ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΔΙΑΤΡΙΒΗ MASTER

Το Πρόβλημα του Εμποδίου

Ειρήνη Αλεξάνδρου

Επιβλέπων:
Δρ. Εμμανουήλ Μηλάκης

7 Ιουνίου 2021

The research work of E. Milakis is co-funded by the European Regional Development Fund and the Republic of Cyprus through the Research and Innovation Foundation (Project: EXCELLENCE/1216/0025)

Republic of Cyprus

European Union
European Regional
Development Fund

Structural Funds
of the European Union in Cyprus

University
of Cyprus

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της πτυχιακής μου εργασίας, αισθάνομαι την ανάγκη να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου σε όσους συνέβαλαν στην ολοκλήρωση αυτής της προσπάθειας.

Κατ′ αρχήν, θα ήθελα να εκφράσω τις ειλικρινείς και θερμές μου ευχαριστίες στον Αναπληρωτή Καθηγητή και επιβλέποντα της διατριβής μου κ. Εμμανουήλ Μηλάκη, για την αμέριστη υποστήριξη, καθοδήγηση και ενθάρρυνση που μου παρείχε κατά τη διάρκεια της συγγραφής της παρούσας εργασίας, καθώς επίσης και για την εμπιστοσύνη που έδειξε προς το πρόσωπό μου.

Τέλος, θα επιθυμούσα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και ορισμένους πολύ αγαπητούς και αξιόλογους ανθρώπους, που με κατανόηση, επιμονή και υπομονή στάθηκαν δίπλα μου στηρίζοντας κάθε μου απόφαση όλο αυτό το διάστημα.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή περιλαμβάνεται στη γενική περιοχή των γραμμικών Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων και στη λεγόμενη Θεωρία των Ελεύθερων Συνόρων. Οι Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις (ΜΔΕ) είναι ίσως ο πιο σημαντικός σύνδεσμος μεταξύ των Μαθηματικών και άλλων επιστημών. Τα μοντέλα που εμφανίζονται στη Φυσική, τη Βιολογία, τα Χρηματοοικονομικά κ.λπ., περιγράφονται μέσω των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων και η μαθηματικά αυστηρή θεμελίωση είναι απαραίτητη για την κατανόηση και επίλυση των αντίστοιχων προβλημάτων. Ο κύριος σκοπός αυτού του έργου είναι να μελετήσει τη μαθηματική μεθοδολογία που θεωρείται ευρέως κατάλληλη για μια αυστηρή μαθηματική ανάλυση των ερωτήσεων που περιλαμβάνονται στον τομέα των προβλημάτων Ελεύθερων Συνόρων και ειδικότερα σε προβλήματα τύπων Εμποδίου. Αυτά τα θεωρητικά προβλήματα προκύπτουν με φυσικό τρόπο κατά τη μελέτη διαφόρων φαινομένων. Υποκινούνται από εφαρμογές στη θεωρία ελαστικότητας, στη θεωρία αλλαγής φάσης υλικών, στις ροές υγρών και ερωτήσεων στο γενικό πεδίο της βελτιστοποίησης σχημάτων. Η περιοχή, λόγω της φύσης των προβλημάτων (άμεση σχέση με την τεχνολογία, φυσικές και οικονομικές επιστήμες) παραμένει εξαιρετικού ενδιαφέροντος. Ο κύριος σκοπός της παρούσας διατριβής είναι η παρουσίαση της ομαλότητας της λύσης, όπως αυτή μπορεί να επιτευχθεί για το κλασικό πρόβλημα του Εμποδίου. Στο κεφάλαιο 1 δίνουμε κάποια εισαγωγικά στοιχεία μαζί με την απλούστερη μοντελοποίηση των προβλημάτων τύπου Εμποδίου καθώς και μια γνωστή εφαρμογή όπου ο αναγνώστης μπορεί να δει πώς προκύπτει ένα απλό Πρόβλημα Εμποδίου. Στο κεφάλαιο 2 δίνουμε κάποια χρήσιμα εργαλεια, που θα χρειαστούμε σχετικά με τους χώρους *Sobolev* και την σύγκλιση. Στο κεφάλαιο 3 κάνουμε μία σύντομη αναφορά στο Λογισμό των Μεταβολών και την ελαχιστοποίηση ενεργειών. Στο κεφάλαιο 4 παραθέτουμε το Πρόβλημα Εμποδίου, αποδεικνύοντας ύπαρξη μοναδικής λύσης, καθώς και χρήσιμες ιδιότητες της λύσης. Στο κεφάλαιο 5 μελετούμε τις ιδιότητες διαφορησιμότητας της λύσης του Προβλήματος Εμποδίου. Στο κεφάλαιο 6 εξετάζουμε την Ομαλότητα της Λύσης και των Παραγώγων της. Τέλος στο κεφάλαιο 7 δίνουμε ένα παραβολικό τύπο *Almgren* που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δώσει μια διαφορετική απόδειξη της βέλτιστης ομαλότητας ως προς τη χωριακή μεταβλητή για τη λύση στο πρόβλημα το κλασματικού Λεπτού Εμποδίου. Το μεγαλύτερο μέρος της παρούσας διατριβής στηρίχθηκε στις σημειώσεις[4].

Τα προβλήματα εμποδίων χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι η λύση πρέπει να ικανοποιεί μονομερείς περιορισμούς, δηλαδή πρέπει να παραμείνει, στο πεδίο ορισμού της, ή σε μέρος αυτού, πάνω από μια δεδομένη συνάρτηση, το λεγόμενο εμπόδιο. Το κλασικό Πρόβλημα εμποδίου συνίσταται στην περιγραφή του σχήματος μιας ελαστικής μεμβράνης που βρίσκεται στην κορυφή ενός δεδομένου εμποδίου φ. Δηλαδή, αναζητούμε μια συνάρτηση u (το σχήμα της μεμβράνης) που παραμένει πάνω από το εμπόδιο φ σε ένα χωρίο Ω, έχει δεδομένες συνοριακές τιμές στο $\partial\Omega$ και ελαχιστοποιεί το ολοκλήρωμα *Dirichlet* (ενέργεια). Ένα δεύτερο δημοφιλές πρόβλημα είναι το λεπτό πρόβλημα εμποδίου (ή πρόβλημα *Signorini*). Στο πρόβλημα αυτό ο περιορισμός $u(x) \geq \varphi(x)$ ζητείται μόνο για τις τιμές του x που βρίσκονται σε κάποια επιφάνεια D συν-διάστασης 1 μέσα στο Ω. Μπορεί να θεωρείται ως μοντέλο που περιγράφει το σχήμα μιας ελαστικής μεμβράνης που έχει προσκολληθεί πάνω από ένα πολύ λεπτό εμπόδιο. Στις εφαρμογές εμφανίζεται κατά τη μελέτη της συγκέντρωσης φυσιολογικού ορού στη μία πλευρά μιας ημιπερατής μεμβράνης ιδιαιτέρως στις κυτταρικές δομές, στα χρηματοοικονομικά μαθηματικά κατά την τιμολόγηση ομολόγων αμερικανικού τύπου, κατά πάσα πιθανότητα στη θεωρία των διαδικασιών τύπου *Markov* (δείτε [5], [6]) και σε βέλτιστα προβλήματα ελέγχου θερμοκρασίας σε επιφάνειες (για λεπτομερή περιγραφή των εφαρμογών στη δυναμική υγρών δείτε το βιβλίο [8]). Στην απλούστερη ελλειπτική περίπτωση, η συνάρτηση u είναι αρμονική μακριά από το σύνολο επαφής και υποαρμονική οπουδήποτε αλλού. Τα βασικά μαθηματικά προβλήματα αφορούν την ομαλότητα της λύσης και την ομαλότητα του ελεύθερο συνόρου της (δηλαδή το σύνολο όπου η μεμβράνη αφήνει το εμπόδιο). Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε σύντομα να συνδέσουμε το Λογισμό Μεταβολών με το Κλασσικό πρόβλημα του Εμποδίου, και να δούμε κάποιες τυπικές εφαρμογές του. Εκτενής συζήτηση για τη Θεωρία Μεταβολών γίνεται στο επόμενο κεφάλαιο. Έστω Ω ένα φραγμενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και

$$g \in W^{1,2}(\Omega), \quad f \in L^{\infty}(\Omega).$$

Ο ελαχιστοποιητής του συναρτησοειδούς

$$J(u) = \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + 2fu)\, dx$$

πάνω στο σύνολο

$$\mathcal{A} = \{u \in W^{1,2}(\Omega) : \; u - g \in W_0^{1,2}(\Omega)\}$$

επιλύει το πρόβλημα *Poisson*

$$\begin{cases} -\Delta u + f = 0 & \text{στο} \;\; \Omega \\ u = g & \text{στο} \;\; \partial\Omega \end{cases}$$

με την έννοια των κατανομών, δηλαδή

$$\int_{\Omega} (\nabla u \nabla \phi + f\phi)\, dx = 0$$

για όλες τις συναρτήσεις δοκιμής $\phi \in C_0^{\infty}(\Omega)$.

Έστω τώρα ότι μας δίνεται γνωστή συνάρτηση $\psi \in C^2(\Omega)$, το λεγόμενο εμπόδιο, που ικανοποιεί τη συνθήκη συμβιβαστότητας

$$\psi \leq g \;\; \text{στο} \;\; \partial\Omega$$

υπό την έννοια ότι $(\psi - g)^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Ελαχιστοποιούμε το συναρτησοειδές

$$J(u) = \int_\Omega (|\nabla u|^2 + 2fu)\ dx$$

αλλά τώρα πάνω από το καινούργιο σύνολο

$$\mathcal{A} = \{u \in W^{1,2}(\Omega) :\ u - g \in W_0^{1,2}(\Omega),\ u \geq \psi \ \text{ σχεδόν παντού στο } \ \Omega\}.$$

Όπως και στο πρόβλημα της Αρχής του *Dirichlet*, μπορούμε να σκεφτούμε το γράφημα της u ως μια μεμβράνη που στηρίζεται σε ένα έλασμα (τα συνοριακά δεδομένα). Τώρα όμως το γράφημα της u πρέπει να παραμένει πάνω από το γράφημα της ψ. Το καινούργιο στοιχείο στην κατάσταση αυτή είναι οτι υπάρχει υποσύνολο (ή υποσύνολα) του Ω όπου η μεμβράνη ακουμπά το εμπόδιο. Το σύνολο επαφής $\Lambda := \{u = \psi\}$ είναι πιθανόν μη-κενό ενώ το σύνολο $\Gamma := \partial\Lambda \cap \Omega$ ονομάζεται Ελεύθερο Σύνορο και είναι εκ των προτέρων άγνωστο. Με μεθόδους αποκοπής (*penalization methods*) μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega), \quad \text{για κάθε} \quad 1 < p < \infty$$

και άρα απο το Θεώρημα Εμφύτευσης (*Sobolev*) θα έχουμε

$$u \in C^{1,\alpha}_{loc}(\Omega), \quad \text{για κάθε} \quad 0 < \alpha < 1.$$

Οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{στο } \ \{u > \psi\} \\ \Delta u = \Delta\psi & \text{σχεδον παντού στο } \ \{u = \psi\}. \end{cases}$$

και επιπλέον, $\Delta u \leq f$ στο Ω (με την έννοια των κατανομών). Δηλαδή, η λύση στο Πρόβλημα του Εμποδίου είναι μια συνάρτηση $u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ για κάθε

$1 < p < \infty$, η οποία ικανοποιεί

$$\begin{cases} -\Delta u + f \geq 0 & \text{σχεδον παντού στο } \Omega \\ u \geq \psi & \text{σχεδον παντού στο } \Omega \\ (-\Delta u + f)(u - \psi) = 0 & \text{σχεδον παντού στο } \Omega \\ u - g \in W_0^{1,2}(\Omega). \end{cases}$$

Με άλλα λόγια το Πρόβλημα του Εμποδίου είναι ένα πρόβλημα Συμπληρωματικότητας το οποίο χαρακτηρίζει με μοναδικό τρόπο τους ελαχιστοποιητές. Η συνθήκη συμπληρωματικότητας συχνά γράφεται ως

$$\min\{-\Delta u + f, u - \psi\} = 0.$$

Στην περίπτωση τώρα του Προβλήματος Λεπτού Εμποδίου, θεωρούμε Ω ένα φραγμένο χωρίο στον $\mathbb{R}^n$ και M είναι μια ομαλή $(n-1)-$διάστατη πολλαπλότητα. Έστω ότι το M χωρίζει το Ω σε δυο μέρη: τα Ω^+ και Ω^-. Οι συναρτήσεις $\psi : M \to \mathbb{R}$, $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ είναι δεδομένες, τέτοιες ώστε $g > \psi$ στο $M \cap \partial\Omega$. Το πρόβλημα του Λεπτού Εμποδίου προκύπτει αν ελαχιστοποιούμε το συναρτησοειδές

$$J(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx$$

πάνω στο σύνολο

$$\mathcal{A} = \{u \in W^{1,2}(\Omega) : \; u = g \text{ στο } \partial\Omega \text{ και } u \geq \psi \text{ στο } M \cap \Omega\}.$$

Η συνάρτηση ψ είναι το λεπτό εμπόδιο και η κύρια διαφορά σε σχέση με το κλασικό Πρόβλημα Εμποδίου έγκειται στο γεγονός ότι ο έξτρα περιορισμός (η λύση να παραμένει πάνω από το εμπόδιο) ζητείται μόνο στο M και όχι σε ολόκληρο το Ω.

1.1 Ένα απλό Πρόβλημα Εμποδίου

Στη θεωρία ελέγχου πρέπει να βρούμε μια βέλτιστη επιλογή στρατηγικής έτσι ώστε ένα λειτουργικό κόστος ή κέρδος να γίνει ελάχιστο ή μέγιστο. Θεωρούμε το χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ φραγμένο, ομαλό και έστω $x \in \Omega$. Θεωρούμε μια κίνηση *Brown*, την οποία συμβολίζουμε με W_x τέτοια ώστε $W_x(0) = x$. Έστω ότι $\tau = \tau_x$ είναι η χρονική στιγμή που η κίνηση χτυπάει στο σύνορο $\partial\Omega$ και θ είναι ο χρόνος τερματισμού (σε σχέση με την υποκείμενη διήθηση για την κίνηση του *Brown*). Για f και g στο $\overline{\Omega}$, ορίζουμε το αναμενόμενο κέρδος της παύσης (τερματισμού) της κίνησης *Brown* τη χρονική στιγμή $\theta \wedge \tau := \min(\theta, \tau)$ ως

$$J_x(\theta) := \mathbb{E}\left[\int_0^{\theta\wedge\tau} \frac{1}{2} f(W_x(s))\, ds + g(W_x(\theta \wedge \tau))\right]$$

όπου με $\mathbb{E}$ συμβολίζουμε την αναμενόμενη τιμή (μέση τιμή). Μεγιστοποιούμε τώρα ως προς όλους τους πιθανούς χρόνους παύσης (*stopping times*) και ορίζουμε

$$u(x) := \sup_{\theta\ -\ stopping\ time} J_x(\theta).$$

Η τιμή $u(x)$ είναι το μέγιστο αναμενόμενο κέρδος, αν ξεκινήσουμε τη διαδικασία στο σημείο x. Η φυσιολογική ερώτηση που τίθεται είναι αν υπάρχει βέλτιστος χρόνος παύσης $\theta^* = \theta^*_x$ για τον οποίο

$$J_x(\theta^*) = \max_{\theta} J_x(\theta),$$

και αν υπάρχει πως μπορούμε να βρούμε το θ^*. Η ερώτηση αυτή είναι αρκετά δύσκολη, και εκ των πραγμάτων θα πρέπει να στρέψουμε την προσοχή μας στη συνάρτηση $u(x)$. Προκύπτει ότι, μόλις υπολογίσουμε τη συνάρτηση u, μπορούμε φυσιολογικά να κατασκευάσουμε ένα βέλτιστο θ^*. Η προσέγγιση αυτή ονομάζεται Δυναμικός Προγραμματισμός. Ας δούμε τώρα μερικές ιδιότητες της συνάρτησης u. Καταρχήν, μπορούμε να υποθέσουμε $\theta = 0$, δηλαδή να σταματήσουμε εξ' αρχής τη διαδικασία και να συλλέξουμε το κέρδος $g(x)$, άρα

$$u(x) \geq g(x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \Omega.$$

Επιπλέον $\tau = 0$ αν $x \in \partial\Omega$, άρα

$$u(x) = g(x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \partial\Omega.$$

Θεωρούμε τώρα οποιοδήποτε σημείο $x \in \Omega$ και σταθεροποιούμε ένα $\delta > 0$. Αν δεν παύσουμε το φαινόμενο για χρόνο δ τότε, με βάση την αντίστοιχη Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση, η νέα κατάσταση στο χρόνο δ θα πρέπει να είναι $W_x(\delta)$. Τότε, δεδομένου ότι βρισκόμαστε πλέον στο σημείο $W_x(\delta)$, το χειρότερο που μπορούμε να αναμένουμε από κει και πέρα, κατά τη μεγιστοποίηση του κέρδους είναι $u(W_x(\delta))$. Άρα, αν αποφασίσουμε να μην σταματήσουμε τη διαδικασία για χρόνο δ, και υποθέτοντας ότι δεν έχουμε κτυπήσει στο σύνορο $\partial\Omega$, το κέρδος είναι

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\delta f(W_x(s))\ ds + u(W_x(\delta))\right].$$

Αφού τώρα η $u(x)$ είναι το *supremum* των κερδών ως προς όλους τους χρόνους παύσης, θα έχουμε

$$u(x) \geq \mathbb{E}\left[\int_0^\delta f(W_x(s))\ ds + u(W_x(\delta))\right].$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του *Itô* προκύπτει ότι

$$\mathbb{E}\left[u(W_x(\delta))\right] = u(x) + \mathbb{E}\left[\int_0^\delta Lu(W_x(s))\ ds\right]$$

όπου $Lu = -\Delta u$. Άρα

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\delta \left(f(W_x(s)) + Lu(W_x(s))\right)\ ds\right] \leq 0.$$

Διαιρούμε με το $\delta > 0$ και στη συνέχεια στέλνουμε το $\delta \to 0^+$ και έχουμε

$$-\Delta u \geq f \quad \text{στο} \quad \Omega.$$

Τέλος παρατηρούμε ότι παρόλο που

$$u(x) \geq g(x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \Omega$$

αν η αυστηρή ανισότητα ισχύει, δηλαδή

$$u(x) > g(x) \quad \text{για κάποιο} \quad x \in \Omega$$

τότε δεν θα είναι η στρατηγική βέλτιστη αν σταματήσουμε τη διαδικασία αμέσως (όπως περιγράψαμε νωρίτερα). Αφήνουμε το σύστημα λοιπόν να εξελιχθεί για μικρό χρόνο δ και ο τύπος παραπάνω θα δώσει

$$-\Delta u = f$$

για τα σημεία όπου $u > g$, δηλαδή

$$\begin{cases} -\Delta u \geq f & \text{στο } \Omega \\ (-\Delta u - f)(u - g) = 0 & \text{στο } \Omega \\ u \geq g & \text{στο } \Omega \\ u = g & \text{στο } \partial\Omega. \end{cases}$$

Το πρόβλημα αυτό δεν είναι τίποτε άλλο από ένα πρόβλημα εμποδίου (με δεξιό μέλος) για την u στο Ω με εμπόδιο τα συνοριακά δεδομένα $g(x)$!

Κεφάλαιο 2

Χώροι *Sobolev* και ασθενής σύγκλιση

Σε αυτή την ενότητα θα δούμε χρήσιμα εργαλεία για την σύγκλιση συναρτήσεων, τα οποία θα χρειαστούμε για να αποδείξουμε την ύπαρξη ελαχιστοποιητή σε ενέργειες.

Στην ανάλυση μελετάμε την σύγκλιση ακολουθιών. Πιο συγκεκριμένα, στο λογισμό των μεταβολών μας ενδιαφέρουν κυρίως ακολουθίες συναρτήσεων $u^j(x)$ για τις οποίες ισχύει ότι:

$$\int_D |\nabla u^j(x)|^2 dx \leq C \tag{2.0.1}$$

για δεδομένο χωρίο D και σταθερά C, δηλαδή οι παραγώγοι των $u^j(x)$ είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες.

Ορισμός 2.1. *Έστω $D \subset \mathbb{R}^n$. Ορίζουμε $L^2(D)$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων $u(x)$ στο D τέτοιες ώστε*

$$\|u\|_{L^2(D)} = \left(\int_D |u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \tag{2.0.2}$$

Θεώρημα 2.1. *Ο χώρος $L^2(D)$ με τη νόρμα $\|.\|_{L^2(D)}$ είναι πλήρης.*

Απόδειξη. Έστω $(u_n) \in L^2(D)$ ακολουθία *Cauchy*, δηλαδή $\forall \epsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}$

έτσι ώστε $\forall n_0, n_1 \geq m$

$$\|u_{n_0} - u_{n_1}\|_{L^2(D)} \leq \epsilon.$$

Έστω $\epsilon = \frac{1}{2^k}, k \in \mathbb{N}$. Για συνάρτηση $g \in L^2(D)$ μη μηδενική, από την ανισότητα $Cauchy - Schwarz$ προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}\int_D |(u_{n_k}(x) - u_{n_{k+1}}(x))g(x)|dx &\leq \left\|u_{n_k} - u_{n_{k+1}}\right\|_{L^2(D)} \|g\|_{L^2(D)} \\ &\leq \frac{1}{2^k} \|g\|_{L^2(D)}\end{aligned}$$

Μπορούμε να κάνουμε εναλλαγή αθροίσματος ολοκληρώματος, επομένως εφόσον το ολοκλήρωμα είναι πεπερασμένο ισχύει ότι:

$$g(x) \sum_{k=1}^{\infty} |u_{n_k} - u_{n_{k+1}}| < +\infty$$

σχεδόν παντού στο D. Επομένως

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_{n_k} - u_{n_{k+1}}| < +\infty$$

σχεδόν παντού στο D. Άρα υπάρχει συνάρτηση $u(x)$ τέτοια ώστε

$$\lim_{k \to \infty} u_{n_k}(x) = u(x)$$

Από το Θεώρημα του $Fatou$ επιλέγουμε $n_k > m$ και άρα ισχύει ότι:

$$\|u - u_{n_k}\|_{L^2(D)} < \liminf_{i \to \infty} \|u_{n_i} - u_{n_k}\|_{L^2(D)} < \epsilon$$

Η τελευταία σχέση ισχύει εφόσον η ακολουθία u_n είναι ακολουθία $Cauchy$ και άρα $u - u_{n_k} \in L^2(D)$. Επομένως

$$u = u - u_{n_k} + u_{n_k} \Rightarrow u \in L^2(D)$$

Τέλος

$$\|u - u_n\|_{L^2(D)} \leq \|u - u_{n_k}\|_{L^2(D)} + \|u_{n_k} - u_n\|_{L^2(D)} < \epsilon$$

Επομένως ο $L^2(D)$ με την $\|.\|_L^2(D)$ είναι πλήρης. $\square$

Παρατήρηση 2.2. Το Θεώρημα 2.1 δεν ισχύει γενικά για *Riemann* ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Για παράδειγμα η $u^j(x) \in L^2(D)$, η οποία ορίζεται ως εξής:

$$u^j(x) = \begin{cases} 1, & \gamma\iota\alpha\ x\ \epsilon\nu\alpha\varsigma\ \alpha\pi o\ \tau o\upsilon\varsigma\ j\ \pi\rho\omega\tau o\upsilon\varsigma\ \rho\eta\tau o\upsilon\varsigma\ \alpha\rho\iota\theta\mu o\upsilon\varsigma \\ 0, & \delta\iota\alpha\phi o\rho\epsilon\tau\iota\kappa\alpha \end{cases}$$

είναι *Riemann* ολοκλοκληρώσιμη εφόσον

$$\int_0^1 |u^j(x)|dx = 0$$

Προφανώς, η ακολουθία $u^j(x)$ συγκλίνει σημειακά στη συνάρτηση:

$$u^0(x) = \begin{cases} 1 & \alpha\nu\ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \alpha\nu\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Όμως η $u^0(x)$ δεν είναι *Riemann* ολοκληρώσιμη.

Θεώρημα 2.3 ($Bolzano - Weiestrass$). *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό και φραγμένο και $\{x^j\}_{j=1}^{\infty}$ ακολουθία στο σύνολο K. Τότε υπάρχει υποακολουθία $\{x^{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε $\lim_{k\to\infty} x^{j_k} \in K$.*

Απόδειξη. Εφόσον το K είναι φραγμένο τότε και η ακολουθία $\{x^j\}$ είναι φραγμένη στο K. Παρατηρούμε επίσης, ότι $x^j = (x^j(1), ..., x^j(n))$.

Η ακολουθία $x^j(1)$ είναι φραγμένη στον $\mathbb{R}$. Γνωρίζουμε ότι στον χώρο $(\mathbb{R}, |.|)$ κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υποακολουθία. Επομένως, η $x^j(1)$ έχει συγκλίνουσα υποακολουθία τέτοια ώστε:

$$x^{j_{k_1}}(1) \to x(1).$$

Επομένως η υποακολουθία $x^{j_{k_1}}$ της x^j έχει συγκλίνουσα πρώτη συντεταγμένη.

Όμοια, η ακολουθία $x^{j_{k_1}}(2)$ είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$, επομένως έχει συγκλίνουσα υποακολουθία τέτοια ώστε

$$x^{j_{k_2}}(2) \to x(2).$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι κάθε υποακολουθία συγκλίνουσας ακολουθίας είναι συγκλίνουσα με το ίδιο όριο.

Επομένως, η υποακολουθία $x^{j_{k_2}}$ της x^j έχει συγκλίνουσες πρώτη και δεύτερη συντεταγμενη.

Επαναλαμβάνοντας την πιο πάνω διαδικασία n_φορές προκύπτει ότι:

$$x^{j_{k_n}} \to x$$

όπου $x = (x(1), ..., x(n))$.

Όμως το σύνολο K είναι κλειστό επομένως $x \in K$. $\square$

Το αποτελέσματα του Θεωρήματος $Bolzano-Weiestrass$ δεν ισχύει γενικά στον $L^2(D)$. Για χώρους άπειρης διάστασης μπορούμε να εξάγουμε κάποια άλλα αποτελέσματα, για το σκοπό αυτό θα χρειαστούμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 2.4. *Λέμε ότι η u^j συγκλίνει ασθενώς στον $L^2(D)$ στο u^0 και γράφουμε $u^j \rightharpoonup u^0$, αν για κάθε συνάρτηση $v \in L^2(D)$*

$$\int_D u^j(x)v(x)dx \to \int_D u^0 v(x)dx.$$

Σημείωση: Παρατηρούμε ότι, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό " $\rightharpoonup$ " και όχι " $\to$ " για την ασθενή σύγκλιση.

Λήμμα 2.5. *Έστω ότι $u^j \rightharpoonup u^0$ στον $L^2(D)$ για κάποιο χωρίο D. Τότε*

$$\liminf_{j\to\infty} \left\| u^j \right\|_{L^2(D)} \geq \left\| u^0 \right\|_{L^2(D)}.$$

Απόδειξη.

$$\liminf_{j\to\infty}(\left\|u^j\right\|^2_{L^2(D)} - \left\|u^0\right\|^2_{L^2(D)}) = \liminf_{j\to\infty}\int_D(|u^j(x)|^2 - |u^0(x)|^2)dx$$
$$= \liminf_{j\to\infty}\int_D(|u^j(x)|^2 - |u^0(x)|^2 - 2u^j(x)u^0(x) + 2|u^0(x)|^2)dx$$
$$= \liminf_{j\to\infty}\int_D(|u^j(x) - u^0(x)|^2)dx \geq 0$$

όπου στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό της ασθενής συγκλισης για $v(x) = u^0(x)$, δηλαδή

$$\lim_{j\to\infty}\int_D(u^j(x)u^0(x) - |u^0(x)|^2)dx = 0$$

Έπεται το Λήμμα. □

Παρακάτω παραθέτουμε χωρίς απόδειξη κάποιες ιδιότητες, για τους χώρους *Sobolev* και τη σύγκλιση ακολουθιών, τις οποίες θα χρειαστούμε στα επόμενα κεφάλαια. Για τις αποδείξεις των επόμενων αποτελεσμάτων, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο Κεφάλαιο 2 από τις Σημειώσεις του *John Anderson* για το Πρόβλημα Εμποδίου[4].

Θεώρημα 2.6 (Θεώρημα Ασθενής Συμπάγειας)**.** *Έστω $u^j(x) \in L^2(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$, φραγμένη ακολουθία. Τότε υπάρχει υποακολουθία u^{j_k} της u^j τέτοια ώστε $u^j \rightharpoonup u^0$ για κάποια συνάρτηση $u^0 \in L^2(D)$.*

Ορισμός 2.7. *Έστω $u(x)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση σε ένα χωρίο $D \subset \mathbb{R}^n$. Αν υπάρχει ολοκληρώσιμη συνάρτηση $w(x)$ τέτοια ώστε*

$$\int_D \frac{\partial v(x)}{\partial x_i}u(x)dx = -\int_D v(x)w(x)dx \ \ \forall v \in \mathbf{C}^1_c(D)$$

Τότε, θα λέμε ότι η συνάρτηση $u(x)$ είναι ασθενώς διαφορίσιμη ως προς την x_i και η $w(x)$ είναι η x_i_ασθενής παράγωγος της $u(x)$ και θα γράφουμε

$$w(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}$$

Ορισμός 2.8. *Έστω ότι $D \subset \mathbb{R}^n$ και $u(x) \in L^2(D)$ συνάρτηση ασθενώς διαφορίσιμη, ως προς όλες τις κατευθύνσεις x_i, $i = 1, \ldots n$, όπου οι ασθενείς παραγώγοι $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(D)$ για όλα τα $i = 1, \ldots n$. Τότε θα λέμε ότι $u \in W^{1,2}(D)$. Ο χώρος $W^{1,2}(D)$ εφοδιασμένος με τη νόρμα*

$$\|u\|_{W^{1,2}(D)} = \left(\int_D |u(x)|^2 dx + \int_D |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \tag{2.0.3}$$

όπου $\nabla u(x) = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$ καλείται χώρος Sobolev.

Ορίζουμε, τον $W^{k,2}(D)$, που αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις που ορίζονται στο χώρο D, για τις οποίες υπάρχουν όλες οι ασθενείς παραγώγοι υπάρχουν και

$$\|u\|_{W^{k,2}(D)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u|^2 dx \right)^{1/2} < \infty.$$

όπου η άθροιση είναι για όλους τους πολυδείκτες $|a| \leq k$.

Λήμμα 2.9. *Ο χώρος $(W^{1,2}(D), \|.\|_{W^{1,2}(D)})$ είναι πλήρης.*

Επίσης, κάθε φραγμένη ακολουθία συναρτήσεων $u^j \in W^{1,2}(D)$ έχει υποακολουθία u^{j_k} τέτοια ώστε $u^{j_k} \rightharpoonup u^0$ και $\frac{\partial u^{j_k}}{\partial x_i} \rightharpoonup \frac{\partial u^0}{\partial x_i}$ στον $L^2(D)$ για κάποια συνάρτηση $u^0 \in W^{1,2}(D)$.

Λήμμα 2.10. *Υποθέτουμε ότι $u, v \in W^{1,2}(D)$, τότε $max(u, v) \in W^{1,2}(D)$. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε σταθερά c, $max(u, c) \in W^{1,2}(D)$.*

Θεώρημα 2.11 (Ίχνους)**.** *Έστω D φραγμένο χωρίο με συνεχώς διαφορίσιμο σύνορο. Τότε υπάρχει τελεστής*

$$T : W^{1,2}(D) \to L^2(\partial D), \tag{2.0.4}$$

ο οποίος προσδιορίζει τις συνοριακές τιμές (ως προς το ίχνος) της $u \in W^{1,2}(D)$, πάνω στο σύνορο ∂D.

Επίσης, $Tu = u|_{\partial D}$ για όλες τις συναρτήσεις $u \in C(\bar{D}) \cap W^{1,2}(D)$.

Πόρισμα 2.12. *Έστω D φραγμένο C^1 χωρίο και η συνάρτηση $u \in W^{1,2}(D)$,* *για την οποία ισχύει ότι $u = f$ στο ∂D ώς προς το ίχνος. Τότε:*

$$\|u\|_{L^2(D)} \leq C(\|\nabla u\|_{L^2(D)} + \|f\|_{L^2(\partial D)}), \tag{2.0.5}$$

όπου η σταθερά C είναι ανεξάρτητη της u.

Πόρισμα 2.13. *Έστω $u^j \rightharpoonup u^0$ στον $W^{1,2}(D)$, όπου D φραγμένο C^1 χωρίο. Υποθέτουμε επίσης ότι, $u^j = f$ στο ∂D ως προς το ίχνος. Τότε $u^0 = f$ στο ∂D.*

Κεφάλαιο 3

Ο Λογισμός των Μεταβολών

Στο λογισμό των μεταβολών ασχολούμαστε με την εύρεση και περιγραφή ιδιοτήτων συναρτήσεων που ελαχιστοποιούν ενέργειες. Πιο συγκεκριμένα αναζητούμε συνάρτηση $u(x)$ η οποία ελαχιστοποιεί την παρακάτω ενέργεια:

$$J[u] = \int_D F(\nabla u(x))dx \tag{3.0.1}$$

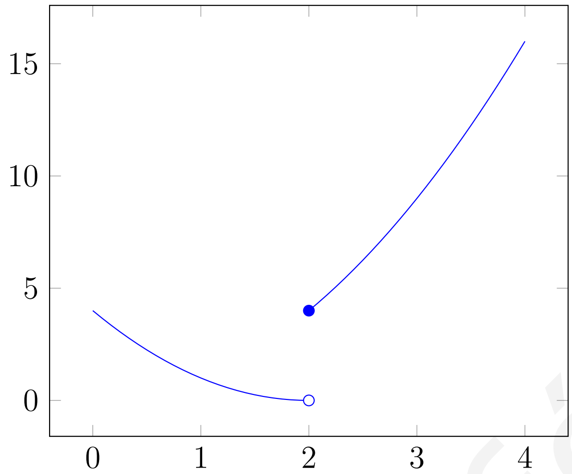
όπου F δεδομένη συνάρτηση και $u(x) \in K$ όπου

$$K = \left\{u \in W^{1,2}(D), u(x) = f(x)\ \sigma\tau o\ \partial D\right\}. \tag{3.0.2}$$

Σημείωση: Το κυριότερο πρόβλημα στο λογισμό των Μεταβολών είναι η απόδειξη ύπαρξης του ελαχιστοποιητή στο πρόβλημα ελαχιστοποίησης (3.0.1) στο σύνολο K. Μπορούμε να κατασκευάσουμε παραδείγματα για τα οποία δεν υπάρχει ελαχιστοποιητής.

Πιο κάτω θα δούμε ένα εύκολο παράδειγμα μη ύπαρξης ελαχίστου στον $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 1:



Πιο πάνω, βλεπουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$J[u] = \begin{cases} (u-2)^2, & 0 \leq u < 2 \\ u^2, & 2 \leq u \leq 4 \end{cases}$$

Προφανώς, η συνάρτηση u δεν έχει ελάχιστο στο διαστημα $[0,4]$.

Επομένως για την ύπαρξη ελαχιστοποιητή χρειαζόμαστε κάποιες επιπλέον υποθέσεις.

Θεώρημα 3.1. *Έστω $f(x)$ μία κάτω ημισυνεχής συνάρτηση (δηλαδή $f(x_0) = \liminf_{x\to x_0} f(x)$) σ'ένα κλειστό και φραγμένο σύνολο $K \subset \mathbb{R}^n$ και $f(x) > -\infty$. Τότε η $f(x)$ έχει ελάχιστο στο σύνολο K.*

Απόδειξη. Βήμα 1: Ορίζουμε $V_f = \{f(x), x \in K\}$. Εφόσον $f(x) > -\infty$, τότε το V_f είναι κάτω φραγμένο σύνολο και άρα από την Ιδιότητα της Πληρότητας στους πραγματικούς αριθμούς υπάρχει το $\inf_{x\in K} f(x)$.

Βήμα 2: Μπορώ να βρω ακολουθία $x^j \in K$ για την οποία ισχύει ότι:

$$\lim_{j\to\infty} f(x^j) = \inf_{x\in K} f(x)$$

Βήμα 3: Εφόσον το K είναι κλειστό και φραγμένο από το θεώρημα $Bolzano-Weiestrass$, το K είναι συμπαγές στον $\mathbb{R}^n$ και άρα εφόσον $x^j \in K$ έχει συγκλίνουσα υποακολουθία

$$x_{j_k} \to x_0 \in K.$$

Βήμα 4: Εφόσον η $f(x)$ είναι κάτω ημισυνεχής ισχύει ότι

$$f(x_0) = \liminf_{x_{j_k} \to x_0} f(x_{j_k}) \leq \lim_{j_k \to \infty} f(x_{j_k}) = \inf_{x \in K} f(x).$$

Όμως εξ' ορισμού για το $infimum$ ισχύει ότι:

$$inf_{x \in K} f(x) \leq f(x_0)$$

Επομένως η $f(x)$ λαμβάνει ελάχιστο στο $x_0 \in K$. □

Μπορούμε τώρα να ανάγουμε το προηγούμενο θεώρημα στην περίπλοκη περίπτωση ελαχιστοποίησης του συναρτησοειδούς (3.0.1) στο σύνολο (3.0.2). Η δυσκολία που υπάρχει για το πρόβλημα είναι ότι το σύνολο K δεν είναι πεπερασμένης διάστασης, επομένως δε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα $Bolzano - Weiestrass$.

Παρόλα αυτά μπορούμε να αναπαράξουμε τη διαδικασία του Θεωρήματος 3.1 με την ακόλουθη διαδικασία:

1. Για να δείξουμε ότι το ελάχιστο είναι ένας καλά ορισμένος αριθμός χρειάζεται να υποθέσουμε ότι $F(\nabla u) \geq -C$ όπου C είναι σταθερά. Επομένως θα ισχύει ότι $J[u] \geq -C \int_D dx = -C|D|$ όπου $J[u]$ το συναρτησοειδές (3.0.1). Τότε από την ιδιότητα της πληρότητας στους πραγματικούς αριθμούς ορίζεται το $infimum$.

2. Από την ιδιότητα ύπαρξης του $infimum$, μπορώ να βρώ ακολουθία $u^j \in K$ για την οποία ισχύει ότι

$$\lim_{j \to \infty} J[u^j] = \inf_{v \in K} J[v].$$

3. Ο χώρος $W^{1,2}(D)$ είναι ασθενώς συμπαγής, επομένως αν

$$\left\|u^j\right\|_{W^{1,2}(D)} \leq C \tag{3.0.3}$$

τότε υπάρχει υποακολουθία u^{j_k} για την οποία ισχύει ότι:

$$u^{j_k} \rightharpoonup u^0 \in W^{1,2}(D)$$

Για να επιβεβαιώσουμε ότι ισχύει η σχέση (3.0.3), υποθέτουμε ότι για το συναρτησοειδές ισχύει ότι:

$$J[u] \to \infty \ \text{ όταν } \ \|u\|_{W^{1,2}(D)} \to \infty \tag{3.0.4}$$

Προφανώς από την (3.0.4) προκύπτει ότι η $\|u^j\|_{W^{1,2}(D)}$ είναι φραγμένη αν η $J[u^j]$ είναι φραγμένη, το οποίο ισχύει εφόσον

$$J[u^j] \to \inf_{u\in K} J[u] \in \mathbb{R}$$

4. Χρειάζεται να δείξουμε ότι το $J[u]$ είναι κάτω ημισυνεχής σε σχέση με την ασθενή σύγκλιση στον $W^{1,2}(D)$.

Στην πιο πάνω διαδικασία, είναι εύκολο να αποφασίσουμε κατά πόσο ισχύουν τα σημεία (1)-(3) για κάποιο συναρτησοειδές $J[u] = \int_D F(\nabla u)dx$. Το σημείο (4) χρειάζεται περαιτέρω σχολιασμό. Αρχικά πρέπει να βρούμε κάποια κριτήρια τα οποία θα μας εξασφαλίζουν ότι το συναρτησοειδές είναι κάτω ημισυνεχές. Για να κατανοήσουμε την πιο περίπλοκη περίπτωση, παρακάτω θα δούμε ένα εύκολο παράδειγμα.

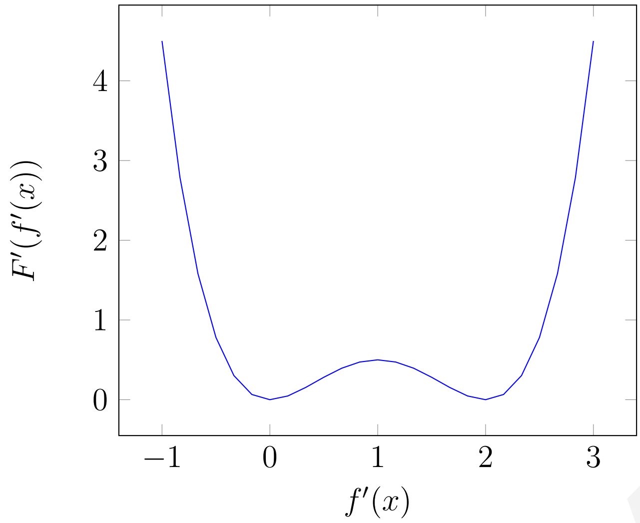
Παράδειγμα 2: Μελετάμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης στη μία διάσταση.

$$\min J_F(f(x)) = \int_0^1 F(f'(x))dx \tag{3.0.5}$$

στο σύνολο

$$K = \left\{f \in W^{1,2}(0,1), f(0) = 0 \ \kappa\alpha\iota \ f(1) = 1\right\} \tag{3.0.6}$$

Έστω ότι η $F(\cdot)$ είναι συνάρτηση με το παρακάτω γράφημα



Εφόσον $F(\cdot) \geq 0$ ισχύει ότι $J_F(f) \geq 0$ για όλες τις $f \in K$.

Εάν όμως

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x \in A \\ 2, & x \notin A \end{cases} \tag{3.0.7}$$

για κάποιο σύνολο A, τότε η ενέργεια $J_F(f'(x)) = 0$, εφόσον $F(0) = F(2) = 0$ και επομένως οποιαδήποτε συνάρτηση $f(x)$ που ικανοποιεί την (3.0.7) ελαχιστοποιεί την (3.0.5).

Παρατηρούμε ότι ένας τέτοιος ελαχιστοποιητής μπορεί να προσεγγίσει αυθαίρετα (ως προς την $C^0[0,1]$ νόρμα), οποιαδήποτε συνάρτηση $g(x)$ για την οποία ισχύει ότι $0 \leq g' \leq 2$.

Αυτό σημαίνει ότι για οποιανδήποτε συνάρτηση $g(x) \in K$ για την οποία ισχύει ότι $0 \leq g'(x) \leq 2$ μπορούμε να βρούμε ακολουθία $f^j \in K$ για την οποία ισχύει ότι $f^j \to g$ ομοιόμορφα και $J_F(f^j(x)) = 0$. Όμως η $J_F(g(x))$ μπορεί να είναι αυστηρώς θετική, αν για παράδειγμα $g(x) = x$. Επομένως το συναρτησοειδές που ορίσαμε στην (3.0.5) δεν είναι κάτω ημισυνεχές.

Παρακάτω θα δούμε ότι το πρόβλημα που εμφανίζεται στο προηγούμενο παράδειγμα δεν οφείλεται στο γεγονός ότι η F μηδενίζεται σε 2 διαφορετικά σημεία.

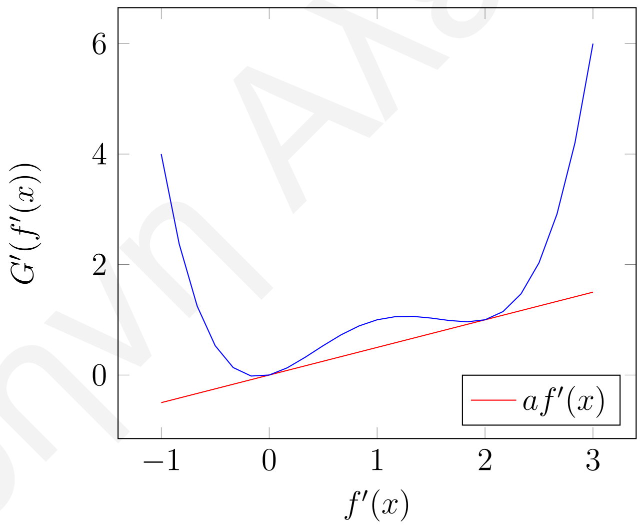
Παράδειγμα 3: Μελετάμε την περίπτωση ελαχιστοποίησης του προβλήματος:

$$minJ_G(f(x)) = \int_0^1 G(f'(x))dx \tag{3.0.8}$$

στο σύνολο

$$K = \{f \in W^{1,p}(0,1), f(0) = 0 \; \kappa\alpha\iota \; f(1) = 1\}$$

όπου η συνάτρτηση G δίνεται από το γράφημα



Εάν αφαιρέσουμε την γραμμική συνάρτηση $af'(x)$ από τη συνάρτηση $G(f'(x))$ προκύπτει το γράφημα που μελετήσαμε στο Παράδειγμα 2. Μπορούμε μάλιστα να υποθέσουμε ότι:

$$G(f'(x)) = F(f'(x)) + af'(x).$$

Επομένως

$$\begin{aligned} J_G(f(x)) &= \int_0^1 G(f'(x))dx \\ &= \int_0^1 F(f'(x))dx + a\int_0^1 f'(x)dx \\ &= J_F(f(x)) + af(1) - af(0) \\ &= J_F(f(x)) + a. \end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση προκύπτει, εφόσον $f \in K$ και $af(1) - af(0) = a$, άρα προκύπτει ότι:

$$J_G(f(x)) = J_F(f(x)) + a \quad \forall f \in K$$

Εφόσον δεν μπορούμε να βρούμε ελαχιστοποιητή για το J_F, δεν μπορούμε να βρούμε ούτε για το J_G.

Συμπέρασμα: Το συναρτησοειδές $J_G(f(x)) = \int_0^1 G(f'(x))dx$ δεν έχει ελαχιστοποιητή, εφόσον μπορούμε να ακουμπήσουμε τη γραφική παράσταση σε δύο διαφορετικά σημεία με μία γραμμική συνάρτηση. Δηλαδή η G δεν είναι κυρτή. Προφανώς η κυρτότητα είναι μια αναγκαία συνθήκη για ύπαρξη ελαχιστοποιητή σε οποιασδήποτε διάστασης χώρο $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 3.2. *Έστω D φραγμένο χωρίο και έστω $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν τα εξής:*

1. *Υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε $F(\nabla u) \geq -C$.*

2. *$\int_D F(\nabla u)dx \to \infty$ όταν $\|\nabla u\|_{L^2(D)} \to \infty$.*

3. *$F(p)$ είναι κυρτή, δηλαδή*

$$F(q) \geq F(p) + F'(p)(q-p) \;\forall\, p, q \in \mathbb{R}^n.$$

Τότε για οποιοδήποτε κλειστό, μη κενό σύνολο $K \subset W^{1,2}(D)$ υπάρχει συνάρτηση $u \in K$ τέτοια ώστε:

$$\int_D F(\nabla u)dx = \inf_{v\in K} \int_D F(\nabla v)dx.$$

Απόδειξη. Αρχικά εφόσον $F(\nabla u) \geq -C$, τότε για οποιαδήποτε $u \in K$ ισχύει ότι:

$$J(u) = \int_D F(\nabla u(x))dx \geq -C \int_D dx = -C|D|.$$

Επομένως το σύνολο των τιμών της $J(u)$ είναι φραγμένο από κάτω και το $m = \inf_{u\in K} J(u)$ υπάρχει και είναι καλά ορισμένο.
Επομένως μπορούμε να βρούμε ακολουθία $u^j \in K$ τέτοια ώστε $J(u^j) \to m$. Παρατηρούμε ότι $\|\nabla u^j\|_{L^2(D)}$ είναι φραγμένο εφόσον $\int_D F(\nabla u)dx \to \infty$ όταν $\|\nabla u\|_{L^2(D)} \to \infty$, τότε από το Θεώρημα 2.6 (Ασθενής Συμπάγειας) υπάρχει υποακολουθία u^{j_k} και μία συνάρτηση $u^0 \in W^{1,2}(D)$ για την οποία $u^{j_k} \rightharpoonup u^0$. Εφόσον το K είναι κλειστό, τότε $u^0 \in K$.
Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι η υποακολουθία u^{j_k} είναι ολόκληρη η ακολουθία u^j. Αρκεί να δείξουμε ότι $J(u^0) = m$.

Έστω ότι $j \to \infty$

$$\begin{aligned} m \leftarrow \int_D F(\nabla u^J)dx &= \int_D F(\nabla u^0 + \nabla(u^j - u^0))dx \\ &\geq \int_D F(\nabla u^0)dx + \int_D F'(\nabla u^0)(\nabla u^j - \nabla u^0)dx \\ &\to \int_D F(\nabla u^0)dx + \int_D F'(\nabla u^0)(\nabla u^0 - \nabla u^0)dx \\ &= \int_D F(\nabla u^0)dx \\ &\geq \inf_{v\in K} J(v) = m \\ \Rightarrow J(u^0) = m, & \end{aligned}$$

λόγω της κυρτότητας της F. □

Πρόταση 3.1. *Έστω ότι η συνάρτηση $F(p)$ που ορίσαμε στο Θεώρημα 3.2 είναι αυστηρά κυρτή, δηλαδή*

$$F(q) > F(p) + F'(p)(q-p) \quad \forall q, p \in \mathbb{R}^n \text{ και } p \neq q$$

Έστω επίσης ότι το χωρίο D είναι συνεκτικό και το σύνολο K κυρτό. Τότε μπορώ να βρω μοναδικό ελαχιστοποιητή, μεταξύ όλων των συναρτήσεων με τις συνοριακές συνθήκες.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $u(x) \in K$ και $v(x) \in K$ δύο ελαχιστοποιητές. Προφανώς, οι δύο συναρτήσεις θα έχουν την ίδια ενέργεια και άρα:

$$0 = \int_D F(\nabla u(x))dx - \int_D F(\nabla v(x))dx \geq \int_D F'(\nabla u(x))(\nabla(v-u))dx \tag{3.0.9}$$

Με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $\nabla v(x) = \nabla u(x)$ εφόσον η $F(.)$ είναι αυστηρά κυρτή.
Εφόσον τώρα η u είναι ελαχιστοποιητής, $v, u \in K$ και το σύνολο K είναι κυρτό, τοτε για $t \in [0,1]$ ισχύει ότι $(1-t)u(x) + tv(x) \in K$ και επομένως $u(x) + t(v(x) - u(x)) \in K$.

Άρα

$$0 \leq \int_D F(\nabla u(x) + t\nabla(v(x) - u(x)))dx - \int_D F(\nabla u(x))dx.$$

Διαιρώντας με t και θέτοντας $t \to 0$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} \int_D F(\nabla u(x) - t\nabla(v(x) - u(x))) - F(\nabla u(x))dx \\ &= \int_D F'(\nabla u(x))\nabla(v(x) - u(x))dx. \end{aligned}$$

Άρα

$$\int_D F'(\nabla u(x))\nabla(v(x) - u(x))dx \geq 0. \tag{3.0.10}$$

Συγκρίνοντας τις (3.0.9) και (3.0.10) προκύπτει ότι:

$$\int_D F'(\nabla u)\nabla(v-u)dx = 0$$

και είδαμε ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\nabla v = \nabla u$, επομένως $\nabla(v-u) = 0$ και άρα $v(x) - u(x)$ είναι σταθερά. Όμως $v(x) = u(x)$ στο ∂D και άρα $v(x) - u(x) = 0$ στο D εφόσον είναι συνεκτικό.
Άρα προκύπτει το ζητούμενο $u(x) = v(x)$, δηλαδή μοναδικό ελαχιστοποιητή.
□

Το Θέωρημα 3.2 της ύπαρξη και η Πρόταση 3.1 της μοναδικότητας για τον ελαχιστοποιητή είναι ιδιαίτερα σημαντικά και έχουν άμεση εφαρμογή στην απόδειξη του επόμενου Θεωρήματος.

Θεώρημα 3.3. *(Αρχή του Dirichlet)*
Υποθέτουμε ότι η $u \in C^2(\bar{D})$ λύνει το πρόβλημα

$$\begin{cases} \Delta u(x) = h(x) & \sigma\tau o\ D \\ u(x) = f(x) & \sigma\tau o\ \partial D \end{cases} \tag{3.0.11}$$

Τότε

$$\int_D (\frac{1}{2}|u(x)|^2 - u(x)h(x))dx = \inf_{w \in K} \int_D \frac{1}{2}|\nabla w(x)|^2 - w(x)h(x)dx, \tag{3.0.12}$$

όπου

$$K = \left\{ w \in C^2(\bar{D}), w(x) = f(x)\ \sigma\tau o\ \partial D \right\}$$

Αντίστροφα αν η $u \in K$ ικανοποιεί την (3.0.12) τότε η $u(x)$ λύνει το πρόβλημα (3.0.11).

Κεφάλαιο 4

Το πρόβλημα Εμποδίου

Στο παρόν κεφάλαιο, θα εξετάσουμε το πρόβλημα εμποδίου. Στο πρόβλημα εμποδίου αναζητούμε ελαχιστοποιητή για το συναρτησοειδές:

$$J[u] = \int_D F(\nabla u(x))dx = \int_D |\nabla u(x)|^2 dx \tag{4.0.1}$$

στο σύνολο

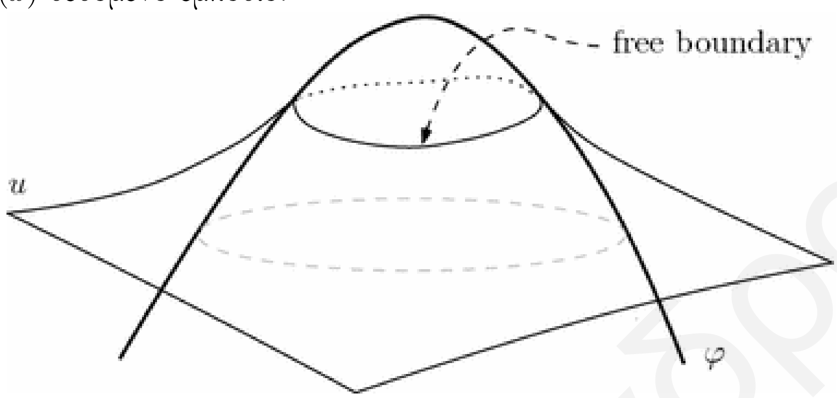
$$K = \left\{ u \in W^{1,2}(D)\,, u(x) = f(x)\ \sigma\tau o\ \partial D\ \kappa\alpha\iota\ u(x) \geq g(x)\ \sigma\tau o\ D \right\}, \tag{4.0.2}$$

όπου $D \subset \mathbb{R}^n$ ομαλό, $f(x)$ ομαλή συνάρτηση και $g(x)$ ομαλή συνάρτηση τέτοια ώστε $g|_{\partial D} \leq f(x)$.

Σημειώνεται ότι το σύνολο K είναι κυρτό για όλες τις συναρτήσεις $u(x)$ που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες $f(x)$ και $u(x) \geq g(x)$ στο χωρίο D.

Η διαφορά μεταξύ του προβλήματος εμποδίου και του προβλήματος ελαχιστοποίησης του Θεωρήματος 3.3, είναι ότι στο πρόβλημα εμποδίου αναζητούμε ελαχιστοποιητή ο οποίος παραμένει πάνω από κάποιο δεδομένο εμπόδιο $g(x)$.

Σχήμα 4.1: Γραφική παράσταση μιας τυπικής λύσης του προβλήματος εμποδίου, όπου $\phi(x)$ δεδομένο εμπόδιο.



Σημείωση: Το πρόβλημα Εμποδίου είναι αρκετά πιο περίπλοκο από το πρόβλημα του *Dirichlet*. Για παράδειγμα το πρόβλημα εμποδίου έχει ένα επιπλέον άγνωστο. Συγκεκριμένα, είναι άγνωστο το σύνολο στο οποίο $u(x) = g(x)$ ή ισοδύναμα το σύνολο $\Omega = \{x;\, u(x) > g(x)\}$. Ιδιαίτερα σημαντικό είναι το σύνορο του συνόλου $\overline{\Omega}$. Το $\Gamma = \partial\Omega \cap D$ θα το ονομάζουμε ελεύθερο σύνορο.

4.1 Ύπαρξη λύσης και χρήσιμες Ιδιότητες

Η απόδειξη ύπαρξης λύσης στο πρόβλημα εμποδίου είναι μια απλή εφαρμογή του Θεωρήματος 3.2. Συγκεκριμένα έχουμε το παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα 4.1. *Έστω D φράγμένο χωρίο με C^1 σύνορο, $f(x) \in C(\partial D)$ και $g(x) \in W^{1,2}(D)$. Υποθέτουμε επίσης, ότι το σύνολο*

$$K = \left\{u \in W^{1,2}(D);\ u(x) = f(x) \text{ στο } \partial D \text{ και } u(x) \geq g(x) \text{ στο } D\right\}$$

δεν είναι κενό. Τότε υπάρχει μοναδική συνάρτηση $u(x) \in K$ τέτοια ώστε:

$$J(u) = \int_D |u(x)|^2 dx \leq \int_D |v(x)|^2 dx$$

για κάθε συνάρτηση $v(x) \in K$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη θα ακολουθήσουμε τα ίδια βήματα όπως και στο Θεώρημα 3.2. Αρχικά, παρατηρούμε ότι

$$F(\nabla u(x)) = |u(x)|^2 \geq 0 \ \Rightarrow \ J(u) \geq 0.$$

Επομένως, το σύνολο των τιμών της $J(u)$ είναι κάτω φραγμένο και άρα ορίζεται το $m = \inf_{u \in K} J(u)$. Μπορούμε να βρούμε ακολουθία $u^j \in K$ τέτοια ώστε:

$$J(u^j) \to \inf_{v \in K} J(v) = m.$$

Ισχύει επίσης ότι αν $\|\nabla u\|_{L^2(D)} \to \infty \ \Rightarrow \ J(u) \to \infty$. Άρα εφόσον, $J(u^j) \to m$, ισχύει ότι το $\|\nabla u^j\|_{L^2(D)}$ είναι επίσης φραγμένο και από το Πόρισμα 2.12 προκύπτει ότι το $\|u^j\|_{W^{1,2}(D)}$ είναι φραγμένο.
Μπορούμε τώρα να βρούμε υποακολουθία τέτοια ώστε:

$$u^{j_k} \rightharpoonup u^0 \in W^{1,2}(D).$$

Από το Πόρισμα 2.13 $u^0(x) = f(x)$ στο ∂D και άρα $u^0 \in K$

$$J(u^0) = \inf_{v \in K} J(v).$$

Από την αυστηρή κυρτότητα του συναρτησοειδές $J(u)$ και την Πρόταση 3.1 υπάρχει μοναδική λύση στο προβλημα. □

Σημείωση: Το Θεώρημα 4.1 δε μας υποδεικνύει πώς να υπολογίσουμε τον ελαχιστοποιητή. Ακόμη και αν έχουμε ένα καλά ορισμένο χωρίο και ομαλές συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ δε γνωρίζουμε πώς να υπολογίσουμε την τιμή της $u(x)$. Ωστόσο, έχουμε ένα μοναδικό ελαχιστοποιητή τον οποίο πρέπει να περιγράψουμε όσο το δυνατό πληρέστερα.

Ωστόσο, υπάρχουν κάποια ερωτήματα που μας απασχολούν σε αυτού του είδους προβλήματα. Για παράδειγμα:

1. Υπάρχει κάποια διαφορική εξίσωση την οποία ικανοποιεί, ο ελαχιστοποιητής $u(x)$ του προβλήματος εμποδίου (όπως ο ελαχιστοποιητής στο Θεώρημα 3.3 ο οποίος ικανοποιεί το πρόβλημα του *Dirchlet*);

2. Υπάρχουν άλλες καλές ιδιότητες τις οποίες ικανοποιεί η λύση του προβήματος εμποδίου (αν για παράδειγμα είναι συνεχής, παραγωγίσιμη και αναλυτική);

3. Τι μπορούμε να πούμε για το σύνολο Ω και το σύνορο του;

Μεταβολικές Ανισότητες Έστω ότι η $u(x)$ ελαχιστοποιεί το $J(u) = \int_D |\nabla u(x)|^2 dx$ σε ένα κυρτό σύνολο K (όπως του προβλήματος εμποδίου) και $v \in K$, τότε $(1-t)u + tv \in K$ για όλα τις τιμές του $t \in [0,1]$. Εφόσον $u(x)$ είναι ελαχιστοποιητής έχουμε ότι:

$$\int_D |\nabla u|^2 dx \leq \int_D |\nabla((1-t)u + tv))|^2 dx = \int_D |\nabla(u + t(v-u))|^2 dx \tag{4.1.1}$$

$$\Rightarrow \int_D \left(2t\nabla u \nabla(v-u) + t^2 |\nabla(v-u)|^2\right) dx \geq 0. \tag{4.1.2}$$

Διαιρούμε την (4.1.2) με t και θέτουμε $t \to 0$, τότε

$$\int_D \nabla u \nabla(v-u) dx \geq 0. \tag{4.1.3}$$

Αυτή η ανισότητα καλείται μεταβολική ανισότητα.

Αν τώρα επιλέξουμε $v(x)$ και ισχύει ότι $(1-t)u + tv \in K$ για όλα τα $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, τότε:

$$\int_D \nabla u \nabla(v-u) dx = 0. \tag{4.1.4}$$

Μπορούμε, εύκολα να δούμε πώς προκύπτει η (4.1.4), επαναλαμβάνοντας την προηγούμενη διαδικασία για $t < 0$.

Πρόταση 4.2. *Έστω ότι έχουμε το πρόβλημα εμποδίου, στο οποίο αναζητούμε ελαχιστοποιητή για το συναρτησοειδές (4.0.1) στο σύνολο (4.0.2), τότε $u(x) = g(x)$ μόνο αν $\Delta g(x) \leq 0$.*

Απόδειξη. Επιλέγουμε $v(x) = u(x) + \phi(x)$, για οποιαδήποτε $\phi \geq 0$ και $\phi \in W^{1,2}(D)$ με συμπαγή φορέα, τότε από την (4.1.3) προκύπτει ότι:

$$\int_D \nabla u \nabla \phi dx \geq 0 \tag{4.1.5}$$

Εάν όμως, $\operatorname{supp}(\phi) \subset \{u(x) > g(x)\}$, τότε η $(1-t)u + tv \in K$ για όλα τα $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, επομένως από την (4.1.4) ισχύει ότι:

$$\int_D \nabla u \nabla \phi dx = 0. \tag{4.1.6}$$

Ολοκληρώνοντας κατα μέρη την (4.1.5) έχουμε ότι:

$$0 \leq \int_D \nabla u \nabla(\phi) dx = -\int_D \phi \Delta u dx. \tag{4.1.7}$$

Εφόσον $\phi \geq 0$, από την (4.1.7) προκύπτει ότι $\Delta u \leq 0$ στο σύνολο D. Όμοια, από την (4.1.6) $\Delta u = 0$ στο σύνολο $\{x \in D;\ u(x) > g(x)\}$.

Επομένως, η ισότητα $u(x) = g(x)$ ισχύει μόνο άν $\Delta g \leq 0$. □

Σημείωση: Το πρόβλημα που προκύπτει στον υπολογισμό της (4.1.7) είναι ότι υποθέσαμε ότι η $u(x)$ έχει δεύτερες παραγώγους. Επομένως, θα πρέπει κατά κάποιο τρόπο να εξασφαλίσουμε ότι για τη $u(x)$ ορίζονται οι δεύτερες παραγώγοι της. Ωστόσο, θα πρέπει να αναπτύξουμε μια θεωρία κανονικότητας για το πρόβλημα εμποδίου. Στόχος μας είναι να δείξουμε ότι η λύση στο πρόβλημα εμποδίου έχει ασθενές παραγώγους δευτέρας τάξεως. Για τον σκοπό αυτό, θα χρειαστεί να κάνουμε κάποια υπόθεση και να διαφοροποιήσουμε ελαφρώς το πρόβλημα.

4.2 Κανονικοποιημένες λύσεις προβλήματος Εμποδίου

Σε αυτή την ενότητα, θα απλοποιήσουμε το πρόβλημα εμποδίου που είδαμε στο παρόν κεφάλαιο, κάνοντας κάποιες υποθέσεις, έτσι ώστε να εξάγουμε αποτελέσματα χρήσιμα για την συνέχεια της εργασίας.

Υποθέτουμε ότι $g \in C^2(D)$ και ορίζουμε $v(x) = u(x) - g(x) \geq 0$ όπου $u(x) \in K$ ελαχιστοποιεί το πρόβλημα εμποδίου τότε:

$$
\begin{aligned}
&\int_D |\nabla u(x)|^2 dx = \int_D |\nabla (v(x) + g(x))|^2 dx \\
&= \int_D |\nabla v(x)|^2 dx + \int_D 2\nabla v(x) \nabla g(x) dx + \int_D |\nabla g(x)|^2 dx \\
&= \int_D |\nabla v(x)|^2 dx - 2\int_D v(x)\Delta g(x) dx + 2\int_{\partial D} v(x) \frac{\partial g(x)}{\partial \overrightarrow{v}} dS + \int_D |\nabla g(x)|^2 dx \\
&= 2\bigg(\int_D (\frac{1}{2}|\nabla v(x)|^2 - v(x)\Delta g(x)) dx \bigg) + 2\int_{\partial D} v(x) \frac{\partial g(x)}{\partial \overrightarrow{v}} dS + \int_D |\nabla g(x)|^2 dx
\end{aligned}
$$

όπου η τρίτη ισότητα προκύπτει εύκολα αν χρησιμοποιήσουμε τους τύπους του *Green*. Σημειώνεται επίσης ότι, εφόσον η $g(x)$ είναι δεδομένη συνάρτηση (ανεξάρτητη της $v(x)$), το ολοκλήρωμα $\int_D |\nabla g(x)|^2 dx$ είναι ανεξάρτητο της $v(x)$. Επίσης, $v(x) = u(x) - g(x) = f(x) - g(x)$ στο ∂D, εφόσον $u \in K$, δηλαδή $u(x) = f(x)$ στο ∂D. Ειδικότερα, προκύπτει ότι:

$$
\begin{aligned}
&\int_D |\nabla g(x)|^2 dx + 2\int_{\partial D} v(x) \frac{\partial g(x)}{\partial \overrightarrow{v}} dS \\
&= \int_D |\nabla g(x)|^2 dx + 2\int_{\partial D} (f(x) - g(x)) \frac{\partial g(x)}{\partial \overrightarrow{v}} dS
\end{aligned}
$$

όπου είναι απλά μία σταθερά ανεξάρτητη της $v(x)$. Επομένως η $v(x)$ ελαχιστοποιεί το συναρτησοειδές:

$$\int_D (\frac{1}{2}|\nabla v(x)|^2 - v(x)\Delta g(x)) dx \tag{4.2.1}$$

στο σύνολο:

$$\overline{K} = \left\{ v \in W^{1,2}(D);\ v(x) \geq 0 \ \text{και}\ v(x) = f(x) - g(x) \ \text{στο}\ \partial D \right\}. \tag{4.2.2}$$

Σημείωση: Σε πολλές περιπτώσεις είναι ευκολότερο να μελετάμε τη συνάρτηση $v(x)$ παρά την $u(x)$. Ειδικότερα είναι ευκολότερο να μελετάμε τη συνάρτηση $v(x)$ εάν $\Delta g(x) = -1$.

Ορισμός 4.3. *Λέμε ότι η συνάρτηση $u(x)$ είναι λύση στο ομαλοποιημένο πρόβλημα εμποδίου εάν ελαχιστοποιεί το συναρτησοειδές:*

$$\int_D \left(\frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 + u(x)\right)dx \tag{4.2.3}$$

στο σύνολο συναρτήσεων:

$$K = \left\{u \in W^{1,2}(D);\ u(x) \geq 0 \ \textit{και}\ u(x) = f(x)\ \textit{στο}\ \partial D\right\}. \tag{4.2.4}$$

Κεφάλαιο 5

Θεωρία Κανονικότητας

Στο παρόν κεφάλαιο, θα ερευνήσουμε ιδιότητες διαφορησιμότητας της λύσης του προβλήματος εμποδίου στο χώρο $W^{2,2}(D)$.

Πρόταση 5.1. *Υποθέτουμε ότι η $u(x)$ είναι λύση στο ομαλοποιημένο πρόβλημα εμποδίου στην $B_R(0)$ ως προς κάποιες συνοριακές συνθήκες. Τότε για οποιοδήποτε $R_0 < R$ ισχύει ότι:*

$$\|\nabla u(x)\|_{L^2(B_R(0))} \leq \frac{C}{R - R_0} \|u(x)\|_{L^2(B_R(0))} . \tag{5.0.1}$$

Απόδειξη. Εφόσον $u(x)$ είναι λύση στο ομαλοποιημένο πρόβλημα εμποδίου, αυτό που σκοπεύουμε να κάνουμε είναι να συγκρίνουμε την ενέργεια της συνάρτησης $u(x)$ με μία άλλη κατάλληλα επιλεγμένη συνάρτηση.
Επιλέγουμε $\phi(x) = \psi^2(x)u(x)$, όπου $\psi \in C_c^\infty(B_R(0))$, $\psi(x) = 1$ στην $B_{R_0}(0)$ και

$$|\nabla\psi(x)| \leq \frac{2}{R - R_0}.$$

Παρατηρούμε ότι $\phi(x) \geq 0$ και η συνάρτηση $u(x) + t\phi(x) \in K$, για κάθε $t \in (-1, 1)$, όπου Κ το σύνολο του Ορισμού 4.3. Άρα, έχουμε ότι:

$$\int_{B_R(0)} \left(\frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 + u(x)\right)dx \leq \int_{B_R(0)} \left(\frac{1}{2}|\nabla(u(x) + t\phi(x))|^2 + u(x) + t\phi(x)\right)dx.$$

Από την τελευταία σχέση εύκολα προκύπτει ότι:

$$0 \leq \int_{B_R(0)} \Big(t\nabla u(x)\nabla\phi(x) + \frac{t^2}{2}|\nabla\phi(x)|^2 + t\phi(x) \Big) dx.$$

Διαιρούμε την τελευταία σχέση με t και θέτουμε $t \to 0$ (το t μπορεί να πάρει και θετικές και αρνητικές τιμες). Τότε, από τις μεταβολικές ανισότητες που μελετήσαμε στο Κεφάλαιο 4 προκύπτει ότι:

$$0 = \int_{B_R(0)} \Big(\nabla u(x)\nabla\phi(x) + \phi(x) \Big) dx. \tag{5.0.2}$$

Εξ' ορισμού της συνάρτησης $\phi(x)$ η (5.0.2) γράφεται ως:

$$0 = \int_{B_R(0)} \Big(\psi^2(x)|\nabla u(x)|^2 + 2u(x)\psi(x)\nabla\psi(x)\nabla u(x) + \phi(x) \Big) dx. \tag{5.0.3}$$

Αναδιατάσσουμε την (5.0.3) και παίρνουμε:

$$\int_{B_R(0)} \psi^2(x)|\nabla u(x)|^2 dx = -\int_{B_R(0)} (2u(x)\psi(x)\nabla\psi(x)\nabla u(x) - \phi(x)) dx \tag{5.0.4}$$

$$\leq -\int_{B_R(0)} 2u(x)\psi(x)\nabla\psi(x)\nabla u(x) dx \tag{5.0.5}$$

$$\leq \Big(\int_{B_R(0)} \psi^2(x)|\nabla u(x)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{B_R(0)} 4u^2(x)|\nabla\psi(x)|^2 dx \Big)^{1/2}. \tag{5.0.6}$$

Οπου, στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιούμε την ανισότητα $Cauchy - Schwartz$. Υψώνουμε στο τετράγωνο τα δύο μέρη της τελευταίας ανισότητας και διαιρούμε με

$$\int_{B_R(0)} \psi^2(x)|\nabla u(x)|^2 dx$$

για να προκύψει ότι:

$$\int_{B_R(0)} \psi^2(x)|\nabla u(x)|^2 dx \leq \int_{B_R(0)} 4u^2(x)|\nabla \psi(x)|^2 dx.$$

Εφόσον $R_0 < R$, $\psi(x) = 1$ στην $B_{R_0}(0)$ και $|\nabla\psi(x)| \leq \frac{2}{R-R_0}$ προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}\int_{B_{R_0}(0)} |\nabla u(x)|^2 dx &= \int_{B_{R_0}(0)} |\nabla u(x)|^2 \psi^2(x) dx \\ &\leq \int_{B_R(0)} |\nabla u(x)|^2 \psi^2(x) dx \\ &\leq \int_{B_R(0)} 4u^2(x)|\nabla\psi(x)|^2 dx \\ &\leq \frac{16}{(R-R_0)^2} \int_{B_R(0)} u^2(x) dx,\end{aligned}$$

δηλαδή το ζητούμενο. □

5.1 Δεύτερες Παραγώγοι της λύσης

Σε αυτή την ενότητα, θα δείξουμε ότι η λύση του ομαλοποιημένου προβλήματος εμποδίου έχει ασθενές δεύτερες παραγώγους. Παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε τους συμβολισμούς $e_1 = (1, 0, ..., 0), ..., \ e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$.

Λήμμα 5.2. *Έστω $u(x)$ λύση του ομαλοποιημένου προβλήματος εμποδίου στο χωρίο D. Τότε, για κάθε συμπαγές σύνολο $\mathbf{C} \subset D$, υπάρχει σταθερα C η οποία εξαρτάται μόνο απο την $dist(\mathbf{C}, D^c)$ και*

$$\int_{\mathbf{C}} \left| \frac{\nabla(u(x+e_ih) - u(x))}{h} \right|^2 dx \leq C \int_D \left| \frac{(u(x+e_ih) - u(x))}{h} \right|^2 dx \qquad (5.1.1)$$

για κάθε $h \in \mathbb{R}$, για το οποίο ισχύει ότι $|h| < \frac{dist(\mathbf{C}, D^c)}{2}$.

Απόδειξη. Από τις μεταβολικές ανισότητες, που είδαμε στο Κεφάλαιο 4, γνωρίζουμε ότι για κάθε $\phi(x)$ με συμπαγή φορέα, για την οποία ισχύει ότι

$u(x) + t\phi \in K$, όπου $t \in (0, \epsilon)$ όπου $\epsilon > 0$ μικρό, τότε ισχύει:

$$0 \leq \int_D (\nabla u(x) \nabla \phi(x) + \phi(x))dx. \tag{5.1.2}$$

Τώρα, επιλέγουμε $\phi(x) = \psi^2(x)(u(x + e_i h) - u(x))$ όπου $\psi(x) \in C_c^\infty(D)$ και η οποία ικανοποιεί τα εξής:

1. $0 \leq \psi(x) \leq 1$ για όλα τα $x \in D$
2. $\psi(x) = 1$ για $x \in \mathbf{C}$
3. $\psi(x) = 0$ για όλα τα x για τα οποία ισχύουν ότι $dist(x, \mathbf{C}) > \frac{dist(\mathbf{C}, D^c)}{2}$
4. $|\nabla \psi(x)| < \frac{4}{dist(\mathbf{C}, D^c)}$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $t \in [0, 1)$ ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} u(x) + t\phi(x) &= u(x) + t\psi^2(x)((u(x + e_i h) - u(x))) \\ &= (1 - t\psi^2(x))u(x) + t\psi^2(x)u(x + e_i h) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

εφόσον $u(x) \geq 0$. Σημειώνεται ότι, η $u(x)$ ορίζεται στο D και άρα η $u(x + e_i h)$ ορίζεται στο σύνολο

$$D_{-h} = \{x : \ x + e_i h \in K\}.$$

Επομένως, η $u(x) + t\phi$ ορίζεται μόνο στο σύνολο $D_{-h} \cap D \subset D$. Ισχύει επίσης ότι $\psi(x) = 0$ για $x \in D \backslash (D_{-h} \cap D)$, εφόσον $|h| < \frac{dist(\mathbf{C}, D^c)}{2}$ και άρα $dist(x, \mathbf{C}) > \frac{dist(\mathbf{C}, D^c)}{2}$. Επομένως, αν πάρουμε την συνάρτηση $u(x) + t\phi(x)$ στο σύνολο $D_{-h} \cap D$ ($\phi(x)$ η συνάρτηση που ορίσαμε προηγουμένως) και $\phi(x) = 0$ στο $D \backslash (D_{-h} \cap D)$, όπου $|h| < \frac{dist(\mathbf{C}, D^c)}{2}$, τότε έχουμε μια καλά ορισμένη συνάρτηση.
Παρατηρούμε, επίσης ότι

$$u(x) + t\phi(x) = t\psi^2(x)(u(x + e_i h) - u(x)) + u(x) = f(x) \ \sigma\tau o \ \partial D.$$

Επομένως $u(x) + t\phi(x) \in K$. Από την (5.1.2) προκύπτει:

$$\int_D \Big(\nabla u(x)\nabla(\psi^2(x)(u(x+e_ih) - u(x))) + \psi^2(x)(u(x+e_ih) - u(x))\Big)dx \geq 0. \tag{5.1.3}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η $u(x+e_ih)$ είναι ελαχιστοποιητής, στο ομαλοποιημένο πρόβλημα εμποδίου, σε ένα ελαφρώς μετατοπισμένο χωρίο και με συνοριακές τιμές την $f(x+e_ih)$. Όμοια με παραπάνω επιλέγοντας $\phi(x) = \psi^2(x)(u(x) - u(x+e_ih))$ προκύπτει:

$$\int_D \big(\nabla u(x+e_ih)\nabla(\psi^2(x)(u(x) - u(x+e_ih))) + \psi^2(x)(u(x) - u(x+e_ih))\big)dx \geq 0. \tag{5.1.4}$$

Προσθέτουμε τις (5.1.3) και (5.1.4) και αναδιατάσσουμε κατάλληλα τους όρους για να προκύψει:

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_D \nabla(u(x+e_ih) - u(x))\nabla(\psi^2(x)(u(x+e_ih) - u(x)))dx \\ &= \int_D \psi^2(x)\Big|\nabla(u(x+e_ih) - u(x))\Big|^2 dx \\ &+ \int_D 2\psi(x)(u(x+e_ih) - u(x))\nabla\psi(x)\nabla(u(x+e_ih) - u(x))dx. \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} &\int_D \psi^2(x)\Big|\nabla(u(x+e_ih) - u(x))\Big|^2 dx \leq \\ \leq -2&\int_D \psi(x)(u(x+e_ih) - u(x))\psi(x)\nabla(u(x+e_ih) - u(x))dx. \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

Στη συνέχεια της απόδειξης θα χρειαστούμε την ανισότητα, $2\mathbf{v}\mathbf{w} \leq 2|\mathbf{v}|^2 - \frac{1}{2}|\mathbf{w}|^2$ για $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}$. Άρα, έχουμε:

$$\begin{aligned} 2(u(x+e_ih) - u(x))\nabla\psi(x)\psi(x)\nabla(u(x+e_ih) - u(x)) \leq \\ \leq 8|\nabla\psi(x)|^2(u(x+e_ih) - u(x))^2 + \frac{1}{2}\psi^2(x)|\nabla(u(x+e_ih) - u(x))|^2. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την τελευταία ανισότητα στην (5.1.5) προκύπτει ότι:

$$\int_D \psi^2(x)|\nabla(u(x+e_ih)-u(x))|^2dx \le \int_D 16|\nabla\psi(x)|^2(u(x+e_ih)-u(x))^2dx. \tag{5.1.6}$$

Εφόσον $\psi(x)=1$ στο $\mathbf{C}$, τότε:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{C}}|\nabla(u(x+e_ih)-u(x))|^2dx &= \int_{\mathbf{C}}\psi^2(x)|^2dx\\ &\le \int_D \psi^2(x)|\nabla(u(x+e_ih)-u(x))|^2\\ &\le \int_D 16|\nabla\psi(x)|^2(u(x+e_ih)-u(x))^2dx.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε ότι $|\nabla\psi(x)| < \frac{4}{dist(\mathbf{C},D^c)}$ και

$$\int_{\mathbf{C}}|\nabla(u(x+e_ih)-u(x))|^2dx \le \frac{256}{dist(\mathbf{C},D^c)}\int_D(u(x+e_ih)-u(x))^2dx. \tag{5.1.7}$$

Διαιρώντας την (5.1.7) με h^2 προκύπτει το ζητούμενο. □

Λήμμα 5.3. *Υποθέτουμε ότι $u \in W^{1,2}(D)$ και $\mathbf{C} \subset D$ συμπαγές σύνολο, τότε για κάθε $|h| \le dist(\mathbf{C},D^c)$ ισχύει ότι:*

$$\int_{\mathbf{C}}\left|\frac{u(x+e_ih)-u(x)}{h}\right|^2dx \le \int_D\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^2dx. \tag{5.1.8}$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη του λήμματος, θα χρειαστεί να θεωρήσουμε δεδομένο, ότι ισχύει το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού στους χώρους *Sobolev*. Επίσης, θα χρειαστούμε την ανισότητα $Cauchy-Schwartz$, δηλαδή αν $f \in L^2(S)$ και $|S|$ το εμβαδό του S,τότε:

$$\left|\int_S|f(x)|dx\right|^2 \le |S|\int_S|f(x)|^2dx. \tag{5.1.9}$$

Απο το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού γνωρίζουμε ότι:

$$\frac{u(x+e_ih)-u(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_0^h\frac{\partial u(x+e_is)}{\partial x_i}ds. \tag{5.1.10}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{C}}\left|\frac{u(x+e_ih)-u(x)}{h}\right|^2dx&=\int_{\mathbf{C}}\left|\frac{1}{h}\int_0^h\frac{\partial u(x+e_is)}{\partial x_i}ds\right|^2dx\\&\leq\int_{\mathbf{C}}\frac{1}{|h|}\int_0^h\left|\frac{\partial u(x+e_is)}{\partial x_i}\right|^2dsdx,\end{aligned} \tag{5.1.11}$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιούμε την ανισότητα $Cauchy{-}Schwartz$. Από το Θεώρημα του $Fubini$ προκύπτει:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{C}}\frac{1}{h}\int_0^h\left|\frac{\partial u(x+e_is)}{\partial x_i}\right|^2dsdx&=\frac{1}{h}\int_0^h\int_{\mathbf{C}}\left|\frac{\partial u(x+e_is)}{\partial}x_i\right|^2dxds\\&\leq\frac{1}{h}\int_0^h\int_D\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^2dxds\\&=\int_D\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^2dx,\end{aligned} \tag{5.1.12}$$

όπου, χρησιμοποιήσαμε ότι $\mathbf{C}\subset D$ και ότι $|h|\leq dist(\mathbf{C},D^c)$. Απο τις (5.1.11) και (5.1.12) προκύπτει το ζητούμενο. □

Λήμμα 5.4. *Έστω $\mathbf{C}\subset D$ συμπαγές σύνολο. Υποθέτουμε επίσης ότι $u(x)\in L^2(D)$ και έστω ότι υπάρχει σταθερά C όπου ισχύει ότι:*

$$\int_{\mathbf{C}}\left|\frac{u(x+e_ih)-u(x)}{h}\right|^2dx\leq C \tag{5.1.13}$$

για όλα τα $|h|<\delta$. Τότε ορίζεται η ασθενής παραγωγος $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ στο $\mathbf{C}$ και μάλιστα:

$$\int_{\mathbf{C}}\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^2dx\leq C. \tag{5.1.14}$$

Απόδειξη. Αρχικά, παρατηρούμε από την (5.1.13) ότι για οποιαδήποτε ακολουθία $h_j\to 0$ η συνάρτηση $\frac{u(x+e_ih_j)-u(x)}{h_j}$ είναι φραγμένη στο χώρο $L^2(\mathbf{C})$. Επομένως από το Θεώρημα 2.6 ασθενής συμπάγειας υπάρχει υποακολουθία (χωρίς βλάβη της γενικότητας θα την συμβολίζουμε με h_j) τέτοια ώστε:

$$v^j(x) = \frac{u(x+e_ih_j)-u(x)}{h_j} \rightharpoonup g_i(x) \in L^2(\mathbf{C}). \tag{5.1.15}$$

Από το Λήμμα 2.5 ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} &\|g_i(x)\|_{L^2(\mathbf{C})} \leq \liminf_{j\to\infty} \left\|v_i^j\right\|_{L^2(\mathbf{C})} \leq C \\ &\Rightarrow \|g_i(x)\|_{L^2(\mathbf{C})} \leq C. \end{aligned} \tag{5.1.16}$$

Ισχυρισμός: Η $g_i(x)$ είναι η x_i-ασθενής παράγωγος της $u(x)$.

Απόδειξη Ισχυρισμού: Υποθέτουμε ότι $\phi \in C_c^1(\mathbf{C})$ οποιαδήποτε συνάρτηση τότε:

$$\begin{aligned} -\int_{\mathbf{C}} \frac{\partial\phi(x)}{\partial x_i}u(x)dx &= \lim_{h_j\to 0} -\int_{\mathbf{C}} \frac{\phi(x+e_ih_j)-\phi(x)}{h_j}u(x)dx = \\ &= \lim_{h_j\to 0} -\frac{1}{h_j}\left(\int_{\mathbf{C}} \phi(x+e_ih_j)u(x)dx - \int_{\mathbf{C}} \phi(x)u(x)dx\right) = \left\{ \begin{array}{l} \alpha\lambda\lambda.\ \mu\epsilon\tau\alpha\beta\lambda. \\ x+e_ih_j \to x \\ \sigma\tau\eta\ \phi(x+e_ih_j) \end{array} \right. \\ &= \lim_{h_j\to 0} -\frac{1}{h_j}\left(\int_{\mathbf{C}+e_ih_j} \phi(x)u(x-e_ih_j)dx - \int_{\mathbf{C}} \phi(x)u(x)dx\right) \end{aligned}$$

Εφόσον η $\phi(x)$ έχει συμπαγή φορέα στο $\mathbf{C}$ τότε έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} -\int_{\mathbf{C}} \frac{\partial\phi(x)}{\partial x_i}u(x)dx &= \lim_{h_j\to 0} \int_{\mathbf{C}+e_ih_j} \phi(x)\frac{u(x)-u(x+e_ih_j)-u(x)}{h_j}dx \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \alpha\lambda\lambda.\ \mu\epsilon\tau\alpha\beta\lambda. \\ x-e_ih_j \to x \end{array} \right. \\ &= \lim_{h_j\to 0} \int_{\mathbf{C}} \phi(x+e_ih_j)\frac{u(x+e_ih_j)-u(x)}{h_j}dx \\ &\rightharpoonup \int_{\mathbf{C}} \phi(x)g_i(x)dx. \end{aligned}$$

Εξ' ορισμού της ασθενής παραγώγου:

$$g_i(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}.$$

Από την (5.1.16) προκύπτει το ζητούμενο δηλαδή:

$$\int_{\mathbf{C}} \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right|^2 dx \le C.$$

□

Συνοψίζοντας όλα τα προηγούμενα καταλήγουμε στο παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 5.5. *Έστω $u(x)$ λύση στο ομαλοποιημένο πρόβλημα εμποδίου, τότε η $u(x)$ έχει ασθενείς παραγώγους δευτέρας τάξεως σε οποιοδήποτε συμπαγές σύνολο $\mathbf{C} \subset D$ και υπάρχει σταθερά C_c(εξαρτάται μόνο από το σύνολο C) τέτοιο ώστε για κάθε i*

$$\int_{\mathbf{C}} \left| \nabla \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right|^2 dx \le C_c \int_D \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right|^2 dx. \tag{5.1.17}$$

Ειδικότερα:

$$\int_{\mathbf{C}} |D^2 u(x)|^2 dx \le C_c \int_D |\nabla u(x)|^2 dx. \tag{5.1.18}$$

Απόδειξη. Από το Λήμμα 5.2 και το Λήμμα 5.3 προκύπτει ότι:

$$\int_{\mathbf{C}} \left| \frac{\nabla(u(x+e_i h_j) - u(x))}{h} \right|^2 dx \le C \int_D \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right|^2 dx \tag{5.1.19}$$

Τότε από το Λήμμα 5.4 και την (5.1.19) προκύπτει ότι η $\nabla u(x)$ είναι ασθενώς διαφορίσιμη ως προς το x_i και μάλιστα:

$$\int_{\mathbf{C}} \left| \nabla \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right|^2 dx \le C_c \int_D \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right|^2 dx. \tag{5.1.20}$$

Επομένως προκύπτει η (5.1.17). Αθροίζοντας την τελευταία ως προς i τότε προκύπτει η (5.1.18). □

5.2 Οι εξισώσεις *Euler – Lagrange*

Σε αυτή την ενότητα, σκοπός μας είναι να αποδείξουμε ότι η λύση του ομαλοποιημένου προβλήματος εμποδίου ικανοποιεί τις εξισώσεις *Euler – Lagrange*. Εφόσον προηγουμένως έχουμε εξασφαλίσει ότι για τη λύση ορίζονται οι παράγωγοι δευτέρας τάξεως μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο Θεώρημα:

Θεώρημα 5.6. *Υποθέτουμε ότι, το σύνολο D είναι ένα C^1 χωρίο και ότι η $u(x)$ ελαχιστοποιεί την*

$$\int_D (\frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 + u(x))dx$$

στο σύνολο συναρτήσεων

$$K = \left\{u \in W^{1,2}(D);\ u(x) \geq 0\ \kappa\alpha\iota\ u(x) = f(x)\ \sigma\tau o\ \partial D\right\}.$$

Τότε:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = \mathcal{X}_{\{u(x)>0\}} & \sigma\tau o\ D \\ u(x) \geq 0 & \sigma\tau o\ D \\ u \in W^{2,2}_{loc}(D) \end{cases}$$

όπου

$$\mathcal{X}_{\{u(x)>0\}} = \begin{cases} 1 & \alpha\nu\ u(x) > 0 \\ 0 & \alpha\nu\ u(x) = 0 \end{cases}$$

Απόδειξη. Αρχικά, παρατηρούμε από το Θεώρημα 5.5 ότι $u(x) \in W^{2,2}_{loc}(D)$ και εφόσον $u \in K$, ισχύει ότι $u(x) \geq 0$. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι

$$\Delta u(x) = \mathcal{X}_{\{u(x)>0\}}$$

Εφόσον η $u(x)$ είναι ελαχιστοποιητής,τότε για όλες τις $\phi(x) \geq 0$ για τις οποίες ισχύει ότι $\phi(x) \in W_0^{1,2}(D)$ ικανοποιεί τη μεταβολική ανισότητα:

$$\int_D (\nabla\phi(x)\nabla u(x) + \phi(x))dx \geq 0. \tag{5.2.1}$$

όπου

$$W_0^{1,2}(D) = \left\{v \in W^{1,2}(D);\ v(x) = 0\ \sigma\tau o\ \partial D\ \omega\varsigma\ \pi\rho o\varsigma\ \tau o\ \iota\chi\nu o\varsigma\right\}.$$

Επιλέγουμε τη συνάρτηση $\phi(x)$ να έχει συμπαγή φορέα στο D και ολοκληρώνουμε κατα μέρη την (5.2.1).

$$0 \leq \int_D (-\phi(x)\Delta u(x) + \phi(x))dx = \int_D \phi(x)(1 - \Delta u(x))dx \tag{5.2.2}$$

Άρα, αφού η $\phi(x)$ είναι οποιαδήποτε συνάρτηση προκύπτει ότι $1 - \Delta u \geq 0$, και άρα έχουμε ότι $0 \leq \Delta u(x) \leq 1$.
Τώρα για να δείξουμε ότι, $\Delta u(x) = \mathcal{X}_{\{u(x)>0\}}$, αρκεί να επιλέξουμε κατάλληλα τη συνάρτηση $\phi(x)$.Επιλέγουμε $\phi(x) = \psi(x)u(x)$, όπου $\psi(x) \in C_c^1(D)$ και $0 \leq \psi(x) \leq 1$. Κάνοντας αυτή την επιλογή, εξασφαλίζουμε ότι $u(x) + t\phi(x) \in K$ για κάθε $t \in (-1, 1)$. Επομένως, από τις μεταβολικές ανισότητες γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$0 = \int_D \phi(x)(1 - \Delta u(x))dx = \int_D \psi(x)u(x)(1 - \Delta u(x))dx. \tag{5.2.3}$$

Υποθέτουμε ότι $\Delta u(x) \neq 1$ σε κάποιο σύνολο $\Sigma \in \{u(x) \geq \epsilon\}$. Τότε $1 - \Delta u(x) > 0$ στο σύνολο Σ. Επιλέγοντας την $\psi(x)$ ώστε να είναι θετική σε αυτό το σύνολο τότε η $u(x)\psi(x)(1 - \Delta u(x)) > 0$ στο Σ. Επίσης ισχυει ότι $\Sigma \subset D$ και $\psi(x)u(x)(1 - \Delta u(x)) \geq 0$ από την (5.2.3) προκύπτει ότι:

$$0 = \int_\Sigma \psi(x)u(x)(1 - \Delta u(x))dx$$

όπου είναι πιθανόν να ισχύει αν το σύνολο Σ έχει μέτρο 0. Επομένως $\Delta u(x) = 1$ στο σύνολο $\{u(x) > \epsilon\}$ για κάθε $\epsilon > 0$. Παίρνοντας το όριο $\epsilon \to 0$, έχουμε ότι $\Delta u(x) = 1$ στο σύνολο $\{u(x) > 0\}$.

Αν τώρα, $u(x) = 0$, ισχύει ότι $\Delta u(x) = 0$ σχεδόν παντού. Επομένως:

$$\Delta u(x) = \begin{cases} 1, \ \alpha\nu \ u(x) > 0 \\ 0, \ \alpha\nu \ u(x) = 0 \end{cases}$$

το οποίο είναι το ζητούμενο.

□

Κεφάλαιο 6

Ομαλότητα Λύσης και Παραγώγων της

Στο Θεώρημα 5.6 του προηγούμενου κεφαλαίου είδαμε ότι η λύση στο ομαλοποιημένο πρόβλημα ικανοποιεί τις εξισώσεις $Euler - Lagrange$, όμως δεν μας δίνεται καμία πληροφορία για τη λύση στο ελεύθερο σύνορο $\Gamma_u = \partial \bar{\Omega_u} = \partial \{x;\ u(x) > 0\}$.

Στο παρόν κεφάλαιο, θα δείξουμε ότι η λυση στο πρόβλημα εμποδίου είναι συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση, τέτοια ώστε $u(x) = 0$ και $|\nabla u(x)| = 0$ στο Γ_u. Στις εφαρμογές είναι εξίσου σημαντικό να καταλάβουμε πώς ορίζεται η λύση μου στο ελεύθερο σύνορο Γ_u όσο και ο υπολογισμός της λύσης.

Αρχικά, θα δούμε ότι οι εξισώσεις $Euler - Lagrange$ στη πραγματικότητα μας δίνουν σημαντικές πληροφορίες για το ελεύθερο σύνορο. Για το σκοπό αυτό, πρέπει να καταλάβουμε ότι, στις εξισώσεις $Euler - Lagrange$ δεν μας δίνεται λύση όπως το πρόβλημα:

$$\Delta v(x) = \begin{cases} 1 \ \ \sigma\tau o\ \sigma\upsilon\nu o\lambda o\ \ \{v(x) > 0\} \\ 0 \ \ \sigma\tau o\ \sigma\upsilon\nu o\lambda o\ \ \{v(x) = 0\} \end{cases} \tag{6.0.1}$$

εφόσον οι εξισώσεις $Euler - Lagrange$, μας δίνουν ακόμη μία σημαντική πληροφορία, ότι $u \in W^{2,2}_{loc}(D)$ που προσδιορίζει λεπτομερώς τη λύση. Για το σκοπό αυτο, θα δούμε ένα παράδειγμα στη μία διασταση.

Παράδειγμα: Μελετάμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-1)^2 + (1-x) & \textit{οταν } 0 < x < 1 \\ 0 & \textit{οταν } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Τότε ισχύει ότι:

$$\Delta f(x) = f''(x) = \begin{cases} 1 & \textit{στο } \{f(x) > 0\} \\ 0 & \textit{στο } \{f(x) = 0\} \end{cases}$$

Όμως $f(x) \notin W^{2,2}_{loc}([0,2])$. Πράγματι, παρατηρούμε ότι:

$$f'(x) = \begin{cases} x - 2 & \textit{οταν } 0 < x < 1 \\ 0, & \textit{οταν } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Για $h \to 0$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left| \frac{f'(x+h) - f(x)}{h} \right|^2 dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1-h} \left| \frac{x+h-2-x+2}{h} \right|^2 dx + \\ + \int_{1-h}^{1} \left| \frac{2-x}{h} \right|^2 dx + 0 \approx \frac{1}{2} - h + \int_{1-h}^{1} \left| \frac{1}{h} \right|^2 dx \to \infty$$

Επομένως, η $f(x)$ δε μπορεί να είναι λύση του προβλήματος εμποδίου.

Με το προηγούμενο παράδειγμα, καταλαμβαίνουμε ότι, το πρόβλημα εμποδίου "επιλέγει" το ελεύθερο σύνορο με τέτοιο τρόπο ώστε $u \in W^{2,2}_{loc}(D)$. Επομένως, είναι λογικό να υποθέτουμε ότι αυτό που καθορίζει τη θέση του ελεύθερου συνόρου, είναι ότι η λύση μου ικανοποιεί κάποιες συνοριακές συνθήκες στο Γ.

6.1 $C^{1,1}$- εκτιμήσεις για τη λύση

Σε αυτή την ενότητα, σκοπός μας είναι να αποδείξουμε ότι η λύση στο ομαλοποιημένο πρόβλημα εμποδίου ικανοποιεί δύο συνοριακές στο ελεύθερο σύνορο Γ.

Ας θυμηθούμε το πρόβλημα *Dirichlet*

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= h(x) \ \ \sigma\tau o\ D \\ u(x) &= f(x) \quad \sigma\tau o\ \partial D \end{aligned}$$

όπου έχει μοναδική λύση κάτω από κάποιες υποθέσεις. Αυτό σημαίνει ότι το συνοριακό δεδομένο $f(x)$ και το χωρίο D καθορίζουν την τιμή του $\nabla u(x)$ για κάθε $x \in \partial D$.

Στο πρόβλημα εμποδίου τα πράγματα είναι διαφορετικά. Γενικότερα, στο πρόβλημα εμποδίου το σύνολο $\Omega = \{x \in D;\ u(x) > 0\}$ είναι μέρος της λύσης και είναι ιδιαίτερα σημαντικό σύνολο στο πρόβλημα. Ειδικότερα, σε αυτή την ενότητα θα δείξουμε ότι το σύνολο Ω δεν είναι ένα τυχαίο υποσύνολο του D, αλλά ικανοποιεί τα εξής:

1. $\Omega \subset D$

2. $spt(f) \subset \bar{\Omega}$

3. Αν η $u(x)$ είναι λύση του προβλήματος *Dirichlet*:

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 1 \ \ \sigma\tau o\ \Omega \\ u(x) &= f(x) \ \ \sigma\tau o\ \partial\Omega \cap \partial D \\ u(x) &= 0 \quad \sigma\tau o\ \partial\Omega \setminus \partial D \end{aligned}$$

   τότε $|\nabla u(x)| = 0$ στο $\partial\Omega \setminus \partial D$ και $u(x) \geq 0$ στο Ω.

Θα αρχίσουμε την απόδειξη με το επόμενο Λήμμα που αφορά λύσεις στις εξισώσεις του *Poisson*.

Λήμμα 6.1. *Έστω $h(x)$ μία φραγμένη και ολοκληρώσιμη συνάρτηση $|h(x)| \leq M$ με φορέα στο φραγμένο σύνολο $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Ορίζουμε*

$$u(x) = -\frac{1}{n(n-2)w_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{h(z)}{|x-z|^{n-2}} dz, \tag{6.1.1}$$

όπου w_n το εμβαδό της μοναδιαίας σφαίρας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |u(x)| \leq \frac{M}{2(n-2)} diam(D)^2 \tag{6.1.2}$$

και υπάρχει σταθερά C_n, η οποία εξαρτάται μόνο από τη διάσταση n τέτοια ώστε

$$|u(x) - u(x)| \leq C_n diam(D) M |x-y| \tag{6.1.3}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$, όπου $diam(D)$ ορίζουμε τη διάμετρο της μικρότερης σφαίρας που περιέχει το D.

Απόδειξη. Αρχικά, θα αποδείξουμε την (6.1.2).

$$\begin{aligned}|u(x)| &\leq \frac{1}{n(n-2)w_n}\int_{\mathbb{R}} \frac{|h(z)|}{|x-z|^{n-2}} dz \\ &\leq \frac{M}{n(n-2)w_n}\int_{B_{diam(D)}(x)} \frac{1}{|x-z|^{n-2}} dz\end{aligned}$$

οπου ισχύουν οι ανισότητες εφόσον η $h(x)$ έχει συμπαγή φορέα στο D και $|h(x)| \leq M$.

Εάν τώρα, κάνουμε αλλαγή μεταβλητών τέτοια ώστε $x - z \to z$ προκύπτει ότι:

$$|u(x)| \leq \frac{M}{n(n-2)w_n}\int_{B_{diam(D)}(0)} \frac{1}{|z|^{n-2}} dz. \tag{6.1.4}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned}\int_{B_{diam(D)}(0)} \frac{1}{|z|^{n-2}} dz &= \int_0^{diam(D)} \int_{\partial B_\sigma(0)} \frac{1}{\sigma^{n-2}} dS d\sigma \\ &= \int_0^{diam(D)} \frac{n w_n \sigma^{n-1}}{\sigma^{n-2}} d\sigma.\end{aligned} \tag{6.1.5}$$

Από τις (6.1.4) και (6.1.5) ισχύει ότι:

$$|u(x)| \leq \frac{M}{2(n-2)} diam(D)^2,$$

όπου είναι και το ζητούμενο.

Μένει τώρα να αποδείξουμε την (6.1.3). Έστω $x, y \in \mathbb{R}^n$.

1η Περίπτωση: Αν $|x-y| \geq diam(D)$, τότε από την (6.1.2) προκύπτει το ζητούμενο.

2η Περίπτωση: Αν $|x-y| < diam(D)$. Θέτουμε $r = |x-y|$ και προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(x)| &= \frac{1}{n(n-2)w_n}\left| \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{h(z)}{|x-z|^{n-2}} - \frac{h(z)}{|y-z|^{n-2}} \right) dz \right| \\
&\leq \frac{1}{n(n-2)w_n}\left| \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{3r}(\frac{x+y}{2})} \left(\frac{h(z)}{|x-z|^{n-2}} - \frac{h(z)}{|y-z|^{2}} \right) dz \right| \\
&+ \frac{1}{n(n-2)w_n} \int_{B_{3r}(\frac{x+y}{2})} \frac{|h(z)|}{|x-z|^{n-2}} dz \\
&+ \frac{1}{n(n-2)w_n} \int_{B_{3r}(\frac{x+y}{2})} \frac{|h(z)|}{|y-z|^{n-2}} dz \\
&= I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε ξεχωριστά τα 3 ολοκληρώματα. Καταρχήν

$$I_2 \leq \frac{M}{n(n-2)w_n} \int_{B_{3r}(\frac{x+y}{2})} \frac{1}{|x-z|^{n-2}} dz.$$

Παρατηρούμε ότι $B_{3r}(\frac{x+y}{2}) \subset B_{4r}(x)$. Άρα:

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \frac{M}{n(n-2)w_n} \int_{B_{4r}(x)} \frac{1}{|x-z|^{n-2}} dz \\
&= \frac{M}{n(n-2)w_n} \int_{B_{4r}(x)} \frac{1}{|z|^{n-2}} dz \\
&= \frac{8M}{(n-2)} r^2 \leq \frac{8M}{(n-2)} diam(D) r.
\end{aligned}$$

όπου ακολουθήσαμε την ίδια τακτική όπως και στην απόδειξη της (6.1.2).
Όμοια

$$I_3 \leq \frac{8M}{(n-2)} diam(D) r.$$

Απομένει τώρα να εκτιμήσουμε το ολοκλήρωμα I_1. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το κέντρο είναι η αρχή δηλαδή $\frac{x+y}{2} = 0$. Η αντίστοιχη εκτίμηση για μη μηδενικό κέντρο προκύπτει κάνοντας κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής στο ολοκλήρωμα I_1.
Αν $z \in \mathbb{R}^n \setminus B_{3r}(\frac{x+y}{2}) = \mathbb{R}^n \setminus B_{3r}(0)$, τοτε αν $t \in [0,1]$

$$|tx + (1-t)y - z| \geq |z| - |tx + (1-t)y| \geq |z| - r > \frac{|z|}{2}. \tag{6.1.6}$$

όπου η (6.1.6) προκύπτει εάν παρατηρήσουμε ότι $|z| \geq 3r$ και ότι:

$$\begin{aligned} |tx + (1-t)y| &= |tx + (1-t)y - \frac{x+y}{2}| \\ &= \left| \frac{(2t-1)(x-y)}{2} \right| \leq r \end{aligned}$$

εφόσον $\frac{x+y}{2} = 0$ και $|x - y| = r$.
Χρησιμοποιώντας το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{|x-z|^{n-2}} - \frac{1}{|y-z|^{n-2}} \right| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{|tx + (1-t)y - z|^{n-2}} \right) dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 \frac{(n-2)(x-y)}{|tx + (1-t)y - z|^{n-1}} dt \right| \\ &\leq \frac{(n-2)|x-y| 2^{n-1}}{|z|^{n-1}} = \frac{2^{n-1}(n-2) r}{|z|^{n-1}} \end{aligned} \tag{6.1.7}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει απο την (6.1.6).
Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της (6.1.7) θα εκτιμήσουμε το I_1.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{n(n-2)w_n}\left|\int_{\mathbb{R}\setminus B_{3r}(0)}\left(\frac{h(z)}{|x-z|^{n-2}}-\frac{h(z)}{|y-z|^{n-2}}\right)dz\right| \\
&\leq \frac{2^{n-1}(n-2)rM}{n(n-2)w_n}\left|\int_{spt(h)\setminus B_{3r}(0)}\frac{1}{|z|^{n-1}}dz\right| \\
&\leq \frac{2^{n-1}r}{nw_n}\left|\int_{B_{diam(D)}}\frac{1}{|z|^{n-1}}dz\right| \\
&= 2^{n-1}Mdiam(D)r.
\end{aligned}$$

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω, έχουμε ότι

$$|u(x)-u(y)| \leq \left(\frac{16}{n-2}+2^{n-1}\right)Mdiam(D)|x-y|.$$

Επομένως προκύπτει η (6.1.3), δηλαδή

$$|u(x)-u(y)| \leq C_n Mdiam(D)|x-y| \;\; \forall x,y \in \mathbb{R}^n.$$

□

Στην απόδειξη του επόμενου Λήμματος χρησιμοποιούνται οι τύποι του *Poisson* για τον αρμονικό τελεστή και ένα Θεώρημα για τις εκτιμήσεις των παραγώγων για αρμονικές συναρτήσεις, τα οποία παραθέτουμε χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 6.2 (Επίλυση εξισώσεων *Poisson*)**.** *Έστω u όπως η (6.1.1). Τότε:*

1. $u \in \mathbf{C}^(\mathbb{R}^n)$ *και*

2. $\Delta u(x) = h(x)$

Θεώρημα 6.3. *Έστω u αρμονική συνάρτηση στο D. Τότε, για κάθε $B_r(x_0) \subset D$ και για κάθε πολυδείκτη α τέτοιο ώστε $|\alpha| = k$ ισχύει ότι:*

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}}\,\|u\|_{L^1(B_r(x_0))} \tag{6.1.8}$$

όπου

$$C_0 = \frac{1}{w_n},\ C_k = \frac{(2^{n+1}nk)^k}{w_n},\ (k = 1, ...)$$

Λήμμα 6.4. *Έστω $h(x)$ μία φραγμένη και ολοκληρώσιμη συνάρτηση, $|h(x)| \leq M$, στη $B_3(0)$ και έστω ότι:*

$$\Delta u = h(x)$$
$$sup_{B_3(0)} u(x) \leq N.$$

Τότε

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y| \ \ \forall x, y \in B_3(0) \tag{6.1.9}$$

όπου C σταθερά που εξαρτάται μόνο από τα n, M, N.

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$v(x) = -\frac{1}{n(n-2)w_n} \int_{B_3(0)} \frac{h(z)}{|x - z|^{n-2}} dz.$$

Τότε από το Λήμμα 6.1 ισχύει ότι:

$$|v(x) - v(y)| \leq C_n M |x - y|. \tag{6.1.10}$$

Επίσης από το Θεώρημα 6.2, έχουμε ότι $\Delta v(x) = h(x)$.

Ορίζουμε τώρα, $w(x) = u(x) - v(x)$. Παρατηρούμε ότι, η συνάρτηση $w(x)$ είναι αρμονική, εφόσον $\Delta w(x) = \Delta u(x) - \Delta v(x) = 0$. Από το Θέωρημα 6.3 προκύπτει ότι:

$$|\nabla w(x)| \leq C_1 \|w\|_L^1 (B_1(x)) \ \ \forall x \in B_2(0) \tag{6.1.11}$$

Επίσης,

$$sup_{B_3(0)} |w(x)| \leq sup_{B_3(0)} |u(x)| + sup_{B_3(0)} |v(x)| \leq N + \frac{9M}{2(n-2)} \tag{6.1.12}$$

όπου χρησιμοποιούμε το Λήμμα 6.1 στη τελευταία ανισότητα.

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, την (6.1.11) και (6.1.12) προκύπτει ότι για κάθε $x, y \in B_2(0)$ υπάρχει ξ μεταξύ των x και y τέτοιο ώστε:

$$|w(x) - w(y)| \leq |\nabla w(\xi)||x - y| \leq C|x - y| \tag{6.1.13}$$

όπου C σταθερά που εξαρτάται μόνο από τα n, M, N.

Συνοψίζοντας, από τις (6.1.10) και (6.1.13) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &= |u(x) - v(x) + v(x) - v(y) + v(y) - u(y)| \\ &\leq |w(x) - w(y)| + |v(x) - v(y)| \\ &\leq C|x - y| \end{aligned}$$

όπου C σταθερά που εξαρτάται από τα n, M, N. (Το C μπορεί να είναι διαφορετικό από αύτο της (6.1.12)). □

Για την απόδειξη του Πορίσματος 6.7 που ακολουθεί θα χρειαστούμε τον Ορισμό για ισοσυνεχή ακολουθία συναρτήσεων και το Θεώρημα $Arzela - Ascoli$ τα οποίο παραθέτουμε πιο κάτω.

Ορισμός 6.5. *Έστω $f_k(x)$ ακολουθία συναρτήσεων, $x \in D$. Θα λέμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $f_k(x)$ είναι ισοσυνεχής εάν $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ τέτοιο ώστε $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x, y \in D$ και $|x - y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon$.*

Θεώρημα 6.6 ($Arzela - Ascoli$). *Έστω $f_k(x)$ ομοιόμορφα φραγμένη και ισοσυνεχής ακολουθία, τότε υπάρχει $\{f_{k_n}\}$ υποακολουθία της f_k και f_0 τέτοιο ώστε:*

$$f_{k_n} \to f_0$$

ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές σύνολο $K \subset D$.

Πρόταση 6.7. *Έστω $h^k(x)$ μία ομοιόμορφα φραγμένη, $|h^k(x)| \leq M$ και ολοκληρώσιμη ακολουθία συναρτήσεων. Έστω $u^k(x)$ μία ακολουθία συναρτήσεων* *τέτοια ώστε:*

$$\begin{aligned} &\Delta u^k = h^k(x) \quad \sigma\tau o\ B_3(0) \\ &sup_{B_3(0)}|u^k(x)| \leq N \end{aligned} \tag{6.1.14}$$

Τότε υπάρχει συνάρτηση u_0 και υποακολουθία u^{k_j} τέτοια ώστε $u^{k_j} \to u_0$ ομοιόμορφα στη $B_2(0)$.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 6.4 προκύπτει ότι η ακολουθία u^k είναι ισοσυνεχής. Επομένως, ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος $Arzela - Ascoli$ και άρα προκύπτει το ζητούμενο. □

Πρόταση 6.8. *Έστω $u(x)$ η λύση στο ομαλοποιημένο πρόβλημα εμποδίου στο D. Τότε το σύνολο $\Omega = \{x \in D;\ u(x) > 0\}$ είναι ανοικτό.*

Απόδειξη. Η απόδειξη του Πορίσματος, προκύπτει από τη συνέχεια της λύσης στο $\Delta u(x) = \mathcal{X}_{\{u>0\}}$. □

Λήμμα 6.9. *Έστω $f(x)$ και $g(x)$ φραγμένες ακολουθίες σε ένα χωρίο D. Υποθέτουμε επίσης ότι, $\Delta u(x) = f(x)$ και $\Delta v(x) = g(x)$ στο D. Αν $f(x) \geq g(x)$ στο D και $u(x) \leq v(x)$ στο ∂D, τότε:*

$$u(x) \leq v(x) \ \ \sigma\tau o\ D.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε $w(x) = u(x) - v(x)$. Αρκεί να δείξουμε ότι $w(x) \leq 0$ στο D.
Για την $w(x)$ ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \Delta w(x) &= f(x) - g(x) \geq 0 \ \ \sigma\tau o\ D \\ w(x) &= u(x) - v(x) \leq 0 \quad\ \sigma\tau o\ \partial D \end{aligned} \tag{6.1.15}$$

Από την Αρχή του $Dirichlet$ η $w(x)$ είναι λύση της (6.1.15) αν και μόνο αν ελαχιστοποιεί την

$$\int_D \frac{1}{2}|\nabla w(x)|^2 + w(x)(f(x) - g(x))dx \tag{6.1.16}$$

στο σύνολο συναρτήσεων

$$K = \left\{ w \in W^{1,2}(D);\ w(x) = u(x) - v(x) \ \sigma\tau o\ \partial D \right\}.$$

Στη συνέχεια, ορίζουμε $\bar{w}(x) = \min(w(x), 0) \in K$ και προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \int_D \frac{1}{2}|\nabla \bar{w}(x)|^2 + \bar{w}(x)(f(x) - g(x))dx &= \int_{D\cap\{w(x)\leq 0\}} \frac{1}{2}|\nabla w(x)|^2 + w(x)(f(x) - g(x))dx \\ &\leq \int_D \frac{1}{2}|\nabla w(x)|^2 + w(x)(f(x) - g(x))dx \end{aligned}$$

Με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $w(x) \leq 0$ στο D. Όμως η $w(x)$ ελαχιστοποιεί την (6.1.16) και άρα ισχύει η ισότητα. Επομένως $w(x) \leq 0 \Rightarrow u(x) \leq v(x)$ στο D. □

Στην απόδειξη θεωρήματος που ακολουθεί θα χρησιμοποιήσουμε την Ανισότητα του *Harnack* την οποία παραθέτουμε στη συνέχεια χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 6.10 (Ανισότητα *Harnack*). *Για κάθε συνεκτικό ανοικτο σύνολο $K \subset\subset D$, υπάρχει μία θετική σταθερά C, η οποία εξαρτάται μόνο από το K τέτοια ώστε:*

$$\sup_K u \leq C \inf_K u$$

για όλες τις μη αρνητικές, αρμονικές συναρτήσεις στο D.

Θεώρημα 6.11. *Έστω $u(x)$ λύση στο ομαλοποιημένο πρόβλημα εμποδίου στο χωρίο D. Υποθέτουμε επίσης ότι, για κάποιο $s > 0$*

$$x_0 \in \ \Gamma \cap \{x \in D,\ dist(x, \partial D) > s\}.$$

Τότε υπάρχει σταθερά C, η οποία εξαρτάται από τη διάσταση n, τέτοια ώστε:

$$\sup_{x\in B_r(x_0)} u(x) \leq Cr^2 \ \ \forall r \leq \frac{s}{2}$$

Απόδειξη. Θα χωρίσουμε την απόδειξη σε τρία βήματα:

Βήμα 1ο: Αρχίκα θέλουμε να δείξουμε ότι για την απόδειξη του θεωρήματος αρκεί να μελετήσουμε το εξής πρόβλημα:

Αν $u(x)$ είναι λύση στο ομαλοποιημένο πρόβλημα εμποδίου στην $B_2(0)$ και $u(0) = 0$ τότε $\sup_{B_1(0)} u(x) \leq C$, όπου C σταθερά που εξαρτάται από τη διάσταση.

Απόδειξη Βήματος 1: Έστω $u(x)$ η λύση του προβήματος όπως αυτή ο-ρίζεται στο Θεώρημα. Επιλέγω $x_0 \in \Omega$.

Ορίζουμε $u_r(x) = \frac{u(rx+x_0)}{r^2}$ όπου $rx + x_0 \in D$ και $u_r(0) = 0$.

Παρατηρούμε ότι, $B_{2r}(x_0) \subset D$, άρα $B_2(0) \subset \{x;\ rx + x_0 \in D\}$ και εφόσον $u(x) \in W^{2,2}_{loc}(B_2(0))$, ισχύει ότι $u_r(x) \in W^{2,2}_{loc}(B_2(0))$. Επίσης,

$$\Delta u_r(x) = \Delta\left(\frac{u(rx + x_0)}{r^2}\right) = \frac{r^2}{r^2}\Delta u(y)\bigg|_{y=rx+x_0} = \begin{cases} 1, & u_r(x) > 0 \\ 0, & u_r(x) = 0 \end{cases}$$

στο σύνολο $\{x;\ rx + x_0 \in D\}$.

Επομένως, η u_r είναι λύση στο ομαλοποιημένο πρόβλημα στην $B_2(0)$.

Τέλος, αν για την $u_r(x)$ ισχύει ότι, $\sup_{B_1(0)} u_r(x) \leq C$ τότε θα ισχύει ότι:

$$\frac{u(rx + x_0)}{r^2} = u_r(x) \leq C \ \ \forall x \in B_1(0)$$

και άρα θα ισχύει και το ζητούμενο στο Θεώρημα.

Βήμα 2ο: Έστω $u(x)$ είναι λύση στο ομαλοποιημένο πρόβλημα εμποδίου στην $B_2(0)$ και $u(0) = 0$, τότε υπάρχει C_n (εξαρτάται μόνο από τη διάσταση) τέτοια ώστε αν $y \in \partial B_1(0)$ τότε:

$$u(x) \geq C_n u(y) - \frac{1}{2n} \ \ \forall\, x \in B_{1/2}(y) \cap \partial B_1(0).$$

Απόδειξη Βήματος 2: Αρχικά, ορίζουμε τη συνάρτηση $v(x)$ έτσι ώστε

$$\begin{aligned} \Delta v(x) &= 0 \quad \sigma\tau o\ B_1(0) \\ v(x) &= u(x) \ \ \sigma\tau o\ \partial B_1(0) \end{aligned} \tag{6.1.17}$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι $\Delta u = \mathcal{X}_{\{u>0\}}$. Επομένως από το Λήμμα 6.9 συγκρίνοντας τις $u(x)$ και $v(x)$ προκύπτει ότι $u(x) \leq v(x)$ στο $B_1(0)$.

Ορίζουμε επίσης, $w(x) = v(x) - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}|x-y|^2$, τότε:

$$\begin{aligned} \Delta w(x) &= 1 \quad \sigma\tau o\ B_1(0) \\ w(x) &= u(x) \quad \sigma\tau o\ \partial B_1(0) \end{aligned} \tag{6.1.18}$$

Όμοια με προηγουμένως, από το Λήμμα 6.9 για τις συναρτήσεις $w(x)$ και $u(x)$, ισχύει ότι $w(x) \leq u(x)$ στο $B_1(0)$.

Επομένως, προκύπτει ότι:

$$v(x) - \frac{1}{2n} \leq w(x) \leq u(x) \leq v(x) \ \ \sigma\tau o\ B_1(0). \tag{6.1.19}$$

Εφόσον ισχύει ότι $v(x) \geq u(x) \geq 0$ και η $v(x)$ είναι αρμονική από την Ανισότητα του *Harnack*, υπάρχει σταθερά C που εξαρτάται μόνο από τη διάσταση του χώρου τέτοια ώστε:

$$v(y) \leq \sup_{B_{1/2}(y)} v(x) \leq C \inf_{B_{1/2}(y)} v(x) \tag{6.1.20}$$

Από την (6.1.20) και εφόσον $u(y) \leq v(y)$ ισχύει ότι

$$\inf_{B_{1/2}(y)} v(x) \geq \frac{v(y)}{C} \geq \frac{u(y)}{C}. \tag{6.1.21}$$

Τέλος από την (6.1.19) και (6.1.21) καταλήγουμε στο εξής:

$$\frac{u(y)}{C} \leq \inf_{B_{1/2}(y)} v(x) \leq \inf_{B_{1/2}(y)} u(x) + \frac{1}{2n}$$

Παίρνοντας $C_n = \frac{1}{C}$ από την τελευταία σχέση ισχύει ότι:

$$u(x) \geq C_n u(y) - \frac{1}{2n} \ \ \forall x \in B_{1/2}(y).$$

Εφόσον $B_{1/2}(y) \cap \partial B_1(0) \subset B_{1/2}(y)$ προκύπτει το ζητούμενο του Βήματος 2.

Βήμα 3ο: Υποθέτουμε ότι $u(x)$ είναι λύση στο ομαλοποιημένο πρόβλημα εμποδίου στο $B_2 0$ και $u(0) = 0$ τότε $\sup_{B_1(0)} u(x) \leq C_n$, όπου C_n σταθερά που εξαρτάται μόνο από τη διάσταση.

Απόδειξη Βήματος 3: Ορίζουμε συνάρτηση $v(x)$ έτσι ώστε

$$\Delta v(x) = 0 \quad \sigma\tau o \; B_1(0) \tag{6.1.22}$$

$$v(x) = u(x) \;\; \sigma\tau o \; \partial B_1(0) \tag{6.1.23}$$

Τότε όπως είδαμε στο Βήμα 2 ισχύει ότι $v(x) - \frac{1}{2n} \leq u(x) \leq v(x)$ στο $B_1(0)$. Εφόσον $u(0) = 0$ παρατηρούμε ότι:

$$v(0) \leq \frac{1}{2n}. \tag{6.1.24}$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής για αρμονικές συναρτήσεις, συμπεραίνουμε από την (6.1.24) ότι:

$$\frac{1}{2n} \geq v(0) = \frac{1}{nw_n} \int_{\partial B_1(0)} v(x) dS_x = \frac{1}{nw_n} \int_{\partial B_1(0)} u(x) dS_x. \tag{6.1.25}$$

Επιλέγοντας τώρα, $u(y) = sup_{\partial B_1(0)} u(x)$ τότε από την (6.1.25)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{nw_n} \int_{\partial B_1(0)} u(x) dS_x \geq \frac{1}{nw_n} \int_{\partial B_1(0) \cap B_{1/2}(y)} u(x) dS_x \geq \\ \geq \frac{K}{nw_n} \left(C_n u(y) - \frac{1}{2n} \right), \end{aligned}$$

όπου $K = \int_{\partial B_1(0) \cap B_{1/2}(y)} dS_x$, και η ανισότητα προκύπτει από το Βήμα 2 και αν παρατηρήσουμε ότι $u \geq 0$. Από την τελευταία ανισότητα παίρνουμε ότι:

$$u(y) \leq C_n, \;\; u(y) = sup_\partial B_1(0) u(x) \tag{6.1.26}$$

όπου C_n σταθερά που εξαρτάται μόνο από τη διάσταση.

Τέλος, η απόδειξη προκύπτει από την αρχή μεγίστου για τη $v(x)$. Δηλαδή ισχύει ότι:

$$u(x) \leq v(x) \leq sup_{\partial B_1(0)} v(y) = u(y) \ \ \forall x \in B_1(0)$$

Άρα:

$$sup_{B_1(0)} u(x) \leq C_n.$$

$\square$

Πόρισμα 6.12. *Έστω ότι η $u(x)$ είναι λύση στο ομαλοποιημένο πρόβλημα εμποδίου στο χωρίο D. Τότε $|\nabla u(x)| = 0$ για όλα τα σημεία $x \in \Gamma$.*

Απόδειξη. Θέτουμε $x_0 \in \Gamma \cap D$. Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} = 0$$

Θέτουμε $r(x) = |x - x_0|$, παρατηρούμε ότι από το Θεώρημα 6.11 και την υπόθεση ότι $x_0 \in \Gamma$, από το Λήμμα 6.4 προκύπτει ότι η $u(x)$ είναι συνεχής και άρα $u(x_0) = 0$. Επομένως:

$$\left| \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \right| \leq \frac{C_n r^2}{r} = Cr \to 0 \ o\tau\alpha\nu \ r \to 0.$$

Επομένως προκύπτει το Πόρισμα. $\square$

Θεώρημα 6.13. *Έστω $u(x)$ λυση στο ομαλοποιημένο πρόβλημα εμποδίου στο χωρίο D. Αν $u(y) = 0$ και $B_{s/4}(y) \subset D$, τότε υπάρχει σταθερά C_n που εξαρτάται μόνο από τη διάσταση, τέτοια ώστε*

$$|D^2 u(x)| \leq C_n \quad \forall x \in B_{s/8}(y) \cap \{u > 0\}.$$

Επιπλέον η $u(x)$ είναι αναλύτική στο $\Omega = \{u > 0\}$.

Απόδειξη. Έστω $y \in D$ τέτοιο ώστε $u(y) = 0$. Θέτουμε επίσης $s = dist(y, \partial D)$, έτσι ώστε $B_s(y) \subset D$. και έστω $z \in B_{s/8}(y) \cap \{u > 0\}$.

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι, $B_r(z) \subset \{u > 0\}$, όπου $B_r(z)$ η μεγαλύτερη μπάλα που περιέχεται στο σύνολο Ω. Παρατηρούμε ότι, $r \leq \frac{s}{8}$, εφόσον $z \in B_{s/8}(y)$ και $u(y) = 0$.
Επιλέγω $q \in \partial B_r(z) \cap \partial \{u > 0\}$. Από την τριγωνική ανισότητα παρατηρούμε ότι $|y - q| \leq |y - z| + |z - q| < \frac{s}{8} + r \leq \frac{s}{4}$. Άρα $B_{4r}(q) \subset B_s(y) \subset D$.

Εφόσον $q \in \Gamma$ και $B_{4r}(q) \subset D$, από το Θεώρημα 6.11 η $u(x)$ είναι ομοιόμορφα φραγμενη στο $B_{2r}(q)$, δηλαδή:

$$\sup_{x \in B_{2r}(q)} u(x) \leq 4Cr^2. \tag{6.1.27}$$

Παρατηρούμε επίσης ότι, $B_r(z) \subset B_{2r}(q)$ και άρα από την (6.1.27) προκύπτει ότι:

$$\sup_{x \in B_r(z)} u(x) \leq \sup_{x \in B_{2r}(q)} u(x) \leq 4Cr^2.$$

Επομένως η συνάρτηση $u(x)$ ικανοποιεί τα εξής:

$$\begin{aligned} \Delta u(x) = 1 & \quad o\tau\alpha\nu \ x \in B_r(z) \\ u(x) \leq 4Cr^2 & \quad o\tau\alpha\nu \ x \in B_r(z) \end{aligned}$$

Ορίζουμε $w(x) = u(x) - \frac{1}{2n}|x - z|^2$. Για τη συνάρτηση $w(x)$ ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \Delta w(x) = 0 & \quad o\tau\alpha\nu \ x \in B_r(z) \\ w(x) \leq (4C + \frac{1}{2n})r^2 & \quad o\tau\alpha\nu \ x \in B_r(z) \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 6.3, γνωρίζουμε ότι για τη $w(x)$ (αρμονική συνάρτηση) ισχύει ότι:

$$|D^2 w(x)| \leq C_2(4C + \frac{1}{2n})$$

Επιλέγοντας $x = z$ προκύπτει ότι

$$|D^2 u(z)| \leq C_n \quad \forall z \in B_{s/8}(y) \cap \{u > 0\},$$

όπου C_n σταθερά που εξαρτάται μόνο από τη διασταση.

Τέλος η $u(x)$ είναι αναλυτική εφόσον $w(x)$ είναι αρμονική σε περιοχή του z και οι αρμονικές συναρτήσεις είναι αναλυτικές. $\square$

Κεφάλαιο 7

Τύπος *Almgren* για λεπτά εμπόδια

Στο παρόν κεφάλαιο αποδεικνύουμε ένα παραβολικό τύπο *Almgren*. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δώσει μια διαφορετική απόδειξη της βέλτιστης ομαλότητα ως προς τη χωριακή μεταβλητή για τη λύση στο πρόβλημα του κλασματικού Λεπτού Εμποδίου (βλέπε [1]). Για τον αντίστοιχο τύπο συχνότητας στην περίπτωση θερμικών συναρτήσεων ($\gamma = 0$) παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα άρθρα [9], [12], [13], [14] και στις αναφορές εκεί. Η θεωρία που αναπτύσσουμε στο παρόν κεφάλαιο εμφανίζεται στην μη-δημοσιευμένη εργασία [3].

Για $s \in (0,1)$, ορίζουμε τον κλασματικό θερμικό τελεστή $H^s(x',t)$ της συνάρτησης $u = u(x',t) : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$ διαμέσου του μετασχηματισμού *Fourier*

$$\widehat{H^s u}(\xi,\rho) = (i\rho + |\xi|^2)^s \widehat{u}(\xi,\rho)$$

για $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$ και $\rho \in \mathbb{R}$. Ο κλασματικός θερμικός τελεστής μπορεί να γίνει αντιληπτός και ως παραβολικός υπεριδιάζον τελεστής και οι ιδιότητες των λύσεων μπορούν να προκύψουν μέσω της σύνδεσής του με το αντίστοιχο πρόβλημα επέκτασης που περιλαμβάνει παραβολικές εκφυλισμένες εξισώσεις με βάρος A_2. Έστω δεδομένη $\psi : \mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty, -\infty) \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\psi \in L^2(\mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty, +\infty)), \quad (i\rho + |\xi|^2)^s \widehat{\psi}(\xi,\rho) \in L^2(\mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty, +\infty))$$

για κάποιο $0 < s < 1$, αναζητούμε συνάρτηση $u = u(x', t)$ έτσι ώστε

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)^s u \leq 0, \quad u - \psi \geq 0, & \text{στο } \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \\ (u - \psi)(\partial_t - \Delta)^s u = 0, & \text{στο } \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \end{cases} \tag{7.0.1}$$

Ακολουθώντας τη θεωρία της εργασίας [2] μπορούμε να θεωρήσουμε το (7.0.1) ως ενα μοντέλο κλασματικών προβλημάτων Εμποδίου. Μια δεύτερη μοντελοποίηση μπορεί να δοθεί χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη εξίσωση $Hamilton - Jacobi$, ειδικότερα, μπορούμε να δούμε το πρόβλημα ως ελαχιστοποίηση μονότονων τελεστών. Δηλαδή, στο (7.0.1) η u είναι ακριβώς η λύση του

$$\max\{(\partial_t - \Delta)^s u,\ \psi - u\} = 0, \quad \text{στο } \ \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \tag{7.0.2}$$

όπου ψ είναι ένα εμπόδιο που ορίζεται στο υπερεπίπεδο $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$.

Για το κεφάλαιο αυτό θεωρούμε το αντίστοιχο τοπικό ανάλογο χρησιμοποιώντας της αντίστοιχη L_γ-θερμική επέκταση της u, στο όποιο εφ΄ εξης, θα αναφερόμαστε ως Πρόβλημα Ελευθέρου Συνόρου με λεπτό εμπόδιο ή απλούστερα ως Πρόβλημα Ελευθέρου Συνόρου

$$\begin{cases} \operatorname{div}(y^\gamma \nabla u) - y^\gamma \partial_t u = 0, & \text{για } (x', y, t) \in \mathbb{R}^n_+ \times (-T, 0] \\ u(x, 0, t) \geq \psi(x, 0, t), & \text{για } (x', t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times (-T, 0] \\ \lim_{y \to 0^+} y^\gamma \partial_y u(x', y, t) = 0, & \text{για } u(x', 0, t) > \psi(x, 0, y) \\ \lim_{y \to 0^+} y^\gamma \partial_y u(x', y, t) \leq 0, & \text{για } (x', y, t) \in \mathbb{R}^n_+ \times (-T, 0] \\ u(x', 0, 0) = \phi(x'), & \text{για } x' \in \mathbb{R}^{n-1} \end{cases} \tag{7.0.3}$$

όπου $\mathbb{R}^n_+ := \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$ και $s = \frac{1-\gamma}{2}$.

Θα χρησιμοποιήσουμε τον εξής συμβολισμό

$$G_\gamma(x, y, t) = \begin{cases} \frac{c_{n,\gamma}}{(-t)^{\frac{n+\gamma}{2}}} e^{\frac{|x|^2 + y^2}{4t}}, & t < 0 \\ 0 & t \geq 0. \end{cases} \tag{7.0.4}$$

όπου $c_{n,\gamma} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n-1}{2}} |\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})|}$, και εδώ με Γ συμβολίζουμε τη Γάμμα συνάρτηση.

Θεωρούμε τις παρακάτω πόσοτητες

$$d(t) = \int_{\mathbb{R}^n_+} y^\gamma |\nabla u|^2 G_\gamma \, dx \tag{7.0.5}$$

και

$$h(t) = \int_{\mathbb{R}^n_+} y^\gamma u^2 G_\gamma \, dx. \tag{7.0.6}$$

Για τους σκοπούς της παρούσας ενότητας υποθέτουμε ότι το u είναι μια λύση του προβλήματος ελεύθερου συνόρου μας με μηδέν εμπόδιο και είναι μηδέν στην αρχή. Πρώτα περιοριζόμαστε στην περίπτωση $\gamma \geq 0$ και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} h'(t) &= \int_{\mathbb{R}^n_+} (2y^\gamma u u_t G_\gamma + y^\gamma u^2 (G_\gamma)_t) \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n_+} (2y^\gamma u u_t G_\gamma - u^2 \operatorname{div}(y^\gamma \nabla G_\gamma)) \, dx \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^n_+} (y^\gamma u_t - \operatorname{div}(y^\gamma \nabla u)) u G_\gamma \, dx - 2d(t) \end{aligned} \tag{7.0.7}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το Θεώρημα Απόκλισης και το γεγονός ότι $uu_\nu = 0$ στο υπερεπίπεδο $\mathbb{R}^{n-1}$. Τώρα

$$\begin{aligned} d(t) &= \int_{\mathbb{R}^n_+} y^\gamma |\nabla u|^2 G_\gamma \, dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n_+} u G_\gamma \operatorname{div}(y^\gamma \nabla u) \, dx - \int_{\mathbb{R}^n_+} y^\gamma u G_\gamma \nabla u \cdot \overrightarrow{\sigma} \, dx \end{aligned}$$

αφού $\nabla G_\gamma = \overrightarrow{\sigma} \cdot G_\gamma$ όπου $\overrightarrow{\sigma} = \left(\frac{x'}{2t}, \frac{y}{2t}\right)$. Αντικαθιστούμε στην (7.0.7) και έχουμε

$$\begin{aligned} h'(t) &= 2\int_{\mathbb{R}^n_+}(y^\gamma u_t - \operatorname{div}(y^\gamma \nabla u))uG_\gamma\, dx + 2\int_{\mathbb{R}^n_+} uG_\gamma \operatorname{div}(y^\gamma\nabla u)\, dx \\ &\quad + 2\int_{\mathbb{R}^n_+} y^\gamma u G_\gamma \nabla u\cdot \overrightarrow{\sigma}\, dx \\ &= 2\int_{\mathbb{R}^n_+} y^\gamma (u_t + \nabla u \cdot \overrightarrow{\sigma})uG_\gamma\, dx. \end{aligned}$$

Τώρα

$$\begin{aligned} d(t) &= -\int_{\mathbb{R}^n_+} y^\gamma(u_t + \nabla u\cdot\overrightarrow{\sigma})uG_\gamma\, dx + \int_{\mathbb{R}^n_+}(y^\gamma u_t - \operatorname{div}(y^\gamma\nabla u))uG_\gamma\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n_+}\left(\frac{1}{2}(y^\gamma u_t - \operatorname{div}(y^\gamma\nabla u)) - y^\gamma(u_t+\nabla u\cdot\overrightarrow{\sigma})\right)uG_\gamma\, dx \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n_+}(y^\gamma u_t - \operatorname{div}(y^\gamma\nabla u))uG_\gamma\, dx \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} h'(t) &= \int_{\mathbb{R}^n_+}\left(2y^\gamma(u_t+\nabla u\cdot\overrightarrow{\sigma}) - (y^\gamma u_t - \operatorname{div}(y^\gamma\nabla u))\right)uG_\gamma\, dx + \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n_+}(y^\gamma u_t - \operatorname{div}(y^\gamma\nabla u))uG_\gamma\, dx. \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} d(t)h'(t) &= \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^n_+}(y^\gamma u_t - \operatorname{div}(y^\gamma\nabla u))uG_\gamma\, dx\right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^n_+}((y^\gamma u_t - \operatorname{div}(y^\gamma\nabla u)) - 2y^\gamma(u_t+\nabla u\cdot\overrightarrow{\sigma}))uG_\gamma\, dx\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^n_+}(y^\gamma u_t - \operatorname{div}(y^\gamma\nabla u))uG_\gamma\, dx\right)^2 \\ &\quad - 2\left(\int_{\mathbb{R}^n_+}\left(\frac{1}{2}(y^\gamma u_t - \operatorname{div}(y^\gamma\nabla u)) - y^\gamma(u_t+\nabla u\cdot\overrightarrow{\sigma})\right)uG_\gamma\, dx\right)^2. \end{aligned}$$

Τώρα

$$
\begin{aligned}
d'(t) &= \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n_+} y^\gamma |\nabla u|^2 G_\gamma \; dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n_+} \operatorname{div}(y^\gamma \nabla G_\gamma)|\nabla u|^2 \; dx - 2\int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla G_\gamma (y^\gamma \nabla u) u_t \; dx - 2\int_{\mathbb{R}^n_+} G_\gamma \operatorname{div}(y^\gamma \nabla u) u_t \; dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n_+} \operatorname{div}(y^\gamma \nabla G_\gamma)|\nabla u|^2 \; dx - 2\int_{\mathbb{R}^n_+} y^\gamma \nabla u \cdot \overrightarrow{\sigma} G_\gamma u_t \; dx - 2\int_{\mathbb{R}^n_+} \operatorname{div}(y^\gamma \nabla u) G_\gamma u_t \; dx.
\end{aligned}
\tag{7.0.8}
$$

Από την ισότητα $Rellich - Necas$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}(y^\gamma \nabla G_\gamma)|\nabla u|^2 = {} & \operatorname{div}(y^\gamma \nabla G_\gamma |\nabla u|^2) - 2\operatorname{div}(y^\gamma \nabla G_\gamma \cdot \nabla u \nabla u) + 2\Delta(y^\gamma \nabla G_\gamma)\nabla u \cdot \nabla u \\
& + 2y^\gamma \nabla G_\gamma \nabla u \Delta u.
\end{aligned}
$$

Τώρα αν $\beta_k := y^\gamma (\nabla G_\gamma)_k = y^\gamma \sigma_k G_\gamma$ είναι εύκολο να δούμε οτι

$$
D_i \beta_k = \begin{cases} y^\gamma \frac{\delta_{ik}}{2t} G_\gamma + y^\gamma \frac{x_i x_k}{(2t)^2} G_\gamma, & i < n \\ \gamma y^{\gamma-1} \frac{x_k}{2t} G_\gamma + y^\gamma \frac{1}{2t} G_\gamma + y^\gamma \frac{x_k y}{(2t)^2} G_\gamma, & i = n. \end{cases}
$$

Άρα, αν εφαρμόσουμε ξανά το Θεώρημα Απόκλισης, θα έχουμε

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n_+} \operatorname{div}(y^\gamma \nabla G_\gamma)|\nabla u|^2 \; dx = {} & 2\int_{\mathbb{R}^n_+} y^\gamma \nabla G_\gamma \nabla u \Delta u \; dx + 2\int_{\mathbb{R}^n_+} \gamma y^{\gamma-1} \nabla u \nabla G_\gamma u_y \; dx \\
& + 2\int_{\mathbb{R}^n_+} y^\gamma \frac{1}{2t} |\nabla u|^2 G_\gamma \; dx + 2\int_{\mathbb{R}^n_+} y^\gamma \left(\frac{x \cdot \nabla u}{2t}\right)^2 G_\gamma \; dx
\end{aligned}
$$

και η (7.0.8) γίνεται

$$
\begin{aligned}
d'(t) &= -2\int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla u\cdot\overrightarrow{\sigma} G_\gamma \operatorname{div}(y^\gamma\nabla u)\,dx - \frac{1}{t}d(t) - 2\int_{\mathbb{R}^n_+} y^\gamma(\nabla u\cdot\overrightarrow{\sigma})^2 G_\gamma\,dx \\
&\quad - 2\int_{\mathbb{R}^n_+} y^\gamma\nabla u\cdot\overrightarrow{\sigma} G_\gamma u_t\,dx - 2\int_{\mathbb{R}^n_+} \operatorname{div}(y^\gamma\nabla u) G_\gamma u_t\,dx \\
&= -2\int_{\mathbb{R}^n_+} (\nabla u\cdot\overrightarrow{\sigma}\operatorname{div}(y^\gamma\nabla u) + y^\gamma(\nabla u\cdot\overrightarrow{\sigma})^2 + y^\gamma\nabla u\cdot\overrightarrow{\sigma} u_t + \operatorname{div}(y^\gamma\nabla u)u_t) G_\gamma\,dx \\
&\quad - \frac{1}{t}d(t) \\
&= -2\int_{\mathbb{R}^n_+} \left((\nabla u\cdot\overrightarrow{\sigma})^2 + 2\nabla u\cdot\overrightarrow{\sigma}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y^\gamma}\operatorname{div}(y^\gamma\nabla u) + u_t\right) + \frac{1}{y^\gamma}\operatorname{div}(y^\gamma\nabla u)u_t\right) y^\gamma G_\gamma\,dx \\
&\quad - \frac{1}{t}d(t) \\
&= -\frac{1}{t}d(t) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n_+}\left(u_t - \frac{1}{y^\gamma}\operatorname{div}(y^\gamma\nabla u)\right)^2 y^\gamma G_\gamma\,dx \\
&\quad - 2\int_{\mathbb{R}^n_+}\left(u_t + \nabla u\cdot\overrightarrow{\sigma} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y^\gamma}\operatorname{div}(y^\gamma\nabla u) - u_t\right)\right)^2 y^\gamma G_\gamma\,dx \\
&=: -\frac{1}{t}d(t) + I(t).
\end{aligned}
$$

Τώρα αν $\phi(t) = \frac{2td(t)}{h(t)}$ τότε

$$\phi'(t) = \frac{2t}{h^2(t)}(I(t)h(t) - d(t)h'(t))$$

και

$$
\begin{aligned}
I(t)h(t) - d(t)h'(t) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n_+}\left(u_t - \frac{1}{y^\gamma}\operatorname{div}(y^\gamma\nabla u)\right)^2 y^\gamma G_\gamma\,dx\cdot\int_{\mathbb{R}^n_+} y^\gamma u^2 G_\gamma\,dx \\
&\quad - 2\int_{\mathbb{R}^n_+}\left(u_t + \nabla u\cdot\overrightarrow{\sigma} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y^\gamma}\operatorname{div}(y^\gamma\nabla u) - u_t\right)\right)^2 y^\gamma G_\gamma\,dx\cdot\int_{\mathbb{R}^n_+} y^\gamma u^2 G_\gamma\,dx \\
&\quad - \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^n_+}\left(u_t - \frac{1}{y^\gamma}\operatorname{div}(y^\gamma\nabla u)\right) y^\gamma u G_\gamma\,dx\right)^2 \\
&\quad - 2\left(\int_{\mathbb{R}^n_+}\left(\frac{1}{2}\left(u_t - \frac{1}{y^\gamma}\operatorname{div}(y^\gamma\nabla u)\right) - (u_t + \nabla u\cdot\overrightarrow{\sigma})\right) y^\gamma u G_\gamma\,dx\right)^2
\end{aligned}
$$

άρα

$$\phi'(t) \geq t\frac{J(t)}{h(t)}$$

όπου

$$J(t) := \int_{\mathbb{R}^n_+} \left(u_t - \frac{1}{y^\gamma}\operatorname{div}(y^\gamma \nabla u)\right)^2 y^\gamma G_\gamma \, dx. \tag{7.0.9}$$

Μόλις αποδείξαμε το παρακάτω Λήμμα

Λήμμα 7.1. *Έστω $u \in W^{2,\infty}_{x,t}(\mathbb{R}^n_+ \times (-\infty, 0])$ με συμπαγή φορέα και $uu_\nu = 0$ στο υπερεπίπεδο $\mathbb{R}^{n-1}$. Θέτουμε*

$$\phi(t) = 2t\frac{d(t)}{h(t)}$$

όπου $d(t)$ και $h(t)$ ορίζονται στις (7.0.5), (7.0.6). Τότε

$$\phi'(t) \geq t\frac{J(t)}{h(t)}$$

όπου $J(t)$ ορίζεται στην (7.0.9).

Η απόδειξη του παρακάτω Λήμματος είναι όμοια με αυτήν του Λήμματος 7.1 και την παραλείπουμε.

Λήμμα 7.2. *Έστω*

$$d(r) = r^2 \int_{\mathbb{R}^n_+} y^\gamma |\nabla u(x', y, -r^2)|^2 G_\gamma(x', y, -r^2) \, dx$$

και

$$h(r) = \int_{\mathbb{R}^n_+} y^\gamma u^2(x', y, -r^2) G_\gamma(x', y, -r^2) \, dx$$

όπου G_γ είναι η ποσότητα στη σχέση (7.0.4) και $u(x,t) \in W^{2,\infty}_{x,t}(\mathbb{R}^n_+ \times (-\infty, 0])$ έχει συμπαγή φορέα με $uu_\nu = 0$ στον $\mathbb{R}^{n-1}$. Αν

$$\phi(r) = \frac{d(r)}{h(r)}$$

τότε

$$\phi'(r) \geq -r^3 \frac{J(r)}{h(r)}$$

όπου

$$J(r) = \int_{\mathbb{R}^n_+} y^\gamma \left(\frac{1}{y^\gamma} \operatorname{div}\left(y^\gamma \nabla u(x, y, -r^2) - u_t(x, y, -r^2)\right) \right) G_\gamma(x, y, -r^2)\; dx.$$

Στο επόμενο λήμμα μας, δείχνουμε ότι εάν κάποιος πρέπει να εξετάσει φραγμένα χωρία αντί για άπειρες λωρίδες, ο τύπος μονοτονίας θα πρέπει να αλλάξει ανάλογα.

Λήμμα 7.3. *Έστω u λύση του προβλήματος Ελευθέρου συνόρου και για $(x,t) = (x', y, t)$ θέτουμε $v(x,t) = u(x,t)\bar{\psi}(x)$ όπου $\bar{\psi} \in C_0^\infty(B_4)$ είναι συνάρτηση αποκοπής τέτοια ώστε $0 \leq \bar{\psi} \leq 1,\ \bar{\psi} \equiv 1$ στην B_3, $\bar{\psi} \equiv 0$ έξω από την $B_{7/2}$ και $L_\gamma \bar{\psi}$ φραγμένη. Θέτουμε*

$$\phi(t) = 2t \frac{d(t)}{h(t)}$$

όπου

$$h(t) = \int_{\mathbb{R}^n_+} y^\gamma v^2(x, y, t) G_\gamma(x, y, t)\; dx$$

και

$$d(t) = \int_{\mathbb{R}^n_+} y^\gamma |\nabla v(x, y, t)|^2 G_\gamma(x, y, t)\; dx.$$

Τότε υπάρχουν καθολικές θετικές σταθερές $C,\ C_0$ τέτοιες ώστε

$$\phi'(t) - C\phi(t) \geq Ct + C \frac{t e^{\frac{1}{Ct}}}{h(t)} ||u||_{L^2(Q_4)}$$

για $t \in (-C_0, 0)$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι αν $v = u\psi$ τότε η $h(t)$ ικανοποιεί

$$\begin{aligned} h'(t) &= 2 \int_{\mathbb{R}^n_+} y^\gamma v v_t G\; dx + \int_{\mathbb{R}^n_+} y^\gamma v^2 G_\gamma\; dx \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^n_+} y^\gamma (v_t - L_\gamma v) v G_\gamma\; dx - 2 \int_{\mathbb{R}^n_+} y^\gamma |\nabla v|^2 G_\gamma\; dx. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας συνήθεις εκτιμήσεις ενεργείας έχουμε

$$||u||_{L^\infty(Q_3)} + ||\nabla u||_{L^\infty(Q_3)} \leq C||u||_{L^2(Q_4)} \tag{7.0.10}$$

για κάποια θετική σταθερά C.
Τώρα

$$h'(t) \geq -C \int_{\mathbb{R}^n_+} y^\gamma (|u||\nabla u| + |u|^2) G_\gamma \; dx - 2 \int_{\mathbb{R}^n_+} y^\gamma |\nabla(u\psi)|^2 G_\gamma \; dx$$

αφού

$$|\operatorname{div}(y^\gamma \nabla(u\psi) - y^\gamma \psi u_t)| = |2y^\gamma \nabla u \nabla \psi + u \operatorname{div}(y^\gamma \nabla \psi)|.$$

Τώρα $G_\gamma(x,y,t) = \frac{c_{n,\gamma}}{(-t)^{\frac{n+\gamma}{2}}} e^{\frac{|x|^2+y^2}{4t}}$ και στους φορείς $\operatorname{supp} \nabla\psi, \; \operatorname{supp}(\operatorname{div}(y^\gamma \nabla \psi))$, χρησιμοποιώντας την (7.0.10) έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} y^\gamma (|u||\nabla u| + |u|^2) G_\gamma \; dx \leq Ch(t) + Ce^{\frac{1}{Ct}} ||u||^2_{L^2(Q_4)}$$

για $t \in (-C_0, 0)$. Ξανά από τις εκτιμήσεις ενεργείας έχουμε

$$h'(t) \geq -Ch(t) - Ce^{\frac{1}{Ct}} ||u||^2_{L^2(Q_4)}$$

για $t \in (-C_0, 0)$. Από το Λήμμα 7.1

$$\phi'(t) = \left(\frac{2td(t)}{h(t)} \right)' \geq t \frac{J(t)}{h(t)}$$

όπου

$$\begin{aligned}
J(t) &= \int_{\mathbb{R}^n_+} y^\gamma ((u\psi)_t - L_\gamma(u\psi))^2 G_\gamma \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n_+} y^\gamma (2\nabla u \nabla \psi - u L_\gamma(\psi))^2 G_\gamma \, dx \\
&\le C \int_{\mathbb{R}^n_+} y^\gamma |u|^2 G_\gamma \, dx + C \int_{\mathbb{R}^n_+} y^\gamma |\nabla u|^2 G_\gamma \, dx + C e^{\frac{1}{Ct}} \int_{\mathbb{R}^n_+} |u|^2 \, dx \int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^2 \, dx \\
&\le C \left(h(t) + d(t) + e^{\frac{1}{Ct}} ||u||^4_{L^2(Q_4)} \right).
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\phi'(t) \ge t \frac{J(t)}{h(t)} \ge Ct + C\phi(t) + C \frac{t e^{\frac{1}{Ct}}}{h(t)} ||u||^4_{L^2(Q_4)}$$

για $t \in (-C_0, 0)$ και η απόδειξη ολοκληρώνεται. □

Πόρισμα 7.4. *Υπάρχουν σταθερές $C,\ C_0 > 0$ τέτοιες ώστε*

$$F(t) = e^{-Ct}\phi(t) - Ce^{-Ct}$$

είναι μη-φθίνουσα για $t \in (-C_0, 0)$ μικρό και ϕ είναι όπως στο Λήμμα 7.3, δεδομένου ότι $\Lambda = \frac{||u||_{L^2}}{h(t)}$ είναι φραγμένο για $t \in (-C_0, 0)$.

Η απόδειξη του επόμενου λήμματος μας είναι παρόμοια με αυτή του Λήμματος 7.3.

Λήμμα 7.5. *Έστω u είναι λύση του προβλήματος Ελευθέρου Συνόρου και $\bar{\psi}$ είναι η συνάρτηση αποκοπής που ορίστηκε στο Λήμμα 7.3. Έστω $h(r),\ d(r),\ \phi(r)$ όπως στο Λήμμα 7.2 και $h(r) \ge C_0 r^\beta$ για κάποιο $\beta > 0$ αρκετά μεγάλο και $C_0 > 0$ καθολική σταθερά. Τότε υπάρχουν $C > 0,\ R_0 > 0$ αρκετά μικρό έτσι ώστε η*

$$\mathcal{F}(r) = e^{Cr^\gamma}\phi(r) + Ce^{Cr^\gamma}$$

να είναι μη-φθίνουσα για $r \in (0, R_0)$ και κάποιο $\gamma > \gamma(\beta) > 0$.

Στο επόμενο μέρος της θεωρίας μας θα αποδείξουμε τον τύπο μονοτονίας για τους σταθμικούς όρους των ποσοτήτων $d(r)$ και $h(r)$ (δείτε π.χ. [7], [10], και[12]). Έστω

$$D(r) = -\frac{1}{r^2}\int_{-r^2}^{0} t \int_{\mathbb{R}^n_+} y^\gamma |\nabla v(x', y, t)|^2 G_\gamma(x', y, t)\ dxdt = \frac{1}{r^2}\int_{-r^2}^{0} d(t)\ dt \tag{7.0.11}$$

και

$$H(r) = \frac{1}{r^2}\int_{-r^2}^{0}\int_{\mathbb{R}^n_+} y^\gamma v^2(x', y, t) G_\gamma(x', y, t)\ dxdt = \frac{1}{r^2}\int_{-r^2}^{0} h(t)\ dt. \tag{7.0.12}$$

Τότε έχουμε το επόμενο Λήμμα

Λήμμα 7.6. *Έστω $D(r)$, $H(r)$ είναι όπως στις (7.0.11), (7.0.12) και $v(x, y, t)$, $G_\gamma(x, y, t)$ έχουν επιλεγεί όπως το Λήμμα 7.3. Αν $\mathcal{F}_0(r) = \frac{D(r)}{H(r)}$ τότε*

$$\mathcal{F}_0'(r) = \frac{2}{r}\frac{h(-r^2)}{H(r)}(\phi(r) - \mathcal{F}_0(r))$$

όπου $\phi(r) = \frac{d(-r^2)}{h(-r^2)}$ ορίζονται στο Λήμμα 7.2.

Απόδειξη. Υπολογίζουμε τις παραγώγους

$$D'(r) = -\frac{2}{r}D(r) + \frac{2}{r}d(-r^2)$$

και

$$H'(r) = -\frac{2}{r}H(r) + \frac{2}{r}h(-r^2)$$

τότε

$$\mathcal{F}_0'(r) = -\frac{1}{H^2(r)}(D'(r)H(r) - H'(r)D(r)) = -\frac{1}{H^2(r)}\frac{2}{r}(d(-r^2)H(r) - h(-r^2)D(r))$$

το οποίο δίνει

$$\mathcal{F}_0'(r) = \frac{h(-r^2)}{H(r)}\frac{2}{r}(\phi(r) - \mathcal{F}_0(r))$$

για $\phi(r) = \frac{d(-r^2)}{h(-r^2)}$. $\square$

Πόρισμα 7.7. *Υποθέτουμε ότι* $H(r) \gtrsim r^{\beta}$ *για κάποιο* $\beta > 0$ *αρκετά μεγάλο. Τότε υπάρχουν* $C > 0$ *και* $R_0 > 0$ *αρκετά μικρό έτσι ώστε η*

$$\mathcal{G}(r) = e^{cr^{\delta}} \mathcal{F}_0(r) + Ce^{cr^{\delta}}$$

να είναι μη-φθίνουσα για $r \in (0, R_0)$ *και κάποιο* $\delta = \delta(\beta) > 0$.

Παρατήρηση 7.8. *Η υπόθεση για την* $H(r)$ *στο Πόρισμα 7.7 μπορεί να αποφευχθεί θεωρώντας μια περικοπή του τύπου μονοτονικότητας με την κατάλληλη ποσότητα τάξης* r^{β} *όπως στην εργασία [11].*

Το κύριο θεώρημα της παρούσας ενότητας ακολουθεί παρακάτω.

Θεώρημα 7.9. *Έστω* u *είναι λύση του προβλήματος Ελευθέρου Συνόρου όπως στο Λήμμα 7.5 και έστω* $\beta > 1 - s$ *με* $\epsilon \in (0, \beta - 1 + s)$ *αρκετά μικρό. Τότε υπάρχει σταθερά* $C_0 > 0$ *(που εξαρτάται μόνο από τα* γ, n, ϵ *και το εμπόδιο) έτσι ώστε η συνάρτηση*

$$\Phi(r) := \frac{1}{2} r e^{Cr^{\epsilon}} \frac{d}{dr} \log \max\{H(r),\ r^{2(2-\beta)}\} + 2e^{Cr^{\epsilon}}$$

να είναι μη-φθίνουσα για $r \in (0, 1)$.

Απόδειξη. Για να δείξουμε οτι η $\Phi(r)$ είναι μονότονη αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{H'(r)}{H(r)}\right) \geq -C\left(r\frac{H'(r)}{H(r)} + 4\right) r^{\epsilon - 1}. \tag{7.0.13}$$

Παρατηρείστε ότι, χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς του Λήμματος 7.6, έχουμε

$$\begin{aligned} D(r) &= -\frac{1}{r^2} \int_{-r^2}^{0} t \int_{\mathbb{R}^n_+} y^{\gamma} |\nabla v|^2 G_{\gamma} \; dxdt \\ &= -\frac{1}{r^2} \int_{-r^2}^{0} t \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} (\,\mathrm{div}\,(y^{\gamma} \nabla v) + y^{\gamma} \nabla v \cdot \overrightarrow{\sigma}) v G_{\gamma} \; dx \right) \; dt \end{aligned} \tag{7.0.14}$$

και

$$H(r) = \frac{1}{r^2}\int_{-r^2}^{0} h(t)\ dt$$
$$= h(-r^2) - \frac{2}{r^2}\int_{-r^2}^{0} t\left(\int_{\mathbb{R}^n_+}(y^\gamma v_t - \operatorname{div}(y^\gamma \nabla v))vG_\gamma\ dx\right)\ dt - 2D(r). \tag{7.0.15}$$

Δηλαδή

$$r\frac{H'(r)}{H(r)} = 4\frac{D(r)}{H(r)} + \frac{J_0(r)}{H(r)}. \tag{7.0.16}$$

όπου

$$J_0(r) = -\frac{2}{r^2}\int_{-r^2}^{0} t\int_{\mathbb{R}^n_+}(y^\gamma v_t - \operatorname{div}(y^\gamma \nabla v))vG_\gamma\ dxdt.$$

Είναι αρκετό να εκτιμήσουμε τη παράγωγο κάθε όρου στο δεξιό μέλος της σχέσης (7.0.16) ξεχωριστά. Για το πρώτο όρο έχουμε, από το Λήμμα 7.6, ότι

$$\mathcal{F}_0'(r) = \frac{2}{r}\frac{h(-r^2)}{H(r)}(\phi(r) - \mathcal{F}_0(r)) = -\frac{2}{r}\frac{1}{H^2(r)}(d(-r^2)H(r) - h(-r^2)D(r)) \tag{7.0.17}$$

άρα είναι αρκετό να εκτιμήσουμε τη διαφορά

$$A(r) = d(-r^2)\int_{-r^2}^{0} h(t)\ dt - h(-r^2)\int_{-r^2}^{0} d(t)\ dt = \int_{-r^2}^{0}(d(-r^2)h(t) - h(-r^2)d(t))\ dt.$$

Αυτό είναι όμως ταυτόσημο με το περιεχόμενο του Λήμματος 7.1 από όπου, μαζί με την (7.0.17), καταλήγουμε ότι

$$\mathcal{F}_0'(r) \geq -\frac{2}{r^3}\frac{1}{H(r)}\int_{-r^2}^{0} t^2\int_{\mathbb{R}^n_+}\left(v_t - \frac{1}{y^\gamma}\operatorname{div}(y^\gamma\nabla v)\right)^2 y^\gamma G_\gamma\ dxdt \geq -Cr^{2\epsilon-1} \tag{7.0.18}$$

Για τον δεύτερο όρο στην (7.0.16) έχουμε

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dr}\left(\frac{J_0(r)}{H(r)}\right) = \frac{1}{H^2(r)}(J_0'(r)H(r) - H'(r)J_0(r)) \\
&= \frac{4}{r^3}\int_{-r^2}^{0} t \int_{\mathbb{R}^n_+} (y^\gamma v_t - \operatorname{div}(y^\gamma \nabla v))vG_\gamma \, dxdt \cdot \frac{1}{H(r)} \\
&- \frac{4}{r}r^2 \int_{\mathbb{R}^n_+} (y^\gamma v_t(x',y,-r^2) - \operatorname{div}(y^\gamma \nabla v(x',y,-r^2)))v(x',y,-r^2)G_\gamma(x',y,-r^2)\, dx \cdot \frac{1}{H(r)} \\
&+ \frac{2}{r^2}\frac{H'(r)}{(H(r))^2}\int_{-r^2}^{0} t \int_{\mathbb{R}^n_+} (y^\gamma v_t - \operatorname{div}(y^\gamma \nabla v))vG_\gamma \, dxdt \\
&= B_1(r) + B_2(r) + B_3(r).
\end{aligned}
$$

Τώρα

$$
\begin{aligned}
B_1(r) &\geq -\frac{4}{r^3}\frac{1}{H(r)}\left(\int_{-r^2}^{0}\int_{\mathbb{R}^n_+} y^\gamma u^2 G_\gamma \, dxdt\right)^{1/2} \qquad (7.0.19)\\
&\quad \cdot \left(\int_{-r^2}^{0} t^2 \int_{\mathbb{R}^n_+} y^\gamma \left(v_t - \frac{1}{y^\gamma}\operatorname{div}(y^\gamma \nabla v)\right)^2 G_\gamma \, dxdt\right)^{1/2} \\
&= -\frac{4}{r^2}\frac{1}{H(r)}(H(r))^{1/2}\left(\int_{-r^2}^{0} t^2 \int_{\mathbb{R}^n_+} y^\gamma \left(v_t - \frac{1}{y^\gamma}\operatorname{div}(y^\gamma \nabla v)\right)^2 G_\gamma \, dxdt\right)^{1/2} \\
&\geq -Cr^{\epsilon-1}. \qquad (7.0.20)
\end{aligned}
$$

Ομοίως,

$$
\begin{aligned}
B_3(r) &\geq -\frac{2}{r}\frac{H'(r)}{(H(r))^2}(H(r))^{1/2}\left(\int_{-r^2}^{0} t^2 \int_{\mathbb{R}^n_+} \left(v_t - \frac{1}{y^\gamma}\operatorname{div}(y^\gamma \nabla v)\right)^2 y^\gamma G_\gamma \, dxdt\right)^{1/2} \\
&\geq -Cr\frac{H'(r)}{H(r)}r^{\epsilon-1}. \qquad (7.0.21)
\end{aligned}
$$

Τελικά, για να εκτιμήσουμε τη $B_2(r)$, παρατηρούμε ότι

$$B_2(r) \geq -\frac{4}{rH(r)} \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} y^\gamma v^2(x', y, -r^2) G_\gamma(x', y, -r^2)\ dx \right)^{1/2}$$
$$\cdot \left(r^4 \int_{\mathbb{R}^n_+} y^\gamma \left(v_t(x', y, -r^2) - \frac{1}{y^\gamma} \operatorname{div}\left(y^\gamma \nabla v(x', y, -r^2) \right) \right)^2 G_\gamma(x', y, -r^2)\ dx \right)^{1/2}$$

και επίσης,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} y^\gamma v^2(x', y, -r^2) G_\gamma(x', y, -r^2)\ dx \right)^{1/2} = (h(-r^2))^{1/2} = \left(\frac{r}{2} H'(r) + H(r) \right)^{1/2}$$
$$= (H(r))^{1/2} \left(\frac{r}{2} \frac{H'(r)}{H(r)} + 1 \right)^{1/2}$$

άρα,

$$B_2(r) \geq -\frac{2}{rH(r)} (H(r))^{1/2} \left(\frac{r}{2} \frac{H'(r)}{H(r)} + 2 \right)$$
$$\cdot \left(r^4 \int_{\mathbb{R}^n_+} y^\gamma \left(v_t(x', y, -r^2) - \frac{1}{y^\gamma} \operatorname{div}\left(y^\gamma \nabla v(x', y, -r^2) \right) \right)^2 G_\gamma(x', y, -r^2)\ dx \right)^{1/2}$$
$$\geq -C \left(2 + \frac{r}{2} \frac{H'(r)}{H(r)} \right) r^{\epsilon - 1}. \tag{7.0.22}$$

Συνδυάζοντας τις (7.0.18), (7.0.19), (7.0.21) και την (7.0.22) η απόδειξη ολοκληρώνεται. □

Βιβλιογραφία

[1] I. Athanasopoulos, L. Caffarelli, E. Milakis. *On the regularity of the Non-dynamic Fractional Obstacle Problem*, J. Differential Equations 2018, 265, no 6, 2614–2647.

[2] I. Athanasopoulos, L. Caffarelli, E. Milakis. *Parabolic Obstacle Problems. Quasi-convexity Regularity*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) 2019, Vol XIX 1–45..

[3] I. Athanasopoulos, L. Caffarelli, E. Milakis. *A Parabolic Almgren Monotonicity Formula for degenerate operators and applications*, Unpublished manuscript 2016.

[4] J. Andersson. *The Obstacle Problem*, Lecture notes March 29, 2016

[5] R. Bass, M. Kassmann. *Hölder continuity of harmonic functions with respect to operators of variable order*, Comm. Partial Differential Equations, 2005, 30, no 7-9, 1249-1259.

[6] R. Bass, M. Kassmann. *Harnack inequalities for non-local operators of variable order*, Trans. Amer. Math. Soc., 2005, 357, no 2, 837-850.

[7] L. Caffarelli. *A monotonicity formula for heat functions in disjoint domains.* Boundary value problems for partial differential equations and applications, pages 53–60, 1993.

[8] Duvaut, G. and Lions, J.-L. *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod-Paris, 1972, pages xx+387

[9] L. Caffarelli, A. Karakhanyan, F. Lin. *The geometry of solutions to a segregation problem for nondivergence systems.* Journal of Fixed Point Theory and Applications, 5(2):31–351, 2009.

[10] L. Caffarelli, C. Kenig. *Gradient estimates for variable coefficient parabolic equations and singular perturbation problems.* Amer. J. Math., 120(2):39–439, 1998.

[11] L. Caffarelli, S. Salsa, L. Silvestre. *Regularity estimates for the solution and the free boundary of the obstacle problem for the fractional Laplacian.* Invent. Math., 171(2):42–461, 2008.

[12] D. Danielli, N. Garofalo, A. Petrosyan, T. To. *Optimal regularity and the free boundary in the parabolic signorini problem.* Memoirs AMS, to appear.

[13] L. Escauriaza, F. J. Fernandez, S. Vessella. *Doubling properties of caloric functions.* Appl. Anal., 85(1-3):20–223, 2006.

[14] L. Escauriaza, C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega. *Decay at infinity of caloric functions within characteristic hyperplanes.* Math. Res. Lett., 13(2-3):44–453, 2006.