Premier Colloque Franco-Chypriote de Didactique des Mathématiques

First French-Cypriot Conference of Mathematics Education

CHYPRE ET FRANCE RECHERCHE EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

CYPRUS AND FRANCE RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION

University of Cyprus
School of Social Sciences and Sciences of Education

Université Paris Diderot
Laboratoire de Didactique André Revuz

Éditeurs

A. Gagatsis, A. Kuzniak, E. Deliyianni, L. Vivier

Lefkosia, 2009

Premier Colloque

Franco-Chypriote de

Didactique des Mathématiques

First French-Cypriot

Conference of

Mathematics Education

CHYPRE ET FRANCE RECHERCHE EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

CYPRUS AND FRANCE RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION

University of Cyprus
School of Social Sciences and Sciences of Education

Université Paris Diderot
Laboratoire de Didactique André Revuz

Éditeurs
A. Gagatsis, A. Kuzniak, E. Deliyianni, L. Vivier

Lefkosia, 2009

ISBN: 978-9963-9650-1-4

Introduction

Ce livre contient un certain nombre des contributions proposées à l'occasion du premier colloque Franco-Chypriote de didactique des mathématiques d'octobre 2009. Ce colloque, le premier du genre, vient concrétiser une longue collaboration en didactique des mathématiques entre chercheurs chypriotes, français et grecs. Cette collaboration remonte aux années 80 où des travaux de thèses furent conduits à l'Université de Strasbourg sous les directions de François Pluvinage et Raymond Duval. Notamment sous l'influence d'Athanasios Gagatsis, les échanges se sont renforcés et ont pris une envergure internationale lors des colloques organisés par l'European Research in Mathematics Education (ERME). Lors de ces rencontres internationales, les échanges ont permis d'avancer dans la collaboration et de confronter les méthodes de travail et les problématiques dans des contextes bien différents mais partageant une profonde culture commune. Plus spécifiquement, le groupe de travail sur la géométrie animé par Alain Kuzniak, avec l'aide précieuse d'Iliada Elia et Bernard Parszysz, a permis de tisser des liens forts dont ce premier colloque Franco-Chypriote est le fruit.

Les contributions françaises émanent toutes du Laboratoire de Didactique André Revuz de l'université Paris Diderot. Ce Laboratoire de recherche résulte de la fusion de deux équipes de didactique de l'Université Paris Diderot, l'une de didactique des mathématiques (Didirem) et l'autre de didactique de la physique (Ldsp). Un des thèmes privilégiés par le laboratoire est celui de l'articulation entre Mathématiques et Réalités, vaste thème qui permet d'interroger l'enseignement des contenus mathématiques de base du point de la modélisation et des applications des mathématiques au monde réel.

La didactique des mathématiques est un vaste champ de recherche comme l'indique la pluralité des sujets abordés lors de ce colloque. Les articles sont regroupés en six chapitres et traitent des grands thèmes de la didactique :

1- *Enseignement et apprentissage numérique* : ce chapitre est axé sur la proportionnalité et les structures multiplicatives à l'école primaire ;

2- *Enseignement et apprentissage géométrique* : ce chapitre balaye un large spectre de l'enseignement de la géométrie en prenant notamment appui sur les travaux de Duval ainsi que ceux de Houdement et Kuzniak ;

3- *Formation en mathématiques des enseignants* : les trois articles de ce chapitre émanent du Laboratoire de Didactique André Revuz et abordent des thèmes d'actualité comme la comparaison internationale, la modélisation ou les aspects sémiotiques ;

4- *Rôle des représentations dans l'apprentissage des mathématiques* : les trois articles de ce chapitre s'intéressent largement aux représentations des nombres et des fonctions, aux conversions entre ces représentations, ainsi qu'aux différentes interprétations de ces concepts mathématiques ;

5- *Regards sur l'enseignement des mathématiques* : les deux articles de ce chapitre s'appuient sur la créativité en mathématiques et exposent deux visions globales de l'enseignement des mathématiques ;

6- *Connaissance géométriques en contexte non-scolaire* : avec pour thèmes les intuitions des Indiens d'Amazonie et la construction de mosaïques par les Romains de l'antiquité, ce chapitre propose deux études didactiques de la géométrie hors d'une institution scolaire.

Une des caractéristiques première de l'approche didactique suivie dans ce livre est son ouverture aux différents cadres théoriques qui nourrissent le champ de la didactique sans être inféodée à l'un ou à l'autre de ces cadres. Cette diversité de positionnement théorique est indispensable pour permettre les collaborations fructueuses entre chercheurs de pays différents – entre chercheurs chypriotes, espagnols, français et grecs pour ce colloque. Par un jeu de miroir entre les différents articles, il est possible de saisir les points de convergence entre les équipes mais aussi leurs différences, source de complémentarité. Selon nous, cette diversité des approches permet un traitement des problèmes rencontrés dans l'enseignement, tant au niveau cognitif que didactique ou mathématique, le plus efficace possible.

Athanasios Gagatsis, Alain Kuzniak,

Eleni Deliyianni, Laurent Vivier

Introduction

This book contains a number of contributions presented in the first French-Cypriot conference of didactic of mathematics held in October 2009. This conference, the first of its kind, came to strengthen the long collaboration that already exists between Cypriot, French and Greek researchers that deal with the didactic of mathematics. This collaboration dates back to the eighties where various theses were carried out at the University of Strasbourg under the directions of François Pluvinage and Raymond Duval. In particular under the influence of Athanasios Gagatsis, the exchanges were reinforced to such a degree that the conferences organized by the European Society for Research in Mathematics Education (ERME) took on an international character. During these international meetings, the exchanges that took place facilitated the advancement of collaborations in order to confront the different work methods and problems that exist in quite a different context but nevertheless sharing a deep common culture. More specifically, the work group on geometry organized by Alain Kuzniak, with the invaluable assistance of Iliada Elia and Bernard Parszysz, made it possible to weave a strong bond with the first French-Cypriot conference being the fruit of their labor.

The French contributions all emanate from the Laboratory of Didactic André Revuz of the University Paris Diderot. This Research laboratory resulted from the union of two teams on didactic from the University Paris Diderot, one of didactic of mathematics (Didirem) and the other of didactic of physics (Ldsp). One of the topics dealt with by the laboratory is that of the articulation between Mathematics and Realities, a vast topic which makes it possible to question the teaching of the basic mathematical contents of the point of modeling and the applications of mathematics to the real-world.

The didactic aspect of mathematics is a vast research field as the plurality of the subjects undertaken at the time of this conference indicates. The articles are categorized in six chapters and engage in broad topics of the didactic aspect:

1 – *Numerical Teaching and Learning*: this chapter is centered on the multiplicative proportionality and structures at elementary school;

2 – *Geometrical Teaching and Learning*: this chapter sweeps a broad spectrum of teaching of geometry but in particular taking support on the work of Duval and of Houdement and Kuzniak;

3 – *Mathematics Teachers' Education*: the three articles of this chapter emanate from the Laboratory of Didactic André Revuz and approach topics of topicality like the international comparison, modeling or the semiotic aspects;

4 – *The Role of Representations in Mathematical Learning*: the three articles in this chapter mainly focus on the representations of numbers and functions, conversions between representations, as well as various interpretations of these mathematical concepts;

5 – *Perspectives on Mathematics Teaching*: the two articles of this chapter are based on creativity in mathematics and give two comprehensive views of teaching mathematics;

6 – *Geometrical Knowledge in Out-of-School Contexts*: with topics such as the intuitions of the Indians of Amazonia and the construction of mosaics by the Romans of antiquity, this chapter proposes two didactic studies on geometry out of the educational context.

One of the characteristics of the didactic approach followed in this book is its opening to the various theoretical executives which nourish the field of didactic without being pledged to one or to the other of these frameworks. This diversity of theoretical positioning is essential to allow fruitful collaborations between researchers of different countries - between Cypriots, Spanish, French and Greeks who will participate in this conference. By taking a glance at the various articles, it is possible to seize the convergence points between the teams but also their differences, source of complementarity. We believe that this diversity of approaches allows us to treat the problems encountered in teaching in various ways, as well as at the level of cognitive as didactic or mathematical in the most effective way possible.

Athanasios Gagatsis, Alain Kuzniak,

Eleni Deliyianni, Laurent Vivier

CONTENTS - SOMMAIRE

CHAPITRE 1

ENSEIGNEMENT ET APPRENTISSAGE NUMÉRIQUE

CHAPTER 1

NUMERICAL TEACHING AND LEARNING

UNDERSTANDING ADDITIVE AND MULTIPLICATIVE STRUCTURES: THE EFFECT OF NUMBER STRUCTURE AND NATURE OF QUANTITIES ON PRIMARY SCHOOL STUDENTS' PERFORMANCE

Ceneida Fernandez and Salvador Llinares

Departamento de Innovación y Formación Didáctica

Universidad de Alicante, España

ABSTRACT

The present study explores relationships between additive and multiplicative structures in the context of proportional reasoning. One goal is to examine hypothetical learning trajectories derived from these relations in the context of understanding proportionality. 198 Spanish primary school children were given a test which involved twelve problems with proportional and non-proportional situations in which the relationship between quantities (integer or non-integer) and the nature of quantities (discrete or continuous) were manipulated. Findings revealed the existence of two separate additive and multiplicative structures and that the integer and non-integer relationships between quantities play different roles in these two structures. In additive situations, understanding the integer relationship between quantities was a forerunner to success while in the proportional situations the important thing was to understand non-integer relationships between quantities.

INTRODUCTION

Proportional reasoning implies not only the understanding of the multiplicative relationship that exists between quantities but also the ability to discriminate proportional from non-proportional situations (Christou & Philippou, 2002; Modestou, Elia, & Gagatsis, 2008; Karplus, Pulos, & Stage, 1983). The skills of proportional reasoning are extremely useful in the interpretation of real phenomena because a lot of real-life phenomena follow these proportional rules (Cramer, Post, & Currier (1993)). Furthermore, proportional reasoning is not only relevant in mathematics but also in other sciences like biology, physics, geography, and in many contexts such as monetary changes, change of units, scale drawings, speeds, reductions and enlargements, map reading, etc (Van Dooren, De Bock, Janssens, & Verschaffel, 2008).

Proportional reasoning plays such a critical role in a students' mathematical development that it has been described as a watershed concept, a cornerstone of higher mathematics and the capstone of elementary concepts (Lesh, Post & Behr, 1988). One of the important aspects in the development of proportional reasoning at the end of Primary education is that of the mechanisms which drive the change from additive to multiplicative reasoning. This change is understood as a part of a cognitive development where students' schemas change. These changes in schemas lead students to understand and solve more complex situations (Verschaffel, Greer & Torbeyns, 2006). Vergnaud (1997) introduced the concept of "conceptual field" to characterize these schemas. For example, the conceptual field of the multiplicative structures is designed as a network of interconnected but distinct concepts such us multiplication, division, fractions, ratios, numbers, rational and linear and nonlinear functions.

Some degree of mathematical maturity is required to understand the difference between adding and multiplying and contexts in which each operation is appropriate. One of the difficult tasks for primary school children is to understand the multiplicative nature of the rational numbers. Children who reason additively indiscriminately employ additive transformations, but whether additive reasoning is an invariant stage in the development of proportional reasoning is unclear (Lamon, 2007). So, although the multiplicative structures are based in part on the additive structure, they also have their own specificity that is not reducible to additive structures. The ideas of ratio and proportion exemplify this difference. One question generated in this area concerns the links between the understanding of additive and multiplicative structures (Lamon, 2007).

Steffe (in Lamon, 2007) has articulated a theory concerning the way in which children's formation and use of units progressively develops from early counting through multiplication. The centrality of unit in fraction instruction, especially the role of composite units and the fact that ratios and rates may be viewed as complex types of units suggest that unit building may be an important mechanism in accounting for the development of increasingly sophisticated mathematical ideas. The ability to construct a reference unit and then reinterpret a situation in terms of that unit, (which is called "unitizing", Lamon, 1994) appears critical to the development of increasingly sophisticated mathematical ideas.

In our attempt to study the links between the understanding of multiplicative and additive structures in the development of primary school students, we have linked two aspects of proportional reasoning research. On the one hand, there are studies that have shown students' over-use of proportionality (De Bock, Van Dooren, Janssens, & Verschaffel, 2002; De Bock, Van Dooren, Janssens, & Verschaffel, 2007; Modestou & Gagatsis, 2008; Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens, & Verschaffel, 2005;). On the other hand the literature indicates that some variables influence learners' performance in proportional problem-solving (Boyer, Levine, & Huttenlocher, 2008; Harel & Behr, 1989; Jeong, Levine, & Huttenlocher, 2007; Tourniaire & Pulos, 1985; Van Dooren, De Bock, Evers, & Verschaffel, 2009).

Over-use of proportionality: Relations between the additive and multiplicative structure

Learners of different ages tend to apply proportional methods to solve different types of non-proportional situations where one of the quantities is unknown (word missing-value problems) although this is not the appropriate method. This fact shows the difficulty experienced by some learners in distinguishing proportional from non-proportional situations and the tendency to use multiplicative relationships in additive situations (De Bock et al., 2007; Van Dooren et al., 2005; Van Dooren et al., 2008). An example of an additive situation (non-proportional problem with the structure $f(x) = x + b, b \neq 0$) is the following problem: “Sue and Julie are running equally fast around a track. Sue started first. When she had run 9 laps, Julie had run 3 laps. When Julie completed 15 laps, how many had Sue run?” It was found that that a large number of schoolchildren and even pre-service elementary school teachers responded erroneously to this problem by solving a proportion $9 / x = 3 / 15$ (Cramer et al., 1993; Van Dooren et al., 2005).

Moreover, Modestou & Gagatsis (2007) have provided further evidence that the improper application of proportionality in non-proportional situations, regardless of students’ grade and tests’ setting, is an indication that linearity is an epistemological obstacle. Therefore, proportional reasoning is a suitable context in which to study the development of multiplicative structure and its relation to additive structure (Kaput & West, 1994; Karplus et al., 1983) and to identify how this relation influences the hypothetical learning trajectories.

Variables affecting proportional reasoning

Research has shown that there are certain factors that affect proportional reasoning and show a complex relation between additive and multiplicative structure. These factors are: the size of the numbers, the existence of integer internal or external ratios (number structure), the existence of continuous or discrete quantities and the familiarity of the context. Some of the results obtained by Van Dooren et al., (2009) indicate that learners are more successful in proportional problems when the external ratio between quantities is an integer (whatever the internal ratio) and the presence of non-integer ratios leads learners to use incorrect additive strategies. The external ratio relates quantities from different magnitudes, while the internal ratio relates quantities from the same magnitude. Furthermore, with regard to non-proportional situations, fewer learners use proportional methods when the relationship between quantities is not an integer. These results indicate that the type of multiplicative relationship between quantities in a non-proportional situation influences the learner’s ability to adopt or not to adopt proportional approximations to solve a situation.

On the other hand, the effect of the variable “nature of quantities” in learners’ performance when solving proportional problems is still controversial in the literature. Tourniaire and Pulos, (1985) pointed out that students can more easily visualize discrete quantities than continuous ones. So they are more successful in dealing with discrete quantities than with continuous ones in proportional problems. Further studies have suggested the opposite, using numerical comparison problems. For instance, Jeong et al. (2007) showed that children of 6, 8 and 10 years of age use additive strategies when quantities are discrete but use multiplicative relationships with continuous quantities to try to solve proportional problems. Also, Boyer et al., (2008) found that 6 to-9-year- old children had more difficulty when quantities were discrete than when quantities were continuous in proportional problems.

In this study we investigated the interaction effect of these two variables (number structure and nature of quantities) in order to understand better the link between additive and multiplicative structures. For this goal we used proportional situations ($f(x) = ax$) and non-proportional situations ($f(x) = x + b, b\neq 0$) in order to obtain information about how students integrate additive and multiplicative relations in their understanding of the multiplicative conceptual field. More specifically, this study explores de following questions:

- How do the variables of "nature of quantities" (discrete or continuous quantities) and "number structure" (integer or non-integer relationships between quantities) influence learners' performance when solving proportional and additive problems?

- Taking into account the conceptual field of additive and multiplicative structures, how might we explain these influences?

- What are the hypothetical learning trajectories that we can infer from these influences?

METHOD

Participants

The participants were 198 primary school children: 65 in the 4th grade (9-10 years old), 68 in the 5th grade (10-11 years old) and 64 in the 6th grade (11-12 years-old) from two different Spanish schools. The participating schools were located in the same city and the pupils were from mixed socio-economic backgrounds.

The data were collected at the start of the academic year 2008-2009. Contents in the primary school curricula relating to the multiplicative conceptual field are the fraction concept, graphic representations, equivalent fractions and fraction comparisons in 3rd and 4th grades and in grades 5th and 6th, the students are introduced to the computation of percentages of a quantity and to proportional and non-proportional situations.

Instrument and procedure

We used a test with 12 word problems: 4 proportional problems (P), 4 additive problems (A) and 4 buffer problems. We included additive problems *($f(x) = x + b$ with $b \neq 0$)* because the erroneous additive strategy in the proportional problem is a correct strategy in the additive problem and vice versa. Buffer problems were included to avoid learners' discovering the experimental design.

We manipulated the relationship between quantities to obtain integer or non-integer multiplicative relationships. Also, we took into consideration whether the quantities were continuous or discrete. So 2 of the 4 proportional problems and 2 of the 4 additive problems from the test referred to discrete quantities (one where the relationship between quantities is an integer, D-I, and the other where the relationship between quantities is non-integer, D-N). The other 4 referred to continuous quantities (again 2 where the relationship between quantities is an integer, C-I and 2 where the relationship between quantities is a non-integer, C-N). We also limited the size of the numbers (we used numbers with one or two digits), the complexity of the calculation (the outcome is always an integer), the context (always actions) and the position of the unknown quantity (when we read the word problem the unknown quantity is always at the same position). There are examples of the problems in Table 1 and it shows how the experimental variables were manipulated.

To set up the test, we used 8 discrete situations and 8 continuous situations. Then proportional and additive problems were created by manipulating one sentence (for example, "They started together but John plants faster" in the proportional problem and "They plant equally fast but John started earlier" in the additive one). We composed a total of 8 different tests and each test with 4 different orders.

Table 1

Examples of problems considering the number structure (versions I and N) and the nature of quantities (versions D and C)

	I	N
P-D	Rachel and John are planting flowers. They started together but John plants faster. When Rachel has planted 4 flowers, John has planted 12 flowers. If Rachel has planted 20 flowers, how many flowers has John planted?	Rachel and John are planting flowers. They started together but John plants faster. When Rachel has planted 8 flowers, John has planted 12 flowers. If Rachel has planted 20 flowers, how many flowers has John planted?
A-D	Rachel and John are planting flowers. They plant equally fast but John started earlier. When Rachel has planted 4 flowers, John has planted 12 flowers. If Rachel has planted 20 flowers, how many flowers has John planted?	Rachel and John are planting flowers. They plant equally fast but John started earlier. When Rachel has planted 8 flowers, John has planted 12 flowers. If Rachel has planted 20 flowers, how many flowers has John planted?
P-C	Jill and Anthony are painting a fence. They started together but Jill paints slower. When Jill has painted 2 m, Anthony has painted 10 m. If Jill has painted 6 m, how many meters has Anthony painted?	Jill and Anthony are painting a fence. They started together but Jill paints slower. When Jill has painted 20 m, Anthony has painted 50 m. If Jill has painted 30 m, how many meters has Anthony painted?
A-C	Jill and Anthony are painting a fence. They paint equally fast but Jill started later. When Jill has painted 2 m, Anthony has painted 10 m. If Jill has painted 6 m, how many meters has Anthony painted?	Jill and Anthony are painting a fence. They paint equally fast but Jill started later. When Jill has painted 20 m, Anthony has painted 50 m. If Jill has painted 30 m, how many meters has Anthony painted?

The pupils had 50 minutes (i.e. the duration of a regular mathematics lesson) to complete the test. There were no further test instructions except that the children were told that they were allowed to use calculators and were asked to write down the operations they had computed by means of the calculator.

Analysis

Pupils' responses were analyzed to identify correct (codified as 1) and incorrect (codified as 0) answers. Moreover, strategies that the children used were categorized as proportional (Prop, the use of the multiplicative relationship), additives (Add, the use of the additive relationship) and other (Oth, other incorrect strategies). The analysis of the strategies, however, will not be reported here.

For the analysis of the data an implicative statistical method (Gras, Suzuki, Guillet, & Spagnolo, 2008) was employed using computer software called C.H.I.C. (Classification Hiérarchique, Implicative et Cohésitive). The implicative statistical analysis aims at giving a statistical meaning to expressions like: "If we observe the variable *a* in a subject, then in general we observe the variable *b* in the same subject". The main principle of the implicative analysis is based on the quasi-implication: "If *a* is true then *b* is more or less true". An implicative diagram has been produced from the application of the analyses on each age group of students. This diagram represents graphically the network of the quasi-implicative relations among the variables considered. In this study the implicative diagrams contain relationships between variables which indicate whether success in a specific problem implies success in another problem. Also responses were statistically analysed by means of a repeated measures logistic regression analysis using the software SPSS. We carried out this analysis to ensure that the differences in learners' performance were significant.

RESULTS

The results are presented in two parts. In the first part, we present the pupils' percentages of the correct answers to illustrate their performance in each type of problem. In this way, we study the effect of the variables "nature of quantities" and "number structure". The second part involves the implicative diagram of the learners' success level which shows not only the impact of the number structure and nature of quantities but also possible learning trajectories.

The pupils' performance

Table 2 shows the pupils' percentages of correct answers to the different problems. In general, they were more successful in the additive problems than in the proportional ones. The statistical analysis indicated that the difference was significant, $\chi^2(1,N=197)=114.530$, $p<0.001$. Furthermore, there is a significant increase in correct answers during grades ($\chi^2(2,N=197)=16.159$, $p<0.001$), except in additive problems with discrete quantities and integer relationship between quantities. While the difference in the pupils' correct answers was not significant between the 4th and 5th grade (29.23% versus 32.35%), the difference between 5th and 6th grade was significant (32.35% versus 36.13%).

Table 2

Percentages of correct answers to problems

	P-D-I	P-D-N	P-C-I	P-C-N	A-D-I	A-D-N	A-C-I	A-C-N	Total
4th grade	12,31%	1,54%	7,69%	0,00%	56,92%	55,38%	46,15%	53,85%	29,23%
5th grade	23,53%	1,47%	16,18%	1,47%	42,65%	63,24%	45,59%	64,71%	32,35%
6th grade	25,00%	7,81%	20,31%	3,13%	51,56%	62,50%	51,56%	67,19%	36,13%
Total	20,28%	3,61%	14,73%	1,53%	50,38%	60,37%	47,77%	61,91%	32,57%

The pupils were also more successful in proportional problems with integer ratios (20.28% P-D-I and 14.73% P-C-I) than in proportional problems with non-integer ratios (3.61% P-D-N and 1.53% P-C-N). However, in additive problems, they were more successful when the relationships between quantities were non-integer (60.37% A-D-N and 61.91% A-C-N) than when the relationships were integer (50.38% A-D-I and 47.77% A-C-I). The statistical analysis showed a significant "type of problem" × "number structure" interaction effect, $\chi^2(1,N=197)=32.798$, $p<0.001$. These differences, therefore, were significant.

The statistical analysis also showed a significant "type of problem" × "nature of quantities" interaction effect, $\chi^2(1,N=197)=5.657$, $p=0.017$. Table 2 illustrates that learners were more successful in proportional problems with discrete quantities (20.28% P-D-I and 3.61% P-D-N) than in proportional problems with continuous quantities (14.73% P-C-I and 1.53% P-C-N). These differences were significant. In additive problems, although the differences were not significant, the children were also more successful with discrete quantities (50.38% A-D-I and 60.37% A-C-I) than with continuous ones (47.77% A-C-I and 61.91% A-C-N).

Implicative relationships of the pupils' responses to the tasks

Figure 1 illustrates the implicative diagram of the variables corresponding to 4th- grade-children's success level in each problem. Two separate "chains" of implicative relations among the variables are formed with respect to the type of problem. Chain 1 involves the learners' success level with the additive problems and chain 2 is comprised of their success level with the proportional problems. The establishment of these separate implicative chains suggests that no links exist between additive and multiplicative structure, and so children who succeeded in proportional problems did not necessary succeed in additive problems and vice versa. Moreover, the ways in which the different problems are linked in the two implicative chains suggest that success with the proportional or additive problems depended on the “number structure” and “the nature of quantities” involved in the problem. However, the chains do not have a similar structure, so each type of problem depends on the variables in a different way.

The chain related to additive problems indicates that if learners are successful in additive problems with continuous quantities (the relationship between quantities being an integer or non-integer, A-C-N and A-C-I) they are also successful in additive problems with discrete quantities and non-integer relations (A-D-N). Furthermore, the types of situations mentioned above are more likely to lead to success in additive problems with discrete quantities and integer relations (A-D-I). These results seem to underline the role played by the variable nature of quantities in the understanding of the additive situations in primary school children.

With respect to the proportional problems implicative chain, if learners are successful in discrete proportional problems with non-integer ratios (P-D-N) they are also successful in discrete and continuous problems with integer ratios (P-D-I and P-C-I). So it is important in that case to be successful with non-integer ratios to be successful with integer ratios.

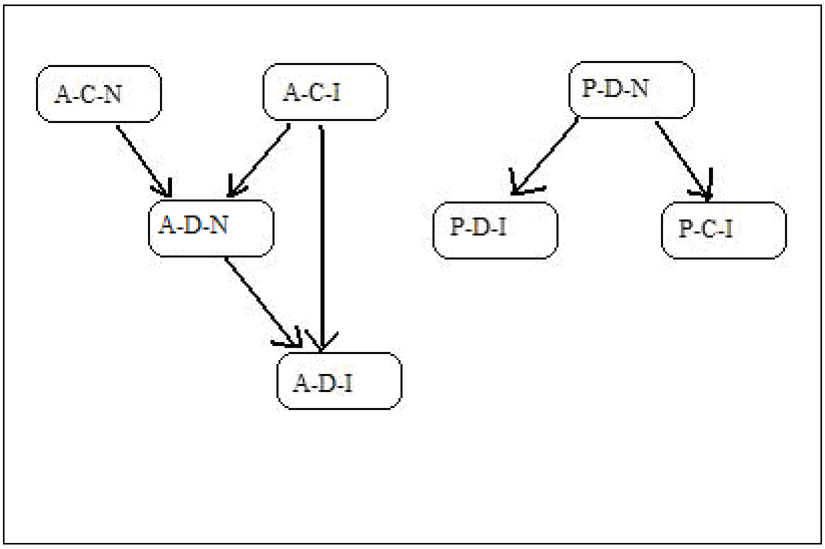


Figure 1. Implicative Diagram for fourth grade pupils

Figure 2 and Figure 3 show the implicative diagrams corresponding to 5th and 6th grade children’s success level respectively. Again two separate “chains” of implicative relations appeared between additive and multiplicative structures. One chain represents pupils’ answers to additive problems (chain 1) and the other chain their answers to proportional problems (chain 2). As we have said above, these two separate chains indicate that there are no relations between the additive and multiplicative structure and therefore it is not possible to establish relations between the pupils’ success in proportional problems and their success in additive problems.

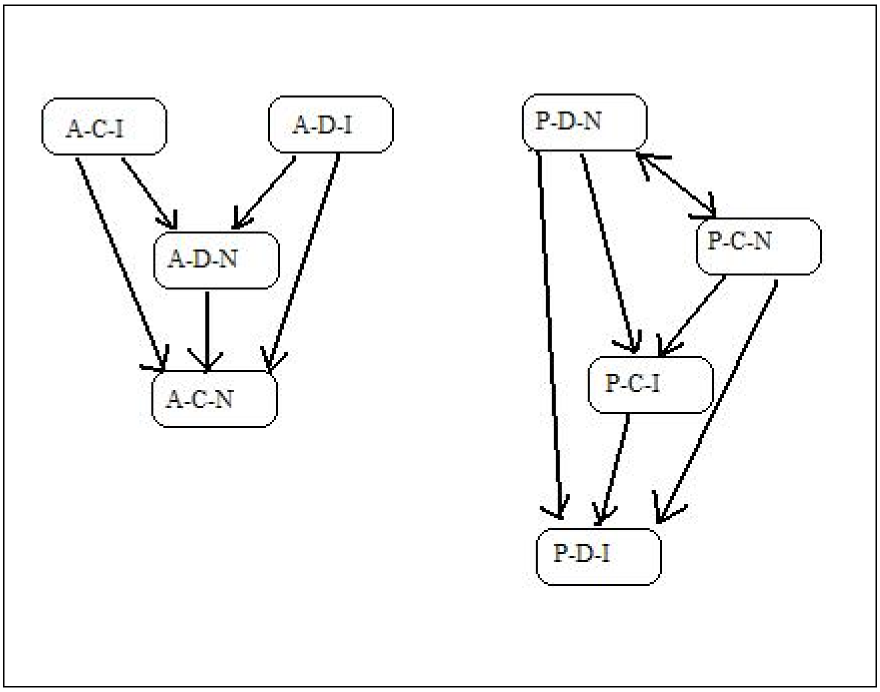


Figure 2. Implicative Diagram for fifth grade pupils

Chain 1, which relates the different additive problems, is the same in 5th and 6th grades. If pupils are successful with integer relationships between numbers (independently of whether they are dealing with discrete or continuous quantities, A-D-I y A-C-I) then, they will be successful with non-integer relationships between numbers (A-D-N y A-C-N). Therefore, the non-integer relations between numbers in the additive problems are showed as more likely to lead to successfully solving this type of problem. Furthermore, if students are successful with discrete quantities and non-integer relationship between numbers (A-D-N) then they will be successful with continuous quantities and non-integer relationship between numbers (A-C-N).

Chain 2, which relates the proportional problems, is different in 5th and 6th grades due to the different role played by the nature of quantities. In 5th grade, if the pupils are successful in proportional problems with non-integer ratios (and with discrete or continuous quantities, P-D-N y P-C-N) then they will be successful with integer ratios (P-D-I y P-C-I). Moreover, if they are successful with discrete quantities and non-integer ratios (P-D-N) they will be successful with continuous quantities and non-integer ratios (P-C-N). And if students are successful with continuous quantities and integer ratios (P-C-I), then they will be successful with discrete quantities and integer ratios (P-D-I).

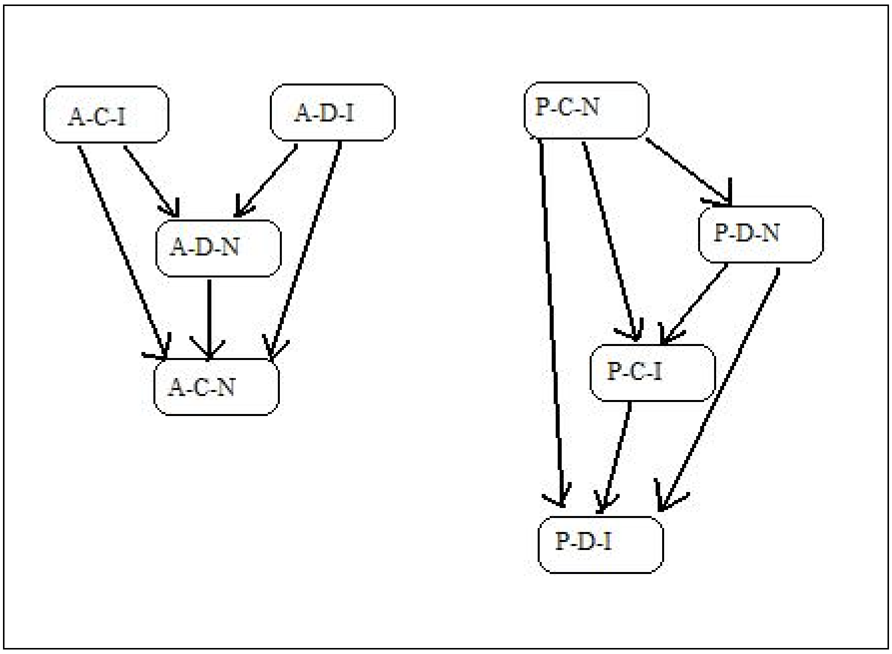


Figure 3. Implicative Diagram for sixth grade pupils

On the other hand, in 6th grade, the relationship between discrete situations with non-integer ratios and continuous quantities with non-integer ratios (P-D-N->P-C-N) disappears entirely. We now find that if learners are successful with non-integer ratios and continuous quantities (P-C-N), then they will be successful with non-integer ratios (P-D-N). Also if they are successful with non-integer ratios (P-D-N and P-C-N), then they will be successful with integer ratios (P-D-I and P-C-I). Moreover, if they are successful with continuous problems and integer ratios (P-C-I), then they also will be successful in discrete problems with integer ratios (P-D-I).

The different implicative relations in the primary school children's success level indicate that the separation between multiplicative and additive structure continues from 4th to 6th grade and that with 5th and 6th grade pupils the nature of quantities has modified the relations established in the particular context of proportional problems.

DISCUSSION

The present study explores relationships between additive and multiplicative structures in the context of proportional reasoning. Specifically, the goal of this study is to investigate how primary school children perform in additive and proportional situations as a way of focusing our attention on how the variables "nature of quantities" and "number structure" affect their understanding of additive and multiplicative structures. Our findings provide information about conceptual operations needed to progressively perform better in the multiplicative conceptual field and more specifically in the context of proportional and non-proportional problems. For this reason, we also examine characteristics of hypothetical learning trajectories derived from the relationships between additive and multiplicative structures in the context of proportional reasoning.

The implicative analysis reveals that additive and multiplicative relationships define two separate structures from 4th through to 6th grade of primary school, so it is not possible to establish relations between pupils' success-levels in additive problems and in proportional problems. These findings seem to indicate that the notion of ratio in the multiplicative structure is generated independently of the additive structures (Kieren, 1994). Other evidence that supports this claim is the large number of students who used proportionality in the additive situation (De Bock et al., 2007; Fernández, Llinares, & Valls, 2008; Modestou & Gagatsis, 2007; Van Dooren et al., 2005; Van Dooren et al., 2008).

Furthermore, the two statistical analyses show the impact of the variables studied ("number structure" and "nature of quantities") on the students' performance in relation to additive and multiplicative structure. With regard to the variable "number structure", the regression analysis indicates that in proportional problems the children perform better when the ratios are integer than when the ratios are non-integer. However, in additive problems, they perform better when the relationship between quantities is non-integer than when it is integer. These results are in agreement with those obtained with the implicative analysis. But also, implicative diagrams seem to indicate that the multiplicative relationship between quantities plays different roles in the two kinds of problems. In additive problems, the integer relationship between quantities is more likely to lead to success, while in proportional problems this role is played by non-integer ratios. Our results regarding the effect of "number structure" obtained with Spanish primary school children replicated those reported by Van Dooren et al. (2009) with Flemish primary school pupils.

On the other hand, in relation to the role played by the nature of quantities in the understanding of the relations between additive and multiplicative structure, in Fernández, Llinares, Van Dooren, De Bock and Verschaffel (in press), the discrete or continuous nature of the quantities did not have a significant effect on secondary school students' performance, but our findings pointed out a possible influence. In this study we dealt only with primary school pupils and this variable does have a significant effect on their performance in proportional problems. Learners perform better in proportional problems with discrete quantities than with continuous ones. These results are in agreement with those of Tourniaire and Pulos, (1985) who in their review of the literature, suggest that learners can more easily visualize discrete quantities than continuous ones. However, later studies have found the contrary (Boyer et al., 2008; Jeong et al., 2007). So this variable is still controversial and requires further research.

Building the meaning of ratio: the cognitive mechanism of unitizing

In proportional problems, primary school students have to construct a reference unit (for example we can represent it by 20:50) and reinterpret the situation in terms of that unit. This process was called by Lamon (1994) "unitizing" and can be considered essential to the ability to differentiate this situation from the additive situation where it is not necessary to construct any new unit. The only requirement there is an additive relation between quantities (in this case 50 – 20).

Learners are more successful in proportional problems with integer ratios than with non-integer ratios, while in additive problems, they are more successful with non-integer ratios than with integer ratios. These findings could be explained by the understanding of the ratio (unit). In the case of integer ratios the unit would be for example 30 : 60. Students could make the division and understand this ratio as the double. But in the case of non-integer ratios, the unit would be for instance 20 : 35. The result of the division is not an integer and it is harder to understand. Students in this type of situation use an additive strategy (additive relationships between quantities).

It is not easy to interpret our results of the variable "nature of quantities" but the fact that children are more successful with discrete quantities than continuous ones could be explained by the idea that the process of addition is associated with situations that entail adding, joining, subtracting, separating and removing- actions with which children are familiar because of their experiences with counting.

Implications for teaching

Our study also suggests some useful guidelines for instruction. Our findings provide information about how primary school children are able to solve additive and proportional problems involving different variables and point out the separation between the processes of building a unit and using it in proportional and additive problems. This situation indicates the necessity for teachers to focus on the difference between these two situations because the notion of ratio in proportional situations doesn't come from additive structure

Finally, characteristics identified from the implicative analysis enable us to identify hypothetical learning trajectories with implications for teaching. If we consider the implications among problems it should be possible to design teaching situations with different types of problems that progressively raise certain challenges to allow primary school children to gradually overcome obstacles.

Acknowledgement

The research reported here has been financed by the University of Alicante, Spain, under grant no. GRE08-P03.

REFERENCES

Boyer, Ty W., Levine, S. C., & Huttenlocher, J. (2008). Development of proportional reasoning: Where young children go wrong. *Developmental Psychology, 44*(5), 1478-90.

Christou, C. & Philippou, G. (2002). Mapping and development of intuitive proportional thinking. *Journal of Mathematical Behavior, 20,* 321-336.

Cramer, K., Post, T., & Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: Research implications. In D. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp. 159-178). NY: Macmillan Publishing Company.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2002). Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors. *Educational Studies in Mathematics*, *50*, 311-334.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2007). *The illusion of linearity: From analysis to improvement.* New York: Springer.

Fernández, C., Llinares, S., & Valls, J. (2008). Implicative analysis of strategies in solving proportional and non-proportional problems. In O. Figueras & A. Sepúlveda (Eds.). *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* and the XXX North American (Vol. 3. pp. 1-8) Morelia, Michoacán, México: PME.

Fernández, C., Llinares, S., Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaffel, L. (in press). Effect of the number structure and the quality nature on secondary school students' proportional reasoning. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, C. (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 1, pp. XXX-YYY. Thessaloniki, Greece: PME.

Gras, R., Suzuki, E., Guillet, F., & Spagnolo, F. (F.) (eds.) (2008). *Statistical Implicative analysis. Theory and Applications.* London: Springer

Harel, G. & Behr, M. (1989). Structure and hierarchy of missing-value proportion problems and their representations. *Journal of Mathematical Behavior, 8*(1), 77-119.

Jeong, Y., Levine, S. C., & Huttenlocher, J. (2007). The development of proportional reasoning: Effect of continuous versus discrete quantities. *Journal of Cognition and Development, 8*(2), 237-256.

Kaput, J. & West, M.M. (1994). Missing-value proportional reasoning problems: Factors affecting informal reasoning patterns. In G. Harel & J. Confrey (eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 237-287). New York: State University of New York Press.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. (1983). Proportional reasoning of early adolescents. In R. Lesh & M. Landau (eds.), *Acquisitions of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 45-90). Orlando, FL: Academic Press, Inc.

Kieren, T. (1994). Multiple views of multiplicative structure. In G. Harel & J. Confrey (eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 387-397). New York: State University of New York Press.

Lamon, S. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. In G. Harel & J. Confrey (eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 89-122). New York: State University of New York Press.

Lamon. S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework. In F. Lester Jr. (eds.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Vol. I,* (pp.629-668). Charlotte, NC: NCTM-Information Age Publishing.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 93-118). Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics.

Modestou, M. & Gagatsis, A. (2007). Students' improper proportional reasoning: A result of the epistemological obstacle of "linearity". *Educational Psychology*, *27*(1), 75-92.

Modestou, M., Elia, I., & Gagatsis, A. (2008). Behind the scenes of pseudo-proportionality. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *39(3),* 313-324.

Tourniaire, F. & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, *16*, 181-204.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities of overgeneralization. *Cognition and Instruction*, *23*(1), 57-86.

Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2008). The linear imperative: An inventory and conceptual analysis of students' overuse of linearity. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(3), 311-342.

Van Dooren, W., De Bock, D., Evers, M., & Verschaffel, L. (2009). Students' overuse of proportionality on missing-value problems: How numbers may change solutions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40*(2), 187-211.

Vergnaud, G. (1997). *El niño, las Matemáticas y la Realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. Mexico, DF: Trillas (4º Edición)

Verschaffel, L., Greer, B., & Torbeyns, J. (2006). Numerical thinking. In A. Gutierrez & P. Boero (eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 51-82). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

PROPORTIONAL REASONING REFORMED[1]

Modestina Modestou[*] and Athanasios Gagatsis[**]

[*]Cyprus Pedagogical Institute

[**]University of Cyprus

ABSTRACT

In this study we propose a new model of proportional reasoning, based both on bibliographical and research data. Three written tests were used involving analogical, proportional and non-proportional situations that were administered to elementary school pupils of grade 5 and 6. The results suggest the existence of a multi-component model of proportional reasoning, contributing in this way to the reformulation of the concept. In this model, the components of analogical reasoning, routine proportionality and meta-analogical awareness take a constitutive part. Thus, proportional reasoning does not coincide exclusively with success in solving a certain restricted range of proportional problems, as routine missing-value and comparison problems (routine proportionality), but it also involves handling verbal and arithmetical analogies (analogical reasoning), as well as the awareness of discerning non-proportional situations (meta-analogical awareness), which is metacognitive in nature.

INTRODUCTION

Proportionality is a concept of fundamental importance, making its necessity to everyday life evident in most cultures from the ancient times. In our days gaps appear in defining those elements that are directly connected with the ability to use proportions and therefore apply proportional reasoning (Lamon, 1999). Proportional reasoning is much more complex than often thought (Tourniare & Pulos, 1985), something that makes even more difficult the adequate elaboration of the term "proportional reasoning". In most of the cases, the way that the concept of proportional reasoning is being perceived is indirectly implied through the tasks that are included in relevant researches (Baxter & Junker, 2001; Misailidou & Williams, 2003), as well as in mathematical textbooks. In particular, proportional reasoning has been traditionally considered synonymous with the ability to solve proportional missing-value problems

[1] This study is based on the same framework as the one of Modestou and Gagatsis (in press) to appear in Mathematical Teaching and Learning, targetting on a different age group.

(Cramer, Post, & Currier, 1993). Therefore, missing-value problems have been naively assumed to provide a valid measure of proportional reasoning.

However, recent research on the illusion of linearity (De Bock, Verschaffel, & Janssens, 1998; Modestou & Gagatsis, 2007) suggests that this typical approach of proportional reasoning is not accompanied with understanding of the concept of proportion itself. Pupils, irrespective of age, even though succeeding in solving typical proportional problems, fail to distinguish between proportional and non-proportional situations (De Bock et al, 1998; Modestou & Gagatsis, 2007). Consequently, an illusion of the existence of linearity is created in pupils, resulting in the erroneous use of proportional strategies for the solution of non-proportional situations.

Therefore, a proportional thinker cannot be identified as someone who can mechanically solve a proportion (Cramer et al., 1993). In fact the wide use of rote algorithms, such as the cross multiplication, or even primal additive solution methods, indicates that not all persons who solve correctly a problem involving proportions necessarily use proportional reasoning (Lesh, Post & Behr, 1988; Lamon, 1999). On the contrary, it is the ability to decide whether a problem is being solved by applying direct proportion, inverse proportion, additive reasoning or any other numerical relationship that is essential for proportional reasoning (Karplus, Pulos & Stage, 1983).

Consequently, the implicit model that considers proportional reasoning ability as identical with the ability to solve typical missing-value problems does not prove to be adequate. Proportional reasoning must include a new aspect of metacognitive character which will refer to the aptitude of distinguishing the proportional from the non-proportional situations. Therefore, the main purpose of this study was to propose and test a new model of proportional reasoning, including also the latter ability.

THEORETICAL FRAMEWORK

The proposed model of proportional reasoning

The main purpose of this study was to propose and test a new model of proportional reasoning. This model questions the implicit assumption that proportional reasoning is a one component process involving only the ability to solve routine proportional problems. In contrast, it takes into account and expands bibliographical data which indicate that proportional reasoning encompasses wider and more complex spectra of cognitive abilities (Lesh et al., 1988). In particular, the model proposed in this study assumes that proportional reasoning can be described better by a three-component model, which consists of the aspects of analogical reasoning, routine proportionality and meta-analogical awareness (see Figure 1).

Routine proportionality. The aspect of routine proportionality, representing the ability for solving routine proportional tasks has an indispensable part in this model. Throughout the literature the ability to construct and algebraically solve proportions is implicitly considered as a fundamental aspect of proportional reasoning (Lamon, 1993), and therefore it can only constitute an essential part of the proposed model of proportional reasoning. This aspect includes second-ordered relations that involve an equivalent relationship between two ratios. The existence of a relation between two relations and the recognition of this structural similarity, is according to Piaget & Inhelder (1958) the essential characteristic of proportionality; a characteristic that links the proportional with the analogical aspect of the proposed model.

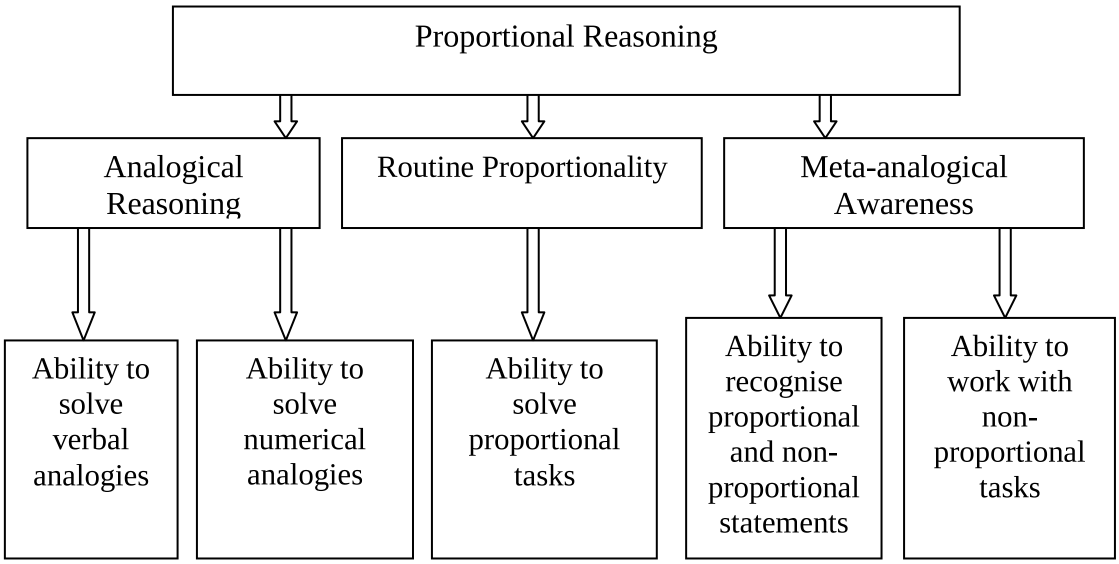


Figure 1. The proposed model of proportional reasoning

Proportional tasks can be assigned to different categories according to their linguistic structure. The basic linguistic structure for problems involving proportionality is that of missing-value which is presented with three numbers *a*, *b*, and *c* and the task is to find the unknown x such as *a/b=c/x* (Tourniare & Pulos, 1985). For example, the task where pupils know the cost of 2 kg of apples and have to calculate the cost of 5 kg of apples is a typical missing-value item. However, this format is not always accompanied with multiplicative solution methods, as numerous pupils are inclined towards using primitive additive strategies. In addition, the missing-value format has been linked with pupils' tendency to use the mnemonic "cross-multiply" rule, which in most cases precludes the use of proportional reasoning (Lest et al., 1988; Lamon, 1999). This rule is especially popular in Cyprus and Greece, as it is formally presented through 6^{th} and 8^{th} grade mathematic textbooks. Therefore, the connection between the missing-value format and mechanical methods for solving proportional tasks is something well cultivated in Cyprus.

The comparison tasks are not accompanied with the “problem” of the application of a rote rule, but are more rarely used. These tasks are presented with four numbers *a, b, c,* and *d* and pupils are asked to determine whether they form a proportion. For example, a reformulation of the previous missing-value task into a comparison task would be: A bag with 2 kg of apples cost €1.68. A second bag with 5 kg of apples cost €4.05. Is the price per kg the same or not? In the literature different studies on proportionality have used different methods and tasks for studying pupils’ reasoning. The use of a single method always brings into question the issue of the generality of the findings (Tourniare & Pulos, 1985) and therefore must be avoided.

Consequently, these two different kinds of items are used to measure the component of routine proportionality in the proposed model of proportional reasoning. However, this model does not consist only of the ability to solve proportional tasks multiplicatively, but is completed with the inclusion of two more aspects that refer to the recognition and handling of non-proportional situations (meta-analogical awareness), as well as to the ability of solving verbal and numerical analogies (analogical reasoning).

Meta-analogical awareness. A fundamental aspect of proportional reasoning lies in the success in analysing the quantities in a given situation in order to establish whether or not a proportional relation exists (Karplus et al., 1983; Lamon, 1999). This is connected with the adeptness to recognise and asses a problem situation, which constitutes the first from four general metacognitive procedures that facilitate the problem solving procedure (Davidson, Deuser, & Sternberg, 1994). Therefore, the recognition and codification of the basic problem elements is proved to be essential for an efficient solution of every problem.

Consequently, pupils’ tendency to use the linear model in problem situations for which is not suited is inevitably connected with an absence of recognising and thereafter defining a proportional problem situation. This is defined as “meta-analogical awareness” in the theoretical model of proportional reasoning. It refers to the awareness of situations which appear proportional but are not, and to the distinction of which situations are truly proportional and which not. For example, the task of determining whether the statement “A five year old boy has 83cm of height. When he will be ten years old then his height will be 1.66m” is proportional or not, is considered as an item belonging to the aforementioned aspect of proportional reasoning. Therefore, this metacognitive aspect in the proposed model of proportional reasoning reflects the phenomenon of the illusion of linearity, accompanied with all the difficulties pupils have in recognising it.

Analogical reasoning. The analogical reasoning aspect concludes the proposed model of proportional reasoning. Analogy, according to English (2004), is the ability to reason with relation patterns. Consequently, analogical reasoning refers to individuals’ abilities to recognize and apply patterns whether these patterns are embodied in concrete objects or abstract ideas (Goswami, 1992). This ability is the fundamental element that justifies the inclusion of the aspect of analogical reasoning in the interpretation of proportional reasoning.

Polya (1954), from very early has put forward the existence of a relation between proportions and analogies by indicating that a proportion is a special case of analogy. In fact, both proportions and analogies require pupils to reason about relationships between relations (Goswami, 1992), by focusing on the finding of the structural pattern between the terms. When pupils are able to trace the structural similarity between the terms of verbal or optical analogies and not just focus on their perceptual similarities, then they are able to realise the relations that embody proportional reasoning (Lamon, 1999).

Classical analogies usually use the notation A:B::C:D, where the C and D terms must be related in the same way as A and B are linked (English, 2004). The terms can consist of words (*bird:air ::fish:_*), numbers *(3:4 ::15:_)* or pictures and therefore refer to verbal, numerical or optical analogies (Goswami, 1992; Lamon, 1999). These analogies are basically proportional or relational problems (English, 2004). Pupils can benefit from solving these tasks as a number of mathematical ideas (including proportional reasoning) are learned or intuitively justified based on analogies (Hatano & Sakakibara, 2004). The key element in solving analogy tasks is the focus on the structural similarity between the terms and not on perceptual similarities, something that consequently helps pupils work with proportional tasks.

METHOD

Participants

The sample of the study consisted of 383 students of Grade 5 and 6 (10 and 11 year olds) of different elementary schools covering all provinces of Cyprus. In particular, 184 students attended the 5th Grade and 199 the 6th Grade. These grades were chosen as suitable for the study as they mark the end of the elementary education in Cyprus.

Test Batteries

The items used in this study addressed the three aspects of the proposed model of proportional reasoning. These items were organized into three tests that included tasks addressed to more than one of the three aspects in order to avoid any possible influence of the task category on the participants. The first test (Test I) consisted of three parts that required pupils to:

(a) Recognise if a statement is correct or not and to change it, if possible, in order to become mathematically acceptable. Six statements were included in this section, each of which included four quantities. The relation between these quantities was proportional

(proportional statements) or constant, additive or unknown (non-proportional statements). The four non-proportional statements were formulated in such a way that they could easily mislead pupils to treat them as proportional and therefore state that they are correct (see for example Table 1, part A). Therefore, in order to handle these tasks pupils should have been able first to discriminate the proportional from the non-proportional statements and then correct them if possible.

(b) Solve proportional missing-value tasks which were given in the context of a cake recipe that needs to change in order to be suitable for more persons (see Table 1, part B) and

(c) Solve proportional comparison tasks that concerned the sweetness of two lemonades (see Table 1, part C). In sections (b) and (c), the proportional missing-value and comparison tasks were direct, in the sense that the relation between the two quantities in each task was directly proportional (Van Dooren et al., 2003).

Table 1

Example of the Items Included in Test I –Direct Measures

Part A	If a 9 year-old boy has 1.23m height then at his 18th birthday will be 2.46m The statement is correct/incorrect, because………………………………… *Complete only if the statement is incorrect* Can the statement be corrected by changing only one number? If yes, in what way? If no, explain why……………………………………………… (Lamon, 1999)
Part B	Recipe for chocolate cake for three *120g chocolate* *9 spoons of cream* *3 eggs* *4 spoons of coffee liqueur* *4 spoons of sugar* Mother wants to bake the cake for four persons instead of three. How much sugar will she need?” (Misailidou & Williams, 1998)
Part C	John makes concentrate by using 6 spoonfuls of sugar and 12 cups of lemon juice. Mary makes concentrate by 4 using spoonfuls of sugar and 7 cups of lemon juice. John/ Mary has the sweeter lemonade because………………………… In order both children have the same lemonade………………………… (Karplus et al., 1983)

The second test (Test II) comprised four proportional and four non-proportional tasks that were also presented in a missing-value and comparison format. These tasks were geometrical. That is, the proportional tasks referred to the linear enlargement of the perimeter of rectangular and circular figures and the non-proportional tasks referred to the square enlargement of the area of respective figures. All the tasks involved indirect measures for indicating the perimeter and the area of the figure (Van Dooren et al., 2003). For instance the ribbon that was going to be sewed around a tablecloth was used as an indirect measure of perimeter, while the paint for covering the interior of a picture was used as an indirect measure for area (see Table 2).

Table 2

Example of the Items Included in Test II –Indirect Measures

Missing- value format Non-proportional Area	If 8ml of paint are needed in order to fill the inside of a square picture with 4cm of length, how much paint is needed for an enlargement of the same picture with 12cm of length
Comparison format Proportional Perimeter	Ann needs 5 minutes in order to sew a ribbon around a square towel of 30cm length. She calculated that it will take her 30 minutes to sew the same ribbon around a square tablecloth of 180cm of length. Are Ann's calculations correct? If not, how much time will she need for the tablecloth?

Finally, the last test (Test III) was presented in two parts of verbal and numerical multiple choice classical analogies in the notation A:B :: C:_ . Because students in Cyprus are not very familiar with this notation a special explanation was given as for the way students should handle these items. In the first part students were given nine verbal analogies like *ink: pen:: paint _ (colour, brush, paper)* and were required to find the relational similarity between the first pair of terms and apply the same relation to the second pair of terms by choosing the correct word. The words given in brackets were selected in such way that students could also be affected by the perceptual similarities of the terms, making their choice more difficult. It must be noted that this part of the test was organised according to Millers Analogy Test (Meagher, 2006) which proposes three groups of relations amongst the terms: semantic, classification and association (see Table 3). The semantic type of analogy can be thought of as involving the definitions of the terms. The classification type of analogy is concerned with the hierarchy of words and concepts, while the association type of analogy deals with relationships between two distinct but related ideas. Based on this classification three of the verbal analogies of the test were semantic, three involved classification and the remaining association.

Table 3

Example of the Items Included in Test III – Verbal and numerical analogies

Verbal analogies	*Semantic (v2)*	Clever: intelligent :: underhanded:_____ (devious, naive, honest)
	Classification (v6)	Picture: art :: Word:_____ (paper, speaking, literature)
	Association (v7)	Ink: pen :: paint: _____ (color, brush, paper)
Numerical analogies	*Integer ratio (m4)*	6:3:: 8: _____ (2, 4, 16)
	Non-integer ratio (m6)	6:4 :: 9: _____ (1, 3, 6)
	Square (m8)	6:36 :: 8: _____ (37, 64, 72)

In the second part of Test III students had to deal with ten numerical analogies of the same form as the verbal analogies presented previously. Students were given the three terms and had to chose the fourth one from three possible choices (i.e. *6:8::9:_ (12,18,27)*). The numerical analogies given were of different difficulty level, as the ratio between the terms of the first pair was not always an integer number (see Table 3). In particular, four of the numerical analogies involved an integer ratio, the other two involved a non-integer ratio, while in the remaining analogies the relation was square or cubic.

Methods of data analysis

Students' answers to the tasks of the three tests were not simply codified as correct or wrong. On the contrary, depending on the degree and the way each student handle each task, a different mark could be assigned ranging from 0 (wrong answer) to 1 (completely correct answer). For the analysis of the collected data we employed the Confirmatory Factor Analysis (CFA) in order to confirm and to explore the structural organization of the different aspects of the proposed model for proportional reasoning. One of the most widely used structural equation modelling computer programs, EQS (Bentler, 1995), was used for testing the model fitting. The tenability of a model can be determined by using the following measures of goodness-of-fit: x^2/df, CFI (Comparative Fit Index), RMSEA (Root Mean Square Error of Approximation) and SRMR (Standardized Root Mean Square Residual) (Bentler, 1995). The following values of the four indices are needed for supporting an adequate fit of the model: The observed values for x^2/df, should be less than 2, the values for CFI should be higher than .9, the values of RMSEA need to be lower than .05 and the values of SRMR should be lower than .10.

RESULTS

Proportional reasoning model

The main purpose of this study was to validate a theoretical model that defines the different aspects of proportional reasoning. The a priori model of proportional reasoning hypothesized the existence of three different aspects that correspond to analogical reasoning, routine proportionality and to meta-analogical awareness. In this model the components of analogical reasoning, routine proportionality and meta-analogical awareness were handled as second-order factors. The first order factors were used for explaining the different contexts in which the tasks of each dimension were presented, i.e. missing value or comparison tasks, direct or indirect measures. The fit of the model was very good (CFI=0.96; $\mathbf{x}^2$/df, = 1.33; RMSEA=0.029). The results indicate that a three order factor model was appropriate and this implies that the battery of test can be used to measure students' ability in relation to different types of constructs.

Therefore, these results confirmed the existence of a three-component model of proportional reasoning, in which the aspects of analogical reasoning, routine proportionality and meta-analogical awareness take an indispensable part (Figure 2). For the formation of the model we first calculate the relations between the three second-order factors through a second order factor model where each high order factor was allowed to be correlated with all the others. By doing this, the values of the correlation coefficients were found providing a further justification of the fact that a third order factor model was found to be appropriate.

In this model the different tasks included in the Tests I, II and III were classified into eight different first-order factors. These factors were created by exclusively proportional, analogical or non-proportional tasks that are presented in different contexts. It must be noted that, ideally three items are expected to be used in order to find out whether they represent a factor (and this is mainly for technical reasons i.e. to have enough information to run the model) but since the model is consisted of eight first order factors, the model is identified (see the number of degrees of freedom in each case) (Bentler, 1995). Therefore, the appearance of factors F1, F4 and F5 that are formed by two items does not have an impact on the reliability of the measurement for these factors.

The first four first-order factors (F1-F4) having high loadings on the second-order factor of routine proportionality consist of proportional tasks presented in Tests I and II and in different contexts. More precisely, the second-order factor of routine proportionality is formed by proportional statements (F1), proportional missing-value tasks with direct measures (F2), proportional comparison tasks with direct measures (F3), based on content related correlation, as well as proportional tasks with indirect measures (F4) that are correlated irrespectively of the tasks' form. It must be noted however, that the four first-order proportional factors (F1-F4) have different factor loadings on the second-order factor that represents the ability for routine proportionality. Therefore, the four factors do not predict pupils' proportional reasoning to the same degree. The factor F3, representing the proportional comparison tasks with direct measures, has the lower factor loading (0.34) on the factor of proportional reasoning. A possible explanation for this pupils' absence of familiarity with this kind of tasks, as they are rarely included in Cyprus's mathematics textbooks. The other three factors, which in their majority include missing-value tasks, present higher and similar factor loadings [F1(0.96), F2(0.78), F4(0.79)], representing better indicators of the aspect of routine proportionality.

Factors F5 and F6 consist of the non-proportional tasks of Tests I and II, respectively, and constitute the second-order factor that represents meta-analogical awareness. In particular, factor F6 consists of the non-proportional statements that were included in Test I, whereas factor F5 consists of the non-proportional tasks of Test II that were formulated with indirect measures and referred to the area of a rectangular figure. The factor loading of factor F6 (0.69) is higher than the one of factorsF5 (0.41), indicating that the recognition of a situation's characteristics, that place it in the proportional or non-proportional category, is the main predictor of the second-order factor of meta-analogical awareness.

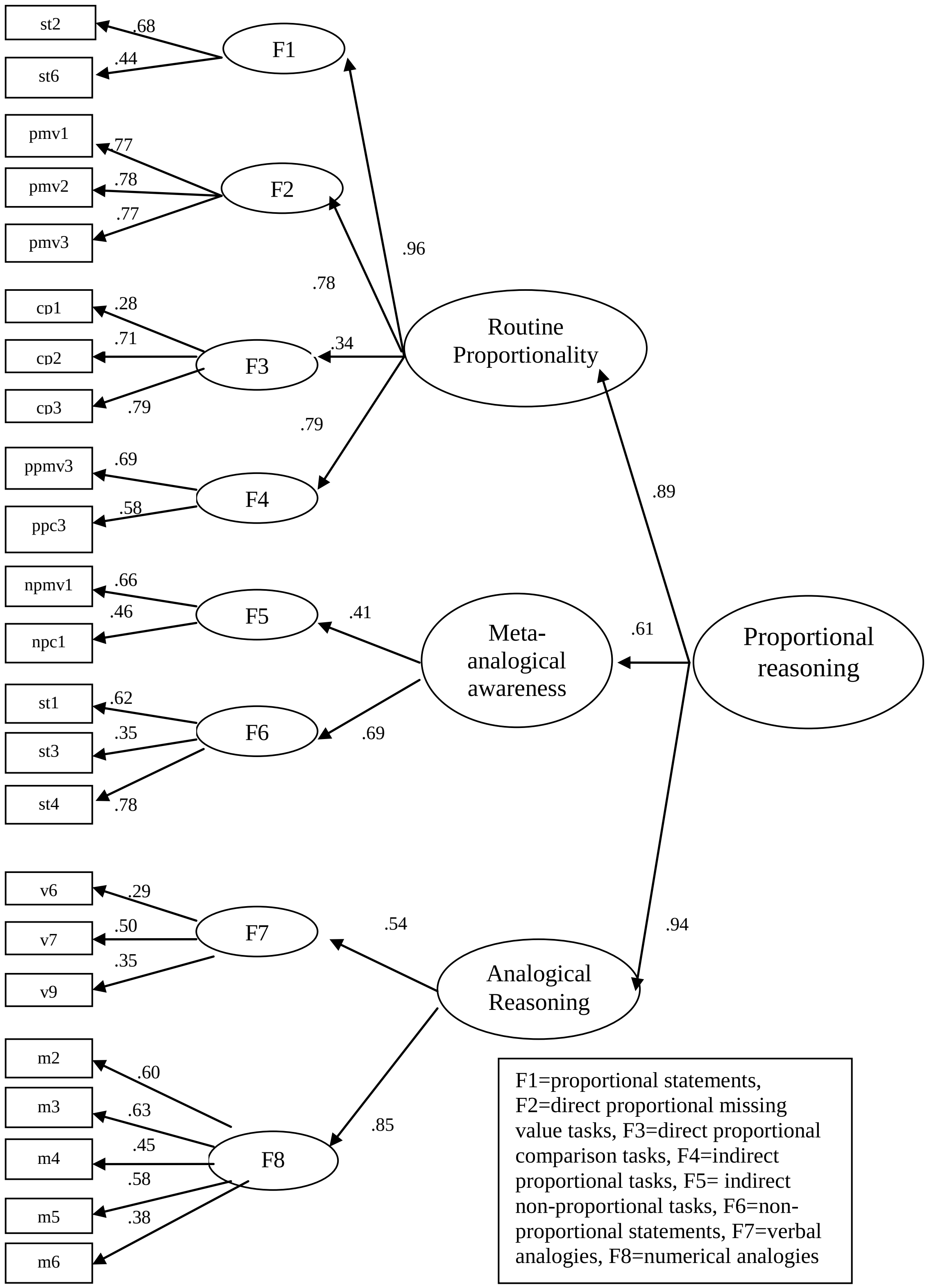


Figure 2. The three-component model of proportional reasoning

The two remaining first-order factors F7 and F8 consist of the verbal and numerical analogies included in Test III. Factor F8 consists of the numerical analogies with internal integer or non-integer ratio and has higher loadings on the second-order factor of analogical reasoning compared to factor F7. This is maybe due to the fact that elementary school students are more familiar with numerical analogies compared to the verbal ones. The verbal analogies factor (F7) is formulated by the respective analogies that refer to the association category, which deals with relationships between two distinct but related ideas (Meagher, 2006). It must be noted that in this factor none of the semantic category of analogies were included. This is mainly due to the inclusion of adjectives in this category of the definition of terms, which can have a two-fold role in language: Sometimes as a mean to describe a noun (i.e. *black* box) and sometimes as part of a mathematical definition (i.e. *parallel* lines, *perpendicular* lines).

The three second-order factors that represent the aspects of routine proportionality, analogical reasoning and meta-analogical awareness form a greater third-order factor, confirming that the reformulation of proportional reasoning that we have proposed fits the data well. The factor of meta-analogical awareness (0.61) is the weakest predictor of proportional reasoning compared to the factors of proportional thinking (0.89) and analogical reasoning (0.94). The relatively small loading of the factor concerned with the meta-analogical awareness implies that the third-order factor is mainly consisted of the two other second order factors.

DISCUSSION

The main aim of the present study was the validation of an elaborated model for interpreting proportional reasoning. The results confirm that a three-component model for proportional reasoning fits the data well, supporting the reformulation of proportional reasoning that we have proposed. The model supplies a concrete framework for interpreting proportional reasoning that takes into account the need (Karplus et al, 1983; Lesh et al., 1988; Cramer et al., 1993; Lamon, 1999) for differentiating the view of proportional reasoning as synonymous with success in solving routine proportional tasks. In this model, the aspects of analogical reasoning, routine proportionality and meta-analogical awareness take a constitutive part. Thus, proportional reasoning does not coincide exclusively with success in solving routine proportional problems, but it also involves the ability to handle verbal and arithmetical analogies, as well as a disposition towards discerning and handling non-proportional situations.

This research confirmed our initial hypothesis that the reformulated model of proportional reasoning includes the ability to distinguish proportional from non-proportional situations. Therefore, the illusion of linearity can be explained through this reformulated model, and in paricular from pupils' shortcomings in the meta-analogical awareness component. This component represents the recognition and handling of non-proportional situations and is differentiated from the other two aspects of the new model for proportional reasoning.

The items included in the analogical reasoning aspect fit the data well, justifing in this way their inclusion in the reformulated model of proportional reasoning. Pupils' ability to solve typical verbal and numerical analogies with the notation A:B::C:D was confirmed to be one of the major regulators of proportional reasoning, proposed in this study. This reinforces previous findings (Deal & Hardy, 2004) which show that the development of the ability for analogical reasoning reflects the respective development of mathematical reasoning. Pupils appear to use similar logical analysis when solving proportional tasks as when dealing with tasks of A:B::C:D notation (Hatano & Sakakibara, 2004).

Based on the results of this study further research can be carried out investigating possible relations between the three components of the proportional reasoning model. Moreover, a longitudinal study, following the same sample from elementary to secondary education, would be of great importance as it would indicate whether one component reflects to a different degree pupils' proportional reasoning abilities, according to age. This would allow to determine the respective roles of each component in the development of proportional reasoning. In this way the time that meta-analogical awareness occurs and the way it is developed can be established, showing whether this develops in parallel with pupils' originating proportional reasoning skills or whether it occurs only after pupils master them.

REFERENCES

Baxter, P. G., & Junker, B. (2001). *Designing cognitive- developmental assessments: A case study in proportional reasoning.* Paper presented at the Annual Meeting of the National Council of Measurement in Education, Seattle: USA. Retrieved April 23rd from http://www.stat.cmu.edu/~brian/rpm/baxterjunkerncme.pdf

Bentler, M. P. (1995). *EQS structural equations program manual*. Encino, CA: Multivariate Software Inc.

Cramer, K., Post, T., & Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: Research implications. In D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp. 159-178). New York: Macmillan.

Davidson, E. J., Deuser, R., & Sternberg, J. R. (1994). The role of metacognition in problem solving. In Metcalfe, J. & Shimamura, P. A. (Eds.), *Metacognition: Knowing about knowing* (pp. 207-226).

Deal, D., & Hardy, S. (2004). Portraying mathematical and analogical reasoning in the young: Three case studies. In L. D. English (Ed.), *Mathematical and analogical reasoning of young learners* (pp. 97-125). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics*, *35,* 65-85.

English, L. D. (2004). Mathematical and analogical reasoning in early childhood. In L. D. English (Ed.), *Mathematical and analogical reasoning of young learners* (pp.1-22). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Goswami, U. (1992). *Analogical reasoning in children*. *Essays in developmental psychology series.* UK: Lawrence Erlbaum Associates.

Hatano, G., & Sakakibara, T. (2004). Commentary: Toward a cognitive-sociocultural psychology of mathematical and analogical reasoning development. In L. D.English (Ed.), *Mathematical and analogical reasoning of young learners* (pp.187-213). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Inhelder, B., & Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence*. New York: Basic Books.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, K. E. (1983). Proportional reasoning of early adolescents. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and process* (pp. 45-90). New York: Academic Press.

Lamon, J. S. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding*: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93- 118). NCTM: Lawrence Erlbaum Associates.

Meagher, D. (2006). *Harcourt assessment report: Introduction to the Miller analogies test*. Retrieved March 7, 2006, from http://harcourtassessment.com/hai/Images/pdf/assessmentReports/MillerWhitepaper.pdf

Misailidou, C., & Williams, J. (2003). Diagnostic assessment of children’s proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behaviour*, *22*, 335-368.

Modestou, M., & Gagatsis, A. (in press). Cognitive and metacognitive aspects of proportional reasoning. *Mathematical Teaching and Learning.*

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2007). Students' improper proportional reasoning: A result of the epistemological obstacle of "linearity". *Educational Psychology, 27* (1), 75-92.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics*. New Jersey: Princeton University Press.

Tourniare, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics, 16*, 181-204.

Van Dooren, W., De Bock, D., De Bolle, E., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2003). Secondary school students' improper proportional reasoning: The role of direct versus indirect measures. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 2,* 1-18.

LES TABLES DE MULTIPLICATION POUR DES ÉLÈVES EN DIFFICULTÉS EN MATHÉMATIQUES : CONNAISSANCES ET COMPORTEMENTS

Dimitrios Anastasiou, Charalambos Lemonidis and Eleutheria Pantsiou

Université de Macédoine Ouest, Grèce

RÉSUMÉ

Cette étude explore les connaissances et les comportements des élèves ayant des difficultés, en mathématiques ou d'apprentissage, sur le thème des tables de multiplication. L'échantillon de cette étude est constitué de 5 élèves (4 garçons et 1 fille) choisis, dans une classe de CE2 de 20 élèves, pour leurs faibles performances en mathématiques. Les élèves ont été répartis en deux catégories selon leurs connaissances des tables de multiplication. Les quatre élèves de la première catégorie ont de légères difficultés pour déterminer un produit issu des tables de multiplication. Ils peuvent trouver le produit des tables de multiplication, en utilisant plusieurs fois des stratégies rudimentaires pour le niveau considéré. Il y a peu de produits qu'ils ne peuvent pas trouver. L'unique élève de la deuxième catégorie semble avoir de sérieuses difficultés pour trouver un produit issu des tables de multiplication. Il fait beaucoup d'erreurs, il connaît quelques produits simples ou d'un niveau moyen, mais il ne connaît pas les produits avec les grands nombres. Ses difficultés sérieuses sont apparemment dues à un déficit d'attention. Hors du contexte des tables de multiplication, deux élèves ayant des difficultés d'apprentissage présentent des particularités. Les sources de difficultés pour déterminer les produits des tables de multiplication semblent être liées à un déficit d'attention et au milieu familial.

INTRODUCTION

La plupart des recherches sur les difficultés d'apprentissage portent sur les difficultés de lecture. Les difficultés d'apprentissage en mathématiques, en comparaison avec les difficultés de la langue écrite, suscite peu d'intérêt comme champ de recherche (Ginsburg, 1997 ; Hanich, Jordan, Kaplan & Dick, 2001). Ginsburg (1997) attribue ce manque a une « culture de la peur » pour les mathématiques, au moins dans la société américaine. Quoiqu'il en soit, une certaine proportion d'élèves a des difficultés en mathématiques dont une partie reçoit, pour cette raison, une certaine forme d'éducation spéciale (Desoete, Roeyers, & Clercq, 2004. Ginsburg, 1997). En particulier, Geary

(2004) estime que 5% à 8% de la population scolaire est confrontée à des difficultés en mathématiques qui sont généralement associées à un déficit cognitif ou mnémonique. Des indices semblent montrer que ces déficits sont liés à des dysfonctionnements correspondants de certaines zones cérébrales (Geary & Hoard, 2001. Rourke & Conway, 1997).

En Grèce, peut-être pour la première fois, la circulaire Γ6/344/6-11-1991 sur les « élèves à besoins éducatifs spéciaux » se réfère à « des difficultés spéciales en mathématiques ». Dans la même circulaire, les élèves ayant des difficultés spéciales dans le domaine des mathématiques sont considérés comme appartenant à la catégorie plus large des élèves ayant des besoins éducatifs spéciaux (Direction de l'éducation spéciale du ministère de l'Éducation, 1994). Il en est de même dans les textes officiels grecs de 2000 – loi 2817 – et de 2008 – loi 3699. Dans cette dernière, la dyscalculie est considérée comme une forme de difficulté d'apprentissage spécifique. Toutefois, les mesures de prévention et d'intervention qui ont été prises pour les élèves ayant des difficultés d'apprentissage en mathématiques sont minimes.

Plusieurs chercheurs ont proposé de nombreux types de problèmes liés aux difficultés d'apprentissage en mathématiques. Beaucoup d'élèves ayant des difficultés d'apprentissage en mathématiques sont également confrontés à des difficultés en lecture, tandis que les difficultés de quelques élèves ne portent que sur les mathématiques (Hanich, Jordan, Kaplan & Dick, 2001; Jordan & Hanich, 2000; Jordon & Montani, 1997; Robinson, Menchetti, & Torgessen, 2002).

Certaines difficultés en mathématiques des élèves sont directement liées à la capacité d'effectuer les calculs arithmétiques. Les difficultés dans les activités numériques peuvent être liées : aux déficits de la mémoire de travail, aux difficultés de rappel de la mémoire à long terme ou aux erreurs dans la mise en œuvre de stratégies de résolution (Geary, 2004; Geary & Hoard, 2001).

Certains enfants en difficultés d'apprentissage en mathématiques ont des problèmes dans l'automatisation des opérations mathématiques et en particulier dans l'apprentissage des tables de multiplication. Ainsi, l'apprentissage des tables de multiplication préoccupe les spécialistes depuis des décennies (Woodward, 2006). En Grèce, l'apprentissage et l'enseignement des tables de multiplication, commence à partir de la classe CE1, grade 2, et se déroule durant toute l'école élémentaire.

Il a été constaté que, pour l'enseignement des tables de multiplication, la plupart des enseignants utilisent avec les enfants ayant des difficultés d'apprentissage les mêmes méthodes et techniques que celles utilisées avec les enfants sans difficulté d'apprentissage (Wood, Frank, & Wacker, 1998). Mais McComas, Walker & Cooper (1996) ont soutenu que pour aider les enfants ayant des difficultés d'apprentissage, il faut que l'enseignant s'appuie sur des stratégies d'enseignement qui comportent des éléments de base qui peuvent être décomposés en différentes étapes, en ciblant précisément les étapes qui sont associées aux difficultés particulières de chaque enfant.

Les difficultés d'apprentissage des tables de multiplication sont associées aux problèmes de la mémoire, mémorisation et disponibilité de ce qui est mémorisé. Une stratégie didactique pour améliorer la performance scolaire, dont l'efficacité a été montrée, est de familiariser les enfants en difficultés avec l'utilisation de certaines techniques ou stratégies mnémoniques (Scruggs & Mastropieri, 2000). Les techniques mnémoniques sont définies comme «un mécanisme ou une procédure ou une énergie utilisée pour améliorer la mémoire» (Mastropieri & Scruggs, 1991, p. 271).

Mastropieri et Scruggs (1991) ont souligné que les enfants ayant des difficultés d'apprentissage préfèrent des techniques mnémoniques spécifiques par rapport aux méthodes classiques d'enseignement. En particulier, Wood, Frank & Wacker (1998) ont constaté qu'avec l'apprentissage des stratégies mnémoniques pour les tables de multiplication, et en général pour la multiplication, les enfants ayant des difficultés en mathématiques acquièrent plus facilement les produits des tables de multiplication. En effet, certains enfants ayant des difficultés en mathématiques sont arrivés au point d'atteindre 100% de précision dans les résultats des tables de multiplication. En outre, ces mêmes enfants ont acquis une attitude plus positive envers les mathématiques, et ont même réussi à travailler seuls, sans la direction de leur professeur (Wood, Frank & Wacker, 1998).

Woodward (2006) avec une recherche menée sur des élèves de CM1, grade 4, ayant des difficultés d'apprentissage en mathématiques, a constaté que pour améliorer la capacité d'accès immédiat par la mémoire des produits de la multiplication (automatisation) il est nécessaire de combiner les techniques mnémoniques avec de fréquents exercices sur les produits de la multiplication.

Stratégies pour le calcul des produits des tables de multiplication

De nombreuses études ont été menées afin d'identifier les stratégies utilisées par les élèves pour résoudre des problèmes de type multiplicatif avec des nombres naturels (Anghileri, 1989· Kouba, 1989· Mulligan, 1992· Steffe, 1994· Mulligan & Mitchelmore, 1997). Mulligan et Mitchelmore (1997) ont organisé et classé les modèles intuitifs et les stratégies correspondantes du calcul, présentées dans le tableau 1 ci-dessous. Le même modèle intuitif peut être utilisé avec une variété de stratégies.

Fischbein et al. (1985) ont été parmi les premiers à évoquer la notion des modèles intuitifs, également connus comme modèles indirects, implicites ou informels. Ils estiment que : « chaque opération arithmétique fondamentale est généralement associée à un modèle indirect, inconscient, primitif et intuitif », qui guide la recherche pour trouver l'opération qui est nécessaire dans la résolution d'un problème.

Comptage direct (*Direct counting*). Utilisation des objets pour modéliser le problème. Les objets sont simplement comptés sans aucune référence à la structure multiplicative.

Comptage rythmique (*Rhythmic counting*). Le comptage suit la structure du problème. Par exemple, « 1, 2, 3, 4, 5, 6 ou 6, 5, 4, 3, 2, 1 ». Parallèlement avec le comptage, a lieu un deuxième comptage du nombre de groupes.

Comptage avec saut (*Skip counting*). Le dénombrement se réalise avec les multiples, par exemple, « 5, 10, 15 ou 15, 10, 5 ». Cette façon de faire est plus facile pour le comptage du nombre de groupes.

Addition ou soustraction répétitives (*Repeated addition or subtraction*). Le dénombrement est remplacé par des calculs : « 3+3=6, 6+3=9 ou 9–3=6, 6–3=3 ».

Addition de double (*Additive doubling*). Par exemple, « 4 plus 4 égal 8, 8 plus 8 égal 16 ».

Addition de moitiés (*Additive halving*). Par exemple, si on divise 8 en deux moitiés nous avons 4 plus 4.

Opération multiplicative (*Multiplicative operation*). Le résultat peut s'obtenir à partir d'un résultat de multiplication connu et disponible en mémoire. Par exemple, pour le produit 3 fois 4, on peut avoir accès directement au produit 12 ou bien, avec l'utilisation d'un résultat connu, 3×4 peut se calculer ainsi : 3×3=9 puis 9+3=12.

Table 1

Modèles intuitifs pour multiplication

Modèles intuitifs	Stratégies du calcul
	Multiplication
1. Comptage direct	Comptage unitaire
2. Addition répétitive	Comptage rythmique en avant
	Comptage avec saut en avant
	Addition répétitive
	Addition de double
3. Opération multiplicative	Opération multiplicative connue
	Production d'une opération multiplicative

(Mulligan & Mitchelmore, 1997, p. 316)

Au départ, les élèves appliquent les stratégies procédurales pour trouver le produit, comme le comptage direct ou rythmique. Mais ensuite, les stratégies procédurales sont progressivement remplacées par un accès immédiat à la mémoire. Cette stratégie apparaît au début des années scolaires et évolue progressivement dans les années suivantes par un stockage en mémoire de plus en plus de résultats (Steel & Funnel, 2001).

Selon Hans Ter Heege (1985), la plupart des enfants ne peuvent pas facilement mémoriser les tables de multiplication par le biais de la formation et de la pratique, mais ils passent par une étape intermédiaire dans laquelle ils utilisent spontanément des stratégies visant à produire le produit de la multiplication. Ces stratégies sont les suivantes :

- Utilisation de la propriété commutative (6×7 = 7×6).
- Utilisation *de multiples de 10*, par exemple ils utilisent 10×6 = 60 pour trouver 5×6 = 30, ou 10×8 = 80 pour trouver 9×8 = 72.
- Un calcul *des produit avec duplication*, par exemple ils utilisent le produit 2×7=14 pour calculer 4×7 en doublant 14.
- Un calcul utilisant la moitié, apparaît uniquement pour le calcul des produits de la forme 5×... qui sont calculés en prenant la moitié de 10×...
- Augmentation de « un ». Les enfants augmentent un produit connu en ajoutant une fois le multiplicateur. Ils connaissent, ou ils calculent facilement, 5×7 = 35 puis ils trouvent 6×7 par l'addition 35 + 7.
- Réduction de « un ». Les enfants réduisent un produit connu en diminuant une fois le multiplicateur. Souvent ils calculent 9×7 = 70 – 7. Cette stratégie « d'un en moins » est utilisée exclusivement pour les produits de la forme 9×…

Selon Le Fevre et al. (1996), il y a quatre facteurs qui influencent la performance des élèves pour effectuer une multiplication. Le premier facteur est la taille des nombres du produit. Il est particulièrement important selon que les facteurs sont de petits ou grands nombres : si un des facteurs est élevé (par exemple, la table de 8) les erreurs des élèves augmentent. Le deuxième facteur est l'influence de paires identiques (n×n). Plus précisément, les carrés comme 8×8 s'effectuent plus rapidement par rapport aux problèmes qui ne le sont pas comme 8×7. Il y a une petite augmentation du temps de réponse quand la taille des nombres du problème augmente. Le troisième facteur est l'avantage des produits ayant un facteur 5. Un produit qui contient le facteur 5 devrait être résolu plus facilement par rapport à d'autres facteurs, puisque les produits de 5 suivent une série rythmique. Le quatrième facteur est la tendance vers les erreurs selon les termes du produit, ainsi les élèves donnent une réponse qui convient à un autre produit qui a un facteur commun avec le produit donné.

MÉTHODE

L'objectif de cette étude est d'explorer les comportements des élèves ayant des difficultés en mathématiques sur les tables de multiplication. Pour cette raison, il a été choisi une classe de CE2, grade 3, d'une école primaire de Florina, en Grèce, qui se composait de 20 enfants, 12 garçons et 8 filles.

Pour mesurer les capacités arithmétiques essentielles on a utilisé une version adaptée au test American WRAT3 (Wide Range Achievement Test, Révision 3 - Wilkinson, 1993), qui a été passé par tous les élèves de la classe. Sur la base des résultats de WRAT3, et les informations que nous avions par l'enseignant de la classe relativement aux élèves qui avaient des difficultés en mathématiques, on a sélectionné cinq élèves ayant des scores faibles. Ces élèves ont individuellement passé le test *Standard Progressive Matrices* (SPM) qui a exclu la possibilité que le score faible des élèves en WRAT3 était dû à une arriération mentale.

Puis, chacun des cinq élèves a passé un entretien personnel avec un des auteurs de ce travail. À l'entretien on leur a posé des questions sur les tables de multiplication qui avaient été divisées en: simples, moyens et difficiles, selon la littérature bibliographique. Après avoir complété les entrevues, on a constaté que deux des cinq élèves avaient plus des difficultés de trouver les résultats corrects des tables de multiplication. Pour déterminer les sources de difficulté de ces élèves, on a réalisé une entrevue avec l'enseignant de la classe.

Les participants à la recherche

Initialement, tous les élèves de la classe CE2 de l'école primaire ont participé à la recherche afin de déterminer lesquels d'entre eux avaient des difficultés en arithmétique. En se basant sur les performances au test WRAT3, on a sélectionnés cinq élèves ayant les scores les plus bas : quatre garçons (Georges, Pierre, John, Costas) et une fille (Maria).

Après une discussion avec l'enseignant de la classe, on s'est mis d'accord sur le fait que ces cinq élèves sont effectivement les plus faibles en mathématiques. En particulier, selon l'opinion du professeur, Pierre présentait des symptômes de manque de maturité et il était généralement distrait pendant les cours.

Moyens de sélection des données

Wide Range Achievement Test, Revision 3 (WRAT-3). Pour mesurer la connaissance en calculs numériques écrits on a utilisé une version abrégée et adaptée du test américain WRAT3, qui est destiné aux élèves du primaire (Anastassiou, 2004. Wilkinson, 1993). Dans ce court formulaire de l'épreuve WRAT3, il y a 25 questions de calcul arithmétique écrit, organisées en 5 lignes. La réponse écrite dans chaque opération arithmétique, ou question, a le score 1 si elle est correcte ou 0 si elle est fausse.

Le score maximal que peut atteindre chaque élève est 25. Le temps donné pour ce test a été 15 minutes.

Standard Progressive Matrices (SPM). SPM comprend 60 problèmes. Chaque problème est constitué d'un dessin, auquel il manque une pièce, toujours au même endroit. Le candidat doit choisir un complément parmi les 6 ou 8 morceaux qui sont donnés juste au-dessous du dessin. Les problèmes, ou dessins, sont classés en 5 groupes nommés A, B, C, D et E. Chaque groupe contient 12 dessins d'une difficulté croissante, mais d'une logique similaire. Les premières séries exigent de la précision dans la discrimination, tandis que le dernier problème des deux dernières séries, sont plus difficiles, ils contiennent des comparaisons proportionnelles et d'autres relations logiques (Raven, Raven, & Court, 1993). L'épreuve était individuelle et a duré environ 15-20 minutes. Chaque bonne réponse, dans cet essai, est marquée d'un point, une erreur de zéro point et, dans le cas de cinq erreurs consécutives, le processus s'arrêtait.

Procédure

Le test WRAT-3 a été passé par tous les élèves afin d'identifier les plus faibles en arithmétique. Ensuite on a fait la correction de l'épreuve à l'échelle 25. Les scores varient entre 12 et 23. Une élève a obtenu 23/25, deux élèves 22/25, un 21/25, un autre 20/25, trois élèves 19/25, un 18/25, trois 17/25, cinq élèves 16/25, deux 14/25 et enfin un 12/25. Ainsi, il y avait un classement des élèves de la classe sur la base des résultats du test WRAT3. Une discussion avec l'enseignant a été menée, afin de préciser quels élèves sont, à son avis, faibles en mathématiques. L'accent a été mis sur les élèves qui ont eu la plus faible performance au test, c'est-à-dire les élèves qui ont eu un score de 12/25, 14/25 et 16/25. Parmi ceux-ci, seuls les élèves identifiés par l'enseignant comme faibles en mathématiques ont été retenus pour l'étude. Ainsi, ont été retenus pour l'étude : deux des élèves ayant eu le score de 16/25 et les trois élèves ayant eu un score de 12/25 et 14/25. À ce propos, il est intéressant de noter que ces trois derniers élèves ont tous été identifiés comme faibles en mathématiques par l'enseignant : les résultats du test WRAT3 sont en accord avec l'opinion de l'enseignant. Finalement, un groupe de cinq élèves a été constitué, qui est l'échantillon de cette recherche.

Ces cinq élèves (4 garçons et 1 fille) ont passé un test d'intelligence afin d'exclure la possibilité que la faible performance au test WRAT3 soit due à un retard mental. Il a été constaté que ces cinq élèves ont une plus faible performance que leurs pairs, mais sans être dans le domaine de l'arriération mentale. Toutefois, des facteurs comme le stress ou le déficit d'attention doit être pris en considération dans le résultat final, tel qu'il est discuté ci-dessous.

RÉSULTATS DE LA RECHERCHE

On a effectué des entretiens individuels avec chacun des cinq élèves afin d'explorer leur performances aux tables de multiplication et les différentes stratégies utilisées. Lors de l'entrevue le chercheur demandait des produits issus des tables de multiplication ainsi que le mode de pensée qui a conduit à chaque réponse. Si un élève avait une difficulté pour trouver une réponse, il pouvait utiliser le boulier. Les questions étaient divisées en trois catégories en fonction de leur difficulté. Ainsi, le premier groupe (produits simples), inclus des produits des tables de 2, 5 et 10, le deuxième groupe (produits de difficulté moyenne) inclus des produits des tables de 3 et 4 et du type carré $n \times n$, et le troisième groupe (produits difficiles) inclus des produits des tables de 6, 7, 8 et 9. Les entrevues ont eu lieu dans une classe de l'école et ils ont été enregistrés.

La transcription et l'analyse des réponses, en ce qui concerne la performance aux tables de multiplication, semblent séparer deux groupes d'élèves : quatre élèves, qui pouvaient trouver les produits dans la plupart des cas, bien que plusieurs fois ils utilisaient des stratégies personnelles, et un élève en grande difficulté.

Les réponses des quatre élèves avec une légère difficulté dans le calcul des produits

Les quatre élèves, trois garçons (George, John, Costas) et une fille (Maria), pouvaient bien trouver le produit des tables de multiplication en utilisant des stratégies telles que la réponse directe due à une disponibilité du résultat en mémoire, l'addition répétitive, monter de deux en deux et de cinq en cinq, connaître le produit précédant et ajouter ou connaître le produit suivant et soustraire, etc. Plus précisément :

Produits simples – Les réponses données aux produits simples des tables de multiplication étaient correctes. Ainsi, les quatre élèves montaient correctement de 2 en 2, de 5 en 5 et de 10 en 10. Pour les produits 2×3 = 6, 2×6 = 12, 6×5 = 30, 9×5 = 45 et les réponses ont été rapides et sans erreurs. Les stratégies utilisées dans cette catégorie de produits étaient : l'addition répétitive, connaître le produit suivant et soustraire et quelques produits qu'ils connaissaient par cœur. Ainsi, Georges et John calculent 2×3 en pensant 3+3 = 6. Georges, pour le produit 9×5, pense que 10×5 = 50 et donc si on soustrait 5 de 50 il reste 45. Costas a déclaré qu'il savait par cœur les produits de cette catégorie. Maria est restée silencieuse quand il fallait expliquer sa manière de penser, ainsi la chercheuse a choisi de ne pas la presser à répondre. Toutefois, pour le produit 6×5 elle a dit qu'elle pensait initialement que 5×5 = 25, puis elle a ajouté un autre 5, donc 6×5 = 30.

Produits de difficulté moyenne – Trois élèves ont donné des réponses correctes aux questions de cette catégorie de produits. En particulier, ils répondent de manière correcte pour les produits 3×4=12, 4×3=12, 6×3=18, 7×3=21 et 5×4=20 ainsi que pour les carrés 2×2=4, 3×3=9, 4×4=16, 5×5=25, 6×6=36, 7×7=49, 8×8=64, 9×9=81, et 10×10=100. Les stratégies qui sont apparues aux produits moyens des tables de multiplication était : l'addition répétitive, connaître le produit suivant et soustraire, connaître le produit précédant et ajouter, l'utilisation de la propriété commutative et le retrait immédiat des produits. Il faut noter que John a utilisé le boulier pour trouver le produit 7×7, tandis que pour expliquer comment il a trouvé 5×4 il a dit que, puisque 2×5 = 10 donc 4×5 = 20, c'est-à-dire le double de 2×5 = 10. En outre, pour le produit 4×3 deux élèves ont déclaré que c'est l'inverse de 3×4, tandis que le troisième a dit que 4+4+4 = 12. John, pour expliquer comment il a trouvé le produit 7×3, a dit que 2×7 =14, on ajoute à 14 encore 7, ainsi 7×3 = 21. Georges s'est basé essentiellement sur l'addition répétitive, et Costas, comme dans la catégorie précédente, a dit qu'il savait par cœur les réponses.

Maria savait que 3×4 était l'inverse de 4×3, de sorte que le résultat est le même. Pour le produit 6×3 = 18, elle dit qu'elle a répété par cœur la table de multiplication de 6 jusqu'à atteindre 6×3. Pour le produit 7×4, elle a dit que 2×7 = 14 et puis elle a ajouté, mais sans dire combien. En outre, elle a refusé d'utiliser le boulier pour certains grands carrés, comme pour 7×7, malgré son indécision. En règle générale, on peut dire qu'elle savait donner correctement les carrés, mais sans être en mesure d'expliquer comment elle pense. Aussi, la chercheuse l'a plusieurs fois rassurée, car Maria était très stressée et mélangeait ses mots.

Produits difficiles – La plupart des réponses données dans cette catégorie sont correctes. Les produits qui ont été étudiés sont les suivants : 5×6=30, 7×8=56, 8×6=48, 6×9=54, 7×6=42 et 9×8=72. Dans la plupart des produits les élèves ont utilisé la stratégie « connaître le produit suivant et soustraire ». Ainsi, pour 7×8 Georges a dit que, puisque 8×8 = 64, on soustrait 8 de 64 et il reste 56. John, pour 9×8, pense que : puisque 9×9 = 81, on soustrait 9 de 81 et il reste 72. Pour le même produit, Costas dit que 10×8 = 80, on soustrait 8 de 80 et il reste 72. Ils ont également utilisé la stratégie d'addition répétitive. Ainsi, pour le produit 7×6, Georges a dit qu'il a additionné 7+7+7+7+7+7. John, pour le produit 8×6, a dit que d'abord il a pensé que 6×6 = 36, à 36 il a ajouté encore 12 et il a ainsi trouvé que 8×6 = 48. Il faut souligner que Georges a dit qu'il a eu des difficultés pour le produit 8×6, il a d'ailleurs utilisé le boulier.

Maria a répondu correctement aux produits 5×6=30, 7×8=56, 6×9=54, 7×6=42, et elle a fait des erreurs aux produits 8×6 = 50 et 9×8 = 64. Elle a déclaré que pour le produit 7×8 = 56, elle a d'abord pensé que 7×7 = 49 et elle a ajouté 7 pour trouver 56. En outre, pour 6×9 = 54 elle a dit que 10×6 = 60, elle a soustrait 6 de 60 et elle a trouvé 54. Il faut noter qu'elle refusait d'utiliser le boulier pour effectuer les produits qu'elle ne trouvait pas. Elle était assez lente à répondre et dans plusieurs cas elle était stressée et elle mélangeait ses mots. Pour cette raison, on ne l'a pas pressée pour qu'elle exprime sa pensée à chaque produit.

En général, on peut conclure que ces quatre élèves peuvent trouver les résultats des tables de multiplication. Mais plusieurs fois, ils utilisent des stratégies rudimentaires pour la classe de CE2 ce qui montre qu'ils ne connaissent pas suffisamment bien les tables de multiplication pour leur niveau scolaire.

Avec John, George et Costas, l'entretien personnel s'est déroulé dans un climat agréable et créatif. Ces enfants ne semblaient pas avoir d'anxiété et ils n'avaient pas de difficulté à répondre aux questions sur leur façon de trouver les résultats de chaque produit. Au contraire, Maria a été très stressée. On a fait des efforts pour qu'elle se détende et pour produire une discussion très amicale. Elle était très lente pour trouver les résultats et elle ne voulait pas utiliser le boulier, elle préférait trouver les résultats par elle-même.

Les réponses de l'élève avec de graves difficultés dans le calcul des produits

Pierre avait des difficultés sévères pour de nombreux produits des tables de multiplication et il confondait souvent les résultats. Il a donné plusieurs réponses fausses et il a utilisé le boulier plus souvent que les autres élèves. Plus précisément :

Produits simples – Pierre montait correctement de 2 en 2, de 5 en 5 et de 10 en 10. Mais sur certains points il était un peu confus. Il a répondu correctement pour les produits : 2×3=6, 2×6=12, 2×5=10, 2×7=14, 6×5=30 et 9×5=45. Pierre a dit qu'il connaissait par cœur la plupart des réponses, tandis que pour le produit 6×5 il a dit qu'il est monté six fois de 5 en 5. Par ailleurs, pour le produit 9×5 il a dit que 10×5 = 50, donc, on soustrait 5 et il reste 45.

Produits de difficulté moyenne – En ce qui concerne les produits de cette catégorie, Pierre a répondu correctement pour les produits 2×4=8, 3×4=12, 4×3=12, 6×3=18 et 7×4=28. Toutefois, aux produits doubles : 2×2=4, 3×3=9, 4×4=16, 5×5=25, 6×6=36, 7×7=49, 8×8=64, 9×9=81 et 10×10=100 il a fait beaucoup d'erreurs et il a utilisé à de nombreuses reprises le boulier. Les stratégies qu'il a utilisées le plus était : l'addition répétitive, les produits commutatifs, connaître le produit précédant et ajouter et l'accès immédiat à la mémoire. En particulier, pour 4×3, Pierre a dit que d'abord il a pensé que 3×3 = 9, puis il a ajouté 3, ce qui donne 12. Il a utilisé la même logique pour les produits 7×3 et 4×4, tandis pour 2×4 = 8 il a dit qu'il est monté quatre fois de 2 en 2. Pour 5×5 = 25 il a dit que « 5×6 = 30, je soustrais 5 de 30 et il reste 25 ». Il a répondu faussement aux produits : 6×3=23, 3×3=6, 4×4=12 et 7×7=42. Pour les autres produits, soit il a utilisé le boulier soit il a dit qu'il les connaissait par cœur. Pierre a été très lent pour ces réponses, tandis que, dans plusieurs produits, il confondait les réponses. En outre, il fallait que la chercheuse répète la même question plusieurs fois, car Pierre était souvent distrait.

Produits simples – Dans cette catégorie de produits, Pierre a présenté beaucoup de difficultés. Il a répondu correctement seulement pour le produit 5×6 =30. Il a répondu faussement pour le produit 7×8 = 48. En outre, il a utilisé le boulier pour les produits 7×8 et 8×6. Par ailleurs, Pierre a dit que pour 5×6 = 30, il a pensé que 5×5 = 25 et il a ensuite ajouté 5. Nous avons décidé en ce qui concerne Pierre de ne plus lui demander des produits difficiles, car on a remarqué depuis le début qu'il avait des difficultés particulières et un déficit d'attention.

Ce que nous pouvons dire en général est que Pierre ne connaît pas les tables de multiplication. De plus, il est gêné par un déficit d'attention pour donner les bonnes réponses. Il n'était pas concentré pour pouvoir penser de manière efficace, alors qu'il ne connaissait pas du tout certains produits. Lors de l'utilisation du boulier il a compté un par un, stratégie qui l'a conduit à beaucoup d'erreurs.

Les cinq élèves ont pu trouver les produits simples et les carrés. Comme prévu, la plupart des erreurs sont apparues dans les produits difficiles. Les quatre premiers élèves pouvaient calculer les produits de difficulté moyenne, mais Pierre n'a pas toujours répondu correctement. Par ailleurs les stratégies utilisées étaient différentes en fonction du produit donné.

DISCUSSION

Nous avons vu ci-dessus que les connaissances sur la multiplication des quatre élèves ayant de légères difficultés en mathématiques sont les suivantes. Ces élèves trouvent un moyen de répondre correctement aux produits des tables de multiplication. Mais les stratégies qu'ils utilisent, comme l'addition répétitive ou l'utilisation du boulier, même pour les produits simples ou de difficulté moyenne, montrent que ces élèves, pour le niveau de la classe où ils sont, ne maîtrisent pas bien les tables de multiplication. Seul l'un des quatre élèves semble connaître bien les tables de multiplication : les produits simples, de difficulté moyenne et certains produits difficiles sont disponibles en mémoire et, pour les autre produits difficiles, ils utilisent la stratégie de calcul à partir d'autres produits connus.

Un de ces cinq élèves a présenté de sérieux problèmes dans la connaissance des tables de multiplication. Il pouvait compter oralement de 2 en 2, de 5 en 5 et de 10 en 10 et trouver les produits simples des tables de 2 et 5. Mais il a commis beaucoup d'erreurs, et il a calculé avec difficulté les produits de difficulté moyenne. Il ne peut presque pas calculer les produits difficiles.

Selon le professeur de la classe, pour certains élèves comme Pierre et Maria, d'autres facteurs comme le milieu familial, le déficit d'attention et l'immaturité de caractère jouent un rôle important dans leurs performances moyennes ou mauvaises aux tables de multiplication et en général en mathématiques.

En ce qui concerne Pierre, il présente de graves symptômes d'immaturité par rapport à ses pairs et il est généralement distrait pendant les cours. Son milieu familial ne présente pas de problème particulier. Ces parents sont des enseignants, ils vont souvent se renseigner à l'école sur les progrès de leur fils. Les hypothèses de l'enseignant, sur les causes des difficultés dans les tables de multiplication, sont son immaturité et son manque d'attention ainsi que son indifférence pour les cours à l'école et non pas un problème d'arriération mental.

Maria est originaire de l'Albanie et son adaptation à la réalité de l'école grecque est effectivement très difficile. Dans son milieu familial, sa mère ne connaît pas le grec et Maria a en charge toutes les responsabilités familiales (paiement de comptes, exécution des travaux ménagers, etc.). Cela réduit le temps disponible pour étudier et est une cause d'angoisse, ce qui était évidente à toutes les séances de cette recherche.

Cependant, elle a fait beaucoup d'efforts et elle a amélioré de façon significative ses résultats par rapport au trimestre précédent. L'enseignant l'évalue en fonction des ses problèmes, prenant en compte les difficultés familiales de cette élève.

En ce qui concerne les autres élèves (George, John et Costas), le professeur a fait remarqué que leurs difficultés en mathématiques étaient dues à un petit déficit d'attention et non pas à des problèmes familiaux ou autres.

En comparant Pierre et Maria des trois autres enfants, nous pouvons dire que leurs difficultés dans le calcul des produits se présentent de façon différente. Pierre présente des lacunes sévères aux tables de multiplication. Certains produits sont disponibles en mémoire mais pas tous. Mise à part le manque d'attention qu'il présente, il serait bien de passer un examen de capacité de mémoire. Mais en général, il faut étudier en détail les causes de ce type de difficultés d'apprentissage. Maria a une performance meilleure aux tables de multiplication que Pierre, mais elle présente néanmoins des difficultés au cours du processus métacognitif qui semblent avoir une origine émotionnelle. Cela l'empêche d'être flexible et efficace dans l'utilisation des stratégies alternatives et des instruments de calcul, comme le boulier, pour trouver les résultats des produits. Peut-être que le milieu familial difficile crée des problèmes qui surviennent dans le processus d'apprentissage.

BIBLIOGRAPHIE

Anghileri, J. (1989). An investigation of young's children's understanding of multiplication. *Educational Studies in Mathematics, 20,* 367-385.

Anastasiou, D. (2004). *Évaluation de l'impact de deux programmes éducatifs d'intervention dans le traitement phonologique et orthographique de la langue écrite chez les enfants ayant des difficultés d'apprentissage.* Athènes: Thèses en Grec.

Direction de l'éducation spéciale du ministère de l'Éducation, (1994). Bulletin d'information sur le traitement spécifique (6me édition). Athènes: OEDB.

Desoete, A., Roeyers, H., & De Clercq, A. (2004). Children with mathematics learning disabilities in Belgium. *Journal of Learning Disabilities, 37,* 50-61.

Geary, D. C. (2004). Mathematics and learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 37,* 4-15.

Geary, D. C., & Hoard, M., K. (2001). Numerical and arithmetical deficits in learning-disabled children: Relation to dyscalculia and dyslexia. *Aphasiology, 15,* 635-647.

Ginsburg, H. P. (1997). Mathematics learning disabilities: A view from developmental psychology. *Journal of Learning Disabilities*, *30*, 20-33.

Goldman, S. R., Pellegrino, J. W., & Mertz, D. L. (1988). Extended practice of basic addition facts: Strategy changes in learning disabled students. *Cognition and Instruction*, *5*, 223-265.

Hanich, L. B., Jordan, N. C., Kaplan, D., & Dick, J. (2001). Performance across different areas of mathematical cognition in children with learning difficulties. *Journal of Educational Psychology*, *93,* 615-626.

Heege, T. H. (1985). The acquisition of basic multiplication skills. *Educational Studies in Mathematics*, *16*, 375-388.

Jordan, N. C., & Hanich, L. B. (2000). Mathematical thinking in second-grade children with different types of learning difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, *33*, 567-578.

Jordon, N. C., & Montani, T. O. (1997). Cognitive arithmetic and problem solving: A comparison of children with specific and general mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, *30*, 624-634, 684.

Fischbein, E., Deri M., Nello M-S., & Marino M-S. (1985). The role of implicit model in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16*(1), 3-17.

Kouba, V. L. (1989). Children's solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, 147-158.

LeFevre, J., Bisanz, J., Daley, K. E., Buffone, L., Greenham, S. L. & Sadesky, G. S. (1996). Multiple routes to solution of single-digit multiplication problems. *Journal of Experimental* Psychology: General, *125*, 284–306.

Mastropieri, M. A., & Scruggs, T. E. (1991). *Teaching students ways to remember: Strategies for learning mnemonically*. Cambridge, MA: Brookline Books.

McComas, J. J., Wacker, D. P., & Cooper, L. J. (1996). Experimental analysis of academic performance in a classroom setting. *Journal of Behavioral Education*, *6*, 191–201.

Mulligan, J. T. (1992). Children's solutions to multiplication and division word problems: A longitudinal study. *Mathematics Education Research Journal*, *4*, 24-42.

Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*, 309-330.

Loi 2817/2000. *Education des personnes ayant des besoins éducatifs spéciaux et les autres dispositions* (FEK 78, τ. A΄). Athènes: Imprimerie Nationale.

Loi 3699/2008. *Education spéciale et formation des personnes handicapées ou avec besoins éducatifs spéciaux* (FEK 199, τ. A΄). Athènes: Imprimerie Nationale.

Raven, J., Raven, J. C., & Court, J. H. (1993). *Manual for Raven's Progressive Matrices and Vocabulary scales. General overview.* Oxford: Oxford Psychologists Press.

Robinson, C. S., Menchetti, B. M., & Torgessen, J. K. (2002). Toward a two-factor theory of one type of mathematics disabilities. *Learning Disabilities Research and Practice*, *17*, 81-89.

Rourke, B. P., & Conway, J. A. (1997). Disabilities of arithmetic and mathematic reasoning: Perspectives from neurology and neuropsychology. *Journal of Learning Disabilities*, *30*, 34-46.

Scruggs, T. E., & Mastropieri, M. A. (2000). The effectiveness of mnemonic instruction for students with learning and behavior problems: An update and research synthesis. *Journal of Behavioral Education*, *10*, 163-173.

Steel, S., & Funnell, E. (2001). Learning multiplication facts: A study of children taught by discovery methods in England. *Journal of Experimental child Psychology, 79*, 37-55.

Steffe, L. P. (1994). Children's Multiplying Schemes. In G. Harel & J. Confrey (Eds)., *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 3-40). NY: State University of New York Press.

Wilkinson, G. S. (1993). WRAT 3 - *Wide Range Achievement Test.* Wilmington, DE: Wide Range Inc.

Wood, D. K., & Frank, A. R. (2000). Using memory – enhancing strategies to learn multiplication facts. *Teaching Exceptional Children, 32*, 78-82.

Wood, D. K., Frank, A. R., & Wacker, D. P. (1998). Teaching multiplication facts to children with learning disabilities. *Journal of Applied Behavior Analysis*, *31*, 323-338.

Woodward, J. (2006). Developing automaticity in multiplication facts: Integrating strategy instruction with timed practice drills. *Learning Disability Quarterly, 29*, 269-289.

CHAPITRE 2

ENSEIGNEMENT ET APPRENTISSAGE GÉOMÉTRIQUE

CHAPTER 2

GEOMETRICAL TEACHING AND LEARNING

ANALYSES EN TERMES D'ESPACES DE TRAVAIL GÉOMÉTRIQUE SUR L'ENSEIGNEMENT FRANÇAIS DE LA SYMÉTRIE EN DÉBUT DE COLLÈGE

Caroline Bulf

Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris Diderot, France

RÉSUMÉ

La symétrie axiale est la première des isométries enseignées en France : dès l'école primaire puis en début de collège en classe de 6e (les élèves ont entre 11 et 12 ans) ; la symétrie centrale est enseignée dans la classe suivante en 5e. Cet article porte sur l'étude des effets de la symétrie axiale sur l'enseignement et l'apprentissage de la symétrie centrale. L'un des objectifs de cet article est de montrer comment les travaux de Duval (2005) sur les différents traitements de la figure dans le raisonnement géométrique permettent de décrire l'organisation des composants de l'Espace de Travail Géométrique (ETG) personnel des élèves, au sens de Houdement et Kuzniak (2006), au début de l'enseignement secondaire français. En particulier, nous mettrons en évidence le rôle joué par la symétrie axiale dans l'organisation de cet ETG à travers l'analyse du type de déconstruction des figures.

INTRODUCTION

Contexte de la recherche

Le contenu de cet article fait partie d'une recherche plus conséquente tirée de notre travail de thèse (Bulf, 2008) qui a pour objectif d'étudier les effets de la symétrie axiale sur la conceptualisation des isométries planes et sur la nature du travail géométrique au collège en France. En effet, La symétrie axiale est abordée en France dès l'école primaire sous la forme d'activités de pliage ou de pavage. Jusqu'en 2008, l'enseignement secondaire français se caractérisait par un enseignement nivelé des transformations du plan : la symétrie axiale était la première des isométries enseignées en début de collège ; la symétrie centrale était enseignée au niveau suivant en classe de 5e ; la translation était abordée en classe de 4e et enfin la rotation était enseignée en classe de 3e (les élèves ont alors entre 14 et 15 ans). Désormais, l'enseignement de la translation en 4e et de la rotation en 3e sont supprimés [1].

Nous présentons dans cet article une étude détaillée sur l'enseignement et l'apprentissage de la symétrie centrale en classe de 5^{e} et ses liens avec la symétrie axiale.

Une nouvelle problématique des effets de la symétrie axiale au carrefour des précédents travaux

Notre travail se situe au carrefour des problématiques déjà traitées par la littérature abondante à ce sujet (Grenier, 1990), (Tavignot, 1993), (Cassan, 1997), (Bkouche, 1992) et (Jahn, 1998). Nous nous interrogeons sur l'enseignement des transformations du plan mais en partant de la spécificité du concept de symétrie : nous cherchons à déterminer les effets de la symétrie axiale sur l'apprentissage des autres transformations du plan. En effet, la symétrie axiale étant la première des transformations enseignées, et aussi la plus familière, elle va participer à la construction des nouvelles connaissances visées par le collège. Cet article se concentre sur l'enseignement de la symétrie centrale en 5^{e} : peut-on relier les conceptions familières résistantes liées à la symétrie axiale chez les élèves (et déjà identifiées dans les travaux cités précédemment) aux difficultés didactiques rencontrées lors de l'enseignement des autres transformations du plan (et donc ici à l'enseignement de la symétrie centrale) ? Les précédents travaux sur l'enseignement des transformations pointent des difficultés liées au concept de conservation des mesures, au concept d'orientation (celui-ci permet en particulier de distinguer la symétrie axiale et la symétrie centrale) et au passage à la discrétisation du plan (la familiarité de la symétrie axiale pour l'élève pourrait alors la cristalliser dans une perception globale). L'intérêt de cet article est donc de déterminer si les difficultés rencontrées lors de l'enseignement de la symétrie centrale sont liées au concept de symétrie axiale.

Notre méthodologie de recherche est basée d'une part sur l'analyse d'un questionnaire réalisé dans une classe de 5^{e} après l'enseignement de la symétrie centrale et d'autre part sur l'analyse des séances d'enseignement de la symétrie centrale reçues par ces mêmes élèves. Notre cadre d'analyse est principalement constitué des notions de paradigmes géométriques et d'Espaces de Travail Géométrique (ETG) au sens de Houdement et Kuzniak (2006). Un des objectifs de cet article est de décrire comment les travaux de Duval (2005) sur les différents traitements de la figure dans le raisonnement géométrique permettent de décrire l'organisation des composants de l'ETG personnel des élèves. Nous mettrons en évidence que la symétrie axiale agit tel un obstacle didactique, au sens de Brousseau (1998), c'est-à-dire un obstacle qui se révèle dans une situation didactique, et ici plus particulièrement dans l'organisation du travail géométrique des élèves lors de l'enseignement de la symétrie centrale.

UN CADRE D'ANALYSE FONDÉ SUR LA NOTION D'ESPACE DE TRAVAIL GÉOMÉTRIQUE

De la perception à la conceptualisation

De nombreux travaux, en psychologie notamment (Palmer & Hemenway, 1978; Palmer, 1985; Rock, 2001; Giaquinto, 2005) s'accordent pour désigner la symétrie comme un facteur important de la perception. L'axe vertical médian de la symétrie bilatérale apparaît comme un stimulus très fort et va jusqu'à provoquer des «préférences» dans la perception qui inhiberaient d'autres phénomènes potentiels : la symétrie axiale pourrait alors agir comme un obstacle perceptif.

D'autre part, le rôle accordé à la perception est reconnu dans le processus de conceptualisation (Merri, 2007 ; Vergnaud, 1991, 1996). Vergnaud place au cœur du processus de conceptualisation la notion de représentation du réel dont l'étude est révélée à travers l'activité de l'élève. Ainsi, la symétrie axiale étant un facteur important de la perception, la symétrie axiale peut donc être un facteur important de la conceptualisation opérant lors d'un apprentissage.

Nous décrivons dans le paragraphe suivant le cadre d'analyse retenu pour notre étude et qui permet de problématiser notre recherche sur les effets de la symétrie axiale sur l'apprentissage et l'enseignement de la symétrie centrale.

Les paradigmes géométriques et les Espaces de Travail Géométrique

Nous faisons référence au cadre de Houdement et Kuzniak (2006) des paradigmes géométriques et des Espaces de Travail Géométrique (ETG) afin de prendre en compte la spécificité géométrique du travail de l'élève et son rapport avec la réalité. En particulier nous allons montrer que la notion d'ETG apparaît comme un espace privilégié pour analyser la conceptualisation en jeu.

Houdement et Kuzniak (2006, pp. 180-181) ont catégorisé ces modes de pensées selon des paradigmes dits géométriques, qui se caractérisent par leur rapport à la réalité :

- La Géométrie I (GI), « la géométrie naturelle » concerne des raisonnements géométriques qui reposent sur la perception et la manipulation d'objets matériels issus de l'espace local et réel : « l'intuition, l'expérience et le raisonnement déductif s'exercent sur des objets matériels, ou matérialisés, grâce à la perception ou la mise en œuvre d'expériences mécaniques réelles comme le pliage ».
- La Géométrie II (GII), la « géométrie axiomatique naturelle » concerne des raisonnements géométriques dits hypothético-déductifs mettant en jeu des modèles mathématiques prédéfinis dans un système tel que celui de la géométrie euclidienne : « la source de validation se fonde sur les lois hypothético-déductives dans un système axiomatique […] la relation avec la réalité subsiste encore dans la mesure où elle s'est constituée pour organiser les connaissances géométriques issues de problèmes spatiaux ».

• Nous éludons dans notre étude la Géométrie III (GIII), la « géométrie axiomatique formaliste », car elle ne concerne ni le collège ni la réalité quotidienne.

Disons-le tout de suite : il n'existe pas de frontière nette entre ces deux paradigmes. En effet, il existe des modèles de référence implicites dans GI et l'espace réel et local peut également être sollicité dans GII. On parlera plutôt de basculements de paradigmes, ou de jeu GI-GII, car on peut effectivement passer d'un paradigme à un autre au cours d'une même situation. Cependant, on suppose qu'il existe généralement un paradigme dominant et que ce jeu GI-GII est alors en partie régulé par le contrat didactique (Brousseau, 1998): ce jeu entre les deux paradigmes dépend du niveau scolaire considéré et des relations maître-élève qui ont eu lieu durant l'enseignement qui précède l'activité observée.

S'ajoute à cette catégorisation en termes de paradigmes la notion d'Espace de Travail Géométrique (ETG) pour décrire plus finement le travail de l'élève que la simple distinction GI-GII ne permet pas, en général, d'appréhender. L'organisation des trois composants constitue l'Espace de Travail Géométrique (ETG) (schéma 2).

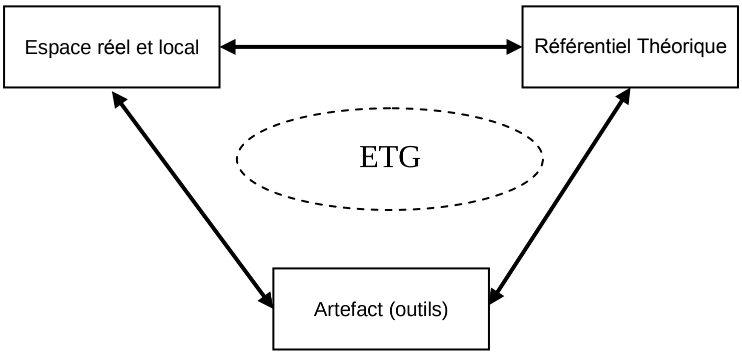


Schéma 1. Définition de l'Espace de Travail Géométrique.

L' «espace réel et local» désigne l'ensemble des objets matérialisés ; le pôle « artefacts » rassemble les outils et instruments mobilisés par le géomètre (compas, règle graduée, pliage, etc.) et la composante dite «référentiel théorique» définit le système logico-déductif dans lequel s'organisent le(s) modèles(s) théoriques et les objets mathématiques en jeu. L'organisation de ces composants dépend du but à atteindre et de l'institution dans laquelle le géomètre s'inscrit. L'adaptation de ces composants conduit à considérer différents types d'ETG : nous nous intéresserons plus particulièrement à l'ETG personnel des élèves qui est celui que les élèves s'approprient en fonction de leurs connaissances mathématiques, de leurs capacités cognitives et du contrat en jeu (Houdement et Kuzniak, 2006, pp. 188-189).

Le plan cognitif de l'ETG : apport des travaux de Duval

À chacun des pôles de l'ETG se superpose une composante cognitive propre à l'activité géométrique de l'élève. Nous référons aux travaux de Duval qui portent sur le rôle de la visualisation dans le développement du raisonnement en géométrie. Duval (2005) décrit le développement des processus cognitifs articulant la visualisation et le langage en géométrie. Il définit le processus de déconstruction dimensionnelle des formes dans la visualisation non-iconique qu'il distingue de la déconstruction instrumentale et de la déconstruction heuristique (pour faire apparaître des formes particulières). Il situe en particulier le processus de déconstruction dimensionnelle au cœur du processus de visualisation et du développement du raisonnement en géométrie. Il décrit les différents processus de déconstruction en fonction des dimensions en jeu : « l'activité de construction de figures, presque toujours des configurations de formes 2D/2D ou 3D/2D, repose sur leur déconstruction en tracés 1D/2D et 0D/2D (le dénominateur correspond à la prise en compte de l'espace dans lequel les représentations sont produites) ». Duval distingue ainsi différents types de traitement de la figure (Duval, 2005, pp. 21-23) :

- la décomposition méréologique implique un découpage de la figure de départ en sous-figures de même dimension (2D) ;
- la déconstruction instrumentale implique l'utilisation d'outils (règle graduée, compas, etc.) dans le but de reconstruire la figure;
- la déconstruction dimensionnelle implique une déconstruction en unités figurales de dimension inférieure dans le but de mettre en relation ces unités figurales (1D ou 0D).

D'après l'auteur, la déconstruction dimensionnelle se fait nécessairement en articulation avec une activité discursive car « la seule énonciation des propriétés caractéristiques d'un parallélogramme par exemple implique que l'on déconstruise dimensionnellement une figure simple 2D/2D en une configuration d'unités figurales 1D ou 0D/2D. Car les propriétés d'un objet 2D/2D […] sont des relations entre des objets représentés par des unités figurales 1D/2D […] ou 0D/2D ».

Ces différents types de traitement de la figure impliquent une organisation différente des composants de l'ETG. On peut remarquer que la décomposition méréologique suppose un raisonnement basé principalement sur la perception à travers des découpages et superposition de la figure : le pôle « espace réel et local » de l'ETG sera alors le pôle dominant. La déconstruction instrumentale implique elle, plutôt la mise en œuvre d'instruments dans un but de construction : dans ce cas, le pôle « artefact » sera le pôle dominant. Enfin, la déconstruction dimensionnelle permet de mettre en évidence des relations entre unités figurales de dimensions inférieures et d'en déduire des propriétés géométriques associées à un raisonnement déductif relaté dans un discours axiomatique : le pôle « référentiel théorique » est alors le pôle dominant. Cette typologie est à la base de notre cadre d'analyse car on peut finalement admettre de manière plus générale qu'à chaque traitement de la figure est associée une organisation différente de l'ETG qui peut entraîner une polarisation différente de l'un de ses composants, et donc nous permettre de caractériser l'ETG personnel des élèves et celui mis en place par le professeur.

Liens entre le plan des composants et le plan cognitif

Dans cette description de l'ETG, on retrouve l'idée d'adaptation des différents composants de l'ETG : ces derniers s'adaptent au statut du géomètre et au but que celui-ci s'est fixé. Nous supposons que l'articulation des différents composants de l'ETG fait écho à ce que Vergnaud entend par conceptualisation et nous considérons l'ETG comme un environnement privilégié pour décrire le processus de conceptualisation opérant lors de l'apprentissage (scolaire) : « […] ce que j'entends par conceptualisation, c'est l'identification des objets du monde, de leurs propriétés, relations et transformations, que cette identification résulte d'une perception directe ou quasi-directe, ou d'une construction » (Vergnaud, 2007, p. 342). La notion d'invariant opératoire (Vergnaud, 1991, 1994) permet alors de décrire l'articulation entre les composants de l'ETG sur le plan cognitif :

- les concepts-en-acte sont les éléments ou notions qui peuvent être pertinents ou non pertinents, qui sont mis en jeu et se révèlent naturellement lors de l'activité mathématique observée. Leur fonction est d'abord une fonction de sélection, pour retenir de la situation présentée ce qui est nécessaire et suffisant à l'atteinte du but.
- les théorèmes-en-acte sont les propositions tenues pour vraies sur le réel, qui sont vraies ou fausses, mises en place instinctivement, et suite aux interactions avec le milieu.

L'articulation de ces derniers éléments théoriques permet de faire le lien entre les composants de l'ETG qui décrivent l'activité mathématique observée (l'espace réel et local, les artefacts, le référentiel théorique) et le plan cognitif associé (perception, construction, raisonnement déductif) : cela permet de mettre en évidence l'adéquation entre ces deux plans notamment à travers des théorèmes-en-acte qui peuvent parfois être erronés. En effet la notion d'invariant opératoire (dont les concept-en-acte et théorème-en-acte) permet d'atteindre les concepts mathématiques mobilisés à travers le comportement humain au cours de l'activité géométrique observée. Les différents types de traitement des figures, au sens de Duval, permettent de décrire l'articulation entre les composants de l'ETG et donc de décrire la conceptualisation en jeu.

Les questions de recherche concernant les effets de la symétrie sur l'apprentissage des élèves

Le premier axe de recherche explicité dans cet article concerne les effets de la symétrie axiale sur la conceptualisation et l'apprentissage de la symétrie centrale. Plus particulièrement : peut-on relier les difficultés des élèves lors de l'apprentissage de la symétrie centrale à celles liées à la symétrie axiale ?

D'après le cadre d'analyse décrit précédemment, on se propose de déterminer le rôle de la symétrie axiale dans le processus de conceptualisation opérant lors de l'apprentissage de la symétrie centrale en spécifiant son rôle. Par suite, on se demande si la symétrie axiale pilote l'organisation et les inférences des invariants opératoires dans la construction de l'ETG personnel de l'élève. Quel type de déconstruction favorise-t-elle ?

- une décomposition méréologique (découpage selon des axes de symétrie potentiels) ?
- une déconstruction instrumentale (à travers par exemple le schème routinier de la médiatrice) ?
- une déconstruction dimensionnelle (à travers la mise en œuvre de propriétés métriques) ?

UN QUESTIONNAIRE À DES ÉLÈVES D'UNE CLASSE DE 5^{e} (12-13 ANS)

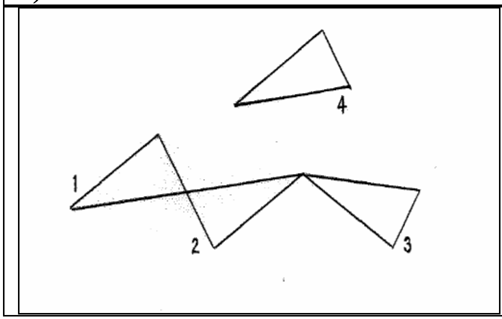
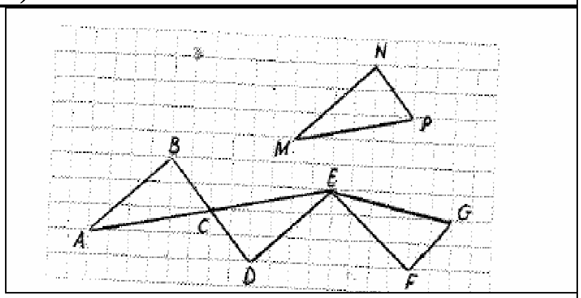
Dans le but de répondre à ces questions, nous avons élaboré un questionnaire composé d'exercices mettant en jeu la symétrie axiale et la symétrie centrale. Étant donné les raisons pour lesquelles nous avons choisi d'observer le concept de symétrie (du fait de ses liens étroits avec la réalité et de son importance dans l'enseignement français) et étant donné que nous analyserons le traitement de la figure (en fonction notamment de la dimension des objets en jeu), le choix des exercices s'est porté sur des types de situations familières à ce niveau d'enseignement, que l'on retrouve le plus souvent dans les manuels scolaires (situation de reconnaissance, de construction, etc.) et qui accordent une place importante à la perception et aux changements de dimensions. Ces exercices ont été proposés environ un mois après que l'enseignement de la symétrie centrale a été achevé afin d'observer le processus de conceptualisation et l'apprentissage qui résulte de l'enseignement visé à ce niveau scolaire. Le traitement de la figure dépend de la tâche donnée et du contrat en jeu et nous proposons donc, dans la suite de cet article, une analyse *a priori* des situations de reconnaissance des symétries axiale et centrale afin d'éclairer les raisons de nos choix.

Analyse a priori *des tâches proposées dans le questionnaire*

La première situation [2] analysée dans cet article (tableau 1) a été proposée en deux temps : les élèves de 5^{e} ont d'abord réalisé la situation dite de «Perception Ponctuelle» (PP) puis huit jours plus tard, celle dite de «Perception Globale» (PG). La tâche consiste à reconnaître une symétrie centrale à la question a. et une symétrie axiale à la question b.

Tableau 1

La situation triangle (perception globale et perception ponctuelle)

Perception Globale (PG)	***Perception Ponctuelle (PP)***
Dans chacun des cas suivants, dites quelle(s) symétrie(s) transforme(nt) : a) 1→2 b) 2→3	Dans chacun des cas suivants, dites quelle(s) symétrie(s) transforme(nt) : a) ABC en EDC b) CDE en GFE
	

Nous faisons l’hypothèse que la prise d’informations par l’élève va changer selon la perception suggérée par la tâche et donc appeler *a priori* un traitement différent. L’énoncé des tâches ne propose ni de dénomination des objets représentés ni des hypothèses qui fixeraient des propriétés mathématiques, ce qui est cohérent avec notre volonté d’accorder à la perception une part importante dans le choix des stratégies des élèves. Aussi, un élève peut proposer des propriétés mathématiques relevées sur le graphique (par la perception ou la mesure) mais il peut également déclarer que les côtés AC et CE par exemple n’ont pas la même mesure si l’on tient compte des marges d’erreurs (Duval, 1994). Étant donné que l’élève se satisfait de constatations perspectives, on suppose que l’organisation des composants de l’ETG va être différente dans les deux tâches. La tâche PG s’inscrirait plutôt dans un paradigme GI car il n’y a aucun repère de mesure donné et l’élève peut se satisfaire de superpositions convaincantes : le demi-tour dans le cas de la symétrie centrale et le pliage dans le cas de la symétrie axiale. La tâche PP, elle, s’inscrirait plutôt dans GII car les points sont nommés et le quadrillage est un repère suggéré fort, même si ce n’est finalement pas tout à fait GII car aucune propriété mathématique n’est donnée en amont. Le passage à une discrétisation du plan (et donc à une déconstruction dimensionnelle [3]) permet de mettre en évidence des propriétés caractéristiques (égalités de mesures ou encore des propriétés affines euclidiennes comme l’orthogonalité) et d’en déduire les symétries en jeu : il s’agit alors d’un raisonnement déductif et c’est en ce sens que nous situons plutôt l’ETG dans GII. Cependant, un élève peut tout aussi bien rester à un niveau d’appréhension globale des figures tout en nommant les points et justifier sa réponse car le triangle ABC devient le triangle EDC par demi-tour ; l’ordre des points donné dans l’énoncé n’est alors pas pris en compte : {A,B,C}→{E,D,C} ou {A,B,C}→{C,D,E}.

Il est possible que les élèves construisent des stratégies basées sur la reconnaissance de figures de référence qui renvoient aux figures de référence stipulées dans les programmes contemporains à notre recherche (le cerf-volant est « la » figure de référence de la symétrie axiale en 6^e, le parallélogramme est « la » figure de référence de la symétrie centrale en 5^e).

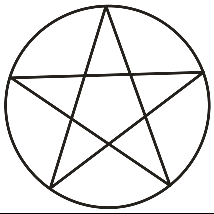
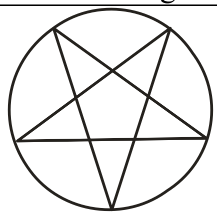
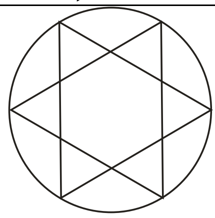
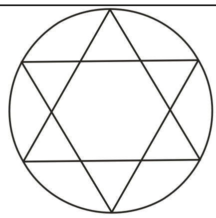
Précisons que cette situation met en jeu de nombreuses autres variables didactiques qui peuvent avoir un effet sur les stratégies de reconnaissance mobilisées par l'élève : l'ambiguïté des mesures tendant à ne pas tenir compte de l'orientation de la figure et à considérer les triangles comme des triangles isocèles, l'effet de déplacement rotatoire dans le plan de la question b. du fait de la position des figures et du point commun entre les deux triangles ou encore l'orientation de la figure ou l'ordre des points donnés dans l'énoncé peuvent n'être pas pris en compte (F peut être interprété comme l'image de C et G comme l'image de D et l'élève reconnaît alors, à tort, une symétrie centrale).

L'intérêt de cette situation réside dans le fait qu'il s'agit d'une tâche simple et qu'elle pourrait être tout à fait rencontrée dans une séance de classe ordinaire, comme exercice routinier de reconnaissance des transformations ; chaque cas de figure n'envisage qu'une seule transformation. Quelque soit la stratégie décrite précédemment (et la dimension des objets mathématiques en jeu) la perception de la figure a une part importante en amont et dans les deux cas, quelles que soient les variables didactiques, la symétrie axiale apparaît comme une solution envisageable. Il aurait été nécessaire de proposer également des situations intermédiaires où l'on aurait joué sur certaines de ces variables didactiques (par exemple, éviter les points communs entre les figures ou éviter un axe de symétrie vertical, etc.) mais il est difficile d'isoler chacune de ces variables du fait de la complexité même du champ disciplinaire qu'est la géométrie car comme le souligne Vergnaud : « il est bien difficile de construire des situations et d'élaborer des exercices relevant de la géométrie des figures sans toucher en même temps la question des positions relatives et la question des transformations. De même, il n'y a pas de géométrie des transformations sans figures et sans positions » (Vergnaud, 2001, p. 15). L'analyse de cette situation sous ces contraintes-ci indiquera déjà des éléments intéressants sur le rôle joué par la symétrie axiale dans l'organisation de l'ETG personnel de l'élève et la dimension des objets mathématiques en jeu.

La deuxième situation (tableau 2) analysée dans cet article porte sur des figures globalement invariantes dont la parité des axes de symétrie est un facteur non négligeable sur la manière de les percevoir et de reconnaître des transformations.

Tableau 2

La situation rosace (ordre pair et impair)

Rosace d'ordre 5		***Rosace d'ordre 6***	
orientation 1	***orientation 2***	***orientation 1***	***orientation 2***
Indiquez la (les) symétrie(s) qui transforme(nt) la rosace en elle-même. Justifiez votre réponse. Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.			
			

La position de la figure et les angles saillants sont également des variables didactiques pouvant influencer la réponse des élèves. Nous avons choisi de proposer cette situation afin de tester l'hypothèse *a priori* de ce que nous appelons le « phénomène d'exclusivité des transformations ». En effet, on suppose qu'une organisation des programmes qui consiste à enseigner une nouvelle isométrie à chaque niveau scolaire entraîne un effet de contrat amenant à considérer de manière isolée chacune d'elle : l'élève pourrait se polariser par exemple sur la transformation nouvelle qu'on vient de lui enseigner alors que plusieurs transformations peuvent laisser invariantes une même figure. Qu'en est-il en 5^{e} ? La symétrie axiale est supposée être la transformation la plus familière pour tous les élèves mais la symétrie centrale vient de leur être enseignée.

Les stratégies de reconnaissance des symétries possibles peuvent être là aussi de natures différentes et impliquer une organisation différente de l'ETG en fonction de la dimension des éléments de la figure pris en compte : certaines stratégies peuvent impliquer un découpage de la figure en sous-figures superposables (décomposition méréologique 2D/2D) ; la symétrie centrale peut être reconnue par demi-tour et la symétrie axiale reconnue par pliage (en testant les diagonales comme des axes de symétrie potentiels). D'autres stratégies impliquent une décomposition des figures point par point : la symétrie centrale peut être reconnue, par exemple, uniquement en identifiant le centre du cercle circonscrit comme un centre de symétrie. De plus, le point d'intersection des axes de symétrie ou des diagonales peut être interprété comme un centre de symétrie. La symétrie axiale et la symétrie centrale peuvent également être toutes deux reconnues en vérifiant l'équidistance d'un couple {point ; image} par rapport à un (des) axe(s) potentiel(s) de symétrie ou le centre supposé de symétrie, avec l'aide d'instruments : règle graduée, équerre ou compas. Des propriétés caractéristiques (conservation de la forme ou des dimensions, orthogonalité, milieu, etc.) sont alors formulées pour en déduire l'une ou l'autre des symétries.

L'intérêt de cette situation réside dans l'analyse *a posteriori* du traitement de la figure selon la transformation reconnue dans le but de déterminer le rôle de la symétrie axiale dans l'organisation de l'ETG personnel de ces élèves ainsi que la transformation la plus prégnante.

Les deux prochains points constituent les principaux résultats obtenus à partir de l'analyse de ces situations. Ils mettent en évidence que le comportement attendu des élèves de 5^{e} révèle un ETG encore très instable notamment à travers le traitement de la figure et l'organisation nettement influencée par les invariants opératoires de la symétrie axiale. Nous décrirons comment la proximité entre les invariants opératoires des deux symétries est source d'amalgames chez les élèves et comment le passage à la déconstruction dimensionnelle peut se révéler finalement artificiel à ce niveau scolaire.

Une grande proximité entre les invariants opératoires des deux symétries

Nous avons choisi de mener une étude qualitative des 54 copies recueillies : les conduites des élèves sont inférées à partir de leurs productions écrites. Seulement 40% [4] des élèves de la classe reconnaissent sans erreur la symétrie centrale, à la question a, et la symétrie axiale, à la question b, et ce quel que soit le changement de perception suggéré. Cependant, environ 60% des élèves de cette même classe proposent au moins une fois une réponse erronée (ou pas de réponse) à la question a. et/ou à la question b. On ne relève pas de comportements similaires entre les élèves qui sont dans l'erreur, c'est-à-dire que les erreurs semblent diversifiées : par exemple les élèves qui ne reconnaissent jamais la symétrie axiale à la question b. peuvent avoir des comportements très différents à la question a. Les profils des élèves semblent donc éclatés et ceci annonce un ETG personnel des élèves de 5^{e} encore instable.

De manière générale, les erreurs viennent d'un « amalgame de différentes grandeurs par l'intermédiaire d'un objet support » (Artigue, 1990) qui a été déjà remarqué par Cassan (1997) : il y a une confusion de ces deux notions, ici la symétrie axiale et la symétrie centrale, dans des tâches qui peuvent les mettre toutes deux en jeu.

Nous proposons dans le paragraphe suivant de décrire les différents aspects de ces amalgames à partir des procédures des élèves. Nous analysons pour certains invariants opératoires et leurs représentations externes (au sens de Vergnaud) qui sont les aspects visuels de la conceptualisation en jeu, c'est-à-dire le langage et les gestes associés, les symboles, les outils mis en œuvre.

Certains élèves reconnaissent davantage de symétries axiales erronées dans le cas PG et davantage de symétries centrales erronées dans le cas PP (il serait nécessaire d'étudier des situations intermédiaires où l'axe n'est pas vertical et les figures n'ont pas de point commun pour généraliser un tel résultat). Nous justifions ces confusions par la trop grande proximité des invariants opératoires entre ces deux transformations à ce niveau scolaire (bien que l'une soit un déplacement et l'autre un antidéplacement). En effet le schème de bidécomposabilité est principalement mobilisé par les élèves quelle que soit la situation. Ce schème consiste à décomposer la figure, ou la configuration, proposée en deux parties superposables : « si on replie la feuille sur les traits, il y a les mêmes figures de part et d'autre » ou encore « car l'axe coupe l'image en son milieu ». C'est l'orientation des figures qui peut, dans le cas de la situation des triangles, différencier la symétrie centrale de la symétrie axiale. Pour cela, certains élèves vont jusqu'à tracer un « faux-axe » de symétrie voire même les images obtenues comme s'il s'agissait d'une symétrie axiale pour vérifier et montrer empiriquement qu'il ne s'agit pas d'une symétrie axiale ; une appréhension globale des figures suffit alors. Le concept en acte d'involution permet pour l'élève de contrôler la symétrie axiale mais il n'est pas mobilisé pour vérifier la symétrie centrale : des flèches rotatives simples dans le cas de la symétrie centrale ou des flèches rotatives doubles dans le cas de la symétrie axiale signifient le déplacement dans le plan pour l'une et le pliage en 3D pour l'autre.

Un grand nombre d'élèves de 5^{e} entremêlent les registres de langue (registre courant et registre mathématique) quelle que soit la perception suggérée par la tâche. Cependant, dans la situation dite PG, les élèves relatent davantage une géométrie dynamique : « la figure est reportée », « par demi-tour », « les figures se superposent », « les côtés ne partent pas dans des sens opposés, comme dans un miroir », « si l'on fait pivoter la figure vers le bas, on verra que ce sont les mêmes figures ». Le traitement de la figure dans le discours rend compte d'un point de vue global (2D). On discerne une organisation de la pensée sous la forme d'un programme de construction implicite (avec l'emploi du pronom « on ») et même structuré par des connecteurs logiques : « car si on trace un trait, on plie la figure… ». Dans la situation dite PP, le discours des élèves se rapproche du cadre de la géométrie affine euclidienne : « C milieu de [AE] et (AB) parallèle à (ED) » ; voire même dans le cadre fonctionnel : « [BC] →[DC] » mais précisons que le formalisme des fonctions reste tout de même rare. On ne relève presque aucun codage de propriétés : ni de codage d'équidistance, ni celui d'égalité de mesure, ni celui de perpendicularité quelle que soit la perception suggérée ; aucun argument métrique n'est révélé graphiquement. Un petit nombre d'élèves nomment tout de même les points fixes (centre de symétrie et points de l'axe de symétrie).

Des résultats similaires sont obtenus à partir de l'analyse de la situation rosace qui montre cependant qu'une majorité d'élèves de 5^{e} reconnaissent exclusivement des symétries axiales sur une même figure globalement invariante (55,5%). Ils sont seulement 30% à reconnaître une symétrie centrale et strictement plus de deux symétries axiales (quel que soit l'ordre de la rotation) et tout de même 26% à ne reconnaître qu'une symétrie centrale (alors qu'elle n'existe pas dans le cas impair). Ainsi, de nombreux élèves de cette classe de 5^{e} reconnaissent une symétrie centrale dans les cas où la rosace est d'ordre 5 et sont donc dans l'erreur : ils adoptent le théorème-en-acte que l'on pourrait formuler de la manière suivante *si tous les axes de symétrie d'une figure se coupent en un même point, ce point est un centre de symétrie*. Il s'agit également d'une forme d' « amalgame » entre le centre et le milieu : les élèves tracent et nomment les cinq diagonales qui sont aussi axes de symétrie et nomment O ce point d'intersection situé au centre de la figure. La construction de ces axes de symétrie concourants conduit les élèves à la conception familière erronée qui consiste à considérer le centre d'une figure comme son centre de symétrie. Citons en guise d'exemple un extrait d'une copie : « la symétrie axiale qui coupe l'étoile en 10 […] et la symétrie centrale dont le centre est au milieu de l'étoile à l'endroit où se rejoignent les axes ». La stratégie de reconnaissance de la symétrie axiale repose sur un contrôle perceptif : l'élève réalise une décomposition méréologique de la figure car il la décompose en sous-figures (superposables) de même dimension alors que la stratégie de reconnaissance de la symétrie centrale repose sur sa constructibilité à travers notamment la construction des axes de symétrie (stratégie donc très différente de celles reconnues dans la situation des triangles).

La déconstruction dimensionnelle : un effet de contrat en 5^{e} ?

Les différents comportements identifiés précédemment lors de l'analyse de notre questionnaire rendent compte des interprétations variées que peut faire un élève de la tâche proposée. On remarque que certaines adaptations rendent compte d'effets de contrat. En effet, le « formalisme » des réponses (registre formel de la géométrie affine) peut être cohérent avec la réponse visée mais peut aussi donner lieu à des justifications exhaustives (sans être erronées). Par exemple, un élève donne un maximum d'arguments dans la situation triangle dite PP alors qu'il semblait plus concis dans le cas dit PG ; d'autres élèves changent carrément leurs réponses dans la situation dite PP pour des réponses erronées qu'ils justifient par des propositions du type « car dans la symétrie centrale, l'image d'une figure est une figure de même longueur et c'est le cas ici » ou bien « dans la symétrie centrale, l'image d'un segment est un segment de même longueur » ; ces mêmes élèves proposaient pourtant des réponses correctes (justifiées par superposition) dans le cas dit PG. Exhiber de telles propriétés est cohérent lorsqu'il s'agit effectivement de reconnaître une symétrie centrale, mais l'élève l'emploie également lorsqu'il s'agit de reconnaître une symétrie axiale. D'après les signifiants dont on dispose, on peut raisonnablement penser qu'il s'agit d'un effet de contrat mais il serait nécessaire de proposer des tâches intermédiaires pour généraliser un tel résultat (par exemple des situations sans points communs entre les figures). On se rend également compte dans ces exemples non isolés que les représentations externes graphiques ne sont pas toujours cohérentes avec celles formulées dans le discours associé. Le traitement de la figure semble parfois différent entre le discours et l'action. Par exemple, un élève annonce des propriétés institutionnelles de conservation pour justifier la symétrie centrale, or deux « pseudo-axes de symétrie » sont tracés avec des flèches rotatives : on suppose alors que le raisonnement pourrait être plutôt du type *si ce n'est pas une symétrie axiale, c'est une symétrie centrale*, raisonnement validé par le concept-en-acte d'orientation car l'une est antidéplacement et l'autre un déplacement ; ce type de raisonnement n'est pas alors celui qui est retranscrit dans le discours associé. Cela rappelle le caractère artificiel, dénoncé par Bkouche des propriétés de conservation que les programmes scolaires mettent en exergue : la déconstruction dimensionnelle visible dans ce type de discours ne serait finalement qu'un effet de contrat.

Dans le cas de la situation des rosaces, l'étude du discours des élèves qui sont dans l'erreur renvoie à ce même effet de contrat dans lequel on reconnaît une forme institutionnelle correcte mais inappropriée dans le cas où la rotation est d'ordre impair : « si on choisit trois points caractéristiques et que l'on cherche leurs images, si on relie les points avec leur symétrique respectif par des droites, le centre d'intersection des trois droites et le centre de symétrie ». De plus la concaténation des termes « l'axe de symétrie centrale » rend compte de cet amalgame de notions lors du processus de conceptualisation ; ce terme est alors justifié dans le discours associé par la propriété : « dans la symétrie centrale, l'image d'un segment est un segment de même longueur ».

Ainsi, quelle que soit la situation analysée certains élèves semblent invoquer des arguments qui impliquent une déconstruction dimensionnelle mais le passage vers une géométrie de type GII est incohérent avec la réponse proposée (qui est souvent erronée) : le passage vers GII semble donc artificiel.

Étant donné ces résultats concernant l'apprentissage de la symétrie centrale, on peut se demander quels sont les effets de l'enseignement reçu par ces élèves : comment l'élève construit-il son ETG personnel à partir de celui proposé en classe ? Comment s'adaptent ses connaissances anciennes (relatives à la symétrie axiale) ? Quels sont les liens entretenus avec la symétrie axiale lors de l'enseignement de la symétrie centrale ?

Le deuxième axe de recherche développé dans cet article a pour but d'expliciter l'organisation de l'ETG personnel des élèves décrit précédemment au regard de l'enseignement reçu par ces mêmes élèves ; pour cela nous avons analysé les observations effectuées lors de l'enseignement de la symétrie centrale reçu par cette même classe de 5^{e}.

LES EFFETS DE L'ENSEIGNEMENT

Notre méthodologie d'analyse se concentre sur l'analyse des malentendus entre le professeur et les élèves. En effet, nous supposons qu'un certain nombre de malentendus sont à prévoir du fait de la nature ambivalente du concept de symétrie (à la fois un concept issu de notre vie quotidienne et un concept mathématique enseigné dans l'institution scolaire) et également du fait d'employer un même mot pour désigner deux transformations fondamentalement différentes (l'une est un déplacement et l'autre un antidéplacement). Pour analyser ces malentendus, nous faisons référence à la notion d'« incident » au sens de Roditi (2003, p. 192) qui est définie comme « une manifestation publique (au sens où elle s'intègre à la dynamique de la classe) d'un élève ou d'un groupe, en relation avec l'enseignement, et en décalage négatif par rapport à l'ensemble des réponses correctes envisageables compte tenu de la tâche proposée. »

Les principaux résultats sont alors développés dans les points suivants : nous décrirons comment la proximité entre les deux symétries est entretenue en classe et peut être à l'origine des amalgames rencontrés précédemment ; puis nous décrirons comment les différents passages d'une dimension à une autre (3D, 2D, 1D et 0D) peuvent être à la source de malentendus.

Une proximité entre les deux « symétries » entretenue en classe

D'après les observations de classe réalisées lors de l'enseignement de la symétrie centrale en 5e, on constate que le professeur entretient un lien fort entre la symétrie axiale et la symétrie centrale dès la première séance ; ce lien est déjà immédiat par leur dénomination respective. En effet, la première activité proposée en classe a pour but d'introduire la symétrie centrale comme la composée de deux symétries axiales dont l'un des axes est vertical et l'autre horizontal (O est leur point d'intersection). Dans un premier temps, les élèves construisent le symétrique d'une figure F1 par rapport à un axe vertical (la figure image est F2) puis par rapport à un axe horizontal (la figure image est F3). Les élèves doivent ensuite trouver un moyen d'obtenir F3 sans passer par F2. On relève alors différentes manières de plier chez les élèves : certains tentent de pointer leur doigt sur le point O avec le calque en dessous puis le retournent en diagonale, comme une page, d'autres tentent de plier par rapport à la bissectrice de l'angle droit formé par les axes orthogonaux. Ces différentes méthodes de pliage résultent d'une adaptation du schème disponible par l'élève (en 3D), celui du pliage par rapport à un axe de symétrie, qui n'est donc pas valide ici. Ces schèmes sont alors évacués oralement par le professeur, ou invalidés de manière pragmatique.

C'est finalement la stratégie du demi-tour que le professeur valide (toujours lors de cette première séance) mais on relève un malentendu résistant à propos du signifié du centre de symétrie. En effet, l'élève n'a, à ce stade de l'enseignement, que la symétrie axiale comme connaissance disponible (concernant les transformations du plan), il s'adapte alors à la nouvelle situation et évoque un axe de symétrie au lieu du centre de symétrie. Ceci n'est pourtant pas erroné car on tourne autour d'un axe normal au plan pour passer de F1 à F3. Nous proposons ci-dessous l'extrait de l'incident révélant ce malentendu :

> « E : Ben moi je calque sur la figure F1, après avec le compas, je mets le compas sur le point O et sur le calque.
> P : Ah ! La pointe du compas ? Donc qu'est-ce que tu fais avec <u>ce point O</u> ?
> E : <u>C'est l'axe</u>.
> P : C'est l'axe ? Le point O c'est l'axe... C'est un point !
> E : Oui.
> P : Un axe c'est une droite. Et qu'est-ce que tu fais avec ce point avec ton compas dessus ? … Il dit qu'il met le compas sur le point O et après ?
> E: Après il met le compas sur le point O et il tourne la feuille.
> P : Vous avez entendu ? […] Elle calque son schéma, elle bloque, elle reproduit le point O, elle met le calque comme ça. Et qu'est-ce que tu fais ? Quel geste a-t-elle fait ? Elle a tourné son papier calque. [P mime le tout]. Voila elle calque F1 et elle tourne naturellement. Elle a tourné autour de quoi ?
> E : Autour de O.

P : Autour du point O qui lui est… complètement…
E: L'axe de symétrie.
E(s) (puis P) : C'est le centre ! »

L'ETG personnel de l'élève se situe toujours en 3D (comme pour le pliage lorsqu'il s'agit de la symétrie axiale) alors que l'ETG attendu par le professeur se situe seulement dans le plan (2D). Le professeur s'attend à ce que l'élève dise que le point O « est fixe » ou « est le centre de symétrie ». Or pour l'élève le centre de symétrie est effectivement l'élément fixe mais matérialisé par la branche du compas autour de laquelle tourne la figure, et qui permet la superposition recherchée des figures. L'élève procède alors par analogie avec la symétrie axiale pour caractériser cette invariance : pour lui *le centre de symétrie est donc l'axe de symétrie*. Ce type d'incident est important car il révèle des problèmes cognitifs relatifs à la dimension des objets géométriques en jeu, liés à l'analogie de la symétrie axiale.

Le passage délicat vers la déconstruction dimensionnelle dans l'enseignement

Dans la classe observée, la validation et l'institutionnalisation des propriétés de conservation viennent après la définition du symétrique d'un point et les schèmes de construction associés. Le professeur use du terme de symétrie, commun aux deux transformations, pour évoquer la propriété de conservation des mesures (caractéristique de toutes les isométries). Le professeur rappelle les propriétés de conservation associées à la symétrie axiale afin que ses élèves s'en inspirent pour les reformuler dans le cas de la symétrie centrale. On suppose alors que le rappel de la symétrie axiale évoque pour l'élève le principe de conservation des mesures par le principe de superposition. À force d'effets Topaze [5], l'élève formule alors la propriété qui résonne finalement comme un dicton dont le sens originel a été évacué : « Dans la symétrie centrale, l'image d'un segment est un segment de même longueur ». Nous proposons l'extrait suivant qui illustre ce phénomène :

« P : Donc si vous devez expliquer à quelqu'un ce qu'il se passe lorsqu'on trace le symétrique d'un segment. Qu'est-ce que vous diriez ? Que diriez-vous de l'image d'un segment ? En vous souvenant de ce qu'on a décrit un petit peu sur la symétrie axiale. Vous avez dû apprendre un certain nombre de propriétés. L'image d'un segment est un segment… vous avez tous fait la symétrie axiale. Qu'est-ce qu'on pourrait dire, là ? L'image du segment [AB] est le segment [A'B']. On vient de vérifier que ces deux segments ont exactement la même longueur. Qu'est-ce qu'on pourrait dire ?
E : Qu'ils sont à égale distance du point O.
P : Qu'ils sont à égale distance du point O...
E': Que dans la symétrie, ben que l'image d'un segment est un segment…
P : …est un segment… [En attente de la suite, P monte le ton de la dernière syllabe]
E [reprend] : De même longueur.

> P : De même longueur [P baisse le ton], très bien. C'est ça la propriété. C'est ça qu'il va falloir apprendre par cœur. Dans la symétrie centrale, l'image d'un segment est un segment de même longueur. »

On retrouve ainsi une difficulté cognitive qui relève du « hiatus dimensionnel », décrit par Duval (2005, pp. 45-46) : la construction des objets est instrumentalisée et passe d'abord par le tracé d'éléments de dimension 0D (les points), puis les éléments de dimension 1D (les droites et les segments) jusqu'à la figure visée de dimension 2. La tâche proposée ici par le professeur (qui est de faire émerger des propriétés de conservation à partir de la construction du symétrique d'une figure) emprunte un chemin inverse : on décompose la figure obtenue après construction (donc de dimension 2D ou 1D) en éléments de dimension inférieure 1D et 0D dans le but de faire apparaître des relations pertinentes entre ces éléments. Et d'après Duval, c'est une « révolution cognitive » qui ne va pas de soi et peut donc conduire à certains incidents didactiques.

CONCLUSION: MISE EN REGARD ENTRE L'ETG PERSONNEL DES ÉLÈVES ET L'ENSEIGNEMENT REÇU PAR CES ÉLÈVES

Un ETG personnel des élèves encore très instable ancré dans GI

L'ETG personnel des élèves de 5^{e} comporte finalement, quelle que soit la tâche, un pôle dominant « espace local et réel » avec une interaction forte avec le pôle « artefact » qui rend compte d'amalgames dus à la proximité entre les invariants opératoires de la symétrie axiale et de la symétrie centrale. Le pôle « artefact » semble particulièrement sollicité lors de la mise en œuvre des propriétés de la symétrie centrale dans la situation des rosaces ; les symétries axiales sont massivement reconnues par la mise en œuvre d'une décomposition méréologique tandis que la symétrie centrale est mis en évidence par sa constructibilité (et donc une déconstruction instrumentale). On constate que l'ETG personnel des élèves de 5^{e} est encore très ancré dans GI mais laisse transparaître une tentative de passage vers GII, un passage encore instable voire artificiel (notamment à travers un passage maladroit vers la déconstruction dimensionnelle). On assiste ainsi à la négociation entre GI et GII qui se poursuit tout au long du collège et dont la thèse (Bulf, 2008) rend compte jusqu'en 3^{e} à travers notamment une méthodologie de recherche similaire appliquée en classe de 3^{e}, prenant en compte la rotation.

Une distance entre l'ETG standard mis en place par le professeur et celui que les élèves s'approprient finalement

L'ETG standard mis en place par le professeur en classe de 5^{e} laisse à la charge des élèves les changements implicites de dimension des objets mathématiques en jeu. On pointe en particulier le passage délicat vers la déconstruction dimensionnelle : surviennent des malentendus résistants concernant la dimension dans laquelle s'inscrit l'ETG (notamment lors de la première séance consacrée à la symétrie centrale ou lors de l'institutionnalisation des propriétés de conservation).

On suppose que ces malentendus génèrent alors une dénaturation du projet d'enseignement et sont à l'origine par la suite de certains amalgames pointés dans les résultats du questionnaire. En effet, l'ETG mis en place par le professeur semble se concentrer sur le pôle « référentiel théorique » tandis que celui des élèves se polarise plutôt sur les deux autres composantes (« l'espace réel et local », et « artefacts ») : on en déduit l'existence d'une distance entre l'ETG standard du professeur et celui que les élèves s'approprient finalement. On suppose alors que le concept de symétrie axiale et son enseignement peut être en partie à l'origine de cette distance car il se révèle finalement être un obstacle didactique en 5^{e}, au sens de Brousseau, car l'ETG standard du professeur entretient une proximité entre les deux symétries qui est source d'incidents didactiques et créent par la suite des amalgames lors du processus de conceptualisation.

De plus, l'existence de cette distance rend compte de la négociation délicate qui s'opère lors d'un changement de paradigmes qui ne va donc pas de soi : l'ETG mis en place par le professeur semble déjà ancré dans GII alors que celui des élèves doit encore s'adapter car celui-ci s'inscrit au départ (et y est fortement ancré) dans GI. Il est alors intéressant de remarquer que cette distance ne tend pas à se réduire à la fin du collège (en 3^{e}), et qu'au contraire, elle est maintenue par cette négociation permanente et délicate de changement de paradigmes entre GI et GII.

NOTES

[1] Les programmes contemporains à notre recherche sont consultables à partir des Bulletins Officiels (BO) suivants (http://www.education.gouv.fr) : BO n°5 Hors-Série du 9 septembre 2004 (programme de 6^{e}), BO n°5 Hors-Série du 25 août 2005 (programme de 5^{e}), BO n°10 Hors-Série du 15 octobre 1998 (programme 3^{e}). Les programmes de l'école primaire sont consultables à partir du BO n°3 Hors-Série du 19 juin 2008 (programme de l'école primaire et maternelle) et les nouveaux programmes de 2009 du collège sont alors consultables à partir du BO spécial n°6 du 28 Août 2009.

[2] La notion de « situation » est employée ici au sens de Vergnaud, c'est-à-dire, dans le sens de tâche à résoudre sous des contraintes et un but donnés, et non dans le sens donné dans la Théorie des Situations Didactiques de Brousseau.

[3] Notons que d'après Duval, la déconstruction dimensionnelle est nécessaire pour passer à un raisonnement déductif mais précisons qu'elle n'est pas suffisante : l'élève peut très bien passer à une déconstruction dimensionnelle sans basculer dans un paradigme GII.

[4] Les résultats sont donnés en pourcentage dans le but de donner un éclairage rapide de l'importance des effectifs par rapport à la classe, et n'ont en aucun cas une valeur statistique étant donné l'échantillon étudié.

[5] En référence à la célèbre dictée donnée par Topaze, on désigne par effet Topaze (Brousseau, 1998, pp.52-53) un phénomène d'enseignement dans lequel l'élève finit par donner la réponse attendue après une négociation à la baisse des connaissances visées, qui peut aboutir à une disparition complète.

BIBLIOGRAPHIE

Artigue, M. (1990). Épistémologie et Didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (2/3), 241-286.

Bkouche, R. (1992). De la géométrie et des transformations, *Repères IREM*, 4, 135-158.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*, Grenoble : la Pensée Sauvage.

Bulf, C. (2008). *Étude des effets de la symétrie axiale sur la conceptualisation des isométries planes et sur la nature du travail géométrique au collège*, thèse de doctorat, Université Paris Diderot, Irem Paris 7.

Cassan, S. (1997). Centre de symétrie d'une figure, comparaisons de productions d'élèves de CM2 et de cinquième, *Petit x*, 46, 55-84.

Duval, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique, *Repères IREM*, 17, 121-138.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de didactique et sciences cognitives*, 10, 5-53.

Giaquinto, M. (2005). *From symmetry perception to basic geometry*, in: Mancosu, P., Jorgensen, K. F., & Pederson, S. A., *Visualization, explanation and reasoning styles in mathematics*, Springer, 31-55.

Grenier, D. (1990). Construction et étude d'un processus d'enseignement de la symétrie orthogonale : éléments d'analyse du fonctionnement de la théorie des situations, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(1), 5-60.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 11, 175-193.

Jahn, A. P. (1998). *Des transformations des figures aux transformations ponctuelles : étude d'une séquence d'enseignement avec Cri-Géomètre – Relations entre aspects géométriques et fonctionnels en classe de Seconde*, thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble I.

Merri, M. (dir.) *Activité humaine et conceptualisation, questions à Gérard Vergnaud*, Toulouse : Presses universitaires du Mirail.

Palmer, S. E. & Hemenway, K. (1978). Orientation and Symmetry: Effects of Multiple, Rotational, and Near Symmetries, *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 4 (4), 691-702.

Palmer, S. E. (1985). The role of symmetry in shape perception, *Acta Psychologica*, 59, 67-90.

Rock, I. (2001). *La perception*, Paris – Bruxelles : De Boeck Université.

Roditi, E. (2003). Régularité et Variabilité des pratiques ordinaires d'enseignement. Le cas de la multiplication des nombres décimaux en sixième, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23(2), 183-216.

Tavignot, P. (1993). Construction et étude d'un processus d'enseignement de la symétrie orthogonale : éléments d'analyse du fonctionnement de la théorie des situations, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 13(3), 257-294.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (2/3), 133-170.

Vergnaud, G. (1996). *Au fond de l'action, la conceptualisation*, in : Barbier, G.-M. (dir.) *Savoirs théoriques et savoirs d'action*, Paris : PUF, 275-292.

Vergnaud, G. (2007). in: Merri, M. (dir.) *Activité Humaine et Conceptualisation, questions à Gérard Vergnaud*, Toulouse : Presses Universitaires du Mirail.

UN ESSAI SUR LA NATURE DU TRAVAIL GÉOMÉTRIQUE EN FIN DE LA SCOLARITÉ OBLIGATOIRE EN FRANCE

Alain Kuzniak

Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris Diderot, France

RÉSUMÉ

Le propos de cette contribution est de définir la nature du travail géométrique mis en place en France à la fin de la scolarité obligatoire. Pour conduire cette étude, les notions de paradigmes géométriques et d'Espaces de Travail Géométrique (ETG) ont été utilisées. L'ETG de référence est explicité à partir d'une analyse des programmes officiels de 1996 et 2005 puis les ETG idoines sont étudiés en confrontant les manuels scolaires et des observations en classe. De cette analyse, il résulte que les ETG sont de plus en plus morcelés et oscillent de manière confuse entre les paradigmes géométriques. Cet émiettement de l'ETG est en grande partie dû au fait que le travail géométrique n'est plus piloté par des préoccupations épistémologiques mais par une adéquation au niveau des élèves.

INTRODUCTION

Dans cet article, nous allons étudier la nature du travail géométrique mis en place en fin de scolarité obligatoire en France (classes de quatrième, troisième et seconde). Ces niveaux de scolarité correspondent à la fin de l'enseignement obligatoire et aussi à la fin d'un programme d'enseignement unique pour la quasi-totalité des élèves. La troisième est la classe terminale du Collège dit *unique* car il est censé accueillir tous les élèves en leur fixant les mêmes objectifs d'apprentissage. La classe de seconde est la première classe du Lycée et elle constitue une classe de détermination qui permet aux élèves de choisir ensuite des sections plus spécialisées dans certains domaines. Ainsi pour la majorité des élèves, c'est dans cette classe qu'ils reçoivent pour la dernière fois un enseignement de la géométrie. Pour conduire notre étude, nous utiliserons les notions d'espace de travail géométriques (ETG) et de paradigmes géométriques [1] (Houdement & Kuzniak, 2003, 2006). Nous ne revenons pas ici sur les trois paradigmes géométriques, notés Géométrie I, II et III et présentés par Bulf (2009) dans cet ouvrage, mais nous allons apporter quelques précisions sur la notion de travail géométrique et d'ETG pour poser dans ce cadre les questions que nous souhaitons étudier. Nous étudierons ensuite la nature de l'ETG actuel en nous basant sur diverses études effectuées au sein du Laboratoire André Revuz.

DE LA PENSÉE MATHÉMATIQUE AU TRAVAIL MATHÉMATIQUE

La pensée mathématique

La prise en compte de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques comme thème de recherche est relativement récente puisqu'on peut faire remonter sa naissance à la fin des années soixante. La réforme des mathématiques modernes ou plus exactement les ratés de cette réforme ont suscité en partie ce mouvement de recherche en faisant apparaître les difficultés diverses rencontrées par les élèves et les professeurs. À partir de là, il devenait nécessaire de ne plus penser seulement en terme de contenus mais aussi en termes d'éducation et d'apprentissage.

Très fortement influencée par les idées des psychologues, notamment Piaget, une vision constructiviste de l'enseignement s'est alors imposée : il s'agissait de comprendre et d'accompagner la construction de la pensée mathématique. Cette notion de pensée mathématique réfère au type de pensée que doit déployer un individu quand il fait des mathématiques (Piaget, 1950). Dans le cas de la géométrie, vue comme une science déductive dont le domaine d'appui est l'espace, les thèmes privilégiés dans les études internationales sur l'enseignement de la géométrie sont en rapport avec :

1. le développement des capacités spatiales ;
2. la relation entre monde réel et géométrie à travers le processus de géométrisation ;
3. l'instrumentation et le rôle des artefacts comme les logiciels ;
4. le raisonnement et son développement.

Quelle place peut alors avoir le didacticien des mathématiques dans ce paysage longtemps dominé par l'approche psychologique ? Il nous semble qu'elle réside dans l'observation précise de l'activité des actants (professeurs et élèves) dans le cadre scolaire. Ceci nous conduit à privilégier les approches qui étudient non plus la pensée mathématique en tant que telle mais plutôt sa part visible dans l'activité du mathématicien.

L'activité du mathématicien

Des auteurs comme Giaquinto (2005) distinguent plusieurs phases dans l'activité du mathématicien comme la découverte, l'explication, la justification et les applications. Dans chacune de ces phases, des moments permettent de passer de l'élaboration de ce savoir à sa diffusion la plus large dans la communauté des mathématiciens et au-delà de toucher les professeurs et les étudiants. Ainsi pour le travail relatif à la découverte, il faut faire la découverte, puis la présenter et aussi s'approprier d'autres découvertes.

Cette présentation de l'activité du mathématicien prend en compte le fait que son travail s'intègre dans une communauté d'êtres humains et qu'un acte fort qui permet le développement des mathématiques est l'acte de compréhension, non seulement par l'auteur de la découverte mais aussi par les membres de la communauté. Le mathématicien Thurston (1998) exprime un point de vue semblable en définissant mathématiques comme le plus petit sujet tel que :

- Les mathématiques incluent les nombres entiers et la géométrie du plan et des solides.
- Les mathématiques sont ce que les mathématiciens étudient.
- Les mathématiciens sont ces êtres humains qui font avancer la compréhension humaine des mathématiques.

L'intérêt de cette conception est de bien montrer la dépendance des mathématiques de l'activité des mathématiciens, ces êtres humains spécialisés dans l'avancée de la compréhension de ce domaine.

Le travail mathématique : une œuvre et un style

Une autre façon d'envisager la question du travail mathématique consiste à se concentrer sur l'œuvre élaborée par les mathématiciens et à définir le travail mathématique à partir de la conception généralisée du travail donnée par Granger (1963, 1998). Pour lui, le « travail » consiste à mettre en forme un contenu initial non structuré. Ce contenu amorphe n'est pas nécessairement matériel et le travail mathématique illustre de manière exemplaire cette vision généralisée du travail. Dans ce cas le contenu n'est pas tangible et ne devient visible que grâce au travail de mise en forme effectué par le mathématicien. Ceci permet de dépasser l'opposition traditionnelle et caricaturale entre le travail intellectuel qui ne porterait que sur des formes et le travail manuel orienté vers un produit concret et pratique.

Cette mise en relation de la forme et du contenu passe par un travail rhétorique nécessaire sur la forme mais non vide de sens et qui doit permettre d'établir un contact codifié entre le lecteur et l'auteur des propositions. Granger appelle style cette manière de présenter la connaissance rationnelle en la soumettant à des normes codifiées qui participent de la mise en place du sens des objets dans un sens déterminé. Ces normes s'appliquent notamment au langage et aux symboles utilisés dans l'activité mathématique. Cette manière de faire, ce style, contribue à fixer l'orientation du travail et la résolution des problèmes. Elle permet d'exclure certaines pratiques en limitant les possibilités du lecteur ou de l'étudiant.

LA NOTION D'ESPACE DE TRAVAIL GÉOMÉTRIQUE

Vers une définition

Nous avons appelé espace de travail géométrique (ETG) un univers organisé pour le travail du géomètre. Cet espace comporte deux niveaux, l'un que nous appellerons le plan des composantes et l'autre le plan cognitif.

Le premier se structure avec la mise réseau des trois composantes suivantes :

- un espace réel et local avec un ensemble d'objets de nature sensible ;
- un ensemble d'artefacts qui seront les outils et instruments utilisés par le géomètre ;
- un référentiel théorique constitué de propriétés.

Mais un espace de travail de la géométrie ne prend tout son sens que grâce à ses utilisateurs. Les composantes seules ne suffisent pas à le définir car le sens de l'espace de travail va dépendre de la fonction que son concepteur et ses utilisateurs lui attribuent Une première réorganisation de ces différentes composantes sera plutôt de nature épistémologique et son orientation sera guidée par les paradigmes géométriques mis en jeu. Le paradigme de référence permet d'interpréter les contenus des composantes et de les structurer dans le sens souhaité.

La fonction de l'ETG peut évoluer en relation avec le contexte social et économique qui influe sur les institutions éducatives dans lesquelles la géométrie est enseignée. Elle va aussi dépendre fortement d'une dimension cognitive ce qui nous a conduit à introduire un deuxième plan dit cognitif et structuré autour des trois processus suivants : visualisation, construction et preuve (Duval 1995).

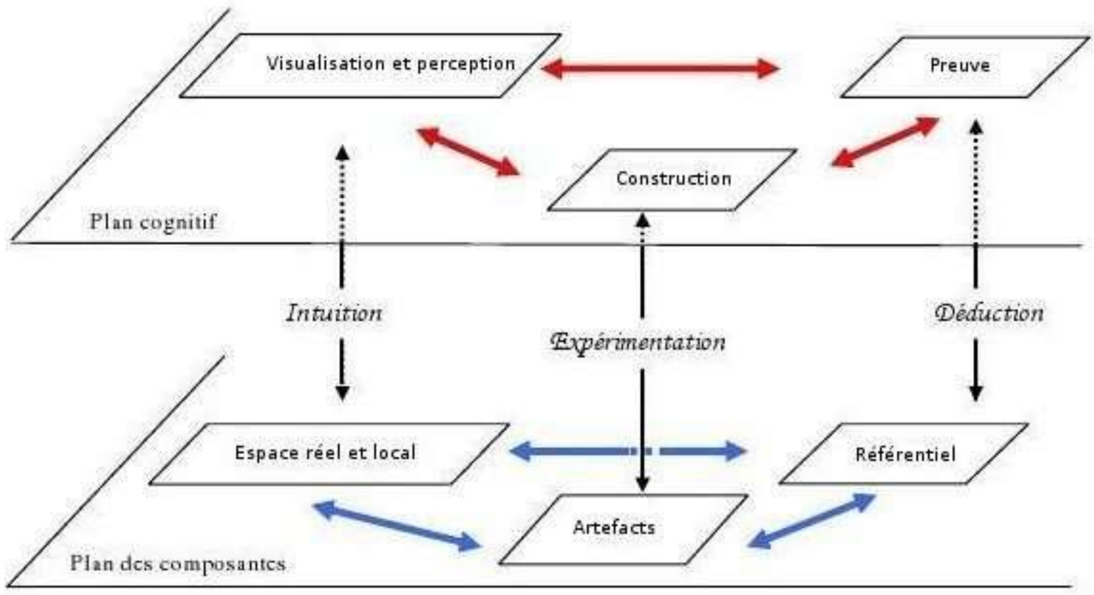


Figure 1. L'espace de travail géométrique

Le travail géométrique que nous décrivons s'inscrit dans le cadre des institutions scolaires. Ceci conduit à distinguer un certain nombre de niveaux d'ETG qui ne sont pas sans relations avec le processus de la transposition didactique.

L'ETG de référence : la réorganisation attendue

Le fait pour une communauté d'individus de s'accorder sur un paradigme donné pour formuler des problèmes et organiser leurs solutions en privilégiant certains outils ou certaines manières de pensée, débouche sur ce que nous conviendrons d'appeler l'ETG de référence. Pour connaître cet ETG, il faudra dégager ces manières de faire et de voir en décrivant notamment le style du travail géométrique avec ses règles de discours, de traitement et de présentation. Cet ETG dépendra du paradigme privilégié : Géométrie I, II ou III.

L'ETG idoine ou la question de la didactisation

Une fois posées les bases de la géométrie enseignée, il reste à se préoccuper de son enseignement effectif qui nécessite l'existence d'un espace propice à l'enseignement réussi de la géométrie souhaitée. Cette réussite dépendra naturellement aussi des utilisateurs de cet espace mis en forme pour eux : les élèves bien sûr mais aussi les professeurs chargés de le mettre en place dans les classes.

L'ETG de référence doit être aménagé et organisé pour devenir un espace de travail effectif et idoine dans une institution donnée avec une fonction définie. Les experts concepteurs de la réorganisation didactique des diverses composantes de l'espace de travail, jouent un rôle semblable à celui d'un architecte qui conçoit un espace de travail pour des utilisateurs potentiels futurs. Ils aménagent un ETG qui peut être idoine parce qu'il respecte les intentions et le cahier des charges de l'institution demandeuse mais qui peut n'être pas adéquat à sa fonction attendue en se révélant non performant lors de sa mise en œuvre dans les classes.

Les ETG personnels

Les ETG idoines doivent être investis par des élèves qui se les approprient avec leurs connaissances et leur fonctionnement cognitif particuliers. Ces espaces de travail sont ce que nous appelons des ETG personnels. Ils se constituent de manière progressive et peuvent n'être parfois pas opérationnels. La notion d'ETG personnel ne concerne pas les seuls élèves et étudiants, mais elle concerne aussi les professeurs. En effet, ces derniers doivent avoir une conscience claire de la nature des espaces de travail géométrique idoines afin d'éviter les malentendus résultant d'une gestion floue et implicite du jeu entre les paradigmes.

ESPACES DE TRAVAIL ET PARADIGMES GÉOMÉTRIQUES

Une diversité d'articulations

Dans la pratique, les ETG, notamment les ETG personnels et idoines, ne reposent pas sur un seul paradigme mais plutôt sur une articulation entre les paradigmes et celle-ci peut être maîtrisée ou non. Nous parlerons, dans le premier cas d'un jeu entre paradigmes et, dans le second, d'un glissement pour insister sur l'aspect non maîtrisé et subi de la relation entre les paradigmes. Plusieurs articulations possibles sont envisageables que l'étude des différents niveaux d'ETG permet d'affiner dans une institution donnée. Voici quelques exemples que nous avons déjà rencontrés.

La Géométrie I assumée (GI / gII) [2]. Le but de cette géométrie est l'étude des configurations du monde réel avec la possibilité encouragée de mesurer sur les figures pour établir une conclusion. D'autre part, un certain nombre de théorèmes, éventuellement démontrables en GII, sont utilisés comme des outils techniques évitant la mesure ou facilitant le calcul.

La Géométrie II assumée (GII / gI) dont le modèle de référence est la géométrie d'Euclide. L'horizon axiomatique est clairement assumé et l'organisation logique de l'ensemble du référentiel est recherchée. Cependant cette géométrie n'est pas aveugle et les propriétés s'appuient pour leur genèse sur l'intuition de l'espace.

La Géométrie II morcelée (GII / GI). Comme la précédente, cette géométrie prend appui sur un ensemble de propriétés et d'expériences issues de la Géométrie I. Mais ici, il s'agit plutôt de développer des îlots hypothético-déductifs autour des propriétés de quelques figures de base. Ces îlots sont fondés sur une propriété souvent validée par la mesure ou l'observation.

La Géométrie III subreptice (GII / GIII). Dans ce cas, l'enseignement de la Géométrie II est orienté, voire piloté, par des nécessités intra mathématiques qui ne s'expliquent que par un horizon caché de type GIII. Elle est ainsi organisée de manière subreptice (Robert, 2003) par des considérations affines et euclidiennes ou par la structuration, toujours cachée, des propriétés autour de la notion de groupes de transformation.

La Géométrie III assumée (GIII / gI, gII). En privilégiant d'autres cadres et registres dans le travail géométrique (cadre vectoriel, analytique, numérique), l'enseignement de cette géométrie réalise sciemment l'évacuation de la géométrie élémentaire discursive et figurale que l'on rencontre déjà, de manière progressive, dans les autres approches de la géométrie enseignée.

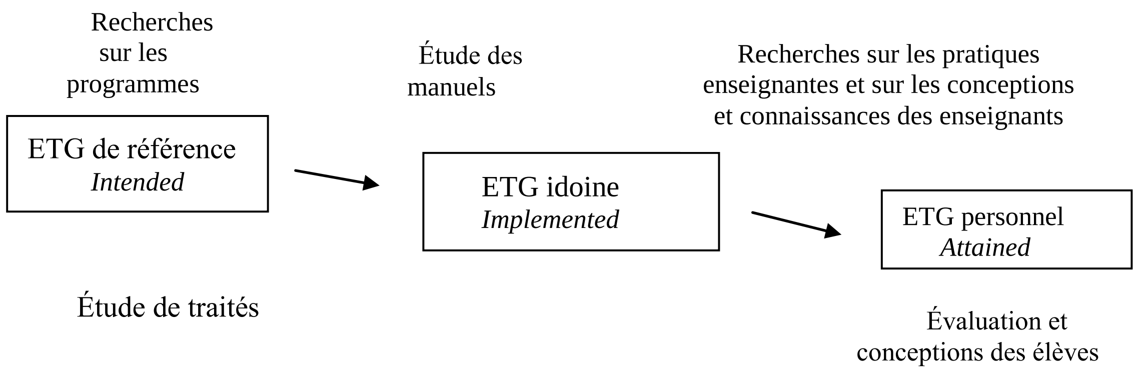
Nos questions et un cadre pour l'étude

Nous pouvons enfin exprimer les deux questions que nous souhaitons éclaircir dans cet article.

Question 1 : Quel est l'ETG de référence actuellement proposé en fin de scolarité obligatoire en France ?
Nous faisons l'hypothèse qu'il s'agit d'une Géométrie II (GII/GI) morcelée.

Question 2 : Quelle est la caractéristique de l'ETG idoine correspondant ?
Nous souhaitons étudier plus particulièrement les conséquences du morcellement annoncé de l'ETG de référence sur ces ETG et aussi sur les ETG personnels des élèves.

Notre recherche des caractéristiques du travail géométrique s'accorde bien avec l'approche systémique privilégiée par l'étude internationale TIMSS. Dans cette étude les auteurs se concentrent sur différents types de curricula qu'ils appellent *Intended, Implemented* et *Attained* (Kaiser, 1994 et Kuzniak, 2005). Cette étude utilise aussi une



méthodologie (SMSO) qui précise le type d'étude à effectuer pour analyser ces différents niveaux et dont nous ne retenons que quelques éléments adaptés à la question de la géométrie et en phase avec notre travail.

Figure 2. L'organisation et l'étude des différents ETG

SUR L'ETG DE RÉFÉRENCE EN FIN DE SCOLARITÉ OBLIGATOIRE EN FRANCE

Dans les périodes de stabilité éducative, l'accès à l'ETG de référence est facilité par ce qu'on peut appeler des « traités » qui regroupent et organisent le corpus de référence. Pendant très longtemps, les éléments d'Euclide ont joué ce rôle et fixé la nature du travail géométrique. Ce n'est plus le cas aujourd'hui dans notre enseignement et le dernier « traité » qui visait à asseoir le référentiel théorique de la géométrie enseignée au collège en France fut celui de Cousin-Fauconnet (1995) et son impact resta très limité.

Depuis, il semble que seuls les textes des programmes officiels et les documents qui les accompagnent remplissent ce rôle de référence. Les mathématiciens sont pratiquement absents du processus d'élaboration de ces programmes qui est à la charge de l'institution scolaire et des enseignants. D'autre part, nous verrons que l'absence d'organisation du référentiel théorique en un traité explique l'impression d'espace de travail morcelé que nous attribuerons à l'ETG de référence actuel. Les programmes qui nous préoccupent sont ceux publiés en 1996 et 2005.

En collège, les deux versions du programme, l'ancienne comme la nouvelle, insistent sur la notion d'activité mathématique définie comme le fait d'« identifier un problème, conjecturer un résultat en expérimentant sur des exemples, bâtir une argumentation et contrôler le résultat obtenu. ». Quant à la géométrie, il lui est assigné le rôle de « passer de l'identification perceptive de figures et de configurations à leur caractérisation par des propriétés ». Dans les documents d'accompagnement du programme, il est précisé que les propriétés à démontrer « se voient » sur la figure mais que les élèves doivent comprendre la nécessité de démontrer ce résultat.

En utilisant la terminologie des paradigmes, nous pouvons affirmer que les programmes mettent au cœur de leurs préoccupations la question de la transition entre GI et GII. Cependant, le passage d'une géométrie à l'autre n'est pas établi une fois pour toute à un moment du curriculum, et la transition semble sans cesse remise à l'œuvre sur chaque nouvelle notion. Celles-ci sont introduites et structurées autour d'objets géométriques : les triangles, les cercles, les polygones dont il est rappelé qu'ils sont aussi des objets de l'espace sensible. Les programmes s'appuient aussi sur les transformations géométriques comme élément structurant. Dans les programmes de 1996, une transformation nouvelle (symétrie orthogonale, symétrie centrale, translation et rotation) est introduite dans chaque classe du collège. Dans ceux de 2005, la translation et la rotation disparaissent, ce qui a pour effet de diminuer la structuration globale du référentiel théorique qui apparaît de plus en plus en plus comme le résultat d'une juxtaposition d'objets.

Cette indécision sur le choix définitif du paradigme se manifeste particulièrement par l'importance accordée dans chaque classe aux études expérimentales afin de conjecturer des propriétés. Les constructions (à l'aide d'instruments, de l'outil informatique ou de schémas à main levée) jouent un rôle clé dans ce processus. Mais dans le même temps, la notion de socle est imposée par l'institution scolaire pour définir dans toutes les matières un niveau minimal exigible pour tous les élèves. Or dans le cas des constructions en mathématiques, aucune démonstration n'est exigible et les connaissances de base se limitent à la maîtrise de techniques utiles pour faire des constructions. À la fin du collège, un élève doit savoir construire et maîtriser les techniques sans forcément connaître les justifications théoriques issues de la Géométrie II. À travers cette reconnaissance exclusive des techniques, on devine déjà le glissement possible vers des ETG idoines et personnels guidés par un horizon GI avec l'accent mis sur la perception et les artefacts. Nous appellerons Géométrie I subreptice ce glissement non assumé vers la Géométrie I.

A contrario, toujours dans les programmes de 2005, l'apprentissage de la démonstration fait l'objet d'une attention plus soutenue. Un paragraphe intitulé « une initiation progressive à la démonstration » explique que « la question de la preuve a une place centrale en mathématiques ». La pratique de la preuve permet progressivement d'aboutir à la mise en place de la démonstration. Cette distinction entre preuve et démonstration est une nouveauté dans l'enseignement français. La preuve dépend du contexte social et elle peut revêtir différentes formes tandis que la démonstration est fondamentalement une forme rhétorique caractéristique du style mathématique. Cette distinction entre preuve et démonstration conduit les auteurs à différencier deux phases dans le processus d'apprentissage de la démonstration : le raisonnement et sa mise en forme. Dans le même temps les auteurs insistent sur la phase de découverte. Cela ne va pas être sans conséquence sur le travail mis en place dans les classes car elle suggère l'introduction dans l'ETG idoine de deux contextes différents : celui de la découverte et celui de la justification.

L'utilisation de logiciels de géométrie dynamique est aussi présentée comme un outil facilitateur pour ne plus considérer la figure uniquement sous sa forme iconique. En donnant la possibilité de déplacer les points et de multiplier les expériences, les logiciels sont censés favoriser l'accès à la notion générale de figure qu'il faut distinguer du dessin. Dans cette optique optimiste, l'utilisation de logiciels de géométrie dynamique favorise les conjectures et le raisonnement pour valider cette conjecture.

Mais, l'ambiguïté de l'espace de travail idoine est à nouveau accentué par le rôle attribué aux logiciels qui peuvent, dans certains cas, se substituer à une démonstration lorsque les élèves ne sont pas en mesure de produire les raisonnements correspondants en Géométrie II. Ainsi, non seulement les logiciels peuvent être à la source de conjectures mais ils peuvent être aussi les garants de la validité d'un résultat. Il y a là un glissement implicite et potentiel vers un ETG où l'expérience et les artefacts guident le travail.

En classe de seconde, dans une autre institution, le Lycée, la volonté annoncée des auteurs des programmes est de stabiliser le travail géométrique développé au Collège. Les nouvelles notions introduites (triangles isométriques et semblables) ne doivent pas l'être pour elle-mêmes mais pour utiliser les outils de preuve développés au Collège. La démarche de travail préconisée reste très proche de celle mise en œuvre au Collège. Le point de départ de la géométrie doit être intuitif et expérimental et s'appuyer sur la perception. Les logiciels restent une source de conjectures de propriétés. Celles-ci doivent être ensuite prouvées puis démontrées.

Pour conclure cette partie, nous parlerons d'une Géométrie (GI /GII) mixte car si les auteurs insistent sur la différence entre démonstration et preuves expérimentales, les deux cohabitent sans cesse et semblent également légitimes. De plus, le référentiel théorique morcelé ne permet pas d'assumer complètement le passage à la Géométrie II par manque d'horizon axiomatique. Seuls des îlots argumentatifs isolés sont développés et ils doivent à chaque fois pouvoir être étayés par des expériences. Cette évanescence d'un référentiel théorique organisé n'est pas une nouveauté car tel était déjà le cas dans la période de réaction au tout axiomatique des mathématiques modernes. Ce qui est nouveau, c'est, d'une part, le statut ambigu donné aux instruments et aux constructions et, d'autre part, la multiplicité des îlots démonstratifs dépendants de configurations mal reliées les unes aux autres. Cette multiplicité contribue à la déstructuration du référentiel théorique.

ETG IDOINES D'AUJOURD'HUI

Nous allons maintenant tenter d'apprécier les effets de cette Géométrie mixte et morcelée sur les ETG idoines que nous avons rencontrés. Autrement dit, comment cette évolution de l'espace de référence se répercute-t-elle dans les manuels et dans la pratique des enseignants ?

La description des ETG idoines est bien plus complexe que celle des ETG de référence car il est rare de pouvoir disposer d'une source unique pour définir ces ETG. Pour comprendre leur fonctionnement, il faut recourir à différentes sources parfois contradictoires comme les cours des professeurs et les manuels, très nombreux en France où il n'existe pas de manuels accrédités par le ministère. De plus, il n'est souvent possible d'aborder les ETG que de manière locale à partir de l'étude d'un thème voire d'un type de taches prescrites. Pour notre approche des ETG idoines, en plus de nos observations personnelles en classe, nous nous appuierons sur divers travaux réalisés au sein du Laboratoire André Revuz et qui donnent des informations issues des manuels mais aussi de la pratique en classe.

Pour décrire le processus de didactisation qui s'opère dans les classes et déterminer l'ETG idoine, nous présenterons successivement :

- une étude de la notion d'angle inscrit en classe de troisième qui nous donnera une première caractérisation de l'ETG idoine standard ;
- le glissement introduit dans cet ETG par l'emploi massif des logiciels de géométrie à partir des années 2000 ;
- la rupture entre l'ETG idoine standard et une grande partie des élèves engagés dans un autre type de travail géométrique que celui attendu par le professeur.

ETG idoine standard

Nous allons observer le traitement de la notion d'angle inscrit en troisième. Cette notion nous semble pertinente car elle se place en fin du cursus de Collège et elle force les professeurs et les manuels à l'intégrer dans un ETG déjà en place et dont nous pouvons ainsi voir certaines des caractéristiques stables.

Deux propriétés figurent dans les programmes de troisième qui correspondent aux propriétés énoncées par Euclide dans son livre III : la propriété 20 portant sur la relation entre l'angle au centre et un angle inscrit interceptant le même angle et la propriété 21 sur l'égalité des angles inscrits qui en est une conséquence. Dans l'enseignement classique de la géométrie, la démonstration de la propriété 20 s'appuie sur l'étude de trois cas de figure, elle est donc relativement complexe, par contre il est facile de déduire la propriété 21 de la propriété 20.

Dans les programmes de 1996, les notions d'angles inscrit et au centre sont incluses dans une partie intitulée « rotation, angles, polygones réguliers ». Le programme précise « comparer un angle inscrit et l'angle au centre qui intercepte le même arc ». Il est dit que cette comparaison permet celle de deux angles interceptant le même arc. Dans les nouveaux programmes, ces notions ne font plus partie des notions exigibles et elles se rattachent aux figures planes dans le mouvement de déstructuration que nous avons signalé (les rotations ne font plus partie du programme).

La mise en place de la notion d’angle inscrit en classe a fait l’objet d’un travail de Roditi (2004) qui a pu montrer à cette occasion la proximité de l’approche développée par un enseignant avec la proposition du manuel que nous avons retenu pour notre étude. Le manuel choisi (Triangle 2003) a été développé par des auteurs proches de l’Institut National de la Recherche Pédagogique qui assument de manière cohérente et constante un même parti pris pour introduire les notions mathématiques. Roditi signale que ce manuel est bien connu pour être bien adapté au niveau des élèves. Ainsi dans ce cas, la mise en place de l'ETG idoine est déjà très influencée par le niveau des élèves.

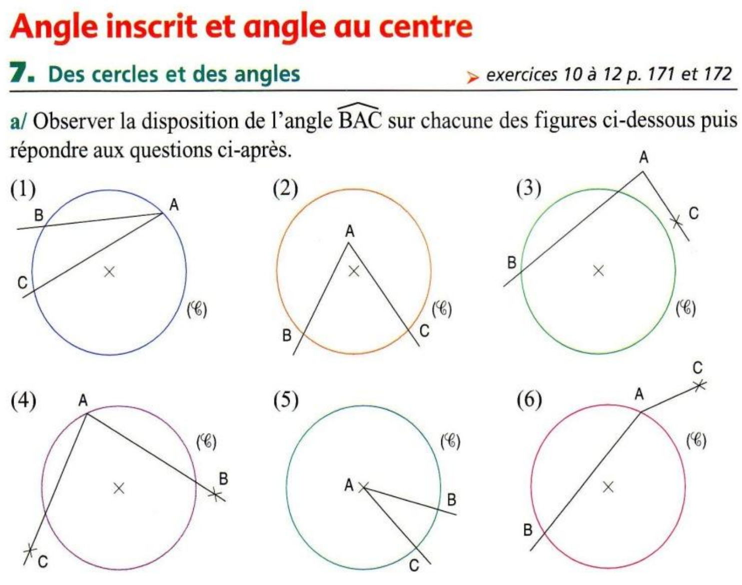
Une activité (p. 165) présente la notion d’angle inscrit et d’angle au centre. Les élèves sont invités à dégager ces deux notions à partir de deux questions portant sur un corpus de six figures (voir ci-dessous).

Sur les figures (1) et (4), on dit que l’angle BAC est un angle inscrit dans le cercle ($\mathcal{C}$). Ce n’est pas le cas de BAC sur les autres figures.

En déduire quelles semblent être les caractéristiques d’un angle inscrit.

Sur la figure (5), on dit que l’angle BAC est un angle au centre. Ce n’est pas le cas de BAC sur les autres figures.

En déduire quelles semblent être les caractéristiques d’un angle au centre


Angle inscrit et angle au centre

7. Des cercles et des angles ➤ exercices 10 à 12 p. 171 et 172

a/ Observer la disposition de l’angle $\widehat{BAC}$ sur chacune des figures ci-dessous puis répondre aux questions ci-après.

Des définitions sont proposées un peu plus loin par les auteurs du livre. Elles sont alors associées à des images prototypiques des notions d’angle aigu et d’angle au centre dans un lien très fort de l’image colorée et codée avec le texte.

Ainsi le mode de production des définitions est nettement de type empirique. En s’appuyant sur quelques dessins particuliers, il fonctionne aussi d’une manière abductive qui va se trouver confirmée dans l’activité suivante (p. 165) consacrée aux deux propriétés fondamentales des angles inscrits et au centre.

> « Tracer un cercle de centre O. Tracer plusieurs angles inscrits dans un cercle qui interceptent un même arc BC. Mesurer ces angles.
> Quelle conjecture peut-on faire ?
> Tracer un cercle de centre O. Tracer un angle au centre et un angle inscrit de ce cercle qui interceptent le même arc BC. Mesurer ces deux angles. Recommencer plusieurs fois ces tracés.
> Quelle conjecture peut-on faire ? »

Cette activité permet de dégager les deux propriétés, écrites en rouge dans le livre et présentées dans un ordre différent de l'ordre euclidien.

> « Si deux angles inscrits dans un cercle interceptent le même arc alors ils ont la même mesure.
> Si, dans un cercle, un angle au centre et un angle inscrit interceptent le même arc alors la mesure de l’angle au centre est le double de la mesure de l’angle inscrit. »

Les deux propriétés ont été dégagées à partir de très peu d’exemples. On peut réellement parler ici d’abduction puisque l’idée de propriété étant présente, il suffit de l’extraire à partir de petit nombre d’exemples qui la vérifient. L’usage de la mesure est recommandé pour dégager la propriété même si le processus abductif incite à négliger les approximations et tend à rendre inutile la réalisation effective d'un mesurage. Ainsi, l’espace idoine qui se met en place s’appuie résolument sur la Géométrie I mais entre-t-on vraiment dans GII ? Trancher la question n’est pas évident dans ce livre puisque les deux propriétés ne sont pas démontrées. Elles sont admises sans que l’on sache exactement quelle a été la validation retenue. Autrement dit, ces propriétés font-elles partie de GII ou de GI ?

De plus, les propriétés ne sont pas présentées dans l’ordre qui habituellement permet de déduire la propriété des angles inscrits de celle des angles au centre. Cette absence d’un souci d’organisation globale du schéma déductif éloigne l'ETG idoine de la Géométrie II. Cette impression se confirme par l’étude du seul exemple d’application de la propriété dans le manuel. Il s’agit de prouver un alignement sur une figure bien particulière sans le degré de généralité qu’aurait pu introduire une formulation plus générale. Ainsi, le travail reste fixé sur une figure particulière sans atteindre le niveau des figures génériques.

L’ETG idoine se caractérise ainsi par l’absence de figure générique et par un appui sur des figures particulières. Il est également possible de mesurer. Le raisonnement fait la part belle à l’abduction pour dégager des propriétés qui sont ensuite utilisées comme techniques pour donner des valeurs numériques. Tous ces éléments nous semblent caractériser un ETG situé, de fait, plutôt dans une Géométrie I subreptice.

Dans son étude, Roditi a observé une séance conduite par un jeune professeur. Ce dernier utilise le manuel précédent pour préparer son cours tout en opérant un certain nombre de transformations toutes destinées à limiter les degrés de liberté dans l'activité des élèves. Le fait de limiter le travail et les initiatives des élèves permet au professeur de gérer plus facilement la conduite de la classe. On remarque que :

- L'activité sur les définitions est supprimée et remplacée par la donnée immédiate des définitions. Chaque définition est associée à une figure comme dans le livre cité.
- L'activité d'émission de la conjecture est nettement plus fermée que dans le livre, les élèves ne dessinent plus des angles sur leur feuille. Les dessins (trois en tout) figurent sur la fiche donnée aux élèves ce qui permet de donner les mêmes angles à mesurer à tous les élèves. De plus, la mesure des angles choisis permet une division simple. Comme dans le livre, une conjecture, qui relève plus du constat, est demandée à la fin.

Dans son étude, Roditi affirme que les élèves en font encore moins que ce que le professeur attendait, notamment au niveau des calculs et de l'émission de la conjecture. Ainsi, nous voyons à l'œuvre un phénomène de délitement progressif de l'ETG idoine de plus en plus piloté par le professeur qui tente de l'adapter au niveau des élèves. Ces derniers, dans un jeu de rôle bien huilé, tentent encore de le simplifier pour alléger leur travail d'élève.

L'impact des logiciels sur l'ETG idoine

Dans un travail de master, Boclé (2008) a déterminé une situation prototypique proposée dans les manuels français pour introduire une nouvelle notion en géométrie en fin de Collège. Son étude fait apparaître, dans les manuels conçus juste après 1998, la structure prototypique SP1 suivante :

1. Construction de figures particulières avec des instruments de dessins.
2. Mesurage sur ces figures à l'aide des instruments.
3. Émission d'une conjecture d'une propriété.
4. Institutionnalisation de la propriété admise ou démontrée plus tard.

Dans les manuels qui suivent les programmes de 2005, une nouvelle tendance émerge. L'introduction d'une nouvelle notion se fait par le biais d'un logiciel de géométrie. La situation prototypique SP2 est alors la suivante :

1. Construction d'une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie.
2. Mesure donnée par le logiciel.
3. Déplacement de points afin de constater que la propriété reste vraie.
4. Institutionnalisation de la propriété admise ou démontrée plus tard.

Dans les deux cas, pour introduire une propriété, les élèves construisent plusieurs figures répondant à des critères donnés. Les mesures effectuées sur ces figures permettent de constater un invariant puis d'émettre une conjecture. Dans les manuels qui suivent les programmes de 2007, les activités de construction et de mesure supposent l'usage d'un logiciel de géométrie. Le début de chaque activité se situe clairement dans GI avec un ETG qui favorise la perception et l'instrumentation. Dans les deux approches, avec et sans logiciel, le point crucial pour déterminer le type de géométrie réellement en jeu dans l'ETG idoine se situe au niveau du point 4. Si la propriété est démontrée uniquement de manière déductive sans recours à la mesure, il est possible de basculer en Géométrie II. Par contre, que se passe-t-il si la propriété n'est pas démontrée ?

Ces situations prototypiques répondent bien aux instructions des programmes recommandant la mise en place d'activités aboutissant à la conjecture de propriétés. L'insistance dans les nouveaux programmes sur l'utilisation d'un logiciel de géométrie a été prise en compte dans les manuels mais l'apport réel de ces logiciels dans le passage de la GI à GII mérite d'être questionné. En effet, plusieurs manuels justifient l'utilisation d'un logiciel de géométrie par l'amélioration de la précision de la mesure et la possibilité de multiplier les exemples. Or une mesure reste une approximation et elle est donc imprécise. C'est justement cette imprécision qui peut créer une contradiction au sein de la classe et conduire à la volonté de convaincre puis à la nécessité de prouver sans usage de la mesure. Insister sur la précision des logiciels et sur leur avantage par rapport aux constructions à la règle et au compas risque d'éloigner de la nécessité de fournir une preuve qui était un des enjeux de l'ETG de référence.

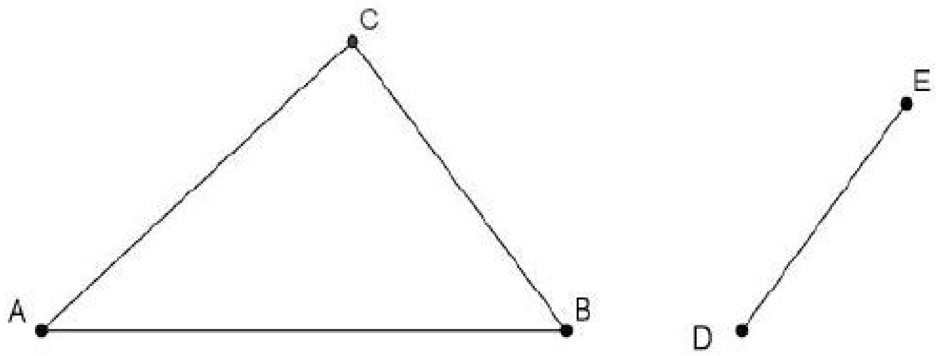
Dans son travail en classe, Boclé a essayé de voir si l'utilisation de l'outil informatique dans ces situations prototypiques favorisait le passage vers GII ou bien si au contraire elle constituait un élément bloquant. Elle a pu constater que la force de la preuve par expérimentation l'emportait sur un travail classique sur la démonstration comme une preuve purement déductive. Dans ce cas, il semble que l'usage des logiciels en situation standard stabilise plutôt un ETG de type GI et non une transition vers la GII.

La rupture consommée en classe de seconde ou quand la monstration devient démonstration.

Nous allons retrouver cette contradiction entre le travail attendu par l'institution et le travail effectivement mis en place dans le cas de l'étude des triangles semblables dans une classe de seconde ordinaire. Les triangles semblables ont été réintroduits dans l'enseignement obligatoire français en 2000. La notion avait disparu des programmes depuis la réforme des mathématiques modernes et elle est réapparue dans un tout autre contexte en 2000 en classe de seconde. Les triangles semblables ne sont pas vus par les programmes comme une notion nouvelle mais comme l'occasion de stabiliser le travail géométrique en fin de scolarité. Nous regarderons ici uniquement les résultats d'une séance menée par un professeur qui suit la démarche prototypique SP1 dans un premier temps mais qui, au moment de la phase 4 d'institutionnalisation, développe une démarche SP2 avec un usage exclusif du logiciel par lui-même.

L'activité suivante est donnée aux élèves. Il s'agit de la première activité sur les triangles semblables.

Partie I : Créer un triangle DEF tel que $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$, $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$.



Les questions suivantes figurent sur la fiche :

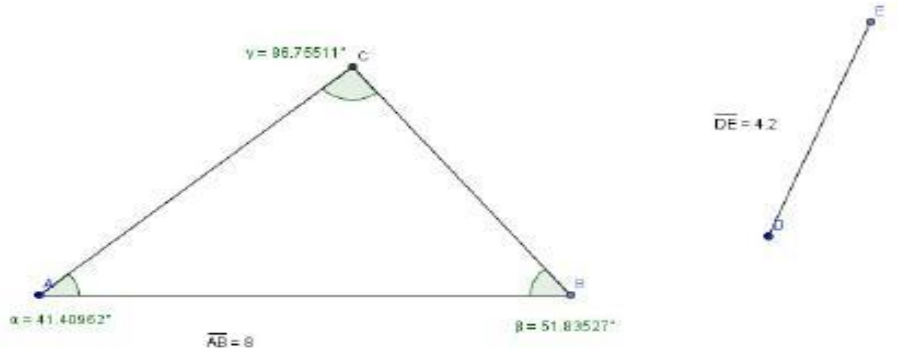
> Que peut-on dire des angles ACB et DFE ?
> Comparer les côtés des triangles avec votre règle. Que constate-t-on ?
> Finir la phrase On peut conjecturer que si deux triangles ont ... alors leurs côtés sont ...

Pour le professeur la phase de construction ne pose pas de problème. Il a anticipé deux triangles possibles, ce qui lui semble une difficulté intéressante. Pour lui, il s'agit clairement de motiver dans GI l'origine d'une propriété qui sera pleinement dans GII une fois qu'elle aura été démontrée dans la leçon suivante. La figure est pour lui un exemple générique et il n'a pas vraiment réfléchi aux mesures qui figuraient sur la fiche.

La grande majorité des élèves, mais pas tous, s'engage pleinement dans l'activité de construction qui s'avère longue et complexe. Les élèves ont des difficultés à utiliser leurs instruments de dessin et la tâche « faire un angle égal » ne correspond pas pour eux à une technique immédiatement mobilisable. De plus, les deux possibilités de figures suscitent des problèmes dans la classe car les élèves travaillent sur des figures particulières et non générales.

Une autre partie des élèves a compris que la construction n'avait pas d'importance pour le professeur et ils attendent tranquillement que le cours se déroule. Ils émettent, par abduction, des conjectures purement linguistiques en essayant d'adapter au mieux leurs connaissances mathématiques avec la situation. Dans le même temps, les élèves engagés dans la tâche de construction produisent des résultats très divers et contradictoires mais de fait ces résultats et le travail de ces élèves vont être laissés de côté par le professeur qui va privilégier la solution construite avec l'aide du logiciel Geogebra et présentée ave un video-projecteur. Pour cela, le professeur suit alors la structure prototype SP2 mais sans faire de dévolution aux élèves. L'usage du logiciel est à sa seule charge et il procède ainsi à une institutionnalisation qui nie tout le travail antérieur des élèves.

Le point de départ sur l'ordinateur est cette figure où les mesures affichées sont données avec cinq chiffres décimaux et ceci même pour les angles. Le rapport de proportionnalité calculé par l'ordinateur était de l'ordre de 1,875 et était exactement le même pour les trois rapports.



La précision des mesures indiquées sur l'ordinateur fait d'autant plus violemment apparaître aux élèves l'imperfection de leur travail avec les instruments. Leur travail proprement dit est de peu d'utilité puisqu'il est laissé de côté. De plus la précision du logiciel le transforme et, ceci, à l'insu du professeur, en outil de preuve et en source de vérité comme en témoigne le dialogue qui clôt le cours après l'énoncé de la conjecture.

> Le professeur. « A-t-on démontré la propriété ? »
> Les élèves dans une quasi-unanimité : « Oui! On a fait une démonstration. »
> Le professeur interloqué : « Ben Non c'est trop imprécis ! »

Ainsi après plus de trois années d'entrée progressive en Géométrie II et malgré les programmes qui insistent sur la vigilance nécessaire sur le statut des énoncés, admis ou démontrés, le décalage entre le travail attendu et le travail effectué est profond mais cela résulte en grande partie du fait que l'ETG idoine proposé aux élèves est lui-même très ambigu et probablement fondamentalement de type GI subreptice.

CONCLUSION

Notre étude nous permet de conclure d'une manière assurée sur quelques points caractéristiques des ETG rencontrés en fin de scolarité en France.

L'ETG de référence peut être caractérisé comme relevant de la Géométrie II morcelée. Un grand nombre d'îlots démonstratifs sont introduits pour bien montrer le lien entre la géométrie et l'intuition de l'espace. Puis, l'accent est mis sur la nécessité de développer le travail démonstratif en le distinguant des preuves expérimentales et des affirmations perceptives.

Cependant, cet ETG de référence laisse la porte ouverte, dans certains cas, à la mise en place de techniques et de propriétés validées par la seule expérimentation par les élèves avec des logiciels. De plus, son insistance constante sur une transition vers la Géométrie II appuyée sur la Géométrie I, peut laisser supposer qu'une Géométrie mixte est possible.

Cette porte ouverte devient un boulevard lorsqu'on envisage les ETG idoines qui se révèlent particulièrement instables et dépendants du niveau des élèves et des choix du professeur. Le jeu traditionnel entre les Géométries I et II s'avère particulièrement ambigu du fait de la puissance probatoire des logiciels pour les élèves.

Dans les exemples que nous avons pu observer [4], le glissement vers la Géométrie I a été favorisé par l'usage des logiciels qui instituent une preuve informatique qui vient à l'encontre de la preuve axiomatique. Cette dernière est d'autant plus affaiblie que le référentiel théorique mis à disposition des élèves n'apparaît pas, même en filigrane.

Enfin, la réorganisation des ETG semble de plus en plus piloté par un professeur s'adaptant au niveau des élèves plus que par des choix épistémologiques assumés. Le travail géométrique fonctionne par appauvrissements successifs ce qui peut expliquer la tentative récente de supprimer la géométrie discursive et figurale en classe de seconde au profit de la seule géométrie analytique. Une autre voie serait possible, en adéquation avec la demande sociale actuelle : assumer une Géométrie I dans la scolarité obligatoire. Cela permettrait de remettre en place un travail géométrique riche et de restructurer les ETG de manière cohérente.

NOTES

[1] La notion de paradigme, due à Kuhn, recouvre l'ensemble des croyances, des techniques et des valeurs que partage un groupe scientifique. Elle permet de fixer la manière correcte de poser et d'entreprendre la résolution d'un problème. (Houdement & Kuzniak, 2006). Dans l'article de Bulf, les différents paradigmes géométriques sont repris.

[2] Nous désignons l'ETG en utilisant le paradigme dominant, le couple entre parenthèses précise les paradigmes en jeu dans cet ETG.

[3] Manuel collection Triangle mathématiques de 3^{e} édité par Hatier.

[4] Nous avons pu observer, chez des professeurs débutants, un grand nombre de séances qui allaient toutes dans le même sens.

BIBLIOGRAPHIE

Bulf, C. (2009). Analyses en termes d'Espaces de Travail Géométrique sur l'enseignement français de la symétrie en début de Collège. *Dans cet ouvrage.*

Boclé, C. (2008). *Utilisation des logiciels de géométrie dynamique et espace de travail géométriques en classe de quatrième,* Master de didactique des mathématiques, Université Paris-Diderot.

Cousin-Fauconnet, A. (1995). *Enseigner la géométrie au collège.* Paris : Armand Colin.

Duval, R. (1995). Why to teach geometry in *Icmi Studies on Geometry,* (pp 53-58). Catania.

Giaquinto, M., (2005). Mathematical activity in *Visualization, Explanation and Reasoning styles in Mathematics, 75-87* Springer.

Granger, G.G., (1963). *Essai d'une philosophie du style.* Paris : Odile Jacob.

Granger, G.G., (1998). *L'irrationnel.* Paris : Odile Jacob.

Houdement, C., Kuzniak, A., (2003). Elementary geometry split into different geometrical paradigms. *Proceedings of CERME 3.* Bellaria, Italie

Houdement, C., Kuzniak, A., (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 11,* 175-193.

Kaiser, G., Luna, E. & Huntley, I., (1999). *International Comparisons in Mathematics.* Education Falmer Press.

Kuzniak, A. (2005). Diversité des mathématiques enseignées "ici et ailleurs": l'exemple de la géométrie. In Copirelem (Ed) *Enseigner les mathématiques en France, en Europe et ailleurs (*pp 47-56). Strasbourg : Irem de Strasbourg.

Kuzniak, A., (2006). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Eléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 6*(2)**,** 167-188.

Kuzniak, A., & Vivier, L. (2009). A French look on the Greek Geometrical Working Space at secondary school level. *Proceedings of Cerme6.* Lyon, France

Piaget, J. (1950). *Introduction à l'épistémologie génétique. La pensée mathématique.* Paris : PUF

Robert, A. (2003). Un point de vue sur les spécificités du travail géométrique des élèves à partir de la quatrième : l'organisation des connaissances en niveaux de conceptualisation. *Petit x, 63*, 7 –29.

Roditi, E. (2004). Le théorème de l'angle inscrit au collège : analyse d'une séance d'introduction. *Petit x*, *66,* 18-48.

Thurston, W. P., (1995). On Proof and Progress in Mathematics. *For the Learning of Mathematics, 15*(1), 29-35.

THE FUNCTIONING OF GEOMETRICAL FIGURES IN CYPRIOT GEOMETRY TEXTBOOKS[1]

Paraskevi Michael, Athanasios Gagatsis, Eleni Deliyianni, Annita Monoyiou and Andreas Philippou

Department of Education, University of Cyprus

ABSTRACT

In this paper a part of a study that examined the functioning of geometrical figures in the learning of geometry with respect to the shift from Middle (Grade 9) to High school (Grades 10 and 11) in Cyprus is presented. The aim was to classify the exercises and the examples of the geometry textbooks, according to the Duval's four types of geometrical figure apprehension: perceptual, sequential, discursive and operative.

INTRODUCTION

It is widely acknowledge that the school textbooks reflect the aims of the curriculum (Smidt et al., 1997 in Pepin & Haggerty, 2002). In fact, the school textbooks correspond to the curriculum (Symeou – Mai, 2008), present the content that is to be taught and provide support to the teacher, in order to organize the teaching (Brändström, 2005). The wide use of textbooks in the classroom gives them the potential to influence students' learning (Apple, 1986 in Pepin & Haggerty, 2004). Textbooks provide continuity and coherence for students during the lesson and prevent chaos in the classroom since keep students occupied (Brändström, 2005). Therefore, they possess a central role in the classroom, both for students and teachers.

Recently, research has turned its interest to textbooks, as far as their content and the way teachers use them, is concerned (Pepin & Haggerty, 2002). Following the notion that the school textbook is the main tool of the teacher, it is reasonable to explore the school textbooks as important tools for teaching.

Mathematical ability is a compound of general intelligence, visual imagery, and ability to perceive number and space configurations and to retain such configurations as mental

[1] This paper is a preliminary study based on the research *project "Ability to use multiple representations in Functions and Geometry: The Transition from Middle to High school"* of the Research Promotion Foundation.

pictures (Hamley, 1935 in McGee, 1979). Both teachers and researchers agree that the use of visual representations is an important part of mathematics education, because such representations appear to enhance intuition and understanding in many areas of mathematics (Krutetskii, 1976). To get some idea of the representations used in a mathematics class, an easy method consists in taking a look at those in textbooks, which can be considered as "fair copies" of those actually made in classrooms (Parzysz, 1991).

Based on those mentioned above, this study aims to investigate the geometry textbooks of Grades 9, 10 and 11 used in Cyprus, in order to form a more comprehensive picture about the types of geometrical figure apprehension (as proposed by Duval, 1995) which are involved in the exercises and examples used. In a further stage, an investigation of students' performance while engaging with tasks that correspond to each of the four types of geometrical figure apprehension is going to be conducted.

THEORETICAL BACKGROUND

Geometry occupies a particular place within mathematics; it appears as a model of physical space, and it follows that the objects it deals with (e.g., lines, planes, points) are directly taken from sensory experience, unlike in the other areas of mathematics (Parzysz, 1991). In geometry three registers are used: the register of natural language, the register of symbolic language and the figurative register. In fact, a figure constitutes the external and iconical representation of a concept or a situation in geometry. It belongs to a specific semiotic system, which is linked to the perceptual visual system, following internal organization laws. As a representation, it becomes more economically perceptible compared to the corresponding verbal one, because in a figure various relations of an object with other objects are depicted (Mesquita, 1996).

Parzysz (1991) referred to graphical images**,** which are instruments of both monstration and demonstration. He mentions some purposes which can be fulfilled by them:

-they *illustrate* definitions (e.g., for parallelogram, pyramid) or theorems (e.g., Pythagorean). This is due to the nature of geometry, whose objects are obviously linked with material realizations (drawings or models which can be drawn).

-they *sum up* a complex set of information: the "figure", drawn in order to solve a geometrical problem, allows a simultaneous glance at most of the data present in the wording.

-they *help in conjecture:* the "figure" also makes it possible to suggest potential relations between its elements, which will have to be demonstrated afterwards (in the drawing, this triangle seems to be isosceles: is it true?)

-they *help with proof:* the role of drawings in proofs is essentially of a "negative" nature, i.e. it provides counter-examples to conjectures (this triangle, which was thought to be isosceles, is certainly not so, for in another instance it is obviously not the case).

It can be noticed that these varied functions are essentially applicable to plane geometry, and, even if they remain valid for space geometry, their efficiency is sometimes less evident in this case.

Geometrical figures are simultaneously concepts and spatial representations (Fischbein & Nachlieli, 1998). The double status of external representation in geometry often causes difficulties to students when dealing with geometrical problems due to the interactions between concepts and images in geometrical reasoning (Mesquita, 1998). According to Duval (1995), the usefulness of the geometric shape in the analysis of a geometric problem is considered to be unquestionable, since it provides an intuitive presentation of the components and relationships in a geometric situation (Duval, 1995). However, students are often not helped by the figure, in order to reach the solution of the problem. In fact, even though a figure shows many things to the eye, students do not become able to distinguish those “many” (Duval, 1998-2001). This fact makes us to wonder about the reasons that cause the obstruction of the heuristic function of the shape.

The concern expressed above could be clarified by Duval (1995), who distinguishes four apprehensions for a “geometrical figure”: perceptual, sequential, discursive and operative. He claims that to function as a geometrical figure, a drawing must evoke perceptual apprehension and at least one of the other three. Each has its specific laws of organization and processing of the visual stimulus array. Particularly, perceptual apprehension refers to the recognition of a shape in a plane or in depth. In fact, one’s perception about what the figure shows is determined by figural organization laws and pictorial cues. Perceptual apprehension indicates the ability to name figures and the ability to recognize in the perceived figure several sub-figures. Sequential apprehension is required whenever one must construct a figure or describe its construction. The organization of the elementary figural units does not depend on perceptual laws and cues, but on technical constraints and on mathematical properties. Discursive apprehension is related with the fact that mathematical properties represented in a drawing cannot be determined through perceptual apprehension. In any geometrical representation the perceptual recognition of geometrical properties must remain under the control of statements (e.g., denomination, definition, primitive commands in a menu).

However, it is through operative apprehension that we can get an insight to a problem solution when looking at a figure. Operative apprehension depends on the various ways of modifying a given figure: the mereologic, the optic and the place way. The mereologic way refers to the division of the whole given figure into parts of various shapes and the combination of them in another figure or sub-figures (reconfiguration), the optic way is when one makes the figure larger or narrower, while the place way refers to its position or orientation variation. Each of these different modifications can be performed mentally or physically, through various operations. These operations constitute a specific figural processing which provides figures with a heuristic function. In a problem of geometry, one or more of these operations can highlight a figural modification that gives an insight to the solution of a problem.

The role of perceptual, operative and discursive apprehension in geometrical figure understanding was recently confirmed by Deliyianni, Elia, Gagatsis, Monoyiou and Panaoura (2009). Moving a step forward, Elia, Gagatsis, Deliyianni, Monoyiou and Michael (2009) investigated the role the mereologic, the optic and the place way modifications exert on operative figure understanding and they verified a model, which lent support to Duval's (1995) conceptualization of the cognitive processes underlying operative figure understanding.

A question that occurs is why perceptual apprehension does not lead to operative apprehension. Duval (1999) considers representation and visualization to be at the core of understanding in mathematics. So, for each operation, he identifies visual variables that trigger or inhibit the visibility of the relevant subfigure and operation within a given figure. Operative apprehension is different from perceptual apprehension because perception fixes at the first glance the vision of some shapes and this evidence makes them steady. In fact, there are differences between visual perception and visualization. Visualization refers to a cognitive activity which is intrinsically semiotic, that is, neither mental nor physical. The way of watching is not the same in vision than in visualization. Visualization, which performs only the synoptic function, is not intuition but representation. In that sense, there are several possible geometrical registers for visualization. Visualization in mathematics is needed because it displays organization of relations, but it is not primitive, because it is not mere visual perception. The use of visualization requires a specific training, specific to visualize each register. Geometrical figures are not directly available as iconic representations can be. Visualization consists in grasping directly the whole configuration of relations and in discriminating what is relevant in it. Most frequently, students go no further than to a local apprehension and do not see the relevant global organization but an iconic representation (Duval, 1999).

THE STUDY

This study constitutes a part of a larger research project, in which the ability to use multiple representations in functions and geometry is examined, in relation to the transition from Middle to High school. The aim of this paper is the examination of the exercises and examples included in the geometry textbooks of the last grade of Middle school (Grade 9) and the two first grades of the High school (Grades 10 and 11) in Cyprus. Specifically, we tried to classify the exercises and the examples based on the theoretical model proposed by Duval (1995), which involves four types of geometrical figure apprehension. Each exercise and example was placed in one of the four categories, according to the type of apprehension that was required in order to be solved. Representative examples and exercises from the mathematics textbooks of the three grades for each of the four types of understanding can be found in the Appendix.

While examining and classifying the exercises and examples of the specific textbooks, attention was at the same time drawn on the theoretical part of the textbooks. It is noteworthy the fact that in all the three grades examined, three types of apprehension are involved in the different shapes presented in the theoretical part, respectively; those are the perceptual, the discursive and the operative. However, the dominant type of apprehension is the perceptual one. It is also remarkable that figures involving the fourth type of apprehension, that is the sequential one, are only traced in the theoretical part of Grade 9.

The percentages of exercises requiring each type of apprehension of the geometrical figure by grade are presented in Table 1. On the one hand, according to the results, the higher percentage of the exercises examined from the geometry textbooks requires the activation of perceptual apprehension for Grades 9, 10 and 11. On the other hand, the least required type of apprehension is the sequential, for Grades 9 and 10. However, this is not the case for Grade 11, since discursive apprehension constitutes the type of apprehension that is the less activated in the exercises examined. As discursive and operative apprehension is concerned, the percentages for Grades 9 and 10 are quite similar. The situation is different for Grade 11, since there is a higher amount of exercises mobilizing operative apprehension than discursive or even sequential apprehension.

Table 1

Percentages of exercises requiring each type of geometrical figure apprehension by grade

Grade	N	Perceptual (%)	Sequential (%)	Discursive (%)	Operative (%)
Grade 9	171	61,4	7,0	16,4	15,2
Grade 10	161	50,3	2,5	24,2	22,4
Grade 11	131	50,8	12,3	8,5	21,5

Comparing the percentages of exercises requiring each type of geometrical figure apprehension in each grade, on the one hand a slight fall in the amount of exercises requiring the perceptual and sequential apprehension of the geometrical figure from

Grade 9 to Grade 10 and on the other hand, an increase from Grade 10 to Grade 11 is observed. There is, also, an increase from Grade 9 to Grade 10, as discursive and operative apprehension are concerned, followed by a decrease from Grade 10 to Grade 11 particularly as regards discursive apprehension.

Table 2, presents the exercises activating each type of apprehension of the geometrical figure for the two educational levels. According to the results, some changes occur during the transition from one level to the other. In particular, the percentage of exercises involving perceptual apprehension decreases from Middle to High school. In contrast the percentages of exercises involving discursive and operative apprehension, increases from Middle to High school. As for sequential apprehension, the percentages remain constant from Middle to High school.

Table 2

Percentages of exercises included in each type of geometrical figure apprehension by educational level

Educational Level	N	Perceptual (%)	Sequential (%)	Discursive (%)	Operative (%)
Middle School (Grade 9)	171	61,4	7,0	16,4	15,2
High School Grades 10, 11)	291	50,5	6,9	17,2	22

The percentages of examples that require each type of apprehension of the geometrical figure for Grades 9, 10, 11 are demonstrated in Table 3. The table shows that the highest percentage of examples used in the mathematics textbooks are those involving perceptual apprehension. A small percentage of examples that require operative apprehension exist in the textbooks of the three Grades. As for discursive apprehension, a small amount of examples mobilizing this type of apprehension appears only in Grade 9. It is also noticeable the fact that examples involving sequential apprehension are totally absent from the textbooks of these three Grades.

Specifically, concerning perceptual apprehension, there is an increase in the number of examples of this type of apprehension while moving from Grade 9 to Grade 10. In contrast, this number is reduced when passing from Grade 10 to Grade 11. As far as operative apprehension concerns, a slight decrease in the percentage of the examples appearing in the textbooks from Grade 9 to Grade 10 is observed, while this type of examples appears to be more frequently presented in the textbook of Grade 11 than in the one of Grade 10.

Table 3

Percentages of examples requiring each type of geometrical figure apprehension by grade

	N	Perceptual (%)	Sequential (%)	Discursive (%)	Operative (%)
Grade 9	34	79,4	0	11,8	11,9
Grade 10	57	93	0	0	7
Grade 11	54	81,5	0	0	8,5

Table 4 presents the percentages of examples which belong in each type of apprehension of the geometrical figure for the two educational levels. Examples requiring perceptual apprehension appear more frequently in the mathematics textbooks of High school. We notice a similar situation for operative apprehension also, as there is an augmentation of a similar percentage (almost 7%) in the use of this type of examples. As mentioned above, examples of discursive apprehension are not used in High school, while examples of sequential apprehension is not involved at all, both in the two types of schools.

Table 4

Percentages of examples included in each type of geometrical figure apprehension by educational level

Educational Level	N	Perceptual (%)	Sequential (%)	Discursive (%)	Operative (%)
Middle school (Grade 9)	34	79,4	0	11,8	5,9
High school (Grades 10, 11)	111	87,4	0	0	12,6

CONCLUSIONS

The aim of this research study was to identify the types of geometrical figure apprehension as proposed by Duval (1995) which are required in the exercises and examples of the geometry textbooks from Grades 9 to 11.

According to the results perceptual apprehension is the dominant type of apprehension required in both the exercises and the examples of the geometry textbooks examined. Attention is also given to operative apprehension, even though exercises and examples of this type are found in lower percentages in textbooks. Sequential is the type of apprehension that is least demanded in the exercises. It is remarkable that examples which involve sequential apprehension are totally absent from the geometry textbooks of the grades examined.

The number of exercises classified in each type of geometrical figure apprehension changes from Grade 9 to Grade 11. In particular, there is a rise in the amount of exercises activating operative or discursive apprehension from Grade 9 to Grade 10, followed by a reduction in Grade 11. As perceptual and sequential apprehension is concerned the opposite situation is noticed. The number of these exercises is reduced in Grade 10, while an augmentation occurs in Grade 11. Although there is a shift in the rates of exercises of perceptual apprehension through the three Grades, this kind of exercises occupy almost the half of the total amount of exercises.

Consequently, we come to wonder whether we should refer exclusively to a transition from Middle to High school. According to the results of this study, students pass through two different levels; the first one is from Middle school (Grade 9) to the comprehensive school's mathematics class (Grade 10), while the second is when passing from the comprehensive school's mathematics class to the elective mathematics class of the High school (Grade 11). This fact needs to be given attention in order to face students' problems and difficulties using the appropriate actions.

Concerning exercises and examples, the number of examples requiring perceptual or operative apprehension is analogous to the number of exercises that require the same type of apprehension, respectively. This is not the case for sequential and discursive apprehension. Although there are exercises that involve these types of apprehension, the number of examples included in the textbooks is very few or even totally absent in some cases. Therefore, there is a lack of support to students through the examples, in order to manage with tasks of these types of geometrical figure apprehension.

By the comparison between Middle and High school we extract the conclusion that there is a reduction of exercises which involve perceptual apprehension, accompanied by almost an analogous augmentation in exercises of operative apprehension. This is an important fact, because operative apprehension helps students to find solutions to problems. The solution of a problem requires the understanding of the organization of the shape, which in operative understanding the given figure functions as a starting point for investigating other modifications (Duval, 1999). As operative apprehension constitutes a complex operation, students in the age of High school are considered to be more able of handling this type of tasks, due to maturation and to teaching experience.

Besides, in the transition from Middle to High school the number of examples is not in proportion with the number of exercises. Particularly, we notice that the tasks of operative apprehension decline, while the examples increase. The opposite situation is encountered as perceptual apprehension is regarded, since there are more examples and less exercises of this type in High school.

In the light of the above, we consider that the examination of students' performance in the four types of apprehension would be useful, in order to get an inside to students' behaviors in relation to their understanding of the geometrical figures. By this kind of research it will be feasible to discriminate the similarities, differences, but also the problems that may occur in the transition from one educational level to the other.

REFERENCES

Brändström, A. (2005). Differentiated Tasks in Mathematics Textbooks: An analysis of the levels of difficulty. (Licentiate Thesis, Luleå University of Technology – Department of Mathematics, Sweden).

Deliyianni, E., Elia, I., Gagatsis, A., Monoyiou, A., & Panaoura, A. (2009). A theoretical model of students' geometrical figure understanding. *Proceedings of CERME 6, Lyon, France.*

Duval, R. (1998-2001). Figures' Representational Function in Geometry and Figure's Multiple and Parallel Entries. In *Representation and Mathematics Visualization*, PME-NA XXII, Tuscon, Arizona, USA, 2000.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for learning. Retrieved from ERIC ED 466 379.

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processes. In R. Sutherland & J. Mason (eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematical education.* Berlin, Springer, pp. 142- 157.

Elia, Gagatsis, Deliyianni, Monoyiou & Michael (2009). A structural model of Primary school students' operative apprehension of the geometrical figure. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, C. (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of* *the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp.1-9). Thessaloniki, Greece: PME.

Fischbein, E., & Nachlieli, T. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International Journal of Science Education*, *20*(10), 1193- 1211.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren.* Chicago: University of Chicago Press.

McGee, M. G. (1979). Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences. *Psychological Bulletin, 86,* p.p 889-918.

Mesquita, A. L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 183-195.

Mesquita, A. L. (1996). On the utilization of encoding procedures on the treatment of geometrical problems. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. III, pp. 399- 406. Valencia.

Parzysz, B (1991). Representation of space and students' conceptions at high school level. *Educational Studies in Mathematics, 22*, pp. 575-593.

Pepin, B., & Haggarty, L. (2004). Mathematics textbooks and their use by teachers: A window into the education world of particular countries. In J. J. H. Van den Akker, W. Kuiper, & U. Hameyer (Eds.), *Curriculum landscapes and trends,* pp.73 – 100. Kluwer Academic Publishers.

Pepin, B., & Haggarty, L. (2002). An investigation of mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: Who gets an opportunity to learn what?, *British Educational Research Journal, 28(4),* pp. 567 – 590.

Symeou – Mai, T. (2008). Content analysis of mathematics textbooks in Elementary and Secondary Education: The case of functions. In A.Gagatsis, P. Damianou & A.Philippou (Eds.), *Proceedings of the 10th Conference of Mathematics Education and Science*, pp. 247 – 266. Cyprus: Cypriot Mathematics Committee.

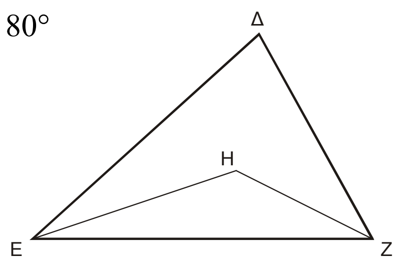
APPENDIX

Exercises and examples for each type of understanding of the geometrical figure from geometry textbooks for Grades 9, 10 and 11.

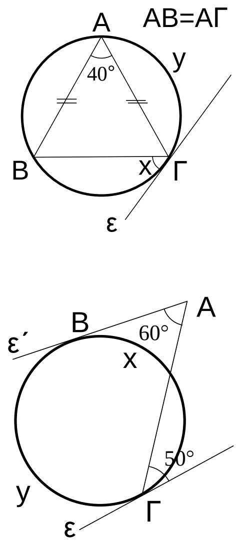
1. Perceptual Understanding

ΔEZ is a tringle. H is the intersection point of the dichotomous of angles E and Z. If angle Δ is 80° and ΔEZ is 40°, find the angle EHZ.

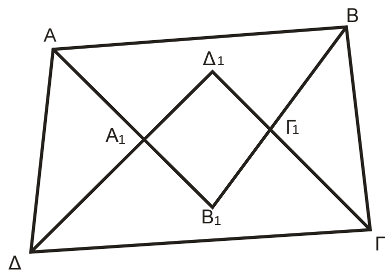
(Grade 9)



Lines ε and ε΄ are tangents. Find x and y. (Grade 10)



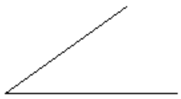
Example (Grade 11)
Prove that the dichotomous of the angles of a quadrilateral shape an inscribed quadrilateral.



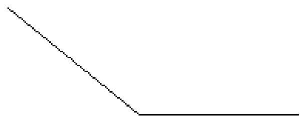
2. Sequential Understanding

Use a compass in order to draw the dichotomous of the following angles. (Grade 9)

(a)



(b)

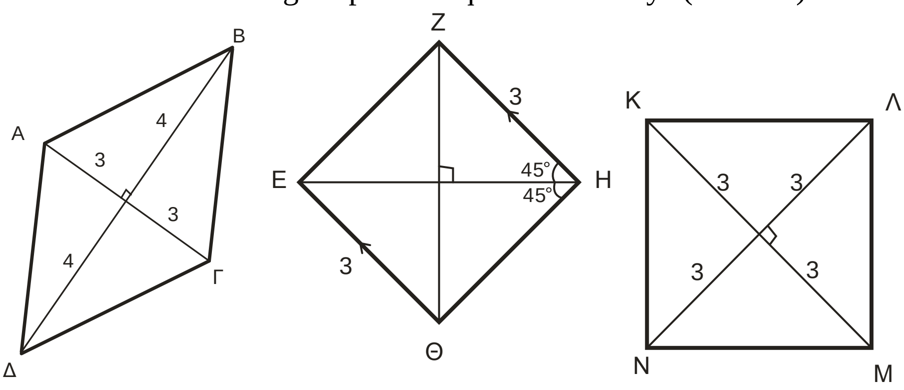


Draw a circle with ratio r that goes through a constant point K. How many circles of this type can we draw on a plane? At which point are their centers found? (Grade 10)

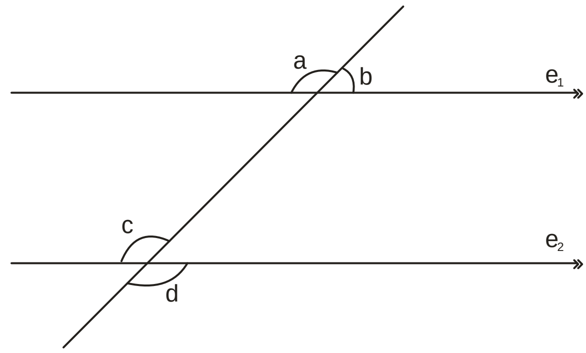
Draw a straight line that passes from a constant point O and intersects two fixed incompatible straight lines. (Grade 11)

3. Discursive Understanding

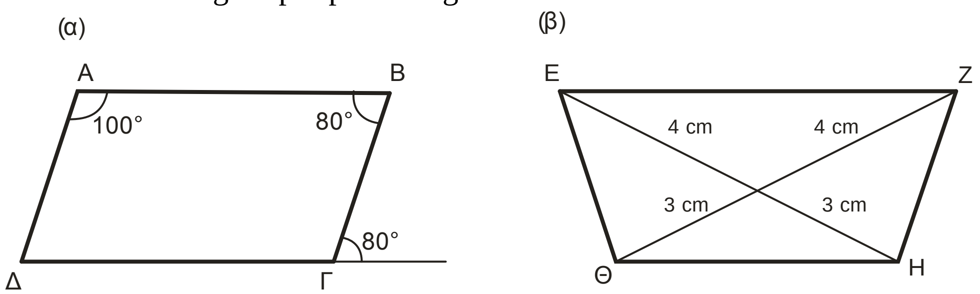
Which of the following shapes are squares and why? (Grade 9)



How can we call angles a and b? What is the relation between them?
(Grade 10)

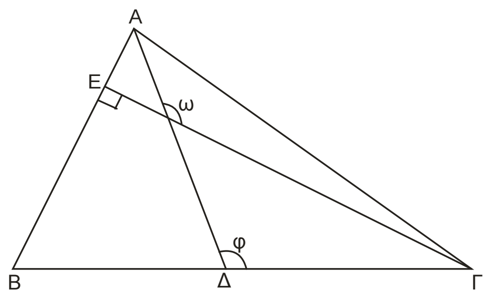


Example (Grade 9)
Are the following shapes parallelograms?



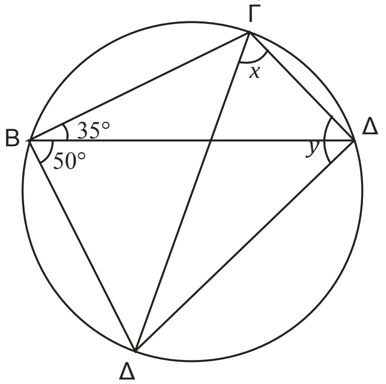
4. Operative Understanding

ΓΕ is an altitude and ΑΔ is a dichotomous of the triangle ΑΒΓ. If angle ΕΓΒ= 30° and ΒΑΔ= 40°, calculate the angles Β, ω, φ.



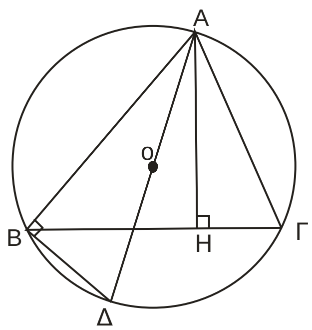
(Grade 9)

Find the value of x and y. (Grade 10)



Example (Grade 10)

ΑΒΓ is a triangle and υ_α = ΑΗ. Prove that $\beta\gamma = 2R\upsilon_\alpha$, where R is the radio of the circle in which the triangle ΑΒΓ is inscribed.



SPATIAL ABILITY AND GEOMETRICAL FIGURE UNDERSTANDING

Panagiota Kalogirou*, Iliada Elia and Athanasios Gagatsis***

***Department of Education, University of Cyprus, ** Cyprus Pedagogical Institute**

ABSRACT

The aim of this paper is to trace and discuss the relationship between spatial ability and geometrical figure understanding as proposed by Duval (1995, 1999). The paper consists of a brief literature review on spatial ability and geometrical understanding, empirical results from research studies that have been done to explore the role of geometrical models on children's conceptions of geometrical shapes and from other investigations focusing on geometrical figure understanding. In the last part of the paper, we explain and discuss the associations between spatial ability and geometrical figure understanding. More specifically, our assumption is that operative apprehension, as proposed by Duval, is a form of visual processing that concerns geometrical figures.

WHAT IS SPATIAL ABILITY?

Spatial ability has been the focus of a great amount of research ever since its discovery as a distinct dimension in factor analytic studies dating from the 1920s (Goldberg & Meredith, 1974). The National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1989, 2000) has recognized the importance of introducing spatial reasoning as an approach to mathematics right at the point at which children are being introduced to mathematics learning.

There are many definitions of spatial ability, but it is generally accepted to be related to skills involving the retrieval, retention and transformation of visual information in a spatial context (Lohman, 1993; Halpern, 2000). McGee (1979) defined spatial ability as "the ability to formulate mental images and to manipulate these images in the mind" (p. 267). Researchers have broken apart the concept of spatial ability into specific factors that are believed to contribute to spatial comprehension. Factor labeling and definitions vary from one researcher to another.

For example, many researchers (McGee, 1979; Burnett & Lane, 1980; Pellegrino et al., 1984; Clements & Battista, 1992) support that spatial ability consists of two major components: spatial relations and spatial visualization. *Spatial Relations* are described as comprehension of the arrangement of elements within a visual stimulus pattern (McGee, 1979). According to D'Oliveira (2004), spatial relations refer to the ability to solve simple rotation problems or to identify reflected versions of the target (see Figure 1).

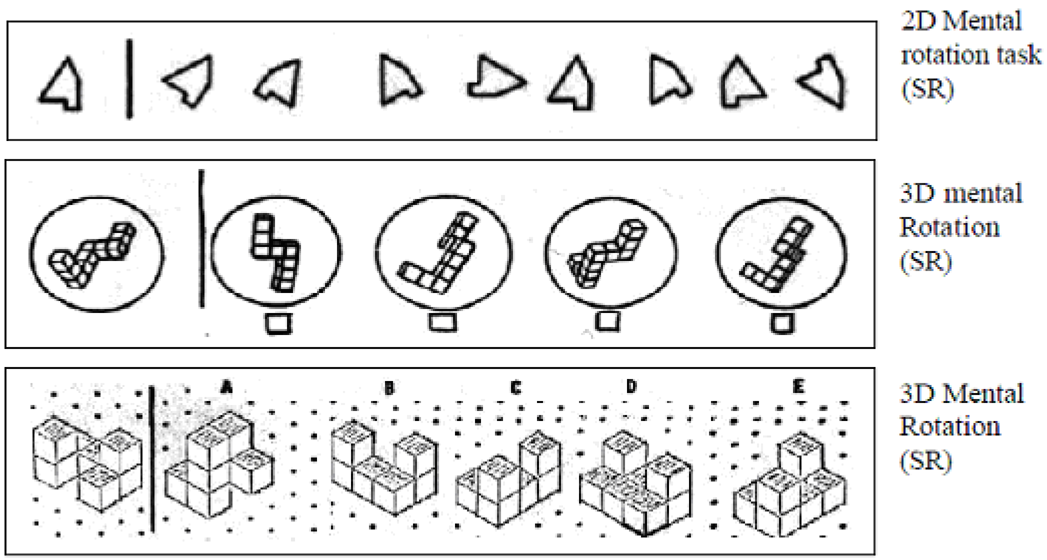


Figure 1. Spatial relations items. Children are asked to identify which of the figures in right is the same as the figure in left in a different orientation (Olkun, 2003)

Spatial visualization is described as the ability to imagine rotations of objects or their parts in 3-D space (Burnet & Lane, 1980) by folding and unfolding, for example (McGee, 1979) (see Figure 2). The manipulation could be in a holistic, as well as piece-by-piece fashion (Battista, Wheatley & Talsma, 1989) and the movements must be imagined (Clements & Battista, 1992). The kinds of activities used to measure spatial visualization ability require a manipulation in which there is movement among the internal parts of a complex configuration and/or the folding and unfolding of flat patterns (Pellegrino, et al., 1984). In a short definition, spatial visualization is the mental manipulation and integration of stimuli consisting of more than one part or movable parts (Olkun, 2003).

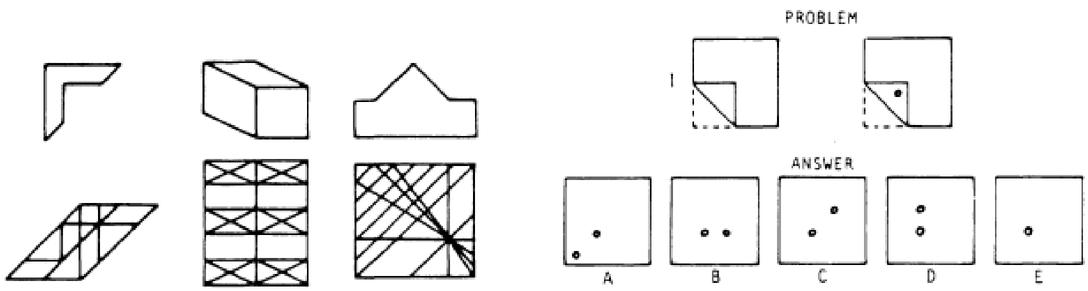


Figure 2. Spatial visualization items. Left, Embedded Figures: students are asked to find the simple shape shown on the top in the complex shape shown on the

bottom. Right, Paper Folding: students are asked to indicate how the paper would look when unfolded (Linn and Petersen, 1985, p.1485).

The meaning of spatial visualization has been also interpreted differently in accordance with the viewpoint of each researcher; and, the same applies to sub-abilities that compose thereof. Of all the different classifications, McGee classified spatial visualization abilities as follows (Gutiérrez, 1996):

-Ability to visualize a configuration in which there is movement among its parts

-Ability to comprehend imaginary movements in three dimensions, and to manipulate objects in the imagination

-Ability to imagine the rotation of a depicted object, the (un)folding of a solid, and the relative changes of position of objects in space

-Ability to manipulate or transform the image of a spatial pattern into other arrangements

As a result of a meta-analysis of studies carried out between 1974 and 1982, Linn and Petersen (1985) made a classification of spatial tests into three distinct categories and labeled these categories spatial perception, spatial visualisation and mental rotation. *Spatial perception* was defined as the ability to determine spatial relations despite distracting information and can be done efficiently using a gravitational/ kinesthetic process (see Figure 3). *Spatial visualisation* is the ability to manipulate complex spatial information when several stages are needed to produce the correct solution and can be done efficiently using an analytic process (Linn and Petersen, 1985). *Mental rotation* was defined by Linn & Petersen (1985) as the ability to rotate, in imagination, quickly and accurately two- or three-dimensional figures and can be done efficiently using a Gestalt-like mental rotation process analogous to physical rotation of the stimuli (see Figure 4).

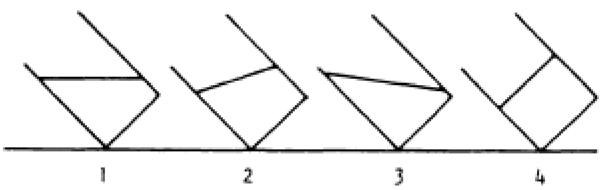


Figure 3. A spatial perception item. Students are asked to indicate which tilted bottle has a horizontal water line (Linn and Petersen, 1985, p.1482).

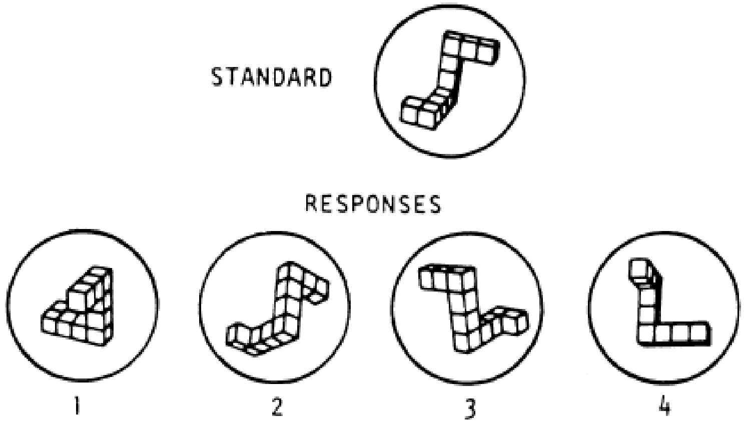


Figure 4. A mental rotation item. Respondents are asked to identify the two responses that show the standard in a different orientation (Linn and Petersen, 1985, p.1483).

Kimura (1999) defines six spatial factors that have a broad acceptance because they can be distinctly identified by experimental measurement. They are: Spatial Orientation, Spatial Location Memory, Targeting, Spatial Visualization, Disembedding and Spatial Perception. As mentioned above, elements that compose spatial ability differ by researcher, but that spatial visualization functions as an important factor in spatial ability is agreed by all of them.

CAN WE DEFINE GEOMETRICAL FIGURE "UNDERSTANDING"?

Geometry has been a difficult branch of mathematics for many students. During the past twenty years, several mathematics educators have investigated students' geometrical reasoning based on different theoretical frames. For example, van Hieles developed a model referring to levels of geometric thinking (van Hiele, 1986), Fischbein introduced the theory of figural concepts (Fischbein, 1993) and Duval reported on a cognitive analysis of geometrical thinking (Duval, 1998).

Understanding geometrical figures is a core component of the learning of geometry. According to Fischbein (1993), when we refer to geometrical figures, we have to consider three categories of mental entities: the definition, the image (based on the perceptive-sensorial experience, like the image of a drawing) and the figural concept. The figural concept is a mental reality, it is the construct handled by mathematical reasoning in the domain of geometry. It is devoid of any concrete-sensorial properties (like color, weight, density, etc.) but displays figural properties (Fischbein, 1993).

A figural concept potentially remains under the double and sometimes contradictory influence of the two systems to which it may be related - the conceptual and the figural one. Ideally, it is the conceptual system which should absolutely control the meanings, the relationships and the properties of the figure (Fischbein, 1993). The double status of external representation in geometry often causes difficulties to students when dealing with geometrical problems due to the interactions between concepts and images in geometrical reasoning (e.g. Mesquita, 1998).

Duval (1995, 1999) distinguishes four apprehensions for a “geometrical figure”: perceptual, sequential, discursive and operative. To function as a geometrical figure, a drawing must evoke perceptual apprehension and at least one of the other three. Each type of apprehension has its specific laws of organization and processing of the visual stimulus array. Particularly, *perceptual apprehension* refers to the recognition of a shape in a plane or in depth and indicates the abilities to name figures and to recognize in the perceived figure several sub-figures. One’s perception about what the figure shows is determined by figural organization laws and pictorial cues (see Figure 4).

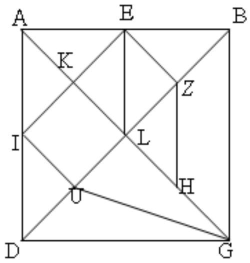


Figure 4. Perceptual Apprehension Task. Students are asked to recognize the figures KEZL, IEZU, EZHL, IKGU, LGU, BIL (Deliyianni, Elia, Gagatsis, Monoyiou, & Panaoura, 2009, in press).

Sequential apprehension is required whenever one must construct a figure or describe its construction. The organization of the elementary figural units does not depend on perceptual laws and cues, but on technical constraints and on mathematical properties. *Discursive apprehension* is related with the fact that mathematical properties represented in a drawing cannot be determined through perceptual apprehension. In any geometrical representation the perceptual recognition of geometrical properties must remain under the control of statements (e.g. denomination, definition, primitive commands in a menu). However, it is through *operative apprehension* that we can get an insight to a problem solution when looking at a figure. Operative apprehension depends on the various ways of modifying a given figure: the mereologic, the optic and the place way. The mereologic way refers to the division of the whole given figure into parts of various shapes and the combination of them in another figure or sub-figures (reconfiguration), (see Figure 5) the optic way is when one makes the figure larger or narrower or slant (see Figure 6), while the place way refers to the variations of the figure’s position or orientation (see Figure 7).

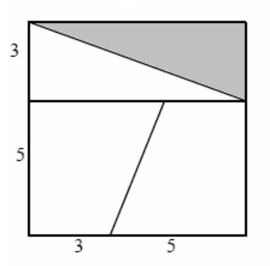


Figure 5. A merologic task. Students are asked to calculate the shaded area (Elia, Gagatsis, Deliyianni, Monoyiou, & Michael, 2009).

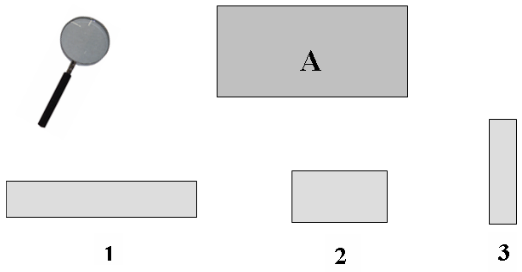


Figure 6. An optic way task. Shape A is the rectangle as it looks through a magnifier. Students are asked to circle the picture that shows the rectangle, in reality (Elia, et al., 2009).

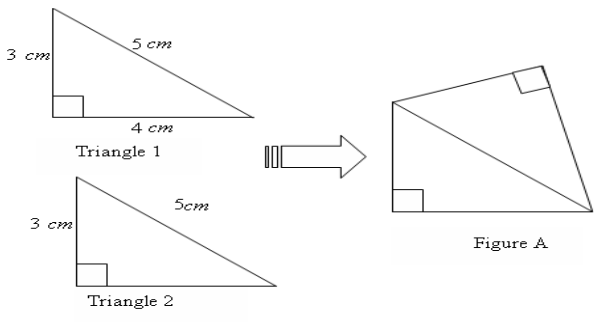


Figure 7. A place way task. Students are asked to calculate the area of figure A (Elia, et al., 2009).

Each of these different modifications can be performed mentally or physically, through various operations. These operations constitute a specific figural processing which provides figures with a heuristic function. In a problem of geometry, one or more of these operations can highlight a figural modification that gives an insight to the solution of the problem.

GEOMETRICAL MODELS AND UNDERSTANDING OF GEOMETRICAL FIGURES: SOME EMPIRICAL RESULTS

A number of recent studies have explored children's geometric conceptions and provided useful foundations for the development and improvement of mathematics education. We will briefly describe two studies which explored the role of geometrical models of polygonal shapes on children's geometrical understanding (Elia & Gagatsis, 2003; Gagatsis, Sriraman, Elia & Modestou, 2006) and two studies which investigated different aspects of geometrical figure understanding based on Duval's theoretical position (Deliyianni, Elia, Gagatsis, Monoyiou & Panaoura, 2009; Elia, Gagatsis, Deliyianni, Monoyiou & Michael, 2009).

Elia and Gagatsis (2003) explored young children's geometric conceptions and understanding about shapes through the geometrical model of dynamic transformations of polygons or "polytopes" of dimensions 0, 1 and 2 (0-polytopes are points, 1-polytopes are line segments and 2-polytopes are convex polygons), by asking children of 4-7 years of age to draw a stairway of figures (triangles, squares and rectangles) with each shape being bigger than its preceding one. Results showed that children were mainly using two strategies while solving the problems: (a) conservation of shape, by increasing both dimensions of the figure and (b) increasing one dimension of the figure. Each strategy seemed to reflect a different way of reasoning and understanding, possibly corresponding to a different level of development in geometric thinking. Also, children were found to work relatively more flexibly with tasks using rectangles than tasks using squares.

In another study Gagatsis, Sriraman, Elia and Modestou (2006), offered a new and powerful perspective on investigating children's construction of geometric and spatial ideas. In particular, they theorized that a "good understanding" has two stages: the passive (and easier) one, such as classifying, identifying, and the active (and more difficult) one, such as acting on or manipulating objects (Markovits, Eylon & Bruckheimer, 1986). Therefore, their study explored the relationship between the passive stage in the understanding of geometric shapes, i.e., recognition of shapes among others, and the active stage in geometric understanding, i.e., dynamic transformation (increase or decrease) of shapes. In addition, their study investigated how these stages are associated with children's IQ, in relation to geometric understanding, strategies and skills. The results of their study were in line with the findings of the previous study (Elia and Gagatsis, 2003; Gagatsis & Patronis, 1990). More specifically three distinct geometric transformation strategies were applied by the children in a consistent way: a) O-strategy involving the differentiation of only one dimension of the figures; b) T-strategy representing the differentiation of both dimensions of the figures, thus conserving the initial form of the figures; and c) N-strategy standing for the drawing of a defective series of irregularly increasing or decreasing figures. The different strategies for the transformation of geometric figures were assumed to belong to different levels of cognitive development. In particular, the use of T-strategy may have had the characteristics of the Van Hiele's visual level, since children attended the geometrical figures as holistic visual prototypes and attempted not to change their appearance. Using the O-strategy, though, implies that children did not focus only on the form of the figure as a whole, but applied a continuous dynamic transformation, by changing a part of the attributes of the figure, such as one-dimensional units (line segments) and keeping other attributes, such as the parallel lines, invariant. This behavior indicates that children may have had the characteristics of a transitional stage between the van Hiele's visual level and descriptive level. The children who applied the N-strategy may have had the characteristics of a level lower than the visual one, namely prerecognitive level (Clements et al., 1999), as they had not yet developed the ability to recognize or construct specific geometrical figures.

Also, the study revealed that children's behavior towards the tasks varied with respect to their age. As children got older, they tended to apply the dynamic transformation process of O-strategy more frequently and coherently in the different figures. In addition, the IQ score was found to be directly associated with the transformation processes of figures applied mostly by 4-6 year-old children. Particularly, low IQ performance seemed to have a close relationship with the production of a defective series of figures for all the children of this study, while high IQ performance was found to be directly associated with the construction of a series of similar figures by increasing or decreasing both dimensions of the figures in the transformation tasks only for the youngest children. It is noteworthy that no relationships were found between the abilities of students to recognize geometrical figures and their geometric transformation strategies. Yet, children who exhibited low recognition ability were inclined to produce defective pathways of very irregular figures. This finding suggests that recognition tasks require different types of abilities relative to construction or transformation tasks. This is in line with Duval's theoretical position, mentioned above, that there are distinct types of geometrical figure understanding: perceptual, sequential, discursive and operative. Recognition abilities may refer to perceptual understanding, while geometric transformation processes may constitute a component of the operative understanding of geometrical figures.

The structure underlying the cognitive processes of perceptual, operative and discursive apprehension in geometrical figure understanding were investigated by Deliyianni, Elia, Gagatsis, Monoyiou and Panaoura (2009). Structural equations modelling affirmed the existence of six first-order factors standing for perceptual and recognition abilities, mereologic and place way abilities of modifying geometrical figures, and abilities of using geometrical properties and measurement concepts given in linguistic statements. Perceptual and recognition abilities were the basic components of a second-order factor representing perceptual apprehension of geometrical figures, mereologic and place way abilities of modifying geometrical figures were regressed on a second-order factor standing for operative apprehension of figures, and the abilities of using geometrical properties and measurement concepts given in linguistic statements comprised the second-order factor referring to the discursive apprehension of figures. The three second-order factors, perceptual, operative and discursive apprehension, were found to constitute a third-order factor that corresponded to the geometrical figure understanding. Evidence was provided for the invariance of this structure across elementary and secondary school students. However, differences existed in the geometrical figure understanding performance of primary and secondary school students. Particularly, secondary school students' performance was higher in all the dimensions of the geometrical figure understanding relative to the primary school students' performance.

It is acknowledged that through the operative apprehension of geometrical figures we can get an insight to a problem solution when looking at a figure (Duval, 1995). Thus, in a following study, Elia, Gagatsis, Deliyianni, Monoyiou and Michael (2009) focused on the operative apprehension of geometrical figures by examining the role the mereologic, the optic and the place modifications exert on operative figure understanding of sixth grade students in primary school. Structural equations modelling affirmed the existence of three first-order factors indicating the differential effects of the ways of figure modification and a second-order factor representing the operative apprehension. This finding lent support to Duval's (1995) conceptualization of the cognitive processes underlying operative figure understanding and suggested that, in order to develop the operative apprehension during mathematics instruction in primary school, emphasis should be given on the three types of figure modification, which provides figures with a heuristic function. Furthermore, the results revealed that differences existed between the students' performance in mereologic, optic and place modification tasks. Particularly, the sixth graders' performance on the mereologic modification tasks was significantly lower than the other two types of modification tasks. The weak performance on these tasks may have been caused by the fact that they required more complex figural processes relative to most of the other tasks. That is, the students needed to understand the division of the given figure into parts and their combination in another figure and proceed to calculations of specific areas or estimations of the figures' perimeter in order to provide a solution to the corresponding tasks.

Many studies in the field of mathematics education have explored geometrical figure understanding, while a great amount of studies in the field of cognitive psychology have examined spatial ability. However, limited attention has been given to the investigation of the interrelations between spatial ability and understanding of geometrical figures. In the next part of this study we attempt to identify and discuss the relations between the four apprehensions of geometrical figures proposed by Duval (1995, 1999) and spatial ability components, based on research in the field of cognitive psychology.

TRACING THE RELATIONSHIP BETWEEN SPATIAL ABILITY AND GEOMETRICAL FIGURE UNDERSTANDING

Spatial abilities are routinely implicated in accounts of creative and higher-order thinking in science and mathematics (Shepard, 1978; West, 1991). There is extensive research in mathematics showing a relationship between spatial ability and mathematical performance (e.g., Battista, 1990; McGee, 1979; Sherman, 1979; Smith, 1964) and reporting that spatial ability is important in learning many topics of mathematics (Bennett, Seashore, & Wesman, 1974; McNemar, 1964). According to Clements (1997), children who have strong spatial sense do better at mathematics. However, the role of spatial ability is elusive and, even in geometry, complex.

Considering the various components of spatial ability based on the literature and the four apprehensions of “geometrical figures”, we assume that there is a relationship between spatial ability and geometrical figure understanding. Specifically, spatial ability is more closely linked with perceptual and operative understanding of geometrical figures. Our hypothesis is substantiated below.

It seems that there is a similarity between Disembedding, the spatial factor defined by Kimura (1999) or the feature of spatial perception as defined by Linn and Petersen (1985) and Duval’s perceptual apprehension (1995, 1999). Kimura (1999) defined Disembedding as the skill that allows a person to find a simple object when it is embedded in a more complex figure. Perceptual apprehension, according to Duval (1995, 1999), indicates the ability to name figures and the ability to recognize in the perceived figure several sub-figures.

As Fischbein and Nachlieli (1998) point out, geometrical figures are simultaneously concepts and images (spatial representations). They are not mere iconic representations, but semiotic ones. A semiotic representation illustrates the organization of the relations between representational units. In the case of geometrical figures, these representational units can be one-dimensional or two-dimensional shapes. Therefore, in the learning of geometry it is not enough to see and understand what is represented at first glance. Here exists the difference between visual perception and visualization. Although visual perception is one of the most important factors affecting the ability to recognize plane shapes (perceptual apprehension), it only provides a direct access to the shape and never gives a complete apprehension of it. On the contrary, visualization is based on the production of a semiotic representation of the concept and gives at once a complete apprehension of any organization of relations (Duval, 1999). Visualization in mathematics requires specific training in order to go further from the first glance, to grasp directly the whole configuration of relations and to handle the figure as a geometrical object. According to English and Warren (1995), the way an individual visualizes a shape is one of the most important factors affecting the development of spatial ability and yet many people experience difficulty with this process.

In light of the above, spatial visualization is another component of spatial ability that is associated with geometrical figure understanding. Next, we explain that this close relationship is attributed mainly to one type of geometrical figure apprehension, that is, the operative apprehension.

A fundamental component of visualization is visual processing (Gutierrez, 1997). According to Yakimanskaya (1991), visual processing includes the following functions-processes of mental images:

a) Change in the position of the represented object, e.g. object rotation.

b) Change in the structure of the represented object. The image is transformed such that it has only a weak similarity with the initial form of the object.

c) Combination of the above changes (Yakimaskaya, 1991).

Similarly, operative apprehension, as proposed by Duval (1999), is a form of visual processing that concerns geometrical figures, that is, figural processing. Duval (1995, 1999) analyzes the form of visualization of geometrical figures by proposing three specific visual operations (mereologic way, optic way and place way) that concern exclusively this system of representation and that allow the change of any initial geometrical figure into another one, while maintaining the properties of the initial figure. In operative apprehension, the given figure becomes a starting point in order to investigate other configurations that can be obtained by one of these visual modifications. A geometrical figure has many possible configurations or sub-configurations, one of which may give insight into the solution of a problem. For example, drawing some units on a given figure is an indication of operative apprehension which may help in an investigation. But, this requires the ability to visualize the result of the configuration. Therefore, operative apprehension of geometrical figures can be considered as one dimension of spatial visualization.

We consider the above discussion about the connecting points between spatial ability and geometrical figure understanding as a start of future research projects aimed at investigating the relationship between the two constructs and their impact on the learning process in geometry. This research could provide answers to questions like: To what extent can we empirically verify a comprehensive structural model that integrates the effects of spatial ability and of the different types of geometrical figure understanding on the learning of geometry? To what extent does spatial ability affect geometrical figure understanding? To what extent does geometrical figure understanding influence spatial ability? What is the influence of age development and mathematics instruction on spatial ability and geometrical figure understanding? Can the development of spatial ability contribute to the development of the operative apprehension and other types of geometrical figure apprehension? What is the role of spatial ability in geometry problem solving which requires the interplay between geometrical figure understanding and deductive reasoning? Exploring empirically and giving answers to these questions could contribute to the important field of research concerning the learning of geometry and could be practically useful for the teaching of geometry in primary and secondary school.

REFERENCES

Battista, M. T. (1999). The importance of spatial structuring in geometric reasoning. *Teaching Children Mathematics, 6*(3), 170-177.

Battista, M. T., Wheatley, G. H., & Talsma, G. (1982). The Importance of Spatial Visualization and Cognitive Development for Geometry Learning in Pre-service Elementary Teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13(5), 332-340.

Bennett, G. K., Seashore, H. G., & Wesman, A. G. (1974). *Manual for the differential aptitude test (5th ed.).* New York: The Psychological Corporation.

Burnet, S. A. & Lane, D. M. (1980). Effects of Academic Instruction on Spatial Visualization. *Intelligence, 4 (*July- September): 233-242.

Clements, D. H. (1999). Geometric and Spatial Thinking in Young Children. In J. V. Copley (Ed.), *Mathematics in the early years* (pp. 66–79). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Clements, D. H. & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 420-464). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Clements, D., Swaminathan, M., Hannibal, M. Z. & Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30 (2), 192-212.

D'Oliveira, T. (2004). Dynamic Spatial Ability: an exploratory analysis and a confirmatory study. *The International Journal of Aviation Psychology, 14*, 19-38.

Deliyianni, E., Elia, I., Gagatsis, A., Monoyiou, A., & Panaoura, A. (2009, in press). A theoretical model of students' geometrical figure understanding. *Proceedings of CERME 6. Lyon, France.*

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processes. In R. Sutherland & J. Mason (eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematical education.* Berlin, Springer, pp. 142- 157.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st century*. Dordrecht, Kluwer Academic, pp. 37-51.

Duval, R. (1999). *Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for learning.* Retrieved from ERIC ED 466 379.

Elia, I. & Gagatsis, A. (2003). Young children's understanding of geometric shapes: The role of geometric models. *European Early Childhood Education Research Journal*, 11, 43 61.

Elia, I., Gagatsis, A., Deliyianni, E., Monoyiou, A., & Michael, S. (2009). A structural model of primary school students' operative apprehension of geometrical figures. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & C. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Vol.3* (pp.1-8). Thessaloniki, Greece: PME.

English, L. & Warren, E. (1995). Facility with plane shapes: a multifaceted skill. *Educational Studies in Mathematics*, 28 (4), 365-383.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(2), 139-162.

Fischbein, E., & Nachlieli, T. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International Journal of Science Education*, *20*(10), 1193- 1211.

Gagatsis, A, & Patronis, T. (1990). Using Geometric Models in a Process of Reflective Thinking in Learning and Teaching Mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 21, *29-54.*

Gagatsis, A., Sriraman, B., Elia, I., & Modestou, M. (2006). Exploring young children's geometrical strategies. *Nordic Studies in Mathematics Education, 11*(2), 23–50.

Goldberg, J. & Meredith, W. (1974). A longitudinal study of spatial ability. *Behavior genetics*, *5*(2)

Gutierrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In L. Puig and A. Gutierrez (Eds.) *Proceedings of the 20th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (vol.1, pp.3-19). Valencia: Universidad de Valencia.

Halpern, D.F. (2000). *Sex differences and cognitive abilities.* Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kimura, D. (1999). *Sex and Cognition.* Cambridge, MA:MIT Press

Linn, M. C., & Petersen, A. C. (1985). Emergence and characterisation of gender differences in spatial abilities: A meta-analysis. *Child Development, 56*, 1479-1498

Lohman, D. (1993) Implications of cognitive psychology for ability testing: three critical assumptions. In: Rumsey, M., Walker, G., Harris, J (eds.) *Personnel Measurement: Directions for Research*. Hillsdale NJ: Erlbaum

Markovits, Z., Eylon, B. & Bruckheimer, M. (1986). Functions today and yesterday. *For the Learning of Mathematics,* 6 (2), 18-24.

McGee, M. G. (1979). Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences. *Psychological Bulletin 86,* 889-918.

McNemar, Q. (1964) Lost: our intelligence? Why? *American Psychologist, 19, 8714~82*

Mesquita, A. L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 183-195.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Olkun, S. (2003). Making Connections: Improving Spatial Abilities with Engineering Drawing Activities *International Journal of Mathematics Teaching and Learning, April 2003.*

Pellegrino, J. W., Alderton, D. L. & Shute, V. J. (1984). Understanding spatial ability. *Educational Psychologist*, *19*(3), 239-253.

Shepard, R. N. (1978). The mental image. *American Psychology*. *33*:125–137.

Sherman, J. A. (1979) Women and Mathematics: Summary of Research from 1977-1979 NIE Grant. Unpublished manuscript.

Smith, I. M. (1964). *Spatial ability.* San Diego: Knapp.

Van Hiele, P. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. Orlando, FL: Academic Press.

West, T. G. (1991). *In the mind's eye.* Buffalo, New York: Prometheus Books.

Yakimanskaya, I. S. (1991). *Soviet studies in mathematics education: The development of spatial thinking in schoolchildren*. Reston, VA: NCTM.

QUELLE ARTICULATION ENTRE CONCEPTUALISATION ET CONFRONTATION AUX OBJETS SENSIBLES EN GÉOMÉTRIE À L'ÉCOLE PRIMAIRE?

Anne-Cécile Mathé

Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris Diderot, France, Laboratoire de Mathématiques de Lens, Université Lille Nord de France, Université d' Artois, France

RÉSUMÉ

En France, les activités de géométrie à l'école primaire proposent essentiellement un travail sur des objets sensibles: tracés de figures planes ou représentations diverses de solides. L'accès des élèves aux objets et propriétés géométriques visés par l'apprentissage leur impose de traduire ces objets sensibles en objets de connaissance dans le champ spécifique de la géométrie. Comment leur permettre d'opérer ce passage d'un registre de connaissances à un autre? Je souhaite illustrer le fait que l'articulation entre objets sensibles et objets géométriques soulève nécessairement un problème pragmatique, de l'interprétation à donner aux objets et aux actions dans le contexte de la géométrie. À partir d'un exemple de séance, je propose d'interroger quelques pistes didactiques pouvant participer à la prise en compte de ces questions dans la pratique des enseignants.

INTRODUCTION

Dans les programmes scolaires français, l'enjeu de l'enseignement de la géométrie à l'école primaire consiste, à partir d'activités sur des objets sensibles tels que des tracés de figures planes ou des représentations diverses de solides («reconnaissance», «description», «construction»), à amener les élèves à constituer des objets conceptuels ou « objets géométriques » tels que le cercle, le carré, le cube, objets qui se substituent alors progressivement à la notion première d'objet sensible. L'enseignement de la géométrie à l'école suppose donc, à partir de problèmes relevant de manipulations matérielles ou symboliques d'objets sensibles, de construire des concepts géométriques et de donner ainsi aux élèves accès à un domaine de connaissance relatif à une interprétation spécifique du réel: la géométrie (ou «géométrie élémentaire»). Pour Houdement et Kuzniak (2006, p.190), «la géométrie élémentaire fait rencontrer un monde idéal avec un monde matériel par l'intermédiaire des objets géométriques. L'activité géométrique peut alors être conçue comme un travail qui va mettre en relation une formulation théorique et un contenu matérialisable dans l'espace réel grâce à un ensemble d'outils spécifiques». Comment cette mise en relation entre le monde matériel et le monde de la géométrie peut-elle s'opérer ?

Je voudrais attirer l'attention, dans cette contribution, sur le fait que le jeu entre manipulation d'objets sensibles et accès au domaine de connaissance spécifique de la géométrie est fondamentalement problématique. Il induit nécessairement des problèmes d'ordre pragmatique et sémiotique, liés à l'écart entre les interprétations que font les élèves des objets, la signification qu'ils donnent aux manipulations, et la signification que nous, enseignants ou didacticiens qui nous plaçons dans le champ spécifique de la géométrie, nous donnons à ces confrontations aux objets. Arrêtons-nous un instant sur ce point.

Traditionnellement, dans les pratiques scolaires françaises, le rôle conféré aux activités de manipulations et actions sur les objets sensibles (ou confrontations aux objets [1]) me semble pouvoir admettre deux dimensions. Dans une *dimension ascendante,* l'idée consiste, à partir de situations [2] d'action sur un milieu matériel choisi, à faire émerger des connaissances sur les concepts géométriques visés par l'enseignant. Dans une *dimension descendante,* ces situations sont conçues et mises en place par les enseignants dans le but d'illustrer des connaissances géométriques préalablement rencontrées ou d'amener les élèves à appliquer ces connaissances, c'est-à-dire à les faire fonctionner de façon opératoire pour résoudre un problème donné [3]. Pour l'enseignant, les situations, de par le milieu matériel choisi, les questions formulées et les diverses consignes de production ont pour but d'amener les élèves à faire émerger ou utiliser des concepts géométriques ou leurs propriétés pour résoudre un problème posé sur des objets sensibles. L'entrée des élèves dans la géométrie suppose donc de développer une capacité à interpréter les objets sensibles (les représentations de figures planes ou de solides) et construire des schèmes d'action sur ces objets idoines au cadre de pensée spécifique de la géométrie. Or, nous savons, depuis les travaux de Wittgenstein (1945) et de Quine (1977), que la fréquentation d'un même objet sensible ou une expérience au sens de Conne (2008) peut donner lieu à une pluralité d'interprétations et donc de significations possibles en fonction de la «forme de vie» dans laquelle nous nous plaçons. La géométrie définit un cadre de pensée et une manière de voir le monde spécifiques. Les confrontations aux objets sensibles en classe de géométrie donnent à expérimenter à des individus aux connaissances et donc aux ontologies différentes. Les élèves entrent dans les activités de géométrie qui leur sont proposées dans une forme de vie qui leur est familière, souvent très éloignée du champ spécifique de la géométrie (Quine dirait que *la traduction commence «at home»*). Amener les élèves à entrer dans la géométrie consiste donc en une *acculturation* (Sarrazy, 2005), c'est-à-dire à les accompagner dans une modification de la façon d'interpréter les objets et les actions qui leur sont données à effectuer. Par là-même, comme j'avais pu le mettre en évidence dans ma thèse (Mathé, 2006), organiser un enseignement de la géométrie autour de confrontations à des objets sensibles induit nécessairement de faire face à des problèmes de signification des manipulations (matérielles et symboliques) en jeu. Bien que s'appuyant plutôt sur les cadres théoriques que nous livrent la théorie piercienne, Conne (2008, p.232) écrit: «C'est d'ailleurs une difficulté à laquelle se confronte tout enseignant d'imaginer ce qu'une expérience qu'il réserve à ses élèves pourra leur procurer, à eux qui n'ont justement pas les savoirs qu'il possède. Notre interprétation de ce que produisent et font les élèves pourra être faussée» La considération des cadres de pensée que nous donnent Quine et Wittgenstein ne peut que nous amener à rejoindre cette position. Vouloir faire des confrontations à des objets sensibles un lieu d'apprentissage en géométrie, que ce soit dans une dimension ascendante et/ou descendante, suppose en effet de considérer la nécessité d'accorder la manière de voir l'expérience des élèves à une interprétation adéquate au domaine spécifique de la géométrie qui, seule, peut leur donner accès aux connaissances géométriques visées. Or, ces problèmes de signification sont le plus souvent négligés, voire même ignorés dans l'enseignement de la géométrie. Pourtant, si les élèves et l'enseignant manipulent les mêmes objets sensibles et s'accordent même parfois sur des actions et un langage partagés sur ces objets, ils se placent, la plupart du temps, dans des formes de vie différentes, relatives à des savoirs, cadres théoriques, ontologies distincts. Ils assignent des significations différentes à la confrontation aux objets qu'ils sont en train de vivre, sans que ni l'enseignant, ni les élèves n'en aient conscience. La confrontation aux objets se développe ainsi dans un pernicieux malentendu, empêchant l'enseignant de montrer aux élèves ce que la confrontation donne à voir et entravant par là-même l'accès de ceux-ci aux enjeux d'apprentissage de la situation (Mathé, 2006). Mais alors, comment prendre en compte ces problèmes de signification dans les pratiques scolaires? La suite de ce texte vise à proposer et interroger des pistes didactiques susceptibles d'apporter des premiers éléments de réponse à cette question.

Dans un premier temps, je rapprocherai la question de la signification de la confrontation aux objets au problème de visualisation mis en évidence par Duval (2005), au cœur du travail d'un groupe de recherche de Lille. Je rendrai compte brièvement d'une expérimentation mise en place et observée pour une mise à l'essai de situations prenant en compte ces problèmes de visualisation. À partir de la mise en évidence de réussites et échecs de la séance observée, j'émettrai ensuite quelques hypothèses sur des conditions nécessaires à la construction par les élèves de connaissances en géométrie à partir de la manipulation d'objets sensibles et à certains moyens qui pourraient permettre à l'enseignant de faire des confrontations aux objets un lieu d'apprentissage effectif.

Dans un second temps, en me référant à quelques éléments d'analyse d'une seconde situation d'apprentissage, en géométrie des solides, je m'attarderai sur la nécessité d'un mouvement dialectique entre objets sensibles et objets géométriques pour assurer les conditions d'un apprentissage en géométrie, nécessité dégagée de l'analyse du premier exemple. Dans ce cadre, j'interrogerai plus particulièrement la place et le rôle d'un travail du langage dans les possibilités d'articuler confrontation aux objets et processus de conceptualisation.

SIGNIFICATION DE LA CONFRONTATION AUX OBJETS EN GÉOMÉTRIE PLANE ET PROBLÈME DE VISUALISATION : UN EXEMPLE DE SITUATION

Les changements de regard sur les figures, un pré-requis à une articulation entre confrontation aux objets et concepts géométriques à l'école primaire

Le premier exemple présenté dans le but d'apporter des pistes de réflexion quant aux possibilités de prendre en compte, dans des situations de classe, le problème de signification soulevé s'ancre dans une recherche menée par un groupe lillois autour de l'enseignement de la géométrie plane à l'école primaire [4]. Cette recherche, en étroite relation avec les travaux de Duval (2005), part du constat que l'organisation des objectifs d'enseignement en géométrie plane, dès l'école primaire, conduit les élèves à construire, à partir d'un travail sur des formes en deux dimensions, des concepts liés à des propriétés, des relations entre des objets relevant d'objets théoriques à une dimension (le segment, la droite), voire de dimension zéro (le point). Or, Duval (Duval, 2005; Duval & Godin, 2005) souligne qu'un tel ordre d'introduction des connaissances se heurte à la manière dont les figures sont perçues et interprétées en dehors des mathématiques. Ce qui, d'emblée, est reconnu comme une forme 2D ne se décompose pas perceptivement en un réseau de formes 1D: «l'introduction des connaissances géométriques va à l'encontre des processus spontanés d'identification visuelle des formes» (Duval & Godin, *ib.*, p.7). Le témoignage de professeurs avec lesquels nous travaillons dans les écoles et de nombreux travaux de recherche (Celi, 2002; Berthelot & Salin, 2000) soulignent les difficultés des élèves concernant l'appréhension de la figure dans la résolution de problèmes de géométrie et notamment au collège, y compris dans le passage à la démonstration. L'entrée dans un processus de conceptualisation en géométrie à l'école implique donc la prise en compte par l'enseignant d'un travail autour de la déconstruction dimensionnelle des figures et de la capacité des élèves à exercer un changement de regard sur ces objets : «sans une telle transformation de la manière spontanée et prédominante de voir, toutes les formulations de propriétés géométriques risquent d'être des formulations qui tournent à vide» (Duval & Godin, 2005, p.8). L'expérimentation présentée ici est motivée par la question suivante: comment permettre aux élèves et aux enseignants de travailler la question du rapport aux figures ?

La problématique de départ de l'expérimentation en classe présentée ici est donc en lien direct avec les problèmes de signification soulevés dans le paragraphe précédent, même si elle n'y est pas exprimée de la même manière. En effet, dire que les élèves ont une appréhension des figures différente de celle idoine au cadre de la géométrie revient à dire que, parce qu'ils se situent dans des formes de vie différentes de celle de la géométrie, les élèves développent spontanément des interprétations des figures non conformes à la manière spécifique de voir les objets en géométrie et que ces interprétations font obstacle à leur accès aux apprentissages visés. Dans ce contexte, la question pourrait être exprimée de la façon suivante: quel type de situations pourrait-on imaginer pour permettre à l'enseignant de prendre en compte et de gérer la tension entre les interprétations spontanées des figures par les élèves et une interprétation idoine au contexte de la géométrie?

Comment amener les élèves à un changement de regard sur les figures pour un accès aux concepts géométriques?

La problématique d'acquisition par les élèves d'un rapport aux figures spécifique à la géométrie, c'est-à-dire, d'une mobilité du regard entre surfaces, lignes et points dans la vision d'une figure, nous a conduit à un travail autour de la conception et de l'expérimentation, en fin d'école primaire, de situations dans lesquelles cette mobilité est une clé à la résolution du problème. «Nous faisons l'hypothèse qu'il est possible d'amorcer, à partir de situations bien choisies, un travail sur les figures planes qui permette le développement chez l'élève d'habiletés en analyse de figures géométriques favorisant la mobilité du regard que nous cherchons» (Keskessa, Perrin-Glorian & Delplace, 2007, p.37). Dans leurs articles, Duval et Godin (2005) et Keskessa, Perrin-Glorian et Delplace (2007) présentent des exemples de telles situations. Le principe de ces situations, appelées «situations de restauration de figures », consiste à demander aux élèves de reproduire une figure modèle donnée à partir d'une amorce (ou partie) de cette figure. Il n'est donné aux élèves aucune indication de mesure de longueur. Ceux-ci ont à leur disposition tous les instruments disponibles. Toutefois, il est introduit un système de coûts à l'utilisation des instruments, ce qui permet la réussite par des procédures diverses convoquant plus ou moins de connaissances géométriques mais incite à utiliser certains instruments plutôt que d'autres et donc à faire émerger certaines propriétés de la figure et à développer les connaissances géométriques visées.

Un exemple de situation

Nous nous intéresserons ici plus particulièrement à une situation expérimentée dans une classe de CE2 (élèves de 8 ou 9 ans). Pour l'enseignant, l'objectif de l'activité consiste à amener les élèves à mettre en évidence des propriétés d'alignement de segments et de points sur une figure donnée et à utiliser ces propriétés pour construire des droites et localiser des points. Plus largement, il s'agit de construire des connaissances sur les concepts de segment, droite et point. Pour les élèves, l'objectif est de compléter une amorce afin de restaurer une figure modèle, en mettant en œuvre la méthode la moins coûteuse possible. Outre les propriétés géométriques de la figure à reproduire, les variables didactiques sont les propriétés de l'amorce fournie, les instruments disponibles et les règles de coûts de l'usage des instruments.

La fiche distribuée aux élèves est partagée en deux parties: en haut, la figure modèle, en bas, l'amorce de la figure à compléter afin de reproduire exactement la figure modèle (voir figure 1).

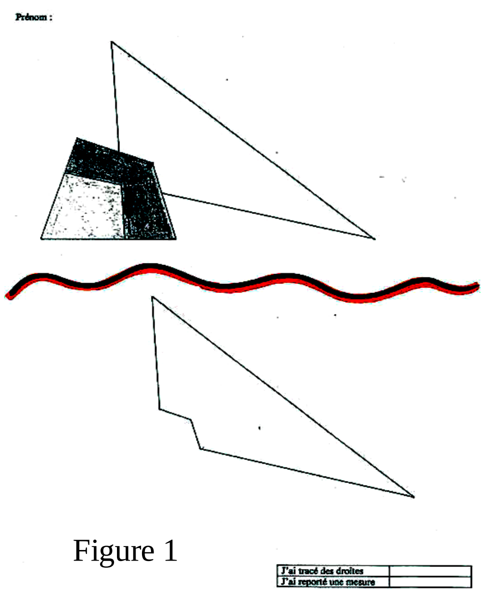


Figure 1

Les élèves ont à leur disposition une réglette non graduée dite «informable» violette (sur laquelle il est possible d'écrire) permettant à la fois de tracer des droites sur la figure modèle et de reporter des longueurs de la figure modèle à la figure en construction (sans recours à la mesure) et une réglette non graduée non «informable» (plastifiée) blanche permettant de tracer des droites dans la figure à construire. Les règles de coût des instruments sont les suivants : 0 point pour le tracé d'une droite sur la figure modèle ; 1 point pour le tracé d'une droite, avec la réglette blanche, pour compléter l'amorce ; 3 points pour un report de longueur, au moyen de la réglette violette, de la figure modèle à la figure à construire. Les élèves assignent une couleur à chaque droite tracée lors de l'analyse de la figure modèle et inscrivent un trait de la même couleur dans le cadre prévu lorsqu'ils tracent la droite correspondante dans la seconde partie de la fiche. Ils notent ainsi chaque action effectuée sous forme d'une «écriture additive», ce qui les aide ensuite à compter le coût de leur restauration.

Au regard du choix des propriétés de la figure, de l'amorce et des règles de coûts choisies, la procédure attendue des élèves est la suivante:

1. Analyse de la figure modèle au regard de l'amorce. L'élève trace les sept droites «remarquables» qui lui permettront de compléter l'amorce (voir figure 2).
2. L'élève commence par tracer les cinq droites qu'il peut construire à partir des segments et points figurant dans l'amorce. Apparaît ainsi un des points à construire. Pour chaque droite tracée, il inscrit un trait de la couleur correspondante dans la case «j'ai tracé une droite» (voir figure 3).
3. L'élève doit recourir à un report de longueur du modèle à la figure à compléter. (Plusieurs stratégies possibles). Il inscrit un trait dans la case «j'ai reporté une longueur» (voir figure 4).
4. L'élève peut tracer les deux droites manquantes et faire apparaître les cinq autres points. La figure est restaurée. L'élève valide alors sa production par superposition avec un papier calque puis compte le coût de sa restauration (voir figure 5).

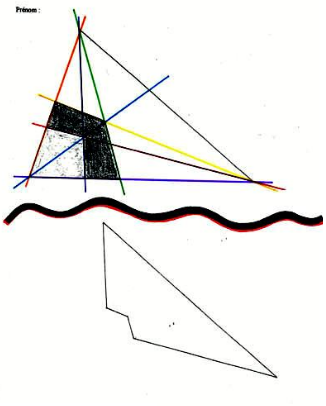


Figure 2

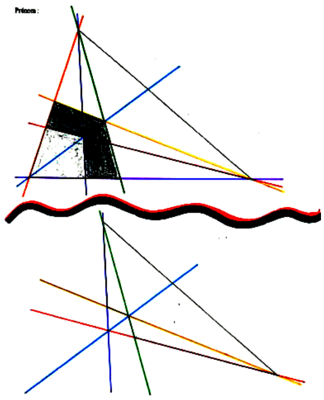


Figure 3

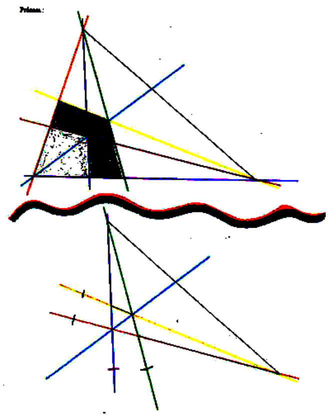


Figure 4

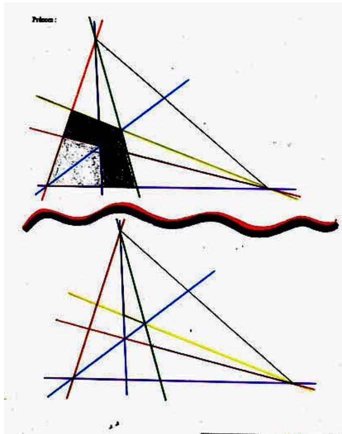


Figure 5

La figure choisie présente de façon sous-jacente un réseau riche de propriétés d'alignement de segments et de points. Nous le voyons plus précisément à travers la présentation de cette situation, le choix de l'amorce détermine la nature du différentiel entre amorce et figure modèle. Il définit donc la nature de l'invisible que les élèves vont avoir à mettre en évidence lors de l'analyse de la figure modèle afin de parvenir à construire une figure identique à partir de l'amorce. L'analyse de la situation et l'observation de la mise en œuvre de la séance en classe nous montrent que les élèves appréhendent d'abord la figure modèle et l'amorce comme surfaces ou assemblage de surfaces, conformément à ce que serait la vision spontanée de l'objet hors du contexte de la géométrie. Toutefois, le choix de la figure modèle et de l'amorce et les règles de coûts amènent les élèves à modifier leur regard sur ces objets et à considérer les propriétés visuelles traduisant les positions relatives des bords de ces surfaces puis les propriétés relevant des positions relatives des points d'intersection de ces bords. Ce travail prend en charge de façon innovante les problèmes de signification de la confrontation aux objets que je tente de questionner ici. L'expérimentation présentée permet de livrer de premières pistes quant à certains moyens d'accorder les manières de voir et de penser des élèves pour les amener à une interprétation des objets et des actions sur ceux-ci conforme à la forme de vie de la géométrie. Entrer dans la géométrie, c'est-à-dire apprendre à voir et analyser une figure en géométrie, consiste à opérer une modification de la signification des données observationnelles. Quels sont les moyens proposés à travers ces activités pour accompagner les élèves dans cette modification? Le parti pris dans la conception de ces situations (et corroboré par les observations en classe) est de faire des instruments un vecteur-clé du jeu entre ces différents cadres de pensée. Pour nous, le jeu sur les instruments, en situation d'action sur les objets sensibles, permet à l'enseignant d'inverser la prédominance chez les élèves d'une analyse «perceptive» sur une analyse «géométrique» des figures. Par les contraintes imposées sur l'utilisation des instruments, via le système de coûts, l'enseignant conduit les élèves vers une analyse des figures en termes d'unités de dimension un ou zéro et provoque alors un changement de leur rapport aux objets, articulant ainsi analyse perceptive et analyse géométrique des figures.

Le jeu sur les instruments, un vecteur de questionnement, avec les élèves, sur la signification des objets dans le contexte de la géométrie

Il nous paraît tout d'abord important de distinguer deux dimensions dans l'utilisation des instruments de tracé usuels en géométrie, en particulier à la fin de l'école primaire. D'une part, les instruments peuvent servir à repérer ou construire des éléments graphiques. D'autre part, leur utilisation peut relever de la mise en œuvre des propriétés géométriques. L'instrument devient alors instrument de géométrie servant à représenter, dans un certain registre de représentation, un objet théorique en fonction des propriétés géométriques que les élèves lui reconnaissent et dont ils ont besoin pour la résolution du problème. Ainsi, l'usage des instruments en géométrie ne relève pas uniquement de la perception : ils peuvent produire des tracés qui possèdent des propriétés graphiques traduisant des propriétés géométriques et permettant de les rendre visibles. On recourt aux instruments pour produire des propriétés graphiques particulières anticipées grâce à des connaissances géométriques et on utilise la vue pour les contrôler (Perrin-Glorian, à paraître). La façon dont les élèves utilisent les instruments pour leurs actions sur les objets sensibles du milieu matériel de la situation est donc étroitement liée à la façon dont ils perçoivent et interprètent ces objets. L'analyse du mode d'usage des instruments par les élèves lors de leur fréquentation des figures peut ainsi donner des indices sur les significations qu'ils assignent à ces objets et aux actions sur ces objets. Offre, Perrin-Glorian et Verbaere (2006, p. 7), à travers l'analyse de situations en classe, ont montré que «l'usage des instruments ne va pas de soi et qu'une présentation ostensive ne saurait suffire pour que les élèves puissent acquérir des schèmes d'utilisation des instruments qui leur permettent de conjuguer maîtrise technique et utilisation à bon escient des propriétés géométriques». Or, la prise en compte des problèmes de signification soulevés dans le premier paragraphe nous aide à comprendre pourquoi : les élèves ne peuvent recourir à un usage réglé des instruments que s'ils interprètent leurs actions sur les objets dans le domaine des connaissances géométriques et nous avons montré que tel n'était *a priori* pas le cas. Un travail vers un usage réglé des instruments, de l'utilisation de gabarits ou de pochoirs, «instruments 2D», à l'utilisation de la règle, du compas pour tracer des lignes ou des points, constitue donc une piste didactique pour la prise en compte des problèmes de signification dont il est question ici.

Retour à la situation : des dysfonctionnements observés

Toutefois, si l'on revient à la situation présentée, la question des conditions permettant l'articulation entre travail sur les objets et conceptualisation est loin d'être résolue. En effet, la situation permet d'accompagner les élèves dans une déconstruction dimensionnelle des figures et les amène à passer d'une interprétation des figures en termes de surfaces à la mise en évidence puis l'utilisation de propriétés quant aux positions relatives d'unités de dimension un (les bords des surfaces puis les lignes matérialisant les propriétés d'alignement de ces bords) ou zéro (les points d'intersection de ces bords ou lignes). On peut cependant se demander si les élèves parviennent à inclure dans le cadre théorique de la géométrie les propriétés visuelles qu'ils dégagent. En particulier, la confrontation aux objets mise en place ici pour sa dimension ascendante remplit-elle bien sa fonction ? Les élèves reconnaissent-ils les propriétés géométriques qu'ils font émerger lorsqu'ils travaillent sur les objets locaux et particuliers que sont les figures de travail, les traits qui en délimitent les contours, les lignes, prolongement de ces traits ou les points, point d'intersection de ces lignes? Plusieurs indices nous laissent penser que non. Je mentionnerai un exemple d'échange relevé lors de la mise en commun organisée par l'enseignante à la fin de l'activité. Les élèves ont explicité et confronté les procédures leur ayant permis d'effectuer avec succès les deux premières étapes de la résolution de la tâche. Ils doivent maintenant expliquer les stratégies qu'ils ont élaborées pour placer les deux autres droites, c'est-à-dire expliquer comment ils ont procédé pour effectuer un report de longueur de la figure modèle à la figure en construction. Un élève vient alors au tableau et explique qu'à l'aide de la règle informable, il est parvenu à placer le sommet manquant du triangle « englobant » la figure complexe en faisant pivoter autour d'un des sommets de ce triangle la règle informable sur laquelle il avait relevé la longueur d'un des côtés du triangle. Le sommet est ainsi obtenu comme point d'intersection de l'arc de cercle formé et d'une des droites déjà tracées. L'enseignante valide cette procédure et reprend la formulation de l'élève : «on peut faire bouger la règle jusqu'à ce qu'elle touche la droite rose», sans que jamais ne soient mentionnées les notions de cercle ou de point d'intersection du cercle et de la droite. Or, la technique élaborée par l'élève aurait pu donner lieu à l'explicitation des propriétés géométriques qu'elle mettait en œuvre : un cercle est l'ensemble des points situés à égale distance de son centre ; la droite et le cercle admettent ici deux points d'intersection. Les élèves et l'enseignante restent donc constamment dans un cadre de pensée pratique et dans la considération de techniques de construction locales. Les élèves ne sont pas amenés à réinterpréter les objets qu'ils manipulent comme signes référant à des objets conceptuels géométriques et à mettre en relation ces techniques avec la construction de connaissances sur ces objets.

Cette difficulté me semble trouver sa source dans le fait que le cadre de pensée (forme de vie) de la géométrie se construit, certes, dans l'interaction de celui qui apprend avec les objets sensibles dans une situation choisie (et dans un dialogue social au sein de la classe), mais que l'emploi des nouveaux objets de pensée construits (au sens de façon correcte de dire, faire, utiliser) est soumis à des règles établies et contrôlées par la communauté scientifique et scolaire, hors de l'interaction des élèves à la situation. En classe, de premiers concepts quotidiens (au sens de Vygotski (1933)) émergent dans l'interaction des élèves à la situation, par le biais de l'identification de régularités de propriétés utiles pour l'action sur des objets sensibles de la situation et donc de schèmes d'action sur ces objets. Se développe alors une dialectique de la formulation (Brousseau, 1998, p.36): soumis à des contraintes de communication des actions sur les objets sensibles, les élèves mettent progressivement au point, dans une interaction entre élèves et entre les élèves et la situation, «un langage que tout le monde compre[nd] et qui pre[nd] en compte les objets et les relations pertinentes de la situation de façon adéquate (c'est-à-dire en permettant les raisonnements utiles et adéquates pour l'action)». Ce sont les interactions entre élèves et entre les élèves et la situation qui permettent d'accompagner les élèves dans un questionnement sur le regard à porter sur les objets et les guider, par des situations choisies, vers une manière de voir et de penser spécifique à la géométrie. Toutefois, seul l'enseignant a la capacité de fixer la façon dont on parlera, dans le champ de la géométrie, des objets conceptuels qui se construisent par interaction des élèves aux objets de la situation. La forme de vie « géométrie » se construit chez les élèves à travers l'évolution de leurs interprétations des objets et de leurs modes de traitement, mais les règles régissant la façon correcte de parler de ces objets sont fixées par l'enseignant. Dans un premier temps, l'enseignant aménage les conditions d'interactions entre les élèves et la situation (et entre les élèves). Dans un second temps, il doit faire valoir sa position d'expert en apportant de manière interventionniste dans le milieu des élèves les règles d'emploi idoines des objets conceptuels qui se construisent pour que les concepts quotidiens élaborés pour l'action puissent laisser place à des concepts scientifiques (géométriques) conformes aux usages scolaires et scientifiques. Une fois les règles d'usage des mots fixées, la confrontation aux objets participe alors dans une autre dimension à mettre en lien objets et concepts: elle permet cette fois aux élèves de remplir le concept nommé de différents objets et d'éprouver l'usage du concept dans différentes situations d'action sur les objets.

Les dysfonctionnements observés ici ne se situent donc pas au niveau des interactions des élèves à la situation mais dans le fait que l'enseignant ne permet pas à ceux-ci d'opérer un changement de registres. L'Espace de Travail Géométrique (ETG, au sens de Kuzniak et Houdement (2006)) de l'enseignant étant finalement très proche de celui des élèves, celui-ci n'assure pas l'enrichissement du milieu nécessaire pour que les élèves puissent passer de l'élaboration de schèmes d'actions locaux sur les objets de la situation à l'identification de connaissances construites sur les concepts géométriques sous-jacents.

Je terminerai ce paragraphe en insistant sur deux points importants. Tout d'abord, cette rapide analyse nous montre que, contrairement à ce que pourraient laisser entendre de nombreuses pratiques scolaires, il apparaît illusoire de penser que le concept puisse émerger directement de la fréquentation d'objets dans une situation choisie. Les difficultés rencontrées lors de l'expérimentation présentée (qui, je pense, ne sont qu'une illustration de dysfonctionnements courants dans les classes, à en juger par les observations que j'ai pu y mener) montrent en effet que les liens entre objets et concepts ne peuvent se faire de manière ascendante, de la confrontation des objets au concept géométrique, mais, pour être générateurs d'apprentissage en géométrie, ces liens doivent s'établir dans des *allers-retours* entre objets et concepts.

Ainsi, pour que les élèves puissent construire des connaissances géométriques à partir du travail sur les objets, il est nécessaire d'organiser un lieu dans lequel ils soient amenés à élaborer des concepts quotidiens locaux pour l'action, d'une part, puis de convoquer, grâce à l'intervention de l'enseignant sur le milieu, les concepts géométriques en jeu : subsumer le trait dans le concept du segment, la ligne qu'il trace dans le concept de droite. Le travail non seulement dans mais sur le langage, via les interactions langagières en classe, s'impose à nous comme un lieu privilégié et incontournable pour l'aménagement d'allers-retours entre les objets sensibles et les concepts qui se construisent. Deux pistes de travail s'ouvrent alors à nous:

- Comprendre en quoi le fonctionnement même du langage, par son caractère référentiel et contextuel, permet de faire des interactions langagières en classe un vecteur d'allers-retours entre confrontation aux objets et conceptualisation en classe de géométrie [5].

- Mettre en lien cette sensibilité au langage avec une réflexion sur un milieu didactique favorisant les interactions langagières et parvenir à dégager des conditions sur la situation, le rôle, la place et l'apport de l'enseignant sur le milieu de l'élève qui permettent aux interactions langagières de fonctionner en classe de géométrie.

PISTES DE RÉFLEXION SUR LE RÔLE DU LANGAGE DANS L'ARTICULATION ENTRE OBJETS ET CONCEPTS

Les interactions langagières : le lieu des allers-retours entre objets et concepts dans les confrontations aux objets considérées dans leur dimension ascendante

Dans le cas de la situation présentée précédemment, par le choix de la tâche, de la figure modèle, de l'amorce, des règles de coûts sur les instruments, les élèves sont amenés à entrer dans une démarche de déconstruction dimensionnelle des figures et à relever des propriétés relatives à l'alignement de segments ou de points d'intersection de droites portant ces segments. Une première observation attentive du langage mis en œuvre par les élèves dans la situation montre que, lorsqu'ils formulent leurs actions, les élèves modifient la façon dont ils interprètent les objets à la façon dont ils les désignent, passant d'expressions telles que « la forme» à l'évocation des « bords » puis de «traits» pour enfin parler de «droites», de «points». L'action amène les élèves à sélectionner, parmi les propriétés visuelles qu'ils identifient sur les objets, les propriétés qu'ils reconnaissent à l'objet et dont ils ont besoin pour résoudre le problème. Soumis à des contraintes d'explicitation, ils construisent, par nécessité, un langage qui met en lien l'objet et les propriétés qu'ils prennent en compte pour l'action : lorsqu'ils prolongent un segment afin de mettre en évidence que deux segments sont portés par la même droite par exemple, les élèves ont besoin d'un terme leur permettant de distinguer segment (ou «trait») auquel ils reconnaissent deux extrémités et la droite (vue comme un segment que l'on peut prolonger autant que l'on veut). Les élèves ajustent la manière dont ils voient les objets, dont ils utilisent les instruments et la façon dont ils parlent des objets pour se donner des moyens d'agir de façon opératoire dans la situation. C'est en reconnaissant des propriétés communes à différents objets qu'ils manipulent, les différents segments délimitant la figure ou les droites portant ces segments par exemple, que les élèves subsument ces objets dans les concepts géométriques qu'ils appelleront ensuite, avec l'aide de l'enseignant, segment ou droite. Le choix du terme est en effet pris en charge par l'enseignant qui veille à la conformité du langage qui se construit avec les usages scolaires et institutionnels et assure de façon déterminante, par le biais de ce travail sur le langage, les conditions d'accès des élèves au cadre théorique de la géométrie, régi par des usages et des règles extérieurs à l'interaction des élèves avec la situation. Les élèves donnent ensuite sens aux concepts et construisent des connaissances à leur sujet en les remplissant d'objets matériels de la situation vérifiant des propriétés communes. De façon concomitante, les élèves construisent progressivement et éprouvent, sous les contraintes de l'action et de façon partagée, une manière de voir, d'agir et de parler spécifique à la géométrie. Le travail dans et sur le langage me semble donc constituer un lieu-clé incontournable permettant de faire fonctionner en situation d'action les va-et-vient entre objets et concepts au cœur du processus de conceptualisation en géométrie à l'école primaire.

Je n'ai évoqué jusqu'ici que le cas de confrontations aux objets considérées dans leur dimension ascendante, de l'objet matériel au concept. Je voudrais terminer ce texte en évoquant brièvement le rôle du langage dans les confrontations aux objets prises pour leur dimension descendante, pour illustrer un concept où les élèves sont amenés à faire fonctionner des concepts géométriques dans la résolution d'un problème sur des objets matériels.

Les interactions langagières en classe, un lieu permettant un questionnement sur le sens des concepts

L'analyse de cette situation fait l'objet de ma thèse (Mathé, 2006). Il s'agit d'une activité de classement de solides présentés aux élèves sous forme d'emballages ménagers pour laquelle les élèves vont devoir convoquer et mettre en œuvre les concepts de face (de solides), polygone, côté (de polygones) et d'arêtes. Pour l'enseignant, l'objectif de cette activité est d'amener les élèves à convoquer leurs connaissances sur les objets théoriques que constituent les solides et les polygones en situation d'action sur les objets concrets que sont les emballages et autres objets (boîtes de lessive ou d'emballage de différentes proportions, boîte de camembert, boîte de «Toblerone », balles de tennis…). Il les invitera par la suite à remplir un tableau à deux colonnes – « toutes les faces sont des polygones», «il y a des faces qui ne sont pas des polygones », mais la fiche n'a pas encore été distribuée aux élèves. Ces concepts de *face de solide, polygone, côté* ont déjà été définis en classe (les élèves disposaient par exemple dans leur cahier de leçon d'une définition de polygone comme « forme à plusieurs côtés») et les élèves ont rencontré et utilisé ces concepts dans d'autres situations au cours de l'année et des années précédentes. C'est dans cette mesure que l'enseignant suppose que les élèves disposent de ces différents concepts. C'est donc bien la dimension descendante de la confrontation aux objets qui est utilisée ici par l'enseignant : il s'agit pour lui d'amener les élèves à faire fonctionner certaines de leurs connaissances géométriques pour résoudre le problème posé.

Après avoir illustré les difficultés rencontrées à travers quelques exemples d'interactions langagières observées, mon but consiste ici à montrer, à travers la présentation d'éléments d'analyse du début de l'activité observée, dans quelle mesure les jeux de langage [6] développés dans l'action (ici, action de classement des objets) constitue un lieu permettant de faire émerger un questionnement sur le sens des concepts que les élèves engagent pour la résolution de la tâche.

Confrontés à la nécessité de classer les objets qui leur sont présentés, les élèves se mettent d'abord d'accord pour retenir comme critères de classement «la forme» des objets puis la «forme de leurs faces». Ils distinguent ensuite deux classes d'objets appelées « les formes polygonales » et «les formes rondes», expressions dont la compréhension semble d'abord être partagée. Cependant, un élève intervient au cours des échanges pour exprimer sa difficulté à saisir les objets désignés par l'expression «forme polygonale». Invités par l'enseignant à traduire cette expression, les élèves se réfèrent à la définition dont ils disposent: «un polygone est une forme à plusieurs côtés». Mais ils identifient avec peine les objets remplissant ce concept.

Une analyse des significations assignées par les élèves au terme « forme » dans les jeux de langage de la situation montre que ceux-ci l'utilisent pour désigner indifféremment l'allure générale d'un solide ou d'une figure plane : le concept de «forme» est donc à la fois rempli par des objets en trois dimensions («formes des emballages») et des objets en deux dimensions («cercle», «ovale»). Notons d'ailleurs qu'il ne peut en être autrement puisque, même si ce mot figure dans les Instructions Officielles relatives au cycle 2, le mot «forme» n'appartient pas au vocabulaire de la géométrie et ne jouit pas de règles d'usage clairement définies dans ce contexte. Les élèves utilisent ce mot en suivant les règles de l'usage qu'ils en connaissent dans le langage courant. Parallèlement, le mot «côté», spontanément associé à l'adjectif «plat», désigne dès le début de l'activité pour les élèves une des faces des solides. Cet usage, bien sûr non conforme à l'usage du mot dans le contexte spécifique de la géométrie, est cependant dans un premier temps opératoire en situation car les élèves en partagent la référence : les élèves délimitent la classe des « formes rondes» par l'expression « formes [qui] ont des côtés qui ne sont pas des côtés plats». Comme pour le mot «forme», cet usage du terme «côté» ne semblait d'abord pas générer de difficulté – signification non adéquate au contexte de la géométrie mais opératoire en situation puisque les élèves semblaient en partager la référence. Mais le travail d'explicitation de la définition de «polygone», d'abord conçu par l'enseignant comme une phase de rappel d'une leçon précédente, met en lumière, dans les échanges langagiers autour de l'action sur les objets, la divergence des significations assignées au mot «côté» puis au mot «polygone». L'enseignant, qui prend conscience des difficultés qui émergent, invite alors un élève à dessiner au tableau «ce qu'il pense être un polygone». L'élève commence par tracer un rectangle au tableau. Les discussions s'engagent alors pour déterminer le caractère polygonal du rectangle, mais l'élève intervient et signale à l'enseignant qu'il n'avait pas terminé: il voulait dessiner un pavé («faire les côtés»). Le dessin par un élève d'un objet qu'il pense appartenir à ce concept montre que les élèves ont développé au cours des jeux de langage des interprétations contradictoires du terme «côté». Alors que la majorité d'entre eux associent à ce mot une face de solide, quelques-uns s'attachent à distinguer les références de «face» et «côté» et interprètent le mot «côté» comme un segment délimitant une figure plane. Se développent alors des échanges entre élèves, dans lesquels chacun expose et appuie son interprétation du mot. Les deux parties s'opposent.

Mon travail de thèse m'a permis de montrer que c'est parce qu'ils sont confrontés à des objets matériels pour la construction d'une action commune sur ces objets que les élèves (et l'enseignant) prennent conscience de divergences dans la signification qu'ils assignent aux concepts, ici de côté et de face, convoqués comme outils théoriques pour l'action. Bien que manipulant les mêmes objets et utilisant dans un premier temps les mêmes mots pour décrire leurs perspectives d'action sur ces objets, les élèves développent des interprétations différentes des mots car ils ne se situent pas dans les mêmes «formes de vie». Sans que les intervenants n'en aient d'abord eu conscience, nous observons ainsi la coexistence de discours contradictoires sur les objets de la situation, ce qui révèle que le sens donné par les élèves aux concepts en jeu n'est pas conforme au cadre théorique de la géométrie. Par le biais d'interactions langagières, les élèves et l'enseignant parviennent toutefois à mener un travail d'explicitation, de confrontation et d'évaluation des significations assignées aux termes en jeu. Ce travail génère ainsi un questionnement d'ordre linguistique et ontologique (nous rejoignons ici les travaux de Héraud, Clément & Errerra (2004)): linguistique parce qu'il naît de la contradiction dans l'usage des mots, ontologique parce qu'il porte sur le discours à élaborer sur les choses. Comme l'émergence directe de concepts de la confrontation aux objets s'était avérée impossible précédemment, l'organisation de l'action des élèves sur les objets matériels en utilisant les concepts géométriques en jeu se heurte également à des problèmes de signification sous-jacents que peut prendre en compte et dépasser un travail dans et sur le langage.

Que les confrontations aux objets soient considérées et mises en place par l'enseignant dans une dimension *a priori* ascendante ou descendante, l'articulation entre objets sensibles et concepts géométriques ne peut donc se faire que dans un mouvement dialectique de va-et-vient entre ces deux pôles que nous pourrions synthétiser dans un premier temps par le schéma suivant:

Expérience imaginée - Champ des possibles
Modification de la manière de voir, d'agir et de parler des objets.
Les objets deviennent des représentants d'objets conceptuels.
Exemple de lieu d'exercice de ces changements : le mode d'usage des instruments.
Rôle du travail dans et sur le langage.

Action locale et matérielle sur des objets sensibles

Cadre théorique de la géométrie
Concepts géométriques
Règles d'emploi (faire, dire, agir) fixées par l'enseignant via le langage

Les élèves éprouvent la signification et l'emploi des concepts dans le cadre de la géométrie, en remplissant ces concepts d'objets et en faisant fonctionner pour la résolution de problèmes locaux et matériels.
Le travail dans et sur le langage permet de mettre à jour les écarts d'interprétations des mots désignant les concepts et d'expliciter les règles d'emploi des concepts géométriques.

CONCLUSION

Je m'étais engagée, dans l'introduction de ce texte, à interroger les conditions d'articulation entre confrontation aux objets et processus de conceptualisation en géométrie à la fin de l'école primaire. En premier lieu, il me paraît important d'insister sur le fait que la succincte présentation de deux situations montre que, si le travail sur les objets constitue aujourd'hui l'essentiel des activités proposées en géométrie à l'école primaire (et après), l'articulation entre confrontation aux objets et travail sur les concepts géométriques ne va pas de soi. L'interprétation que les élèves peuvent développer d'un objet ou d'une expérience est multiple. La géométrie constitue une forme de vie supposant une manière particulière de voir le monde. L'entrée dans la géométrie à partir d'une expérience de l'objet suppose donc l'exercice d'un mouvement dialectique aménageant des allers-retours entre les objets et les concepts. Rapprochant les problèmes de significations ainsi soulevés des problèmes de visualisation mis en évidence par Duval, nous avons évoqué un exemple de situation permettant de prendre en compte le problème de changement du rapport aux figures dans l'enseignement de la géométrie à la fin de l'école primaire.

Toutefois, la présentation de la mise en œuvre de cette situation en classe nous montre que le travail autour de la construction d'interprétations des objets idoines au cadre théorique de la géométrie constitue une condition nécessaire mais non suffisante à l'articulation entre travail sur les objets et construction de connaissances sur des concepts, dans la mesure où le processus de conceptualisation ne peut se faire que dans un mouvement de va-et vient entre objets et concepts en situation d'action sur les objets. La question réside donc dans les modalités qui permettraient d'aménager des allers-retours entre objets et cadre théorique en situation. L'étude de la façon dont les élèves manipulent les objets via les instruments et la conception de situations amenant les élèves à faire progresser leurs usages en situation d'action sur les objets livrent une première piste de réflexion.

Par ailleurs, l'analyse de dysfonctionnements observés lors de la mise en œuvre de cette situation, comme l'analyse d'interactions langagières dans une classe de géométrie des solides (Mathé, 2006) m'ont permis de mettre en évidence l'importance fondamentale à accorder au travail dans et sur le langage si l'on veut faire de la confrontation aux objets un élément constitutif du processus de conceptualisation : les élèves n'apprennent pas dans le langage mais par le langage. Le langage, intrinsèquement contextuel, est un élément indiciel de la forme de vie dans laquelle on se place, c'est-à-dire du discours que l'on porte sur les objets et de la théorie (ou vision du monde) dans laquelle ce discours s'insère. Le travail sur la façon dont les élèves désignent les objets, pour pouvoir rendre compte de façon opératoire et partagée de leurs actions et des propriétés qu'ils reconnaissent à ces objets et qu'ils utilisent pour l'action, constitue donc un vecteur fort d'allers-retours entre objets sensibles et cadre théorique de la géométrie. Plus encore, si le rôle du langage est pris en compte par l'enseignant dans la mise en œuvre des situations de confrontation aux objets, nous avons montré que le travail sur le langage pour l'élaboration d'un vocabulaire et de références partagés opératoires pour l'action et spécifiques à la géométrie permet l'émergence, dans un mouvement dialectique entre objets et cadre théorique, d'un questionnement sur le sens des concepts géométriques convoqués pour l'action sur les objets. La suite du travail consiste à définir de façon plus précise des éléments déterminants du milieu didactique qui favoriseraient les interactions langagières et à les faire fonctionner en classe de géométrie.

NOTES

[1] Dans ce texte, j'appellerai *confrontation aux objets* toute forme de manipulation matérielle et/ou symbolique donnée à faire aux élèves dans le cadre d'un problème et de consignes de production données (description, reproduction, construction…).

[2] J'utilise ici une acception plus large du mot « situation » que celle donnée par Brousseau (1998) dans la Théorie des Situations Didactiques. Dans ce texte, je désignerai par « situation » le contexte général mis en place par l'enseignant dans lequel agit et interagit l'élève.

[3] Ces dimensions ne sont pas antinomiques : si certaines situations mises en place par les enseignants peuvent se réduire à l'illustration de concepts ou l'application de

connaissances géométriques par les élèves, la très grande majorité des situations d'apprentissages proposées aux élèves ont pour objectif d'amener les élèves à construire de nouvelles connaissances à partir à la fois de leurs connaissances antérieures et des contraintes du milieu. Une même confrontation aux objets peut donc avoir une dimension descendante et une dimension ascendante.

[4] Ce groupe est soutenu par l'IUFM Nord Pas de Calais depuis 2002. Y participent ou y ont participé Marc Godin, Jean-Robert Delplace, Raymond Duval, Claire Gaudeul, Bachir Keskessa, Régis Leclercq, Christine Mangiante, Marie-Jeanne Perrin-Glorian, Odile Verbaere ainsi que des maîtres formateurs. J'appartiens à ce groupe depuis 2007.

[5] Ma thèse tentait d'esquisser de premières pistes de réflexion en ce sens. Pour ce faire, j'y montrais notamment la pertinence de conjuguer les outils livrés par la TSD à des outils conceptuels de la sémantique logique pour l'analyse de situations de classe.

[6] « Le terme jeu de langage est destiné à insister sur le fait que parler un langage est une partie d'une activité ou d'une forme de vie. » (Wittgenstein, 1945, §23). Les jeux de langage ne sont pas uniquement linguistiques : apprendre un langage, c'est non seulement apprendre le fonctionnement de la langue mais aussi apprendre une forme de vie. Décrire un objet d'après son apparence, ou d'après des mesures, construire un objet d'après une description, rendre compte d'un processus, traduire d'une langue dans une autre, demander, remercier, jurer, saluer, prier, voilà la diversité des jeux de langage.

BIBLIOGRAPHIE

Berthelot, R. & Salin, M.-H. (2000). L'enseignement de la géométrie au début du collège. *Petit x* n°56, 5-34.

Brousseau, G. (1998). *La Théorie des Situations Didactiques*, La Pensée sauvage.

Celi, V. (2002). *Comparaison de l'enseignement de la géométrie en France et en Italie pour des élèves de 11 à 16 ans. Effets sur leur formation*. Thèse, université Paris 7.

Conne, F. (2008). L'expérience comme signe didactique indiciel, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol.28/2, 219-264, La pensée sauvage.

Dias, T. & Durand-Guerrier, V. (2005). Expérimenter pour apprendre en mathématiques, *Repères IREM,* 60, 61/78.

Durand-Guerrier, V. (2005). Mathématiques et réalité, un exemple en géométrie des solides, compte-rendu d'atelier, in *Actes du séminaire 2004 de l'IREM de Montpellier*

Durand-Guerrier, V., Héraud, J.-L. & Tisseron, C. (2006). *Jeux et enjeux de langage dans l'élaboration de savoirs en classe*, P.U. Lyon.

Duval, R. (2005). les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de didactiques et sciences cognitives*, vol.10, IREM de Strasbourg.

Duval, R. & Godin, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N* n°76, 7-27.

Héraud, J-L., Clément, P. & Errera, J-P. (2004). Paradoxe sémantique et argumentation : analyse d'une séquence d'enseignement sur les grenouilles au cycle 2, *Aster* n° 38, 123-150.

Héraud, J.-L. & Errera, J.-P. (2006). Édith ne parle pas, in Durand-Guerrier, V., Héraud J.-L. & Tisseron, C. (coord.), *Jeux et enjeux de langage dans l'élaboration des savoirs*, P. U. L.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de didactiques et sciences cognitives*, volume 11, IREM de Strasbourg, 175 – 193.

Keskessa, B., Perrin-Glorian, M.-J. & Delplace, J.-R. (2007). Géométrie plane et figures au cycle 3. Une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie. *Grand N*, n°79, 33-60.

Mathé, A.-C. (2006). *Jeux et enjeux de langage dans la construction d'un vocabulaire de géométrie spécifique. Analyse de la portée des jeux de langage dans un Atelier de géométrie en cycle 3 et modélisation des gestes de l'enseignant en situation.* Thèse, université Lyon 1

Offre, B., Perrin-Glorian, M.-J. & Verbaere, O. (2006). Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2, *Grand N* n°77, 7-34, et *Petit x* n°72, 6-39.

Quine, W.V.O (1975). *Philosophie de la logique*, Paris : Aubier - Montaigne.

Quine, W.V.O (1977). *Le Mot et la Chose*, Flammarion.

Sarrazy, B. (2005). La théorie des situations : une théorie anthropologique des mathématiques ? Autour de la théorie des situations, in Clanché, P., Salin, M.-H. & Sarrazy, B. (dir.) *Sur la théorie des situations didactiques. Questions, réponses, ouvertures... Hommage à Guy Brousseau.* La pensée sauvage (375-390).

Tisseron, C. (2005). Autour de la rationalité (en référence à Gilles Gaston Granger), in *Actes électroniques du colloque « Didactiques : quelles référence épistémologiques ? »*, Bordeaux.

Vergnaud, G. (1991). La Théorie des champs conceptuels, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 10/2.3, La pensée sauvage.

Vygotski, L. (1933). Pensée et langage (traduction de Françoise Sève, avant-propos de Lucien Sève), Collection « Terrains», Éditions Sociales, Paris, 1985 ; Rééditions : La Dispute, Paris, 1997.

Wittgenstein, L. (1945, trad. 1963 et 2005). *Investigations philosophiques,* Gallimard.

CHAPITRE 3

FORMATION EN MATHÉMATIQUES DES ENSEIGNANTS

CHAPTER 3

MATHEMATICS TEACHERS EDUCATION

THEORETICAL CONSIDERATIONS ON DESIGNING AND IMPLEMENTING A TEACHER TRAINING COURSE ON MATHEMATICAL MODELING: INSIGHTS FROM A FRENCH-CYPRIOT COMPARISON

Richard Cabassut* and Nicholas G. Mousoulides**

***Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris Diderot et Université de Strasbourg, France**
**** Department of Education, University of Cyprus**

ABSTRACT

In this paper we present and discuss the design and implementation of a teacher training course on Mathematical Modeling by comparing its piloting in France and in Cyprus. Using Anthropological Theory of Didactics, we present how the institution at the level of the society and the school determine the course design. Through different qualitative examples which arose during piloting, we propose different theoretical considerations to discuss modeling, reasons to teach modeling, modeling tasks, and the teaching and assessment of modeling.

INSTITUTIONAL CONTEXT OF THE COURSE

LEMA Comenius Project

LEMA [1] is an ongoing EU funded project (2006-2009). Among the project's core aims is the development of materials for professional development courses in mathematical modeling and applications for mathematics teachers across six European nations. The participating countries are Cyprus, France, Germany, Spain, Hungary, and United Kingdom. The target groups of the project are in-service and pre-service teachers at primary and lower secondary level and teacher trainers. Following an analysis of needs the course has been developed, piloted, evaluated and optimised. Outputs of the project include a DVD of the course materials, including video sequences demonstrating classroom practices under different settings in partner nations.

To determine the content of this training, the project team was based firstly on an analysis of needs conducted by administering questionnaires in the different countries on the state of research on teaching and training of the modeling. These elements show a wide divergence in the educational systems of different European countries. For example, in some countries like Denmark and Finland, compulsory education is entirely conducted within the same school.

In other countries, education is differentiated in different schools to graduate from elementary school (German example from grade 5, 10-11 years), while in other countries education is undifferentiated at the start of the school (France, Spain, Cyprus). In the curriculum, the modeling is explicitly to be taught in Germany while this is not the case in Spain (Garcia et al., 2007). Finally, the training has characteristics varying from one country to another: mandatory or voluntary, supported on working hours or outside working hours, resulting in additional bonus or not, with organizational constraints in the time or fairly free of responsibility for the public or a private organization. For all these reasons the project team opted for a modular organization in five relatively autonomous modules, scheduled for five days (consecutive or not). This flexible modular structure would adapt to the variety of situations, still leaving the opportunity for trainers to adapt training to local institutional conditions.

The theoretical framework

We adopt the mathematisation cycle used in LEMA project. This cycle is inspired by the PISA study (OECD, 2006), itself inspired by the works of Blum, Schupp, Niss and Neubrand. As illustrated in the figure below, we consider four processes in which different competencies are developed:

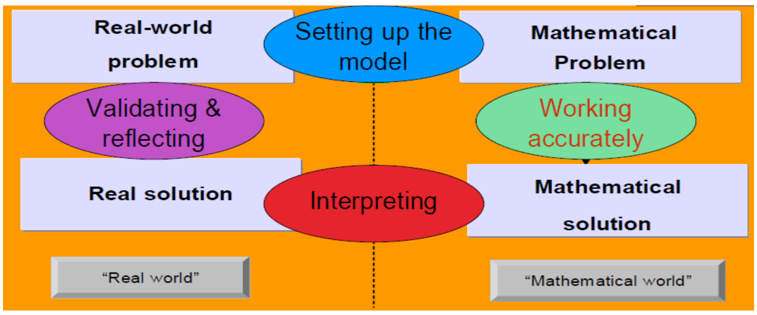


Figure 1: Mathematisation cycle used in LEMA project

The project team, following different researchers positions (Maaß, 2006), makes a distinction between word problems, formulations of mathematical tasks in the daily language, illustrations of mathematical concepts, routine application of mathematical procedures, and modeling tasks; problems related to real world, authentic, complex, open, using a complete cycle of modeling.

Course Implementation in France and Cyprus

In France, an in-service training course must meet a number of institutional constraints. Training course is offered in the regional teacher training course frame organized by the regional education authority (Rectorat or Inspection d'Académie). It must meet the criteria of regional and national educational policy (priorities for training plans). The teacher receives information on training courses and could register the course through an institutional web application between September and October. The teacher also needs to apply for authorization to attend the training by the local institution (the secondary school headmaster or the inspector in charge for the primary school district). The primary school teachers are replaced by other teachers for the duration of training. The course is canceled if there are not enough teachers to attend as it was the case for a modeling teacher training course during 2008-2009. It would be interesting to study the reasons for the insufficient number of participants (lack of attractiveness of training; modeling is not a priority). It is also interesting to note that it is difficult to obtain a 5-day training at high school: first, teachers are rarely replaced, and second, teachers are often allowed to participate only in three days training per year. For the purpose of the LEMA project, the French partner has provided training during 2007-2008 for primary school teachers. The only way to develop training courses of five days in primary school is to include training within the three weeks when the student teachers are responsible for classes. Teachers who are in charge of these classes during the year can attend in-service training for three weeks. These periods occurred in January and in May. The teacher training on modeling was provided as part of a problem solving training. The first five days have been allocated to the piloting course on modeling. At the last moment the institution has limited participation to teachers in charge of the classes of cycle 2 (grade 0 to 2, age 5 to 8 years). This change influenced the content of training, as training had to first be focused on primary school teachers and second to consider tasks for pupils at the age mentioned above (and are just beginning to learn reading and writing). The above description shows the importance of institutional conditions to the levels of co-determination of the school and society.

In Cyprus, teachers participated in the in-service Teacher Training Course (TTC) on a volunteer basis. LEMA project's posters and flyers were sent to schools prior to participation and teachers expressed their willingness to participate in the project. The TTC lasted five days in April and May 2008 and twenty five primary school teachers participated in the meetings. Each meeting lasted around 6 hours.

Since teachers participated on their free time, meetings took place during Saturdays. Between meetings, teachers had opportunities to try out the various modeling tasks, teaching methods, and the models of assessment they worked with during TTC meetings. The second author of this paper delivered the TTC. It should be noted here that the meetings focused explicitly on modeling and the TTC was not combined in any way with other form of teacher in-service training. As a consequence, teachers were very enthusiastic with their participation and also optimistic about introducing mathematics complex problem solving and modeling in the mathematics teaching.

These different origins (international PISA survey, European Commission, National Educational system) illustrate what the Anthropological Theory of Didactic (ATD)[2] calls the high levels of didactic determination (civilization, society, school) determining the teaching and the learning of mathematics.

Evaluation of LEMA project is a central part of the activity informing development of the teacher training course and associated materials at every stage. Questionnaires (addressing beliefs, pedagogical content knowledge) were used within a pre-post-control-group-design. This quantitative evaluation will be processed later. In this paper we use a qualitative approach by taking examples from teachers' reports, posters and interviews conducted during and after piloting in France and Cyprus. These examples are not considered as representative of a national style, but rather bring illustrations and arguments into the discussion.

INSIGHTS FROM THE COURSE PILOTING IN FRANCE AND CYPRUS

Let us describe the five modules of the course and compare some elements from the piloting in France and Cyprus.

What is modeling? Why modeling?

The modeling module is divided into two sub-modules: "what is modeling?" and "why modeling?". It proposes to work on different tasks in the real world, to reflect the characteristics of those tasks and to think of criteria for differentiating the tasks of modeling from other tasks related to real world. This part is based on the theoretical framework proposed by PISA (OECD, 2006) and includes the cycle of modeling mentioned previously. Then the trainees are requested to think about the inclusion of a greater number of tasks of modeling and implementation in education, its benefits for students, but also the difficulties and obstacles of modeling introduction.

In France, several teachers are not familiar with the word modeling: more focus is on applied problems or everyday life problems. Teachers' practices are more concentrated on simple word problems, embedding mathematical tasks into everyday language, illustration of mathematical concepts (representation and handling) and applying mathematical routines. The teachers are not very used to work with complex, opened and authentic problems related to real world. Very often the data and the hypotheses are also given with the task. The following question (retrieved from the questionnaire) was administered to trainees at the beginning and at the end of the training:

Traffic jam - a task: *Imagine you were to teach children in an age you regard as suitable for this task. The following questions are all related to the task below and all connected with each other.*

It is the start of summer holidays and there are many traffic jams. Chris is on holiday in Germany and has been stuck in a 20 km-traffic jam for 6 hours. It is hot and she is longing for a drink. Although there are rumours that the Red Cross is coming around

with a small lorry distributing water, she has received nothing so far. How long will the Red Cross need to provide everyone with water?
This task has many solutions. Students have to reflect on how many people there might be in such a traffic jam and how the Red Cross distributes the water. The data can be either estimated or evaluated statistically.

	not very likely				very likely
1) Please x one to show how likely you are to use this type of task	☐	☐	☐	☐	☐

2) Give reasons why (pros and/or cons)

Teacher answers are summarized in the table below.

Scale	1	2	3	4	5
% at the beginning	22	26	33	8	11
% at the end	0	15	31	31	23

It is impressive to observe that the course appeared to encourage teachers to use modeling tasks in their classes.

In Cyprus

It is necessary to underline here that modeling tasks do not appear in mathematics textbooks in Cyprus. Further, although problem solving is a core part of the mathematics curriculum, very rarely complex problems appear in students' textbooks. This situation has obviously an impact on teachers' knowledge, beliefs and attitudes towards modeling and problem solving. Specifically, many teachers were not familiar with modeling problems and some of them even considered some modeling problems, though being real world based problem, not pure mathematical ones. In general, teachers' everyday classroom practices are mostly focused on decontextualized problems with no connections to real world problems, in which students apply mathematical routines. Students have very few opportunities to work on complex, opened and authentic problems.

Why modeling?

In France, the trainees find the arguments in favor of modeling proposed by Blum and Niss (1991), but formulate them in their own words: to be related to reality, to do group work, to reinvent knowledge, to illustrate that a problem is not only numerical calculations, to ask questions, to choose, to develop critical and logical thinking. The answers to the question presented above give reasons pro/contra modeling. At the beginning of the course, the difficulty of modeling was addressed as a first reason (“there are no adequate data” [3], “too many unknowns”), the lack of reliable data (“on demand think about a rumor”, “not enough data”), complexity (“too many criteria to take into account”, “too many unknown variables”, ”lost because of the complexity”), lack of mathematical knowledge (measures), the lack of “familiarity” of students with the situation. But this modeling task makes possible to develop “research” and “reflection”, use of “representations” or “schematization”, “group work”, authenticity (“real situation”), link with reality (“to connect the reality”), and use of mathematical knowledge (“logical”, “approximate calculation”). At the end of the training, this modeling task allows to develop transversal competencies, to see “different search procedures”, to “make assumptions”, to “ask questions”, to “refer to everyday life”, to “compare the paths followed by the students”, to “verify the hypotheses by testing if possible”, to bring “a discussion in class related to the different answers depending on the assumptions made and which will therefore be justified”, to allow “to ask and accept multiple answers”, to “train pupils to reflection”, to “debate, to make choices”, to “argue” and to “build steps of the modeling problem”, to “involve assumptions and reality” and “compare methods, results, relevance”. The management of a modeling task looks difficult: “the fear of failing to manage all situations, leaving in every sense”, the difficulty of the validation (“how to validate?”, “situation non-verifiable”), “the time needed to find an answer”, complexity (difficulty of solving a problem with several steps). During the training period cognitive obstacles associated with the young age of the students (pupils from grade 1 and 2 between 5 and 7 years old) were also reported.

In Cyprus, almost all the participants were very optimistic that modeling can be a method of improving the teaching and learning of mathematics. Teachers expressed that there were many reasons for introducing modeling in their everyday classroom practice, although they also reported a number of difficulties towards this change.

In favor of modeling, teachers reported that modeling activities can be used for providing connections between mathematics and other disciplines, such as science and language and can help students learn how mathematics are useful beyond school for solving everyday problems. Furthermore, in modeling tasks students have opportunities to develop more than one correct solution for the same problem, and this can be found to be very important; this is the nature of real world problems, in which solutions are evaluated not only in terms of their correctness, but also in terms of the hypotheses and the constraints that each problem sets. Teachers, further, expressed that the teaching framework and the nature of modeling problems assist students in exploring possibilities of technology introduction and can encourage students to reflect on their work and to develop their metacognitive abilities.

Among the reasons (favorable or unfavorable) for modeling, there are general reasons related to the resolution of complex and open problems in connection with the development of transversal skills and management of class activities, and specific reasons related to the real world (knowledge of the real world, authenticity, familiarity, representation, validation, evaluation, ...). What is specific and what is general in modeling?

We can observe here the role of low levels of didactic determination (subject, theme, domain, discipline) pointed by ATD [2]. ATD questions whether modeling is designated as knowledge to be taught. In France, at primary school, problem solving is clearly designated as knowledge to be taught and the reports (IGEN, 2006) on class activities show that it is knowledge that can be taught. It is less clear for modeling that could be considered in the curriculum as a part of problem solving. But the educational inspectors' reports (IGEN, 2006) show that the practice of open problems related to every day life is not so frequent. The training course assumes that modeling is knowledge to be taught and the transposition problem is how to teach it and how to learn it. The “lesson” module will try to answer these questions.

Modeling tasks

The *Tasks Module* consists of four sub-modules, “tasks”, “classification”, “creation”, and “change”. These modules provide opportunities for adopting experiences of the modeling process from a variety of tasks, be aware of different tasks, reflect the influence of task presentation on strategies for students. The trainee reflects on how to prepare new tasks from real life situations, and to rewrite or adapt textbooks activities and turn them into modeling tasks in accordance with the objectives of his/her lessons, think on classifying various tasks related to context and having an overview of the wide range of tasks that can be used with pupils. In the module, we consider how to provide a variety of tasks, as to ensure that teachers have plenty opportunities to meet the objectives of the course.

In France, teachers are concerned with a clear formulation of an open-ended task. Authenticity of a task is very controversial: a lot of modeling tasks look artificial for a child and authenticity could bring difficulty and complexity in learning. Frequent criteria to classify tasks are mathematical domain, real world domain, complexity (one step-more step), openness, presentation of the task, and work modalities. The teachers enjoy creating tasks related to class related student life because in this case the real world domain is known, representation is much easier, and can be controlled more easily.

In Cyprus, working with modeling tasks during the TTC was one of the most enjoyable activities for teachers. Teachers enjoyed a lot working with and solving modeling tasks. It was challenging and very interesting to reformulate existing tasks in their mathematics textbooks into modeling tasks. Teachers worked with their existing textbooks and developed very interesting and innovative modeling tasks. Further, a number of teachers went ahead and tried out the modeling tasks in their classes. Results varied from very positive to positive and all teachers were too optimistic that this approach can be very beneficial in their near future. In developing their own modeling tasks from scratch, it appeared that it was too difficult for teachers to develop their own modeling tasks. In most of the cases they, rather, develop similar modeling tasks to the ones delivered to them in advance. A variable that seemed to guide in a way teachers' approaches and efforts were their concerns on how their students would perceive the modeling tasks, in terms of level of sophistication, context used, level of difficulty, and mathematical concepts and procedures involved.

It would be interesting to relate the classification of tasks to the different ways: on one hand a pupil will solve the task (pupil's praxeology in terms of ATD: what techniques and what justifications of the techniques), and on the other hand a teacher will teach with the task (teacher's praxeology in terms of ATD: when to introduce the task? what function to assign to the task?). What relations between classifications of tasks and praxeologies?

Lessons/Methods

The lesson module is composed of four sub-modules "skills", "content", "method", and "new technologies". This module provide opportunities to think about issues and problems that might arise in the modeling class, to consider several methods and strategies that can be used in modeling lessons, to reflect on the skills acquired by students during the modeling, to design lessons that help students develop skills in modeling and how to assist students in developing their reasoning skills. It reflects the importance for students to have an overview of the cycle of modeling, it addresses methods for assisting students in developing their metacognitive strategies, and it provides tips on using a modeling approach for teaching specific mathematical content.

In France, the following difficulties are pointed out by the trainees from teacher's side. Modeling is a time consuming activity, sometimes difficult to put in accordance with curriculum. There is a need for a cognitive progression and the curriculum structure of modeling, presenting how to develop curriculum competencies through modeling. Metacognition could be difficult for some pupils, especially young ones. They are interested in creating a task with different levels of difficulty for pupils. They have identified the following difficulties from pupils' side: language understanding, real world understanding, and problem simplification, information processing, motivation, controlling the plausibility, and getting the prerequisites (from mathematics and from real world). In assisting pupils, teachers suggest to reformulate, to learn data processing, to the working modes, to manipulate objects, to discuss, and to argue.

In Cyprus, the same difficulties were reported in general. Teachers underlined the following as the major difficulties of introducing modeling in everyday mathematics teaching: time constraints make implementation of modeling tasks difficult; no modeling tasks in the existing curriculum, makes modeling adoption quite difficult. Teachers acknowledge the importance of group work and reported that they design mathematics lessons in which their students work in groups. However, students not always work successfully in groups and further, assessing group work is not an easy task for teachers. Teachers also documented that through modeling teachers should also assist their students in understanding the real world problems presented to them, in setting appropriate hypotheses, in developing more that one models, and in handling complex sets of data. Teachers, finally, reported that metacognitive skills should explicitly be taught in mathematics lessons.

Here a specific problem appears: the double transposition (Cabassut, 2009). In the different steps of the modeling cycle the knowledge and techniques from real world and from mathematical world meet and have to be transposed and to be taught. For example in setting the model, we have to manage how we transpose real world knowledge and mathematical knowledge to select data, to set hypotheses, to define the model and to validate it, using both mathematical and extra-mathematical arguments.

We have also to take into consideration the role of the low levels of didactic determination (ATD vocabulary): subject, theme, domain, and discipline.

Assessment and reflection

The assessment module is composed of three sub-modules respectively formative assessment, summative assessment, and feedback. They reflect on how to identify, assess and assist student progress in mathematical modeling, questioning both summative and formative assessment, and to consider strategies that encourage the learning of self-assessment among students.

The reflection module examines possible reactions to modeling of students and parents, and how to deal with them. It examines how the characteristics of the institution in which the teacher is trained can interfere with his/her attempts to integrate modeling into practice. It also examines ways to overcome obstacles.

In France there is a need of examples of summative assessment to fit with the curriculum requirements. The difficulty to assess (formative or summative) pupil work involved in a complex and opened task is pointed. Here, one has to differentiate the assessment of isolated modeling competence as a part of the modeling cycle and the assessment of the complete modeling competence (corresponding to the complete cycle). More generally, the difficulty is to take into account the institutional request on assessment.

In Cyprus, the case is the same; examples of summative assessment are clearly needed. Assessment is a difficult, yet challenging, component of modeling and it should be made explicit that even before, assessment on modeling is more difficult than assessment in traditional mathematics classrooms. Teachers' concerns on how to assess a complex, open ended task promoted discussion and underlined the importance for focusing more on formative than on summative assessment.

Here we can again differentiate in assessment what is generic to modeling (transversal competences, to work accurately in the modeling cycle) from what is specific (to set the model, to interpret the mathematical solution, to validate the real solution,...). Does the mathematical teacher have to assess the extra-mathematical knowledge and techniques from real world?

CONCLUSION

A number of interesting results arise from the comparison of the TTC implementation in France and Cyprus. We consider it important, first, to examine the role of the different levels of didactic determination in modeling. We address the institutional differences between the two partners. While in France the organization of the in-service training was heavily constrained by institutional framework, in Cyprus teachers participated in TTC on a totally volunteer basis, on their free time. A second important difference between the two sites was the role of modeling in the national curriculum. In France, for instance, problem solving is an object to be explicitly taught, and modeling is a part of problem solving. At the same time, in Cyprus although problem solving is a part of the mathematics curriculum, in most of the cases complex problems rarely appear in the mathematics textbooks and therefore modeling was a totally new topic to teachers. Another difference between the implementation of TTC in the two countries was related to the extent to which teachers had opportunities to practice the TTC in their own classrooms. Again, due to institutional constraints, in France TTC was delivered in a short period of five consecutive days. On the contrary, in Cyprus TTC was delivered in a two month period and between meetings teachers had opportunities to go back to their classes and implement part of the TTC, although this was not a compulsory part of the course. We can conclude that in contrast to what research usually focused on lower level of didactic determination, the higher level of the didactic determination can play an important role.

An important similarity was teachers' motivation. In both countries, teachers were very enthusiastic with their participation in the training and motivated to include modeling in their teaching. However, as it was presented earlier, due to the different place of problem solving in the mathematics curricula in the two countries, teachers focused on different aspects of modeling and expressed different concerns, regarding modeling introduction and inclusion in the curriculum. In France, for example, since problem solving is a core part of the curriculum, teachers focused on "teacher praxeology" (Bosch & Gascón, 2006). An example of this dimension is related to their concerns on how modeling can be progressed throughout the whole mathematics curriculum, how fruitful assessment on modeling can be developed, and the integration of the modeling competencies. In Cyprus, since modeling is a totally new topic in mathematics curriculum, teachers focused mostly on "student praxeology", by expressing concerns about modeling tasks and time constraints. To conclude, teacher training on modeling is not an easy, yet straightforward task. It is rather a multifaceted research in which different actors play significant roles; from a macro level, different theories of mathematics education can serve to provide a background for designing and implementing teacher training courses on modeling. From a micro level, how teachers' beliefs and concerns might influence training, how technology can fruitful be introduced, how the mathematics classroom is organized, and how formative assessment is approached are important questions that needs to be answered. Further research is clearly needed in those directions.

NOTES

[1] This project is co-funded by the European Union under Comenius-2.1-Action, from 10/2006 to 09/2009. The project LEMA Learning and Education in and through Modeling and Applications is described on the site www.lema-project.org. The partners of the project: Katja Maaß & Barbara Schmidt, University of Education Freiburg, Richard Cabassut, IUFM, Strasbourg University , Fco. Javier Garcia & Luisa Ruiz, University of Jaen, Nicholas Mousoulides, University of Cyprus, Anke Wagner, University of Education, Ludwigsburg, Geoff Wake, The University of Manchester, Ödön Vancso & Gabriella Ambrus, Eötvös Lorand University, Budapest.

[2] The ATD (Anthropological Theory of the Didactic was created by Chevallard and is described in (Bosch & Gascón 2006).

[3] The quotations are from the trainees.

REFERENCES

Bosch, M., & Gascón, J. (2006). 25 years of didactic transposition. I*CMI Bulletin* 58, 51-65.

Cabassut, R. (2008). Un exemple de formation continue à la modélisationdans le cadre du projet Lema : description et problèmes rencontrés. *In Actes du XXXVème colloque de la COPIRELEM.* Bordeaux-Bombannes. IUFM d'Aquitaine.Université Bordeaux IV.

Cabassut, R. (2009). The double transposition in mathematisation at primary school in *Proceedings of 6th Cerme (congress of European society for research in mathematics education),* Lyon, France.

IGEN Inspection Générale de l'Education Nationale (2006). *L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire.* Ministère de l'Education Nationale.

Maaß, K. (2006). What are modeling competencies?, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 38 (2).

PISA (2006). *Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy: A Framework for PISA*. Publisher: OECD.

SITUATIONS DE MODÉLISATION POUR LA FORMATION EN MATHÉMATIQUES DE FUTURS PROFESSEURS D'ÉCOLE

Catherine Taveau

IUFM de Paris − Université Paris 4 Sorbonne − IREM Paris Diderot, France

RÉSUMÉ

En formation des enseignants du primaire, les enjeux d'un enseignement des mathématiques sont multiples : réactualisation des connaissances, apports didactiques et réconciliation avec les mathématiques. Pour atteindre ces divers objectifs, nous avons développé deux situations de modélisation que nous analysons dans cet article. La première, les poignées de mains*, vise à donner un savoir mathématique sur le dénombrement et un savoir didactique sur les registres de représentation sémiotiques. La seconde,* le pot de fleur cassé*, articule un problème de la vie quotidienne avec des connaissances anciennes sur le cercle. Après avoir présenté les réactions des étudiants à ces deux situations, nous interrogeons la pertinence de ce type de situation dans le cadre de la formation des enseignants.*

LES ENJEUX DE LA FORMATION EN MATHÉMATIQUES DES ENSEIGNANTS DE L'ÉCOLE PRIMAIRE

Comme dans de très nombreux pays, les étudiants français, qui se destinent à devenir professeurs à l'école primaire, sont généralement peu compétents en mathématiques. Leur cursus universitaire est plutôt soit littéraire, soit sciences humaines. Très peu d'entre d'eux ont fait des mathématiques après le baccalauréat et beaucoup restent marqués par un sentiment d'échec dans cette discipline, voire un souvenir très douloureux de l'enseignement qu'ils ont subi (Nimier, 1978 ; Lafortune, 1989, 1994 ; Tobias, 1976).

Les enjeux de la formation d'enseignants du primaire sont donc multiples. Il s'agit d'une part de permettre l'acquisition des notions mathématiques qui seront enseignées à l'école primaire et dont les étudiants doivent avoir une parfaite maîtrise, et d'autre part de développer la compréhension des processus d'apprentissage de ces notions par des connaissances didactiques et épistémologiques et finalement, mais prioritairement, de redonner confiance à une grande partie des étudiants en leur permettant d'envisager les mathématiques autrement.

Afin que le futur enseignant soit dans une relation de confiance avec la discipline, il est important qu'il développe des capacités de raisonnement, de rigueur et de recherche pour qu'il ne soit pas paralysé face à une situation mathématique inconnue. Il doit donc développer des démarches de recherche, d'exploration et d'investigation, d'auto validation, mais aussi de synthèse lui permettant d'institutionnaliser de nouvelles connaissances.

Les savoirs mathématiques ou savoirs académiques, abordés en formation ne sont globalement pas étrangers aux étudiants. Ce sont ceux abordés dans leur scolarité antérieure mais pour lesquels leurs représentations sont souvent très floues voire erronées. Il s'agit donc de revisiter ces savoirs avec une dimension professionnalisante. Ainsi l'articulation entre les savoirs académiques et les savoirs didactiques permet de redonner une vie à des notions mathématiques qui étaient dépourvues de sens. D'autre part, la formation doit favoriser chez les étudiants une réorganisation de ces savoirs en les articulant entre eux et surtout en évitant un émiettement trop souvent rencontré dans l'enseignement secondaire.

Il est très fréquent, que face à un problème se résolvant de façon experte par un système de deux équations à deux inconnues, les étudiants se lancent immédiatement dans l'écriture d'inconnues x et de y sans savoir, d'une part les combiner pour modéliser le problème, et d'autre part sans savoir résoudre techniquement les équations produites. C'est pourquoi, en formation nous ne commençons pas par ce type de problèmes. Les étudiants les reconnaissent très vite, essayent de réinvestir d'anciennes connaissances, malheureusement souvent défaillantes. L'outil mathématique n'est pas disponible, le blocage est immédiat et le sentiment d'échec trop violent paralyse la suite des recherches (Nimier, 1978 ; Lafortune, 1989, 1994 ; Tobias, 1976).

Il s'agit donc pour nous de proposer des situations de formation qui s'approchent des situations a-didactique proposées dans la théorie des situations didactiques de Brousseau (1997). La situation initiale doit être claire, l'appropriation du problème doit être aisée et nous souhaitons faire fonctionner les phases d'actions, de formulation et de validation. La phase d'institutionnalisation permettra de construire de nouvelles connaissances ou d'en réactiver d'anciennes tout en leur redonnant du sens.

Pour cela, en tout début de formation, nous proposons à nos étudiants des situations originales, situations dites concrètes favorisant une bonne appropriation. Le problème posé par ces situations va nécessiter une modélisation mathématique qui sera objet de notre réflexion. D'autre part, pour chacune d'elles, nous questionnons la capacité de transfert des étudiants aussi bien du point de vue des notions mathématiques que du point de vue des démarches d'investigation.

Les deux situations de formation de références pour les étudiants qui vont être décrites ont chacune des objectifs différents. La première appelée les *poignées de mains* (Jaffrot et Taveau 2007, Kuzniak 2007) vise à la fois la modélisation d'une situation simple mais aussi la prise de conscience des différents type de registres de représentation au sens de Duval utilisés par les étudiants et de la difficulté de la conversion d'un registre dans un autre. Un dernier objectif est aussi l'institutionnalisation d'un savoir mathématique dans le domaine du dénombrement, en général jamais rencontré par les étudiants. La seconde situation appelée le *pot de fleur cassé* vise à réactiver chez les étudiants des connaissances géométriques rencontrées antérieurement et de les mettre au service de la résolution de problèmes. Elle permet de revisiter des propriétés géométriques, d'aborder le problème de la précision des constructions et par là même d'aborder les paradigmes géométriques de Houdement et Kuzniak (2006).

LA SITUATION DES POIGNÉES DE MAINS

Le savoir mathématique mis en jeu n'est ici pas nécessairement un savoir à reproduire dans les classes, puisque la situation traite un thème aussi difficile que celui de la modélisation à partir de la résolution de problèmes. Il s'agit plutôt d'une action didactique tournée vers une autre représentation de ce que sont les mathématiques.

Description de la situation

Le professeur invite les étudiants, séparés en deux groupes qui ne se connaissent pas encore, à se serrer la main et à lui serrer la main, puis il leur donne une consigne formulée en plusieurs temps et qui porte sur le dénombrement des poignées de mains. Le professeur annonce qu'il va poser une question mathématique, qu'il y aura d'abord un moment de travail individuel, puis par groupes, avec une production d'affiches qui seront observées et questionnées.

Pendant la phase individuelle, d'une durée de 5 à 10 minutes, chacun cherche :

- combien de poignées de mains ont été échangées dans le groupe (une moitié de classe) ;
- combien pour la salle entière (une variante intéressante consiste à envisager le double de personnes) ;
- combien si tous les étudiants de l'établissement avaient été concernés ;
- et si on peut aussi le savoir quel que soit le nombre de personnes dans un groupe.

L'activité se poursuit ensuite, par groupes de quatre, pendant au moins 30 minutes. Dans cette phase, il y a notamment :

- des échanges, une confrontation, et la poursuite de la recherche ;
- la réalisation d'une affiche sur la ou les façons de résoudre le problème par le groupe, cette affiche devant permettre aux lecteurs de comprendre la démarche utilisée.

Puis vient le temps de l'affichage simultané de toutes les affiches où chacun peut se lever, lire les affiches pour préparer d'éventuelles questions et demandes d'explicitations. Chaque groupe peut également présenter sa production.

Enfin, arrive un temps de discussion entre les étudiants avec des questions éventuelles, la liste des différentes procédures, les accords, les désaccords. La validation est gérée par les étudiants eux-mêmes. Le professeur ne valide rien à ce moment là. Il laisse débattre, il organise la classe en favorisant les explications des réponses et des formules trouvées et aussi la lisibilité par "n'importe qui" de ces réponses.

La séance se conclut par la validation par le professeur et par l'apport d'éventuels compléments mathématiques. Dans ce cas, le savoir institutionnalisé par le professeur porte sur la formule qui permet de résoudre cette classe de problèmes de dénombrement.

Les procédures

Cette situation permet d'aborder à la fois des contenus mathématiques et des notions de didactique. D'autre part, c'est une situation où les étudiants ne disposent pas généralement de technique connue et mettent en œuvre seulement des procédures personnelles très variées utilisant des registres de représentation différents.

La première démarche observée consiste à compter les poignées de mains. Cette démarche s'appuie sur une procédure d'énumération. Elle prend en compte chaque individu dans le groupe et le considère par rapport aux autres individus pris individuellement. Ce peut être :

- en augmentant un à un le nombre d'individus dans le groupe : une poignée de mains pour deux individus, (1+2) poignées de mains si une 3$^{\text{è}}$ personne entre dans le groupe, (1+2+3) pour une 4$^{\text{è}}$ personne, etc. Cette démarche aboutit, pour n personnes, à la réponse : $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots\ldots + (n–1)$.
- en ordonnant les individus du groupe de n personnes : le 1$^{\text{er}}$ échange (n–1) poignées de mains, (n-2) pour le 2$^{\text{ème}}$, etc. jusqu'à 1 pour l'avant-dernier et 0 pour le dernier. Cette démarche aboutit à la réponse : $(n–1) + (n–2) + \ldots + 3 + 2 + 1$.

La deuxième démarche observée consiste à dénombrer les gestes effectués par chaque individu du groupe de n personnes. Chaque individu va tendre le bras à (n-1) autres personnes, soit pour n personnes, on obtient $n \times (n–1)$ bras tendus. Comme une poignée de mains correspond à deux bras tendus, le résultat s'obtient en prenant la moitié du résultat précédent $\frac{n(n-1)}{2}$. Cette fois-ci, la démarche s'appuie sur une procédure de dénombrement immédiat. Le groupe est pris dans sa globalité et le raisonnement porte sur un ensemble d'individus.

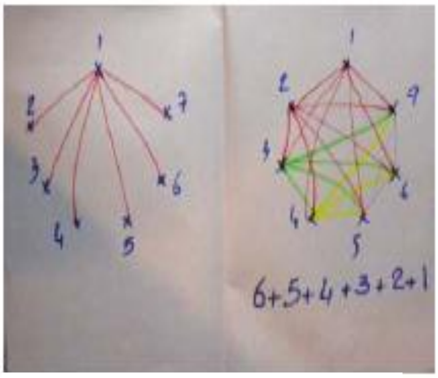
Puis nous avons observé, mais très rarement, certains étudiants qui reconnaissent immédiatement un problème de combinatoire et qui applique la formule $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$ en justifiant par le fait qu'il s'agit de trouver le nombre de combinaisons possibles de deux mains (une poignée) parmi n mains.

Les modélisations

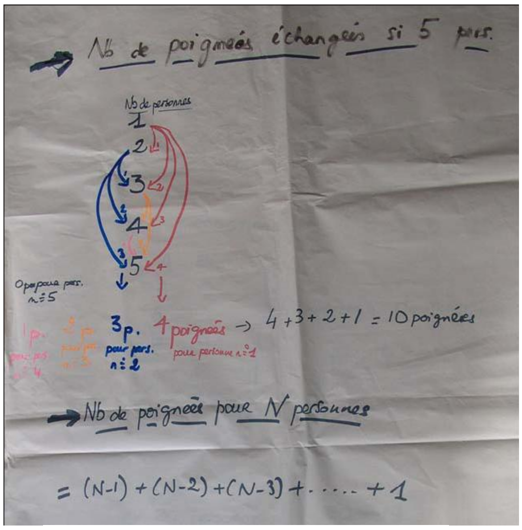
On peut donc penser que chaque méthode de résolution est en elle-même l'aboutissement d'une modélisation de la situation ou l'application d'un modèle pour les étudiants « matheux ».

Nous pouvons aussi observer que chacune de ces deux modélisations fait fonctionner les registres de représentations, au sens de Duval, de façon différente. Ainsi concernant la modélisation de la première procédure, nous repérons :

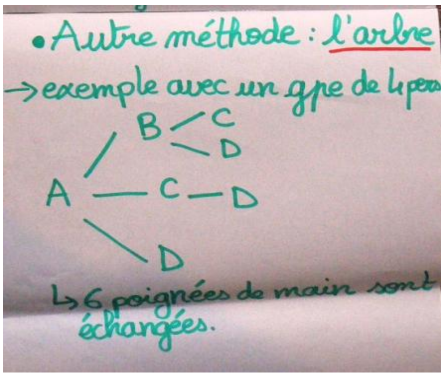
- le registre de représentation symbolique : $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots\ldots + (n–1)$ ou $(n–1) + (n–2) + \ldots + 3 + 2 + 1$;
- le registre discursif : « La première personne serre la mains à toutes les autres sauf à elle-même, puis la deuxième personne serre la main à toutes les autre sauf à elle-même et à la première personne, etc. Puis l'avant dernière personne ne serre la main qu'à la dernière personne ».
- le registre de représentation graphique prend des allures multiples :



Production d'un graphe



Production d'un schéma



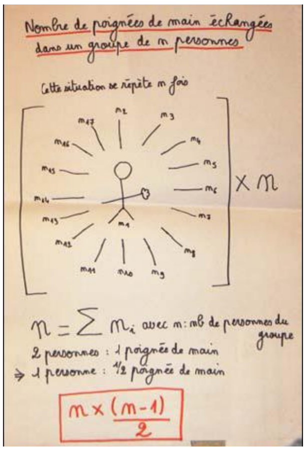
Production d'un arbre

Production d'un tableau cartésien

La production d'un tableau cartésien, dont le raisonnement s'appuie sur la même modélisation, n'aboutit pas à une même représentation symbolique. Ici le calcul du nombre de poignées de mains est donné par l'expression $\frac{n^2 - n}{2}$. Cette représentation graphique permet d'obtenir aisément une formule qui donne plus rapidement un résultat pour un nombre donné de personnes, ce qui n'est pas le cas pour l'expression 1 + 2 + 3 + 4 +…+ (n-1).

Pour la modélisation de la seconde procédure nous repérons :

- le registre de représentation symbolique : $\frac{n(n-1)}{2}$;
- le registre discursif : « Chaque personne serre la main à toutes les autres personnes sauf elle-même et ceci pour toutes les personnes. Or une poignée de mains est un échange entre deux mains, par conséquent le nombre de poignées de mains est la moitié du nombre de mains serrées. »
- le registre de représentation graphique est moins utilisé que dans la première modélisation mais quand elle existe elle peut prendre la forme d'un schéma (voir ci-contre).



Institutionnalisation et transfert

Ainsi, même si cette situation se réfère à un même modèle générateur mathématique, *la combinatoire*, le savoir mathématique construit par les étudiants n'est pas de même nature dans chacune des deux modélisations. Cette affirmation nous permet de mieux comprendre pourquoi, contrairement à ce que nous pensions, les étudiants n'effectuent pas de transfert immédiat pour résoudre les problèmes mathématiques proposés à la suite de cette situation (cf. annexe 1).

Nous avions proposé ces exercices pour permettre une utilisation de la formule $\frac{n(n-1)}{2}$ dans la généralisation des situations proposées dans ces exercices. Or même si ces problèmes visent au réinvestissement des savoirs institutionnalisés dans la situation des *poignées de mains*, et même s'ils se résolvent finalement tous par le calcul d'une formule proche de celle élaborée $\frac{n(n-1)}{2}$, ces problèmes ne sont pas tous congruents et ne se réfèrent pas à la même modélisation.

Ainsi certains étudiants repèreront le même modèle pour ce qui est du nombre de diagonales dans un polygone ou le nombre de droites passant par deux points, comme étant le nombre de combinaisons possibles de deux points parmi n points, s'ils ont utilisé ce modèle pour résoudre la situation des poignées de mains. En revanche, le nombre de marches de l'escalier sera pour eux un nouveau problème, dont la conjecture amènera la résolution par la somme des n premiers nombres entiers.

De même, les étudiants qui, lors de la situation des poignées de mains, ont abouti à la solution arithmétique ($1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n$) rencontreront des difficultés à résoudre les problèmes du nombre de diagonales dans un polygone ou du nombre de droites passant par deux points.

La question délicate pour le formateur est de savoir ce qu'il souhaite alors institutionnaliser à partir de cette situation mathématique. Trois aspects peuvent être retenus :

1- Un problème mathématique peut être résolu à partir de différentes procédures s'appuyant sur des modélisations différentes. Comme l'explique Brousseau (2003), un modèle est avancé par un actant pour répondre à une question ou à un problème, à l'aide de son répertoire de connaissances. Ceci est un point fondamental dans le cadre de la formation d'enseignants pour concevoir d'une façon moins étriquée ce qu'est faire des mathématiques.

2- La résolution de cette situation met assez naturellement en œuvre les registres de représentations de Duval. Les productions des étudiants illustrent très nettement le passage d'un registre de représentation dans un autre pour un même modèle. En revanche ce passage n'est plus possible d'un modèle à l'autre modèle.

3- L'institutionnalisation d'un savoir numérique : la somme des n–1 premiers nombres entiers peut se calculer par la formule $\frac{n(n-1)}{2}$. Ceci est démontré par une simple astuce de calcul et permet de montrer que les expressions algébriques trouvées dans les deux modélisations sont équivalentes.

Une deuxième question délicate concerne le niveau de transfert des connaissances chez les étudiants. Depuis l'introduction de cette situation en formation, nous remarquons qu'il est assez faible en ce qui concerne les connaissances mathématiques en jeu mais en revanche assez élevé au niveau de la démarche d'investigation. Un des objectifs de la formation est peut être atteint : redonner confiance dans leur capacité à faire des mathématiques même si la situation n'a jamais été rencontrée auparavant.

Une situation dont on se souvient

Nous pensons que la situation des poignées de mains reste, pour un très grand nombre d'étudiants, une situation de référence de formation. C'est tout d'abord pour eux la surprise d'une autre représentation de l'enseignement des mathématiques. Les modélisations obtenues à travers leurs productions les étonnent. Autant de procédures pour une situation si simple. Et puis, le besoin de trouver une formule qui pourrait leur permettre de trouver la valeur de l'expression ($1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n–1$) lorsque n vaut par exemple 470 motive leur volonté de comprendre le passage d'une écriture à une autre.

LE POT DE FLEUR CASSÉ

Cette situation a pour objectif de prouver aux étudiants que des savoirs mathématiques peuvent être au service de la résolution d'un problème « quotidien ».

La modélisation de cette situation entraîne la résolution du problème dans le micro espace de la feuille de papier et les solutions mathématiques trouvées permettent de résoudre effectivement le problème concret. Un des objectifs de cette situation est d'évaluer en début de formation certaines connaissances géométriques disponibles chez les étudiants et de repérer des concepts erronés. À l'issue de cette situation, le formateur pourra réactiver plus naturellement les savoirs géométriques nécessaires aux étudiants.

Description de la situation

Un pot de fleur de forme classique est cassé et il s'agit de le remplacer à l'identique sans avoir à l'emporter. Nous avons réussi à récupérer un certain nombre de morceaux de tailles différentes (cf. photo) mais nous n'avons pas de quoi le reconstituer car des morceaux essentiels sont manquants.

Par groupe, chaque étudiant reçoit un morceau du même pot brisé. Sa tâche est de pouvoir donner les informations nécessaires à un marchand pour remplacer le pot.

Analyse didactique de la situation concrète

Ainsi même si la situation parait simple, sa dévolution n'est pas évidente faute d'un référent pratique qu'il a fallu préciser. L'analyse *a posteriori* fait apparaître que la connaissance pratique nécessaire pour acheter un pot de fleur n'est pas disponible chez une grande partie des étudiants, tous citadins : pour acheter un pot de fleur usuel, il est nécessaire de connaître la dimension de son diamètre supérieur et de sa hauteur.

Cette connaissance pratique étant fournie aux étudiants, ceux-ci commencent par tracer naturellement le contour de leur morceau après avoir repéré le bord supérieur du pot. Celui qui a le fond du pot fait de même.

L'étudiant, disposant du morceau présentant le plus grand arc de cercle, va rapidement terminer le cercle en reportant plusieurs fois son gabarit. Il met en œuvre une connaissance implicite sur la conservation de la courbure d'un cercle et la réalisation est assez réussie. Il ne trouve pas pour autant la dimension du diamètre et se propose d'aller dans le magasin avec sa construction qui lui servira de gabarit comme le font les archéologues. Le formateur constate qu'il lui faudra reformuler la situation en précisant que les informations doivent être communiquées par téléphone ou SMS.

Les étudiants ayant en main les autres morceaux commencent de la même façon : ils tracent le contour de leur pièce et s'arrêtent là. Certains vont imiter leur camarade chanceux, et avec beaucoup de patience vont aussi reporter la courbure de leur petit morceau mais ils constatent que malgré leur application ils n'obtiennent pas du tout le même cercle (validation par transparence en superposant les productions).

Les étudiants restent ainsi bloqués dans une démarche pragmatique.

La situation modélisée par les mathématiques

Face à cet obstacle, nous proposons aux étudiants de mettre momentanément de côté les morceaux de poterie et de s'intéresser à la situation des *arcs de cercles* (annexe 2).

Il s'agit de terminer les cercles dont un de leurs arcs a été tracé sur une feuille mobile unie et de donner la dimension du diamètre. Les étudiants y reconnaissent la situation qu'ils essayaient de résoudre précédemment mais cette fois-ci plusieurs « morceaux de différents pots de fleur » leur seraient fournis.

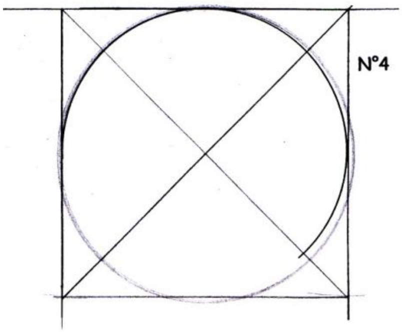
Les étudiants disposent de tout leur matériel de géométrie et de papier calque. Majoritairement, ils commencent par construire le cercle n° 1 et n° 4. Une approche perceptive des figures par les étudiants permet d'obtenir de nombreuses procédures pour l'arc n°4, procédures qui s'appuient sur des propriétés implicites.

Procédure 1 : démarche par essais répétés de la place du centre du cercle : de nombreux trous effectués par la pointe du compas sont repérables. **L'ensemble des points du cercle sont équidistants de son centre**.

Procédure 2 : avec la règle graduée, rechercher la corde de longueur maximale puis ensuite par mesure trouver son milieu. **Dans un cercle, la corde la plus longue est le diamètre et le centre du cercle est le milieu de ce diamètre.**

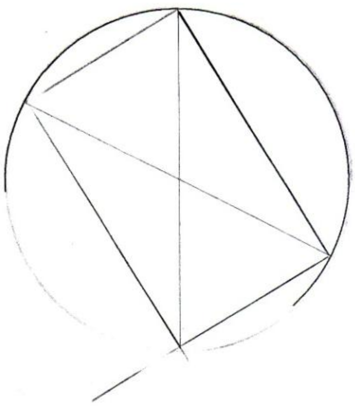
Procédure 3 : par pliages en superposant la ligne du tracé. Deux pliages mettent en évidence le centre du cercle. **Les axes de symétrie du cercle sont sécants en un point qui est le centre du cercle**.

Il est intéressant de constater que ces trois premières procédures ont déjà été observées chez les élèves de 7 à 9 ans dans les travaux d'Artigue et Robinet (1986) concernant les conceptions du cercle. Les élèves utilisaient également une procédure s'appuyant sur la conservation de la courbure du cercle, comme l'ont utilisée les étudiants avec le pot de fleur (**invariance du cercle par rotation autour de son centre).** Cette procédure n'est pas reprise par les étudiants, peut-être car pas assez mathématique à leur goût dès qu'ils se retrouvent sur la feuille de papier.



Procédure 4 : construction du carré circonscrit au cercle en s'appuyant sur la construction des tangentes, le centre du cercle étant l'intersection des diagonales du carré. Cette construction est souvent utilisée et met en action la définition de la tangente connue comme étant une droite sécante à un cercle en un seul point. Elle aboutit toujours à une construction erronée et les étudiants sont étonnés qu'il soit impossible de construire effectivement la tangente ainsi.

Procédure 5 : à l'aide d'une équerre, construction d'un triangle rectangle inscrit dans l'arc de cercle puis par mesure de l'hypoténuse tracé du centre du cercle. **Tout triangle rectangle est inscriptible dans un cercle et l'hypoténuse du triangle est le diamètre du cercle.**



Procédure 6 : construction d'un rectangle inscrit dans le cercle et obtention du centre du cercle par construction des diagonales du rectangle (voir ci-contre). **Un rectangle est inscriptible dans un cercle dont le centre est l'intersection des diagonales**.

Procédure 7 : construction de la médiatrice d'une corde, elle coupe le cercle en deux points qui constitue le diamètre, puis le centre du cercle est obtenu par mesure.

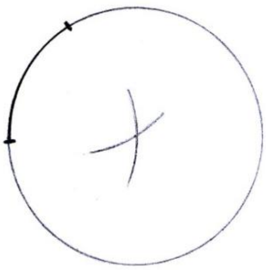
Procédure 8 : construction de la médiatrice de deux cordes différentes. Elles sont sécantes en un point centre du cercle. **L'ensemble des points du cercle sont équidistants au centre**.

Les variables possibles de cette situation concerne d'une part la longueur proposée du diamètre des arcs de cercle déjà tracés et d'autre part l'orientation de ceux-ci.

En effet, si la mesure de la longueur du diamètre est non entière, la construction du centre du cercle par la mesure est difficile même si elle est réalisée rigoureusement avec des instruments de bonne qualité. L'orientation des arcs de cercles peut avoir des influence sur l'emploi de certains instruments comme l'équerre, souvent utilisée dans une orientation prototypique, l'angle droit tourné vers le haut à gauche par rapport à la feuille de papier.

Parmi ces procédures, plusieurs ne permettent pas d'obtenir le centre du cercle pour les autres arcs et les étudiants prennent vite conscience qu'il est nécessaire de trouver des méthodes efficaces quelle que soit la dimension de l'arc proposé. Pour l'arc de cercle n°1, une autre procédure est aussi utilisée car la reconnaissance perceptive d'un demi cercle permet la construction immédiate du diamètre.

N°2



Pour l'arc de cercle n°2, certains vont construire un triangle équilatéral en prenant la longueur de la corde qui intercepte l'arc et réussissent à construire le cercle. Cette procédure est ici efficace puisque l'angle au centre vaut 60° mais sera inopérante dans les autres cas. Ce cas sera questionné dans la suite de la séance pour démontrer pourquoi dans cet exemple particulier cette procédure est efficace.

Néanmoins beaucoup d'étudiants sont en difficultés pour la construction des cercles n°2 et 3.

Comme nous l'avons signalé, cette situation n'a pas les mêmes objectifs que celle des poignées de mains. Elle permet d'obtenir une évaluation diagnostique des différentes propriétés mobilisables par les étudiants ainsi que des représentations erronées de certaines autres propriétés ou celles qui ne sont pas fonctionnelles dans le cadre de la construction.

Cette séance permet de redéfinir un certain nombre de propriétés géométriques, de leur donner un sens fonctionnel c'est-à-dire en quoi elles permettent de résoudre des problèmes de construction. Elle vise aussi à réinvestir les notions de médiatrice d'un segment et de cercle comme ensemble de points équidistants au centre, notions qui serviront pour les constructions à la règle et au compas.

Les apports théoriques qui suivront cette situation porteront sur les paradigmes géométriques (Houdement et Kuzniak, 2006). En effet, beaucoup d'étudiants ne sont pas convaincus de la validité des constructions proposées à partir des propriétés géométriques réactivées car les imprécisions des constructions réalisées ne leur permettent pas de retrouver le cercle souhaité. Ils ne font pas de différence entre construction par approximations (guidée par des propriétés) et construction par ajustements (guidée par la perception) ce qui fait qu'ils restent convaincus que certaines de leurs procédures, faites un peu au hasard, sont justes.

Le travail sur la notion de tangente est assez exemplaire. Les connaissances mobilisées sont exactes mais ne permettent pas de résoudre le problème. La connaissance de la tangente par les étudiants est quasiment exclusivement comme la position relative d'une droite et d'un cercle, celle où il n'y a qu'un point commun. Difficilement utilisable dans la construction mais qui ne gène pas les étudiants.

Retour au pot de fleur

Chacun reprend son morceau, ses tracés et trouve alors le diamètre du cercle aux approximations près.

Pour obtenir la hauteur cela est, à ce moment de la formation, assez complexe. En effet un pot de fleur est un cône tronqué et pour obtenir la hauteur il faut pouvoir mesurer l'angle existant entre les plans parallèles des bases et une génératrice. Ensuite par des calculs trigonométriques et l'application du théorème de Thalès (réduction), on obtient la hauteur du pot. Ces notions seront retravaillées plus tard au moment de l'étude des solides géométriques. Néanmoins, une vraie difficulté demeure concernant la mesure de l'angle nécessaire. Il nous faut construire un gabarit d'angle qui coïncide avec l'angle du pot de fleur et ensuite prendre la mesure de ce gabarit.

LIEN ENTRE LA MODÉLISATION ET LES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES DISPONIBLES

Face aux enjeux de la formation, les situations proposées sont-elles de « bonnes situations » de formation, autrement dit des situations qui permettent de remplir les deux objectifs initiaux : acquisition de savoirs mathématiques et réconciliation avec la discipline ?

On se rend compte que, dans la situation des *poignées de mains,* le transfert des connaissances ne se réalise pas et que chaque problème reste un nouveau problème surtout pour les étudiants peu scientifiques.

On observe que dans la situation du *pot de fleur cassé,* seule une solution pragmatique leur semble possible. Les étudiants ne disposent pas assez de modèles mathématiques mobilisables pour résoudre le problème concret. En effet, pour résoudre cette situation, il faut d'une part reconnaître un modèle et d'autre part il faut savoir mobiliser les techniques qui s'y rattache.

Ainsi concernant la construction de savoirs nouveaux et la réactualisation d'anciens, ces situations ne semblent pas forcément être pertinentes pour les étudiants. Plusieurs mois après la situation des *poignées de mains*, moins de la moitié de mes étudiants sont capables de résoudre l'exercice proposé en annexe 3.

En revanche, il semble que ces situations, travaillées en début de formation avec les étudiants, atteignent leur objectif en terme de réconciliation avec les mathématiques et permettent à beaucoup d'étudiants de se lancer sans peur dans des démarches d'investigation et de recherche pour résoudre des problèmes nouveaux.

Finalement, nous pouvons observé à la fois, un relatif échec d'une transposition de compétences mathématiques chez les étudiants mais une réussite d'une transposition dans leurs attitudes à s'engager dans l'activité mathématique. Cette dichotomie peut être interprétée par le fait que l'acquisition des notions mathématiques se situe du côté du cognitif et nécessite de nombreux exercices d'entraînement. Ainsi, quelques rencontres ne suffisent pas à fixer l'acquisition cognitive. En revanche, la réconciliation se situe du côté de l'affectif et dans ce cas une simple rencontre peut être décisive, du type expérience cruciale, il y a alors moins besoin de l'entraîner et de l'exercer.

D'autre part, ces deux situations semblent pertinentes pour une première approche de la théorie des situations didactiques et de la notion de registres de représentation qui sont illustrés dans les moment d'analyse *a posteriori* avec les étudiants. Un dernier élément qui nous semble essentiel pour de futurs enseignants, c'est la capacité à s'investir et à comprendre les procédures des autres pour résoudre un problème mathématique. Nous avons remarqué que ces deux situations, les *poignées de mains* et le *pot de fleur cassé* permettent aussi de développer cette attitude qui devra devenir une attitude professionnelle pour ces futurs enseignants.

BIBLIOGRAPHIE

Artigue, M., & Robinet, J. (1986). Conception du cercle chez les élèves de l'école élémentaire, Brochure n°38, IREM, Université Paris 7.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

Brousseau, G. (2003). Quels type de savoirs mathématiques utilise-t-on dans la modélisation ? www.univ-irem.fr/IMG/pdf/Mod-Recueil.pdf.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in mathematics 61* (1-2), 103-131.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et sciences cognitives 10*, 5 - 53.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives 11*, 175-216.

Jaffrot, M., & Taveau, C. (2006). Situations de formation pour aborder la modélisation de notions mathématiques chez les PE1. *Cdrom des Actes du XXXIIIe colloque Copirelem CRDP Versailles.*

Kuzniak, A. (2007). Le savoir mathématique : source et base de l'enseignement didactique et pédagogique pour les futurs enseignants en mathématiques. *Recherche et formation 55*, 27-40.

Lafortune, L., & Solar, C. (1994). *Des mathématiques autrement*. Montréal : éditions du Remue ménage.

Lafortune, L. (1989). *Quelles différences ? Les femmes et l'enseignement des mathématiques*. Montréal : éditions du Remue ménage.

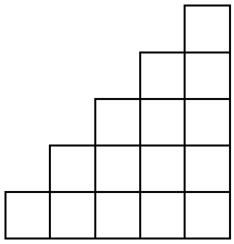
Nimier, J. (1976). *Mathématiques et affectivité*. Paris : Stock.

Tobias, S. (1978 et 1990). *Overcoming Math Anxiety*. Boston: houghton Mifflin.

Tobias, S. (1978). *Le mythe des maths*. Paris Montréal : éditions Axes.

ANNEXE 1

L'escalier



Cet escalier est formé de cubes et il a 5 marches.

Combien de cubes faudra-t-il pour construire un escalier de 10 marches ? Un escalier de 27 marches ? Un escalier de p marches ?

Les diagonales

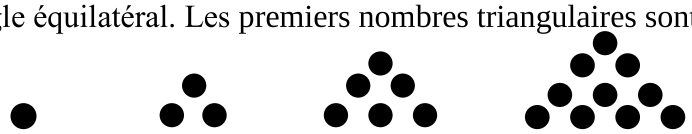
Quel est le nombre de diagonales d'un hexagone ? d'un décagone ? d'un polygone à n côtés ?

Points et lignes

Quel est le nombre de segments qui relient N points, sachant que 3 de ces points ne sont jamais alignés ?

Les nombres triangulaires

Un nombre est appelé « triangulaire » s'il peut représenter une quantité disposée sous la forme d'un triangle équilatéral. Les premiers nombres triangulaires sont :



1 **3** **6** **10**

Donnez les six nombres triangulaires qui suivent le nombre triangulaire 10. Quel est le 55ème nombre triangulaire ?

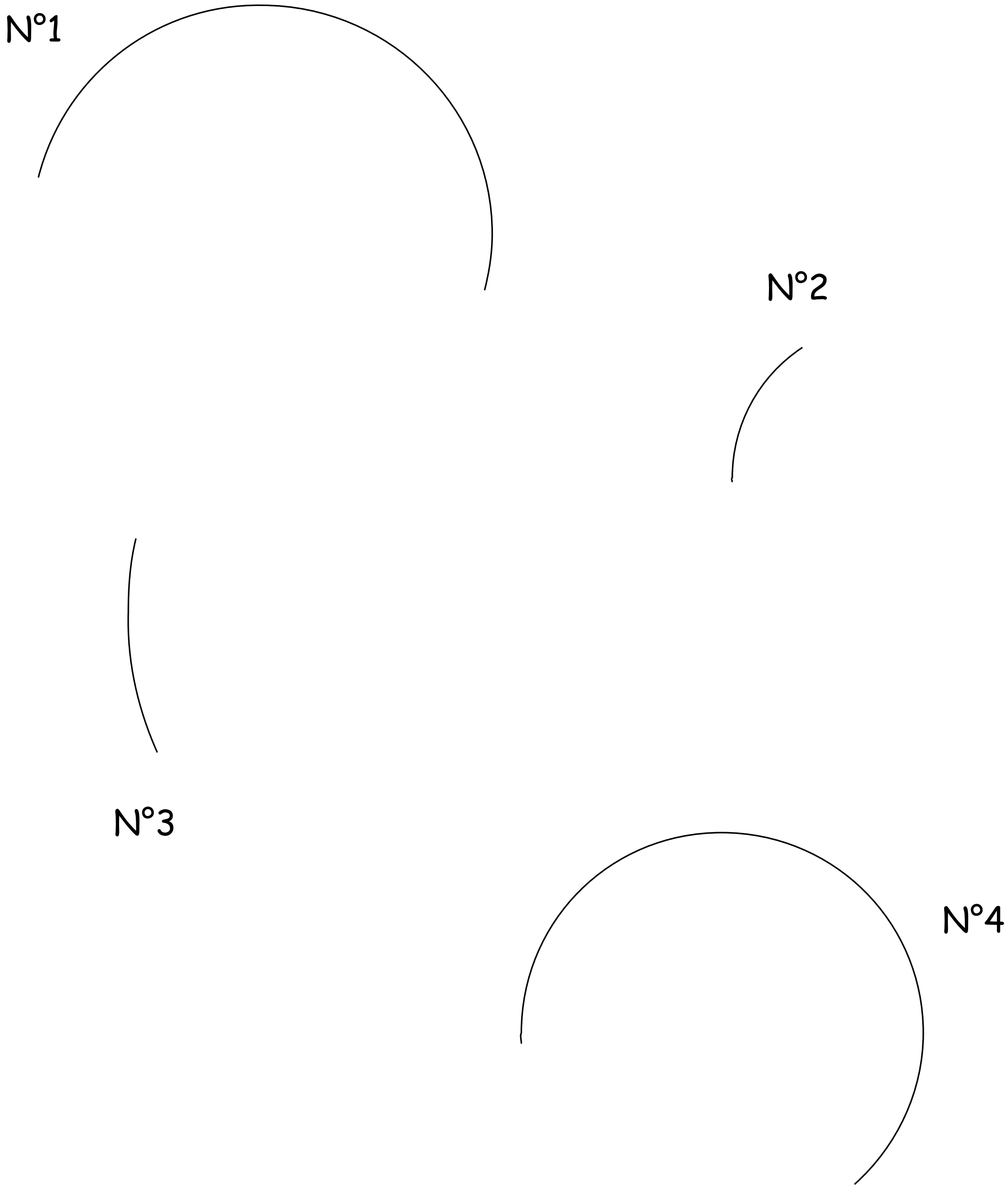
Le renard et les raisins

Un renard aimait manger les grains de raisins. Le premier jour il en mange 6, puis le 2ème jour il en mange 6 de plus que ce qu'il avait mangé le premier jour.

Ainsi de suite, tous les jours il mangeait 6 grains de plus que chaque jour précédent. Combien de jours lui faudra-t-il pour avoir mangé au total 1800 grains ?

ANNEXE 2

Terminer les cercles à partir du tracé d'un de leurs arcs de cercle et donner la dimension du diamètre.



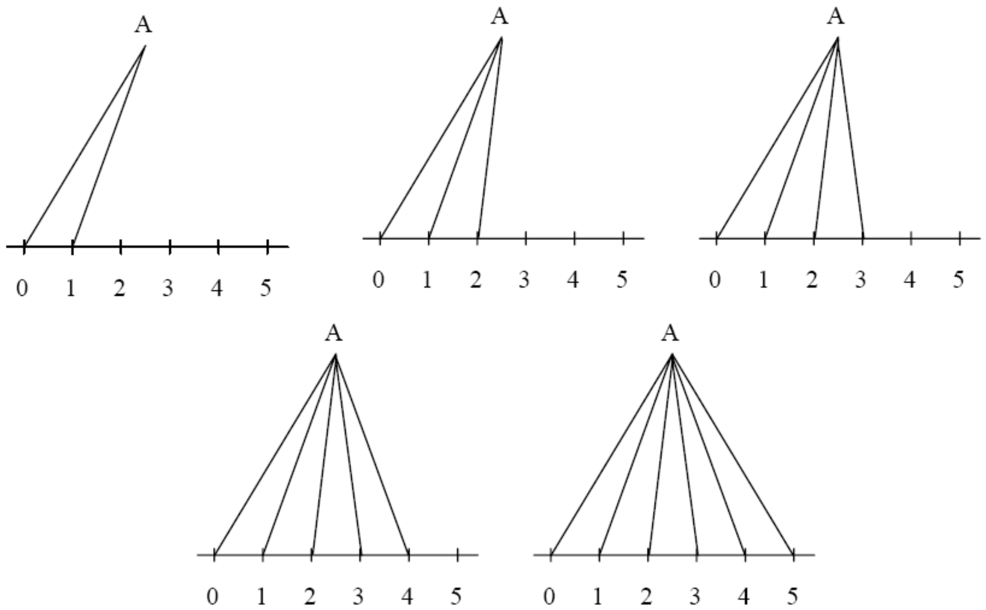
Note (non donnée aux étudiants) : les angles au centre qui intercepte ces arcs sont :

- de 180° pour l'arc N°1 ;
- de 60° pour l'arc N°2 ;
- de 25° pour l'arc N°3 ;
- de 120° pour l'arc N°4.

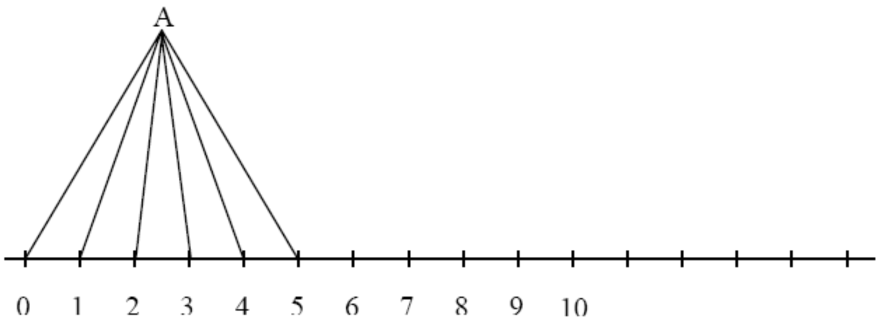
ANNEXE 3

On considère une demi-droite graduée. On numérote les points de la graduation avec les nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5…

On trace tous les segments dont une extrémité est le point A (comme ci-dessous) et l'autre un point de la graduation, en prenant les points de la graduation dans l'ordre croissant de leurs numéros.



1. Cinq étapes ont été représentées ci-dessus. Combien de triangles sont visibles à chacune d'elles ?
2. Julio a placé sur la demi-droite les points numérotés de 0 à 10. Il a tracé tous les segments d'origine A correspondants. Combien de triangles a-t-il ainsi créés ? Justifier la réponse.



3. Sur la figure réalisée par Léa, il y a 105 triangles. Quel est le numéro du dernier point qu'elle a marqué sur la demi-droite ? Justifier la réponse.
4. Julio dit : « Et s'il y avait 3 321 triangles sur le dessin, quel serait le numéro du dernier point marqué sur la demi-droite ? ». Répondre et justifier la réponse.

LA NUMÉRATION EN BASE QUELCONQUE POUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS DU PREMIER DEGRÉ EN FRANCE ET EN GRÈCE.
UNE ÉTUDE ARTICULANT REGISTRES ET PRAXÉOLOGIES

Kostas Nikolantonakis* and Laurent Vivier**

***Université de Macédoine Ouest, Grèce**

**** Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris Diderot et Université d'Orléans, France**

RÉSUMÉ

La formation des enseignants du premier degré est différente à plus d'un titre entre la France et la Grèce. Néanmoins, les apports mathématiques qui permettent d'éclairer et de maîtriser les mathématiques de l'école élémentaire sont proches, comme la numération de position des entiers naturels dans une base quelconque que nous étudions dans cet article. Un test, passé par deux populations d'étudiants, française et grecque, est analysé par une articulation novatrice entre registres de représentation et praxéologies.

INTRODUCTION

La recherche présentée dans cet article est le fruit d'une collaboration d'enseignement et de recherche, dans le cadre du programme Erasmus, entre l'université d'Orléans, en France, et l'université de Macédoine Ouest, en Grèce. Dans l'objectif de comparer la formation en mathématiques des enseignants du premier degré, nous avons, de manière prospective, proposé des tests à des étudiants français et grecs. Parmi les items soumis, nous présentons dans cet article quelques questions soulevées par la numération en base quelconque. Ce thème, qui déstabilise souvent les étudiants, permet de faire ressortir des phénomènes qui peuvent s'analyser aussi bien par les praxéologies que par les registres de représentation.

Afin d'analyser les items relatifs à la numération en base quelconque, nous développons l'articulation, initiée dans Vivier (2008), entre la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) de Chevallard (1999, 2002) et les registres de représentation sémiotique de Duval (1993, 1995, 1996). L'intérêt de la TAD est qu'elle fournit un cadre permettant de lier les techniques avec les types de tâches en les insérant dans une organisation mathématique ce que ne permet pas directement le cadre de Duval. D'autre part, la distinction des techniques en traitement/conversion permet, pour des conversions non congruentes, de distinguer une différence cognitive pointée par Duval (1996) que les praxéologies ne permettent généralement pas d'analyser.

Nous commençons par présenter les systèmes de formation, grec et français, des enseignants du premier degré. Des différences de structures apparaissent, mais, concernant la numération en base quelconque, nous exposerons les nombreux points de convergence qui permettent d'envisager une étude comparative. La section suivante est une section théorique sur l'articulation entre les cadres de Chevallard et de Duval, déjà esquissée dans Vivier (2008). Nous y présentons notre réflexion sur l'intérêt de prendre simultanément en compte les praxéologies et les registres pour certains problèmes mathématiques. Les deux sections suivantes présentent le test proposé, son analyse *a priori* puis les analyses *a posteriori*. Les analyses utilisent bien entendu le cadre développé en section 3.

LES CONTEXTES DE FORMATION

Deux systèmes de formation différents

En Grèce, dès l'entrée à l'université, les étudiants se destinant au professorat du premier degré doivent faire le choix d'une université pédagogique où ils préparent, en quatre ans, un diplôme. Plusieurs parcours sont possibles, notamment par un concours de recrutement national qui a lieu tous les deux ans. Il est assez facile, pour les lauréats d'un diplôme d'enseignement, de trouver un travail dans l'enseignement primaire, éventuellement en tant que contractuel, ce qui explique l'intérêt des étudiants pour les facultés pédagogiques.

En France [1], pendant les trois premières années universitaires, les étudiants préparent une licence de leur choix. C'est seulement ensuite qu'ils préparent un concours spécifique pour l'enseignement primaire. Après obtention de ce concours ils sont, après validation d'une année de stage et de formation dans les Instituts Universitaires de Formation des Maîtres (IUFM), titulaires d'un poste d'enseignement du premier degré. Il y a peu de professeurs contractuels dans le premier degré en France. Une année universitaire d'enseignement de plus est relevée en France, mais en Grèce les quatre années de formation sont totalement attribuées à l'enseignement primaire contre seulement deux en France.

Les institutions d'enseignement primaire diffèrent sur deux points essentiels. En Grèce, l'enseignement primaire se poursuit jusqu'au grade 6 inclus alors qu'en France il se termine après le grade 5. Avec une année de plus d'enseignement dans le premier degré en Grèce, il y a plus de notions mathématiques à enseigner qu'en France. Parallèlement, on constate rapidement que, à niveau d'âge identique, les programmes grecs comportent, en mathématiques, plus de notions que les programmes français. Ainsi, les professeurs du premier degré en Grèce doivent maîtriser, pour les enseigner, un plus grand contenu mathématique que leurs homologues français.

La numération de position dans la formation des enseignants

En ce qui concerne la numération en base autre que dix, les pré-requis et les objectifs sont identiques en France et en Grèce. Cette notion est absente du cursus primaire et secondaire [2] dans les deux pays et les étudiants de chaque nationalité se retrouvent dans la même situation face à ce savoir, totalement nouveau pour la plupart d'entre eux. Les futurs enseignants n'auront à enseigner que la numération de position en base dix, ils n'ont donc pas une obligation de maîtriser ce nouveau savoir.

Par conséquent, il n'est proposé qu'une faible quantité de cours et de notions sur la numération en base quelconque aux futurs enseignants du premier degré dans les deux pays. Il s'agit plutôt de faire prendre conscience du caractère relatif de la base dix tout en faisant comprendre les mécanismes généraux de la numération de position. Plus spécifiquement, les points suivants sont abordés et travaillés :

- le codage ;
- l'aspect ordinal ;
- la conversion entre deux bases dont l'une est très souvent la base dix [3] ;
- quelques opérations simples pour mieux comprendre le mécanisme des retenues dans les techniques opératoires.

Les étudiants français ont eu un cours magistral en amphithéâtre de 2 heures sur la numération (dont la numération de position en base quelconque) en tout début d'année universitaire. Le groupe des 26 étudiants français qui ont passé le test a ensuite suivi environ 4 heures de travaux dirigés sur la numération de position en base quelconque.

En Grèce, la première année comporte deux cours notionnels obligatoires répartis sur les deux semestres : « éléments d'arithmétique, théorie des nombres et fonctions pour l'enseignant » et « géométrie et résolution de problèmes » pour le second semestre. En première année d'université, sur les 13 cours de 3 heures du premier semestre, 4 sont attribués à la numération en base quelconque, soit 9 heures de travail effectif [4].

Hypothèses sur les deux populations

Les deux formations sont semblables quant au thème de la numération en base quelconque, notamment en ce qui concerne le faible nombre d'heures d'enseignement sur ce thème. Les étudiants français sont, en moyenne, plus âgés de 3 ans que leurs homologues grecs, temps passé à préparer une licence. Mais ces 3 années n'ont que peu de répercussions pour le thème considéré dans cet article – exception faite des étudiants français, peu nombreux, qui détiennent une licence de mathématiques.

Les étudiants grecs ont passé, à l'issue du premier semestre, un examen de 3 heures dont la numération constitue environ 1/3 des exercices. Dans cet article, nous analysons une centaine de ces productions grecques. Comme il s'agit de l'examen qui sanctionne le premier semestre, nous faisons l'hypothèse d'un bon investissement des étudiants grecs pour ce test.

Le test passé par les 26 étudiants français est constitué d'une partie du contenu de l'examen grec du premier semestre à laquelle sont ajoutés des items de géométrie qui seront proposés à l'examen grec du second semestre. Les étudiants français ont eu 3 heures pour effectuer le test. Ce dernier a eu lieu en fin de formation, à deux semaines des épreuves du concours. Il s'agit d'un ultime entraînement au concours : nous faisons également l'hypothèse d'un bon investissement des étudiants français pour ce test.

La plupart des étudiants n'ont pas semblé être pressés par le temps lors du test, de 3 heures pour les deux populations. Les items non abordés ou incomplets sont principalement dus à une incapacité d'un étudiant à traiter tel ou tel exercice. Nous faisons donc l'hypothèse que le facteur temps n'a pas été déterminant.

LE CADRE D'ANALYSE

Après une rapide présentation des deux cadres, nous exposons dans cette section l'articulation entre les praxis (Chevallard, 1999, 2002) et les registres de représentation (Duval, 1993, 1995, 1996) que nous utiliserons dans les analyses de la section suivante.

La praxis en TAD

En Théorie Anthropologique du Didactique, c'est autour du, ou des, type(s) de tâches que s'élabore le travail en mathématiques nommé par Chevallard (1999) Organisation Mathématique (OM). Généralement, pour effectuer un type de tâches T, on dispose d'au moins une technique τ. Par exemple, pour le type de tâches *effectuer la somme de deux entiers naturels*, plusieurs techniques sont envisageables comme :

- prendre deux collections dont le cardinal est donné par chacun des deux nombres en jeu puis dénombrer le cardinal de la nouvelle collection obtenue par réunion ;
- sur-compter à partir d'un des deux nombres ;
- utiliser un algorithme d'addition (poser l'opération) ;
- utiliser une calculatrice.

Un type de tâches et les techniques relatives s'organisent en un bloc [T,τ] nommé bloc des savoir-faire ou *praxis*. Si aucune technique n'est à disposition, le type de tâches T est problématique et demande la production d'une technique (Chevallard, 1999). Pour produire et/ou justifier une technique τ, il est nécessaire de porter un regard théorique sur le problème posé par T. Chevallard définit un nouveau bloc, appelé bloc des savoirs ou *logos*, constitué des technologie et théorie. Type de tâches, techniques, technologie et théorie forment une *praxéologie*, qualifiée de ponctuelle lorsque l'on ne considère qu'un seul type de tâches.

Les registres de représentation sémiotique

Duval, dans son cadre d'analyse, prend un autre point de vue. Il part des signes utilisés dans le travail mathématique qui se regroupent en systèmes sémiotiques. Pour les besoins des mathématiques, ces systèmes sémiotiques sont plus précisément des registres de représentation sémiotique (Duval, 1993, 1995, 1996). La distinction essentielle faite par Duval consiste en la dichotomie entre traitement et conversion. Un traitement est une transformation sémiotique qui reste à l'intérieur d'un même registre de représentation R ; une conversion est une transformation sémiotique dont le résultat est exprimé dans un autre registre. Nous notons R→R' une conversion du registre R dans le registre R'. Par exemple, si l'on considère le registre R de représentation des entiers dans le système décimal, la transformation sémiotique 8+13 en 21 est un traitement[5] de R, alors que si l'on considère la transformation sémiotique 3/4 en 0,75 il s'agit d'une conversion du registre des fractions R_f dans le registre usuel des nombres décimaux R_d.

Duval (1996) insiste particulièrement sur la différence cognitive entre traitements et conversions. Ces dernières sont bien plus complexes et problématiques, surtout lorsqu'elles ne sont pas congruentes. Par exemple, la conversion du registre R_f dans le registre R_d est non congruente. Mais, comme le précise Duval, deux conversions réciproques ne sont, en général, pas cognitivement équivalentes. C'est le cas avec R_f et R_d où la conversion du registre des décimaux dans le registre des fractions (décimales) est, elle, très congruente – on retrouve tous les chiffres dans le même ordre, sauf éventuellement les zéros finaux.

Praxis indexées par les registres

Bosch et Chevallard (1999) ont développé l'aspect sémiotique en TAD en introduisant la distinction entre ostensif et non ostensif. L'accent est principalement mis sur les modes de production des ostensifs : graphique, gestuel, phonique, etc. Cette distinction a montré son intérêt mais elle a, à nos yeux, le défaut de ne pas prendre en compte le fait essentiel qu'un signe mathématique n'est jamais isolé mais est toujours intégré dans au moins un registre de représentation. Pour ces raisons, l'articulation entre les praxéologies et les registres de représentation que nous proposons écarte volontairement cette notion d'ostensif.

En TAD, un type de tâches n'est pas toujours énoncé en faisant référence au(x) registre(s) de représentation utilisé(s). Or, une tâche que doit traiter un élève est toujours exprimée à l'aide de registres sémiotiques. Ces derniers peuvent considérablement influencer l'activité cognitive de l'élève. Par exemple, pour les populations d'étudiants concernées par notre étude, le type de tâches « trouver le successeur d'un entier » est effectué correctement et de manière quasi immédiate si le registre de représentation des entiers est la base dix. En revanche, et nous le constaterons, il n'en est pas de même dès que la base de référence n'est plus dix : les erreurs sont fréquentes et la durée de traitement augmente.

Pour prendre en compte cette distinction, nous indexons les types de tâches par le(s) registre(s) dans le(s)quel(s) ils sont exprimés. Lorsque le type de tâches T est relatif à un seul registre de représentation R, nous le notons T_R. De même, une technique τ propre à un seul registre R, c'est-à-dire un traitement de R, est notée τ_R. Nous obtenons ainsi une praxis relatif à un registre R, ce que nous notons $[T_R,\tau_R]$ ou plus simplement $[T,\tau]_R$ et que nous appelons R-praxis.

Les conversions

Le cadre précédent est très local et ne permet pas, à lui seul, de modéliser toute l'activité mathématique. Par exemple, un type de tâches peut être exprimé dans plusieurs registres ce qui nécessite la coordination des registres et des conversions [6]. Afin de lier les points de vue de Chevallard et de Duval, nous considérons une conversion entre deux registres $R \rightarrow R'$ comme une technique $\tau_{R \rightarrow R'}$. Ces techniques de conversion sont, selon Duval, très différentes du point de vue cognitif des techniques de traitement qui s'expriment dans un seul registre.

Duval précise que le fonctionnement cognitif de base des mathématiques nécessite la coordination d'au moins deux registres de représentation (Duval, 1996). Nous réinterprétons son propos en le précisant dans le langage des praxéologies. Prenons deux registres R et R' et considérons deux techniques de conversion réciproques $\tau_{R \rightarrow R'}$ et $\tau_{R' \rightarrow R}$. Ce dernières, comme le signale Duval (1996), permettent de coordonner les registres. Mais la coordination va plus loin : ces techniques de conversion permettent de coordonner des traitements, τ_R et $\tau_{R'}$, mais aussi des types de tâches, T_R et $T_{R'}$. Finalement les techniques de conversion permettent de coordonner des R-praxis, $[T,\tau]_R$ et $[T,\tau]_{R'}$.

Mais, et nous le constaterons, les techniques de conversion permettent aussi des stratégies d'évitement : si l'on dispose de $[T,\tau]_R$ et que l'on veuille résoudre $T_{R'}$ on peut alors bloquer la production d'une technique $\tau_{R'}$, propre au registre R'. Il suffit en effet d'utiliser $\tau_{R' \rightarrow R}$ pour ensuite résoudre T_R à l'aide de τ_R – puis, éventuellement, utiliser $\tau_{R \rightarrow R'}$ si l'on veut revenir dans le registre initial R'. De ce point de vue, une technique de conversion est un élément technologique : $\tau_{R' \rightarrow R}$ permet de produire et justifier une technique pour résoudre $T_{R'}$ en s'appuyant sur la R-praxis $[T,\tau]_R$.

On pourrait rendre compte de la situation avec les seules praxéologies en précisant le registre dans l'énoncé d'un type de tâches. Une technique pour résoudre $T_{R'}$ serait soit de travailler dans un seul registre, $\tau_{R'}$, soit de faire une conversion, $\tau_{R' \rightarrow R}$, avant un traitement dans le registre R, τ_R. Mais, en plaçant sur un pied d'égalité traitement et conversion, cette modélisation masque leur différence cognitive essentielle révélée par Duval.

LE TEST SUR LA NUMÉRATION DE POSITION

Nous interrogeons dans les tests (cf. annexe 1) des types de tâches usuels et non problématiques aux niveaux d'enseignement considérés, exception faite du registre de représentation dans lequel sont exprimés ces types de tâches. Nous présentons ici les deux suivants :

T^s : trouver le successeur et le prédécesseur d'un nombre entier donné.

T^p : trouver la parité d'un nombre entier donné.

La difficulté de ces types de tâches provient essentiellement des registres utilisés qui sont différents du registre de numération en base dix. Nous indexons les types de tâches, techniques et praxis par la base du registre de représentation considéré. Nous distinguerons plus spécifiquement les bases *a*, avec $a \neq dix$, et dix.

Les registres

Le codage des entiers naturels dans le système de numération de position en base *a* constitue un registre de représentation au sens de Duval (1996) que nous notons R-*a*. Du point de vue mathématique, tous ces registres sont totalement équivalents, mais la prégnance de R-*dix* dans la société et dans l'enseignement font que ce dernier est très largement privilégié.

Du point de vue cognitif, toute variation dans R-*a* induit une variation dans R-*b* : les variations, de quelque nature qu'elles soient, sont cognitivement pertinentes (Duval, 1996). En outre, ces conversions ne sont pas congruentes du tout : en général tous les chiffres changent ainsi que le nombre de chiffres.

Pour effectuer une conversion R-*a*→R-*b* pour un nombre *N*, on relève essentiellement ces deux techniques :

$\tau^{\mathrm{div}}{}_{a \to b}$, effectuer des divisions euclidiennes successives par *b* dans R-*a*, en partant de la division euclidienne de *N* par *b* – notons que *b* doit au préalable être écrit en base *a*. Les restes successifs, en les identifiant aux chiffres dans R-*b*, donnent les chiffres de *N* dans R-*b* (voir G12 en annexe 2) ;

$\tau^{\mathrm{ep}}{}_{a \to b}$, partir de l'écriture polynomiale dans R-*a*, convertir [7] *a* et les chiffres de *a* dans R-*b*, puis effectuer le calcul dans R-*b* (voir F9 et G14 en annexe 2).

Ces conversions nécessitent de maîtriser les techniques opératoires dans R-*a* ce qui n'est en général le cas que pour R-*dix* – surtout que ces techniques nécessitent l'usage de la multiplication et, pour la première, de la division euclidienne. Ainsi, on peut penser raisonnablement que la conversion R-*a*→R-*b* mettant en jeu deux bases différentes de la base dix est souvent effectuée par la double conversion R-*a*→R-*dix*→R-*b* utilisant l'écriture polynomiale, $\tau^{\mathrm{ep}}{}_{a \to dix}$, puis des divisions euclidiennes, $\tau^{\mathrm{div}}{}_{dix \to b}$.

Le type de tâches T_a^s

Le type de tâches T_a^s est : *trouver le successeur et le prédécesseur d'un nombre entier écrit en base a*. La variable didactique numérique (voir annexe 1) est choisie pour chacun des cinq items de sorte qu'un des deux nombres à déterminer (successeur ou prédécesseur) nécessite une modification d'au moins deux chiffres avec, pour l'item c, l'introduction d'un nouveau chiffre. Pour déterminer les deux nombres encadrant immédiatement un certain nombre *N* codé dans R-*a*, on peut ajouter 1 pour obtenir le successeur (*N*+1) et retrancher 1 pour obtenir le prédécesseur (*N*–1), toujours dans le registre R-*a*. On définit ainsi les deux techniques τ_a^{+1} et τ_a^{-1}. La R-praxis indexée par R-*a* pour le type de tâches T_a^s est notée $[T_a^s ; \tau_a^{+1}, \tau_a^{-1}]$ ou plus simplement $[T^s ; \tau^{+1}, \tau^{-1}]_a$. [8]

Avec l'utilisation des techniques de conversion, il est nécessaire d'écrire un polynôme en *b*, puis de calculer correctement sa valeur, dans la base *dix* pour ce qui nous occupe. Dans ce test, les conversions en base dix ne sont pas problématiques, nous avons proposé des bases toujours inférieures à dix. Ainsi, il n'y a pas à convertir au préalable ni les chiffres ni la base puisqu'ils s'interprètent directement et correctement en base dix. Ainsi, une autre manière d'effectuer T_a^s est de procéder ainsi : utiliser l'écriture polynomiale, $\tau^{ep}{}_{a\to dix}$, puis ajouter et retrancher 1, τ_{dix}^{+1} et τ_{dix}^{-1}, puis, éventuellement, effectuer des divisions euclidiennes, $\tau^{div}{}_{dix\to a}$. Ce type de procédé est plus complexe que la précédente qui reste dans R-*a* : mathématiquement car on utilise toujours τ_a^{+1} et τ_a^{-1}, avec *a*=*dix*, mais avec au moins une conversion en plus, et cognitivement car au moins une conversion est requise.

Le type de tâches T_a^p

Le type de tâches T_a^p est : *trouver la parité d'un nombre entier écrit en base a*. Il a été choisi deux bases paires et deux impaires avec, pour ces dernières, des nombres avec des chiffres tous pairs sauf éventuellement celui des unités (voir annexe 1). Ainsi, il n'est pas nécessaire de convertir dans R-*dix* pour avoir la réponse puisque le chiffre des unités donne la réponse. Il sera néanmoins sans doute très rare de voir une technique τ_a^p propre à T_a^p, même si elles peuvent être facilement justifiées par l'écriture polynomiale [9] :

- si *a* est pair, la parité de *N* est la même que celle de son chiffre des unités (c'est la technique utilisée en base dix) ;
- si *a* est impair, la parité de *N* est la même que le nombre de ses chiffres impairs.

La R-praxis indexée par R-*a* pour le type de tâches T_a^p est notée $[T_a^p ; \tau_a^p]$ ou plus simplement $[T^p ; \tau^p]_a$.

Il semble peu vraisemblable d'observer cette R-praxis puisqu'elle n'a pas été travaillée et la résolution des items par une conversion dans R-*dix* sera sans doute très majoritaire : $\tau^{ep}{}_{a\to dix}$ puis τ_{dix}^p. Néanmoins, l'écriture polynomiale permet de répondre sans effectuer aucun calcul et donc de développer la R-praxis $[T^p ; \tau^p]_a$ avec un début de production de la technique τ_a^p – avec évidemment des différences selon la parité de *a*. Sur ce point, il est difficile d'interpréter sans ambiguïté une réponse qui suit juste une écriture polynomiale. En effet, il peut s'agir soit d'un début de conversion $R_a \rightarrow R_{dix}$ avec une prise de conscience que la réponse est à portée sans aucun calcul, soit d'une utilisation de l'écriture polynomiale comme un registre à part entière. Toutefois la question ne se pose pas pour notre étude car aucun étudiant ne s'arrête à l'écriture polynomiale pour répondre.

LES ANALYSES

Nous commençons par une courte section pour expliquer le nombre important de non réponses à ces items (voir les colonnes NF en annexes 1). À des fins de précision, les indicateurs retenus pour l'analyse se focalisent sur les traitements et les conversions relatifs aux différents registres de représentation. L'analyse qui suit n'est pas organisée selon les deux types de tâches mais selon le registre de traitement. Le contraste, entre les résultats relatifs aux deux types de tâches, permet de mieux faire ressortir les conclusions. Enfin, une rapide comparaison des deux populations est esquissée.

Aucune réponse

14% des étudiants n'ont pas abordé, ou pas réussi sur leur brouillon, les deux items étudiés relatifs à T^s et T^p, alors que le reste du test a été largement abordé. Il est vraisemblable qu'ils ont été bloqués par les registres R-*a* dans lesquels sont exprimés les types de tâches. Ils n'ont de disponible ni traitement dans R-*a* ni conversion pour ramener le problème dans R-*dix*. C'est T_a^s et T_a^p qui sont problématiques pour ces étudiants ($a \neq dix$). Ce premier groupe montre la pertinence de détacher l'analyse des types de tâches et des registres de représentation : en TAD, comme en mathématique, τ_a^{+1} et τ_{dix}^{+1} constituent une même technique.

Indicateurs pour l'analyse

Pour T^s, nous avons relevé, outre les items non faits (NF) et le nombre d'étudiants ayant donné une réponse correcte aux cinq questions, la base de traitement qui peut être soit la base initiale (BI), soit la base dix (R-*dix*).

Parfois, il n'est pas possible de voir les traitements, même par l'analyse des erreurs, lorsque seule une réponse correcte apparaît en BI. On peut en effet penser que certains étudiants ont effectué les traitements dans R-*dix* mais que conversion et reconversion sont restées dans l'espace privé du brouillon. L'analyse des erreurs permet en général de lever l'indécidabilité. L'erreur peut relever d'un problème soit de conversion/reconversion dans R-*dix* (voir F6 en annexe 2), soit d'un mauvais traitement [10] en BI. Finalement, les cas indécidables sont très peu nombreux. Nous faisons alors l'hypothèse que les registres de traitement peuvent être déterminés à partir des productions, sans les brouillons. Les quelques étudiants indécidables sont tous dans le cas d'une réponse correcte en BI sans traitement apparent. Ils sont comptés comme ayant fait un traitement en BI.

On pourrait penser à affiner les analyses en distinguant les différentes réponses pour un même étudiant. Par exemple, pour F6 (voir annexe 2) s'il est clair que le prédécesseur de $(10100)_2$ est obtenu par une conversion dans R-*dix*, on peut en douter pour ce qui est du successeur, puisqu'il s'agit du cas non problématique. Mais cela ne permettrait en rien d'éclairer le propos car nous n'avons aucun indice sur le traitement effectif de l'étudiant. D'autre part, ce sont les cas où un réel traitement est requis qui permettent une analyse intéressante car les interprétations d'une substitution d'un 0 final par un 1 pour avoir le successeur ne manquent pas.

Nous avons relevé également les erreurs. Nous ne nous intéressons ici qu'aux erreurs de traitements et de conversions en délaissant les autres (erreur de calcul, oubli d'un terme pourtant écrit, mauvaise lecture de l'énoncé, etc.). Nous relevons ainsi les erreurs de conversion ainsi que les erreurs de traitement. Parmi ces dernières, on note une erreur d'écriture dans le codage qui consiste à ne répercuter une retenue au rang suivant qu'une seule fois alors qu'il est nécessaire de prendre en compte une nouvelle retenue [11]. Ce type d'erreur concerne peu d'étudiants et nous n'avons pas jugé utile de séparer ce type d'erreur des erreurs de traitement en BI.

Pour le type de tâches T^p, nous avons repris la même grille de lecture avec quelques adaptations. On relève quelques étudiants affirmer la parité des nombres sans qu'il n'y ait de trace de R-*dix*. Il est peu probable que les étudiants aient utilisé une technique propre à R-*a* et bien plus vraisemblable d'y voir l'expression de la réponse trouvée au brouillon en R-*dix* après une conversion. Nous les avons néanmoins comptés séparément.

Traitements en base dix

Les étudiants qui font les traitements dans R-*dix* après une conversion (éventuellement suivie d'une reconversion, voir F9 en annexe 2) ne sont pas bloqués par R-*a* mais soit ils manquent de traitements dans ce registre, c'est-à-dire des techniques, soit ils n'osent pas s'aventurer dans ce registre par manque d'assurance. Dans les deux cas, T_a^s et T_a^p n'ont pas de techniques fiables, il n'y a pas de R-praxis constituée pour ces types de tâches et il est nécessaire de construire des techniques. Ces dernières sont obtenues par une conversion dans R-*dix* où l'on dispose des techniques τ_{dix}^{+1} et τ_{dix}^{-1} ainsi que de τ_{dix}^{p}.

Le problème de l'absence de R-praxis dans R-*a* est résolu par $[T^s,T^p,\tau^{+1},\tau^{-1},\tau^p]_{dix}$ et la technique de conversion $\tau^{ep}{}_{a\rightarrow dix}$ avec, parfois, une reconversion par $\tau^{div}{}_{dix\rightarrow a}$. Il y a bien des constructions de techniques, mais elles sont de natures très différentes de celles relatives à des traitements de R-*a*. Ces techniques qui utilisent une conversion évitent de construire une praxis propre à R-*a*. Notre analyse montre que les techniques construites bloquent la construction de R-praxis, notamment pour T_a^p.

La technique utilisée, ou construite, pour T_a^p est systématiquement une technique que nous décomposons en $\tau^{ep}{}_{a\to dix}$ puis $\tau_{dix}{}^p$. Pour T_a^s la situation est un peu plus complexe car certains étudiants donnent la réponse dans R-*dix* sans reconversion. Il y a donc une construction de deux techniques différentes selon les sujets étudiés : $\tau^{ep}{}_{a\to dix}$ puis $\tau_{dix}{}^{+1}$ ou $\tau^{ep}{}_{a\to dix}$ puis $\tau_{dix}{}^{+1}$ puis $\tau^{div}{}_{dix\to a}$. Seule la dernière répond, partiellement, au manque praxéologique dans R-*a*. Notons que cette nécessité de donner la réponse dans R-*a* n'est sans doute pas due à un problème praxéologique. Il est en effet plus simple d'y voir ce que Bronner (2005) a appelé le contrat institutionnel de calcul : le résultat doit être exprimé dans le registre initial.

Dans tous ces cas, l'aspect technologique des conversions est totalement occulté par les étudiants qui font un traitement en base dix, seul l'aspect technique des conversions est utilisé. Ce point renforce une fois de plus la nécessité de distinguer les techniques de traitements et les techniques de conversions. Ces dernières montrent leurs deux aspects praxéologiques de nature très différentes, technique ou technologique.

Comme on pouvait s'y attendre, les erreurs sont essentiellement des erreurs de conversions. Pour T^s, 9 étudiants sur 17 font une erreur de conversion (voir par exemple G14 en annexe 2) contre seulement 1 étudiant qui fait une erreur de traitement. Et pour T^p, sur les 102 étudiants, 39% font une erreur de conversion contre seulement 3% d'erreur de traitement. La technique de conversion $\tau^{ep}{}_{a\to dix}$ n'est pas fiable, en revanche en base dix les traitements sont, sans surprise, très fiables.

Traitements en base initiale

Une différence notable entre les deux types de tâches apparaît. Pour T_a^p, 81% des étudiants utilisent une conversion en base dix contre seulement 13% pour T_a^s. Clairement, la première montre que la R-praxis $[T^p,\tau^p]_a$ n'est pas disponible alors que $[T^s,\tau^{+1},\tau^{-1}]_a$ l'est pour 72% des étudiants.

En outre, les erreurs de traitements en BI sont très fréquentes (certains étudiants n'en faisant qu'une, d'autres en faisant jusque 4 ou 5) et plus de la moitié (64%) des étudiants font au moins une erreur de traitement en BI. Nous y voyons la caractéristique d'un type de tâches T_a^s non problématique (presque les 3/4 des étudiants utilisent $\tau_a{}^{+1}$ et $\tau_a{}^{-1}$), mais relatif à une R-praxis qui n'est pas suffisamment maîtrisée, puisque les erreurs sont très fréquentes.

Comparaison des deux populations

Bien entendu, la faible population française et le fait que les deux populations ne sont pas forcément représentatives de leurs pays respectifs ne permettent pas de tirer des conclusions du point de vue statistique. Néanmoins, certaines différences et de certaines ressemblances apparaissent :

- La R-praxis relatif à T_a^p n'a pas de place dans aucune des deux institutions de formation et on ne relève aucun début de construction de $\tau_a{}^p$. Cette R-praxis, qui

n'est pas un enjeu d'apprentissage, est de fait niée puisqu'il ressort une impossibilité d'obtenir la parité d'un nombre sans l'écrire en base dix.
- Le contrat institutionnel de calcul (Bronner, 2005) vu à travers T_a^s dans les deux pays semblent le même puisqu'il faut fournir le résultat en BI. Mais il semble s'exprimer différemment : les traitements en BI sont plus importants en Grèce qu'en France, mais les reconversions à partir du traitement dans R-*dix* pour T^s semblent plus systématique en France (6 sur 7) qu'en Grèce (6 sur 10).

CONCLUSION

Faire des mathématiques requiert d'avoir des problèmes à résoudre et des techniques qui permettent de les résoudre. Mais d'un autre côté, il n'y a pas d'activité mathématique sans activité sémiotique. Partant de ces deux principes simples il est naturel de penser à une articulation entre registres de représentation et praxis devenait incontournable.

Le problème plus général de l'articulation entre registres et praxéologie est moins aisé. D'une part, dans l'histoire des mathématiques, on relève parfois uniquement des praxis sans bloc théorique constitué. D'autre part, le bloc théorique, le *logos,* faisant intervenir des non ostensifs et/ou plusieurs registres de représentation, ne semblent pas pouvoir être indexées par les registres de représentation. Dans cet article, nous posons le problème des liens entre technologie et conversion. Il nous semble, mais l'étude reste à faire, que toute conversion peut s'interpréter comme un élément technologique. Mais, comme nous l'avons montré, il ne suffit pas d'avoir une conversion pour développer une technologie et que bien au contraire une conversion peut entraver le développement praxéologique en proposant une stratégie d'évitement.

Les connexions entre R-praxis, comme celles étudiées dans cet article, constituent à nos yeux un passage incontournable pour la constitution des organisations mathématiques complexes. Nous rejoignons ici certaines préoccupations de la recherche en TAD sur la connexion des praxéologies de complexité croissante (Barbé, Bosch, Esquinoza, Gascón, 2005 ; García, Gascón, Ruiz Higueras, Bosch, 2006). Notre point de vue est néanmoins différent et se pose plutôt à un niveau inférieur. Le cadre que nous développons semble particulièrement adapté au début d'un apprentissage qui s'accompagne d'un nouveau registre de représentation. C'est le cas traité dans cet article. Nous envisageons de continuer nos recherches par l'étude des nombres entiers dans les premières classes de l'école primaire – registres de représentation et praxis.

On peut également remarquer que, dans (Barbé, Bosch, Esquinoza & Gascón, 2005), le problème de déconnexion de deux praxéologies sur les limites des fonctions du curriculum espagnol s'accompagne également d'une différence de registre propre à ces deux praxéologies. Une fois de plus, l'analyse avec les registres reste à faire.

Cette recherche prospective va être étendue dans deux directions : augmenter la taille de la population française afin de pouvoir proposer des conclusions statistiquement satisfaisantes ; étudier un plus grand nombre de praxis. Nous élaborons dans cette perspective des types de tâches, toujours dans des bases de numération autres que dix, sur la somme, la différence, la comparaison et la conversion entre deux bases de numération.

NOTES

[1] La structure présentée de la formation des enseignants du premier degré en France ne tient pas compte d'une réforme actuellement en cours.

[2] Bien entendu, la numération en base soixante est utilisée pour la mesure du temps et, dans une moindre mesure, pour la mesure des angles. Mais il s'agit plus d'un registre sémiotique de mesures de grandeurs que d'un registre sémiotique de représentation des nombres.

[3] Deux techniques sont essentiellement enseignées et apprises : *faire des divisions euclidiennes successives pour coder un nombre donné en base dix dans une autre base* et *écrire un polynôme en la base afin de trouver, par un calcul, le codage en base dix*. Ces deux techniques ne sont en général pas reliées entre elles et la première reste, pour beaucoup d'étudiant, sans technologie.

[4] En Grèce, trois quarts d'heures de cours compte pour une heure d'enseignement. Ces séances ont toutes lieu en amphithéâtre.

[5] Si l'on prend la technique usuelle du système de numération en base dix. Car si l'on considère la technique qui consiste à créer des collections de cardinal 8 et 13 pour les réunir et dénombrer la nouvelle collection nécessite l'utilisation de deux techniques de conversion. Une technologie de conservation des quantités justifie alors ces techniques.

[6] Comme par exemple pour effectuer la somme 3/4+2,1.

[7] Ces conversions sont en général simples pour les tâches effectives données aux étudiants car les bases a et b sont deux nombres proches. Le cas simple étant $a<b$ car tout chiffre de R-a s'interprète comme un chiffre de R-b, moyennant une conversion totalement masquée par la congruence parfaite. Dans les autres cas, la technique $\tau^{\mathrm{ep}}_{a\to b}$ devient problématique et il faut alors recourir, d'une manière ou d'une autre, à la technique précédente $\tau^{div}_{a\to b}$.

[8] L'utilisation directe du système sémiotique ordinal sans référence à la somme ou à la différence semble trop abstrait, car purement symbolique, pour le niveau des étudiants. Nous faisons l'hypothèse que ces derniers confondent la notion de successeur et de

prédécesseur avec les opérateurs +1 et –1. Bien entendu, il faudrait distinguer la manière d'effectuer ces opérations, mais les traces laissées par les étudiants ne le permettent pas et, en particulier, nous ne trouvons aucune opération +1 ou –1 posée – ce qui ne veut pas dire qu'elles ne le sont pas au brouillon.

[9] L'écriture polynomiale se révèle être un élément technologique important.

[10] Comme $(4000)_7$ qui est souvent donné pour prédécesseur de $(5000)_7$.

[11] Comme l'erreur qui consiste à proposer $(70)_7$ comme successeur de $(66)_7$ ou $(30140)_4$ comme successeur de $(30133)_4$).

BIBLIOGRAPHIE

Barbé, Q. Bosch, M., Espinoza, L., & Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice, The case of limits of functions in spanish hight school, *Educational Studies in Mathematics*, *59*, 235-268.

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). Sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(1), 77-123.

Bronner, A. (2005). La question du numérique dans l'enseignement du secondaire au travers des évolutions curriculaires, *Actes de la XIII^{ème} école d'été de didactique des mathématiques*, Ste Livrade, 18-26 août 2005.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude 1. Structures et fonctions, *Actes de la 11^{e} École d'Été de didactique des mathématiques, Corps, 21-30 Août 2001*, (pp 3-22). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 222-265.

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ?, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 16*(3), 349-382.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Peter Lang, Berne.

Duval, R. (1993). Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactiques et de sciences cognitives,* 5, 37-65.

Garcia, F. J., Gascon, J., Ruiz Higueras, L. & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics, *ZDM, 38*(3), 226-246.

Vivier, L. (2008). De la synthèse sur les nombres à la doxa ensembliste, *Annales de Didactiques et de sciences cognitives,* 13, 63-92.

ANNEXE 1 : ITEMS DU TEST ET RÉSULTATS

T^s : trouver les successeurs et les prédécesseurs de chacun des nombres suivants.

a. $(103)_4$ **b.** $(10100)_2$ **c.** $(66)_7$ **d.** $(5000)_7$ **e.** $(30133)_4$

	Base Initiale	R-*dix*	NF	Réussite à tous les items
France 26	17 (65%)	7 (27%)	2 (8%)	5 (19%)
Grèce 100	74 (74%)	10 (10%)	16 (16%)	28 (28%)
Total 126	91 (72%)	17 (13%)	18 (14%)	33 (26%)

Traitements en Base Initiale (BI)

	Erreur de traitement en BI	Réussite à tous les items
France 17	12 (71%)	4 (24%)
Grèce 74	46 (62%)	25 (34%)
Total 91	58 (64%)	29 (32%)

Traitements dans R-dix

	Erreur de conversion	Erreur de traitement dans R-*dix*	Nombre de Reconversions	Réussite à tous les items
France 7	3	1	6	1
Grèce 10	6		6	3
Total 17	9 (53%)	1 (6%)	12 (71%)	4 (24%)

T^p : parmi les quatre nombres suivants, quels sont les nombres pairs et les nombres impairs ?

a. $(2475)_8$ **b.** $(2221)_3$ **c.** $(44)_5$ **d.** $(10101)_2$

	Affirmation en Base Initiale	R-*dix*	NF	Autres	Réussite à tous les items
France 26	3 (12%)	20 (77%)	3 (12%)	0	12 (46%)
Grèce 100		82 (82%)	15 (15%)	3 (3%)	51 (51%)
Total 126	3 (2%)	102 (81%)	18 (14%)	3 (2%)	63 (50%)

Dans R-*dix* (explicite)

	Erreur de Conversion	Erreur de Traitement	Autres erreurs relatifs aux bases
France 20	3 (15%)	2 (10%)	1 (5%)
Grèce 82	37 (45%)	1 (1%)	1 (1%)
Total 102	40 (39%)	3 (3%)	2 (2%)

ANNEXE 2

F6 – Traitement apparemment en BI pour T[s]. Le « 2 » au prédécesseur permet de comprendre l'existence d'une reconversion : pour 20–1, les restes successifs en utilisant $\tau^{div}_{dix \to deux}$ sont 1 – 1 – 0 et l'algorithme s'arrête avec ce reste nul et 2 au quotient.

Le successeur de $(10100)_2$ est $(10101)_2$
Le prédecesseur de $(10100)_2$ est $(2011)_2$

F9 – L'écriture polynomiale permet une conversion puis un traitement dans R-*dix* ; la reconversion est explicite mais sans technique visible (vraisemblablement des divisions euclidiennes au brouillon).

Exercice 4

a) $\overline{103}^4 = 3\times4^0+0\times4^1+1\times4^2 = 3+0+16 = 19$

$18 < 19 < 20$

$\overline{102}^4 < \overline{103}^4 < \overline{110}^4$

b) $\overline{10100}^2 = 0\times2^0+0\times2^1+1\times2^2+0\times2^3+1\times2^4$
$= 0+0+4+0+16$
$= 20$

$19 < 20 < 21$

$\overline{10011}^2 < \overline{10100}^2 < \overline{10101}^2$

G12 – La technique de reconversion avec la division

δ) $5000_7 \to 5\cdot7^3 = 1715$

1714 | 7
6 | 244 | 7
6 | 34 | 7
6 | 4

$4666_7 = 1714$

1716 | 7
1 | 245 | 7
0 | 35 | 7
0 | 5

$5001_7 = 1716$

$5001_7 \leftarrow 5000_7 \leftarrow 4666_7$

G14 – Une erreur dans l'utilisation de $\tau^{ep}_{a \to dix}$

α) $103_4 \to 1\cdot4^2+0\cdot4^1+3\cdot4^0 = 28$
Ο προηγούμενος είναι το 27 και ο επόμενος το 29

γ) $66_7 \to 6\cdot7^1+6\cdot7^0 = 42+42 = 84$
Ο προηγούμενος είναι το 83 και ο επόμενος το 85

CHAPITRE 4

RÔLE DES REPRÉSENTATIONS DANS L´APPRENTISSAGE DES MATHÉMATIQUES

CHAPTER 4

THE ROLE OF REPRESENTATIONS IN MATHEMATICAL LEARNING

TRACING STUDENTS' REPRESENTATIONAL FLEXIBILITY PROFILES IN DECIMALS[1]

Eleni Deliyianni*, Iliada Elia **, Areti Panaoura* and Athanasios Gagatsis***

***University of Cyprus, ** Cyprus Pedagogical Institute,**

***** Frederick University, Cyprus**

ABSTRACT

This research study investigates the developmental nature of representational flexibility in decimal number addition by tracing possible profiles in students' thinking and identifying their characteristics. A total of 1701 primary (Grade 5 and 6) and secondary (Grade 7 and 8) school students aged from 10 to 14 participated in the study. Hierarchical clustering was performed to students' responses in the conversion tasks in order to classify their response profiles as far as representational flexibility in decimal number addition is concerned. The results indicate the existence of four distinct hierarchical levels of flexibility: Early Representational Level, Symbolic Level, Multiple-Representation Transitional Level and Multiple-Representational Level. The chi-square test results reveal that representational flexibility develops within primary and secondary education. However, student distribution in hierarchical levels is the same in primary and secondary school indicating that it does not develop from one educational stage to the other.

INTRODUCTION AND THEORETICAL BACKGROUND

The concept of decimal numbers is included in mathematics curricula and it is considered to be of great significance due to its application and use in everyday life. The specific concept is closely linked with the concept of fractions, since decimals can be considered as the parts of the whole that has been divided into a number of parts that are powers of 10 (Thomson & Walker, 1996).

Besides, a growing body of literature suggests that identifying and representing a concept through different representations and "translating" the concept from one system

[1] This report constitutes a part of the medium research project MED19, funded by the University of Cyprus.

of representation to another are fundamental in learning and understanding (Duval, 2002). Monoyiou and Gagatsis (2008) showed that students who were able to coordinate both algebraic and graphical representations in order to solve a simple function task had a coherent understanding of the concept of function and were able to solve complex problems. Learners however tend to use representations in isolation (Duval, 2002). Elia and Gagatsis's (2008) study provided evidence of student difficulties with transferring information gained in one representational context of functions to another, which indicated their fragmentary understanding. In Gagatsis, Shiakalli and Panaoura's (2003) study it was found that 7-8-year old students dealt with addition and subtraction tasks with a number line in a completely distinct and inconsistent way compared to the tasks without a number line. These cognitive difficulties reveal deficiencies in representational flexibility, which are indicative of fragmentary mathematical understanding.

According to Chevalier and Blaye (2008) cognitive flexibility is the ability to switch mental sets in response to changing relevant cues in the environment. Following this definition, we consider representational flexibility as the ability to switch mental sets in response to changing representations of the same mathematical concept. In fact, this study is based on the assumption that there are various profiles of flexible representational thinking of decimals which may represent different progressive levels of understanding.

The necessity of using a variety of representations in supporting and assessing students' constructions of decimal numbers is stressed by a number of studies (e.g. Thomson & Walker, 1996; Martinie & Bay-Williams, 2003). Michaelidou, Gagatsis and Pitta-Pantazi (2004) reveal 6th graders' difficulties in recognition and conversion tasks in decimals. Recently, Deliyianni, Elia, Panaoura and Gagatsis's (2009) findings provided a strong case for the important role of multiple-representation flexibility and problem-solving ability in primary and secondary school students' decimal number addition understanding. The results revealed also that multiple-representation flexibility constitutes a multi-faceted construct in which the representation transformations interact with the modes of representation and the place-value concept. Therefore, developing the abilities to recognize the addition of one and/or two decimal digit numbers in a variety of diagrammatic representations, to manipulate symbolically the addition of one and/or two decimal digit numbers, to converse one and/or two decimal digit numbers from a diagrammatic to a symbolic representation and the reverse may contribute to the development of multiple-representation flexibility, which is of primary importance in the understanding of decimal number addition concept (Deliyianni et al., 2009).

The aim of this study is to identify and describe students' representational flexibility profiles in decimals and search for a possible developmental trend in students' representational thinking. In this context, we also investigate whether representational flexibility improves with grade. This knowledge may contribute to the articulation of an operational definition of the concept of representational flexibility that could provide improved clarity of the students' individual differences in mathematics learning.

METHOD

The study was conducted among 1701 students, aged 10 to 14, of primary (Grade 5 and 6) and secondary (Grade 7 and 8) schools of Cyprus (414 in Grade 5, 415 in Grade 6, 406 in Grade 7, 466 in Grade 8). The test that was constructed in order to examine the hypotheses of this study consists of 19 multiple-representation and 4 problem-solving tasks.

Multiple-representation flexibility tasks differed in terms of the following three dimensions: (a) the types of representation transformation, b) the modes of representation and c) the value of the digits. With respect to the transformations, there were three types of tasks: recognition (Type Re tasks), treatment (Type Tr tasks) and conversion (Type Co tasks) tasks. Concerning the modes of representation, there were four types of tasks: number line tasks (Type L tasks), tasks involving rectangular area surface (Type R tasks), tasks consisting of circular area surface (Type C tasks) and tasks in a symbolic representation (Type S tasks). In conversion tasks the first uppercase corresponded to the initial representation and the second one to the target representation. As for the value of digits, distinction was made between the tasks in which both summands consist of tenths (Type t tasks) or hundreds (Type h tasks) and the tasks in which the summands included tenths and hundreds respectively (Type th tasks).

Problem-solving tasks (Type Pr tasks) differed in terms of the modes of representation. Thus, there were two types of problems: the verbal (Type V tasks) and the diagrammatic (Type D tasks) ones. In the codification of all task types the task numbering was indicated at the end. Representative tasks used in the test appear in the Appendix. Particularly the test included:

1. Recognition tasks in which the students are asked to identify addition of one and/or two digit numbers in number line (ReLt1, RELh4, ReLth7), rectangular (ReRt2, ReRh5, ReRth8) and circular (ReCh3, ReCth6) area diagrams.

2. Symbolic addition treatment tasks in which the summands consist of tenths and/ or hundreds (TrSt9, TrSh10, TrSth11, TrSh12, TrSt13).

3. Conversion tasks from a symbolic to a diagrammatic representation (CoSLth14, CoSRh15, CoSCt16), and the reverse (CoRSh17, CoLSth18, CoCSt19), in which the summands consist of tenths and/ or hundreds.

4. Diagrammatic decimal number addition problem (PrD20).

5. Verbal decimal number addition problem that is accompanied by an auxiliary diagrammatic representation (PrD21).

6. Verbal decimal number addition problem (PrV22).

7. Justification problem-solving task that is presented verbally and is related to the addition of decimal numbers (PrV23).

RESULTS

In order to classify students' response profiles for representational flexibility in decimal number addition, Ward's method of hierarchical clustering was applied to students' responses in the conversion tasks, taking into account the theoretical definition of representational flexibility. Four clusters corresponding to four distinct hierarchical levels of flexibility were identified. In Cluster 1, 2, 3 and 4 belongs 584, 367, 467 and 283 students, correspondingly.

Table 1 presents the mean scores and standard deviations in multiple-representation flexibility and problem-solving ability dimensions by cluster.

Specifically, the students in Cluster 1 (Early Representational Level) attain low performance in conversion tasks from a symbolic to a diagrammatic representation and moderate performance in recognition and treatment tasks. However, they fail in conversions from a diagrammatic to a symbolic representation. Their performance in problem-solving tasks is low, as well. The students in Cluster 2 (Symbolic Level) differ from students in Cluster 1 in that they demonstrate low performance in conversions from a diagrammatic to a symbolic representation and moderate performance in conversion tasks from a symbolic to a diagrammatic representation.

The students in Cluster 3 (Multiple-Representation Transitional Level) attain moderate performance in recognition, conversion and problem-solving tasks. However, they attain a high performance in treatment tasks. Lastly, Cluster 4 (Multiple-Representational Level) involves high achievers in all the tasks. They display flexibility in the conversion tasks and demonstrate high performance in problem-solving tasks.

Table 1

Mean Scores and Standard Deviations in Multiple-Representation Flexibility and Problem-Solving Ability Dimensions by Cluster

	Cluster 1		Cluster 2		Cluster 3		Cluster 4	
Dimension	Mean	SD	Mean	SD	Mean	SD	Mean	SD
Recognition tasks in which both summands consist of tenths or hundreds	0.51	0.27	0.58	0.26	0.68	0.24	0.82	0.20
Recognition tasks in which the summands included tenths and hundreds respectively	0.39	0.34	0.41	0.33	0.44	0.36	0.54	0.37
Treatment tasks	0.65	0.30	0.73	0.24	0.84	0.21	0.95	0.13
Conversion tasks from an equation to a diagram	0.17	0.17	0.46	0.21	0.65	0.22	0.93	0.14
Conversion tasks from a diagram to an equation	0.04	0.11	0.21	0.21	0.50	0.24	0.90	0.15
Problem-solving tasks with a diagram	0.27	0.39	0.40	0.44	0.63	0.43	0.87	0.29
Verbal problem-solving tasks	0.22	0.25	0.32	0.27	0.41	0.27	0.51	0.25

Table 2 presents the percentages of Grade 5 to 8 students at Early Representational Level, Symbolic Level, Multiple-Representation Transitional Level and Multiple-Representational Level. The chi-square test results reveal that there are differences as far as the distribution in hierarchical levels is concerned between the four age groups [(x^2 (9)=28.73, $p<0.01$]]. On the one hand, the distribution of Grade 6 and Grade 8 is higher from the distribution of Grade 5 and Grade 7, respectively, at Multiple-Representation Transitional Level and Multiple-Representational Level. On the other hand, the distribution of Grade 6 and Grade 8 are lower from the distribution of Grade 5 and Grade 7, respectively, at Early Representational Level and Symbolic Level. Therefore, the representational flexibility improves within the same educational stage (Grade 5 to 6, Grade 7 to 8). However, the distribution in hierarchical levels is similar in Grade 5 and 7, and Grade 6 and 8, respectively. This result indicates that the representational flexibility did not develop from primary to secondary education.

Table 2

The Percentages of Hierarchical Levels by Grade

	Grade 5		Grade 6		Grade 7		Grade 8	
Hierarchical Level	%	N	%	N	%	N	%	N
Early Representational Level	29.3	171	20.5	120	27.4	160	22.8	133
Symbolic Level	22.9	107	26.6	124	22.1	103	28.5	133
Multiple-Representation Transitional Level	19.1	54	27.9	79	20.8	59	32.2	91
Multiple-Representation Transitional Level	22.3	82	25.1	92	22.9	84	29.7	109

DISCUSSION

This study examined whether there is a developmental trend in the students' representational flexibility in the addition of decimal numbers and identified their characteristics. The findings reveal that there are four distinct hierarchical levels of flexibility. The levels have a reasonably clear profile of characteristic responses. While the most salient contrast is between Early Representational Level and Multiple-Representational Level, there seems to be a regular and systematic increase in the sophistication from one level to the other. These findings can be of practical use because they may facilitate the progressive organization of learning activities on decimal numbers by level of difficulty, which may support students of various abilities.

Gagatsis, Deliyianni, Elia, Monoyiou and Panaoura (2009) have recently investigated the developmental nature of representational flexibility in fraction addition by tracing four hierarchical levels in students' thinking and identifying their characteristics. The findings of the present study are generally in line with students' response profiles for representational flexibility in fraction addition. However, the Multiple-Representation Transitional Level in fraction addition is divided into two clusters, the Symbolic and the Diagrammatic based on students behavior in the conversion tasks. Students in both clusters attain moderate performance in recognition and problem-solving tasks, and high performance in treatment tasks. On the one hand, students in the symbolic cluster perform poorly in the conversion tasks from a diagram to an equation, while they attain moderate performance in conversion tasks from an equation to a diagram. On the other hand, students in the diagrammatic cluster exhibit low performance in conversion tasks from an equation to a diagram and moderate performance in conversion tasks from a diagram to an equation. Therefore, the symbolic cluster in fraction addition corresponds to the Symbolic Level in decimal number addition. Even though there are some slight differences between the two developmental hierarchies, the findings reveal the potential for developing an integrated developmental hierarchy of representational flexibility in rational numbers, which could be the subject of a future study.

Furthermore, we have investigated the relations between the hierarchical levels and school grade. According to the results, the representational flexibility improves within the same educational stage. Particularly, it develops within primary (Grade 5 to 6) and secondary education (Grade 7 to 8). In fact, as it was expected, older pupils perform better than younger ones over all types of tasks because of both the overall cognitive development that takes place during the school years and the learning at school.

Even though students' representational flexibility profiles identified here may represent four hierarchically ordered levels of thinking in the addition of decimals, findings showed that representational flexibility was independent of school stage, as it did not develop from primary to secondary education. In fact, results reveal that the distribution in hierarchical levels is similar in primary and secondary schools, which is an unexpected result. However, this may be explained keeping in mind the transition to secondary education problem universally, and more specifically in Cyprus according to the report of the local committee for the Educational System Reform (2005).

Certainly, there is still a need for further research for the teaching implications of the subject. In particular, it would be interesting and useful to examine the effects of intervention programs which taking into account the four hierarchical levels. Further research is also needed to examine the application of these levels in other concepts and age levels, before articulating an operational definition of representational flexibility.

REFERENCES

Chevalier, N., & Blaye, A. (2008). Cognitive flexibility in preschoolers: the role of representation activation and maintenance. *Developmental Science, 11*(3), 339-353.

Deliyianni, E., Elia, I., Panaoura, A., & Gagatsis A. (2009). A structural model for the understanding of decimal numbers in primary and secondary education. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, C. (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 393-400). Thessaloniki, Greece: PME.

Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 1*(2), 1-16.

Educational Reform Committee (2005). *Educational Reform Committee Report. Republic of Cyprus- Cyprus Ministry of Education and Culture.* Retrieved October 14, 2006, from http://www.paideia.org.cy/upload/ekthesi_epitropis.pdf

Elia, I., & Gagatsis, A. (2008). A comparison between the hierarchical clustering of variables, implicative statistical analysis and confirmatory factor analysis. In. R. Gras, E. Suzuki, F. Guillet, & F. Spagnolo (Eds.), *Studies in Computational Intelligence 127: Statistical Implicative Analysis* (pp. 131-163). Heidelberg: Springer-Verlag.

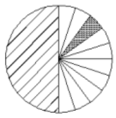
Gagatsis, A., Deliyianni, E., Elia, I., Monoyiou, A., & Panaoura A. (2009). *Considering flexibility from a developmental perspective: The case of multiple representations in fractions.* 13th Biennial Conference EARLI.

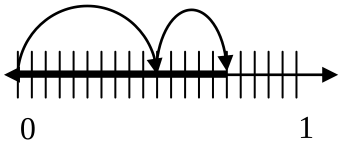
Gagatsis, A., Shiakalli, M., & Panaoura, A. (2003). La droite arithmétique comme modèle géométrique de l'addition et de la soustraction des nombres entiers. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 8*, 95-112.

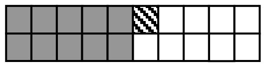
Monoyiou, A., & Gagatsis, A. (in press, 2008). A coordination of different representations in function problem solving. *Proceedings of the 11th International Congress of Mathematics Education*. Monterrey, Mexico: ICME. Retrieved July 12, 2008, from http://tsg.icme11.org/tsg/show/21

APPENDIX

1. Circle the diagram or the diagrams whose shaded part corresponds to the equation 0.5 + 0.05.



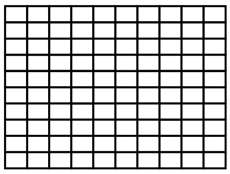




(ReCth6) (ReLth7) (ReRth8) [recognition tasks]

2. Solve the equation: 0.5 + 0.4 = ….... (TrSt9) [treatment task]

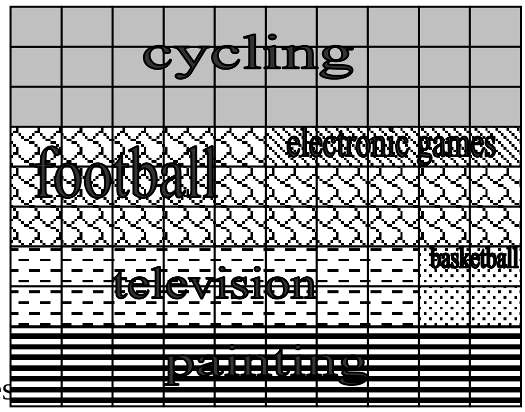
3. Present the following equation on the diagram:



0.05 + 0.04=… (CoSRh15) [conversion task]

4. A research was conducted in a school to find out which activities the students choose to do in their free time. The results are given below:

- 0.25 of the students play football.
- 0.04 of the students play basketball.
- 0.3 of the students do cycling.
- 0.16 of the students watch television.
- 0.2 of the students paint.
- 0.05 of the students play computer games



Which activities 0.6 of the students do? (PrD21)

5. In the addition of two decimal numbers that do not have zero as a digit of tenths and hundreds the sum may be a whole number. Do you agree with this view? Explain. (PrV23) [problem solving tasks]

THE FUNCTIONING OF REPRESENTATIONS IN MATHEMATICS EDUCATION WITH RESPECT TO THE SHIFT FROM ELEMENTARY TO SECONDARY EDUCATION

Athanasios Gagatsis*, Eleni Deliyianni*, Iliada Elia ** and Areti Panaoura***

***University of Cyprus, ** Cyprus Pedagogical Institute,**

***** Frederick University, Cyprus**

ABSRACT

The aim of this article is to present synoptically the main results of the medium size research project MED19 "The functioning of representations in mathematics education with respect to the shift from elementary to secondary education", funded by University of Cyprus. It constitutes from four sections. In the first section a structural model for fraction understanding related to representations and problem solving is presented. The second section is referred to a structural model for the understanding of decimal numbers in primary and secondary education, while the third section is related with the affective and cognitive factors on the use of representations in the learning of fractions and decimals. In the last section a theoretical model of students geometrical figure understanding is suggested.

INTRODUCTION AND THEORETICAL BACKGROUND

A representation is any configuration of signs, characters or objects that stand for something else (Goldin & Shteingold, 2001). Nowadays the centrality of different types of representation in teaching and learning mathematics seems to become widely acknowledged by the mathematics education community. The NCTM's Principles and Standards for School Mathematics (2000) document includes a new process standard that addresses representations and stresses the importance of the use of multiple representations in mathematical learning. In fact, the abilities of recognizing the same concept in multiple systems of representations, manipulating the concept within these representations and converting flexibly the concept from one system of representation to another are necessary for the acquisition of the concept (Lesh, Post, & Behr, 1987).

Furthermore, problem solving is an integral part of all mathematics learning (NCTM, 2000; Reys, Lindquist, Lambdin, Smith, & Suydam, 2001). The role of multiple representations in problem solving is widely acknowledged (Elia, Gagatsis, & Demetriou, 2007). Hitt (1998) underlines that the ability to solve problems entails the ability to convert with the preservation of meaning from one system of representation to another in functions.

The relationship between cognition and affect has attracted increased interest on the part of mathematics educators, particularly in the search for causal relationship between affect and achievement in mathematics (Zan, Brown, Evans, & Hannula, 2006). This is due to the fact that the mathematical activity is marked out by a strong interaction between cognitive and emotional aspect. The affective domain is a complex structural system consisting of four main dimensions or components: emotions, attitudes, values and beliefs (Goldin, 2001). Beliefs is a multifaceted construct, which can be described as one's subjective "understandings, premises, or propositions about the world" (Philipp, 2007, p. 259). The construct of self-efficacy beliefs signifies a person's perceived ability or capability to successfully perform a given task or behaviour. Bandura (1997) defines self-efficacy as one's perceived ability to plan and execute tasks to achieve specific goals. Self-efficacy beliefs have received increasing attention in educational research, primarily in studies for academic motivation and self-regulation (Pintrich & Schunk, 1995). It was found that self-efficacy is a major determinant of the choices that individuals make, the effort they expend, the perseverance they exert in the face of difficulties, and the thought patterns and emotional reactions they experience (Bandura, 1986).

In the first section of this article a structural model for fraction understanding related to representations and problem solving is presented. The second section is referred to a structural model for the understanding of decimal numbers in primary and secondary education, while the third section is related with the affective and cognitive factors on the use of representations in the learning of fractions and decimals. We concentrated our attention on the notion of fractions and decimals. On the one hand, fractions are among the most essential (Harrison & Greer, 1993), but complex mathematical concepts that children meet in school mathematics (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). On the other hand, the concept of decimal numbers is included in mathematics curricula and it is considered to be of great significance due to its application and use in everyday life. The specific concept is closely linked with the concept of fractions, since decimals can be considered as the parts of the whole that has been divided into a number of parts that are powers of 10 (Thomson & Walker, 1996). The necessity of using a variety of representations in supporting and assessing students' constructions of fractions and decimals is stressed by a number of studies (e.g. Lamon, 2001; Thomson & Walker, 1996; Martinie & Bay-Williams, 2003). However, the cognitive processes underlying the understanding of fractions and decimals have not investigated systematically yet especially when the students are at a point of transition from primary to secondary education.

In the last section of the present article a theoretical model of students geometrical figure understanding is suggested. Duval (1995, 1999) distinguishes four apprehensions for a “geometrical figure”: perceptual, sequential, discursive and operative. To function as a geometrical figure, a drawing must evoke perceptual apprehension and at least one of the other three. Each has its specific laws of organization and processing of the visual stimulus array. Particularly, perceptual apprehension refers to the recognition of a shape in a plane or in depth. In fact, one’s perception about what the figure shows is determined by figural organization laws and pictorial cues. Perceptual apprehension indicates the ability to name figures and the ability to recognize in the perceived figure several sub-figures. Sequential apprehension is required whenever one must construct a figure or describe its construction. The organization of the elementary figural units does not depend on perceptual laws and cues, but on technical constraints and on mathematical properties. Discursive apprehension is related with the fact that mathematical properties represented in a drawing cannot be determined through perceptual apprehension. In any geometrical representation the perceptual recognition of geometrical properties must remain under the control of statements (e.g. denomination, definition, primitive commands in a menu). However, it is through operative apprehension that we can get an insight to a problem solution when looking at a figure. Operative apprehension depends on the various ways of modifying a given figure: the mereologic, the optic and the place way. The mereologic way refer to the division of the whole given figure into parts of various shapes and the combination of them in another figure or sub-figures (reconfiguration), the optic way is when one made the figure larger or narrower, or slant, while the place way refer to its position or orientation variation. Each of these different modifications can be performed mentally or physically, through various operations. These operations constitute a specific figural processing which provides figures with a heuristic function. In a problem of geometry, one or more of these operations can highlight a figural modification that gives an insight to the solution of a problem.

Even though previous research studies investigated extensively the role of external representations in geometry (e.g. Duval, 1998; Kurina, 2003), the cognitive processes underline the four apprehensions for a “geometrical figure” proposed by Duval (1995, 1999) have not empirically verified yet. Keeping in mind the transition problem from one educational level to another universally (Mullins & Irvin, 2000), our main aim in the last section is to confirm a three-order theoretical model concerning the primary and secondary school students’ geometrical figure understanding.

A STRUCTURAL MODEL FOR FRACTION UNDERSTANDING RELATED TO REPRESENTATIONS AND PROBLEM SOLVING[1]

The first study was conducted among 829 pupils aged 10 to 12 belonging to 41 classes of different primary schools in Cyprus (414 in Grade 5, 415 in Grade 6). The test that was constructed for this study included:

1. Recognition tasks in which the pupils are asked to identify similar (RELa, RECa, RERa, RELb, RERb) and dissimilar (RELc, RERc, RECc) fraction addition in number line, rectangular and circular area diagrams.

2. Symbolic treatment tasks of similar (TRSa) and dissimilar (TRSb, TRSc) fraction addition.

3. Conversion tasks having the diagrammatic and the symbolic representation as the initial and the target representation, respectively. Similar fraction additions are presented in number line (COLSs) and circular area diagram (COCSs), whereas dissimilar fraction additions are presented in number line (COLSd) and rectangular area diagram (CORSd).

4. Conversion tasks having the symbolic and the diagrammatic representation as the initial and the target representation, respectively. Pupils are asked to present the similar fraction addition in circular area diagram (COSCs) and in number line (COSLs), whereas they are asked to present the dissimilar fraction additions in rectangular area diagram (COSRd).

5. Diagrammatic addition problem in which the unknown quantity is the summands (PD).

6. Verbal problem that is accompanied by auxiliary diagrammatic representation and the unknown quantity is the summands (PVD).

7. Verbal problem whose solution requires not only fraction addition but also the knowledge of the ratio meaning of fraction (PV).

8. Justification task that is presented verbally and is related to similar or dissimilar fraction addition (JV).

[1] A part of the first section is presented in 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and is published in its proceedings (Deliyianni, Panaoura, Elia, & Gagatsis, 2008).

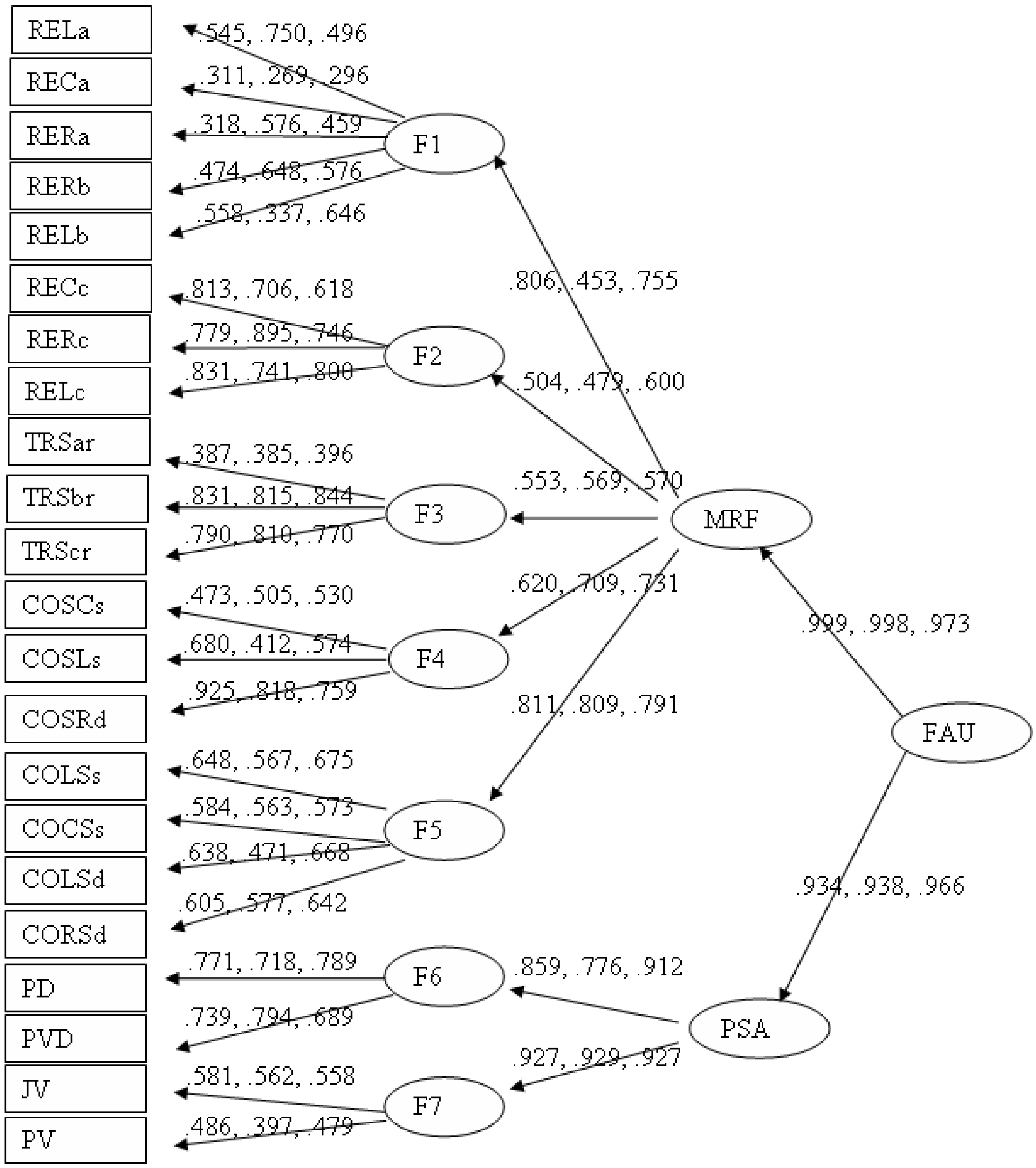


Figure 1. The CFA model of the fraction addition understanding

Notes: 1. The first, second and third coefficients of each factor stand for the application of the model in the whole sample, 5th and 6th graders, respectively. 2. Errors of the variables are omitted. 3. MRF=multiple representation flexibility, PSA= problem solving ability, FAU=fraction addition understanding

In order to explore the structure of the various fraction addition understanding dimensions a third-order CFA (Confirmatory Factor Analysis) model for the total sample was designed and verified. Bentler's (1995) EQS programme was used for the analysis. The tenability of a model can be determined by using the following measures of goodness-of-fit: x^2, CFI (Comparative Fit Index) and RMSEA (Root Mean Square Error of Approximation). The following values of the three indices are needed to hold true for supporting an adequate fit of the model: $x^2/df < 2$, CFI > 0.9, RMSEA < 0.06. The a priori model hypothesized that the variables of all the measurements would be explained by a specific number of factors and each item would have a nonzero loading on the factor it was supposed to measure. The model was tested under the constraint that the error variances of some pair of scores associated with the same factor would have to be equal.

Figure 1 presents the results of the elaborated model, which fits the data reasonably well ($x^2/df=1.911$, CFI=0.968, RMSEA=0.033). The third-order model which is considered appropriate for interpreting fraction addition understanding (FAU), involves seven first-order factors. The first-order factors F1 to F5 regressed on a second-order factor that stands for the multiple representations flexibility (MRF). The first-order factor F1 refers to the similar fraction addition recognition tasks, while the first-order factor F2 to the dissimilar fraction addition recognition tasks in a variety of diagrammatic representations. The first-order factor F3 consists of the similar and dissimilar fraction addition treatment tasks. Conversion tasks in which the initial and the target representation is similar and dissimilar fraction equation and diagrammatic representation, respectively, constitute the first-order factor F4, while the first-order factor F5 refers to the similar and dissimilar fraction addition conversion tasks from a diagrammatic to a symbolic representation.

The majority of tasks which involve number line have higher loadings than the other tasks, suggesting that the number line model is more strongly related than the circular and rectangular diagrams to multiple representations flexibility. Furthermore, dissimilar fraction tasks loadings are higher than the respective similar fraction addition loadings, indicating that in order to be solved extra mental processes are required since the fraction equivalence understanding is involved, as well. The specific knowledge is also needed to solve similar fraction addition recognition tasks which the number of subdivision is double that of the denominator (e.g. RERa). As a result, higher loadings are observed in these tasks relative to other similar fraction addition tasks. Moreover, the factors loadings indicate that conversion from a diagrammatic to a symbolic representation is more closely associated with multiple representations flexibility than the other first-order factors are. Nevertheless, the first-order factor F1 to F4 loadings strength reveal that the flexibility in multiple representations of similar and dissimilar fraction addition constitute a multifaceted construct in which relations between: a) modes of representation (symbolic, diagrammatic), b) functions (recognition, treatment, conversion) that representations fulfill and c) relative concepts (similar and dissimilar fractions, equivalence) arose.

The other two first-order factor F6 and F5 regressed on a second-order factor that represents problem solving ability (PSA). The first-order factor F6 consists of problems having a diagram as an autonomous or an auxiliary representation. Both of them have a common mathematical structure since they have the summands as the unknown quantity. On the other hand, the verbal problem whose solution requires the knowledge of the ratio meaning of fraction and the justification task formed the first-order factor F7, since in order to be solved different cognitive processes are needed. The two second-order factors that correspond to the multiple representations flexibility and to the problem solving ability regressed on a third-order factor that stands for the fraction addition concept understanding. Their loadings values are almost the same revealing that pupils' fraction addition understanding is predicted from both multiple representations flexibility and problem solving ability.

To test for possible similarities between the two age groups' fraction addition understanding, the proposed three-order factor CFA model is validated for each grade separately. The fit indices of the models tested were acceptable and the same structure holds for both the 5th (x^2/df=1.535, CFI=0.954, RMSEA=0.036) and the 6th (x^2/df=1.865, CFI=0.940, RMSEA=0.046) graders. However, some factor loadings are stronger in the group of the 6th graders, revealing that the strength of the relations between these abilities increases across the ages.

A STRUCTURAL MODEL FOR THE UNDERSTANDING OF DECIMAL NUMBERS IN PRIMARY AND SECONDARY EDUCATION[2]

The second study was conducted among 1701 students, aged 10 to 14, of primary (Grade 5 and 6) and secondary (Grade 7 and 8) schools in Cyprus (414 in Grade 5, 415 in Grade 6, 406 in Grade 7, 466 in Grade 8).

The test that was constructed for the aims of this study consists of 19 multiple-representation and 4 problem-solving tasks. Particularly the test included:

1. Recognition tasks in which the students are asked to identify addition of one and/or two digit numbers in number line (ReLt1, RELh4, ReLth7), rectangular (ReRt2, ReRh5, ReRth8) and circular (ReCh3, ReCth6) area diagrams.

2. Symbolic addition treatment tasks in which the summands consist of tenths and/ or hundreds (TrSt9, TrSh10, TrSth11, TrSh12, TrSt13).

[2] A part of the second section is presented in 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and is published in its proceedings (Deliyianni, Elia, Panaoura, & Gagatsis, 2009).

3. Conversion tasks from a symbolic to a diagrammatic representation (CoSLth14, CoSRh15, CoSCt16), and the reverse (CoRSh17, CoLSth18, CoCSt19), in which the summands consist of tenths and/ or hundreds.

4. Diagrammatic decimal number addition problem (PrD20).

5. Verbal decimal number addition problem that is accompanied by an auxiliary diagrammatic representation (PrD21).

6. Verbal decimal number addition problem (PrV22).

7. Justification problem-solving task that is presented verbally and is related to the addition of decimal numbers (PrV23).

In order to explore the structure of the various decimal number addition understanding dimensions a third-order CFA model for the total sample was designed and verified. Bentler's (1995) EQS programme was used for the analysis.

Figure 2 presents the results of the elaborated model, which fits the data reasonably well [$x^2(201)$ =380.61, CFI=0.98, RMSEA=0.02]. The third-order model which is considered appropriate for interpreting decimal number addition understanding, involves seven first-order factors, two second-order factors and a third-order factor. The two second-order factors that correspond to the multiple-representation flexibility (MRF) and to the problem-solving ability (PSA) are regressed on a third-order factor that stands for the understanding of the decimal number addition concept (DAU). The values of their loadings are both high revealing that students' decimal number understanding is predicted from both multiple-representation flexibility and problem-solving ability. Thus, the findings confirm our first hypothesis suggesting that multiple-representation flexibility and problem-solving ability influence the understanding of decimal number addition.

The first-order factors F1 to F5 are regressed on the second-order factor that stands for the multiple-representation flexibility. The first-order factor F1 refers to the recognition tasks in which the summands have the same number of digits, while the first-order factor F2 refers to recognition tasks in which the summands have different number of digits. The first-order factor F3 consists of decimal number addition treatment tasks in which the summands have the same or different number of digits. Conversion tasks in which the initial and the target representation is decimal number equation and diagrammatic representation, respectively, constitute the first-order factor F4, while the first-order factor F5 refers to the decimal number addition conversion tasks from a diagrammatic to a symbolic representation. Therefore, the existence of the first-order factors F1 to F5 verifies the second hypothesis. Particularly, it reveals that the flexibility in multiple decimal number addition representations constitutes a multi-faceted construct which involves an interaction between representation transformations (recognition, treatment, conversion), the modes of representation (symbolic, diagrammatic) and the place-value concept.

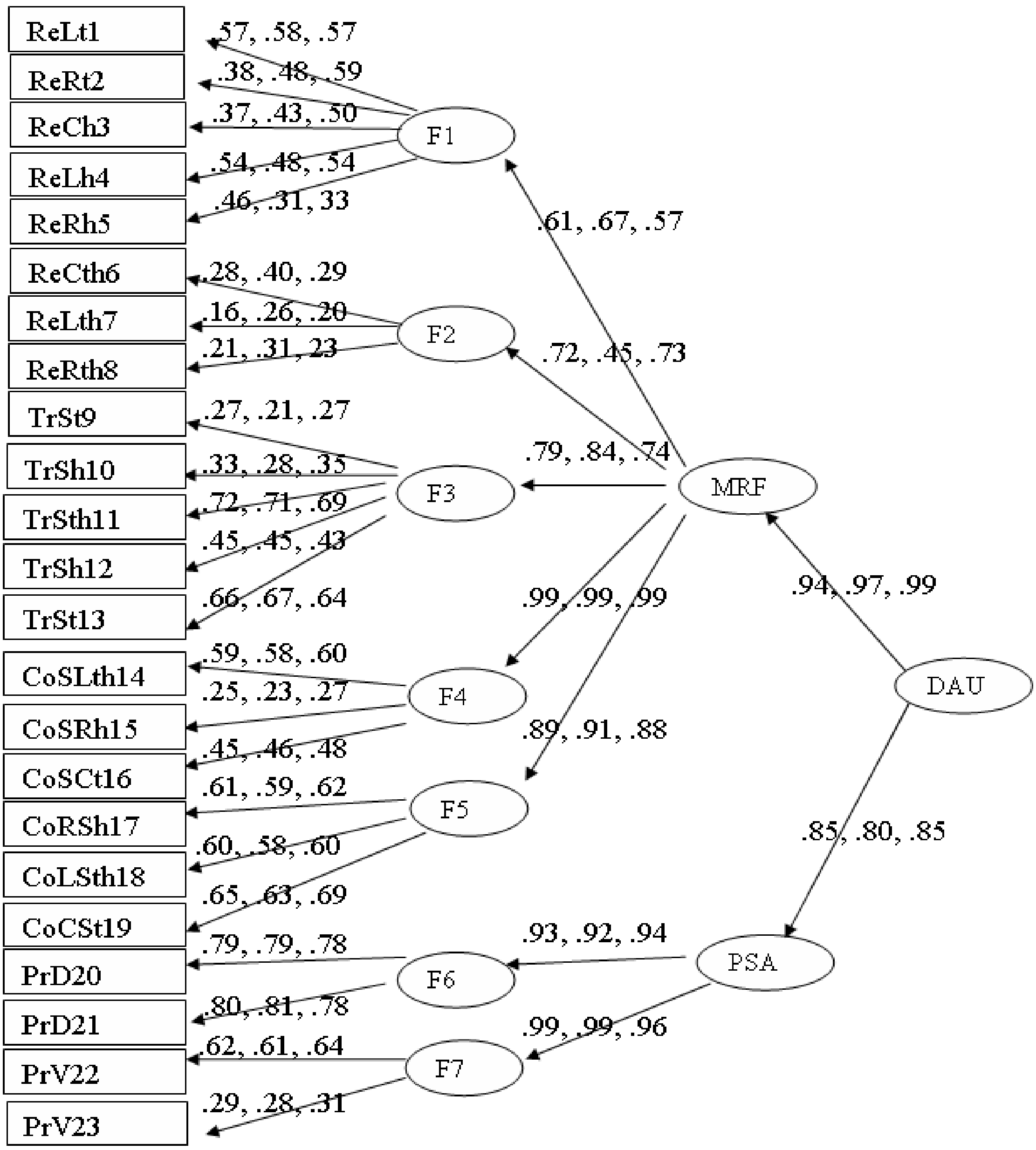


Figure 2. The CFA model of the decimal number addition understanding

Notes: 1. The first, second and third coefficients of each factor stand for the application of the model in the whole sample, primary and secondary school students, respectively. 2. Errors of the variables are omitted. 3. MRF=multiple representation flexibility, PSA= problem solving ability, DAU=decimal number addition understanding

The other two first-order factors F6 and F7 are regressed on a second-order factor that represents problem-solving ability. The first-order factor F6 consists of problems accompanied with a diagram while the factor F7 is comprised of the verbal problems. The existence of these two first-order factors confirms the third hypothesis as it explains the differential effects of the modes of representation on problem-solving ability.

To test the invariance of this structure between the two educational level groups' decimal number addition understanding, multiple group analysis was applied, where the proposed three-order factor model was validated for primary (Grade 5 and 6) and secondary (Grade 7 and 8) school students separately. The model was tested under the assumption that the relations of the observed variables to the first-order factors, of the seven first-order factors to the two second-order factors and of the two second-order factors to the third-order factor would be equal across the two level groups. The fit indices of the model tested are acceptable [x^2 (426) =798.24, CFI= 0.96, RMSEA= 0.03]. Thus, the results are in line with the fourth hypothesis that the same structure holds for both the primary and the secondary school students. However, some factor loadings are stronger in the group of the secondary school students, revealing that the strength of the relations between these abilities and, thus, the specific structural organisation potency increased across the educational levels.

AFFECTIVE AND COGNITIVE FACTORS ON THE USE OF REPRESENTATIONS IN THE LEARNING OF FRACTIONS AND DECIMALS[3]

The study was conducted as in the previous section among 1701 students, aged 10 to 14, of primary (Grade 5 and 6) and secondary (Grade 7 and 8) schools in Cyprus (414 in Grade 5, 415 in Grade 6, 406 in Grade 7, 466 in Grade 8).

A questionnaire was developed for measuring students' beliefs about the use of different types of representations for understanding the concept of fractions. The questionnaire comprised of 27 Likert type items of five points (1=strongly disagree, 5=strongly agree). The reliability of the whole questionnaire was very high (Cronbach's alpha was 0.88). For example there were items such as "I can easily find the diagram that corresponds to an equation of fractions" and "When I solve a problem with fractions, I use the number line for executing the operations". At the same time a test was developed for measuring students' ability on multiple representation flexibility as far as fraction addition and decimal number addition is concerned. There were treatment, recognition, conversion, diagrammatic problem-solving and verbal problem-solving tasks.

[3] A part of the third section is presented in 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and is published in its proceedings (Panaoura, Gagatsis, Deliyianni, & Elia, 2009).

In order to confirm the structure of students' cognitive and affective abilities in the concepts of fractions and decimals at primary and secondary education, a CFA model was constructed by using the Bentler's (1995) EQS programme.

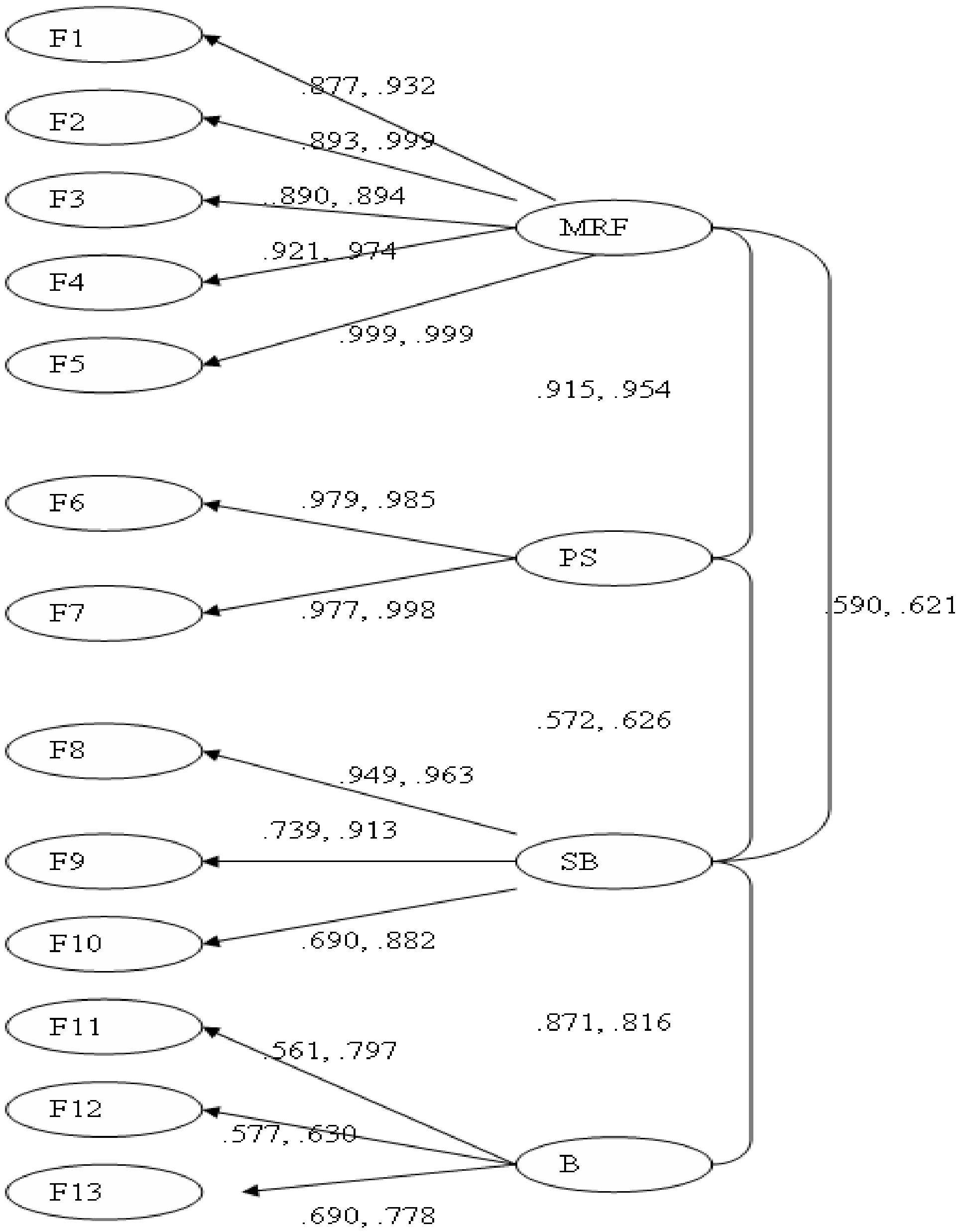


Figure 3. The CFA model of students' cognitive and affective abilities in fractions and decimals at primary and secondary education

Notes: 1. The first and second coefficients of each factor stand for the application of the model at primary and secondary education, B= Beliefs 2. Errors of the variables are omitted. 3. MRF= Multiple representation flexibility, PS= Problem solving Ability, SB= Self-efficacy beliefs

Figure 3 presents the results of the elaborated model that fits the data reasonably well for both the levels of education (primary education: x^2 /2713= 1.42, CFI=0.911 and RMSEA=0.026, secondary education: x^2/2707=1.49, CFI=0.913 and RMSEA=0.027). The second order model which is considered appropriate for interpreting students' beliefs and abilities involves 15 first order factors and 4 second order factors. The five first order factors (F1 to F5) express the multiple representation flexibility (MRF) for the concepts of fractions and decimals. Specifically, F1 refers to recognition tasks with the same number of digits, F2 refers to recognition tasks with different number of digits, F3 consists of treatment tasks, F4 refers to conversion tasks in which the initial representation is symbolic and the target one is a diagram and F5 consists of conversion tasks from a diagrammatic to a symbolic representation. Those five first order factors regressed on a second order factor concerning students' multiple representation flexibility. The next second order factor express problem solving ability (PS). It is consisted of two first order factors (F6: problem solving ability on problems with a diagrammatic representation and F7: problem solving performance on verbal problems). The third second order factor express students' self-efficacy beliefs about the use of representations (SB). It consisted of three first order factors (F8: self-efficacy beliefs about the conversion from one type of representation to another, F9: general self-efficacy beliefs about mathematics, F10: self-efficacy beliefs about the use of verbal representations). The fourth second order factor explains students' beliefs about the use and the role of representations on learning and understanding (B). It is consisted of three first order factors (F11: beliefs about the use of number line, F12: beliefs about the use of models, materials and representations, F13: beliefs about the use of diagrams in problem solving).

The interest concentrated on the interrelations between the second-order factors, as indications of the impact of affective factors on cognitive performance and vice-versa. The highest statistically significant ($p<0.05$) interrelation is between the multiple representation flexibility and problem solving performance (primary school: 0.915, secondary school: 0.954), indicating that students who are efficient in using different types of representations have higher performance on problem solving tasks with representations. As it was expected, very high is the relation of students' beliefs about the use of representations and their self-efficacy beliefs (primary school: 0.877, secondary school: 0.816). Students' with high self-efficacy beliefs about their ability to use representations, express positive beliefs about the use of representations on teaching and learning. The relation is lower in secondary education where teachers use fewer representations and consequently students have less positive beliefs about their usefulness and less positive self-efficacy beliefs due to the lack of recent experiences. The relations between the self-efficacy beliefs about the use of representations with the problem-solving ability (primary school: 0.572, secondary school: 0.626) and the multiple-representation flexibility are higher in secondary education (primary school:

0.590, secondary school: 0.621), indicating that students have more precise self-representation about their cognitive and affective performance. There are no statistically significant interrelations of beliefs about the use of representations with the multiple-representation flexibility. That means that the students encounter conversion and recognition tasks as exercises which have no contribution on the constructing of positive beliefs for representations' value as teaching tools on the learning procedure.

The loadings of the whole model are higher in the case of secondary education. Therefore the particular cognitive structure is an integrated model on cognitive and affective factors concerning the use of representations for the concepts of decimals and fractions which becomes more stable across the educational levels, as a result of the continuous experiences in the teaching procedure and the more precise self-representation about the cognitive and affective performance.

A THEORETICAL MODEL OF STUDENTS' GEOMETRICAL FIGURE UNDERSTANDING[4]

The forth study was conducted among 1086 students, aged 10 to 14, of elementary (Grade 5 and 6) and secondary (Grade 7 and 8) schools in Cyprus (250 in Grade 5, 278 in Grade 6, 230 in Grade 7, 328 in Grade 8). The a priori analysis of the test that was constructed for this study is the following:

1. The first group of tasks includes task 1 (Pe1a, Pe1b, Pe1c, Pe1d, Pe1e, Pe1f, Pe1g) and 2 (Pe2a, Pe2b, Pe2c, Pe2d, Pe2e, Pe2f) concerning students' geometrical figure perceptual ability and their recognition ability, respectively.

2. The second group of tasks includes area and perimeter measurement tasks, namely task 3 (Op3), 4 (Op4), 5 (Op5) and 6 (Op6a, Op6b, Op6c). These tasks examine students' operative apprehension of a geometrical figure. The tasks 3, 4 and 5 require a reconfiguration of a given figure, while task 6 demands the place way of modifying two given figures in a new one in order to be solved.

3. The third group of tasks includes the verbal problems 7 (Ve7), 8 (Ve8), 9 (Ve9), 10 (Ve10) and 11 (Ve11) that correspond to discursive figure apprehension. On the one hand, the verbal problems 7 and 8 demand increased perceptual ability of geometrical figure relations and basic geometrical reasoning. On the other hand, tasks 9, 10 and 11 are verbal area and perimeter measurement problems. In verbal problem 9 visualization (e.g. Presmeg, 2007) facilitates its solution process, while in verbal problems 10 and 11 the concept of epistemological obstacles (Brousseau, 1997) may interfere the way of solving them.

[4] A part of the forth section is presented in Sixth Conference of European Research in Mathematics Education and is published in its proceedings (Deliyianni, Elia, Gagatsis, Monoyiou, & Panaoura, 2009).

In order to explore the structure of the various geometrical figure understanding dimensions a third-order CFA model for the total sample was designed and verified. Bentler's (1995) EQS programme was used for the analysis.

Figure 4 presents the results of the elaborated model, which fitted the data reasonably well [$x^2(220) = 436.86$, CFI = 0.99, RMSEA =0.03, 90%, confidence interval for RMSEA 0.026-0.034]. The first, second and third coefficients of each factor stand for the application of the model in the whole sample (Grade 5 to 8), primary (Grade 5 and 6) and secondary (Grade 7 and 8) school students, respectively. The errors of variables are omitted.

The third-order model which is considered appropriate for interpreting geometrical figure understanding, involves six first-order factors, three second-order factors and one third-order factor. The three second-order factors that correspond to the geometrical figure perceptual (PEA), operative (OPA) and discursive (DIA) apprehension, respectively, are regressed on a third-order factor that stands for the geometrical figure understanding (GFU). Therefore, it is suggested that the type of geometric figure apprehension does have an effect on geometrical figure understanding, verifying our first hypothesis. On the second-order factor that stands for perceptual apprehension the first-order factors F1 and F2 are regressed. The first-order factor F1 refers to the perceptual tasks, while the first-order factor F2 to the recognition tasks. Thus, the findings reveal that perceptual and recognition abilities have a differential effect on geometrical figure perceptual apprehension. On the second-order factor that corresponds to operative apprehension the first-order factors F3 and F4 are regressed. The first-order factor F3 consists of the tasks which require a reconfiguration of a given figure, while the tasks demanding the place way of modifying two given figures in a new one in order to be solved constitute the first-order factor F4. Therefore the results indicate that the ways of figure modification have an effect on operative figure understanding. The first-order factors F5 and F6 are regressed on the second-order factor that stands for discursive apprehension, indicating the effect measurement concept exerts on this type of geometric figure apprehension. To be specific, the first-order factor F5 refers to the verbal problems which demand increased perceptual ability of geometrical figure relations and basic geometrical reasoning, while the first-order factor F6 consists of the verbal perimeter and area problems.

To test for possible similarities between the two educational level groups' geometrical figure understanding, multiple group analysis is applied, where the proposed three-order factor model is validated for elementary and secondary school students separately. The model is tested under the assumption that the relations of the observed variables to the first-order factors, of the six first-order factors to the three second-order factors and of the three second-order factors to the third-order factor will be equal across the two educational levels. The fit indices of the model tested are acceptable [x^2 (485) = 903.78, CFI= 0.97, RMSEA= 0.04, 90% confidence interval for RMSEA= 0.036, 0.044]. Thus, the results are in line with our second hypothesis that the same geometrical figure understanding structure holds for both the elementary and the secondary school students. It is noteworthy that some factor loadings are higher in the group of the secondary school students suggesting that the specific structural organization potency increases across the ages.

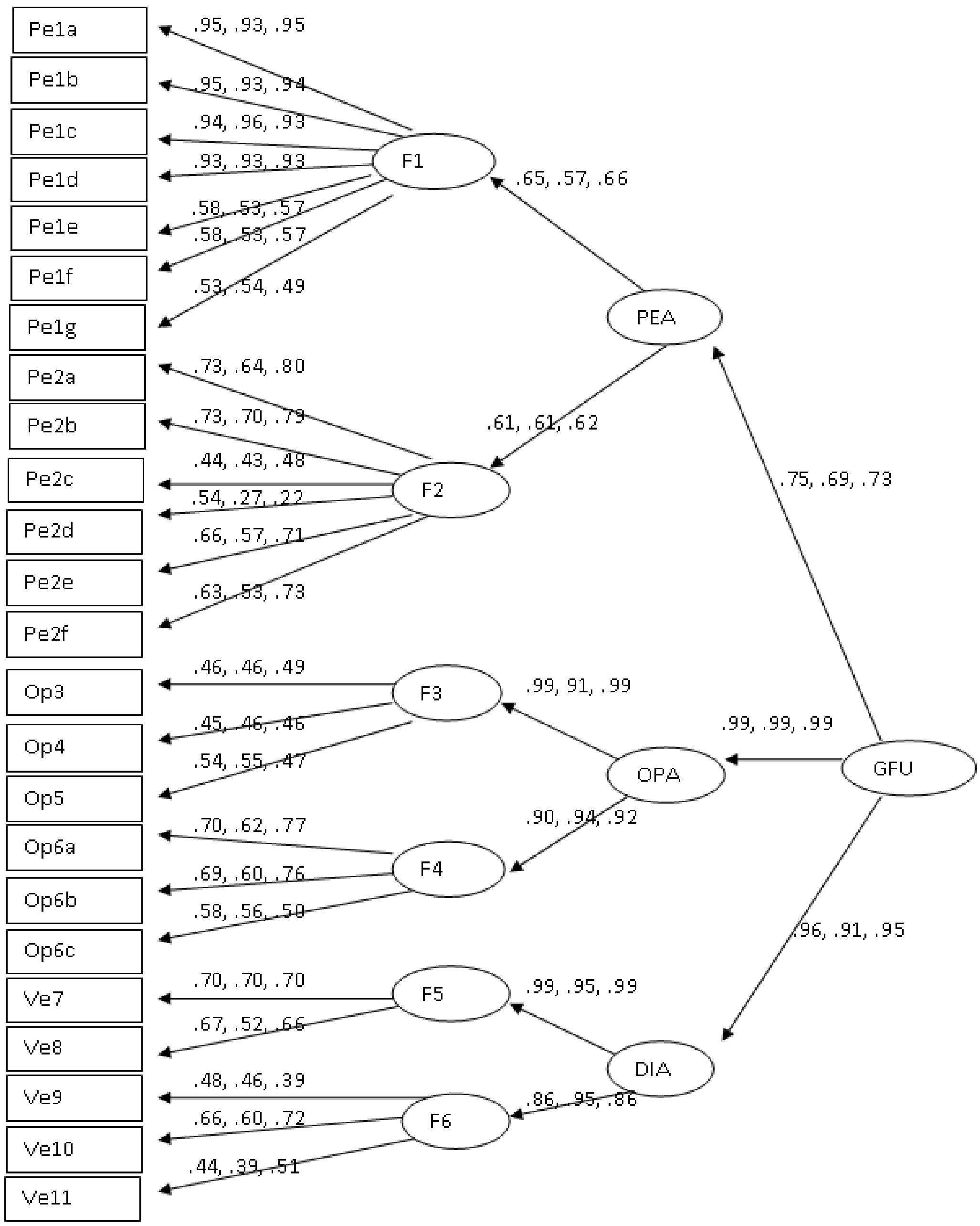


Figure 4. The CFA model of the geometrical figure understanding.

Notes: 1. The first, second and third coefficients of each factor stand for the application of the model in the whole sample (Grade 5 to 8), primary (Grade 5 and 6) and secondary

(Grade 7 and 8) school students, respectively. 2. Errors of the variables are omitted. 3. PEA=perceptual; apprehension, OPA= operative apprehension, DIA= discursive apprehension, GFU=geometrical figure understanding

DISCUSSION

The aim of this article was to present synoptically the main results of the medium size research project MED19 "The functioning of representations in mathematics education with respect to the shift from elementary to secondary education", funded by University of Cyprus. It constitutes from four sections. Particularly, in the first section a structural model for fraction understanding related to representations and problem solving is presented. The second section is referred to a structural model for the understanding of decimal numbers in primary and secondary education, while the third section is related with the affective and cognitive factors on the use of representations in the learning of fractions and decimals. In the last section a structural model of students geometrical figure understanding is suggested.

The results presented in the first section provided a strong case for the important role of the multiple representations flexibility and problem solving ability in 5^{th} and 6^{th} graders fraction addition understanding. Specifically, CFA showed that two second-order factors are needed to account for the flexibility in multiple representations and the problem solving ability. Both of these second-order factors are highly associated with a third-order factor representing the fraction addition understanding. CFA also show that five first-order factors are required to account for the second- order factor that stands for the flexibility in multiple representations and two first-order factors are needed to explain the second-order factor that represents the problem solving ability. Thus, the results indicate the differential effect of both problem modes of representation and required cognitive processes on problem solving ability. Furthermore, the findings provided evidence to Duval's (2006) view that changing modes of representation is the threshold of mathematical comprehension for learners at each stage of curriculum since the conversion from a diagrammatic to a symbolic representation dimension is more strongly related to multiple representations flexibility than the other dimensions are. Nevertheless, the factors loadings of the proposed three-order model suggest that the flexibility in multiple representations constitute a multifaceted construct in which representations, functions of representations and relative concepts are involved.

It is worth mentioning that the high factor loadings in tasks involving number line reveal the specific model's importance in fraction addition and the different cognitive processes which are activated in order to handle it relative to other diagrammatic representations. In fact the number line is a geometrical model, which involves a continuous interchange between a geometrical and an arithmetic representation. Operations on real number are represented as operations on segments on the line (e.g. Michaelidou, Gagatsis, & Pitta-Pantazi, 2004). That is, the number line has been acknowledged as a suitable representational tool for assessing the extent to which students have developed the measure interpretation of fractions and for reaching fractions additive operations (e.g. Keijzer & Terwel, 2003). Furthermore, the strength of factor loadings in dissimilar fraction addition tasks confirm that different mental processes are required so as to be solved relative to similar fraction addition since the knowledge of fraction equivalence is also needed. The results underline also the high association of the fraction equivalence with fraction addition understanding. Besides, as Smith (2002) points out in order to develop fully the measure personality of fractions pupils need to master the equivalence of fractions.

Concerning the age, it is to be stressed that the structure of the processes underlying the fraction addition understanding is the same across Grade 5 and 6. Even though some factors loadings are higher in the group of 6^{th} graders, indicating that overall cognitive development and learning take place, the results provided evidence for the stability of this structure during primary school years represented here.

The results of the study presented in the second section provided a strong case for the important role of multiple-representation flexibility and problem-solving ability in primary and secondary school students' decimal number addition understanding. CFA showed that two second-order factors are needed to account for the flexibility in multiple representations and the problem-solving ability. Both of these second-order factors are highly associated with a third-order factor representing the decimal number addition understanding.

CFA also verified that five first-order factors are required to account for the second-order factor that stands for the flexibility in multiple representations, while two first-order factors are needed to explain the second-order factor that represents the problem-solving ability. In particular, the ability to recognize decimal number addition, to symbolically manipulate decimal number addition and to convert flexibly from one decimal number addition representation to another differentially affected multiple-representation flexibility. Besides, the value of digits was found to differentially affect the ability to solve recognition tasks of decimal number addition. However, the place-value concept do not affect students' ability to calculate symbolically the sums of decimals since the specific processes are automated by the age group of the students involved here. Furthermore, the ability to convert from diagrammatic to symbolic equation came out as a dimension of performance distinct from the ability to convert from a decimal number addition equation to a diagrammatic representation. This suggests that the different types of representation differentially affect the solution process, because students activate different mental processes when solving these tasks. In fact, the findings revealed that multiple-representation flexibility constitutes a multi-faceted construct in which the representation transformations interact with the modes of representation and the place-value concept. The results indicated also the differential effect of the modes of representation on problem-solving ability as far as the addition of decimal numbers is concerned. Therefore, developing the abilities to recognize the addition of one and/or two digit numbers in a variety of diagrammatic representations, to manipulate symbolically the addition of one and/or two digit numbers, to converse one and/or two digit numbers from a diagrammatic to a symbolic representation and the reverse and to solve decimal number addition verbal and diagrammatic problems may contribute to the development of multiple-representation flexibility and problem-solving ability, which are of primary importance in the understanding of decimal number addition concept.

Besides, the findings of the second section are generally in line with the three-level hierarchy validated for the fraction-addition understanding in the first section of the present article. This reveals the potential for developing and validating an integrated cognitive framework of rational numbers, which could be the subject of a future study.

Moving a step forward, the results in the third section confirmed that multiple-representation flexibility, ability on solving problems with representations, beliefs about use of representations and self-efficacy beliefs about using them constructed an integrated model with strong interrelations in different educational levels. All the abovementioned cognitive and affective dimensions have impact on decimal and fraction addition understanding. The results indicated the important role of the multiple-representation flexibility and problem-solving ability in primary and secondary school students' fraction and decimal number addition understanding and the important role of beliefs about the use of different representations for the specific concepts and their respective self-efficacy beliefs. The invariance across primary and secondary education on the structure of the model underlines the need to develop curriculum and teaching methods which have continuity from primary to secondary education.

Although the conversion and recognition tasks have not important contribution on developing positive beliefs about the use of representations, there is an indirect impact, as far as tasks for developing multiple-representation flexibility seems to be a presupposition for developing the ability to solve problems with multiple representations. Problem-solving ability correlates with self-efficacy beliefs and those with beliefs about the use of representations. Recent experiences and success in solving tasks with representations affect the development of self-efficacy beliefs and as a consequence construct positive beliefs about the use of representations. The lower relations in secondary education than in primary education indicate that students need more experiences of using a variety of representations at this level of education in order to stable their beliefs on the specific domain. On the one hand, the difference can be explained by the fact that students face difficulties in multiple-representation tasks which are increased in secondary education since no emphasis is placed on learning with multiple representations. On the other hand, the lower relation can be explained by the construction of a more precise self-image when students become older (Demetriou & Panaoura, 2006), while younger students tend to overestimate their performance and have very high self-efficacy beliefs.

The significant interrelation of students' self-efficacy beliefs with their multiple-representation flexibility and the problem-solving ability confirm that students with lower performance on mathematics have at the same time negative self-efficacy beliefs about their ability to use representations because they cannot use them fluently and flexibly as a tool to overcome obstacle on understanding the concepts of fractions and decimals. This is an important indication for teachers, curriculum designers and researchers in order to improve students' self-efficacy beliefs and beliefs about the use of representations and mainly their understanding of difficult mathematical concepts which are presented in different representational forms, such as the concepts of fractions and decimals.

In the last section, structural equations modelling affirmed the existence of six first-order factors indicating the differential effect of perceptual and recognition abilities, the ways of figure modification and measurement concept, three second-order factors representing perceptual, operative and discursive apprehension and a third-order factor that corresponded to the geometrical figure understanding. It also suggested the invariance of this structure across elementary and secondary school students. Thus, emphasis should be given in all the aspects of geometrical figure apprehension in both educational levels concerning teaching and learning.

On the theoretical level, the four studies contribute to gain a more comprehensive picture of geometrical figure understanding as regards perceptual, discursive and operative apprehension and the fraction and decimal number addition understanding related to multiple-representation flexibility and problem-solving ability. Besides, these studies contribute to find out more meaningful similarities between primary and secondary students' geometrical figure understanding, representational thinking, problem-solving ability, students' beliefs about the use of different representations for the learning of the fractions and decimals and their self-efficacy beliefs about the use of different forms of representations. Keeping in mind the difficulties students face during their transition from one educational level to another (Mullins & Irvin, 2000), the studies could be practically useful, as well, as these studies offer suggestions for a smoother transition of students to secondary school in mathematics learning.

Certainly, there is still need for further investigation into the teaching implications of the subject. In particular, it would be interesting and useful in future to investigate the effects of intervention programs aiming to develop students' cognitive performance concerning fraction and decimal numbers by improving dimensions of affective factors such as beliefs and self-efficacy beliefs and vice versa. Besides, longitudinal performance investigation in geometrical figure understanding tasks for specific groups of students as they move from elementary to secondary education should be carried out.

REFERENCES

Bandura, A. (1986). *Social foundations of thought and action: A social cognitive theory*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Bandura, A. (1997) *Self-efficacy: The exercise of control*. New York: Freeman.

Bentler, M. P. (1995). *EQS Structural equations program manual*. Encino, CA: Multivariate Software Inc.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: The Netherlands, Kluwer.

Charalambous, C.,& Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics, 64*, 293-316.

Deliyianni E., Elia I., Gagatsis A., Monoyiou A., & Panaoura A. (in press, 2009). A theoretical model of students geometrical figure understanding. *Sixth Conference of European Research in Mathematics Education.* Lyon, France. Retrieved January 20, 2009, from http://cerme6.univ-lyon1.fr/documents/wg5.pdf.

Deliyianni E., Elia I., Panaoura A., & Gagatsis A. (2009). A structural model for the understanding of decimal numbers in primary and secondary education. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, H. (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 393-400). Thessaloniki, Greece: PME.

Deliyianni, E., & Gagatsis, A. (2009). La comprensione dell'addizione di frazioni nella scuola primaria: Il ruolo delle rappresentazioni multiple. *La Matemematica e la sua Didattica, 23*(3), 299-318.

Deliyianni, E., Panaoura, A., Elia, I., & Gagatsis, A. (2008). A structural model for fraction understanding related to representations and problem solving. In Figueras, O. & Sepúlveda, A. (Eds.). *Proc. of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, pp. 399-406)*. Morelia, México: PME.

Demetriou, A., & Panaoura, A. (2006). The development of mathematical reasoning: It's Interplay with Processing Efficiency, Self-awareness and Self-regulation. In Lieven Verschaffel, Filip Dochy, Monique Boekaerts and Stella Vosniadou (Eds). *Essays in honor of Erik De Corte - Advances in Learning and Instruction* (pp. 19-37). EARLI.

Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processes. In R. Sutherland & J. Mason (eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematical education* (pp. 142- 157). Berlin: Springer.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 37-51). Dordrecht: Kluwer Academic.

Duval, R. (1999). *Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for learning,* Retrieved from ERIC ED 466 379.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103- 131.

Elia, I., Gagatsis, A., & Demetriou, A. (2007). The effects of different modes of representation on the solution of one step additive problems, *Learning and Instruction*, *17*, 658-672.

Goldin, G. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In Cuoco, A. A. & Curcio, F. R. (Ed.): *The roles of representation in school mathematics*. Yearbook. Reston, VA: National council of teachers of mathematics, 1-23.

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representation and the development of mathematical concepts. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The role of representation in school mathematics* (pp. 1-23). Boston, Virginia: NCTM.

Harrison, J., & Greer, B. (1993). Children's understanding of fractions in Hong Kong and Northern Ireland. In I. Hirabayashi and N. Nohda (Eds.), *Proceedings of the 17th Conference for the Psychology of Mathematics Education, 3* (pp. 146-153). Tsukuba: University of Tsukuba.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 123-134.

Keijzer, R., & Terwel, J. (2003). Learning for mathematical insight: a longitudinal comparative study on modeling. *Learning and Instruction, 13,* 285 – 304.

Kurina, F. (2003).Geometry - The resource of opportunities. In M. Mariotti (ed.), *Proceedings of CERME 3*, Bellaria, Italy, Retrieved March 25, 2008, from http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/draft/proceedings_draft

Lamon, S. L. (2001). Presenting and representing: From fractions to rational numbers. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *The roles of representations in school mathematics-2001 yearbook* (pp. 146-165). Reston, VA: NCTM.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, (pp. 33-40). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Martinie, S. L., & Bay–Williams, J.M. (2003). Investigating students' conceptual understanding of decimal fractions using multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *8*(5), 244 – 247.

Michaelidou, N., Gagatsis, A., & Pitta- Pantazi, D. (2004). The number line as a representation of decimal numbers: A research with sixth grade students. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proc. of the 28th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 305 – 312). Bergen, Norway: PME.

Mullins, E. R., & Irvin, J. L. (2000). Transition into middle school. *Middle School Journal*, *31* (3), 57 -60.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, Va: NCTM.

Panaoura, A., Gagatsis, A., Deliyianni, E., & Elia, I. (2009). Affective and cognitive factors on the use of representations in the learning of fractions and decimals. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, C. (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.4, pp. 273- 280). Thessaloniki, Greece: PME.

Panaoura, A., Gagatsis, A., Deliyianni E., & Elia, I. (in press, 2009). Students' beliefs about the use of represenations in the learning of fractions. *Educational Pcychology*.

Pintrich, P. R., & Schunk D. H. (1996). *Motivation in education: Theory, research, and applications*. Englewood Cliffs, NJ: Merrill/Prentice Hall.

Presmeg, N. (2007). The power and perils of metaphor in making internal connections in trigonometry and geometry. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education: Working Group 1, The role of images and metaphors in the learning and understanding of mathematics* (pp. 161-170). Larnaca, Cyprus: ERME, http://www.cyprusisland.com/cerme.

Reys, R. E., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V., Smith, N. L., & Suydam, M. N. (2001). *Helping children learn mathematics* (6th ed.). New York: John Wiley & Sons, Inc.

Smith, J.P. (2002). The development of students' knowledge of fractions and ratios. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.). *Making sense of fractions, ratios and proportions* (pp.3 – 17). Reston, Va: NCTM

Thomson, C.S., & Walker, V. (1996). Connecting decimals and other mathematical content, *Teaching Children Mathematics*, *8* (2), 496 – 502.

Zan, R., Brown, L., Evans, J. & Hannula, M. (2006). Affect in mathematics education. An introduction. *Educational Studies in Mathematics, 63* (2), 113-121.

A FIVE-DIMENSIONAL MODEL
FOR THE UNDERSTANDING OF FUNCTION

Annita Monoyiou and Athanasios Gagatsis

Department of Education, University of Cyprus

ABSTRACT

The present study investigates preservice teachers' behaviour in five aspects of the understanding of function: "coordinated" or algebraic approach when dealing with simple function tasks, effectiveness in problem solving, concept definition, examples of function and recognizing functions. A main concern of this paper is also to examine the approach preservice teachers follow in relation to the other four aspects of the understanding of the concept. Data were obtained from two task-based interviews. Findings indicated that the five aspects of the understanding of function were not independent entities, but were interrelated in the thought processes of the two teachers. Notable findings occurred as regards the relation between the approach teachers used, problem solving and the other types of behaviour examined.

INTRODUCTION AND THEORETICAL FRAMEWORK

The concept of function is central in mathematics and its applications. The understanding of functions does not appear to be easy. Students of secondary or even tertiary education, in any country, have difficulties in conceptualizing the notion of function (Evangelidou, Spyrou, Elia, & Gagatsis, 2004). A factor that influences the learning of functions is the diversity of representations related to this concept (Hitt, 1998). An important educational objective in mathematics is for pupils to identify and use efficiently various forms of representation of the same mathematical concept and move flexibly from one system of representation of the concept to another.

The use of multiple representations has been strongly connected with the complex process of learning in mathematics, and more particularly, with the seeking of students' better understanding of important mathematical concepts (Greeno & Hall, 1997), such as function. The ability to identify and represent the same concept through different representations is considered as a prerequisite for the understanding of the particular concept (Even, 1998). Besides recognizing the same concept in multiple systems of representation, the ability to manipulate the concept with flexibility within these representations as well as the ability to "translate" the concept from one system of representation to another are necessary for the mastering of the concept (Lesh, Post, & Behr, 1987).

Some researchers interpret students' errors as either a product of a deficient handling of representations or a lack of coordination between representations (Greeno & Hall, 1997). The standard representational forms of some mathematical concepts, such as the concept of function, are not enough for students to construct the whole meaning and grasp the whole range of their applications. Mathematics instructors, at the secondary level, traditionally have focused their teaching on the use of the algebraic representation of functions (Eisenberg & Dreyfus, 1991) and as a consequence students have difficulties in making the connection between different representations of the concept.

In this paper we will concentrate on the following lines of inquiry. The first research domain refers to the students' approach/perspective from which a function is viewed; the second one, is associated with students' performance in function problem solving; the third research domain refers to students' concept image and examples for function; and the fourth research direction which was discussed above rather in a general sense, concerns the different representations of the notion, the recognition of these representations and the passage from one to another.

The concept of function is viewed in this study from two different perspectives, the algebraic and the coordinated approach/perspective. In the algebraic perspective a function is perceived of as linking x and y values: For each value of x, the function has a corresponding y value. The coordinated perspective combines the algebraic and the graphical approach. In this perspective, the function is thought from a local and a global point of view at the same time. The students' can "coordinate" (flexibly manipulate) two systems of representation, the algebraic and the graphical one. Monoyiou and Gagatsis (2008) investigated the understanding of the above mentioned approaches students develop and use and examined which approach is more correlated with students' ability in solving problems. An important finding was that students who used a coordinated approach were also successful in problem solving.

Demetriou (1998) suggested that understanding is closely linked to problem solving, which refers to processes that are employed to generate responses aiming at the transformation of a situation such that a goal is achieved or a gap is bridged. A number of researchers have addressed the important role of connections between the different modes of representations in functions and in problem solving (Gagatsis & Shiakalli, 2004; Monoyiou & Gagatsis, 2008). Gagatsis and Shiakalli (2004) found that university students' ability to translate from one representation of the concept of function to another is related to problem solving success.

Concept image and concept definitions are two terms that have been discussed extensively in the literature concerning students' conceptions of function (Vinner & Dreyfus, 1989). Although formal definitions of mathematical concepts are introduced to high school or college students, they do not essentially use them when asked to identify or construct a mathematical object to do with these concepts. They are frequently based on a concept image which refers to "the set of all the mental pictures associated in the student's mind with the concept name, together with all the properties characterizing them" (Vinner & Dreyfus, 1989, p. 356).

The centrality of examples in teaching and learning mathematics has been long acknowledged. In the last decades a great deal of attention has been given in the importance of examples and the significant role they play in mathematics. Within a variety of educational uses of examples in mathematics, examples are viewed as "illustrations of concepts and principles" (Watson & Mason, 2005). "Learner-generated examples" is a teaching strategy of asking learners to construct their own examples of mathematical objects under given constraints. Watson and Mason claim, and provide ample evidence, that examples generated by learners serve as a powerful pedagogical tool for enhancing the learning of mathematics (Zazkis & Leikin, 2008).

The present study investigates pre-service teachers' behaviour in the above mentioned five aspects of the understanding of function: "coordinated" or algebraic approach when dealing with simple function tasks, effectiveness in problem solving, concept definition, examples of function and the recognition of functions given in various representations. We assume that success and consistency in the five aspects examined here constitute strong indications of the understanding of the concept (Elia, Panaoura, Gagatsis, Gravvani, & Spyrou, 2008). A main concern of this paper is also to examine the approach preservice teachers follow in relation to the other four aspects of the understanding of the concept.

METHOD

This research is a part of a larger investigation involving quantitative and qualitative data. For the purposes of the quantitative research two tests consisted of tasks concerning the above five aspects of the concept of function were administrated to preservice teachers. The qualitative research involved ten participants selected according to their performance in the two tests and the approach they used in solving simple function tasks (algebraic or coordinated). However, in this report we focus on two cases, that of Maria's and Chris's (pseudonyms). Maria and Chris are both preservice teachers of high academic performance admitted to the University of Cyprus on the basis of competitive examination scores. Maria used a coordinated approach in solving simple function tasks, while Chris used an algebraic approach.

One-hour audio-taped interviews were contacted, in which the participants were asked to solve thirteen tasks. Specifically, the interviews involved: (a) two simple function tasks concerning teachers' approach/perspective. In each task, there were two functions in algebraic form and one of them was also in graphical representation. Preservice teachers were asked to interpret graphically the second function, (b) three complex function problems. The first involved a linear function, the second a quadratic and the third an exponential one, (c) two tasks concerning the function definition, (d) two tasks involving examples of the concept and (e) four tasks regarding the recognition of functions given in different representations (graphical, Venn diagram, verbal and algebraic). In this article, due to space limitations, we will focus on six of the above tasks. The data included the task-based interviews, interviewees' notes and interviewer's notes. The audio-taped interviews were transcribed and transcripts were analysed. A matrix was constructed in order to see patterns in Maria's and Chris's responses.

RESULTS

Table 1 shows preservice teachers performance in the six tasks. Maria used a coordinated approach to solve the simple function task. She was very successful in both problems the one involving a quadratic function and the other an exponential relationship. She also gave a correct definition and example of the concept. Furthermore, she recognized the function given to her in an algebraic form (an equation). In contrast, Chris used an algebraic approach and her performance in problem solving was rather poor. She gave an ambiguous definition, an incorrect example and she did not recognize the function given to her.

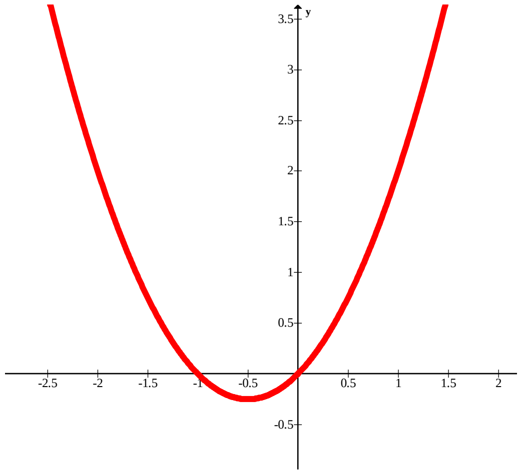
Table 1

Preservice teachers' performance in the six tasks of the interview

	Task 1 Approach	Task 2 Problem	Task 3 Problem	Task 4 Definition	Task 5 Example	Task 6 Recognition
Maria	Coordinated	Correct	Correct	Correct	Correct	Correct
Chris	Algebraic	Incorrect	Incorrect	Ambiguous	Incorrect	Incorrect

Parts of both interviews are given. They are discussed and analysed in order to gain insight on the participants' actual thoughts.

Task 1: In the following diagram $y=x^2+x$ is given. Draw the function $y=x^2+x+1$.



1. Maria: This graph will go one up.

Interviewer: Can you draw it?

Maria: Yes. The minimum point will go one up and the point that intersects the y axis. (She draws easily the graph.)

2. Chris: I will give values for x and y. For x=1 then y=3. For x=0 then y=1. For x=2 then y=7. For x=-1 then y=1. I think that these values are enough. I can draw the function. (She puts the pairs of values on the graph and then she draws the function).

In Task 1, Maria who used a coordinated approach referred that the points of the second function are "one more" than the points of the other. She drew the graph quite easily. Chris who used an algebraic approach constructed a table of values in order to help her construct the graph.

Task 2: The sum of the two legs of a right triangle ABC ($A= 90^O$) is 10cm. (a) Find the area of the right triangle as a function of its side AB=x, (b) Draw the graph of the above function and (c) Prove that the right triangle has maximum area, when it is also isosceles.

1. Maria: Ok, So…. (She draws a triangle). AB + AC=10, x + AC=10, AC=10-x. The area of a triangle is the multiplication of the two legs divided by two so………A= x (10-x)/2, A= $(10x-x^2)/2$, A= 5x – ½ x^2

Interviewer: Can you draw this function?

Maria: Yes. x^2 is negative so we have a maximum point. I will also find an intersection with the axes. For y=0, 5x-1/2 x^2=0, x^2=10x, x^2-10x=0, x (x-10) = 0. So y=0 when x=0 and x=10. I have two points. I will also find the maximum point. f'(x) =5-x, 5-x=0, x=5.

We have a maximum point for x=5. So when x=5, y=25-25/2, y=12.5. Now I have the intersections with the x axis and the maximum point so I can draw the graph (She draws the graph easily).

Interviewer: Can you prove that the right triangle has maximum area, when it is also isosceles?

Maria: We have maximum when x equals 5. We found this before. So, the sum of the two legs is 10. The triangle has maximum area, when it is also isosceles.

2. Chris: (She draws a triangle). AB + AC=10, A= AB.AC/2, A= x (10-x)/2. That's the area of the triangle.

Interviewer: Can you draw this function?

Chris: I will find values for x and y. For x=1 then y=4.5. For x=0 then y=0. For x=2 then y=8. For x=6 then y=12. (She puts the points and she draws a linear function).

Interviewer: Is this a straight line?

Chris: I think yes.

Task 3: ….In 1994, there were only 5000 whales of a particular species and the numbers of whales in the next two years were 4500 and 4050 respectively. Given the population was predicted to decline in this manner, what will be the whale population in 2001? (Presmeg & Nenduradu, 2005).

1. Maria: It is a pattern. I will make a table. From the first to the second we have 500. From the second to the third 450. From the third to the fourth 400? The second difference is constant? 50?

Interviewer: Can you give the equation?

Maria: Yes, W= 5000- ….No. Is it an exponential function?

Interviewer: Can you give the function?

Maria: No, it is difficult. I don't remember it.

2. Chris: (She draws a table). From 1994 to 1995 the difference is 500. From 1995 to 1996 450. That means minus 50 every time…

Interviewer: Can you give the equation?

Chris: Yes, It is W= 5000-50x.

Interviewer: Can you draw this function?

Chris: Yes. It is like this (She draws a linear function).

Maria was quite successful in problem solving. In the first problem (Task 2) she found the equation giving the area of the triangle and she drew the graph. She immediately recognized that this was a quadratic function with a maximum point. In order to draw the function more precisely we found the intersections with the x axis and the maximum point. She also proved that the right triangle has maximum area, when it is also isosceles. Chris managed to find the area of the right triangle as a function of its side AB=x. Then she tried to draw the graph by finding pairs of values for x and y. She found four points but instead of drawing a quadratic function, she drew a linear one. Finally, she was having difficulties to give an answer to the last question. Concerning, the second problem Maria although in the beginning she was tempted to consider it linear then she rejected the possibility and recognized the exponential relationship. Maria had difficulties in finding the decay factor (0.9) and in giving the equation. Chris assumed the second differences to be constant (i.e., 50) but she gave a linear equation. She then drew a linear function. Chris "forced" the graphs in both problems to be a straight line.

Task 4: What is a function? Can you give a simple definition?

1. Maria: Function is for example one set of values. Every element of the first set (A) has a corresponding element in the second set (B). For every x there is a y. We cannot have for one x, two y. Two values of x can lead to a y.

2. Chris: Function is a set. It is a relation between x and y.

In task 4, Maria gave a quite accurate definition of function. In contrast, Chris made a reference to a relation between two variables (x and y) but without the definition of the domain and range, so her definition was characterised as ambiguous.

Task 5: Can you give a simple example from the applications of functions in everyday life?

1. Maria: Fruits and their prices. For example 1 kg of oranges costs 40. 2kg of oranges costs 80. Then for x Kg we will pay y=40x.

2. Chris: An example of a function is f(x) equals with something.

In task 5, Maria gave a correct example of a function by giving an application from everyday life. Chris on the other hand tried to give a symbolic equation but this was incorrect and incomplete.

Task 6: Is this equation ($x^2+y^2=1$) a function or not? Explain your answer.

1. Maria: Sure it is not a function. Is it the equation of a circle? I am not sure about it….. $y^2=2-x^2$ that means that for one x there are two y.

2. Chris: It is a function. We have x and y so it is a function.

In task 6, Maria recognize that the equation given to her was not a function due to the fact that one x has two y. Chris recognize the equation as a function due to the presence of the two variables (x and y). For her every analytic expression of x and y is a function. She showed lack of understanding about the concept of function.

CONCLUSIONS

This study investigated preservice teachers' behaviour in five different aspects of the understanding of function, i.e. approach, problem solving, concept definition, examples of the notion and recognition of the concept, and their interrelations. Maria displayed a conceptual understanding of function. She used a coordinated approach to solve the simple function tasks. Furthermore, she provided correct solutions to the problems, gave an accurate definition and an appropriate example of function and was successful in the recognition task. Chris displayed ambiguous or limited ideas of the function concept. She used an algebraic approach and had a poor performance in problem solving. She also gave inadequate definitions or examples and had difficulty in recognizing the concept. Approach, problem solving, concept definitions, examples and recognition were not independent entities, but were interrelated in the thought processes of the two teachers.

Notable findings occurred as regards the relation between the approach preservice teachers used, problem solving and the other types of behaviour examined for the concept of function. Maria who used a coordinated approach was also very successful in problem solving. Furthermore, she was successful in all the other aspects of the understanding of function. This finding is in line with the results of other studies that suggest that many students deal with functions pointwise (Even 1998). Students can plot and read points, but cannot think of a function as it behaves over intervals or in a global way. These studies also indicate that a global approach to functions is more powerful than a pointwise approach. Students who can easily and freely use a global (coordinated) approach have a better and more powerful understanding of the relationships between graphic and algebraic representations and are more successful in problem solving (Monoyiou & Gagatsis, 2008).

The findings of this study are based on qualitative data particularly on the two interviews analysed and discussed above. Therefore, we cannot make generalization based on them. Quantitative methods should be also used for collecting and analysing data on preservice teachers' behaviour in the five different aspects of the understanding of function. It could be also interesting to examine whether designing and implementing didactic activities that are not restricted in limited and separately taught aspects, but interconnected with each other on the basis of the above forms of understanding of the notion, may contribute to the development of a global and coherent understanding of function and successful problem solving.

REFERENCES

Demetriou, A. (1998). Cognitive development. In A. Demetriou, W. Doise & C.F.M. van Lieshout (Eds.), *Life-span developmental psychology* (pp. 179-270). Chichester: Wiley.

Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 9-24). United States: Mathematical Association of America.

Elia, I., Panaoura, A., Gagatsis, A., Gravvani, K., & Spyrou, P. (2008). Exploring different aspects of the understanding of function: Toward a four-facet model. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 8*(1), 49-69.

Evangelidou, A., Spyrou, P., Elia, I., & Gagatsis, A. (2004). University students' conceptions of function. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proc. 28th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 351-358). Bergen, Norway:PME.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *The Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 105-121.

Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology, 24*(5), 645-657.

Greeno, J. G., & Hall, R.P. (1997). Practicing representation: Learning with and about representational forms, *Phi Delta Kappan, 78*, 361-367.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 123-134.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Monoyiou, A., & Gagatsis, A. (2008). A coordination of different representations in function problem solving. *Proceedings of the 11th International Congress of Mathematics Education*. Monterrey, Mexico: ICME. Retrieved July 12, 2008, from http://tsg.icme11.org/tsg/show/21

Presmeg, N., & Nenduradu, R. (2005). An investigation of a preservice teacher's use of representations in solving algebraic problems involving exponential relationships. In H.L. Chick & J.L. Vincent (Eds.), *Proc. 29th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 105-112). Melbourne, Australia: PME.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(4), 356-266.

Watson, A., & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 131-148.

CHAPITRE 5

REGARDS SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

CHAPTER 5

PERSPECTIVES ON MATHEMATICS TEACHING

COGNITIVE STYLE AND DIFFERENTIATION OF TEACHING MATHEMATICS[1]

Andreas Philippou*, Athanasios Gagatsis*, Savvas Timotheou*,

Marianna Christofia-Palatou and Iliada Elia****

*** Department of Education, University of Cyprus,**

**** Cyprus Pedagogical Institute**

ABSTRACT

This article attempts to give an initial approach to the concept of differentiation of teaching mathematics in mixed-ability classes. Special emphasis is given in the individual cognitive styles and learning of mathematics. Various views for the creativity in mathematics and the use of multiple-solution of mathematical problems are also presented. It is suggested that the differentiation of the teaching of mathematics can be achieved by developing the creativity of students in mathematics using multiple-solution problems and activities in various modes of representations.

INTRODUCTION

The most important error in teaching mathematics in the past centuries was the confrontation of all children as variants of same person. As a result, teachers considered that it was reasonable to teach all the students the same subjects in the same way (Gardner in Tomlinson, 2003). Nowadays, it is believed that students are non-homogeneous as far as the culture, the readiness, the interests, and the cognitive styles, are concerned. They represent multiple academic levels of readiness in different courses and in various phases of a lesson (Christofia-Palatou, Elia, & Gagatsis, 2008).

Therefore it is well documented that "it is no longer possible to talk and teach all students in the same level, because, in this case, the lesson will be very difficult or at very fast rate for some of them or at very slow rate for others" (Kerry & Sands, 1982, p. 8). Accepting that students learn at different rates, constitutes a declaration of reality,

[1] A part of this article is presented in the 11th Cypriot Conference of Mathematics Education and Science and is published in its proceedings (Philippou, Gagatsis, Timotheou, Christofia-Palatou, & Elia, 2009).

for which the teachers must create a “friendly” environment, in which they have the flexibility to adapt the rhythm, learning approaches and the ways of learning, so as to meet the different needs of students. The differentiated teaching can contribute substantially to the creation of such environment.

The aim of differentiated teaching in all thematic areas is that all students are involved in the process of the lesson and are able to achieve the objectives of the lesson. Differentiated teaching is a well organized and flexible way to promote the teaching and it is essential in helping all students to achieve the maximum improvement of their performance.

Teaching can be differentiated in the content, in the process of teaching and in the outcome. That is to say, differentiated teaching is about teaching different students with various and hierarchical (based on concrete criteria) ways, means, processes, environment, so that to correspond in the different needs of students in mixed-ability classes.

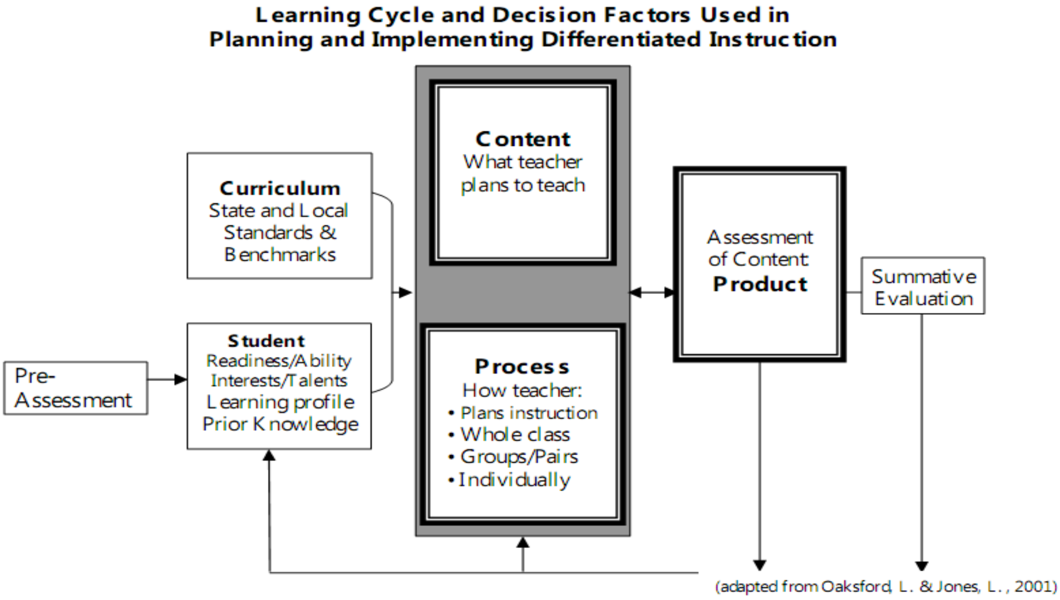
In other words, differentiated teaching is the correspondence of the teacher at the needs of the student that is guided by the following general principles such as, the remarkable work, the flexible group work and the continuous evaluation and adaptation. Differentiation is simply the attention to learning needs of an individual student, or a small group of students, contrary to the teaching at which the students are faced as they are similar to each other. Teachers can differentiate the content of teaching, the process and the result, according to the readiness, the interests, and the learning profile of the student, through a series of teaching and administrative strategies.

In this article, we engage in a synthesis of various pedagogic theories for differentiated teaching, psychological theories of learning and theories and opinions about creativity in mathematics.

WHY DIFFERENTIATED TEACHING?

Differentiation is an organized and flexible way of approaching teaching that helps children achieve in learning and to achieve the biggest output (Tomlmson, 2000).

In the figure that follows, the action of teaching is presented in a schematic way. In this, various elements are involved: the curriculum, the student, the subject of teaching and the process of teaching. Emphasis is given in the relations of the initial and final evaluation with the process of teaching.



• *Object: Content which is presented.*

• *Process: Activities that help the practice of students or the understanding of the content.*

• *Result: Result of a lesson or period of teaching, as a test, project or notes.*

• *Readiness: Previous knowledge, running skills and ability of student with the material that is presented in the lesson.*

• *Interests: The teacher aligns the basic skills and the material for understanding in a subject on the curriculum with the subjects or the objectives that are required by the students.*

• *Cognitive Style: The teacher examines the style of learning, the talent of students, or their cognitive skills.*

The differentiations and adaptations intend to facilitate the students in mathematics. These can develop in the usual class with the condition that the teacher has considered the particularities of his students. Some of the ways with which the teachers can differentiate their teaching in order to correspond appropriately to the interests of the students are:

- Selection of adults or schoolmates who have the relative knowledge, to act as mentors in the study of a subject region of common interest.

- Adoption of multiple ways of study of a subject from the students and presentation of the results of their work.

- Benefit from possibility of accessing different materials, tools and technologies.

- Possibility of choice of work and results, including choices which are proposed by the students themselves.

- Encouraging students to study and to implement key concepts and principles in areas which are of interest to them.

DIFFERENTIATED TEACHING IN MATHEMATICS AND COGNITIVE STYLES IN LEARNING OF MATHEMATICS.

The aim of differentiated teaching in all thematic regions is all students to participate in the process of the lesson and to achieve the aims and objectives of the lesson. Differentiated teaching in the mathematics class describes the various strategies of teaching for the teaching of mathematics. Specifically, it refers to the teaching of basic concepts, the educational process in the programming and the designing of the objectives and the parallel objectives.

An important discrimination of cognitive styles is referred to in the piecewise and in global approach (Pask, 1976). Students who behave piecewise learn with small, well determined steps in a way that their knowledge and understanding are built consequentially. Students who behave globally work with more exploratory way, creating an overall picture before they advance in the details. They are characterized by skills of superior thought and reconstruction of preexisting knowledge.

Chinn and Ashcroft (1995) indicate that the cognitive style in mathematics is referred in the way with which a person thinks when a numerical problem is given to him. Bath, Chinn and Knox (1986) and Chinn and Ashcroft (1995) propose a discrimination of cognitive styles, similar with the above, categorizing answers in selective mathematical problems. More specifically, they describe two styles, local or the “worm” and global or the “grasshopper”. Table 1 presents the characteristics the local and global approach based on the results of Bath’s et al. (1986) research study (in Gagatsis, 1997).

Table 1

Characteristics of the local and global approach

		"Worm" (local)	" Grasshopper " (global)
I	Analysis and identification of the problem.	- He focuses in the parts, notices the details and distinguishes. - He carefully looks to find a useful formula.	- Global style, he puts it all together. - He looks at the operations in order to determine the estimate of the answer or sequence of restrictions.
II	Methods of resolution of problem.	- He is directed only in one formula. - It uses a unique method, some strictly organized steps, generally only to one direction. - He uses the numbers as they are given. - He tends to multiply and add, he avoids abstraction and division. - He tends to use pencil and paper in order to calculate.	- He makes a controlled exploration. - Flexible handlings, he uses multiple methods, in general he works by seeing an answer and continues using new methods. -He converts, disrupt, rounds numbers and makes the calculations easier. - He tends to subtract. - He tends it makes the all operations in his mind.
III	Verification	He does not verify his answer or if he verifies he uses the same method.	He verifies his answer using various processes or methods.

(Bath et al., 1986)

The following examples are indicative of different ways students face certain algebraic-graphical problems as far as the approach used to solve them is concerned.

Example 1

The students are called to construct a draft graph of the parabola $y = x^2 - 4x + 5,\ x \in \mathbb{R}$ given that they have in their disposal the graphic representation of $y = x^2$. Students who try to solve this problem "locally" begin to find coordinates of points of the parabola one by one to construct the corresponding table of arithmetic values by making similar recovery operations and having always the risk of errors. They do not try to acquire a general prospect of the problem, they consider the problem exactly as given, that is they give in succession values to x for $x = -3, -2, -1, 0\ 1{,}2, \ldots.$ The next stage is each calculation in the form: $y_1 = (-3)^2 - 4(-3) + 5 = 9 + 12 + 5 = 26,\ y^2 = (-2)^2 - 4(-2) + 5 = 4 + 8 + 5 = 17$ etc which is time-consuming as a process of finding the values and afterwards as a placement of points in orthogonal system axes.

Some of the students who apply local strategy learning have difficulty to reach up at the end of plotting the graphic representation due to the number of operations and the large number of points that they have to place on the axis system and afterwards to pass the curve above the points to have final graphic. Besides, a possible error in a "sequence" placement of points and afterwards the mapping out of the curve is "distressed" that the curve is possible to have.

Students that face the work "globally", especially if they know that they have limited occasion of making operation and calculations for the table of values, they read the exercise from the beginning to the end in order to see if there exist an easy strategy or re-composition. A possible solution may be to make an estimate of the result. They may recompose the exercise $y = x^2 - 4x + 5, x \in R$ in the form $y = (x - 2)^2 + 1$ and observe the two transformations that are held in the given curve. Specifically, they may be able to indicate immediately that the $y = x^2$ is transported totally and in succession two units right and afterwards one unit above, so making, simply and fast the graphic representation. Thus, they acquire an overall and flexible view of the answer (Monogiou & Gagatsis, 2008)).

Example 2

When trying to find the definite integral $\int_{-2}^{+2} (8x^5 + 2\chi^3 - 5\chi)\, dx$ the students who apply "local" strategy of learning will begin to calculate each one term of the integral separately and afterwards they calculate their values. Students who apply the "global" method to solve the problem are going to investigate the problem examining if there exist easier strategies or re-compositions. They may observe that the function is odd and integrated from -2 to +2, and then the result that is given is 0.

Example 3

The students are asked to calculate the definite integral $\int_{2+\gamma}^{5+\gamma} \varphi(\chi-\gamma)dx$ with the condition $\int_{2}^{5} \varphi(\chi)dx = 10$. Many students, who apply "local" strategies of learning, begin to make the classic calculations step by step until they connect the given integral with the asked one. In contrast, the students who apply the "global" strategies indicate that the asked areas are exactly equal with the initial area since it is simply a displacement of the initial area for γ units to the right!

Example 4

When the two ends of a diameter $A\ (x_1, y_1)$ and $B\ (x_2, y_2)$ of a circle are given and it is asked to show that the equation of the circle with diameter AB is: $(x-x_1)\,(x-x_2) + (y-y_1)\,(y-y_2) = 0$, the students with "local" strategies of learning begin progressively initially by finding the center of circle as the midpoint M of the segment AB and afterwards the length of the radius MA or MB or $\frac{AB}{2}$. When we try to find these results, the calculations and operations are too many, up to finding the final solution. The students with "global" style strategies observe that any point $R\ (x, y)$ on the circle has the property that PA is perpendicular to the segment PB and hence the product of the slopes is equal with -1:

$m_{AP} \cdot m_{BP} = -1$ i.e. $\frac{y-y_1}{x-x_1} \cdot \frac{y-y_2}{x-x_2} = -1$, which is something that leads immediately to the result: $(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0$

ESTIMATE OF DIVERSITY IN THE WAY OF STUDENTS' THINKING

Students at any class level differ in many points of views. When the teachers develop the lesson plan, they recognize the differences in the way the students can learn and also the ways that are suitable and important for them. What differences allow the focus to the differentiation of teaching and evaluation? Some differences could be cognitive (e.g., pre-requisite mathematical knowledge, skills, strategies), while other differences may be emotional and behavioral (e.g., curiosity, confidence, perseverance).

Problem 1. How many square tiles 1×1 dm are needed to form the internal perimeter in a square region of dimensions 10×10 dm? Find a way to solve this problem without calculating for each tile. (from Alper, et al, 2003a).

The students are encouraged to find and to share multiple ways to solve this problem, and afterwards they are called to solve the general problem for the borders of N×N square. It is asked to solve the problem with at least two ways.

Problem 2. Find all positive integer numbers that can be written as the difference of two square integer numbers? For example, $17 = 9^2 - 8^2$. (from Sallee et al, 1991).

None of the students possess the theoretical background and they are not going to give a complete answer immediately.

The problem encourages the handling of numerical data. There exist a number of simple approaches for this problem. Some will approach the problem by examining algebraic the formulas like $a^2 - b^2$ or $(a+b)^2 - a^2$. Nevertheless, it is very difficult to found a complete description of possible numbers only with the algebraic approach.

Groups are supposed to try certain numbers and to begin to record the data. As soon as a result comes out as a plan from the data, the algebra can be used in order to justify the pattern that is revealed. Practically, many of the students with high ability in the symbolic handling and the use of standardized algorithms are going to try an algebraic approach, and many students with low ability are going to try to collect the data.

Something that even these problems that require collection of data. Often, the "more skillful" students will begin immediately with an algebraic approach and they will remain stuck in the algebra while the "less skillful" students take certain or even full results.

Many students find various patterns, e.g. each odd number. This specific result has various explanations. The students usually know that each odd number is the difference of successive square numbers either via algebra (that writes an odd number as $2n+1$ for some n, and then$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1)$, either via diagrams. Other students observe that these numbers cannot be written since the difference of two squares is divided by 4, or observe that the multiples of 4 it is possible, with or without proof. Consequently, the students are in position to work with this problem in a lot of levels and, in the same time, to learn several concepts of algebra.

Many of the students have the ability to find a draft solution plan, but not the proof. Even without proof, the different methods and the collected data is interesting. The student may sometimes prove that the odd numbers and multiples of 4 are possible answer, usually with the examination of the formula$(\nu + 2)^2 - \nu^2$, but are not able to show that other numbers are impossible to verify. For the complete proof will be required an argument where, $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ is an even number and next with the examination of cases, both factors should be even, hence their product should have 4 as a factor.

The first two examples are problems that underline the concept of the variable, mathematical representation, investigation and proof.

DISCUSSION

Nowadays, differentiated teaching in mixed abilities classes constitutes the base for the implementation of equal opportunities in education. However, the application of differentiated work in mixed abilities classes is not an easy case. Most teachers accept its philosophy but they do not know how to apply it. In this article an effort was done to explain the meaning of differentiation and to present some strategies and procedures for applying it generally in teaching and in particular on the teaching of mathematics. Special reference was made in the cognitive style of students in mathematics and in the use of multiple representations in the teaching and learning of mathematics. Finally, a research study was presented, which showed the importance of different representations in the differentiation of teaching of mathematics.

The teacher is able to differentiate the content of teaching, the process of learning, or the learning results. However, in order to proceed in the differentiation it should diagnose the characteristics of his students. The students differ as for the readiness, the interest and the learning profile.

The interest referred to in the attraction, curiosity or the passion of a child for a specific subject or a skill. In order to differentiate according to students' interests, the educator harmonizes the basic skills and resources for the understanding of a subject of the curriculum with other subjects or work in which the students are interested.

The learning profile refers to the way in which we learn. It can be formed from the type of intelligence that characterizes the person, the sex, the education, or his cognitive style. Some students comprehend better certain ideas if they discuss them with their schoolmates. Some prefer to work individually and in writing. Some learn better when they advance from piecemeal knowledge to constructing the whole picture, while others need to form a completed picture for a subject before they comprehend the individual elements (Gagatsis & Koutselini, 1999).

An important role in the teaching also plays the cognitive profile of the teacher. Depending on the cognitive type of the teacher, e.g. "local" or "global", is possible to follow a certain type of teaching. This type of teaching can be spontaneously adapted with the cognitive style of learning of mathematics. However, by following a certain type of teaching it is possible that some of the students do not comprehend. The examination of the relation of cognitive type of the teachers with the type of teaching that they apply and also its effectiveness could be an issue for future research.

In future, a research study which examines the relationship between the learning profile of students, such as the "local" and the "global" style, with the performance in mathematical problems in different concepts and cognitive requirements (e.g. procedural problems and routine problems with multiple representations), would be theoretically interesting and practically useful to the issue as far as differentiation in mathematics teaching is concerned.

REFERENCES

Bath, J. B., Chinn, S. J., & Knox, D. E. (1986). *The test of cognitive style in mathematics.* East Aurora, N.Y.: Slosson.

Chinn, S.J., & Ashcroft, J. R. (1995). *Mathematics for dyslexics-A teaching handbook.* London: Whurr Publishers Ltd.

Christofia-Palatou M., Elia, I., & Gagatsis, A. (2008). Differentiation of teaching, cognitive styles and representations in mathematics. *Proceedings of the 25th Panhellenic Conference of Mathematics Education: The Mathematics Education and the composite reality of the 21st century* (pp. 840-855).Volos: Greek Mathematical Society- University of Thessaly (in Greek).

Gagatsis, A. (1997). *Didactics of Mathematics and Dyslexia*. Nicosia: Ofeltis (in Greek).

Gagatsis, A., & Koutselini, M. (1999). Curriculum development as praxis and differentiation in practice: The case of mathematics. In A. Gagatsis (Ed.), *A multidimensional approach to learning in mathematics and sciences* (pp. 107-122). Nicosia: Intercollege Press.

Kerry, T. & Sands, M. (1982). *Handling classroom groups.* Basingstoke: Macmillan Education.

Monoyiou, A., & Gagatsis, A. (2008). The use and the flexible treatment of multiple representations in functions and problem solving. In A. Gagatsis, P. DAmianou , & A. Philippou (Eds.), Proceeding of the 10th Cyprioy Conference of Mathematics Education (pp. 75-89). Nicosia: Cyprus Mathematical Society (in Greek).

Pask, G. (1976). *The cybernetics of human learning and performance.* London: Hutchinson.

Philippou, A., Gagatsis, A., Timotheou, S., Christofia-Palatou, M., & Elia, I. (2009). Cognitive styles and differentiation of mathematics instruction. In A. Gagatsis, A. Philippou, P. Damianou, & E. Avgerinos (Eds.), *Proceedings of the 11th Cyprus Conference on Mathematics Education and Science* (pp. 411-420). Nicosia: Cyprus Mathematical Society (in Greek).

Tomlinson, C. (2000). *Differentiation of teaching in mixed ability classes.*. Nicosia: Cyprus Pedagogical Institute (translation in greek).

Tomlinson, C. (2003). *Differentiation of work in classroom*. Nicosia: Cyprus Pedagogical Institute (translation in Greek).

DEVELOPMENT OF CREATIVITY IN MATHEMATICS

Andreas Philippou*, Athanasios Gagatsis*, Savvas Timotheou*
and Elizabeth Dialeraki**

***Department of Education, University of Cyprus, ** Greek Secondary Education**

ABSTRACT

The development of creativity is an objective of mathematics teaching worldwide. Problem solving plays an important role in the teaching of mathematics and mathematical thinking development. Creativity in mathematics is mainly developed through problem solving. This can be accomplished by using various teaching approaches, multiple-solution exercises and multiple modes of representations in problem solving. In this article, emphasis is given on solving problems and exercises in mathematics with various ways.

INTRODUCTION – PROBLEM SOLVING

Problem solving plays an important role in all scientific areas of teaching and learning. Hilbert (1902) notes that each part of science remains alive if it continues to offer plenty of problems. Possible inexistence of problems may provide the disappearance of human development. For this reason problems are necessary in mathematics research. The solution of the problems offers an opportunity for the researcher to discover new methods and approaches and new challenges for further research.

Problem solving played an important role in mathematics of ancient cultures (e.g. Egyptian, Chinese, Greeks, Babylonians) and was the starting point for the development in various fields of mathematics (Geometry, Algebra, Number Theory, Statistics etc). Furthermore, problem solving plays an important role in school mathematics (Elia, & Gagatsis, 2004). On the teaching of mathematics, the foundation of the exploitation of problems occurred by the pioneering tasks of Polya (1973, 1981) which was the basis for many researchers in the field of mathematical problem solving.

The development of the ability of students to solve problems is recognized as the primary objective of teaching mathematics from all educators, independently from the learning theory that they follow. It is this ability that reflects the level of mathematical thinking and is considered that includes both creative and critical thinking. In fact, if we have to summarize in a single sentence the purposes of mathematical education or education in general, we could say that “education is designed to develop the ability for problem solving”. It is generally accepted that a factor, which plays a decisive role in the efforts of solving a problem, is the way of the problem solution presentation. Therefore, the verbal description of a problem which is accompanied with the presence of other external representations, may contribute significantly to the attempt to solve it from the initial stage of its understanding. Recently, the use of external representations is supported by the mathematical educational community in mathematical problem solving. In fact, the Principles and Evaluation Standards for School Mathematics (NCTM, 2000) suggest the use of multiple external representations in problem solving both in primary and secondary school.

In mathematics education, problem solving is referred to the planning of the procedure from the existing data to the desired situation by the means of a series of intellectual activities. The solution of the problem (Figure 1) leads to a final product, which constitutes the end of a series of procedures carried out by the subject, who may be invisible or visible, informed or unscrupulous (Elia, & Gagatsis, 2004). The final product is referred to the suitability of the solution, the time required to complete the solution by the solver, the correctness or not of the solution, the completion of the solution and the degree of complexity. The procedures are referred to factors relating to the behavior of the student during the problem solution, the heuristics strategies that the solver uses and the algorithms that he applies.

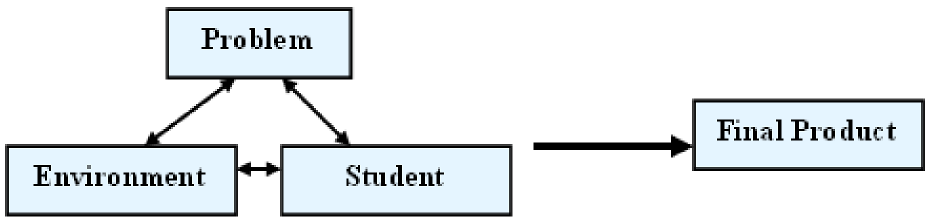


Figure 1. Solution process of a problem

CREATIVITY IN MATHEMATICS

Figure 1 indicates the importance of the interaction of the task and the subject for the successful completion of the problem solving process. Various problems and questions, require different intellectual operations action in order to be answered. “How many” and “what” are the intellectual operations which characterize the human intelligence. Various lists and classifications have been proposed occasionally by psychology researchers. Similarly, the theories for the architecture of the mind are an important part of psychology research studies. In the majority of the theories two specific terms are mentioned, the converging and the divergent creative thinking. It is obvious that both types of thinking are explicitly linked to mathematics.

In this article, we are specifically interested for the divergent-creative thinking that is characterized by a more liberal way of processing problem data. This method allows new and unexpected combinations with final goal a number of original ideas and different possible solutions. This last idea is basic for the development of creativity in mathematics.

The mathematical creativity is a crucial characteristic for higher mathematical thinking. Singh (1987) describes the creativity as “the process of generating significant ideas, making theoretical ideas practical, converting innovative ideas from other fields into the new field” (p.186). In this line, creativity in mathematics implies creation of original, inventive, novel and unpredictable ideas in the field of mathematics (Singh, 1987). In all contemporary curriculums there are procedures described by which the students can develop their ability to creative thinking. The creativity could be detected by the means of problem solving, but also in the investigation of mathematical concepts. According to Haylock (1987), there are two main approaches to the recognition of creative thinking in mathematics. The first is the overcoming of fixation, the breaking of a mental set and the second is to have divergent thinking. Many researchers conclude that posing questions and finding problems are crucial, at the heart of originality, which form an extremely strong association with creativity (Getzels & Csiksezentmihalyi, 1975; Mackworth, 1965). Creativity is a kind of intellectual trait or ability in producing a certain product that is original and has social or personal value, which is designed with a certain purpose in mind and using some given information (Hu & Adey, 2002).

Suitable mathematical problems and activities achieve to develop the ability of students in ways of thinking and various solutions of a problem. The solution of a multiple-solution problem is an effective instrument for higher and exploratory mathematical thinking and creativity. (Leikin, Levav-Vineberg, Gurevich, & Mednikov, 2006). The multiple-solution problems are defined as the problems which provide definitely the condition for solving the problem with multiple solutions. Based on the tasks of Leikin (Leikin, Gurevich, & Mednikov, 2002; Leikin, 2005; Leikin, Levav-Waynberg, Gurevich, & Mednikov, 2006; Leikin, Levav-Waynberg, 2007; Leikin, 2007) the difference between the solutions may be reflected in the use of:

(a) Various modes of representations

Research has been conducted in Cyprus and in Greece concerning problem solving (Elia, Gagatsis, & Demetriou, 2007), the concept of limit functions (Elia, Gagatsis, Panaoura, Zachariades, & Zoulinaki, 2009), the concept of function (Elia, Panaoura, Gagatsis, Gravvani. & Spyrou, 2008, Elia, Panaoura, Eracleous, & Gagatsis, 2007) and number line (Gagatsis, Elia, & Andreou, 2003).

(b) Various properties (definitions or theorems) of the mathematical concepts from a specific mathematical subject.

Concerning this subject, there is a limited bibliography in Greek language (e.g. Gagatsis, Papadopoulou, Sarika, & Tsaoylidis, 1994).

(c) Various mathematical tools and theorems from different areas of mathematics.

According to Leikin (2007) three spaces of solutions are proposed (solutions spaces) which allow the researchers to examine the mathematical creativity during multiple-solution problem solving.

The solution spaces are distinguished as follows:

a) **Expert solution spaces** (Expert Solution Spaces), which are distinguished in:

- *Conventional solution space*, which generally recommended by the curriculum and displayed in textbooks.
- *Unconventional solution spaces* include problem solutions, which are usually not prescribed by school curriculum.

If we want, a particular problem-solving approach to become a habit of mind it should belong to the conventional spaces of many problems.

b) Individual solution spaces are also of two kinds. The distinction is related to the ability of a person to apply it individually.

- *Personal solution spaces* include solutions that individuals may present on the spot or after some attempt without help of others.
- *Potential solution spaces* include solutions that solvers produce with the help of others.

Any problem-solving strategy becomes a habit of mind only when it belongs to the personal solution space. However, not each solution from this space is a habit of mind. In order to be a habit of mind, a solution should belong to personal solution spaces of many problems from different parts of mathematical curriculum.

c) Collective solution spaces characterize solutions produced by groups of participants (communities of practice). They determine local conventional spaces and are subsets of expert solution spaces.

We use solution intervals as a tool that allows the investigation of mathematical creativity of students.

Comparing individual and collective solution spaces of students from different groups with specific solutions spaces, we can estimate the mathematic knowledge and the creativity of the students (Leikin & Lev, 2007; Leikin & Levav-Waynberg, 2007; Krutetskii, 1976; Ervynck, 1991; Silver, 1997).

Multiple-solution tasks should be incorporated in the curriculum and can be used either for the development or for the evaluation of a concept. They are necessary for the development of the mathematical proving (NCTM, 2000; Polya, 1973; Schoenfeld, 1985), need a good organization of mathematical knowledge (Polya, 1973) and require creative mathematical thinking. Some solutions are shorter or more elegant than others (Polya, 1973; Kruteskii, 1976, Ervynk, 1991; Silver, 1985). The main characteristics of creativity according to Torrence (1974, in: Leikin et al, 2006) is the *flexibility*, *novelty and fluency*.

Krutetskii (1976), Ervynck (1991) and Silver (1985), connected the concept of creativity in mathematics with multiple-solution tasks.

In particular, by examining the multiple-solution tasks, creativity may occur as:

- Flexibility which refers to the number of solutions generated by a solver.
- Novelty which refers to the conventionality of suggested solutions.
- Fluency which refers to the pace of solving procedure and switches between different solutions.

MATHEMATICS TEACHERS' CONCEPTIONS FOR MULTIPLE- SOLUTION TASKS

Research studies concerning the use of multiple-solution tasks from many countries have led to three basic questions:

Why? How? When?

In the questions "why" to use multiple-solution tasks and "how" and "when" to be used, Leikin (2007) present certain perceptions of mathematics teachers of secondary education.

Why? (based on Leikin, 2007)

BEFORE	**AFTERWARDS**
• Why do I need this? It is excessive. I have so many things to teach. I believe I know geometry and my professor never asked us to solve a problem in many ways. Of course, there are students who find a different	• Above all it is amusing and at some points you feel enjoying it. You enjoy solving and knowing various solutions. Why don't we teach with that way at schools?

solution, but there is no time in the lesson to present all solutions. • The multiple-solution tasks will confuse me and might not help me to learn geometry. I don't remember geometry. It has been three years since I dealt with geometry. I should not become a school teacher. • Why should we make it so difficult? I'm having a hard time finding one solution and you ask for two? Is not fair to ask me to find more.	• In the beginning, I felt embarrassed that I failed to solve a problem. Afterwards I re-examined all the theorems and solved hundreds of problems. I showed to one of my student many different solutions for a problem and the student asked me why we don't do this at school.

How? (based on Leikin, 2007)

BEFORE	**AFTERWARDS**
• "How can I find a problem with 3 solutions? Usually I don't search for a problem but I hardly I find a solution." • "How I am going to teach tomorrow when I realize how difficult is geometry for me?" • "Different people may find different solutions, but how can I make it alone? When a teacher can do it in class? There is much pressure of time and the teacher should cover the official syllabus.	• In order to find a second solution of a problem you need to find at least the first. In order for you to find a problem with two solutions, you must solve at least 10 problems with one kind of solution. In order for you to find the third solution, you will need to solve 30 problems. • Initially you press yourself to stop to search with which theorem the problem is connected or else you get stuck in the theorem. Afterwards you realize that you do not care to know where you can find the problem in the book. You simply solve it. • Initially you feel that you can find a solution for each problem and afterwards you are surprised to see that for many problems you can have two solutions. To find the third solution it

	continues to be provocative. • In each chapter, you can find many problems with two solutions. Sometimes it is difficult in more problems that are complex.

When? (based on Leikin, 2007)

BEFORE	**AFTERWARDS**
• When will I do this? I have so much work to finish. • When can I do it in the class? There is pressure of time and I must follow the syllabus. • Different solutions are for problems which are more advanced. You should learn a lot of concepts and a lot of theorems in order to apply them in a problem.	• In each subject you can find many tasks with many solutions. • In tasks that are more difficult this is hard. For example, in tasks of resemblance, you cannot solve them without the use of resemblance. • Don't you remember about the areas? The theorem of Thales can be solved without the use of resemblance… • All right, but this does not mean the more difficult task is the one which has the bigger number of solutions. • School teachers teach differently. Some say: "I do not have the time to hear all the solutions." Others discuss the different solutions when they check the exercises in order to let each student to present their solutions. Only rarely a solution plan of a teacher solves with different ways a problem. I think that you should present to the students that this is possible and then they will learn to do so for themselves.

EXAMPLES OF TASKS OF MULTIPLE SOLUTIONS

Let's try to solve some multiple-solution problems by referring to the solution space of each way but also to elect certain original and creative ways.

Example 1: From all the quadrilaterals with constant perimeter QUOTE $P = 4c$, square has the biggest area (Leikin, 2007).

I. ***Analysis***:

$$P = 4c = 2 \cdot a + 2 \cdot b \Rightarrow b = 2c - a, \quad E = a \cdot b, \quad E(a) = a \cdot (2c - a),$$

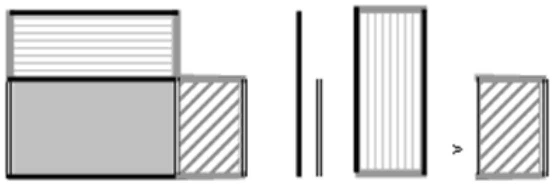
$\frac{dE(a)}{da} = -2a + 2c, \quad \frac{dE(a)}{da} = 0 \Rightarrow a = 0, \quad E_{max}(a), \ for \ a = c \ and \ b = 2c - c = c$ So

$a = b$, hence, it is a square.

II. ***Algebra***: $f(a) = a(2c - a)$ is a parabola with extreme point when $a = c$

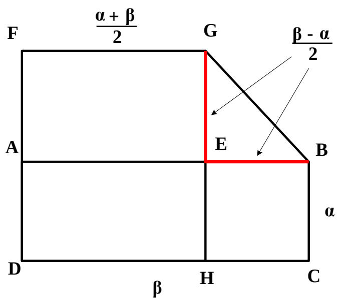
- According to the extreme point formula.
- According to the symmetry of the parabola at the interval $[0,2c]$.

III. Geometry



IV. ***Symmetry***: From all the geometrical shapes with given perimeter P, the most symmetrical has the biggest area.

V. Geometry and algebraic handlings



ABCD is a square with perimeter P and sides a, b and without loss of generality let $a < b$.

DFGH is a square with perimeter P and side $\frac{a+b}{2}$

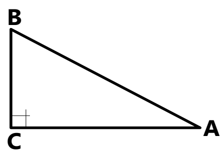
$E_{ABCD} = E_{AEHD} + E_{HEBC}$, $E_{DFGH} = E_{AEHD} + E_{AFGE}$

$E_{HEBC} = a \cdot \frac{a-b}{2}$, $E_{AFGE} = \frac{(a+b)}{2} \cdot \frac{b-a}{2}$,

$a < b \Rightarrow a < \frac{b-a}{2} \Rightarrow E_{HEBC} < E_{AFGE} \Rightarrow E_{ABCD} < E_{DFGH}$

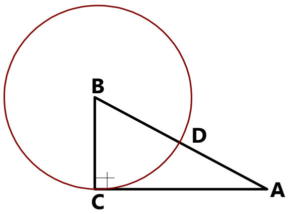
Example 2: In a right triangle with an acute angle 30°, the edge that is opposite the right angle is equal the half of the hypotenuse.

I. Trigonometry



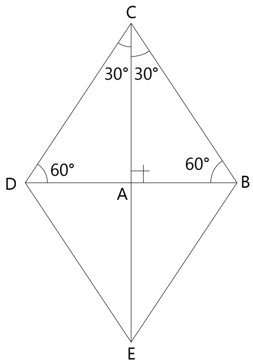
ABC, right triangle, $A = 30^o$, $\sin \hat{A} = \frac{BC}{BA} \Rightarrow$ $sin30° = \frac{BC}{BA} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BC}{BA}$
$\Rightarrow BC = 2 \cdot BA$

II. Circle construction



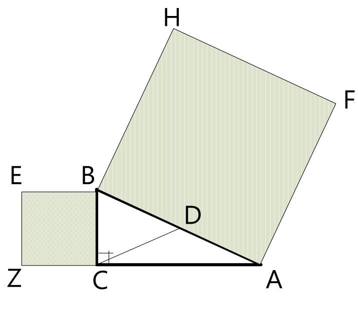
$$BC = BD = DA, \quad BC = \frac{BA}{2}$$

III. Rhombus construction



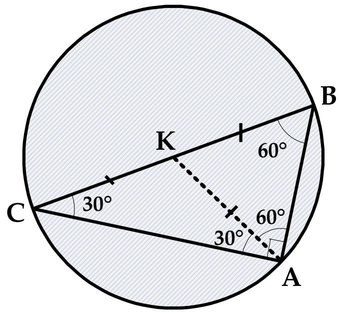
$BD = BC \Rightarrow AD + AB = BC \Rightarrow 2AB = BG \Rightarrow AB = \frac{BC}{2}$ $(AD = AB$ are the are the diagonals of the rhombus)

IV. Construction and Comparison of the area of squares.



$$(EBCZ) = 7{,}57\ cm^2, \quad (HBAF) = 30{,}29\ cm^2, \ \frac{HBAF}{EBCZ} = 4{,}00$$

V. *Inscribe the triangle in a circle*



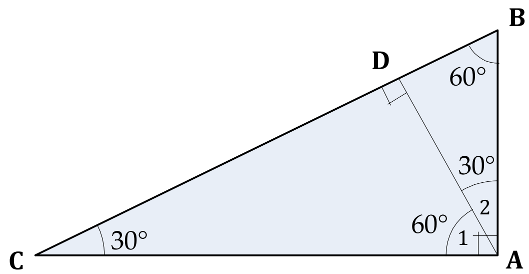
We draw the radius of the circle from point A on the circle (A is vertex of the triangle ABC.

In the triangle KBA we have that KA=KB, hence the triangle KBA is isosceles, i.e. the triangle KBA is isosceles and $\angle KBA = \angle KAB = 60^0$

The angle AKB is 60°, hence the triangle AKB is equilateral, thus BA=KB.

It is also true that $B = \frac{BC}{2}$, hence: $BA = \frac{BC}{2}$ QED.

VI. *Metric Relations*



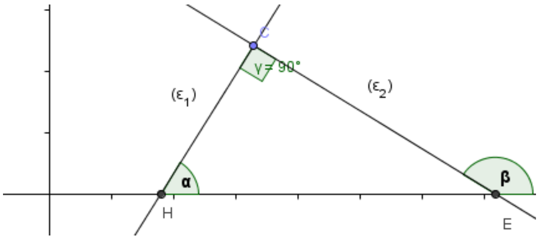
From the metric relations at the right triangle $ABC \Rightarrow (AB)^2 = (BC)\cdot(BD)$ we have that $\angle BCA = 30^o$ *thus* $\angle DA_1C = 60^o$,

Hence $\angle ABD = 60^o$ *thus* $\angle DA_2B = 30^o$.

So $sinA_2 = \frac{BD}{AB} \Rightarrow sin30^o = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BD}{AB} \Rightarrow BD = \frac{AB}{2}$.

$(AB)^2 = (BC)\left(\frac{AB}{2}\right) \Rightarrow AB = \frac{BC}{2}$ *QED.*

Example 3: If two straight lines: **(ε_1) $\psi=\lambda_1 \chi+\beta_1$ and (ε_2) $\psi=\lambda_2 \chi+\beta_2$** are orthogonal show that: **$\lambda_1 . \lambda_2 = -1$**



I. ***With analytic geometry*** (When $\hat{a}, \hat{\beta} \neq 0°$ or $90°$)

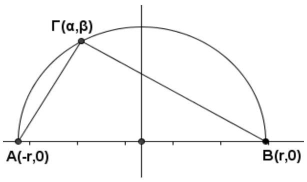
We assume that the straight lines (ε_1) and (ε_2) cross the x-axis at points H and E.

It is true that, $\beta = 90° + \alpha \Rightarrow tan\beta = tan(90° + \alpha)$,

$\Rightarrow tan\beta = -cot\alpha \Rightarrow tan\beta = -\frac{1}{tan\alpha} \Rightarrow \lambda_2 = -\frac{1}{\lambda_1} \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

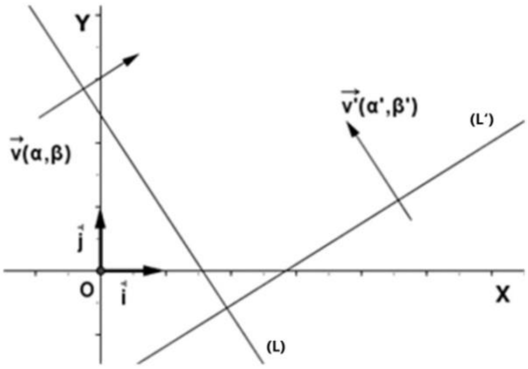
Or

In the figure below, it is true that:



$$\lambda_{A\Gamma} \cdot \lambda_{\Gamma B} = \frac{\beta}{a+r} \cdot \frac{\beta}{a-r} = \frac{\beta^2}{a^2-r^2} = \frac{\beta^2}{-\beta^2} = -1$$

II. With vector calculus.



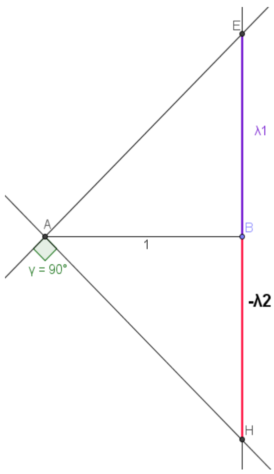
(1) In the orthonormal coordinate system the necessary and sufficient condition for two straight lines to be orthogonal is that the product of the slopes equals -1.

In the orthonormal system xy we consider two straight lines L and L' with equations $\alpha\chi + \beta\psi + \gamma = 0$ and $\alpha'\chi + \beta'\psi + \gamma' = 0$. These straight lines are orthogonal to the vectors $\vec{v}(a,\beta)$ and $\overrightarrow{v'}(a',\beta')$ respectively. In order for these straight lines to be orthogonal, it is enough to show that the vectors $\vec{v}$ and $\overrightarrow{v'}$ are vertical. But $\vec{v} \perp \overrightarrow{v'} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \overrightarrow{v'} = 0 \Leftrightarrow aa' + \beta\beta' = 0$.

The relation $aa' + \beta\beta' = 0$ is written $\frac{aa'}{\beta\beta'} + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{a}{\beta}\right) \cdot \left(-\frac{a'}{\beta'}\right) = -1 \Leftrightarrow \lambda \cdot \lambda' = -1$ q.e.d..

III. Geometrical Solutions

(1) Triangles Similarity



The triangles ABE and ABH are similar; hence their homologous sides are proportional to each other, $\frac{BE}{AB} = \frac{AB}{BH} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{1} = \frac{1}{-\lambda_2} \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

IV. With areas of triangles

$$E_{ABE} + E_{ABH} = E_{AEH} \Rightarrow 1 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot (-\lambda_2) = \sqrt{1+\lambda_1^2} \cdot \sqrt{1+\lambda_2^2} \Rightarrow$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2 = (1+\lambda_1^2) \cdot (1+\lambda_2^2) \Rightarrow \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 = 1 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1^2\lambda_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1^2\lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda_1\lambda_2 + 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1\lambda_2 = -1$$

V. With the use of Pythagorean theorem

$$(AE)^2 + (AH)^2 = (EH)^2 \Rightarrow \left(\sqrt{1+\lambda_1^2}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{1+\lambda_2^2}\right)^2 = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \Rightarrow$$

$$1 + \lambda_1^2 + 1 + \lambda_2^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$$

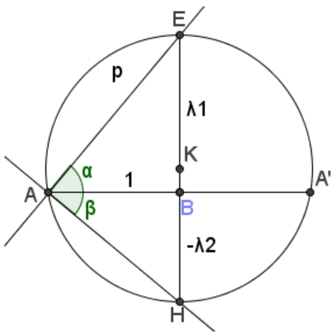
VI. With the power of a point to a circle.

Triangle AEH is right at the point A and hence the segment EH is the diameter of circle. If we extent the segment AB towards B so that AB=BA' then using power of the point B to the circle we have: (AB)(BA')= (BE) (BH).

Hence : $1 \cdot 1 = \lambda_1 \cdot (-\lambda_2)$.

Thus $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$. q.e.d.

VII. Trigonometric Solutions



(1) With the use of the tangent

$$\alpha + \beta = 90^o \Rightarrow a = 90^o - \beta \Rightarrow tan\alpha = cot\,\beta \Rightarrow \frac{\lambda_1}{1} = -\frac{1}{\lambda_2} \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1\,.$$

(2) With the use of sine

$$\alpha + \beta = 90^o \Rightarrow a = 90^o - \beta \Rightarrow \sin a = \cos\beta$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_1}{\sqrt{1+\lambda_1^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1+\lambda_2^2}} \Rightarrow \lambda_1\sqrt{1+\lambda_2^2} = -1 \cdot \sqrt{1+\lambda_1^2} \Rightarrow \lambda_1^2(1+\lambda_2^2) = (1+\lambda_1^2) \Rightarrow$$

$$\lambda_1^2 + \lambda_1^2\lambda_2^2 = 1 + \lambda_1^2 \Rightarrow \lambda_1^1\lambda_2^2 = 1 \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1.$$

(3) With the use of cosine

$$\alpha + \beta = 90^o \Rightarrow \cos(\alpha+\beta) = \cos 90^o = 0 \Rightarrow$$

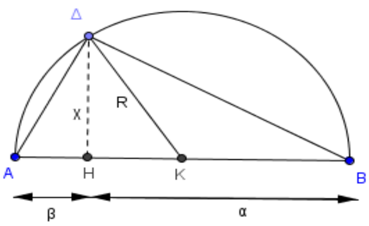
$$\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_1^2}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1+\lambda_2^2}} - \frac{\lambda_1}{\sqrt{1+\lambda_1^2}} \cdot \frac{-\lambda_2}{\sqrt{1+\lambda_2^2}} = 0 \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$$

(4) If θ is the angle of the line ε_1 with $x - axis$ (so $\lambda_1 = \tan\theta$) and φ is the angle of the line ε_2 with $x - axis$, $(so\ \lambda_2 = \tan\varphi)$, then $\hat{\theta} = 90^o + \hat{\phi}$ since it is an exterior angle of the triangle.

Thus, $tan\hat{\theta} = tan(90^o + \hat{\varphi}) = -cot\hat{\varphi}$, , that is to say $\lambda_1 = -\frac{1}{\lambda_2}$..

Example 4. Prove that: $\frac{\alpha+\beta}{2} \geq \sqrt{\alpha\beta}, \forall\alpha,\beta \in \mathbb{R}$

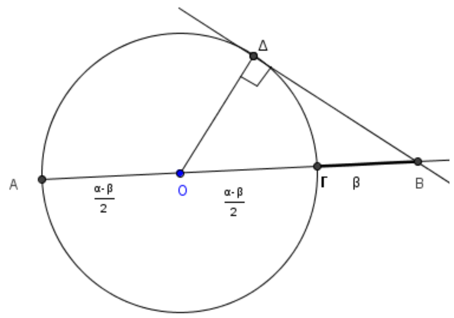
I. Algebraically



(α) $\left(\sqrt{a} - \sqrt{\beta}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a + \beta - 2\sqrt{a\beta} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a+\beta}{2} \geq \sqrt{a\beta},\ \ \forall a,\beta \in \mathbb{R}$

(β) $\frac{a+\beta}{2} \geq \sqrt{a\beta} \Leftrightarrow \left(\frac{a+\beta}{2}\right)^2 \geq a\beta \Leftrightarrow (a+\beta)^2 \geq 4a\beta \Leftrightarrow a^2 + \beta^2 - 2a\beta \geq 0 \Leftrightarrow$ $(a-\beta)^2 \geq 0$ True, *q.e.d.*

II. Geometrically

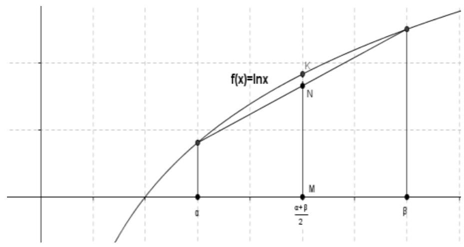


(α) $x^2 = \alpha \cdot \beta$ and $x \leq R$, thus $x = \sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{\alpha+\beta}{2}$

(β) $B\Delta^2 = B\Gamma \cdot BA \Rightarrow B\Delta^2 = \beta \cdot \alpha \Rightarrow B\Delta = \sqrt{\alpha\beta}.$

But $B\Delta < BO$, *i.e.* $\sqrt{\alpha\beta} < \beta + \frac{\alpha-\beta}{2} \Rightarrow \sqrt{\alpha\beta} < \frac{\alpha+\beta}{2}$

III. With analysis



$MN = \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} = \frac{ln\alpha + ln\beta}{2}$, $\quad MN < MK \Rightarrow \frac{ln\alpha + ln\beta}{2} < \ln\frac{\alpha+\beta}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(\alpha\beta) < \ln\frac{\alpha+\beta}{2} \Rightarrow$
$\ln(\alpha\beta)^{\frac{1}{2}} < \frac{\alpha+\beta}{2} \Rightarrow \sqrt{\alpha\beta} < \frac{\alpha+\beta}{2}$

DISCUSSION

Why use multiple-solution tasks in mathematics teaching? This question is not only asked by professors in other countries, but also by those in Cyprus.

Many educators and researchers indicate that multiple-solution tasks are essential for the growth of mathematic justification (NCTM, 2000; Polya, 1973; Schoenfeld, 1985). Multiple-solution tasks require good management of mathematic knowledge (Polya, 1973). i.e., they require creative mathematic thinking. Certain solutions can be shorter or more elegant than others (Polya, 1973; Kruteskii, 1976; Ervynk, 1991; Silver, 1985).

Based on the short presentation of thoughts and perceptions for the creativity in the mathematics and from the presentation of multiple-solution tasks we reach an initial conclusion: Multiple-solution tasks should be incorporated in the curriculum since they can be used either for the development or for the evaluation of a mathematical concept. Indeed the various solutions of same mathematical task reflect different aspects of a mathematical concept. Those different aspects are essential for a total comprehension and for learning mathematics concepts.

REFERENCES

Applebaum, M. & Leikin, R. (2007). Looking back at the beginning; Critical thinking in solving unrealistic problems. *The Montana Mathematics Enthusiast,* Vol. 4, no.2, pp. 258-265

Brown, S. L, and Walter, M, I. (eds), 1993, *Problem Posing .-Reflection and Application.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Elia, I., & Gagatsis, A. (2004). *Pictures in problem solving: Facilitator or obstacle?* Nicosia: University of Cyprus, Cyprus Research Promotion Foundation (in Greek).

Elia, L, Gagatsis, A., Panaoura, A., Zachariades, T., & Zoulinaki, F. (2009). Geometric and algebraic approaches in the concept of limit and the impact of the "didactic [1] contract", *international Journal of Science and Mathematics Education (in press)*

Elia, I., Panaoura, A., Gagatsis, A., Grawani, K., & Spyrou, P. (2008). Exploring different aspects of the understanding of function: Toward a four-facet model. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education,* 8(1), 49-69.

Elia, L, Gagatsis, A., & Demetriou, A. (2007). The effects of different modes of representation on the solution of one-step additive problems. *Learning and Instruction, 17,* 658-672.

Elia, 1., Panaoura, A., Eracleous, A., & Gagatsis, A. (2007), Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education, 5,* 533-556.

Ervynck, G. (1991). Mathematical creativity. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 42−53). Dordrecht: Kluwer.

Gagatsis, A. (1994). *Didactics of Mathematics. Theory and Research.* Thessaloniki: Art of text (in Greek).

Gagatsis, A., Elia, I., & Andreou, S. (2003). Representations and mathematics learning: Functions and number line. *Euclides γ*, 59, 5-34 (in Greek).

Gagatsis, A., Michaelidou, E., & Shiakalli, M. (2001). *Theories on Representations and Learning of Mathematics.* Nicosia: ERASMUS IP1 (in Greek).

Gagatsis A., Papadopoulou, P., Sarika, M., Tsaoulidis, A. (1994). On three exercises in Classical Geometry of the French Secondary Curriculum. *Diastassi* 3-4, 4-18 (in Greek).

Getzels, J.W., & Csiksezentmihalyi, M. (1975). From problem solving to problem finding. In I.A. Taylor & J.W. Getzels (Eds.), *Perspectives in creativity* (pp. 221 – 246). Chicago: Aldine Publishers.

Haylock, D.W. (1987). A framework for assessing mathematical creativity in schoolchildren. *Educational Studies in Mathematics*, *18*, 59 – 74.

Hu, W., & Adey, P. (2002). A scientific creativity test for secondary school student. *International Journal of Science Education*, *24*(4), 384-403

Krutetskii, V.A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren.* Chicago: University of Chicago Press.

Leikin, R. (2005). Teachers' learning in teaching: Developing teachers' mathematical knowledge through instructional interactions. The paper presented at the 15th 1CMI Study: *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics,* http://stwww,weizmann.ac.il/G-math/ICMI/log in.html

Leikin, R. (2007). Habits of mind associated with advanced mathematical thinking and solution spaces of mathematical tasks.

Leikin, R., & Lev, M. (2007). Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity. In J.H. Woo, H.C. Lew, K.S. Park, & D.Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 161-168). Seoul: PME.

Leikin, R. & Levav-Waynberg, A. (2007). Exploring mathematics teacher knowledge to explain the gap between theory-based recommendations and school practice in the use of connecting tasks. *Educational Studies in Mathematics, 66,* 349-371.

Leikin, R., Levav-Waynberg, A., Gurevich, I., & Mednikov, L. (2006). Implementation of Multiple Solution Connecting Tasks: Do Students’ Attitudes Support Teachers’ Reluctance? *Focus on learning problems in mathematics, 28*(1), 1-22.

Leikin, R., Gurevich, I. & Mednikov, L. (2002). Connecting tasks: Mathematical activities for teachers and students. MALAM: University of Haifa, Ministry of Education (In Hebrew).

Mackworth, N.H. (1965). Visual noise: causes tunnel vision. *Psychonomic Science, 3,* 67-68.

National Council of Teachers of Mathematics, (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Panaoura, R., Demetriou, A., & Gagatsis, A. (2007). *Development of problem solving ability and the self regulation of cognitive behavior*. Nicosia: University of Cyprus, Cyprus Research Promotion Foundation (in Greek).

Polya, G. (1973). *How To Solve It. A New Aspect of Mathematical Method.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery.* New York: John Wiley & Sons.

Schoenfeld, A. H. (1983). *Problem Solving in the Mathematics Curriculum: A Report, Recommendations and An Annotated Bibliography* Reston, VA: The Mathematical Association of America.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving,*. Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1991), On Mathematics as Sense-Making: An Informal Attack on the Unfortunate Divorce of Forma] and Informal Mathematics In J, Voss, D. N.

Silver, E. A. (1985). *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives.*

Silver, E.A. (1997). Fostering Creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *Analyses, 3,* 75-80.

Singh, B. (1987). The development of tests to measure mathematical creativity. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 18*(2), 181 – 186.

Perkins & J. Segal (eds.) *Informal Reasoning and Education,* (pp. 311-343). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.Silver, E, A., 1985, in *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving; Multiple Research Perspectives,* edited by E. A. Silver (London: Lawrence Erlbaum Associates) pp. 247-26

CHAPITRE 6

CONNAISSANCES GÉOMÉTRIQUES EN CONTEXTE NON-SCOLAIRE

CHAPTER 6

GEOMETRIC KNOWLEDGE IN OUT-OF-SCHOOL CONTEXTS

IS THERE INNATE CORE GEOMETRICAL KNOWLEDGE?

Georgia Griva* and Athanasios Raftopoulos**

***National Capodistrean University of Athens,**

**** Department of Psychology, University of Cyprus**

ABSTRACT

Dehaene, et al., (2006) carried out with Mundurukú, an experiment consisting of two nonverbal tasks. The aim of the first was to probe Mundurukú's intuitions about basic concepts of Euclidean geometry. Mundurukú were presented with arrays of six images, in which the five images. The aim of the second task was, first, to evaluate the subject's capability in relating the geometrical information on the map to geometrical relations in the environment. Second, to investigate whether Mundurukú spontaneously understand and use geometry as a means of measuring and charting the length, area, and shape of land surfaces. Mundurukú achieved a high success rate on both tasks. Based on that and on the lack of geometrical education on their part, Dehaene et al. infer that these people has an intuitive understanding of the fundamental geometrical concepts and relations. Moreover, Dehaene et al. considered Mundurukú's performance as evidence that core geometrical knowledge is inherent, being a universal constituent of the human mind. Owing to evolutionary adaptations, the human mind spontaneously imposes stable conceptual geometrical and topological relations upon continuously changing, varying, and imperfect sensory data. The main conclusion drawn from this study is that core geometrical knowledge is innate, emanating from evolutionary adaptations, and this knowledge induces direct, spontaneous and intuitive understanding of the relevant concepts. Discriminations regarding shapes and geometrical relations such as distances and metric properties are made possible only because of the existence of the relevant concepts that are spontaneously applied to the incoming input organizing it and rendering meaningful. There are two problems that can be raised with regard to Dehaene et al. interpretation of the Mundurukú data. First, what does it means for a person to have a geometrical concept, and second, is it possible for discrimination tasks to be handled successfully without taking recourse to any conceptual repertory? We argue that there are two levels of representation, one conceptual and a nonconceptual purely perceptual, and that discriminations with regard to shapes, distances, orientations and spatial relations can be achieved at a purely perceptual level, without any conceptual involvement.

INTRODUCTION

Dehaene, Izard, Pica, and Spelke (2006) present the findings of an experiment carried out with Mundurukú, an isolated Amazonian indigene group, whose language lacks geometrical terms and they have no experience with geometrical instruments and maps, and no schooling. The experiment consisted of two nonverbal tasks. The aim of the first was to probe Mundurukú's intuitions about basic concepts of Euclidean geometry such as points, lines, figures, metric properties etc. Mundurukú were presented with arrays of six images, in which the five images instantiated a desired geometrical concept while the remaining one violated it (see figure 1). Mundurukú were asked in their language to find the "weird" or "ugly" image among the six. The hypothesis was that if the Mundurukú share the conceptual primitives of geometry with those who have geometrical education they should infer the intended geometrical concept behind each array and therefore select the discrepant image.

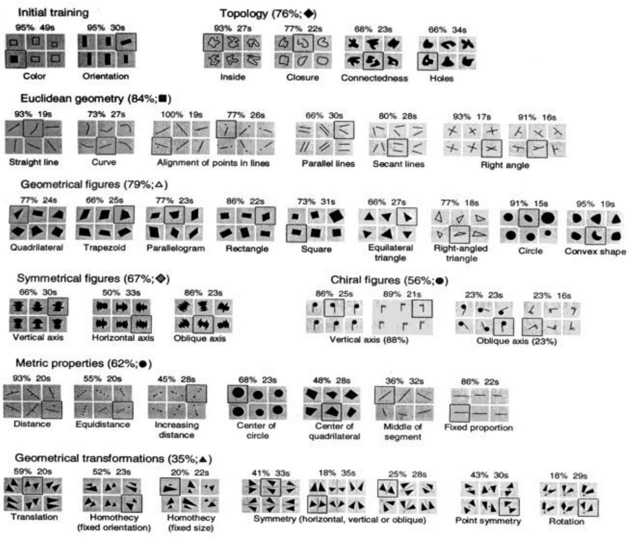


Figure 1

The second task was an abstract map depicting squares and/or circles forming a right angle or isosceles triangle arrangement (see figure 2). The squares and circles represented real objects (boxes and cans respectively) set on real places of Mundurukú's area, either at a right angle or at isosceles triangle configuration. A star on one of the forms marked the location of a hidden object. Mundurukú had to "read" that abstract map and use it as a guide in order to find the hidden object at the appropriate box or can. The map preserved the two-dimensional geometrical relationships between the objects, as viewed from above, but it didn't preserve the scale of the objects. In addition, there were three versions of the map with regard to orientation (see figure 3), so that only the geometrical relationships among the forms specified the location of the hidden object. The aim of that task was, first, to evaluate the subject's capability in relating the geometrical information on the map to geometrical relations in the environment.

Second, to investigate whether Mundurukú spontaneously understand and use geometry as a means of measuring and charting the length, area, and shape of land surfaces, activities which in ancient times inspired and dictated the development of geometrical concepts and processes.

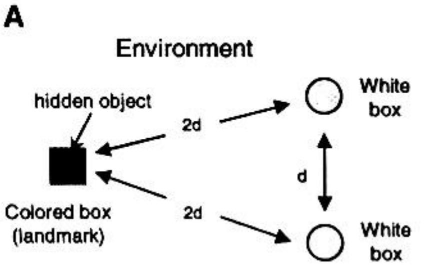


Figure 2

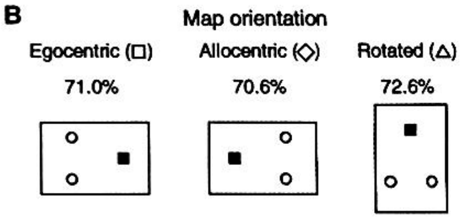


Figure 3

Mundurukú achieved a high success rate on both tasks. Based on that and on the lack of geometrical education on their part, Dehaene et al. infer that these people has an intuitive understanding of the fundamental geometrical concepts and relations (Ibid., 383-384). Moreover, Dehaene et al. considered Mundurukú's performance as evidence that core geometrical knowledge is inherent, being a universal constituent of the human mind. Owing to evolutionary adaptations, the human mind spontaneously imposes stable conceptual geometrical and topological relations upon continuously changing, varying, and imperfect sensory data. By means of these stable conceptual relations the sensory data are organized into a meaningful configuration. Being a property of the cognitive architecture, core geometrical knowledge emerges independently of education, instruction, experience with maps and geometrical instruments, and the possession of a complicated geometrical language allowing the intuitive comprehension of the relevant concepts.

There are two tenets in the Dehaene et al. thesis. Core geometrical knowledge is innate, emanating from evolutionary adaptations, and this knowledge induces direct, spontaneous and intuitive understanding of the relevant concepts. Discriminations regarding shapes and geometrical relations such as distances and metric properties are made possible only because of the existence of the relevant concepts that are spontaneously applied to the incoming input organizing it and rendering meaningful. There are two problems that can be raised with regard to Dehaene et al. interpretation of the Mundurukú data. First, what does it means for a person to have a geometrical concept, and second, is it possible for discrimination tasks to be handled successfully without taking recourse to any conceptual repertory? We argue that there are two levels of representation, one conceptual and a nonconceptual purely perceptual, and that discriminations with regard to shapes, distances, orientations and spatial relations can be achieved at a purely perceptual level.

HAVING GEOMETRICAL CONCEPTS

Geometrical concepts are well-defined mathematical concepts. The fundamental concepts such as point, line are defined indirectly through the axioms. The rest of the concepts are defined directly and accurately through specific propositions, the definitions. For example square is defined as the parallelogram that has equal sides and equal angles. Geometrical definitions state sufficient and necessary conditions under which a shape, a property or a relation can be identified as a particular geometrical figure, property or relation. By means of the definitions every geometrical object is accurately determined. In the definition of square, the essential properties are the parallelism of the opposite sides (captured in the concept parallelogram), the equality of all sides and the equality of all angles. One who knows the definition of square can easily identify a figure as a square by simply examining whether the figure has the essential properties of squareness. In addition, one can discriminate between squares and other figures. Furthermore, knowledge of the definition of square allows a person to comprehend propositions related with squares, to make judgements and to draw inferences about squares.

The mathematical definitions of geometrical concepts aim to achieve three goals: a) to individuate the concepts, b) to specify their content, and c) to facilitate the development of geometrical thinking. From a purely mathematical point of view, to have a geometrical concept is equivalent to knowing the relevant definition. However, isn't it possible for someone to have a geometrical concept such as square without knowing the relevant definition? After all, children usually learn basic geometrical figures by demonstration and not by definition (parents or teachers say "that is a square" pointed out to a drawn square). The answer is yes, because possessing a concept is not identical with knowing a definition.

Having a geometrical concept is a distinctive state of mind; concepts are mental representations. To have a concept presupposes that an entity has been individuated and conceived of as a distinct object with its own qualities. It's not possible to have the concept of square if the square-like shapes are not conceived of as distinct particular shapes. In other words, conceptualization is a sort of objectification.

Each individual object has its own properties. Some of these properties are essential and uniquely determine the object's nature and kind, and some other are accidental. For example, the side's length is a secondary quality for squares. Parallelism of the opposite sides and the equality of sides and angles are core qualities of squares. It is not possible to conceive of an entity as a distinct particular object without having grasped at least some of its core qualities. How would be possible for a square shape to be regarded as a particular shape without the conception of at least, the sameness of all of its sides and angles? Concepts capture at least some of the core properties of a particular individuated entity. The properties that enter into one's concept of an object, property, or relation are those that are exemplified in the objects, properties, or relations with which one had one's first encounter.

Concepts are not abstract objects defined by the properties that they attribute to the object or the universal at issue, in which case one should have to suppose that concepts are of the individuals or universals that have those properties, but particular structures in the brain. Thus, when one thinks of object X, this idea is the neuronal structure in one's brain that represents all the information about X that one has in mind at that particular instance. This move allows us to claim that one could have inaccurate and incomplete concepts of universals and objects. But if one's notion of X is not of the object known by that name, then what is it about? Surely, that concept has intentionality insofar as it allows one to represent X. Concepts are of their origin, that is, of the dominant source of information that allowed or prompted one to open a file folder for X. The properties of X at that moment constitute the foundational facts that are included in a file folder opened for X when encountering it. Concepts are about the foundational facts and in that sense concepts are not individuated by and, thus, are not determined by content (that content certainly changes as X changes yet the concept keeps referring to the same object) but by circumstance, namely the foundational facts. When one has the concept of square he can think of squares even if not one square is in his sight. In fact, to possess the concept of square one must represent squareness not as a property of an actual object that is now in place but as a property of an infinity of objects not subjected to space-time limitations. That is related with another aspect of concept possession.

The above account of concepts entails that grasping of the core properties of a particular object does not necessarily mean thorough and detailed understanding of them. For example, the conception of the sameness of all sides and angles of a square does not require understanding that each of its angles is *right*, that all sides are *equal*, or that its opposite sides are *parallel* (the words in italics signify the relevant concepts). It suffices to comprehend that all sides and angles are the same or look the same, and that the opposite sides retain constant distances. In other words concepts do not necessarily provide complete and detailed descriptions of particular objects. They may provide fine-grained representations of some aspects of an object and allow a partial understanding of the object.

To possess a concept requires the existence of the re-identification condition on demonstrative concept possession. To possess a concept, a subject must be able consistently to re-identify a given object or property as falling under the concept, or equivalently, one must be able to tell whether an object or property satisfies the description provided by the concept, if it does; if one possesses a concept, one has a recognitional capacity (McDowell 1994, 57). To be able to do that, one need to be able to store concepts in long-term memory and retrieve them when the occasion arises.

Their maintenance in long-term memory renders concepts accessible representations appropriate for thought's constituents. They can consciously be recalled for the recognition of objects. They can get connected with other concepts, and they get involved in reasoning, in decision making, in planning and in problem solving. Concepts allow the formation of beliefs and judgments (Bermúdez, 1995; Crane, 1992; Peacocke, 1992; Tye, 2005), and moreover, according to Gareth Evan's Generality Constraint (1982) apart from limitations imposed by short-term memory and attention, for any concept a person possesses, the person can think any proposition that can be formed from this concept. For example, a person who possesses the concept of square has at least one belief; every entity that has the featural characteristics of square is a square. It is nevertheless impossible for a person to possess just one concept.

Concepts never exist in isolation but are strongly connected with other concepts producing propositions. The connections between concepts are essentially logical and semantical relations. Given on one hand the logical and semantical relations through which concepts are connected, and on the other hand that concepts are the constituents of propositions, propositions are also connected through logical and semantical relations. Finally, being the constituents of thoughts (e. g., beliefs, judgments, decisions) concepts actively reveal themselves in the expressions of thoughts. They can be traced in all cultural elements such as linguistic expressions, art, religious and theories about the world.

Recapitulating, having a concept is a mental state characterized by the construction of a representation the content of which individuates in a fine-grained way an entity or aspects of it (object, property or relation). Conceptual representations are stored in long-term memory and are involved in thinking and in inferences (Stich calls them "inferentially promiscuous.") Concepts are of their origin, that is, of the foundational facts that are registered when one encounters for the first time an entity instantiating the concept and opened an object-file for it. Although we will not deal with this issue here, we note that this is very important for explaining how concepts are grounded in the world through experience and how conceptual content emerges from perceptual content.

Having outlined conceptual states, we can go back to Dehaene et al.'s experiment and ask what would have counted as evidence that Mundurukú possess the core geometrical concepts of Euclidean geometry? According to what has been said, cultural elements and recognitional capacities could support an assumption that Mundurukú have, at least, a raw understanding of some basic geometrical concepts of Euclidean geometry. Indeed, examining Mundurukú's linguistic terms we can assume that Mundurukú have a degree of understanding of some geometrical concepts. They have a very raw understanding of circle as a curved figure (*iroyruy'at* is their term), of curved figures (*iwaketkut'at*), of dot/point (literally "the mouth of the round thing", *yabi*), of center/middle/half (*ipidase)*, and of curve/line (literally "his straight finger", *ibucũg*). In addition, they have some understanding of extent/size/distance (typically accompanied by a two-hands gesture defining a certain extent), and of equality/similarity. It is interesting that the concept of center/middle/half is involved in their cosmology according to which the earth/ground occupies the middle layer of the universe. Their understanding of dot/point, curve/line, and curved figures is perhaps related with their artistic activities (face-body painting, sculpturing of symbolic miniatures). It then seems reasonable to attribute to this raw understanding of the specific geometrical concepts Mundurukú's high success rate at the arrays named straight lines, curve, alignment of points in lines, parallel lines, secant lines (all of them in the category of Euclidean geometry), distance, equidistance, increasing distance, center of circle (all of them in the category of Metric properties). The knowledge needed to perform well in these arrays was maybe pre-existed but not innate. It was a cultural knowledge.

With regard to the rest of the arrays we will argue that Mundurukú's performance can be explained without taking recourse to any conceptual repertory by means of perceptual nonconceptual representations.

NONCONCEPTUAL PERCEPTUAL REPRESENTATIONS

Research on perception has shown that conceptual representations do not exhaust mental representations. Theories of visual processing presume that when we view an image at least three stage of analysis take place (Mather, 2006). In the first stage a piecemeal representation of the visual structure is built, containing information about the edges and lines present at each location in the image. This representation is sometimes called the primal sketch, because it provides a simple, sparse description of local image features. In the second stage a representation of the larger-scale shapes and surfaces present in the visual scene is built. The operations performed in that stage do not require or involve any knowledge about the objects present in the scene. Their aim is to parse visual field into discrete entities independently of what these entities are. For that it is not required that the perceiver possess the relevant concepts. A representation of an object's shape will be built even if the subject does not possess the concept "shape". In addition, the representation of an object's shape does not necessarily causes the representation of shape as a distinct particular property of objects. In the third stage the visual system constructs representations of the objects present in the scene. It is in this stage that shapes and surfaces are matched to stored object conceptual representations to achieve recognition of the objects. The processes performed in this stage are knowledge-depended. Pylyshyn (1999) calls the first two stages of visual processing "the early vision system". Raftopoulos (2001, 2006, 2009) claims that the operations of the first stage serve "sensation", the operations of the second stage serve "perception", and the operations of the third stage serve "cognition", in an attempt to confine, as well as to achieve a refinement of the three states. He provides evidence that the output of the second level (what he names "perceptual level") is a weak representation that encodes i) information about the distinct entities (proto-objects) that are present in the visual field, along with spatiotemporal information about these entities (position, motion, relative position), ii) featural information about shape, size, orientation and surface properties of proto-objects, iii) information about the relational properties of proto-objects (e.g. topological relations, such as, up-down, left-right), iv) information about the causal relations that hold between proto-objects, and v) information about the functional properties of proto-objects. All this information is retrieved from a scene by bottom-up processes, i.e. processes that are conceptually unmediated, and hence, unaffected by cognition.

The existence of nonconceptual representations indicates that independently of the concepts one possesses when one is viewing a scene one constructs representations that contain information about the distinct entities that are present in his visual field. The information involved is about the shapes of the entities and their phenomenal differences, as well as information about the sizes, distances and orientations of entities as viewed from the perceiver. It is in fact expected that nonconceptual representations precede conceptual representations for a number of reasons: a) the visual field must be segmented into distinct entities to make possible navigation in the environment and pursuit of food, and this takes place, both ontogenetically and phylogenetically speaking, before concepts are formed, b) a person must be able to see, reach, avoid or grasp an object even if it's the first time that sees it and thus have no stored representation of it, and c) prior to consider something as a particular object or to observe and extract its properties or its relations with other objects, thus making conceptualizations, one must first perceive it as a distinct entity. Research (Driver, et. al., 2001; Duncan & Humphreys, 1989, 1992; Rensink, 2000a,b; Vecera, 2000) confirms that there is a pre-attentional perceptual stage in which the visual field is segmented into discrete entities (or, proto-objects), some of which (up to four or five) will be selected by attention for deeper processing. Attentional processes construct a detailed representation of a selected distinct entity that eventually allows its identification and recognition. Lamme (2003, 2004) claims that attention marks the transition from perception, where we have phenomenal awareness of objects, to states where we have access awareness, i.e., to cognitive states.

A PERCEPTUAL INTERPRETATION OF MUNDURUKÚ'S EXPERIMENT

In the first test Mundurukú had to deal with shapes' discriminations. Discrimination between shapes is a task very close to matching-tasks. In both tasks what is required for a successful performance is finding out whether two or more images have similarities. When there is disparity in one or more dimensions the images do not match and that differentiates the images. The dimensions along which similarities are looked for are the physical dimensions of shapes such as the straightness or curvature of edge segments, the distances between edge segments, or the directions of edge segments. The computations of these dimensions are already included in the cognitively impenetrable processes of shape representation. Furthermore, properties such as symmetries, parallelism etc., can be perceived even though the viewer may not possess the relevant concepts since they are properties that are directly retrieved from the environment in conceptually unmediated ways. These mean that shapes are matched and discriminations can be made on the basis of purely perceptual processes that require no concepts. Now, let us return to Dehaene et al.'s first nonverbal test.

At the first category of arrays named Topology, the images in each array have visual differences. In the first array the weird or ugly image is the only one where the dot is not within the figure. To see that there's no need for one to possess the concept "inside" (despite that, Mundurukú possess the term be "badi" which means "inside"). Thus, it may be that noticing the difference between the images is simply a perceptual effect that does not rely on concept possession, undermining thus Dehaene's et al., argument. In the second array, the weird image is the only one that does not seem complete. There's an opening at its top part, and again there's no need to have the concept "closure" to see that. In the third array the weird image is the only one that comprises two discrete parts. In that case the discrimination may result either from counting the objects "here are two objects whereas in the other five images there is only one object", or from a simple one-to-one correspondence process between the object-files that the perceptual system opens for the objects in the scene in the way Uller et al., (1999) explain infants success in arithmetical tasks. Finally at the fourth array, the weird image is the only one that seems perforated. As mentioned, Mundurukú craft necklaces and bracelets, and thus they are used to utilizing things with holes or to make holes and this may explain the success in this task.

At the second category of arrays named Euclidean Geometry, Mundurukú accomplished the highest success rates. The first and the second arrays both involve curved and straight lines. Apart from the fact that Mundurukú already possessed the concept "curve" (they have a term for "curve, line") a curved line differentiates from a straight line in the directions of its parts. In a straight line all of its parts have the same direction unlike curved lines. Perceptual mechanisms pick up and process information about direction of edge segments, providing perceivers with nonconceptual representation of shapes upon which discrimination of the directions of segments is possible. The third and the fourth arrays involve straight lines and points. In the third array the weird image is the only one where the point is not upon the line but at a distance. This is so obvious that the success rate was 100%. In the fourth array what makes one image weird with respect to the others is also a matter of direction. In the weird image the point is not at the direction of the line. The fifth and the sixth arrays involve parallel and convergent lines. Parallel lines never approximate to each other, in contrast with convergent lines that get closer and closer until they intersect. So, what is at issue with parallel and convergent lines is a matter of relative position. In parallel lines the distance between them remains the same, whereas in convergent lines the distance between them changes. The nonconceptual representations constructed by the perceptual mechanisms contain information about the relative position of objects, making perceivers capable of capturing differences among relative positions. Finally, the seventh and the eighth arrays include right angles. When two lines are vertical to each other their relative position is such that taking as a viewpoint the point of intersection the two lines does not seem closer at any direction. Verticality is also a matter of relative position and as such it is represented nonconceptually.

Third category, Geometrical Figures, concerns differences in closed shapes. In the array of quadrilaterals, for instance, the weird image is the only one that its shape consists of three and not four segments. In addition, in "parallelogramms" the shape of the weird image has only one pair of parallel lines, contrary to the shapes of the other five images that consist of two pairs of parallel lines. The two pairs of parallel lines are what make a figure look sharp whereas the one pair of parallel doesn't. In the array of equilateral triangles the five of the images represent essentially the same shape in different sizes and in different rotations. This is so because the equilateral triangle is the only regular triangle, i.e. the only triangle that has equal sides and equal angles. That means, each of its vertices is equidistant from the other two and the space between each pair of crossed sides is equal with the space between the other pairs of crossed sides. The distances between vertices and the spaces between crossed sides are significant elements that greatly determine the form of shapes. The sixth weird image of that array is a triangle that none of its vertices is equidistant from the other two and the spaces between crossed sides are all unequal (all angles are different in degree). As a result, the "weird" (or "ugly") triangle doesn't look uniform like the other five but asymmetric. The extensiveness of space between two of its crossed sides is what make one of the images appear weird in the next array of right-angled triangles. In the array of circles the weird image is elongated contrary to the other five that are round. Elongation is a matter of distance between opposite parts. In elongated shapes the distance between two opposite parts (denominated length) is bigger than the distance between the other two opposite parts (denominated width). All these can be noticed perceptually, that is without the viewer possessing the relevant concepts and, thus, the success in the tasks can be explained perceptually and not conceptually.

The fourth category of arrays is that of Symmetrical Figures. Symmetry is a property of (some) shapes in which the shape appears to comprise two exactly the same parts. Each point in the one part has the same distance from an imaginary or real axis with a corresponding point in the other part. Thus, symmetry concerns equal distances of points around a line. As mentioned, shape representation provided by perception contains information about distances between points, and consequently between opposite parts of a shape, sufficient enough to render a perceiver capable of grasping the sameness of parts, and hence, the symmetry. Apart from that we are all accustomed to symmetrical shapes, given that human and animal bodies, as well as the leaves of plants and trees, are symmetrical.

Similar considerations lead to the same conclusion with respect to the fifth and sixth array. The lowest success rate was achieved at the last category of arrays, that of Geometrical Transformations. Only at the two first arrays was the success rate above 50%, and this is not at all accidental. The weird images of those two arrays include two triangles one of which looks up and the other looks down (direction), whereas the triangles in the other images look the same direction. In the remaining six arrays there are no apparent differentiations, and thus the pick up of the weird image is much more difficult. In the absence of concepts, only the elements of objects that are bottom-up retrievable enter to the content of their representations, and therefore only discriminations on the ground of pure perception are possible.

We have argued that it is possible for a normal person to perform well in Dehaene et al.'s first nonverbal test in virtue of perception of shapes' phenomenal differences. Perceiving the phenomenal differences of shapes neither presupposes nor does it entail conceiving them, being able to describe them or being able to tell what exactly their differences are. But this is at the core of what it means for a person to have a concept. Therefore, Mundurukú's performance in the first nonverbal test cannot be considered evidence that they have innate knowledge of geometrical concepts.

Neither the second nonverbal test (the map test) can count as evidence that Mundurukú innately have geometrical concepts. First of all Mundurukú have concepts about distances and directions, as it is indicated by the relevant terms of their language. In addition, they are capable to navigate in their territory, and they occasionally draw circles (although coarse ones) on the ground to represent villages (p. 383). These drawings failed to preserve metric information about the angles and distances between the referents. But still, they show that Mundurukú are capable to use marks to find their way, as well as they are capable to make pictorial representations of objects (e.g., villages). But again, these cultural elements do not count as evidence that they have the relevant geometrical concepts such as angle, or right-angled triangle. It is possible for a creature to extract information from a scene about relevant positions, angles and distances, without the creature having the relevant geometrical concepts. Chapuis & Varlet's (1987) experiment with Alsatian dogs is illustrative. At the positions A and B of the figure below food was placed. The dogs were taken on a leash along the path ADB, represented in the diagram with the solid lines, and shown, but not allowed to eat, pieces of meat at A and B. The three points A, D, B, were all far enough apart to be invisible from each other. When the dogs were released from point A they took the meat from location A and then went in the direction of location B where there was the other piece of meat, following the route AB represented in the diagram with the dotted line. That occurred in 96 percent of the trials.

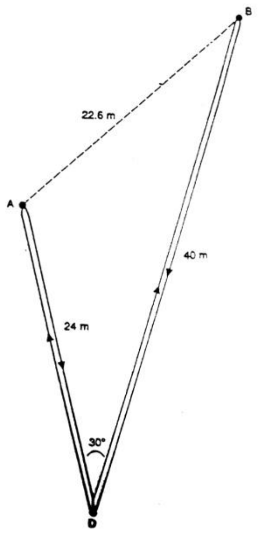


Figure 4

Dogs did not follow the enforced route ADB but the shortcut AB, satisfying implicitly the geometrical proposition "the shortest route is the straight one" (triangular inequality). It is obvious that the dogs had a representation of the three locations A, D, B, which contained information about the relative positions of A, D, B and information about their relative distances. It is though exaggerated to assume that the dogs have the relevant concepts, or that the dogs know the triangular inequality!

One could object here that although the fact that one can perceive a visual scene and extract from it information in a direct, conceptually unmediated way may suggest that the content of the perceptual states formed during this direct stage is cognitively impenetrable, in that the relevant processes are not modulated by concepts through top-down flow of information, still the process is conceptually modulated through concepts that are hardwired in the perceptual system (Fodor, forthcoming). In other words, the perceptual system functions because there are concepts implemented in its circuits that render coherent and meaningful the input. Dehaene's et. al., thesis is vindicated, the cognitive impenetrability of early vision notwithstanding.

The view that the visual system may implement such concepts is reinforced if one bears in mind that in order for perception to transform the information impinging on the retina in a format that allows us to experience the environment the way we do, the implementation of several operational constraints or principles is required. Despite its cognitive impenetrability, the perceptual system does not function independently of any kind of "knowledge". Visual processing at almost every level is constrained by certain principles or rather operational constraints that modulate its information processing. Such constraints are needed because perception is underdetermined by the retinal image. Unless the processing of information in the perceptual system is constrained by some assumptions about the physical world, perception is not feasible. Most computational accounts hold that these operational constraints instantiate some reliable generalities of the natural physical world, which means that in propositional form they become assumptions about the world. They are not assumptions about specific objects acquired through experience; they are general idealizations about the world.

The formation of the *full primal sketch*, which involves the grouping of the edge fragments formed in the *raw primal sketch*, relies upon the principles of "local proximity" (adjacent elements are combined) and of "similarity" (similarly oriented elements are combined). It also relies upon the more general principle of "closure" (two edge-segments could be joined although their contrasts differ because of illumination effects). Other assumptions that are brought to bear upon the early visual processing to solve the problem of the underdetermination of the percept by the retinal image are those of "continuity" (the shapes of natural objects tend to vary smoothly and usually do not have abrupt discontinuities), "proximity" (since matter is cohesive, adjacent regions usually belong together and remain so even when the object moves), and "similarity" (since the same kind of surface absorbs and reflects light in the same way, the different sub regions of an object are likely to look similar). Finally, the "rigidity" constraint to explain the kinetic depth effect, in which randomly arranged moving points are perceived as lying on the surface of a rigid 3D object.

The formation of the *21/2 sketch* is similarly underdetermined, in that there is a great deal of ambiguity in matching features between the two images, since there are usually more than one possible matches. Stereopsis requires a unique matching, which means that the matching processing must be constrained. The formation of the *21/2 sketch*, therefore, relies upon a different set of principles that guide stereopsis, such as a given point on a physical surface has a unique position in space at some time, and matter is cohesive and surfaces are generally smooth. These principles are reflected in the constraints of "compatibility" (a pair of image elements are matched together if they are physically similar, since they originate from the same point of the surface of an object), of "uniqueness" (an item from one image matches with only one item from the other image), and of "continuity" (disparities must vary smoothly). Another constraint is the "epipolar" constraint (the viewing geometry is known).

There is evidence that the physiological mechanisms underlying vision reflect these constraints; their physical making is such that they implement these constraints, from cells for edge detection to mechanisms implementing the epipolar constraint. Thus, in a sense that will be explicated below, one might claim that these principles are hardwired in our perceptual system.

The operational constraints reflect general or higher-order physical regularities that govern the behavior of objects in our world, and are implemented by mechanisms in the perceptual system and modulate its processing. As such, they are not available to introspection and function outside the realm of consciousness. One does not "know" or "believe" that an object moves in continuous paths, that it persists in time, or that it is rigid, though one uses this information to parse, index and follow the object. In other words, these constraints are not perceptually salient but one must be “sensitive” to them if it is to be described as perceiving our world. The constraints constitute the *modus operandi* of the perceptual system, and not a set of rules stored in memory used by the perceptual system as premises in perceptual inferences; they are reflected in the functioning of the perceptual system and can be used only by that dedicated transducer. The constraints are implicit, in that they are available only for the processing of the visual image, whereas explicit “theoretical” constraints are available for a wide range of cognitive applications. Implicit constraints cannot be overridden; one cannot decide to substitute them with another body of constraints, even if one knows that under certain conditions they may lead to errors (as in the case of visual illusions). Thus, in no way could they be construed as applying a “conceptual” net over perception, which thus, renders perception conceptual (at least in the sense of ‘concept’ that is used either in classical cognitivism or in neural network theories of cognition) from its onset.

One could argue, thus, that even though early vision is cognitively impenetrable and the processes and states involved are nonconceptual, still the content of these states are conceptual since some concepts are embedded in the contents of early vision not by reaching this stage via top-down flow of information but by being there either from the beginning or as a result of the development of the circuits of early vision. Though this is possible, notice that these concepts do not play the role that concepts are usually thought to play in cognition. First, they are not personal contents in the sense that one is not aware of them when they are employed in early vision. In that sense they are alike Bermudez’ (1995) subpersonal informational processing contents. Second, they can be used only in the processes of early vision and they are not available for cognitive tasks (Pylyshyn, 2007; Raftopoulos, 2001, 2009). Third, they do not allow re-identification across times and contexts of the objects formed during early vision (Pylyshyn, 2007; Raftopoulos, 2009). Fourth, they do not satisfy Evan’s (1982) generality constraint (Heck, 2007; Raftopoulos, 2009). For these reasons, Pylyshyn (2007, 52) calls them subpersonal concepts since, being inside encapsulated modules of early vision, they do not enter into general reasoning. Such concepts may be “codes for proximal properties involved in perception, such as edges, gradients, or the sorts of labels that appear in early computational vision”. Thus, if one uses “concept” with its usual significance, then this possible innateness does not entail that the contents of early visual states are conceptual in the standard definition of the term.

CONCLUSION

Human’s, and presumably animal’s, perceptual representations of the external world contain information about the shapes and sizes of the objects, their relative positions and orientations, their relative distances and their directions. All this information is necessary for the navigation in the environment and the pursuit of food. But for a living creature to have such information available is not the same as having the relevant concepts and, in fact, phylogenetically and ontogenetically speaking we **could and co?** do all these things without possessing the relevant concepts. Estimating that this thing is far from reaching is not the same as having the concept of distance.

Consider, for example, a very simple organism-environment interaction, namely a frog's interaction with a fly. The representational content of the neural activity induced by the fly in the frog's brain consists in the possibility of tongue flicking and eating on the basis of indications about potentialities that are afforded by specific objects in the environment. That is, the representational content is in the indication in the frog that it is in a tongue flicking and eating situation. This content is about the potentialities, or possibilities of further interactions, that are afforded by the environment for the system's interactions with it, not about the fly; the relevant states of the frog are intimately connected with action. The potentialities implicitly predicate those interactive properties of the environment that could support the indicated actions of the frog. This is a kind of functional predication. Since this kind of content implicitly predicts the properties of the environment that afford actions on the part of the perceiver, it is about these properties.

To catch the fly the frog, after perceiving the fly, does not have to calculate the courses of action that are available to it, the chances of success, the outcome of each course of action, and estimate utilities. The possibility of eating that the fly affords to the frog is indirectly perceived by the frog; when it sees the fly it sees the affordance of food. Furthermore, the instrumentality of a particular course of action reveals itself in the perceptual content; there is no need for decision-making. All the information needed to initiate action is directly present in the perceptual content.

This is in line with Bickhard's (2000) practical grasp on the part of an organism of the implications of the afforded potentialities by the environment for the organism's actions and to Campbell's (1999) indexical causality. The potentialities afforded by the environment for the organism's interactions with it have causal significance only with respect to that specific system and not with respect to other systems, no matter how similar they are. This is so because the potentialities correspond to the disposition of the body of the organism and its specific position in space. Campbell (1999) calls this kind of causality "indexical causality," because the content of the term associated with it (e.g., "it is within reach") depends crucially upon the context in which it is used. As the frog need not have an internal representation of the fly, so it need not know that the fly "is within reach" in order to initiate action. "The notion of something being 'within reach' that we should want to use in characterizing its knowledge is dedicated to its own capacities for movement. . . . Its representation of something as 'within reach' may be quite directly tied to its own initiation of movement. The reason for saying that the representation is precisely a representation of something as 'within reach' is entirely its direct relation to the creature's actions." (Campbell 1999, p. 85)

Thus, in geometry, as before in arithmetic (Gallistel and Gelman, 1992; Raftopoulos, 2005; 2008; Uller et. al., 1999; Wynn, 1995; 1996) one should not hasten to interpret the success of infants or uneducated people in some tasks as evidence for the existence of innate core principles of geometry or mathematics, when alternative low-level perceptual interpretations of the data are available. It is more mysterious to posit the existence of innate knowledge than to explain how such knowledge can be acquired by abstracting from interactions with the environment, which, in addition, has the benefit of showing how conceptual structure is grounded in experience

We think that having perceptual information as a basis conceptualization is possible by means of attention. As mentioned in the previous section, attentional process allows the construction of an elaborated representation of the selected objects, appropriate to subserve identification and recognition. In this elaborate representation, featural, functional, and relational properties of a selected object are encoded and not simply registered as in the weak nonconceptual representations. The information thus selected and encoded is the information coming from the object that is referred to by means of the object-file that the perceptual system opened for that object when it first encountered it. One can see now the distinctive role of the foundational facts in establishing a direct way of referring to objects without relying on a description of them, since that description is always changing as new information is coming in about the object. The objects processed attentionally are selected either exogenously (because a physical characteristic such as its color attracted attention), or, endogenously, because they are connected with some task or theory. Attention is task and theory driven, and thus it is influenced by cognition. It is the task- or theory-requirements that determine which properties of a selected object are to be further processed. Once encoded, a property of an object can be subjected to further attentional process as a distinct object by itself, and therefore can be conceptualized. That means that a distinct representation can be constructed having as its content the properties of the property and this allows a finer –grained representation of this property. This representation enters Dehaene's et. al., global neuronal work-space and makes it available to the consumer parts of human brain (memory, thinking etc.)

To see the shape of a material object or, to see that a square object is different from a rectangular one is not the same as having the concepts shape, square and rectangle. To have the concepts distance, shape, square or rectangle means to consider distance, shape, and square or rectangular shapes distinct objects with particular individual qualities. It also means to have them as objects in mind irrespective of the current situations. Of course, to regard distance and shape as objects in thought is a process of objectification that pertain to a more abstractive level, given that they concern properties of objects and relations between objects. But the relevant information is already there, in our perceptual representations available for analysis.

REFERENCES

Bermùdez, J.L. (1995): Nonconceptual content: from perceptual experience to subpersonal computational states. *Mind and Language*, 10 (4), 333 – 369.

Bickhard, M. H. (2000): Dynamic representing and representational dynamics. In E. Dietrich, and A. Markman, eds., *Cognitive Dynamics: Conceptual and Representational Change in Humans and Machines*. Erlbaum.

Campbell, J. (199): The role of physical objects in spatial thinking. In N. Eilan, R. McCarthy, and B. Brewer, eds., *Spatial Representation: Problems in Philosophy and Psychology*. Oxford University Press.

Chapuis, N. & Varlet, C. (1987): Shortcut by dogs in natural surroundings. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 39, 49-64.

Crane, T. (1992): The Nonconceptual content of experience. In Tim Crane (ed.) *The Contents of Experience: Essays on Perception*. Cambridge: Cambridge University Press, 136 – 158.

Dehaene S., Izard V., Pica P., Spelke E. (2006): Core knowledge of geometry in an Amazonian indigene group. *Science*, 311, 381-384.

Driver, J, Davis, G, Russell, C, Turatto, M, Freeman, E. (2001): Segmentation, attention and phenomenal visual objects. *Cognition*, 80, 61-95.

Duncan, J. & Humphreys, G. W. (1989): Visual search and stimulus similarity. *Psychological Review*, 96, 433-458.

Duncan, J. & Humphreys, G. W. (1992): Beyond the surface search: Visual search and attentional engagement. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 18, 578-588.

Evans, G. (1982): *The Varieties of Reference*. Oxford: Oxford University Press.

Fodor, J. (forthcoming): Modularity revisited. Cambridge, MA: The MIT Press.

Gallistel, C. R., & Gelman, R. (1992): Preverbal and verbal counting and computation. *Cognition*, 44, 43-74.

Heck, R. G. Jr. (2007): Are there different kinds of content? In J. Cohen & B. McLaughlin (eds.), *Contemporary Debates in the Philosophy of Mind*. Oxford: Blackwell.

Lamme, V. (2003): Why visual attention and awareness are different? *Trends in Cognitive Science*, 7,12-18.

Lamme, V. (2004): Independent neural definitions of visual awareness and attention. In A. Raftopoulos (ed.) *The Cognitive Impenetrability of Perception: An Interdisciplinary Approach*. NJ: NovaScience Books.

Mather, G. (2006): *Foundations of Perception*. UK: Psychology Press.

Peacocke, C. (1992): Scenarios, concepts, and perception. In Tim Crane (ed.) *The Contents of Experience: Essays on Perception*. Cambridge: Cambridge University Press, 105-135.

Pylyshyn, Z. W. (1999): Is vision continuous with cognition? The case for cognitive impenetrability of visual perception. *Behavioral and Brain Sciences*, 22, 341-423.

Pylyshyn, Z. W. (2007): *Things and Places: How the Mind connects with the World*. Cambridge, MA: The MIT Press.

Raftopoulos, A. (2001): Is perception informationally encapsulated? The issue of the theory–ladenness of perception. *Cognitive Science,* 25, 423-451.

Raftopoulos, A. (2005). How Many Core Systems for Number? In Gagatsis, A., Spagnolo, F., Makrides, Gr., and Farmaki, V. (Eds.), *Proceedings of the Fourth Mediterranean Conference on Mathematics Education*, (pp. 55-68), Palermo Italy.

Raftopoulos, A., and Müller, V. (2006): The Nonconceptual Content of Experience. *Mind and Language*, 27 (2), 187-219.

Raftopoulos, A. (2008): Arithmetic Cognition. *Noesis, 3, the Journal of the Greek Cognitive Science Society*, 209-241. (In Greek).

Raftopoulos, A. (2009): *Perception and Cognition: How do Psychology and the Neural Sciences inform Philosophy*. MIT Press, a Bradford book.

Rensink, R. A. (2000a): The dynamic representation of scenes. *Visual Cognition*, 7, 17-42.

Rensink, R. A. (2000b): Seeing, sensing, and scrutinizing. *Vision Research*, 40, 1469-1487.

Tye, M. (2005): Nonconceptual content, richness and fineness of grain. In T. Gendler & J. Hawthorne, (Eds.), *Perceptual Experience*. Oxford: Oxford University Press.

Uller, C., Carey, S., Fenner, G. H., & Klatt, L. (1999): What representations underlie infant numerical knowledge? *Cognitive Development,* 14, 1-36.

Vecera, P. (2000): Toward a biased competition account of object-based segmentation and attention. *Brain and Mind*, 1, 353-384.

Wynn, K. (1996): Infants' individuation and enumeration of actions. *Psychological Science,* 7, 164-169.

Wynn, K. (1998): Psychological foundations of number: Numerical competence in human infants. *Trends in Cognitive Sciences*, 2 (8), 296-304.

À LA RECHERCHE DES ESPACES DE TRAVAIL GÉOMÉTRIQUE DES MOSAÏSTES ANTIQUES

Bernard Parzysz

Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris Diderot et Université d'Orléans, France

RÉSUMÉ

L'ingéniosité et la qualité de certaines mosaïques géométriques antiques posent au géomètre d'aujourd'hui la question des connaissances mises en œuvre pour parvenir à de tels résultats. Étant donné l'absence de documents écrits, c'est uniquement à partir des œuvres qu'on peut espérer parvenir à identifier les modèles reproduits et, à travers eux, retrouver les connaissances, voire les procédures selon lesquelles ces modèles ont été implémentés dans les réalisations matérielles et, au-delà, le geste de l'artiste-artisan. Ceci débouche sur un certain nombre de questions, dont celle des adaptations nécessaires pour passer du modèle théorique à la surface où elle devait s'insérer et celle de la transmission des connaissances associées. Des notions issues de la didactique des mathématiques, comme celles d'organisation praxéologique, d'appréhension d'un dessin géométrique, de paradigme géométrique (en particulier G1 et G2) et d'espace de travail géométrique trouvent ici un terrain d'application différent de leur « lieu » d'origine.

INTRODUCTION

Les mosaïques géométriques antiques, très longtemps dédaignées par les archéologues, présentent parfois une richesse et une qualité d'exécution qui suscitent l'admiration du géomètre, tant pour l'ingéniosité de la conception du décor que pour la perfection avec laquelle celui-ci a été mis en place et réalisé. De telles réalisations supposent chez les artisans et artistes tout un corpus de connaissances variées, comportant en particulier une dimension géométrique essentielle. Des réalisations comme celles de la *fig. 1* impliquent à l'évidence l'existence d'un modèle géométrique relevant de la « géométrie de la règle et du compas » (*fig. 2*).

Piazza Armerina (Sicile)

fig. 1

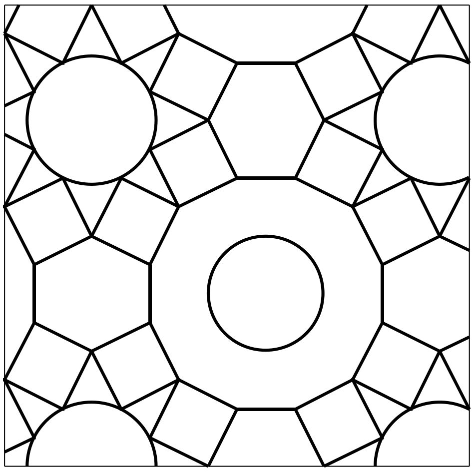


fig. 2

Je voudrais ici aborder quelques questions liées à la réalisation de ces mosaïques et à la diffusion des décors, en « exportant » pour cela un certain nombre de notions appartenant à la didactique des mathématiques, comme l'a par exemple fait C. Bulf dans sa thèse (Bulf, 2008). La question n'est pas forcément incongrue puisqu'il s'agit, d'une part d'un domaine (la géométrie plane) qui relève traditionnellement du domaine mathématique, et d'autre part les connaissances associées ont été apprises et enseignées dans tout le monde romain, et pendant une assez longue période (au moins du 1^er^ siècle avant notre ère au 6^e^ siècle de notre ère). Je m'intéresserai en particulier à la question des vecteurs de la transmission des décors et la question de la « distance » séparant le modèle théorique de sa réalisation matérielle.

LA RÉALISATION DES MOSAÏQUES GÉOMÉTRIQUES : UNE ORGANISATION PRAXÉOLOGIQUE

À l'origine, c'est-à-dire au 5^e^ siècle avant notre ère, la mosaïque apparaît comme une technique de pose de galets, inventée par les Grecs, destinée à fournir un revêtement pour les sols et les murs qui soit particulièrement résistant ; puis, dès le 3^e^ siècle, les galets seront remplacés par de petits cubes de pierre taillée (tesselles). L'aspect esthétique n'est, au départ, qu'un supplément facultatif. Mais bientôt, dans tout l'empire romain et surtout dans les provinces orientales, cet aspect non fonctionnel va prendre une dimension de plus en plus importante, culminant dans la production de véritables chefs d'œuvre.

La mosaïque peut se définir comme « *un assemblage, au moyen de petits éléments généralement quadrangulaires, en pierre, en marbre, en terre cuite ou en verre, constituant un revêtement imperméable pour une surface plane ou courbe.* » (Lavagne, 1988, p. 468). D'après Vitruve, la réalisation d'une mosaïque de sol commence par la confection d'un niveau de drainage sur le sol préalablement arasé. Sur ce niveau viennent se superposer une couche de mortier de chaux grossier puis une couche de mortier plus fin, celui-ci constituant la surface sur laquelle sera posée les tesselles de mosaïque. Celles-ci sont scellées dans un lit de pose de 2 à 3 mm d'épaisseur, constitué de chaux et de poudre de marbre.

En plus du maçon chargé de la préparation du support, un atelier de mosaïstes comprend donc au minimum trois spécialistes : un tailleur de tesselles (*tessellarius*), un dessinateur (*pictor imaginarius*) et un poseur de tesselles (*musivarius*) [1]. Contrairement à ce qu'on aurait pu penser, les ateliers n'étaient pas installés à demeure mais étaient essentiellement itinérants, les mosaïstes transportant un outillage minimum et s'installant pour un temps plus ou moins long sur le chantier [2].

En ce qui me concerne, ce sont essentiellement le *pictor* et le *musivarius* qui sont plus particulièrement le sujet de mon intérêt pour la mosaïque, le premier pour le tracé du motif *in situ* et le second pour la façon dont il finalise l'œuvre. L'organisation praxéologique (Chevallard, 1999) sous-jacente à la réalisation des mosaïques géométriques peut être schématisée de la façon suivante.

Les tâches

Elles sont de types variés ; les principales sont relatives à la conception du décor par le *pictor*, à la réalisation des tracés préparatoires (par le même), à la mise en place des tesselles par le *musivarius*. Mais des genres de tâches annexes peuvent éventuellement intervenir, comme la transformation par le *pictor* d'un modèle préexistant, l'adaptation − toujours par le *pictor* − d'un décor donné à une surface donnée, ou le rattrapage d'erreurs dans la pose des tesselles (par le *musivarius* ou le *pictor* lui-même).

Les techniques

Pour le *pictor*, le corpus de techniques est essentiellement associé aux « constructions à la règle et au compas ». Cette expression nécessite d'être précisée. Tout d'abord, le terme de « construction » est foncièrement ambigu, car il peut désigner, soit (dans une géométrie de type G1) une procédure de tracé effectif, matériel, utilisant des instruments tels que règle, compas, équerre, etc., soit (dans une géométrie de type G2) un discours de type logico-déductif définissant progressivement, à partir de la donnée de certains objets géométriques, de nouveaux objets. Il en résulte que l'expression « construction à la règle et au compas » peut, elle aussi, avoir deux sens : dans une géométrie de type G2 il s'agira de ne faire intervenir dans le discours que des droites et des cercles, tandis que dans G1 il s'agira d'utiliser de « vrais » instruments. Dans le cas de l'Antiquité, il s'agit essentiellement du cordeau, instrument multi-usages qui peut servir selon le cas à tracer des segments, à reporter des longueurs, à tracer des cercles, des angles droits, etc. Notons quand même que les Romains n'ignoraient ni le compas ni l'équerre.

En outre, une technique est associée, non seulement aux instruments utilisés, mais également aux usages visés. Ainsi, par exemple, une corde lisse pourra servir à vérifier un alignement, à reporter une longueur ou à tracer un cercle, tandis qu'une corde « graduée » par des nœuds espacés d'un pied pourra servir à mesurer des longueurs ou à déterminer un angle droit (triangle « égyptien ») [3].

La technologie

Sous l'Empire romain, les écoles mathématiques « théoriques », comme celles d'Alexandrie, demeurent actives, mais de façon générale l'enseignement a tendance à s'orienter vers les aspects pratiques. C'est ainsi qu'au 1er siècle avant notre ère un mouvement encyclopédique se développe dans le monde romain ; en particulier, un certain Geminos [4], sur lequel on n'a guère de renseignements, écrit vers les années 30 avant notre ère une *Science mathématique,* en 12 volumes au moins, qui inclut de nombreux domaines tels que la géodésie (arpentage), la scénographie, la mécanique, l'optique, etc. : « *Geminos prend en compte* [les] *aspects plus « modernes » de la science et, pour leur accorder une place dans l'économie de son système sans trop chagriner les tenants de l'ancienne classification, il opère une distinction entre les sciences théoriques et les sciences pratiques, dans chaque domaine de la connaissance. C'est ainsi que la logistique, science du calcul concret, s'oppose à l'arithmétique, science abstraite du nombre ; de même, la géodésie est plus matérielle que la géométrie, laquelle traite abstraitement de l'être géométrique en soi.* » (Guillaumin, 1994, p. 281). Ainsi, on voit apparaître, à côté des sciences exactes, comme la géométrie, des sciences « appliquées » − comme nous dirions aujourd'hui − telles que l'arpentage. Et l'agrimenseur Agennius Urbinus écrit (vers 400 de notre ère) que « *par l'évidence de ses démarches scientifiques,* [la géométrie] *éclaire la matière des objets de la science, de sorte que, on le comprend,* [elle] *est inhérente aux arts, ou que les arts procèdent de la géométrie.* » (cité dans (Guillaumin, 1994), pp. 291-292)

Dans le domaine de la mosaïque, la technologie consiste en un corpus de connaissances justifiant les « constructions à la règle et au compas ». On peut penser que les *pictores,* tout au moins les meilleurs d'entre eux, ne disposaient pas seulement pour cela des connaissances « pratiques » de type G1, mais qu'ils pouvaient aussi, dans certains cas au moins, justifier une construction nouvelle à l'aide d'arguments théoriques faisant intervenir la règle et le compas « euclidiens », et non plus les instruments physiques, et dire, par exemple, que tel quadrilatère est un losange parce que ses côtés sont obtenus avec la même « ouverture de compas » (c'est-à-dire le même rayon de cercle).

La théorie

D'après ce qui vient d'être vu, la théorie qui justifie la technologie ci-dessus est la géométrie « savante » développée par la science grecque, c'est-à-dire Euclide, ses prédécesseurs et ses successeurs. Rappelons ici que la culture grecque, que ce soit en littérature, en philosophie, dans les arts ou dans les sciences, était fort en honneur chez les Romains, ainsi que le montre par exemple le nombre de sculptures qui sont en fait des copies d'originaux grecs : « *Les fameuses statues de Phidias, Myron, Polyclète, Lysippe ne nous seraient parvenues que par des descriptions littéraires s'il n'y avait eu les copies romaines qui ornaient, à côté de portraits de philosophes, de stratèges et de princes hελléniques, les péristyles, jardins et autres bibliothèques des somptueuses maisons de ville ou villas de campagne.* » (De Tommaso, 2006, p. 250).

LES ESPACES DE TRAVAIL GÉOMÉTRIQUE DU *PICTOR*

La notion d'Espace de Travail Géométrique (ETG) (Kuzniak, 2009) va nous permettre de préciser les divers éléments qui entrent en jeu lors de la procédure de réalisation d'une mosaïque par un *pictor* donné.

L'ETG de référence

Il est constitué, comme nous l'avons vu, par le corpus de connaissances géométriques établi par la tradition, qui relève à la base d'une géométrie de type G1 : ses objets sont physiques (tracés) et ses validations de nature perceptive ou instrumentée, quoique pouvant éventuellement, comme nous l'avons vu, se référer plus ou moins implicitement à la géométrie savante (de type G2). C'est le cas en particulier pour la détermination d'un angle droit à l'aide de la corde à nœuds : même si le *pictor* ignore pourquoi la technique fonctionne effectivement, c'est la réciproque du théorème de Pythagore qui la justifie.

L'ETG idoine

Lié à la façon dont se pratiquait l'enseignement, il nous est largement inconnu. La question de la transmission des connaissances chez les *pictores* est en effet, encore aujourd'hui, largement ouverte. C'est sans doute − ce point fait consensus − sous la forme d'un compagnonnage que les connaissances nécessaires à la production des mosaïques géométriques se sont transmises, comme ce fut encore le cas au Moyen-Âge et même à l'époque classique. On peut aussi considérer que ces connaissances étaient souvent de nature essentiellement pratique, visant à fournir au *pictor*, lors de sa formation, des procédures de construction pour un certain nombre de motifs de base, sans souci de justification : « *chez les Romains, on se contente d'apprendre par cœur les définitions et les énoncés des propositions*. » (Daremberg & Saglio, 1877, entrée « Géométrie »)

L'ETG personnel

Il résulte pour partie de l'enseignement reçu par le *pictor* lors de sa formation, et pour partie des connaissances qu'il a pu le cas échéant se construire lui-même au cours de sa vie professionnelle. Il peut ainsi s'agir d'une nouvelle façon de construire un motif, d'une transformation d'un motif existant, de l'association de deux décors, voire de l'invention d'un nouveau décor. La transmission de ces innovations à ses élèves sera alors susceptible de faire évoluer l'ETG idoine pour la génération suivante.

LA QUESTION DE LA TRANSMISSION DES CONNAISSANCES

Il est une question qui fait débat depuis plus de 20 ans : celle des moyens par lesquels certains décors ont pu essaimer vite et loin. On constate en effet qu'un certain nombre d'entre eux traversent, sans changements autres que superficiels, le temps et l'espace : certains sont réalisés au même moment en (Grande-) Bretagne et en Syrie et perdurent sur 4 ou 5 siècles.

Des supports physiques ?

Certains spécialistes supposent l'existence de cahiers de modèles que les *pictores* transportaient avec eux :

> - « *Il est à peu près certain qu'à l'époque qui nous occupe, les mosaïques figurées n'étaient pas des œuvres originales ni de véritables créations. C'étaient des productions copiées, modifiées, adaptées ou composées, à partir de livrets de modèles que possédaient les ateliers de mosaïstes et dans lesquels le client choisissait les sujets qu'il voulait voir représentés dans sa demeure.* » (Daszewski & Michaelides, 1989, p. 14)
> - « *L'existence de carnets de modèles me paraît exigée par la pratique même du choix de la clientèle. On voit mal comment un chef d'atelier pourrait proposer la réalisation d'une image sans présenter à son client un recueil où est illustrée la variété de son répertoire.* » (Lavagne, 1988, p. 472)

D'autres, au contraire, récusent cette hypothèse :

> - « *Personne n'a jamais vu de cahier de modèles et aucun texte ni image n'en atteste l'existence* ». (Bruneau, 1987, p. 154)
> - « *L'hypothèse des « cahiers de modèles » est inutile : il n'est pas nécessaire de supposer leur existence pour expliquer la transmission de la tradition iconographique.* […] *Il nous paraît que l'essentiel de la transmission avait dû se faire de façon vivante dans la transmission de maître à disciple, au cours de la formation du* pictor. » (Balmelle & Darmon, 1986, pp. 246-247).

Une hypothèse alternative

En ce qui concerne les décors géométriques, j'ai récemment (Parzysz, 2008, 2009) émis une hypothèse qui élude pour une part cette question : celle de l'existence de *schémas-clés* transmis lors de l'apprentissage du *pictor* (et relevant donc de l'ETG idoine). Un schéma-clé est un dessin sur lequel il est possible de « lire » la structure géométrique du décor, et aussi d'en déduire une procédure de construction de ce décor. Pour illustrer ce dont il s'agit, je m'appuierai sur des exemples liés à l'octogone régulier inscrit dans un carré.

Tout d'abord, le dessin de la *fig. 3* constitue en lui-même un schéma-clé pour la construction de cette configuration : on y « lit » un carré muni de ses diagonales, ainsi que 4 cercles centrés aux sommets du carré et passant par le centre de celui-ci. Les sommets de l'octogone sont obtenus comme intersections de ces cercles avec les côtés du carré. La procédure de construction en découle immédiatement :

1° un carré étant donné, tracer ses diagonales ;
2° tracer les cercles centrés aux sommets du carré et passant par le point d'intersections des diagonales ;
3° les points d'intersection de ces cercles avec le carré sont les sommets de l'octogone cherché.

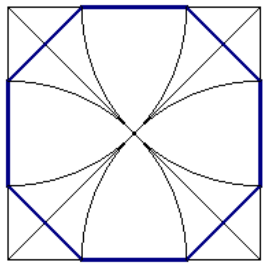


fig. 3

On remarquera qu'ici le dessin ne représente pas que lui-même, puisqu'il est destiné à être reproduit en d'autres lieux et en d'autres tailles ; c'est en fait une représentation dans G1 d'une configuration de G2 (le *modèle* du décor). La « lecture » du dessin se situe dans G1, mais on en déduit une construction « théorique » (de G2), qui se déclinera elle-même, finalement, en une procédure de G1. Ce genre d'exercice peut dans l'absolu s'avérer périlleux, car le passage de G1 à G2 (suite à la « lecture ») comporte des risques (Houdement & Kuzniak, 2000), (Parzysz, 2007a). En effet, deux dessins apparemment identiques peuvent ne pas représenter le même objet théorique. On en trouve un exemple frappant chez Dürer (1525) : les dessins ci-dessous (*fig. 4* et *fig. 5*) illustrent la construction d'un pentagone régulier, respectivement à partir du cercle circonscrit et d'un de ses côtés.

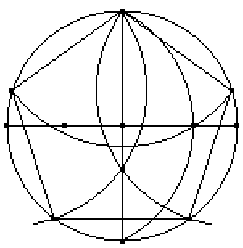


fig. 4

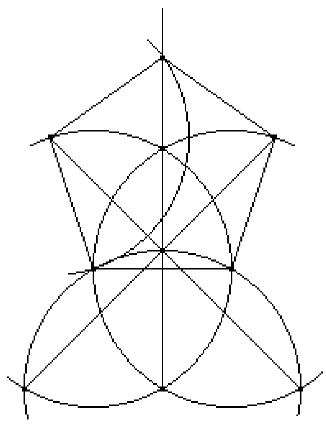


fig. 5

Or, quoique les deux pentagones soient visuellement indiscernables, du point de vue de G2, la construction indiquée par la figure 4 est exacte (c'est la construction dite « de Ptolémée »), tandis que celle de la figure 5 n'est qu'approchée : le pentagone a bien ses côtés égaux, mais ses angles sont « légèrement » inégaux. Cependant, cette construction est tout à fait acceptable pour un artisan ou un artiste, et c'est très certainement à ce titre que Dürer l'inclut dans son ouvrage [5]. Cette problématique liée à G1, qui est celle de la précision, est celle qui prévaut dans l'enseignement professionnel, et elle est différente de celle de l'enseignement général, liée à G2. La question de savoir si une construction est exacte ou approchée du point de vue de G2 n'est pas un enjeu de l'enseignement professionnel. C'est ainsi qu'un manuel de construction géométrique « à l'usage des dessinateurs » présente la construction (exacte) du pentagone régulier selon Ptolémée en disant : « *CF est le côté approché du pentagone* » (Arthot & Mansion, 1976, p. 19). Et, inversement, il conclut une trisection (approchée) de l'angle à la règle et au compas par : « *L'angle est divisé en 3 angles égaux.* » (*op. cit.* p. 15)

Pour en revenir au schéma-clé, une de ses qualités essentielles est, outre sa « lisibilité » (c'est-à-dire sa facilité à induire une interprétation correcte de la configuration représentée), le fait qu'il n'induise pas de « fausse piste » chez le lecteur (c'est-à-dire une interprétation erronée). En outre, l'établissement d'un schéma-clé nécessite (Duval, 2005) une décomposition méréologique de la configuration (identification de sous-figures), ainsi qu'une décomposition dimensionnelle (position particulière de points, repérage de rapports simples entre longueurs), tout en ayant également à l'esprit la décomposition instrumentale pour la reconstruction.

D'autre part, dans la conception du modèle d'un décor donné, plusieurs schémas-clés peuvent être articulés. Prenons par exemple le motif centré suivant (*fig. 6*), provenant de Bignor (Pays de Galles) et défini par Balmelle et al. (2002) comme « *composition centrée, dans un carré et autour d'un carré, de 4 demi-étoiles de huit losanges sur les diagonales, cantonnant le carré central et contiguës entre elles, déterminant des carrés latéraux et des triangles en encoignure* » (pl. 391b). Il s'agit en fait de l'expression d'une simple appréhension perceptive, au sens de Duval.


fig. 6

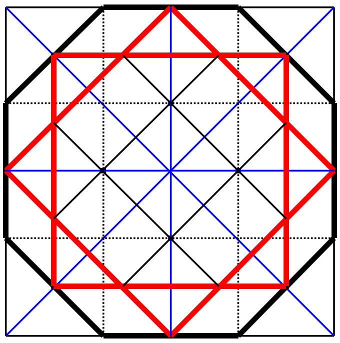


fig. 7

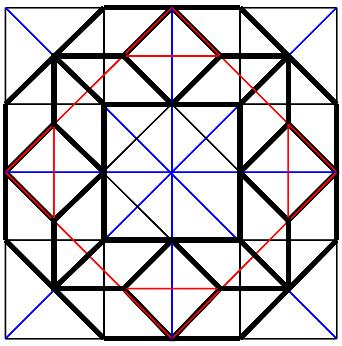


fig. 8

On remarque dès l'abord que cette « description » [6] est largement insuffisante, à elle seule, pour permettre de reconstituer le motif. Une étude attentive des propriétés géométriques (alignements, concours, symétries, orthogonalité…) permet ensuite de conjecturer que l'octogone (dont le texte ne dit mot) est régulier, et de repérer deux carrés dont les sommets sont les milieux des côtés de l'octogone (le fait qu'il s'agisse de carrés venant *a posteriori* confirmer, dans G2, la régularité de l'octogone). Nous sommes cette fois au niveau de l'appréhension discursive de Duval.

Finalement, on aboutit à un nouveau schéma-clé (*fig. 7*), qui rassemble les observations faites, et permet d'en extraire une procédure de construction (appréhension séquentielle selon Duval) telle que :

1° un carré étant donné, y inscrire un octogone régulier (*fig. 3*) ;
2° tracer les médianes du carré [7] ;
3° tracer (grâce aux diagonales et aux médianes du carré) les deux carrés dont les sommets sont les milieux des côtés de l'octogone ;
4° par les points d'intersection de ces deux carrés, tracer les parallèles aux diagonales du carré initial ;
5° tracer les diagonales de l'octogone parallèles aux côtés du carré.

On a ainsi obtenu tous les éléments nécessaires à la réalisation du motif (*fig. 8*).

Un motif assez semblable est celui de la fig. 9, décrit dans le même ouvrage comme une « *composition en couronne, dans un octogone et autour d'un cercle, de 8 carrés sur la pointe latéraux, ces motifs contigus entre eux déterminant des losanges et faisant apparaître une étoile à huit pointes (ici au trait).* » (op. cit. pl. 315) et illustré par un exemple provenant de La Huerta del Rio (Espagne).

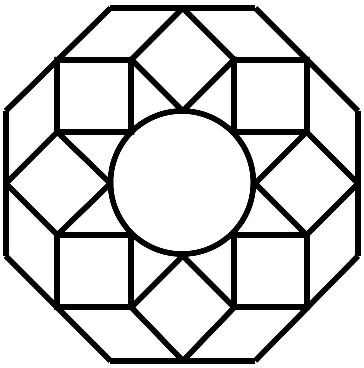


fig. 9

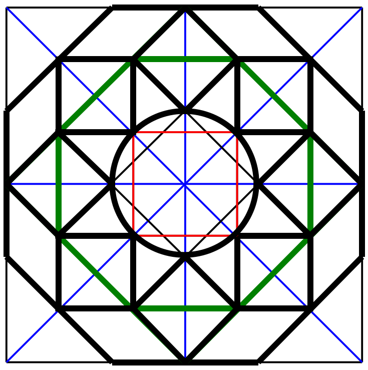


fig. 10

L'étude géométrique de ce motif aboutit cette fois au schéma-clé de la *fig. 10* et permet d'imaginer la procédure de construction suivante :

1° un carré étant donné, y inscrire un octogone régulier ;
2° tracer les médianes du carré [8] ;
3° tracer (grâce aux diagonales et aux médianes du carré) les deux carrés dont les sommets sont les milieux des côtés de l'octogone ;
4° par les points d'intersection de ces deux carrés, tracer les parallèles aux côtés et aux diagonales du carré initial.

On peut alors tracer l'ensemble du décor.

Si maintenant nous comparons les schémas-clés des *fig. 8* et *fig. 10,* nous nous apercevons qu'ils procèdent tous deux d'un même « prototype » (*fig. 11*) :

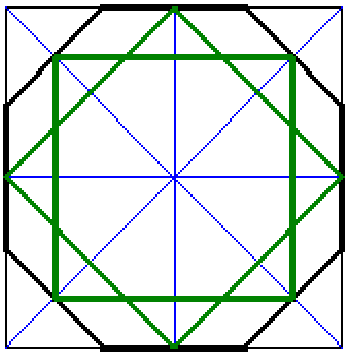


fig. 11

Ainsi (*fig. 12*), le motif de la figure 6 et celui de la figure 9 peuvent être obtenus comme enchaînements de trois schémas-clés : ceux de la figure 3, de la figure 11 et de la figure 7 (resp. *fig. 10*) : nous sommes cette fois au niveau de l'appréhension opératoire.

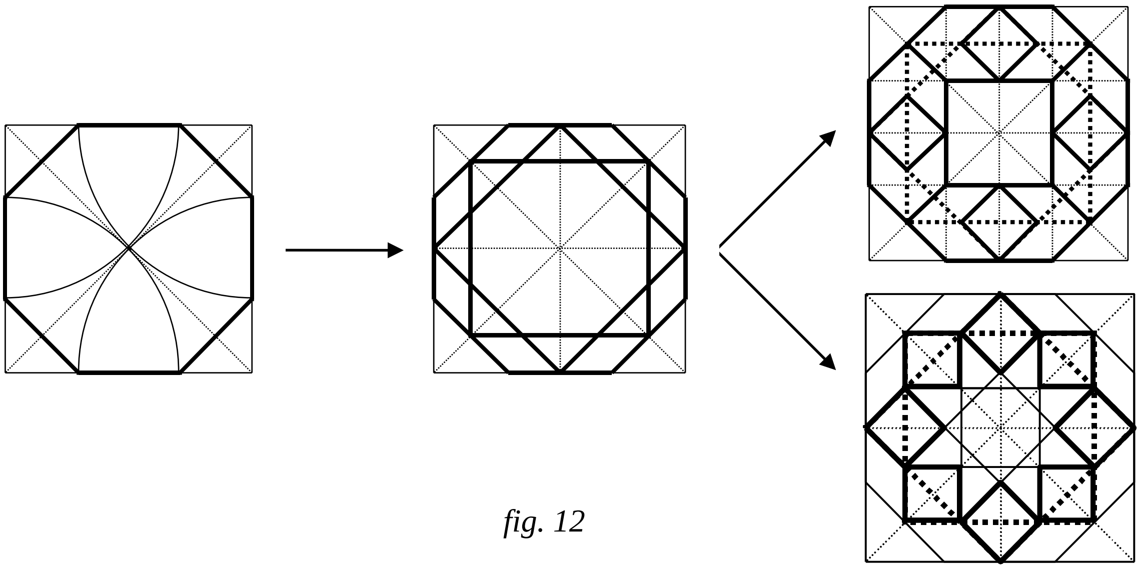


fig. 12

Un même schéma-clé peut engendrer plusieurs décors différents, et inversement un même décor peut nécessiter l'enchaînement de plusieurs schémas-clés.

Cette hypothèse des schémas-clés comme vecteurs de la transmission des connaissances permet d'expliquer avec quelque vraisemblance la présence de motifs voisins dans des lieux et des époques parfois fort éloignés. On peut imaginer que la formation du *pictor* spécialisé dans la mosaïque géométrique comportait une forte composante figurale comprenant des exercices de lecture et de reproduction de schémas, ce qui nécessitait de sa part le passage d'une simple appréhension perceptive, liée à une géométrie de type G1, à une appréhension discursive (« lecture » du schéma), puis opératoire (établissement d'une « construction »), nécessitant la mise en œuvre de propriétés de G2 suivie d'un retour à G1 pour les tracés. L'aspect mnémonique, qui comme nous l'avons vu devait être important, était destiné à fournir à l'apprenti un bagage de schémas-clés « basiques » le rendant indépendant de tout support physique.

Je terminerai ce paragraphe en donnant l'exemple d'un artisan antique qui s'est manifestement cantonné − sans doute par manque de connaissances − à l'appréhension perceptive. Il s'agit d'une mosaïque de Migennes (Yonne) dite « à décor multiple », constituée de carreaux jointifs présentant plusieurs types de décor. Deux de ces panneaux (*fig. 13* et *fig. 14*) représentent une « *étoile de huit losanges inscrite dans un cercle* » (*op. cit.* pl. 289).

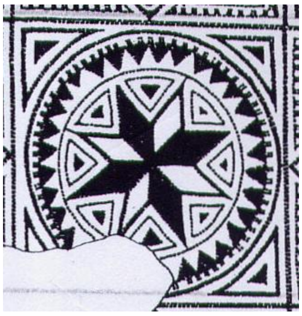


fig. 13

fig. 14

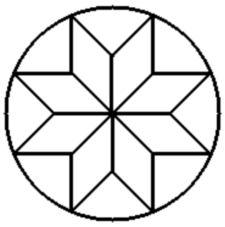


fig. 15

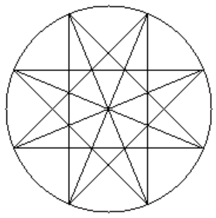


fig. 16

Il s'agit là d'un modèle très classique (*fig. 15*), qu'on obtient très simplement par partage d'un cercle en 8 ou en 16 et tracé d'un octogone croisé inscrit (*fig. 16*), et dont de nombreux exemples soignés existent. Or, ici les alignements qu'on s'attendrait à trouver n'existent pas ; le *pictor* (à moins qu'il ne s'agisse d'un *musivarius* ?) s'en est tenu à une appréhension perceptive du modèle, qu'il a vraisemblablement « lu » comme composé de 8 quadrilatères (losanges ?) jointifs dont deux sommets opposés sont, l'un au centre du cercle, l'autre sur sa circonférence.

LA QUESTION DE L'APPROXIMATION

Ce déficit dans l'appréhension du modèle nous amène à une autre question importante : celle de la place et du rôle de l'approximation dans la réalisation d'une mosaïque géométrique. Ma recherche m'a montré que, par rapport au modèle théorique dont la nature est parfois clairement décelable sans ambiguïté, l'œuvre pouvait présenter une distance plus ou moins grande, et ceci à plusieurs niveaux.

Approximation d'adaptation

L'*approximation d'adaptation* se présente au moment de l'inscription des tracés dans la surface à couvrir. Un modèle géométrique donné ne peut théoriquement être adapté qu'en modifiant sa taille ; or, en prenant l'exemple d'une surface rectangulaire qui doit être décorée d'un motif répétitif, il arrive très fréquemment que la proportion du motif décoratif ne corresponde pas tout à fait à celle de ce rectangle. Deux possibilités, toutes deux attestées, s'offrent alors au *pictor* :

- soit faire comme si de rien n'était et installer le décor selon les règles de la géométrie, ce qui fera apparaître à certains endroits des parties de motif incomplètes ;
- soit adapter la géométrie à la surface en « trichant ». Ceci est relativement aisé dans le cas d'un décor construit sur une grille carrée ou triangulaire (cas fréquent), car il suffira d'adapter la grille à la surface en la déformant légèrement pour adapter le décor. Par contre, le problème est moins évident lorsque des cercles ou d'autres courbes doivent être « adaptés », car il faut alors les retoucher à la main.

On comprend alors pourquoi le recours à une grille d'ensemble − dont on retrouve parfois, lors de la dépose des mosaïques, quelques traces sous forme de tracés ou d'incisions − était si répandu.

Approximation de repentir

L'*approximation de repentir*, qui est sans doute le fait du *musivarius* − bénéficiant éventuellement les conseils du *pictor* − apparaît parfois au moment de la pose des tesselles. Il s'agit de la réparation d'une erreur de tracé du *pictor* non détectée au départ, qui est ensuite camouflée plus ou moins bien. C'est par exemple le cas à Besançon, où une bordure noire et blanche (*fig. 17*) devait être posée le long de la mosaïque de Méduse (Parzysz, 2007b).

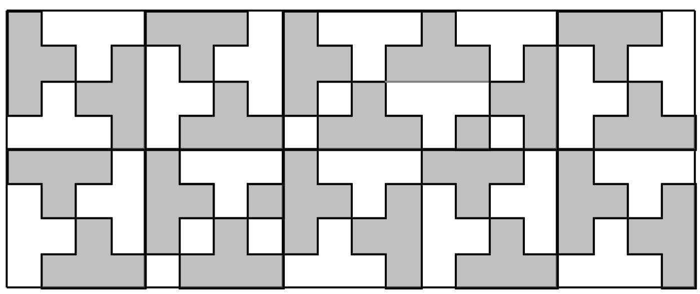


fig. 17

Cette frise est constituée de carrés de 4×4 unités constitués chacun de 4 éléments en T placés en « moulin à vent », avec inversion de couleurs. Deux carrés sont superposés dans la hauteur de la frise pour constituer un rectangle de 8×4 unités. La bordure est constituée de 25 rectangles semblables, et la même disposition réapparaît tous les deux rectangles. Apparemment, seuls les contours des carrés avaient été tracés par le *pictor*, à charge pour le *musivarius* d'y placer le motif correspondant. Mais il semble qu'il y ait eu en fait deux poseurs qui ont commencé chacun par une extrémité de la bande, et que le second ait fait une erreur d'un rectangle. Lorsqu'ils s'en sont aperçus, ils ont opéré tant bien que mal un « rafistolage », en s'efforçant de préserver au mieux les éléments en T (en gris clair sur la *fig. 18*).

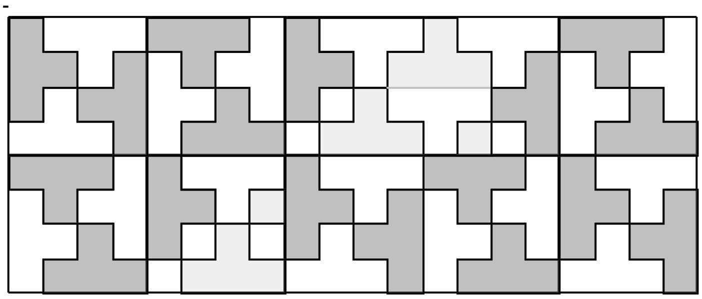
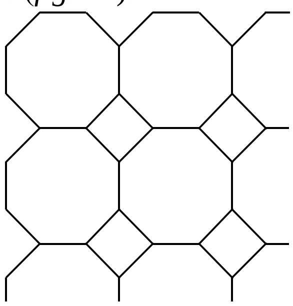


fig. 18

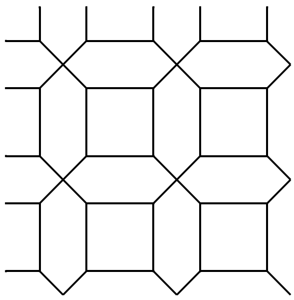
Approximation de modèle

L'*approximation de modèle* peut être de deux sortes :

- elle peut être liée à une appréhension trop superficielle du modèle géométrique, non opératoire du fait qu'elle n'aboutit pas à la mise en place d'un procédé de construction prenant en compte tous les éléments de la configuration ; nous en avons vu un exemple particulièrement frappant plus haut, mais ils sont parfois plus subtils. Il existe à ce niveau des moyens de contrôle comme la vérification d'alignements (lignes de rappel, en particulier obliques) ;
- elle peut également être liée à la volonté du *pictor* de remplacer un modèle par un modèle approché, plus facile à construire. Prenons l'exemple de l'octogone régulier utilisé en tant que motif de base de pavage, soit de façon jointive, soit de façon sécante (*fig. 19*).



octogones jointifs



octogones sécants

fig. 19

Ces configurations de base sont fréquemment employées pour la réalisation de décors variés, tels que celui de la *fig. 20*, qui est très répandu.

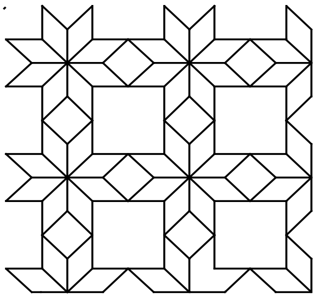
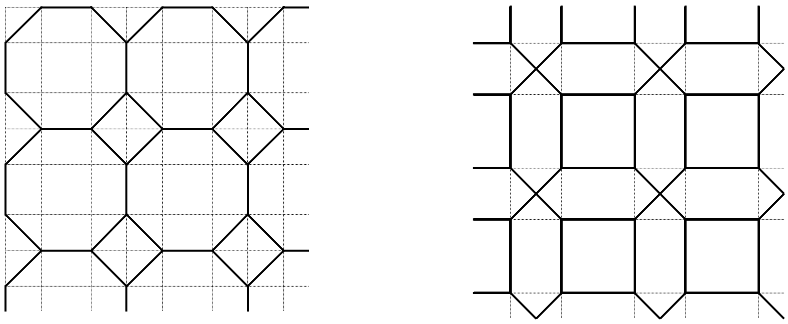


fig. 20

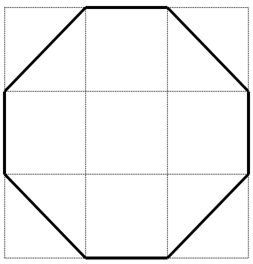
Dans un cas comme dans l'autre, la réalisation du pavage nécessite la mise en place d'un réseau « en tartan », c'est-à-dire un réseau orthogonal à deux modules (*fig. 21*).



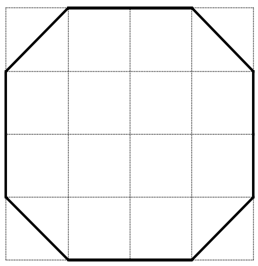
octogones jointifs *octogones sécants*

fig. 21

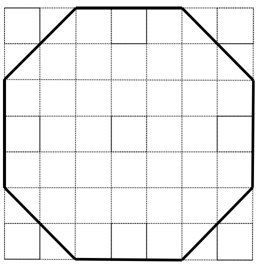
Ceci peut par exemple être obtenu par report de longueurs à partir du schéma-clé de la *fig. 3*. Mais il se trouve que les octogones qu'on trouve dans les pavements de mosaïque sont fréquemment irréguliers, ce qui ne saurait être attribué à la maladresse du *pictor* étant donné qu'ils se présentent en fait sous des formes variées, parmi lesquelles figurent les suivantes [9] (*fig. 22*) :



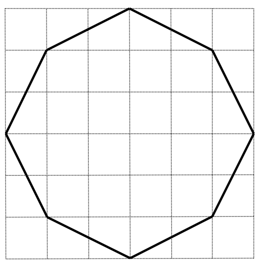
a



b



c



d

fig. 22

La *fig. 23* présente un exemple de la forme *b* provenant de Low Ham (Somerset).

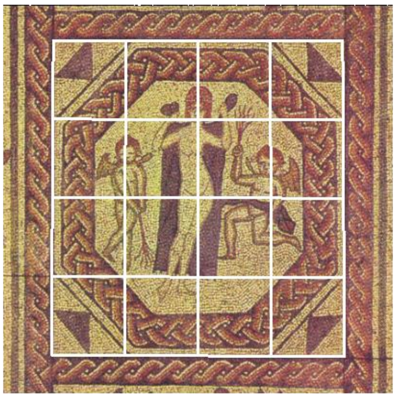


fig. 23

Ces diverses formes, qu'on peut considérer comme des approximations de l'octogone régulier, ont en commun le fait d'être construites sur un réseau carré, dont la mise en place est incontestablement plus facile que le réseau en tartan. Elles ne sont pas interchangeables, et interviennent dans des types de décors différents. La forme *d* (*fig. 22*) appartient à une grande famille de décors (une soixantaine au moins), très répandue, fondée sur la « diagonale du double carré » [10] (famille DDC), dont le succès s'explique, au moins partiellement, par la facilité de mémorisation des schémas-clés associés. En voici un exemple (*fig . 24*) provenant de Kourion (Chypre) : il s'agit d'un octogone « développé » correspondant au schéma-clé de la *fig. 25*, c'est-à-dire un octogone sur les côtés duquel on a construit des carrés extérieurs, construction ici bien plus simple qu'avec un octogone régulier.

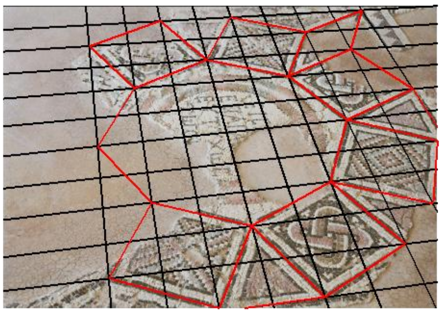


fig. 24

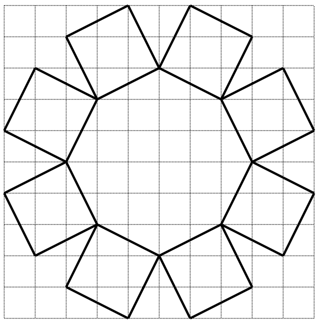


fig. 25

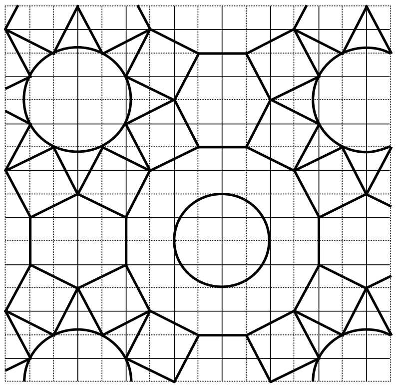


fig. 26

Autre exemple : la mosaïque de la *fig. 1*, à base de dodécagones « développés », appartient elle aussi à la famille DDC (*fig. 26*).

CONCLUSION

Les diverses questions qui viennent d'être soulevées visaient, on s'en est rendu compte, à une meilleure organisation du travail, et comportaient parfois également une dimension didactique, lorsqu'elles visaient à faciliter la transmission et l'appropriation des connaissances. La qualité de la formation reçue par les *pictores* était sans doute très variable, mais certains d'entre eux étaient à même de se situer dans des espaces de travail géométrique (ETG) tels qu'ils leur ont permis de concevoir, de réaliser et de diffuser des œuvres qui sont souvent, incontestablement, de grande qualité. Il s'agissait plus précisément :

- d'un corpus de connaissances géométriques issu de la géométrie grecque (ETG de référence) ;
- de techniques de production, de reproduction et de transmission de configurations géométriques rencontrées lors de la formation, qui était de type compagnonnage (ETG idoine, que cet article nous a permis de préciser, fût-ce de façon hypothétique) ;
- de techniques et de configurations élaborées au cours de la vie professionnelle [11] (ETG personnel), qui éventuellement pourraient ensuite s'agréger à l'ETG idoine.

Comme il est d'usage dans les métiers du bâtiment, ces connaissances relevaient à la base d'une géométrie « appliquée » de type G1, mais la réflexion des *pictores* devait sans aucun doute, à certains moments comme lors de l'étude d'un dessin de décor, se situer dans une géométrie de type G2. Il s'agissait en effet, sur la base d'une observation − qui, pour être efficace, devait nécessairement atteindre les niveaux discursif et même opératoire − de mettre en évidence un ensemble de propriétés de la configuration représentée, puis d'en déduire une procédure permettant de reproduire, à l'aide des instruments usuels, le motif de façon aussi proche de l'idéal que possible.

NOTES

[1] Pour donner une idée de la hiérarchie des tâches, sous l'Empire un *tessellarius* gagnait environ 50 sesterces par jour, un *musivarius* 60 sesterces et un *pictor imaginarius* 175 sesterces. Malgré tout, le *pictor* n'était considéré que comme un simple artisan ; son nom n'est pratiquement jamais mentionné sur les œuvres.

[2] On a calculé qu'un *tessellarius* pouvait couvrir une surface de 0,5 à 0,75 m^2 par jour.

[3] Relevons au passage une construction mentionnée, sans référence, par plusieurs chercheurs actuels (Tebby, 1995, Hanoune, 1994) : c'est celle de l'octogone régulier inscrit dans un carré (voir plus bas en section 4. Elle ne figure pas dans Euclide et je n'en ai pas, pour l'instant, trouvé trace chez d'autres géomètres de l'Antiquité.

[4] Ou Geminus.

[5] La présence de ces deux constructions dans l'ouvrage ne tient pas à une question de simplicité mais à une différence de propos : dans la première la donnée est un cercle dans lequel doit s'inscrire le pentagone, tandis que dans la seconde c'est un segment qui doit constituer un côté du pentagone.

[6] C'est le terme utilisé par les auteurs dans l'introduction de l'ouvrage cité.

[7] Les diagonales ont déjà été tracées au 1°. Le tracé des médianes n'est pas nécessaire (les milieux des côtés du carré suffisent), mais il permet un contrôle de précision par le concours des médianes et des diagonales au centre du carré.

[8] Voir note 7.

[9] Les formes *a*, *b*, *c*, ont des angles égaux et des côtés alternativement de deux longueurs, tandis que la forme *d* présente des côtés de même longueur et des angles alternativement de deux grandeurs. On peut aussi remarquer que, même si elles sont obtenues de façon différente, les formes *a* et *b* sont identiques.

[10] J'ai caractérisé(Parzysz, 2008) les décors de cette famille par les trois caractéristiques suivantes : 1° ils sont construits sur un *réseau carré*, 2° ils s'appuient exclusivement sur les *nœuds* de ce réseau, 3° ils font jouer un rôle important, sinon exclusif, aux *diagonales de double carré*, un rectangle constitué de deux carrés ayant un côté commun.

[11] Souvent adaptées à partir de configurations préexistantes, mais parfois aussi imaginées de toutes pièces.

RÉFÉRENCES

Arthot, F. & Mansion, P. (1976). *Courbes usuelles. Tracés géométriques*. Paris : Ed. Casteilla.

Balmelle, C. & Darmon J.-P. (1986). L'artisan-mosaïste dans l'Antiquité tardive. Réflexion à partir des signatures. *Artistes, artisans et production artistique au Moyen-Âge. Vol. I. Les hommes.* Paris : Ed. Picard.

Balmelle, C., et al. (2002). *Le décor géométrique de la mosaïque romaine* (2 vol.). Paris : Ed. Picard.

Bruneau, P. (1987). *La mosaïque antique*. Coll. Lectures en Sorbonne. Presses de l'Université Paris-Sorbonne.

Bulf, C. (2008). *Étude des effets de la symétrie axiale sur la conceptualisation des isométries planes et sur la nature du travail géométrique au collège.* Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques 19/2*, 221-265.

Daremberg, C. & Saglio, E. (1877). *Dictionnaire des Antiquités grecques et romaines*. 10 vol. Paris : Ed. Picard.

Daszewski, A. & Michaelides, D. (1989). *Guide des mosaïques de Paphos*. Ed. Fondation culturelle de la Banque de Chypre.

De Tommaso, G. (2006). *L'art romain*. Coll. La grande histoire de l'art. Paris : Ed. Mediasat.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives* 10, 5-53.

Dürer, A. (1525): *Instruction sur la manière de mesurer*. Traduit de l'allemand et présenté par J. Bardy et M. Van Peene. Paris : Ed. Flammarion, 1995.

Guillaumin, J.-Y. (1994). Géométrie grecque et agrimensorique romaine. La science comme justification d'une idéologie. *Dialogues d'Histoire Ancienne* 20.2, 279-295.

Hanoune, R. (1994). Le travail de l'ouvrier mosaïste à *Bulla Regia* (Tunisie). *La mosaïque gréco-romaine IV*, 281-283.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2000). Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol 20/1*. La Pensée sauvage.

Kuzniak, A. (2009). Sur la nature du travail géométrique dans le cadre de la scolarité obligatoire. *Actes de la 14e École d'été de Didactique des Mathématiques* (Bloch, I. & Conne, F., éds). Éd. La Pensée Sauvage (à paraître).

Lavagne, H. (1988). La mosaïque antique. *La Recherche* 198, pp. 466-474.

Parzysz, B. (2007a). La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles. De quoi s'agit-il ? *Quaderni della Ricerca in Didattica* 17, 121-144. Ed. Dipartimento di Matematica, Università di Palermo.

Parzysz, B. (2007b). Analyse des tracés régulateurs des mosaïques. *Au collège Lumière de Besançon* (sous la dir. de C. Munier) vol. 2 (Éléments d'architecture), 267-346. Ed. INRAP.

Parzysz, B. (2008). Mosaïques géométriques, du descriptif au procédural. *Lettre de l'AFEMA*, 13-16.

Parzysz, B. (2009). Using key diagrams to design and construct Roman geometric mosaics? *Nexus Network Journal* 11.2. Ed. Birkhaüser, Basel (à paraître)

Tebby, S. (1995). Geometric mosaics of Roman Britain. *Proceedings of the Vth International Colloquium on Ancient Mosaics* (P. Johnson, R. Ling & D.J. Smith, eds.), 273-294.

University of Cyprus
School of Social Sciences and Sciences of Education

Université Paris Diderot
Laboratoire de Didactique André Revuz

- **AMBASSADE DE FRANCE À CHYPRE**
- **RESEARCH PROMOTE FOUNDATION OF CYPRUS (ΙΠΕ)**

  Research project: “Ability to use multiple representations in functions and geometry” [ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΕΣ/ΠΑΙΔΙ/0308(ΒΕ)/03]
- **CYPRUS MATHEMATICAL SOCIETY**

ISBN : 978-9963-9650-1-4