να τεκμηριώσουν άτυπα μεν αλλά με σαφή τρόπο την άποψη τους. Αυτό στοιχειωθετεί την άποψη ότι οι ερωτήσεις αυτές απαιτούν συστημική σκέψη. Ο παράγοντας αναστοχαστική σκέψη αφορά στην ικανότητα των μαθητών να προχωρούν σε μια βαθύτερη κατανόηση της έννοιας του ορίου, πάντοτε βέβαια στο πλαίσιο της διδακτέας ύλης δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και να ερμηνεύουν ποιοτικά χαρακτηριστικά της έννοιας του ορίου. .

Τα αποτελέσματα της εργασίας έδειξαν ότι η συσχέτιση μεταξύ των δύο παραγόντων ήταν στατιστικά σημαντική. Πιθανή αιτία για τη ψηλή συσχέτιση των δύο παραγόντων είναι το γεγονός ότι οι παράγοντες σχετίζονται σε σημαντικό βαθμό με την κατανόηση της έννοιας του ορίου συνάρτησης. Συγκεκριμένα η σε βάθος κατανόηση της έννοιας του ορίου και η ικανότητα του μαθητή να αντιμετωπίζει διαφορετικές μορφές ορίων και να αιτιολογεί τις ενέργειες του, προϋποθέτει ότι ο μαθητής πρέπει να είναι ικανός να χρησιμοποιεί τις ιδιότητες του ορίου συνάρτησης, να ερμηνεύει διαφορετικές αναπαραστάσεις σχετικές με την έννοια του ορίου και να υπολογίζει το όριο συνάρτησης όταν είναι δεδομένη η γραφική της παράσταση.

Βασικός παράγοντας για την ανάπτυξη της θεωρητικής σκέψης για την έννοια του ορίου στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση αποτελεί ο παράγοντας αναλυτική – συστημική σκέψη. Από τα αποτελέσματα των μετρήσεων και στους τρεις κύκλους διεξαγωγής της έρευνας, φαίνεται ότι ο παράγοντας αυτός οδηγεί στην κατάκτηση της θεωρητικής σκέψης για την έννοια του ορίου συνάρτησης. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνει την αναφορά της Sierpinska (1994) ότι η θεωρητική σκέψη ασχολείται με την ερμηνεία των εννοιών, καθώς επίσης και την αναφορά των Gray και Tall (1994) γύρω από τον τρόπο με τον οποίο οι διεργασίες μεταβάλλονται σε έννοιες και αντίστροφα.

Όσον αφορά τη δομή του μοντέλου, από τα αποτελέσματα φαίνεται ότι παραμένει αμετάβλητη με την πάροδο του χρόνου. Το μοντέλο είχε την ίδια δομή για τις δύο μετρήσεις του δεύτερου κύκλου διεξαγωγής της έρευνας και τα έργα που αφορούν τους δύο παράγοντες του μοντέλου έχουν στατιστικά σημαντικές φορτίσεις. Η σταθερότητα της δομής του προτεινόμενου μοντέλου με την πάροδο του χρόνου ενισχύει την καταλληλότητα του να περιγράψει την θεωρητική σκέψη των μαθητών για την έννοια του ορίου συνάρτησης καθώς και τη σημασία των παραγόντων που προτείνονται για την εξήγηση της θεωρητικής σκέψης των μαθητών.

Η δομή του μοντέλου των τριών παραγόντων το οποίο επιβεβαιώθηκε αρχικά φαίνεται ότι διαφοροποιήθηκε λόγω της χρήσης της τεχνολογίας κατά την παρεμβατική διδασκαλία. Η τεχνολογία φαίνεται ότι βοήθησε στην άμβλυνση των ορίων των παραγόντων αναλυτική και συστημική σκέψη με αποτέλεσμα στη συνεχεία οι δύο παράγοντες να έχουν ενοποιηθεί σε ένα παράγοντα τον παράγοντα αναλυτική – συστημική σκέψη.

Κατηγορίες Μαθητών με Βάση τους Παράγοντες του Μοντέλου Θεωρητικής Σκέψης για την Έννοια του Ορίου Συνάρτησης

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης έδειξαν ότι υπάρχουν τρεις κατηγορίες μαθητών με διαφορετικά χαρακτηριστικά ως προς την επίδοση τους στη έννοια του ορίου συνάρτησης.

Η πρώτη κατηγορία μαθητών είχε χαμηλές επιδόσεις τόσο στον παράγοντα αναλυτική – συστημική σκέψη, όσο και στον παράγοντα αναστοχαστική σκέψη. Η αποτυχία των μαθητών της κατηγορίας αυτής έχει να κάνει με τον τρόπο που οι μαθητές ερμηνεύουν τις γραφικές παραστάσεις και την αδυναμία τους να συνδέσουν το όριο της συνάρτησης με την γραφική παράσταση της συνάρτησης. Οι μαθητές της πρώτης κατηγορίας δεν είναι ικανοί να κατανοήσουν σε βάθος την έννοια του ορίου. Φαίνεται ότι οι μαθητές δε έχουν προχωρήσει στο στάδιο της εσωτερίκευσης (Sfard, 1991) όπου το άτομο εξοικειώνεται με την εκτέλεση της διεργασίας η οποία στη συνέχεια οδηγεί στην κατανόηση της έννοιας. Η δεύτερη κατηγορία μαθητών είχε μεσαίες επιδόσεις στον παράγοντα αναλυτική – συστημική σκέψη αλλά εξακολουθεί να έχει χαμηλές επιδόσεις στον παράγοντα αναστοχαστική σκέψη. Φαίνεται ότι οι μαθητές έχουν προχωρήσει στο στάδιο της επεξεργασίας και διαχείρισης συμβόλων, όπως επισημαίνει ο Tall στο διαδικαστικό – συμβολικό κόσμο. Αποκτούν έλεγχο σε μία δράση σύμφωνα με το Dubinsky και τους συνεργάτες του αποκτώντας έλεγχο στη δράση αυτή την οποία εσωτερικεύουν. Η διαφοροποίηση στις ικανότητες των μαθητών της δεύτερης από την πρώτη κατηγορία φαίνεται να οφείλεται στο γεγονός ότι το ποσοστό επιτυχίας των μαθητών της δεύτερης κατηγορίας στον παράγοντα αναλυτική – συστημική σκέψη ήταν ικανοποιητικός. Η χρήση της τεχνολογίας κατά την διάρκεια του παρεμβατικού προγράμματος διδασκαλίας φαίνεται να έχει θετική επίδραση στους μαθητές της δεύτερης κατηγορίας. Όπως επισημαίνει ο Tall(1992), η χρήση της τεχνολογίας σε συνδυασμό με τη χρήση συγκεκριμένων λογισμικών προγραμμάτων βοηθούν τους μαθητές να αποκτήσουν τις ιδιότητες ενός αντικειμένου πριν, κατά ή και μετά την μελέτη της διαδικασίας. Η χρήση των εργαλείων μάθησης υποστηρίζει και ενισχύει τις ικανότητες μάθησης και κατ' επέκταση την θεωρητική σκέψη των μαθητών. Η τρίτη κατηγορία μαθητών είχε σημαντικές διαφορές από τη δεύτερη κατηγορία. Συγκεκριμένα η τρίτη κατηγορία είχε πολύ καλή επίδοση στον παράγοντα αναλυτική – συστημική σκέψη και ικανοποιητική επίδοση στον παράγοντα αναστοχαστική σκέψη. Η σχετικά ικανοποιητική επίδοση των μαθητών στον παράγοντα αναστοχαστική σκέψη, δηλώνει ότι ο συγκεκριμένος παράγοντας έχει ενισχύσει την σε βάθος κατανόηση της έννοιας του ορίου όπως επισημαίνει και η Sierpinska (2002) όταν αναφέρεται στη συστημική γνώση στο δικό της μοντέλο ανάπτυξης της θεωρητικής γνώσης. Οι μαθητές της τρίτης κατηγορίας, φαίνεται ότι μπορούν να στοχάζονται πάνω στις λειτουργίες οι οποίες εφαρμόζονται στην έννοια του ορίου, αντιλαμβάνονται ποιοι μετασχηματισμοί μπορούν να ενεργήσουν σε αυτή και καθίστανται ικανοί να κατασκευάσουν κατάλληλους μετασχηματισμούς και να σκέφτονται πάνω στη διεργασία αυτή συνολικά, όπως επισημαίνει και ο Dubinsky (1991). Η χρήση των εργαλείων μάθησης όπως τα μαθηματικά εφαρμογίδια που χρησιμοποιήθηκαν στο παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας υποστήριξαν και ενίσχυσαν τις ικανότητες μάθησης προβάλλοντας τις διάφορες πτυχές μέσα από τις οποίες μπορεί να εξεταστεί ένα μαθηματικό αντικείμενο. Όπως έχουν δείξει και άλλες έρευνες (Cooley, 1997, Estes, 1990, Heid, 1988, Porzio, 1994, Tall, 1994) η τεχνολογία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βοηθήσει τους μαθητές να αντιληφθούν έννοιες της Ανάλυσης και να τις συνδέσουν μέσα από πολλαπλές αναπαραστάσεις

Εκπαιδευτικές Εφαρμογές του Μοντέλου

Το μοντέλο της παρούσας εργασίας μπορεί να αποτελέσει σημαντικό εργαλείο για τους εκπαιδευτικούς και τους ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών. Το μοντέλο καταδεικνύει στους εκπαιδευτικούς τις σημαντικότερες διαστάσεις του τρόπου ανάπτυξης της θεωρητικής σκέψης των μαθητών για την έννοια του ορίου συνάρτησης. Τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας καταδεικνύουν την σημασία της ανάπτυξης της θεωρητικής σκέψης των μαθητών για την έννοια του ορίου συνάρτησης και αποδεικνύουν την αναγκαιότητα του σχεδιασμού του τρόπου διδασκαλίας της έννοιας του ορίου και της συμπερίληψης δραστηριοτήτων οι οποίες θα βοηθήσουν στην σε βάθος κατανόηση της έννοιας του ορίου.

Η θετική διαφορά που παρουσιάζουν οι μαθητές που παρακολούθησαν το παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας έναντι των μαθητών που διδάχθηκαν την έννοια του ορίου με παραδοσιακή διδασκαλία, καταδεικνύει την σημαντική βοήθεια που μπορεί να προσφέρει η χρήση της τεχνολογίας στη διδασκαλία της έννοιας του ορίου και επιβεβαιώνει προηγούμενες έρευνες οι οποίες υποστηρίζουν ότι τα ηλεκτρονικά συστήματα άλγεβρας μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να διερευνήσουν έννοιες και προβλήματα μέσα από διαφορετικές μορφές αναπαραστάσεων (Porzio, 1999; Kaput, 1996) αλλά και να μάθουν στρατηγικές και να οικοδομήσουν αφηρημένες αλγεβρικές δομές (Arnold, 2004).

Εισηγήσεις για Μελλοντικές Έρευνες

Η παρούσα εργασία εξέτασε την έννοια του ορίου συνάρτησης μέσα από ένα θεωρητικό μοντέλο ανάπτυξης της θεωρητικής σκέψης για την έννοια του ορίου και πως διαφοροποιείται η θεωρητική σκέψη με την χρήση της τεχνολογίας. Είναι αναγκαία η επανάληψη παρόμοιων εργασιών που να μελετούν τη θεωρητική σκέψη των μαθητών και για άλλες μαθηματικές έννοιες. Ο σχεδιασμός των παρεμβατικών προγραμμάτων διδασκαλίας πρέπει να βασίζεται στα αποτελέσματα προηγούμενων ερευνών γύρω από τις θεωρίες μάθησης και στην αξιοποίηση των δυνατοτήτων που παρέχονται στους διδάσκοντες αλλά και στους μαθητές με την ορθή χρήση της τεχνολογίας. Τα αποτελέσματα των ερευνών αυτών μπορούν να είναι χρήσιμα εργαλεία στην ανάπτυξη των Αναλυτικών Προγραμμάτων αλλά και στην παραγωγή διδακτικού υλικού το οποίο να χρησιμοποιείται στην τάξη κατά την διδασκαλία των υπό μελέτη μαθηματικών εννοιών. Ενδιαφέρον θα έχει αν η θεωρητική σκέψη των μαθητών για την έννοια του ορίου συνάρτησης ελεγχθεί και στην Γ′ Λυκείου όπου οι μαθητές έχουν επιλογή μαθηματικά κατεύθυνσης και να ελεγχθεί κατά πόσον το μοντέλο ανάπτυξης της θεωρητικής σκέψης των μαθητών για την έννοια του ορίου με παράγοντες αναλυτική – συστημική σκέψη και αναστοχαστική σκέψη παραμένει αναλλοίωτο με την πάροδο του χρόνου. Η έρευνα αυτή μπορεί να επεκταθεί και στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, ιδιαίτερα σε φοιτητές Μαθηματικών τμημάτων, όπου η έννοια του ορίου αντιμετωπίζεται με μαθηματική αυστηρότητα. Μέσα από μια τέτοια έρευνα μπορεί να φανεί σε ποιο βαθμό διαφοροποιείται το μοντέλο που προέκυψε από την παρούσα έρευνα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Abric, J. C. (1987). *Coopération, compétition et représentations sociales*. Delval.

Ainsworth, S. E., Wood, D. J., & Bibby, P. A. (1997). Evaluating principles for multi-representational learning environments. In S. Vosniadou, K. Matsagouras, K. Maridaki-Kassotaki, & S. Kotsanis, 7th European conference for research on learning and instruction (pp. 500-501). Athens: Gutenberg University Publications.

Ainsworth, S. (1999). The functions of multiple representations. Computers and Education, 33(2-3), 131-152.

Ali, M. B., & Tall, D. (1996). Procedural and conceptual aspects of standard algorithms in calculus.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. Educational studies in mathematics, 52(3), 215-241.

Arnold, S. (2004). Classroom computer algebra: Some issues and approaches. *Australian Mathematics Teacher, 60*(2), 17-21.

Artigue, M. (1992) Didactic engineering. Recherche en didactique des mathematiques ´ , 13(3), 41–66.

Artigue, M., (1992). Analysis. In D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking (pp. 167–198). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.

Artigue, M. (1997). Le logiciel 'Derive'comme révélateur de phénomènes didactiques liés à l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. *Educational Studies in Mathematics*, *33*(2), 133-169.

Artigue, M. (2000). Teaching and learning calculus: What can be learned from education research and curricular changes in France? In E. Dubinsky & A. Schoenfeld & J.J.Kaput (Eds.) *Research in collegiate mathematics education* IV (Vol. 8, pp.1-15).Providence: American mathematical society.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 7: 245-274.

Arzarello F. (1991). Pre-algebraic Problem Solving. In J.P.Ponte J.F.Matos, J.M. Matos, D.Fernades, Mathematical Problem Solving and new Information Technologies, Springer.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education,II(CBMS),*American Mathematical Society, 1-32.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E. & Schingendorf, K.E. (1997). The Development of Students' Graphical Understanding of the Derivative. Journal of Mathematical Behavior, 16(4).

Atkins, N., Creegan, A. & Soan, P. (1995). You can lead students to DERIVE, but can you make them think? *International DERIVE Journal*, 2(1), 63–82.

Aviram, A. (2000). From "computers in the classroom" to mindful radical adaptation by education systems to the emerging cyber culture. *Journal of Educational Change* 1: 331–352.

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L., & Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice: The case of limits of functions in Spanish high schools. In *Beyond the apparent banality of the mathematics classroom* (pp. 235-268). Springer US.

Bachelard G. 1938: (reprinted 1983) La Formation de l'esprit Scientifique, J. Vrin., Paris, France.

Balacheff, N. (1994). Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en didactique des mathématiques*, *14*, 9-42.

Bannan-Ritland, B. (2003). The role of design in research: The integrative learning design framework. *Educational Researcher*, *32*(1), 21-24.

Berry, J. S., & Nyman, M. A. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *The Journal of Mathematical Behavior, 22*(4), 479-495.

Beth, E.W. & Piaget, J. (1966). *Mathematical Epistemology and Psychology*, (W. Mays, trans.), Reidel. Dordrecht (originally published 1965).

Bezuidenhout, J. (2001). Limits and Continuity: Some Conceptions of First-year Student. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 32(4),* 487-500.

Biza, I., Souyoul, A., & Zachariades, Th. (2005). Conceptual change in advanced mathematical thinking. *In M. Bosch (Ed.), Proceedings of the Fourth Conference on European Research in Mathematics Education* (pp. 1727–1736). Sant Feliu de Guixols, Spain: CERME

Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs: objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(1), 77-123.

Brousseau, G. (1983). 'Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathematiques', *Recherches en didactique des mathematiques* 4(2), 165–198.

Brown, A. L. (1992). Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions. Journal of the Learning Sciences, 2, 141–178.

Brownell, W. A. (1935). Psychological considerations in the learning and teaching of arithmetic. *In W. D. Reeve (Ed.), Teaching of Arithmetic, The Tenth Yearbook of the National Council of Teacher's of Mathematics, Bureau of Publication, Teachers College, Columbia University.*

Cobb, P., Confrey, J., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational researcher*, *32*(1), 9-13.

Cooley, L. A. (1997). Evaluating student understanding in a calculus cource enhanced by a computer algebra system. *Primus: Problems, Resources and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 7,* 308-316.

Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2014). Design research: An analysis and critique. *Handbook of international research in mathematics education*.

Cornu, B. [1980] lnterfirence des modiles spontanis dans l'appren· tissage de Ia notion de .limite. Seminaire de Recherche Pedagogique (no. 8), Institut National Polytechnique de Grenoble.

Cornu, B. (1981). Apprentissage de la notion de limit: Modeles spontanes et modeles propres. [Learning the limit concept: Individual and suitable models.] *Actes du Cnquieme Colloque du Groupe International PME (pp. 322-326).* Grenoble: Universite de Grenoble.

Cornu, B. (1983).Quelques obstacies ; a l' apprentissage de la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 4,236-268.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking Dordrecht: Kluwer. 25-41*.

Cotrill, J.,Dubinsky,E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*, 167-192.

Crick, F. (1994). *The Astonishing Hypothesis*, London: Simon & Schuster.

Dana-Picard, T., Kidron, I. A pedagogy-embedded Computer Algebra System as an instigator to learn more mathematics. In: Hoyles, C., Lagrange, J.-b., Son, L.H., Sinclair, N. eds. (2006) Proceedings of the Seventeenth Study Conference of the International Commission on Mathematical Instruction. Hanoi Institute of Technology and Didirem Université, Paris 7, pp. 128-135

Davis, R. B., & Vinner, S. (1986). The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *Journal of Mathematical Behaviour*, 5(3), 281–303.

DeLoache, J. S. & DeMendoza, O. A. (1987). Joint picturebook interactions of mothers of 1-year-old children. British Journal of Developmental Psychology, 5, 111-123.

Dorier, J. (1995). Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics. *Educational studies in mathematics*, 29, 175-197.

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1990). On difficulties with diagrams: Theoretical issues. In Proceedings of the 14th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, pp. 27-36).

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.) Advanced mathematical thinking. Dordrecht, NL: Kluwer, 95-123.

Dubinsky, E. (1994). A theory and practice of learning college mathematics. In A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving*, 221-243, Hillsdale, NJ: Erlbaum..

Dubinsky, E., Kaput, J., & Shoenfeld, A. (1998). Research in Collegiate Mathematics Education. III .*Cbms Issues in Mathematics Education, V7*.

Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2002). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In *The teaching and learning of mathematics at university level* (pp. 275-282). Springer Netherlands.

Dubinsky, E., & Yiparaki, O. (2000). On student understanding of AE and EA quantification, *Research in Collegiate Mathematics Education*, IV, 239-289.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. Hillsdale, NJ: LEA.

Duval, D. (1987). Diverses questions relatives au calcul formel avec des nombres algébriques Thèse d'Etat (1987) Grenoble.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational studies in mathematics, 61(1-2), 103-131.

Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1991, February). On the reluctance to visualize in mathematics. In Visualization in teaching and learning mathematics (pp. 25-37). Mathematical Association of America.

Elia, I., Gagatsis, A., Panaoura, A., Zachariades, T., & Zoulinaki, F. (2009). Geometric and algebraic approaches in the concept of 'limit' and the impact of the 'didactic contact'. International Journal of Science and Mathematics Education, 7, 765–790.

Ervynck, G. (1981). Conceptual difficulties for first year university students in the acquisition of limit of a function. *Proceedings of the Psychology of Mathematics Education*, 5 (pp. 330-333), Grenoble, France.

Estes, K. A. (1990). Graphics technologies as instructional tools in applied calculus: Impact on instructor, students, and conceptual and procedural achievement. (Doctoral dissertation). *Dissertation Abstracts International, 51(04)*, 1147A.

Ferrini-Mundy, J., & Graham, K. G. (1991). An overview of the calculus curriculum reform effort: Issues for learning, teaching, and curriculum development. *American Mathematical Monthly*, 627-635.

Ferrini-Mundy, J., & Lauten, D. (1993). *Teaching and learning calculus*. In P.S. Wilson, Ed., Research ideas for the classroom: High school mathematics (pp. 155-176). New York, NY: Macmillan Publishing Company.

Ferrini-Mundy, J., & Gaudard, M. (1992). Preparation or pittfall in the study of college calculus. Journal for Research in Mathematics Education, 23, 56–71.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach*.Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Fischbein, E., Jehiam, R., & Cohen, C. (1995). The concept of irrational number in high school student and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 29, 29-44.

Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinity. Educational Studies in Mathematics, 48, 309-329.

Frecktling, (1998). Research methodologies in mathematics & science education. Washington, DC: National Science Foundation.

Gagatsis, A., Demetriou, A., Afantiti, Th., Michaelidou, E., Panaoura, R., Shiakalli, M., & Christofides, M. (1999). L' influenza delle Rappresentazioni "Semiotiche" nella Risoluzionedi Problemi Additivi. *La Matematica e la sue Didattica, 2, 382-403.*

Gagatsis, A., Christou, C., & Elia, I. (2004). The nature of multiple representations in developing mathematical relationships. Quaderni di Ricerca in Didattica, 14, 150-159.

Gagatsis, A., & Panaoura, A. (2014). A multidimensional approach to explore the understanding of the notion of absolute value. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *45*(2), 159-173.

Goldin, Gerald A., and James J. Kaput. "A Joint Perspective on the Idea of Representation in Learning and Doing Mathematics?' In Theories of Mathematical Learning, edited by Leslie P. Steffe, Pearla Nesher, Paul Cobb, Gerald A. Goldin, and Brian Greer, pp. 397-430. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, 1996.

Goldin, G.A. (2002) Connecting understandings from mathematics and mathematics education research. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), Proceedings of the 26th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, pp. 161-166). Norwich, England: Program Committee.

Gray Eddie & Tall, (1994). Duality, Ambiguity and Flexibilty: A proceptual View of Simple Arithmetic, *The Journal for Research in Mathematics Education,*26 (2), 115-141.

Gray Eddie & Tall David, (2001). Relationships between embodied objects and symbolic procepts: an explanatory of success and failure in mathematics, *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 65-72. Utrecht, The Netherlands.

Hähkiöniemi, M. (2006). Associative and reflective connections between the limit of the difference quotient and limiting process. *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(2), 170-184.

Hannula, Markku, S., Maijala, H., Pehkonen, E., & Soro, R. (2002) Taking a step to infinity: Student's Confidence with infinity Tasks in School Mathematics. In S.Lehti, & K. Merenluoto (Eds.), *Proceedings of third European Symposium on Conceptual Change. A Process Approach to Conceptual Change* (pp. 195-200). Turku, Finland.

Harel, G. U. E. R. S. H. O. N., Selden, A., & Selden, J. O. H. N. (2006). Advanced mathematical thinking. *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future*, 147-172.

Heid, M.K. (1988). Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computeras a tool. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(1), 3–25.

Hitt, F., & Lara-Chavez, H. (1999). Limits, continuity and discontinuity of functions from two points of view: That of the teacher and that of the student.*Proceeding of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *19*, 49-54.

Hohenwarter, M., & Preiner, J. (2007). Dynamic mathematics with GeoGebra. Journal of Online Mathematics and its Applications. ID 1448, vol. 7, March 2007

Janvier, C. E. (1987). Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. In *This book stems from a symposium organized by CIRADE (Centre Interdisciplinaire de Recherche sur l" Apprentissage et le Développement en Education) of Université du Que1bec abec abec abec abec abec abec abec abec abec abec abec abec abec abec abec à Montréal.*. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Juter, K. (2007). Students' concept development of limits. In *CERME 5* (pp. 2320-2329). University of Cyprus.

Juter, K. (2007). Students' conceptions of limits: High achievers versus low achievers. *The Montana Mathematics Enthusiast*, *4*(1), 53-65.

Kaput, J. J. (1987a). Representation Systems and Mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*

(pp. 19-26). Hillsdale, NJQ Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. (1989). Linking representations in the symbol system of algebra. In C. Kieran & S. Wagner (Eds.), Research issues in the learning and teaching of algebra (pp. 167-194). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics; and Hillsdale, NJ: Erlbaum

Kaput, J. (1994). Democratizing access to calculus: New routes using old roots. In A. Schoenfeld, (Ed.), Mathematical thinking and problem solving (pp. 39 77-155). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kaput, J. (1996). Algebra and technology: New semiotic continuities and referential connectivity. In F. Hitt, T. Rojano, & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the PME-NA XXI Annual Meeting*, Cuernavaca, Mexico.

Kelly, A. E. (2003). Research as design: The role of design in educational research. Educational Researcher, 32(1), 3–4.

Kelly, A. E., Lesh, R. A., & Baek, J. Y. (Eds.). (2014). *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching*. Routledge.

Kidron, I., & Zehavi, N. (2002). The role of animation in teaching the limit concept. The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education, 9, 205–227.

Kreis, Y. (2004). Mathémattic. Intégration de l'outil informatique dans le cours de mathématiques de la classe de 4e . Luxembourg, Luxembourg: MEN.

Kuhn, T. (1970). S. 1962. The structure of scientific revolutions (2nd ed.). Chicago, IL: University of Chicago Press.

Kutzler, B. (1994). DERIVE – the future of teaching mathematics. *International DERIVE Journal*, 1(1), 37–48.

Lagrange, J.-B. (1999a). Techniques and concepts in pre-calculus using CAS: A two year classroom experiment with the TI-92. *The International Journal of Computer* Algebra in Mathematics Education, 6(2), 43–65.

Lagrange, J. B., Artigue, M., Laborde, C., & Trouche, L. (2003). Technology and mathematics education: A multidimensional study of the evolution of research and innovation. In Second international handbook of mathematics education (pp. 237-269). Springer Netherlands.

Lauten, A. D., Graham, K., & Ferrini-Mundy, J. (1994). Student understanding of basic calculus concepts: Interaction with the graphics calculator. *The Journal of Mathematical Behavior*, *13*(2), 225-237.

Lavicza, Z. (2006). Factors influencing the integration of Computer Algebra Systems into university-level mathematics education. International Journal for Technology in Mathematics Education. 14(3).

Lesh, R., Behr, M., Post, T. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics, (pp. 33-40). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (2000). Symbolizing, communicating, and mathematizing: Key components of models and modeling. *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design*, 361-384.

Lesh, R., & Lamon, S. J. (1992). Assessing authentic mathematical performance. *Assessment of authentic performance in school mathematics*, 17-62.

Li, L. & Tall, D. O. (1993). Constructing Different Concept Images of Sequences and Limits by Programming. *Proceedings of PME 17, Tsukuba, Japan*, II, 41–48.

Lobato, J.: (2014). *Handbook of design research methods in education: Research Methods for Alternative Approaches to Transfer: Implications for Design Experiments.* Routledge.

Lobato, J. Research methods for alternative approaches to transfer: Implications for design experiments In A. Kelly & R. Lesh. *Design research in education*.

Maharaj, A. (2010). An APOS analysis of students' understanding of the concept of a limit of a function. *Pythagoras,* (71), 41-52.

Mamona, J.: 1990, ‘Sequences and series – Sequences and functions: Students’ confusions’, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 21(2), 333–337.

Mamona-Downs, J. and Downs, M.: 2000, ‘Advanced mathematical thinking with a special reference to reflection on mathematical structure’, to appear in Lyn English (Chief Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education,* Lawrence Erlbaum Ass., NJ.

Mayer, R. E. (2009). Multimedia learning (2nd ed.). New York: Cambridge University Press.

Merenluoto, K., and Lehtinen, E. (2002). Conceptual change in mathematics: Understanding the real numbers. In Limon, M. & Mason, L. (Eds.), Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice, (pp.233-258). Dodrecht: Kluwer Academic Publishers.

Merenlueto, K., & Lehtinen, E. (2004). Number concept and conceptual change: Outlines for new teaching strategies. *Learning and Instruction, 14, 519-534.*

Monaghan, A. I. C. (1991). *Intonation in a text-to-speech conversion system*(Doctoral dissertation, University of Edinburgh).

Monaghan, J. D., Sun, S. & Tall, D. O.: 1994. Construction of the Limit Concept with a Computer Algebra System, *Proceedings of PME 18,* Lisbon, Portugal, III. 279–286.

NCTM, (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, Va: NCTM. Presmeg, N.C. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies, and imaginative rationality in high school mathematics. Educational Studies in Mathematics, 23, 595-610.

Nitsch, R., Fredebohm, A., Bruder, R., Kelava, A., Naccarella, D., Leuders, T., & Wirtz, M. (2014). Students’competencies in working with functions in secondary mathematics education—empirical examination of a competence structure model. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1-26.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation.*Educational Studies in Mathematics*, *14*, 235-250.

Parameswaran, R. (2007). On understanding the notion of limits and infinitesimal quantities. *International Journal of Science and Mathematics Education,* 5: 193-216.

Parks, V. W. (1995). Impact of a laboratory approach supported by "Mathematica" on the conceptualization of limit in a first calculus course. (Doctoral dissertation). Dissertation Abstracts International, 56(10), 3872A.

Piaget, J., & Inhelder, B. The psychology of the child (H. Weaver, trans.). New York: Basic Books, 1969. (Originally published, 1966).

Piaget, J., & Inhelder, B. Mental imagery in the child (P. A. Chilton, trans.). New York: Basic Books, 1971. (Originally published, 1966).

Piaget, J. (1972). *The Principles of Genetic Epistemology*, (W. Mays trans.), London, Routledge & Kegan Paul.

Piaget, J. (1985). *The Equilibrium of Cognitive Structures*, Cambridge Massechusetts: Harvard University Press.

Pierce, R. (1999a). Using CAS as scaffolding for calculus: Some observations. In W.Spunde, P. Cretchley & R. Hubbard (Eds.), The Challenge of Diversity: *Proceedings of the Delta-99 Symposium on Undergraduate Mathematics* (pp. 172–176). Brisbane: Delta 99 Committee.

Pierce, R. (1999b). Computer algebra systems facilitate positive learning strategies. In J. Truran & K. Truran (Eds.), Making the Difference. *Proceedings of the 22nd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Adelaide* (pp. 431–438). Sydney: MERGA.

Pierce, R., & Stacey, K. (2004). A framework for monitoring progress and planning teaching toward the effective use of computer algebra systems. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(1), 59–93.

Pierce, R. and Stacey, K. (2007). A framework for monitoring progress and planning teaching towards the effective use of computer algebra systems. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 9: 59–93

Pierce, R. and Stacey, K. (2007). Developing algebraic insight. *Mathematics Teaching 203*, 12-16.

Porzio, D. (1999). Effects of differing emphases in the use of multiple representations and technology on students' understanding of calculus concepts. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *21*(3), 1-29.

Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics,55*(1-3), 103-132.

Rasmussen, C., & Stephan, M. (2008). 10 A Methodology for Documenting Collective Activity. *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching*, 195.

Roh, K. H. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational studies in Mathematics*, *69*(3), 217-233.

Robert, A. (1982a,b). L' Acquisition de la notion de convergence des suites numeriques dans *Enseignement Superieur, en Didactique des Mathematiques vol.no 3*, 307-341.

Robert, A., Robinet, J. (1996). Price en compte du meta en didactique des mathematiques. *Recherches annee de DEUG. Cahier de Didactique des Mathematiques*, 16(2), 145-176.

Robert, A., & Speer, N. (2002). Research on the teaching and learning of calculus/elementary analysis. In *The teaching and learning of mathematics at university level* (pp. 283-299). Springer Netherlands.

Robinet, J. (1983). Une expérience d'ingénierie didactique sur la notion de limite de fonction. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4*(3), 223-292.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics, in D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics, (pp. 334–370), New York: MacMillan.

Sfard, A. (1987). 'Two conceptions of mathematical notions: operational and structural', in J. C. Bergeron, N. Hershcovics and C. Kieran (eds.), *Proceedings of the Eleventh International Conference for Psychology of Mathematics Education*, Vol. III, Universite de Montreal, Montreal, Canada, 162-169.

Sfard, A. (1988), 'Operational vs structural method of teaching mathematics: A case study', in Proceedings of the Twelfth International Conference of PME, Hungary, pp. 560-567.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22(1), 1-36.*

Shavelson, R. J., Phillips, D. C., Towne, L., & Feuer, M. J. (2003). On the science of education design studies. *Educational researcher*, *32*(1), 25-28.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatives à la notion de limite *Recherche en Didactique des Mathématiques*, **6**(1), 5-68.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics,* 18, 371-397.

Sierpinska, A. (1988). Epistemological remarks on functions. *Proceedings of the 12th International Conference on the Psychology of Mathematics Eduvaion, (Vol III),* 568-575.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding mathematics. *For the learning of mathematics*,**10**(3), 24-36.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In E. Dubinsky, & G. Harel (Ed.), The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy (pp. 25-58). USA: Mathematical Association of America.

Sierpinska, A., Kilpatrick, J., Balacheff, N., Howson Geoffrey, A., Sfard, A. & Steinbring, H. (1993). What is research in Mathematics Education and what are its results. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(3), 274-278.

Sierpinska, A., & Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. In *International handbook of mathematics education*(pp. 827-876). Springer Netherlands.

Sierpinska A., Nnadozie A., & Okta A. (2002). A study of relationships between theoretical thinking and high achievement in linear algebra. Concordia University.

Sierpinska, A. (2005). On practical and theoretical thinking and other false dichotomies in mathematics education, in M. Hoffmann, J. Lenhard and F. Seeger (Eds), *Activity and Sign - Grounding Mathematics Education*. (pp. 117-136). Dordrecht: Kluwer.

Sierpinska, A., Bobos, G., & Pruncut, A. (2011). Teaching absolute value inequalities to mature students. Educational Studies in Mathematics, 78(3), 275-305.

Sirotic, N., & Zarkis, R. (2004). Irrational numbers: dimensions of knowledge. In D. E. McDougall, & J. A. Ross (Eds), *Proceedings of the 26th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 171-178). Toronto, Canada: Ontario Institute for Studies in Education of University of Toronto.

Stafylidou, S., and Vosniadou, S. (2004). The development of Students' Understanding of the Numerical Value of Fractions. *Special Issue on Conceptual Change. Learning and Instruction* 14, 503–518.

Stavy, R., &Tirosh, D. (2000). How students (mis)understand science and mathematics: Intuitive rules. New York: Teachers College Press.

Skemp, R.R. (1979). *Intelligence, Learning and Action*, John Wiley & Sons, Chichester, U.K.

Szydlik, J.E.: 2000, 'Mathematical beliefs and conceptual understanding of the limit of a function', *Journal for Research in Mathematics Education* 31(3), 258–276.

Taback, S., 1975: The child's concept of limit. In M. Rosskopf (Ed.), *Children's mathematical concepts* (pp. 111–144). New York: Teachers College Press.

Tall, D. & Schwarzenberger ,R.L.E (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits, *Mathematics Teaching*, 83 (44-49).

Tall, D.O.: 1980b, 'The notion of infinite measuring numbers and its relevance in the intuition of infinity', *Educational Studies in Mathematics* 11, 271–284.

Tall, D. (1980). Mathematical intuition, with special reference to limiting processes. In *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 170-176).

Tall, D., & Vinner S., (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151–169.

Tall, D. (1991), (Ed). *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity and proof. In D. A. Grouws (Ed), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 495-511). New York: Macmillan.

Tall, D. O., (1993). Students Difficulties in Calculus. Proceeding of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus. ICME-7, Québec, Canada, (1993), 13-28.

Tall, D.: 1994, 'Computer environments for the learning of mathematics', in R. Biehler, R.W. Scholz, R. Strasser and B. Winkelmann (eds.), Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Tall, D.O.: 1995, 'Cognitive development, representations and proof', Proceedings of Justifying and Proving in School Mathematics, Institute of Education, London, pp. 27-38.

Tall, D. (1996). Functions and calculus. In *International handbook of mathematics education* (pp. 289-325). Springer Netherlands.

Tall, D. (2000). Technology and Versatile Thinking In Mathematical Development. In Michael O. J. Thomas (Ed),*Proceedings of TIME 2000*, (pp. 33–50). Auckland, New Zealand.

Tall, D. (2004). Thinking Through Three Worlds of Mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4*, 281-288, Bergen, Norway.

Thorndike, E. L. (1922). *The Psychology of Arithmetic*, New York: Macmillan.

Tirosh, D. and Tsamir, P. (2004). An Application of the Conceptual Change Theory to the Comparison of Infinite Sets. In S. Vosniadou, C. Stathopoulou, X. Vamvakoussi, & N. Mamaloukos (Eds.), *Proceedings of the 4th European Symposium on Conceptual Change.* (pp. 96-98) Delfi, Greece.

Toeplitz, J. (1971). *Istorija kino-iskusstva: 1928-1933*. Progress.

Trouche L. & Guin D. (1996). Seeing is Reality : How Graphic Calculators May Influence the Conceptualization of Limits, in L. Puig & A. Gutiérrez (eds), *Proceedings of the PME 20*, Universitat de Valencia, vol.4, 323-330

Trouche, L. (2004). Environnements Informatisés et Mathématiques: quels usages pour quels apprentissages?. Educational Studies in Mathematics, 55(1-3), 181-197.

Vamvakoussi, X., and Vosniadou, S. (2002). Conceptual change in Mathematics: From the set of natural to the set of rational numbers. In S.Lehti, & K. Merenluoto (Eds.), *Proceedings of the Third European Symposium on Conceptual Change. A Process Approach to Conceptual Change*. (pp. 201-204). Turku, Finland.

Vamvakoussi, X., Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction, 14,* 453-467.

Vamvakoussi, X., and Vosniadou, S. (2004a). Understanding density: presuppositions, synthetic models and the effect of the number line. In S. Vosniadou, C. Stathopoulou, X. Vamvakoussi, & N. Mamaloukos (Eds.), *Proceedings of the 4th European Symposium on Conceptual Change* (pp. 98-101) Delfi, Greece.

Vamvakoussi, X., and Vosniadou, S. (2004b) Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Special Issue on Conceptual Change. Learning and Instruction 14*, 453–467.

Vamvakoussi, X., Vosniadou, S. (2007). How many numbers are there in a rational number interval? Constrains, synthetic models and the effect of the number line. In S. Vosniadou, A. Baltas, & X. Vamvakoussi (Eds.), R*eframing the conceptual change approach in learning and instruction* (pp. 265-282). Elsevier.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2004). The Illusion of Linearity: A Misconception Requiring Conceptual Change? In S. Vosniadou, C. Stathopoulou, X. Vamvakoussi, & N. Mamaloukos (Eds.), *Proceedings of the 4th European Symposium on Conceptual Change* (pp. 106-108). Delfi, Greece.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Structures. In J. Heiber, & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 141-161). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates & NCTM.

Vergnauld, G. (1990). Epistemology and psychology of mathematics education. In P. Nesher, & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition* (pp. 14-30). Cambridge: Cambridge University Press.

Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of though in relation to instrumented activity. European journal of psychology of education, 10(1), 77-101.

Vinner, S.: 1975. The Naive Platonic approach as a teaching strategy in arithmetic. *Ed. St. in Math*., 339–350.

Vinner S. 1983: ‘Conflicts between definitions and intuitions: the case of the tangent’, Proceedings of P.M.E. 6, Antwerp.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. Journal for research in mathematics education, 356-366.

von Glasersfeld E. (1987) 'Learning as a Constructive Activity'. In C. Janvier (Ed) Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. Lawrence Erlbaum, Hillslade, NJ.

Vosniadou, S. (1994). Capturing and modelling the process of conceptual change. In S. Vosniadou (Guest Editor*), Special Issue on Conceptual Change. Learning and Instruction*, 4, 45-69.

Vosniadou, S. (1999). Conceptual change research: State of the art and future directions. In W. Schnotz, S. Vosniadou, & M. Carretero (Eds.), *New perspectives on conceptual change* (pp. 3–13). Oxford, UK: Elsevier Science.

Vosniadou, S. (2004). Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching. *Special Issue on Conceptual Change. Learning and Instruction* 14, 445-451.

Vosniadou, S. and Brewer, W. F. (1992) Mental Models of the Earth: A Study of Conceptual Change in Childhood. *Cognitive Psychology*, 24, 535-585.

Vygotsky, L. S. (1987). The collected works of LS Vygotsky: Vol. 1, Problems of general psychology (RW Rieber & AS Carton, Eds., N. Minick, trans.).

Williams, S. (1991). Models of Limit held by College Calculus Students. *Journal for Research in Mathematics Education* 22(3): 219-236.

Williams, S. (2001). Predications of the limit concept: An application of repertory grids. *Journal for Research in Mathematics Education 32*, 341-367.

Zachariades, T., Christou, C., & Papageorgiou, E. (2002, July). The difficulties and reasoning of undergraduate mathematics students in the identification of functions. In Proceedings in the 10th ICME Conference, Crete, Greece.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Δοκίμιο Αξιολόγησης 1

Δοκίμιο Αξιολόγησης 1

Όριο συνάρτησης

Όνομα: ……………………………………………… Τμήμα:……………………..

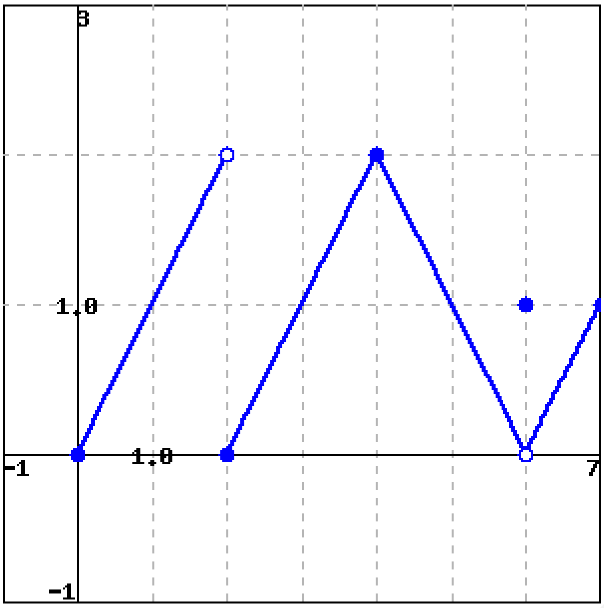
1. Στις πιο κάτω προτάσεις να βάλετε σε κύκλο το **Σ** αν η πρόταση είναι ορθή ή το **Λ** αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α) Το όριο μιας συνάρτησης είναι ένας αριθμός τον οποίον η συνάρτηση δεν μπορεί να φτάσει.	**Σ**	**Λ**
β) Το όριο περιγράφει πως η συνάρτηση $y = f(x)$ παίρνει μια τιμή όταν το x πλησιάζει ένα συγκεκριμένο σημείο.	**Σ**	**Λ**
γ) Το όριο είναι ένας αριθμός τον οποίο η συνάρτηση πλησιάζει αλλά δεν μπορεί να τον φτάσει.	**Σ**	**Λ**
δ) Το όριο είναι μια προσεγγιστική τιμή, η οποία μπορεί να είναι τόσο ακριβής όσο εμείς θέλουμε.	**Σ**	**Λ**

2. Να σχολιάσετε τη φράση: «*Η συνάρτηση* $y = f(x)$ *ορίζεται για* $x\epsilon\mathbb{R}$. *Το όριο της συνάρτησης* $y = f(x)$ *στο* $x_0\epsilon\mathbb{R}$ *είναι η αριθμητική τιμή της συνάρτησης στο* x_0».

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………

3.



Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης που βλέπετε πιο πάνω να απαντήσετε τα πιο κάτω ερωτήματα:

α) Το όριο της συνάρτησης στο x=0 είναι: ………………………………….

β) Το όριο της συνάρτησης στο x=1 είναι: ………………………………….

γ) Το όριο της συνάρτησης στο x=2 είναι: ………………………………….

δ) Το όριο της συνάρτησης στο x=3 είναι: ………………………………….

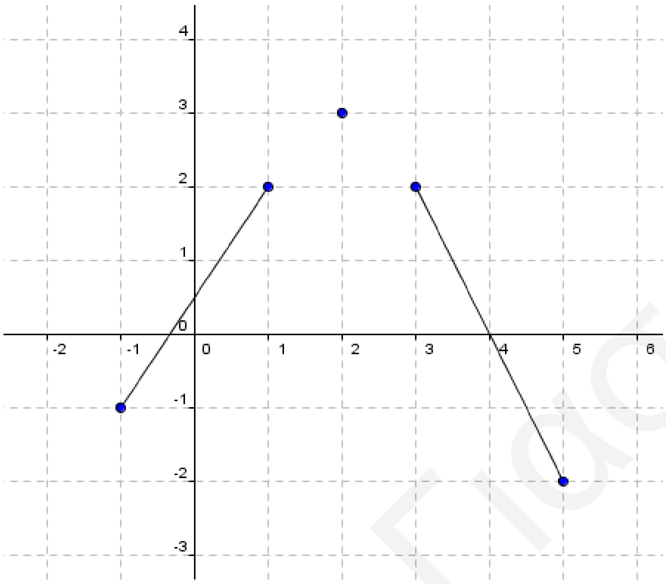
ε) Το όριο της συνάρτησης στο x=4 είναι: ………………………………….

στ) Το όριο της συνάρτησης στο x=5 είναι: ……………………………….

ζ) Το όριο της συνάρτησης στο x=6 είναι: ………………………………….

η) Το όριο της συνάρτησης στο x= -1 είναι: ……………………………….

4. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης που βλέπετε πιο πάνω να απαντήσετε τα πιο κάτω ερωτήματα:



α) Το όριο της συνάρτησης στο x= -1 είναι: ………………………………

β) Το όριο της συνάρτησης στο x=1 είναι: …………………………………

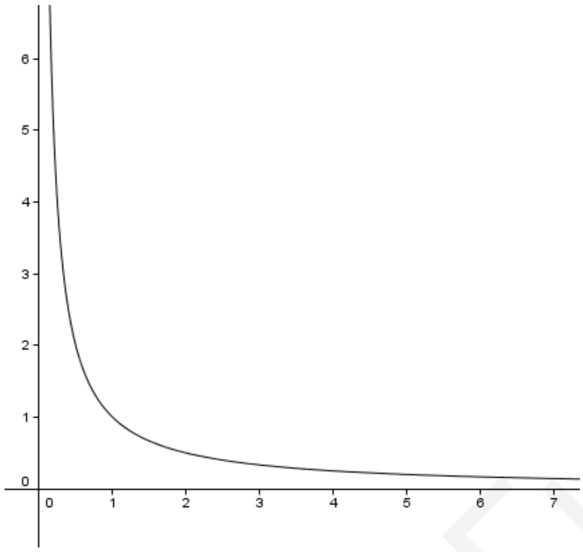
γ) Το όριο της συνάρτησης στο x=2 είναι: …………………………………

δ) Το όριο της συνάρτησης στο x=3 είναι: …………………………………

ε) Το όριο της συνάρτησης στο x=4 είναι: …………………………………

στ) Το όριο της συνάρτησης στο x=5 είναι: ………………………………

5. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$.



α) Τι αντιλαμβάνεστε όταν βλέπετε ότι το $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$;

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………

β) Μπορούμε να πούμε ότι $f(\infty) = 0$;

……………………………………………………………………………………………..

6. Τι σημαίνει η μαθηματική έκφραση: $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$;

……………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

7. (α) Να εξηγήσετε τι αντιλαμβάνεστε όταν βλέπετε την μαθηματική έκφραση: $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$.

……………………………………………………………………………………

(β) Πρέπει να ορίζεται η συνάρτηση στο x=1 για να έχει όριο;

……………………………………………………………………………………

(γ) Πρέπει το $f(1) = 3$ ή όχι;

……………………………………………………………………………………

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Παρεμβατικό Πρόγραμμα Διδασκαλίας 1

Παρεμβατικό Πρόγραμμα Διδασκαλίας 1

Όριο Συνάρτησης στο $x_0 \epsilon \mathbb{R}$

Δραστηριότητα 1:

Να μπείτε στην ιστοσελίδα http://www.calculusapplets.com/ και να ανοίξετε το εφαρμογίδιο " Informal view of limits".

- Στην οθόνη σας βλέπετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0{,}5x$. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, σύμφωνα με τη γραφική παράσταση που βλέπετε στην οθόνη σας και ποιο το αντίστοιχο πεδίο τιμών;

  ………………………………………………………………………………………..

  Να επιλέξετε το δρομέα δίπλα από το x και να δώσετε διάφορες τιμές στο x. Τι παρατηρείτε για τις αντίστοιχες τιμές του y όσο το x πλησιάζει την τιμή 1, τόσο από τιμές μεγαλύτερες από το 1, όσο και από τιμές μικρότερες από το 1;

  …………………………………………………………………………………………
  …………………………………………………………………………………………
  ………………………………………………………………………

  Ποια τιμή παίρνει το y όταν το x τείνει να γίνει ίσο με 1;

  ………………………………………………………………………………........

- Να ανοίξετε την λίστα επιλογών και να επιλέξετε την δεύτερη συνάρτηση. Στην οθόνη σας βλέπετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0{,}5x$. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, σύμφωνα με τη γραφική παράσταση που βλέπετε στην οθόνη σας και ποιο το αντίστοιχο πεδίο τιμών;

  ………………………………………………………………………………………..

  Να επιλέξετε το δρομέα δίπλα από το x και να δώσετε διάφορες τιμές στο x. Τι παρατηρείτε για τις αντίστοιχες τιμές του y όσο το x πλησιάζει την τιμή 1, τόσο από τιμές μεγαλύτερες από το 1, όσο και από τιμές μικρότερες από το 1;

  …………………………………………………………………………………………
  …………………………………………………………………………………………

  Ποια τιμή παίρνει το y όταν το x τείνει να γίνει ίσο με 1;

  ………………………………………………………………………………………..

- Να ανοίξετε την λίστα επιλογών και να επιλέξετε την τρίτη συνάρτηση. Στην οθόνη σας βλέπετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0{,}5x$. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, σύμφωνα με τη γραφική παράσταση που βλέπετε στην οθόνη σας και ποιο το αντίστοιχο πεδίο τιμών;

………………………………………………………………………………………..

Να επιλέξετε το δρομέα δίπλα από το x και να δώσετε διάφορες τιμές στο x. Τι παρατηρείτε για τις αντίστοιχες τιμές του y όσο το x πλησιάζει την τιμή 1, τόσο από τιμές μεγαλύτερες από το 1, όσο και από τιμές μικρότερες από το 1;

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

Ποια τιμή παίρνει το y όταν το x τείνει να γίνει ίσο με 1;

………………………………………………………………………………………..

- Με βάση τις παρατηρήσεις σας στα τρία προηγούμενα παραδείγματα, τι μπορείτε να πείτε για την τιμή της $f(x)$, όταν το x τείνει να γίνει ίσο με 1;

……………………………………………………………………………………….

Δραστηριότητα 2

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο “ Table view of limits”.

- Στην οθόνη σας βλέπετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0{,}5x$ και τον αντίστοιχο πίνακα τιμών. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, σύμφωνα με τη γραφική παράσταση που βλέπετε στην οθόνη σας και ποιο το αντίστοιχο πεδίο τιμών;

  ……………………………………………………………………………………..

  Να δώσετε διάφορες τιμές στο x και την ίδια τιμή αντίστοιχα στο c. Να επιλέξετε το δρομέα δίπλα από το x και να δώσετε διάφορες τιμές στο x. Τι παρατηρείτε για τις αντίστοιχες τιμές του y όσο το x πλησιάζει την τιμή που δώσατε, τόσο από τιμές μεγαλύτερες από αυτήν, όσο και από τιμές μικρότερές της; Να συγκρίνετε την τιμή του y με τις ενδείξεις που βλέπετε στον πίνακα τιμών.

  ………………………………………………………………………………………
  ………………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………

  Ποια τιμή παίρνει το y όταν το x τείνει να γίνει ίσο με την τιμή που δώσατε;

  ……………………………………………………………………………….........

- Να ανοίξετε την λίστα επιλογών και να επιλέξετε την δεύτερη συνάρτηση. Στην οθόνη σας βλέπετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0{,}5x$ και τον αντίστοιχο πίνακα τιμών. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, σύμφωνα με τη γραφική παράσταση που βλέπετε στην οθόνη σας και ποιο το αντίστοιχο πεδίο τιμών;

  ……………………………………………………………………………………..

  Να δώσετε διάφορες τιμές στο x και την ίδια τιμή αντίστοιχα στο c. Να επιλέξετε το δρομέα δίπλα από το x και να δώσετε διάφορες τιμές στο x. Τι παρατηρείτε για τις αντίστοιχες τιμές του y όσο το x πλησιάζει την τιμή που δώσατε, τόσο από τιμές μεγαλύτερες από αυτήν, όσο και από τιμές μικρότερές της; Να συγκρίνετε την τιμή του y με τις ενδείξεις που βλέπετε στον πίνακα τιμών.

  ………………………………………………………………………………………
  ………………………………………………………………………………………

  Ποια τιμή παίρνει το y όταν το x τείνει να γίνει ίσο με την τιμή που δώσατε;

  ……………………………………………………………………………….........

- Να ανοίξετε την λίστα επιλογών και να επιλέξετε την τρίτη συνάρτηση. Στην οθόνη σας βλέπετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0{,}5x$ και τον αντίστοιχο πίνακα τιμών. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, σύμφωνα με τη γραφική παράσταση που βλέπετε στην οθόνη σας και ποιο το αντίστοιχο πεδίο τιμών;

  ……………………………………………………………………………………..

Να δώσετε διάφορες τιμές στο x και την ίδια τιμή αντίστοιχα στο c. Να επιλέξετε το δρομέα δίπλα από το x και να δώσετε διάφορες τιμές στο x. Τι παρατηρείτε για τις αντίστοιχες τιμές του y όσο το x πλησιάζει την τιμή που δώσατε, τόσο από τιμές μεγαλύτερες από αυτήν, όσο και από τιμές μικρότερές της; Να συγκρίνετε την τιμή του y με τις ενδείξεις που βλέπετε στον πίνακα τιμών.

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………

Ποια τιμή παίρνει το y όταν το x τείνει να γίνει ίσο με την τιμή που δώσατε;

…………………………………………………………………………………........

- Με βάση τις παρατηρήσεις σας στα τρία προηγούμενα παραδείγματα, τι μπορείτε να πείτε για την τιμή της $f(x)$, όταν το x τείνει να γίνει ίσο με το c;

…………………………………………………………………………………….

Δραστηριότητα 3:

1. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)$.

…………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………

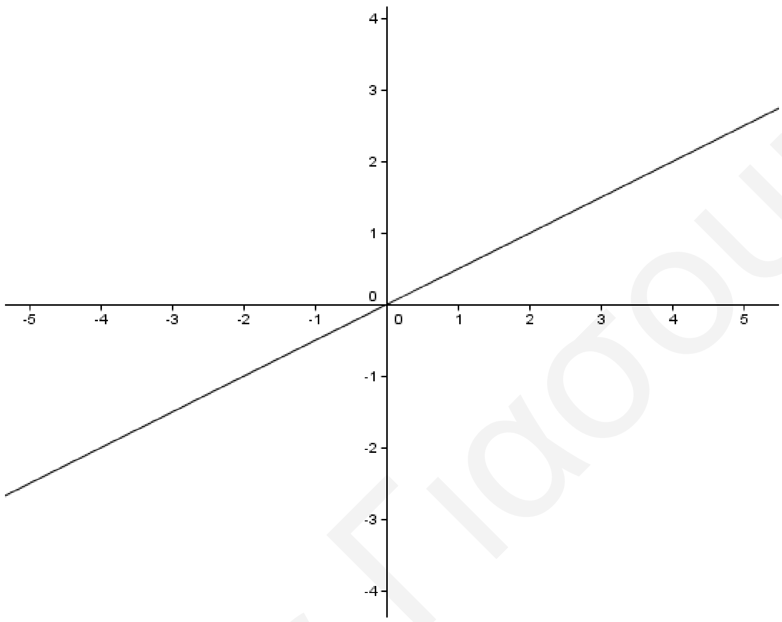
2. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$.

…………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………

Όριο Συνάρτησης στο $x_0 \epsilon \mathbb{R}$

Δραστηριότητα 1:

- Στο σχήμα βλέπετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0{,}5x$.



Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και ποιο το αντίστοιχο πεδίο τιμών;
………………………………………………………………………………………..

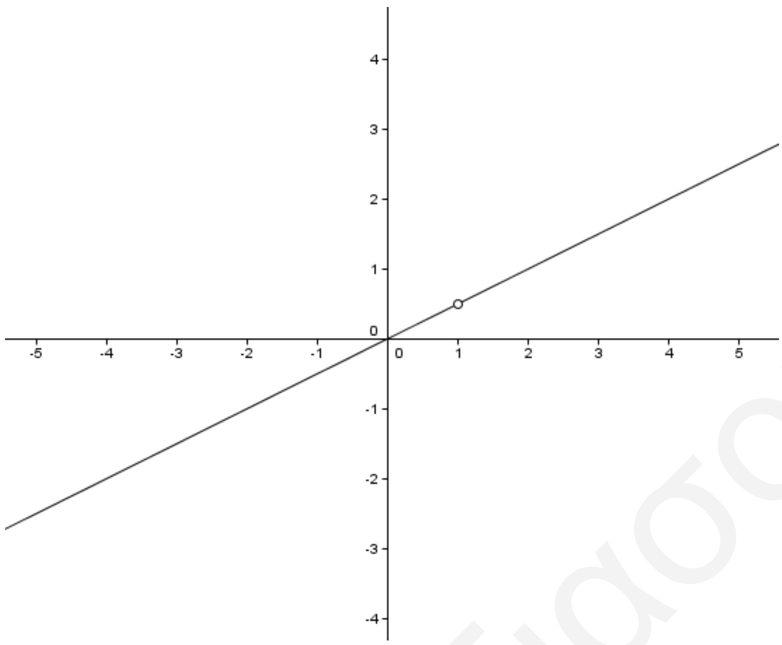
Ποια τιμή παίρνει το y όσο το x πλησιάζει την τιμή 1, τόσο από τιμές μεγαλύτερες από το 1, όσο και από τιμές μικρότερες από το 1;

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………

Ποια τιμή παίρνει το y όταν το x είναι ίσο με 1;

……………………………………………………………………………….........

- Στο σχήμα βλέπετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0{,}5x$.



Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και ποιο το αντίστοιχο πεδίο τιμών;
………………………………………………………………………………………..

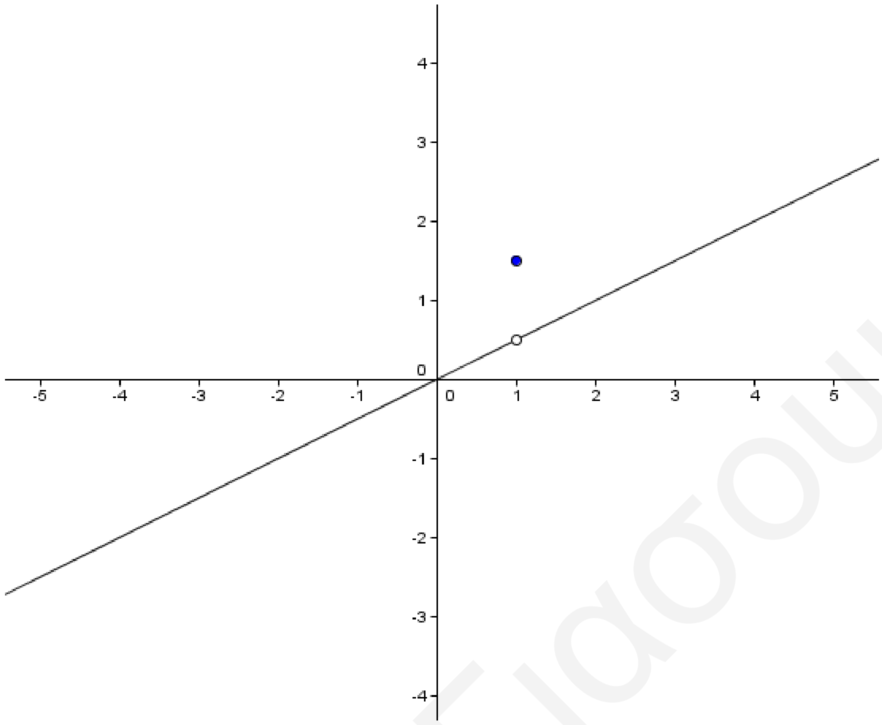
Ποια τιμή παίρνει το y όσο το x πλησιάζει την τιμή 1, τόσο από τιμές μεγαλύτερες από το 1, όσο και από τιμές μικρότερες από το 1;

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………

Ποια τιμή παίρνει το y όταν το x είναι ίσο με 1;

…………………………………………………………………………………........

- Στο σχήμα βλέπετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0{,}5x$.



Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και ποιο το αντίστοιχο πεδίο τιμών;
……………………………………………………………………………………..

Ποια τιμή παίρνει το y όσο το x πλησιάζει την τιμή 1, τόσο από τιμές μεγαλύτερες από το 1, όσο και από τιμές μικρότερες από το 1;

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………

Ποια τιμή παίρνει το y όταν το x είναι ίσο με 1;

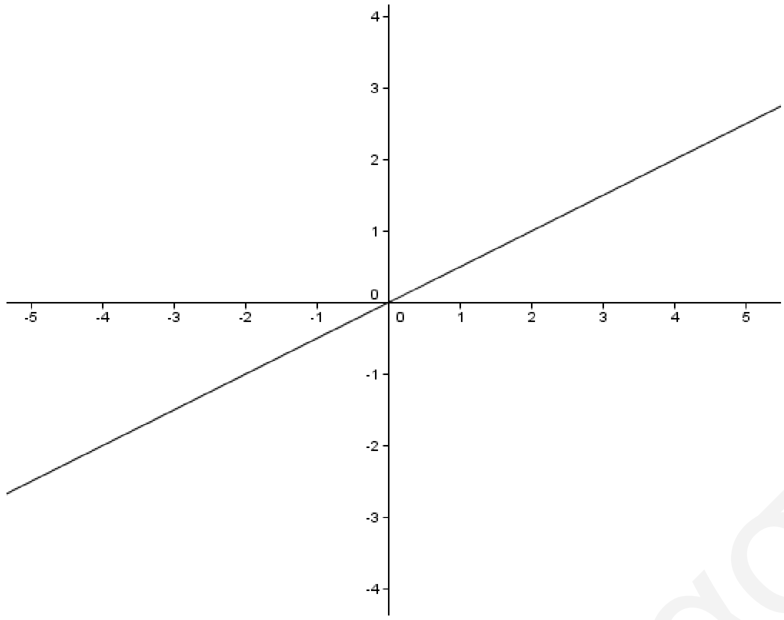
…………………………………………………………………………………........

- Με βάση τις παρατηρήσεις σας στα τρία προηγούμενα παραδείγματα, τι μπορείτε να πείτε για την τιμή της $f(x)$, όταν το x τείνει να γίνει ίσο με 1;

…………………………………………………………………………………….

Δραστηριότητα 2:

- Στο σχήμα βλέπετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0{,}5x$.



Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα τιμών για τις διάφορες τιμές του x.

x	y
0,9	
0,99	
0,999	
1,001	
1,01	
1,1	

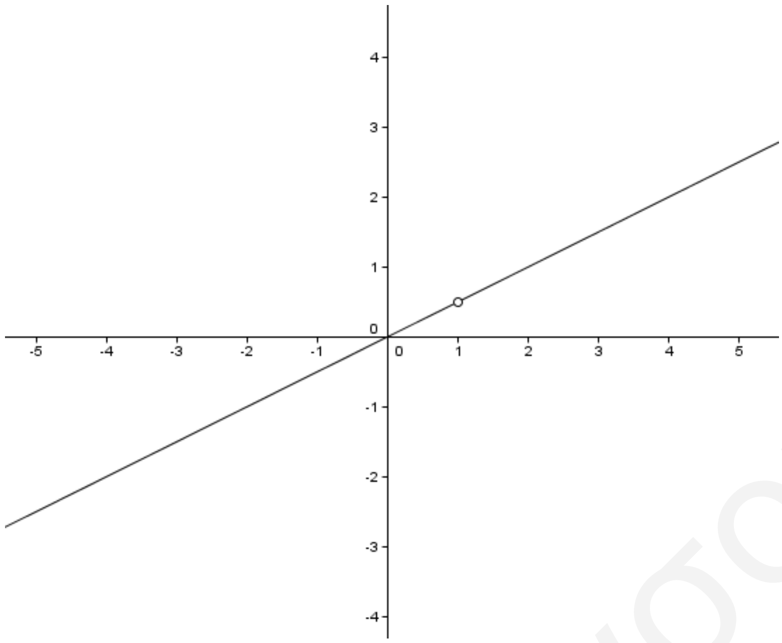
Ποια τιμή παίρνει το y όσο το x πλησιάζει την τιμή 1, τόσο από τιμές μεγαλύτερες από το 1, όσο και από τιμές μικρότερες από το 1;

……………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………

Ποια τιμή παίρνει το y όταν το x είναι ίσο με 1;

……………………………………………………………………………………...................

- Στο σχήμα βλέπετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0{,}5x$.



Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα τιμών για τις διάφορες τιμές του x.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$
0,9	
0,99	
0,999	
1,001	
1,01	
1,1	

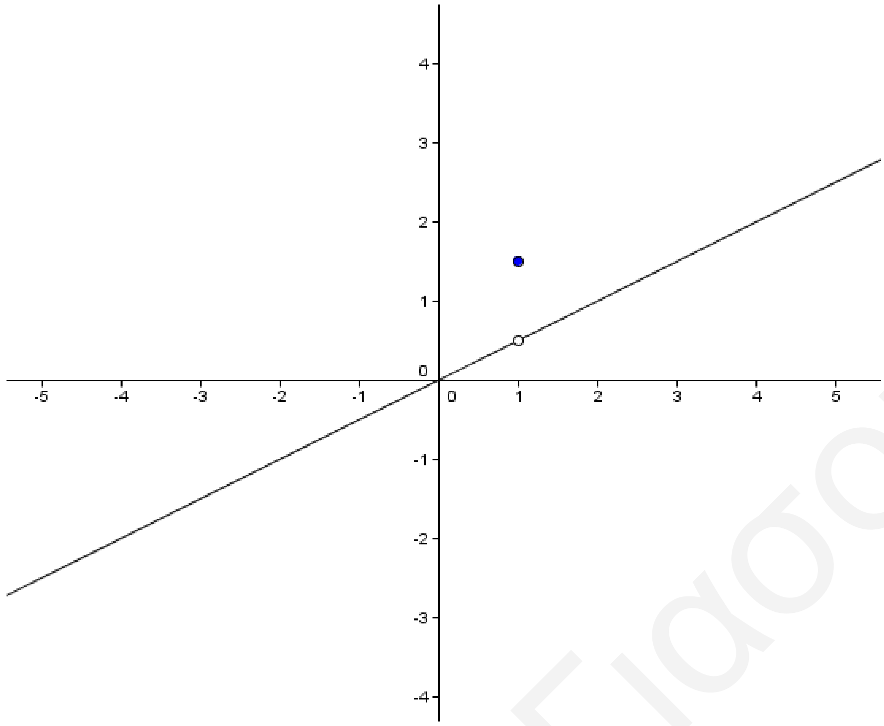
Ποια τιμή παίρνει το y όσο το x πλησιάζει την τιμή 1, τόσο από τιμές μεγαλύτερες από το 1, όσο και από τιμές μικρότερες από το 1;

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………

Ποια τιμή παίρνει το y όταν το x είναι ίσο με 1;

……………………………………………………………………………….................

- Στο σχήμα βλέπετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0{,}5x$.



Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα τιμών για τις διάφορες τιμές του x.

x	y
0,9	
0,99	
0,999	
1,001	
1,01	
1,1	

Ποια τιμή παίρνει το y όσο το x πλησιάζει την τιμή 1, τόσο από τιμές μεγαλύτερες από το 1, όσο και από τιμές μικρότερες από το 1;

……………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………

Ποια τιμή παίρνει το y όταν το x είναι ίσο με 1;

……………………………………………………………………………....................

- Με βάση τις παρατηρήσεις σας στα τρία προηγούμενα παραδείγματα, τι μπορείτε να πείτε για την τιμή της $f(x)$, όταν το x τείνει να γίνει ίσο με 1;

……………………………………………………………………………….

Δραστηριότητα 3:

- Να βρείτε το $\lim_{x\to 2}(x-2)$.

  ………………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………

- Να βρείτε το $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$.

  ………………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………

Όριο Συνάρτησης στο $x_0 \epsilon \mathbb{R}$

Η έννοια του ορίου

- Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό c, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0, τότε γράφουμε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = c$$

και διαβάζουμε:

«το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0, είναι c» ή

« το όριο της $f(x)$ στο x_0 είναι c».

Πλευρικά όρια συνάρτησης

Δραστηριότητα 1:

Να μπείτε στην ιστοσελίδα http://www.calculusapplets.com/ και να ανοίξετε το εφαρμογίδιο “ Informal view of limits”.

- Στην οθόνη σας βλέπετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0{,}5x$. Να επιλέξετε το δρομέα δίπλα από το x και να δώσετε διάφορες τιμές στο x. Τι παρατηρείτε για τις αντίστοιχες τιμές του y όσο το x πλησιάζει την τιμή 1, τόσο από τιμές μεγαλύτερες από το 1, όσο και από τιμές μικρότερες από το 1;

  ………………………………………………………………………………………

  …………………………………………………………………………

  Ποια τιμή παίρνει το y όταν το x πάρει την τιμή 1;

  ……………………………………………………………………………….

Δραστηριότητα 2:

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «πλευρικό όριο συνάρτησης- υποενότητα 1.1».

- Στην οθόνη σας βλέπετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x$.Να δώσετε την τιμή 3 στο x και να επιλέξετε διαδοχικά τα εικονίδια «αριστερό όριο», «δεξιό όριο» και «όριο».

  Να απαντήσετε τα πιο κάτω ερωτήματα:

  (α) Ποιο είναι το όριο της συνάρτησης καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό 3 από μικρότερες τιμές του;

  ………………………………………………………………………………

  (β) Ποιο είναι το όριο της συνάρτησης καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό 3 από μεγαλύτερες τιμές του;

  ………………………………………………………………………………

(γ) Ποιο είναι το όριο της συνάρτησης όταν το x τείνει να πάρει την τιμή 3;
……………………………………………………………………………………….

Να επαναλάβετε τη διαδικασία και για άλλες τιμές του x.

- Να επιλέξετε την δεύτερη εφαρμογή. Στην οθόνη ας βλέπετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 4$. Να δώσετε την τιμή 0 στο x και να επιλέξετε διαδοχικά τα εικονίδια «αριστερό όριο», «δεξιό όριο» και «όριο».
Να απαντήσετε τα πιο κάτω ερωτήματα:
(α) Ποιο είναι το όριο της συνάρτησης καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό 0 από μικρότερες τιμές του;
………………………………………………………………………………………
(β) Ποιο είναι το όριο της συνάρτησης καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό 0 από μεγαλύτερες τιμές του;
………………………………………………………………………………………
(γ) Ποιο είναι το όριο της συνάρτησης όταν το x τείνει να πάρει την τιμή 0;
……………………………………………………………………………………….

Να επαναλάβετε τη διαδικασία και για άλλες τιμές του x.

<u>Δραστηριότητα 4:</u>

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «πλευρικό όριο συνάρτησης- υποενότητα 1.2».

- Στην οθόνη σας βλέπετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x-2}$.

Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα τιμών για τις διάφορες τιμές του x.

x	**y**
2,9	
2,99	
2,999	
3,001	
3,01	
3,1	

Να απαντήσετε τα πιο κάτω ερωτήματα:

Να δώσετε την τιμή 2 στο x και να επιλέξετε διαδοχικά τα εικονίδια «αριστερό όριο», «δεξιό όριο» και «όριο».
Να απαντήσετε τα πιο κάτω ερωτήματα:

(α) Ποιο είναι το όριο της συνάρτησης καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό 2 από μικρότερες τιμές του;

……………………………………………………………………………………

(β) Ποιο είναι το όριο της συνάρτησης καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό 2 από μεγαλύτερες τιμές του;

……………………………………………………………………………………

(γ) Ποιο είναι το όριο της συνάρτησης όταν το x τείνει να πάρει την τιμή 2;

…………………………………………………………………………………….

Να επαναλάβετε τη διαδικασία και για άλλες τιμές του x.
Για ποια τιμή του x το όριο δεν υπάρχει;

……………………………………………………………………………………

- Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό c_1, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0 από μικρότερες τιμές $(x < x_0)$, τότε γράφουμε:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = c_1$$

  και διαβάζουμε

  «το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 από τα αριστερά, είναι c_1».
- Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό c_2, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0 από μεγαλύτερες τιμές $(x > x_0)$, τότε γράφουμε:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = c_2$$

  και διαβάζουμε

  «το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 από τα δεξιά, είναι c_2».
- Οι αριθμοί c_1 και c_2 λέγονται πλευρικά όρια της συνάρτησης f. Το c_1 λέγεται αριστερό όριο της f και το c_2 δεξιό όριο της f.
- Αν $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = c$ τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = c$.

Όριο Συνάρτησης στο $x_0 \epsilon \mathbb{R}$

Η έννοια του ορίου

- Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό c, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0, τότε γράφουμε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = c$$

και διαβάζουμε:

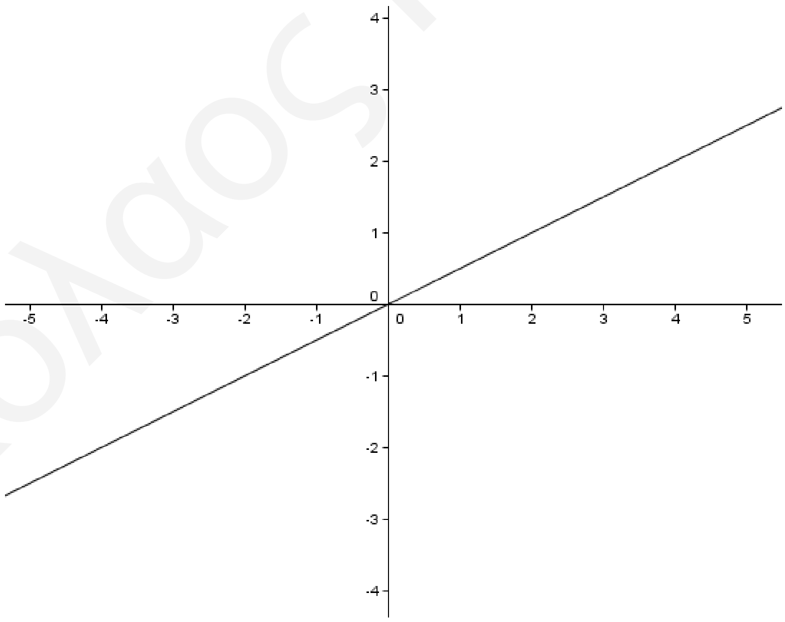
«το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0, είναι $\boldsymbol{c}$» ή

« το όριο της $f(x)$ στο x_0 είναι $\boldsymbol{c}$».

Πλευρικά όρια συνάρτησης

Δραστηριότητα 1:

- Στο σχήμα βλέπετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0{,}5x$.



Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα τιμών για τις διάφορες τιμές του x.

x	**y**
0,9	
0,99	
0,999	
1,001	
1,01	
1,1	

Ποια τιμή παίρνει το y όσο το x πλησιάζει την τιμή 1, τόσο από τιμές μεγαλύτερες από το 1, όσο και από τιμές μικρότερες από το 1;

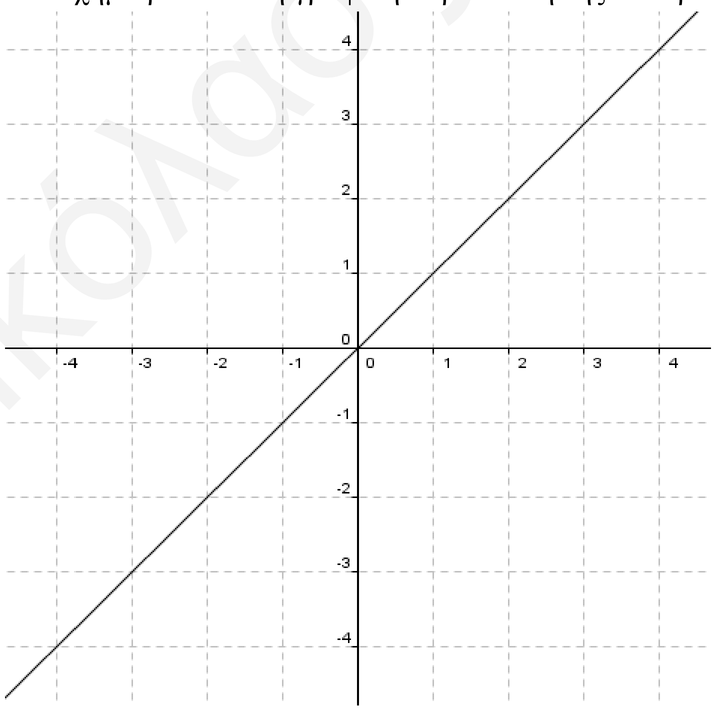
…………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

Ποια τιμή παίρνει το y όταν το x είναι ίσο με 1;

……………………………………………………………………………….................

Δραστηριότητα 2:

- Στο σχήμα βλέπετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x$.



Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα τιμών για τις διάφορες τιμές του x.

x	**y**
2,9	
2,99	
2,999	
3,001	
3,01	
3,1	

Να απαντήσετε τα πιο κάτω ερωτήματα:

(α) Ποιο είναι το όριο της συνάρτησης καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό 3 από μικρότερες τιμές του;

………………………………………………………………………………………

(β) Ποιο είναι το όριο της συνάρτησης καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό 3 από μεγαλύτερες τιμές του;

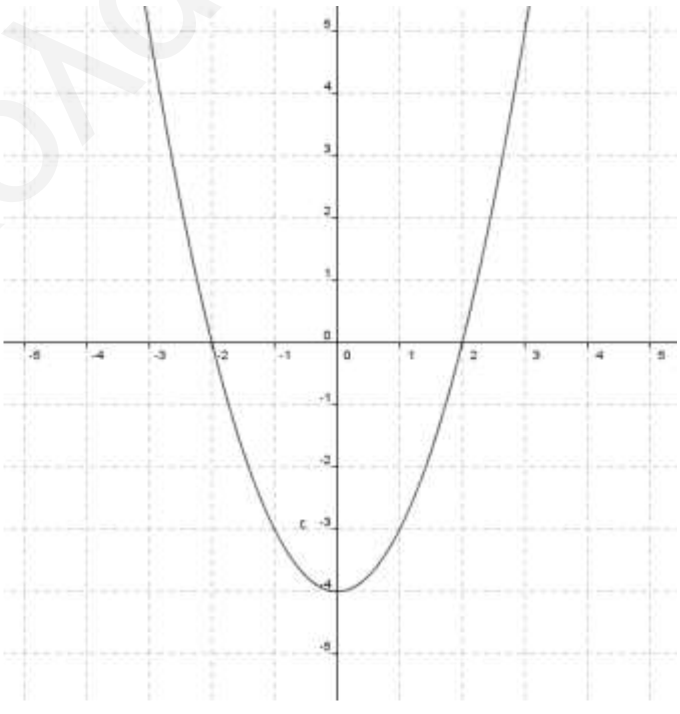
………………………………………………………………………………………

(γ) Ποιο είναι το όριο της συνάρτησης όταν το x τείνει να πάρει την τιμή 3;

………………………………………………………………………………………

<u>Δραστηριότητα 3:</u>

- Στο σχήμα βλέπετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 4$.



Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα τιμών για τις διάφορες τιμές του x.

x	**y**
-0,1	
-0,01	
-0,001	
0,001	
0,01	
0,1	

Να απαντήσετε τα πιο κάτω ερωτήματα:

(α) Ποιο είναι το όριο της συνάρτησης καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό 0 από μικρότερες τιμές του;

………………………………………………………………………………………

(β) Ποιο είναι το όριο της συνάρτησης καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό 0 από μεγαλύτερες τιμές του;

………………………………………………………………………………………

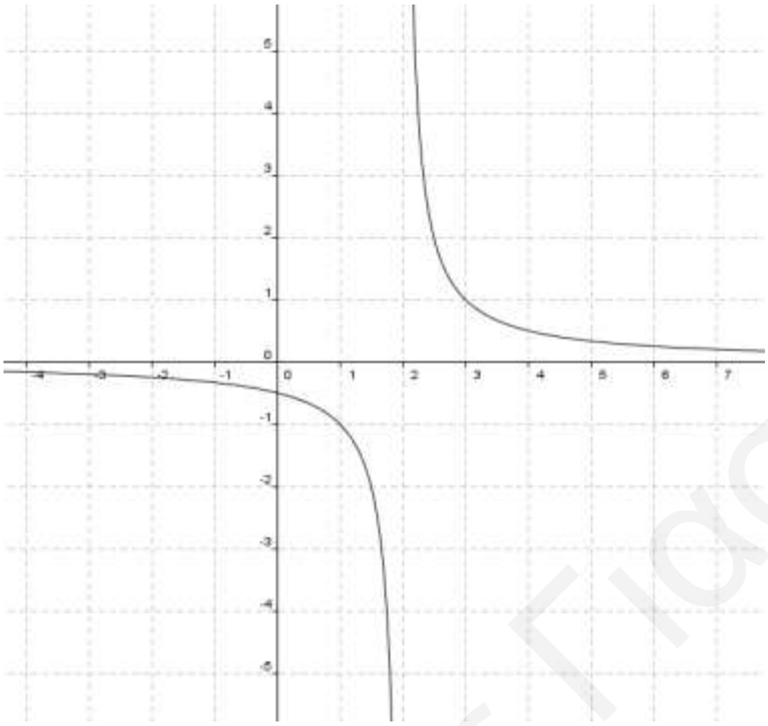
(γ) Ποιο είναι το όριο της συνάρτησης όταν το x τείνει να πάρει την τιμή 0;

……………………………………………………………………………………….

Να επαναλάβετε τη διαδικασία και για άλλες τιμές του x.

Δραστηριότητα 4:

- Στο σχήμα βλέπετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x-2}$.



Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα τιμών για τις διάφορες τιμές του x.

x	**y**
1,9	
1,99	
1,999	
2,001	
2,01	
2,1	

Να απαντήσετε τα πιο κάτω ερωτήματα:

(α) Ποιο είναι το όριο της συνάρτησης καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό 2 από μικρότερες τιμές του;

…………………………………………………………………………………

(β) Ποιο είναι το όριο της συνάρτησης καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό 2 από μεγαλύτερες τιμές του;

…………………………………………………………………………………

(γ) Ποιο είναι το όριο της συνάρτησης όταν το x τείνει να πάρει την τιμή 2;

……………………………………………………………………………………….

Να επαναλάβετε τη διαδικασία και για άλλες τιμές του x.

Για ποια τιμή του x το όριο δεν υπάρχει;

………………………………………………………………………………………

- Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό c_1, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0 από μικρότερες τιμές $(x < x_0)$, τότε γράφουμε:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = c_1$$

  και διαβάζουμε

  «το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 από τα αριστερά, είναι c_1».
- Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό c_2, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0 από μεγαλύτερες τιμές $(x > x_0)$, τότε γράφουμε:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = c_2$$

  και διαβάζουμε

  «το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 από τα δεξιά, είναι c_2».
- Οι αριθμοί c_1 και c_2 λέγονται πλευρικά όρια της συνάρτησης f. Το c_1 λέγεται αριστερό όριο της f και το c_2 δεξιό όριο της f.
- Αν $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = c$ τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = c$.

Ορισμός του Ορίου Συνάρτησης στο $x_0 \epsilon \mathbb{R}$

- Όταν γράφουμε $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ εννοούμε ότι οι τιμές $f(x)$ βρίσκονται όσο θέλουμε κοντά στο c, για όλα τα $x \neq x_0$ τα οποία βρίσκονται «αρκούντως κοντά στο x_0».
- Στη θέση της φράσης «οι τιμές $f(x)$ βρίσκονται όσο θέλουμε κοντά στο L» χρησιμοποιούμε την ανισότητα $|f(x) - L| < \varepsilon$, όπου ε οποιοσδήποτε θετικός αριθμός.
- Στη θέση της φράσης «για όλα τα $x \neq x_0$ τα οποία βρίσκονται αρκούντως κοντά στο x_0» χρησιμοποιούμε την ανισότητα
  $0 < |x - x_0| < \delta$, όπου δ είναι ένας αρκούντως μικρός θετικός αριθμός.

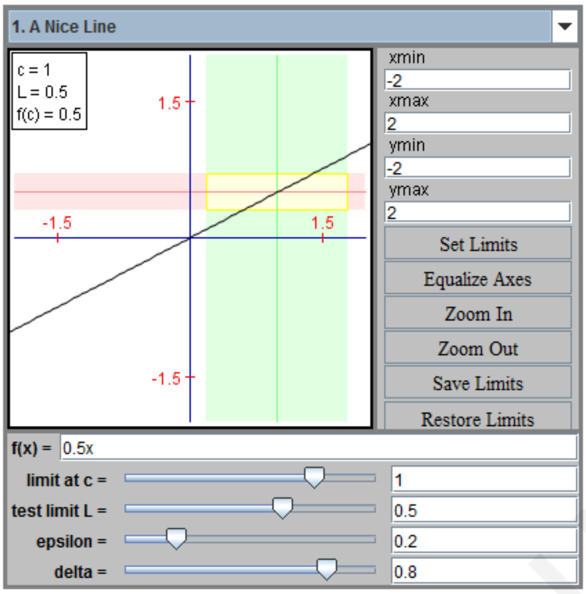
<u>Δραστηριότητα 1:</u>

Να μπείτε στην ιστοσελίδα http://www.calculusapplets.com/ και να ανοίξετε το εφαρμογίδιο " Formal definition of limits".

- Στην οθόνη σας βλέπετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0{,}5x$. Θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο της συνάρτησης f και να ελέγξουμε αν είναι ίσο με 0,5 όταν το x τείνει στο 1.

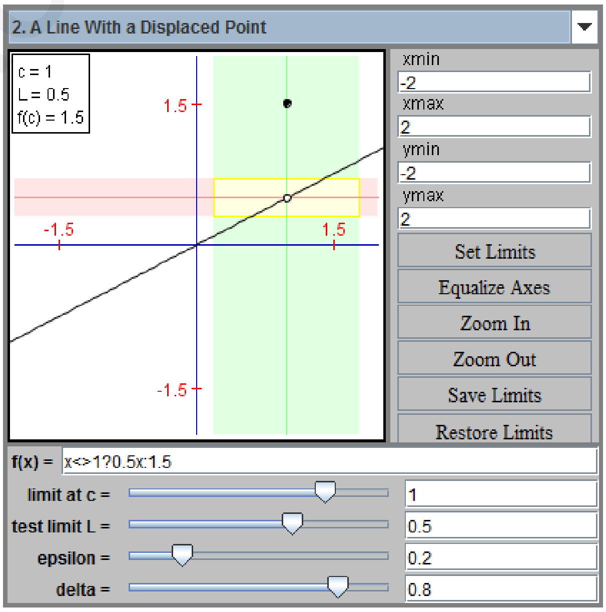
  Η κατακόρυφη στήλη περιλαμβάνει τα σημεία εκείνα των οποίων οι τετμημένες απέχουν απόσταση δ από το x_0. Ενώ η οριζόντια τα σημεία εκείνα των οποίων οι τεταγμένες απέχουν απόσταση ε από το L.
  Το ερώτημα που θα πρέπει να απαντήσουμε είναι για ποιες συγκεκριμένες τιμές του ε, μπορούμε να βρούμε τιμές για το δ, τέτοιες ώστε το μέρος της συνάρτησης που βρίσκεται μέσα στην κατακόρυφη στήλη να παραμένει και εντός της οριζόντιας στήλης.

  Να επιλέξετε τον δρομέα ε και να δώσετε διάφορες τιμές στο ε. Στην συνέχεια να επιλέξετε το δρομέα δ και να δώσετε διάφορες τιμές στο δ. Τι παρατηρείται για το πλάτος της κατακόρυφης και της οριζόντιας στήλης για τις διάφορες τιμές των ε και δ;
  …………………………………………………………………………………………
  …………………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………
  Τι πρέπει να συμβαίνει για το πλάτος των δύο στηλών έτσι ώστε να προσεγγίσουμε την τιμή 0,5 για το L όταν το x τείνει στο 1;
  …………………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………



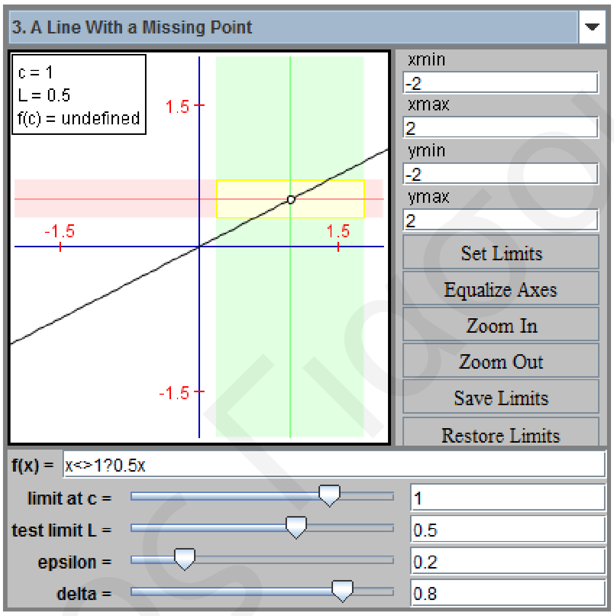
- Να ανοίξετε την λίστα επιλογών και να επιλέξετε την δεύτερη συνάρτηση. Στην οθόνη σας βλέπετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0{,}5x$.
  Να επιλέξετε τον δρομέα ε και να δώσετε διάφορες τιμές στο ε. Στην συνέχεια να επιλέξετε το δρομέα δ και να δώσετε διάφορες τιμές στο δ.

  Τι πρέπει να συμβαίνει για το πλάτος των δύο στηλών έτσι ώστε να προσεγγίσουμε την τιμή 0,5 για το L όταν το x τείνει στο 1;
  ………………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………..



- Να ανοίξετε την λίστα επιλογών και να επιλέξετε την τρίτη συνάρτηση. Στην οθόνη σας βλέπετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0{,}5x$.
  Να επιλέξετε τον δρομέα ε και να δώσετε διάφορες τιμές στο ε. Στην συνέχεια να επιλέξετε το δρομέα δ και να δώσετε διάφορες τιμές στο δ.

  Τι πρέπει να συμβαίνει για το πλάτος των δύο στηλών έτσι ώστε να προσεγγίσουμε την τιμή 0,5 για το L όταν το x τείνει στο 1;
  ……………………………………………………………………………………
  …………………………………………………………………………



- Με βάση τα πιο πάνω παραδείγματα καταλήγουμε στον ορισμό του ορίου:
  Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Θα λέμε ότι η f έχει όριο $L \in \mathbb{R}$, ,όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος, ώστε για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, με $0 < |x - x_0| < \delta$, να ισχύει: $|f(x) - L| < \varepsilon$.

- Με βάση τον ορισμό του ορίου αποδεικνύεται ότι:

  1. $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$

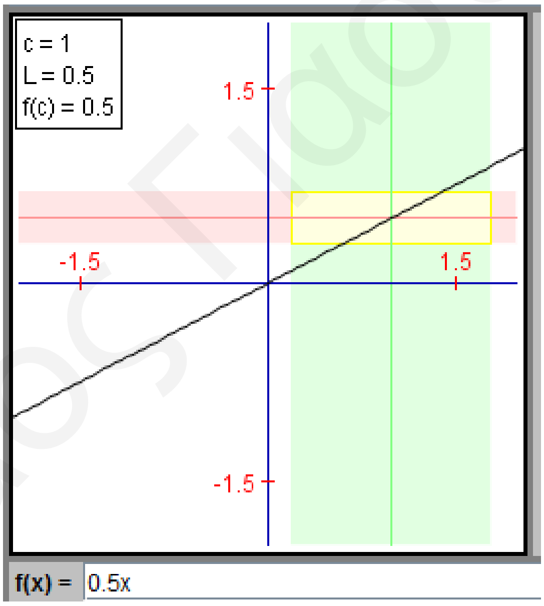
  2. $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$

Ορισμός του Ορίου Συνάρτησης στο $x_0 \epsilon \mathbb{R}$

- Όταν γράφουμε $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ εννοούμε ότι οι τιμές $f(x)$ βρίσκονται όσο θέλουμε κοντά στο c, για όλα τα $x \neq x_0$ τα οποία βρίσκονται «αρκούντως κοντά στο x_0».
- Στη θέση της φράσης «οι τιμές $f(x)$ βρίσκονται όσο θέλουμε κοντά στο L» χρησιμοποιούμε την ανισότητα $|f(x) - L| < \varepsilon$, όπου ε οποιοσδήποτε θετικός αριθμός.
- Στη θέση της φράσης «για όλα τα $x \neq x_0$ τα οποία βρίσκονται αρκούντως κοντά στο x_0» χρησιμοποιούμε την ανισότητα
  $0 < |x - x_0| < \delta$, όπου δ είναι ένας αρκούντως μικρός θετικός αριθμός.

Δραστηριότητα 1:

- Στο σχήμα βλέπετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0{,}5x$. Θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο της συνάρτησης f και να ελέγξουμε αν είναι ίσο με 0,5 όταν το x τείνει στο 1.

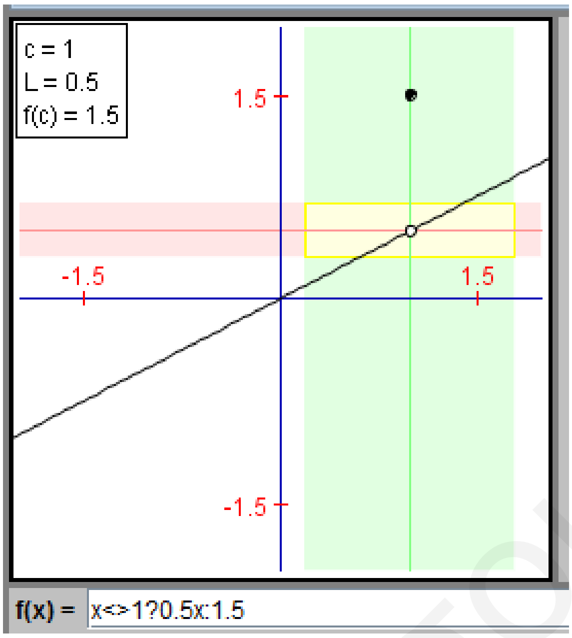


Η κατακόρυφη στήλη περιλαμβάνει τα σημεία εκείνα των οποίων οι τετμημένες απέχουν απόσταση δ από το x_0. Ενώ η οριζόντια τα σημεία εκείνα των οποίων οι τεταγμένες απέχουν απόσταση ε από το L.
Το ερώτημα που θα πρέπει να απαντήσουμε είναι για ποιες συγκεκριμένες τιμές του ε, μπορούμε να βρούμε τιμές για το δ, τέτοιες ώστε το μέρος της συνάρτησης που βρίσκεται μέσα στην κατακόρυφη στήλη να παραμένει και εντός της οριζόντιας στήλης.
Τι πρέπει να συμβαίνει για το πλάτος των δύο στηλών έτσι ώστε να προσεγγίσουμε την τιμή 0,5 για το L όταν το x τείνει στο 1;

……………………………………………………………………………………

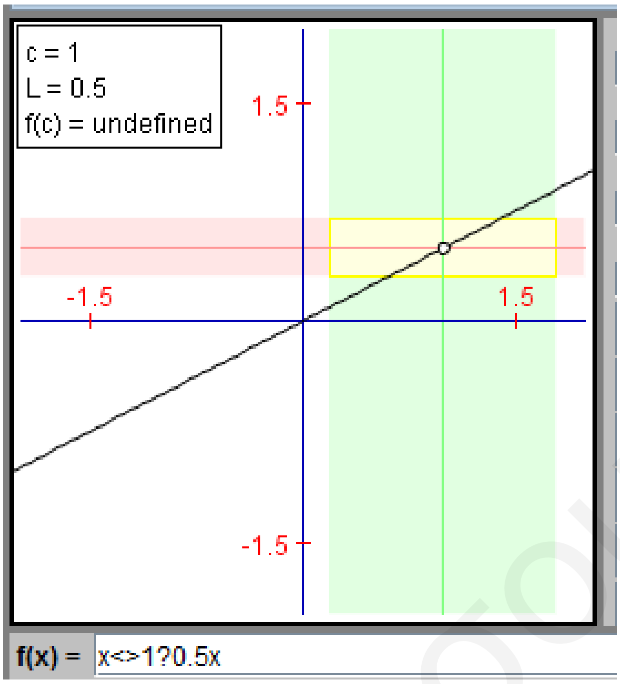
……………………………………………………………………………

- Στο σχήμα βλέπετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0{,}5x$.



Τι πρέπει να συμβαίνει για το πλάτος των δύο στηλών έτσι ώστε να προσεγγίσουμε την τιμή 0,5 για το L όταν το x τείνει στο 1;
…………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………..

- Στο σχήμα βλέπετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0{,}5x$.



Τι πρέπει να συμβαίνει για το πλάτος των δύο στηλών έτσι ώστε να προσεγγίσουμε την τιμή 0,5 για το L όταν το x τείνει στο 1;

……………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

- Με βάση τα πιο πάνω παραδείγματα καταλήγουμε στον ορισμό του ορίου:
  Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Θα λέμε ότι η f έχει όριο $L \in \mathbb{R}$, ,όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος, ώστε για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, με $0 < |x - x_0| < \delta$, να ισχύει: $|f(x) - L| < \varepsilon$.

- Με βάση τον ορισμό του ορίου αποδεικνύεται ότι:

  1. $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$

  2. $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$

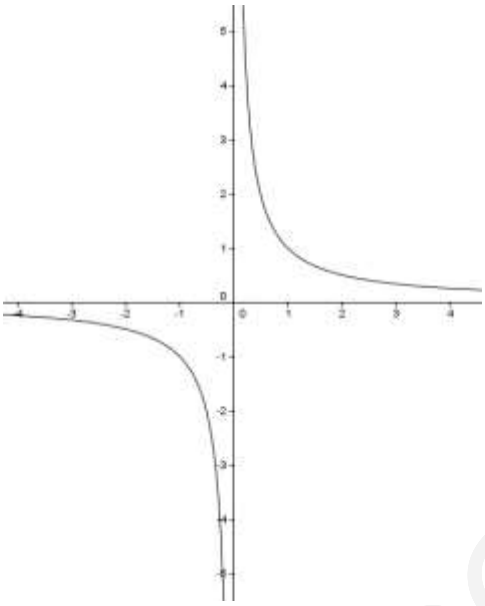
Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0 \epsilon \mathbb{R}$

Όνομα:…………………………………………………… Τμήμα:………………..

Δραστηριότητα 1:

Να μπείτε στην ιστοσελίδα http://www.calculusapplets.com/ και να ανοίξετε το εφαρμογίδιο "Limits at Infinity". Να ανοίξετε τη λίστα επιλογών και να επιλέξετε την πρώτη συνάρτηση. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$.

Να βρείτε τα πιο κάτω όρια:



1. $\lim_{x \to 0^-} f(x) =$ ……………
2. $\lim_{x \to 0^+} f(x) =$ ……………
3. $\lim_{x \to 0} f(x) =$ ……………..

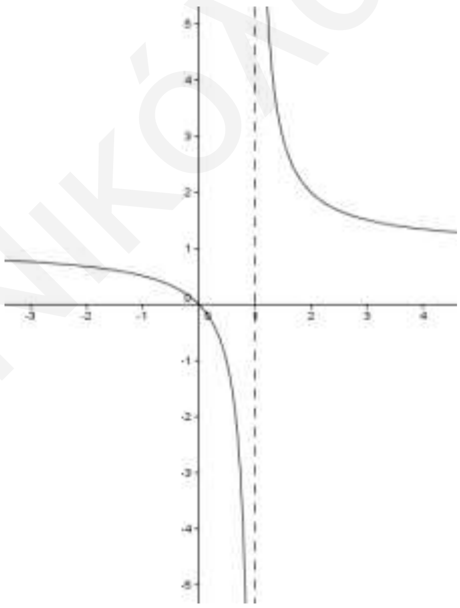
Ποια είναι η αριθμητική τιμή της $f(x) = \frac{1}{x}$ στο $x = 0$;…………………………………

Με βάση τις παρατηρήσεις σας να συμπληρώσετε τα πιο κάτω:

$\frac{1}{0^+} =$…… $\frac{1}{0^-} =$……..

Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{x}{x-1}$.

Να βρείτε τα πιο κάτω όρια:



1. $\lim_{x \to 1^-} f(x) =$ ……………
2. $\lim_{x \to 1^+} f(x) =$ ……………
3. $\lim_{x \to 1} f(x) =$ ……………..

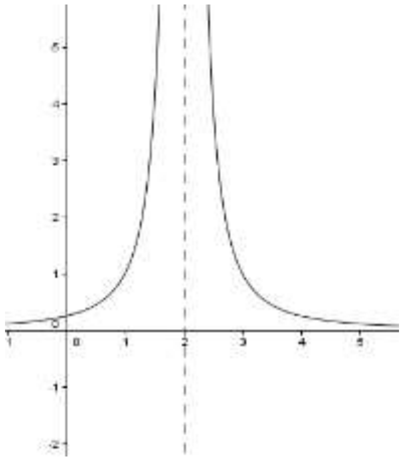
Ποια είναι η αριθμητική τιμή της $f(x) = \frac{x}{x-1}$ στο $x = 1$;………………………………

Με βάση τις παρατηρήσεις σας να συμπληρώσετε τα πιο κάτω:

$\frac{1}{0^+} =$…… $\frac{1}{0^-} =$……..

Δραστηριότητα 2:

Να μπείτε στην ιστοσελίδα http://www.calculusapplets.com/ και να ανοίξετε το εφαρμογίδιο “ One- and Two-Sided Limits and When Limits Fail to Exist ”. Να ανοίξετε τη λίστα επιλογών και να επιλέξετε την δεύτερη συνάρτηση. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$.



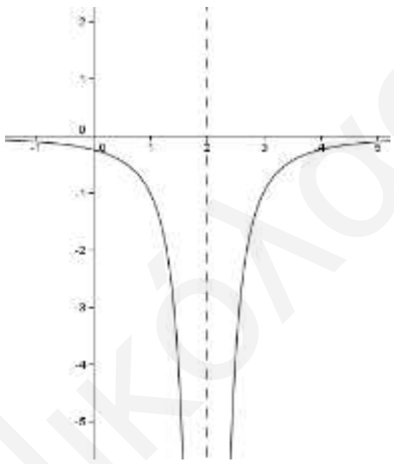
Να βρείτε τα πιο κάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
2. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
3. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Ποια είναι η αριθμητική τιμή της $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$ στο $x=2$; ……………………………………………

Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\frac{-1}{(x-2)^2}$.

Να βρείτε τα πιο κάτω όρια:



1. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
2. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
3. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Ποια είναι η αριθμητική τιμή της $f(x)=\frac{-1}{(x-2)^2}$ στο $x=2$;

……………………………………………

Ασκήσεις:

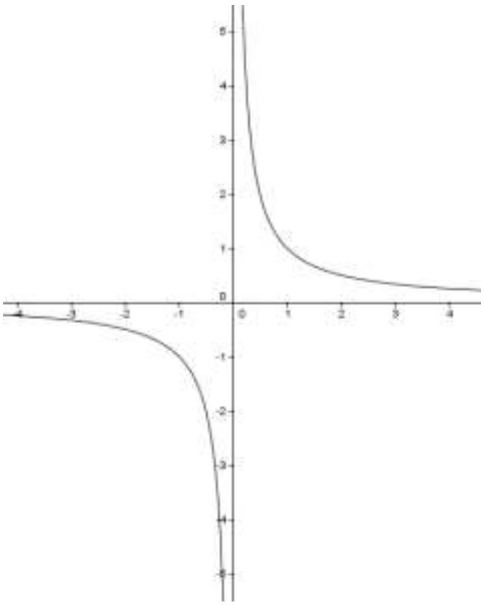
1. $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x-1}{x-2}$
2. $\lim\limits_{x\to -3^+} \frac{x^2-1}{3+x}$

Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0 \epsilon \mathbb{R}$

Όνομα:…………………………………………………… Τμήμα:………………..

Δραστηριότητα 1:

Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$.



Να βρείτε τα πιο κάτω όρια:

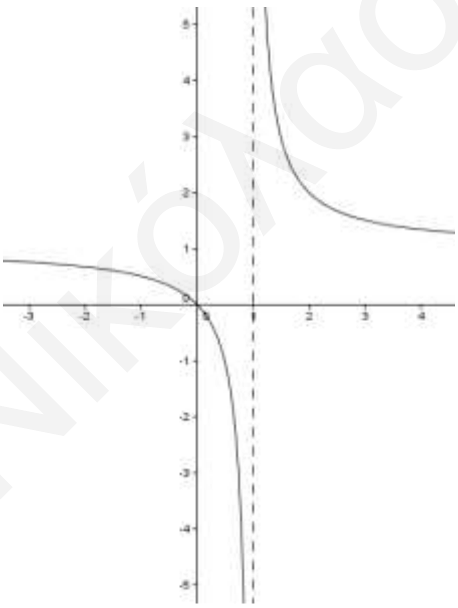
4. $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) =$ ……………
5. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) =$ ……………
6. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$ ……………..

Ποια είναι η αριθμητική τιμή της $f(x) = \frac{1}{x}$ στο $x = 0$;…………………………………

Με βάση τις παρατηρήσεις σας να συμπληρώσετε τα πιο κάτω:

$\frac{1}{0^+} =$…… $\frac{1}{0^-} =$………

Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{x}{x-1}$.



Να βρείτε τα πιο κάτω όρια:

4. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) =$ ……………
5. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) =$ ……………
6. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) =$ ……………..

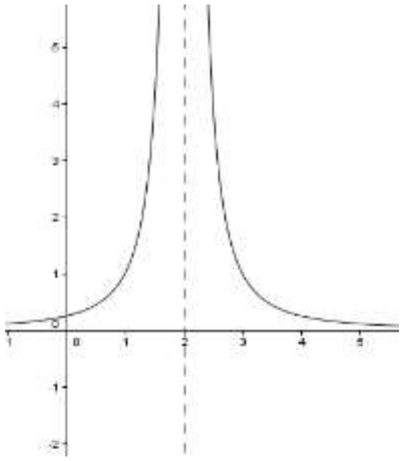
Ποια είναι η αριθμητική τιμή της $f(x) = \frac{x}{x-1}$ στο $x = 1$; …………………………………

Με βάση τις παρατηρήσεις σας να συμπληρώσετε τα πιο κάτω:

$\frac{1}{0^+} =$…… $\frac{1}{0^-} =$………

Δραστηριότητα 2:

Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$.

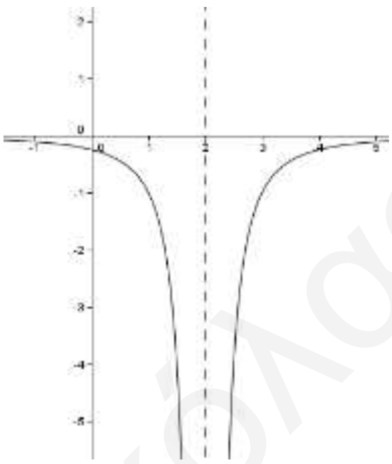


Να βρείτε τα πιο κάτω όρια:

4. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
5. $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
6. $\lim_{x\to 2} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Ποια είναι η αριθμητική τιμή της $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ στο $x = 2$; ……………………………………………

Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}$.



Να βρείτε τα πιο κάτω όρια:

4. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
5. $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
6. $\lim_{x\to 2} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Ποια είναι η αριθμητική τιμή της $f(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}$ στο $x = 2$;

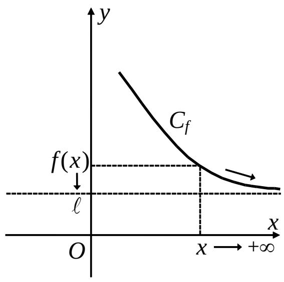
……………………………………………

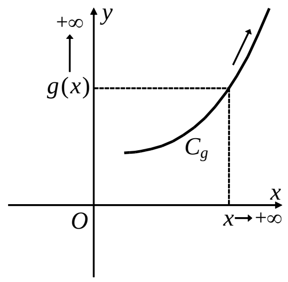
Ασκήσεις:

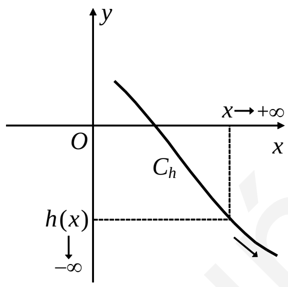
1. $\lim_{x\to 2^-} \frac{x-1}{x-2}$
2. $\lim_{x\to -3^+} \frac{x^2-1}{3+x}$

Όρια Συνάρτησης στο άπειρο

Στα πιο κάτω σχήματα έχουμε τις γραφικές παραστάσεις τριών συναρτήσεων f, g, h σε ένα διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$.







Καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα με οποιονδήποτε τρόπο παρατηρούμε ότι:

- Το $f(x)$ προσεγγίζει όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f έχει στο $+\infty$ όριο το ℓ και γράφουμε

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

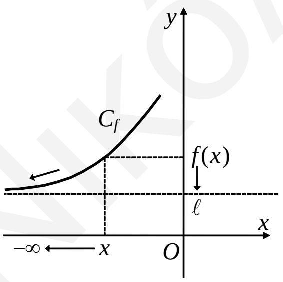
- Το $g(x)$ αυξάνεται απεριόριστα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η g έχει στο $+\infty$ όριο το $+\infty$ και γράφουμε

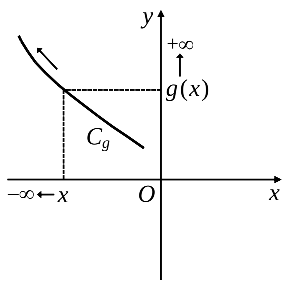
$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

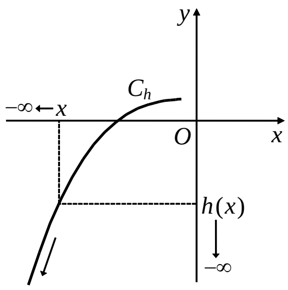
- Το $h(x)$ μειώνεται απεριόριστα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η h έχει στο $+\infty$ όριο το $-\infty$ και γράφουμε

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$$

Ανάλογοι ορισμοί μπορούν να διατυπωθούν, όταν $x \to -\infty$ για μια συνάρτηση που είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(-\infty, \beta)$. Έτσι, για τις συναρτήσεις f, g, h των παρακάτω σχημάτων έχουμε:



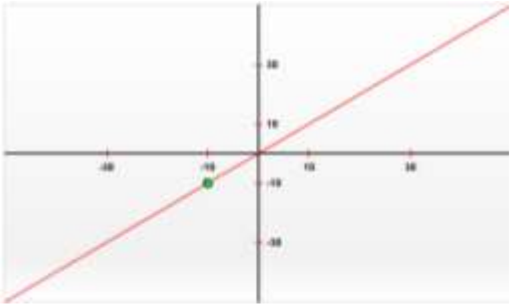




$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \qquad \lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$$

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «η έννοια του ορίου συνάρτησης- υποενότητα 1.2 όριο συνάρτησης όταν $x \to \pm\infty$». Με τη βοήθεια του εφαρμογιδίου να απαντήσετε τα πιο κάτω.

1. Στο σχήμα βλέπετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x$. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.



x	$f(x)$
-1000	
-100	
-10	
10	
100	
1000	

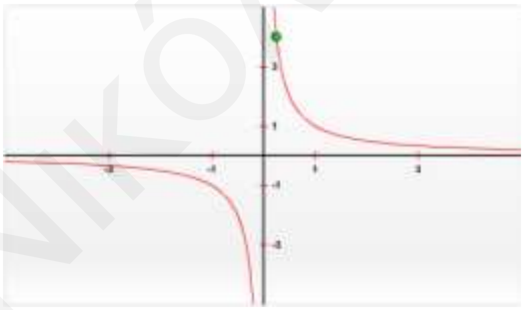
Τι παρατηρείται για τις τιμές της $f(x)$ όταν το x μικραίνει απεριόριστα;

…………………………………………………………………………………………..

Τι παρατηρείται για τις τιμές της $f(x)$ όταν το x μεγαλώνει απεριόριστα;

…………………………………………………………………………………………..

2. Στο σχήμα βλέπετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.



x	$f(x)$
-1000	
-100	
-10	
10	
100	
1000	

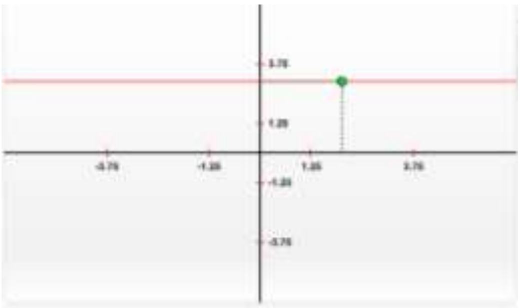
Τι παρατηρείται για τις τιμές της $f(x)$ όταν το x μικραίνει απεριόριστα;

…………………………………………………………………………………………..

Τι παρατηρείται για τις τιμές της $f(x)$ όταν το x μεγαλώνει απεριόριστα;

…………………………………………………………………………………………..

3. Στο σχήμα βλέπετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3$. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.



x	$f(x)$
-1000	
-100	
-10	
10	
100	
1000	

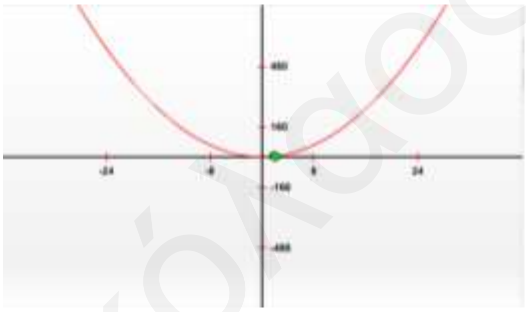
Τι παρατηρείται για τις τιμές της $f(x)$ όταν το x μικραίνει απεριόριστα;

……………………………………………………………………………………………..

Τι παρατηρείται για τις τιμές της $f(x)$ όταν το x μεγαλώνει απεριόριστα;

……………………………………………………………………………………………..

4. Στο σχήμα βλέπετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2$. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.



x	$f(x)$
-1000	
-100	
-10	
10	
100	
1000	

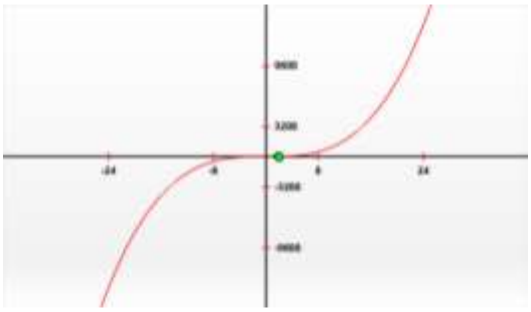
Τι παρατηρείται για τις τιμές της $f(x)$ όταν το x μικραίνει απεριόριστα;

……………………………………………………………………………………………..

Τι παρατηρείται για τις τιμές της $f(x)$ όταν το x μεγαλώνει απεριόριστα;

……………………………………………………………………………………………..

5. Στο σχήμα βλέπετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3$. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.



x	$f(x)$
-1000	
-100	
-10	
10	
100	
1000	

Τι παρατηρείται για τις τιμές της $f(x)$ όταν το x μικραίνει απεριόριστα;

……………………………………………………………………………………………..

Τι παρατηρείται για τις τιμές της $f(x)$ όταν το x μεγαλώνει απεριόριστα;

……………………………………………………………………………………………..

Με βάση τις παρατηρήσεις σας να βρείτε τα πιο κάτω όρια:

$\lim\limits_{x\to+\infty} x =$ ………………………………. $\lim\limits_{x\to-\infty} x =$
……………………………….

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} =$ ………………………………. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} =$
……………………………….

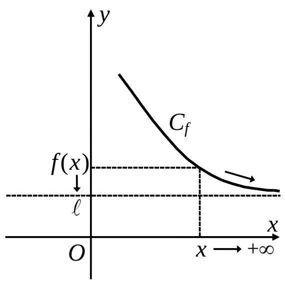
$\lim\limits_{x\to+\infty} c =$ ………………………………. $\lim\limits_{x\to-\infty} c =$
……………………………….

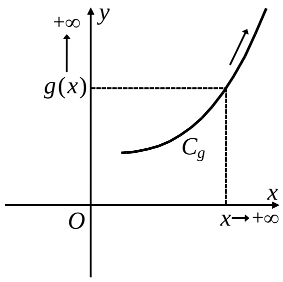
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 =$ ………………………………. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 =$
……………………………….

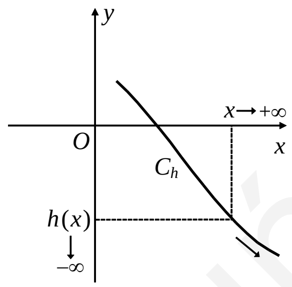
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 =$ ………………………………. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 =$
……………………………….

Όρια Συνάρτησης στο άπειρο

Στα πιο κάτω σχήματα έχουμε τις γραφικές παραστάσεις τριών συναρτήσεων f, g, h σε ένα διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$.







Καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα με οποιονδήποτε τρόπο παρατηρούμε ότι:

- Το $f(x)$ προσεγγίζει όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f έχει στο $+\infty$ όριο το ℓ και γράφουμε

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

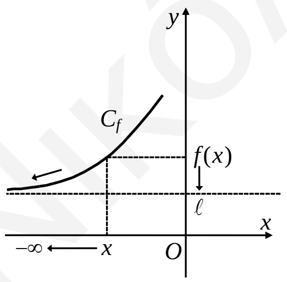
- Το $g(x)$ αυξάνεται απεριόριστα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η g έχει στο $+\infty$ όριο το $+\infty$ και γράφουμε

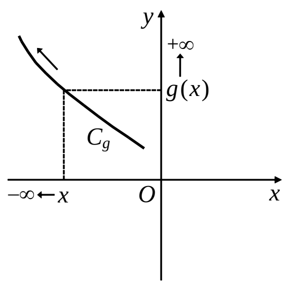
$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

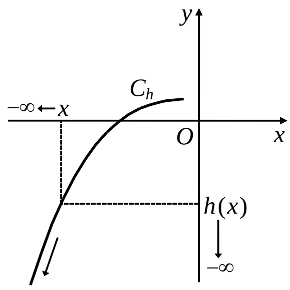
- Το $h(x)$ μειώνεται απεριόριστα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η h έχει στο $+\infty$ όριο το $-\infty$ και γράφουμε

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$$

Ανάλογοι ορισμοί μπορούν να διατυπωθούν, όταν $x \to -\infty$ για μια συνάρτηση που είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(-\infty, \beta)$. Έτσι, για τις συναρτήσεις f, g, h των παρακάτω σχημάτων έχουμε:

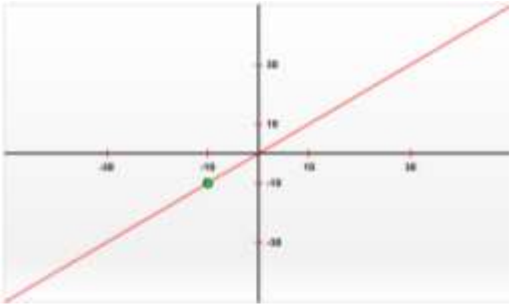






$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \qquad \lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$$

6. Στο σχήμα βλέπετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x$. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.



x	$f(x)$
-1000	
-100	
-10	
10	
100	
1000	

Τι παρατηρείται για τις τιμές της $f(x)$ όταν το x μικραίνει απεριόριστα;

……………………………………………………………………………………………..

Τι παρατηρείται για τις τιμές της $f(x)$ όταν το x μεγαλώνει απεριόριστα;

……………………………………………………………………………………………..

7. Στο σχήμα βλέπετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.

x	$f(x)$
-1000	
-100	
-10	
10	
100	
1000	

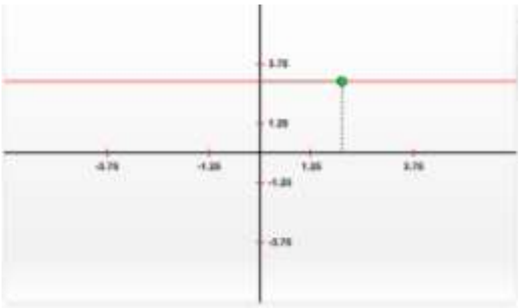
Τι παρατηρείται για τις τιμές της $f(x)$ όταν το x μικραίνει απεριόριστα;

……………………………………………………………………………………………..

Τι παρατηρείται για τις τιμές της $f(x)$ όταν το x μεγαλώνει απεριόριστα;

……………………………………………………………………………………………..

8. Στο σχήμα βλέπετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3$. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.



x	$f(x)$
-1000	
-100	
-10	
10	
100	
1000	

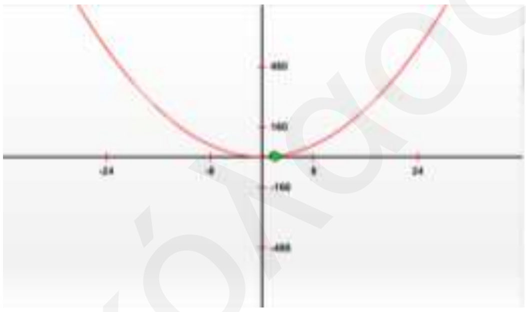
Τι παρατηρείται για τις τιμές της $f(x)$ όταν το x μικραίνει απεριόριστα;

………………………………………………………………………………………………..

Τι παρατηρείται για τις τιμές της $f(x)$ όταν το x μεγαλώνει απεριόριστα;

………………………………………………………………………………………………..

9. Στο σχήμα βλέπετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2$. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.



x	$f(x)$
-1000	
-100	
-10	
10	
100	
1000	

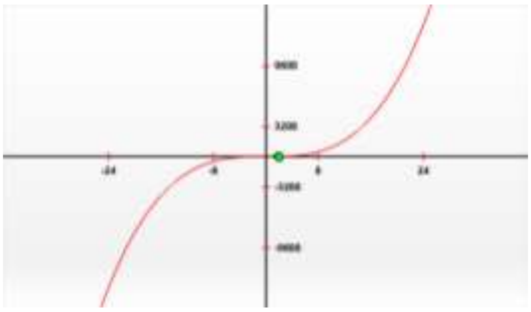
Τι παρατηρείται για τις τιμές της $f(x)$ όταν το x μικραίνει απεριόριστα;

………………………………………………………………………………………………..

Τι παρατηρείται για τις τιμές της $f(x)$ όταν το x μεγαλώνει απεριόριστα;

………………………………………………………………………………………………..

10. Στο σχήμα βλέπετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3$. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.



x	$f(x)$
-1000	
-100	
-10	
10	
100	
1000	

Τι παρατηρείται για τις τιμές της $f(x)$ όταν το x μικραίνει απεριόριστα;

……………………………………………………………………………………………..

Τι παρατηρείται για τις τιμές της $f(x)$ όταν το x μεγαλώνει απεριόριστα;

……………………………………………………………………………………………..

Με βάση τις παρατηρήσεις σας να βρείτε τα πιο κάτω όρια:

$\lim\limits_{x\to+\infty} x =$ ………………………………. $\lim\limits_{x\to-\infty} x =$ ……………………………….

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} =$ ………………………………. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} =$ ……………………………….

$\lim\limits_{x\to+\infty} c =$ ………………………………. $\lim\limits_{x\to-\infty} c =$ ……………………………….

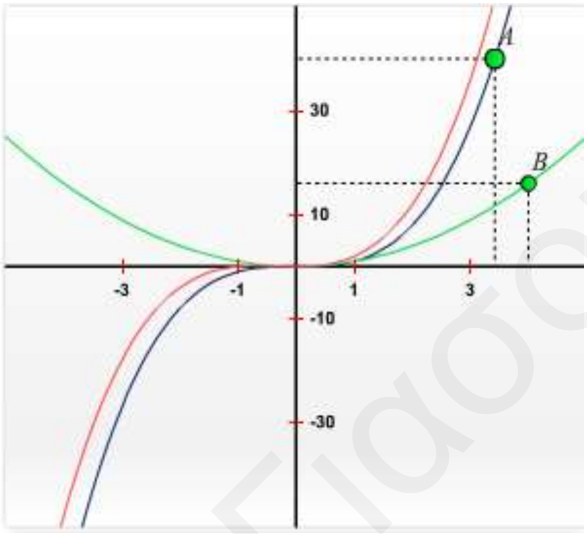
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 =$ ………………………………. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 =$ ……………………………….

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 =$ ………………………………. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 =$ ……………………………….

Ιδιότητες των ορίων όταν το $x \to \pm\infty$

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «η έννοια του ορίου συνάρτησης- υποενότητα 2.1». Με τη βοήθεια του εφαρμογιδίου να απαντήσετε τα πιο κάτω.

1. Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ και $h(x) = f(x) + g(x)$. Το σημείο Α ανήκει στην γραφική παράσταση της $f(x)$ και το Β στην γραφική παράσταση της $g(x)$. Με τη βοήθεια του σχήματος να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.



x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x) = f(x) + g(x)$
10			
100			
1000			

Τι παρατηρείται για τις τιμές της $h(x)$ όταν η $f(x)$ και η $g(x)$ μεγαλώνουν απεριόριστα;

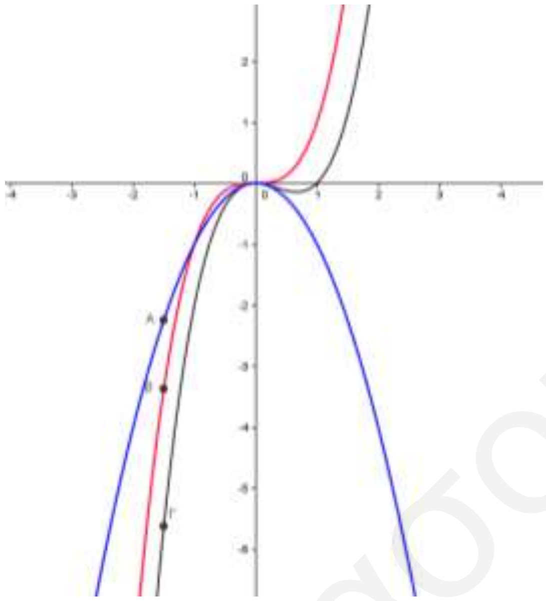
……………………………………………………………………………………………..

Με βάση τις παρατηρήσεις σας να βρείτε τα πιο κάτω όρια :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$ ……………………………… $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) =$ ………………………………

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) =$ ………………………………

2. Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^3$ και $h(x) = f(x) + g(x)$. Το σημείο Α ανήκει στην γραφική παράσταση της $f(x)$ και το Β στην γραφική παράσταση της $g(x)$. Με τη βοήθεια του σχήματος να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.



x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x) = f(x) + g(x)$
-1000			
-100			
-10			

Τι παρατηρείται για τις τιμές της $h(x)$ όταν η $f(x)$ και η $g(x)$ μικραίνουν απεριόριστα;

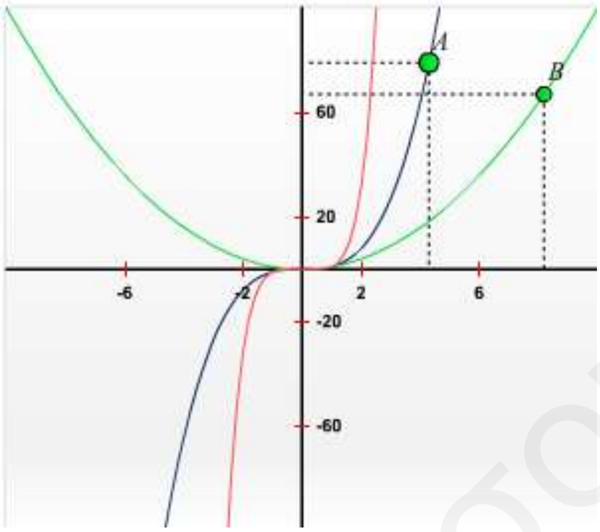
……………………………………………………………………………………………..

Με βάση τις παρατηρήσεις σας να βρείτε τα πιο κάτω όρια :

$\lim_{x\to-\infty} f(x) =$ ……………………………… $\lim_{x\to-\infty} g(x) =$ ……………………………….

$\lim_{x\to-\infty} h(x) =$ ……………………………….

3. Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ και $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Το σημείο Α ανήκει στην γραφική παράσταση της $f(x)$ και το Β στην γραφική παράσταση της $g(x)$. Με τη βοήθεια του σχήματος να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.



x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x) = f(x) \cdot g(x)$
-1000			
-100			
-10			
10			
100			
1000			

Τι παρατηρείται για τις τιμές της $h(x)$ όταν η $f(x)$ και η $g(x)$ μεγαλώνουν απεριόριστα;

……………………………………………………………………………………………..

Τι παρατηρείται για τις τιμές της $h(x)$ όταν η $f(x)$ και η $g(x)$ μικραίνουν απεριόριστα;

……………………………………………………………………………………………..

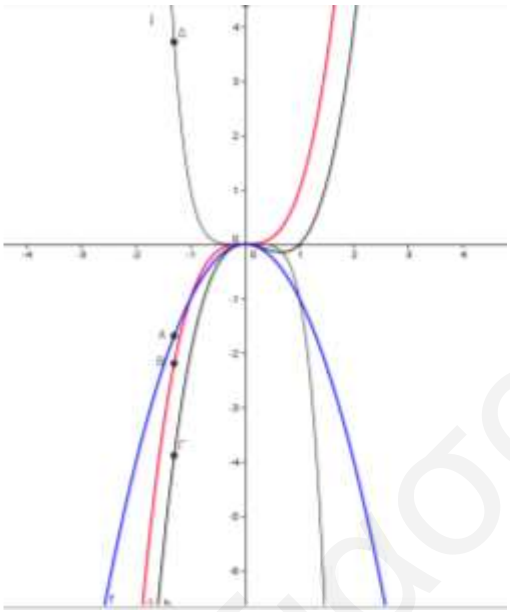
Με βάση τις παρατηρήσεις σας να βρείτε τα πιο κάτω όρια :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ ……………………………… $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) =$ ……………………………….

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$ ……………………………… $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) =$ ……………………………….

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) =$ ……………………………… $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) =$ ……………………………….

4. Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^3$ και $j(x) = f(x) \cdot g(x)$. Το σημείο Α ανήκει στην γραφική παράσταση της $f(x)$ το Β στην γραφική παράσταση της $g(x)$ και το Δ στη γραφική παράσταση της $j(x)$. Με τη βοήθεια του σχήματος να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.



x	$f(x)$	$g(x)$	$j(x) = f(x) \cdot g(x)$
-1000			
-100			
-10			
10			
100			
1000			

Τι παρατηρείται για τις τιμές της $h(x)$ όταν η $f(x)$ και η $g(x)$ μεγαλώνουν απεριόριστα;

…………………………………………………………………………………………..

Τι παρατηρείται για τις τιμές της $h(x)$ όταν η $f(x)$ και η $g(x)$ μικραίνουν απεριόριστα;

…………………………………………………………………………………………..

Με βάση τις παρατηρήσεις σας να βρείτε τα πιο κάτω όρια :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ …………………………… $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) =$ ……………………………….

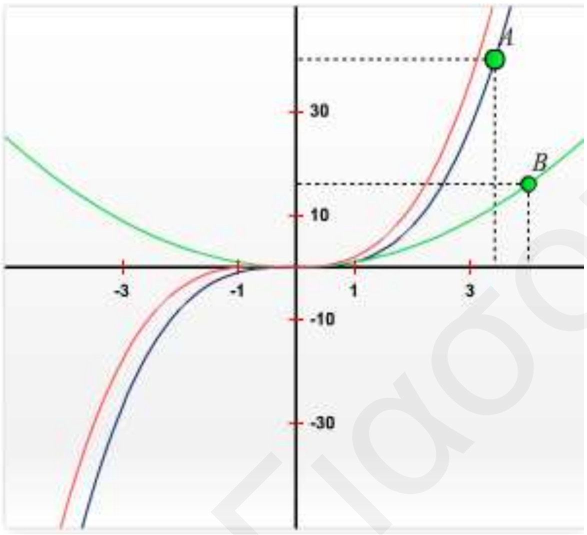
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$ ………………………………. $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) =$ ……………………………….

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) =$ ………………………………. $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) =$ ……………………………….

Ιδιότητες των ορίων όταν το $x \to \pm\infty$

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «η έννοια του ορίου συνάρτησης- υποενότητα 2.1». Με τη βοήθεια του εφαρμογιδίου να απαντήσετε τα πιο κάτω.

1. Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ και $h(x) = f(x) + g(x)$. Το σημείο Α ανήκει στην γραφική παράσταση της $f(x)$ και το Β στην γραφική παράσταση της $g(x)$. Με τη βοήθεια του σχήματος να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.



x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x) = f(x) + g(x)$
10			
100			
1000			

Τι παρατηρείται για τις τιμές της $h(x)$ όταν η $f(x)$ και η $g(x)$ μεγαλώνουν απεριόριστα;

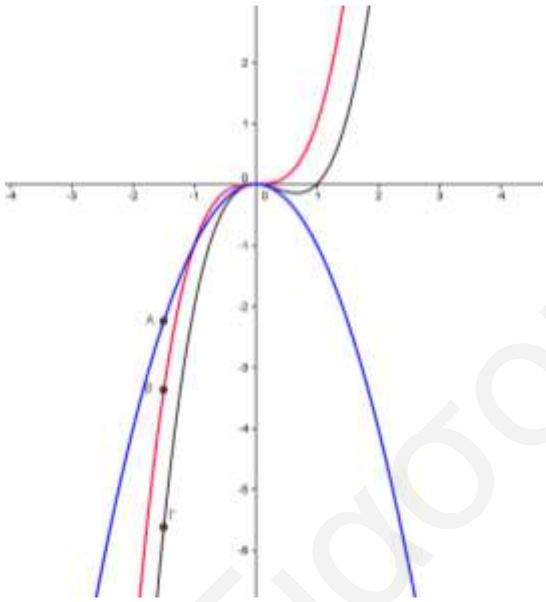
……………………………………………………………………………………………..

Με βάση τις παρατηρήσεις σας να βρείτε τα πιο κάτω όρια :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ ……………………………… $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) =$ ………………………………

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) =$ ………………………………

2. Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^3$ και $h(x) = f(x) + g(x)$. Το σημείο Α ανήκει στην γραφική παράσταση της $f(x)$ και το Β στην γραφική παράσταση της $g(x)$. Με τη βοήθεια του σχήματος να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.



x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x) = f(x) + g(x)$
-1000			
-100			
-10			

Τι παρατηρείται για τις τιμές της $h(x)$ όταν η $f(x)$ και η $g(x)$ μικραίνουν απεριόριστα;

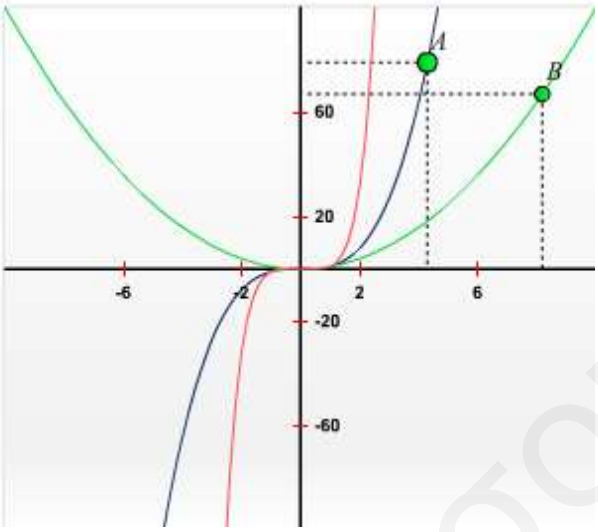
……………………………………………………………………………………………..

Με βάση τις παρατηρήσεις σας να βρείτε τα πιο κάτω όρια :

$\lim_{x\to-\infty} f(x) =$ ………………………………. $\lim_{x\to-\infty} g(x) =$ ……………………………….

$\lim_{x\to-\infty} h(x) =$ ……………………………….

3. Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ και $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Το σημείο Α ανήκει στην γραφική παράσταση της $f(x)$ και το Β στην γραφική παράσταση της $g(x)$. Με τη βοήθεια του σχήματος να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.



x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x) = f(x) \cdot g(x)$
-1000			
-100			
-10			
10			
100			
1000			

Τι παρατηρείται για τις τιμές της $h(x)$ όταν η $f(x)$ και η $g(x)$ μεγαλώνουν απεριόριστα;

……………………………………………………………………………………………..

Τι παρατηρείται για τις τιμές της $h(x)$ όταν η $f(x)$ και η $g(x)$ μικραίνουν απεριόριστα;

……………………………………………………………………………………………..

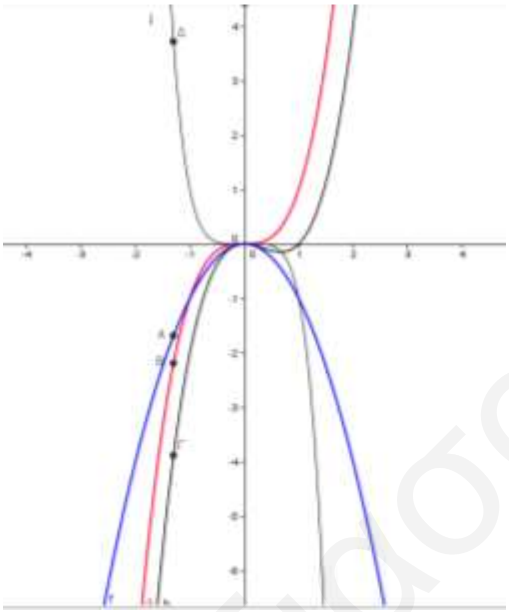
Με βάση τις παρατηρήσεις σας να βρείτε τα πιο κάτω όρια :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ ……………………………… $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) =$ ………………………………

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$ ……………………………… $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) =$ ………………………………

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) =$ ……………………………… $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) =$ ………………………………

4. Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^3$ και $j(x) = f(x) \cdot g(x)$. Το σημείο Α ανήκει στην γραφική παράσταση της $f(x)$ το Β στην γραφική παράσταση της $g(x)$ και το Δ στη γραφική παράσταση της $j(x)$. Με τη βοήθεια του σχήματος να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.



x	$f(x)$	$g(x)$	$j(x) = f(x) \cdot g(x)$
-1000			
-100			
-10			
10			
100			
1000			

Τι παρατηρείται για τις τιμές της $h(x)$ όταν η $f(x)$ και η $g(x)$ μεγαλώνουν απεριόριστα;

……………………………………………………………………………………………..

Τι παρατηρείται για τις τιμές της $h(x)$ όταν η $f(x)$ και η $g(x)$ μικραίνουν απεριόριστα;

……………………………………………………………………………………………..

Με βάση τις παρατηρήσεις σας να βρείτε τα πιο κάτω όρια :

$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$ ……………………………… $\lim_{x \to +\infty} g(x) =$ ………………………………

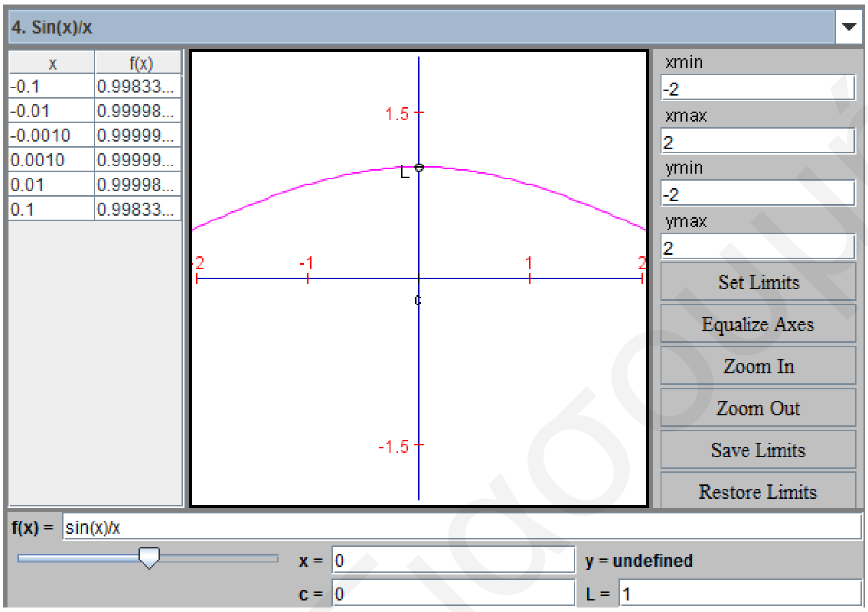
$\lim_{x \to -\infty} f(x) =$ ……………………………… $\lim_{x \to -\infty} g(x) =$ ………………………………

$\lim_{x \to +\infty} h(x) =$ ……………………………… $\lim_{x \to -\infty} h(x) =$ ………………………………

Το όριο της συνάρτησης $f(x) = \frac{ημx}{x}$ όταν το $x \to 0$

Να μπείτε στην ιστοσελίδα http://www.calculusapplets.com/ και να ανοίξετε το εφαρμογίδιο “ A table view of limits”.

- Στην οθόνη σας βλέπετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{ημx}{x}$.



Να επιλέξετε το δρομέα δίπλα από το x και να δώσετε διάφορες τιμές στο x. Τι παρατηρείτε για τις αντίστοιχες τιμές της $f(x)$ όσο το x πλησιάζει την τιμή 0, τόσο από τιμές μεγαλύτερες από το 0, όσο και από τιμές μικρότερες από το 0;

………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………

Ποια είναι η αριθμητική τιμή της συνάρτησης $f(x) = \frac{ημx}{x}$ στο x=0;

……………………………………………………………………………………..

Να παρατηρήσετε το πίνακα τιμών που βλέπετε στην οθόνη σας. Ποια τιμή παίρνει η $f(x)$ όταν το x τείνει να γίνει ίσο με 0;

……………………………………………………………………………........

Με βάση τις παρατηρήσεις σας να βρείτε το πιο κάτω όριο:

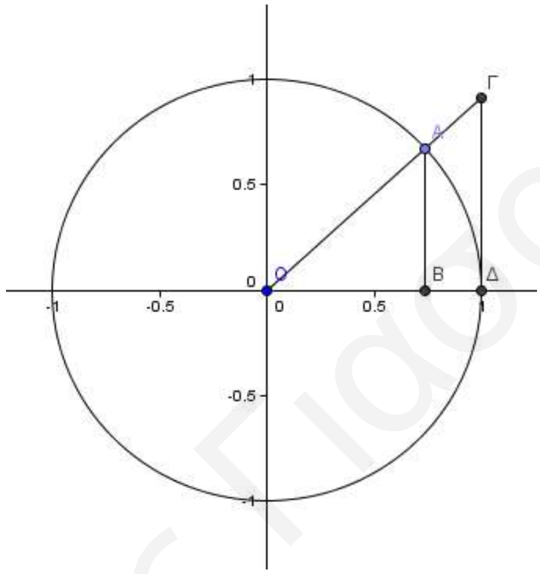
$$\lim_{x \to 0} \frac{ημx}{x} = \text{…………………..}$$

Ιδιότητα:

Αν $f_1(x) \leq g(x) \leq f_2(x)$ και $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} f_2(x) = A$ τότε $\lim_{x\to+\infty} g(x) = A$.

Με βάση την πιο πάνω ιδιότητα θα πρέπει να βρούμε δύο συναρτήσεις f_1 και f_2 έτσι ώστε να ισχύει η ιδιότητα και να δείξουμε ότι το $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 1$.

Στο σχήμα ο κύκλος έχει ακτίνα R=1 και η γωνία ΑΟΔ ισούται με x ακτίνια και $0 < x < \frac{\pi}{2}$.



Με βάση το σχήμα να βρείτε:

$\eta\mu x =$……………… , $\varepsilon\varphi x =$……………...

Έχουμε:

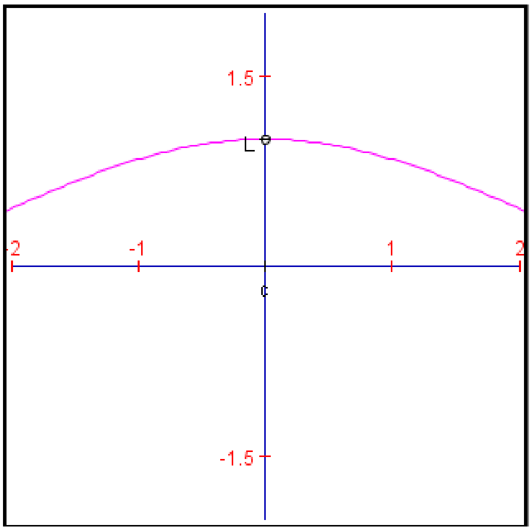
Εμβαδόν τριγώνου ΑΟΜ < εμβαδόν κυκλικού τομέα ΑΟΜ < εμβαδόν τριγώνου ΑΟΓ

Να εκφράσετε τη πιο πάνω σχέση με βάση το σχήμα, ως προς τη γωνιά x.

………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………

Το όριο της συνάρτησης $f(x)=\frac{\eta\mu x}{x}$ όταν το $x \to 0$

Στην οθόνη σας βλέπετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\frac{\eta\mu x}{x}$.



x	$f(x)=\frac{\eta\mu x}{x}$
-0,001	
-0,01	
-0,1	
0,1	
0,01	
0,001	

Να συμπληρώσετε τον πίνακα για τις διάφορες τιμές του x. Τι παρατηρείτε για τις αντίστοιχες τιμές της $f(x)$ όσο το x πλησιάζει την τιμή 0, τόσο από τιμές μεγαλύτερες από το 0, όσο και από τιμές μικρότερες από το 0;

…………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………

Ποια είναι η αριθμητική τιμή της συνάρτησης $f(x)=\frac{\eta\mu x}{x}$ στο x=0;

……………………………………………………………………………………..

Να παρατηρήσετε το πίνακα τιμών που βλέπετε στην οθόνη σας. Ποια τιμή παίρνει η $f(x)$ όταν το x τείνει να γίνει ίσο με 0;

…………………………………………………………………………………........

Με βάση τις παρατηρήσεις σας να βρείτε το πιο κάτω όριο:

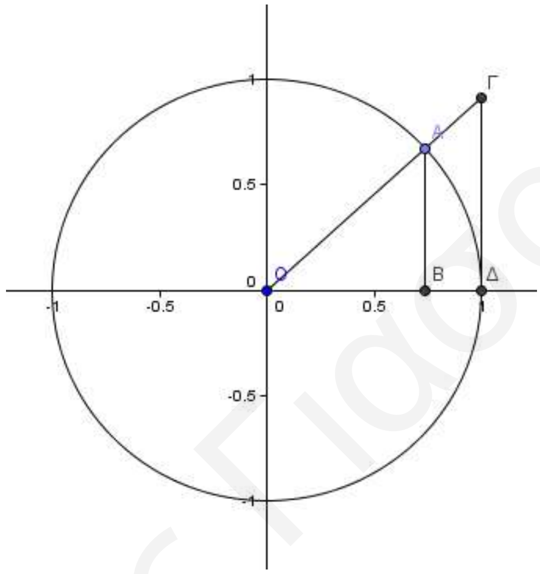
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=$ …………………..

Ιδιότητα:

Αν $f_1(x) \leq g(x) \leq f_2(x)$ και $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} f_2(x) = A$ τότε $\lim_{x\to+\infty} g(x) = A$.

Με βάση την πιο πάνω ιδιότητα θα πρέπει να βρούμε δύο συναρτήσεις f_1 και f_2 έτσι ώστε να ισχύει η ιδιότητα και να δείξουμε ότι το $\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$.

Στο σχήμα ο κύκλος έχει ακτίνα R=1 και η γωνία ΑΟΔ ισούται με x ακτίνια και $0 < x < \frac{\pi}{2}$.



Με βάση το σχήμα να βρείτε:

$\eta\mu x =$………………. , $\varepsilon\varphi x =$……………...

Έχουμε:

Εμβαδόν τριγώνου ΑΟΜ < εμβαδόν κυκλικού τομέα ΑΟΜ < εμβαδόν τριγώνου ΑΟΓ

Να εκφράσετε τη πιο πάνω σχέση με βάση το σχήμα, ως προς τη γωνιά x.

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

Δοκίμιο Αξιολόγησης 2

Δοκίμιο Αξιολόγησης 2

Όριο συνάρτησης

1. Στις πιο κάτω προτάσεις να βάλετε σε κύκλο το **Σ** αν η πρόταση είναι ορθή ή το **Λ** αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α) Το όριο μιας συνάρτησης είναι ένας αριθμός τον οποίον η συνάρτηση δεν μπορεί να φτάσει.	**Σ**	**Λ**
β) Το όριο περιγράφει πως η συνάρτηση $y = f(x)$ παίρνει μια τιμή όταν το x πλησιάζει ένα συγκεκριμένο σημείο.	**Σ**	**Λ**
γ) Το όριο είναι ένας αριθμός τον οποίο η συνάρτηση πλησιάζει αλλά δεν μπορεί να τον φτάσει.	**Σ**	**Λ**
δ) Το όριο είναι μια προσεγγιστκή τιμή, η οποία μπορεί να είναι τόσο ακριβής όσο εμείς θέλουμε.	**Σ**	**Λ**

2. Στον πίνακα τιμών δίνονται οι τιμές του x και οι αντίστοιχες τιμές του $f(x)$ για μια συγκεκριμένη συνάρτηση.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
$-0{,}1$	$-0{,}0544$
$-0{,}01$	$-0{,}00506$
$-0{,}001$	$0{,}0008269$
$-0{,}0001$	$-0{,}00003056$
$-0{,}00001$	$0{,}0000003575$
$-0{,}000001$	$-0{,}00000049994$
$-0{,}0000001$	$0{,}0000000421$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
$0{,}1$	$-0{,}0544$
$0{,}01$	$-0{,}00506$
$0{,}001$	$0{,}0008269$
$0{,}0001$	$-0{,}00003056$
$0{,}00001$	$0{,}0000003575$
$0{,}000001$	$-0{,}00000049994$
$0{,}0000001$	$0{,}0000000421$

Όταν το x πλησιάζει το 0, υπάρχει κάποια τιμή στην οποία πλησιάζει το $f(x)$;

…………………………………………………………………………………………..

3. Στον πίνακα τιμών δίνονται οι τιμές του x και οι αντίστοιχες τιμές του $f(x)$ για μια συγκεκριμένη συνάρτηση.

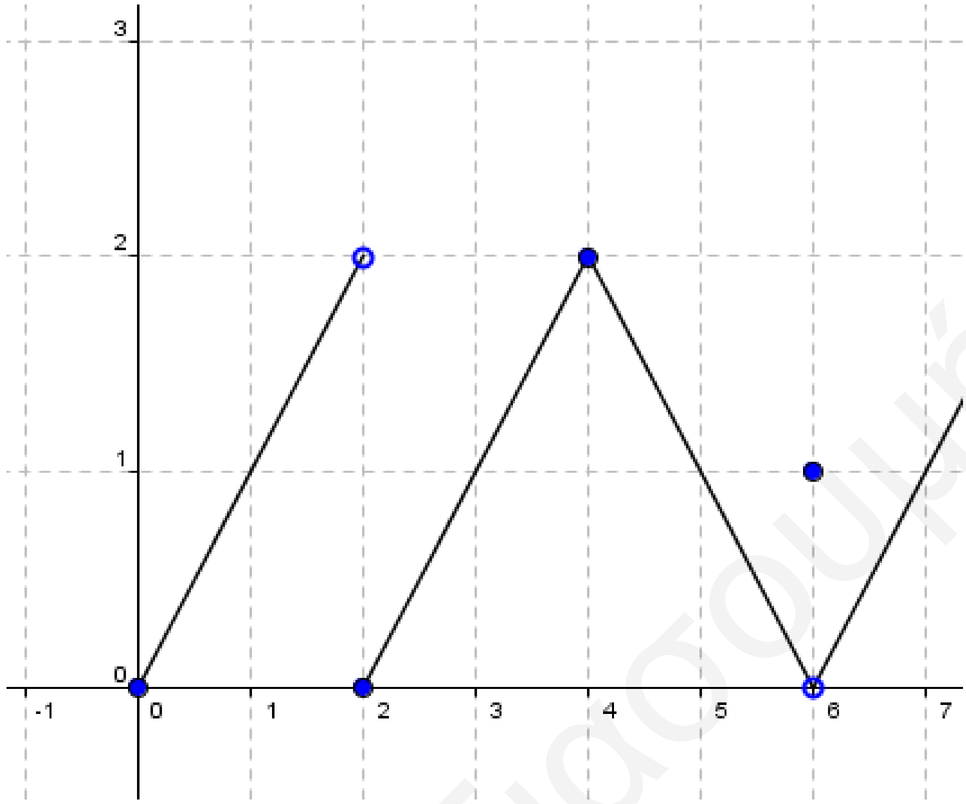
$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
$-0{,}1$	$0{,}001$
$-0{,}01$	$0{,}00001$
$-0{,}001$	$0{,}000001$
$-0{,}0001$	$0{,}00000001$
$-0{,}00001$	$0{,}0000000001$
$-0{,}000001$	$0{,}000000000001$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
$0{,}1$	$0{,}001$
$0{,}01$	$0{,}00001$
$0{,}001$	$0{,}000001$
$0{,}0001$	$0{,}00000001$
$0{,}00001$	$0{,}0000000001$
$0{,}000001$	$0{,}000000000001$

Όταν το x πλησιάζει το 0, υπάρχει κάποια τιμή στην οποία πλησιάζει το $f(x)$;

……………………………………………………………………………………

4. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να απαντήσετε τα πιο κάτω ερωτήματα:



α) Το όριο της συνάρτησης στο x=0 είναι: …………………………………

β) Το όριο της συνάρτησης στο x=1 είναι: …………………………………

γ) Το όριο της συνάρτησης στο x=2 είναι: …………………………………

δ) Το όριο της συνάρτησης στο x=3 είναι: …………………………………

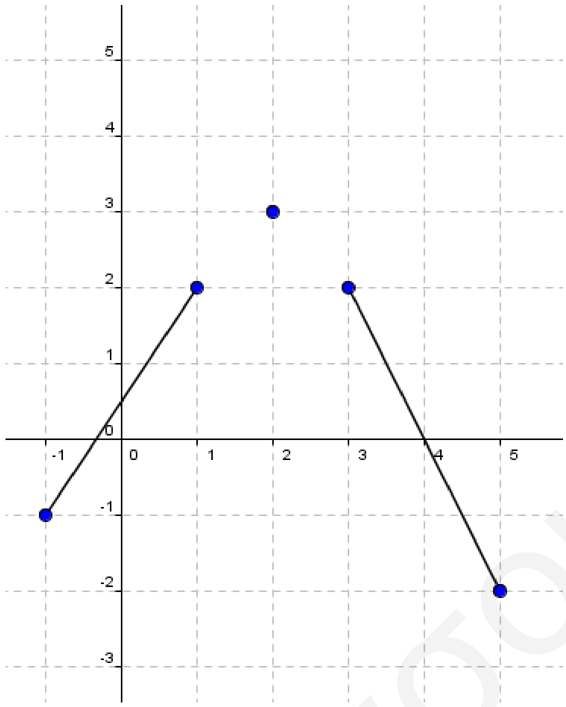
ε) Το όριο της συνάρτησης στο x=4 είναι: …………………………………

στ) Το όριο της συνάρτησης στο x=5 είναι: ………………………………

ζ) Το όριο της συνάρτησης στο x=6 είναι: …………………………………

η) Το όριο της συνάρτησης στο x= -1 είναι: ………………………………

5. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να απαντήσετε τα πιο κάτω ερωτήματα:



α) Το όριο της συνάρτησης στο x= -1 είναι: ………………………………

β) Το όριο της συνάρτησης στο x=1 είναι: …………………………………

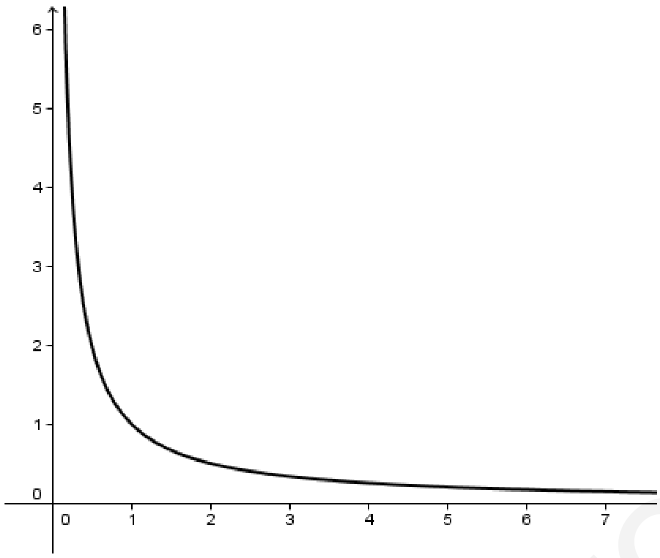
γ) Το όριο της συνάρτησης στο x=2 είναι: …………………………………

δ) Το όριο της συνάρτησης στο x=3 είναι: …………………………………

ε) Το όριο της συνάρτησης στο x=4 είναι: …………………………………

στ) Το όριο της συνάρτησης στο x=5 είναι: ………………………………

6. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$.



α) Τι αντιλαμβάνεστε όταν βλέπετε ότι το $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$;

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

β) Μπορούμε να πούμε ότι $f(\infty) = 0$;

………………………………………………………………………………………………

7. (α) Να εξηγήσετε τι αντιλαμβάνεστε όταν βλέπετε την μαθηματική έκφραση: $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$.

………………………………………………………………………………………………

(β) Πρέπει να ορίζεται η συνάρτηση στο x=1 για να έχει όριο;

………………………………………………………………………………………………

(γ) Πρέπει το $f(1) = 3$ ή όχι;

………………………………………………………………………………………………

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ

Παρεμβατικό Πρόγραμμα Διδασκαλίας 2

Παρεμβατικό Πρόγραμμα Διδασκαλίας 2

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1

Εμβαδόν κύκλου - Εισαγωγή στις Άπειρες Διαδικασίες

Πρόβλημα: Πως πορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν ενός κύκλου με ακτίνα $R = 1$;

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

Ε1: Τι σημαίνει ότι ένα τρίγωνο έχει εμβαδό ίσο με $4,5$;

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

Ε2: Να βρείτε γεωμετρικά σχήματα των οποίων το εμβαδό μπορεί να υπολογιστεί με την προηγούμενη μέθοδο.

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………

Ε3: Μπορούμε να χωρίσουμε τον κύκλο σε σχήματα των οποίων τα εμβαδά μπορούμε να υπολογίσουμε;

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

Ε4: Με ποιο τρόπο είναι δυνατόν να συνδέσουμε το εμβαδό του κύκλου με τα εμβαδά πολυγώνων;

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………

Να κατασκευάσετε δυο τετράγωνα: Ένα εγγεγραμμένο και ένα περιγεγραμμένο στον κύκλο.
Προσπαθήστε να απαντήσετε στην ερώτηση χρησιμοποιώντας το εφαρμογίδιο «kyklos».
Στο εφαρμογίδιο μπορούμε να δούμε τον κύκλο.
Οι δύο δρομείς μεταβάλλουν την ακτίνα ρ του κύκλου και το πλήθος ν των πλευρών του κανονικού εγγεγραμμένου και του κανονικού περιγεγραμμένου πολυγώνου στον κύκλο.
Εμφανίζονται τα εμβαδά αυτών των πολυγώνων και η διαφορά τους.

Ε5: Ποια σχέση υπάρχει ανάμεσα στο εμβαδό E του κύκλου και τα εμβαδά των δύο αυτών τετραγώνων;

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………

Ε6: Ποια είναι η διαφορά των εμβαδών των δύο τετραγώνων;

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………

Ε7: Μέσω ποιας διαδικασίας είναι δυνατόν να πετύχουμε καλύτερη προσεγγιση του E;

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………

E8: Να συμπληρώσετε το πιο κάτω πίνακα:

ν	Εμβαδό Εγγεγραμμένου ν-γώνου	Εμβαδό Περιγεγραμμένου ν-γώνου	Διαφορά των εμβαδών μικρότερη ή ίση από
4			
6			
8			
10			
12			
			0,09
	3,1 …	3,1 …	
			0,009
	3,14 …	3,14 ….	
			0,0009
	3,141 …	3,141 …	
			0,00009

E9: Υπάρχει κάποιο βήμα στη διαδικασία αυτή όπου το περιγεγραμμένο και το εγγεγραμμένο πολύγωνο θα έχουν το ίδιο εμβαδό με εκείνο του κύκλου;

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………

E10: Θα τερματιστεί αυτή η διαδικασία;

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………

E11: Η διαφορά των εμβαδών ποιον αριθμό πλησιάζει;

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………

E12: Πόσο κοντά στον αριθμό αυτό μπορεί να φτάσει η διαφορά των εμβαδών;

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………

E13: Πόσο κοντά στο εμβαδό του κύκλου μπορούμε να φτάσουμε;

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………

Φύλλο Εργασίας 2

Εισαγωγή στο όριο συνάρτησης σε σημείο

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Μια κάμερα καταγράφει έναν αγώνα των $100m$.
Με ποιο τρόπο θα μπορούσαν τα δεδομένα της κάμερας να μας βοηθήσουν στον υπολογισμό της ταχύτητας ενός αθλητή κατά τη χρονική στιγμή $T = 6sec$;

- Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «limit_mathima_2». Στο περιβάλλον αυτό μπορούμε να έχουμε τα δεδομένα της κάμερας.
- Όταν αλλάζουμε τις τιμές του t αλλάζουν και οι τιμές του *s(t)* που δίνουν την απόσταση που έχει καλύψει ο αθλητής έως τη χρονική στιγμή t.
- Το t μπορεί να πλησιάσει το T από μικρότερες και από μεγαλύτερες τιμές.
- Να εμφανίσετε τη μέση ταχύτητα $U(t) = \frac{s(T)-s(t)}{T-t}$ στο διάστημα που ορίζουν τα t και T.

Ε1: Να συμπληρώσετε τα κενά στον παρακάτω πίνακα.

t	$\frac{s(T)-s(t)}{T-t}$	t	$\frac{s(T)-s(t)}{T-t}$
4		8	
5		7	
5,5		6,5	
5,8		6,3	
5,9		6,1	
5,93		6,07	
5,95		6,03	
5,99		6,01	
5,995		6,005	
5,999		6,001	
5,9999		6,0001	
5,99999		6,00001	

Ε2: Ποιον αριθμό πλησιάζει η μέση ταχύτητα καθώς το t πλησιάζει το $T = 6sec$;

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

- Να εμφανίσετε τη συνάρτηση της μέσης ταχύτητας και να επιβεβαιώσετε γραφικά την απάντησή σας.

E3: Ποια νομίζετε ότι είναι η ταχύτητα του αθλητή τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{T = 6sec}$;

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

- Να εμφανίσετε την $\varepsilon - \zeta\acute{\omega}\nu\eta$. Τα σημεία της $\varepsilon - \zeta\acute{\omega}\nu\eta\varsigma$ έχουν τεταγμένη μεγαλύτερη από $L - \varepsilon$ και μικρότερη από $L + \varepsilon$.
- Να μετακινήστε το t έτσι ώστε το σημείο $(t, U(t))$ να βρεθεί στην $\varepsilon - \zeta\acute{\omega}\nu\eta$ και να παρατηρήσετε τις τιμές της μέσης ταχύτητας.

E4: Για ποιες τιμές του $\boldsymbol{t}$ το σημείο $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{U}(\boldsymbol{t}))$ ανήκει στην $\boldsymbol{\varepsilon - \zeta\acute{\omega}\nu\eta}$ για $\boldsymbol{\varepsilon = 0,8}$

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

- Να εμφανίσετε την $\delta - \zeta\acute{\omega}\nu\eta$. Τα σημεία που ανήκουν στη $\delta - \zeta\acute{\omega}\nu\eta$ έχουν τετμημένη μεγαλύτερη του $T - \delta$ και μικρότερη του $T + \delta$. Με πράσινο χρωματίζονται τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται ταυτόχρονα στην $\varepsilon - \zeta\acute{\omega}\nu\eta$ και στη $\delta - \zeta\acute{\omega}\nu\eta$. Τα σημεία της $\delta - \zeta\acute{\omega}\nu\eta\varsigma$ που είναι εκτός της $\varepsilon - \zeta\acute{\omega}\nu\eta\varsigma$ χρωματίζονται με κόκκινο.

E5: Να προσπαθήσετε να βρείτε ένα $\boldsymbol{\delta}$ τέτοιο ώστε να μην υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης στην κόκκινη περιοχή.

E6: Να μειώσετε το $\boldsymbol{\varepsilon}$ σε $\boldsymbol{0,5}$ και να βρείτε κατάλληλο $\boldsymbol{\delta}$ ώστε τα σημεία $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{U}(\boldsymbol{t}))$ να μην βρίσκονται στην κόκκινη περιοχή.

E7: Εάν $\boldsymbol{\varepsilon = 0,05}$ μπορείτε να βρείτε $\boldsymbol{\delta}$ με την παραπάνω ιδιότητα;

- Μπορείτε να εμφανίσετε το παράθυρο μεγέθυνσης. Μπορεί να σας βοηθήσει ώστε να δείτε σε μια μικρή περιοχή γύρω από το σημείο (6,10).

E8: Εάν το $\boldsymbol{\varepsilon}$ μικρύνει κι άλλο θα μπορούμε πάντα να βρούμε $\boldsymbol{\delta}$ με την παραπάνω ιδιότητα;

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

E9: Να συμπληρώσετε τα κενά της παρακάτω πρότασης με τα κατάλληλα χρώματα ώστε να εκφράζει το συμπέρασμα της E8.

"Για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε η συνάρτηση να μην βρίσκεται στην ……….………. περιοχή."

Ε10: Να συμπληρώσετε τα κενά ώστε η παρακάτω πρόταση να αποδίδει το συμπέρασμα της Ε8.

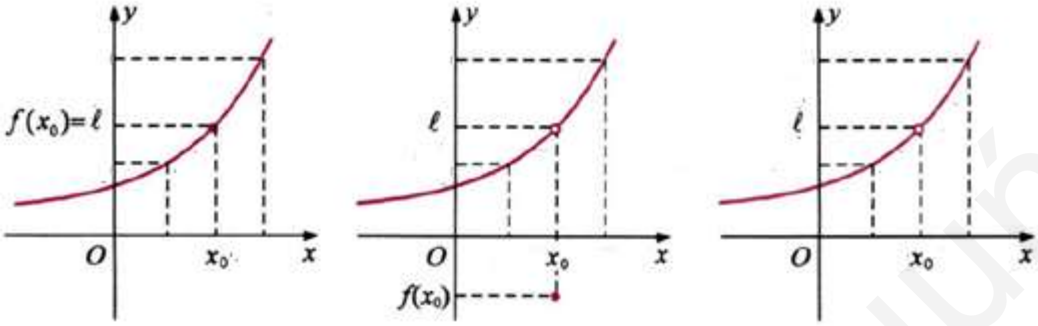
Τα ………..……….. μπορούν να είναι όσο κοντά θέλουμε στο ……..…… αρκεί τα ………..…. να είναι κατάλληλα κοντά στο ……..………… και διαφορετικά του ……..…….

Ε11: Να προσπαθήσετε να διατυπώσετε το συμπέρασμα της Ε8, χρησιμοποιώντας μαθηματικά σύμβολα.

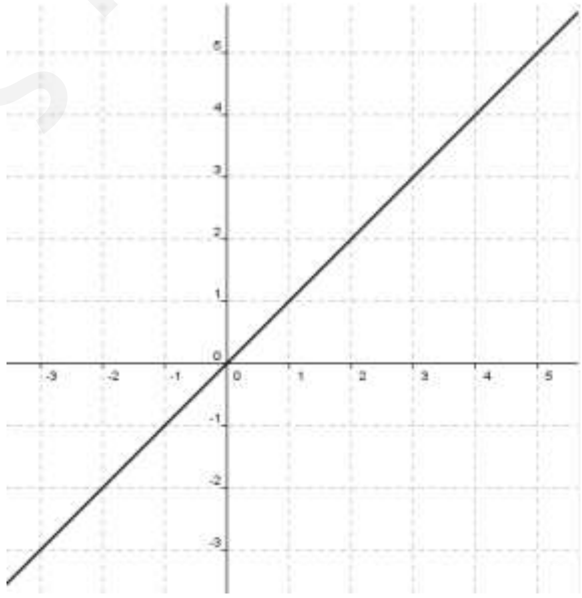
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

Δραστηριότητες

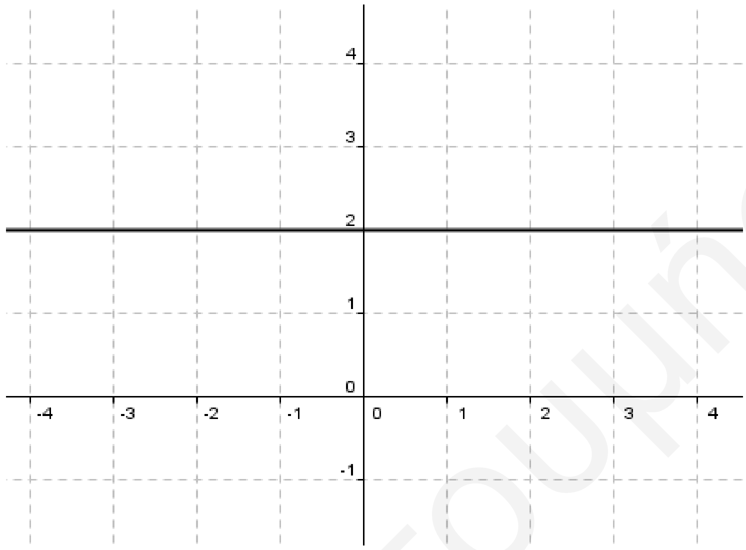
1. Να μελετήσετε τις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις και να βρείτε το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ σε κάθε περίπτωση.



2. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x$. Να υπολογίσετε τα όρια:
   i. $\lim_{x \to -2} (x)$
   ii. $\lim_{x \to 4} (x)$

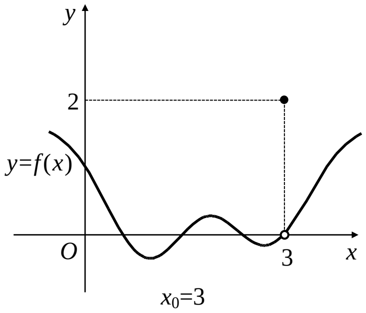


3. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2$. Να υπολογίσετε τα όρια:
   i. $\lim_{x \to 0}(2)$
   ii. $\lim_{x \to 3}(2)$

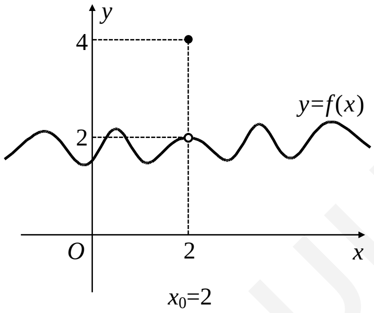


Φύλλο Εργασίας 3

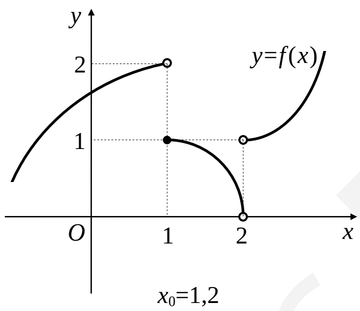
1. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ και το $f(x_0)$ εφόσον υπάρχουν και να αιτιολογήσετε την απάντηση σας, όταν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι:



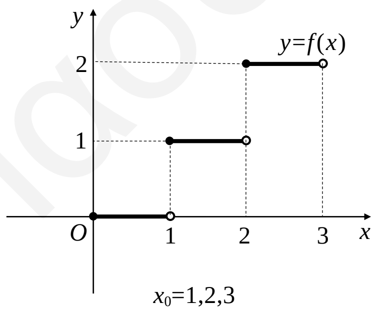
$x_0=3$



$x_0=2$



$x_0=1,2$



$x_0=1,2,3$

2. Δίνεται η συνάρτηση f που είναι ορισμένη στο $[-2,+\infty)$ και έχει γραφική παράσταση που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να εξετάσετε ποιοι από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι αληθείς.

i. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 2$

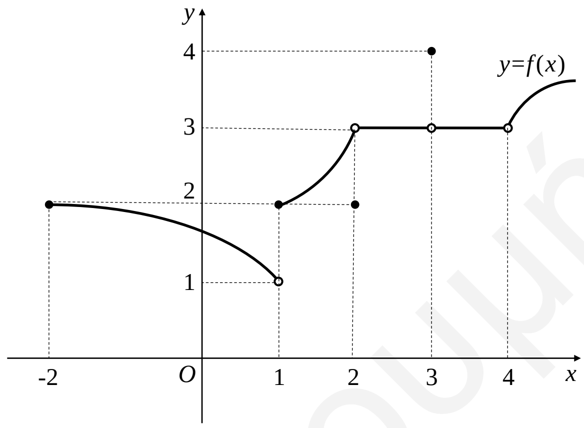
ii. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$

iii. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$

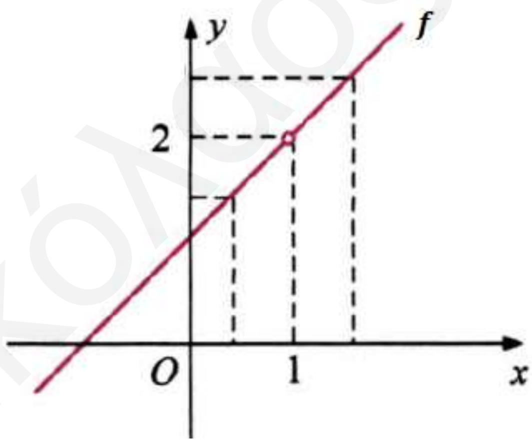
iv. $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 4$

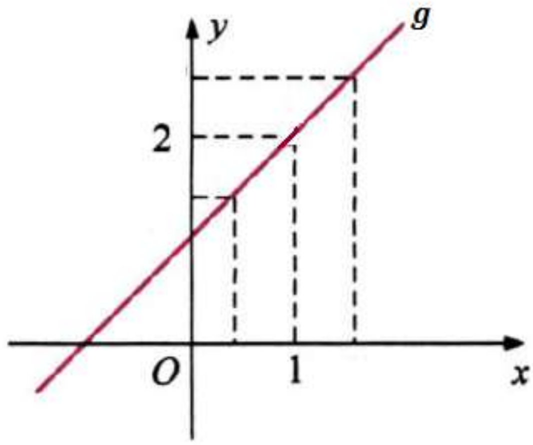
v. $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 3$

vi. $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 2$

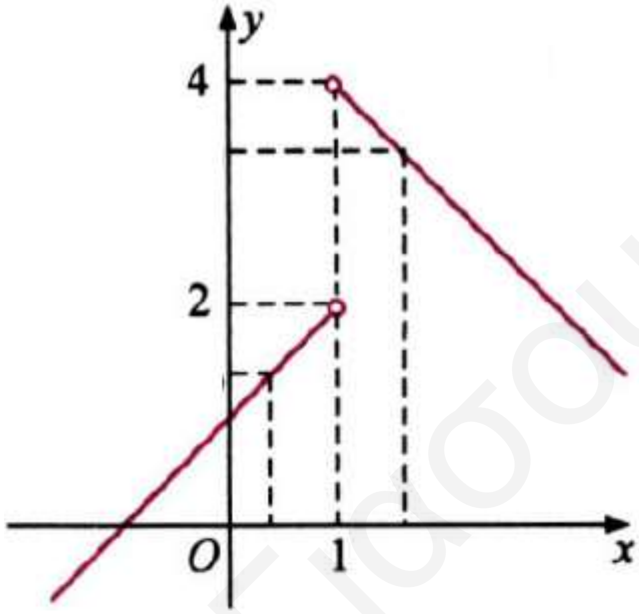


3. Στα πιο κάτω σχήματα φαίνεται η γραφική παράσταση των συναρτήσεων $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ και $g(x) = x+1$. Να υπολογίσετε τα $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$. Τι παρατηρείται;

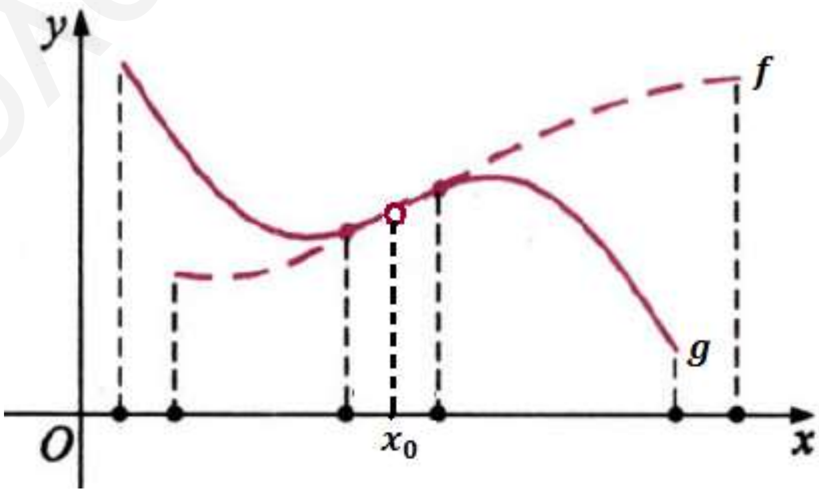




4. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης
$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x<1 \\ -x+5, & x>1 \end{cases}$$
Να υπολογίσετε το $\lim_{x \to 1} f(x)$ αν υπάρχει και να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.



5. Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g. Τι παρατηρείται για τα όρια $\lim_{x \to x_0} f(x)$ και $\lim_{x \to x_0} g(x)$. Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.



Φύλλο Εργασίας 4

Όριο Συνάρτησης στο $x_0 \epsilon \mathbb{R}$

Πλευρικά όρια συνάρτησης

Δραστηριότητα 1:

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «πλευρικό όριο συνάρτησης - υποενότητα 1.1».

- Να επιλέξετε την τέταρτη εφαρμογή. Στην οθόνη σας βλέπετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$. Να δώσετε την τιμή 1 στο x και να επιλέξετε διαδοχικά τα εικονίδια «αριστερό όριο», «δεξιό όριο» και «όριο».
  Να απαντήσετε τα πιο κάτω ερωτήματα:
  (α) Ποιο είναι το όριο της συνάρτησης καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό 1 από μικρότερες τιμές του;
  ……………………………………………………………………………………
  ……………………………………..
  (β) Ποιο είναι το όριο της συνάρτησης καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό 1 από μεγαλύτερες τιμές του;
  ……………………………………………………………………………………
  …………………………………....
  (γ) Ποιο είναι το όριο της συνάρτησης όταν το x τείνει να πάρει την τιμή 1;
  ……………………………………………………………………………………
  ……………………………………..
  Να επαναλάβετε τη διαδικασία και για άλλες τιμές του x.

- Να επιλέξετε την τρίτη εφαρμογή. Στην οθόνη σας βλέπετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 4$. Να δώσετε την τιμή 0 στο x και να επιλέξετε διαδοχικά τα εικονίδια «αριστερό όριο», «δεξιό όριο» και «όριο».
  Να απαντήσετε τα πιο κάτω ερωτήματα:
  (α) Ποιο είναι το όριο της συνάρτησης καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό 0 από μικρότερες τιμές του;
  ……………………………………………………………………………………
  (β) Ποιο είναι το όριο της συνάρτησης καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό 0 από μεγαλύτερες τιμές του;
  ……………………………………………………………………………………
  (γ) Ποιο είναι το όριο της συνάρτησης όταν το x τείνει να πάρει την τιμή 0;

  Να επαναλάβετε τη διαδικασία και για άλλες τιμές του x.

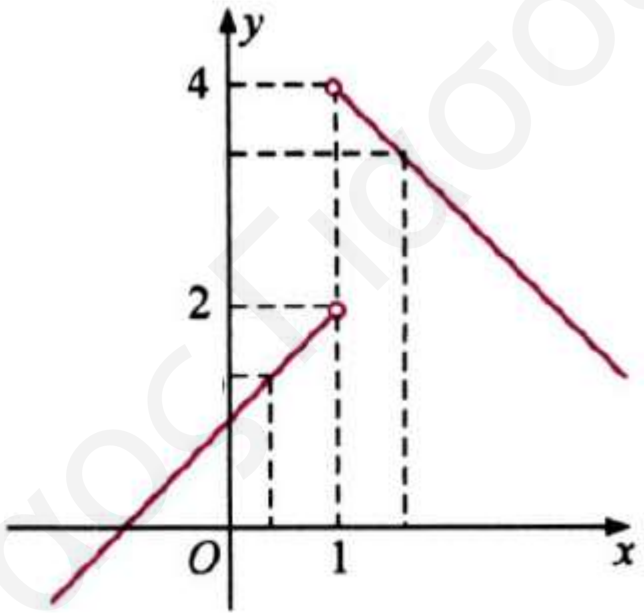
Δραστηριότητα 2:

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «πλευρικό όριο συνάρτησης- υποενότητα 1.2».

- Να επιλέξετε την δεύτερη εφαρμογή. Στην οθόνη σας βλέπετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-2}$.
  Να δώσετε την τιμή 2 στο x και να επιλέξετε διαδοχικά τα εικονίδια «αριστερό όριο», «δεξιό όριο» και «όριο».
  Να απαντήσετε τα πιο κάτω ερωτήματα:
  (α) Ποιο είναι το όριο της συνάρτησης καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό 2 από μικρότερες τιμές του;
  …………………………………………………………………………………
  (β) Ποιο είναι το όριο της συνάρτησης καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό 2 από μεγαλύτερες τιμές του;
  …………………………………………………………………………………
  (γ) Ποιο είναι το όριο της συνάρτησης όταν το x τείνει να πάρει την τιμή 2;
  …………………………………………………………………………………
  Να επαναλάβετε τη διαδικασία και για άλλες τιμές του x.

Δραστηριότητες

6. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης
$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x<1 \\ -x+5, & x>1 \end{cases}$$
Από τη γραφική παράσταση τι συμπεραίνεται για τα πιο κάτω όρια αν υπάρχουν;
   i. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$
   ii. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$
   iii. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

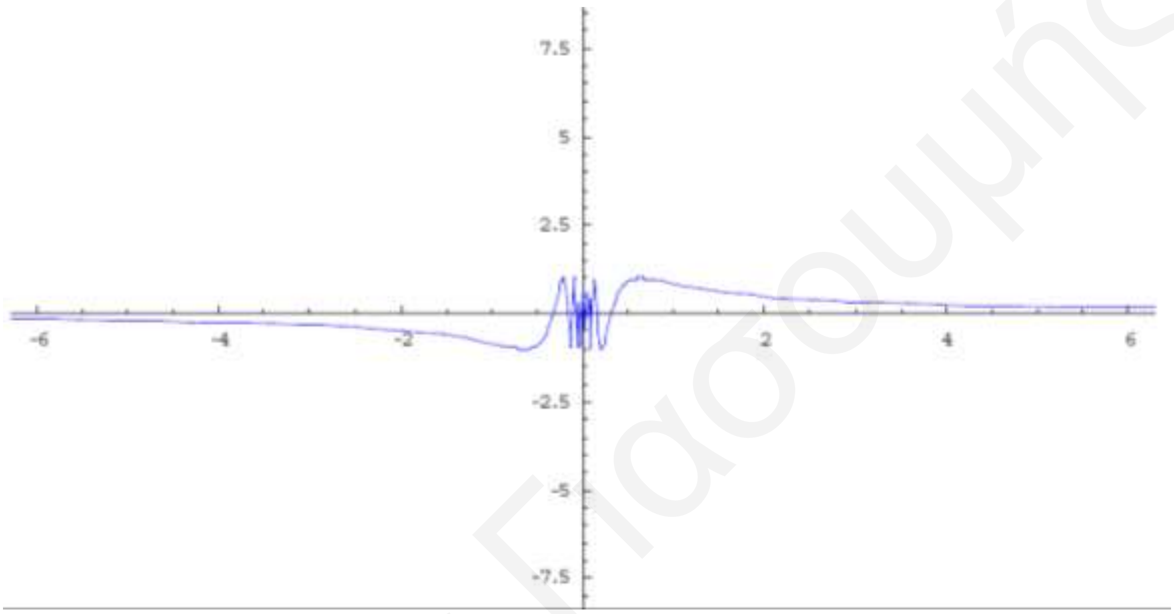


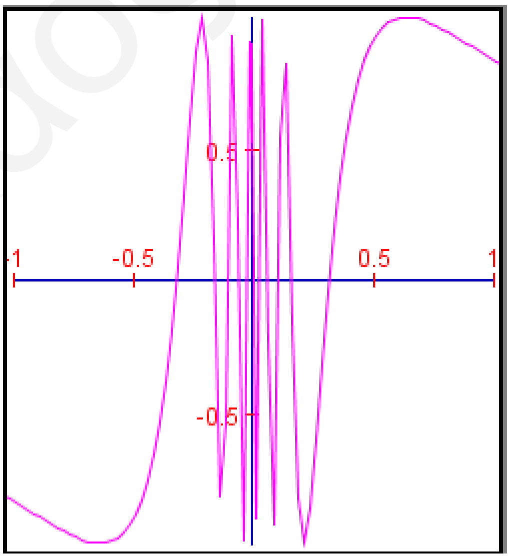
7. Στα πιο κάτω σχήματα φαίνεται η γραφική παράσταση της ίδιας συνάρτησης. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα όρια

   i. $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

   ii. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

   iii. $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$





8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}$, $x \neq 3$. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της $f(x)$ και με βάση τη γραφική παράσταση να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια αν υπάρχουν και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας:

   i. $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$

   ii. $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$

   iii. $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

Φύλλο Εργασίας 5

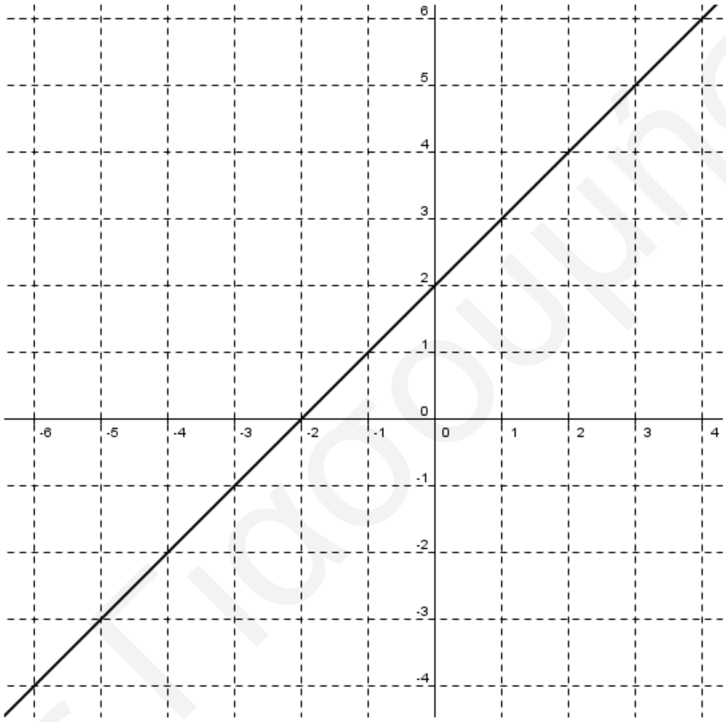
Ιδιότητες Ορίων

- Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = x + 2$. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \to 1}(x)$

ii. $\lim_{x \to 1}(2)$

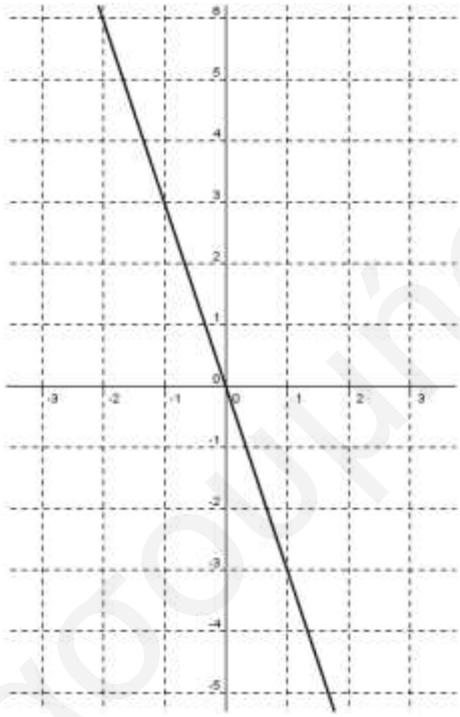
iii. $\lim_{x \to 1}(x + 2)$



Τι παρατηρείται;

………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………

- Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = -3x$. Να υπολογίσετε τα όρια:



  i. $\lim_{x\to 1}(x)$

  ii. $\lim_{x\to 1}(-3)$

  iii. $\lim_{x\to 1}(-3x)$

Τι παρατηρείται;

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

- Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0, τότε:

1. $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$

2. $\lim_{x\to x_0}(\kappa f(x)) = \kappa \lim_{x\to x_0} f(x)$, για κάθε σταθερή $\kappa \epsilon \mathbb{R}$

3. $\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$

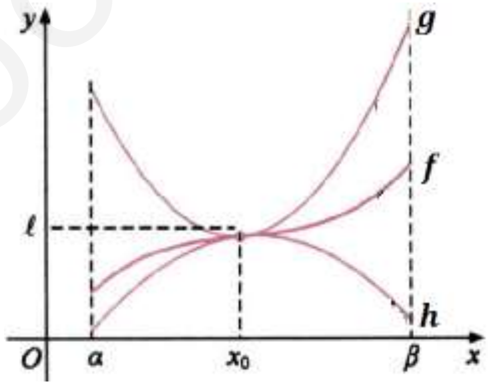
4. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$, εφόσον $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$

5. $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \left|\lim_{x\to x_0} f(x)\right|$

6. $\lim_{x\to x_0} \sqrt[\kappa]{f(x)} = \sqrt[\kappa]{\lim_{x\to x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0.

7. Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν
   - $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και
   - $\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$

   τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$



Δραστηριότητες:

1. Να βρείτε τα όρια και να αναφέρεται σε κάθε βήμα ποιες ιδιότητες έχετε χρησιμοποιήσει:
   i. $\lim\limits_{x\to 0}(x^5-4x^3-2x+5)$
   ii. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-3x+2}$
   iii. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$
   iv. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x^2-1}-\frac{2}{x^2+2x-3}\right)$
   v. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-5x^2+6x}{x^2-4}$
2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^4-16}{x^3-8}$, να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.
3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x^2-9}$ και $g(x)=\sqrt{3-x}$.
   Να υπολογίσετε τα όρια:
   i. $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$
   ii. $\lim\limits_{x\to 3}g(x)$
   iii. Μπορούμε να μιλήσουμε για το όριο $\lim\limits_{x\to 3}\left(\sqrt{x^2-9}+\sqrt{3-x}\right)$;
4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}$ αν υπάρχει και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
5. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & x<1\\ -x+5, & x>1\end{cases} \quad \text{και} \quad g(x)=\begin{cases}-x-1, & x<1\\ x-5, & x>1\end{cases}$$

   Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\left(f(x)+g(x)\right)$ αν υπάρχει.

6. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 2}\frac{|x^2-2x|+x-2}{x^2-4}$, αν υπάρχει και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2\alpha x+\beta, & x\le 3\\ \alpha x+3\beta, & x>3\end{cases}$. Να υπολογίσετε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=10$.
8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\alpha x+2\beta, & x\le 1\\ x^2+\beta x+2\alpha, & x>1\end{cases}$. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ και $f(2)=2$, να υπολογίσετε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
9. Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ με $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lambda^2-6$ και $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lambda$. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, για τις οποίες υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

10. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 2}\frac{|x^2-5x+6|}{x^2-4}$, αν υπάρχει και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
11. Να βρείτε, αν υπάρχει το όριο στο $x_0 = 1$ της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4, & x < 1 \\ -\frac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$.

Φύλλο Εργασίας 6

1. Να βρείτε το $\lim_{x\to 2^-}\frac{|x^2-2x|+x-2}{x^2-4}$, αν υπάρχει.
2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2\alpha x+\beta, & x\le 3\\ \alpha x+3\beta, & x>3\end{cases}$. Να υπολογίσετε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $\lim_{x\to 3} f(x)=10$.
3. Δίνεται η συνάρτηση $\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}\alpha x+2\beta, & x\le 1\\ x^2+\beta x+2\alpha, & x>1\end{cases}}$. Αν υπάρχει το $\boldsymbol{\lim_{x\to 2} f(x)}$ και $\boldsymbol{f(2)=2}$, να υπολογίσετε τις τιμές των $\boldsymbol{\alpha,\beta}\in\mathbb{R}$.
4. Δίνεται μια συνάρτηση $\boldsymbol{f}$ ορισμένη στο $\boldsymbol{(\alpha,x_0)}\cup\boldsymbol{(x_0,\beta)}$ με $\boldsymbol{\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lambda^2-6}$ και $\boldsymbol{\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lambda}$. Να βρείτε τις τιμές του $\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}$, για τις οποίες υπάρχει το $\boldsymbol{\lim_{x\to x_0} f(x)}$.
5. Να υπολογίσετε το $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}}$, αν υπάρχει.
6. Να υπολογίσετε το $\boldsymbol{\lim_{x\to 2^+}\frac{|x^2-5x+6|}{x^2-4}}$, αν υπάρχει.

Φύλλο Εργασίας 6

1. Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$ τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

   Να ερμηνεύσετε την πιο πάνω ιδιότητα και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

2. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$. Να ερμηνεύσετε την πρόταση και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

3. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

4. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.

5. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, τότε $f(x) = 0$ στο x_0.

6. Να βάλετε σε κύκλο την σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

   Είναι $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$, όταν:

   Α. Η f δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (x_0, β)

   Β. Η f ορίζεται μόνο σε διάστημα της μορφής (α, x_0)

   Γ. Η f ορίζεται σε διάστημα της μορφής (x_0, β), αλλά όχι σε διάστημα της μορφής (α, x_0)

   Δ. Η f ορίζεται σε διάστημα της μορφής (α, x_0) και (x_0, β)

   Ε. Τίποτα από τα παραπάνω

7. Αν $f(x) \leq 0 \leq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x\to \alpha}\big(f(x) - g(x)\big) = 0$ να δείξετε ότι $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x)$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε

Δοκίμιο Αξιολόγησης 3

Δοκίμιο Αξιολόγησης 3

Όριο συνάρτησης

Όνομα: ……………………………………………… Τμήμα:……………………..

1. Στις πιο κάτω προτάσεις να βάλετε σε κύκλο το **Σ** αν η πρόταση είναι ορθή ή το **Λ** αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α) Το όριο μιας συνάρτησης είναι ένας αριθμός τον οποίον η συνάρτηση δεν μπορεί να φτάσει. **Σ** **Λ**

β) Το όριο περιγράφει πως η συνάρτηση $y = f(x)$ παίρνει μια τιμή όταν το x πλησιάζει ένα συγκεκριμένο σημείο. **Σ** **Λ**

γ) Το όριο είναι ένας αριθμός τον οποίο η συνάρτηση πλησιάζει αλλά δεν μπορεί να τον φτάσει. **Σ** **Λ**

δ) Το όριο είναι μια προσεγγιστική τιμή, η οποία μπορεί να είναι τόσο ακριβής όσο εμείς θέλουμε. **Σ** **Λ**

2. Στον πίνακα τιμών δίνονται οι τιμές του x και οι αντίστοιχες τιμές του $f(x)$ για μια συγκεκριμένη συνάρτηση.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
$-0{,}1$	$-0{,}0544$
$-0{,}01$	$-0{,}00506$
$-0{,}001$	$0{,}0008269$
$-0{,}0001$	$-0{,}00003056$
$-0{,}00001$	$0{,}0000003575$
$-0{,}000001$	$-0{,}00000049994$
$-0{,}0000001$	$0{,}0000000421$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
$0{,}1$	$-0{,}0544$
$0{,}01$	$-0{,}00506$
$0{,}001$	$0{,}0008269$
$0{,}0001$	$-0{,}00003056$
$0{,}00001$	$0{,}0000003575$
$0{,}000001$	$-0{,}00000049994$
$0{,}0000001$	$0{,}0000000421$

Όταν το x πλησιάζει το 0, υπάρχει κάποια τιμή στην οποία πλησιάζει το $f(x)$;……………………………………………………………………

3. Στον πίνακα τιμών δίνονται οι τιμές του x και οι αντίστοιχες τιμές του $f(x)$ για μια συγκεκριμένη συνάρτηση.

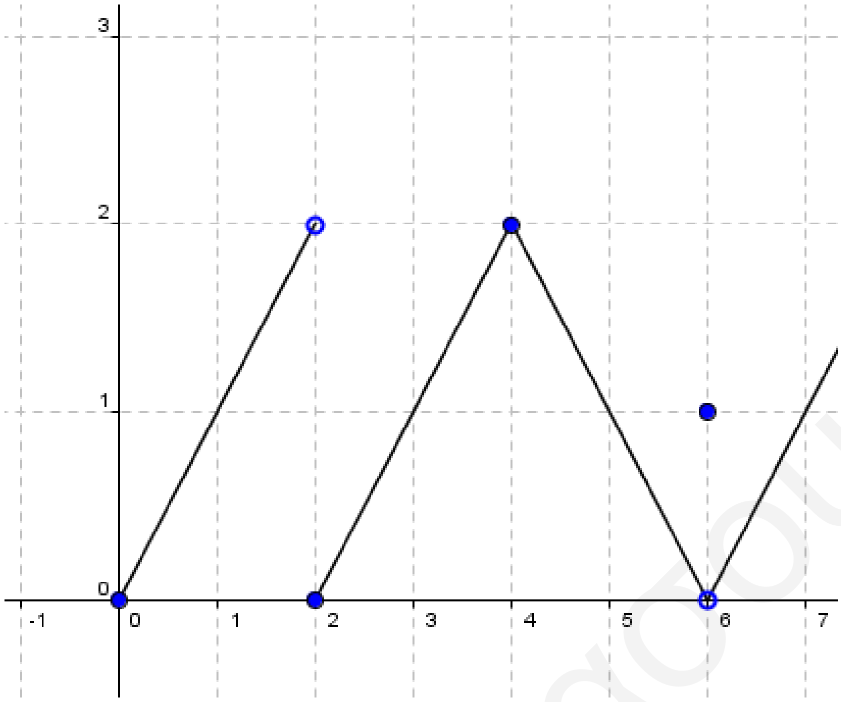
x	$f(x)$
$-0{,}1$	$0{,}001$
$-0{,}01$	$0{,}00001$
$-0{,}001$	$0{,}000001$
$-0{,}0001$	$0{,}00000001$
$-0{,}00001$	$0{,}0000000001$
$-0{,}000001$	$0{,}000000000001$

x	$f(x)$
$0{,}1$	$0{,}001$
$0{,}01$	$0{,}00001$
$0{,}001$	$0{,}000001$
$0{,}0001$	$0{,}00000001$
$0{,}00001$	$0{,}0000000001$
$0{,}000001$	$0{,}000000000001$

Όταν το x πλησιάζει το 0, υπάρχει κάποια τιμή στην οποία πλησιάζει το $f(x)$;

………………………………………………………………………………

4. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να απαντήσετε τα πιο κάτω ερωτήματα και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση:



α) Το όριο της συνάρτησης στο x=0 είναι: ……………………………………
…………………………………………………………………………………

β) Το όριο της συνάρτησης στο x=1 είναι: ……………………………………
…………………………………………………………………………………

γ) Το όριο της συνάρτησης στο x=2 είναι: ……………………………………
…………………………………………………………………………………

δ) Το όριο της συνάρτησης στο x=3 είναι: ……………………………………
…………………………………………………………………………………

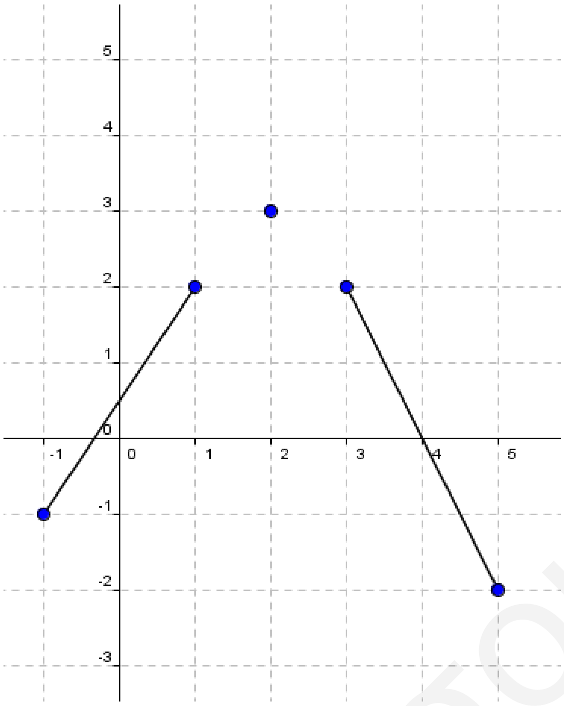
ε) Το όριο της συνάρτησης στο x=4 είναι: ……………………………………
…………………………………………………………………………………

στ) Το όριο της συνάρτησης στο x=5 είναι: …………………………………
…………………………………………………………………………………

ζ) Το όριο της συνάρτησης στο x=6 είναι: ……………………………………
…………………………………………………………………………………

η) Το όριο της συνάρτησης στο x= -1 είναι: …………………………………
…………………………………………………………………………………

5. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να απαντήσετε τα πιο κάτω ερωτήματα και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση:



α) Το όριο της συνάρτησης στο x= -1 είναι: ………………………………

……………………………………………………………………………

β) Το όριο της συνάρτησης στο x=1 είναι: …………………………………

……………………………………………………………………………

γ) Το όριο της συνάρτησης στο x=2 είναι: …………………………………

……………………………………………………………………………

δ) Το όριο της συνάρτησης στο x=3 είναι: …………………………………

……………………………………………………………………………

ε) Το όριο της συνάρτησης στο x=4 είναι: …………………………………

……………………………………………………………………………

στ) Το όριο της συνάρτησης στο x=5 είναι: ………………………………

……………………………………………………………………………

6. (α) Να εξηγήσετε τι αντιλαμβάνεστε όταν βλέπετε την μαθηματική έκφραση: $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$

   ………………………………………………………………………………………

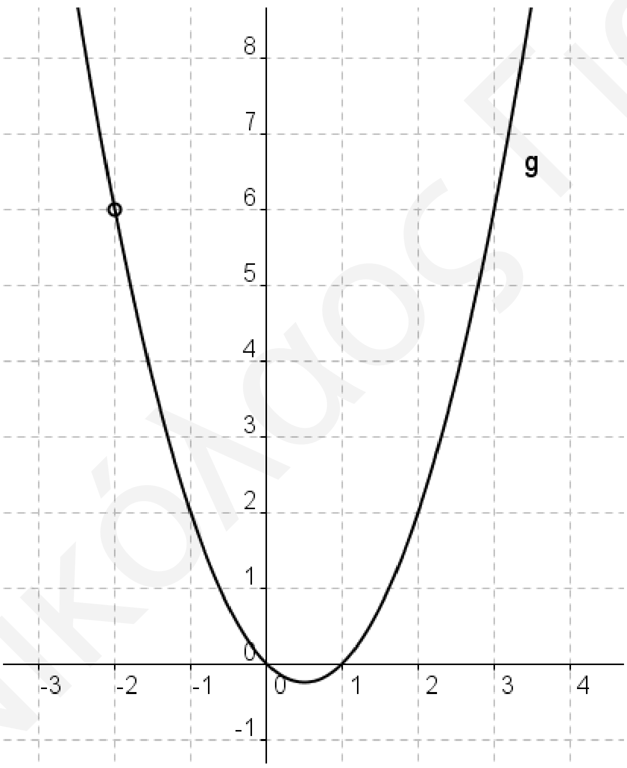
   (β) Πρέπει να ορίζεται η συνάρτηση στο $x = 1$ για να έχει όριο;

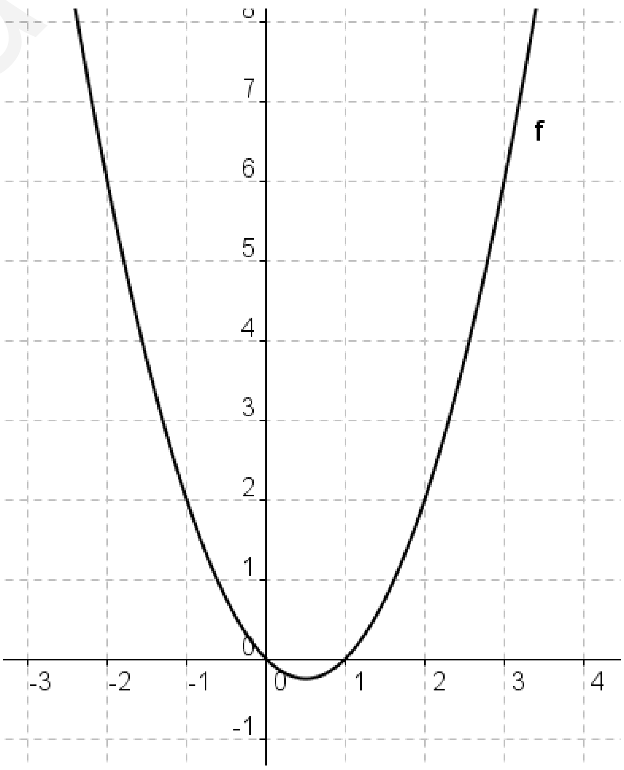
………………………………………………………………………………………

   (γ) Πρέπει το $f(1) = 3$ ή όχι;

………………………………………………………………………………………

7. Στα πιο κάτω σχήματα φαίνεται η γραφική παράσταση των συναρτήσεων $g(x) = \frac{x^3+x^2-2x}{x+2}$ και $f(x) = x^2 - x$. Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \to -2} g(x)$ και $\lim_{x \to -2} f(x)$. Να εξηγήσετε τον τρόπο με τον οποίο εργαστήκατε.





………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

8. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^2+3x-10}$. Να αναφέρετε αναλυτικά τις ιδιότητες που χρησιμοποιήσατε για να υπολογίσετε το πιο πάνω όριο.

9. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \to 2^+} \frac{|x(x-2)(x-3)|}{x-2}$. Να αναφέρετε αναλυτικά τις ιδιότητες που χρησιμοποιήσατε για να υπολογίσετε το πιο πάνω όριο.