



**Πανεπιστήμιο  
Κύπρου**

**ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ**

**Η ΙΚΑΝΟΤΗΤΑ ΜΑΘΗΤΩΝ ΠΡΟΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΣΤΟΥΣ  
ΑΡΙΘΜΟΥΣ ΚΑΙ ΣΤΑ ΜΟΤΙΒΑ: ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΚΑΙ  
ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΜΕΣΩ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΩΝ  
ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΩΝ ΜΑΘΗΣΗΣ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ  
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ**

**ΛΟΥΙΖΑ Α. ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ**

**ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ**

**2019**



Πανεπιστήμιο  
Κύπρου

**ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ**

**Η ΙΚΑΝΟΤΗΤΑ ΜΑΘΗΤΩΝ ΠΡΟΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΣΤΟΥΣ  
ΑΡΙΘΜΟΥΣ ΚΑΙ ΣΤΑ ΜΟΤΙΒΑ: ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΚΑΙ  
ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΜΕΣΩ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΩΝ  
ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΩΝ ΜΑΘΗΣΗΣ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ  
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ**

**ΛΟΥΙΖΑ Λ. ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ**

Διατριβή η οποία υποβλήθηκε προς απόκτηση διδακτορικού τίτλου σπουδών στο  
Πανεπιστήμιο Κύπρου

Απρίλιος, 2019

ΛΟΥΙΖΑ Λ. ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ

© Λουίζα Λ. Δημητρίου, 2019

## ΣΕΛΙΔΑ ΕΓΚΥΡΟΤΗΤΑΣ

**Υποψήφια Διδάκτορας:** Λουίζα Λ. Δημητρίου

**Τίτλος Διατριβής:** *Η ικανότητα μαθητών προδημοτικής στους αριθμούς και στα μοτίβα: Περιγραφή και ανάπτυξη της μέσω διαφορετικών περιβαλλόντων μάθησης με τη χρήση τεχνολογίας*

*Η παρούσα Διδακτορική Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για απόκτηση Διδακτορικού διπλώματος στο Τμήμα Επιστημών της Αγωγής και εγκρίθηκε στις 17 Απριλίου 2019 από τα μέλη της Εξεταστικής Επιτροπής.*

### **Εξεταστική Επιτροπή:**

**Ερευνητικός Σύμβουλος:** Δήμητρα Πίττα-Πανταζή, Καθηγήτρια  
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

.....

### **Μέλη Επιτροπής:**

Κωνσταντίνος Χρίστου, Καθηγητής (Πρόεδρος)  
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

.....

Ιλιάδα Ηλία, Επίκουρη Καθηγήτρια  
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

.....

Μαριάννα Τζεκάκη, Ομότιμη Καθηγήτρια  
Τμήμα Επιστημών Προσχολικής Αγωγής και  
Εκπαίδευσης, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

.....

Χρυσάνθη Σκουμπουρδή, Καθηγήτρια  
Τμήμα Επιστημών της Προσχολικής Αγωγής και του  
Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού, Πανεπιστήμιο Αιγαίου

.....

## ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥ ΔΙΔΑΚΤΟΡΑ

*Η παρούσα διατριβή υποβάλλεται προς συμπλήρωση των απαιτήσεων για απονομή Διδακτορικού Τίτλου του Πανεπιστημίου Κύπρου. Είναι προϊόν πρωτότυπης εργασίας αποκλειστικά δικής μου, εκτός των περιπτώσεων που ρητώς αναφέρονται μέσω βιβλιογραφικών αναφορών, σημειώσεων ή και άλλων δηλώσεων.*

Λουίζα Δημητρίου

.....

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της εργασίας ήταν: (α) η ανάπτυξη ενός μοντέλου μέσα από την εφαρμογή της εμπειρικά θεμελιωμένης θεωρίας, για την περιγραφή των συνιστωσών που συνθέτουν την ικανότητα των μαθητών προδημοτικής κατά την επίλυση μαθηματικών έργων που σχετίζονται με τους Αριθμούς και τα Μοτίβα, (β) η εξέταση της ύπαρξης ομάδων μαθητών με διαφορετικό τρόπο επεξεργασίας των έργων αυτών και (γ) η διερεύνηση της επίδρασης δύο διαφορετικών περιβαλλόντων διερευνητικής μάθησης με τη χρήση οθονών αφής στην ικανότητα των μαθητών κατά την επίλυση των έργων που προαναφέρθηκαν.

Το δείγμα αποτέλεσαν 60 μαθητές προδημοτικής που έλαβαν μέρος σε συνεντεύξεις που βασίζονται στην επίλυση έργων, πριν και μετά την παρέμβαση. Σαράντα μαθητές συμμετείχαν στα δύο περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης με χρήση iPads και 20 μαθητές, αποτέλεσαν την ομάδα ελέγχου. Τα δύο περιβάλλοντα (υψηλού βαθμού καθοδηγούμενο περιβάλλον διερευνητικής μάθησης και χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενο περιβάλλον διερευνητικής μάθησης), διέφεραν ως προς το βαθμό καθοδήγησης που ενέπλεκαν οι δραστηριότητές τους και που δέχονταν οι μαθητές.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η ικανότητα προσέγγισης έργων που σχετίζονται με τους Αριθμούς και τα Μοτίβα, περιγράφεται από πέντε συνιστώσες, που αφορούν στην *Ικανότητα διαχείρισης και ερμηνείας δεδομένων του προβλήματος*, στην *Ικανότητα επεξεργασίας και χρήσης αναπαραστάσεων*, στην *Ικανότητα χρήσης μαθηματικών διαδικασιών*, στην *Ικανότητα παροχής αιτιολογήσεων* και στην *Ικανότητα έκφρασης με ακρίβεια στην ορολογία*. Κάθε συνιστώσα, αναλύεται σε τρεις διαστάσεις οι οποίες υποδεικνύουν διαφορετική επεξεργασία/χρήση/χειρισμό των στοιχείων που εμπλέκονται σε αυτές τις συνιστώσες: (α) *Επιφανειακή/Ιδιοσυγκρασιακή*, (β) *Μονοδιάστατη*, η οποία διακρίνεται σε χαμηλότερο και υψηλότερο επίπεδο και (γ) *Ευέλικτη*. Επιπρόσθετα, εντοπίστηκαν τέσσερις ομάδες μαθητών με διαφορετικό προφίλ προσέγγισης έργων. Η προσέγγιση της πρώτης ομάδας χαρακτηρίστηκε «*Επιφανειακή*», δεδομένου ότι οι μαθητές υιοθετούσαν επιφανειακή/ιδιοσυγκρασιακή επεξεργασία δεδομένων, αναπαραστάσεων και διαδικασιών, δεν παρείχαν αιτιολογήσεις και δεν χρησιμοποιούσαν ορθή ορολογία. Η προσέγγιση της δεύτερης ομάδας, χαρακτηρίστηκε «*Μεταβατική*», μιας και οι μαθητές, παρουσίασαν χαμηλότερου επιπέδου μονοδιάστατη επεξεργασία στις πέντε συνιστώσες του μοντέλου. Οι μαθητές αξιοποιούσαν μόνο μερικά δεδομένα του προβλήματος, εστίαζαν σε μία ή σε μερικές πτυχές της αναπαράστασης, χωρίς ολοκληρωμένη αντίληψη

της, επεδείκνυαν μη ολοκληρωμένη εφαρμογή μαθηματικών διαδικασιών, παρείχαν αιτιολογήσεις που βασίζονταν σε λανθασμένα στοιχεία και παρείχαν λεκτικές περιγραφές που δεν ήταν οι πιο κατάλληλες για έμμεση περιγραφή της ορολογίας. Η προσέγγιση της τρίτης ομάδας, χαρακτηρίστηκε «*Διαδικαστική*», μιας και οι μαθητές παρουσίασαν υψηλότερου επιπέδου μονοδιάστατη επεξεργασία στις πέντε συνιστώσες του μοντέλου. Αξιοποιούσαν όλα τα δεδομένα του προβλήματος χωρίς περαιτέρω εντοπισμό συσχετίσεων, επεδείκνυαν έναν και μοναδικό ολοκληρωμένο τρόπο χειρισμού της αναπαράστασης, εφάρμοζαν βήμα προς βήμα μαθηματικές διαδικασίες, παρείχαν αιτιολογήσεις που βασίζονταν σε συγκεκριμένα αριθμητικά παραδείγματα και χρησιμοποιούσαν κατάλληλες έμμεσες λεκτικές περιγραφές της ορολογίας. Η προσέγγιση της τέταρτης ομάδας, χαρακτηρίστηκε «*Δομική*», μιας και οι μαθητές εστίαζαν στη δομή των προβλημάτων, διατύπωναν γενικεύσεις και παρουσίασαν ευέλικτη επεξεργασία και χειρισμό των στοιχείων που εμπλέκονται στις πέντε συνιστώσες του μοντέλου.

Τα αποτελέσματα έδειξαν επίσης, ότι τα δύο περιβάλλοντα μάθησης ήταν σε θέση να βοηθήσουν τους μαθητές να βελτιώσουν την επίδοσή τους σε σχέση με την ομάδα ελέγχου. Ωστόσο, το περιβάλλον υψηλού βαθμού καθοδηγούμενης διερεύνησης, φαίνεται να βοήθησε περισσότερους μαθητές να βελτιώσουν το προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων το οποίο επέδειξαν πριν την παρέμβαση.

## ABSTRACT

The purpose of the study was (a) to develop a theoretical model through the application of the grounded theory method for the description of the components which synthesize preschool students' ability to solve and approach number and pattern tasks, (b) to investigate the existence of different groups of students with varying approaches and performance on these tasks and (c) to examine the impact of two inquiry based environments with the use of touchscreens, on students' ability to solve the aforementioned tasks.

Sixty preschool students participated in the study. Task-based interviews were conducted during which the participants were asked to solve a test, prior and after the intervention. Forty students participated in the two inquiry – based learning environments (highly guided inquiry intervention program and minimally guided inquiry intervention program) with the use of iPads, whereas, 20 students participated in the control group. The two environments differed in the extend of the pedagogical guidance involved in the activities and provided to the students.

The results showed that students' ability in approaching the number and pattern tasks can be described through five components which refer to the *Ability to use and interpret the problem's data*, the *Ability to process and use representations*, the *Ability to use mathematical processes*, the *Ability to provide justifications* and the *Ability to attend to precision using the necessary mathematical terms*. Each component is further analyzed in three dimensions which indicate different processing/use of the aspects involved in these components: (a) *Surface/Superficial/Idiosyncratic*, (b) *Unistructural* which is further analyzed into a lower and a higher level and (c) *Flexible*. Four groups of students with different types of approaches were identified. The first group's approach was named as "Surface/Superficial" since students adopted a *Surface/Superficial/Idiosyncratic* processing of data, representations and processes, did not provide justifications and did not use the appropriate mathematical terms. The second group's approach was named as "Transitive" since students indicated the lower level of the *Unistructural* processing in the five components of the model. Students used only some of the problem's data, focused only on one or some aspects of the representations without a comprehensive view of the representation, indicated incomplete application of mathematical processes, provided justifications which were based on incorrect aspects and provided verbal descriptions



which were not the most appropriate for the indirect description of the mathematical terms. The third group's approach was named as "Procedural" since students indicated the higher level of the *Unistructural* processing in the five components of the model. They utilized all the data without further identification of relationships, they indicated one and only way of processing the representation, they applied step by step mathematical processes, they provided justifications based on certain arithmetical examples and they used appropriate indirect verbal descriptions of the mathematical terms. The fourth group's approach was named as "Structural", since students focused on the problems' structure, expressed generalizations and showed flexible processing and use of the aspects involved in the five components of the model.

The results also showed that the two learning environments helped students to enhance their performance compared to the control group. However, the results provided evidence, that the highly guided inquiry intervention program encouraged a greater number of students to improve the profile they indicated prior to the intervention regarding the approach they adopted on the tasks.

## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ολοκληρώνοντας τη διδακτορική μου διατριβή θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της συμβουλευτικής επιτροπής που με έχουν βοηθήσει ώστε να διεκπεραιώσω αυτή την εργασία. Πρώτα από όλους θα ήθελα να ευχαριστήσω την ερευνητική μου σύμβουλο Δρ. Δήμητρα Πίττα – Πανταζή για την πολύτιμη καθοδήγηση που μου παρείχε σε όλα τα στάδια της διδακτορικής μου διατριβής καθώς και για τις συμβουλές, τις γνώσεις της που απλόχερα μου έχει χαρίσει όλα αυτά τα χρόνια που έχουμε συνεργαστεί αλλά και για τη στήριξή της στη δύσκολη πορεία ολοκλήρωσης της διδακτορικής μου διατριβής. Η βοήθεια που μου προσέφερε η Δρ. Δήμητρα Πίττα Πανταζή, δεν περιορίζεται μόνο στην παρούσα διατριβή, καθώς τα τελευταία χρόνια μου έδωσε την ευκαιρία να αποκτήσω πολύτιμες ερευνητικές και επαγγελματικές εμπειρίες. Θερμές ευχαριστίες, θα ήθελα να εκφράσω ακόμη σε όλα τα μέλη της συμβουλευτικής μου επιτροπής. Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή Δρ. Κωνσταντίνο Χρίστου για τις πολύ χρήσιμες συμβουλές που μου παρείχε αλλά και για τις σημαντικές του εισηγήσεις σε όλα τα στάδια εκπόνησης της διδακτορικής μου διατριβής. Ευχαριστώ επίσης, την επίκουρη καθηγήτρια Δρ. Ιλιάδα Ηλία για τις συμβουλές και εισηγήσεις για βελτίωση που μου έχει προσφέρει. Ιδιαίτερες ευχαριστίες θα ήθελα να εκφράσω και στα υπόλοιπα μέλη της ερευνητικής μου επιτροπής Δρ. Μαριάννα Τζεκάκη και Δρ. Χρυσάνθη Σκουμπουρδή για τη συμμετοχή τους στην αξιολόγηση της παρούσας εργασίας καθώς και για τις χρήσιμες εισηγήσεις τους.

Θα ήθελα ακόμη να ευχαριστήσω τους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνά μου καθώς και τους γονείς τους που επέτρεψαν τη συμμετοχή τους. Δε θα μπορούσα να παραλείψω να ευχαριστήσω το προσωπικό του νηπιαγωγείου από το οποίο έχω συλλέξει τα δεδομένα μου για την πολύ καλή συνεργασία αλλά και κατανόηση που επέδειξαν κατά τη διάρκεια συλλογής των δεδομένων μου.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ θα ήθελα να εκφράσω στη φίλη και συνεργάτιδά μου Μαριλένα Χρυσοστόμου, για τη μεγάλη βοήθεια που μου έχει προσφέρει στην ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνάς μου αλλά, για τις πολύτιμες εισηγήσεις της αλλά και για τη στήριξή της σε όλη αυτή την πορεία. Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω την Παναγιώτα Ηρακλέους καθώς και την Παρασκευή Σοφοκλέους για τη βοήθεια που μου έχουν προσφέρει όσον αφορά διαδικαστικά θέματα της διδακτορικής μου διατριβής.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα την οικογένεια μου, το σύζυγο μου καθώς και τους φίλους μου για την κατανόηση που έχουν δείξει όλα αυτά τα χρόνια και που στάθηκαν δίπλα μου, πίστεψαν σε μένα και με στήριξαν σε αυτή τη διαδικασία.

ΛΟΥΙΖΑ Λ. ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ

*Στην οικογένειά μου και στο Σέργιο*

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σελίδα εγκυρότητας .....	iv
Υπεύθυνη δήλωση υποψήφιου διδάκτορα .....	v
Περίληψη .....	vi
Abstract .....	viii
Ευχαριστίες .....	x
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ I: Το πρόβλημα</b> .....	1
Διατύπωση του Προβλήματος .....	2
Σκοπός της εργασίας .....	3
Ερευνητικά ερωτήματα .....	4
Σημαντικότητα της Έρευνας .....	4
Πρωτοτυπία της έρευνας .....	6
Περιορισμοί της Εργασίας .....	7
Δομή της εργασίας .....	8
Εννοιολογικοί Ορισμοί Κυριότερων Εννοιών .....	9
Αίσθηση της έννοιας του αριθμού – Αριθμητικές ικανότητες .....	9
Ικανότητα των μαθητών στα Μοτίβα .....	10
Διερευνητική μάθηση .....	10
Υψηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση .....	10
Χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση .....	11
Συνήθης διδασκαλία .....	11
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ II: Επισκόπηση Βιβλιογραφίας</b> .....	12
Μαθηματική ικανότητα των μαθητών προσχολικής ηλικίας .....	14
Μαθηματικές διαδικασίες και στρατηγικές μαθητών προδημοτικής κατά την επίλυση έργων που εμπλέκουν την έννοια του Αριθμού και των Μοτίβων .....	15
Διαδικασίες αρίθμησης: Απαγγελία αριθμολέξεων, άμεση αναγνώριση, απαρίθμηση, εκτίμηση .....	20
Απαγγελία αριθμολέξεων .....	20
Άμεση αναγνώριση ποσοτήτων .....	21
Απαρίθμηση ποσοτήτων .....	23
Εκτίμηση Ποσοτήτων .....	25
Διαδικασίες για εύρεση σχέσεων: σύγκριση συλλογών, διάταξη αριθμών .....	26
Σύγκριση συλλογών .....	27
	xii

Διάταξη αριθμών.....	28
Διαδικασίες που αφορούν σε πράξεις αριθμών: πρόσθεση, αφαίρεση, ανάλυση και σύνθεση αριθμού.....	29
Πρόσθεση/αφαίρεση.....	30
Ανάλυση και σύνθεση αριθμού.....	32
Διαδικασίες αναγνώρισης μοτίβων και γενίκευσης.....	33
Επεξεργασία και κατασκευή αναπαραστάσεων κατά την επίλυση έργων που εμπλέκουν την έννοια του Αριθμού και των Μοτίβων.....	38
Επεξεργασία και χρήση των δεδομένων κατά την επίλυση προβλημάτων που εμπλέκουν την έννοια του Αριθμού και των Μοτίβων.....	43
Αιτιολογήσεις κατά την επίλυση έργων που εμπλέκουν την έννοια του Αριθμού και των Μοτίβων.....	46
Ακρίβεια στην ορολογία κατά την επίλυση έργων που εμπλέκουν την έννοια των Αριθμών και των Μοτίβων.....	48
Γενικές περιγραφές της ανάπτυξης της σκέψης ή της μαθηματικής ικανότητας.....	50
Θεωρίες ανάπτυξης από το πεδίο της μαθηματικής παιδείας.....	53
Παρεμβάσεις για ενίσχυση της μαθηματικής ικανότητας των παιδιών προσχολικής ηλικίας.....	54
Σύγχρονα τεχνολογικά εργαλεία.....	54
Οθόνες αφής - iPads.....	56
Διερευνητική μάθηση.....	59
Διερευνητική μάθηση και τεχνολογία.....	59
Σύνοψη.....	63
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ III: Μεθοδολογία.....</b>	<b>65</b>
Καθορισμός πληθυσμού – Δείγμα της Έρευνας.....	65
Διαδικασία εκτέλεσης της έρευνας.....	67
Πρώτη φάση.....	68
Δεύτερη φάση.....	68
Τρίτη φάση.....	68
Τέταρτη φάση.....	69
Μέσα συλλογής δεδομένων.....	69
Συνεντεύξεις που βασίζονται στην επίλυση έργων.....	69
Δοκίμιο.....	70
Περιβάλλοντα Μάθησης.....	75
Σχεδιασμός περιβαλλόντων διερευνητικής μάθησης.....	75
Υψηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση.....	79
Χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση.....	80
Συνήθης διδασκαλία.....	81

Επιλογή μαθηματικών εφαρμογών .....	81
Τεχνικές ανάλυσης των δεδομένων της έρευνας .....	86
Τεχνικές ανάλυσης ποιοτικών δεδομένων - Εμπειρικά Θεμελιωμένη Θεωρία .....	86
Σκοπός της εμπειρικά θεμελιωμένης θεωρίας .....	86
Θεωρητική δειγματοληψία .....	87
Θεωρητικός Κορεσμός .....	87
Ανάλυση δεδομένων .....	88
Μέθοδος της σταθερής σύγκρισης.....	90
Θεωρητική Ευαισθησία .....	91
Ανάλυση ποσοτικών δεδομένων.....	91
Διόρθωση εργαλείου μέτρησης .....	91
Τεχνικές ανάλυσης ποσοτικών δεδομένων .....	92
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV: Ανάλυση των δεδομένων και αποτελέσματα .....</b>	<b>93</b>
Διαστάσεις που συνθέτουν τη μαθηματική ικανότητα παιδιών προδημοτικής κατά την επίλυση έργων αριθμών και μοτίβων.....	94
Εμπειρικά θεμελιωμένη θεωρία - Ανοιχτή Κωδικοποίηση .....	94
Ενδεικτικά αποσπάσματα συνεντεύξεων - Αριθμοί έργο1 .....	95
Ενδεικτικά αποσπάσματα συνεντεύξεων - Αριθμοί έργο 2.....	102
Ενδεικτικά αποσπάσματα συνεντεύξεων - Αριθμοί έργο 3.....	109
Ενδεικτικά αποσπάσματα συνεντεύξεων - Μοτίβα έργο 1.....	116
Ενδεικτικά αποσπάσματα συνεντεύξεων - Μοτίβα έργο 2.....	122
Ενδεικτικά αποσπάσματα συνεντεύξεων - Μοτίβα έργο 3.....	128
Δημιουργία κατηγοριών.....	134
Εμπειρικά θεμελιωμένη θεωρία - Αξονική Κωδικοποίηση .....	150
Εμπειρικά θεμελιωμένη θεωρία - Επιλεκτική Κωδικοποίηση.....	166
Προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων.....	173
Επιφανειακή Προσέγγιση - Επιφανειακό προφίλ ομάδας 1 .....	174
Μεταβατική Προσέγγιση - Μεταβατικό προφίλ ομάδας 2.....	176
Διαδικαστική Προσέγγιση - Διαδικαστικό προφίλ ομάδας 3 .....	181
Δομική Προσέγγιση - Δομικό προφίλ ομάδας 4.....	185
Κωδικοποίηση για την απόδοση τρόπου προσέγγισης - επεξεργασίας κάθε έργου .....	190
Εντοπισμός προφίλ των μαθητών της παρέμβασης.....	193
Αποτελέσματα που αφορούν στις παρεμβάσεις και περαιτέρω διερεύνηση των προφίλ/ομάδων μαθητών .....	194
Διαφορές στην επίδοση σε έργα που σχετίζονται με έννοιες των Αριθμών και των Μοτίβων μαθητών με διαφορετικό προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων.....	194

Η επίδραση των δύο παρεμβατικών προγραμμάτων στην ικανότητα επίλυσης έργων που σχετίζονται με τις έννοιες των Αριθμών και των Μοτίβων .....	196
Μεταβολή των προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων από το προπαρεμβατικό στο μεταπαρεμβατικό στάδιο .....	198
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ V: Συζήτηση των αποτελεσμάτων</b> .....	202
Η δομή της ικανότητας των μαθητών προδημοτικής σε έργα Αριθμών και Μοτίβων .....	203
Διαχείριση και ερμηνεία δεδομένων προβλήματος .....	204
Επεξεργασία και χρήση αναπαραστάσεων .....	206
Ικανότητα χρήσης μαθηματικών διαδικασιών .....	208
Ικανότητα παροχής αιτιολογήσεων .....	209
Ικανότητα έκφρασης με ακρίβεια .....	211
Προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων μαθητών προδημοτικής κατά την επίλυση έργων που σχετίζονται με έννοιες των Αριθμών και των Μοτίβων .....	213
Χαρακτηριστικά της πρώτης ομάδας προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων.....	213
Χαρακτηριστικά της δεύτερης ομάδας προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων .....	215
Χαρακτηριστικά της τρίτης ομάδας προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων.....	217
Χαρακτηριστικά της τέταρτης ομάδας προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων .....	218
Αποτελέσματα που αφορούν στις παρεμβάσεις με χρήση της τεχνολογίας και περαιτέρω διερεύνηση των προφίλ/ομάδων μαθητών .....	220
<b>Κεφάλαιο VI: Συμπεράσματα</b> .....	224
Συμπεράσματα της εργασίας.....	224
Εφαρμογές της εργασίας σε θεωρητικό, σε μεθοδολογικό και σε πρακτικό επίπεδο .....	230
Εισηγήσεις για μελλοντικές έρευνες.....	231
Αναφορές .....	233
Παράρτημα Α.....	258
Παράρτημα Β.....	274
Παράρτημα Γ .....	305
Παράρτημα Δ.....	312
Παράρτημα Ε.....	318
Παράρτημα ΣΤ.....	325

## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ/ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

		Σελίδα
Διάγραμμα 3.1	Δομή του σχεδιασμού της έρευνας και διαδικασία διεξαγωγής της έρευνας.....	67
Διάγραμμα 4.1	Ενδεικτικό παράδειγμα αριθμοί έργο1.....	96
Διάγραμμα 4.2	Ενδεικτικό παράδειγμα αριθμοί έργο 2.....	102
Διάγραμμα 4.3	Ενδεικτικό παράδειγμα αριθμοί έργο 3.....	109
Διάγραμμα 4.4	Ενδεικτικό παράδειγμα μοτίβα έργο 1.....	116
Διάγραμμα 4.5	Ενδεικτικό παράδειγμα μοτίβα έργο 2.....	122
Διάγραμμα 4.6	Ενδεικτικό παράδειγμα μοτίβα έργο 3.....	128
Διάγραμμα 4.7	Διαστάσεις της κατηγορίας επεξεργασία και χειρισμός δεδομένων προβλήματος.....	150
Διάγραμμα 4.8	Διαστάσεις της κατηγορίας επεξεργασία/χειρισμός δεδομένων προβλήματος.....	152
Διάγραμμα 4.9	Διαστάσεις της κατηγορίας ικανότητα χρήσης μαθηματικών διαδικασιών.....	156
Διάγραμμα 4.10	Διαστάσεις της κατηγορίας ικανότητα παροχής αιτιολογήσεων.....	160
Διάγραμμα 4.11	Διαστάσεις της κατηγορίας ικανότητα έκφρασης με ακρίβεια.....	162
Διάγραμμα 4.12	Μοντέλο ικανότητας προσέγγισης και επεξεργασίας μαθηματικών έργων που σχετίζονται με τους αριθμούς και τα μοτίβα.....	172
Διάγραμμα 4.13	Έργα που χρησιμοποιήθηκαν για παρουσίαση των ομάδων συμπεριφοράς.....	173
Διάγραμμα 4.14	Ενδεικτικές λύσεις των μαθητών που υιοθέτησαν επιφανειακή προσέγγιση στα έργα Αρ.18, Αρ.6, Αρ.11, και Α6 αντίστοιχα όπως παρουσιάζονται από πάνω αριστερά προς κάτω δεξιά.....	175
Διάγραμμα 4.15	Ενδεικτικές λύσεις των μαθητών που υιοθέτησαν μεταβατική προσέγγιση στα έργα Αρ.18, Αρ.6, Αρ.11, και Α6 αντίστοιχα όπως παρουσιάζονται από πάνω αριστερά προς κάτω δεξιά.....	180
Διάγραμμα 4.16	Ενδεικτικές λύσεις των μαθητών που υιοθέτησαν διαδικαστική προσέγγιση στα έργα Αρ.18, Αρ.6, Αρ.11, και Α6 αντίστοιχα όπως παρουσιάζονται από πάνω αριστερά προς κάτω δεξιά.....	184
Διάγραμμα 4.17	Ενδεικτικές λύσεις των μαθητών που υιοθέτησαν δομική προσέγγιση στα έργα Αρ.18, Αρ.6, Αρ.11, και Α6 αντίστοιχα όπως παρουσιάζονται από πάνω αριστερά προς κάτω δεξιά.....	189



## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

		Σελίδα
Πίνακας 2.1	Αναπτυξιακή πρόοδος παιδιών ηλικίας 2-7 ετών σε έργα μοτίβων (Clements & Sarama, 2009) .....	35
Πίνακας 3.1	Δείγμα της έρευνας.....	66
Πίνακας 3.2	Μαθηματικό περιεχόμενο δοκιμίου.....	71
Πίνακας 3.3	Οργάνωση των μαθημάτων ως προς το μαθηματικό τους περιεχόμενο.....	76
Πίνακας 3.4	Ανάλυση παραδείγματος υψηλού βαθμού καθοδηγούμενης διερεύνησης και χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενης διερεύνησης με χρήση οθονών αφής.....	83
Πίνακας 3.5	Ενδεικτικό παράδειγμα βαθμολόγησης των έργων του δοκιμίου.....	92
Πίνακας 4.1	Παράδειγμα εφαρμογής ανοιχτής κωδικοποίησης σε απόσπασμα συνέντευξης του μαθητή «Μάρκου».....	97
Πίνακας 4.2	Παράδειγμα εφαρμογής ανοιχτής κωδικοποίησης σε απόσπασμα συνέντευξης της μαθήτριας «Ελίζας».....	98
Πίνακας 4.3	Παράδειγμα εφαρμογής ανοιχτής κωδικοποίησης σε απόσπασμα συνέντευξης του μαθητή «Κώστα».....	100
Πίνακας 4.4	Παράδειγμα εφαρμογής ανοιχτής κωδικοποίησης σε απόσπασμα συνέντευξης της μαθήτριας «Μαρίας» .....	101
Πίνακας 4.5	Παράδειγμα εφαρμογής ανοιχτής κωδικοποίησης σε απόσπασμα συνέντευξης της μαθήτριας «Νίκης» .....	103
Πίνακας 4.6	Παράδειγμα εφαρμογής ανοιχτής κωδικοποίησης σε απόσπασμα συνέντευξης της μαθήτριας «Μαργαρίτας» .....	105
Πίνακας 4.7	Παράδειγμα εφαρμογής ανοιχτής κωδικοποίησης σε απόσπασμα συνέντευξης του μαθητή «Κυριάκου».....	106
Πίνακας 4.8	Παράδειγμα εφαρμογής ανοιχτής κωδικοποίησης σε απόσπασμα συνέντευξης του μαθητή «Αλέξανδρου».....	107
Πίνακας 4.9	Παράδειγμα εφαρμογής ανοιχτής κωδικοποίησης σε απόσπασμα συνέντευξης του μαθητή «Παύλου».....	110
Πίνακας 4.10	Παράδειγμα εφαρμογής ανοιχτής κωδικοποίησης σε απόσπασμα συνέντευξης της μαθήτριας «Νεφέλης».....	110
Πίνακας 4.11	Παράδειγμα εφαρμογής ανοιχτής κωδικοποίησης σε απόσπασμα συνέντευξης του μαθητή «Κωνσταντίνου».....	112
Πίνακας 4.12	Παράδειγμα εφαρμογής ανοιχτής κωδικοποίησης σε απόσπασμα συνέντευξης της μαθήτριας «Μαρίας».....	114
Πίνακας 4.13	Παράδειγμα εφαρμογής ανοιχτής κωδικοποίησης σε απόσπασμα συνέντευξης του μαθητή «Κυριάκου».....	116
Πίνακας 4.14	Παράδειγμα εφαρμογής ανοιχτής κωδικοποίησης σε απόσπασμα συνέντευξης της μαθήτριας «Ευαγγελίας».....	117
Πίνακας 4.15	Παράδειγμα εφαρμογής ανοιχτής κωδικοποίησης σε απόσπασμα συνέντευξης του μαθητή «Παναγιώτη».....	118
Πίνακας 4.16	Παράδειγμα εφαρμογής ανοιχτής κωδικοποίησης σε απόσπασμα συνέντευξης του μαθητή «Ελευθέριου».....	120
Πίνακας 4.17	Παράδειγμα εφαρμογής ανοιχτής κωδικοποίησης σε απόσπασμα συνέντευξης της μαθήτριας «Αννας».....	123
Πίνακας 4.18	Παράδειγμα εφαρμογής ανοιχτής κωδικοποίησης σε απόσπασμα συνέντευξης του μαθητή «Χαράλαμπου».....	124

Πίνακας 4.19	Παράδειγμα εφαρμογής ανοιχτής κωδικοποίησης σε απόσπασμα συνέντευξης της μαθήτριας «Αγγέλας».....	125
Πίνακας 4.20	Παράδειγμα εφαρμογής ανοιχτής κωδικοποίησης σε απόσπασμα συνέντευξης της μαθήτριας «Μαρίνας».....	127
Πίνακας 4.21	Παράδειγμα εφαρμογής ανοιχτής κωδικοποίησης σε απόσπασμα συνέντευξης του μαθητή «Μιχάλη».....	129
Πίνακας 4.22	Παράδειγμα εφαρμογής ανοιχτής κωδικοποίησης σε απόσπασμα συνέντευξης της μαθήτριας «Μαρίας».....	130
Πίνακας 4.23	Παράδειγμα εφαρμογής ανοιχτής κωδικοποίησης σε απόσπασμα συνέντευξης της μαθήτριας «Κατερίνας».....	131
Πίνακας 4.24	Παράδειγμα Εφαρμογής Ανοιχτής Κωδικοποίησης σε Απόσπασμα Συνέντευξης του Μαθητή «Μιλτιάδη».....	132
Πίνακας 4.25	Κωδικοί που συνθέτουν την κατηγορία ικανότητα διαχείριση και ερμηνεία δεδομένων προβλήματος.....	135
Πίνακας 4.26	Κωδικοί που συνθέτουν την κατηγορία ικανότητα επεξεργασίας και χρήσης αναπαραστάσεων.....	137
Πίνακας 4.27	Κωδικοί που συνθέτουν την κατηγορία ικανότητα χρήσης μαθηματικών διαδικασιών.....	140
Πίνακας 4.28	Κωδικοί που συνθέτουν την κατηγορία ικανότητα παροχής αιτιολογήσεων.....	145
Πίνακας 4.29	Κωδικοί που συνθέτουν την κατηγορία ικανότητα έκφρασης με ακρίβεια.....	146
Πίνακας 4.30	Κωδικοί που συνθέτουν την κατηγορία συνολικά επιτεύγματα.....	148
Πίνακας 4.31	Κωδικοί που συνθέτουν την διάσταση επιφανειακή/ιδιοσυγκρασιακή επεξεργασία/χειρισμός δεδομένων προβλήματος.....	151
Πίνακας 4.32	Κωδικοί που συνθέτουν την διάσταση μονοδιάστατη επεξεργασία/χειρισμός δεδομένων προβλήματος.....	151
Πίνακας 4.33	Κωδικοί που συνθέτουν την διάσταση ευέλικτη επεξεργασία/χειρισμός δεδομένων προβλήματος.....	152
Πίνακας 4.34	Κωδικοί που συνθέτουν την διάσταση επιφανειακή/ ιδιοσυγκρασιακή επεξεργασία/χρήση αναπαραστάσεων.....	153
Πίνακας 4.35	Κωδικοί που συνθέτουν τη διάσταση μονοδιάστατη επεξεργασία/χρήση αναπαραστάσεων.....	153
Πίνακας 4.36	Κωδικοί που συνθέτουν την διάσταση ευέλικτη επεξεργασία/ χρήση αναπαραστάσεων.....	155
Πίνακας 4.37	Κωδικοί που συνθέτουν την διάσταση επιφανειακές/ ιδιοσυγκρασιακές διαδικασίες/προσεγγίσεις.....	156
Πίνακας 4.38	Κωδικοί που συνθέτουν την διάσταση μονοδιάστατη χρήση/ εφαρμογή μαθηματικών διαδικασιών.....	157
Πίνακας 4.39	Κωδικοί που συνθέτουν την διάσταση ευέλικτη χρήση/εφαρμογή μαθηματικών διαδικασιών.....	159
Πίνακας 4.40	Κωδικοί που συνθέτουν την διάσταση επιφανειακή/ ιδιοσυγκρασιακή περιγραφή που δεν παραπέμπει σε αιτιολόγηση.....	161
Πίνακας 4.41	Κωδικοί που συνθέτουν την διάσταση μονοδιάστατη χρήση αιτιολογήσεων.....	161
Πίνακας 4.42	Κωδικοί που Συνθέτουν την Διάσταση Ευέλικτη Χρήση Αιτιολογήσεων.....	162
Πίνακας 4.43	Κωδικοί που συνθέτουν την διάσταση επιφανειακή/ ιδιοσυγκρασιακή	

	περιγραφή που δεν εμπλέκει ούτε παραπέμπει σε χρήση ορολογίας.....	163
Πίνακας 4.44	Κωδικοί που συνθέτουν την διάσταση μονοδιάστατη περιγραφή που παραπέμπει έμμεσα σε χρήση ορολογίας.....	164
Πίνακας 4.45	Κωδικοί που συνθέτουν την διάσταση ευέλικτη χρήση της ορθής ορολογίας.....	165
Πίνακας 4.46	Στοιχεία περιγραφικής στατιστικής για την συνολική επίδοση στο προπαραεμβατικό δοκίμιο των τεσσάρων ομάδων προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων.....	195
Πίνακας 4.47	Στοιχεία περιγραφικής στατιστικής για την επίδοση στα έργα αριθμητικής και την επίδοση στα έργα μοτίβων στο προπαραεμβατικό δοκίμιο των τεσσάρων ομάδων προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων.....	196
Πίνακας 4.48	Στοιχεία περιγραφικής στατιστικής για την επίδοση στο μεταπαραεμβατικό δοκίμιο στα έργα που σχετίζονται με την έννοια των αριθμών και τα μοτίβα των τριών ομάδων που συμμετείχαν σε διαφορετικό περιβάλλον μάθησης .....	197
Πίνακας 4.49	Ανάλυση crosstabs ανάμεσα στις ομάδες προφίλ των μαθητών στο προπαραεμβατικό και μεταπαραεμβατικό στάδιο.....	199
Πίνακας 4.50	Ανάλυση crosstabs ανάμεσα στις ομάδες προφίλ των μαθητών στο προπαραεμβατικό στάδιο και στο περιβάλλον μάθησης που συμμετείχαν	200
Πίνακας 4.51	Ανάλυση crosstabs ανάμεσα στις ομάδες προφίλ των μαθητών στο μεταπαραεμβατικό στάδιο και στο περιβάλλον μάθησης που συμμετείχαν.....	201

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

### ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Τα τελευταία χρόνια φαίνεται να παρουσιάζεται ιδιαίτερη έμφαση και αυξημένο ενδιαφέρον στη διδασκαλία των Μαθηματικών σε μαθητές μικρών ηλικιών μεταξύ των ερευνητών στο πεδίο της μαθηματικής παιδείας (Clements, Sarama, Spitler, Lange, & Wolfe, 2011; English & Mulligan, 2013; Levenson, Tirosh, & Tsamir, 2011; Papic, Mulligan, & Mitchelmore, 2011; Sarama & Clements, 2009). Ένας από τους λόγους του φαινομένου αυτού, είναι και η έμφαση που έχει δοθεί στη διδασκαλία των Μαθηματικών κατά την προσχολική ηλικία τόσο σε παγκόσμιο επίπεδο όσο και στο εκπαιδευτικό σύστημα της Κύπρου. Υπάρχουν σαφείς ενδείξεις ότι η διδασκαλία των Μαθηματικών από το νηπιαγωγείο, αποτελεί σημαντικό παράγοντα πρόβλεψης της επιτυχίας των μαθητών στις πρώτες τάξεις του δημοτικού ή ακόμη και της μετέπειτα ακαδημαϊκής τους επιτυχίας (Bowman, Donovan, & Burns, 2001; Campbell, Pungello, Miller-Johnson, Burchinal, & Ramey, 2001; Claessens & Engel, 2013; Duncan et al., 2007). Αποτελέσματα διαχρονικών ερευνών εισηγούνται ότι μαθητές που αποτυγχάνουν στο νηπιαγωγείο τείνουν να συνεχίζουν να αποτυγχάνουν και στο δημοτικό (Hanich, Jordan, Kaplan, & Dick, 2001; Morgan, Farkas, & Wu, 2009), ενώ οι Watts, Duncan, Siegler και Davis-Kean (2014) έδειξαν ότι η μαθηματική επίδοση μαθητών Α' δημοτικού μπορεί να αποτελέσει ισχυρό παράγοντα πρόβλεψης της μαθηματικής τους ικανότητάς στην ηλικία των 15 ετών.

Η αναγνώριση της σημασίας της διδασκαλίας των μαθηματικών σε μαθητές μικρών ηλικιών, οδήγησε πολλούς ερευνητές καθώς και εθνικούς οργανισμούς να τονίσουν την ανάγκη για παροχή καλύτερης εκπαίδευσης (NCTM, 2000; Presser, Clements, Ginsburg, & Ertle, 2015). Σύμφωνα με τους Kilpatrick, Swafford και Findell (2001) πρωταρχικός στόχος της διδασκαλίας των μαθηματικών σε μαθητές προσχολικής ηλικίας μέχρι Β' δημοτικού, είναι να δημιουργήσει «μαθηματικά ικανούς» μαθητές, εμπλέκοντάς τους σε δραστηριότητες που προάγουν το μαθηματικό συλλογισμό και την επίλυση προβλήματος (Clements & Conference Working Group, 2004; NAEYC, 2010). Κατά συνέπεια τα νέα ερευνητικά δεδομένα φαίνεται να εγείρουν σημαντικά ζητήματα σχετικά με τη μαθηματική γνώση και τις στρατηγικές που μπορούν να αναπτύξουν οι μικροί μαθητές ώστε να καταστούν «μαθηματικά ικανοί». Επιπρόσθετα, η αναθεώρηση υφιστάμενων θεωριών που υποστήριζαν ότι οι μικροί μαθητές έχουν περιορισμένη μαθηματική γνώση καθώς και ελάχιστες δυνατότητες να μάθουν Μαθηματικά (Piaget, Inhelder, & Szeminska,

1960; Piaget & Szeminska, 1952; Thorndike, 1922) και η αντικατάστασή τους με νέες θεωρίες που υποστηρίζουν την ύπαρξη ικανοτήτων που μπορούν να αναπτυχθούν κατά τα πρώτα χρόνια ζωής του ατόμου (Baroody, Lai, & Mix, 2006; Clements, Sarama, & DiBiase, 2004), φαίνεται να εντείνουν το ενδιαφέρον των ερευνητών για τη διδασκαλία των μαθηματικών στο νηπιαγωγείο.

### **Διατύπωση του Προβλήματος**

Παρά το αυξημένο ενδιαφέρον και τη σημασία της διδασκαλίας των Μαθηματικών από το νηπιαγωγείο, το ερευνητικό πεδίο της μαθηματικής παιδείας που αφορά στους μαθητές προσχολικής, περιορίζεται σε συγκεκριμένες κατευθύνσεις στις οποίες δόθηκε ιδιαίτερη έμφαση. Πληθώρα ερευνών εξετάζει την επίδραση που έχει η μαθηματική επίδοση των μαθητών προσχολικής ηλικίας στη μετέπειτα πορεία τους στην εκπαίδευση. Ιδιαίτερη έμφαση εντοπίζεται επίσης σε περιγραφές σταδίων ή τροχιών μάθησης οι οποίες περιγράφουν την μαθηματική ικανότητα των μαθητών προσχολικής ηλικίας, ενημερώνοντάς μας για τις διαδικασίες αλλά και τις στρατηγικές που είναι σε θέση να υιοθετούν και για το τι μπορούν και το τι δεν μπορούν να κάνουν οι μαθητές αυτοί (π.χ. δείτε Sarama & Clements, 2009). Μια περιγραφή της μαθηματικής ικανότητας μικρότερων ηλικιακά μαθητών χρειάζεται ωστόσο, να εμπλέκει πέραν από πληροφορίες για τα επίπεδα των μαθητών ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο και στοιχεία για τη διαφοροποίησή του τρόπου με τον οποίο εστιάζονται και χειρίζονται δεδομένα, επεξεργάζονται και χειρίζονται αναπαραστάσεις, διατυπώνουν αιτιολογήσεις και εκφράζονται με ακρίβεια.

Συγκεκριμένα, όσον αφορά τη μαθηματική ικανότητα των παιδιών προσχολικής ηλικίας σε σχέση με το μαθηματικό περιεχόμενο, περιγράφεται ή εξετάζεται σε πληθώρα μελετών, οι οποίες ενημερώνουν για την ύπαρξη διαφορετικού επιπέδου στρατηγικών (από απλές στρατηγικές σε πιο σύνθετες) κυρίως στην περιοχή των Αριθμών (Siegler & Robinson, 1982; Τζεκάκη, 2007) αλλά και στην περιοχή των Μοτίβων (Sarama & Clements, 2009).

Από την άλλη, περιορισμένες έρευνες παρέχουν στοιχεία για τη διαφοροποιημένη ικανότητα των μαθητών να αξιοποιούν, να επεξεργάζονται ή να κατασκευάζουν αναπαραστάσεις κατά την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων και ενημερώνουν για: (α) μια εξελικτική πορεία από τη χρήση ιδιοσυγκρασιακών αναπαραστάσεων στην χρήση αναπαραστάσεων που υποδεικνύουν αντίληψη της δομής (Mulligan, Prescott, & Michelmore, 2004), (β) τη διαφορετική προτίμηση μαθητών ίδιας ηλικίας ως προς το είδος των αναπαραστάσεων (συγκεκριμένες, εικονικές, συμβολικές) που χρησιμοποιούν

επεξεργάζονται ή κατασκευάζουν κατά την επίλυση προβλημάτων (Carruthers & Worthington, 2011). Επιπρόσθετα, ένας μικρός αριθμός ερευνών κυρίως σε μαθητές δημοτικού (Carpenter, Franke, & Levi, 2003) και λιγότερο σε μαθητές νηπιαγωγείου (Rayen, 2017), παρέχουν στοιχεία για τη διαφοροποιημένη ικανότητα και εξέλιξη της ικανότητας των μαθητών να παρέχουν αιτιολογήσεις (επίκληση στην αυθεντία, χρήση συγκεκριμένων παραδειγμάτων, γενικευμένες δηλώσεις) για τον τρόπο σκέψης τους ή τις απαντήσεις τους σε μαθηματικά προβλήματα.

Αυτή η μεμονωμένη και αποσπασματική εξέταση των πτυχών που προαναφέρθηκαν και που παρατηρείται μέχρι σήμερα, τονίζει την απουσία οποιασδήποτε προσπάθειας παράλληλης διερεύνησης των συγκεκριμένων πτυχών και των τυχόν διασυνδέσεων μεταξύ τους. Κατά συνέπεια, η βιβλιογραφία φαίνεται να στερείται ενός μοντέλου το οποίο να συνδυάζει τις ικανότητες αυτές και να περιγράφει το ρόλο που διαδραματίζουν καθώς και τον τρόπο με τον οποίο διαπλέκονται κατά την επίλυση μαθηματικών έργων από μαθητές προσχολικής ηλικίας.

### **Σκοπός της εργασίας**

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η παρουσίαση ενός μοντέλου, το οποίο μέσα από την εφαρμογή της εμπειρικά θεμελιωμένης θεωρίας, θα περιγράφει τις συνιστώσες που συνθέτουν τη μαθηματική ικανότητα των μαθητών προδημοτικής αλλά και τον τρόπο με τον οποίο συνδυάζονται και συνυπάρχουν κατά την επίλυση μαθηματικών έργων που αφορούν στην έννοια των Αριθμών και των Μοτίβων. Για την ολοκλήρωση και συμπλήρωση του μοντέλου θα γίνει προσπάθεια διερεύνησης και ενός πρώτου επιμέρους στόχου, ο οποίος εμπλέκει την εξέταση και την περιγραφή της συμπεριφοράς, της ικανότητας και του τρόπου προσέγγισης των μαθητών προδημοτικής κατά την επίλυση μαθηματικών έργων, μέσα από την περιγραφή ομάδων μαθητών με διαφοροποιημένη μαθηματική ικανότητα ως προς όλες τις συνιστώσες που την συνθέτουν. Δεύτερο επιμέρους στόχο της εργασίας αποτελεί η διερεύνηση του κατά πόσον η μαθηματική ικανότητα μαθητών προσχολικής ηλικίας που επιδεικνύουν στην επίλυση έργων Αριθμών και Μοτίβων, επηρεάζεται από τη συμμετοχή τους σε διδασκαλίες διερευνητικής μάθησης με τη χρήση οθονών αφής.

## **Ερευνητικά ερωτήματα**

Τα βασικά ερευνητικά ερωτήματα που προκύπτουν από τον σκοπό της εργασίας αναλύονται ως εξής:

1. Ποιες διαστάσεις περιγράφουν την ικανότητα των μαθητών προδημοτικής κατά την επίλυση έργων που σχετίζονται με έννοιες των Αριθμών και των Μοτίβων;
2. Ποια είναι τα διαφορετικά προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων που παρουσιάζουν μαθητές προδημοτικής κατά την επίλυση έργων που σχετίζονται με έννοιες των Αριθμών και των Μοτίβων;
3. Ποιες είναι οι διαφορές στην επίδοση (προπαραμβατικό στάδιο/μέτρηση) σε έργα που σχετίζονται με έννοιες των Αριθμών και των Μοτίβων των μαθητών προδημοτικής με διαφορετικό προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων;
4. Τα τρία περιβάλλοντα μάθησης (υψηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με χρήση οθονών αφής, χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με χρήση οθονών αφής, ομάδα ελέγχου) ενισχύουν διαφορετικά την ικανότητα επίλυσης έργων που σχετίζονται με έννοιες των Αριθμών και των Μοτίβων των μαθητών προδημοτικής; Αν ναι, με ποιο τρόπο;
5. Μεταβάλλεται το προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων που παρουσιάζουν μαθητές προδημοτικής κατά την επίλυση έργων που σχετίζονται με έννοιες των Αριθμών και των Μοτίβων από το προπαραμβατικό στο μεταπαραμβατικό στάδιο; Αν ναι, πώς;

## **Σημαντικότητα της Έρευνας**

Ο βαθμός σημασίας της έρευνας όπως προτείνεται από την παρούσα ερευνητική πρόταση είναι τριπλός: θεωρητικός, μεθοδολογικός και πρακτικός.

Αρχικά, όσον αφορά τη θεωρητική συνεισφορά της έρευνας, φαίνεται να ενισχύεται η γνώση όσον αφορά τη μαθηματική ικανότητα των μαθητών προσχολικής ηλικίας. Συγκεκριμένα, γίνεται προσπάθεια ανάπτυξης ενός μοντέλου το οποίο θα επικεντρώνεται στην ικανότητα και τη συμπεριφορά των μαθητών προσχολικής ηλικίας σε έργα που σχετίζονται με την ενότητα περιεχομένου των Αριθμών και των Μοτίβων. Το μοντέλο αυτό δε θα περιορίζεται μόνο σε απλή αναφορά των ικανοτήτων των μαθητών, αλλά θα συνδυάζει τις βασικές διαστάσεις που επηρεάζουν τον τρόπο που οι μαθητές προδημοτικής

συμπεριφέρονται και επεξεργάζονται τις καταστάσεις που τους δίνονται όταν κληθούν να επιλύσουν έργα Αριθμών και των Μοτίβων, προβάλλοντας τον τρόπο με τον οποίο διαπλέκονται. Ενώ στη βιβλιογραφία εντοπίζονται διάφορες πτυχές που περιγράφουν τη συμπεριφορά και τον τρόπο επεξεργασίας των έργων από μέρους των μαθητών όπως η ικανότητα επίλυσης προβλήματος, η εφαρμογή μαθηματικών διαδικασιών, η εστίαση της προσοχής τους από την επιφάνεια στη δομή και ο τρόπος που επικοινωνούν τις ιδέες τους, αυτές οι πτυχές φαίνεται μέχρι στιγμής να αντιμετωπίζονται μεμονωμένα και αποσπασματικά. Η μελέτη αυτή, φαίνεται ακόμη να δίνει ιδιαίτερη σημασία στο ρόλο των ατομικών διαφορών, αφού στοχεύει να εντοπίσει ομάδες συμπεριφοράς μαθητών οι οποίες να διακρίνονται τόσο ως προς τις ικανότητες των μαθητών αλλά και ως προς τον τρόπο που συμπεριφέρονται κατά την επίλυση έργων που σχετίζονται με τους Αριθμούς και τα Μοτίβα. Η αναγνώριση των ατομικών διαφορών και η χρήση διδασκαλιών που να ανταποκρίνονται στα ατομικά χαρακτηριστικά των μαθητών τονίζεται από διάφορες οργανώσεις όπως για παράδειγμα το Τμήμα Εκπαίδευσης και Δεξιοτήτων του Ηνωμένου Βασιλείου μέσω του *"Every Child Matters: Change for Children in Schools"* το 2005 καθώς και από άλλους ερευνητές που υποστηρίζουν ότι οι διδακτικές πρακτικές θα πρέπει να ανταποκρίνονται στις ανάγκες των μαθητών καθώς και στο ρυθμό με τον οποίο μαθαίνουν (Tomlinson, 1999). Μέσω της συγκεκριμένης μελέτης, δίνεται ιδιαίτερη σημασία στο ρόλο των ατομικών διαφορών. Επιπρόσθετα, η διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο συγκεκριμένα περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης με χρήση οθονών αφής επιδρούν στη μαθηματική ικανότητα μαθητών προδημοτικής κατά την επίλυση μαθηματικών έργων που πραγματοποιείται στην παρούσα έρευνα, φαίνεται να ενισχύει τα ερευνητικά αποτελέσματα στο πεδίο της Μαθηματικής παιδείας σχετικά με τη συνεισφορά διαφορετικών περιβαλλόντων διερευνητικής μάθησης και των οθονών αφής στη διδασκαλία και μάθηση των μαθητών. Τέτοια αποτελέσματα προτείνουν συγκεκριμένες εισηγήσεις σχετικά με τον τρόπο αξιοποίησής τους, στην προσχολική ηλικία.

Η μεθοδολογική συνεισφορά της παρούσας εργασίας στο πεδίο της μαθηματικής παιδείας, προκύπτει από την εφαρμογή της εμπειρικά θεμελιωμένης θεωρίας, ως της βασικής μεθόδου ανάλυσης των δεδομένων της έρευνας. Συγκεκριμένα, στο πεδίο της μαθηματικής παιδείας, δεν εντοπίζονται έρευνες οι οποίες να παρουσιάζουν θεωρίες που να θεμελιώνονται σε εμπειρικά δεδομένα τα οποία έχουν συλλεχθεί και αναλυθεί με συστηματικό τρόπο. Μέσω της παρούσας εργασίας και της λεπτομερούς περιγραφής των σταδίων ανάλυσης που ακολουθήθηκαν (ανοιχτή κωδικοποίηση, αξονική κωδικοποίηση, επιλεκτική κωδικοποίηση), ενισχύεται το πεδίο της μαθηματικής παιδείας όσον αφορά τον



τρόπο εφαρμογής ποιοτικών μεθόδων ανάλυσης δεδομένων όπως η εμπειρικά θεμελιωμένη θεωρία.

Από πρακτικής άποψης, η παρούσα έρευνα μπορεί να προσφέρει στον εκπαιδευτικό σημαντικές πληροφορίες όσον αφορά τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται και διαπλέκονται οι διαστάσεις που καθορίζουν τη μαθηματική ικανότητα μαθητών προδημοτικής. Μέσα από τις πληροφορίες που παρέχει το προτεινόμενο μοντέλο, ο εκπαιδευτικός θα είναι σε θέση να αναγνωρίσει και να αξιολογήσει την επίδοση αλλά και το επίπεδο των μαθητών του και κατά συνέπεια να τους παρέχει εξατομικευμένη βοήθεια που θα στηρίζεται στις προσωπικές τους ανάγκες. Ακόμη, μέσα από τη διεξαγωγή των παρεμβατικών διδασκαλιών, θα προταθούν αποτελεσματικές πρακτικές ενίσχυσης και βελτίωσης της επίδοσης και των διαδικασιών μαθηματικού συλλογισμού μαθητών προδημοτικής με ενσωμάτωση των οθονών αφής καθώς και εισηγήσεις όσον αφορά στον τρόπο διεξαγωγής διδασκαλιών διερευνητικής μάθησης στην προδημοτική με χρήση των οθονών αφής. Δηλαδή θα προταθούν συγκεκριμένες πρακτικές εισηγήσεις, έργα αξιολόγησης καθώς και ενδεικτικά πρακτικά μαθήματα όσον αφορά τη διεξαγωγή διδασκαλιών διερευνητικής μάθησης με χρήση οθονών αφής τις οποίες και θα μπορεί να υιοθετήσει ο εκπαιδευτικός για να ενισχύσει αλλά και να βελτιώσει την επίδοση των μαθητών του.

### **Πρωτοτυπία της έρευνας**

Δύο είναι οι καινοτομίες της παρούσας εργασίας:

(α) Πρώτη καινοτομία της εργασίας αποτελεί η περιγραφή ενός μοντέλου το οποίο προκύπτει μέσα από την εφαρμογή της εμπειρικά θεμελιωμένης θεωρίας και παρουσιάζει την ικανότητα των μαθητών προδημοτικής σε έργα που σχετίζονται με τους Αριθμούς και τα Μοτίβα διασυνδέοντας τις διαστάσεις που συνθέτουν την ικανότητα αυτή.

Επιπρόσθετα, η καινοτομία της παρούσας έρευνας βασίζεται και στην εφαρμογή της εμπειρικά θεμελιωμένης θεωρίας ως της βασικής μεθόδου ανάλυσης των δεδομένων.

(β) Δεύτερη καινοτομία της εργασίας αποτελεί ο σχεδιασμός και η εφαρμογή διαφορετικών περιβαλλόντων μάθησης που ενσωματώνουν τη χρήση οθονών αφής με στόχο την ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών προδημοτικής σε έργα που σχετίζονται με την έννοια των Αριθμών και τα Μοτίβα. Παράλληλα, πρωτοτυπία της εργασίας αποτελεί και η επιλογή των δύο διαφορετικών μορφών διερευνητικής μάθησης, δηλαδή του περιβάλλοντος υψηλού βαθμού καθοδηγούμενης διερεύνησης με χρήση οθονών αφής καθώς και του χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενης διερεύνησης με χρήση οθονών αφής.

## Περιορισμοί της Εργασίας

Η παρούσα εργασία έχει κάποιους περιορισμούς οι οποίοι και παρουσιάζονται πιο κάτω. Συγκεκριμένα, οι περιορισμοί αυτοί αφορούν (α) την επιλογή του δείγματος των μαθητών της έρευνας, (β) τη διαδικασία συλλογής δεδομένων και (γ) τη διεξαγωγή των παρεμβατικών προγραμμάτων.

Συγκεκριμένα, όσον αφορά την επιλογή των μαθητών της έρευνας, η επιλογή των μαθητών δεν έγινε με τη χρήση τυχαίων μεθόδων δειγματοληψίας αλλά αποτέλεσαν ένα ευκαιριακό δείγμα. Οι μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα επιλέγηκαν με βάση την ευκολία πρόσβασης της ερευνήτριας στο συγκεκριμένο σχολείο καθώς και με το ενδιαφέρον που επέδειξαν ώστε να συμμετάσχουν. Όσον αφορά τη διαδικασία συλλογής δεδομένων, λόγω του ότι οι μαθητές προδημοτικής δεν είναι σε θέση να επεξηγούν γραπτώς τον τρόπο σκέψης τους, αυτό έγινε από την ίδια την ερευνήτρια και αυτό αποτελεί έναν ακόμη περιορισμό της έρευνας. Επιπρόσθετα, ένας ακόμη περιορισμός που παρουσιάζεται όσον αφορά τη διαδικασία συλλογής δεδομένων αποτελεί και το γεγονός ότι δεν έγιναν διαχρονικές μετρήσεις. Τέλος, ο τελευταίος περιορισμός αφορά τη διεξαγωγή των παρεμβατικών διδασκαλιών. Η ίδια η ερευνήτρια ανέλαβε τη διδασκαλία των 2 περιβαλλόντων μάθησης. Αυτό έγινε ώστε να εξασφαλιστεί η εφαρμογή όλων των διδακτικών σχεδιασμών που σχεδιάστηκαν. Ωστόσο το γεγονός ότι η ερευνήτρια δεν είχε την εμπειρία της εφαρμογής των περιβαλλόντων μάθησης πριν τη διδασκαλία τους στις δύο πειραματικές ομάδες, όπως και το γεγονός ότι δεν υπήρχε η δυνατότητα πραγματοποίησης της διδασκαλίας της ομάδας ελέγχου από την ίδια την ερευνήτρια, αποτελεί έναν ακόμη από τους περιορισμούς της έρευνας. Κατά συνέπεια κάποιες διαφορές που ενδέχεται να παρουσιάσουν οι μαθητές που συμμετείχαν στις παρεμβατικές διδασκαλίες σε σχέση με τους μαθητές που συμμετείχαν στη συνήθη διδασκαλία, πιθανό να οφείλονται στον αυξημένο χρόνο διδασκαλίας των ομάδων παρέμβασης με τις υπό έμφαση έννοιες στους Αριθμούς και στα Μοτίβα και όχι αποκλειστικά στη διδακτική προσέγγιση που ακολουθήθηκε, δηλαδή τη διερευνητική μάθηση με χρήση οθονών αφής.

## Δομή της εργασίας

Στα κεφάλαια που ακολουθούν περιγράφεται αρχικά το θεωρητικό πλαίσιο στο οποίο στηρίχτηκε η παρούσα εργασία, η μεθοδολογία, τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα της έρευνας.

Αρχικά, στο θεωρητικό πλαίσιο, παρουσιάζονται ερευνητικά αποτελέσματα που αφορούν σε διαφορετικές διαστάσεις που περιγράφουν την μαθηματική ικανότητα των μικρότερων ηλικιακά μαθητών (κυρίως προδημοτικής) κατά την επίλυση μαθηματικών έργων και συγκεκριμένα έργων που προέρχονται από την περιοχή των Αριθμών και των Μοτίβων. Ακολούθως, παρουσιάζεται η βιβλιογραφία, οι θεωρίες και τα ερευνητικά αποτελέσματα σχετικά με την *Επεξεργασία, χρήση και κατασκευή αναπαραστάσεων* κατά την επίλυση έργων που εμπλέκουν την έννοια του Αριθμού και των Μοτίβων. Στη συνέχεια περιγράφονται ερευνητικά αποτελέσματα καθώς και μοντέλα που αφορούν στην *Επεξεργασία και χρήση των δεδομένων* κατά την επίλυση προβλημάτων που εμπλέκουν την έννοια του Αριθμού και των Μοτίβων. Παράλληλα, περιγράφονται ερευνητικά αποτελέσματα σχετικά με τις *Αιτιολογήσεις* των μαθητών κατά την επίλυση έργων που εμπλέκουν την έννοια του Αριθμού και των Μοτίβων καθώς και την *Ακρίβεια* στη χρήση ορολογίας των μαθητών προσχολικής ηλικίας σε έργα που σχετίζονται με τις έννοιες των Αριθμών και των Μοτίβων. Στη συνέχεια, η επισκόπηση της βιβλιογραφίας, εστιάζεται σε γενικές περιγραφές της σκέψης ή της μαθηματικής ικανότητας. Συγκεκριμένα, παρουσιάζονται βασικές θεωρίες καθώς και μοντέλα τα οποία διαδραματίζουν καθοριστικό ρόλο στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης σε μαθητές προσχολικής ηλικίας. Οι θεωρίες αυτές προέρχονται είτε από το πεδίο της γνωστικής ψυχολογίας είτε της μαθηματικής παιδείας. Τέλος, η επισκόπηση της βιβλιογραφίας, παρουσιάζει ερευνητικά αποτελέσματα τα οποία εστιάζουν στη συνεισφορά παρεμβατικών διδασκαλιών που (α) ενσωματώνουν τη χρήση της τεχνολογίας (όπως για παράδειγμα τη χρήση υπολογιστικών λογισμικών προγραμμάτων και οθονών αφής), (β) που εστιάζονται στη διερευνητική μάθηση και (γ) συνδυάζουν τη διερευνητική μορφή μάθησης με σύγχρονα τεχνολογικά εργαλεία.

Στο τρίτο κεφάλαιο, περιγράφεται η μεθοδολογία της έρευνας και συγκεκριμένα οι μαθητές της έρευνας, η διαδικασία διεξαγωγής της έρευνας, το εργαλείο μέτρησης της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών σε έργα Αριθμών και Μοτίβων, ο σχεδιασμός των παρεμβατικών διδασκαλιών, οι τεχνικές ανάλυσης των δεδομένων καθώς και η βαθμολόγηση των απαντήσεων των μαθητών στο εργαλείο.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, αρχικά γίνεται παρουσίαση των αποτελεσμάτων των ποιοτικών δεδομένων της έρευνας τα οποία αφορούν (α) στον έλεγχο για την ανάπτυξη ενός μοντέλου που θα περιγράφει την ικανότητα των μαθητών προδημοτικής σε έργα που σχετίζονται με Αριθμούς και Μοτίβα, (β) στον εντοπισμό ομάδων μαθητών ως προς την ικανότητά τους σε έργα που σχετίζονται με Αριθμούς και Μοτίβα καθώς και (γ) στην περιγραφή των χαρακτηριστικών των μαθητών που διαφέρουν ως προς την ικανότητά τους. Στη συνέχεια γίνεται παρουσίαση των αποτελεσμάτων των ποσοτικών δεδομένων της έρευνας τα οποία σχετίζονται με τη διεξαγωγή των παρεμβατικών διδασκαλιών.

Στο πέμπτο κεφάλαιο, γίνεται συζήτηση (α) του μοντέλου που περιγράφει τις συνιστώσες που απαρτίζουν την ικανότητα των μαθητών προδημοτικής σε έργα που σχετίζονται με Αριθμούς και Μοτίβα, (β) των διαστάσεων του συγκεκριμένου μοντέλου, (γ) των προφίλ/ομάδων μαθητών προσέγγισης και επεξεργασίας δεδομένων που προέκυψαν και (δ) των αποτελεσμάτων των παρεμβατικών διδασκαλιών σε συνδυασμό με υφιστάμενα ερευνητικά δεδομένα και θεωρίες.

Τέλος στο έκτο κεφάλαιο, παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της εργασίας σε σχέση με τις τρεις αλληλοσχετιζόμενες διαστάσεις της διδασκαλίας των μαθηματικών: το μαθηματικό περιεχόμενο, τους μαθητές και το δάσκαλο, εφαρμογές της εργασίας σε θεωρητικό, σε μεθοδολογικό και σε πρακτικό επίπεδο καθώς και εισηγήσεις για μελλοντικές έρευνες .

## **Εννοιολογικοί Ορισμοί Κυριότερων Εννοιών**

### **Αίσθηση της έννοιας του αριθμού – Αριθμητικές ικανότητες**

Η αίσθηση της έννοιας του αριθμού αναφέρεται στη βαθιά κατανόηση της έννοιας του αριθμού, στην αντίληψη των σχέσεων μεταξύ των αριθμών και στην ικανότητα χειρισμού προβλημάτων που εμπλέκουν αριθμούς στην καθημερινή ζωή (Yang, 2005). Για τους σκοπούς της παρούσας έρευνας η *αίσθηση της έννοιας του αριθμού* διακρίνεται σε τρεις συνιστώσες: διαδικασίες αρίθμησης, διαδικασίες για εύρεση σχέσεων και διαδικασίες που αφορούν σε πράξεις με αριθμούς (Purpura & Lonigan, 2013). Οι διαδικασίες αρίθμησης ορίζονται ως η ικανότητα των μαθητών να γνωρίζουν τους κανόνες και τις διαδικασίες της αριθμητικής ακολουθίας και να είναι σε θέση να αναγνωρίζουν ποσότητες με ευέλικτο τρόπο, ενώ οι διαδικασίες για εύρεση σχέσεων αναφέρονται στην κατανόηση του τρόπου

με τον οποίο δύο ή περισσότερα αντικείμενα (ή ομάδες αριθμών) συνδέονται ή σχετίζονται μεταξύ τους, όπως επίσης και η σχέση μεταξύ των αριθμών σε μία νοερή αριθμητική γραμμή. Τέλος, οι διαδικασίες που αφορούν σε πράξεις με αριθμούς, ορίζονται ως η κατανόηση του τρόπου με τον οποίο σύνολα δεδομένων συνθέτονται και αναλύονται.

### **Ικανότητα των μαθητών στα Μοτίβα**

Σύμφωνα με την Papic και τους συνεργάτες της (2011) τα μοτίβα αποτελούν σχέσεις με μία μορφή κανονικότητας μεταξύ των στοιχείων τους. Κατά την προσχολική ηλικία τα μοτίβα περιλαμβάνουν τρεις βασικές μορφές (Papic et al., 2011): (α) σχήματα με χαρακτηριστικά κανονικότητας, (β) επαναλαμβανόμενες ακολουθίες και (γ) αναπτυσσόμενα μοτίβα. Τα επαναλαμβανόμενα μοτίβα έχουν μία κυκλική δομή η οποία μπορεί να γενικευτεί μέσα από συνεχή επανάληψη μίας μικρότερης μονάδας επανάληψης (Liljedahl, 2004). Τα αναπτυσσόμενα μοτίβα αποτελούνται από μία ακολουθία στοιχείων η οποία αυξάνεται (ή μειώνεται) με συστηματικό τρόπο (Papic et al., 2011). Ένα απλό παράδειγμα αναπτυσσόμενου μοτίβου είναι και η ακολουθία των άρτιων αριθμών 2, 4, 6... Για τους σκοπούς της παρούσας έρευνας, η *ικανότητα των μαθητών στα Μοτίβα* περιλαμβάνει την έννοια του επαναλαμβανόμενου και αναπτυσσόμενου μοτίβου καθώς και την έννοια της αντιστοίχισης σε πίνακα τιμών.

### **Διερευνητική μάθηση (Inquiry based learning)**

Η διερευνητική μάθηση, ορίζεται ως η μάθηση κατά την οποία δεν προσφέρονται έτοιμες οι διαδικαστικές ή εννοιολογικές πληροφορίες στους μαθητές, αλλά δημιουργούνται οι ευκαιρίες ώστε οι μαθητές να τις ανακαλύπτουν όταν τους παρέχεται το κατάλληλο υλικό (Alfieri, Brooks, Aldrich, & Tenenbaum, 2011). Επίκεντρο της διερευνητικής μάθησης είναι ο ίδιος ο μαθητής, που καλείται να παρατηρήσει δεδομένα και να αναζητήσει λύσεις για την επίλυση προβλημάτων (Dorier & Maaß, 2014).

### **Υψηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση**

Σύμφωνα με τον Baroody και τους συνεργάτες του (2015), μία μορφή καθοδηγούμενης διερεύνησης είναι η υψηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση. Η συγκεκριμένη μορφή

διδασκαλίας, είναι καλά δομημένη και περιλαμβάνει συγκεκριμένες ερωτήσεις. Σε αυτή την περίπτωση παρόλο που το μοτίβο, η σχέση ή η στρατηγική δεν παρέχεται άμεσα ή δεν επεξηγείται ξεκάθαρα στον μαθητή (όπως στη συνήθη διδασκαλία), αυτού του είδους η διερευνητική μάθηση παρέχει νύξεις, εμπλέκει σημαντική μαθησιακή υποστήριξη η οποία συνεπάγεται αυξημένη καθοδήγηση των μαθητών από τους εκπαιδευτικούς μέσω επιπρόσθετων έργων ή μέσω της χρήσης διαβαθμισμένων ερωτημάτων.

### **Χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση**

Μία άλλη μορφή καθοδηγούμενης διερεύνησης σύμφωνα με τον Baroody και τους συνεργάτες του (2015), είναι η χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση.

Συγκεκριμένα, η χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση, παρέχει λιγότερη, έμμεση – υποβόσκουσα βοήθεια στον μαθητή. Στη συγκεκριμένη μορφή καθοδηγούμενης διερεύνησης οι μαθητές έρχονται εξ' αρχής με ανοικτούς προβληματισμούς χωρίς να παρέχεται οποιοδήποτε μορφή βοήθειας μέσω επιπρόσθετων έργων ή μέσω της χρήσης διαβαθμισμένων ερωτημάτων.

### **Συνήθης διδασκαλία**

Στην παρούσα έρευνα, η συνήθης διδασκαλία ορίζεται ως η διδασκαλία η οποία βασίστηκε στο νέο αναλυτικό πρόγραμμα των Μαθηματικών (Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού Κύπρου, 2010). Ο όρος συνήθης διδασκαλία χρησιμοποιείται υπό την έννοια ότι μια τέτοια διδασκαλία αναμένεται να συναντήσει κανείς τη δεδομένη χρονική στιγμή σε μία τυπική προδημοτική τάξη στην Κύπρο, μιας και σε αυτού του είδους διδασκαλία δεν εμπλέκεται η ενεργητική εμπλοκή των μαθητών με την τεχνολογία και ο σχεδιασμός και η εφαρμογή της δε στηρίζεται στις αρχές της διερευνητικής μάθησης. Οι έννοιες που διδάχτηκαν οι μαθητές που συμμετείχαν στις συγκεκριμένες διδασκαλίες προέρχονται από την ενότητα περιεχομένου των Αριθμών και την ενότητα περιεχομένου της Άλγεβρας – Μοτίβων και είναι ίδιες με αυτές που διδάχτηκαν οι μαθητές των δύο μορφών διερευνητικής μάθησης. Οι συνήθεις διδασκαλίες, είναι σχεδιασμένες με τρόπο που επιτρέπουν την ατομική εργασία αλλά και την εργασία σε ζευγάρια, ενώ ο μεγαλύτερος χρόνος του μαθήματος περιλαμβάνει συζητήσεις στην ολομέλεια.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ Π

### ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Αρχικά στην *Επισκόπηση της βιβλιογραφίας* παρουσιάζονται ερευνητικά αποτελέσματα που περιγράφουν συγκεκριμένες διαστάσεις της ικανότητας μικρότερων ηλικιακά μαθητών (κυρίως προσχολικής ηλικίας) κατά την επίλυση μαθηματικών έργων και συγκεκριμένα έργων που προέρχονται από την περιοχή των Αριθμών και των Μοτίβων. Συγκεκριμένα, γίνεται παρουσίαση της βιβλιογραφίας που σχετίζεται με τις *Μαθηματικές διαδικασίες και στρατηγικές* που υιοθετούν παιδιά προσχολικής ηλικίας κατά την ενασχόλησή τους με έργα που εμπλέκουν την έννοια του Αριθμού και των Μοτίβων. Ακολούθως, γίνεται αναφορά σε ερευνητικά δεδομένα που σχετίζονται με την *Επεξεργασία και κατασκευή αναπαραστάσεων*, ενώ στη συνέχεια, παρουσιάζεται η βιβλιογραφία που σχετίζεται με την *Επεξεργασία και χρήση των δεδομένων* κατά την επίλυση προβλημάτων. Η επόμενη διάσταση στην οποία αναφέρεται η βιβλιογραφική επισκόπηση, αφορά στις *Αιτιολογήσεις* που υιοθετούν οι μαθητές κατά την επίλυση μαθηματικών έργων, ενώ η τελευταία διάσταση για την οποία παρουσιάζονται ερευνητικά αποτελέσματα, αφορά στην *Ικανότητα έκφρασης με ακρίβεια στην ορολογία*. Στη συνέχεια, η επισκόπηση της βιβλιογραφίας, εστιάζεται σε γενικές περιγραφές της σκέψης ή της μαθηματικής ικανότητας. Στο συγκεκριμένο μέρος, παρουσιάζονται βασικές θεωρίες καθώς και μοντέλα τα οποία διαδραματίζουν καθοριστικό ρόλο στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης σε μαθητές προσχολικής ηλικίας. Οι θεωρίες αυτές προέρχονται είτε από το πεδίο της γνωστικής ψυχολογίας είτε της μαθηματικής παιδείας. Πιο συγκεκριμένα από το πεδίο της γνωστικής ψυχολογίας γίνεται αναφορά στη θεωρία του Piaget (1936), στη θεωρία του Vygotsky (1978) καθώς και στην ταξινόμια SOLO (Biggs & Collis, 1982). Αντίστοιχα, από το πεδίο της μαθηματικής παιδείας γίνεται αναφορά στη θεωρία της Resnick (1992) η οποία αναφέρεται στην εξέλιξη της σκέψης από μία συγκεκριμένη μορφή σε πιο αφηρημένη, καθώς και στη θεωρία της Mulligan και των συνεργατών της (2004) που εστιάζουν στον τρόπο με τον οποίο παιδιά μικρών ηλικιών αναπτύσσουν την έννοια της δομής.

Τέλος, η επισκόπηση της βιβλιογραφίας ολοκληρώνεται με μία σύντομη περιγραφή της εξέλιξης της χρήσης σύγχρονων τεχνολογικών εργαλείων στη διδασκαλία μαθητών μικρών ηλικιών, ενώ στη συνέχεια παρουσιάζονται ερευνητικά αποτελέσματα που σχετίζονται με τη διερευνητική μορφή διδασκαλίας καθώς και τη συνεισφορά της

συγκεκριμένης μορφής όταν συνδυάζεται με σύγχρονα τεχνολογικά εργαλεία. Αξίζει να σημειωθεί ότι στο θεωρητικό πλαίσιο, παρουσιάζονται και αξιοποιούνται ερευνητικά αποτελέσματα που αφορούν κυρίως σε μαθητές προσχολικής ηλικίας ενώ σε άλλες περιπτώσεις αφορούν σε μαθητές δημοτικού, κυρίως των πρώτων τάξεων και σε ελάχιστες περιπτώσεις σε μεγαλύτερο ηλικιακά δείγμα. Αυτό συμβαίνει, λόγω της περιορισμένης βιβλιογραφίας σε μερικά θέματα στο νηπιαγωγείο και στην προδημοτική. Τα ερευνητικά δεδομένα που υπάρχουν σχετικά με το θέμα της παρούσας εργασίας και προέρχονται από έρευνες στις οποίες συμμετείχαν μαθητές των πρώτων τάξεων του δημοτικού αλλά και μεγαλύτερο ηλικιακά δείγμα, μπορούν να αποτελέσουν το έναυσμα για διερεύνηση αυτών των θεμάτων και στην προδημοτική.



## Μαθηματική ικανότητα των μαθητών προσχολικής ηλικίας

Η εξέταση της μαθηματικής ικανότητας και η ανάπτυξή της, δεν περιορίζεται μόνο στην επιτυχία ή αποτυχία σε συγκεκριμένες μαθηματικές περιοχές όπως οι Αριθμοί, η Άλγεβρα, η Γεωμετρία. Οι διαφορετικές απόψεις για τη μαθηματική ανάπτυξη, συγκλίνουν στην ιδέα ότι οι μαθητές χρειάζεται να αναπτύξουν ένα τρόπο σκέψης ο οποίος εμπλέκει συνήθειες, νοητικές ρουτίνες (mental routines) και μορφές υψηλού επιπέδου επεξεργασίας (Tzekaki, 2014). Η Tzekaki (2014) συνδυάζοντας διαφορετικές προσεγγίσεις, περιγράφει την μαθηματική δραστηριότητα, ως ένα σύνολο μαθηματικών ενεργειών (mathematical actions) τις οποίες συνοψίζει στην ακόλουθη (ημιτελή) λίστα: αναζήτηση για ιδιότητες και συσχετίσεις, αναγνώριση μοτίβων και δομών, ανάλυση και σύνθεση σε μέρη και μονάδες μερών, διασυνδέσεις, συνδέσεις με τη γλώσσα, αναπαραστάσεις, σημεία και σύμβολα, επεξηγήσεις/αιτιολογήσεις, αναστοχασμοί και γενικεύσεις... Η βιβλιογραφική ανασκόπηση που ακολουθεί για τις διαστάσεις της μαθηματικής ικανότητας, εμπλέκει και αναφέρεται στις μαθηματικές ενέργειες που προαναφέρθηκαν. Στο πρώτο μέρος που αφορά στις μαθηματικές διαδικασίες, γίνεται αναφορά τόσο σε διαδικασίες που εφαρμόζονται σε συγκεκριμένο μαθηματικό περιεχόμενο (Αριθμούς και Μοτίβα), αλλά και σε διαδικασίες που εφαρμόζονται και σχετίζονται με τις μαθηματικές ενέργειες που προαναφέρθηκαν όπως η γενίκευση, η αιτιολόγηση, η χρήση της γλώσσας για ύπαρξη ακρίβειας στην ορολογία, η επεξεργασία και χρήση αναπαραστάσεων, η επίλυση προβλήματος με έμφαση στην επεξεργασία δεδομένων, η ανάλυση και σύνθεση κλπ. Επιπρόσθετα, στο δεύτερο μέρος της βιβλιογραφικής ανασκόπησης που αφορά σε θεωρίες από τη γνωστική ψυχολογία και τη μαθηματική παιδεία, δίνεται έμφαση σε θεωρίες για τον εντοπισμό της δομής (Mulligan et al., 2004) την εξέλιξη από τη συγκεκριμένη σκέψη σε γενικεύσεις (Resnick, 1992) και την ικανότητα εντοπισμού της δομής και συσχετίσεων (Piggs & Collins, 1982), οι οποίες παραπέμπουν στις μαθηματικές ενέργειες που προαναφέρθηκαν. Οι μαθηματικές ενέργειες που αναφέρει η Tzekaki (2014) αρχίζουν από αυθεντικές ερωτήσεις, προβλήματα, άγνωστες καταστάσεις, παιχνίδια και εμπλέκουν διατύπωση υποθέσεων, επίλυση προβλήματος, μοντελοποίηση, χρήση πηγών και εργαλείων, αιτιολόγηση και μεταγνωστικές διαδικασίες. Αυτές οι συνθήκες, σε συνδυασμό με τη διερευνητική μάθηση και τη χρήση τεχνολογίας και οθονών αφής, που περιγράφονται στο τρίτο μέρος της βιβλιογραφικής ανασκόπησης, δημιουργούν τις προϋποθέσεις, για το σχεδιασμό κατάλληλων διδακτικών παρεμβάσεων για την ανάπτυξη της μαθηματικής ικανότητας μαθητών αλλά και συγκεκριμένα μαθητών προσχολικής ηλικίας και τη βελτίωση της μάθησής τους.

## **Μαθηματικές διαδικασίες και στρατηγικές μαθητών προδημοτικής κατά την επίλυση έργων που εμπλέκουν την έννοια του Αριθμού και των Μοτίβων**

Για περισσότερα από 25 χρόνια οι ερευνητές έχουν συγκεντρώσει ένα μεγάλο αριθμό ερευνητικών αποτελεσμάτων που δείχνουν ότι τα μικρά παιδιά είναι σε θέση να αναπτύξουν σημαντικές μορφές μαθηματικών ικανοτήτων (Baroody et al., 2006; Ginsburg, 2006). Διαχρονικές μελέτες (Jordan, Glutting, & Ramineni, 2009; Jordan, Glutting, Ramineni, & Watkins, 2010; Jordan, Kaplan, Ramineni, & Locuniak, 2008; Locuniak & Jordan, 2008) έχουν εντοπίσει ένα αριθμό αλληλοσυνδεδεμένων ικανοτήτων που σχετίζονται σημαντικά με την μετέπειτα ακαδημαϊκή επιτυχία των μαθητών στα Μαθηματικά. Πολλά από τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην ενότητα περιεχομένου των Αριθμών και της Άλγεβρας, προκύπτουν κατά τη διάρκεια ανάπτυξης της αίσθησης του αριθμού και του αλγεβρικού συλλογισμού ή λόγω ανεπαρκούς ανάπτυξης τους κατά τη διάρκεια της προσχολικής ηλικίας. Σύμφωνα με τους Mulligan, Cavanagh και Keanan-Brown (2012) η διδασκαλία εννοιών που σχετίζονται με τους Αριθμούς καθώς και η διδασκαλία εννοιών που σχετίζονται με την Άλγεβρα θα πρέπει να διδάσκονται παράλληλα από την προσχολική ηλικία με τρόπο που η μια περιοχή να υποστηρίζει την άλλη καθώς, όπως έχει διαφανεί, η αλγεβρική σκέψη αναπτύσσεται παράλληλα με την αίσθηση του αριθμού από πολύ νωρίς. Η παράλληλη ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης όσο και της αίσθησης του αριθμού μπορεί να συμβάλει σε καλύτερη κατανόηση του αριθμητικού μας συστήματος αλλά και να αποτελέσει μια ισχυρή βάση πάνω στην οποία να στηριχθεί η επίσημη αλγεβρική σκέψη τα μετέπειτα χρόνια (Mulligan et al., 2012).

Οι Αριθμοί και οι Πράξεις, αποτελούν τη σημαντικότερη περιοχή της μάθησης των μαθηματικών στην προσχολική ηλικία (Clements & Sarama, 2007). Η κατανόηση των Αριθμών και η ύπαρξη μίας σταθερής βάσης κατανόησης της έννοια του Αριθμού, αποτελούν βασικό στοιχείο και για άλλες ενότητες περιεχομένου του αναλυτικού προγράμματος. Το ενδιαφέρον των ερευνητών για την εξέταση της ανάπτυξης της αίσθησης του αριθμού από την προσχολική ηλικία, φαίνεται από την πληθώρα των ερευνών που καταπιάνονται με το συγκεκριμένο θέμα. Ωστόσο, αρκετοί ερευνητές (π.χ. Carraher & Schliemann, 2007; Clements & Sarama, 2007) που ασχολούνται με τη γνωστική ανάπτυξη των μαθητών, πλέον έχουν στρέψει την προσοχή τους και στην πρώιμη ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης και του μαθηματικού συλλογισμού (Papic et al., 2011). Η σημαντικότητα της διδασκαλίας των Αριθμών και των μοτίβων από την προσχολική ηλικία, τονίζεται και από το Εθνικό Συμβούλιο Δασκάλων για τα Μαθηματικά

στην Αμερική (NCTM, 2000) το οποίο συμπεριλαμβάνει στις πέντε βασικές ενότητες περιεχομένου, οι οποίες θα πρέπει να διδάσκονται σε όλες τις ηλικιακές ομάδες, την ενότητα περιεχομένου των Αριθμών και την ενότητα περιεχομένου της Άλγεβρας - μοτίβων. Παράλληλα με τη διδασκαλία των ενοτήτων περιεχομένου, τονίζουν την ανάγκη ανάπτυξης πέντε βασικών διαδικασιών, οι οποίες θα πρέπει να αποτελούν απαραίτητα στοιχεία στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Οι διαδικασίες αυτές αναφέρονται στην επίλυση προβλήματος, στον συλλογισμό και την απόδειξη, στην επικοινωνία, στις συνδέσεις και στις αναπαραστάσεις. Σύμφωνα με τον Moomaw (2011), όλες οι διαδικασίες θα πρέπει να διδάσκονται στα σχολεία με στόχο την ανάπτυξη του μαθηματικού περιεχομένου. Τόσο οι διαδικασίες όσο και το μαθηματικό περιεχόμενο θεωρούνται εξίσου σημαντικά. Οι προαναφερθείσες διαδικασίες αντικατοπτρίζονται και στο έγγραφο των Common Core Standards State (2010) στο οποίο περιγράφονται οι μαθηματικές πρακτικές οι οποίες αποτελούν ικανότητες που οι εκπαιδευτικοί σε όλες τις βαθμίδες πρέπει να επιδιώξουν να αναπτύξουν οι μαθητές τους. Αυτές οι μαθηματικές πρακτικές αναφέρονται σε σημαντικές «διαδικασίες και ικανότητες» με διαχρονική σημασία στην μαθηματική εκπαίδευση. Συγκεκριμένα, περιγράφονται οι ακόλουθες οχτώ μαθηματικές πρακτικές: κατανόηση μέσω προβλήματος και επιμονή στη λύση προβλήματος, ποσοτική και αφηρημένη σκέψη, ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων, μοντελοποίηση, στρατηγική χρήση εργαλείων, ακρίβεια, δομή των μαθηματικών και κανονικότητα σε επαναλαμβανόμενο συλλογισμό.

Προτού γίνει παρουσίαση των μαθηματικών διαδικασιών και πιο συγκεκριμένα των διαδικασιών που σχετίζονται με την έννοια των Αριθμών και των διαδικασιών που σχετίζονται με την έννοια των Μοτίβων, κρίνεται απαραίτητη μία σύντομη ανασκόπηση της βιβλιογραφίας για τον όρο «αίσθηση του αριθμού» καθώς και για την έννοια του μοτίβου. Όπως έχει διαπιστωθεί από τους Gersten, Jordan και Flojo (2005) η αίσθηση του αριθμού αποτελεί ένα περίπλοκο σύστημα δεξιοτήτων το οποίο δεν ορίζεται με τον ίδιο τρόπο από τους ερευνητές με αποτέλεσμα να δημιουργούνται προβλήματα όσον αφορά τη διδασκαλία του συγκεκριμένου θέματος (Griffin, 2004). Ένας ορισμός ο οποίος φαίνεται να είναι ευρέως αποδεκτός στο πεδίο της μαθηματικής παιδείας, αναφέρεται στη βαθιά κατανόηση της έννοιας του αριθμού, στην αντίληψη των σχέσεων μεταξύ των αριθμών και στην ικανότητα χειρισμού προβλημάτων που εμπλέκουν αριθμούς στην καθημερινή ζωή (Yang, 2005). Οι διαδικασίες αίσθησης της έννοιας του αριθμού που καλούνται να αναπτύξουν οι μαθητές μικρών ηλικιών, δεν περιορίζονται σε απλή μάθηση των αριθμών και πράξεων, αλλά περιλαμβάνουν διαφορετικές μορφές γνώσεων ικανοτήτων και τρόπων

σκέψης όπως για παράδειγμα την κατανόηση των αριθμών και τον τρόπο αναπαράστασής τους, την αντίληψη των μαθηματικών σχέσεων, την επίλυση προβλημάτων και τους νοερούς υπολογισμούς (Τζεκάκη, 2007). Επιπρόσθετα, μέσα από μετανάλυση 40 σχετικών ερευνητικών μελετών, οι Politylo, White και Marcotte (2011) έχουν εντοπίσει περίπου τριάντα στοιχεία τα οποία έχουν χαρακτηριστεί ως συνιστώσες της ικανότητας αίσθησης του αριθμού. Μεταξύ των στοιχείων αυτών φαίνεται να περιλαμβάνονται δεξιότητες όπως η σύγκριση ποσοτήτων, η εκτίμηση, η αρίθμηση, η εκτέλεση απλών υπολογισμών, η αναγνώριση του αριθμού καθώς και η γενική κατανόηση των αριθμών (Politylo et al., 2011). Ακόμη μία προσπάθεια περιγραφής της αίσθησης της έννοιας του αριθμού εντοπίζεται από τους Pittalis, Pitta-Pantazi και Christou (2013) που επιβεβαίωσαν εμπειρικά ένα θεωρητικό μοντέλο σύμφωνα με το οποίο, η αίσθηση της έννοιας του αριθμού, αποτελεί σύνθεση βασικών αριθμητικών δεξιοτήτων του τυπικού αριθμητικού συλλογισμού και του αλγεβρικού αριθμητικού συλλογισμού (Pittalis et al., 2013). Μεταξύ των βασικών αριθμητικών δεξιοτήτων, συμπεριλαμβάνονται βασικές αριθμητικές ικανότητες όπως έχουν διατυπωθεί από την Jordan και τους συνεργάτες της (2006) όπως για παράδειγμα η ικανότητα αρίθμησης, η ικανότητα αναγνώρισης, σύγκρισης και γνώσης του αριθμού, η απαρίθμηση αντικειμένων, οι μη λεκτικοί υπολογισμοί και η ικανότητα εκτίμησης. Αντίστοιχα, ο τυπικός αριθμητικός συλλογισμός περιλαμβάνει ικανότητες όπως η εκτέλεση υπολογισμών, η επίλυση αριθμητικών προβλημάτων καθώς και η κατανόηση της έννοιας των πράξεων. Τέλος η νέα συνιστώσα που φαίνεται να προστίθεται στο μοντέλο της αίσθησης του αριθμού αναφέρεται στην κατανόηση της αλγεβρικής διάστασης της αριθμητικής. Σε αυτή την συνιστώσα περιλαμβάνονται ικανότητες όπως η εύρεση αριθμητικών μοτίβων, η κατανόηση συναρτήσεων καθώς και η επίλυση αριθμητικών εξισώσεων μέσα από διαφορετικές μορφές.

Η ανάδειξη της αλγεβρικής διάστασης της αριθμητικής που προαναφέρθηκε, τονίζει όπως και τα αποτελέσματα άλλων ερευνητικών εργασιών το ενδιαφέρον και την ανάγκη ανάπτυξης της αλγεβρικής σκέψης στην προσχολική ηλικία (Papic, Mulligan, & Mitchelmore, 2009; Tzekaki & Ikonomidou, 2009). Για το σκοπό αυτό, τα νέα αναλυτικά προγράμματα άλλων χωρών για τους μικρότερους μαθητές (Mulligan & Mitchelmore, 2009; Warren & Cooper, 2005) όπως και το νέο αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών της Κύπρου για την προσχολική ηλικία, συμπεριλαμβάνουν στην ενότητα περιεχομένου της Άλγεβρας, την ενασχόληση με δραστηριότητες μοτίβων. Σύμφωνα με τους Mulligan και Mitchelmore (2009) τα μοτίβα αποτελούν κάποιες προβλεπόμενες κανονικότητες οι οποίες περιλαμβάνουν συνήθως αριθμητικές, χωρικές ή λογικές σχέσεις, ενώ σύμφωνα με

την Papic και τους συνεργάτες της (2011) ο όρος μοτίβο αναφέρεται σε οποιαδήποτε αναπαραγόμενη κανονικότητα. Οι Τζεκάκη και Κούλελη (2007), ορίζουν το μοτίβο ως ένα σύνολο από μορφικά, γεωμετρικά ή μετρικά χαρακτηριστικά τα οποία παραμένουν σταθερά μέσα σε ομάδες αριθμών, σχημάτων, μεγεθών ή άλλων μαθηματικών καταστάσεων (σελ. 269). Στη μαθηματική εκπαίδευση προτείνεται ως εύρεση μοτίβου η ανακάλυψη ηχητικών, οπτικών και κινητικών κανονικοτήτων που μπορούν να επαναλαμβάνονται, να μεγαλώνουν ή γενικότερα να σχετίζονται μεταξύ τους με έναν κανόνα (Τζεκάκη, 2007, σ. 251). Ο van de Walle (2007) κατατάσσει τα μοτίβα σε δυο μεγάλες κατηγορίες αναφορικά με την εξέλιξή τους: τα επαναλαμβανόμενα και τα αναπτυσσόμενα μοτίβα. Οι Papic και Mulligan (2007) αναφέρουν ως δύο από τα τρία βασικά είδη μοτίβων τα επαναλαμβανόμενα και τα αναπτυσσόμενα μοτίβα.

Τα επαναλαμβανόμενα μοτίβα παρουσιάζουν μια κυκλική δομή, δηλαδή ο πυρήνας τους έχει ένα κεντρικό θέμα/επαναλαμβανόμενη μονάδα (π.χ. ΑΒΓ) και υποδεικνύεται η επιστροφή συνεχώς σε αυτήν (ΑΒΓ-ΑΒΓ-ΑΒΓ..) (Liljedahl, 2004). Αυτή η μικρή, επαναλαμβανόμενη μονάδα μπορεί να διαφέρει στον αριθμό και στην πολυπλοκότητα των στοιχείων που περιέχει ανάλογα με χαρακτηριστικά όπως το μέγεθος, το σχήμα, οι διαστάσεις, η κατεύθυνση. Τα επαναλαμβανόμενα μοτίβα, τα οποία περιλαμβάνουν οπτικό περιεχόμενο (π.χ. χρώμα/σχήμα) αποτελούν ένα φυσικό τρόπο με τον οποίο γίνεται η εισαγωγή της έννοιας του μοτίβου επειδή δεν προϋποθέτουν οποιαδήποτε επιπρόσθετη γνώση, όπως για παράδειγμα οι αριθμητικές πράξεις οι οποίες εμπλέκονται μετέπειτα στα αριθμητικά μοτίβα. Τα έργα επαναλαμβανόμενων μοτίβων ποικίλουν ως προς το βαθμό που απαιτούν νοερές αναπαραστάσεις και χειρισμό της επαναλαμβανόμενης μονάδας (Collins & Laski, 2015). Συγκεκριμένα, μερικά έργα απαιτούν από τα παιδιά να αντιγράψουν ή να επεκτείνουν ένα μοτίβο, ενώ άλλα να εντοπίσουν τη μονάδα επανάληψης και να μεταφράσουν την δομή του συγκεκριμένου μοτίβου χρησιμοποιώντας ένα νέο υλικό (Rittle-Johnson, McLean, McEldoon, & Fyfe, 2013; Warren & Cooper, 2007). Από την άλλη, τα έργα που απαιτούν τον εντοπισμό της μονάδας επανάληψης και μετάφραση με τη χρήση ενός άλλου υλικού, είναι πιο δύσκολα επειδή απαιτούν από τα παιδιά να χρησιμοποιούν στρατηγικές που βασίζονται στον εντοπισμό ομοιοτήτων καθώς και αφηρημένο χειρισμό της μονάδας επανάληψης (Rittle-Johnson et al., 2013; Warren & Cooper, 2006). Τα αναπτυσσόμενα μοτίβα αποτελούνται από μια αλληλουχία στοιχείων που αυξάνονται (ή μειώνονται) με συστηματικό τρόπο. Ένα απλό χαρακτηριστικό παράδειγμα σύμφωνα με την Papic και τους συνεργάτες της (2011) είναι η αλληλουχία των άρτιων αριθμών π.χ. 2, 4, 6... Στόχος δεν είναι μόνο η επέκτασή τους αλλά η

αναζήτηση γενικεύσεων ή αλγεβρικών σχέσεων που θα δίνουν τη δυνατότητα στους μαθητές να γνωρίζουν ποια τροπή θα παίρνει το αναπτυσσόμενο μοτίβο (αριθμητικό ή οπτικό) σε ένα οποιοδήποτε σημείο στην πορεία (Δεσλή & Γαϊτανέρη, 2017).

Στα επόμενα μέρη/υποενότητες αυτού του μέρους της βιβλιογραφικής ανασκόπησης, παρουσιάζονται ερευνητικά αποτελέσματα που αφορούν στις μαθηματικές διαδικασίες και συγκεκριμένα τις διαδικασίες που σχετίζονται με την έννοια του αριθμού και τις διαδικασίες που σχετίζονται με την έννοια του μοτίβου. Για σκοπούς παρουσίασης των διαδικασιών που εμπλέκονται στην αίσθηση της έννοιας του αριθμού, στην παρούσα εργασία αξιοποιήθηκε το μοντέλο των Purpura και Lonigan (2013). Συγκεκριμένα, οι Purpura και Lonigan (2013) έχουν εντοπίσει ότι οι πρώιμες αριθμητικές ικανότητες αποτελούν σύνθεση τριών παραγόντων: διαδικασίες αρίθμησης, διαδικασίες για εύρεση σχέσεων και διαδικασίες που αφορούν σε πράξεις με αριθμούς. Σύμφωνα με τους ίδιους, η διαδικασία αρίθμησης ορίζεται ως η ικανότητα των μαθητών να γνωρίζουν τους κανόνες και τις διαδικασίες της αριθμητικής ακολουθίας και να είναι σε θέση να αναγνωρίζουν ποσότητες με ευέλικτο τρόπο. Μεταξύ των ικανοτήτων αρίθμησης περιλαμβάνονται ικανότητες όπως η αρίθμηση, η αρίθμηση προς τα πάνω ή προς τα κάτω, η αντιστοιχία ένα προς ένα, η πληθικότητα, η απαρίθμηση χωρίς άμεση επαφή ή χειρισμό του συνόλου των αντικειμένων, η απαρίθμηση υποσυνόλων, η άμεση αναγνώριση και η εκτίμηση (Purpura & Lonigan, 2013). Παράλληλα, ο δεύτερος παράγοντας που έχουν εντοπίσει και ονομάσει ως διαδικασίες για εύρεση σχέσεων, ορίζεται ως η κατανόηση του τρόπου με τον οποίο δύο ή περισσότερα αντικείμενα (ή ομάδες αριθμών) συνδέονται ή σχετίζονται μεταξύ τους, όπως επίσης και η σχέση μεταξύ των αριθμών σε μία νοερή αριθμητική γραμμή. Οι ικανότητες οι οποίες περιλαμβάνονται στην συγκεκριμένη κατηγορία σχετίζονται με την έννοια της τακτικότητας, του σχετικού μεγέθους, της σύγκρισης αριθμών ή συνόλων, τη διάταξη των αριθμών (Purpura & Lonigan, 2013). Τέλος, οι διαδικασίες που αφορούν σε πράξεις με αριθμούς, ορίζονται ως η κατανόηση του τρόπου με τον οποίο σύνολα δεδομένων συνθέτονται και διαχωρίζονται. Συγκεκριμένες ικανότητες που περιλαμβάνονται σε αυτή την κατηγορία, αναφέρονται στις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης με αντικείμενα, στη σύνθεση και ανάλυση αριθμού, στα προβλήματα με δοσμένες ιστορίες, στην ισοδυναμία συνόλων και στο συνδυασμό αριθμών (Purpura & Lonigan, 2013). Μετά την παρουσίαση των διαδικασιών που σχετίζονται με την επίλυση έργων που εμπλέκουν την έννοια του Αριθμού, ακολουθεί βιβλιογραφική ανασκόπηση για τις διαδικασίες που σχετίζονται με την επίλυση έργων που αφορούν στην έννοια των μοτίβων.

## **Διαδικασίες αρίθμησης: Απαγγελία αριθμολέξεων, άμεση αναγνώριση, απαρίθμηση, εκτίμηση**

Ακολουθεί περιγραφή των διαστάσεων που σύμφωνα με τους Purpura και Lonigan (2013) αποτελούν τους παράγοντες που συνθέτουν τις διαδικασίες αρίθμησης. Οι συγκεκριμένες συνιστώσες αναφέρονται στην ικανότητα απαγγελίας αριθμολέξεων, την άμεση αναγνώριση, την απαρίθμηση και την εκτίμηση.

### ***Απαγγελία αριθμολέξεων***

Ο όρος *αρίθμηση ή καταμέτρηση* (counting) αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών να απαγγέλουν μία σειρά αριθμολέξεων με τρόπο που η κάθε μια από αυτές να συνδέεται με μία αριθμήσιμη μονάδα (Steffe & Cobb, 1988). Οι Καφούση και Σκουμπουρδή (2008) υποστηρίζουν ότι η αρίθμηση αποτελείται από τρεις συνιστώσες: (α) την ικανότητα απαγγελίας της ακολουθίας των αριθμολέξεων στη σωστή τους σειρά, (β) την ικανότητα κατασκευής ενός πλήθους μονάδων που θεωρούνται αριθμήσιμες και (γ) την ικανότητα συντονισμού των πιο πάνω δραστηριοτήτων με τρόπο που κάθε αριθμήσιμη μονάδα να αντιστοιχίζεται σε μία μόνο αριθμολέξη. Παράλληλα, όπως οι ίδιες υποστηρίζουν, η γνώση της σειράς των αριθμών δεν εμπεριέχει οποιαδήποτε αριθμητική σχέση. Οι μόνες σχέσεις που είναι σε θέση να κατασκευάσουν οι μαθητές, είναι οι σχέσεις «πριν», «μετά» και «ανάμεσα» και αφορούν μόνο τα στοιχεία της ακολουθίας των αριθμολέξεων (Καφούση & Σκουμπουρδή, 2008). Μέχρι την ηλικία των 2 ετών, συνήθως τα παιδιά μαθαίνουν τις πρώτες αριθμολέξεις (το «ένα» και το «δύο»), ενώ η εκμάθηση των υπολοίπων αριθμολέξεων σε συνδυασμό με την ικανότητα τους για άμεση αναγνώριση ποσοτήτων εμφανίζεται περίπου στην ηλικία των 2 έως 4 ετών όταν τα παιδιά αρχίζουν να απαριθμούν αντικείμενα (Καφούση & Σκουμπουρδή, 2008).

Σύμφωνα με το μοντέλο των Wright, Stanger, Stafford και Martland (2006), η μάθηση των αριθμολέξεων από το 1 έως το 100 σε ευθεία ή σε αντίστροφη σειρά, περιλαμβάνει πέντε επίπεδα ανάπτυξης. Στο *πρώτο επίπεδο*, τα παιδιά είναι σε θέση να απαγγέλουν τα ονόματα των αριθμών από το 1 έως το 20, ωστόσο ξεκινώντας πάντα την απαγγελία τους από τον αριθμό 1. Επιπρόσθετα, φαίνεται να μην είναι σε θέση να αναφέρουν ποιος αριθμός ακολουθεί μετά από ένα συγκεκριμένο, δοσμένο αριθμό. Η ακολουθία των αριθμών μπορεί να χαρακτηριστεί δηλαδή ως μία αδιάσπαστη αλυσίδα. Στο *δεύτερο επίπεδο*, τα παιδιά είναι σε θέση να εντοπίζουν την επόμενη μίας αριθμολέξης σε ακολουθία αριθμών από το 1 ως το 10 ξεκινώντας πάντα την απαγγελία τους από το 1. Για παράδειγμα, στην ερώτηση «ποιος αριθμός είναι μετά το 5» τα παιδιά απαντούν «1, 2,

3, 4, 5, 6». Στο  *τρίτο επίπεδο*, τα παιδιά μπορούν να βρουν αμέσως την επόμενη μιας αριθμολέξης σε ακολουθία αριθμών από το 1 ως το 10, χωρίς να υπάρχει η ανάγκη να ξεκινήσουν την απαγγελία από το 1, αλλά φαίνεται να αντιμετωπίζουν δυσκολίες μετά το 10. Σε αυτή την περίπτωση μπορεί να θεωρηθεί ότι οι μαθητές διατηρούν στο μυαλό τους μια εικόνα του τμήματος της ακολουθίας των αριθμών (Steffe, von Glasersfeld, Richards, Cobb, & Pet, 1983). Αντίστοιχα, το  *τέταρτο επίπεδο* αποτελεί μία εξέλιξη της προηγούμενης ικανότητας των μαθητών αφού στη διαδικασία συμπεριλαμβάνεται όλο το διάστημα των αριθμών από το 1 έως και το 30. Τέλος, το  *πέμπτο επίπεδο*, αναφέρεται στην ικανότητα των παιδιών να βρίσκουν την επόμενη μιας αριθμολέξης για ένα διάστημα αριθμών από το 1 έως και το 100.

Η εκμάθηση των αριθμολέξεων από το 1 μέχρι το 20 μπορεί να περιλαμβάνει απομνημόνευση, ωστόσο τα παιδιά είναι απαραίτητο να αναγνωρίσουν και να χρησιμοποιήσουν τα επαναλαμβανόμενα μοτίβα που εμφανίζονται μετά το 20 στην ακολουθία των αριθμών (Fosnot & Dolk, 2001; Fuson, 2012; Fuson, Richards, & Briars, 1982). Κατά συνέπεια, η γνώση των ονομάτων των αριθμών μέχρι το 100, σύμφωνα με τις Καφούση και Σκουμπουρδή (2008) περιλαμβάνει: (α) τη γνώση των μονοψήφιων αριθμών, (β) την κατανόηση ότι οι αλλαγές γίνονται μετά από το 9 (π.χ. μετά το 19 ή το 29 υπάρχει αλλαγή δεκάδας), (γ) τη γνώση των ονομάτων των δεκάδων και (δ) την αναγνώριση των κανόνων που ακολουθεί η προφορική ακολουθία των αριθμολέξεων (κάθε δεκάδα συνδυάζεται με τη σειρά των μονοψήφιων αριθμών).

### ***Άμεση αναγνώριση ποσοτήτων***

Πολλοί ερευνητές υποστηρίζουν ότι η ικανότητα για άμεση αναγνώριση ποσοτήτων (subitizing) αποτελεί ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά της αίσθησης της έννοιας του αριθμού (Burns, 2007; Penner-Wilger et al., 2007; Van de Walle, 2013), ενώ η σταδιακή ανάπτυξη της συγκεκριμένης ικανότητας, θεωρείται σημαντική για το χτίσιμο της γνώσης των πρώτων αριθμητικών εννοιών (Καφούση & Σκουμπουρδή, 2008). Σύμφωνα με τον Clements (1999) η άμεση αναγνώριση ποσοτήτων, αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών να αντιλαμβάνονται και να προσδιορίζουν άμεσα χωρίς απαρίθμηση, το πλήθος μικρών συλλογών αντικειμένων. Η άμεση αναγνώριση ποσοτήτων, αποτελεί μία βασική ικανότητα στην οποία μπορούν να βασιστούν οι μαθητές ώστε να αναγνωρίζουν μεγαλύτερες ομάδες αντικειμένων σε συγκεκριμένες διατάξεις (Clements, 1999).

Οι μαθητές είναι σε θέση να αναγνωρίζουν μικρές συλλογές αντικειμένων και να τις συνδέουν με τις αντίστοιχες αριθμολέξεις στις ηλικίες των δύο έως τεσσάρων ετών



(Baroody, 2004). Για παράδειγμα, παιδιά ηλικίας δύο ετών, είναι σε θέση να απαντήσουν άμεσα ότι κρατούν 2 σοκολάτες (μία σε κάθε χέρι) χωρίς να απαιτείται η μέτρηση όλων των αντικειμένων. Αντίστοιχα, μαθητές ηλικίας πέντε ετών, μπορούν με άμεση αναγνώριση, να υπολογίσουν ότι μπροστά τους έχουν 5 μαρκαδόρους.

Η άμεση αναγνώριση ποσοτήτων, όπως υποστηρίζεται από ερευνητικά δεδομένα, εμπεριέχει την κατανόηση της έννοιας του αριθμού και είναι απαραίτητη για την αρίθμηση (Antell & Keating, 1983; Starkey & Cooper, 1980). Συγκεκριμένα, οι αριθμολέξεις μαθαίνονται μέσω της απαρίθμησης και το νόημα τους εξασφαλίζεται μέσω της αντιστοίχισης τους με τα μη λεκτικά μεγέθη. Αντίθετα, άλλες έρευνες υποστηρίζουν ότι η άμεση αναγνώριση αποτελεί μία γρήγορη μορφή απαρίθμησης (Clements 1999). Σύμφωνα με τη συγκεκριμένη υπόθεση η ικανότητα των βρεφών να διακρίνουν μικρές συλλογές αντικείμενων μάλλον στηρίζεται σε αντιληπτικά ή χωρο-χρονικά δεδομένα και δεν συνδέεται με συνειδητή γνώση της πληθικότητας (Huttenlocher, Jordan & Levine, 1994). Πρόσφατες έρευνες δείχνουν ότι η δεύτερη υπόθεση είναι πιο ισχυρή.

Σύμφωνα με τον Clements (1999) υπάρχουν δύο είδη άμεσης αναγνώρισης: (α) αντιληπτική άμεση αναγνώριση (perceptual subitize) και (β) εννοιολογική άμεση αναγνώριση (conceptual subitize). Πιο συγκεκριμένα η *αντιληπτική άμεση αναγνώριση* περιλαμβάνει την αναγνώριση ενός αριθμού αντικειμένων, χωρίς ωστόσο να γίνεται χρήση οποιασδήποτε άλλης μαθηματικής διαδικασίας. Αντίθετα τα άτομα που έχουν την ικανότητα να χρησιμοποιούν εννοιολογική άμεση αναγνώριση είναι σε θέση να βλέπουν τους αριθμούς ως μονάδες αλλά και ως μονάδες άλλων ομάδων (Steffe & Cobb, 1988).

Ένας από τους παράγοντες που φαίνεται να επηρεάζει την ικανότητα των μαθητών για άμεση αναγνώριση είναι η χωρική οργάνωση των αντικειμένων. Ορθογώνιες διατάξεις αντικειμένων φαίνεται να διευκολύνουν τους μαθητές, ακολουθούμενες από τις γραμμικές, κυκλικές διατάξεις, καθώς και οργανώσεις που δεν ακολουθούν συγκεκριμένη δομή (Beckwith & Restle, 1966; Wang, Resnick, & Boozer, 1971). Επιπρόσθετα συγκεκριμένες οργανώσεις είναι πιο εύκολες για κάποιους αριθμούς. Όσον αφορά μεγαλύτερους αριθμούς, οι γραμμικές οργανώσεις αντικειμένων φαίνεται να είναι ευκολότερες σε σχέση με τις ορθογώνιες. Σε αυτή την περίπτωση οι μαθητές προσχολικής ηλικίας δεν είναι σε θέση να χρησιμοποιούν εννοιολογική άμεση αναγνώριση των αντικειμένων. Αντί αυτού, απαριθμούν ένα-ένα τα αντικείμενα (Clements, 1999). Κατά την έναρξη του σχολείου οι μαθητές αρχίζουν να εφαρμόζουν εννοιολογική άμεση αναγνώριση. Ωστόσο οι μαθητές Α' δημοτικού περιορίζονται στην άμεση αναγνώριση τεσσάρων ή πέντε αντικειμένων που βρίσκονται σε μη οργανωμένη διαρρύθμιση. Η ικανότητα για άμεση αναγνώριση

ποσοτήτων μπορεί να αναπτυχθεί στους μαθητές μέσω επαναλαμβανόμενων παιχνιδιών στην τάξη (Penner – Wilger et al., 2007).

### *Απαρίθμηση*

Για να είναι σε θέση να περιγράψουν και να αιτιολογήσουν μεγαλύτερες ποσότητες αντικειμένων οι μαθητές θα πρέπει να είναι σε θέση να αναπτύξουν και να βελτιώσουν την κατανόηση της έννοιας του αριθμού, χρησιμοποιώντας διαδικασίες που βασίζονται σε αφηρημένες αναπαραστάσεις παρά στην αντίληψη. Σύμφωνα με τους Steffe και Cobb (1988) η απαρίθμηση (enumeration) είναι η διαδικασία η οποία επιτρέπει στους μαθητές να καθορίζουν την ποσότητα οποιουδήποτε συνόλου και περιλαμβάνει την απαγγελία μίας σειράς αριθμολέξεων, ώστε κάθε αριθμολέξη να συνδέεται με μία αριθμητική μονάδα. Κατά τη διαδικασία απαρίθμησης, οι μαθητές συνήθως μετακινούν τα αντικείμενα (όταν αυτά είναι πραγματικά) ή τα δείχνουν (όταν αυτά είναι πραγματικά ή σε εικόνες). Η ικανότητα για απαρίθμηση ορατών αντικειμένων αρχίζει να αναπτύσσεται στα παιδιά από την ηλικία των 3,5 ετών μέχρι την ηλικία των 4 ετών (Καφούση & Σκουμπουρδή, 2008).

Τα περισσότερα παιδιά αναπτύσσουν τρεις βασικές αρχές αρίθμησης πριν ακόμη μπου στο νηπιαγωγείο (Gelman & Gallistel, 1978): (α) την αρχή της αντιστοιχίας ένα προς ένα, (β) την αρχή της σταθερής σειράς και (γ) την αρχή της πληθικότητας.

Η αρχή της αντιστοιχίας αναφέρεται στην ικανότητα των παιδιών να αποδίδουν μία και μοναδική τιμή σε κάθε αντικείμενο, ενώ η αρχή της σταθερής σειράς, αναφέρεται στην ικανότητα των μικρών παιδιών να αποδίδουν τους αριθμούς πάντα με την ίδια σειρά.

Αντίστοιχα, η αρχή της πληθικότητας αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίζουν και να αντιλαμβάνονται ότι ο τελευταίος αριθμός που ακούγεται, ορίζει και το πλήθος του συνόλου.

Για να μπορέσουν οι μαθητές να κατανοήσουν πλήρως την έννοια της πληθικότητας και να αντιληφθούν τους αριθμούς ως μέρη και ολόκληρες, θα πρέπει να κατακτήσουν δύο βασικές έννοιες: (α) τη *διατήρηση του αριθμού* και (β) την *ιεραρχική συμπερίληψη* (Fuson, 2012). Όσον αφορά στη *διατήρηση του αριθμού*, σύμφωνα με την πιαζετιανή θεωρία της γνωστικής ανάπτυξης, τα παιδιά δεν έχουν ολοκληρωμένη κατανόηση της έννοιας της απαρίθμησης ως ένα μέσο υπόδειξης της πληθικότητας μέχρι να καταφέρουν να επιτύχουν σε έργα διατήρησης του αριθμού (Piaget & Szeminska, 1952), όπου κατανοούν ότι ένα σύνολο αντικειμένων παραμένει το ίδιο ανεξάρτητα από την φυσική διάταξη των συγκεκριμένων αντικειμένων στο χώρο. Αντίστοιχα, η *ιεραρχική συμπερίληψη*, αναφέρεται

στην ιδέα ότι ένας αριθμός στην ακολουθία των αριθμών, είναι κατά ένα μεγαλύτερος από τον προηγούμενο, όπως επίσης και ότι ο αριθμός του συνολικού συνόλου περιέχει όλους τους προηγούμενους αριθμούς. Για παράδειγμα, όταν ένας μαθητής μετρά 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 τότε ο αριθμός 8 έχει μία τιμή που είναι ίση με  $7+1$  και συμπεριλαμβάνει τους αριθμούς 1 έως 7 σε αυτόν. Τα παιδιά χρειάζονται μία σταθερή αντίληψη όσον αφορά την ιεραρχική συμπερίληψη ώστε να είναι σε θέση να χρησιμοποιήσουν τη στρατηγική της «μέτρησης από».

Οι Clements και Sarama (2009) και Fuson (2012) μελετώντας ένα μεγάλο αριθμό ερευνητικών αποτελεσμάτων εντόπισαν βασικές δυσκολίες που αντιμετωπίζουν παιδιά ηλικίας 3-5 ετών όσον αφορά την έννοια της απαρίθμησης. Συγκεκριμένα όπως αναφέρουν, παιδιά ηλικίας 3-5 ετών όταν κληθούν να χρησιμοποιήσουν αριθμολέξεις ώστε να απαριθμήσουν ένα σύνολο αντικειμένων, καταργούν ορισμένες από αυτές ή επαναλαμβάνουν τις ίδιες αριθμολέξεις. Επιπρόσθετα, τείνουν να αντιστοιχίζουν περισσότερες από μία αριθμολέξεις στο ίδιο αντικείμενο ή την ίδια αριθμολέξη σε δύο αντικείμενα, ενώ φαίνεται να συνεχίζουν τη διαδικασία της απαρίθμησης παρόλο που στις περισσότερες περιπτώσεις έχουν ήδη αντιστοιχίσει αριθμολέξεις σε όλα τα αντικείμενα. Όταν κληθούν να αναφέρουν το σύνολο των αντικειμένων μετά την εφαρμογή της διαδικασίας απαρίθμησης χρησιμοποιούν μία λανθασμένη αριθμολέξη ή επαναλαμβάνουν τη διαδικασία απαρίθμησης ξανά.

Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές αυτών των ηλικιών όπως αναφέρουν πολλοί ερευνητές (Clements & Sarama, 2014; Cross, Woods, & Schweingruber, 2009; Fuson, 2012) εξαρτάται από μια σειρά παραγόντων. Συγκεκριμένα το μέγεθος του συνόλου (μικρός ή μεγάλος αριθμός αντικειμένων), η διάταξη των αντικειμένων (σε σειρά ή χωρίς συγκεκριμένη οργάνωση), το είδος των αντικειμένων του συνόλου (χειριστικά αντικείμενα ή πιο αφηρημένα στοιχεία) καθώς και η προσπάθεια που καταβάλλει ο ίδιος ο μαθητής αποτελούν μερικούς από τους παράγοντες που φαίνεται να επιδρούν στην ικανότητα των μαθητών για απαρίθμηση. Θέλοντας να δείξουν την αναπτυξιακή πορεία της δεξιότητας απαρίθμησης, οι Sarama και Clements (2009), έχουν αναπτύξει ένα μοντέλο το οποίο στηρίζεται στην ηλικία των μαθητών. Οι ερευνητές αναφέρουν ότι στην ηλικία των 5 ετών, τα παιδιά είναι σε θέση να απαριθμούν αντικείμενα με ακρίβεια μέχρι το 10 και ακολούθως μεγαλύτερα σύνολα συλλογών, ενώ κατανοούν πλήρως την έννοια της πληθικότητας. Για να αποφύγουν τυχόν δυσκολίες στη διαδικασία της απαρίθμησης, μετακινούν τα αντικείμενα ή όταν έχουν στη διάθεσή τους ένα σχέδιο, σημειώνουν/διαγράφουν τα αντικείμενα που έχουν μετρήσει. Ακόμη, είναι σε θέση να

ζωγραφίσουν ώστε να δείξουν ομάδες συλλογών με 10 αντικείμενα και στην πορεία με 20 ή 30 αντικείμενα. Μπορούν να αναγνωρίσουν τα λάθη άλλων μαθητών στη διαδικασία απαρίθμησης και να περιορίσουν τα δικά τους λάθη. Επιπρόσθετα, μπορούν να μετρούν αντίστροφα, καθώς απομακρύνουν αντικείμενα από μία συλλογή αντικειμένων με 10 αντικείμενα. Σταδιακά φαίνεται ότι οι μαθητές κατακτούν «τον κανόνα της τελευταίας λέξης» και στη συνέχεια οικειοποιούνται την πληθική σημασία του αριθμού. Σύμφωνα με τον Sadler (2009), το μοντέλο αυτό μπορεί να βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς στη διάγνωση της ικανότητας των μαθητών όσον αφορά την αίσθηση της έννοιας του αριθμού όπως επίσης και να τους κατευθύνει στην υιοθέτηση συγκεκριμένων δραστηριοτήτων ώστε να προσαρμόζονται στις ατομικές ανάγκες κάθε μαθητή και ειδικότερα των μαθητών που αντιμετωπίζουν ιδιαίτερες δυσκολίες.

Όταν τα παιδιά καταφέρουν να εξασφαλίσουν ακρίβεια και σταθερότητα στη διαδικασία απαρίθμησης, τότε είναι σε θέση να χρησιμοποιήσουν και άλλες πιο εξελιγμένες στρατηγικές (Clements & Sarama, 2009). Μερικές από τις στρατηγικές που είναι σε θέση να χρησιμοποιούν είναι για παράδειγμα η παράλειψη μέτρησης κάποιων αριθμών (skip counting), η μέτρηση 2-2, 5-5 ή 10-10, η αρίθμηση προς τα πίσω, καθώς και η μέτρηση από (ξεκινώντας από ένα άλλο αριθμό πέραν από τον αριθμό ένα και συνεχίζοντας στην ακολουθία των αριθμών).

### ***Εκτίμηση Ποσοτήτων***

Σύμφωνα με το NCTM (2000) η ενασχόληση με δραστηριότητες εκτίμησης, αποτελεί μία πρώιμη εφαρμογή της αίσθησης των αριθμών. Τα έργα αριθμητικών εκτιμήσεων, εξετάζουν την ικανότητα των μαθητών να προσεγγίζουν μια ποσότητα (Mazzocco, Feigenson, & Halberda, 2011). Για παράδειγμα ένα τέτοιο έργο μπορεί να ζητά από τα παιδιά να προσεγγίσουν, χωρίς ωστόσο να μετρήσουν, πόσοι βόλοι υπάρχουν σε ένα δοχείο. Παιδιά τα οποία δεν έχουν αναπτύξει την έννοια του αριθμού καθώς και τη χωρική αίσθηση θα μαντέψουν ένα τυχαίο αριθμό όσον αφορά το συγκεκριμένο ερώτημα, ενώ παιδιά τα οποία έχουν καλή αίσθηση του μεγέθους της μονάδας, θα χρησιμοποιήσουν λογικές αιτιολογήσεις στην προσπάθειά τους να αιτιολογήσουν την απάντησή τους (Van de Walle, 1998).

Οι Sarama και Clements (2009) εισηγούνται μία αναπτυξιακή πορεία όσον αφορά την ανάπτυξη της δεξιότητας εκτίμησης ποσοτήτων. Συγκεκριμένα, αναφέρουν ότι, στην ηλικία των 5 ετών οι μαθητές τείνουν να χρησιμοποιούν ένα «μικρό αριθμό» (π.χ. 1-4)

ώστε να εκτιμήσουν συλλογές αντικειμένων που καλύπτουν μικρή έκταση και ένα «μεγάλο αριθμό» (10, 20 ή μεγαλύτερο αριθμό) στις περιπτώσεις όπου η συλλογή αντικειμένων καλύπτει μεγάλη έκταση. Στην ηλικία των 6 ετών, οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιούν τη δεξιότητα της άμεσης αναγνώρισης και να χρησιμοποιούν έναν «ενδιάμεσο αριθμό» ώστε να περιγράψουν τον πληθικό αριθμό μίας συλλογής αντικειμένων. Για παράδειγμα στην ερώτηση πόσα αντικείμενα υπάρχουν σε μία συλλογή 9 αντικειμένων, τα παιδιά της συγκεκριμένης ηλικίας μπορεί να απαντήσουν 15.

Αρκετοί ερευνητές (Barrody & Gatzke, 1991; Dowker, 1997; Sarama & Clements, 2009; Whalen, Gallistel & Gelman, 1999) διερεύνησαν τη σχέση μεταξύ της ικανότητας εκτίμησης και της μαθηματικής ικανότητας. Σύμφωνα με τον Dowker (1997) υπάρχει θετική συσχέτιση μεταξύ των ικανοτήτων και δεξιοτήτων για εκτίμηση και των αριθμητικών πράξεων που προϋποθέτουν ακριβή γνώση της έννοιας του αριθμού. Επιπρόσθετα, παιδιά ηλικίας 4 ½ χρονών είναι σε θέση να εκτιμούν το μέγεθος ενός συνόλου διακριτών στοιχείων και να χρησιμοποιούν σημεία αναφοράς (Barroody & Gatzke, 1991). Για παράδειγμα μπορούν να εκτιμήσουν τον αριθμό των κουκκίδων σε ένα σύνολο (π.χ. 8) στο 25% της πραγματικής αξίας ή να αναφέρουν εάν ένα σύνολο αντικειμένων είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο από ένα συγκεκριμένο σημείο αναφοράς. Η ακρίβεια εκτίμησης καθώς και το επίπεδο δυσκολίας ενός έργου φαίνεται να επηρεάζεται από το μέγεθος του αριθμητικού στόχου (Whalen et al., 1999), καθώς και από τη διαρρύθμιση των αριθμητικών στόχων (Sarama & Clements, 2009).

### **Διαδικασίες για εύρεση σχέσεων: σύγκριση συλλογών, διάταξη αριθμών**

Οι διαδικασίες για εύρεση σχέσεων, αποτελούν ένα δεύτερο παράγοντα που απαρτίζει την έννοια του αριθμού σύμφωνα με τους Purpura και Lonigan (2013). Ο όρος *διαδικασίες για εύρεση σχέσεων* όπως έχει προαναφερθεί, ορίζεται ως η κατανόηση της σχέσης μεταξύ ενός συνόλου αντικειμένων, μεταξύ διαφορετικών αριθμών ή μεταξύ αριθμών σε μία νοερή αριθμητική γραμμή (Purpura & Lonigan, 2013). Στον συγκεκριμένο παράγοντα, περιλαμβάνονται έννοιες όπως η σύγκριση μεγεθών, η σύγκριση αριθμών, η διάταξη και η σειροθέτηση αριθμών.

### *Σύγκριση συλλογών*

Η ικανότητα των παιδιών να συγκρίνουν ποσότητες, ξεκινά από την παιδική ηλικία, όταν μπορούν να αντιληφθούν τις διαφορές μεταξύ δύο συνόλων ανάλογα με το μέγεθος των συνόλων και την αναλογία μεγέθους μεταξύ των δύο συνόλων (Clements & Sarama, 2014). Καθώς τα παιδιά μαθαίνουν να μετράνε και η σκέψη τους όσον αφορά τους αριθμούς, γίνεται πιο σαφής μέσω φυσικών, λεκτικών και γραπτών αναπαραστάσεων, είναι σε θέση να καθορίσουν εάν ένα σύνολο στοιχείων έχει κάτι παραπάνω από, λιγότερο από ή ίσο αριθμό με ένα άλλο σύνολο (σε περιπτώσεις όπου οι διαφορές δεν είναι προφανείς).

Σύμφωνα με τις Καφούση και Σκουμπουρδή (2008), η εμπλοκή των παιδιών προσχολικής ηλικίας σε δραστηριότητες που εμπλέκουν σύγκριση δύο ή και περισσότερων συλλογών αντικειμένων, θεωρείται πολύ σημαντική όσον αφορά την κατανόηση της πληθικότητας του αριθμού καθώς και των πράξεων με τους αριθμούς. Ακόμη και παιδιά πολύ μικρής ηλικίας (π.χ. 2 χρονών) είναι σε θέση να διαπιστώσουν και να διακρίνουν μικρές συλλογές αντικειμένων που περιλαμβάνουν ή δεν περιλαμβάνουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων (Wagner & Waltres, 1982). Σε αυτού του είδους τις δραστηριότητες εμπλέκονται λέξεις/σχέσεις όπως: περισσότερα, λιγότερα, ίδια, τόσα όσα. Όπως αναφέρουν οι Καφούση και Σκουμπουρδή (2008) σε αυτή την ηλικία η ικανότητα αυτή δε μπορεί να θεωρηθεί ως κατανόηση της πληθικότητας των στοιχείων της συλλογής.

Οι Cross et al. (2009) υποστηρίζουν ότι αρχικά τα βρέφη και τα μικρά παιδιά, βασίζουν τις συγκρίσεις τους σε ενδείξεις που βασίζονται αποκλειστικά στην αντίληψη. Για παράδειγμα στις περιπτώσεις όπου το μήκος μίας συλλογής δεδομένων είναι μεγαλύτερο από το μήκος μίας άλλης συλλογής, τα παιδιά καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι η πρώτη συλλογή αποτελείται από τα περισσότερα στοιχεία ακόμη και όταν το πλήθος το στοιχείων των δύο συλλογών είναι ίδιο. Αργότερα, αρχίζουν να χρησιμοποιούν στρατηγικές αντιστοίχισης μεταξύ των δύο συνόλων, μέχρι να προσδιορίζουν ποιο από τα δύο σύνολα περιλαμβάνει στοιχεία που δε μπορούν να συνδυαστούν με στοιχεία του άλλου συνόλου. Μόλις αποκτήσουν μία σταθερή αντίληψη όσον αφορά την έννοια της πληθικότητας, μπορούν να χρησιμοποιήσουν τις στρατηγικές αρίθμησης ώστε να συγκρίνουν την πληθικότητα δύο συνόλων. Οι καταστάσεις σύγκρισης, επιτρέπουν επίσης στα παιδιά να αρχίσουν να σκέφτονται σχετικά με το πόσο περισσότερα ή πόσο λιγότερα στοιχεία έχει ένα σύνολο. Αυτό είναι αρχικά δύσκολο, αλλά βασίζεται στις γνώσεις τους για τη σχέση μέρους – όλου και συνδέεται με τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης (Cross et al., 2009).

Θέλοντας να δείξουν την ανάπτυξη της ικανότητας των παιδιών όσον αφορά τη δεξιότητα της σύγκρισης, οι Sarama και Clements (2009) εισηγούνται μία αναπτυξιακή πορεία. Συγκεκριμένα στην ηλικία των 4 ετών, τα παιδιά είναι σε θέση να αντιστοιχούν μικρές και ίσες ομάδες συλλογών, οι οποίες αποτελούνται από διαφορετικό αριθμό (μη λεκτική σύγκριση ανόμοιων στοιχείων). Επίσης είναι σε θέση να συγκρίνουν ομάδες αντικειμένων από 1- 6 αντικείμενα μέσω αντιστοίχισης (σύγκριση μέσω αντιστοίχισης) και μπορούν να κάνουν ακριβείς συγκρίσεις μετρώντας μικρές συλλογές αντικειμένων (μέχρι 5 αντικείμενα) όταν αυτά έχουν το ίδιο μέγεθος (σύγκριση μέσω σύγκρισης). Αντίστοιχα, στην ηλικία των 5 ετών, τα παιδιά μπορούν να εκτελούν συγκρίσεις μετρώντας τα αντικείμενα ακόμη και όταν τα αντικείμενα της μεγαλύτερης συλλογής είναι μικρότερα σε μέγεθος, ενώ μέχρι την ηλικία των 6 ετών, μπορούν να εκτελούν με τον ίδιο τρόπο συγκρίσεις σε συλλογές που αποτελούνται μέχρι 10 αντικείμενα.

Ωστόσο, όπως υποστηρίζει ο Baroody (2017) τα παιδιά αρχικά δεν είναι σε θέση να αναγνωρίσουν ότι η αριθμολέξη που χρησιμοποιούν για ένα αριθμό αναπαριστά το σχετικό μέγεθος του συγκεκριμένου αριθμού. Με τον καιρό, είναι σε θέση να αναγνωρίσουν ότι οι μικρότεροι και γνωστοί για αυτούς αριθμοί, έχουν ξεχωριστά σχετικά μεγέθη, με την αίσθηση του σχετικού μεγέθους όσον αφορά τους μεγαλύτερους και άγνωστους για αυτούς αριθμούς να παραμένει ασαφής. Για τα μικρότερα παιδιά, οι μικροί αριθμοί (π.χ. 1, 2) μπορεί να έχουν ξεχωριστά σχετικά μεγέθη, αλλά κάποιιοι μεγαλύτεροι αριθμοί όπως για παράδειγμα ο αριθμός 6 ή ο αριθμός 7 μπορούν απλά να θεωρηθούν ως «μεγάλοι» ή ακόμη και να μην μπορούν να διακριθούν από μεγαλύτερους αριθμούς όπως για παράδειγμα τον αριθμό 10. Τα παιδιά στη συνέχεια, είναι σε θέση να δουν κάθε αριθμό ως μία «σταδιακή πρόοδο» στην αριθμητική ακολουθία από το 1 μέχρι το 10 και να αντιληφθούν ότι αναπαριστούν μία μεγαλύτερη ποσότητα και τελικά να κατανοήσουν ότι κάθε αριθμός είναι κατά ένα μεγαλύτερος από τον προηγούμενό του (Baroody, 2017).

### ***Διάταξη αριθμών***

Η διατακτικότητα είναι μία άλλη έννοια η οποία συνθέτει τον παράγοντα *Διαδικασίες για εύρεση σχέσεων* (Purpura & Lonigan, 2013). Συγκεκριμένα, η διατακτική σημασία του αριθμού, καθορίζει τη θέση που έχει ένας συγκεκριμένος αριθμός σε μια συλλογή με προκαθορισμένη δομή σε σχέση με άλλους αριθμούς ή αντικείμενα (Cross et al., 2009).

Η διατακτική σημασία του αριθμού αποτελεί μία σημαντική λειτουργία όπως και η πληθικότητα. Ενώ η πληθικότητα του αριθμού μπορεί να γίνει αντιληπτή από τα παιδιά από μικρή ηλικία, η διατακτικότητα του αριθμού είναι πιο δύσκολη και η ανάπτυξή της

φαίνεται να καθυστερεί περισσότερο σε σχέση με την έννοια της πληθικότητας (Καφούση & Σκουμπουρδή, 2008). Επιπρόσθετα, σύμφωνα με τον Baroody (1987), η γνώση της σειράς των αριθμολέξεων σχετικά με τη διάταξη, καθυστερεί σε σχέση με τη γνώση της σειράς των αριθμολέξεων στην απαρίθμηση, καθώς η χρήση των διατακτικών ή των τακτικών αριθμών απαιτεί την κατανόηση της σχετικής θέσης ενός αντικειμένου σε σχέση με κάποιο σημείο αναφοράς. Για παράδειγμα, η χρήση της αριθμολέξης «πρώτος» εξαρτάται από ποια κατεύθυνση παρατηρούν τα παιδιά αυτή τη σειρά.

Όπως αναφέρουν οι Bruce και Threlfall (2004), σε έρευνα που πραγματοποιήθηκε σε παιδιά ηλικίας 3 μέχρι 5 περίπου ετών ζητήθηκε να υποδείξουν το 2<sup>ο</sup>, 1<sup>ο</sup>, 4<sup>ο</sup>, 10<sup>ο</sup>, 3<sup>ο</sup>, 7<sup>ο</sup> και 14<sup>ο</sup> άνθρωπο μέσα από μια σειρά η οποία αποτελείτο από 15 άτομα που βρίσκονταν στη στάση ενός λεωφορείου. Μισά από τα παιδιά δεν ήταν σε θέση να δώσουν καμία απάντηση ενώ τα υπόλοιπα παιδιά, απάντησαν σωστά μόνο για το 1<sup>ο</sup>, 2<sup>ο</sup> και 4<sup>ο</sup> αντικείμενο της σειράς. Όπως διαπιστώθηκε, τα παιδιά συνήθως έτειναν να δείχνουν συνεχόμενες θέσεις ανεξάρτητα από τους τακτικούς αριθμούς που τους ζητήθηκαν, ενώ προσπαθούσαν να κάνουν κάποιες εκτιμήσεις για να εντοπίσουν τη σειρά διάταξης. Μόνο ένα παιδί στη συγκεκριμένη έρευνα χρησιμοποίησε την αρίθμηση για να απαντήσει στο ερώτημα κάτι που δείχνει ότι μπορεί αρχικά η διάταξη ενός αριθμού να μην συνδέεται από τα παιδιά με την πληθικότητά του.

Οι Sarama και Clements (2009) εισηγούνται μια πορεία ανάπτυξης της έννοιας της διάταξης. Συγκεκριμένα, στην ηλικία των 5 ετών, τα παιδιά είναι σε θέση να χρησιμοποιούν τη διατακτική έννοια του αριθμού και να χρησιμοποιούν λέξεις όπως πρώτος, δεύτερος... δέκατος. Στη συγκεκριμένη ηλικία μπορούν για παράδειγμα να αναγνωρίσουν ποιο αντικείμενο είναι τρίτο στη σειρά. Αντίστοιχα, στην ηλικία των 6 ετών, τα παιδιά είναι σε θέση να διατάσσουν αριθμούς και ποσότητες αντικειμένων.

### **Διαδικασίες που αφορούν σε πράξεις αριθμών: πρόσθεση, αφαίρεση, ανάλυση και σύνθεση αριθμού**

Οι αριθμητικές πράξεις αποτελούν τον τρίτο παράγοντα, που σύμφωνα με τους Purpura και Lonigan (2013) συνθέτει την πρώιμη αριθμητική ικανότητα των μικρών παιδιών. Οι διαδικασίες που αφορούν σε πράξεις αριθμών, ορίζονται ως η κατανόηση του τρόπου με τον οποίο οι ομάδες συνόλων συνθέτονται και διαχωρίζονται σε ομάδες και υποσύνολα. Μερικές από τις διαδικασίες που αφορούν σε πράξεις αριθμών είναι και οι πράξεις



πρόσθεσης και αφαίρεσης με αντικείμενα καθώς και η σύνθεση και ο διαχωρισμός των αριθμών.

### ***Πρόσθεση/αφαίρεση***

Κατά την πρώιμη ηλικία, πέραν από την απαρίθμηση, τα παιδιά ξεκινούν να κατανοούν την έννοια της αξίας θέσης ψηφίου και τις αριθμητικές πράξεις αφού οι αριθμητικές πράξεις, αποτελούν μέρος των καθημερινών τους δραστηριοτήτων. Οι αριθμητικές πράξεις εμφανίζονται συχνά στην καθημερινότητα των παιδιών όταν κληθούν να ενώσουν μαζί ποσότητες, να μοιράσουν αντικείμενα ή ακόμη και όταν αναρωτιούνται πόσα ακόμη χρειάζονται ώστε να καταλήξουν σε ένα συγκεκριμένο αριθμό. Σύμφωνα με τους Fuson, Grandau και Sugiyama (2001) στο νηπιαγωγείο τα παιδιά ξεκινούν να αναπτύσσουν την αξία θέσης ψηφίου μέσω αναπαραστάσεων του δεκαδικού συστήματος. Ωστόσο, κατακτούν αυτή την ικανότητα με διαφορετικό ρυθμό. Για παράδειγμα, ένα παιδί μπορεί να είναι σε θέση να απαριθμήσει 15 αντικείμενα, ωστόσο μπορεί να μην είναι σε θέση να κατανοήσει ότι ο αριθμός 15 αποτελεί σύνθεση μίας δεκάδας και ακόμη 5 μονάδων. Αντίθετα, ένα άλλο παιδί μπορεί να είναι σε θέση να αντιληφθεί αυτή την ισοδυναμία και να κατανοήσει την αξία θέσης ψηφίου.

Σύμφωνα με την Τζεκάκη (2007), η ικανότητα για επαρκή χειρισμό των σχέσεων που διέπουν τους αριθμούς της πρώτης δεκάδας είναι απαραίτητη για τη «μεταβίβαση» της δεξιότητας σε μεγαλύτερους υπολογισμούς ή εκτιμήσεις. Παράλληλα, η εξέλιξη όσον αφορά την κατάκτηση της ικανότητας της αρίθμησης, οδηγεί στην εύρεση πιο αποτελεσματικών τρόπων πρόσθεσης και αφαίρεσης (Fuson, 2004).

Οι Carpenter & Moser (1982), φαίνεται να ομαδοποιούν τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν τα παιδιά σε τρεις κατηγορίες: (α) τις στρατηγικές που βασίζονται στην αρίθμηση με μοντελοποίηση των δεδομένων του προβλήματος, (β) τις στρατηγικές που βασίζονται στην αρίθμηση, χωρίς τη χρήση μοντέλων, όπως για παράδειγμα αρίθμηση από κάποιο αριθμό και (γ) τις στρατηγικές στις οποίες γίνεται χρήση των γνωστών αθροισμάτων και διαφορών. Για παράδειγμα στην περίπτωση της στρατηγικής χρήσης γνωστών αθροισμάτων και διαφορών, ένας μαθητής μπορεί να γνωρίζει ότι  $6+6=12$ , αλλά να μην είναι σε θέση να γνωρίζει αυτόματα πόσα είναι  $6+7$ . Ο συγκεκριμένος μαθητής μπορεί να χρησιμοποιήσει το ήδη γνωστό άθροισμα  $6+6=12$  ώστε να μπορέσει να βρει το συγκεκριμένο άθροισμα. Αυτό βοηθά τους μαθητές να αποφεύγουν τη χρήση στρατηγικών χαμηλότερου γνωστικού επιπέδου όπως είναι η μέτρηση με τη χρήση δακτύλων.

Οι στρατηγικές απαρίθμησης έχουν αναγνωρισθεί ως βασικές, όσον αφορά την ανάπτυξη της αίσθησης της έννοια τους αριθμού. Σε πειραματική έρευνα που διεξήγαγε ο Cheng (2012), έχει διαπιστωθεί ότι τα παιδιά ηλικίας 5-6 ετών είναι σε θέση να χρησιμοποιήσουν πιο σύνθετες στρατηγικές όπως τη στρατηγική *μέτρηση από* έχοντας τον ένα προσθετό και προσθέτοντας σε αυτόν τον άλλο προσθετό (Siegler & Robinson, 1982). Επιπρόσθετα, μέσα από τις εμπειρίες τους με τις συγκεκριμένες στρατηγικές, τα παιδιά αρχίζουν να αποθηκεύουν απλά αποτελέσματα στην μνήμη τους τα οποία και οδηγούν στη δημιουργία στρατηγικών «μνήμης» όπως είναι η ανάκληση γνωστών αποτελεσμάτων ή η ανάλυση. Η ανάκληση γνωστού αποτελέσματος, λειτουργεί ως ένας μηχανισμός που στηρίζεται στη μνήμη και όχι σε ενεργούς υπολογισμούς. Τέλος, η στρατηγική της ανάλυσης του αριθμού περιλαμβάνει τη μετατροπή του αρχικού προβλήματος, σε δύο ή περισσότερα απλοποιημένα προβλήματα, είτε χρησιμοποιώντας γνωστά αποτελέσματα ή τις ιδιότητες του δεκαδικού συστήματος. Οι δεξιότητες εκτέλεσης των συγκεκριμένων στρατηγικών, συνεχίζουν να βελτιώνονται και να επεκτείνονται σε πιο σύνθετα προβλήματα.

Αρχικά τα παιδιά, στα πρώτα στάδια, σε προβλήματα πρόσθεσης, ξεκινούν να μετρούν τα αντικείμενα της πρώτης συλλογής, ακολούθως τα αντικείμενα της δεύτερης συλλογής και τέλος όλα τα αντικείμενα από την αρχή (*counting all*) (Καφούση & Σκουμπουρδή 2008). Μία από τις σημαντικότερες αλλαγές στην σκέψη που καταφέρνουν να πραγματοποιήσουν παιδιά ηλικίας 5-6 είναι η εκτέλεση αριθμητικών πράξεων πρόσθεσης και αφαίρεσης χωρίς να έχουν ανάγκη να έχουν μπροστά τους τα πραγματικά αντικείμενα (Καφούση & Σκουμπουρδή 2008). Η εξέλιξη των αθροιστικών στρατηγικών των παιδιών, σύμφωνα με την Τζεκάκη, διακρίνεται σε τρία στάδια (Τζεκάκη, 2007). Στο πρώτο στάδιο, τα παιδιά δεν είναι σε θέση να έχουν ολοκληρωμένη αντίληψη της κατάστασης που έχουν να αντιμετωπίσουν. Έτσι χρησιμοποιούν την καταμέτρηση, βάζουν μαζί ή βγάζουν αντικείμενα. Τελικά, καταφεύγουν στην πιο απλοποιημένη μορφή προσθετικής διαδικασίας, τη *μέτρηση όλων* (*count all*). Δηλαδή, απαριθμούν όλα τα αντικείμενα που έχουν στη διάθεσή τους ξεκινώντας από την πρώτη συλλογή αντικειμένων και προχωρούν στη δεύτερη συλλογή αντικειμένων. Σε ένα δεύτερο στάδιο κάποια από τα παιδιά, κατανοούν ότι δεν είναι αναγκαίο να μετρήσουν όλα τα αντικείμενα και έτσι χρησιμοποιούν τη στρατηγική *μέτρηση από* (*count on*) συνεχίζοντας να μετρούν από το τέλος ενός συνόλου, χωρίς αυτό να είναι απαραίτητα το μεγαλύτερο σύνολο. Σε ένα τρίτο στάδιο και αφού τα παιδιά έχουν κατανοήσει τις σχέσεις ανάμεσα στους αριθμούς, είναι σε θέση να ενεργοποιούν πιο εξελιγμένες στρατηγικές οι οποίες

βασίζονται στην κατανόηση αυτών των σχέσεων. Μια από τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν είναι η *ανάλυση και σύνθεση των αριθμών*. Στις περιπτώσεις αυτές τα καταφέρνουν καλύτερα στους μικρούς αριθμούς καις τη συνέχεια στους μεγαλύτερους και τους διπλού αριθμούς.

Η προτίμηση συγκεκριμένων υπολογιστικών στρατηγικών ποικίλει, και πέραν από το ηλικιακό επίπεδο αλλά και την ετοιμότητα κάθε παιδιού φαίνεται να σχετίζεται και με τα χαρακτηριστικά των προβλημάτων. Ερευνητικά αποτελέσματα υποστηρίζουν ότι τα παιδιά αποφεύγουν να χρησιμοποιούν τις πιο σύνθετες υπολογιστικές στρατηγικές, εκτός και αν το επίπεδο δυσκολίας του ίδιου του προβλήματος το απαιτεί. Για παράδειγμα οι Siegler και Jenkins (1989) διερεύνησαν τη χρήση δεξιοτήτων απαρίθμησης από παιδιά προσχολικής ηλικίας. Έχουν εντοπίσει ότι η συχνότητα με την οποία τα παιδιά χρησιμοποιούν πιο σύνθετες στρατηγικές απαρίθμησης (π.χ. μέτρηση από) ήταν υψηλότερος, όταν τα παιδιά είχαν να αντιμετωπίσουν πιο σύνθετα προβλήματα (ο ένας προσθετός μεγαλύτερος από 20) παρά στα πιο απλά προβλήματα (προσθετέοι μεταξύ 1-5). Αντίστοιχα σε έρευνα των Geary, Bow-Thomas, Liu και Siegler (1996), οι ερευνητές εντόπισαν ότι τα παιδιά νηπιαγωγείου της Κίνας χρησιμοποίησαν τη στρατηγική της ανάλυσης αριθμού πιο συχνά όταν το άθροισμα των προβλημάτων ήταν μεγαλύτερο από το 10 παρά όταν το άθροισμα των προβλημάτων ήταν μικρότερο από 11.

### ***Ανάλυση και σύνθεση αριθμού***

Η ανάλυση και σύνθεση του αριθμού είναι μία άλλη διαδικασία η οποία περιλαμβάνεται στον παράγοντα *Διαδικασίες για εύρεση σχέσεων* σύμφωνα με τους Puzpura και Lonigan (2013). Η ανάλυση και η σύνθεση αριθμού ορίζεται ως η κατανόηση ότι ένας αριθμός μπορεί να αναλυθεί σε μικρότερα μέρη τα οποία όταν επανενωθούν μπορούν να σχηματίσουν τον ίδιο αριθμό. Η συγκεκριμένη διαδικασία, θεωρείται μια πολύ σημαντική πράξη για τους μικρούς μαθητές καθώς μπορεί από τη μία να συμβάλει στην οικοδόμηση της σχέσης μέρους όλου αλλά να συμβάλει ακόμη στην κατανόηση της επίλυσης προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης με άγνωστο προσθετέο ή μειωτέο (Καρούση & Σκουμπουρδή, 2008). Επιπρόσθετα, η ανάλυση και σύνθεση μικρών αριθμών με τη χρήση αντικειμένων κατά την προσχολική εκπαίδευση είναι απαραίτητη για την κατανόηση του δεκαδικού συστήματος, των ιδιοτήτων των πράξεων και της πρόσθεσης των κλασμάτων σε μεγαλύτερες ηλικίες. Η ανάλυση και σύνθεση αριθμών προϋποθέτει ότι τα παιδιά είναι σε θέση να αριθμούν, αλλά ταυτόχρονα να κατανοούν ότι μικρότεροι αριθμοί εμπεριέχονται

μέσα σε μεγαλύτερους. Έτσι, παιδιά ηλικίας 3-4 ετών μπορούν να δουν ότι 2 αντικείμενα και 1 αντικείμενο μας κάνουν 3 αντικείμενα, δηλαδή ότι οι αριθμοί 2 και 1 είναι «κρυμμένοι» μέσα στο 3, ενώ σε μεγαλύτερη ηλικία, τα παιδιά μπορούν χωρίσουν μια ομάδα αντικειμένων σε υποομάδες (π.χ. να χωρίζουν 4 αντικείμενα σε 2 και 2 ή 1 και 3) (Καφούση & Σκουμπουρδή 2008, σελ. 94). Σύμφωνα με τον Cheng (2012), παιδιά ηλικίας 4-5 ετών στην Κίνα, είχαν αρκετά καλή κατανόηση των βασικών εννοιών των αριθμών 1-10 και ήταν σε θέση να σχηματίζουν αριθμούς συνδυάζοντας τη λέξη «δεκάδα» με τη λέξη «μονάδα» (Geary et al., 1996; Ho & Fuson, 1998; Miura, Okamoto, Kim, Chang, Steere, & Fayol, 1994). Ωστόσο, τα ερευνητικά αποτελέσματα όσον αφορά την κατανόηση μέρους – μέρους – όλου, φαίνεται να μη βρίσκονται σε συμφωνία (Baroody, 2000). Κάποιες έρευνες, εισηγούνται ότι τα παιδιά πιθανό να μην είναι σε θέση να κατανοήσουν τη σχέση μέρους – μέρους – όλου όσον αφορά τους αριθμούς πριν να φτάσουν την ηλικία των 7 ετών (Briars & Larkin, 1984; Piaget, 1965), ιδιαίτερα όταν τα δύο μέρη δεν είναι ίσα (Ginsburg, Klein, & Starkey, 1998). Αντίθετα, κάποιες ερευνητές έδειξαν ότι παιδιά ηλικίας 5 ετών μπορούν να κατανοήσουν αλλά και να χρησιμοποιήσουν την ιδιότητα ότι η πρόσθεση και η αφαίρεση αποτελούν αντίθετες πράξεις (Baroody & Lai, 2007; Bryant, Christie, & Rendu, 1999; Klein & Bisanz, 2000; Rasmussen, Ho, & Bisanz, 2003). Άλλες έρευνες (Baroody & Lai, 2007; Bobis, 1996; Bryant et al., 1999; Rasmussen et al., 2003) υποστηρίζουν ότι η κατανόηση αυτών των εννοιών μπορεί να προκύψει πιο γρήγορα. Η Fischer (1990) εισήγαγε επίσημα σε μαθητές προσχολικής ηλικίας την έννοια του μέρους – μέρους – όλου. Η έρευνά της έδειξε ότι οι εκπαιδευτικοί που εστιάζονται στην έννοια του μέρους – μέρους – όλου, μπορούν να βοηθήσουν πραγματικά τα παιδιά να επεκτείνουν την κατανόησή τους όσον αφορά την έννοια του αριθμού καθώς και την ικανότητά τους όσον αφορά την επίλυση προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης.

### **Διαδικασίες αναγνώρισης μοτίβων και γενίκευσης**

Οι σύγχρονες έρευνες όσον αφορά την ανάπτυξη της μαθηματικής ικανότητας κατά την πρώιμη ηλικία, υιοθετούν την άποψη ότι τα μικρά παιδιά είναι σε θέση να κατανοήσουν αφηρημένες και γενικευμένες μαθηματικές ιδέες. Ερευνητικά αποτελέσματα που τονίζουν την ανάγκη της διδασκαλίας εννοιών που σχετίζονται με τους Αριθμούς και την Άλγεβρα με τρόπο που η μια περιοχή να υποστηρίζει την άλλη (Mulligan et al., 2012), έχουν εστιάσει το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών σε έννοιες που σχετίζονται με τη πρώιμη αλγεβρική σκέψη και το συλλογισμό (Carragher & Schliemann, 2007; Clements & Sarama, 2007; Kaput, 2008). Τα μοτίβα, αποτελούν την πρώτη μορφή προαλγεβρικής σκέψης, με

την οποία έρχονται σε επαφή τα παιδιά προσχολικής ηλικίας. Η ενασχόληση με έργα μοτίβων κατά την προσχολική ηλικία, θέτει τα θεμέλια για την μετέπειτα ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης καθώς παρέχει ευκαιρίες στα παιδιά ώστε να αναπτύξουν τη συσχετιστική σκέψη (Charles, 2005; Fuchs et al., 2012; Lee, Ng, Bull, Pe, & Ho, 2011; Mulligan & Mitchelmore, 2009; Orton & Orton, 1999; Warren & Cooper, 2006; Whitin & Whitin, 2011). Επιπρόσθετα οι δραστηριότητες που σχετίζονται με τα μοτίβα δίνουν την ευκαιρία στους μαθητές να εξασκήσουν τις δεξιότητές τους για αναζήτηση, αναγνώριση, αντιγραφή, επέκταση και δημιουργία μοτίβων καθώς και γενικεύσεις (Billings, Tiedt, Slater, & Langrall, 2007/2008; Papic, Mulligan, & Michelmore, 2009; Waters, 2004).

Σύμφωνα με την Τζεκάκη (2010) όσον αφορά στην εύρεση μοτίβων και την ανακάλυψη κανονικοτήτων, επιδιώκεται οι μαθητές προσχολικής ηλικίας να (α) αναγνωρίζουν, αναπαράγουν και συνεχίζουν μία κανονικότητα από υλικά, παραστάσεις, ήχους, κίνηση, λέξεις και αριθμούς, (β) να εντοπίζουν το στοιχείο που λείπει σε μια κανονικότητα, (γ) να μεταφράζουν από μια μορφή υλικού σε άλλη μία κανονικότητα, (δ) να περιγράφουν ποιοτικές και ποσοτικές αλλαγές στην εξέλιξη των κανονικοτήτων και (ε) να περιγράφουν και να γενικεύουν τον κανόνα ο οποίος προσδιορίζει την κανονικότητα.

Αρκετοί είναι οι ερευνητές (Clements & Sarama, 2009; Rustigian, 1976; Skoumpourdi, 2013) που έχουν ασχοληθεί με τον τρόπο ανάπτυξης της ικανότητας των παιδιών σε διάφορες πτυχές που σχετίζονται με την έννοια των μοτίβων. Οι Clements και Sarama (2009) παρουσίασαν μια τροχιά μάθησης όσον αφορά τα μοτίβα η οποία σχετίζεται με τις απλές, τυπικές περιπτώσεις επαναλαμβανόμενων μοτίβων. Η αναπτυξιακή πρόοδος αφορά μικρά παιδιά ηλικίας 2-7 ετών. Η περιγραφή κάθε σταδίου περιγράφεται στον Πίνακα 2.1

## Πίνακας 2.1

*Αναπτυξιακή Πρόοδος Παιδιών Ηλικίας 2-7 Ετών σε Έργα Μοτίβων (Sarama & Clements, 2009)*

Αναπτυξιακό Στάδιο	Χαρακτηριστικά
Pre-Explicit Patternner (2 χρονών)	Εντοπισμός και έμμεση χρήση μοτίβων Έλλειψη ικανότητας αναγνώρισης διαδοχικών γραμμικών μοτίβων με ακρίβεια
Pattern Recognizer (3 χρονών)	Αναγνώριση απλών μοτίβων
Pattern Fixer (4 χρονών)	Συμπλήρωση των στοιχείων που λείπουν από ένα μοτίβο (αρχικά μοτίβα ABAB), αντιγραφή απλών μοτίβων (π.χ. ABABAB και ABBABB) και επέκταση μοτίβων της μορφής AB
Pattern Extender (5 χρονών)	Επέκταση απλών επαναλαμβανόμενων μοτίβων (π.χ. ABBABB).
Pattern Unit Recognizer (6 χρονών)	Αναγνώριση της μικρότερης μονάδας ενός μοτίβου και μετάφραση

Το έργο των Sarama και Clements (2009) φαίνεται να ενισχύεται από τα ερευνητικά αποτελέσματα της Skoumpourdi (2013) η οποία εστίαστηκε στις ενέργειες των μαθητών προσχολικής ηλικίας σε έργα επαναλαμβανόμενων και αναπτυσσόμενων μοτίβων. Συγκεκριμένα, οι ενέργειες των μαθητών μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε έξι κατηγορίες (Skoumpourdi, 2013) σύμφωνα με τη δομή του μοτίβου, τον τρόπο που οι μαθητές χειρίζονται την μονάδα επανάληψης καθώς και το είδος του υλικού που χρησιμοποιήθηκε για την παρουσίαση των μοτίβων. Οι κατηγορίες αυτές είναι οι ακόλουθες: (α) Τροποποίηση του επαναλαμβανόμενου/αναπτυσσόμενου μοτίβου: οι μαθητές αναπτύσσουν μοτίβα, χωρίς ωστόσο να χρησιμοποιούν όλα τα στοιχεία της επαναλαμβανόμενης μονάδας. Δηλαδή, οι μαθητές τροποποιούν αντί να επεκτείνουν το μοτίβο. (β) Απουσία επέκτασης (αναπαραγωγής) των επαναλαμβανόμενων/αναπτυσσόμενων μοτίβων: Οι μαθητές επεκτείνουν το μοτίβο, χωρίς ωστόσο να χρησιμοποιούν όλα τα στοιχεία της μονάδας επανάληψης. Επεκτείνουν τα μοτίβα, επαναλαμβάνοντας μόνο το ένα μέρος της μονάδας επανάληψης. Έτσι η επέκταση των μοτίβων παρουσιάζει μόνο μερικά στοιχεία της επαναλαμβανόμενης μονάδας του μοτίβου που τους δόθηκε. (γ) Τυχαία επέκταση του μοτίβου: οι μαθητές επεκτείνουν το μοτίβο χρησιμοποιώντας όλα τα στοιχεία της μονάδας επανάληψης σε τυχαία σειρά. Επεκτείνουν το μοτίβο χρησιμοποιώντας όλα τα στοιχεία της μονάδας επανάληψης, τοποθετώντας τα

ωστόσο, σε τυχαία θέση. (δ) Αντίστροφη επέκταση επαναλαμβανόμενου/αναπτυσσόμενου μοτίβου: οι μαθητές επεκτείνουν το μοτίβο, χρησιμοποιώντας όλα τα στοιχεία της μονάδας επανάληψης σε αντίστροφη σειρά. Οι μαθητές αρχίζουν να κατανοούν δηλαδή την ύπαρξη μίας μονάδας επανάληψης, αλλά δεν είναι σε θέση να αντιληφθούν ότι ένα μοτίβο ξεκινά με την μονάδα επανάληψης. (ε) Τμηματική επέκταση επαναλαμβανόμενου/αναπτυσσόμενου μοτίβου: οι μαθητές επεκτείνουν το μοτίβο αρχικά, χρησιμοποιώντας όλα τα στοιχεία της μονάδας επανάληψης στη σωστή σειρά. Ωστόσο, στη συνέχεια, συνεχίζουν να προσθέτουν στοιχεία τα οποία δεν τοποθετούνται στη σωστή τους θέση. (στ) Συνήθης επέκταση του επαναλαμβανόμενου/αναπτυσσόμενου μοτίβου: οι μαθητές επεκτείνουν το μοτίβο χρησιμοποιώντας όλα τα στοιχεία της μονάδας επανάληψης στη σωστή σειρά, τουλάχιστον δύο φορές.

Έρευνες που έχουν εξετάσει την ικανότητα των παιδιών σε έργα επαναλαμβανόμενων μοτίβων, έδειξαν ότι από την προσχολική ηλικία, τα παιδιά είναι σε θέση να εντοπίζουν, να κατασκευάζουν και να επεξηγούν μία ποικιλία από οπτικά επαναλαμβανόμενα μοτίβα (Papic, 2007; Papic & Mulligan, 2007; Papic et al., 2011). Για παράδειγμα ο RittleJohnson και οι συνεργάτες του (2013) εντόπισαν ότι η πλειοψηφία των παιδιών προσχολικής ηλικίας ήταν σε θέση να επεκτείνουν ένα οπτικό επαναλαμβανόμενο μοτίβο, ακόμη και με σύνθετη επαναλαμβανόμενη μονάδα (AABB). Ωστόσο, οι μαθητές προσχολικής ηλικίας, δεν επιτυγχάνουν με τον ίδιο τρόπο σε όλα τα έργα που περιλαμβάνουν οπτικά επαναλαμβανόμενα μοτίβα (Papic et al., 2011; RittleJohnson et al., 2013). Προηγούμενες έρευνες έχουν εντοπίσει ότι η πλειοψηφία των παιδιών (75%) μεταξύ των ηλικιών 3-5 ετών αντέγραψαν με ακρίβεια επαναλαμβανόμενα μοτίβα χρησιμοποιώντας το ίδιο υλικό και περίπου 50% κατάφεραν να επεκτείνουν σωστά τα επαναλαμβανόμενα μοτίβα. Από την άλλη πλευρά, λιγότερα από το 1/3 των παιδιών προσχολικής ηλικίας ήταν σε θέση να εντοπίσουν και να απομονώσουν την επαναλαμβανόμενη μονάδα ή να μεταφράσουν το μοτίβο χρησιμοποιώντας διαφορετικά υλικά (Rittle-Johnson et al., 2013).

Παρόμοια, οι Klein και Starkey (2004) εντόπισαν μερικές λανθασμένες συμπεριφορές των μαθητών κατά τη διαδικασία αντιγραφής των μοτίβων. Πιο συγκεκριμένα ένα από τα λάθη τα οποία οι μαθητές έτειναν να παρουσιάζουν ήταν κατά την προσπάθειά αντιγραφής του αρχικού μοτίβου. Στην προσπάθεια αυτή τα παιδιά ξεκινούσαν την κατασκευή τους χωρίς όμως να χρησιμοποιούν τη βασική μονάδα AB (π.χ. BAAB και AABA). Επιπρόσθετα ένα άλλο λάθος που παρουσίασαν οι μαθητές ήταν ότι ενώ είχαν κατανοήσει ότι το μοτίβο ξεκινά με τη βασική μονάδα AB, κατά τη διαδικασία

κατασκευής του μοτίβου δεν εφαρμόζαν συστηματικά τη συγκεκριμένη βασική μονάδα (π.χ. ABBA και ABAAB). Όσον αφορά το τρίτο είδος σφάλματος, τα παιδιά ήταν σε θέση να κατασκευάσουν σωστά τη βασική μονάδα AB και στη συνέχεια επαναλάμβαναν συστηματικά τη μονάδα μέχρι να αντιγράψουν το αρχικό μοτίβο. Ωστόσο, μετά την αντιγραφή του αρχικού μοντέλου, οι μαθητές λανθασμένα πρόσθεταν ένα ή περισσότερα επιπρόσθετα μπλοκς (π.χ. ABABA και ABABAA). Τα ίδια λάθη παρατηρήθηκαν και στις δραστηριότητες επέκτασης, ενώ τα παιδιά έτειναν να παρουσιάζουν περισσότερα λάθη στις δραστηριότητες επέκτασης από ότι στις δραστηριότητες αντιγραφής.

Όπως έχει προαναφερθεί πολλοί είναι οι ερευνητές (Fuchs et al., 2012; Lee et al., 2011; Mulligan & Mitchelmore, 2009; Whitin & Whitin, 2011) που τονίζουν ότι η ενασχόληση των παιδιών με έργα μοτίβων αποτελεί τη βάση για τη μετέπειτα ανάπτυξη του αλγεβρικού συλλογισμού γιατί παρέχει δυνατότητες στα παιδιά να αναπτύξουν τη συσχεσιακή σκέψη (relational thinking) και να διαμορφώνουν γενικεύσεις. Στο πλαίσιο των οπτικών επαναλαμβανόμενων μοτίβων, η συσχεσιακή σκέψη, αναφέρεται στον τρόπο με τον οποίο τα στοιχεία ενός μοτίβου συνδυάζονται ώστε να δημιουργούν την μονάδα επανάληψης (π.χ. σε ένα μοτίβο της μορφής ABAB, τα στοιχεία A και B σχηματίζουν τη μονάδα επανάληψης), στον τρόπο που δύο μονάδες σε ένα μοτίβο έχουν την ίδια δομή (π.χ. το μοτίβο ABAB σχηματίζεται μέσω επανάληψης της ίδιας μονάδας AB) και πώς η ίδια μονάδα μπορεί να αναπαρίσταται με διαφορετικά υλικά (π.χ. κύκλος, τετράγωνο, κύκλος, τετράγωνο και μπλε, κόκκινο, μπλε, κόκκινο είναι μοτίβα της μορφής AB). Σε έρευνα των Collins και Laskis (2015) σχετικά με τον τρόπο προσέγγισης των μοτίβων, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι ενώ τα έργα θα μπορούσαν να λυθούν χρησιμοποιώντας στρατηγικές που εστιάζουν στον εντοπισμό σχέσεων, η επίλυση της πλειοψηφίας των έργων αυτών έγινε χρησιμοποιώντας μία στρατηγική αντιστοίχισης η οποία βασίστηκε σε οπτικά ή σε επιφανειακά χαρακτηριστικά χωρίς να δίνεται οποιαδήποτε έμφαση στη διερεύνηση της δομής των μοτίβων αυτών (Collins & Laskis, 2015). Τα αποτελέσματα αυτά εισηγούνται ότι η αναγνώριση και η ανάλυση της βασικής μονάδας ενός επαναλαμβανόμενου μοτίβου είναι μια δύσκολη διαδικασία για τους μαθητές προσχολικής ηλικίας, ενώ η ανάλυση των γνωστικών απαιτήσεων των έργων επαναλαμβανόμενων μοτίβων όπως επίσης και οι προσεγγίσεις που χρησιμοποιούν οι μαθητές μπορούν να παρέχουν σημαντικές πληροφορίες σχετικά με τον τρόπο που μπορούμε να αναπτύξουμε την ικανότητα των παιδιών όσον αφορά την έννοια των επαναλαμβανόμενων μοτίβων (Collins & Laskis, 2015).



Παρά τις δυσκολίες των παιδιών προσχολικής ηλικίας σε σχέση με τα επαναλαμβανόμενα μοτίβα οι οποίες προαναφέρθηκαν, υπάρχουν ενθαρρυντικά αποτελέσματα (Blanton & Kaput, 2004; Blanton & Kaput, 2011; Warren, 2005) για την ικανότητα των μικρότερα ηλικιακά μαθητών κατά την επίλυση έργων με αναπτυσσόμενα μοτίβα. Συγκεκριμένα, η Warren (2005) παρέχει στοιχεία για την ικανότητα μαθητών ηλικίας 9 ετών να σκέφτονται συσχεσιακά για τα δεδομένα που παρουσιάζονται σε αναπτυσσόμενα μοτίβα κάτι που η Blanton και Kaput (2004) είχαν εντοπίσει ήδη σε πολύ μικρότερα παιδιά. Συγκεκριμένα οι Blanton και Kaput (2004) εντόπισαν ότι ακόμη και από την προσχολική ηλικία, οι μαθητές μπορούν να σκέφτονται για το πώς δύο ποσότητες συνμεταβάλλονται (π.χ. «κάθε φορά που προσθέτουμε ακόμη ένα σκύλο έχουμε δύο ακόμη μάτια») και από την Α' τάξη του δημοτικού, μπορούν να περιγράφουν τη σχέση αντιστοίχισης (correspondence relationship). Ωστόσο, σημαντικά είναι και τα αποτελέσματα παλαιότερων ερευνών που υποδεικνύουν ότι αρκετοί μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες όσον αφορά την αντιμετώπιση των μοτίβων ως συναρτήσεις (Redden, 1996; Stacey & MacGregor, 1995; Warren, 1996, 2000). Αυτές οι δυσκολίες αφορούν στη μη κατάλληλη χρήση λεκτικών περιγραφών για την περιγραφή της σχέσης, στην τάση χρήσης προσθετικής στρατηγικής για την περιγραφή μίας γενίκευσης (εστίαση σε ένα σύνολο δεδομένων) καθώς και στην αδυναμία για χωρική οπτικοποίηση ή συμπλήρωση μοτίβων (Warren, 2000). Παρόμοια τα αποτελέσματα της έρευνας της Warren (2005) έδειξαν ότι, σχεδόν μισά από τα παιδιά που συμμετείχαν στην έρευνα, δεν ήταν σε θέση να συμπληρώσουν το επόμενο βήμα σε απλά αναπτυσσόμενα μοτίβα αλλά ούτε και να δημιουργήσουν τα δικά τους αναπτυσσόμενα μοτίβα. Αυτό, σύμφωνα με τη Warren (2005), πιθανό να οφείλεται σε περιορισμένες εμπειρίες με αναπτυσσόμενα μοτίβα που είχαν οι μαθητές σε μικρότερη ηλικία, δεδομένου ότι κατά την προσχολική ηλικία τα αναλυτικά προγράμματα δίνουν έμφαση κυρίως στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα.

### **Επεξεργασία και κατασκευή αναπαραστάσεων κατά την επίλυση έργων που εμπλέκουν την έννοια του Αριθμού και των Μοτίβων**

Ιδιαίτερη έμφαση φαίνεται να έχει δοθεί από πολλούς ερευνητές στην έννοια των αναπαραστάσεων από τη στιγμή που το Εθνικό Συμβούλιο Δασκάλων των Μαθηματικών της Αμερικής (NCTM, 2000) έχει συμπεριλάβει τις αναπαραστάσεις στις βασικές διαδικασίες και έχει επισημάνει το σημαντικό τους ρόλο τόσο στη διδασκαλία όσο και στη μάθηση των μαθηματικών εννοιών. Ο τρόπος με τον οποίο αναπαρίστανται οι

μαθηματικές έννοιες φαίνεται να επηρεάζει τον τρόπο με τον οποίο τα παιδιά κατανοούν και χρησιμοποιούν τις συγκεκριμένες ιδέες (NCTM, 2000). Ο όρος αναπαραστάσεις, αναφέρεται σε εικόνες, διαγράμματα, πραγματικά αντικείμενα, ψηφιακά χειριστικά αντικείμενα καθώς και γραπτά σύμβολα. Σύμφωνα με το NCTM (2000) οι μαθητές από το νηπιαγωγείο είναι σε θέση να αποκτήσουν την ικανότητα να δημιουργούν και να χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις, να επιλέγουν, να εφαρμόζουν και να μεταφράζουν μαθηματικές αναπαραστάσεις ώστε να επιλύουν προβλήματα και να χρησιμοποιούν τις αναπαραστάσεις για να ερμηνεύουν μαθηματικές ιδέες.

Οι αναπαραστάσεις, θεωρούνται ως ένα μέσο επίτευξης της εννοιολογικής κατανόησης. Η ικανότητα για ευέλικτη μετάβαση μεταξύ διαφορετικών ειδών αναπαράστασης της ίδιας έννοιας αποτελεί ένδειξη εννοιολογικής κατανόησης όπως επίσης και στόχο της διδασκαλίας (Lesh, Post, & Behr 1987). Έρευνα που έχει πραγματοποιηθεί σε τριάντα μαθητές ηλικίας 5 έως 6 ετών με στόχο να διερευνηθεί η ικανότητα των παιδιών για μετάφραση των αριθμητικών λέξεων στη συμβολική τους μορφή και σε χειριστικές αναπαραστάσεις, έδειξε ότι υπάρχουν παιδιά που είναι ικανά να μεταβαίνουν ευέλικτα από μια μορφή αναπαράστασης σε άλλη (Ayub, Ghazali, Othman, 2013).

Ο Bruner (1966) ανέπτυξε μία θεωρία όσον αφορά τη μάθηση μέσω των αναπαραστάσεων. Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή, σε κάθε φάση ανάπτυξης του παιδιού, η γνώση αποκτάται μέσω διαφορετικών ειδών αναπαράστασης. Συγκεκριμένα, αρχικά τα παιδιά μαθαίνουν μέσω ενεργητικών (enactive) ή έμπρακτων αναπαραστάσεων, δηλαδή μέσω φυσικών κινήσεων. Αυτές οι αναπαραστάσεις χαρακτηρίζονται από φυσική δράση πάνω στα ίδια τα αντικείμενα του πραγματικού κόσμου. Στη συνέχεια δίνει περισσότερη έμφαση στις εικονικές αναπαραστάσεις (iconic) οι οποίες είναι σε θέση να αντιπροσωπεύουν μία έννοια χωρίς ωστόσο να την ορίζουν πλήρως (Bruner, 1966). Τελικά, η μάθηση στηρίζεται κυρίως σε σύμβολα και στις «συμβολικές αναπαραστάσεις». Οι συμβολικές αναπαραστάσεις δεν έχουν αναλογική σχέση με αυτό που αναπαριστούν και χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση σχέσεων με αφηρημένα σύμβολα. Η συγκεκριμένη θεωρία του Bruner (1966), δείχνει τη σταδιακή μετάβαση των παιδιών από τις συγκεκριμένες έννοιες στην κατάκτηση πιο αφηρημένων εννοιών. Καθώς εξελίσσεται η συγκεκριμένη διαδικασία από το πραγματικό στο αφηρημένο επίπεδο, επιτυγχάνεται ένα είδος γενίκευσης. Ο Kilpatrick και οι συνεργάτες του (2001) έχουν περιγράψει αυτή την εξέλιξη αναφέροντας ότι τα παιδιά που μεταβαίνουν από τα πραγματικά σενάρια, στη

χρήση εικονικών και τελικά συμβολικών αναπαραστάσεων, είναι σε θέση να οικοδομήσουν την εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών ιδεών.

Παρόμοια, οι Steffe και Cobb (1988) έχουν προτείνει ότι η μαθηματική σκέψη ξεκινά από μία ανάγκη για χρήση των πραξιακών αναπαραστάσεων καθώς και κινήσεων που προκύπτουν από την αντίληψη και καταλήγει σε νοερά αντικείμενα ή ενέργειες (έννοιες που προκύπτουν ανεξάρτητα από την αντίληψη). Κατά συνέπεια η διαδικασία διδασκαλίας θα πρέπει να ξεκινά με συγκεκριμένες εμπειρίες οι οποίες να περιλαμβάνουν τη χρήση χειριστικών μέσων ή αντικειμένων, δημιουργώντας αυτό που οι ίδιοι ονόμασαν «μυϊκή μνήμη» (Steffe & Cobb, 1988). Τα χειριστικά μέσα με προσθετική αξία στη διδασκαλία, είναι τα εργαλεία που βοηθούν τους μαθητές στην οικοδόμηση, την ενίσχυση και τη σύνδεση διάφορων αναπαραστάσεων των μαθηματικών ιδεών. Επιπρόσθετα, τα χειριστικά αντικείμενα δε χρειάζεται κατ' ανάγκη να είναι φυσικά αντικείμενα. Μπορεί να υπάρχουν στην οθόνη ενός υπολογιστή ή μίας ταμπλέτας και μπορεί να είναι εξίσου χρήσιμα όπως και τα φυσικά, γιατί οι μαθητές μπορούν να τα χειριστούν (Olivito & Martinovic, 2017).

Ωστόσο, οι Sarama και Clements (2016) προειδοποιούν τους εκπαιδευτικούς, ότι τα χειριστικά μέσα δεν πρέπει να χρησιμοποιούνται ως παιχνίδια αλλά ως εργαλεία σκέψης δεδομένου ότι έρευνες οι οποίες διερεύνησαν την επίδραση της χρήσης των χειριστικών μέσων, φαίνεται να παρουσιάζουν αντικρουόμενα αποτελέσματα όσον αφορά τη συνεισφορά τους στην εκπαιδευτική διαδικασία. Συγκεκριμένα κάποια αποτελέσματα φαίνεται να υποστηρίζουν ότι οι αναπαραστάσεις μπορούν να ενισχύσουν τη διδασκαλία και άλλες να αναφέρουν ότι τη δυσχεραίνουν. Όπως αναφέρουν οι Sarama & Clements (2016) η επίδοση μαθητών που χρησιμοποίησαν χειριστικά μέσα ήταν χαμηλότερη σε σχέση με τους μαθητές που δεν χρησιμοποίησαν τα χειριστικά μέσα. Επιπρόσθετα, σε έρευνα των Hiebert και Wearne (1992) ένας μαθητής ο οποίος εργαζόταν στην έννοια της αξίας θέσης ψηφίου με απομονωμένα κυβάρια και συνδεδεμένα κυβάρια σε δεκάδα, χρησιμοποίησε το ένα κυβάρια ως δέκα και τη δέσμη με κυβάρια (με δέκα κυβάρια σε αυτή) ως ένα. Αυτό, μπορεί να συμβαίνει γιατί τα παιδιά κάποιες φορές μαθαίνουν να χρησιμοποιούν τα χειριστικά μέσα με ένα μοναδικό τρόπο χωρίς να υπάρχει ευελιξία στον τρόπο χρήσης τους. Επιπρόσθετα, όπως υποστηρίζουν οι Sarama και Clements (2016) πολλές φορές η διδασκαλία φαίνεται να αδυνατεί να συνδέσει τις αναπαραστάσεις που έχουν τα παιδιά που χρησιμοποιούν τα χειριστικά μέσα, με αυτές που βασίζονται στο χαρτί και στο μολύβι. Καταλήγοντας, υποστηρίζουν ότι όσο τα μαθηματικά σύμβολα μαθαίνονται με ένα συγκεκριμένο και μοναδικό τρόπο, τα χειριστικά μέσα δεν μπορούν να

διασφαλίσουν την εννοιολογική κατανόηση. Τα παιδιά μπορεί να χρειάζεται να έχουν στην διάθεσή τους χειριστικά μέσα ώστε να οικοδομήσουν τις αρχικές τους ιδέες, ωστόσο για να μπορεί να επιτευχθεί αυτό θα πρέπει να αναστοχάζονται στις πράξεις που εκτελούν με τη χρήση των συγκεκριμένων μέσων (Clements, 1999).

Όσον αφορά τη δεύτερη κατηγοριοποίηση των αναπαραστάσεων σύμφωνα με τη θεωρία του Bruner (1966), τις εικονικές αναπαραστάσεις, οι ερευνητές φαίνεται να έχουν διακρίνει περαιτέρω τις οπτικές αναπαραστάσεις σε δύο κατηγορίες: τις εικονικές και τις σχηματικές αναπαραστάσεις. Οι εικονικές αναπαραστάσεις αποτελούν ζωγραφιές των αντικειμένων, με συγκεκριμένες λεπτομέρειες και χρώμα, ενώ οι σχηματικές αναπαραστάσεις αποτελούν διαγράμματα που παρουσιάζουν τις χωρικές σχέσεις μεταξύ των μερών του προβλήματος (Hegarty & Kozhevnikov, 1999). Η ανάλυση των οπτικών αναπαραστάσεων των μαθητών έδειξε ότι οι επιτυχημένοι λύτες μαθηματικών προβλημάτων τείνουν να χρησιμοποιούν σχηματικές αναπαραστάσεις, ενώ οι μαθητές που δυσκολεύονται στην επίλυση προβλημάτων φαίνεται να δημιουργούν εικονικές αναπαραστάσεις με αποτέλεσμα να καταλήγουν σε λανθασμένες απαντήσεις (Guoliang, 2003; Hegarty & Kozhevnikov, 1999; van Garderen & Montague, 2003). Αντίστοιχα, όπως επισημαίνει η Mulligan (2002) οι αδύνατοι μαθητές τείνουν συστηματικά να δημιουργούν «φτωχές» εικονικές αναπαραστάσεις οι οποίες στερούνται δομής, ενώ οι επιτυχημένοι μαθητές χρησιμοποιούν αφηρημένη σημειογραφία που χαρακτηρίζεται από καλή οργάνωση και δομή.

Μια ακόμη ισχυρή μορφή οπτικής αναπαράστασης η οποία ενισχύει την κατανόηση των παιδιών για έννοιες που σχετίζονται με τους αριθμούς είναι και η αριθμητική γραμμή (Gersten et al., 2009). Η σημαντική συνεισφορά της αριθμητικής γραμμής, έγκειται στο γεγονός ότι μπορεί να παρέχει ένα απλό τρόπο για την αναπαράσταση μαθηματικών εννοιών (Skoumpourdi, 2010). Αποτελεί μία οπτική αναπαράσταση στην οποία παρουσιάζεται η διάταξη αλλά και το μέγεθος των αριθμών. Με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής, οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν τις διατακτικές σχέσεις μεταξύ των αριθμών διαπιστώνοντας ότι κάθε αριθμός έχει συγκεκριμένη θέση πάνω σε αυτήν όπως επίσης και ότι αριθμοί οι οποίοι έπονται ενός αριθμού, τοποθετούνται σε αυτή με συγκεκριμένο τρόπο. Επιπρόσθετα, καθώς οι μαθητές κατανοούν ότι οι αριθμοί αναπαριστούν μία απόσταση ή μία ποσότητα από το 0, μαθαίνουν για την πληθικότητα του αριθμού. Τέλος, καθώς οι μαθητές μαθαίνουν ότι κάθε ίσο διάστημα στην αριθμητική γραμμή αναπαριστά μία συγκεκριμένη μονάδα, μπορούν να επεκτείνουν τις δεξιότητες αρίθμησης τους από (α) την απαρίθμηση ενός αριθμού αντικειμένων ενός συνόλου στη (β)

μέτρηση μονάδων μήκους (Van de Walle, Karp, & Bay-Williams, 2012). Μαθαίνοντας αυτές τις έννοιες και δεξιότητες μέσω της ενασχόλησης με την αριθμητική γραμμή, οι μαθητές μπορεί να αναπτύξουν νοερές αναπαραστάσεις όσον αφορά τη διάταξη και το μέγεθος των αριθμών και να τις χρησιμοποιήσουν ώστε να κάνουν συγκρίσεις, να κατανοήσουν την αξία θέσης ψηφίου και να μοντελοποιήσουν τις αριθμητικές πράξεις (Diezmann & Lowrie, 2006). Όπως υποστηρίζουν οι Engel, Claessens και Finch (2013), η στοχευμένη ενασχόληση με τις αριθμητικές γραμμές κατά την μαθηματική διαδικασία στις μικρές τάξεις, μπορεί να βοηθήσει στην εννοιολογική ανάπτυξη πιο αφηρημένων εννοιών ακόμη και από το νηπιαγωγείο. Συγκεκριμένα οι Woods, Geller και Basaraba (2018) αναφέρουν ότι η αριθμητική γραμμή μπορεί να παρέχει ένα σημαντικό σύνδεσμο μεταξύ των χειριστικών αναπαραστάσεων των πρώιμων μαθηματικών εννοιών και της πιο αφηρημένης μαθηματικής γραφής.

Η πιο αφηρημένη μορφή μαθηματικής γραφής με την οποία έρχονται σε επαφή μικρότεροι ηλικιακά μαθητές, εμπλέκει τα σύμβολα των αριθμών ή και τα σύμβολα των πράξεων και της ισότητας. Η δεξιότητα αναγνώρισης συμβόλων των αριθμών αποτελεί βασική επιδίωξη από το νηπιαγωγείο ώστε τα παιδιά να είναι σε θέση να αναγνωρίζουν τη συμβολική αναπαράσταση των αριθμών (Zhou, Wang, Wang & Wang, 2006). Η επιδίωξη αυτού του σκοπού γίνεται σταδιακά μέσα από δραστηριότητες αντιστοίχισης ενός γραπτού αριθμητικού συμβόλου με μία διάταξη αντικειμένων ή μία εικόνα.

Το «*Williams Maths Review*» (DCSF, 2008) υπογραμμίζει την ανάγκη για τη δημιουργία μαθησιακών περιβαλλόντων τα οποία να ενθαρρύνουν τα παιδιά να επιλέγουν τα δικά τους «μαθηματικά γραφικά» ώστε να υποστηρίξουν τη μαθηματική σκέψη και τις διαδικασίες. Ο όρος «μαθηματικά γραφικά» αναφέρεται στις οπτικές αναπαραστάσεις που τα μικρά παιδιά επιλέγουν να χρησιμοποιούν ώστε να διερευνούν μαθηματικές ιδέες και να επεξηγούν τον τρόπο σκέψης τους. Τα διαφορετικά είδη αναπαραστάσεων που προαναφέρθηκαν αξιοποιούνται σε διαφορετικό βαθμό από τα παιδιά μικρότερων ηλικιών ανάλογα με το βαθμό ετοιμότητάς τους, χωρίς να σημαίνει ότι παιδιά ίδιας ηλικίας θα προτιμήσουν, θα επεξεργαστούν ή θα αξιοποιήσουν την ίδια μορφή αναπαράστασης κατά την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος. Αυτή η εξέλιξη στη χρήση, επεξεργασία και κατασκευή αναπαραστάσεων από μέρους των παιδιών, εμφανίζεται και στις περιπτώσεις όπου καλούνται να εκτελέσουν πράξεις όπως για παράδειγμα την πρόσθεση. Συγκεκριμένα όπως αναφέρουν οι Carruthers και Worthington (2011) σε μία τάξη η δασκάλα ζήτησε από τα παιδιά να επιλέξουν μικρές ποσότητες από σταφύλια, να τις τοποθετήσουν σε διαφορετικά πιάτα και να προσπαθήσουν να εντοπίσουν πόσα ήταν όλα τα σταφύλια μαζί.

Ένας μαθητής επέλεξε να χρησιμοποιήσει το χαρτί και να ζωγραφίσει δύο διαφορετικά σύνολα από σταφύλια αφήνοντας ένα κενό μεταξύ ώστε να μπορεί κάποιος να το αναγνωρίσει ως 4 και 3. Έγραψε τους αριθμούς πάνω από κάθε ομάδα και τους ένωσε με το τελικό αποτέλεσμα 7. Δεδομένου ότι ο μαθητής παρουσίασε τον τρόπο σκέψης του όπως ο ίδιος επιθυμούσε, οι υπολογισμοί που είχε κάνει ήταν για τον ίδιο κατανοητοί. Δύο άλλα παιδιά επέλεξαν να κάνουν τους υπολογισμούς νοερά, ενώ κάποια άλλα παιδιά επέλεξαν να διερευνήσουν τις ιδέες τους στο χαρτί, συνδυάζοντας νοερούς υπολογισμούς και γραπτές μεθόδους. Χρησιμοποίησαν μία ποικιλία από ατομικά γραφικά τα οποία περιλάμβαναν λέξεις, αριθμούς, σχέδια καθώς και μαθηματικά σύμβολα τα οποία είχαν οι ίδιοι επινοήσει και κατάφεραν να δημιουργήσουν τις δικές τους συνδέσεις, βασιζόμενοι στις προϋπάρχουσες τους γνώσεις όσον αφορά τα αριθμητικά σύμβολα. Κατά συνέπεια, όταν δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να επιλέγουν οι ίδιοι τα μαθηματικά γραφικά που επιθυμούν, αυτό πιθανό να συνεπάγεται ενίσχυση των μαθηματικών τους διαδικασιών (DFES, 2006).

### **Επεξεργασία και χρήση των δεδομένων κατά την επίλυση έργων που εμπλέκουν την έννοια του Αριθμού και των Μοτίβων**

Η διαδικασία επίλυσης προβλήματος, αποτελεί μία σύνθετη διαδικασία και προϋποθέτει το συνδυασμό πολλών δεξιοτήτων μαζί. Η ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης προβλήματος είναι ένας από τους σημαντικότερους στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης και στηρίζει επίσης, την ανάπτυξη κι άλλων μαθηματικών ικανοτήτων, όπως την αντίληψη πληροφοριών και δεδομένων (Τζεκάκη, 2017). Σύμφωνα με τους van Bommel και Palme (2015), η επίλυση προβλήματος ορίζεται ως η κατανόηση του προβλήματος, η ικανότητα για αποκωδικοποίηση των δοσμένων δεδομένων και μη δοσμένων καθώς και η επιλογή κατάλληλων στρατηγικών που μπορούν να οδηγήσουν στην επίλυση του προβλήματος. Πολλοί ερευνητές (π.χ. Artzt & Armour - Thomas, 1992; Goos, Galbraith and Renshaw, 2000; Mayer, 1985; Polya, 1957) τονίζουν τη σημασία του πρώτου βήματος της διαδικασίας επίλυσης προβλήματος, δηλαδή την κατανόηση του προβλήματος και την επιλογή των κατάλληλων δεδομένων του προβλήματος. Για να είναι σε θέση να κατανοήσει ένας μαθητής ένα μαθηματικό πρόβλημα, θα πρέπει να μπορεί να διακρίνει και να επιλέξει τα δεδομένα που μπορούν να τον οδηγήσουν στην λύση από άλλες πληροφορίες που δεν σχετίζονται με την επίλυσή του. Όταν οι μαθητές δεν είναι σε θέση

να εντοπίσουν και να συγκεντρώσουν τα σημαντικά δεδομένα του προβλήματος, τότε οδηγούνται σε λανθασμένες απαντήσεις.

Ως εκ τούτου, η αντίληψη/κατανόηση, σύνδεση ή συσχέτιση των στοιχείων ενός προβλήματος, σύμφωνα με τα στάδια επίλυσης ενός προβλήματος που προτείνει ο Polya (1957), είναι απαραίτητα για την ορθή επίλυσή του. Μια από τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος, αφορά στο περιεχόμενο των μαθηματικών προβλημάτων και συγκεκριμένα στην αντίληψη του περιεχομένου του προβλήματος (κυρίως όταν παρουσιάζεται μόνο λεκτικά), στην αντίληψη των στοιχείων του προβλήματος που χρειάζονται διερεύνηση και στην αποτυχία να τα συνδέσουν ώστε να οδηγηθούν στην ανάπτυξη ενός σχεδίου επίλυσης (Τζεκάκη, 2007). Ερευνητικά αποτελέσματα (Mayer, 1985, αναφέρεται στην Τζεκάκη 2017) υποδεικνύουν ότι η δυσκολία κατανόησης των δεδομένων και των σχέσεων ενός προβλήματος, βελτιώνεται με την ηλικία καθώς και με την αξιοποίηση εξωτερικών αναπαραστάσεων, διαγραμμάτων, τη διάκριση των δεδομένων κλπ. Συγκεκριμένα όμως, έχει διαπιστωθεί ότι αν και στα λεκτικά αριθμητικά προβλήματα, η χρήση παραστατικών ή συμβολικών μέσων (οπτικοποίηση), διευκολύνει τα παιδιά να αντιληφθούν το περιεχόμενο του προβλήματος, μπορεί οι μαθητές να εντοπίσουν στο σχήμα άλλα στοιχεία ή να δώσουν σημασία σε άσχετες πληροφορίες ή να το αντιληφθούν με διαφορετικό τρόπο και δεν το αντιστοιχούν με το λεκτικό πρόβλημα (Ιατροπούλου, 2009). Τα αποτελέσματα της εργασίας της Παπαδοπούλου (2018) έδειξαν ότι τόσο πριν την διδακτική παρέμβαση όσο και μετά την παρέμβαση τα παιδιά προσχολικής ηλικίας δεν αναπαριστούσαν γραφικά τα δεδομένα του προβλήματος στο στάδιο της κατανόησης του προβλήματος, ενδεχομένως λόγω του ότι πριν την παρέμβαση δεν είχαν την απαιτούμενη γνώση αλλά και λόγω του ότι δεν δόθηκε ιδιαίτερη βαρύτητα σε αυτό κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης. Ωστόσο, τα αποτελέσματα παρείχαν ενδείξεις ότι μετά από συμμετοχή σε κατάλληλη διδασκαλία, τα παιδιά προσχολικής ηλικίας μπορούσαν να ανακαλέσουν λεκτικά ένα πρόβλημα, να αναφέρουν σωστά τα δεδομένα του προβλήματος και να προσδιορίσουν σωστά το ζητούμενο (Παπαδοπούλου, 2018).

Η εργασία της Ιατροπούλου (2009) εστίασε στην έρευνα για τη βελτίωση των ικανοτήτων των παιδιών της προσχολικής ηλικίας, να λύνουν προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης και εξέτασε τις ικανότητες των μικρών παιδιών να αντιληφθούν τα στοιχεία του προβλήματος και να τα συνδέσουν έτσι ώστε να επινοήσουν ένα σχέδιο επίλυσης. Αυτό πραγματοποιήθηκε με την παρουσίαση τριών, αυξανόμενης δυσκολίας, λεκτικών προβλημάτων και τριών αφηγηματικών. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι όσον αφορά στην

κατανόηση των δεδομένων, τα παιδιά αντιλαμβάνονταν καλύτερα τα στοιχεία του προβλήματος στα προβλήματα αφήγησης ιστοριών από ότι στα λεκτικά προβλήματα και όπως αναφέρει παρατηρήθηκε βελτίωση στην ικανότητα ανάπτυξης ενός σχεδίου επίλυσης μέσα από τα αφηγηματικά προβλήματα, αρχικά γιατί απομακρυνόταν το ενδεχόμενο να εστιάζουν σε δευτερεύοντα για τη λύση στοιχεία του προβλήματος (Τζεκάκη, 2007). Οι διαφορές στην κατανόηση του στόχου δεν ήταν μεγάλες μεταξύ των αφηγηματικών και των λεκτικών προβλημάτων. Όσον αφορά στα λεκτικά προβλήματα, φάνηκε ότι τα παιδιά που δεν θυμούνταν τις πληροφορίες, συνήθως δεν προσπαθούσαν να λύσουν το πρόβλημα ή έδιναν τυχαίες απαντήσεις οι οποίες ελέγχονταν από το αποτέλεσμα και από τις ερωτήσεις του ερευνητή. Εντοπίστηκε επίσης, ότι στα λεκτικά προβλήματα η ανάκληση λεκτικών – αριθμητικών πληροφοριών και η κατανόηση του στόχου, συνδεόταν με το βαθμό δυσκολίας του προβλήματος, αφού όσο αυξανόταν ο βαθμός δυσκολίας του, λιγότερα παιδιά θυμούνταν τις πληροφορίες και κατανοούσαν το στόχο (Ιατροπούλου, 2009). Όσον αφορά στην αντίληψη των στοιχείων του προβλήματος από την πλευρά του βαθμού δυσκολίας και της σημασιολογικής του δομής, δεν φάνηκαν διαφορές στα αφηγηματικά προβλήματα ως προς την κατανόηση των πληροφοριών ούτε ως προς την κατανόηση του στόχου (Ιατροπούλου, 2019).

Οι Mulbar, Rahman και Ahmar (2017) διεξήγαγαν έρευνα με στόχο να διερευνήσουν την ικανότητα φοιτητών να επεξεργάζονται τα δεδομένα κατά την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Ο Mulbar και οι συνεργάτες του (2017) ταξινόμησαν τα αποτελέσματα τους σε ένα από τα εξής πέντε επίπεδα (α) Αδόμητο: Οι φοιτητές χρησιμοποιούν λανθασμένα δεδομένα έτσι οι απαντήσεις που δίνουν είναι λανθασμένες ή άσχετες, (β) Μονοδομικό: Οι φοιτητές είναι σε θέση να επικεντρώσουν την προσοχή τους στο πρόβλημα, ωστόσο μπορούν να χρησιμοποιήσουν μόνο μία πληροφορία ή ένα μόνο σχετικό δεδομένο ώστε να επιλύσουν το πρόβλημα, (γ) Πολυδομικό: Οι φοιτητές είναι σε θέση να χρησιμοποιήσουν πολλαπλά δεδομένα ή πληροφορίες που σχετίζονται με την επίλυση του προβλήματος, ωστόσο δεν παρουσιάζεται οποιαδήποτε συσχέτιση ή σύνδεση μεταξύ των δεδομένων αυτών, (δ) Συσχετιστικό: οι φοιτητές μπορούν να χρησιμοποιούν πολλαπλά δεδομένα και είναι σε θέση να συνδέουν τα δεδομένα ή τις διαδικασίες ώστε να καταλήγουν σε σχετικά συμπεράσματα (ε) Εκτεταμένης αφαίρεσης: όπου οι φοιτητές είναι σε θέση να χρησιμοποιούν πολλαπλά δεδομένα/πληροφορίες και να εφαρμόζουν τις έννοιες/διαδικασίες. Στη συνέχεια, συνδέουν τα δεδομένα ή τις διαδικασίες ώστε να μπορούν να αντλήσουν συναφή συμπεράσματα και να γενικεύσουν τα αποτελέσματα.



## **Αιτιολογήσεις κατά την επίλυση έργων που εμπλέκουν την έννοια του Αριθμού και των Μοτίβων**

Οι αιτιολογήσεις που χρησιμοποιούν οι μαθητές ώστε να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους μπορεί να παρέχουν σημαντικές πληροφορίες στους εκπαιδευτικούς και να τους βοηθήσουν να κατανοήσουν το επίπεδο κατανόησής τους. Όσο πιο γρήγορα κατανοήσουν οι μαθητές της αναγκαιότητα να αιτιολογούν τις απαντήσεις τους, τόσο πιο γρήγορα θα φτάσουν στη διαπίστωση ότι τα μαθηματικά θα πρέπει να έχουν νόημα. Μεταξύ των βασικών πρακτικών που οι εκπαιδευτικοί σε όλες τις βαθμίδες πρέπει να επιδιώξουν να αναπτύξουν οι μαθητές τους είναι και η ικανότητα παροχής αιτιολογήσεων και η ικανότητα ανάπτυξης κατάλληλων ισχυρισμών (Common Core Standards State, 2010).

Ο Carpenter και οι συνεργάτες του (2003) αναφέρονται σε τρία επίπεδα αιτιολόγησης τα οποία χρησιμοποιούν οι μαθητές δημοτικού. Συγκεκριμένα, το πρώτο επίπεδο αιτιολόγησης, αναφέρεται στις περιπτώσεις όπου οι μαθητές επιλέγουν λόγους που δεν σχετίζονται με μαθηματικές αιτιολογήσεις αλλά βασίζονται στο τι άκουσαν από άλλα άτομα που έχουν κάποια εξουσία. Παραδείγματα αιτιολογήσεων που εμπίπτουν σε αυτή την κατηγορία είναι: «Το γνωρίζω γιατί μου το είπε η δασκάλα μου (ή οι γονείς μου)», «Το γνωρίζω επειδή το γράφει το βιβλίο». Εάν οι μαθητές συστηματικά καταφεύγουν σε τέτοιου είδους αιτιολογήσεις, τότε σύμφωνα με τον Carpenter και τους συνεργάτες του (2003) αυτό συνεπάγεται και αποφυγή της μαθηματικής αιτιολόγησης κάτι που αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της μαθηματικής κατανόησης. Το δεύτερο επίπεδο αιτιολόγησης, αναφέρεται στις αιτιολογήσεις με παραδείγματα όπου οι μαθητές για να αιτιολογήσουν την άποψή τους χρησιμοποιούν συγκεκριμένα αριθμητικά παραδείγματα. Οι μαθητές συνήθως δοκιμάζουν μερικά παραδείγματα ώστε να ελέγξουν την ορθότητα του ισχυρισμού τους και ισχυρίζονται ότι ο συλλογισμός τους ισχύει για όλες τις περιπτώσεις αριθμών. Για παράδειγμα όταν ρωτηθούν γιατί το άθροισμα δύο άρτιων αριθμών είναι ένας άρτιος αριθμός αναφέρουν: «Το άθροισμα δύο άρτιων αριθμών είναι πάντα άρτιος γιατί  $4+2=6$  και ο αριθμός 6 είναι ένας άρτιος αριθμός». Παρόλο που τα συγκεκριμένα αριθμητικά παραδείγματα μπορεί να είναι πολύ χρήσιμα στην προσπάθεια των μαθητών να ελέγξουν κατά πόσο ισχύει ο ισχυρισμός τους, δεν είναι αποδεκτά καθώς δεν μπορούν να αποδείξουν ότι βρίσκουν εφαρμογή σε όλες τις περιπτώσεις των αριθμών. Όπως υποστηρίζουν ο Carpenter και οι συνεργάτες του (2003), οι μαθητές μπορεί να καταφεύγουν σε αιτιολογήσεις που βασίζονται σε συγκεκριμένα παραδείγματα, επειδή δεν διαθέτουν τα απαραίτητα «εργαλεία» ώστε να προχωρήσουν ένα βήμα παραπέρα από τη χρήση τους. Κατά συνέπεια, μέσω της διδασκαλίας, οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να

βοηθήσουν τους μαθητές τους να αντιληφθούν τα μειονεκτήματα της χρήσης συγκεκριμένων αριθμητικών παραδειγμάτων και να προχωρήσουν σε πιο γενικευμένους ισχυρισμούς. Το τρίτο επίπεδο αιτιολόγησης, αναφέρεται στη χρήση γενικευμένων δηλώσεων. Στις συγκεκριμένες περιπτώσεις, οι μαθητές χρησιμοποιούν ένα γενικό επιχείρημα μέσω μιας λεκτικής, αριθμητικής ή συμβολικής αναπαράστασης ώστε να επεξηγήσουν γιατί η υπόθεσή τους ισχύει σε όλες τις περιπτώσεις. Για παράδειγμα στο παράδειγμα που έχει προαναφερθεί γιατί το άθροισμα δύο άρτιων αριθμών δίνει ένα άρτιο αριθμό, οι μαθητές που είναι σε θέση να χρησιμοποιήσουν μία γενικευμένη δήλωση, στηρίζονται στον ορισμό των άρτιων και περιττών αριθμών και αναφέρουν: « Το άθροισμα δύο άρτιων αριθμών είναι πάντα ένας άρτιος αριθμός, γιατί οι άρτιοι αριθμοί μπορούν να διαιρεθούν σε ζευγάρια χωρίς να αφήνουν οποιοδήποτε υπόλοιπο και αν προσθέσεις δύο αριθμούς που δεν αφήνουν υπόλοιπο τότε και το αποτέλεσμα δε θα έχει οποιοδήποτε υπόλοιπο».

Ο Hiebert και οι συνεργάτες του (1997) υποστηρίζουν ότι θα πρέπει να δίνονται ευκαιρίες στους μαθητές ώστε να λύνουν μαθηματικά προβλήματα σε συνεργασία και να μοιράζονται τον τρόπο σκέψης τους. Αυτό μπορεί να συμβάλει στη βελτίωση του επιπέδου αιτιολόγησης που είναι σε θέση να ενεργοποιούν. Η Payan (2017) σε έρευνα που έχει διεξάγει σε μαθητές προσχολικής ηλικίας, έδειξε ότι οι μαθητές οι οποίοι επί καθημερινής βάσεως συμμετείχαν σε προγράμματα τα οποία προέτρεπαν τους μαθητές να επεξηγούν και να μοιράζονται τον τρόπο σκέψης τους, βελτίωσαν τον προφορικό τους λόγο. Οι περισσότεροι μαθητές κατά την έναρξη της έρευνας, χρησιμοποιούσαν αιτιολογήσεις που βασίστηκαν σε επίκληση στην αυθεντία (το μυαλό μου μού το είπε» ή «άκουσα τη δασκάλα μου να το λέει») και επέδειξαν το χαμηλότερο επίπεδο κατανόησης. Μέχρι το τέλος της έρευνας, οι μαθητές της πειραματικής ομάδας, ήταν σε θέση να χρησιμοποιήσουν το επόμενο επίπεδο αιτιολόγησης, δηλαδή την αιτιολόγηση με παράδειγμα (Carpenter et al., 2003). Επιπρόσθετα, ήταν σε θέση να περιγράψουν και να επεξηγήσουν τον τρόπο σκέψης τους.

## **Ακρίβεια στην ορολογία κατά την επίλυση έργων που εμπλέκουν την έννοια των Αριθμών και των Μοτίβων**

Μια από τις οκτώ μαθηματικές πρακτικές των Common Core State Standards (2010), αποτελεί η ύπαρξη ακρίβειας η οποία εστιάζει στην ικανότητα των μαθητών να χρησιμοποιούν με ακρίβεια το λεξιλόγιο (την ορολογία) όταν εξηγούν τον συλλογισμό στον οποίο βασίστηκαν. Η γλώσσα των μαθηματικών, κυρίως το λεξιλόγιο και οι όροι, είναι απαραίτητα για την κατανόηση των προφορικών και γραπτών μορφών των μαθηματικών (Ernst-Slavit & Mason, 2011; Riccomini, Smith, Hughes, & Fries, 2015). Οι Hughes, Powel, και Stevens (2016) τονίζουν ότι η γλώσσα διαδραματίζει έναν πολύ σημαντικό ρόλο στην μάθηση των μαθηματικών.

Παρόλο που τα μαθηματικά σχετίζονται συνήθως με αριθμούς και αριθμητικά σύμβολα παρά με τη χρήση λεξιλογίου και της γλώσσας, η κατανόηση των συμβολικών αναπαραστάσεων, συμπεριλαμβανομένων και των λεκτικών αναπαραστάσεων αποτελεί βασικό μέρος της μαθηματικής γνώσης (Skemp, 1987). Μέσα από τη μάθηση των λέξεων για τους αριθμούς και τις μαθηματικές έννοιες, τα παιδιά καθίστανται ικανά να εξελίσσουν τις διαδικασίες της μαθηματικής τους σκέψης, πέρα από τις μη-συμβολικές αναπαραστάσεις (Mix, Huttenlocher, & Levine, 2002). Οι μαθηματικές λέξεις/όροι βοηθούν τους μαθητές να ανακαλύψουν ομοιότητες μεταξύ των αντικειμένων μαθαίνοντας τρόπους να περιγράφουν τις ιδιότητές τους, όπως αριθμό και μέγεθος (Sandhofer, & Smith, 1999). Για παράδειγμα, η κατανόηση και η κατάλληλη χρήση των λέξεων «μεγαλύτερο» και «μικρότερο» βοηθά τα παιδιά να εξηγήσουν τις σχέσεις μεταξύ δύο αριθμών, π.χ. το 7 είναι μεγαλύτερο από το 5, ενώ το 5 είναι μικρότερο από το 7. Τόσο η ορολογία των αριθμών/αριθμολέξεων όσο και λέξεις όπως «μεγαλύτερο», «μικρότερο», «προσθέτω», «αφαιρώ», «ισούται», βοηθούν τα παιδιά να κατανοήσουν και να περιγράψουν αριθμητικές σχέσεις και πράξεις (Jordan et al., 2010). Ερευνητικά αποτελέσματα δείχνουν ότι η χρήση της μαθηματικής συζήτησης (math talks) από μέρους των εκπαιδευτικών έχει θετική επίδραση στην μαθηματική εξέλιξη των παιδιών (Klibanoff, Levine, Huttenlocher, Vasilyeva & Hedges, 2006). Τα παιδιά ενδέχεται να γνωρίζουν ή να έχουν ακούσει αυτές τις μαθηματικές λέξεις που προαναφέρθηκαν σε μη-μαθηματικά πλαίσια, επομένως, είναι σημαντικό για αυτά να γνωρίσουν και να έρθουν σε επαφή με το μαθηματικό νόημα αυτών των λέξεων και εννοιών (Lansdell, 1999).

Σύμφωνα με τα Common Core State Standards (2010), οι μαθηματικά «επιτυχημένοι» μαθητές προσπαθούν να επικοινωνούν με τους άλλους με ακρίβεια. Αντίστοιχα, ερευνητές (Kleemans, Segers, Verhoeven, 2011; Schleppegrell, 2010)

τονίζουν ότι οι μαθητές που αντιμετωπίζουν αριθμητικές δυσκολίες νωρίς, σε πρώιμο στάδιο, παρουσιάζουν επίσης και δυσκολίες με την κατανόηση της μαθηματικής γλώσσας. Παρόλα αυτά, εκπαιδευτικές παρεμβάσεις στο νηπιαγωγείο και στην προδημοτική παρέχουν ενθαρρυντικά αποτελέσματα ως προς την παροχή βοήθειας σε όλα τα παιδιά ώστε να αναπτύξουν τις απαραίτητες δεξιότητες για την εκμάθηση του λεξιλογίου (Marulis & Neuman, 2010). Για παράδειγμα, οι Hassinger-Das, Jordan και Dyson (2015) διεξήγαγαν μια μελέτη στην οποία εξέτασαν κατά πόσο η παρέμβαση μέσω της ανάγνωσης παραμυθιού που στόχευε στο μαθηματικό λεξιλόγιο (όπως για παράδειγμα «ισούται», «μεγαλύτερο», «μικρότερο», «περισσότερα», «λιγότερα») καθώς και στις σχετικές αριθμητικές έννοιες, θα ενίσχυαν τη γνώση του λεξιλογίου των μαθητών που παρουσίαζαν κίνδυνο χαμηλής επίδοσης. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η ομάδα παιδιών που συμμετείχε στην συγκεκριμένη παρέμβαση ξεπέρασε τις υπόλοιπες ομάδες (που συμμετείχαν σε άλλες παρεμβάσεις) στη μέτρηση που αφορούσε στο μαθηματικό λεξιλόγιο, τόσο στην περίπτωση των λέξεων που ήταν άμεσα συνδεδεμένες (ήταν σε συνάφεια) με την παρέμβαση που προηγήθηκε όσο και σε αυτές που δεν ήταν άμεσα συνδεδεμένες με την παρέμβαση.

Στην περίπτωση των μοτίβων, η χρήση της κατάλληλης ορολογίας/λεξιλογίου και η ύπαρξη ακρίβειας από μέρους των παιδιών καθίσταται ακόμη πιο δύσκολη αν αναλογιστεί κανείς τα αποτελέσματα ερευνών όπως αυτή της Waters (2004) σύμφωνα με την οποία οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί έδειξαν περιορισμένη κατανόηση της «γλώσσας» και του λεξιλογίου που σχετίζεται με τα μοτίβα και δεν χρησιμοποιούσαν ένα συστηματικό ορισμό για τα μοτίβα. Τέτοιες παρατηρήσεις μπορεί να επισημάνει ακόμη και τώρα κάποιος όντας παρατηρητής διδασκαλιών σε μερικές τάξεις προδημοτικής στην Κύπρο. Υπάρχουν περιπτώσεις διδασκαλιών οι οποίες δεν παρέχουν τις προϋποθέσεις που χρειάζονται ώστε τα παιδιά να αναπτύξουν κατανόηση για το τι αποτελεί το «μοτίβο» και ο όρος μοτίβο και κατ' επέκταση να χρησιμοποιούν τον όρο αυτό και τις κατάλληλες περιγραφές και επεξηγήσεις όταν αναγνωρίζουν ένα μοτίβο. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να αναπτύξουν το μαθηματικό λεξιλόγιο, χρησιμοποιώντας οι ίδιοι την ορθή μαθηματική ορολογία (π.χ. μοτίβο, επανάληψη, στέλεχος) και ενθαρρύνοντας τους μαθητές να χρησιμοποιούν την κατάλληλη μαθηματική γλώσσα για να περιγράψουν τα μοτίβα (Ontario Ministry of Education, 2007). Ερευνητικά αποτελέσματα δείχνουν ότι οι επεξηγήσεις που παρέχονται από τους «ειδικούς», υποστηρίζουν και ενισχύουν την κατανόηση των μαθητών (Rittle-Johnson, Fyle, Loehr, & Miller, 2015). Στη βιβλιογραφία, προτείνεται επίσης, οι μαθητές να ενθαρρύνονται να επεξηγούν οι ίδιοι τα μοτίβα

χρησιμοποιώντας την δική τους «γλώσσα», μιας και φαίνεται ότι η παρακίνηση των μαθητών να παράγουν τις δικές τους επεξηγήσεις μπορεί να βελτιώσει τη μάθηση των μαθητών σε σχέση με τα μοτίβα (Rittle-Johnson, Saylor, & Swygart, 2008).

### **Γενικές περιγραφές της ανάπτυξης της σκέψης ή της μαθηματικής ικανότητας**

Πέραν όμως από τις περιγραφές της ανάπτυξης της ικανότητας των παιδιών σε σχέση με συγκεκριμένες πτυχές της έννοιας του αριθμού όπως προτάθηκαν από τους Sarama και Clements (2009) και που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο μέρος του θεωρητικού πλαισίου, στη βιβλιογραφία εντοπίζονται και πιο γενικές περιγραφές της ανάπτυξης της σκέψης ή της μαθηματικής ικανότητας των παιδιών. Οι περιγραφές αυτές προκύπτουν τόσο από το πεδίο της γνωστικής ψυχολογίας όσο και από το πεδίο της μαθηματικής παιδείας.

Αδιαμφισβήτητα, η ερευνητική δράση της γνωστικής ψυχολογίας, έχει συνεισφέρει σε μεγάλο βαθμό στο πεδίο της μαθηματικής παιδείας και συγκεκριμένα στην κατανόηση του τρόπου με τον οποίο τα μικρά παιδιά μαθαίνουν Μαθηματικά. Ο Piaget, αποτελεί έναν από τους πιο γνωστούς γνωστικούς ψυχολόγους, ο οποίος είναι γνωστός για την κονστρακτιβιστική προσέγγιση μάθησης την οποία υιοθέτησε. Μια από τις θεμελιώδεις πεποιθήσεις του Piaget είναι ότι τα μικρά παιδιά μαθαίνουν καλύτερα όταν τους παρέχονται ευκαιρίες να εξερευνήσουν και να αλληλεπιδράσουν με τον γύρω κόσμο, ενώ διακρίνει τρία είδη γνώσης: τη φυσική, τη λογική και την κοινωνικομαθηματική γνώση. Η φυσική γνώση περιλαμβάνει μάθηση μέσω των αισθήσεων και μπορεί να γίνει εφικτή μόνο μέσω της εξερεύνησης με τα χέρια ενώ η κοινωνική γνώση αναφέρεται στη γνώση, η οποία επιτυγχάνεται μέσω αλληλεπιδράσεων με άλλα άτομα. Σύμφωνα με τον Piaget η λογικομαθηματική γνώση είναι η γνώση όπου επιτυγχάνεται το μεγαλύτερο μέρος της μαθηματικής μάθησης. Πολλές μαθηματικές έννοιες είναι εσωτερικές, ωστόσο μέσα από αλληλεπιδράσεις με πραγματικά αντικείμενα αναπτύσσονται κατάλληλες συνδέσεις, με αποτέλεσμα να επιτυγχάνεται η γνώση και η κατανόηση. Η σημασία της χρήσης πραγματικών χειριστικών μέσων βασίζεται στη θεωρία του Piaget, η οποία υποστηρίζει ότι τα παιδιά για να κατακτήσουν θεμελιώδεις έννοιες που σχετίζονται με τους αριθμούς και την αίσθηση του αριθμού θα πρέπει να αλληλεπιδρούν με αντικείμενα (Moomaw, 2011). Η θεωρία του Piaget γίνεται γενικά αποδεκτή από τους εκπαιδευτικούς για πολλούς λόγους συμπεριλαμβανομένου ότι επικεντρώνεται στη μάθηση του παιδιού σε ένα πλούσιο περιβάλλον μέσα από το οποίο το παιδί μπορεί να αποκτήσει πλούσιες εμπειρίες. Στη

διαδικασία αυτή ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι καθοδηγητικός. Σύμφωνα με τον Piaget (1936) τα βασικά στάδια μέσα από τα οποία εξελίσσεται η μάθηση των παιδιών, αποτελούν σημαντικά εργαλεία για τους εκπαιδευτικούς ώστε να κατανοήσουν την εξέλιξη της μαθηματικής κατανόησης των παιδιών. Ωστόσο, πιο πρόσφατες έρευνες φαίνεται να θέτουν σημαντικά ερωτήματα όσον αφορά τα στάδια ανάπτυξης του Piaget και να αποδεικνύουν ότι τα παιδιά μικρότερων ηλικιών είναι περισσότερο ικανά, έχουν περισσότερες ικανότητες σε σχέση με τις ικανότητες που προτείνονται και είναι σε θέση να χειριστούν ποικιλία μαθηματικών εννοιών από μικρότερη ηλικία (Lee & Ginsburg, 2007; Sarama & Clements, 2014). Σύμφωνα με τις απόψεις του Piaget, τα παιδιά θα πρέπει να έχουν μία ισχυρή κατανόηση των μαθηματικών εννοιών πριν είναι σε θέση να κατανοήσουν τις διαδικασίες αρίθμησης. Οι Clements και Sarama (2014) υποστηρίζουν ότι αυτό, εν μέρει, είναι σωστό. Ωστόσο, θεωρούν ότι τα παιδιά είναι σε θέση να μάθουν πολύ περισσότερα όσον αφορά την αρίθμηση πριν ακόμη κατακτήσουν αυτές τις ιδέες. Επιπρόσθετα, υποστηρίζουν ότι οι διαδικασίες αρίθμησης μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν βασικές ιδέες στα μαθηματικά (Clements & Sarama, 2014).

Μία άλλη θεωρία που προκύπτει από τον τομέα της γνωστικής ψυχολογίας και που εν μέρει φαίνεται να υποστηρίζει τη θεωρία του Piaget είναι και η θεωρία γνωστικής ανάπτυξης του Vygotsky (1978). Η θεωρία του Vygotsky (1978) παρουσιάζει αρκετά κοινά με τη θεωρία του Piaget, δεδομένου ότι δίνει μεγάλη έμφαση στο παιχνίδι ως τον πιο σημαντικό τρόπο μάθησης των μικρών παιδιών (Moomaw, 2011). Ωστόσο, ο Vygotsky φαίνεται να δίνει έμφαση και στον τρόπο με τον οποίο οι κοινωνικές αλληλεπιδράσεις και πολιτισμικά στοιχεία συνεισφέρουν στη γνωστική ανάπτυξη του ατόμου και να εισάγει τον όρο *Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης*. Χρησιμοποιώντας τον όρο *Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης*, ο οποίος αντιστοιχεί στην απόσταση ανάμεσα στο πραγματικό αναπτυξιακό επίπεδο των μαθητών και στο επίπεδο δυνάμει ανάπτυξης όπως αυτό καθορίζεται από την επίλυση προβλημάτων κάτω από την καθοδήγηση των ενηλίκων ή σε συνεργασία με πιο ικανούς συνομήλικους, δίνει έμφαση στην κοινωνική οικοδόμηση της γνώσης.

Ωστόσο, όπως επισημαίνει ο Piaget, οι γνωστικές δεξιότητες των παιδιών αναπτύσσονται σταδιακά ενώ η ηλικία καθώς και η χρονική στιγμή κατά την οποία συμβαίνει αυτό παρουσιάζει διαφοροποιήσεις ανάλογα με το κάθε παιδί (Park, 2013). Επιπρόσθετα, γνωρίζουμε ότι η ηλικία κατά την οποία ένα παιδί είναι σε θέση να κατακτήσει συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες, επηρεάζεται σε σημαντικό βαθμό από τις εμπειρίες τις οποίες αποκτά (Clements & Sarama, 2014). Όλα τα παιδιά φαίνεται να

γεννιούνται με έμφυτη την ικανότητα της αρίθμησης, αλλά ακόμη και αυτό μπορεί να διαφέρει από παιδί σε παιδί. Η ηλικία κατά την οποία τα παιδιά αναπτύσσουν συγκεκριμένες πτυχές της αίσθησης του αριθμού, συχνά αναφέρεται στα μοντέλα ανάπτυξης των συγκεκριμένων δεξιοτήτων. Αποτελούν ωστόσο, μόνο προσεγγίσεις. Η απόκτηση αίσθησης για το που βρίσκονται οι αριθμητικές δεξιότητες του παιδιού βασίζεται στον εντοπισμό των εκπαιδευτικών τους αναγκών παρά στην διατύπωση κρίσεων με βάση την ηλικία.

Ένα άλλο μοντέλο το οποίο φαίνεται να βρίσκεται σε συμφωνία με τα στάδια ανάπτυξης του Piaget είναι και η ταξινομία SOLO (Structured of observed learning outcomes). Η ταξινομία αυτή αποτελεί ένα μοντέλο της γνωστικής ψυχολογίας που προτάθηκε από τους Biggs και Collins το 1982. Το μοντέλο αυτό εστιάζεται στις εσωτερικές διαδικασίες καθώς και στον τρόπο που οι μαθητές αντιμετωπίζουν ένα πρόβλημα. Το μοντέλο αυτό στηρίζει τις αρχές του στα στάδια ανάπτυξης του Piaget (Pegg, 2014). Κεντρικό στοιχείο της ταξινομίας του SOLO είναι η άποψη ότι υπάρχουν «φυσικά» στάδια στην ανάπτυξη της μάθησης οποιασδήποτε σύνθετης δεξιότητας. Επιπρόσθετα αυτά τα στάδια φαίνεται να είναι παρόμοια, αλλά να μην ταυτίζονται με τα αναπτυξιακά στάδια της σκέψης όπως προτείνονται από τον Piaget και τους συνεργάτες του (Biggs & Collis, 1982). Σύμφωνα με το μοντέλο SOLO, οι μαθητές οικοδομούν ενεργά τις γνώσεις τους, αξιοποιώντας προηγούμενες εμπειρίες και γνώσεις. Με αυτό τον τρόπο, μετακινούνται μεταξύ πέντε διαδοχικών σταδίων τα οποία διαφοροποιούνται με ποιοτικές διαφορές. Ωστόσο, σε αυτό που επικεντρώνονται οι εργασίες που αξιοποιούν την ταξινομία SOLO είναι στους κύκλους που εμφανίζονται σε καθένα από τα «πέντε είδη σκέψης». Σε κάθε είδος σκέψης εντοπίστηκαν διαφορετικά επίπεδα απαντήσεων μέσα από τα οποία διαμορφώθηκε ένας κύκλος επιπέδων γνωστός ως «Μονοδομικό – Πολυδομικό – Συσχετιστικό – ΜΠΣ» (Pegg & Tall, 2010). Κάθε απάντηση, εντάσσεται σε έναν από τα πέντε επίπεδα πολυπλοκότητας της ταξινομίας SOLO: (α) αδόμητη (prestructural), (β) Μονοδομική (Unistructural), (γ) Πολυδομική (Multistructural), (δ) Συσχετιστική (Relational) και (ε) Εκτεταμένης αφαίρεσης (Extended abstract). Στο πρώτο επίπεδο (αδόμητο), η απάντηση του μαθητή δεν έχει καμία σχέση με τα δεδομένα αλλά και την κατάσταση του προβλήματος ενώ στο δεύτερο επίπεδο (μονοδομικό), ο μαθητής φαίνεται να είναι σε θέση να επικεντρώνεται μόνο σε μία πληροφορία ή σχετικό δεδομένο του προβλήματος. Αντίστοιχα, στο τρίτο επίπεδο (πολυδομικό), ο μαθητής χρησιμοποιεί περισσότερες από μία έννοιες ή αρχές σε περισσότερα από ένα ή δύο δεδομένα του θέματος χωρίς ωστόσο να υπάρχει οποιαδήποτε συσχέτιση ή σύνδεση αυτών των

δεδομένων. Στο τέταρτο επίπεδο (συσχετιστικό), ο μαθητής έχει την ικανότητα να συνθέτει πληροφορίες και διαδικασίες και να κατανοεί πλήρως τις μεταξύ τους σχέσεις. Τέλος, στο πέμπτο επίπεδο (εκτεταμένη αφαίρεση), ο μαθητής είναι σε θέση να ενσωματώνει στην απάντησή του αφηρημένες και γενικές αρχές (Φιλίππου & Χρίστου, 2002).

### **Θεωρίες ανάπτυξης από το πεδίο της μαθηματικής παιδείας**

Πέραν όμως από τις θεωρίες που προέρχονται από τον τομέα της γνωστικής ανάπτυξης κι άλλες έρευνες από το πεδίο της μαθηματικής παιδείας φαίνεται να εστιάζονται στον τρόπο ανάπτυξης της σκέψης ή της μαθηματικής ικανότητας.

Μια άλλη ερμηνεία του συνεχούς από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο που προαναφέρθηκε στο μέρος που αφορά στην επεξεργασία των αναπαραστάσεων αποτελεί η μετάβαση - εξέλιξη από τη συγκεκριμένη σκέψη στην γενική σκέψη (specific to general thinking). Συγκεκριμένα, η Resnick (1992) ερμηνεύει την ανάπτυξη από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο ως την μετάβαση από συγκεκριμένες έννοιες (σε συγκεκριμένο πλαίσιο ή για συγκεκριμένο αντικείμενο) σε γενικές έννοιες (π.χ. γενικεύσεις που εφαρμόζονται ανεξαρτήτως πλαισίου). Με άλλα λόγια, η συγκεκριμένη γνώση, η οποία βασίζεται στις προσωπικές εμπειρίες του ατόμου, μπορεί να εφαρμοστεί σε γνωστές καταστάσεις, ενώ η αφηρημένη γνώση, η οποία βασίζεται στη γενίκευση, εφαρμόζεται σε άγνωστα προβλήματα καθώς επίσης και σε γνωστές καταστάσεις (Bisanz, Watchorn, Piatt, & Sherman, 2009; Prather & Alibali, 2009). Σύμφωνα με τη Resnick (1992) οι αρχικοί ποσοτικοί συλλογισμοί των παιδιών περιλαμβάνουν την κατανόηση ότι μία ποσότητα (π.χ. μία πίττα) μπορεί να χωριστεί σε δύο ή περισσότερα κομμάτια και ότι η σειρά με την οποία θα συνδυαστούν αυτά τα κομμάτια δεν έχει σημασία. Η Resnick υποστηρίζει ότι αυτού του είδους η κατανόηση εμπερικλείει πρωταρχικές ιδέες όσον αφορά την έννοια της αντιμεταθετικής και της προσεταιριστικής ιδιότητας. Καθώς τα παιδιά μαθαίνουν να μετρούν φυσικά αντικείμενα, αυτές οι πρωταρχικές αναπαραστάσεις σχέσεων διατηρούνται όμως τα παιδιά μαθαίνουν να τις εφαρμόζουν σε μετρήσιμα υλικά (π.χ. 3 μήλα + 5 μήλα = 5 μήλα + 3 μήλα). Παράλληλα, όπως υποστηρίζει η Resnick, καθώς οι αριθμοί απομακρύνονται από το πλαίσιο με το οποίο παρουσιάζονται, οι μαθητές αρχίζουν να κατανοούν βασικές αρχές των αριθμών (π.χ.  $3+5=5+3$ ). Αυτή η μορφή συλλογισμού, σύμφωνα με την ίδια, σταδιακά γίνεται πιο αφηρημένη. Αυτό το τελευταίο είδος συλλογισμού, περιλαμβάνει την αφηρημένη κατανόηση ότι αυτές οι αρχές αποτελούν γενικούς μαθηματικούς κανόνες.



Αυτό που η Resnick (1992) φαίνεται να ονομάζει γενίκευση, άλλοι ερευνητές φαίνεται να το χαρακτηρίζουν ως εντοπισμό δομής. Για παράδειγμα οι Mulligan & Vergnaud (2006) τονίζουν ότι αρκετές έρευνες που σχετίζονται με την πρόσθεση και την αφαίρεση, ανέδειξαν τις στρατηγικές μικρότερων ηλικιακά παιδιών να εντοπίζουν και να εστιάζουν σε δομικές σχέσεις όπως της ισότητας και της αντιμεταθετικής ιδιότητας (Warren & Cooper, 2003). Πιο συγκεκριμένα, σε έρευνες που έχουν διερευνήσει τον τρόπο με τον οποίο παιδιά μικρών ηλικιών αναπτύσσουν την έννοια της δομής, η Mulligan και οι συνεργάτες της (2004) κατέληξαν σε τέσσερα στάδια: (α) το προ-δομικό όπου οι αναπαραστάσεις των παιδιών δεν εμφανίζουν καμία μαθηματική ή χωρική δομή, ενώ τα περισσότερα παραδείγματα παρουσιάζουν στοιχεία με περιγραφικά ή ιδιοσυγκρασιακά χαρακτηριστικά, (β) το στάδιο της αναδυόμενης δομής όπου οι αναπαραστάσεις των παιδιών εμφανίζουν κάποια στοιχεία δομής ωστόσο χωρίς να παρουσιάζουν οποιαδήποτε αριθμητικά ή χωρικά στοιχεία, (γ) το στάδιο της μερικής δομής όπου στις αναπαραστάσεις εμφανίζονται στοιχεία μερικής δομής μέσω της χρήσης μαθηματικών ή χωρικών χαρακτηριστικών, ωστόσο οι αναπαραστάσεις είναι ημιτελείς και (δ) το στάδιο της δομικής ανάπτυξης όπου οι αναπαραστάσεις των παιδιών παριστάνουν ξεκάθαρα μαθηματικά ή χωρικά χαρακτηριστικά.

## **Παρεμβάσεις για ενίσχυση της μαθηματικής ικανότητας των παιδιών προσχολικής ηλικίας**

### **Σύγχρονα τεχνολογικά εργαλεία**

Οι μαθητές τους 21ου αιώνα, λόγω της ραγδαίας εξέλιξης των τεχνολογικών εργαλείων, έρχονται σε επαφή με προηγμένες μορφές τεχνολογίας από πολύ μικρή ηλικία (Gutnick et al., 2011; Rideout, 2011). Όπως διατυπώνεται από διάφορους ερευνητές (McManis & Gunnewig, 2012; Wang & Ching 2003), η ενασχόληση με την τεχνολογία μπορεί και έχει τις δυνατότητες να παρέχει πρωτοφανείς ευκαιρίες μάθησης στους μαθητές.

Η χρήση των σύγχρονων τεχνολογιών στη διδασκαλία των Μαθηματικών, υποστηρίζει και αυξάνει τις κοινωνικές και γνωστικές δεξιότητες των παιδιών καθώς και την μαθηματική τους ικανότητα. Μέσω των σύγχρονων τεχνολογιών, οι μαθητές μπορούν να αλληλεπιδρούν με τους συμμαθητές τους, να μοιράζονται πληροφορίες και να συνεργάζονται για την επίλυση προβλημάτων (Wang & Ching 2003). Συγκεκριμένα, μέσα

από κατάλληλη καθοδήγηση από τον εκπαιδευτικό, η ενασχόληση με τις νέες τεχνολογίες σχετίζεται με αύξηση στην αφηρημένη σκέψη, τη βελτίωση του οπτικό-κινητικού συντονισμού καθώς και της οπτικής μνήμης (Nir-Gal & Klein, 2004). Ωστόσο, για να μπορούν να αξιοποιηθούν στο μέγιστο βαθμό οι δυνατότητες που παρέχει η τεχνολογία για την υποστήριξη της μάθησης και ανάπτυξης των παιδιών, η τεχνολογία που επιλέγεται θα πρέπει να είναι αναπτυξιακά κατάλληλη για τα παιδιά, να περιλαμβάνει εργαλεία που βοηθούν τους εκπαιδευτικούς να την εφαρμόζουν αποτελεσματικά και να ενσωματώνεται στην τάξη και στο αναλυτικό πρόγραμμα (Clements & Sarama, 2003; Glaubke, 2007).

Σύμφωνα με τον Freiman (2014), ο όρος «τεχνολογία» ταυτίζεται με τον όρο «νέες τεχνολογίες» και αναφέρεται στο πιο πρόσφατο και μοντέρνο εργαλείο, κατάλληλο στη διδασκαλία των μαθηματικών. Από την άλλη ο όρος «Τεχνολογίες της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας» αναφέρεται σε μια ποικιλία εκπαιδευτικών λογισμικών και εφαρμογίδων, συμπεριλαμβανομένου των λογιστικών φύλλων, του επεξεργαστή κειμένου, του διαδικτύου κτλ (Freiman, 2014). Οι μαθηματικές εφαρμογές ή εφαρμογίδια αποτελούν διαδραστικά περιβάλλοντα, τα οποία υπάρχουν στο διαδίκτυο και αποτελούν την οπτική αναπαράσταση ενός δυναμικού αντικειμένου που δίνει δυνατότητες για κατασκευή της μαθηματικής γνώσης (Moyer, Bolyard & Spikell, 2002).

Η χρήση υπολογιστικών λογισμικών προγραμμάτων στη διδασκαλία των Μαθηματικών που βοηθά τους μαθητές να μάθουν Μαθηματικά ή παρέχει ευκαιρίες στους μαθητές να εφαρμόζουν μαθηματικές έννοιες και δεξιότητες (Harskamp, 2015), είναι γνωστή και ως *Computer-Assisted Instruction (CAI)*. Σύμφωνα με τους Foster, Anthony, Clements, Sarama και Williams (2016) η διδασκαλία CAI αποτελεί ένα τρόπο υποστήριξης της μαθηματικής διδασκαλίας λόγω της εύκολης εφαρμογής της καθώς και της καταλληλότητάς της για εξατομικευμένη διδασκαλία μέσω της τακτικής παρακολούθησης της προόδου των μαθητών. Ερευνητικά δεδομένα έχουν καταλήξει στη γενικότερη άποψη ότι όταν χρησιμοποιείται σωστά, η διδασκαλία με τη χρήση υπολογιστών μπορεί να επιφέρει σημαντικά αποτελέσματα στη μάθηση των μαθηματικών (Baroody et al., 2013). Επιπρόσθετα, τα ερευνητικά δεδομένα εισηγούνται ότι οι μαθητές προσχολικής ηλικίας (Fletcher-Flinn & Gravatt, 1995) καθώς και δημοτικού είχαν τη μεγαλύτερη βελτίωση στα Μαθηματικά από τη χρήση της διδασκαλίας CAI. Οι Clements και Sarama ανέπτυξαν το υπολογιστικό μαθηματικό πρόγραμμα “Building Blocks” (Clements & Sarama, 2007). Το συγκεκριμένο πρόγραμμα καλύπτει μια ευρεία έκταση θεμάτων όπως: αρίθμηση, αριθμητικές πράξεις, αξία θέσης ψηφίου, μέτρηση και γεωμετρία και απευθύνεται σε μικρούς μαθητές. Μια σειρά από εμπειρικές μελέτες

υποστηρίζουν την αποτελεσματικότητα του συγκεκριμένου προγράμματος. Όπως έχει διαφανεί η χρήση του προγράμματος “Building Blocks” μπορεί να βοηθήσει παιδιά προσχολικής ηλικίας από χαμηλό κοινωνικοοικονομικό υπόβαθρο (Clements & Sarama, 2007). Η μαθηματική επίδοση των συγκεκριμένων μαθητών φάνηκε να είναι σημαντικά υψηλότερη σε σχέση με την επίδοση των μαθητών της ομάδας ελέγχου. Επιπρόσθετα, δύο ακόμη μελέτες διερεύνησαν την επίδραση του προγράμματος “Building Blocks” σε μεγαλύτερη κλίμακα. Όπως διαφάνηκε από τα ερευνητικά αποτελέσματα της έρευνας (Clements & Sarama, 2008) το μέγεθος επίδρασης στους μαθητές προσχολικής ηλικίας που συμμετείχαν στο πρόγραμμα αυτό ήταν στατιστικά μεγαλύτερο σε σχέση με της ομάδας ελέγχου. Ακόμη σε δεύτερη έρευνα (Clements et al., 2011) στην οποία έλαβαν μέρος 106 εκπαιδευτικοί και 1305 μαθητές προσχολικής ηλικίας προερχόμενοι από χαμηλά κοινωνικοοικονομικά στρώματα, έδειξε ότι οι μαθητές που συμμετείχαν στο πρόγραμμα “Building Blocks” έμαθαν περισσότερα Μαθηματικά σε σχέση με τις συγκρινόμενες ομάδες.

### **Οθόνες αφής - iPads**

Η ραγδαία εξέλιξη της τεχνολογίας, πρόσφατα φαίνεται να εισήγαγε μία νέα μορφή τεχνολογίας στην εκπαίδευση, τις οθόνες αφής. Οι οθόνες αφής περιλαμβάνονται στην ευρύτερη κατηγορία της φορητής μάθησης, η οποία συμπεριλαμβάνει κάθε μορφή μάθησης που γίνεται με τη διαμεσολάβηση μιας κινητής υπηρεσίας ή ακριβέστερα, με τη χρήση μιας φορητής συσκευής (UNESCO, 2013). Τα iPads αποτελούν μία μορφή οθονών αφής και έκαναν την εισαγωγή τους στο εμπόριο το 2010. Σύμφωνα με την Goodwin (2012) οι οθόνες αφής αποτελούν ένα ευέλικτο και ελκυστικό κομμάτι της τεχνολογίας, ενώ η ποικιλία των διαθέσιμων εφαρμογών, δείχνουν ότι είναι ικανές να διαφοροποιούν τη διαδικασία της μάθησης για τα παιδιά σε διαφορετικά στάδια ανάπτυξης, με διαφορετικές ανάγκες και σε διαφορετικά πλαίσια. Οι οθόνες αφής μπορούν να παρέχουν εξατομικευμένη μάθηση (Murray, 2010), ενώ επιτρέπουν μία παιδοκεντρική προσέγγιση στη διαδικασία μάθησης (Johnson et al., 2013). Θεωρούνται ιδανικές για χρήση στην προσχολική εκπαίδευση, διότι επιτρέπουν τη σύνδεση μεταξύ των μαθηματικών και της τεχνολογίας με διασκεδαστικό και εποικοδομητικό τρόπο (Zaranis, Kalogiannakis & Papadakis, 2013). Η χρήση της συσκευής, πραγματοποιείται με τη χρήση των δακτύλων και αυτό είναι κάτι που την καθιστά εύχρηστη και προσιτή στους μικρούς μαθητές (Gaver, 1991). Έρευνες που προέρχονται από τον τομέα της νευροεπιστήμης, έχουν δείξει ότι υπάρχει άμεση σύνδεση μεταξύ των δακτύλων και την επεξεργασία των αριθμών

(Kaufmann et al. 2008) και ότι η συστηματική χρήση των δακτύλων επηρεάζει θετικά την ανάπτυξη της έννοιας του αριθμού καθώς και των δεξιοτήτων υπολογισμού (Gracia-Baffaluy & Noel 2008). Επιπρόσθετα, το λογισμικό των οθονών αφής είναι τόσο έξυπνο, που ακόμη και οι μαθητές νηπιαγωγείου χρειάζονται ελάχιστες ή καθόλου οδηγίες για το πώς να χειριστούν τη συσκευή (Bennett, 2011), έτσι εξαλείφονται οποιαδήποτε μειονεκτήματα χειρισμού από αρχαίους χρήστες ή μικρά παιδιά.

Οι περισσότερες έρευνες, οι οποίες έχουν διερευνήσει τη μάθηση των Μαθηματικών από μαθητές μικρής ηλικίας χρησιμοποιώντας τις οθόνες αφής, αναφέρουν θετικές επιδράσεις στην επίδοση των παιδιών ή θετικές εμπειρίες (Alade et al. 2016; Dejonckheere et al. 2015; Hubber et al. 2016; Hung et al. 2015; Kosko & Ferdig 2016; Mattoon et al., 2015; Outhwaite et al., 2017; Presser et al. (2015); Reeves et al. 2017; Stubbe et al. 2016). Ωστόσο, οι Bebell και Pedulla (2015) σε διαχρονική έρευνα που έχουν διεξάγει με στόχο να διερευνήσουν την επίδραση των μαθηματικών εφαρμογιδίων στην επίδοση μαθητών νηπιαγωγείου μέχρι Β' δημοτικού, δεν εντόπισαν οποιαδήποτε σταθερή συνεισφορά. Αντίστοιχα, ο Miller (2018) αναφέρει μόνο μικρή θετική συνεισφορά στην επίδοση των παιδιών νηπιαγωγείου όσον αφορά έννοιες που σχετίζονται με την αισθητοποίηση των αριθμών, ενώ αντίθετα, υψηλά επίπεδα εμπλοκής των μικρών μαθητών. Αποτελέσματα άλλων ερευνών (Carr, 2012; McKenna, 2012; Wilson, Nash, Wissinger, & Leidman, 2013; Zimmerman & Howard, 2013) δείχνουν ότι η χρήση των iPads δε φαίνεται να συνέβαλε σε στατιστικά σημαντικές διαφορές. Αντίστοιχα, πειραματική μελέτη η οποία έγινε σε μαθητές νηπιαγωγείου, έδειξε ότι οι μαθητές που συμμετείχαν στην παρεμβατική διδασκαλία με τη χρήση τεχνολογίας ήταν σε θέση να βελτιώσουν την ικανότητά τους όσον αφορά τη σύγκριση αριθμών αλλά δεν παρατηρήθηκε βελτίωση σε οποιοδήποτε άλλες πτυχές της αίσθησης του αριθμού (Räsänen, Salminen, Wilson, Aunio, & Dehaene, 2009).

Περιορισμένος αριθμός ερευνών φαίνεται να εστιάστηκε σε ένα μικρό αριθμό μαθηματικών εφαρμογιδίων ή σε συγκεκριμένες μαθηματικές δεξιότητες, έτσι ώστε να παρέχουν πληροφορίες σχετικά με τη σύνδεση των συγκεκριμένων εφαρμογιδίων και την επίδρασή τους στη μάθηση των παιδιών. Για παράδειγμα ο Reeves και οι συνεργάτες του (2017) στην έρευνά τους, επέλεξαν εφαρμογίδια τα οποία εστιάζονται σε συγκεκριμένες ικανότητες όπως στην έννοια της απαρίθμησης, στη διάταξης καθώς και στην αριθμητική πράξη της πρόσθεσης. Τα αποτελέσματα της έρευνάς τους αναφέρουν θετική επίδραση σε όλες τις δεξιότητες που προαναφέρθηκαν. Παρόμοια αποτελέσματα φαίνεται να αναφέρει και ο Dejonckheere με τους συνεργάτες του (2015). Οι συγκεκριμένοι ερευνητές,

χρησιμοποίησαν τις οθόνες αφής σε παιδιά ηλικίας 4-6 ετών, με στόχο να διερευνήσουν έννοιες που σχετίζονται με την εκτίμηση χρησιμοποιώντας μία ψηφιακή αριθμητική γραμμή. Η εστίαση σε μία αριθμητική έννοια χρησιμοποιώντας διαφορετικές στρατηγικές εκτίμησης, είχε ως αποτέλεσμα θετικές επιδράσεις όσον αφορά την ακρίβεια εκτίμησης. Αντίστοιχα, η Presser και οι συνεργάτες της (2015) εστιάστηκαν σε δεξιότητες που σχετίζονται με την έννοια της άμεσης αναγνώρισης και στον ίσο διαμοιρασμό χρησιμοποιώντας ένα εφαρμογίδιο γνωστό ως «Next Generation Preschool». Στα αποτελέσματα της έρευνάς τους, αναφέρουν θετική επίδραση στις αριθμητικές δεξιότητες των παιδιών που συμμετείχαν. Οι Pimm και Sinclair (2015) εντόπισαν ότι τα χαρακτηριστικά του εφαρμογιδίου «TouchCounts» το οποίο εστιάζεται στην έννοια των αριθμών, είναι σε θέση να ενισχύσουν και να αναπτύξουν την ικανότητα των μαθητών νηπιαγωγείου όσον αφορά την έννοια της πληθικότητας. Αντίστοιχα, οι Kosko και Ferdig (2016) εξέτασαν τις επιδράσεις στην επίδοση των παιδιών, ωστόσο δίνοντας έμφαση στην επιλογή κατάλληλων παιδαγωγικά εφαρμογιδίων που βρίσκονται σε συμφωνία με το αναλυτικό πρόγραμμα. Αυτοί οι ερευνητές αναφέρουν ότι τα καλά σχεδιασμένα μαθηματικά εφαρμογίδια είναι σε θέση να βελτιώσουν την επίδοση των μαθητών αλλά υπάρχει η ανάγκη για περαιτέρω έρευνες ώστε να διερευνηθεί ο βαθμός βελτίωσης που είναι σε θέση να επιφέρουν τα συγκεκριμένα εφαρμογίδια. Λαμβάνοντας υπόψη το μεγάλο αριθμό μαθηματικών εφαρμογιδίων που είναι διαθέσιμα, κρίνεται αναγκαία η αναγνώριση των χαρακτηριστικών των εφαρμογιδίων που είναι σε θέση να επηρεάσουν την κατανόηση των παιδιών.

Υπάρχουν ερευνητές (Choppin, Carsons, Bory, Cerosaletti & Gillis, 2014) που έχουν ασχοληθεί με την αξιολόγηση των ψηφιακών εργαλείων και έχουν εντοπίσει ότι αρκετά από αυτά, υστερούν σε βασικά χαρακτηριστικά, τα οποία θεωρούνται σημαντικά στην ενδυνάμωση της διαδικασίας μάθησης. Γενικότερα, είναι αποδεκτό ότι τα αποτελέσματα της διδασκαλίας εξαρτώνται σε σημαντικό βαθμό από το σχεδιασμό του ψηφιακού εργαλείου. Ο σχεδιασμός του ψηφιακού εργαλείου μπορεί να επηρεάζει σε σημαντικό βαθμό τον τρόπο που οι μαθητές αλληλεπιδρούν με αυτό και κατά συνέπεια τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές κατανοούν το περιεχόμενο που διδάσκονται και αναπτύσσουν δεξιότητες επίλυσης προβλήματος (Hoyles & Noss, 2003; Lee & Hollebrands, 2006). Ο σχεδιασμός ενός ψηφιακού εργαλείου, μπορεί να επηρεάζεται σε σημαντικό από τις επιστημολογικές και παιδαγωγικές πεποιθήσεις του κατασκευαστή του σε σχέση με τα μαθηματικά, την επίλυση προβλήματος και τη διδασκαλία (Lee & Hollebrands, 2006), ενώ ένας αποτελεσματικός σχεδιασμός ενός ψηφιακού εργαλείου, θα

πρέπει να θεμελιώνεται σε ένα επιστημολογικό πλαίσιο (Bannan-Ritland, Dabbagh, & Murphy, 2000). Οι Harrison και Lee (2018) έχουν εξετάσει διάφορα μοντέλα τα οποία ασχολούνται με τα χαρακτηριστικά τα οποία πρέπει να έχει ένα ψηφιακό εργαλείο, ώστε να μεγιστοποιείται η παιδαγωγική του συνεισφορά και έχουν κατηγοριοποιήσει τα χαρακτηριστικά αυτά σε τέσσερις ευρύτερες κατηγορίες: (α) αλληλεπιδράσεις, (β) ποιότητα περιεχομένου, (γ) ανατροφοδότηση/υποστήριξη και (δ) ευκολία στη χρήση τους. Συγκεκριμένα η κατηγορία των αλληλεπιδράσεων, περιλαμβάνει χαρακτηριστικά τα οποία θα πρέπει να έχουν τα ψηφιακά εργαλεία όπως: αλληλεπιδράσεις με νόημα, φυσικές ενέργειες στα αντικείμενα, ορατές συνέπειες των ενεργειών των μαθητών καθώς και ένα εύρος ενεργειών που δεν περιορίζεται από την τεχνολογία. Η δεύτερη κατηγορία κριτηρίων, αναφέρεται στην ποιότητα περιεχομένου του ψηφιακού εργαλείου και περιλαμβάνει κριτήρια όπως: η υψηλής ποιότητας παρουσίαση μαθηματικού περιεχομένου, η διασφάλιση της ενασχόλησης με γνωστικά απαιτητικά έργα και η παρουσίαση χρήσιμου μαθηματικού περιεχομένου που ανταποκρίνεται στο ηλικιακό επίπεδο των μαθητών και ανταποκρίνεται στις υπό έμφαση έννοιες περιεχομένου κάθε ηλικιακής ομάδας. Η τρίτη κατηγορία κριτηρίων, αναφέρεται σε χαρακτηριστικά των ψηφιακών εργαλείων όπως η παροχή κατάλληλης και σχετικής ανατροφοδότησης, η παροχή κατάλληλης στήριξης στους μαθητές καθώς και η παροχή δυνατότητας για αναστοχασμό των μαθητών στις ενέργειές τους. Τέλος, η τέταρτη κατηγορία κριτηρίων, αναφέρεται σε χαρακτηριστικά των ψηφιακών εργαλείων όπως η ευκολία στη χρήση τους από τους μαθητές, η χρήση κατανοητών οδηγιών καθώς και η δυνατότητα χρήσης τους από πολλούς μαθητές (Harrison & Lee, 2018).

Ωστόσο, όπως διαφαίνεται, καμία από τις έρευνες που έχουν προαναφερθεί στο επίπεδο της προδημοτικής εκπαίδευσης και αξιοποιούν οθόνες αφής και εφαρμογίδια, δεν επικεντρώνεται στο να εξετάσει την προστιθέμενη αξία και την παιδαγωγική συνεισφορά των εφαρμογιδίων στη διαδικασία μάθησης ανάλογα με τη μορφή διδασκαλίας στην οποία ενσωματώνονται (π.χ. υψηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερευνητική μάθηση και χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερευνητική μάθηση).

### **Διερευνητική μάθηση**

Ο Alfieri και οι συνεργάτες του (2011) ορίζουν τη διερευνητική μάθηση ως τη μάθηση κατά την οποία δεν προσφέρονται έτοιμες οι διαδικαστικές ή εννοιολογικές πληροφορίες, αλλά δημιουργούνται οι ευκαιρίες ώστε οι μαθητές να τις ανακαλύπτουν από μόνοι όταν

τους παρέχεται το κατάλληλο υλικό. Σύμφωνα με τους Dogier και Maaß (2014), επίκεντρο της διερευνητικής μάθησης είναι ο ίδιος ο μαθητής όπου καλείται να παρατηρήσει δεδομένα και να αναζητήσει λύσεις για την επίλυση προβλημάτων. Πρόσφατα η Σκουμπουρδή (2017) έχει προτείνει ένα θεωρητικό πλαίσιο όσον αφορά το σχεδιασμό και την εφαρμογή δραστηριοτήτων που βασίζονται στη διερευνητική μάθηση το οποίο αποτελείται από πέντε στάδια: (α) Έργο: ένα μαθηματικό πρόβλημα, το οποίο βασίζεται στα ενδιαφέροντα, τις εμπειρίες καθώς και τις γνώσεις των μαθητών, παρουσιάζεται στους μαθητές από τον εκπαιδευτικό. Το συγκεκριμένο έργο, το οποίο μπορεί να επιδέχεται μία ή περισσότερες απαντήσεις, σχεδιάζεται με τέτοιο τρόπο ώστε να προβληματίζει τους μαθητές και να διασφαλίζει τη συμμετοχή τους στη διαδικασία επίλυσής του (β) Εξερεύνηση: οι μαθητές (ατομικά ή σε ομάδες) χρησιμοποιώντας στρατηγικές, εξερευνούν και διερευνούν το πρόβλημα, όπως παρουσιάζεται μέσα από την προβληματική κατάσταση. Επιλέγουν και χρησιμοποιούν διάφορα μέσα για να διατυπώσουν ισχυρισμούς, ερωτήσεις στους συμμαθητές τους αλλά και στο δάσκαλό τους ώστε να κατανοήσουν τη προβληματική κατάσταση και εισηγούνται πιθανές λύσεις για την επίλυση του προβλήματος. (γ) Παρουσίαση: Οι μαθητές μοιράζονται τις ιδέες που έχουν προκύψει μέσα από την εξερεύνηση του προβλήματος με όλη την τάξη, παρουσιάζοντας και επεξηγώντας τις ιδέες τους καθώς και τις λύσεις που έχουν εντοπίσει. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού σε αυτό το στάδιο είναι να παρατηρεί και να οργανώνει τις παρουσιάσεις κάθε ομάδας καθώς και να διατυπώνει ερωτήσεις ώστε να βοηθήσει τους μαθητές να περιγράψουν και να επεξηγήσουν τις εξερευνήσεις τους. (δ) Σύνδεση: Ο εκπαιδευτικός, σε συνεργασία με τους μαθητές, συνοψίζει τα αποτελέσματα, θέτει ερωτήσεις και τους ενθαρρύνει να διατυπώνουν ερωτήσεις οι οποίες να διασυνδέουν τις προτεινόμενες ιδέες, με το αντικείμενο προς διερεύνηση αλλά και με τους στόχους του μαθήματος. Οι ερωτήσεις που διατυπώνει ο εκπαιδευτικός, θα πρέπει να ενθαρρύνουν την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και τον μαθηματικό συλλογισμό (Carlsen, Erfjord & Hundeland, 2010). (ε) Γενίκευση: ο εκπαιδευτικός γενικεύει (και μαθηματικοποιεί όταν αυτό είναι εφικτό) τις ενέργειες των μαθητών του, διαμορφώνει μαθηματικές έννοιες και τις συνδέει με τις προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών, παρέχοντας κατάλληλη ανατροφοδότηση. (στ) Μετάφραση: Σε αυτό το στάδιο, οι μαθητές καλούνται να μεταφέρουν σε άλλα άτομα (μαθητές από άλλες τάξεις, την οικογένειά τους κτλ.) τις λύσεις τους μέσα από μία ποικιλία διαφορετικών τρόπων όπως για παράδειγμα μέσα από λεκτικές περιγραφές και χειρονομίες (Skoumpourdi, 2016). ζ) Επέκταση: οι μαθητές καλούνται να προτείνουν/λύσουν παρόμοια διαφοροποιημένα προβλήματα ή προβλήματα επέκτασης.

Ο Baroody και οι συνεργάτες του (2015) κατηγοριοποίησαν τη μάθηση μέσω καθοδηγούμενης διερεύνησης σε τέσσερις κατηγορίες: υψηλού βαθμού καθοδήγηση, μέτριου βαθμού καθοδήγηση, χαμηλού βαθμού καθοδήγηση και μη καθοδηγούμενη διερεύνηση. Ως εκ τούτου, η διερευνητική μάθηση, περιλαμβάνει ένα εύρος μεθόδων, οι οποίες μπορεί να μην επιδρούν το ίδιο αποτελεσματικά σε όλες τις περιπτώσεις (Baroody et al., 2015; Chi, 2009). Στο ένα άκρο βρίσκεται η υψηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση η οποία είναι καλά δομημένη και περιλαμβάνει συγκεκριμένες ερωτήσεις. Σε αυτή την περίπτωση παρόλο που το μοτίβο, η σχέση ή η στρατηγική δεν παρέχεται άμεσα ή δεν επεξηγείται ξεκάθαρα στον μαθητή (όπως στην συνήθη διδασκαλία), αυτού του είδους η διερευνητική μάθηση παρέχει νύξεις και εμπλέκει σημαντική μαθησιακή υποστήριξη η οποία συνεπάγεται αυξημένη καθοδήγηση των μαθητών από τους εκπαιδευτικούς. Η διδασκαλία και η πρακτική οργανώνονται για να κατευθύνουν την προσοχή του μαθητή σε κανονικότητες ή σε στρατηγική. Η ανατροφοδότηση διευκρινίζει κατά πόσον η απάντηση είναι ορθή ή όχι και παρέχει κάποια επεξήγηση του λόγου που η απάντηση είναι ορθή η λανθασμένη. Στο άλλο άκρο, βρίσκεται η μη καθοδηγούμενη διερεύνηση (ελεύθερο παιχνίδι) κατά την οποία οι μαθητές επιλέγουν οι ίδιοι το δικό τους έργο, εμπλέκονται σε μη δομημένες δραστηριότητες και δεν λαμβάνουν ανατροφοδότηση από ενήλικα. Μεταξύ των δύο άκρων, εμπλέκονται δύο ενδιάμεσες μορφές καθοδηγούμενης διερεύνησης, οι οποίες είναι παρόμοιες: η μέτριου βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση και η χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση. Συγκεκριμένα, η χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση, παρέχει λιγότερη, έμμεση – υποβόσκουσα βοήθεια στον μαθητή και η ανατροφοδότηση που παρέχεται, περιορίζεται κυρίως στο κατά πόσο η απάντηση είναι ορθή ή όχι. Σε αυτή την περίπτωση η αλληλεπίδραση που υπάρχει μεταξύ εκπαιδευτικού και μαθητή καθώς και ο μεταξύ τους διάλογος είναι πιο περιορισμένα σε σχέση με την μεγάλη αλληλεπίδραση που υπάρχει μεταξύ τους στο περιβάλλον υψηλού βαθμού καθοδηγούμενης διερεύνησης.

Ο Baroody και οι συνεργάτες του (2016) εντόπισαν ότι οι μαθητές προσχολικής ηλικίας που συμμετείχαν σε παρεμβατικές διδασκαλίες καθοδηγούμενης διερεύνησης (οποιοδήποτε βαθμού) παρουσίασαν στατιστικά σημαντικά υψηλότερη επίδοση σε σχέση με τους μαθητές της ομάδας ελέγχου που συμμετείχαν σε παραδοσιακή διδασκαλία. Ωστόσο, τα αποτελέσματα των Kirschner, Sweller και Clark (2006) έδειξαν ότι η χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση είναι πιο αναποτελεσματική και ανεπαρκής σε σχέση με τη συνήθη διδασκαλία. Επιπρόσθετα, άλλα αποτελέσματα σχετικά με την επίδραση των μορφών διερευνητικής μάθησης αναδεικνύουν την σημαντική αποτελεσματικότητα των παρεμβάσεων που βασίζονται σε υψηλού βαθμού διερευνητική καθοδήγηση στην μάθηση



από μέρους των μαθητών. Συγκεκριμένα, η μετανάλυση που παρουσιάζει ο Alfieri και οι συνεργάτες του το (2011) η οποία βασίστηκε σε 164 ερευνητικές εργασίες, έδειξε ότι η υψηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση είναι πιο αποτελεσματική από οποιαδήποτε άλλη μορφή διδασκαλίας.

### ***Διερευνητική μάθηση και τεχνολογία***

Σημαντικό θέμα σχετικά με τον σχεδιασμό παρεμβάσεων που βασίζονται στη διερευνητική μάθηση, αποτελεί και ο συνδυασμός της διερευνητικής μάθησης με την χρήση τεχνολογίας. Οι Artigue και Baptist (2012) υποστηρίζουν ότι η χρήση της τεχνολογίας μπορεί να βοηθήσει στη διερευνητική μάθηση στα Μαθηματικά λόγω των δυνατοτήτων που παρέχουν τα τεχνολογικά εργαλεία. Ο όρος διερευνητική μάθηση, όπως έχει προαναφερθεί, αναφέρεται στη μάθηση όπου ο μαθητής αποτελεί το επίκεντρο, παρατηρεί φαινόμενα και αναζητεί τις κατάλληλες μαθηματικές λύσεις (Dorier & Maab, 2014; Maab & Artigue, 2013). Παρόλα αυτά, ελάχιστες φαίνεται να είναι οι έρευνες που έχουν βρεθεί να συγκρίνουν ψηφιακά περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης στο πεδίο της μαθηματικής εκπαίδευσης (de Jong, Hendrikse, & van der Meij, 2010) και συγκεκριμένα σε μαθητές προσχολικής ηλικίας, αφού οι περισσότερες από αυτές πραγματοποιούνται κυρίως στη δευτεροβάθμια καθώς και τριτοβάθμια εκπαίδευση (π.χ. Fathurrohman, Porter & Worthy, 2014; Rasmussen & Kwon, 2007) ή προέρχονται από το πεδίο των Φυσικών Επιστημών. Μια από τις ελάχιστες έρευνες που αφορά σε μικρότερους ηλικιακά μαθητές και δίνει έμφαση στην διερευνητική μάθηση και συγκεκριμένα στις διαφορετικές μορφές διερευνητικής μάθησης σε συνδυασμό με τη χρήση τεχνολογίας, είναι αυτή του Baroody και των συνεργατών του (2015). Στην έρευνα αυτή φάνηκε ότι οι μαθητές δημοτικού που συμμετείχαν σε παρεμβατικές διδασκαλίες καθοδηγούμενης και μη καθοδηγούμενης διερεύνησης και ελεύθερου παιχνιδιού και εργάστηκαν σε υπολογιστές με τη χρήση ψηφιακού εποπτικού μέσου, παρουσίασαν στατιστικά σημαντικότερη επίδοση σε σχέση με τους μαθητές της ομάδας ελέγχου. Επιπρόσθετα, όπως αναφέρουν οι ίδιοι οι ερευνητές τα καλά σχεδιασμένα προγράμματα στον υπολογιστή και η κατάλληλη επιλογή παιχνιδιών στον υπολογιστή μπορούν να παρέχουν αποτελεσματική διδασκαλία ακόμη και στους μικρότερους μαθητές. Ένα πρόγραμμα στον υπολογιστή μπορεί να παρέχει την υποστήριξη (σκαλοπάτια μάθησης) για την καθοδηγούμενη διερευνητική μάθηση την οποία οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί δεν είναι σε θέση να παρέχουν. Τέτοια αποτελέσματα ενθαρρύνουν την περαιτέρω διερεύνηση του τρόπου επίδρασης διαφορετικών

περιβαλλόντων μάθησης στην μάθηση μικρότερων ηλικιακά ομάδων μαθητών, μέσω της εφαρμογής και σύγκρισης διαφορετικών μορφών διερευνητικής μάθησης με την παράλληλη ενσωμάτωση της χρήσης της τεχνολογίας η οποία φαίνεται να μπορεί να συνεισφέρει στη διερευνητική μάθηση στα μαθηματικά (Artigue & Baptist, 2012).

## Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό, αρχικά έγινε προσπάθεια παρουσίασης των βασικών μαθηματικών διαδικασιών καθώς και των στρατηγικών που υιοθετούν μαθητές προσχολικής ηλικίας, κατά την επίλυση έργων που εμπλέκουν την έννοια του Αριθμού και των Μοτίβων. Οι διαδικασίες και στρατηγικές που σχετίζονται με τους Αριθμούς παρουσιάστηκαν στη βάση τριών βασικών αξόνων σύμφωνα με το μοντέλο των Purpura και Lonigan (2013). Συγκεκριμένα παρουσιάστηκαν: (α) οι βασικές διαδικασίες αρίθμησης όπως η απαγγελία αριθμολέξεων, η άμεση αναγνώριση, η απαρίθμηση και η εκτίμηση, (β) οι διαδικασίες για εύρεση σχέσεων όπως η σύγκριση συλλογών και η διάταξη αριθμών και (γ) οι βασικές διαδικασίες που αφορούν σε πράξεις αριθμών όπως η πρόσθεση/αφαίρεση και η ανάλυση και σύνθεση αριθμού. Παράλληλα, ακολούθησε συζήτηση όσον αφορά βασικές διαδικασίες αναγνώρισης και γενίκευσης μοτίβων, ώστε να εξεταστεί η ικανότητα των μαθητών προσχολικής ηλικίας σε έργα που σχετίζονται με τα Μοτίβα. Στη συνέχεια έγινε αναφορά σε ερευνητικά δεδομένα που σχετίζονται με την επεξεργασία και κατασκευή αναπαραστάσεων, τη χρήση δεδομένων κατά την επίλυση μαθηματικών έργων, τη χρήση αιτιολογήσεων και την ακρίβεια στην χρήση ορολογίας τα οποία προκύπτουν κυρίως από έρευνες που έχουν διεξαχθεί σε μαθητές μικρών ηλικιών, ενώ ακολούθησε αναφορά σε γενικές περιγραφές που σχετίζονται με την ανάπτυξης της σκέψης ή της μαθηματικής ικανότητας. Οι συγκεκριμένες θεωρίες προέκυψαν τόσο από το πεδίο της γνωστικής ψυχολογίας, όσο και από πεδίο της μαθηματικής παιδείας. Όσον αφορά το πεδίο της γνωστικής ψυχολογίας, παρουσιάστηκαν βασικές θεωρίες και θεωρητικά μοντέλα όπως η θεωρία του Piaget (1936), η θεωρία του Vygotsky (1978) και η ταξινόμια SOLO (Biggs & Collis, 1982). Αντίστοιχα, έγινε περιγραφή θεωρητικών προσεγγίσεων που προέκυψαν από το πεδίο των μαθηματικών όπως η θεωρία της Resnick (1992) η οποία εστιάζεται στη μετάβαση-εξέλιξη από τη συγκεκριμένη σκέψη στη γενική σκέψη καθώς και η θεωρία της Mulligan και των συνεργατών της (2004), που εστιάζει στον τρόπο με τον οποίο παιδιά μικρών ηλικιών αναπτύσσουν την έννοια της δομής.

Στο τελευταίο μέρος της βιβλιογραφικής επισκόπησης, αρχικά έγινε μία σύντομη περιγραφή της εξέλιξης της χρήσης σύγχρονων τεχνολογικών εργαλείων στη διδασκαλία

μαθητών μικρών ηλικιών (από τα σύγχρονα υπολογιστικά συστήματα στις οθόνες αφής όπως τα iPads) ενώ στη συνέχεια παρουσιάστηκαν ερευνητικά αποτελέσματα που σχετίζονται με την διερευνητική μάθηση και τη συνεισφορά της συγκεκριμένης μορφής διδασκαλίας όταν συνδυάζεται με σύγχρονα τεχνολογικά εργαλεία.

ΛΟΥΙΖΑ Λ. ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ

### ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Στο κεφάλαιο αυτό, περιγράφεται η μεθοδολογία, το δείγμα της έρευνας, η διαδικασία εκτέλεσης της έρευνας, τα μέσα συλλογής δεδομένων και η κατασκευή του εργαλείου μέτρησης που αξιοποιήθηκε. Στη συνέχεια, γίνεται ανάλυση των τριών περιβαλλόντων μάθησης που εφαρμόστηκαν (υψηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με χρήση οθονών αφής, χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με χρήση οθονών αφής και συνήθης διδασκαλία χωρίς χρήση οθονών αφής). Πιο συγκεκριμένα, περιγράφεται ο σχεδιασμός των δύο παρεμβατικών διδασκαλιών διερευνητικής μάθησης (υψηλού και χαμηλού βαθμού διερευνητική προσέγγιση) δίνοντας έμφαση στις ομοιότητες αλλά και στις διαφορές που παρουσίασαν οι δύο μορφές. Ακόμη, παρουσιάζονται τα κριτήρια επιλογής των μαθηματικών εφαρμογών που αξιοποιήθηκαν, ενώ παρουσιάζονται δύο ενδεικτικά δείγματα διδασκαλιών διερευνητικής μάθησης. Στη συνέχεια γίνεται αναφορά στη βασική τεχνική ανάλυσης των δεδομένων της έρευνας, την εμπειρικά θεμελιωμένη θεωρία ενώ περιγράφονται τα στάδια που ακολουθήθηκαν για την ολοκλήρωση των αναλύσεων. Τέλος παρουσιάζονται οι τεχνικές ανάλυσης των ποσοτικών δεδομένων της έρευνας καθώς και ο τρόπος βαθμολόγησης/διόρθωσης του δοκιμίου.

#### **Καθορισμός Πληθυσμού – Δείγμα της Έρευνας**

Με βάση το σκοπός της έρευνας, ο πληθυσμός της έρευνας είναι οι μαθητές προδημοτικής. Δεδομένου ότι υπάρχουν σαφείς ενδείξεις ότι η επίδοση των μαθητών από το νηπιαγωγείο αποτελεί σημαντικό παράγοντα πρόβλεψης της επιτυχίας τους στις πρώτες τάξεις του δημοτικού ή ακόμη και της μετέπειτα ακαδημαϊκής τους επιτυχίας (Bowman, Donovan, & Burns, 2001; Claessens & Engel, 2013; Duncan et al., 2007; Gormley, 2007), κρίνεται απαραίτητη η διερεύνηση και η περιγραφή του ρόλου που διαδραματίζουν οι συνιστώσες που συνθέτουν τη μαθηματική ικανότητα κατά τη διαδικασία επίλυσης έργων Αριθμών και Μοτίβων στο επίπεδο της προσχολικής ηλικίας.

Για τη διερεύνηση του βασικού ερωτήματος της έρευνας, επιλέγηκαν 60 μαθητές προδημοτικής (35 αγόρια και 25 κορίτσια) ενός αστικού νηπιαγωγείου της επαρχίας Λάρνακας. Ο μέσος όρος ηλικίας των μαθητών του δείγματος ήταν  $5 \frac{2}{12}$ , ενώ το εύρος

των ηλικιών των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα κυμαίνεται μεταξύ 4 8/12 με 5 5/12. Η επιλογή του συγκεκριμένου δείγματος ήταν ευκαιριακή λόγω της εύκολης πρόσβασης που είχε η ερευνήτρια στο συγκεκριμένο δείγμα. Κατά την έναρξη της έρευνας όλοι οι μαθητές δεν είχαν διδαχθεί οποιαδήποτε έννοια των Μαθηματικών δεδομένου ότι η συγκεκριμένη περίοδος, αποτελεί μία περίοδο προσαρμογής των μαθητών στο σχολικό περιβάλλον.

Οι μαθητές αυτοί είχαν την ευκαιρία να συμμετάσχουν σε ημιδομημένες συνεντεύξεις που στηρίζονται στην επίλυση έργων (task based interviews). Οι ίδιοι μαθητές είχαν την ευκαιρία να συμμετάσχουν στα δύο παρεμβατικά προγράμματα (υψηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με χρήση οθονών αφής και χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με χρήση οθονών αφής). Συγκεκριμένα, είκοσι μαθητές αποτέλεσαν την πρώτη παρεμβατική ομάδα της υψηλού βαθμού καθοδηγούμενης διερεύνησης με χρήση οθονών αφής (12 αγόρια, 8 κορίτσια), είκοσι μαθητές αποτέλεσαν τη δεύτερη παρεμβατική ομάδα της χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενης διερεύνησης με χρήση οθονών αφής (11 αγόρια, 9 κορίτσια), ενώ οι υπόλοιποι 20 μαθητές (12 αγόρια, 8 κορίτσια) αποτέλεσαν την ομάδα η οποία συμμετείχε στη συνήθη διδασκαλία. Περισσότερες πληροφορίες όσον αφορά το σχεδιασμό των τριών περιβαλλόντων μάθησης παρουσιάζονται σε επόμενες υποενότητες του συγκεκριμένου κεφαλαίου. Ο Πίνακας 3.1 παρουσιάζει συνολικά το δείγμα της έρευνας που συμμετείχε σε κάθε περιβάλλον μάθησης.

Πίνακας 3.1

*Δείγμα Έρευνας*

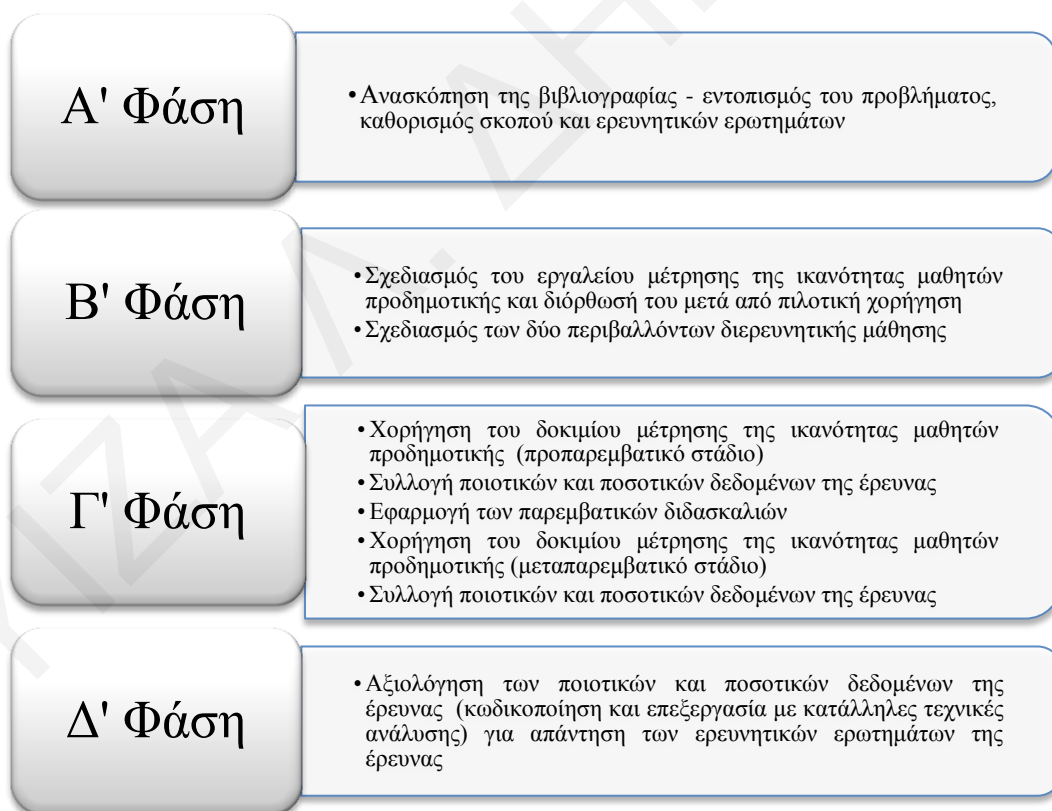
Ερευνητικά Ερωτήματα 1- 6			
	Υψηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση	Χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση	Συνήθης διδασκαλία
Σύνολο	20	20	20
Αγόρια	12	11	12
Κορίτσια	8	9	8

Αξίζει να σημειωθεί ότι τόσο οι μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα, όσο και οι γονείς τους είχαν ενημερωθεί για το σκοπό της συγκεκριμένης έρευνας καθώς και για τη διεξαγωγή των παρεμβατικών διδασκαλιών και τονίστηκε ότι οι μαθητές θα συμμετείχαν στην έρευνα, μπορούσαν να αποσυρθούν οποιαδήποτε στιγμή οι ίδιοι επιθυμούσαν. Επιπρόσθετα, εξασφαλίστηκε η γραπτή συγκατάθεση των γονιών για τη συμμετοχή των

παιδιών τους καθώς και άδεια διεξαγωγής της έρευνας από το Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας και Αξιολόγησης του Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού της Κύπρου.

### Διαδικασία εκτέλεσης της έρευνας

Η συλλογή των δεδομένων της έρευνας πραγματοποιήθηκε κατά τη σχολική χρονιά 2016-2017. Συγκεκριμένα, κατά την περίοδο αυτή αρχικά χορηγήθηκε στους μαθητές το δοκίμιο μαθηματικής ικανότητας (το οποίο παρουσιάζεται στην επόμενη υποενότητα του κεφαλαίου) σε δύο χρονικές φάσεις. Η πρώτη χορήγηση του δοκιμίου πραγματοποιήθηκε κατά τη διάρκεια της περιόδου Οκτώβριος 2016 - Δεκέμβριος 2016 (προπαραεμβατικό στάδιο) ενώ η δεύτερη χορήγηση του δοκιμίου πραγματοποιήθηκε κατά τη διάρκεια της περιόδου Φεβρουάριος 2017 - Απρίλιος 2017 (μεταπαραεμβατικό στάδιο). Αντίστοιχα, η διεξαγωγή των παρεμβατικών διδασκαλιών έγινε κατά τη διάρκεια των μηνών Ιανουαρίου και Φεβρουαρίου 2017. Οι φάσεις διεξαγωγής της έρευνας παρουσιάζονται συνοπτικά στο Διάγραμμα 3.1 και αναλύονται στη συνέχεια με περισσότερη λεπτομέρεια.



Διάγραμμα 3.1 Δομή του σχεδιασμού της έρευνας και διαδικασία διεξαγωγής της έρευνας

### **Πρώτη φάση**

Αρχικά, στην πρώτη φάση της έρευνας έγινε ανασκόπηση της βιβλιογραφίας ώστε να εντοπιστεί το πρόβλημα. Λαμβάνοντας υπόψη το πρόβλημα που εντοπίστηκε, διατυπώθηκε ο σκοπός και τα ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας. Στη συνέχεια ακολούθησε εκτεταμένη διερεύνηση της σχετικής βιβλιογραφίας ώστε να γίνει μία σύνθεση του θεωρητικού πλαισίου.

### **Δεύτερη φάση**

Η δεύτερη φάση της έρευνας περιελάμβανε το σχεδιασμό α) του εργαλείου μέτρησης της ικανότητας των μαθητών προδημοτικής σε έργα που σχετίζονται με τους Αριθμούς και τα Μοτίβα και β) των δύο περιβαλλόντων διερευνητικής μάθησης. Για το σχεδιασμό του εργαλείου μέτρησης της ικανότητας των μαθητών προδημοτικής, λήφθηκαν υπόψη προηγούμενες σχετικές έρευνες, καθώς και έργα που περιλαμβάνονται σε διεθνή εγχειρίδια Μαθηματικών. Κατά τη διάρκεια του σχεδιασμού (έγινε πιλοτική χορήγησή κάποιων έργων του δοκιμίου σε 40 μαθητές προδημοτικής. Με βάση τα δεδομένα που συλλέχθηκαν, αποφασίστηκαν κάποιες αλλαγές στο εργαλείο. Η δεύτερη φάση της έρευνας περιλάμβανε ακόμη, το σχεδιασμό των δύο περιβαλλόντων διερευνητικής μάθησης. Σχεδιάστηκαν συνολικά 15 σαραντάλεπτα μαθήματα για κάθε περιβάλλον μάθησης. Μετά την ολοκλήρωση του σχεδιασμού των μαθημάτων, κάποια από αυτά δόθηκαν στους εκπαιδευτικούς των τάξεων όπου θα πραγματοποιούνταν οι παρεμβατικές διδασκαλίες, ώστε να γίνει έλεγχος όσον αφορά την κατανόηση των οδηγιών καθώς και έλεγχος των μαθημάτων που σχεδιάστηκαν όσον αφορά το σκοπό τους από την επιβλέπουσα καθηγήτρια.

### **Τρίτη φάση**

Η τρίτη φάση της έρευνας περιλαμβάνει την υλοποίηση της έρευνας. Συγκεκριμένα, η εφαρμογή της έρευνας έγινε κατά τη σχολική χρονιά 2016-2017 αφού εξασφαλίστηκε η σχετική άδεια από το Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας και Αξιολόγησης του Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού της Κύπρου. Αρχικά, στο πρώτο στάδιο έγινε συλλογή των δεδομένων της προπαραεμβατικής φάσης. Ακολούθως πραγματοποιήθηκαν οι 15 παρεμβατικές διδασκαλίες διερευνητικής μάθησης με τη χρήση των οθονών αφής.

Συγκεκριμένα, οι μαθητές δούλευαν συνεργατικά σε δυάδες σε κάθε οθόνη αφής, ώστε να διασφαλιστεί η ενεργητική συμμετοχή όλων των μαθητών. Τα εφαρμογίδια τα οποία αξιοποίησαν οι μαθητές σε κάθε μάθημα, τοποθετήθηκαν συγκεντρωμένα σε ένα φάκελο στα iPads ώστε να διευκολυνθεί η πρόσβαση και ο εντοπισμός τους από τους μαθητές. Με την ολοκλήρωση κάθε ενότητας μαθημάτων, οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν σε κάποια ερωτήματα ώστε να διαπιστωθεί το επίπεδο κατανόησής της. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα συγκεκριμένα δεδομένα δεν αξιοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία. Μετά την ολοκλήρωση των παρεμβατικών διαδικασιών έγινε η συλλογή των δεδομένων της μεταπαραμβατικής φάσης ώστε να ολοκληρωθεί η συλλογή των ποιοτικών και ποσοτικών δεδομένων της έρευνας.

#### **Τέταρτη φάση**

Στην τέταρτη φάση της έρευνας, έγινε αξιολόγηση των δεδομένων της έρευνας, χρησιμοποιώντας τόσο ποιοτικές τεχνικές ανάλυσης (εμπειρικά θεμελιωμένη θεωρία) όσο και ποσοτικές τεχνικές ανάλυσης (περιγραφική στατιστική), ώστε να δοθεί απάντηση στο πρόβλημα που εντοπίστηκε μέσα από τη ανασκόπηση της βιβλιογραφίας.

#### **Μέσα συλλογής δεδομένων**

##### **Συνεντεύξεις που βασίζονται στην επίλυση έργων**

Η συλλογή των δεδομένων της έρευνας, βασίστηκε στη διεξαγωγή ατομικών ημιδομημένων συνεντεύξεων που βασίζονται στην επίλυση έργων (task based interviews). Η επιλογή της συγκεκριμένης μεθόδου συλλογής των δεδομένων έγινε δεδομένου ότι οι συνεντεύξεις που στηρίζονται στην επίλυση έργων παρέχουν δυνατότητες εις βάθους διερεύνησης της εννοιολογικής κατανόησης των μαθητών (Maher & Sigley, 2014). Δεδομένου ότι στόχος της παρούσας εργασίας ήταν η διερεύνηση των προσεγγίσεων που ακολουθούσαν οι μαθητές καθώς και οι στρατηγικές τους, κρίθηκε ως η πλέον κατάλληλη μέθοδος συλλογής των δεδομένων. Επιπρόσθετα η επιλογή της ημιδομημένης μορφής συνέντευξης βασίστηκε στο γεγονός ότι η συγκεκριμένη μορφή επιτρέπει στον ερευνητή να αξιολογήσει την απάντηση του μαθητή (Assad, 2015) και να επεκτείνει τις ερωτήσεις που χρησιμοποιεί ώστε να εξασφαλίσει επιπρόσθετες πληροφορίες σχετικά με το υπό εξέταση φαινόμενο. Η ημιδομημένη μορφή των συνεντεύξεων, περιελάμβανε την



εκφώνηση της οδηγίας κάθε έργου που δόθηκε σε προφορικό επίπεδο στους μαθητές καθώς και ερωτήματα που σχετίζονται με τον τρόπο με τον οποίο εργάστηκαν οι μαθητές ώστε να καταλήξουν στην απάντησή τους όπως: «Ποια στοιχεία του έργου σε βοήθησαν για να δώσεις αυτή την απάντηση; Θα μπορούσες να βρεις έναν άλλο τρόπο ώστε να επιλύσεις το έργο αυτό;». Κάθε μαθητής, συμμετείχε συνολικά σε 6 ατομικές ημιδομημένες συνεντεύξεις διάρκειας 25 λεπτών η κάθε μια (3 κατά το προπαραεμβατικό στάδιο και 3 κατά το μεταπαραεμβατικό στάδιο) όπου κλήθηκαν να ολοκληρώσουν και να απαντήσουν στα έργα του δοκιμίου που τους είχε δοθεί.

### **Δοκίμιο**

Για να διερευνηθεί ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές προδημοτικής συμπεριφέρονται σε έργα που σχετίζονται με τους Αριθμούς και τα Μοτίβα, αναπτύχθηκε ένα δοκίμιο το οποίο συμπληρώθηκε από τους μαθητές κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων. Το δοκίμιο αυτό περιλαμβάνει κυρίως ερωτήσεις που επιδέχονται σύντομες απαντήσεις και συνδέονται με την ενότητα περιεχομένου των Αριθμών και της Άλγεβρας – Μοτίβων. Η επιλογή των συγκεκριμένων περιοχών από τις οποίες προέρχονται τα έργα, έχει προκύψει τόσο από τη σημασία που καταλαμβάνουν οι ενότητες αυτές στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών της Κύπρου (2010), όσο και από τη σημασία που διαδραματίζει η επιτυχία στα έργα αυτά κατά την προσχολική ηλικία στη μετέπειτα ακαδημαϊκή πορεία των μαθητών (Mulligan et al., 2012).

Συγκεκριμένα, η επιλογή των έργων των Αριθμών έγινε λαμβάνοντας υπόψη τις δομές που σύμφωνα με τους Purpura και Lonigan (2013) συνθέτουν την πρώιμη αριθμητική ικανότητα, ενώ χρησιμοποιήθηκαν και προσαρμόστηκαν έργα τα οποία αξιοποιήθηκαν σε προηγούμενες έρευνες. Σε κάποιες περιπτώσεις λήφθηκαν υπόψη και μερικά έργα από διεθνή εγχειρίδια Μαθηματικών (Developing Mathematics, 2009) τα οποία και προσαρμόστηκαν ανάλογα. Συγκεκριμένα, τα έργα αυτά είχαν ως στόχο να διερευνήσουν την ικανότητα των μαθητών όσον αφορά τις διαδικασίες αρίθμησης (απαγγελία αριθμών, άμεση αναγνώριση, απαρίθμηση, εκτίμηση), τις διαδικασίες για εύρεση σχέσεων (σύγκριση συλλογών, διάταξη αριθμών) καθώς και τις διαδικασίες που αφορούν σε πράξεις αριθμών (πρόσθεση, αφαίρεση, ανάλυση και σύνθεση αριθμού). Επιπρόσθετα, για την ανάπτυξη των έργων των Μοτίβων χρησιμοποιήθηκαν και προσαρμόστηκαν έργα που αξιοποιήθηκαν σε προηγούμενες έρευνες που μελέτησαν την ικανότητα των μαθητών σε έργα Μοτίβων. Συγκεκριμένα, αξιοποιήθηκαν έργα επαναλαμβανόμενων και αναπτυσσόμενων μοτίβων, ενώ χρησιμοποιήθηκαν και έργα με

πίνακα εισόδου και εξόδου τιμών. Για να διασφαλιστεί η εγκυρότητα της τελικής μορφής του δοκιμίου, όπως προέκυψε μετά την εφαρμογή της πιλοτικής χορήγησης, το δοκίμιο εξετάστηκε προσεκτικά τόσο από ερευνητές ειδικούς με το θέμα για έλεγχο της εγκυρότητας περιεχομένου του όσο και από τους ίδιους τους εκπαιδευτικούς που διδάσκουν τους μαθητές προδημοτικής ώστε να διαπιστωθεί ο βαθμός κατανόησης των οδηγιών από τους μικρούς μαθητές. Λόγω του ότι γίνεται προσπάθεια εντοπισμού του τρόπου που συμπεριφέρονται οι μαθητές προδημοτικής, απαιτείται ένα μεγάλο εύρος έργων διαφορετικών γνωστικών απαιτήσεων τα οποία να διαφοροποιούνται ως προς το ζητούμενό τους π.χ. απλή αναφορά σε μία αριθμητική απάντηση και απάντηση που στηρίζεται σε πιο γενικευμένες δομές. Τα συγκεκριμένα έργα που έχουν χρησιμοποιηθεί έχουν τη δυνατότητα να διαφοροποιήσουν το βαθμό δυσκολίας (συγκεκριμένο – αφηρημένο επίπεδο) αλλά και να εντοπίσουν το βαθμό εστίασης της προσοχής των μαθητών στις δοθείσες καταστάσεις (επιφανειακές παρατηρήσεις – εντοπισμός δομής). Αξίζει να σημειωθεί ότι για την ολοκλήρωση των έργων, δόθηκε η ευκαιρία στους μαθητές να αξιοποιήσουν πραγματικά χειριστικά μέσα (π.χ. κύβοι, χάντρες, μολύβια, σβηστήρια, ρίγες) καθώς και εικονικές αναπαραστάσεις αντικειμένων όπως για παράδειγμα τυπωμένες καρτέλες. Ακολουθεί πίνακας όπου παρουσιάζεται η κατηγοριοποίηση των έργων που χρησιμοποιήθηκαν στη συγκεκριμένη έρευνα, ενώ στη συνέχεια ακολουθεί περιγραφή των έργων που χρησιμοποιήθηκαν.

### Πίνακας 3.2

#### Μαθηματικό Περιεχόμενο Δοκιμίου

Μαθηματικό Περιεχόμενο	Έργα δοκιμίου
Διαδικασίες Αρίθμησης (απαγγελία αριθμών, άμεση αναγνώριση, απαρίθμηση, εκτίμηση)	Αρ. 2, Αρ. 3, Αρ. 4, Αρ. 21
Διαδικασίες εύρεσης σχέσεων (σύγκριση και διάταξη)	Αρ. 6, Αρ. 9, Αρ. 10, Αρ.11, Αρ.12, Αρ. 13, Αρ. 14, Αρ. 15, Αρ.16, Αρ. 17
Διαδικασίες που αφορούν πράξεις αριθμών (πρόσθεση, αφαίρεση, ανάλυση και σύνθεση)	Αρ.1, Αρ.5, Αρ. 7, Αρ. 8, Αρ.18, Αρ.20
Μοτίβα (επαναλαμβανόμενα/αναπτυσσόμενα μοτίβα, πίνακα αντιστοίχισης τιμών)	A.1, A.2, A.3, A.4, A.5, A.6, A.7, A.8

Τα έργα που περιλαμβάνονται στην πρώτη κατηγορία έργων και αφορούν τις διαδικασίες αρίθμησης (Purpura & Baroody, 2013) είναι τα έργα Αρ. 2, 3, 4 και 21. Για την κατασκευή των έργων αυτών λήφθηκαν υπόψη έργα σχετικών ερευνών όπως των Barroody και Gatzke (1991), των Clements και Sarama (2014) των Cross, Woods και Schweingruber (2009),

του Fuson, (2012) και των Sarama και Clements (2009). Συγκεκριμένα, στα έργα Αρ.2, Αρ. 3 και Αρ. 4 οι μαθητές κλήθηκαν να απαριθμήσουν τα αντικείμενα που δόθηκαν σε εικονικές αναπαραστάσεις (σε σειρά, σε κυκλική διάταξη, χωρίς συγκεκριμένη χωρική διάταξη) και να γράψουν, να αντιστοιχίσουν ή να αναφέρουν το σωστό αριθμητικό σύμβολο ή αριθμολέξη. Αντίστοιχα, το έργο των Αριθμών (Αρ. 21) αποτελεί ένα έργο εκτίμησης. Στόχος των μαθητών ήταν να υπολογίσουν πόσες περίπου φίσες υπήρχαν σε μία συλλογή που παρουσιάστηκε, λαμβάνοντας υπόψη ένα συγκεκριμένο σημείο αναφοράς.

Όσον αφορά στα έργα τα οποία αναφέρονται σε διαδικασίες εύρεσης σχέσεων αυτά είναι: Αρ. 6, Αρ. 9, Αρ. 10, Αρ.11, Αρ.12, Αρ. 13, Αρ. 14, Αρ. 15, Αρ.16, Αρ. 17. Για την κατασκευή των έργων που απαιτούσαν σύγκριση ποσοτήτων (Αρ.6, Αρ.9) λήφθηκαν υπόψη έργα που χρησιμοποιήθηκαν σε άλλες έρευνες (Jordan, Kaplan, Olah, & Locuniak, 2006; Kleemans, Peeters, Segers, & Verhoeven, 2014; Krajewski & Schneider, 2009; Pittalis et al., 2013; Van Luit & Van de Rijt, 2009) και τροποποιήθηκαν ανάλογα ώστε να συνδέονται με τους στόχους της παρούσας εργασίας. Συγκεκριμένα, στο έκτο έργο (Αρ. 6), το οποίο αποτελεί ένα έργο σύγκρισης ποσοτήτων, οι μαθητές είχαν να συγκρίνουν και να αναγνωρίσουν την ομάδα (πράσινη ή κίτρινη) με τους περισσότερους κύβους unifix. Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα οι μαθητές μπορούσαν να χειριστούν το υλικό, με όποιο τρόπο ήθελαν, να το συνδέσουν ή να το αποσυνδέσουν ώστε να απαντήσουν στο ερώτημα που τους είχε τεθεί. Στο έργο Αρ. 9, το οποίο διακρίνεται σε 2 υποερωτήματα, αρχικά οι μαθητές κλήθηκαν να δημιουργήσουν κατάλληλη εικονική αναπαράσταση ώστε να ζωγραφίσουν τις μπάλες της Μαρίας και του Αντρέα (« Η Μαρία είχε 3 μπάλες περισσότερες από τον Αντρέα») και στη συνέχεια τις μπάλες της Μαρίας, του Αντρέα και της γιαγιάς τους («Ο Αντρέας είχε μία μπάλα περισσότερη από τη Μαρία και η γιαγιά μία μπάλα περισσότερη από τον Αντρέα»). Το δέκατο έργο το δοκιμίου (Αρ. 10) αξιοποιήθηκε με τον τρόπο που παρουσιάζεται σε διεθνή εγχειρίδια Μαθηματικών (Developing Mathematics a, 2009). Το έργο αυτό είναι ένα πιο σύνθετο έργο σύγκρισης καθώς απαιτεί από τους μαθητές χρησιμοποιώντας 10 κύβους unifix με κατάλληλο τρόπο, να δημιουργήσουν σωστά το ζητούμενο του προβλήματος («Στο πιάτο πρέπει να υπάρχει ένας περισσότερος κύβος από ότι στην παλάμη και στο κουτί τρεις περισσότεροι κύβοι από ότι στην παλάμη»). Όσον αφορά στην ανάπτυξη των έργων Αρ.11 Αρ.12 Αρ.13 αυτή στηρίχτηκε σε ερευνητικά αποτελέσματα άλλων ερευνών (Geary, Hoard, Byrd-Craven, Nugent, & Numtee, 2007; Hornung, Schiltz, Brunner & Martin, 2014) που προϋπόθεταν τη συμπλήρωση αριθμητικών συμβόλων σε δοσμένες αριθμητικές γραμμές. Στο έργο Αρ.

11, ζητήθηκε από τους μαθητές να διατάξουν τα μπαλόνια στη σωστή θέση πάνω σε μία αριθμητική γραμμή, λαμβάνοντας υπόψη το δοσμένο αριθμό που αναγραφόταν σε καθένα από αυτά, ενώ στο έργο Αρ. 12, οι μαθητές κλήθηκαν να αναγράψουν το κατάλληλο αριθμητικό σύμβολο στα μπαλόνια, σύμφωνα με τη θέση που είχαν τοποθετηθεί σε μία αριθμητική γραμμή. Στο έργο Αρ. 13 οι μαθητές κλήθηκαν να συμπληρώσουν την ακολουθία των αριθμών που τους δόθηκε χρησιμοποιώντας κατάλληλα αριθμητικά σύμβολα. Όσον αφορά στα έργα Αρ. 14 και Αρ. 15 αυτά υιοθετήθηκαν από διεθνή εγχειρίδια Μαθηματικών (Developing Mathematics, 2009). Συγκεκριμένα, στο έργο Αρ. 14, στόχος των μαθητών ήταν να τοποθετήσουν τον αριθμό 10 στην κατάλληλη θέση σε πλέγματα αριθμών. Αντίστοιχα στο έργο Αρ. 15, δόθηκε ο πίνακας του 100 ώστε οι μαθητές χρησιμοποιώντας αριθμητικά σύμβολα να συμπληρώσουν τους αριθμούς που είχαν διαγραφεί σε διάφορες θέσεις. Όσον αφορά την κατασκευή των έργων Αρ.16 και Αρ. 17, λήφθηκαν υπόψη έργα σχετικών ερευνών όπως των Bruce και Threlfall (2004). Στο έργο Αρ. 16 οι μαθητές κλήθηκαν να τοποθετήσουν σε σειρά καρτέλες σύμφωνα με τις οδηγίες που τους δόθηκαν («Να τοποθετήσεις τις καρτέλες στη σωστή τους θέση εάν γνωρίζεις ότι το κουνέλι είναι πρώτο, η γάτα είναι τρίτη, ο σκύλος είναι δεύτερος, το άλογο τελευταίο και ο βάτραχος τέταρτος»). Στο έργο Αρ. 17, δόθηκαν καρτέλες που αναπαριστούσαν διάφορα παιδάκια. Οι καρτέλες αυτές τοποθετήθηκαν στο θρανίο σε συγκεκριμένες θέσεις. Στόχος των μαθητών ήταν να εντοπίσουν σε ποια θέση βρισκόταν ένα συγκεκριμένο παιδάκι μετά από κάποιες αλλαγές που αναφέρθηκαν από την ερευνήτρια («Εάν το 5<sup>ο</sup> αγόρι, ανταλλάξει θέση με το 3<sup>ο</sup> κορίτσι, σε ποια θέση θα βρίσκεται το 4<sup>ο</sup> κορίτσι;») καθώς και να εντοπίσουν ποιο παιδάκι βρισκόταν σε μία συγκεκριμένη θέση μετά από κάποιες αλλαγές που αναφέρθηκαν από την ερευνήτρια («Εάν το κορίτσι που είναι 3<sup>ο</sup>, πάει στην τελευταία θέση, ποιο παιδάκι θα βρίσκεται στην 3<sup>η</sup> θέση;»).

Τα έργα τα οποία αναφέρονται σε διαδικασίες που αφορούν πράξεις είναι: Αρ.1, Αρ.5, Αρ. 7, Αρ. 8, Αρ.18, Αρ.20. Συγκεκριμένα, στο πρώτο έργο (Αρ.1) το οποίο υιοθετήθηκε από την έρευνα του Pittali και των συνεργατών του (2013) οι μαθητές κλήθηκαν να συμπληρώσουν ή να διαγράψουν κύκλους σε δοσμένες εικονικές αναπαραστάσεις, ώστε οι κύκλοι μέσα στο κουτί να αντιστοιχούν με τον αναγραφόμενο αριθμό. Στόχος των μαθητών στο πέμπτο έργο (Αρ. 5) το οποίο υιοθετήθηκε από διεθνή εγχειρίδια Μαθηματικών (Developing Mathematics, 2009), ήταν να αναγνωρίσουν πόσα ακόμη αντικείμενα χρειάζονταν, ώστε τα αντικείμενα να είναι αρκετά για όλα τα παιδιά. Για την επίλυση του συγκεκριμένου έργου, οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να χειριστούν

πραγματικά αντικείμενα. Ακολούθως, το έβδομο έργο (Αρ. 7) διακρίνεται από 4 υποερωτήματα. Για το σχεδιασμό του συγκεκριμένου έργου λήφθηκαν υπόψη έργα των Blanton και Karut (2004). Συγκεκριμένα, στο έργο αυτό οι μαθητές είχαν να αποφασίσουν (α) πόσα πόδια έχουν 2 παπάκια, (β) πόσα πόδια έχουν 3 παπάκια, (γ) να δημιουργήσουν κατάλληλη εικονική αναπαράσταση ώστε να δείξουν τα παπάκια που έχουν 12 πόδια και (δ) να αναγνωρίσουν πόσα παπάκια έχουν 10 πόδια. Το επόμενο έργο (Αρ. 8) αποτελεί επέκταση του έργου Αρ.7. Στόχος των μαθητών ήταν να κρίνουν την ορθότητα του συλλογισμού ενός μαθητή που ανέφερε ότι υπήρχαν 4 παπάκια κρυμμένα πίσω από ένα φράκτη δεδομένου ότι όλα τα πόδια που είχε μετρήσει ήταν 7. Το έργο Αρ. 18, αποτελεί ένα έργο σύνθεσης και ανάλυσης αριθμού. Το έργο αυτό υιοθετήθηκε από την έρευνα των Tsamir, Tirosh, Levenson, Taback & Barkai (2013). Συγκεκριμένα σε αυτό το έργο, οι μαθητές είχαν στη διάθεσή τους 2 είδη καρτελών στις οποίες υπήρχαν ζωγραφισμένες καραμέλες. Στις καρτέλες υπήρχαν ζωγραφισμένες από 0 μέχρι και 8 καραμέλες. Οι μαθητές, κλήθηκαν να επιλέξουν τις κατάλληλες καρτέλες, ώστε να συνθέσουν τον αριθμό 8 ως άθροισμα δύο προσθετέων. Στόχος τους, ήταν να εντοπίσουν όσο το δυνατό περισσότερους τρόπους για να συνθέσουν τον αριθμό 8. Στο έργο Αρ. 19 δόθηκε μία εικονική αναπαράσταση στους μαθητές όπου παρουσιάζονταν δύο ράφια. Στα ράφια υπήρχαν κάποιες τσάντες όπου αναγραφόταν ένα αριθμητικό σύμβολο το οποίο και παρουσίαζε τον αριθμό των μαρκαδόρων που υπήρχαν μέσα σε αυτές. Οι μαρκαδόροι δε φαίνονταν, ωστόσο το αριθμητικό σύμβολο αποτελούσε ένδειξη των μαρκαδόρων που υπήρχαν σε αυτές. Στόχος των μαθητών ήταν να αναγνωρίσουν σε ποια από τα δύο ράφια συνολικά οι τσάντες είχαν τους περισσότερους μαρκαδόρους. Στόχος των μαθητών στο έργο Αρ. 20, το οποίο και υιοθετήθηκε από διεθνή εγχειρίδια Μαθηματικών (2009) ήταν να τοποθετήσουν κατάλληλα 15 φίσες διαφορετικών χρωμάτων σε 5 κουτιά ώστε να δημιουργηθεί άθροισμα 10 φισών σε οριζόντια και κατακόρυφη διάταξη (δείτε Παράρτημα Α).

Όσον αφορά τα έργα που σχετίζονται με τα μοτίβα, οι μαθητές είχαν την ευκαιρία χρησιμοποιώντας πραγματικά υλικά (χάντρες) να συμπληρώσουν, να επεκτείνουν και να μεταφράσουν μοτίβα από τη μία μορφή στην άλλη και ακολούθως να σημειώσουν τις απαντήσεις τους στο δοκίμιο που τους είχε δοθεί. Για την κατασκευή των έργων όσον αφορά τα μοτίβα, λήφθηκαν υπόψη έργα σχετικών ερευνών όπως για παράδειγμα των Blanton και Karut (2004), των Collins και Laskis (2015), των Klein και Starkey (2004) της Papic και των συνεργατών της (2011) του Rittle-Johnson και των συνεργατών του 2013 και της Warren (2000, 2005), και της Warren και των συνεργατών της (2007). Το

πρώτο έργο, αποτελεί ένα έργο επέκτασης επαναλαμβανόμενου μοτίβου. Συγκεκριμένα αποτελείται από τρία επαναλαμβανόμενα μοτίβα τα οποία διαφέρουν ως προς τη δομή τους (AB, ABB, ABΓ). Στο δεύτερο έργο (A.2) ζητήθηκε από τους μαθητές να εντοπίσουν εάν ένα κολιέ που τους παρουσιάστηκε ήταν μοτίβο, ενώ το τρίτο έργο (A.3) αποτελεί ένα έργο επέκτασης επαναλαμβανόμενου μοτίβου της μορφής ABΓ στο οποίο ζητήθηκε από τους μαθητές να εντοπίσουν συγκεκριμένους όρους του μοτίβου που τους ζητήθηκαν (δείτε Παράρτημα Α). Το τέταρτο έργο (A.4) αποτελεί ένα έργο συμπλήρωσης όπου οι μαθητές κλήθηκαν να συμπληρώσουν συγκεκριμένους όρους τριών έργων τα οποία διέφεραν ως προς τη δομή τους (ABΓ, AABBB, AABBG). Τα έργα A.5 και A.6 αποτελούν έργα επέκτασης αναπτυσσόμενων μοτίβων. Το έβδομο έργο αποτελεί ένα έργο μετάφρασης, όπου οι μαθητές κλήθηκαν χρησιμοποιώντας πραγματικές χάντρες να μεταφράσουν σε μία άλλη μορφή (πραγματικά αντικείμενα) ένα μοτίβο που τους δόθηκε σε εικονική αναπαράσταση. Τέλος, το τελευταίο έργο αποτελεί ένα έργο αντιστοίχισης τιμών σε πίνακα του οποίου η κατασκευή του στηρίχτηκε σε έργα σχετικών ερευνών όπως της Warren, Miller και Cooper (2011).

## **Περιβάλλοντα μάθησης**

### **Σχεδιασμός διδασκαλιών διερευνητικής μάθησης**

Ο σχεδιασμός των περιβαλλόντων διερευνητικής μάθησης βασίστηκε στο (α) μαθηματικό περιεχόμενο, (β) στη φιλοσοφία χρήσης των τεχνολογικών εργαλείων και του τρόπου επιλογής τους, (γ) στην οργάνωση και διαχείριση του τρόπου εργασίας των μαθητών στην τάξη από την εκπαιδευτικό και (δ) στη δομή των μαθηματικών δραστηριοτήτων. Οι Pierce και Stacey (2010) στον παιδαγωγικό τους χάρτη για την παρουσίαση του τρόπου χρήσης της τεχνολογίας, χρησιμοποιούν παρόμοιους άξονες. Συγκεκριμένα, οι άξονες αυτοί αναφέρονται στις δυνατότητες των τεχνολογικών εργαλείων, στην οργάνωση και διαχείριση της εργασίας στην τάξη και στο μαθηματικό περιεχόμενο.

Τα δύο περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης που σχεδιάστηκαν, αφορούν στο ίδιο μαθηματικό περιεχόμενο και έχουν τους ίδιους μαθησιακούς στόχους. Επιπρόσθετα, αξιοποιούν με την ίδια φιλοσοφία τα τεχνολογικά εργαλεία.

Σχετικά με το μαθηματικό περιεχόμενο, οι δραστηριότητες των δύο περιβαλλόντων διερευνητικής μάθησης με χρήση οθονών αφής, αφορούν τις ίδιες μαθηματικές έννοιες που προέρχονται από δύο ενότητες περιεχομένου του Αναλυτικού Προγράμματος της

Κύπρου: Αριθμοί και Άλγεβρα, (Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού της Κύπρου, 2010) και έχουν ως σκοπό την ανάπτυξη των ικανοτήτων που προκύπτουν από τις συνιστώσες που περιγράφουν την μαθηματική ικανότητα των παιδιών προδημοτικής (επεξεργασία/χειρισμός δεδομένων, επεξεργασία/χειρισμός αναπαραστάσεων, χρήση μαθηματικών διαδικασιών, παροχή αιτιολογήσεων, έκφραση με ακρίβεια στην ορολογία) όπως προέκυψαν από την παρούσα εργασία. Οι δραστηριότητες των περιβαλλόντων διερευνητικής μάθησης έχουν επίσης στόχο, την ενθάρρυνση των μαθηματικών ενεργειών (π.χ. αναζήτηση συσχετίσεων, αναγνώριση μοτίβων και δομών, συνδέσεις με τη γλώσσα, αναπαραστάσεις, αιτιολογήσεις, αναστοχασμοί, γενικεύσεις) που περιγράφει η Τζεκάκη (2014) με τις οποίες ορίζει την μαθηματική δραστηριότητα. Αξίζει να σημειωθεί, ότι συγκεκριμένα ως προς την ενότητα περιεχομένου της Άλγεβρας και στα δύο περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης, συμπεριλαμβάνονται δραστηριότητες που αφορούν αποκλειστικά στην έννοια των μοτίβων (επαναλαμβανόμενα μοτίβα, αναπτυσσόμενα μοτίβα και πίνακες με τιμές εισόδου/εξόδου). Ως εκ τούτου, οι μαθησιακοί στόχοι και των δύο περιβαλλόντων διερευνητικής μάθησης είναι οι ίδιοι. Η οργάνωση των μαθημάτων ως προς το μαθηματικό περιεχόμενό τους παρουσιάζεται στον Πίνακα 3.3.

Πίνακας 3.3

*Οργάνωση των Μαθημάτων ως προς το Μαθηματικό τους Περιεχόμενο*

Μάθημα	Μαθηματικό περιεχόμενο
1 (1X40')	Απαρίθμηση στοιχείων – Αναγνώριση ποσοτήτων
2 (1X40')	Άμεση αναγνώριση
3 (1X40')	Αξία θέσης ψηφίου – Πίνακας του 100 - Σύγκριση αριθμών
4 (1X40')	Αξία θέσης ψηφίου – Πίνακας του 100 - Σύγκριση αριθμών
5 (1X40')	Αριθμητική γραμμή
6 (1X40')	Ανάλυση – Σύνθεση αριθμού
7 (1X40')	Ανάλυση – Σύνθεση αριθμού
8 (1X40')	Πρόσθεση
9 (1X40')	Πρόσθεση
10 (1X40')	Εκτίμηση
11 (1X40')	Επαναλαμβανόμενα μοτίβα
12 (1X40')	Επαναλαμβανόμενα μοτίβα
13 (1X40')	Αναπτυσσόμενα μοτίβα
14 (1X40')	Αναπτυσσόμενα μοτίβα
15 (1X40')	Μηχανές

Σε σχέση με τη φιλοσοφία αξιοποίησης της τεχνολογίας και στα δύο περιβάλλοντα μάθησης αξιοποιήθηκε η αρχή της «μάθησης με την τεχνολογία» (Jonassen, Howland, Marra, & Crismond, 2003). Συγκεκριμένα, η αρχή αυτή αναγνωρίζει ότι η τεχνολογία

αποτελεί συνεργάτη και ενσωματώνεται με αρμονικό τρόπο στις πρακτικές της μαθηματικής τάξης (Goos, Galbraith, Renshaw, & Geiger 2003). Επιπρόσθετα, η τεχνολογία χρησιμοποιήθηκε ως εργαλείο για εξάσκηση, αξιοποιώντας τη δυνατότητα των ψηφιακών εργαλείων για άμεση ανατροφοδότηση αλλά και ως εργαλείο για ανάπτυξη και ενίσχυση της εννοιολογικής κατανόησης των μαθητών (Drijvers, 2015). Αξιοποιήθηκαν μαθηματικά εφαρμογίδια και εφαρμογές που έδωσαν τη δυνατότητα διερεύνησης δεδομένων, παρατήρησης για εντοπισμό ομοιοτήτων και διαφορών, εξάσκησης σε δεξιότητες, εκμάθησης μέσω της ανατροφοδότησης που παρείχαν καθώς και παροχής πολλαπλών λύσεων μέσω παιχνιδιού σε ένα πρόβλημα (BECTA, 2009; Drijvers, 2015; Pierce & Stacey, 2010).

Σχετικά με τον τρόπο οργάνωσης και διαχείρισης της εργασίας στην τάξη από την εκπαιδευτικό, τα δύο παρεμβατικά προγράμματα παρουσίασαν κάποιες ομοιότητες αλλά και κάποιες διαφορές οι οποίες αναλύονται πιο κάτω. Αρχίζοντας από τις ομοιότητες τόσο στο περιβάλλον του υψηλού βαθμού καθοδηγούμενης διερεύνησης με χρήση οθονών αφής, όσο και στο χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενο περιβάλλον διερεύνησης με χρήση οθονών αφής, οι μαθητές εργάζονταν σε δυάδες κατά την εργασία τους με τα iPads, ενώ υπήρχε εναλλαγή του τρόπου εργασίας τους (ατομικά ή σε δυάδες) κατά την συμπλήρωση των φύλλων εργασίας που τους δόθηκαν. Λαμβάνοντας υπόψη ότι η συνεργατική μάθηση σε ψηφιακά περιβάλλοντα βοηθά τους μαθητές να απολαμβάνουν τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος και αυξάνει την επιμονή τους για την επίλυση δραστηριοτήτων (Charles & Shumar, 2007; Hiebert et al., 1997), επιλέγηκε η συνεργατική μάθηση σε μικρές ομάδες των δύο ατόμων, ώστε να διασφαλιστεί η ενεργητική συμμετοχή και εμπλοκή και των δύο μαθητών. Σε κάθε μάθημα οι μαθητές καλούνταν να απαντήσουν σε προβληματισμούς οι οποίοι είχαν σχεδιαστεί από πριν για κάθε μάθημα και είδος παρέμβασης. Αφού παρουσιάζονταν οι προβληματισμοί αυτοί μέσω προβολέα στον πίνακα σε μορφή παρουσίασης, οι μαθητές εργάζονταν στο εκάστοτε εφαρμογίδιο μέσω των iPads και συμπλήρωναν τις απαντήσεις τους (όπου χρειαζόταν) στα ερωτήματα των φύλλων εργασίας. Οι μαθητές κατέγραφαν τις απαντήσεις που εντόπιζαν μέσω της αξιοποίησης των iPads τους σε φύλλα εργασίας, τα οποία φύλλα διαφοροποιούνταν ανάλογα με το περιβάλλον στο οποίο συμμετείχαν οι μαθητές (δείτε παράδειγμα στο Παράρτημα Γ και Δ αντίστοιχα, για την υψηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση και την χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση). Αξίζει να σημειωθεί, ότι τα φύλλα εργασίας που παρουσιάζονται στα Παραρτήματα Γ και Δ, δείχνουν την πορεία του μαθήματος, τη δόμηση των δραστηριοτήτων των δύο περιβαλλόντων διερευνητικής μάθησης και την



ακολουθία των προβληματισμών που προβάλλονταν κάθε φορά στον πίνακα από την εκπαιδευτικό, δεν δόθηκαν όμως σε αυτή ακριβώς τη μορφή στους μαθητές λόγω της δυσκολίας των μαθητών προδημοτικής για ανάγνωση. Ωστόσο, στις περιπτώσεις όπου οι μαθητές καλούνταν να καταγράψουν παραδείγματα, να συμπληρώσουν πίνακα, να παρέχουν συγκεκριμένες αριθμητικές απαντήσεις ή να κατασκευάσουν μία αναπαράσταση, δινόταν το φύλλο καταγραφής όπως παρουσιάζεται στο Παράρτημα Γ και Δ. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι μαθητές είχαν την ελευθερία να παρουσιάσουν τον τρόπο με τον οποίο εργάστηκαν με οποιονδήποτε τρόπο επέλεξαν οι ίδιοι (για παράδειγμα κατασκευή εικονικών αναπαραστάσεων, χρήση αριθμητικών συμβόλων) ώστε η διαδικασία να ανταποκρίνεται στις ανάγκες και τις ατομικές διαφορές κάθε μαθητή (DFES, 2006). Στις περιπτώσεις όπου ζητείτο από τους μαθητές να παρέχουν επεξηγήσεις (δηλαδή αυτές που περιλαμβάνονται στα φύλλα εργασίας στο Παράρτημα Γ και Δ), γινόταν ηχογράφηση των συνομιλιών των μαθητών. Γενικά, καθώς οι μαθητές εργάζονταν στα iPads, η εκπαιδευτικός/ερευνήτρια επενέβαινε στις περιπτώσεις όπου οι μαθητές έθεταν διευκρινιστικές ερωτήσεις για τη χρήση του iPad ή του εφαρμογιδίου ή είχαν απορία για κάποια οδηγία που δόθηκε. Ταυτόχρονα, περιφερόταν μεταξύ των μαθητών καθώς εργάζονταν και τους προέτρεπε να περιγράψουν την διαδικασία που ακολούθησαν ή τον τρόπο σκέψης καθώς και να αιτιολογήσουν τις επιλογές τους.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η σημαντικότερη ομοιότητά των δύο περιβαλλόντων διερευνητικής μάθησης, εδράζεται στο ότι και τα δύο περιβάλλοντα διέπονταν από τα χαρακτηριστικά της διερευνητικής μάθησης, όπου ο μαθητής είναι το επίκεντρο της μάθησης και καλείται να εργαστεί με παρόμοιους τρόπους όπως ένας μαθηματικός (Maab & Artigue, 2013). Πιο συγκεκριμένα, σε ένα τέτοιο περιβάλλον διερευνητικής μάθησης ο μαθητής παρατηρεί φαινόμενα, υποβάλει ερωτήσεις, ψάχνει μαθηματικούς τρόπους για επίλυση προβλημάτων, ερμηνεύει και αξιολογεί λύσεις, γενικεύει και συνδέει καταστάσεις για ανάπτυξη μαθηματικών εννοιών και δομών (Maab & Artigue, 2013; NRC, 1996, 2000).

Τα δύο παρεμβατικά προγράμματα, παρουσίασαν ωστόσο και κάποιες διαφορές ως προς τον τρόπο οργάνωσης και διαχείρισης της εργασίας των μαθητών στην τάξη από την εκπαιδευτικό καθώς και ως προς τη φιλοσοφία δόμησης των δραστηριοτήτων, δηλαδή τη δομή των δραστηριοτήτων που αξιοποιήθηκαν και το βαθμό καθοδήγησης των μαθητών. Τα συγκεκριμένα σημεία παρουσιάζονται αναλυτικά πιο κάτω για κάθε διδασκαλία.

**Υψηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση:** Ο σχεδιασμός της υψηλού βαθμού καθοδηγούμενης διερεύνησης βασίστηκε στις αρχές των Baroody και των συνεργατών του (2015). Σύμφωνα με τις αρχές αυτές, σε αυτή την περίπτωση διδασκαλιών, η εκπαιδευτικός θέτει επιπρόσθετους προβληματισμούς/ερωτήματα σε σχέση με τη χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση ανάλογα με την εξέλιξη του μαθήματος συμβάλλοντας περαιτέρω στον καθοδηγητικό χαρακτήρα διερεύνησης του συγκεκριμένου περιβάλλοντος μάθησης. Αυτές οι επιπρόσθετες ερωτήσεις/ προβληματισμοί στην περίπτωση των συγκεκριμένων διδασκαλιών, είτε παρακινούσαν τους μαθητές για περαιτέρω διερεύνηση με τη χρήση των iPads, είτε ενθάρρυναν περισσότερη συζήτηση στην ολομέλεια και ανταλλαγή απόψεων. Επιπρόσθετα, στο περιβάλλον υψηλού βαθμού καθοδηγούμενης διερεύνησης, η ανατροφοδότηση που παρέχεται από την εκπαιδευτικό δεν περιορίζεται μόνο στο κατά πόσο η απάντηση είναι ορθή ή λανθασμένη αλλά στις περιπτώσεις που απαιτείται εμπλέκει και κάποιες νύξεις (Baroody et al., 2015).

Επιπρόσθετα, στο περιβάλλον υψηλού βαθμού καθοδηγούμενης διερεύνησης παρόλο που το μοτίβο, η σχέση ή η στρατηγική δεν παρέχεται άμεσα ή δεν επεξηγείται ξεκάθαρα στον μαθητή (όπως στην περίπτωση της συνήθους διδασκαλίας), αυτού του είδους η διερευνητική μάθηση παρέχει νύξεις, εμπλέκει σημαντική μαθησιακή υποστήριξη η οποία συνεπάγεται περισσότερη καθοδήγηση των μαθητών από τους εκπαιδευτικούς, μιας και η διδασκαλία οργανώνεται για να κατευθύνει την προσοχή του μαθητή σε κανονικότητες ή σε στρατηγική (Baroody et al., 2015). Σε αυτό το περιβάλλον, οι μαθητές έλυναν προβλήματα με διαβαθμισμένο βαθμό δυσκολίας και καθοδήγησης. Συγκεκριμένα το περιβάλλον αυτό άρχιζε με καθοδηγούμενες διερευνητικές δραστηριότητες, οι οποίες ενέπλεκαν για παράδειγμα προβληματισμούς που αφορούσαν σε συγκεκριμένες περιπτώσεις. Τα έργα αυτά δεν περιλαμβάνονταν και στη χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση, αλλά χρησιμοποιήθηκαν μόνο στην υψηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση ώστε να διασφαλιστεί η σταδιακή αύξηση του βαθμού δυσκολίας που παρεχόταν στους μαθητές. Στη συνέχεια, στο περιβάλλον αυτό υπήρχε μία σταδιακή πορεία από τους προβληματισμούς που προαναφέρθηκαν σε δραστηριότητες οι οποίες ενέπλεκαν ανοικτά προβλήματα και υψηλότερο βαθμό δυσκολίας. Αυτά τα ανοικτά προβλήματα ήταν ίδιας φιλοσοφίας με αυτά που αξιοποιήθηκαν στη χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενο περιβάλλον διερεύνησης.

### *Χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση*

Η διάκριση της χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενης διερεύνησης σε σχέση με την υψηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση βασίστηκε στις αρχές των μορφών διερευνητικής μάθησης όπως διατυπώνονται από τον Baroody και τους συνεργάτες του (2015).

Συγκεκριμένα, όσον αφορά τον τρόπο οργάνωσης και διαχείρισης της εργασίας των μαθητών στην τάξη, στην περίπτωση του περιβάλλοντος χαμηλού βαθμού διερευνητικής μάθησης, η εκπαιδευτικός δεν έθετε οποιεσδήποτε ερωτήσεις που θα παρέπεμπαν σε καθοδήγηση ούτε παρείχε οποιεσδήποτε νύξεις, κάτι που συνέβαινε στο περιβάλλον υψηλού βαθμού καθοδήγησης. Επιπρόσθετα, όσον αφορά στην παροχή ανατροφοδότησης από μέρους της εκπαιδευτικού, στο περιβάλλον χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενης διερεύνησης αυτή περιοριζόταν στο αν η απάντηση ήταν ορθή ή λανθασμένη.

Τα δύο περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης διέφεραν ακόμη ως προς τη δομή τους και κατά συνέπεια ως προς τις δραστηριότητες στις οποίες ενέπλεκαν τους μαθητές. Συγκεκριμένα, η πορεία των δραστηριοτήτων στη χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση διέφερε σε σχέση με την υψηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση, χωρίς αυτό να αποκλείει το ότι περιλαμβάνονταν και κοινές δραστηριότητες, σε διαφορετικά ωστόσο σημεία του μαθήματος. Για το σχεδιασμό του περιβάλλοντος με χαμηλό βαθμό καθοδηγούμενης διερεύνησης, λήφθηκε υπόψη η περιγραφή των Baroody και των συνεργατών του (2015) σύμφωνα με την οποία, σε αυτό το περιβάλλον παρέχεται λιγότερη, έμμεση – υποβόσκουσα βοήθεια στον μαθητή. Το περιβάλλον χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενης διερεύνησης με χρήση οθονών αφής περιελάμβανε μόνο καταστάσεις λύσης προβλήματος οι οποίες αναφέρονταν σε ανοικτά προβλήματα χωρίς να υπάρχει οποιαδήποτε μορφή σταδιακής καθοδήγησης στην πορεία του μαθήματος στο συγκεκριμένο περιβάλλον. Αυτή η απουσία καθοδήγησης και σταδιακής πορείας σε αυτό το περιβάλλον μάθησης καθιστούσε τα ανοικτά προβλήματα πιο σύνθετα για τους μαθητές, μιας και η λύση τους δεν ήταν εμφανής και γνωστή σε αυτούς και έτσι απαιτούσαν από τους μαθητές να αναπτύξουν πρακτικές και τρόπους για την αντιμετώπισή τους. Σύμφωνα με τους Klavir και HersHKovitz (2008) τα ανοικτά προβλήματα σπάζουν το στερεότυπο ότι κάθε πρόβλημα έχει μία ορθή λύση και επιτρέπουν στους μαθητές να εργάζονται ταυτόχρονα στο ίδιο πρόβλημα σε διαφορετικά επίπεδα, μιας και κάποιοι μαθητές θα είναι ικανοποιημένοι με μία λύση, άλλοι θα εντοπίσουν πολλές λύσεις ενώ άλλοι θα εργαστούν συστηματικά για να εντοπίσουν όλες τις δυνατές λύσεις. Οι διαφορές και οι ομοιότητες των δύο περιβαλλόντων διερευνητικής μάθησης που περιγράφηκαν πιο πάνω φαίνονται πιο ξεκάθαρα στο παράδειγμα που ακολουθεί στον Πίνακα 3.4.

## **Συνήθης διδασκαλία**

Η συνήθης διδασκαλία την οποία παρακολούθησαν οι μαθητές της τρίτης ομάδας (ομάδα ελέγχου) βασίστηκε στο Νέο Αναλυτικό Πρόγραμμα των Μαθηματικών της Κύπρου για την προσχολική ηλικία και συγκεκριμένα, την περίοδο της έρευνας η διδασκαλία βασιζόταν στη ενότητα περιεχομένου των Αριθμών και στην ενότητα περιεχομένου της Άλγεβρας – Μοτίβων. Οι έννοιες που διδάχτηκαν οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας και προέρχονταν από τις προαναφερθείσες ενότητες περιεχομένου, ήταν οι ίδιες με αυτές που διδάχτηκαν οι μαθητές των παρεμβατικών ομάδων. Οι συνήθειες διδασκαλίες που εφαρμόστηκαν, στόχευαν τόσο στην εννοιολογική όσο και στη διαδικαστική γνώση, ήταν σχεδιασμένες με τρόπο που επέτρεπαν στους μαθητές να εργάζονται και ατομικά αλλά και σε ζευγάρια και περιλάμβαναν συζητήσεις στην ολομέλεια. Αξίζει να σημειωθεί ότι η συζήτηση στην ολομέλεια καταλάμβανε το μεγαλύτερο χρόνο του μαθήματος και ως εκ τούτου ο χρόνος που εργάζονταν οι μαθητές ατομικά ή σε ζευγάρια ήταν περιορισμένος σε σχέση με τον αντίστοιχο χρόνο (ατομική ή συνεργατική εργασία) που είχαν οι μαθητές των δύο παρεμβάσεων. Ο όρος συνήθης διδασκαλία χρησιμοποιείται υπό την έννοια ότι μια τέτοια διδασκαλία αναμένεται να συναντήσει κανείς τη δεδομένη χρονική στιγμή σε μία τυπική προδημοτική τάξη στην Κύπρο, μιας και σε αυτού του είδους διδασκαλία δεν εμπλεκόταν η χρήση των οθονών αφής – iPads από τους μαθητές και δεν βασιζόταν ο σχεδιασμός και η εφαρμογή της στη διερευνητική μάθηση (βασικά στοιχεία τα οποία εμπλέκονταν στις δύο παρεμβάσεις).

## **Επιλογή μαθηματικών εφαρμογών**

Για την επιλογή κατάλληλων μαθηματικών εφαρμογών λήφθηκαν υπόψη κριτήρια τα οποία αναγνωρίζονται από διάφορους ερευνητές (Harrison & Lee, 2018) ως βασικά χαρακτηριστικά στην ενδυνάμωση της μαθηματικής διαδικασίας. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκαν ανοικτά εφαρμογίδια τα οποία επέτρεπαν την κατασκευή της γνώσης, αλλά και εφαρμογίδια για εξάσκηση. Παράλληλα, έγινε επιλογή μαθηματικών εφαρμογών που επέτρεπαν στους μαθητές να εκτελούν αλληλεπιδράσεις με νόημα στα ψηφιακά εργαλεία και οι συνέπειες αυτών των αλληλεπιδράσεων ήταν άμεσα αντιληπτές από τους μαθητές. Επιπρόσθετα, δόθηκε έμφαση στην ποιότητα του περιεχομένου των εργαλείων αυτών, ώστε να χρησιμοποιούν μαθηματικό περιεχόμενο το οποίο να σχετίζεται με τις ενότητες περιεχομένου των Αριθμών και των Μοτίβων. Ακόμη, δόθηκε έμφαση στη

μορφή της ανατροφοδότηση που παρείχαν οι συγκεκριμένες εφαρμογές. Δηλαδή, έγινε προσπάθεια επιλογής εφαρμογών (όταν αυτό ήταν εφικτό) οι οποίες παρείχαν ανατροφοδότηση στους μαθητές και έδιναν τη δυνατότητα αναστοχασμού των μαθητών στις ενέργειές τους. Τέλος, έγινε επιλογή εύχρηστων εφαρμογών (Harrison & Lee, 2018) ώστε να μπορούν να χρησιμοποιηθούν εύκολα από τους μικρούς μαθητές και να μην απαιτείται πολύς χρόνος για την εκμάθησής τους, καθώς και εφαρμογών που ήταν ελκυστικές για τους μικρούς μαθητές εργαλεία ώστε η διαδικασία μάθησης να αποτελεί μια διασκεδαστική διαδικασία (Zaranis et al., 2013). Συγκεκριμένα, για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας κάποιες από τις εφαρμογές που χρησιμοποιήθηκαν είναι: (α) Αριθμοί: TouchCounts, Math shelf, MathBrix, Subitising, Counting, SkipCounting, Teaching Numbers, Mystery Numbers, Robots and Numbers, Line em Up, Fun with Numbers, Split Box, Friends of Ten Relational Rods, (β) Μοτίβα: Pattern Shapes, LearningPatterns, PatternGame, Patterns, Colors Shapes, Function Machine.

Πίνακας 3.4

Ανάλυση Παραδείγματος Υψηλού Βαθμού Καθοδηγούμενης Διερεύνησης με Χρήση Οθονών Αφής και Χαμηλού Βαθμού Καθοδηγούμενης Διερεύνησης με Χρήση Οθονών Αφής

	<i>Υψηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με χρήση οθονών αφής (Παράρτημα Γ)</i>	<i>Χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με χρήση οθονών αφής (Παράρτημα Δ)</i>
<b>Στόχοι</b>	Οι μαθητές: 1. Να συνθέτουν και να αναλύουν αριθμούς με διαφορετικούς τρόπους 2. Να επεξηγούν και να χρησιμοποιούν την αντιμεταθετική ιδιότητα στην πρόσθεση.	
<b>Διάρκεια μαθήματος</b>	2x40 λεπτά	
<b>Τεχνολογικό Εργαλείο</b>	Εφαρμογές: 1. TouchCounts 2. CuriousGeorge ( <a href="https://pbskids.org/curiousgeorge">https://pbskids.org/curiousgeorge</a> ) 3. Math Brix (commutative property of addition) 4. Relational rods by mathies 5. Balance Math	Εφαρμογές: 1. Number Frames 2. TouchCounts 3. Relational rods by mathies 4. Balance Math
<b>Δόμηση Δραστηριοτήτων στα Μαθήματα</b> <i>Περιέργεια/ Πρόκληση ενδιαφέροντος – Διερεύνηση – Αρχικός προβληματισμός</i>	Επίλυση καθοδηγούμενων προβληματισμών: <ul style="list-style-type: none"> <li>Χρήση της εφαρμογής TouchCounts ώστε οι μαθητές να συνθέσουν άλλους αριθμούς χρησιμοποιώντας τους αριθμούς που δίνονται 1, 2, 3 και 4 αλλά και να αναλύουν τελικά τους νέους αριθμούς που δημιουργούν καταλήγοντας και πάλι στους αρχικούς ώστε να συνεχίσουν τη διερεύνησή τους. Μέσα από τη διερεύνηση και τις παρατηρήσεις τους καλούνται να εντοπίσουν τον μεγαλύτερο αλλά και τον μικρότερο αριθμό που μπορεί να δημιουργηθεί χρησιμοποιώντας δύο από τους δοσμένους αριθμούς.</li> </ul>	Επίλυση ανοικτών προβλημάτων: <ul style="list-style-type: none"> <li>Χρήση του εφαρμογιδίου Number Frames ώστε οι μαθητές να εξετάσουν διαφορετικές περιπτώσεις για τον δεύτερο προσθετέο που δεν δίνεται και τον αντίστοιχο συνολικό αριθμό που προκύπτει από την ένωση των δύο προσθετέων (δίνεται ο ένας προσθετέος καθώς και ένας περιορισμός για το συνολικό αποτέλεσμα και ζητείται ο εντοπισμός όλων των δυνατών επιλογών που υπάρχουν για τον δεύτερο προσθετέο και το αντίστοιχο συνολικό αποτέλεσμα).</li> </ul>

Πορεία  
δραστηριοτήτων

- Χρήση του εφαρμογιδίου CuriousGeorge ώστε οι μαθητές να αναλύσουν αριθμούς εφόσον τους δίνεται ο συνολικός αριθμός και ο ένας από τους δύο προσθετέους τόσο εικονικά (για οπτική σύγκριση των δύο) με κυβάρια και συμβολικά.
- Χρήση του εφαρμογιδίου Math Brix (commutative property of addition), ώστε οι μαθητές μέσα από την εργασία τους με κυβάρια και τη διασύνδεση της εικονικής αναπαράστασης με μαθηματικές προτάσεις στις οποίες ζητείται ο ένας εκ των δύο προσθετέων να παρατηρήσουν και να περιγράψουν την αντιμεταθετική ιδιότητα ως προς την πρόσθεση. Σύγκριση των προσθετέων και των αποτελεσμάτων στα παραδείγματα που τους δίνονται και εντοπισμός ομοιοτήτων μεταξύ των δύο πράξεων.
- Χρήση του εφαρμογιδίου TouchCounts, ώστε οι μαθητές να εντοπίσουν όλους τους πιθανούς συνδυασμούς για τη δημιουργία του αριθμού 6. Γίνεται καταγραφή των απαντήσεων των μαθητών σε φύλλο εργασίας που τους δίνεται (βλέπε Παράρτημα Γ). Η εκπαιδευτικός καθώς εργάζονται περιφέρεται και θέτει το ερώτημα: «Ποια ζευγαράκια δε χρειάζεται να εξετάσεις ξανά».
- Χρήση του εφαρμογιδίου Relational rods, για επίλυση συγκεκριμένου προβληματισμού (σενάριο με βαγόνια τρένου και παιδιά και συγκεκριμένες πληροφορίες για τον τρόπο μετακίνησής τους στα δύο βαγόνια) ο οποίος ενθαρρύνει την παρατήρηση και τον αναστοχασμό για το συστηματικό τρόπο εντοπισμού όλων των δυνατών ζευγαριών. Εφόσον εντοπίσουν όλα τα δυνατά ζευγάρια η εκπαιδευτικός θέτει τα εξής ερωτήματα για την απάντηση των οποίων οι μαθητές παρατηρούν την εργασία τους στο εφαρμογίδιο:
  - Να εξηγήσεις πώς αλλάζει ο αριθμός παιδιών στα δύο
- Χρήση του εφαρμογιδίου TouchCounts, ώστε οι μαθητές να εντοπίσουν όλους τους πιθανούς συνδυασμούς για τη δημιουργία του αριθμού 6. Γίνεται καταγραφή των απαντήσεων των μαθητών όπως οι ίδιοι επιθυμούν χωρίς να παρέχεται κάποιος συγκεκριμένος πίνακας ή άλλος τρόπος καταγραφής όπως γίνεται στην περίπτωση της υψηλού βαθμού καθοδηγούμενης διερεύνησης. Η εκπαιδευτικός καθώς εργάζονται περιφέρεται και θέτει τον προκαθορισμένο προβληματισμό: «Πώς μπορείς να εντοπίσεις τα ζευγαράκια του αριθμού 6 πιο γρήγορα;»
- Χρήση του εφαρμογιδίου Relational rods ώστε οι μαθητές να δείξουν με ποιο τρόπο μπορεί να τοποθετηθούν 8 παιδιά σε 2 βαγόνια. Κατά την ενασχόλησή τους με το εφαρμογίδιο η εκπαιδευτικός θέτει τους δύο συγκεκριμένους προβληματισμούς. Για τους συγκεκριμένους προβληματισμούς οι μαθητές καλούνται να εξηγήσουν αν συμφωνούν ή διαφωνούν με τις απόψεις που περιγράφονται σε αυτούς:
  - «Πάντα το πρώτο βαγόνι θα έχει περισσότερα παιδιά από το δεύτερο βαγόνι».
  - «Με τον τρόπο που εργάστηκα βρήκα 7 ζευγαράκια που σχηματίζουν τον αριθμό 8. Δεν έχει άλλα».
- Χρήση του εφαρμογιδίου Balance Math, ώστε οι μαθητές να ισορροπήσουν τα κιβώτια. Στόχος είναι μέσα από τη διερεύνηση και τις παρατηρήσεις τους να εντοπίσουν όσο το δυνατό περισσότερους τρόπους για να ισορροπήσουν τη ζυγαριά (ανάμεσα στους τρόπους που καλούνται να εντοπίσουν συμπεριλαμβάνεται και η ανάλυση και σύνθεση αριθμού μέσω της ένωσης τριών προσθετέων).

(συνέχεια από προηγούμενη σελίδα)

---

βαγόνια όσο το τρένο προχωρά.

→ Να συγκρίνεις τον τρόπο που εργάστηκες εδώ για να εντοπίσεις τα ζευγαράκια του 8 με τρόπο που εργάστηκες προηγουμένως για να βρεις τα ζευγαράκια του 6.

→ Σε τι νομίζεις ότι βοηθά ο τρόπος με τον οποίο εργάστηκες σε αυτή την δραστηριότητα;

- Χρήση του εφαρμογιδίου Balance Math, ώστε οι μαθητές να ισορροπήσουν τα κιβώτια. Στόχος είναι μέσα από τη διερεύνηση και τις παρατηρήσεις τους να εντοπίσουν την περίπτωση που η ζυγαριά ισορροπεί και έχει χρησιμοποιηθεί ο μεγαλύτερος αριθμός κιβωτίων (να καταλήξουν στην ανάλυση και σύνθεση αριθμού μέσω της ένωσης τριών προσθετέων).
- Χρήση του εφαρμογιδίου Relational rods ώστε οι μαθητές χρησιμοποιώντας με κατάλληλο τρόπο τις ράβδους, να εντοπίσουν τις διαφορετικές επιλογές που υπάρχουν για τη σχεδίαση του σπιτιού σε ένα οικόπεδο που αποτελείται από 10 τετράγωνα. Στόχος να εντοπίσουν όλα τα δυνατά ζευγαράκια του 10 που πληρούν τον περιορισμό που τέθηκε (το σπίτι θα πρέπει να καλύπτει περισσότερα τετράγωνα από ότι ο κήπος).

- Χρήση του εφαρμογιδίου Relational rods ώστε οι μαθητές χρησιμοποιώντας με κατάλληλο τρόπο τις ράβδους, να εντοπίσουν τις διαφορετικές επιλογές που υπάρχουν για τη σχεδίαση του σπιτιού σε ένα οικόπεδο που αποτελείται από 10 τετράγωνα. Στόχος να εντοπίσουν όλα τα δυνατά ζευγαράκια του 10 που πληρούν τον περιορισμό που τέθηκε (το σπίτι θα πρέπει να καλύπτει περισσότερα τετράγωνα από ότι ο κήπος).

---

**Τελική αξιολόγηση-  
Ολοκλήρωση του  
μαθήματος**

Επίλυση προβληματισμού ο οποίος απαιτεί ανάλυση και σύνθεση αριθμού και επιδέχεται πολλές και διαφορετικές λύσεις με ανάλυση του αριθμού σε δύο ή και σε περισσότερους προσθετέους.

---



## **Τεχνικές ανάλυσης των δεδομένων της έρευνας**

### **Τεχνικές ανάλυσης ποιοτικών δεδομένων - Εμπειρικά Θεμελιωμένη Θεωρία**

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι η οικοδόμηση ενός μοντέλου το οποίο να μπορεί να περιγράψει την ικανότητα των μαθητών προδημοτικής κατά την επίλυση έργων που σχετίζονται με έννοιες των Αριθμών και των Μοτίβων και να επεξηγήσει τους παράγοντες που αλληλεπιδρούν κατά τη διαδικασία αυτή.

Ως βασική τεχνική ανάλυσης των δεδομένων της έρευνας, έχει χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της εμπειρικά θεμελιωμένης θεωρίας. Σκοπός της εμπειρικά θεμελιωμένης θεωρίας είναι η μετάβαση από το συγκεκριμένο επίπεδο των εμπειρικών δεδομένων, στο αφαιρετικό επίπεδο μίας αναπτυσσόμενης θεωρίας (Glaser, 1992; Glaser & Strauss, 1967; Strauss & Corbin, 1998; Charmaz, 2006). Η εμπειρικά θεμελιωμένη θεωρία, χρησιμοποιείται κυρίως σε ερευνητικά θέματα τα οποία δεν έχουν εξερευνηθεί ή βρίσκονται υπό διερεύνηση και δεν έχουν διατυπωθεί συγκεκριμένες θεωρίες οι οποίες να συσχετίζουν δύο ή περισσότερα φαινόμενα μεταξύ τους (Ιωσηφίδης, 2006). Κατά συνέπεια, η επιλογή της συγκεκριμένης τεχνικής κρίνεται κατάλληλη για την παρούσα έρευνα, δεδομένου ότι παρέχει τη δυνατότητα της εις βάθος διερεύνησης των διαστάσεων που περιγράφουν την ικανότητα αυτή και που αλληλεπιδρούν κατά την διαδικασία επίλυσης έργων που σχετίζονται με έννοιες των Αριθμών και των Μοτίβων από μαθητές προδημοτικής.

### **Σκοπός της εμπειρικά θεμελιωμένης θεωρίας**

Η εμπειρικά θεμελιωμένη θεωρία, μελετά τον τρόπο με τον οποίο μια ομάδα μαθητών αντιμετωπίζει ένα πρόβλημα (Glaser, 1992). Είναι μία επαγωγική προσέγγιση στην ποιοτική έρευνα, σύμφωνα με την οποία οι θεωρίες προκύπτουν μέσω της εξέτασης δεδομένων αντί να εξάγονται παραγωγικά. Η μέθοδος αυτή αποτελεί ένα συστηματοποιημένο τρόπο μετάβασης από το συγκεκριμένο επίπεδο των εμπειρικών δεδομένων, στο αφαιρετικό επίπεδο μίας αναπτυσσόμενης θεωρίας. Η θεμελιωμένη θεωρία δεν αποτελεί απλή περιγραφική μελέτη ενός φαινομένου αλλά προσδιορισμό μίας βασικής έννοιας (Charmaz, 2006). Χρησιμοποιεί ένα σύνολο τεχνικών προκειμένου να ανακαλύψει και να αποκωδικοποιήσει την ανθρώπινη συμπεριφορά, με σκοπό την ανάπτυξη μίας θεωρίας για το υπό φαινόμενο διερεύνηση (Strauss & Corbin, 1990).

### ***Θεωρητική δειγματοληψία***

Σύμφωνα με τους Strauss και Corbin (1998), η θεωρητική δειγματοληψία (theoretical sampling) είναι η δειγματοληψία με βάση τις έννοιες που αποδεικνύεται ότι σχετίζονται θεωρητικά με την αναπτυσσόμενη θεωρία. Στη θεμελιωμένη θεωρία η θεωρητική δειγματοληψία περιλαμβάνει τον προσδιορισμό του συνόλου των εμπειρικών δεδομένων που πρέπει να αναλυθούν, ώστε να επιτυγχάνεται η εις βάθος μελέτη του φαινομένου και να αναδύεται η θεωρία του. Ο ερευνητής, κατανοώντας σταδιακά το φαινόμενο που μελετάει, διαμορφώνει ανάλογα τη δειγματοληπτική του στρατηγική. Η ίδια η πορεία της μεθόδου διαμορφώνεται καθ' όλη τη διάρκεια της διαδικασίας. Ανάλογα με την κατανόηση του φαινομένου και τις έννοιες που αναδύονται σιγά σιγά, διαμορφώνεται η στρατηγική που θα υιοθετηθεί στη συνέχεια, προκειμένου να κατανοηθούν καλύτερα οι διάφορες όψεις ενός φαινομένου.

### ***Θεωρητικός Κορεσμός***

Ένα από τα βασικά θεωρητικά κριτήρια στην εμπειρικά θεμελιωμένη θεωρία, είναι ότι τα δεδομένα τα οποία συλλέγονται θα πρέπει να εξασφαλίζουν το «θεωρητικό κορεσμό» του φαινομένου. Η διαδικασία κωδικοποίησης και αναζήτησης περιπτώσεων σταματά όταν επέλθει ο *θεωρητικός κορεσμός* (theoretical saturation), όταν δηλαδή η αντιπαραβολή των νέων δεδομένων που παράγονται στο ερευνητικό πεδίο με τις θεωρητικές κατηγορίες, τις ιδιότητές τους και το πλέγμα των μεταξύ τους σχέσεων δεν προσφέρει καινούργιες θεωρητικές προοπτικές ούτε δημιουργεί την ανάγκη για το μετασχηματισμό της ήδη παραχθείσας εμπειρικά θεμελιωμένης θεωρίας (Strauss & Corbin, 1998). Είναι κρίσιμο ένας ερευνητής να γνωρίζει τον κίνδυνο που πιθανό να προκύψει από έναν προκαθορισμένο κορεσμό των κατηγοριών όταν αυτό δε συμβαίνει στην πραγματικότητα. Αυτό μπορεί να συμβαίνει λόγω μίας μη κριτικής και περιορισμένης αναλυτικής επεξεργασίας των δεδομένων (Charmaz, 2006). Επιπρόσθετα, ο θεωρητικός κορεσμός μπορεί να θεωρηθεί ως μία μορφή τριγωνοποίησης των δεδομένων. Κατά συνέπεια λανθασμένος κορεσμός των δεδομένων πιθανό να επηρεάσει την αυστηρότητα της έρευνας. Στην παρούσα έρευνα, ο θεωρητικός κορεσμός ολοκληρώθηκε με την ολοκλήρωση της συνέντευξης του 41<sup>ου</sup> μαθητή. Συγκεκριμένα, η ανάλυση των δεδομένων,

μετά το συγκεκριμένο μαθητή, δεν παρουσιάστηκε οποιαδήποτε νέα ετικέτα, η οποία να συμβάλει στη δημιουργία οποιασδήποτε καινούργιας κατηγορίας.

### *Ανάλυση δεδομένων*

Ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά της εμπειρικά θεμελιωμένης θεωρίας είναι και ο μεγάλος όγκος υλικού και δεδομένων που προκύπτουν. Στόχος κάθε ερευνητή είναι η διαχείριση των δεδομένων αλλά και η μείωση της πολυπλοκότητάς τους (Strauss & Corbin, 1998). Η διαχείριση των δεδομένων αποτελεί μία από τις πρώτες ενέργειες της αναλυτικής διαδικασίας. Βασικό στοιχείο κάθε αναλυτικής διαδικασίας, είναι η μετάβαση από τα εμπειρικά δεδομένα σε θεωρητικές έννοιες και κατηγορίες. Η διαδικασία μετάβασης από τα εμπειρικά δεδομένα σε θεωρητικές έννοιες επιτυγχάνεται μέσω των διαφορετικών σταδίων της διαδικασίας κωδικοποίησης.

Σύμφωνα με τους εκπροσώπους της εμπειρικά θεμελιωμένης θεωρίας, η *κωδικοποίηση* είναι η αναλυτική διαδικασία μέσω της οποίας τα δεδομένα τεμαχίζονται, ονομάζονται, ταξινομούνται και ενσωματώνονται εντός ενός θεωρητικού πλαισίου. Πρόκειται για μια δυναμική και ρευστή διαδικασία η οποία μας βοηθά να καταλάβουμε τη λογική που κρύβεται πίσω από την ανάλυση (Strauss & Corbin, 1998). Με την έννοια κωδικοποίηση στην εμπειρικά θεμελιωμένη θεωρία, εννοούμε την αντιστοίχιση και απόδοση νοήματος σε λέξεις κλειδιά με φράσεις, προτάσεις που έχουν νόημα για την έρευνα. Η κωδικοποίηση, ως αφαιρετική διαδικασία *μετάβασης* από τα δεδομένα στις θεωρητικές κατηγορίες, διακρίνεται σε τρία στάδια: στην *ανοιχτή κωδικοποίηση* (open), στην *αξονική ή κατά άξονα κωδικοποίηση* (axial) και στην *επιλεκτική κωδικοποίηση* (selective).

Οι Strauss και Corbin (1998) ορίζουν την ανοιχτή κωδικοποίηση ως εξής:

*«Για να αποκαλύψουμε, να κατονομάσουμε και να αναπτύξουμε έννοιες, πρέπει να ανοίξουμε το κείμενο και να εκθέσουμε τις σκέψεις, τις ιδέες και τα νοήματα που περιέχονται μέσα σ' αυτό. Χωρίς το πρώτο αναλυτικό βήμα, δεν μπορεί να υπάρξει η υπόλοιπη ανάλυση και επικοινωνία που ακολουθεί. Σε γενικές γραμμές, κατά τη διάρκεια της κωδικοποίησης, τα δεδομένα χωρίζονται σε διακριτά μέρη, εξετάζονται στενά και συγκρίνονται για ομοιότητες και διαφορές. Γεγονότα, συμβάντα, αντικείμενα, πράξεις και αλληλεπιδράσεις που διαπιστώνεται ότι έχουν παρόμοια φύση ή σημασία ομαδοποιούνται κάτω από πιο αφηρημένες έννοιες που ονομάζονται κατηγορίες»*

(Strauss & Corbin, 1998, σελ. 102)

Σύμφωνα με την Charmaz (2006) στην ανοιχτή κωδικοποίηση τα δεδομένα τμηματοποιούνται σε διακριτά μέρη και αποδίδονται σε αυτά κάποιες «εννοιολογικές ετικέτες» (κωδικοί). Με βάση τις «εννοιολογικές ετικέτες», τα δεδομένα εξετάζονται προσεκτικά και συγκρίνονται για διαφορές και ομοιότητες. Εννοιολογικά όμοια δεδομένα οργανώνονται μαζί σε κατηγορίες. Στην ανοιχτή κωδικοποίηση μετά τη δημιουργία κατηγοριών εξετάζονται και διατυπώνονται οι ιδιότητες (properties) χαρακτηριστικά-εκφάνσεις μιας κατηγορίας (Charmaz, 2006). Συγκεκριμένα, στην παρούσα έρευνα, στο πρώτο στάδιο εφαρμογής της ανοιχτής κωδικοποίησης, τα αποσπάσματα των απομαγνητοφωνήσεων των συνεντεύξεων των μαθητών εισήχθησαν στο λογισμικό επεξεργασίας ποιοτικών δεδομένων Atlas. ti. Ακολούθως, δόθηκε έμφαση στις λέξεις που χρησιμοποίησαν οι μαθητές. Χρησιμοποιώντας απλά ερωτήματα ποιος, γιατί, τι, πώς, πότε, πού κτλ αναλύθηκε κάθε πρόταση των δεδομένων. Κάθε πρόταση που αναλύθηκε «έσπασε» σε επιμέρους γεγονότα/περιστατικά και σε καθένα από αυτά δόθηκε μία ξεχωριστή ετικέτα. Έγινε προσπάθεια δηλαδή να εντοπιστούν και να ονομαστούν οι «εννοιολογικές ετικέτες» οι οποίες απέδιδαν τις βασικές σκέψεις και ιδέες των μαθητών. Οι κωδικοί που προέκυψαν έτυχαν σύγκρισης και οι όμοιοι κωδικοί που εξέφραζαν τα ίδια γεγονότα/περιστατικά ομαδοποιήθηκαν κάτω από την ίδια εννοιολογική ετικέτα. Αξίζει να επισημανθεί ότι στο συγκεκριμένο στάδιο οι έννοιες που προέκυψαν, προήλθαν από την ανάλυση των συνεντεύξεων και δεν επιλέχθηκαν εκ των προτέρων. Στη συνέχεια πραγματοποιήθηκε σύνδεση των συγκεκριμένων ετικετών, λαμβάνοντας υπόψη τις ομοιότητες που παρουσίασαν και έγινε ομαδοποίησή τους σε ευρύτερες κατηγορίες. Οι κατηγορίες αυτές ονομάστηκαν, ώστε να μπορεί να γίνει εφικτή η ομαδοποίηση των εννοιολογικών ετικετών κάτω από συγκεκριμένες κατηγορίες. Τέλος, στο τελευταίο στάδιο της ανοιχτής κωδικοποίησης, εντοπίστηκαν οι βασικές ιδιότητες των κατηγοριών που προέκυψαν από το προηγούμενο στάδιο και οι οποίες χαρακτήριζαν τις συγκεκριμένες κατηγορίες που συνέθεταν.

Το δεύτερο στάδιο της εμπειρικά θεμελιωμένης θεωρίας, περιλαμβάνει την εφαρμογή της *αξονικής κωδικοποίησης*. Το στάδιο αυτό χαρακτηρίζεται από επανάλυση των αποτελεσμάτων της ανοιχτής κωδικοποίησης. Σκοπός της *αξονικής κωδικοποίησης*, είναι να εμπλουτιστούν οι παραγόμενες από την ανάλυση του εμπειρικού υλικού κατηγορίες και να οργανωθούν γύρω από λίγους κομβικούς θεωρητικούς άξονες (Charmaz, 2006). Η αξονική κωδικοποίηση, αφορά την εκ νέου ομαδοποίηση των δεδομένων, κατά την οποία ο ερευνητής χρησιμοποιεί τις κατηγορίες της ανοιχτής κωδικοποίησης, και αναζητά πιο αναλυτικές έννοιες. Επιπρόσθετα, στην αξονική

κωδικοποίηση πραγματοποιείται η διατύπωση των διαστάσεων κάθε κατηγορίας (Charmaz, 2006). Στην παρούσα έρευνα, μετά την ολοκλήρωση της ανοιχτής κωδικοποίησης, έγινε προσπάθεια χρησιμοποιώντας τις βασικές κατηγορίες που είχαν προκύψει από το στάδιο της ανοιχτής κωδικοποίησης, να αναζητηθούν πιο αναλυτικές έννοιες για κάθε κατηγορία ώστε να εντοπιστούν οι διαστάσεις που συνέθεταν την κάθε κατηγορία.

Τέλος, η *επιλεκτική κωδικοποίηση* αποτελεί ψηλότερο και πιο αφαιρετικό επίπεδο ανάλυσης σε σχέση με την αξονική κωδικοποίηση (Charmaz, 2006). Συγκεκριμένα, η *επιλεκτική κωδικοποίηση*, βασίζεται στα αποτελέσματα της ανοιχτής και της αξονικής κωδικοποίησης και έχει ως στόχο τη διάκριση της κεντρικής έννοιας η οποία και οργανώνει τις άλλες έννοιες που έχουν εντοπισθεί σε ένα σύνολο κειμένων. Δηλαδή επιδιώκεται η ολοκλήρωση της θεωρίας και η οικοδόμηση ενός συνεκτικού θεωρητικού συστήματος, που θα αξιολογεί και θα ενσωματώνει τις βασικές κατηγορίες και το πλέγμα των παραγόμενων σχέσεων του υπό εξέταση φαινομένου (Ιωσηφίδης, 2008). Κατά την εφαρμογή της επιλεκτικής κωδικοποίησης στην παρούσα έρευνα, έγινε προσπάθεια παρουσίασης του μοντέλου που προέκυψε διακρίνοντας την κεντρική ιδέα καθώς και (α) τις συνθήκες – όρους (χαρακτηριστικά των μαθητών και των συνθηκών της εργασίας), (β) τις δράσεις – αλληλεπιδράσεις των μαθητών (τι κάνουν και πώς συμπεριφέρονται οι μαθητές κατά την επεξεργασία των έργων που τους δόθηκαν) και (γ) τις συνέπειες (τα αποτελέσματα των δράσεων/αλληλεπιδράσεων των μαθητών). Για την εφαρμογή της επιλεκτικής κωδικοποίησης, λήφθηκαν υπόψη οι κατηγορίες, οι ιδιότητες καθώς και διαστάσεις των κατηγοριών που εντοπίστηκαν κατά την εφαρμογή της ανοιχτής και αξονικής κωδικοποίησης. Συγκεκριμένα, η παρουσίαση του θεωρητικού συστήματος που προέκυψε από την εφαρμογή της εμπειρικά θεμελιωμένης θεωρίας, επιτυγχάνεται τόσο με τη χρήση περιγραφικών προτάσεων που επεξηγούν το υπό εξέταση φαινόμενο, όσο και με διαγραμματικό τρόπο.

### ***Μέθοδος της σταθερής σύγκρισης***

Ένα από τα βασικά συστατικά της εμπειρικά θεμελιωμένης θεωρίας είναι και η μέθοδος της σταθερής σύγκρισης. Κατά την εφαρμογή της σταθερής σύγκρισης, οι παρατηρήσεις συγκρίνονται η μία με την άλλη όπως επίσης και με τη θεωρία που φαίνεται να αναδύεται. Σύμφωνα με τους Glaser και Strauss (1967) η μέθοδος της σταθερής σύγκρισης, περιλαμβάνει τέσσερα στάδια: σύγκριση περιστατικών που ισχύουν για κάθε κατηγορία,

ενσωμάτωση των κατηγοριών και των ιδιοτήτων τους, οριοθέτηση της θεωρίας και συγγραφή της θεωρίας. Συγκεκριμένα, στην παρούσα έρευνα, κατά την εφαρμογή της σταθερής σύγκρισης, έγινε προσπάθεια ώστε να συγκριθούν οι εννοιολογικές ετικέτες που προέκυψαν ώστε να διαπιστωθεί κατά πόσον αυτές οι ετικέτες ήταν σε θέση να ομαδοποιηθούν σε μία ευρύτερη κατηγορία ή να διακριθούν σε ξεχωριστές κατηγορίες (Glaser & Strauss, 1967). Μέσω της εφαρμογής της σταθερής σύγκρισης, ενισχύθηκε η θεωρητική ευαισθησία της έρευνας δεδομένου ότι παρουσιάζεται με τεκμηριωμένο και εμπειριστατωμένο τρόπο η συμπερίληψη ή ο αποκλεισμός των ετικετών σε συγκεκριμένες διαδικασίες.

### ***Θεωρητική Ευαισθησία***

Σύμφωνα με τους Glaser και Strauss (1967) ο ερευνητής μπορεί να αναστοχάζεται στα εμπειρικά δεδομένα και να κατασκευάζει από αυτά θεωρητικά σημαντικές κατηγορίες και υποθέσεις στο βαθμό που διαθέτει *θεωρητική ευαισθησία*. Σύμφωνα με τους ίδιους η *θεωρητική ευαισθησία* παρέχει τη δυνατότητα στον ερευνητή να θέτει σε τάξη τις εμπειρικές παρατηρήσεις του αλλά και να αναγνωρίζει όσα εμπειρικά δεδομένα παρουσιάζουν θεωρητικό ενδιαφέρον. Επιπρόσθετα, βοηθά τον ερευνητή, να αναπτύσσει αφηρημένες κατηγορίες. Η θεωρητική ευαισθησία μπορεί να αναπτυχθεί, εάν ο ερευνητής αντλήσει θεωρητικές ιδέες και σχήματα τόσο από την επιστημονική του πειθαρχία και τη σχετική βιβλιογραφία όσο και από την καθημερινή του εμπειρία.

### **Ανάλυση ποσοτικών δεδομένων**

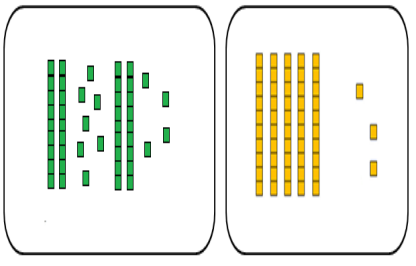
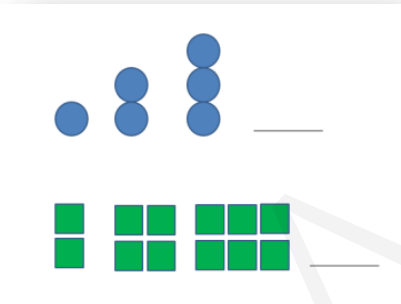
#### **Διόρθωση εργαλείου μέτρησης**

Ο καθορισμός του βαθμού επιτυχίας/αποτυχίας των μαθητών στα έργα του δοκιμίου, βασίστηκε σε μεγάλο βαθμό στον τρόπο με τον οποίο ήταν σε θέση να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους. Συγκεκριμένα, στις περιπτώσεις όπου οι μαθητές έδιναν σωστές απαντήσεις, ωστόσο δεν ήταν θέση να αιτιολογήσουν τον τρόπο σκέψης τους τότε δεν δινόταν κανένας βαθμός. Ο Πίνακας 3.5 παρουσιάζει τον τρόπο βαθμολόγησης των απαντήσεων των μαθητών για δύο ενδεικτικά έργα. Συγκεκριμένα το πρώτο έργο προέρχεται από την ενότητα περιεχομένου των Αριθμών ενώ το δεύτερο έργο σχετίζεται

με τα μοτίβα. Ο τρόπος βαθμολόγησης των υπόλοιπων έργων παρουσιάζεται στο Παράρτημα Α στον Πίνακα Α1.

Πίνακας 3.5

Ενδεικτικό παράδειγμα βαθμολόγησης των έργων του δοκιμίου

Μαθηματικό Έργο	Βαθμολόγηση
<p data-bbox="411 600 592 633"><i>Αριθμοί έργο 6</i></p> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Βαθμολογία 1 αν ο μαθητής εντόπισε την ομάδα με τους περισσότερους κύβους αιτιολογώντας σωστά την απάντησή του</li> <li>- Βαθμολογία 0 αν ο μαθητής εντόπισε την ομάδα με τους περισσότερους κύβους όμως δεν είναι σε θέση να αιτιολογήσει σωστά την απάντησή του</li> <li>- Βαθμολογία 0 αν ο μαθητής δεν εντόπισε σωστά την ομάδα με τους περισσότερους κύβους</li> </ul>
<p data-bbox="411 965 587 999"><i>Μοτίβα έργο 6</i></p> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Βαθμολογία 0,5 για κάθε ορθή επέκταση μοτίβου σε υποερώτημα και αιτιολόγηση της απάντησης</li> <li>- Βαθμολογία 0 για λανθασμένη επέκταση μοτίβου σε υποερώτημα</li> <li>- Βαθμολογία 0 αν ο μαθητής εντόπισε την ομάδα με τους περισσότερους κύβους όμως δεν είναι σε θέση να αιτιολογήσει σωστά την απάντησή του</li> </ul>

### Τεχνικές ανάλυσης ποσοτικών δεδομένων

Για να απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα 3, 4 και 5 χρησιμοποιήθηκαν στοιχεία περιγραφικής στατιστικής και εντοπίστηκαν οι μέσοι όροι επίδοσης κάθε προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων. Συγκεκριμένα υπολογίστηκε η συνολική επίδοση κάθε ομάδας μαθητών (επίδοση σε όλα τα έργα του δοκιμίου) καθώς και η επίδοση για κάθε κατηγορία έργων (έργα που σχετίζονται με τους Αριθμούς και έργα που σχετίζονται με τα Μοτίβα).

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

### ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στο πρώτο μέρος των αποτελεσμάτων παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που αφορούν στα δύο πρώτα ερευνητικά ερωτήματα της εργασίας όπως προέκυψαν από την εφαρμογή της Εμπειρικά Θεμελιωμένης Θεωρίας και συγκεκριμένα από τα τρία στάδια κωδικοποίησης (ανοιχτή κωδικοποίηση, αξονική κωδικοποίηση και επιλεκτική κωδικοποίηση). Αρχικά τα αποτελέσματα αφορούν στις συνιστώσες που περιγράφουν την ικανότητα επίλυσης έργων που σχετίζονται με την έννοια των Αριθμών και των Μοτίβων, στις ιδιότητες των παραγόντων αυτών και στις διαστάσεις που διακρίθηκαν. Ακολούθως παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που αφορούν στην περιγραφή των προσεγγίσεων των διαφορετικών ομάδων μαθητών κατά την επίλυση των έργων αυτών. Η συμπεριφορά, η δραστηριότητα και η επίδοση των διαφορετικών ομάδων μαθητών, παρουσιάζονται μέσα από την περιγραφή των διαφορετικών προφίλ ομάδων που προέκυψαν, εφόσον λήφθηκαν υπόψη οι κατηγορίες και οι διαστάσεις των κατηγοριών που εντοπίστηκαν κατά την εφαρμογή της εμπειρικά θεμελιωμένης θεωρίας.

Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου των αποτελεσμάτων, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που αφορούν στο τρίτο, τέταρτο και πέμπτο ερευνητικό ερώτημα της εργασίας και τα οποία προέκυψαν μέσα από τη διαδικασία ανάλυσης των ποσοτικών δεδομένων της έρευνας. Συγκεκριμένα το τρίτο ερευνητικό ερώτημα επιδιώκει να διερευνήσει τις διαφορές που παρουσιάζονται στην επίδοση των μαθητών προδημοτικής με διαφορετικό προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων σε έργα που σχετίζονται με έννοιες των Αριθμών και των Μοτίβων. Αντίστοιχα, το τέταρτο και πέμπτο ερευνητικό ερώτημα της έρευνας, σχετίζονται με τη διεξαγωγή των παρεμβατικών διδασκαλιών. Δηλαδή γίνεται προσπάθεια ώστε να διαπιστωθεί εάν τα δύο περιβάλλοντα μάθησης (υψηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με χρήση οθονών αφής, χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με χρήση οθονών αφής) και η ομάδα που συμμετείχε στη συνήθη διδασκαλία, ενισχύουν διαφορετικά την ικανότητα των μαθητών προδημοτικής καθώς και αν το προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων που παρουσιάζουν οι μαθητές προδημοτικής μπορεί να μεταβληθεί μέσα από τη συμμετοχή τους στις παρεμβατικές διδασκαλίες. Τέλος γίνεται προσπάθεια ώστε να διαπιστωθεί ο τρόπος με τον οποίο η αλληλεπίδραση μεταξύ του περιβάλλοντος μάθησης (υψηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με χρήση οθονών αφής, χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενη



διερεύνηση χρήση οθονών αφής, συνήθης διδασκαλία) και του προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων επιδρά στην ικανότητα των μαθητών προδημοτικής να επιλύουν τα συγκεκριμένα έργα.

### **Διαστάσεις που συνθέτουν τη μαθηματική ικανότητα παιδιών προδημοτικής κατά την επίλυση έργων Αριθμών και Μοτίβων**

Στο μέρος αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που αφορούν στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα της παρούσας εργασίας σχετικά με τις διαστάσεις/συνιστώσες που συνθέτουν τη μαθηματική ικανότητα των παιδιών προδημοτικής κατά την επίλυση έργων που σχετίζονται με έννοιες των Αριθμών και των Μοτίβων. Συγκεκριμένα η ανάλυση αφορά στο εξής ερευνητικό ερώτημα:

1. Ποιες διαστάσεις περιγράφουν την ικανότητα των μαθητών προδημοτικής κατά την επίλυση έργων που σχετίζονται με έννοιες των Αριθμών και των Μοτίβων;

Για την εξέταση του συγκεκριμένου ερωτήματος, χρησιμοποιήθηκαν τα δεδομένα όπως έχουν προκύψει από τη βιντεογράφιση των ημιδομημένων συνεντεύξεων που βασίζονται στην επίλυση έργων κατά τη διάρκεια του προπαραεμβατικού σταδίου. Για την ανάλυση των δεδομένων αυτών, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της εμπειρικά θεμελιωμένης θεωρίας και τα στάδια της ανοιχτή κωδικοποίηση, αξονική κωδικοποίηση και επιλεκτική κωδικοποίηση τα οποία και περιγράφονται πιο κάτω.

### **Εμπειρικά θεμελιωμένη θεωρία – Ανοιχτή Κωδικοποίηση**

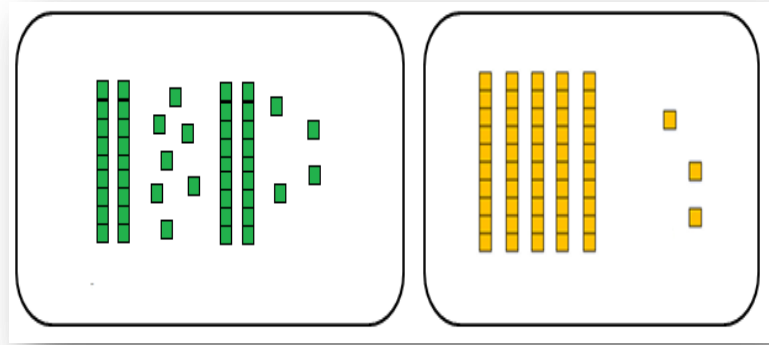
Στο πρώτο μέρος της εμπειρικά θεμελιωμένης θεωρίας, εφαρμόστηκε η ανοιχτή κωδικοποίηση. Όπως προαναφέρθηκε στο κεφάλαιο της μεθοδολογίας, σύμφωνα με την Charmaz (2006, σελ. 4) στην ανοιχτή κωδικοποίηση, τα δεδομένα τμηματοποιούνται σε διακριτά μέρη και τους δίνονται «εννοιολογικές ετικέτες» (κωδικοί). Με βάση τις «εννοιολογικές ετικέτες», τα δεδομένα εξετάζονται προσεκτικά και συγκρίνονται για διαφορές και ομοιότητες. Εννοιολογικά όμοια δεδομένα οργανώνονται μαζί σε κατηγορίες. Στην ανοιχτή κωδικοποίηση μετά τη δημιουργία κατηγοριών, εξετάζονται και διατυπώνονται οι ιδιότητες (properties) χαρακτηριστικά-εκφάνσεις μιας κατηγορίας

(Charmaz, 2006). Αρχικά στο μέρος αυτό της ανοιχτής κωδικοποίησης, παρουσιάζονται αποσπάσματα από τις συνεντεύξεις των μαθητών ώστε να διαφανεί η ετικετικοποίηση και η κατηγοριοποίηση των φαινομένων όπως προκύπτουν από τα δεδομένα.

Χρησιμοποιώντας απλά ερωτήματα ποιος, γιατί, τι, πώς, πότε, πού κτλ αναλύεται κάθε πρόταση των δεδομένων. Κάθε πρόταση που έχει αναλυθεί «διασπάται» σε επιμέρους γεγονότα/περιστατικά και σε καθένα από αυτά ανατίθενται ξεχωριστές ετικέτες γεγονότων/περιστατικών. Οι κωδικοί που προέκυψαν έτυχαν σύγκρισης και οι όμοιοι κωδικοί που εξέφραζαν τα ίδια γεγονότα/περιστατικά ομαδοποιήθηκαν κάτω από την ίδια εννοιολογική ετικέτα. Οι ετικέτες κωδικών που έχουν αποδοθεί εμφανίζονται στη δεξιά στήλη των πινάκων που παρουσιάζονται πιο κάτω και εμπλέκουν αποσπάσματα από συνεντεύξεις μερικών μαθητών του δείγματος. Πιο συγκεκριμένα, στους πίνακες, παρουσιάζονται ενδεικτικά αποσπάσματα των συνεντεύξεων των μαθητών και αφορούν σε έξι μαθηματικά έργα που χορηγήθηκαν στους μαθητές. Τα πρώτα τρία μαθηματικά έργα αφορούν στην ενότητα περιεχομένου Αριθμοί ενώ τα υπόλοιπα τρία έργα αφορούν έργα Μοτίβων. Για κάθε έργο παρουσιάζονται αποσπάσματα από τέσσερις μαθητές. Μετά την παρουσίαση των συνεντεύξεων, στο δεύτερο μέρος της ανοιχτής κωδικοποίησης, παρουσιάζεται η δημιουργία των κατηγοριών και διατυπώνονται οι ιδιότητες χαρακτηριστικά - εκφάνσεις των κατηγοριών αυτών.

### ***Ενδεικτικά αποσπάσματα συνεντεύξεων - Αριθμοί έργο 1***

Συγκεκριμένα, στο έργο αυτό παρουσιάστηκαν στους μαθητές δύο ομάδες από κύβους unifix. Στόχος του συγκεκριμένου έργου, ήταν να αναφέρουν οι μαθητές ποια από τις δύο ομάδες είχε συνολικά τους περισσότερους κύβους. Αξίζει να σημειωθεί ότι πριν από την έναρξη της συγκεκριμένης δραστηριότητας, οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να επεξεργαστούν τους κύβους unifix, να παίξουν μαζί τους, να τους αποσυνδέσουν και να τους συνδέσουν ώστε να αντιληφθούν τον τρόπο με τον οποίο μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Οι μαθητές ήταν ελεύθεροι να χρησιμοποιήσουν οποιοδήποτε τρόπο θεωρούσαν οι ίδιοι ως τον πιο κατάλληλο ώστε να εντοπίσουν ποια ομάδα είχε τους περισσότερους κύβους. Για την ομάδα με τους περισσότερους κύβους χρησιμοποιήθηκαν κύβοι unifix χρώματος κίτρινου, ενώ για την ομάδα με τους λιγότερους συνολικά κύβους χρησιμοποιήθηκε το πράσινο χρώμα.



Διάγραμμα 4.1: Ενδεικτικό παράδειγμα αριθμοί έργο 1

## Πίνακας 4.1

Παράδειγμα Εφαρμογής Ανοιχτής Κωδικοποίησης σε Απόσπασμα Συνέντευξης του Μαθητή «Μάρκου»

<b>Ανοιχτή Κωδικοποίηση</b>		
<b>Απομαγνητοφώνηση συνέντευξης</b>	<b>Αρχικοί κωδικοί</b>	<b>Κατηγοριοποίηση ετικετοποίηση κωδικών</b>
<b><u>Μάρκος (Σ1)</u></b>		
<p>Λ: Μάρκο μπορείς να μου πεις ποια από τις δύο ομάδες έχει τους περισσότερους κύβους;</p> <p>Μ: (χωρίς να κάνει οποιαδήποτε ενέργεια στο υλικό, απαντά αμέσως) Οι πράσινοι κύβοι είναι οι πιο πολλοί.</p>	μη χρήση των κύβων	E1: ιδιοσυγκρασιακή χρήση εργαλείου που εμπλέκει την πληθικότητα για δικούς τους σκοπούς (π.χ. παιχνίδι) και όχι για την επίλυση προβλήματος
<p>Λ: Μπορείς να μου εξηγήσεις από πού το κατάλαβες αυτό;</p> <p>Μ: Βλέπω το χρώμα τους. Επειδή το πράσινο μπορεί να νικήσει τα άλλα χρώματα. Πάντα μπορεί να νικήσει τα άλλα χρώματα</p>	«βλέπω το χρώμα τους»	E3: εστίαση της προσοχής σε εξωτερικά χαρακτηριστικά της εικόνας/εργαλείου (π.χ χρώμα, σχήμα, μέγεθος) που δε σχετίζονται με την επίλυση του έργου
<p>Λ: Μπορείς να μου εξηγήσεις από πού το κατάλαβες αυτό;</p> <p>Μ: Βλέπω το χρώμα τους. Επειδή το πράσινο μπορεί να νικήσει τα άλλα χρώματα. Πάντα μπορεί να νικήσει τα άλλα χρώματα</p>	«επειδή μπορεί να νικήσει»	E4: αιτιολόγηση που βασίζεται σε άσχετα στοιχεία με το πρόβλημα/κατάσταση
<p>Λ: Γιατί λες ότι μπορεί να νικήσει τα άλλα χρώματα;</p> <p>Μ: Ε αφού προχτές που έπαιζα με τον ξάδερφό μου, νίκησε το πράσινο αυτοκινητάκι.</p>	«που έπαιζα με τον ξάδερφό μου»	E5: πρόσθεση περιττών δεδομένων μέσω απόδοσης οικείας ιστορίας/σεναρίου
<p>Λ: Είσαι σίγουρος ότι οι πράσινοι κύβοι είναι πιο πολλοί ; Μπορείς να μετρήσεις τους κίτρινους και τους πράσινους κύβους αν θέλεις για να αποφασίσεις.</p> <p>Μ: Όχι δε χρειάζεται να δω και τους κίτρινους και τους πράσινους, οι πράσινοι είναι το πιο ωραίο χρώμα.</p>	«όχι δε χρειάζεται να δω και τους κίτρινους»	E190: καμία χρήση των όρων μονάδες/δεκάδες και καμία προσπάθεια περιγραφής που να παραπέμπει στους όρους μονάδες/δεκάδες
<p>Λ: Θέλεις να δοκιμάσεις να το σκεφτείς ξανά;</p> <p>Μ: Όχι είμαι σίγουρος, γιατί μου το είπε η δασκάλα μου.</p>	«πράσινο το πιο ωραίο χρώμα»	E165: πρόσθεση περιττών δεδομένων μέσω εκδήλωσης προτίμησης (π.χ. αγαπημένο χρώμα)
<p>Λ: Δηλαδή έχεις δει όλα αυτά που σου λέει το πρόβλημα.</p>	«γιατί μου το είπε η δασκάλα μου»	E4: αιτιολόγηση που βασίζεται σε άσχετα στοιχεία με το πρόβλημα/κατάσταση

M: Ναι είδα αυτά που έπρεπε.

«αυτά που  
έπρεπε»E62: μη αξιοποίηση των  
δεδομένων του προβλήματος

## Πίνακας 4.2

Παράδειγμα Εφαρμογής Ανοιχτής Κωδικοποίησης σε Απόσπασμα Συνέντευξης της μαθήτριας «Ελίζας»

Απομαγνητοφώνηση συνέντευξης	Ανοιχτή Κωδικοποίηση	
	Αρχικοί κωδικοί	Κατηγοριοποίηση ετικετικοποίηση κωδικών
<b><u>Ελίζα (Σ2)</u></b>		
Λ: Θέλω να κοιτάξεις προσεκτικά τις δύο ομάδες με κύβους και να μου πεις ποια από τις δύο ομάδες έχει τους περισσότερους κύβους. Η κίτρινη ή η πράσινη ομάδα;		
E: ... (σκέφτεται για λίγο και ξεκινά να μετρά τους κύβους που δεν είναι ενωμένοι ο ένας με τον άλλο) 1,2, 3 ...11. (Προχωρά στην ομάδα με τους κίτρινους κύβους) 1,2, 3.	«1,2,3..11»	E7: απαρίθμηση μερικών στοιχείων και παράλειψη άλλων απαραίτητων στοιχείων όταν δεν ζητείται ξεκάθαρα η εφαρμογή της απαρίθμησης
Λ: Ε άρα ποια ομάδα έχει τους πιο πολλούς κύβους;	αποσυνδεδεμένοι πράσινοι κύβοι - αποσυνδεδεμένοι κίτρινοι κύβοι	E8: αξιοποίηση ενός ή μόνο μερικών δεδομένων του προβλήματος
E: Εμ... αυτοί φαίνονται να είναι πιο πολλοί (δείχνει τους πράσινους)..	«οι πράσινοι φαίνονται να είναι οι πιο πολλοί»	E9: ανεπιτυχής σύγκριση δύο συνόλων όπου το καθένα περιλαμβάνει και μεμονωμένα στοιχεία και ομαδοποίηση μεμονωμένων στοιχείων (μονάδες, δεκάδες)
Λ: Μπορείς να μου εξηγήσεις γιατί η πράσινη ομάδα έχει τους περισσότερους κύβους;		
E: Επειδή, εδώ τα πράσινα είναι 11 (δείχνει μόνο τους αποσυνδεδεμένους πράσινους κύβους) και εδώ τα κίτρινα 3 (δείχνει μόνο τους αποσυνδεδεμένους κίτρινους κύβους)	δείχνει μόνο αποσυνδεδεμένους πράσινους και αποσυνδεδεμένους κίτρινους	E158: αιτιολόγηση που βασίζεται σε υπόδειξη μερικών πληροφοριών της εικόνας/εργαλείου
Λ: Είσαι σίγουρη για την απάντησή σου ή θέλεις να προσπαθήσεις ξανά;		
E: Ναι. Τα πράσινα κυβάκια φαίνονται να είναι πιο πολλά	«τα πράσινα κυβάκια φαίνονται να είναι πιο πολλά»	E10: σύγκριση ποσοτήτων μόνο μέσα από οπτική παρατήρηση των διακριτών στοιχείων δύο συνόλων με ξεκάθαρη διαφορά στο πλήθος
Λ: Μέτρησες όλα όσα έπρεπε να μετρήσεις;		

E: Ναι τα μέτρησα όλα.

«ναι τα μέτρησα όλα»

E7: απαρίθμηση μερικών στοιχείων και παράλειψη άλλων απαραίτητων στοιχείων όταν δεν ζητείται ξεκάθαρα η εφαρμογή της απαρίθμησης

Λ: Αυτά εδώ τα μέτρησες (δείχνω τις 5 κίτρινες δεκάδες και τις 4 πράσινες δεκάδες);

E: Όχι ξέχασα. Αυτό εδώ (δείχνει μία κίτρινη δεκάδα) είναι ένα. Άρα να βάλω ακόμη 5 κίτρινους κύβους.

Όλοι μαζί είναι 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

«Αυτό εδώ είναι ένα », εννοώντας την κίτρινη δεκάδα

E203: Μη κατάλληλη λεκτική περιγραφή που να παραπέμπει στους όρους μονάδες/δεκάδες και χωρίς απευθείας χρήση των όρων μονάδες/δεκάδες

1 δεκάδα = 1 κύβος

E13: χρήση του εργαλείου που εμπλέκει την πληθικότητα με τρόπο που οι αρχικές ενέργειες υποδείκνυαν σωστή χρήση αλλά στη συνέχεια παρουσιαζόταν αδυναμία ορθής χρήσης και χειρισμού του υλικού

«να βάλω ακόμη 5 κίτρινους κύβους»

E65: ημιτελής σύγκριση πλήθους στοιχείων δύο συνόλων όπου το καθένα περιλαμβάνει και μεμονωμένα στοιχεία και ομαδοποίηση των μεμονωμένων στοιχείων (μονάδες, δεκάδες) με συγκεκριμένο/μοναδικό τρόπο λόγω μη αντίληψης των σχέσεων μεταξύ των ομαδοποιήσεων και των μεμονωμένων στοιχείων

«1, 2, 3, 4,..8»

E7: απαρίθμηση μερικών στοιχείων και παράλειψη άλλων απαραίτητων στοιχείων όταν δεν ζητείται ξεκάθαρα η εφαρμογή της απαρίθμησης

Λ: Άρα αυτά εδώ (δείχνω μία κίτρινη δεκάδα) τι δείχνει;

E: Δείχνει έναν.

1 δεκάδα = 1 κύβος

E13: χρήση του εργαλείου που εμπλέκει την πληθικότητα με τρόπο που οι αρχικές ενέργειες υποδείκνυαν σωστή χρήση αλλά στη συνέχεια παρουσιαζόταν αδυναμία ορθής χρήσης και χειρισμού του υλικού

Πίνακας 4.3

Παράδειγμα Εφαρμογής Ανοιχτής Κωδικοποίησης σε Απόσπασμα Συνέντευξης του Μαθητή «Κώστας»

Ανοιχτή Κωδικοποίηση	
Απομαγνητοφώνηση συνέντευξης	Κατηγοριοποίηση ετικετικοποίηση κωδικών
Αρχικοί κωδικοί	Κατηγοριοποίηση ετικετικοποίηση κωδικών
<b><u>Κώστας (Σ3)</u></b>	
<p>Λ: Μπορείς να μου πεις ποια από τις δύο ομάδες έχει τους περισσότερους κύβους;</p> <p>Κ: ... (παρατηρεί τους κύβους των δύο ομάδων προσεκτικά για λίγη ώρα, σκέφτεται και απαντά). Θα βλέπω για να τους μετρήσω όλους τους κύβους για να πω. Πρέπει να μετρήσω, αλλιώς δεν γίνεται.</p>	<p>«θα βλέπω για να τους μετρήσω όλους τους κύβους»</p> <p>E14: τυπική χρήση εργαλείου που εμπλέκει την πληθικότητα μόνο με συγκεκριμένο τρόπο για εύρεση της απάντησης μέσω μέτρησης όλων των στοιχείων</p> <p>E15: αποτελεσματική χρήση γνωστής διαδικασίας «απαρίθμηση όλων» όταν δε ζητείται ξεκάθαρα η εφαρμογή της</p>
<p>Λ: Μπορείς να σκεφτείς κάποιο άλλο τρόπο για να απαντήσεις;</p> <p>Κ: Όχι είναι ο μόνος τρόπος για να τους μετρήσω όλους τους και ενωμένους και μονούς κύβους (ξεκινά να μετρά τους κύβους της κίτρινης ομάδας και ακολούθως της πράσινης ομάδας).</p>	<p>«μόνος τρόπος για να βρω και ενωμένους και μονούς»</p> <p>E16: αξιοποίηση όλων των δεδομένων του προβλήματος χωρίς περαιτέρω εντοπισμό συσχετίσεων μεταξύ δεδομένων του ίδιου ερωτήματος ή διαφορετικών ερωτημάτων</p> <p>E15: αποτελεσματική χρήση γνωστής διαδικασίας «απαρίθμηση όλων» όταν δε ζητείται ξεκάθαρα η εφαρμογή της</p> <p>E15: αποτελεσματική χρήση γνωστής διαδικασίας «απαρίθμηση όλων» όταν δε ζητείται ξεκάθαρα η εφαρμογή της</p>
<p>Λ: Υπάρχει κάποιος τρόπος να συγκρίνεις τους ενωμένους κύβους χωρίς να τους μετρήσεις;</p> <p>Κ: Όχι δε μπορώ να συγκρίνω χωρίς να μετρήσω. Εμ... πόσους κίτρινους είπα;</p>	<p>«δε μπορώ να συγκρίνω χωρίς να μετρήσω»</p> <p>E66: σύγκριση του πλήθους στοιχείων δύο συνόλων όπου το καθένα περιλαμβάνει και μεμονωμένα στοιχεία και ομαδοποίηση μεμονωμένων στοιχείων (μονάδες, δεκάδες) μέσα από την ανάλυση και των δύο συνόλων σε μεμονωμένα στοιχεία και τη βήμα προς βήμα μέτρησή τους</p> <p>E17: δυσκολία λόγω εγκλωβισμού σε χρονοβόρα διαδικασία</p>
	<p>«πόσους είπα»</p>

Λ: Μου είπες ότι έχει 53 κίτρινους κύβους.

Κ: Άρα η κίτρινη ομάδα έχει τους περισσότερους κύβους.

Λ: Μπορείς να μου εξηγήσεις γιατί η κίτρινη ομάδα έχει τους περισσότερους κύβους;

Κ: Αφού τους μέτρησα όλους. Η πράσινη ομάδα είχε 51 κύβους και η κίτρινη ομάδα 53 κύβους. Το 53 είναι μεγαλύτερο από το 51

«αφού τους μέτρησα όλους»

E18: αιτιολόγηση που βασίζεται σε απλή περιγραφή μαθηματικής διαδικασίας

μέτρηση όλων

E15: αποτελεσματική χρήση γνωστής διαδικασίας «απαρίθμηση όλων» όταν δε ζητείται ξεκάθαρα η εφαρμογή της

«το 53 είναι μεγαλύτερο από το 51»

E23: σύγκριση αριθμών χωρίς οπτική αναπαράσταση

#### Πίνακας 4.4

*Παράδειγμα Εφαρμογής Ανοιχτής Κωδικοποίησης σε Απόσπασμα Συνέντευξης της Μαθήτριας «Μαρίας»*

Απομαγνητοφώνηση συνέντευξης	Ανοιχτή Κωδικοποίηση	
	Αρχικοί κωδικοί	Κατηγοριοποίηση ετικετικοποίηση κωδικών
<p><b><u>Μαρίνα (Σ4)</u></b></p> <p>Λ: Μαρίνα μπορείς να μου πεις ποια από τις δύο ομάδες έχει τους περισσότερους κύβους;</p> <p>Μ: ... (κοιτά τους κύβους και σκέφτεται. Μετά από λίγα λεπτά ξεκινά και συνδέει τους κύβους που είναι μόνοι τους και σχηματίζει δεκάδες. Τοποθετεί τις δεκάδες που σχημάτισε με τους πράσινους κύβους τη μία δίπλα από την άλλη και αντιπαραβάλλει από κάτω τις δεκάδες που σχημάτισε με τους κίτρινους κύβους).</p> <p>Είναι ίσοι αυτοί οι κύβοι. Όμως επειδή υπάρχουν 3 κίτρινοι και 1 πράσινος εδώ, (δείχνει τους κύβους που δε σχηματίζουν δεκάδες) οι κίτρινοι είναι περισσότεροι από τους πράσινους.</p>	<p>σύνδεση μονών κύβων σε δεκάδες</p> <p>αντιπαραβολή δεκάδων</p> <p>«είναι ίσοι»</p>	<p>E20: μετασχηματισμός της οργάνωσης των κομματιών του εργαλείου που εμπλέκει την πληθικότητα αρχίζοντας από τη δημιουργία ομάδων με ίσο αριθμό στοιχείων</p> <p>E21: αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ δεδομένων του ερωτήματος για εντοπισμό συσχετίσεων</p> <p>E177: σύγκριση του πλήθους στοιχείων δύο συνόλων όπου το καθένα περιλαμβάνει και μεμονωμένα στοιχεία και</p>



(συνέχεια από προηγούμενη σελίδα)

ομαδοποίηση μεμονωμένων στοιχείων (μονάδες, δεκάδες) μέσα από την δημιουργία και απαλοιφή κοινών ομαδοποιήσεων- δεκάδων (έννοια ισότητας) και σύγκριση μόνο των μεμονωμένων στοιχείων που απομένουν

Λ: Από πού κατάλαβες ποιοι κύβοι είναι οι περισσότεροι;

Μ: Αφού το 3 είναι μεγαλύτερο από το 1

«3 μεγαλύτερο από 1»

E23: σύγκριση αριθμών χωρίς οπτική αναπαράσταση

Λ: Γιατί επέλεξες να εργαστείς με αυτό τον τρόπο;

Μ: Είναι πολλοί οι κύβοι και έπρεπε να σκεφτώ πιο γρήγορο τρόπο για να μη χρειαστεί να μετρώ τους ενωμένους κύβους που ήταν σε ομάδες των 10.

«τους ενωμένους κύβους που ήταν σε ομάδες των 10»

E191: Κατάλληλη λεκτική περιγραφή που να παραπέμπει στους όρους μονάδες/δεκάδες και χωρίς απευθείας χρήση των όρων μονάδες/δεκάδες

Λ: Γιατί είναι πιο γρήγορος ο τρόπος αυτός;

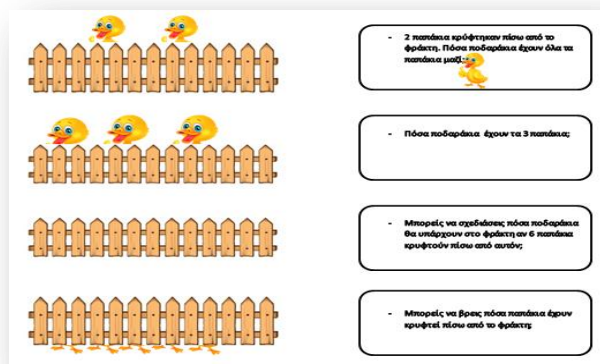
Μ: Γιατί έτσι μετρώ μόνο τους μονούς κύβους

«πρέπει να μετρώ μόνο τους μονούς κύβους»

E25: αιτιολόγηση που βασίζεται σε γενικευμένη δήλωση

### Ενδεικτικά αποσπάσματα συνεντεύξεων - Αριθμοί έργο 2

Στο συγκεκριμένο έργο, ζητήθηκε από τους μαθητές, αφού δούνε προσεκτικά κάθε αναπαράσταση, να απαντήσουν σε συγκεκριμένα ερωτήματα. Πιο συγκεκριμένα, αρχικά, ζητήθηκε από τους μαθητές να υπολογίζουν πόσα πόδια έχουν συνολικά δύο παπάκια και αντίστοιχα στο δεύτερο παράδειγμα πόσα πόδια έχουν συνολικά τρία παπάκια. Στο τρίτο παράδειγμα, ζητήθηκε από τους ίδιους τους μαθητές να ζωγραφίσουν πόσα πόδια έχουν συνολικά 6 παπάκια ενώ στο τελευταίο παράδειγμα, αφού παρατηρήσουν τα πόδια που βρίσκονται σχεδιασμένα να αναφέρουν πόσα παπάκια κρύφτηκαν πίσω από το φράκτη.



Διάγραμμα 4.2: Ενδεικτικό παράδειγμα αριθμοί έργο 1

Αξίζει να σημειωθεί, ότι πριν από την έναρξη της συγκεκριμένης δραστηριότητας, παρουσιάστηκε στους μαθητές η εικόνα μιας πάπιας και έγινε συζήτηση σχετικά με το πόσα πόδια έχει μια πάπια ώστε να διασφαλιστεί ότι όλοι οι μαθητές γνώριζαν πόσα πόδια έχει μια πάπια. Πιο κάτω παρουσιάζονται κάποια αποσπάσματα απομαγνητοφωνήσεων των μαθητών που παρουσιάζουν τον διαφορετικό τρόπο με τον οποίο απαντούσαν οι μαθητές καθώς και τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν.

Πίνακας 4.5

*Παράδειγμα Εφαρμογής Ανοιχτής Κωδικοποίησης σε Απόσπασμα Συνέντευξης της μαθήτριας «Νίκη»*

<b>Ανοιχτή Κωδικοποίηση</b>		
<b>Απομαγνητοφώνηση συνεντεύξεων</b>	<b>Αρχικοί Κωδικοί</b>	<b>Κατηγοριοποίηση ετικετοποίηση κωδικών</b>
<b><u>Νίκη(Σ5)</u></b>		
Λ: Μπορείς να σκεφτείς πόσα πόδια έχουν συνολικά και τα δύο παπάκια που κρύφτηκαν πίσω από το φράκτη;		
N: (απαντά αμέσως) Θα έχουν πολλά πόδια.	«θα έχουν πολλά πόδια»	E161: ιδιοσυγκρασιακή σύγκριση πλήθους στοιχείων δύο συνόλων όπου το καθένα περιλαμβάνει και μεμονωμένα στοιχεία και ομαδοποίηση των μεμονωμένων στοιχείων (μονάδες, δεκάδες) η οποία δε βασίζεται στις σχέσεις που εμπλέκονται στην προβληματική κατάσταση
Λ: Μπορείς να μου εξηγήσεις από πού κατάλαβες ότι θα έχουν πολλά πόδια;		
N: Επειδή τα παπάκια έτρεξαν.	«επειδή τα παπάκια έτρεξαν»	E4: αιτιολόγηση που βασίζεται σε άσχετα στοιχεία με το πρόβλημα/κατάσταση
Λ: Γιατί έτρεξαν;		
N: Ήθελαν να πάνε στη μαμά τους, πεινούσαν.	«ήθελαν να πάνε στη μαμά τους»	E5: πρόσθεση περιττών δεδομένων μέσω απόδοσης οικείας ιστορίας/σεναρίου ή
Λ: Και εδώ (2 <sup>ο</sup> παράδειγμα). Πόσα πόδια έχουν συνολικά όλα τα παπάκια;		
N: (απαντά αμέσως) Θα έχουν πολλά πόδια.	«θα έχουν πολλά πόδια»	E161: ιδιοσυγκρασιακή σύγκριση πλήθους στοιχείων δύο συνόλων όπου το καθένα περιλαμβάνει και μεμονωμένα στοιχεία και ομαδοποίηση των μεμονωμένων στοιχείων (μονάδες, δεκάδες) η οποία δε βασίζεται στις σχέσεις που

(συνέχεια από προηγούμενη σελίδα)

		εμπλέκονται στην προβληματική κατάσταση
Λ: Γιατί θα έχουν πολλά πόδια;		
N: Επειδή πήγαν στην αυλή.	«επειδή πήγαν στην αυλή»	E4: αιτιολόγηση που βασίζεται σε άσχετα στοιχεία με το πρόβλημα/κατάσταση
Λ: Τι θα κάνουν στην αυλή.		
N: Θα παίζουν με τη μπάλα.	«θα παίζουν με τη μπάλα»	E5: πρόσθεση περιττών δεδομένων μέσω απόδοσης οικείας ιστορίας/σεναρίου ή προτίμησης
Λ: Τώρα θέλω να μου ζωγραφίζεις πόσα πόδια θα έχουν 6 παπάκια. Μπορείς να το κάνεις;		
N: ... (παίρνει τα χρωματιστά και ξεκινά να ζωγραφίζει 2 πάπιες δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στα εξωτερικά χαρακτηριστικά του. Ζωγραφίζει ροζ φόρεμα για τις πάπιες).	ροζ φόρεμα	E3: εστίαση της προσοχής σε εξωτερικά χαρακτηριστικά της εικόνας/εργαλείου (π.χ. χρώμα, σχήμα, μέγεθος) που δε σχετίζονται με την επίλυση του έργου
Λ: Τι σκέφτηκες και ζωγράφισες αυτές τις πάπιες;		
N: Οι πάπιες έχουν ράμφος και στόμα και τους έβαλα και το αγαπημένο μου χρώμα το ροζ.	«οι πάπιες έχουν ράμφος και στόμα»	E3: εστίαση της προσοχής σε εξωτερικά χαρακτηριστικά της εικόνας/εργαλείου (π.χ. χρώμα, σχήμα, μέγεθος) που δε σχετίζονται με την επίλυση του έργου
		E165: πρόσθεση περιττών δεδομένων μέσω εκδήλωσης προτίμησης (π.χ. αγαπημένο χρώμα)
Λ: Τώρα, μπορείς να μου πεις και πόσα παπάκια κρύφτηκαν πίσω από αυτό το φράκτη;	«αγαπημένο χρώμα ροζ»	
N: Αυτό το παπάκι (δείχνει το ένα παπάκι που παρουσιάζεται στη διατύπωση του πρώτου ερωτήματος).	«αυτό το παπάκι»	E3: εστίαση της προσοχής σε εξωτερικά χαρακτηριστικά της εικόνας/εργαλείου (π.χ. χρώμα, σχήμα, μέγεθος) που δε σχετίζονται με την επίλυση του έργου
Λ: Από πού το κατάλαβες; Μπορείς να μου εξηγήσεις;		
N: Γιατί ήρθε και ο παπάς τους. Μετά ήταν όλη η οικογένεια μαζί για να πάνε βόλτα.	«γιατί ήρθε ο παπάς τους»	E4: αιτιολόγηση που βασίζεται σε άσχετα στοιχεία με το πρόβλημα/κατάσταση
	«όλη η οικογένεια μαζί»	E5: πρόσθεση περιττών δεδομένων μέσω απόδοσης οικείας ιστορίας/σεναρίου ή προτίμησης
Λ: Είσαι σίγουρη για την απάντησή σου ή θέλεις να προσπαθήσεις ξανά;		
N: Είμαι σίγουρη, γιατί τα παπάκια έτσι είναι.	«γιατί τα παπάκια έτσι είναι»	E4: αιτιολόγηση που βασίζεται σε άσχετα στοιχεία με το πρόβλημα/κατάσταση

Πίνακας 4.6

Παράδειγμα Εφαρμογής Ανοιχτής Κωδικοποίησης σε Απόσπασμα Συνέντευξης της Μαθήτριας «Μαργαρίτας»

Ανοιχτή Κωδικοποίηση		
Απομαγνητοφώνηση συνέντευξης	Αρχικοί κωδικοί	Κατηγοριοποίηση ετικετικοποίηση κωδικών
<b><u>Μαργαρίτα (Σ6)</u></b>		
Λ: Μπορείς να μου πεις πόσα πόδια έχουν συνολικά και τα δύο παπάκια;		
Μ: 1,2 και 1,2.		
Λ: Δηλαδή πόσα είναι τα πόδια τους;		
Μ: 2.	«2»	E7: απαρίθμηση μερικών στοιχείων και παράλειψη άλλων απαραίτητων στοιχείων όταν δεν ζητείται ξεκάθαρα η εφαρμογή της απαρίθμησης
Λ: Και εδώ; Πόσα πόδια έχουν αυτά τα παπάκια;		
Μ: 1,2 ...1, 2 ...1, 2.	«1,2...1,2...1,2»	E26: επανάληψη του δοσμένου αριθμού, από τα δεδομένα ως απάντηση
Λ: Τώρα θέλω να ζωγραφίζεις πόσα πόδια έχουν 6 παπάκια.		
Μ: ... (ξεκινά να ζωγραφίζει και ζωγραφίζει συνολικά 6 πόδια).	6 παπάκια → 6 πόδια	E12: ιδιοσυγκρασιακή μη ολοκληρωμένη κατανομή στοιχείων χωρίς αντιστοίχιση πολλών στοιχείων σε ένα άλλο ή και το αντίστροφο
Λ: Άρα πόσα πόδια έχουν τα 6 παπάκια;		
Μ: 6 πόδια! Όσα είναι τα παπάκια είναι και τα πόδια τους.	τόσα πόδια όσα τα παπάκια	E26: επανάληψη του δοσμένου αριθμού, από τα δεδομένα ως απάντηση
Λ: Τώρα, θέλω να κοιτάξεις προσεκτικά την εικόνα και να μου πεις πόσα παπάκια κρύφτηκαν πίσω από το φράκτη. Φαίνονται μόνο τα πόδια τους και εσύ θέλω να σκεφτείς και να μου πεις πόσα παπάκια υπάρχουν.		
Μ: ... (ξεκινά και μετρά 1-1 όλα τα πόδια). Κρύφτηκαν 10 παπάκια! Όσα είναι τα πόδια είναι και τα παπάκια.	10 πόδια → 10 παπάκια	E12: προσφυγή σε αντιστοίχιση ένα προς ένα αντί σε αντιστοίχιση πολλών στοιχείων σε ένα άλλο ή και τα αντίστροφα
	«τόσα παπάκια όσα τα πόδια»	E26: επανάληψη του δοσμένου αριθμού, από τα δεδομένα ως απάντηση

(συνέχεια από προηγούμενη σελίδα)

Λ: Μπορείς να μου εξηγήσεις πώς το σκέφτηκες αυτό;

Μ: Κάθε φορά που έχει ένα πόδι σημαίνει έχει και ένα παπάκι. Επειδή είναι 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 πόδια άρα είναι 10 παπάκια!

«κάθε φορά που έχει ένα πόδι σημαίνει έχει και ένα παπάκι»

E12: προσφυγή σε αντιστοίχιση ένα προς ένα αντί σε αντιστοίχιση πολλών στοιχείων σε ένα άλλο ή και τα αντίστροφα

«επειδή είναι 1,2,3...10 πόδια»

E19: αιτιολόγηση που βασίζεται μόνο σε συγκεκριμένο λανθασμένο παράδειγμα

Πίνακας 4.7

Παράδειγμα Εφαρμογής Ανοιχτής Κωδικοποίησης σε Απόσπασμα Συνέντευξης του Μαθητή «Κυριάκου»

Ανοιχτή Κωδικοποίηση		
Απομαγνητοφώνηση συνέντευξης	Αρχικοί κωδικοί	Κατηγοριοποίηση ετικετικοποίηση κωδικών
<b><u>Κυριάκος (Σ7)</u></b>		
Λ: Μπορείς να μου πεις πόσα πόδια έχουν τα παπάκια αυτά;		
Κ: (μετρά όλα τα πόδια) 1,2 (μικρή παύση), 3, 4» Έχουν 4 πόδια. Αφού είναι 1,2, 3, 4.	«1,2 (μικρή παύση), 3, 4»	E15: αποτελεσματική χρήση γνωστής διαδικασίας «απαρίθμηση όλων» όταν δεν ζητείται ξεκάθαρα η εφαρμογής της
Λ: Και αυτά τα παπάκια; Πόσα πόδια έχουν;		
Κ: Έχουν 1,2 (μικρή παύση), 3, 4 (μικρή παύση) 5,6 (χτυπά 2 φορές το δάκτυλό του κάνοντας παύση σε κάθε παπάκι και μετρά).	«1,2 (μικρή παύση), 3, 4 (μικρή παύση) 5,6»	E15: αποτελεσματική χρήση γνωστής διαδικασίας «απαρίθμηση όλων» όταν δε ζητείται ξεκάθαρα η εφαρμογή της
Λ: Πολύ καλά! Τώρα θέλω να μου ζωγραφίσεις πόσα πόδια θα έχουν 6 παπάκια.		
Κ: ... (ξεκινά και ζωγραφίζει. Κάθε φορά που ζωγραφίζει 2 πόδια, αναφέρει τον αντίστοιχο αριθμό από παπάκια. Ζωγραφίζει 8 πόδια και ξεκινά ξανά από την αρχή να μετρά βάζοντας το δάκτυλο του ταυτόχρονα σε δύο πόδια και μετρά) 1 παπάκι, 2, 3, 4 παπάκια... (συνεχίζει να ζωγραφίζει ακόμη 5 πόδια, αφήνει το μολύβι).	ζωγραφίζει πόδια  μετρά 2 πόδια για κάθε παπάκι	E27: δημιουργία κατάλληλης εικονικής αναπαράστασης με συγκεκριμένο τρόπο για εύρεση απάντησης χωρίς δυνατότητα ερμηνείας/ανάλυσης της εικόνας με διαφορετικό τρόπο  E15: αποτελεσματική χρήση γνωστής διαδικασίας «απαρίθμηση όλων» όταν δε ζητείται ξεκάθαρα η εφαρμογή της

(συνέχεια από προηγούμενη σελίδα)

Λ: Ωραία. Τώρα έχεις ζωγραφίσει 6 παπάκια;	βάζει το δάχτυλό του ταυτόχρονα σε δύο πόδια	E28: έλεγχος απάντησης μέσω απαρίθμησης
Κ: ... (ξεκινά και μετρά ξανά από την αρχή, βάζοντας το δάχτυλό του) 1, 2, 3, 4, 5, 6 ... (διστάζει). Έχει ένα πόδι περισσότερο. Πρέπει να σβήσω ένα πόδι! (το διορθώνει).	2 πόδια → 1 παπάκι  βάζει το δάχτυλό του και μετρά πρέπει να σβήσω ένα πόδι»	E29: αντιστοίχιση πολλών στοιχείων σε ένα άλλο ή και το αντίστροφο  E28: έλεγχος απάντησης μέσω απαρίθμησης
Λ: Τώρα έχεις ζωγραφίζει 6 παπάκια;		
Κ: Ναι! Να τα (και ξεκινά και τα μετρά ξανά).		
Λ: Τώρα θέλω να δεις αυτή την εικόνα (4 <sup>ο</sup> παράδειγμα) και να μου πεις πόσα παπάκια κρύφτηκαν πίσω από το φράκτη).		
Κ: (βάζει το δάχτυλό του και για κάθε 2 πόδια, μετρά 1 παπάκι) 1, 2, 3, 4, 5. Έχει 5 παπάκια αφού έχει 10 πόδια!	2 πόδια → 1 παπάκι  «έχει 5 παπάκια αφού έχει 10 πόδια»	E29: αντιστοίχιση πολλών στοιχείων σε ένα άλλο ή και το αντίστροφο  E29: αντιστοίχιση πολλών στοιχείων σε ένα άλλο ή και το αντίστροφο
Λ: Είσαι σίγουρος για την απάντησή σου;		
Κ: Ναι γιατί τα μέτρησα όλα.	«γιατί τα μέτρησα»	E18: αιτιολόγηση που βασίζεται σε απλή περιγραφή μαθηματικής διαδικασίας

Πίνακας 4.8

Παράδειγμα Εφαρμογής Ανοιχτής Κωδικοποίησης σε Απόσπασμα Συνέντευξης του Μαθητή «Αλέξανδρου»

Απομαγνητοφώνηση συνέντευξης	Ανοιχτή Κωδικοποίηση	
	Αρχικοί κωδικοί	Κατηγοριοποίηση ετικετικοποίηση κωδικών
<u>Αλέξανδρος (Σ8)</u>		
Λ: Μπορείς να σκεφτείς και να μου πεις πόσα πόδια έχουν και τα δύο παπάκια μαζί;		
Α: 4 (απαντά πολύ γρήγορα).		
Λ: Μπορείς να μου εξηγήσεις πώς το σκέφτηκες ότι έχουν 4 πόδια;		

(συνέχεια από προηγούμενη σελίδα)

A: Επειδή 2+2 μας κάνουν 4!	«2 και 2 κάνουν 4»	E31: ανάκληση γνωστού αποτελέσματος
Λ: Πολύ καλά. Και αυτά εδώ τα παπάκια; Πόσα πόδια έχουν; (2 <sup>ο</sup> παράδειγμα)		
A: Α! Εδώ έχει ένα παπάκι περισσότερο. Άρα θα έχουν 6 πόδια! (απαντά αμέσως)	«έχει ένα παπάκι περισσότερο»	E64: αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ δεδομένων διαφορετικών ερωτημάτων για εντοπισμό συσχετίσεων
Λ: Αυτό πώς το σκέφτηκες τόσο γρήγορα;		
A: Αφού εδώ τα 2 παπάκια είχαν 4 πόδια. Εδώ που είναι 3 τα παπάκια θα έχουν ακόμη 2 πόδια δηλαδή 6 πόδια!	αφού $2+2=4$ τότε $4+2=6$	E54: χρήση γνωστών αποτελεσμάτων για εξαγωγή άλλων αποτελεσμάτων
Λ: Μπράβο Αλέξανδρε! Πολύ καλά! Τώρα θέλω να προσπαθήσεις να σκεφτείς και να μου ζωγραφίσεις πόσα πόδια θα έχουν τα 6 παπάκια!		
A: ... (σκέφτεται). Αφού πριν βρήκα ότι τα 3 παπάκια είχαν 6 πόδια. Ε τώρα θα έχουμε ακόμη 3 παπάκια με 6 πόδια. Ε.. 6 και 6 (σκέφτεται).	«βρήκα πριν 3 παπάκια 6 πόδια άρα ακόμα 3 παπάκια»	E64: αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ δεδομένων διαφορετικών ερωτημάτων για εντοπισμό συσχετίσεων
Λ: Σε δυσκολεύει;		
A: Ναι λίγο... Έχω 6 και πάω 7, 8, 9, 10, 11, 12. Θα έχουν 12 πόδια! Άρα είχαμε 6 πόδια πριν και τώρα μέτρησα ακόμη 6, 2 πόδια για κάθε παπάκι, άρα γίνονται 12.	«έχω 6 και πάω 7, 8, 9, 10, 11, 12  «είχαμε 6 και τώρα ακόμη 6, 2 για κάθε παπάκι»	E33: χρήση αριθμητικής διαδικασίας «αρίθμηση από τον πρώτο»  E32: νοερή απεικόνιση της κατάστασης του προβλήματος που υποδεικνύει ομαδοποίηση/οργάνωση των στοιχείων που εμπλέκονται
Λ: Πολύ καλά! Τώρα, θέλω να προσπαθήσεις να σκεφτείς και να μου πεις πόσα παπάκια κρύφτηκαν πίσω από αυτό τον φράκτη.		
A: ... (ξεκινά και μετρά τα πόδια. Απαντά γρήγορα). Έχουν κρυφτεί 5 παπάκια!		
Λ: Αυτό πώς το σκέφτηκες τόσο γρήγορα;		
A: Αφού 2 πόδια κάνουν έναν παπάκι.	2 πόδια → 1 παπάκι	E29: αντιστοίχιση πολλών στοιχείων σε ένα άλλο ή και το αντίστροφο
Λ: Δηλαδή πες μου το λίγο καλύτερα.		

(συνέχεια από προηγούμενη σελίδα)

A: Πριν ήταν 12 πόδια και τα παπάκια ήταν 6. Ε τώρα που έχουν 10 πόδια, σημαίνει ότι έχει δύο λιγότερα πόδια. αρα από τα 6 παπάκια έφυγε το ένα και έμειναν τα 5.

«πριν ήταν 12 πόδια... ε τώρα που έχουν 10»

E64: αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ δεδομένων διαφορετικών ερωτημάτων για εντοπισμό συσχετίσεων

«δύο λιγότερα πόδια, από τα 6 έφυγε το 1 παπάκι»

E139: έλεγχος απάντησης μέσω νοερών στρατηγικών και αριθμητικών διαδικασιών

### ***Ενδεικτικά αποσπάσματα συνεντεύξεων – Αριθμοί έργο 3***

Στόχος των μαθητών στο συγκεκριμένο έργο, ήταν η ανάλυση και σύνθεση του αριθμού 8 ως άθροισμα 2 προσθετών. Οι μαθητές, για το σκοπό αυτό, είχαν στη διάθεσή τους καρτέλες οι οποίες αναπαριστούσαν καραμέλες. Σε κάθε καρτέλα μπορεί να υπήρχαν από 0 μέχρι 8 καραμέλες μωβ ή κόκκινου χρώματος. Οι μαθητές θα έπρεπε να κάνουν το κατάλληλο συνδυασμό καρτελών λαμβάνοντας υπόψη ότι οι καραμέλες που θα επέλεγαν θα έπρεπε να ήταν συνολικά 8. Η διαδικασία συνεχιζόταν μέχρι οι μαθητές να αναφέρουν ότι δεν ήταν σε θέση να βρουν κάποια άλλη απάντηση στο ερώτημα. Στα ενδεικτικά αποσπάσματα συνεντεύξεων μαθητών που ακολουθούν, παρουσιάζονται οι κυριότερες στρατηγικές που χρησιμοποιήθηκαν από τους μαθητές



Διάγραμμα 4.3: Ενδεικτικό παράδειγμα αριθμοί έργο 1



Πίνακας 4.9

Παράδειγμα Εφαρμογής Ανοιχτής Κωδικοποίησης σε Απόσπασμα Συνέντευξης του Μαθητή «Παύλου»

<b>Ανοιχτή Κωδικοποίηση</b>		
<b>Απομαγνητοφώνηση συνέντευξης</b>	<b>Αρχικοί κωδικοί</b>	<b>Κατηγοριοποίηση ετικετικοποίηση κωδικών</b>
<b><u>Παύλος (Σ9)</u></b>		
Λ: Μπορείς να σκεφτείς και να μου δείξεις πόσες μωβ και πόσες κόκκινες καραμέλες θα πρέπει να πάρει ο Ανδρέας ώστε να έχει συνολικά 8 καραμέλες;		
Π: ... (ξεκινά και βλέπει τις καρτέλες. Δείχνει 4 καρτέλες με το ίδιο χρώμα καραμελών και δεν μετρά τις καραμέλες). Αυτές θα αγοράσει τις 4 εικόνες!	δεν μετρά τις καραμέλες  «αυτές θα αγοράσει τις 4 εικόνες»	E1: απουσία χρήσης εργαλείου που εμπλέκει την πληθικότητα  E62: μη αξιοποίηση των δεδομένων του προβλήματος
Λ: Από πού κατάλαβες ότι αυτές είναι οι καραμέλες που θα αγοράσεις;		
Π: Επειδή θα αγοράσει κόκκινες καραμέλες	«επειδή θα αγοράσει κόκκινες καραμέλες»	E4: αιτιολόγηση που βασίζεται σε άσχετα στοιχεία με το πρόβλημα/κατάσταση
Λ: Ωραία και όλες οι καραμέλες στις καρτέλες είναι σίγουρα 8;		
Π: Ναι, αυτές πρέπει να αγοράσει	«αυτές πρέπει να αγοράσει»	E62: μη αξιοποίηση των δεδομένων του προβλήματος

Πίνακας 4.10

Παράδειγμα Εφαρμογής Ανοιχτής Κωδικοποίησης σε Απόσπασμα Συνέντευξης της Μαθήτριας «Νεφέλης»

<b>Ανοιχτή Κωδικοποίηση</b>		
<b>Απομαγνητοφώνηση συνέντευξης</b>	<b>Αρχικοί κωδικοί</b>	<b>Κατηγοριοποίηση ετικετικοποίηση κωδικών</b>

**Νεφέλη (Σ10)**

Λ: Θέλω να προσέξεις πολύ προσεκτικά τις καρτέλες και να πάρεις 2 καρτέλες ώστε συνολικά ο Αντρέας να αγοράσει 8 καραμέλες. Θα πρέπει να αγοράσει και μωβ και κόκκινες καραμέλες

(συνέχεια από προηγούμενη σελίδα)

N: ... (ξεκινά να βλέπει τις καρτέλες. Παίρνει αμέσως 2 καρτέλες. Μια με δύο κόκκινες καραμέλες και μια άλλη με άλλες δύο κόκκινες καραμέλες και τις μετρά). 1, 2 (παύση), 1, 2 (παύση). Όχι δεν είναι αυτές γιατί έχουν και οι δύο κόκκινες καραμέλες. Αφού πρέπει να πάρει κόκκινες και μωβ καραμέλες. Να δω άλλες.	μέτρηση καραμελών	E7: απαρίθμηση μερικών στοιχείων και παράλειψη άλλων απαραίτητων στοιχείων όταν δεν ζητείται ξεκάθαρα η εφαρμογή της απαρίθμησης
Λ: Μη ξεχνάς ότι θα πρέπει να πάρει κόκκινες και μωβ καραμέλες.	«όχι έχουν και οι δύο κόκκινες καραμέλες»	E8: αξιοποίηση ενός ή μόνο μερικών δεδομένων του προβλήματος
N: (Τις βάζει πίσω. Παίρνει μια καρτέλα που έχει 5 μωβ καραμέλες και μια καρτέλα με 5 κόκκινες καραμέλες. Τις μετρά). 1, 2,...5 1,2,...5. Όχι	«1, 2...5 1, 2...5 όχι»	E55: ημιτελής προσπάθεια εφαρμογής της στρατηγικής δοκιμής και ελέγχου χωρίς να γίνεται έλεγχος οποιασδήποτε δοκιμής και αναπροσαρμογής της διαδικασίας
Λ: Άρα τι θα κάνεις τώρα;		
N: (Τις βάζει πίσω. Παίρνει μια καρτέλα που έχει 8 κόκκινες καραμέλες και ακόμη μια καρτέλα που έχει 8 μωβ καραμέλες. Τις μετρά). 1,2, ...8. 1, 2,...8. Ναι, αυτές θα πρέπει να πάρει!	«8 κόκκινες και 8 μωβ καραμέλες»	E26: επανάληψη του δοσμένου αριθμού, από τα δεδομένα ως απάντηση
Λ: Από πού το κατάλαβες ότι θα πρέπει να πάρει αυτές τις καραμέλες;		
N: Επειδή είναι (μετρά ξανά) 1,2, ...8 και 1,2,...8. Άρα είναι 8.	«επειδή είναι 8 εδώ και 8 εδώ»	E19: αιτιολόγηση που βασίζεται μόνο σε συγκεκριμένο λανθασμένο παράδειγμα
Λ: Δηλαδή είσαι σίγουρη, όταν μετρήσεις όλες τις καραμέλες και στις δύο καρτέλες όλες μαζί είναι 8;		
N: Ναι, τα μέτρησα και ήταν 8.	«τα μέτρησα και ήταν 8»	E13: χρήση του εργαλείου που εμπλέκει την πληθικότητα με τρόπο που οι αρχικές ενέργειες υποδεικνυαν σωστή χρήση αλλά στη συνέχεια παρουσιαζόταν αδυναμία ορθής χρήσης και χειρισμού του υλικού
Λ: Μπορείς να σκεφτείς και άλλο τρόπο; Μπορεί να έχει και άλλες επιλογές ο Ανδρέας;		
N: Όχι, δεν έχει άλλο τρόπο, μόνο αυτές γίνεται! Πρέπει να μπαίνει πάντα 8 από το ένα χρώμα και 8 από το άλλο χρώμα.	«8 από το ένα χρώμα και 8 από το άλλο»	E71: ανεπιτυχής εύρεση προσθετών που να δίνουν το ζητούμενο συγκεκριμένο άθροισμα

Ανοιχτή Κωδικοποίηση		
Απομαγνητοφώνηση συνέντευξης	Αρχικοί κωδικοί	Κατηγοριοποίηση ετικετικοποίηση κωδικών
<b><u>Κωνσταντίνος (Σ11)</u></b>		
Λ: Θέλω να σκεφτείς και να μου πεις πόσες κόκκινες και πόσες μωβ καραμέλες θα πρέπει να αγοράσει ώστε όλες οι καραμέλες του να είναι 8;		
Κ: (Παίρνει τις καρτέλες και ξεκινά να μετρά τις καραμέλες. Παίρνει μια καρτέλα με 5 μωβ καραμέλες. Παίρνει ακόμη μια καρτέλα με 5 κόκκινες καραμέλες και τις μετρά). 1,2 ,3..10. Όχι δεν είναι αυτές.	μετρά τις καραμέλες  «1, 2, 3,4, 5...6, 7, 8, 9, 10 όχι»	E15: αποτελεσματική χρήση γνωστής διαδικασίας «απαρίθμησης όλων» όταν δε ζητείται ξεκάθαρα η εφαρμογή της  E162: αποτελεσματική χρήση στρατηγικής δοκιμής και ελέγχου χωρίς αναστοχασμό στις δοκιμές (τυχαίες δοκιμές) όταν οι άγνωστες ποσότητες είναι δύο
Λ: Τι θα κάνεις τώρα;		
Κ: Θα βάλω πίσω την καρτέλα με τις κόκκινες καραμέλες και θα πιάσω μία άλλη με κόκκινες και θα τις μετρήσω όλες ξανά.. 1, 2, 3...9 (Την βάζει ξανά πίσω και παίρνει μία καρτέλα με 3 κόκκινες καραμέλες. Τις μετρά). 1, 2, 3...8. Αυτές θα πάρε! 5 μωβ και 3 κόκκινες καραμέλες! Βρήκα σωστή απάντηση που δίνει 8!	«1,2,3, 4, 5...6, 7, 8, 9 όχι»  «1,2,3, 4, 5...6, 7,8 ναι»	E162: αποτελεσματική χρήση στρατηγικής δοκιμής και ελέγχου χωρίς αναστοχασμό στις δοκιμές (τυχαίες δοκιμές) όταν οι άγνωστες ποσότητες είναι δύο  E162: αποτελεσματική χρήση στρατηγικής δοκιμής και ελέγχου χωρίς αναστοχασμό στις δοκιμές (τυχαίες δοκιμές) όταν οι άγνωστες ποσότητες είναι δύο
	«σωστή απάντηση που δίνει 8»	E72: επιτυχής εύρεση προσθετέων που να δίνουν το ζητούμενο συγκεκριμένο άθροισμα
Λ: Ωραία. Μπορείς να σκεφτείς και άλλη απάντηση;		
Κ:...(σκέφτεται λίγο και παίρνει μια καρτέλα με 4 κόκκινες καραμέλες και μια με 4 μωβ καραμέλες. Μετρά τις καραμέλες). Ναι 4 μωβ και 4 κόκκινες! Βρήκα σωστή απάντηση που δίνει 8!	«4 μωβ και 4 κόκκινες, ναι»  «σωστή απάντηση που δίνει 8»	E162: αποτελεσματική χρήση στρατηγικής δοκιμής και ελέγχου χωρίς αναστοχασμό στις δοκιμές (τυχαίες δοκιμές) όταν οι άγνωστες ποσότητες είναι δύο  E72: επιτυχής εύρεση προσθετέων που να δίνουν το ζητούμενο συγκεκριμένο άθροισμα

Λ: Μπράβο. Πώς το σκέφτηκες αυτό;

Κ: Αφού τις μέτρησα, κάνουν 8.

Λ: Ωραία. Μπορείς να σκεφτείς και άλλη απάντηση;

Κ: (Κοιτάζει τις καρτέλες. Παίρνει μια καρτέλα με 6 μωβ και μια καρτέλα με 3 κόκκινες και τις μετρά.

Επιστρέφει πίσω την καρτέλα με τις 3 κόκκινες.

Παίρνει μία με 2 κόκκινες και μετρά όλες τις καραμέλες). Α! Βρήκα ακόμη μία απάντηση. Θα πρέπει να πάρει 2 κόκκινες και 6 μωβ. Βρήκα σωστή απάντηση που δίνει 8!

«6 μωβ και 3 κόκκινες, όχι»

ανταλλαγή καρτελών με κόκκινες καραμέλες

«6 μωβ και 2 κόκκινες ,να»

ακόμη μία απάντηση

«σωστή απάντηση που δίνει 8»

E56: αποτελεσματική χρήση στρατηγικής δοκιμής και ελέγχου με αναστοχασμό στις δοκιμές, όταν οι άγνωστες ποσότητες είναι δύο

E14: τυπική χρήση εργαλείου που εμπλέκει την πληθικότητα μόνο με συγκεκριμένο τρόπο για εύρεση της απάντησης μέσω μέτρησης όλων των στοιχείων

E56: αποτελεσματική χρήση στρατηγικής δοκιμής και ελέγχου με αναστοχασμό στις δοκιμές, όταν οι άγνωστες ποσότητες είναι δύο

E58: έλεγχος για εντοπισμό πολλαπλών απαντήσεων όταν απαιτούνται

E72: επιτυχής εύρεση προσθετών που να δίνουν το ζητούμενο συγκεκριμένο άθροισμα

Λ: Το πρώτο ζευγάρι που βρήκες είναι το 5 και 3 σωστά;

Κ: Ναι.

Λ: Μπορείς να μου εξηγήσεις γιατί και το 6 και 2 είναι σωστή απάντηση;

Κ: Ναι επειδή τα μετρώ και κάνουν 8!

Λ: Θα μπορούσες και πιο γρήγορα να αποφασίσεις γιατί το 6+2 είναι σωστή απάντηση με βάση τα προηγούμενα;

Κ: Όχι γιατί τα προηγούμενα είναι άλλες απαντήσεις

«επειδή τα μετρώ και κάνουν 8»

«τα προηγούμενα είναι άλλες απαντήσεις»

E18: αιτιολόγηση που βασίζεται σε απλή περιγραφή μαθηματικής διαδικασίας

E16: αξιοποίηση όλων των δεδομένων του προβλήματος χωρίς περαιτέρω εντοπισμό συσχετίσεων μεταξύ δεδομένων του ίδιου ερωτήματος ή διαφορετικών ερωτημάτων

Πίνακας 4.12

Παράδειγμα Εφαρμογής Ανοιχτής Κωδικοποίησης σε Απόσπασμα Συνέντευξης της μαθήτριας «Μαρίνας»

Απομαγνητοφώνηση συνέντευξης	Ανοιχτή Κωδικοποίηση	
	Αρχικοί κωδικοί	Κατηγοριοποίηση ετικετικοποίηση κωδικών
<b><u>Μαρίνα (Σ12)</u></b>		
Λ: Μαρίνα μπορείς να σκεφτείς ένα τρόπο για να πάρει 8 καραμέλες;		
Μ: Θα πρέπει να πάρει 4 μωβ και 4 κόκκινες καραμέλες... επειδή 4 και 4 κάνουν 8		
Λ: Πώς το βρήκες τόσο γρήγορα;		
Μ: Επειδή θυμάμαι ότι $4 + 4 = 8$ (βρίσκει τις σωστές καρτέλες και τις τοποθετεί στο θρανίο).	«θυμάμαι ότι $4+4=8$ »	E31: ανάκληση γνωστού αποτελέσματος
Βρήκα σωστό τρόπο.	«βρήκα σωστό τρόπο»	E72: επιτυχής εύρεση προσθετών που να δίνουν το ζητούμενο συγκεκριμένο άθροισμα
Λ: Πολύ ωραία Μαρίνα. Μπορείς να βρεις και άλλη απάντηση;		
Μ: Ναι! Αν βγάλω ένα από εδώ και το βάλω εδώ θα έχουμε $5+3$ (αναζητεί τις καρτέλες).		
Λ: Χρησιμοποίησες κάτι για να σε βοηθήσει και να το βρεις;		
Μ: Όχι, το σκέφτηκα στο μυαλό μου.		
Λ: Τι ακριβώς σκέφτηκες;		
Μ: Έχω 5 και πάω 6, 7, 8.	«έχω 5 και πάω 6, 7, 8»	E33: χρήση αριθμητικής διαδικασίας «αρίθμηση από τον πρώτο»
Λ: Πολύ ωραία! Μπορείς να βρεις και άλλη απάντηση;		
Μ: Ναι μπορώ να βρω και άλλες απαντήσεις όπως έκανα πριν! Αν βγάλω ένα από εδώ (δείχνει τις καρτέλες που χρησιμοποίησε στην προηγούμενη περίπτωση) και το βάλω εδώ θα έχουμε $6+2$ (αναζητά τις κατάλληλες καρτέλες). Βρήκα σωστό τρόπο.	«και άλλες απαντήσεις»  «βρήκα σωστό τρόπο»	E58: έλεγχος για εντοπισμό πολλαπλών απαντήσεων όταν απαιτούνται  E72: επιτυχής εύρεση προσθετών που να δίνουν το ζητούμενο συγκεκριμένο άθροισμα
Λ: Μπορείς να μου εξηγήσεις πώς σκέφτεσαι κάθε φορά για να καταλάβω και εγώ πώς μπορείς και βρίσκεις τόσες πολλές απαντήσεις τόσο γρήγορα;		
Μ: Ναι αφού σκέφτομαι σε αυτά που βρήκα πριν. Αφού 4 και 4 κάνουν 8, βγάζω ένα από τον ένα	«σκέφτομαι πάνω σε αυτά που βρήκα πριν»	E21: αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ δεδομένων του ερωτήματος για εντοπισμό συσχετίσεων

<p>αριθμό και τον βάζω στον άλλο και μένουν ίσα. Έτσι γίνεται πάντα. Αν αλλάξω τη θέση των αριθμών, βρίσκω ένα άλλο διαφορετικό τρόπο. Δηλαδή 2 και 6 (βρίσκει τις κατάλληλες καρτέλες) είναι 8.</p>	<p>«βγάζω ένα από τον ένα αριθμό και τον βάζω στον άλλο»</p>	<p>(συνέχεια από προηγούμενη σελίδα) E22: εντοπισμός διαφορετικών προσθετέων που δίνουν σταθερό άθροισμα μέσω της αύξησης του ενός προσθετέου κατά ένα και της μείωσης του άλλου προσθετέου κατά ένα (έννοια της ισότητας)</p>
	<p>«και μένουν ίσα»</p>	<p>E189: ορθή χρήση του όρου της ισότητας στο κατάλληλο πλαίσιο</p>
<p>Λ: Γιατί όταν βγάζεις ένα από τον ένα αριθμό και βάζεις ένα στον άλλο αριθμό βγαίνει το ίδιο αποτέλεσμα;</p>	<p>αλλαγή στη θέση των αριθμών → άλλος τρόπος</p>	<p>E35: εστίαση σε ιδιότητα πράξεων που αναδύεται (αντιμεταθετική ιδιότητα), μέσω εντοπισμού σχέσεων που υποβόσκουν</p>
<p>Μ: Επειδή αυτό που χάνει το ένα, το κερδίζει το άλλο και έτσι όλα μαζί μένουν τα ίδια.</p>	<p>«επειδή αυτό που χάνει το ένα το κερδίζει το άλλο και όλα μαζί μένουν ίδια»</p>	<p>E25: αιτιολόγηση που βασίζεται σε γενικευμένη δήλωση</p>
<p>Λ: Τι εννοείς μένουν ίδια;</p>	<p>«τον έσπαζα διαφορετικά κάθε φορά»</p>	<p>E109: σύνθεση και ανάλυση δοσμένου αριθμού με διαφορετικούς τρόπους</p>
<p>Μ: Εννοώ ότι αν τα μετρήσω ξανά δε θα αλλάξει ο αριθμός που θα βρω γιατί απλά τον έσπαζα διαφορετικά κάθε φορά.</p>	<p>«όχι δεν τις μετρούσα όλες, έκανα τον τρόπο που σου είπα πριν στο μυαλό μου»</p>	<p>E139: έλεγχος απάντησης μέσω νοερών στρατηγικών και αριθμητικών διαδικασιών</p>

### Ενδεικτικά αποσπάσματα συνεντεύξεων – Μοτίβα έργο 1

Στο συγκεκριμένο έργο ζητήθηκε από τους μαθητές να συμπληρώσουν τα δύο αναπτυσσόμενα μοτίβα όπως παρουσιάζονται στην πιο κάτω εικόνα. Συγκεκριμένα το πρώτο αναπτυσσόμενο μοτίβο έχει κανόνα ανάπτυξης +1, ενώ το δεύτερο αναπτυσσόμενο μοτίβο έχει κανόνα ανάπτυξης +2. Ακολουθώντας, παρουσιάζονται ενδεικτικά παραδείγματα απομαγνητοφωνήσεων συνεντεύξεων με 4 μαθητές.



Διάγραμμα 4.4: Ενδεικτικό παράδειγμα έργου μοτίβα 1

Πίνακας 4.13

Παράδειγμα Εφαρμογής Ανοιχτής Κωδικοποίησης σε Απόσπασμα Συνέντευξης του Μαθητή «Κυριάκου»

Ανοιχτή Κωδικοποίηση		
Απομαγνητοφώνηση	Αρχικοί κωδικοί	Κατηγοριοποίηση Ετικετικοποίηση κωδικών
<b><u>Κυριάκος (Σ13)</u></b>		
Λ: Θέλω να προσέξεις πολύ καλά αυτό το μοτίβο. Μπορείς να μου ζωγραφίσεις πώς θα μοιάζει το επόμενο που θα πρέπει να ζωγραφίσουμε;		
Κ: (Ξεκινά και ζωγραφίζει ένα ορθογώνιο σε κατακόρυφη διάσταση). Θα γίνει ένας πύργος με παράθυρα!	πύργος με παράθυρα	E5: πρόσθεση περιττών δεδομένων μέσω απόδοσης οικείας ιστορίας/σεναρίου
Λ: Γιατί ζωγράφισες αυτό το ορθογώνιο εδώ;		
Κ: Γιατί μοιάζει με πύργο!	«γιατί μοιάζει με πύργο	E4: αιτιολόγηση που βασίζεται σε άσχετα στοιχεία με το πρόβλημα/κατάσταση

Λ: Θέλεις να προσπαθήσεις να δοκιμάσεις ξανά να ζωγραφίσεις το επόμενο σχήμα;

Κ: Μα αφού το έκανα.

Λ: Είσαι σίγουρος γι' αυτό που ζωγράφισες ήδη;

Κ: Ναι σίγουρα είναι σωστός ο πύργος μου και έχει και το αγαπημένο μου χρώμα πάνω το κόκκινο.

«αγαπημένο χρώμα κόκκινο»

E165: πρόσθεση περιττών δεδομένων μέσω εκδήλωσης προτίμησης (π.χ. αγαπημένο χρώμα)

Λ: Υπάρχει κάτι άλλο που παρατηρείς σε αυτή την εικόνα;

Κ: Εδώ δεν έχει αριθμούς ενώ στα άλλα που κάναμε πριν είχε αριθμούς.

«δεν έχει αριθμούς ενώ στα άλλα που κάναμε είχε αριθμούς»

E61: ιδιοσυγκρασιακές περιγραφές για την προβληματική κατάσταση που δεν σχετίζονται με εντοπισμό μοτίβου ή του κανόνα για τη σχέση δύο μεταβλητών

#### Πίνακας 4.14

*Παράδειγμα Εφαρμογής Ανοιχτής Κωδικοποίησης σε Απόσπασμα Συνέντευξης της Μαθήτριας «Ευαγγελίας»*

Απομαγνητοφώνηση συνέντευξης	Ανοιχτή Κωδικοποίηση	
	Αρχικοί κωδικοί	Κατηγοριοποίηση ετικετικοποίηση κωδικών
<p><b><u>Ευαγγελία (Σ14)</u></b></p> <p>Λ: Θέλω να προσέξεις αυτά τα σχήματα. Η Γεωργία έφτιαξε αυτά τα σχήματα. Θα συνεχίσει να τα φτιάχνει με αυτό τον τρόπο. Μπορείς να μου ζωγραφίσεις πώς θα μοιάζει το επόμενο σχήμα που πρέπει να φτιάξει;</p> <p>Ε: Το σχήμα θα είναι πιο μεγάλο... μακρύ (Ξεκινά και ζωγραφίζει 7 κύκλους σε κατακόρυφη διάσταση).</p>	<p>«σχήμα πιο μεγάλο... μακρύ»</p> <p>επόμενο σχήμα: 7 κύκλοι</p>	<p>E145: αποσπασματική επεξεργασία της εικόνας του μοτίβου και στιγμιαία οπτική παρατήρηση της για εντοπισμό μόνο για τον εντοπισμό της κατεύθυνσης μεταβολής και όχι και του μεγέθους της μεταβολής</p> <p>E36: ανεπιτυχής εύρεση όρων αναπτυσσόμενου μοτίβου με κανόνα +1</p>



(συνέχεια από προηγούμενη σελίδα)

Λ: Μπορεί να μου εξηγήσεις τι σκέφτηκες για να ζωγραφίσεις αυτούς τους κύκλους;

Ε: Γιατί έπρεπε να ζωγραφίσω 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 κύκλους.

«γιατί έπρεπε να ζωγραφίσω 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7»

E19: ανεπιτυχής αιτιολόγηση που βασίζεται σε περιγραφή διαδικασίας

Λ: Αυτό το σχήμα που έκανες (δείχνει το σχήμα 4) έχει περισσότερους κύκλους από το σχήμα αυτό (δείχνω το σχήμα 3);

Ε: Ναι, είναι πιο μεγάλο σχήμα.

Λ: Πώς το βρήκες;

Ε: Φαίνονται περισσότερα

«φαίνονται περισσότερα»

E10: σύγκριση ποσοτήτων μόνο μέσα από οπτική παρατήρηση των διακριτών στοιχείων δύο συνόλων με ξεκάθαρη διαφορά στο πλήθος

Λ: Δηλαδή μπορείς να μου εξηγήσεις τι παθαίνει κάθε φορά το επόμενο σχήμα;

Ε: Βάζω και άλλους κύκλους κάθε φορά.

Λ: Πόσους πιο πολλούς κύκλους βάζεις κάθε φορά;

Ε: Όσους θέλω.

«όσους θέλω»

E145: αποσπασματική επεξεργασία της εικόνας του μοτίβου και στιγμιαία οπτική παρατήρηση της για εντοπισμό μόνο για τον εντοπισμό της κατεύθυνσης μεταβολής και όχι και του μεγέθους της μεταβολής

Λ: Άρα, αντί 7 θα μπορούσαν να είναι και 10 οι κύκλοι;

Ε: Ναι, μπορούν να είναι και 10.

επόμενο σχήμα: 10 κύκλοι

E36: ανεπιτυχής εύρεση όρων αναπτυσσόμενου μοτίβου με κανόνα +1

Λ: Είσαι σίγουρη για την απάντησή σου ή θέλεις να παρατηρήσεις ξανά την εικόνα;

Ε: Είμαι σίγουρη γιατί φαίνεται στην εικόνα ότι το σχέδιο μεγαλώνει.

«το σχέδιο μεγαλώνει»

E158: αιτιολόγηση που βασίζεται σε υπόδειξη μερικών πληροφοριών της εικόνας/εργαλείου

#### Πίνακας 4.15

*Παράδειγμα Εφαρμογής Ανοιχτής Κωδικοποίησης σε Απόσπασμα Συνέντευξης του Μαθητή «Παναγιώτη»*

Ανοιχτή Κωδικοποίηση		
Απομαγνητοφώνηση συνέντευξης	Αρχικοί κωδικοί	Κατηγοριοποίηση ετικετικοποίηση κωδικών

**Παναγιώτης (Σ15)**

Λ: ...Μπορείς να προσέξεις καλά το μοτίβο και να μου ζωγραφίσεις το επόμενο;

Π: (Ξεκινά και παρατηρεί τους προηγούμενους όρους του μοτίβου. Ζωγραφίζει 4 κύκλους σε

κατακόρυφη διάσταση). Θα πρέπει να έχει 4 κύκλους.

Λ: Μπορείς να μου εξηγήσεις πώς το σκέφτηκες;

Π: Γιατί στην αρχή μέτρησα 1 κύκλο, 2, 3. Τώρα θα πρέπει να έχει 4!

Λ: Μετά στο επόμενο σχήμα πόσους κύκλους θα έβαζες;

Π: (σιγοψιθυρίζει 1, 2, 3, 4, 5) 5!

Λ: Γιατί θα έβαζες 5;

Π: Γιατί μετά το 4 είναι το 5.

Λ: Άρα τι γίνεται κάθε φορά στο σχήμα;

Π: Κάθε σχήμα είναι ένας αριθμός που ξέρουμε και τα λέμε σε σειρά και προχωρούν (απαγγελία των αριθμών).

Λ: Δηλαδή τι διαφορετικό έχει το κάθε σχήμα;

Π: Κάθε σχήμα στην εικόνα έχει διαφορετικό αριθμό.

Λ: Δηλαδή τι εννοείς διαφορετικό αριθμό; Πώς βρίσκεις τους διαφορετικούς αριθμούς;

Π: Είναι όπως μάθαμε τους αριθμούς. Δε μπορώ να το εξηγήσω διαφορετικά.

Λ: Πώς είσαι σίγουρος ότι αυτό που ζωγράφισες

στην αρχή μέτρησα 1, 2, 3

σιγοψιθυρίζει 1, 2, 3, 4, 5

επόμενο σχήμα: 5 κύκλοι

«μετά το 4 είναι το 5»

«λέμε σε σειρά και προχωρούν»

«κάθε σχήμα στην εικόνα έχει διαφορετικό αριθμό»

«δε μπορώ να το εξηγήσω διαφορετικά»

E15: αποτελεσματική χρήση γνωστής διαδικασίας «απαρίθμησης όλων» όταν δεν ζητείται ξεκάθαρα η εφαρμογή της

E159: ανάκληση και απαγγελία της ακολουθίας των αριθμών για συμπλήρωση ή επέκταση της διάταξης αριθμών χωρίς άμεσο εντοπισμό και αναφορά στη σχέση μεταξύ προηγούμενου και επόμενου αριθμού

E37: επιτυχής εύρεση όρων αναπτυσσόμενου μοτίβου με κανόνα +1

E39: άμεση αναφορά στη διάταξη δύο οποιονδήποτε διαδοχικών αριθμών

E40: αντιμετώπιση της ακολουθίας του μοτίβου ως μια διαδικασία συνεχούς λεκτικής περιγραφής για επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση μοτίβου

E41: ιδιοσυγκρασιακές παρατηρήσεις της εικόνας που δεν σχετίζονται με την αποκάλυψη του κανόνα του αναπτυσσόμενου μοτίβου στην εικόνα

E163: απουσία ξεκάθαρης αναφοράς του κανόνα του μοτίβου κατά την επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση του μοτίβου

είναι η σωστή απάντηση;

(συνέχεια από προηγούμενη σελίδα)

Π: Γιατί μέτρησα, τα είπα σε σειρά όλα	«γιατί μέτρησα, τα είπα σε σειρά όλα»	E18: αιτιολόγηση που βασίζεται σε απλή περιγραφή μαθηματικής διαδικασίας
Λ: (η ερευνήτρια δείχνει στο μαθητή το επόμενο μοτίβο στο οποίο κάθε επόμενο σχήμα διαφέρει από το προηγούμενο κατά δύο). Ποιο θα είναι το επόμενο σχήμα εδώ;		
Π: (Ο μαθητής βλέπει το μοτίβο). Θα έχει 7 κουτάκια το επόμενο σχήμα (ζωγραφίζει τον επόμενο όρο του μοτίβου).	7 κουτάκια	E42: ανεπιτυχής εύρεση όρων αναπτυσσόμενου μοτίβου με κανόνα +2
Λ: Γιατί θα έχει 7 κουτάκια;		
Π: Γιατί μετά το 6 είναι το 7.	«μετά το 6 είναι το 7»	E39: άμεση αναφορά στη διάταξη δύο οποιονδήποτε διαδοχικών αριθμών
Λ: Μπορείς να μου εξηγήσεις πώς από το σχήμα αυτό (σχήμα 2) προχωρήσαμε σε αυτό το σχήμα (σχήμα 3);		
Π: Εδώ έχει 4 κουτάκια και εδώ έχει 6. Α ξέχασε να βάλει τα 5 κουτάκια.	ξέχασε να βάλει 5 κουτάκια	E41: ιδιοσυγκρασιακές παρατηρήσεις της εικόνας που δεν σχετίζονται με την αποκάλυψη του κανόνα του αναπτυσσόμενου μοτίβου στην εικόνα

#### Πίνακας 4.16

*Παράδειγμα Εφαρμογής Ανοιχτής Κωδικοποίησης σε Απόσπασμα Συνέντευξης του Μαθητή «Ελευθέριου»*

Ανοιχτή Κωδικοποίηση		
Απομαγνητοφώνηση συνέντευξης	Αρχικοί κωδικοί	Κατηγοριοποίηση ετικετικοποίηση κωδικών
<b><u>Ελευθέριος (Σ16)</u></b>		
Λ: Θέλω να προσέξεις προσεκτικά το μοτίβο και να μου ζωγραφίσεις το επόμενο σχήμα.		
Ε: (παρατηρεί τους όρους του μοτίβου. Ζωγραφίζει 4 κύκλους σε κατακόρυφη διάσταση).	επόμενο σχήμα 4: 4 κύκλοι	E37: επιτυχής εύρεση όρων αναπτυσσόμενου μοτίβου με κανόνα +1

Λ: Πώς βρήκες ότι θα είναι 4 οι κύκλοι;

Ε: Κάθε φορά έχει 1 κύκλο περισσότερο. Φαίνεται στην εικόνα ότι μπαίνει ένας νέος κύκλος σε κάθε σχήμα όπως προχωρούμε (δείχνει στην εικόνα τον ένα κύκλο που προστίθεται κάθε φορά).

Λ: Μπορείς να μου εξηγήσεις τι πρέπει να κάνω για να μπορώ να βρω το επόμενο σχήμα;

Ε: Θα προσθέσω 1 στον αριθμό 4. Άρα θα είναι 5.

Λ: Μπορείς να μου εξηγήσεις τι πρέπει να κάνω για να μπορώ να βρω οποιοδήποτε σχήμα που δε φαίνεται στην εικόνα;

Ε: Πρέπει να ξέρω το προηγούμενο σχήμα για να προσθέσω σε αυτό.

Λ: Πρόσεξε τους κύκλους που έχουν τα σχήματα (δείχνω σχήμα 1, 2, 3 κτλ.). Είσαι σίγουρος ότι τα σχήματα που έφτιαξες είναι σωστά;

Ε: Είμαι σίγουρος γιατί έβαζα ένα περισσότερο κύκλο και επειδή ο αριθμός του σχήματος δείχνει και πόσους κύκλους θα έχει.

Λ: (η ερευνήτρια δείχνει στο μαθητή το επόμενο μοτίβο στο οποίο κάθε επόμενο σχήμα διαφέρει από το προηγούμενο κατά δύο). Ποιο θα είναι το επόμενο σχήμα εδώ; Μπορείς να το βρεις και να μου το εξηγήσεις.

Ε: (ζωγραφίζει 3 στήλες από δύο κυβάκια) Δε χρειάζεται να μετρήσω όλα τα κυβάκια. Το βλέπω στην εικόνα ότι κάθε φορά μπαίνει μία νέα σειρά με κυβάκια. Άρα γι' αυτό στη σειρά

Λ: Πολύ ωραίες οι παρατηρήσεις σου. Μπορείς να μου εξηγήσεις πώς θα είναι το επόμενο σχήμα (5<sup>ο</sup> σχήμα);

Ε: Θα προσθέσω 1 στον αριθμό 4 για να γίνουν 5 οι στήλες, αλλά πάντα κάθε σειρά έχει 2

(συνέχεια από προηγούμενη σελίδα)

«φαίνεται στην εικόνα ότι μπαίνει ένας νέος κύκλος»

E43: ανάλυση της εικόνας με τρόπο που αποκαλύπτει τον κανόνα του αναπτυσσόμενου μοτίβου

«θα προσθέσω 1 στον αριθμό 4»

E164: περιγραφή και εφαρμογή του κανόνα του μοτίβου για επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση του μοτίβου

«πρέπει ξέρω το προηγούμενο σχήμα για να προσθέσω σε αυτό»

E150: αντιμετώπιση της ακολουθίας του μοτίβου ως συνεχούς πρόσθεσης κάποιου μεγέθους στον προηγούμενο όρο για τη δημιουργία του επόμενου όρου

«και επειδή ο αριθμός του σχήματος δείχνει πόσους κύκλους θα έχει»

E25: αιτιολόγηση που βασίζεται σε γενικευμένη δήλωση

4 σειρές με δύο κυβάκια

E166: επιτυχής εύρεση όρων αναπτυσσόμενου μοτίβου με κανόνα +2

«στην εικόνα κάθε φορά μπαίνει μία νέα σειρά με κυβάκια»

E43: ανάλυση της εικόνας με τρόπο που αποκαλύπτει τον κανόνα του αναπτυσσόμενου μοτίβου

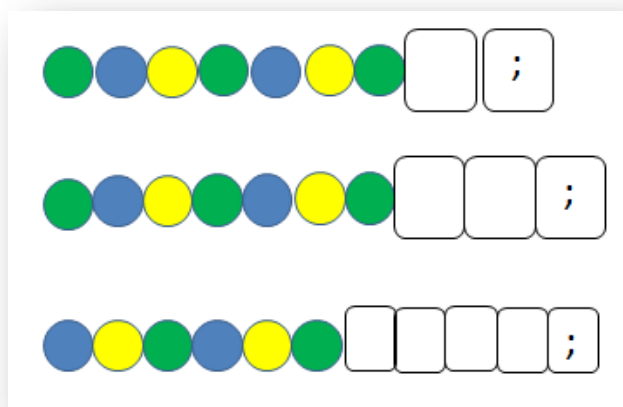
«προσθέτω 1 στον αριθμό 4 για να γίνουν 5 οι στήλες

E164: περιγραφή και εφαρμογή του κανόνα του μοτίβου για επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση του

κυβάκια. Και κάθε στήλη θα έχει πάλι 2 κυβάκια. Λ: Αν έπρεπε να βρεις το επόμενο σχήμα χρησιμοποιώντας τη λέξη κυβάκια τι θα έλεγες; Ε: Ο αριθμός με κυβάκια που έχω πριν +2.	αλλά πάντα κάθε «ο αριθμός με κυβάκια +2	μοτίβου (συνέχεια από προηγούμενη σελίδα) Ε164: περιγραφή και εφαρμογή του κανόνα του μοτίβου για επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση του μοτίβου
Λ: Πώς μπορεί κάποιος να βρει τα κυβάκια ή τις στήλες οποιουδήποτε σχήματος που δε φαίνεται στην εικόνα; Ε: Πρέπει να ξέρει τις στήλες ή τα κυβάκια του προηγούμενου σχήματος και να προσθέσει σε αυτά	«πρέπει να ξέρει τις στήλες ή τα κυβάκια του προηγούμενου σχήματος»	Ε150: αντιμετώπιση της ακολουθίας του μοτίβου ως συνεχούς πρόσθεσης κάποιου μεγέθους στον προηγούμενο όρο για τη δημιουργία του επόμενου όρου

### **Ενδεικτικά αποσπάσματα συνεντεύξεων - Μοτίβα έργο 2**

Το συγκεκριμένο έργο αποτελεί ένα έργο επέκτασης. Συγκεκριμένα, ζητήθηκε από τους μαθητές χρησιμοποιώντας χάντρες να τοποθετήσουν στη θέση που υπήρχε το ερωτηματικό τη σωστή χάντρα ώστε τα μοτίβα να είναι σωστά. Ακολούθως οι μαθητές ζωγράρισαν την απάντησή τους σε φύλλο καταγραφής. Τα τρία μοτίβα που χρησιμοποιήθηκαν σε αυτή τη δραστηριότητα ήταν της μορφής ΑΒΓ, ώστε να διαπιστωθεί εάν οι μαθητές ήταν σε θέση να εντοπίσουν οποιαδήποτε συσχέτιση μεταξύ των ερωτημάτων η οποία και θα επηρέαζε τη διαδικασία την οποία θα ακολουθούσαν οι μαθητές.



Διάγραμμα 4.5: Ενδεικτικό παράδειγμα έργου μοτίβα 2

Απομαγνητοφώνηση συνέντευξης	Ανοιχτή Κωδικοποίηση	
	Αρχικοί Κωδικοί	Κατηγοριοποίηση ετικετοποίηση κωδικών
<b><u>Άννα (Σ17)</u></b>		
Λ: Θέλω να παρατηρήσεις προσεκτικά αυτό το κολιέ και να μου ζωγραφίσεις τη χάντρα που θα πρέπει να ζωγραφίσουμε εδώ (το κουτάκι που υπάρχει το ερωτηματικό) ώστε να φτιάξουμε ένα ομοιόμορφο κολιέ. Σε αυτά τα κουτιά (τα άδεια κουτιά) μπαίνουν κάποιες άλλες χάντρες. Εμείς δε θέλουμε αυτές τις χάντρες. Μόνο αυτή που έχει αυτό το σημαδάκι.		
A: (Ξεκινά αμέσως και ζωγραφίζει μια ροζ χάντρα στο 1 <sup>ο</sup> παράδειγμα).		
Λ: Ζωγράφισες μια ροζ χάντρα;		
A: Ναι. Το ροζ είναι το αγαπημένο μου χρώμα.	«αγαπημένο χρώμα»	E165: πρόσθεση περιττών δεδομένων μέσω εκδήλωσης προτίμησης (π.χ. αγαπημένο χρώμα)
Λ: Και εδώ (επόμενο έργο) τι χρώμα χάντρας θα πρέπει να ζωγραφίσεις;		
A: Κόκκινο (απαντά αμέσως).		
Λ: Γιατί κόκκινο;		
A: Επειδή δεν έχει κόκκινο χρώμα αυτό το κολιέ και πρέπει να του βάλουμε.	«επειδή δεν έχει κόκκινο χρώμα στο κολιέ»	E4: αιτιολόγηση που βασίζεται σε άσχετα στοιχεία με το πρόβλημα/κατάσταση
Λ: Γιατί πρέπει να του βάλουμε κόκκινο;		
A: Γιατί το κολιέ της αδερφής μου έχει κόκκινη χάντρα.	«κολιέ της αδερφής μου»	E5: πρόσθεση περιττών δεδομένων μέσω απόδοσης οικείας ιστορίας/σεναρίου ή προτίμησης
Λ: Και εδώ (τελευταίο έργο) τι χρώμα χάντρας θα πρέπει να ζωγραφίσεις;		
A: Καφέ (απαντά αμέσως).		
Λ: Γιατί καφέ;		
A: Γιατί δε βάλουμε καθόλου καφέ στα κολιέ μας.	«γιατί δε βάλουμε καφέ στο κολιέ»	E4: αιτιολόγηση που βασίζεται σε άσχετα στοιχεία με το πρόβλημα/κατάσταση
Λ: Υπάρχει κάτι άλλο που παρατηρείς ε αυτή την εικόνα με τα σχήματα (αρχικό έργο);		

(συνέχεια από προηγούμενη σελίδα)

A: Ναι δεν έχω γράψει το όνομά μου. Να το γράψω.	«δεν έχω γράψει το όνομά μου»	E61: ιδιοσυγκρασιακές περιγραφές για την προβληματική κατάσταση που δεν σχετίζονται με εντοπισμό μοτίβου ή του κανόνα για τη σχέση δύο μεταβλητών
--	-------------------------------	---

#### Πίνακας 4.18

Παράδειγμα Εφαρμογής Ανοιχτής Κωδικοποίησης σε Απόσπασμα Συνέντευξης του Μαθητή «Χαράλαμπος»

Ανοιχτή Κωδικοποίηση		
Απομαγνητοφώνηση συνέντευξης	Αρχικοί κωδικοί	Κατηγοριοποίηση ετικετικοποίηση κωδικών
<b><u>Χαράλαμπος (Σ18)</u></b>		
Λ: Δες προσεκτικά αυτό το κολιέ και πες μου τι χρώμα χάντρας θα πρέπει να βάλεις ώστε να φτιάξουμε ένα ομοιόμορφο κολιέ.		
X: (παρατηρεί το μοτίβο). Πρέπει να μπει μπλε χρώμα. (ζωγραφίζει τη χάντρα).	«να μπει μπλε»	E44: ανεπιτυχής εύρεση όρων επαναλαμβανόμενου μοτίβου ABΓ
Λ: Πώς σκέφτηκες και έβαλες μπλε χρώμα;		
X: Φαίνεται στην εικόνα. Μετά το πράσινο είναι το μπλε.	«πράσινο μετά μπλε»	E45: αποσπασματική επεξεργασία της εικόνας του μοτίβου και στιγμιαία οπτική παρατήρηση της για εντοπισμό μόνο του τι βρίσκεται δίπλα από συγκεκριμένο στοιχείο και όχι της μονάδας επανάληψης
Λ: Στο κουτάκι εδώ (κουτάκι πριν το ερωτηματικό ) τι χρώμα χάντρας πρέπει να βάλεις.		
X: Εδώ δε θα μπει κάποια χάντρα.	«δεν θα μπει χάντρα»	E45: αποσπασματική επεξεργασία της εικόνας του μοτίβου και στιγμιαία οπτική παρατήρηση της για εντοπισμό μόνο του τι ακολουθεί μετά από συγκεκριμένο στοιχείο και όχι της μονάδας επανάληψης
Λ: Και εδώ (2 <sup>ο</sup> παράδειγμα);		
X: Μπλε, φαίνεται ότι μετά το πράσινο είναι μπλε!	«πράσινο μετά μπλε»	E45: αποσπασματική επεξεργασία της εικόνας του μοτίβου και στιγμιαία οπτική παρατήρηση της για εντοπισμό μόνο του τι βρίσκεται δίπλα από συγκεκριμένο στοιχείο και όχι της μονάδας επανάληψης
Λ: Στα δύο κουτάκια (δείχνω δύο κουτάκια πριν από το ερωτηματικό) δε θα βάλεις κάτι;		

(συνέχεια από προηγούμενη σελίδα)

X: Όχι δεν έχει χάντρες εδώ.	«όχι δεν έχει χάντρες εδώ»	E45: αποσπασματική επεξεργασία της εικόνας του μοτίβου και στιγμιαία οπτική παρατήρηση της για εντοπισμό μόνο του τι ακολουθεί μετά από συγκεκριμένο στοιχείο και όχι της μονάδας επανάληψης
Λ: Ωραία. Και εδώ (3 <sup>ο</sup> παράδειγμα). Τι χρώμα χάντρας θα πρέπει να μπει;		
X: Μπλε. Εδώ είναι πράσινο άρα μετά το πράσινο μπαίνει το μπλε.	«να μπει μπλε»	E44: ανεπιτυχής εύρεση όρων επαναλαμβανόμενου μοτίβου ABΓ
Λ: Εδώ δεν έβαλες άλλες χάντρες;		
X: Μα μετά το πράσινο είναι το μπλε.	«πράσινο μετά μπλε»	E45: αποσπασματική επεξεργασία της εικόνας του μοτίβου και στιγμιαία οπτική παρατήρηση της για εντοπισμό μόνο του τι ακολουθεί μετά από συγκεκριμένο στοιχείο και όχι της μονάδας επανάληψης
Λ: Ναι, αλλά είναι ακριβώς δίπλα από το πράσινο η μπλε η χάντρα;		
X: Εεε... όχι δίπλα δίπλα. Είναι μετά από το πράσινο.	«όχι δίπλα δίπλα»	E45: αποσπασματική επεξεργασία της εικόνας του μοτίβου και στιγμιαία οπτική παρατήρηση της για εντοπισμό μόνο του τι ακολουθεί μετά από συγκεκριμένο στοιχείο και όχι της μονάδας επανάληψης

#### Πίνακας 4.19

*Παράδειγμα Εφαρμογής Ανοιχτής Κωδικοποίησης σε Απόσπασμα Συνέντευξης της Μαθήτριας «Αγγέλας»*

Απομαγνητοφώνηση συνέντευξης	Ανοιχτή Κωδικοποίηση	
	Αρχικοί κωδικοί	Κατηγοριοποίηση ετικετικοποίηση κωδικών
<u><i>Αγγέλα (Σ19)</i></u> Λ: Μπορείς να μου πεις τι χρώμα χάντρας θα πρέπει να βάλουμε ώστε να φτιάξουμε ένα ομοιόμορφο κολιέ; Α: (Ξεκινά από την αρχή του μοτίβου και το παρατηρεί). Πράσινο, μπλε, κίτρινο, πράσινο, μπλε, κίτρινο, πράσινο, μπλε, κίτρινο. Πρέπει να μπει κίτρινο!	«πρέπει να μπει κίτρινο»	E47: επιτυχής εύρεση όρων επαναλαμβανόμενου μοτίβου ABΓ



Λ: Από πού το κατάλαβες ότι πρέπει να μπει κίτρινο;

Α: Επειδή είναι πράσινο, μπλε, κίτρινο, πράσινο, μπλε, κίτρινο, πράσινο, μπλε, κίτρινο.

«πράσινο, μπλε, κίτρινο, πράσινο...»

E40: αντιμετώπιση της ακολουθίας του μοτίβου ως μια διαδικασία συνεχούς λεκτικής περιγραφής για επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση μοτίβου

Λ: Ωραία. Και εδώ (2<sup>ο</sup> παράδειγμα). Τι χρώμα χάντρας θα πρέπει να μπει;

Α: Πράσινο, μπλε, κίτρινο, πράσινο, μπλε, κίτρινο, πράσινο, κίτρινο, μπλε... Έκανα λάθος να ξεκινήσω από την αρχή. Πράσινο, μπλε, κίτρινο, πράσινο, μπλε, κίτρινο, πράσινο, μπλε, κίτρινο, πράσινο, μπλε, κίτρινο, πράσινο! (ζωγραφίζει το πράσινο χρώμα).

«πράσινο, μπλε, κίτρινο, πράσινο...»

E40: αντιμετώπιση της ακολουθίας του μοτίβου ως μια διαδικασία συνεχούς λεκτικής περιγραφής για επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση μοτίβου

ζωγραφίζει πράσινο χρώμα

E47: επιτυχής εύρεση όρων επαναλαμβανόμενου μοτίβου ABΓ

Λ: Γιατί έβαλες πράσινο εδώ;

Α: Γιατί είναι πράσινο, μπλε, κίτρινο, πράσινο, μπλε, κίτρινο, πράσινο, μπλε, κίτρινο, πράσινο.

«πράσινο, μπλε, κίτρινο, πράσινο...»

E40: αντιμετώπιση της ακολουθίας του μοτίβου ως μια διαδικασία συνεχούς λεκτικής περιγραφής για επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση μοτίβου

Λ: Και εδώ (3<sup>ο</sup> παράδειγμα). Τι χρώμα θα πρέπει να βάλεις;

Α: Μπλε, κίτρινο, πράσινο, μπλε, κίτρινο, πράσινο, μπλε, κίτρινο, πράσινο, κίτρινο, πράσινο (συγχύζεται)! Θα πρέπει να μπει πράσινο.

«μπλε, κίτρινο, πράσινο»

E40: αντιμετώπιση της ακολουθίας του μοτίβου ως μια διαδικασία συνεχούς λεκτικής περιγραφής για επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση μοτίβου

Λ: Είσαι σίγουρος για την απάντησή σου;

Α: Να δω ξανά. Μπλε, κίτρινο, πράσινο, μπλε, κίτρινο, πράσινο, μπλε, κίτρινο, πράσινο, μπλε, κίτρινο. Πρέπει να μπει κίτρινο (ζωγραφίζει την κίτρινη χάντρα).

«πρέπει να μπει κίτρινο»

E47: επιτυχής εύρεση όρων επαναλαμβανόμενου μοτίβου ABΓ

Λ: Ε τώρα πώς είσαι σίγουρη ότι είναι σωστή η απάντηση

Α: Ναι είμαι σίγουρη γιατί τα είπα όλα ξανά και είναι σωστό.

«τα είπα όλα ξανά»

E18: αιτιολόγηση που βασίζεται σε απλή περιγραφή μαθηματικής διαδικασίας

Λ: Δεν υπήρχε πιο γρήγορος τρόπος να το βρεις;

Α: Όχι δε μπορώ να βρω πιο γρήγορο τρόπο.

«όχι, δε μπορώ να βρω πιο γρήγορο τρόπο»

E163: απουσία ξεκάθαρης αναφοράς του κανόνα του μοτίβου κατά την επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση του μοτίβου

Λ: Δηλαδή πόσα χρώματα είναι αυτά που επαναλαμβάνονται. Δες ξανά την εικόνα.

A: Πολλά χρώματα.	«πολλά χρώματα»	(συνέχεια από προηγούμενη σελίδα) E57: ιδιοσυγκρασιακές παρατηρήσεις της εικόνας που δεν σχετίζονται με τον εντοπισμό της μονάδας επανάληψης του επαναλαμβανόμενου μοτίβου στην εικόνα
-------------------	-----------------	---

Πίνακας 4.20

Παράδειγμα Εφαρμογής Ανοιχτής Κωδικοποίησης σε Απόσπασμα Συνέντευξης της μαθήτριας «Μαρίας»

<b>Ανοιχτή Κωδικοποίηση</b>		
<b>Απομαγνητοφώνηση συνέντευξης</b>	<b>Αρχικοί κωδικοί</b>	<b>Κατηγοριοποίηση ετικετικοποίηση κωδικών</b>
<b><u>Μαρίνα (Σ20)</u></b>		
Λ: Θέλω να παρατηρήσεις προσεκτικά το κολιέ και να μου πεις τι χρώμα χάντρας θα πρέπει να συμπληρώσουμε, ώστε να φτιάξουμε ένα ομοίωμα κολιέ.		
M: (παρατηρεί το μοτίβο και ξεκινά από την 7 <sup>η</sup> χάντρα του μοτίβου που είναι πριν από το πρώτο κουτάκι) πράσινο, μπλε, κίτρινο! Θα πρέπει να μπει κίτρινο.	«πρέπει να μπει κίτρινο»	E47: επιτυχής εύρεση όρων επαναλαμβανόμενου μοτίβου ABΓ
Λ: Γιατί κίτρινο;		
M: Γιατί κάθε φορά μπαίνουν τρία χρώματα στην εικόνα, πράσινο, μπλε, κίτρινο (δείχνει 3-3 μαζί)! Άρα και εδώ θα είναι πράσινο, μπλε, κίτρινο!	«κάθε φορά μπαίνουν 3 χρώματα στην εικόνα»	E59: εντοπισμός και αναγνώριση μονάδας επανάληψης του επαναλαμβανόμενου μοτίβου στην εικόνα
Λ: Ωραία. Είδα ότι ξεκίνησες να σκέφτεσαι από εδώ (δείχνω την 7 <sup>η</sup> χάντρα). Γιατί;		
M: Γιατί είδα ότι από εδώ αρχίζει ξανά το πράσινο, μπλε, κίτρινο Και γι' αυτό έβαλα κίτρινο.	«από εδώ αρχίζει ξανά το πράσινο, μπλε, κίτρινο»	E144: αντιμετώπιση της ακολουθίας του μοτίβου ως μια συνεχής επανεμφάνιση χωρίς τέλος της μονάδας επανάληψης
Λ: Και σε αυτό το παράδειγμα; Τι χρώμα θα πρέπει να μπει.		
M: (σκέφτεται για λίγο) είναι το ίδιο με πριν και έχει ακόμη ένα κουτάκι. Άρα αφού πριν έβαλα κίτρινο εδώ θα πρέπει να μπει πράσινο!	«είναι το ίδιο με πριν και ακόμα ένα κουτάκι»	E64: αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ δεδομένων διαφορετικών ερωτημάτων για εντοπισμό συσχετίσεων
	«πρέπει να μπει πράσινο»	E47: επιτυχής εύρεση όρων επαναλαμβανόμενου μοτίβου ABΓ

(συνέχεια από προηγούμενη σελίδα)

Λ: Και σε αυτό το παράδειγμα (δείχνω το 3<sup>ο</sup> παράδειγμα);

Μ: (σκέφτεται) και αυτό είναι το ίδιο με πριν. «ίδιο με πριν»  
Αλλά ξεκινά με μπλε χάντρα. Όμως εδώ έχει πράσινο όπως πριν! Και έχει 2 κουτάκια άλλα.  
Κάθε 3<sup>ο</sup> κουτάκι μπαίνει κίτρινο. Μετακινεί τα δάκτυλά της στα επόμενα τρία κενά κουτιά) είναι κίτρινο! Άρα πρέπει να μπει κίτρινο!

«αλλά ξεκινά με μπλε χάντρα»

«κάθε 3<sup>ο</sup> κουτάκι μπαίνει κίτρινο»

«πρέπει να μπει κίτρινο»

E64: αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ δεδομένων διαφορετικών ερωτημάτων για εντοπισμό συσχετίσεων

E64: αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ δεδομένων διαφορετικών ερωτημάτων για εντοπισμό συσχετίσεων

E164: περιγραφή και εφαρμογή του κανόνα του μοτίβου για επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση του μοτίβου

E47: επιτυχής εύρεση όρων επαναλαμβανόμενου μοτίβου ΑΒΓ

### Ενδεικτικά αποσπάσματα συνεντεύξεων - Μοτίβα έργο 3

Στο συγκεκριμένο έργο, οι μαθητές κλήθηκαν να συμπληρώσουν τους πίνακες αντιστοίχισης τιμών. Πριν ξεκινήσουν τη συμπλήρωση, έγινε ξεκάθαρος στους μαθητές ο τρόπος λειτουργίας των μηχανών. Ειπώθηκε ότι στη μηχανή μπαίνει κάποιος αριθμός. Η μηχανή αυτή κάνει κάποια «μαγικά» στους αριθμούς και δίνει ένα καινούργιο αριθμό. Στόχος των μαθητών ήταν να ανακαλύψουν ποιον αριθμό έδινε η μηχανή κάθε φορά.

0	:	0	2	+	1	2
2	3	1	3		2	4
3	:	2			3	
:	6		5			8
7	8	4	6		5	10

Διάγραμμα 4.6: Ενδεικτικό παράδειγμα έργου μοτίβα

Πίνακας 4.21

Παράδειγμα Εφαρμογής Ανοιχτής Κωδικοποίησης σε Απόσπασμα Συνέντευξης του μαθητή «Μιχάλη»

<b>Ανοιχτή Κωδικοποίηση</b>		
<b>Απομαγνητοφώνηση συνέντευξης</b>	<b>Αρχικοί Κωδικοί</b>	<b>Κατηγοριοποίηση ετικετικοποίηση κωδικών</b>
<b><u>Μιχάλης (Σ21)</u></b>		
Λ: Μιχάλη θέλω να δεις προσεκτικά τους αριθμούς που μπαίνουν στη μηχανή και τους αριθμούς που βγαίνουν από αυτή. Παρατηρείς κάτι;		
Μ: (παρατηρεί για μερικά λεπτά και απαντά) Έχει πολλούς αριθμούς.	«έχει πολλούς αριθμούς»	E61: ιδιοσυγκρασιακές περιγραφές για την προβληματική κατάσταση που δεν σχετίζονται με εντοπισμό μοτίβου ή του κανόνα για τη σχέση δύο μεταβλητών
Λ: Μπορείς να μου πεις ποιον αριθμό θα βγάλει η μηχανή εάν βάλουμε τον αριθμό 3;		
Μ: Θα βγάλει τον αριθμό 100	αναφορά τυχαίου αριθμητικού άσχετου με το παράδειγμα	E62: μη αξιοποίηση των δεδομένων του προβλήματος
Λ: Γιατί τον αριθμό 100;		
Μ: Γιατί μου τον είπε ο φίλος μου!	«γιατί αυτόν γράφει εδώ!»	E4: αιτιολόγηση που βασίζεται σε άσχετα στοιχεία με το πρόβλημα/κατάσταση
Λ: Και εδώ; Ποιον αριθμό θα βγάλει η μηχανή μας εάν βάλουμε τον αριθμό 7;		
Μ: Θα δώσει τον αριθμό 100 ξανά!		
Λ: Γιατί τον αριθμό 100 και πάλι;;		
Μ: Γιατί αυτόν είπα και πριν.	«γιατί και αυτόν είπα και πριν!»	E4: αιτιολόγηση που βασίζεται σε άσχετα στοιχεία με το πρόβλημα/κατάσταση
Λ: Θέλεις να προσπαθήσεις ξανά; Το 1 έγινε 2, το 2 έγινε 3. Παρατηρείς κάτι;		
Μ: Όχι. Δεν ξέρω να κάνω κάτι άλλο		

Πίνακας 4.22

Παράδειγμα Εφαρμογής Ανοιχτής Κωδικοποίησης σε Απόσπασμα Συνέντευξης της Μαθήτριας «Μαρίας»

Απομαγνητοφώνηση συνέντευξης	Ανοιχτή Κωδικοποίηση	
	Αρχικοί κωδικοί	Κατηγοριοποίηση ετικετικοποίηση κωδικών
<b><u>Μαρία (Σ22)</u></b>		
Λ: Μπορείς να παρατηρήσεις τη μηχανή και να μου πεις ποιον αριθμό θα πάρουμε στην έξοδο εάν στην αρχή βάλουμε τον αριθμό 3;		
Μ: (Παρατηρεί για λίγο τους αριθμούς της δεξιάς στήλης). Εδώ έχει λάθος. Να αλλάξω τους αριθμούς του πίνακα. Πρέπει να γίνει 1 (διορθώνει το 2 και το κάνει 1). 1, 2, 3, 4, 5, 6. Ήταν λάθος οι αριθμοί. Αφού πρέπει να ξεκινά από το 1(ξεκινά από το 1 και απαγγέλει τους αριθμούς μέχρι το 6). Είναι 1, 2, 3, 4, 5, 6 (σημειώνει απαντήσεις δεξιάς στήλης).	αλλάζει το 2 και το κάνει 1  ξεκινά από το 1, απαγγελία: 1, 2, 3, 4, 5, 6	Ε49: ημιτελής επεξεργασία για εντοπισμό μοτίβου ή κανόνα για τη σχέση δύο μεταβλητών  Ε159: ανάκληση και απαγγελία της ακολουθίας των αριθμών για συμπλήρωση ή επέκταση της διάταξης αριθμών χωρίς άμεσο εντοπισμό και αναφορά στη σχέση μεταξύ προηγούμενου και επόμενου αριθμού
Λ: Γιατί;	σημειώνει απαντήσεις δεξιάς στήλης	Ε48: ανεπιτυχής εύρεση όρων αριθμητικού κατακόρυφου μοτίβου με κανόνα +1
Λ: Και εδώ σε αυτά τα κουτάκι που έμειναν κενά (δείχνω αριστερή στήλη); Ποιους αριθμούς πρέπει να γράψεις;		
Μ: Και εδώ το ίδιο. Πρέπει να είναι 1, 2, 3, 4, 5, 6. Αυτό είναι λάθος (δείχνει τον αριθμό 7). Πρέπει να γίνει 6!	«πρέπει να είναι 1, 2, 3, 4, 5, 6»	Ε159: ανάκληση και απαγγελία της ακολουθίας των αριθμών για συμπλήρωση ή επέκταση της διάταξης αριθμών χωρίς άμεσο εντοπισμό και αναφορά στη σχέση μεταξύ προηγούμενου και επόμενου αριθμού
	«πρέπει να γίνει 6»	Ε49: ημιτελής επεξεργασία για εντοπισμό μοτίβου ή κανόνα για τη σχέση δύο μεταβλητών
Λ: (δείχνω ξανά τον αρχικό πίνακα στη μαθήτρια). Για δεξ εδó το 1 έγινε 2 (δείχνω τον αριθμό εισόδου και δίπλα τον αριθμό εξόδου σε οριζόντια διάταξη). Το 2 έγινε 3 (δείχνω τον αριθμό εισόδου και δίπλα τον αριθμό εξόδου). Τι γίνεται κάθε φορά;		

(συνέχεια από προηγούμενη σελίδα)

M: (δείχνει μόνο κατακόρυφα τους αριθμούς της αριστερής στήλης 1, 2, 3). Δεν ξέρω πώς το 3 έγινε 4. Είναι όπως είπα πριν. Όπως μετρώ 1, 2, 3, 4. Είχε λάθος, το διόρθωσα.

δείχνει μόνο κατακόρυφα 1, 2, 3

E49: ημιτελής επεξεργασία για εντοπισμό μοτίβου ή κανόνα για τη σχέση δύο μεταβλητών

#### Πίνακας 4.23

Παράδειγμα Εφαρμογής Ανοιχτής Κωδικοποίησης σε Απόσπασμα Συνέντευξης της μαθήτριας «Κατερίνας»

Ανοιχτή Κωδικοποίηση		
Απομαγνητοφώνηση συνέντευξης	Αρχικοί κωδικοί	Κατηγοριοποίηση ετικετικοποίηση κωδικών
<b><u>Κατερίνα (Σ23)</u></b>		
Λ: Μπορείς να μου πεις ποιον αριθμό θα δώσει η μηχανή στην έξοδο εάν βάλουμε μέσα τον αριθμό 3;		
Κ: Θα δώσει τον αριθμό 4!	«θα δώσει τον αριθμό 4»	E50: επιτυχής εύρεση των τιμών των δύο μεταβλητών με κανόνα +1
Λ: Μπορείς να μου εξηγήσεις πώς σκέφτηκες ότι θα δώσει τον αριθμό 4;		
Κ: Επειδή μετά τον αριθμό 3 είναι ο αριθμός 4.	«μετά το 3 είναι το 4»	E39: άμεση αναφορά στη διάταξη δύο οποιονδήποτε διαδοχικών αριθμών
Λ: Ωραία, και αν μας έδωσε τον αριθμό 6, ποιον αριθμό βάλουμε στην αρχή στη μηχανή;		
Κ: Βάλουμε τον αριθμό 5. Γιατί πριν από τον αριθμό 6 είναι ο αριθμός 5!	«βάλουμε τον αριθμό 5»	E50: επιτυχής εύρεση των τιμών των δύο μεταβλητών με κανόνα +1
	«πριν από το 6 είναι το 5»	E39: άμεση αναφορά στη διάταξη δύο οποιονδήποτε διαδοχικών αριθμών
Λ: Και αν βάλουμε τον αριθμό 7;		
Κ: Μας έδωσε τον αριθμό 8!	«έδωσε τον αριθμό 8»	E50: επιτυχής εύρεση των τιμών των δύο μεταβλητών με κανόνα +1
Λ: Γιατί;		
Κ: Επειδή μετά το 7 είναι το 8.	«μετά το 7 είναι το 8»	E39: άμεση αναφορά στη διάταξη δύο οποιονδήποτε διαδοχικών αριθμών
Λ: Μπορείς να μου πεις τι παθαίνουν κάθε φορά οι αριθμοί που μπαίνουν στην μηχανή και βγαίνουν από την έξοδο;		

(συνέχεια από προηγούμενη σελίδα)

Κ: (σκέφτεται λίγο). Κάθε φορά τα λέω με σειρά (απαγγέλει) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Σκεφτόμουν τι είναι μετά.

«τα λέω με σειρά, σκέφτομαι τι είναι μετά»

E40: αντιμετώπιση της ακολουθίας του μοτίβου ως μια διαδικασία συνεχούς λεκτικής περιγραφής για επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση μοτίβου

απαγγέλει 1, 2, 3,...8

E159: ανάκληση και απαγγελία της ακολουθίας των αριθμών για συμπλήρωση ή επέκταση της διάταξης αριθμών χωρίς άμεσο εντοπισμό και αναφορά στη σχέση μεταξύ προηγούμενου και επόμενου αριθμού

Α: Πολύ καλά Κατερίνα. Τώρα, θέλω να κοιτάξεις τη δεύτερη μηχανή. Η μηχανή αυτή είναι διαφορετική κάνει κάποια άλλα μαγικά στους αριθμούς σε σχέση με την προηγούμενη μηχανή (προσθέτει ακόμη 2 στους αριθμούς εισόδου). Θέλω να την κοιτάξεις καλά και να μου πεις ποιον αριθμό

θα μας δώσει εάν στη μηχανή βάλουμε τον αριθμό 3;

Κ: Θα μας δώσει τον αριθμό 4.

«θα δώσει τον αριθμό 4»

E51: ανεπιτυχής εύρεση των τιμών των δύο μεταβλητών με κανόνα +2

Α: Γιατί θα δώσει τον αριθμό 4;

Κ: Γιατί μετά τον αριθμό 3 είναι ο αριθμός 4.

Α: Γενικά, μπορείς να μου πεις τι παθαίνουν οι αριθμοί που βάζουμε στην είσοδο και τελικά βγαίνουν οι αριθμοί που παίρνουμε στην έξοδο;

Κ: Ναι πάμε παρακάτω στη σειρά που λέμε τους αριθμούς.

«πάμε παρακάτω στη σειρά των αριθμών»

E163: απουσία ξεκάθαρης αναφοράς του κανόνα του μοτίβου κατά την επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση του μοτίβου

Πίνακας 4.24

Παράδειγμα Εφαρμογής Ανοιχτής Κωδικοποίησης σε Απόσπασμα Συνέντευξης του Μαθητή «Μιλτιάδη»

#### Ανοιχτή Κωδικοποίηση

Απομαγνητοφώνηση συνέντευξης

Αρχικοί  
κωδικοί

Κατηγοριοποίηση ετικετικοποίηση  
κωδικών

#### Μιλτιάδης (Σ24)

Α: Θέλω να δεις τη μηχανή και να μου πεις ποιον αριθμό θα δώσει στην έξοδό της, εάν στην αρχή βάλουμε τον αριθμό 3.

(συνέχεια από προηγούμενη σελίδα)

M: Θα μας δώσει ένα μεγαλύτερο αριθμό από τον 3. Θα μας δώσει τον αριθμό 4.	4 μεγαλύτερο από 3 «αριθμός 4»	E23: σύγκριση αριθμών χωρίς οπτική αναπαράσταση E50: επιτυχής εύρεση των αντίστοιχων τιμών δύο μεταβλητών με κανόνα +1
Λ: Γιατί θα μας δώσει τον αριθμό 4; M: Επειδή ξέρω ότι 3 και 1 κάνουν 4.	«επειδή ξέρω ότι 3 και 1 κάνουν 4»	E31: ανάκληση γνωστού αποτελέσματος
Λ: Εξήγησε μου λίγο πώς δουλεύει η μηχανή αυτή. Δηλαδή τι γίνεται στους αριθμούς που βάζουμε στην είσοδο και παίρνουμε αυτούς τους αριθμούς στην έξοδο; M: Ο αριθμός που μπαίνει στη μηχανή και 1 μου δίνει τον αριθμό που βγαίνει.	«ο αριθμός που μπαίνει στη μηχανή και 1, μου δίνει τον αριθμό που βγαίνει»	E164: περιγραφή και εφαρμογή του κανόνα του μοτίβου για επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση του μοτίβου
Λ: Πολύ καλά Μιλτιάδη. Και αν μας έδωσε τον αριθμό 6 στην έξοδο, ποιον αριθμό της βάλουμε στην αρχή; M: Βάλουμε τον αριθμό 5. Αφού ξέρω ότι 5 και 1 κάνει 6.	«ο αριθμός 5» «ξέρω ότι 5 και 1 κάνει 6»	E50: επιτυχής εύρεση των αντίστοιχων τιμών δύο μεταβλητών με κανόνα +1 E31: ανάκληση γνωστού αποτελέσματος
Λ: Και αν του βάλουμε τον αριθμό 7 στην αρχή ποιον αριθμό θα μας βγάλει; M: Θα μας βγάλει τον αριθμό 8 γιατί αν δώσει ένα στον αριθμό 7 θα μας δώσει τον αριθμό 8.	«αριθμός 8»	E53: επιτυχής εύρεση των αντίστοιχων τιμών δύο μεταβλητών με κανόνα +2
Λ: Πολύ καλά. Τώρα θέλω να δεις αυτή τη μηχανή. Αυτή η μηχανή δουλεύει με διαφορετικό τρόπο από ότι η πρώτη μηχανή και αλλάζει τους αριθμούς με διαφορετικό τρόπο από ότι η μηχανή που είδαμε τώρα (διπλασιάζει τους αριθμούς). Θέλω να την προσέξεις πολύ καλά τις δύο πρώτες γραμμές του πίνακα και να μου πεις τι παθαίνουν οι αριθμοί που παίρνουμε στην έξοδο; Του βάλουμε τον αριθμό 3. M: ... (σκέφτεται λίγο). Αυτή η μηχανή δίνει στους αριθμούς τον ίδιο αριθμό με αυτούς. Στον αριθμό 1 έδωσε ακόμη 1 και έγινε 2. Αφού 1 και 1 κάνουν 2 Έεε 2 και 2 κάνουν 4	«1 και 1 κάνουν 2» «2 και 2 κάνουν 4»	E31: ανάκληση γνωστού αποτελέσματος E31: ανάκληση γνωστού αποτελέσματος



(συνέχεια από προηγούμενη σελίδα)

Λ: Μπράβο Μιλτιάδη. Τώρα αν μπει ο αριθμός 3 στην είσοδο ποιος αριθμός θα βγει στην έξοδο;

Μ: (σκέφτεται για λίγο). Πρέπει να είναι 3 και 3 (σκέφτεται)

Λ: Δυσκολεύεσε;

Μ: Λίγο. 3 και 1 κάνουν 4. 4 και ακόμη 1 και ακόμη 1 κάνουν 6. Το βρήκα κάνουν 6.

Λ: Και εδώ που μας έδωσε τον αριθμό 8; Ποιον αριθμό βάλαμε στην αρχή;

Μ: Βάλαμε τον αριθμό 4. Αφού 4 και 4 κάνουν 8.

3 και 1 κάνουν 4  
→ 4 και 1 και 1  
κάνουν 6

E54: χρήση γνωστών αποτελεσμάτων για εξαγωγή άλλων αποτελεσμάτων

«αριθμό 4»

E60: επιτυχής εύρεση των αντίστοιχων τιμών δύο μεταβλητών με πολλαπλασιαστική δομή

«4 και 4 κάνουν 8»

E31: ανάκληση γνωστού αποτελέσματος

### **Δημιουργία κατηγοριών**

Οι κωδικοί γεγονότων/περιστατικών που προέκυψαν μέσα από την εφαρμογή της ανοιχτής κωδικοποίησης και που αφορούν συνολικά όλα τα μαθηματικά έργα που χορηγήθηκαν, παρουσιάζονται στον Πίνακα Β1 στο Παράρτημα Β. Συγκεντρωτικά, ο Πίνακας Β1 παρουσιάζει τους κωδικούς που προέκυψαν από όλους τους μαθητές και όλα τα έργα. Στη συνέχεια, ακολουθεί επεξήγηση του τρόπου με τον οποίο κάθε ετικέτα, η οποία έχει προκύψει από το πρώτο στάδιο της ανοιχτής κωδικοποίησης, εντάχθηκε σε μία ευρύτερη κατηγορία.

Μετά την εφαρμογή της ετικετικοποίησης, πραγματοποιήθηκε σύγκριση και αντιπαραβολή των ετικετών των κωδικών που αναφέρθηκαν και ομαδοποιήθηκαν περαιτέρω σε ένα πιο ψηλό και αφηρημένο επίπεδο, γνωστό ως κατηγορίες. Πιο συγκεκριμένα προέκυψαν οι ακόλουθες ευρύτερες κατηγορίες: *Ικανότητα διαχείρισης και ερμηνείας δεδομένων προβλήματος*, *Ικανότητα επεξεργασίας και χρήσης αναπαραστάσεων (εικονικές αναπαραστάσεις, εποπτικά μέσα)*, *Ικανότητα χρήσης μαθηματικών διαδικασιών*, *Ικανότητα παροχής αιτιολογήσεων*, *Ικανότητα έκφρασης με ακρίβεια* και *Συνολικά επιτεύγματα*. Πιο κάτω ακολουθεί παρουσίαση και επεξήγηση των κατηγοριών που προέκυψαν. Σε διάφορα σημεία γίνεται επεξήγηση μερικών κωδικών για περαιτέρω διασαφήνισή τους.

Η πρώτη κατηγορία, η κατηγορία *Ικανότητα διαχείρισης και ερμηνείας δεδομένων προβλήματος* αναφέρεται στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές της έρευνας, διαχειρίζονταν ή/και επεξεργάζονταν τα δεδομένα του προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα η κατηγορία αυτή διακρίνεται σε δύο ιδιότητες: τον *Αναστοχασμό δεδομένων προβλήματος* και την *Ερμηνεία δεδομένων προβλήματος*. Οι κωδικοί E64 και E21 εντάσσονται στην ιδιότητα *Αναστοχασμός δεδομένων προβλήματος* ενώ οι κωδικοί E16, E8, E5, E165, E62 και E26 εντάσσονται στην ιδιότητα *Ερμηνεία δεδομένων προβλήματος*. Ενδεικτικό παράδειγμα όσον αφορά τον κωδικό E64, παρουσιάζεται στα αποσπάσματα συνεντεύξεων πιο πάνω (Σ8\_Αλέξανδρος), όπως και για τον κωδικό E16 (Σ11\_Κώστας). Οι κωδικοί που συνθέτουν την κατηγορία *Ικανότητα διαχείρισης και ερμηνείας δεδομένων* παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.25.

Πίνακας 4.25

*Κωδικοί που Συνθέτουν την Κατηγορία Ικανότητα Διαχείρισης και Ερμηνείας Δεδομένων Προβλήματος*

Μαθηματικά έργα στα οποία εμφανίζεται ο συγκεκριμένος κωδικός	Κωδικοί που συνθέτουν την κατηγορία ικανότητα διαχείρισης και ερμηνείας δεδομένων προβλήματος
Αρ.2, Αρ.7, Αρ.8, Α3	E64: αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ δεδομένων διαφορετικών ερωτημάτων για εντοπισμό συσχετίσεων
Αρ.5, Αρ.6, Αρ.10, Αρ.17, Αρ.18, Αρ.19, Αρ.20, Α5, Α6, Α7	E21: αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ δεδομένων του ερωτήματος για εντοπισμό συσχετίσεων
Αρ.6, Αρ.8, Αρ.10, Αρ.17, Αρ.18, Αρ.19, Αρ.20, Α5	E16: αξιοποίηση όλων των δεδομένων του προβλήματος χωρίς περαιτέρω εντοπισμό συσχετίσεων μεταξύ τους
Αρ.6, Αρ.10, Αρ.17, Αρ.18, Αρ.19, Αρ.20, Α5	E8: αξιοποίηση ενός ή μόνο μερικών δεδομένων του προβλήματος
Αρ.6, Αρ.7, Αρ.8, Αρ.9, Αρ.19, Α1, Α2, Α3, Α4, Α5, Α6, Α7	E5: πρόσθεση περιττών δεδομένων μέσω απόδοσης οικείας ιστορίας/σεναρίου
Αρ.6, Αρ.7, Αρ.8, Αρ.9, Αρ.19, Α1, Α2, Α3, Α4, Α5, Α6, Α7	E165: πρόσθεση περιττών δεδομένων μέσω εκδήλωσης προτίμησης (π.χ αγαπημένο χρώμα)
Αρ.5, Αρ.6, Αρ.9, Αρ.10, Αρ.13, Αρ.14, Αρ.15, Αρ.17, Αρ.18, Αρ.19, Αρ.20, Αρ.21, Α7	E62: μη αξιοποίηση των δεδομένων του προβλήματος
Αρ.7, Αρ.8, Αρ.9, Αρ.10, Αρ.18	E26: επανάληψη του δοσμένου αριθμού από τα δεδομένα, ως απάντηση

Η δεύτερη κατηγορία *Ικανότητα επεξεργασίας και χρήσης αναπαραστάσεων* (εικονικές αναπαραστάσεις, εποπτικά μέσα) διακρίνεται σε δύο ιδιότητες. Πιο συγκεκριμένα η πρώτη ιδιότητα αφορά στην ικανότητα των μαθητών να *χειρίζονται δοσμένες αναπαραστάσεις*, να χρησιμοποιούν, να μετασχηματίζουν, να επεξεργάζονται και να αξιοποιούν το εργαλείο/εποπτικά μέσα (κύβοι, καρτέλες, πραγματικά αντικείμενα), την εικόνα ή το μοντέλο (αριθμητική γραμμή, πλέγμα αριθμών) που τους δόθηκε ώστε να βρίσκουν απαντήσεις. Αντίστοιχα η δεύτερη ιδιότητα αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών να *δημιουργούν αναπαραστάσεις* (εξωτερικές εικονικές αναπαραστάσεις, νοερές αναπαραστάσεις). Αξίζει να σημειωθεί ότι οι συγκεκριμένες αναπαραστάσεις, δε δόθηκαν έτοιμες στους μαθητές, αλλά δημιουργήθηκαν από τους ίδιους τους μαθητές λαμβάνοντας υπόψη τις πληροφορίες που δίνονταν σε κάθε έργο.

Όπως μπορεί να διαφανεί μέσα από τον Πίνακα 4.26, οι κωδικοί E81, E92, E141, E59, E43, E91, E10, E140, E57, E145, E45, E41, E3, E20, E14, E1, E13, E116, E123, E126, E114, E115, E121, E122, E113, E120 αφορούν στην ικανότητα των μαθητών να χειρίζονται τις δοσμένες εικονικές αναπαραστάσεις, εργαλεία/εποπτικά μέσα ή μοντέλα. Ο κωδικός E59, ο οποίος αναφέρεται σε εντοπισμό της μονάδας επανάληψης του επαναλαμβανόμενου μοτίβου στην εικονική αναπαράσταση, αφορά καθαρά στις περιπτώσεις όπου οι μαθητές υποδείκνυαν ξεκάθαρα με κάποιο τρόπο (με το δάχτυλο, ή σημειώνοντας) τη μονάδα επανάληψης στην εικόνα του επαναλαμβανόμενου μοτίβου. Αντίστοιχα, ο κωδικός E3, ο οποίος αναφέρεται στην εστίαση των μαθητών της έρευνας σε εξωτερικά χαρακτηριστικά της εικόνας, αναφέρεται στις περιπτώσεις όπου οι μαθητές εστίαζαν σε λεπτομέρειες (π.χ. χρώμα) της δοσμένης εικονικής αναπαράστασης και στις περιπτώσεις όπου οι μαθητές δημιουργούσαν εικόνα με λεπτομέρεια (π.χ. χρώμα), χωρίς αυτό να διαδραματίζει οποιοδήποτε ρόλο στην επίλυση του έργου. Ενδεικτικό παράδειγμα του συγκεκριμένου κωδικού E3, παρουσιάζεται στα αποσπάσματα συνεντεύξεων (Σ1\_Μάρκος).

Επιπρόσθετα, οι κωδικοί E176, E87, E76, E32, E105, E27, E82, E102, E101, E168, E104 και E167 αναφέρονται στην ικανότητα των μαθητών να *δημιουργούν αναπαραστάσεις*. Ενδεικτικό παράδειγμα του κωδικού E27 παρουσιάζεται στα αποσπάσματα συνεντεύξεων που παρουσιάστηκαν πιο πάνω (Σ7\_Κυριάκος).

Πίνακας 4.26

Κωδικοί που Συνθέτουν την Κατηγορία Ικανότητα Επεξεργασίας και Χρήσης Αναπαραστάσεων

Μαθηματικά έργα στα οποία εμφανίζεται ο συγκεκριμένος κωδικός	Κωδικοί που συνθέτουν την κατηγορία ικανότητα επεξεργασίας και χρήσης αναπαραστάσεων
Αρ.1	E81: ιδιοσυγκρασιακή δημιουργία εικονικής αναπαράστασης χωρίς απόδοση καταστάσεων πρόσθεσης/αφαίρεσης
Αρ.3, Αρ.4, Αρ.5	E92: άμεση αναγνώριση συνόλου μέχρι 6 αντικείμενα και επανεντοπισμός των συγκεκριμένων διατάξεων σε εικονικές αναπαραστάσεις που εμπλέκουν μεγαλύτερα σύνολα
Αρ.21	E141: εκτίμηση πλήθους στοιχείων ζητούμενου συνόλου, μέσω ανάλυσης της εικόνας για εντοπισμό του αριθμού των φορών που το δοσμένο σύνολο αναφοράς εμφανίζεται στο ζητούμενο σύνολο
A1, A3, A4, A7	E59: εντοπισμός και αναγνώριση στην εικονική αναπαράσταση της μονάδας επανάληψης του επαναλαμβανόμενου μοτίβου
A5, A6	E43: ανάλυση της εικόνας με τρόπο που αποκαλύπτει τον κανόνα του αναπτυσσόμενου μοτίβου
Αρ.3, Αρ.4	E91: άμεση αναγνώριση συνόλου μέχρι 3 αντικείμενα σε εικονική αναπαράσταση χωρίς δυνατότητα άμεσου επανεντοπισμού των συγκεκριμένων διατάξεων σε εικονικές αναπαραστάσεις που εμπλέκουν μεγαλύτερα σύνολα
Αρ.6, A5, A6	E10: σύγκριση ποσοτήτων μόνο μέσα από οπτική παρατήρηση των διακριτών στοιχείων δύο συνόλων με ξεκάθαρη διαφορά στο πλήθος
Αρ.21	E140:προσκόλληση και ανάγκη εντοπισμού στην εικόνα του αριθμού μη-απόλυτα διακριτών στοιχείων για την εκτίμηση πλήθους στοιχείων συνόλου
A1, A2, A3, A4, A7	E57: ιδιοσυγκρασιακές παρατηρήσεις της εικόνας που δεν σχετίζονται με τον εντοπισμό της μονάδας επανάληψης του επαναλαμβανόμενου μοτίβου στην εικόνα
A5, A6	E145: αποσπασματική επεξεργασία της εικόνας του μοτίβου και στιγμιαία οπτική παρατήρηση της, για εντοπισμό μόνο της κατεύθυνσης μεταβολής και όχι και του μεγέθους της μεταβολής
A1, A2, A3, A4, A7	E45: αποσπασματική επεξεργασία της εικόνας του μοτίβου και στιγμιαία οπτική παρατήρηση της για εντοπισμό μόνο του τι βρίσκεται δίπλα από συγκεκριμένο στοιχείο και όχι της μονάδας επανάληψης
A5, A6	E41: ιδιοσυγκρασιακές παρατηρήσεις της εικόνας που δεν σχετίζονται με την αποκάλυψη του κανόνα του αναπτυσσόμενου μοτίβου στην εικόνα
Αρ.6, Αρ.7, Αρ.11, Αρ.12, Αρ.16, Αρ.20, Α8	E3: εστίαση της προσοχής σε εξωτερικά χαρακτηριστικά της εικόνας/εργαλείου (π.χ χρώμα, σχήμα, μέγεθος) που δεν σχετίζονται με την επίλυση του έργου
Αρ.5, Αρ.6, Αρ.10, Αρ.20	E20: μετασχηματισμός της οργάνωσης των κομματιών του εργαλείου που εμπλέκει την πληθικότητα αρχίζοντας από τη δημιουργία ομάδων με ίσο αριθμό στοιχείων
Αρ.5, Αρ.6, Αρ.10, Αρ.18, Αρ.20	E14: τυπική χρήση εργαλείου που εμπλέκει την πληθικότητα μόνο με συγκεκριμένο τρόπο για εύρεση της απάντησης μέσω μέτρησης όλων των στοιχείων
Αρ.5, Αρ.6, Αρ.10, Αρ.18	E1: ιδιοσυγκρασιακή χρήση εργαλείου που εμπλέκει την πληθικότητα για δικούς τους σκοπούς (π.χ. παιχνίδι) και όχι για την επίλυση προβλήματος
Αρ.5, Αρ.6, Αρ.10, Αρ.18	E13: χρήση του εργαλείου που εμπλέκει την πληθικότητα με τρόπο που οι αρχικές ενέργειες υποδεικνυαν σωστή χρήση αλλά στη συνέχεια παρουσιαζόταν αδυναμία ορθής χρήσης και χειρισμού του υλικού

Αρ.11, Αρ.12	E116: καθολική επεξεργασία της αριθμητικής γραμμής συσχετίζοντας οποιουδήποτε αριθμούς πάνω σε αυτή
Αρ.14, Αρ.15	E123: καθολική επεξεργασία του πλέγματος ως προς διαφορετικές διαστάσεις
Αρ.14, Αρ.15	E126: εστίαση και εντοπισμός διαφόρων σχέσεων κατακόρυφα και οριζόντια που υποβόσκουν μεταξύ οποιονδήποτε αριθμών στο πλέγμα των αριθμών
Αρ.14, Αρ.15	E114: προσκόλληση και ανάγκη αναφοράς όλων των αριθμών για εντοπισμό των ζητούμενων αριθμών στην αριθμητική γραμμή
Αρ.11, Αρ.12	E115: εστίαση κάθε φορά σε δοσμένο αριθμό της αριθμητικής γραμμής, για άμεση συσχέτισή του με τον προηγούμενο ή τον επόμενο του
Αρ.14, Αρ.15	E121: ανάγκη αναφοράς όλων των αριθμών για εντοπισμό των ζητούμενων αριθμών σε πλέγματα αριθμών
Αρ.14, Αρ.15	E122: εστίαση κάθε φορά στο σημείο του ζητούμενου αριθμού για άμεση συσχέτιση με τον επόμενο ή τον προηγούμενο σε πλέγματα αριθμών
Αρ.11, Αρ.12	E113: ιδιοσυγκρασιακή χρήση αριθμητικής γραμμής χωρίς καμία ερμηνεία
Αρ.14, Αρ.15	E120: ιδιοσυγκρασιακή χρήση πλέγματος αριθμών χωρίς καμία ερμηνεία
Αρ.1	E176: απόδοση καταστάσεων πρόσθεσης και αφαίρεσης σε εικονική αναπαράσταση με ερμηνεία των καταστάσεων που αναπαρίστανται με διαφορετικούς τρόπους μέσω της ανάλυσης και σύνθεσης κουκκίδων (δημιουργία)
Αρ.1	E87: απόδοση καταστάσεων πρόσθεσης σε εικονική αναπαράσταση με μοναδική ερμηνεία της κατάστασης που αναπαρίσταται την επεξεργασία των κουκκίδων μία προς μία (δημιουργία)
Αρ.1	E76: απόδοση καταστάσεων πρόσθεσης και αφαίρεσης σε εικονική αναπαράσταση με μοναδική ερμηνεία των καταστάσεων που αναπαρίστανται την επεξεργασία των κουκκίδων μία προς μία (δημιουργία)
Αρ.7, Αρ.8	E32: νοερή απεικόνιση της κατάστασης του προβλήματος που υποδεικνύει ομαδοποίηση/οργάνωση των στοιχείων που εμπλέκονται (δημιουργία)
Αρ.9	E105: νοερή απεικόνιση της κατάστασης του προβλήματος που υποδεικνύει ευέλικτες διατάξεις των αριθμητικών ποσοτήτων για εύρεση δύο άγνωστων συγκρινόμενων συνόλων (δημιουργία)
Αρ.7, Αρ.8	E27: δημιουργία κατάλληλης εικονικής αναπαράστασης με συγκεκριμένο τρόπο για εύρεση απάντησης χωρίς δυνατότητα ερμηνείας/ανάλυσης της εικόνας με διαφορετικό τρόπο (δημιουργία)
Αρ.1	E82: προσπάθεια απόδοσης καταστάσεων αφαίρεσης στην εικονική αναπαράσταση με μοναδικό/συγκεκριμένο τρόπο χωρίς το τελικό σύνολο να αντιστοιχεί στο ζητούμενο καθορισμένο αποτέλεσμα (δημιουργία)
Αρ.9	E102: προσπάθεια δημιουργίας εικονικής αναπαράστασης δύο άγνωστων συνόλων με δοσμένη διαφορά, που κατέληγε πάντα σε απεικόνιση όπου το πλήθος της ζητούμενης διαφοράς συγγεόταν με το πλήθος των στοιχείων του ενός συνόλου (δημιουργία)
Αρ.9	E101: ιδιοσυγκρασιακή δημιουργία εικονικής αναπαράστασης του προβλήματος για σύγκριση δύο άγνωστων συνόλων (δημιουργία)
Αρ.8	E168: προσπάθεια δημιουργίας εικονικής αναπαράστασης για τη σχέση του αριθμού των στοιχείων δύο ποσοτήτων, η οποία κατέληγε πάντα σε απεικόνιση ίσου αριθμού στοιχείων των δύο ποσοτήτων αντί της σχέσης τους (δημιουργία)
Αρ.9	E104: δημιουργία εικονικής αναπαράστασης για εύρεση των δύο άγνωστων συγκρινόμενων συνόλων μέσα από δοκιμές χωρίς επεξεργασία/αξιοποίηση της προηγούμενης αναπαράστασης που δημιουργούσαν (δημιουργία)
Αρ.8	E167: ιδιοσυγκρασιακή δημιουργία εικονικής αναπαράστασης του προβλήματος για αντιστοίχιση στοιχείων (δημιουργία)

Η επόμενη κατηγορία, αφορά στην *Ικανότητα χρήσης μαθηματικών διαδικασιών/στρατηγικών* που εφάρμοζαν οι μαθητές, ώστε να επιλύσουν τα μαθηματικά έργα που τους δόθηκαν. Οι διαδικασίες αυτές διακρίνονται σε δύο ιδιότητες: αριθμητικές διαδικασίες και αλγεβρικές διαδικασίες. Οι αριθμητικές διαδικασίες αναφέρονται στις διαδικασίες που υιοθετούσαν οι μαθητές κατά την επίλυση έργων που σχετίζονται με την ενότητα περιεχομένου Αριθμοί, ενώ οι αλγεβρικές διαδικασίες αφορούν διαδικασίες που χρησιμοποίησαν οι μαθητές στα έργα που σχετίζονται με την ενότητα περιεχομένου της Άλγεβρας και πιο συγκεκριμένα στα Μοτίβα. Οι κωδικοί E54, E97 και E31 αφορούν νοερές διαδικασίες/στρατηγικές πρόσθεσης και αφαίρεσης. Αντίστοιχα οι κωδικοί E119, E15, E33, E83, E84, E85, E134, E7 και E90 αναφέρονται σε διαδικασίες αρίθμησης και απαρίθμησης ενώ οι κωδικοί E23, E9, E110, E129, E127, E128, E39, E159, E161, E171, E177, E65 και E160 αναφέρονται σε διαδικασίες που χρησιμοποιούσαν οι μαθητές κατά την ενασχόλησή τους με έργα σύγκρισης και διάταξης αριθμών. Επιπρόσθετα, οι κωδικοί E172, E173, E174 και E175 αναφέρονται στις διαδικασίες των μαθητών κατά την ενασχόλησή τους με έργα που προϋπόθεταν τη δημιουργία συγκεκριμένου αθροίσματος μέσα από εύρεση περισσότερων από δύο άγνωστων προσθετέων, ενώ οι κωδικοί E58 και E106 αναφέρονται στις διαδικασίες που χρησιμοποιούσαν οι μαθητές για τον εντοπισμό πολλαπλών απαντήσεων σε έργα που είτε απαιτούσαν είτε δεν απαιτούσαν περισσότερες από μία λύσεις. Οι κωδικοί E12, E29, E94, E95 και E169 αναφέρονται σε διαδικασίες που υιοθετούσαν οι μαθητές σε έργα που ενέπλεκαν την έννοια της αντιστοίχισης, ενώ οι κωδικοί E136 και E138 αφορούν στις διαδικασίες που υιοθετούσαν οι μαθητές σε έργα εκτίμησης.

Οι κωδικοί E86, E144, E150, E164, E40, E163, E49, E61, E155 και E170 αναφέρονται στις διαδικασίες που χρησιμοποίησαν οι μαθητές ώστε να επιλύσουν τα μαθηματικά έργα που ενέπλεκαν την έννοια του μοτίβου. Πιο συγκεκριμένα, οι κωδικοί E144 και E150 υποδεικνύουν τη ξεκάθαρη αντίληψη που επέδειξαν μερικοί μαθητές της έρευνας, για την έννοια του μοτίβου ως μια διαδικασία χωρίς τέλος. Ενδεικτικά παραδείγματα των συγκεκριμένων κωδικών E144 και E150 παρουσιάζονται στα αποσπάσματα συνεντεύξεων που έχουν παρουσιαστεί στο πρώτο μέρος της ανοιχτής κωδικοποίησης. Συγκεκριμένα όσον αφορά τον κωδικό E144 ενδεικτικό παράδειγμα προκύπτει από την εικοστή συνέντευξη (Σ20\_Μαρίνα) όπου η συγκεκριμένη μαθήτρια ανέφερε τη χαρακτηριστική φράση «από εδώ αρχίζει ξανά το πράσινο, μπλε, κίτρινο», ενώ όσον αφορά τον κωδικό E50 ενδεικτικό παράδειγμα προκύπτει από τη δέκατη έκτη συνέντευξη (Σ16\_Ελευθέριος) όπου ο μαθητής, θέλοντας να τονίσει την αντιμετώπιση του

αναπτυσσόμενου μοτίβου που του δόθηκε, ως μία διαδικασία χωρίς τέλος, ανέφερε τη χαρακτηριστική φράση «πρέπει ξέρω το προηγούμενο σχήμα για να προσθέσω σε αυτό».

Αντίστοιχα, ο κωδικός E163 αφορά στην αδυναμία των μαθητών της εργασίας να περιγράψουν και να αναφέρουν ξεκάθαρα με λόγια τον κανόνα του μοτίβου. Ενδεικτικό παράδειγμα όπως προκύπτει μέσα από τα αποσπάσματα των πιο πάνω συνεντεύξεων είναι και η συνέντευξη 23 (Σ23\_Κωνσταντίνος) όπου ο μαθητής χρησιμοποίησε τη φράση «πάμε παρακάτω στη σειρά των αριθμών» χωρίς ωστόσο να είναι σε θέση να δηλώσει ξεκάθαρα τον κανόνα του μοτίβου που παρουσιάστηκε στις μηχανές. Αντίθετα, ο κωδικός E164 αφορά στην ικανότητα των μαθητών της εργασίας να περιγράψουν λεκτικά τον κανόνα του μοτίβου. Ενδεικτικό παράδειγμα από τα αποσπάσματα των συνεντεύξεων προκύπτει μέσα από τη συνέντευξη 24 (Σ24\_Μιλτιάδης) όπου ο μαθητής χρησιμοποιώντας τη φράση: «ο αριθμός που μπαίνει στη μηχανή και 1, μου δίνει τον αριθμό που βγαίνει» ήταν σε θέση να περιγράψει με ξεκάθαρο τρόπο τον κανόνα του μοτίβου που παρουσιάστηκε στις μηχανές.

Επιπρόσθετα, οι κωδικοί E56, E108, E162, E55 και E107 αναφέρονται στη χρήση της στρατηγικής δοκιμής και ελέγχου. Ο κωδικός E109 αφορά τις διαδικασίες σύνθεσης και ανάλυσης αριθμού που υιοθετούσαν οι μαθητές, ενώ οι κωδικοί E22 και E35 αφορούν την έννοια της ισότητας και την αντιμεταθετική ιδιότητα αντίστοιχα. Τέλος ο κωδικός E66 αναφέρεται στις διαδικασίες αναγνώρισης σχέσεων μεταξύ συνόλου στοιχείων με το μεμονωμένο στοιχείο. Οι κωδικοί που συνθέτουν τη συγκεκριμένη κατηγορία παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.27

Πίνακας 4.27

*Κωδικοί που Συνθέτουν την Κατηγορία Ικανότητα Χρήσης Μαθηματικών Διαδικασιών*

Μαθηματικά έργα στα οποία εμφανίζεται ο συγκεκριμένος κωδικός	Κωδικοί που συνθέτουν την κατηγορία ικανότητα χρήσης μαθηματικών διαδικασιών
Αρ1, Αρ.7, Αρ.8, Αρ.9, Αρ.14, Αρ.15, Α8	E54: χρήση γνωστών αποτελεσμάτων για εξαγωγή άλλων αποτελεσμάτων
Αρ.1, Αρ.5	E97: αναγνώριση και εφαρμογή συμπληρωματικής πρόσθεσης
Αρ.3, Αρ.4, Αρ.7, Αρ.8, Αρ.9, Αρ.14, Αρ.15, Αρ.17, Αρ.19, Α8	E31: ανάκληση γνωστού αποτελέσματος
Αρ.13	E119: χρήση αντίστροφης αρίθμησης
Αρ.1, Αρ.6, Αρ.7, Αρ.17,	E15: αποτελεσματική χρήση γνωστής διαδικασίας «απαρίθμηση όλων» όταν δε ζητείται ξεκάθαρα η εφαρμογή της

A5,A6	
Αρ.1, Αρ.3, Αρ.4, Αρ.7, Αρ.9, Αρ.11, Αρ.18, Αρ.19	E33: χρήση αριθμητικής διαδικασίας «αρίθμηση από τον πρώτο»
Αρ.1	E83: εντοπισμός των στοιχείων που αναπαριστούν το ζητούμενο αποτέλεσμα/αριθμό από και διαγραφή των υπόλοιπων στοιχείων
Αρ.2, Αρ.3, Αρ.4	E84: ολοκληρωμένη εφαρμογή διαδικασίας απαρίθμησης συνόλου μέχρι 5 στοιχείων όταν ζητείται ξεκάθαρα η εφαρμογή της
Αρ.2, Αρ.3, Αρ.4	E85: ολοκληρωμένη εφαρμογή διαδικασίας απαρίθμησης όταν ζητείται ξεκάθαρα η εφαρμογή της
Αρ.19	E134: απαρίθμηση όλων αρχίζοντας από τον πρώτο
Αρ.6, Αρ.7, Αρ.18, Αρ.19	E7: απαρίθμηση μερικών στοιχείων και παράλειψη άλλων απαραίτητων στοιχείων όταν δεν ζητείται ξεκάθαρα η εφαρμογή της απαρίθμησης
Αρ.3, Αρ.4	E90: υπόδειξη του τελευταίου στοιχείου της συλλογής μετά την απαρίθμηση και όχι αναφορά στο πλήθος του συνόλου των στοιχείων υποδεικνύοντας μη αντίληψη της πληθικής έννοιας του αριθμού
Αρ.6, Α8	E23: σύγκριση αριθμών χωρίς οπτική αναπαράσταση
Αρ.6	E9: ανεπιτυχής σύγκριση δύο συνόλων όπου το καθένα περιλαμβάνει και μεμονωμένα στοιχεία και ομαδοποίηση μεμονωμένων στοιχείων (μονάδες, δεκάδες)
Αρ.11, Αρ.12, Αρ.13	E110: εστίαση και εντοπισμός διαφόρων σχέσεων που υποβόσκουν μεταξύ οποιονδήποτε αριθμών στην αριθμητική γραμμή ή σε πλαίσιο που παραπέμπει στην αριθμητική γραμμή
Αρ.16	E129: εντοπισμός/συμπλήρωση της διάταξης στοιχείων και χρήση της τακτικής έννοιας του αριθμού (1ος, 2ος, 3ος ) μέσα από αξιοποίηση σχέσεων μεταξύ οποιονδήποτε όρων
Αρ.16	E127: εντοπισμός/συμπλήρωση της διάταξης στοιχείων και χρήση της τακτικής έννοιας του αριθμού (1ος, 2ος, 3ος...) μόνο μέσα από σειριακή επεξεργασία/απαγγελία της ακολουθίας των αριθμών
Αρ.16	E128: εντοπισμός/συμπλήρωση της διάταξης στοιχείων και χρήση της τακτικής έννοιας του αριθμού (1ος, 2ος, 3ος) μέσα από αξιοποίηση προηγούμενων ή επόμενων όρων
Αρ.9, Αρ.11, Αρ.12, Αρ.13, Αρ.14, Αρ.15, Αρ.16, Α5, Α6, Α8	E39: άμεση αναφορά στη διάταξη δύο οποιονδήποτε διαδοχικών αριθμών
Αρ.11, Αρ.12, Αρ.13, Αρ.14, Αρ.15, Αρ.16, Α5, Α6, Α8	E159: μη εντοπισμός και αναφορά στη σχέση μεταξύ προηγούμενου και επόμενου αριθμού
Αρ.6, Αρ.20	E161: ιδιοσυγκρασιακή σύγκριση πλήθους στοιχείων δύο συνόλων όπου το καθένα περιλαμβάνει και μεμονωμένα στοιχεία και ομαδοποίηση των μεμονωμένων στοιχείων (μονάδες, δεκάδες) η οποία δε βασίζεται στις σχέσεις που εμπλέκονται στην προβληματική
Αρ.11, Αρ.12, Αρ.13, Αρ.14, Αρ.15, Αρ.16, Αρ.17	E171: ιδιοσυγκρασιακή συμπλήρωση συγκεκριμένων αριθμών που ζητούνται, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η ακολουθία και η διάταξη των αριθμών
Αρ.6	E177: σύγκριση του πλήθους στοιχείων δύο συνόλων όπου το καθένα περιλαμβάνει και μεμονωμένα στοιχεία και ομαδοποίηση μεμονωμένων στοιχείων (μονάδες, δεκάδες) μέσα από την δημιουργία και απαλοιφή κοινών ομαδοποιήσεων- δεκάδων (έννοια ισότητας) και σύγκριση μόνο των μεμονωμένων στοιχείων που απομένουν



Αρ.6, Αρ.20	E65: ημιτελής σύγκριση πλήθους στοιχείων δύο συνόλων όπου το καθένα περιλαμβάνει και μεμονωμένα στοιχεία και ομαδοποίηση των μεμονωμένων στοιχείων (μονάδες, δεκάδες) με συγκεκριμένο/μοναδικό τρόπο, λόγω μη αντίληψης των σχέσεων μεταξύ των ομαδοποιήσεων και των μεμονωμένων στοιχείων
Αρ.11, Αρ.12, Αρ.13, Αρ.14, Αρ.15	E160: εντοπισμός και αναφορά στη σχέση μεταξύ προηγούμενου και επόμενου αριθμού χωρίς εντοπισμό σχέσεων που υποβόσκουν μεταξύ οποιονδήποτε άλλων αριθμών
Αρ.20	E172: ανάλυση συγκεκριμένου συνόλου στοιχείων αντί δημιουργία ίδιου αθροίσματος μέσα από εύρεση αγνώστων προσθετών σε κατακόρυφη και οριζόντια διάταξη
Αρ.20	E173: ημιτελής προσπάθεια δημιουργίας ίδιου αθροίσματος με συγκεκριμένο/μοναδικό τρόπο μέσα από εύρεση αγνώστων προσθετών σε κατακόρυφη και οριζόντια διάταξη, λόγω της αδυναμίας χειρισμού και των δύο διαστάσεων (οριζόντια και κατακόρυφη)
Αρ.20	E174: προσπάθεια δημιουργίας ίδιου αθροίσματος μέσα από εύρεση αγνώστων προσθετών σε κατακόρυφη και οριζόντια διάταξη η οποία δεν ολοκληρώνεται λόγω της δυσκολίας εντοπισμού του κοινού προσθετού που εμπλέκεται στις δύο διαστάσεις και επηρεάζει το ζητούμενο άθροισμα
Αρ.20	E175: δημιουργία ίδιου αθροίσματος μέσα από εύρεση αγνώστων προσθετών σε κατακόρυφη και οριζόντια διάταξη μέσα από εντοπισμό και αντίληψη του κοινού προσθετού που εμπλέκεται στις δύο διαστάσεις και επηρεάζει το ζητούμενο άθροισμα (έννοια ισότητας)
Αρ.18	E58: έλεγχος για εντοπισμός πολλαπλών απαντήσεων όταν απαιτούνται
Αρ.9	E106: έλεγχος για εύρεση πολλαπλών απαντήσεων όταν δεν απαιτούνται
Αρ.7, Αρ.8	E12: προσφυγή σε αντιστοίχιση ένα προς ένα αντί σε αντιστοίχιση πολλών στοιχείων σε ένα άλλο ή και τα αντίστροφα πολλών στοιχείων σε ένα άλλο ή και το αντίστροφο
Αρ.7, Αρ.8	E29: αντιστοίχιση πολλών στοιχείων σε ένα άλλο ή και το αντίστροφο
Αρ.5	E94: μη ολοκληρωμένη κατανομή στοιχείων χωρίς αντιστοίχιση κάθε στοιχείου ενός συνόλου με κάθε ένα στοιχείο από πολλαπλά σύνολα
Αρ.5	E95: ημιτελής αντιστοίχιση κάθε στοιχείου ενός συνόλου με κάθε ένα στοιχείο από πολλαπλά σύνολα
Αρ.7	E169: ιδιοσυγκρασιακή, μη ολοκληρωμένη κατανομή στοιχείων χωρίς αντιστοίχιση πολλών στοιχείων σε ένα άλλο ή και το αντίστροφο
Αρ.21	E136: αντιμετώπιση του εκτιμώμενου αποτελέσματος ως βέβαιου, χωρίς σύγκριση του με το σημείο αναφοράς και χωρίς αναπροσαρμογή της εκτίμησης
Αρ.21	E138: αναστοχασμός και σύγκριση του εκτιμώμενου αποτελέσματος σε σχέση με το σημείο αναφοράς με δυνατότητα αναπροσαρμογής της εκτίμησης ευέλικτες
Αρ.2, Αρ.11, Αρ.12, Αρ.13, Αρ.14, Αρ.15	E86: αναγνώριση και αξιοποίηση μοτίβου που υπάρχει, ακόμη και όταν δεν απαιτείται η εύρεση του
A1, A2, A3, A4, A7	E144: αντιμετώπιση της ακολουθίας του μοτίβου ως μια συνεχής επανεμφάνιση χωρίς τέλος της μονάδας επανάληψης σύνολα
A5, A6	E150: αντιμετώπιση της ακολουθίας του μοτίβου ως συνεχούς πρόσθεσης κάποιου μεγέθους στον προηγούμενο όρο για τη δημιουργία του επόμενου όρου
A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8	E164: περιγραφή και εφαρμογή του κανόνα του μοτίβου για επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση του μοτίβου
A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8	E40: αντιμετώπιση της ακολουθίας του μοτίβου ως μια διαδικασία συνεχούς λεκτικής περιγραφής για επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση μοτίβου

A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8	E163: απουσία περιγραφής του κανόνα του μοτίβου κατά την επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση του μοτίβου
A8	E49: ημιτελής επεξεργασία για εντοπισμό μοτίβου ή κανόνα για τη σχέση δύο μεταβλητών χωρίς δυνατότητα αλλαγής του τρόπου επεξεργασίας
A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8	E61: ιδιοσυγκρασιακές περιγραφές για την προβληματική κατάσταση που δεν σχετίζονται με εντοπισμό μοτίβου ή του κανόνα για τη σχέση δύο μεταβλητών
A7	E155: προσφυγή σε μοτίβο AB κατά τη μετάφραση ενός μοτίβου πιο σύνθετης δομής από σχήμα σε χρώμα
A7	E170: ιδιοσυγκρασιακή απόδοση χρωμάτων στα σχήματα του επαναλαμβανόμενου μοτίβου, χωρίς να γίνεται η απαιτούμενη μετάφραση του μοτίβου από σχήμα σε χρώμα
Ap.9, Ap.18	E56: αποτελεσματική χρήση στρατηγικής δοκιμής και ελέγχου με αναστοχασμό στις δοκιμές, όταν οι άγνωστες ποσότητες είναι δύο
Ap.10, Ap.20	E108: αποτελεσματική χρήση στρατηγικής δοκιμής και ελέγχου με αναστοχασμό στις δοκιμές, όταν οι άγνωστες ποσότητες είναι περισσότερες από δύο
Ap.9, Ap.18	E162: αποτελεσματική χρήση στρατηγικής δοκιμής και ελέγχου χωρίς αναστοχασμό στις δοκιμές (τυχαίες δοκιμές) όταν οι άγνωστες ποσότητες είναι δύο
Ap.9, Ap.18	E55: ημιτελής προσπάθεια εφαρμογής της στρατηγικής δοκιμής και ελέγχου χωρίς να γίνεται έλεγχος οποιασδήποτε δοκιμής και αναπροσαρμογής της διαδικασίας
Ap.10, Ap.20	E107: μη αποτελεσματική χρήση στρατηγικής δοκιμής και ελέγχου χωρίς αναστοχασμό στις δοκιμές και δυνατότητα αναπροσαρμογής της διαδικασίας, όταν οι άγνωστες ποσότητες είναι περισσότερες από δύο
Ap.18	E109: σύνθεση και ανάλυση δοσμένου αριθμού με διαφορετικούς τρόπους
Ap.18, Ap.20	E22: εντοπισμός διαφορετικών προσθετών που δίνουν σταθερό άθροισμα μέσω της αύξησης του ενός προσθετού κατά ένα και της μείωσης του άλλου προσθετού κατά ένα (έννοια της ισότητας)
Ap.18	E35: εστίαση σε ιδιότητα πράξεων που αναδύεται (αντιμεταθετική ιδιότητα), μέσω εντοπισμού σχέσεων που υποβόσκουν
Ap.5	E96: αντιστοίχιση κάθε στοιχείου ενός συνόλου με κάθε ένα στοιχείο από πολλαπλά
Ap.6, Ap.20	E66: σύγκριση του πλήθους στοιχείων δύο συνόλων όπου το καθένα περιλαμβάνει και μεμονωμένα στοιχεία και ομαδοποίηση μεμονωμένων στοιχείων (μονάδες, δεκάδες) μέσα από την ανάλυση και των δύο συνόλων σε μεμονωμένα στοιχεία και τη βήμα προς βήμα μέτρησή τους

Η τέταρτη κατηγορία *Ικανότητα παροχής αιτιολογήσεων*, αφορά στις επεξηγήσεις που χρησιμοποιούσαν οι μαθητές ώστε να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις που έδιναν. Η συγκεκριμένη κατηγορία, διακρίνεται σε δύο ιδιότητες: τις αιτιολογήσεις που εμπλέκουν αναστοχασμό της πορείας και πλήρη αντίληψη της ανάγκης για ολοκληρωμένη απάντηση στο ερώτημα γιατί και πώς, ενώ η δεύτερη διάσταση αναφέρεται σε χρήση και αναφορά σε δεδομένα ή στοιχεία που είτε δόθηκαν είτε προέκυψαν στην πορεία. Στην πρώτη ιδιότητα εντάσσεται ο κωδικός E25: *αιτιολόγηση που βασίζεται σε γενικευμένη δήλωση*. Στη

συγκεκριμένη περίπτωση, οι μαθητές της έρευνας, χωρίς να αναφέρονται στο συγκεκριμένο παράδειγμα που είχαν να αντιμετωπίσουν, χρησιμοποίησαν μια γενικευμένη δήλωση ώστε να αιτιολογήσουν την απάντησή τους. Χαρακτηριστικό απόσπασμα του συγκεκριμένου κωδικού από τα πιο πάνω αποσπάσματα συνεντεύξεων (Σ12\_Μαρίνα) είναι αυτό όπου η μαθήτρια, για να αιτιολογήσει την απάντησή της χρησιμοποιεί ως αιτιολόγηση μια γενικευμένη δήλωση «επειδή αυτό που χάνει το ένα το κερδίζει το άλλο και έτσι όλα μαζί μένουν τα ίδια». Στην ίδια διάσταση εμπλέκεται και ο κωδικός E193 E193: *παροχή εναλλακτικών αιτιολογήσεων που βασίζονται σε γενικευμένες δηλώσεις*. Στη δεύτερη διάσταση, εντάσσονται οι κωδικοί E4, E25, E18, E19, E158, E914 και E195. Ο κωδικός E4 αναφέρεται στη χρήση αιτιολογήσεων που βασίζεται σε άσχετα στοιχεία με το πρόβλημα/κατάσταση. Ενδεικτικά παραδείγματα του συγκεκριμένου κωδικού παρουσιάζονται πιο πάνω στα αποσπάσματα συνεντεύξεων, όπως για παράδειγμα: «επειδή μπορεί να νικήσει τα άλλα χρώματα» (Σ1\_Μάρκος), «γιατί μου το είπε η δασκάλα μου» (Σ1\_Μάρκος), «επειδή τα παπάκια έτρεξαν» (Σ5\_Νίκη). Αντίστοιχα ο κωδικός E158, αναφέρεται σε αιτιολογήσεις που χρησιμοποιούσαν οι μαθητές οι οποίες βασίστηκαν σε υπόδειξη μερικών πληροφοριών της εικόνας ή του εργαλείου. Ενδεικτικό παράδειγμα, όπως παρουσιάζεται στα αποσπάσματα συνεντεύξεων είναι το ακόλουθο: «δείχνει μόνο αποσυνδεδεμένους πράσινους και αποσυνδεδεμένους κίτρινους κύβους» (Σ2\_Ελίζα). Στην συγκεκριμένη περίπτωση η μαθήτρια στην προσπάθειά της να αιτιολογήσει την απάντησή της εστίαστηκε μόνο σε μερικές πληροφορίες του εργαλείου (αποσυνδεδεμένους κύβους) και αγνόησε άλλα σημαντικά στοιχεία (συνδεδεμένους κύβους). Στην κατηγορία αυτή, όπως έχει προαναφερθεί, εντάσσεται και ο κωδικός E19: *αιτιολόγηση που βασίζεται μόνο σε συγκεκριμένο λανθασμένο παράδειγμα*. Στη συγκεκριμένη περίπτωση οι μαθητές χρησιμοποιούσαν ως αιτιολόγηση ένα λανθασμένο παράδειγμα το οποίο εφάρμοσαν και αναγνώριζαν ως την απάντηση στο ερώτημα που τους τέθηκε. Ο κωδικός E18, ο οποίος εντάσσεται στη συγκεκριμένη κατηγορία, αφορά στη χρήση αιτιολογήσεων που βασίζονται σε απλή περιγραφή μαθηματικής διαδικασίας. Οι μαθητές στη συγκεκριμένη περίπτωση, για να αιτιολογήσουν την απάντηση που έδιναν, περιέγραφαν τη διαδικασία που ακολούθησαν ώστε να καταλήξουν στην απάντησή τους. Ενδεικτικό παράδειγμα του συγκεκριμένου κωδικού, όπως παρουσιάζεται πιο πάνω στα αποσπάσματα συνεντεύξεων είναι το ακόλουθο: «αφού τους μέτρησα όλους» (Σ3\_Κώστας). Οι κωδικοί που συνθέτουν την κατηγορία *Ικανότητα παροχής αιτιολογήσεων* παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.28.

Πίνακας 4.28

Κωδικοί που Συνθέτουν την Κατηγορία Ικανότητα Παροχής Αιτιολογήσεων

Μαθηματικά έργα στα οποία εμφανίζεται ο συγκεκριμένος κωδικός	Κωδικοί που συνθέτουν την κατηγορία ικανότητα παροχής αιτιολογήσεων
Αρ.6, Αρ.8, Αρ.18, Α1, Α2, Α3, Α4, Α5, Α6, Α7	E25: αιτιολόγηση που βασίζεται σε γενικευμένη δήλωση
Αρ.6, Αρ.8, Αρ.18, Α1, Α2, Α3, Α4, Α5, Α6, Α7	E193: παροχή εναλλακτικών αιτιολογήσεων που βασίζονται σε γενικευμένες δηλώσεις
Αρ.6, Αρ.7, Αρ.8, Αρ.18, Α1, Α3, Α4, Α5, Α6, Α7	E18: αιτιολόγηση που βασίζεται σε απλή περιγραφή μαθηματικής διαδικασίας
Αρ.7, Αρ.8, Αρ.18	E19: αιτιολόγηση που βασίζεται μόνο σε συγκεκριμένο λανθασμένο παράδειγμα
Αρ.6, Α1, Α3, Α4, Α5, Α6, Α7	E158: αιτιολόγηση που βασίζεται σε υπόδειξη μερικών πληροφοριών της εικόνας/εργαλείου
Αρ.6, Αρ.7, Αρ.18, Α1, Α2, Α3, Α4, Α5, Α6, Α7, Α8	E4: αιτιολόγηση που βασίζεται σε άσχετα στοιχεία με το πρόβλημα/κατάσταση
Αρ.6, Αρ.7, Αρ.18, Α1, Α2, Α3, Α4, Α5, Α6, Α7, Α8	E194: παροχή απάντησης που δεν απαντά στο ερώτημα γιατί, πώς
Αρ.6, Αρ.7, Αρ.18, Α1, Α2, Α3, Α4, Α5, Α6, Α7, Α8	E195: αιτιολόγηση που βασίζεται σε συγκεκριμένο ή συγκεκριμένα αριθμητικά παραδείγματα

Η πέμπτη κατηγορία αφορά στην *Ικανότητα έκφρασης με ακρίβεια* και συγκεκριμένα στην ικανότητα έκφρασης με ακρίβεια στην ορολογία (π.χ. μοτίβο, πρόσθεση/προσθέτω, αφαίρεση/αφαιρώ, ίσα/ισότητα, μονάδες/δεκάδες). Η ικανότητα των μαθητών να εκφράζονται με ακρίβεια εξετάστηκε μέσα από τις λεκτικές τους διατυπώσεις και μέσα από την ικανότητά τους να χρησιμοποιούν τους όρους ορθά, στο κατάλληλο πλαίσιο. Η κατηγορία αυτή διακρίνεται σε δύο ιδιότητες. Η πρώτη ιδιότητα αφορά τη γνώση και ικανότητα ανάκλησης της ακριβούς ορολογίας που εμπλέκεται στην κατάσταση/πρόβλημα, ενώ η δεύτερη διάσταση αναφέρεται σε χρήση και ανάκληση γνώσεων και λέξεων για έμμεση περιγραφική απόδοση των επίσημων όρων που εμπλέκονται στο πρόβλημα. Στον Πίνακα 4.29, παρουσιάζονται οι κωδικοί οι οποίοι περιγράφουν την διαβαθμισμένη ικανότητα έκφρασης με ακρίβεια.

Στην πρώτη ιδιότητα, εντάσσονται οι κωδικοί E180, E183, E186, E189, E192, E196, E205, E208 οι οποίοι αναφέρονται στις περιπτώσεις όπου οι μαθητές, προέβαιναν σε ορθή χρήση της κατάλληλης ορολογίας στη δεδομένη κατάσταση/πρόβλημα. Ενδεικτικό παράδειγμα για τον κωδικό E189 παρουσιάζεται στο απόσπασμα της συνεντεύξης Μαρίνα\_Σ12 όπως έχει παρουσιαστεί στο πρώτο στάδιο της ανοιχτής κωδικοποίησης. Στη δεύτερη ιδιότητα, εντάσσονται οι κωδικοί E178, E181, E184, E187, E190, E198, E207, E210 οι οποίοι αναφέρονται στις περιπτώσεις όπου οι λεκτικές περιγραφές των μαθητών

της έρευνας δεν περιλάμβαναν καθόλου χρήση ορολογίας που εμπλέκονταν στη δεδομένη κατάσταση/πρόβλημα και ούτε ενέπλεκαν περιγραφές που να παραπέμπουν στους όρους αυτούς. Ενδεικτικό παράδειγμα για τον κωδικό E190 παρουσιάζεται πιο πάνω στα αποσπάσματα συνεντεύξεων (Μάρκος\_Σ1). Οι κωδικοί E179, E182, E185, E188, E191, E197, E206, E209 αφορούν στις περιπτώσεις όπου οι λεκτικές περιγραφές των μαθητών της έρευνας δεν περιλάμβαναν άμεση χρήση της ορολογίας που εμπλέκονταν στη δεδομένη κατάσταση/πρόβλημα αλλά αποτελούσαν κατάλληλες έμμεσες περιγραφές των συγκεκριμένων όρων. Ενδεικτικό παράδειγμα για τον κωδικό E191 παρουσιάζεται στα πιο πάνω αποσπάσματα συνεντεύξεων (Μαρίνα\_Σ4). Οι κωδικοί E199, E200, E201, E202, E203 και E204 αφορούν στις περιπτώσεις όπου οι λεκτικές περιγραφές των μαθητών της έρευνας δεν περιλάμβαναν την άμεση χρήση της ορολογίας που εμπλέκονταν στη δεδομένη κατάσταση/πρόβλημα και δεν αποτελούσαν κατάλληλες έμμεσες περιγραφές των συγκεκριμένων όρων. Ενδεικτικό παράδειγμα για τον κωδικό E203 παρέχεται στα πιο πάνω αποσπάσματα συνεντεύξεων (Ελίζα\_Σ2).

#### Πίνακας 4.29

*Κωδικοί που Συνθέτουν την Κατηγορία Ικανότητα Έκφρασης με Ακρίβεια*

Μαθηματικά έργα στα οποία εμφανίζεται ο συγκεκριμένος κωδικός	Κωδικοί που συνθέτουν την κατηγορία ικανότητα έκφρασης με ακρίβεια
A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7	E178: καμία χρήση του όρου του μοτίβου και καμία προσπάθεια περιγραφής που να παραπέμπει στον όρο του μοτίβου
A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7	E179: κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο του μοτίβου και χωρίς απευθείας χρήση του όρου του μοτίβου
A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7	E199: μη κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο του μοτίβου και χωρίς απευθείας χρήση του όρου του μοτίβου
A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7	E180: ορθή χρήση του όρου του μοτίβου στο κατάλληλο πλαίσιο
Αρ. 1, Αρ.5, Αρ.18, Αρ.20	E181: καμία χρήση του όρου της πρόσθεσης και καμία προσπάθεια περιγραφής που να παραπέμπει στον όρο της πρόσθεσης
Αρ. 1, Αρ.5, Αρ.18, Αρ.20	E182: κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο της πρόσθεσης και χωρίς απευθείας χρήση του όρου της πρόσθεσης
Αρ. 1, Αρ.5, Αρ.18, Αρ.20	E200: μη κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο της πρόσθεσης και χωρίς απευθείας χρήση του όρου της πρόσθεσης
Αρ. 1, Αρ.5, Αρ.18, Αρ.20	E183: ορθή χρήση του όρου της πρόσθεσης στο κατάλληλο πλαίσιο
Αρ. 1, Αρ.18, Αρ.20	E184: καμία χρήση του όρου της αφαίρεσης και καμία προσπάθεια περιγραφής που να παραπέμπει στον όρο της αφαίρεσης

Αρ. 1, Αρ.18, Αρ.20	E185: κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο της αφαίρεσης και χωρίς απευθείας χρήση του όρου της αφαίρεσης
Αρ. 1, Αρ.18, Αρ.20	E201: μη κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο της αφαίρεσης και χωρίς απευθείας χρήση του όρου της αφαίρεσης
Αρ. 1, Αρ.18, Αρ.20	E186: ορθή χρήση του όρου της αφαίρεσης στο κατάλληλο πλαίσιο
Αρ.6, Αρ.18	E187: καμία χρήση του όρου της ισότητας και καμία προσπάθεια περιγραφής που να παραπέμπει στον όρο της ισότητας
Αρ.6, Αρ.18	E188: κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο της ισότητας και χωρίς απευθείας χρήση του όρου της ισότητας
Αρ.6, Αρ.18	E202: μη κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο της ισότητας και χωρίς απευθείας χρήση του όρου της ισότητας
Αρ.6, Αρ.18	E189: ορθή χρήση του όρου της ισότητας στο κατάλληλο πλαίσιο
Αρ.6	E190: καμία χρήση του όρου των όρων μονάδες/δεκάδες και καμία προσπάθεια περιγραφής που να παραπέμπει στους όρους μονάδες/δεκάδες
Αρ.6	E191: κατάλληλη λεκτική περιγραφή που να παραπέμπει στους όρους μονάδες/δεκάδες και χωρίς απευθείας χρήση των όρων μονάδες/δεκάδες
Αρ.6	E203: μη κατάλληλη λεκτική περιγραφή που να παραπέμπει στους όρους μονάδες/δεκάδες και χωρίς απευθείας χρήση των όρων μονάδες/δεκάδες
Αρ.6	E192: ορθή χρήση των όρων μονάδες/δεκάδες στο κατάλληλο πλαίσιο
Αρ.11, Αρ.12	E196: ορθή χρήση του όρου αριθμητική γραμμή στο κατάλληλο πλαίσιο
Αρ.11, Αρ.12	E197: κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο αριθμητική γραμμή και χωρίς απευθείας χρήση του όρου της αριθμητική γραμμή
Αρ.11, Αρ.12	E204: μη κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο αριθμητική γραμμή και χωρίς απευθείας χρήση του όρου της αριθμητική γραμμή
Αρ.11, Αρ.12	E198: καμία χρήση του όρου της αριθμητικής γραμμής και καμία προσπάθεια περιγραφής που να παραπέμπει στον όρο της αριθμητικής γραμμής
Αρ.15	E205: χρήση της ορολογίας των αριθμών/αριθμολέξεων στο κατάλληλο πλαίσιο για αριθμούς μέχρι το 100
Αρ.15	E206: χρήση της ορολογίας των αριθμών/αριθμολέξεων στο κατάλληλο πλαίσιο για αριθμούς μέχρι το 20
Αρ.15	E207: απουσία χρήσης της ορολογίας των αριθμών/αριθμολέξεων για τους περισσότερους αριθμούς μέχρι και το 10
Αρ.6, Αρ.9, Αρ.11, Αρ.12, Αρ.14, Αρ.15	E208: ορθή χρήση των όρων που αφορούν σε σύγκριση αριθμών (μεγαλύτερος, μικρότερος) στο κατάλληλο πλαίσιο
Αρ.6, Αρ.9, Αρ.11, Αρ.12, Αρ.14, Αρ.15	E209: κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει σε όρους που αφορούν σε σύγκριση αριθμών και χωρίς απευθείας χρήση των όρων αυτών (μεγαλύτερος, μικρότερος)
Αρ.6, Αρ.9, Αρ.11, Αρ.12, Αρ.14, Αρ.15	E210: καμία χρήση των όρων που αφορούν σε σύγκριση αριθμών (μεγαλύτερος, μικρότερος) και καμία προσπάθεια έμμεσης περιγραφής που να παραπέμπει στους όρους σύγκρισης (μεγαλύτερος, μικρότερος)

Η τελευταία κατηγορία η οποία έχει προκύψει, ονομάζεται *Συνολικά Επιτεύγματα* και αφορά στο αποτέλεσμα της προσπάθειας των μαθητών για την επίλυση των έργων,

συγκεκριμένα ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο. Ως εκ τούτου, μέσω της συγκεκριμένης κατηγορίας διαφαίνεται η μαθηματική ικανότητα των μαθητών και πιο ειδικά στο πού είχαν επιτυχία ή αποτυχία. Πιο συγκεκριμένα, οι κωδικοί E77, E78, E79 , E80 αφορούν στο αποτέλεσμα της προσπάθειας των μαθητών κατά την ενασχόλησή τους με έργα αντιστοίχισης ποσότητας και συμβόλου αριθμού. Επιπρόσθετα, οι κωδικοί E112, E111, E118, E117, E124, E125, E131, E130, E133 και E132 αφορούν την επίδοση των μαθητών στα έργα συμπλήρωσης ή διάταξης αριθμών και στοιχείων. Οι κωδικοί E71 και E72 αφορούν την επίδοση των μαθητών σε έργα που προϋπόθεταν την εύρεση προσθετέων που να δίνουν συγκεκριμένο άθροισμα ενώ οι κωδικοί E142 και E143 αναφέρονται στην ικανότητα των μαθητών για επιτυχή ή ανεπιτυχή εκτίμηση πλήθους συνόλου στοιχείων. Οι κωδικοί E98 και E99 αναφέρονται στην επίδοση των μαθητών σε ερωτήματα που αφορούσαν την έννοια τόσα – όσα, ενώ ο κωδικός E10 αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών για σύγκριση ποσοτήτων μέσω οπτικής παρατήρησης διακριτών στοιχείων. Όσον αφορά την επίδοση των μαθητών σε έργα Μοτίβων οι κωδικοί E44, E47, E146, E147, E148, E149, E151, E152, E153 και E154 αναφέρονται στην επιτυχή ή ανεπιτυχή εύρεση των όρων επαναλαμβανόμενου μοτίβου διαφορετικών μορφών, ενώ οι κωδικοί E42, E53, E60, E48, E50, E51 και E166 αναφέρονται στην επιτυχή ή ανεπιτυχή εύρεση των όρων αναπτυσσόμενου μοτίβου διαφορετικών μορφών ή των τιμών των δύο μεταβλητών στις περιπτώσεις των μηχανών. Τέλος οι κωδικοί E157 και E156 αναφέρονται στην επιτυχή ή ανεπιτυχή προσπάθεια μετάφρασης μοτίβου σύνθετης δομής από σχήμα σε χρώμα.

Πίνακας 4.30

*Κωδικοί που Συνθέτουν την Κατηγορία Συνολικά Επιτεύγματα*

Μαθηματικά έργα στα οποία εμφανίζεται ο συγκεκριμένος κωδικός	Κωδικοί που συνθέτουν την κατηγορία συνολικά επιτεύγματα
Αρ.1	E77: ανεπιτυχής πρόσθεση ή αφαίρεση στοιχείων για αντιστοίχιση ποσότητας και συμβόλου αριθμού
Αρ.1	E78: επιτυχής πρόσθεση ή αφαίρεση στοιχείων για αντιστοίχιση ποσότητας και συμβόλου αριθμού
Αρ.1	E79: επιτυχής πρόσθεση στοιχείων για αντιστοίχιση ποσότητας και συμβόλου αριθμού
Αρ.1	E80: επιτυχής αφαίρεση στοιχείων για αντιστοίχιση ποσότητας και συμβόλου αριθμού

Αρ.11, Αρ.12	E111: επιτυχής συμπλήρωση αριθμών μέχρι το 10 στην αριθμητική γραμμή
Αρ.13	E118: ανεπιτυχής συμπλήρωση αριθμών σε φθίνουσα ακολουθία
Αρ.13	E117: επιτυχής συμπλήρωση αριθμών σε φθίνουσα ακολουθία
Αρ.14, Αρ.15	E124: ανεπιτυχής συμπλήρωση αριθμών σε πλέγματα αριθμών
Αρ.14, Αρ.15	E125: επιτυχής συμπλήρωση αριθμών σε πλέγματα αριθμών
Αρ.16	E131: ανεπιτυχής συμπλήρωση της διάταξης στοιχείων που έχουν σταθερή θέση
Αρ.16	E130: επιτυχής συμπλήρωση της διάταξης στοιχείων που έχουν σταθερή
Αρ.17	E133: ανεπιτυχής ερμηνεία της διάταξης στοιχείων χρησιμοποιώντας τον τακτικό αριθμό όταν εμπλέκεται μετακίνηση της θέσης των στοιχείων
Αρ.17	E132: επιτυχής ερμηνεία της διάταξης στοιχείων χρησιμοποιώντας τον τακτικό αριθμό όταν εμπλέκεται μετακίνηση της θέσης των στοιχείων
Αρ.18, Αρ.19, Αρ.20	E71: ανεπιτυχής εύρεση προσθετέων που να δίνουν το ζητούμενο συγκεκριμένο άθροισμα
Αρ.18, Αρ.19, Αρ.20	E72: επιτυχής εύρεση προσθετέων που να δίνουν το ζητούμενο συγκεκριμένο άθροισμα
Αρ.21	E142: ανεπιτυχής εκτίμηση πλήθους συνόλου στοιχείων σε σχέση με το σύνολο αναφοράς
Αρ.21	E143: επιτυχής εκτίμηση πλήθους συνόλου στοιχείων σε σχέση με το σύνολο αναφοράς
Αρ.5	E98: ανεπιτυχής απάντηση στο ερώτημα που αφορά την έννοια «τόσα – όσα»
Αρ.5	E99: επιτυχής απάντηση στο ερώτημα που αφορά την έννοια «τόσα – όσα»
Αρ.6, Α5, Α6	E10: σύγκριση ποσοτήτων μόνο μέσα από οπτική παρατήρηση των διακριτών στοιχείων δύο συνόλων με ξεκάθαρη διαφορά στο πλήθος
Α1, Α3, Α4	E44: ανεπιτυχής εύρεση όρων επαναλαμβανόμενου μοτίβου ΑΒΓ
Α1, Α3, Α4	E47: επιτυχής εύρεση όρων επαναλαμβανόμενου μοτίβου ΑΒΓ
Α1	E146: ανεπιτυχής εύρεση όρων επαναλαμβανόμενου μοτίβου ΑΒ
Α1	E147: επιτυχής εύρεση όρων επαναλαμβανόμενου μοτίβου ΑΒ
Α1	E148: ανεπιτυχής εύρεση όρων επαναλαμβανόμενου μοτίβου ΑΒΒ
Α1	E149: επιτυχής εύρεση όρων επαναλαμβανόμενου μοτίβου ΑΒΒ
Α4	E151: ανεπιτυχής εύρεση όρων επαναλαμβανόμενου μοτίβου ΑΑΑΒΒ
Α4	E152: επιτυχής εύρεση όρων επαναλαμβανόμενου μοτίβου ΑΑΑΒΒ
Α4	E153: ανεπιτυχής εύρεση όρων επαναλαμβανόμενου μοτίβου ΑΑΒΒΓ
Α4	E154: επιτυχής εύρεση όρων επαναλαμβανόμενου μοτίβου ΑΑΒΒΓ
Α6	E42: ανεπιτυχής εύρεση όρων αναπτυσσόμενου μοτίβου με κανόνα +2
Α6	E166: επιτυχής εύρεση όρων αναπτυσσόμενου μοτίβου με κανόνα +2
Α5, Α6	E36: ανεπιτυχής εύρεση όρων αναπτυσσόμενου μοτίβου με κανόνα +1
Α5, Α6	E37: επιτυχής εύρεση όρων αναπτυσσόμενου μοτίβου με κανόνα +1
Α8	E48: ανεπιτυχής εύρεση όρων αριθμητικού κατακόρυφου μοτίβου με κανόνα +1
Α8	E50: επιτυχής εύρεση των τιμών των δύο μεταβλητών με κανόνα +1
Α8	E51: ανεπιτυχής εύρεση των τιμών των δύο μεταβλητών με κανόνα +2
Α8	E53: επιτυχής εύρεση των αντίστοιχων τιμών δύο μεταβλητών με κανόνα +2
Α8	E60: επιτυχής εύρεση των αντίστοιχων τιμών δύο μεταβλητών με πολλαπλασιαστική δομή

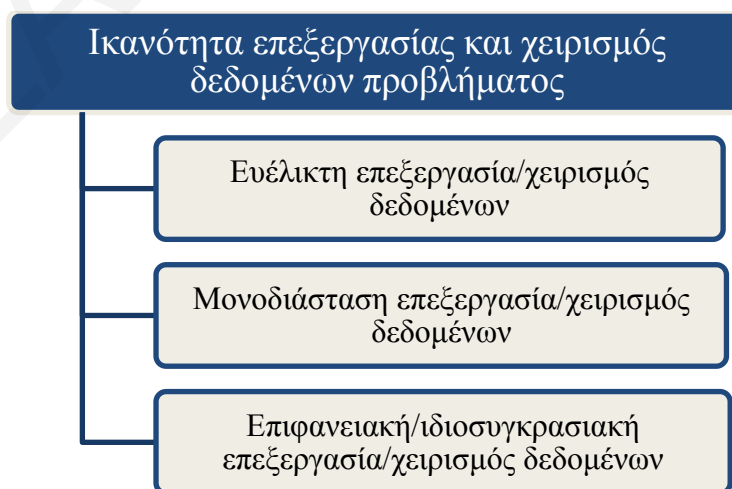


A7	E157: ανεπιτυχής μετάφραση μοτίβου σύνθετης δομής AABBBΓ από σχήμα σε χρώμα
A7	E156: επιτυχής μετάφραση μοτίβου σύνθετης δομής AABBBΓ από σχήμα σε χρώμα

### Εμπειρικά Θεμελιωμένη Θεωρία – Αξονική Κωδικοποίηση

Μετά τη δημιουργία των κατηγοριών που προαναφέρθηκαν, ακολούθησε η εφαρμογή της *αξονικής κωδικοποίησης*. Η *αξονική κωδικοποίηση*, περιλαμβάνει την επανανάλυση των αποτελεσμάτων της *ανοιχτής κωδικοποίησης*. Σκοπός της *αξονικής κωδικοποίησης*, είναι να εμπλουτιστούν οι παραγόμενες από την ανάλυση του εμπειρικού υλικού κατηγορίες και να οργανωθούν γύρω από λίγους κομβικούς θεωρητικούς άξονες. Επιπρόσθετα, στην αξονική κωδικοποίηση πραγματοποιείται η διατύπωση των διαστάσεων κάθε κατηγορίας (Charmaz, 2006).

Όπως παρατηρήθηκε μέσα από την ανάλυση των δεδομένων στην ανοιχτή κωδικοποίηση, οι κωδικοί οι οποίοι εντάχθηκαν σε κάθε κατηγορία, διακρίνονται σε κάποιες ιδιότητες. Στο Διάγραμμα 4.7, παρουσιάζονται οι διαστάσεις της κατηγορίας *Επεξεργασία και χειρισμός δεδομένων προβλήματος*. Οι διαστάσεις αυτές μπορούν να διακριθούν ως ακολούθως: *Επιφανειακή/ιδιοσυγκρασιακή επεξεργασία/χειρισμός δεδομένων*, *Μονοδιάστατη επεξεργασία/χειρισμός δεδομένων* και *Ευέλικτη επεξεργασία και χειρισμός δεδομένων προβλήματος*.



Διάγραμμα 4.7: Διαστάσεις της κατηγορίας επεξεργασία και χειρισμός δεδομένων προβλήματος

Η πρώτη διάσταση της συγκεκριμένης κατηγορίας, αναφέρεται στην *Επιφανειακή/ιδιοσυγκρασιακή επεξεργασία ή χειρισμό δεδομένων προβλήματος*. Ο όρος *Επιφανειακή/ιδιοσυγκρασιακή επεξεργασία ή χειρισμός δεδομένων προβλήματος* αναφέρεται στις περιπτώσεις όπου οι μαθητές, χωρίς να λαμβάνουν υπόψη τα δεδομένα του προβλήματος, πρόσθεταν περιττά δεδομένα τα οποία μπορεί να σχετίζονταν με οικείες/ιστορίες ή σενάρια, προσωπικές προτιμήσεις ή επαναλάμβαναν κάποια στοιχεία του προβλήματος ως απαντήσεις στα ερωτήματα που τους ανατέθηκαν.

Πίνακας 4.31

*Κωδικοί που Συνθέτουν την Διάσταση Επιφανειακή/Ιδιοσυγκρασιακή Επεξεργασία/Χειρισμός Δεδομένων Προβλήματος*

Επιφανειακή/ιδιοσυγκρασιακή επεξεργασία/χειρισμός δεδομένων προβλήματος
E5: πρόσθεση περιττών δεδομένων μέσω απόδοσης οικείας ιστορίας/σεναρίου
E165: πρόσθεση περιττών δεδομένων μέσω εκδήλωσης προτίμησης (π.χ αγαπημένο χρώμα)
E62: μη αξιοποίηση των δεδομένων του προβλήματος
E26: επανάληψη του δοσμένου αριθμού από τα δεδομένα, ως απάντηση

Αντίστοιχα, η δεύτερη διάσταση της συγκεκριμένης κατηγορίας, αναφέρεται στη *Μονοδιάστατη επεξεργασία και χειρισμό δεδομένων προβλήματος*. Ο όρος *μονοδιάστατη επεξεργασία* αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών να λαμβάνουν υπόψη όλα ή μόνο μερικά από τα δεδομένα του προβλήματος, χωρίς ωστόσο να είναι σε θέση να εντοπίζουν περαιτέρω συσχετίσεις μεταξύ τους που να διευκολύνουν την επίλυση των μαθηματικών έργων.

Πίνακας 4.32

*Κωδικοί που Συνθέτουν την Διάσταση Μονοδιάστατη Επεξεργασία/Χειρισμός Δεδομένων Προβλήματος*

Μονοδιάστατη επεξεργασία/χειρισμός δεδομένων προβλήματος
E16: αξιοποίηση όλων των δεδομένων του προβλήματος, χωρίς περαιτέρω εντοπισμό συσχετίσεων μεταξύ τους
E8: αξιοποίηση ενός ή μόνο μερικών δεδομένων του προβλήματος

Η τρίτη διάσταση της συγκεκριμένης κατηγορίας, αναφέρεται στην *Ευέλικτη επεξεργασία και χειρισμό δεδομένων προβλήματος*. Ο όρος *Ευέλικτη επεξεργασία και χειρισμός δεδομένων προβλήματος*, όπως μπορεί να διαπιστωθεί από τους κωδικούς στον

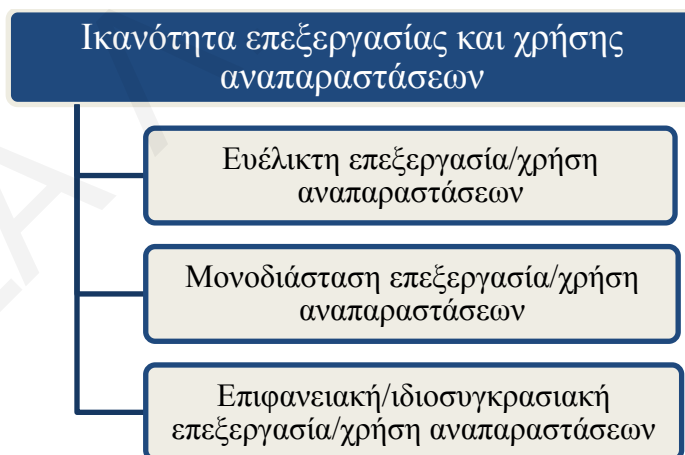
Πίνακα 4.33, αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών της έρευνας να επεξεργάζονται με κατάλληλο τρόπο τα δεδομένα του προβλήματος και να εντοπίζουν ομοιότητες μεταξύ των δεδομένων, οι οποίες οδηγούν στον εντοπισμό συσχετίσεων που διευκολύνουν την επίλυση των μαθηματικών έργων.

Πίνακας 4.33

*Κωδικοί που Συνθέτουν την Διάσταση Ευέλικτη επεξεργασία/χειρισμός δεδομένων προβλήματος*

Ευέλικτη επεξεργασία/χειρισμός δεδομένων προβλήματος
E64: αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ δεδομένων διαφορετικών ερωτημάτων για εντοπισμό συσχετίσεων
E21: αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ δεδομένων του ερωτήματος για εντοπισμό συσχετίσεων

Ακολούθως, παρουσιάζονται οι ιδιότητες όπως έχουν προκύψει μέσα από την εφαρμογή της αξονικής κωδικοποίησης για την κατηγορία *Ικανότητα Επεξεργασίας και χρήσης αναπαραστάσεων (εικονικών αναπαραστάσεων και εργαλείων)*. Όπως διαφαίνεται από το Διάγραμμα 4.8, οι κωδικοί που εντάσσονται στη συγκεκριμένη κατηγορία παρουσιάζουν τρεις βασικές ιδιότητες: *Επιφανειακή/ιδιοσυγκρασιακή επεξεργασία/χρήση αναπαραστάσεων, Μονοδιάστατη επεξεργασία/χρήση αναπαραστάσεων και Ευέλικτη επεξεργασία/χρήση αναπαραστάσεων*.



Διάγραμμα 4.8: Διαστάσεις της κατηγορίας Επεξεργασία/χειρισμός δεδομένων προβλήματος

Η πρώτη διάσταση της κατηγορίας *Επεξεργασία και χρήση αναπαραστάσεων* αναφέρεται στην *Επιφανειακή/ιδιοσυγκρασιακή επεξεργασία /χρήση αναπαραστάσεων*. Όπως μπορεί να διαπιστωθεί από τους κωδικούς του Πίνακα 4.34 που εντάσσονται στη συγκεκριμένη κατηγορία, ο όρος αυτός αναφέρεται στην ιδιοσυγκρασιακή ενασχόληση των μαθητών με τις αναπαραστάσεις.

#### Πίνακας 4.34

*Κωδικοί που Συνθέτουν την Διάσταση Επιφανειακή/Ιδιοσυγκρασιακή Επεξεργασία/Χρήση Αναπαραστάσεων*

---

<i>Επιφανειακή/ιδιοσυγκρασιακή επεξεργασία/χρήση αναπαραστάσεων</i>
E81: ιδιοσυγκρασιακή δημιουργία εικονικής αναπαράστασης χωρίς απόδοση καταστάσεων πρόσθεσης αφαίρεσης
E1: ιδιοσυγκρασιακή χρήση εργαλείου που εμπλέκει την πληθικότητα για δικούς τους σκοπούς (π.χ. παιχνίδι) και όχι για την επίλυση προβλήματος
E13: χρήση του εργαλείου που εμπλέκει την πληθικότητα με τρόπο που οι αρχικές ενέργειες υποδεικνύουν σωστή χρήση αλλά στη συνέχεια παρουσιάζονται αδυναμία ορθής χρήσης και χειρισμού του υλικού
E3: εστίαση της προσοχής σε εξωτερικά χαρακτηριστικά της εικόνας/εργαλείου (π.χ. χρώμα, σχήμα, μέγεθος) που δεν σχετίζονται με την επίλυση του έργου
E101: ιδιοσυγκρασιακή δημιουργία εικονικής αναπαράστασης του προβλήματος για σύγκριση δύο άγνωστων συνόλων
E113: ιδιοσυγκρασιακή χρήση αριθμητικής γραμμής χωρίς καμία ερμηνεία
E120: ιδιοσυγκρασιακή χρήση πλέγματος αριθμών χωρίς καμία ερμηνεία
E167: ιδιοσυγκρασιακή δημιουργία εικονικής αναπαράστασης του προβλήματος για αντιστοίχιση στοιχείων
E57: ιδιοσυγκρασιακές παρατηρήσεις της εικόνας που δεν σχετίζονται με τον εντοπισμό της μονάδας επανάληψης του επαναλαμβανόμενου μοτίβου στην εικόνα
E41: ιδιοσυγκρασιακές παρατηρήσεις της εικόνας που δεν σχετίζονται με την αποκάλυψη του κανόνα του αναπτυσσόμενου μοτίβου στην εικόνα

---

Η δεύτερη διάσταση της κατηγορίας *Επεξεργασία και χρήση αναπαραστάσεων*, αφορά τη μονοδιάστατη επεξεργασία/χρήση των αναπαραστάσεων. Ο όρος *Μονοδιάστατη επεξεργασία/χρήση αναπαραστάσεων* αναφέρεται σε ενέργειες των μαθητών στις αναπαραστάσεις (εικονικές αναπαραστάσεις, εργαλεία και μοντέλα) ο οποίος υποδηλώνει προσκόλληση σε ένα και μοναδικό τρόπο χειρισμού τους (είτε δόθηκαν έτοιμες είτε δημιουργήθηκαν από τον μαθητή οι εικονικές αναπαραστάσεις), χωρίς να παρουσιάζεται η δυνατότητα υιοθέτησης οποιουδήποτε εναλλακτικού τρόπου προσέγγισής τους. Ο Πίνακας 4.35 παρουσιάζει τους κωδικούς που εντάσσονται στη συγκεκριμένη διάσταση.

#### Πίνακας 4.35

*Κωδικοί που Συνθέτουν την Μονοδιάστατη Επεξεργασία/Χρήση Αναπαραστάσεων*

---

<i>Μονοδιάστατη επεξεργασία/χρήση αναπαραστάσεων</i>
E87: απόδοση καταστάσεων πρόσθεσης σε εικονική αναπαράσταση με μοναδική ερμηνεία της κατάστασης που αναπαρίσταται την επεξεργασία των κουκκίδων μία προς μία
E76: απόδοση καταστάσεων πρόσθεσης και αφαίρεσης σε εικονική αναπαράσταση με μοναδική ερμηνεία των καταστάσεων που αναπαρίστανται την επεξεργασία των κουκκίδων μία προς μία

---

E91: άμεση αναγνώριση συνόλου μέχρι 3 αντικείμενα σε εικονική αναπαράσταση χωρίς δυνατότητα άμεσου επανεντοπισμού των συγκεκριμένων διατάξεων σε εικονικές αναπαραστάσεις που εμπλέκουν μεγαλύτερα σύνολα

E14: τυπική χρήση εργαλείου που εμπλέκει την πληθικότητα μόνο με συγκεκριμένο τρόπο για εύρεση της απάντησης μέσω μέτρησης όλων των στοιχείων

E10: σύγκριση ποσοτήτων μόνο μέσα από οπτική παρατήρηση των διακριτών στοιχείων δύο συνόλων με ξεκάθαρη διαφορά στο πλήθος

E27: δημιουργία κατάλληλης εικονικής αναπαράστασης με συγκεκριμένο τρόπο για εύρεση απάντησης χωρίς δυνατότητα ερμηνείας/ανάλυσης της εικόνας με διαφορετικό τρόπο

E114: προσκόλληση και ανάγκη αναφοράς όλων των αριθμών για εντοπισμό των ζητούμενων αριθμών στην αριθμητική γραμμή

E115: εστίαση κάθε φορά σε δοσμένο αριθμό της αριθμητικής γραμμής, για άμεση συσχέτισή του με τον προηγούμενο ή τον επόμενο του

E121: ανάγκη αναφοράς όλων των αριθμών για εντοπισμό των ζητούμενων αριθμών σε πλέγματα αριθμών

E122: εστίαση κάθε φορά στο σημείο του ζητούμενου αριθμού για άμεση συσχέτιση με τον επόμενο ή τον προηγούμενο σε πλέγματα αριθμών

E140: προσκόλληση και ανάγκη εντοπισμού στην εικόνα του αριθμού μη-απόλυτα διακριτών στοιχείων για την εκτίμηση πλήθους στοιχείων συνόλου

E82: προσπάθεια απόδοσης καταστάσεων αφαίρεσης στην εικονική αναπαράσταση με μοναδικό/συγκεκριμένο τρόπο χωρίς το τελικό σύνολο να αντιστοιχεί στο ζητούμενο καθορισμένο αποτέλεσμα

E104: δημιουργία εικονικής αναπαράστασης για εύρεση των δύο άγνωστων συγκρινόμενων συνόλων μέσα από δοκιμές χωρίς επεξεργασία/αξιοποίηση της προηγούμενης αναπαράστασης που δημιουργούσαν

E168: προσπάθεια δημιουργίας εικονικής αναπαράστασης για τη σχέση του αριθμού των στοιχείων δύο ποσοτήτων, η οποία κατέληγε πάντα σε απεικόνιση ίσου αριθμού στοιχείων των δύο ποσοτήτων αντί της σχέσης τους

E102: προσπάθεια δημιουργίας εικονικής αναπαράστασης δύο άγνωστων συνόλων με δοσμένη διαφορά, που κατέληγε πάντα σε απεικόνιση όπου το πλήθος της ζητούμενης διαφοράς συγχέοταν με το πλήθος των στοιχείων του ενός συνόλου

E145: αποσπασματική επεξεργασία της εικόνας του μοτίβου και στιγμιαία οπτική παρατήρηση της, για εντοπισμό μόνο της κατεύθυνσης μεταβολής και όχι και του μεγέθους της μεταβολής

E45: αποσπασματική επεξεργασία της εικόνας του μοτίβου και στιγμιαία οπτική παρατήρηση της για εντοπισμό μόνο του τι βρίσκεται δίπλα από συγκεκριμένο στοιχείο και όχι της μονάδας επανάληψης

Η τρίτη διάσταση της κατηγορίας *Ικανότητα Ευέλικτης επεξεργασίας και χρήσης αναπαραστάσεων*, αναφέρεται σε ενέργειες των μαθητών οι οποίες επιδείκνυαν ιδιαίτερη ευελιξία όσον αφορά στην επεξεργασία και στη χρήση των εικονικών αναπαραστάσεων που τους δίνονταν. Στον Πίνακα 4.36 παρουσιάζονται οι κωδικοί που αντιπροσωπεύουν τη συγκεκριμένη διάσταση. Ο όρος ευελιξία, αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών να χειρίζονται και να επεξεργάζονται τις αναπαραστάσεις ώστε να επιλύουν μαθηματικά έργα με διαφορετικούς τρόπους, όπως επίσης και στην ικανότητά τους να μεταφέρουν και να αξιοποιούν με κατάλληλο τρόπο τις γνώσεις που έχουν αποκτήσει, σε νέες καταστάσεις

που απαιτούν το χειρισμό αναπαραστάσεων. Επιπρόσθετα, η ευελιξία αυτή αναφέρεται στην ικανότητά των μαθητών να χειρίζονται με στρατηγικό τρόπο τα εργαλεία, τις εικονικές αναπαραστάσεις και τα μοντέλα που τους δίνονται και να αναλύουν τις δοσμένες εικονικές αναπαραστάσεις, ώστε να εντοπίζουν σχέσεις. Τέλος, είναι σε θέση να απεικονίζουν νοερά προβληματικές καταστάσεις με τρόπο που να φανερώνει οργάνωση των στοιχείων που εμπλέκονται.

#### Πίνακας 4.36

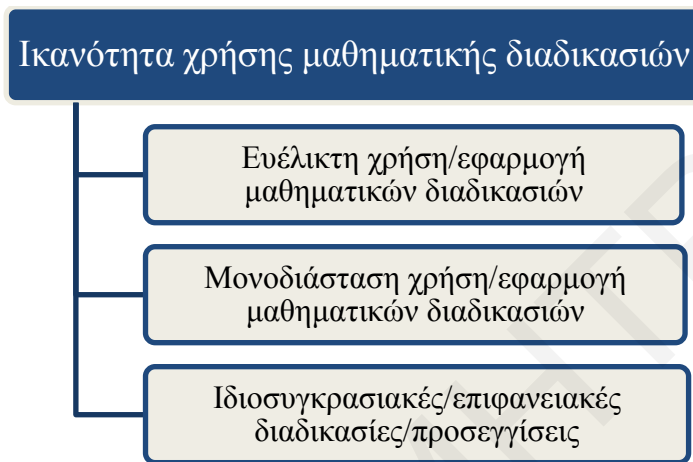
*Κωδικοί που Συνθέτουν την Διάσταση Ευέλικτη Επεξεργασία/Χρήση Αναπαραστάσεων*

---

<i>Ευέλικτη επεξεργασία/χρήση αναπαραστάσεων</i>
E176: απόδοση καταστάσεων πρόσθεσης και αφαίρεσης σε εικονική αναπαράσταση με ερμηνεία των καταστάσεων που αναπαρίστανται με διαφορετικούς τρόπους μέσω της ανάλυσης και σύνθεσης κουκκίδων
E92: άμεση αναγνώριση συνόλου μέχρι 6 αντικείμενα και άμεσως επανεντοπισμός των συγκεκριμένων διατάξεων σε εικονικές αναπαραστάσεις που εμπλέκουν μεγαλύτερα σύνολα
E20: μετασχηματισμός της οργάνωσης των κομματιών του εργαλείου που εμπλέκει την πληθικότητα αρχίζοντας από τη δημιουργία ομάδων με ίσο αριθμό στοιχείων
E32: νοερή απεικόνιση της κατάστασης του προβλήματος που υποδεικνύει ομαδοποίηση/οργάνωση των στοιχείων που εμπλέκονται
E105: νοερή απεικόνιση της κατάστασης του προβλήματος που υποδεικνύει ευέλικτες διατάξεις των αριθμητικών ποσοτήτων για εύρεση δύο άγνωστων συγκρινόμενων συνόλων
E116: καθολική επεξεργασία της αριθμητικής γραμμής συσχετίζοντας οποιουδήποτε αριθμούς πάνω σε αυτή
E123: καθολική επεξεργασία του πλέγματος ως προς διαφορετικές διαστάσεις
E126: εστίαση και εντοπισμός διαφόρων σχέσεων κατακόρυφα και οριζόντια που υποβόσκουν μεταξύ οποιονδήποτε αριθμών στο πλέγμα των αριθμών
E141: εκτίμηση πλήθους στοιχείων ζητούμενου συνόλου, μέσω ανάλυσης της εικόνας για εντοπισμό του αριθμού των φορών που το δοσμένο σύνολο αναφοράς εμφανίζεται στο ζητούμενο σύνολο
E59: εντοπισμός και αναγνώριση στην εικονική αναπαράσταση της μονάδας επανάληψης του επαναλαμβανόμενου μοτίβου
E43: ανάλυση της εικόνας με τρόπο που αποκαλύπτει τον κανόνα του αναπτυσσόμενου μοτίβου

---

Οι διαστάσεις της τρίτης κατηγορίας *Ικανότητα χρήσης μαθηματικών διαδικασιών*, όπως έχουν προκύψει μέσα από την εφαρμογή της αξονικής κωδικοποίησης παρουσιάζονται στο Διάγραμμα 4.9.



Διάγραμμα 4.9: Διαστάσεις της κατηγορίας ικανότητα χρήσης μαθηματικών διαδικασιών

Η πρώτη διάσταση της κατηγορίας *Ικανότητα χρήσης μαθηματικών διαδικασιών*, αναφέρεται στις περιπτώσεις όπου οι μαθητές κατέφευγαν στη χρήση *Επιφανειακών/ιδιοσυγκρασιακών διαδικασιών/προσεγγίσεων* κατά την ενασχόλησή τους με τα μαθηματικά έργα. Ο όρος *Επιφανειακές/ιδιοσυγκρασιακές προσεγγίσεις* αναφέρεται στη υιοθέτηση ιδιοσυγκρασιακών διαδικασιών που δε σχετίζονται με τα μαθηματικά. Ο Πίνακας 4.37 παρουσιάζει τους κωδικούς που εντάσσονται στη συγκεκριμένη κατηγορία.

Πίνακας 4.37

*Κωδικοί που Συνθέτουν την Διάσταση Επιφανειακές/Ιδιοσυγκρασιακές Διαδικασίες/Προσεγγίσεις*

Επιφανειακές/ιδιοσυγκρασιακές διαδικασίες/προσεγγίσεις

E94: ιδιοσυγκρασιακή μη ολοκληρωμένη κατανομή στοιχείων χωρίς αντιστοίχιση κάθε στοιχείου προς σύνολο με κάθε ένα στοιχείο από πολλαπλά σύνολα

E12: προσφυγή σε αντιστοίχιση ένα προς ένα αντί σε αντιστοίχιση πολλών στοιχείων σε ένα άλλο ή και τα αντίστροφα

E169: ιδιοσυγκρασιακή, μη ολοκληρωμένη κατανομή στοιχείων χωρίς αντιστοίχιση πολλών στοιχείων σε ένα άλλο ή και το αντίστροφο

E61: ιδιοσυγκρασιακές περιγραφές για την προβληματική κατάσταση που δεν σχετίζονται με εντοπισμό μοτίβου ή του κανόνα για τη σχέση δύο μεταβλητών

(συνέχεια από προηγούμενη σελίδα)

E170: ιδιοσυγκρασιακή απόδοση χρωμάτων στα σχήματα του επαναλαμβανόμενου μοτίβου, χωρίς να γίνεται η απαιτούμενη μετάφραση του μοτίβου από σχήμα σε χρώμα

E171: ιδιοσυγκρασιακή συμπλήρωση συγκεκριμένων αριθμών που ζητούνται, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η ακολουθία και η διάταξη των αριθμών

E90: υπόδειξη του τελευταίου στοιχείου της συλλογής μετά την απαρίθμηση και όχι αναφορά στο πλήθος του συνόλου των στοιχείων υποδηλώνοντας μη αντίληψη της πληθικής έννοιας του αριθμού

E161: ιδιοσυγκρασιακή σύγκριση πλήθους στοιχείων δύο συνόλων όπου το καθένα περιλαμβάνει και μεμονωμένα στοιχεία και ομαδοποίηση των μεμονωμένων στοιχείων (μονάδες, δεκάδες) η οποία δε βασίζεται στις σχέσεις που εμπλέκονται στην προβληματική κατάσταση

E172: ιδιοσυγκρασιακή ανάλυση συγκεκριμένου συνόλου στοιχείων αντί δημιουργία ίδιου αθροίσματος μέσα από εύρεση αγνώστων προσθετέων σε κατακόρυφη και οριζόντια διάταξη

Οι κωδικοί που εντάσσονται στη *Μονοδιάστατη χρήση/εφαρμογή μαθηματικών διαδικασιών* παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.38. Όπως μπορεί να διαπιστωθεί από τους κωδικούς που εντάσσονται σε αυτή την κατηγορία, ο συγκεκριμένος όρος έχει χρησιμοποιηθεί θέλοντας να τονιστεί η μορφή των διαδικασιών που έτειναν να χρησιμοποιούν οι μαθητές. Πιο ειδικά, επέλεξαν να εφαρμόζουν γνωστές διαδικασίες ή επέλεξαν να εφαρμόζουν ένα μοναδικό και συγκεκριμένο τρόπο βήμα προς βήμα. Σε κάποιες περιπτώσεις η συγκεκριμένη προσέγγιση συνέβαλε σε «εγκλωβισμό» των μαθητών στις συγκεκριμένες διαδικασίες με αποτέλεσμα να μην είναι σε θέση να ολοκληρώνουν τη διαδικασία που ακολουθούσαν.

Πίνακας 4.38

*Κωδικοί που Συνθέτουν την Διάσταση Μονοδιάστατη Χρήση/Εφαρμογή Μαθηματικών Διαδικασιών*

#### Μονοδιάστατη χρήση/εφαρμογή μαθηματικών διαδικασιών

E15: αποτελεσματική χρήση γνωστής διαδικασίας «απαρίθμηση όλων» όταν δε ζητείται ξεκάθαρα η εφαρμογή της

E7: απαρίθμηση μερικών στοιχείων και παράλειψη άλλων απαραίτητων στοιχείων όταν δεν ζητείται ξεκάθαρα η εφαρμογή της απαρίθμησης

E85: ολοκληρωμένη εφαρμογή διαδικασίας απαρίθμησης όταν ζητείται ξεκάθαρα η εφαρμογή της

E84: ολοκληρωμένη εφαρμογή διαδικασίας απαρίθμησης συνόλου μέχρι 5 στοιχείων όταν ζητείται ξεκάθαρα η εφαρμογή της

E33: χρήση αριθμητικής διαδικασίας «αρίθμηση από τον πρώτο»

E134: απαρίθμηση όλων αρχίζοντας από τον πρώτο

E31: ανάκληση γνωστού αποτελέσματος

E83: εντοπισμός των στοιχείων που αναπαριστούν το ζητούμενο αποτέλεσμα/αριθμό από και διαγραφή των υπόλοιπων στοιχείων

E97: αναγνώριση και εφαρμογή συμπληρωματικής πρόσθεσης

E119: χρήση αντίστροφης αρίθμησης



- E29: αντιστοιχισή πολλών στοιχείων σε ένα άλλο ή και το αντίστροφο
- E96: αντιστοιχισή κάθε στοιχείου ενός συνόλου με κάθε ένα στοιχείο από πολλαπλά σύνολα
- E95: ημιτελής αντιστοιχισή κάθε στοιχείου ενός συνόλου με κάθε ένα στοιχείο από πολλαπλά σύνολα
- E23: σύγκριση αριθμών χωρίς οπτική αναπαράσταση
- E66: σύγκριση του πλήθους στοιχείων δύο συνόλων όπου το καθένα περιλαμβάνει και μεμονωμένα στοιχεία και ομαδοποίησή μεμονωμένων στοιχείων (μονάδες, δεκάδες) μέσα από την ανάλυση και των δύο συνόλων σε μεμονωμένα στοιχεία και τη βήμα προς βήμα μέτρησή τους
- E65: ημιτελής σύγκριση πλήθους στοιχείων δύο συνόλων όπου το καθένα περιλαμβάνει και μεμονωμένα στοιχεία και ομαδοποίησή των μεμονωμένων στοιχείων (μονάδες, δεκάδες) με συγκεκριμένο/μοναδικό τρόπο λόγω μη αντίληψης των σχέσεων μεταξύ των ομαδοποιήσεων και των μεμονωμένων στοιχείων
- E162: αποτελεσματική χρήση στρατηγικής δοκιμής και ελέγχου χωρίς αναστοχασμό στις δοκιμές (τυχαίες δοκιμές) όταν οι άγνωστες ποσότητες είναι δύο
- E55: ημιτελής προσπάθεια εφαρμογής της στρατηγικής δοκιμής και ελέγχου χωρίς να γίνεται έλεγχος οποιασδήποτε δοκιμής και αναπροσαρμογής της διαδικασίας
- E107: μη αποτελεσματική χρήση στρατηγικής δοκιμής και ελέγχου χωρίς αναστοχασμό στις δοκιμές και δυνατότητα αναπροσαρμογής της διαδικασίας, όταν οι άγνωστες ποσότητες είναι περισσότερες από δύο
- E39: άμεση αναφορά στη διάταξη δύο οποιονδήποτε διαδοχικών αριθμών
- E160: εντοπισμός και αναφορά στη σχέση μεταξύ προηγούμενου και επόμενου αριθμού χωρίς εντοπισμό σχέσεων που υποβόσκουν μεταξύ οποιονδήποτε άλλων αριθμών
- E159: ανάκληση και απαγγελία της ακολουθίας των αριθμών για συμπλήρωση ή επέκταση της διάταξης αριθμών χωρίς άμεσο εντοπισμό και αναφορά στη σχέση μεταξύ προηγούμενου και επόμενου αριθμού
- E128: εντοπισμός/συμπλήρωση της διάταξης στοιχείων και χρήση της τακτικής έννοιας του αριθμού (1ος, 2ος, 3ος) μέσα από αξιοποίηση προηγούμενων ή επόμενων όρων
- E127: εντοπισμός/συμπλήρωση της διάταξης στοιχείων και χρήση της τακτικής έννοιας του αριθμού (1ος, 2ος, 3ος...) μόνο μέσα από σειριακή επεξεργασία/απαγγελία της ακολουθίας των αριθμών
- E173: ημιτελής προσπάθεια δημιουργίας ίδιου αθροίσματος με συγκεκριμένο/μοναδικό τρόπο μέσα από εύρεση αγνώστων προσθετέων σε κατακόρυφη και οριζόντια διάταξη, λόγω της αδυναμίας χειρισμού και των δύο διαστάσεων (οριζόντια και κατακόρυφη)
- E174: προσπάθεια δημιουργίας ίδιου αθροίσματος μέσα από εύρεση αγνώστων προσθετέων σε κατακόρυφη και οριζόντια διάταξη η οποία δεν ολοκληρώνεται λόγω της δυσκολίας εντοπισμού του κοινού προσθετέου που εμπλέκεται στις δύο διαστάσεις και επηρεάζει το ζητούμενο άθροισμα
- E136: αντιμετώπιση του εκτιμώμενου αποτελέσματος ως βέβαιου, χωρίς σύγκριση του με το σημείο αναφοράς και χωρίς αναπροσαρμογή της εκτίμησης
- E40: αντιμετώπιση της ακολουθίας του μοτίβου ως μια διαδικασία συνεχούς λεκτικής περιγραφής για επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση μοτίβου
- E163: απουσία ξεκάθαρης αναφοράς του κανόνα του μοτίβου κατά την επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση του μοτίβου
- E49: ημιτελής επεξεργασία για εντοπισμό μοτίβου ή κανόνα για τη σχέση δύο μεταβλητών χωρίς δυνατότητα αλλαγής του τρόπου επεξεργασίας
- E155: προσφυγή σε μοτίβο AB κατά τη μετάφραση ενός μοτίβου πιο σύνθετης δομής από σχήμα σε χρώμα

Ο όρος *Ευέλικτη χρήση/εφαρμογή μαθηματικών διαδικασιών* αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών να υιοθετούν εναλλακτικές διαδικασίες επίλυσης των μαθηματικών έργων πέραν από τις τυπικές μαθηματικές διαδικασίες. Επιπρόσθετα, οι διαδικασίες που εντάσσονται στη συγκεκριμένη κατηγορία, πρόσφεραν τη δυνατότητα

συντόμευσης της επίλυσης των μαθηματικών έργων όπως επίσης και τη δυνατότητα για αναστοχασμό στις διαδικασίες που ακολουθούσαν. Ο Πίνακας 4.39 παρουσιάζει τους κωδικούς που εντάσσονται στη συγκεκριμένη κατηγορία.

Πίνακας 4.39

*Κωδικοί που Συνθέτουν την Διάσταση Ευέλικτη Χρήση/Εφαρμογή Μαθηματικών Διαδικασιών*

---

Ευέλικτη χρήση/εφαρμογή μαθηματικών διαδικασιών

---

E54: χρήση γνωστών αποτελεσμάτων για εξαγωγή άλλων αποτελεσμάτων

E109: σύνθεση και ανάλυση δοσμένου αριθμού με διαφορετικούς τρόπους

E22: εντοπισμός διαφορετικών προσθετέων που δίνουν σταθερό άθροισμα μέσω της αύξησης του ενός προσθετέου κατά ένα και της μείωσης του άλλου προσθετέου κατά ένα (έννοια της ισότητας)

E175: δημιουργία ίδιου αθροίσματος μέσα από εύρεση αγνώστων προσθετέων σε κατακόρυφη και οριζόντια διάταξη μέσα από εντοπισμό και αντίληψη του κοινού προσθετέου που εμπλέκεται στις δύο διαστάσεις και επηρεάζει το ζητούμενο άθροισμα (έννοια ισότητας)

E177: σύγκριση του πλήθους στοιχείων δύο συνόλων όπου το καθένα περιλαμβάνει και μεμονωμένα στοιχεία και ομαδοποίηση μεμονωμένων στοιχείων (μονάδες, δεκάδες) μέσα από την δημιουργία και απαλοιφή κοινών ομαδοποιήσεων- δεκάδων (έννοια ισότητας) και σύγκριση μόνο των μεμονωμένων στοιχείων που απομένουν

E110: εστίαση και εντοπισμός διαφόρων σχέσεων που υποβόσκουν μεταξύ οποιονδήποτε αριθμών στην αριθμητική γραμμή ή σε πλαίσιο που παραπέμπει στην αριθμητική γραμμή

E129: εντοπισμός/συμπλήρωση της διάταξης στοιχείων και χρήση της τακτικής έννοιας του αριθμού (1ος, 2ος, 3ος ) μέσα από αξιοποίηση σχέσεων μεταξύ οποιοδήποτε όρων

E56: αποτελεσματική χρήση στρατηγικής δοκιμής και ελέγχου με αναστοχασμό στις δοκιμές, όταν οι άγνωστες ποσότητες είναι δύο

E108: αποτελεσματική χρήση στρατηγικής δοκιμής και ελέγχου με αναστοχασμό στις δοκιμές, όταν οι άγνωστες ποσότητες είναι περισσότερες από δύο

E138: αναστοχασμός και σύγκριση του εκτιμώμενου αποτελέσματος σε σχέση με το σημείο αναφοράς με δυνατότητα αναπροσαρμογής της εκτίμησης

E35: εστίαση σε ιδιότητα πράξεων που αναδύεται (αντιμεταθετική ιδιότητα), μέσω εντοπισμού σχέσεων που υποβόσκουν

E58: έλεγχος για εντοπισμός πολλαπλών απαντήσεων όταν απαιτούνται

E106: έλεγχος για εύρεση πολλαπλών απαντήσεων όταν δεν απαιτούνται

E86: αναγνώριση και αξιοποίηση μοτίβου που υπάρχει, ακόμη και όταν δεν απαιτείται η εύρεση του

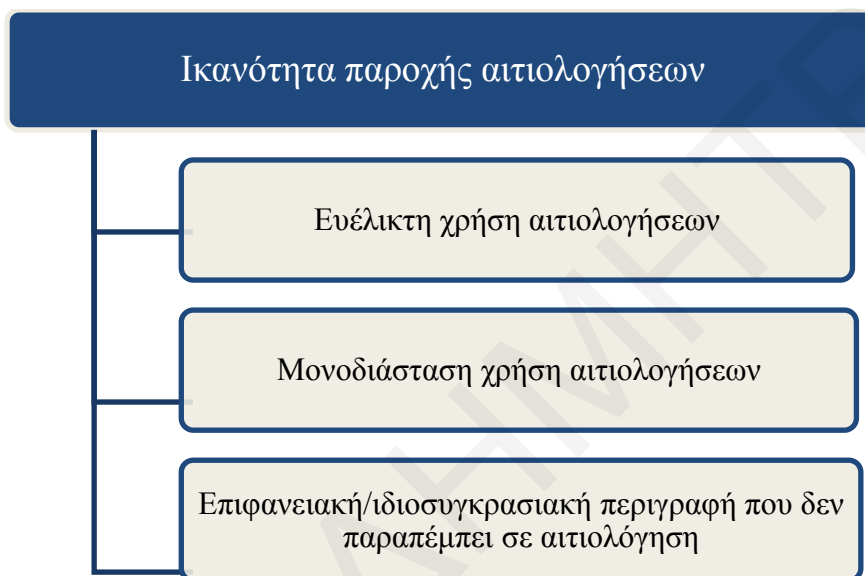
E144: αντιμετώπιση της ακολουθίας του μοτίβου ως μια συνεχής επανεμφάνιση χωρίς τέλος της μονάδας επανάληψης

E150: αντιμετώπιση της ακολουθίας του μοτίβου ως συνεχούς πρόσθεσης κάποιου μεγέθους στον προηγούμενο όρο για τη δημιουργία του επόμενου όρου

E164: περιγραφή και εφαρμογή του κανόνα του μοτίβου για επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση του μοτίβου

---

Ακολουθως, παρουσιάζονται οι ιδιότητες όπως έχουν προκύψει μέσα από την εφαρμογή της αξονικής κωδικοποίησης για την κατηγορία *Ικανότητα παροχής αιτιολογήσεων*. Όπως διαφαίνεται από το Διάγραμμα 4.10, οι κωδικοί που εντάσσονται στη συγκεκριμένη κατηγορία παρουσιάζουν τρεις βασικές ιδιότητες: *Ευέλικτη χρήση αιτιολογήσεων*, *Μονοδιάστατη χρήση αιτιολογήσεων* και *Επιφανειακή/ιδιοσυγκρασιακή περιγραφή που δεν παραπέμπει σε αιτιολόγηση*.



Διάγραμμα 4.10: Διαστάσεις της κατηγορίας ικανότητα παροχής αιτιολογήσεων

Η πρώτη διάσταση της κατηγορίας *Ικανότητα παροχής αιτιολογήσεων*, αναφέρεται στην *Επιφανειακή/ιδιοσυγκρασιακή περιγραφή που δεν παραπέμπει σε αιτιολόγηση*. Όπως μπορεί να διαπιστωθεί από τους κωδικούς του Πίνακα 4.40 που εντάσσονται στη συγκεκριμένη κατηγορία, ο όρος αυτός αναφέρεται σε ιδιοσυγκρασιακές λεκτικές περιγραφές των μαθητών της έρευνας οι οποίες δεν παρέπεμπαν σε αιτιολόγηση διότι βασιζόνταν σε άσχετα στοιχεία/δεδομένα σε σχέση με την κατάσταση/πρόβλημα. Σε αυτή τη διάσταση εμπίπτουν και οι απαντήσεις που δίνονταν μετά από ερώτημα του ερευνητή για αιτιολόγηση οι οποίες δεν απαντούσαν στο ερώτημα «γιατί, πώς κλπ».

#### Πίνακας 4.40

*Κωδικοί που Συνθέτουν την Διάσταση Επιφανειακή/Ιδιοσυγκρασιακή Περιγραφή που δεν Παραπέμπει σε Αιτιολόγηση*

---

<i>Επιφανειακή/ιδιοσυγκρασιακή περιγραφή που δεν παραπέμπει σε αιτιολόγηση</i>
E4: αιτιολόγηση που βασίζεται σε άσχετα στοιχεία με το πρόβλημα/κατάσταση
E194: παροχή απάντησης που δεν απαντά στο ερώτημα γιατί, πώς

---

Η δεύτερη διάσταση της κατηγορίας *Ικανότητα χρήσης αιτιολογήσεων* αφορά στην *Μονοδιάστατη χρήση αιτιολογήσεων* η οποία παραπέμπει στις περιπτώσεις όπου οι μαθητές εγκλωβίζονταν σε έναν και μοναδικό τρόπο προσπάθειας αιτιολόγησης. Ο όρος *Μονοδιάστατη χρήση αιτιολογήσεων* αναφέρεται στην προσκόλληση των μαθητών είτε σε απλή περιγραφή/επανάληψη του τρόπου που εργάστηκαν (επαναλαμβάνοντας απλά με λόγια τη διαδικασία που ακολούθησαν) ή σε συγκεκριμένο/α παράδειγμα/τα που εντόπισαν (π.χ. αριθμητικά) ή στην αναφορά σε συγκεκριμένο στοιχείο ή πληροφορία ή ακόμη και στην αναφορά σε συγκεκριμένο λανθασμένο παράδειγμα (εφόσον δεν γνώριζαν ότι το παράδειγμα που χρησιμοποιούσαν ήταν έτσι και αλλιώς λανθασμένο). Ο Πίνακας 4.41 παρουσιάζει τους κωδικούς που εντάσσονται στη συγκεκριμένη διάσταση.

#### Πίνακας 4.41

*Κωδικοί που Συνθέτουν την Διάσταση Μονοδιάστατη Χρήση Αιτιολογήσεων*

---

<i>Μονοδιάστατη χρήση αιτιολογήσεων</i>
E18: αιτιολόγηση που βασίζεται σε απλή περιγραφή μαθηματικής διαδικασίες
E195: αιτιολόγηση που βασίζεται σε συγκεκριμένο ή συγκεκριμένα αριθμητικά παραδείγματα
E19: αιτιολόγηση που βασίζεται μόνο σε συγκεκριμένο λανθασμένο παράδειγμα
E158: αιτιολόγηση που βασίζεται σε υπόδειξη μερικών πληροφοριών της εικόνας/εργαλείου

---

Η τελευταία διάσταση της κατηγορίας *Ικανότητα παροχής αιτιολογήσεων* αφορά στην *Ευέλικτη χρήση αιτιολογήσεων* και αναφέρεται σε ενέργειες των μαθητών οι οποίες επιδείκνυαν ιδιαίτερη ευελιξία όσον αφορά στην παροχή αιτιολογήσεων που βασίζονται σε γενικευμένη δήλωση. Στον Πίνακα 4.42 παρουσιάζεται ο κωδικός που αντιπροσωπεύει τη συγκεκριμένη διάσταση. Ο όρος ευελιξία, αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών να διατυπώνουν αιτιολογήσεις οι οποίες προχωρούν πέρα από συγκεκριμένα παραδείγματα και εμπλέκουν κατάλληλη διατύπωση της γενίκευσης ή/και την ικανότητά τους να

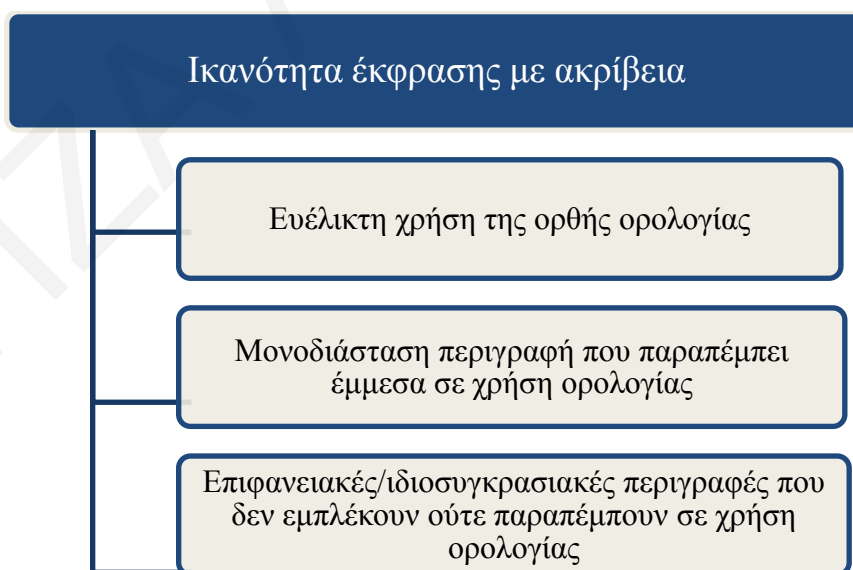
διατυπώνουν αυτές τις γενικευμένες δηλώσεις με διαφορετικούς τρόπους. Η ευελιξία αυτή αναφέρεται, επίσης, στην ικανότητά τους να μεταβαίνουν από την απλή υπόδειξη της απάντησης στην αιτιολόγησή της μέσω γενικευμένης δήλωσης όταν το ζητούσε ο ερευνητής, αναδεικνύοντας την επίγνωσή τους για την ανάγκη αιτιολόγησης και για το τι απαντά ικανοποιητικά στο «γιατί βρήκες αυτό, ή πώς κατέληξες εδώ, ή πώς είσαι σίγουρος/η για την απάντησή σου».

Πίνακας 4.42

*Κωδικοί που Συνθέτουν την Διάσταση Ευέλικτη Χρήση Αιτιολογήσεων*

Ευέλικτη χρήση αιτιολογήσεων
E25: αιτιολόγηση που βασίζεται σε γενικευμένη δήλωση
E193: παροχή εναλλακτικών αιτιολογήσεων που βασίζονται σε γενικευμένες δηλώσεις

Τέλος, παρουσιάζονται οι ιδιότητες όπως έχουν προκύψει μέσα από την εφαρμογή της αξονικής κωδικοποίησης για την κατηγορία *Ικανότητα έκφρασης με ακρίβεια*. Όπως διαφαίνεται από το Διάγραμμα 4.11, οι κωδικοί που εντάσσονται στη συγκεκριμένη κατηγορία παρουσιάζουν τρεις βασικές ιδιότητες: *Ευέλικτη χρήση ορθής ορολογίας*, *Μονοδιάστατη περιγραφή που παραπέμπει έμμεσα σε χρήση ορολογίας* και *Επιφανειακή/ιδιοσυγκρασιακή περιγραφή που δεν εμπλέκει ούτε παραπέμπει σε χρήση ορολογίας*.



*Διάγραμμα 4.11: Διαστάσεις της κατηγορίας ικανότητα έκφρασης με ακρίβεια*

Η πρώτη διάσταση της κατηγορίας *Ικανότητα έκφρασης με ακρίβεια* αναφέρεται στην *Επιφανειακή/ιδιοσυγκρασιακή περιγραφή που δεν εμπλέκει ούτε παραπέμπει σε χρήση ορολογίας*. Όπως μπορεί να διαπιστωθεί από τους κωδικούς του Πίνακα 4.43 που εντάσσονται στη συγκεκριμένη κατηγορία, ο όρος αυτός αναφέρεται σε ιδιοσυγκρασιακές λεκτικές περιγραφές των μαθητών της έρευνας οι οποίες δεν παρέπεμπαν ούτε σε έμμεση περιγραφή του όρου ούτε σε χρήση της κατάλληλης ορολογίας που εμπλεκόταν στην κατάσταση/πρόβλημα.

#### Πίνακας 4.43

*Κωδικοί που Συνθέτουν την Διάσταση Επιφανειακή/Ιδιοσυγκρασιακή Περιγραφή που δεν Εμπλέκει Ούτε Παραπέμπει σε Χρήση Ορολογίας*

Επιφανειακή/ιδιοσυγκρασιακή περιγραφή που δεν εμπλέκει ούτε παραπέμπει σε χρήση ορολογίας

E178: καμία χρήση του όρου του μοτίβου και καμία προσπάθεια περιγραφής που να παραπέμπει στον όρο του μοτίβου

E181: καμία χρήση του όρου της πρόσθεσης και καμία προσπάθεια περιγραφής που να παραπέμπει στον όρο της πρόσθεσης

E184: καμία χρήση του όρου της αφαίρεσης και καμία προσπάθεια περιγραφής που να παραπέμπει στον όρο της αφαίρεσης

E187: καμία χρήση του όρου της ισότητας και καμία προσπάθεια περιγραφής που να παραπέμπει στον όρο της ισότητας

E190: καμία χρήση του όρου των όρων μονάδες/δεκάδες και καμία προσπάθεια περιγραφής που να παραπέμπει στους όρους μονάδες/δεκάδες

E198: καμία χρήση του όρου της αριθμητικής γραμμής και καμία προσπάθεια περιγραφής που να παραπέμπει στον όρο της αριθμητικής γραμμής

E207: απουσία χρήσης της ορολογίας των αριθμών/αριθμολέξεων για τους περισσότερους αριθμούς μέχρι και το 10

E210: καμία χρήση των όρων που αφορούν σε σύγκριση αριθμών (μεγαλύτερος, μικρότερος) και καμία προσπάθεια έμμεσης περιγραφής που να παραπέμπει στους όρους σύγκρισης (μεγαλύτερος, μικρότερος)

Η δεύτερη διάσταση της κατηγορίας *Ικανότητα έκφρασης με ακρίβεια* αφορά στην μονοδιάστατη περιγραφή που παραπέμπει έμμεσα σε χρήση ορολογίας. Ο όρος *Μονοδιάστατη περιγραφή που παραπέμπει έμμεσα σε χρήση ορολογίας* αναφέρεται στην επιμονή των μαθητών και στην προσκόλληση τους σε έναν και μοναδικό τρόπο έμμεσης περιγραφής μιας βασικής έννοιας που εμπλεκόταν στις καταστάσεις, χωρίς να επιδεικνύουν ικανότητα ανάκλησης ή χρήσης της ακριβούς ορολογίας που εμπλεκόταν στην κατάσταση/πρόβλημα (ακόμη και μετά από παρότρυνση του ερευνητή). Πιο συγκεκριμένα, οι μονοδιάστατες αυτές περιγραφές, άλλοτε ήταν κατάλληλες ώστε να περιγράψουν έμμεσα τον όρο που εμπλεκόταν στην κατάσταση και άλλοτε λιγότερο

επιτυχημένες στο να αποδώσουν ξεκάθαρα τον όρο στον οποίο αναφέρονταν. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο όρος μονοδιάστατη περιγραφή αναφέρεται και στις περιπτώσεις ανάκλησης και χρήσης ορθής ορολογίας (π.χ. ορολογία αριθμών/αριθμολέξεων) η οποία όμως περιορίζεται σε ένα μικρό εύρος περιπτώσεων (π.χ. αριθμών μέχρι το 20) χωρίς ικανότητα ευέλικτης μεταφοράς σε μεγαλύτερο εύρος περιπτώσεων. Ο Πίνακας 4.44 παρουσιάζει τους κωδικούς που εντάσσονται στη συγκεκριμένη διάσταση.

#### Πίνακας 4.44

*Κωδικοί που Συνθέτουν την Διάσταση Μονοδιάστατη Περιγραφή που Παραπέμπει Έμμεσα σε Χρήση Ορολογίας*

---

<i>Μονοδιάστατη περιγραφή που παραπέμπει έμμεσα σε χρήση ορολογίας</i>
E179: προσπάθεια περιγραφής που να παραπέμπει στον όρο του μοτίβου, χωρίς απευθείας χρήση του όρου του μοτίβου
E182: προσπάθεια περιγραφής που να παραπέμπει στον όρο της πρόσθεσης, χωρίς απευθείας χρήση του όρου της πρόσθεσης
E185: προσπάθεια περιγραφής που να παραπέμπει στον όρο της αφαίρεσης, χωρίς απευθείας χρήση του όρου της αφαίρεσης
E188: προσπάθεια περιγραφής που να παραπέμπει στον όρο της ισότητας, χωρίς απευθείας χρήση του όρου της ισότητας
E191: προσπάθεια περιγραφής που να παραπέμπει στους όρους μονάδες/δεκάδες, χωρίς απευθείας χρήση των όρων μονάδες/δεκάδες
E197: προσπάθεια περιγραφής που να παραπέμπει στον όρο αριθμητική γραμμή χωρίς απευθείας χρήση του όρου της αριθμητική γραμμή
E206: χρήση της ορολογίας των αριθμών/αριθμολέξεων στο κατάλληλο πλαίσιο για αριθμούς μέχρι το 20
E209: κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει σε όρους που αφορούν σε σύγκριση αριθμών και χωρίς απευθείας χρήση των όρων αυτών (μεγαλύτερος, μικρότερος)

---

Η τελευταία διάσταση της κατηγορίας *Ικανότητα έκφρασης με ακρίβεια* αφορά στην *Ευέλικτη επεξεργασία/χρήση της ορθής ορολογίας* και αναφέρεται σε ενέργειες των μαθητών οι οποίες επιδείκνυαν ιδιαίτερη ευελιξία όσον αφορά στην χρήση της ορθής ορολογίας. Στον Πίνακα 4.45 παρουσιάζονται οι κωδικοί που συνθέτουν τη συγκεκριμένη διάσταση. Ο όρος ευελιξία, αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών να ανακαλούν με ευκολία και να χρησιμοποιούν ορθά τους όρους που εμπλέκονταν στις καταστάσεις/προβλήματα και να εναλλάσσουν με επιτυχία την χρήση των διαφορετικών όρων που τυχόν εμπλέκονταν στην κατάσταση/πρόβλημα.

Πίνακας 4.45

*Κωδικοί που Συνθέτουν την Διάσταση Ευέλικτη Χρήση της Ορθής Ορολογίας*

---

Ευέλικτη χρήση της ορθής ορολογίας

---

- E180: Ορθή χρήση του όρου του μοτίβου στο κατάλληλο πλαίσιο
  - E183: Ορθή χρήση του όρου της πρόσθεσης στο κατάλληλο πλαίσιο
  - E186: Ορθή χρήση του όρου της αφαίρεσης στο κατάλληλο πλαίσιο
  - E189: Ορθή χρήση του όρου της ισότητας στο κατάλληλο πλαίσιο
  - E192: Ορθή χρήση των όρων μονάδες/δεκάδες στο κατάλληλο πλαίσιο
  - E196: Ορθή χρήση του όρου αριθμητική γραμμή στο κατάλληλο πλαίσιο
  - E205: Χρήση της ορολογίας των αριθμών/αριθμολέξεων στο κατάλληλο πλαίσιο για αριθμούς μέχρι το 100
  - E208: Ορθή χρήση των όρων που αφορούν σε σύγκριση αριθμών (μεγαλύτερος, μικρότερος) στο κατάλληλο πλαίσιο
-



## Εμπειρικά Θεμελιωμένη Θεωρία – Επιλεκτική Κωδικοποίηση

Η επιλεκτική κωδικοποίηση, όπως προαναφέρθηκε στο κεφάλαιο της Μεθοδολογίας, βασίζεται στα αποτελέσματα της ανοιχτής και της αξονικής κωδικοποίησης και έχει ως στόχο τη διάκριση της κεντρικής έννοιας η οποία και οργανώνει τις άλλες έννοιες που έχουν εντοπισθεί σε ένα σύνολο κειμένων. Δηλαδή επιδιώκεται η ολοκλήρωση της θεωρίας και η οικοδόμηση ενός συνεκτικού θεωρητικού συστήματος, που θα αξιολογεί και θα ενσωματώνει τις βασικές κατηγορίες και το πλέγμα των παραγόμενων σχέσεων του υπό εξέταση φαινομένου.

Η ανάλυση των δεδομένων της παρούσας έρευνας μέσω της εφαρμογής των σταδίων που προαναφέρθηκαν, έχουν συμβάλει στη δημιουργία ενός μοντέλου το οποίο επεξηγεί τους παράγοντες που φαίνεται να αλληλεπιδρούν κατά την επίλυση μαθηματικών έργων από μαθητές προδημοτικής και που καθορίζουν την επιτυχία ή την αποτυχία των μαθητών αλλά και τη συμπεριφορά και τις προσεγγίσεις των μαθητών αυτών κατά την επίλυση των μαθηματικών έργων. Πιο συγκεκριμένα στις συνθήκες του συγκεκριμένου μοντέλου φαίνεται να εντάσσονται παράγοντες όπως: *Μαθηματικό Έργο*, *Μαθητής* και *Διδασκαλία*. Για τους σκοπούς της παρούσας έρευνας, δε δόθηκε έμφαση και δεν διερευνήθηκαν εις βάθος οι συγκεκριμένες συνθήκες. Ωστόσο, στη συνέχεια ακολουθεί σύντομη περιγραφή των πιο πάνω συνθηκών.

Ο όρος *Μαθηματικό Έργο* αναφέρεται στο είδος των έργων που είχαν να αντιμετωπίσουν οι μαθητές. Συγκεκριμένα, στην παρούσα έρευνα οι μαθητές είχαν να αντιμετωπίσουν έργα που σχετίζονται με τους Αριθμούς και τα Μοτίβα. Πιο συγκεκριμένα στην ενότητα περιεχομένου *Αριθμοί*, οι μαθητές είχαν να αντιμετωπίσουν έργα αρίθμησης και απαρίθμησης, αντιστοίχισης, σύγκρισης και διάταξης αριθμών καθώς και έργα πρόσθεσης/αφαίρεσης, έργα σύνθεσης και ανάλυσης αριθμού καθώς και έργα εκτίμησης πλήθους στοιχείων. Αντίστοιχα, στα Μοτίβα, οι μαθητές είχαν να αντιμετωπίσουν έργα συμπλήρωσης και επέκτασης, επαναλαμβανόμενων και αναπτυσσόμενων μοτίβων, καθώς και έργα μετάφρασης επαναλαμβανόμενου μοτίβου. Επιπρόσθετα, στη συγκεκριμένη κατηγορία έργων συμπεριλήφθηκε και ένα έργο που ενέπλεκε τιμές εισόδου και εξόδου σε πίνακα τιμών, όπου χρειαζόταν η εύρεση του κανόνα/μοτίβου για τη συμπλήρωση άλλων τιμών εισόδου ή εξόδου που ζητούνταν.

Ο παράγοντας *Μαθητής* αναφέρεται σε ατομικά χαρακτηριστικά που παρέχουν πληροφορίες για την γνωστική ικανότητα των μαθητών όπως για παράδειγμα το δείκτη νοημοσύνης (IQ), το γνωστικό στύλ την ταχύτητα επεξεργασίας των πληροφοριών. Τέλος ο παράγοντας *Διδασκαλία* αναφέρεται στο είδος της διδασκαλίας που είχαν δεχτεί οι

μαθητές μέχρι τη χρονική στιγμή έναρξης της έρευνας. Πιο συγκεκριμένα η διδασκαλία που είχαν δεχτεί οι μαθητές ενδέχεται να διέφερε ως προς την εμπλοκή μαθητοκεντρικής ή δασκαλοκεντρικής προσέγγισης, την αξιοποίηση του μοντέλου διερευνητικής μάθησης και το βαθμό καθώς και τον τρόπο αξιοποίησης και εμπλοκής της τεχνολογίας.

Τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας υποδεικνύουν τις διαστάσεις που φαίνεται να επιδρούν και να επηρεάζουν την επίδοση των μαθητών της έρευνας και οι οποίοι αποτελούν ουσιαστικά τις συνιστώσες που περιγράφουν την ικανότητα των μαθητών προδημοτικής και αλληλεπιδρούν κατά την επίλυση έργων που αφορούν στην έννοια των Αριθμών και των Μοτίβων. Συγκεκριμένα η *Ικανότητα διαχείρισης και ερμηνείας δεδομένων προβλήματος*, η *Ικανότητα επεξεργασίας και χρήσης αναπαραστάσεων*, η *Ικανότητα χρήσης μαθηματικών διαδικασιών*, η *Ικανότητα παροχής αιτιολογήσεων* και η *Ικανότητα έκφρασης με ακρίβεια* είναι οι παράγοντες που καθορίζουν την πορεία των μαθητών κατά την ενασχόλησή τους με έργα από την περιοχή των Αριθμών και των Μοτίβων.

Η διάσταση της *Ικανότητας διαχείρισης και ερμηνείας δεδομένων προβλήματος*, αναφέρεται στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές είναι σε θέση να επεξεργάζονται ή/και να διαχειρίζονται τα δεδομένα των μαθηματικών έργων που είχαν να αντιμετωπίσουν. Όπως διαφάνηκε από την ανάλυση των αποτελεσμάτων, οι μαθητές της έρευνας ήταν σε θέση να επεξεργάζονται και να διαχειρίζονται τα δεδομένα των προβλημάτων που τους δόθηκαν με τρεις τρόπους, αφού προέκυψαν τρεις διαφορετικές διαστάσεις στη συγκεκριμένη κατηγορία: *Επιφανειακή/ιδιοσυγκρασιακή επεξεργασία/χειρισμός δεδομένων προβλήματος*, *Μονοδιάστατη επεξεργασία/χειρισμός δεδομένων προβλήματος* και *Ευέλικτη επεξεργασία/χειρισμός δεδομένων προβλήματος*. Ο όρος *Επιφανειακή/ιδιοσυγκρασιακή επεξεργασία/χειρισμός δεδομένων προβλήματος* αναφέρεται στις περιπτώσεις των μαθητών που αγνοούσαν τα δεδομένα του προβλήματος και είτε πρόσθεταν περιττά στοιχεία τα οποία σχετίζονταν με οικείες ιστορίες/σενάρια ή προσωπικές προτιμήσεις, είτε επαναλάμβαναν, χωρίς να επεξεργάζονται, ένα ή μερικά στοιχεία του προβλήματος ως απαντήσεις στα ερωτήματα. Ο όρος *Μονοδιάστατη επεξεργασία/χειρισμός δεδομένων προβλήματος* αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών να λαμβάνουν υπόψη είτε όλα είτε μόνο μερικά από τα δεδομένα του προβλήματος, χωρίς ωστόσο να είναι σε θέση να εντοπίζουν περαιτέρω συσχετίσεις μεταξύ τους οι οποίες μπορούσαν να διευκολύνουν και να επιταχύνουν τη διαδικασία επίλυσης των μαθηματικών έργων που είχαν να αντιμετωπίσουν. Η τελευταία διάσταση της συγκεκριμένης κατηγορίας, χαρακτηρίζεται ως *Ευέλικτη επεξεργασία/χειρισμός δεδομένων προβλήματος*, που όπως έχει προαναφερθεί στο

κεφάλαιο της αξονικής κωδικοποίησης, αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών της έρευνας να επεξεργάζονται με κατάλληλο τρόπο τα δεδομένα του προβλήματος και να εντοπίζουν ομοιότητες μεταξύ των δεδομένων. Ο εντοπισμός των συγκεκριμένων ομοιοτήτων, ήταν σε θέση να οδηγήσει τους μαθητές στον εντοπισμό συσχετίσεων που επέτρεπαν την υιοθέτηση συντομευμένων ή μη τυπικών λύσεων.

Ακολούθως, η διάσταση της *Ικανότητας επεξεργασίας και χρήσης αναπαραστάσεων*, αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών της έρευνας να χειρίζονται, να χρησιμοποιούν, να μετασχηματίζουν και να επεξεργάζονται δοσμένες αναπαραστάσεις που δόθηκαν έτοιμες στους μαθητές καθώς και να αξιοποιούν εργαλεία/εποπτικά μέσα (π.χ. κύβοι, χάντρες πραγματικά αντικείμενα), εικόνες ή μοντέλα (αριθμητική γραμμή, πλέγμα αριθμών) για την επίλυση των μαθηματικών έργων. Παράλληλα, στη συγκεκριμένη κατηγορία εντάσσεται και η ικανότητα των μαθητών της έρευνας να δημιουργούν αναπαραστάσεις (είτε εξωτερικές είτε νοερές αναπαραστάσεις). Όπως διαπιστώθηκε από την ανάλυση των αποτελεσμάτων, οι μαθητές ήταν σε θέση να χειρίζονται/να επεξεργάζονται δοσμένες αναπαραστάσεις, εργαλεία, εικόνες και μοντέλα αλλά και να δημιουργούν αναπαραστάσεις με τρεις διαφορετικούς τρόπους:

*Επιφανειακή/ιδιοσυγκρασιακή επεξεργασία/χρήση αναπαραστάσεων, Μονοδιάστατη επεξεργασία/χρήση αναπαραστάσεων, Ευέλικτη επεξεργασία/χρήση αναπαραστάσεων.* Ο όρος *Επιφανειακή/ιδιοσυγκρασιακή επεξεργασία/χρήση αναπαραστάσεων*, αναφέρεται στην ιδιοσυγκρασιακή ενασχόληση των μαθητών της έρευνας με τις αναπαραστάσεις. Η αξιοποίηση και επεξεργασία των αναπαραστάσεων σε αυτές τις περιπτώσεις, δεν ήταν εφικτό να οδηγήσει σε ορθή επίλυση των μαθηματικών έργων καθώς δεν παρέπεμπε σε ουσιαστική χρήση τους. Αντίστοιχα, η δεύτερη διάσταση της συγκεκριμένης κατηγορίας αναφέρεται στη *Μονοδιάστατη επεξεργασία/χρήση αναπαραστάσεων*. Η συγκεκριμένη διάσταση φαίνεται να συνδέεται άμεσα με προσκόλληση σε ένα και μοναδικό τρόπο χειρισμού των δοσμένων αναπαραστάσεων, χωρίς να υπάρχει η δυνατότητα χρήσης οποιουδήποτε εναλλακτικού τρόπου προσέγγισής τους. Η τελευταία διάσταση της κατηγορίας αυτής χαρακτηρίζεται ως: *Ευέλικτη επεξεργασία/χρήση αναπαραστάσεων* και αναφέρεται στις περιπτώσεις των μαθητών, όπου οι ενέργειές τους επιδείκνυαν ιδιαίτερη ευελιξία όσον αφορά στην επεξεργασία και χρήση των αναπαραστάσεων που τους δόθηκαν. Συγκεκριμένα, ο όρος ευελιξία αναφέρεται στις περιπτώσεις των μαθητών που ήταν σε θέση να επεξεργάζονται τις αναπαραστάσεις με διαφορετικούς τρόπους για την επίλυση των μαθηματικών έργων, να χειρίζονται με στρατηγικό τρόπο τα εργαλεία, τις εικονικές αναπαραστάσεις και τα μοντέλα που τους δόθηκαν, καθώς και να αναλύουν τις

δοσμένες αναπαραστάσεις με τρόπο που να επιτρέπει τον εντοπισμό σχέσεων. Παράλληλα, ο όρος ευελιξία αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών να απεικονίζουν νοερά καταστάσεις με τρόπο που να φανερώνει οργάνωση των εμπλεκόμενων στοιχείων.

Η *Ικανότητα χρήσης μαθηματικών διαδικασιών* αποτελεί άλλη μία διάσταση που φαίνεται να διαδραμάτισε ρόλο κατά τη διαδικασία επίλυσης των μαθηματικών έργων. Ο συγκεκριμένος παράγοντας αφορά στις διαδικασίες και στρατηγικές τις οποίες υιοθετούσαν οι μαθητές για να επιλύσουν τα μαθηματικά έργα. Οι μαθητές ήταν σε θέση να χρησιμοποιούν μαθηματικές διαδικασίες με τρεις διαφορετικούς τρόπους: *Επιφανειακές/ιδιοσυγκρασιακές διαδικασίες/προσεγγίσεις, Μονοδιάστατη χρήση/εφαρμογή μαθηματικών διαδικασιών και Ευέλικτη χρήση/εφαρμογή μαθηματικών διαδικασιών.* Η πρώτη διάσταση της κατηγορίας *Ικανότητα χρήσης μαθηματικών διαδικασιών* αναφέρεται στην επιλογή και εφαρμογή *Επιφανειακών/ιδιοσυγκρασιακών διαδικασιών/προσεγγίσεων.* Συγκεκριμένα, ο όρος *Επιφανειακές/ιδιοσυγκρασιακές προσεγγίσεις* αναφέρεται στην υιοθέτηση προσεγγίσεων που δεν συνδέονται με τα μαθηματικά ή με μαθηματικό περιεχόμενο και που στηρίζονται σε ενέργειες, μη σχετικές με το μαθηματικό έργο. Αντίστοιχα, η δεύτερη διάσταση της συγκεκριμένης κατηγορίας *Μονοδιάστατη χρήση/εφαρμογή μαθηματικών διαδικασιών,* αναφέρεται στην εφαρμογή συγκεκριμένων γνωστών μαθηματικών διαδικασιών με περιορισμένη αντίληψη της εφαρμογής τους ή με μη ολοκληρωμένη εφαρμογή τους ή στην επιλογή και εφαρμογή ενός συγκεκριμένου και μοναδικού τρόπου βήμα προς βήμα. Όπως διαφάνηκε από την ανάλυση των αποτελεσμάτων, η επιλογή και εφαρμογή ενός και μοναδικού τρόπου βήμα προς βήμα, πολλές φορές δημιουργούσε εγκλωβισμό σε χρονοβόρες διαδικασίες και κατ' επέκταση στη μη ολοκλήρωσή τους. Η τρίτη διάσταση της κατηγορίας *Ικανότητα χρήσης μαθηματικών διαδικασιών* η οποία αναφέρεται στην *Ευέλικτη χρήση/εφαρμογή μαθηματικών διαδικασιών,* εμπλέκει τη χρήση εναλλακτικών διαδικασιών που διαφέρουν από τις τυπικές μαθηματικές διαδικασίες. Οι συγκεκριμένες εναλλακτικές μαθηματικές διαδικασίες, σε αρκετές περιπτώσεις, επιτρέπουν ή/και οδηγούν σε συντομευμένες λύσεις. Επιπρόσθετα, η υιοθέτηση αυτών των εναλλακτικών διαδικασιών ήταν άμεσα συνυφασμένη με συνεχή και παράλληλο αναστοχασμό στις συγκεκριμένες διαδικασίες.

Η διάσταση της *Ικανότητας παροχής αιτιολογήσεων,* αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών να αιτιολογούν την απάντησή τους ή τον τρόπο σκέψης τους και συγκεκριμένα στο είδος της αιτιολόγησης που χρησιμοποιούν. Οι μαθητές ήταν σε θέση να εκφράζουν και να χρησιμοποιούν αιτιολογήσεις με τους ακόλουθους τρεις τρόπους: *Επιφανειακή/ιδιοσυγκρασιακή περιγραφή που δεν παραπέμπει σε αιτιολόγηση,*

*Μονοδιάσταση παροχή/εφαρμογή αιτιολογήσεων και Ευέλικτη χρήση αιτιολογήσεων.* Η πρώτη διάσταση της κατηγορίας αυτής, η *Επιφανειακή/ιδιοσυγκρασιακή περιγραφή που δεν παραπέμπει σε αιτιολόγηση*, αναφέρεται σε ιδιοσυγκρασιακές λεκτικές περιγραφές των μαθητών της έρευνας οι οποίες δεν παρέπεμπαν σε αιτιολόγηση διότι βασίζονταν σε άσχετα στοιχεία/δεδομένα σε σχέση με την κατάσταση/πρόβλημα ή δεν αποτελούσαν καν απαντήσεις στο ερώτημα «γιατί ή πώς». Η δεύτερη διάσταση της συγκεκριμένης κατηγορίας η *Μονοδιάστατη παροχή/εφαρμογή αιτιολογήσεων* αναφέρεται στην προσκόλληση των μαθητών για αιτιολόγηση μέσω μόνο απλής περιγραφής/επανάληψης της πορείας που ακολούθησαν προηγουμένως, μέσω συγκεκριμένου/ων παραδείγματος/των που εντόπισαν (π.χ. αριθμητικά), μέσω αναφοράς σε συγκεκριμένο στοιχείο ή πληροφορία του προβλήματος ή ακόμη και μέσω αναφοράς σε συγκεκριμένο λανθασμένο παράδειγμα. Η τελευταία διάσταση, η *Ευέλικτη χρήση αιτιολογήσεων* αναφέρεται σε ενέργειες των μαθητών οι οποίες επιδείκνυαν ευελιξία όσον αφορά στην παροχή αιτιολογήσεων που βασίζονται σε γενικευμένη δήλωση ή/και ικανότητα διατύπωσης αυτών των γενικευμένων δηλώσεων με διαφορετικούς τρόπους.

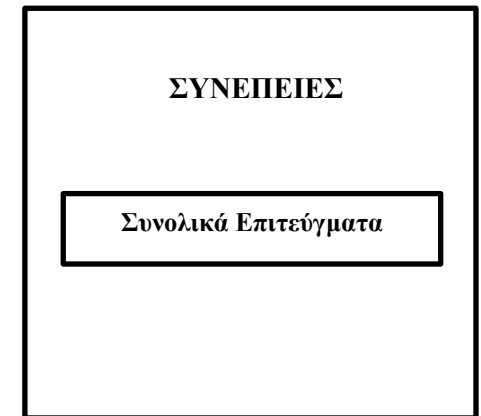
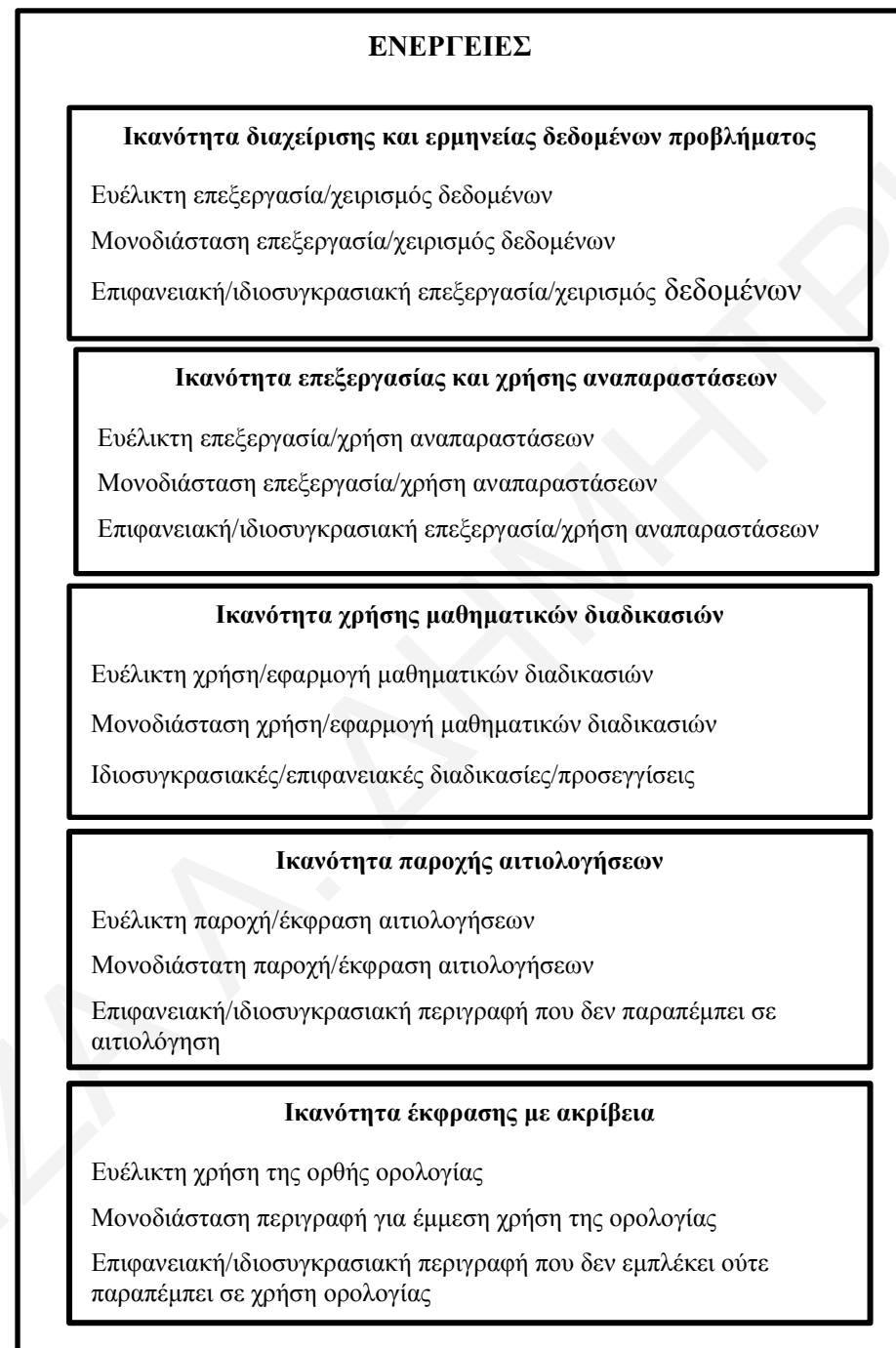
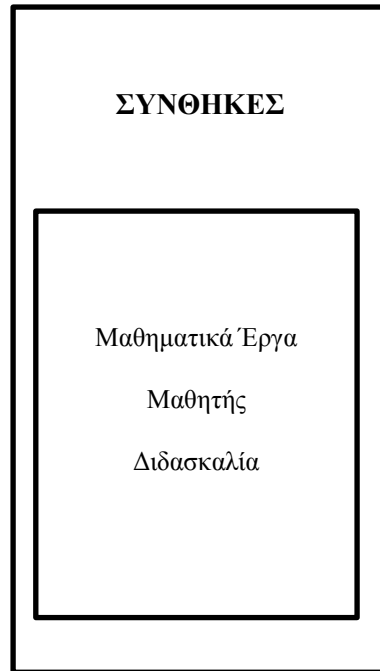
Η πέμπτη διάσταση, η *Ικανότητα έκφρασης με ακρίβεια*, αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών να χρησιμοποιούν στις λεκτικές τους περιγραφές τους, κατάλληλους μαθηματικούς όρους ή ορολογία (εννοιών ή διαδικασιών). Η ύπαρξη ακρίβειας στην ορολογία και η διαφοροποιημένη ικανότητα των μαθητών της εργασίας να εκφράζονται με ακρίβεια περιγράφεται μέσα από τους ακόλουθους τρεις τρόπους:

*Επιφανειακή/ιδιοσυγκρασιακή περιγραφή που δεν εμπλέκει ούτε παραπέμπει σε χρήση ορολογίας, Μονοδιάστατη περιγραφή για έμμεση χρήση της ορολογίας και Ευέλικτη χρήση της ορθής ορολογίας.* Η *Επιφανειακή/ιδιοσυγκρασιακή περιγραφή που δεν εμπλέκει ούτε παραπέμπει σε χρήση ορολογίας*, αναφέρεται σε ιδιοσυγκρασιακές λεκτικές περιγραφές των μαθητών της έρευνας οι οποίες δεν παρέπεμπαν καν σε οποιαδήποτε έμμεση περιγραφή του όρου (της έννοιας ή διαδικασίας) και σε καμία περίπτωση δεν περιλάμβαναν άμεση χρήση της κατάλληλης ορολογίας. Η *Μονοδιάστατη περιγραφή για έμμεση χρήση της ορολογίας* αναφέρεται στην προσκόλληση των μαθητών σε έναν και μοναδικό τρόπο έμμεσης περιγραφής του όρου (έννοια ή διαδικασίας) που εμπλεκόταν στις καταστάσεις, χωρίς να επιδεικνύουν ικανότητα άμεσης χρήση του όρου/ορολογίας που εμπλεκόταν στην κατάσταση/πρόβλημα. Οι μονοδιάστατες αυτές λεκτικές περιγραφές, άλλοτε ήταν κατάλληλες ώστε να περιγράψουν έμμεσα τον όρο που εμπλεκόταν στην κατάσταση και άλλοτε λιγότερο επιτυχημένες στο να αποδώσουν ξεκάθαρα τον όρο στον οποίο αναφέρονταν. Επιπρόσθετα, ο όρος *Μονοδιάστατη περιγραφή για έμμεση χρήση της*

ορολογίας, αναφέρεται και στις περιπτώσεις ανάκλησης και χρήσης ορθής ορολογίας (π.χ. ορολογία αριθμών/αριθμολέξεων) η οποία όμως περιορίζεται σε ένα μικρό εύρος περιπτώσεων (π.χ. αριθμών μέχρι το 20) χωρίς ικανότητα ευέλικτης μεταφοράς σε μεγαλύτερο εύρος περιπτώσεων. Η *Ευέλικτη χρήση της ορθής ορολογίας* αφορά στην ικανότητα των μαθητών να ανακαλούν και να χρησιμοποιούν ορθά τους όρους που εμπλέκονταν στις καταστάσεις/προβλήματα και να εναλλάσσουν με επιτυχία την χρήση των διαφορετικών όρων που τυχόν εμπλέκονταν στην κατάσταση/πρόβλημα.

Ο τρόπος *Διαχείρισης και ερμηνείας των δεδομένων των μαθηματικών έργων*, η *Ικανότητα επεξεργασίας και χρήσης αναπαραστάσεων*, η *Ικανότητα χρήσης μαθηματικών διαδικασιών*, η *Ικανότητα παροχής αιτιολογήσεων* όπως επίσης, και η *Ικανότητα έκφρασης με ακρίβεια* φαίνεται να επηρεάζουν τα *Συνολικά Επιτεύγματα* των μαθητών. Ο όρος *Συνολικά επιτεύγματα* αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών να επιλύουν έργα που τους σχετίζονται με τους Αριθμούς και τα Μοτίβα, και πιο συγκεκριμένα εάν σημείωσαν επιτυχία ή αποτυχία στα εν λόγω έργα.

Στο Διάγραμμα 4.12, παρουσιάζεται συνοπτικά το μοντέλο που έχει προκύψει μέσα από την εφαρμογή των σταδίων της εμπειρικά θεμελιωμένης θεωρίας.



Διάγραμμα 4.12: Μοντέλο ικανότητας προσέγγισης και επεξεργασίας μαθηματικών έργων που σχετίζονται με τους αριθμούς και τα μοτίβα

## Προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων

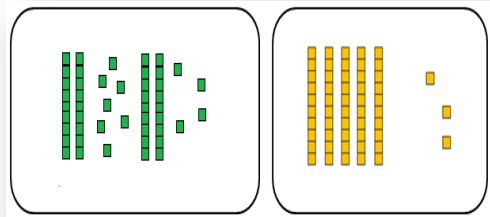
Στο μέρος αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που αφορούν στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα της παρούσας εργασίας σχετικά με τα προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα. Συγκεκριμένα η ανάλυση αφορά στο εξής ερευνητικό ερώτημα:

2. Ποια είναι τα διαφορετικά προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων που παρουσιάζουν μαθητές προδημοτικής κατά την επίλυση έργων που σχετίζονται με έννοιες των Αριθμών και των Μοτίβων;

Κατά την ποιοτική ανάλυση των αποτελεσμάτων, εντοπίστηκαν ομάδες παρόμοιας συμπεριφοράς ως προς την ικανότητα τους σε έργα Αριθμών και Μοτίβων. Συγκεκριμένα, η ανάλυση των αποτελεσμάτων οδήγησε στην δημιουργία τεσσάρων ομάδων συμπεριφοράς: Ομάδα 4, Ομάδα 3, Ομάδα 2, Ομάδα 1. Πιο κάτω, περιγράφεται η δραστηριότητα καθεμιάς από τις τέσσερις ομάδες συμπεριφοράς. Για την παρουσίαση και επεξήγηση των συγκεκριμένων ομάδων συμπεριφοράς, έχουν επιλεγεί ενδεικτικά τέσσερα έργα, από τα οποία τα τρία προέρχονται από την ενότητα περιεχομένου *Αριθμοί*, ενώ το τέταρτο έργο σχετίζεται με τα Μοτίβα. Το Διάγραμμα 4.13 παρουσιάζει τα έργα που χρησιμοποιήθηκαν ώστε να παρουσιαστούν οι ομάδες συμπεριφορών που προέκυψαν.



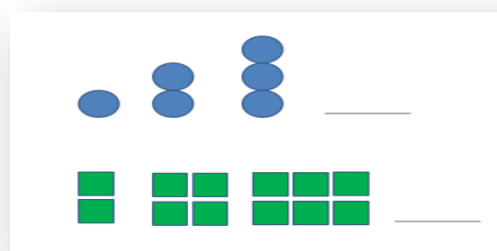
Έργο ανάλυσης και σύνθεσης του 8



Έργο σύγκρισης δεκάδων και μονάδων



Έργο συμπλήρωσης αριθμών στην αριθμητική γραμμή



Έργο επέκτασης αναπτυσσόμενου μοτίβου

Διάγραμμα 4.13: Έργα που χρησιμοποιήθηκαν για παρουσίαση των ομάδων συμπεριφοράς



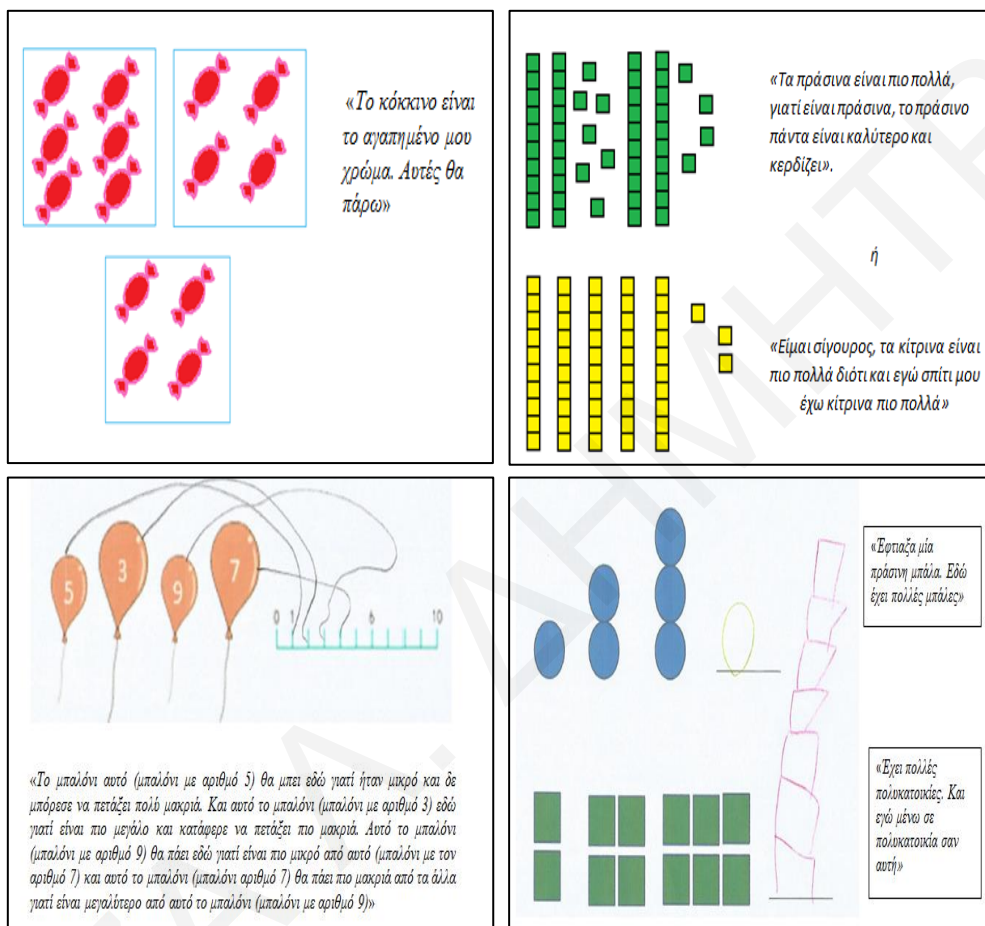
## Επιφανειακή Προσέγγιση – Επιφανειακό προφίλ ομάδας 1

Στη συγκεκριμένη ομάδα συμπεριφοράς εντάσσονται οι μαθητές που φαίνεται να ακολουθούν μία επιφανειακή αντιμετώπιση των προβλημάτων, η οποία δεν επέτρεπε καμία ουσιαστική επεξεργασία των καταστάσεων και δεν οδηγούσε σε επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων που δόθηκαν.

Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές αυτοί, φαίνεται να μην ήταν σε θέση να λαμβάνουν υπόψη τους τα δεδομένα του προβλήματος. Αντί αυτού, έδιναν ιδιαίτερη έμφαση στη χρήση μη σχετικών δεδομένων με το πρόβλημα, υιοθετώντας και αναφέροντας πληροφορίες που προέρχονταν είτε από γνωστές τους ιστορίες, είτε δικά τους σενάρια αλλά και ατομικές προτιμήσεις (π.χ. αγαπημένο χρώμα). Πιο συγκεκριμένα, όπως φαίνεται στο έργο ανάλυσης και σύνθεσης του αριθμού 8 (βλέπε Διάγραμμα 4.14, πάνω αριστερά) οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας, δεν ήταν σε θέση να λάβουν υπόψη τους τα δεδομένα του προβλήματος, αλλά χρησιμοποίησαν ατομικές προτιμήσεις ώστε να επιλέξουν καρτέλες όπως για παράδειγμα ότι οι καραμέλες με κόκκινο χρώμα είναι οι αγαπημένες τους. Επέλεξαν επίσης να συνδυάσουν τρεις κάρτες στις οποίες όλες οι καραμέλες ήταν κόκκινες, χωρίς να λάβουν υπόψη τους ότι έπρεπε να συνδυάσουν δύο κάρτες οι οποίες να περιλαμβάνουν διαφορετικό χρώμα καραμελών. Επιπρόσθετα, τόσο στο έργο σύγκρισης ποσοτήτων με δεκάδες και μονάδες, όσο και στο έργο συμπλήρωσης αριθμών στην αριθμητική γραμμή αλλά και στο έργο επέκτασης του αναπτυσσόμενου μοτίβου (βλέπε Διάγραμμα 4.14) οι μαθητές χωρίς να λάβουν υπόψη τους τα δεδομένα του προβλήματος που μπορούσαν να τους οδηγήσουν στην επίλυση των έργων, φαίνεται να υιοθέτησαν γνωστές και οικείες ιστορίες ή σενάρια (π.χ. έχω και εγώ στο σπίτι μου πολλά κίτρινα/το πράσινο είναι δυνατό χρώμα, το μπαλόνι πέταξε πιο μακριά από το άλλο μπαλόνια, είναι μία πολυκατοικία/μένω και εγώ σε πολυκατοικία) ώστε να απαντήσουν τα συγκεκριμένα έργα.

Αξίζει ακόμη να σημειωθεί ότι οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας, κατέφευγαν σε ιδιοσυγκρασιακό χειρισμό και επεξεργασία των εικονικών αναπαραστάσεων, εργαλείων και μοντέλων που τους δόθηκαν, ενώ φαίνεται να έδιναν ιδιαίτερη έμφαση σε εξωτερικά χαρακτηριστικά των αναπαραστάσεων (σχήμα, χρώμα, μέγεθος) τα οποία δεν διαδραμάτιζαν ρόλο στην επίλυση του έργου. Όπως φαίνεται, στο έργο σύγκρισης ποσοτήτων με δεκάδες και μονάδες (βλέπε Διάγραμμα 4.14, πάνω δεξιά) οι μαθητές εστιάστηκαν στο χρώμα των στοιχείων αντί στον αριθμό των στοιχείων ώστε να αναφέρουν ποια ομάδα είχε τα

περισσότερα στοιχεία. Αντίστοιχα, στο έργο συμπλήρωσης της αριθμητικής γραμμής (βλέπε Διάγραμμα 4.14, κάτω αριστερά) οι μαθητές έδωσαν έμφαση στο μέγεθος των μπαλονιών (μικρό/μεγάλο μπαλόνι). Παράλληλα, οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας δεν ήταν σε θέση να υιοθετούν μαθηματικές διαδικασίες και κατέφευγαν σε χρήση ιδιοσυγκρασιακών προσεγγίσεων.



Διάγραμμα 4.14: Ενδεικτικές λύσεις των μαθητών που υιοθέτησαν επιφανειακή προσέγγιση στα έργα Αρ.18, Αρ.6, Αρ.11, και Α6 αντίστοιχα όπως παρουσιάζονται από πάνω αριστερά προς κάτω δεξιά

Οι προσπάθειες αιτιολόγησης των μαθητών της συγκεκριμένης ομάδας αποτελούσαν σε όλες τις περιπτώσεις ιδιοσυγκρασιακές λεκτικές περιγραφές οι οποίες δεν παρέπεμπαν σε αιτιολόγηση διότι βασίζονταν σε άσχετα στοιχεία/δεδομένα σε σχέση με την κατάσταση/πρόβλημα. Για παράδειγμα, στο έργο σύγκρισης ποσοτήτων με δεκάδες και μονάδες (βλέπε Διάγραμμα 4.14, πάνω δεξιά), οι μαθητές έδιναν ως αιτιολόγηση απαντήσεις όπως «επειδή το πράσινο είναι το καλύτερο χρώμα» χωρίς καμία ένδειξη αιτιολόγησης βάση μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών που εμπλέκονταν στην κατάσταση. Παρόμοια, στο έργο ανάλυσης και σύνθεσης του αριθμού 8 (βλέπε Διάγραμμα χ, πάνω αριστερά) οι μαθητές

παρείχαν ως αιτιολόγηση φράσεις όπως «θα διαλέξω αυτές τις κάρτες που έχουν κόκκινες καραμέλες διότι μου αρέσουν πιο πολύ». Ως εκ τούτου, αντίστοιχα αποτελέσματα προκύπτουν και στον παράγοντα που αφορά στην ακρίβεια στη χρήση της ορολογίας.

Οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας εμφάνιζαν ιδιοσυγκρασιακές λεκτικές περιγραφές, οι οποίες δεν παρέπεμπαν καν σε έμμεση περιγραφή των μαθηματικών όρων, εννοιών ή διαδικασιών που εμπλέκονταν στην κατάσταση/πρόβλημα. Οι συγκεκριμένοι μαθητές, δεν ήταν σε θέση να χρησιμοποιήσουν την ορθή ορολογία των αριθμών/αριθμολέξεων μέχρι το 20 με εξαίρεση την αναφορά στις αριθμολέξεις των αριθμών μέχρι το 5 όταν αυτό ζητείτο ξεκάθαρα και αποτελούσε το μοναδικό ζητούμενο του έργου.

### **Μεταβατική Προσέγγιση – Μεταβατικό προφίλ ομάδας 2**

Στη συγκεκριμένη ομάδα συμπεριφοράς, εντάσσονται οι μαθητές που φαίνεται να ακολούθησαν μια προσέγγιση η οποία προσομοιάζει σε κάποιο βαθμό με τη διαδικαστική προσέγγιση, αλλά και σε κάποιο βαθμό με την επιφανειακή προσέγγιση. Η προσέγγιση των συγκεκριμένων μαθητών δεν ήταν καθαρά διαδικαστική (από την αρχή μέχρι το τέλος), όπως η προσέγγιση των μαθητών της ομάδας που παρουσιάζεται στις επόμενους παραγράφους, ούτε καθαρά επιφανειακή (από την αρχή μέχρι το τέλος), όπως η προσέγγιση των μαθητών που επεξηγήθηκε πιο πάνω. Οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας, ενώ ήταν σε θέση να αντιληφθούν και να κατανοήσουν ορισμένα από τα δεδομένα του προβλήματος, εντούτοις δεν ήταν σε θέση να λάβουν υπόψη όλα τα δεδομένα που απαιτούνταν για την επίλυση του προβλήματος. Η συγκεκριμένη συμπεριφορά, αναφέρεται στη *Μονοδιάστατη επεξεργασία/χειρισμό δεδομένων προβλήματος* που προαναφέρθηκε στην αξονική κωδικοποίηση και πιο συγκεκριμένα, χαρακτηρίζεται ως *Χαμηλότερου επιπέδου Μονοδιάστατη επεξεργασία/χειρισμός δεδομένων προβλήματος*. Για παράδειγμα, στο έργο ανάλυσης και σύνθεσης του αριθμού 8 (βλέπε Διάγραμμα 4.15, πάνω αριστερά) οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας, έλαβαν υπόψη τους ότι χρειάζονταν καραμέλες δύο διαφορετικών χρωμάτων, αλλά δεν έδειξαν να λαμβάνουν υπόψη ότι το σύνολο των στοιχείων μετά την ένωση θα έπρεπε να ήταν 8. Παρόμοια, στο έργο σύγκρισης ποσοτήτων με μονάδες και δεκάδες (βλέπε Διάγραμμα 4.15, πάνω δεξιά) οι μαθητές λάμβαναν υπόψη μόνο τους αποσυνδεδεμένους κύβους (μονάδες) των δύο συνόλων και όχι τις δεκάδες.

Οι συγκεκριμένοι μαθητές φαίνεται να κατέφευγαν και να παρουσίαζαν προσκόλληση σε ένα και μοναδικό τρόπο χειρισμού των εικονικών αναπαραστάσεων, μοντέλων και εργαλείων και ο συγκεκριμένος τρόπος επεξεργασίας δεν επεδείκνυε ολοκληρωμένη αντίληψη, κατανόηση, επεξεργασία της εικόνας του εργαλείου ή της αναπαράστασης. Αυτή η συμπεριφορά, αναφέρεται στην *Μονοδιάστατη επεξεργασία/χειρισμό* που αναφέρθηκε στην αξονική κωδικοποίηση και αποτελεί την *Χαμηλότερου επιπέδου Μονοδιάστατη επεξεργασία/χειρισμό αναπαραστάσεων*. Στο έργο σύγκρισης ποσοτήτων με μονάδες και δεκάδες (βλέπε Διάγραμμα 4.15, πάνω δεξιά) μετά από παρότρυνση της ερευνήτριας να λάβουν υπόψη και τις δεκάδες τις οποίες παρέβλεπαν, μετρούσαν τις δεκάδες ως μονάδα (δηλαδή το κομμάτι με τους συνδεδεμένους κύβους το αντιμετώπιζαν ως ίσο με ένα αποσυνδεδεμένο κύβο), κάτι που υποδεικνύει περιορισμένη αντίληψη των σχέσεων μεταξύ των κομματιών του υλικού. Στο έργο συμπλήρωσης αριθμών στην αριθμητική γραμμή (βλέπε Διάγραμμα 4.15, κάτω αριστερά), οι μαθητές αγνοούσαν τους ήδη συμπληρωμένους αριθμούς που υπήρχαν και άρχιζαν την αρίθμηση στην αριθμητική γραμμή από το 1 και όχι από το 0 που υπήρχε ήδη συμπληρωμένο. Στο έργο επέκτασης αναπτυσσόμενου μοτίβου (βλέπε Διάγραμμα 4.15, κάτω δεξιά) οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας, προέβαιναν σε επεξεργασία της εικόνας η οποία δεν ήταν ολοκληρωμένη καθώς οι παρατηρήσεις τους περιορίζονταν μόνο στο ότι σε κάθε επόμενο σχήμα (όρος του μοτίβου) αυξανόταν ο αριθμός των κύκλων ή των κύβων αντίστοιχα. Η παρατήρηση αυτή δεν βασιζόταν σε ολοκληρωμένη επεξεργασία και ανάλυση της εικόνας η οποία θα τους επέτρεπε να αναφερθούν πιο συγκεκριμένα στο ότι ο αριθμός των στοιχείων (κύκλοι ή κύβοι) κάθε όρου αυξάνεται κατά ένα ή κατά δύο αντίστοιχα σε κάθε μοτίβο.

Οι διαδικασίες που υιοθετούσαν για να επιλύσουν τα έργα παρέπεμπαν στη χρήση κάποιων γνωστών, απλών μαθηματικών διαδικασιών τις οποίες προσπαθούσαν να εφαρμόσουν βήμα προς βήμα. Ωστόσο, η εφαρμογή των συγκεκριμένων διαδικασιών βήμα προς βήμα, δεν γινόταν ολοκληρωμένα, ούτε με ορθό τρόπο, είτε λόγω περιορισμένης αντίληψης της διαδικασίας (μη εξοικείωσης) ή του πλαισίου στην οποία καλούνταν να την εφαρμόσουν. Αυτή η συμπεριφορά αναφέρεται στην *Μονοδιάστατη χρήση/εφαρμογή μαθηματικών διαδικασιών* που έχει περιγραφεί στην αξονική κωδικοποίηση και χαρακτηρίζεται ως *Χαμηλότερου επιπέδου Μονοδιάστατη χρήση/εφαρμογή μαθηματικών διαδικασιών*. Η προαναφερθείσα συμπεριφορά της μη ολοκληρωμένης εφαρμογής των διαδικασιών τους οδηγούσε σε «αδιέξοδο» με αποτέλεσμα να καταφεύγουν σε ενέργειες και

αποφάσεις που εμφάνιζαν, τελικά, χαρακτηριστικά *Επιφανειακής/Ιδιοσυγκρασιακής προσέγγισης*. Εξαίρεση αποτελούσαν τα πιο απλά έργα του δοκιμίου στα οποία οι συγκεκριμένοι μαθητές ήταν σε θέση να εφαρμόσουν με επιτυχία απλές, γνωστές μαθηματικές διαδικασίες οι οποίες ζητούνταν ξεκάθαρα. Στο έργο ανάλυσης και σύνθεσης του αριθμού 8 (βλέπε Διάγραμμα 4.15, πάνω αριστερά), οι συγκεκριμένοι μαθητές κατέφευγαν σε εφαρμογή γνωστής διαδικασίας βήμα προς βήμα και συγκεκριμένα στην απαρίθμηση όλων για να εντοπίσουν το σύνολο των στοιχείων δύο καρτών χωρίς τελικά να καταλήγουν σε απόφαση για το αν ο συγκεκριμένος συνδυασμός καρτών ήταν σωστός. Αυτό υποδείκνυε την περιορισμένη αντίληψη που είχαν για τη χρησιμότητα της διαδικασίας στο συγκεκριμένο πλαίσιο. Αυτές οι μη ολοκληρωμένες προσπάθειες, οδηγούσαν σε ιδιοσυγκρασιακές αποφάσεις (π.χ. 8 κόκκινες και 8 μωβ καραμέλες αντί 8 στο σύνολο που ζητούσε το έργο) οι οποίες παρέπεμπαν σε επιφανειακή προσέγγιση. Παρόμοια στο έργο σύγκρισης ποσοτήτων με μονάδες και δεκάδες (βλέπε Διάγραμμα 4.15, πάνω δεξιά) οι συγκεκριμένοι μαθητές χρησιμοποιούσαν τη διαδικασία απαρίθμησης όλων για να εντοπίσουν το πλήθος στοιχείων κάθε συνόλου χωρίς όμως να την εφαρμόζουν σωστά στο συγκεκριμένο πλαίσιο (μετρούσαν τις δεκάδες ως μονάδες όπως προαναφέρθηκε). Επιπρόσθετα, παρόλο που μετά την εφαρμογή της διαδικασίας απαρίθμησης κατέληγαν σε ένα (λανθασμένο) αριθμό για το σύνολο των στοιχείων κάθε συνόλου, δεν ήταν σε θέση να συγκρίνουν τους δύο αριθμούς και προέβαιναν σε σύγκριση μόνο μέσα από οπτική παρατήρηση του πλήθους στοιχείων των δύο συνόλων. Το αποτέλεσμα αυτής της οπτικής σύγκρισης, παρέπεμπε σε επιφανειακή προσέγγιση, γιατί επέλεξαν ως μεγαλύτερο σύνολο αυτό με τα περισσότερα αποσυνδεδεμένα κομμάτια υλικού (σύνολο πράσινων κύβων). Στο έργο συμπλήρωσης αριθμών στην αριθμητική γραμμή (βλέπε Διάγραμμα 4.15, κάτω αριστερά) οι μαθητές της ομάδας αυτής κατέφευγαν στην ανάκληση και απαγγελία της ακολουθίας των αριθμών ως μέσο για να συμπληρώσουν όλους τους αριθμούς της αριθμητικής γραμμής, ανάμεσα στους οποίους θα ήταν και οι τέσσερις συγκεκριμένοι αριθμοί που ζητούνταν να συμπληρωθούν. Ωστόσο, η περιορισμένη αντίληψή τους για το πλαίσιο στο οποίο καλούνταν να συμπληρώσουν αριθμούς, τους οδήγησε στην τροποποίηση της αριθμητικής γραμμής που δόθηκε και άρχιζε από το μηδέν, προσαρμόζοντάς την στη δική τους αντίληψη ότι πρέπει να αρχίζει από το ένα.

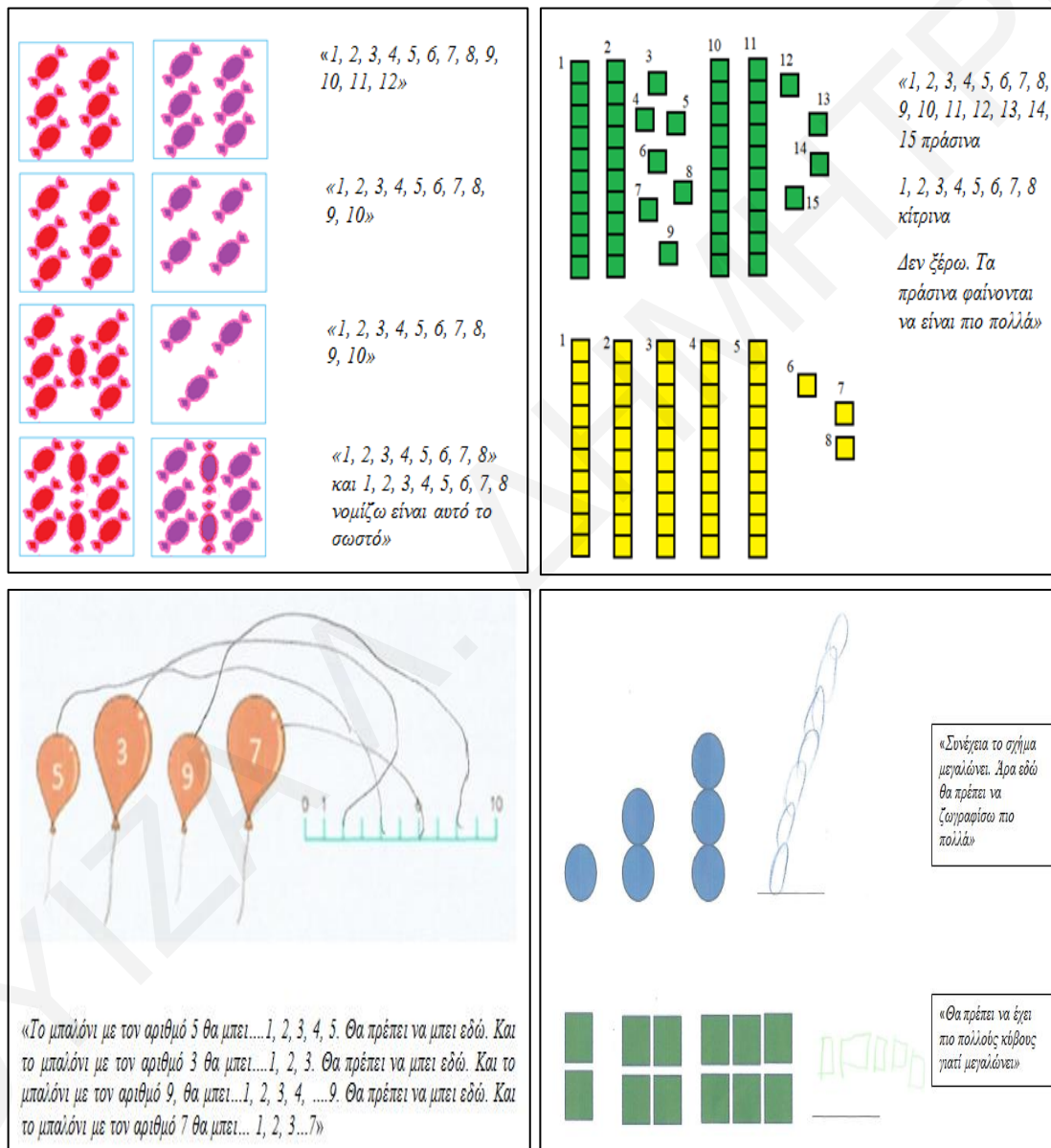
Οι αιτιολογήσεις των μαθητών της ομάδας 2 περιορίζονταν κυρίως στην αναφορά σε συγκεκριμένο στοιχείο ή πληροφορία της δοθείσας κατάστασης ή ακόμη και στην αναφορά σε συγκεκριμένο λανθασμένο παράδειγμα (εφόσον δεν γνώριζαν ότι το παράδειγμα που

χρησιμοποιούσαν ήταν έτσι και αλλιώς λανθασμένο). Σε ελάχιστες περιπτώσεις οι αιτιολογήσεις τους παρέπεμπαν είτε σε απλή περιγραφή/επανάληψη του τρόπου που εργάστηκαν (επαναλαμβάνοντας απλά με λόγια τη διαδικασία που ακολούθησαν) ή σε συγκεκριμένο/α παράδειγμα/τα που εντόπισαν (π.χ. αριθμητικά). Οι συμπεριφορές αυτές αναφέρονται στην *Μονοδιάστατη παροχή αιτιολογήσεων* και χαρακτηρίζονται ως *Χαμηλότερου επιπέδου Μονοδιάστατη παροχή αιτιολογήσεων*. Για παράδειγμα, στο έργο σύγκρισης ποσοτήτων μονάδες και δεκάδες (βλέπε Διάγραμμα 4.15, πάνω δεξιά) οι μαθητές της ομάδας αυτής, είτε αιτιολογούσαν την απάντησή τους βασισμένοι στο ότι φαίνονταν περισσότεροι οι κύβοι της μιας ομάδας (και συγκεκριμένα της ομάδας που είχε περισσότερους αποσυνδεδεμένους κύβους) ή αιτιολογούσαν την απάντησή τους περιγράφοντας τον λανθασμένο τρόπο απαρίθμησης που ακολούθησαν (όπου μετρούσαν ως ένα τις δεκάδες). Παρόμοια, στο έργο ανάλυσης και σύνθεσης του αριθμού 8 (βλέπε Διάγραμμα 4.15, πάνω αριστερά) οι μαθητές αιτιολογούσαν την απάντησή τους επαναλαμβάνοντας την διαδικασία απαρίθμησης που χρησιμοποιούσαν για να εντοπίσουν τον συνολικό αριθμό καραμελών των δύο καρτών παρόλο που δεν κατέληγαν, με βάση αυτό, σε κάποιο συνδυασμό καρτών και σε αρκετές περιπτώσεις συνδύαζαν αυτή την περιγραφή και σε λανθασμένο αριθμητικό παράδειγμα που δεν ικανοποιούσε τις συνθήκες της κατάστασης προβλήματος (ανέφεραν π.χ. διότι χρειάζονται 8 κόκκινες και 8 μωβ, παρόλο που η ερευνήτρια είχε τονίσει ότι συνολικά έπρεπε να ήταν 8).

Όσον αφορά στην ύπαρξη ακρίβειας στην χρήση της ορολογίας, οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας σε όλες τις περιπτώσεις δεν χρησιμοποιούσαν με ακρίβεια την ορολογία, αλλά προέβαιναν σε λεκτικές περιγραφές που δεν ήταν οι πιο κατάλληλες, έστω και έμμεσα, να περιγράψουν τον όρο που δεν χρησιμοποιούσαν. Η μη καταλληλότητα αυτών των λεκτικών περιγραφών οφειλόταν, σε μερικές περιπτώσεις, στο ότι δεν ήταν επαρκείς ή ολοκληρωμένες για να περιγράψουν έμμεσα την ορολογία που χρειαζόταν. Η συμπεριφορά αυτή, αναφέρεται στη *Μονοδιάστατη περιγραφή για έμμεση χρήση της ορολογίας* και χαρακτηρίζεται ως *Χαμηλότερου επιπέδου Μονοδιάστατη περιγραφή για έμμεση χρήση της ορολογίας*.

Συγκεκριμένα, στα έργα επέκτασης αναπτυσσόμενου μοτίβου (βλέπε Διάγραμμα 4.15, κάτω δεξιά), υπήρχαν μαθητές που ανέφεραν ότι ο αριθμός των στοιχείων κάθε επόμενου σχήματος αυξανόταν ή ότι κάθε επόμενο σχήμα μεγάλωνε, χωρίς να εντοπίζουν το μέγεθος αυτής της σταθερής αύξησης ή διαφοράς (και εννοείται χωρίς να χρησιμοποιείται ο όρος

μοτίβο). Επιπρόσθετα, στο έργο σύγκρισης ποσοτήτων με δεκάδες και μονάδες (βλέπε Διάγραμμα 4.15, πάνω δεξιά), οι μαθητές χρησιμοποιούσαν φράσεις που υποδείκνυαν ότι αντιμετώπιζαν με τον ίδιο τρόπο τις δεκάδες και τις μονάδες, επομένως οι περιγραφές τους για αυτά δεν παρέπεμπε καν στο νόημα που έχουν αυτοί οι όροι. Ακόμη, όσον αφορά στη σύγκριση αριθμών, οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας, δεν χρησιμοποιούσαν άμεσα την ορολογία σύγκρισης αριθμών (μεγαλύτερος/μικρότερος), αλλά προέβαιναν σε λεκτικές περιγραφές οι οποίες παρέπεμπαν έμμεσα σε αυτούς τους όρους.



Διάγραμμα 4.15: Ενδεικτικές λύσεις των μαθητών που υιοθέτησαν μεταβατική προσέγγιση στα έργα Αρ.18, Αρ.6, Αρ.11, και Α6 αντίστοιχα όπως παρουσιάζονται από πάνω αριστερά προς κάτω δεξιά

Αντίστοιχα, στο έργο ανάλυσης και σύνθεσης του αριθμού 8 (βλέπε Διάγραμμα 4.15, πάνω αριστερά) οι περισσότεροι μαθητές χρησιμοποιούσαν φράσεις όπως «1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 καραμέλες, βλέπω 8 καραμέλες άρα μαζί είναι 8 μωβ και 8 κόκκινες καραμέλες» χωρίς αυτή η λεκτική περιγραφή να παραπέμπει έστω και έμμεσα στην έννοια, για παράδειγμα, της πρόσθεσης.

Από την άλλη, υπήρχαν και μαθητές οι οποίοι υιοθετούσαν ακόμη πιο ιδιοσυγκρασιακές περιγραφές, όπως «κόκκινες, μωβ να διαλέξει όποιες του αρέσουν» οι οποίες δεν είχαν καμία σχέση και δεν παρέπεμπαν έστω σε έμμεση περιγραφή ορολογίας που εμπλεκόταν στο πρόβλημα. Οι μοναδικές περιπτώσεις στις οποίες οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας χρησιμοποιούσαν άμεσα την ορθή ορολογία, ήταν οι περιπτώσεις όπου χρησιμοποιούσαν την ορθή ορολογία των αριθμών/αριθμολέξεων μέχρι το 20, χωρίς ωστόσο να είναι σε θέση να πράξουν το ίδιο για αριθμούς μεγαλύτερους από το 20, έστω και αν τα έργα το απαιτούσαν.

### **Διαδικαστική Προσέγγιση – Διαδικαστικό προφίλ ομάδας 3**

Στη συγκεκριμένη ομάδα συμπεριφοράς, εντάσσονται οι μαθητές που φαίνεται να ακολούθησαν μια διαδικαστική προσέγγιση, εφαρμόζοντας μία αναμενόμενη/γνωστή διαδικασία ή στρατηγική χωρίς να είναι σε θέση να αξιοποιήσουν έναν εναλλακτικό τρόπο λύσης ή να συντομεύσουν τη διαδικασία επίλυσης. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές αυτοί, φαίνεται να ήταν σε θέση να λαμβάνουν υπόψη τους όλα τα δεδομένα του προβλήματος, ωστόσο δεν ήταν σε θέση να εντοπίσουν περαιτέρω συσχετίσεις μεταξύ των δεδομένων αυτών. Η συμπεριφορά αυτή αναφέρεται στη *Μονοδιάστατη επεξεργασία/χειρισμό δεδομένων* και χαρακτηρίζεται ως *Ψηλότερου επιπέδου Μονοδιάστατη επεξεργασία/χειρισμός δεδομένων*. Για παράδειγμα όπως φαίνεται στο έργο σύγκρισης ποσοτήτων με δεκάδες και μονάδες (βλέπει Διάγραμμα 4.16, πάνω δεξιά) οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας έλαβαν υπόψη όλα τα δεδομένα που παρέχονταν, αλλά δεν εντόπισαν και δεν αξιοποίησαν τη σχέση μεταξύ δέκα μονάδων και μίας δεκάδας κάτι που στη συνέχεια τους οδήγησε σε εφαρμογή χρονοβόρων διαδικασιών. Παρόμοια και στο έργο συμπλήρωσης αριθμητικής γραμμής (βλέπε Διάγραμμα 4.16, κάτω αριστερά), οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας, σε αντίθεση με τους μαθητές που υιοθέτησαν δομική προσέγγιση και που παρουσιάζονται στη συνέχεια, δεν εστίασαν στο να εντοπίσουν εξ' αρχής σχέσεις μεταξύ των δοσμένων αριθμών. Επιπρόσθετα,



στα έργα επέκτασης αναπτυσσόμενου μοτίβου (βλέπε Διάγραμμα 4.16, κάτω δεξιά) δεν εστίαζαν στο να εντοπίσουν διαφορές μεταξύ των δοσμένων όρων (προηγούμενου και επόμενου).

Ακόμη, φαίνεται να παρουσίασαν προσκόλληση σε ένα μοναδικό τρόπο χειρισμού και επεξεργασίας των εικονικών αναπαραστάσεων, εργαλείων και μοντέλων, χωρίς να είναι σε θέση να παρουσιάσουν οποιοδήποτε εναλλακτικό τρόπο προσέγγισης. Η συμπεριφορά αυτή αναφέρεται στη *Μονοδιάστατη επεξεργασία/χρήση αναπαραστάσεων* και χαρακτηρίζεται ως *Υψηλότερου επιπέδου Μονοδιάστατη επεξεργασία/χρήση αναπαραστάσεων*. Συγκεκριμένα, στο έργο ανάλυσης και σύνθεσης του αριθμού 8 (βλέπε Διάγραμμα 4.16, πάνω αριστερά) οι μαθητές συνδύαζαν τυχαία δύο καρτέλες κάθε φορά και τις χρησιμοποιούσαν για να βρουν την απάντηση, χωρίς να βελτιώνουν/διαφοροποιούν τον τρόπο αξιοποίησης των καρτελών. Παρέμεναν εγκλωβισμένοι στον τυχαίο συνδυασμό καρτελών, χωρίς να αναστοχάζονται κάθε φορά στα αποτελέσματά τους κάτι που θα τους βοηθούσε να επιλέξουν στοχευμένα τις επόμενες καρτέλες. Επιπρόσθετα, στο έργο σύγκρισης ποσοτήτων με δεκάδες και μονάδες (βλέπε Διάγραμμα 4.16, πάνω δεξιά), οι συγκεκριμένοι μαθητές χρησιμοποίησαν το υλικό όπως τους δόθηκε, χωρίς να μετασχηματίσουν τη μορφή του (σύνδεση ή αποσύνδεση κύβων). Αντίστοιχα, στο έργο συμπλήρωσης της αριθμητικής γραμμής (βλέπε Διάγραμμα 4.16, κάτω αριστερά) οι μαθητές της ομάδας αυτής, μπορούσαν να κάνουν συσχετίσεις στην αριθμητική γραμμή μόνο μεταξύ προηγούμενων και επόμενων σημείων, σε αντίθεση με τους μαθητές που υιοθέτησαν δομική προσέγγιση οι οποίοι ήταν σε θέση να συσχετίσουν οποιαδήποτε σημεία στην αριθμητική γραμμή. Στο έργο επέκτασης αναπτυσσόμενου μοτίβου (βλέπε Διάγραμμα 4.16, κάτω δεξιά) οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας, χρησιμοποιούσαν την εικόνα με ένα συγκεκριμένο τρόπο όπως αυτή παρουσιάζόταν, χωρίς να εμφανίζουν διαφορετικό τρόπο επεξεργασία της. Συγκεκριμένα, οι μαθητές δεν προχωρούσαν σε ανάλυση της εικόνας με στόχο να εντοπίσουν διαφορές προηγούμενου και επόμενου όρου κάτι που εφαρμόσαν οι μαθητές που υιοθέτησαν δομική προσέγγιση.

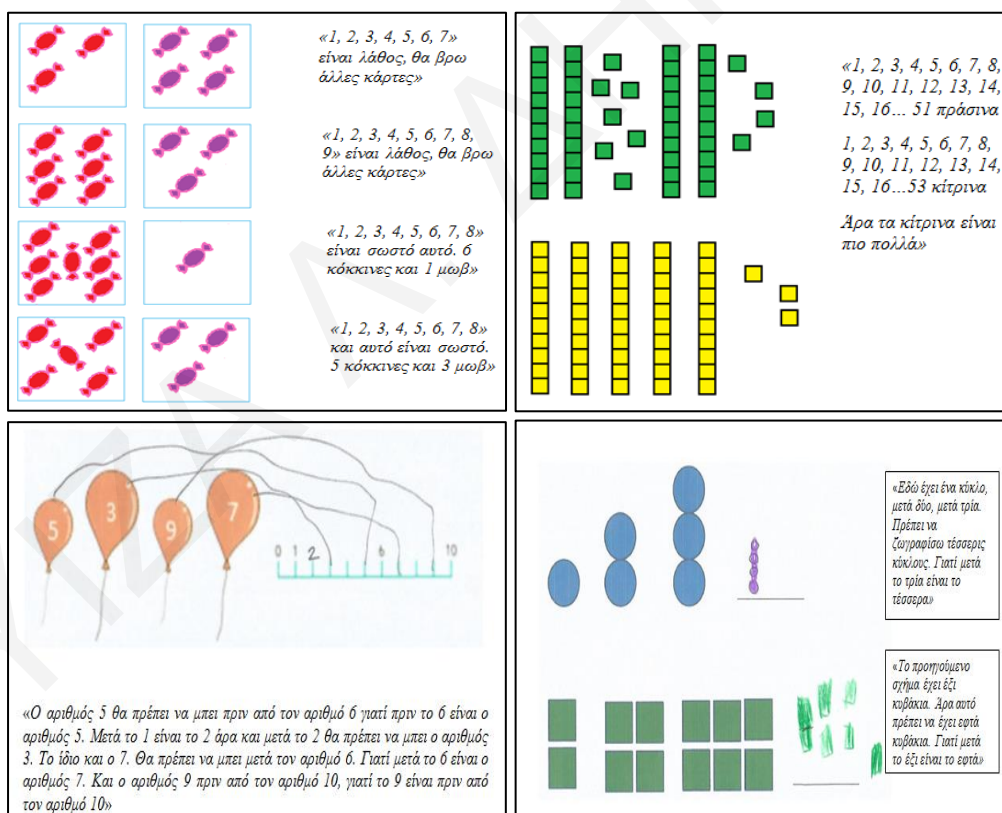
Οι μαθηματικές διαδικασίες που επέλεξαν να εφαρμόσουν, ήταν γνωστές διαδικασίες τις οποίες και εφαρμόζαν βήμα προς βήμα χωρίς ωστόσο να υπάρχει η δυνατότητα εφαρμογής εναλλακτικών, τρόπων επίλυσης. Οι συγκεκριμένες διαδικασίες, αν και ήταν χρονοβόρες, ήταν σε θέση να οδηγήσουν τους μαθητές σε σωστές απαντήσεις στα περισσότερα έργα, με εξαίρεση μερικά έργα των οποίων οι γνωστικές απαιτήσεις ήταν αυξημένες. Η συμπεριφορά αυτή αναφέρεται στη *Μονοδιάστατη χρήση/εφαρμογή μαθηματικών διαδικασιών* που

προαναφέρθηκε στην αξονική κωδικοποίηση και χαρακτηρίζεται ως *Υψηλότερου επιπέδου Μονοδιάστατη χρήση/εφαρμογή μαθηματικών διαδικασιών*. Όπως φαίνεται στο έργο ανάλυσης και σύνθεσης τους αριθμού 8 (βλέπε Διάγραμμα 4.16, πάνω αριστερά) και στο έργο σύγκρισης ποσοτήτων με μονάδες και δεκάδες (βλέπε Διάγραμμα 4.16, πάνω δεξιά), οι μαθητές χρησιμοποιούσαν τη διαδικασία απαρίθμησης όλων για να εντοπίσουν το αποτέλεσμα της ένωσης δύο καρτών και για να εντοπίσουν τον αριθμό των στοιχείων κάθε συνόλου, αντίστοιχα. Επίσης, στο έργο ανάλυσης και σύνθεσης του αριθμού 8, οι μαθητές εφαρμόζαν τη στρατηγική δοκιμής και ελέγχου χωρίς όμως να προβαίνουν σε αναστοχασμό στο αποτέλεσμα για τη στοχευμένη επιλογή των επόμενων καρτών. Στο έργο συμπλήρωσης της αριθμητικής γραμμής (βλέπε Διάγραμμα 4.16, κάτω αριστερά) οι μαθητές, κατέφευγαν στην ανάκληση συγκεκριμένων σημείων της ακολουθίας των αριθμών και με βάση αυτό συμπλήρωναν τους ζητούμενους αριθμούς στην αριθμητική γραμμή. Η φράση που χρησιμοποιούσαν «μετά το 2 είναι το 3» ή «πριν το 10 είναι το 9» υποδεικνύουν την ανάγκη τους να προχωρούν σταδιακά βήμα βήμα, βασισμένοι σε κάτι οικείο και γνωστό όπως η ακολουθία των αριθμών. Στα έργα επέκτασης αναπτυσσόμενου μοτίβου (βλέπε Διάγραμμα 4.16, κάτω δεξιά) οι μαθητές αφού απαριθμούσαν τα στοιχεία κάθε όρου, βασίζονταν στη ακολουθία των αριθμών 1, 2, 3, 4... για να εντοπίσουν τον αριθμό στοιχείων του επόμενου όρου που ακολουθούσε. Αυτό τους οδήγησε σε σωστά αποτελέσματα στο πρώτο αναπτυσσόμενο μοτίβο με κανόνα +1, αλλά σε λανθασμένα αποτελέσματα για το πιο σύνθετο αναπτυσσόμενο μοτίβο με κανόνα +2.

Οι αιτιολογήσεις των μαθητών της ομάδας 3, περιορίζονταν σε απλή περιγραφή/επανάληψη του τρόπου που εργάστηκαν (επαναλαμβάνοντας απλά με λόγια τη διαδικασία που ακολούθησαν) ή στην αναφορά σε συγκεκριμένο στοιχείο ή πληροφορία που υπήρχε στην αναπαράσταση. Η πλειοψηφία των μαθητών υιοθετούσε αιτιολογήσεις που βασίζονταν σε επανάληψη της περιγραφής της διαδικασίας που ακολούθησαν χωρίς όμως να εμπεριέχουν κάποιο στοιχείο γενίκευσης όπως των μαθητών της ομάδας 4 που προαναφέρθηκε. Οι συμπεριφορές αυτές αναφέρονται στη *Μονοδιάστατη παροχή αιτιολογήσεων* και χαρακτηρίζεται ως *Υψηλότερου επιπέδου Μονοδιάστατη παροχή αιτιολογήσεων*. Για παράδειγμα, στο έργο ανάλυσης και σύνθεσης τους αριθμού 8 (βλέπε Διάγραμμα 4.16, πάνω αριστερά) επαναλάμβαναν την περιγραφή της εφαρμογής της στρατηγικής δοκιμής και ελέγχου ή αναφέρονταν σε μερικά αριθμητικά παραδείγματα που αποτελούσαν τις λύσεις που εντόπισαν. Παρόμοια, στο έργο σύγκρισης ποσοτήτων με

μονάδες και δεκάδες (βλέπε Διάγραμμα 4.16, πάνω δεξιά) επαναλάμβαναν την διαδικασία όπου απαριθμούσαν τα δύο σύνολα με τους κύβους και την σύγκριση των αριθμών/ποσοτήτων.

Όσον αφορά στην ύπαρξη ακρίβειας στην χρήση της ορολογίας, οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας σε όλες τις περιπτώσεις (με εξαίρεση του όρου «μοτίβο» και της ορολογίας των αριθμών/αριθμολέξεων) δεν χρησιμοποιούσαν με ακρίβεια την ορολογία αλλά προέβαιναν σε περιγραφές που παρέπεμπαν έμμεσα στους κατάλληλους όρους. Μάλιστα σε μερικές περιπτώσεις αυτές οι λεκτικές περιγραφές που χρησιμοποιούσαν δεν ήταν και οι πιο κατάλληλες για έμμεση περιγραφή των όρων που εμπλέκονταν στην κατάσταση. Οι συμπεριφορές αυτές αναφέρονται στη *Μονοδιάστατη περιγραφή για έμμεση χρήση της ορολογίας* και χαρακτηρίζεται ως *Υψηλότερου επιπέδου Μονοδιάστατη περιγραφή για έμμεση χρήση της ορολογίας*.



Διάγραμμα 4.16: Ενδεικτικές λύσεις των μαθητών που υιοθέτησαν διαδικαστική προσέγγιση στα έργα Αρ.18, Αρ.6, Αρ.11, και Α6 αντίστοιχα όπως παρουσιάζονται από πάνω αριστερά προς κάτω δεξιά

Για παράδειγμα, στο έργο ανάλυσης και σύνθεσης του αριθμού 8 (βλέπε Διάγραμμα 4.16, πάνω αριστερά) μερικοί μαθητές χρησιμοποιούσαν φράσεις όπως «3 κύβοι, έρχονται ακόμη 5 κύβοι και είναι 8 διότι τους είδα έναν έναν» ή «4 κύβοι, 5, 6, 7, 8 άρα βγαίνουν 8» αντί να αναφέρουν φράσεις όπως «4 κύβοι και ακόμη/προσθέτω 4, και γίνονται ή ισούνται με 8 κύβους». Ωστόσο, αρκετοί μαθητές με τις περιγραφές που χρησιμοποιούσαν απέδιδαν και ήταν πιο κοντά στην ορθή ορολογία όπως: «αυτές οι καραμέλες μαζί με αυτές τις καραμέλες όταν ενώνονται δίνουν 8 καραμέλες».

Αντίστοιχα, στο έργο σύγκρισης ποσοτήτων με δεκάδες και μονάδες (βλέπε Διάγραμμα 4.16, πάνω δεξιά), οι μαθητές χρησιμοποιούσαν φράσεις όπως «θα κάνω 1, 2, 3... να βρω όλους τους πράσινους και μετά το ίδιο για τους κίτρινους και βλέπω» και μαθητές που ανέφεραν «ξεκινώ από το 1 και προχωρώ και στις δύο ομάδες για να δω αν είναι ίδιες», αντί να χρησιμοποιήσουν φράσεις όπως «μετρώ τους κύβους και στις δύο ομάδες να δω αν είναι ίσοι ή για να συγκρίνω». Στο ίδιο έργο, μερικοί μαθητές προέβαιναν σε σύγκριση των αριθμών (π.χ. 51, 53) χρησιμοποιώντας ορθή ορολογία όπως μεγαλύτερος/μικρότερος, ενώ οι περισσότεροι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας προέβαιναν σε λεκτικές περιγραφές που παρέπεμπαν σε έμμεση αναφορά στους συγκεκριμένους όρους π.χ. «το 53 δείχνει πιο πολλά από το 51». Όσον αφορά το έργο συμπλήρωσης της αριθμητικής γραμμής (βλέπε Διάγραμμα 4.16, κάτω αριστερά), οι μαθητές της ομάδας αυτής, δεν αναφέρονταν στον όρο αριθμητική γραμμή αλλά οι λεκτικές τους περιγραφές, ήταν κατάλληλες εφόσον παρέπεμπαν σε έμμεση περιγραφή του συγκεκριμένου όρου. Όσον αφορά στις εξαιρέσεις που προαναφέρθηκαν, όπου κάποιοι μαθητές της ομάδας 3 χρησιμοποιούσαν άμεσα την ορολογία, αρκετοί μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας χρησιμοποιούσαν τον όρο μοτίβο σε όλα τα έργα που ενέπλεκαν τα μοτίβα. Επιπρόσθετα, οι περισσότεροι μαθητές της ομάδας αυτής, χρησιμοποιούσαν την ορολογία των αριθμών/αριθμολέξεων μέχρι το 100 ορθά και οι υπόλοιποι χρησιμοποιούσαν ορθά την ορολογία των αριθμών/αριθμολέξεων μέχρι το 70.

#### **Δομική Προσέγγιση – Δομικό προφίλ ομάδας 4**

Κατά την επίλυση των μαθηματικών έργων εντοπίστηκαν μαθητές (Ομάδα 4) οι οποίοι υιοθετούσαν μία δομική προσέγγιση στα περισσότερα από τα έργα που κλήθηκαν να επεξεργαστούν. Η δραστηριότητα των μαθητών αυτών, δείχνει την πρόθεση αλλά και την

ικανότητά τους, να εστιάζουν στη δομή των δοσμένων καταστάσεων και να εντοπίζουν υποβόσκουσες σχέσεις. Οι μαθητές αυτοί, φαίνεται να υιοθέτησαν μία ευέλικτη προσέγγιση τόσο κατά την επεξεργασία/χειρισμό των δεδομένων του προβλήματος, στην επεξεργασία και χρήση αναπαραστάσεων αλλά και στην εφαρμογή μαθηματικών διαδικασιών που επέλεξαν να χρησιμοποιήσουν, στην διατύπωση αιτιολογήσεων αλλά και στην ακρίβεια ως προς τη χρήση της ορολογίας.

Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές αυτοί, παρουσίασαν έντονα την ανάγκη να εστιάζονται στις ομοιότητες και διαφορές των δεδομένων των προβλημάτων ώστε να εντοπίζουν συσχετίσεις οι οποίες και θα διευκόλυναν την επίλυση του προβλήματος. Όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 4.17, στο έργο σύγκρισης ποσοτήτων με δεκάδες και μονάδες (βλέπε Διάγραμμα 4.17, πάνω δεξιά) οι μαθητές εστίασαν και εντόπισαν τη σχέση μεταξύ των δεκάδων και των μονάδων (δημιουργία δεκάδες από 10 μονάδες) αλλά και τις ομοιότητες και τις διαφορές που εμφάνιζαν τα δύο σύνολα προς σύγκριση (π.χ. ίδιος αριθμός δεκάδων). Παρόμοια, στο έργο επέκτασης αναπτυσσόμενου μοτίβου (βλέπε Διάγραμμα, κάτω δεξιά), οι μαθητές εστίασαν στο να εντοπίσουν ομοιότητες και διαφορές μεταξύ των όρων του μοτίβου. Αντίστοιχα, στο έργο συμπλήρωσης της αριθμητικής γραμμής (βλέπε Διάγραμμα 4.17, κάτω αριστερά), οι μαθητές εστίασαν εξ' αρχής στον εντοπισμό σχέσεων μεταξύ των δεδομένων του προβλήματος, που στην προκειμένη ήταν οι δοσμένοι αριθμοί που κλήθηκαν να συμπληρώσουν.

Επιπρόσθετα, οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας, ήταν σε θέση να χειρίζονται με στρατηγικό τρόπο τα εργαλεία, τις εικονικές αναπαραστάσεις και τα μοντέλα που τους δόθηκαν, επιδεικνύοντας ευελιξία στο να τα επεξεργαστούν με διαφορετικούς τρόπους. Όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 4.17 στο έργο επέκτασης αναπτυσσόμενου μοτίβου (Διάγραμμα 4.17, κάτω δεξιά), οι μαθητές ήταν σε θέση να αναλύσουν την εικόνα του μοτίβου με διαφορετικούς τρόπους (προστίθεται μία στήλη ή αλλιώς προστίθενται ακόμη δύο κυβάκια). Παρόμοια, στο μοντέλο της αριθμητικής γραμμής, οι συγκεκριμένοι μαθητές επέδειξαν ικανότητα να επεξεργάζονται την αριθμητική γραμμή εντοπίζοντας σχέσεις μεταξύ οποιονδήποτε σημείων της αριθμητικής γραμμής ανεξαρτήτως αποστάσεων. Επιπρόσθετα, οι μαθητές ήταν σε θέση να χειριστούν με ευέλικτο τρόπο τους κύβους που τους δόθηκαν μετασχηματίζοντας/τροποποιώντας με στρατηγικό τρόπο την αρχική μορφή του υλικού που τους δόθηκε, έχοντας επίγνωση της χρησιμότητας της συγκεκριμένης ενέργειας. Ικανότητα μετασχηματισμού αναπαραστάσεων, επέδειξαν και στο έργο ανάλυσης/σύνθεσης του αριθμού

8 (βλέπε Διάγραμμα 4.17, πάνω αριστερά), όπου παρόλο που δεν αξιοποιούσαν τις καρτέλες για να εντοπίσουν το αποτέλεσμα, έδειχναν να τροποποιούν τις νοερές εικόνες που είχαν στο μυαλό τους προσθέτοντας και αφαιρώντας στοιχεία με στόχο να διατηρούν σταθερό το άθροισμα.

Παράλληλα, οι μαθητές της ομάδας αυτής, ήταν επίσης σε θέση να υιοθετούν εναλλακτικές διαδικασίες επίλυσης μαθηματικών έργων, πέραν από τις τυπικές, να διατυπώνουν και να αξιοποιούν γενικεύσεις ή και να αξιοποιούν νοερές στρατηγικές. Στο έργο ανάλυσης και σύνθεσης του αριθμού 8 (βλέπε Διάγραμμα 4.17, πάνω αριστερά) οι μαθητές ανέφεραν ξεκάθαρα τη γενίκευση (αφαιρώ ένα από το ένα προσθέτω ένα στο άλλο και διατηρείται η ισότητα) που αξιοποίησαν για να εντοπίσουν όλους τους δυνατούς συνδυασμούς, αλλά και αρκετοί από αυτούς αναφέρθηκαν και στην αξιοποίηση της αντιμεταθετικής ιδιότητας. Επίσης, στο έργο ανάλυσης και σύνθεσης του αριθμού 8, υπήρχαν μαθητές οι οποίοι μπορεί να μην άρχιζαν με το διπλό άθροισμα  $4+4$  αλλά από έναν άλλο συνδυασμό και εφαρμόζοντας τη στρατηγική δοκιμής και ελέγχου, με αναστοχασμό κάθε φορά στο αποτέλεσμα για να εντοπίσουν τις επόμενες επιλογές καρτών που θα αποτελούσαν ορθούς συνδυασμούς. Στο ίδιο έργο οι μαθητές παρουσίασαν και νοερές στρατηγικές, όπου αξιοποιούσαν γνωστά τους αθροίσματα και συγκεκριμένα, τα διπλά αθροίσματα. Ο συλλογισμός για την έννοια της ισότητας και η ξεκάθαρη διατύπωσή του, προέκυψε και στο έργο σύγκρισης ποσοτήτων με δεκάδες και μονάδες (βλέπε Διάγραμμα 4.17, πάνω δεξιά). Οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας, μετά από την κατάλληλη επεξεργασία του υλικού, εντόπισαν ότι οι δεκάδες στα δύο σύνολα ήταν ίσες και άρα για τη σύγκριση των δύο ποσοτήτων χρειαζόταν μόνο η σύγκριση των μονάδων. Διατύπωση γενίκευσης από μέρους των μαθητών παρουσιάστηκε και στα έργα επέκτασης αναπτυσσόμενου μοτίβου (βλέπε Διάγραμμα 4.17, κάτω δεξιά), όπου οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας, ανέφεραν ξεκάθαρα ότι για να βρω τον αριθμό κύκλων ή κύβων οποιουδήποτε όρου/σχήματος των δύο αυτών μοτίβων, χρειάζεται να προσθέσω ένα κύκλο ή δύο κύβους αντίστοιχα, στον προηγούμενο όρο.

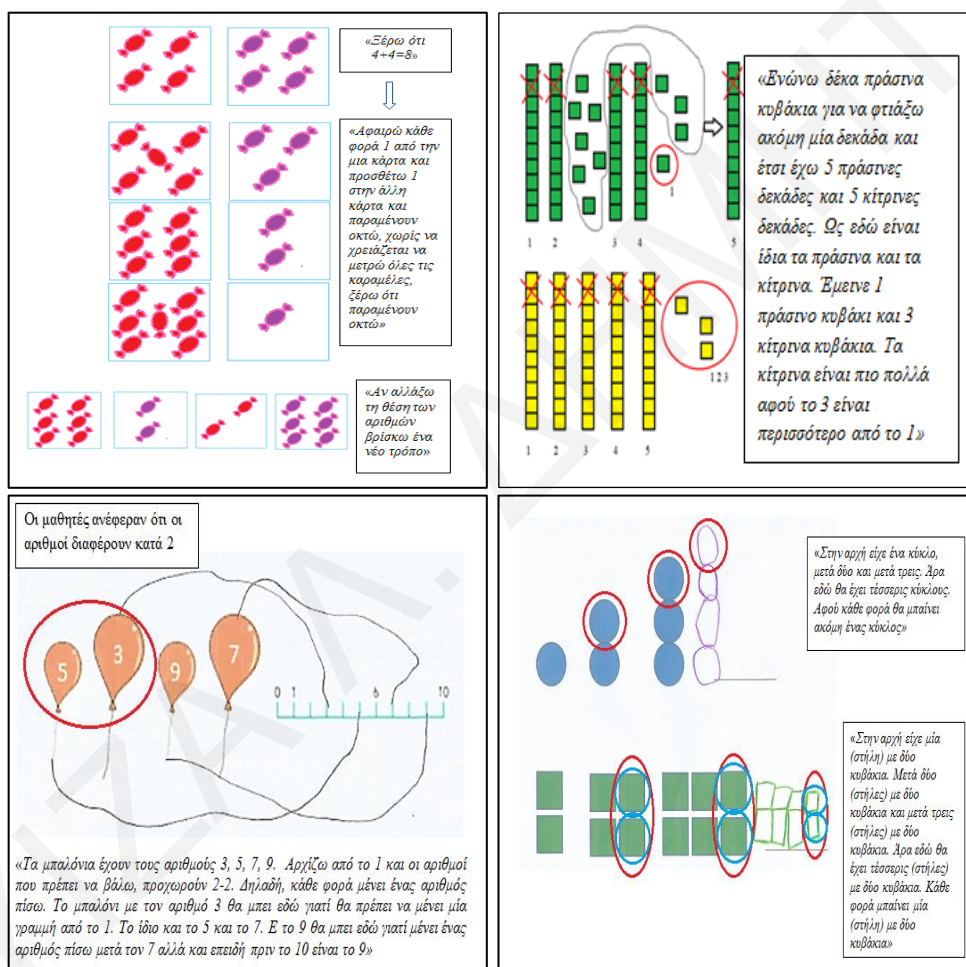
Οι μαθητές της ομάδας 4 ήταν σε θέση να παρέχουν αιτιολογήσεις που βασίζονταν σε γενικευμένες δηλώσεις ή ακόμη και να παρέχουν διαφορετικές διατυπώσεις της ίδιας αιτιολόγησης που ενέπλεκε γενικευμένη δήλωση. Συγκεκριμένα, στο έργο σύγκρισης ποσοτήτων με δεκάδες και μονάδες (βλέπε Διάγραμμα 4.17, πάνω δεξιά) οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας αιτιολόγησαν την απάντησή τους αξιοποιώντας τη γενίκευση που

εντόπισαν προηγουμένως, συντομεύοντας την και εξηγώντας ότι αρκούσε απλά να συγκρίνουν τα μέρη που διέφεραν παραλείποντας τα ίσα μέρη που φρόντιζαν να δημιουργήσουν. Αντίστοιχα, στο έργο ανάλυσης και σύνθεσης του αριθμού 8 (βλέπε Διάγραμμα 4.17, πάνω αριστερά), αιτιολόγησαν την απάντησή τους βάση της γενίκευσης που εντόπισαν προηγουμένως αναφέροντας ότι οι απαντήσεις τους ήταν σίγουρα ορθές διότι απλά φρόντιζαν να διατηρούν το πλήθος 8 αφαιρώντας από το ένα μέρος και προσθέτοντας το στο άλλο. Παρόμοια, στο έργο συμπλήρωσης της αριθμητικής γραμμής (βλέπε Διάγραμμα 4.17, κάτω αριστερά), οι μαθητές αιτιολόγησαν την απάντησή τους χρησιμοποιώντας μία γενικευμένη δήλωση, αφού εντόπισαν ότι οι αριθμοί που τους δόθηκαν διέφεραν μεταξύ τους κατά 2, ενώ στα έργα επέκτασης αναπτυσσόμενου μοτίβου (βλέπε Διάγραμμα 4.17, κάτω δεξιά), αξιοποίησαν την γενίκευση που εντόπισαν προηγουμένως και αιτιολόγησαν την απάντησή τους παρέχοντας μια πιο συντομευμένη περιγραφή της γενίκευσης.

Ωστόσο, αξίζει να σημειωθεί ότι όσον αφορά στην ακρίβεια ως προς τη χρήση ορολογίας, οι μαθητές της ομάδας 4 δεν εμφάνισαν τις ίδιες συμπεριφορές. Υπήρχαν μαθητές της ομάδας 4 οι οποίοι ήταν σε θέση να ανακαλούν με ευκολία και να χρησιμοποιούν ορθά τους όρους που εμπλέκονταν στις καταστάσεις/προβλήματα ή ακόμη και να εναλλάσσουν με επιτυχία την χρήση των διαφορετικών όρων που τυχόν εμπλέκονταν στην κατάσταση/πρόβλημα. Υπήρχαν όμως και μαθητές οι οποίοι δεν χρησιμοποιούσαν άμεσα την ορολογία αλλά προέβαιναν σε περιγραφές οι οποίες ήταν κατάλληλες και οδηγούσαν σε έμμεση χρήση της ορολογίας. Για παράδειγμα, στο έργο ανάλυσης και σύνθεσης του αριθμού 8 (βλέπε Διάγραμμα 4.17, πάνω αριστερά) στην προσπάθειά τους να περιγράψουν την γενίκευση όπου διατηρούσαν τον αριθμό 8 σταθερό αφαιρώντας μια μονάδα από τον ένα προσθετέο και προσθέτοντας μια μονάδα στον άλλο, μερικοί μαθητές χρησιμοποιούσαν τον όρο «ίσα, προσθέτω ή αφαιρώ» ενώ άλλοι μαθητές χρησιμοποιούσαν τους όρους «είναι ίδια, βάζω, βγάζω». Αντίστοιχα, στο έργο σύγκρισης ποσοτήτων με δεκάδες και μονάδες (βλέπε Διάγραμμα 4.17, πάνω δεξιά), υπήρχαν μαθητές που χρησιμοποιούσαν φράσεις όπως «θα συγκρίνω τις μονάδες αφού οι δεκάδες είναι ίσες», ενώ άλλοι μαθητές χρησιμοποιούσαν φράσεις όπως «θα συγκρίνω τους κύβους που είναι μόνοι τους αφού εκείνοι που ένωσα και έχουν δέκα κύβους είναι ίδιοι».

Επιπρόσθετα, στο έργο συμπλήρωσης της αριθμητικής γραμμής (βλέπε Διάγραμμα 4.17, κάτω αριστερά), οι περισσότεροι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας, ήταν σε θέση να χρησιμοποιήσουν τον όρο της αριθμητικής γραμμής, όταν αυτή εμπλεκόταν στην

κατάσταση/πρόβλημα. Όσον αφορά στην σύγκριση αριθμών, όλοι οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας έκαναν χρήση ορθής ορολογίας που αφορά στη σύγκριση των αριθμών, χρησιμοποιώντας τους όρους μεγαλύτερους/μικρότερους. Επιπρόσθετα, αξίζει να σημειωθεί ότι όλοι οι μαθητές της ομάδας αυτής, χρησιμοποιούσαν και έκαναν αναφορά στον όρο μοτίβο, σε όλα τα έργα μοτίβων και χρησιμοποιούσαν την ορολογία των αριθμών/αριθμολέξεων μέχρι το 100 ορθά σε όλα τα έργα.



Διάγραμμα 4.17: Ενδεικτικές λύσεις των μαθητών που υιοθέτησαν δομική προσέγγιση στα έργα Αρ.18, Αρ.6, Αρ.11, και Α6 αντίστοιχα όπως παρουσιάζονται από πάνω αριστερά προς κάτω δεξιά



## **Κωδικοποίηση για την απόδοση τρόπου προσέγγισης-επεξεργασίας κάθε έργου**

Σε κάθε έργο εξετάστηκε και κωδικοποιήθηκε η προσέγγιση του μαθητή για την επεξεργασία δεδομένων, η προσέγγιση του μαθητή για τον τρόπο επεξεργασίας της αναπαράστασης (εικονική αναπαράσταση ή εποπτικό μέσο ανάλογα με το τι εμπλεκόταν στο έργο), η μαθηματική διαδικασία που εφάρμοσε για να επιλύσει το έργο καθώς και το είδος της αιτιολόγησης που εξέφρασε και ο βαθμός ακρίβειας στην ορολογία που επέδειξε. Η προσέγγιση που εξετάστηκε ήταν ανεξάρτητη και δεν είχε καμία σχέση με την επίδοση (σκορ) που συγκέντρωσε ο μαθητής στο έργο. Συνδυάζοντας τις πληροφορίες για την προσέγγιση στους πέντε παράγοντες (επεξεργασία δεδομένων, επεξεργασία αναπαραστάσεων, μαθηματικές διαδικασίες, αιτιολόγηση και ακρίβεια) προέκυπτε ένας κωδικός που αντιπροσωπεύει την προσέγγιση του μαθητή στο συγκεκριμένο έργο (επιφανειακή, μεταβατική, διαδικαστική και δομική). Ακολουθεί η επεξήγηση του πώς προέκυπτε ο κωδικός σε κάθε έργο για την καθολική προσέγγιση του μαθητή στο έργο.

Στην περίπτωση που ο μαθητής παρουσίαζε επιφανειακή επεξεργασία δεδομένων ή και επιφανειακή/ιδιοσυγκρασιακή χρήση της αναπαράστασης και επιφανειακή/ιδιοσυγκρασιακή χρήση αιτιολογήσεων, παρουσίαζε και επιφανειακή/ιδιοσυγκρασιακή διαδικασία για την επίλυση του έργου καθώς και επιφανειακή/ιδιοσυγκρασιακή περιγραφή που δεν ενέπλεκε ούτε παρέπεμπε σε χρήση ορθής ορολογίας. Αυτό παρατηρήθηκε σε όλους τους μαθητές που υιοθέτησαν τέτοια προσέγγιση και σε όλα τα έργα στα οποία υιοθέτησαν τέτοια προσέγγιση. Ως εκ τούτου ο κωδικός 1 που αποδόθηκε σε αυτές τις περιπτώσεις υποδείκνυε ότι η καθολική προσέγγιση και επεξεργασία του έργου ήταν η «*Επιφανειακή/ιδιοσυγκρασιακή προσέγγιση*».

Παρόμοια, στην περίπτωση που ο μαθητής παρουσίασε ευέλικτη επεξεργασία χειρισμό των δεδομένων ή και ευέλικτη επεξεργασία-χρήση αναπαραστάσεων και ευέλικτη χρήση αιτιολογήσεων, παρουσίαζε και ευέλικτη χρήση-εφαρμογή μαθηματικών διαδικασιών. Ωστόσο, ως προς το θέμα της ακρίβειας, υπήρχαν μαθητές που σε συνδυασμό με τα προαναφερθέντα εμφάνιζαν και ευέλικτη χρήση ορθής ορολογίας, αλλά και μαθητές που εμφάνιζαν μονοδιάστατη περιγραφή που παρέπεμπε έμμεσα σε χρήση ορολογίας. Λόγω του ότι η ακρίβεια στην ορολογία οφειλόταν περισσότερο ενδεχομένως και σε θέμα μνήμης του συγκεκριμένου όρου ή σε θέμα εμπειριών, και οι συγκεκριμένοι μαθητές που δεν χρησιμοποίησαν ξεκάθαρα τους όρους, ήταν σε θέση με κατάλληλες λεκτικές περιγραφές να

αναφερθούν έμμεσα σε αυτούς, κρίθηκε ότι όλοι οι συγκεκριμένοι μαθητές συγκέντρωναν επαρκή στοιχεία που υποδείκνυαν ότι η προσέγγισή τους ήταν δομική. Ως εκ τούτου, ο κωδικός 4 που αποδόθηκε σε αυτές τις περιπτώσεις υποδείκνυε ότι η καθολική προσέγγιση και επεξεργασία του έργου ήταν η «*Δομική προσέγγιση*».

Ωστόσο, η διαδικασία απόδοσης κωδικού για την καθολική προσέγγιση του μαθητή στο έργο στις περιπτώσεις που οι μαθητές παρουσίαζαν μονοδιάστατη επεξεργασία δεδομένων ή αναπαραστάσεων ή διαδικασιών ή μονοδιάστατη χρήση αιτιολογήσεων και μονοδιάστατη περιγραφή που παραπέμπει έμμεσα σε χρήση ορολογίας, ήταν πιο σύνθετη. Η μονοδιάστατη επεξεργασία δεδομένων, η μονοδιάστατη επεξεργασία αναπαραστάσεων, η μονοδιάστατη εφαρμογή διαδικασιών και η μονοδιάστατη παροχή αιτιολογήσεων ενέπλεκαν δύο διαφορετικές συμπεριφορές. Πιο συγκεκριμένα, η μονοδιάστατη επεξεργασία δεδομένων αφορούσε είτε σε περίπτωση που ο μαθητής λάμβανε υπόψη μόνο μερικά από τα δεδομένα του προβλήματος-κατάστασης (χαμηλότερο επίπεδο μονοδιάστατης επεξεργασίας δεδομένων) ή την περίπτωση όπου ο μαθητής λάμβανε υπόψη όλα τα δεδομένα του προβλήματος αλλά παρέμενε προσκολλημένος σε έναν μοναδικό τρόπο χειρισμού χωρίς εντοπισμό περεταίρω σχέσεων μεταξύ τους (υψηλότερο επίπεδο μονοδιάστατης επεξεργασίας δεδομένων). Η μονοδιάστατη επεξεργασία αναπαραστάσεων αφορούσε είτε σε περίπτωση που ο μαθητής επεξεργαζόταν μόνο ένα μέρος της αναπαράστασης, εικονικής ή εποπτικού μέσου (χαμηλότερο επίπεδο μονοδιάστατης επεξεργασίας αναπαράστασης) ή την περίπτωση όπου επεξεργαζόταν την αναπαράσταση ολοκληρωμένα μεν αλλά παρέμενε προσκολλημένος σε έναν συγκεκριμένο τρόπο (ή τυπικό τρόπο) χρήσης και ερμηνείας του υλικού τον οποίο επαναλάμβανε συνεχώς (υψηλότερο επίπεδο μονοδιάστατης επεξεργασίας αναπαράστασης). Η μονοδιάστατη εφαρμογή μαθηματικών διαδικασιών αφορούσε είτε σε περιπτώσεις που ο μαθητής χρησιμοποιούσε αποσπασματικά ένα μέρος μιας διαδικασίας χωρίς να το ολοκληρώνει ή χωρίς να αρχίζει σωστά τη διαδικασία (χαμηλότερο επίπεδο μονοδιάστατης εφαρμογής διαδικασίας) ή σε περιπτώσεις που ο μαθητής εφάρμοζε ολοκληρωμένα μια διαδικασία, ωστόσο, την εφάρμοζε βήμα προς βήμα χωρίς να παρουσιάζει ευελιξία στη χρήση της συγκεκριμένης διαδικασίας (υψηλότερο επίπεδο μονοδιάστατης εφαρμογής διαδικασίας). Η μονοδιάστατη χρήση αιτιολογήσεων αφορούσε είτε σε περιπτώσεις που οι αιτιολογήσεις βασίζονταν σε προσπάθεια περιγραφής της διαδικασίας που ακολούθησαν ως μέσο για να απαντήσουν στο «γιατί, πώς» ή σε συγκεκριμένο ορθό αριθμητικό παράδειγμα που εντόπισαν (υψηλότερο επίπεδο μονοδιάστατης παροχής αιτιολόγησης) είτε σε περιπτώσεις όπου ως

αιτιολόγηση αναφέρονταν σε ένα συγκεκριμένο στοιχείο ή πληροφορία της εικόνας ή των δεδομένων ή ακόμη και σε ένα παράδειγμα που δεν ίσχυε, αλλά δεν είχαν επίγνωση ότι ήταν λανθασμένο (κατώτερο επίπεδο παροχής μονοδιάστατης αιτιολόγησης). Η μονοδιάστατη περιγραφή που παραπέμπει έμμεσα σε χρήση ορολογίας, αφορούσε είτε την προσκόλληση σε κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παρείχε έμμεση αναφορά στον όρο (υψηλότερο επίπεδο μονοδιάστατης περιγραφής για έμμεση χρήση ορολογίας) είτε σε λεκτική περιγραφή που δεν ήταν η πιο κατάλληλη για να αποδώσει την έμμεση αναφορά στον όρο (χαμηλότερο επίπεδο μονοδιάστατης περιγραφής για έμμεση χρήση ορολογίας). Σε αυτές τις περιπτώσεις όλοι οι μαθητές που υιοθετούσαν σε ένα έργο μονοδιάστατη προσέγγιση στην επεξεργασία δεδομένων ή αναπαραστάσεων παρουσίαζαν και μονοδιάστατη εφαρμογή διαδικασιών στο ίδιο έργο και μονοδιάστατη χρήση αιτιολόγησης: (α) όχι όμως απαραίτητα και μονοδιάστατη περιγραφή για έμμεση χρήση ορολογίας και (β) όχι απαραίτητα μονοδιάστατη προσέγγιση ιδίου επιπέδου (υψηλότερο ή χαμηλότερο επίπεδο μονοδιάστατου) και στους πέντε παράγοντες που εξετάζονταν (δεδομένα, αναπαραστάσεις, διαδικασίες, αιτιολογήσεις, ακρίβεια). Για παράδειγμα, υπήρχαν μερικοί μαθητές οι οποίοι: (α) παρουσίασαν μονοδιάστατη εφαρμογή ή χρήση στους τέσσερεις παράγοντες, εκτός από την ακρίβεια, μιας και μερικοί μαθητές βρίσκονταν σε κατώτερη διάσταση από την μονοδιάστατη (βρίσκονταν δηλαδή στην επιφανειακή διάσταση) στην περίπτωση της ακρίβειας στην ορολογία, (β) σε κάποιο έργο εμφάνισαν κατωτέρου επιπέδου μονοδιάστατη εφαρμογή διαδικασίας, επεξεργασίας δεδομένων, παροχή αιτιολόγησης και βαθμού ακρίβειας στην ορολογία, αλλά ανωτέρου επιπέδου μονοδιάστατη επεξεργασία της αναπαράστασης. Η πλειοψηφία όμως των μαθητών που υιοθέτησαν μονοδιάστατη προσέγγιση σε κάποιο έργο διατήρησαν αυτή την προσέγγιση στο ίδιο επίπεδο και στους πέντε παράγοντες (αναπαραστάσεις, δεδομένα, διαδικασίες, αιτιολογήσεις, ακρίβεια). Εάν υιοθέτησαν στο έργο την κατωτέρου επιπέδου μονοδιάστατη προσέγγιση και στους πέντε παράγοντες (δεδομένα, αναπαραστάσεις, μαθηματική διαδικασία, αιτιολόγηση, ακρίβεια) τότε σε αυτούς αποδόθηκε ο κωδικός 2 «μεταβατική προσέγγιση». Εάν υιοθέτησαν στο έργο την ανωτέρου επιπέδου μονοδιάστατη προσέγγιση και στους πέντε παράγοντες (δεδομένα, αναπαραστάσεις, μαθηματική διαδικασία, αιτιολογήσεις, ακρίβεια) τότε σε αυτούς αποδόθηκε ο κωδικός 3 «διαδικαστική προσέγγιση». Όσον αφορά στις εξαιρέσεις, στην περίπτωση των μαθητών που δεν διατήρησαν την μονοδιάστατη προσέγγιση κατωτέρου επιπέδου και στους πέντε παράγοντες αποφασίστηκε ότι: (α) αν στους τρεις από τους πέντε παράγοντες εμφάνισαν ανωτέρου επιπέδου

μονοδιάστατη επεξεργασία ή χρήση συμπεριλαμβανομένου του παράγοντα «μαθηματικές διαδικασίες» τους αποδόθηκε ο κωδικός 3 «*Διαδικαστική προσέγγιση*», νοουμένου ότι στις άλλες δύο περιπτώσεις εμφάνισαν μονοδιάστατη χρήση κατώτερου επιπέδου, (β) αν στους τρεις από τους πέντε παράγοντες εμφάνισαν κατώτερου επιπέδου μονοδιάστατη επεξεργασία ή χρήση συμπεριλαμβανομένου του παράγοντα «μαθηματικές διαδικασίες» τους αποδόθηκε ο κωδικός 2 «*Μεταβατική προσέγγιση*», νοουμένου ότι στις άλλες δύο περιπτώσεις εμφάνισαν μονοδιάστατη χρήση ανώτερου επιπέδου και (γ) αν στους τέσσερις παράγοντες από τους πέντε εμφάνισαν μονοδιάστατη εφαρμογή ή χρήση κατώτερου επιπέδου, συμπεριλαμβανομένου του παράγοντα «μαθηματικές διαδικασίες», και στην περίπτωση της ακρίβειας εμφάνισαν «επιφανειακή προσέγγιση» (η οποία εκ των πραγμάτων είναι «κατώτερη» της μονοδιάστατης), τους αποδόθηκε ο κωδικός 2 «*Μεταβατική προσέγγιση*» καθώς αυτό κρίθηκε ως αδυναμία ως προς την λεκτική ικανότητα ή θέμα εμπειριών. Δεν αναφέρονται άλλοι συνδυασμοί, διότι δεν υπήρχαν εξαιρέσεις μαθητών με άλλους συνδυασμούς προσεγγίσεων.

Η περιγραφή που προηγήθηκε οδήγησε στην απόδοση κωδικού για κάθε έργο ο οποίος αντιπροσώπευε την καθολική προσέγγιση του μαθητή στο συγκεκριμένο έργο. Ακολούθως, λαμβάνοντας υπόψη τους κωδικούς του μαθητή στα 29 έργα, καθοριζόταν με συγκεκριμένο τρόπο ο οποίος περιγράφεται στην επόμενη παράγραφο το γενικό προφίλ του μαθητή για την προσέγγιση και επεξεργασία των έργων αριθμητικής και μοτίβων.

### **Εντοπισμός προφίλ των μαθητών της παρέμβασης**

Για τον εντοπισμό του προφίλ της παρέμβασης κάθε μαθητή, λήφθηκαν υπόψη οι στρατηγικές που υιοθέτησε στα 29 έργα του δοκιμίου. Στην πλειονότητά τους οι μαθητές (96,6% των μαθητών), υιοθέτησαν την ίδια προσέγγιση/στρατηγική σε τουλάχιστον 20 από τα 29 έργα. Ως εκ τούτου, η κατάταξή τους σε συγκεκριμένο προφίλ, αναδυόταν αβίαστα από την ίδια τους τη συμπεριφορά στα έργα. Πιο συγκεκριμένα, εφόσον στην πλειονότητα των έργων υιοθετούσαν ίδιου τύπου προσέγγιση/στρατηγική, αυτό υποδείκνυε την τάση και την προτίμησή τους να αντιμετωπίζουν τα έργα με το συγκεκριμένο τρόπο και κατ' επέκταση το χαρακτηρισμό της συμπεριφοράς τους με το αντίστοιχο προφίλ. Ωστόσο, 2 μαθητές από τους 60 δεν υιοθέτησαν μία στρατηγική σε τουλάχιστον 20 από τα 29 έργα. Συγκεκριμένα, 2 μαθητές υιοθέτησαν την μεταβατική προσέγγιση/στρατηγική σε 18 έργα και την διαδικαστική

προσέγγιση/στρατηγική σε 11 έργα. Επιπρόσθετα, 2 μαθητές υιοθέτησαν τη διαδικαστική προσέγγιση/στρατηγική σε 18 ή 11 έργα και την μεταβατική ή δομική προσέγγιση/στρατηγική σε 11 ή 18 έργα αντίστοιχα. Σε αυτές τις περιπτώσεις όπως και στις προηγούμενες, η απόδοση προφίλ βασίστηκε στη στρατηγική που υιοθετήθηκε περισσότερες φορές από τους μαθητές. Στις συγκεκριμένες περιπτώσεις η εξέταση των στρατηγικών που υιοθέτησαν οι μαθητές, υπέδειξε ότι η προτίμηση των μαθητών στην στρατηγική που υιοθέτησαν τις περισσότερες φορές, άλλαζε μόνο στις περιπτώσεις όπου το έργο είχε μεγαλύτερο βαθμό δυσκολίας. Ο μεγαλύτερος βαθμός δυσκολίας του έργου, τους οδηγούσε να υιοθετήσουν μία προσέγγιση/στρατηγική χαμηλότερου επιπέδου. Αυτή η παρατήρηση έτεινε να παρουσιάζεται και στις υπόλοιπες περιπτώσεις μαθητών που υιοθετούσαν την ίδια προσέγγιση σε τουλάχιστον 20 έργα. Σε ελάχιστες περιπτώσεις, ένας μικρός αριθμός μαθητών, εξαιτίας ακριβώς του μεγαλύτερου βαθμού δυσκολίας κάποιων έργων, εμφάνισε και τρίτο είδος προσέγγισης/στρατηγικής σε 3 το πολύ έργα από τα 29. Η διαδικασία που έχει περιγραφεί πιο πάνω υιοθετήθηκε και για τον εντοπισμό του προφίλ των μαθητών και μετά την παρέμβαση.

### **Αποτελέσματα που αφορούν στις παρεμβάσεις και περαιτέρω διερεύνηση των προφίλ/ομάδων μαθητών**

Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου των αποτελεσμάτων παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που αφορούν στο τρίτο, τέταρτο και το πέμπτο ερευνητικό ερώτημα της εργασίας και τα οποία προέκυψαν μέσα από περιγραφικές τεχνικές ανάλυσης ποσοτικών δεδομένων.

#### **Διαφορές στην επίδοση σε έργα που σχετίζονται με έννοιες των Αριθμών και των Μοτίβων μαθητών με διαφορετικό προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων**

Σε αυτό το μέρος παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την εφαρμογή της περιγραφικής στατιστικής που αφορούν στην απάντηση για το τρίτο ερευνητικό ερώτημα της εργασίας:

3. Ποιες είναι οι διαφορές στην επίδοση (προπαραμβατικό στάδιο-μέτρηση) σε έργα που σχετίζονται με έννοιες των Αριθμών και των Μοτίβων των μαθητών προδημοτικής με διαφορετικό προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων;

Για να διερευνηθεί εάν υπήρχαν διαφορές μεταξύ των μαθητών με διαφορετικό προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων στο προπαραμβατικό δοκίμιο και λαμβάνοντας υπόψη

τον τρόπο με τον οποίο έγινε η συλλογή των δεδομένων της έρευνας, χρησιμοποιήθηκε περιγραφική στατιστική και εντοπίστηκαν οι μέσοι όροι επιτυχίας για κάθε ομάδα προφίλ μαθητών. Συγκεκριμένα όπως φάνηκε, οι μέσοι όροι της συνολικής επίδοσης για κάθε ομάδα προφίλ μαθητών, αυξάνονται καθώς μετακινούμαστε από το Επιφανειακό προφίλ 1 στο Δομικό προφίλ 4. Οι μέσοι όροι για κάθε ομάδα προφίλ μαθητών παρουσιάζονται στον πιο κάτω πίνακα.

Πίνακας 4.46

*Στοιχεία Περιγραφικής Στατιστικής για την Συνολική Επίδοση στο Προπαραεμβατικό Δοκίμιο των Τεσσάρων Ομάδων Προφίλ Προσέγγισης και Επεξεργασίας Έργων*

	N	Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση
Επιφανειακό προφίλ 1	12	.041	.029
Μεταβατικό προφίλ 2	25	.278	.085
Διαδικαστικό προφίλ 3	16	.648	.101
Δομικό προφίλ 4	7	.864	.086

Επιπρόσθετα, για να διαπιστωθεί κατά πόσο διαφοροποιείται η επίδοση των τεσσάρων ομάδων προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων στην ικανότητα επίλυσης έργων της αριθμητικής και των μοτίβων, εντοπίστηκαν οι μέσοι όροι επιτυχίας κάθε ομάδας μαθητών για κάθε ομάδα έργων. Ο Πίνακας 4.47 παρουσιάζει τα στοιχεία της περιγραφικής στατιστικής των τεσσάρων ομάδων προφίλ στην ικανότητα επίλυσης έργων που σχετίζονται με την αριθμητική και στην ικανότητα επίλυσης έργων που σχετίζονται με τα μοτίβα. Όπως φαίνεται από τον πίνακα αυτό, οι μέσοι όροι επιτυχίας των τεσσάρων ομάδων διαφοροποιούνται, τόσο στην ικανότητα επίλυσης έργων αριθμητικής όσο και στην ικανότητα επίλυσης έργων που σχετίζονται με τα μοτίβα, με την επίδοση να αυξάνεται καθώς μετακινούμαστε από το Επιφανειακό προφίλ 1 στο Δομικό προφίλ 4.

Πίνακας 4.47

*Στοιχεία Περιγραφικής Στατιστικής για την Επίδοση στα Έργα Αριθμητικής και την Επίδοση στα Έργα Μοτίβων στο Προπαραεμβατικό Δοκίμιο των Τεσσάρων Ομάδων Προφίλ Προσέγγισης και Επεξεργασίας Έργων*

	Προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων	Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση
Επίδοση στα έργα αριθμητικής	Επιφανειακό προφίλ 1	.056	.039
	Μεταβατικό προφίλ 2	.313	.084
	Διαδικαστικό προφίλ 3	.672	.089
	Δομικό προφίλ 4	.859	.074
Επίδοση στα έργα μοτίβων	Επιφανειακό προφίλ 1	.003	.012
	Μεταβατικό προφίλ 2	.186	.113
	Διαδικαστικό προφίλ 3	.584	.193
	Δομικό προφίλ 4	.878	.123

#### **Η επίδραση των δύο παρεμβατικών προγραμμάτων στην ικανότητα επίλυσης έργων που σχετίζονται με τις έννοιες των Αριθμών και των Μοτίβων**

Σε αυτό το μέρος παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για την απάντηση του τέταρτου ερευνητικού ερωτήματος της εργασίας:

4. Τα τρία περιβάλλοντα μάθησης (υψηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με χρήση οθονών αφής, χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με χρήση οθονών αφής, συνήθης διδασκαλία) ενισχύουν διαφορετικά την ικανότητα επίλυσης έργων που σχετίζονται με έννοιες των Αριθμών και των Μοτίβων των μαθητών προδημοτικής; Αν ναι, με ποιο τρόπο;

Για να διερευνηθεί εάν υπήρχαν διαφορές στην επίδοση μεταξύ των μαθητών των δύο παρεμβατικών προγραμμάτων (υψηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με χρήση οθονών αφής και χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με χρήση οθονών αφής) και της συνήθης διδασκαλίας, στο μεταπαραεμβατικό δοκίμιο, εντοπίστηκαν οι μέσοι όροι επιτυχίας (προπαραεμβατικό και μεταπαραεμβατικό δοκίμιο) των τεσσάρων ομάδων προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων στην ικανότητα επίλυσης έργων των Αριθμών και των Μοτίβων. Τα στοιχεία περιγραφικής στατιστικής για την επίδοση των τριών ομάδων στα έργα που σχετίζονται με τις συγκεκριμένες έννοιες στο μεταπαραεμβατικό δοκίμιο, παρουσιάζονται στον

Πίνακα 4.48. Συγκεκριμένα, η ομάδα που συμμετείχε στην παρέμβαση με την υψηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με χρήση οθονών αφής, παρουσίασε ψηλότερη επίδοση τόσο στα έργα που σχετίζονται με την έννοια των Αριθμών όσο και στα έργα που σχετίζονται με τα Μοτίβα σε σχέση με την ομάδα που συμμετείχε στην παρέμβαση με τη χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με χρήση οθονών αφής και η ομάδα που συμμετείχε στην χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με χρήση οθονών αφής, παρουσίασε ψηλότερη επίδοση από την ομάδα που συμμετείχε στη συνήθη διδασκαλία και στις δύο κατηγορίες έργων. Οι μέσοι όροι επιτυχίας κάθε ομάδας προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων παρουσιάζεται στον Πίνακα 4.48.

Πίνακας 4.48

*Στοιχεία Περιγραφικής Στατιστικής για την Επίδοση στο Μεταπαραμβατικό Δοκίμιο στα Έργα που Σχετίζονται με την Έννοια των Αριθμών και τα Μοτίβα των Τριών Ομάδων που Συμμετείχαν σε Διαφορετικό Περιβάλλον Μάθησης*

	Τύπος περιβάλλοντος	Τυπικό σφάλμα	Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση
Επίδοση στα έργα που σχετίζονται με την έννοια των αριθμών	Υψηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με χρήση οθονών αφής (Ομάδα 1)	.019	.768	.205
	Χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με χρήση οθονών αφής (Ομάδα 2)	.018	.636	.236
	Συνήθης διδασκαλία (Ομάδα 3)	.018	.518	.245
Επίδοση στα έργα που σχετίζονται με τα μοτίβα	Υψηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με χρήση οθονών αφής (Ομάδα 1)	.033	.809	.176
	Χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με χρήση οθονών αφής (Ομάδα 2)	.033	.620	.307
	Συνήθης διδασκαλία (Ομάδα 3)	.033	.434	.272



## **Μεταβολή των προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων από το προπαραεμβατικό στο μεταπαραεμβατικό στάδιο**

Σε αυτό το μέρος παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που αφορούν στο πέμπτο ερευνητικό ερώτημα της εργασίας:

5. Μεταβάλλεται το προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων που παρουσιάζουν μαθητές προδημοτικής κατά την επίλυση έργων που σχετίζονται με έννοιες των Αριθμών και των Μοτίβων από το προπαραεμβατικό στο μεταπαραεμβατικό στάδιο; Αν ναι, πώς;

Για να διερευνηθεί αν παρουσιάστηκε μεταβολή των προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων που υιοθέτησαν οι μαθητές από το προπαραεμβατικό στάδιο στο μεταπαραεμβατικό στάδιο πραγματοποιήθηκε ανάλυση crosstabs. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.49. Όπως παρουσιάζεται στον πίνακα, τρεις μαθητές με Επιφανειακό προφίλ 1 στο προπαραεμβατικό στάδιο διατήρησαν αυτό το προφίλ και στο μεταπαραεμβατικό στάδιο, ενώ εννέα μαθητές παρουσίασαν μετάβαση από το Επιφανειακό προφίλ 1 στο Μεταβατικό προφίλ 2. Δώδεκα μαθητές με Μεταβατικό προφίλ 2 στο προπαραεμβατικό στάδιο, διατήρησαν αυτό το προφίλ και στο μεταπαραεμβατικό στάδιο ενώ δεκατρείς μαθητές παρουσίασαν μετάβαση στο Διαδικαστικό προφίλ 3. Ωστόσο, όλοι οι μαθητές που υιοθέτησαν Διαδικαστικό προφίλ 3 κατά το προπαραεμβατικό στάδιο, διατήρησαν αυτό το προφίλ και στο μεταπαραεμβατικό στάδιο. Παρόμοια, όλοι οι μαθητές που υιοθέτησαν το Δομικό προφίλ 4 στο προπαραεμβατικό στάδιο, διατήρησαν αυτό το προφίλ και στο μεταπαραεμβατικό στάδιο. Αξίζει να σημειωθεί ότι ενώ η πλειοψηφία των μαθητών στο προπαραεμβατικό στάδιο παρουσίασε Μεταβατικό προφίλ 2, η πλειοψηφία στο μεταπαραεμβατικό στάδιο υιοθέτησε Διαδικαστικό προφίλ 3. Βελτίωση παρουσιάζεται και από το γεγονός ότι ενώ στο προπαραεμβατικό στάδιο το 20% των μαθητών παρουσίασε Επιφανειακό προφίλ 1, μόνο το 5% των μαθητών παρέμεινε στο Επιφανειακό προφίλ 1 κατά το μεταπαραεμβατικό στάδιο. Ωστόσο, δεν φαίνεται να παρατηρείται κάποια βελτίωση ως προς την υιοθέτηση του Δομικού προφίλ 4. Συγκεκριμένα, κανένας μαθητής με διαφορετικό προφίλ από το Δομικό προφίλ 4 κατά το προπαραεμβατικό στάδιο, δεν επέδειξε μετάβαση στο Δομικό προφίλ 4 κατά το μεταπαραεμβατικό στάδιο.

Πίνακας 4.49

*Ανάλυση Crosstabs Ανάμεσα στις Ομάδες Προφίλ των Μαθητών στο Προπαρεμβατικό και Μεταπαρεμβατικό Στάδιο*

		Προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων στο μεταπαρεμβατικό στάδιο				Σύνολο
		Επιφανειακό προφίλ (1)	Μεταβατικό προφίλ (2)	Διαδικαστικό προφίλ (3)	Δομικό προφίλ (4)	
Προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων στο προ παρεμβατικό στάδιο	Επιφανειακό προφίλ 1	3	9	0	0	12
	Μεταβατικό προφίλ 2	0	12	13	0	25
	Διαδικαστικό προφίλ 3	0	0	16	0	16
	Δομικό προφίλ 4	0	0	0	7	7
	Σύνολο	3	21	29	7	60

Επιπρόσθετα, πραγματοποιήθηκε ανάλυση crosstabs ανάμεσα στις ομάδες προφίλ των μαθητών στο προπαρεμβατικό στάδιο και στο περιβάλλον μάθησης που συμμετείχαν (δείτε Πίνακα 4.50) και ανάλυση crosstabs ανάμεσα στις ομάδες προφίλ των μαθητών στο μεταπαρεμβατικό στάδιο και στο περιβάλλον μάθησης που συμμετείχαν (δείτε Πίνακα 4.51). Όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.50 στο προπαρεμβατικό στάδιο υπήρχαν μαθητές με Επιφανειακό προφίλ 1 και στις τρεις ομάδες με διαφορετικό περιβάλλον μάθησης, ωστόσο, με βάση τον Πίνακα 4.51 στο μεταπαρεμβατικό στάδιο οι μαθητές με Επιφανειακό προφίλ 1 που συμμετείχαν στα δύο παρεμβατικά προγράμματα (υψηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με χρήση οθονών αφής και χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με χρήση οθονών αφής) παρουσίασαν μετάβαση σε διαφορετικό προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων. Αντίθετα, εξακολουθούσαν να εμφανίζονται μαθητές με Επιφανειακό προφίλ προσέγγισης 1 στο μεταπαρεμβατικό στάδιο στην ομάδα ελέγχου. Άλλη μια παρατήρηση που προκύπτει από τους Πίνακες 4.50 και 4.51 αποτελεί το ότι οι μαθητές με Διαδικαστικό προφίλ 3 που συμμετείχαν στην υψηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με τη χρήση οθονών αφής, αυξήθηκαν στο μεταπαρεμβατικό στάδιο κατά επτά σε σχέση με το προπαρεμβατικό και η συγκεκριμένη μετάβαση-εξέλιξη στο Διαδικαστικό προφίλ 3 προέκυψε από μαθητές που προηγουμένως, στο προπαρεμβατικό, είχαν υιοθετήσει Μεταβατικό προφίλ 2. Παρόμοια, οι μαθητές με Διαδικαστικό προφίλ 3 στο μεταπαρεμβατικό στάδιο που

συμμετείχαν στη χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με χρήση οθονών αφής, αυξήθηκαν κατά πέντε σε σχέση με το προπαραεμβατικό στάδιο και η συγκεκριμένη μετάβαση-εξέλιξη στο Διαδικαστικό προφίλ 3 προέκυψε από μαθητές που στο προπαραεμβατικό είχαν υιοθετήσει Μεταβατικό προφίλ 2. Από την άλλη οι μαθητές με Διαδικαστικό προφίλ 3 στο μεταπαραεμβατικό στάδιο που συμμετείχαν στην ομάδα ελέγχου διατηρήθηκαν στα ίδια επίπεδα στο μεταπαραεμβατικό στάδιο μιας και οι μαθητές με Διαδικαστικό προφίλ 3 της ομάδας ελέγχου στο μεταπαραεμβατικό αυξήθηκαν μόνο κατά 1 σε σχέση με το προπαραεμβατικό στάδιο.

Πίνακας 4.50

*Ανάλυση Crosstabs Ανάμεσα στις Ομάδες Προφίλ των Μαθητών στο Προπαραεμβατικό Στάδιο και στο Περιβάλλον Μάθησης που Συμμετείχαν*

		Περιβάλλον μάθησης			Σύνολο
		Υψηλού βαθμού Καθοδηγούμενη διερεύνηση με τη χρήση οθονών αφής	Χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με χρήση οθονών αφής	Συνήθης διδασκαλία	
Προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων στο προπαραεμβατικό στάδιο	Επιφανειακό προφίλ 1	5	4	3	12
	Μεταβατικό προφίλ 2	10	7	8	25
	Διαδικαστικό προφίλ 3	3	6	7	16
	Δομικό προφίλ 4	2	3	2	7
Σύνολο		20	20	20	60

Πίνακας 4.51

*Ανάλυση Crosstabs Ανάμεσα στις Ομάδες Προφίλ των Μαθητών στο Μεταπαρεμβατικό Στάδιο και στο Περιβάλλον Μάθησης που Συμμετείχαν*

		Περιβάλλον μάθησης			Σύνολο
		Υψηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με τη χρήση οθονών αφής	Χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με χρήση οθονών αφής	Συνήθης διδασκαλία	
Προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων στο μεταπαρεμβατικό στάδιο	Επιφανειακό προφίλ 1	0	0	3	3
	Μεταβατικό προφίλ 2	8	6	7	21
	Διαδικαστικό προφίλ 3	10	11	8	29
	Δομικό προφίλ 4	2	3	2	7
Σύνολο		20	20	20	60

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

### ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Η έμφαση που έχει δοθεί στη διδασκαλία των Μαθηματικών κατά την προσχολική ηλικία καθώς και οι ενδείξεις ότι η διδασκαλία των Μαθηματικών από το νηπιαγωγείο μπορεί να αποτελέσει ισχυρό παράγοντα πρόβλεψης της επιτυχίας των παιδιών σε μετέπειτα στάδια, φαίνεται να έχει αυξήσει το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών στο πεδίο της μαθηματικής παιδείας (Clements, Sarama, Spitler, Lange, & Wolfe, 2011; English & Mulligan, 2013; Levenson, Tirosh, & Tsamir, 2011; Papic et al., 2011; Sarama & Clements, 2009). Αρκετές από τις έρευνες αυτές, φαίνεται να εστιάζονται στην ενότιτες περιεχομένου των Αριθμών και των Μοτίβων και να διερευνούν την επίδραση που έχει η μαθηματική επίδοση των μαθητών προσχολικής ηλικίας σε μεταγενέστερες ηλικίες, ενώ μεγάλη έμφαση φαίνεται να δίνεται σε περιγραφές σταδίων ή τροχιών μάθησης οι οποίες αναφέρονται συγκεκριμένα στην ικανότητα των μαθητών να επιτυγχάνουν σε συγκεκριμένο μαθηματικό περιεχόμενο, ενώ παρέχουν πληροφορίες σχετικά με το τι μπορούν και τι δε μπορούν να κάνουν οι μαθητές αυτοί. Δεν εντοπίζονται, ωστόσο, εργασίες οι οποίες να επιχειρούν μία περιγραφή της μαθηματικής ικανότητας σε μικρότερους μαθητές, η οποία δε περιορίζεται απλά στο να ενημερώσει για το πού επιτυγχάνουν και το πού αποτυγχάνουν οι μαθητές σε σχέση με συγκεκριμένο μαθηματικό περιεχόμενο, αλλά να παρουσιάζει την εξέλιξη στη μαθηματική σκέψη, στη συμπεριφορά, στο συλλογισμό και στις προσεγγίσεις που υιοθετούν οι μικρότεροι ηλικιακά μαθητές. Ως εκ τούτου, παρατηρήθηκε η ανάγκη για εξέταση των πιο πάνω, μέσα από εμπειρικά δεδομένα από μικρότερους ηλικιακά μαθητές και συγκεκριμένα μαθητές προδημοτικής και η εις βάθος ανάλυσή τους μέσα από την εφαρμογή της εμπειρικά θεμελιωμένης θεωρίας για τη δημιουργία ενός μοντέλου που θα ενημερώνει για τις συνιστώσες που περιγράφουν την μαθηματική ικανότητα των παιδιών αυτών και διαπλέκονται κατά την επεξεργασία των μαθηματικών έργων.

Επιπρόσθετα, ενώ πολλά ερευνητικά αποτελέσματα (Alade et al., 2016; Clements & Sarama, 2007; Dejonckheere et al., 2015; Hubber et al., 2016; Hung et al., 2015; Kosko & Ferdig, 2016) φαίνεται να αναφέρονται και να τονίζουν τη θετική συνεισφορά της τεχνολογίας στη διδασκαλία και μάθηση κατά την προσχολική ηλικία, ελάχιστη προσοχή φαίνεται να έχει δοθεί στον τρόπο με τον οποίο η τεχνολογία και συγκεκριμένα η χρήση των οθονών αφής,

μπορεί να βοηθήσουν στην ανάπτυξη των ικανοτήτων των μαθητών προσχολικής ηλικίας (Steglin, 2005). Δηλαδή, στο πώς συγκεκριμένες παρεμβατικές διδασκαλίες οι οποίες ενσωματώνουν τη χρήση των οθονών αφής, μπορούν να βοηθήσουν στην ανάπτυξη των ικανοτήτων των μαθητών προσχολικής ηλικίας σε έννοιες που σχετίζονται με τους Αριθμούς και τα Μοτίβα.

Σκοπός της παρούσας εργασίας, ήταν η παρουσίαση ενός μοντέλου για την περιγραφή των συνιστώσων που συνθέτουν την ικανότητα μαθητών προδημοτικής, κατά την επίλυση μαθηματικών έργων που αφορούν στην έννοια των Αριθμών και των Μοτίβων όπως επίσης και η διερεύνηση του πώς η χρήση διαφορετικών περιβαλλόντων διερευνητικής μάθησης με χρήση οθονών αφής, υποστηρίζει την ανάπτυξη της ικανότητας αυτής στους μαθητές προδημοτικής. Ο σκοπός της παρούσας έρευνας ήταν η ανάπτυξη ενός μοντέλου το οποίο να περιγράφει τις βασικές συνιστώσες της ικανότητας των μαθητών προδημοτικής κατά την επίλυση μαθηματικών έργων που αφορούν στην έννοια των Αριθμών και των Μοτίβων, ενώ επιμέρους στόχοι ήταν (α) η περιγραφή της εξελικτικής πορείας στη συμπεριφορά και ικανότητα των μαθητών προδημοτικής κατά την επίλυση μαθηματικών έργων μέσα από την περιγραφή ομάδων μαθητών με διαφορετικά επίπεδα προσέγγισης και επεξεργασίας έργων και (β) η διερεύνηση της επίδρασης διαφορετικών περιβαλλόντων διερευνητικής μάθησης με τη χρήση οθονών αφής στην ικανότητα των μαθητών προδημοτικής να επιλύουν μαθηματικά έργα που αφορούν στην έννοια των Αριθμών και των Μοτίβων.

### **Η δομή της ικανότητας των μαθητών προδημοτικής σε έργα Αριθμών και Μοτίβων**

Από τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας, προκύπτει ότι η ικανότητα των μαθητών προδημοτικής κατά την επίλυση έργων που αφορούν στην έννοια των Αριθμών και των Μοτίβων περιγράφεται από πέντε βασικές συνιστώσες: (α) *Διαχείριση και ερμηνεία δεδομένων προβλήματος*, (β) *Επεξεργασία και χρήση αναπαραστάσεων*, (γ) *Ικανότητα χρήσης μαθηματικών διαδικασιών*, (δ) *Ικανότητα παροχής αιτιολογήσεων* και (ε) *Ικανότητα έκφρασης με ακρίβεια*. Για κάθε μια από αυτές τις κατηγορίες εντοπίστηκαν τρεις διαστάσεις, οι οποίες αποτελούν διαβαθμίσεις της διαφοροποιημένης ικανότητας ανταπόκρισης στις απαιτήσεις κάθε κατηγορίας (συνιστώσες).

## Διαχείριση και ερμηνεία δεδομένων προβλήματος

Η πρώτη συνιστώσα του μοντέλου, αναφέρεται στην *Ικανότητα διαχείρισης και ερμηνείας δεδομένων του προβλήματος*. Η σημασία της *Ικανότητας διαχείρισης και ερμηνείας των δεδομένων του προβλήματος* που εντοπίστηκε στην παρούσα εργασία συνάδει με τις παρατηρήσεις πολλών ερευνητών (Artzt & Thomas, 1992; Goos, Galbraith, & Renshaw, 2000; Mayer, 1985; Polya, 1997) οι οποίοι τονίζουν τη σημασία του πρώτου βήματος της διαδικασίας επίλυσης προβλήματος, δηλαδή την κατανόηση του προβλήματος και την επιλογή των κατάλληλων δεδομένων. Αναδεικνύουν ουσιαστικά, όπως και τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας, το ότι η επιτυχία και η συμπεριφορά κατά την επίλυση προβλήματος, καθορίζεται σε μεγάλο βαθμό από την ικανότητα διάκρισης και επιλογής των δεδομένων που μπορούν να οδηγήσουν στην λύση του προβλήματος, από άλλες πληροφορίες που δε σχετίζονται με την επίλυσή του. Η συγκεκριμένη συνιστώσα αναφέρεται στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές της έρευνας διαχειρίζονταν ή/και επεξεργάζονταν τα δεδομένα του προβλήματος. Συγκεκριμένα, όπως διαφάνηκε, η συνιστώσα αυτή διακρίνεται σε δύο ιδιότητες: τον *Αναστοχασμό δεδομένων προβλήματος* καθώς και την *Ερμηνεία δεδομένων προβλήματος*.

Όπως διαπιστώθηκε από την εφαρμογή της αξονικής κωδικοποίησης, οι κωδικοί που εντάχθηκαν στη συγκεκριμένη συνιστώσα, διακρίθηκαν σε τρεις επιμέρους διαστάσεις: *Επιφανειακή/ιδιοσυγκρασιακή επεξεργασία/χειρισμός δεδομένων*, *Μονοδιάστατη επεξεργασία/χειρισμός δεδομένων* και *Ευέλικτη επεξεργασία/χειρισμός δεδομένων*. Συγκεκριμένα, η πρώτη διάσταση, η *Επιφανειακή/ιδιοσυγκρασιακή επεξεργασία/χειρισμός δεδομένων*, αναφέρεται στην παντελή παράβλεψη των δεδομένων του προβλήματος, στην προσθήκη περιττών στοιχείων, τα οποία σχετίζονταν με οικείες ιστορίες/σενάρια ή προσωπικές προτιμήσεις. Η διάσταση αυτή, συνάδει με το επίπεδο που εντόπισαν ερευνητές (Mulbar, Rahman, & Ahmar, 2017) σχετικά με την επεξεργασία των δεδομένων, όπου παρατηρείται χρήση λανθασμένων ή άσχετων δεδομένων τα οποία οδηγούν σε λανθασμένες και άσχετες λύσεις σε σχέση με το πρόβλημα. Η δεύτερη διάσταση της συγκεκριμένης κατηγορίας, η *Μονοδιάστατη επεξεργασία/χειρισμός των δεδομένων του προβλήματος* αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών να είναι σε θέση είτε να λαμβάνουν υπόψη τους όλα τα δεδομένα του προβλήματος που έχουν να αντιμετωπίσουν, είτε μερικά από αυτά, χωρίς όμως να είναι σε θέση να εντοπίζουν οποιεσδήποτε συσχετίσεις μεταξύ των δεδομένων οι οποίες ενδεχομένως να διευκόλυναν τη διαδικασία επίλυσης των μαθηματικών έργων. Η

συγκεκριμένη διάσταση και ο χαρακτηρισμός *Μονοδιάστατη επεξεργασία δεδομένων* στην παρούσα εργασία, εμπλέκει και συνάδει με τα δύο επίπεδα τα οποία εντοπίζονται και στη βιβλιογραφία: (α) το μονοδομικό επίπεδο που εντόπισαν ερευνητές (Mulbar, Rahman, & Ahmar, 2017) σχετικά με την επεξεργασία των δεδομένων όπου παρατηρείται επικέντρωση της προσοχής στο πρόβλημα, ωστόσο, αξιοποιείται μόνο μια πληροφορία ή ένα μόνο σχετικό δεδομένο στην προσπάθεια επίλυσης του προβλήματος και (β) το πολυδομικό επίπεδο που εντόπισαν ερευνητές (Mulbar, Rahman, & Ahmar, 2017) σχετικά με την επεξεργασία των δεδομένων όπου παρατηρείται δυνατότητα χρήσης πολλαπλών δεδομένων ή πληροφοριών χωρίς όμως να παρουσιάζεται οποιαδήποτε συσχέτιση ή σύνδεση μεταξύ των δεδομένων αυτών. Αξίζει να σημειωθεί ότι στην παρούσα εργασία, τόσο η αξιοποίηση όλων των δεδομένων χωρίς περαιτέρω εντοπισμό συσχετίσεων όσο και η αξιοποίηση μόνο ενός ή μερικών δεδομένων του προβλήματος, κρίνεται ως μονοδιάστατη επεξεργασία δεδομένων μιας και τα δύο χαρακτηρίζονται από κάποιο είδος ανεπάρκειας ή απουσίας δράσης σε πολλαπλά επίπεδα. Ωστόσο, η διαφοροποίηση μεταξύ των δύο αυτών συμπεριφορών, αναδεικνύεται και διακρίνεται πιο αναλυτικά στην συνέχεια όπου διαμορφώνονται και περιγράφονται τα διαφορετικά προφίλ/ομάδες μαθητών. Η τρίτη διάσταση της συγκεκριμένης συνιστώσας, η *Ευέλικτη επεξεργασία/χειρισμός δεδομένων του προβλήματος*, έχει χρησιμοποιηθεί ώστε να δείξει την ικανότητα των μαθητών να επεξεργάζονται με κατάλληλο τρόπο τα δεδομένα του προβλήματος. Ο τρόπος με τον οποίο επεξεργάζονταν τα δεδομένα, επέτρεπε στους μαθητές να εντοπίζουν διάφορες συσχετίσεις μεταξύ τους και αυτό ήταν κάτι που διευκόλυνε τη διαδικασία επίλυσης των έργων. Η *Ευέλικτη επεξεργασία/χειρισμός δεδομένων* αναφέρεται και συνάδει με το συσχετιστικό/συσχεσιακό επίπεδο που εντόπισαν άλλοι ερευνητές (Mulbar, Rahman, & Ahmar, 2017) οι οποίοι εξέτασαν, αξιοποιώντας το μοντέλο SOLO (Biggs & Collis, 1982), την ικανότητα μεγαλύτερων ηλικιακά υποκειμένων να επεξεργάζονται δεδομένα του προβλήματος. Το συσχετιστικό/συσχεσιακό επίπεδο που εντόπισαν, εμπλέκει την ικανότητα χρήσης πολλαπλών δεδομένων και τον εντοπισμό συσχετίσεων και συνδέσεων μεταξύ των δεδομένων που επιτρέπει την εξαγωγή σχετικών συμπερασμάτων.



## Επεξεργασία και χρήση αναπαραστάσεων

Η δεύτερη διάσταση του μοντέλου, *Επεξεργασία και χρήση αναπαραστάσεων (εικονικών αναπαραστάσεων και εποπτικών εργαλείων/μέσων)* φάνηκε μέσα από τα δεδομένα της εργασίας ότι καθορίζει αλλά και περιγράφει μια από τις βασικές ικανότητες που χρειάζεται να αναπτύξουν οι μαθητές ώστε να είναι σε θέση να αντιμετωπίσουν με επιτυχία έργα που αφορούν στην έννοια των Αριθμών και των Μοτίβων. Η σημαντικότητα του συγκεκριμένου παράγοντα στην επίδοση των μαθητών προδημοτικής, συνάδει με την σημασία που δίνεται σε αυτόν από το Εθνικό Συμβούλιο Δασκάλων για τα Μαθηματικά στην Αμερική (NCTM, 2000) τον οποίο συμπεριλαμβάνουν μέσα στις πέντε βασικές διαδικασίες οι οποίες θα πρέπει να αποτελούν απαραίτητα στοιχεία στη διδασκαλία των Μαθηματικών και τονίζουν ότι αποτελεί ικανότητα που πρέπει να αναπτύξουν οι μαθητές. Παρόμοια, δύο από τις οκτώ μαθηματικές πρακτικές των Common Core State Standards (2010), και συγκεκριμένα η «στρατηγική χρήση εργαλείων/εποπτικών μέσων» και η «ποσοτική και αφηρημένη σκέψη», εμπλέκουν στοιχεία που περιλαμβάνονται στον παράγοντα της παρούσας εργασίας για την *Επεξεργασία και χρήση αναπαραστάσεων* και αποτελούν βασικές ικανότητες που οι εκπαιδευτικοί σε όλες τις βαθμίδες πρέπει να επιδιώξουν να αναπτύξουν οι μαθητές τους.

Ο παράγοντας *Επεξεργασία και χρήση αναπαραστάσεων*, όπως προέκυψε μέσα από την ανάλυση των δεδομένων της έρευνας, φαίνεται να διακρίνεται σε δύο επιμέρους ιδιότητες. Συγκεκριμένα, η πρώτη ιδιότητα, αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών να χειρίζονται δοσμένες αναπαραστάσεις, να χρησιμοποιούν, να μετασχηματίζουν, να επεξεργάζονται και να αξιοποιούν τα εργαλεία ή τα εποπτικά μέσα που τους δόθηκαν (π.χ. κύβοι, καρτέλες, πραγματικά αντικείμενα), την εικόνα ή το μοντέλο (αριθμητική γραμμή, πλέγμα αριθμών) ώστε να δίνουν απαντήσεις. Παράλληλα, η δεύτερη ιδιότητα της κατηγορίας *Επεξεργασία και χρήση αναπαραστάσεων*, αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών προδημοτικής να δημιουργούν αναπαραστάσεις (εξωτερικές εικονικές ή νοερές αναπαραστάσεις), λαμβάνοντας υπόψη τις πληροφορίες κάθε προβλήματος που τους είχε δοθεί.

Επιπρόσθετα, όπως διαφάνηκε μέσα από την εφαρμογή της αξονικής κωδικοποίησης, οι κωδικοί οι οποίοι εντάχθηκαν στη συγκεκριμένη συνιστώσα, διακρίθηκαν σε τρεις διαστάσεις. Η πρώτη διάσταση της συγκεκριμένης κατηγορίας, αναφέρεται στην *Επιφανειακή/ιδιοσυγκρασιακή επεξεργασία/χρήση αναπαραστάσεων*. Η συγκεκριμένη διάσταση προέκυψε στις περιπτώσεις όπου οι μαθητές χρησιμοποιούσαν με ιδιοσυγκρασιακό τρόπο τις αναπαραστάσεις που τους δόθηκαν (είτε αφορούσαν σε εικόνες, ή μοντέλα ή

εποπτικά μέσα/εργαλεία). Η *Επιφανειακή/ιδιοσυγκρασιακή επεξεργασία/χρήση αναπαραστάσεων*, αναφέρεται στην τάση των «αδύνατων» μαθητών να δημιουργούν εικονικές αναπαραστάσεις οι οποίες αποτελούν ζωγραφιές των αντικειμένων, με συγκεκριμένες λεπτομέρειες και χρώμα και στην τάση τους να εστιάζουν σε λεπτομέρειες των δοσμένων αναπαραστάσεων, οι οποίες δεν σχετίζονται με την επίλυση του προβλήματος (Hegarty & Kozhevnikov, 1999). Εμπλέκει επίσης, την τάση χρήσης των εργαλείων/εποπτικών μέσων ως παιχνίδια (που δεν συνδέονται με τον μαθησιακό στόχο για τον οποίο δόθηκαν) παρά ως εργαλεία σκέψης (Sarama & Clements, 2016).

Όσον αφορά στη δεύτερη διάσταση της κατηγορίας *Επεξεργασία και χρήση αναπαραστάσεων*, αυτή αναφέρεται στη *Μονοδιάστατη επεξεργασία/χρήση αναπαραστάσεων*. Ο συγκεκριμένος όρος έχει χρησιμοποιηθεί, ώστε να δείξει τις ενέργειες των μαθητών στις αναπαραστάσεις οι οποίες φανερώνουν έναν και μοναδικό τρόπο χειρισμού τους, χωρίς να παρουσιάζεται οποιαδήποτε δυνατότητα χρήσης άλλου εναλλακτικού τρόπου αντιμετώπισής τους. Η συγκεκριμένη διάσταση συνάδει με τις παρατηρήσεις των Clements και Sarama (2016) οι οποίοι επισημαίνουν ότι τα παιδιά κάποιες φορές μαθαίνουν να χρησιμοποιούν τα εργαλεία/εποπτικά μέσα με έναν και μοναδικό τρόπο, χωρίς να υπάρχει ευελιξία στον τρόπο χρήσης τους. Ο όρος *Μονοδιάστατη επεξεργασία/χρήση αναπαραστάσεων* στην παρούσα εργασία παραπέμπει επίσης, στην απουσία αναστοχασμού από μέρους των μαθητών κατά την επεξεργασία των εργαλείων/εποπτικών μέσων και εικονικών αναπαραστάσεων. Η απουσία αναστοχασμού δημιουργεί πρόβλημα καθώς οι μαθητές μπορεί να χρειάζεται να έχουν στην διάθεσή τους χειριστικά μέσα ώστε να οικοδομήσουν τις αρχικές τους ιδέες ωστόσο, για να μπορεί να επιτευχθεί αυτό θα πρέπει να αναστοχάζονται στις πράξεις που εκτελούν με τη χρήση των συγκεκριμένων μέσων (Clements, 1999). Η τελευταία διάσταση της συγκεκριμένης συνιστώσας, αναφέρεται στην *Ευέλικτη επεξεργασία/χρήση αναπαραστάσεων*. Χρησιμοποιώντας τον όρο ευελιξία, αναφερόμαστε στην ικανότητα των μαθητών να επεξεργάζονται τις εικονικές αναπαραστάσεις που τους δίνονται με διαφορετικούς τρόπους, ώστε να επιλύουν τα μαθηματικά έργα που τους δόθηκαν. Ακόμη, ο όρος ευελιξία, αναφέρεται και στην ικανότητα των μαθητών να χειρίζονται με κατάλληλο αλλά και στρατηγικό τρόπο τα εργαλεία που τους δίνονται, τις εικονικές αναπαραστάσεις καθώς και τα μοντέλα, ενώ υποδεικνύει την ικανότητα των μαθητών να αναλύουν τις δοσμένες εικονικές αναπαραστάσεις με τρόπο που να εντοπίζουν σχέσεις. Ως εκ τούτου, η ευέλικτη διάσταση στην παρούσα εργασία συμπεριλαμβάνει και αυτό που τονίζεται από τα Common Core State

Standards (2010) για την «στρατηγική χρήση εργαλείων/εποπτικών μέσων» και την «ποσοτική και αφηρημένη σκέψη» η οποία δίνει έμφαση στην ευελιξία μετάβασης μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων. Επιπρόσθετα, ο όρος ευελιξία στην παρούσα εργασία, αναφέρεται και στην ικανότητά τους να μεταφέρουν τις γνώσεις που έχουν αποκτήσει σε νέες καταστάσεις οι οποίες απαιτούν το χειρισμό αναπαραστάσεων. Τέλος, η ευελιξία αναφέρεται στην ικανότητά τους, να απεικονίζουν νοερά προβληματικές καταστάσεις ή να δημιουργούν εικονικές αναπαραστάσεις, με τρόπο που να φανερώνει οργάνωση των στοιχείων που εμπλέκονται σε αυτή τη διαδικασία. Αυτή η ευελιξία, συνδέεται με τις παρατηρήσεις των Hegarty & Kozhevnikov (1999), οι οποίοι παρέχουν στοιχεία για την ικανότητα των «επιτυχημένων» μαθητών να χρησιμοποιούν σχηματικές αναπαραστάσεις, οι οποίες αποτελούν διαγράμματα που παρουσιάζουν τις χωρικές σχέσεις μεταξύ των μερών του προβλήματος (Hegarty & Kozhevnikov, 1999).

### **Ικανότητα χρήσης μαθηματικών διαδικασιών**

Η τρίτη συνιστώσα η οποία συνθέτει το μοντέλο, αναφέρεται στην *Ικανότητα χρήσης μαθηματικών διαδικασιών* και στρατηγικών που ήταν σε θέση να εφαρμόζουν οι μαθητές ώστε να επιλύσουν τα έργα που τους δόθηκαν. Συγκεκριμένα, οι μαθηματικές διαδικασίες/στρατηγικές που υιοθέτησαν οι μαθητές, διακρίνονται σε δύο ιδιότητες: (α) τις αριθμητικές διαδικασίες και (β) τις αλγεβρικές διαδικασίες. Ο όρος αριθμητικές διαδικασίες, αναφέρεται στις διαδικασίες που σχετίζονται με την ενότητα περιεχομένου των Αριθμών, ενώ οι αλγεβρικές διαδικασίες αναφέρονται στις διαδικασίες που υιοθετούσαν οι μαθητές σε έργα που σχετίζονται με τα Μοτίβα.

Κατά την εφαρμογή της αξονικής κωδικοποίησης, όπως διαφάνηκε, η συγκεκριμένη κατηγορία διακρίθηκε σε τρεις επιμέρους διαστάσεις. Συγκεκριμένα, η πρώτη διάσταση της κατηγορίας *Ικανότητα χρήσης μαθηματικών διαδικασιών*, αναφέρεται στην επιλογή και εφαρμογή *Επιφανειακών/ιδιοσυγκρασιακών διαδικασιών/προσεγγίσεων*. Οι επιφανειακές/ιδιοσυγκρασιακές προσεγγίσεις αναφέρονται στην υιοθέτηση προσεγγίσεων που δεν συνδέονται με μαθηματικό περιεχόμενο και που στηρίζονται σε ενέργειες, μη σχετικές με το μαθηματικό έργο. Η δεύτερη διάσταση της συγκεκριμένης κατηγορίας, η *Μονοδιάστατη χρήση/εφαρμογή μαθηματικών διαδικασιών*, αναφέρεται στην τάση των μαθητών να καταφεύγουν σε γνωστές διαδικασίες ή να χρησιμοποιούν και να εφαρμόζουν

έναν και μοναδικό τρόπο βήμα προς βήμα, χωρίς να υπάρχει η δυνατότητα υιοθέτησης ενός εναλλακτικού τρόπου προσέγγισης. Ως αποτέλεσμα, σε πολλές περιπτώσεις, εγκλωβίζονταν σε χρονοβόρες και πολύπλοκες διαδικασίες τόσο στην περίπτωση των έργων που ενέπλεκαν την έννοια των Αριθμών όσο και στα έργα που αφορούσαν στα Μοτίβα, χωρίς να είναι σε θέση πάντοτε να ολοκληρώσουν τη διαδικασία και να επιλύσουν τα μαθηματικά έργα που τους δόθηκαν. Αυτή η βήμα προς βήμα εφαρμογή γνωστών διαδικασιών που χαρακτηρίζει τον όρο μονοδιάστατη εφαρμογή διαδικασιών, άλλοτε ενέπλεκε ορθή εφαρμογή τους και άλλοτε ημιτελή εκτέλεση διαδικασιών χωρίς πλήρη αντίληψη της εφαρμογής τους. Ο διαχωρισμός των δύο αυτών συμπεριφορών της μονοδιάστατης χρήσης διαδικασιών, αναδεικνύεται και παρουσιάζεται πιο αναλυτικά στην περιγραφή των διαφορετικών προφίλ/ομάδων μαθητών. Η τελευταία διάσταση της κατηγορίας αυτής, η *Ευέλικτη χρήση/εφαρμογή μαθηματικών διαδικασιών έχει* χρησιμοποιηθεί ώστε να δείξει την ικανότητα των μαθητών να χρησιμοποιούν πέραν από τις τυπικές διαδικασίες και εναλλακτικές. Οι εναλλακτικές αυτές διαδικασίες, έδωσαν τη δυνατότητα στους μαθητές να συντομεύσουν τη διαδικασία επίλυσης των έργων που τους δόθηκαν. Επίσης, οι μαθητές που ήταν σε θέση να χρησιμοποιούν τέτοιου είδους εναλλακτικές προσεγγίσεις, παρουσίασαν την ικανότητα αναστοχασμού στις διαδικασίες που χρησιμοποιούσαν. Η ευέλικτη χρήση/εφαρμογή μαθηματικών διαδικασιών περιλάμβανε ενδεικτικά, συμπεριφορές όπως: (α) ικανότητα εύρεσης ζητούμενων αθροισμάτων νοερά μέσω ανάκλησης γνωστών αποτελεσμάτων (π.χ. διπλά αθροίσματα), (β) ικανότητα γενίκευσης μοτίβων μέσω επεξεργασίας που αναδείκνυε την μονάδα επανάληψης στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα και τον εντοπισμό του κανόνα-σταθερής διαφοράς στα αναπτυσσόμενα μοτίβα, (γ) την ικανότητα ανάλυσης και σύνθεσης αριθμού και την εφαρμογή στρατηγικών όπως δοκιμής και ελέγχου με ικανότητα αναστοχασμού στην πορεία εφαρμογής τους, (δ) την ικανότητα εντοπισμού μοτίβων ακόμη και σε περιπτώσεις όπου δεν απαιτούσαν άμεσα εύρεση μοτίβου και (ε) την ικανότητα εκτίμησης ποσοτήτων μέσω κατάλληλων στρατηγικών και συλλογισμών που οδηγούσαν σε λογικές εκτιμήσεις.

### **Ικανότητα παροχής αιτιολογήσεων**

Η τέταρτη συνιστώσα του μοντέλου, αναφέρεται στην *Ικανότητα για παροχή αιτιολογήσεων*. Η σημασία της ικανότητας αιτιολόγησης που εντοπίστηκε στην παρούσα εργασία συνάδει με την σημασία που δίνεται σε αυτήν από το έγγραφο των Common Core State Standards (2010), το οποίο περιγράφει ως μια από τις οκτώ μαθηματικές πρακτικές την «Ανάπτυξη ισχυρισμών

και κρίση συλλογισμού των άλλων» τονίζοντας την ανάγκη ανάπτυξής της από τους μαθητές όλων των βαθμίδων. Η σημασία της συνιστώσας «*Ικανότητα παροχής αιτιολογήσεων*» της παρούσας εργασίας στην προδημοτική, συμβάλλει και συνάδει με την σημασία που αποδίδεται στην ανάπτυξη της ικανότητας απόδειξης ως μιας από τις πέντε βασικές διαδικασίες οι οποίες θα πρέπει να αποτελούν απαραίτητα στοιχεία στη διδασκαλία των Μαθηματικών από το Εθνικό Συμβούλιο Δασκάλων για τα Μαθηματικά στην Αμερική (NCTM, 2000). Η έμφαση στη διαδικασία και ανάπτυξη της ικανότητας απόδειξης, ενισχύεται και επιτυγχάνεται μέσω της έγκαιρης και σταδιακής προσπάθειας για ανάπτυξη της ικανότητας αιτιολόγησης από τους μικρότερους ηλικιακά μαθητές (προδημοτικής), λαμβάνοντας υπόψη ότι στην περίπτωση των μικρότερων ηλικιακά μαθητών αναφερόμαστε σε αιτιολόγηση και όχι σε απόδειξη (Blanton, Levi, Crites, & Dougherty, 2011).

Συγκεκριμένα, η κατηγορία *Ικανότητα παροχής αιτιολογήσεων*, αναφέρεται στις επεξηγήσεις που χρησιμοποιούσαν οι μαθητές στις περιπτώσεις όπου ζητήθηκε από αυτούς να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους. Όπως έχει εντοπιστεί, η συγκεκριμένη κατηγορία, διακρίνεται σε δύο ιδιότητες. Η πρώτη ιδιότητα αφορά στις αιτιολογήσεις των μαθητών που εμπλέκουν αναστοχασμό της πορείας καθώς και κατανόηση της ανάγκης για παροχή ολοκληρωμένων απαντήσεων, ενώ η δεύτερη διάσταση αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών να χρησιμοποιούν ή να αναφέρονται σε δεδομένα που δόθηκαν ή που προέκυψαν στην πορεία.

Κατά την εφαρμογή της αξονικής κωδικοποίησης, εντοπίστηκε ότι οι κωδικοί που συνέθεσαν την κατηγορία της *Ικανότητας παροχής αιτιολογήσεων*, διακρίνονταν σε τρεις διαστάσεις. Πρώτη διάσταση στην κατηγορία της *Ικανότητας παροχής αιτιολογήσεων*, αποτελεί η *Επιφανειακή/ιδιοσυγκρασιακή περιγραφή που δεν παραπέμπει σε αιτιολόγηση*. Η διάσταση αυτή αναφέρεται στις περιπτώσεις όπου οι μαθητές κατέληγαν σε ιδιοσυγκρασιακές λεκτικές περιγραφές, οι οποίες ωστόσο δεν παρέπεμπαν σε αιτιολόγηση. Η συγκεκριμένη διάσταση συνάδει και εμπλέκει ανάμεσα σε άλλα και το πρώτο επίπεδο αιτιολόγησης που προτείνει ο Carpenter και οι συνεργάτες του (2003), το οποίο αναφέρεται στις περιπτώσεις όπου οι μαθητές επιλέγουν λόγους που δεν σχετίζονται με μαθηματικές αιτιολογήσεις αλλά βασίζονται στο τι άκουσαν από άλλα άτομα που έχουν κάποια εξουσία ή είναι σημαντικά γι' αυτούς. Αντίστοιχα, ο όρος *Μονοδιάσταση παροχή/έκφραση αιτιολογήσεων*, περιγράφει τη δεύτερη διάσταση της συγκεκριμένης κατηγορίας και αναφέρεται στις περιπτώσεις όπου οι μαθητές περιορίζονταν και εγκλωβίζονταν σε ένα μοναδικό τρόπο αιτιολόγησης.

Συγκεκριμένα, ο όρος *Μονοδιάστατη παροχή/έκφραση αιτιολογήσεων*, αναφέρεται σε προσκόλληση των μαθητών είτε σε απλή περιγραφή και επεξήγηση του τρόπου που εργάστηκαν, είτε σε αναφορά σε συγκεκριμένο λανθασμένο παράδειγμα που εντόπισαν (το οποίο θεωρούσαν ορθό), είτε σε αναφορά σε συγκεκριμένο/α (ορθό) παράδειγμα/τα που εντόπισαν. Ως εκ τούτου, η διάσταση αυτή εμπλέκει ανάμεσα σε άλλα, το δεύτερο επίπεδο αιτιολόγησης που προτείνει ο Carpenter και οι συνεργάτες του (2003), τις αιτιολογήσεις με παραδείγματα, όπου οι μαθητές για να αιτιολογήσουν την άποψή τους χρησιμοποιούν συγκεκριμένο/να αριθμητικό/κά παράδειγμα/τα, δοκιμάζουν μερικά παραδείγματα ώστε να ελέγξουν την ορθότητα του ισχυρισμού τους και ισχυρίζονται ότι ο συλλογισμός τους ισχύει για όλες τις περιπτώσεις. Αξίζει να σημειωθεί ότι όλες οι συμπεριφορές που προαναφέρθηκαν και εμπίπτουν στην *Μονοδιάστατη παροχή/έκφραση αιτιολογήσεων*, έχουν ως κοινό χαρακτηριστικό την αναφορά σε συγκεκριμένο/α παράδειγμα/τα λανθασμένα και μη και την αναφορά σε συγκεκριμένο πλαίσιο. Ωστόσο, η περαιτέρω διάκριση μεταξύ των συμπεριφορών αυτών (αν αφορούσαν σε ορθά παραδείγματα ή λανθασμένα) αναλύεται και αναδεικνύεται περαιτέρω μέσα από την περιγραφή των διαφορετικών ομάδων προφίλ μαθητών. Η τελευταία διάσταση της κατηγορίας, η *Ευέλικτη παροχή/έκφραση αιτιολογήσεων*, αναφέρεται στις περιπτώσεις των μαθητών όπου επέδειξαν ευελιξία όσον αφορά στην παροχή αιτιολογήσεων που βασίζονται σε γενικευμένη δήλωση. Συγκεκριμένα, ο όρος ευελιξία έχει χρησιμοποιηθεί ώστε να υποδηλώσει την ικανότητα των μαθητών να διατυπώνουν γενικευμένες αιτιολογήσεις, οι οποίες προχωρούσαν πέραν από συγκεκριμένα παραδείγματα, να παρέχουν αιτιολογήσεις που ενέπλεκαν κατάλληλες γενικευμένες δηλώσεις ή ακόμη και να παρέχουν αιτιολογήσεις με γενικευμένες δηλώσεις με διαφορετικούς τρόπους/διατυπώσεις. Η συγκεκριμένη διάσταση συνάδει με το τρίτο επίπεδο αιτιολόγησης που αναφέρουν ο Carpenter και οι συνεργάτες του (2003), στο οποίο οι μαθητές χρησιμοποιούν ένα γενικό επιχείρημα μέσω μίας λεκτικής, αριθμητικής ή συμβολικής αναπαράστασης ώστε να επεξηγήσουν γιατί η υπόθεσή τους ισχύει σε όλες τις περιπτώσεις.

### **Ικανότητα έκφρασης με ακρίβεια**

Τέλος, η τελευταία συνιστώσα που συνθέτει το θεωρητικό μοντέλο, αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών να εκφράζονται με ακρίβεια, δηλαδή χρησιμοποιώντας κατάλληλη ορολογία. Η σημαντικότητα της συγκεκριμένης συνιστώσας υποστηρίζεται και από τις

μαθηματικές πρακτικές των Common Core State Standards (2010). Συγκεκριμένα, μια από τις οκτώ πρακτικές αποτελεί η ανάγκη για ύπαρξη ακρίβειας η οποία εστιάζει στην ικανότητα των μαθητών να χρησιμοποιούν με ακρίβεια το λεξιλόγιο (την ορολογία) όταν επεξηγούν τον συλλογισμό στον οποίο βασίστηκαν. Αρκετοί ερευνητές (Ernst-Slavit & Mason, 2011; Riccomini, Smith, Hughes, & Fries, 2015) τονίζουν το ότι η γλώσσα των μαθηματικών, κυρίως το λεξιλόγιο και οι όροι, είναι απαραίτητα για την κατανόηση των προφορικών και γραπτών μορφών των μαθηματικών. Όπως διαπιστώθηκε, η κατηγορία αυτή διακρίνεται σε δύο ιδιότητες: (α) στη γνώση και ικανότητα ανάκλησης της ακριβούς ορολογίας που εμπλέκεται στην κατάσταση και (β) στη χρήση γνώσεων και λέξεων που παραπέμπουν έμμεσα στους επίσημους όρους που εμπλέκονται σε ένα πρόβλημα.

Η εφαρμογή της αξονικής κωδικοποίησης, ανέδειξε την ύπαρξη τριών διαστάσεων όσον αφορά στην *Ικανότητα έκφρασης με ακρίβεια*. Η πρώτη διάσταση, αναφέρεται στην *Επιφανειακή/ιδιοσυγκρασιακή περιγραφή που δεν εμπλέκει ούτε παραπέμπει σε χρήση ορολογίας*. Ο όρος αυτός, έχει χρησιμοποιηθεί ώστε να δείξει ότι οι μαθητές έτειναν να χρησιμοποιούν ιδιοσυγκρασιακές περιγραφές που δεν παρέπεμπαν ούτε σε έμμεση περιγραφή αλλά ούτε και σε κατάλληλη ορολογία που εμπλεκόταν στο πρόβλημα. Οι δυσκολίες των μικρότερα ηλικιακά μαθητών να χρησιμοποιούν λεκτικές περιγραφές οι οποίες χαρακτηρίζονται από ακρίβεια στην ορολογία ή που έστω να παραπέμπουν έμμεσα σε χρήση ορολογίας παρατηρήθηκαν και από άλλους ερευνητές (Kleemans et al., 2011; Schleppegrell, 2010). Η δεύτερη διάσταση, αναφέρεται στη *Μονοδιάστατη περιγραφή για έμμεση χρήση της ορολογίας*. Η διάσταση αυτή έχει εντοπιστεί στις περιπτώσεις των μαθητών που έτειναν να εστιάζονται σε έναν, μοναδικό τρόπο έμμεσης περιγραφής μίας βασικής έννοιας του προβλήματος. Οι μαθητές αυτοί δεν ήταν σε θέση να ανακαλούν ή να χρησιμοποιούν την ακριβή ορολογία. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι λεκτικές περιγραφές για την έμμεση περιγραφή των όρων που εμπλέκονταν σε ένα πρόβλημα, άλλοτε ήταν πετυχημένες και άλλοτε αποτυχημένες στο να αναδείξουν την ακριβή σημασία της εμπλεκόμενης έννοιας. Η συγκεκριμένη διάσταση αποκτά νόημα αν λάβουμε υπόψη την άποψη ότι οι μαθητές πρέπει να ενθαρρύνονται να επεξηγούν οι ίδιοι κάποιες έννοιες, π.χ. τα μοτίβα, χρησιμοποιώντας την δική τους «γλώσσα» μιας και φαίνεται ότι η παρακίνηση των μαθητών να παράγουν τις δικές τους επεξηγήσεις μπορεί να βελτιώσει τη μάθηση των μαθητών σε σχέση με τα μοτίβα (Rittle-Johnson et al., 2008). Η τελευταία διάσταση, αφορά στην *Ευέλικτη χρήση της ορθής ορολογίας*. Συγκεκριμένα, η διάσταση αυτή αφορά στις περιπτώσεις των μαθητών που ήταν σε

θέση να ανακαλούν και να χρησιμοποιούν ορθά τους όρους που εμπλέκονταν σε ένα πρόβλημα καθώς και να παρουσιάζουν εναλλαγή στη χρήση διαφορετικών όρων που πιθανό να εμπλέκονταν σε ένα πρόβλημα. Αυτή η διάσταση συνάδει με την εισήγηση των Common Core State Standards (2010) ότι οι μαθηματικά «επιτυχημένοι» μαθητές προσπαθούν να επικοινωνούν με τους άλλους με ακρίβεια.

### **Προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων μαθητών προδημοτικής κατά την επίλυση έργων που σχετίζονται με έννοιες των Αριθμών και των Μοτίβων**

Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι, όσον αφορά τους μαθητές προδημοτικής, υπάρχουν τέσσερα προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων που σχετίζονται με τους Αριθμούς και τα Μοτίβα. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων οδήγησε στην δημιουργία τεσσάρων ομάδων συμπεριφοράς: *Επιφανειακή Προσέγγιση, Μεταβατική Προσέγγιση, Διαδικαστική Προσέγγιση και Δομική Προσέγγιση*. Ακολουθεί μία περιγραφή των χαρακτηριστικών κάθε ομάδας μαθητών, όπως προέκυψαν από τα ποιοτικά δεδομένα της έρευνας, ώστε να παρουσιαστούν οι μεταξύ τους σχέσεις. Η συμπεριφορά και τα χαρακτηριστικά των τεσσάρων ομάδων περιγράφονται στην βάση των πέντε συνιστωσών (και των διαστάσεων τους) οι οποίοι έχουν εντοπιστεί ότι διαδραματίζουν ρόλο στη διαδικασία επίλυσης μαθηματικών έργων που σχετίζονται με τις έννοιες των Αριθμών και των Μοτίβων από μαθητές προδημοτικής.

### **Χαρακτηριστικά της πρώτης ομάδας προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων**

Οι μαθητές της πρώτης ομάδας, δεν έδειχναν να λαμβάνουν υπόψη τους τα δεδομένα του προβλήματος. Σε όλες τις περιπτώσεις χρησιμοποιούσαν άσχετα δεδομένα με το πρόβλημα, ενώ έτειναν να αναφέρουν πληροφορίες που προέρχονταν από δικά τους σενάρια ή οικείες ιστορίες, εμφανίζοντας χαρακτηριστικά του επιπέδου επεξεργασίας των δεδομένων που εντόπισαν ο Mulbar και οι συνεργάτες του (2017) σύμφωνα με το οποίο οι μαθητές χρησιμοποιούν άσχετα και λανθασμένα δεδομένα που δεν έχουν καμία σχέση με την επίλυση του προβλήματος. Όσον αφορά στο χειρισμό και στην επεξεργασία των εικονικών αναπαραστάσεων (είτε δοσμένων είτε αυτών που δημιουργούσαν), εργαλείων και μοντέλων, οι μαθητές της ομάδας αυτής φαίνεται να έδιναν μεγάλη έμφαση σε λεπτομέρειες και στα



εξωτερικά χαρακτηριστικά των αναπαραστάσεων τα οποία δεν σχετίζονταν με την επίλυση των προβλημάτων. Η συγκεκριμένη παρατήρηση συνάδει με τα αποτελέσματα των Hegarty και Kozhevnikov (1999) για την τάση των «αδύνατων» μαθητών να εστιάζουν στα εξωτερικά χαρακτηριστικά των αναπαραστάσεων. Συνάδει επίσης, με το προ-δομικό επίπεδο της Mulligan και των συνεργατών της (2004) σύμφωνα με το οποίο οι αναπαραστάσεις των παιδιών παρουσιάζουν στοιχεία με περιγραφικά ή ιδιοσυγκρασιακά χαρακτηριστικά. Επιπρόσθετα, οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας δεν ήταν σε θέση να υιοθετούν μαθηματικές διαδικασίες, αλλά κατέφευγαν σε χρήση ιδιοσυγκρασιακών προσεγγίσεων. Όσον αφορά τις αιτιολογήσεις που χρησιμοποιούσαν οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας, ήταν ιδιοσυγκρασιακές, λεκτικές περιγραφές οι οποίες δεν παρέπεμπαν σε αιτιολόγηση δεδομένου ότι στηρίζονταν σε άσχετα στοιχεία ή δεδομένα με την κατάσταση/πρόβλημα. Οι προσπάθειές τους για αιτιολόγηση παρέπεμπαν σε αρκετές περιπτώσεις και σε αυτό που ο Carpenter και οι συνεργάτες του (2003) χαρακτηρίζουν ως επίκληση στην αυθεντία, μιας και υπήρχαν περιπτώσεις όπου οι μαθητές της πρώτης ομάδας ανέφεραν ότι αυτό άκουσαν ή αυτό τους είπε κάποιο πρόσωπο σημαντικό για αυτούς. Παρόμοια φαίνεται να είναι και η συμπεριφορά που παρουσίασαν οι μαθητές και στον παράγοντα που αφορά στην ακρίβεια στη χρήση της ορολογίας. Συγκεκριμένα, έτειναν να χρησιμοποιούν ιδιοσυγκρασιακές λεκτικές περιγραφές, οι οποίες δε σχετίζονταν με την προβληματική κατάσταση και δεν παρέπεμπαν σε περιγραφή των μαθηματικών όρων, εννοιών ή διαδικασιών. Αυτές οι ιδιοσυγκρασιακές περιγραφές, χωρίς καμία ακρίβεια στην ορολογία, παρατηρούνταν από μαθητές με χαμηλή επίδοση. Αυτό συνάδει με αποτελέσματα άλλων ερευνητών (Kleemans et al., 2011; Schleppegrell, 2010), οι οποίοι τονίζουν ότι οι μαθητές που αντιμετωπίζουν π.χ. αριθμητικές δυσκολίες νωρίς, σε πρώιμο στάδιο, παρουσιάζουν επίσης και δυσκολίες στην κατανόηση της μαθηματικής γλώσσας.

Με βάση τις παρατηρήσεις που προαναφέρθηκαν οι μαθητές της πρώτης ομάδας, φαίνεται να υιοθέτησαν στα προβλήματα που είχαν να αντιμετωπίσουν, μία προσέγγιση η οποία χαρακτηρίζεται ως *Επιφανειακή*. Αυτή η *Επιφανειακή προσέγγιση* που χαρακτηρίζει την καθολική συμπεριφορά των μαθητών της πρώτης ομάδας παρουσιάζει ομοιότητες με μερικά γενικά χαρακτηριστικά του *Αδόμητου επιπέδου πολυπλοκότητας* της ταξινομίας SOLO (Biggs & Collis, 1982), όπως το ότι οι μαθητές παρέχουν άσχετες πληροφορίες με το πρόβλημα, επαναλαμβάνουν απλά κάτι που άκουσαν και φαίνεται ότι δεν είναι σε θέση να κατανοήσουν το ζητούμενο. Ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές της πρώτης ομάδας αντιμετώπισαν τα

μαθηματικά έργα, δεν επέτρεπε ουσιαστική επεξεργασία των προβληματικών καταστάσεων με αποτέλεσμα να παρουσιάσουν τη χαμηλότερη επίδοση.

### **Χαρακτηριστικά της δεύτερης ομάδας προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων**

Οι μαθητές της δεύτερης ομάδας ήταν σε θέση να αντιληφθούν και να κατανοήσουν ορισμένα από τα δεδομένα του προβλήματος, εντούτοις, δεν ήταν σε θέση να λάβουν υπόψη τους και να κατανοήσουν όλα τα δεδομένα του προβλήματος τα οποία και αποτελούσαν απαραίτητη προϋπόθεση για την επίλυσή του. Η συγκεκριμένη συμπεριφορά ως προς την επεξεργασία των δεδομένων προσομοιάζει με το *Μονοδομικό επίπεδο* που εντόπισαν ο Mulbar και οι συνεργάτες του (2017) σε μεγαλύτερο ηλικιακά δείγμα, σύμφωνα με το οποίο οι μαθητές είναι σε θέση να επικεντρώσουν την προσοχή τους στο πρόβλημα, ωστόσο μπορούν να χρησιμοποιήσουν μόνο μία πληροφορία ή ένα μόνο σχετικό δεδομένο στην προσπάθεια επίλυσης του προβλήματος. Επιπρόσθετα, οι μαθητές της δεύτερης ομάδας εστίαζονταν σε έναν και μοναδικό τρόπο χειρισμού των εικονικών αναπαραστάσεων, μοντέλων και εργαλείων, ο οποίος δεν επεδείκνυε ολοκληρωμένη αντίληψη, κατανόηση, επεξεργασία της εικόνας του εργαλείου ή του μοντέλου. Όσον αφορά στις μαθηματικές διαδικασίες που ήταν σε θέση να χρησιμοποιούν, φαίνεται να εστίαζονταν στην εφαρμογή γνωστών απλών μαθηματικών διαδικασιών τις οποίες και εκτελούσαν βήμα προς βήμα. Η επιτυχία εφαρμογής των συγκεκριμένων διαδικασιών, σχετίζεται με το βαθμό δυσκολίας των έργων που είχαν να αντιμετωπίσουν οι μαθητές. Συγκεκριμένα, οι μαθητές της ομάδας αυτής μπορούσαν να εφαρμόσουν με επιτυχία, απλές και γνωστές μαθηματικές διαδικασίες οι οποίες και ζητούνταν ξεκάθαρα. Αυτό, ωστόσο, δε φαίνεται να παρουσιάζεται και στις περιπτώσεις των πιο σύνθετων μαθηματικών έργων. Σε αυτές τις περιπτώσεις, η εφαρμογή των συγκεκριμένων διαδικασιών βήμα προς βήμα, δεν γινόταν ολοκληρωμένα αλλά ούτε με ορθό τρόπο, είτε λόγω περιορισμένης αντίληψης της διαδικασίας (μη εξοικείωσης), είτε λόγω του πλαισίου στο οποίο καλούνταν να την εφαρμόσουν με αποτέλεσμα να παρουσιάζουν χαρακτηριστικά *Επιφανειακής/Ιδιοσυγκρασιακής προσέγγισης*. Η μη ολοκληρωμένη εφαρμογή των διαδικασιών τους οδηγούσε σε «αδιέξοδο» με αποτέλεσμα να καταφεύγουν σε ενέργειες και αποφάσεις που εμφάνιζαν τελικά, χαρακτηριστικά επιφανειακής/ιδιοσυγκρασιακής προσέγγισης. Όσον αφορά στις αιτιολογήσεις που μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν, αυτές περιορίζονταν κυρίως στην αναφορά σε συγκεκριμένο στοιχείο ή πληροφορία της δοθείσας

κατάστασης, ή ακόμη και στην αναφορά σε συγκεκριμένο λανθασμένο παράδειγμα (το οποίο θεωρούσαν ως ορθό), ενώ σε ελάχιστες περιπτώσεις οι αιτιολογήσεις τους παρέπεμπαν σε απλή περιγραφή/επανάληψη του τρόπου που εργάστηκαν. Επιπρόσθετα, οι λεκτικές τους περιγραφές δεν χαρακτηρίζονταν από ακρίβεια στην ορολογία (με εξαίρεση την ορολογία των αριθμών/αριθμολέξεων μέχρι το 20). Οι συγκεκριμένοι μαθητές άλλοτε παρείχαν λεκτικές περιγραφές που δεν ήταν οι πιο κατάλληλες να περιγράψουν έμμεσα την έννοια και την ορολογία που εμπλεκόταν στο πρόβλημα, ενώ σε κάποιες περιπτώσεις προέβαιναν σε εντελώς ιδιοσυγκρασιακές λεκτικές περιγραφές οι οποίες δεν είχαν καμία σχέση με την έννοια που εμπλεκόταν στην κατάσταση/πρόβλημα.

Τα χαρακτηριστικά και η συμπεριφορά των μαθητών της δεύτερης ομάδας διαφοροποιούνται από αυτά των μαθητών της πρώτης και της τρίτης ομάδας (που ακολουθεί στη συνέχεια). Πιο συγκεκριμένα, η καθολική συμπεριφορά των μαθητών της δεύτερης ομάδας δεν παρέπεμπε στην *Επιφανειακή προσέγγιση* μιας και δεν παρουσίαζαν από την αρχή ιδιοσυγκρασιακές προσεγγίσεις και αιτιολογήσεις, ούτε έδιναν τόση έμφαση στα εξωτερικά χαρακτηριστικά των αναπαραστάσεων, αλλά ούτε και έδειχναν να παραβλέπουν εντελώς τα δεδομένα των προβλημάτων και να προσθέτουν δικά τους σενάρια. Οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας παρουσίασαν συμπεριφορά που προσομοίαζε σε *Επιφανειακή προσέγγιση* μόνο μετά τις αποτυχημένες τους προσπάθειες να εφαρμόσουν μαθηματικές διαδικασίες σε έργα/προβληματικές καταστάσεις με μέτριες ή υψηλές γνωστικές απαιτήσεις. Η διαφοροποίησή τους με την τρίτη ομάδα μαθητών βασίζεται στην περιορισμένη τους ικανότητα σε σχέση με τους μαθητές αυτούς να επεξεργαστούν όλα τα δεδομένα του προβλήματος και τις αναπαραστάσεις, να αντιληφθούν αλλά και να εφαρμόσουν ολοκληρωμένα τις μαθηματικές διαδικασίες που επέλεξαν. Συγκεκριμένα, η προσέγγιση των μαθητών της δεύτερης ομάδας δεν ήταν καθαρά διαδικαστική (από την αρχή μέχρι το τέλος) όπως αυτή των μαθητών της τρίτης ομάδας ούτε καθαρά επιφανειακή (από την αρχή μέχρι το τέλος) όπως αυτή των μαθητών της πρώτης ομάδας.

Με βάση τις παρατηρήσεις που προαναφέρθηκαν και την σύγκριση με την πρώτη και την τρίτη ομάδα, η καθολική συμπεριφορά των μαθητών της δεύτερης ομάδας χαρακτηρίζεται ως *Μεταβατική προσέγγιση*. Η *Μεταβατική προσέγγιση* παρουσιάζει ομοιότητες με μερικά γενικά χαρακτηριστικά του *Μονοδομικού επιπέδου πολυπλοκότητας* της ταξινομίας SOLO (Biggs & Collis, 1982), όπως το ότι οι μαθητές είναι σε θέση να ακολουθήσουν απλές οδηγίες, να μετρήσουν, να αναγνωρίσουν και να εντοπίσουν στοιχεία. Παρόλα αυτά, η

κατανόησή τους για μια ιδέα φαίνεται να είναι αποσπασματική, μη ολοκληρωμένη, αποσυνδεδεμένη ή υπεραπλουστευμένη, χωρίς να είναι σε θέση «να δουν την όλη εικόνα» (Pegg & Tall, 2010).

### **Χαρακτηριστικά της τρίτης ομάδας προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων**

Οι μαθητές της τρίτης ομάδας, φαίνεται να ήταν σε θέση να κατανοήσουν και να λάβουν υπόψη τους όλα τα δεδομένα των προβλημάτων που χρειάζονταν για την επίλυση, χωρίς ωστόσο να μπορούν να εντοπίσουν οποιοσδήποτε συσχετίσεις μεταξύ των δεδομένων αυτών, οι οποίες θα μπορούσαν για παράδειγμα να βοηθήσουν στην επίλυση ή σε συντόμευση διαδικασιών. Η συγκεκριμένη παρατήρηση συνάδει με το *Πολυδομικό επίπεδο* που εντόπισε ο Mulbar και οι συνεργάτες του (2017) σε μεγαλύτερο ηλικιακά δείγμα. Όσον αφορά στην *Ικανότητα επεξεργασίας και χρήσης αναπαραστάσεων*, οι μαθητές της τρίτης ομάδας φαίνεται να αξιοποιούσαν τις αναπαραστάσεις (εικονικές, μοντέλα ή εργαλεία) με συγκεκριμένο τρόπο που βοηθούσε μεν στην επίλυση, ωστόσο δεν παρουσίαζαν ευελιξία στο να διαφοροποιήσουν τον τρόπο που χειρίζονταν τις αναπαραστάσεις. Παρά την εξοικείωση που άρχιζαν να αποκτούν με την αναπαράσταση, εγκλωβίζονταν σε έναν μοναδικό τρόπο χειρισμού και επεξεργασίας των αναπαραστάσεων, χωρίς να υπάρχει η δυνατότητα αξιοποίησης ή υιοθέτησης οποιουδήποτε εναλλακτικού τρόπου. Αντίστοιχα, όσον αφορά τις μαθηματικές διαδικασίες που επέλεγαν να εφαρμόσουν, αυτές ήταν γνωστές διαδικασίες τις οποίες και εφαρμόζαν βήμα προς βήμα χωρίς ωστόσο, να υπάρχει η δυνατότητα εφαρμογής εναλλακτικών τρόπων επίλυσης. Οι συγκεκριμένες διαδικασίες, αν και χρονοβόρες, ήταν σε θέση να οδηγήσουν τους μαθητές σε ορθές απαντήσεις στα περισσότερα έργα, με εξαίρεση μερικά έργα των οποίων οι γνωστικές απαιτήσεις ήταν αυξημένες. Οι αιτιολογήσεις των μαθητών της τρίτης ομάδας, περιορίζονταν κυρίως σε αναφορά σε συγκεκριμένο/να αριθμητικό/κα παράδειγμα/τα και σε λίγες περιπτώσεις σε απλή περιγραφή/επανάληψη του τρόπου που εργάστηκαν (επαναλαμβάνοντας απλά με λόγια τη διαδικασία που ακολούθησαν) χωρίς αυτές οι προσπάθειες αιτιολόγησης να βασίζονται σε γενικευμένες δηλώσεις, χωρίς δηλαδή να εμπεριέχουν κάποιο στοιχείο γενίκευσης. Η αιτιολόγηση με παράδειγμα συνάδει με το δεύτερο επίπεδο αιτιολόγησης του Carpenter και των συνεργατών του (2003) σύμφωνα με το οποίο οι μαθητές συνήθως δοκιμάζουν μερικά παραδείγματα ώστε να ελέγξουν την ορθότητα του ισχυρισμού τους και ισχυρίζονται ότι ο συλλογισμός τους ισχύει για όλες τις

περιπτώσεις. Αυτή η βήμα προς βήμα εφαρμογή διαδικασιών σε συγκεκριμένο πλαίσιο, η αιτιολόγηση με βάση συγκεκριμένα παραδείγματα και η προσκόλληση σε ένα συγκεκριμένο αναμενόμενο τρόπο χειρισμού των αναπαραστάσεων καθώς και η επανάληψή του με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, τα οποία παρουσίασαν οι μαθητές της τρίτης ομάδας, προσομοιάζουν με τη «συγκεκριμένη σκέψη» (specific thinking) όπως περιγράφεται από την Resnick (1992). Το συγκεκριμένο είδος σκέψης, εμπλέκει την αναφορά σε συγκεκριμένες περιπτώσεις (είτε αφορούν το συγκεκριμένο πλαίσιο ή το συγκεκριμένο αντικείμενο) σε αντίθεση με τη «γενική σκέψη» η οποία αναφέρεται σε γενικές έννοιες/γενικεύσεις που προχωρούν πέρα από τα συγκεκριμένα παραδείγματα και πλαίσιο. Επίσης, όσον αφορά στην ύπαρξη ακρίβειας στην χρήση της ορολογίας, οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας σε όλες τις περιπτώσεις (με εξαίρεση του όρου «μοτίβο» και της ορολογίας των αριθμών/αριθμολέξεων μέχρι το 100) δεν χρησιμοποιούσαν με ακρίβεια την ορολογία αλλά προέβαιναν σε λεκτικές περιγραφές που παρέπεμπαν έμμεσα και με κατάλληλο τρόπο τις περισσότερες φορές (αλλά όχι πάντα) στην έννοια ή στον όρο που εμπλεκόταν στο έργο/προβληματική κατάσταση.

Με βάση τις παρατηρήσεις που προαναφέρθηκαν, η καθολική προσέγγιση των μαθητών της τρίτης ομάδας χαρακτηρίζεται ως *Διαδικαστική προσέγγιση* και αναφέρεται στην βήμα προς βήμα εφαρμογή διαδικασιών, στην προσκόλληση και επανάληψη του ίδιου τρόπου χειρισμού αναπαραστάσεων, στην επεξεργασία των δεδομένων χωρίς περαιτέρω εντοπισμό συσχετίσεων και στην αναφορά σε συγκεκριμένα παραδείγματα, χωρίς δυνατότητα συντόμευσης διαδικασιών. Η *Διαδικαστική προσέγγιση* παρουσιάζει ομοιότητες με μερικά γενικά χαρακτηριστικά του *Πολυδομικού επιπέδου* πολυπλοκότητας της ταξινόμιας SOLO (Biggs & Collis, 1982) όπως το ότι οι μαθητές είναι σε θέση να εφαρμόζουν την μέθοδο, να εκτελούν, να ταξινομούν, να επιλύουν, να περιγράφουν, να αναπαριστούν και να συνδυάζουν.

#### **Χαρακτηριστικά της τέταρτης ομάδας προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων**

Οι μαθητές της τέταρτης ομάδας, επέδειξαν ιδιαίτερη ευελιξία όσον αφορά στην επεξεργασία των δεδομένων του προβλήματος. Οι μαθητές εστίαζαν την προσοχή τους στον εντοπισμό ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ των δεδομένων του προβλήματος ή και μεταξύ των διαφορετικών ερωτημάτων (ζητούμενων) του ίδιου έργου επιδεικνύοντας ικανότητα εντοπισμού συσχετίσεων μεταξύ των δεδομένων. Ο τρόπος επεξεργασίας δεδομένων από τους

μαθητές της τέταρτης ομάδας συνάδει με το *Συσχεσιακό/Συσχετιστικό επίπεδο* που εντόπισε ο Mulbar και οι συνεργάτες του (2017) σε μεγαλύτερο ηλικιακά δείγμα, σύμφωνα με το οποίο τα υποκείμενα ήταν σε θέση να χρησιμοποιούν πολλαπλά δεδομένα και να συσχετίζουν τα δεδομένα ώστε να καταλήγουν σε σχετικά συμπεράσματα. Παρόμοια, επέδειξαν ευελιξία κατά τον χειρισμό και την επεξεργασία των αναπαραστάσεων, αφού έτειναν να χειρίζονται με στρατηγικό τρόπο τα εργαλεία και ήταν σε θέση να αναλύουν με διαφορετικούς τρόπους τις δοσμένες εικονικές αναπαραστάσεις. Για παράδειγμα, στις περιπτώσεις όπου οι μαθητές είχαν στη διάθεσή τους πραγματικά υλικά (π.χ. κύβους unifix), ήταν σε θέση να μετασχηματίσουν και να τροποποιήσουν με κατάλληλο και στρατηγικό τρόπο το υλικό, ώστε να οδηγηθούν στη λύση του προβλήματος. Επιπρόσθετα, στις περιπτώσεις όπου τα μαθηματικά έργα δόθηκαν με τη βοήθεια εικονικών αναπαραστάσεων, οι μαθητές αυτοί επέδειξαν ιδιαίτερη ευελιξία στον τρόπο ανάλυσής τους, αφού μπορούσαν να εντοπίσουν διάφορες σχέσεις σε αυτές. Ακόμη, είχαν την ικανότητα να τροποποιούν νοερές εικόνες που είχαν στο μυαλό τους, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση της ανάλυσης/σύνθεσης αριθμού, ώστε προσθέτοντας και αφαιρώντας στοιχεία να διατηρούν σταθερό το άθροισμα. Ο τρόπος επεξεργασίας των αναπαραστάσεων από μέρους των μαθητών της τέταρτης ομάδας, προσομοιάζει με το επίπεδο δομικής ανάπτυξης της Mulligan και των συνεργατών της (2004) σύμφωνα με το οποίο οι αναπαραστάσεις των παιδιών χαρακτηρίζονται από δομή αφού εμπλέκουν μαθηματικά ή χωρικά χαρακτηριστικά. Δεδομένου ότι οι μαθητές της τέταρτης ομάδας παρουσίασαν τη υψηλότερη επίδοση, τα αποτελέσματα συνάδουν με τα αποτελέσματα της Mulligan (2002) που δείχνουν ότι οι επιτυχημένοι μαθητές χρησιμοποιούν αφηρημένη σημειογραφία που χαρακτηρίζεται από καλή οργάνωση και δομή. Η ευελιξία που παρουσίασαν οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας, οφείλεται και στην ικανότητά τους να χρησιμοποιούν μία ποικιλία στρατηγικών πέραν από τυπικές διαδικασίες. Συγκεκριμένα, οι μαθητές ήταν σε θέση να υιοθετούν εναλλακτικές διαδικασίες επίλυσης μαθηματικών έργων, νοερές στρατηγικές καθώς και να διατυπώνουν ή να αξιολογούν γενικεύσεις. Επιπρόσθετα, οι μαθητές της τέταρτης ομάδας ήταν σε θέση να παρέχουν αιτιολογήσεις που βασίζονταν σε γενικευμένες δηλώσεις (Carpenter et al., 2003) και να παρέχουν λεκτικές περιγραφές οι οποίες χαρακτηρίζονταν από ακρίβεια στην χρήση ορολογίας. Η ικανότητά τους να διατυπώνουν γενικεύσεις (π.χ. για την ισότητα, την αντιμεταθετική ιδιότητα), να μεταφέρουν γνωστές διαδικασίες σε νέα πλαίσια και η ικανότητά τους να παρέχουν αιτιολογήσεις στη βάση γενικευμένων δηλώσεων, παρέχουν ενδείξεις ότι οι συγκεκριμένοι μαθητές επιδεικνύουν κάποια μετάβαση-εξέλιξη από

τη συγκεκριμένη σκέψη στη γενική σκέψη (specific to general thinking) όπως την περιγράφει η Resnick (1992). Η συγκεκριμένη παρατήρηση γίνεται πάντα υπό το πρίσμα ότι αναφερόμαστε σε μαθητές προδημοτικής και του τι συνεπάγεται αυτό ως προς το επίπεδο «γενίκευσης» και «αφαίρεσης».

Ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά της συγκεκριμένης ομάδας μαθητών ήταν η ανάγκη αλλά και η ικανότητά τους να εστιάζουν στη δομή των προβλημάτων που τους δόθηκαν. Επιπρόσθετα, επέδειξαν έντονα την ανάγκη να αναζητούν και να εντοπίζουν σχέσεις οι οποίες δεν ήταν φανερές. Με βάση τις παρατηρήσεις που προαναφέρθηκαν, η καθολική συμπεριφορά και προσέγγιση των μαθητών της ομάδας αυτής, χαρακτηρίστηκε ως *Δομική προσέγγιση*. Η *Δομική προσέγγιση* προσομοιάζει με μερικά γενικά χαρακτηριστικά του *Συσχεσιακού/Συσχετιστικού επιπέδου* πολυπλοκότητας της ταξινομίας SOLO (Biggs & Collis, 1982), όπως το ότι οι μαθητές είναι σε θέση να αναλύουν, να συσχετίζουν, να επιχειρηματολογούν, να σχεδιάζουν, να ερμηνεύουν, να επεξηγούν τις αιτίες, να εστιάζουν στη δομή, να συμπεραίνουν, να ενσωματώνουν και να αντιπαραβάλλουν.

#### **Αποτελέσματα που αφορούν στις παρεμβάσεις με χρήση της τεχνολογίας και περαιτέρω διερεύνηση των προφίλ/ομάδων μαθητών**

Η τεχνολογίας στις μέρες μας, αναμφίβολα, αποτελεί ένα σπουδαίο εργαλείο στη μάθηση και διδασκαλία των Μαθηματικών (NCTM, 2008) και για αυτό τα τελευταία χρόνια η χρήση της αποτελεί μία βασική αρχή των αναλυτικών προγραμμάτων (π.χ. NCTM, 2000; Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού της Κύπρου, 2010). Η ραγδαία ανάπτυξη της τεχνολογίας, εισήγαγε μία νέα μορφή τεχνολογίας στην εκπαίδευση, τις οθόνες αφής. Η συγκεκριμένη μορφή τεχνολογίας, θεωρείται ιδανική για χρήση στην προσχολική εκπαίδευση, διότι επιτρέπει τη σύνδεση μάθησης και τεχνολογίας με διασκεδαστικό και εποικοδομητικό τρόπο (Zaranis, Kalogiannakis & Papadakis, 2013). Οι περισσότερες έρευνες, οι οποίες έχουν ασχοληθεί με τη διερεύνηση της μάθησης των Μαθηματικών από μικρούς μαθητές χρησιμοποιώντας τις οθόνες αφής, φαίνεται να έχουν εστιαστεί σε μεγάλο βαθμό στη διερεύνηση του αν οι οθόνες αφής, είναι σε θέση να επηρεάσουν την επίδοση των μαθητών προσχολικής ηλικίας (Alade et al., 2016; Bebell & Pedulla, 2015; Hubber et al., 2016; Kosko & Ferdig, 2016; Outhwaite et al., 2017; Reeves et al., 2017). Ωστόσο, λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι τα περισσότερα ερευνητικά δεδομένα τονίζουν τη θετική συνεισφορά των οθονών αφής στη μάθηση των

Μαθηματικών, κρίνεται απαραίτητη η διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο η ενσωμάτωση τέτοιων συσκευών μπορεί να μεγιστοποιήσει την επίδοση των μαθητών προσχολικής ηλικίας.

Για το σκοπό αυτό, οργανώθηκαν και πραγματοποιήθηκαν δύο παρεμβατικές διδασκαλίες, οι οποίες διαφοροποιούνται ως προς το βαθμό καθοδήγησης που παρείχαν στους μαθητές. Συγκεκριμένα, η πρώτη παρεμβατική διδασκαλία που εφαρμόστηκε, χαρακτηρίζεται ως υψηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με χρήση οθονών αφής, ενώ η δεύτερη παρέμβαση ως χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με χρήση οθονών αφής. Οι δύο διδασκαλίες είχαν τους ίδιους στόχους, αξιοποίησαν τις ίδιες μαθηματικές εφαρμογές, ωστόσο διαφοροποιήθηκαν ως προς το βαθμό καθοδήγησης που παρείχαν στους μαθητές.

Όπως διαφάνηκε μέσα από την ανάλυση των αποτελεσμάτων, οι μαθητές που συμμετείχαν στην υψηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με χρήση οθονών αφής παρουσίασαν υψηλότερη επίδοση σε σχέση με τους μαθητές που συμμετείχαν στη χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με τη χρήση οθονών αφής αλλά και σε σχέση με την ομάδα ελέγχου που συμμετείχαν σε συνήθη διδασκαλία. Τα αποτελέσματα αυτά συνάδουν με τη μετανάλυση που παρουσιάζει ο Alfieri και οι συνεργάτες του το 2011, η οποία υποδεικνύει ότι η υψηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση ήταν πιο αποτελεσματική από οποιαδήποτε μορφή διδασκαλίας. Τα αποτελέσματα επίσης της παρούσας εργασίας, βρίσκονται σε διαφωνία με τα αποτελέσματα του Kirschner και των συνεργατών του (2006) οι οποίοι υποστηρίζουν ότι η χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση είναι πιο αναποτελεσματική και ανεπαρκής σε σχέση με την συνήθη διδασκαλία. Αυτή η διαφωνία που προαναφέρθηκε, προκύπτει από το γεγονός ότι οι μαθητές της παρούσας εργασίας που συμμετείχαν στη χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με χρήση οθονών αφής, παρουσίασαν υψηλότερη επίδοση σε σχέση με τους μαθητές της ομάδας ελέγχου (συνήθη διδασκαλία). Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι μπορεί η ομάδα μαθητών που συμμετείχε στην υψηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση να επέδειξε τη μεγαλύτερη βελτίωση στην επίδοσή της, αλλά βελτίωση παρουσίασε και η ομάδα μαθητών που συμμετείχε στην χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση, υποδεικνύοντας ότι το διερευνητικό περιβάλλον μάθησης είναι πιο αποτελεσματικό από μία συνήθη διδασκαλία. Τα αποτελέσματα αυτά συνάδουν με αυτό που εντόπισε ο Baroody και οι συνεργάτες του (2016) ότι οι μαθητές προσχολικής ηλικίας που συμμετείχαν σε παρεμβατικές διδασκαλίες καθοδηγούμενης διερεύνησης (οποιοδήποτε βαθμού) παρουσίασαν στατιστικά σημαντικά υψηλότερη επίδοση σε σχέση με τους μαθητές της ομάδας ελέγχου. Επιπρόσθετα, δεδομένου ότι τα δύο παρεμβατικά προγράμματα της



παρούσας εργασίας ενέπλεκαν τη χρήση οθονών αφής σε αντίθεση με το περιβάλλον της συνήθους διδασκαλίας το οποίο δεν ενέπλεκε τη χρήση των συγκεκριμένων συσκευών, η εργασία παρέχει στοιχεία που τονίζουν τη συνεισφορά των iPads στη μάθηση των μαθητών. Συγκεκριμένα, οι δυνατότητες που παρέχουν οι οθόνες αφής και συγκεκριμένα τα iPads, φαίνεται να ενισχύουν την παιδοκεντρική προσέγγιση στη διαδικασία μάθησης (Johnson et al., 2013), να ενισχύουν τα κίνητρα των μικρών μαθητών για μάθηση και να επιτρέπουν τη σύνδεση της μάθησης με την τεχνολογία με διασκεδαστικό και εποικοδομητικό τρόπο (Zaranis et al., 2013). Ακόμη, η συστηματική χρήση των δακτύλων, η οποία επιτυγχάνεται μέσω των οθονών αφής φαίνεται να διαδραματίζει θετικό ρόλο στην ανάπτυξη της έννοιας του αριθμού καθώς και των δεξιοτήτων υπολογισμού (Gracia-Baffaluy & Noel 2008). Το γεγονός όμως ότι στα δύο παρεμβατικά προγράμματα, χρησιμοποιήθηκαν από τους μαθητές οι ίδιοι συσκευές και τα ίδια εφαρμογίδια αλλά διέφερε ο βαθμός καθοδήγησης, η δόμηση των δραστηριοτήτων και το είδος των ερωτήσεων που έθετε η εκπαιδευτικός, υποδεικνύει ότι αυτή η συνεισφορά των οθονών αφής και των εφαρμογιδίων στη διδασκαλία και μάθηση ενισχύεται ανάλογα με τη μορφή της διερευνητικής διδασκαλίας.

Επιπρόσθετα, ένας άλλος από τους στόχους της παρούσας εργασίας ήταν να διαπιστωθεί κατά πόσο μεταβάλλεται το προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων που παρουσιάζουν μαθητές προδημοτικής κατά την επίλυση έργων που σχετίζονται με έννοιες των Αριθμών και των Μοτίβων από το προπαραεμβατικό στο μεταπαραεμβατικό στάδιο. Πιο συγκεκριμένα, στόχος ήταν να διαπιστωθεί κατά πόσο οι μαθητές μιας συγκεκριμένης ομάδας/προφίλ στο προπαραεμβατικό στάδιο, παρουσίασαν χαρακτηριστικά και τρόπο προσέγγισης των έργων μιας διαφορετικής ομάδας προφίλ στο μεταπαραεμβατικό στάδιο. Όπως διαφάνηκε μέσα από την ανάλυση των αποτελεσμάτων, οι συγκεκριμένες παρεμβατικές διδασκαλίες φαίνεται να επέδρασαν θετικά στους μαθητές που κατά το προπαραεμβατικό στάδιο, είχαν αναγνωρισθεί ότι άνηκαν στο *Επιφανειακό προφίλ/ομάδα προσέγγισης* ή στο *Μεταβατικό προφίλ/ομάδα προσέγγισης και επεξεργασίας έργων*. Συγκεκριμένα, όσον αφορά στην υψηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με χρήση οθονών αφής, όλοι οι μαθητές με επιφανειακό προφίλ στο προπαραεμβατικό στάδιο παρουσίασαν χαρακτηριστικά και τρόπο προσέγγισης έργων του μεταβατικού προφίλ/ομάδας στο μεταπαραεμβατικό στάδιο. Επιπρόσθετα, στην ίδια παρέμβαση, οι περισσότεροι από τους μισούς μαθητές που παρουσίασαν μεταβατικό προφίλ/ομάδα στο προπαραεμβατικό στάδιο, παρουσίασαν χαρακτηριστικά και τρόπο προσέγγισης έργων του διαδικαστικού προφίλ/ομάδας στο μεταπαραεμβατικό στάδιο. Στην

παρέμβαση με την χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με τη χρήση οθονών αφής, όλοι οι μαθητές με επιφανειακό προφίλ στο προπαρεμβατικό στάδιο, παρουσίασαν χαρακτηριστικά και τρόπο προσέγγισης έργων του μεταβατικού προφίλ/ομάδας στο μεταπαρεμβατικό στάδιο. Επίσης, στην ίδια παρέμβαση οι περισσότεροι από τους μισούς μαθητές που είχαν παρουσιάσει μεταβατικό προφίλ/ομάδα στο προπαρεμβατικό στάδιο, παρουσίασαν χαρακτηριστικά και τρόπο προσέγγισης έργων του διαδικαστικού προφίλ/ομάδας στο μεταπαρεμβατικό στάδιο.

Ωστόσο, δεν παρατηρήθηκε οποιαδήποτε μεταβολή της συμπεριφοράς και του τρόπου προσέγγισης των έργων των μαθητών μετά την ολοκλήρωση των παρεμβατικών διδασκαλιών, οι οποίοι εντοπίστηκε ότι άνηκαν στο διαδικαστικό ή στο δομικό προφίλ/ομάδα κατά το προπαρεμβατικό στάδιο. Αυτό ήταν αναμενόμενο για την περίπτωση των μαθητών με δομικό προφίλ/ομάδα προσέγγισης, μιας και η βελτίωση που θα επιδεχόταν η προσέγγισή τους, δεν θα αφορούσε σε αλλαγή τρόπου προσέγγισης (η οποία ήταν ήδη υψηλού επιπέδου) αλλά σε περαιτέρω ενίσχυση του συγκεκριμένου είδους προσέγγισης και επεξεργασίας έργου. Στην περίπτωση των μαθητών με διαδικαστικό προφίλ/ομάδα προσέγγισης έργων, η βελτίωσή τους και η μετάβασή τους σε δομικό προφίλ προσέγγισης φαίνεται να απαιτεί μια πιο μακροχρόνια και συστηματική παρέμβαση. Η μετάβαση των συγκεκριμένων μαθητών στο δομικό προφίλ/ομάδας προσέγγισης έργων, δεν αποτελεί εύκολη υπόθεση αν αναλογιστεί κάποιος ότι μια τέτοια αλλαγή δεν αφορά απλά σε βελτίωση της επίδοσης αλλά σε αλλαγή τρόπου σκέψης, ο οποίος θα εμπλέκει το συλλογισμό και την ικανότητα συλλογισμού της δομής. Αν και οι οθόνες αφής φαίνεται με την κατάλληλη ενσωμάτωσή τους στη διδασκαλία να μπορούν να ενισχύσουν την επίδοση των μαθητών, εντούτοις απαιτείται συστηματική και μακροχρόνια διδασκαλία. Μια τέτοια διδασκαλία, σε συνδυασμό με κατάλληλη επιλογή και ποικιλία εφαρμογών στη βάση διαφοροποιημένης διδασκαλίας και σε συνδυασμό με κατάλληλο σχεδιασμό και μορφή διερευνητικού περιβάλλοντος μάθησης, αναμένεται ότι θα δημιουργεί τις προϋποθέσεις ούτως ώστε οι μαθητές με διαφορετικές ανάγκες (λόγου χάρη στην προκειμένη περίπτωση οι μαθητές με διαδικαστικό προφίλ), να πετύχουν το μέγιστο των δυνατοτήτων τους (Goodwin, 2012).

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

### ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο κεφάλαιο αυτό αρχικά, παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της εργασίας όπως προέκυψαν από τη συζήτηση των αποτελεσμάτων. Στη συνέχεια, ακολουθεί η συζήτηση των εφαρμογών των αποτελεσμάτων της εργασίας σε θεωρητικό, μεθοδολογικό και πρακτικό επίπεδο. Τέλος, παρουσιάζονται κάποιες εισηγήσεις οι οποίες μπορούν να αποτελέσουν τη βάση για τη διεξαγωγή μελλοντικών ερευνών.

#### **Συμπεράσματα της Εργασίας**

Σκοπό της παρούσας εργασίας, αποτέλεσε η παρουσίαση ενός μοντέλου για την περιγραφή των συνιστωσών που συνθέτουν την ικανότητα των μαθητών προδημοτικής κατά την επίλυση μαθηματικών έργων που αφορούν στην έννοια των Αριθμών και των Μοτίβων. Επιπρόσθετα, ένας επιμέρους στόχος της εργασίας ήταν και η εξέταση του τρόπου με τον οποίο η χρήση διαφορετικών περιβαλλόντων μάθησης με χρήση οθονών αφής υποστηρίζει την ανάπτυξη της ικανότητας αυτής σε μαθητές προδημοτικής. Λαμβάνοντας υπόψη τη σημαντικότητα της διδασκαλίας των μαθηματικών κατά την προσχολική ηλικία καθώς και την αναγκαιότητα της ανάπτυξης βασικών αριθμητικών και αλγεβρικών ικανοτήτων στη συγκεκριμένη ηλικία, τα συμπεράσματα της εργασίας παρουσιάζονται σε σχέση με τις τρεις αλληλοσχετιζόμενες διαστάσεις της διδασκαλίας των μαθηματικών: το μαθηματικό περιεχόμενο, τους μαθητές και το δάσκαλο. Μέσω της παρούσας εργασίας, γίνεται προσπάθεια περιγραφής μίας συνεκτικής εικόνας, όσον αφορά στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές προδημοτικής προσεγγίζουν έργα που σχετίζονται με τους Αριθμούς και τα Μοτίβα (μαθηματικό περιεχόμενο). Αυτή η συνεκτική εικόνα, στοχεύει στο να ενημερώσει τον εκπαιδευτικό για τις βασικές συνιστώσες που διαδραματίζουν ρόλο στη διαδικασία επίλυσης των έργων που αφορούν στους Αριθμούς και στα Μοτίβα, για τις ομάδες/προφίλ μαθητών με διαφοροποιημένη ικανότητα και συμπεριφορά κατά την επίλυση και επεξεργασία των έργων αυτών καθώς και για τα περιβάλλοντα μάθησης που είναι πιο αποτελεσματικά για τη βελτίωση και ανάπτυξη των δυνατοτήτων των μαθητών.

Όσον αφορά στο μαθηματικό περιεχόμενο, τα αποτελέσματα της εφαρμογής της εμπειρικά θεμελιωμένης θεωρίας δείχνουν ότι η ικανότητα προσέγγισης και επεξεργασίας έργων που σχετίζονται με τους Αριθμούς και τα Μοτίβα από μαθητές προδημοτικής, περιγράφεται από πέντε συνιστώσες: (α) την *Ικανότητα διαχείρισης και ερμηνείας δεδομένων του προβλήματος*, (β) την *Ικανότητα επεξεργασίας και χρήσης αναπαραστάσεων*, (γ) την *Ικανότητα χρήσης μαθηματικών διαδικασιών*, (δ) την *Ικανότητα παροχής αιτιολογήσεων* και (ε) την *Ικανότητα έκφρασης με ακρίβεια στην ορολογία*. Οι συγκεκριμένες συνιστώσες που εντοπίστηκαν, συνάδουν και συνδέονται με τις μαθηματικές διαδικασίες που τονίζονται από το Εθνικό Συμβούλιο Δασκάλων για τα Μαθηματικά στην Αμερική (NCTM, 2000) και τις μαθηματικές πρακτικές που προτείνονται από τα Common Core State Standards (2010). Αυτές οι συνιστώσες αποτελούν ενδείξεις οι οποίες τονίζουν ότι το «κάνω μαθηματικά» και στην περίπτωση της προσχολικής εκπαίδευσης, δηλώνει την εμπλοκή σε αυτές τις βασικές διαδικασίες και μαθηματικές πρακτικές οι οποίες δεν πρέπει να παραβλέπονται. Αποτελεί επιτακτική ανάγκη, οι πέντε συνιστώσες που περιγράφονται πιο κάτω, να εμπλέκονται στη διδασκαλία των μαθητών στην προδημοτική και να αξιολογούνται, με στόχο την ανάπτυξη τους από όλους τους μαθητές της προσχολικής ηλικίας, χωρίς να διαχωρίζονται αλλά να διδάσκονται παράλληλα με τις ενότητες περιεχομένου. Η *Ικανότητα διαχείρισης και ερμηνείας των δεδομένων του προβλήματος*, αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών να διαχειρίζονται και να επεξεργάζονται τα δεδομένα ενός προβλήματος που τους δίνεται. Η *Ικανότητα επεξεργασίας και χρήσης αναπαραστάσεων*, αναφέρεται από τη μία στην ικανότητα των μαθητών να χρησιμοποιούν, να επεξεργάζονται και να μετασχηματίζουν δοσμένες αναπαραστάσεις (εικονικές αναπαραστάσεις, μοντέλα, εργαλεία) και από την άλλη στην ικανότητά τους να δημιουργούν αναπαραστάσεις (εξωτερικές ή νοερές αναπαραστάσεις). Η *Ικανότητα χρήσης μαθηματικών διαδικασιών* εμπλέκει την ικανότητα των μαθητών να επιλέγουν αριθμητικές ή αλγεβρικές διαδικασίες ώστε να επιλύσουν τα προβλήματα που τους δίνονται, ενώ η *Ικανότητα παροχής αιτιολογήσεων* αναφέρεται στις επεξηγήσεις και τα επιχειρήματα που χρησιμοποιούσαν οι μαθητές ώστε να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις που έδιναν. Τέλος, η *Ικανότητα έκφρασης με ακρίβεια*, αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών να εκφράζονται και να επικοινωνούν τις ιδέες τους με ακρίβεια στην ορολογία που εμπλέκεται στο έργο/προβληματική κατάσταση.

Τα εμπειρικά δεδομένα της εργασίας έδειξαν επίσης, ότι κάθε μία από τις πέντε συνιστώσες που περιγράφουν την ικανότητα προσέγγισης και επεξεργασίας έργων που

σχετίζονται με τους Αριθμούς και τα Μοτίβα οι οποίες προαναφέρθηκαν, αναλύεται σε τρεις διαστάσεις. Η πρώτη διάσταση αναφέρεται στην *Επιφανειακή/Ιδιοσυγκρασιακή* επεξεργασία/χρήση/χειρισμό δεδομένων του προβλήματος, αναπαραστάσεων, μαθηματικών διαδικασιών, αιτιολογήσεων και λεκτικών εκφράσεων με ακρίβεια στην ορολογία. Η διάσταση αυτή αναφέρεται σε ενέργειες που υποδείκνυαν απουσία ουσιαστικής επεξεργασίας της κατάστασης και σε ενέργειες που δεν σχετίζονταν με το μαθηματικό έργο και το ζητούμενο (π.χ. στις διαδικασίες), σε εστίαση της προσοχής σε λεπτομέρειες που δεν σχετίζονται με την επίλυση του έργου (π.χ. στις αναπαραστάσεις) καθώς και στην αναφορά και προσθήκη άσχετων δεδομένων σε σχέση με το πρόβλημα (π.χ. στα δεδομένα, στις αιτιολογήσεις). Η δεύτερη διάσταση, αναφέρεται στην *Μονοδιάστατη* επεξεργασία/χρήση/χειρισμό δεδομένων του προβλήματος, αναπαραστάσεων, μαθηματικών διαδικασιών, αιτιολογήσεων και λεκτικών εκφράσεων με ακρίβεια στην ορολογία. Αυτή η διάσταση, η οποία εντοπίστηκε σε κάθε μία από τις πέντε συνιστώσες, εμπλέκει δύο διαφορετικά είδη προσέγγισης και επεξεργασίας, ένα υψηλότερο επίπεδο μονοδιάστατης επεξεργασίας/προσέγγισης και ένα χαμηλότερο επίπεδο μονοδιάστατης επεξεργασίας/προσέγγισης. Το υψηλότερο επίπεδο μονοδιάστατης επεξεργασίας/προσέγγισης αναφέρεται στον ένα και μοναδικό τρόπο επεξεργασίας των καταστάσεων χωρίς περαιτέρω εντοπισμό συσχετίσεων (π.χ. στα δεδομένα, στις αναπαραστάσεις), στην υιοθέτηση ενός και μοναδικού τρόπου επίλυσης και στην εφαρμογή του βήμα προς βήμα (π.χ. στις μαθηματικές διαδικασίες), στην προσκόλληση σε συγκεκριμένες λεκτικές περιγραφές οι οποίες απέδιδαν έμμεσα τις έννοιες (π.χ. στην ακρίβεια στην ορολογία) και στην ανάγκη αναφοράς σε συγκεκριμένα παραδείγματα (π.χ. στις αιτιολογήσεις). Το χαμηλότερο επίπεδο μονοδιάστατης επεξεργασίας/προσέγγισης, υποδεικνύει την εστίαση σε μία μόνο πτυχή της κατάστασης (π.χ. στα δεδομένα, στις αναπαραστάσεις), σε περιορισμένη αντίληψη ή σε μη ολοκληρωμένη εφαρμογή του τρόπου επίλυσης (π.χ. στις μαθηματικές διαδικασίες) και στην παροχή μη ολοκληρωμένων ή μη κατάλληλων λεκτικών εκφράσεων (π.χ. στις αιτιολογήσεις, στην ύπαρξη ακρίβειας στην ορολογία). Η τρίτη διάσταση αναφέρεται στην *Ευέλικτη* επεξεργασία/χρήση/χειρισμό δεδομένων του προβλήματος, αναπαραστάσεων, μαθηματικών διαδικασιών, αιτιολογήσεων και λεκτικών εκφράσεων με ακρίβεια στην ορολογία. Η συγκεκριμένη διάσταση η οποία εντοπίστηκε σε κάθε μία από τις πέντε συνιστώσες, υποδεικνύει την ικανότητα αναστοχασμού (π.χ. στα δεδομένα του προβλήματος, στις μαθηματικές διαδικασίες), εντοπισμού συσχετίσεων (π.χ. στα δεδομένα του προβλήματος,

στις αναπαραστάσεις), εύρεσης εναλλακτικών τρόπων προσέγγισης/επεξεργασίας (π.χ. στις αναπαραστάσεις, στις μαθηματικές διαδικασίες, στις αιτιολογήσεις), διατύπωσης γενικεύσεων (π.χ. στις μαθηματικές διαδικασίες, στις αιτιολογήσεις), στρατηγικού τρόπου χρήσης (π.χ. αναπαραστάσεων, μαθηματικών διαδικασιών) και ευέλικτης παροχής κατάλληλων λεκτικών εκφράσεων (π.χ. στις αιτιολογήσεις, στην ακρίβεια στην ορολογία).

Ως προς τους μαθητές, η εργασία κατέληξε σε δύο βασικά συμπεράσματα. Αρχικά διαπιστώθηκε ότι υπάρχουν τέσσερις ομάδες μαθητών οι οποίες διακρίνονται ως προς την ικανότητα και τον τρόπο που διαχειρίζονται τα δεδομένα ενός προβλήματος και τις αναπαραστάσεις ενός μαθηματικού έργου, ως προς τις μαθηματικές διαδικασίες που χρησιμοποιούν, ως προς το είδος των αιτιολογήσεων που παρέχουν καθώς και ως προς την ικανότητά τους να εκφράζονται με ακρίβεια στην ορολογία. Η διαφοροποιημένη ικανότητα των τεσσάρων ομάδων μαθητών συνάδει με αυτό που επισημαίνει ο Piaget, ότι οι γνωστικές δεξιότητες των μαθητών αναπτύσσονται σταδιακά και η χρονική στιγμή κατά την οποία συμβαίνει αυτό ποικίλει ανάλογα με το κάθε παιδί (Park, 2013).

Η προσέγγιση της πρώτης ομάδας/προφίλ μαθητών χαρακτηρίστηκε ως *Επιφανειακή* δεδομένου ότι οι συγκεκριμένοι μαθητές έτειναν να υιοθετούν επιφανειακή/ιδιοσυγκρασιακή επεξεργασία δεδομένων και αναπαραστάσεων, επιφανειακές/ιδιοσυγκρασιακές διαδικασίες, περιγραφές που δεν παρέπεμπαν σε αιτιολόγηση και περιγραφές που δεν ενέπλεκαν ούτε παρέπεμπαν σε χρήση ορολογίας. Η προσέγγιση της δεύτερης ομάδας/προφίλ μαθητών, χαρακτηρίστηκε ως *Μεταβατική*, μιας και οι μαθητές αυτοί παρουσίασαν: (α) χαμηλότερου επιπέδου μονοδιάστατη επεξεργασία/χειρισμό δεδομένων μιας και αξιοποιούσαν μόνο μερικά δεδομένα της κατάστασης, (β) χαμηλότερου επιπέδου μονοδιάστατη επεξεργασία/χρήση αναπαραστάσεων, εφόσον εστίαζαν σε μία ή σε μερικές πτυχές της αναπαράστασης, χωρίς ολοκληρωμένη αντίληψη και επεξεργασία της, (γ) χαμηλότερου επιπέδου μονοδιάστατη χρήση/εφαρμογή μαθηματικών διαδικασιών, μιας και επέδειξαν μη ολοκληρωμένη εφαρμογή μαθηματικών διαδικασιών, λόγω περιορισμένης αντίληψης της διαδικασίας ή του πλαισίου εφαρμογής της, (δ) χαμηλότερου επιπέδου μονοδιάστατη χρήση αιτιολογήσεων, εφόσον οι αιτιολογήσεις που παρείχαν βασίζονταν σε συγκεκριμένο λανθασμένο παράδειγμα ή σε συγκεκριμένο στοιχείο ή πληροφορία της δοθείσας κατάστασης και (ε) χαμηλότερου επιπέδου μονοδιάστατη περιγραφή που παραπέμπει έμμεσα σε χρήση ορολογίας μιας και παρείχαν λεκτικές περιγραφές που δεν ήταν οι πιο κατάλληλες να περιγράψουν έμμεσα την έννοια/όρο που εμπλεκόταν στην κατάσταση/πρόβλημα. Η προσέγγιση της τρίτης ομάδας/προφίλ

μαθητών, χαρακτηρίστηκε ως *Διαδικαστική*, μιας και οι μαθητές αυτοί παρουσίασαν: (α) υψηλότερου επιπέδου μονοδιάστατη επεξεργασία/χειρισμό δεδομένων μιας και αξιοποίησαν όλα τα δεδομένα της κατάστασης χωρίς περαιτέρω εντοπισμό συσχετίσεων μεταξύ τους και χωρίς δυνατότητα επεξεργασίας τους με εναλλακτικό τρόπο, (β) υψηλότερου επιπέδου μονοδιάστατη επεξεργασία/χρήση αναπαραστάσεων εφόσον επέδειξαν έναν και μοναδικό ολοκληρωμένο τρόπο χειρισμού της αναπαράστασης, χωρίς δυνατότητα επεξεργασίας της με εναλλακτικό τρόπο, (γ) υψηλότερου επιπέδου μονοδιάστατη χρήση/εφαρμογή μαθηματικών διαδικασιών εφόσον επέδειξαν προσκόλληση στη βήμα προς βήμα ολοκληρωμένη εφαρμογή μαθηματικών διαδικασιών χωρίς δυνατότητα εφαρμογής εναλλακτικών τρόπων επίλυσης και συντόμευσης, (δ) υψηλότερου επιπέδου μονοδιάστατη παροχή αιτιολογήσεων μιας και οι αιτιολογήσεις που παρείχαν βασίζονταν μόνο σε συγκεκριμένα αριθμητικά παραδείγματα και (ε) υψηλότερου επιπέδου μονοδιάστατη παροχή λεκτικών περιγραφών που παραπέμπουν έμμεσα σε χρήση ορολογίας εφόσον οι περιγραφές που παρείχαν, αποτελούσαν μόνο έμμεσες περιγραφές των εννοιών/όρων που εμπλέκονταν στην κατάσταση/πρόβλημα. Η προσέγγιση της τέταρτης ομάδας/προφίλ μαθητών, χαρακτηρίστηκε ως *Δομική*, μιας και οι μαθητές αυτοί εμφάνισαν έντονα την ικανότητα και την τάση να εστιάζουν στη δομή των προβληματικών καταστάσεων που τους δόθηκαν, να διατυπώνουν γενικεύσεις και παρουσίασαν: (α) ευέλικτη επεξεργασία/χειρισμό δεδομένων, (β) ευέλικτη επεξεργασία/χρήση αναπαραστάσεων, (γ) ευέλικτη χρήση/εφαρμογή μαθηματικών διαδικασιών, (δ) ευέλικτη παροχή αιτιολογήσεων, και (ε) ευέλικτη χρήση της ορθής ορολογίας που εμπλεκόταν στην κατάσταση/πρόβλημα).

Δεύτερον, η εργασία κατέληξε στο συμπέρασμα ότι και τα δύο περιβάλλοντα μάθησης τα οποία σχεδιάστηκαν και εφαρμόστηκαν (υψηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με χρήση οθονών αφής και χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με χρήση οθονών αφής) ήταν σε θέση να βοηθήσουν τους μαθητές να βελτιώσουν την επίδοσή τους σε σχέση με την ομάδα ελέγχου, μετά την ολοκλήρωση των παρεμβατικών διδασκαλιών. Ωστόσο, αυτό που προέκυψε είναι ότι το υψηλού βαθμού καθοδηγούμενο περιβάλλον διερευνητικής μάθησης φαίνεται να βοήθησε περισσότερους μαθητές να βελτιώσουν το προφίλ προσέγγισης που ανήκαν. Επιπρόσθετα και τα δύο παρεμβατικά προγράμματα βοήθησαν όλους τους μαθητές που πριν την παρέμβαση παρουσίασαν *Επιφανειακό προφίλ/ομάδας προσέγγισης έργων* να εμφανίσουν χαρακτηριστικά του *Μεταβατικού προφίλ/ομάδας προσέγγισης έργων* μετά την ολοκλήρωση των παρεμβάσεων. Ωστόσο, τα αποτελέσματα, παρέχουν ενδείξεις ότι οι μαθητές που συμμετείχαν στο περιβάλλον υψηλού βαθμού καθοδηγούμενης διερεύνησης

με χρήση οθονών αφής και είχαν παρουσιάσει στο προπαραεμβατικό στάδιο χαρακτηριστικά *Μεταβατικού προφίλ/ομάδας προσέγγισης έργων* και μετά την παρέμβαση χαρακτηριστικά *Διαδικαστικού προφίλ/ομάδας προσέγγισης έργων* ήταν περισσότεροι σε σχέση με τους αντίστοιχους μαθητές (δηλαδή με μεταβατικό προφίλ πριν την παρέμβαση και διαδικαστικό προφίλ μετά την παρέμβαση) που συμμετείχαν στην χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με χρήση οθονών αφής. Αυτό φαίνεται από τα στοιχεία που δείχνουν ότι ο αριθμός μαθητών που κατέληξε σε διαδικαστικό προφίλ προσέγγισης στο περιβάλλον υψηλού βαθμού καθοδηγούμενης διερεύνησης με χρήση οθονών αφής τριπλασιάστηκε, ενώ ο αριθμός μαθητών που κατέληξε σε διαδικαστικό προφίλ προσέγγισης στην παρέμβαση με χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με χρήση οθονών αφής σχεδόν διπλασιάστηκε. Ως εκ τούτου, φαίνεται ότι η καθοδήγηση που παρέχεται στη διερευνητική μάθηση είναι σημαντική για την προώθηση της μάθησης των μαθητών στα μαθηματικά, κάτι που συνάδει και τονίζεται και σε μεταanalύσεις ερευνών στο γνωστικό αντικείμενο των φυσικών επιστημών, οι οποίες δείχνουν ότι η διδασκαλία υψηλού βαθμού καθοδηγούμενης διερεύνησης είναι πιο αποτελεσματική από οποιαδήποτε άλλη μορφή διδασκαλίας (Alfieri et al., 2011).

Ως προς τον εκπαιδευτικό, η εργασία κατέληξε στο συμπέρασμα ότι έστω και αν τα δύο περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης που σχεδιάστηκαν και εφαρμόστηκαν ήταν σε θέση να βοηθήσουν τους μαθητές που συμμετείχαν σε αυτά να βελτιώσουν την επίδοσή τους, εντούτοις όπως προαναφέρθηκε το περιβάλλον υψηλού βαθμού καθοδηγούμενης διερεύνησης με χρήση οθονών αφής, βοήθησε περισσότερους μαθητές του επιφανειακού και μεταβατικού προφίλ/ομάδας στο προπαραεμβατικό στάδιο να επιδείξουν χαρακτηριστικά του αμέσως επόμενου προφίλ/ομάδας προσέγγισης στο μεταπαραεμβατικό στάδιο. Τέτοια αποτελέσματα, τονίζουν στον εκπαιδευτικό την ανάγκη σχεδιασμού και εφαρμογής διδασκαλιών με υψηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με χρήση οθονών αφής με τρόπο που να ανταποκρίνεται στους μαθητές διαφορετικών επιδόσεων και προφίλ/ομάδας προσέγγισης έργων.

Συγκεκριμένα, ο εκπαιδευτικός χρειάζεται να λάβει υπόψη του τα θετικά αποτελέσματα που επιφέρει μία τέτοια διδασκαλία σε μαθητές χαμηλότερης επίδοσης με προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων που επιδέχονται βελτίωσης (όπως οι μαθητές επιφανειακού και μεταβατικού προφίλ της παρούσας εργασίας) αλλά και σε μαθητές υψηλότερης επίδοσης. Ωστόσο, κρίνεται απαραίτητο ο εκπαιδευτικός να λάβει υπόψη του ότι η προσπάθεια ενίσχυσης των δυνατοτήτων των μαθητών μέτριας και υψηλότερης επίδοσης (π.χ. μαθητές με



διαδικαστικό προφίλ προσέγγισης) ως προς την ικανότητά τους για εντοπισμό δομικών σχέσεων και εστίαση στη δομή, δεν αποτελεί εύκολη υπόθεση έστω και αν η διδασκαλία βασίζεται στην υψηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με χρήση οθονών αφής ή στη χαμηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση με χρήση οθονών αφής. Η μετάβαση μαθητών με προφίλ προσέγγισης έργων που επιδέχονται βελτίωσης προς στο δομικό προφίλ προσέγγισης, απαιτεί συστηματική διδασκαλία η οποία θα εμπλέκει την υψηλού βαθμού καθοδηγούμενη διερεύνηση και την ενσωμάτωση της τεχνολογίας, οθόνων αφής καθώς και κατάλληλων εφαρμογών. Αξίζει να σημειωθεί, ότι κατά τον σχεδιασμό τέτοιων διδασκαλιών, χρειάζεται να λαμβάνονται υπόψη και οι ανάγκες μαθητών με τις υψηλότερες επιδόσεις, με ήδη ανεπτυγμένο το δομικό προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων, ώστε να παρέχονται και σε αυτούς ευκαιρίες να ενισχύσουν ακόμη περισσότερο τις δυνατότητές τους.

### **Εφαρμογές της εργασίας σε θεωρητικό, σε μεθοδολογικό και σε πρακτικό επίπεδο**

Με βάση τα αποτελέσματα της, η εργασία συνεισφέρει σε τρεις τομείς: θεωρητικό, μεθοδολογικό και πρακτικό, όπως έχουν αναφερθεί στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας. Από θεωρητικής πλευράς, ενισχύεται η βιβλιογραφία της μαθηματικής παιδείας σχετικά με την ικανότητα των μαθητών προδημοτικής κατά την επίλυση έργων που σχετίζονται με τους Αριθμούς και τα Μοτίβα. Συγκεκριμένα, η εργασία προσθέτει στη βιβλιογραφία της μαθηματικής παιδείας, μέσα από την εφαρμογή της εμπειρικά θεμελιωμένης θεωρίας, ένα μοντέλο που περιγράφει και ενημερώνει για την αλληλεπίδραση των συνιστωσών της ικανότητας των μαθητών προδημοτικής κατά την επίλυση και επεξεργασία έργων που αφορούν στην έννοια των Αριθμών και των Μοτίβων καθώς και για τις διαστάσεις αυτών των συνιστωσών οι οποίες επέτρεψαν τον εντοπισμό και την περιγραφή της επίδοσης, της συμπεριφοράς/προσεγγίσεων/χαρακτηριστικών των τεσσάρων ομάδων/προφίλ μαθητών. Επιπρόσθετα, από μεθοδολογικής πλευράς, η παρούσα εργασία παρουσιάζει την εφαρμογή της εμπειρικά θεμελιωμένης θεωρίας στο πεδίο της μαθηματικής παιδείας. Συγκεκριμένα μέσω της παρούσας εργασίας, γίνεται λεπτομερής περιγραφή και παρουσίαση των σταδίων της εμπειρικά θεμελιωμένης θεωρίας (ανοιχτή, αξονική και επιλεκτική κωδικοποίηση) που ακολουθήθηκαν. Από πρακτικής άποψης, η παρούσα έρευνα προσφέρει στον εκπαιδευτικό σημαντικές πληροφορίες όσον αφορά τις μαθηματικές ικανότητες αλλά και τον τρόπο προσέγγισης των έργων από τους μαθητές προδημοτικής. Συγκεκριμένα, μέσα από το μοντέλο

που έχει δημιουργηθεί, το οποίο αναγνωρίζει τις συνιστώσες που διαδραματίζουν ρόλο κατά την επίλυση των έργων αλλά και τα προφίλ συμπεριφοράς των μαθητών, ο εκπαιδευτικός είναι σε θέση να αναγνωρίσει και να αξιολογήσει την ικανότητα των μαθητών του και να παρέχει κατάλληλη και εξατομικευμένη βοήθεια η οποία θα στηρίζεται στις προσωπικές ανάγκες των μαθητών. Ακόμη, τα αποτελέσματα τα οποία προκύπτουν μέσα από την εφαρμογή των παρεμβατικών διδασκαλιών, παρέχουν πρακτικές εισηγήσεις, έργα αξιολόγησης καθώς και πρακτικά μαθήματα όσον αφορά τη χρήση των οθονών αφής τις οποίες και μπορεί ο εκπαιδευτικός να εφαρμόσει ώστε να ενισχύσει και να βελτιώσει την επίδοση των μαθητών.

### **Εισηγήσεις για μελλοντικές έρευνες**

Η παρούσα εργασία έχει διερευνήσει την ικανότητα μαθητών προδημοτικής σε έργα Αριθμών και Μοτίβων καθώς και τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αυτοί προσεγγίζουν και επεξεργάζονται τα έργα αυτά. Ενδιαφέρουσα πρόταση για μελλοντική εργασία αποτελεί η εξέταση του κατά πόσον τα συγκεκριμένα αποτελέσματα που έχουν εντοπιστεί, ισχύουν και σε άλλες ενότητες περιεχομένου όπως για παράδειγμα την ενότητα της Γεωμετρίας ή της Μέτρησης. Άλλη μια εισήγηση για μελλοντική έρευνα, θα μπορούσε να αποτελέσει η διερεύνηση της εξέλιξης των μαθητών προδημοτικής και στην επόμενη βαθμίδα. Θα ήταν σημαντικό να διερευνηθεί κατά πόσον τα συγκεκριμένα προφίλ/ομάδες παρουσιάζονται και σε μεγαλύτερο ηλικιακά δείγμα, αλλά και ο τρόπος με τον οποίο πραγματοποιείται η μετάβαση των μαθητών από ένα προφίλ/ομάδα προσέγγισης σε άλλο. Επιπρόσθετα, για την ολοκλήρωση της εργασίας το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν μαθητές προδημοτικής, οι οποίοι δεν επιλέγηκαν μέσω μεθόδων τυχαίας δειγματοληψίας, αλλά με ευκαιριακό τρόπο. Μελλοντικές έρευνες θα μπορούσαν να διερευνήσουν κατά πόσο ισχύουν ίδια αποτελέσματα και στις περιπτώσεις όπου τα δεδομένα προέρχονται μέσα από εφαρμογή μεθόδων τυχαίας δειγματοληψίας.

Επιπρόσθετα, εφαρμόστηκαν δύο παρεμβατικές διδασκαλίες, για να διερευνηθεί κατά πόσον η εφαρμογή παρεμβατικών διδασκαλιών διερευνητικής μάθησης με τη χρήση των οθονών αφής, οι οποίες διαφοροποιούνται ως προς το βαθμό καθοδήγησης που παρέχουν στους μαθητές, είναι σε θέση να βελτιώσουν την ικανότητα των μαθητών προδημοτικής κατά την επίλυση έργων Αριθμών και Μοτίβων. Ωστόσο, αποτελεί ανάγκη, η εξέταση της επίδρασης αντίστοιχων παρεμβάσεων αλλά μεγαλύτερης χρονικής διάρκειας στην ανάπτυξη

της ικανότητας των μαθητών μέσω διαχρονικών μετρήσεων αλλά και η εξέταση του ενδεχόμενου διαφοροποιημένου βαθμού συνεισφοράς τέτοιων παρεμβατικών προγραμμάτων σε μαθητές με διαφοροποιημένες ανάγκες (π.χ. σε μαθητές με διαφορετικά προφίλ προσέγγισης και επεξεργασίας έργων).

ΛΟΥΙΖΑ Λ. ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ

## ΑΝΑΦΟΡΕΣ

### Αγγλική Βιβλιογραφία

- Alade, F., Lauricella, A. R., Beaudoin-Ryan, L., & Wartella, E. (2016). Measuring with Murray: Touchscreen technology and preschoolers' STEM learning. *Computers in Human Behavior, 62*, 433–441. doi:10.1016/j.chb.2016.03.080.
- Alfieri, L., Brooks, P. J., Aldrich, N. J., & Tenenbaum, H. R. (2011). Does discovery-based instruction enhance learning? *Journal of Educational Psychology, 103*(1), 1–18
- Antell, S. E., & Keating, D. P. (1983). Perception of numerical invariance in neonates. *Child Development, 54*, 695–701.
- Artzt, A. F., & Armour-Thomas, E. (1992). Development of a cognitive-metacognitive framework for protocol analysis of mathematical problem solving in small groups. *Cognition and Instruction, 9*(2), 137-175. doi:10.1207/s1532690xci0902\_3
- Assad, D. A. (2015). Task-based interviews in mathematics: Understanding student strategies and representations through problem solving. *International Journal of Education and Social Science, 2*(1), 17-26.
- Aunio, P., & Niemivirta, M. (2010). Predicting children's mathematical performance in grade one by early numeracy. *Learning and Individual Differences, 20*(5), 427-435. doi:10.1016/j.lindif.2010.06.003
- Ayub, A., Ghazali, M., & Othman, A. R. (2013). Preschool children's understanding of numbers from multiple representation perspective. *IOSR Journal of humanities and social science, 14*(6), 93-100.
- Banchi, H., & Bell, R. (2008). The many levels of inquiry. *Science and Children, 46*(2), 26 – 29.
- Bannan-Ritland, B., Dabbagh, N., & Murphy, K. (2000). Learning object systems as constructivist learning environments: Related assumptions, theories, and applications. In D.A. Wiley (Ed.) *The Instructional Use of Learning Objects*. Bloomington, IN: Association for Educational Communications and Technology.
- Baroody, A. J. (1987). The development of counting strategies for single-digit addition. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*(2) 141-157.

- Baroody, A. J. (2000). Does mathematics instruction for three to five year olds really make sense? *Young Children*, 7(4), 61-67.
- Baroody, A. J. (2004). The developmental bases for early childhood number and operations standards. In D. H. Clements & J. Sarama, (Eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 173–219). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Baroody, A. J. (2017) What role should concrete experiences play in early childhood mathematics instruction? In J. Sarama & D. Clements (Eds.), *Interventions in Early Childhood Mathematics Education* (pp. 1-73). Champaign: University of Illinois at Urbana-Champaign
- Bobis, J. (1996). Visualisation and the development of number sense with kindergarten children. In J. Mulligan & M. Mitchelmore (Eds.), *Children's number learning: A research monograph of MERGA/AAMT* (pp. 17–34). Adelaide: Australian Association of Mathematics Teachers.
- Baroody, A. J., Eiland, M. D., Purpura, D. J., & Reid, E. E. (2013). Can computer-assisted discovery learning foster first graders' fluency with the most basic addition combinations? *American Educational Research Journal*, 50(3), 533–573. doi:10.3102/0002831212473349
- Baroody, A. J., & Gatzke, M. R. (1991). The estimation of set size by potentially gifted kindergarten-age children. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(1), 59-68.
- number sense. *Early Education and Development*, 20(1), 80-128. doi:10.1080/10409280802206619
- Baroody, A. J., & Lai, M.-L. (2007). Preschoolers' understanding of the addition-subtraction inverse principle: A Taiwanese sample. *Mathematics Thinking and Learning*, 9(2), 131–171.
- Baroody, A. J., Lai, M. L., & Mix, K. S. (2006). The development of young children's number and operation sense and its implications for early childhood education. In B. Spodek & O. N. Saracho (Eds.), *Handbook of research on the education of young children* (pp. 187-221). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Baroody, A. J., Purpura, D. J., Eiland, M. D., & Reid, E. E. (2015). The impact of highly and minimally guided discovery instruction on promoting the learning of reasoning strategies

- for basic add-1 and doubles combinations. *Early Childhood Research Quarterly*, 30, 93–105. doi: 10.1016/j.ecresq.2014.09.003
- Bebell, D., & Pedulla, J. (2015). A quantitative investigation into the impacts of 1:1 iPads on early learners' ELA and math achievement. *Journal of Information Technology Education: Innovations in Practice*, 14, 191–215.
- BECTA. (2009). *Primary Mathematics with ICT: A pupil's entitlement to ICT in primary mathematics*. Retrieved from <http://www.bee-it.co.uk/Guidance%20Docs/Becta%20Files/Schools/Curriculum/Mathematics/02%20ICT%20in%20primary%20mathematics%20A%20pupil's%20entitlement.pdf>
- Beckwith, M., & Restle, F. (1966). Process of enumeration. *Psychological Review*, 73(5), 437.
- Bennett, K. R. (2011). Less than a class set. *Learning and Leading with Technology*, 39, 22–25.
- Biggs, J., & Collis, K. (1982). *Evaluating the quality of learning The SOLO taxonomy*. New York Academic Press.
- Billings, E. M., Tiedt, T. L., Slater, L. H., & Langrall, C. (2007/2008). Algebraic thinking and pictorial growth patterns. *Teaching Children Mathematics*, 14(5), 302–308.
- Bisanz, J., Watchorn, R. P. D., Piatt, C., & Sherman, J. (2009). On “understanding” children's developing use of inversion. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(1-2), 10–24. doi:10.1080/10986060802583907
- Bobis, J. (1996). Visualisation and the development of number sense with kindergarten children. In J. Mulligan & M. Mitchelmore (Eds.), *Children's number learning: A research monograph of MERGA/AAMT* (pp. 17–34). Adelaide: Australian Association of Mathematics Teachers.
- Bowman, B. T., Donovan, M. S., & Burns, M. S. (2001). *Eager to learn: Educating our preschoolers*. Washington, DC: National Academy Press.
- Briars, D. J., & Larkin, J. H. (1984). An integrated model of skill in solving elementary word problems. *Cognition and Instruction*, 1(3), 245–296.

- Bruce, B., & Threlfall, J. (2004). One, two, three and counting: Young children's methods and approaches in the cardinal and ordinal aspects of number, *Educational Studies in Mathematics*, 55, 3–26.
- Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge: Harvard University Press.
- Bryant, P., Christie, C., & Rendu, A. (1999). Children's understanding of the relation between addition and subtraction inversion, identify, and decomposition. *Journal of Experimental Child Psychology*, 74(3), 194–212. doi:10.1006/jecp.1999.2517
- Burns, M. (2007). *About teaching mathematics: A K-8 resource* (3rd ed.). Sausalito, CA: Math Solutions.
- Campbell, F. A., Pungello, E. P., Miller-Johnson, S., Burchinal, M., & Ramey, C. T. (2001). The development of cognitive and academic abilities: Growth curves from an early childhood educational experiment. *Developmental Psychology*, 37(2), 231-242.
- Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. W. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth: Heinemann.
- Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills. In T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective* (pp. 9-24). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Carr, J. M. (2012). Does math achievement happen when iPads and game-based learning are incorporated into fifth-grade mathematics instruction? *Journal of Information Technology Education: Research*, 11(1), 269–286.
- Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669–705). Charlotte, NC: Information Age.
- Carruthers, E., & Worthington, M. (2011). *Children's mathematical graphics: Understanding the key concept*. Maidenhead: Open University Press.
- Charles, R. I. (2005). Big ideas and understandings as the foundation for elementary and middle school mathematics. *Journal of Mathematics Education*, 7(3), 9–24.

- Charles, E. S., & Shumar, W. (2007). *Creativity, collaboration and competence: Agency in online synchronous chat environment*. Paper presented at the international conference on Computer-Supported Collaborative Learning (CSCL '07), New Brunswick, NJ. Paper retrieved from <http://GerryStahl.net/vmtwiki/liz.pdf>
- Charmaz, K. (2006). *Constructing grounded theory: A practical guide through qualitative analysis*. London: Sage.
- Chi, M. T. H. (2009). Active-Constructive-Interactive: A conceptual framework for differentiating learning activities. *Topics in Cognitive Science, 1*, 73–105.
- Cheng, Z. J. (2012). Teaching young children decomposition strategies to solve addition problems: An experimental study, *Journal of Mathematical Behavior, 31*(1), 29-47. doi:10.1016/j.jmthb.2011.09.002..
- Choppin, J., Carsons, C., Bory, Z., Cerosaletti, C., & Gillis, R. (2014). A typology for analyzing digital curricula in mathematics education. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology, 2*(1), 11-25.
- Clark, R. E., Kirschner, P. A., & Sweller, J. (2012). Putting students on the path to learning: The case for fully guided instruction. *American Educator, 36*(1), 6-11.
- Claessens, A. & Engel, M. (2013). How important is where you start? Early mathematics knowledge and later school success. *Teachers College Record, 115*(6), 1-29.
- Clements, D. (1999a). Subitizing. What is it? Why teach it? *Teaching Children Mathematics, 5*(7), 400-405.
- Clements, D. (1999b). Concrete manipulatives, concrete ideas. *Contemporary Issues in Early Childhood, 1*(1) 45-60.
- Clements, D. H., & Conference Working Group. (2004). Part one: Major themes and recommendations. In D. H. Clements, J. Sarama & A. M. DiBiase (Eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 1-72). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Clements, D.H., & Sarama, J. (2003). Strip mining for gold: Research and policy in educational technology: A response to ‘fool’s gold’. *Educational Technology Reviews, 11*(1), 7–69.



- Clements, D. H., & Sarama, J. (2007). Effects of a preschool mathematics curriculum: Summative research on the Building Blocks project. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(2), 136-163.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2008). Experimental evaluation of the effects of a research-based preschool mathematics curriculum. *American Educational Research Journal*, 45(2), 443-494.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York: Routledge.
- Clements, D. H., Sarama, J., & DiBiase, A. M. (2004). *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Clements, D. C., Sarama, J., Spitler, M. A., Lange, A. A., & Wolfe, C. B. (2011). Mathematics learned by young children in an intervention based on learning trajectories: A large-scale cluster randomized trial. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(2), 127–166.
- Collins, M. A., & Laski, E. V. (2015). Preschoolers' strategies for solving visual pattern tasks. *Early Childhood Research Quarterly*, 32(3), 204-214. doi:10.1016/j.ecresq.2015.04.004
- Common Core State Standards Initiative (CCSSI). 2010. *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers. <http://www.corestandards.org>
- Creswell, J. W, Plano Clark, V. L., Guttman, M. L., & Hanson, E. E. (2003). Advanced mixed methods research design. In A.Tashakkori and C. Teddlie (Eds.), *Handbook of mixed methods in social and behavioral research* (pp. 209–240). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Cross, C. T., Woods, T. A., & Schweingruber, H. (2009). *Mathematics learning in early childhood*. Washington, DC: National Academies Press.
- Dejonckheere, P. J. N., Smitsman, A. W., Desoete, A., Haeck, B., Ghyselinck, K., Hillaert, K., & Coppenolle, K. (2015). Early math learning with tablet PCs: The role of action. *European Journal of Psychology and Educational Studies*, 2(3), 79–87. doi:10.4103/2395-2555.190477
- de Jong, T., Hendrikse, P., & van der Meij, H. (2010). Learning mathematics through inquiry: A large-scale evaluation. In M. J. Jacobson & P. Reimann (Eds.), *Designs for learning*

- environments of the future: International perspectives from the learning sciences* (pp. 189-203). New York: Springer. doi:10.1007/978-0-387-88279-6\_7
- Denzin, N. (1994). Triangulation. In N. Denzin, & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research*. Thousand Oaks, Ca: Sage.
- Denzin, N. and Lincoln, Y. (2000) The discipline and practice of qualitative research. In: N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (pp. 1-32), Sage, Thousand Oaks.
- Diezmann, C. M., & Lowrie, T. (2006). Primary students' knowledge and errors on number lines. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen, & M. Chinnappan (Eds.), *Proceedings of the 29th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 1, pp. 171–178). Sydney, Australia: Mathematics Education Research Group of Australasia.
- Dorier, J.-L., & Maaß, K. (2014). Inquiry based mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 300 – 304). New York: Springer.
- Dowker, A. (1997). Young children's addition estimates. *Mathematical Cognition*, 3(2), 140-153. doi:10.1080/135467997387452
- Drijvers, P. (2015). Digital technology in mathematics education: Why it works (or doesn't). In S. Je Chuo (Ed.), *Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 135-151). Switzerland: Springer. doi:10.1007/978-3-319-17187-6\_8
- Drijvers, P., Ball, L., Barzel, B, Heid, K., Cao, Y., & Maschietto, M. (2016). *Uses of technology in lower secondary mathematics education: A concise topical survey*. Switzerland: Springer.
- Duncan, G. J., Dowsett, C. J., Claessens, A., Magnuson, K., Huston, A. C., Klebanov, P., Pagani, L., ... Japel, C. (2007). School readiness and later achievement. *Developmental Psychology*, 43(1), 1428-1446. doi:10.1037/0012-1649.43.6.1428
- Eisenhart, M. & Howe, K. (1992). Validity in educational research. In M. Le Compte, W. Millroy, & J. Preissle (Eds.), *The Handbook of Qualitative Research in Education* (pp. 642-680). San Diego: Academic Press.
- Engel, M., Claessens, A., & Finch, M. A. (2013). Teaching students what they already know? The (mis) alignment between mathematics instructional content and student knowledge in

- kindergarten. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 35(2), 157-178. doi:10.3102/0162373712461850
- English, L. (2008). Setting an agenda for international research in mathematics education. In L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh, & B. Srirnam (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed.) (pp. 3–19). New York: Routledge.
- English, L. D., & Mulligan, J. (2013). *Reconceptualizing early mathematics learning*. Dordrecht, The Netherlands: Springer.
- Ernst-Slavit, G., & Mason, M. (2011). “Words that hold us up:” Teacher talk and academic language in five upper elementary classrooms. *Linguistics and Education*, 22(4), 430–440.
- Fathurrohman, M., Porter, A., & Worthy, A. L. (2014). Comparison of performance due to guided hyperlearning, unguided hyperlearning, and conventional learning in mathematics: An empirical study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(5), 682-692. doi:10.1080/0020739X.2013.868541
- Fischer, F. (1990). A part-part-whole curriculum for teaching number to kindergarten. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(3), 207– 215. doi:10.2307/749374
- Fosnot, C., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing number sense, addition and subtraction*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Foster, M. E., Anthony, J. L., Clements, D. H., Sarama, J., & Williams, J. M. (2016). Improving mathematics learning of kindergarten students through computer-assisted instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 47(3), 206-232.
- Freiman, V. (2014). Types of technology in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 623 – 629). New York: Springer.
- Fuchs, L. S., Compton, D. L., Fuchs, D., Paulsen, K., Bryant, J. D., & Hamlett, C. L. (2005). The prevention, identification, and cognitive determinants of math difficulty. *Journal of Educational Psychology*, 97(3), 493–513. doi:10. 1037/0022-0663.97.3.493.
- Fuson, K. C. (2012). *Children’s counting and concepts of number*. New York, NY: Springer-Verlag.

- Fuson K.C., Grandau L., & Sugiyama P.A. (2001) Achievable numerical understandings for all young Children. *Teaching Children Mathematics*, 7(9), 522–526.
- Fuson, K. C., Richards, J., & Briars, D. J. (1982). The acquisition and elaboration of the number word sequence. In C. Brainerd (Ed.), *Progress in cognitive development research: Children's logical and mathematical cognition* (Vol. I, pp. 33– 92). New York, NY: Springer-Verlag.
- Gaver, W. (1991). Technology affordances. In Scott P. Robertson, Gary M. Olson, and Judith S. Olson (Eds.). *Proceedings of the SIGCHI Conference on Human Factors in Computing Systems* (pp 79-84), ACM, New York.
- Geary, D. C., Bow-Thomas, C., Liu, F., & Siegler, R. S. (1996). Development of arithmetical competencies in Chinese and American children: Influence of age, language, and schooling. *Child Development*, 67(5), 2022–2044.
- Geary, D. C., Hoard, M. K., Byrd-Craven, J., Nugent, L., & Numtee, C. (2007). Cognitive mechanisms underlying achievement deficits in children with mathematical learning disability. *Child Development*, 78, 1343–1359.
- Gersten, R., Chard, D. J., Jayanthi, M., Baker, S. K., Morphy, P., & Flojo, J. (2009). Mathematics instruction for students with learning disabilities: A meta-analysis of instructional components. *Review of Educational Research*, 79(3), 1202–1242.
- Gersten, R., Jordan, N. C., & Flojo, J. R. (2005). Early identification and interventions for students with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, 38(4), 293-304. doi: 10.1177/00222194050380040301
- Ginsburg, H. P. (2006). Mathematical play and playful mathematics: A guide for early education. In D. Singer, R. M. Golinkoff, & K. Hirsh-Pasek (Eds.), *Play = Learning: How play motivates and enhances children's cognitive and social-emotional growth* (pp. 145–165). New York, NY: Oxford University Press.
- Ginsburg, H. P., Klein, A., & Starkey, P. (1998). The development of children's mathematical knowledge: Connecting research with practice. In I. E. Sigel & K. A. Renninger (Eds.), *Handbook of child psychology: Vol. 4. Child psychology in practice* (5th Ed., pp. 401–476). New York: Wiley & Sons.
- Glaser, B. (1992). *Basics of grounded theory analysis*. Mill Valley, CA Sociology Press.

- Glaser, B., & Strauss, A. L. (1967). *The discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research*. Chicago: Aldine.
- Glaubke, C.R. (2007). *The effects of interactive media on preschoolers' learning: A review of the research and recommendations for the future*. Oakland, CA: Children Now.
- Goodwin, K. (2012). *Use of Tablet Technology in the Classroom: NSW Curriculum and Learning Innovation Centre*. Strathfield NSW: NSW Curriculum and Learning Innovation Centre.
- Goos, M., Galbraith, P., Renshaw, P. (2000). A money problem: A source of insight into problem solving action. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 13, 1-21.
- Goos, M., Galbraith, P., Renshaw, P., & Geiger, V. (2003). Perspectives on technology mediated learning in secondary school mathematics classrooms. *The Journal of Mathematical Behavior*, 22(1), 73–89. doi:10.1016/S0732-3123(03)00005-1
- Gracia-Baffaluy, M., Noel, M. P. (2008). Does finger training increase numerical performance? *Cortex*, 44(4), 368–375. doi:0.1016/j.cortex.2007.08.020
- Gormley, W. T. (2007). Early childhood care and education: Lessons and puzzles. *Journal of Policy Analysis and Management*, 26(3), 633-671. doi:10.1002/pam.20269
- Griffin, S. (2004). Building number sense with number worlds: A mathematics program for young children. *Early Childhood Research Quarterly*, 19, 173 – 180. doi:10.1016/j.ecresq.2004.01.012
- Guba, E. G., & Lincoln, Y. S. (1982). Epistemological and methodological bases of naturalistic inquiry. *Educational Communication & Technology Journal*, 30(4), 233-252.
- Guoliang, Y. (2003). Visual-spatial representations and mathematical problem solving among mathematical learning disabilities. *Acta Psychologica Sinica*, 35(5), 643- 648.
- Gutnick, A. L., Robb, M., Takeuchi L., & Kotler, J. (2011). “*Always Connected: The New Digital Media Habits of Young Children.*” New York: The Joan Ganz Cooney Center at Sesame Workshop.
- Hanich, L. B., Jordan, N. C., Kaplan, D., & Dick, J. (2001). Performance across different areas of mathematical cognition in children with learning difficulties. *Journal of Educational Psychology*, 93(3), 615-626. doi:10.1037/0022-0663.93.3.615

- Harrison, T.R. & Lee, H.S. (2018). iPads in the mathematics classroom: Developing criteria for selecting appropriate learning apps. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, 6(2), 155-172. doi:10.18404/ijemst.408939
- Harskamp, E. (2015). The effects of computer technology on primary school students' mathematics achievement: A meta-analysis. In S. Chinn (Ed.), *The Routledge international handbook of dyscalculia and mathematical learning difficulties* (pp. 383–392). New York, NY: Routledge.
- Hassinger-Das, B., Jordan, N.C., & Dyson, N. (2015). Reading stories to learn math: Mathematics vocabulary instruction for children with early numeracy difficulties. *Elementary School Journal*, 116, 242–264. <http://dx.doi.org/10.1086/683986>
- Hegarty, M., & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology*, 91(4), 684-689.
- Hiebert, J., & Wearne, D. (1992) Links between teaching and learning place value with understanding in first grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(2), pp. 98-122. doi:10.2307/749496
- Ho, C. S. H. & Fuson, K. C. (1998). Children's knowledge of teen quantities as tens and ones: Comparisons of Chinese, British, and American kindergartners. *Journal of Educational Psychology*, 90(3), 536–544. doi:10.1037/0022-0663.90.3.536
- Holt, J. (1982). *How children fail*. New York: Dell.
- Hornung, C., Schiltz, C., Brunner, M., & Martin, R. (2014). Predicting first-grade mathematics achievement: The contributions of domain-general cognitive abilities, nonverbal number sense, and early number competence. *Frontiers in Psychology*, 5(272), 1–18. doi:10.3389/fpsyg.2014.00272
- Hoyles, C., & Noss, R. (2003). What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & F. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (323-349). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Hsiao, H.-C. (2007). A brief review of digital games and learning. *Proceedings of the 2007 First IEEE International Workshop on Digital Game and Intelligent Toy Enhanced Learning (DIGITEL'07)* (pp. 124-129). Jhongli City. doi:10.1109/DIGITEL.2007.3

- Hubber, P. J., Outhwaite, L. A., Chigeda, A., McGrath, S., Hodgen, J., & Pitchford, N. J. (2016). Should touch screen tablets be used to improve educational outcomes in primary school children in developing countries? *Frontiers in Psychology*, 7(839). doi:org/10.3389/fpsyg.2016.00839.
- Hughes, E. M., Powell, S. R., & Stevens, E. A. (2016). Supporting clear and concise mathematics language: Instead of that, say this. *Teaching Exceptional Children*, 49, 7–17. doi:10.1177/0040059916654901.
- Hung, C., Sun, J. C., & Yu, P. (2015). The benefits of a challenge: student motivation and flow experience in tablet-PC-game-based learning. *Interactive Learning Environments*, 23(2), 172–190. doi:10.1080/10494820.2014.997248.
- Huttenlocher, J., Jordan, N. C., & Levine, S. C. (1994). A mental model for early arithmetic. *Journal of Experimental Psychology: General*, 123(3), 284–296.
- Johnson, L., Adams Becker, S., Cummins, M., Estrada V., Freeman, A., & Ludgate, H. (2013). *NMC Horizon Report: 2013 K-12 Edition*. Austin, Texas: The New Media Consortium (NMC).
- Jonassen, D. H., Howland, J., Marra, R. M., & Crismond, D. (2008). *Meaningful learning with technology* (3rd ed.). Upper Saddle River, NJ: Pearson Education.
- Jordan, N. C., Glutting, J., & Ramineni, C. (2009). The importance of number sense to mathematics achievement in first and third grades. *Learning and Individual Differences*, 20(2), 82-88. doi:10.1016/j.lindif.2009.07.004
- Jordan, N. C., Glutting, J., Ramineni, C., & Watkins, M. W. (2010). Validating a number sense screening tool for use in kindergarten and first grade: Prediction of mathematics proficiency in third grade. *School Psychology Review*, 39(2), 181-185.
- Jordan, N. C., Kaplan, D., Oláh, L. N., & Locuniak, M. N. (2006). Number sense growth in kindergarten: A longitudinal investigation of children at risk for mathematics difficulties. *Child Development*, 77, 153–175.
- Jordan, N.C., Kaplan, D., Ramineni, C., & Locuniak, M. N. (2008). Development of number combination skill in the early school years: When do fingers help? *Developmental Science*, 11(5), 662-668. doi:10.1111/j.1467-7687.2008.00715.x

- Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum/Taylor & Francis Group & National Council of Teachers of Mathematics.
- Kaufmann, L., Vogel, S. E., Wood, G., Kremser, C., Schocke, M., Zimmerhackl, L. B. & Koten, J. W. (2008). A developmental fMRI study of nonsymbolic numerical and spatial processing. *Cortex*, *44*(4), 376-385. doi:10.1016/j.cortex.2007.11.009.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001) *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- Kirschner, P. A., Sweller, J., & Clark, R. E. (2006). Why minimal guidance during instruction does not work: An analysis of the failure of constructivist, discovery, problem-based, experiential, and inquiry-based teaching. *Educational Psychologist*, *41*, 75–86. doi:10.1207/s15326985ep4102\_1
- Klavir, R., & HersHKovitz, S. (2008). Teaching and evaluating ‘openended’ problems. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning* *20*(5).
- Kleemans, T., Peeters, M., Segers, E., & Verhoeven, L. (2012). Child and home predictors of early numeracy skills in kindergarten. *Early Childhood Research Quarterly*, *27*, 471–477.
- Kleemans, T., Segers, E., & Verhoeven, L. (2011) Precursors to numeracy in kindergartners with specific language impairment. *Research in Developmental Disabilities*, *32*(6), 2901–2908. doi:10.1016/j.ridd.2011.05.013
- Klein, J. S., & Bisanz, J. (2000). Preschoolers doing arithmetic: The concepts are willing, but the working memory is weak. *Canadian Journal of Educational Psychology*, *54*(2), 105 – 115. doi:10.1037/h0087333
- Klein, A., & Starkey, P. (2004). *Scott Foresman – Addison Wesley Mathematics: Pre-K*. Glenview, IL: Pearson Scott Foresman.
- Klibanoff, R. S., Levine, S. C., Huttenlocher, J., Vasilyeva, M., & Hedges, L. V. (2006). Preschool children’s mathematical knowledge: The effect of teacher “Math Talk”. *Developmental Psychology*, *42*(1), 59–69.
- Koll H., & Mills, S. (2009). *Developing mathematics: Counting and understanding number Ages 5-6*. London: A&C Black



- Koll H., & Mills, S. (2009). *Developing mathematics: Number facts and calculations Ages 5-6*. London: A&C Black
- Koll H., & Mills, S. (2009). *Developing mathematics: Using and applying mathematics Ages 5-6*. London: A&C Black
- Kosko, K., & Ferdig, R. (2016). Effects of a tablet-based mathematics application for pre-school children. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 35(1), 61–79.
- Krajewski, K., & Schneider, W. (2009). Early development of quantity to number-word linkage as a precursor of mathematical school achievement and mathematical difficulties: Findings from a four-year longitudinal study. *Learning and Instruction*, 19, 513–526.
- Lansdell, J. M. (1999). Introducing young children to mathematical concepts: Problems with “new” terminology. *Educational Studies*, 25(3), 327–333. doi:10.1080/03055699997837
- Lee, J. S., & Ginsburg, H. P. (2007). Preschool teachers' beliefs about appropriate early literacy and mathematics education for low-and middle-socioeconomic status children. *Early Education and Development*, 18(1), 111-143. doi:10.1080/10409280701274758
- Lee, H. S., & Hollebrands, K. F. (2006). Students’ use of technological features while solving a mathematics problem. *Journal of Mathematical Behavior*, 25(3), 252-266. doi:10.1016/j.jmathb.2006.09.005
- Lee, K., Ng, S. F., Bull, R., Pe, M. L., & Ho, R. (2011). Are patterns important? An investigation of the relationships between proficiencies in patterns, computation, executive functioning, and algebraic word problems. *Journal of Educational Psychology*, 103(2), 269–281. doi:10.1037/a0023068
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving. *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, 21, 33-40.
- Levenson, E., Tirosh, D., & Tsamir, P. (2011). *Preschool geometry: Theory, research, and practical perspectives*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Levin, J. R., & O’Donnell, A. M. (1999). What to do about educational research’s credibility gaps? *Issues in Education* 5(2), 177-229.
- Liljedahl, P. (2004). Repeating pattern or number pattern: The distinction is blurred. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 26(3), 24-42.

- Maaß, K., & Artigue, M. (2013). Implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching: A synthesis. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 45(6), 779-795. doi:10.1007/s11858-013-0528-0
- Maher, C. A. & Sigley, R. (2014). Task-based interviews in mathematics education. In S. Lernman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Dordrecht, Netherlands: Springer Science+Business Media. doi:10.1007/978-94-007-4978-8.
- Marulis, L. M., & Neuman, S. B. (2010). The effects of vocabulary intervention on young children's word learning: A meta-analysis. *Review of Educational Research*, 80(3), 300-335. doi:10.3102/0034654310377087.
- Mattoon, C., Bates, A., Shifflet, R., Latham, N., & Ennis, S. (2015). Examining computational skills in pre-kindergarteners: the effects of traditional and digital manipulatives in a prekindergarten classroom. *Early Childhood Research and Practice*, 17(1) Retrieved from <http://ecrp.uiuc.edu/v17n1/mattoon.html>.
- Mayer, R.E. (1985). Mathematical ability. In R.J. Sternberg, (Ed.), *Human Abilities: An Information Processing Approach* (pp. 127-150). New York: Freeman.
- Mazzocco, M. M., Feigenson, L., & Halberda, J. (2011). Impaired acuity of the approximate number system underlies mathematical learning disability (dyscalculia). *Child development*, 82(4), 1224-1237.
- McKenna, C. (2012). There's an app for that: How two elementary classrooms used iPads to enhance student learning and achievement. *Education*, 2(5), 136-142. doi:10.5923/j.edu.20120205.05
- McManis, L. D., & Gunnewig, S. B. (2012). Finding the education in educational technology with early learners. *YC Young Children*, 67(3), 14.
- Miller, T. (2018). Developing numeracy skills using interactive technology in a play-based learning environment. *International Journal of STEM education*, 5(39). doi:10.1186/s40594-018-0135-2
- Miller, E., & Almon, J. (2009). *Crisis in the kindergarten: Why children need to play in school*. College Park, MD: Alliance for Childhood.
- Mitchell, A. & Savill-Smith, C. (2004). *The use of computer and video games for learning: A review of the literature*. Learning and Skills Development Agency.

- Miura, I. T., Okamoto, Y., Kim, C. C., Chang, C. -M., & Steere, M. (1994). Comparisons of children's cognitive representations of number: China, France, Japan, Korea, Sweden, and the United States. *International Journal of Behavior Development*, 17(3), 401–411. doi:10.1177/016502549401700301.
- Mix, K. S., Huttenlocher, J., & Levine, S. C. (2002). *Quantitative development in infancy and early childhood*. New York, NY, US: Oxford University Press.
- Moomaw, S. (2011). *Teaching mathematics in early childhood*. Baltimore, MD: Brookes.
- Morgan, P. L., Farkas, G., & Wu, Q. (2009). Five-year growth trajectories of kindergarten children with learning difficulties in mathematics. *Journal of Learning Disabilities*, 42, 306-321. doi:10.1177/0022219408331037
- Moyer, P. S., Bolyard, J. J., & Spikell, M. A. (2002). What are virtual manipulatives?. *Teaching children mathematics*, 8(6), 372-377.
- Mulbar, U., Rahman, A., & Ahmar, A. S. (2017). Analysis of the ability in mathematical problem-solving based on SOLO taxonomy and cognitive style. *World Transactions on Engineering and Technology Education*, 15(1), 68-73. doi:10.26858/wtetev15i1y2017p6873
- Mulholland, J. & Wallace, J. (2003). Strength, sharing and service: Restorying and the legitimization of research texts. *British Educational Research Journal*. 29(1), 5-23.
- Mulligan, J. T., Cavanagh, M., & Keanan-Brown, D. (2012). The role of algebra and early algebraic reasoning in the Australian Curriculum: Mathematics. In B. Atweh, M. Goos, R. Jorgensen & D. Siemon (Eds.) *Engaging the Australian National Curriculum: Mathematics-Perspectives from the field* (pp. 47-70), Adelaide: MERGA Inc
- Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 33-49. doi:10.1007/BF03217544
- Mulligan, J., Prescott, A. & Michelmore, M. (2004). Children's development of structure in early mathematics. In M. Johnsen Hoines & A.B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 29th Annual Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education*, (Vol.3, pp. 393-401). Norway: PME

- Mulligan, J. T. & Vergnaud, G. (2006). Research on children's early mathematical development: Towards integrated perspectives. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 261 - 276). London: Sense Publishers.
- National Association for the Education of Young Children. (2010). *Standards for Initial and Advanced Early Childhood Professional Preparation Programs*. Washington, DC: NAEYC.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Nir-Gal, O., & Klein, P. S. (2004). Computers for cognitive development in early childhood: The teacher's role in the computer learning environment. *Information Technology in Childhood Education Annual*, 16, 97–119.
- Ontario Ministry of Education. (2007). *A guide to effective instruction in mathematics, Kindergarten to grade 3, Patterning and Algebra*. Toronto: Queen's Printer for Ontario.
- Orton, A., & Orton, J. (1999). Pattern and the approach to algebra. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 104–120). London, UK: Cassell.
- Outhwaite, L. A., Guilford, A., & Pitchford, N. J. (2017). Closing the gap: Efficacy of a tablet intervention to support the development of early mathematics skills in UK primary school children. *Computers & Education*, 108, 43–58. doi:10.1016/j.compedu.2017.01.011.
- Papic, M. (2007). Promoting Repeating Patterns with Young Children-More Than Just Alternating Colours!. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 12(3), 8-13.
- Papic, M., & Mulligan, J.T. (2007). The growth of early mathematical patterning: An intervention study. In J. Watson, & K. Beswick (Eds.), *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, ( Vol. 2, pp. 591-600). Adelaide: MERGA.
- Papic, M., Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (2009). The growth of mathematical patterning strategies in preschool children. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 329–336). Thessaloniki, Greece: PME

- Papic, M., Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the development of preschoolers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(3), 237-268.
- Payan, E. (2017). The impact of math talks on student achievement in kindergarten school. Unpublished theses. School of education student Capstone.
- Pegg J. (2014) Structure of the observed learning outcome (SOLO) model. In: Lerman S. (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, Dordrecht
- Pegg, J., & Tall, D. O. (2005). The fundamental cycle of concept construction underlying various theoretical frameworks. *International Reviews on Mathematical Education (ZDM)*, 37(6), 468-475.
- Penner-Wilger, M., Fast, L., LeFevre, J., Smith-Chant, B. L., Skwarchuk, S., Kamawar, D., & Bisanz, J. (2007). The foundations of numeracy: Subitizing, finger gnosis, and fine-motor ability. *Proceedings of the 29th annual cognitive science society* (pp. 1385-1390). Austin, TX: Cognitive Science Society.
- Piaget, J. (1936). *Origins of intelligence in the child*. London: Routledge & Kegan Paul.
- Piaget, J. (1965). *The moral judgment of the child*. New York, NY, US: Free Press.
- Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1960). *The child's conception of geometry*. London: Routledge and Kegan Paul.
- Piaget, J., & Szeminska, A. (1952). *The child's conception of number*. London: Routledge and Kegan Paul.
- Pierce, R., & Stacey, K. (2010). Mapping pedagogical opportunities provided by mathematics analysis software. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 15(1), 1-20.
- Biggs, J. B., & Collins, K. F. (1982). *Evaluating the quality of learning. The SOLO taxonomy*. London Academic Press.
- Pimm, D., & Sinclair, N. (2015). How do you make numbers? ” : Rhythm and turn-taking when coordinating ear, eye and hand. In K. Krainer & N. Vondrová, *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, (pp. 1961-1967). Prague, Czech Republic.

- Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2013). A longitudinal study tracing the development of number sense components. In A. M. Lindmeijer & A. Heinze, *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 4, pp. 41-48). Kiel, Germany: PME.
- Politylo, B., White, K., & Marcotte, A. M. (2011, February). *An investigation of the construct of number sense*. Poster submitted to the National Association of School Psychologists (NASP), San Francisco, CA.
- Polya, G. (1957) *How to solve it: A New aspect of mathematical method* (2nd ed). New York: Double Day and Co.
- Prather, R. W., & Alibali, M. W. (2009). The development of arithmetic principle knowledge: how do we know what learners know? *Developmental Review*, 29(4), 221–248. doi:10.1016/j.dr.2009.09.001
- Presser, A. L., Clements, M., Ginsburg, H., & Ertle, B. (2015). Big math for little kids: The effectiveness of a preschool and kindergarten mathematics curriculum. *Early Education & Development*, 26(3), 399–426. doi:10.1080/10409289.2015.994451
- Purpura, D. J., & Lonigan, C. J. (2013). Informal numeracy skills: The structure and relations among numbering, relations, and arithmetic operations in preschool. *American Educational Research Journal*, 50(1), 178-209. doi: 10.3102/0002831212465332
- Rasanen, P., Salminen, J., Wilson, A. J., Aunio, P., & Dehaene, S. (2009). Computer-assisted intervention for children with low numeracy skills. *Cognitive Development*, 24, 450- 472. doi:10.1016/j.cogdev.2009.09.003
- Rasmussen, C., Ho, E., & Bisanz, J. (2003). Use of the mathematical principle of inversion in young children. *Journal of Experimental Child Psychology*, 85(2), 89–102.
- Rasmussen, C., & Kwon, O. N. (2007). An inquiry-oriented approach to undergraduate mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, 26, 189-194.
- Reeves, J. L., Gunter, G. A., & Lacey, C. (2017). Mobile learning in pre-kindergarten: Using student feedback to inform practice. *Educational Technology & Society*, 20(1), 37–44.
- Resnick, L. B. (1992). From protoquantities to operators: Building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge. In G. Leinhardt, R. T. Putnam, & R. A. Hattrop

- (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 373-429). Hillsdale, NJ, US: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Riccomini, P. J., Smith, G. W., Hughes, E. M., & Fries, K. M. (2015). The Language of Mathematics: The importance of teaching and learning mathematical vocabulary. *Reading and Writing Quarterly*, 31(3), 235-252. doi:10.1080/10573569.2015.1030995
- Rideout, V. (2011). *Zero to Eight: Children's Media Use in America*. San Francisco, CA: Common Sense Media.
- Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., Loehr, A. M., & Miller, M.R. (2015). Beyond numeracy in preschool: Adding patterns to the equation. *Early Childhood Research Quarterly*, 31, 101-112. doi:10.1016/j.ecresq.2015.01.005
- Rittle-Johnson, B., McLean, L., McEldoon, K. L., & Fyfe, E. (2013). Emerging understanding of patterns in four-year-olds. *Journal of Cognition and Development*, 14(3), 376–396. doi:10.1080/15248372.2012.689897
- Rittle-Johnson, B., Saylor, M., & Swygert, K. (2008). Learning from Explaining: Does it matter if mom is listening? *Journal of Experimental Child Psychology*, 100, 215-224. doi:10.1016/j.jecp.2007.10.002
- Sadler, F. H. (2009). Help! They still don't understand counting. *Teaching Exceptional Children Plus*, 6(1).
- Sandhofer, C., & Smith, L. B. (1999). Learning color words involves learning a system of mappings. *Developmental Psychology*, 35(3), 668- 679.
- Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. New York: Routledge.
- Sarama, J., & Clements, D.H. (2016). Physical and virtual manipulatives: What is “concrete”? In P.S Moyer-Packenham (Eds.) *International perspectives on teaching and learning mathematics with virtual manipulatives*. (Vol. 3, pp. 71-93). Springer International Publishing: Switzerland
- Sedighian, K., & Sedighian, A. (1996). Can educational computer games help educators learn about the psychology of learning mathematics in children? *Proceedings of the 18th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education -- the*

North American Chapter. Florida, USA. Retrieved from <http://www.citeulike.org/group/932/article/383707>

- Siegler, R.S., & Robinson, M.(1982). The development of numerical understandings. In H. Reese & L. P. Lipsitt (Eds.), *Advances in child development and behavior* (Vol. 16, pp. 241-312). San Diego, CA: Academic Press.
- Siegler, R. S., & Jenkins, E. (1989). *How children discover new strategies*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Skemp, R. (1987). *The Psychology of learning mathematics*. Hillsdale, NJ Lawrence Erlbaum Associates.
- Skoumpourdi, C. (2010). The number line: an auxiliary means or an obstacle? *International Journal for Mathematics Teaching and Learning* (Electronic Journal)
- Skoumpourdi, C. (2013). Kindergartners' performance levels on patterning. *International Journal for Mathematics in Education*, HMS, 5, 108–131.
- Skoumpourdi, C. (2016). Patterns for kindergartners: A developmental framework. In B. MajTatsis, M. Pytlak & E. Swoboda (Eds.) *CME Inquiry Based Mathematical Education*, (pp. 107–116). Rzeszow, Poland: University of Rzeszow.
- Skoumpourdi, C. (2017). A framework for designing inquiry based activities (FIBA) for early childhood mathematics. In T. Dooley, & G. Gueudet, G. (Eds.) *10<sup>th</sup> Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 10)* (pp. 1901-1908). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.
- Starkey, P. & Cooper, R.G. (1980). Perception of numbers by human infants. *Science*, 210(4473), 1033- 1035. doi:10.1126/science.7434014.
- Steffe, L. P. & Cobb, P. (1988). *Construction of arithmetical meanings and strategies*. New York: Springer-Verlag
- Steffe, L.P., von Glasersfeld, E., Richards, J., Cobb, P. (1983). *Children's counting types: Philosophy, theory, and application*. Praeger Scientific, New York.
- Steglin, D. A. (2005). Making the case for play policy: research-based reasons to support play-based environments. *Young Children*, 60(2), 76–86.



- Strauss, A., & Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research. Grounded theory procedures and techniques*. Thousand Oaks, Calif.: Sage.
- Strauss, A., & Corbin, J. (1998). *Basics of Qualitative Research: Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications, Inc.
- Stubbe, H., Badri, A., Telford, R., van der Hulst, A., & van Joolingen, W. (2016). *Electronic Journal of eLearning*, 14(2), 136–149.
- Thorndike, E. L. (1922). *The psychology of arithmetic*. New York: Mcmillan.
- Threlfall, J. (2005). Repeating patterns in the early primary years. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 1-17). Great Britain: Continuum Studies in Mathematics Education.
- Tirosh, D., Tsamir, P., Levenson, E., Tabach, M., & Barkai, R. (2013). Exploring young children's self-efficacy beliefs related to mathematical and nonmathematical tasks performed in kindergarten: Abused and neglected children and their peers. *Educational Studies in Mathematics*, 83(2), 309–322.
- Tomlinson, C. (1999). *The differentiated classroom: Responding to the needs of all learners*. Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.
- Tzekaki, M. (2014). Mathematics Activity in Early Childhood. Is it so simple? In Liljedahl, P., Nicol, C., Oesterle, S., & Allan, D. (Eds.). *Proceedings of the 38th Conference of PME and the 36th Conference of PME-NA*. (Vol. 5, pp. 289- 296). Vancouver, Canada: PME.
- UNESCO (2013). *Policy guidelines for mobile learning*. UNESCO, Paris.
- Van de Walle, J. A. (1998). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*. New York: Longman.
- Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2012). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (8th ed.). Boston, MA: Pearson.
- Van de Walle, J. A., Karp, K., & Bay-Williams, J. (2013). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*. Upper Saddle River, NJ: Pearson Inc.
- van Garderen, D., & Montague, M. (2003). Visual-spatial representation, mathematical problem solving, and students of varying abilities. *Learning Disabilities Research & Practice*, 18(4), 246-254. doi: 0.1111/1540-5826.00079

- Van Luit, J., & Van de Rijt, B. (2009). *Utrecht early numeracy test-revised*. Apeldoorn, The Netherlands: Graviant
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Wagner, S. H., & Walters, J. (1982). A longitudinal analysis of early number concepts. In G. Foreman (Ed.), *Action and thought: From sensorimotor schemes to symbolic operations* (pp. 137-161). New York: Academic
- Wang, X.C., & Ching C.C. (2003). Social construction of computer experience in a first-grade classroom: Social processes and mediating artifacts. *Early Education and Development*, 14(3), 335–61. doi:10.1207/s15566935eed1403\_4
- Wang, M. C., Resnick, L. B., & Boozer, R. F. (1971). The sequence of development of some early mathematics behaviors. *Child Development*, 42(6), 1767-1778.
- Warren, E., & Cooper, T. (2003). Introducing equivalence and inequivalence in Year 2. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 8(10), 4–9.
- Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 305-312). Melbourne: PME
- Warren, E., & Cooper, T. (2006). Using repeating patterns to explore functional thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 11(1), 9–14.
- Warren, E., & Cooper, T. (2007). Repeating patterns and multiplicative thinking: Analysis of classroom interactions with 9-year-old students that support the transition from the known to the novel. *Journal of Classroom Interaction*, 41(2), 7–17.
- Warren, E., & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 67(2), 171-185.
- Warren, E., Miller, J., & Cooper, T. J. (2011). Exploring young children's functional thinking. In B. Ubuz (Ed.). *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol 4, pp 329-337), Ankara, Turkey: PME.

- Waters, J. (2004). Mathematical patterning in early childhood settings. In I. Putt, R. Faragher, & M. McLean (Eds.), *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010. Proceedings of the 27th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 2, pp. 565–572). Townsville, Australia: MERGA.
- Watts, T. W., Duncan, G. J., Siegler, R. S., & Davis-Kean, P. E. (2014). What's past is prologue relations between early mathematics knowledge and high school achievement. *Educational Researcher*, *43*(7), 352-360. doi:10.3102/0013189X14553660
- Whalen, J., Gallistel, C. R., & Gelman, R. (1999). Nonverbal counting in humans: The psychophysics of number representation. *Psychological Science*, *10*(2), 130-137.
- Whitin, P., & Whitin, D. J. (2011). Mathematical pattern hunters. *Young Children*, *66*(3), 84–90.
- Wilson, L., Nash, J., Wissinger, C., & Leidman, M. B. (2013). iPads in elementary education: Content mastery and curriculum pacing. In R. McBride & M. Searson. *Proceedings of the 24<sup>th</sup> Society for Information Technology & Teacher Education International Conference* (pp. 3810–3813). New Orleans, LA.
- Wright, R. J., Stanger, G., Stafford, A.K., & Martland, J. (2006). *Teaching number in the classroom with 4-8 years-olds*. Sage Publications Ltd.
- Yang, D. C. (2005). Number sense strategies used by 6th-grade students in Taiwan. *Educational Studies*, *31*(3), 317-333. doi:10.1080/03055690500236845
- Zaranis, N., Kalogiannakis, M., & Papadakis, S. (2013). Using Mobile Devices for Teaching Realistic Mathematics in Kindergarten Education. *Creative Education (Special Issue in Preschool Education)*, *4*(7A), 1-10.
- Zhou, X.; Wang, Y.; Wang, L. & Wang, B. (2006). Kindergarten children's representation and understanding of written number symbols. *Early Child Development and Care*, *176*(1), 33-45.
- Zimmerman, S., & Howard, B. (2013). Implementing ipads into K-12 classrooms: A case study. In R. McBride & M. Searson. *Proceedings of the 24<sup>th</sup> Society for Information Technology & Teacher Education International Conference* (pp. 2512–2516). New Orleans, LA.

## Ελληνική Βιβλιογραφία

- Ιατροπούλου, Ο. (2009). *Επίλυση προβλήματος με αφήγηση ιστοριών* (Διπλωματική Εργασία). Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Θεσσαλονίκη, Ελλάδα.
- Ιωσηφίδης, Θ., (2008). *Ποιοτικές μέθοδοι έρευνας στις κοινωνικές επιστήμες*. Αθήνα: Κριτική.
- Καρούση, Σ., & Σκουμπουρδή, Χ. (2008). *Τα μαθηματικά των παιδιών 4-6 ετών*. Αθήνα: Εκδόσεις Πατάκη.
- Συμεού, Α. (2007). Εγκυρότητα και αξιοπιστία στην ποιοτική εκπαιδευτική έρευνα: Παρουσίαση, αιτιολόγηση και πράξη. Πρακτικά 5 ου Πανελληνίου Συνεδρίου Παιδαγωγικής Εταιρείας Ελλάδας "25 Χρόνια Παιδαγωγικής Εταιρείας Ελλάδας" (Τομ. 2, σσ. 333-339). Θεσσαλονίκη: Α/φοί Κυριακίδη.
- Τζεκάκη Μ. (2007). *Μικρά παιδιά, Μεγάλα Μαθηματικά Νοήματα*. Αθήνα: Gutenberg.
- Τζεκάκη, Μ. (2017). *Επίλυση μαθηματικού προβλήματος* [Παρουσίαση Power point]. Ανακτήθηκε από <https://eclass.uowm.gr/modules/document/file.php>
- Τζεκάκη, Μ., & Κούλελη, Μ. (2007). Διερεύνηση της ικανότητας αναγνώρισης προτύπων σε παιδιά προσχολικής ηλικίας, Στο Χ. Σακονίδης & Δ. Δεσλή (επιμ.), *Πρακτικά του 2ου Πανελληνίου Συνέδριου της Ένωσης Ερευνητών στη Διδακτική των Μαθηματικών* (σ. 267-278). Αθήνα: Τυπωθήτω.
- Παπαδοπούλου, Σ. (2018). *Επίλυση προβλήματος: Διδακτική παρέμβαση*. (Διπλωματική Εργασία). Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Θεσσαλονίκη, Ελλάδα.
- Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου, & Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων. (2010). *Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών*. Λευκωσία, Κύπρος: Συγγραφέας. Retrieved from [http://www.schools.ac.cy/klimakio/Themata/Mathimatika/analytika\\_programmata/ektenes\\_programma\\_mathimatika.pdf](http://www.schools.ac.cy/klimakio/Themata/Mathimatika/analytika_programmata/ektenes_programma_mathimatika.pdf)
- Φιλίππου, Γ., & Χρίστου, Α. (2002). *Διδακτική των μαθηματικών*. Εκδόσεις Δαρδάνος: Αθήνα

## Παράρτημα Α

Δοκίμιο μέτρησης της ικανότητας μαθητών προδημοτικής σε έργα Αριθμών και Μοτίβων και βαθμολόγηση των έργων του δοκιμίου για τη συλλογή των ποσοτικών δεδομένων

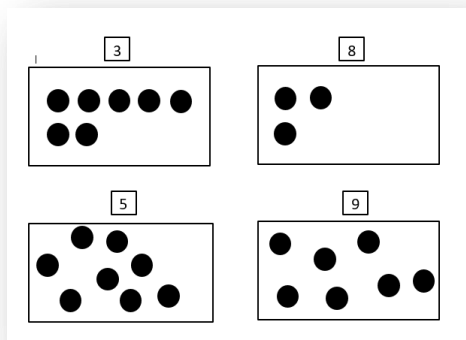
ΛΟΥΙΖΑ Λ. ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ

Πίνακας Α1:

Έργα Αριθμών και Μοτίβων της Προπαρεμβατικής και Μεταπαραεμβατικής Φάσης- Βαθμολόγηση Εργαλείου για Συλλογή Ποσοτικών Δεδομένων

**Μαθηματικό έργο**

**Βαθμολόγηση**



Αριθμοί έργο 1

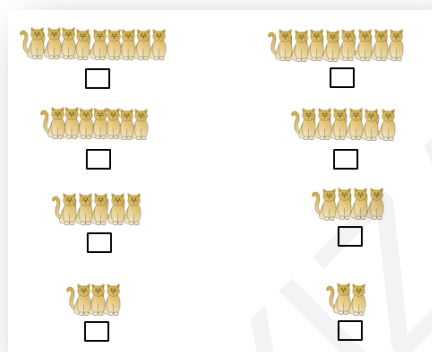
Ερώτημα

Να ζωγραφίσεις ή να διαγράψεις κύκλους ώστε οι κύκλοι που είναι μέσα στο κουτί να είναι όσοι δείχνει το αριθμητικό σύμβολο

Βαθμολόγηση

Βαθμολογία 0,25 για κάθε ορθή απάντηση σε υποερώτημα

Βαθμολογία 0 μονάδες για κάθε λανθασμένη απάντηση σε υποερώτημα



Αριθμοί έργο 2

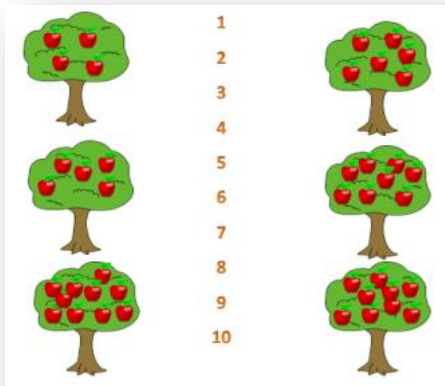
Ερώτημα:

Πόσα γατάκια υπάρχουν σε κάθε εικόνα;

Βαθμολόγηση

Βαθμολογία 0,125 μονάδε για κάθε ορθή απάντηση σε υποερώτημα

Βαθμολογία 0 μονάδες για κάθε λανθασμένη απάντηση σε υποερώτημα



*Αριθμοί έργο 3*

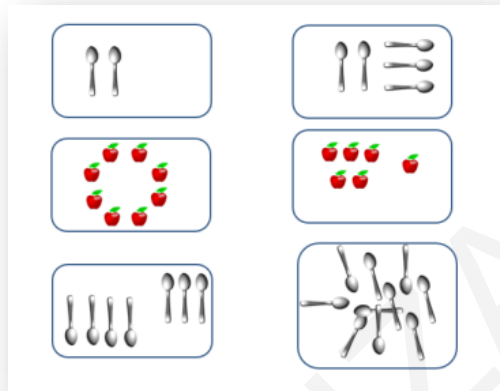
*Ερώτημα:*

*Να αντιστοιχίσεις το κάθε δέντρο με τον αριθμό (αριθμητικό σύμβολο) που δείχνει τα μήλα κάθε δέντρου*

*Βαθμολόγηση:*

*Βαθμολογία 0,166 για κάθε ορθή απάντηση σε κάθε υποερώτημα*

*Βαθμολογία 0 για κάθε λανθασμένη απάντηση σε υποερώτημα*



*Αριθμοί έργο 4*

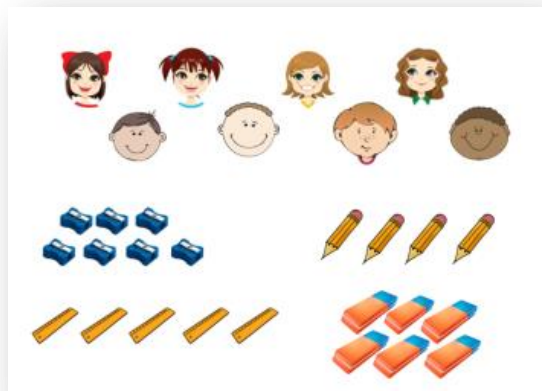
*Ερώτημα:*

*Πόσα αντικείμενα υπάρχουν σε κάθε εικόνα;*

*Βαθμολόγηση:*

*0,166 μονάδες → για ορθή απάντηση σε κάθε υποερώτημα*

*0 μονάδες → για κάθε λανθασμένη απάντηση σε υποερώτημα*



### Αριθμοί έργο 5

#### Ερώτημα:

Οχτώ παιδιά θέλουν να μοιραστούν τις ξύστρες, τα μολύβια, τις ρίγες και τα σβηστήρια (χρήση πραγματικών αντικειμένων). Να αναφέρεις εάν τα αντικείμενα είναι αρκετά ώστε κάθε παιδί να μπορεί να πάρει ένα από κάθε είδος. Εάν δεν είναι αρκετά να αναφέρεις πόσα ακόμη αντικείμενα χρειάζονται από κάθε είδος ώστε κάθε παιδί να πάρει ένα αντικείμενο από κάθε είδος.

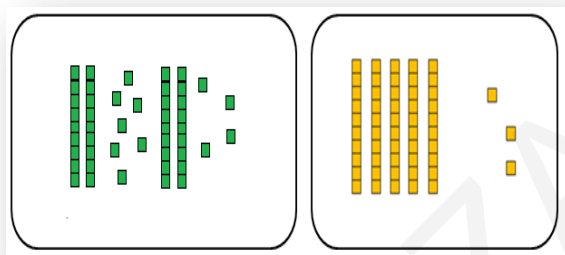
#### Βαθμολόγηση:

Βαθμολογία 0,125 για κάθε ομάδα αντικειμένων που αναγνώρισε ότι δεν έχει αρκετά αντικείμενα

Βαθμολογία 0,125 για κάθε ομάδα στην οποία εντόπισε σωστά πόσα αντικείμενα χρειάζονται

Βαθμολογία 0 για κάθε ομάδα αντικειμένων στην οποία έδωσε λανθασμένη απάντηση στο ερώτημα αν τα αντικείμενα της ομάδας είναι αρκετά

Βαθμολογία 0 για κάθε ομάδα αντικειμένων στην οποία έδωσε λανθασμένη απάντηση για τον αριθμό των αντικειμένων κάθε ομάδας που χρειάζονται ακόμη



### Αριθμοί έργο 6

#### Ερώτημα:

Να αναφέρεις ποια ομάδα έχεις τους περισσότερους κύβους;

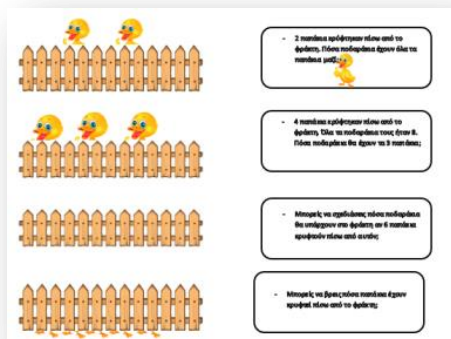
#### Βαθμολόγηση:

Βαθμολογία 1 αν ο μαθητής εντόπισε την ομάδα με τους περισσότερους κύβους αιτιολογώντας σωστά την απάντησή του

Βαθμολογία 0 αν ο μαθητής εντόπισε την ομάδα με τους περισσότερους κύβους όμως δεν είναι σε θέση να αιτιολογήσει σωστά την απάντησή του

Βαθμολογία 0 αν ο μαθητής δεν εντόπισε σωστά την ομάδα με τους περισσότερους κύβους





### Αριθμοί έργο 7

Ερώτημα:

(α) Πόσα πόδια έχουν 2 παπάκια;

(β) Πόσα πόδια έχουν 3 παπάκια;

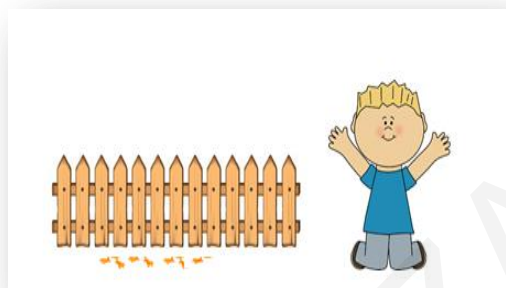
(γ) Πόσα πόδια έχουν 6 παπάκια; (Οι μαθητές κλήθηκαν να δημιουργήσουν εικονική αναπαράσταση)

(δ) Πίσω από το φράκτη φαίνονται 10 πόδια. Πόσα παπάκια κρύφτηκαν πίσω από τον φράκτη;

Βαθμολόγηση:

Βαθμολογία 0,25 για ορθή απάντηση σε κάθε υποερώτημα η οποία προέκυψε μέσα από σωστή εφαρμογή διαδικασία

Βαθμολογία 0 για κάθε λανθασμένη ή τυχαία απάντηση σε υποερώτημα



### Αριθμοί έργο 8

Ερώτημα:

Να εξηγήσεις εάν συμφωνείς ή διαφωνείς με τον Αντρέα

«Πίσω από το φράκτη κρύφτηκαν 8 παπάκια»

Βαθμολόγηση:


Βαθμολογία 1 αν ο μαθητής απαντά σωστά στο ερώτημα, αιτιολογώντας σωστά και την απάντησή του

Βαθμολογία 0 αν ο μαθητής απαντά σωστά στο ερώτημα, ωστόσο η αιτιολόγηση που δίνει είναι λανθασμένη ή τυχαία

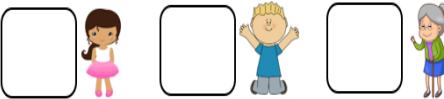
Βαθμολογία 0 αν ο μαθητής δεν απαντά σωστά στο ερώτημα

### Αριθμοί έργο 9

Η Μαρία έχει τρία περισσότερα μπαλόνια από τον Αντρέα



Ο Αντρέας έχει ένα περισσότερο μπαλόνιο από τη Μαρία και ένα λιγότερο μπαλόνιο από τη γιαγιά



#### Ερώτημα:

Να ζωγραφίσεις τις μπάλες της Μαρίας, του Αντρέα και της γιαγιάς εάν γνωρίζεις ότι:

(α) Η Μαρία είχε 3 περισσότερες μπάλες από τον Αντρέα

(β) Ο Αντρέας είχε μία περισσότερη μπάλα από τη Μαρία και η γιαγιά μία περισσότερη μπάλα από τον Αντρέα

#### Βαθμολόγηση

Βαθμολογία 0,5 για το πρώτο υποερώτημα όταν η σχέση μεταξύ των δύο συνόλων που δημιουργούσαν ήταν η ζητούμενη

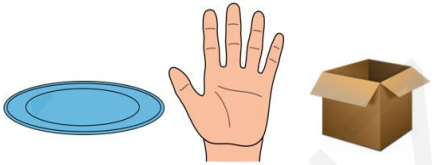
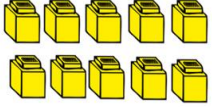
Βαθμολογία 0,5 για το δεύτερο υποερώτημα το οποίο αναλύεται σε 0,25 αν η σχέση μεταξύ των δύο συνόλων που δημιουργούσαν ήταν ορθή και 0,25 αν η σχέση μεταξύ των δύο άλλων συνόλων ήταν η ζητούμενη

Βαθμολογία 0 αν η σχέση μεταξύ των συνόλων που δημιουργούσαν για τον Αντρέα και τη Μαρία στο πρώτο υποερώτημα δεν ήταν η ζητούμενη

Βαθμολογία 0 αν η σχέση μεταξύ των συνόλων που δημιουργούσαν για τον Αντρέα και τη Μαρία δεν ήταν η ζητούμενη και 0 μονάδες αν η σχέση μεταξύ των συνόλων που δημιουργούσαν για τον Αντρέα και τη γιαγιά δεν ήταν η σωστή

### Αριθμοί έργο 10

- Στο πιάτο θα πρέπει να υπάρχουν 2 περισσότεροι κύβοι από ότι στην παλάμη
- Στο κουτί θα πρέπει να υπάρχουν 2 περισσότεροι κύβοι από ότι στην παλάμη



#### Ερώτημα:

«Στο πιάτο πρέπει να υπάρχει ένας περισσότερος κύβος από ότι στην παλάμη και στο κουτί τρεις περισσότεροι κύβοι από ότι στην παλάμη»

#### Βαθμολόγηση:

Βαθμολογία 0,5 αν η σχέση μεταξύ των στοιχείων που συμπλήρωσε στο χέρι και στο πιάτο είναι ορθή

Βαθμολογία 0,5 αν η σχέση μεταξύ των στοιχείων που συμπλήρωσε στο χέρι και στο κουτί είναι ορθή

Βαθμολογία 0 αν η σχέση μεταξύ των στοιχείων που συμπλήρωσε στο χέρι και στο πιάτο είναι λανθασμένη

*Αριθμοί έργο 11*



*Ερώτημα:*

*Να τοποθετήσεις τα μπαλόνια στη σωστή τους θέση πάνω στην αριθμητική γραμμή*

*Βαθμολόγηση*

*Βαθμολογία 0,25 για κάθε ορθή τοποθέτηση αριθμού στην αριθμητική γραμμή*

*Βαθμολογία 0 για κάθε λανθασμένη τοποθέτηση αριθμού στην αριθμητική γραμμή*

*Αριθμοί έργο 12*



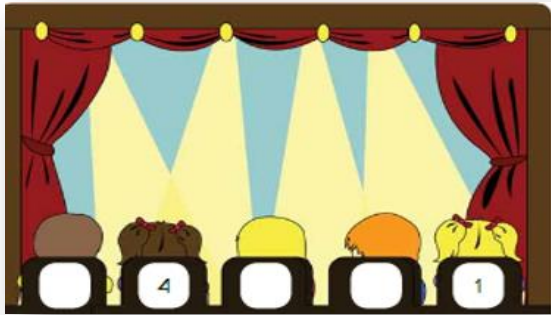
*Ερώτημα*

*Να γράψεις σε ποια θέση έχει σταθεί το κάθε μπαλόνι*

*Βαθμολόγηση*

*Βαθμολογία 0,33 για κάθε ορθή συμπλήρωση αριθμού στη ζητούμενη θέση στην αριθμητική γραμμή*

*Βαθμολογία 0 για κάθε λανθασμένη συμπλήρωση αριθμού στη ζητούμενη θέση στην αριθμητική γραμμή*



### Αριθμοί έργο 13

*Ερώτημα:*

*Να συμπληρώσεις τους αριθμούς που λείπουν*

*Βαθμολόγηση:*

Βαθμολογία 0,33 για κάθε ορθή συμπλήρωση αριθμού στη ζητούμενη θέση στην ακολουθία των αριθμών

Βαθμολογία 0 για κάθε λανθασμένη συμπλήρωση αριθμού στη ζητούμενη θέση στην ακολουθία των αριθμών

Να γράψετε σε κάθε κοουτίκι τον αριθμό 10 στη σωστή θέση

1	2		
6	7		
	12		15

1			4
		7	
			11

1			4
	6	7	
			12
	14		

1		3		5
6				
11			14	
	17			

### Αριθμοί έργο 14


*Ερώτημα:*

*Να δείξεις σε ποια θέση θα πρέπει να τοποθετηθεί ο αριθμός 5*

*Βαθμολόγηση:*

Βαθμολογία 0,25 για κάθε ορθή συμπλήρωση του αριθμού 10 στη ζητούμενη θέση στο πλέγμα των αριθμών

Βαθμολογία 0 για κάθε λανθασμένη συμπλήρωση αριθμού 10 στη ζητούμενη θέση στο πλέγμα των αριθμών

Οι αριθμοί μας χάθηκαν!!! 

1	★	3	4		6	7	8	9	10
11	12	★	14	15	16	17	18	19	★
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	★	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54		★	57	58	59	60
61	62	63	64		66				70
71	72	73		★	76		★		80
						★			90
91	92	93	★	95	96	97	98	99	★

### Αριθμοί έργο 15


Ερώτημα:

Να συμπληρώσεις τους αριθμούς

Βαθμολόγηση:

Βαθμολογία 0,10 για κάθε ορθή συμπλήρωση ζητούμενου αριθμού στη ζητούμενη θέση στο πλέγμα των αριθμών

Βαθμολογία 0 για κάθε λανθασμένη συμπλήρωση αριθμού 10 στη ζητούμενη θέση στο πλέγμα των αριθμών



- Να τοποθετήσεις τα ζώα στη σωστή σειρά:  
Το κουνέλι είναι πρώτο, η γάτα είναι τρίτη, ο σκύλος είναι δεύτερος, το άλογο είναι τελευταίο και ο βάτραχος τέταρτος.

### Αριθμοί έργο 16

Ερώτημα:

«Να τοποθετήσεις τις καρτέλες στη σωστή τους θέση εάν γνωρίζεις ότι το κουνέλι είναι πρώτο, η γάτα είναι τρίτη, ο σκύλος είναι δεύτερος, το άλογο τελευταίο και ο βάτραχος τέταρτος»

Βαθμολόγηση:

Βαθμολογία 0,20 για κάθε ορθή τοποθέτηση της καρτέλας με ζωάκι στη θέση που ζητείται  
Βαθμολογία 0 για κάθε λανθασμένη τοποθέτηση της καρτέλας με ζωάκι.



### Αριθμοί έργο 17

#### Ερώτημα

- (α) Εάν το αγόρι που είναι στην 5<sup>η</sup> θέση, ανταλλάξει θέση με το 3<sup>ο</sup> κορίτσι, σε ποια θέση θα βρίσκεται το 4<sup>ο</sup> κορίτσι  
(β) Εάν το κορίτσι που είναι 3<sup>ο</sup>, πάει στην τελευταία θέση, ποιο παιδάκι θα βρίσκεται στην 3<sup>η</sup> θέση;

#### Βαθμολόγηση

Βαθμολογία 0,5 για ορθή αναφορά της θέσης που θα έχει το παιδάκι που καθορίζεται στο ερώτημα

Βαθμολογία 0 για λανθασμένη αναφορά της θέσης που θα έχει το παιδάκι που καθορίζεται στο ερώτημα

Βαθμολογία 0,5 για ορθό εντοπισμό του παιδιού που βρίσκεται στη θέση που ζητείται

Βαθμολογία 0 για λανθασμένο εντοπισμό του παιδιού που βρίσκεται στη θέση που ζητείται

### Αριθμοί έργο 18



#### Ερώτημα

Πόσες κόκκινες και πόσες μωβ καραμέλες θα πρέπει να αγοράσει ο Αντρέας ώστε όλες μαζί να είναι 8 οι καραμέλες του;

#### Βαθμολόγηση:

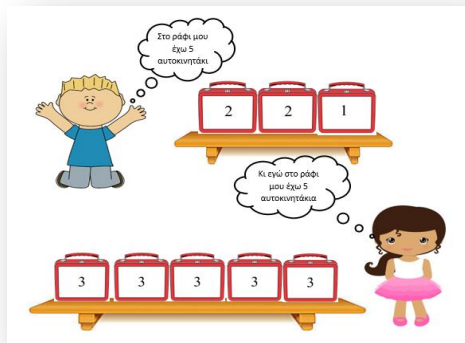
Βαθμολογία 0,25 για εντοπισμό ενός και μόνο συνδυασμού

Βαθμολογία 0,5 για εντοπισμό περισσότερων από έναν συνδυασμό και λιγότερο από πέντε συνδυασμούς

Βαθμολογία 0,75 για εντοπισμό των 5 συνδυασμών χωρίς να γίνεται αναφορά στους άλλους τέσσερις συνδυασμούς που προκύπτουν από την εφαρμογή της αντιμεταθετικής ιδιότητας

Βαθμολογία 1 για εντοπισμό των 5 συνδυασμών και των άλλων τεσσάρων συνδυασμών που προκύπτουν από την εφαρμογή της αντιμεταθετικής ιδιότητας

Βαθμολογία 0 για κανένα εντοπισμό συνδυασμού



### Αριθμοί έργο 19

**Ερώτημα:**

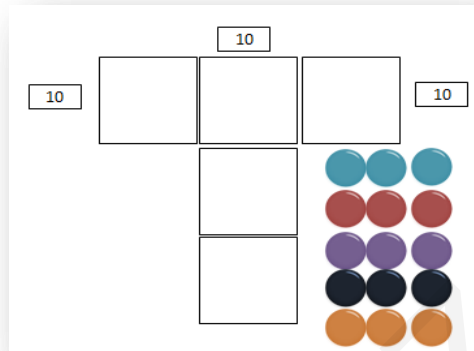
Σε ποιο ράφι υπάρχουν οι περισσότεροι μαρκαδόροι;

**Βαθμολόγηση:**

Βαθμολογία 0 όταν δόθηκε ως απάντηση το παιδάκι που έχει 5 βαλίτσες αντί 5 μαρκαδόρους

Βαθμολογία 0 όταν δόθηκε ως απάντησε το παιδάκι με τις 3 βαλίτσες (Αντρέας) αλλά η απάντηση ήταν τυχαία

Βαθμολογία 1 όταν δόθηκε ως απάντηση το παιδάκι με τις 3 βαλίτσες μετά από εφαρμογή συγκεκριμένης διαδικασίας



### Αριθμοί έργο 20

**Ερώτημα:**

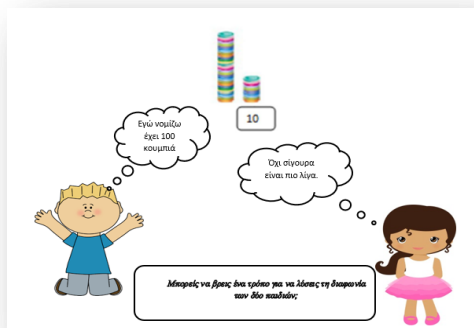
Να χρησιμοποιήσετε όλες τις φίσες ώστε (οριζόντια και κατακόρυφα) να δημιουργείται άθροισμα 10.

**Βαθμολόγηση:**

Βαθμολογία 0,25 όταν δημιουργούσαν άθροισμα 10 σε μία από τις δύο διαστάσεις (οριζόντια ή κατακόρυφα)

Βαθμολογία 1 όταν δημιουργούσαν άθροισμα 10 και στις δύο διαστάσεις (οριζόντια και κατακόρυφα)

Βαθμολογία 0 όταν δε δημιουργούσαν σε καμία διάσταση άθροισμα 10



Αριθμοί έργο 21

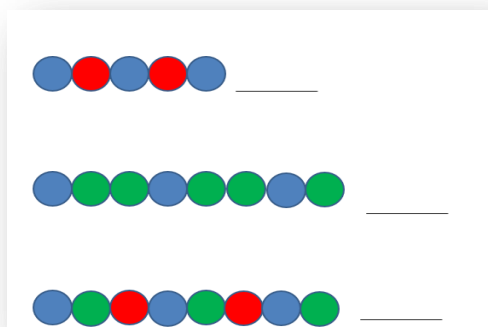
Ερώτημα:

Πόσες περίπου τάπες υπάρχουν;

Βαθμολόγηση:

Βαθμολογία 1 όταν η εκτίμηση για το πλήθος στοιχείων είναι λογική αφού πλησιάζει την δοσμένη ποσότητα

Βαθμολογία 0 όταν η εκτίμηση για το πλήθος στοιχείων δεν είναι λογική και δεν πλησιάζει την δοσμένη ποσότητα



Μοτίβα έργο 1

Ερώτημα:

Να συμπληρώσεις τα μοτίβα

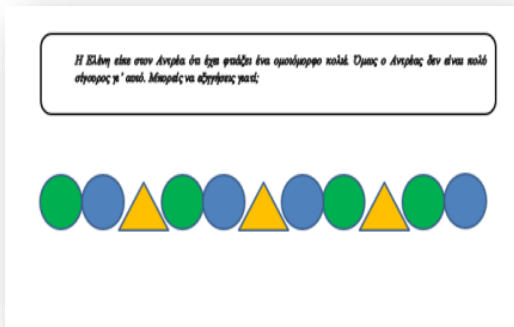
Βαθμολόγηση:

Βαθμολογία 0,33 για κάθε ορθή επέκταση μοτίβου σε υποερώτημα

Βαθμολογία 0 για κάθε λανθασμένη επέκταση μοτίβου σε υποερώτημα

Βαθμολογία 0 αν μαθητής επεκτείνει ορθά το μοτίβο, ωστόσο η αιτιολόγηση που δίνει είναι λανθασμένη ή δείχνει τυχαίο συλλογισμό





### Μοτίβα έργο 2

Ερώτημα:

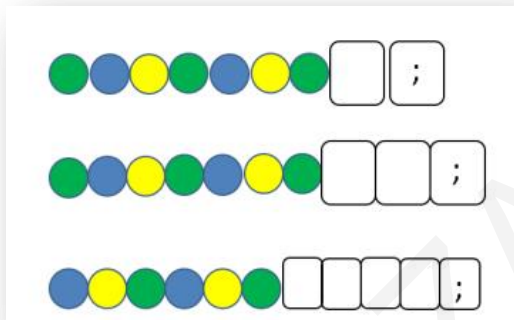
Η Ελένη έφτιαξε αυτό το κολιέ. Λέει ότι έφτιαξε ένα μοτίβο. Να εξηγήσεις εάν συμφωνείς ή διαφωνείς με την άποψη της Ελένης

Βαθμολόγηση:

Βαθμολογία 1 για αναγνώριση και αιτιολόγηση ότι η εικονική αναπαράσταση δεν υποδηλώνει μοτίβο

Βαθμολογία 0 για λανθασμένη υπόδειξη και αιτιολόγηση ότι η εικονική αναπαράσταση υποδηλώνει μοτίβο

Βαθμολογία 0 για αναγνώριση ότι η εικονική αναπαράσταση δεν υποδηλώνει μοτίβο αλλά συνοδεύεται από λανθασμένη αιτιολόγηση ή τυχαίο συλλογισμό



### Μοτίβα έργο 3

Ερώτημα:

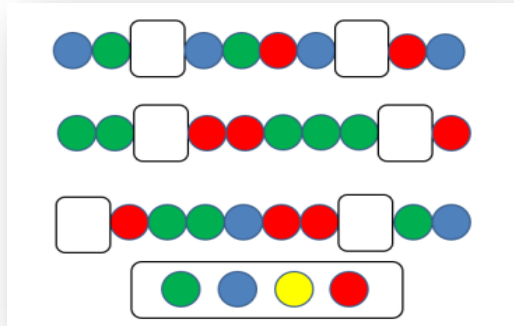
Τι χρώμα χάντρας θα πρέπει να βάλουμε στο ερωτηματικό;

Βαθμολόγηση:

Βαθμολογία 0,33 για κάθε ορθή επέκταση μοτίβου σε υποερώτημα

Βαθμολογία 0 για κάθε λανθασμένη επέκταση μοτίβου σε υποερώτημα

Βαθμολογία 0 αν μαθητής επεκτείνει ορθά το μοτίβο, ωστόσο η αιτιολόγηση που δίνει είναι λανθασμένη ή βασίζεται σε τυχαίο συλλογισμό



*Μοτίβα έργο 4*

*Ερώτημα:*

*Να συμπληρώσεις τα μοτίβα*

*Βαθμολόγηση:*

Βαθμολογία 0,166 για κάθε ορθή συμπλήρωση κενού που υπάρχει στο μοτίβο

Βαθμολογία 0 για κάθε λανθασμένη συμπλήρωση κενού που υπάρχει στο μοτίβο

Βαθμολογία 0 αν μαθητής συμπληρώνει ορθά το κενό στο μοτίβο, ωστόσο η αιτιολόγηση που δίνει είναι λανθασμένη ή βασίζεται σε τυχαίο συλλογισμό

*Μοτίβα έργο 5*

*Ερώτημα:*

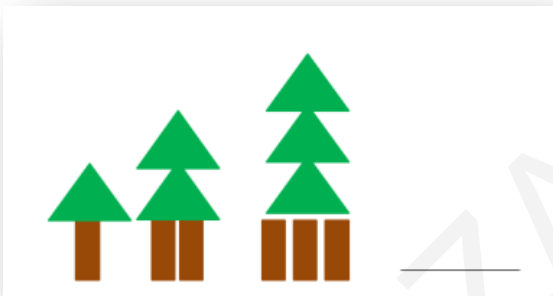
*Να ζωγραφίσεις το επόμενο σχήμα*

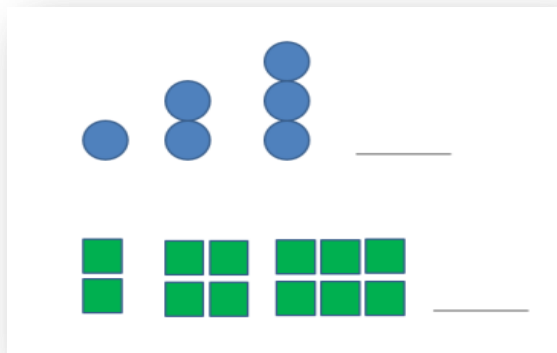
*Βαθμολόγηση:*

Βαθμολογία 0,50 όταν επέκτειναν σωστά μία από τις δύο διαστάσεις (φύλλα ή κορμοί) και αιτιολογούσαν την απάντησή τους

Βαθμολογία 1 όταν επέκτειναν σωστά και τις δύο διαστάσεις (φύλλα και κορμοί) και αιτιολογούσαν την απάντησή τους

Βαθμολογία 0 όταν δεν επέκτειναν σωστά καμία από τις δύο διαστάσεις





*Μοτίβα έργο 6*

*Ερώτημα:*

*Να ζωγραφίσεις το επόμενο σχήμα*

*Βαθμολόγηση:*

*Βαθμολογία 0,5 για κάθε ορθή επέκταση μοτίβου σε υποερώτημα και αιτιολόγηση της απάντησης*

*Βαθμολογία 0 για λανθασμένη επέκταση μοτίβου σε υποερώτημα*



*Μοτίβα έργο 7*

*Ερώτημα:*

*Χρησιμοποιώντας τις χάντρες να φτιάξεις ένα κολιέ που να μοιάζει με τον τρόπο που έχει φτιαχτεί το μοτίβο της Ελένης*

*Βαθμολόγηση:*

*Βαθμολογία 1 για ορθή μετάφραση μοτίβου και αιτιολόγηση που σχετίζεται με μαθηματικό περιεχόμενο*

*Βαθμολογία 0,5 για ορθή μετάφραση μοτίβου και αιτιολόγηση που δε σχετίζεται με μαθηματικό περιεχόμενο*

*Βαθμολογία 0 για λανθασμένη μετάφραση μοτίβου*

Μοτίβα έργο 8

0	;	0	2	+	1	2
2	3	1	3		2	4
3	;	2			3	
;	6		5			8
7	8	4	6		5	10

Ερώτημα:

Ποιον αριθμό θα δώσει η μηχανή εάν σε αυτή βάλουμε τον αριθμό....;

Βαθμολόγηση:

Βαθμολογία 0,142 για κάθε ορθή συμπλήρωση αριθμού σε κάθε κελί που ζητείται (;

Βαθμολογία 0 αν ο μαθητής συμπληρώνει ορθά τον αριθμό στο κελί που ζητείται, ωστόσο η αιτιολόγηση που δίνει είναι λανθασμένη ή βασίζεται σε τυχαίο συλλογισμό

Βαθμολογία 0 για κάθε λανθασμένη συμπλήρωση αριθμού στο κελί που ζητείται

## **Παράρτημα Β**

Ανοιχτή κωδικοποίηση όλων των έργων

ΛΟΓΙΣΤΑ Λ. ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ

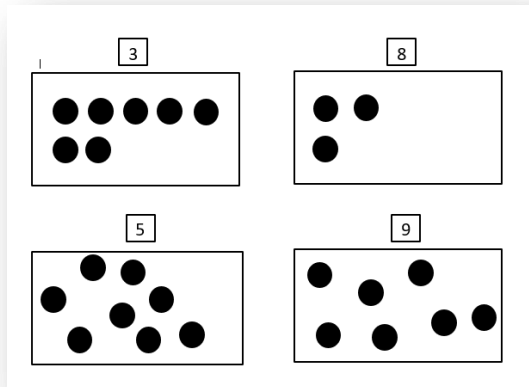
## Πίνακας Β2

### Ανοιχτή Κωδικοποίηση όλων των έργων

#### Μαθηματικό έργο

#### Κωδικοποίηση και Ετικετικοποίηση

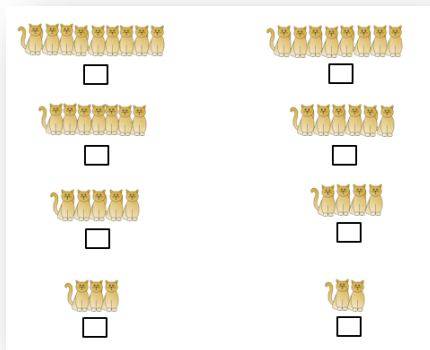
#### Αριθμοί 1



- E81: ιδιοσυγκρασιακή δημιουργία εικονικής αναπαράστασης χωρίς απόδοση καταστάσεων πρόσθεσης/αφαίρεσης
- E87: απόδοση καταστάσεων πρόσθεσης σε εικονική αναπαράσταση με μοναδική ερμηνεία της κατάστασης που αναπαρίσταται την επεξεργασία των κουκκίδων μία προς μία
- E82: προσπάθεια απόδοσης καταστάσεων αφαίρεσης στην εικονική αναπαράσταση με μοναδικό/συγκεκριμένο τρόπο χωρίς το τελικό σύνολο να αντιστοιχεί στο ζητούμενο καθορισμένο αποτέλεσμα
- E76: απόδοση καταστάσεων πρόσθεσης και αφαίρεσης σε εικονική αναπαράσταση με μοναδική ερμηνεία των καταστάσεων που αναπαρίστανται την επεξεργασία των κουκκίδων μία προς μία
- E176: απόδοση καταστάσεων πρόσθεσης και αφαίρεσης σε εικονική αναπαράσταση με ερμηνεία των καταστάσεων που αναπαρίστανται με διαφορετικούς τρόπους μέσω της ανάλυσης και σύνθεσης κουκκίδων
- E15: αποτελεσματική χρήση γνωστής διαδικασίας «απαρίθμηση όλων» όταν δε ζητείται ξεκάθαρα η εφαρμογή της
- E33: χρήση αριθμητικής διαδικασίας «αρίθμηση από τον πρώτο»
- E83: εντοπισμός του ζητούμενου αριθμού στην εικονική αναπαράσταση και διαγραφή των υπολοίπων
- E54: χρήση γνωστών αποτελεσμάτων για εξαγωγή άλλων αποτελεσμάτων
- E97: αναγνώριση και εφαρμογή συμπληρωματικής πρόσθεσης
- E181 Καμία χρήση του όρου της πρόσθεσης και καμία προσπάθεια περιγραφής που να παραπέμπει στον όρο της πρόσθεσης
- E182: Κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο της πρόσθεσης και χωρίς απευθείας χρήση του όρου της πρόσθεσης
- E200: Μη κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο της πρόσθεσης και χωρίς απευθείας χρήση του όρου της πρόσθεσης
- E183: Ορθή χρήση του όρου της πρόσθεσης στο κατάλληλο πλαίσιο
- E184: Καμία χρήση του όρου της αφαίρεσης και καμία προσπάθεια περιγραφής που να παραπέμπει στον όρο της αφαίρεσης

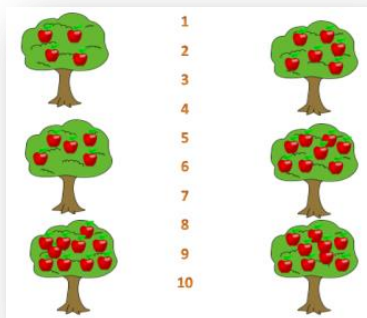
- E185: Κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο της αφαίρεσης και χωρίς απευθείας χρήση του όρου της αφαίρεσης
- E186: Ορθή χρήση του όρου της αφαίρεσης στο κατάλληλο πλαίσιο
- E201: Μη κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο της αφαίρεσης και χωρίς απευθείας χρήση του όρου της αφαίρεσης
- E77: ανεπιτυχής πρόσθεση ή αφαίρεση στοιχείων για αντιστοίχιση ποσότητας και συμβόλου αριθμού
- E79: επιτυχής πρόσθεση στοιχείων για αντιστοίχιση ποσότητας και συμβόλου αριθμού
- E80: επιτυχής αφαίρεση στοιχείων για αντιστοίχιση ποσότητας και συμβόλου αριθμού
- E78: επιτυχής πρόσθεση ή αφαίρεση στοιχείων για αντιστοίχιση ποσότητας και συμβόλου αριθμού

### Αριθμοί 2



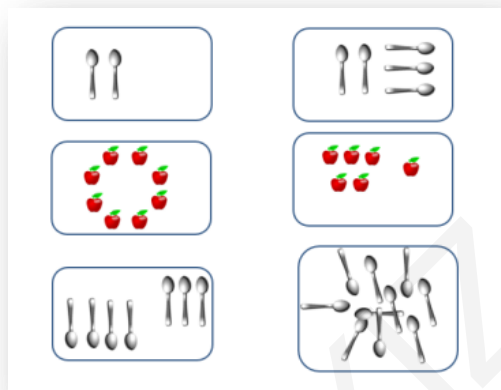
- E84: ολοκληρωμένη εφαρμογή διαδικασίας απαρίθμησης συνόλου μέχρι 5 στοιχείων όταν ζητείται ξεκάθαρα η εφαρμογή της
- E85: ολοκληρωμένη εφαρμογή διαδικασίας απαρίθμησης όταν ζητείται ξεκάθαρα η εφαρμογή της
- E64: αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ δεδομένων διαφορετικών ερωτημάτων για εντοπισμό συσχετίσεων
- E86: αναγνώριση και αξιοποίηση μοτίβου που υπάρχει, ακόμη και όταν δεν απαιτείται η εύρεση του

### Αριθμοί 3



- E84: ολοκληρωμένη εφαρμογή διαδικασίας απαρίθμησης συνόλου μέχρι 5 στοιχείων όταν ζητείται ξεκάθαρα η εφαρμογή της
- E85: ολοκληρωμένη εφαρμογή διαδικασίας απαρίθμησης όταν ζητείται ξεκάθαρα η εφαρμογή της
- E90: υπόδειξη του τελευταίου στοιχείου της συλλογής μετά την απαρίθμηση και όχι αναφορά στο πλήθος του συνόλου των στοιχείων υποδεικνύοντας μη αντίληψη της πληθικής έννοιας του αριθμού
- E91: άμεση αναγνώριση συνόλου μέχρι 3 αντικείμενα σε εικονική αναπαράσταση χωρίς δυνατότητα άμεσου επανεντοπισμού των συγκεκριμένων διατάξεων σε εικονικές αναπαραστάσεις που εμπλέκουν μεγαλύτερα σύνολα
- E92: άμεση αναγνώριση συνόλου μέχρι 6 αντικείμενα και επανεντοπισμός των συγκεκριμένων διατάξεων σε μεγαλύτερα σύνολα
- E33: χρήση αριθμητικής διαδικασίας «αρίθμηση από τον πρώτο»
- E31: ανάκληση γνωστού αποτελέσματος

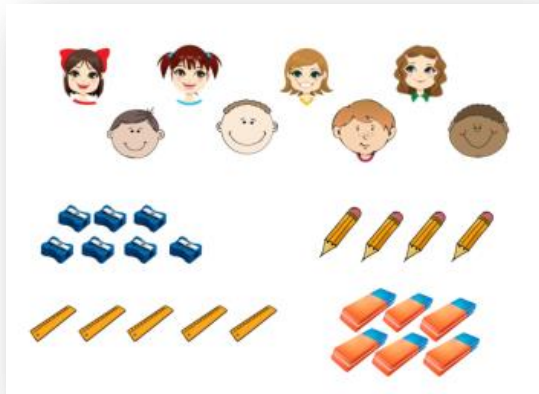
### Αριθμοί 4



- E84: ολοκληρωμένη εφαρμογή διαδικασίας απαρίθμησης συνόλου μέχρι 5 στοιχείων όταν ζητείται ξεκάθαρα η εφαρμογή της
- E85: ολοκληρωμένη εφαρμογή διαδικασίας απαρίθμησης όταν ζητείται ξεκάθαρα η εφαρμογή της
- E90: υπόδειξη του τελευταίου στοιχείου της συλλογής μετά την απαρίθμηση και όχι αναφορά στο πλήθος του συνόλου των στοιχείων υποδεικνύοντας μη αντίληψη της πληθικής έννοιας του αριθμού
- E91: άμεση αναγνώριση συνόλου μέχρι 3 αντικείμενα σε εικονική αναπαράσταση χωρίς δυνατότητα άμεσου επανεντοπισμού των συγκεκριμένων διατάξεων σε εικονικές αναπαραστάσεις που εμπλέκουν μεγαλύτερα σύνολα
- E92: άμεση αναγνώριση συνόλου μέχρι 6 αντικείμενα και επανεντοπισμός των συγκεκριμένων διατάξεων σε μεγαλύτερα σύνολα
- E33: χρήση αριθμητικής διαδικασίας «αρίθμηση από τον πρώτο»
- E31: ανάκληση γνωστού αποτελέσματος

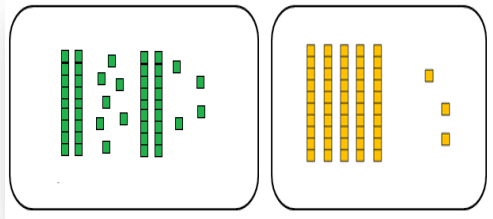


## Αριθμοί 5



- E1: ιδιοσυγκρασιακή χρήση εργαλείου που εμπλέκει την πληθικότητα για δικούς τους σκοπούς (π.χ παιχνίδι) και όχι για την επίλυση προβλήματος
- E13: χρήση του εργαλείου που εμπλέκει την πληθικότητα με τρόπο που οι αρχικές ενέργειες υποδεικνυαν σωστή χρήση αλλά στη συνέχεια παρουσιαζόταν αδυναμία ορθής χρήσης και χειρισμού του υλικού
- E14: τυπική χρήση εργαλείου που εμπλέκει την πληθικότητα μόνο με συγκεκριμένο τρόπο για εύρεση της απάντησης μέσω μέτρησης όλων των στοιχείων
- E20: μετασχηματισμός της οργάνωσης των κομματιών του εργαλείου που εμπλέκει την πληθικότητα αρχίζοντας από τη δημιουργία ομάδων με ίσο αριθμό στοιχείων
- E62: δεν λαμβάνει υπόψη καθόλου τα δεδομένα του προβλήματος
- E8: λαμβάνει υπόψη μόνο ένα ή μόνο μερικά δεδομένα του προβλήματος
- E16: Λαμβάνει υπόψη όλα τα δεδομένα του προβλήματος χωρίς περαιτέρω εντοπισμό συσχετίσεων μεταξύ δεδομένων του ίδιου ερωτήματος ή διαφορετικών ερωτημάτων
- E21: αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ δεδομένων του ερωτήματος για εντοπισμό συσχετίσεων
- E94: ιδιοσυγκρασιακή μη ολοκληρωμένη κατανομή στοιχείων χωρίς αντιστοίχιση κάθε στοιχείου ενός συνόλου με κάθε ένα στοιχείο από πολλαπλά σύνολα
- E95: ημιτελής αντιστοίχιση κάθε στοιχείου ενός συνόλου με κάθε ένα στοιχείο από πολλαπλά σύνολα
- E96: αντιστοίχιση κάθε στοιχείου ενός συνόλου με κάθε ένα στοιχείο από πολλαπλά σύνολα
- E97: αναγνώριση και εφαρμογή συμπληρωματικής πρόσθεσης
- E92: άμεση αναγνώριση συνόλου μέχρι 6 αντικείμενα και επανενοπισμός των συγκεκριμένων διατάξεων σε μεγαλύτερα σύνολα
- E181 Καμία χρήση του όρου της πρόσθεσης και καμία προσπάθεια περιγραφής που να παραπέμπει στον όρο της πρόσθεσης
- E182: Κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο της πρόσθεσης και χωρίς απευθείας χρήση του όρου της πρόσθεσης
- E200: Μη κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο της πρόσθεσης και χωρίς απευθείας χρήση του όρου της πρόσθεσης
- E183: Ορθή χρήση του όρου της πρόσθεσης στο κατάλληλο πλαίσιο
- E98: ανεπιτυχής απάντηση στο ερώτημα που αφορά την έννοια «τόσα – όσα»
- E99: επιτυχής απάντηση στο ερώτημα που αφορά την έννοια «τόσα – όσα»

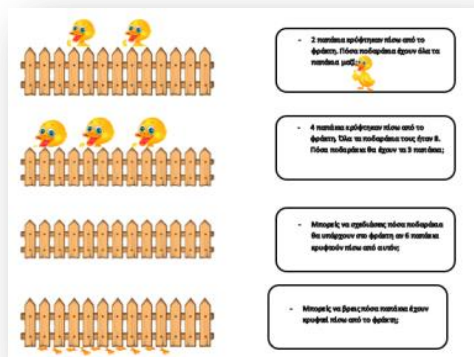
## Αριθμοί 6



- E3: εστίαση της προσοχής σε εξωτερικά χαρακτηριστικά της εικόνας/εργαλείου (π.χ χρώμα, σχήμα, μέγεθος) που δεν σχετίζονται με την επίλυση του έργου
- E1: ιδιοσυγκρασιακή χρήση εργαλείου που εμπλέκει την πληθικότητα για δικούς τους σκοπούς (π.χ παιχνίδι) και όχι για την επίλυση προβλήματος
- E13: χρήση του εργαλείου που εμπλέκει την πληθικότητα με τρόπο που οι αρχικές ενέργειες υποδείκνυαν σωστή χρήση αλλά στη συνέχεια παρουσιαζόταν αδυναμία ορθής χρήσης και χειρισμού του υλικού
- E14: τυπική χρήση εργαλείου που εμπλέκει την πληθικότητα μόνο με συγκεκριμένο τρόπο για εύρεση της απάντησης μέσω μέτρησης όλων των στοιχείων
- E20: μετασχηματισμός της οργάνωσης των κομματιών του εργαλείου που εμπλέκει την πληθικότητα αρχίζοντας από τη δημιουργία ομάδων με ίσο αριθμό στοιχείων
- E161: ιδιοσυγκρασιακή σύγκριση πλήθους στοιχείων δύο συνόλων όπου το καθένα περιλαμβάνει και μεμονωμένα στοιχεία και ομαδοποίηση των μεμονωμένων στοιχείων (μονάδες, δεκάδες) η οποία δε βασίζεται στις σχέσεις που εμπλέκονται στην προβληματική κατάσταση
- E65: ημιτελής σύγκριση πλήθους στοιχείων δύο συνόλων όπου το καθένα περιλαμβάνει και μεμονωμένα στοιχεία και ομαδοποίηση των μεμονωμένων στοιχείων (μονάδες, δεκάδες) με συγκεκριμένο/μοναδικό τρόπο, λόγω μη αντίληψης των σχέσεων μεταξύ των ομαδοποιήσεων και των μεμονωμένων στοιχείων
- E66: σύγκριση του πλήθους στοιχείων δύο συνόλων όπου το καθένα περιλαμβάνει και μεμονωμένα στοιχεία και ομαδοποίηση μεμονωμένων στοιχείων (μονάδες, δεκάδες) μέσα από την ανάλυση και των δύο συνόλων σε μεμονωμένα στοιχεία και τη βήμα προς βήμα μέτρησή τους
- E9: ανεπιτυχής σύγκριση δύο συνόλων όπου το καθένα περιλαμβάνει και μεμονωμένα στοιχεία και ομαδοποίηση μεμονωμένων στοιχείων (μονάδες, δεκάδες)
- E177: σύγκριση του πλήθους στοιχείων δύο συνόλων όπου το καθένα περιλαμβάνει και μεμονωμένα στοιχεία και ομαδοποίηση μεμονωμένων στοιχείων (μονάδες, δεκάδες) μέσα από την δημιουργία και απαλοιφή κοινών ομαδοποιήσεων- δεκάδων (έννοια ισότητας) και σύγκριση μόνο των μεμονωμένων στοιχείων που απομένουν
- E5: πρόσθεση περιττών δεδομένων μέσω απόδοσης οικείας ιστορίας/σεναρίου
- E165: πρόσθεση περιττών δεδομένων μέσω εκδήλωσης προτίμησης (π.χ αγαπημένο χρώμα)
- E62: δε λαμβάνει υπόψη καθόλου τα δεδομένα του προβλήματος
- E8: λαμβάνει υπόψη μόνο ένα ή μόνο μερικά δεδομένα του προβλήματος
- E16: λαμβάνει υπόψη όλα τα δεδομένα του προβλήματος χωρίς περαιτέρω εντοπισμό συσχετίσεων μεταξύ δεδομένων του ίδιου ερωτήματος ή διαφορετικών ερωτημάτων
- E21: αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ δεδομένων του ερωτήματος για εντοπισμό συσχετίσεων
- E4: αιτιολόγηση που βασίζεται σε άσχετα στοιχεία με το πρόβλημα/κατάσταση

- 
- E194: παροχή απάντησης που δεν απαντά στο ερώτημα γιατί, πώς
  - E158: αιτιολόγηση που βασίζεται σε υπόδειξη μερικών πληροφοριών της εικόνας/εργαλείου
  - E195: αιτιολόγηση που βασίζεται σε συγκεκριμένο ή συγκεκριμένα αριθμητικά παραδείγματα
  - E18: αιτιολόγηση που βασίζεται σε απλή περιγραφή μαθηματικής διαδικασίας
  - E193: παροχή εναλλακτικών αιτιολογήσεων που βασίζονται σε γενικευμένες δηλώσεις
  - E25: αιτιολόγηση που βασίζεται σε γενικευμένη δήλωση
  - E7: απαρίθμηση μερικών στοιχείων και παράλειψη άλλων απαραίτητων στοιχείων όταν δεν ζητείται ξεκάθαρα η εφαρμογή της απαρίθμησης
  - E10: σύγκριση ποσοτήτων μόνο μέσα από οπτική παρατήρηση των διακριτών στοιχείων δύο συνόλων με ξεκάθαρη διαφορά στο πλήθος
  - E15: αποτελεσματική χρήση γνωστής διαδικασίας «απαρίθμηση όλων» όταν δε ζητείται ξεκάθαρα η εφαρμογή της
  - E23: σύγκριση αριθμών χωρίς οπτική αναπαράσταση
  - E190: Καμία χρήση του όρου των όρων μονάδες/δεκάδες και καμία προσπάθεια περιγραφής που να παραπέμπει στους όρους μονάδες/δεκάδες
  - E191: Κατάλληλη λεκτική περιγραφή που να παραπέμπει στους όρους μονάδες/δεκάδες και χωρίς απευθείας χρήση των όρων μονάδες/δεκάδες
  - E203: Μη κατάλληλη λεκτική περιγραφή που να παραπέμπει στους όρους μονάδες/δεκάδες και χωρίς απευθείας χρήση των όρων μονάδες/δεκάδες
  - E192: Ορθή χρήση των όρων μονάδες/δεκάδες στο κατάλληλο πλαίσιο
  - E187 Καμία χρήση του όρου της ισότητας και καμία προσπάθεια περιγραφής που να παραπέμπει στον όρο της ισότητας
  - E189: Ορθή χρήση του όρου της ισότητας στο κατάλληλο πλαίσιο
  - E202: Μη κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο της ισότητας και χωρίς απευθείας χρήση του όρου της ισότητας
  - E188: Κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο της ισότητας και χωρίς απευθείας χρήση του όρου της ισότητας
  - E208: Ορθή χρήση των όρων που αφορούν σε σύγκριση αριθμών (μεγαλύτερος, μικρότερος) στο κατάλληλο πλαίσιο
  - E209: Κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει σε όρους που αφορούν σε σύγκριση αριθμών και χωρίς απευθείας χρήση των όρων αυτών (μεγαλύτερος, μικρότερος)
  - E210: Καμία χρήση των όρων που αφορούν σε σύγκριση αριθμών (μεγαλύτερος, μικρότερος) και καμία προσπάθεια έμμεσης περιγραφής που να παραπέμπει στους όρους σύγκρισης (μεγαλύτερος, μικρότερος)
-

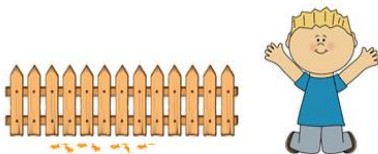
## Αριθμοί 7



- E4: αιτιολόγηση που βασίζεται σε άσχετα στοιχεία με το πρόβλημα/κατάσταση
- E194: παροχή απάντησης που δεν απαντά στο ερώτημα γιατί, πώς
- E19: αιτιολόγηση που βασίζεται μόνο σε συγκεκριμένο λανθασμένο παράδειγμα
- E195: αιτιολόγηση που βασίζεται σε συγκεκριμένο ή συγκεκριμένα αριθμητικά παραδείγματα
- E18: αιτιολόγηση που βασίζεται σε απλή περιγραφή μαθηματικής διαδικασίας
- E5: πρόσθεση περιττών δεδομένων μέσω απόδοσης οικείας ιστορίας/σεναρίου
- E165: πρόσθεση περιττών δεδομένων μέσω εκδήλωσης προτίμησης (π.χ αγαπημένο χρώμα)
- E26: επανάληψη του δοσμένου αριθμού, από τα δεδομένα ως απάντηση
- E64: αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ δεδομένων διαφορετικών ερωτημάτων για εντοπισμό συσχετίσεων
- E3: εστίαση της προσοχής σε εξωτερικά χαρακτηριστικά της εικόνας/εργαλείου (π.χ χρώμα, σχήμα, μέγεθος) που δε σχετίζονται με την επίλυση του έργου
- E27: δημιουργία κατάλληλης εικονικής αναπαράστασης με συγκεκριμένο τρόπο για εύρεση απάντησης χωρίς δυνατότητα ερμηνείας/ανάλυσης της εικόνας με διαφορετικό τρόπο
- E32: νοερή απεικόνιση της κατάστασης του προβλήματος που υποδεικνύει ομαδοποίηση/οργάνωση των στοιχείων που εμπλέκονται
- E7: απαρίθμηση μερικών στοιχείων και παράλειψη άλλων απαραίτητων στοιχείων όταν δεν ζητείται ξεκάθαρα η εφαρμογή της απαρίθμησης
- E169: ιδιοσυγκρασιακή μη ολοκληρωμένη κατανομή στοιχείων χωρίς αντιστοίχιση πολλών στοιχείων σε ένα άλλο ή και το αντίστροφο
- E12: προσφυγή σε αντιστοίχιση ένα προς ένα αντί σε αντιστοίχιση πολλών στοιχείων σε ένα άλλο ή και τα αντίστροφα
- E15: αποτελεσματική χρήση γνωστής διαδικασίας «απαρίθμηση όλων» όταν δεν ζητείται ξεκάθαρα η εφαρμογή της
- E31: ανάκληση γνωστού αποτελέσματος
- E54: χρήση γνωστών αποτελεσμάτων για εξαγωγή άλλων αποτελεσμάτων
- E33: χρήση αριθμητικής διαδικασίας «αρίθμηση από τον πρώτο»
- E29: αντιστοίχιση πολλών στοιχείων σε ένα άλλο ή και το αντίστροφο

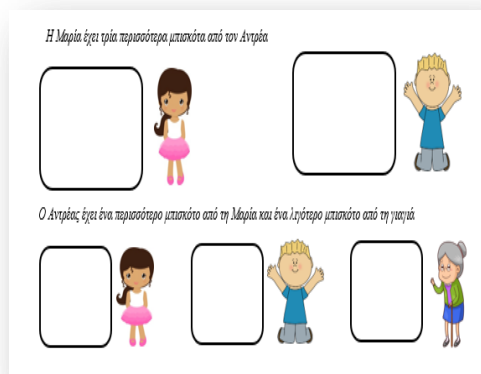
## Αριθμοί 8

Ο Αντρέας είχε ένα πύργο από το φράγμα υπάκουο 4 πακέτα. Να εγγυηθείς εάν ο Αντρέας έχει ήπαινο.



- E5: πρόσθεση περιττών δεδομένων μέσω απόδοσης οικείας ιστορίας/σεναρίου
- E165: πρόσθεση περιττών δεδομένων μέσω εκδήλωσης προτίμησης (π.χ αγαπημένο χρώμα)
- E26: επανάληψη του δοσμένου αριθμού, από τα δεδομένα ως απάντηση
- E16: λαμβάνει υπόψη όλα τα δεδομένα του προβλήματος χωρίς περαιτέρω εντοπισμό συσχετίσεων μεταξύ δεδομένων του ίδιου ερωτήματος ή διαφορετικών ερωτημάτων
- E64: αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ δεδομένων διαφορετικών ερωτημάτων για εντοπισμό συσχετίσεων
- E167: ιδιοσυγκρασιακή δημιουργία εικονικής αναπαράστασης του προβλήματος για αντιστοίχιση στοιχείων
- E168: προσπάθεια δημιουργίας εικονικής αναπαράστασης για τη σχέση του αριθμού των στοιχείων δύο ποσοτήτων, η οποία κατέληγε πάντα σε απεικόνιση ίσου αριθμού στοιχείων των δύο ποσοτήτων αντί της σχέσης τους
- E27: δημιουργία κατάλληλης εικονικής αναπαράστασης με συγκεκριμένο τρόπο για εύρεση απάντησης χωρίς δυνατότητα ερμηνείας/ανάλυσης της εικόνας με διαφορετικό τρόπο
- E32: νοερή απεικόνιση της κατάστασης του προβλήματος που υποδεικνύει ομαδοποίηση/οργάνωση των στοιχείων που εμπλέκονται
- E19: αιτιολόγηση που βασίζεται μόνο σε συγκεκριμένο λανθασμένο παράδειγμα
- E195: αιτιολόγηση που βασίζεται σε συγκεκριμένο ή συγκεκριμένα αριθμητικά παραδείγματα
- E18: αιτιολόγηση που βασίζεται σε απλή περιγραφή μαθηματικής διαδικασίας
- E193: παροχή εναλλακτικών αιτιολογήσεων που βασίζονται σε γενικευμένες δηλώσεις
- E25: αιτιολόγηση που βασίζεται σε γενικευμένη δήλωση
- E12: απουσία αντιστοίχισης πολλών στοιχείων σε ένα άλλο ή και το αντίστροφο
- E29: αντιστοίχιση πολλών στοιχείων σε ένα άλλο ή και το αντίστροφο
- E31: ανάκληση γνωστού αποτελέσματος
- E54: χρήση γνωστών αποτελεσμάτων για εξαγωγή άλλων αποτελεσμάτων

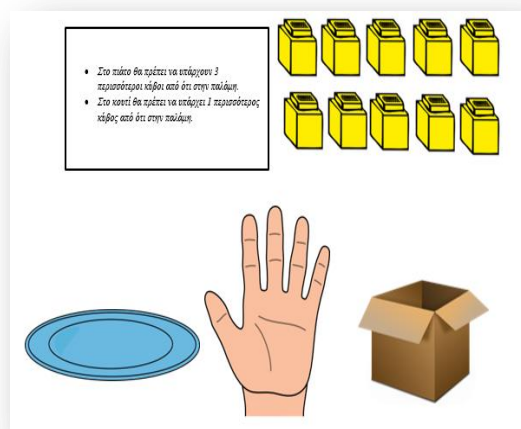
## Αριθμοί 9



- E101: ιδιοσυγκρασιακή δημιουργία εικονικής αναπαράστασης του προβλήματος για σύγκριση δύο άγνωστων συνόλων
- E102: προσπάθεια δημιουργίας εικονικής αναπαράστασης δύο άγνωστων συνόλων με δοσμένη διαφορά, που κατέληγε πάντα σε απεικόνιση όπου το πλήθος της ζητούμενης διαφοράς συγγεόταν με το πλήθος των στοιχείων του ενός συνόλου
- E104: δημιουργία εικονικής αναπαράστασης για εύρεση των δύο άγνωστων συγκρινόμενων συνόλων μέσα από δοκιμές χωρίς επεξεργασία/αξιοποίηση της προηγούμενης αναπαράστασης που δημιουργούσαν
- E105: νοερή απεικόνιση της κατάστασης του προβλήματος που υποδεικνύει ευέλικτες διατάξεις αριθμητικών ποσοτήτων για εύρεση δύο άγνωστων συγκρινόμενων συνόλων
- E55: ημιτελής προσπάθεια εφαρμογής της στρατηγικής δοκιμής και ελέγχου χωρίς να γίνεται έλεγχος οποιασδήποτε δοκιμής και αναπροσαρμογής της διαδικασίας
- E39: άμεση αναφορά στη διάταξη δύο οποιονδήποτε διαδοχικών αριθμών
- E162: αποτελεσματική χρήση στρατηγικής δοκιμής και ελέγχου χωρίς αναστοχασμό στις δοκιμές (τυχαίες δοκιμές) όταν οι άγνωστες ποσότητες είναι δύο
- E56: αποτελεσματική χρήση στρατηγικής δοκιμής και ελέγχου **με αναστοχασμό** στις δοκιμές, όταν οι άγνωστες ποσότητες είναι δύο
- E31: ανάκληση γνωστού αποτελέσματος
- E54: χρήση γνωστών αποτελεσμάτων για εξαγωγή άλλων αποτελεσμάτων
- E33: χρήση αριθμητικής διαδικασίας «αρίθμηση από τον πρώτο»
- E62: δεν λαμβάνει υπόψη καθόλου τα δεδομένα του προβλήματος
- E5: πρόσθεση περιττών δεδομένων μέσω απόδοσης οικείας ιστορίας/σεναρίου
- E165: πρόσθεση περιττών δεδομένων μέσω εκδήλωσης προτίμησης (π.χ αγαπημένο χρώμα)
- E26: επανάληψη του δοσμένου αριθμού, από τα δεδομένα ως απάντηση
- E106: έλεγχος για εύρεση πολλαπλών απαντήσεων όταν δεν απαιτούνται
- E208: Ορθή χρήση των όρων που αφορούν σε σύγκριση αριθμών (μεγαλύτερος, μικρότερος) στο κατάλληλο πλαίσιο
- E209: Κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει σε όρους που αφορούν σε σύγκριση αριθμών και χωρίς απευθείας χρήση των όρων αυτών (μεγαλύτερος, μικρότερος)
- E210: Καμία χρήση των όρων που αφορούν σε σύγκριση αριθμών (μεγαλύτερος, μικρότερος) και καμία προσπάθεια έμμεσης περιγραφής που να παραπέμπει στους όρους σύγκρισης (μεγαλύτερος, μικρότερος)



## Αριθμοί 10



- E107: μη αποτελεσματική χρήση στρατηγικής δοκιμής και ελέγχου χωρίς αναστοχασμό στις δοκιμές και δυνατότητα αναπροσαρμογής της διαδικασίας, όταν οι άγνωστες ποσότητες είναι περισσότερες από δύο
- E108: αποτελεσματική χρήση στρατηγικής δοκιμής και ελέγχου με αναστοχασμό στις δοκιμές, όταν οι άγνωστες ποσότητες είναι περισσότερες από δύο
- E1: ιδιοσυγκρασιακή χρήση εργαλείου που εμπλέκει την πληθικότητα για δικούς τους σκοπούς (π.χ παιχνίδι) και όχι για την επίλυση προβλήματος
- E13: χρήση του εργαλείου που εμπλέκει την πληθικότητα με τρόπο που οι αρχικές ενέργειες υποδεικνυαν σωστή χρήση αλλά στη συνέχεια παρουσιαζόταν αδυναμία ορθής χρήσης και χειρισμού του υλικού
- E14: τυπική χρήση εργαλείου που εμπλέκει την πληθικότητα μόνο με συγκεκριμένο τρόπο για εύρεση της απάντησης μέσω μέτρησης όλων των στοιχείων
- E20: μετασχηματισμός της οργάνωσης των κομματιών του εργαλείου που εμπλέκει την πληθικότητα αρχίζοντας από τη δημιουργία ομάδων με ίσο αριθμό στοιχείων
- E62: δεν λαμβάνει υπόψη καθόλου τα δεδομένα του προβλήματος
- E8: λαμβάνει υπόψη μόνο ένα ή μόνο μερικά δεδομένα του προβλήματος
- E26: επανάληψη του δοσμένου αριθμού, από τα δεδομένα ως απάντηση
- E16: λαμβάνει υπόψη όλα τα δεδομένα του προβλήματος χωρίς περαιτέρω εντοπισμό συσχετίσεων μεταξύ δεδομένων του ίδιου ερωτήματος ή διαφορετικών ερωτημάτων
- E21: αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ δεδομένων του ερωτήματος για εντοπισμό συσχετίσεων

## Αριθμοί 11



- E171: ιδιοσυγκρασιακή συμπλήρωση συγκεκριμένων αριθμών που ζητούνται, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η ακολουθία και η διάταξη των αριθμών
- E159: ανάκληση και απαγγελία της ακολουθίας των αριθμών για συμπλήρωση ή επέκταση της διάταξης αριθμών χωρίς άμεσο εντοπισμό και αναφορά στη σχέση μεταξύ προηγούμενου και επόμενου αριθμού
- E160: εντοπισμός και αναφορά στη σχέση μεταξύ προηγούμενου και επόμενου αριθμού χωρίς εντοπισμό σχέσεων που υποβόσκουν μεταξύ οποιονδήποτε άλλων αριθμών
- E110: εστίαση και εντοπισμός διαφόρων σχέσεων που υποβόσκουν μεταξύ οποιονδήποτε αριθμών στην αριθμητική γραμμή ή σε πλαίσιο που παραπέμπει στην αριθμητική γραμμή
- E3: εστίαση της προσοχής σε εξωτερικά χαρακτηριστικά της εικόνας/εργαλείου (π.χ χρώμα, σχήμα, μέγεθος) που δε σχετίζονται με την επίλυση του έργου
- E113: ιδιοσυγκρασιακή χρήση αριθμητικής γραμμής χωρίς καμία ερμηνεία
- E114: προσκόλληση και ανάγκη αναφοράς όλων των αριθμών για εντοπισμό των ζητούμενων αριθμών στην αριθμητική γραμμή
- E115: εστίαση κάθε φορά σε δοσμένο αριθμό της αριθμητικής γραμμής, για άμεση συσχέτισή του

---

με τον προηγούμενο ή τον επόμενο του

- E116: καθολική επεξεργασία της αριθμητικής γραμμής συσχετίζοντας οποιουσδήποτε αριθμούς πάνω σε αυτή
- E39: άμεση αναφορά στη διάταξη δύο οποιονδήποτε διαδοχικών αριθμών
- E33: χρήση αριθμητικής διαδικασίας «αρίθμηση από τον πρώτο»
- E86: αναγνώριση και αξιοποίηση μοτίβου που υπάρχει, ακόμη και όταν δεν απαιτείται η εύρεση του
- E196: Ορθή χρήση του όρου αριθμητική γραμμή στο κατάλληλο πλαίσιο
- E197: Κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο αριθμητική γραμμή και χωρίς απευθείας χρήση του όρου της αριθμητική γραμμή
- E204: Μη κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο αριθμητική γραμμή και χωρίς απευθείας χρήση του όρου της αριθμητική γραμμή
- E198: Καμία χρήση του όρου της αριθμητικής γραμμής και καμία προσπάθεια περιγραφής που να παραπέμπει στον όρο της αριθμητικής γραμμής
- E208: Ορθή χρήση των όρων που αφορούν σε σύγκριση αριθμών (μεγαλύτερος, μικρότερος) στο κατάλληλο πλαίσιο
- E209: Κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει σε όρους που αφορούν σε σύγκριση αριθμών και χωρίς απευθείας χρήση των όρων αυτών (μεγαλύτερος, μικρότερος)
- E210: Καμία χρήση των όρων που αφορούν σε σύγκριση αριθμών (μεγαλύτερος, μικρότερος) και καμία προσπάθεια έμμεσης περιγραφής που να παραπέμπει στους όρους σύγκρισης (μεγαλύτερος, μικρότερος)
- E111: επιτυχής συμπλήρωση αριθμών μέχρι το 10 στην αριθμητική γραμμή
- E112: ανεπιτυχής συμπλήρωση αριθμών μέχρι το 10 στην αριθμητική γραμμή

---

### Αριθμοί 12

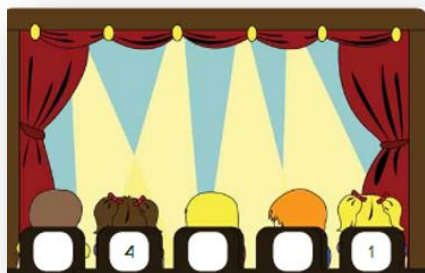


- E3: εστίαση της προσοχής σε εξωτερικά χαρακτηριστικά της εικόνας/εργαλείου (π.χ χρώμα, σχήμα, μέγεθος) που δε σχετίζονται με την επίλυση του έργου
- E113: ιδιοσυγκρασιακή χρήση αριθμητικής γραμμής χωρίς καμία ερμηνεία
- E114: προσκόλληση και ανάγκη αναφοράς όλων των αριθμών για εντοπισμό των ζητούμενων αριθμών στην αριθμητική γραμμή
- E115: εστίαση κάθε φορά σε δοσμένο αριθμό της αριθμητικής γραμμής, για άμεση συσχέτισή του με τον προηγούμενο ή τον επόμενο του
- E116: καθολική επεξεργασία της αριθμητικής γραμμής συσχετίζοντας οποιουσδήποτε αριθμούς πάνω σε αυτή
- E159: ανάκληση και απαγγελία της ακολουθίας των αριθμών για συμπλήρωση ή επέκταση της διάταξης αριθμών χωρίς άμεσο εντοπισμό και αναφορά στη σχέση μεταξύ προηγούμενου και επόμενου αριθμού
- E160: εντοπισμός και αναφορά στη σχέση μεταξύ προηγούμενου και επόμενου αριθμού χωρίς εντοπισμό σχέσεων που υποβόσκουν μεταξύ οποιονδήποτε άλλων αριθμών



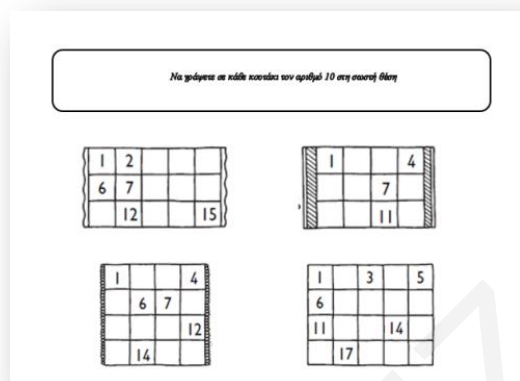
- 
- E110: εστίαση και εντοπισμός διαφόρων σχέσεων που υποβόσκουν μεταξύ οποιονδήποτε αριθμών στην αριθμητική γραμμή ή σε πλαίσιο που παραπέμπει στην αριθμητική γραμμή
  - E171: ιδιοσυγκρασιακή συμπλήρωση συγκεκριμένων αριθμών που ζητούνται, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η ακολουθία και η διάταξη των αριθμών
  - E39: άμεση αναφορά στη διάταξη δύο οποιονδήποτε διαδοχικών αριθμών
  - E31: ανάκληση γνωστού αποτελέσματος
  - E86: αναγνώριση και αξιοποίηση μοτίβου που υπάρχει, ακόμη και όταν δεν απαιτείται η εύρεση του
  - E196: Ορθή χρήση του όρου αριθμητική γραμμή στο κατάλληλο πλαίσιο
  - E197: Κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο αριθμητική γραμμή και χωρίς απευθείας χρήση του όρου της αριθμητική γραμμή
  - E204: Μη κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο αριθμητική γραμμή και χωρίς απευθείας χρήση του όρου της αριθμητική γραμμή
  - E198: Καμία χρήση του όρου της αριθμητικής γραμμής και καμία προσπάθεια περιγραφής που να παραπέμπει στον όρο της αριθμητικής γραμμής
  - E208: Ορθή χρήση των όρων που αφορούν σε σύγκριση αριθμών (μεγαλύτερος, μικρότερος) στο κατάλληλο πλαίσιο
  - E209: Κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει σε όρους που αφορούν σε σύγκριση αριθμών και χωρίς απευθείας χρήση των όρων αυτών (μεγαλύτερος, μικρότερος)
  - E210: Καμία χρήση των όρων που αφορούν σε σύγκριση αριθμών (μεγαλύτερος, μικρότερος) και καμία προσπάθεια έμμεσης περιγραφής που να παραπέμπει στους όρους σύγκρισης (μεγαλύτερος, μικρότερος)
  - E111: επιτυχής συμπλήρωση αριθμών μέχρι το 10 στην αριθμητική γραμμή
  - E112: ανεπιτυχής συμπλήρωση αριθμών μέχρι το 10 στην αριθμητική γραμμή

### Αριθμοί 13




- E62: δεν λαμβάνει υπόψη καθόλου τα δεδομένα του προβλήματος
- E159: ανάκληση και απαγγελία της ακολουθίας των αριθμών για συμπλήρωση ή επέκταση της διάταξης αριθμών χωρίς άμεσο εντοπισμό και αναφορά στη σχέση μεταξύ προηγούμενου και επόμενου αριθμού
- E160: εντοπισμός και αναφορά στη σχέση μεταξύ προηγούμενου και επόμενου αριθμού χωρίς εντοπισμό σχέσεων που υποβόσκουν μεταξύ οποιονδήποτε άλλων αριθμών
- E110: εστίαση και εντοπισμός διαφόρων σχέσεων που υποβόσκουν μεταξύ οποιονδήποτε αριθμών στην αριθμητική γραμμή ή σε πλαίσιο που παραπέμπει στην αριθμητική γραμμή
- E171: ιδιοσυγκρασιακή συμπλήρωση συγκεκριμένων αριθμών που ζητούνται, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η ακολουθία και η διάταξη των αριθμών
- E39: άμεση αναφορά στη διάταξη δύο οποιονδήποτε διαδοχικών αριθμών
- E119: χρήση αντίστροφης αριθμησης
- E86: αναγνώριση και αξιοποίηση μοτίβου που υπάρχει, ακόμη και όταν δεν απαιτείται η εύρεση του
- E117: επιτυχής συμπλήρωση αριθμών σε φθίνουσα ακολουθία
- E118: ανεπιτυχής συμπλήρωση αριθμών σε φθίνουσα ακολουθία

### Αριθμοί 14



- E62: δεν λαμβάνει υπόψη καθόλου τα δεδομένα του προβλήματος
- E120: ιδιοσυγκρασιακή χρήση πλέγματος αριθμών χωρίς καμία ερμηνεία
- E121: ανάγκη αναφοράς όλων των αριθμών για εντοπισμό των ζητούμενων αριθμών σε πλέγματα αριθμών
- E122: εστίαση κάθε φορά στο σημείο του ζητούμενου αριθμού για άμεση συσχέτιση με τον επόμενο ή τον προηγούμενο σε πλέγματα αριθμών
- E123: καθολική επεξεργασία του πλέγματος ως προς διαφορετικές διαστάσεις
- E159: ανάκληση και απαγγελία της ακολουθίας των αριθμών για συμπλήρωση ή επέκταση της διάταξης αριθμών χωρίς άμεσο εντοπισμό και αναφορά στη σχέση μεταξύ προηγούμενου και επόμενου αριθμού
- E160: εντοπισμός και αναφορά στη σχέση μεταξύ προηγούμενου και επόμενου αριθμού χωρίς εντοπισμό σχέσεων που υποβόσκουν μεταξύ οποιονδήποτε άλλων αριθμών
- E126: εστίαση και εντοπισμός διαφόρων σχέσεων κατακόρυφα και οριζόντια που υποβόσκουν μεταξύ οποιονδήποτε αριθμών στο πλέγμα των αριθμών
- E171: ιδιοσυγκρασιακή συμπλήρωση συγκεκριμένων αριθμών που ζητούνται, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η ακολουθία και η διάταξη των αριθμών
- E39: άμεση αναφορά στη διάταξη δύο οποιονδήποτε διαδοχικών αριθμών
- E31: ανάκληση γνωστού αποτελέσματος
- E54: χρήση γνωστών αποτελεσμάτων για εξαγωγή άλλων αποτελεσμάτων
- E86: αναγνώριση και αξιοποίηση μοτίβου που υπάρχει, ακόμη και όταν δεν απαιτείται η εύρεση του

### Αριθμοί 15

Οι αριθμοί μας χάθηκαν!!! 

1	☀	3	4		6	7	8	9	10
11	12	☀	14	15	16	17	18	19	☀
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	☀	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54		☀	57	58	59	60
61	62	63	64		66				70
71	72	73		☀	76		☀		80
						☀			90
91	92	93	☀	95	96	97	98	99	☀

- E208: Ορθή χρήση των όρων που αφορούν σε σύγκριση αριθμών (μεγαλύτερος, μικρότερος) στο κατάλληλο πλαίσιο
- E209: Κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει σε όρους που αφορούν σε σύγκριση αριθμών και χωρίς απευθείας χρήση των όρων αυτών (μεγαλύτερος, μικρότερος)
- E210: Καμία χρήση των όρων που αφορούν σε σύγκριση αριθμών (μεγαλύτερος, μικρότερος) και καμία προσπάθεια έμμεσης περιγραφής που να παραπέμπει στους όρους σύγκρισης (μεγαλύτερος, μικρότερος)
- E124: ανεπιτυχής συμπλήρωση αριθμών σε πλέγματα αριθμών
- E125: επιτυχής συμπλήρωση αριθμών σε πλέγματα αριθμών
- E62: δεν λαμβάνει υπόψη καθόλου τα δεδομένα του προβλήματος
- E120: ιδιοσυγκρασιακή χρήση πλέγματος αριθμών χωρίς καμία ερμηνεία
- E121: ανάγκη αναφοράς όλων των αριθμών για εντοπισμό των ζητούμενων αριθμών σε πλέγματα αριθμών
- E122: εστίαση κάθε φορά στο σημείο του ζητούμενου αριθμού για άμεση συσχέτιση με τον επόμενο ή τον προηγούμενο σε πλέγματα αριθμών
- E123: καθολική επεξεργασία του πλέγματος ως προς διαφορετικές διαστάσεις
- E159: ανάκληση και απαγγελία της ακολουθίας των αριθμών για συμπλήρωση ή επέκταση της διάταξης αριθμών χωρίς άμεσο εντοπισμό και αναφορά στη σχέση μεταξύ προηγούμενου και επόμενου αριθμού
- E160: εντοπισμός και αναφορά στη σχέση μεταξύ προηγούμενου και επόμενου αριθμού χωρίς εντοπισμό σχέσεων που υποβόσκουν μεταξύ οποιονδήποτε άλλων αριθμών
- E126: εστίαση και εντοπισμός διαφόρων σχέσεων κατακόρυφα και οριζόντια που υποβόσκουν μεταξύ οποιονδήποτε αριθμών στο πλέγμα των αριθμών
- E171: ιδιοσυγκρασιακή συμπλήρωση συγκεκριμένων αριθμών που ζητούνται, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η ακολουθία και η διάταξη των αριθμών
- E39: άμεση αναφορά στη διάταξη δύο οποιονδήποτε διαδοχικών αριθμών
- E31: ανάκληση γνωστού αποτελέσματος
- E54: χρήση γνωστών αποτελεσμάτων για εξαγωγή άλλων αποτελεσμάτων
- E86: αναγνώριση και αξιοποίηση μοτίβου που υπάρχει, ακόμη και όταν δεν απαιτείται η εύρεση του
- E205: Χρήση της ορολογίας των αριθμών/αριθμολέξεων στο κατάλληλο πλαίσιο για αριθμούς μέχρι το 100
- E206: Χρήση της ορολογίας των αριθμών/αριθμολέξεων στο κατάλληλο πλαίσιο για αριθμούς μέχρι το 20
- E207: Απουσία χρήσης της ορολογίας των αριθμών/αριθμολέξεων για τους περισσότερους αριθμούς

μέχρι και το 10

- E208: Ορθή χρήση των όρων που αφορούν σε σύγκριση αριθμών (μεγαλύτερος, μικρότερος) στο κατάλληλο πλαίσιο
- E209: Κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει σε όρους που αφορούν σε σύγκριση αριθμών και χωρίς απευθείας χρήση των όρων αυτών (μεγαλύτερος, μικρότερος)
- E210: Καμία χρήση των όρων που αφορούν σε σύγκριση αριθμών (μεγαλύτερος, μικρότερος) και καμία προσπάθεια έμμεσης περιγραφής που να παραπέμπει στους όρους σύγκρισης (μεγαλύτερος, μικρότερος)
- E124: ανεπιτυχής συμπλήρωση αριθμών σε πλέγματα αριθμών
- E125: επιτυχής συμπλήρωση αριθμών σε πλέγματα αριθμών

### Αριθμοί 16



- E127: εντοπισμός/συμπλήρωση της διάταξης στοιχείων και χρήση της τακτικής έννοιας του αριθμού ( $1^{ος}$ ,  $2^{ος}$ ,  $3^{ος}$ ...) μόνο μέσα από σειριακή επεξεργασία/απαγγελία της ακολουθίας των αριθμών
- E128: εντοπισμός/συμπλήρωση της διάταξης στοιχείων και χρήση της τακτικής έννοιας του αριθμού ( $1^{ος}$ ,  $2^{ος}$ ,  $3^{ος}$ ) μέσα από αξιοποίηση προηγούμενων ή επόμενων όρων
- E171: ιδιοσυγκρασιακή συμπλήρωση συγκεκριμένων αριθμών που ζητούνται, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η ακολουθία και η διάταξη των αριθμών
- E39: άμεση αναφορά στη διάταξη δύο οποιονδήποτε διαδοχικών αριθμών
- E129: εντοπισμός/συμπλήρωση της διάταξης στοιχείων και χρήση της τακτικής έννοιας του αριθμού ( $1^{ος}$ ,  $2^{ος}$ ,  $3^{ος}$ ) μέσα από αξιοποίηση σχέσεων μεταξύ οποιοδήποτε όρων
- E3: εστίαση της προσοχής σε εξωτερικά χαρακτηριστικά της εικόνας/εργαλείου (π.χ χρώμα, σχήμα, μέγεθος) που δε σχετίζονται με την επίλυση του έργου
- E159: ανάκληση και απαγγελία της ακολουθίας των αριθμών για συμπλήρωση ή επέκταση της διάταξης αριθμών χωρίς άμεσο εντοπισμό και αναφορά στη σχέση μεταξύ προηγούμενου και επόμενου αριθμού
- E130: επιτυχής συμπλήρωση της διάταξη στοιχείων που έχουν σταθερή θέση
- E131: ανεπιτυχής συμπλήρωση της διάταξης στοιχείων που έχουν σταθερή θέση

### Αριθμοί 17



- E62: δεν λαμβάνει υπόψη καθόλου τα δεδομένα του προβλήματος
- E8: λαμβάνει υπόψη μόνο ένα ή μόνο μερικά δεδομένα του προβλήματος
- E16: λαμβάνει υπόψη όλα τα δεδομένα του προβλήματος χωρίς περαιτέρω εντοπισμό συσχετίσεων μεταξύ δεδομένων του ίδιου ερωτήματος ή διαφορετικών ερωτημάτων
- E21: αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ δεδομένων του ερωτήματος για εντοπισμό συσχετίσεων
- E171: ιδιοσυγκρασιακή συμπλήρωση συγκεκριμένων αριθμών που ζητούνται, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η ακολουθία και η διάταξη των αριθμών
- E132: επιτυχής ερμηνεία της διάταξης στοιχείων χρησιμοποιώντας τον τακτικό αριθμό όταν εμπλέκεται μετακίνηση της θέσης των στοιχείων
- E133: ανεπιτυχής ερμηνεία της διάταξης στοιχείων χρησιμοποιώντας τον τακτικό αριθμό όταν εμπλέκεται μετακίνηση της θέσης των στοιχείων

### Αριθμοί 18



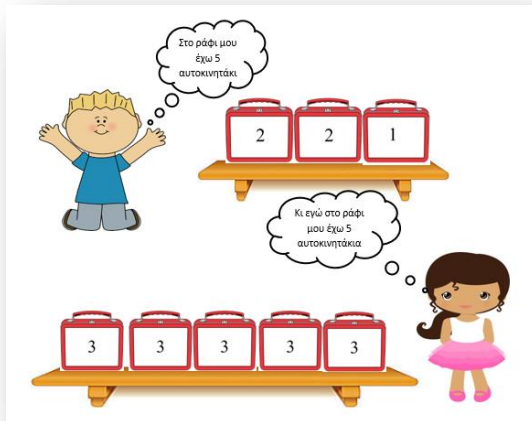
- E62: δεν λαμβάνει υπόψη καθόλου τα δεδομένα του προβλήματος
- E8: λαμβάνει υπόψη μόνο ένα ή μόνο μερικά δεδομένα του προβλήματος
- E26: επανάληψη του δοσμένου αριθμού, από τα δεδομένα ως απάντηση
- E16: λαμβάνει υπόψη όλα τα δεδομένα του προβλήματος χωρίς περαιτέρω εντοπισμό συσχετίσεων μεταξύ δεδομένων του ίδιου ερωτήματος ή διαφορετικών ερωτημάτων
- E21: αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ δεδομένων του ερωτήματος για εντοπισμό συσχετίσεων
- E1: ιδιοσυγκρασιακή χρήση εργαλείου που εμπλέκει την πληθικότητα για δικούς τους σκοπούς (π.χ παιχνίδι) και όχι για την επίλυση προβλήματος
- E13: χρήση του εργαλείου που εμπλέκει την πληθικότητα με τρόπο που οι αρχικές ενέργειες υποδεικνυαν σωστή χρήση αλλά στη συνέχεια παρουσιαζόταν αδυναμία ορθής χρήσης και χειρισμού του υλικού
- E14: τυπική χρήση εργαλείου που εμπλέκει την πληθικότητα μόνο με συγκεκριμένο τρόπο για εύρεση της απάντησης μέσω μέτρησης όλων των στοιχείων
- E22: εντοπισμός διαφορετικών προσθετέων που δίνουν σταθερό άθροισμα μέσω της αύξησης του ενός προσθετέου κατά ένα και της μείωσης του άλλου προσθετέου κατά ένα (έννοια της ισότητας)
- E35: εστίαση σε ιδιότητα πράξεων που αναδύεται αντιμεταθετική ιδιότητα), μέσω εντοπισμού σχέσεων που υποβόσκουν

- 
- E4: αιτιολόγηση που βασίζεται σε άσχετα στοιχεία με το πρόβλημα/κατάσταση
  - E194: παροχή απάντησης που δεν απαντά στο ερώτημα γιατί, πώς
  - E195: αιτιολόγηση που βασίζεται σε συγκεκριμένο ή συγκεκριμένα αριθμητικά παραδείγματα
  - E19: αιτιολόγηση που βασίζεται μόνο σε συγκεκριμένο λανθασμένο παράδειγμα
  - E18: αιτιολόγηση που βασίζεται σε απλή περιγραφή μαθηματικής διαδικασίας
  - E193: παροχή εναλλακτικών αιτιολογήσεων που βασίζονται σε γενικευμένες δηλώσεις
  - E25: αιτιολόγηση που βασίζεται σε γενικευμένη δήλωση
  - E7: απαρίθμηση μερικών στοιχείων και παράλειψη άλλων απαραίτητων στοιχείων όταν δεν ζητείται ξεκάθαρα η εφαρμογή της απαρίθμησης
  - E15: αποτελεσματική χρήση γνωστής διαδικασίας «απαρίθμησης όλων» όταν δε ζητείται ξεκάθαρα η εφαρμογή της
  - E33: χρήση αριθμητικής διαδικασίας «αρίθμηση από τον πρώτο»
  - E31: ανάκληση γνωστού αποτελέσματος
  - E55: ημιτελής προσπάθεια εφαρμογής της στρατηγικής δοκιμής και ελέγχου χωρίς να γίνεται έλεγχος οποιασδήποτε δοκιμής και αναπροσαρμογής της διαδικασίας
  - E162: αποτελεσματική χρήση στρατηγικής δοκιμής και ελέγχου χωρίς αναστοχασμό στις δοκιμές (τυχαίες δοκιμές) όταν οι άγνωστες ποσότητες είναι δύο
  - E56: αποτελεσματική χρήση στρατηγικής δοκιμής και ελέγχου με αναστοχασμό στις δοκιμές, όταν οι άγνωστες ποσότητες είναι δύο
  - E109: σύνθεση και ανάλυση δοσμένου αριθμού με διαφορετικούς τρόπους
  - E58: έλεγχος για εντοπισμό πολλαπλών απαντήσεων όταν απαιτούνται
  - E187 Καμία χρήση του όρου της ισότητας και καμία προσπάθεια περιγραφής που να παραπέμπει στον όρο της ισότητας
  - E189: Ορθή χρήση του όρου της ισότητας στο κατάλληλο πλαίσιο
  - E202: Μη κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο της ισότητας και χωρίς απευθείας χρήση του όρου της ισότητας
  - E188: Κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο της ισότητας και χωρίς απευθείας χρήση του όρου της ισότητας
  - E181 Καμία χρήση του όρου της πρόσθεσης και καμία προσπάθεια περιγραφής που να παραπέμπει στον όρο της πρόσθεσης
  - E182: Κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο της πρόσθεσης και χωρίς απευθείας χρήση του όρου της πρόσθεσης
  - E200: Μη κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο της πρόσθεσης και χωρίς απευθείας χρήση του όρου της πρόσθεσης
-



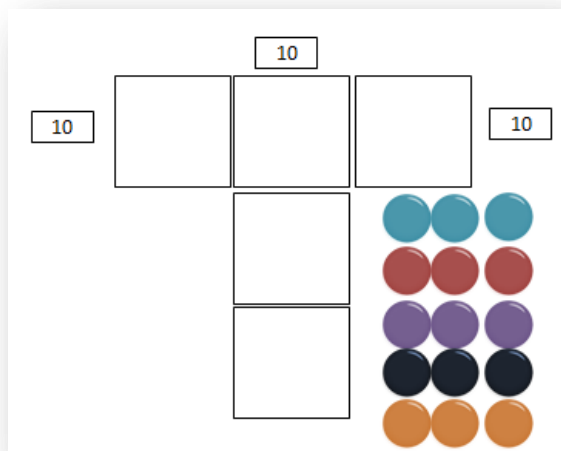
- E183: Ορθή χρήση του όρου της πρόσθεσης στο κατάλληλο πλαίσιο
- E184: Καμία χρήση του όρου της αφαίρεσης και καμία προσπάθεια περιγραφής που να παραπέμπει στον όρο της αφαίρεσης
- E185: Κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο της αφαίρεσης και χωρίς απευθείας χρήση του όρου της αφαίρεσης
- E186: Ορθή χρήση του όρου της αφαίρεσης στο κατάλληλο πλαίσιο
- E201: Μη κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο της αφαίρεσης και χωρίς απευθείας χρήση του όρου της αφαίρεσης
- E72: επιτυχής εύρεση προσθετέων που να δίνουν το ζητούμενο συγκεκριμένο άθροισμα
- E71: ανεπιτυχής εύρεση προσθετέων που να δίνουν το ζητούμενο συγκεκριμένο άθροισμα

### Αριθμοί 19



- E62: δεν λαμβάνει υπόψη καθόλου τα δεδομένα του προβλήματος
- E5: πρόσθεση περιττών δεδομένων μέσω απόδοσης οικείας ιστορίας/σεναρίου
- E165: πρόσθεση περιττών δεδομένων μέσω εκδήλωσης προτίμησης (π.χ αγαπημένο χρώμα)
- E8: λαμβάνει υπόψη μόνο ένα ή μόνο μερικά δεδομένα του προβλήματος
- E16: λαμβάνει υπόψη όλα τα δεδομένα του προβλήματος χωρίς περαιτέρω εντοπισμό συσχετίσεων μεταξύ δεδομένων του ίδιου ερωτήματος ή διαφορετικών ερωτημάτων
- E21: αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ δεδομένων του ερωτήματος για εντοπισμό συσχετίσεων
- E7: απαρίθμηση μερικών στοιχείων και παράλειψη άλλων απαραίτητων στοιχείων όταν δεν ζητείται ξεκάθαρα η εφαρμογή της απαρίθμησης
- E33: χρήση αριθμητικής διαδικασίας «αρίθμηση από τον πρώτο»
- E134: απαρίθμηση όλων αρχίζοντας από τον πρώτο
- E31: ανάκληση γνωστού αποτελέσματος
- E71: ανεπιτυχής εύρεση προσθετέων που να δίνουν το ζητούμενο συγκεκριμένο άθροισμα
- E72: επιτυχής εύρεση προσθετέων που να δίνουν το ζητούμενο συγκεκριμένο άθροισμα

## Αριθμοί 20



- E62: δεν λαμβάνει υπόψη καθόλου τα δεδομένα του προβλήματος
- E8: λαμβάνει υπόψη μόνο ένα ή μόνο μερικά δεδομένα του προβλήματος
- E16: λαμβάνει υπόψη όλα τα δεδομένα του προβλήματος χωρίς περαιτέρω εντοπισμό συσχετίσεων μεταξύ δεδομένων του ίδιου ερωτήματος ή διαφορετικών ερωτημάτων
- E21: αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ δεδομένων του ερωτήματος για εντοπισμό συσχετίσεων
- E3: εστίαση της προσοχής σε εξωτερικά χαρακτηριστικά της εικόνας/εργαλείου (π.χ χρώμα, σχήμα, μέγεθος) που δε σχετίζονται με την επίλυση του έργου
- E13: χρήση του εργαλείου που εμπλέκει την πληθικότητα με τρόπο που οι αρχικές ενέργειες υποδεικνύουν σωστή χρήση αλλά στη συνέχεια παρουσιάζονται αδυναμία ορθής χρήσης και χειρισμού του υλικού
- E14: τυπική χρήση εργαλείου που εμπλέκει την πληθικότητα μόνο με συγκεκριμένο τρόπο για εύρεση της απάντησης μέσω μέτρησης όλων των στοιχείων
- E20: μετασχηματισμός της οργάνωσης των κομματιών του εργαλείου που εμπλέκει την πληθικότητα αρχίζοντας από τη δημιουργία ομάδων με ίσο αριθμό στοιχείων
- E161: ιδιοσυγκρασιακή σύγκριση πλήθους στοιχείων δύο συνόλων όπου το καθένα περιλαμβάνει και μεμονωμένα στοιχεία και ομαδοποίηση των μεμονωμένων στοιχείων (μονάδες, δεκάδες) η οποία δε βασίζεται στις σχέσεις που εμπλέκονται στην προβληματική κατάσταση
- E172: ιδιοσυγκρασιακή ανάλυση συγκεκριμένου συνόλου στοιχείων αντί δημιουργία ίδιου αθροίσματος μέσα από εύρεση αγνώστων προσθετέων σε κατακόρυφη και οριζόντια διάταξη
- E173: ημιτελής προσπάθεια δημιουργίας ίδιου αθροίσματος με συγκεκριμένο/μοναδικό τρόπο μέσα από εύρεση αγνώστων προσθετέων σε κατακόρυφη και οριζόντια διάταξη, λόγω της αδυναμίας χειρισμού και των δύο διαστάσεων (οριζόντια και κατακόρυφη)
- E174: προσπάθεια δημιουργίας ίδιου αθροίσματος μέσα από εύρεση αγνώστων προσθετέων σε κατακόρυφη και οριζόντια διάταξη η οποία δεν ολοκληρώνεται λόγω της δυσκολίας εντοπισμού του κοινού προσθετέου που εμπλέκεται στις δύο διαστάσεις και επηρεάζει το ζητούμενο άθροισμα
- E175: Δημιουργία ίδιου αθροίσματος μέσα από εύρεση αγνώστων προσθετέων σε κατακόρυφη και οριζόντια διάταξη μέσα από εντοπισμό και αντίληψη του κοινού προσθετέου που εμπλέκεται στις δύο διαστάσεις και επηρεάζει το ζητούμενο άθροισμα (έννοια ισότητας)
- E66: σύγκριση του πλήθους στοιχείων δύο συνόλων όπου το καθένα περιλαμβάνει και μεμονωμένα στοιχεία και ομαδοποίηση μεμονωμένων στοιχείων (μονάδες, δεκάδες) μέσα από την ανάλυση και των δύο συνόλων σε μεμονωμένα στοιχεία και τη βήμα προς βήμα μέτρησή τους
- E22: εστίαση στην έννοια που αναδύεται (έννοια ισότητας) μέσω εντοπισμού σχέσεων που υποβόσκουν
- E107: μη αποτελεσματική χρήση στρατηγικής δοκιμής και ελέγχου χωρίς αναστοχασμό στις δοκιμές

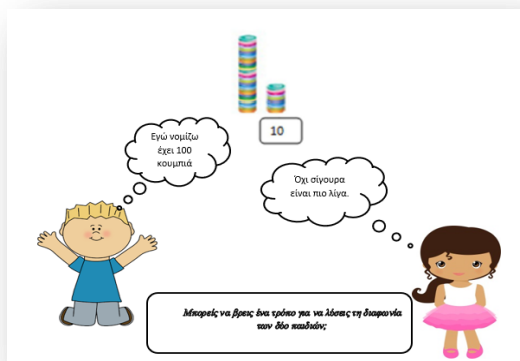


---

και δυνατότητα αναπροσαρμογής της διαδικασίας, όταν οι άγνωστες ποσότητες είναι περισσότερες από δύο

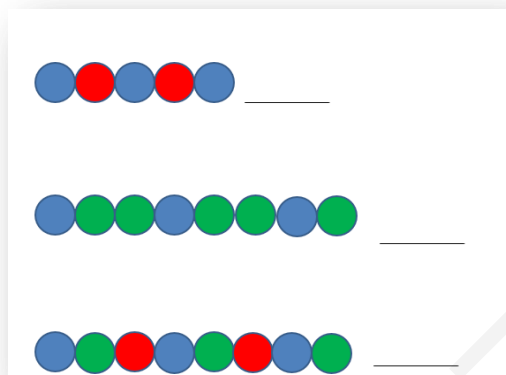
- E108: αποτελεσματική χρήση στρατηγικής δοκιμής και ελέγχου με αναστοχασμό στις δοκιμές, όταν οι άγνωστες ποσότητες είναι περισσότερες από δύο
- E181: Καμία χρήση του όρου της πρόσθεσης και καμία προσπάθεια περιγραφής που να παραπέμπει στον όρο της πρόσθεσης
- E182: Κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο της πρόσθεσης και χωρίς απευθείας χρήση του όρου της πρόσθεσης
- E200: Μη κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο της πρόσθεσης και χωρίς απευθείας χρήση του όρου της πρόσθεσης
- E183: Ορθή χρήση του όρου της πρόσθεσης στο κατάλληλο πλαίσιο
- E184: Καμία χρήση του όρου της αφαίρεσης και καμία προσπάθεια περιγραφής που να παραπέμπει στον όρο της αφαίρεσης
- E185: Κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο της αφαίρεσης και χωρίς απευθείας χρήση του όρου της αφαίρεσης
- E186: Ορθή χρήση του όρου της αφαίρεσης στο κατάλληλο πλαίσιο
- E201: Μη κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο της αφαίρεσης και χωρίς απευθείας χρήση του όρου της αφαίρεσης
- E71: ανεπιτυχής εύρεση προσθετέων που να δίνουν το ζητούμενο συγκεκριμένο άθροισμα
- E72: επιτυχής εύρεση προσθετέων που να δίνουν το ζητούμενο συγκεκριμένο άθροισμα

## Αριθμοί 21



- E62: δεν λαμβάνει υπόψη καθόλου τα δεδομένα του προβλήματος
- E136: αντιμετώπιση του εκτιμώμενου αποτελέσματος ως βέβαιου, χωρίς σύγκριση του με το σημείο αναφοράς και χωρίς αναπροσαρμογή της εκτίμησης
- E138: αναστοχασμός και σύγκριση του εκτιμώμενου αποτελέσματος σε σχέση με το σημείο αναφοράς με δυνατότητα αναπροσαρμογής της εκτίμησης
- E140: προσκόλληση και ανάγκη εντοπισμού στην εικόνα του αριθμού μη-απόλυτα διακριτών στοιχείων για την εκτίμηση πλήθους στοιχείων συνόλου
- E141: εκτίμηση πλήθους στοιχείων ζητούμενου συνόλου, μέσω ανάλυσης της εικόνας για εντοπισμό του αριθμού των φορών που το δοσμένο σύνολο αναφοράς εμφανίζεται στο ζητούμενο σύνολο
- E142: ανεπιτυχής εκτίμηση πλήθους συνόλου στοιχείων σε σχέση με το σύνολο αναφοράς
- E143: επιτυχής εκτίμηση πλήθους συνόλου στοιχείων σε σχέση με το σύνολο αναφοράς

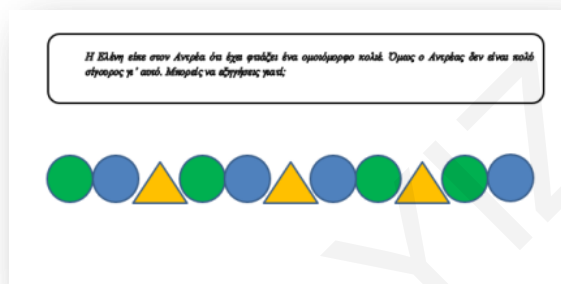
## Μοτίβα - Άλγεβρα 1



- E5: πρόσθεση περιττών δεδομένων μέσω απόδοσης οικείας ιστορίας/σεναρίου
- E165: πρόσθεση περιττών δεδομένων μέσω εκδήλωσης προτίμησης (π.χ αγαπημένο χρώμα)
- E61: ιδιοσυγκρασιακές περιγραφές για την προβληματική κατάσταση που δεν σχετίζονται με εντοπισμό μοτίβου ή του κανόνα για τη σχέση δύο μεταβλητών
- E45: αποσπασματική επεξεργασία της εικόνας του μοτίβου και στιγμιαία οπτική παρατήρηση της για εντοπισμό μόνο του τι βρίσκεται δίπλα από συγκεκριμένο στοιχείο και όχι της μονάδας επανάληψης
- E40: αντιμετώπιση της ακολουθίας του μοτίβου ως μια διαδικασία συνεχούς λεκτικής περιγραφής για επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση μοτίβου
- E163: απουσία ξεκάθαρης αναφοράς του κανόνα του μοτίβου κατά την επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση του μοτίβου
- E164: περιγραφή και εφαρμογή του κανόνα του μοτίβου για επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση του μοτίβου
- E144: αντιμετώπιση της ακολουθίας του μοτίβου ως μια συνεχής επανεμφάνιση χωρίς τέλος της μονάδας επανάληψης
- E57: ιδιοσυγκρασιακές παρατηρήσεις της εικόνας που δεν σχετίζονται με τον εντοπισμό της μονάδας επανάληψης του επαναλαμβανόμενου μοτίβου στην εικόνα
- E59: εντοπισμός και αναγνώριση της μονάδας επανάληψης του επαναλαμβανόμενου μοτίβου στην εικόνα
- E4: αιτιολόγηση που βασίζεται σε άσχετα στοιχεία με το πρόβλημα/κατάσταση

- E194: παροχή απάντησης που δεν απαντά στο ερώτημα γιατί, πώς
- E195: αιτιολόγηση που βασίζεται σε συγκεκριμένο ή συγκεκριμένα αριθμητικά παραδείγματα
- E158: αιτιολόγηση που βασίζεται σε υπόδειξη μερικών πληροφοριών της εικόνας/εργαλείου
- E18: αιτιολόγηση που βασίζεται σε απλή περιγραφή μαθηματικής διαδικασίας
- E193: παροχή εναλλακτικών αιτιολογήσεων που βασίζονται σε γενικευμένες δηλώσεις
- E25: αιτιολόγηση που βασίζεται σε γενικευμένη δήλωση
- E44: ανεπιτυχής εύρεση όρων επαναλαμβανόμενου μοτίβου ABΓ
- E47: επιτυχής εύρεση όρων επαναλαμβανόμενου μοτίβου ABΓ
- E146: ανεπιτυχής εύρεση όρων επαναλαμβανόμενου μοτίβου AB
- E147: επιτυχής εύρεση όρων επαναλαμβανόμενου μοτίβου AB
- E148: ανεπιτυχής εύρεση όρων επαναλαμβανόμενου μοτίβου ABB
- E149: επιτυχής εύρεση όρων επαναλαμβανόμενου μοτίβου ABB
- E178: Καμία χρήση του όρου του μοτίβου και καμία προσπάθεια περιγραφής που να παραπέμπει στον όρο του μοτίβου
- E179: Κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο του μοτίβου και χωρίς απευθείας χρήση του όρου του μοτίβου
- E199: Μη κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο του μοτίβου και χωρίς απευθείας χρήση του όρου του μοτίβου
- E180: Ορθή χρήση του όρου του μοτίβου στο κατάλληλο πλαίσιο

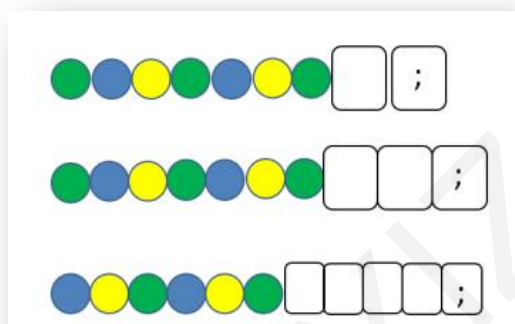
## Μοτίβα - Άλγεβρα 2



- E5: πρόσθεση περιττών δεδομένων μέσω απόδοσης οικείας ιστορίας/σεναρίου
- E165: πρόσθεση περιττών δεδομένων μέσω εκδήλωσης προτίμησης (π.χ αγαπημένο χρώμα)
- E61: ιδιοσυγκρασιακές περιγραφές για την προβληματική κατάσταση που δεν σχετίζονται με εντοπισμό μοτίβου ή του κανόνα για τη σχέση δύο μεταβλητών
- E45: αποσπασματική επεξεργασία της εικόνας του μοτίβου και στιγμιαία οπτική παρατήρηση της για εντοπισμό μόνο του τι βρίσκεται δίπλα από συγκεκριμένο στοιχείο και όχι της μονάδας επανάληψης
- E40: αντιμετώπιση της ακολουθίας του μοτίβου ως μια διαδικασία συνεχούς λεκτικής περιγραφής για επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση μοτίβου
- E163: απουσία ξεκάθαρης αναφοράς του κανόνα του μοτίβου κατά την επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση του μοτίβου
- E164: περιγραφή και εφαρμογή του κανόνα του μοτίβου για επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση του μοτίβου
- E144: αντιμετώπιση της ακολουθίας του μοτίβου ως μια συνεχής επανεμφάνιση χωρίς τέλος της μονάδας επανάληψης

- E57: ιδιοσυγκρασιακές παρατηρήσεις της εικόνας που δεν σχετίζονται με τον εντοπισμό της μονάδας επανάληψης του επαναλαμβανόμενου μοτίβου στην εικόνα
- E59: εντοπισμός και αναγνώριση μονάδας επανάληψης του επαναλαμβανόμενου μοτίβου στην εικόνα
- E4: αιτιολόγηση που βασίζεται σε άσχετα στοιχεία με το πρόβλημα/κατάσταση
- E194: παροχή απάντησης που δεν απαντά στο ερώτημα γιατί, πώς
- E158: αιτιολόγηση που βασίζεται σε υπόδειξη μερικών πληροφοριών της εικόνας/εργαλείου
- E18: αιτιολόγηση που βασίζεται σε απλή περιγραφή μαθηματικής διαδικασίας
- E193: παροχή εναλλακτικών αιτιολογήσεων που βασίζονται σε γενικευμένες δηλώσεις
- E25: αιτιολόγηση που βασίζεται σε γενικευμένη δήλωση
- E178: Καμία χρήση του όρου του μοτίβου και καμία προσπάθεια περιγραφής που να παραπέμπει στον όρο του μοτίβου
- E179: Κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο του μοτίβου και χωρίς απευθείας χρήση του όρου του μοτίβου
- E199: Μη κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο του μοτίβου και χωρίς απευθείας χρήση του όρου του μοτίβου
- E180: Ορθή χρήση του όρου του μοτίβου στο κατάλληλο πλαίσιο

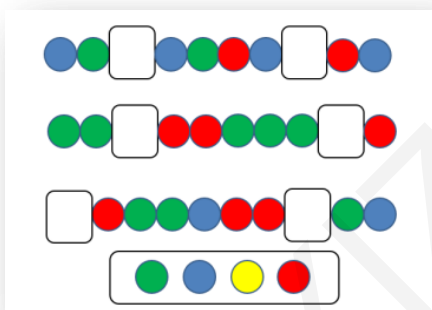
### Μοτίβα - Άλγεβρα 3



- E5: πρόσθεση περιττών δεδομένων μέσω απόδοσης οικείας ιστορίας/σεναρίου
- E165: πρόσθεση περιττών δεδομένων μέσω εκδήλωσης προτίμησης (π.χ αγαπημένο χρώμα)
- E64: αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ δεδομένων διαφορετικών ερωτημάτων για εντοπισμό συσχετίσεων
- E61: ιδιοσυγκρασιακές περιγραφές για την προβληματική κατάσταση που δεν σχετίζονται με εντοπισμό μοτίβου ή του κανόνα για τη σχέση δύο μεταβλητών
- E45: αποσπασματική επεξεργασία της εικόνας του μοτίβου και στιγμιαία οπτική παρατήρηση της για εντοπισμό μόνο του τι βρίσκεται δίπλα από συγκεκριμένο στοιχείο και όχι της μονάδας επανάληψης
- E40: αντιμετώπιση της ακολουθίας του μοτίβου ως μια διαδικασία συνεχούς λεκτικής περιγραφής για επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση μοτίβου
- E163: απουσία ξεκάθαρης αναφοράς του κανόνα του μοτίβου κατά την επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση του μοτίβου
- E164: περιγραφή και εφαρμογή του κανόνα του μοτίβου για επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση του μοτίβου
- E144: αντιμετώπιση της ακολουθίας του μοτίβου ως μια συνεχής επανεμφάνιση χωρίς τέλος της μονάδας επανάληψης

- E57: ιδιοσυγκρασιακές παρατηρήσεις της εικόνας που δεν σχετίζονται με τον εντοπισμό της μονάδας επανάληψης του επαναλαμβανόμενου μοτίβου στην εικόνα
- E59: εντοπισμός και αναγνώριση μονάδας επανάληψης του επαναλαμβανόμενου μοτίβου στην εικόνα
- E4: αιτιολόγηση που βασίζεται σε άσχετα στοιχεία με το πρόβλημα/κατάσταση
- E194: παροχή απάντησης που δεν απαντά στο ερώτημα γιατί, πώς
- E158: αιτιολόγηση που βασίζεται σε υπόδειξη μερικών πληροφοριών της εικόνας/εργαλείου
- E18: αιτιολόγηση που βασίζεται σε απλή περιγραφή μαθηματικής διαδικασίας
- E193: παροχή εναλλακτικών αιτιολογήσεων που βασίζονται σε γενικευμένες δηλώσεις
- E25: αιτιολόγηση που βασίζεται σε γενικευμένη δήλωση
- E44: ανεπιτυχής εύρεση όρων επαναλαμβανόμενου μοτίβου ΑΒΓ
- E47: επιτυχής εύρεση όρων επαναλαμβανόμενου μοτίβου ΑΒΓ
- E178: Καμία χρήση του όρου του μοτίβου και καμία προσπάθεια περιγραφής που να παραπέμπει στον όρο του μοτίβου
- E179: Κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο του μοτίβου και χωρίς απευθείας χρήση του όρου του μοτίβου
- E199: Μη κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο του μοτίβου και χωρίς απευθείας χρήση του όρου του μοτίβου
- E180: Ορθή χρήση του όρου του μοτίβου στο κατάλληλο πλαίσιο

#### Μοτίβα – Άλγεβρα 4



- E5: πρόσθεση περιττών δεδομένων μέσω απόδοσης οικείας ιστορίας/σεναρίου
- E165: πρόσθεση περιττών δεδομένων μέσω εκδήλωσης προτίμησης (π.χ αγαπημένο χρώμα)
- E61: ιδιοσυγκρασιακές περιγραφές για την προβληματική κατάσταση που δεν σχετίζονται με εντοπισμό μοτίβου ή του κανόνα για τη σχέση δύο μεταβλητών
- E45: αποσπασματική επεξεργασία της εικόνας του μοτίβου και στιγμιαία οπτική παρατήρηση της για εντοπισμό μόνο του τι βρίσκεται δίπλα από συγκεκριμένο στοιχείο και όχι της μονάδας επανάληψης
- E40: αντιμετώπιση της ακολουθίας του μοτίβου ως μια διαδικασία συνεχούς λεκτικής περιγραφής για επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση μοτίβου
- E163: απουσία ξεκάθαρης αναφοράς του κανόνα του μοτίβου κατά την επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση του μοτίβου
- E164: περιγραφή και εφαρμογή του κανόνα του μοτίβου για επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση του μοτίβου
- E144: αντιμετώπιση της ακολουθίας του μοτίβου ως μια συνεχής επανεμφάνιση χωρίς τέλος της μονάδας επανάληψης
- E57: ιδιοσυγκρασιακές παρατηρήσεις της εικόνας που δεν σχετίζονται με τον εντοπισμό της

- μονάδας επανάληψης του επαναλαμβανόμενου μοτίβου στην εικόνα
- E59: εντοπισμός και αναγνώριση μονάδας επανάληψης του επαναλαμβανόμενου μοτίβου στην εικόνα
- E4: αιτιολόγηση που βασίζεται σε άσχετα στοιχεία με το πρόβλημα/κατάσταση
- E194: παροχή απάντησης που δεν απαντά στο ερώτημα γιατί, πώς
- E158: αιτιολόγηση που βασίζεται σε υπόδειξη μερικών πληροφοριών της εικόνας/εργαλείου
- E18: αιτιολόγηση που βασίζεται σε απλή περιγραφή μαθηματικής διαδικασίας
- E193: παροχή εναλλακτικών αιτιολογήσεων που βασίζονται σε γενικευμένες δηλώσεις
- E25: αιτιολόγηση που βασίζεται σε γενικευμένη δήλωση
- E178: Καμία χρήση του όρου του μοτίβου και καμία προσπάθεια περιγραφής που να παραπέμπει στον όρο του μοτίβου
- E179: Κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο του μοτίβου και χωρίς απευθείας χρήση του όρου του μοτίβου
- E199: Μη κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο του μοτίβου και χωρίς απευθείας χρήση του όρου του μοτίβου
- E180: Ορθή χρήση του όρου του μοτίβου στο κατάλληλο πλαίσιο
- E44: ανεπιτυχής εύρεση όρων επαναλαμβανόμενου μοτίβου ABΓ
- E47: επιτυχής εύρεση όρων επαναλαμβανόμενου μοτίβου ABΓ
- E151: ανεπιτυχής εύρεση όρων επαναλαμβανόμενου μοτίβου AAABB
- E152: επιτυχής εύρεση όρων επαναλαμβανόμενου μοτίβου AAABB
- E153: ανεπιτυχής εύρεση όρων επαναλαμβανόμενου μοτίβου AABBB
- E154: επιτυχής εύρεση όρων επαναλαμβανόμενου μοτίβου AABBB

*Μοτίβα – Άλγεβρα 5*

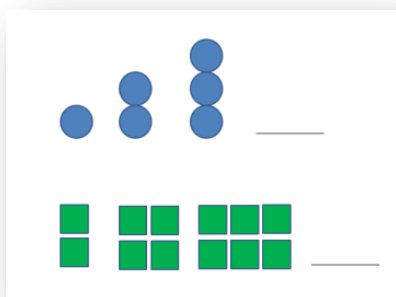


- E5: πρόσθεση περιττών δεδομένων μέσω απόδοσης οικείας ιστορίας/σεναρίου
- E165: πρόσθεση περιττών δεδομένων μέσω εκδήλωσης προτίμησης (π.χ αγαπημένο χρώμα)
- E8: λαμβάνει υπόψη μόνο ένα ή μόνο μερικά δεδομένα του προβλήματος
- E16: λαμβάνει υπόψη όλα τα δεδομένα του προβλήματος χωρίς περαιτέρω εντοπισμό συσχετίσεων μεταξύ δεδομένων του ίδιου ερωτήματος ή διαφορετικών ερωτημάτων
- E21: αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ δεδομένων του ερωτήματος για εντοπισμό συσχετίσεων
- E4: αιτιολόγηση που βασίζεται σε άσχετα στοιχεία με το πρόβλημα/κατάσταση
- E194: παροχή απάντησης που δεν απαντά στο ερώτημα γιατί, πώς
- E158: αιτιολόγηση που βασίζεται σε υπόδειξη μερικών πληροφοριών της εικόνας/εργαλείου
- E18: αιτιολόγηση που βασίζεται σε απλή περιγραφή μαθηματικής διαδικασίας
- E193: παροχή εναλλακτικών αιτιολογήσεων που βασίζονται σε γενικευμένες δηλώσεις

- 
- E25: αιτιολόγηση που βασίζεται σε γενικευμένη δήλωση
  - E61: ιδιοσυγκρασιακές περιγραφές για την προβληματική κατάσταση που δεν σχετίζονται με εντοπισμό μοτίβου ή του κανόνα για τη σχέση δύο μεταβλητών
  - E145: αποσπασματική επεξεργασία της εικόνας του μοτίβου και στιγμιαία οπτική παρατήρηση της, για εντοπισμό μόνο της κατεύθυνσης μεταβολής και όχι και του μεγέθους της μεταβολής
  - E40: αντιμετώπιση της ακολουθίας του μοτίβου ως μια διαδικασία συνεχούς λεκτικής περιγραφής για επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση μοτίβου
  - E163: απουσία ξεκάθαρης αναφοράς του κανόνα του μοτίβου κατά την επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση του μοτίβου
  - E164: περιγραφή και εφαρμογή του κανόνα του μοτίβου για επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση του μοτίβου
  - E150: αντιμετώπιση της ακολουθίας του μοτίβου ως συνεχούς πρόσθεσης κάποιου μεγέθους στον προηγούμενο όρο για τη δημιουργία του επόμενου όρου
  - E15: αποτελεσματική χρήση γνωστής διαδικασίας «απαρίθμησης όλων» όταν δεν ζητείται ξεκάθαρα η εφαρμογή της
  - E159: ανάκληση και απαγγελία της ακολουθίας των αριθμών για συμπλήρωση ή επέκταση της διάταξης αριθμών χωρίς άμεσο εντοπισμό και αναφορά στη σχέση μεταξύ προηγούμενου και επόμενου αριθμού
  - E39: άμεση αναφορά στη διάταξη δύο οποιονδήποτε διαδοχικών αριθμών
  - E43: ανάλυση της εικόνας με τρόπο που αποκαλύπτει τον κανόνα του αναπτυσσόμενου μοτίβου
  - E41: ιδιοσυγκρασιακές παρατηρήσεις της εικόνας που δεν σχετίζονται με την αποκάλυψη του κανόνα του αναπτυσσόμενου μοτίβου στην εικόνα
  - E10: σύγκριση ποσοτήτων μόνο μέσα από οπτική παρατήρηση των διακριτών στοιχείων δύο συνόλων με ξεκάθαρη διαφορά στο πλήθος
  - E178: Καμία χρήση του όρου του μοτίβου και καμία προσπάθεια περιγραφής που να παραπέμπει στον όρο του μοτίβου
  - E179: Κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο του μοτίβου και χωρίς απευθείας χρήση του όρου του μοτίβου
  - E199: Μη κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο του μοτίβου και χωρίς απευθείας χρήση του όρου του μοτίβου
  - E180: Ορθή χρήση του όρου του μοτίβου στο κατάλληλο πλαίσιο
  - E36: ανεπιτυχής εύρεση όρων αναπτυσσόμενου μοτίβου με κανόνα +1
  - E37: επιτυχής εύρεση όρων αναπτυσσόμενου μοτίβου με κανόνα +1
-



## Μοτίβα – Άλγεβρα 6



- E5: πρόσθεση περιττών δεδομένων μέσω απόδοσης οικείας ιστορίας/σεναρίου
- E165: πρόσθεση περιττών δεδομένων μέσω εκδήλωσης προτίμησης (π.χ αγαπημένο χρώμα)
- E21: αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ δεδομένων του ερωτήματος για εντοπισμό συσχετίσεων
- E4: αιτιολόγηση που βασίζεται σε άσχετα στοιχεία με το πρόβλημα/κατάσταση
- E194: παροχή απάντησης που δεν απαντά στο ερώτημα γιατί, πώς
- E158: αιτιολόγηση που βασίζεται σε υπόδειξη μερικών πληροφοριών της εικόνας/εργαλείου
- E18: αιτιολόγηση που βασίζεται σε απλή περιγραφή μαθηματικής διαδικασίας
- E193: παροχή εναλλακτικών αιτιολογήσεων που βασίζονται σε γενικευμένες δηλώσεις
- E25: αιτιολόγηση που βασίζεται σε γενικευμένη δήλωση
- E61: ιδιοσυγκρασιακές περιγραφές για την προβληματική κατάσταση που δεν σχετίζονται με εντοπισμό μοτίβου ή του κανόνα για τη σχέση δύο μεταβλητών
- E145: αποσπασματική επεξεργασία της εικόνας του μοτίβου και στιγμιαία οπτική παρατήρηση της, για εντοπισμό μόνο για τον εντοπισμό της κατεύθυνσης μεταβολής και όχι και του μεγέθους της μεταβολής
- E40: αντιμετώπιση της ακολουθίας του μοτίβου ως μια διαδικασία συνεχούς λεκτικής περιγραφής για επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση μοτίβου
- E163: απουσία ξεκάθαρης αναφοράς του κανόνα του μοτίβου κατά την επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση του μοτίβου
- E164: περιγραφή και εφαρμογή του κανόνα του μοτίβου για επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση του μοτίβου
- E150: αντιμετώπιση της ακολουθίας του μοτίβου ως συνεχούς πρόσθεσης κάποιου μεγέθους στον προηγούμενο όρο για τη δημιουργία του επόμενου όρου
- E10: σύγκριση ποσοτήτων μόνο μέσα από οπτική παρατήρηση των διακριτών στοιχείων δύο συνόλων με ξεκάθαρη διαφορά στο πλήθος
- E15: αποτελεσματική χρήση γνωστής διαδικασίας «απαρίθμησης όλων» όταν δεν ζητείται ξεκάθαρα η εφαρμογή της
- E159: ανάκληση και απαγγελία της ακολουθίας των αριθμών για συμπλήρωση ή επέκταση της διάταξης αριθμών χωρίς άμεσο εντοπισμό και αναφορά στη σχέση μεταξύ προηγούμενου και επόμενου αριθμού
- E39: άμεση αναφορά στη διάταξη δύο οποιονδήποτε διαδοχικών αριθμών
- E41: ιδιοσυγκρασιακές παρατηρήσεις της εικόνας που δεν σχετίζονται με την αποκάλυψη του κανόνα του αναπτυσσόμενου μοτίβου στην εικόνα
- E43: ανάλυση της εικόνας με τρόπο που αποκαλύπτει τον κανόνα του αναπτυσσόμενου μοτίβου
- E178: Καμία χρήση του όρου του μοτίβου και καμία προσπάθεια περιγραφής που να παραπέμπει



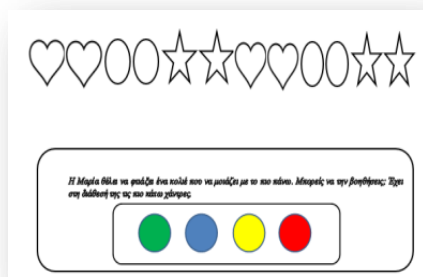
---

στον όρο του μοτίβου

- E179: Κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο του μοτίβου και χωρίς απευθείας χρήση του όρου του μοτίβου
- E199: Μη κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο του μοτίβου και χωρίς απευθείας χρήση του όρου του μοτίβου
- E180: Ορθή χρήση του όρου του μοτίβου στο κατάλληλο πλαίσιο
- E36: ανεπιτυχής εύρεση όρων αναπτυσσόμενου μοτίβου με κανόνα +1
- E42: ανεπιτυχής εύρεση όρων αναπτυσσόμενου μοτίβου με κανόνα +2
- E37: επιτυχής εύρεση όρων αναπτυσσόμενου μοτίβου με κανόνα +1
- E166: επιτυχής εύρεση όρων αναπτυσσόμενου μοτίβου με κανόνα +2

---

### Μοτίβα – Άλγεβρα 7



- E62: δεν λαμβάνει υπόψη καθόλου τα δεδομένα του προβλήματος
- E5: πρόσθεση περιττών δεδομένων μέσω απόδοσης οικείας ιστορίας/σεναρίου
- E165: πρόσθεση περιττών δεδομένων μέσω εκδήλωσης προτίμησης (π.χ αγαπημένο χρώμα)
- E21: αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ δεδομένων του ερωτήματος για εντοπισμό συσχετίσεων
- E61: ιδιοσυγκρασιακές περιγραφές για την προβληματική κατάσταση που δεν σχετίζονται με εντοπισμό μοτίβου ή του κανόνα για τη σχέση δύο μεταβλητών
- E170: ιδιοσυγκρασιακή απόδοση χρωμάτων στα σχήματα του επαναλαμβανόμενου μοτίβου, χωρίς να γίνεται η απαιτούμενη μετάφραση του μοτίβου από σχήμα σε χρώμα
- E45: αποσπασματική επεξεργασία της εικόνας του μοτίβου και στιγμιαία οπτική παρατήρηση της για εντοπισμό μόνο του τι βρίσκεται δίπλα από συγκεκριμένο στοιχείο και όχι της μονάδας επανάληψης
- E155: προσφυγή σε μοτίβο AB κατά τη μετάφραση ενός μοτίβου πιο σύνθετης δομής από σχήμα σε χρώμα
- E40: αντιμετώπιση της ακολουθίας του μοτίβου ως μια διαδικασία συνεχούς λεκτικής περιγραφής για επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση μοτίβου
- E163: απουσία ξεκάθαρης αναφοράς του κανόνα του μοτίβου κατά την επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση του μοτίβου
- E164: περιγραφή και εφαρμογή του κανόνα του μοτίβου για επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση του μοτίβου
- E144: αντιμετώπιση της ακολουθίας του μοτίβου ως μια συνεχής επανεμφάνιση χωρίς τέλος της μονάδας επανάληψης
- E57: ιδιοσυγκρασιακές παρατηρήσεις της εικόνας που δεν σχετίζονται με τον εντοπισμό της

- μονάδας επανάληψης του επαναλαμβανόμενου μοτίβου στην εικόνα
- E59: εντοπισμός και αναγνώριση μονάδας επανάληψης του επαναλαμβανόμενου μοτίβου στην εικόνα
- E4: αιτιολόγηση που βασίζεται σε άσχετα στοιχεία με το πρόβλημα/κατάσταση
- E194: παροχή απάντησης που δεν απαντά στο ερώτημα γιατί, πώς
- E158: αιτιολόγηση που βασίζεται σε υπόδειξη μερικών πληροφοριών της εικόνας/εργαλείου
- E18: αιτιολόγηση που βασίζεται σε απλή περιγραφή μαθηματικής διαδικασίας
- E193: παροχή εναλλακτικών αιτιολογήσεων που βασίζονται σε γενικευμένες δηλώσεις
- E25: αιτιολόγηση που βασίζεται σε γενικευμένη δήλωση
- E178: Καμία χρήση του όρου του μοτίβου και καμία προσπάθεια περιγραφής που να παραπέμπει στον όρο του μοτίβου
- E179: Κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο του μοτίβου και χωρίς απευθείας χρήση του όρου του μοτίβου
- E199: Μη κατάλληλη λεκτική περιγραφή που παραπέμπει στον όρο του μοτίβου και χωρίς απευθείας χρήση του όρου του μοτίβου
- E180: Ορθή χρήση του όρου του μοτίβου στο κατάλληλο πλαίσιο
- E156: επιτυχής μετάφραση μοτίβου σύνθετης δομής AABBGΓ από σχήμα σε χρώμα
- E157: ανεπιτυχής μετάφραση μοτίβου σύνθετης δομής AABBGΓ από σχήμα σε χρώμα

### Μοτίβα – Άλγεβρα 8

0	;	0	2	+	1	2
2	3	1	3		2	4
3	;	2			3	
;	6		5			8
7	8	4	6		5	10

- E3: εστίαση της προσοχής σε εξωτερικά χαρακτηριστικά της εικόνας/εργαλείου (π.χ χρώμα, σχήμα, μέγεθος) που δε σχετίζονται με την επίλυση του έργου
- E4: αιτιολόγηση που βασίζεται σε άσχετα στοιχεία με το πρόβλημα/κατάσταση
- E194: παροχή απάντησης που δεν απαντά στο ερώτημα γιατί, πώς
- E61: ιδιοσυγκρασιακές περιγραφές για την προβληματική κατάσταση που δεν σχετίζονται με εντοπισμό μοτίβου ή του κανόνα για τη σχέση δύο μεταβλητών
- E49: ημιτελής επεξεργασία για εντοπισμό μοτίβου ή κανόνα για τη σχέση δύο μεταβλητών χωρίς δυνατότητα αλλαγής του τρόπου επεξεργασίας
- E40: αντιμετώπιση της ακολουθίας του μοτίβου ως μια διαδικασία συνεχούς λεκτικής περιγραφής για επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση μοτίβου
- E163: απουσία ξεκάθαρης αναφοράς του κανόνα του μοτίβου κατά την επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση του μοτίβου
- E164: περιγραφή και εφαρμογή του κανόνα του μοτίβου για επέκταση, συμπλήρωση ή μετάφραση του μοτίβου
- E159: ανάκληση και απαγγελία της ακολουθίας των αριθμών για συμπλήρωση ή επέκταση της διάταξης αριθμών χωρίς άμεσο εντοπισμό και αναφορά στη σχέση μεταξύ προηγούμενου και επόμενου αριθμού

- 
- E39: άμεση αναφορά στη διάταξη δύο οποιονδήποτε διαδοχικών αριθμών
  - E23: σύγκριση αριθμών χωρίς οπτική αναπαράσταση
  - E31: ανάκληση γνωστού αποτελέσματος
  - E54: χρήση γνωστών αποτελεσμάτων για εξαγωγή άλλων αποτελεσμάτων
  - E53: επιτυχής εύρεση των αντίστοιχων τιμών δύο μεταβλητών με κανόνα +2
  - E60: επιτυχής εύρεση των αντίστοιχων τιμών δύο μεταβλητών με πολλαπλασιαστική δομή
  - E48: ανεπιτυχής εύρεση όρων αριθμητικού κατακόρυφου μοτίβου με κανόνα +1
-

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

Υψηλού Βαθμού Καθοδηγούμενη Διερεύνηση με Χρήση Οθονών Αφής για το Μάθημα  
Ανάλυσης και Σύνθεσης Αριθμού

ΛΟΥΙΖΑ Λ. ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ

## ΜΑΘΗΜΑΤΑ 6 - 7

---

### *Ανάλυση και Σύνθεση Αριθμού*

**Στόχοι:**

- Οι μαθητές να αναλύουν και να συνθέτουν αριθμούς μέχρι 10.
- Οι μαθητές να επεξηγούν και να χρησιμοποιούν την αντιμεταθετική ιδιότητα στην πρόσθεση.

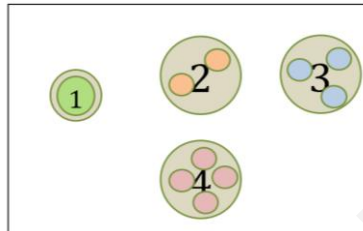
# ΠΑΙΧΝΙΔΙΑ ΓΙΑ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

## Δραστηριότητα 1



Να ανοίξεις το εφαρμογίδιο TouchCounts

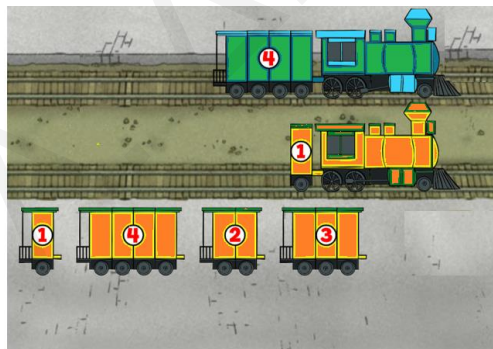
<https://itunes.apple.com/au/app/touchCounts/id897302197?mt=8> και να βρεις τον μεγαλύτερο αριθμό και τον μικρότερο αριθμό που μπορεί να δημιουργηθεί από δύο αριθμούς που δίνονται.



## Δραστηριότητα 2

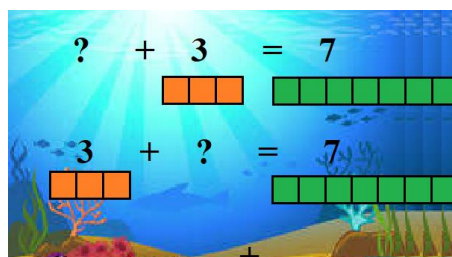


Να ανοίξεις το εφαρμογίδιο <https://pbskids.org/curiousgeorge/busyday/trains/> και να ακολουθήσεις τις οδηγίες.



## Δραστηριότητα 3

Να ανοίξεις το εφαρμογίδιο <https://www.mathbrix.com/1st-grade/forward-backward-commutative-property-of-addition> και να ακολουθήσεις τις οδηγίες.

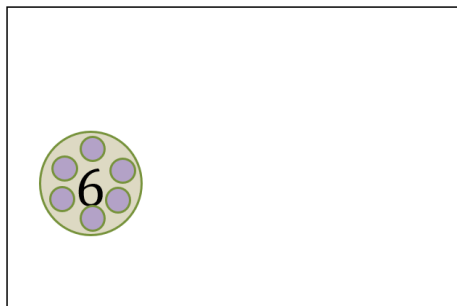


#### Δραστηριότητα 4



Να ανοίξεις το εφαρμογίδιο TouchCounts

<https://itunes.apple.com/au/app/touchcounts/id897302197?mt=8> και να βρεις όλα τα ζευγαράκια που δημιουργούν τον αριθμό 6.



Καθώς εργάζεσαι στο Touchcount να καταγράφεις τα αποτελέσματά σου στον πίνακα.

Ζευγάρια του 6		
6		
5		
4		
3		
2		
1		
0		

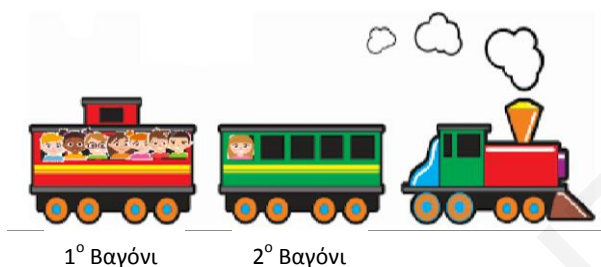


Ποια ζευγαράκια δεν χρειαζόταν να εξετάσεις ξανά;

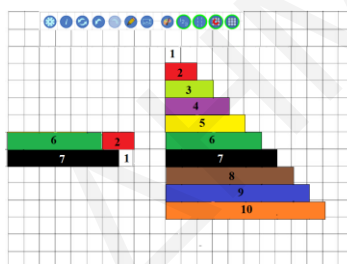
## ΓΙΝΕ ΣΤΑΘΜΑΡΧΗΣ ΤΡΕΝΟΥ !

### Δραστηριότητα 1

Στο πρώτο βαγόνι υπάρχουν 7 παιδιά και στο δεύτερο βαγόνι 1 παιδί. Σε κάθε στάση ένα παιδί από το πρώτο βαγόνι θα μετακινείται στο δεύτερο βαγόνι, μέχρι το πρώτο βαγόνι να αδειάσει εντελώς.



Να ανοίξεις το εφαρμογίδιο <https://itunes.apple.com/us/app/relational-rods-by-mathies/id960682555?mt=8> για να δείξεις με τις ράβδους τον αριθμό παιδιών των δύο βαγονιών σε κάθε στάση.



Να εξηγήσεις πώς αλλάζει ο αριθμός παιδιών στα δύο βαγόνια όσο το τρένο προχωρά.

Να συγκρίνεις τον τρόπο που εργάστηκες εδώ για να εντοπίσεις τα ζευγαράκια του 8 με τον τρόπο που εργάστηκες προηγουμένως για να βρεις τα ζευγαράκια του 6

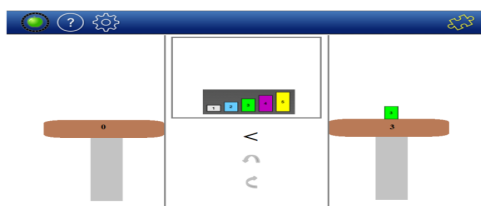
Κιβώτια που θα μεταφερθούν με τρένο



### Δραστηριότητα 2

Να ανοίξεις το εφαρμογίδιο <https://itunes.apple.com/us/app/balance-math/id703195971?mt=8>.

Να τοποθετήσεις στη μια ζυγαριά το πράσινο κιβώτιο. Να τοποθετήσεις όσα περισσότερα κιβώτια γίνεται στην άλλη μεριά της ζυγαριάς ώστε να ισορροπεί χωρίς να αλλάξεις κάτι στη μεριά που τοποθετήθηκε το πράσινο κιβώτιο.





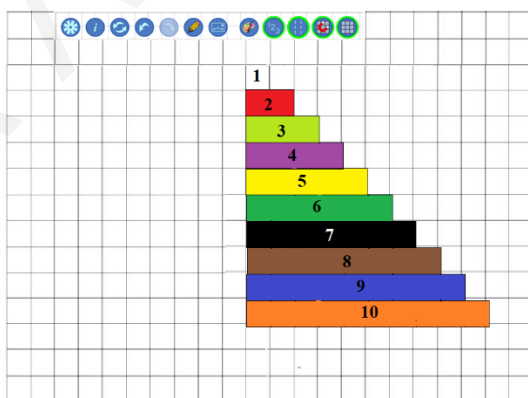
## ΣΧΕΔΙΑΣΕ ΤΟ ΣΠΙΤΙ !

Ο κύριος Στέφανος έχει ένα οικόπεδο που αποτελείται από 10 τετράγωνα. Σε αυτό θα κτίσει ένα σπίτι και στο υπόλοιπο θα φτιάξει έναν κήπο. Δεν θα μείνει κενός χώρος.

Να σχεδιάσεις ποια τετραγωνάκια μπορεί να καλύπτει το σπίτι και ποια ο κήπος. Ο κύριος Στέφανος θέλει το σπίτι να καλύπτει περισσότερα τετραγωνάκια από τον κήπο.



Να ανοίξεις το εφαρμογίδιο [www. https://itunes.apple.com/us/app/relational-rods-by-mathies/id960682555?mt=8](https://itunes.apple.com/us/app/relational-rods-by-mathies/id960682555?mt=8) για να αρχίσεις να σχεδιάζεις το σπίτι και τον κήπο του κυρίου Στέφανου.



Να εξηγήσεις στους συμμαθητές σου τον τρόπο που εργάστηκες και πώς σκέφτηκες για να σχεδιάσεις το σπίτι και τον κήπο.

## ΒΡΕΣ ΤΙΣ ΜΠΑΛΕΣ ΤΩΝ ΟΜΑΔΩΝ !

Πέντε ποδοσφαιρικές ομάδες (μπλε, κίτρινοι, άσπροι, κόκκινοι και πράσινοι) έκαναν προπόνηση στο ίδιο γήπεδο. Οι μπάλες τους μπερδεύτηκαν και αντί να μπουν σε πέντε καλάθια για να τις ξεχωρίζουν, κάποιες ενώθηκαν και έτσι είναι χωρισμένες σε 3 καλάθια.

Κάθε ομάδα είχε διαφορετικό αριθμό από μπάλες.

Οι μπάλες που έχουν τα τρία καλάθια φαίνονται πιο κάτω.



Να δείξεις πόσες μπάλες μπορεί να έχει κάθε ομάδα. Αν θέλεις μπορείς να χρησιμοποιήσεις το εφαρμογίδιο TouchCounts.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ

Χαμηλού Βαθμού Καθοδηγούμενη Διερεύνηση με Χρήση Οθονών Αφής για το Μάθημα  
Ανάλυσης και Σύνθεσης Αριθμού

ΛΟΥΙΖΑ Λ. ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ

## ΜΑΘΗΜΑΤΑ 6 - 7

---

### *Ανάλυση και Σύνθεση Αριθμού*

**Στόχοι:**

- Οι μαθητές να αναλύουν και να συνθέτουν αριθμούς μέχρι 10.
- Οι μαθητές να επεξηγούν και να χρησιμοποιούν την αντιμεταθετική ιδιότητα στην πρόσθεση.



## ΓΙΝΕ ΖΑΧΑΡΟΠΛΑΣΤΗΣ !

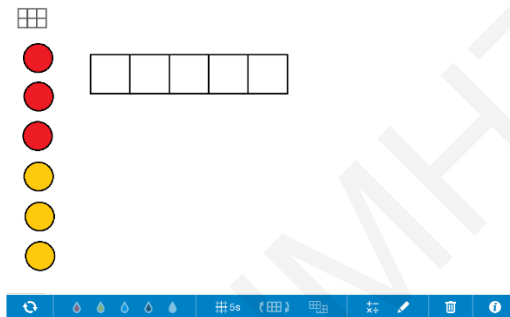


### Δραστηριότητα 1



Η Αναστασία έφτιαξε 2 σοκολατάκια φράουλας. Δεν γνωρίζουμε πόσα σοκολατάκια μπανάνας έφτιαξε. Γνωρίζουμε ότι όλα τα σοκολατάκια που έφτιαξε ήταν λιγότερα από 6.

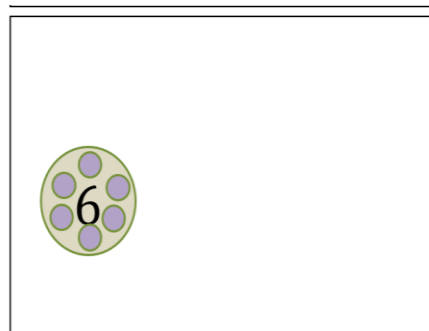
Να ανοίξεις το εφαρμογίδιο <https://itunes.apple.com/us/app/number-frames-by-mlc/id873198123?mt=8> και να δείξεις πόσα συνολικά σοκολατάκια έχει το κουτί της Αναστασίας. Να δείξεις όλες τις επιλογές που υπάρχουν.



### Δραστηριότητα 2



Να ανοίξεις το εφαρμογίδιο Touchcounts <https://itunes.apple.com/au/app/touchcounts/id897302197?mt=8> και να βρεις όλα τα ζευγαράκια που δημιουργούν τις 6 σταγόνες σοκολάτας που υπάρχουν στο μπισκότο.



Πώς μπορείς να εντοπίσεις τα ζευγαράκια του 6 πιο γρήγορα;

# ΓΙΝΕ ΣΤΑΘΜΑΡΧΗΣ ΤΡΕΝΟΥ !

## Δραστηριότητα 1

Σε ένα τρένο υπάρχουν 2 άδεια βαγόνια. Πρόκειται να ταξιδέψουν με αυτό 8 παιδιά.



Να ανοίξεις το εφαρμογίδιο <https://itunes.apple.com/us/app/relational-rods-by-mathies/id960682555?mt=8> για να δείξεις πόσα παιδιά θα μπουν σε κάθε βαγόνι.



Να επεξηγήσεις εάν συμφωνείς ή αν διαφωνείς με τις απόψεις των πιο κάτω μαθητριών. Αν διαφωνείς να τους εξηγήσεις πώς μπορούν να εργαστούν για να διορθώσουν το λάθος τους.



Πάντα το πρώτο βαγόνι θα έχει περισσότερα παιδιά από το δεύτερο βαγόνι.



Με τον τρόπο που εργάστηκα βρήκα 7 ζευγαράκια που σχηματίζουν τον αριθμό 8. Δεν έχει άλλα.

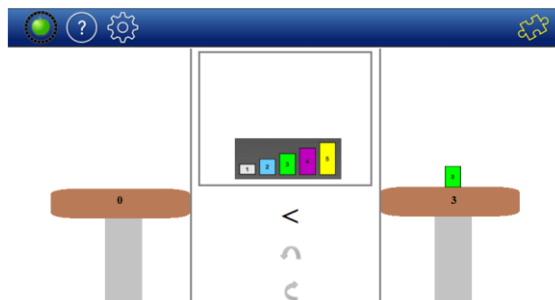
Κιβώτια που θα μεταφερθούν με τρένο



## Δραστηριότητα 2

Να ανοίξεις το εφαρμογίδιο <https://itunes.apple.com/us/app/balance-math/id703195971?mt=8>.

Να τοποθετήσεις στη μια μεριά της ζυγαριάς το πράσινο κιβώτιο. Να βρεις και να δείξεις όσο το δυνατό περισσότερους τρόπους ώστε να ισορροπήσει η ζυγαριά, χωρίς να αλλάξεις κάτι στη μεριά που τοποθετήθηκε το πράσινο κιβώτιο.



## ΣΧΕΔΙΑΣΕ ΤΟ ΣΠΙΤΙ !

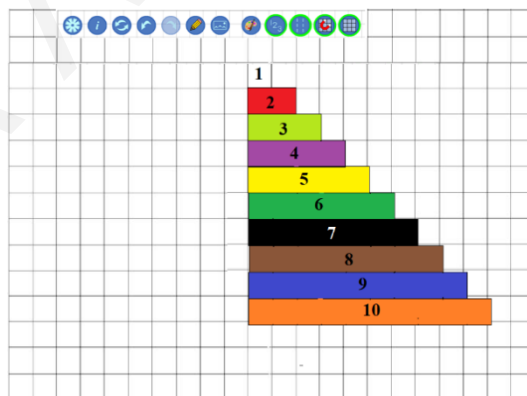


Ο κύριος Στέφανος έχει ένα οικόπεδο που αποτελείται από 10 τετράγωνα. Σε αυτό θα κτίσει ένα σπίτι και στο υπόλοιπο θα φτιάξει έναν κήπο. Δεν θα μείνει κενός χώρος.

Να σχεδιάσεις ποια τετραγωνάκια μπορεί να καλύπτει το σπίτι και ποια ο κήπος. Ο κύριος Στέφανος θέλει το σπίτι να καλύπτει περισσότερα τετραγωνάκια από τον κήπο.



Να ανοίξεις το εφαρμογίδιο [www. https://itunes.apple.com/us/app/relational-rods-by-mathies/id960682555?mt=8](https://itunes.apple.com/us/app/relational-rods-by-mathies/id960682555?mt=8) για να αρχίσεις να σχεδιάζεις το σπίτι και τον κήπο του κυρίου Στέφανου.



Να εξηγήσεις στους συμμαθητές σου τον τρόπο που εργάστηκες και πώς σκέφτηκες για να σχεδιάσεις το σπίτι και τον κήπο.

## ΒΡΕΣ ΤΙΣ ΜΠΑΛΕΣ ΤΩΝ ΟΜΑΔΩΝ !

Πέντε ποδοσφαιρικές ομάδες (μπλε, κίτρινοι, άσπροι, κόκκινοι και πράσινοι) έκαναν προπόνηση στο ίδιο γήπεδο. Οι μπάλες τους μπερδεύτηκαν και αντί να μπουν σε πέντε καλάθια για να τις ξεχωρίζουν, κάποιες ενώθηκαν και έτσι είναι χωρισμένες σε 3 καλάθια.

Κάθε ομάδα είχε διαφορετικό αριθμό από μπάλες.

Οι μπάλες που έχουν τα τρία καλάθια φαίνονται πιο κάτω.



Να δείξεις πόσες μπάλες μπορεί να έχει κάθε ομάδα. Αν θέλεις μπορείς να χρησιμοποιήσεις το εφαρμογίδιο TouchCounts.



## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε

Υψηλού Βαθμού Καθοδηγούμενη Διερεύνηση με Χρήση Οθονών Αφής για το Μάθημα  
Επαναλαμβανόμενα Μοτίβα

ΛΟΥΙΖΑ Λ. ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ

## ΜΑΘΗΜΑΤΑ 11-12

---

### *Επαναλαμβανόμενα Μοτίβα*

#### **Στόχοι:**

Οι μαθητές να αναγνωρίζουν και να περιγράφουν επαναλαμβανόμενα μοτίβα (μορφής AB, ABΓ, AAB, ABB).

Οι μαθητές να συμπληρώνουν και να επεκτείνουν επαναλαμβανόμενα μοτίβα (μορφής AB, ABΓ, AAB, ABB).

Οι μαθητές να κατασκευάζουν επαναλαμβανόμενα μοτίβα (μορφής AB, ABΓ, AAB, ABB).

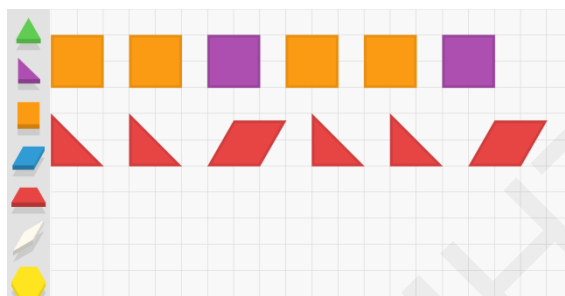




## Δραστηριότητα 1

Να ανοίξεις το εφαρμογίδιο <https://apps.mathlearningcenter.org/pattern-shapes/> και να αντιγράψεις τα μοτίβα που βλέπεις πιο κάτω στο εφαρμογίδιο.

Ο Μάρκος πιστεύει ότι τα δύο μοτίβα μοιάζουν πολύ. Να εξηγήσεις εάν συμφωνείς με τον Μάρκο.



## Δραστηριότητα 2



Να ανοίξεις το εφαρμογίδιο <http://www.scottle.edu.au/ec/viewing/L494/index.html> και να ακολουθήσεις τις οδηγίες.



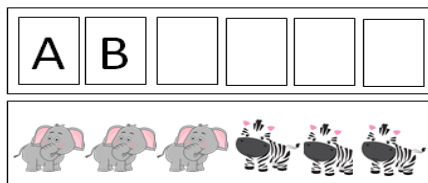
Ποιο τερατάκι χρησιμοποίησες 1<sup>ο</sup>, 2<sup>ο</sup>, 3<sup>ο</sup>, 4<sup>ο</sup> ... Γιατί;  
Υπάρχει κάτι που επαναλαμβάνεται συνέχεια  
Τι σε βοήθησε κάθε φορά ώστε να επιλέξεις το συγκεκριμένο τερατάκι;



### Δραστηριότητα 3

Να ανοίξεις το εφαρμογίδιο <https://itunes.apple.com/us/app/patterns-includes-3-pattern-games-in-1-app/id1111322024?mt=8> και να κατασκευάσεις μοτίβα σύμφωνα με τις οδηγίες.

CAN YOU MAKE THE PATTERN?

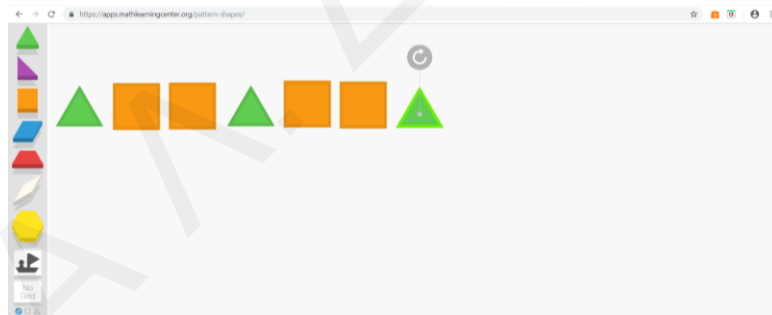


Ποιο ζώακι χρησιμοποίησες πρώτο, δεύτερο για να φτιάξεις το μοτίβο;  
Τι είναι αυτό που επαναλαμβάνεται συνεχώς ώστε να δημιουργείται το μοτίβο;



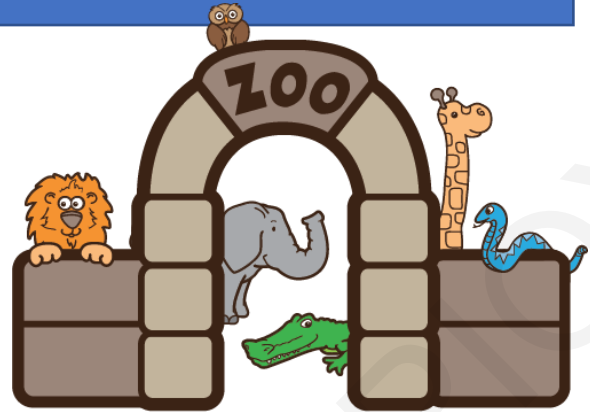
### Δραστηριότητα 4

Να ανοίξεις το εφαρμογίδιο <https://apps.mathlearningcenter.org/pattern-shapes/> και να κατασκευάσεις όσα περισσότερα διαφορετικά μοτίβα μπορείς στα οποία να υπάρχει εναλλαγή: (α) χρώματος και σχήματος, (β) μόνο χρώματος, και (γ) μόνο σχήματος.



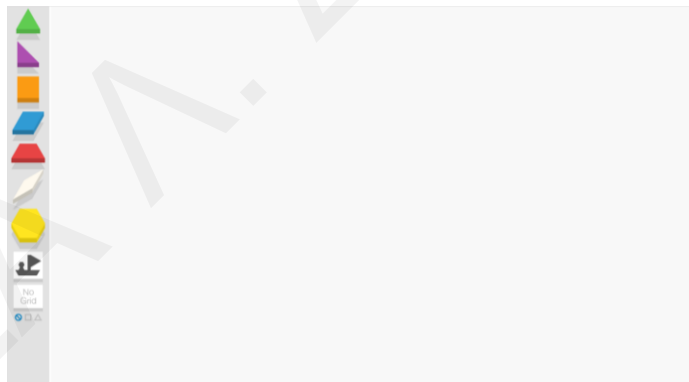
Να εξηγήσεις στους συμμαθητές σου ποιο ή ποια κριτήρια χρησιμοποίησες για να φτιάξεις το κάθε μοτίβο.

## ΓΙΝΕ Ο ΠΙΟ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΣ ΕΛΑΙΟΧΡΩΜΑΤΙΣΤΗΣ !



Ο Ζωολογικός κήπος χρειάζεται ανανέωση. Ο υπεύθυνος του κήπου θα κάνει έναν διαγωνισμό για να βρει τον ελαιοχρωματιστή που θα βάψει τους τοίχους του κήπου με το πιο παράξενο μοτίβο! Το πιο παράξενο μοτίβο πρέπει να περιλαμβάνει περισσότερα από δύο χρώματα και περισσότερα από δύο σχήματα.

Να ανοίξεις το εφαρμογίδιο <https://apps.mathlearningcenter.org/pattern-shapes/> για να αρχίσεις να φτιάχνεις το μοτίβο που θα διακοσμήσει τον τοίχο του ζωολογικού κήπου.

























































Να εξηγήσεις τα κριτήρια με τα οποία σκέφτηκες να φτιάξεις το μοτίβο σου.

## ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΕ ΤΑ ΜΟΤΙΒΑ !



Η Άννα λέει ότι τα πιο κάτω μοτίβα ομαδοποιούνται σε 3 ακριβώς ομάδες.  
Να ομαδοποιήσεις τα μοτίβα και να εξηγήσεις τον τρόπο που σκέφτηκες.

κάρτα 1									
κάρτα 2									
κάρτα 3									
κάρτα 4									
κάρτα 5									
κάρτα 6									

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΤ

Χαμηλού Βαθμού Καθοδηγούμενη Διερεύνηση με Χρήση Οθονών Αφής για το Μάθημα  
Επαναλαμβανόμενα Μοτίβα

ΛΟΥΙΖΑ Λ. ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ



## ΜΑΘΗΜΑΤΑ 11-12

---

### *Επαναλαμβανόμενα Μοτίβα*

**Στόχοι:**

Οι μαθητές να αναγνωρίζουν και να περιγράφουν επαναλαμβανόμενα μοτίβα (μορφής AB, ABΓ, AAB, ABB).

Οι μαθητές να συμπληρώνουν και να επεκτείνουν επαναλαμβανόμενα μοτίβα (μορφής AB, ABΓ, AAB, ABB).

Οι μαθητές να κατασκευάζουν επαναλαμβανόμενα μοτίβα (μορφής AB, ABΓ, AAB, ABB).

# ΠΑΙΧΝΙΔΙΑ ΓΙΑ ΕΥΡΕΣΗ ΜΟΤΙΒΩΝ !

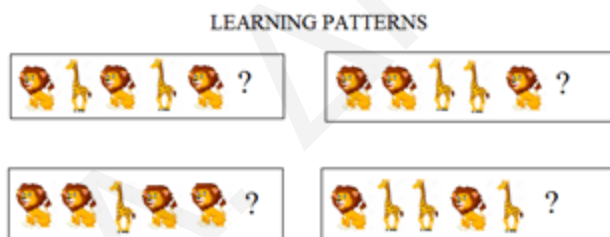
## Δραστηριότητα 1

Να ανοίξεις το εφαρμογίδιο <http://www.scottle.edu.au/ec/viewing/L1056/index.html> για να συνεχίσεις το μοτίβο με τους ήχους.



## Δραστηριότητα 2

Να ανοίξεις το εφαρμογίδιο <https://itunes.apple.com/ca/app/learning-patterns-pattern-logic-game-for-kids/id717236674?mt=8> για να συνεχίσεις τα μοτίβα.

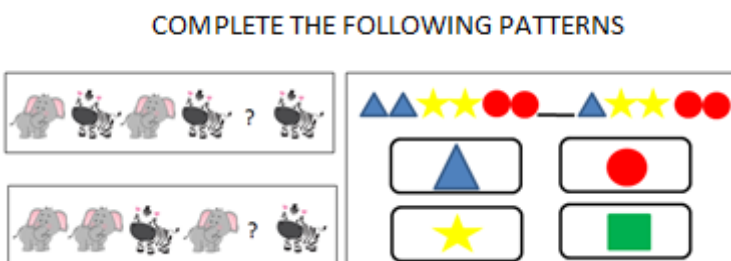


Να εξηγήσεις στον διπλανό σου σε τι μοιάζουν και σε τι διαφέρουν τα πιο πάνω μοτίβα.



## Δραστηριότητα 3

Να ανοίξεις το εφαρμογίδιο <https://itunes.apple.com/us/app/patterns-includes-3-pattern-games-in-1-app/id1111322024?mt=8> και το εφαρμογίδιο <https://www.education.com/game/shape-patterns-quiz/> για να συμπληρώσεις τα μοτίβα.





## Δραστηριότητα 1



Να ανοίξεις το εφαρμογίδιο <http://www.scottle.edu.au/ec/viewing/L494> ακολουθήσεις τις οδηγίες.



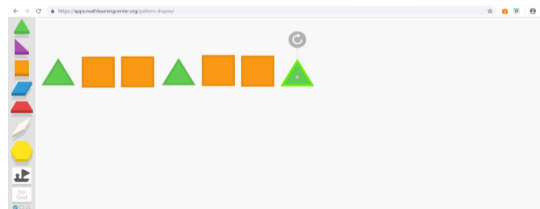
## Δραστηριότητα 2

Να ανοίξεις το εφαρμογίδιο <https://www.education.com/game/make-your-own-pattern/> και να κατασκευάσεις το μοτίβο με τα ζώα.



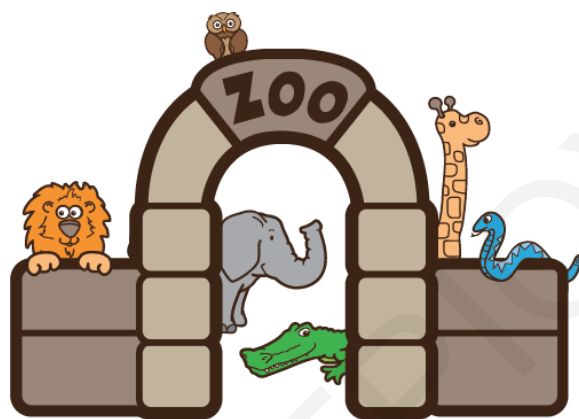
## Δραστηριότητα 3

Να ανοίξεις το εφαρμογίδιο <https://apps.mathlearningcenter.org/pattern-shapes/> και να κατασκευάσεις όσα περισσότερα διαφορετικά μοτίβα μπορείς.



Να εξηγήσεις στους συμμαθητές σου ποιο ή ποια κριτήρια χρησιμοποίησες για να φτιάξεις το κάθε μοτίβο.

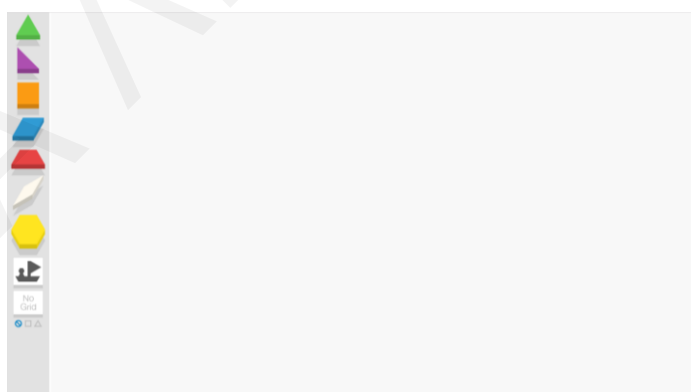
## ΓΙΝΕ Ο ΠΙΟ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΣ ΕΛΑΙΟΧΡΩΜΑΤΙΣΤΗΣ !



Copyright Homemade-Preschool.com

Ο Ζωολογικός κήπος χρειάζεται ανανέωση. Ο υπεύθυνος του κήπου θα κάνει έναν διαγωνισμό για να βρει τον ελαιοχρωματιστή που θα βάψει τους τοίχους του κήπου με το πιο παράξενο μοτίβο! Το πιο παράξενο μοτίβο πρέπει να περιλαμβάνει περισσότερα από δύο χρώματα και περισσότερα από δύο σχήματα.

Να ανοίξεις το εφαρμογίδιο <https://apps.mathlearningcenter.org/pattern-shapes/> για να αρχίσεις να φτιάχνεις το μοτίβο που θα διακοσμήσει τον τοίχο του ζωολογικού κήπου.
















































Να εξηγήσεις τα κριτήρια με τα οποία σκέφτηκες να φτιάξεις το μοτίβο σου.

## ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΕ ΤΑ ΜΟΤΙΒΑ !



Η Άννα λέει ότι τα πιο κάτω μοτίβα ομαδοποιούνται σε 3 ακριβώς ομάδες.  
Να ομαδοποιήσεις τα μοτίβα και να εξηγήσεις τον τρόπο που σκέφτηκες.

κάρτα 1									
κάρτα 2									
κάρτα 3									
κάρτα 4									
κάρτα 5									
κάρτα 6	