Πανεπιστήμιο Κύπρου
University of Cyprus

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑ:
Η ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΕΝΟΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΜΑΡΙΑ Γ. ΚΑΤΤΟΥ

2013

Πανεπιστήμιο Κύπρου
University of Cyprus

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑ: Η ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΕΝΟΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Μαρία Γ. Κάττου

Διατριβή η οποία υποβλήθηκε προς απόκτηση
διδακτορικού τίτλου σπουδών στο Πανεπιστήμιο Κύπρου

Απρίλιος, 2013

ΣΕΛΙΔΑ ΕΓΚΥΡΟΤΗΤΑΣ

Υποψήφια Διδάκτωρ: Μαρία Γ. Κάττου

Τίτλος Διατριβής: Μαθηματική Δημιουργικότητα: Η Ανάπτυξη ενός Θεωρητικού Μοντέλου

Η παρούσα Διδακτορική Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για απόκτηση Διδακτορικού Διπλώματος στο Τμήμα Επιστημών της Αγωγής και εγκρίθηκε στις 18 Απριλίου 2013 από τα μέλη της Εξεταστικής Επιτροπής.

Εξεταστική Επιτροπή

Ερευνητικός Σύμβουλος:
Κωνσταντίνος Χρίστου ....
Καθηγητής, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Άλλα μέλη:
Δήμητρα Πίττα-Πανταζή (Πρόεδρος) ....
Αναπληρώτρια Καθηγήτρια, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Αθανάσιος Γαγάτσης ....
Καθηγητής, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Θεοδόσιος Ζαχαριάδης ....
Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Δέσποινα Πόταρη ....
Αναπληρώτρια Καθηγήτρια, Τμήμα Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία στόχευε στην ανάπτυξη ενός θεωρητικού μοντέλου που να περιγράφει τη μαθηματική δημιουργικότητα μαθητών ηλικίας εννέα με δώδεκα ετών. Πιο συγκεκριμένα, η έννοια της μαθηματικής δημιουργικότητας εξετάστηκε ως προς τέσσερις διαστάσεις: το αποτέλεσμα, το άτομο, τη διαδικασία και το περιβάλλον. Όσον αφορά στο αποτέλεσμα, διερευνήθηκαν τα στοιχεία που το χαρακτηρίζουν και οι μεταξύ τους σχέσεις. Το άτομο εξετάστηκε ως προς τα γνωστικά χαρακτηριστικά, τα χαρακτηριστικά προσωπικότητας και την ηλικία. Σε σχέση με τη διαδικασία, μελετήθηκαν οι επιμέρους υπο-διαδικασίες δημιουργικής σκέψης και ο τρόπος εμφάνισής τους σε μαθητές με διαφορετικό βαθμό μαθηματικής δημιουργικότητας. Η επίδραση του εκπαιδευτικού περιβάλλοντος εξετάστηκε, με στόχο να διερευνηθεί κατά πόσο η μαθηματική δημιουργικότητα επιδέχεται διδακτικών παρεμβάσεων. Πέρα από τα πιο πάνω, διερευνήθηκε κατά πόσο η μαθηματική δημιουργικότητα αποτελεί ειδική ή γενική ικανότητα.

Στην έρευνα συμμετείχαν 476 μαθητές Δ’, Ε’ και Στ’ τάξης δημοτικών σχολείων της Κύπρου. Για τη συλλογή των δεδομένων χρησιμοποιήθηκαν πέντε εργαλεία: (α) το εργαλείο μαθηματικής δημιουργικότητας, (β) το εργαλείο μαθηματικής ικανότητας, (γ) το εργαλείο γενικής δημιουργικότητας, (δ) το εργαλείο δημιουργικής προσωπικότητας και (ε) το εργαλείο Naglieri Nonverbal Ability Test. Ακολούθησαν συνεντεύξεις σε 182 μαθητές, με στόχο τη διερεύνηση της δημιουργικής διαδικασίας. Τέλος, εξετάστηκε η επίδραση ενός παρεμβατικού προγράμματος στη μαθηματική δημιουργικότητα των μαθητών. Ειδικότερα, 24 μαθητές απετέλεσαν την πειραματική ομάδα ενώ άλλοι 24 μαθητές απετέλεσαν την ομάδα ελέγχου.

Τα αποτελέσματα της εργασίας έδειξαν ότι το δημιουργικό αποτέλεσμα ορίζεται από τις ικανότητες της ευχέρειας, της ευελιξίας και της πρωτοτυπίας. Οι τρεις ικανότητες αν και είναι διακριτές μεταξύ τους, έχουν στατιστικά σημαντικές συσχετίσεις εντός του ιδίου μαθηματικού έργου. Δηλαδή, όσες περισσότερες λύσεις προτείνει ένας μαθητής σε ένα μαθηματικό έργο, τόσες πιο πολλές μαθηματικές ιδέες αναμένεται ότι θα αξιοποιήσει και ως εκ τούτου πιο πρωτότυπες απαντήσεις θα προκύψουν. Όσον αφορά στο άτομο, τα γνωστικά χαρακτηριστικά συνδράμουν περισσότερο από τα χαρακτηριστικά προσωπικότητας στην ερμηνεία της μαθηματικής δημιουργικότητας. Ειδικότερα, η κατοχή μαθηματικών γνώσεων σε συνδυασμό με την κατοχή γενικών δημιουργικών δεξιοτήτων

επηρεάζουν την εμφάνιση μαθηματικά δημιουργικής συμπεριφοράς. Η ηλικία, η νοημοσύνη και τα χαρακτηριστικά προσωπικότητας αν και μπορούν να προσφέρουν στην ερμηνεία της μαθηματικής δημιουργικότητας έχουν χαμηλές φορτίσεις, καταδεικνύοντας ότι είναι αναγκαία αλλά όχι απαραίτητα στοιχεία για την εμφάνιση της μαθηματικής δημιουργικότητας. Η δημιουργική διαδικασία μπορεί να περιγραφεί από πέντε μη σειριακά στάδια: τη διερεύνηση, τη συσχέτιση, την κατασκευή, την αξιολόγηση και την επικοινωνία. Η δημιουργική διαδικασία διαφοροποιείται ανάμεσα σε μαθητές με διαφορετικό βαθμό μαθηματικής δημιουργικότητας, τόσο ως προς τα στάδια που εμφανίζονται όσο και ως προς το βαθμό επεξεργασίας που τυγχάνει καθένα από αυτά. Τέλος, η μαθηματική δημιουργικότητα επιδέχεται διδακτικών παρεμβάσεων, μιας και οι μαθητές της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου βελτίωσαν τις ικανότητες ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας με την πάροδο του χρόνου. Παρόλα αυτά, η δημιουργική ικανότητα των μαθητών της πειραματικής ομάδας ενισχύθηκε σε μεγαλύτερο βαθμό από τη δημιουργική ικανότητα των μαθητών της ομάδας ελέγχου. Όσον αφορά τη φύση της μαθηματικής δημιουργικότητας, φαίνεται να αποτελεί μια ειδική ικανότητα εξειδικευμένη στο γνωστικό αντικείμενο των μαθηματικών και διαφοροποιημένη από αντίστοιχη δημιουργική ικανότητα σε άλλα γνωστικά πεδία.

Με βάση τα πιο πάνω αποτελέσματα, το θεωρητικό μοντέλο με τις τέσσερις του διαστάσεις δίνει τη δυνατότητα για πολύπλευρη διερεύνηση της έννοιας της μαθηματικής δημιουργικότητας. Καθεμιά από τις τέσσερις διαστάσεις προσθέτει διαφορετικά στοιχεία, οδηγώντας στη σύνθεση πληρέστερης εικόνας για τη μαθηματική δημιουργικότητα, ενώ η αγνόηση μιας από αυτές μειώνει τη σαφήνεια του ορισμού που προσφέρει κάποια άλλη.

ABSTRACT

This study purports to develop a unified theoretical model regarding mathematical creativity. In particular, the concept of mathematical creativity has been investigated across four axes: product, person, process and press/ environment. Concerning the product, we investigated the manner in which it can be defined. As for the person, cognitive and personality characteristics as well as age were taken into consideration. Regarding the process, we examined the stages of creative thinking and the way it appears to students who varied in mathematical creativity. The effect of the educational intervention was examined in order to investigate whether mathematical creativity can be enhanced in appropriate educational settings.

Four hundred and seventy six students, aged 9–12, participated in the present study. To fulfill the objectives of the study five tests were administered to students: (a) a mathematical creativity test, (b) a mathematical test, (c) a self-perception questionnaire of creative personality, (d) a general creativity test, and (e) the Naglieri Nonverbal Ability Test. Interviews were also conducted to 182 students, aiming to investigate the creative process. Finally, the effect of an intervention program to students' mathematical creativity was examined. In this case, 24 students constituted the experimental group while another 24 students constituted the control group.

The results of the study verified that the creative product in mathematics can be described across fluency, flexibility and originality, whereas the three abilities are interrelated in each task. In other words, the more correct mathematical solutions are proposed by an individual, the more possibilities to consider different and original mathematical ideas exist. As regards to the creative person, the results showed that the cognitive characteristics contribute more than the personality traits in the interpretation of mathematical creativity. Specifically, data analysis revealed that, the possession of mathematical knowledge in combination with being generally creative are prerequisites for the emergence of an individuals' potential. Although age, intelligence and personality traits predict mathematical creativity, the corresponding loadings were low, indicating that these elements are necessary but not sufficient for the description of mathematical creativity. The creative process could be described across five non-sequential stages: investigation, correlation, creation, evaluation and communication. The creative process was differentiated among students with different degrees of mathematical creativity. The

discrepancies were obvious on the number of stages that appeared in each group of students, as well as to the level of their elaboration. Lastly, mathematical creativity could be enhanced in appropriate educational settings, as proven by the experimental group as well as the control group. They have both improved their fluency, flexibility and originality over time. However, the improvement of the experimental group's mathematical creativity was better in comparison to the control group. Concerning the nature of mathematical creativity, it seems to be a domain-specific ability which is specialized in the discipline of mathematics and it is differentiated from creative ability in other areas. Taking the abovementioned into consideration, the theoretical model with the four axes may describe mathematical creativity as a multicomponent concept.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η υλοποίηση της παρούσας διατριβής ήταν εφικτή χάρη στην παρουσία και στην υποστήριξη κάποιων ατόμων, στα οποία το να χαρίσω ένα απλό «ευχαριστώ» είναι πολύ λίγο για να αποτιμήσει τη συνεισφορά τους. Θα ήθελα πρώτα πρώτα να ευχαριστήσω τα μέλη της συμβουλευτικής μου επιτροπής, για την καθοδήγηση και την υποστήριξή τους κατά τη συγγραφή της διατριβής. Ιδιαίτερες ευχαριστίες θα ήθελα να εκφράσω στον επιβλέποντα καθηγητή μου Κωνσταντίνο Χρίστου, όχι μόνο για την επιστημονική του καθοδήγηση αλλά κυρίως για την ηθική του υποστήριξη από το σχεδιασμό μέχρι και την υλοποίηση της διατριβής. Καθ' όλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών αισθάνομαι ότι μου έδωσε αρκετές ευκαιρίες να αναπτύξω την κριτική αλλά κυρίως ... τη δημιουργική μου σκέψη!

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής, την Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Δήμητρα Πίττα-Πανταζή και τον Καθηγητή Αθανάσιο Γαγάτση. Στην κυρία Πίττα-Πανταζή θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου για την αμέριστη συμπαράστασή της όλα αυτά τα χρόνια καθώς και για την προθυμία της να συζητήσει μαζί μου καθετί που με απασχολούσε. Οι χρήσιμες συμβουλές του κυρίου Γαγάτση και οι προβληματισμοί που έθετε, υπήρξαν πολύτιμα εφόδια για τη βελτίωση της εργασίας μου. Θα ήθελα, επίσης, να ευχαριστήσω το συνάδελφο Μάριο Πιττάλη για τις χρήσιμες συμβουλές του στην ανάλυση των δεδομένων.

Το πιο μεγάλο ευχαριστώ αξίζει δικαιωματικά στα άτομα που ήταν κοντά μου δίνοντάς μου δύναμη: στο Σπύρο, στους γονείς και στην αδερφή μου. Στο Σπύρο η οποιαδήποτε ευχαριστία είναι λίγη για να εκφράσει την πραγματική του συνεισφορά. Η αγάπη και το χαμόγελο του μου έδιναν στιγμές ξεκούρασης, ενώ ταυτόχρονα η υπομονή που έδειξε όλα αυτά τα χρόνια, η βοήθειά του κατά τη διεκπεραίωση της εργασίας και η ενθάρρυνσή του ήταν αυτά που με πείσμωναν για να τελειώσω. Ως μια πράξη ευγνωμοσύνης θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς και την αδερφή μου για την ηθική στήριξη που μου παρείχαν κατά τη διάρκεια των σπουδών μου και την ανιδιοτελή τους συνεισφορά. Η προσπάθειά τους να με βοηθήσουν και να με στηρίξουν με οποιοδήποτε τρόπο ήταν ιδιαίτερα σημαντική.

Στο Σπύρο και στους γονείς μου

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι
ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Εισαγωγή

Η σύγχρονη κοινωνία χαρακτηρίζεται από σύνθετα, δυναμικά και ισχυρά συστήματα πληροφοριών, καθώς και από μια απαιτητική οικονομία που βασίζεται πέρα από τις γνώσεις, στη δημιουργικότητα και στην πρωτοτυπία (Hunsaker, 2005). Ως εκ τούτου, κρίνεται επιτακτική ανάγκη η συμπερίληψη της δημιουργικότητας και της καινοτομίας ανάμεσα στα βασικά χαρακτηριστικά των πολιτών, τόσο σε ανεπτυγμένες όσο και σε αναπτυσσόμενες χώρες, ώστε οι πολίτες να είναι σε θέση να αξιοποιούν τις δοθείσες ευκαιρίες, προσδίδοντάς τους νέες διαστάσεις (Vidal, 2009). Σύμφωνα με τη Leikin (2009), μόνο τα άτομα με δημιουργικότητα, φαντασία και ευέλικτη γνώση μπορούν να βοηθήσουν την κοινωνία, γιατί είναι σε θέση να αξιοποιούν ασήμαντες φαινομενικά ιδέες και να καταλήγουν στην παραγωγή πρωτότυπης εργασίας.

Η εκπαίδευση προετοιμάζοντας τους μελλοντικούς πολίτες, επιβάλλεται να συνεισφέρει προς αυτό το στόχο, βοηθώντας τους μαθητές να παραμείνουν ανταγωνίσιμοι στη διεθνή αγορά και στο χώρο εργασίας. Πράγματι, πολλά εκπαιδευτικά συστήματα, διεθνείς οργανισμοί και ερευνητές (π.χ. Committee on Science, Engineering, and Public Policy, 2005 · Leikin, 2009 · Office for Standards in Education, 2003) έχουν τονίσει την ανάγκη για ενδυνάμωση της δημιουργικότητας των μαθητών. Για παράδειγμα, η πρώτιστη εισήγηση του National Academy of Science ήταν η ενίσχυση της δημιουργικότητας των πολιτών, στοχεύοντας στην αύξηση του ποσοστού των ταλέντων και στην ενίσχυση της οικονομικής ανάπτυξης (Committee on Science, Engineering, and Public Policy, 2005). Παρόμοια εισήγηση είχε διατυπώσει το Office for Standards in Education (2003), αναφέροντας ότι η δημιουργικότητα αποτελεί ένα από τα βασικά ζητήματα στην κυβερνητική ατζέντα για τη χάραξη εκπαιδευτικής πολιτικής στο Ηνωμένο Βασίλειο.

Μέχρι και τη δεκαετία του ’90 η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών ιδρυμάτων έδιναν μεγαλύτερη έμφαση σε ακαδημαϊκές δεξιότητες παρά στην ανάπτυξη της δημιουργικότητας, ως δεξιότητα σκέψης (Ford & Harris, 1992). Εντούτοις, η αναφορά του National Advisory Committee on Creative and Cultural Education (NACCCE, 1999), ότι όλοι είμαστε ή μπορούμε να γίνουμε δημιουργικοί άλλοι σε μικρότερο και άλλοι σε μεγαλύτερο βαθμό, φτάνει να μας δοθούν οι κατάλληλες ευκαιρίες, έχει προβληματίσει τα σύγχρονα εκπαιδευτικά συστήματα. Πλέον οι σύγχρονες τάσεις στην εκπαίδευση χαρακτηρίζονται από μια μετατόπιση του ενδιαφέροντος από τη στατική όψη της δημιουργικότητας, ως χαρακτηριστικό ενός «επίλεκτου» συνόλου ατόμων, στη δυναμική όψη, που θεωρεί τη δημιουργικότητα ως εν δυνάμει χαρακτηριστικό κάθε ατόμου (Silver, 1997).

Αυτή τη θεώρηση ενστερνίζονται οι ερευνητές που ασχολούνται με τη δημιουργικότητα στον τομέα της μαθηματικής παιδείας (Gil, Ben-Zvi, & Apel, 2007 · Silver, 1997). Ήδη από το 1989, το National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) ανακήρυξε την αρχή της ισότητας ως βάση για τη μαθηματική εκπαίδευση: όλοι οι μαθητές, ανεξαρτήτως προσωπικών χαρακτηριστικών και υποβάθρου θα πρέπει να έχουν ευκαιρίες να μελετήσουν και υποστήριξη για να μάθουν μαθηματικά. Με άλλα λόγια, τα σχολεία δεν θα πρέπει να στοχεύουν στην ενίσχυση της δημιουργικής ικανότητας μόνο των μαθητών που με κατάλληλα εργαλεία αναγνωρίστηκαν ως δημιουργικοί, αλλά αντιθέτως θα πρέπει να προσανατολίζουν τις προσπάθειές τους στη δημιουργία παιδαγωγικών συνθηκών που θα ενισχύσουν τη δημιουργικότητα όλων ανεξαιρέτως των μαθητών (Goldin, 2009).

Η έννοια της μαθηματικής δημιουργικότητας αν και εμφανίστηκε για πρώτη φορά το 1902 (Sriraman, 2004), έλαβε ιδιαίτερου ενδιαφέροντος τα τελευταία 50 χρόνια (Leikin, 2009). Η ένταξη της δημιουργικότητας στα σχολικά μαθηματικά μπορεί να βελτιώσει τη μάθηση των μαθηματικών εννοιών και την κατανόηση των μαθηματικών διαδικασιών, αφού σύμφωνα με το Hadamard (1945), η επιτυχία στα μαθηματικά απαιτεί κυρίως δημιουργικό ταλέντο παρά ακαδημαϊκή επίδοση. Όπως η Starko (1994) αναφέρει, οι μαθητές που χρησιμοποιούν δημιουργικά τις γνώσεις τους σε ένα γνωστικό πεδίο, μαθαίνουν το περιεχόμενο καλύτερα και παράλληλα, μαθαίνουν στρατηγικές εντοπισμού λύσεων, λήψης απόφασης και επίλυσης προβλήματος. Μάλιστα, άτομα με δημιουργική ικανότητα κατέχουν υψηλότερου επιπέδου γνώσεις που τους εξασφαλίζουν απαραίτητες δεξιότητες ζωής (Milgram & Hong, 2009). Πιο συγκεκριμένα, τα δημιουργικά άτομα είναι ικανά να αντιλαμβάνονται μοτίβα και σχέσεις χρησιμοποιώντας σύνθετη και μη-αλγοριθμική σκέψη, να εφαρμόζουν πρωτότυπη σκέψη που οδηγεί σε περισσότερες από μια λύσεις ή στρατηγικές (Munro, 2000 · Smith & Stein, 1998 · Stein, Smith, Henningsen & Silver, 2000) και να προτείνουν λύσεις που είναι μαθηματικά αποδεχτές (Birkhoff, 1969), εφαρμόσιμες και κατάλληλες για το πλαίσιο του προβλήματος (Sternberg, 1997).

Παρόλη τη σημασία που φαίνεται να κατέχει η δημιουργική σκέψη στον τομέα της μαθηματικής εκπαίδευσης, διάφορα επιστημολογικά ερωτήματα για τη μαθηματική δημιουργικότητα εξακολουθούν να παραμένουν αναπάντητα, αναχαιτίζοντας τις ερευνητικές προσπάθειες (Ford & Harris, 1992). Για παράδειγμα, στο ερώτημα «πώς ορίζεται η μαθηματική δημιουργικότητα;» έχουν προταθεί πολλοί και διαφορετικοί ορισμοί (Sarmiento & Stahl, 2008). Στην ίδια βάση, τα ερωτήματα «πώς θα μπορούσε να αναπτυχθεί η δημιουργικότητα στα μαθηματικά;» (Milgram & Livne, 2005) και «κάτω υπό ποιες συνθήκες θα μπορούσε να ενισχυθεί η δημιουργικότητα στο σχολικό περιβάλλον;» (Hershkovitz, Peled, & Littler, 2009) λαμβάνουν μεγάλο ενδιαφέρον στη βιβλιογραφία και χρήζουν απάντησης. Ειδικότερα, στόχο της παρούσας εργασίας αποτελεί η ανάπτυξη ενός θεωρητικού μοντέλου για την έννοια της μαθηματικής δημιουργικότητας. Η διερεύνηση των γνωστικών χαρακτηριστικών και των χαρακτηριστικών προσωπικότητας που επηρεάζουν το δημιουργικό άτομο, η μελέτη των γνωστικών σταδίων που εμπλέκονται στη δημιουργική διαδικασία, η περιγραφή των χαρακτηριστικών του μαθηματικά δημιουργικού αποτελέσματος και η μελέτη της επίδρασης εκπαιδευτικών πρακτικών στη δημιουργική σκέψη, συμβάλουν στην ανάπτυξη ενός πολύπλευρου θεωρητικού μοντέλου για τη μαθηματική δημιουργικότητα.

Διατύπωση του Προβλήματος

Τα εκπαιδευτικά συστήματα σε όλο τον κόσμο αντιμετωπίζουν το πρόβλημα της «απώλειας» ταλέντων, είτε αυτό αναφέρεται στη δυσκολία αναγνώρισης των ιδιαίτερων ικανοτήτων των μαθητών ή στην απουσία κατάλληλων εκπαιδευτικών παροχών που θα επιτρέψουν στους μαθητές να αναπτύξουν το ιδιαίτερο χάρισμά τους (Milgram & Hong, 2009). Οι Milgram και Hong (2009) έχουν εντοπίσει ποικίλα εμπόδια που αποθαρρύνουν την ανάπτυξη της δημιουργικής σκέψης στα μαθηματικά στο σχολικό περιβάλλον. Σε μια προσπάθεια άρσης τέτοιων εμποδίων, η Leikin (2009) προτείνει όπως η έρευνα στο πεδίο της μαθηματικής δημιουργικότητας εστιάσει σε δύο αλληλοσχετιζόμενους στόχους. Ο πρώτος στόχος αναφέρεται στην ανάπτυξη ενός θεωρητικού πλαισίου που θα συνεισφέρει στην κατανόηση της φύσης της μαθηματικής δημιουργικότητας από την οπτική της σκέψης, της διδασκαλίας και της μάθησης. Ο δεύτερος στόχος, που αποτελεί εφαρμογή του πρώτου, αξιοποιεί το θεωρητικό πλαίσιο για τη μαθηματική δημιουργικότητα, ώστε να βελτιώσει τις διδακτικές παροχές που ενθαρρύνουν τέτοιου είδους σκέψη (Leikin, 2009).

Από θεωρητικής πλευράς, η ανάγκη για καθορισμό ενός κοινού πλαισίου για τη μαθηματική δημιουργικότητα οφείλεται κυρίως στην πολλαπλότητα και στη διαφορετικότητα των ορισμών και των θεωριών που προτάθηκαν κατά καιρούς για την έννοια (Leikin, 2009 · Sarmiento & Stahl, 2007 · Sriraman, 2005). Σε μερικές περιπτώσεις οι ορισμοί επικεντρώνονται στη γενική δημιουργικότητα, χωρίς να δίνουν ιδιαίτερη έμφαση στα μαθηματικά (Haylock, 1987). Για παράδειγμα, οι ορισμοί που προτάθηκαν από το Silver (1997) και τη Leikin (2009) βασίζονται στις έννοιες της ευχέρειας, της ευελιξίας και της πρωτοτυπίας που προτάθηκαν από τον Torrance (1974). Άλλες φορές οι ορισμοί εστιάζονται στα μαθηματικά, παραμελώντας την ικανότητα δημιουργικής σκέψης (Haylock, 1987). Σε αυτούς τους ορισμούς περιλαμβάνονται γνωστικές διαδικασίες όπως η λύση προβλήματος (Ervynck, 1991), η γενίκευση (Krutetskii, 1976), οι συνδέσεις μαθηματικών εννοιών και ιδεών (Haylock, 1987). Εντούτοις, για να μπορέσει μια συμπεριφορά να κριθεί ως δημιουργική στα μαθηματικά θα πρέπει να εμφανίζονται ξεκάθαρα τόσο στοιχεία της δημιουργικής ικανότητας όσο και της μαθηματικής σκέψης (Haylock, 1987). Ως εκ τούτου, η ανάγκη για ανάπτυξη ενός θεωρητικού πλαισίου για τη μαθηματική δημιουργικότητα, με το συγκερασμό θεωριών της γενικής δημιουργικότητας και της μαθηματικής παιδείας, κρίνεται ουσιαστική.

Οι ερευνητικές προσπάθειες που έχουν γίνει στη μαθηματική δημιουργικότητα επικεντρώνονται στον εντοπισμό ενός συνόλου γνωστικών χαρακτηριστικών ή χαρακτηριστικών προσωπικότητας που περιγράφουν το δημιουργικό άτομο (π.χ. Freiman & Sriraman, 2011 · Klavir & Gorodetsky, 2009), στον προσδιορισμό μιας σειράς από στάδια που προσδιορίζουν τη δημιουργική διαδικασία (π.χ. Ervynck, 1991 · Sheffield, 2009), στην περιγραφή του δημιουργικού αποτελέσματος (π.χ. Chamberlin & Moon, 2005· Haylock, 1987) και στην περιγραφή περιβαλλόντων που ενθαρρύνουν τη δημιουργικότητα (π.χ. Goldin, 2002 · Kleiman, 2005· Yerushalmy, 2009). Εντούτοις, η έννοια της μαθηματικής δημιουργικότητας είναι σύνθετη και πολύπλοκη και ως εκ τούτου, η μονόπλευρη αντιμετώπιση της δεν είναι ικανοποιητική για να την εξηγήσει πλήρως (Batey, 2012). Σύμφωνα με το Batey (2012), αν και η διερεύνηση κάθε όψης της δημιουργικότητας ξεχωριστά δίνει ενδείξεις για την έννοια, εντούτοις καμία όψη δεν υφίσταται αν δεν υπάρχουν και οι άλλες όψεις. Έτσι, μια ολοκληρωμένη διερεύνηση και ορισμός της μαθηματικής δημιουργικότητας αναμένεται να είναι πολύπλευρη και να λαμβάνει υπόψη τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των επιμέρους στοιχείων που την απαρτίζουν (Batey, 2012).

Από πρακτικής πλευράς, το υφιστάμενο εκπαιδευτικό σύστημα δεν παρέχει κατάλληλες ευκαιρίες για ανάπτυξη της δημιουργικής ικανότητας των μαθητών (Piirto, 1999 · Silver, 1997). Το αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών (Kandemir & Gur, 2007), οι γνώσεις και οι διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών (Hwang, Chen, Dung, & Yang, 2007 · Siswono, 2008) περιλαμβάνονται ανάμεσα στους παράγοντες που δυσχεραίνουν την ανάπτυξη της δημιουργικότητας στο σχολικό περιβάλλον. Πιο συγκεκριμένα, κατά πλειοψηφία τα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών είναι οργανωμένα γύρω από ένα σύνολο τεχνικών και διαδικασιών που διδάσκονται με μια συγκεκριμένη πορεία (Haylock, 1987 · Yushau, Mji & Wessels, 2003) και αποζητούν την εύρεση μίας μοναδικής, ορθής απάντησης, που μπορεί να προκύψει από την εφαρμογή γνωστών διαδικασιών (Goldin, 2009 · Yushau, Mji & Wessels, 2003). Δυστυχώς, τέτοιου είδους αναλυτικά προγράμματα ευνοούν την ανάπτυξη συγκλίνουσας σκέψης, καταπνίγοντας τη δημιουργικότητα και περιορίζοντας τα μαθηματικά σε ένα σύνολο δεξιοτήτων και κανόνων που θα πρέπει ο μαθητής να απομνημονεύσει (Mann, 2005 · Yerushalmy, 2009).

Πέρα από τον παραδοσιακό τρόπο εργασίας στα μαθηματικά, ο Siswono (2008) εντοπίζει ότι η άγνοια των εκπαιδευτικών για την έννοια της δημιουργικότητας, για τον τρόπο αξιοποίησής της στη διδασκαλία των μαθηματικών και την αξία της στη γνωστική ανάπτυξη των μαθητών αποτελούν εμπόδια στην ενθάρρυνση της μαθηματικής δημιουργικότητας. Παράλληλα, η ανεπάρκεια εκπαιδευτικών υλικών, ο μειωμένος διδακτικός χρόνος, ο μεγάλος αριθμός μαθητών στις τάξεις και ο ήδη βεβαρημένος διδακτικός φόρτος των εκπαιδευτικών, οδηγεί τους εκπαιδευτικούς να μετατρέπουν τη διαδικασία μάθησης σε μια μηχανική εμπειρία (Slavkin, 2004), δίνοντας έμφαση στην ταχύτητα και στην ακρίβεια των υπολογισμών που εκτελούν οι μαθητές (Goldin, 2009), παρά στην ικανότητά τους να σκέφτονται αφηρημένα ή δημιουργικά (Clemons, 2005). Η Leikin (2008) τονίζει την ύπαρξη επείγουσας ανάγκης για επαναπροσδιορισμό των αναλυτικών προγραμμάτων και τροποποίηση της ισχύουσας κουλτούρας στα σχολεία, με στόχο την ενθάρρυνση και ανάπτυξη της δημιουργικότητας στα μαθηματικά.

Η παρούσα εργασία εστιάζεται στη διερεύνηση της δημιουργικής σκέψης στα μαθηματικά σε μαθητές δημοτικού σχολείου. Πιο συγκεκριμένα, η εργασία προσεγγίζει το θέμα σε θεωρητικό και πρακτικό επίπεδο. Σε θεωρητικό επίπεδο, η εργασία συνεισφέρει στην ανάπτυξη ενός μοντέλου για την έννοια της δημιουργικότητας στα μαθηματικά, περιλαμβάνοντας διαφορετικές όψεις της ίδιας έννοιας, όπως εκφράζονται μέσω: του ατόμου, της διαδικασίας, του αποτελέσματος και του περιβάλλοντος. Σε πρακτικό επίπεδο, αναπτύσσονται και εγκυροποιούνται εργαλεία μέτρησης της δημιουργικότητας στα μαθηματικά, καθώς και παρεμβατικό πρόγραμμα για ενίσχυση των δημιουργικών ικανοτήτων μαθητών δημοτικού σχολείου.

Σκοπός Εργασίας

Ο σκοπός της προτεινόμενης διατριβής είναι η ανάπτυξη ενός θεωρητικού μοντέλου που περιγράφει: (α) τα γνωστικά χαρακτηριστικά και τα χαρακτηριστικά προσωπικότητας των δημιουργικών μαθητών, (β) τις γνωστικές διαδικασίες που παρουσιάζουν οι μαθητές καθώς εργάζονται σε έργα που ευνοούν την εμφάνιση δημιουργικής σκέψης, (γ) τα χαρακτηριστικά του αποτελέσματος που προκύπτουν από τη δημιουργική διαδικασία και (δ) την επίδραση του εκπαιδευτικού περιβάλλοντος στη μαθηματική δημιουργικότητα σε μαθητές που φοιτούν στις μεγαλύτερες τάξεις δημοτικού σχολείου.

Η ανάπτυξη του μοντέλου στηρίζεται στο συγκερασμό θεωρητικών πλαισίων, που αναφέρονται από τη μια στη γενική δημιουργικότητα και από την άλλη στα μαθηματικά. Σύμφωνα με το Haylock (1987), σε οποιαδήποτε προσπάθεια ορισμού της μαθηματικής δημιουργικότητας οι δύο παράμετροι- δημιουργικότητα και μαθηματικά- θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη. Ως εκ τούτου, η ανάπτυξη του θεωρητικού μοντέλου στηρίζεται αρχικά σε ιδέες που αναφέρονται στη γενική δημιουργικότητα και έπειτα επιλέγονται οι ιδέες που θεωρούνται πιο σχετικές με τα σχολικά μαθηματικά (Haylock, 1987).

Πιο συγκεκριμένα, ο σκοπός της διατριβής μπορεί να επιμεριστεί στους εξής στόχους:

(α) Ορισμός και ανάλυση της έννοιας της μαθηματικής δημιουργικότητας.

(β) Περιγραφή των χαρακτηριστικών του δημιουργικού αποτελέσματος.

(γ) Διερεύνηση των γνωστικών χαρακτηριστικών και των χαρακτηριστικών προσωπικότητας που ευνοούν την εμφάνιση μαθηματικά δημιουργικής ικανότητας.

(δ) Προσδιορισμός των υπο-διαδικασιών που περιγράφουν τη δημιουργική διαδικασία.

(ε) Διερεύνηση της επίδρασης παρεμβατικού προγράμματος στις δημιουργικές ικανότητες των μαθητών στα μαθηματικά.

(στ) Ανάπτυξη κατάλληλων εργαλείων για τη διερεύνηση της μαθηματικής δημιουργικότητας.

(ζ) Σχεδιασμός παρεμβατικού προγράμματος και έλεγχος της αποτελεσματικότητάς του στην ενίσχυση της μαθηματικής δημιουργικότητας σε μαθητές δημοτικού.

(η) Αξιοποίηση ποσοτικών και ποιοτικών μεθόδων ανάλυσης για διασταύρωση των αποτελεσμάτων της εργασίας.

Ερευνητικά Ερωτήματα

Με την εκπλήρωση των πιο πάνω στόχων επιχειρείται να δοθεί απάντηση στα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα:

(α) Αποτελεί η δημιουργική ικανότητα στα μαθηματικά μια ειδική ικανότητα ή εμπίπτει στη γενική δημιουργική ικανότητα;

(β) Ποια είναι τα χαρακτηριστικά του δημιουργικού αποτελέσματος στα μαθηματικά;

(γ) Πώς επιδρούν τα γνωστικά χαρακτηριστικά και τα χαρακτηριστικά προσωπικότητας στη μαθηματική δημιουργική ικανότητα των μαθητών;

(δ) Ποιες γνωστικές υπο-διαδικασίες εμφανίζονται καθώς οι μαθητές εργάζονται σε μαθηματικά δημιουργικά έργα;

(ε) Ποια είναι η επίδραση ενός παρεμβατικού προγράμματος στη μαθηματική δημιουργική ικανότητα των μαθητών;

Σημασία και Πρωτοτυπία της Εργασίας

Η ένταξη της δημιουργικότητας στα σχολικά μαθηματικά ενδέχεται να διαφοροποιήσει τη μάθηση των μαθηματικών σε διάφορες διαστάσεις. Πιο συγκεκριμένα, η μαθηματική δημιουργικότητα απαιτεί ευέλικτη γνώση στο γνωστικό πεδίο των μαθηματικών (Polya, 1973 · Silver, 1997) και ανώτερη μαθηματική σκέψη (Ervynck, 1991). Η σύνδεση μαθηματικών εννοιών και ιδεών, η διατύπωση στόχων, η διερεύνηση, οι εναλλαγές μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων, η επιχειρηματολογία, οι συγκρίσεις διαφορετικών στρατηγικών και η κατανόηση του τρόπου με τον οποίο περισσότερες από μια προσεγγίσεις του ιδίου προβλήματος μπορούν να οδηγήσουν σε ισοδύναμα αποτελέσματα αποτελούν σημαντικά στοιχεία ανάπτυξης του μαθηματικού συλλογισμού (Ervynck, 1991· NCTM, 2000 · Polya, 1973 · Yerushalmy, 2009). Πρόσφατα, στόχος των εκπαιδευτικών συστημάτων είναι ο σχεδιασμός κατάλληλων διδακτικών προγραμμάτων που θα μπορούν να ενισχύσουν τη δημιουργική σκέψη σε όλους τους μαθητές και όχι μόνο σε κάποιους εξαιρετικούς μαθητές που φέρουν το «χάρισμα» (Hershkovitz, Peled & Littler, 2009 · Silver, 1997). Για να επιτευχθεί κάτι τέτοιο, είναι απαραίτητη η διεξαγωγή εμπειρικών ερευνών που να επεξηγούν σε ποιο βαθμό μπορεί να διδαχθεί η δημιουργικότητα στα μαθηματικά, δίνοντας στοιχεία για τα χαρακτηριστικά του δημιουργικού ατόμου, του δημιουργικού αποτελέσματος και της δημιουργικής διαδικασίας. Λαμβάνοντας υπόψη τα πιο πάνω, η διεξαγωγή ερευνών που να επικεντρώνονται στη μαθηματική δημιουργικότητα κρίνεται επιτακτική ανάγκη.

Οι ερευνητικές προσπάθειες που έχουν γίνει στη μαθηματική δημιουργικότητα συνήθως επικεντρώνονται στη μονόπλευρη διερεύνηση της έννοιας, χωρίς να λαμβάνουν υπόψη τους τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των επιμέρους στοιχείων που την απαρτίζουν (Batey, 2012). Η παρούσα διατριβή επιχειρεί να προτείνει ένα πολυδιάστατο ορισμό για την έννοια της μαθηματικής δημιουργικότητας, αξιοποιώντας τη θεωρία "4P" που προτάθηκε από το Rhodes (1961) και υιοθετήθηκε από άλλους μετ' έπειτα ερευνητές (π.χ. Klavir & Gorodetsky, 2009 · Plucker, Beghetto, & Dow, 2004). Το μοντέλο 4P ορίζει τη δημιουργικότητα ως μια οντότητα που αποτελείται από τέσσερεις διαστάσεις: το άτομο (person), τη διαδικασία (process), το αποτέλεσμα (product) και το πλαίσιο/περιβάλλον (press). Η συγκεκριμένη θεωρητική προσέγγιση μπορεί να αποτελέσει τη βάση για την ανάπτυξη ενός θεωρητικού πλαισίου που θα συνεισφέρει στη μελέτη των γνωστικών χαρακτηριστικών και των χαρακτηριστικών προσωπικότητας των δημιουργικών μαθητών (άτομο), στη διερεύνηση των γνωστικών υπο-διαδικασιών που εμφανίζονται καθώς οι μαθητές λύνουν μαθηματικά έργα (διαδικασία), στον εντοπισμό και στην αξιολόγηση του αποτελέσματος της δημιουργικής διαδικασίας (αποτέλεσμα) και στο σχεδιασμό κατάλληλων εκπαιδευτικών συνθηκών που ενισχύουν την ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας (περιβάλλον). Αξίζει να αναφερθεί ότι το μοντέλο 4P υιοθετήθηκε κυρίως σε ερευνητικές προσπάθειες στο πεδίο της γενικής δημιουργικότητας και σε κάθε σχεδόν προσπάθεια οι συνιστώσες του μοντέλου 4P μελετήθηκαν η καθεμιά ξεχωριστά, χωρίς να γίνει οποιαδήποτε προσπάθεια για μελέτη των μεταξύ τους επιδράσεων (Kaufman, Plucker & Baer, 2008). Με βάση τα πιο πάνω, η αξιοποίηση του θεωρητικού πλαισίου 4P στη μαθηματική παιδεία αναμένεται να επεκτείνει και να βελτιώσει την υπάρχουσα βιβλιογραφία για τη μαθηματική δημιουργικότητα, οδηγώντας στην ανάπτυξη ενός ολοκληρωμένου θεωρητικού πλαισίου για την έννοια.

Μέχρι πρόσφατα η στατική όψη της δημιουργικότητας, ως χαρακτηριστικό ενός επίλεκτου συνόλου ατόμων, δεν άφηνε χώρο για εμπλοκή της δημιουργικότητας στην «εκπαίδευση για όλους». Αντ' αυτού μια πιο δυναμική όψη της δημιουργικότητας, που τη θεωρεί ως εν δυνάμει χαρακτηριστικό κάθε ατόμου, παρέχει γερό υπόβαθρο για εκπαιδευτικές εφαρμογές (Silver, 1997). Όπως ανέφερε ο Silver (1997), αν και η δημιουργικότητα συνδέεται με τις έννοιες της ιδιοφυίας και του ταλέντου, μπορεί να είναι ιδιαίτερα χρήσιμο αν οι εκπαιδευτικοί των μαθηματικών αντιμετώπιζαν τη δημιουργικότητα ως ικανότητα που μπορεί να ενθαρρυνθεί ευρέως στο σχολικό πληθυσμό. Έτσι, η παρούσα εργασία δεν έχει ως στόχο τη μελέτη μιας επίλεκτης ομάδας ατόμων -των δημιουργικών ατόμων στα μαθηματικά- που μοιράζονται κοινά χαρακτηριστικά, αλλά στοχεύει στη διερεύνηση των χαρακτηριστικών που ευνοούν την εμφάνιση της δημιουργικής συμπεριφοράς στα μαθηματικά και είναι εφαρμόσιμη σε όλο το μαθητικό πληθυσμό.

Σε πρακτικό επίπεδο, η σημαντικότητα της παρούσας διατριβής μπορεί να αναλυθεί στις ακόλουθες δύο διαστάσεις. Πρώτα, η ανάπτυξη ενός θεωρητικού μοντέλου επιτρέπει το σχεδιασμό κατάλληλων εργαλείων για τη μέτρηση της μαθηματικής δημιουργικότητας. Με βάση τις παραμέτρους που κρίνονται ότι συμβάλλουν στη μαθηματική δημιουργικότητα, αναπτύσσονται εργαλεία που μπορούν να αξιοποιηθούν για εκπαιδευτικούς και ερευνητικούς σκοπούς. Δεύτερο, η ανάπτυξη κατάλληλου διδακτικού υλικού που στοχεύει στην ενίσχυση της μαθηματικής δημιουργικότητας ενδέχεται να οδηγήσει στον εμπλουτισμό των ισχυόντων αναλυτικών προγραμμάτων.

Τα αποτελέσματα της παρούσας διατριβής αναμένεται να βοηθήσουν παρόμοιες εργασίες στο πεδίο της μαθηματικής δημιουργικότητας, παρέχοντας ένα θεωρητικό πλαίσιο που ενσωματώνει διάφορους παράγοντες. Παράλληλα, τα αποτελέσματα της διατριβής θα συνεισφέρουν στην επαγγελματική κατάρτιση των εκπαιδευτικών και στο σχεδιασμό αναλυτικών προγραμμάτων για τα μαθηματικά. Μάλιστα, στο πλαίσιο των εκπαιδευτικών μεταρρυθμίσεων, η εργασία θα συνεισφέρει σημαντικές πληροφορίες για τη βελτίωση της διδασκαλίας των μαθηματικών και την ενίσχυση της μάθησης των μαθηματικών.

Περιορισμοί της Εργασίας

Καθώς θα μελετώνται τα αποτελέσματα της παρούσας διατριβής, προτείνεται όπως ληφθούν υπόψη οι περιορισμοί στους οποίους υπόκειται. Κατά πρώτο λόγο, η επιλογή του δείγματος περιορίστηκε σε μαθητές Δ', Ε' και Στ' τάξης δημοτικού σχολείου. Ως εκ τούτου, τα αποτελέσματα της έρευνας δεν αφορούν όλο το ηλικιακό φάσμα της εκπαίδευσης, αλλά περιορίζονται στη μελέτη της δημιουργικότητας σε μαθητές των συγκεκριμένων τάξεων. Ταυτόχρονα, η επιλογή μαθητών δεν ακολούθησε τεχνικές τυχαίας δειγματοληψίας, αλλά επιλέγηκαν τμήματα και σχολεία στα οποία υπήρχε συνεργασία με τους υπεύθυνους εκπαιδευτικούς και διευθυντές. Παρόλο που η παρούσα διατριβή προτείνει ένα θεωρητικό μοντέλο για τη μαθηματική δημιουργικότητα, απαιτούνται μακροχρόνιες έρευνες, αξιοποιώντας ευρύτερο ηλικιακό φάσμα και τυχαία δειγματοληψία, για να εγκυροποιήσουν το προτεινόμενο μοντέλο με την πάροδο του χρόνου.

Πέρα από την επιλογή των υποκειμένων που έλαβαν μέρος στην έρευνα, ένας άλλος περιορισμός προκύπτει από τη χορήγηση των εργαλείων. Οι ομαδικές χορηγήσεις που έγιναν για τη συλλογή των δεδομένων δεν έδωσαν τη δυνατότητα για επεξήγηση των απαιτήσεων των εργαλείων και παρουσίαση παραδειγμάτων σε κάθε μαθητή ξεχωριστά. Παράλληλα, οι ομαδικές χορηγήσεις δεν άφηναν περιθώριο να ζητηθούν διευκρινήσεις από τους μαθητές, στις περιπτώσεις όπου οι απαντήσεις τους δεν ήταν σαφείς.

Περιορισμοί εμφανίστηκαν και κατά την ανάλυση των δεδομένων. Στο εργαλείο μαθηματικής δημιουργικότητας οι μαθητές κλήθηκαν να παρουσιάσουν τις μαθηματικές τους ιδέες και να διατυπώσουν προβλήματα, δραστηριότητες οι οποίες ενέπλεκαν τη χρήση γραπτού λόγου. Κάποιοι μαθητές είχαν δυσκολίες στη λεκτική έκφραση των ιδεών τους, γεγονός που ενδεχομένως να επηρέασε την επίδοσή τους. Ταυτόχρονα, η ανάγκη για ερμηνεία των γραπτών απαντήσεων των μαθητών αύξησε την υποκειμενικότητα στην αξιολόγηση των εργαλείων. Όσον αφορά στο παρεμβατικό πρόγραμμα, ο περιορισμένος αριθμός μαθητών που απετέλεσε την πειραματική ομάδα και την ομάδα ελέγχου δεν επέτρεψε τη διεξαγωγή πιο σύνθετων στατιστικών αναλύσεων.

Δομή της Εργασίας

Η παρούσα εργασία αποτελείται από έξι κεφάλαια. Το πρώτο κεφάλαιο αποτελεί την εισαγωγή στο θέμα μελέτης και περιλαμβάνει το πρόβλημα, το σκοπό της εργασίας και τα ερευνητικά ερωτήματα. Ταυτόχρονα, γίνεται αναφορά στους λόγους που η εργασία θεωρείται σημαντική και πρωτότυπη στον τομέα της καθώς και στη θεωρητική και πρακτική συνεισφορά της στον τομέα της μαθηματικής παιδείας.

Το δεύτερο κεφάλαιο περιλαμβάνει τη σχετική βιβλιογραφία που υπάρχει τόσο στον τομέα της γενικής δημιουργικότητας όσο και στον τομέα της μαθηματικής δημιουργικότητας. Αρχικά γίνεται αναφορά σε θεωρητικά μοντέλα και ορισμούς για την έννοια της δημιουργικότητας. Ακολούθως, η βιβλιογραφική ανασκόπηση επικεντρώνεται σε έρευνες που σχετίζονται με τα γνωστικά χαρακτηριστικά και τα χαρακτηριστικά προσωπικότητας του δημιουργικού ατόμου, τις γνωστικές διαδικασίες που ακολουθεί το δημιουργικό άτομο κατά την επίλυση ανοικτών έργων, τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα και τους τρόπους αξιολόγησης του δημιουργικού αποτελέσματος, καθώς επίσης τις διδακτικές πρακτικές και τα εκπαιδευτικά περιβάλλοντα προς ενίσχυση της δημιουργικής ικανότητας των μαθητών στα μαθηματικά.

Το τρίτο κεφάλαιο περιγράφει τη μεθοδολογία της εργασίας. Συγκεκριμένα, γίνεται αναφορά στα υποκείμενα, στα εργαλεία μέτρησης, στα προτεινόμενα θεωρητικά μοντέλα, στη διαδικασία συλλογής δεδομένων και στις τεχνικές κωδικοποίησης και ανάλυσής τους.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση των δεδομένων. Γίνεται παρουσίαση των ποσοτικών αποτελεσμάτων, τα οποία αφορούν στην επίδοση των μαθητών στα εργαλεία και στα επιμέρους έργα, καθώς επίσης και των ποιοτικών αποτελεσμάτων που προέκυψαν από τις συνεντεύξεις και την παρατήρηση μαθητών καθώς εργάζονται στην επίλυση δημιουργικών έργων. Ταυτόχρονα, ελέγχεται η εγκυρότητα των προτεινόμενων θεωρητικών μοντέλων.

Στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται συζήτηση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν και περιγράφεται ένα ενιαίο εννοιολογικό μοντέλο για τη μαθηματική δημιουργικότητα. Στο τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της παρούσας εργασίας και γίνεται αναφορά στις εκπαιδευτικές εφαρμογές του μοντέλου και σε εισηγήσεις για μελλοντικές έρευνες στο πεδίο.

Εννοιολογικοί Ορισμοί

Δημιουργικότητα

Η δημιουργική ικανότητα εμπλέκει σκέψη που οδηγεί στην παραγωγή καινοτόμων ιδεών (Sternberg, 2006). Χαρακτηρίζεται από γενικά αλλά και ειδικά γνωστικά χαρακτηριστικά. Με άλλα λόγια, υπάρχουν χαρακτηριστικά που μπορούν να αξιοποιηθούν σε οποιαδήποτε γνωστική περιοχή, αλλά και στοιχεία που διαφοροποιούνται ανάλογα με το πλαίσιο στο οποίο εμφανίζεται η δημιουργική συμπεριφορά.

Μαθηματική Δημιουργικότητα

Ο όρος μαθηματική δημιουργικότητα εμπλέκει δύο γνωστικά πεδία: τα μαθηματικά και τη δημιουργικότητα (Haylock, 1987). Εντούτοις, μέχρι στιγμής δεν έχει αναπτυχθεί κάποιο θεωρητικό πλαίσιο που να εξηγά πλήρως τη δομή της έννοιας. Τα κοινά στοιχεία μεταξύ των ορισμών που προτάθηκαν αφορούν την ικανότητα λύσης προβλημάτων με διαφορετικούς τρόπους (π.χ. Leikin, 2009), την εύρεση πολλαπλών λύσεων σε ανοικτά προβλήματα (Leikin, 2009), την ευέλικτη εναλλαγή στον τρόπο σκέψης, στο είδος των αναπαραστάσεων και στις στρατηγικές (π.χ. Klavir & Hershkovitz, 2008 · Krutetskii, 1976· Sheffield, 2009) και την παρουσίαση πρωτότυπων και καινοτόμων μαθηματικών ιδεών (π.χ. Haylock, 1997 · Kim, Cho, & Ahn, 2003 · Milgram & Hong, 2009 · Sheffield, 2009). Οι πιο πάνω ιδέες ενσωματώνουν τις έννοιες της ευχέρειας, της ευελιξίας και της πρωτοτυπίας, όπως ορίστηκαν στη γενική δημιουργικότητα, στο γνωστικό αντικείμενο των μαθηματικών.

Στην παρούσα εργασία ο όρος μαθηματική δημιουργικότητα αποτελεί μια πολυδιάστατη έννοια η οποία εμπερικλείει τις ακόλουθες παραδοχές:

(α) Η δημιουργική εργασία συμβαίνει σε ένα ή περισσότερα πεδία. Με τον όρο μαθηματική δημιουργικότητα αναφερόμαστε στη δημιουργική εργασία που εμφανίζεται αποκλειστικά στο πεδίο των μαθηματικών.

(β) Η δημιουργική ικανότητα στα μαθηματικά αποτελεί χαρακτηριστικό γνώρισμα όλων των μαθητών, άλλων σε μεγαλύτερο και άλλων σε μικρότερο βαθμό.

(γ) Για να είναι δυνατή η εμφάνιση της δημιουργικής ικανότητας των μαθητών στα μαθηματικά απαιτείται αρμονική συνύπαρξη στοιχείων από τις εξής διαστάσεις: άτομο, διαδικασία, αποτέλεσμα, περιβάλλον. Όπως ορίστηκε από τον Kleiman (2005) το δημιουργικό αποτέλεσμα μπορεί να προκύψει από ένα δημιουργικό άτομο που συμμετείχε σε μια δημιουργική διαδικασία μέσα σε ένα δημιουργικό περιβάλλον.

Δημιουργικό Αποτέλεσμα

Το δημιουργικό αποτέλεσμα αποτελεί τη δημόσια όψη της δημιουργικότητας, την απτή μορφή της όλης διαδικασίας (Cropley, 2006). Η παραγωγή πρωτότυπων, ασυνήθιστων, και κατάλληλων λύσεων σε μαθηματικά προβλήματα (Chamberlin & Moon, 2005 · Sriraman, 2005), που εμφανίζουν ένα υψηλό επίπεδο επεξεργασίας μαθηματικών ιδεών (Sheffield, 2000) και ικανοποιούν ένα επίπεδο χρησιμότητας σε σχέση με το σκοπό για τον οποίο εμφανίστηκαν και τους περιορισμούς που έχουν τεθεί (Gardner, 2006 · Sternberg & Lubart, 2000) αποτελούν ενδείξεις του δημιουργικού αποτελέσματος στα μαθηματικά. Η αξιολόγηση του δημιουργικού αποτελέσματος γίνεται εντός του γνωστικού αντικειμένου στο οποίο αναφέρεται και εντός του ευρύτερου κοινωνικού πλαισίου στο οποίο το αποτέλεσμα εντάσσεται (Csikszentmihalyi, 1996 · Gardner, 1994). Το δημιουργικό αποτέλεσμα αξιολογείται με βάση τις έννοιες της πρωτοτυπίας, της ευελιξίας και της ευχέρειας (Klavir & Hershkovitz, 2008 · Leikin & Lev, 2007).

Δημιουργικό Άτομο

Το δημιουργικό άτομο στα μαθηματικά διακατέχεται από γνωστικά χαρακτηριστικά στο συγκεκριμένο πεδίο και ταυτόχρονα αποτελεί μια γενικά δημιουργική προσωπικότητα (Krutetskii, 1976). Η κατοχή μαθηματικών γνώσεων και γενικών δημιουργικών δεξιοτήτων (Amabile, 1996) καθώς επίσης η νοημοσύνη (Torrance, 1962) και η ωρίμανση (Charles & Runco, 2001) συγκαταλέγονται ανάμεσα στα χαρακτηριστικά του δημιουργικού ατόμου. Όσον αφορά στη δημιουργική προσωπικότητα, το θεωρητικό πλαίσιο που προτάθηκε από τους Sternberg και Lubart (1996) ορίζει έξι διακριτά αλλά αλληλοσχετιζόμενα στοιχεία: διανοητικές ικανότητες, γνώσεις, γνωστικό στυλ, προσωπικότητα, κίνητρα και περιβάλλον.

Δημιουργική Διαδικασία

Η δημιουργική διαδικασία αναφέρεται στην περιγραφή μιας σειράς σταδίων, με την οποία το άτομο προσεγγίζει δημιουργικά μια κατάσταση (Johnson & Carruthers, 2006). Στην παρούσα εργασία υιοθετείται το μοντέλο που ανέπτυξε η Sheffield (2009), για να βοηθήσει τους μαθητές να γίνουν πιο δημιουργικοί κατά τη λύση προβλημάτων. Τα πέντε στάδια του μοντέλου είναι η κατασκευή, η συσχέτιση, η διερεύνηση, η επικοινωνία και η αξιολόγηση. Τα στάδια του μοντέλου δεν ακολουθούνται γραμμικά, αλλά η μετάβαση από το ένα στάδιο στο άλλο καθορίζεται από το ίδιο το άτομο.

Δημιουργικό Περιβάλλον

Το δημιουργικό περιβάλλον αναφέρεται στο πλαίσιο στο οποίο το δημιουργικό άτομο ενεργεί, στο χώρο όπου συμβαίνει η δημιουργική δράση και εμφανίζεται το δημιουργικό αποτέλεσμα (Klavir & Gorodetsky, 2009). Λόγω του ότι η ανάπτυξη της δημιουργικής ικανότητας επιδέχεται επιρροή από διδακτικές και εμπειρικές καταστάσεις (Holyoak & Thagard, 1995 · Sternberg, 1988), η ύπαρξη κατάλληλου περιβάλλοντος μπορεί να βοηθήσει προς αυτό το σκοπό. Στο δημιουργικό περιβάλλον εντάσσονται μεταβλητές όπως τα εκπαιδευτικά περιβάλλοντα στα οποία εργάζονται οι μαθητές, οι διδακτικές παρεμβάσεις που οργανώνει ο εκπαιδευτικός για ενίσχυση της μαθηματικής δημιουργικότητας, τα έργα και οι δραστηριότητες που επιλέγονται, οι μέθοδοι αξιολόγησης, η ενσωμάτωση νέων τεχνολογιών και η εφαρμογή της συνεργατικής μάθησης.

Ευχέρεια

Η ευχέρεια αναφέρεται στη ροή των ιδεών (Torrance, 1974). Στη μαθηματική εκπαίδευση αναφέρεται στον αριθμό των μαθηματικά ορθών απαντήσεων που εμφανίζονται σε μια προβληματική κατάσταση (Leikin & Lev, 2007). Σύμφωνα με τους Lev-Zamir και Leikin (2011), η ευχέρεια σχετίζεται με τη συνοχή ιδεών, την ύπαρξη συνδέσεων και τη χρήση βασικών γνώσεων. Για την εμφάνιση μεγάλου αριθμού απαντήσεων και ιδεών απαιτείται συνδυασμός ακρίβειας και ταχύτητας απαντήσεων (Binder, 1996).

Ευελιξία

Η ευελιξία σχετίζεται με τον αριθμό των διαφορετικών ιδεών που εμπλέκονται σε μια λύση (Leikin & Lev, 2007). Η ικανότητα αυτή σχετίζεται με την ευέλικτη εναλλαγή ιδεών και προσεγγίσεων σε μια κατάσταση (Lev-Zamir & Leikin, 2011).

Πρωτοτυπία

Η πρωτοτυπία ορίζεται ως ο βαθμός σπανιότητας των ιδεών που εμφανίζονται σε μια λύση (Leikin & Lev, 2007). Όσο πιο μοναδικές είναι οι ιδέες που εμφανίζονται τόσο πιο πρωτότυπες είναι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

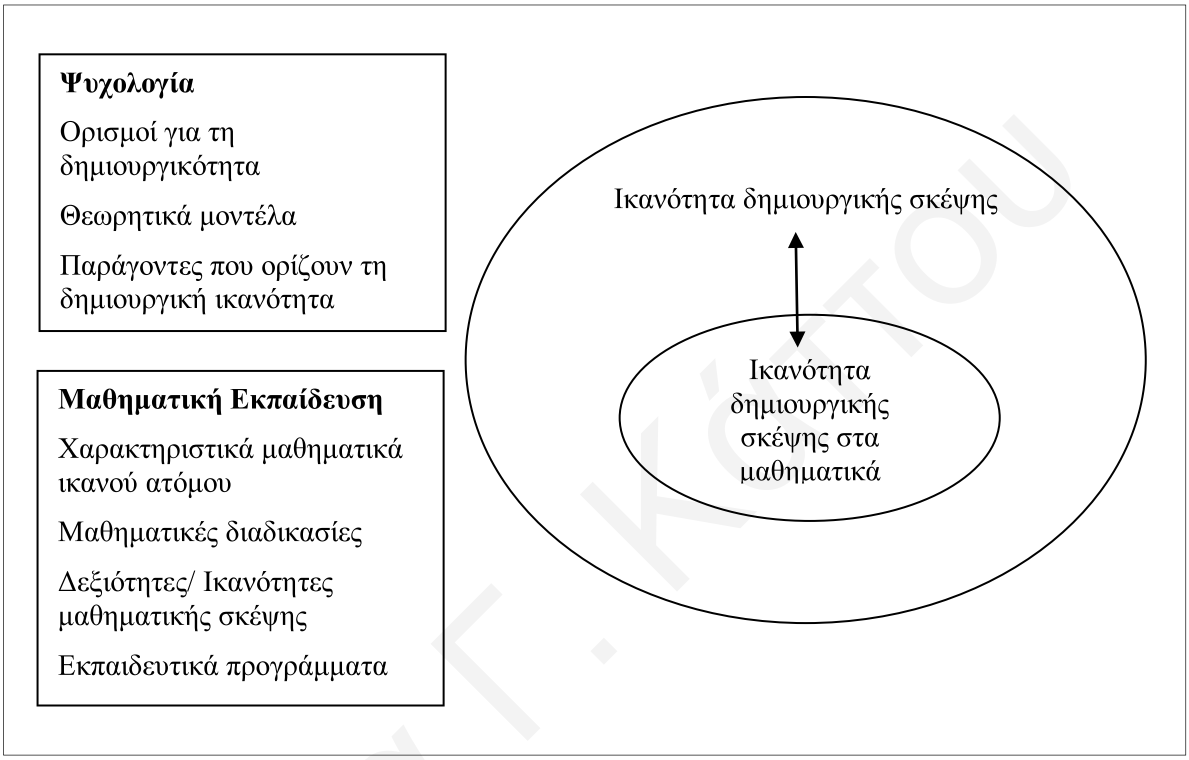
Εισαγωγή

Η έννοια της μαθηματικής δημιουργικότητας εμφανίστηκε για πρώτη φορά το 1902 σε δημοσίευμα του γαλλικού περιοδικού «L' Enseigement Mathematique» (Sriraman, 2005). Στη συνέχεια, λίγες προσπάθειες έγιναν για να ορίσουν επακριβώς την έννοια ή για να αναπτύξουν κάποιο εργαλείο για την αξιολόγησή της (Haylock, 1997 · Sriraman, 2004). Τις τελευταίες δεκαετίες η έρευνα γύρω από τη μαθηματική δημιουργικότητα έχει συστηματικοποιηθεί. Πλέον η μαθηματική δημιουργικότητα έχει ενταχθεί ανάμεσα στους στόχους της εκπαίδευσης (Leikin, 2009 · NCTM, 2000) και θεωρείται ως απαραίτητη συνθήκη για επίτευξη υψηλού επιπέδου μαθηματικής σκέψης (Haylock, 1987· Krutetskii, 1976). Η καθυστέρηση στην εμφάνιση και στην περαιτέρω διερεύνηση του όρου οφείλεται τόσο σε επιστημολογικά εμπόδια που αφορούν τη φύση της δημιουργικότητας, όσο και σε επιστημολογικά εμπόδια που αφορούν τη φύση των μαθηματικών.

Πρώτα πρώτα, η απουσία ενός συγκεκριμένου, λειτουργικού και κοινά αποδεχτού ορισμού για τη γενική δημιουργικότητα περιόρισε τις ερευνητικές προσπάθειες και καθυστέρησε τον ορισμό της έννοιας της μαθηματικής δημιουργικότητας (Haylock, 1987 · Plucker, Beghetto & Dow, 2004). Λόγω του ότι κάθε ορισμός για τη μαθηματική δημιουργικότητα θα πρέπει να αναφέρεται τόσο στα μαθηματικά όσο και στη δημιουργικότητα (Haylock, 1987), οι ερευνητές χρειάζεται να μετακινηθούν από το γνωστικό αντικείμενο των μαθηματικών στη βιβλιογραφία που αναφέρεται στη γενική δημιουργικότητα, για να εντοπίσουν και να υιοθετήσουν τις ιδέες που είναι πιο σχετικές με τη μαθηματική εργασία (Haylock, 1987 · Sriraman, 2005). Έτσι, η απουσία ενός αποδεχτού πλαισίου για τη γενική δημιουργικότητα δυσκόλεψε τον ορισμό της μαθηματικής δημιουργικότητας. Παράλληλα, η συζήτηση αν η δημιουργικότητα αποτελεί μια γενική ικανότητα εφαρμόσιμη σε κάθε γνωστικό αντικείμενο (γενική δημιουργικότητα) ή μια ειδική ικανότητα, που είναι εξειδικευμένη σε κάθε πεδίο (ειδική δημιουργικότητα), απέτρεπε τους ερευνητές να εστιαστούν σε ένα γνωστικό αντικείμενο, για παράδειγμα στο αντικείμενο των μαθηματικών. Έτσι μέχρι και τα μέσα του 20ου αιώνα οι έρευνες περιορίζονταν στη διερεύνηση της γενικής δημιουργικότητας ενώ πολύ αργότερα ξεκίνησε το ενδιαφέρον να στρέφεται στη μαθηματική δημιουργικότητα. Ακόμα και οι πρώτες έρευνες που έλαβαν υπόψη τους την ειδική δημιουργικότητα, συμπεριέλαβαν τα μαθηματικά στη γενικότερη γνωστική περιοχή των φυσικών επιστημών (Kaufman & Baer, 2004 · Oral, Kaufman, & Agars, 2007).

Η ίδια η φύση των μαθηματικών αποξένωσε τη μαθηματική εκπαίδευση από τη δημιουργικότητα, αφού οι δύο έννοιες θεωρούνταν ως ασύνδετες (Meissner, 2000 · Pehkonen, 1997). Ο Derek Haylock (1985) στο άρθρο του «Conflicts in the assessment and encouragement of mathematical creativity in schoolchildren», διαλέγεται τους λόγους που προκάλεσαν το χάσμα μεταξύ μαθηματικών και δημιουργικότητας. Κατά πρώτο λόγο, η έμφαση των μαθηματικών στην ακρίβεια και στην ταχύτητα των αριθμητικών πράξεων και των μαθηματικών διαδικασιών περιόριζε τις ευκαιρίες για πρωτότυπες συνδέσεις και εφαρμογές των μαθηματικών ιδεών (Haylock, 1985). Δεύτερο, η αντίληψη ότι τα μαθηματικά κυβερνούνται από ένα σύνολο κανόνων και λογικών διαδικασιών που οι μαθητές καλούνται να μάθουν και να εφαρμόσουν, απορρίπτει τη δυνατότητα ανάπτυξης δημιουργικής και ευέλικτης σκέψης (Haylock, 1985). Τρίτο, η τάση για συστηματικοποίηση των μεθόδων επίλυσης και των μαθηματικών ιδεών δεν αφήνει περιθώρια για ανάπτυξη δημιουργικών προσεγγίσεων (Haylock, 1985). Από τη στιγμή που οι μαθητές δεν είναι ικανοί να ξεπερνούν τα στερεότυπα σχήματα, για να επιλύσουν ένα πρόβλημα ή δεν είναι σε θέση να αντιληφθούν με ποιο τρόπο τα μαθηματικά συνδέονται με τις τέχνες και τις επιστήμες, δύσκολα μπορούν να εμφανίσουν δημιουργική συμπεριφορά στα μαθηματικά (Bolden, Harries & Newton, 2010 · Krutetskii, 1976).

Όπως φαίνεται από την πιο πάνω συζήτηση, οποιαδήποτε ερευνητική προσπάθεια που επικεντρώνεται στη μαθηματική δημιουργικότητα συνδυάζει θεωρητικά πλαίσια και ερευνητικά ευρήματα από (α) τον τομέα της ψυχολογίας, με έμφαση στη φύση και στους παράγοντες που σχετίζονται με τη δημιουργική ικανότητα και (β) τον τομέα της μαθηματικής εκπαίδευσης. Πιο συγκεκριμένα, η βιβλιογραφική ανασκόπηση της εργασίας μεταφέρει ερευνητικά αποτελέσματα από τον τομέα της ψυχολογίας στον τομέα της μαθηματικής εκπαίδευσης. Το θεωρητικό υπόβαθρο της παρούσας εργασίας αντλεί ορισμούς και μελετά παράγοντες που επηρεάζουν τη γενική ικανότητα δημιουργικής σκέψης από τον τομέα της ψυχολογίας, όπως παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 2.1. Ως γενικό πλαίσιο για την παρούσα εργασία υιοθετείται το θεωρητικό μοντέλο 4P που προτάθηκε από το Mel Rhodes (1961), εντάσσοντας στοιχεία από άλλα θεωρητικά μοντέλα, όπως την Investment Theory (Sternberg & Lubart, 1996) και το Componential Model of Creativity (Amabile, 1983, 1996). Από τον τομέα της μαθηματικής εκπαίδευσης, αξιοποιούνται τα χαρακτηριστικά του μαθηματικά ικανού ατόμου, των μαθηματικών διαδικασιών και των κατάλληλων εκπαιδευτικών προγραμμάτων για ενίσχυση της μαθηματικής ικανότητας. Η σύνθεση των θεωρητικών αποτελεσμάτων από τον τομέα της ψυχολογίας και της μαθηματικής εκπαίδευσης σκιαγραφεί τα στοιχεία που ορίζουν την ικανότητα δημιουργικής σκέψης στα μαθηματικά, καθώς και τη μεταξύ τους σχέση.



Διάγραμμα 2.1. Η δομή του θεωρητικού υπόβαθρου.

Προσεγγίσεις για τη διερεύνηση της δημιουργικότητας

Η ανάπτυξη ορισμών και θεωρητικών μοντέλων για την έννοια της δημιουργικότητας απασχόλησε ιδιαίτερα τους ερευνητές κατά τις τελευταίες δεκαετίες (Bolden, Harries & Newton, 2010 · Eysenck, 1996 · Feldhusen & Goh, 1995 · Mayer, 1999 · Starko, 1995). Ως εκ τούτου, διάφοροι ορισμοί έχουν προταθεί για τη συγκεκριμένη έννοια, χωρίς όμως κάποιος από αυτούς να επιτυγχάνει να την προσδιορίσει πλήρως (Shaughnessy, 1998). Πιο συγκεκριμένα, οι ορισμοί που έχουν προταθεί εμφανίζουν ουσιαστικές διαφορές που αφορούν τα στοιχεία που αποτελούν ή σχετίζονται με τη δημιουργικότητα. Για παράδειγμα, κάποιοι ορισμοί συνδέουν τη δημιουργικότητα με τη νοημοσύνη (π.χ. Getzels & Jackson, 1962 · Prince, 2006 · Sternberg, 1985), άλλοι με την ενόραση (π.χ. Boden, 1990 · Sriraman, 2005) και άλλοι τη θεωρούν συγκεκριμένο είδος σκέψης (π.χ. Cropley, 2001 · Mumford & Gustafson, 1988). Μια άλλη βασική διαφορά ανάμεσα στους ορισμούς που έχουν προταθεί, αφορά το μέσο έκφρασης της δημιουργικότητας. Οι Treffinger, Young, Selby και Shepardson (2002) εντόπισαν πάνω από 100 ορισμούς στους οποίους η δημιουργικότητα αποτελεί προσωπική δραστηριότητα και επικεντρώνονται στα προσωπικά χαρακτηριστικά του δημιουργικού ατόμου (π.χ. Runco, 2007 · Sternberg, 2006). Παράλληλα, η δημιουργικότητα έχει περιγραφεί ως μια σειρά από γνωστικές διαδικασίες (π.χ. Treffinger, Isaksen & Dorval, 1994 · Wallas, 1926) ή ως ένα σύνολο χαρακτηριστικών που περιγράφουν το δημιουργικό αποτέλεσμα (π.χ. Sternberg & Lubart, 1999 · Sternberg & Lubart, 2000 · Weisberg, 1993). Επίσης, προτάθηκαν ορισμοί που δίνουν έμφαση στο περιβάλλον όπου λαμβάνει χώρο η δημιουργική διαδικασία και ταυτόχρονα αξιολογείται το δημιουργικό αποτέλεσμα (π.χ. Csikszentmihalyi, 1990 · Csikszentmihalyi, 1996).

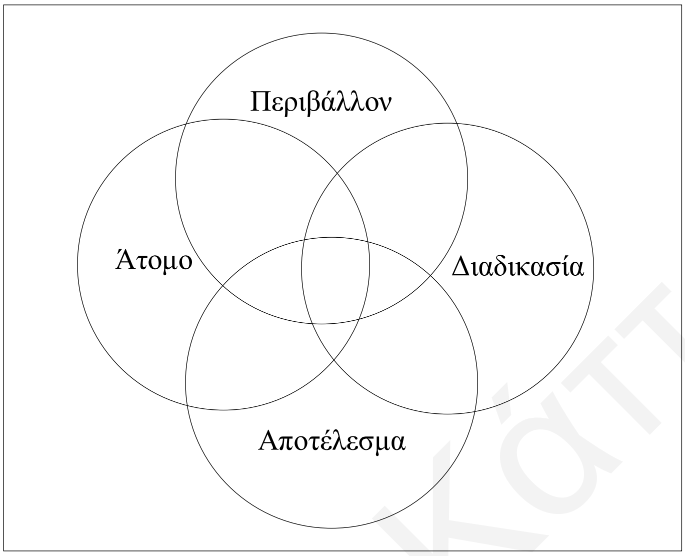
Σε μια προσπάθεια οργάνωσης των ορισμών που προτάθηκαν για τη δημιουργικότητα στην πάροδο του χρόνου, οι Sternberg και Lubart (1996) περιέγραψαν έξι προσεγγίσεις με βάση τις οποίες προσεγγίστηκε η έννοια. Αρχικά, οι δημιουργικές ιδέες θεωρούνταν μυστικιστικές, ήταν δηλαδή μια πνευματική διαδικασία, που δεν άφηνε περιθώρια σε ερευνητικές μελέτες. Η *μυστικιστική* προσέγγιση στηριζόταν στην παραδοχή ότι η δημιουργικότητα είναι αποτέλεσμα έμπνευσης που προέρχεται από μια ανώτερη δύναμη. Η μυστικιστική προσέγγιση αντικαταστάθηκε σταδιακά από την *πραγματιστική* προσέγγιση, όπου το ερευνητικό ενδιαφέρον στράφηκε στον τρόπο ανάπτυξης της δημιουργικότητας παρά στην κατανόησή της. Η ανάγκη για αξιολόγηση της δημιουργικότητας οδήγησε στην ανάπτυξη *ψυχομετρικών* προσεγγίσεων, οι οποίες στοχεύουν στην ποσοτικοποίηση της έννοιας με τη χρήση κατάλληλων εργαλείων. Κατά τη δεκαετία του 1980-1990 η έμφαση απομακρύνθηκε από τη μελέτη μετρήσιμων αποτελεσμάτων και προσεγγίσεων που σχετίζονταν με το αποτέλεσμα της δημιουργικής διαδικασίας σε προσεγγίσεις που επικεντρώθηκαν στην κατανόηση του μυαλού. Ως εκ τούτου, η *ψυχοδυναμική* προσέγγιση στηρίχθηκε στη μελέτη της συνειδητής και ασυνείδητης πραγματικότητας του ατόμου. Πιο πρόσφατα υιοθετήθηκαν *γνωστικές* προσεγγίσεις για την κατανόηση των νοερών αναπαραστάσεων και των διαδικασιών που υποθάλπουν της δημιουργικής σκέψης. Η σημασία του κοινωνικοπολιτιστικού περιβάλλοντος στην εμφάνιση, ενίσχυση και ανάπτυξη της δημιουργικότητας προκάλεσαν το ενδιαφέρον για χρήση *κοινωνικών* προσεγγίσεων στη μελέτη της έννοιας.

Λόγω του ότι η δημιουργικότητα αποτελεί ένα πολυδιάστατο φαινόμενο παρά μια απλή θεωρητική δομή (MacKinnon, 1970), τα σύγχρονα θεωρητικά μοντέλα είναι αποτέλεσμα συμβολής ενός ή περισσότερων προσεγγίσεων (π.χ. Csikszentmihalyi, 1988 · Sternberg & Lubart, 1996). Η επόμενη ενότητα επικεντρώνεται στην παρουσίαση του θεωρητικού μοντέλου στο οποίο στηρίζεται η παρούσα εργασία και ακολούθως γίνεται ανάλυση των τεσσάρων συνιστωσών του (Άτομο, Διαδικασία, Αποτέλεσμα, Περιβάλλον), αξιοποιώντας ορισμούς και θεωρητικά στοιχεία από τον τομέα της γενικής δημιουργικότητας και της μαθηματικής παιδείας.

Μοντέλο 4P

Ο Mel Rhodes μελετώντας τη δημιουργικότητα στα μέσα του 20$^{\text{ου}}$ αιώνα αντιλήφθηκε ότι η συγκεκριμένη έννοια δεν είναι απλή και ούτε καν μονοδιάστατη. Με τα δικά του λόγια: «Η δημιουργικότητα δεν μπορεί να ερμηνευθεί ... από ένα μόνο παράγοντα, ανεξαρτήτως του πόσο σημαντικός μπορεί να είναι αυτός» (Rhodes, 1961, σ. 306). Έτσι στην προσπάθειά του να ερμηνεύσει την πολυμορφική φύση της δημιουργικότητας διερεύνησε διάφορους ορισμούς για την έννοια και συμπέρανε ότι όλοι οι ορισμοί εστιάζονται γύρω από τέσσερις συνιστώσες, οι οποίες επικαλύπτονται και αλληλοσχετίζονται: το δημιουργικό άτομο (Person), τη δημιουργική διαδικασία (Process), το δημιουργικό αποτέλεσμα (Product) και το δημιουργικό συγκείμενο/ περιβάλλον (Press). Ο Isaksen (1987) ονόμασε την προσέγγιση του Rhodes ως 4P και την αναπαρέστησε ως τέσσερις κύκλους που επικαλύπτονται, όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 2.2.

Η πρώτη συνιστώσα αναφέρεται στον άνθρωπο και περιλαμβάνει στοιχεία για τις γνωστικές ικανότητες, την προσωπικότητα και τα χαρακτηριστικά του δημιουργικού ατόμου. Η διαδικασία περιγράφει τη νοητική διεργασία που είναι ενεργή κατά τη δημιουργία ιδεών. Αναφέρεται, δηλαδή, στα στάδια, στα βήματα, στις δράσεις ή στις συμπεριφορές που διενεργούνται μέχρι την εμφάνιση του δημιουργικού αποτελέσματος. Όσον αφορά στο αποτέλεσμα, περιλαμβάνει τις ιδέες εκφραζόμενες λεκτικά ή πρακτικά, οι οποίες αξιολογούνται με συγκεκριμένα κριτήρια. Τέλος, το συγκείμενο αναφέρεται στη σχέση μεταξύ του ατόμου και του περιβάλλοντος. Παρόλο που οι τέσσερις συνιστώσες του μοντέλου μπορούν να εξεταστούν ξεχωριστά, εντούτοις δεν λειτουργούν απομονωμένα η μια από την άλλη (Isaksen, Murdock, Firestien, & Treffinger, 1993). Οι τέσσερις συνιστώσες του μοντέλου αλληλεπιδρούν συνεχώς, καθώς ένα δημιουργικό άτομο εφαρμόζει μια δημιουργική διαδικασία, για να αναπτύξει ένα δημιουργικό αποτέλεσμα εντός ενός περιβάλλοντος (Firestien, 1993 · Jones, 1993).



Διάγραμμα 2.2. Το θεωρητικό μοντέλο 4P για τη δημιουργικότητα.

Θεωρητικά μοντέλα που περιλαμβάνουν τις τέσσερις συνιστώσες, προτάθηκαν κατά καιρούς και από άλλους ερευνητές, με μικρές διαφοροποιήσεις. Για παράδειγμα, ο Mooney (1963) αντικατέστησε τον όρο συγκείμενο με τον όρο περιβάλλον, ενώ ο Golann (1963) με τον όρο μέτρηση. Ακολούθως, οι Dellas και Gaier (1970) παρέφρασαν το μοντέλο του Rhodes, τροποποιώντας τους αρχικούς όρους και ορίζοντάς τους ως: η φύση του ατόμου, η διαδικασία κατά τη δημιουργία, η φύση και η ποιότητα του αποτελέσματος, και περιβαλλοντικοί παράγοντες. Παραλλαγή του μοντέλου 4P αποτελεί και το μοντέλο COCO που προτάθηκε από τον Treffinger (1988, 1991). Σύμφωνα με αυτό το μοντέλο, η δημιουργική συμπεριφορά προκύπτει από τις δυναμικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των εξής στοιχείων: Χαρακτηριστικά (Characteristics), Λειτουργίες (Operations), Συγκείμενο (Context) και Αποτελέσματα (Outcomes). Τα Χαρακτηριστικά αναφέρονται στην προσωπικότητα του δημιουργικού ατόμου, οι Λειτουργίες περιλαμβάνουν τις στρατηγικές και τις τεχνικές που εφαρμόζουν τα άτομα για να λύσουν προβλήματα, να λάβουν αποφάσεις και να οργανώσουν τις σκέψεις του. Το Συγκείμενο περιλαμβάνει το πολιτισμικό πλαίσιο, το κλίμα και τη δυναμική του περιβάλλοντος, όπως η επικοινωνία και η συνεργασία, καθώς επίσης το φυσικό περιβάλλον στο οποίο δρα το άτομο. Τα Αποτελέσματα είναι τα προϊόντα και οι ιδέες που προκύπτουν από την προσπάθεια του ατόμου. Όπως αναφέρει η Babij (2001), παρόλες τις παραλλαγές που προτάθηκαν στο αρχικό μοντέλο, το μοντέλο 4P έτυχε μεγάλης αποδοχής από τους ερευνητές στο χώρο της δημιουργικότητας. Το μοντέλο 4P κατάφερε να συνδέσει διαφορετικούς ορισμούς για τη δημιουργικότητα, δημιουργώντας ένα ευέλικτο πλαίσιο που δίνει νόημα στην πολυδιάστατη φύση της έννοιας (Isaksen, Murdock, Firestien, & Treffinger, 1993).

Η αξιοποίηση του θεωρητικού μοντέλου 4P στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας εξυπηρετεί τρεις αλληλένδετους στόχους. Πρώτο, αναγνωρίζει τη σύνθετη φύση της δημιουργικότητας, περιλαμβάνοντας γνωστικά χαρακτηριστικά και χαρακτηριστικά προσωπικότητας, και συνδέοντάς τα με περιβαλλοντικούς και άλλους κοινωνικούς παράγοντες. Δεύτερο, αναγνωρίζει τη δυναμική και αναπτυξιακή φύση της δημιουργικής ικανότητας, με την έννοια ότι η δημιουργικότητα μπορεί να αναπτυχθεί σε κατάλληλο περιβάλλον. Τρίτο, η ανάπτυξη της δημιουργικότητας δεν επικεντρώνεται μόνο σε ένα υποσύνολο παιδιών που έχουν εντοπιστεί ως δημιουργικά, αλλά απευθύνεται σε όλους τους μαθητές. Αν και οι συνιστώσες- άτομο, διαδικασία, αποτέλεσμα, περιβάλλον- μπορούν να υπάρξουν ανεξάρτητα και να μελετηθούν αποσπασματικά, μόνο αν αντιμετωπιστούν ως ολότητα θα ορίσουν πλήρως την έννοια της δημιουργικότητας (Rhodes, 1961). Έτσι, η σύζευξη και των τεσσάρων συνιστωσών σε μια εργασία για τη δημιουργικότητα προσδίδει πιο νοηματικό και περιεκτικό περιεχόμενο στην έννοια (Kleiman, 2005).

Δημιουργικότητα στη μαθηματική εκπαίδευση

Στο πλαίσιο της παρούσας διατριβής το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στη δημιουργική ικανότητα ειδικά στο γνωστικό αντικείμενο των μαθηματικών. Έτσι, το θεωρητικό υπόβαθρο που ακολουθεί εστιάζεται στη μαθηματική δημιουργικότητα, αξιοποιώντας πολλές φορές στοιχεία από τη βιβλιογραφία που αναφέρονται στη γενική δημιουργικότητα.

Κάθε προσπάθεια ορισμού της μαθηματικής δημιουργικότητας θα πρέπει να ενσωματώνει στοιχεία από τον τομέα της δημιουργικότητας και ταυτόχρονα από την επιστήμη των μαθηματικών (Haylock, 1987). Σε κάποιες περιπτώσεις οι ερευνητές καταφεύγουν στη γενική δημιουργική ικανότητα, για να επιλέξουν τις ιδέες που σχετίζονται με τον τομέα των μαθηματικών (Haylock, 1987), ενώ άλλες φορές αναπτύσσουν ορισμούς που αναφέρονται αποκλειστικά σε δεξιότητες από το γνωστικό αντικείμενο των μαθηματικών και ιδιαίτερα δεξιότητες που εμφανίζονται κατά την επίλυση προβλήματος (Kattou, Kontoyianni, Pitta-Pantazi, Christou, & Cleanthous, 2011).

Στην πρώτη κατηγορία ορισμών περιλαμβάνονται οι ερευνητικές προσπάθειες των Krutetskii (1976), Ervynck (1991), Silver (1997), Haylock (1997), Kim, Cho και Ahn (2003), Leikin και Lev (2007). Οι ορισμοί αυτοί υιοθετούν τις έννοιες της ευελιξίας, της ευχέρειας και της πρωτοτυπίας, όπως προτάθηκαν από τον Torrance (1974, 1995), στο πλαίσιο των μαθηματικών. Συγκεκριμένα, οι ερευνητές μελέτησαν τη μαθηματική δημιουργικότητα αξιοποιώντας μαθηματικά έργα με πολλαπλές λύσεις ή μεθόδους επίλυσης. Σε αυτό το πλαίσιο, η ευχέρεια αναφέρεται στον αριθμό των ορθών και διαφορετικών λύσεων που προτείνονται, η ευελιξία στις εναλλαγές μεταξύ διαφορετικών ιδεών και τέλος, η πρωτοτυπία αναφέρεται στο βαθμό καινοτομίας των προτεινόμενων λύσεων (Leikin, 2007). Ταυτόχρονα, κατά την επίλυση προβλημάτων με πολλαπλές λύσεις, ο Holland (στο Imai, 2000) πρόσθεσε τα στοιχεία της επεξεργασίας, δηλαδή της επέκτασης ή της βελτίωσης μεθόδων και της ευαισθησίας, με άλλα λόγια της εποικοδομητικής κριτικής των κοινότυπων μεθόδων, ως κριτήρια της μαθηματικής δημιουργικότητας.

Στη δεύτερη κατηγορία περιλαμβάνονται ορισμοί που έχουν ως επίκεντρο τη λύση προβλήματος. Για παράδειγμα, ο Polya (1954) όρισε τη μαθηματική δημιουργικότητα ως την ικανότητα επίλυσης προβλήματος με ευρετικές μεθόδους και ο Ervynck (1991) ως την ικανότητα επίλυσης προβλήματος για ανάπτυξη της σκέψης σε δομές. Πιο πρόσφατα, οι Bahar και Maker (2011) αναφέρθηκαν στη μαθηματική δημιουργικότητα ως την ικανότητα παραγωγής καινοτόμων λύσεων σε μαθηματικά προβλήματα, εφαρμόζοντας μαθηματικές αρχές και ιδιότητες με πολλούς, διαφορετικούς τρόπους για την παραγωγή ορθών μαθηματικών απαντήσεων. Πέρα από την επίλυση προβλημάτων, η ικανότητα διατύπωσης μαθηματικών προβλημάτων περιλαμβάνεται σε ορισμούς για το δημιουργικό άτομο (Krutetskii, 1976 · Silver, 1997).

Ο Aiken (1973) παρατήρησε ότι οι ορισμοί για τη μαθηματική δημιουργικότητα επικεντρώνονται συνήθως σε διαδικασίες σκέψης που ενδεχομένως θα εμφανιστούν κατά τη δημιουργική εργασία. Η παρατήρηση μοτίβων με αριθμούς ή σχήματα (Freiman & Sriraman, 2011), η διάκριση ή η επιλογή στοιχείων που πληρούν συγκεκριμένα κριτήρια (Hadamard, 1945) και η επέκταση μοτίβων με πρωτότυπους τρόπους (Cornish & Wines, 1980) περιλαμβάνονται στις δημιουργικές διαδικασίες. Ταυτόχρονα, η ικανότητα εντοπισμού σχέσεων μεταξύ ασύνδετων ιδεών (Tammadge, 1979 στο Haylock, 1987) και κατ' επέκταση η ικανότητα αφαίρεσης και γενίκευσης μαθηματικών εννοιών (Haylock, 1985 · Krutetskii, 1976) θεωρούνται ως ανωτέρου επιπέδου διαδικασίες σκέψης, απαραίτητες για τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά (Ervynck, 1991). Πιο πρόσφατα, σε ορισμούς για τη μαθηματική δημιουργικότητα αναφέρθηκε η ικανότητα εφαρμογής μη αλγοριθμικών διαδικασιών για τη λήψη απόφασης (Sriraman, 2005), ο ευέλικτος χειρισμός πληροφοριών και η ικανότητα αντιστροφής διαδικασιών (Sheffield, 2008).

Η ποικιλομορφία των ορισμών που έχουν προταθεί για τη μαθηματική δημιουργικότητα, δεν θα πρέπει να αποτελεί βαρύ παιδαγωγικό εμπόδιο. Ανεξαρτήτως του ορισμού που υιοθετείται σε κάθε ερευνητική προσπάθεια, η ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας σε όλους τους μαθητές θα πρέπει να είναι ένας από τους κύριους στόχους της μαθηματικής παιδείας στα σχολεία (Leikin, 2009).

Η μαθηματική δημιουργικότητα σε μαθητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης

Η πλειοψηφία των ορισμών για τη δημιουργικότητα εμπλέκει την παραγωγή ενός πρωτότυπου αποτελέσματος ή τη γένεση μιας καινοτόμας ιδέας. Εντούτοις, όταν το πλαίσιο αναφοράς της έννοιας είναι η πρωτοβάθμια εκπαίδευση ο ορισμός της δημιουργικότητας τροποποιείται, μιας και δεν αναμένεται από μαθητές δημοτικού σχολείου η παραγωγή ενός άγνωστου και ταυτόχρονα ουσιώδους, για τη μαθηματική κοινότητα, συμπεράσματος (Koichu & Orey, 2010). Ως εκ τούτου, εντάχθηκαν οι όροι απόλυτη και σχετική δημιουργικότητα (absolute - relative creativity), σε μια προσπάθεια να επεξηγηθούν οι δημιουργικές ικανότητες σε συγκεκριμένες ομάδες πληθυσμού (Koichu & Orey, 2010 · Leikin, 2009 · Liljedahl & Sriraman, 2006 · Sriraman, 2005).

Η απόλυτη δημιουργικότητα σχετίζεται με «μεγάλες ιστορικές στιγμές» (όροι του Vygotsky, 1982 στο Leikin, 2009) και ανακαλύψεις που έτυχαν ευρείας αποδοχής (Leikin, 2009). Αναφέρεται, δηλαδή, σε καινοτόμες ιδέες και σε γεγονότα που άλλαξαν την ιστορία. Σε αντίθεση, η σχετική δημιουργικότητα αναφέρεται σε ανακαλύψεις ενός ατόμου, σε σχέση με μια συγκεκριμένη ομάδα αναφοράς (Vygotsky, 1982 στο Leikin, 2009). Με άλλα λόγια, με την έννοια της σχετικής δημιουργικότητας ένα μαθηματικό αποτέλεσμα είναι νέο κυρίως για ένα άτομο ή για την ομάδα που το δημιούργησε (Leikin, 2009). Η Leikin (2009) αναφέρει ότι το αποτέλεσμα κρίνεται ως δημιουργικό με βάση τις προηγούμενες εμπειρίες του ατόμου που το πρότεινε καθώς και σε σχέση με την επίδοση άλλων ατόμων με παρόμοιο εκπαιδευτικό υπόβαθρο. Από τους πιο πάνω ορισμούς διαφαίνεται ότι η απόλυτη δημιουργικότητα σπάνια μπορεί να εμφανιστεί στο σχολικό περιβάλλον (Koichu & Orey, 2010), ενώ η ανάπτυξη της σχετικής δημιουργικότητας σε όλους τους μαθητές θεωρείται στις μέρες μας ως ένας από τους πιο σημαντικούς στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης (Koichu & Orey, 2010 · Sriraman, 2005 · Sriraman, 2008).

Πέρα από τους όρους απόλυτη και σχετική δημιουργικότητα, άλλοι δόκιμοι όροι χρησιμοποιήθηκαν από τους ερευνητές, για να χαρακτηρίσουν τη δημιουργικότητα ανάλογα με το «βαθμό» εμφάνισής της. Ο Mayer (1999) χρησιμοποίησε τους όρους προσωπική και κοινωνική δημιουργικότητα. Η προσωπική δημιουργικότητα αναφέρεται στην εμφάνιση μιας νέας, για το άτομο που την προτείνει, ιδέας. Η κοινωνική δημιουργικότητα αναφέρεται στην εμφάνιση μιας ιδέας που είναι νέα και χρήσιμη για το κοινωνικό και πολιτισμικό πλαίσιο στο οποίο παράγεται. Το NACCCE (1999) αναφέρθηκε στους όρους ατομική, σχετική και ιστορική δημιουργικότητα. Πέρα από την ατομική και την ιστορική δημιουργικότητα που αντιστοιχούν με την προσωπική και την κοινωνική δημιουργικότητα που όρισε ο Mayer (1999), η σχετική δημιουργικότητα αναφέρεται στην παραγωγή καινοτόμου αποτελέσματος σε σχέση με ένα σύνολο ατόμων με κοινά χαρακτηριστικά (π.χ. συμμαθητές). Επίσης, οι έννοιες μεγάλο C (Big C) και μικρό c (little c) χρησιμοποιήθηκαν για να διακρίνουν τα διαφορετικά επίπεδα δημιουργικότητας. Ο Gardner (1993) αναφέρθηκε στο μεγάλο C για να περιγράψει τη δημιουργικότητα επιφανών ατόμων, όπως ο Freud και ο Picasso, ενώ στο μικρό c για να περιγράψει τη δημιουργικότητα που εμφανίζουν τα άτομα στην καθημερινή τους ζωή.

Ανεξαρτήτως από τους όρους που χρησιμοποιήθηκαν για τη διάκριση των επιπέδων δημιουργικότητας, οι ερευνητές φαίνεται να συμφωνούν ότι όλα τα άτομα είναι δημιουργικά, όχι με την έννοια ότι μπορούν να παρουσιάσουν εγνωσμένου κύρους εργασία, αλλά ότι μπορούν να εμφανίσουν δημιουργική συμπεριφορά στην καθημερινότητά τους. Για παράδειγμα σε σχολικό επίπεδο, ο Sriraman (2005) ορίζει τη μαθηματική δημιουργικότητα ως τη διαδικασία που καταλήγει σε ασυνήθιστες και πρωτότυπες λύσεις σε ένα δοθέν πρόβλημα και ως την ικανότητα διατύπωσης νέων ερωτήσεων που θα επιτρέψουν σε ένα παλιό πρόβλημα να αντιμετωπιστεί υπό νέα οπτική γωνία. Οι δημιουργικοί μαθητές στα μαθηματικά ενδέχεται να αναπτύξουν κατανόηση για τα συμβολικά συστήματα και τις μαθηματικές διαδικασίες, καθώς επίσης να επινοήσουν τρόπους εύρεσης, ελέγχου και επεξήγησης των λύσεων που προτείνουν (Bolden, Harries & Newton, 2010 · Haylock, 1987). Πάντα, δηλαδή, η μαθηματική δημιουργικότητα σε μαθητές εξαρτάται από το συγκείμενο και αξιολογείται σε σχέση με τις προηγούμενες εμπειρίες τους, την επίδοση άλλων μαθητών που έχουν παρόμοιο εκπαιδευτικό υπόβαθρο και την εμφάνιση μεθόδων ή λύσεων που δεν ήταν αναμενόμενες στο συγκεκριμένο συγκείμενο από τα συγκεκριμένα άτομα (Liljedahl & Sriraman, 2006 · Zazkis & Holton, 2009).

Ορίζοντας τη μαθηματική δημιουργικότητα στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας

Για τη μελέτη της μαθηματικής δημιουργικότητας θα αξιοποιηθεί το θεωρητικό μοντέλο 4P. Όπως οι Klavir και Gorodetsky (2009) ανέφεραν, το θεωρητικό μοντέλο 4P περικλείει τις διαφορετικές όψεις της δημιουργικότητας και προσφέρεται για μια συνεκτική και ολοκληρωμένη διερεύνηση της έννοιας. Η μελέτη των τεσσάρων διαστάσεων ως ολότητα- άτομο, διαδικασία, αποτέλεσμα, περιβάλλον- επιτρέπει τον καθορισμό της έννοιας αλλά και τις μεταξύ τους σχέσεις (Hasirci & Demirkan, 2003). Η μελέτη κάθε διάστασης ξεχωριστά δείχνει μια αποσπασματική εικόνα για την έννοια. Για παράδειγμα, η δημιουργική διαδικασία δεν θα μπορούσε να αντιμετωπιστεί ξεκομμένα από το δημιουργικό άτομο, αφού εντός του ατόμου υπάρχει ένα σύνθετο σύστημα γνωστικών δεξιοτήτων, προσωπικών παραγόντων, κινήτρων, γνωστικών στυλ, στρατηγικών και μεταγνωστικών ικανοτήτων που εργάζονται ταυτόχρονα για να οδηγήσουν σε δημιουργικές συμπεριφορές. Ταυτόχρονα, η διαδικασία δεν θα μπορούσε να ειδωθεί ανεξάρτητα από το αποτέλεσμα, αφού το αποτέλεσμα θα κρίνει την επιτυχία ή την αποτυχία της δημιουργικής προσπάθειας. Από την άλλη, το περιβάλλον είναι αυτό που θα κρίνει την ορθότητα και την αποτελεσματικότητα της διαδικασίας ή του αποτελέσματος.

Δημιουργικό αποτέλεσμα

«Το σημείο εκκίνησης όλων των ερευνητικών προσπαθειών για τη δημιουργικότητα αποτελεί η ανάλυση του δημιουργικού αποτελέσματος, ο καθορισμός του τι το διαφοροποιεί από τα υπόλοιπα» (MacKinnon, 1978, σ. 187). Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το δημιουργικό αποτέλεσμα αποτελεί τη δημόσια όψη της δημιουργικότητας, την απτή μορφή της όλης διαδικασίας (Cropley, 2006). Ως εκ τούτου, δύο ερωτήματα γεννιούνται: Πώς μπορούμε να καθορίσουμε τι είναι αυτό που διαφοροποιεί το δημιουργικό αποτέλεσμα από τα υπόλοιπα; Πώς μπορούμε να αξιολογήσουμε αποτελεσματικά και δίκαια το δημιουργικό προϊόν;

Στην απάντηση των πιο πάνω ερωτημάτων επιδόθηκαν αρκετοί ερευνητές, οι οποίοι επικεντρώθηκαν στην πρόταση ορισμών («products definitions» ή «product bias») για το δημιουργικό αποτέλεσμα (Runco, 2007) και στον καθορισμό κριτηρίων, με τα οποία θα πρέπει να αξιολογείται το δημιουργικό αποτέλεσμα (Getzels & Csikszentmihalyi, 1976· Haylock, 1987). Η πλειοψηφία των ορισμών συγκλίνει ότι η καινοτομία, η καταλληλότητα και η χρησιμότητα χαρακτηρίζουν το δημιουργικό αποτέλεσμα (π.χ. Plucker & Beghetto, 2004 · Sternberg & Lubart, 2000 · Weisberg, 1993). Παράλληλα, σύγχρονες έρευνες τόσο στη γενική όσο και στην ειδική δημιουργικότητα (π.χ. Klavir & Gorodetsky, 2009 · Leikin & Lev, 2007), εφαρμόζουν τον ορισμό του Torrance (1974) για αξιολόγηση της δημιουργικής συμπεριφοράς. Με άλλα λόγια η πρωτοτυπία, η ευελιξία και η ευχέρεια, ως στοιχεία που συναποτελούν τη δημιουργικότητα, αναμένεται να χαρακτηρίζουν τη δημιουργική συμπεριφορά (Torrance, 1974).

Πρωτοτυπία

Η έννοια της πρωτοτυπίας του δημιουργικού αποτελέσματος περιλαμβάνεται σε περισσότερους από 100 ορισμούς για τη δημιουργικότητα (Treffinger, κ.α., 2002). Για παράδειγμα, η δημιουργικότητα ορίστηκε ως η εμπλοκή διαδικασιών που καταλήγουν σε ένα πρωτότυπο και ασυνήθιστο αποτέλεσμα (Weisberg, 1993), ως η ικανότητα παραγωγής αποτελέσματος που είναι καινοτόμο και χρήσιμο (Plucker & Beghetto, 2004), ως η ικανότητα παραγωγής απροσδόκητης, πρωτότυπης και χρήσιμης εργασίας (Sternberg & Lubart, 2000) και ως η υψηλού επιπέδου ανθρώπινη ικανότητα ή δεξιότητα που οδηγεί σε νέες ιδέες, προσεγγίσεις ή δράσεις (Kwon, Park & Park, 2006). Σύμφωνα με το Vidal (2005), η πρωτοτυπία θεωρείται ως χαρακτηριστικό της δημιουργικής συμπεριφοράς, λόγω του ότι επιτυγχάνεται άλμα από τον προφανή τρόπο σκέψης σε πιο καινοτόμες, ασυνήθιστες και μοναδικές ιδέες.

Αντίστοιχοι ορισμοί της δημιουργικότητας με έμφαση στην πρωτοτυπία του αποτελέσματος εμφανίζονται και στο πεδίο της μαθηματικής παιδείας (Leikin, 2008). Πιο συγκεκριμένα, η μαθηματική δημιουργικότητα ορίζεται ως η ικανότητα παραγωγής πρωτότυπων, ασυνήθιστων και κατάλληλων λύσεων σε μαθηματικά προβλήματα (Chamberlin & Moon, 2005 · Sriraman, 2005), ως η διατύπωση νέων ερωτήσεων που θα επιτρέψουν σε ένα πρόβλημα να γίνει πιο κατανοητό (Sriraman, 2005). Ταυτόχρονα, η ικανότητα γενίκευσης, παραγωγής δηλαδή πρωτότυπων αποδείξεων σε τυπικά μαθηματικά προβλήματα και η ανακάλυψη νέων θεωρημάτων και θεωριών, περιλαμβάνουν το χαρακτηριστικό της πρωτοτυπίας (Shriki, 2010). Με άλλα λόγια, η πρωτοτυπία μπορεί να γίνει εμφανής στις ερωτήσεις και στις υποθέσεις που κάνει ένα άτομο, στις αναπαραστάσεις και στις μεθόδους που χρησιμοποιεί και στην αιτιολόγηση που προβάλλει (Gil, Ben-Zvi & Apel, 2007 · Sheffield, 2008). Αυτό συμβαίνει γιατί τα δημιουργικά άτομα δεν φοβούνται να χρησιμοποιήσουν μεθόδους που δεν εγγυώνται την επιτυχία (Sheffield, 2009), αλλά αναζητούν πρωτότυπες στρατηγικές, εντοπίζουν νέες σχέσεις μεταξύ τεχνικών και ιδεών και προσεγγίζουν τα προβλήματα με μοναδικό και απρόβλεπτο τρόπο (Klavir & Gorodetsky, 2009 · Rietzschel, Nijstad, & Stroebe, 2007).

Παρόλο που η πρωτοτυπία αποτελεί σημαντική ένδειξη για τη δημιουργική συμπεριφορά, εντούτοις δεν είναι επαρκές χαρακτηριστικό για τον ορισμό της (Runco & Jaeger, 2012). Σύμφωνα με τους Eisenberger και Cameron (1998), «η δημιουργική ικανότητα αναφέρεται στην εμφάνιση πρωτότυπης συμπεριφοράς που ικανοποιεί ένα επίπεδο ποιότητας και χρησιμότητας» (σ. 676). Παρόμοιους ορισμούς προτείνουν οι Eisenberger, Haskins και Gambleton (1999) όταν αναφέρουν ότι «η δημιουργικότητα εμπλέκει την παραγωγή καινοτόμων συμπεριφορών που ικανοποιούν ένα επίπεδο ποιότητας και χρησιμότητας» (σ. 308), όπως και οι Fodor και Carver (2000) όταν όρισαν τη δημιουργικότητα ως το προϊόν που χαρακτηρίζεται από συνδυασμό πρωτοτυπίας, καταλληλότητας, αξίας και χρησιμότητας. Όταν γίνεται αναφορά στους όρους καταλληλότητα και χρησιμότητα θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη ο σκοπός για τον οποίο εμφανίστηκε το αποτέλεσμα καθώς επίσης και οι περιορισμοί που έχουν τεθεί εξ' αρχής (Gardner, 2006 · Runco & Jaeger, 2012). Δηλαδή, τα κριτήρια αξιολόγησης της καταλληλότητας και της χρησιμότητας του αποτελέσματος διαφοροποιούνται ανάλογα με το συγκείμενο στο οποίο εμφανίζεται το αποτέλεσμα, δίνοντας με αυτό τον τρόπο έμφαση στην κοινωνική πλευρά της δημιουργικότητας (Bolden, Harries & Newton, 2010 · Csikszentmihalyi, 1996 · Plucker, Beghetto & Dow, 2004).

Στο πλαίσιο της μαθηματικής παιδείας ο ορισμός των Chamberlin και Moon (2005) τονίζει τη σημασία της καταλληλότητας του αποτελέσματος, για να κριθεί ένα αποτέλεσμα ως δημιουργικό: «δημιουργικότητα είναι μια ασυνήθιστη ικανότητα παραγωγής πρωτότυπων και χρήσιμων λύσεων για τα μαθηματικά προβλήματα» (σ. 38). Είναι δηλαδή εμφανές ότι όσο πρωτότυπη και αν είναι μια μαθηματική ιδέα, δεν μπορεί να θεωρηθεί ως δημιουργική αν δεν είναι μαθηματικά ορθή, αφού δεν ικανοποιεί το σκοπό για τον οποίο εμφανίστηκε (Haylock, 1985).

Ευχέρεια

Ο ορισμός του Torrance (1974) πέρα από την πρωτοτυπία περιλαμβάνει την ευχέρεια και την ευελιξία ως στοιχεία προς αξιολόγηση του δημιουργικού αποτελέσματος. Όσον αφορά στην ευχέρεια, η ταχύτητα και η ακρίβεια παραγωγής αριθμού εναλλακτικών ιδεών ή λύσεων χαρακτηρίζουν τη δημιουργική σκέψη (Gil, Ben-Zvi & Apel, 2007 · Klavir & Gorodetsky, 2009 · Proctor & Burnett, 2004). Λαμβάνοντας υπόψη ότι η ευχέρεια δίνει ενδείξεις για την ποσότητα των ενεργών και διαθέσιμων γνώσεων του ατόμου (Klavir & Gorodetsky, 2009), η ταχύτητα στον εντοπισμό σχέσεων ή στην εύρεση εναλλακτικών εφαρμογών μιας ιδέας ενδέχεται να οδηγήσει στην παραγωγή πρωτότυπου αποτελέσματος (Mumford, 2001 · Simonton, 1998). Όσες πιο πολλές ιδέες παράγονται, τόσο πιο πιθανόν είναι να εντοπιστεί ανάμεσα σε αυτές μια πρωτότυπη και κατάλληλη ιδέα (Vidal, 2005). Σύμφωνα με τον Binder (1996), τα άτομα που μπορούν με ευχέρεια να αντιδρούν σε βασικές μαθηματικές δεξιότητες επιτυγχάνουν στην εφαρμογή αυτών των δεξιοτήτων σε καινούρια μαθηματικά πλαίσια (Binder, 1996 · Lindsley, 1996).

Ευελιξία

Η ευελιξία αναφέρεται στην παραγωγή διαφορετικών ιδεών σε σχέση με ένα ερέθισμα (Vidal, 2005). Η ευελιξία εμπλέκει την ικανότητα επαναπροσδιορισμού μοντέλων και δικτύων ιδεών, το μετασχηματισμό γνωστών συμβάσεων σε πρακτικές καταστάσεις, την εναλλαγή του τρόπου σκέψης, του είδους των αναπαραστάσεων και των στρατηγικών ή ακόμα την αντιστροφή διαδικασιών (Cornish & Wines, 1980 · Klavir & Gorodetsky, 2009· Krutetskii, 1969 · Sheffield, 2009). Ο Mann (2006) θεωρεί ότι η ευελιξία ενός ατόμου καθορίζεται από την ικανότητά του να αξιοποιεί, να εφαρμόζει και να προσαρμόζει τις προηγούμενες γνώσεις του σε νέες εφαρμογές. Έτσι, διευκρινίζει ότι για να υπάρξει ευέλικτη εφαρμογή της γνώσης, απαιτείται πέρα από τις διαδικαστικές γνώσεις ενός ατόμου (knowledge of) να αναπτυχθεί υψηλοτέρου επιπέδου εννοιολογική γνώση (knowledge about) που θα του επιτρέπει να διαμορφώνει τη γνώση παρά να την εφαρμόζει τυφλά ως διαδικασία (Mann, 2006).

Δημιουργικό άτομο στα μαθηματικά

Για την κατανόηση και την ερμηνεία της δημιουργικότητας ενός ατόμου είναι απαραίτητη η αρμονική συνύπαρξη χαρακτηριστικών γενικής και ειδικής δημιουργικής ικανότητας. Ενδεικτικά, ο Krutetskii (1976) αναφέρει ότι τα δημιουργικά άτομα στα μαθηματικά θα πρέπει να αποτελούν μια γενικά δημιουργική προσωπικότητα και ταυτόχρονα να διακατέχονται από γνωστικά χαρακτηριστικά στο συγκεκριμένο γνωστικό πεδίο.

Δημιουργική προσωπικότητα

Στο ερώτημα «Ποια χαρακτηριστικά μπορούν να αποτελέσουν ενδείξεις της δημιουργικότητας ενός ατόμου;» κλήθηκαν να απαντήσουν οι ερευνητές στο αντίστοιχο πεδίο (Craft, 2005). Παρόλα αυτά, οι λίστες με τα χαρακτηριστικά μιας δημιουργικής προσωπικότητας συχνά επικαλύπτονται, κάποιες φορές είναι αντιφατικές και άλλες φορές προσθέτουν νέα χαρακτηριστικά (Selby, Shaw & Houtz, 2005). Σύμφωνα με τους Selby, Shaw και Houtz (2005) δεν θα πρέπει να αναμένεται από ένα δημιουργικό άτομο να παρουσιάσει όλα τα χαρακτηριστικά που προτείνονται στη βιβλιογραφία, αλλά και από την άλλη, ένα άτομο που εμφανίζει ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά δεν σημαίνει ότι θα τα εμφανίζει σε κάθε περίπτωση.

Οι περισσότεροι ερευνητές συγκλίνουν ότι τα δημιουργικά άτομα έχουν επίγνωση της ικανότητάς τους (Walberg, 1988 · Walberg & Herbig, 1991), έχουν αυτοπεποίθηση

(Selby, Shaw & Houtz, 2005) και χαρακτηρίζονται από ανεξαρτησία ή αυτονομία στο χαρακτήρα (Runco, 2007). Αυτά τα χαρακτηριστικά επιτρέπουν στα δημιουργικά άτομα να πιστεύουν στις ικανότητές τους και να μην ανησυχούν ότι θα αποτύχουν (Csikszentmihalyi, 1997). Ταυτόχρονα, η περιέργεια, η φαντασία, η διαίσθηση, η διορατικότητα, το ανοικτό μυαλό και η επιθυμία να αποκτήσουν εμπειρίες χαρακτηρίζουν το δημιουργικό άτομο (Selby, Shaw & Houtz, 2005 · Seo, Lee & Kim, 2005). Δραστηριότητες που εμπλέκουν ρίσκο και δίνουν τη δυνατότητα για πειραματισμό τονώνουν τα δημιουργικά άτομα, γιατί σε τέτοιες περιπτώσεις θεωρούν ότι έχουν την ευκαιρία να υπερνικήσουν εμπόδια και να αναπτύξουν τον τρόπο σκέψης τους (Sternberg & Lubart, 1996). Λόγω του ότι τα δημιουργικά άτομα είναι απαλλαγμένα από κάθε είδους περιορισμό και στερεότυπη σκέψη και παράλληλα είναι σταθερά στις αποφάσεις και στο πείσμα τους για επιτυχία καταφέρνουν να καταλήξουν σε πρωτότυπες και καινοτόμες ιδέες (Kleiman, 2005).

Πέρα από τα πιο πάνω χαρακτηριστικά, τα δημιουργικά άτομα παρακινούνται να εργαστούν από εσωτερικά κίνητρα, από προσωπική επιθυμία να ολοκληρώσουν ένα στόχο. Για αυτό το λόγο, τα δημιουργικά άτομα χάνουν την αίσθηση του χρόνου και ο στόχος τους γίνεται αυτοσκοπός (Csikszentmihalyi, 1997). Οι Sternberg και Lubart (1993) ανέφεραν τρεις λόγους/ κίνητρα για να εξηγήσουν την αφοσίωση των δημιουργικών ατόμων στο έργο που επιτελούν. Το δημιουργικό άτομο παρακινείται να εργαστεί, (α) για να ξεχωρίσει από τους υπόλοιπους, επιδεικνύοντας απροσδόκητη συμπεριφορά, (β) για να επιβεβαιώσει τις δημιουργικές του ικανότητες κατά την επίλυση ενός έργου ή ακόμα (γ) για προσωπική ικανοποίηση που έχει πετύχει το στόχο του, καταλήγοντας σε καινοτόμο αποτέλεσμα (Sternberg & Lubart, 1993).

Αναφορικά με τα ενδιαφέροντά τους, τα δημιουργικά άτομα επιλέγουν να ασχολούνται με σύνθετα και ασυνήθιστα θέματα (Runco, 2007 · Watkins, 1999), με θέματα που έχουν νόημα και εφαρμογή, χωρίς να ασχολούνται ιδιαίτερα με τις λεπτομέρειες (Kleiman, 2005 · Watkins, 1999). Σε αυτά τα θέματα άλλωστε υπάρχει μεγαλύτερο έδαφος για δημιουργία και καινοτομία. Για παράδειγμα, στο πεδίο των μαθηματικών οι Freiman και Sriraman (2011) παρατήρησαν ότι τα δημιουργικά άτομα αρέσκονται στη βαθύτερη διερεύνηση γνωστών αποτελεσμάτων, στον εντοπισμό νέων μαθηματικών εννοιών προς μελέτη, στην ανακάλυψη νέων μεθόδων και αγνώστων ιδιοτήτων, στον εντοπισμό συνδέσεων μεταξύ φαινομενικά ανεξάρτητων κλάδων των μαθηματικών και στην εύρεση έξυπνων λύσεων και πρακτικών εφαρμογών στα μαθηματικά προβλήματα.

Ως άτομα δεν είναι ιδιαίτερα κοινωνικά και συχνά περιγράφονται ως εγωκεντρικά, αφού προτιμούν την ατομική εργασία, χωρίς να τους ενδιαφέρει αν θα θεωρηθούν από τον κοινωνικό περίγυρο ως «διαφορετικά» (Kleiman, 2005). Εντούτοις, η ανεπτυγμένη αίσθηση του χιούμορ, η συναισθηματική ευαισθησία και η ενεργητικότητα είναι από τα χαρακτηριστικά που τους κάνουν αγαπητούς (Kleiman, 2005 · Selby, Shaw & Houtz, 2005).

Είναι ιδιαίτερα σημαντική η αναγνώριση των χαρακτηριστικών ενός δημιουργικού ατόμου, ώστε να τύχουν κατάλληλης ενθάρρυνσης και ενίσχυσης (Hull, 2007). Παρόλα αυτά, η ύπαρξη πολλών χαρακτηριστικών για το δημιουργικό άτομο, εμποδίζει την ανάπτυξη ενός καταλόγου με γνωρίσματα προσωπικότητας που να περιγράφει όλα τα δημιουργικά άτομα. Ο Runco (2007) εντόπισε ότι η δημιουργική προσωπικότητα πιθανόν να διαφέρει από πεδίο σε πεδίο και ίσως από άτομο σε άτομο, για αυτό πολύ εύστοχα ανέφερε ότι «δεν υπάρχει μια δημιουργική προσωπικότητα» (σ. 315). Αυτό από τη μια, θα μπορούσε να αποτελεί αδυναμία στον εντοπισμό χαρακτηριστικών της δημιουργικής προσωπικότητας, αλλά από την άλλη, μπορεί να αποτελέσει κίνητρο στους εκπαιδευτικούς και στους ερευνητές να αποδέχονται συμπεριφορές που με μια πρώτη ματιά μπορεί να μην παραπέμπουν σε δημιουργικά άτομα (Hull, 2007). Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας, θεωρήθηκε ότι η Investment Theory (Sternberg & Lubart, 1996) μπορεί να «οργανώσει» τα χαρακτηριστικά προσωπικότητας που διακατέχουν το δημιουργικό άτομο. Ακολουθεί περιγραφή της εν λόγω θεωρίας.

Investment Theory

Η θεωρία που προτάθηκε από τους Sternberg και Lubart (1996) παρομοιάζει τα δημιουργικά άτομα με επιτυχημένους επενδυτές που «αγοράζουν χαμηλά και πωλούν ακριβά», με την έννοια ότι τα δημιουργικά άτομα αξιοποιούν ιδέες που δεν είναι δημοφιλείς και φαινομενικά δεν έχουν αξία και τις μετατρέπουν σε σημαντικές και πολύτιμες (Sternberg, 2006 · Sternberg & Lubart, 1996). Σύμφωνα με αυτή τη θεωρία, η ανάπτυξη της δημιουργικότητας απαιτεί τη συμβολή έξι διακριτών αλλά αλληλοσχετιζόμενων στοιχείων: διανοητικές ικανότητες, γνώσεις, γνωστικό στυλ, προσωπικότητα, κίνητρα και περιβάλλον (Sternberg, 2006 · Sternberg & Lubart, 1996), όπως περιγράφονται στη συνέχεια.

Η συνύπαρξη τριών *διανοητικών ικανοτήτων* - της συνθετικής, της αναλυτικής και της πρακτικής ικανότητας - συμβάλλουν στην εμφάνιση δημιουργικής σκέψης (Sternberg, 1985). Η συνθετική ικανότητα αναφέρεται στην παραγωγή πρωτότυπων ιδεών και στην αντιμετώπιση καταστάσεων με νέους τρόπους. Η ικανότητα να αναγνωρίζεις τα σημαντικά και τα πολύτιμα στοιχεία μιας ιδέας, ορίζεται ως αναλυτική ικανότητα. Η αναλυτική ικανότητα εμπλέκει κριτική σκέψη, στοιχεία ανάλυσης και αξιολόγησης ιδεών. Τέλος, η πρακτική ικανότητα αναφέρεται στη μετάφραση θεωρίας σε πράξη και εμπλέκει τη μετατροπή των αφηρημένων ιδεών σε πρακτικές εφαρμογές (Sternberg, 2006). Η δημιουργική ικανότητα απαιτεί τη συνύπαρξη και την εξισορρόπηση των τριών διανοητικών ικανοτήτων, γιατί πέρα από την παραγωγή νέων ιδεών, απαιτείται ανάλυση και αξιολόγηση των ιδεών για εντοπισμό των πιο χρήσιμων και κατάλληλων και έπειτα τη μετατροπή τους σε υλοποιήσιμη μορφή (Sternberg, 2012 · Sternberg & Lubart, 1995).

Η κατοχή *γνώσεων* κρίνεται απαραίτητη για να μπορέσει ένα άτομο να συμβάλει δημιουργικά σε ένα γνωστικό πεδίο, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι η κατοχή γνώσεων σημαίνει απαραίτητα και δημιουργική συμπεριφορά (Lubart & Sternberg, 1995). Από τη μια, το άτομο θα πρέπει να κατέχει αρκετές γνώσεις σε ένα γνωστικό αντικείμενο, έτσι ώστε να μπορεί να συνεισφέρει με πρωτότυπες ιδέες, αποφεύγοντας την επανάληψη υφιστάμενων ιδεών (Lubart & Sternberg, 1995 · Sternberg, 2006). Από την άλλη, η κατοχή γνώσεων σε ένα αντικείμενο μπορεί να περιορίσει το άτομο, αποτρέποντάς το να χειριστεί καταστάσεις με διαφορετικό τρόπο από ότι τα είχε αντιμετωπίσει στο παρελθόν. Ο Sternberg (2012) προτείνει ότι το άτομο θα πρέπει να χρησιμοποιήσει τις γνώσεις του αλλά να μην τις αφήσει να αποτελέσουν εμπόδιο στη δημιουργική του ικανότητα.

Πέρα από την κατοχή γνώσεων, το *γνωστικό στυλ,* δηλαδή ο τρόπος που ένα άτομο προτιμά να χρησιμοποιήσει τις γνώσεις και τις δεξιότητές του, φαίνεται να αποτελεί στοιχείο της δημιουργικότητας (Sternberg, 1988, 1997). Για να είναι ένα άτομο δημιουργικό, θα πρέπει να επιλέγει πρωτότυπο τρόπο σκέψης, παρά να ακολουθεί προκαθορισμένους τρόπους και να υιοθετεί ιδέες άλλων (Sternberg, O'Hara & Lubart, 1997). Έτσι, ερευνητικές προσπάθειες που διερευνούν ποιο γνωστικό στυλ συμβάλλει στην ανάπτυξη της δημιουργικής ικανότητας- το οπτικό ή λεκτικό (π.χ. Palmiero, Nakatani, Raver, Belardinelli, & van Leeuwen, 2010), το ολιστικό ή αναλυτικό (π.χ. Kaufman, 2002)- διεξήχθηκαν στο πεδίο της δημιουργικότητας.

Ταυτόχρονα, οι Sternberg και Lubart (1996) εντόπισαν κοινά χαρακτηριστικά *προσωπικότητας* που ενισχύουν την εμφάνιση δημιουργικής συμπεριφοράς. Χαρακτηριστικά γνωρίσματα όπως η επιμονή, η επιθυμία για υπέρβαση εμποδίων, η ανάληψη ρίσκου, η αυτορρύθμιση, η περιέργεια και η φαντασία περιλαμβάνονται στις περιγραφές των δημιουργικών ατόμων (Sternberg, 2006).

Για να μπορέσει ένα άτομο, όσο δημιουργικό και αν είναι, να χρησιμοποιήσει τις διανοητικές του ικανότητες και γνώσεις θα πρέπει να διακατέχεται από *κίνητρα* (Lubart & Sternberg, 1995). Το δημιουργικό άτομο χαρακτηρίζεται από εσωτερικά κίνητρα και επικέντρωση στο έργο που έχει να επιτελέσει. Άλλωστε, δεν μπορεί ένα άτομο να εκτελέσει μια δημιουργική εργασία σε ένα πεδίο εκτός και αν αγαπά αυτό που κάνει και αν το ενδιαφέρον του επικεντρώνεται στην εργασία παρά στην επιβράβευσή της (Amabile, 1996).

Τέλος, το άτομο χρειάζεται κατάλληλο *περιβάλλον* που να υποστηρίζει και να ανταμείβει τις δημιουργικές του ιδέες. Ένα άτομο μπορεί να έχει όλα τα άλλα στοιχεία που χρειάζεται για να σκεφτεί δημιουργικά, αλλά εντούτοις χωρίς υποστήριξη από το περιβάλλον και τον περίγυρό του, ενδέχεται να μην εμφανίσει δημιουργική συμπεριφορά (Sternberg, 2006).

Μπορεί στην Investment Theory να περιλαμβάνονται στοιχεία που με μια πρώτη ματιά να παραπέμπουν σε γνωστικά χαρακτηριστικά (π.χ. γνώσεις, γνωστικό στυλ και διανοητικές ικανότητες). Παρόλα αυτά, οι πιο πάνω άξονες χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία για να οργανώσουν τα χαρακτηριστικά των δημιουργικών ατόμων και όχι για να αξιολογήσουν τις αντίστοιχες ικανότητές τους.

Γνωστικά χαρακτηριστικά στα μαθηματικά

Η διερεύνηση μαθηματικών ιδεών, η επιχειρηματολογία (Yerushalmy, 2009), η γενίκευση, η αναλογική σκέψη (Prouse, 1967), ο έλεγχος και ο επανέλεγχος των υποθέσεων και η ικανότητα πρόβλεψης (Torrance, 1966) αναφέρονται στους ορισμούς για τη μαθηματική δημιουργικότητα. Παράλληλα, η Starko (1995) συγκαταλέγει τη μεταφορική σκέψη (ή την ικανότητα του ατόμου να βλέπει ομοιότητες μεταξύ ανόμοιων ιδεών), τη λογική σκέψη, την οπτικοποίηση και τη λήψη απόφασης ανάμεσα στα γνωστικά χαρακτηριστικά ενός δημιουργικού ατόμου. Λαμβάνοντας υπόψη τα πιο πάνω, πολύ εύστοχα ο Ervynck (1991) θεωρεί τη μαθηματική δημιουργικότητα ως ανώτερου επίπεδου σκέψη. Η σύνδεση μαθηματικών ιδεών, ο ευέλικτος χειρισμός των μαθηματικών εννοιών και η κατανόηση ότι διαφορετικές προσεγγίσεις ενός προβλήματος μπορούν να οδηγήσουν σε ισοδύναμα αποτελέσματα είναι σημαντικά στοιχεία ανάπτυξης της μαθηματικής κατανόησης (NCTM, 2000 · Polya, 1973 · Schoenfeld, 1985).

Διάφορες ερευνητικές προσπάθειες έχουν γίνει για να καθορίσουν τους παράγοντες που επηρεάζουν τη δημιουργική ικανότητα των μαθητών. Ενδεικτικά, το Componential Model of Creativity (Amabile, 1996) αποτελεί ένα ευρέως αποδεκτό θεωρητικό μοντέλο, το οποίο ορίζει τη δημιουργικότητα «ως μια συμπεριφορά που προκύπτει από τη σύζευξη προσωπικών χαρακτηριστικών, γνωστικών ικανοτήτων και κοινωνικού περιβάλλοντος» (σ. 358). Πιο συγκεκριμένα, η Amabile (1996) διέκρινε τρεις παράγοντες που είναι απαραίτητοι για την εμφάνιση δημιουργικής συμπεριφοράς ή ενέργειας: η κατοχή δεξιοτήτων που θεωρούνται απαραίτητες για το γνωστικό αντικείμενο (domain-relevant skills), η κατοχή δεξιοτήτων που είναι σχετικές με τη δημιουργικότητα (creativity-relevant skills) και η ύπαρξη κινήτρων (task motivation), όπως παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 2.3.

ΔΕΞΙΟΤΗΤΕΣ ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΜΕ ΤΟ ΓΝΩΣΤΙΚΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ	ΔΕΞΙΟΤΗΤΕΣ ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΜΕ ΤΗ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑ	ΚΙΝΗΤΡΑ
ΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΕΙ: - Γνώσεις για το γνωστικό αντικείμενο - Τεχνικές δεξιότητες - Ειδικό «ταλέντο» στο γνωστικό αντικείμενο	ΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΕΙ: - Έμμεση ή άμεση γνώση για την παραγωγή νέων ιδεών - Κατάλληλο γνωστικό στυλ - Κατάλληλο τρόπο εργασίας	ΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΕΙ: - Στάσεις προς το στόχο - Αντιλήψεις για τα κίνητρα
ΕΞΑΡΤΑΤΑΙ ΑΠΟ: - Έμφυτες γνωστικές δυνατότητες - Έμφυτες αντιληπτικές και κιναισθητικές δεξιότητες - Τυπική και άτυπη εκπαίδευση	ΕΞΑΡΤΑΤΑΙ ΑΠΟ: - Κατάρτιση - Εμπειρία - Χαρακτηριστικά προσωπικότητας	ΕΞΑΡΤΑΤΑΙ ΑΠΟ: - Εσωτερικά κίνητρα για το στόχο - Παρουσία ή απουσία εξωτερικών περιορισμών στο κοινωνικό περιβάλλον - Ικανότητα εξάλειψης των εξωτερικών περιορισμών

Διάγραμμα 2.3. Το θεωρητικό μοντέλο της Amabile (1996).

Όπως φαίνεται από το Διάγραμμα 2.3, για την εμφάνιση δημιουργικής συμπεριφοράς σε ένα γνωστικό πεδίο είναι απαραίτητη η συνύπαρξη δύο ειδών γνωστικών δεξιοτήτων: δεξιότητες για το γνωστικό αντικείμενο και δεξιότητες για τη δημιουργικότητα. Οι δεξιότητες για το γνωστικό αντικείμενο περιλαμβάνουν γνώσεις για γεγονότα, αρχές και ορισμούς σε ένα γνωστικό πεδίο (Amabile, 1983). Σύμφωνα με το Brown (1989), αυτού του είδους οι δεξιότητες αποτελούν το βασικότερο μέρος του μοντέλου, αφού κανείς δεν μπορεί να είναι δημιουργικός αν δεν κατέχει γνώσεις ή αν δεν έχει τις απαραίτητες δεξιότητες στο πεδίο που εργάζεται. Οι δεξιότητες που σχετίζονται με τη δημιουργικότητα έχουν γενική φύση και μπορούν να εφαρμοστούν σε κάθε γνωστικό πεδίο (Amabile, 1996).

Αντίστοιχα, στο πεδίο της μαθηματικής παιδείας η κατοχή μαθηματικών γνώσεων (Sheffield, 2009) και γενικών δημιουργικών δεξιοτήτων (Hong & Milgram, 2010) έχουν διερευνηθεί ως παράγοντες που επηρεάζουν τη δημιουργικότητα. Ταυτόχρονα, η νοημοσύνη (Kattou, Kontoyianni, Pitta-Pantazi, & Christou, 2010) περιλαμβάνεται ανάμεσα στα γνωστικά χαρακτηριστικά που εξετάστηκαν σε σχέση με τη μαθηματική δημιουργικότητα. Ακολουθεί σχετική βιβλιογραφική ανασκόπηση για τα τρία γνωστικά χαρακτηριστικά που θα διερευνηθούν στην παρούσα εργασία.

Κατοχή γνώσεων

Η κατοχή γνώσεων σε ένα αντικείμενο (π.χ. Jay & Perkins, 1997 · Weisberg, 1999), η ανάκλησή τους σε κατάλληλη χρονική στιγμή και η αποτελεσματική εφαρμογή τους (π.χ. Verschaffel, Luwel, Torbeyns, & Van Dooren, 2009 · Fennema & Romberg, 1999) προβλημάτισαν τους ερευνητές στον τομέα της δημιουργικότητας.

Αναφορικά με την *κατοχή γνώσεων* σε ένα γνωστικό αντικείμενο, επικρατούν δύο απόψεις: η Tension view και η Foundation view (Weisberg, 1999). Η πρώτη άποψη υιοθετεί την αρχή ότι οι γνώσεις αποτελούν τα δομικά υλικά στα οποία στηρίζεται ένα άτομο για να αναπτύξει νέες ιδέες (Craft, 2005 · Weisberg, 1999). Η γνώση του τι έχει προηγηθεί σε ένα πεδίο βοηθά το άτομο να συγκεντρωθεί σε νέες ιδέες, παρά σε βασικές δεξιότητες (Weisberg, 2006). Εντούτοις, η κατοχή πολλών γνώσεων σε ένα τομέα μπορεί να επιδράσει αρνητικά στην εμφάνιση πρωτότυπων ιδεών (Sternberg, 2006 · Weisberg, 1999). «Ο μεγάλος αριθμός γνώσεων σε ένα γνωστικό πεδίο μπορεί να περιορίσει τη δημιουργικότητα, γιατί αν (το άτομο) γνωρίζει πολύ καλά πώς λειτουργούν τα πράγματα (στο γνωστικό πεδίο), καθίσταται ανίκανο να αποδράσει (από τα ήδη γνωστά πλαίσια) και να προτείνει νέες ιδέες» (DeBono, 1968, σ. 228). Την άποψη αυτή υποστηρίζουν διάφοροι ερευνητές, οι οποίοι θεωρούν ότι η κατοχή γνώσεων ενδέχεται να περιορίσει το άτομο σε στερεότυπες λύσεις ή να το οδηγήσει σε λανθασμένη μεταφορά των γνώσεων σε νέες προβληματικές καταστάσεις (Weisberg, 2006 · Weisberg, 1999). Ως εκ τούτου, η Tension view περιγράφει τη σχέση μεταξύ των γνώσεων και της δημιουργικότητας ως αντεστραμμένο U, με τη μέγιστη δημιουργικότητα να συμβαίνει κάπου στο μέσο επίπεδο γνώσεων (Weisberg, 1999).

Η δεύτερη άποψη για τη σχέση της δημιουργικότητας και των γνώσεων σε ένα αντικείμενο, η Foundation view, θεωρεί ότι η ανάπτυξη νέων ιδεών δεν στηρίζεται, αλλά οικοδομείται πάνω στις προϋπάρχουσες γνώσεις (Weisberg, 1986, 1993, 1995). Ο ίδιος ο Torrance στη συνέντευξή του στο Shaughnessy (1998) ανέφερε ότι οι γνώσεις αποτελούν τη βάση για την παραγωγή ενός δημιουργικού αποτελέσματος, αφού ο σχηματισμός νέων γνώσεων μπορεί να προκύψει αν υπάρχει κατανόηση του τι ήδη υπάρχει. Έτσι, για να μπορέσει κάποιος να φτάσει σε υψηλό επίπεδο δημιουργικότητας σε ένα πεδίο, χρειάζεται να εργαστεί για μεγάλη χρονική περίοδο σε ένα γνωστικό αντικείμενο, για να αφομοιώσει τι έχει προηγηθεί σε αυτό (Weisberg 1999).

Αντίστοιχες συζητήσεις για το ρόλο των προϋπάρχουσων γνώσεων στη δημιουργικότητα εμφανίζονται και στο πεδίο της μαθηματικής παιδείας. Από τη μια, υπάρχουν ερευνητές οι οποίοι θεωρούν ότι η κατοχή μαθηματικών γνώσεων συνεισφέρει περισσότερο από κάθε άλλη μεταβλητή στη δημιουργικότητα των μαθητών (Hong & Aqui, 2004 · Mann, 2005). Με άλλα λόγια, όσες περισσότερες μαθηματικές γνώσεις κατέχει ένα άτομο, τόσο πιο δημιουργικό αναμένεται να είναι σε αυτό το πεδίο. Σύμφωνα με τη Sheffield (2009), η μαθηματική δημιουργικότητα εξαρτάται από τη σύνδεση και το συνδυασμό των διαθέσιμων εννοιών και πληροφοριών, ενώ ταυτόχρονα οι προϋπάρχουσες γνώσεις αποτελούν τη βάση στην οποία οι νέες πληροφορίες θα οργανωθούν. Κάθε άτομο, δηλαδή, που είναι ικανό να οικοδομήσει μια προσωπική γνωστική δομή που είναι μοναδική και πλήρης από προσωπικές διασυνδέσεις πιθανόν να καταλήξει σε δημιουργικό αποτέλεσμα (Caine & Caine, 1991 · Clemons, 2005). Παράλληλα, άτομα που δεν έχουν ικανοποιητικές μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες είναι ανίκανα να επιδείξουν μαθηματικά δημιουργική σκέψη, καθώς η έλλειψη απαραίτητων γνώσεων και εμπειριών τα αποτρέπει να εκφράσουν τις δημιουργικές τους σκέψεις με αναγνωρίσιμους τρόπους στο πεδίο των μαθηματικών (Haylock, 1987 · Mann, 2009).

Τα πιο πάνω συμπεράσματα επιβεβαιώθηκαν εμπειρικά μέσα από πρόσφατες εργασίες (Bahar & Maker, 2011 · Mann, 2005 · Sak & Maker, 2006). Στην εργασία τους οι Sak και Maker (2006) χορήγησαν ένα μαθηματικό εργαλείο που περιελάμβανε ανοικτού και κλειστού τύπου μαθηματικά έργα, για να αξιολογήσουν τις μαθηματικές γνώσεις των μαθητών. Ταυτόχρονα, οι μαθητές κλήθηκαν να συμπληρώσουν ένα εργαλείο αποκλίνουσας σκέψης. Τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης εργασίας έδειξαν ότι η κατοχή γνώσεων είχε στατιστικά σημαντική συνεισφορά στην ερμηνεία της ευχέρειας, της ευελιξίας και της πρωτοτυπίας των μαθητών (Sak & Maker, 2006). Αντίστοιχα στην εργασία των Bahar και Maker (2011), οι ερευνητές συσχέτισαν την επίδοση των μαθητών στο Iowa Tests of Basic Skills και στο Comprehensive Tests of Basic Skills με την επίδοσή τους σε εργαλείο αποκλίνουσας σκέψης. Οι ερευνητές κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι υπήρχε δυνατή συσχέτιση μεταξύ των δύο επιδόσεων των μαθητών. Τέλος, ο Mann (2005) κατά τη διεξαγωγή παλινδρομικής ανάλυσης εντόπισε ότι η μαθηματική επίδοση των μαθητών συνεισφέρει στην πρόβλεψη της μαθηματικής δημιουργικότητάς τους.

Υπάρχουν βέβαια και υποστηρικτές της αντίθετης άποψης. Οι γνώσεις των μαθητών και η εξοικείωση με τους αλγόριθμους και τους κανόνες ενδέχεται να περιορίσουν τη δημιουργική τους ικανότητα (Haylock, 1997). Για παράδειγμα, οι αντιλήψεις των μαθητών ότι κάθε ερώτηση έχει πάντα μόνο μια σωστή απάντηση, η οποία μπορεί να βρεθεί με την εφαρμογή γνωστών διαδικασιών περιορίζει τη φαντασία και την περιέργεια των μαθητών για πειραματισμό και διερεύνηση (Mann, 2005). Σύμφωνα με τον Pehkonen (1997), αυτό το φαινόμενο προκύπτει λόγω του ότι η υπερβολική έμφαση στις γνώσεις και στη λογική οδηγεί στην ανάπτυξη του αριστερού ημισφαιρίου και στην αγνόηση του δεξιού ημισφαιρίου του εγκεφάλου, το οποίο φαίνεται να σχετίζεται με τη δημιουργικότητα.

Οι έρευνες που έγιναν από την Jensen (στο Haylock 1987) καθώς επίσης από το Baran και τους συνεργάτες του (2011), επιβεβαίωσαν ότι δεν υπάρχει σχέση μεταξύ των μαθηματικών γνώσεων και της δημιουργικότητας των μαθητών. Πιο συγκεκριμένα, η Jensen εντόπισε στατιστικά σημαντικές συσχετίσεις μεταξύ των αριθμητικών ικανοτήτων και της μαθηματικής επίδοσης των μαθητών αλλά δεν εντόπισε αντίστοιχη συσχέτιση με τη μαθηματική δημιουργικότητα των μαθητών. Όσον αφορά στην έρευνα του Baran και των συνεργατών του (2011), ο στόχος ήταν η διερεύνηση της σχέσης μεταξύ της δημιουργικότητας και της μαθηματικής ικανότητας μαθητών ηλικίας έξι ετών. Και σε αυτή την περίπτωση, δεν εντοπίστηκε στατιστικά σημαντική συσχέτιση μεταξύ της επίδοσης των μαθητών στο εργαλείο γενικής δημιουργικότητας (Torrance Tests of Creative Thinking) με τη μαθηματική τους επίδοση.

Πέρα από την κατοχή γνώσεων σε ένα πεδίο, ο *ευέλικτος χειρισμός* και η *κατάλληλη εφαρμογή* τους σε προβληματικές καταστάσεις είναι εξίσου σημαντικά στοιχεία για την παραγωγή δημιουργικού αποτελέσματος (Silver, 1997). Ο Verschaffel και οι συνεργάτες του (2009) καθώς και οι Fennema και Romberg (1999) κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι ο ευέλικτος χειρισμός των γνώσεων περιλαμβάνει κυρίως την ικανότητα σύνδεσης διαφορετικών μαθηματικών εννοιών και ιδεών, την ικανότητα εναλλαγής μεταξύ στρατηγικών και αναπαραστάσεων και την ικανότητα σύγκρισης διαφορετικών στρατηγικών και λύσεων. Οι συνεχείς εναλλαγές καθώς και η ικανότητα επιλογής της πιο κατάλληλης ιδέας υποστηρίζουν την κατασκευή μαθηματικής γνώσης (Leikin, 2007 · Star & Newton, 2009).

Ταυτόχρονα, η *οργάνωση και η ανάκληση πληροφοριών* θεωρούνται εξίσου σημαντικές στην εμφάνιση δημιουργικών ιδεών (Guilford, 1962 στο Mann, 2006). Πράγματι, οι Jay και Perkins (1997) εντόπισαν ότι αυτό που χαρακτηρίζει τα δημιουργικά άτομα δεν είναι τόσο το πλήθος των πληροφοριών που κατέχουν αλλά η ύπαρξη ενός υψηλά οργανωμένου συνόλου γνώσεων. Οι οργανωμένες γνώσεις επιτρέπουν στα άτομα να αντιλαμβάνονται τη βαθύτερη δομή ενός προβλήματος και να ανακαλούν με ευκολία τις κατάλληλες ιδέες (Jay & Perkins, 1997). Η ανάκληση πληροφοριών από τη μνήμη εξαρτάται από το πόσο εύκολα προσβάσιμες είναι οι γνώσεις, δηλαδή, από το πόσο εύκολα μπορούν να ανακαλεστούν σε μια δεδομένη στιγμή (Tulving & Pearlstone, 1996). Συνήθως, τα άτομα αξιοποιούν στην εργασία τους μόνο τις γνώσεις που είναι εύκολα προσβάσιμες και για αυτό καταλήγουν σε συνηθισμένες ιδέες (Rietzschel, Nijstad & Stroebe, 2007). Ενδεχομένως, η βασική διαφορά μεταξύ ενός δημιουργικού και ενός μη δημιουργικού ατόμου να οφείλεται στα διαφορετικά επίπεδα γνώσης που αξιοποιούνται σε μια δεδομένη κατάσταση αλλά και στον τρόπο με τον οποίο οι διαθέσιμες γνώσεις χρησιμοποιούνται (Rietzschel, Nijstad & Stroebe, 2007 · Weisberg, 1999).

Γενική και ειδική δημιουργική ικανότητα

Για δεκαετίες, οι ερευνητές στον τομέα της δημιουργικότητας αντιλαμβάνονταν και χειρίζονταν την έννοια ως μια γενική γνωστική ικανότητα (Plucker, 1998). Όπως οι Plucker και Zabelina (2009) ορίζουν, η γενική δημιουργική ικανότητα (domain-general creativity) χαρακτηρίζεται από καθολικότητα στη φύση της, είναι ικανότητα, δηλαδή, που μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιαδήποτε γνωστική περιοχή. Η θεωρία για την καθολικότητα της δημιουργικής σκέψης υποθέτει ότι η δημιουργική έκφραση είναι πανομοιότυπη σε όλα τα γνωστικά πεδία και ως εκ τούτου, ένα άτομο που έχει επιδείξει υψηλό επίπεδο δημιουργικότητας σε ένα γνωστικό πεδίο αναμένεται ότι θα επιδείξει αντίστοιχα υψηλό επίπεδο δημιουργικότητας σε διάφορα πεδία (Beghetto & Kaufman, 2009).

Η ιδέα της ειδικής δημιουργικότητας (domain-specific creativity) εμφανίστηκε σχετικά πρόσφατα, αφού τον προηγούμενο αιώνα, και κυρίως τη δεκαετία του ’80, δόθηκε ιδιαίτερη έμφαση στο ρόλο του συγκείμενου και της εξειδίκευσης στις κοινωνικές επιστήμες (Plucker & Zabelina, 2009). Σε αυτό το πλαίσιο, θεωρείται ότι η φύση και οι εφαρμογές της δημιουργικής ικανότητας διαφέρει μεταξύ των γνωστικών περιοχών (Beghetto & Kaufman, 2009). Η θεωρία της πολλαπλής νοημοσύνης, που ανέπτυξε ο Howard Gardner (1983), απετέλεσε το έναυσμα για διάκριση της δημιουργικότητας σε γενική και ειδική ικανότητα. Πιο συγκεκριμένα, ο Gardner (1983) ανέφερε ότι η δημιουργικότητα δεν αποτελεί μια καθολική δομή, αλλά αντίθετα απαιτείται εξειδίκευση σε κάθε γνωστική περιοχή. Ως εκ τούτου, οι ψυχολόγοι και οι εκπαιδευτικοί δεν θα πρέπει πλέον να θεωρούν τα άτομα απλώς δημιουργικά, αλλά δημιουργικά σε συγκεκριμένες γνωστικές περιοχές.

Μέχρι σήμερα, το ερώτημα κατά πόσο η δημιουργικότητα αποτελεί γενική ή ειδική ικανότητα συγκαταλέγεται ανάμεσα στα πιο ενδιαφέροντα θέματα προς διερεύνηση για τη φύση της δημιουργικότητας (Baer & Kaufman, 2005 · Kaufman & Baer, 2004 · Plucker & Zabelina, 2009). Τα αποτελέσματα στον τομέα είναι αντικρουόμενα, αφού η διάκριση της δημιουργικότητας σε γενική και ειδική ικανότητα φαίνεται να έχει τους φανατικούς υποστηρικτές της.

Από τη μια, υπάρχουν ερευνητές οι οποίοι υποστηρίζουν την καθολικότητα της δημιουργικής ικανότητας (Beghetto & Kaufman, 2009 · Kaufman & Baer, 2004). Οι ερευνητές επικαλούνται ως βασικό τους επιχείρημα την ομοιότητα των χαρακτηριστικών και των δεξιοτήτων που εμφανίζουν τα δημιουργικά άτομα σε όλες τις γνωστικές περιοχές (Kaufman & Baer, 2005). Ειδικότερα, στο βιβλίο «Creativity across domains», στο οποίο περιγράφεται η δημιουργική διαδικασία και το δημιουργικό αποτέλεσμα σε διάφορα γνωστικά αντικείμενα (π.χ. ποίηση, ψυχολογία, μαθηματικά), οι Kaufman και Baer (2005) εντόπισαν κοινά χαρακτηριστικά και δεξιότητες σε δημιουργικά άτομα σε όλους τους τομείς, παρόλο που μπορεί να εντοπιστούν ελάχιστες παραλλαγές μεταξύ των γνωστικών πεδίων. Η ιδέα της γενικής δημιουργικότητας οδήγησε άλλωστε στην ανάπτυξη εργαλείων μέτρησης της δημιουργικής ικανότητας, όπως το Torrance Tests of Creative Thinking (Torrance, 1974) και το Guilford’s Alternative Uses Task (Guilford, 1967). Λόγω της καθολικότητας της φύσης της δημιουργικότητας, οι μετρήσεις σε αυτά τα εργαλεία αναμένεται να έχουν ικανότητα πρόβλεψης της δημιουργικής σκέψης σε μεγάλο εύρος γνωστικών πεδίων (Hong & Milgram, 2010).

Από την άλλη, οι σύγχρονες έρευνες αναφέρονται στη δημιουργικότητα ως ειδική ικανότητα (Baer, 1998 · Baer & Kaufman, 2005 · Kaufman & Baer, 2004 · Plucker, 1998 · Plucker & Beghetto, 2004 · Plucker & Runco, 1998). Οι ερευνητές που υποστηρίζουν ότι η δημιουργικότητα αποτελεί ειδική ικανότητα, αναγνωρίζουν ότι σε κάθε γνωστικό πεδίο απαιτείται η ανάπτυξη διαφορετικών θεωρητικών και λειτουργικών ορισμών για την έννοια (Baer, 1998 · Kaufman & Baer, 2005). Άλλωστε, η δημιουργικότητα δεν μπορεί να γίνει κατανοητή αν δεν γίνεται αναφορά στο γνωστικό αντικείμενο στο οποίο συμβαίνει (Miell & Littlleton, 2008). Οι διαφορές που εμφανίζονται στα χαρακτηριστικά των δημιουργικών ατόμων, στις διανοητικές διαδικασίες καθώς και στις ικανότητες δημιουργικής σκέψης που απαιτούνται εντός των διαφόρων γνωστικών πεδίων τονίζουν την ανάγκη για «ανεξαρτητοποίηση» της δημιουργικής ικανότητας κάθε γνωστικού πεδίου (Plucker & Zabelina, 2009). Ως απόδειξη για την ειδική φύση της δημιουργικότητας, οι Plucker και Zabelina (2009) παραθέτουν τις χαμηλές συσχετίσεις που εντόπισαν μεταξύ των δημιουργικών αποτελεσμάτων σε διαφορετικά γνωστικά πεδία.

Πρόσφατα, έχουν προταθεί υβριδικά μοντέλα για τη φύση της δημιουργικότητας, μοντέλα, δηλαδή, που περιλαμβάνουν στοιχεία τόσο από τη γενική όσο και την ειδική φύση της δημιουργικότητας (Baer & Kaufman, 2005 · Hong & Milgram, 2008 · Sternberg, 2005). Για παράδειγμα, το μοντέλο των Sternberg και Lubart (1996) όπως και το μοντέλο της Amabile (1996) κάνουν αναφορά σε γενικές ικανότητες, όπως η νοημοσύνη και οι δεξιότητες σε σχέση με τη δημιουργικότητα, αλλά και σε ειδικές ικανότητες, όπως οι διανοητικές ικανότητες και οι δεξιότητες σε σχέση με το γνωστικό αντικείμενο.

Παρόλο ότι υπάρχει πλούσια συζήτηση γύρω από τη διάκριση γενικής και ειδικής δημιουργικότητας, περιορισμένες έρευνες έχουν γίνει αναφορικά με την επίδραση της γενικής δημιουργικής ικανότητας στην ειδική δημιουργικότητα. Τέτοιες έρευνες διεξήχθηκαν από τους Hong και Milgram (2010) και τους Diakidou και Spanoudis (2002). Στην πρώτη εργασία, οι Hong and Milgram (2010) βρήκαν στατιστικά σημαντική επίδραση της γενικής δημιουργικότητας στη μαθηματική δημιουργικότητα. Έτσι, οι Milgram και Hong (2009), πρότειναν όπως κατά τη μελέτη της μαθηματικής δημιουργικότητας λαμβάνεται υπόψη τόσο η γενική όσο και η ειδική δημιουργικότητα. Μάλιστα, εξήγησαν ότι η γενική δημιουργικότητα από μόνη της δεν μπορεί να επεξηγήσει το συγκεκριμένο είδος σκέψης που οδηγεί στην παραγωγή μαθηματικών ιδεών, αλλά αποτελεί προϋπόθεση για την εμφάνιση της δημιουργικότητας στα μαθηματικά (Milgram & Hong, 2009). Όμοια, οι Diakidou και Spanoudis (2002) εντόπισαν στατιστικά σημαντική συνεισφορά της ανεξάρτητης με το γνωστικό αντικείμενο μέτρησης στη δημιουργική επίδοση των μαθητών στην ιστορία.

Νοημοσύνη

Η σχέση μεταξύ της δημιουργικότητας και του δείκτη νοημοσύνης δεν είναι ιδιαίτερα απλή (Leikin, 2008). Η διερεύνηση της σχέσης που υπάρχει μεταξύ των δύο εννοιών ξεκίνησε με την εμφάνιση της έννοιας της δημιουργικότητας, σε μια προσπάθεια ανεξαρτητοποίησης του πεδίου από άλλα ψυχολογικά πεδία, όπως η νοημοσύνη (Runco, 2007). Ως εκ τούτου, διάφορα εμπειρικά δεδομένα προέκυψαν, πολλές φορές αντικρουόμενα. Αρκετοί ερευνητές έχουν εντοπίσει στατιστικά σημαντική σχέση μεταξύ νοημοσύνης και δημιουργικότητας (π.χ. Ripple & May, 1962 · Srivastava & Thomas, 1991), ενώ άλλοι εντοπίζουν ότι οι δύο έννοιες δεν έχουν καμία σχέση μεταξύ τους (π.χ. Getzels & Jackson, 1962). Λόγω της ασυμφωνίας στη σχέση μεταξύ νοημοσύνης και δημιουργικότητας, το θέμα παραμένει άλυτο και χρειάζεται περαιτέρω διερεύνηση (Sternberg & O' Hara, 1999). Στη συνέχεια, παρατίθενται ερευνητικές προσπάθειες που θεωρούν ότι η δημιουργικότητα και η νοημοσύνη αποτελούν ξεχωριστές οντότητες και ακολούθως έρευνες που υποστηρίζουν την ύπαρξη σχέσης μεταξύ των δύο εννοιών.

Οι Getzels και Jackson (1962) ήταν από τους πρώτους ερευνητές που εντόπισαν ότι η δημιουργικότητα και η νοημοσύνη αποτελούν ασύνδετα στοιχεία. Η προσπάθεια των ερευνητών επικεντρώθηκε στον εντοπισμό δύο ομάδων μαθητών- η μια ομάδα αποτελείται από άτομα με υψηλή νοημοσύνη αλλά χαμηλή δημιουργικότητα και η άλλη ομάδα από άτομα με υψηλή δημιουργικότητα και χαμηλή νοημοσύνη- με στόχο να τις συγκρίνουν ως προς την ακαδημαϊκή τους επίδοση. Η εργασία των Getzels και Jackson (1962) κατέληξε στο συμπέρασμα ότι οι δύο ομάδες μαθητών είχαν διαφορές μεταξύ τους μόνο όσον αφορά στον επαγγελματικό προσανατολισμό, στα ενδιαφέροντα και στην επίδοσή τους. Οι Wallach και Kogan (1965) επανέλαβαν παρόμοιο πείραμα εντοπίζοντας ότι ο βαθμός συσχέτισης των μετρήσεων στο εργαλείο δημιουργικότητας και στο εργαλείο νοημοσύνης ήταν πολύ χαμηλός, επαναλαμβάνοντας το συμπέρασμα ότι οι δύο έννοιες δεν έχουν σχέση μεταξύ τους. Σε παρόμοια συμπεράσματα κατέληξε η έρευνα του Silvia (2008) ο οποίος μεταναλύοντας τα δεδομένα των Wallach και Kogan παρατήρησε ότι η σχέση μεταξύ της δημιουργικότητας και της νοημοσύνης ήταν χαμηλή. Ο Kim (2008) στη δική του εργασία βρήκε μια αμελητέα σχέση μεταξύ της δημιουργικότητας και της νοημοσύνης, προτείνοντας ότι οι μαθητές με χαμηλό δείκτη νοημοσύνης μπορούν να είναι δημιουργικοί και αντίστροφα. Πρόσφατα, ο Heilman (2005) έδωσε ένα πραγματικό παράδειγμα για να υποστηρίξει το πιο πάνω συμπέρασμα: ο Lewis Terman σε έρευνά του το 1954 μελέτησε ενήλικες οι οποίοι ως μαθητές είχαν συγκεντρώσει υψηλή βαθμολογία σε τεστ νοημοσύνης. Ανάμεσα σε αυτούς τους ενήλικες λίγοι ήταν εκείνοι που αποδείχθηκαν ως δημιουργικοί, ενώ ένα άτομο που ως μαθητής είχε λάβει χαμηλή βαθμολογία στο τεστ νοημοσύνης κέρδισε Βραβείο Νόμπελ στη Φυσική (William Shockley).

Σε αντίθεση με τα πιο πάνω, υπήρξαν ερευνητικές προσπάθειες που δεν εστιάστηκαν στο ερώτημα κατά πόσο υπάρχει σχέση μεταξύ των δύο εννοιών, αλλά στον τρόπο με τον οποίο οι έννοιες συνδέονται, θεωρώντας αυτονόητη την ύπαρξη μιας τέτοιας σχέσης (Plucker & Renzulli, 1999). Για παράδειγμα, στο μοντέλο Structure of Intellect που προτάθηκε από το Guilford (1967), η δημιουργικότητα θεωρείται ως στοιχείο της νοημοσύνης, ενώ στη θεωρία των Sternberg και Lubart (1996) η νοημοσύνη περιλαμβάνεται ανάμεσα στις μεταβλητές που αποτελούν προϋπόθεση για εμφάνιση της δημιουργικότητας. Η Threshold theory of intelligence (Torrance, 1962) φαίνεται όμως να κερδίζει το έδαφος. Η Threshold theory of intelligence προτείνει ότι η δημιουργικότητα και η νοημοσύνη αποτελούν ξεχωριστές οντότητες, αλλά υπάρχει σχέση μεταξύ τους. Σύμφωνα με τη θεωρία, η δημιουργικότητα και η νοημοσύνη σχετίζονται μεταξύ τους κάτω από ένα όριο νοημοσύνης (συνήθως 120) (Runco, 2007 · Sternberg & O’Hara, 1999). Όταν ο δείκτης νοημοσύνης του ατόμου είναι πέρα από 120, η σχέση μεταξύ δημιουργικότητας και νοημοσύνης είναι αμελητέα και οι δύο έννοιες μοιάζουν να είναι σχεδόν ανεξάρτητες νοητικές ικανότητες (Runco, 2007).

Ηλικία

Η αναπτυξιακή τροχιά που ακολουθεί η δημιουργική ικανότητα μπορεί να εξηγηθεί από τις αλλαγές που προκύπτουν στο άτομο, ως αποτέλεσμα της ηλικίας και της εκπαιδευτικής του εμπειρίας (Sak & Maker, 2006). Για παράδειγμα, η αποκλίνουσα σκέψη, η ικανότητα αξιολόγησης (Runco, 1991, 2003), η ευχέρεια και η ευελιξία (Charles & Runco, 2001) αυξάνονται ανάλογα με το βαθμό ωριμότητας των μαθητών. Ως εκ τούτου, το άτομο γίνεται πιο δημιουργικό καθώς μεγαλώνει (Claxton, Pannells & Rhoads, 2005). Εντούτοις, δεν συμφωνούν όλοι οι ερευνητές ότι η ανάπτυξη της δημιουργικότητας ακολουθεί μια γραμμική τροχιά σε σχέση με την ηλικία.

Ενδεικτικά, ο Torrance (1968) εντόπισε ότι τα δύο στοιχεία συνδέονται με μια καμπυλόγραμμη σχέση, που έχει τη μορφή U. Αυτή η σχέση υποδηλώνει ότι τα παιδιά είναι ιδιαίτερα δημιουργικά αλλά σταματούν να συμπεριφέρονται με αυτό τον τρόπο σε κάποια ηλικία, για να επανακτήσουν τη δημιουργική τους ικανότητα σε μεγαλύτερη ηλικία. Πιο συγκεκριμένα, τα παιδιά γεννιούνται με δημιουργική ικανότητα η οποία φθίνει συνεχώς μέχρι την ηλικία των 10 ετών (περίπου στη Δ’ τάξη δημοτικού σχολείο), όπου η δημιουργικότητα φτάνει στο χαμηλότερο σημείο της καμπύλης (Torrance, 1968). Στη συνέχεια, η δημιουργικότητα των μαθητών ολοένα και αυξάνεται (Torrance, 1968). Ο Torrance ανέφερε ότι αυτή η ύφεση στη δημιουργικότητα των μαθητών της Δ’ τάξης πιθανόν να οφείλεται στην προσπάθεια των μαθητών να συμμορφωθούν στις προσδοκίες του εκπαιδευτικού συστήματος κατά τα πρώτα χρόνια φοίτησής τους καθώς επίσης στην προσπάθειά τους να μη διαφοροποιηθούν από τους συνομηλίκους τους (Torrance, 1968).

Αντιθέτως, οι Charles και Runco (2001) εντόπισαν ότι οι μαθητές στη Δ’ τάξη βρίσκονται στο αποκορύφωμα της δημιουργικής τους ικανότητας, ενώ μια σταθερή μείωση παρατηρείται στην ευχέρεια, στην ευελιξία και στην πρωτοτυπία που επιδεικνύουν οι μαθητές στην Ε’ τάξη. Όμοια, οι Sak και Maker (2006) διερεύνησαν τα χαρακτηριστικά της ευχέρειας, της ευελιξίας και της πρωτοτυπίας σε συνάρτηση με την ηλικία και εντόπισαν ότι συνδέονται με μια σχέση που έχει τη μορφή σκάλας (plateau-hill-little top-plateau). Ειδικότερα, παρατηρήθηκε στασιμότητα στην ευχέρεια, στην ευελιξία και στην πρωτοτυπία των μαθητών στην ηλικία των 8-9 ετών, αύξηση στην ηλικία των 9-10 ετών, στασιμότητα στην ηλικία των 10-11 και έπειτα αύξηση. Σύμφωνα με τους ερευνητές, η ηλικία επηρεάζει σε μεγαλύτερο βαθμό την ικανότητα ευελιξίας, πρωτοτυπίας και επεξεργασίας σε σχέση με την ικανότητα ευχέρειας (Sak & Maker, 2006). Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η ευχέρεια σχετίζεται περισσότερο με τις μαθηματικές γνώσεις που κατέχει το άτομο παρά με την ηλικία (Sak & Maker, 2006).

Δημιουργική διαδικασία

Η τρίτη συνιστώσα του μοντέλου 4P αναφέρεται στη δημιουργική διαδικασία που οδηγεί στην παραγωγή ενός δημιουργικού αποτελέσματος. Αν και δεν υπάρχει «ένας κοινός μηχανισμός για τη δημιουργική σκέψη» (Noscal, 1995, σ. 27), εντούτοις η μελέτη της δημιουργικής διαδικασίας μπορεί να μας επιτρέψει να εντοπίσουμε τρόπους και μεθόδους για βελτίωσή της (Kilgour, 2006). Εύστοχο είναι το ερώτημα που θέτει ο Lubart (2001) στο άρθρο του «Models of the Creative Process: Past, Present and Future»: Τι κάνει τη διαδικασία δημιουργική; Ο Lubart (2001) στο συγκεκριμένο άρθρο δίνει τρεις εναλλακτικές περιγραφές για τη μορφή της δημιουργικής διαδικασίας. Κατά πρώτο λόγο, η δημιουργική διαδικασία ενδέχεται να οδηγήσει είτε σε διαπρεπή αποτελέσματα (αυτό που ορίστηκε προηγουμένως ως απόλυτη δημιουργικότητα) ή σε «καθημερινά επίπεδα» δημιουργικής συμπεριφοράς (σχετική δημιουργικότητα). Δεύτερο, η δημιουργική διαδικασία μοιάζει με ένα συνεχές, όπου στο ένα άκρο εμφανίζεται έντονη δημιουργική δράση και στο άλλο άκρο παρατηρείται απουσία δημιουργικής δράσης. Με αυτή την οπτική, η δημιουργική διαδικασία δεν σημαίνει ότι είτε υπάρχει σε μεγάλο βαθμό ή όχι, αλλά μπορεί να πάρει ενδιάμεσες τιμές ανάμεσα στα δύο άκρα του συνεχούς. Σε αυτό άλλωστε οφείλεται και ο διαφορετικός βαθμός δημιουργικής συμπεριφοράς που παρατηρείται από άτομο σε άτομο. Μια τρίτη ερμηνεία επεξηγεί ότι η δημιουργική από τη μη δημιουργική συμπεριφορά δεν οφείλεται αποκλειστικά στη δημιουργική διαδικασία αλλά σε άλλους παράγοντες (π.χ. γνώσεις) που ενδέχεται να διαφοροποιήσουν τη διαδικασία (Lubart, 2001). Εντούτοις, για να είναι εφικτή η μελέτη των πιο πάνω περιπτώσεων, απαιτείται η περιγραφή και η μελέτη των σταδίων, με τα οποία το άτομο προσεγγίζει δημιουργικά μια κατάσταση (Johnson & Carruthers, 2006).

Στάδια δημιουργικής διαδικασίας

Από τις πρώτες προσπάθειες μοντελοποίησης της δημιουργικής διαδικασίας σε διακριτά στάδια ήταν αυτή του Graham Wallas (1926). Ο Wallas πρότεινε ότι η δημιουργική διαδικασία περιλαμβάνει επτά στάδια: την αντιμετώπιση (encounter), την προετοιμασία (preparation), τη συγκέντρωση (concentration), την επώαση (incubation), το φωτισμό (illumination), την επαλήθευση (verification) και τη διάχυση/πειστικότητα (persuasion). Στο πρώτο στάδιο προσδιορίζεται η ύπαρξη της προβληματικής κατάστασης ενώ κατά το δεύτερο στάδιο γίνεται η κατανόηση και η διερεύνηση της προβληματικής κατάστασης (Davis & Rimm, 2004 · Johnson & Carruthers, 2006). Στο στάδιο της συγκέντρωσης το άτομο προσπαθεί συνειδητά να λύσει το πρόβλημα. Θεωρείται ότι τα στάδια της συγκέντρωσης και της προετοιμασίας απαιτούν σκληρή δουλειά και χρόνο, και στηρίζονται στις γνώσεις και στις ικανότητες του ατόμου. Σε αντίθεση, κατά το στάδιο της επώασης δεν συμβαίνει οποιαδήποτε συνειδητή εργασία, αλλά υποσυνείδητα τα άτομα φιλτράρουν πληροφορίες από το συνειδητό στο ασυνείδητο ώστε να μπορέσουν να τις χρησιμοποιήσουν σε επόμενο στάδιο (Johnson & Carruthers, 2006). Στο πέμπτο στάδιο, στο στάδιο του φωτισμού ή του «Εύρηκα», όπως έχει αποκαλεστεί, εμφανίζεται ξαφνικά η λύση στην προβληματική κατάσταση (Davis & Rimm, 2004). Δοκιμαστικές λύσεις που εμφανίστηκαν κατά το πέμπτο στάδιο, μεταβαίνουν στο στάδιο της επαλήθευσης, το οποίο εμπλέκει έλεγχο, διαμόρφωση και ανάπτυξη των ιδεών (Johnson & Carruthers, 2006). Στο τελευταίο στάδιο, το άτομο προσπαθεί να πείσει άλλους ότι η ιδέα ή η λύση που προτείνει είναι αποτελεσματική για το σκοπό που έχει δημιουργηθεί. Πρόσφατα, το μοντέλο του Wallas έχει περιοριστεί σε τέσσερα στάδια: προετοιμασία, επώαση, φωτισμός, επαλήθευση (Cropley, 1997). Η διάκριση των σταδίων της δημιουργικής διαδικασίας, όπως προτάθηκε από το Wallas υιοθετήθηκε ή τροποποιήθηκε από πιο σύγχρονους του ερευνητές, στον αριθμό και στην ονομασία των σταδίων.

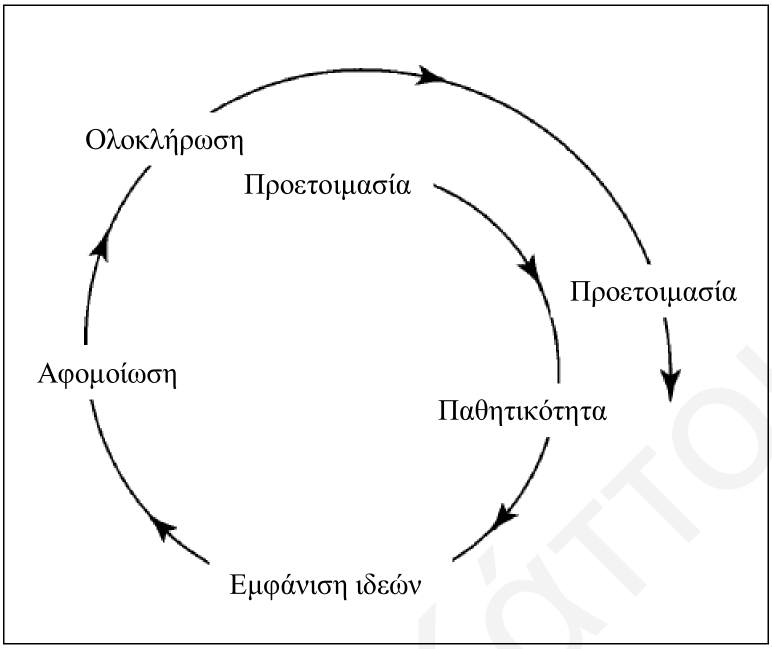
Για παράδειγμα, ο Osborn (1963) αναφέρει ότι η δημιουργική διαδικασία «συνήθως περιλαμβάνει κάποια ή όλα» (σ. 115) από τα πιο κάτω στάδια: προσανατολισμός, προετοιμασία, ανάλυση, ιδεοπλασία, επώαση, σύνθεση και αξιολόγηση. Στο στάδιο του προσανατολισμού το άτομο εντοπίζει το πρόβλημα και το αναλύει σε επιμέρους υπο-προβλήματα και έπειτα στο στάδιο της προετοιμασίας συγκεντρώνει τα σχετικά στοιχεία και πληροφορίες προς επίλυσή του. Κατά το στάδιο της ανάλυσης, γίνεται διάκριση των σχετικών πληροφοριών και έπειτα εντοπίζονται οι εναλλακτικές ιδέες. Στο πέμπτο στάδιο, αυτό της επώασης, το άτομο σταματά να ασχολείται συνειδητά με το στόχο του μέχρι που εμφανίζεται η δημιουργική ιδέα. Στο στάδιο της σύνθεσης, το άτομο συνδυάζει τα επιμέρους στοιχεία και στο τελευταίο στάδιο γίνεται αξιολόγηση και επαλήθευση των ιδεών που έχουν προκύψει.

Πιο πρόσφατα, ο Cropley (Cropley, 1997 · Cropley & Urban, 2000) εντόπισε ότι το μοντέλο του Wallas είναι κατάλληλο για το πρώτο μέρος της δημιουργικής διαδικασίας, την παραγωγή του καινοτόμου αποτελέσματος, αλλά απουσιάζει η εφαρμογή της δημιουργικής ιδέας. Για αυτό το λόγο, πρότεινε ένα μοντέλο που περιλαμβάνει επτά στάδια. Πιο συγκεκριμένα, ο Cropley πρότεινε ότι η δημιουργική διαδικασία απαιτεί το στάδιο της προετοιμασίας, της οικειότητας δηλαδή με το γνωστικό αντικείμενο και της ενεργοποίησης, της συνειδητοποίησης του προβλήματος που έχει προκύψει. Στο στάδιο της παραγωγής εμφανίζονται εναλλακτικές ιδέες που θεωρούνται ότι μπορούν να επιλύσουν την προβληματική κατάσταση ενώ στο στάδιο της επώασης προκύπτουν μία ή περισσότερες πρωτότυπες λύσεις, που στη συνέχεια ελέγχονται για την ορθότητά τους. Στο επόμενο στάδιο, στο στάδιο της επικοινωνίας, το αποτέλεσμα της δημιουργικής διαδικασίας γίνεται γνωστό σε άλλα άτομα, με στόχο την αποδοχή και την επικύρωσή του.

Τα στάδια που προτάθηκαν από το Wallas (1926) υιοθετήθηκαν από διάφορους ερευνητές στη μαθηματική παιδεία (π.χ. Hadamard, 1945 · Liljedahl, 2004 · Poincare, 1948 · Sriraman, 2004), για να περιγράψουν τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά. Πιο συγκεκριμένα το πρώτο στάδιο της δημιουργικής διαδικασίας ονομάστηκε από τον Poincare (1948) ως προκαταρκτικό (preliminary) και από το Hadamard (1945) ως εναρκτήριο (initiation). Αυτό το στάδιο χαρακτηρίζεται από σκληρή, σκόπιμη και συνειδητή εργασία, όπου το άτομο ανατρέχει σε προηγούμενες γνώσεις και εμπειρίες, για να εντοπίσει τη λύση στην προβληματική κατάσταση (Liljedahl, 2004). Στην πορεία, το άτομο ανίκανο να καταλήξει σε μια λύση, σταματά να εργάζεται στο πρόβλημα σε συνειδητό επίπεδο και ασχολείται με διαφορετικά προβλήματα ή καταστάσεις. Σε αυτό το στάδιο η λύση του προβλήματος επεξεργάζεται σε ασυνείδητο επίπεδο (Hadamard, 1945 · Poincaré, 1952). Αυτό είναι το στάδιο της επώασης, το οποίο είναι άμεσα συνδεδεμένο με τη συνειδητή διαδικασία που προηγήθηκε στο προηγούμενο στάδιο. Το τρίτο στάδιο χαρακτηρίζεται από την ξαφνική εμφάνιση της λύσης. Εντούτοις, η δημιουργική διαδικασία δεν ολοκληρώνεται στο τρίτο στάδιο, αλλά ακολουθεί το στάδιο της έκφρασης και της επικοινωνίας του αποτελέσματος. Σε αυτό το στάδιο γίνεται επαλήθευση της ορθότητας και της χρησιμότητας της λύσης και διερευνάται η πιθανότητα επέκτασης και αξιοποίησης του αποτελέσματος.

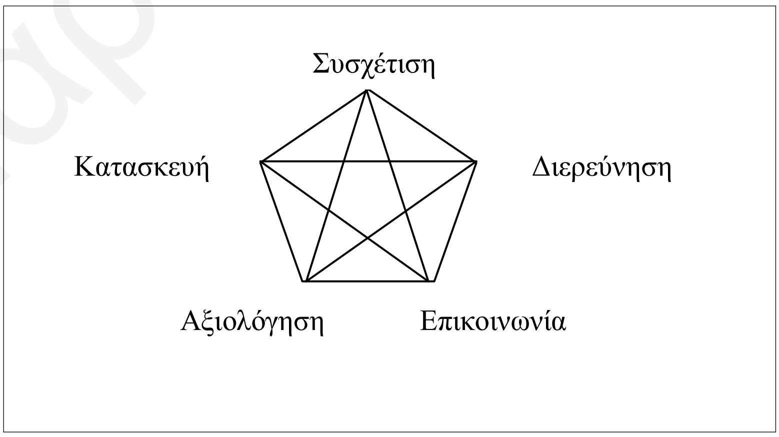
Ένα άλλο μοντέλο περιγραφής της δημιουργικής διαδικασίας προτάθηκε από την Craft (2000), για να αναπαραστήσει την ανάπτυξη της ιδέας από τη σύλληψη μέχρι την παραγωγή της. Με τα λόγια της Craft «Πρώτα είναι το στάδιο της προετοιμασίας- να βρεθείς σε ένα κατάλληλο χώρο για να είσαι δημιουργικός. Τι ακριβώς σημαίνει αυτό, είναι προσωπικό θέμα. Μπορεί να σημαίνει να βρεθείς σε ένα φυσικό χώρο, μπορεί να σημαίνει εύρεση χρόνου ή να είσαι με άλλους ανθρώπους που σε ενθαρρύνουν… Έπειτα, είναι το στάδιο της παθητικότητας, μιας περιόδου που χαρακτηρίζεται από κενό και έλλειψη κατεύθυνσης… Το στάδιο της αφομοίωσης είναι το λιγότερο ορατό και είναι ένα εσωτερικό στάδιο, το οποίο απαιτεί χρόνο. Το τελευταίο στάδιο της ολοκλήρωσης εμπλέκει την πραγματοποίηση της ιδέας» (σ. 32-33). Το σπειροειδές μοντέλο της Craft παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 2.4.

Στο πεδίο της μαθηματικής παιδείας, ο Ervynck (1991) περιέγραψε τη μαθηματική δημιουργικότητα σε τρία στάδια. Το στάδιο 0 ή αλλιώς προκαταρκτικό στάδιο (Preliminary technique stage) περιλαμβάνει κάποιου είδους τεχνικές ή πρακτικές εφαρμογές των μαθηματικών κανόνων ή διαδικασιών. Στο στάδιο 1 της αλγοριθμικής δραστηριότητας (Algorithmic activity) εμπλέκονται μαθηματικές τεχνικές, όπως η επαναλαμβανόμενη εφαρμογή αλγορίθμων. Στο στάδιο 2, αυτό της δημιουργικής δραστηριότητας (Creative activity), εμφανίζονται δημιουργικοί τρόποι σκέψης στα μαθηματικά.



Διάγραμμα 2.4. Στάδια δημιουργικής διαδικασίας σύμφωνα με την Craft (2000).

Πιο πρόσφατα, η Sheffield (2009) πρότεινε ένα μοντέλο με πέντε στάδια, το οποίο μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να γίνουν πιο δημιουργικοί κατά την επίλυση προβλημάτων. Τα πέντε στάδια του μοντέλου είναι η κατασκευή, η συσχέτιση, η διερεύνηση, η επικοινωνία και η αξιολόγηση, όπως παρουσιάζονται στο Διάγραμμα 2.5.



Διάγραμμα 2.5. Στάδια δημιουργικής διαδικασίας σύμφωνα με τη Sheffield (2009).

Η διερεύνηση αναφέρεται στην εις βάθος μελέτη των διαθέσιμων πληροφοριών και των σχετικών μαθηματικών εννοιών. Κατά το στάδιο της διερεύνησης, οι μαθητές αξιοποιούν όλες τις διαθέσιμες πληροφορίες που σχετίζονται με το μαθηματικό θέμα στο οποίο εργάζονται. Στο στάδιο της συσχέτισης, οι μαθητές καλούνται να εντοπίσουν σχέσεις μεταξύ μαθηματικών ιδεών, εννοιών και λύσεων. Ως εκ τούτου, αναμένεται από τους μαθητές να αναλογιστούν παρόμοια προβλήματα ή μαθηματικές ιδέες που έχουν αντιμετωπίσει και να εντοπίσουν ομοιότητες και διαφορές. Κατά το στάδιο της αξιολόγησης, απαιτείται εμπλοκή της κριτικής σκέψης για επιβεβαίωση της επίτευξης του αρχικού στόχου και του ελέγχου της αξίας των προτεινόμενων λύσεων. Το στάδιο της επικοινωνίας αναφέρεται στη διάχυση των ιδεών και στην προσπάθεια επεξήγησης της λογικής που υποθάλπει. Τέλος, το στάδιο της κατασκευής αναφέρεται στην εύρεση λύσεων, στον εντοπισμό νέων ερωτημάτων ή διερευνήσεων (Sheffield, 2009).

Για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας υιοθετείται το τελευταίο μοντέλο για τη διερεύνηση της μαθηματικής διαδικασίας. Η επιλογή αυτή οφείλεται σε δύο λόγους. Πρώτα, το μοντέλο δεν είναι γραμμικό, αλλά η μετάβαση από το ένα στάδιο στο άλλο καθορίζεται από το ίδιο το άτομο. Επίσης, δεν υπάρχει ένα σταθερό σημείο έναρξης της διαδικασίας, αλλά το άτομο μπορεί να ξεκινήσει από οποιοδήποτε σημείο του μοντέλου κατευθύνοντας τη διαδικασία ανάμεσα στα στάδια που χρειάζεται για να λύσει ένα πρόβλημα (Sheffield, 2008). Δεύτερο, σε αντίθεση με τα προηγούμενα μοντέλα οι διαδικασίες επικεντρώνονται στη στιγμή της εμφάνισης δημιουργικών ιδεών και όχι στη χρονική στιγμή πριν ή μετά την εμφάνιση των ιδεών.

Περιβάλλον που ενισχύει τη δημιουργικότητα

Η τέταρτη διάσταση του μοντέλου 4P περιλαμβάνει τα χαρακτηριστικά του πλαισίου στο οποίο ενεργεί το δημιουργικό άτομο, λαμβάνει χώρο η δημιουργική δράση και εμφανίζεται το δημιουργικό αποτέλεσμα (Klavir & Gorodetsky, 2009). Για παράδειγμα, ορισμοί όπως αυτοί που προτάθηκαν από τους Nuessel, Stewart και Cedeño (2001) και το Csikszentmihalyi (1999) εξηγούν ότι η δημιουργικότητα παρατηρείται «...εντός ενός κοινωνικού πλαισίου...» (Nuessel, Stewart & Cedeño, 2001, σ. 114) και αξιολογείται από πολιτισμικούς και κοινωνικούς θεσμούς (Csikszentmihalyi, 1999). Οι πιο πάνω ορισμοί επιβεβαιώνουν ότι είναι αδύνατο να διαχωρίσει κανείς τη δημιουργικότητα από το συγκείμενο στο οποίο συμβαίνει, τόσο για την αναγνώριση όσο και για την αξιολόγηση του αποτελέσματος και της διαδικασίας (Basadur & Hausdorf, 1996 · Csikszentmihalyi, 1996).

Για τη διδακτική των μαθηματικών ως πλαίσιο εμφάνισης της μαθηματικής δημιουργικότητας εκλαμβάνεται το εκπαιδευτικό περιβάλλον στο οποίο λαμβάνει χώρο μια τέτοια συμπεριφορά. Σύμφωνα με τους Sternberg και Lubart (1993), το εκπαιδευτικό περιβάλλον ενδέχεται να επηρεάσει τη δημιουργικότητα ενός ατόμου με τρεις τρόπους. Πρώτα, το εκπαιδευτικό περιβάλλον μπορεί να ενθαρρύνει και να ενισχύσει τη δημιουργικότητα. Δεύτερο, το περιβάλλον αξιολογεί το δημιουργικό αποτέλεσμα με βάση κριτήρια που έχουν τεθεί και τέλος έχει τη δυνατότητα να επιβραβεύσει τις δημιουργικές ιδέες. Ο Goldin (2002) αναφέρει ότι για την ανάπτυξη εκπαιδευτικού περιβάλλοντος που συμβάλλει στην ανάπτυξη υψηλού επιπέδου μαθηματικής σκέψης θα πρέπει να ληφθεί υπόψη ο σχεδιασμός κατάλληλων εκπαιδευτικών περιβαλλόντων, η εφαρμογή κατάλληλων διδακτικών παρεμβάσεων και η επιλογή κατάλληλων έργων/δραστηριοτήτων. Ο Kleiman (2005) προσθέτει τα κριτήρια και τις μεθόδους αξιολόγησης και η Yerushalmy (2009) την ενσωμάτωση των νέων τεχνολογιών ως παράγοντες που συντείνουν στην ανάπτυξη εκπαιδευτικού περιβάλλοντος που επηρεάζει την εμφάνιση της δημιουργικής ικανότητας.

Εκπαιδευτικά περιβάλλοντα για ενίσχυση της μαθηματικής δημιουργικότητας

Τα παιδιά είναι εκ φύσεως ιδιαίτερα δημιουργικά, έχουν ζωντανή φαντασία και ενεργή περιέργεια (Paul & Kathy, 1990). Με την έναρξη της επίσημης εκπαίδευσης, η δημιουργικότητα των μαθητών μειώνεται και η αποκλίνουσα σκέψη των μαθητών αντικαθίσταται σταδιακά από τη συγκλίνουσα σκέψη (Yushau, Mji & Wessels, 2003). Όπως ο Gnedenko (1991, στο Freiman & Sriraman, 2011) ανέφερε, καθένας έχει έμφυτη δημιουργική ικανότητα που φαίνεται να περιορίζεται από το εκπαιδευτικό σύστημα, υποδηλώνοντας ότι η ύπαρξη ή η απουσία συγκεκριμένων παραγόντων στο σχολείο επηρεάζουν τη δημιουργικότητα των μαθητών. Εντούτοις, πολλοί ερευνητές επιβεβαιώνουν ότι η δημιουργικότητα επιδέχεται επιρροή από διδακτικές και εμπειρικές καταστάσεις (π.χ. Holyoak & Thagard, 1995 · Sternberg, 1988). Για αυτό το λόγο, οι Feldhusen και Goh (1995) αναφέρουν ότι αν οι τακτικές και οι στρατηγικές που απαιτούνται για την εμφάνιση της δημιουργικής συμπεριφοράς είχαν καθοριστεί, θα ήταν δυνατή η ανάπτυξη διδακτικών μοντέλων.

Ο Csikszentmihalyi (1996) αναφέρει επτά στοιχεία που θα πρέπει να χαρακτηρίζουν το δημιουργικό σχολικό περιβάλλον: (1) κατάλληλα εκπαιδευμένοι δάσκαλοι, (2) ρεαλιστικές προσδοκίες από τους μαθητές, (3) κατάλληλο εποπτικό υλικό, (4) αναγνώριση της δημιουργικής δυνατότητας των μαθητών, (5) ευκαιρίες διερεύνησης, (6) ευκαιρίες για αυτοκατευθυνόμενη μάθηση, και τέλος (7) ενθάρρυνση και επιβράβευση. Ο τρόπος, δηλαδή, που το περιβάλλον αντιμετωπίζει τη δημιουργικότητα, η σημασία που της προσδίδεται, οι μετρήσεις που χρησιμοποιούνται για τον εντοπισμό της καθώς και οι παιδαγωγικές συνθήκες που εφαρμόζονται δείχνουν να ενισχύουν τη δημιουργικότητα (Leikin, 2008).

Ο Torrance (1962) απαριθμεί πέντε συνθήκες που πρέπει να υφίστανται για να ενισχυθεί η δημιουργικότητα: (1) απουσία απειλής και ύπαρξη δυνατότητας για ανάληψη ρίσκου, (2) αυτογνωσία και ικανότητα έκφρασης, (3) αποδοχή της διαφορετικότητας, (4) αποδοχή διαφορετικών ιδεών και ενίσχυση της αυτοπεποίθησης των μαθητών για τις δικές τους ιδέες, (5) ικανότητα επικοινωνίας και καλές διαπροσωπικές σχέσεις. Με άλλα λόγια, ο Torrance απαιτεί την ύπαρξη ελεύθερου περιβάλλοντος εργασίας, ενός περιβάλλοντος που δεν επιδέχεται απειλής από εξωτερικούς παράγοντες όπως η αξιολόγηση, ο διδακτικός χρόνος και η ύλη, αλλά ενισχύεται από εσωτερικά κίνητρα για ολοκλήρωση του έργου και επίτευξη του στόχου. Παράλληλα, το άτομο χαρακτηρίζεται από αυτοπεποίθηση για τις ικανότητες και τις ιδέες του και είναι σε θέση να τις παρουσιάζει και να τις συζητά με τον εκπαιδευτικό και τους συμμαθητές του. Στις συνθήκες που προτείνονται από τον Torrance ιδιαίτερη σημασία δίνεται στην ανεξαρτησία και στην ανάπτυξη εσωτερικών κινήτρων. Καθώς η δημιουργικότητα εκτιμάται στο εκπαιδευτικό περιβάλλον και γίνεται αποδεχτή η πολυφωνία, η ελευθερία και η ανεξαρτησία της σκέψης, οι μαθητές αισθάνονται άνετα να εκφράσουν τις δικές τους ιδέες χωρίς το φόβο της κριτικής και της απόρριψης (Cangelosi, 1996 · Davies, 1999).

Στο πλαίσιο της μαθηματικής παιδείας ο Sriraman (2005) προτείνει πέντε αρχές στις οποίες θα πρέπει να κτιστεί ένα εκπαιδευτικό περιβάλλον που θα στοχεύει στην ενίσχυση της μαθηματικής δημιουργικότητας σε μαθητές ηλικίας K-12: την αρχή του Gestalt (Gestalt's principle), την αρχή της καλαισθησίας (aesthetic principle), την αρχή της ελεύθερης αγοράς (free market principle), την αρχή της επιμόρφωσης (scholarly principle) και την αρχή της αβεβαιότητας (uncertainty principle). Σύμφωνα με την πρώτη αρχή, η ενίσχυση της μαθηματικής δημιουργικότητας θα πρέπει να ακολουθεί τα τέσσερα στάδια που διατυπώθηκαν από τον Wallas (1926) και είχαν επηρεαστεί από τη θεωρία του Gestalt: προετοιμασία, επώαση, φωτισμό και επαλήθευση. Είναι δηλαδή σημαντικό οι εκπαιδευτικοί να ενθαρρύνουν τους μαθητές να εργαστούν σε μαθηματικά προβλήματα για κάποιο χρονικό διάστημα, δημιουργώντας έτσι κατάλληλες ευκαιρίες στους μαθητές, για να καταλήξουν σε ενόραση και κάποια μορφή «ανακάλυψης». Η αρχή της καλαισθησίας απαιτεί την εμφάνιση μιας «ωραίας» μαθηματικής ιδέας, που ενδέχεται να προκύψει από το συνδυασμό άλλων ιδεών ή διαφορετικών μαθηματικών περιοχών ή ακόμα από τη χρήση άτυπων τεχνικών απόδειξης. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να γίνεται προσεκτική επιλογή των δραστηριοτήτων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές, ως βασικό στοιχείο για να αναπτυχθεί το αίσθημα σεβασμού προς τα μαθηματικά. Σύμφωνα με την αρχή της ελεύθερης αγοράς, οι μαθητές θα πρέπει να ενθαρρύνονται να παρουσιάζουν τις λύσεις τους σε κατάλληλο χώρο και χρόνο, γεγονός που θα τους επιτρέπει να αποκτήσουν εμπειρίες στην παρουσίαση και στην προάσπιση των ιδεών τους έναντι αυτών των συμμαθητών τους. Η τέταρτη αρχή, η αρχή της επιμόρφωσης απαιτεί όπως οι εκπαιδευτικοί αποδέχονται τις διαφορετικές ιδέες και προσεγγίσεις που μπορεί να προτείνουν οι μαθητές. Ταυτόχρονα, θα πρέπει να δημιουργήσουν ένα παιδαγωγικό περιβάλλον στο οποίο οι μαθητές θα ενθαρρύνονται να συζητούν και να κάνουν ερωτήσεις για την ισχύ των προσεγγίσεων των άλλων μαθητών αλλά και του ίδιου του δασκάλου. Η διερώτηση, η εύρεση ανάλογων προβλημάτων, η ανάπτυξη ανεξάρτητης σκέψης, η διερεύνηση μαθηματικών προβλημάτων ενδέχεται να ενθαρρύνουν τους μαθητές σε ανεξάρτητη δραστηριότητα. Τέλος, σύμφωνα με την αρχή της αβεβαιότητας, η δημιουργία, σε αντίθεση με τη μάθηση, απαιτεί την έκθεση των μαθητών σε αβέβαιες καταστάσεις. Αυτή η δεξιότητα απαιτεί από το δάσκαλο να παρέχει υποστήριξη στους μαθητές που βιώνουν την απογοήτευση καθώς δεν μπορούν να λύσουν ένα δύσκολο πρόβλημα.

Εκπαιδευτικός και διδακτικές παρεμβάσεις

Η δημιουργικότητα στα μαθηματικά δεν ενθαρρύνεται στο σχολικό περιβάλλον, αλλά αντιθέτως υποτιμάται και αποθαρρύνεται (Milgram & Hong, 2009 · Sriraman, 2005). Οι Wheeler, Waite και Bromfield (2002) θεωρούν ότι ο εκπαιδευτικός είναι το κλειδί για την ενθάρρυνση και την ανάπτυξη της δημιουργικής σκέψης στο σχολείο. Άλλωστε, «η δημιουργική διδασκαλία ενθαρρύνει τη δημιουργική μάθηση» (Woods, 1995, σ. 2).

Διάφορα ερωτήματα έχουν τεθεί κατά καιρούς αναφορικά με το ρόλο του δασκάλου, τις εκπαιδευτικές τεχνικές που θα πρέπει να εφαρμόσει, τις γνώσεις που απαιτείται να κατέχει και την επιμόρφωση που χρειάζεται (Leikin, 2008).

Για να είναι σε θέση ο εκπαιδευτικός να ενθαρρύνει την ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας χρειάζεται πρώτα πρώτα να «είναι ικανός να αναγνωρίζει τη δημιουργική συμπεριφορά και να γνωρίζει πώς να την καλλιεργήσει» (Beghetto & Kaufman, 2009, σ. 41) και δεύτερο να έχει πειστεί ο ίδιος για τη σημασία της δημιουργικότητας στην ενίσχυση της μαθηματικής κατανόησης (Leikin, 2009). Πιο συγκεκριμένα, ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να είναι γνώστης του τρόπου με τον οποίο η δημιουργικότητα σχετίζεται με το αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών (Boden, 2001) και να νιώθει ασφαλής (μαθηματικά και παιδαγωγικά) να εφαρμόσει τέτοιου είδους δραστηριότητες στην τάξη του (Leikin, 2009). Με άλλα λόγια, για να είναι δυνατή η δημιουργία δημιουργικών μαθητών είναι απαραίτητη η ύπαρξη δημιουργικών και με αυτοπεποίθηση εκπαιδευτικών, που να κατέχουν τις απαραίτητες γνώσεις και δεξιότητες.

Εφόσον η δημιουργικότητα στα μαθηματικά μπορεί να βελτιωθεί με κατάλληλες διδακτικές μεθόδους (Hershkovitz, Peled & Littler, 2009), ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι σημαντικός σε όλα τα στάδια της διδασκαλίας: στην επιλογή των δραστηριοτήτων, στον τρόπο παρουσίασης τους στους μαθητές, στην οργάνωση της εργασίας των μαθητών και στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων της διδακτικής διαδικασίας (Freiman, 2009). Αναφορικά με την επιλογή δραστηριοτήτων, ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να εμπλέκει τους μαθητές σε δημιουργικές διερευνήσεις που είναι ενδιαφέρουσες και σημαντικές για τους ίδιους, χωρίς να τους περιορίζει στη λύση τυπικών μαθηματικών προβλημάτων που αποτελούν απλή εφαρμογή κανόνων και αλγορίθμων (Mann, 2006 · Meissner, 2000).

Ταυτόχρονα, ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να έχει εμπειρία στην οργάνωση κατάλληλου παιδαγωγικού περιβάλλοντος και στην ενίσχυση των μαθητών να εμφανίσουν και να αναπτύξουν δημιουργική σκέψη στα μαθηματικά (Taylor, 2009). Βασικό στοιχείο του εκπαιδευτικού περιβάλλοντος πρέπει να είναι η ύπαρξη συναισθηματικά ασφαλούς κλίματος, το οποίο θα χαρακτηρίζεται από εμπιστοσύνη, αξιοπρέπεια και αλληλοσεβασμό κατά τη διαδικασία της διερεύνησης και ανακάλυψης μαθηματικών εννοιών (Goldin, 2009· Koichu & Orey, 2010). Σε αυτό το περιβάλλον δεν επικρίνονται τα λάθη και αποφεύγεται η απειλή της αξιολόγησης (Sheffield, 2009). Οι μαθητές έχουν ελευθερία να εκφράσουν τις απόψεις τους και να ανταλλάξουν ιδέες με τους συμμαθητές τους (Meissner, 2000 · Sriraman, 2009). Ο εκπαιδευτικός είναι δεκτικός σε απροσδόκητες απαντήσεις, γιατί σύμφωνα με τους Hershkovitz, Peled και Littler (2009) αν ένας εκπαιδευτικός έχει προκαθορισμένες αναμενόμενες απαντήσεις μπορεί εύκολα να αγνοήσει ή να απορρίψει τις πιο ενδιαφέρουσες απαντήσεις των μαθητών του.

Παρόλο που ο δάσκαλος δίνει την ελευθερία στους μαθητές να εργαστούν με το δικό τους τρόπο, αυτό δεν σημαίνει ότι το μάθημα δεν είναι καλά οργανωμένο. Πιο συγκεκριμένα, το μάθημα θα πρέπει να έχει ξεκάθαρο στόχο, να καθορίζει τα κριτήρια για την επιτυχία του μαθητή, να δίνει τη δυνατότητα συνεργατικής εργασίας και να είναι ξεκάθαρο για τις ελευθερίες και τους περιορισμούς που το χαρακτηρίζουν (Prince, 2006). Σύμφωνα με τον Prince (2006), ο εκπαιδευτικός χρειάζεται να βρει μια ισορροπία μεταξύ ελευθερίας και περιορισμών. Από τη μια, η ύπαρξη αυξημένης δομής στη διδακτική πράξη μειώνει την ευκαιρία στους μαθητές να εμφανίσουν δημιουργικές ικανότητες, ενώ από την άλλη η έλλειψη απαραίτητης καθοδήγησης μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές σε παρανοήσεις (Prince, 2006). Έτσι, η εύρεση της χρυσής τομής μεταξύ περιορισμών και ελευθερίας θα βοηθήσει τους μαθητές να απολαύσουν τη δημιουργική διαδικασία και αυτό το αίσθημα ευχαρίστησης θα ενισχύει τη σκέψη τους.

Αναφορικά με τη δημιουργική διδασκαλία, θα πρέπει να είναι ευέλικτη και να αξιοποιεί ποικιλία διδακτικών προσεγγίσεων. Πιο συγκεκριμένα, ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να είναι ικανός να τροποποιεί το βαθμό δυσκολίας των έργων για συγκεκριμένους μαθητές ανάλογα με τις ικανότητές τους (Diezmann & Watters, 2000). Θα πρέπει, δηλαδή, να δίνει σε όλους τους μαθητές την ευκαιρία να σκεφτούν (Freiman, 2009), να τους προκαλεί και να τους παρακινεί στη μαθησιακή διαδικασία χωρίς να μειώνει το βαθμό δυσκολίας και τις απαιτήσεις του έργου (Henningsen & Stein, 1997). Η εμπλοκή των μαθητών σε δημιουργικές εξερευνήσεις μαθηματικών εννοιών (Mann, 2006), η ενθάρρυνση να αναλάβουν ρίσκο ώστε να εντοπίσουν λύσεις που δεν είναι απευθείας αντιληπτές (Sriraman, 2009), η παρακίνηση των μαθητών να ψάχνουν για πολλές και διαφορετικές λύσεις (Presmeg, 2003) αποτελούν μερικές από τις τεχνικές διαφοροποίησης της διδασκαλίας, ώστε κάθε μαθητής να διερευνήσει μαθηματικές έννοιες δημιουργικά, ανάλογα με τις δυνατότητές του.

Δημιουργικές δραστηριότητες στα μαθηματικά

Με στόχο την ενίσχυση των δημιουργικών ικανοτήτων των μαθητών έχουν προταθεί χαρακτηριστικά που θα πρέπει να διακατέχουν τις δημιουργικές δραστηριότητες στα μαθηματικά (Hershkovitz, Peled & Littler, 2009). Παρόλα αυτά, δεν χρειάζεται κάθε δραστηριότητα να έχει όλα τα πιο κάτω χαρακτηριστικά, για να μπορέσει να ενισχύσει τη δημιουργική σκέψη των μαθητών, αλλά αρκεί να ανήκει σε μια σειρά από δραστηριότητες που ως ολότητα να παρέχουν ευκαιρίες για εμφάνιση δημιουργικής συμπεριφοράς (Hershkovitz, Peled & Littler, 2009).

Λόγω του ότι το δημιουργικό αποτέλεσμα έχει οριστεί με τα χαρακτηριστικά της ευχέρειας, της ευελιξίας και της πρωτοτυπίας, οι δραστηριότητες θα πρέπει να ευνοούν την εμφάνιση αυτών των χαρακτηριστικών, αποζητώντας την εύρεση πολλών, διαφορετικών και καινοτόμων λύσεων (Hershkovitz, Peled & Littler, 2009). Σε αυτό το πλαίσιο, η ευχέρεια αναφέρεται στον αριθμό των ορθών απαντήσεων, η ευελιξία στα διαφορετικά είδη απαντήσεων και η πρωτοτυπία στη συμβατότητα και στην καινοτομία των προτεινόμενων λύσεων (Leikin, Koichu & Berman, 2009).

Πέρα από την εύρεση πολλών λύσεων, οι δραστηριότητες θα πρέπει να δίνουν στους μαθητές δυνατότητες να διερευνήσουν μαθηματικές έννοιες και να αποκτήσουν βαθιά κατανόηση μαθηματικών ιδεών (Haylock, 1997 · Sheffield, 2008). Θα πρέπει, δηλαδή, να προκαλούν τους μαθητές να ασχοληθούν με μαθηματικές έννοιες, όπως και οι έμπειροι μαθηματικοί (Polya, 1973), αφήνοντάς τους περιθώρια να διερωτηθούν, να διερευνήσουν, να συνδυάσουν και να εξηγήσουν μαθηματικές ιδέες, να χρησιμοποιήσουν μαθηματικές αρχές, να γενικεύσουν, να συζητήσουν και να επιχειρηματολογήσουν (Diezmann & Watters, 2000 · Hershkovitz, Peled & Littler, 2009 · NCTM, 2000 · Sheffield, 2003).

Για να είναι δυνατή η ενασχόληση των μαθητών με μαθηματικές ιδέες, οι δραστηριότητες δεν θα πρέπει να είναι συνηθισμένες, με την έννοια ότι οι μαθητές δεν θα πρέπει να τις έχουν ξαναδεί ούτε να είχαν την ευκαιρία στο παρελθόν να ασχοληθούν μαζί τους. Τέτοιου είδους δραστηριότητες απαιτούν ευέλικτο τρόπο σκέψης και δημιουργούν την ανάγκη για επέκταση των προηγούμενων γνώσεων, μέσα από διερευνήσεις, ανακαλύψεις και συσχετίσεις μαθηματικών ιδεών (Schoenfeld, Burkhardt, Daro, Ridgway, Schwartz, & Wilcox, 1999). Επιπρόσθετα, το γεγονός ότι οι δραστηριότητες δεν έχουν προφανείς λύσεις ή προφανείς τρόπους επίλυσης δεν περιορίζουν τα μαθηματικά ως ένα σύνολο κανόνων που θα πρέπει να απομνημονευτούν, αλλά προκαλούν τη φαντασία και τον ενθουσιασμό των μαθητών, για να εντοπίσουν αξιόλογες λύσεις (Mann, 2006).

Επιπρόσθετο χαρακτηριστικό των δραστηριοτήτων που ενισχύουν τη δημιουργική ικανότητα στα μαθηματικά είναι ο βαθμός δυσκολίας του έργου (Hershkovitz, Peled & Littler, 2009). Σύμφωνα με τη Leikin (2007), για να μπορέσουν όλοι οι μαθητές να αναπτύξουν δημιουργικό μαθηματικό συλλογισμό οι δραστηριότητες δεν θα πρέπει να είναι ούτε πολύ εύκολες, αλλά ούτε πολύ δύσκολες. Ως εκ τούτου, η Sheffield (2003) προτείνει όπως υπάρχει ένας αριθμός προφανών απαντήσεων στις οποίες μπορούν να φτάσουν όλοι οι μαθητές, αλλά ταυτόχρονα να υπάρχει περιθώριο για πρόκληση των ικανοτήτων των πιο ικανών μαθητών. Δηλαδή, κατά το σχεδιασμό δημιουργικών έργων, θα πρέπει να υπάρχει υπόδειξη για τον τρόπο λύσης, ώστε κάθε μαθητής να έχει την ευκαιρία να ενισχύσει τη μαθηματική του δημιουργικότητα (Leikin, 2007), αξιοποιώντας τις προϋπάρχουσές του γνώσεις (Sheffield, 2003). Έργα που δεν επιδέχονται εύρος πιθανών απαντήσεων ενδέχεται να δημιουργήσουν απογοήτευση στους μαθητές παρά να ενισχύσουν τη δημιουργική τους ικανότητα (Hershkovitz, Peled & Littler, 2009).

Ο Haylock (1997) εντόπισε τρεις κατηγορίες μαθηματικών δραστηριοτήτων που ενισχύουν τη δημιουργική σκέψη: δραστηριότητες επίλυσης προβλήματος, δραστηριότητες διατύπωσης προβλήματος και δραστηριότητες αναδιατύπωσης της προβληματικής κατάστασης. Σύμφωνα με το Haylock (1997), η πρώτη κατηγορία δημιουργικών δραστηριοτήτων καλεί τους μαθητές να βρουν όσες πιο πολλές διαφορετικές και ενδιαφέρουσες λύσεις μπορούν σε ένα δοθέν πρόβλημα. Η δεύτερη κατηγορία δραστηριοτήτων καλεί τους μαθητές να κατασκευάσουν όσες περισσότερες ενδιαφέρουσες μαθηματικές ερωτήσεις και προβλήματα μπορούν, με συγκεκριμένα δεδομένα και η τρίτη κατηγορία να αναδιατυπώσουν τα στοιχεία μιας κατάστασης στηριζόμενοι σε μαθηματικές ιδιότητες. Η σύνδεση της δημιουργικότητας με τα προβλήματα δεν εμφανίζεται στην επίλυση ή στη διατύπωση, αλλά στην αμοιβαία επίδραση της διατύπωσης, της προσπάθειας επίλυσης, της αναδιατύπωσης και της τελικής λύσης του προβλήματος (Silver, 1997). Στη συνέχεια, θα γίνει αναφορά στη σχέση των τριών κατηγοριών δραστηριοτήτων με τη μαθηματική δημιουργικότητα.

Λύση προβλήματος

Η λύση προβλήματος θεωρείται ως αποτελεσματικό εργαλείο για τη διερεύνηση και την ενίσχυση της δημιουργικής μαθηματικής σκέψης (Leikin, 2007 · Leikin & Lev, 2007 · Leikin & Levav-Waynberg, 2007 · Silver, 1997 · Sriraman, 2005). Ειδικότερα, η Leikin (2007, σ. 2330) ανέφερε ότι «η λύση προβλήματος με διαφορετικούς τρόπους προϋποθέτει σύνθετο τρόπο σκέψης που ενισχύει την ανώτερου επιπέδου μαθηματική σκέψη». Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι διαφορετικές λύσεις διευκολύνουν τη δημιουργία συνδέσεων μεταξύ των μαθηματικών γνώσεων και εννοιών και οδηγούν στην ενίσχυση των υφιστάμενων εννοιολογικών δικτύων (Silver, Ghousseini, Gosen, Charalambous, & Strawhun, 2005).

Οι Koichu και Orey (2010) στοχεύοντας να εξηγήσουν τον τρόπο εμφάνισης των δημιουργικών ιδεών μελέτησαν τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος και επιβεβαίωσαν το συμπέρασμα των Kwon, Park και Park (2006). Πιο συγκεκριμένα, όταν το άτομο αντιμετωπίζει ένα πρόβλημα αρχικά προσπαθεί να ανακαλέσει από τη μνήμη του μια γνωστή μέθοδο επίλυσης. Η απλή ανάκληση της μεθόδου επίλυσης θεωρείται χαμηλού επιπέδου νοητική διεργασία που σχετίζεται μεν με τη λύση προβλήματος, αλλά όχι τόσο με τη δημιουργική σκέψη (Shye & Yuhas, 2004). Αν δεν είναι κατορθωτή η ανάκληση κατάλληλης μεθόδου για τη λύση του προβλήματος, ο λύτης καταφεύγει στον εντοπισμό ανάλογου προβλήματος που έχει αντιμετωπίσει παλαιότερα. Αν δεν μπορεί να ανακληθεί από τη μνήμη καμιά μέθοδος επίλυσης, ο λύτης θα πρέπει να ανακαλύψει μια νέα μέθοδο ή μια νέα μαθηματική ιδέα (Koichu & Orey, 2010).

Σύμφωνα με το Harris (1998), κατά τη λύση ενός προβλήματος οι δημιουργικές λύσεις μπορούν να προκύψουν από την εξέλιξη προηγούμενων ιδεών, από τη σύνθεση δύο ή περισσότερων προϋπάρχουσων ιδεών, από την επανεφαρμογή μιας ιδέας με διαφορετικό τρόπο ή την αντιμετώπισή της από διαφορετική οπτική γωνία. Συμπληρωματικά, ο Brunkala (2009) αναφέρει ακόμα τρεις τρόπους που μπορούν να οδηγήσουν στην εμφάνιση δημιουργικών λύσεων: την αφαίρεση, τη σύνδεση και τη διερεύνηση. Ο πρώτος τρόπος αναφέρεται στη δημιουργία μοντέλων που αντανακλούν τον πραγματικό κόσμο και μπορούν να λυθούν με μαθηματικά εργαλεία. Ο δεύτερος τρόπος στοχεύει στην κατανόηση ότι γνωστά μαθηματικά εργαλεία μπορούν να συνδυαστούν και να εφαρμοστούν σε νέα προβλήματα με διαφορετικό τρόπο. Τέλος, η διερεύνηση οδηγεί στην ανακάλυψη νέων μαθηματικών εργαλείων που ταιριάζουν σε άλυτα προβλήματα.

Τα *ανοικτά προβλήματα,* τα προβλήματα, δηλαδή, που δεν έχουν όλα τους τα στοιχεία πλήρως καθορισμένα, έχουν προταθεί ως κατάλληλα για την εμφάνιση της δημιουργικής ικανότητας των μαθητών στα μαθηματικά (Prince, 2006 · Sheffield, 2003 · Silver, 1997). Ο Ejersbo (2003) όρισε τρία είδη ανοικτών προβλημάτων, ανάλογα με το αν επιδέχονται: (α) διαφορετικές διαδικασίες επίλυσης, (β) διαφορετικές ορθές απαντήσεις και (γ) διαφορετική ερμηνεία ανάλογα με το λύτη. Στα ανοικτού τύπου προβλήματα οι μαθητές είναι υπεύθυνοι να λάβουν αποφάσεις για τις μεθόδους ή τις διαδικασίες που θα χρησιμοποιήσουν και για το είδος των προϋπάρχουσων γνώσεων που είναι σχετικές με αυτά, στοιχεία που μέχρι πρότινος αποφάσιζαν οι δάσκαλοι και τα βιβλία (Siswono, 2008).

Τα *έργα πολλαπλών λύσεων,* που αποτελούν υποκατηγορία των ανοικτών προβλημάτων, έχουν συνδεθεί με τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά (Ervynck, 1991 · Krutetskii, 1976 · Leikin, 2007 · Silver, 1997). Οι Milgram και Hong (2009) ανέφεραν ότι η ικανότητα παραγωγής μεγάλου αριθμού λύσεων έχει στατιστικά σημαντική σχέση με την παραγωγή ασυνήθιστων και υψηλής ποιότητας απαντήσεων. Ως διαφορετικές λύσεις σε ένα πρόβλημα, θεωρούνται αυτές που βασίζονται: (α) σε διαφορετικές αναπαραστάσεις των μαθηματικών εννοιών που εμπλέκονται στο έργο, (β) σε διαφορετικές ιδιότητες (ορισμούς ή θεωρήματα) των μαθηματικών εννοιών που εμπλέκονται στο έργο σε ένα συγκεκριμένο πεδίο ή (γ) σε διαφορετικές ιδιότητες των μαθηματικών εννοιών σε διαφορετικά πεδία (π.χ. άλγεβρα, γεωμετρία) (Leikin, 2007, 2009).

Παράλληλα, οι Chamberlin & Moon (2005) θεωρούν τις *δραστηριότητες μοντελοποίησης*, ως κατάλληλες για την αναγνώριση και την ανάπτυξη της δημιουργικής ικανότητα των μαθητών. Οι δραστηριότητες μοντελοποίησης απεικονίζουν πραγματικές καταστάσεις και καλούν τους μαθητές να ερμηνεύσουν, να περιγράψουν, να κάνουν υποθέσεις και γενικεύσεις, καθώς αναπτύσσουν μοντέλα ή εννοιολογικά εργαλεία προς επίλυση του προβλήματος (Doerr & English, 2003). Μέσω των δραστηριοτήτων μοντελοποίησης, οι μαθητές προσπαθούν να καταλήξουν σε πολύπλοκα μοντέλα αξιοποιώντας σύνθετες μαθηματικές ιδέες και αναπαραστάσεις (Lesh & Doerr, 2003 · Sriraman & English, 2004). Ως εκ τούτου, οι δραστηριότητες μοντελοποίησης ικανοποιούν τα χαρακτηριστικά των δημιουργικών δραστηριοτήτων για παραγωγή πολλαπλών λύσεων από όλους τους μαθητές, με την εμπλοκή υψηλού επιπέδου μαθηματικών διαδικασιών.

Διατύπωση προβλήματος

Ο Csikszentmihalyi (1990) ανέφερε ότι η δημιουργικότητα δεν είναι μόνο η ικανότητα να επιλύεις αλλά και να ανακαλύπτεις προβλήματα. Σύμφωνα με τους Jay και Perkins (1997), «ο εντοπισμός και η διατύπωση προβλήματος αποτελεί στοιχείο κλειδί για τη δημιουργική σκέψη και τη δημιουργική επίδοση σε πολλά αντικείμενα, ένα είδος σκέψης που είναι διαφορετικό και ίσως πιο σημαντικό από τη λύση προβλήματος» (σ. 257). Η διατύπωση προβλήματος αναφέρεται στην ικανότητα του ατόμου να θέτει νέα προβλήματα, να τροποποιεί δοθέντα προβλήματα ή ακόμα να μετατρέπει προβλήματα από μια αναπαράσταση σε άλλη (Cohen & Stover, 1981 · Silver, 1994 · Silver, Mamona, Leung, & Kenney, 1996). Δύο προβλήματα ενδέχεται να διαφέρουν, ως προς τη γλωσσική διατύπωση, τα δεδομένα, το στόχο του προβλήματος και τη μέθοδο επίλυσης (Leikin, Koichu & Berman, 2009). Το ενδιαφέρον κατά τη διατύπωση προβλήματος δεν εστιάζεται στη λύση, αλλά στη δημιουργία πρωτότυπων προβλημάτων και ερωτημάτων προς επίλυση, των οποίων η λύση είναι άγνωστη τουλάχιστον στο άτομο που διατυπώνει το πρόβλημα (Leung, 1997 · Pelczer & Rodríguez, 2011).

Η ικανότητα διατύπωση προβλημάτων θεωρείται ένδειξη της μαθηματικής δημιουργικότητας ενός ατόμου (Ervynck, 1991 · Silver, 1997), αφού αυτή η διαδικασία σχετίζεται με τη γνωστική ευελιξία και επεξεργασία, που εκφράζονται με την κατασκευή νέων σχέσεων (Bull, Montgomery & Kimball, 1999). Ο Leung και οι συνεργάτες του (Leung, 1997 · Leung & Silver, 1997) διερεύνησαν την επίδραση της διατύπωσης προβλήματος στις μαθηματικές ικανότητες αλλά και στην ανάπτυξη της δημιουργικής σκέψης των μαθητών. Τα αποτελέσματα των πιο πάνω εργασιών έδειξαν ότι τα άτομα που είχαν επιδείξει ευχέρεια σε εργαλεία γενικής δημιουργικότητας (TTCT) προέβαλαν μεγάλο αριθμό προβλημάτων (Leung & Silver, 1997) και ταυτόχρονα τα άτομα που είχαν επιδείξει ευελιξία σε εργαλεία γενικής δημιουργικότητας πρότειναν λεκτικά προβλήματα που αξιοποιούσαν διαφορετικές μαθηματικές ιδέες (Leung, 1997).

Ως εκ τούτου, η διατύπωση προβλήματος έχει αξιοποιηθεί στα εργαλεία μέτρησης της μαθηματικής δημιουργικότητα των μαθητών (π.χ. Balka, 1974 · Getzels & Jackson, 1962). Πιο συγκεκριμένα, ο Balka (1974) στο «Creative mathematical ability test» που ανέπτυξε, καλούσε τους μαθητές να διατυπώσουν προβλήματα τα οποία θα μπορούσαν να λυθούν από τις πληροφορίες και τα δεδομένα που δίνονταν. Η μαθηματική δημιουργικότητα και σε αυτή την περίπτωση αξιολογήθηκε με βάση την ευχέρεια, την ευελιξία και την πρωτοτυπία των προβλημάτων που διατυπώνονται. Στο πλαίσιο της διατύπωσης προβλήματος, η ευχέρεια αναφέρεται στον αριθμό των προβλημάτων που έχουν διατυπωθεί ή των ερωτήσεων που έχουν προταθεί, η ευελιξία στον αριθμό των διαφορετικών μαθηματικών ιδεών που αξιοποιούν και η πρωτοτυπία στη σπανιότητα των προβλημάτων σε σχέση με τα προβλήματα που τέθηκαν από τους υπόλοιπους μαθητές (Balka, 1974).

Παρόμοια προσπάθεια αξιοποίησης της διατύπωσης προβλήματος για τη μέτρηση της μαθηματικής δημιουργικότητας γίνεται στο τεστ που ανέπτυξαν οι Getzels και Jackson (1962). Στο συγκεκριμένο τεστ, ένα από τα έργα ζητούσε από τα υποκείμενα να διατυπώσουν μαθηματικά προβλήματα που θα μπορούσαν να απαντηθούν χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες που τους δίνονταν. Σε αυτή την περίπτωση, η αξιολόγηση της δημιουργικότητας στηρίχθηκε στο πόσο σύνθετες ήταν οι διαδικασίες που απαιτούνται για να βρεθεί η λύση (π.χ. ο αριθμός και το είδος των αριθμητικών διαδικασιών που χρησιμοποιήθηκαν). Ο Leung (1997) προτείνει ότι ακόμα και αν το πλαίσιο στο οποίο λαμβάνει χώρο η διατύπωση προβλήματος διαφέρει, η αξιολόγησή της ως είδος μαθηματικής δημιουργικότητας θα πρέπει να περιλαμβάνει πρωτοτυπία στο περιεχόμενο, στο συγκείμενο, στη στρατηγική επίλυσης ή στο επίπεδο δυσκολίας του προβλήματος.

Αναδιατύπωση της προβληματικής κατάστασης

Ο όρος αναδιατύπωση αναφέρθηκε πρώτα από τον Guilford (1959) ως χαρακτηριστικό γνώρισμα της δημιουργικότητας. Ο όρος αυτός αναφέρεται στην ικανότητα του ατόμου να τροποποιεί προηγούμενες ερμηνείες γνωστών εννοιών και να τις χρησιμοποιεί με πρωτότυπο τρόπο, απαιτώντας από το λύτη να αναδιατυπώνει επανειλημμένως τα στοιχεία μιας κατάστασης με μαθηματικές ιδιότητες (Haylock, 1997). Ο Torrance (1988) θεωρεί ότι η ικανότητα αναδιατύπωσης εμπλέκει μετασχηματισμό της σκέψης και επανερμηνεία των γνώσεων για την παραγωγή μοναδικών λύσεων.

Παράδειγμα αναδιατύπωσης στα μαθηματικά αποτελεί το έργο: «Να αναφέρετε σε τι μοιάζουν οι αριθμοί 16 και 36» (Haylock, 1997). Σε ένα τέτοιο έργο, οι μαθητές μπορεί να εστιάσουν σε ιδιότητες των αριθμών, να αναλογιστούν το μέγεθος του αριθμού, να εντοπίσουν πολλαπλάσια ή διαιρέτες. Απαντήσεις μαθητών που προέκυψαν στο πιο πάνω έργο ήταν οι εξής: και οι δύο αριθμοί έχουν το 6 ανάμεσα στα ψηφία τους, είναι πολλαπλάσια του 2, είναι πολλαπλάσια του 4, είναι ζυγοί αριθμοί, είναι μικρότεροι από τον αριθμό 40, είναι μεγαλύτεροι από τον αριθμό 15, δεν είναι πρώτοι αριθμοί, είναι παράγοντες του αριθμού 576 (Haylock, 1997).

Σημασία των δραστηριοτήτων στην ενίσχυση της δημιουργικότητας

Η ικανότητα λύσης και διατύπωσης προβλημάτων με διαφορετικούς τρόπους συμβάλλει στην ενίσχυση της μαθηματικής δημιουργικότητας (Leikin, 2007). Η ενασχόληση των μαθητών με προβλήματα που επιδέχονται πέραν της μιας ορθής απάντησης, αναπτύσσουν το μαθηματικό συλλογισμό των μαθητών (NCTM, 2000 · Polya, 1973 · Schoenfeld, 1985). Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι μαθητές παρατηρούν πώς περισσότερες από μια προσεγγίσεις του ιδίου προβλήματος οδηγούν σε ισοδύναμα αποτελέσματα, συγκρίνοντας διαφορετικές στρατηγικές και συνδέοντας μαθηματικές έννοιες και ιδέες (NCTM, 2000 · Polya, 1973 · Schoenfeld, 1985). Η ανάπτυξη μαθηματικών συνδέσεων υποστηρίζεται από εναλλαγές μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων της ίδια έννοιας ή ακόμα διαφορετικών εργαλείων από διακριτές μαθηματικές ενότητες (Fennema & Romberg, 1999 · Leikin, 2007 · NCTM, 2000). Οι εναλλαγές που παρατηρούνται από τη μια νοερή διαδικασία στην άλλη επιτρέπουν τη διερεύνηση της ευελιξίας της μαθηματικής σκέψης του ατόμου (Krutetskii, 1976 · Verschaffel κ.α., 2009).

Ταυτόχρονα, η υψηλού επιπέδου σκέψη που απαιτείται για την επίτευξη τέτοιου είδους εναλλαγών δίνουν την ευκαιρία στους μαθητές να αυξήσουν τις μαθηματικές τους γνώσεις και δεξιότητες (Diezmann & Watters, 2000 · Henningsen & Stein, 1997). Η διαδικασία κατανόησης του προβλήματος, εμβάθυνσης στα δεδομένα για εντοπισμό πολλών και πρωτότυπων λύσεων, διερεύνησης μοτίβων και σχέσεων και το αφηρημένο επίπεδο εργασίας ενθαρρύνουν τους μαθητές να σκεφτούν σε μεγαλύτερο βάθος τις μαθηματικές έννοιες (House, 1987 · Sheffield, 2009). Για αυτό το λόγο, οι μαθητές που αναπτύσσουν αποκλίνουσες ιδέες κατά την επίλυση προβλημάτων, λύνουν τα προβλήματα με πιο αποτελεσματικό τρόπο (Milgram & Arad, 1981 · Vartanian, Martindale, & Kwiatkowski, 2003).

Πέρα από την ανάπτυξη των γνωστικών δεξιοτήτων των μαθητών, οι δημιουργικές δραστηριότητες ενθαρρύνουν την ανάπτυξη μεταγνωστικών δεξιοτήτων (Diezmann & Watters, 2000). Λόγω του οι δημιουργικές δραστηριότητες εμπλέκουν ένα ευρύ πεδίο γνώσεων, αναγκάζουν τους μαθητές να αντιληφθούν ποιες είναι οι χρήσιμες πληροφορίες σε κάθε περίπτωση (Schoenfeld, 1985), πότε χρειάζεται να αναπτύξουν νέες ή να τροποποιήσουν υφιστάμενες στρατηγικές (Hatano & Oura, 2003) ή να αξιολογήσουν και να αποφασίσουν για την καταλληλότερη λύση, ανάμεσα σε διάφορες πιθανές εναλλακτικές λύσεις (Mackworth, 1965). Οι αποφάσεις που χρειάζονται να πάρουν οι μαθητές πριν καταλήξουν στη λύση, τους αναγκάζουν να στηριχθούν σε προϋπάρχουσες γνώσεις, να αναστοχαστούν και να εξηγήσουν τη διαδικασία που ακολούθησαν (Siswono, 2008). Αυτή η περίοδος αναστοχασμού εμβαθύνει την κατανόηση του ατόμου στο πρόβλημα και το βοηθά να διασαφηνίσει τη σκέψη του για την αποτελεσματικότητα της λύσης (Siswono, 2008).

Τέλος, η επίλυση δημιουργικών δραστηριοτήτων ενισχύει τα κίνητρα των μαθητών να ασχοληθούν με τα μαθηματικά (Lupkowski-Shoplik & Assouline, 1994). Οι Middleton και Spanias (1999) εντόπισαν ότι καθώς οι μαθητές ασχολούνται με δημιουργικά έργα επιδεικνύουν ποικιλία παιδαγωγικά επιθυμητών συμπεριφορών, όπως επιμονή, επεξεργασία, έλεγχο της κατανόησης, προτίμηση σε δυσκολότερα έργα και προθυμία να αναλάβουν ρίσκα. Μάλιστα, τα δημιουργικά έργα διευκολύνουν την ανάπτυξη της αυτονομίας των μαθητών να εργαστούν σε μαθηματικές καταστάσεις (Diezmann & Watters, 2000). Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι τα δημιουργικά προβλήματα παρέχουν ευκαιρίες στους μαθητές να διερευνήσουν, να συζητήσουν και να επιχειρηματολογήσουν για τις λύσεις τους.

Ενσωμάτωση νέων τεχνολογιών

Τα τελευταία 25 χρόνια η ανάπτυξη της εκπαιδευτικής τεχνολογίας είναι ικανή να αλλάξει τον τρόπο με τον οποίο μαθαίνουν οι μαθητές (Hoyles & Noss, 2003 · Schwartz, Yerushalmy & Wilson, 1993). Αν και μεγάλος αριθμός ερευνητών έχει ασχοληθεί με τα πλεονεκτήματα της τεχνολογίας στην εκπαίδευση από τη μια και την ενίσχυση της δημιουργικής σκέψης από την άλλη, ελάχιστοι ερευνητές έχουν συνδυάσει τους δύο τομείς για να διεξάγουν έρευνα που να επικεντρώνεται στην προαγωγή της δημιουργικότητας από την ενσωμάτωση της τεχνολογίας (Wheeler, Waite & Bromfield, 2002). Οι έρευνες που έχουν ασχοληθεί με το συγκεκριμένο θέμα συγκλείνουν στο συμπέρασμα ότι οι νέες τεχνολογίες μπορούν να αποτελέσουν αποτελεσματικό εργαλείο για την ενθάρρυνση της δημιουργικότητας των μαθητών στα μαθηματικά (π.χ. Kattou, Chrstou & Pitta-Pantazi, 2012 · Sheffield, 2003 · Yerushalmy, 2009 · Yushau, Mji & Wessels, 2003). Η επεξεργασία και η αναπαράσταση εννοιών, η ανάπτυξη ιδεών, η δημιουργία συνδέσεων, η παροχή ευκαιριών συνεργασίας, επικοινωνίας και αξιολόγησης των ιδεών αποτελούν τρόπους με τους οποίους η ενσωμάτωση της τεχνολογίας ενισχύει τη δημιουργική ικανότητα των μαθητών (Loveless, 1995).

Πιο συγκεκριμένα, οι νέες τεχνολογίες δίνουν τη δυνατότητα *οπτικοποίησης* των μαθηματικών εννοιών και παρουσίασης τους με πολλαπλές αναπαραστάσεις (Yushau, Mji & Wessels, 2003). Μαθηματικές έννοιες που θα ήταν δύσκολο να γίνουν κατανοητές χωρίς τη χρήση των ηλεκτρονικών υπολογιστών παίρνουν εικόνα και δίνουν στους μαθητές τη δυνατότητα να τις διερευνήσουν και να εντοπίσουν τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά τους, μέσα από τον ευέλικτο χειρισμό διαφορετικών αναπαραστάσεων. Για παράδειγμα, αριθμητικά δεδομένα μπορεί να μετατραπούν σε γραφική παράσταση ή πίνακα τιμών και αντίθετα, επιτρέποντας στο μαθητή να αντιληφθεί τις διαφορετικές αναπαραστάσεις της ίδιας έννοιας και τον τρόπο μετασχηματισμού μιας αναπαράστασης στην άλλη (Yushau, Mji & Wessels, 2003). Μέχρι στιγμής, η δυσκολία των μαθητών να αναγνωρίσουν και να συνδέσουν τις μαθηματικές δομές και έννοιες σε διαφορετικές καταστάσεις αποτελούσε ένα από τους παράγοντες που περιόριζε τη δημιουργικότητα των μαθητών στα μαθηματικά (Yushau, Mji & Wessels, 2003). Πλέον, η ενσωμάτωση των νέων τεχνολογιών και η έκθεση των μαθητών σε πολλαπλές αναπαραστάσεις της ίδιας έννοιας τους βοηθά να απεικονίσουν, να ερευνήσουν και να κατανοήσουν τις μαθηματικές έννοιες, ενθαρρύνοντας έτσι τη μαθηματική τους δημιουργικότητα (Cangelosi, 1996).

Πέρα από την οπτικοποίηση των μαθηματικών εννοιών, ο τρόπος παρουσίασης του περιεχομένου αποτελεί πρόκληση και κίνητρο για τους μαθητές να ασχοληθούν και να αφοσιωθούν σε αυτό που μελετούν. Οι μαθητές προτιμούν να μαθαίνουν με τη χρήση νέων τεχνολογιών, γιατί δεν χρειάζεται να αποστηθίσουν πληροφορίες, αλλά μπορούν οι ίδιοι είτε να τις ανακαλύψουν ή να τις εντοπίσουν στο τεχνολογικό περιβάλλον (Paul & Kathy, 1990 · Simonton, 2000 · Yushau, Mji & Wessels, 2003). Ενθαρρύνοντας τους μαθητές να επιλύουν και να εντοπίζουν προβλήματα, χωρίς να επικεντρώνονται σε κανόνες, διαδικασίες και δεξιότητες, οι μαθητές καθίστανται μέτοχοι της διδασκαλίας και της μάθησης (Emilia, 1996 στο Jeffrey & Craft, 2004). Σύμφωνα με τη Yerushalmy (2009), η αξιοποίηση της τεχνολογίας δεν μεταφέρει τις απαιτούμενες δεξιότητες στους μαθητές, αλλά τους διδάσκει πώς να χειριστούν αντικείμενα με κατανόηση, δίνοντας έμφαση στη διερεύνηση, στην επίλυση και στη διατύπωση προβλήματος. Παράλληλα, αυξάνει τις πιθανότητες για παραγωγή υποθετικού συλλογισμού, ενισχύει την ανάπτυξη νοερών διαδικασιών και καλλιεργεί δεξιότητες κριτικής και αξιολόγησης (Loveless, 1995 · Yerushalmy, 2009). Συμπερασματικά, οι νέες τεχνολογίες δεν ευνοούν μόνο την εκμάθηση εννοιών και δεξιοτήτων αλλά προωθούν *υψηλότερου επιπέδου σκέψη* που είναι απαραίτητη για την εκδήλωση της δημιουργικότητας (Loveless, 2003).

Ταυτόχρονα, η δυνατότητα οπτικοποίησης μαθηματικών εννοιών και η ανάπτυξη υψηλότερου επιπέδου σκέψης που παρέχεται από τη χρήση νέων τεχνολογικών εργαλείων, διευκολύνουν την ανάπτυξη δεξιοτήτων *επίλυσης προβλήματος* (Kaput, 1992). Οι Sarmiento και Stahl (2007) παρατήρησαν ότι οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές επιτρέπουν στους μαθητές να αντιπαραβάλουν διαφορετικές αναπαραστάσεις μιας προβληματικής κατάστασης και να συντονίζουν τις διαφορετικές πιθανές πορείες επίλυσης του προβλήματος, μέχρι που να καταλήξουν στην πιο αποτελεσματική. Οι Harskamp και Suhre (2007) ανέπτυξαν ένα λογισμικό λύσης προβλήματος που απευθυνόταν σε μαθητές γυμνασίου. Οι μαθητές που εργάστηκαν με το λογισμικό επέδειξαν αυξημένες ικανότητες επίλυσης προβλήματος σε σχέση με τους μαθητές που εργάστηκαν με παραδοσιακή διδασκαλία. Σε παρόμοια προσπάθεια, οι Chang, Sung και Lin (2006) πρότειναν το εκπαιδευτικό πρόγραμμα MathCal που βασιζόταν στα τέσσερα στάδια λύσης προβλήματος του Polya. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι το πρόγραμμα ήταν αποτελεσματικό στη βελτίωση της επίδοσης των μαθητών με χαμηλή ικανότητα λύσης προβλήματος, ενώ ταυτόχρονα είχε θετική επίδραση στην ικανότητα λύσης προβλήματος όλων των μαθητών και στη βελτίωση των στάσεων τους απέναντι στα μαθηματικά (Chang, Sung & Lin, 2006).

Η βελτίωση των στάσεων των μαθητών στα μαθηματικά με τη χρήση των υπολογιστών οφείλεται στην ανάπτυξη *εσωτερικών κινήτρων* (Cox, 1997), στοιχείο απαραίτητο για την εμφάνιση της δημιουργικής σκέψης (Amabile, 1996). Η ενεργή συμμετοχή των μαθητών στη διαδικασία διδασκαλίας-μάθησης (Wheeler, Waite & Bromfield, 2002 · Wood & Ashfield, 2008), η εμπλοκή τους σε δραστηριότητες που αποτελούν πρακτικές εφαρμογές μαθηματικών εννοιών, η ελευθερία που τους δίνεται να φανταστούν και να εφεύρουν (Lewis, 2008), δίνουν στους μαθητές προσωπικό ρόλο στην εκπαίδευση και τους καθιστούν πιο ενεργούς και ανεξάρτητους (Yushau, Mji & Wessels, 2003), προσελκύοντας το ενδιαφέρον τους και παρακινώντας τους να προτείνουν πρωτότυπες αλλά και αποτελεσματικές λύσεις (Jeffrey & Craft, 2004). Εκτός από την αυτονομία στη μάθηση των μαθητών, η δημιουργική χρήση των νέων τεχνολογιών υποστηρίζει την ανάπτυξη της *συνεργασίας*, της επικοινωνίας, της έκφρασης και της αλληλεπίδρασης (Loveless, 2006). Η αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών μπορεί να στοχεύει στην ανακατασκευή των πηγών με τρόπο που θα διευκολύνεται ο εντοπισμός πρωτότυπης λύσης προβλήματος, στην ανάλυση της προβληματικής κατάστασης ή στην αντιπαραβολή και σύγκριση των δημιουργικών ιδεών που προτάθηκαν από τους μαθητές (Fisher, 1990).

Τέλος, τα εγγενή χαρακτηριστικά των νέων τεχνολογικών εργαλείων παρέχουν ευκαιρίες για ενεργή επίδειξη της φαντασίας, της πρωτοτυπίας και της δημιουργικότητας των μαθητών (Loveless, 1995). Οι νέες τεχνολογίες επιτρέπουν την εύκολη πρόσβαση σε πλήθος πληροφοριών τόσο σε τοπικό όσο και σε παγκόσμιο επίπεδο (Sharp κ.α., 2000), επιτρέποντας στους μαθητές να διευρύνουν τους ορίζοντές τους και να ενισχύσουν την κατανόησή τους για τον κόσμο που τους περιβάλλει (NACCCE, 1999). Η ταχύτητα και η αυτοματοποίηση των διαδικασιών επιτρέπουν στους χρήστες να μελετούν, να παρατηρούν, να διερωτώνται, να ερμηνεύουν, να αναλύουν και να συνθέτουν πληροφορίες σε υψηλό επίπεδο (Department for Education and Employment, 1998). Η αμεσότητα και η προσαρμοστικότητα των νέων τεχνολογιών ενθαρρύνουν τη δοκιμή των ιδεών μέσω μιας διαδικασίας υπόθεσης, ανάλυσης και αξιολόγησης (Wood & Ashfield, 2008). Η δυνατότητα για άμεση ανατροφοδότηση, η κίνηση, ο ήχος, η ενέργεια, η αλληλεπίδραση και η εξατομίκευση είναι πιθανότερο να παρακινήσουν τους μαθητές να σκεφτούν δημιουργικά παρά οποιοδήποτε άλλο μέσο (Yang & Chin, 1996). Συμπερασματικά, τα ίδια τα χαρακτηριστικά των νέων τεχνολογιών μπορούν να συνεισφέρουν σημαντικά στις διαδικασίες δημιουργικότητας, προβάλλοντας νέα εργαλεία, μέσα και περιβάλλοντα, για να μάθεις να είσαι δημιουργικός και να μαθαίνεις μέσω του να είσαι δημιουργικός (Loveless, 2003).

Αν και η αξιοποίηση των νέων τεχνολογιών στη διδασκαλία των μαθηματικών μπορεί να ενισχύσει το βαθμό δημιουργικότητας των μαθητών, δεν θα πρέπει να ξεχνούμε ότι δεν είναι η πρόσβαση σε ψηφιακές πηγές που προκαλεί τη δημιουργικότητα, αλλά οι ευκαιρίες που παρέχονται για αλληλεπίδραση, συμμετοχή και ενεργή επίδειξη της φαντασίας και της πρωτοτυπίας (Loveless, 2003). Πολύ εύστοχα ο Shneiderman (2000) αναφέρει ότι οι άνθρωποι χαρακτηρίζονται από δημιουργικότητα, αλλά η προηγμένη τεχνολογία μπορεί να αυξήσει τις δυνατότητες που υπάρχουν.

Συνεργατικότητα

Οι αλληλεπιδράσεις στο περιβάλλον μάθησης των μαθητών είναι ιδιαίτερα σημαντικές στην ανάπτυξη της δημιουργικότητας (Selby, Shaw & Houtz, 2005). Μελετώντας τον τρόπο εργασίας των δημιουργικών ατόμων σε διάφορους τομείς, ο John-Steiner (2000) και ο Neumann (2007) παρατήρησαν ότι η συνεργασία και η κοινωνική υποστήριξη επηρεάζει τη δημιουργική τους ικανότητα. Σε αντίστοιχο συμπέρασμα κατέληξαν τόσο η Shriki (2010) όσο και ο Sriraman (2009). Ειδικότερα, και οι πέντε επιφανείς μαθηματικοί στους οποίους ο Sriraman (2009) διενήργησε συνεντεύξεις αναφέρθηκαν στο ρόλο των κοινωνικών αλληλεπιδράσεων στην ενίσχυση της δημιουργικής εργασίας. Η Shriki (2010) ανέφερε ότι η αλληλεπίδραση μπορεί να υποστηρίξει την ανάπτυξη της δημιουργικότητας, εφόσον οι δημιουργικές σκέψεις εμφανίζονται κυρίως κατά την ανταλλαγή ιδεών. Ως εκ τούτου, θα πρέπει να δοθεί η δυνατότητα στους μαθητές όλων των επιπέδων να εκτεθούν σε ευκαιρίες να επικοινωνήσουν και να συζητήσουν για μαθηματικές έννοιες και ιδέες (NCTM, 2000 · Shriki, 2010 · Sriraman, 2005).

Οι δημιουργικές ιδέες προκύπτουν κάποιες φορές ως αποτέλεσμα ομαδικής επίλυσης προβλήματος. Οι ικανότητες που αναπτύσσονται κατά την ομαδική εργασία, η ανταλλαγή ιδεών, οι οργανωτικές και επικοινωνιακές δεξιότητες που εμφανίζονται παράλληλα με τις μαθηματικές ικανότητες, αποτελούν σημαντική βάση για πιο δημιουργική δραστηριότητα (Prince, 2006). Πράγματι, η αλληλεπίδραση μεταξύ ατόμων που έχουν κοινά ενδιαφέροντα ή κίνητρα, η επικοινωνία και η συζήτηση μαθηματικών ιδεών και η ανταλλαγή σκέψεων μπορεί να αποτελέσουν πηγή έμπνευσης και κινητήριο δύναμη, ώστε οι μαθητές να αναστοχαστούν και να οργανώσουν τη σκέψη τους (NCTM, 2000 · Shriki, 2010). Αυτό είναι εφικτό, αφού τα άτομα σε ομάδες μπορούν να οικοδομήσουν ο ένας στις ιδέες του άλλου ή να επεκτείνουν ασήμαντες φαινομενικά ιδέες με πιο δημιουργικό τρόπο (Makel & Plucker, 2007).

Από την άλλη, η μετωπική διδασκαλία είναι περισσότερο προσανατολισμένη προς το αποτέλεσμα παρά τη διαδικασία της διδασκαλίας, γεγονός που δεν ενθαρρύνει την ανάπτυξη δημιουργικών ιδεών (Wood & Ashfield, 2008). Η μετωπική διδασκαλία είναι κατάλληλη για την εκμάθηση κανονισμών, διαδικασιών και βασικών δεξιοτήτων, ιδιαίτερα σε μικρούς μαθητές (Wood & Ashfield, 2008). Το αυστηρά οργανωμένο και δομημένο μάθημα οδηγεί τους μαθητές να υιοθετήσουν ένα παθητικό ρόλο και να εξαρτώνται από το δάσκαλο, αποτυγχάνοντας να αναπτύξουν δεξιότητες ανεξάρτητης μάθησης.

Αξιολόγηση της δημιουργικότητας

Απαντώντας στο ερώτημα «γιατί απαιτείται μέτρηση της δημιουργικότητας» ο Treffinger (1987, 2003) προέβαλε διάφορα επιχειρήματα για να υποστηρίξει την αναγκαιότητα της αξιολόγησης της δημιουργικής ικανότητας. Ανάμεσα σε αυτά τα επιχειρήματα περιλαμβάνονται η αναγνώριση της δυνατότητας και του ταλέντου των μαθητών να συμπεριφέρονται δημιουργικά και η επιβεβαίωση ότι τα τεστ νοημοσύνης και τα τεστ επίδοσης δεν μπορούν να συλλάβουν τη δημιουργική ικανότητα των μαθητών. Στα προαναφερθέντα επιχειρήματα υποθάλπουν δύο στοιχεία: ο σκοπός αξιολόγησης της δημιουργικότητας ως διερευνητικός και η ακαταλληλότητα χρήσης συγκεκριμένων εργαλείων για αξιολόγηση της δημιουργικής ικανότητας. Αναφορικά με το πρώτο στοιχείο, οι Zazkis και Holton (2009) αναφέρουν ότι το έργο της μαθηματικής παιδείας δεν είναι να μετρήσει τη δημιουργικότητα - η παράμετρος αυτή συγκαταλέγεται στους στόχους της ψυχολογίας - αλλά να αναγνωρίσει τη δυνατότητα των μαθητών με στόχο να την ενισχύσει και να την αναπτύξει. Όσον αφορά στο δεύτερο στοιχείο, η αξιοποίηση συγκεκριμένων εργαλείων για αξιολόγηση της δημιουργικής ικανότητας ενδέχεται να είναι ακατάλληλη για το σκοπό για τον οποίο χρησιμοποιείται.

Οι Treffinger, Young, Selby και Shepardson (2002) αναφέρουν έξι στοιχεία που θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη κατά την επιλογή εργαλείου/ων αξιολόγησης της δημιουργικής ικανότητας. Πρώτα, η ύπαρξη σαφούς και συγκεκριμένου ορισμού για την έννοια της δημιουργικότητας θα καθοδηγήσει τον ερευνητή ή τον εκπαιδευτικό να συγκεκριμενοποιήσει τα χαρακτηριστικά που επιθυμεί να αξιολογήσει. Οι παράγοντες ή τα χαρακτηριστικά που κρίνονται ως σημαντικά για την κατανόηση της δημιουργικότητας θα επηρεάσουν τη διαδικασία και το εργαλείο αξιολόγησης που θα επιλεγεί και θα χρησιμοποιηθεί. Ταυτόχρονα, η χρήση πολλαπλών εργαλείων αξιολόγησης κρίνεται ως πιο έγκυρη, γιατί η σύνθετη και πολυδιάστατη φύση της δημιουργικότητας δεν μπορεί να γίνει κατανοητή από ένα μόνο εργαλείο. Πέρα από τη χρήση διαφορετικών εργαλείων μέτρησης της δημιουργικότητας, ο ερευνητής/ εκπαιδευτικός θα πρέπει να γνωρίζει τα πλεονεκτήματα και τους περιορισμούς κάθε εργαλείου, για να είναι σε θέση να συλλέξει τα στοιχεία που χρειάζεται. Τέλος, τα δεδομένα που θα συλλεχθούν δεν θα πρέπει να στοχεύουν στον αποκλεισμό ή στην κατηγοριοποίηση των μαθητών.

Ανάμεσα στα εργαλεία που έχουν αναπτυχθεί για την αξιολόγηση της δημιουργικότητας, περιλαμβάνονται εργαλεία που εστιάζονται στο άτομο, στη διαδικασία, στο αποτέλεσμα και στο περιβάλλον (Treffinger, Young, Selby, & Shepardson, 2002). Ανάμεσα στα εργαλεία για αξιολόγηση του ατόμου εμπίπτουν τα εργαλεία προσωπικότητας (π.χ. Creative Personality Scale, The creative behavior inventory) και τα εργαλεία διερεύνησης γνωστικών χαρακτηριστικών (π.χ. What Kind of Person are You?). Η διαδικασία είναι αρκετά δύσκολο να αξιολογηθεί (Kleiman, 2005). Ανάμεσα στα εργαλεία που θεωρητικά αξιολογούν τη δημιουργική διαδικασία συγκαταλέγεται το «Wallach & Kogan test» (1965), ως εργαλείο που μετρά την αποκλίνουσα σκέψη. Το αποτέλεσμα της δημιουργικής διαδικασίας αξιολογείται συνήθως με βάση το βαθμό ικανοποίησης συγκεκριμένων κριτηρίων. Τέτοιου είδους εργαλεία είναι το «Creative Product Inventory» και το «Creative product semantic scale». Τέλος, τα εργαλεία για το περιβάλλον αξιολογούν χαρακτηριστικά που εμφανίζονται στο ευρύ και εγγύς περιβάλλον του ατόμου (π.χ. Work Environment Survey Inventory).

Στο βιβλίο των Kaufman, Plucker και Baer (2008) «Essentials of Creativity Assessment» διευκρινίζεται ότι δεν υπάρχει ένα τέλειο εργαλείο αξιολόγησης/ μέτρησης της δημιουργικότητας, και ούτε αναμένεται ότι οι ερευνητές θα συμφωνήσουν ποτέ στην υιοθέτηση ενός κοινού τρόπου αξιολόγησης. Η καλύτερη επιλογή ενός εργαλείου αξιολόγησης της δημιουργικότητας θα προκύψει από τον αντίστοιχο ορισμό που υιοθετείται σε κάθε ερευνητική προσπάθεια. Ταυτόχρονα, καθώς αξιολογείται το εν δυνάμει δημιουργικό ταλέντο, οι ερευνητές θα πρέπει να έχουν στο μυαλό τους ότι τα εργαλεία που χρησιμοποιούνται αποτελούν ενδείξεις της δημιουργικότητας. Με ποιο τρόπο και σε ποιο βαθμό οι άνθρωποι επιδεικνύουν και αντιλαμβάνονται τη δημιουργική τους ικανότητα εξαρτάται από τη σύνθετη αλληλεπίδραση των παραγόντων που αναφέρονται στον ορισμό της δημιουργικότητας (Hong & Milgram, 2008).

Αξιολόγηση της μαθηματικής δημιουργικότητας

«Η σημαντικότητα της μαθηματικής δημιουργικότητας μειώνεται στο σχολικό περιβάλλον, καθώς δεν υπάρχει επίσημος τρόπος αξιολόγησής της στα δοκίμια μέτρησης της μάθησης των μαθηματικών» (Chamberlin & Moon, 2005, σ. 42). Πράγματι, η διαδικασία αξιολόγησης των μαθηματικών σπάνια δίνει στους μαθητές τη δυνατότητα να αναπτύξουν δημιουργική σκέψη, μιας και τα στοιχεία που αξιολογούνται είναι εκ διαμέτρου αντίθετα από τα στοιχεία που ενισχύουν τη δημιουργικότητα (Haylock, 1987). Συγκεκριμένα, η αξιολόγηση των μαθηματικών επικεντρώνεται κυρίως στην ταχύτητα και στην ακρίβεια των απαντήσεων, στην υπολογιστική ευχέρεια και στην ορθή ανάκληση πληροφοριών, αλγορίθμων και λύσεων, αντί να ευνοεί την επίλυση προβλήματος και την ανάπτυξη αποκλίνουσας σκέψης (Kim, Cho & Ahn, 2003 · Mann, 2005 · Sheffield, 2009).

Με αυτό τον τρόπο, οι μαθητές που το ταλέντο τους διαφέρει από τις ικανότητες που μετρούν τέτοιου είδους εργαλεία παραγκωνίζονται και ως επακόλουθο δεν τους δίνεται κατάλληλη εκπαιδευτική στήριξη για ενίσχυση του εν δυνάμει ταλέντου τους (Milgram & Hong, 2009). Σύμφωνα με τον Taylor (2009), οι μέθοδοι αξιολόγησης δεν θα πρέπει να επιβραβεύουν τους μαθητές που είναι ικανοί να αποστηθίζουν τις έννοιες και διαδικασίες που διδάχτηκαν σε προηγούμενα μαθήματα, αλλά εκείνους που μπορούν να ανταπεξέλθουν σε νέες μαθηματικές καταστάσεις. Αυτοί άλλωστε θα είναι οι μαθητές που θα επιτύχουν μελλοντικά στην κοινωνία, αφού θα είναι ικανοί να προσαρμόζουν και να εφαρμόζουν τις γνώσεις τους σε διαφορετικά σενάρια (Taylor, 2009).

Κρίνεται επιτακτική, λοιπόν, η ανάγκη για την ανάπτυξη εργαλείων ή διαδικασιών που θα στοχεύουν στην αναγνώριση της δημιουργικής ικανότητας των μαθητών στα μαθηματικά (Mann, 2009). Αν και διάφοροι κατά καιρούς ερευνητές (Balka, 1974 · Getzels & Jackson, 1962 · Jensen, 1973 · Prouse, 1967) έχουν αναπτύξει εργαλεία μέτρησης της μαθηματικής δημιουργικότητας, εντούτοις δεν υπάρχει στοιχειοθετημένη χρήση αυτών των εργαλείων σε έρευνες, πέρα από την ίδια την προσπάθεια των ερευνητών να αναπτύξουν τα εργαλεία (Lee, Hwang & Seo, 2003).

Οι πρώτες προσπάθειες αναγνώρισης ατόμων με δημιουργικές ικανότητες στα μαθηματικά είχαν στηριχθεί στη χρήση εργαλείων μέτρησης νοημοσύνης. Σχετικά σύντομα οι ερευνητές κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η δημιουργική ικανότητα είναι ανεξάρτητη από αυτό που μετριέται με τα τεστ νοημοσύνης (Fasko, 2001 · Proctor & Burnett, 2004). Στη συνέχεια, αξιοποιήθηκαν εργαλεία αποκλίνουσας σκέψης (π.χ. Haylock, 1987 · Jensen, 1973), τα οποία μετρούσαν στοιχεία της μαθηματικής ικανότητας, που δεν μπορούσαν να αξιολογηθούν με τους συνηθισμένους τρόπους αξιολόγησης (Haylock, 1987). Συγκεκριμένα, τα εργαλεία μέτρησης της αποκλίνουσας ικανότητας καλούσαν τους μαθητές να βρουν όσες περισσότερες απαντήσεις/ λύσεις μπορούσαν και μετρούσαν την ποσότητα των λύσεων που προτείνονταν (Eysenck, 1996). Τα εργαλεία αυτά επικρίθηκαν, κυρίως γιατί η ποσότητα των απαντήσεων δεν είναι ο καλύτερος τρόπος αξιολόγησης της δημιουργικής σκέψης, αλλά χρειάζεται αξιολόγηση της ποιότητας και της πρωτοτυπίας των απαντήσεων. Ως επακόλουθο, αναπτύχθηκαν εργαλεία αναγνώρισης της δημιουργικής σκέψης, τα οποία ακολουθούσαν δύο βασικές προσεγγίσεις. Η πρώτη προσέγγιση εστιάζεται στις γνωστικές διαδικασίες που εμφανίζονται κατά την επίλυση προβλήματος και η δεύτερη στον καθορισμό κριτηρίων για το αποτέλεσμα της δημιουργικής σκέψης (Haylock, 1997 · Pelczer & Rodríguez, 2011).

Στην πρώτη κατηγορία περιλαμβάνεται το εργαλείο που αναπτύχθηκε από τον Balka (1974) και περιελάμβανε κριτήρια μέτρησης της δημιουργικής μαθηματικής ικανότητας. Ο Balka (1974) εξέταζε τόσο τη συγκλίνουσα σκέψη των μαθητών, μέσα από τον καθορισμό μοτίβων, όσο και την αποκλίνουσα σκέψη, που την όριζε ως την ικανότητα να διατυπώνεις μαθηματικές υποθέσεις, να αξιολογείς ασυνήθιστες μαθηματικές ιδέες, να αντιλαμβάνεσαι τι λείπει από ένα πρόβλημα και να επιμερίζεις ένα πρόβλημα σε συγκεκριμένα υποπροβλήματα. Στη δεύτερη κατηγορία περιλαμβάνονται οι ερευνητικές προσπάθειες του Silver (1997), της Leikin (2007), των Klavir και Gorodetsky (2009), οι οποίες αξιοποίησαν τις έννοιες της ευχέρειας, της ευελιξίας και της πρωτοτυπίας, για να αξιολογήσουν το δημιουργικό αποτέλεσμα. Σε αυτή την περίπτωση, το δημιουργικό αποτέλεσμα μπορεί να προκύπτει από έργα επίλυσης και διατύπωσης μαθηματικών προβλημάτων (Siswono, 2008).

Ο βαθμός στον οποίο βασικές μαθηματικές έννοιες διερευνώνται και αναπτύσσονται (βάθος κατανόησης), ο αριθμός των ορθών απαντήσεων, μεθόδων ή ερωτήσεων που προτείνονται (ευχέρεια), ο αριθμός των διαφορετικών κατηγοριών απαντήσεων, μεθόδων ή ερωτήσεων (ευελιξία), η σπανιότητα των απαντήσεων (πρωτοτυπία), η ποιότητα έκφρασης της μαθηματικής σκέψης περιλαμβάνοντας πίνακες, σχεδιαγράμματα, μοντέλα στις απαντήσεις (επεξεργασία ή κομψότητα), η ικανότητα γενίκευσης και επέκτασης μαθηματικών εννοιών θα πρέπει να περιλαμβάνονται ανάμεσα στα κριτήρια αξιολόγησης της δημιουργικής ικανότητας των μαθητών (Sheffield, 2000). Η αξιοποίηση τέτοιου είδους κριτηρίων δεν στοχεύει απλώς στο διαχωρισμό των μαθητών σε δημιουργικούς και μη, αλλά στην αναγνώριση της δημιουργικής συμπεριφοράς όταν αυτή συμβαίνει (Starko, 1995). Δηλαδή, τα δεδομένα που συλλέγονται επιτρέπουν στον εκπαιδευτικό να διαγνώσει τις ιδιαίτερες ανάγκες των μαθητών και τον καθοδηγούν στο σχεδιασμό και στη διαφοροποίηση της διδασκαλίας, ώστε να παρέχει ευκαιρίες για ενίσχυση της δημιουργικότητας (Trefffinger, 2003). Πρόσφατες ερευνητικές προσπάθειες αξιοποιούν εργαλεία μέτρησης της μαθηματικής δημιουργικότητας με στόχο να βρουν τρόπους να την αναπτύξουν, παρά να εντοπίσουν απλώς τη δυνατότητα των μαθητών για δημιουργική σκέψη στα μαθηματικά (π.χ. Lee κ.α., 2003).

Οποιοδήποτε είδος μέτρησης της δημιουργικής ικανότητας εμφανίζει μειονεκτήματα, όσον αφορά στα εσωτερικά κίνητρα των μαθητών, στο χρόνο και στην υποκειμενικότητα της αξιολόγησης. Ειδικότερα, η αξιολόγηση επηρεάζει πάντα αρνητικά τη δημιουργικότητα, επειδή τείνει να αυξάνει τα εξωτερικά κίνητρα και να μειώνει τα εσωτερικά κίνητρα (Amabile, 1996 · Baer, 1997). Η αξιολόγηση καθοδηγεί τη σκέψη του μαθητή να σκεφτεί «τι μπορεί να περιμένει ο δάσκαλος σε αυτή τη δραστηριότητα», στερώντας του την ευχαρίστηση να ασχοληθεί με την επίλυση των δημιουργικών έργων χωρίς να ανησυχεί αν θα ευχαριστήσει το δάσκαλο (Runco, 2007). Αναφορικά με το χρόνο, ο Mann (2005), τονίζει ότι τα εργαλεία αυτά είναι χρονοβόρα τόσο στη συμπλήρωσή τους από τους μαθητές όσο και στην επεξεργασία των αποτελεσμάτων λόγω της ποικιλομορφίας των απαντήσεων. Παράλληλα, η αξιολόγηση των απαντήσεων υπόκειται στην υποκειμενικότητα της ερμηνείας του αξιολογητή (Hashimoto, 1997 · Mann, 2005). Οι Klavir και Hershkovitz (2008) ανέφεραν ότι προβάλλοντας ένα σχετικά απλό εργαλείο για αξιολόγηση ανοικτού τύπου μαθηματικών προβλημάτων μπορεί να βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς και τους μαθητές να αξιολογήσουν τις λύσεις και θα αποτελέσει ένα σημαντικό μέσο για ενθάρρυνση της δημιουργικής μαθηματικής σκέψης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε για τη διεκπεραίωση της εργασίας. Πιο συγκεκριμένα, γίνεται αναφορά στα υποκείμενα, στα εργαλεία μέτρησης καθώς και στις μεθόδους ανάλυσης των δεδομένων που συλλέχθηκαν. Όσον αφορά στα υποκείμενα που απετέλεσαν το δείγμα της εργασίας, γίνεται αναφορά στην ηλικία, στη γεωγραφική τους προέλευση και στον τρόπο επιλογής τους. Αναφορικά με τα εργαλεία μέτρησης, πέρα από την παρουσίαση των έργων που περιλαμβάνονται σε αυτά, γίνεται περιγραφή της διαδικασίας σχεδιασμού και ελέγχου της εγκυρότητας και της αξιοπιστίας τους, καθώς και του τρόπου διόρθωσής τους. Ταυτόχρονα, γίνεται αναφορά στη διαδικασία σχεδιασμού των ημιδομημένων συνεντεύξεων και περιγραφή της σειράς μαθημάτων που εφαρμόστηκαν στο παρεμβατικό πρόγραμμα. Τέλος, επεξηγούνται οι ποσοτικές και ποιοτικές μέθοδοι ανάλυσης, που χρησιμοποιήθηκαν για την επίτευξη των στόχων της παρούσας εργασίας.

Οι παράμετροι που λήφθηκαν υπόψη κατά το σχεδιασμό των εργαλείων μέτρησης προέκυψαν από το θεωρητικό υπόβαθρο της παρούσας εργασίας. Η υιοθέτηση του μοντέλου 4P κατεύθυνε την εργασία στην αξιολόγηση τεσσάρων μεταβλητών: του ατόμου, της διαδικασίας, του αποτελέσματος και του περιβάλλοντος. Για τη μελέτη των πιο πάνω μεταβλητών απαιτήθηκαν συνδυαστικές μεθοδολογικές προσεγγίσεις, με την έννοια ότι εφαρμόστηκαν ποσοτικές και ποιοτικές μέθοδοι, ενσωματώνοντας χορήγηση δοκιμίων, διεξαγωγή κλινικών συνεντεύξεων και παρατήρηση. Ο συνδυασμός των δύο μεθοδολογικών προσεγγίσεων επέτρεψε από τη μια τη διερεύνηση της μαθηματικής δημιουργικότητας στο σύνολο του πληθυσμού, δίνοντας τη δυνατότητα γενίκευσης των αποτελεσμάτων και από την άλλη την εξέταση του τρόπου εμφάνισης της δημιουργικής σκέψης σε συγκεκριμένα υποκείμενα.

Υποκείμενα

Για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας έλαβαν μέρος μαθητές Δ’, Ε’ και Στ’ τάξης δημοτικών σχολείων της Κύπρου. Η επιλογή μαθητών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, για να αποτελέσουν το δείγμα της παρούσας εργασίας, δεν ήταν τυχαία. Όπως αναφέρεται στο δημοσίευμα «Excellence and Enjoyment: A strategy for primary schools» (DfES, 2003), «Η πρωτοβάθμια εκπαίδευση αποτελεί κρίσιμο στάδιο στην ανάπτυξη του παιδιού-διαμορφώνει τη ζωή του. Η πρωτοβάθμια εκπαίδευση παρέχει στα παιδιά τα απαραίτητα μέσα για μάθηση, τα παροτρύνει να δοκιμάσουν τη χαρά της ανακάλυψης, επιλύοντας δημιουργικά προβλήματα και τα οδηγεί στην ανάπτυξη της αυτοπεποίθησης και της κοινωνικής και συναισθηματικής ωρίμανσης» (σ. 4). Συμφωνώντας, οι Hershkovitz, Peled και Littler (2009) προσθέτουν ότι η περίοδος της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης είναι σημαντική για τη διερεύνηση της δημιουργικότητας των μαθητών, αφού σε αυτό το διάστημα οι μαθητές σχηματίζουν τις μαθηματικές τους γνώσεις και τις αντιλήψεις τους για το ρόλο και τη σημασία των μαθηματικών στη ζωή τους.

Αναφορικά με την ηλικία των υποκειμένων, η επιλογή μαθητών ηλικίας δέκα με δώδεκα ετών στηρίχθηκε σε δύο στοιχεία: στα στάδια ανάπτυξης των παιδιών και στα αποτελέσματα ερευνητικών εργασιών στον τομέα της γενικής δημιουργικότητας. Κατά πρώτο λόγο, οι Rosenblatt και Winner (1988) διακρίνουν τρεις φάσεις δημιουργικότητας: την προ-συμβατική περίοδο (preconventional: μέχρι την ηλικία των 6-8 ετών), τη συμβατική περίοδο (conventional: από την ηλικία 6-8 μέχρι την ηλικία 10-12) και τη μετα-συμβατική περίοδο (postconventional: μετά την ηλικία των 12 ετών). Σύμφωνα με τους Rosenblatt και Winner (1988), η προσυμβατική και η συμβατική περίοδος είναι εγγενώς ανώτερες από τη μετασυμβατική περίοδο, υποδηλώνοντας ότι τα παιδιά είναι πιο δημιουργικά από τους ενήλικες. Αυτό μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι η δημιουργική δυνατότητα στους ενήλικες καταστέλλεται από κοινωνικούς περιορισμούς.

Επιπρόσθετα, σύμφωνα με τη γνωστικο-εξελικτική προσέγγιση του Piaget, οι μαθητές ηλικίας 10-12 ετών βρίσκονται στο στάδιο της Συγκεκριμένης Λογικής Σκέψης (Concrete Operational Stage). Σε αυτό το στάδιο οι μαθητές είναι σε θέση να επιτελούν συγκεκριμένες λογικές λειτουργίες και να επιλύουν γνωστικά έργα (Salkind, 2002). Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές είναι σε θέση να εστιάζονται σε περισσότερες από μια πτυχές ενός ερεθίσματος, να χειρίζονται σύμβολα που σχετίζονται με συγκεκριμένα αντικείμενα, να φαντάζονται ή να τροποποιούν συγκεκριμένα σενάρια και να αντιλαμβάνονται την έννοια της ομαδοποίησης, του μεγέθους και του αριθμού (Salkind, 2002). Αυτού του είδους η σκέψη είναι απαραίτητη για την εμφάνιση της μαθηματικής δημιουργικότητας, αφού διευκολύνει την εύρεση διαφορετικών λύσεων, τον εντοπισμό στοιχείων που ομαδοποιούν ή διακρίνουν δύο μαθηματικά αντικείμενα, αλλά και την ευέλικτη εναλλαγή μεταξύ διαφορετικών πτυχών μιας μαθηματικής έννοιας.

Ταυτόχρονα, τα αποτελέσματα ερευνητικών εργασιών στη μελέτη της γενικής δημιουργικότητας θεωρούν ότι η ηλικία 10-12 ετών αποτελεί κομβικό σημείο, λόγω του ότι τα αποτελέσματα των ερευνών για το συγκεκριμένο ηλικιακό φάσμα είναι αντικρουόμενα (Charles & Runco, 2001 · Torrance, 1968). Κάποιοι ερευνητές (Torrance, 1968) υποστηρίζουν ότι τα παιδιά γεννιούνται με δημιουργική ικανότητα η οποία φθίνει συνεχώς μέχρι την ηλικία των 10 ετών, όπου η δημιουργικότητα φτάνει στο χαμηλότερο δυνατόν σημείο της και έπειτα ολοένα αυξάνεται. Αντιθέτως, οι Charles και Runco (2001) εντόπισαν ότι οι μαθητές στη Δ’ τάξη βρίσκονται στο αποκορύφωμα της δημιουργικής τους ικανότητας, ενώ παρατηρείται μια σταθερή μείωση στην ευχέρεια, στην ευελιξία και στην πρωτοτυπία που επιδεικνύουν οι μαθητές στην Ε’ τάξη. Οι Sak και Maker (2006) παρατήρησαν στεγανοποίηση στην ευχέρεια, στην ευελιξία και στην πρωτοτυπία των μαθητών ηλικίας 10-11 ετών και έπειτα περαιτέρω αύξηση των ικανοτήτων. Επιλέγοντας το συγκεκριμένο ηλικιακό φάσμα στο πλαίσιο της παρούσας διατριβής, θα είναι δυνατή η διερεύνηση της σχέσης που υπάρχει μεταξύ της ηλικίας και της δημιουργικής ικανότητας των μαθητών σε αυτό το κομβικό σημείο.

Ο Πίνακας 3.1 παρουσιάζει τον αριθμό των μαθητών που συμμετείχε σε κάθε φάση της εργασίας, οργανωμένο ανά τάξη. Πιο συγκεκριμένα, 476 μαθητές Δ’, Ε’ και Στ’ τάξης δημοτικών σχολείων της Κύπρου συμμετείχαν στην παρούσα εργασία. Πιο συγκεκριμένα, κατά το έτος χορήγησης των εργαλείων, 202 μαθητές (42.4% του δείγματος) φοιτούσαν στη Δ’ τάξη (εννέα χρονών), 165 μαθητές (34.7% του δείγματος) φοιτούσαν στην Ε’ τάξη (δέκα χρονών) και 109 μαθητές (22.9% του δείγματος) φοιτούσαν στη Στ’ τάξη (έντεκα χρονών). Οι μαθητές προέρχονταν από επτά δημόσια σχολεία της επαρχίας Λευκωσίας (347 μαθητές) και δύο δημόσια σχολεία της επαρχίας Λάρνακας (129 μαθητές). Από τους 476 μαθητές οι 254 φοιτούσαν σε αστικά σχολεία και οι 222 μαθητές φοιτούσαν σε σχολεία της επαρχίας. Αξίζει να αναφερθεί ότι ακολουθήθηκε σκόπιμη δειγματοληψία μέγιστης ετερογένειας, ώστε στο δείγμα να περιληφθούν μαθητές που καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα ηλικίας, γνωσιολογικού υποβάθρου και νοημοσύνης. Στη διεξαγωγή των συνεντεύξεων συμμετείχαν 182 μαθητές, οι οποίοι επιλέγηκαν χρησιμοποιώντας σκόπιμη στρωματοποιημένη δειγματοληψία. Με άλλα λόγια, το αρχικό δείγμα χωρίστηκε σε υποομάδες με κριτήριο το βαθμό μαθηματικής δημιουργικότητας που επέδειξαν και έπειτα από αυτές τις ομάδες επιλέγηκαν τυχαία συγκεκριμένα υποκείμενα. Περαιτέρω λεπτομέρειες για τις ομάδες των μαθητών που συμμετείχαν στις συνεντεύξεις παρουσιάζονται στο επόμενο κεφάλαιο.

Το παρεμβατικό πρόγραμμα ενίσχυσης της μαθηματικής δημιουργικότητας παρακολούθησαν 24 μαθητές, οι οποίοι κατανέμονται ως ακολούθως: 15 μαθητές Δ’ τάξης (εννέα χρονών), 3 μαθητές Ε’ τάξης (δέκα χρονών) και 6 μαθητές Στ’ τάξης (έντεκα χρονών). Οι μαθητές συμμετείχαν εθελοντικά στο παρεμβατικό πρόγραμμα και οι ίδιοι είχαν εκφράσει το ενδιαφέρον τους να παρακολουθήσουν τη σειρά των μαθημάτων. Παράλληλα, μια αντίστοιχη ομάδα από 24 μαθητές απετέλεσε την Ομάδα Ελέγχου. Σε αυτή την ομάδα, οι 12 μαθητές φοιτούσαν στη Δ’ τάξη, οι 7 φοιτούσαν στην Ε’ τάξη και οι 5 φοιτούσαν στη Στ’ τάξη.

Πίνακας 3.1

Αριθμός μαθητών που συμμετείχε σε κάθε φάση της εργασίας.

	Δ’ Τάξη	Ε’ Τάξη	Στ’ Τάξη	Σύνολο
Χορήγηση δοκιμίων	202	165	109	476
Κλινικές συνεντεύξεις	53	81	48	182
Πειραματική Ομάδα	15	3	6	24
Ομάδα Ελέγχου	12	7	5	24

Εργαλεία μέτρησης

Η συλλογή των δεδομένων έγινε μέσω της χορήγησης πέντε εργαλείων, της διεξαγωγής συνεντεύξεων και της σύγκρισης της επίδοσης των μαθητών στο πλαίσιο του παρεμβατικού προγράμματος. Ειδικότερα, αναπτύχθηκαν τέσσερα εργαλεία: (α) το εργαλείο μαθηματικής δημιουργικότητας, (β) το εργαλείο μαθηματικής ικανότητας (τρεις παράλληλες μορφές, μια για κάθε τάξη), (γ) το εργαλείο γενικής δημιουργικότητας, (δ) το εργαλείο δημιουργικής προσωπικότητας. Ταυτόχρονα, χρησιμοποιήθηκε το εργαλείο Naglieri Nonverbal Ability Test (Level D και Level E) για τη μέτρηση της νοημοσύνης και του συλλογισμού των μαθητών (Naglieri, 1997). Για τη διεξαγωγή των συνεντεύξεων σχεδιάστηκε κλείδα συνέντευξης. Για τη διερεύνηση της επίδρασης του παρεμβατικού προγράμματος έγινε χορήγηση του εργαλείου μέτρησης μαθηματικής δημιουργικότητας καθώς και του εργαλείου μέτρησης αντιλήψεων για τη δημιουργικότητα και τα μαθηματικά. Πιο κάτω επεξηγείται ο σχεδιασμός, η δομή, το περιεχόμενο και η εγκυροποίηση των εργαλείων.

Εργαλείο Μαθηματικής Δημιουργικότητας

Για τη μέτρηση της μαθηματικής δημιουργικότητας αναπτύχθηκε γραπτό δοκίμιο (δείτε Παράρτημα 1), το οποίο περιλαμβάνει τέσσερα ανοικτού τύπου έργα. Ανάμεσα στα έργα περιλαμβάνονται έργα επίλυσης προβλήματος, διατύπωσης προβλήματος και αναδιατύπωσης της προβληματικής κατάστασης.

Κατά την ανάπτυξη του Εργαλείου Μαθηματικής Δημιουργικότητας, λήφθηκαν υπόψη τα εξής στοιχεία: Πρώτα, τα έργα να ανταποκρίνονται στα κριτήρια μέτρησης της δημιουργικότητας. Για αυτό το λόγο, σε όλα τα έργα, που περιλήφθηκαν στο εργαλείο, υπάρχουν περισσότερες από μια ορθές απαντήσεις (ευχέρεια). Ταυτόχρονα, οι απαντήσεις μπορούν να ομαδοποιηθούν σε διαφορετικές κατηγορίες, ανάλογα με τις μαθηματικές ιδέες που εμπλέκονται (ευελιξία). Τα έργα είναι αρκετά γενικά, δίνοντας στους μαθητές την ευκαιρία να προτείνουν μοναδικές λύσεις (πρωτοτυπία).

Παράλληλα, λήφθηκαν υπόψη οι εισηγήσεις της Sheffield (2003), για το βαθμό δυσκολίας των έργων. Πιο συγκεκριμένα, τα έργα που επιλέγηκαν για το Εργαλείο Μαθηματικής Δημιουργικότητας δεν είναι ούτε εύκολα, αλλά ούτε δύσκολα, ώστε να είναι σε θέση όλοι οι μαθητές, ανεξαρτήτου ηλικίας και γνωσιολογικού υποβάθρου στα μαθηματικά, να προτείνουν τουλάχιστον μια ορθή λύση. Ως εκ τούτου, υπάρχει ένας αριθμός προφανών απαντήσεων στις οποίες μπορούν να φτάσουν όλοι οι μαθητές, αλλά ταυτόχρονα υπάρχει περιθώριο για εύρεση σύνθετων και πρωτότυπων απαντήσεων που αναμένεται ότι θα προταθούν από τους πιο ικανούς μαθητές (Sheffield, 2003).

Κατά την επιλογή δραστηριοτήτων, έγινε προσπάθεια να περιληφθούν έργα με λεκτική και με εικονική αναπαράσταση, ώστε να μην ευνοούνται μαθητές με συγκεκριμένο γνωστικό στυλ. Επιπρόσθετα, τα τέσσερα έργα εμπλέκουν έννοιες και από τις πέντε ενότητες του αναλυτικού προγράμματος των Μαθηματικών: Αριθμοί και Πράξεις, Μοτίβα-Σχέσεις-Άλγεβρα, Έννοιες Χώρου-Γεωμετρία, Μέτρηση, Ανάλυση δεδομένων-Στατιστική-Πιθανότητες. Στα περισσότερα έργα υπάρχει δυνατότητα για εμπλοκή εννοιών από περισσότερες από μια ενότητες.

Αναλυτική περιγραφή του Εργαλείου Μαθηματικής Δημιουργικότητας

Το Εργαλείο Μαθηματικής Δημιουργικότητας αποτελείται από τέσσερα ανοικτού τύπου έργα στα οποία οι μαθητές κλήθηκαν να προτείνουν πολλές λύσεις, διαφορετικές λύσεις, και λύσεις που κανένας άλλος στην τάξη δεν θα μπορέσει να σκεφτεί. Με αυτή την οδηγία, διαφυλάσσεται ότι οι απαιτήσεις των έργων αντιστοιχούν με τον τρόπο αξιολόγησής τους, μιας και στη μέτρηση της δημιουργικότητας σημασία έχει η ευχέρεια (αριθμός λύσεων), η ευελιξία (αριθμός διαφορετικών ιδεών) και η πρωτοτυπία (σπανιότητα λύσεων) των λύσεων. Ακολουθεί αναλυτική περιγραφή των έργων.

Στο πρώτο έργο του Εργαλείου Μαθηματικής Δημιουργικότητας δίνονται 21 αριθμοί και οι μαθητές καλούνται να σχηματίσουν ομάδες αριθμών που να έχουν κοινό/ά στοιχείο/α. Το συγκεκριμένο έργο αποτελεί έργο αναδιατύπωσης της προβληματικής κατάστασης, αφού απαιτείται από τους μαθητές να εναλλάσσουν τον τρόπο σκέψης τους και να αναλογίζονται διαφορετικές ιδιότητες των αριθμών. Οι αριθμοί που δίνονται στην εκφώνηση του έργου επιλέγηκαν ώστε να έχουν μεταξύ τους αρκετά κοινά χαρακτηριστικά. Για παράδειγμα, οι μαθητές μπορούν να αναλογιστούν τα ψηφία των αριθμών, να εντοπίσουν διαιρέτες ή παράγοντες αριθμού, να δημιουργήσουν μοτίβα αριθμών ή να αναλογιστούν το μέγεθος των αριθμών.

Στο δεύτερο έργο παρουσιάζονται τρία γεωμετρικά σχήματα: ένα ορθογώνιο σκαληνό τρίγωνο, ένα τετράγωνο και ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Οι μαθητές καλούνται να αναφέρουν τους λόγους για τους οποίους το ένα εκ των τριών σχημάτων δεν ανήκει στην ίδια ομάδα με τα άλλα δύο. Ανά δύο τα σχήματα μοιράζονται κοινά χαρακτηριστικά, δίνοντας την ευκαιρία στο λύτη να αναλογιστεί κάθε φορά διαφορετικό σχήμα που αποτελεί εξαίρεση της ομαδοποίησης. Έννοιες όπως η ισότητα πλευρών και γωνιών, το μέγεθος πλευρών και γωνιών, τα είδη σχημάτων, τα είδη γωνιών και το εμβαδόν των σχημάτων μπορούν να περιληφθούν στις μαθηματικές ιδιότητες που θα αναλογιστούν οι μαθητές.

Στο τρίτο έργο οι μαθητές καλούνται να σκιάσουν με διαφορετικούς τρόπους το μισό ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Ως εκ τούτου, δίνονται ορθογώνια παραλληλόγραμμα, στα οποία σε κάθε πλευρά υπάρχουν σημεία που υποδηλώνουν τη μονάδα μήκους. Σκόπιμα, τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα δεν είναι χωρισμένα σε γραμμές, στήλες ή τετραγωνικές μονάδες, για να αποφευχθεί ο προσανατολισμός των μαθητών προς συγκεκριμένο τρόπο σκέψης. Οι μαθητές μπορεί να καταλήξουν σε προφανείς λύσεις φέρνοντας τον άξονα συμμετρίας ή χωρίζοντας το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο σε γραμμές, στήλες ή τετραγωνάκια και χρωματίζοντας τα μισά. Πιο σύνθετες απαντήσεις μπορούν να προκύψουν με συνδυασμό των πιο πάνω μεθόδων ή με την αξιοποίηση πιο «αφηρημένων» τεχνικών.

Το τέταρτο έργο έχει ως στόχο τη διατύπωση μαθηματικών προβλημάτων. Εισήγηση για τη χρήση έργων διατύπωσης προβλημάτων ή ερωτήσεων γίνεται από διάφορους κατά καιρούς ερευνητές (π.χ. Balka, 1974 · Haylock, 1987 · Silver, 1997). Στο έργο παρουσιάζεται ένας πίνακας με πληροφορίες για τις πωλήσεις μιας οικοδομικής εταιρείας. Οι μαθητές καλούνται να διατυπώσουν τα δικά τους μαθηματικά προβλήματα, που θα μπορούσαν να επιλυθούν με βάση τα δεδομένα που παρουσιάζονται. Προβλήματα που έχουν ως θέμα τον υπολογισμό της είσπραξης, τη σύγκριση της είσπραξης μεταξύ δύο χρονικών περιόδων, τον υπολογισμό των κτισμάτων, τον υπολογισμό των κερδών της εταιρείας ή του φόρου που πληρώνει στο κράτος είναι δυνατόν να προταθούν.

Εργαλείο Μαθηματικής Ικανότητας

Για την αξιολόγηση της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών αναπτύχθηκε ένα εργαλείο, σε τρεις παράλληλες μορφές, μια για κάθε τάξη του δείγματος. Οι τρεις παράλληλες μορφές του εργαλείου περιλαμβάνουν τον ίδιο αριθμό ασκήσεων και ερωτημάτων και οι ασκήσεις αντιστοιχούν στην ίδια μαθηματική έννοια. Αν και στις τρεις μορφές των εργαλείων περιλαμβάνονται ασκήσεις με τις ίδιες μαθηματικές έννοιες, εντούτοις υπάρχει αυξανόμενος βαθμός δυσκολίας ανάλογα με την τάξη στην οποία απευθύνεται το εργαλείο.

Τα έργα που περιλήφθηκαν στο Εργαλείο Μαθηματικής Ικανότητας επιλέγηκαν από τα αντίστοιχα βιβλία αξιολόγησης των μαθηματικών κάθε τάξης (Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων Κύπρου, 2008). Λόγω του ότι στόχος του συγκεκριμένου εργαλείου ήταν να αξιολογήσει τις προϋπάρχουσες μαθηματικές γνώσεις των μαθητών και δεδομένου ότι η έρευνα διεξήχθηκε στο πρώτο εξάμηνο της σχολικής χρονιάς, θεωρήθηκε σκόπιμο όπως για τους μαθητές της κάθε τάξης χρησιμοποιηθούν ασκήσεις από το βιβλίο αξιολόγησης των Μαθηματικών της προηγούμενης τάξης στην οποία φοιτούσαν οι μαθητές. Για παράδειγμα, για τους μαθητές της Δ’ τάξης χρησιμοποιήθηκε το βιβλίο αξιολόγησης των Μαθηματικών της Γ’ τάξης και ούτω καθ’ εξής.

Τα έργα από τα βιβλία αξιολόγησης των μαθηματικών επιλέγηκαν με βάση τα εξής κριτήρια: (α) να περιλαμβάνουν έννοιες από τις πέντε θεματικές ενότητες του αναλυτικού προγράμματος των μαθηματικών της Κύπρου και (β) να υπάρχουν αντίστοιχα έργα στα βιβλία αξιολόγησης των Μαθηματικών και των τριών τάξεων. Αξίζει να διευκρινιστεί ότι οι ασκήσεις που περιλήφθηκαν στο εργαλείο μαθηματικής ικανότητας χρησιμοποιήθηκαν αυτούσιες και δεν έγινε οποιαδήποτε τροποποίηση.

Αναλυτική περιγραφή του Εργαλείου Μαθηματικής Ικανότητας

Το Εργαλείο Μαθηματικής Ικανότητας αποτελείται από πέντε έργα. Στον Πίνακα 3.2 παρουσιάζεται η αντιστοιχία των ασκήσεων ανάμεσα στο δοκίμιο μαθηματικής ικανότητας των τριών τάξεων (δείτε Παράρτημα 2 για τα ολοκληρωμένα δοκίμια).

Πίνακας 3.2

Αντιστοιχία Έργων του Εργαλείου Μαθηματικής Ικανότητας στις τρεις τάξεις.

Έργο 1	
Δ’ τάξη	**1. Κάνε τις πιο κάτω πράξεις.** Α) $\begin{array}{r} 437 \\ +\,285 \\ \hline \end{array}$ Β) $\begin{array}{r} 300 \\ -\,138 \\ \hline \end{array}$ Γ) $\begin{array}{r} 24 \\ \times\,23 \\ \hline \end{array}$ Δ) $568 \mid 4$ Ε) $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=$ ΣΤ) $1-\frac{2}{7}=$
Ε’ τάξη	**1. Κάνε τις πράξεις.** Α) $\begin{array}{r} 2\,538 \\ +\,3\,863 \\ \hline \end{array}$ Β) $\begin{array}{r} 4\,983 \\ -\,2\,874 \\ \hline \end{array}$ Γ) $\begin{array}{r} 545 \\ \times\,34 \\ \hline \end{array}$ Δ) $5\,850 \mid 26$ Ε) $5\frac{3}{7}+2\frac{5}{7}=$ ΣΤ) $1\frac{2}{5}-\frac{3}{5}=$

Στ’ τάξη

1. Βρες την απάντηση.

Α, Β) (4200 – 2560) + 560 =

Γ) 1605 x 38 =

Δ) 9463 : 32 =

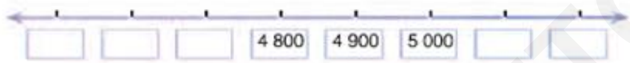
Ε, ΣΤ) $1 - (\frac{3}{8} + \frac{1}{3}) =$

Έργο 2

Δ’ τάξη

2. Συμπλήρωσε τις πιο κάτω αριθμητικές σειρές (μοτίβα).

Α) 

Β) 

Ε’ τάξη

2. Συνέχισε τα μοτίβα.

Στ’ τάξη

2. Συμπλήρωσε τους αριθμούς που λείπουν.

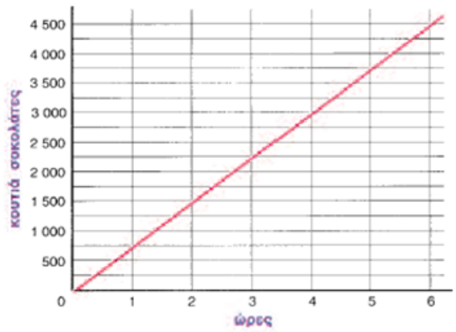
Α) 30, 60, 120, _______ , _______ , _______

Β) 2, 6, 12, 20, _______ , _______ , _______

Έργο 3

Δ’ τάξη

3. Ο Ορέστης πήρε πληροφορίες για την παραγωγή σοκολάτων από το εργοστάσιο «Η ΓΛΥΚΑ». Έμαθε ότι κάθε ώρα παράγεται ο ίδιος αριθμός κουτιών σοκολάτας. Πάρε πληροφορίες από τη γραφική παράσταση και απάντησε στις ερωτήσεις.



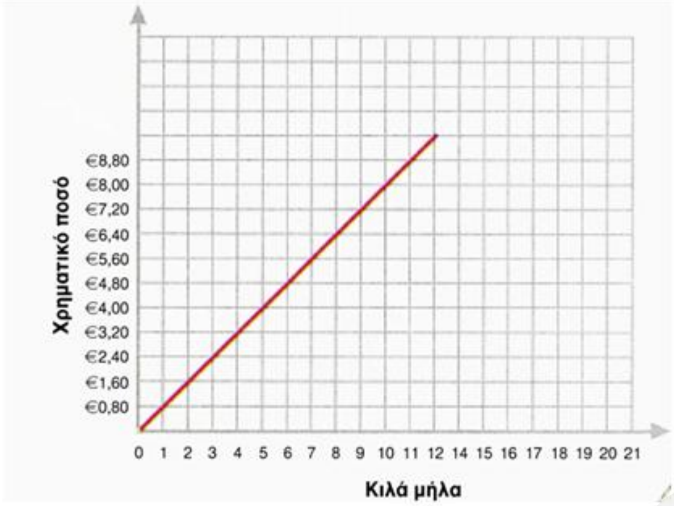
Α) Πόσα κουτιά σοκολάτες παράγει το εργοστάσιο σε 4 ώρες; ……………………

Β) Πόσες ώρες πρέπει να εργαστεί το εργοστάσιο, για να παράξει 3750 κουτιά σοκολάτες; ……………………

Γ) Πόσες ώρες πρέπει να εργαστεί το εργοστάσιο, για να παράξει 9000 κουτιά σοκολάτες; ……………………

Ε’ τάξη

3. Μελέτησε τη γραφική παράσταση και απάντησε στα πιο κάτω ερωτήματα.



Α) Πόσα θα πληρώσω για 4 kg μήλα; ....

Β) Με €7.20, πόσα κιλά μήλα μπορώ να αγοράσω; ....

Γ) Πόσα θα πληρώσω για 24 kg μήλα; ....

Στ’ τάξη

3. Μελέτησε τη γραφική παράσταση και απάντησε στις ερωτήσεις.

Α) Ποιος είναι ο μήνας με τις περισσότερες εισπράξεις;____________________________

Β) Ποιος είναι ο μήνας με τις λιγότερες εισπράξεις;____________________________

Γ) Πόση είναι η διαφορά των εισπράξεων μεταξύ του μήνα με τις περισσότερες εισπράξεις από το μήνα με τις λιγότερες εισπράξεις; ____________________________

Έργο 4

Δ’ τάξη

5. Λύσε το πιο κάτω πρόβλημα.

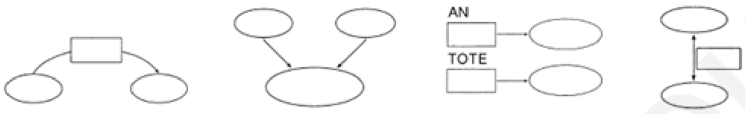
Μια σοκολάτα ζυγίζει 250 g. Μια γκοφρέτα ζυγίζει 100 g λιγότερο από τη σοκολάτα. Ένα κουτί μπισκότα ζυγίζει όσο η σοκολάτα και η γκοφρέτα μαζί.

Πόσο ζυγίζει η γκοφρέτα; ………………………………………………………..

Πόσο ζυγίζουν τα μπισκότα; ……………………………………………………

Ε’ τάξη

5. Λύσε το πιο κάτω πρόβλημα χρησιμοποιώντας το κατάλληλο συνδυασμό σχεδιαγραμμάτων ή με όποιο άλλο τρόπο θέλεις.



Το χωριό του Γιώργου έχει 1250 κατοίκους. Το χωριό της Σοφίας έχει 170 κατοίκους λιγότερους από το χωριό του Γιώργου. Το χωριό του Νίκου έχει τόσους κατοίκους όσους το χωριό του Γιώργου και της Σοφίας μαζί. Πόσους κατοίκους έχει το χωριό του Νίκου;

Στ’ τάξη

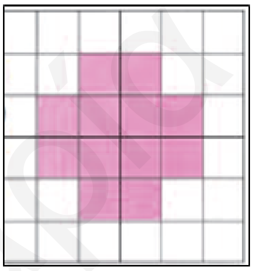
5. Λύσε το πρόβλημα.

Η Μαρία και η Δήμητρα συλλέγουν γραμματόσημα. Η συλλογή της Μαρίας έχει 143 γραμματόσημα περισσότερα από τη συλλογή της Δήμητρας που έχει 376 γραμματόσημα. Πόσα γραμματόσημα έχουν και οι δυο μαζί;

Έργο 5

Δ’ τάξη

6. Παρατήρησε το πιο κάτω σχήμα και συμπλήρωσε τις πιο κάτω προτάσεις. Το κάθε τετραγωνάκι έχει εμβαδόν ίσο με ένα τετραγωνικό εκατοστόμετρο.

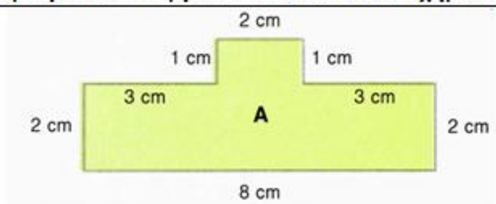


Περίμετρος σκιασμένου σχήματος: ……………………cm

Εμβαδόν σκιασμένου σχήματος: …………………… cm^2

Ε’ τάξη

6. Βρες την περίμετρο και το εμβαδόν του πιο κάτω σχήματος.

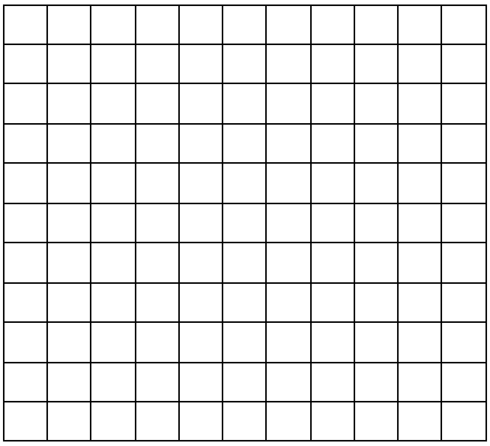


Περίμετρος: ……………………………………………………………………………..

Εμβαδόν: ………………………………………………………………………………

Στ’ τάξη

6. Σχεδίασε ένα ορθογώνιο με περίμετρο 18cm. Βρες το εμβαδόν του.



Εμβαδόν: ……………………………..

Το πρώτο έργο στοχεύει να αξιολογήσει την ικανότητα των μαθητών στην εκτέλεση των τεσσάρων πράξεων, μεταξύ ακέραιων (4 πράξεις) και κλασματικών αριθμών (2 πράξεις). Οι πράξεις μεταξύ ακέραιων αριθμών αντιστοιχούν σε μια πράξη πρόσθεσης, μια πράξη αφαίρεσης, μια πράξη πολλαπλασιασμού και μια πράξη διαίρεσης. Στο Εργαλείο Μαθηματικής Ικανότητας της Δ’ τάξης περιλαμβάνονται πράξεις πρόσθεσης και αφαίρεσης με τριψήφιους αριθμούς, ενώ στα αντίστοιχα εργαλεία για την Ε’ και Στ’ τάξη περιλαμβάνονται πράξεις πρόσθεσης και αφαίρεσης με τετραψήφιους αριθμούς. Η πράξη πολλαπλασιασμού που περιλαμβάνεται στο εργαλείο της Δ’ τάξης αφορά την εκτέλεση πράξης μεταξύ δύο διψήφιων αριθμών, ενώ η πράξη που περιλαμβάνεται στο εργαλείο της Ε’ και Στ’ τάξης αφορά πράξη μεταξύ διψήφιου και τριψήφιου αριθμού ή διψήφιου και τετραψήφιου αριθμού, αντίστοιχα. Αναφορικά με την πράξη διαίρεσης, στο Εργαλείο Μαθηματικής Ικανότητας που απευθύνεται σε μαθητές Δ’ τάξης η πράξη περιλαμβάνει διαίρεση τριψήφιου με μονοψήφιο αριθμό, ενώ στο Εργαλείο Μαθηματικής Ικανότητας που απευθύνεται σε μαθητές Ε’ και Στ’ τάξεων η πράξη περιλαμβάνει διαίρεση τετραψήφιου με διψήφιο αριθμό. Όσον αφορά στις πράξεις με κλασματικούς αριθμούς, το εργαλείο για τη Δ’ τάξη περιλαμβάνει μια πράξη πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων καθώς και μια πράξη συμπλήρωσης μονάδας (αφαίρεση κλάσματος από μονάδα). Οι αντίστοιχες πράξεις για την Ε’ τάξη περιλαμβάνουν πράξεις προσθετικής μορφής (πρόσθεση και αφαίρεση) ομώνυμων μεικτών κλασμάτων ενώ για τη Στ’ τάξη περιλαμβάνεται μια πράξη πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων και μια πράξη αφαίρεσης κλάσματος από μονάδα.

Το δεύτερο έργο του εργαλείου στοχεύει στη συμπλήρωση αριθμητικών μοτίβων. Στο Εργαλείο Μαθηματικής Ικανότητας για τη Δ’ τάξη περιλαμβάνονται μοτίβα με τετραψήφιους αριθμούς που έχουν σταθερή διαφορά (αύξηση κατά σταθερό αριθμό) ως προς τις εκατοντάδες και ως προς τις χιλιάδες. Στο Εργαλείο Μαθηματικής Ικανότητας για την Ε’ τάξη περιλαμβάνεται ένα μοτίβο με εξαψήφιους αριθμούς που έχουν σταθερή διαφορά (μείωση κατά σταθερό αριθμό), καθώς και ένα μοτίβο που ακολουθεί γεωμετρική πρόοδο (πολλαπλασιασμός με σταθερό αριθμό). Στο Εργαλείο Μαθηματικής Ικανότητας για τη Στ’ τάξη περιλαμβάνεται ένα μοτίβο που ακολουθεί γεωμετρική πρόοδο (πολλαπλασιασμός με σταθερό αριθμό) και ένα μοτίβο με αυξανόμενη διαφορά (αύξηση διαφοράς μεταξύ δύο διαδοχικών ζευγών του μοτίβου).

Το τρίτο έργο στοχεύει στην αξιολόγηση της ικανότητας των μαθητών να ερμηνεύουν γραφική παράσταση. Το Εργαλείο Μαθηματικής Ικανότητας που απευθύνεται στη Δ’ και την Ε’ τάξη περιλαμβάνει μια γραμμική γραφική παράσταση. Οι μαθητές και στις δύο περιπτώσεις χρειάζεται να απαντήσουν σε τρία ερωτήματα: οι απαντήσεις στα δύο ερωτήματα είναι εμφανείς από τη γραφική παράσταση, ενώ η απάντηση στο τρίτο ερώτημα θα προκύψει αφού οι μαθητές εντοπίσουν τη σχέση που υπάρχει μεταξύ των μεταβλητών. Το Εργαλείο Μαθηματικής Ικανότητας που απευθύνεται στους μαθητές Στ’ τάξης περιλαμβάνει ένα ιστόγραμμα. Οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν σε τρία ερωτήματα που εμπλέκουν έννοιες σύγκρισης μεταξύ των δεδομένων της γραφικής παράστασης.

Το τέταρτο έργο αφορά στην επίλυση ενός λεκτικού προβλήματος. Για τη Δ’ τάξη το πρόβλημα αποτελείται από δύο υποερωτήματα προσθετικής δομής, μίας και δύο πράξεων αντίστοιχα. Για την Ε’ και Στ’ τάξη, το πρόβλημα περιλαμβάνει ένα ερώτημα προσθετικής δομής δύο πράξεων, συνδυάζοντας πράξεις πρόσθεσης και αφαίρεσης.

Τέλος, το πέμπτο έργο ασχολείται με το θέμα του εμβαδού και της περιμέτρου. Για τη Δ’ τάξη το ζητούμενο είναι ο υπολογισμός της περιμέτρου και του εμβαδού ενός σταυροειδούς σχήματος, στο οποίο είναι εμφανείς οι μονάδες μέτρησης (το σχήμα είναι σχεδιασμένο σε τετραγωνισμένο χαρτί). Για την Ε’ τάξη το ζητούμενο είναι ο υπολογισμός της περιμέτρου και του εμβαδού ενός συμμετρικού σχήματος, στο οποίο είναι εμφανείς οι επί μέρους διαστάσεις. Για τη Στ’ τάξη το ζητούμενο είναι ο σχεδιασμός ενός ορθογωνίου με συγκεκριμένη περίμετρο και ο υπολογισμός του εμβαδού του.

Ο βαθμός δημιουργικής προσωπικότητας στηρίχθηκε στις απαντήσεις των μαθητών σε μια κλείδα αυτοαξιολόγησης. Ο σχεδιασμός του Εργαλείου Δημιουργικής Προσωπικότητας στηρίχθηκε στην «Investment Theory» που προτάθηκε από τους Sternberg και Lubart (1996). Σύμφωνα με τη συγκεκριμένη θεωρία, οι διανοητικές ικανότητες, οι γνώσεις, το γνωστικό στυλ, η προσωπικότητα, τα κίνητρα και το περιβάλλον συμβάλλουν στην ανάπτυξη της δημιουργικής ικανότητας του ατόμου (Sternberg & Lubart, 1996). Μεταφέροντας το θεωρητικό μοντέλο στην παρούσα εργασία, οι έξι παράμετροι, που συμβάλλουν στην ανάπτυξη της δημιουργικής ικανότητας του ατόμου, απετέλεσαν τη δομή στην οποία στηρίχθηκε ο σχεδιασμός και η ανάπτυξη του Εργαλείου Δημιουργικής Προσωπικότητας.

Οι διανοητικές ικανότητες των μαθητών εξετάζονται μέσα από δηλώσεις που αναφέρονται στην κατοχή συνθετικής, αναλυτικής και πρακτικής ικανότητας, όπως τις όρισε ο Sternberg (1985). Οι γνώσεις του ατόμου αξιολογούνται στη βάση του μαθηματικού συλλογισμού και της ικανότητας λύσης προβλήματος. Το γνωστικό στυλ εξετάζεται μέσα από δηλώσεις που διερευνούν την προτίμηση του ατόμου σε λεκτικές, οπτικές ή χωρικές αναπαραστάσεις (Blazhenkova & Kozhevnikov, 2008). Τα εσωτερικά κίνητρα του ατόμου διερευνώνται μέσα από δηλώσεις που αξιολογούν το ενδιαφέρον των μαθητών για τα μαθηματικά και για εργασία που εμπλέκει μαθηματική σκέψη. Χαρακτηριστικά όπως η επιμονή και η διαφορετικότητα διερευνούν την προσωπικότητα του ατόμου. Τέλος, το περιβάλλον εξετάζεται ως συνάρτηση των σχέσεων του ατόμου με τον κοινωνικό του περίγυρο για μαθηματικούς σκοπούς.

Αξίζει να αναφερθεί ότι οι δηλώσεις του Εργαλείου Δημιουργικής Προσωπικότητας εστιάζονται στο γνωστικό αντικείμενο των μαθηματικών. Μια τέτοια προσπάθεια επικροτείται από τους Kaufman, Plucker και Baer (2008), οι οποίοι αναφέρουν ότι οι κλείδες για τη δημιουργικότητα περιλαμβάνουν συνήθως γενικά χαρακτηριστικά, γνωρίσματα ή ικανότητες που θεωρεί ο κατασκευαστής της κλείδας ότι σχετίζονται με τη γενική δημιουργικότητα, αλλά όχι με την ειδική δημιουργικότητα. Η εστίαση των δηλώσεων σε ένα γνωστικό αντικείμενο περιγράφει πιο έγκυρα τα χαρακτηριστικά μιας δημιουργικής προσωπικότητας στα μαθηματικά και επακόλουθα, αποκαλύπτει τα στοιχεία που χρειάζεται να καλλιεργήσει ένα άτομο για να είναι πιο δημιουργικό.

Αναλυτική περιγραφή του Εργαλείου Δημιουργικής Προσωπικότητας

Το Εργαλείο Δημιουργικής Προσωπικότητας αποτελείται από 20 δηλώσεις σε κλίμακα Likert (δείτε Παράρτημα 3). Η οδηγία του εργαλείου καλεί τους μαθητές να διαβάσουν προσεκτικά τις δηλώσεις και έπειτα να βάλουν σε κύκλο τον αριθμό που δηλώνει το βαθμό συμφωνίας τους με τη δήλωση.

Το εργαλείο περιλαμβάνει έξι δηλώσεις που αναφέρονται στις διανοητικές ικανότητες του ατόμου. Πιο συγκεκριμένα οι δηλώσεις 1 και 2 αναφέρονται στην κατοχή αναλυτικής ικανότητας, οι δηλώσεις 3 και 4 αναφέρονται στην κατοχή συνθετικής ικανότητας και οι δηλώσεις 5 και 6 αναφέρονται στην κατοχή πρακτικής ικανότητας.

Στο εργαλείο περιλαμβάνονται δύο δηλώσεις που περιγράφουν τις γνώσεις του ατόμου στα μαθηματικά. Οι δηλώσεις αυτές αναφέρονται στην ικανότητα εντοπισμού μοτίβων (δήλωση 7) και στην ικανότητα επίλυσης προβλήματος (δήλωση 8). Δύο δηλώσεις αναφέρονται στο περιβάλλον εργασίας του δημιουργικού ατόμου. Ειδικότερα, οι δηλώσεις 9 και 10 συνδιαλέγονται τις σχέσεις του ατόμου με τους συμμαθητές και τους γονείς του, στο πλαίσιο μιας εργασίας με μαθηματικό σκοπό.

Όσον αφορά στις δηλώσεις που περιγράφουν την προσωπικότητα του ατόμου, δύο δηλώσεις έχουν περιληφθεί στο συγκεκριμένο εργαλείο. Η δήλωση 11 αναφέρεται στο πείσμα του ατόμου για επιτυχία και η δήλωση 12 αναφέρεται στην επιλογή της διαφορετικότητας. Για τη διερεύνηση των κινήτρων του ατόμου περιλαμβάνονται δύο δηλώσεις στο Εργαλείο Δημιουργικής Προσωπικότητας. Τα κίνητρα αξιολογούνται με βάση το βαθμό επιθυμίας του ατόμου να ασχολείται με εργασία (δήλωση 13) και παιχνίδια (δήλωση 14) με μαθηματικό περιεχόμενο.

Έξι δηλώσεις αναφέρονται στο γνωστικό στυλ του ατόμου. Οι δηλώσεις 15 και 16 επικεντρώνονται στην προτίμηση του ατόμου σε χωρικές αναπαραστάσεις, οι δηλώσεις 17 και 18 επικεντρώνονται στην προτίμηση του ατόμου σε οπτικές αναπαραστάσεις και τέλος οι δηλώσεις 19 και 20 επικεντρώνονται στην προτίμηση του ατόμου σε λεκτικές αναπαραστάσεις.

Για τη δήλωση του βαθμού συμφωνίας των μαθητών στις δηλώσεις του Εργαλείου Δημιουργικής Προσωπικότητας χρησιμοποιήθηκε η κλίμακα Likert με επτά διαβαθμίσεις. Στο ένα άκρο του συνεχούς υπάρχει η ένδειξη «Διαφωνώ απόλυτα» ενώ στο άλλο η άκρη η ένδειξη «Συμφωνώ απόλυτα».

Εργαλείο Γενικής Δημιουργικότητας

Για τη μέτρησης της γενικής δημιουργικότητας αξιοποιήθηκαν δύο έργα από το Torrance Tests of Creative Thinking (TTCT), το πιο γνωστό και πολυχρησιμοποιημένο εργαλείο για την αξιολόγηση της δημιουργικής ικανότητας (Kaufman, Plucker & Baer, 2008). Το TTCT πρωτοδημοσιεύτηκε από τον Paul Torrance το 1966, και μέχρι σήμερα έχουν γίνει τέσσερις φορές νόρμες του εργαλείου (Kim, 2008). Σε αυτή την περίοδο το TTCT έχει δοκιμαστεί σε μεγάλα δείγματα (Davis, 1992) και έχει υψηλή εγκυρότητα πρόβλεψης για μεγάλο εύρος ηλικιών (Cropley, 2000).

Σήμερα χρησιμοποιούνται δύο βασικές μορφές του εργαλείου: το εικονικό TTCT και το λεκτικό TTCT, τα οποία κυκλοφορούν σε δύο παράλληλες εκδοχές. Το λεκτικό TTCT (Thinking Creatively with Words) περιλαμβάνει πέντε έργα: (α) διερώτηση και εικασία (ask-and-guess), (β) βελτίωση αντικειμένου (product improvement), (γ) ασυνήθιστες χρήσεις (unusual uses), (δ) ασυνήθιστες ερωτήσεις (unusual questions), (ε) υποθέσεις (just suppose). Το ερέθισμα για κάθε λεκτικό έργο είναι μια εικόνα και οι λύτες καλούνται να απαντήσουν στα ερωτήματα που τους δίνονται σε γραπτή μορφή (Torrance, 1966, 1974).

Το εικονικό TTCT (Thinking Creatively with Pictures) περιλαμβάνει τριών ειδών έργα: (α) σχεδιασμός εικόνας (picture construction), όπου ο λύτης χρησιμοποιεί ένα βασικό σχήμα και το επεκτείνει για να δημιουργήσει μια εικόνα, (β) συμπλήρωση εικόνας (picture completion), όπου ο λύτης καλείται να ολοκληρώσει μια ατελή μορφή και (γ) σχεδιασμός επαναλαμβανόμενων εικόνων από γραμμές ή κύκλους (repeated figures of lines or circles) (Torrance, 1966, 1974).

Αναλυτική περιγραφή του Εργαλείου Γενικής Δημιουργικότητας

Το Εργαλείο Γενικής Δημιουργικότητας αποτελείται από δύο έργα, ένα λεκτικό και ένα εικονικό, που έχουν μεταφραστεί από την αντίστοιχη μορφή του TTCT (δείτε Παράρτημα 4). Το λεκτικό έργο εμπίπτει στην κατηγορία ασυνήθιστες χρήσεις (unusual uses) και καλεί το λύτη να ονομάσει διαφορετικές χρήσεις ενός αντικειμένου που χρησιμοποιείται στην καθημερινότητα του. Σε αυτή την περίπτωση, οι μαθητές καλούνται να αναφέρουν διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ένα άδειο τενεκεδάκι. Το εικονικό έργο που χρησιμοποιήθηκε στο εργαλείο εμπίπτει στην κατηγορία του σχεδιασμού επαναλαμβανόμενων εικόνων από γραμμές ή κύκλους (repeated figures of lines or circles). Σε αυτό το έργο, ο λύτης καλείται να συμπληρώσει όσο το δυνατόν περισσότερους κύκλους ώστε να σχηματίσει πρόσωπα, πράγματα ή καταστάσεις. Τόσο στο λεκτικό όσο και στο εικονικό έργο ζητείται από τους μαθητές να σκεφτούν όσες πιο πολλές ιδέες μπορούν εντός ενός χρονικού διαστήματος (7 λεπτών), ιδέες που να είναι πρωτότυπες και διαφορετικές μεταξύ τους.

Εργαλείο Naglieri Nonverbal Ability Test (Level D και Level E)

Το εργαλείο Naglieri Nonverbal Ability Test (NNAT) αξιοποιήθηκε στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας για τη μέτρηση του μη-λεκτικού συλλογισμού και της γενικής ικανότητας επίλυσης προβλήματος. Το NNAT είναι ένα σύντομο εργαλείο (με διάρκεια περίπου 30 λεπτών) που περιλαμβάνει έργα πολλαπλής επιλογής, που δεν απαιτούν την κατοχή γλωσσικών ή μαθηματικών δεξιοτήτων (Naglieri, 1997). Λόγω της ευκολίας του εργαλείου στη χορήγηση αλλά και στην κατανόηση των έργων, το NNAT έχει κατά καιρούς χρησιμοποιηθεί για να αξιολογήσει τη γενική ικανότητα του μαθητικού πληθυσμού, για να επιλέξει χαρισματικούς μαθητές που θα συμπεριληφθούν σε εκπαιδευτικά προγράμματα εμπλουτισμού, για να εξετάσει μαθητές με περιορισμένες κιναισθητικές ή γλωσσικές δεξιότητες. Αξίζει να αναφερθεί ότι το συγκεκριμένο εργαλείο έχει δοκιμαστεί σε περισσότερους από 100 000 μαθητές και έχει ισχυρές νόρμες (Naglieri, 1997).

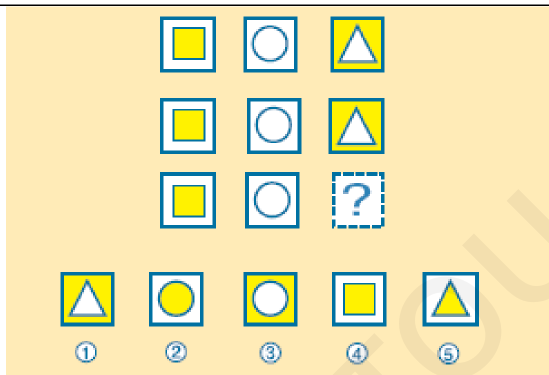
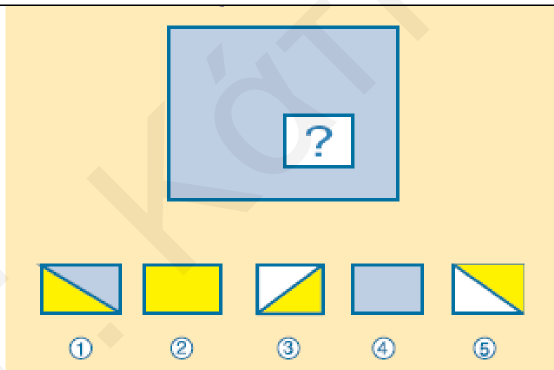
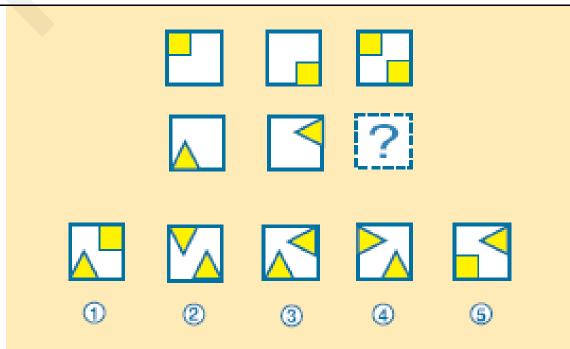
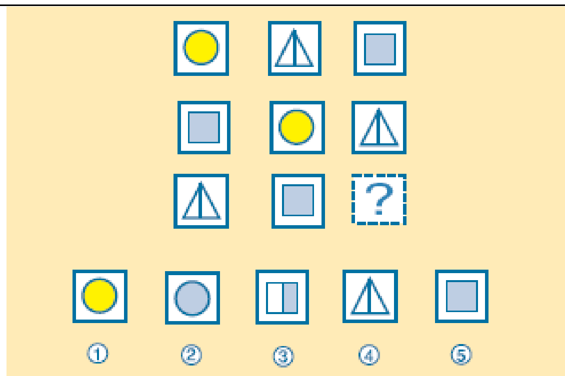
Το NNAT μπορεί να χορηγηθεί σε μαθητές προσχολικής ηλικίας (Grade K) μέχρι και σε μαθητές Γ’ τάξης Λυκείου (Grade 12). Ανάλογα με την ηλικιακή ομάδα στην οποία απευθύνεται το εργαλείο, υπάρχουν επτά διαφορετικά επίπεδα του NNAT. Στο NNAT περιλαμβάνονται τεσσάρων ειδών έργα, όπως παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.3.

Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει έργα αναλογικού συλλογισμού (Reasoning by Analogy), που απαιτούν την αναγνώριση σχέσεων μεταξύ των σχημάτων. Για να καθοριστεί η ορθή απάντηση σε τέτοια έργα, ο λύτης θα πρέπει να δει πώς τα σχήματα αλλάζουν οριζόντια και κάθετα, δίνοντας ιδιαίτερη σημασία σε λεπτομέρειες. Οι σχέσεις ενδέχεται να ενυπάρχουν σε περισσότερες από μια διαστάσεις (π.χ. σχήμα και σκίαση).

Η δεύτερη κατηγορία έργων απαιτεί τη συμπλήρωση μοτίβου (Pattern completion). Τέτοιου είδους έργα αναγκάζουν το λύτη να παρατηρήσει μια εικόνα στην οποία λείπει ένα κομμάτι. Στόχος του λύτη είναι να επιλέξει ποια από τις προτεινόμενες απαντήσεις συμπληρώνει την εικόνα, αφού καθορίσει τόσο τον προσανατολισμό όσο και τις λεπτομέρειες του μέρους που λείπει.

Πίνακας 3.3

Κατηγορίες Έργων του Εργαλείου Naglieri Nonverbal Ability Test.

Αναλογικός συλλογισμός	
Συμπλήρωση μοτίβου	
Χωρική οπτικοποίηση	
Σειριακός συλλογισμός	

Τα έργα χωρικής οπτικοποίησης (Spatial Visualization) αποτελούν την τρίτη κατηγορία έργων που περιλαμβάνονται στο NNAT. Στα έργα χωρικής οπτικοποίησης οι λύτες καλούνται να οπτικοποιήσουν και να αναγνωρίσουν πώς θα έμοιαζε ένα σχήμα μετά από περιστροφή, μετασχηματισμό ή συνδυασμό δύο άλλων σχημάτων.

Η τέταρτη κατηγορία περιλαμβάνει έργα σειριακού συλλογισμού (Serial reasoning problems). Αυτά τα έργα περιλαμβάνουν μια σειρά από σχήματα που τροποποιούνται οριζόντια και κάθετα. Ο λύτης θα πρέπει να αναγνωρίσει τη σειρά και τη μορφή των σχημάτων και να αντιληφθεί πώς αυτή αλλάζει στις υπόλοιπες στήλες ή σειρές.

Όλα τα δοκίμια, ανεξαρτήτου επιπέδου, περιλαμβάνουν 40 έργα: 2 έργα για δοκιμή και εξάσκηση και 38 έργα προς αξιολόγηση της ικανότητας του λύτη. Εντούτοις, ο αριθμός των έργων που περιλαμβάνονται σε κάθε κατηγορία έργων εξαρτάται από το επίπεδο του δοκιμίου.

Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας έχει χρησιμοποιηθεί το επίπεδο D (για τους μαθητές Δ’ τάξης) και το επίπεδο E (για τους μαθητές Ε’ και Στ’ τάξης). Το επίπεδο D περιλαμβάνει 6 έργα συμπλήρωσης μοτίβου, 10 έργα αναλογικού συλλογισμού, 8 προβλήματα σειριακού συλλογισμού και 14 έργα χωρικής οπτικοποίησης. Αντίστοιχα, το επίπεδο E περιλαμβάνει 5 έργα συμπλήρωσης μοτίβου, 6 έργα αναλογικού συλλογισμού, 8 προβλήματα σειριακού συλλογισμού και 19 έργα χωρικής οπτικοποίησης.

Λόγοι επιλογής του Naglieri Nonverbal Ability Test

Πρακτικά και θεωρητικά πλεονεκτήματα του Naglieri Nonverbal Ability Test οδήγησαν στην επιλογή του συγκεκριμένου εργαλείου για τη μέτρηση του μη λεκτικού συλλογισμού, για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας. Πιο συγκεκριμένα, το Naglieri Nonverbal Ability Test έχει κατανοητές οδηγίες χρήσης και μπορεί εύκολα να χορηγηθεί σε μεγάλες ομάδες μαθητών. Έτσι, επιτρέπει την ομαδική χορήγηση σε μαθητές, από ερευνητές αλλά και από εκπαιδευτικούς. Επίσης, το γεγονός ότι το εργαλείο είναι σχετικά σύντομο περιορίζει το χρόνο που απαιτείται για τη χορήγηση, σε σχέση με άλλα εργαλεία. Ταυτόχρονα, το NNAT είναι ένα μη-λεκτικό εργαλείο που επιτρέπει την ταυτόχρονη αξιολόγηση ατόμων με διαφορετικό πολιτισμικό και γλωσσικό υπόβαθρο και δεν απαιτεί ιδιαίτερες κιναισθητικές απαιτήσεις. Λόγω του ότι στα κυπριακά σχολεία υπάρχει μεγάλος αριθμός αλλόγλωσσων, η χρήση του NNAT δεν θα αποθαρρύνει αυτούς τους μαθητές από τη συμμετοχή τους στην έρευνα.

Όσον αφορά στους θεωρητικούς λόγους, η επιλογή του NNAT έγινε λόγω της ύπαρξης διαφορετικών επιπέδων δοκιμίου ανάλογα με την ηλικία των μαθητών, αλλά και λόγω της κατηγοριοποίησης των έργων. Η ύπαρξη διαφορετικών επιπέδων βοηθά στην αξιολόγηση των υποκειμένων με ένα τεστ που είναι κατάλληλο για το ηλικιακό τους επίπεδο και όχι σε σχέση με το συνολικό μαθητικό πληθυσμό.

Εγκυρότητα και Αξιοπιστία των Εργαλείων Μέτρησης

Δεδομένου ότι τα δύο πιο θεμελιώδη χαρακτηριστικά κάθε διαδικασίας μέτρησης είναι η αξιοπιστία και η εγκυρότητα, έγιναν αντίστοιχοι έλεγχοι στα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία. Η εγκυρότητα αναφέρεται στην ικανότητα του εργαλείου να μετρά αυτό που σχεδιάστηκε να μετράει (Ary, Jacobs, & Razavieh, 2002). Η αξιοπιστία αναφέρεται στο βαθμό στον οποίο ένα εργαλείο θα οδηγήσει σε συνεπή αποτελέσματα κάθε φορά που χρησιμοποιείται (Ary, Jacobs, & Razavieh, 2002). Ακολουθεί περιγραφή του τρόπου εξασφάλισης της εγκυρότητας και αξιοπιστίας των εργαλείων.

Εργαλείο Μαθηματικής Δημιουργικότητας

Στο Εργαλείο Μαθηματικής Δημιουργικότητας περιλήφθηκαν ανοικτού τύπου προβλήματα, τα οποία αναπτύχθηκαν για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας. Για αυτό κρίθηκε σκόπιμο να ελεγχθεί η φαινομενική εγκυρότητα των έργων. Ως εκ τούτου, ζητήθηκε από τρεις ερευνητές της μαθηματικής παιδείας και δύο εκπαιδευτικούς δημοτικής εκπαίδευσης να αξιολογήσουν τα έργα ως προς: (α) την καταλληλότητά τους για το σκοπό που αναπτύχθηκαν, (β) τον αριθμό των διαφορετικών απαντήσεων που μπορούν να εμφανιστούν και (γ) το είδος των μαθηματικών ιδεών που μπορούν να αξιοποιηθούν κατά την επίλυσή τους. Με αυτό τον τρόπο, επιβεβαιώθηκε ότι το εργαλείο μετρά όντως αυτό για το οποίο κατασκευάστηκε να μετρά: την ευχέρεια, την ευελιξία και την πρωτοτυπία στα μαθηματικά. Τα έργα στα οποία συμφώνησαν για την καταλληλότητά τους τουλάχιστον οι τέσσερις αξιολογητές αξιοποιήθηκαν ως είχαν στο εργαλείο, ενώ τα υπόλοιπα έτυχαν τροποποίησης.

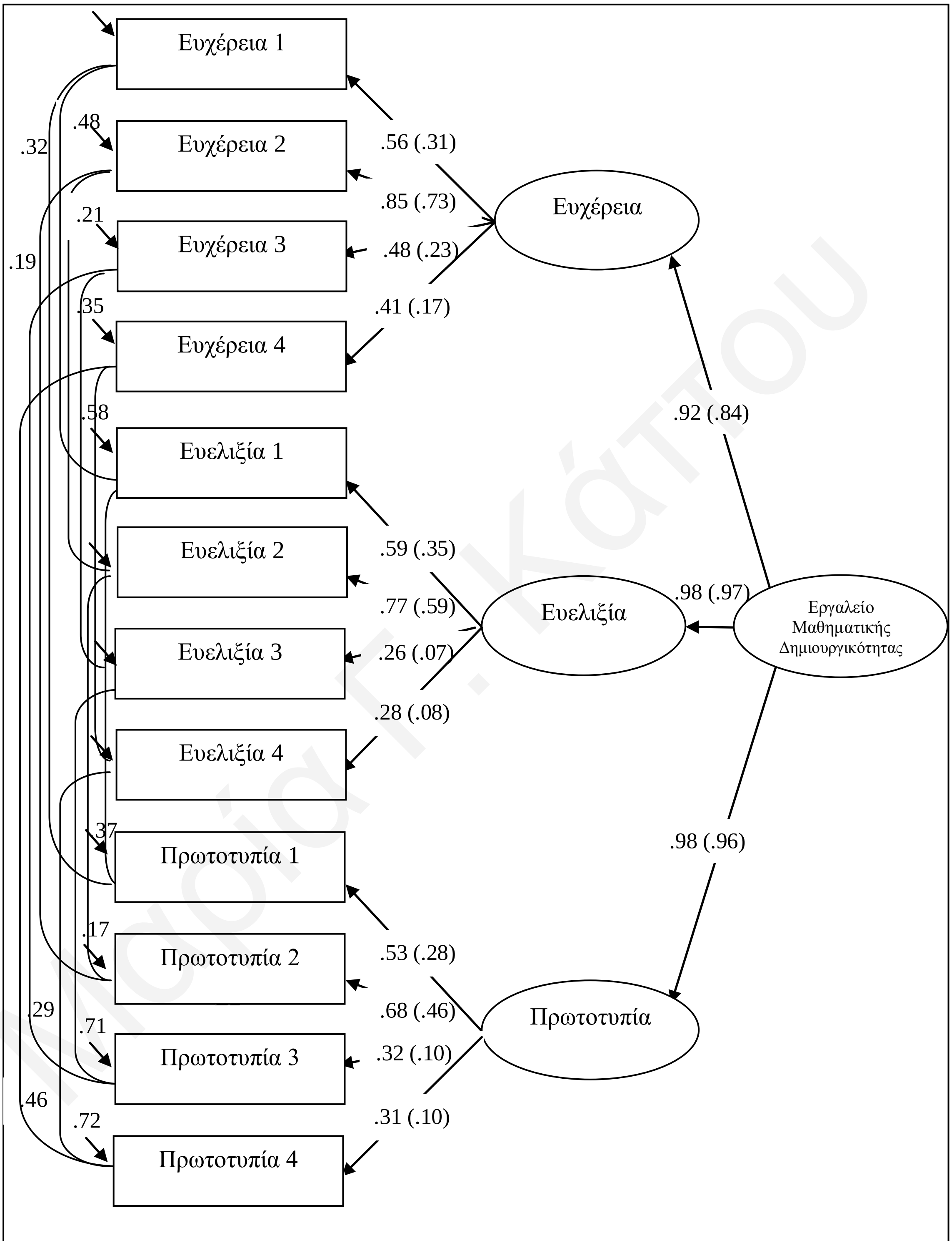
Παράλληλα, κατά την πιλοτική εφαρμογή του Εργαλείου Μαθηματικής Δημιουργικότητας έγινε έλεγχος της εγκυρότητας εννοιολογικής κατασκευής (construct validity). Ο έλεγχος έγινε δυνατός μέσω της επιβεβαίωσης ενός μοντέλου που περιγράφει το εργαλείο, όπως παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 3.1. Σύμφωνα με το συγκεκριμένο μοντέλο, το Εργαλείο Μαθηματικής Δημιουργικότητας έχει τη δυνατότητα να μετρήσει τις ικανότητες ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας, που σύμφωνα με τη διεθνή βιβλιογραφία ορίζουν τη δημιουργικότητα. Η προσαρμογή των δεδομένων στο προτεινόμενο μοντέλο ήταν καλή, επιβεβαιώνοντας την εγκυρότητα του Εργαλείου Μαθηματικής Δημιουργικότητας (CFI=.978, χ^2= 65.167, df=40, χ^2/df=1.629, RMSEA=.08).

Αναφορικά με την αξιοπιστία του Εργαλείου Μαθηματικής Δημιουργικότητας, διεξήχθηκε έλεγχος αξιοπιστίας εσωτερικής συνέπειας (internal consistency). Ο συντελεστής Cronbach alpha για τον έλεγχο αξιοπιστίας του εργαλείου ήταν α= .783. Γενικά, οποιαδήποτε ένδειξη πέραν του .80 θεωρείται ισχυρός δείκτης αξιοπιστίας, ενώ ενδείξεις μεγαλύτερες του .70 θεωρούνται ικανοποιητικές για την ύπαρξη ομοιογένειας μεταξύ των έργων ενός εργαλείου (Murphy & Davidshofer, 2001).

Εργαλείο Μαθηματικής Ικανότητας

Το Εργαλείο Μαθηματικής Ικανότητας περιλαμβάνει έργα από τα βιβλία αξιολόγησης των Μαθηματικών κάθε τάξης, που εκδόθηκαν από την Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων του Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού της Κύπρου. Πέρα από το γεγονός ότι η συγγραφή των βιβλίων αξιολόγησης έγινε από έμπειρη επιτροπή στον τομέα της μαθηματικής παιδείας, αποτελούμενη από επιθεωρητές δημοτικής εκπαίδευσης, συμβούλους των μαθηματικών και εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, έγινε έλεγχος της φαινομενικής εγκυρότητας των εργαλείων. Ειδικότερα, ζητήθηκε από τρεις ερευνητές της μαθηματικής παιδείας και δύο εκπαιδευτικούς δημοτικής εκπαίδευσης να αξιολογήσουν τα έργα ως προς: (α) την καταλληλότητά τους για το σκοπό που αναπτύχθηκαν και (β) την ύπαρξη αντιστοιχίας ανάμεσα στα έργα των τριών παραλλαγών του εργαλείου.

Ακολούθως, έγινε έλεγχος αξιοπιστίας καθεμιάς από τις τρεις μορφές του εργαλείου, δίνοντας τα ακόλουθα αποτελέσματα: α=.704 για το Εργαλείο Μαθηματικής Ικανότητας για τη Δ' τάξη, α=.684 για το Εργαλείο Μαθηματικής Ικανότητας για την Ε' τάξη και α=.771 για το Εργαλείο Μαθηματικής Ικανότητας για τη Στ' τάξη. Εκτός από το εργαλείο για την Ε' τάξη το οποίο είναι οριακά αποδεκτό, οι συντελεστές Cronbach alpha για τα εργαλεία της Δ' και της Στ' τάξης επιβεβαιώνουν την εσωτερική συνοχή του εργαλείου. Οι χαμηλοί δείκτες εσωτερικής αξιοπιστίας πιθανόν να οφείλονται στο μικρό αριθμό έργων που περιλήφθηκαν στο Εργαλείο Μαθηματικής Ικανότητας.



* Ο πρώτος αριθμός δείχνει το συντελεστή φόρτισης και ο αριθμός στην παρένθεση την αντίστοιχη ερμηνευόμενη διασπορά.

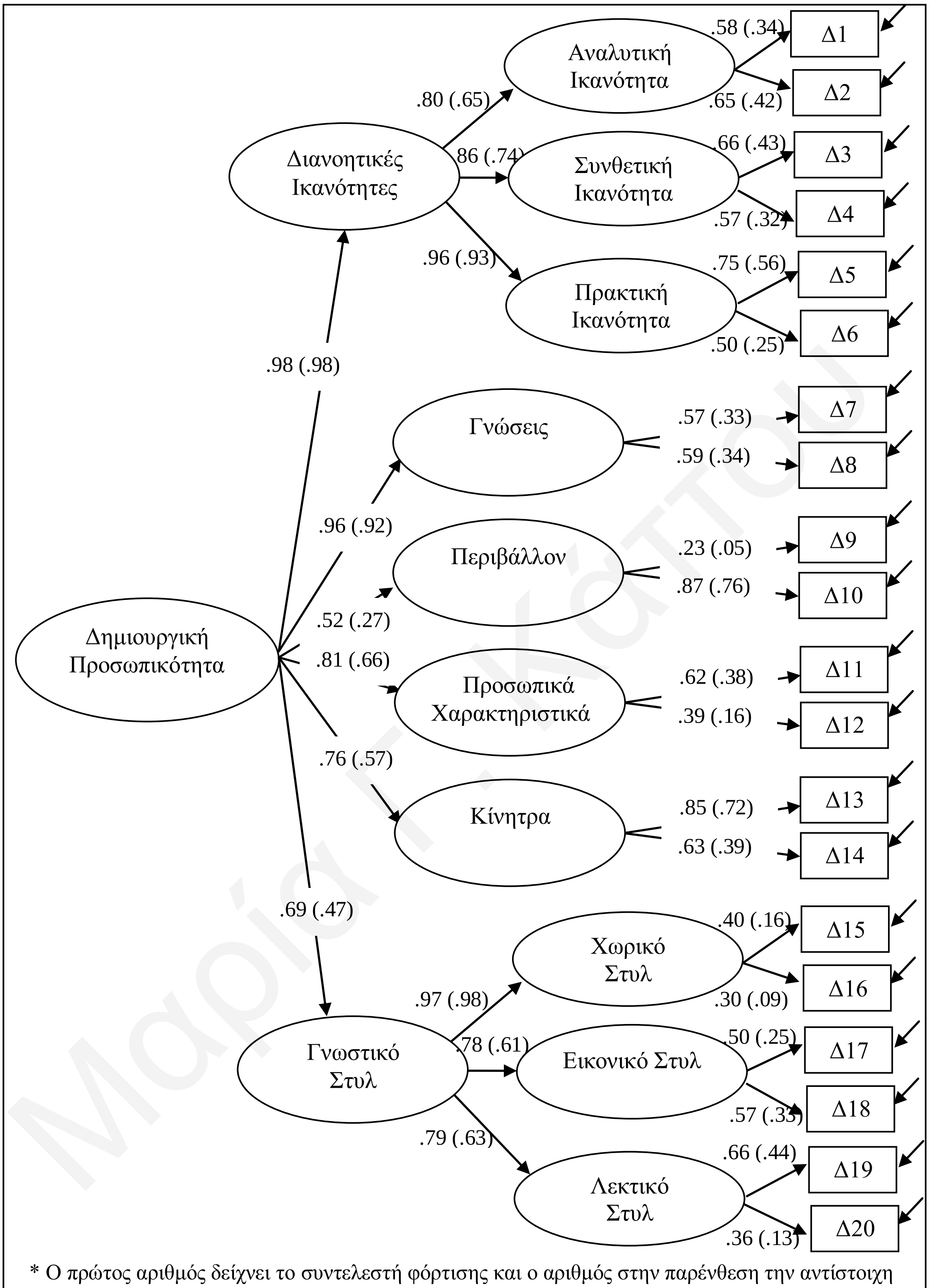
Διάγραμμα 3.1. Εγκυροποίηση Εργαλείου Μαθηματικής Δημιουργικότητας.

Εργαλείο Δημιουργικής Προσωπικότητας

Οι δηλώσεις που περιλήφθηκαν στο Εργαλείο Δημιουργικής Προσωπικότητας (α) αναπτύχθηκαν για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας, ώστε να προσδιορίσουν συγκεκριμένα χαρακτηριστικά προσωπικότητας των δημιουργικών μαθητών στα μαθηματικά, (β) μεταφράστηκαν από αντίστοιχα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν σε έρευνες στο πεδίο της μαθηματικής δημιουργικότητας ή (γ) μεταφράστηκαν από αντίστοιχα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν σε έρευνες στο πεδίο της γενικής δημιουργικότητας και προσαρμόστηκαν στο πεδίο των μαθηματικών.

Αρχικά, κρίθηκε σκόπιμος ο έλεγχος της φαινομενικής εγκυρότητας των δηλώσεων. Για αυτό το λόγο, ζητήθηκε από τρεις ερευνητές της μαθηματικής παιδείας και δύο εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης να διαβάσουν τις δηλώσεις και να τις αξιολογήσουν ως προς την καταλληλότητά τους να ερμηνεύσουν κάθε παράγοντα και ως προς τη σαφήνεια διατύπωσής τους. Έγιναν τροποποιήσεις στις δηλώσεις που προτάθηκαν από τουλάχιστον δύο αξιολογητές.

Λόγω του ότι το συγκεκριμένο εργαλείο έχει σχεδιαστεί με βάση τους έξι πυλώνες της Investment Theory, πραγματοποιήθηκε επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση, με στόχο να εξεταστεί η εγκυρότητα εννοιολογικής κατασκευής του εργαλείου (construct validity). Πιο συγκεκριμένα, ελέγχθηκε η εγκυρότητα ενός μοντέλου με βάση το οποίο οι παράγοντες «Διανοητικές ικανότητες», «Γνώσεις», «Γνωστικό στυλ», «Προσωπικότητα», «Κίνητρα» και «Περιβάλλον» συνθέτουν τη «Δημιουργική προσωπικότητα» (Διάγραμμα 3.2). Ο έλεγχος της εγκυρότητας γνωρίσματος του εργαλείου εξετάστηκε από την πιλοτική χορήγηση και επαναβεβαιώθηκε μετά την τελική χορήγηση του εργαλείου. Πιο συγκεκριμένα, τα αποτελέσματα της ανάλυσης κατά την πιλοτική εφαρμογή έδειξαν ότι η προσαρμογή του μοντέλου είναι ικανοποιητική (CFI=.901, χ^2=217.068, df=160, χ^2/df=1.357, RMSEA=.062), γεγονός που επιβεβαιώνει τη δομή του εργαλείου. Η επιβεβαίωση του μοντέλου και οι στατιστικά σημαντικοί συντελεστές φόρτισης δείχνουν ότι οι δηλώσεις αποτελούν κατάλληλους δείκτες μέτρησης των επί μέρους παραγόντων, επιβεβαιώνοντας την εγκυρότητα εννοιολογικής κατασκευής του εργαλείου. Επιπρόσθετα, ο δείκτης αξιοπιστίας του εργαλείου Cronbach alpha ήταν αρκετά υψηλός (α= .836) δίνοντας ισχυρές ενδείξεις για την αξιοπιστία του.



* Ο πρώτος αριθμός δείχνει το συντελεστή φόρτισης και ο αριθμός στην παρένθεση την αντίστοιχη ερμηνευόμενη διασπορά.

Διάγραμμα 3.2. Εγκυροποίηση Εργαλείου Δημιουργικής Προσωπικότητας.

Εργαλείο Γενικής Δημιουργικότητας

Το Εργαλείο Γενικής Δημιουργικότητας περιλαμβάνει δύο έργα από το TTCT. Σύμφωνα με το εγχειρίδιο χρήσης του TTCT, η εγκυρότητα του εργαλείου προκύπτει από την προβλεπτική ικανότητα του εργαλείου. Η διεξαγωγή μακροχρόνιων ερευνών με τη χρήση του εργαλείου έδειξε ότι τα αποτελέσματα στο TTCT συσχετίζονταν στατιστικά σημαντικά με τα μελλοντικά επιτεύγματα των ατόμων και την κοινωνική τους αναγνωρισιμότητα (Torrance, 2002). Επιπρόσθετα, σύμφωνα με τον Torrance (2002) η αξιοπιστία αξιολογητών (interrater reliability), που προκύπτει χρησιμοποιώντας το συντελεστή Cronbach alpha, κυμαίνεται μεταξύ .78 και .88. Αναφορικά με την αξιοπιστία του εργαλείου, η εκδοχή του εγχειριδίου για το εργαλείο που κυκλοφόρησε το 1990, αναφέρει ότι η αξιοπιστία αξιολογητών είναι ίση με .90, ενώ η εκδοχή του 1998 αναφέρει ότι κυμαίνεται μεταξύ .89 και .94. Σύμφωνα με τον Treffinger (1985), το TTCT θα πρέπει να θεωρείται ότι έχει επαρκή αξιοπιστία για να χρησιμοποιηθεί για ερευνητικούς σκοπούς, δεδομένου του βαθμού δυσκολίας της μέτρησης της δημιουργικής ικανότητας. Παρόμοια σκέψη μοιράζεται και ο Cropley (2000), ο οποίος αναφέρει ότι το TTCT έχει υψηλή προβλεπτική εγκυρότητα στην πάροδο του χρόνου.

Παρόλο που και τα δύο έργα που χρησιμοποιήθηκαν στο εργαλείο μέτρησης της γενικής δημιουργικότητας προέρχονται από το TTCT, εντούτοις εξετάστηκε η φαινομενική εγκυρότητα των έργων. Πιο συγκεκριμένα, ζητήθηκε από τρεις ερευνητές της μαθηματικής παιδείας και από δύο εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης να αξιολογήσουν τα έργα ως προς την καταλληλότητά τους για την επίτευξη του στόχου, ως προς την ορθότητα και την ακρίβεια της μετάφρασης από το πρωτότυπο εργαλείο και ως προς τη σαφήνεια διατύπωσης. Στα έργα που προτάθηκαν τροποποιήσεις από τουλάχιστον δύο αξιολογητές, έγιναν οι απαραίτητες αλλαγές, ώστε να αποδίδουν το νόημα των πρωτότυπων έργων. Ο έλεγχος της αξιοπιστίας Cronbach alpha έδωσε την τιμή α=.731, η οποία θεωρείται ικανοποιητική.

Εργαλείο Naglieri Nonverbal Ability Test (Level D και Level E)

Το Εργαλείο Naglieri Nonverbal Ability Test είναι ένα ευρέως αποδεκτό τεστ μέτρησης της νοημοσύνης και του μη λεκτικού συλλογισμού. Η εγκυρότητα του εργαλείου επιβεβαιώθηκε από τους Naglieri και Ford (2003) οι οποίοι έλεγξαν το εργαλείο σε διαφορετικές ομάδες μαθητών. Όσον αφορά την αξιοπιστία του NNAT, το εγχειρίδιο χρήσης του εργαλείου αναφέρει ότι ο συντελεστής Cronbach α κυμαίνεται από .82 μέχρι .87, ανάλογα με το επίπεδο-τάξη των μαθητών. Στην παρούσα εργασία το εργαλείο έχει εσωτερική αξιοπιστία α=.831.

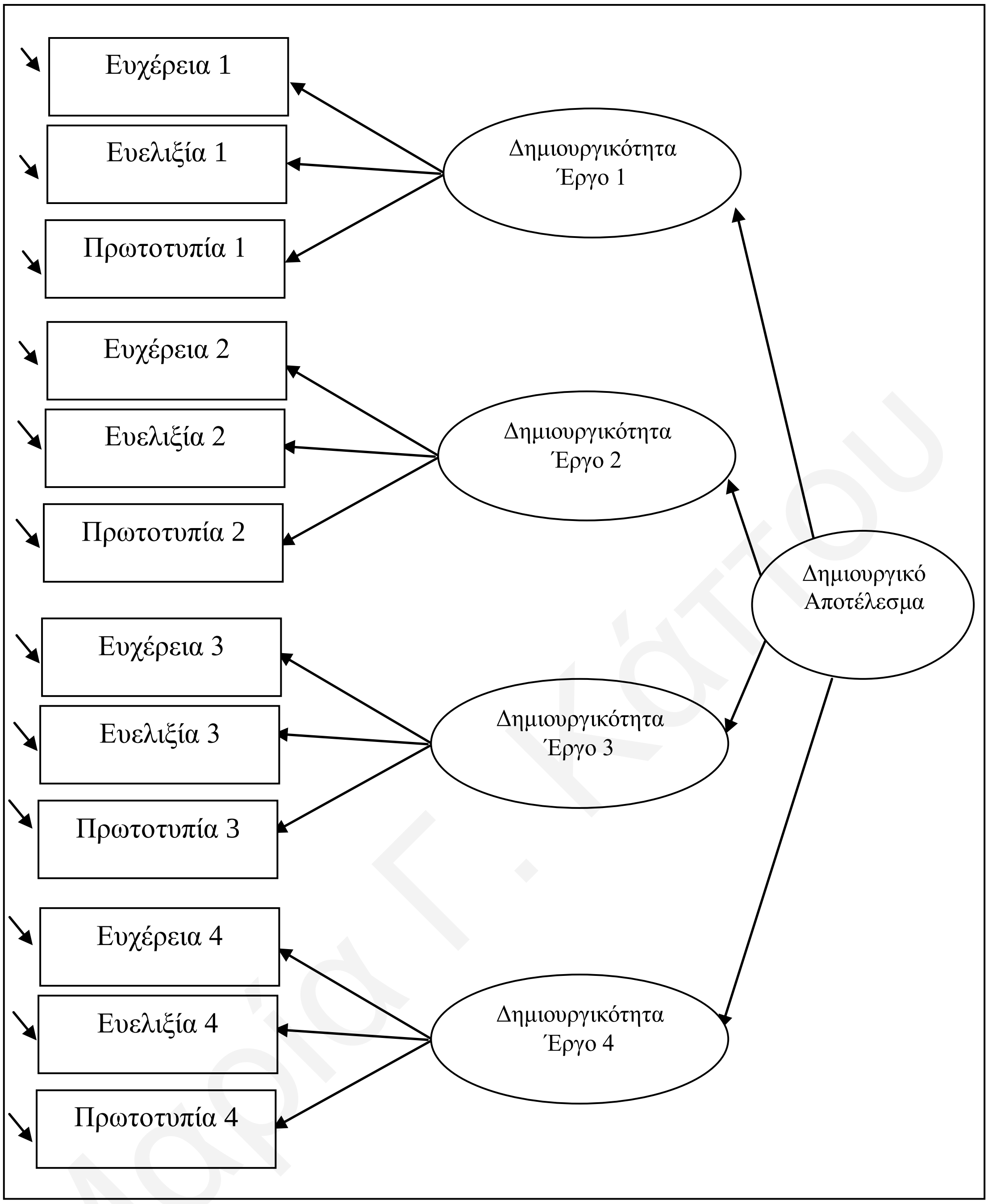
Η Παρούσα Εργασία και τα Προτεινόμενα Μοντέλα

Στόχος της παρούσας εργασίας ήταν η ανάπτυξη ενός μοντέλου που να περιγράφει τη δημιουργική ικανότητα μαθητών Δ’, Ε’ και Στ’ τάξης δημοτικού σχολείου στα μαθηματικά. Το θεωρητικό μοντέλο στο οποίο στηρίχθηκε η μεθοδολογία της παρούσας εργασίας ορίζει τέσσερις μεταβλητές που συνθέτουν τη δημιουργική ικανότητα: το αποτέλεσμα, το άτομο, τη διαδικασία και το περιβάλλον. Παρά το γεγονός ότι το μοντέλο που προτάθηκε από το Rhodes (1961) αναφέρεται στη γενική δημιουργικότητα, στο θεωρητικό μοντέλο που υιοθετεί η παρούσα εργασία οι τέσσερις παράγοντες είναι επικεντρωμένοι στο γνωστικό πεδίο των μαθηματικών. Ως εκ τούτου, η παρούσα εργασία θα στοχεύσει στην ανάπτυξη θεωρητικών μοντέλων για να εξηγήσει κάθε μια από τις τέσσερις μεταβλητές, καθώς επίσης και τις μεταξύ τους σχέσεις.

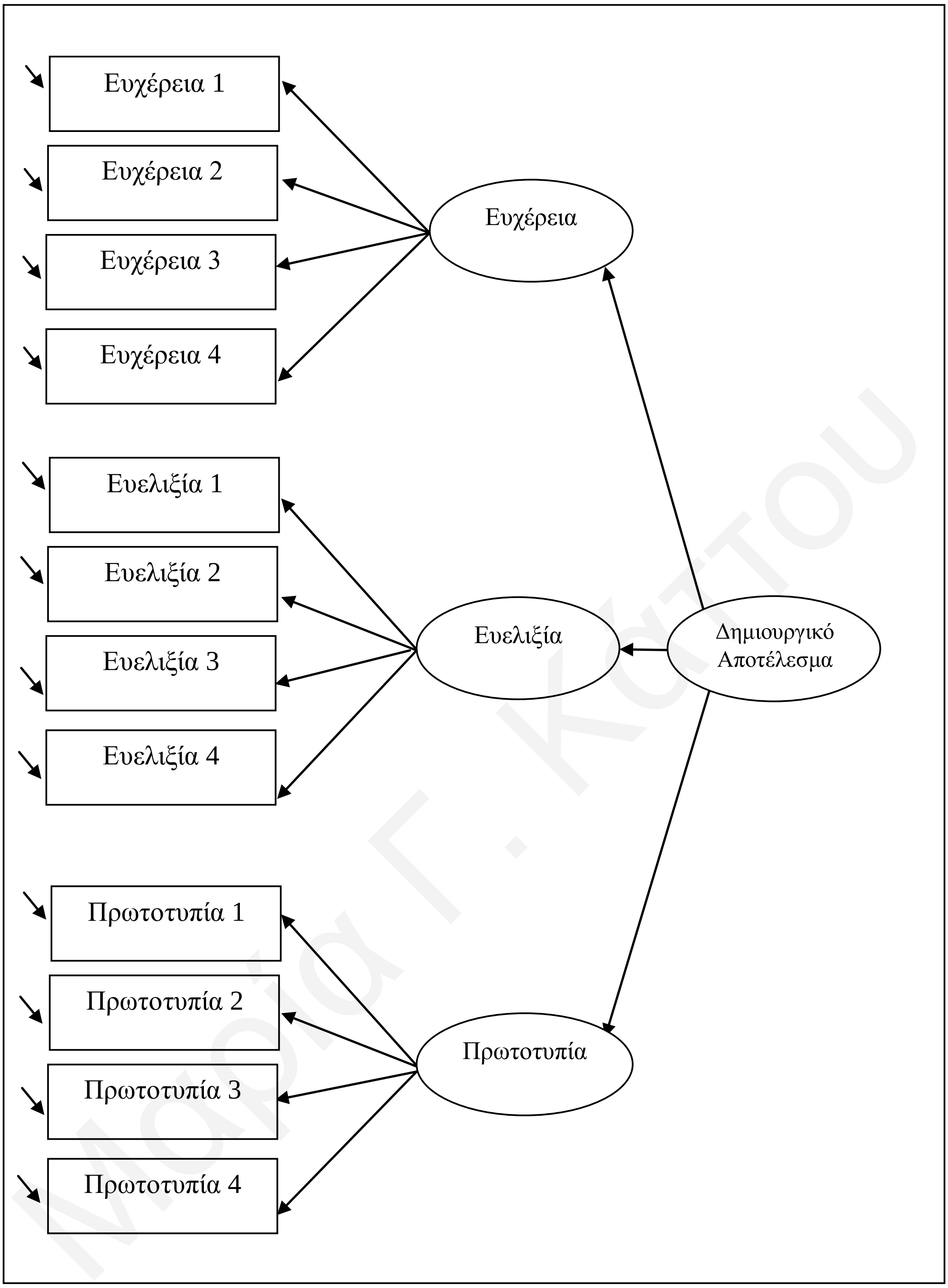
Στα Διαγράμματα 3.3, 3.4 και 3.5 παρουσιάζεται η δομή τριών εναλλακτικών μοντέλων που ορίζουν το «Δημιουργικό Αποτέλεσμα». Με βάση το πρώτο μοντέλο, το δημιουργικό αποτέλεσμα αποτελεί δεύτερης τάξης παράγοντα που σχηματίζεται από τις επιδόσεις των μαθητών στα τέσσερα έργα του Εργαλείου Μαθηματικής Δημιουργικότητας. Οι τέσσερις πρώτης τάξης παράγοντες σχηματίζονται από τις αντίστοιχες ικανότητες ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας σε καθένα από τα έργα.

Το δεύτερο μοντέλο ορίζει τη μαθηματική δημιουργικότητα ως παράγοντα δεύτερης τάξης, ο οποίος σχηματίζεται από τρεις παράγοντες πρώτης τάξης: Ευχέρεια, Ευελιξία και Πρωτοτυπία. Οι παράγοντες πρώτης τάξης σχηματίζονται από την αντίστοιχη επίδοση των μαθητών σε κάθε έργο, όπως παρουσιάζει το Διάγραμμα 3.4.

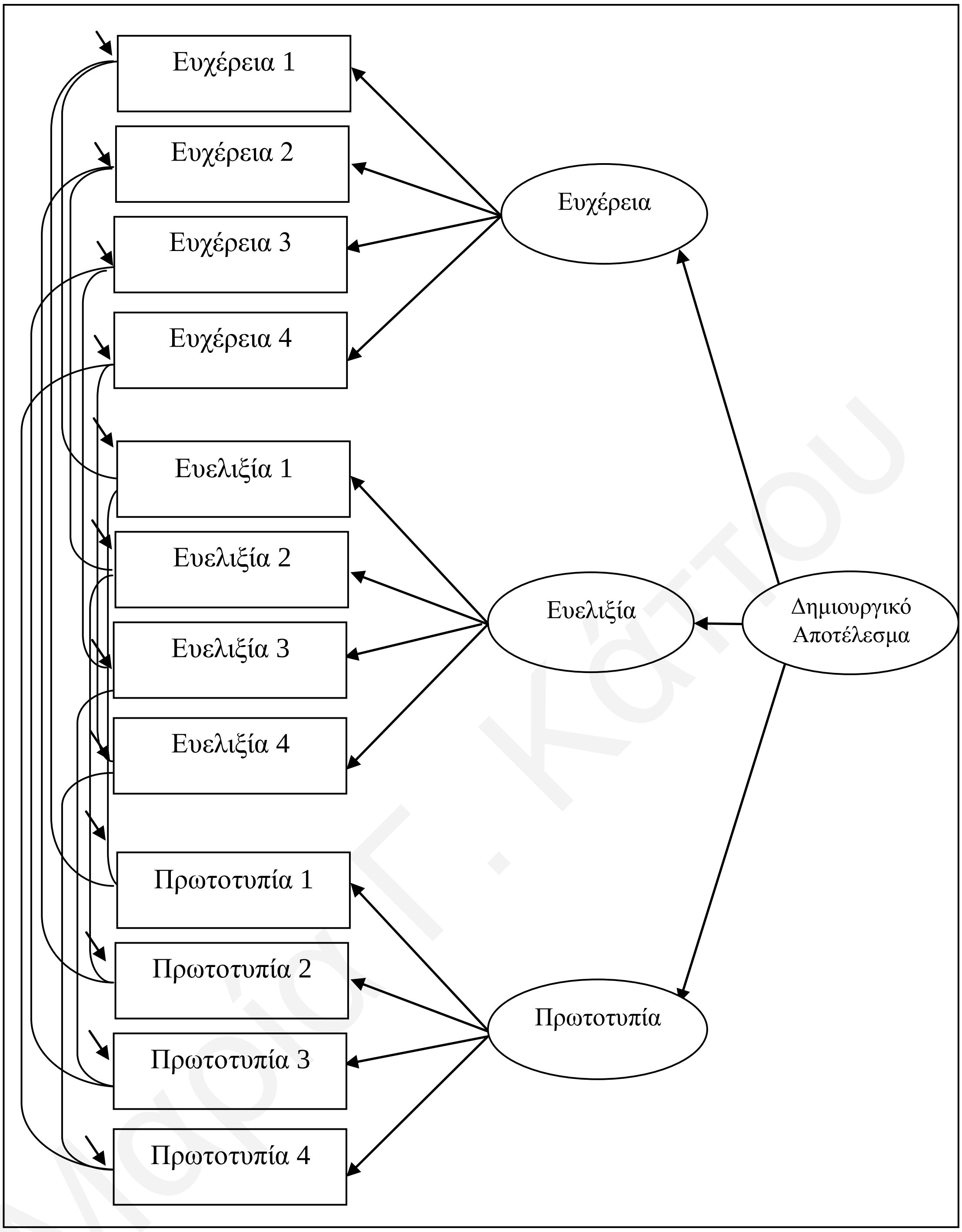
Το Διάγραμμα 3.5 παρουσιάζει το τρίτο από τα εναλλακτικά μοντέλα για το δημιουργικό αποτέλεσμα. Η δομή του μοντέλου αυτού σε σχέση με το μοντέλο 2 δεν διαφέρει ως προς τη δομή. Η διαφορά που υπάρχει, έγκειται στις συσχετίσεις που θεωρούνται ότι υπάρχουν μεταξύ των ικανοτήτων του ίδιου έργου.



Διάγραμμα 3.3. Προτεινόμενο Μοντέλο 1 για τη Δομή του Αποτελέσματος.

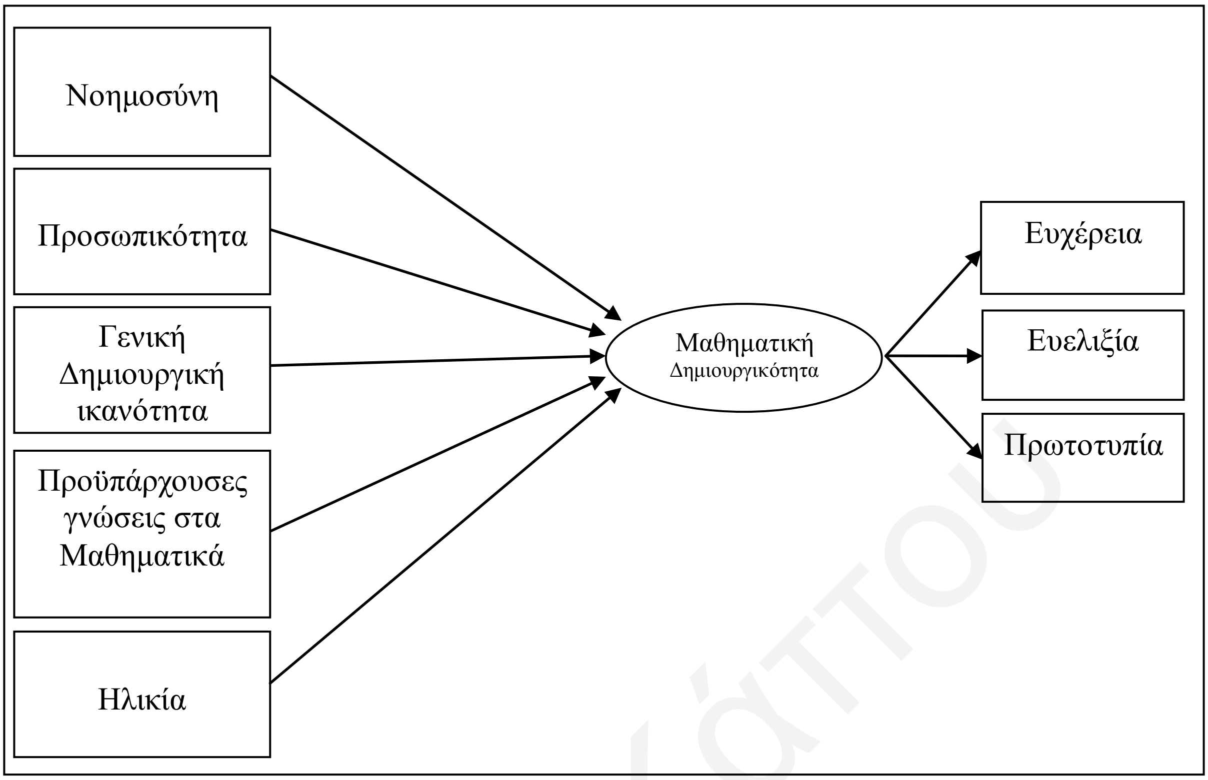


Διάγραμμα 3.4. Προτεινόμενο Μοντέλο 2 για τη Δομή του Αποτελέσματος.



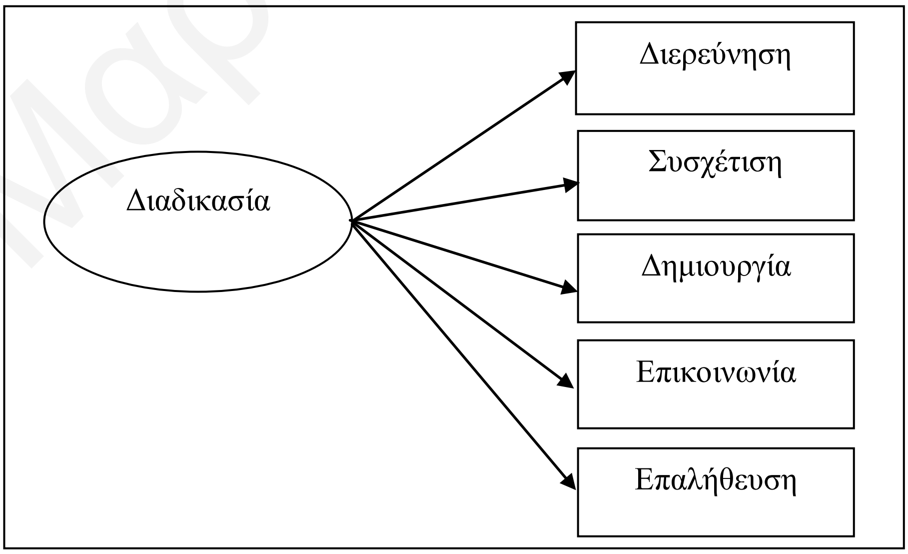
Διάγραμμα 3.5. Προτεινόμενο Μοντέλο 3 για τη Δομή του Αποτελέσματος.

Όσον αφορά στο προτεινόμενο μοντέλο για το «Άτομο», σχηματίζεται από πέντε παράγοντες: χαρακτηριστικά προσωπικότητας, νοημοσύνη, γενική δημιουργική ικανότητα, προϋπάρχουσες γνώσεις στα μαθηματικά και ηλικία, όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 3.6. Ταυτόχρονα, το μοντέλο αυτό παρουσιάζει τη σχέση μεταξύ του Ατόμου και του Αποτελέσματος, υποθέτοντας ότι η πρώτη έννοια μπορεί να ερμηνεύσει τη δεύτερη.



Διάγραμμα 3.6. Προτεινόμενο Μοντέλο για το Άτομο.

Το προτεινόμενο μοντέλο για τη «Διαδικασία» παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 3.7. Σύμφωνα με το συγκεκριμένο μοντέλο η «Διαδικασία» σχηματίζεται από τις υπο-διαδικασίες «Διερεύνηση», «Συσχέτιση», «Κατασκευή», «Επικοινωνία» και «Αξιολόγηση». Το συγκεκριμένο μοντέλο θα επιβεβαιωθεί ποιοτικά και όχι ποσοτικά.

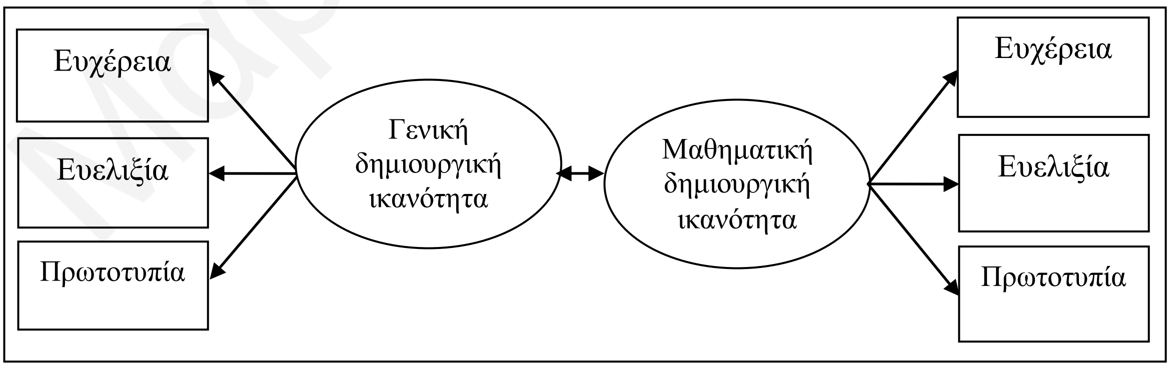


Διάγραμμα 3.7. Προτεινόμενο Μοντέλο για τη Δημιουργική Διαδικασία.

Όσον αφορά στο «Περιβάλλον», θα μελετηθεί η επίδραση του παρεμβατικού προγράμματος στη δημιουργική ικανότητα των μαθητών. Λόγω του ότι ο αριθμός των συμμετεχόντων στη συγκεκριμένη φάση είναι μικρός, δεν θα γίνει επιβεβαίωση οποιουδήποτε θεωρητικού μοντέλου.

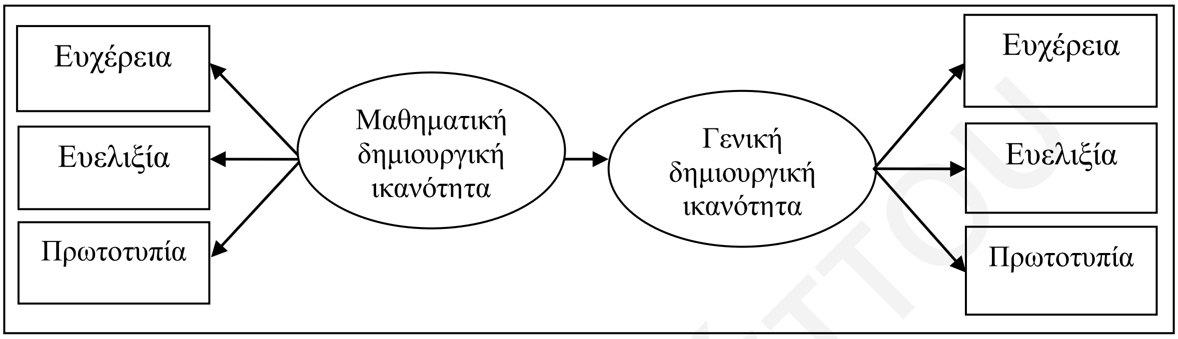
Διευκρινίζεται ότι οι παράγοντες που περιγράφονται στα πιο πάνω μοντέλα δεν αναφέρονται στη γενική δημιουργική ικανότητα, αλλά εστιάζονται στη δημιουργική ικανότητα στα μαθηματικά. Για παράδειγμα, ο παράγοντας «Άτομο» δεν αναφέρεται γενικά στη δημιουργική προσωπικότητα, αλλά στη δημιουργική προσωπικότητα στα μαθηματικά. Αντίστοιχα, οι παράγοντες πρώτης τάξης που συνιστούν τον παράγοντα δεύτερης τάξης «Διαδικασία» δεν αναφέρονται στη διαδικασία που ακολουθεί το άτομο για να καταλήξει σε δημιουργικό αποτέλεσμα, αλλά αναφέρεται στη μαθηματική διαδικασία που ακολουθεί το άτομο καθώς ασχολείται με προβληματικές καταστάσεις στα μαθηματικά. Όμοια, το «Αποτέλεσμα» στο οποίο αναφέρεται το θεωρητικό μοντέλο είναι αποδεκτό και αξιολογείται με βάση μαθηματικά κριτήρια. Τέλος, ο παράγοντας «Περιβάλλον» περικλείει τις εκπαιδευτικές πρακτικές που ενισχύουν τη μάθηση στα μαθηματικά με δημιουργικό τρόπο.

Τέλος, στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας θα μελετηθεί κατά πόσο η δημιουργική ικανότητα στα μαθηματικά αποτελεί μια γενική ή ειδική ικανότητα. Ως εκ τούτου, θα γίνει σύγκριση μεταξύ τριών εναλλακτικών μοντέλων. Το πρώτο μοντέλο παρουσιάζει τη συσχέτιση μεταξύ του Αποτελέσματος της μαθηματικής δημιουργικότητας και της γενικής δημιουργικής ικανότητας (δείτε Διάγραμμα 3.8).

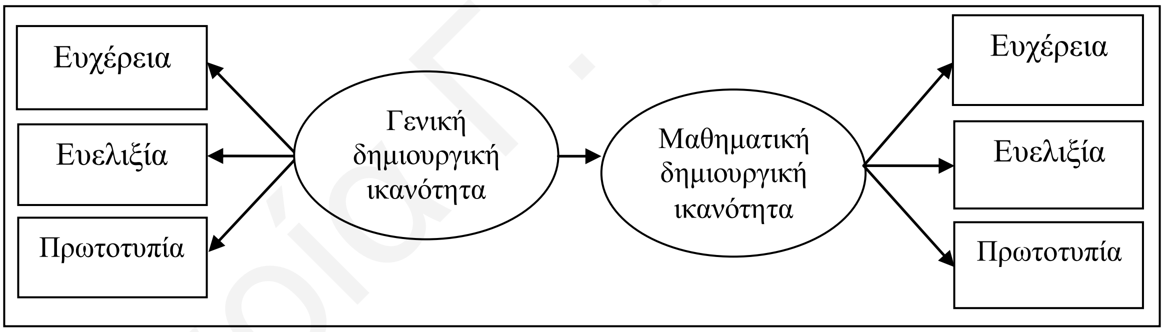


Διάγραμμα 3.8. Προτεινόμενο Μοντέλο για τη Συσχέτιση μεταξύ Μαθηματικής Δημιουργικής Ικανότητας και Γενικής Δημιουργικής Ικανότητας.

Τα άλλα δύο μοντέλα διερευνούν αν το ένα είδος δημιουργικής ικανότητας έχει τη δυνατότητα ερμηνείας στο άλλο. Ενδεικτικά το Διάγραμμα 3.9 παρουσιάζει ένα μοντέλο στο οποίο η μαθηματική δημιουργική ικανότητα μπορεί να ερμηνεύσει τη γενική δημιουργική ικανότητα, ενώ το Διάγραμμα 3.10 παρουσιάζει την αντίθετη σχέση, αν δηλαδή η γενική δημιουργική ικανότητα μπορεί να ερμηνεύσει τη μαθηματική δημιουργική ικανότητα.

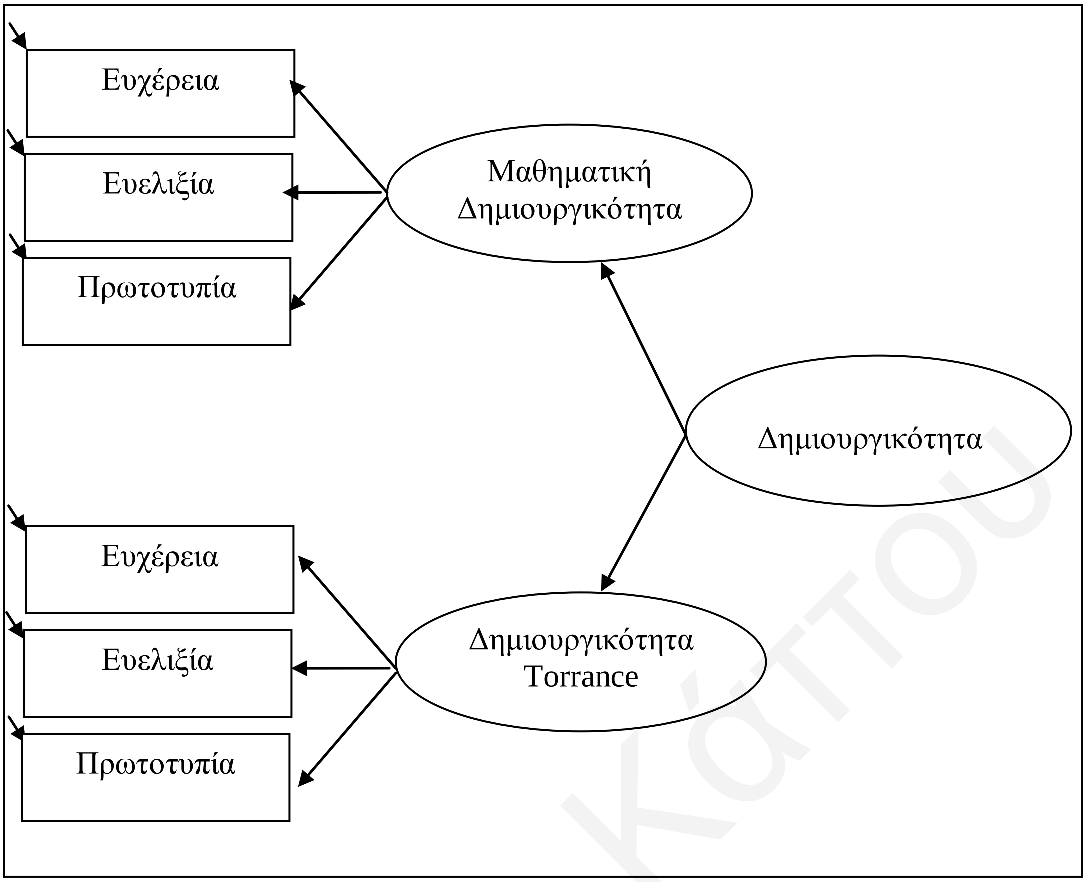


Διάγραμμα 3.9. Προτεινόμενο Μοντέλο για τη Δυνατότητα Ερμηνείας της Γενικής Δημιουργικής Ικανότητας από τη Μαθηματική Δημιουργική Ικανότητα.



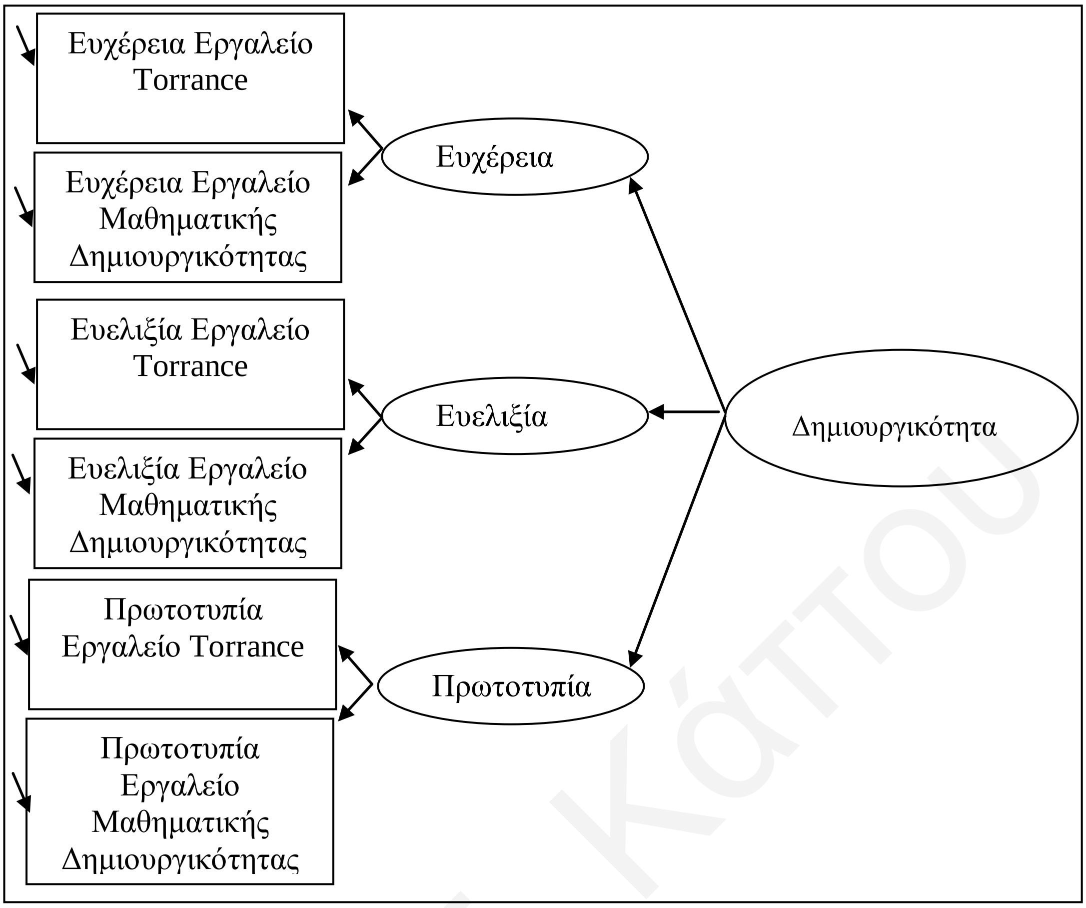
Διάγραμμα 3.10. Προτεινόμενο μοντέλο για τη Δυνατότητα Ερμηνείας της Μαθηματικής Δημιουργικής Ικανότητας από τη Γενική Δημιουργική Ικανότητα.

Στην περίπτωση που τα τρία μοντέλα είναι ισοβαρή θα γίνει σύγκριση μεταξύ των μοντέλων που παρουσιάζονται στα Διαγράμματα 3.11 και 3.12. Το μοντέλο στο Διάγραμμα 3.11 ορίζει τη Δημιουργικότητα ως ένα δεύτερης τάξης παράγοντα που σχηματίζεται από δύο πρώτης τάξης παράγοντες. Οι παράγοντες αυτοί αποτελούν ειδικές μορφές της δημιουργικής ικανότητας σε συγκεκριμένους τομείς, όπως μετρήθηκαν με τα δύο εργαλεία δημιουργικής ικανότητας.



Διάγραμμα 3.11. Προτεινόμενο Μοντέλο για τη Δημιουργικότητα ως Ειδική Ικανότητα.

Το μοντέλο που ορίζει τη δημιουργικότητα ως γενική ικανότητα παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 3.12. Η δημιουργικότητα ορίζεται ως μια ανώτερη δομή η οποία αποτελείται από τις ικανότητες ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας. Οι ικανότητες ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας αποτελούν άδηλους παράγοντες πρώτης τάξης που σχηματίζονται από τις αντίστοιχες επιδόσεις των μαθητών στα έργα του Εργαλείου Μαθηματικής Δημιουργικότητας και στα έργα του Εργαλείου Γενικής Δημιουργικότητας.



Διάγραμμα 3.12. Προτεινόμενο μοντέλο για τη Δημιουργικότητα ως Γενική Ικανότητα.

Διαδικασία

Η διεξαγωγή της έρευνας πραγματοποιήθηκε σε επτά φάσεις. Η πρώτη φάση περιελάμβανε τη βιβλιογραφική ανασκόπηση, η οποία κατεύθυνε το σχεδιασμό του θεωρητικού μοντέλου που περιγράφει τη μαθηματική δημιουργικότητα και την ανάπτυξη των αντίστοιχων εργαλείων μέτρησης. Κατά τη δεύτερη φάση έγινε η προπιλοτική και η πιλοτική χορήγηση των εργαλείων μέτρησης, ενώ κατά την τρίτη φάση τα δεδομένα που συλλέχθηκαν από τις δύο αυτές χορηγήσεις διαμόρφωσαν την τελική μορφή των εργαλείων. Η χορήγηση των εργαλείων στα υποκείμενα, για τη συλλογή των ποσοτικών δεδομένων, έγινε κατά την τέταρτη φάση της έρευνας. Στόχος της πέμπτης φάσης ήταν ο σχεδιασμός και η διεξαγωγή των ημι-δομημένων συνεντεύξεων σε ομάδα μαθητών. Η έκτη φάση περιελάμβανε το σχεδιασμό και τη διεξαγωγή του παρεμβατικού προγράμματος, για ενίσχυση της δημιουργικής ικανότητας των μαθητών. Τέλος, στην έβδομη φάση έγινε η ποσοτική και η ποιοτική ανάλυση των δεδομένων και η εξαγωγή συμπερασμάτων.

Ειδικότερα, η πρώτη φάση της έρευνας περιελάμβανε τις πιο κάτω δραστηριότητες:

- Έρευνα και μελέτη της σχετικής βιβλιογραφίας, μέσα από θεωρητικές πηγές ή ερευνητικά αποτελέσματα που περιστρέφονται γύρω από τη γενική και τη μαθηματική δημιουργικότητα.
- Διαμόρφωση του θεωρητικού μοντέλου που περιγράφει τη μαθηματική δημιουργικότητα.
- Ανάπτυξη των εργαλείων που απαιτούνται για τη συλλογή δεδομένων που θα οδηγούν στην επιβεβαίωση ή στην τροποποίηση του θεωρητικού μοντέλου. Για την ανάπτυξη των εργαλείων, πέρα από τη μελέτη προηγούμενων ερευνητικών προσπαθειών, έγινε ανασκόπηση υφιστάμενων εργαλείων για τη νοημοσύνη, την προσωπικότητα και τη γενική δημιουργικότητα, από τον τομέα της ψυχολογίας. Ακολούθως, έγινε επιλογή του κατάλληλου εργαλείου ανάμεσα από άλλα αντίστοιχα εργαλεία (π.χ. νοημοσύνη) ή επιλογή έργων από υφιστάμενα εργαλεία (π.χ. γενική δημιουργικότητα). Ταυτόχρονα, αναπτύχθηκαν εργαλεία (π.χ. μαθηματική δημιουργικότητα, προσωπικότητα) που εξυπηρετούσαν τους σκοπούς της εργασίας.

Η δεύτερη φάση της έρευνας περιελάμβανε τις πιο κάτω δραστηριότητες:

- Προπιλοτική χορήγηση των εργαλείων μέτρησης σε ένα τμήμα Δ’, Ε’ και Στ’ τάξης δημοτικού σχολείου, για να εξεταστεί κατά πόσο: (α) τα έργα και οι οδηγίες των εργαλείων ήταν κατανοητά στους μαθητές, (β) τα έργα δημιουργούσαν συγκεκριμένες εννοιολογικές δυσκολίες στους μαθητές κατά την επίλυσή τους και (γ) ο εκτιμώμενος χρόνος για την ολοκλήρωση των εργαλείων ήταν ικανοποιητικός. Με βάση αυτά τα αποτελέσματα, έγιναν οι απαραίτητες λεκτικές διορθώσεις στα έργα στα οποία οι μαθητές αντιμετώπισαν δυσκολία ή αφαιρέθηκαν τα έργα που ήταν χρονοβόρα ή δυσνόητα.
- Πιλοτική χορήγηση των εργαλείων μέτρησης σε 164 μαθητές Δ’, Ε’ και Στ’ τάξης δημοτικού σχολείου. Η πιλοτική χορήγηση στόχευε στον έλεγχο της εγκυρότητας και της αξιοπιστίας των εργαλείων που χρησιμοποιήθηκαν, καθώς και στην εξέταση του δείκτη διάκρισης και δυσκολίας των έργων.

Η τρίτη φάση της έρευνας περιελάμβανε τις πιο κάτω δραστηριότητες:

- Ανάλυση των αποτελεσμάτων της πιλοτικής και της προπιλοτικής φάσης.
- Αλλαγές στα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν. Πιο συγκεκριμένα:

  (α) Στο Εργαλείο Μαθηματικής Δημιουργικότητας αντικαταστάθηκε το τέταρτο έργο, το οποίο αφορούσε διατύπωση προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα, το έργο που χρησιμοποιήθηκε στην προπιλοτική φάση αξιοποιούσε δεδομένα από μια γραφική παράσταση. Εντούτοις, διαφάνηκε ότι οι μαθητές δυσκολεύονταν στην ερμηνεία της γραφικής παράστασης, για να αξιοποιήσουν πληροφορίες και να διατυπώσουν τα δικά τους προβλήματα. Έτσι, η γραφική παράσταση αντικαταστάθηκε από πίνακα τιμών. Η πιλοτική φάση έδειξε ότι οι μαθητές ήταν πιο εξοικειωμένοι με την ερμηνεία του πίνακα τιμών, γεγονός που τους επέτρεψε να διατυπώσουν προβλήματα. Επίσης, στο έργο 1, που αναφερόταν στη δημιουργία ομάδων αριθμών προστέθηκαν αριθμοί, ώστε να υπάρχει δυνατότητα εμπλοκής περισσότερων μαθηματικών ιδεών. Ταυτόχρονα, έγιναν λεκτικές διορθώσεις στα υπόλοιπα έργα, ώστε να είναι πιο κατανοητά στους μαθητές.

  (β) Στο Εργαλείο Μαθηματικής Ικανότητας αφαιρέθηκαν κάποια υποερωτήματα των έργων, ώστε να μειωθεί ο χρόνος χορήγησης του εργαλείου. Ειδικότερα, αφαιρέθηκαν δύο πράξεις από το έργο 1 (πολλαπλασιασμός και διαίρεση κλασμάτων) και ένα υποερώτημα από το έργο 2 (μοτίβα). Με αυτές τις προσαρμογές το εργαλείο μπορούσε να συμπληρωθεί σε 20 λεπτά, που ήταν και το ζητούμενο. Επιπρόσθετα, αντικαταστάθηκαν έργα των οποίων το ποσοστό επιτυχίας ήταν πολύ ψηλό, με πιο δύσκολα αλλά όμοιου τύπου έργα.

  (γ) Στο Εργαλείο Δημιουργικής Προσωπικότητας έγιναν λεκτικές διορθώσεις στη διατύπωση των δηλώσεων, μετά την ολοκλήρωση της προπιλοτικής φάσης. Μετά την πιλοτική εφαρμογή και τον έλεγχο εγκυρότητας γνωρίσματος του εργαλείου, ακολούθησαν πιο ουσιαστικές αλλαγές. Πιο συγκεκριμένα, αφαιρέθηκαν δηλώσεις οι οποίες δεν φόρτιζαν στατιστικά σημαντικά στον παράγοντα για τον οποίο διατυπώθηκαν. Ταυτόχρονα, δηλώσεις οι οποίες φαινόταν ότι φόρτιζαν σε περισσότερους από ένα παράγοντα, αντικαταστάθηκαν από άλλες δηλώσεις, στις οποίες φαινόταν ξεκάθαρα η σύνδεσή τους με τον υπό διερεύνηση παράγοντα.

(δ) Στο Εργαλείο Γενικής Δημιουργικότητας μειώθηκε ο αρχικός αριθμός των έργων. Ενώ η εκδοχή του εργαλείου που χρησιμοποιήθηκε στην προπιλοτική φάση περιελάμβανε τέσσερα έργα (δύο λεκτικά και δύο εικονικά), η τελική εκδοχή του εργαλείου περιλαμβάνει μόνο δύο έργα (ένα λεκτικό και ένα εικονικό). Από την προπιλοτική φάση διαφάνηκε ότι η συμπλήρωση των έργων ήταν χρονοβόρα και ως εκ τούτου ο αριθμός των έργων περιόριζε το χρόνο που οι μαθητές είχαν στη διάθεσή τους για να σκεφτούν πρωτότυπες ιδέες.

(ε) Δεν έγινε οποιαδήποτε αλλαγή στο Εργαλείο Naglieri Nonverbal Ability Test, λόγω του ότι είναι ένα σταθμισμένο εργαλείο εγνωσμένου κύρους.

Η τέταρτη φάση της έρευνας περιελάμβανε τις πιο κάτω δραστηριότητες:

- Χορήγηση των εργαλείων μέτρησης σε 476 μαθητές Δ', Ε' και Στ' τάξης δημοτικού σχολείου. Η χορήγηση των εργαλείων διενεργήθηκε από την ερευνήτρια σε συνεργασία με τον/την εκπαιδευτικό του κάθε τμήματος. Την πρώτη περίοδο της χορήγησης επεξηγήθηκαν οι στόχοι της έρευνας και οι απαιτήσεις των εργαλείων. Έπειτα, οι μαθητές εργάστηκαν στο Εργαλείο Μαθηματικής Δημιουργικότητας (35 λεπτά). Κατά τη δεύτερη περίοδο, χορηγήθηκε στους μαθητές το Εργαλείο Μαθηματικής Ικανότητας για 20 λεπτά και έπειτα το Εργαλείο Γενικής Δημιουργικότητας για 15 λεπτά. Την τρίτη περίοδο οι μαθητές κλήθηκαν να συμπληρώσουν το εργαλείο NNAT (30 λεπτά) και το Εργαλείο Δημιουργικής Προσωπικότητας (10 λεπτά).

Η πέμπτη φάση της έρευνας περιελάμβανε τις πιο κάτω δραστηριότητες:

- Σχεδιασμός ημι-δομημένων συνεντεύξεων. Σκοπός των συνεντεύξεων ήταν να διαφανεί η γνωστική διαδικασία που ακολουθούν οι μαθητές, καθώς λύνουν ανοικτά έργα καθώς και η ανάπτυξη του συλλογισμού τους.
- Επιλογή των υποκειμένων για πραγματοποίηση των συνεντεύξεων. Με βάση τα αποτελέσματα της ποσοτικής ανάλυσης επιλέγηκαν οι μαθητές που θα λάμβαναν μέρος στις συνεντεύξεις, με βάση την επίδοσή τους στο εργαλείο μαθηματικής δημιουργικότητας. Πιο συγκεκριμένα, 182 μαθητές συμμετείχαν στις συνεντεύξεις, οι οποίοι κατανέμονται ως ακολούθως: 36 μαθητές (19.78%) είχαν επιδείξει υψηλό βαθμό μαθηματικής δημιουργικότητας, 74 μαθητές (40.66%) είχαν επιδείξει καλό βαθμό μαθηματικής δημιουργικότητας, 51 μαθητές (28.02%) είχαν επιδείξει μέτριο βαθμό μαθηματικής δημιουργικότητας και 21 μαθητές (11.54%) είχαν επιδείξει χαμηλό βαθμό μαθηματικής δημιουργικότητας. Από αυτούς τους μαθητές, οι 53 μαθητές (29.12%)

φοιτούσαν στη Δ’ τάξη, οι 81 μαθητές (44.51%) φοιτούσαν στην Ε’ τάξη και οι 48 μαθητές (26.37%) φοιτούσαν στη Στ’ τάξη.

- Διεξαγωγή συνεντεύξεων. Οι συνεντεύξεις ήταν ατομικές και διεξήχθηκαν από την ερευνήτρια. Στόχος των συνεντεύξεων ήταν η διερεύνηση της διαδικασίας που ακολουθούν οι μαθητές διαφορετικού επιπέδου δημιουργικής ικανότητας στα μαθηματικά, καθώς επιλύουν προβλήματα ανοιχτού τύπου. Μέσα από τις ερωτήσεις αναμενόταν ότι θα διαφανεί ο τρόπος σκέψης των μαθητών καθώς επεξεργάζονται τα δεδομένα του προβλήματος και οι ενέργειες που εκτελούν μέχρι την εμφάνιση της «δημιουργικής» λύσης. Για την πραγματοποίηση των συνεντεύξεων υιοθετήθηκε η μέθοδος της ημιδομημένης συνέντευξης. Ακολουθεί λεπτομερής περιγραφή του σχεδιασμού και της διεξαγωγής των συνεντεύξεων.

Η έκτη φάση της έρευνας περιελάμβανε τις πιο κάτω δραστηριότητες:

- Σχεδιασμός μαθημάτων που θα στοχεύουν στην ενίσχυση της δημιουργικής ικανότητας των μαθητών στα μαθηματικά.
- Χορήγηση του Εργαλείου Μαθηματικής Δημιουργικότητας στους μαθητές της Πειραματικής ομάδας και της Ομάδας Ελέγχου. Στόχος της αρχικής χορήγησης ήταν να αξιολογηθεί η δημιουργική ικανότητα των μαθητών πριν από την έναρξη των μαθημάτων, ώστε να μελετηθεί η διαφοροποίησή της με το πέρας των μαθημάτων.
- Διεξαγωγή 12 δίωρων μαθημάτων στην Πειραματική ομάδα. Τα μαθήματα διεξάγονταν μια φορά την εβδομάδα στο εργαστήριο των Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κύπρου, σε απογευματινές ώρες. Στα μαθήματα έλαβαν μέρος 24 μαθητές.
- Χορήγηση του Εργαλείου Μαθηματικής Δημιουργικότητας στους μαθητές της Πειραματικής ομάδας και της Ομάδας Ελέγχου. Στόχος της δεύτερης χορήγησης ήταν να ελεγχθεί η καταλληλότητα και η χρησιμότητα του παρεμβατικού προγράμματος, στην ανάπτυξη της δημιουργικής ικανότητας των μαθητών της Πειραματικής ομάδας στα μαθηματικά και να συγκριθεί με την αντίστοιχη επίδοση των μαθητών της Ομάδας Ελέγχου.
- Χορήγηση του Εργαλείου Μαθηματικής Δημιουργικότητας ένα μήνα μετά την ολοκλήρωση της σειράς των μαθημάτων στους μαθητές της Πειραματικής Ομάδας. Η τρίτη χορήγηση του εργαλείου αποσκοπούσε στη διερεύνηση της μαθηματικής δημιουργικότητας μετά τη διδακτική παρέμβαση.

- Χορήγηση Εργαλείου Αντιλήψεων για τη Δημιουργικότητα και τα Μαθηματικά στην Πειραματική ομάδα, πριν από την έναρξη και μετά την ολοκλήρωση του παρεμβατικού προγράμματος.

Τέλος, η έβδομη φάση της έρευνας περιελάμβανε τις πιο κάτω δραστηριότητες:

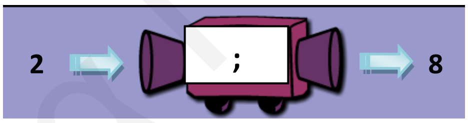
- Διόρθωση των εργαλείων και καταχώρηση των δεδομένων. Για το Εργαλείο Μαθηματικής Δημιουργικότητας αναπτύχθηκε κατάλληλη κλείδα διόρθωσης (δείτε Παράρτημα 5) με τις κατηγορίες απαντήσεων.
- Καταχώρηση των δεδομένων στο στατιστικό πακέτο SPSS και διεξαγωγή ποσοτικών αναλύσεων με τα στατιστικά πακέτα SPSS και MPLUS.
- Απομαγνητοφώνηση συνεντεύξεων και διεξαγωγή ποιοτικών αναλύσεων.
- Καταγραφή αποτελεσμάτων και εξαγωγή συμπερασμάτων.

Σχεδιασμός Συνεντεύξεων

Η διεξαγωγή συνεντεύξεων στόχευε να διερευνήσει τη διαδικασία που ακολουθείται από τους μαθητές καθώς λύνουν μαθηματικά έργα, για να καταλήξουν σε δημιουργικές απαντήσεις. Ο σχεδιασμός των συνεντεύξεων στηρίχθηκε στο θεωρητικό μοντέλο που προτάθηκε από τη Sheffield (2009) και παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 2.5. Τα πέντε στάδια του μοντέλου είναι η διερεύνηση, η συσχέτιση, η κατασκευή, η επικοινωνία και η αξιολόγηση. Το μοντέλο δεν είναι γραμμικό και δεν υπάρχει ένα σταθερό σημείο έναρξης της διαδικασίας. Για αυτό το σκοπό, στις ερωτήσεις της συνέντευξης περιλήφθηκαν ερωτήματα που εξέταζαν τις διαδικασίες που εφάρμοζαν οι μαθητές κατά: (α) τη διερεύνηση της προβληματικής κατάστασης, (β) τη συσχέτιση μαθηματικών εννοιών και προτεινόμενων λύσεων, (γ) την εμφάνιση/ κατασκευή ιδεών/ λύσεων, (δ) την παρουσίαση και επικοινωνία της λύσης και (ε) την αξιολόγηση της ορθότητας και της εφαρμοσιμότητας των ιδεών.

Η επιλογή των υποκειμένων που έλαβαν μέρος στις συνεντεύξεις έγινε με βάση το βαθμό δημιουργικής ικανότητας στα μαθηματικά, που επέδειξαν στο αντίστοιχο εργαλείο. Πιο συγκεκριμένα, 182 μαθητές συμμετείχαν στις συνεντεύξεις, οι οποίοι κατανέμονται ως ακολούθως σε σχέση με τη μαθηματική τους ικανότητα: 36 μαθητές είχαν επιδείξει υψηλό βαθμό μαθηματικής δημιουργικότητας, 74 μαθητές είχαν επιδείξει καλό βαθμό μαθηματικής δημιουργικότητας, 51 μαθητές είχαν επιδείξει μέτριο βαθμό μαθηματικής δημιουργικότητας και 21 μαθητές είχαν επιδείξει χαμηλό βαθμό μαθηματικής δημιουργικότητας. Από αυτούς τους μαθητές, οι 53 μαθητές φοιτούσαν στη Δ’ τάξη, οι 81 μαθητές φοιτούσαν στην Ε’ τάξη και οι 48 μαθητές φοιτούσαν στη Στ’ τάξη. Οι συνεντεύξεις έγιναν ατομικά σε χώρο όπου τίποτα δεν μπορούσε να αποσπάσει την προσοχή των μαθητών και διήρκησαν 20-30 λεπτά. Αρχικά, οι μαθητές κλήθηκαν να μελετήσουν ένα ανοικτού τύπου μαθηματικό έργο (Διάγραμμα 3.13) και να δώσουν όσες πιο πολλές, διαφορετικές και πρωτότυπες απαντήσεις μπορούσαν. Οι μαθητές είχαν όσο χρόνο χρειάζονταν, για να σκεφτούν το μαθηματικό έργο και να προσπαθήσουν να το λύσουν. Καθώς οι μαθητές έλυναν το έργο, καλούνταν να εξηγήσουν τη σκέψη τους και τις προτεινόμενες λύσεις τους. Σύμφωνα με τους Madjar και Shalley (2008), διακόπτοντας το λύτη σε τακτά χρονικά διαστήματα δημιουργείται το αίσθημα της «έκτακτης ανάγκης» ή της «πίεσης χρόνου» που σύμφωνα με τη θεωρία ενεργοποίησης (Gardner & Cummings, 1988) ενεργεί ως έναυσμα για την παραγωγή δημιουργικών ιδεών. Αντιθέτως, αν αφήσεις το άτομο να εργαστεί για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα υπάρχει πιθανότητα να επιβραδύνει τις διαδικασίες παραγωγής δημιουργικών ιδεών (Madjar & Shalley, 2008).

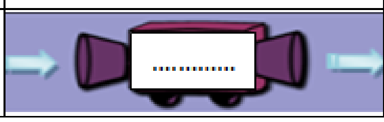
Μια αριθμομηχανή έχει την ιδιότητα να μετατρέπει ένα αριθμό σε κάποιο άλλο αριθμό, ακολουθώντας πάντα την ίδια διαδικασία/πράξεις. Για παράδειγμα, η μηχανή μετέτρεψε τον αριθμό 2, στον αριθμό 8.



Εσύ μπορείς να βάλεις στην αριθμομηχανή και άλλους αριθμούς, κάνοντας πάντα την ίδια διαδικασία/πράξεις, όπως στο πιο πάνω παράδειγμα.

Να συμπληρώσεις τον πίνακα.
(α) Στην πρώτη στήλη να γράψεις κάποιο αριθμό και στη δεύτερη στήλη να γράψεις το αποτέλεσμα.
(β) Ενδιάμεσα να γράψεις τη διαδικασία/πράξη που γίνεται (μπορείς να χρησιμοποιήσεις περισσότερα από ένα σύμβολα/ πράξεις ή αριθμούς).

ΠΡΟΣΟΧΗ: Ο αριθμός 2 μπορεί να καταλήξει στον αριθμό 8 με πολλούς τρόπους.

Αριθμός	Διαδικασία/ Πράξεις	Αποτέλεσμα
		

Διάγραμμα 3.13. Το Έργο που Χρησιμοποιήθηκε κατά τη διάρκεια της Συνέντευξης.

Η συνέντευξη είχε ως βασικό άξονα τις ερωτήσεις που παρουσιάζονται στο Παράρτημα 6. Κατά τη διάρκεια της συνέντευξης έγιναν επιπρόσθετες ερωτήσεις, ανάλογα με τις απαντήσεις των μαθητών, ώστε να γίνει πιο κατανοητός ο τρόπος σκέψης τους. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές αρχικά κλήθηκαν να διαβάσουν το πρόβλημα και έπειτα να εξηγήσουν με δικά τους λόγια τι είχαν καταλάβει, ώστε να εξασφαλιστεί ότι οι μαθητές είχαν αντιληφθεί τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος. Ακολούθως, ζητήθηκε από τους μαθητές να αναφέρουν κατά πόσο έχουν κάποιο αρχικό πλάνο στο μυαλό τους που θα τους οδηγήσει σε πολλές και πρωτότυπες απαντήσεις, αλλά και αν εντοπίζουν μαθηματικές ιδέες που σχετίζονται με το έργο. Με αυτό τον τρόπο θα γινόταν αντιληπτό κατά πόσο η λύση ήταν προφανής στους μαθητές. Προτού ξεκινήσουν να εργάζονται, οι μαθητές κλήθηκαν να «σκέφτονται δυνατά» και να εξηγούν σε κάθε φάση τον τρόπο σκέψης τους. Η αναφορά σε μαθηματικές ιδέες που σχετίζονται με το έργο, ο εντοπισμός σχέσεων μεταξύ των δύο αριθμών, ο συλλογισμός για τη χρήση διαφορετικών πράξεων ή διαφορετικών ειδών αριθμού αποτελούν ενδείξεις διερεύνησης κατά τη διαδικασία της συνέντευξης. Κάθε φορά που οι μαθητές προτείνουν κάποια απάντηση, ακολουθούν διευκρινιστικές ερωτήσεις για τον τρόπο που η ιδέα ήρθε στο μυαλό τους, για τα στοιχεία που τους βοήθησαν να τη σκεφτούν, για τις σχέσεις που έχει με κάτι άλλο που σκέφτηκαν ή είπαν προηγουμένως. Η συσχέτιση, δηλαδή, μπορεί να αναφέρεται στη συσχέτιση μαθηματικών ιδεών, στη συσχέτιση αριθμών ή ακόμα στη συσχέτιση δράσεων και εμπειριών. Η κατασκευή αναφέρεται στην εμφάνιση των απαντήσεων των μαθητών. Ερωτήσεις της μορφής «Πώς ήρθε στο μυαλό σου αυτή η απάντηση;», «Τι άλλαξε στον τρόπο σκέψης σου;» γίνονται στους μαθητές ώστε να γίνει κατανοητή η φάση της κατασκευής. Ταυτόχρονα, έγιναν διευκρινιστικές ερωτήσεις που αφορούν στην εναλλαγή του τρόπου σκέψης και στην εξέλιξη των μαθηματικών ιδεών. Αφού προταθούν αρκετές απαντήσεις, οι μαθητές καλούνται να επιλέξουν την καλύτερη απάντησή τους και να εξηγήσουν τους λόγους επιλογής της. Η ύπαρξη πολλών αριθμών ή συμβόλων, η σπανιότητα εμφάνισής της από άλλους συμμαθητές τους και ο συνδυασμός μαθηματικών ιδεών μπορεί να αναφερθεί κατά τη διαδικασία της αξιολόγησης. Με άλλα λόγια, κατά την αξιολόγηση επιχειρείται η επιβεβαίωση της επίτευξης του στόχου και ο αναστοχασμός των προτεινόμενων απαντήσεων. Το στάδιο της επικοινωνίας αναφέρεται στη διάχυση των ιδεών και στην προσπάθεια επεξήγησης της λογικής που υποθάλπει. Ως εκ τούτου, ερωτήσεις που προκαλούν το μαθητή να εξηγήσει τον τρόπο σκέψης του καθ' όλη τη διαδικασία είναι ιδιαίτερα βοηθητικές.

Οι συνεντεύξεις ηχογραφήθηκαν. Η ηχογράφηση είχε ως στόχο την αποτύπωση των σκέψεων των μαθητών. Ταυτόχρονα, η ερευνήτρια κατέγραφε τις κινήσεις, τις χειρονομίες και τις εκφράσεις των μαθητών καθώς σκέφτονταν και ενεργούσαν. Ενδεικτικά, η καταγραφή στιγμών παθητικότητας και ενθουσιασμού μπορούν να βοηθήσουν στην ερμηνεία της διαδικασίας δημιουργικής σκέψης. Παράλληλα, τα φυλλάδια των μαθητών παρουσιάζουν τις προτεινόμενές τους λύσεις, από τις οποίες μπορεί να διαφανεί αν ακολουθούν τον ίδιο τρόπο σκέψης, πότε γίνεται η εναλλαγή σε άλλη μαθηματική ιδέα, τη σχέση μεταξύ των ιδεών, που μπορεί να μην αναφέρθηκαν λεκτικά κατά τη διάρκεια της συνέντευξης.

Σχεδιασμός Παρεμβατικού Προγράμματος

Το παρεμβατικό πρόγραμμα, που αναπτύχθηκε, στόχευε στην ενίσχυση της δημιουργικής ικανότητας των μαθητών στα μαθηματικά. Ο σχεδιασμός των μαθημάτων στηρίχθηκε στις ακόλουθες αρχές: (α) Παροχή ευκαιριών για διερεύνηση και πειραματισμό μαθηματικών εννοιών. (β) Λύση προβλήματος που αποζητά την εύρεση πολλών, διαφορετικών και καινοτόμων λύσεων ή/και στρατηγικών. (γ) Ύπαρξη κατάλληλου εποπτικού υλικού και ενσωμάτωση σύγχρονων τεχνολογικών εργαλείων. (δ) Εναλλαγές συνεργατικής και αυτοκατευθυνόμενης μάθησης. (ε) Αποδοχή της πολυφωνίας, της ελευθερίας και της ανεξαρτησίας της σκέψης. (στ) Επικοινωνία, επιχειρηματολογία και ανταλλαγή ιδεών (π.χ. Csikszentmihalyi, 1996 · Hershkovitz, Peled & Littler, 2009 · Sheffield, 2003 · Torrance, 1962).

Λαμβάνοντας υπόψη τα πιο πάνω, σχεδιάστηκε παρεμβατικό πρόγραμμα 24 ωρών (12 μαθήματα διάρκειας 2 ωρών). Πιο κάτω παρουσιάζεται η θεματολογία των μαθημάτων και μια σύντομη περιγραφή τους, ενώ στο Παράρτημα 7 παρουσιάζονται αυτούσια τα Φύλλα Εργασίας:

1. Επίγνωση της δημιουργικής συμπεριφοράς:
   Συζήτηση για την έννοια της δημιουργικότητας, παρατήρηση και εντοπισμός δημιουργικών συμπεριφορών στην καθημερινότητα, χαρακτηριστικά δημιουργικής δράσης, λόγοι εμφάνισης δημιουργικής συμπεριφοράς, υποκειμενικά κριτήρια αξιολόγησης, ανάπτυξη και παρουσίαση δημιουργικής δράσης.
2. Ιδιότητες σχημάτων:

Εντοπισμός ιδιοτήτων σχημάτων, διατύπωση ερωτήσεων σε σχέση με τις ιδιότητες σχημάτων, απάντηση σε ερωτήσεις της μορφής «τι θα συνέβαινε αν...», εντοπισμός κοινής/ κοινών ιδιότητας/ιδιοτήτων σε ομάδες σχημάτων, κατασκευή ομάδων σχημάτων με ένα ή περισσότερα κριτήρια.

3. Γεωμετρικές σπαζοκεφαλιές:
   Διαχωρισμός σχημάτων για τη δημιουργία του ελάχιστου και του μέγιστου αριθμού κομματιών, οπτικοποίηση, διαχωρισμός σχημάτων για τη δημιουργία συγκεκριμένων μορφών.
4. Κατασκευή σπιτιών:
   Κατασκευή τρισδιάστατων στερεών, κατασκευή διαφορετικών στερεών με τον ίδιο όγκο, υπολογισμός εμβαδού παράπλευρης επιφάνειας, υπολογισμός εξόδων ολοκλήρωσης σπιτιού, σχεδιασμός αφίσας για διαφήμιση.
5. Διακοσμώντας το σπίτι μας:
   Εντοπισμός μοτίβων στην καθημερινότητα, ανάπτυξη και συνέχιση μοτίβων με αριθμούς και σχήματα, συμμετρία, αλγεβρική κατανόηση των μοτίβων.
6. Ο κόσμος των αριθμών:
   Ομάδες αριθμών, ιδιότητες αριθμών, πολλαπλάσια/ διαιρέτες, πρώτοι, σύνθετοι, τετράγωνοι αριθμοί, ομαδοποιήσεις αριθμών.
7. Αριθμητικά μοτίβα:
   Αναγνώριση ιδιοτήτων αριθμού, διαδικασία υπόθεσης-διερεύνησης-επαλήθευσης, ανάπτυξη ομάδων αριθμού με συγκεκριμένες ιδιότητες.
8. Νικήτρια ομάδα:
   Λύση προβλήματος, μοντελοποίηση μαθηματικής κατάστασης, διαφορετικός τρόπος χειρισμού δεδομένων, επεξήγηση-επικοινωνία, ερωτήσεις και απαντήσεις της μορφής «τι θα συνέβαινε αν...», διατύπωση προβλήματος.
9. Γραφικές παραστάσεις:
   Μελέτη γραμμικών γραφικών παραστάσεων, περιγραφή, σύγκριση και κατασκευή γραφικών αναπαραστάσεων, έννοια μεταβλητής, έννοια ταχύτητας.

Στο παρεμβατικό πρόγραμμα συμμετείχαν 24 μαθητές Δ’, Ε’ και Στ’ τάξης. Οι μαθητές παρακολούθησαν εθελοντικά τη σειρά των μαθημάτων. Αξίζει να αναφερθεί ότι στους μαθητές έγινε χορήγηση του Εργαλείου Μαθηματικής Δημιουργικότητας σε τρεις χρονικές στιγμές: πριν από την έναρξη των μαθημάτων, με την ολοκλήρωση του παρεμβατικού προγράμματος και ένα μήνα μετά την ολοκλήρωση των μαθημάτων. Αυτές οι μετρήσεις στόχευαν να διερευνήσουν την καταλληλότητα των μαθημάτων στην ενίσχυση της δημιουργικής ικανότητας των μαθητών, καθώς επίσης και τον τρόπο εξέλιξης της μαθηματικής δημιουργικότητας μετά τη διδακτική παρέμβαση.

Επίσης, έγινε χορήγηση του Εργαλείου Μέτρησης Αντιλήψεων για τη Δημιουργικότητα και τα Μαθηματικά (Παράρτημα 8). Το εργαλείο αυτό περιλαμβάνει 12 δηλώσεις σχετικά με τη δημιουργικότητα και τα μαθηματικά. Οι δηλώσεις Δ1 (Για να είναι κάποιος καλός/ή στα μαθηματικά, αρκεί να είναι καλός/ή στην εκτέλεση πράξεων), Δ2 (Τα μαθηματικά είναι δημιουργικά), Δ3 (Στα μαθηματικά μπορείς να χρησιμοποιήσεις τη φαντασία και τη δημιουργικότητά σου), Δ4 (Στα μαθηματικά υπάρχει πάντα μόνο μια σωστή απάντηση) και Δ5 (Υπάρχει μόνο ένας σωστός τρόπος, για να λύσεις μια άσκηση στα μαθηματικά) σχετίζονται με πεποιθήσεις για το γνωστικό αντικείμενο των μαθηματικών. Οι δηλώσεις Δ6 (Είμαι δημιουργικός), Δ7 (Ανακαλύπτω νέους τρόπους, για να επιλύσω ασκήσεις), Δ8 (Μπορώ να σκεφτώ διαφορετικούς τρόπους, για να εξηγήσω αυτά που σκέφτομαι στα μαθηματικά), Δ9 (Εντοπίζω εύκολα μοτίβα αριθμών ή σχημάτων), Δ10 (Επιλύω τις μαθηματικές ασκήσεις με διαφορετικούς τρόπους), Δ11 (Βρίσκω ασυνήθιστες και έξυπνες λύσεις στις μαθηματικές ασκήσεις) και Δ12 (Μπορώ να μαντέψω τι θα συμβεί, αν αλλάξει κάποιο στοιχείο του προβλήματος) αφορούν την αυτοεκτίμηση των ικανοτήτων των μαθητών να σκέφτονται δημιουργικά στα μαθηματικά. Οι μαθητές κλήθηκαν να βάλουν σε κύκλο το βαθμό συμφωνίας τους σε κλίμακα Likert με επτά διαβαθμίσεις.

Ανάλυση

Η ανάλυση των δεδομένων που συλλέχθηκαν στην παρούσα εργασία ακολούθησε τόσο ποσοτικές όσο και ποιοτικές μεθόδους ανάλυσης. Σύμφωνα με το Runco (1986), ο συγκερασμός ποσοτικών και ποιοτικών στοιχείων συνεισφέρει σε πιο σφαιρική κατανόηση της έννοιας της δημιουργικότητας.

Τεχνικές Ανάλυσης Ποσοτικών Δεδομένων

Η ανάλυση των ποσοτικών δεδομένων έγινε με το λογισμικό γραμμικής δομικής ανάλυσης Mplus (Muthén & Muthén, 1998) και το στατιστικό πακέτο SPSS. Ειδικότερα, η επιβεβαίωση της προσαρμογής των δεδομένων στα θεωρητικά μοντέλα που προτάθηκαν καθώς επίσης και ο έλεγχος εγκυρότητας των εργαλείων έγιναν με τη χρήση επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης (Confirmatory Factor Analysis - CFA). Το CFA παρέχει τη δυνατότητα: (α) ελέγχου της εγκυρότητας θεωρητικών μοντέλων και σχετικών υποθέσεων και (β) σύγκρισης εναλλακτικών μοντέλων για εντοπισμό αυτού που παρουσιάζει καλύτερη προσαρμογή στα δεδομένα. Για τον έλεγχο του βαθμού προσαρμογής των μοντέλων, το CFA παρουσιάζει τρεις δείκτες στους οποίους στηρίζεται η αξιολόγηση των μοντέλων: το δείκτη comparative fit index (CFI), το πηλίκο χ^2 προς τους βαθμούς ελευθερίας του μοντέλου (χ^2/df) και το δείκτη root mean-square error of approximation (RMSEA). Σύμφωνα με τους Marcoulides και Schumacker (1996), για να είναι αποδεκτό ένα μοντέλο η τιμή του CFI θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη από .90, η τιμή του χ^2/df πρέπει να είναι μικρότερη του 2 και η τιμή του RMSEA να είναι μικρότερη από .08. Κατά τη σύγκριση εναλλακτικών μοντέλων λαμβάνονται υπόψη οι προαναφερθέντες δείκτες, όπως επίσης και οι δείκτες AIC και BIC. Πιο συγκεκριμένα, επιλέγεται το μοντέλο το οποίο έχει αποδεκτές τιμές για το CFI, χ^2/df και RMSEA και επιπρόσθετα έχει τον υψηλότερο δείκτη CFI και τους χαμηλότερους δείκτες AIC και BIC.

Τέλος, το στατιστικό πακέτο SPSS χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό των περιγραφικών χαρακτηριστικών των εργαλείων, καθώς και για τη διερεύνηση διαφορών μεταξύ των ομάδων μαθητών. Συγκεκριμένα, με το στατιστικό πακέτο SPSS διενεργήθηκε πολλαπλή ανάλυση διασποράς (MANOVA), πολλαπλή ανάλυσης συνδιασποράς (MANCOVA), Wilcoxon Signed Ranks Test ανάλυση και Crosstabs ανάλυση.

Τεχνικές Ανάλυσης Ποιοτικών Δεδομένων

Ποιοτικά δεδομένα συλλέχθηκαν κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων, με στόχο να εντοπιστεί η διαδικασία που ακολουθείται για την εύρεση δημιουργικού αποτελέσματος. Κατά την απομαγνητοφώνηση των συνεντεύξεων και την ανάλυση των ποιοτικών δεδομένων εφαρμόστηκε η μέθοδος της αναλυτικής επαγωγής (analytic induction). Σύμφωνα με τους Taylor και Bogdan (1984), αυτή η μέθοδος χρησιμοποιείται για την επιβεβαίωση θεωρητικών δομών, βασιζόμενη σε ποιοτικά δεδομένα. Με άλλα λόγια, η «θεωρία» δεν δημιουργείται από το μηδέν, αλλά στηρίζεται στον έλεγχο υποθέσεων και στην επιβεβαίωση ή αναδιατύπωσή τους. Ακολουθώντας τις αρχές της αναλυτικής επαγωγής, η διαδικασία ανάλυσης των δεδομένων στοχεύει στον εντοπισμό των κύριων θεμάτων που περιγράφουν την υπό διερεύνηση συμπεριφορά και έπειτα τη σύγκρισή τους με θεωρητικές δομές (Patton, 2002). Πιο συγκεκριμένα, το πρώτο βήμα στη διαδικασία είναι ο ορισμός ενός φαινομένου, η διατύπωση υποθέσεων και η ανάπτυξη ενός θεωρητικού μοντέλου προς διερεύνηση. Έπειτα, μέσω της μελέτης των υποκειμένων γίνεται προσπάθεια εντοπισμού κοινών παραγόντων και χαρακτηριστικών. Καθώς ο αριθμός των υποκειμένων αυξάνεται και τα θέματα που εγείρονται ποικίλουν, γίνεται προσπάθεια ενσωμάτωσης νέων στοιχείων στο προτεινόμενο θεωρητικό μοντέλο ή/και αναθεώρηση του μοντέλου υπό το πρίσμα των νέων δεδομένων (Katz, 2001).

Πρακτικά, η πιο πάνω διαδικασία εφαρμόστηκε στα δεδομένα που συλλέχθηκαν κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων με στόχο να επιβεβαιώσει το μοντέλο της Sheffield (2009) για τα στάδια της δημιουργικής διαδικασίας. Ειδικότερα, κατά την απομαγνητοφώνηση των συνεντεύξεων έγινε προσπάθεια εντοπισμού των σταδίων συσχέτισης, διερεύνησης, κατασκευής, αξιολόγησης και επικοινωνίας σε κάθε υποκείμενο, μιας και τα ερωτήματα που εφαρμόστηκαν προκαλούσαν τους μαθητές να αναφερθούν σε αυτά τα στοιχεία. Απαντήσεις που περιελάμβαναν επιπρόσθετα στοιχεία είχαν ως αποτέλεσμα τη βελτίωση, την τροποποίηση και την αναθεώρηση του προτεινόμενου θεωρητικού μοντέλου. Η εμφάνιση των πιο πάνω σταδίων σε διαφορετικό βαθμό ή επίπεδο λήφθηκε υπόψη, οδηγώντας στην ενίσχυση του μοντέλου με στοιχεία ανάλογα με τη δημιουργική ικανότητα των μαθητών. Πέρα από τα δεδομένα που συλλέχθηκαν κατά τις συνεντεύξεις, ποιοτικά δεδομένα συλλέχθηκαν και κατά την παρακολούθηση των μαθητών καθώς εργάζονταν. Όπως αναφέρει ο Patton (1990) η ημιδομημένη παρατήρηση επιτρέπει στον ερευνητή να «εισχωρήσει» στην κατάσταση που περιγράφεται και να την κατανοήσει.

Εργαλείο Μαθηματικής Δημιουργικότητας

Η αξιολόγηση της μαθηματικής δημιουργικότητας στηρίχθηκε στον ορισμό που προτάθηκε από τον Torrance (1974) για τη γενική δημιουργική ικανότητα και υιοθετήθηκε από διάφορους ερευνητές στον τομέα της μαθηματικής παιδείας (π.χ. Kim, Cho, & Ahn, 2003 · Leikin, 2008 · Leikin & Lev, 2007 · Silver, 1997). Σύμφωνα με τον Torrance (1974), η αξιολόγηση της δημιουργικής ικανότητας στηρίζεται στις διαστάσεις της πρωτοτυπίας, της ευχέρειας, της ευελιξίας και της επεξεργασίας. Παρόλα αυτά, πρόσφατα το μοντέλο αξιολόγησης της δημιουργικότητας απλουστεύτηκε και περιλαμβάνει μόνο τις πρώτες τρεις διαστάσεις από το μοντέλο του Torrance (1974), ενώ το στοιχείο της επεξεργασίας δεν λαμβάνεται πλέον υπόψη. Σύμφωνα με τους Cramond, Matthews-Morgan, Bandalos και Zuo (2005), η δυσκολία στην ύπαρξη συμφωνίας μεταξύ των αξιολογητών κατά την αξιολόγηση της επεξεργασίας οδήγησε σε χαμηλή αξιοπιστία (interrater reliability) του εργαλείου. Όμοια στον τομέα της μαθηματικής παιδείας οι ερευνητές (π.χ. Leikin, 2007 · Silver, 1997) χρησιμοποίησαν μόνο τις έννοιες της ευχέρειας, της ευελιξίας και της πρωτοτυπίας στην αξιολόγηση της μαθηματικής δημιουργικότητας, γιατί ήταν δύσκολο να καθοριστούν επίπεδα επεξεργασίας στα μαθηματικά έργα.

Η Leikin (2007) αναφέρει ότι η ευχέρεια στα μαθηματικά αναφέρεται στην ικανότητα παραγωγής μεγάλου αριθμού ιδεών και ως εκ τούτου ο βαθμός ευχέρειας σε ένα μαθηματικό έργο καθορίζεται από τον αριθμό των λύσεων που προτάθηκαν σε αυτό. Η ευελιξία αναφέρεται στον αριθμό των προσεγγίσεων και στην εναλλαγή των μαθηματικών ιδεών σε μια λύση (Leikin, 2007). Για την αξιολόγηση της ευελιξίας απαιτείται η δημιουργία ομάδων απαντήσεων. Δύο λύσεις ανήκουν σε διαφορετική κατηγορία αν εμπλέκουν στρατηγικές επίλυσης που στηρίζονται σε διαφορετικές αναπαραστάσεις, ιδιότητες (θεωρήματα, ορισμούς) ή έννοιες των μαθηματικών (Leikin, 2008). Στον Πίνακα 3.4 παρουσιάζονται οι μαθηματικές ιδέες που εμφανίστηκαν σε κάθε έργο του εργαλείου μαθηματικής δημιουργικότητας και στο Παράρτημα 5 παρουσιάζονται οι απαντήσεις που εμπίπτουν σε κάθε κατηγορία. Τέλος, η πρωτοτυπία σχετίζεται με την παρουσίαση καινοτόμων και μοναδικών ιδεών. Η πρωτοτυπία υπολογίζεται συγκρίνοντας τις απαντήσεις ενός μαθητή με τις απαντήσεις του υπόλοιπου δείγματος. Ως πρωτότυπες κρίνονται οι απαντήσεις με τη μικρότερη συχνότητα εμφάνισης.

Πίνακας 3.4

Μαθηματικές Ιδέες που Εμφανίστηκαν στα Έργα Μαθηματικής Δημιουργικότητας.

Έργο 1 – Ομάδες αριθμών	Αριθμός ψηφίων
	Σύγκριση ψηφίων
	Πράξεις με τα ψηφία των αριθμών
	Διαιρέτες/ πολλαπλάσια αριθμών
	Μέγεθος αριθμών
	Κατηγορίες αριθμών
	Μοτίβα αριθμών
	Μη μαθηματικές ιδιότητες
	Συνδυασμός μαθηματικών ιδεών
Έργο 2 – Διαφοροποίηση σχήματος	Ονομασία σχημάτων
	Ιδιότητες σχημάτων ως προς τις γωνίες
	Ιδιότητες σχημάτων ως προς τις πλευρές
	Μετρικές σχέσεις (περίμετρος/ εμβαδόν)
	Αριθμητικές σχέσεις
	Μη εμφανείς ιδιότητες
Έργο 3 – Σκίαση ορθογωνίου	Διαμοιρασμός με μια γραμμή
	Επαναλαμβανόμενο μοίρασμα και σκίαση των μισών μονάδων
	Συμμετρικά σχήματα
	Συνδυασμός ιδεών/ Αναπροσαρμογή
Έργο 4 – Διατύπωση προβλημάτων	Άθροισμα εισπράξεων
	Σύγκριση εισπράξεων
	Άθροισμα κτισμάτων
	Σύγκριση κτισμάτων
	Φόρος-Κέρδος εταιρείας
	Μέσος όρος
	Εμφανείς απαντήσεις
	Επέκταση/ προσθήκη παραμέτρων

Πιο αναλυτικά, η διαδικασία αξιολόγησης ενός έργου μαθηματικής δημιουργικότητας έχει ως ακολούθως: (α) Ο βαθμός ευχέρειας υπολογίζεται ως το πηλίκο του αριθμού των ορθών μαθηματικών λύσεων που προτάθηκαν από ένα μαθητή διά του μέγιστου αριθμού ορθών μαθηματικών λύσεων που προτάθηκαν από κάποιο μαθητή στον υπό διερεύνηση πληθυσμό. (β) Ο βαθμός ευελιξίας υπολογίζεται ως το πηλίκο του αριθμού των μαθηματικών ιδεών που εμπλέκονται στις λύσεις ενός μαθητή διά του μέγιστου αριθμού μαθηματικών ιδεών που εμπλέκονται στις λύσεις κάποιου μαθητή στον υπό διερεύνηση πληθυσμό. (γ) Ο βαθμός πρωτοτυπίας υπολογίζεται με βάση τη συχνότητα εμφάνισης μιας λύσης σε σχέση με το σύνολο αναφοράς. Ειδικότερα, ένας μαθητής λαμβάνει βαθμό 1 αν μία ή περισσότερες απαντήσεις του έχουν συχνότητα εμφάνισης μικρότερη από 2%. Αντίστοιχα, ένας μαθητής λαμβάνει βαθμό .8 αν η συχνότητα εμφάνισης μίας ή περισσότερων απαντήσεων είναι μεταξύ 2-5%, βαθμό .6 αν η συχνότητα εμφάνισης μίας ή περισσότερων απαντήσεων είναι μεταξύ 6-10%, βαθμό .4 αν η συχνότητα εμφάνισης μίας ή περισσότερων απαντήσεων είναι μεταξύ 11-20% και βαθμό .2 αν η συχνότητα εμφάνισης μίας ή περισσότερων απαντήσεων είναι μεγαλύτερη από 20%.

Με αυτό τον τρόπο προκύπτουν τρεις τιμές κατά την αξιολόγηση ενός έργου, οι οποίες κυμαίνονται από 0 μέχρι 1. Ο συνολικός βαθμός ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας υπολογίζεται ως ο λόγος του αθροίσματος των επί μέρους επιδόσεων σε κάθε έργο, ως προς τον αριθμό των έργων. Συνεπώς, ο συνολικός βαθμός ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας κυμαίνεται μεταξύ 0 και 1.

Εργαλείο Μαθηματικής Ικανότητας

Κατά τη διόρθωση του Εργαλείου Μαθηματικής Ικανότητας, αξιολογήθηκε κάθε έργο και κάθε υποερώτημα ξεχωριστά. Οι ορθές απαντήσεις βαθμολογήθηκαν με μια μονάδα και οι λανθασμένες με μηδέν μονάδες. Με μισή μονάδα βαθμολογήθηκαν οι απαντήσεις που ενώ παρουσίαζαν ορθό τρόπο σκέψης δεν κατέληγαν σε ορθή απάντηση, λόγω λάθους στις πράξεις. Τα έργα που δεν απαντήθηκαν βαθμολογήθηκαν με μηδέν, γιατί οι μαθητές είχαν στη διάθεσή τους ικανοποιητικό χρόνο, για να συμπληρώσουν όλα τα ερωτήματα του εργαλείου.

Για να έχουν όλα τα έργα την ίδια βαρύτητα στο συνολικό βαθμό του εργαλείου, ανεξαρτήτως του αριθμού των υποερωτημάτων, διαιρέθηκε ο συνολικός βαθμός που έλαβε κάποιος μαθητής σε ένα έργο με τον αριθμό των ερωτημάτων του έργου. Η μέγιστη βαθμολογία που μπορούσε να λάβει ένας μαθητής στο Εργαλείο Μαθηματικής Ικανότητας ήταν πέντε, αν λάμβανε μια μονάδα για κάθε έργο του δοκιμίου.

Εργαλείο Γενικής Δημιουργικότητας

Η αξιολόγηση του Εργαλείου Γενικής Δημιουργικότητας στηρίχθηκε στον ορισμό που προτάθηκε από τον Torrance (1974), αξιολογώντας την ευχέρεια, την ευελιξία και την πρωτοτυπία των λύσεων. Η επεξεργασία όπως και στο εργαλείο μαθηματικής δημιουργικότητας δεν συμπεριλήφθηκε, γιατί και από τον ίδιο τον Torrance θεωρήθηκε προαιρετική και δεν συμπεριλήφθηκε στις μετέπειτα δημοσιεύσεις του (Wechsler, 2006).

Αν και η πρώτη έκδοση του εικονικού εργαλείου μέτρησης της γενικής δημιουργικότητας αξιολογούσε την ευχέρεια, την ευελιξία, την πρωτοτυπία και την επεξεργασία, στην τελευταία έκδοση έχει προστεθεί η αξιολόγηση του βαθμού αφαίρεσης των τίτλων που προσδίδεται στην εικόνα, η αντίσταση στην κατασκευή κλειστών γραμμών και άλλα δημιουργικά χαρακτηριστικά (έκφραση συναισθημάτων, σύνταξη ιστορίας, κίνηση ή δράση, εκφραστικοί τίτλοι, σύνθεση σχημάτων, σύνθεση γραμμών ή κύκλων, χιούμορ, πλούσιες ή πολύχρωμες εικόνες, φαντασία, εσωτερική οπτικοποίηση, ασυνήθιστη οπτικοποίηση, σπάσιμο ή επέκταση των «ορίων»). Εντούτοις, στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας δεν περιλήφθηκαν τα πιο πάνω στοιχεία για την αξιολόγηση του εργαλείου. Η αντίσταση στην κατασκευή κλειστών γραμμών δεν μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για το εικονικό έργο του εργαλείου, αφού το δεδομένο ήταν κλειστός κύκλος στον οποίο τα υποκείμενα κλήθηκαν να προσθέσουν λεπτομέρειες για να φτιάξουν εικόνες. Εκ των προτέρων δεν θα μπορούσε να εξεταστεί κάτι τέτοιο. Όσον αφορά στο βαθμό αφαίρεσης των τίτλων, η πλειοψηφία των μαθητών έγραψαν μονολεκτικά κάτω από κάθε εικόνα τι αναπαριστούσε. Ως εκ τούτου, δεν θα μπορούσε να αξιολογηθεί μόνο μια ομάδα μαθητών που είχε διαβάσει προσεκτικά την οδηγία, γιατί κάτι τέτοιο δεν θα αξιολογούσε τόσο τη δημιουργική ικανότητα των μαθητών όσο την ικανότητά τους να διαβάζουν προσεκτικά τις οδηγίες.

Εργαλείο Δημιουργικής Προσωπικότητας

Τα δεδομένα που συλλέχθηκαν από το Εργαλείο Δημιουργικής Προσωπικότητας έλαβαν το βαθμό 1-7 αντίστοιχα με τις επιλογές των μαθητών σε κάθε δήλωση.

Εργαλείο Naglieri Nonverbal Ability Test

Η αξιολόγηση του εργαλείου Naglieri Nonverbal Ability Test έγινε με βάση το εγχειρίδιο χρήσης του (Naglieri, 1997). Οι ορθές απαντήσεις έλαβαν το βαθμό 1 ενώ οι λανθασμένες έλαβαν το βαθμό 0. Το άθροισμα των ορθών απαντήσεων έδωσε το βαθμό για κάθε μαθητή.

Εργαλείο Αντιλήψεων για τη Δημιουργικότητα και τα Μαθηματικά

Τα δεδομένα που συλλέχθηκαν από το συγκεκριμένο εργαλείο έλαβαν το βαθμό 1-7 αντίστοιχα με τις επιλογές των μαθητών σε κάθε δήλωση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV
ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ - ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των ποσοτικών και ποιοτικών αναλύσεων των δεδομένων της παρούσας εργασίας, όπως αυτά συλλέχθηκαν από τη χορήγηση των δοκιμίων, τη διεξαγωγή συνεντεύξεων και τη διεξαγωγή παρεμβατικού προγράμματος. Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στοχεύουν να απαντήσουν στα ερευνητικά ερωτήματα της εργασίας και είναι οργανωμένα με βάση τους τέσσερις άξονες, που σύμφωνα με το θεωρητικό υπόβαθρο της εργασίας, ορίζεται η μαθηματική δημιουργικότητα. Πρώτα, παρουσιάζεται η δομή εναλλακτικών θεωρητικών μοντέλων που περιγράφουν το δημιουργικό αποτέλεσμα στα μαθηματικά και διερευνώνται τα γνωστικά χαρακτηριστικά και τα χαρακτηριστικά προσωπικότητας που επηρεάζουν τη δημιουργική ικανότητα των μαθητών στα μαθηματικά. Στη συνέχεια, γίνεται αναφορά στις γνωστικές διαδικασίες που εμφανίζουν οι μαθητές καθώς εργάζονται σε μαθηματικά έργα και διερευνάται με ποιο τρόπο διαφοροποιούνται σε μαθητές με διαφορετικό βαθμό μαθηματικής δημιουργικότητας. Ακολούθως, μελετάται η επίδραση παρεμβατικού προγράμματος στις δημιουργικές ικανότητες και στις αντιλήψεις των μαθητών και τέλος, εξετάζεται κατά πόσο η δημιουργική ικανότητα στα μαθηματικά αποτελεί μια ειδική ικανότητα ή εμπίπτει στη γενική δημιουργική ικανότητα.

Το Δημιουργικό Αποτέλεσμα στα Μαθηματικά

Το δημιουργικό αποτέλεσμα στα μαθηματικά εξετάστηκε με τη χρήση του Εργαλείου Μαθηματικής Δημιουργικότητας. Ακολουθούν περιγραφικά αποτελέσματα από την ανάλυση των δεδομένων που συλλέχθηκαν με το Εργαλείο Μαθηματικής Δημιουργικότητας. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα εναλλακτικά μοντέλα που περιγράφουν τη δομή του δημιουργικού αποτελέσματος στα μαθηματικά και συγκρίνεται ο βαθμός προσαρμοστικότητάς τους στα δεδομένα της εργασίας. Ταυτόχρονα, γίνεται διαχωρισμός των υποκειμένων της εργασίας σε κατηγορίες με βάση την επίδοσή τους στο Εργαλείο Μαθηματικής Δημιουργικότητας.

Περιγραφικά Αποτελέσματα του Εργαλείου Μαθηματικής Δημιουργικότητας

Τα έργα μαθηματικής δημιουργικότητας αξιολογήθηκαν με βάση τον αριθμό των λύσεων που πρότειναν οι μαθητές (ευχέρεια), τον αριθμό των διαφορετικών μαθηματικών ιδεών που αξιοποιήθηκαν στις λύσεις (ευελιξία) και το βαθμό καινοτομίας των λύσεων (πρωτοτυπία). Κατά μέσο όρο στο Έργο 1 προτάθηκαν πάνω από τέσσερις απαντήσεις (Μ.Ο.= 4.139, S.D.=2.320, Εύρος= 10), στο Έργο 2 προτάθηκαν πάνω από τρεις απαντήσεις (Μ.Ο.= 3.668, S.D.=2.140, Εύρος= 10), στο Έργο 3 προτάθηκαν πάνω από επτά απαντήσεις (Μ.Ο.= 7.187, S.D.=2.573, Εύρος= 16) και στο Έργο 4 προτάθηκαν πάνω από τρεις απαντήσεις (Μ.Ο.= 3.655, S.D.=2.422, Εύρος= 15). Όσον αφορά στην ευελιξία, στο Έργο 2 (Μ.Ο.= 1.786, S.D.=0.911, Εύρος= 5), στο Έργο 3 (Μ.Ο.= 1.618, S.D.=0.714, Εύρος= 4) και στο Έργο 4 (Μ.Ο.= 1.378, S.D.=0.851, Εύρος= 5) οι απαντήσεις των μαθητών αξιοποίησαν περισσότερες από μία μαθηματικές ιδέες, ενώ στο Έργο 1 αξιοποίησαν περισσότερες από δύο μαθηματικές ιδέες (Μ.Ο.= 2.078, S.D.=1.011, Εύρος=5). Τέλος, στο Έργο 2 (Μ.Ο.= 2.523, S.D.=1.496, Εύρος= 5) και στο Έργο 1 (Μ.Ο.= 2.347, S.D.=1.494, Εύρος= 5) προτάθηκαν πιο πρωτότυπες απαντήσεις (κατά μέσο όρο μια τουλάχιστον από τις λύσεις των μαθητών είχε αναφερθεί μόνο από το 6-10 % των υποκειμένων) σε σχέση με τις απαντήσεις που προτάθηκαν στο Έργο 3 (Μ.Ο.= 1.927, S.D.=1.218, Εύρος= 5) και στο Έργο 4 (Μ.Ο.= 1.945, S.D.=1.450, Εύρος= 5), στα οποία οι απαντήσεις κατά μέσο όρο αναφέρθηκαν από το 11-20 % των υποκειμένων.

Λόγω του ότι σε κάθε έργο προέκυψε διαφορετικός αριθμός λύσεων και αξιοποιήθηκε διαφορετικός αριθμός μαθηματικών ιδεών, έγινε μετατροπή της κλίμακας της ευχέρειας, της ευελιξίας και της πρωτοτυπίας κάθε έργου, ώστε οι τρεις τιμές να κυμαίνονται μεταξύ 0 και 1. Τα αποτελέσματα του Εργαλείου Μαθηματικής Δημιουργικότητας παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.1 και επιτρέπουν τη σύγκριση μεταξύ των μέσων όρων των τεσσάρων έργων. Τους χαμηλότερους μέσους όρους είχε το Έργο 4 (Μ.Ο. $_{\text{Ευχέρειας}}$= .244, Μ.Ο. $_{\text{Ευελιξίας}}$= .172, Μ.Ο. $_{\text{Πρωτοτυπίας}}$= .389), το οποίο περιελάμβανε διατύπωση προβλήματος. Το Έργο 3 (Σκίαση ορθογωνίου) έχοντας τον υψηλότερο μέσο όρο ευχέρειας και ευελιξίας (Μ.Ο. $_{\text{Ευχέρειας}}$ = .449, Μ.Ο. $_{\text{Ευελιξίας}}$ = .404), φαίνεται να επέτρεψε την παραγωγή των περισσότερων λύσεων με την εμπλοκή περισσότερων μαθηματικών ιδεών. Πιο πρωτότυπες λύσεις προτάθηκαν στο Έργο 2, το οποίο καλούσε τους μαθητές να σχηματίσουν ομάδες σχημάτων (Μ.Ο. $_{\text{Πρωτοτυπίας}}$ = .505). Όσον αφορά στις τιμές της λοξότητας και της κύρτωσης, οι αντίστοιχες τιμές σε όλα τα έργα είναι μικρότερες από 2, στοιχείο που δείχνει ότι οι απαντήσεις των μαθητών στα έργα του Εργαλείου Μαθηματικής Δημιουργικότητας ακολουθούν την κανονική κατανομή.

Πίνακας 4.1

Περιγραφικά Χαρακτηριστικά Εργαλείου Μαθηματικής Δημιουργικότητας.

Έργα		Μέσος όρος	Τυπική Απόκλιση	Εύρος	Λοξότητα	Κύρτωση
Έργο 1	Ευχέρεια	.414	.232	1	.520	-.394
	Ευελιξία	.231	.112	1	.334	-.160
	Πρωτοτυπία	.470	.299	1	.386	-1.305
Έργο 2	Ευχέρεια	.367	.214	1	.340	-.269
	Ευελιξία	.298	.152	1	.134	-.085
	Πρωτοτυπία	.505	.300	1	.001	-1.297
Έργο 3	Ευχέρεια	.449	.162	1	-.400	-.615
	Ευελιξία	.404	.179	1	.781	-.014
	Πρωτοτυπία	.385	.244	1	.977	-.478
Έργο 4	Ευχέρεια	.244	.161	1	.596	.556
	Ευελιξία	.172	.106	1	.652	1.079
	Πρωτοτυπία	.389	.290	1	.566	-.879

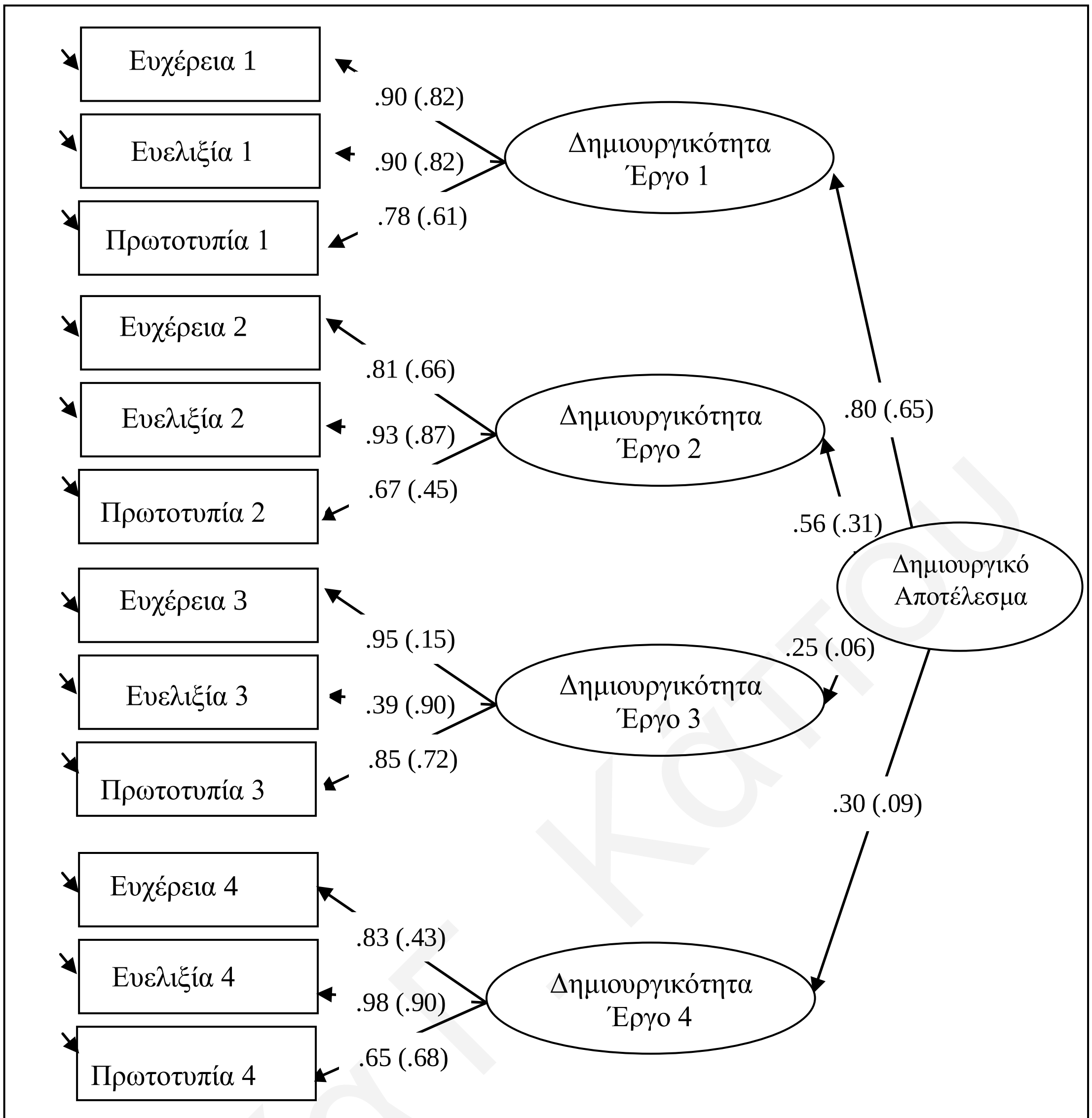
Ταυτόχρονα θεωρήθηκε χρήσιμη η συσχέτιση μεταξύ των επιδόσεων ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας στα τέσσερα έργα (δείτε Παράρτημα 9). Οι πιο ψηλές συσχετίσεις παρατηρήθηκαν ανάμεσα στις ικανότητες ευελιξίας και πρωτοτυπίας στο ίδιο έργο (Έργο 1: r=.709, Έργο 2: r=.634, Έργο 3: r=.807, Έργο 4: r=.812), καθώς και ανάμεσα στις ικανότητες ευχέρειας και ευελιξίας (Έργο 1: r=.815, Έργο 2: r=.759, Έργο 3: r=.369, Έργο 4: r=.643) με μόνη εξαίρεση το Έργο 3. Οι αντίστοιχες συσχετίσεις μεταξύ ευχέρειας και πρωτοτυπίας ήταν χαμηλότερες από τις προηγούμενες (Έργο 1: r=.600, Έργο 2: r=.517, Έργο 3: r=.316, Έργο 4: r=.514) αλλά εξακολουθούσαν να είναι στατιστικά σημαντικές (p<.05).

Οι συσχετίσεις που εντοπίστηκαν ανάμεσα στην ίδια ικανότητα μεταξύ των έργων ήταν χαμηλότερες, σε σύγκριση με τις συσχετίσεις που εντοπίστηκαν ανάμεσα στις τρεις ικανότητες του ίδιου έργου. Ενδεικτικά, ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ δύο έργων του Εργαλείου Μαθηματικής Δημιουργικότητας στην ικανότητα ευχέρειας κυμάνθηκε μεταξύ r=.199 (Έργο 3$_{\text{Ευχέρεια}}$ -Έργο 4$_{\text{Ευχέρεια}}$) και r=.409 (Έργο 1$_{\text{Ευχέρεια}}$ -Έργο 2$_{\text{Ευχέρεια}}$), ο συντελεστής συσχέτισης στην ικανότητα ευελιξίας κυμάνθηκε μεταξύ r=.069 (Έργο 3$_{\text{Ευελιξία}}$ - Έργο 4$_{\text{Ευελιξία}}$) και r=.349 (Έργο 1$_{\text{Ευελιξία}}$ – Έργο 2$_{\text{Ευελιξία}}$) και ο συντελεστής συσχέτισης στην ικανότητα πρωτοτυπίας κυμάνθηκε μεταξύ r=.041 (Έργο 3$_{\text{Πρωτοτυπία}}$- Έργο4$_{\text{Πρωτοτυπία}}$) και r=.279 (Έργο 1$_{\text{Πρωτοτυπία}}$-Έργο 2$_{\text{Πρωτοτυπία}}$), οι οποίοι θεωρούνται χαμηλοί ή μη στατιστικά σημαντικοί. Με άλλα λόγια, οι συσχετίσεις είναι χαμηλότερες, αν οι ικανότητες μελετηθούν οριζόντια, μεταξύ όλων των έργων, σε σχέση με τις συσχετίσεις που παρατηρούνται, αν οι ικανότητες μελετηθούν κατακόρυφα, εντός του ίδιου έργου.

Επιβεβαίωση της Δομής του Δημιουργικού Αποτελέσματος στα Μαθηματικά

Για να εξεταστεί η δομή του δημιουργικού αποτελέσματος στα μαθηματικά έγινε έλεγχος της εγκυρότητας τριών εναλλακτικών μοντέλων, τα οποία ορίζουν το δημιουργικό αποτέλεσμα με βάση τις ικανότητες της ευχέρειας, της ευελιξίας και της πρωτοτυπίας. Το Διάγραμμα 4.1 παρουσιάζει το πρώτο από τα τρία μοντέλα, στο οποίο το δημιουργικό αποτέλεσμα ορίζεται με βάση την επίδοση των μαθητών σε καθένα από τα τέσσερα έργα του Εργαλείου Μαθηματικής Δημιουργικότητας. Η επίδοση σε κάθε έργο κρίνεται από τις ικανότητες ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας. Η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση έδειξε ότι παρόλο που το συγκεκριμένο θεωρητικό μοντέλο έχει υψηλό δείκτη CFI, ο λόγος χ^2 προς τους βαθμούς ελευθερίας δεν είναι ικανοποιητικός (CFI=.965, χ^2=157.779, df=50, χ^2/df=3.156, RMSEA=.079, AIC=-5548.585, BIC=-5381.968).

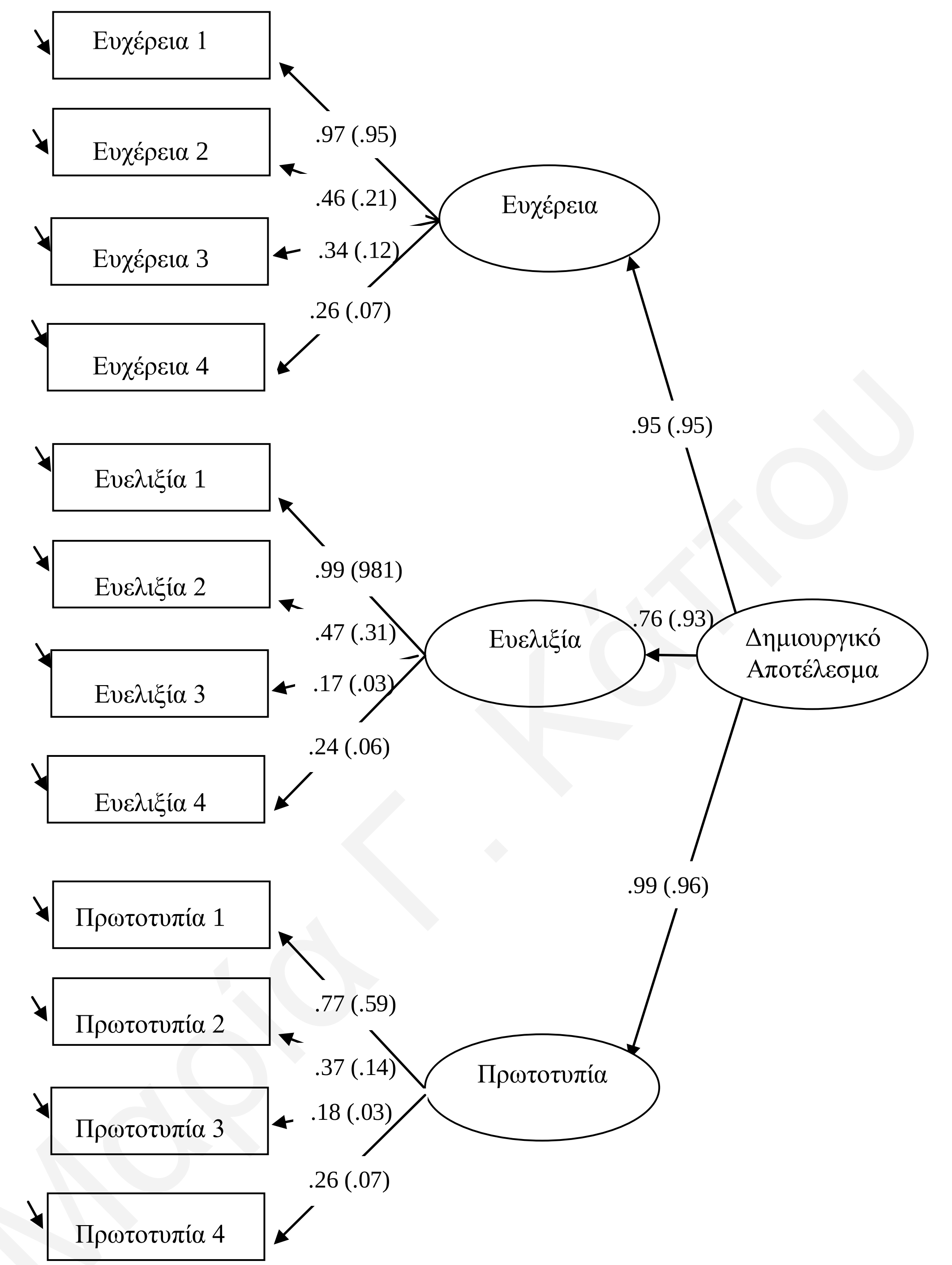
Η δομή του δεύτερου θεωρητικού μοντέλου παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 4.2. Σύμφωνα με αυτό το μοντέλο το μαθηματικά δημιουργικό αποτέλεσμα αποτελείται από τις επιμέρους ικανότητες ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας. Η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση έδειξε ότι το συγκεκριμένο θεωρητικό μοντέλο δεν έχει καλή προσαρμογή στα δεδομένα της παρούσας εργασίας, λόγω του χαμηλού δείκτη CFI και των ακατάλληλων δεικτών χ^2/df και RMSEA (CFI=.324, χ^2=2158.767, df=53, χ^2/df=40.731, RMSEA=.299, AIC=-3553.597, BIC=-3399.477).



* Ο πρώτος αριθμός δείχνει το συντελεστή φόρτισης και ο αριθμός στην παρένθεση την αντίστοιχη ερμηνευόμενη διασπορά.

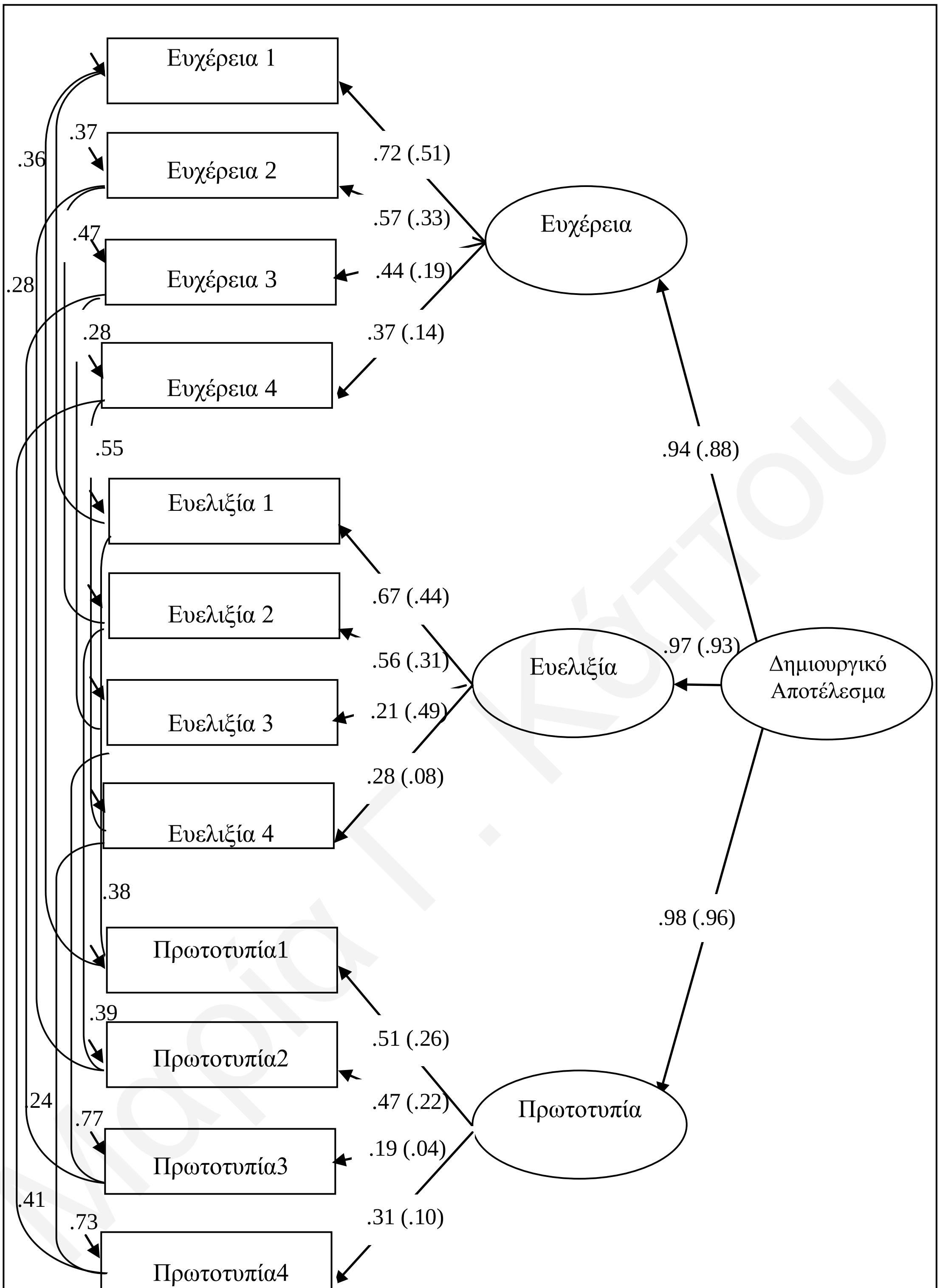
Διάγραμμα 4.1. Μοντέλο 1 για τη Δομή του Δημιουργικού Αποτελέσματος στα Μαθηματικά.

Ως εκ τούτου διερευνήθηκε η προσαρμογή του τρίτου μοντέλου στο οποίο το δημιουργικό αποτέλεσμα ορίζεται με βάση την ευχέρεια, την ευελιξία και την πρωτοτυπία, θεωρώντας ότι οι τρεις ικανότητες συσχετίζονται μεταξύ τους εντός του ίδιου έργου (Διάγραμμα 4.3), λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα των συσχετίσεων που παρουσιάζονται στον Πίνακα Π.1 (Παράρτημα 9). Η προσαρμογή των δεδομένων στο προτεινόμενο μοντέλο ήταν πάρα πολύ καλή (CFI=.990, χ^2=71.173, df=40, χ^2/df=1.804, RMSEA=.056, AIC=-5614.190, BIC=-5405.920).



* Ο πρώτος αριθμός δείχνει το συντελεστή φόρτισης και ο αριθμός στην παρένθεση την αντίστοιχη ερμηνευόμενη διασπορά.

Διάγραμμα 4.2. Μοντέλο 2 για τη Δομή του Δημιουργικού Αποτελέσματος στα Μαθηματικά.



* Ο πρώτος αριθμός δείχνει το συντελεστή φόρτισης και ο αριθμός στην παρένθεση την αντίστοιχη ερμηνευόμενη διασπορά.

Διάγραμμα 4.3. Μοντέλο 3 για τη Δομή του Δημιουργικού Αποτελέσματος στα Μαθηματικά.

Συγκρίνοντας τους δείκτες των τριών μοντέλων, το Μοντέλο 3 έχει τον υψηλότερο δείκτη CFI ($CFI_{\text{Μοντέλο 1}}$=.965, $CFI_{\text{Μοντέλο 2}}$=.324, $CFI_{\text{Μοντέλο 3}}$=.990), τους χαμηλότερους δείκτες AIC και BIC ($AIC_{\text{Μοντέλο 1}}$=-5548.585, $AIC_{\text{Μοντέλο 2}}$=-3553.597, $AIC_{\text{Μοντέλο 3}}$ = -5614.190, $BIC_{\text{Μοντέλο 1}}$=-5381.968, $BIC_{\text{Μοντέλο 2}}$=-3399.477, $BIC_{\text{Μοντέλο 3}}$ = -5405.920) και κατάλληλες τιμές για τους δείκτες χ^2/df ($\chi^2/df_{\text{Μοντέλο 1}}$=3.156, $\chi^2/df_{\text{Μοντέλο 2}}$=40.731, $\chi^2/df_{\text{Μοντέλο 3}}$=1.804), και RMSEA ($RMSEA_{\text{Μοντέλο 1}}$=.079, $RMSEA_{\text{Μοντέλο 2}}$=.299, $RMSEA_{\text{Μοντέλο 3}}$=.056), επιβεβαιώνοντας την εγκυρότητα της δομής του και την καταλληλότητά του να περιγράψει το αποτέλεσμα της μαθηματικής δημιουργικότητας.

Με βάση το Μοντέλο 3, το αποτέλεσμα της μαθηματικής δημιουργικότητας ορίζεται από τις ικανότητες ευχέρειας (r=.94, R^2= 88), ευελιξίας (r=.97, R^2= 93) και πρωτοτυπίας (r=.98, R^2= .96). Οι υψηλές φορτίσεις των άδηλων παραγόντων πρώτης τάξης στον παράγοντα δεύτερης τάξης επιβεβαιώνουν ότι οι τρεις ικανότητες συνθέτουν μια ανώτερη θεωρητική δομή, το αποτέλεσμα της μαθηματικής δημιουργικότητας. Ανάμεσα στις τρεις ικανότητες, η πρωτοτυπία συνεισφέρει περισσότερο στον παράγοντα δεύτερης τάξης, δεδομένου του υψηλότερου συντελεστή φόρτισης.

Οι παράγοντες πρώτης τάξης (ευχέρεια, ευελιξία, πρωτοτυπία) σχηματίζονται από τις αντίστοιχες επιδόσεις των υποκειμένων στα έργα του Εργαλείου Μαθηματικής Δημιουργικότητας. Οι στατιστικά σημαντικές φορτίσεις των επιδόσεων ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας σε καθένα από τα τέσσερα έργα που χρησιμοποιήθηκαν επιβεβαιώνουν ότι τα έργα που χρησιμοποιήθηκαν είναι κατάλληλα για τη μέτρηση των άδηλων παραγόντων πρώτης τάξης. Το έργο 1 έχει τους υψηλότερους συντελεστές φόρτισης στους αντίστοιχους παράγοντες πρώτης τάξης (Ευχέρεια: r=.72, Ευελιξία: r=.67, Πρωτοτυπία: r=.51) ενώ το έργο 3 τους χαμηλότερους συντελεστές φόρτισης (Ευχέρεια: r=.44, Ευελιξία: r=.21, Πρωτοτυπία: r=.19). Ταυτόχρονα, μεταξύ της ευχέρειας, της ευελιξίας και της πρωτοτυπίας εντός του ίδιου έργου υπάρχουν στατιστικά σημαντικές συσχετίσεις, που κυμαίνονται μεταξύ του .24 (Πρωτοτυπία - Ευχέρεια έργο 3) και του .77 (Πρωτοτυπία - Ευελιξία έργο 3).

Ομάδες υποκειμένων με βάση το Δημιουργικό Αποτέλεσμα στα Μαθηματικά

Τα υποκείμενα της έρευνας διαχωρίστηκαν σε τέσσερις ομάδες ανάλογα με την επίδοσή τους στο Εργαλείο Μαθηματικής Δημιουργικότητας. Η επίδοση των μαθητών προέκυψε ως το άθροισμα των επιμέρους επιδόσεων τους στην ικανότητα ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας. Λόγω του ότι η κλίμακα αξιολόγησης καθεμιάς από τις ικανότητες είχε ως μέγιστο βαθμό το 1, ο μέγιστος βαθμός μαθηματικής δημιουργικότητας που μπορούσε να λάβει κάποιος μαθητής ήταν το 3. Ως εκ τούτου, η Ομάδα 1 περιλαμβάνει τα άτομα που η επίδοσή τους ανήκει στο χαμηλότερο 15% των επιδόσεων (Επίδοση ≤.75), η Ομάδα 2 περιλαμβάνει τα άτομα που η επίδοσή τους ανήκει μεταξύ του 15% και του 50% των επιδόσεων (.75< Επίδοση ≤1.07), η Ομάδα 3 περιλαμβάνει τα άτομα που η επίδοσή τους ανήκει μεταξύ του 50% και του 85% των επιδόσεων (1.07< Επίδοση ≤ 1.46) και η Ομάδα 4 περιλαμβάνει τα άτομα που η επίδοσή τους ανήκει στο υψηλότερο 15% των επιδόσεων (1.46 < Επίδοση ≤3).

Ο Πίνακας 4.2 παρουσιάζει τα περιγραφικά χαρακτηριστικά των ατόμων που ανήκουν σε κάθε ομάδα. Από τον Πίνακα 4.2 φαίνεται ότι ο πληθυσμός της Ομάδας 2 (N=168) και 3 (N=168) είναι μεγαλύτερος σε σχέση με τον πληθυσμό των Ομάδων 1 (N=71) και 4 (N=69). Επιπρόσθετα, η πλειοψηφία των ατόμων που ανήκουν στις Ομάδες 1 και 2 είναι μαθητές της Δ’ τάξης, ενώ η πλειοψηφία των ατόμων που ανήκουν στην Ομάδα 4 είναι μαθητές της Ε’ και Στ’ τάξης.

Πίνακας 4.2

Περιγραφικά Χαρακτηριστικά Ομάδων Μαθητών.

	Δ’ τάξη N (%)	Ε’ τάξη N (%)	Στ’ τάξη N (%)	Σύνολο N (%)
Ομάδα 1	46 (9.66%)	20 (4.20%)	5 (1.05%)	71 (14.92%)
Ομάδα 2	82 (17.23%)	53 (11.13%)	33 (6.93%)	168 (35.29%)
Ομάδα 3	56 (11.76%)	65 (13.66%)	47 (9.87%)	168 (35.29%)
Ομάδα 4	18 (3.78%)	27 (5.67%)	24 (5.04%)	69 (14.50%)
Σύνολο	202 (42.44%)	165 (34.67%)	109 (22.90%)	476 (100%)

Οι μέσοι όροι και οι τυπικές αποκλίσεις των τεσσάρων ομάδων υποκειμένων στην ικανότητα ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας που επέδειξαν στο Εργαλείο Μαθηματικής Δημιουργικότητας παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.3. Όπως φαίνεται από τους μέσους όρους, η Ομάδα 4 έχει την καλύτερη ικανότητα ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας, ακολουθούμενη από την Ομάδα 3, την Ομάδα 2 και την Ομάδα 1.

Πίνακας 4.3

Μέσοι Όροι Ευχέρειας, Ευελιξίας και Πρωτοτυπίας των Ομάδων Μαθητών.

	Ομάδα 1 $\bar{X}$ (SD)	Ομάδα 2 $\bar{X}$ (SD)	Ομάδα 3 $\bar{X}$ (SD)	Ομάδα 4 $\bar{X}$ (SD)	Σύνολο $\bar{X}$ (SD)
Ευχέρεια	.190 (.057)	.322 (.071)	.415 (.087)	.551 (.097)	.368 (.132)
Ευελιξία	.167 (.035)	.235 (.038)	.310 (.044)	.409 (.057)	.277 (.085)
Πρωτοτυπία	.206 (.065)	.349 (.077)	.515 (.924)	.701 (.086)	.437 (.172)
Μαθηματική Δημιουργικότητα	.563 (.121)	.907 (.098)	1.239 (.112)	1.661 (.163)	1.082 (.350)

Τα αποτελέσματα της πολλαπλής ανάλυσης διασποράς που ακολούθησε, έδειξαν ότι μεταξύ των ομάδων υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές στο βαθμό μαθηματικής δημιουργικότητας (Pillai's $F_{(3,472)}$= 68.245, p<.05). Όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.4, υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των τεσσάρων ομάδων μαθητών που οφείλονται τόσο στην ικανότητα ευχέρειας ($F_{(3, 472)}$=457.398, p<.01) όσο και στην ικανότητα ευελιξίας ($F_{(3, 472)}$=533.720, p<.01) και πρωτοτυπίας ($F_{(3,472)}$= 277.598, p<.01). Λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι μεταξύ των ομάδων υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές που οφείλονταν στα τρία χαρακτηριστικά της μαθηματικής δημιουργικότητας, φαίνεται ότι οι ομάδες ήταν διακριτές μεταξύ τους και κάθε ομάδα είχε τα δικά της χαρακτηριστικά ως προς τη μαθηματική δημιουργικότητα.

Πίνακας 4.4

Αποτελέσματα Πολλαπλής Ανάλυσης Διασποράς για τα Χαρακτηριστικά Μαθηματικής Δημιουργικότητας.

	Άθροισμα Τετραγώνων	Βαθμοί Ελευθερίας	Μέσο Τετράγωνο	F	Επίπεδο σημαντικότητας
Ευχέρεια	5.271	3	1.757	457.398	p<.01
Ευελιξία	2.549	3	0.850	533.720	p<.01
Πρωτοτυπία	10.892	3	3.631	277.598	p<.01

Το δημιουργικό άτομο στα μαθηματικά εξετάστηκε ως προς δύο άξονες: τα χαρακτηριστικά δημιουργικής προσωπικότητας και τα γνωστικά χαρακτηριστικά, όπως παρουσιάζονται στη συνέχεια.

Χαρακτηριστικά Δημιουργικής Προσωπικότητας

Η δημιουργική προσωπικότητα στα μαθηματικά εξετάστηκε με το Εργαλείο Δημιουργικής Προσωπικότητας. Ακολουθούν τα περιγραφικά χαρακτηριστικά του Εργαλείου Δημιουργικής Προσωπικότητας και τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση για τη δομή της δημιουργικής προσωπικότητας.

Περιγραφικά Αποτελέσματα του Εργαλείου Δημιουργικής Προσωπικότητας

Τα περιγραφικά χαρακτηριστικά του Εργαλείου Δημιουργικής Προσωπικότητας παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.5. Ειδικότερα, παρουσιάζονται οι μέσοι όροι, οι τυπικές αποκλίσεις, το εύρος, η λοξότητα και η κύρτωση κάθε δήλωσης που περιλαμβάνεται στο εργαλείο. Έγινε προσπάθεια ώστε οι δηλώσεις να ομαδοποιηθούν σε κατηγορίες δηλώσεων που εκφράζουν τους αντίστοιχους παράγοντες της δημιουργικής προσωπικότητας, σύμφωνα με το προτεινόμενο θεωρητικό μοντέλο.

Όπως φαίνεται από τους μέσους όρους των δηλώσεων, ο βαθμός συμφωνίας των υποκειμένων κυμαινόταν μεταξύ των τιμών 4.330 και 5.894 σε κλίμακα 1-7. Φαίνεται ότι οι μαθητές συμφώνησαν με τις δηλώσεις Δ2 («Μπορώ να εξηγήσω στο δάσκαλό μου με ποιο τρόπο έλυσα ένα πρόβλημα»), Δ5 («Όταν περιμένω ρέστα χρησιμοποιώ τα μαθηματικά που ξέρω, για να κάνω υπολογισμούς») και Δ17 («Όταν κλείσω τα μάτια μου, μπορώ εύκολα να φανταστώ μια εικόνα, μια σκηνή ή ένα πρόσωπο που έχω ξαναδεί»), οι οποίες είχαν μέσο όρο πάνω από 5.500. Αντίθετα, οι μαθητές διαφώνησαν με τις δηλώσεις Δ10 («Χρησιμοποιώ και βελτιώνω τις ιδέες των συμμαθητών μου στα μαθηματικά»), Δ7 («Εντοπίζω εύκολα μοτίβα αριθμών ή σχημάτων») και Δ20 («Όταν γράφω κάνω ελάχιστα ή καθόλου γραμματικά και ορθογραφικά λάθη»), οι οποίες είχαν τους χαμηλότερους μέσους όρους. Όσον αφορά στις τιμές της λοξότητας και της κύρτωσης, οι αντίστοιχες τιμές σε όλες τις δηλώσεις είναι μικρότερες από 2, στοιχείο που δείχνει ότι οι απαντήσεις των μαθητών στις δηλώσεις του Εργαλείου Δημιουργικής Προσωπικότητας ακολουθούν την κανονική κατανομή.

Πίνακας 4.5

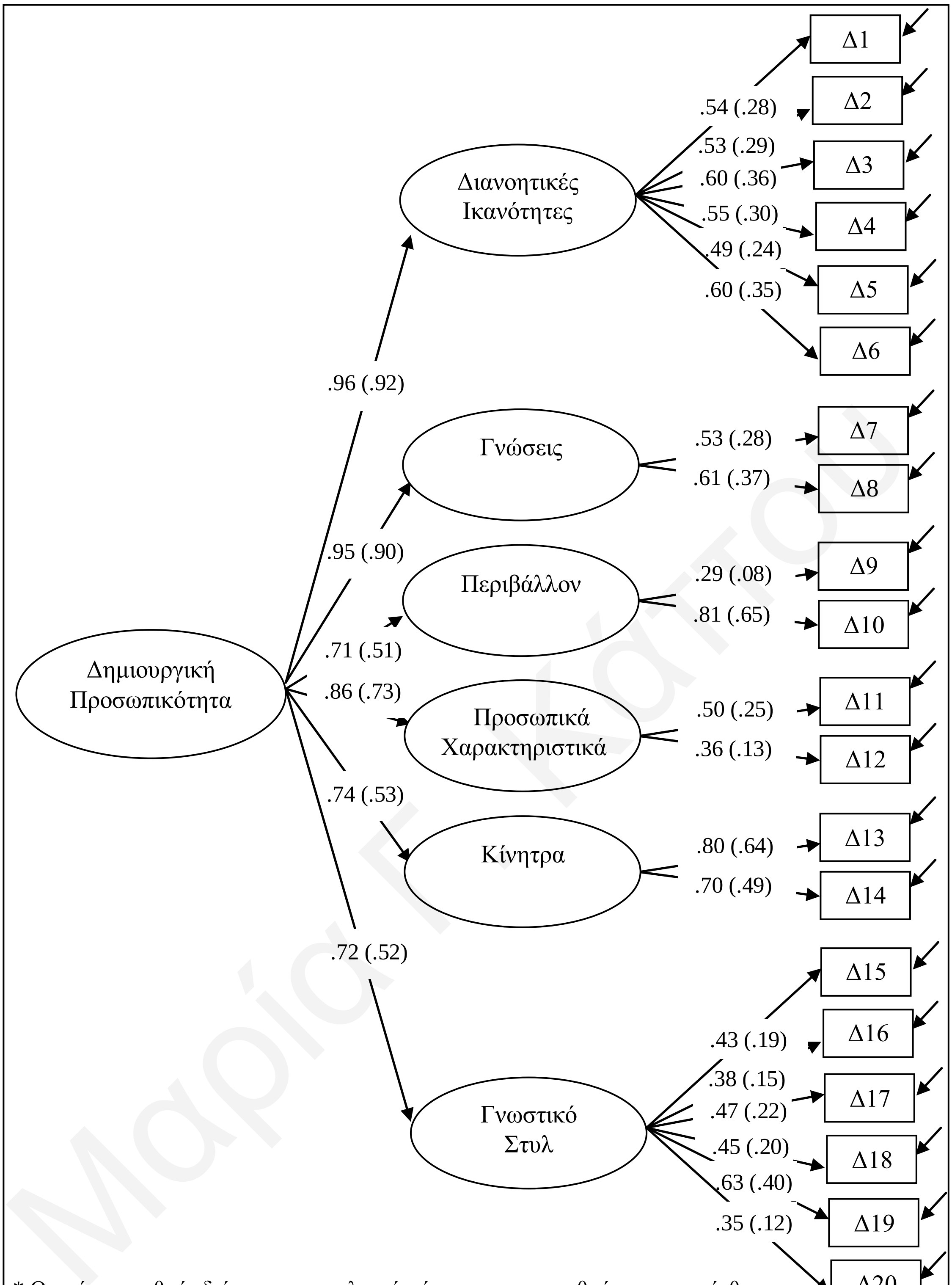
Περιγραφικά Χαρακτηριστικά Εργαλείου Δημιουργικής Προσωπικότητας.

Παράγοντας	Δήλωση	Μέσος όρος	Τυπική Απόκλιση	Εύρος	Λοξότητα	Κύρτωση
Διανοητικές Ικανότητες (Αναλυτική)	Δ1	5.400	1.498	7	-.784	-.069
	Δ2	5.860	1.456	7	-1.253	.840
(Συνθετική)	Δ3	4.934	1.748	7	-.570	-.553
	Δ4	4.820	1.866	7	-.597	-.645
(Πρακτική)	Δ5	5.653	1.781	7	-1.345	.815
	Δ6	5.250	1.783	7	-.841	-.289
Γνώσεις/ Συλλογισμός	Δ7	4.513	1.826	7	-.433	-.796
	Δ8	5.384	2.028	7	-.854	-.093
Περιβάλλον	Δ9	4.588	2.200	7	-.386	-1.289
	Δ10	4.330	1.924	7	-.258	-1.038
Προσωπικά χαρακτηριστικά	Δ11	5.370	1.432	7	-.730	.028
	Δ12	5.202	1.952	7	-.803	-.509
Κίνητρα	Δ13	4.966	1.926	7	-.661	-.687
	Δ14	5.211	1.937	7	-.863	-.416
Γνωστικό Στυλ (Χωρικό)	Δ15	5.139	1.996	7	-.871	-.468
	Δ16	5.051	1.954	7	-.685	-.711
(Οπτικό)	Δ17	5.894	1.642	7	-1.610	1.770
	Δ18	5.072	1.829	7	-.723	-.487
(Λεκτικό)	Δ19	5.181	1.656	7	-.661	-.687
	Δ20	4.560	1.804	7	-.385	-.726

Η δομή των χαρακτηριστικών δημιουργικής προσωπικότητας ορίστηκε με βάση το θεωρητικό μοντέλο που περιέγραψαν οι Sternberg και Lubart (1996) και προσαρμόστηκε στον τομέα των μαθηματικών, με στόχο να αναφέρεται στη μαθηματικά δημιουργική προσωπικότητα. Για να εξεταστεί η δομή των χαρακτηριστικών, ελέγχθηκε η εγκυρότητα του προτεινόμενου θεωρητικού μοντέλου. Το μοντέλο αποτελείται από έξι διακριτούς παράγοντες, τον παράγοντα «Διανοητικές Ικανότητες», τον παράγοντα «Γνώσεις/ Συλλογισμός», τον παράγοντα «Περιβάλλον», τον παράγοντα «Προσωπικά Χαρακτηριστικά», τον παράγοντα «Κίνητρα» και τον παράγοντα «Γνωστικό Στυλ». Λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα από την επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση, η δομή του θεωρητικού μοντέλου φαίνεται να είναι κατάλληλη, για να περιγράψει τη δομή των χαρακτηριστικών δημιουργικής προσωπικότητας (CFI=.908, χ^2= 325.396, df=165, χ^2/df=1.972, RMSEA=.052).

Όλες οι δηλώσεις που περιλήφθηκαν στο Εργαλείο Δημιουργικής Προσωπικότητας είχαν στατιστικά σημαντικές φορτίσεις στους αντίστοιχους παράγοντες πρώτης τάξης, όπως παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 4.4. Ταυτόχρονα, οι συντελεστές φόρτισης των έξι παραγόντων πρώτης τάξης στον άδηλο παράγοντα ανώτερης τάξης είναι στατιστικά σημαντικοί. Λόγω του ότι οι έξι παράγοντες φορτίζουν σε ένα παράγοντα και δεν έχουν μεταξύ τους οποιεσδήποτε συσχετίσεις, επιβεβαιώνεται η καταλληλότητα των δηλώσεων για να ερμηνεύσουν τους αντίστοιχους άδηλους παράγοντες.

Με βάση το Διάγραμμα 4.4 οι παράγοντες «Διανοητικές Ικανότητες» (r=.96, R^2= .92), «Γνώσεις» (r=.95, R^2= .90) και «Προσωπικά Χαρακτηριστικά» (r=.86, R^2= .73) έχουν τις υψηλότερες φορτίσεις στη «Δημιουργική Προσωπικότητα», ενώ οι παράγοντες «Περιβάλλον» (r=.71, R^2=.51), «Γνωστικό Στυλ» (r=.72, R^2= .52) και «Κίνητρα» (r=.74, R^2= .53) έχουν τις χαμηλότερες φορτίσεις.



* Ο πρώτος αριθμός δείχνει το συντελεστή φόρτισης και ο αριθμός στην παρένθεση την αντίστοιχη ερμηνευόμενη διασπορά.

Διάγραμμα 4.4. Η Δομή της Δημιουργικής Προσωπικότητας στα Μαθηματικά.

Για τη διερεύνηση των γνωστικών χαρακτηριστικών του δημιουργικού ατόμου χρησιμοποιήθηκαν τρεις ενδείξεις: η κατοχή μαθηματικών γνώσεων, η γενική δημιουργική ικανότητα και η νοημοσύνη. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα περιγραφικά χαρακτηριστικά των αντίστοιχων εργαλείων.

Περιγραφικά Αποτελέσματα του Εργαλείου Γενικής Δημιουργικότητας

Όπως και τα έργα μαθηματικής δημιουργικότητας, τα έργα γενικής δημιουργικότητας αξιολογήθηκαν με βάση τον αριθμό των λύσεων που πρότειναν οι μαθητές (ευχέρεια), τον αριθμό των διαφορετικών ιδεών που αξιοποιήθηκαν στις λύσεις (ευελιξία) και το βαθμό καινοτομίας των λύσεων (πρωτοτυπία). Κατά μέσο όρο στο Έργο 1 προτάθηκαν πάνω από έξι απαντήσεις (Μ.Ο.= 6.634, S.D.=3.664, Εύρος= 24) και στο Έργο 2 προτάθηκαν περισσότερες από οκτώ απαντήσεις (Μ.Ο.= 8.792, S.D.=3.316, Εύρος= 20). Όσον αφορά στην ευελιξία, στο Έργο 1 κατά μέσο όρο αξιοποιήθηκαν περισσότερες από δύο διαφορετικές ιδέες στις απαντήσεις των μαθητών (Μ.Ο.= 2.235, S.D.=0.745, Εύρος= 3) και στο Έργο 2 αξιοποιήθηκαν περισσότερες από τέσσερις διαφορετικές ιδέες (Μ.Ο.= 4.092, S.D.=1.555, Εύρος= 7). Τέλος, τόσο στο Έργο 1 (Μ.Ο.= 3.267, S.D.=1.251, Εύρος= 5) όσο και στο Έργο 2 (Μ.Ο.= 3.872, S.D.=1.182, Εύρος= 5) μια από τις απαντήσεις των μαθητών αναφέρθηκε σε ποσοστό 5-10 % των υποκειμένων.

Για σκοπούς σύγκρισης της επίδοσης των μαθητών σε καθένα από τα έργα γενικής δημιουργικότητας, ο Πίνακας 4.6 παρουσιάζει το μέσο όρο ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας, σε κλίμακα που κυμαίνεται μεταξύ του 0 και του 1. Όπως φαίνεται από τους μέσους όρους, οι μαθητές πρότειναν περισσότερες απαντήσεις στο Έργο 2 (Μ.Ο. $_{\text{Ευχέρειας}}$= .440) από ότι στο Έργο 1 (Μ.Ο. $_{\text{Ευχέρειας}}$= .276), αλλά οι ιδέες που αξιοποιήθηκαν στο Έργο 1 (Μ.Ο. $_{\text{Ευελιξίας}}$= .745) ήταν περισσότερες από αυτές που αξιοποιήθηκαν στις απαντήσεις του Έργου 2 (Μ.Ο. $_{\text{Ευελιξίας}}$ = .512). Στα δύο έργα ο βαθμός πρωτοτυπίας ήταν σχετικά υψηλός (Έργο 1: Μ.Ο. $_{\text{Πρωτοτυπίας}}$ = .653, Έργο 2: Μ.Ο. $_{\text{Πρωτοτυπίας}}$= .774) με πιο πρωτότυπες απαντήσεις να προτείνονται στο Έργο 2.

Πίνακας 4.6

Περιγραφικά Χαρακτηριστικά Εργαλείου Γενικής Δημιουργικότητας.

Έργα		Μέσος όρος	Τυπική Απόκλιση	Εύρος	Λοξότητα	Κύρτωση
Έργο 1	Ευχέρεια	.276	.153	1	.889	1.607
	Ευελιξία	.745	.248	1	-.687	-.006
	Πρωτοτυπία	.653	.250	1	-.625	-.337
Έργο 2	Ευχέρεια	.440	.166	1	.080	-.035
	Ευελιξία	.512	.194	1	-.121	-.567
	Πρωτοτυπία	.774	.236	1	-1.234	.870
Σύνολο	Ευχέρεια	.358	.130	1	.510	.683
	Ευελιξία	.628	.166	1	-.466	.025
	Πρωτοτυπία	.714	.188	1	-.684	.013

Περιγραφικά Αποτελέσματα του Εργαλείου Μαθηματικής Ικανότητας

Ο Πίνακας 4.7 παρουσιάζει τα περιγραφικά χαρακτηριστικά του Εργαλείου Μαθηματικής Ικανότητας για κάθε τάξη. Ο μέσος όρος επίδοσης των μαθητών της Στ’ τάξης ήταν υψηλότερος (Μ.Ο.= .710) σε σχέση με το μέσο όρο επίδοσης των μαθητών της Ε’ (Μ.Ο.= .695) και της Δ’ τάξης (Μ.Ο.= .646). Βέβαια, παρατηρώντας τους μέσους όρους σε κάθε έργο του Εργαλείου Μαθηματικής Ικανότητας υπήρχαν περιπτώσεις στις οποίες οι μαθητές της Δ’ ή της Ε’ τάξης είχαν υψηλότερο μέσο όρο από τους συμμαθητές τους. Ενδεικτικά, οι μαθητές της Δ’ τάξης είχαν τον υψηλότερο μέσο όρο στο Έργο 2 (Μ.Ο.= .842) σε σχέση με τους μαθητές της Ε’ (Μ.Ο.= .821) και της Στ’ τάξης (Μ.Ο.= .630). Στο Έργο 1 την υψηλότερη επίδοση είχαν οι μαθητές της Ε’ τάξης (Μ.Ο.= .802), ακολουθούμενοι από τους μαθητές της Δ’ (Μ.Ο.= .728) και της Στ’ (Μ.Ο.= .630). Οι μαθητές της Στ’ τάξης είχαν τον υψηλότερο μέσο όρο από τους συμμαθητές τους στα Έργα 3, 4 και 5.

Συγκρίνοντας την επίδοση των μαθητών κάθε τάξης στα έργα του Εργαλείου Μαθηματικής Ικανότητας φαίνεται ότι οι μαθητές της Δ’ τάξης είχαν πιο ψηλό μέσο όρο στο Έργο 2 που αφορούσε τη συνέχιση μοτίβων (Μ.Ο.= .842) και πιο χαμηλό μέσο όρο στο Έργο 3 που αφορούσε την ερμηνεία γραφικής παράστασης (Μ.Ο.= .362). Οι μαθητές της Ε’ τάξης είχαν πιο ψηλό μέσο όρο στο Έργο 2 που αφορούσε τη συνέχιση μοτίβων (Μ.Ο.= .821) και πιο χαμηλό μέσο όρο στο Έργο 5 που αφορούσε τον υπολογισμό περιμέτρου και εμβαδού σε δοθέν σχήμα (Μ.Ο.=.326). Οι μαθητές της Στ' τάξης είχαν πιο ψηλό μέσο όρο στο Έργο 3 (γραφική παράσταση) (Μ.Ο.= .917) και πιο χαμηλό μέσο όρο στο Έργο 5 (Μ.Ο.=.555).

Πίνακας 4.7

Περιγραφικά Χαρακτηριστικά Εργαλείου Μαθηματικής Ικανότητας.

Έργα		Μέσος όρος	Τυπική Απόκλιση	Εύρος
Έργο 1	Δ' Τάξη	.728	.208	1
	Ε' Τάξη	.802	.166	1
	Στ' τάξη	.630	.300	1
Έργο 2	Δ' Τάξη	.842	.273	1
	Ε' Τάξη	.821	.288	1
	Στ' τάξη	.717	.333	1
Έργο 3	Δ' Τάξη	.362	.383	1
	Ε' Τάξη	.660	.276	1
	Στ' τάξη	.917	.193	1
Έργο 4	Δ' Τάξη	.637	.312	1
	Ε' Τάξη	.709	.415	1
	Στ' τάξη	.858	.258	1
Έργο 5	Δ' Τάξη	.534	.406	1
	Ε' Τάξη	.326	.320	1
	Στ' τάξη	.555	.453	1
Σύνολο	Δ' Τάξη	.646	.192	1
	Ε' Τάξη	.695	.178	1
	Στ' τάξη	.710	.217	1

Περιγραφικά Αποτελέσματα του Εργαλείου Νοημοσύνης

Τα περιγραφικά αποτελέσματα του Εργαλείου Νοημοσύνης παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.8. Συγκεκριμένα, στον Πίνακα 4.8 παρουσιάζονται οι μέσοι όροι και οι τυπικές αποκλίσεις της συνολικής επίδοσης των υποκειμένων στο εργαλείο, καθώς και σε κάθε κατηγορία έργων. Λόγω του ότι στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας χρησιμοποιήθηκαν τα επίπεδα D και E του NNAT, τα οποία περιλαμβάνουν διαφορετικό αριθμό έργων ανά κατηγορία, υπολογίστηκε ο λόγος των ορθών απαντήσεων που έδωσαν οι μαθητές σε κάθε κατηγορία έργου προς τον αριθμό των αντίστοιχων έργων του εργαλείου. Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 4.8, οι μαθητές είχαν υψηλή επίδοση στα έργα συμπλήρωσης μοτίβου (Μ.Ο.= .793) ενώ είχαν χαμηλή επίδοση στα έργα αναλογικού συλλογισμού (Μ.Ο.= .386). Η συνολική επίδοση των υποκειμένων στο Εργαλείο Μέτρησης Νοημοσύνης ήταν σχετικά χαμηλή, όπως υποδηλώνεται από το μέσο όρο (Μ.Ο. =19.019).

Πίνακας 4.8

Περιγραφικά Χαρακτηριστικά Εργαλείου Νοημοσύνης.

Έργα	Μέσος όρος	Τυπική Απόκλιση	Εύρος	Λοξότητα	Κύρτωση
Συμπλήρωση Μοτίβου	.793	.213	1	-1.134	1.188
Αναλογικός Συλλογισμός	.386	.210	1	.282	-.366
Σειριακός Συλλογισμός	.540	.256	1	-.100	-.851
Χωρική Οπτικοποίηση	.432	.214	1	.167	-.732
Σύνολο	19.019	6.471	38	.193	-.511

Όσον αφορά στη νοημοσύνη, κρίθηκε σκόπιμη η διερεύνηση της Threshold Theory of Intelligence. Σύμφωνα με τη συγκεκριμένη θεωρία υπάρχει συσχέτιση μεταξύ της νοημοσύνης και της δημιουργικότητας σε όλο το εύρος του πληθυσμού, με μόνη εξαίρεση τα άτομα με ιδιαίτερα υψηλό δείκτη νοημοσύνης στα οποία αυτή η σχέση δεν υφίσταται (Runco, 2007 · Torrance, 1962). Ως εκ τούτου, έγινε συσχετιστική ανάλυση ανάμεσα στα στοιχεία της μαθηματικής δημιουργικότητας (ευχέρεια, ευελιξία, πρωτοτυπία) και της νοημοσύνης, αρχικά στο συνολικό πληθυσμό και ακολούθως σε υποομάδες πληθυσμών.

Ο Πίνακας 4.9 παρουσιάζει τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη συσχετιστική ανάλυση ανάμεσα στη μαθηματική δημιουργικότητα και το βαθμό νοημοσύνης των μαθητών. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης έδειξαν ότι στο συνολικό πληθυσμό υπήρχαν στατιστικά σημαντικές συσχετίσεις μεταξύ των δημιουργικών ικανοτήτων και της νοημοσύνης. Ειδικότερα, ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ της νοημοσύνης και της ευχέρειας ήταν r=.365, ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ της νοημοσύνης και της ευελιξίας ήταν r=.337 και ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ της νοημοσύνης και της πρωτοτυπίας ήταν r=.295. Παρόλα αυτά, για τους μαθητές που βρίσκονται στο ανώτερο

5% (N=29) των επιδόσεων του NNAT η μαθηματική δημιουργικότητα δεν έχει στατιστικά σημαντική συσχέτιση με τη νοημοσύνη (p<.05).

Πίνακας 4.9

Συσχέτιση του Βαθμού Νοημοσύνης με τη Μαθηματική Δημιουργικότητα.

	Συνολικός πληθυσμός r (p)	Επίδοση > 95% r (p)
Ευχέρεια	.365 (.001)*	.210 (.274)
Ευελιξία	.337 (.001)*	.038 (.847)
Πρωτοτυπία	.295 (.001)*	.076 (.695)

* Στατιστικά σημαντική συσχέτιση σε επίπεδο p<.05.

Σύγκριση Ομάδων Μαθητών ως προς τα Γνωστικά Χαρακτηριστικά

Με στόχο τη σύγκριση των γνωστικών χαρακτηριστικών που παρουσιάζουν οι τέσσερις ομάδες μαθητών που διαφέρουν ως προς το βαθμό μαθηματικής δημιουργικότητας έγινε πολλαπλή ανάλυση διασποράς. Ο Πίνακας 4.10 παρουσιάζει τους μέσους όρους και τις τυπικές αποκλίσεις των τεσσάρων ομάδων μαθητών ως προς την κατοχή μαθηματικών γνώσεων, το βαθμό νοημοσύνης και τη γενική δημιουργική ικανότητα και ο Πίνακας 4.11 παρουσιάζει τα αποτελέσματα της πολλαπλής ανάλυσης διασποράς.

Πίνακας 4.10

Μέσοι Όροι Νοημοσύνης, Μαθηματικών Γνώσεων και Γενικής Δημιουργικότητας των Ομάδων Μαθητών.

	Μαθηματικές Γνώσεις	Γενική Δημιουργικότητα	Νοημοσύνη
Ομάδα 1 $\bar{X}$ (SD)	.516 (.185)	1.501 (.445)	14.817 (4.975)
Ομάδα 2 $\bar{X}$ (SD)	.634 (.180)	1.635 (.401)	17.840 (6.446)
Ομάδα 3 $\bar{X}$ (SD)	.725 (.169)	1.769 (.381)	20.393 (5.842)
Ομάδα 4 $\bar{X}$ (SD)	.836 (.132)	1.897 (.374)	22.870 (6.290)
Σύνολο $\bar{X}$ (SD)	.678 (.195)	1.700 (.414)	19.019 (6.470)

Όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα 4.10, η Ομάδα 4 έχει την υψηλότερη επίδοση στο Εργαλείο Μαθηματικής Ικανότητας, στο Εργαλείο Νοημοσύνης και στο Εργαλείο Γενικής Δημιουργικότητας, ακολουθούμενη από την Ομάδα 3, την Ομάδα 2 και την Ομάδα 1. Τα αποτελέσματα της πολλαπλής ανάλυσης διασποράς επιβεβαίωσαν ότι οι μαθητές που ανήκουν σε κάθε ομάδα εκτός από το διαφορετικό βαθμό μαθηματικής δημιουργικότητας, διαφέρουν μεταξύ τους και ως προς τα άλλα γνωστικά χαρακτηριστικά (Pillai's $F_{(3,472)}$= 17.094, $p<.05$). Πιο συγκεκριμένα, η ανάλυση έδειξε ότι οι διαφορές ανάμεσα στις ομάδες μαθητών οφείλονται στην κατοχή μαθηματικών γνώσεων ($F_{(3, 472)}$=49.162, $p<.01$), στο βαθμό νοημοσύνης ($F_{(3, 472)}$=26.076, $p<.01$) και στη γενική δημιουργική ικανότητα ($F_{(3,472)}$=14.733, $p<.01$). Ταυτόχρονα, η ανάλυση έδειξε ότι οι τέσσερις ομάδες μαθητών που διαφέρουν ως προς τη μαθηματική δημιουργικότητα, δημιουργούν τέσσερις ομάδες μαθητών που διαφέρουν στατιστικά σημαντικά μεταξύ τους ως προς τις μαθηματικές γνώσεις και το βαθμό νοημοσύνης ($p<.05$). Όσον αφορά στη γενική δημιουργική ικανότητα σχηματίζονται δύο κατηγορίες μαθητών. Η πρώτη κατηγορία σχηματίζεται από τις Ομάδες 1 και 2 (p=.126) και η δεύτερη κατηγορία σχηματίζεται από τις Ομάδες 3 και 4 (p=.169) που μεταξύ τους έχουν παρόμοια επίδοση στο Εργαλείο Γενικής Δημιουργικότητας.

Πίνακας 4.11

Αποτελέσματα Πολλαπλής Ανάλυσης Διασποράς για τα Γνωστικά Χαρακτηριστικά.

	Άθροισμα Τετραγώνων	Βαθμοί Ελευθερίας	Μέσο Τετράγωνο	F	Επίπεδο σημαντικότητας
Μαθηματικές γνώσεις	4.294	3	1.431	49.162	p<.01
Γενική Δημιουργικότητα	6.983	3	2.328	14.733	p<.01
Νοημοσύνη	2827.652	3	942.551	26.076	p<.01

Σύγκριση των Μαθητών από διαφορετικές Ηλικιακές Ομάδες

Η διερεύνηση της ηλικίας, ως ένα από τους παράγοντες που ενδεχομένως να επηρεάζει την ικανότητα μαθηματικής δημιουργικότητας, έγινε μέσω της σύγκρισης της αντίστοιχης ικανότητας των μαθητών ανάλογα με την τάξη στην οποία φοιτούσαν. Οι μέσοι όροι των τριών ηλικιακών ομάδων στις ικανότητες ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας στα έργα μαθηματικής δημιουργικότητας παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.12. Όπως φαίνεται από τους μέσους όρους, οι μαθητές της Στ’ τάξης είχαν την υψηλότερη επίδοση στις τρεις ικανότητες ακολουθούμενοι από τους μαθητές της Ε’ και της Δ’ τάξης.

Πίνακας 4.12

Μέσοι Όροι Μαθηματικής Δημιουργικότητας ανάμεσα στους Μαθητές των τριών Τάξεων.

		Δ’ Τάξη	Ε’ Τάξη	Στ’ Τάξη
		$\bar{X}$ (SD)	$\bar{X}$ (SD)	$\bar{X}$ (SD)
Μαθηματική Δημιουργικότητα	Ευχέρεια	.330 (.132)	.376 (.122)	.428 (.122)
	Ευελιξία	.255 (.082)	.287 (.082)	.300 (.96)
	Πρωτοτυπία	.394 (.161)	.457 (.176)	.486 (.169)

Η πολλαπλή ανάλυση διασποράς έδειξε ότι οι τρεις ομάδες μαθητών είχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές που οφείλονται στις ικανότητες ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας, ως αποτέλεσμα της ηλικιακής τους διαφοράς (Pillai’s $F_{(3,472)}$= 7.805, p<.05). Ο Πίνακας 4.13 παρουσιάζει τα αποτελέσματα της πολλαπλής ανάλυσης διασποράς.

Πίνακας 4.13

Αποτελέσματα Πολλαπλής Ανάλυσης Διασποράς για τη Μαθηματική Δημιουργικότητα σε σχέση με την Ηλικία.

	Άθροισμα Τετραγώνων	Βαθμοί Ελευθερίας	Μέσο Τετράγωνο	F	Επίπεδο σημαντικότητας
Ευχέρεια	.685	2	.342	21.389	p<0.01
Ευελιξία	.173	2	.087	12.606	p<0.01
Πρωτοτυπία	.698	2	.349	12.319	p<0.01

Επιπρόσθετα, τα αποτελέσματα της ανάλυσης έδειξαν ότι υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές και στα τρία χαρακτηριστικά της μαθηματικής δημιουργικότητας ανάμεσα στις τρεις ηλικιακές ομάδες μαθητών (p<.05). Πιο συγκεκριμένα, εντοπίστηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές ως προς την ικανότητα ευχέρειας (p<.05) μεταξύ των μαθητών των τριών τάξεων. Ως προς τις ικανότητες ευελιξίας και πρωτοτυπίας, παρατηρήθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές ($p<.05$) μεταξύ των μαθητών της Δ’ τάξης και των μεγαλύτερων σε ηλικία μαθητών, ενώ δεν εντοπίστηκαν αντίστοιχες διαφορές στις ικανότητες ευελιξίας ($p=.477$) και πρωτοτυπίας ($p=.372$) μεταξύ των μαθητών της Ε’ και Στ’ τάξης.

Ικανότητα Πρόβλεψης της Μαθηματικής Δημιουργικότητας από τα Χαρακτηριστικά του Ατόμου

Για τη διερεύνηση της ικανότητας πρόβλεψης της μαθηματικής δημιουργικότητας από τα γνωστικά χαρακτηριστικά, τα χαρακτηριστικά προσωπικότητας και την ηλικιακή ανάπτυξη του ατόμου, έγινε παλινδρομική ανάλυση. Ειδικότερα, το Διάγραμμα 4.5 παρουσιάζει το μοντέλο στο οποίο τα γνωστικά χαρακτηριστικά, τα χαρακτηριστικά προσωπικότητας και η ηλικία του ατόμου αποτελούν δείκτες πρόβλεψης της μαθηματικής δημιουργικής ικανότητας. Ανάμεσα στα γνωστικά χαρακτηριστικά που διερευνήθηκαν περιλήφθηκε η μαθηματική ικανότητα, ο βαθμός νοημοσύνης και η γενική δημιουργικότητα των μαθητών. Τα χαρακτηριστικά προσωπικότητας ορίστηκαν με βάση τις αντιλήψεις των μαθητών για το γνωστικό στυλ, τις γνώσεις, τις διανοητικές ικανότητες, τα προσωπικά χαρακτηριστικά, τα κίνητρα και το περιβάλλον στο οποίο επιθυμούν να εργάζονται. Η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση έδειξε ότι η προσαρμογή των δεδομένων στο προτεινόμενο θεωρητικό μοντέλο ήταν ικανοποιητική, επιβεβαιώνοντας την εγκυρότητα της δομής του μοντέλου (CFI=.933, χ^2= 1025.126, df=634, χ^2/df=1.617, RMSEA=.040).

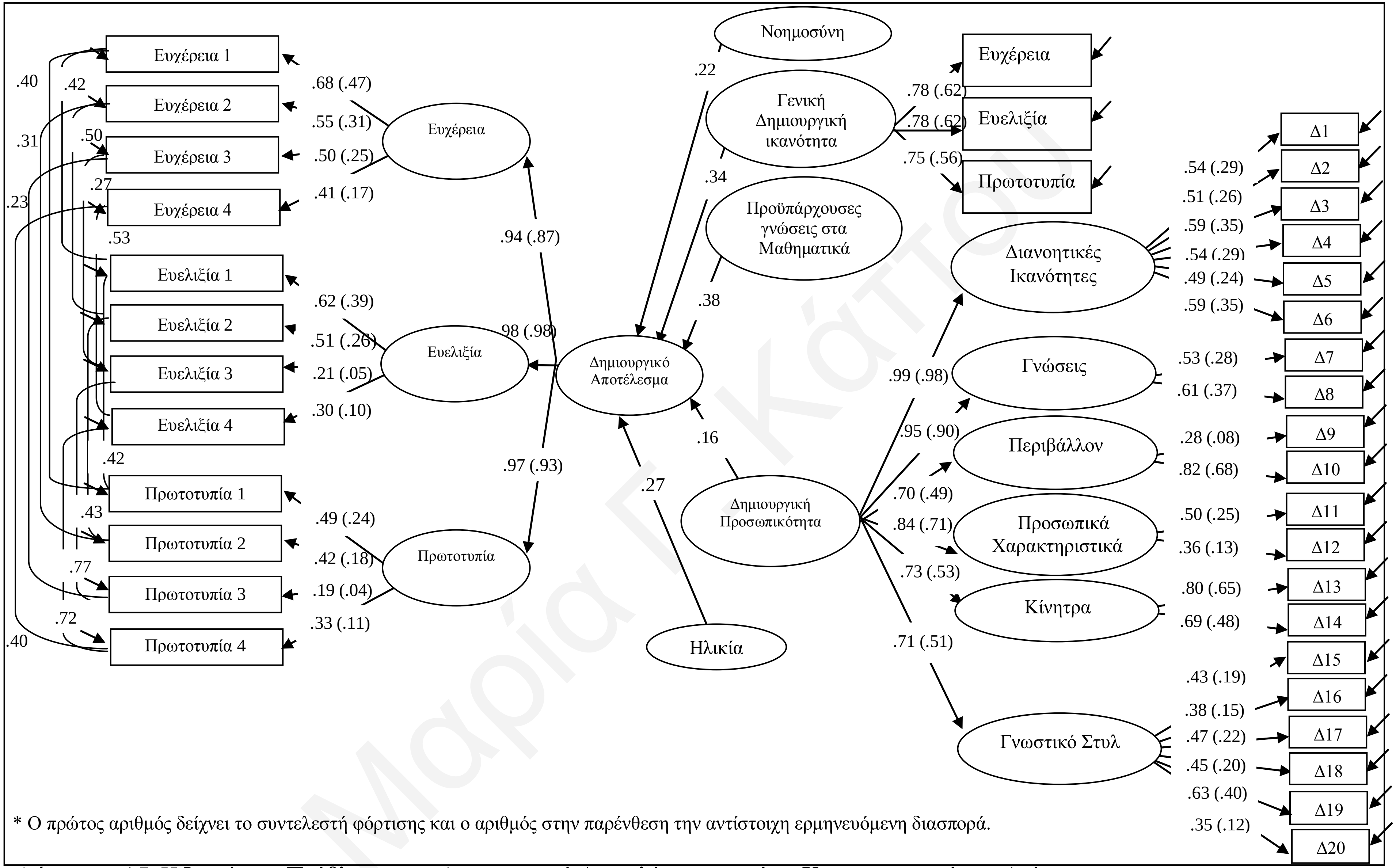
Όπως φαίνεται από το Διάγραμμα 4.5, οι συντελεστές παλινδρόμησης των πέντε παραγόντων είναι στατιστικά σημαντικοί. Η κατοχή μαθηματικών γνώσεων ($r=.38$) και γενικών δημιουργικών ικανοτήτων ($r=.34$) αποτελούν τους πιο ισχυρούς δείκτες ερμηνείας της μαθηματικής δημιουργικότητας. Επιπρόσθετα, η ηλικία ($r=.27$), η νοημοσύνη ($r=.22$) και η προσωπικότητα των μαθητών ($r=.16$) συνεισφέρουν στην ερμηνεία της μαθηματικής δημιουργικότητας. Αξίζει να αναφερθεί ότι το συγκεκριμένο μοντέλο επεξηγεί το 68.6% της διασποράς της μαθηματικής δημιουργικότητας.

Παλινδρομικές αναλύσεις έγιναν, επίσης, για τη διερεύνηση κάθε χαρακτηριστικού του δημιουργικού ατόμου ξεχωριστά. Πιο συγκεκριμένα, κατά τη διερεύνηση της ικανότητας πρόβλεψης του δημιουργικού αποτελέσματος από τα χαρακτηριστικά προσωπικότητας επιβεβαιώθηκε η δομή του μοντέλου που παρουσιάζεται στο Παράρτημα

10 (CFI=.930, χ^2=789.852, df=444, χ^2/df=1.779, RMSEA=.045). Ο συντελεστής παλινδρόμησης της δημιουργικής προσωπικότητας στη μαθηματική δημιουργικότητα ήταν στατιστικά σημαντικός, επιβεβαιώνοντας ότι τα χαρακτηριστικά προσωπικότητας μπορούν να προβλέψουν τη μαθηματική δημιουργικότητα των μαθητών, ερμηνεύοντας ένα πολύ χαμηλό ποσοστό της διασποράς της (9%).

Όσον αφορά στη διερεύνηση των γνωστικών χαρακτηριστικών εξετάστηκε η δομή του μοντέλου που παρουσιάζεται στο Παράρτημα 11. Η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση έδειξε ότι η προσαρμογή των δεδομένων στο προτεινόμενο θεωρητικό μοντέλο ήταν πολύ καλή, επιβεβαιώνοντας την εγκυρότητα της δομής του μοντέλου (CFI=.980, χ^2= 179.199, df=101, χ^2/df=1.774, RMSEA=.05). Με βάση τα αποτελέσματα της ανάλυσης, η γενική δημιουργική ικανότητα (r=.42) και η κατοχή μαθηματικών γνώσεων (r=.41) έχουν τους υψηλότερους συντελεστές παλινδρόμησης, ακολουθούμενα από τη νοημοσύνη (r=.22). Το συγκεκριμένο μοντέλο ερμηνεύει το 61.3% της διασποράς της μαθηματικής δημιουργικότητας.

Σε σχέση με την ηλικία, εξετάστηκε η δομή του μοντέλου που παρουσιάζεται στο Παράρτημα 12. Το συγκεκριμένο μοντέλο είχε πολύ καλή προσαρμογή στα δεδομένα της παρούσας εργασίας (CFI=.985, χ^2= 99.371, df=51, χ^2/df=1.948, RMSEA=.058), επιβεβαιώνοντας ότι η ηλικία έχει την ικανότητα να προβλέψει την επίδοση των μαθητών στο εργαλείο μαθηματικής δημιουργικότητας ($p<.05$). Μάλιστα, η ηλικία μπορούσε να ερμηνεύσει το 15.3% της διασποράς της μαθηματικής δημιουργικότητας. Ταυτόχρονα, εξετάστηκε κατά πόσο ο παράγοντας ηλικία συνεισφέρει στη μαθηματική δημιουργικότητα μέσω των γνώσεων του μαθητή, ως επακόλουθο της γνωστικής του ανάπτυξης. Παρόλα αυτά το συγκεκριμένο μοντέλο δεν ήταν πιο κατάλληλο από το προηγούμενο (CFI=.932, χ^2= 392.692, df=117, χ^2/df=3.356, RMSEA=.078), για να ερμηνεύσει τη συνεισφορά της ηλικίας στη μαθηματική δημιουργικότητα, λόγω του δείκτη χ^2/df που ήταν μεγαλύτερος από 2.



* Ο πρώτος αριθμός δείχνει το συντελεστή φόρτισης και ο αριθμός στην παρένθεση την αντίστοιχη ερμηνευόμενη διασπορά.

Διάγραμμα 4.5. Η Ικανότητα Πρόβλεψης του Δημιουργικού Αποτελέσματος από τα Χαρακτηριστικά του Ατόμου.

Η διερεύνηση της δημιουργικής διαδικασίας έγινε μέσω της διεξαγωγής συνεντεύξεων. Η ανάλυση των συνεντεύξεων επικεντρώθηκε στον εντοπισμό στοιχείων που επιβεβαιώνουν τις υπο-διαδικασίες που προτείνονται από τη Sheffield (2009). Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται ανά υπο-διαδικασία και για κάθε υπο-διαδικασία παρατίθενται χαρακτηριστικά αποσπάσματα από τις συνεντεύξεις μαθητών με διαφορετικό βαθμό μαθηματικής δημιουργικότητας. Ακολούθως, γίνεται σύγκριση των υπο-διαδικασιών, με στόχο τον εντοπισμό ομοιοτήτων ή/και διαφορών ανάμεσα στις ομάδες μαθητών.

Διερεύνηση

Ομάδα μαθητών με χαμηλή μαθηματική δημιουργικότητα

Η υπο-διαδικασία της διερεύνησης απουσίαζε από τους μαθητές με χαμηλό βαθμό μαθηματικής δημιουργικότητας. Οι μαθητές έλαβαν υπόψη τους μόνο τις διαφορετικές πράξεις που θα μπορούσαν να εκτελέσουν στο πλαίσιο της άσκησης, χωρίς αυτό απαραίτητα να τους οδηγεί στην εμφάνιση λύσεων.

Μ386: Δεν χρειάζεται να βάζω συνέχεια πολλαπλασιασμό, μπορώ να βάλω και πρόσθεση και αφαίρεση...4+4=8.
Σ: Θα πρέπει να ξεκινήσεις από το 2 όμως για να φτάσεις στο 8.
Μ386: Τότε σκέφτομαι να αφαιρέσω 6, αλλά δεν γίνεται από τα λίγα να αφαιρέσω τα πολλά.

Μ114: Τώρα σκέφτομαι αν γίνεται με διαίρεση...Δεν ξέρω άλλο... Δεν ξέρω όμως πώς να το κάνω με διαίρεση...Είναι :4;

Πέρα από τη χρήση διαφορετικής πράξης, ελάχιστοι μαθητές από αυτή την ομάδα δοκίμασαν να αναλύσουν τις δύο βασικές διαδικασίες που εκτελεί η μηχανή, το Χ4 και το +6. Για παράδειγμα, οι μαθητές Μ1 και Μ74 βρήκαν εναλλακτικές διαδικασίες που έχουν αποτέλεσμα 4 ή 6.

Μ1: Ξέρω και άλλες λύσεις, με δύο αριθμούς 2+3+3.
Σ: Πώς σκέφτηκες το +3+3;
Μ1: Γιατί 3+3 είναι 6, το 3 είναι το μισό του 6.
Σ: Μπορείς να σκεφτείς και άλλες λύσεις;
Μ1: Μπορούμε να πούμε +4+2. Σκέφτηκα 8+1+5=14.

Σ: Κάθε φορά τι κάνεις δηλαδή;
Μ1: +6.

Μ74: +3+3 γίνεται....+1+1+1+1+1+1....+2+2+2.
Σ: Πώς τα σκέφτηκες;
Μ74: Επειδή και στις δύο περιπτώσεις κάνει αποτέλεσμα +6.

Ομάδα μαθητών με μέτρια μαθηματική δημιουργικότητα

Σε σύγκριση με την ομάδα μαθητών με χαμηλή μαθηματική δημιουργικότητα, οι μαθητές αυτής της ομάδας κατάφεραν να διερευνήσουν τη μια παράμετρο του έργου, αυτή των πράξεων. Κατά πρώτο λόγο, όπως και οι μαθητές με χαμηλή μαθηματική δημιουργικότητα, οι μαθητές με μέτρια δημιουργικότητα κατέφυγαν στην εναλλαγή πράξεων για την εύρεση λύσεων.

Μ36: Επειδή δεν ήθελα να βάζω συνέχεια τα ίδια, προσπάθησα να βάλω και τις τέσσερις πράξεις όχι μόνο μια.

Μ79: Σκέφτηκα ότι αν έβαζα συνέχεια τους ίδιους αριθμούς δεν θα μπορούσα να βρω άλλες απαντήσεις, ενώ αν βάλω και άλλες πράξεις θα είναι πιο καλοί οι τρόποι που θα βρω...

Μ52: Απλώς σκέφτομαι να κάνω από όλες τις πράξεις, +, -, :, Χ...

Επιπρόσθετα, οι μαθητές με μέτρια μαθηματική δημιουργικότητα αναφέρθηκαν στην αξιοποίηση συνδυασμού πράξεων. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές Μ63 και Μ367 σκέφτηκαν τους συνδυασμούς πράξεων που έκαναν, ώστε να εντοπίσουν διαφορετικές λύσεις:

Μ63: Σκέφτομαι τι δεν έβαλα, ας πούμε έβαλα το Χ, έβαλα το Χ με +, έβαλα το +, να βάλω – με +...

Μ367: Επειδή πριν έκανα συνέχεια Χ και + είπα να κάνω Χ και :.

Ο συνδυασμός πράξεων οδήγησε τους μαθητές στην εύρεση «παραγωγικών μεθόδων». Με άλλα λόγια, οι μαθητές εντόπισαν λύσεις οι οποίες με κάποια παραλλαγή στους αριθμούς και τις πράξεις οδηγούνταν στην εύρεση διαφορετικών λύσεων με παρόμοια δομή.

Μ381: 2Χ9-10. Απλώς συνεχίζω το ίδιο, τον πίνακα του 2. 2Χ10-12=8, 2Χ11-14, 2Χ13-18=8...
Σ: Περίγραψε μου πώς εργάστηκες.
Μ381: Με τον πίνακα του 2 και μετά κάνω πρόσθεση ή αφαίρεση.

M32: Προσπαθώ να κάνω τους αριθμούς μεγαλύτερους και μετά να τους μικράνω...12Χ2:3.
Σ: Αυτό πώς ήρθε στο μυαλό σου;
M32: Κάνω συνέχεια το ίδιο. Επειδή δεν έχει μεγάλη διαφορά το 2 με το 8, διαλέγω ένα αριθμό και τον κάνω μεγαλύτερο με τον πολλαπλασιασμό και μετά το διαιρώ για να βρω το ίδιο...Για παράδειγμα να κάνω Χ80:20.

Στο πλαίσιο της διερεύνησης των πράξεων, οι μαθητές αυτής της ομάδας κατάφεραν να αναλύσουν με επιτυχία τις διαδικασίες Χ4 και +6. Οι μαθητές ακολούθησαν κυρίως διαδικασίες με όμοια δομή, όπως για παράδειγμα επαναλαμβανόμενη πρόσθεση, για την εύρεση λύσεων.

M77: 2+3+3...2+3+1+1+1.
Σ: Πώς το σκέφτηκες;
M77: Είναι το ίδιο με το 2+3+3...2+4+2...2+5+1.
Σ: Αυτές τις ιδέες πώς τις σκέφτεσαι; Μοιάζουν μεταξύ τους;
M77: Είναι παρόμοιες, απλώς αλλάζουμε τους αριθμούς.

M36: 2+4+2.
Σ: Αυτό πώς ήρθε στο μυαλό σου;
M36: Για να γίνει το 2 σε 8 πρέπει να προσθέσουμε 6. Για να μην προσθέσουμε πάλι 6 μπορούμε να προσθέσουμε 2 και ακόμα 4...2+5+1.
Σ: Αυτό πώς το βρήκες;
M36: Επειδή πρέπει να βρω πολλούς τρόπους από το 2 στο 8 μοιράζω το 6 με πολλούς τρόπους.

Ομάδα μαθητών με καλή μαθηματική δημιουργικότητα

Οι μαθητές αυτής της ομάδας έλαβαν υπόψη τους και τη δεύτερη παράμετρο του έργου, αυτή των αριθμών, κατά τη διερεύνηση της προβληματικής κατάστασης. Δηλαδή, πέρα από την εναλλαγή και το συνδυασμό πράξεων που παρουσίασαν οι δύο προαναφερθέντες ομάδες, η ομάδα με καλή δημιουργικότητα αναλογίστηκε το είδος του αριθμού και τον αριθμό των συμβόλων που χρησιμοποιείται στις μαθηματικές προτάσεις.

Όμοια όπως και οι δύο προηγούμενες ομάδες, οι μαθητές χρησιμοποίησαν αρχικά απομονωμένες πράξεις και ακολούθως σκέφτηκαν συνδυασμό πράξεων. Τα αποσπάσματα που παρατίθενται πιο κάτω, από το Μ356 και το Μ28, είναι ενδεικτικά για τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές σκέφτηκαν σειριακά τις πράξεις.

M356: Αφού μπορούμε να βάλουμε το :, το -, +, Χ. Θα ξεκινήσουμε με το + μετά με το -...

M28: Σκέφτηκα να μην βάζω μόνο πρόσθεση, να αλλάξω την πράξη μου και σκέφτηκα τον πολλαπλασιασμό....Θα βάλω κάτι και με διαίρεση τώρα.

Οι Μ68, Μ56 και Μ20 σκέφτηκαν ποιους συνδυασμούς πράξεων είχαν κάνει, ώστε να σκεφτούν κάτι διαφορετικό. Οι μαθητές ανέφεραν ότι ο λόγος που αξιοποίησαν συνδυασμό πράξεων ήταν η αύξηση του αριθμού των «συμβόλων» που χρησιμοποιούσαν.

Μ68: Σκέφτομαι το + και - αλλά το ξανάκανα... + και μετά : δεν το έκανα.

Μ56: Έκανα + με Χ, + με - αλλά έχει πάρα πολλά. Και με διαίρεση γίνεται....

Μ20: Για να τις κάνω πιο έξυπνες (τις λύσεις) πρέπει να βάλω πολλά σύμβολα...Ααα θα βάλω δύο πράξεις μαζί.

Αφού οι μαθητές εντόπισαν διαφορετικούς συνδυασμούς των πράξεων, κατέφυγαν στην αξιοποίηση άλλου είδους παραγωγικών διαδικασιών, τις οποίες χειρίστηκαν ευέλικτα διατηρώντας, όμως, τη δομή τους. Ενδεικτικές είναι οι πιο κάτω αναφορές:

Μ20: 2Χ32:8.
Σ: Πώς το σκέφτηκες;
Μ20: Το 32 και το 8 διαιρούνται και όταν κάνεις 2Χ32=64 το 64 διαιρείται με το 8. 2Χ20:5=8
Σ: Πώς βρίσκεις αυτές τις απαντήσεις;
Μ20: Σκέφτηκα τους διαιρέτες του 8 και κατέληξα στο 40 και σκέφτηκα ότι το 2Χ20=40 και μετά σκέφτηκα ποιος αριθμός χρειάζεται για να γίνει 8 και έγραψα το 5.

Μ10: Υπάρχουν άπειροι συνδυασμοί, για να λύσεις την άσκηση.
Σ: Πώς το σκέφτηκες ότι είναι άπειροι οι τρόποι;
Μ10: Επειδή πρόσεξα ότι μπορεί να γίνει στη μηχανή Χ8:2, Χ16:4, Χ32:8, Χ24:6.
Σ: Πώς σκέφτηκες αυτούς τους τρόπους;
Μ10: Βρήκα μια ιδέα που μπορεί να γίνει με πολλούς διαφορετικούς τρόπους.

Μ69: 2+(18:3).
Σ: Μοιάζει με κάποια άλλη λύση;
Μ69: Ναι με το 2+(12:2). Τώρα μου ήρθε άλλο πιο πρωτότυπο..2+(24:4), μου ήρθαν όλες οι διαιρέσεις με το 6.

Η αναφορά στους αριθμούς ήταν αισθητή σε δύο διαστάσεις. Από τη μια, οι μαθητές προσπάθησαν να αυξήσουν τον αριθμό των συμβόλων που χρησιμοποίησαν στις μαθηματικές τους προτάσεις. Από την άλλη, έγινε αναφορά σε ομάδες αριθμών. Οι πιο κάτω μαθητές, αναφέρθηκαν στην πρώτη διάσταση.

Μ185: Τα έκανα όλα με δύο αριθμούς και είπα να κάνω και με τρεις αριθμούς.
Σ: Είναι πιο έξυπνη η λύση σου αν είναι με τρεις αριθμούς;
Μ185: Ναι...Θα κάνω με τέσσερις αριθμούς τώρα...+1+2+2+1.

Μ35: Επειδή αρχικά κάναμε με δύο πράξεις και μετά με τρεις πράξεις....Θα κάνω με έξι πράξεις τώρα.

Μ283: Σκέφτηκα ότι κάναμε με δύο πράξεις και μετά σκέφτηκα να βάλω και τις τρεις πράξεις μαζί, για να κάνω πιο μεγάλη λύση....Σκέφτηκα ότι ήδη κάναμε με δύο και τρεις πράξεις και επειδή πρέπει να βρω πιο καλή λύση είπα να βάλω και τις τέσσερις πράξεις μαζί.

Ακόμα και κατά την ανάλυση των δύο βασικών μαθηματικών ιδεών (Χ4, +6) με τις οποίες δουλεύει η μηχανή, οι μαθητές στόχευαν να αυξήσουν τον αριθμό των πράξεων και των συμβόλων που χρησιμοποιούσαν. Πιο κάτω παρουσιάζονται αποσπάσματα από τις συνεντεύξεις του Μ9, του Μ358 και του Μ354, οι οποίοι διερευνώντας τις διαδικασίες +6 και Χ4 κατέληξαν σε εναλλακτικούς τρόπους που να στηρίζονται σε αυτές τις δύο ιδέες:

Μ9: Θα γράψω +3+3 που μας κάνει 6... Θα βάλω το +2Χ3 που πάλι μας κάνει 6... Σκέφτομαι να βάλω +2+4, και μετά +2+3+1... Να βάλω +12:2 που μας κάνει 6... Θα μπορούσαμε να το κάνουμε καταχρηστικό κλάσμα, $\frac{36}{6}$ *που βγαίνει 6.*
Σ: Τι προσπαθείς να κάνεις δηλαδή κάθε φορά;
Μ9: Να βγαίνει το +6 με πιο πολλές πράξεις.

Μ354: Θα μπορούσαμε να γράψουμε 3+5+1.
Σ: Πώς ήρθε αυτή η ιδέα στο μυαλό σου;
Μ354: Επειδή εδώ λέει ότι μπορείς να χρησιμοποιήσεις περισσότερα από ένα σύμβολα ή πράξεις, άρα το +6 θα μπορούσαμε να το κάνουμε +5+1... Μετά μπορούμε να κάνουμε και 3+2+4...+3+3 ή +7-1 ή +24:4 που μας κάνει 6 πάλι.

Μ358: 2+1+5.
Σ: Αυτό πώς σου ήρθε;
Μ358: Από το 6 πάλι το μοίρασα στο 5+1. Να δοκιμάσω...+(1+2)+ (1+2).
Σ: Πώς το σκέφτηκες αυτό;
Μ358: Επειδή είναι 3 και 3, να το μοιράσω σε 1 και 2 και να κάνουμε 2 παρενθέσεις.... να βάλω 2+1+1+2+1... +(1Χ3)+(1+2).
Σ: Αυτό πώς σου ήρθε;
Μ358: Πάλι από το +3+3 αλλά είπα να κάνω και πολλαπλασιασμό και πρόσθεση.

Σε σχέση με τη δεύτερη διάσταση, οι μαθητές σκέφτηκαν διαφορετικές ομάδες αριθμών, ώστε να εντοπίσουν όσες πιο πολλές λύσεις μπορούσαν.

Μ20: Να κάνουμε με δεκαδικούς.
Σ: Η ιδέα με τους δεκαδικούς πώς σου ήρθε στο μυαλό;
Μ20: Δεν ξέρω. Επειδή θα ήταν πρωτότυπο...

Μ117: Επειδή μου είπες να βρω κάτι πρωτότυπο, είπα να βάλω και άλλους αριθμούς, όπως τα κλάσματα και οι δεκαδικοί.

Μ92: Αχαααα... Πρώτα θα βάλω δεκαδικό αριθμό θα προσθέσω 6 και θα βρω το δεκαδικό που θα βγει και μετά θα προσθέσω κλάσμα και πάλι θα βρω την απάντηση...
Σ: Γιατί σκέφτηκες να βάλεις δεκαδικούς και κλάσματα;
Μ92: Επειδή δεν είναι όπως τα πιο πάνω που είναι ακέραιοι αριθμοί και τα σκέφτονται όλοι.

Ομάδα μαθητών με υψηλή μαθηματική δημιουργικότητα

Η διερεύνηση της ομάδας μαθητών με υψηλή μαθηματική δημιουργικότητα δεν διαφοροποιήθηκε από την αντίστοιχη υπο-διαδικασία της ομάδας με καλή μαθηματική δημιουργικότητα. Πιο συγκεκριμένα, η διερεύνηση των μαθητών αφορούσε τον αριθμό και το είδος των πράξεων, τους πιθανούς συνδυασμούς πράξεων και τα διαφορετικά είδη αριθμών που θα μπορούσαν να αξιοποιηθούν. Ταυτόχρονα, οι μαθητές εντοπίζοντας τις δύο βασικές μαθηματικές ιδέες (Χ4, +6) με τις οποίες δουλεύει η μηχανή πρότειναν εναλλακτικές λύσεις που οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα, αναλύοντας τους αριθμούς και τις πράξεις.

Κατά πρώτο λόγο, οι πρώτες απαντήσεις των μαθητών προέκυψαν από την εναλλαγή του είδους των πράξεων που χρησιμοποιούσαν:

Μ406: Σκέφτομαι πράξεις...Μπορώ να κάνω πρώτα με αφαίρεση, μετά να σκεφτώ διαίρεση, πρόσθεση και πολλαπλασιασμό.

Μ27: Μπορείς να φτάσεις στο 8 με αφαίρεση, πρόσθεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση.

Μ124: Να πολλαπλασιάζουμε και να διαιρούμε. Κάνουμε Χ4. Όπως αυτό που μας λέει 2Χ4, αλλά έχει και άλλους τρόπους.
Σ: Τι εννοείς;
Μ124: Έχει και πρόσθεση, έχει και αφαίρεση.

Μ354: Πρώτα ξεκίνησα με πρόσθεση που ήταν πιο εύκολη και μετά έκανα αφαίρεση, αλλά σαν έκανα αφαίρεση είχα και άλλες ιδέες για την πρόσθεση. Μετά μου ήρθε ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση και τα έκανα.

Διερεύνηση υπήρξε και ως προς το συνδυασμό πράξεων που θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές στις λύσεις τους. Πολύ χαρακτηριστικά ο Μ12 ανέφερε:

Μ12: Όταν κατάλαβα την άσκηση σκέφτηκα ότι είναι καλύτερα να συνδυάσω τον πολλαπλασιασμό και την πρόσθεση γιατί και τα δύο αυξάνουν το αποτέλεσμα... Σκέφτηκα όταν κάνεις Χ2+3 θα βγει 8. Μετά αντί πολλαπλασιασμό και πρόσθεση έβαλα αφαίρεση και βρήκα ότι πάλι μπορεί να γίνει από το 2 στο 8.

Ταυτόχρονα, οι μαθητές προσπάθησαν να αυξήσουν σταδιακά τον αριθμό των πράξεων που χρησιμοποιούσαν, εντοπίζοντας και οι ίδιοι αυτή την εξέλιξη:

Μ15: Οι πρώτες τρεις λύσεις είναι οι πιο εύκολες 2Χ4, 1Χ4, 3Χ4 και έβρισκα το αποτέλεσμα. Μετά σκέφτηκα τον τρόπο 2+6=8 και έβαλα πάλι το +6 και ύστερα είπα αντί να κάνω 2Χ4 να κάνω 2Χ2Χ2, 2Χ8:2 και μετά 2 Χ (5-2), 2:(6-2)Χ8....
Σ: Τι σκέφτεσαι δηλαδή για να βρίσκεις διαφορετικές λύσεις;
Μ15: Εδώ έβαλα ένα σύμβολο, εδώ έβαλα δύο, μετά έβαλα τρία σύμβολα.

Μ3: Σκέφτηκα να χρησιμοποιήσω τρεις αριθμούς στις πράξεις όχι μόνο δύο. Να κάνω πρόσθεση για να βάλω αριθμούς, να «φύγω αριθμούς» και να ξαναβάλω αριθμούς.

Ως προς τους αριθμούς, οι μαθητές έλαβαν υπόψη τους διαφορετικές κατηγορίες αριθμών, ώστε να σκεφτούν λύσεις που δεν θα μπορούσαν να βρουν άλλοι συμμαθητές τους.

Μ44: Απλώς χώρισα τις απαντήσεις μου σε τρεις κατηγορίες, ακέραιοι, δεκαδικοί, μεικτοί και κλάσματα και κάθε φορά μπορεί να κάνω κάτι με δεκαδικούς ή κάτι με μεικτούς... Σκεφτόμουν κάθε φορά τι να χρησιμοποιήσω.

Μ131: Μπορούμε να γράψουμε ένα κλάσμα και να βγαίνει πάνω από τη μονάδα και να βγει πάλι +6. Ας πούμε να κάνουμε $2+\frac{48}{8}$ *θα βγει 8 πάλι. Είναι το ίδιο με το +6 αλλά με διαφορετικό τρόπο... Μπορούμε να κάνουμε με δεκαδικό ή ποσοστό και να προσθέσουμε όσα μηδενικά θέλουμε και πάλι θα είναι 6.*

Επίσης, οι μαθητές έλαβαν υπόψη τους το μέγεθος των αριθμών που χρησιμοποίησαν, ώστε να τους δώσει έναυσμα για νέες ιδέες.

Μ90: Από τους μικρούς αριθμούς πήγα στους μεγάλους αριθμούς.

Μ12: Στο 4 όταν προσθέσουμε 6 μπορεί να γίνει 10. Μπορούμε να βάλουμε 22+6=28 ή μπορούμε να βάλουμε τριψήφιους... 332+6=338.

Συσχέτιση

Ομάδα μαθητών με χαμηλή μαθηματική δημιουργικότητα

Το στάδιο της συσχέτισης δεν ήταν εμφανές στην πλειοψηφία των μαθητών με χαμηλή μαθηματική δημιουργικότητα. Σε κάθε ερώτηση του συνεντευκτή σχετικά με τον εντοπισμό σχέσεων μεταξύ των λύσεων τους οι μαθητές απαντούσαν αρνητικά. Παρόλα αυτά, υπήρξαν κάποιοι μαθητές οι οποίοι στην προσπάθειά τους να εντοπίσουν συσχετίσεις ανάμεσα στις λύσεις τους πρότειναν άστοχες συνδέσεις, στηριζόμενοι κυρίως σε επιφανειακά χαρακτηριστικά. Ενδεικτικά, ο Μ108 ανέφερε την ύπαρξη σχέσης μεταξύ δύο διαδοχικών λύσεών του, στηριζόμενος στο γεγονός ότι και οι δύο λύσεις χρησιμοποιούν την ίδια πράξη, ανεξαρτήτως της διαφορετικής λογικής στην οποία στηρίζονται:

Μ108: 2-1+7.
Σ: Πώς το σκέφτηκες;
Μ108: Αντί να κάνω πρόσθεση στην αρχή, έκανα αφαίρεση και μετά έκανα πρόσθεση για να βγει αυτός ο αριθμός...2+2Χ3.
Σ: Πώς το σκέφτηκες;
Μ108: Από την προηγούμενη λύση. Αντί να κάνω αφαίρεση έκανα πρόσθεση και πολλαπλασιασμό.
Σ: Πώς σχετίζεται με την προηγούμενη λύση;
Μ108: Απλώς άλλαξα αυτά τα δύο σύμβολα.
Σ: Σε τι μοιάζουν δηλαδή οι λύσεις σου;
Μ108: Έχουν και οι δύο πρόσθεση.

Παρόμοια, ο Μ277 επικεντρώθηκε στους κοινούς αριθμούς εισόδου (2) και εξόδου (8) που χρησιμοποίησε στις διαδικασίες του ως ένδειξη συσχέτισης των λύσεων του, όπως παρουσιάζεται πιο κάτω:

Μ277: 2+2+4 αφού ξεκινούμε από το 2 και 2+4=6+2=8.
Σ: Μπορείς να σκεφτείς άλλη απάντηση;
Μ277: 2+5+1.
Σ: Αυτές οι απαντήσεις σου μοιάζουν σε κάτι;
Μ277: Επειδή ξεκινούν από το 2 και τελειώνουν στο 8.

Οι Μ29 και Μ363 θεώρησαν ότι αλλάζοντας τον αριθμό εισόδου στη μηχανή και εκτελώντας την ίδια πράξη προτείνουν διαφορετικές λύσεις, χωρίς να αντιλαμβάνονται την ομοιότητα των λύσεων τους.

Μ29: Θα κάνω +6.
Σ: Πώς το σκέφτηκες;
Μ29: 8-2=6.
Σ: Τι άλλο σκέφτεσαι να κάνεις; Θέλω να μου πεις κάτι που να είναι διαφορετικό από το προηγούμενο...
Μ29: 5+6... 7+6...

Σ: Δηλαδή τι έκανες;
Μ363: 2+6=8...3+6=9.
Σ: Το +6 πώς το σκέφτηκες;
Μ363: Επειδή κάνει 8.
Σ: Οι δύο απαντήσεις μοιάζουν μεταξύ τους;
Μ363: Όχι είναι διαφορετικές.

Εξαιρέσεις στην ομάδα με χαμηλή μαθηματική δημιουργικότητα απετέλεσαν οι μαθητές Μ361 και Μ386, οι οποίοι αντιλήφθηκαν σε κάποιο βαθμό τις σχέσεις που υπήρχαν μεταξύ των λύσεών τους. Από τη μια, ο Μ361 ενώ αντιλήφθηκε ότι οι λύσεις που προτείνει σχετίζονται μεταξύ τους, λόγω της αξιοποίησης της ίδιας μαθηματικής ιδέας, εντούτοις δεν κατάφερε να το εκφράσει και αντ' αυτού πρότεινε άλλες παρόμοιες λύσεις:

Μ361: +3+3.
Σ: Πώς το σκέφτηκες;
Μ361: Όπως μου ήρθε στο μυαλό το 2+2+2. Με βοήθησε το 6.
Σ: Πώς;
Μ361:....+4+2
Σ: Τι σκέφτηκες;
Μ361: Το 6 πάλι...5+1...3+2+1...+8-2.

Από την άλλη, ο Μ386 επεξήγησε πιο ολοκληρωμένα τη σκέψη του:

Μ386: 2Χ4...2+2+2+2.
Σ: Πώς ήρθε αυτό στο μυαλό σου;
Μ386: Είναι διαφορετικό. Σκέφτηκα ότι το 2Χ4 είναι το ίδιο με 2+2+2+2.

Ομάδα μαθητών με μέτρια μαθηματική δημιουργικότητα

Το στάδιο της συσχέτισης ιδεών απουσίαζε από τη διαδικασία δημιουργικής σκέψης των μαθητών με μέτρια μαθηματική δημιουργικότητα. Αν και οι μαθητές ανέφεραν θεωρητικά ότι οι προηγούμενες τους λύσεις ή οι προϋπάρχουσες τους γνώσεις τους βοηθούσαν να εντοπίσουν λύσεις, δεν κατάφεραν να το επιβεβαιώσουν πρακτικά.

Σ: Πόσες διαφορετικές λύσεις νομίζεις ότι μπορείς να σκεφτείς;
Μ31: Πολλές.
Σ: Πώς το ξέρεις; Έχεις κανένα κόλπο που θα σε βοηθήσει να βρίσκεις πολλές λύσεις;
Μ31: Ναι, εκείνα που έκανα πριν θα με βοηθήσουν να βρω και άλλα.

Ακόμα και σε λύσεις στις οποίες οι συνδέσεις ήταν απλές οι μαθητές δεν κατάφεραν να τις αντιληφθούν.

Μ360: 2+2+2+2... 2+3+ ακόμα κάτι.
Σ: Πώς σκέφτηκες αυτές τις απαντήσεις; Έχουν κάποια σχέση μεταξύ τους ή τις σκέφτεσαι τυχαία;
Μ360: Τυχαία.

Μ62: Έκανα 2+2+4=8...2+7-1=8.
Σ: Συνδέεται με κάποια άλλη η τελευταία απάντησή σου;
Μ62: Όχι είναι διαφορετική.

M80: 2+4+2... 2+5+1.
Σ: Μοιάζουν καθόλου οι απαντήσεις μεταξύ τους ή καμιά σχέση;
M80: Καμία σχέση.

Υπήρξαν μαθητές οι οποίοι κατέληξαν σε άστοχες συνδέσεις, όπως για παράδειγμα ο M83, ο M77 και ο M62. Οι μαθητές θεώρησαν ότι δύο λύσεις συνδέονται μεταξύ τους, λόγω της χρήσης κοινών πράξεων ή κοινών αριθμών, χωρίς όμως να λαμβάνουν υπόψη τους τη διαφορετικότητα στη δομή της διαδικασίας.

M83: 2+3+3 επειδή 2+3=5+3=8...
Σ: Αυτό πώς ήρθε στο μυαλό σου; Μοιάζει με κάποια άλλη λύση;
M83: Ναι με το X4.

M77: 2+2+2+2, το έκανα όπως το 2X4 και το βρήκα...2+3+3 γίνεται;
Σ: Πώς σχετίζεται με την προηγούμενη σου λύση;
M77: Αντί να βάλω 2 έβαλα 3.

M62: X3+2.
Σ: Έχει κάποια σχέση με τις προηγούμενες σου λύσεις;
M62: Με το 2:2+7... Έχει συνέχεια πρόσθεση.

Εξαίρεση στην ομάδα με μέτρια μαθηματική δημιουργικότητα απετέλεσε ο M31 ο οποίος κατάφερε επιτυχώς να συσχετίσει δύο λύσεις, αναλύοντας τον πολλαπλασιασμό ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση:

M31: 2X3 +2.
Σ: Μπορείς να σκεφτείς ακόμα πιο έξυπνη απάντηση;
M31: Δεν ξέρω...2+2+2+2.
Σ: Πώς σου ήρθε η ιδέα;
M31: Παρά να κάνω συνέχεια πολλαπλασιασμό είπα να κάνω και πρόσθεση Παρά να κάνω X2 έβαλα 2 φορές το 2 με πρόσθεση.

Ομάδα μαθητών με καλή μαθηματική δημιουργικότητα

Η πλειοψηφία των μαθητών με καλή μαθηματική δημιουργικότητα ανέφερε συσχετίσεις κατά τη διάρκεια της παραγωγής των ιδεών τους. Οι συσχετίσεις που πρότειναν αναφέρονταν κυρίως στη διασύνδεση δράσεων αλλά και στον αναλογισμό εμπειριών και γνώσεων. Για παράδειγμα, ο M57 και ο M40 αντιλήφθηκαν τον πολλαπλασιασμό ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση, συνδέοντας τα δύο είδη πράξεων που περιλαμβάνονται στις λύσεις τους.

M57: Σκέφτηκα ακόμα ένα... Να κάνω +2+2+2, είναι το ίδιο περίπου με το προηγούμενο.
Σ: Τι εννοείς είναι το ίδιο;

M57: Το 2+2+2+2 είναι το ίδιο με το 2Χ4.

M40: Θα γράψω 2+3+3...2Χ3+2 είναι το ίδιο με το προηγούμενο....

Επιπρόσθετα, οι μαθητές συσχέτισαν λύσεις στις οποίες υπέθαλπε κοινή λογική, είτε επειδή η διαδικασία είχε το ίδιο αποτέλεσμα ή λόγω της χρήσης ίδιων πράξεων.
Ο Μ2, ο Μ170 όπως και ο Μ281 παρατηρώντας ότι με τη διαδικασία +6 και Χ4 η μηχανή τους μπορούσε να «δουλέψει» χρησιμοποίησαν επαναλαμβανόμενες προσθέσεις ή πολλαπλασιασμούς με το ίδιο αποτέλεσμα.

M2: Ααα 2Χ2Χ2.
Σ: Ωραία. Έχει κάποια σχέση με τις προηγούμενες σου λύσεις;
M2: Ναι αφού αυτά τα δύο μαζί κάνουν το Χ4...Σκέφτηκα ότι μπορούμε να προσθέσουμε +3Χ2, δηλαδή +2+2+2 που μπορεί να μας κάνει 8, μετά σκέφτηκα το +2+2 να το γράψουμε ως +4 για να γράψουμε πιο λίγους αριθμούς, δηλαδή +4+2...

M170: Αντί η μηχανή να έκανε +6, μπορεί να έκανε +2+2+2.
Σ: Πώς το σκέφτηκες;
M170: Είπα αφού το 6 μπορεί να μοιραστεί σε τρία διολάρια....Να κάνουμε +3+3.
Σ: Τι σε βοήθησε να το σκεφτείς αυτό;
M170: Το αποτέλεσμα, το 6...

M281: Μπορεί να δουλεύει με το +4+2.
Σ: Πολύ σωστά... Πώς σου ήρθε η ιδέα;
M281: Από το +6. Μπορείς να κάνεις το 6 σε πιο μικρούς αριθμούς. Να το χωρίσεις και να τα προσθέσεις μαζί για να κάνει 6... Ααα μπορείς να κάνεις +3+3 αφού πάλι κάνει +6.

Οι μαθητές επίσης αναφέρθηκαν στην ομοιότητα της δομής των διαδικασιών. Ενδεικτικά, ο Μ281 και ο Μ285 ανέφεραν:

M281: Να βάλω 2Χ1+6.
Σ: Μπορείς να σκεφτείς κάτι άλλο;
M281: 2Χ2+4=8.
Σ: Αυτή η απάντηση πώς ήρθε στο μυαλό σου;
M281: Είναι όπως το προηγούμενο. Είναι οι ίδιες πράξεις αλλά όχι οι ίδιοι αριθμοί.

M285: 2Χ6-4=8, 2Χ5-2=8, 2Χ7-6=8.
Σ: Συνδέονται με τα προηγούμενα;
M285: Ναι είναι τα ίδια σύμβολα, η ίδια διαδικασία.

Οι μαθητές αυτής της ομάδας ήταν επίσης σε θέση να αντιληφθούν ότι ακόμα και αν ο αρχικός αριθμός είναι διαφορετικός αλλά η διαδικασία που ακολουθείται στη μηχανή είναι η ίδια, τότε δεν παύουν να ανήκουν στην ίδια οικογένεια λύσεων.

Μ61: 5Χ4=20, 7Χ4=28, 9Χ4=36...
Σ: Η άσκηση λέει ότι υπάρχουν πολλοί τρόποι. Εδώ πόσους τρόπους μου είπες;
Μ61: Ένα, το Χ4.

Στην προσπάθεια εύρεσης λύσεων οι μαθητές κατέφυγαν σε προηγούμενες γνώσεις και εμπειρίες. Οι Μ61, Μ185 και Μ111 σκέφτηκαν χρήσιμες στιγμές από το οικογενειακό και το εκπαιδευτικό τους περιβάλλον.

Μ61: Δοκιμάζω να το κάνω με διαφορετικούς αριθμούς και έβαλα το...$2+5^2-19$.
Σ: Πώς το σκέφτηκες αυτό;
Μ61: Μου εξηγούσε χτες τις δυνάμεις η μαμά μου και μου ήρθε τώρα στο μυαλό...

Μ185: 2-5=-3+11=8 με αρνητικούς αριθμούς.
Σ: Πώς σου ήρθαν οι αρνητικοί αριθμοί;
Μ185: Θυμήθηκα που βλέπω τον πιο μεγάλο μου αδερφό να κάνει τέτοιες πράξεις...

Μ111: Στην αρχή θυμόμουν παλιούς τρόπους που μου έλεγαν οι δάσκαλοι και μετά ανακάλυψα δικούς μου τρόπους.
Σ: Δηλαδή σου έρχονταν στο μυαλό ουρανοκατέβατα αυτά που λέγατε στην τάξη;
Μ111: Θυμούμαι που κάναμε προβλήματα με αυτή τη διαδικασία και την έκανα και εγώ τώρα και στη συνέχεια σκέφτηκα δικούς μου τρόπους.

Ομάδα μαθητών με υψηλή μαθηματική δημιουργικότητα

Σχεδόν όλοι οι μαθητές που ανήκουν στην ομάδα με υψηλή δημιουργικότητα στα μαθηματικά επέδειξαν στοιχεία συσχέτισης κατά τη διαδικασία επίλυσης του μαθηματικού έργου. Η συσχέτιση έγινε εμφανής σε τρεις άξονες: συσχέτιση μαθηματικών ιδεών-δράσεων, συσχέτιση αριθμών και συσχέτιση εμπειριών.

Όσον αφορά στη συσχέτιση μαθηματικών ιδεών, οι μαθητές επικεντρώθηκαν στη συσχέτιση λύσεων που ενέπλεκαν τις ίδιες πράξεις ή την ίδια δομή πράξεων. Για παράδειγμα, ο Μ69 παρατήρησε:

Μ69: 2+(18:3).
Σ: Μοιάζει με κάποια άλλη απάντησή σου;
Μ69: Ναι με το 2+(12:2) γιατί γίνονται οι ίδιες πράξεις.

Ο Μ88 ανέφερε:

Μ88: Να αφαιρέσω και μετά να προσθέσω... 2-2+8.

Σ: Μοιάζει με κάποια άλλη απάντηση αυτό που πρότεινες;
Μ88: Ναι με το +7-1 επειδή και στις δύο περιπτώσεις πρόσθεσα περισσότερα από τον αριθμό που ήθελα να φτάσω και μετά αφαίρεσα... Είναι το ίδιο πράγμα, απλώς άλλαξα τους αριθμούς και αντέστρεψα τις πράξεις.

Ο Μ67 επικεντρώθηκε στις δράσεις με άλλη προοπτική, αναλογιζόμενος τις αντίστροφες διαδικασίες:

Μ67: Εδώ μπορούμε να βάλουμε (2Χ12+8):4.
Σ: Βασίστηκες σε κάποια από τις προηγούμενες σου λύσεις;
Μ67: Ναι. Όπως έκανα σε αυτή τη λύση, ακολουθώντας την αντίθετη διαδικασία...

Ο Μ21 αντιλήφθηκε τον πολλαπλασιασμό ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση.

Μ21: 2+2+2+2.
Σ: Ωραία. Αυτό πώς το σκέφτηκες;
Μ21: Επειδή τον πολλαπλασιασμό μπορούμε να το σπάσουμε σε πρόσθεση...

Όσον αφορά στη συσχέτιση μεταξύ αριθμών, οι μαθητές σκέφτηκαν συσχετίσεις ανάμεσα σε ομάδες αριθμών ή σε «οικογένειες» αριθμών που τους βοηθούσαν να σκεφτούν πιο έξυπνες ιδέες:

Μ131: Μου ήρθε από αυτό τον τρόπο εδώ... Το κλάσμα που έκανα στην αρχή. Σκέφτηκα πως μπορώ να προσθέσω και μεικτούς αριθμούς, όχι μόνο κλάσματα...

Μ287: Σκέφτηκα στην αρχή να κάνω μια πράξη με το 10. Μετά είπα να το κάνω πιο δύσκολο και για αυτό έβαλα το μηδενικό, για να γίνει 100.

Πέρα από τα πιο πάνω, υπήρξαν ενδείξεις συσχέτισης των μαθηματικών ιδεών που εμπλέκονται στη συγκεκριμένη δραστηριότητα με εμπειρίες ή προϋπάρχουσες γνώσεις που είχαν οι μαθητές. Ο Μ53 συνέδεσε τις διαδικασίες που εκτελούσε στο συγκεκριμένο έργο με διαδικασίες που εκτελούσε σε μικρότερες τάξεις:

Σ: Πώς ήρθε η ιδέα στο μυαλό σου; Τι σε βοήθησε;
Μ53: Κάναμε κάτι παρόμοιο στις πιο μικρές τάξεις...

Αντίστοιχα, ο Μ21, ο Μ124 και ο Μ55 αναφέρθηκαν σε αυτά που μαθαίνουν στο σχολείο:

Μ21: 2+5.9+0.1 έβαλα και δεκαδικούς. Πάλι θυμήθηκα τι μάθαμε στο σχολείο.

Μ124: Με βοηθούν εκείνα που κάνουμε στην τάξη. Σκέφτομαι ενότητα-ενότητα και ...τα βρίσκω κατευθείαν.

Μ55: Σκέφτηκα τι μάθαινα τόσα χρόνια εδώ και το θυμήθηκα... Διαιρετότητα, προτεραιότητα πράξεων.

Πολύ χαρακτηριστικά ο Μ131 ανέφερε ότι στην προσπάθειά του να σκεφτεί λύσεις αναλογίστηκε γεγονότα από τη ζωή του:

Μ131: Σκέφτομαι πράγματα που κάναμε πιο παλιά. Ας πούμε την ιδέα για το Χ4 και το +6 τα πήρα από την πρώτη τάξη, αφού τα μαθαίνουμε στην πρώτη τάξη, και μετά σκέφτηκα διάφορα πράγματα που έκανα στη ζωή μου.
Σ: Δηλαδή σκέφτεσαι στην πρώτη τάξη έκανα αυτό...
Μ131: Όχι σκέφτομαι έξυπνους τρόπους που πέρασαν από τη ζωή μου. Μπορεί να μου είπε η μάμα μου κάποιο τρόπο... Επειδή δεν έβρισκα άλλο τρόπο σκέφτηκα να βρω με τους τρόπους που μας μάθαιναν από την Ολυμπιάδα και κατέληξα στις δυνάμεις.

Βέβαια, υπήρχαν και περιπτώσεις μαθητών οι οποίοι θεώρησαν ότι η συσχέτιση ιδεών δυσκολεύει την παραγωγή δημιουργικών ιδεών. Χαρακτηριστικά, ο Μ44 ανέφερε:

Σ: Δηλαδή κάθε φορά χρησιμοποιούσες το προηγούμενο και το έσπαζες ακόμα περισσότερο;
Μ44: Όχι βέβαια. Αν θα μου έδιναν ένα παράδειγμα τέτοιο, αν δεν το καταλάβαινα θα ήταν πιο εύκολο. Εγώ όμως ήθελα να κάνω κάτι πιο δύσκολο και κάθε φορά σκεφτόμουν διαφορετικό πράγμα... Μπορεί να έφτανα σε ένα σημείο και να σκεφτόμουν γιατί να αφήσεις έτσι απλές τις πράξεις μεγάλωσε τις...

Κατασκευή

Ομάδα μαθητών με χαμηλή μαθηματική δημιουργικότητα

Οι λύσεις που προτάθηκαν από τους μαθητές με χαμηλή μαθηματική δημιουργικότητα περιορίστηκαν στο Χ4, +6, σε επαναλαμβανόμενες προσθέσεις ή πολλαπλασιασμούς και σε συνδυασμούς πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού που οδηγούν σε αποτέλεσμα 4 ή 6. Σε καμία περίπτωση οι μαθητές δεν επέδειξαν ικανοποιητική ευελιξία, ώστε να μπορέσουν να χειριστούν τους αριθμούς και τις πράξεις και να ξεφύγουν από τις στερεότυπες λύσεις. Για παράδειγμα, ο Μ282 δεν μπόρεσε να σκεφτεί άλλες λύσεις πέρα από το Χ4 και το +6 ενώ ο μαθητής Μ378 είχε προσκολληθεί στους συγκεκριμένους αριθμούς, χωρίς να μπορέσει να σκεφτεί κάτι διαφορετικό.

Σ: Μπορείς να σκεφτείς και άλλες λύσεις;
Μ282: Χ4, +6.
Σ: Για σκέψου κάτι άλλο.
Μ282: Είναι δύσκολο...

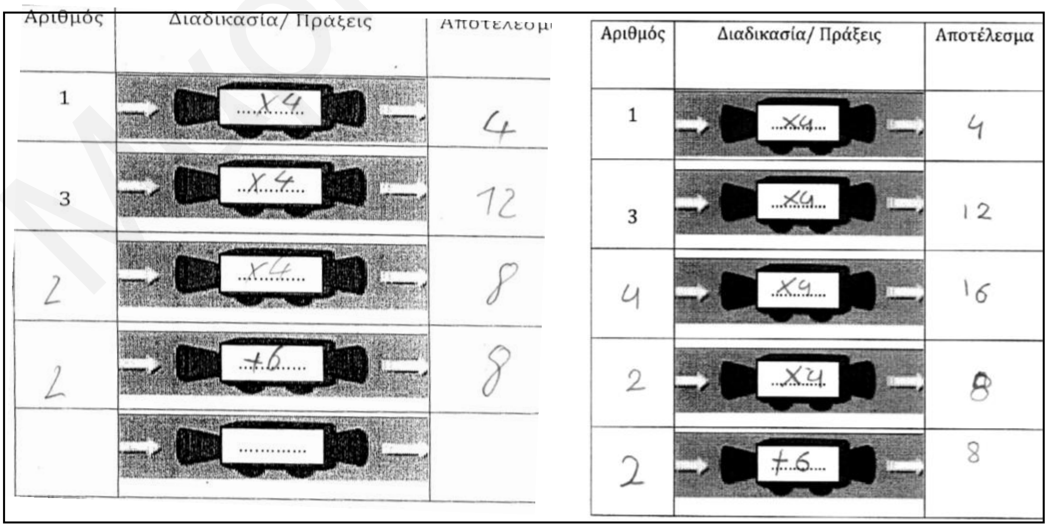
Μ378: 2Χ2.
Σ: Θα μου έδινε αποτέλεσμα 8;
Μ378: Χ4.

Σ: Αυτό που μου είπες προηγουμένως. Μήπως το 2 έγινε 8 με κάποιο άλλο τρόπο;
Μ378: 4+4=8.

Ενδεικτικό είναι το παράδειγμα του Μ119 ο οποίος αναφέροντας τυχαίες πράξεις και αριθμούς εντόπισε μια σωστή διαδικασία. Ακόμα και σε εκείνη τη στιγμή δεν μπορούσε να αναγνωρίσει την ορθότητα της λύσης του.

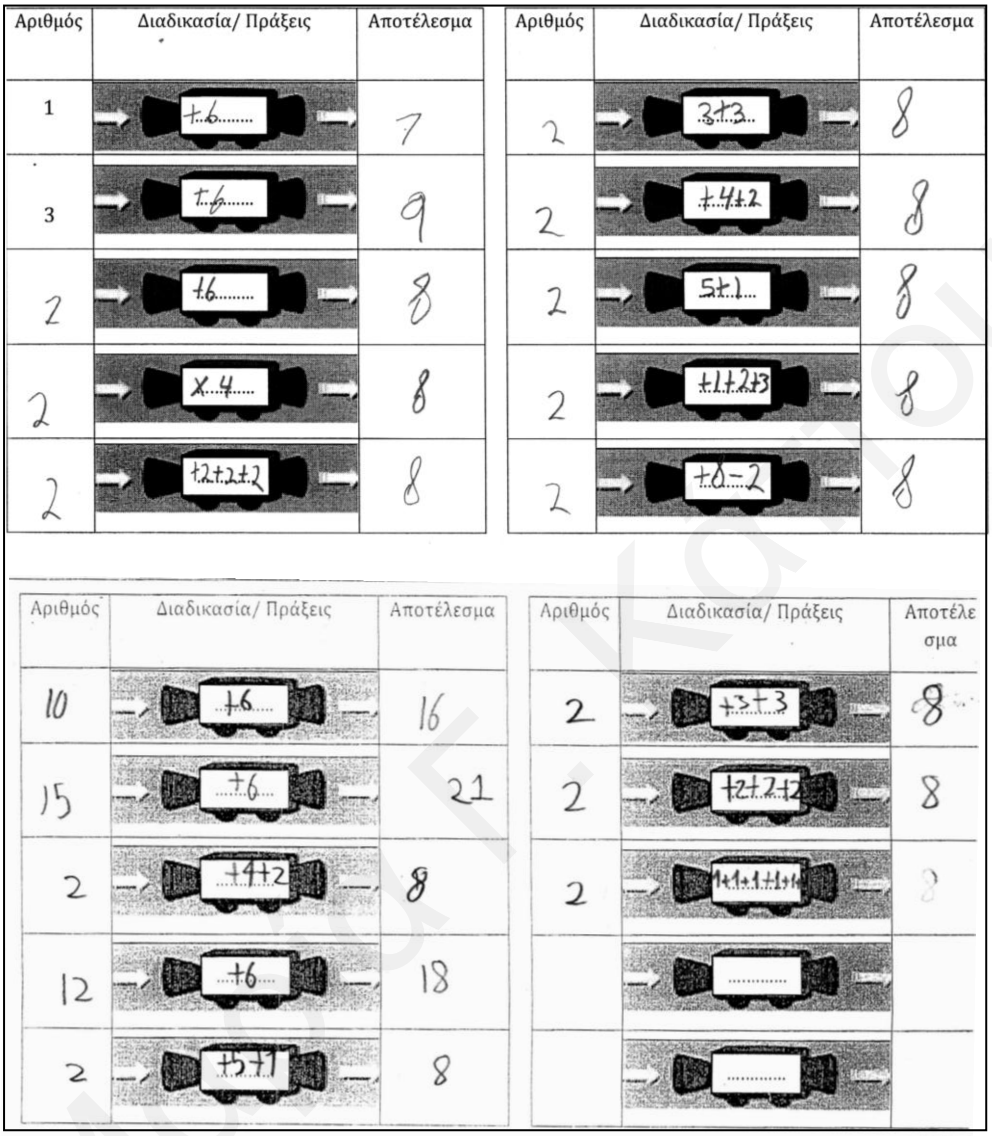
Μ119: Έκανε Χ4.
Σ: Μπορείς να σκεφτείς άλλο τρόπο;
Μ119: 2Χ2Χ2 (γελά).
Σ: Μπράβο!
Μ119: Μα είναι σωστό;
Σ: Βέβαια. Πώς το σκέφτηκες;
Μ119: Έτσι μου ήρθε...Είναι σωστό ή είναι λάθος;
Σ: Είναι σωστό... Μου το είπες τυχαία δηλαδή;
Μ119: Ναι...

Πιο κάτω φαίνονται αποσπάσματα από τα φυλλάδια που συμπλήρωναν οι μαθητές κατά τη διάρκεια της συνέντευξης, στα οποία παρουσιάζεται η «εξέλιξη» των λύσεων των μαθητών της ομάδας με χαμηλή μαθηματική δημιουργικότητα. Οι μαθητές μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε δύο ομάδες, ως προς το στάδιο της κατασκευής: σε αυτούς που οι λύσεις τους περιορίστηκαν στο Χ4 και στο +6 και σε εκείνους που ανέλυσαν τους συγκεκριμένους τρόπους με επαναλαμβανόμενες πράξεις προσθετικής ή πολλαπλασιαστικής δομής. Για παράδειγμα, στην Εικόνα 1 παρουσιάζονται τα φύλλα εργασίας των μαθητών Μ366 και Μ387, οι οποίοι περιορίστηκαν σε λύσεις της μορφής Χ4 και +6.



Εικόνα 4.1. Φύλλα εργασίας των μαθητών Μ366 και Μ387.

Οι μαθητές Μ361 και Μ419 αποτελούν περιπτώσεις μαθητών οι οποίοι ξεκίνησαν από τις λύσεις Χ4 και +6 και έπειτα ανέπτυξαν τη σκέψη τους, αναλύοντας τους αριθμούς σε επαναλαμβανόμενες προσθέσεις ή πολλαπλασιασμούς.



Αριθμός	Διαδικασία/ Πράξεις	Αποτέλεσμα
1	+6	7
3	+6	9
2	+6	8
2	X4	8
2	+2+2+2	8

Αριθμός	Διαδικασία/ Πράξεις	Αποτέλεσμα
2	3+3	8
2	+4+2	8
2	5+1	8
2	+1+2+3	8
2	+8-2	8

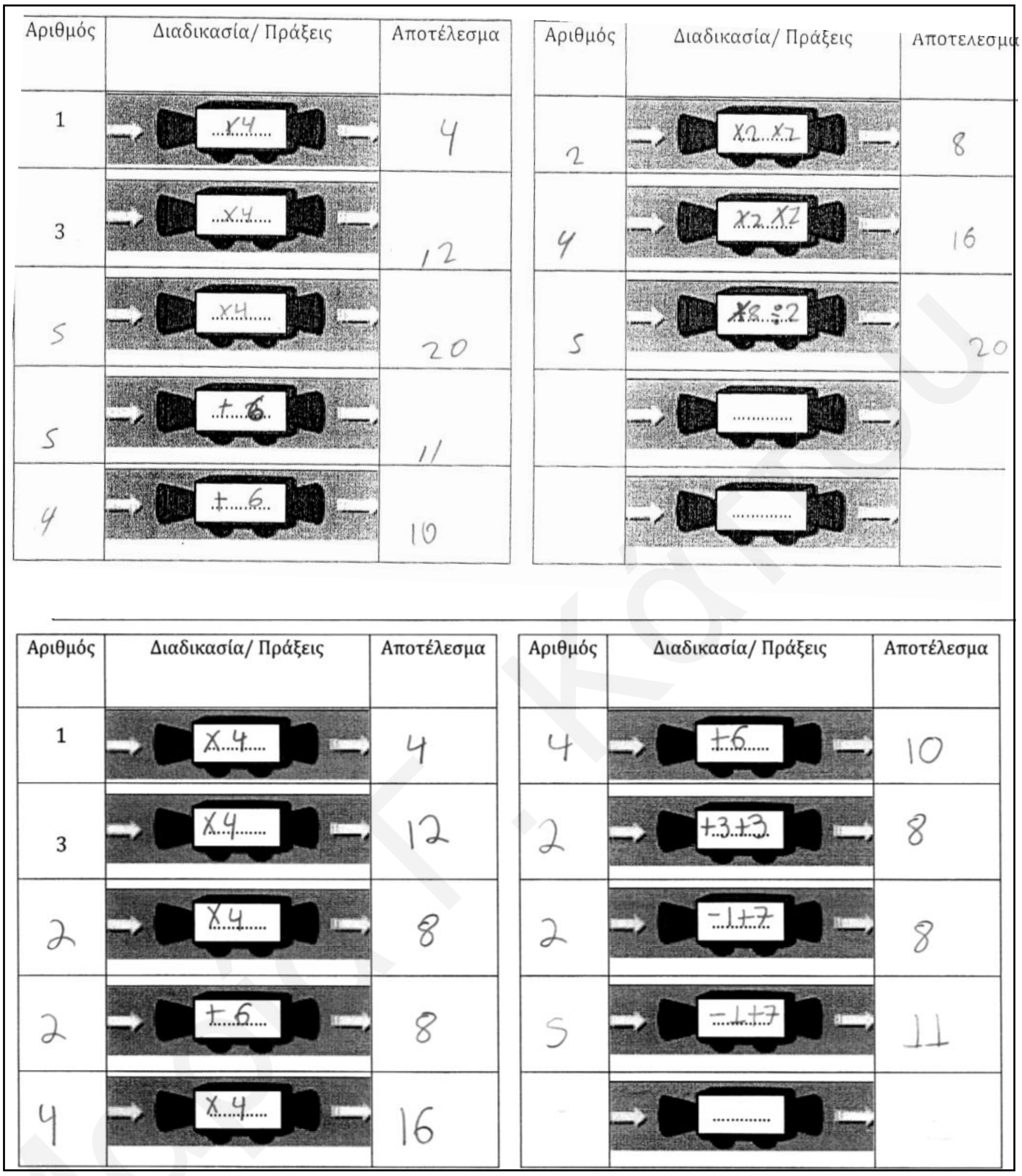
Αριθμός	Διαδικασία/ Πράξεις	Αποτέλεσμα
10	+6	16
15	+6	21
2	+4+2	8
12	+6	18
2	+5+1	8

Αριθμός	Διαδικασία/ Πράξεις	Αποτέλεσμα
2	+3+3	8
2	+2+2+2	8
2	1+1+1+1+1+1	8
	....	
	....	

Εικόνα 4.2. Φύλλα εργασίας των μαθητών Μ361 και Μ419.

Ομάδα μαθητών με μέτρια μαθηματική δημιουργικότητα

Το στάδιο της κατασκευής δεν διαφοροποιήθηκε από το αντίστοιχο στάδιο της ομάδας με χαμηλή μαθηματική δημιουργικότητα ως προς την ποσότητα των λύσεων που προτάθηκαν, αλλά κυρίως ως προς τις μαθηματικές ιδέες που αξιοποιήθηκαν. Κατά πρώτο λόγο, αρκετοί από τους μαθητές πρότειναν λύσεις της μορφής Χ4 και +6 ή λύσεις που προκύπτουν από την ανάλυση των προηγούμενων. Στην Εικόνα 4.3 παρουσιάζεται ο τρόπος εργασίας των συγκεκριμένων μαθητών.



Αριθμός	Διαδικασία/ Πράξεις	Αποτέλεσμα
1	x4	4
3	x4	12
5	x4	20
5	+6	11
4	+6	10

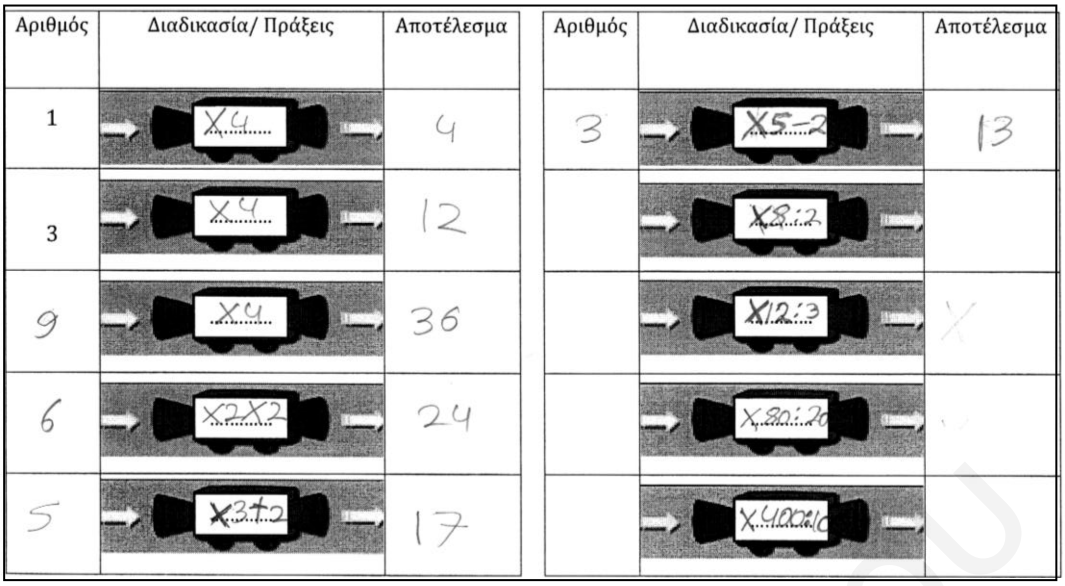
Αριθμός	Διαδικασία/ Πράξεις	Αποτελεσμα
2	x2 x2	8
4	x2 x2	16
5	~~x8~~ :2	20
	....	
	....	

Αριθμός	Διαδικασία/ Πράξεις	Αποτέλεσμα
1	X4	4
3	X4	12
2	X4	8
2	+6	8
4	X4	16

Αριθμός	Διαδικασία/ Πράξεις	Αποτέλεσμα
4	+6	10
2	+3+3	8
2	-1+7	8
5	-1+7	11
	....	

Εικόνα 4.3. Φύλλα εργασίας των μαθητών Μ367 και Μ384.

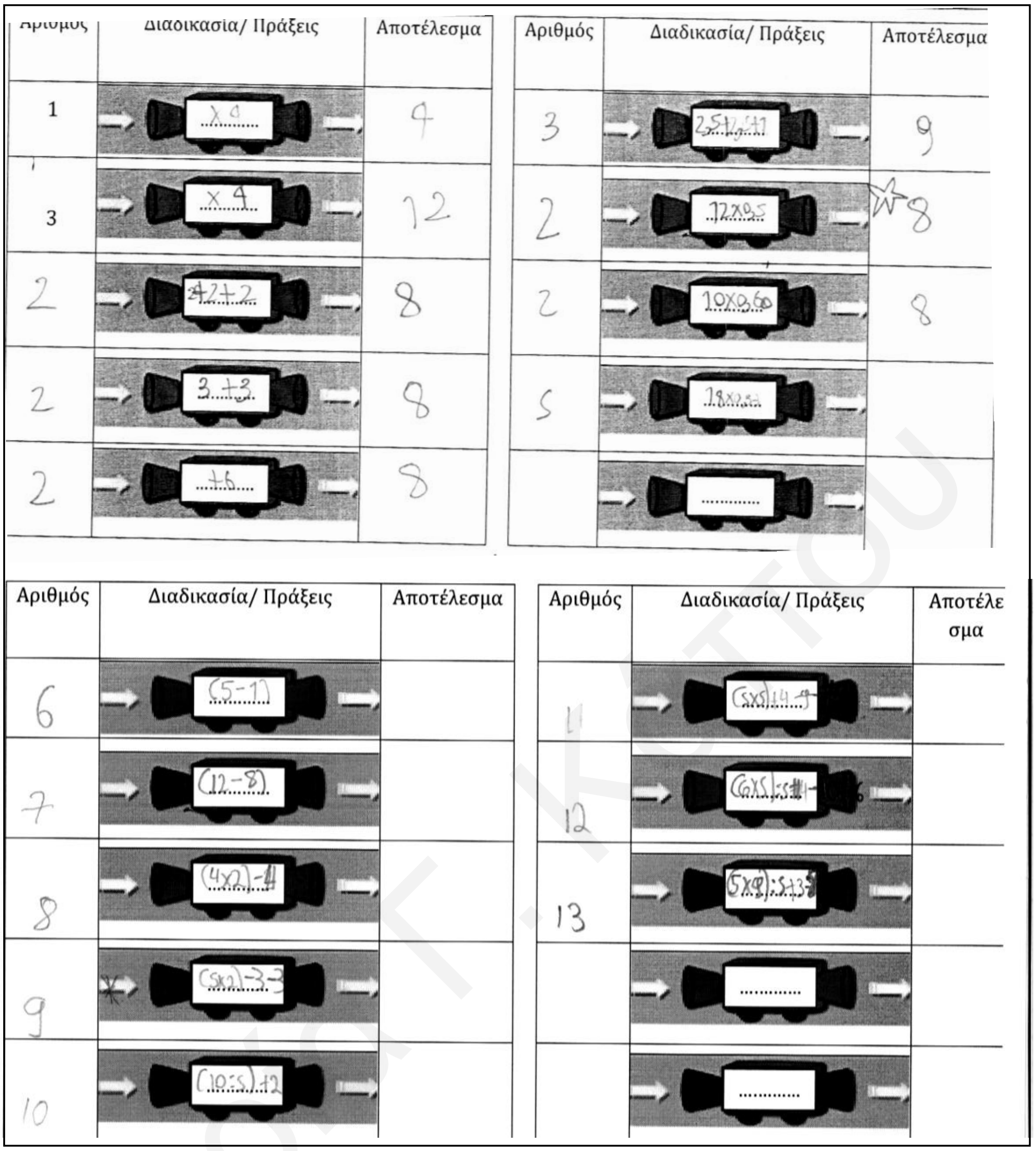
Οι μαθητές που κατάφεραν να αναλύσουν τους αριθμούς και τις πράξεις πρότειναν περισσότερες απαντήσεις από τους μαθητές που περιορίστηκαν στο Χ4 και το +6. Κάποιες φορές μάλιστα, αυτή η διαδικασία τους βοήθησε να συνδυάσουν πράξεις προσθετικής και πολλαπλασιαστικής δομής, εντοπίζοντας παραγωγικές μεθόδους εύρεσης του αποτελέσματος, όπως παρουσιάζεται στην Εικόνα 4.4.



Εικόνα 4.4. Φύλλο εργασίας του μαθητή Μ32.

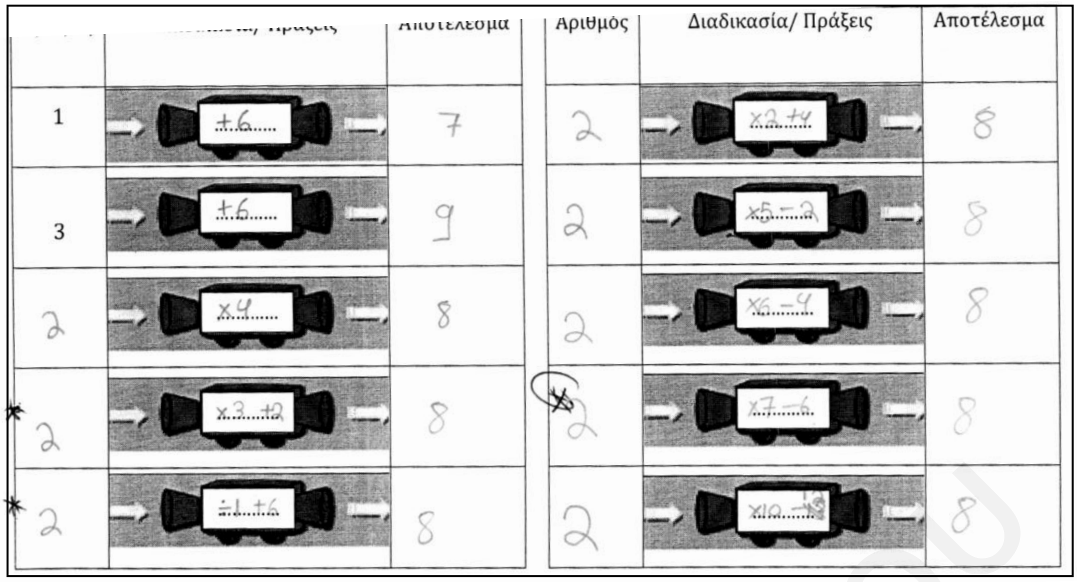
Ομάδα μαθητών με καλή μαθηματική δημιουργικότητα

Οι λύσεις των μαθητών αυτής της ομάδας ήταν ποσοτικά καλύτερες από τις λύσεις των συμμαθητών τους. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές με καλή μαθηματική δημιουργικότητα πρότειναν περισσότερες απαντήσεις από τους μαθητές των δύο προηγούμενων ομάδων, χρησιμοποιώντας περισσότερες μαθηματικές ιδέες. Μελετώντας τις λύσεις των μαθητών θα μπορούσαν να κατηγοριοποιηθούν σε τρεις ομάδες. Κατά πρώτο λόγο, υπήρξαν μαθητές των οποίων οι λύσεις τους προέκυψαν από την ανάλυση των σχέσεων Χ4 και +6. Σε σύγκριση με την ομάδα μαθητών με μέτρια μαθηματική δημιουργικότητα η ανάλυση των σχέσεων δεν περιορίστηκε στη χρήση επαναλαμβανόμενων προσθέσεων ή πολλαπλασιασμών. Αντιθέτως, οι λύσεις περιελάμβαναν μακροσκελείς διαδικασίες ή/και αξιοποίηση διαφορετικών ομάδων αριθμών, έχοντας πάντοτε ως υπόβαθρο το Χ4 και το +6. Ενδεικτικές είναι οι λύσεις που παρουσιάζονται στην Εικόνα 4.5. Είναι χαρακτηριστικό το γεγονός ότι μπροστά από τη διαδικασία που έγραφαν οι μαθητές στη μηχανή δεν έβαζαν κάποιο πρόσημο, γιατί αυτό που τους ανησυχούσε ήταν η εύρεση διαφορετικών διαδικασιών με αποτέλεσμα 4 ή 6, ενώ η πράξη που θα γινόταν στον αριθμό εισόδου ήταν αμελητέα ή ήδη ξεκάθαρη από την αρχή: πολλαπλασιασμός για τη διαδικασία με αποτέλεσμα 4 ή πρόσθεση για τη διαδικασία με αποτέλεσμα 6.



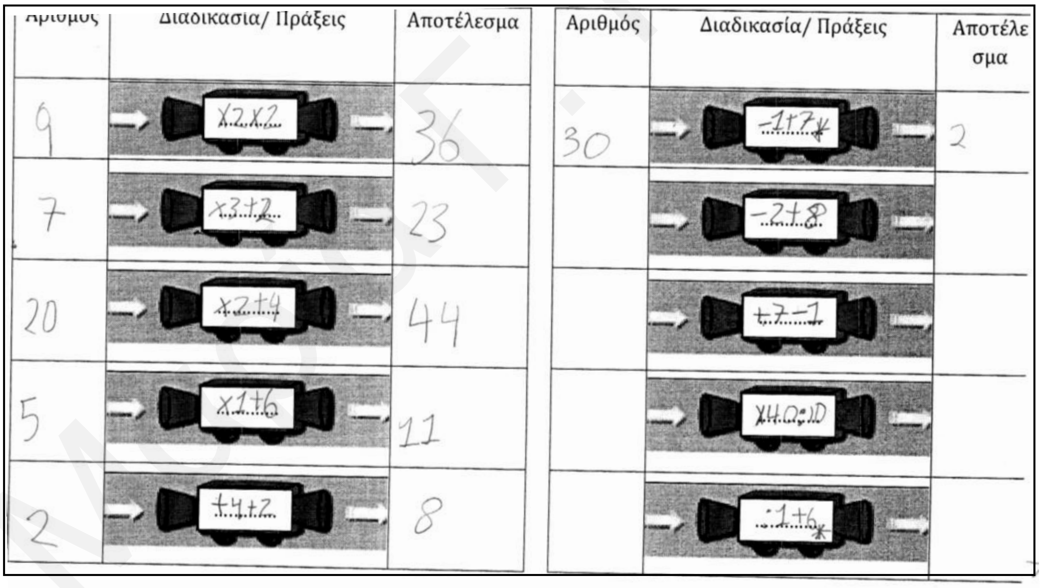
Εικόνα 4.5. Φύλλα εργασίας των μαθητών Μ4 και Μ87.

Κάποιοι από τους μαθητές εντόπισαν συγκεκριμένες διαδικασίες, κατά τη διερεύνηση του μαθηματικού έργου, που με μικρή τροποποίηση μπορούσαν να οδηγήσουν στην εύρεση διαφορετικών λύσεων. Για παράδειγμα, ο Μ285 χρησιμοποίησε συνδυασμό πολλαπλασιασμού με πρόσθεση ή αφαίρεση και κατέληξε σε διαφορετικές λύσεις, όπως φαίνεται πιο κάτω.



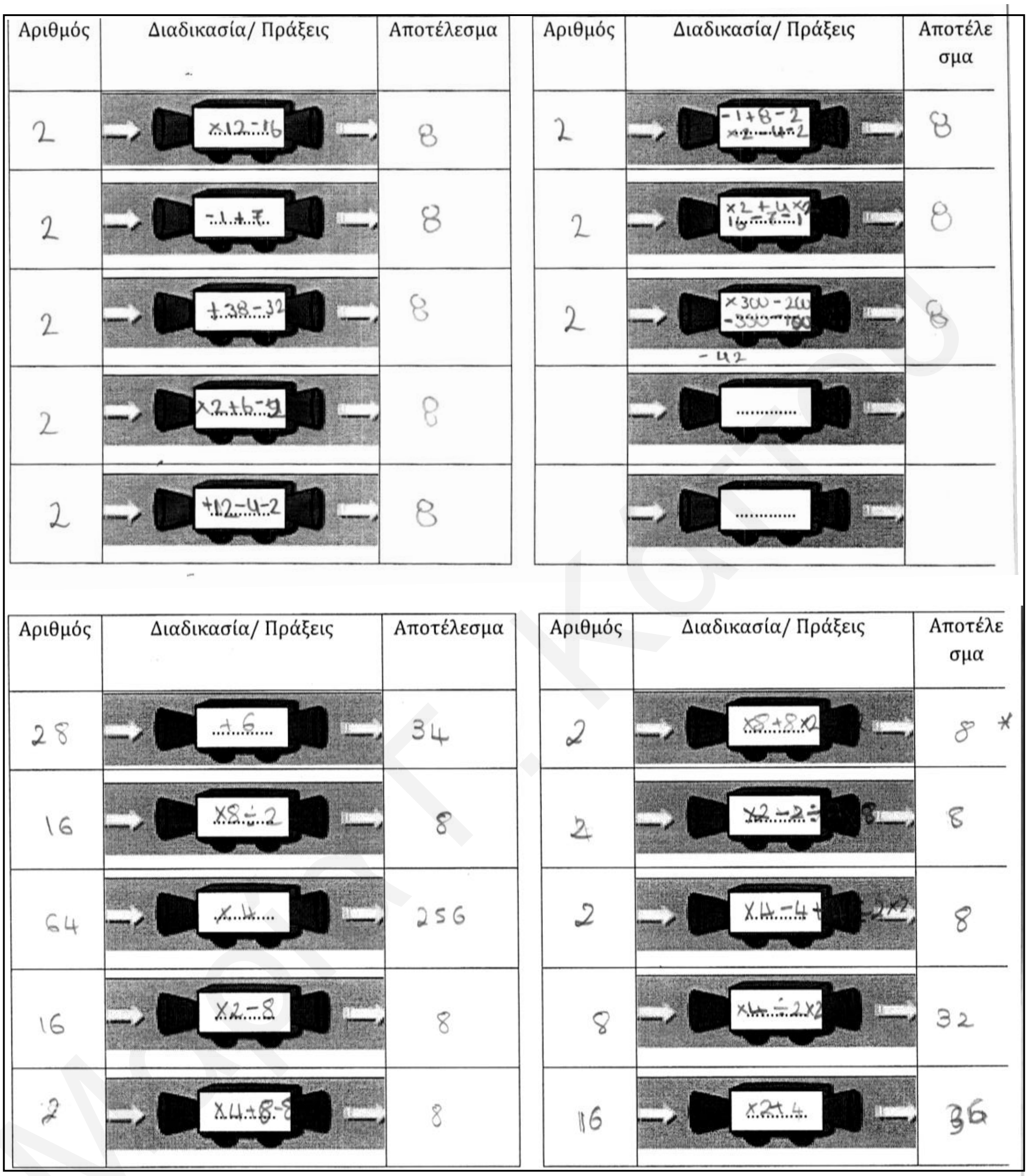
Εικόνα 4.6. Φύλλο εργασίας του μαθητή Μ285.

Όμοια ο Μ284 χρησιμοποίησε αντίθετες πράξεις ώστε να καταλήξει στο ζητούμενο αποτέλεσμα.



Εικόνα 4.7. Φύλλο εργασίας του μαθητή Μ284.

Η πλειοψηφία των μαθητών εφάρμοσε διαδικασίες που το αποτέλεσμα προέκυπτε από τη σειριακή εκτέλεση πράξεων, χωρίς να υπάρχει κάποιος συστηματικός τρόπος εργασίας. Η εργασία αυτών των μαθητών χαρακτηρίζεται από συνεχή εναλλαγή πράξεων και διαδικασιών. Στην Εικόνα 4.8 παρουσιάζεται ο τρόπος εργασίας των μαθητών Μ188 και Μ33.



Εικόνα 4.8. Φύλλα εργασίας των μαθητών Μ138 και Μ33.

Για το σχηματισμό μακροσκελών πράξεων ο Μ102 αναφέρει χαρακτηριστικά:

> *Μ102: 2Χ1:2Χ4:4+4+3=8*
> *Σ: Πώς σου ήρθε η ιδέα; Πώς το σκέφτηκες;*
> *Μ102: Να κάνω πολλές πράξεις, για να κάνω κάτι που δεν θα κάνουν άλλοι. Εγώ δεν μπορώ να το πω δεύτερη φορά όχι άλλοι.*

Σ: Έχεις κάποιο κόλπο για να βρίσκεις αυτές τις λύσεις;
Μ102: Τυχαία...[(2+4):6X5+1]:3X(2:1+2).
Σ: Πώς το σκέφτηκες; Τι σκέφτεσαι δηλαδή γα να βρίσκεις έξυπνες λύσεις;
Μ102: Κάνω πράξεις, πάνω στο αποτέλεσμα κάνω άλλη πράξη, πάνω στο αποτέλεσμα άλλη πράξη.

Τόσο μέσα από τις συνεντεύξεις όσο και μέσα από τα φύλλα εργασίας διαφάνηκε ότι οι μαθητές αυτής της ομάδας έδωσαν ιδιαίτερη έμφαση στην ανάπτυξη ιδεών, ξεκινώντας από τις πιο εύκολες και καταλήγοντας στις πιο δύσκολες.

Μ46: Δοκίμασα εύκολα στην αρχή, για να καταλάβω την άσκηση και μετά άλλαζα τους αριθμούς και έβαζα πιο δύσκολους αριθμούς.

Μ78: Είπα στην αρχή να κάνω πρόσθεση που είναι πιο εύκολο και μετά προσπάθησα να βάλω το μυαλό μου να δουλέψει περισσότερο, για να βρω καλύτερες απαντήσεις.

Μ283: Άρχισα από εύκολη και κάθε φορά που έβρισκα μια απάντηση προσπαθούσα να βρω και κάτι πιο καλό.
Σ: Πώς τα κατάφερνες να βρίσκεις κάθε φορά κάτι πιο καλό;
Μ283: Επειδή δεν μπορούσα να κάνω τις ίδιες πράξεις με αυτά που έκανα πριν και έτσι έπρεπε να βρίσκω κάτι πιο δύσκολο.

Κάποιοι μαθητές για να βρίσκουν λύσεις καθόριζαν εξ' αρχής τις πράξεις και ακολούθως δοκίμαζαν αριθμούς, για να ταιριάζει το αποτέλεσμα.

Σ: Για να καταλάβω, αποφασίζεις πρώτα την πράξη και μετά τους αριθμούς ή αποφασίζεις τους αριθμούς και μετά την πράξη;
Μ185: Την πράξη...Τώρα θα κάνω αφαίρεση. Θα κάνω -2+8...

Μ117: Στην αρχή βάζω έναν αριθμό όποιο τύχει και μετά κάνω την πράξη.
Σ: Βάζεις έναν οποιοδήποτε αριθμό και καταφέρνεις να φτάνεις στο αποτέλεσμα;
Μ117: Ναι. Για παράδειγμα, βάζω ένα μικρό αριθμό και στο τέλος σκέφτομαι ένα άλλο αριθμό για να κάνω πολλαπλασιασμό ή πρόσθεση και να βρω τον αριθμό που θέλω...

Υπήρχαν και από την άλλη πλευρά άτομα που σκέφτονταν αρχικά αριθμούς και ακολούθως προσάρμοζαν τις πράξεις.

Μ280: Για την ακρίβεια δεν σκέφτομαι την πράξη, σκέφτομαι αριθμό που θα βάλω. Μετά είναι πολύ εύκολο για μένα.

Σ: Γιατί κάνεις τόση ώρα να σκεφτείς τους αριθμούς;
Μ56: Για να είναι κάτι διαφορετικό, κάτι έξυπνο.

Για την εύρεση πολλών λύσεων, οι μαθητές επένδυσαν κυρίως στο δυνατό τους σημείο, γιατί αυτό θα τους εξασφάλιζε επιτυχία.

M38: Έλεγχα τις πράξεις και σκεφτόμουν τι μπορώ να κάνω καλύτερα και είπα πολλαπλασιασμό.
Σ: Τι σε έκανε να σκέφτεσαι διαφορετικά και με άλλο τρόπο;
M38: Δεν έφευγα από τον πολλαπλασιασμό, γιατί ήξερα ότι είμαι καλός στον πολλαπλασιασμό.
Σ: Τι θα συμβούλευες άλλους συμμαθητές σου;
M38: Να κάνουν την πράξη που τους βολεύει καλύτερα και να κάνουν συνέχεια τον τρόπο που νιώθουν ότι είναι καλύτεροι.

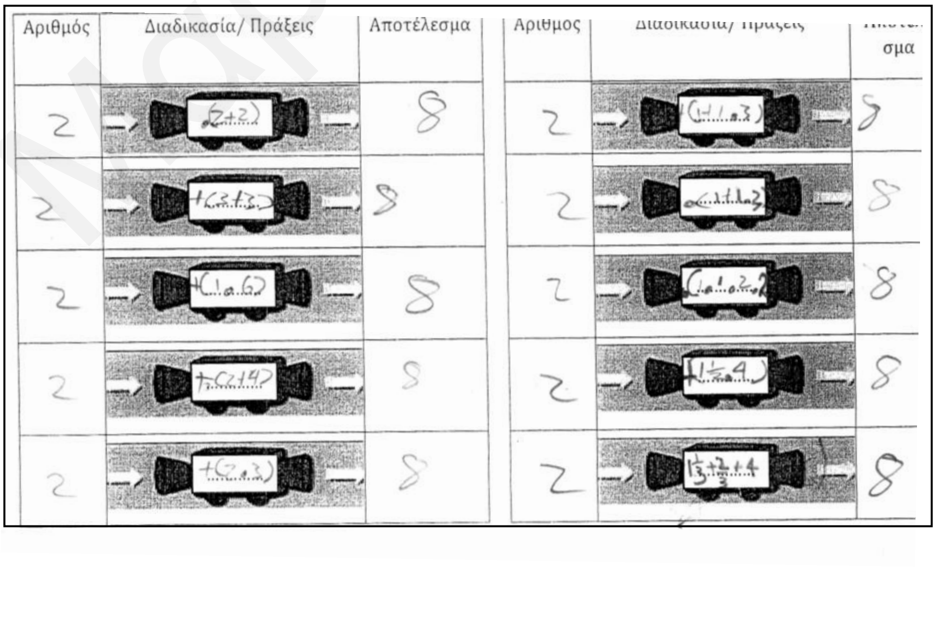
M92: Για να διευκολύνομαι, προτιμούσα να κάνω μια πράξη μικρή ή μεγάλη και να μου βγαίνει αποτέλεσμα 0 και μετά να κάνω πράξεις με κάποιο απλό ή δύσκολο τρόπο για να βγαίνει το 8.

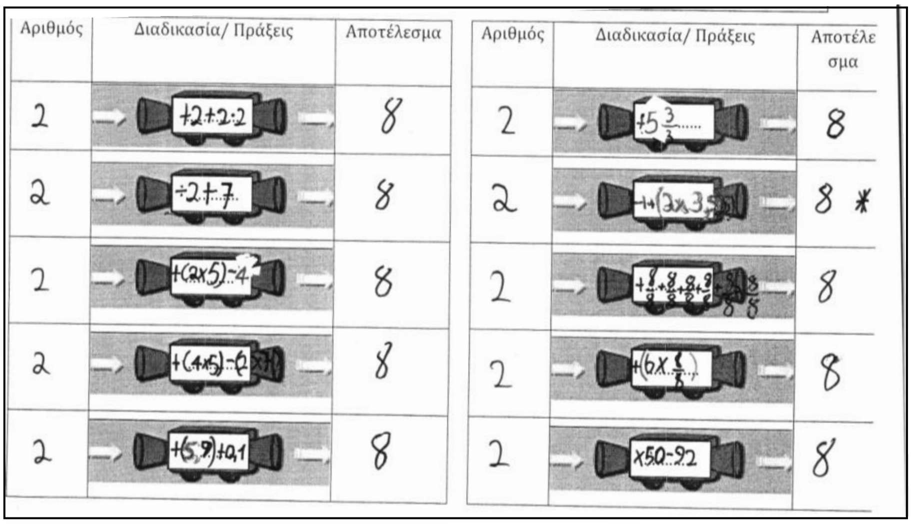
Ομάδα μαθητών με υψηλή μαθηματική δημιουργικότητα

Το στάδιο της Κατασκευής για τη συγκεκριμένη ομάδα μαθητών ήταν ιδιαίτερα πλούσιο, τόσο ως προς τις λύσεις που προτάθηκαν αλλά και ως προς τις γνωστικές διαδικασίες που σκέφτηκαν οι μαθητές. Ο τρόπος που εργάστηκαν οι μαθητές επιμερίζεται σε δύο ομάδες. Η πρώτη ομάδα μαθητών ξεκίνησε με το Χ4 ή το +6 και ακολούθως εξέλιξε τη σκέψη της:

M355: Άρχισα πρώτα με απλά πράγματα...Το Χ4 και το +6.
Σ: Γιατί ξεκίνησες με τα απλά;
M355: Γιατί αν ξεκινούσα με περίπλοκα θα μπερδευόμουν πολύ εύκολα. Άρχισα πρώτα με το Χ4, μετά +6, +2Χ2...
Σ: Πώς σκεφτόσουν αυτά τα διαφορετικά πράγματα κάθε φορά;
M355: Συμπλήρωνα ιδέες στην προηγούμενη.

Στην Εικόνα 4.9 παρουσιάζονται αποσπάσματα από τα φυλλάδια μερικών μαθητών αυτής της ομάδας.

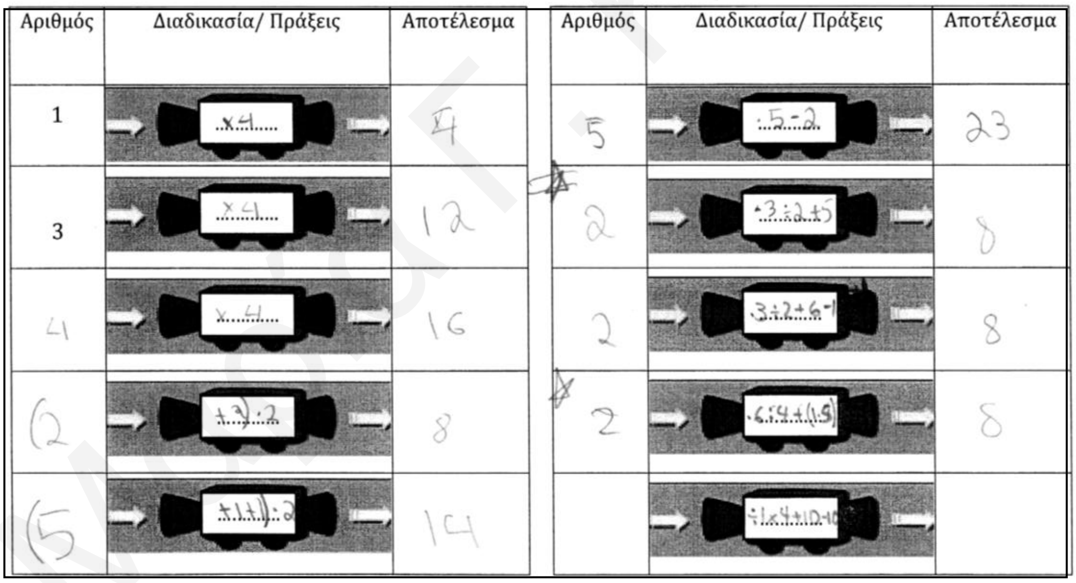




Αριθμός	Διαδικασία/ Πράξεις	Αποτέλεσμα	Αριθμός	Διαδικασία/ Πράξεις	Αποτέλεσμα
2	+2+2·2	8	2	+5 3/3	8
2	÷2+7	8	2	+(2x3,5)	8 *
2	+(2x5)-4	8	2	+8/8+8/8+8/8+8/8	8
2	+(4x5)-(2x1)	8	2	+(6x 1/1)	8
2	+(5,9)+0,1	8	2	x50-92	8

Εικόνα 4.9. Φύλλα εργασίας των μαθητών Μ124 και Μ21.

Χαρακτηριστικό της δεύτερης ομάδας μαθητών ήταν ο εντοπισμός λύσεων που φαινομενικά δεν συνδέονται μεταξύ τους αλλά αξιοποιούν και συνδυάζουν διαφορετικές μαθηματικές ιδέες.



Αριθμός	Διαδικασία/ Πράξεις	Αποτέλεσμα	Αριθμός	Διαδικασία/ Πράξεις	Αποτέλεσμα
1	x4	4	5	·5-2	23
3	x4	12	2	·3÷2+5	8
4	x4	16	2	·3÷2+6-1	8
(2	+2)·2	8	2	·6÷4+(1,5)	8
(5	+1+1)·2	14		÷1x4+10-10	

Εικόνα 4.10. Φύλλο εργασίας του μαθητή Μ41.

Αξίζει να αναφερθεί ότι σε αρκετούς δημιουργικούς μαθητές υπήρχε καταιγισμός ιδεών με την πρώτη ματιά που έρχονταν αντιμέτωποι με τη δραστηριότητα. Ενδεικτικά, ο Μ53 ανέφερε κατευθείαν απλές και σύνθετες λύσεις, συνδυάζοντας πράξεις προσθετικής και πολλαπλασιαστικής δομής.

Μ53: Χ4, +6, 2+1+5, +(2Χ3), Χ3+2.

Παρόλα αυτά, οι λύσεις των μαθητών παρουσιάζουν αυξανόμενο βαθμό δυσκολίας. Το γεγονός αυτό σε κάποιες περιπτώσεις προέκυψε λόγω της ανάλυσης των αριθμών:

Μ354: 2+6 =8, άρα και εδώ θα είναι +6...Το 2 γίνεται 2Χ4=8.
Σ: Πώς σκέφτεσαι να εργαστείς για να βρεις όσες πιο πολλές λύσεις μπορείς; Έχεις κάποιο σχέδιο στο μυαλό σου; Τι θα κάνεις πρώτα;
Μ354: Θα κάνω όπως εδώ που ήταν +6, μετά Χ4, μετά +5+1, +2+3+1 και να συνεχίσω +2Χ3, +6Χ1, +16-6-4.

Σε κάποιες άλλες περιπτώσεις προέκυψε λόγω της αξιοποίησης επιπρόσθετων πράξεων και ομάδων αριθμού.

Μ21: Ξεκίνησα με τα εύκολα Χ4, +6 αλλά μόλις τέλειωσαν τα εύκολα, μου ήρθαν τα δύσκολα.
Σ: Τι εννοείς πιο δύσκολα;
Μ21: Με πιο πολλά σύμβολα και μετά έβαζα παρενθέσεις, χρησιμοποίησα δεκαδικούς, κλάσματα.

Ο συνδυασμός μαθηματικών ιδεών και η προσθήκη ιδεών σε προηγούμενες λύσεις έδωσαν έναυσμα για την παραγωγή επιπρόσθετων λύσεων.

Σ: Τι θα συμβούλευες τους συμμαθητές σου να κάνουν, για να βρίσκουν λύσεις όπως εσένα;
Μ131: Πρώτα να βρίσκουν κάποιους εύκολους τρόπους και μετά να τους αναμιγνύουν. Εκείνους τους εύκολους να τους βάζουν σε άλλους τρόπους για να τους βοηθήσει να βρίσκουν άλλους τρόπους.

Όπως διαφάνηκε από τις συνεντεύξεις, καθώς οι μαθητές σκέφτονταν τις λύσεις τους δεν επικεντρώνονταν αποκλειστικά στη συμπλήρωση ενός είδους ιδεών, για παράδειγμα μόνο σε πράξεις ή μόνο σε αριθμούς. Αντιθέτως, αξιοποιούνταν ταυτόχρονα διαφορετικού είδους ιδέες. Ενδεικτικά:

Σ: Στόχος της άσκησης είναι να βρεις όσες πιο πολλές και πρωτότυπες απαντήσεις μπορείς.
Μ53: Σκέφτομαι να βάλω πιο μεγάλους αριθμούς και να κάνω πιο πολλές πράξεις εδώ.

Μ53: Να βάλω εδώ το 30 και να κάνω +10-4...+100-100+4+2.
Σ: Πώς το σκέφτηκες;
Μ53: Σκέφτηκα να κάνω με πιο μεγάλους αριθμούς και είδα το +10-4 που είχε 2 πράξεις και έκανα 4 πράξεις.

Κάποιοι από τους μαθητές είχαν αντιληφθεί ότι δεν ήταν ανάγκη να περιοριστούν στη χρήση συγκεκριμένου αριθμού συμβόλων ή πράξεων. Αντιθέτως, επέδειξαν ευέλικτο χειρισμό αποσπασματικών αριθμών, δείχνοντας ότι είχαν ξεφύγει από τις στερεότυπες λύσεις.

Μ23: 2Χ80-10-100+10-20-20-3-9

Μ355: +4-1Χ2:2+5-1Χ2

Μ122: 2+(10Χ1):2+2-1, 2+[(10Χ5)-40]:2+2-1

Αυτοί οι μαθητές δεν είχαν προαποφασίσει για τη διαδικασία που θα ακολουθήσουν, αλλά μπορούσαν με τόση ευκολία να χειρίζονται τους αριθμούς και τις πράξεις, που αυτά τους καθοδηγούσαν.

Σ: Σε έβλεπα ότι έκανες ώρα να το σκεφτείς. Τι περνούσε από το μυαλό σου;
Μ60: Τι αριθμούς να βάλω.
Σ: Είχες αποφασίσει από την αρχή τη διαδικασία;
Μ60: Όχι έβγαινε σταδιακά...[(2+1)Χ5+1]:2.
Σ: Πώς ήρθε στο μυαλό σου;
Μ60: Βρίσκω τους αριθμούς σταδιακά. Έβαζα τυχαία τα πρώτα και μετά προσπάθησα να βρω ένα πολλαπλάσιο του 8.

Σ: Αποφασίζεις από την αρχή ποια πράξη θα κάνεις ή ποιο αριθμό θα χρησιμοποιήσεις;
Μ124: Τυχαία. Βγαίνουν προσθέσεις και αφαιρέσεις μέσα στο μυαλό μου και βγαίνει ένα αποτέλεσμα. Και βλέπω εκείνο το αποτέλεσμα με εκείνο που έχω στο μυαλό μου και τα σκέφτομαι.

Μ55: Ξεχνώ τον αριθμό που ξεκινώ και τον αριθμό που θέλω να φτάσω και βρίσκω το πενταπλάσιο ή το διπλάσιο του αριθμού και μετά κάνω :5 ή :2.

Επίσης, διαφάνηκε ότι οι μαθητές ήταν ιδιαίτερα συγκεντρωμένοι και αφοσιωμένοι στην επίλυση του συγκεκριμένου έργου. Όπως οι μαθητές ανέφεραν ακόμα και αν κάτι διέκοψε την εργασία τους, αυτοί συνέχιζαν να διατηρούν στη σκέψη τους αυτό που έκαναν. Πολύ χαρακτηριστικά είναι τα πιο κάτω αποσπάσματα.

Μ122: Ένα λεπτό και κάτι άλλο σκέφτηκα...2+1000:500+8-5+1.
Σ: Καλά την ώρα που σου μιλούσα, εσύ σκεφτόσουν αριθμούς;
Μ122: Ναι, δοκίμαζα, σκεφτόμουν αριθμούς.
Σ: Έτσι κάνεις πάντα;
Μ122: Ναι.
Σ: Το θέλεις και το κάνεις ή άθελά σου;
Μ122: Το θέλω.

Μ60: Ας πούμε τώρα που μας διέκοψαν, δεν έχασα τη σκέψη μου.
Σ: Το σκεφτόσουν ακόμα;
Μ60: Ναι σκεφτόμουν ακόμα, εννοώ το έβαλα σε ένα «συρταράκι», το σταμάτησα και το ξανασκέφτηκα τώρα. Ας πούμε σκεφτόμουν κάτι με τη διαίρεση και τώρα που ήρθε η κυρία για να μην αποσυγκεντρωθώ είπα άσε το εκεί και μετά πάλι.

Μ124: Σκέφτηκα να βάλω κλάσματα μέσα.
Σ: Καλά ενώ μιλούσαμε για άσχετα πράγματα εσύ εξακολουθούσες να σκέφτεσαι;
Μ124: Ναι ακριβώς. Προσπαθώ να σκέφτομαι συνεχώς αλλά εξακολουθώ να ακούω.
Σ: Αντί να ακούς εκείνο που σου λέω συνέχιζες να σκέφτεσαι την άσκηση; Το θέλεις και το κάνεις ή είναι από μόνο του;
Μ124: Το θέλω και μου αρέσει πολύ.

Αξιολόγηση

Ομάδα μαθητών με χαμηλή μαθηματική δημιουργικότητα

Κατά την αξιολόγηση των λύσεων τους οι μαθητές με χαμηλή μαθηματική δημιουργικότητα αναγνώρισαν ότι οι ιδέες τους δεν είχαν κάτι διαφορετικό, κάτι δημιουργικό. Για παράδειγμα, ο Μ96 αντιλήφθηκε ότι οι απαντήσεις του δεν ήταν ιδιαίτερα έξυπνες ενώ ο Μ74 επέλεξε τυχαία μια λύση, χωρίς να μπορεί να αιτιολογήσει την επιλογή του:

Σ: Ποια είναι η πιο δημιουργική σου λύση;
Μ96: Δεν έχω έξυπνη.
Σ: Μπορείς να σκεφτείς τότε κάποια έξυπνη λύση;
Μ96: Όχι δυσκολεύομαι.

Σ: Ποια είναι η πιο έξυπνη σου λύση;
Μ74: Αυτή, αλλά δεν ξέρω γιατί.

Οι μαθητές που έδειξαν την προτίμησή τους σε μια από τις λύσεις τους προέβαλαν αιτιολογήσεις χωρίς μαθηματικό υπόβαθρο:

Σ: Γιατί θεωρείς την απάντηση 2+6=8 ως την πιο έξυπνη;
Μ363: Επειδή είναι εύκολη.

Σ: Ποια είναι η πιο έξυπνη σου απάντηση;
Μ120: Το +1+1+1+1+1+1. Τη διαλέγω γιατί είναι η πιο εύκολη.

Σ: Γιατί διαλέγεις αυτή την απάντηση;
Μ370: Δεν ξέρω. Επειδή 2+8=10-2=8.

Ομάδα μαθητών με μέτρια μαθηματική δημιουργικότητα

Αν και οι απαντήσεις αυτής της ομάδας ήταν ποιοτικά καλύτερες από τις απαντήσεις των μαθητών με χαμηλή μαθηματική δημιουργικότητα, εντούτοις υπήρχαν μαθητές οι οποίοι δεν ένιωθαν ικανοποιητική αυτοπεποίθηση, για να εντοπίσουν την καλύτερη απάντησή τους.

> *Μ110: Δεν ξέρω ποια είναι η καλύτερη... Καμιά, θα τις βρουν όλες οι συμμαθητές μου. Είναι απλοί τρόποι...*
>
> *Μ106: Είναι λίγο δύσκολο να σκεφτώ την πιο έξυπνη απάντηση από όλο το σχολείο.*

Υπήρχαν βέβαια και μαθητές των οποίων η αιτιολόγηση για την απάντηση που επέλεξαν δεν στηριζόταν σε μαθηματικά αλλά σε υποκειμενικά κριτήρια.

> *Μ360: Το +2+4 επειδή μπορεί να μην τη σκεφτούν άλλοι μαθητές.*
>
> *Μ31: Θα διάλεγα αυτή γιατί συγχύστηκα να την κάνω και νομίζω θα είναι η πιο δύσκολη.*
>
> *Μ99: Χ2Χ2 επειδή είναι πιο καλή από τις άλλες.*
>
> *Μ380: +2Χ2.*
> *Σ: Τι το κάνει να ξεχωρίζει;*
> *Μ380: Επειδή έκανε το 2+2=4Χ2=8.*

Η πλειοψηφία των μαθητών στηρίχθηκε στον αριθμό και στο είδος των πράξεων, για να επιλέξουν την απάντηση που προτιμούν. Πιο κάτω φαίνονται οι απαντήσεις του Μ77 και του Μ62.

> *Σ: Μέχρι τώρα ποια είναι η πιο έξυπνη σου απάντηση;*
> *Μ77: Το +3+1+1+1 επειδή είναι λίγο δύσκολο.*
> *Σ: Τι το κάνει δύσκολο;*
> *Μ77: Αυτά τα τρία +1.*
>
> *Μ62: Η Χ1+4+2.*
> *Σ: Γιατί τη θεωρείς δημιουργική;*
> *Μ62: Επειδή έχει πιο πολλές πράξεις.*

Οι μαθητές θεώρησαν ότι η αξιοποίηση της πράξης της διαίρεσης στις λύσεις τους τις έκανε πιο δημιουργικές. Χαρακτηριστικά είναι τα αποσπάσματα από το Μ17, το Μ36 και το Μ106.

> *Μ17: Η καλύτερη είναι η 2Χ8:2 γιατί χρησιμοποίησα πολλαπλασιασμό και διαίρεση. Χρησιμοποίησα τη διαίρεση που στην αρχή νόμιζα ότι ήταν δύσκολο να τη χρησιμοποιήσω.*
>
> *Μ36: Επειδή χρησιμοποίησα διαίρεση και δεν ξαναχρησιμοποίησα διαίρεση μέχρι τώρα....*

Μ106: Η τελευταία είναι η καλύτερη, επειδή έχει μέσα κάποιες πράξεις που πολλά παιδιά δυσκολεύονται. Με πολλαπλασιασμό ή διαίρεση δεν είναι τόσο εύκολη η πράξη όπως η πρόσθεση και η αφαίρεση.

Επίσης, το μέγεθος των αριθμών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές στις λύσεις τους ένιωθαν να επιβεβαιώνει την ικανότητά τους να σκεφτούν «έξυπνες» ιδέες.

Μ381: Νομίζω το 2Χ20-32 είναι η πιο έξυπνη λύση γιατί έχει πιο μεγάλους αριθμούς.

Μ80: Το 2Χ100:25... Σκέφτηκα ότι είναι καλύτερη αυτή η λύση γιατί όταν βλέπει ο δάσκαλος συνέχεια μικρούς αριθμούς θα νομίζει ότι δεν είναι σπουδαίες οι λύσεις μου, ενώ αν δει μεγάλους αριθμούς θα δει ότι είναι πιο πρωτότυπες.

Μ79: Θα βαριόταν ο δάσκαλος αν έκανα πράξεις με μικρούς αριθμούς και θα νόμιζε ότι δεν θα ήταν σπουδαίο, ενώ αν έβαζα μεγάλους αριθμούς θα έβρισκα καλύτερο αποτέλεσμα.

Ομάδα μαθητών με καλή μαθηματική δημιουργικότητα

Κατά την αξιολόγηση των απαντήσεων οι μαθητές αυτής της ομάδας έλαβαν υπόψη τους χαρακτηριστικά των πράξεων και των αριθμών που χρησιμοποίησαν. Αναφορικά με τους αριθμούς, οι μαθητές επέλεξαν απαντήσεις που περιελάμβαναν αρκετούς αριθμούς, «μεγάλους αριθμούς» και είδη αριθμών που δεν θα μπορούσε να σκεφτεί η πλειοψηφία των συμμαθητών τους. Ακολουθούν αποσπάσματα από τις συνεντεύξεις των μαθητών που ενισχύουν τα πιο πάνω αποτελέσματα.

Μ356: Νομίζω εκείνες οι λύσεις που έχουν περισσότερους από δύο αριθμούς είναι πιο έξυπνες.

Μ40: Αυτή η λύση γιατί έχει πιο πολλούς αριθμούς, είναι πιο περίπλοκη και έχει και πιο μεγάλους αριθμούς.

Μ57: Πιστεύω η τελευταία γιατί έχει πιο πολλούς αριθμούς και πιο πολλά σύμβολα.

Οι μαθητές με καλή μαθηματική δημιουργικότητα έλαβαν υπόψη τους διαφορετικά είδη αριθμών. Για αυτό το λόγο, θεώρησαν ότι η χρήση αρνητικών αριθμών και δεκαδικών-κλασματικών αριθμών οδηγούσε σε πιο έξυπνες απαντήσεις.

Μ24: Ίσως αυτή που έμπλεξα πολλά πράγματα να είναι η καλύτερη, δες έμπλεξα αρνητικούς αριθμούς.

Μ34: Νομίζω είναι αυτή που γράφω τώρα, γιατί θα συνδυάσω και δεκαδικούς και ακέραιους.

Το μέγεθος του αριθμού φαίνεται να βοήθησε τους μαθητές να σκεφτούν λύσεις που δεν θα σκεφτόταν κάποιος άλλος από τους συμμαθητές τους.

Μ385: Κάποιος τρόπος που μπορεί να μην είναι τόσο έξυπνος αλλά νομίζω δεν θα το γράψει κανένας άλλος, είναι να χρησιμοποιήσεις μεγάλους αριθμούς.

Μ280: Αυτή η λύση είναι καλή επειδή έχει πιο μεγάλους αριθμούς. Αλλά θα είναι καλή για κάποιο συμμαθητή μου, όχι όμως για κάποιο μαθηματικό.

Η πλειοψηφία των μαθητών επέλεγε την τελευταία λύση ως την πιο δημιουργική γιατί προέκυπτε μετά από συνδυασμό και ενίσχυση προηγούμενων ιδεών.

Μ98: Όσο περνά η ώρα σκέφτομαι διαφορετικά, σκέφτομαι κάτι άλλο που είναι πιο έξυπνο από το προηγούμενο.
Σ: Γιατί το λες αυτό;
Μ98: Γιατί ξεκινώ κάνω σιγά σιγά τα εύκολα, μετά πάω λίγο στα δύσκολα και το μυαλό μου μπαίνει στο θέμα και βρίσκω πιο εύκολα ιδέες.

Μ100: Προτιμώ την τελευταία γιατί...αντί να τη βρω μονομιάς ή με λίγη σκέψη όπως τις προηγούμενες, σε αυτή σκέφτηκα περισσότερο.

Μ35: Πάντως πιστεύω πως από τις πρώτες απαντήσεις δεν θα είναι καμιά η καλύτερη γιατί είναι μικροί αριθμοί, θα δω μόνο τις απαντήσεις που έδωσα προς το τέλος...

Μ281: Η αρχή ήταν η αρχή... Στην αρχή δεν μπορείς να σκεφτείς πολύ δύσκολα πράγματα, μόνο στο τέλος.
Σ: Γιατί στο τέλος;
Μ281: Επειδή στο τέλος κάνεις και άλλες πράξεις και βρίσκεις και άλλες ιδέες.

Ομάδα μαθητών με υψηλή μαθηματική δημιουργικότητα

Κατά την αξιολόγηση των ιδεών τους, οι μαθητές επέλεγαν τις λύσεις οι οποίες αξιοποιούσαν το μεγαλύτερο αριθμό μαθηματικών συμβόλων και πράξεων ή αναλογίζονταν το μέγεθος και το είδος των αριθμών. Όσον αφορά στην επιλογή των λύσεων με τις περισσότερες πράξεις οι μαθητές αναφέρθηκαν στα εξής:

Μ12: Νομίζω αυτή είναι η καλύτερη, γιατί έχει τέσσερις διαφορετικούς αριθμούς και τέσσερις διαφορετικές πράξεις ... έτσι και αλλιώς με αυτή τη λύση θα είναι δύσκολο για κάποιο να βρει το αποτέλεσμα.

Μ15: Αυτή με τα τέσσερα σύμβολα είναι η πιο έξυπνη γιατί έχει πιο πολλές πράξεις.
Σ: Όσο πιο πολλά σύμβολα έχει μια λύση τόσο πιο έξυπνη είναι νομίζεις;

Μ15: Ναι γιατί είναι πιο δύσκολη.

Οι μαθητές που θεώρησαν ότι το μέγεθος των αριθμών που χρησιμοποιούσαν θα έκανε μια λύση πιο πρωτότυπη ανέφεραν:

Σ: Γιατί χρησιμοποιείς στις λύσεις σου πιο μεγάλους αριθμούς;
Μ27: Για να βρω πιο μεγάλο αποτέλεσμα.
Σ: Και τι θα σε βοηθήσει;
Μ27: Για να βγουν πιο πρωτότυπες απαντήσεις.

Μ11: Προτιμώ τη λύση που έγραψα με το 470...Το 470 είναι μεγάλος αριθμός και αν δεν κάνεις πράξεις είναι δύσκολο.

Μ60: Η τελευταία είναι η καλύτερη γιατί είναι η πιο περίπλοκη, έχει πιο πολλούς αριθμούς και πιο μεγάλους αριθμούς.

Στις λύσεις των μαθητών με υψηλή μαθηματική δημιουργικότητα αξιοποιήθηκαν αριθμοί διαφορετικού είδους. Το στοιχείο αυτό προέβαλαν οι μαθητές ως χαρακτηριστικό που διαφοροποιούσε τις ιδέες τους από αυτές των συμμαθητών τους.

Μ9: Αυτή η λύση είναι η καλύτερη γιατί είναι σε μορφή κλάσματος και είναι δύσκολο να το κάνεις σε κλάσμα, θέλει πιο πολλή σκέψη για να το κάνεις παρά +3+3 ή +6.

Μ124: Η τελευταία είναι η καλύτερη, γιατί έβαλα κλάσματα μέσα αντί (ακέραιους) αριθμούς.
Σ: Και γιατί την προτιμάς επειδή έχει κλάσματα αυτή η λύση;
Μ124: Δεν θα τη σκεφτούν άλλοι.

Μ131: Αυτή με τις δυνάμεις είναι η καλύτερη. Επειδή έχει παιδιά που μπορεί να μην ξέρουν τις δυνάμεις ή που να ξέρουν αλλά να μην τα θυμηθούν τη συγκεκριμένη στιγμή.

Σχεδόν όλοι οι μαθητές επέλεγαν ως καλύτερη την τελευταία ιδέα που είχαν προτείνει. Αυτό οφειλόταν στο γεγονός ότι η τελευταία λύση ήταν συνονθύλευμα των ιδεών που αναπτύχθηκαν κατά τη διαδικασία εύρεσης λύσεων ή χρειάζονταν γενικότερα περισσότερη σκέψη.

Μ169: Η τελευταία γιατί σε εκείνη έβαλα τις παραπάνω ιδέες μου.

Μ3: Η τελευταία επειδή προσπάθησα να βάλω όλες τις ιδέες που μάζεψα ως εδώ, να βάλω και τις τέσσερις πράξεις...

Μ9: Αυτή η λύση γιατί όταν έχει κλάσματα θέλει πιο πολλή σκέψη και πρέπει να ξέρεις κάποια βασικά πράγματα παρά μόνο το +.

Το στάδιο της αξιολόγησης είχε σημαντικό ρόλο στη διαδικασία δημιουργικής σκέψης. Συγκεκριμένα, η αξιολόγηση λειτούργησε ως κίνητρο για τους μαθητές, ώστε να συνεχίσουν να προσπαθούν για να βρουν περισσότερες απαντήσεις αλλά και μια λύση που θα τους διαφοροποιήσει από τους υπόλοιπους συμμαθητές τους. Χαρακτηριστικά είναι τα πιο κάτω αποσπάσματα από το Μ69, το Μ41 και το Μ292.

Σ: Όσο περισσότερο χρόνο σε αφήνω να δουλέψεις στην άσκηση τόσο πιο πρωτότυπες λύσεις σκέφτεσαι;
Μ69: Ναι επειδή μου είχες πει να διαλέξω μια απάντηση που θα κερδίσει το διαγωνισμό και σκέφτηκα ότι σε ένα διαγωνισμό χρειάζεται κάτι πιο πρωτότυπο.

Σ: Πόσες λύσεις μπορείς να βρεις;
Μ292: Αρκετές. Θα προσπαθήσω να τις βρω όλες...

Μ41: Όταν μου είπες να βρω κάτι που δεν θα σκεφτούν άλλοι μαθητές, σκέφτηκα ότι αρκετοί μαθητές φοβούνται τη διαίρεση οπότε δεν την κάνουν και σκέφτηκα ότι μπορεί να είναι πιο έξυπνο με αυτή την πράξη.

Επικοινωνία

Ομάδα μαθητών με χαμηλή μαθηματική δημιουργικότητα

Λόγω του ότι οι λύσεις που πρότειναν οι μαθητές αυτής της ομάδας δεν είχαν κάποια λογική, δεν μπόρεσαν να επεξηγήσουν και να επικοινωνήσουν τον τρόπο σκέψης τους.

Σ: Πώς το σκέφτηκες;
Μ363: Επειδή είναι εύκολο.

Σ: Πώς σου ήρθε η ιδέα να κάνεις 2 προσθέσεις;
Μ386: Δεν ξέρω.

Μ359: Χ4.
Σ: Μπράβο. Πώς το σκέφτηκες αυτό;
Μ359: ...
Σ: Τι άλλο μπορούμε να κάνουμε για να γίνει το 2 σε 8; Μια λύση ήταν Χ4 άλλη λύση;
Μ359: ...
Σ: Είναι δύσκολο να σκεφτείς;
Μ359: Ναι.

Ακόμα και τα άτομα που προσπάθησαν να επεξηγήσουν τον τρόπο σκέψης τους περιορίστηκαν σε γενικόλογα σχόλια, χωρίς να δώσουν ιδιαίτερες λεπτομέρειες για τον τρόπο που σκέφτηκαν ή εργάστηκαν, όπως ο Μ386:

Σ: Αν ερχόταν ο δάσκαλος σου πώς θα του εξηγούσες τον τρόπο που σκέφτηκες;
Μ386: Κάθε λίγο είχα διαφορετικούς τρόπους.

Σ: Πώς έρχονταν στο μυαλό σου αυτοί οι διαφορετικοί τρόποι;
Μ386: Αν γράψεις ένα αριθμό θα σου έρθει και ο άλλος και ο άλλος.
Σ: Πώς θα σου έρθει ο άλλος και ο άλλος;
Μ386: Ας πούμε αν βάλω το 6 θα μου έρθει μετά το 7, το 9.

Κάποιοι άλλοι μαθητές θεώρησαν ότι παραθέτοντας τις ιδέες τους ή αναφέροντας τη διαδικασία εκτέλεσης πράξεων επεξηγούσαν τον τρόπο σκέψης τους. Για παράδειγμα ο Μ14 και ο Μ370 ανέφεραν τις πράξεις που εκτέλεσαν.

Σ: Περίγραψέ μου τι έκανες στην άσκηση.
Μ14: Χ4, +6.

Μ370: Έκανα + και μετά –.
Σ: Αν ερχόταν ο δάσκαλος σου πώς θα του εξηγούσες πως σκέφτηκες;
Μ370: Πρόσθετα και αφαιρούσα.

Παρόμοια, ο Μ74 στην προσπάθεια επεξήγησης της εργασίας του αναφέρθηκε στη διαδικασία εκτέλεσης της πράξης.

Μ74: Χ5-2.
Σ: Πώς το σκέφτηκες αυτό;
Μ74: Αφού 2Χ5=10-2=8.

Ομάδα μαθητών με μέτρια μαθηματική δημιουργικότητα

Η διάχυση των ιδεών ήταν δύσκολη και για αυτή την ομάδα μαθητών, αφού δεν ήταν σε θέση να εξηγήσει τον τρόπο σκέψης της. Οι μαθητές κατέληξαν σε γενικόλογες αναφορές, χωρίς να δίνουν ιδιαίτερες διευκρινήσεις.

Μ32: Στην αρχή έκανα 2+πόσα =8 και μετά ξεκίνησα να σκέφτομαι κάτι διαφορετικό.

Μ77: Σκεφτόμουν τους αριθμούς, πώς το 2 έγινε 8... Κάνω τους αριθμούς λίγο διαφορετικά.

Μ83: Στην αρχή δεν το κατάλαβα και μετά διάβασα πιο προσεκτικά την οδηγία και έκανα τα άλλα...

Μ17: Άλλαζα τα σύμβολα και τους αριθμούς και προσπαθούσα να κάνω άλλες πράξεις που να είναι και πιο καλές.

Ο Μ43 δεν αναφέρθηκε διόλου στην επεξήγηση της εργασίας του, αλλά μίλησε περισσότερο «θεωρητικά».

Σ: Τι σε βοήθησε να βρεις τόσες πολλές λύσεις;

Μ43: Η σκέψη.
Σ: Τι σε βοήθησε να δώσεις διαφορετικές λύσεις;
Μ43: Το μυαλό μου.
Σ: Τι σε βοήθησε να βρεις έξυπνες λύσεις;
Μ43: Η φαντασία μου.

Τα άτομα που προσπάθησαν να εξηγήσουν τον τρόπο με τον οποίο εργάστηκαν κατέληξαν να διαβάζουν τις απαντήσεις τους, χωρίς όμως να είναι σε θέση να ερμηνεύσουν τη λογική τους.

Μ62: Στην αρχή έκανα το πιο εύκολο το 2Χ4 και μετά έκανα πάλι Χ4, το ίδιο με το πρώτο ... (διαβάζει τις λύσεις του).
Σ: Τι άρχισες και χρησιμοποιούσες μετά;
Μ: Έκανα Χ, μετά + και μετά ξανά Χ (διαβάζει τις λύσεις του).

Σε σύγκριση με την ομάδα με χαμηλή δημιουργικότητα, υπήρχαν μεμονωμένες περιπτώσεις σε αυτή την ομάδα που μπόρεσαν να εξηγήσουν σε κάποιο βαθμό τη λογική τους.

Μ376: Στην αρχή σκεφτόμουν με το +6 και ύστερα σκέφτηκα τον πίνακα με τα πολλαπλάσια του 2 και άρχισα με το 2Χ... και προχωρούσα.

Μ288: Το πρώτο μου βήμα ήταν Χ4 που ήταν το πιο εύκολο, αλλά μετά σκέφτηκα ότι το 2 θέλει 6 για να γίνει 8, άρα +6. Μετά σκέφτηκα μερικούς τρόπους που το αποτέλεσμα μπορεί να βγει 6 και τους έγραψα.

Μ52: Στην αρχή ξεκίνησα με 1 και μετά πήγα με 2 και με 3 σύμβολα.
Σ: Στα 2 και στα 3 σύμβολα τι έκανες;
Μ52: Τα ένωνα και έβγαινε 8.

Μέσα από τις απαντήσεις των μαθητών διαφάνηκε η εναλλαγή των αριθμών, η εναλλαγή των πράξεων, η αύξηση του αριθμού των πράξεων και ο συνδυασμός μαθηματικών ιδεών. Εντούτοις, οι απαντήσεις τους στερούνταν ευχέρειας λόγου και ερμηνείας.

Ομάδα μαθητών με καλή μαθηματική δημιουργικότητα

Οι μαθητές αναφέρθηκαν στις βασικές μαθηματικές ιδέες που χρησιμοποίησαν στις λύσεις τους, κάποιες φορές δίνοντας αρκετές λεπτομέρειες και άλλοτε λιγότερες. Συγκεκριμένα, έγινε αναφορά στο πώς ξεκίνησαν και πώς ξεδίπλωσαν τη σκέψη τους, στα στοιχεία που τους βοήθησαν, σε ιδέες αναφορικά με το μέγεθος και το είδος των αριθμών που χρησιμοποίησαν ή ακόμα και στο είδος των πράξεων. Ανάμεσα στις απαντήσεις χωρίς ιδιαίτερες λεπτομέρειες, που παρόλα αυτά γινόταν αναφορά σε μαθηματικές ιδέες, είναι αυτές που παρατίθενται πιο κάτω.

Μ281: Στην αρχή έκανα πολύ απλά, έκανα με μια πράξη, με έναν αριθμό, με ένα σύμβολο. Μετά που άρχισα και συνήθιζα και καταλάβαινα καλύτερα έβρισκα και άλλες ιδέες και έφτασα στο ψηλό επίπεδο.

Μ40: Στην αρχή σκέφτηκα πιο μικρούς αριθμούς μετά σκέφτηκα πιο δημιουργικά, πιο δύσκολα και μετά συνέχισα με τον ίδιο τρόπο.

Μ82: Προσπαθούσα να τις κάνω πιο δύσκολες. Στην αρχή ξεκίνησα με Χ4 και +6 και μετά προσπαθούσα να τις δυσκολέψω.
Σ: Πώς το πέτυχες;
Μ82: Με πιο μεγάλους αριθμούς, με διαίρεση, με πολλαπλασιασμό, με κλάσματα και με αρνητικούς αριθμούς.

Οι απαντήσεις των μαθητών που χαρακτηρίζονται από έντονο στοιχείο διάχυσης και επεξήγησης των λύσεών τους παρατίθενται πιο κάτω:

Μ115: Με την πρόσθεση, με το +6 ξεκίνησα να σκέφτομαι και μετά έβαζα 3+3=6, 2+4=6 έβαζα δηλαδή δύο αριθμούς που μπορούν να κάνουν 6. Με τον πολλαπλασιασμό σκέφτηκα ας πούμε 3Χ4=12, 2Χ4=8 και σκεφτόμουν άλλα πράγματα για να βγαίνει το Χ4.
Σ: Μετά τι σκέφτηκες;
Μ115: Σκέφτηκα να χρησιμοποιήσω πολλούς αριθμούς αλλά πάλι σκεφτόμουν το 6. Αλλά αντί να χρησιμοποιήσω 2 αριθμούς μπορεί να χρησιμοποιούσα 3 ή 4, χώριζα εκείνους τους αριθμούς και έβρισκα άλλους...Εδώ σκεφτόμουν τα πολλαπλάσια των αριθμών.

Μ291: Στην αρχή σκεφτόμουν το +6, τα πολύ απλά. Μετά είδα ότι μπορούσα να κάνω Χ4, το πρόσεξα γιατί έπρεπε να κάνω το 2 να γίνει 8 με διαφορετικούς τρόπους. Άρχισα να σκέφτομαι τότε το 20Χ4=80:10=8 και από εδώ κατέληξα στην τελευταία. Μετά είπα ότι το 10 είναι βασικό στοιχείο που πρέπει να υπάρχει στις επόμενες μου λύσεις. Μετά θυμήθηκα που έκανα εκείνο το λάθος και σκέφτηκα τη λύση Χ3+2 μας κάνει 8.
Σ: Ναι αλλά σκεφτόσουν πρόσθεση και αφαίρεση και μετά πήγες σε πολλαπλασιασμό. Γιατί;
Μ291: Από ένα λάθος μου ήρθε η έμπνευση. Μετά 2:2=1 σκέφτηκα έτσι απλά και είπα πόσα μου μένουν για να βρω το 8. Στην επόμενη σκέφτηκα τον πίνακα του πολλαπλασιασμού του 8 και είδα ότι 2Χ8=16 και για αυτό πρόσθεσα 14 και έκανα :2. Μετά άρχισα να ανακατεύω τους πίνακες του πολλαπλασιασμού, αυτό του 5 και του 6 και βρήκα αυτή τη λύση. Μετά το επόμενο βασιζόταν στις πρώτες μου απαντήσεις...

Ομάδα μαθητών με υψηλή μαθηματική δημιουργικότητα

Κατά την επικοινωνία, οι μαθητές είχαν ξεκάθαρο στο μυαλό τους τον τρόπο με τον οποίο εργάστηκαν και για αυτό ήταν σε θέση να δώσουν πολλές λεπτομέρειες για το πώς δούλεψαν. Πιο κάτω παρουσιάζονται τρία χαρακτηριστικά αποσπάσματα στα οποία οι μαθητές αναφέρονται στις επιλογές τους να χρησιμοποιήσουν διαφορετικές πράξεις και αριθμούς καθώς επίσης να αυξήσουν το βαθμό δυσκολίας των προτεινόμενων λύσεων τους.

> *Μ12: Σκέφτηκα να χρησιμοποιήσω όσο πιο πολλά σύμβολα μπορούσα, να κάνω πρώτα πολλαπλασιασμό ή πρόσθεση που θα μεγαλώσει τον αριθμό αρκετά, αυτόματα έβαλα και το 3 και αφαίρεσα όσα έπρεπε για να βγάλει την απάντηση.*

> *Μ131: Στην αρχή σκέφτηκα τους πιο εύκολους τρόπους. Μετά ήθελα να προσθέσω και κλάσματα που να μας βγαίνει το αποτέλεσμα. Μετά σκέφτηκα να κάνουμε με διάφορους τρόπους που μάθαμε, με κλάσματα, με ποσοστά, με δεκαδικούς και σκέφτηκα να προσθέσω και τα μοτίβα... Μετά σκέφτηκα τις δυνάμεις και στο τέλος προσπαθούσα να βρω κάτι πρωτότυπο που το κάνουμε τώρα.*

> *Μ25: Δοκίμασα να χτίσω πάνω σε κάποια άλλη λύση, να βάλω πολλές πράξεις, να κάνω την πιο απλή λύση...Στην αρχή πήγα στο πιο απλό. Είπα το Χ4 ήταν το μόνο και μετά προσπάθησα να χτίσω σε αυτό. Μετά είπα να το σπάσω σε πιο μικρούς αριθμούς (Χ8:2) μετά συνέχισα να μεγαλώνω τους αριθμούς. Μετά μου ήρθε η σκέψη ότι είναι το +6 και ξεκίνησα να χτίζω πάνω σε αυτό, να το αναλύω σε μικρούς αριθμούς, μετά το έκανα μεγάλο και πάλι το έσπασα. Μετά ήθελα να κάνω κάτι που να έχει όλες τις πράξεις μέσα, σκέφτηκα κάποιο που να μην έχει δύσκολες πράξεις αλλά να είναι έξυπνο, κάτι ξεχωριστό. Μετά που βγήκε καλή αυτή η πράξη το μεγάλωσα και έβαλα και άλλους αριθμούς και το πέτυχα.*

Σύγκριση της Διαδικασίας Δημιουργικής Δράσης στις Ομάδες Μαθητών

Πέρα από την απλή περιγραφή των σταδίων που εμφανίστηκαν σε κάθε ομάδα μαθητών είναι σημαντική η μεταξύ τους σύγκριση, ώστε να εντοπιστούν οι ομοιότητες και οι διαφορές τους. Ο Πίνακας 4.14 παρουσιάζει τα στάδια που εμφανίστηκαν σε κάθε ομάδα μαθητών καθώς και το βαθμό επεξεργασίας που έτυχαν. Όσον αφορά στον Πίνακα 4.15, περιλαμβάνει με λεπτομέρεια τα στοιχεία που χαρακτηρίζουν κάθε στάδιο της δημιουργικής διαδικασίας στις τέσσερις ομάδες μαθητών.

Πίνακας 4.14

Εμφάνιση και επεξεργασία σταδίων δημιουργικής διαδικασίας ανάμεσα στις ομάδες μαθητών.

	Ομάδα 1	Ομάδα 2	Ομάδα 3	Ομάδα 4
Διερεύνηση	-	+	+*	+
Συσχέτιση	-	-	+	+*
Κατασκευή	+	+*	+*	+*
Αξιολόγηση	-	+	+	+*
Επικοινωνία	-	-	+	+*

\- Δεν εμφανίστηκε
\+ Εμφανίστηκε
* Αυξημένος βαθμός επεξεργασίας σε σχέση με την προηγούμενη ομάδα μαθητών

Η ομάδα μαθητών με χαμηλή μαθηματική δημιουργικότητα δεν εμφάνισε όλα τα στάδια της διαδικασίας, που περιγράφονται στο μοντέλο της Sheffield (2009). Για παράδειγμα, απουσίαζαν τα στάδια της συσχέτισης, της διερεύνησης, της αξιολόγησης και της επικοινωνίας, ενώ το στάδιο της κατασκευής έτυχε επιφανειακής επεξεργασίας, χωρίς οι μαθητές να έχουν αναλογιστεί βασικές μαθηματικές ιδέες. Ενδεικτικά, οι μαθητές αξιοποίησαν στις απαντήσεις τους μόνο τις εμφανείς σχέσεις που συνδέουν το 2 με το 8 (+6, Χ4) χωρίς να μπορούν να τις αναλύσουν περαιτέρω ή ακόμα να σκεφτούν άλλες μαθηματικές ιδέες.

Η ομάδα μέτριας μαθηματικής δημιουργικότητας μοιράζεται κοινά χαρακτηριστικά με την ομάδα χαμηλής μαθηματικής δημιουργικότητας, όσον αφορά στα στάδια της συσχέτισης και της επικοινωνίας. Ειδικότερα, διαφάνηκε μέσα από τις συνεντεύξεις ότι οι μαθητές με μέτρια μαθηματική δημιουργικότητα δυσκολεύτηκαν να εντοπίσουν συνδέσεις μεταξύ των μαθηματικών ιδεών καθώς επίσης να επεξηγήσουν τον τρόπο σκέψης τους. Αν και οι μαθητές με μέτρια μαθηματική δημιουργικότητα έκαναν αναφορά σε θεωρητική εφαρμογή αυτών των σταδίων, εντούτοις δεν κατάφεραν να υλοποιήσουν τις σκέψεις τους. Όσον αφορά στο στάδιο της διερεύνησης, οι μαθητές μπήκαν στη διαδικασία να αναλογιστούν τις πράξεις και τους συνδυασμούς τους, καταλήγοντας σε παραγωγικές μεθόδους. Λόγω του σταδίου της διερεύνησης, οι μαθητές αξιοποίησαν επιπρόσθετες μαθηματικές ιδέες, όπως ο συνδυασμός πράξεων και η χρήση περισσότερων συμβόλων, κατά την «κατασκευή» των λύσεών τους. Άλλωστε αυτά τα στοιχεία θεώρησαν οι μαθητές ως σημαντικά κατά το στάδιο της αξιολόγησης.

Η ομάδα μαθητών με καλή μαθηματική δημιουργικότητα παρουσιάζει πιο ολοκληρωμένη διαδικασία όσον αφορά στα στάδια που προτείνονται στο θεωρητικό μοντέλο. Πέρα από τη διερεύνηση των πράξεων που είχε αναλογιστεί η ομάδα με μέτρια μαθηματική δημιουργικότητα, οι μαθητές αυτής της ομάδας ασχολήθηκαν και με τη διερεύνηση των αριθμών, λαμβάνοντας υπόψη το είδος και το μέγεθος των αριθμών. Το στάδιο της συσχέτισης εμφανίστηκε για πρώτη φορά στη διαδικασία δημιουργικής δράσης της ομάδας αυτής. Η συσχέτιση έγινε σε δύο επίπεδα: σε μαθηματικό και σε εμπειρικό επίπεδο. Με άλλα λόγια, οι μαθητές εντόπισαν σχέσεις μεταξύ των προτεινόμενων μαθηματικών ιδεών και δράσεων αλλά επίσης αναφέρθηκαν σε διδακτικές και καθημερινές τους εμπειρίες. Τόσο το στάδιο της διερεύνησης όσο και το στάδιο της συσχέτισης φάνηκε ότι επηρέασε τις λύσεις που προτάθηκαν στο στάδιο της κατασκευής. Οι λύσεις των μαθητών ήταν ποσοτικά και ποιοτικά καλύτερες από τις λύσεις των μαθητών που ανήκουν στις προηγούμενες ομάδες. Οι μαθητές μπόρεσαν να προτείνουν περισσότερες λύσεις, αξιοποιώντας περισσότερες μαθηματικές ιδέες. Κατά την αξιολόγηση, πέρα από τις παραμέτρους του έργου έγινε αναφορά στο βαθμό επεξεργασίας που έτυχαν οι λύσεις τους, ενώ κατά το στάδιο της επικοινωνίας οι μαθητές ήταν σε θέση να επεξηγήσουν τη λογική και τον τρόπο εργασίας τους.

Σε σχέση με την ομάδα με καλή μαθηματική δημιουργικότητα, η ομάδα με υψηλή μαθηματική δημιουργικότητα δεν διαφοροποιήθηκε ως προς τον αριθμό των σταδίων που περιλήφθηκαν στη δημιουργική διαδικασία, αλλά ως προς το βαθμό επεξεργασίας των σταδίων της συσχέτισης, της κατασκευής, της αξιολόγησης και της επικοινωνίας. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές ξέφυγαν από τις στερεότυπες λύσεις και κατάφεραν να προτείνουν πιο πρωτότυπες λύσεις, καθώς χειρίζονταν ευέλικτα τους αριθμούς και τις πράξεις. Το στάδιο της αξιολόγησης ήταν αυτό που λειτούργησε ως κίνητρο για τους μαθητές, ώστε να σκεφτούν πιο «έξυπνες» λύσεις, γιατί οι μαθητές με υψηλή μαθηματική δημιουργικότητα ήθελα να διαφοροποιηθούν από τους συμμαθητές τους. Παρόλο που οι λύσεις των μαθητών ξέφευγαν από τις τετριμμένες λύσεις, οι μαθητές είχαν ξεκάθαρο στο μυαλό τους τον τρόπο εργασίας τους και μπορούσαν να αναφερθούν σε λεπτομέρειες και συσχετίσεις.

Πίνακας 4.15

Σύγκριση των Σταδίων Δημιουργικής Διαδικασίας ανάμεσα στις Ομάδες Μαθητών.

	Ομάδα 1	Ομάδα 2	Ομάδα 3	Ομάδα 4
Διερεύνηση	· Καθόλου διερεύνηση · Ανάλυση Χ4, +6*	· Ανάλυση Χ4, +6 · Διαφορετικές πράξεις · Συνδυασμός πράξεων · Διαδικασίες με όμοια δομή	· Διαφορετικές πράξεις · Συνδυασμός πράξεων · Διαδικασίες με όμοια δομή · Ανάλυση πράξεων · Αύξηση αριθμού πράξεων · Ανάλυση αριθμών · Είδος αριθμού	· Διαφορετικές πράξεις · Συνδυασμός πράξεων · Διαδικασίες με όμοια δομή · Ανάλυση πράξεων · Αύξηση αριθμού πράξεων · Ανάλυση αριθμών · Είδος αριθμού · Μέγεθος αριθμού
Συσχέτιση	· Μη εντοπισμός σχέσεων · Άστοχες συνδέσεις	· Μη εντοπισμός σχέσεων · Άστοχες συνδέσεις · Θεωρητική αναφορά στην ύπαρξη συνδέσεων	· Άστοχες συνδέσεις* · Συσχέτιση ιδεών/ δράσεων · Αναλογισμός εμπειριών και προϋπάρχουσων γνώσεων	· Συσχέτιση ιδεών/ δράσεων · Αναλογισμός εμπειριών και προϋπάρχουσων γνώσεων · Συσχέτιση αριθμών · Συσχέτιση πράξεων
Κατασκευή	· Χ4, +6 · Επαναλαμβανόμενες προσθέσεις ή πολλαπλασιασμοί που να οδηγούν σε αποτέλεσμα 4 ή 6	· Χ4, +6 · Επαναλαμβανόμενες προσθέσεις ή πολλαπλασιασμοί που να οδηγούν σε αποτέλεσμα 4 ή 6 · Συνδυασμός πράξεων προσθετικής και πολλαπλασιαστικής δομής	· Συνδυασμός πράξεων προσθετικής και πολλαπλασιαστικής δομής · Ανάλυση των διαδικασιών Χ4, +6 σε μακροσκελείς διαδικασίες ή/και αξιοποίηση διαφορετικών ομάδων αριθμών · Σειριακή εκτέλεση πράξεων	· Συνδυασμός πράξεων προσθετικής και πολλαπλασιαστικής δομής, · Ανάλυση των διαδικασιών Χ4, +6 σε μακροσκελείς διαδικασίες ή/και αξιοποίηση διαφορετικών ομάδων αριθμών · Ευέλικτος χειρισμός αριθμών και πράξεων · Ταυτόχρονη αξιοποίηση διαφορετικών μαθηματικών ιδεών · Συνδυασμός μαθηματικών ιδεών και προσθήκη ιδεών σε προηγούμενες λύσεις

Αξιολόγηση	· Επιλογή λύσεων χωρίς αιτιολόγηση · Αιτιολόγηση χωρίς μαθηματικό υπόβαθρο	· Αιτιολόγηση χωρίς μαθηματικό υπόβαθρο · Επιλογή λύσεων λόγω του αριθμού και του είδους των πράξεων, του μεγέθους των αριθμών	· Επιλογή λύσεων λόγω του αριθμού και του είδους των πράξεων, του μεγέθους και του είδους των αριθμών · Επιλογή της τελευταίας λύσης γιατί προέκυπτε μετά από συνδυασμό και ενίσχυση προηγούμενων ιδεών	· Επιλογή λύσεων λόγω του αριθμού και του είδους των πράξεων, του μεγέθους και του είδους των αριθμών · Επιλογή της τελευταίας λύσης γιατί προέκυπτε μετά από συνδυασμό και ενίσχυση προηγούμενων ιδεών · Το στάδιο της αξιολόγησης αποτέλεσε κίνητρο για την παραγωγή πιο πρωτότυπων ιδεών
Επικοινωνία	· Μη επεξήγηση του τρόπου σκέψης · Γενικόλογα σχόλια · Αναφορά στη διαδικασία εκτέλεσης πράξεων	· Μη επεξήγηση του τρόπου σκέψης · Γενικόλογα σχόλια · Προσπάθεια επεξήγησης της λογικής *	· Επεξήγησης της λογικής · Αναφορά στην ανάπτυξη του τρόπου σκέψης	· Ξεκάθαρος ο τρόπος εργασίας · Αναφορά σε λεπτομέρειες

Η υπογράμμιση υποδηλώνει τα στοιχεία που προστίθενται σε κάθε στάδιο, συγκριτικά με την προηγούμενη ομάδα.
Το * υποδηλώνει ότι αυτά τα χαρακτηριστικά παρατηρήθηκαν σε μεμονωμένες περιπτώσεις.

Το Εκπαιδευτικό Περιβάλλον

Η επίδραση του εκπαιδευτικού περιβάλλοντος στη μαθηματική δημιουργικότητα διερευνήθηκε μέσω της αποτελεσματικότητας του παρεμβατικού προγράμματος. Πιο συγκεκριμένα, έγινε σύγκριση της αρχικής με την τελική επίδοση των 24 μαθητών Δ’, Ε’ και Στ’ τάξης δημοτικού σχολείου που συμμετείχαν στο παρεμβατικό πρόγραμμα (πειραματική ομάδα) καθώς και σύγκριση με τις αντίστοιχες επιδόσεις μιας άλλης ομάδας μαθητών που δεν συμμετείχαν στο παρεμβατικό πρόγραμμα (ομάδα ελέγχου). Τα αποτελέσματα όσον αφορά στο εκπαιδευτικό περιβάλλον παρουσιάζονται σε τέσσερα επίπεδα. Πρώτα, γίνεται σύγκριση της επίδοσης των μαθητών της Πειραματικής Ομάδας στο Εργαλείο Μαθηματικής Δημιουργικότητας πριν από την έναρξη και μετά την ολοκλήρωση της σειράς των μαθημάτων. Δεύτερο, γίνεται σύγκριση της επίδοσης των μαθητών της Ομάδας Ελέγχου στο Εργαλείο Μαθηματικής Δημιουργικότητας πριν από την έναρξη και μετά την ολοκλήρωση της σειράς των μαθημάτων. Τρίτο, γίνεται σύγκριση των επιδόσεων της Πειραματικής Ομάδας με την Ομάδα Ελέγχου. Τέταρτο, παρουσιάζονται οι αντιλήψεις των μαθητών της Πειραματικής Ομάδας για τη σχέση της Δημιουργικότητας με τα Μαθηματικά.

Σύγκριση επίδοσης μαθητών Πειραματικής Ομάδας στο Εργαλείο Μαθηματικής Δημιουργικότητας πριν και μετά το Παρεμβατικό Πρόγραμμα

Τα περιγραφικά αποτελέσματα της επίδοσης της Πειραματικής Ομάδας στο Εργαλείο Μαθηματικής Δημιουργικότητας παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.16. Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάζεται ο μέσος όρος του αριθμού των λύσεων που πρότειναν οι μαθητές σε κάθε δραστηριότητα του Εργαλείου Μαθηματικής Δημιουργικότητας (ευχέρεια), ο μέσος όρος των διαφορετικών μαθηματικών ιδεών που αξιοποιήθηκαν στις λύσεις (ευελιξία) και ο μέσος βαθμός καινοτομίας των λύσεων (πρωτοτυπία) σε τρεις μετρήσεις: πριν από την έναρξη του παρεμβατικού προγράμματος, μετά την ολοκλήρωση του παρεμβατικού προγράμματος και ένα μήνα μετά την ολοκλήρωση των μαθημάτων. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.16 οι μέσοι όροι της ευχέρειας, της ευελιξίας και της πρωτοτυπίας σε κάθε έργο αυξάνονται από τη Μέτρηση 1, στη Μέτρηση 2 και ακολούθως στη Μέτρηση 3.

Επιπρόσθετα, οι μαθητές είχαν συστηματικά καλύτερη επίδοση στο έργο 1 και χειρότερη επίδοση στο έργο 4 του Εργαλείου Μαθηματικής Δημιουργικότητας.

Πίνακας 4.16

Μέσοι όροι της επίδοσης της Πειραματικής Ομάδας στο Εργαλείο Μαθηματικής Δημιουργικότητας στις τρεις Μετρήσεις.

Έργα		Μέτρηση 1		Μέτρηση 2		Μέτρηση 3	
		$\bar{X}$	SD	$\bar{X}$	SD	$\bar{X}$	SD
Έργο 1	Ευχέρεια	.521	.208	.725	.305	.765	.375
	Ευελιξία	.273	.098	.361	.158	.383	.122
	Πρωτοτυπία	.642	.301	.783	.250	.850	.233
Έργο 2	Ευχέρεια	.392	.247	.533	.291	.630	.373
	Ευελιξία	.375	.179	.424	.241	.467	.239
	Πρωτοτυπία	.617	.294	.683	.338	.790	.271
Έργο 3	Ευχέρεια	.422	.150	.560	.160	.609	.190
	Ευελιξία	.323	.138	.448	.165	.538	.219
	Πρωτοτυπία	.267	.127	.475	.263	.600	.343
Έργο 4	Ευχέρεια	.314	.212	.433	.301	.460	.269
	Ευελιξία	.193	.116	.302	.176	.281	.127
	Πρωτοτυπία	.442	.295	.625	.325	.660	.244
Σύνολο	Ευχέρεια	.412	.140	.563	.206	.616	.245
	Ευελιξία	.291	.086	.384	.136	.417	.115
	Πρωτοτυπία	.492	.146	.642	.214	.725	.156

Για τη σύγκριση των επιδόσεων των μαθητών ανάμεσα στις τρεις μετρήσεις εφαρμόστηκε η Wilcoxon Signed Ranks ανάλυση, τα αποτελέσματα της οποίας παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.17. Οι διαφορές στο μέσο όρο των επιδόσεων των υποκειμένων πριν και μετά το παρεμβατικό πρόγραμμα (Μέτρηση 1 και 2) ήταν στατιστικά σημαντικές σε επίπεδο p=.05. Συγκρίνοντας την επίδοση των μαθητών ανάμεσα στη δεύτερη και την τρίτη μέτρηση, παρατηρήθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές ως προς την πρωτοτυπία (p=.019), όχι όμως ως προς την ευχέρεια (p=.179) και την ευελιξία (p=.096).

Πίνακας 4.17

Σύγκριση της επίδοσης της Πειραματικής Ομάδας στο Εργαλείο Μαθηματικής Δημιουργικότητας ανάμεσα στις τρεις Μετρήσεις (Wilcoxon Signed Ranks Test).

	Σύγκριση Μετρήσεων 1-2 Z (p)	Σύγκριση Μετρήσεων 2-3 Z (p)	Σύγκριση Μετρήσεων 1-3 Z (p)
Ευχέρεια	-4.144 (.001)*	-1.344 (.179)	-3.808 (.001)*
Ευελιξία	-3.558 (.001)*	-1.662 (.096)	-3.733 (.001)*
Πρωτοτυπία	-3.237 (.001)*	-2.352 (.019)*	-3.622 (.001)*

* Οι διαφορές είναι στατιστικά σημαντικές σε επίπεδο p<.05.

Σύγκριση επίδοσης μαθητών Ομάδας Ελέγχου στο Εργαλείο Μαθηματικής Δημιουργικότητας πριν και μετά τη διάρκεια του Παρεμβατικού Προγράμματος

Αντίστοιχες αναλύσεις όπως έγιναν για την Πειραματική Ομάδα διεξήχθηκαν και για την Ομάδα Ελέγχου. Κατά πρώτο λόγο, ο Πίνακας 4.18 παρουσιάζει την επίδοση της Ομάδας Ελέγχου στο Εργαλείο Μαθηματικής Δημιουργικότητας πριν και μετά την ολοκλήρωση του παρεμβατικού προγράμματος. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του Πίνακα 4.18 οι μέσοι όροι της ευχέρειας, της ευελιξίας και της πρωτοτυπίας είναι κατά πλειοψηφία υψηλότεροι μετά το παρεμβατικό πρόγραμμα σε σχέση με τους αντίστοιχους μέσους όρους πριν από το παρεμβατικό. Εξαίρεση αποτελούσαν οι μέσοι όροι της ευελιξίας και της πρωτοτυπίας στο έργο 1 και η ευελιξία στο έργο 4.

Για τη σύγκριση των επιδόσεων των μαθητών της Ομάδας Ελέγχουν πριν και μετά τη διεξαγωγή του παρεμβατικού προγράμματος διεξήχθηκε Wilcoxon Signed Ranks ανάλυση. Οι διαφορές στο μέσο όρων των επιδόσεων των υποκειμένων της Ομάδας Ελέγχου πριν και μετά το παρεμβατικό πρόγραμμα ήταν στατιστικά σημαντικές ως προς την ικανότητα ευχέρειας (Z=-2.686, p=.007) και ευελιξίας (Z=-2.419, p=.016), όχι όμως ως προς την ικανότητα πρωτοτυπίας (Z=-1.543, p=.123).

Πίνακας 4.18

Σύγκριση της επίδοσης της Ομάδας Ελέγχου στο Εργαλείο Μαθηματικής Δημιουργικότητας στις δύο Μετρήσεις.

Έργα		Μέτρηση 1		Μέτρηση 2	
		$\bar{X}$	SD	$\bar{X}$	SD
	Ευχέρεια	.413	.160	.483	.241
Έργο 1	Ευελιξία	.264	.103	.256	.112
	Πρωτοτυπία	.492	.283	.483	.306
	Ευχέρεια	.404	.294	.525	.223
Έργο 2	Ευελιξία	.319	.162	.417	.147
	Πρωτοτυπία	.675	.269	.700	.318
	Ευχέρεια	.456	.151	.513	.140
Έργο 3	Ευελιξία	.385	.180	.458	.159
	Πρωτοτυπία	.325	.165	.483	.270
	Ευχέρεια	.331	.172	.339	.188
Έργο 4	Ευελιξία	.203	.089	.198	.127
	Πρωτοτυπία	.442	.264	.442	.317
	Ευχέρεια	.401	.129	.465	.142
Σύνολο	Ευελιξία	.293	.076	.333	.093
	Πρωτοτυπία	.483	.118	.527	.167

Σύγκριση της Μαθηματικής Δημιουργικότητας των μαθητών της Πειραματικής Ομάδας και της Ομάδας Ελέγχου μετά το Παρεμβατικό Πρόγραμμα

Πέρα από τα πιο πάνω, έγινε σύγκριση της αρχικής επίδοσης των δύο ομάδων μαθητών στο Εργαλείο Μαθηματικής Δημιουργικότητας, εφαρμόζοντας πολλαπλή ανάλυση διασποράς (MANOVA). Τα αποτελέσματα της ανάλυσης, τα οποία παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.19, έδειξαν ότι ανάμεσα στις δύο ομάδες μαθητών δεν υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στον αρχικό βαθμό μαθηματικής δημιουργικότητας (Pillai's $F_{(3,44)}$=.120, p=.948). Όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.19, η Πειραματική ομάδα και η Ομάδα Ελέγχου είχαν παρόμοιες επιδόσεις στην ικανότητα ευχέρειας ($F_{(3, 44)}$=.085, p=.772), ευελιξίας ($F_{(3,44)}$=.007, p=.931) και πρωτοτυπίας ($F_{(3, 44)}$= .048, p=.828).

Πίνακας 4.19

Πολλαπλή Ανάλυση Διασποράς για τη Σύγκριση των αρχικών επιδόσεων της Πειραματικής Ομάδας και της Ομάδας Ελέγχου.

	Άθροισμα Τετραγώνων	Βαθμοί Ελευθερίας	Μέσο Τετράγωνο	F	Επίπεδο σημαντικότητας
Ευχέρεια	.002	1	.002	.085	.772
Ευελιξία	.005	1	.005	.007	.931
Πρωτοτυπία	.001	1	.001	.048	.828

Ακολούθησε πολλαπλή ανάλυση συνδιασποράς (MANCOVA) με στόχο τη σύγκριση της τελικής μαθηματικής δημιουργικότητας των δύο ομάδων μαθητών, αφού αφαιρεθεί η επίδραση της αρχικής μέτρησης της αντίστοιχης ικανότητας. Πιο συγκεκριμένα, ως εξαρτημένες μεταβλητές χρησιμοποιήθηκαν οι τελικές επιδόσεις των μαθητών στις ικανότητες ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας. Η σύγκριση των εξαρτημένων μεταβλητών έγινε ανάμεσα στους μαθητές της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου (ανεξάρτητη μεταβλητή). Τα αποτελέσματα της ανάλυσης παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.20. Ο συντελεστής Pillai έδειξε ότι υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των δύο ομάδων μαθητών (Pillai's $F_{(4,41)}$=2.896, p=.047) που οφείλονται στην «προέλευση» τους: Πειραματική Ομάδα ή Ομάδα Ελέγχου. Αν ο μαθητής ανήκει στην Πειραματική Ομάδα ή στην Ομάδα Ελέγχου διαφοροποιεί στατιστικά σημαντικά τις ικανότητες ευχέρειας ($F_{(4, 41)}$ = 6.170, p=.017) και πρωτοτυπίας ($F_{(4, 41)}$ =6.846, p = .012) ενώ οριακά δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφοροποίηση στην ικανότητα ευελιξίας ($F_{(4, 41)}$ =3.927, p = .054).

Πίνακας 4.20

Πολλαπλή Ανάλυση Συνδιασποράς των Δημιουργικών Ικανοτήτων ως προς την Ομάδα των Μαθητών.

	Άθροισμα Τετραγώνων	df	Μέσα Τετράγωνα	F	p
Ευχέρεια	.914(a)	4	.229	15.414	.000*
Ευελιξία	.348(b)	4	.087	12.263	.000*
Πρωτοτυπία	.961(c)	4	.240	11.622	.000*
Ομάδα Μαθητών					
Ευχέρεια	.092	1	.092	6.170	.017*
Ευελιξία	.028	1	.028	3.927	.054
Πρωτοτυπία	.142	1	.142	6.846	.012*
Σφάλμα					
Ευχέρεια	.638	43	.015		
Ευελιξία	.305	43	.007		
Πρωτοτυπία	.889	43	.021		
Σύνολο					
Ευχέρεια	14.232	48			
Ευελιξία	6.818	48			
Πρωτοτυπία	18.242	48			

* Οι διαφορές είναι στατιστικά σημαντικές σε επίπεδο $p<.05$.

Σύγκριση των αντιλήψεων των μαθητών της Πειραματικής Ομάδας για τη σχέση των Μαθηματικών και της Δημιουργικότητας πριν και μετά το Παρεμβατικό Πρόγραμμα

Πριν από την έναρξη και μετά την ολοκλήρωση του παρεμβατικού προγράμματος οι μαθητές παρουσίασαν τις αντιλήψεις τους για τη σχέση των μαθηματικών με τη δημιουργικότητα. Ενώ πριν από την έναρξη των μαθημάτων οι μαθητές είχαν χαμηλή αυτοεκτίμηση των ικανοτήτων τους, με την ολοκλήρωση των μαθημάτων οι μαθητές ένιωσαν πιο σίγουροι για την κατοχή ικανοτήτων που σχετίζονται με τη μαθηματική δημιουργικότητα. Ενδεικτικά, μόνο εννιά μαθητές πριν από την έναρξη του παρεμβατικού προγράμματος θεωρούσαν ότι μπορούσαν να ανακαλύψουν νέους τρόπους, για να λύσουν ασκήσεις (Δ7) ή ήταν σε θέση να επιλύουν μαθηματικές ασκήσεις με διαφορετικούς τρόπους (Δ10). Μετά την ολοκλήρωση των μαθημάτων ο αριθμός των μαθητών που συμφώνησαν με τις πιο πάνω δηλώσεις αυξήθηκε σε 15 και 20 αντίστοιχα. Παράλληλα, σε σύγκριση με τους πέντε μαθητές που είχαν την αρχική πεποίθηση ότι μπορούν να βρίσκουν ασυνήθιστες και έξυπνες λύσεις σε μαθηματικές ασκήσεις, με το τέλος της σειράς των μαθημάτων έγιναν δεκαεπτά οι μαθητές που εξέφρασαν τη συμφωνία τους με τη δήλωση Δ11.

Όσον αφορά στις δηλώσεις που σχετίζονται με τις πεποιθήσεις για τα μαθηματικά, υπήρχε αντίστοιχη αύξηση στο βαθμό συμφωνίας των μαθητών. Για παράδειγμα, με την ολοκλήρωση των μαθημάτων 21 μαθητές συμφώνησαν με τη δήλωση Δ3 η οποία συσχετίζει τα μαθηματικά με τη φαντασία και τη δημιουργικότητα, σε σύγκριση με την έναρξη των μαθημάτων που μόνο επτά μαθητές εξέφρασαν αντίστοιχη συμφωνία. Παράλληλα, ενώ οκτώ μαθητές θεώρησαν τα μαθηματικά ως ένα σύνολο ικανοτήτων που χρειάζονται για την εκτέλεση αριθμητικών πράξεων (Δ1), με την ολοκλήρωση των μαθημάτων μόνο δύο μαθητές εξακολουθούσαν να έχουν την ίδια αντίληψη.

Σχέση μεταξύ μαθηματικής δημιουργικότητας και γενικής δημιουργικής ικανότητας

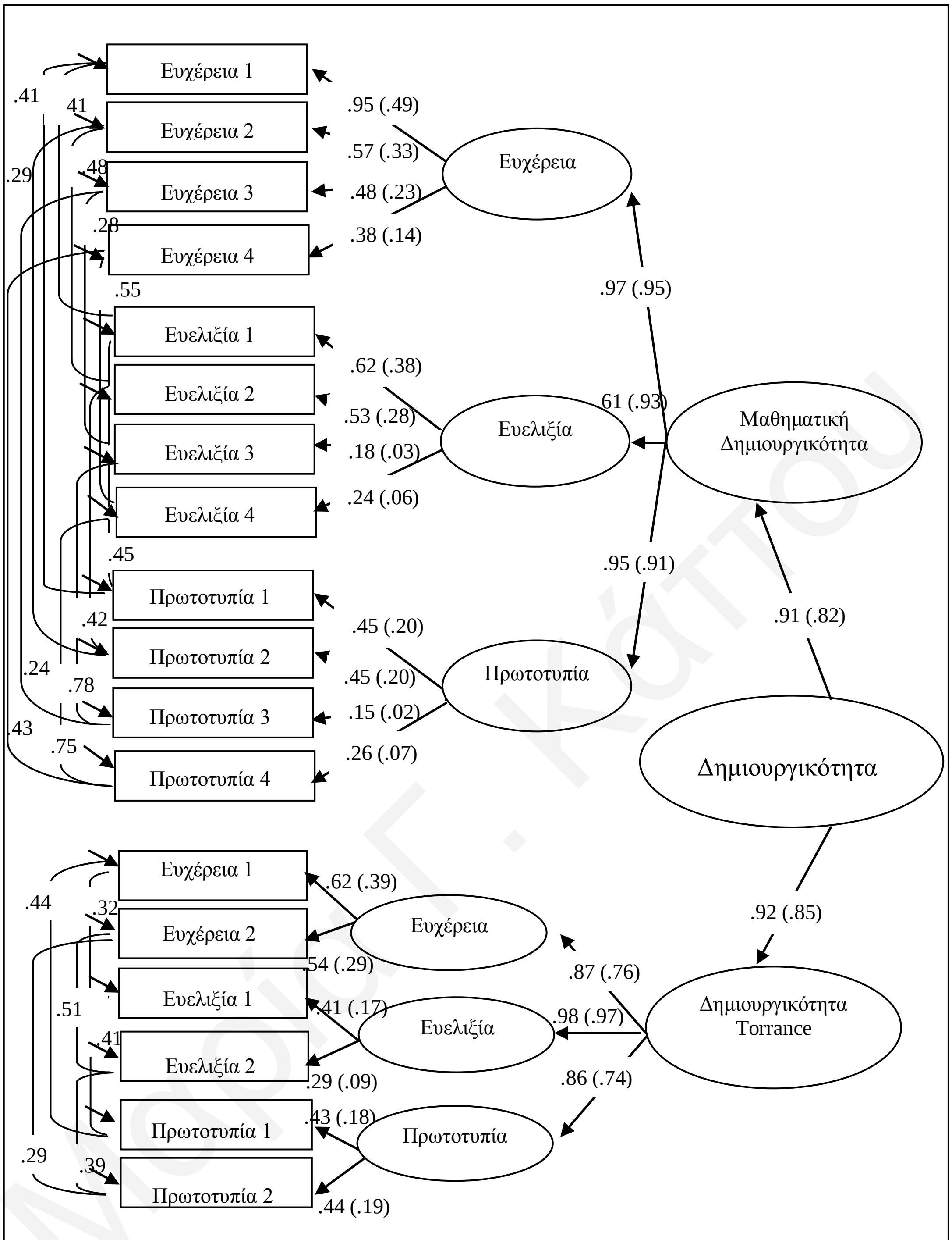
Ένας από τους στόχους της παρούσας διατριβής ήταν να διερευνήσει τη σχέση που υπάρχει μεταξύ της μαθηματικής δημιουργικότητας και της γενικής δημιουργικής ικανότητας. Για αυτό το λόγο, έγινε σύγκριση μεταξύ εναλλακτικών μοντέλων που περιγράφουν τη δομή της σχέσης της μαθηματικής και της γενικής δημιουργικότητας. Αρχικά, έγινε σύγκριση μεταξύ τριών εναλλακτικών μοντέλων (δείτε Παράρτημα 13): στο πρώτο μοντέλο η μαθηματική δημιουργικότητα συσχετίζεται με τη γενική δημιουργική ικανότητα, στο δεύτερο μοντέλο η μαθηματική δημιουργικότητα προβλέπει τη γενική δημιουργικότητα και στο τρίτο μοντέλο η γενική δημιουργικότητα προβλέπει τη μαθηματική δημιουργικότητα. Η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση των τριών μοντέλων έδειξε ότι οι δείκτες προσαρμογής τους ήταν οι ίδιοι (CFI=.984, χ^2=132.492, df=75, χ^2/df=1.498, RMSEA=.051). Το γεγονός αυτό αποτελεί ένδειξη ότι δεν είναι δυνατός ο προσδιορισμός αιτιώδους σχέσης μεταξύ των δύο εννοιών, αλλά επιβεβαιώνει την ύπαρξη συσχέτισης.

Ακολούθως έγινε σύγκριση μεταξύ δύο μοντέλων, όπως παρουσιάζονται στα Διαγράμματα 4.6 και 4.7. Το μοντέλο στο Διάγραμμα 4.6 ορίζει τη δημιουργικότητα ως μια γενικότερη δομή που σχηματίζεται από ειδική δημιουργική ικανότητα σε επιμέρους τομείς. Η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση έδειξε ότι το μοντέλο έχει πολύ καλό δείκτη προσαρμογής στα δεδομένα της εργασίας (CFI=.988, χ^2=160.383, df=111, χ^2/df=1.445, RMSEA=.041, AIC= -7587.739, BIC= -7262.836).

Όσον αφορά στο μοντέλο του Διαγράμματος 4.7, η δημιουργικότητα αποτελείται από τις ικανότητες ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας. Οι ικανότητες ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας αποτελούν άδηλους παράγοντες πρώτης τάξης που σχηματίζονται από τις αντίστοιχες επιδόσεις των μαθητών σε ασκήσεις μαθηματικής δημιουργικότητας (Εργαλείο Μαθηματικής Δημιουργικότητας) και γενικής δημιουργικότητας (Εργαλείο Γενικής Δημιουργικής Ικανότητας), θεωρώντας ότι σχηματίζουν ένα κοινό παράγοντα. Η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση έδειξε ότι το μοντέλο έχει πολύ καλό δείκτη προσαρμογής στα δεδομένα της εργασίας (CFI=.984, χ^2=183.629, df=115, χ^2/df=1.574, RMSEA=.045, AIC= -7572.493, BIC= -7264.252).

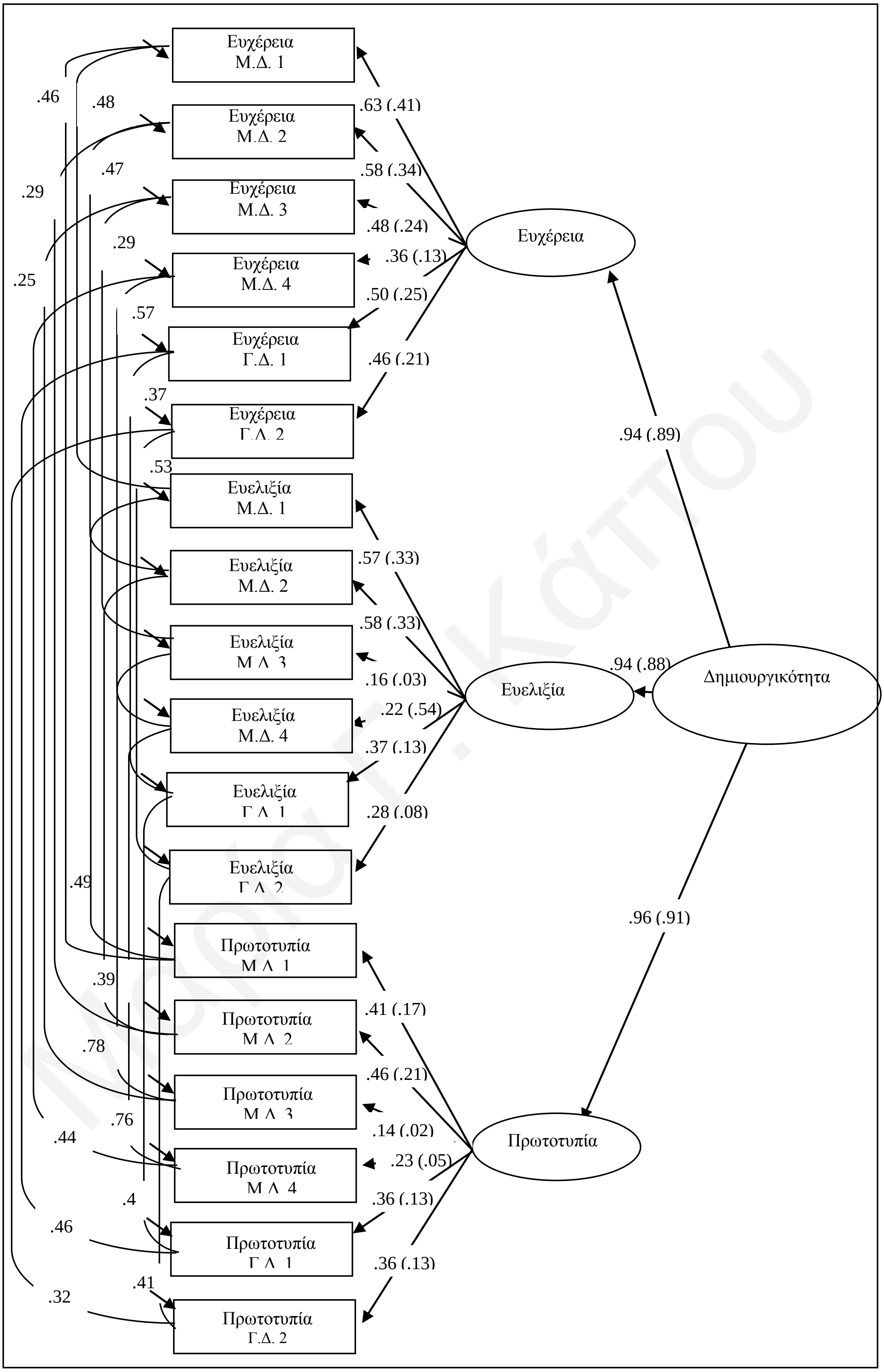
Συγκρίνοντας τα δύο μοντέλα, το πρώτο μοντέλο (Διάγραμμα 4.6) έχει καλύτερη προσαρμογή στα δεδομένα λόγω του υψηλότερου δείκτη CFI ($CFI_{\text{Μοντέλο1}}$=.988, $CFI_{\text{Μοντέλο2}}$=.984) και των χαμηλότερων δεικτών AIC και BIC ($AIC_{\text{Μοντέλο1}}$=-7587.739, $AIC_{\text{Μοντέλο2}}$=-7572.493, $BIC_{\text{Μοντέλο1}}$=-7262.836, $BIC_{\text{Μοντέλο2}}$=-7264.252). Ταυτόχρονα, η διαφορά του χ^2 προς τους βαθμούς ελευθερίας των δύο μοντέλων ήταν στατιστικά σημαντική ($p<.05$), γεγονός που ενισχύει την καταλληλότητα του πρώτου μοντέλου να περιγράψει τη σχέση γενικής και ειδικής δημιουργικότητας.

Τα αποτελέσματα των συσχετιστικών αναλύσεων που παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.21 ενισχύουν το προηγούμενο αποτέλεσμα. Ειδικότερα, ο Πίνακας 4.21 παρουσιάζει τους συντελεστές συσχέτισης ανάμεσα στις ικανότητες ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας μεταξύ των δύο εργαλείων δημιουργικότητας. Με βάση τα αποτελέσματα της ανάλυσης φαίνεται ότι ο συντελεστής συσχέτισης Pearson ήταν πιο υψηλός ανάμεσα στις ικανότητες του ίδιου εργαλείου, παρά μεταξύ των ίδιων ικανοτήτων στα δύο εργαλεία. Ενδεικτικά, η ευελιξία και η πρωτοτυπία έχουν δυνατό δείκτη συσχέτισης στο εργαλείο μαθηματικής δημιουργικότητας (r=.812). Απεναντίας, ο δείκτης συσχέτισης της ικανότητας ευελιξίας ανάμεσα στα δύο εργαλεία ήταν χαμηλότερος (r=.208).



* Ο πρώτος αριθμός δείχνει το συντελεστή φόρτισης και ο αριθμός στην παρένθεση την αντίστοιχη ερμηνευόμενη διασπορά.

Διάγραμμα 4.6. Η Δημιουργικότητα ως Ειδική Ικανότητα.



Διάγραμμα 4.7. Η Δημιουργικότητα ως Γενική Ικανότητα.

Πίνακας 4.21

Συσχετίσεις ανάμεσα στις ικανότητες Ευχέρειας, Ευελιξίας και Πρωτοτυπίας στα Εργαλεία Μαθηματικής και Γενικής Δημιουργικότητας.

	Γενική Δημιουργικότητα			Μαθηματική Δημιουργικότητα		
	Ευχέρεια	Ευελιξία	Πρωτοτυπία	Ευχέρεια	Ευελιξία	Πρωτοτυπία
Γ. Ευχέρεια	1	.615*	.579*	.421*	.237*	.166*
Γ. Ευελιξία	.615*	1	.595*	.301*	.208*	.198*
Γ. Πρωτοτυπία	.579*	.595*	1	.314*	.225*	.214*
Μ. Ευχέρεια	.421*	.301*	.314*	1	.719*	.621*
Μ. Ευελιξία	.237*	.208*	.225*	.719*	1	.812*
Μ. Πρωτοτυπία	.166*	.198*	.214*	.621*	.812*	1

* Οι συσχετίσεις είναι στατιστικά σημαντικές σε επίπεδο $p<.01$ (2-tailed).

Ταυτόχρονα, έγινε ανάλυση Crosstabs ανάμεσα στις τέσσερις ομάδες υποκειμένων που προέκυψαν με βάση την επίδοσή τους στο Εργαλείο Μαθηματικής Δημιουργικότητας και τις τέσσερις ομάδες υποκειμένων που προέκυψαν με αντίστοιχο τρόπο με βάση την επίδοσή τους στο Εργαλείο Γενικής Δημιουργικότητας. Η ανάλυση αυτή είχε ως στόχο να διερευνήσει κατά πόσο τα άτομα που είναι δημιουργικά στα μαθηματικά είναι απαραίτητα και γενικότερα δημιουργικά, αλλά και αντίθετα, κατά πόσο τα άτομα που είναι γενικά δημιουργικά είναι απαραίτητα και δημιουργικά στα μαθηματικά. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.22.

Πίνακας 4.22

Ανάλυση Crosstabs ανάμεσα στις Ομάδες Υποκειμένων με βάση την Επίδοσή τους στα Εργαλεία Μαθηματικής και Γενικής Δημιουργικότητας.

	Μαθηματική Δημιουργικότητα				
Γενική Δημιουργικότητα	Ομάδα 1	Ομάδα 2	Ομάδα 3	Ομάδα 4	Σύνολο
Ομάδα 1	25	27	16	4	72
Ομάδα 2	19	69	60	16	164
Ομάδα 3	23	57	59	29	168
Ομάδα 4	4	15	33	20	72
Σύνολο	71	168	168	69	476

Η ανάλυση έδειξε ότι το 28.99% των μαθητών που είναι ιδιαίτερα δημιουργικοί στα μαθηματικά (τα άτομα που ανήκουν στο υψηλότερο 15% των επιδόσεων) είναι και γενικά δημιουργικοί. Παρόμοια, το 27.78% των μαθητών που επέδειξαν υψηλή γενική δημιουργικότητα ήταν δημιουργικοί και στα μαθηματικά. Απεναντίας, ένα χαμηλό ποσοστό (της τάξης του 5.6%) που έχει χαμηλή επίδοση στο ένα εργαλείο περιλαμβάνεται ανάμεσα στα άτομα με υψηλές επιδόσεις στο άλλο εργαλείο. Με βάση τα πιο πάνω ποσοστά, ένας μαθητής που είναι γενικά δημιουργικός δεν αναμένεται απαραίτητα να είναι δημιουργικός στα μαθηματικά, και ταυτόχρονα ένας μαθητής που είναι δημιουργικός στα μαθηματικά δεν είναι απαραίτητα και γενικά δημιουργικός. Ερμηνεύοντας το αποτέλεσμα αυτό σε συνδυασμό με το Διάγραμμα 4.6, η δημιουργικότητα φαίνεται να αποτελεί μια ειδική ικανότητα. Λόγω της ειδικής φύσης της δημιουργικότητας, ένας μαθητής μπορεί να επιδείξει εξαίρετη δημιουργική επίδοση σε ένα γνωστικό αντικείμενο αλλά όχι απαραίτητα σε κάποιο άλλο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V
ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Εισαγωγή

Η δημιουργικότητα στα μαθηματικά αποτελεί μια χρήσιμη δεξιότητα ζωής (Davis & Rimm, 2004 · Slavkin, 2004), αφού κάθε πολίτης είναι αντιμέτωπος στην καθημερινότητά του με απρόσμενες καταστάσεις οι οποίες επιδέχονται διαφορετικές λύσεις. Αυτός είναι άλλωστε και ο λόγος που διεθνείς οργανισμοί, όπως το National Council of Teachers of Mathematics (2000), περιλαμβάνουν την ανάπτυξη δεξιοτήτων δημιουργικής σκέψης ανάμεσα στους υπό έμφαση εκπαιδευτικούς στόχους που διακηρύσσουν.

Παρόλη τη σημασία που φαίνεται να κερδίζει η μαθηματική δημιουργικότητα στον τομέα της εκπαίδευσης, εντούτοις υπάρχουν πτυχές της έννοιας που χρήζουν διερεύνησης (Fryer, 2012). Η Leikin (2009) τονίζει ότι η έρευνα στο πεδίο της μαθηματικής δημιουργικότητας θα πρέπει να προσανατολιστεί στην επίτευξη δύο στόχων: από τη μια στην ανάπτυξη ενός θεωρητικού μοντέλου που να συνεισφέρει στην κατανόηση της φύσης της μαθηματικής δημιουργικότητας και από την άλλη στην εφαρμογή τέτοιου είδους θεωρητικών πλαισίων, με στόχο τη βελτίωση της διδασκαλίας που ενθαρρύνει τη μαθηματική δημιουργικότητα. Ταυτόχρονα, η διεξαγωγή ερευνών που προκύπτουν από το συνδυασμό μεταβλητών που αποτελούν κλειδί για την κατανόηση της μαθηματικής δημιουργικότητας, θα δώσουν μια πληρέστερη εικόνα για την πολυδιάστατη και δυναμική φύση της έννοιας (Fryer, 2012).

Στόχος της παρούσας εργασίας ήταν η ανάπτυξη ενός θεωρητικού μοντέλου για την έννοια της μαθηματικής δημιουργικότητας, μέσω τεσσάρων διαστάσεων: του αποτελέσματος, του ατόμου, της διαδικασίας και του περιβάλλοντος. Όσον αφορά στην πρώτη διάσταση, στόχος ήταν ο ορισμός της δομής του δημιουργικού αποτελέσματος. Σε σχέση με το άτομο, στόχος ήταν η διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο τα γνωστικά χαρακτηριστικά, τα χαρακτηριστικά προσωπικότητας και η ηλικία επηρεάζουν τη μαθηματική δημιουργική ικανότητα των μαθητών. Η μελέτη της τρίτης διάστασης, δηλαδή της διαδικασίας, στόχευε στον εντοπισμό και στην περιγραφή των γνωστικών υπο-διαδικασιών που εμφανίζονται, καθώς οι μαθητές εργάζονται σε μαθηματικά έργα που ευνοούν τη δημιουργική σκέψη. Σε σχέση με το εκπαιδευτικό περιβάλλον, διερευνήθηκε η επίδραση ενός παρεμβατικού προγράμματος στις μαθηματικά δημιουργικές ικανότητες και στις αντιλήψεις των μαθητών. Πέρα από τις τέσσερις διαστάσεις του μοντέλου, εξετάστηκε η σχέση μεταξύ της μαθηματικής δημιουργικότητας και της γενικής δημιουργικής ικανότητας, ώστε να απαντηθεί το ερώτημα περί γενικής ή ειδικής ικανότητας. Σε αυτό το κεφάλαιο, γίνεται συζήτηση των αποτελεσμάτων της εργασίας, τα οποία είναι οργανωμένα σε σχέση με τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν.

Το Δημιουργικό Αποτέλεσμα

Το δημιουργικό αποτέλεσμα είναι το εμφανές προϊόν της δημιουργικής διαδικασίας. Η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση έδειξε ότι το πιο κατάλληλο μοντέλο ορίζει το δημιουργικό αποτέλεσμα στα μαθηματικά με βάση τις ικανότητες της ευχέρειας, της ευελιξίας και της πρωτοτυπίας. Ο ορισμός της μαθηματικής δημιουργικότητας στη βάση των τριών ικανοτήτων δεν είναι νέος, αφού έχει αξιοποιηθεί από πολλούς ερευνητές στον τομέα της μαθηματικής παιδείας. Για παράδειγμα, η Leikin (2009) και ο Silver (1997) χρησιμοποιούν τις ικανότητες της ευχέρειας, της ευελιξίας και της πρωτοτυπίας, για να αξιολογήσουν τη μαθηματική δημιουργικότητα των μαθητών.

Οι τρεις ικανότητες, αν και είναι διακριτές μεταξύ τους, έχουν στατιστικά σημαντικές συσχετίσεις εντός του ιδίου μαθηματικού έργου. Πιο συγκεκριμένα, παρατηρήθηκαν υψηλές συσχετίσεις ανάμεσα στις ικανότητες ευχέρειας και ευελιξίας, καθώς επίσης ανάμεσα στις ικανότητες ευελιξίας και πρωτοτυπίας στο ίδιο έργο. Οι συσχετίσεις μεταξύ των ικανοτήτων ευχέρειας και πρωτοτυπίας ήταν χαμηλότερες, αλλά παρόλα αυτά ήταν στατιστικά σημαντικές. Ερμηνεύοντας αυτό το αποτέλεσμα θα μπορούσε να λεχθεί ότι όσες περισσότερες λύσεις προτείνει ένας μαθητής σε ένα μαθηματικό έργο, τόσες πιο πολλές μαθηματικές ιδέες αναμένεται ότι θα αξιοποιήσει. Ταυτόχρονα, όσες πιο πολλές μαθηματικές ιδέες ληφθούν υπόψη τόσες πιο πολλές είναι και οι πιθανότητες να εμφανιστούν πρωτότυπες απαντήσεις. Σε παρόμοια συμπεράσματα κατέληξαν και άλλοι ερευνητές. Ο Hébert και οι συνεργάτες του (2002) εξέφρασαν την ύπαρξη σχέσης μεταξύ της ποιότητας και της ποσότητας των ιδεών που παράγονται από ένα άτομο. Αντίστοιχα, ο Osborn (1963, σ. 131) ανέφερε: «είναι σχεδόν αξιωματικό ότι η ποσότητα οδηγεί στην ποιότητα...όσες περισσότερες ιδέες προτείνουμε, τόσο πιο πιθανόν είναι να επινοήσουμε κάποια ιδέα που να είναι καλή». Ο Simonton (1990) μάλιστα υποστήριξε ότι η πρωτοτυπία αποτελεί συνάρτηση του αριθμού των ιδεών που χρησιμοποιούνται.

Διερευνώντας τις συσχετίσεις των ικανοτήτων ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας οριζόντια, μελετώντας δηλαδή την ίδια ικανότητα διαμέσου όλων των έργων, οι συσχετίσεις που εντοπίστηκαν ήταν χαμηλές. Αυτό το αποτέλεσμα οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο αριθμός των λύσεων που προτείνει ένας μαθητής σε ένα έργο δεν σχετίζεται με τον αριθμό των λύσεων που θα προτείνει σε κάποιο άλλο. Παράλληλα, ο αριθμός των μαθηματικών ιδεών και η πρωτοτυπία που χαρακτηρίζουν τις λύσεις ενός μαθητή σε ένα συγκεκριμένο έργο δεν σχετίζονται με τις αντίστοιχες ικανότητές του σε κάποιο άλλο έργο. Αυτό ίσως να οφείλεται στο γεγονός ότι κάθε μαθηματικό έργο έχει τα δικά του χαρακτηριστικά. Έτσι ένας μαθητής μπορεί να προτείνει αριθμό λύσεων σε έργα που περιλαμβάνουν γνώριμα ή ενδιαφέροντα για τον ίδιο στοιχεία, ενώ να μην μπορεί να επιδείξει αντίστοιχη ικανότητα σε άλλα έργα. Δεν υπάρχει, δηλαδή, συστηματική ικανότητα ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας η οποία εφαρμόζεται σε κάθε ερέθισμα.

Κατά τη διερεύνηση της δομής του δημιουργικού αποτελέσματος έγινε σύγκριση της καταλληλότητας και ενός δεύτερου μοντέλου. Σε αυτό το μοντέλο το δημιουργικό αποτέλεσμα ορίστηκε ως η δημιουργική επίδοση των μαθητών σε καθένα από τα έργα του Εργαλείου Μαθηματικής Δημιουργικότητας. Το συγκεκριμένο μοντέλο δεν ήταν το καλύτερο δυνατόν για την επεξήγηση του δημιουργικού αποτελέσματος. Φαίνεται ότι η μαθηματική δημιουργικότητα δεν εξαρτάται τόσο από τα έργα που χρησιμοποιούνται για την αξιολόγησή της, αλλά εξαρτάται από τις επιμέρους δημιουργικές ικανότητες (ευχέρεια, ευελιξία, πρωτοτυπία). Καταλήγοντας, για την ενίσχυση της δημιουργικής ικανότητας δεν είναι αρκετή η επιλογή και η αξιοποίηση κατάλληλων έργων αλλά η ενίσχυση των ικανοτήτων της ευχέρειας, της ευελιξίας και της πρωτοτυπίας.

Όπως φάνηκε από τις αναλύσεις των αποτελεσμάτων του Εργαλείου Μαθηματικής Δημιουργικότητας, οι μαθητές που έλαβαν μέρος στην παρούσα εργασία ήταν σε θέση να προτείνουν περισσότερες από μία λύσεις, να λάβουν υπόψη τους διαφορετικές ιδέες και να επιδείξουν πρωτότυπη σκέψη. Παρά το γεγονός ότι οι μαθητές δεν είχαν αντίστοιχες εμπειρίες με ανοικτού τύπου έργα, που επιδέχονται πολλές λύσεις ή μεθόδους επίλυσης, εντούτοις κατάφεραν να αξιοποιήσουν τη δημιουργική τους ικανότητα. Ως εκ τούτου, φαίνεται ότι η μαθηματική δημιουργικότητα χαρακτηρίζει όλο το μαθητικό πληθυσμό και όχι μια «επίλεκτη» ομάδα μαθητών, όπως συνηθιζόταν να πιστεύεται (Silver, 1997). Αυτό βέβαια που διαφοροποίησε τους μαθητές μεταξύ τους ήταν ο βαθμός εμφάνισης της δημιουργικής τους ικανότητας στα μαθηματικά έργα. Ενδεικτικά, οι μαθητές ήταν πιο ικανοί να σκεφτούν διαφορετικούς τρόπους, για να αναπαραστήσουν το ½ ενός ορθογώνιου σχήματος ενώ δυσκολεύτηκαν στη διατύπωση προβλήματος. Αυτό ίσως να οφείλεται στο γεγονός ότι στο εκπαιδευτικό σύστημα της Κύπρου δίνεται έμφαση στις διαφορετικές αναπαραστάσεις κλασματικών αριθμών, ενώ ταυτόχρονα η διατύπωση προβλήματος απουσιάζει από τα βιβλία των Μαθηματικών του δημοτικού σχολείου και σπάνια ενισχύεται από τους εκπαιδευτικούς.

Ο διαφορετικός βαθμός μαθηματικής δημιουργικότητας που επέδειξε κάθε μαθητής καθόρισε τη δημιουργία τεσσάρων ομάδων μαθητών. Οι μαθητές που ανήκανε στις τέσσερις ομάδες είχαν μεταξύ τους στατιστικά σημαντικες διαφορές στις ικανότητες ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας. Αξίζει να σημειωθεί ότι η πλειοψηφία των μαθητών της ομάδας με υψηλή μαθηματική δημιουργικότητα φοιτούσαν στις Ε' και Στ' τάξεις ενώ στις ομάδες με χαμηλότερη δημιουργική ικανότητα, η πλειοψηφία των μαθητών φοιτούσε στη Δ' τάξη. Θα γίνει στη συνέχεια αναφορά στην επίδραση της ηλικίας στη μαθηματική δημιουργικότητα, παρόλα αυτά είναι χρήσιμο να αναφερθεί ότι οι μαθητές των μεγαλύτερων τάξεων ήταν σε θέση να προτείνουν περισσότερες λύσεις και να αναλογίζονται διαφορετικές μαθηματικές ιδέες.

Το Δημιουργικό Άτομο στα Μαθηματικά

Σε σχέση με το δημιουργικό άτομο, οι αναλύσεις προσανατολίστηκαν σε δύο άξονες, στα χαρακτηριστικά προσωπικότητας και στα γνωστικά χαρακτηριστικά. Ταυτόχρονα, διερευνήθηκε η επίδραση της ηλικίας στη μαθηματική δημιουργική ικανότητα των μαθητών.

Χαρακτηριστικά Δημιουργικής Προσωπικότητας

Τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας έδειξαν ότι τα χαρακτηριστικά δημιουργικής προσωπικότητας ορίζονται από έξι διακριτούς παράγοντες, όπως περιγράφονται στην Investment Theory (Sternberg & Lubart, 1996): «Διανοητικές Ικανότητες», «Γνώσεις/ Συλλογισμός», «Περιβάλλον», «Προσωπικά Χαρακτηριστικά», «Κίνητρα» και «Γνωστικό Στυλ». Ο πρώτος παράγοντας αναφέρεται στην κατοχή τριών ειδών διανοητικών ικανοτήτων: η αναλυτική ικανότητα εμπλέκει στοιχεία ανάλυσης και αξιολόγησης ιδεών, η συνθετική ικανότητα αναφέρεται στην παραγωγή πρωτότυπων ιδεών και τέλος η πρακτική ικανότητα περιλαμβάνει τη μετατροπή αφηρημένων ιδεών σε πρακτικές εφαρμογές (Sternberg, 2006). Ο δεύτερος παράγοντας αναφέρεται στην κατοχή μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων. Ο παράγοντας «Περιβάλλον» περιγράφει τον επιθυμητό τρόπο εργασίας του μαθητή στα μαθηματικά σε σχέση με τον οικογενειακό και φιλικό περίγυρό του. Τα «Προσωπικά Χαρακτηριστικά» περιγράφουν συμπεριφορές δημιουργικών ατόμων. Τα «Κίνητρα» επικεντρώνονται στο βαθμό εσωτερικής παρακίνησης που διακατέχουν τα άτομα, για να ασχοληθούν με εργασία που έχει μαθηματικό περιεχόμενο. Τέλος, το «Γνωστικό στυλ» περιγράφει τον επιθυμητό τρόπο εργασίας, κάνοντας διάκριση σε οπτικό, χωρικό και λεκτικό γνωστικό στυλ. Συγκρίνοντας τη συνεισφορά κάθε παράγοντα στον ανώτερης τάξης παράγοντα, που ορίζει το θεωρητικό μοντέλο ως «Δημιουργική Προσωπικότητα», η κατοχή γνώσεων και διανοητικών ικανοτήτων συνεισφέρουν περισσότερο στην ερμηνεία της δημιουργικής συμπεριφοράς. Όμοια, οι Kaufman και Baer (2004) στη δική τους εργασία όπου είχαν χρησιμοποιήσει ένα ερωτηματολόγιο αυτοαξιολόγησης είχαν εντοπίσει σημαντική σχέση μεταξύ των «ακαδημαϊκών ενδείξεων» και της δημιουργικότητας των μαθητών. Παράλληλα, οι Zhang και Sternberg (2011) παρατήρησαν ότι οι διανοητικές ικανότητες αποτελούσαν το δεύτερο σε σημαντικότητα παράγοντα, μετά τη νοημοσύνη, για την εμφάνιση δημιουργικής συμπεριφοράς. Απεναντίας, το περιβάλλον και τα κίνητρα συμπεριλαμβάνονται στους παράγοντες που δεν επεξηγούν ιδιαίτερα τη δημιουργική προσωπικότητα, λόγω των χαμηλών τους φορτίσεων. Αυτό μπορεί να σημαίνει ότι η δημιουργική συμπεριφορά είναι κάτι που συμβαίνει εντός του ατόμου και δεν επηρεάζεται από εξωγενείς παράγοντες, όπως οι αλληλεπιδράσεις με άλλα άτομα και η παρακίνηση για επικέντρωση στο στόχο.

Τους υψηλότερους μέσους όρους είχαν σε φθίνουσα σειρά οι δηλώσεις που αναφέρονταν στις διανοητικές ικανότητες, τα χαρακτηριστικά προσωπικότητας και το γνωστικό στυλ. Αντίστοιχα, τους χαμηλότερους μέσους όρους σε αύξουσα σειρά είχαν το περιβάλλον, η κατοχή γνώσεων και τα κίνητρα. Φαίνεται, δηλαδή ότι ενώ οι μαθητές αυτοαξιολογήθηκαν ως επαρκείς στα γνωστικά χαρακτηριστικά (διανοητικές ικανότητες, γνωστικό στυλ), όταν κλήθηκαν να αξιολογήσουν το βαθμό κατοχής μαθηματικών γνώσεων, θεώρησαν ότι το στοιχείο αυτό δεν είναι ανάμεσα στα δυνατά τους σημεία. Ενδεχομένως, αυτό να οφείλεται στο γεγονός ότι ενώ στις διανοητικές ικανότητες και στο γνωστικό στυλ οι μαθητές αξιολογούσαν τη συχνότητα εμφάνισης συγκεκριμένων συμπεριφορών, απαντώντας στο ερώτημα «Πόσο συχνά κάνεις κάτι;», για την κατοχή γνώσεων, κλήθηκαν να αξιολογήσουν τον εαυτό τους απαντώντας στο ερώτημα «Πόσο καλά κάνεις κάτι;». Πέρα από το πιο πάνω, οι μαθητές εξέφρασαν την προτίμησή τους να εργάζονται ατομικά, αφού δεν επιδιώκουν ιδιαίτερα τη συνεργασία με τους φίλους και την οικογένειά τους για μαθηματικό σκοπό. Ίσως τα δημιουργικά άτομα να προτιμούν να εργάζονται μόνα τους, στο δικό τους χρόνο και με το δικό τους ρυθμό, χωρίς να επιθυμούν οποιεσδήποτε παρεμβάσεις στον τρόπο σκέψης τους από εξωγενείς παράγοντες, όπως οι συνομιλίες με συμμαθητές τους, που θα τους αποτρέπουν να επιδείξουν δημιουργική συμπεριφορά. Αυτό άλλωστε επιβεβαιώνεται και από τη διεθνή βιβλιογραφία, στην οποία αναφέρεται ότι τα δημιουργικά άτομα δεν είναι ιδιαίτερα κοινωνικά και προτιμούν την ατομική εργασία (Kleiman, 2005).

Όπως φάνηκε από την επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση, τα χαρακτηριστικά δημιουργικής προσωπικότητας μπορούν να προβλέψουν τη μαθηματική δημιουργικότητα των μαθητών. Οι Zhang και Sternberg (2011) καθώς επίσης οι Kaufman και Baer (2004) ανέφεραν ότι η χρήση ερωτηματολογίων αυτοαξιολόγησης μπορεί να δώσει ενδείξεις για τη δημιουργική ικανότητα των ατόμων, γιατί η δημιουργικότητα σχετίζεται σημαντικά με την αυτογνωσία. Ανέφεραν, επιπρόσθετα, ότι για να μπορέσουν τα άτομα να ξεπεράσουν τις ικανότητές τους θα πρέπει να γνωρίζουν ότι τις κατέχουν (Zhang & Sternberg, 2011). Άρα, είναι σημαντικό οι μαθητές να αντιληφθούν πόσο δημιουργικοί είναι, για να μπορέσουν να «δημιουργήσουν». Αξίζει να αναφερθεί ότι η προβλεπτική δύναμη της δημιουργικής προσωπικότητας στο δημιουργικό αποτέλεσμα στα μαθηματικά ήταν σχετικά χαμηλή. Το στοιχείο αυτό αποτελεί ένδειξη ότι η προσωπικότητα δεν είναι επαρκής, για να ερμηνεύσει το βαθμό μαθηματικής δημιουργικότητας που εμφανίζει ένα άτομο, αλλά απαιτείται η μελέτη επιπρόσθετων στοιχείων.

Γνωστικά Χαρακτηριστικά Δημιουργικού Ατόμου

Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας η κατοχή μαθηματικών γνώσεων, η γενική δημιουργική ικανότητα και ο βαθμός νοημοσύνης θεωρήθηκαν ως τα γνωστικά χαρακτηριστικά που επηρεάζουν τη μαθηματικά δημιουργική συμπεριφορά. Πράγματι, αυτό επιβεβαιώθηκε κατά τη σύγκριση των τεσσάρων ομάδων μαθητών που πέρα από το βαθμό μαθηματικής δημιουργικότητας, διέφεραν μεταξύ τους και ως προς τα τρία προαναφερθέντα γνωστικά χαρακτηριστικά. Πιο συγκεκριμένα, οι τέσσερις ομάδες μαθητών που διέφεραν ως προς τη μαθηματική δημιουργικότητα επιβεβαίωναν την ύπαρξη τεσσάρων διακριτών ομάδων μαθητών που διέφεραν ως προς την κατοχή μαθηματικών γνώσεων και το βαθμό νοημοσύνης. Σε σχέση με τη γενική δημιουργική ικανότητα, σχηματίστηκαν δύο ομάδες μαθητών: η ομάδα με χαμηλή δημιουργικότητα και η ομάδα με υψηλή δημιουργικότητα. Στην πρώτη ομάδα, οι μαθητές είχαν μαθηματική δημιουργικότητα κάτω από το μέσο όρο επιδόσεων (Ομάδες 1 και 2), ενώ στη δεύτερη ομάδα οι μαθητές είχαν μαθηματική δημιουργικότητα πάνω από το μέσο όρο επιδόσεων (Ομάδες 3 και 4). Απαραίτητη, δηλαδή, προϋπόθεση για να επιδείξει κάποιος μαθητής υψηλή μαθηματική δημιουργικότητα είναι η κατοχή υψηλής γενικής δημιουργικότητας. Συνοψίζοντας τα πιο πάνω αποτελέσματα, η διαφορετική επίδοση των μαθητών σε ανοικτού τύπου μαθηματικά προβλήματα, κατά πάσα πιθανότητα οφείλεται σε άλλες γνωστικές παραμέτρους. Η παρούσα εργασία κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η διαφοροποίηση του βαθμού μαθηματικής δημιουργικότητας ενδέχεται να οφείλεται στην κατοχή μαθηματικών γνώσεων, στην κατοχή γενικών δημιουργικών δεξιοτήτων και στο βαθμό νοημοσύνης.

Επιπρόσθετα, για τη διερεύνηση της επίδρασης των γνωστικών χαρακτηριστικών στη μαθηματική δημιουργικότητα αξιοποιήθηκαν τα αποτελέσματα από την επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση. Η κατοχή μαθηματικών γνώσεων και η γενική δημιουργική ικανότητα είχαν το μεγαλύτερο βαθμό ερμηνείας της μαθηματικής δημιουργικότητας, ακολουθούμενα από τη νοημοσύνη. Τα πιο πάνω αποτελέσματα επιβεβαιώνονται και από άλλες αντίστοιχες έρευνες, οι οποίες διερεύνησαν την επίδραση κάθε γνωστικού χαρακτηριστικού στη δημιουργικότητα των ατόμων. Στον τομέα της μαθηματικής παιδείας, οι ερευνητές εντόπισαν ότι η κατοχή γνώσεων είναι η μεταβλητή η οποία συνεισφέρει περισσότερο από κάθε άλλη μεταβλητή στη μαθηματική δημιουργικότητα (Mann, 2005 · Sak & Maker, 2006). Τόσο ο Mann (2005) όσο και οι Sak και Maker (2006) κατά τη διεξαγωγή παλινδρομικής ανάλυσης παρατήρησαν ότι οι μαθηματικές γνώσεις είχαν την υψηλότερη φόρτιση στην ερμηνεία της μαθηματικής δημιουργικότητας. Ταυτόχρονα, οι Hong και Aqui (2004) συγκρίνοντας τις διαφορές μεταξύ μαθητών με υψηλή ακαδημαϊκή επίδοση και υψηλή μαθηματική δημιουργικότητα, εντόπισαν ότι η δεύτερη ομάδα μαθητών ήταν γνωστικά πιο «εξοπλισμένη» από τους συμμαθητές τους. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η άριστη γνώση του περιεχομένου βοηθά τα άτομα να ανακαλούν και να επεξεργάζονται πληροφορίες, καθώς επίσης να κάνουν συνδέσεις μεταξύ διαφορετικών εννοιών και αναπαραστάσεων (Sheffield, 2009).

Όσον αφορά στη σχέση της γενικής και της ειδικής δημιουργικότητας, διάφορες πρόσφατες έρευνες (Diakidou & Spanoudis, 2002 · Hong & Milgram, 2010 · Livne &

Milgram, 2006) επιβεβαιώνουν ότι η πρώτη ικανότητα μπορεί να συνεισφέρει στην ερμηνεία της δεύτερης. Πιο συγκεκριμένα, οι Hong και Milgram (2010) όπως και οι Livne και Milgram (2006) εντόπισαν στατιστικά σημαντική επίδραση της γενικής δημιουργικότητας στη μαθηματική δημιουργική ικανότητα. Παρόμοια, οι Diakidou και Spanoudis (2002) παρατήρησαν στατιστικά σημαντική συνεισφορά της γενικής μέτρησης για τη δημιουργικότητα στην ερμηνεία της δημιουργικής ικανότητας των μαθητών στην ιστορία. Συμπερασματικά, η γενική δημιουργική ικανότητα παρέχει στα άτομα τις δεξιότητες να σκέφτονται εναλλακτικές όψεις της ίδιας κατάστασης, να απαντούν με διαφορετικό τρόπο στο ίδιο ερέθισμα και να ενεργοποιούν τη φαντασία τους.

Τα πιο πάνω αποτελέσματα σε συνδυασμό επιβεβαιώνουν τη θεωρία της Amabile (1996), σύμφωνα με την οποία για την εμφάνιση δημιουργικής ικανότητας σε ένα πεδίο απαιτείται ο συνδυασμός δύο ειδών δεξιοτήτων: δεξιότητες σε σχέση με τη γενική δημιουργικότητα και δεξιότητες σε σχέση με το αντικείμενο. Στη συγκεκριμένη περίπτωση για να μπορέσει ένας μαθητής να επιδείξει εξαίρετη μαθηματική δημιουργικότητα θα πρέπει από τη μια να έχει ανεπτυγμένη την ικανότητα να συνδυάζει ιδέες, να σκέφτεται εναλλακτικές προσεγγίσεις μιας κατάστασης και να χρησιμοποιεί την αποκλίνουσά του σκέψη. Από την άλλη, ο μαθητής θα πρέπει να κατέχει μαθηματικές γνώσεις και να είναι ικανός να χειρίζεται με ευελιξία μαθηματικές διαδικασίες και δεξιότητες. Συνεπώς, ο συνδυασμός των δύο χαρακτηριστικών μπορεί να οδηγήσει σε μαθηματικά δημιουργική συμπεριφορά. Για παράδειγμα, ένας μαθητής χωρίς γερό γνωσιολογικό υπόβαθρο δεν θα είναι σε θέση να προτείνει αριθμό μαθηματικών λύσεων, εναλλάσσοντας και συνδυάζοντας μαθηματικές ιδέες. Αντίστοιχα, ένας μαθητής που είναι μαθηματικά ικανός αλλά δεν είναι ιδιαίτερα δημιουργικός δεν θα μπορέσει να προτείνει πρωτότυπες λύσεις, αν δεν έχει την ικανότητα να συνδυάζει και να τροποποιεί ιδέες, καταλήγοντας σε καινοτόμα αποτελέσματα. Πολύ εύστοχα ο Haylock (1987) ανέφερε ότι για τον προσδιορισμό της μαθηματικής δημιουργικότητας δύο είναι τα απαραίτητα στοιχεία που θα πρέπει να ληφθούν υπόψη, ο τομέας των μαθηματικών, υπονοώντας το συγκεκριμένο γνωστικό πεδίο, σε συνδυασμό με τον τομέα της δημιουργικότητας, υποδηλώνοντας τις γενικές δημιουργικές ικανότητες.

Η νοημοσύνη μπορεί να συνεισφέρει στην κατανόηση της μαθηματικής δημιουργικότητας. Παρόλα αυτά, σε σχέση με τα άλλα γνωστικά χαρακτηριστικά, ο συντελεστής φόρτισης είναι χαμηλός, δείχνοντας το χαμηλό βαθμό επεξήγησης της μαθηματικής δημιουργικότητας από τη νοημοσύνη. Οι Livne και Milgram (2006) εντόπισαν χαμηλή συνεισφορά της νοημοσύνης στη μαθηματική δημιουργικότητα, επιβεβαιώνοντας ότι η νοημοσύνη είναι αναγκαία αλλά όχι απαραίτητη συνθήκη για την εμφάνιση της μαθηματικής δημιουργικότητας (Torrance, 1962). Με άλλα λόγια, ένας μαθητής με υψηλό δείκτη νοημοσύνης δεν σημαίνει απαραίτητα ότι είναι και μαθηματικά δημιουργικός. Κατ' επέκταση, αυτό το αποτέλεσμα προτείνει ότι τα εργαλεία νοημοσύνης δεν είναι κατάλληλα για την αξιολόγηση της μαθηματικής δημιουργικότητας.

Όσον αφορά στη νοημοσύνη, στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας μελετήθηκε η threshold theory of intelligence, σύμφωνα με την οποία η νοημοσύνη και η δημιουργικότητα συσχετίζονται στο μέσο πληθυσμό, ενώ στους μαθητές με υψηλό δείκτη νοημοσύνης οι δύο οντότητες λειτουργούν ανεξάρτητα. Τα αποτελέσματα της εργασίας φαίνεται να επιβεβαιώνουν τη θεωρία, μιας και στην πλειοψηφία των μαθητών υπήρχε στατιστικά σημαντική συσχέτιση της μαθηματικής δημιουργικότητας με τη νοημοσύνη σε αντίθεση με τους μαθητές με ιδιαίτερα υψηλό δείκτη νοημοσύνης όπου δεν εντοπίστηκε συσχέτιση μεταξύ της μαθηματικής δημιουργικότητας και της νοημοσύνης. Αυτό ενδεχομένως να σημαίνει ότι υπάρχει ένα ανώτερο επίπεδο νοημοσύνης πάνω από το οποίο δεν υπάρχει αιτιώδης σχέση με τη δημιουργικότητα (Runco, 2007).

Επίδραση της Ηλικίας στη Μαθηματική Δημιουργικότητα

Ταυτόχρονα, μελετήθηκε η επίδραση της ηλικίας στη μαθηματική δημιουργικότητα, στοχεύοντας να διερευνηθούν οι αντικρουόμενες θεωρητικές υποθέσεις που υπάρχουν στο πεδίο. Με βάση τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης η ηλικία έχει την ικανότητα να ερμηνεύσει τη μαθηματική δημιουργικότητα, σε μεγαλύτερο βαθμό από τη νοημοσύνη και την προσωπικότητα. Όπως φάνηκε από τις αναλύσεις η μαθηματική δημιουργικότητα αυξάνεται σε σχέση με την ηλικία των μαθητών. Μάλιστα, η πολλαπλή ανάλυση διασποράς έδειξε ότι οι τρεις ηλικιακές ομάδες μαθητών σχημάτιζαν διαφορετικές ομάδες ως προς την ικανότητα ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας. Ειδικότερα, παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές της Στ' τάξης είχαν την υψηλότερη επίδοση ακολουθούμενοι από τους μαθητές της Ε' και της Δ' τάξης. Οι διαφορές μεταξύ των μαθητών των τριών τάξεων ήταν στατιστικά σημαντικές. Βέβαια, συγκρίνοντας την ικανότητα ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας ανάμεσα στις τρεις ηλικιακές ομάδες μαθητών, οι διαφορές δεν ήταν σε όλες τις περιπτώσεις στατιστικά σημαντικές. Ενώ οι τρεις ομάδες μαθητών διέφεραν ως προς την ικανότητα ευχέρειας, εντούτοις, δεν διαφοροποιήθηκαν ως προς την ικανότητα ευελιξίας και πρωτοτυπίας. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές της Ε’ και της Στ’ τάξης συμπεριφέρθηκαν με τον ίδιο τρόπο ως προς την ευελιξία και την πρωτοτυπία, αλλά διαφοροποιήθηκαν από τους μικρότερους σε ηλικία μαθητές.

Τα αποτελέσματα της εργασίας συμφωνούν με τις θεωρίες που αναφέρουν ότι υπάρχει ύφεση στη δημιουργικότητα των μαθητών της Δ’ τάξης (Torrance, 1962) ενώ στις μεγαλύτερες τάξεις του δημοτικού σχολείου η δημιουργικότητα ολοένα και αυξάνεται. Αυτή η παρατήρηση μπορεί να ερμηνευτεί στο πλαίσιο των αλλαγών που προκύπτουν στο άτομο, ως αποτέλεσμα της εκπαιδευτικής του εμπειρίας ή λόγω της εξελικτικής του ανάπτυξης (Sak & Maker, 2006). Μια πρώτη επεξήγηση που μπορεί να δοθεί στο συγκεκριμένο αποτέλεσμα μπορεί να στηριχθεί στην αύξηση του γνωσιολογικού υποβάθρου των μαθητών. Άλλωστε τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας μπορούν να επιβεβαιώσουν τη σημαντικότητα της κατοχής μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών στη μαθηματική δημιουργικότητα. Οι πιο μεγάλοι σε ηλικία μαθητές ήταν σε θέση να προτείνουν αριθμό λύσεων και ταυτόχρονα, να κάνουν περισσότερους συνδυασμούς μαθηματικών ιδεών λόγω των αυξημένων γνώσεών τους. Παρόλα αυτά, τα αποτελέσματα μιας δεύτερης επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης, στην οποία ο παράγοντας ηλικία συνεισφέρει στη μαθηματική δημιουργικότητα μέσω των γνώσεων του μαθητή, ως επακόλουθο της γνωστικής του ανάπτυξης, έδειξαν ότι το συγκεκριμένο μοντέλο δεν ήταν το καλύτερο για να περιγράψει αυτή τη σχέση. Με άλλα λόγια, πέρα από τη γνωστική ανάπτυξη, η ηλικία επηρεάζει τη μαθηματική δημιουργικότητα και μέσω άλλων παραμέτρων (Runco, 2007).

Για παράδειγμα, η επίδραση της ηλικίας στη μαθηματική δημιουργικότητα μπορεί να ερμηνευθεί στη βάση της εξελικτικής ανάπτυξης των μαθητών. Ίσως η θεωρία του Piaget (1950) για τη γνωστική ανάπτυξη των μαθητών να είναι βοηθητική: οι μαθητές μέχρι τη Δ’ τάξη χαρακτηρίζονται από συγκεκριμένη σκέψη. Η αφηρημένη σκέψη ξεκινά να αναπτύσσεται στη Στ’ τάξη, όπου ξεκινά και η εφηβεία. Έτσι, κατά την ενασχόληση των μαθητών με ανοικτού τύπου μαθηματικά έργα οι έφηβοι δεν περιορίζονται στην αξιοποίηση συγκεκριμένων ιδεών που έχουν διδαχθεί, αλλά επεκτείνουν τον ορίζοντά τους σε πιο αφηρημένες ιδέες, ξεφεύγοντας από τη στερεότυπη, συγκεκριμένη σκέψη. Σε αντίθεση, οι μικρότεροι μαθητές επικεντρώνονται στο χειρισμό συγκεκριμένων μαθηματικών συμβόλων και εννοιών που τους περιορίζει σε συγκλίνουσα σκέψη.

Παράλληλα, η διαφορά στις κοινωνικές νόρμες μεταξύ των ηλικιακών ομάδων μπορεί να προκάλεσε τη διαφορά στη μαθηματική δημιουργικότητα των μαθητών. Λαμβάνοντας υπόψη την έμφυτη προσπάθεια των εφήβων για ανεξαρτητοποίηση και δημιουργία της προσωπικής τους ταυτότητας, θέλουν να διαφοροποιήσουν τις απαντήσεις τους από αυτές των συμμαθητών τους. Από την άλλη, οι μαθητές των μικρότερων τάξεων τείνουν να συμμορφώνονται προς τους διδακτικούς στόχους του εκπαιδευτικού και στις προσδοκίες του εκπαιδευτικού συστήματος, γιατί δεν θέλουν να αποτελέσουν εξαίρεση μεταξύ των συμμαθητών τους (Runco, 2007).

Η Δημιουργική Διαδικασία

Η δεύτερη διάσταση της μαθηματικής δημιουργικότητας που διερευνήθηκε στην παρούσα εργασία αναφέρεται στη διαδικασία. Με άλλα λόγια, ήταν στόχος της εργασίας ο εντοπισμός και η διερεύνηση των γνωστικών υπο-διαδικασιών που εμφανίζονται καθώς οι μαθητές εργάζονται σε μαθηματικά έργα που ευνοούν τη δημιουργική σκέψη. Στο πλαίσιο των ποιοτικών αναλύσεων έγινε προσπάθεια να απαντηθούν τα ακόλουθα δύο ερωτήματα: «Ποιες είναι οι γνωστικές υπο-διαδικασίες που εμφανίζονται κατά τη λύση ενός προβλήματος;» και «Πώς διαφοροποιείται η διαδικασία που οδηγεί σε δημιουργικό αποτέλεσμα σε σύγκριση με αντίστοιχη διαδικασία που οδηγεί σε κοινότυπο αποτέλεσμα;» (Lubart, 2001). Για τον εντοπισμό των γνωστικών υπο-διαδικασιών που εμφανίζονται κατά τη μαθηματική δημιουργικότητα υιοθετήθηκε το θεωρητικό μοντέλο της Sheffield (2009), το οποίο ορίζει τη διαδικασία σε πέντε στάδια: διερεύνηση, συσχέτιση, κατασκευή, αξιολόγηση και επικοινωνία. Με στόχο την εξέταση των διαφορών που εμφανίζονται στη δημιουργική διαδικασία, έγινε σύγκριση των υπο-διαδικασιών ανάμεσα σε μαθητές με διαφορετικό βαθμό μαθηματικής δημιουργικότητας, όπως προτείνεται από τους Johnson και Carruthers (2006). Θα ακολουθήσει περιγραφή της κάθε υπο-διαδικασίας, με στόχο να διαφανεί η εξέλιξη ανάμεσα στους μαθητές με διαφορετικό βαθμό μαθηματικής δημιουργικότητας.

Το στάδιο της διερεύνησης αναφέρεται στην εις βάθος μελέτη των διαθέσιμων πληροφοριών και των σχετικών μαθηματικών εννοιών (Sheffield, 2009). Όπως η Amabile (1996) ανέφερε είναι χρήσιμη η ενεργοποίηση όλων των πληροφοριών που είναι σχετικές με ένα ερέθισμα για την εμφάνιση δημιουργικής συμπεριφοράς. Άρα η διερεύνηση είναι σχετική με το ερέθισμα και μπορεί να γίνει εμφανής σε διαφορετικές μορφές, λαμβάνοντας υπόψη τις πτυχές της προβληματικής κατάστασης. Στο πλαίσιο του συγκεκριμένου έργου, δύο ειδών ιδέες μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν προς διερεύνηση:

οι πράξεις και οι αριθμοί. Όσον αφορά στις πράξεις, η διερεύνηση αφορούσε την εναλλαγή του είδους των πράξεων, το συνδυασμό δύο ή περισσοτέρων πράξεων, την ανάλυση των πράξεων και τον εντοπισμό διαδικασιών που ακολουθούσαν την ίδια δομή. Η διερεύνηση των αριθμών οδήγησε στη χρήση διαφορετικού είδους αριθμών, στον αναλογισμό του μεγέθους του αριθμού καθώς και στην ανάλυση των αριθμών.

Η ομάδα με χαμηλή μαθηματική δημιουργικότητα περιορίστηκε στη διερεύνηση διαφορετικών πράξεων που μπορούσαν να εκτελεσθούν, χωρίς αυτό απαραίτητα να οδηγεί στην εμφάνιση λύσεων. Ουσιαστικά, η διερεύνηση περιορίστηκε στο πιο οφθαλμοφανές χαρακτηριστικό γνώρισμα του έργου, ενώ οι μαθητές δεν μπορούσαν να σκεφτούν άλλες ιδέες ή να εξελίξουν τουλάχιστον την ιδέα που είχαν προτείνει. Η ομάδα με μέτρια μαθηματική δημιουργικότητα κατάφερε να διερευνήσει σε μεγαλύτερο βαθμό τις μαθηματικές ιδέες που εμπλέκονται στο έργο. Πέρα από τη χρήση διαφορετικών πράξεων σκέφτηκε τη χρήση συνδυασμού πράξεων, την ανάλυση των πράξεων ή ακόμα την εύρεση λύσεων με παρόμοια δομή. Είναι, δηλαδή, εμφανές ότι οι μαθητές επικεντρώθηκαν στη διερεύνηση της μιας από τις δύο παραμέτρους του μαθηματικού έργου, καταφέρνοντας όμως να αξιοποιήσουν διαφορετικές ιδέες. Οι ομάδες μαθητών με καλή και υψηλή μαθηματική δημιουργικότητα κατάφεραν κατά τη διερεύνηση να λάβουν υπόψη τους και τη δεύτερη παράμετρο του έργου: τους αριθμούς. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές αναλογίστηκαν το είδος του αριθμού, την αύξηση του αριθμού και των συμβόλων στις μαθηματικές προτάσεις και την ανάλυση των αριθμών. Σε παρόμοια συμπεράσματα κατέληξαν οι Goor και Sommerfeld (1975), οι οποίοι παρατήρησαν ότι τα πιο δημιουργικά άτομα αξιοποιούσαν με μεγαλύτερη ευκολία νέες πληροφορίες, σε αντίθεση με τα λιγότερα δημιουργικά άτομα που δεν προέβαιναν σε οποιαδήποτε προσπάθεια εντοπισμού σχετικών πληροφοριών. Αυτό μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι οι πιο δημιουργικοί μαθητές είχαν γερό γνωσιολογικό υπόβαθρο, στοιχείο που τους επέτρεπε να είναι πιο οξυδερκείς και να λαμβάνουν υπόψη τους διαφορετικές πτυχές της προβληματικής κατάστασης. Αντιθέτως, οι λιγότερο δημιουργικοί μαθητές, ως λιγότερο μαθηματικά ικανοί, περιορίστηκαν στον εντοπισμό των βασικών ιδεών.

Συγκρίνοντας τις τέσσερις ομάδες μαθητών, παρατηρήθηκε ότι ο βαθμός διερεύνησης της προβληματικής κατάστασης διαφοροποίησε τον αριθμό των διαφορετικών ιδεών που αξιοποιήθηκαν στις λύσεις τους. Ενδεικτικά, καθώς ο βαθμός διερεύνησης αυξανόταν από την Ομάδα 1 στην Ομάδα 4, αντίστοιχη αύξηση εντοπιζόταν και στον αριθμό των μαθηματικών ιδεών που αξιοποιήθηκαν. Με άλλα λόγια, το στάδιο της διερεύνησης ενδεχομένως να σχετίζεται με την ικανότητα της ευελιξίας. Σύμφωνα με το Vidal (2009), η ευέλικτη σκέψη απαιτεί εναλλαγή ιδεών, αξιοποίηση διαφορετικών προσεγγίσεων και οπτικών μιας κατάστασης. Τα πιο πάνω χαρακτηριστικά ενυπάρχουν κατά τη διερεύνηση μιας προβληματικής κατάστασης, αφού το άτομο αναγκάζεται να πλοηγηθεί ανάμεσα σε διαφορετικές γνωστικές σφαίρες, βάζοντας φραγμό στον ένα τρόπο σκέψης και ταξιδεύοντας προς άλλες νοητικές κατευθύνσεις, με στόχο να εντοπίσει νέες ιδέες (Doyle, 1998 · Vidal, 2009).

Η Sheffield (2009) ορίζει το στάδιο της συσχέτισης ως τη διαδικασία σύγκρισης ιδεών, εντοπισμού ομοιοτήτων και διαφορών και συνδυασμού διαθέσιμων πληροφοριών. Παρόλα αυτά το στάδιο της συσχέτισης δεν εμφανίστηκε στους μαθητές με χαμηλή και μέτρια μαθηματική δημιουργικότητα, παρά μόνο στην ομάδα μαθητών με καλή και υψηλή μαθηματική δημιουργική ικανότητα. Οι μαθητές με χαμηλή και μέτρια μαθηματική δημιουργικότητα δεν κατάφεραν να συσχετίσουν μαθηματικές ιδέες ή κατέληξαν σε άστοχες συνδέσεις. Από την άλλη, οι μαθητές με πάνω από το μέσο βαθμό μαθηματικής δημιουργικότητας κατέληξαν στη συσχέτιση μαθηματικών ιδεών, πράξεων και αριθμών, στη διασύνδεση δράσεων και στον εντοπισμό ομοιοτήτων και διαφορών στις λύσεις τους. Καθώς αυξανόταν ο βαθμός μαθηματικής δημιουργικότητας, αυξανόταν βέβαια το πλήθος και το είδος των συσχετίσεων. Ενδεικτικά, οι μαθητές της Ομάδας 4 προέβηκαν σε πιο σύνθετες συσχετίσεις από τους μαθητές της Ομάδας 3. Αν μελετήσουμε το στάδιο της συσχέτισης συγκριτικά στις τέσσερις ομάδες μαθητών, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι στις πρώτες δύο ομάδες όπου παρατηρήθηκε περιορισμένη συσχέτιση ο αριθμός των λύσεων που προτάθηκε ήταν και αυτός περιορισμένος. Στις ομάδες με υψηλή μαθηματική δημιουργικότητα, καθώς οι μαθητές εντόπιζαν περισσότερες συσχετίσεις πρότειναν και μεγαλύτερο αριθμό λύσεων. Αυτό πιθανόν να οφείλεται στο γεγονός ότι το στάδιο της συσχέτισης βοηθούσε τους μαθητές να συνδυάσουν ιδέες, να συγκρίνουν και να τροποποιήσουν τις λύσεις τους, καταλήγοντας σε αριθμό διαφορετικών απαντήσεων (Vidal, 2009). Με άλλα λόγια, η συσχέτιση φαίνεται να ενισχύει την ευχέρεια των μαθητών.

Το στάδιο της αξιολόγησης εμπλέκει τους μαθητές σε μια διαδικασία αναστοχασμού των προτεινόμενων λύσεων καθώς και επιβεβαίωσης της επίτευξης των στόχων που είχαν τεθεί εξ’ αρχής (Amabile, 1996 · Sheffield, 2009). Οι μαθητές με χαμηλή και μέτρια μαθηματική δημιουργικότητα δεν ένιωθαν ικανοποιητική αυτοπεποίθηση, για να εντοπίσουν την καλύτερη απάντησή τους. Στην πρώτη ομάδα μαθητών το στάδιο της αξιολόγησης δεν είχε ιδιαίτερο ρόλο στη δημιουργική διαδικασία αφού δεν εμφανίστηκε καθόλου, ενώ στη δεύτερη ομάδα μαθητών, έγινε μια προσπάθεια αναστοχασμού των παραμέτρων που αξιοποιήθηκαν στις λύσεις. Ενώ θα ανέμενε κανείς ότι λόγω του σταδίου της αξιολόγησης οι μαθητές θα αντιλαμβάνονταν ότι ο στόχος τους δεν είχε επιτευχθεί και άρα οι λύσεις τους χρειάζονταν βελτίωση (Sheffield, 2009 · Treffinger, 1995), εντούτοις, δεν φάνηκε οποιαδήποτε προσπάθεια για διαφοροποίηση του τρόπου σκέψης τους. Οι πιο ικανοί μαθητές ήταν σε θέση να αναλογιστούν τι είχαν ήδη κάνει και να σκεφτούν με ποιο τρόπο θα μπορούσαν να βελτιώσουν τις ιδέες τους. Μάλιστα, για αυτούς τους μαθητές το στάδιο της αξιολόγησης είχε σημαντικό ρόλο στη διαδικασία δημιουργικής σκέψης, επιβεβαιώνοντας την αναφορά της Amabile (1996) ότι η διαδικασία αξιολόγησης εμπλέκει τα άτομα σε μια διαδικασία λήψης απόφασης για τη συνέχιση της εργασίας τους. Συγκεκριμένα, η αξιολόγηση λειτούργησε ως κίνητρο για να βοηθήσει τους μαθητές να συνεχίσουν να προσπαθούν, για να βρουν περισσότερες απαντήσεις που θα τους διαφοροποιήσουν από τους υπόλοιπους συμμαθητές τους.

Θα μπορούσε κανείς να υποστηρίξει ότι το στάδιο της αξιολόγησης ενίσχυσε την πρωτοτυπία των μαθητών. Η εργασία του Lubart (1994) που είχε ως στόχο τη διερεύνηση του ρόλου της αξιολόγησης στη δημιουργική διαδικασία φοιτητών κατέληξε στο συμπέρασμα ότι οι φοιτητές που εφάρμοζαν συνεχή αξιολόγηση στην εργασία τους επέδειξαν υψηλότερη δημιουργικότητα σε σύγκριση με τους συμφοιτητές τους που θεώρησαν ότι η αξιολόγηση δεν χρειάζεται στην όλη διαδικασία. Αν αναλογιστούμε ότι οι πιο ικανοί μαθητές πρότειναν πιο πρωτότυπες ιδέες ξεφεύγοντας από τις προφανείς λύσεις, φαίνεται ότι κατά την αξιολόγηση οι μαθητές ήταν σε θέση να εντοπίσουν τα στοιχεία που διαφοροποιούσαν τις λύσεις τους από αυτές των συμμαθητών τους και έτσι συνδυάζοντας ή επεκτείνοντάς τα μπορούσαν να καταλήξουν σε καινοτόμες ιδέες. Οι λιγότερο δημιουργικοί μαθητές στερούνταν αυτής της ικανότητας και για αυτό δεν μπορούσαν να διαφοροποιήσουν τις λύσεις τους.

Το στάδιο της επικοινωνίας αναφέρεται στη διάχυση των ιδεών και στην προσπάθεια επεξήγησης της λογικής που υποθάλπει (Sheffield, 2009). Σύμφωνα με το Sriraman (2008), σε αυτό το στάδιο γίνεται επαλήθευση της ορθότητας και της χρησιμότητας της λύσης και διερευνάται η πιθανότητα επέκτασης και αξιοποίησης του αποτελέσματος. Με άλλα λόγια, το στάδιο της επικοινωνίας εμπλέκει ικανότητες μεταγνώσης, αφού οι μαθητές καλούνται να αναστοχαστούν και να επεξηγήσουν τη σκέψη τους, απαντώντας σε ερωτήματα της μορφής: «Τι έχεις κάνει;» και «Γιατί το έκανες;». Για να μπορέσουν όμως οι μαθητές να επεξηγήσουν τον τρόπο σκέψης τους, θα πρέπει να έχουν κατανοήσει τη διαδικασία που ακολούθησαν. Οι πιο ικανοί μαθητές που είχαν ήδη εφαρμόσει στη διαδικασία τους τα στάδια της συσχέτισης και της διερεύνησης φάνηκε να έχουν πιο ξεκάθαρο τρόπο εργασίας και για αυτό προέβηκαν σε αναφορά λεπτομερειών. Βέβαια, οι μαθητές με υψηλή μαθηματική δημιουργικότητα είχαν πιο ξεκάθαρο τρόπο εργασίας από τους συμμαθητές τους, κάνοντας αναφορά σε λεπτομέρειες. Οι μαθητές που ανήκανε στις άλλες δύο ομάδες μαθητών, λόγω του ότι δεν είχαν συγκεκριμένο πλάνο σκέψης και εργασίας, κατέληξαν να χρησιμοποιούν γενικόλογα σχόλια ή να διαβάζουν τις λύσεις που είχαν γράψει.

Τέλος το στάδιο της κατασκευής αναφέρεται στην εύρεση των λύσεων ή στον εντοπισμό νέων ιδεών και διερευνήσεων (Sheffield, 2009). Οι ποιοτικές αναλύσεις των συνεντεύξεων αποκάλυψαν ότι το στάδιο της κατασκευής ήταν άμεσα συνδεδεμένο με τα υπόλοιπα στάδια της διαδικασίας. Οι μαθητές με χαμηλή μαθηματική δημιουργικότητα πρότειναν μόνο προφανείς λύσεις, όπως το Χ4 και το +6 ή χρησιμοποίησαν επαναλαμβανόμενες προσθέσεις ή πολλαπλασιασμούς με τα συγκεκριμένα αποτελέσματα. Ο περιορισμένος αριθμός λύσεων που πρότειναν, οι προφανείς μαθηματικές ιδέες που χρησιμοποίησαν και οι κοινότυπες λύσεις που κατέληξαν ενδεχομένως να οφείλεται στο γεγονός ότι οι μαθητές αυτής της ομάδας απέτυχαν να εφαρμόσουν τα στάδια της συσχέτισης, της διερεύνησης και της αξιολόγησης. Οι μαθητές με μέτρια μαθηματική δημιουργικότητα δεν διαφοροποιήθηκαν ουσιαστικά από τους συμμαθητές τους με χαμηλή μαθηματική δημιουργικότητα ως προς τον αριθμό των μαθηματικών λύσεων, παρά μόνο ως προς το είδος των μαθηματικών ιδεών που αξιοποίησαν στις λύσεις τους. Συγκεκριμένα, οι μαθητές αυτής της ομάδας κατάφεραν να συνδυάσουν πράξεις προσθετικής και πολλαπλασιαστικής δομής καταλήγοντας σε «παραγωγικές» μεθόδους. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι δύο ομάδες δεν διαφοροποιήθηκαν ως προς το στάδιο της συσχέτισης που όπως προαναφέρθηκε ενδεχομένως να επηρεάζει την ευχέρεια των μαθητών, αλλά διαφοροποιήθηκαν στο στάδιο της διερεύνησης που φαίνεται να επηρεάζει την ευελιξία των μαθητών. Όσον αφορά στην ομάδα με καλή μαθηματική δημιουργικότητα, προέκυψαν ποσοτικά και ποιοτικά καλύτερες απαντήσεις. Συγκρίνοντας τις ομάδες μεταξύ τους είναι εμφανές ότι στην ομάδα με καλή μαθηματική δημιουργικότητα εμφανίζονται για πρώτη φορά τα στάδια της συσχέτισης, της επικοινωνίας και της αξιολόγησης που φαίνεται να επηρέασαν τη δημιουργική διαδικασία. Η ομάδα με υψηλή μαθηματική δημιουργικότητα κατάφερε να χειριστεί ευέλικτα τους αριθμούς και τις πράξεις, συνδυάζοντας μαθηματικές ιδέες και αξιοποιώντας ταυτόχρονα διαφορετικές παραμέτρους του έργου. Πιθανόν η μεγαλύτερη επεξεργασία που έτυχαν όλα τα στάδια αλλά κυρίως τα στάδια της επικοινωνίας και της αξιολόγησης να ενίσχυσαν την αποκλίνουσα σκέψη των μαθητών.

Μέσα από τη μελέτη της δημιουργικής διαδικασίας διαφάνηκε ότι οι πέντε υπο-διαδικασίες περιγράφουν πλήρως τη δημιουργική διαδικασία των μαθητών, δίνοντας έμφαση στην προεργασία, στη διεξαγωγή και στην ολοκλήρωση της δημιουργικής στιγμής. Το συγκεκριμένο μοντέλο επιτυγχάνει το στόχο που έχει θέση ο Guilford (1950): το μοντέλο που θα περιγράφει τη δημιουργική διαδικασία δεν θα πρέπει να περιορίζεται μόνο στη στιγμή εμφάνισης της δημιουργικής ιδέας αλλά και στο διάστημα πριν και μετά. Οι ποιοτικές αναλύσεις των συνεντεύξεων αποκάλυψαν ότι η δημιουργική διαδικασία μοιάζει με ένα συνεχές, όπου στο ένα άκρο εμφανίζεται έντονη δημιουργική δράση και στο άλλο άκρο παρατηρείται απουσία δημιουργικής δράσης. Με αυτή την οπτική, η δημιουργική διαδικασία δεν σημαίνει ότι είτε υπάρχει σε μεγάλο βαθμό σε ένα άτομο ή απουσιάζει παντελώς, αλλά μπορεί να πάρει ενδιάμεσες τιμές ανάμεσα στα δύο άκρα του συνεχούς (Lubart, 2001). Η διαφοροποίηση της δημιουργικής διαδικασίας επηρεάζεται από τις υπο-διαδικασίες που εμφανίζονται και το βαθμό επεξεργασίας που τυγχάνει καθεμιά από αυτές. Πράγματι, παρατηρώντας τα στάδια όπως εμφανίστηκαν στις τέσσερις ομάδες μαθητών, είναι εμφανές ότι δεν αναμένεται να εμφανιστούν όλα τα στάδια, στον ίδιο βαθμό σε όλους τους μαθητές. Στο συγκεκριμένο πεδίο υπάρχουν ελάχιστες έρευνες που να διερευνούν τον τρόπο με τον οποίο η δημιουργική διαδικασία διαφοροποιείται ανάμεσα σε άτομα με διαφορετικό βαθμό δημιουργικής ικανότητας (Lubart, 2001). Μια τέτοια έρευνα είχε διεξαχθεί από τη La Greca (1980) αρκετές δεκαετίες προηγουμένως, αναφέροντας ότι οι πιο δημιουργικοί μαθητές χρησιμοποιούσαν καλύτερα τις στρατηγικές και τις διαδικασίες από τους λιγότερο δημιουργικούς συμμαθητές τους και επιπλέον είχαν πιο ενεργητική εμπλοκή στην όλη διαδικασία.

Ταυτόχρονα, τα στάδια δεν εμφανίστηκαν σειριακά, επιβεβαιώνοντας ότι το μοντέλο δεν είναι γραμμικό (Sheffield, 2009). Το σημείο έναρξης της διαδικασίας, καθώς επίσης η μετάβαση από το ένα στάδιο στο άλλο δεν είναι προκαθορισμένα, αλλά καθορίζονται από το ίδιο το άτομο το οποίο κατευθύνει τη διαδικασία ανάμεσα στα στάδια που χρειάζεται, για να λύσει ένα πρόβλημα (Sheffield, 2008). Άλλωστε, οι σύγχρονες θεωρήσεις (π.χ. Treffinger, 1995) προτείνουν μετακίνηση από μοντέλα που περιγράφουν στεγανοποίηση στη σειρά εμφάνισης των σταδίων δημιουργικής διαδικασίας σε πιο δυναμικά μοντέλα που επιτρέπουν την αλληλεπίδραση μεταξύ των υπο-διαδικασιών και την εμφάνιση κύκλων δημιουργικής συμπεριφοράς κατά την επίλυση μιας προβληματικής κατάστασης (Mumford, Mobley, Uhlman, Reiter-Palmon, & Doares, 1991).

Το Εκπαιδευτικό Περιβάλλον

Η διερεύνηση του εκπαιδευτικού περιβάλλοντος είχε ως στόχο τη μελέτη της επίδρασης ενός παρεμβατικού προγράμματος στη μαθηματική δημιουργικότητα των μαθητών. Για τη διερεύνηση του εκπαιδευτικού περιβάλλοντος δημιουργήθηκαν δύο ισοδύναμες, ως προς τις δημιουργικές ικανότητες, ομάδες: η μία ομάδα συμμετείχε σε σειρά μαθημάτων που στόχευε στην ενίσχυση της μαθηματικής δημιουργικότητας (πειραματική ομάδα) ενώ η άλλη ομάδα παρακολούθησε μόνο τα μαθήματα των μαθηματικών στο σχολείο όπου φοιτά (ομάδα ελέγχου). Το Εργαλείο Μαθηματικής Δημιουργικότητας χορηγήθηκε στους μαθητές πριν από την έναρξη και μετά τη λήξη της σειράς των μαθημάτων.

Όπως φάνηκε από την ανάλυση των αποτελεσμάτων οι ικανότητες ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας των μαθητών της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου ενισχύθηκαν μετά την ολοκλήρωση των μαθημάτων του παρεμβατικού προγράμματος, σε σύγκριση με την αρχική τους επίδοση. Στην πειραματική ομάδα υπήρξε στατιστικά σημαντική διαφοροποίηση και ως προς τις τρεις ικανότητες, ενώ στην ομάδα ελέγχου υπήρξε διαφοροποίηση ως προς τις ικανότητες ευχέρειας και ευελιξίας, όχι όμως ως προς την ικανότητα πρωτοτυπίας. Συγκρίνοντας την τελική επίδοση των δύο ομάδων μαθητών, λαμβάνοντας υπόψη την αρχική επίδοση των μαθητών, εντοπίστηκαν στατιστικά σημαντικές αλλαγές ως προς την ευχέρεια και την πρωτοτυπία, αλλά όχι ως προς την ευελιξία. Τρία είναι τα κύρια συμπεράσματα που προκύπτουν. Πρώτο, η μαθηματική δημιουργικότητα επιδέχεται εμπειρικών και διδακτικών παρεμβάσεων. Δεύτερο, η δημιουργική ικανότητα των μαθητών φαίνεται να ενισχύεται σε μεγαλύτερο βαθμό από κατάλληλα εκπαιδευτικά περιβάλλοντα σε σύγκριση με την υποχρεωτική εκπαίδευση. Τρίτο, η ικανότητα πρωτοτυπίας δεν ενισχύεται το ίδιο εύκολα στους μαθητές όπως η ευχέρεια και η ευελιξία.

Όσον αφορά στο πρώτο συμπέρασμα, πράγματι αρκετοί ερευνητές επιβεβαιώνουν ότι η δημιουργικότητα επιδέχεται επιρροή από διδακτικές και εμπειρικές καταστάσεις (π.χ. Kurtzberg & Reale, 1999 · Levav-Waynberg & Leikin, 2012 · Pyryt, 1999). Για παράδειγμα, οι Kurtzberg και Reale (1999) παρατήρησαν ότι η επίδοση της πειραματικής ομάδας ήταν διπλάσια από την επίδοση της ομάδας ελέγχου σε διάστημα μόνο μιας εβδομάδας στην οποία οι μαθητές είχαν τύχει κατάλληλης εκπαίδευσης. Αντίστοιχα, ο Pyryt (1999) διεξάγοντας μετα-ανάλυση σε 25 έρευνες που διερευνούσαν την αποτελεσματικότητα προγραμμάτων αποκλίνουσας σκέψης, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η αποκλίνουσα σκέψη των μαθητών βελτιωνόταν με το πέρας των μαθημάτων. Το γεγονός ότι ακόμα και η ομάδα ελέγχου βελτίωσε τη μαθηματική δημιουργική της ικανότητα έρχεται σε αντίφαση με το μύθο που θέλει το σχολείο να αποθαρρύνει την ανάπτυξη της δημιουργικής συμπεριφοράς.

Σε σχέση με το δεύτερο συμπέρασμα, παρόλο ότι η υποχρεωτική εκπαίδευση αναπτύσσει τη μαθηματική δημιουργικότητα των μαθηματικών, εντούτοις αυτή η επίδραση φαίνεται να είναι πιο αργή και λιγότερη αποτελεσματική, από εκπαιδευτικά περιβάλλοντα στα οποία στόχος είναι η ανάπτυξη αποκλίνουσας σκέψης. Η επίδραση της άμεσης διδασκαλίας φαίνεται να είναι πιο ισχυρή από την έμμεση διδασκαλία για την αποκλίνουσα σκέψη (Kurtzberg & Reale, 1999 · Ruscio & Amabile, 1999 · Saxon, Treffinger, Young, & Witting, 2003). Στην εργασία τους οι Ruscio και Amabile (1999) διερεύνησαν την επίδραση δύο διαφορετικών διδακτικών προσεγγίσεων στη δημιουργική ικανότητα φοιτητών κατά τη λύση προβλήματος. Στην πρώτη ομάδα μαθητών, όπου η έμφαση κατά τη διδασκαλία ήταν στους αλγόριθμους, παρατηρήθηκε αύξηση στην ταχύτητα επίλυσης προβλήματος και ενίσχυση της αυτοπεποίθησης των μαθητών κατά το χειρισμό των διαδικασιών. Στη δεύτερη ομάδα μαθητών, όπου η έμφαση κατά τη διδασκαλία ήταν στην ανάπτυξη της αποκλίνουσας σκέψης, παρατηρήθηκε ενίσχυση της ικανότητας των μαθητών να εμπλακούν σε διερευνήσεις καθώς επίσης και βελτίωση στον εντοπισμό καινοτόμων λύσεων. Ο Saxon και οι συνεργάτες του (2003) διεξήγαγαν έρευνα με 13 526 μαθητές και γονείς που συμμετείχαν σε κατασκήνωση για ενίσχυση της δημιουργικής ικανότητας. Περισσότεροι από τα τρία τέταρτα των συμμετεχόντων βελτίωσαν τις δεξιότητές τους να εντοπίζουν περισσότερες από μια απαντήσεις, να βρίσκουν διαφορετικούς τρόπους συνδυασμού και συσχέτισης ιδεών και να προτείνουν πρωτότυπους τρόπους αξιοποίησης των γνώσεών τους.

Αναφορικά με το τρίτο συμπέρασμα, φαίνεται ότι η ικανότητα της πρωτοτυπίας διαφοροποιείται από τις ικανότητες της ευχέρειας και της ευελιξίας. Το γεγονός ότι η πρωτοτυπία διαφοροποιήθηκε στη μια ομάδα μαθητών αλλά όχι στην άλλη μπορεί να σημαίνει ότι η πρωτοτυπία είτε χρειάζεται άμεση διδασκαλία ή λόγω της λιγότερο αποτελεσματικής επίδρασης της τυπικής διδασκαλίας χρειάζεται μεγαλύτερο χρονικό διάστημα για να ενισχυθεί. Σε αντίστοιχο αποτέλεσμα κατέληξαν οι Kurtzberg και Reale (1999) οι οποίοι παρατήρησαν βελτίωση των ικανοτήτων ευχέρειας και ευελιξίας αλλά όχι της πρωτοτυπίας. Οι Levav-Waynberg και Leikin (2012) κατέληξαν ότι η πρωτοτυπία χρειάζεται ειδικό χειρισμό για τη βελτίωσή της.

Σύμφωνα με το Hunsaker (2005), οι πιο πολλές έρευνες που διερευνούν την επίδραση κάποιου είδους διδασκαλίας στη δημιουργική ικανότητα δεν διερευνούν κατά πόσο τα άτομα εξακολούθησαν να χρησιμοποιούν τέτοιου είδους δεξιότητες, μετά την πάροδο ενός χρονικού διαστήματος αφότου ολοκληρωθεί η διδακτική παρέμβαση. Ως εκ τούτου, στην παρούσα εργασία διερευνήθηκε η επίδοση των μαθητών της πειραματικής ομάδας ένα μήνα μετά την ολοκλήρωση των μαθημάτων. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων έδειξε ότι οι ικανότητες ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας βελτιώθηκαν σε σύγκριση με τη μέτρηση που έγινε στο τέλος των μαθημάτων, αλλά εντούτοις η αλλαγή που επήλθε δεν ήταν στατιστικά σημαντική. Το πιο πάνω αποτέλεσμα μπορεί να σημαίνει ότι είτε η δημιουργική ικανότητα χρειάζεται συνεχή εξάσκηση για να παρατηρηθεί σημαντική αύξηση ή χρειάζεται περισσότερος χρόνος για να διαφανεί στατιστικά σημαντική αλλαγή στη δημιουργική ικανότητα των μαθητών. Παρόλα αυτά, είναι ενθαρρυντικό το γεγονός ότι η δημιουργική ικανότητα δεν επέστρεψε στον αρχικό της βαθμό (πριν από την έναρξη των μαθημάτων).

Όσον αφορά στις αντιλήψεις των μαθητών της πειραματικής ομάδας, φαίνεται ότι το παρεμβατικό πρόγραμμα βοήθησε τους μαθητές να αντιληφθούν τη σχέση μεταξύ των μαθηματικών και της δημιουργικότητας, βελτιώνοντας την αυτοεκτίμησή τους για τις δημιουργικές τους ικανότητες και ενισχύοντας θετικά τις αντιλήψεις τους για τη σχέση μαθηματικών και δημιουργικότητας. Ειδικότερα, ενώ οι μαθητές πριν από την έναρξη των μαθημάτων είχαν χαμηλή αυτοεκτίμηση των ικανοτήτων τους, με την ολοκλήρωση των μαθημάτων οι μαθητές ένιωσαν πιο σίγουροι για την κατοχή ικανοτήτων που σχετίζονται με τη μαθηματική δημιουργικότητα. Πλέον οι μαθητές ήταν ικανοί να «Ανακαλύπτουν νέους τρόπους, για να λύσουν ασκήσεις», αλλά και να «Λύσουν μαθηματικές ασκήσεις με διαφορετικούς τρόπους» μιας και τα ερεθίσματα που τους δόθηκαν άφηναν έδαφος για διερεύνηση. Αντίστοιχη ενίσχυση παρατηρήθηκε και στις πεποιθήσεις των μαθητών για τη δημιουργικότητα και τα μαθηματικά. Λόγω του ότι στη σειρά των μαθημάτων αξιοποιήθηκαν έργα που επιδέχονταν διαφορετικές λύσεις ή/και μεθόδους επίλυσης, οι μαθητές αντιλήφθηκαν ότι στα «Στα μαθηματικά *δεν* υπάρχει πάντα μόνο μια σωστή απάντηση» και ούτε «Υπάρχει μόνο ένας σωστός τρόπος για να λύσεις μια άσκηση στα μαθηματικά». Με το τέλος των μαθημάτων οι μαθητές είχαν αντιληφθεί ότι «Στα μαθηματικά μπορείς να χρησιμοποιήσεις τη φαντασία και τη δημιουργικότητά σου», αφού σε πολλές περιπτώσεις στο πλαίσιο των μαθημάτων είχαν κληθεί να εντοπίσουν ευφάνταστες λύσεις. Αυτό ενδεχομένως να οφείλεται στο γεγονός ότι μέχρι εκείνη τη στιγμή δεν είχαν δοθεί ευκαιρίες στους μαθητές να λύσουν προβλήματα με πολλές λύσεις ή να απαντήσουν δημιουργικά σε μαθηματικά ερωτήματα και για αυτό δεν γνώριζαν την ικανότητά τους σε τέτοιου είδους ερεθίσματα.

Ολοκληρώνοντας, φάνηκε μέσα από την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος, ότι όλοι οι μαθητές μπορούν να αναπτύξουν τη δημιουργικότητά τους στα μαθηματικά, φτάνει να τους δοθούν κατάλληλες ευκαιρίες και χρόνος για διερεύνηση. Αυτό ακριβώς ανέφερε το National Advisory Committee (DfEE, 1999): όλοι είμαστε ή μπορούμε να γίνουμε δημιουργικοί σε μικρότερο ή μεγαλύτερο βαθμό, φτάνει να μας δοθούν οι κατάλληλες ευκαιρίες. Η δημιουργικότητα για όλους τους μαθητές έχει αναφερθεί και από ερευνητές στη μαθηματική παιδεία (Sheffield, 2009 · Silver, 1997). Εκείνο που χρειάζεται για να επιτευχθεί ο πιο πάνω στόχος είναι οι εκπαιδευτικοί να είναι σε θέση να αναγνωρίσουν δημιουργικές συμπεριφορές, να ενισχύσουν και να ενθαρρύνουν την αποκλίνουσα σκέψη των μαθητών σε όλα τα επίπεδα (Haylock, 1987). Η Fryer (2012) ανέφερε πιο συγκεκριμένα ότι οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να βοηθήσουν τους μαθητές να κάνουν συνδέσεις μεταξύ ιδεών και εμπειριών, να χρησιμοποιήσουν διάφορες προσεγγίσεις για να προσδώσουν νόημα σε αυτά που μαθαίνουν, να αξιοποιούν τη φαντασία τους για να λύνουν προβλήματα ή να αντιμετωπίζουν καταστάσεις.

Σχέση μαθηματικής δημιουργικότητας με γενική δημιουργική ικανότητα

Συγκρίνοντας τα εναλλακτικά μοντέλα που προσδιορίζουν τη μορφή της σχέσης μεταξύ της γενικής και της μαθηματικής δημιουργικότητας, δεν εντοπίστηκε οποιαδήποτε διαφορά. Πιο συγκεκριμένα, τα τρία μοντέλα- συσχέτιση της μαθηματικής δημιουργικότητας με τη γενική δημιουργικότητα, πρόβλεψη της μαθηματικής δημιουργικότητας από τη γενική δημιουργικότητα, πρόβλεψη της γενικής δημιουργικότητας από τη μαθηματική δημιουργικότητα- είχαν τους ίδιους δείκτες προσαρμογής. Το γεγονός αυτό από τη μια επιβεβαιώνει την ύπαρξη συσχέτισης μεταξύ των δύο «ειδών» δημιουργικότητας, αλλά από την άλλη δεν προσδιορίζει την ύπαρξη αιτιώδους σχέσης μεταξύ των δύο εννοιών. Με άλλα λόγια, όσο αυξάνεται η μια μορφή δημιουργικής ικανότητας αναμένεται να αυξάνεται και η άλλη, αλλά εντούτοις ο βαθμός γενικής δημιουργικότητας δεν μπορεί να προβλέψει το βαθμό μαθηματικής δημιουργικότητας ενός ατόμου και αντιστρόφως, ο βαθμός μαθηματικής δημιουργικότητας δεν μπορεί να προβλέψει το βαθμό γενικής δημιουργικότητας.

Αντίστοιχα ήταν και τα αποτελέσματα που προτάθηκαν από τους Milgram και Livne (2005), οι οποίοι εντόπισαν την ύπαρξη θετικής συσχέτισης μεταξύ της γενικής δημιουργικής ικανότητας και της ειδικής δημιουργικής ικανότητας στα μαθηματικά, χωρίς όμως να μπορέσουν να εντοπίσουν αν η μια ικανότητα μπορεί να ερμηνεύσει την άλλη.

Έτσι ακολούθησε σύγκριση της εφαρμοσιμότητας δύο εναλλακτικών θεωρητικών μοντέλων που ορίζουν τη δημιουργικότητα ως ειδική ή γενική ικανότητα, αντίστοιχα. Το πρώτο μοντέλο διακρίνει τη δημιουργικότητα σε ειδικές ικανότητες, διακριτές σε επιμέρους γνωστικές περιοχές. Κάθε ειδική δημιουργική ικανότητα αποτελείται από τις αντίστοιχες ικανότητες ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας. Στο δεύτερο θεωρητικό μοντέλο, η δημιουργικότητα ορίστηκε ως μια ανώτερη δομή, η οποία ανεξαρτήτως του γνωστικού αντικειμένου στο οποίο συμβαίνει, αποτελείται από τις τρεις επιμέρους ικανότητες, ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας. Η σύγκριση των δύο θεωρητικών μοντέλων επιβεβαίωσε την καταλληλότητα του πρώτου μοντέλου. Δηλαδή, η δημιουργικότητα αποτελεί μια ειδική ικανότητα, εξειδικευμένη στο γνωστικό αντικείμενο των μαθηματικών. Οι Kaufman και Baer (2004) στο άρθρο τους «Sure, I'm Creative—But Not In Mathematics!: Self-Reported Creativity In Diverse Domains» εντόπισαν ότι η δημιουργικότητα διακρίνεται σε δύο υποπεριοχές: αυτή που λαμβάνει χώρο στα μαθηματικά και εκείνη που εμφανίζεται σε οποιοδήποτε άλλο γνωστικό αντικείμενο. Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας δεν εξετάστηκε η δημιουργικότητα σε άλλα γνωστικά αντικείμενα πέρα από τα μαθηματικά, για να διαφανεί κατά πόσο η μαθηματική δημιουργικότητα διαφοροποιείται από την αντίστοιχη δημιουργική ικανότητα σε οποιοδήποτε άλλο αντικείμενο ή αν υπάρχει διαφοροποίηση της δημιουργικής ικανότητας σε κάθε γνωστική περιοχή. Εντούτοις, σε οποιοδήποτε επίπεδο και αν εμφανίζεται η διαφοροποίηση της μαθηματικής δημιουργικότητας δημιουργείται η ανάγκη για ανάπτυξη εξειδικευμένων θεωρητικών και λειτουργικών ορισμών (Baer, 1998 · Kaufman & Baer, 2005).

Ταυτόχρονα, διερευνήθηκαν οι συσχετίσεις που υπήρχαν ανάμεσα στις ικανότητες ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας ως προς δύο άξονες: πρώτο διερευνήθηκαν οι συσχετίσεις που υπήρχαν εντός της ίδιας ικανότητας ανάμεσα στα δύο εργαλεία και δεύτερο διερευνήθηκαν οι συσχετίσεις που υπήρχαν μεταξύ των τριών ικανοτήτων στο ίδιο εργαλείο. Σε σχέση με τον πρώτο άξονα, εντοπίστηκαν αμελητέες συσχετίσεις μεταξύ των δύο μετρήσεων της κάθε ικανότητας. Όσον αφορά στο δεύτερο άξονα, παρατηρήθηκαν υψηλές συσχετίσεις ανάμεσα στις τρεις ικανότητες που μετρήθηκαν με το ίδιο εργαλείο. Χαμηλές συσχετίσεις μεταξύ των δημιουργικών αποτελεσμάτων σε διαφορετικά γνωστικά πεδία εντόπισαν οι Plucker και Zabelina (2009), τις οποίες προέβαλαν ως ενδείξεις για την ειδική φύση της δημιουργικότητας. Από τη στιγμή που η εμφάνιση της ίδιας ικανότητας, για παράδειγμα να μπορεί το άτομο να προτείνει αριθμό ορθών απαντήσεων (ευχέρεια), δεν είναι συστηματική σε ερεθίσματα που προκύπτουν σε διαφορετικές γνωστικές περιοχές, καταρρίπτεται η ύπαρξη «καθολικών ικανοτήτων» οι οποίες μεταφέρονται από μια γνωστική περιοχή σε άλλη. Με βάση τα πιο πάνω αποτελέσματα φαίνεται η ακαταλληλότητα των εργαλείων γενικής δημιουργικότητας να προβλέψουν τη δημιουργική σκέψη στα μαθηματικά. Λαμβάνοντας υπόψη ότι ο λόγος κατασκευής των εργαλείων γενικής δημιουργικότητας βασιζόταν στην ιδέα της γενικής δημιουργικότητας και στην παραδοχή ότι ένα εργαλείο μπορεί να προβλέψει τη δημιουργική ικανότητα σε μεγάλο εύρος γνωστικών πεδίων (Hong & Milgram, 2010), καταρρίπτεται η αντίστοιχη θεώρηση.

Σε πρακτικό επίπεδο, τα πιο πάνω συμπεράσματα είναι ιδιαίτερα χρήσιμα στους εκπαιδευτικούς. Ο εντοπισμός ενός μαθητή που είναι δημιουργικός στα μαθηματικά δεν αποτελεί απαραίτητα ένδειξη ότι είναι επίσης δημιουργικός στην τέχνη ή στη λογοτεχνία και αντίστροφα. Ένας μαθητής που δεν έχει επιδείξει εξαιρετικά δημιουργική επίδοση σε ένα τομέα δεν αποκλείεται να είναι δημιουργικός στο αντικείμενο των μαθηματικών. Επεκτείνοντας το πιο πάνω συμπέρασμα, η δημιουργική ικανότητα ενός μαθητή σε ένα πεδίο δεν αντικατοπτρίζει απαραίτητα τη δημιουργική του ικανότητα σε ένα άλλο. Βέβαια, σε καμία περίπτωση δεν απαγορεύεται ο ίδιος μαθητής να επιδείξει δημιουργική συμπεριφορά σε περισσότερα από ένα γνωστικά πεδία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Εισαγωγή

Στόχος της παρούσας εργασίας ήταν η ανάπτυξη ενός θεωρητικού μοντέλου για τη μαθηματική δημιουργικότητα, λαμβάνοντας υπόψη διαφορετικές πτυχές της έννοιας. Πιο συγκεκριμένα, η μαθηματική δημιουργικότητα διερευνήθηκε στο πλαίσιο τεσσάρων διαστάσεων: του αποτελέσματος, του ατόμου, της διαδικασίας και του περιβάλλοντος. Η πολύπλευρη διερεύνηση της μαθηματικής δημιουργικότητας οδήγησε σε θεωρητικής, μεθοδολογικής και πρακτικής φύσης αποτελέσματα, όπως θα αναφερθούν στη συνέχεια.

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της εργασίας, δίνοντας έμφαση στην απάντηση των ερευνητικών ερωτημάτων που τέθηκαν εξ αρχής, στις εκπαιδευτικές εφαρμογές των αποτελεσμάτων, καθώς και στη σύγκριση και σύνδεσή τους με άλλα θεωρητικά μοντέλα. Παράλληλα, στηριζόμενοι στους περιορισμούς της εργασίας γίνονται εισηγήσεις για μελλοντικές έρευνες που θα στοχεύουν στη βελτίωση, στην εμβάθυνση, στην επέκταση και στην εγκυροποίηση των αποτελεσμάτων.

Συνοπτική περιγραφή

Η συνοπτική περιγραφή των αποτελεσμάτων θα γίνει στη βάση των ερευνητικών ερωτημάτων που τέθηκαν στην αρχή της παρούσας εργασίας. Κατά πρώτο λόγο, η μαθηματική δημιουργικότητα αποτελεί μια ειδική ικανότητα, εξειδικευμένη στο γνωστικό αντικείμενο των μαθηματικών. Από θεωρητικής πλευράς, το πιο πάνω συμπέρασμα δίνει τη δυνατότητα για διατύπωση θεωρητικών και λειτουργικών ορισμών για την έννοια, επιτρέποντας στους ερευνητές να διαχωρίζουν τη μαθηματική δημιουργικότητα από οποιοδήποτε άλλο είδος δημιουργικής ικανότητας σε άλλο γνωστικό πεδίο. Από μεθοδολογικής πλευράς, η ειδική φύση της μαθηματικής δημιουργικότητας απαιτεί την ανάπτυξη κατάλληλων εργαλείων μέτρησης, που να είναι επικεντρωμένα στη συγκεκριμένη δημιουργική ικανότητα, χωρίς να μπορούν τα αποτελέσματα να είναι μεταφέρσιμα σε άλλες περιοχές. Από πρακτικής πλευράς, αναγνωρίζεται ότι κάθε άτομο ενδέχεται να είναι δημιουργικό σε μία ή περισσότερες γνωστικές περιοχές χωρίς η δημιουργική του ικανότητα σε ένα αντικείμενο να σημαίνει απαραίτητα αντίστοιχη ικανότητα σε ένα άλλο.

Η ειδική φύση της δημιουργικότητας επιτρέπει τη διεξαγωγή έρευνας που να είναι επικεντρωμένη στο γνωστικό αντικείμενο των μαθηματικών. Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας φάνηκε ότι η μαθηματική δημιουργικότητα αποτελεί πολυδιάστατη έννοια. Αξιοποιώντας το μοντέλο 4P διαφάνηκε ότι καθένας από τους τέσσερις άξονες του μοντέλου προσθέτει διαφορετικά στοιχεία, οδηγώντας στη σύνθεση πληρέστερης εικόνας για την έννοια.

Το δημιουργικό αποτέλεσμα, δηλαδή το εμφανές προϊόν τη δημιουργικής σκέψης, ορίζεται από τις ικανότητες της ευχέρειας, της ευελιξίας και της πρωτοτυπίας. Με άλλα λόγια, για να προσδιοριστεί ο βαθμός μαθηματικής δημιουργικότητας ενός μαθητή χρειάζεται να αξιολογηθεί ο αριθμός των μαθηματικά ορθών λύσεων, ο αριθμός και το είδος των μαθηματικών ιδεών που χρησιμοποίησε. Οι τρεις ικανότητες αν και είναι διακριτές μεταξύ τους, συσχετίζονται εντός του ίδιου έργου, ένδειξη ότι ο αριθμός των απαντήσεων που θα προτείνει ένας μαθητής συσχετίζεται με τον αριθμό των μαθηματικών ιδεών που θα αξιοποιήσει στις λύσεις του και ως αποτέλεσμα επηρεάζει το βαθμό πρωτοτυπίας που θα επιδείξει.

Για το δημιουργικό άτομο διερευνήθηκε η επίδραση των γνωστικών χαρακτηριστικών, των χαρακτηριστικών προσωπικότητας και της ηλικίας στη μαθηματική δημιουργικότητα των μαθητών. Ανάμεσα στα γνωστικά χαρακτηριστικά που διερευνήθηκαν συμπεριλήφθηκε η κατοχή μαθηματικών γνώσεων, η γενική δημιουργική ικανότητα και η νοημοσύνη. Όσον αφορά στα χαρακτηριστικά προσωπικότητας, εξετάστηκαν οι αντιλήψεις των μαθητών για τη σχέση των γνώσεων, των διανοητικών ικανοτήτων, των προσωπικών χαρακτηριστικών, του γνωστικού στυλ, του περιβάλλοντος και των κινήτρων με τη μαθηματική δημιουργικότητα, όπως ορίζεται από την Investment Theory (Sternberg & Lubart, 2006). Από τις πιο πάνω παραμέτρους, η κατοχή μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων γενικής δημιουργικότητας συνεισφέρουν περισσότερο από κάθε άλλη μεταβλητή στην ερμηνεία της μαθηματικής δημιουργικότητας. Η ηλικία των μαθητών, η νοημοσύνη και τα χαρακτηριστικά προσωπικότητας αν και έχουν τη δυνατότητα να ερμηνεύσουν τη μαθηματική δημιουργικότητα, εντούτοις η συνεισφορά τους είναι χαμηλή. Συμπερασματικά, τα μαθηματικά δημιουργικά άτομα χαρακτηρίζονται από γερό μαθηματικό υπόβαθρο και δημιουργική συμπεριφορά. Από τη μια, η ύπαρξη γερού γνωσιολογικού υποβάθρου στα μαθηματικά παρέχει στους μαθητές ποσότητα γνώσεων, διαδικασιών και γνωστικών συνδέσεων. Από την άλλη, η γενική δημιουργικότητα ενισχύει την ικανότητα του ατόμου να προβαίνει σε συνδυασμό ιδεών με πρωτότυπο τρόπο.

Σε σχέση με την ωρίμανση, οι μαθητές μεγαλύτερης ηλικίας έχουν υψηλότερη μαθηματική δημιουργικότητα σε σχέση με τους μικρότερους σε ηλικία συμμαθητές τους. Αυτό δεν οφείλεται αποκλειστικά στη βελτίωση του γνωσιολογικού υποβάθρου των μαθητών, αλλά ενδεχομένως να οφείλεται σε άλλες εξελικτικές και κοινωνικές παραμέτρους. Η χαμηλή συνεισφορά της νοημοσύνης στην ερμηνεία της μαθηματικής δημιουργικότητας επιβεβαιώνει την αναφορά του Torrance (1962) ότι η νοημοσύνη είναι απαραίτητη αλλά όχι αναγκαία συνθήκη για την εμφάνιση δημιουργικής συμπεριφοράς. Άλλωστε, η νοημοσύνη και η μαθηματική δημιουργικότητα συσχετίζονται στην πλειοψηφία του πληθυσμού, ενώ στα άτομα με υψηλό δείκτη νοημοσύνης, οι δύο γνωστικές δομές αποτελούν ανεξάρτητες οντότητες. Με άλλα λόγια, δεν σημαίνει ότι μαθηματικά δημιουργικά άτομα είναι αποκλειστικά τα άτομα με υψηλό δείκτη νοημοσύνης και αντίστροφα, τα άτομα με υψηλό δείκτη νοημοσύνης δεν είναι απαραίτητα δημιουργικά.

Όσον αφορά στα χαρακτηριστικά προσωπικότητας, τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας έδειξαν ότι έχουν χαμηλή επίδραση στη μαθηματική δημιουργικότητα. Με άλλα λόγια, το προφίλ ενός μαθητή που χαρακτηρίζεται από τα έξι στοιχεία- Γνώσεις, Προσωπικά Χαρακτηριστικά, Διανοητικές Ικανότητες, Περιβάλλον, Γνωστικό Στυλ, Κίνητρα- όπως ορίζονται στην Investment Theory δεν μπορεί να καθορίσει το βαθμό ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας του. Παρόλα αυτά, ανάμεσα στα προαναφερθέντα έξι χαρακτηριστικά η κατοχή γνώσεων και διανοητικών ικανοτήτων συνεισφέρουν περισσότερο στην ερμηνεία της δημιουργικής συμπεριφοράς σε σχέση με το περιβάλλον και τα κίνητρα που συμπεριλαμβάνονται στους παράγοντες που δεν επεξηγούν ιδιαίτερα τη δημιουργική προσωπικότητα. Αυτό αποτελεί ένδειξη ότι η δημιουργική συμπεριφορά είναι «εσωτερική δραστηριότητα» η οποία επηρεάζεται κυρίως από ενδογενείς παρά από εξωγενείς παράγοντες.

Σε σχέση με τη δημιουργική διαδικασία τα αποτελέσματα της εργασίας έδειξαν ότι μπορεί να περιγραφεί από πέντε υπο-διαδικασίες- διερεύνηση, συσχέτιση, κατασκευή, αξιολόγηση και επικοινωνία- οι οποίες δεν εμφανίζονται γραμμικά. Η μετάβαση από το ένα στάδιο στο επόμενο καθορίζεται από το ίδιο το άτομο και το στόχο που έχει να επιτελέσει. Η διερεύνηση αναφέρεται στην εις βάθος μελέτη των διαθέσιμων πληροφοριών και των σχετικών μαθηματικών εννοιών. Η συσχέτιση περιλαμβάνει τη σύγκριση ιδεών και το συνδυασμό διαθέσιμων πληροφοριών. Η αξιολόγηση εμπλέκει μια διαδικασία αναστοχασμού και επιβεβαίωσης της επίτευξης των στόχων. Η επικοινωνία αναφέρεται στη διάχυση των ιδεών και στην προσπάθεια επεξήγησης της λογικής που υποθάλπει, εμπλέκοντας μεταγνωστικές ικανότητες. Η κατασκευή αναφέρεται στην εύρεση των λύσεων, στον εντοπισμό νέων ιδεών και διερευνήσεων (Sheffield, 2009).

Η δημιουργική διαδικασία διαφέρει από μαθητή σε μαθητή τόσο ως προς τα στάδια που εμφανίζονται όσο και ως προς το βαθμό επεξεργασίας που τυγχάνουν. Ενδεικτικά, στους μαθητές με κάτω από το μέσο όρο μαθηματικής δημιουργικότητας εμφανίστηκαν κάποιες από τις υπο-διαδικασίες ενώ στους μαθητές με υψηλότερο βαθμό μαθηματικής δημιουργικότητας εμφανίστηκαν και οι πέντε υπο-διαδικασίες. Ο τρόπος εμφάνισης των υπο-διαδικασιών στις ομάδες μαθητών μπορούν να ορίσουν τη διαδικασία ως ένα ιεραρχικό μοντέλο. Οι μαθητές με χαμηλή μαθηματική δημιουργικότητα δεν εφαρμόζουν καμιά γνωστική υπο-διαδικασία αλλά προτείνουν προφανείς απαντήσεις. Στους μαθητές με μέτρια μαθηματική δημιουργικότητα εμφανίστηκαν τα στάδια της διερεύνησης και της αξιολόγησης. Ο βαθμός επεξεργασίας της διερεύνησης αυξάνεται από ομάδα σε ομάδα, αφού οι μαθητές με μέτρια μαθηματική δημιουργικότητα έλαβαν υπόψη τους μόνο μία παράμετρο του προβλήματος ενώ οι μαθητές με καλή μαθηματική δημιουργικότητα αναλογίστηκαν διαφορετικές πτυχές του προβλήματος. Στους μαθητές με καλή μαθηματική δημιουργικότητα εμφανίστηκαν τα στάδια της συσχέτισης και της επικοινωνίας. Οι μαθητές ήταν σε θέση να συνδυάσουν ιδέες, να συγκρίνουν και να τροποποιήσουν τις λύσεις τους, καταλήγοντας σε αριθμό διαφορετικών απαντήσεων, έχοντας την ικανότητα να επεξηγήσουν τον τρόπο σκέψης και δράσης τους. Τέλος, στους μαθητές με υψηλή μαθηματική δημιουργικότητα αυξήθηκε ο βαθμός επεξεργασίας των σταδίων της συσχέτισης, της αξιολόγησης και της επικοινωνίας. Μάλιστα, παρατηρήθηκε ότι το στάδιο της αξιολόγησης είχε λειτουργήσει ως κίνητρο σε αυτούς τους μαθητές, παρακινώντας τους να συνεχίσουν να προσπαθούν, για να βρουν περισσότερες απαντήσεις που θα τους διαφοροποιήσουν από τους υπόλοιπους συμμαθητές τους, ενισχύοντας έτσι την πρωτοτυπία τους.

Μελετώντας την επίδραση των υπο-διαδικασιών στο δημιουργικό αποτέλεσμα, διαφάνηκε ότι το στάδιο της διερεύνησης ενδεχομένως να επηρεάζει την ικανότητα ευελιξίας, μιας και η προσπάθεια εντοπισμού, σχετικών με την προβληματική κατάσταση, πληροφοριών οδηγεί στον εντοπισμό και τη χρήση διαφορετικών μαθηματικών ιδεών. Το στάδιο της συσχέτισης φαίνεται να επηρεάζει την ικανότητα ευχέρειας. Η παρατήρηση των ομοιοτήτων και των διαφορών μεταξύ ιδεών οδηγεί στην εύρεση δομικά όμοιων λύσεων. Το στάδιο της αξιολόγησης ήταν εκείνο που ενίσχυσε την πρωτοτυπία των μαθητών. Η εσωτερική παρακίνηση για εύρεση λύσεων που θα είναι διαφορετικές οδήγησε τους μαθητές σε πιο πρωτότυπες ιδέες.

Τα αποτελέσματα της εργασίας έδειξαν επίσης ότι η μαθηματική δημιουργικότητα μπορεί να ενισχυθεί από κατάλληλα εκπαιδευτικά περιβάλλοντα. Τόσο στους μαθητές της πειραματικής ομάδας όσο και στους μαθητές της ομάδας ελέγχου ο βαθμός της μαθηματικής δημιουργικότητας αυξήθηκε μετά την πάροδο ενός χρονικού διαστήματος. Παρόλα αυτά, η δημιουργική ικανότητα των μαθητών της πειραματικής ομάδας ενισχύθηκε σε μεγαλύτερο βαθμό από την αντίστοιχη ικανότητα των μαθητών της ομάδας ελέγχου, επιβεβαιώνοντας ότι ο σχεδιασμός κατάλληλων εκπαιδευτικών περιβαλλόντων μπορεί να ενισχύσει τη μαθηματική δημιουργικότητα του μαθητικού πληθυσμού. Πέρα από τα πιο πάνω, φάνηκε ότι η δημιουργική ικανότητα των μαθητών της πειραματικής ομάδας συνέχισε να αυξάνεται και μετά τη λήξη των μαθημάτων, χωρίς βέβαια οι αλλαγές να είναι στατιστικά σημαντικές. Το γεγονός αυτό δείχνει ότι η επίδραση του παρεμβατικού προγράμματος δεν ήταν εφήμερη, μιας και η επίδοση των μαθητών δεν επανήλθε στην αρχική της μέτρηση. Απεναντίας, εφοδίασε τους μαθητές με δεξιότητες που μπορούν να χρησιμοποιήσουν σε διαφορετικές περιπτώσεις.

Σχέση αποτελεσμάτων με άλλες θεωρίες

Ο εντοπισμός θεωρητικών πλαισίων που να σχετίζονται άμεσα με τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας δεν κατέστη δυνατός. Λόγω του ότι δεν εντοπίστηκαν ερευνητικές εργασίες στη μαθηματική παιδεία που να εξετάζουν πολύπλευρα την έννοια της μαθηματικής δημιουργικότητας, θα γίνει αναφορά και σύνδεση με θεωρίες που συσχετίζονται με τα επί μέρους αποτελέσματα. Μέσα από τη σύνδεση των αποτελεσμάτων με άλλες θεωρίες θα διαφανεί η συνεισφορά της παρούσας εργασίας σε θεωρητικό επίπεδο. Πιο συγκεκριμένα, στη συζήτηση που ακολουθεί παρουσιάζονται τα θεωρητικά μοντέλα που αξιοποιήθηκαν κατά την ερμηνεία των αποτελεσμάτων και γίνεται αναφορά στην επέκταση ή τροποποίησή τους από τα συμπεράσματα της παρούσας εργασίας.

Για τον ορισμό της μαθηματικής δημιουργικότητας αξιοποιήθηκε το μοντέλο 4P. Μέχρι σήμερα είναι γνωστές οι προσπάθειες ερευνητών στο πεδίο της γενικής δημιουργικότητας (π.χ. Plucker, Beghetto, & Dow, 2004) να υιοθετήσουν το πιο πάνω μοντέλο για να διερευνήσουν την έννοια. Παρόλα αυτά, οι Kaufman, Plucker και Baer (2008) ανέφεραν ότι η πλειοψηφία αυτών των ερευνών μελέτησε τις συνιστώσες του μοντέλου 4P αποσπασματικά, χωρίς να γίνει οποιαδήποτε προσπάθεια για μελέτη των μεταξύ τους επιδράσεων. Αντίστοιχα, στο πεδίο της μαθηματικής παιδείας αν και το μοντέλο 4P περιλαμβάνεται στο θεωρητικό πλαίσιο διαφόρων εργασιών (π.χ. Klavir & Gorodetsky, 2009), εντούτοις οι ερευνητές δεν κατάφεραν να το εφαρμόσουν πρακτικά. Η αξιοποίηση του θεωρητικού μοντέλου 4P για τη διερεύνηση της μαθηματικής δημιουργικότητας απετέλεσε και την κύρια καινοτομία της παρούσας εργασίας, αφού από τη μια λήφθηκε υπόψη η πολυδιάστατη μορφή της έννοιας και από την άλλη διερευνήθηκαν οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των τεσσάρων διαστάσεων του μοντέλου. Πιο συγκεκριμένα, η ενσωμάτωση θεωρητικών μοντέλων κατά τη διερεύνηση του αποτελέσματος, του ατόμου, της διαδικασίας και του περιβάλλοντος, επεκτείνει την υπάρχουσα βιβλιογραφία για τη μαθηματική δημιουργικότητα, οδηγώντας στην ανάπτυξη ενός ολοκληρωμένου θεωρητικού πλαισίου για την έννοια.

Σε σχέση με το δημιουργικό αποτέλεσμα, ο ορισμός στη βάση της ευχέρειας, της ευελιξίας και της πρωτοτυπίας επιβεβαιώνει τον πιο πρόσφατο ορισμό του Torrance, στον οποίο η επεξεργασία δεν λαμβάνεται πλέον υπόψη (Cramond, Matthews-Morgan, Bandalos, & Zuo, 2005). Ο συγκεκριμένος ορισμός αξιοποιήθηκε από αρκετούς ερευνητές της μαθηματικής παιδείας (π.χ. Leikin, 2007 · Silver, 1997) κατά την αξιολόγηση της μαθηματικής δημιουργικότητας των μαθητών. Εντούτοις, τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας επεκτείνουν τον πιο πάνω ορισμό, προσθέτοντας την ύπαρξη συσχετίσεων μεταξύ των τριών δημιουργικών ικανοτήτων. Σε εντοπισμό συσχετίσεων μεταξύ των ικανοτήτων ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας είχαν καταλήξει οι Hébert et al. (2002), ο Simonton (1990) και οι Rietzschel, Nijstad και Stroebe (2007) στη γενική δημιουργικότητα. Στην προσπάθειά τους οι Rietzschel, Nijstad και Stroebe (2007) να δώσουν εξήγηση στην πιο πάνω σχέση αναφέρθηκαν στους κανόνες των πιθανοτήτων: κάθε ιδέα που προκύπτει έχει την ίδια πιθανότητα να είναι πρωτότυπη. Άρα, καθώς παράγονται πιο πολλές ιδέες αυξάνεται ο αριθμός των πρωτότυπων ιδεών που εμφανίζονται.

Κατά την περιγραφή του δημιουργικού ατόμου, η κατοχή μαθηματικών γνώσεων και γενικών δεξιοτήτων δημιουργικής σκέψης είχαν τη μεγαλύτερη επίδραση στη μαθηματική δημιουργικότητα. Το αποτέλεσμα αυτό συμφωνεί με τη θεωρία της Amabile (1996), σύμφωνα με την οποία για την εμφάνιση δημιουργικής ικανότητας σε ένα πεδίο απαιτείται ο συνδυασμός δεξιοτήτων γενικής δημιουργικότητας και γνωστικού περιεχομένου. Η Amabile (1996) βέβαια εκτός από τα πιο πάνω στοιχεία περιλαμβάνει τα κίνητρα στο θεωρητικό της πλαίσιο, παράγοντας ο οποίος δεν μελετήθηκε στην παρούσα εργασία. Αντιθέτως, στην παρούσα εργασία μελετήθηκε η επίδραση της νοημοσύνης, των χαρακτηριστικών προσωπικότητας και της ηλικίας.

Η σχέση της νοημοσύνης με τη μαθηματική δημιουργικότητα όπως παρατηρήθηκε στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας, φαίνεται να επαληθεύει τη Threshold theory of intelligence (Torrance, 1962). Με άλλα λόγια, εντοπίζεται ένα ανώτερο όριο κάτω από το οποίο υπάρχει συσχέτιση μεταξύ της δημιουργικότητας και της νοημοσύνης. Αντίστοιχα, ο Runco (2007) είχε αναφερθεί στην ύπαρξη ενός ανώτερου επιπέδου νοημοσύνης πάνω από το οποίο δεν υπάρχει αιτιώδης σχέση με τη δημιουργικότητα.

Η δομή των χαρακτηριστικών της δημιουργικής προσωπικότητας στηρίχθηκε στην Investment Theory (Sternberg & Lubart, 1996). Ως εκ τούτου, συμπεριλήφθηκαν οι παράμετροι «Διανοητικές Ικανότητες», «Γνώσεις/ Συλλογισμός», «Περιβάλλον», «Προσωπικά Χαρακτηριστικά», «Κίνητρα» και «Γνωστικό Στυλ». Τα αποτελέσματα της εργασίας επιβεβαίωσαν τη δομή του προαναφερθέντος θεωρητικού πλαισίου. Πέρα από την επιβεβαίωση του πιο πάνω μοντέλου εντοπίστηκε ότι τα χαρακτηριστικά δημιουργικής προσωπικότητας μπορούν να προβλέψουν τη μαθηματική δημιουργικότητα των μαθητών. Σε αντίστοιχα αποτελέσματα στο πεδίο της γενικής δημιουργικότητας είχαν καταλήξει οι Zhang και Sternberg (2011) όπως και οι Kaufman και Baer (2004).

Σε σχέση με τη δημιουργική διαδικασία, τα αποτελέσματα της εργασίας επιβεβαιώνουν το μοντέλο της Sheffield (2009), μιας και οι πέντε υπο-διαδικασίες μπορούν να εξηγήσουν τι συμβαίνει κατά τη διάρκεια της «δημιουργικής στιγμής». Ταυτόχρονα, στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας το πιο πάνω μοντέλο εμπλουτίστηκε ως προς τρεις άξονες: ως προς τις διαφορές που εμφάνισαν στη διαδικασία μαθητές με διαφορετικό βαθμό μαθηματικής δημιουργικότητας, ως προς την ιεραρχία των υπο-διαδικασιών και ως προς την επίδραση των υπο-διαδικασιών στη δημιουργική ικανότητα. Τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας έρχονται σε αντίφαση με γραμμικά μοντέλα που περιγράφουν τη δημιουργική διαδικασία, όπως το μοντέλο της Craft (2000), του Cropley (1997) και του Wallas (1926). Η εμφάνιση των υπο-διαδικασιών φαίνεται να μην είναι γραμμική, αλλά να καθορίζεται από το ίδιο το άτομο.

Η ενίσχυση της μαθηματικής δημιουργικότητας σε κατάλληλα εκπαιδευτικά περιβάλλοντα ήταν εμφανής μέσα από την παρούσα εργασία. Έτσι, η δυναμική όψη της δημιουργικότητας, ως ένα εν δυνάμει χαρακτηριστικό κάθε ατόμου, αντικαθιστά τη στατική όψη της έννοιας, ως ένα χαρακτηριστικό γνώρισμα ενός επίλεκτου συνόλου ατόμων (Silver, 1997). Το αποτέλεσμα αυτό αφήνει περιθώρια για την αξιοποίηση της δημιουργικότητας στην «εκπαίδευση για όλους», ενισχύοντας τα ερευνητικά αποτελέσματα που αφορούν στην αξιοποίηση συγκεκριμένων διδακτικών προσεγγίσεων (Shriki, 2010 · Yerushalmy, 2009).

Εκπαιδευτικές εφαρμογές του μοντέλου

Η αξιοποίηση του θεωρητικού μοντέλου 4P στον ορισμό της μαθηματικής δημιουργικότητας παρέχει τη βάση για εκπαιδευτικές εφαρμογές. Αυτό οφείλεται σε τρία χαρακτηριστικά του μοντέλου: πρώτο αναγνωρίζει τη σύνθετη φύση της δημιουργικότητας, δεύτερο η μαθηματική δημιουργικότητα θεωρείται ως χαρακτηριστικό όλων των μαθητών και όχι μιας ομάδας του πληθυσμού και τρίτο αναγνωρίζει τη δυναμική και αναπτυξιακή φύση της δημιουργικής ικανότητας. Σε αυτό το πλαίσιο το θεωρητικό μοντέλο καταδεικνύει στους εκπαιδευτικούς τις σημαντικότερες διαστάσεις και χαρακτηριστικά της δημιουργικής ικανότητας.

Κατά πρώτο λόγο, η χρήση του μοντέλου 4P έδωσε τη δυνατότητα για πολύπλευρη διερεύνηση της έννοιας της μαθηματικής δημιουργικότητας. Αν ληφθεί υπόψη ότι καθένας από τους τέσσερις άξονες προσθέτει διαφορετικά στοιχεία για την έννοια, είναι σαφές ότι η αγνόηση ενός από τους τέσσερις άξονες μειώνει τη σαφήνεια των πληροφοριών που προσφέρει κάποιος άλλος. Για παράδειγμα, οι πρακτικές εφαρμογές που μπορούν να προκύψουν αν αναλογιστεί κανείς τον ορισμό της μαθηματικής δημιουργικότητας μόνο στον άξονα του εμφανούς αποτελέσματος είναι περιορισμένες. Απεναντίας, αν ληφθούν ταυτόχρονα υπόψη οι άλλοι τρεις άξονες του μοντέλου, ο ορισμός για τη μαθηματική δημιουργικότητα γίνεται πιο λειτουργικός. Ο εκπαιδευτικός πλέον θα γνωρίζει ποια γνωστικά χαρακτηριστικά μπορούν να ενδυναμώσουν τη δημιουργική ικανότητα των μαθητών και μπορεί να επενδύσει σε αυτά. Ταυτόχρονα, η επίγνωση της διαδικασίας που ακολουθούν οι μαθητές κατά την εύρεση λύσεων προσθέτει στον εκπαιδευτικό επιπρόσθετα εφόδια για τις υπο-διαδικασίες στις οποίες χρειάζεται να δώσει έμφαση. Συμπερασματικά, η μαθηματική δημιουργικότητα δεν είναι μονοδιάστατη έννοια και δεν πρέπει να αντιμετωπίζεται με αυτό τον τρόπο. Ως εκ τούτου, οι εκπαιδευτικοί χρειάζεται να αντιληφθούν την πολύπλοκη φύση της έννοιας, για να μπορέσουν να την ενισχύσουν στους μαθητές τους, αποφεύγοντας τη χρήση μονοδιάστατων ορισμών ή τη συσχέτιση με μόνο μια γνωστική ή κοινωνική παράμετρο.

Η μαθηματική δημιουργικότητα, όπως και κάθε ικανότητα, εμφανίζεται σε όλους τους μαθητές, άλλους σε μικρότερο και άλλους σε μεγαλύτερο βαθμό. Το συμπέρασμα αυτό μετατοπίζει τη μαθηματική δημιουργικότητα από ένα χαρακτηριστικό γνώρισμα μιας ομάδα μαθητών με ιδιαίτερες ικανότητες σε μια ικανότητα που χαρακτηρίζει όλο το μαθητικό πληθυσμό. Με αυτή την προοπτική, η δημιουργική ικανότητα έχει θέση στην «εκπαίδευση για όλους», καθιστώντας την αναγνώριση και την ενίσχυσή της ανάμεσα στους εκπαιδευτικούς στόχους για κάθε μαθητή (Hershkovitz, Peled & Littler, 2009 · Silver, 1997).

Η μαθηματική δημιουργική ικανότητα των μαθητών μπορεί να γίνει αντιληπτή από την ικανότητά τους να σκέφτονται και να προτείνουν αριθμό μαθηματικών λύσεων, εναλλάσσοντας μαθηματικές ιδέες και συνδέοντάς τις με πρωτότυπο τρόπο. Η συσχέτιση των τριών ικανοτήτων υποδεικνύει ότι η ποσότητα των ιδεών οδηγεί σε ποιότητα ιδεών. Με άλλα λόγια, η ικανότητα των μαθητών να σκέφτονται εναλλακτικές λύσεις σε μια προβληματική κατάσταση ή/ και να λαμβάνουν υπόψη τους διαφορετικές πτυχές ενός ερεθίσματος μπορεί να τους οδηγήσει στην καινοτομία. Τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας καταδεικνύουν την καταλληλότητα των ανοικτών μαθηματικών έργων να δώσουν ενδείξεις για το βαθμό της μαθηματικής δημιουργικότητας των μαθητών. Ως εκ τούτου, καθίσταται ανάγκη η συμπερίληψη τέτοιου είδους έργων τόσο στη διδασκαλία όσο και στην αξιολόγηση των μαθηματικών.

Αναφορικά με την αξιολόγηση της μαθηματικής δημιουργικότητας, το εργαλείο μαθηματικής δημιουργικότητας που αναπτύχθηκε για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας μπορεί να αποτελέσει τη βάση για ανάπτυξη αντίστοιχων δοκιμίων. Τα δοκίμια που χρησιμοποιούνται κατά πλειοψηφία στις τάξεις των μαθηματικών περιορίζονται σε κλειστού τύπου έργα που αποζητούν απομνημόνευση και απλή εφαρμογή μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών με ταχύτητα και ακρίβεια. Τέτοιου είδους δοκίμια δεν είναι κατάλληλα για την αξιολόγηση της δημιουργικότητας αλλά επικεντρώνονται στην κατοχή μαθηματικών γνώσεων. Αντιθέτως, για την αξιολόγηση της μαθηματικής δημιουργικότητας, τόσο για διαγνωστικούς όσο και για ερευνητικούς σκοπούς χρειάζεται η συμπερίληψη έργων που ευνοούν την εμφάνιση αποκλίνουσας σκέψης και συνδυασμού μαθηματικών ιδεών.

Τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας έδειξαν ότι η μαθηματική δημιουργικότητα επιδέχεται διδακτικών παρεμβάσεων. Κατά πλειοψηφία, τα υφιστάμενα αναλυτικά προγράμματα είναι οργανωμένα γύρω από ένα σύνολο τεχνικών και διαδικασιών που διδάσκονται με μια συγκεκριμένη πορεία (Haylock, 1987 · Yushau, Mji & Wessels, 2003) και αποζητούν την εύρεση μιας μοναδικής, ορθής απάντησης, που μπορεί να προκύψει από την εφαρμογή γνωστών διαδικασιών (Goldin, 2009 · Yushau, Mji & Wessels, 2003). Τέτοιου είδους αναλυτικά προγράμματα ευνοούν την ανάπτυξη συγκλίνουσας σκέψης, καταπνίγοντας τη δημιουργικότητα των μαθητών (Mann, 2005 · Yerushalmy, 2009). Δεδομένης της απουσίας κατάλληλων εκπαιδευτικών παροχών για την ενίσχυση της μαθηματικής δημιουργικότητας, υπάρχει ανάγκη για τον εμπλουτισμό των ισχυόντων αναλυτικών προγραμμάτων με δημιουργικές δραστηριότητες. Το παρεμβατικό πρόγραμμα που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας περιλαμβάνει τους βασικούς πυλώνες που θα μπορούσαν να καθοδηγήσουν τους εκπαιδευτικούς στο σχεδιασμό της διδασκαλίας τους. Η χρήση εκπαιδευτικών περιβαλλόντων που ενθαρρύνουν τη συνεργατική μάθηση (Selby, Shaw & Houtz, 2005 · Shriki, 2010), τη μάθηση μέσω διερεύνησης (Henningsen & Stein, 1997 · Mann, 2006), τη χρήση νέων τεχνολογιών (Kattou, Christou, & Pitta-Pantazi, 2012 · Yerushalmy, 2009) και την εύρεση διαφορετικών λύσεων και μεθόδων επίλυσης (Haylock, 1997 · Leikin, 2007) φαίνεται να είναι κατάλληλα για τη βελτίωση της δημιουργικής ικανότητας των μαθητών στα μαθηματικά.

Τα χαρακτηριστικά του ατόμου που ενισχύουν τη μαθηματική δημιουργικότητα παρέχουν στους εκπαιδευτικούς γερό υπόβαθρο για τα στοιχεία που χρειάζεται να επενδύσουν αλλά και για το τι να περιμένουν από μαθητές με διαφορετικό γνωστικό προφίλ. Τα αποτελέσματα της εργασίας έχουν τονίσει τη σημασία των μαθηματικών γνώσεων και των δεξιοτήτων δημιουργικής σκέψης στην εμφάνιση μαθηματικής δημιουργικότητας. Ως εκ τούτου, προτείνεται όπως τα εκπαιδευτικά συστήματα που αποζητούν την ενίσχυση της μαθηματικής δημιουργικότητας των μαθητών να επενδύσουν στην ενίσχυση του γνωσιολογικού τους υποβάθρου στα μαθηματικά, καθώς επίσης και στην καλλιέργεια γενικά δημιουργικής συμπεριφοράς στην καθημερινότητά τους. Δηλαδή, οι εκπαιδευτικοί δεν θα πρέπει να περιορίζουν τη διδασκαλία τους στην παρουσίαση των διαφορετικών περιοχών του αναλυτικού προγράμματος αλλά να στοχεύουν στην ενίσχυση της ικανότητας των μαθητών να συνδέουν τις γνώσεις τους, να ανακαλούν διαφορετικές ιδέες και εμπειρίες και να χρησιμοποιούν τη φαντασία τους με παραγωγικό τρόπο. Από την άλλη, χαρακτηριστικά όπως η νοημοσύνη και το προφίλ προσωπικότητας ενός μαθητή, δεν αποτελούν ασφαλείς ενδείξεις για το βαθμό μαθηματικής δημιουργικότητας των μαθητών. Άρα, είναι σημαντικό οι εκπαιδευτικοί να μην θεωρούν ότι ένας μαθητής με υψηλό δείκτη νοημοσύνης ή με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά προσωπικότητας είναι κατ' ανάγκη δημιουργικός και αντίστροφα.

Η δομή του μοντέλου για τη δημιουργική διαδικασία έδειξε τις υπο-διαδικασίες που μπορούν να αποτελέσουν καταλυτικό ρόλο στην ενίσχυση των ικανοτήτων ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας. Για αυτό το λόγο, οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να δώσουν έμφαση στην ανάπτυξη των ικανοτήτων των μαθητών να διερευνούν μια προβληματική κατάσταση, να συσχετίζουν ιδέες, να αξιολογούν και να αναστοχάζονται την εργασία τους, να ερμηνεύουν και να επικοινωνούν τις ιδέες τους και να κατασκευάζουν λύσεις. Η ενίσχυση των υπο-διαδικασιών που υποθάλπουν της δημιουργικής σκέψης θα βοηθήσει τους μαθητές στην ευέλικτη χρήση και εναλλαγή τους.

Όπως φάνηκε από τα πιο πάνω, υπάρχει μεγάλο μερίδιο ευθύνης στους εκπαιδευτικούς για την ενίσχυση της μαθηματικής δημιουργικότητας (Beghetto & Kaufman, 2009). Άρα πέρα από αλλαγές στο αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών, αντίστοιχες αλλαγές χρήζει η επαγγελματική κατάρτιση των εκπαιδευτικών. Πρώτα πρώτα, στην εκπαίδευση των εκπαιδευτικών χρειάζεται να συμπεριληφθούν μαθήματα για τη δημιουργικότητα και τη διδακτική της. Σύμφωνα με τη Leikin (2009), είναι σημαντικό να πειστεί ο ίδιος ο εκπαιδευτικός για τη σημασία της δημιουργικότητας, ώστε να στοχεύσει στην ενίσχυσή της. Ειδικότερα, στο μάθημα της διδακτικής των μαθηματικών θα μπορούσε να παρουσιαστεί ο τρόπος με τον οποίο το αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών συνδέεται με τη δημιουργικότητα. Ταυτόχρονα, η παρουσίαση ενδεικτικών δραστηριοτήτων ή διδακτικών προσεγγίσεων που ενισχύουν τη μαθηματική δημιουργικότητα θα καταστήσει τους εκπαιδευτικούς πιο ικανούς στην οργάνωση κατάλληλου παιδαγωγικού περιβάλλοντος.

Εισηγήσεις για μελλοντικές έρευνες

Η παρούσα εργασία είχε ως στόχο τη δημιουργία ενός συνεκτικού θεωρητικού μοντέλου για την έννοια της μαθηματικής δημιουργικότητας, λαμβάνοντας υπόψη διαφορετικές πτυχές της έννοιας και τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις. Οι μέχρι σήμερα ερευνητικές προσπάθειες που έχουν γίνει στη μαθηματική παιδεία περιορίστηκαν στη μελέτη αποσπασματικών παραγόντων που επηρεάζουν τη μαθηματική δημιουργικότητα. Εντούτοις, η πολυδιάστατη φύση της μαθηματικής δημιουργικότητας απαιτεί τη διερεύνηση συνδυασμού παραγόντων, που θα προσδώσει μια πιο περιεκτική εικόνα για την έννοια. Πέρα από την παρούσα έρευνα είναι σημαντικός ο σχεδιασμός και η διεκπεραίωση τέτοιων ερευνών που θα συνεισφέρουν στην εγκυροποίηση, επιβεβαίωση, τροποποίηση ή επέκταση των παρόντων αποτελεσμάτων.

Στην παρούσα εργασία η έννοια της μαθηματικής δημιουργικότητας μελετήθηκε σε μαθητές που φοιτούσαν στις μεγαλύτερες τάξεις του δημοτικού σχολείου. Παρόλα αυτά, η επανάληψη παρόμοιων ερευνών με επέκταση του πληθυσμού ηλικιακά ενδέχεται να δώσει σημαντικά αποτελέσματα. Θα ήταν, δηλαδή, χρήσιμο να μελετηθεί η έννοια της μαθηματικής δημιουργικότητας στις μικρότερες τάξεις του δημοτικού σχολείου ή ακόμα σε μαθητές μέσης και ανώτερης εκπαίδευσης. Μάλιστα, η σύγκριση της δομής της μαθηματικής δημιουργικότητας σε μαθητές που προέρχονται από διαφορετικές εκπαιδευτικές βαθμίδες θα απαντούσε σε ερευνητικά ερωτήματα που σχετίζονται με την ηλικία και τη δομή των γνωστικών και άλλων χαρακτηριστικών. Παράλληλα, η διεξαγωγή μακροχρόνιων ερευνών θα έδινε πιο έγκυρα και αξιόπιστα αποτελέσματα, αφού δεν θα απομόνωναν τη μαθηματική δημιουργικότητα σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή αλλά θα τη διερευνούσαν σε μεγαλύτερο εύρος.

Η διεξαγωγή ερευνών με τη συμπερίληψη άλλων γνωστικών χαρακτηριστικών, όπως η μνήμη, το γνωστικό στυλ, η ταχύτητα και η επεξεργασία πληροφοριών, μπορεί να βοηθήσει σε ακριβέστερη περιγραφή του δημιουργικού ατόμου. Μελλοντικές έρευνες θα μπορούσαν να διερευνήσουν με ποιο τρόπο διαφοροποιείται το δημιουργικό αποτέλεσμα και η δημιουργική διαδικασία από μαθητές που υιοθετούν εικονικό/ λεκτικό/ οπτικό ή/ και αναλυτικό/ ολιστικό γνωστικό στυλ. Ενδιαφέρον επίσης θα είχε η διερεύνηση της ταχύτητας και της επεξεργασίας των πληροφοριών όπως και της μνήμης στις ικανότητες ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας. Δεδομένου του ορισμού της ευχέρειας ως ο συνδυασμός ταχύτητας και ορθότητας των μαθηματικών ιδεών και της ευελιξίας ως η αξιοποίηση διαφορετικών μαθηματικών ιδεών θα είχε ερευνητικό ενδιαφέρον η διερεύνηση της ταχύτητας επεξεργασίας και της μνήμης, αντίστοιχα.

Όσον αφορά στο εκπαιδευτικό περιβάλλον, η παρούσα εργασία διερεύνησε την επίδραση της διδασκαλίας στη μαθηματική δημιουργικότητα σε μια μικρή σχετικά ομάδα μαθητών. Η διεξαγωγή ερευνών σε πιο μεγάλους πληθυσμούς θα έδινε τη δυνατότητα για πιο σύνθετες ποσοτικές αναλύσεις. Ταυτόχρονα, θα ήταν χρήσιμη η διερεύνηση των αλλαγών που επήλθαν στη μαθηματική δημιουργικότητα μαθητών λόγω της εκπαιδευτικής τους εμπειρίας σε σχέση με το γνωστικό και κοινωνικό τους προφίλ. Τέλος, η μελέτη της επίδρασης διαφορετικών εκπαιδευτικών περιβαλλόντων στη μαθηματική δημιουργικότητα θα ήταν ενδιαφέρουσα. Για παράδειγμα, η διερεύνηση εκπαιδευτικών περιβαλλόντων που είναι οργανωμένα με τη χρήση τεχνολογίας ή με την αξιοποίηση συνεργατικής μάθησης θα αποκαλύψουν στοιχεία που είναι χρήσιμα να συμπεριληφθούν στα σύγχρονα εκπαιδευτικά συστήματα.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Aiken, L. R. (1973). Ability and creativity in mathematics. *Review of Educational Research, 43*(4), 405–432. doi: 10.1177/00346543043004405

Amabile, T. M. (1983). *The Social Psychology of Creativity*. NY: Springer- Verlag.

Amabile, T. M. (1996). *Creativity in context.* Boulder, CO: Westview Press.

Ary, D., Jacobs, L. C., & Razavieh, A. (2002). *Introduction to research in education* (6th edition). Beimont, CA: Wadsworth.

Babij, B. J. (2001). *Through the looking glass: Creativity and leadership juxtaposed.* (Unpublished masters thesis, State University at Buffalo, USA). Retrieved from http://www.buffalostate.edu/orgs/cbir/readingroom/theses/Babijbjt.pdf

Baer, J. (1997). *Creative teachers, creative students*. Boston: Allyn and Bacon.

Baer, J. (1998). The case for domain specificity of creativity. *Creativity Research Journal, 11*, 173–177. Retrieved from http://www.tandfonline.com/loi/hcrj20

Baer, J. & Kaufman, J. C. (2005). Bridging generality and specificity: The Amusement Park Theoretical (APT) model of creativity. *Roeper Review, 27*(3), 158-163. doi: 10.1080/02783190509554310

Bahar, A. K. & Maker, C. J. (2011). Exploring the relationship between mathematical creativity and mathematical achievement. *Asia-Pacific Journal of Gifted and Talented Education, 3*(1), 33-48.

Balka, D. S. (1974). Creative ability in mathematics. *Arithmetic Teacher,* 21, 633-636.

Baran, G., Erdogan, S., & Ḉakmak, A. (2011). A study on the relationship between six-year-old children’s creativity and mathematical ability. *International Education Studies, 4*(1), 105–111.

Basadur, M. S. & Hausdorf, P. A. (1996). Measuring divergent thinking attitudes related to creative problem solving and innovation management. *Creativity Research Journal, 9*(1), 21-32. doi: 10.1207/s15326934crj0901_3

Batey, M. (2012). The measurement of creativity: From definitional consensus to the introduction of a new heuristic framework. *Creativity Research Journal, 24*(1), 55-65. doi:10.1080/10400419.2012.649181

Beghetto, R. A. & Kaufman, J. C. (2009). Intellectual estuaries: Connecting learning and creativity in programs of advanced academics. *Journal of Advanced Academics, 20*, 296-324. doi: 10.1177/1932202X0902000205

Binder, C. (1996). Behavioral fluency: Evolution of a new paradigm. *The Behavior Analyst, 19*, 163-197.

Birkhoff, G. D. (1969). Mathematics and psychology. *Society for Industrial and Applied mathematics review, 11*, 429-469.

Blazhenkova, O. & Kozhevnikov, M. (2008). The new object-spatial-verbal cognitive style model: Theory and measurement. *Applied Cognitive Psychology, 23*(5), 638-663. doi: 10.1002/acp.1473

Boden, M. A. (1990). *The Creative Mind: Myths and Mechanisms*. London: Basic Books.

Boden, M. (2001). Creativity and knowledge. In A. Craft, B. Jeffrey & M. Leibling (Eds.), *Creativity in Education* (pp. 95-102). London: Continuum.

Bolden, D., Harries, T., & Newton, D. (2010). Pre-service primary teachers' conceptions of creativity in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 73*(1), 143–157. doi:10.1007/s10649-009-9207-z

Brown, R. T. (1989). Creativity: What are we to measure? In J. A. Glover, R. R. Ronning, C. R. Reynolds (Eds.), *Handbook of creativity* (pp. 3-32). New York: Plenum.

Bull, K. S., Montgomery, D., & Kimball, S. L. (1999). *Stimulating creativity in online teaching: An instructional hypertext*. Stillwater, OK: Oklahoma State University.

Caine, R. N. & Caine, G. (1991). *Teaching and the human brain*. Alexindria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

Cangelosi, J. S. (1996). *Teaching mathematics in secondary and middle school: an interactive approach* (2nd ed.). New Jersey: Prentice Hall.

Chamberlin, S. A. & Moon, S. M. (2005). Model-eliciting activities as tool to develop and identify creativity gifted mathematicians. *Journal of Secondary Gifted Education, 17*(1), 37–47.

Chang, K. E., Sung, Y. T., & Hou, H. T. (2006). Web-based tools for designing and developing teaching materials for integration of information technology into instruction. *Educational Technology and Society, 9*, 139-149.

Charles, R. E. & Runco, M. A. (2001). Developmental trends in the evaluative and divergent thinking of children. *Creativity Research Journal, 13*, 417–437. doi: 10.1207/S15326934CRJ1334_19

Claxton, A., Pannells, T., & Rhoads, P. (2005). Developmental trends in the creativity of school-age children. *Creativity Research Journal, 17*(4), 327-335. doi: 10.1207/s15326934crj1704_4

Clemons, S. (2005). Encouraging Creativity in Online Courses. *International Journal of Instructional Technology and Distance Learning*. Retrieved March 10, 2010 from http://www.itdl.org/Journal/Jan_05/article05.htm

Cohen, S. A. & Stover, G. (1981). Effects of teaching sixth-grade students to modify format variables of math word problems. *Reading Research Quarterly, 16*(2), 175-200.

Committee on Science, Engineering and Public Policy. (2005). *Rising above the gathering storm: Energizing and employing America for a brighter economic future.* Washington, DC: National Academies Press.

Cornish, G. & Wines, R. (1980). *ACER Mathematics Profile Series: Number Test*. Hawthorn, Victoria: Australian Council for Educational Research.

Cox, M. J. (1997). The *Effects of Information Technology on students' motivation*. Final Report. London: NCET/King's College.

Craft, A. (2000). *Creativity across the primary curriculum: Framing and developing practice*. London: Routledge.

Craft, A. (2005). *Creativity in schools: tensions and dilemmas*. Abingdon: Routledge.

Cramond, B., Matthews-Morgan, J., Bandalos, D., & Zuo, L. (2005). A report on the 40-year follow-up of the Torrance Tests of Creative Thinking: Alive and well in the new millennium. *Gifted Child Quarterly, 49*, 283–291.

Cropley, A. J. (1997). Creativity: A bundle of paradoxes. *Gifted and Talented International, 12*, 8-14.

Cropley, A. J. (2000). Defining and measuring creativity: Are creativity tests worth using? *Roeper Review, 23*(2), 72–79.

Cropley, A. J. (2001). *Creativity in education and learning: A guide for teachers and educators*. London: Kogan Page Ltd.

Cropley, A. J. (2006). In praise of convergent thinking. *Creativity Research Journal, 18,* 391–404.

Cropley, A. J. & Urban, K. K. (2000). Programs and strategies for nurturing creativity. In K. A. Heller, F. J. Monks, R. J. Sternberg, R. F. Subotnik (Eds.), *International handbook of research and development of giftedness and talent* (pp. 485-498). Oxford, UK: Elsevier.

Csikszentmihalyi, M. (1988). Society, culture, and person: A systems view of creativity. In R. J. Sternberg (Ed.), *The nature of creativity: Contemporary psychological perspectives* (pp. 325– 339). Cambridge: Cambridge University Press.

Csikszentmihalyi, M. (1990). The domain of creativity. In R. S. Albert & M. A. Runco (Eds.), *Theories of creativity* (pp. 190-212). London: Sage Publications.

Csikszentmihalyi, M. (1996). *Creativity: Flow and Psychology of Discovery and Invention.* NY: Harper Perennial.

Csikszentmihalyi, M. (1997). *Creativity: Flow and the Psychology of Discovery and Invention*. New York: Harper Collins.

Csikszentmihalyi, M. (1999). Applications of a system perspective for the study of creativity. In R. Sternberg (Ed.), *Handbook of creativity* (pp. 313–335). Cambridge: Cambridge University Press.

Davies, T. (1999). Taking risks as a failure of creativity in the teaching and learning of design and technology. *The Journal of Design and Technology, 4*(2), 101-108.

Davis, G. A. (1992). *Creativity is forever*. Dubuque, IA: Kendall/Hunt.

Davis, G. A. & Rimm, S. B. (2004). *Education of the gifted and talented* (5th ed.). Boston: Pearson Education.

De Bono, E. (1968). *New think; the use of lateral thinking in the generation of new ideas.* New York: Basic Books.

Dellas, M. & Gaier, E. L. (1970). Identification of creativity: The individual. *Psychological Bulletin, 73,* 55–73.

Department for Education and Employment. (1998). *The National literacy tragedy*. Sudbury: Department for Education and Employment Publications.

DfES (Department for Education and Skills). (2003). *Excellence and enjoyment*. London: DfES.

Diakidou, I. A. & Spanoudis, G. (2002). Domain specificity in creativity testing: A comparison of performance on a general divergent-thinking test and a parallel, content-specific test. *Journal of Creative Behavior, 36*(1), 41-61.

Diezmann, C. M. & Watters, J. J. (2000). Catering for mathematically gifted elementary students: Learning from challenging tasks. *Gifted Child Today, 23*(4), 14-19.

Doerr, H. M. & English, L. D. (2003). A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal of Research in Mathematics Education, 34*(2), 110-136.

Doyle, C. L. (1998). The writer tells: The creative process in the writing of literary fiction. *Creativity Research Journal, 11*, 29–37.

Eisenberger, R. & Cameron, J. (1998). Rewards, intrinsic interest and creativity: New findings. *American Psychologist, 53*, 676-679.

Eisenberger, R., Haskins, F., & Gambleton, P. (1999). Promised reward and creativity: Effects of prior experience. *Journal of Experimental Social Psychology, 35,* 308-325.

Ejersbo, L. R. (2003). *How to operate using mathematical modeling and open-ended tasks within the landscape of investigations into in-service education*. Denmark: Learning Lab.

Ervynck, G. (1991). Mathematical creativity. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 42-53). Dordrecht: Kluwer.

Eysenck, H. J. (1996). The measurement of creativity. In M. A. Boden (Ed.), *Dimensions of creativity* (pp. 199–242). Cambridge: Massachusetts Institute of Technology.

Fasko, D. (2001). Education and creativity. *Creativity Research Journal, 13*(3 & 4), 317-327. doi: 10.1207/S15326934CRJ1334_09

Feldhusen, J. F. & Goh, B. E. (1995). Assessing and accessing creativity: An integrative review of theory, research, and development. *Creativity Research Journal, 8*(3), 231-248. doi: 10.1207/s15326934crj0803_3

Fennema, E. & Romberg, T. A. (Eds.). (1999). *Classrooms that promote mathematical understanding*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Firestien, R. L. (1993). The power of product. In S. G. Isaksen, M. C. Murdock, R. L. Firestien, D. J. Treffinger (Eds.), *Nurturing and Developing Creativity. The Emergence of a Discipline* (pp. 261-277). Norwood, New Jersey.

Fisher, R. (1990). *Teaching Children to Think* (2nd ed.). Cheltenham: Nelson Thornes.

Fodor, E. M. & Carver, R. A. (2000). Achievement and power motives, performance feedback, and creativity. *Journal of Research in Personality, 34*, 380–396. doi: 10.1006/jrpe.2000.2289

Ford, D. Y. & Harris, J. J. (1992). The elusive definition of creativity. *Journal of Creative Behavior. 26*(3), 186-198. doi: 10.1002/j.2162-6057.1992.tb01175.x

Freiman, V. (2009). Mathematical E-nrichment: Problem-of-the-week model. In R. Leikin, A. Berman, B. Koichu (Eds.), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 367-382). Rotterdam: Sense Publishers.

Freiman, V. & Sriraman, B. (2011). interdisciplinary networks for better education in mathematics, science and arts. In Sriraman, B. & Freiman, V. (Eds.), *Interdisciplinarity for the Twenty-First Century: Proceedings of the Third International Symposium on Mathematics and Its Connections to Arts and Sciences*, (pp. xi-xvi). USA: Information Age Publishing Inc. & The Montana Council of Teachers of Mathematics.

Fryer, M. (2012). Some key issues in creativity research and evaluation as seen from a psychological perspective. *Creativity Research Journal*, *24*(1), 21-28. doi: 10.1080/10400419.2012.649236

Gardner, H. (1983). *Frames of mind: The theory of multiple intelligences*. New York: Basic Books.

Gardner, H. (1993). *Creating minds: An anatomy of creativity seen through the lives of Freud, Einstein, Picasso, Stravinsky, Eliot, Graham, and Gandhi*. New York: Basic Books.

Gardner, H. (1994). The creators' patters. In M. Boden (Ed.), *Dimensions of Creativity* (pp. 143-158). London: MIT Press/Badford Books.

Gardner, H. (2006). *Multiple Intelligences: New Horizons*. New York: Basic Books.

Gardner, D. G. & Cummings, L. L. (1988). Activation theory and job design: Review and reconceptualization. In B. Staw & L. Cummings (Eds.), *Research in organizational behavior* (Vol. 10, pp. 81-122). Greenwich, CT. JAI.

Getzels, J. & Csikszentmihalyi, M. (1976). *The creative vision: A longitudinal study of problem finding in art.* New York: Wiley Interscience.

Getzels, J. W. & Jackson, P. J. (1962). *Creativity and intelligence: Explorations with gifted students*. New York: John Wiley and Sons, Inc.

Gil, E., Ben-Zvi, D., & Apel, N. (2007).What is hidden beyond the data? Helping young students to reason and argue about some wider universe. In D. Pratt & J. Ainley (Eds.), *Reasoning about Informal Inferential Statistical Reasoning: A collection of current research studies*. Proceedings of the Fifth International Research Forum on Statistical Reasoning, Thinking, and Literacy (SRTL-5), University of Warwick, UK.

Golann. S. E. (1963). Psychological study of creativity. *Psychological Bulletin, 60,* 548-565.

Goldin, G. A. (2002). Affect, meta-affect and mathematical belief structures. In G. C. Leder, E. Pehkonen, G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 59-72). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Goldin, G. A. (2009). The affective domain and students' mathematical inventiveness. In R. Leikin, A. Berman, B. Koichu (Eds.), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 181-194). Rotterdam: Sense Publishers.

Goor, A. & Sommerfeld, R. E. (1975). A comparison of problem- solving processes of creative students and noncreative students. *Journal of Educational Psychology, 67*, 495–505.

Guilford, J. P. (1950). Creativity. *American Psychologist, 5*, 444–454.

Guilford, J. P. (1959). Traits of creativity. In H. H. Anderson & M. S. Anderson (Eds.), *Creativity and its cultivation, addresses presented at the interdisciplinary symposia on creativity* (pp. 142–161). Harper, New York: Michigan State University, East Lansing, Michigan.

Guilford, J. P. (1967). *The nature of human intelligence*. New York: McGraw-Hill.

Hadamard, J. W. (1945). *Essay on the psychology of invention in the mathematical field.* Princeton: NJ: Princeton University Press.

Harris, R. (1998). *Introduction to creative thinking*. Retrieved May 21, 2011 from http://www.virtualsalt.com/crebook1.htm

Harskamp, E. & Suhre, C. (2007). Schoenfeld's problem solving theory in a student controlled learning environment. *Computers & Education, 49*, 822–839. doi: 10.1016/j.compedu.2005.11.024

Hashimoto, Y. (1997). The methods of fostering creativity through mathematical problem solving. *International Reviews on Mathematical Education, 29*(3), 86-87. Retrieved March 10, 2010, from http://www.fiz-karlsruhe.de/fix/publications/zdm/adm97

Hasirci, D. & Demirkan, H. (2003). Creativity in learning environments: The case of two sixth grade art-rooms. *Journal of Creative Behavior, 37*, 17–42. doi: 10.1002/j.2162-6057.2003.tb00824.x

Hatano, G. & Oura, Y. (2003). Commentary: Reconceptualizing school learning using insight from expertise research. *Educational Researcher, 32*(8), 26–29. doi: 10.3102/0013189X032008026

Haylock, D. (1985). Conflicts in the assessment and encouragement of mathematical creativity in schoolchildren. *International Journal of Mathematical Education in science and Technology, 16*(4), 547-553.

Haylock, D. (1987). A framework for assessing mathematical creativity in school children. *Educational Studies in Mathematics, 18*(1), 59–74. doi: 10.1007/BF00367914

Haylock, D. (1997). Recognizing mathematical creativity in schoolchildren. *ZDM, 29*(3), 68-74. doi: 10.1007/s11858-997-0002-y

Hébert, T. P., Cramond, B., Neumeister, K. L. S., Millar, G., & Silvian, A. F. (2002). *E. Paul Torrance: His life, accomplishments, and legacy*. Storrs: The University of Connecticut, The National Research Center on the Gifted and Talented (NRC/GT).

Heilman, K. M. (2005). *Creativity and the brain.* New York: Psychology Press.

Henningsen, M. & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(5), 524-549.

Hershkovitz, S., Peled, I., & Littler, G. (2009). Mathematical creativity and giftedness in elementary school: Task and teacher promoting creativity for all. In R. Leikin, A. Berman, B. Koichu (Eds), *Creativity in mathematics and the education of gifted students*. (pp. 255-270). Rotterdam, Netherlands: Sense Publisher.

Holyoak, K. J. & Thagard, P. (1995). *Mental leaps: Analogy in creative thought*. Cambridge, MA: MIT Press.

Hong, E. & Aqui, Y. (2004). Cognitive and motivational characteristics of adolescents gifted in mathematics: Comparisons among students with different types of giftedness. *Gifted Child Quarterly*, *48*, 191–201.

Hong, E. & Milgram, R. M. (2008). *Preventing Talent Loss*. NY.: Routledge.

Hong, E. & Milgram, R. M. (2010). Creative thinking ability: domain generality and specificity. *Creativity Research Journal*, *22*(3), 272-287. doi: 10.1080/10400419.2010.503535

House, P. A. (1987). *Providing Opportunities for mathematically gifted, K-12*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Hoyles, C. & Noss, R. (2003).What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? In A. J. Bishop,et.al (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 323- 349). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hull, W. (2007). *Fostering creativity through a nonlinear approach to teaching technology education at Wood river middle school*. (Doctoral dissertation). Retrieved from http://numerons.files.wordpress.com/2012/04/14-fostering-creativity.pdf

Hunsaker, S. L. (2005). Outcomes of creativity programs. *Gifted Child Quarterly, 49*, 292-299. doi: 10.1177/001698620504900403

Hwang, W. -Y., Chen, N. -S., Dung, J. -J., & Yang, Y. -L. (2007). Multiple Representation Skills and Creativity Effects on Mathematical Problem Solving using a Multimedia Whiteboard System. *Educational Technology & Society, 10*(2), 191-212. doi: 10.1016/j.compedu.2004.05.005

Imai, T. (2000). The influence of overcoming fixation in mathematics towards divergent thinking in open-ended mathematics problems on Japanese junior high school students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*, 187- 193. doi: 10.1080/002073900287246

Isaksen, S. G. (Ed.). (1987). *Frontiers of creativity research: Beyond the basics.* Buffalo, NY: Bearly Limited.

Isaksen, S. G., Murdock, M. C., Firestien, R. L., & Treffinger, D. J. (Eds.). (1993). *Understanding and recognizing creativity: The emergence of a discipline.* Norwood, NJ: Ablex.

Jay, E. S. & Perkins, D. N. (1997). Problem finding: The search for mechanism. In M. Runco (Ed.), *The creativity research handbook* (pp. 257-293). New Jersey: Hampton Press.

Jeffrey, B. & Craft, A. (2004). Teaching creatively and teaching for creativity: distinctions and relationships. *Educational Studies, 30*(1), 77–87. doi: 10.1080/0305569032000159750

Jensen, L. R. (1973). *The relationships among mathematical creativity, numerical aptitude and mathematical achievement*. Dissertation Abstracts International, 34(5), 2168.

John-Steiner, V. (2000). *Creative collaboration*. New York: Oxford University Press.

Johnson, H. & Carruthers, L. (2006). Supporting creative and reflective processes. *International Journal of Human-Computer Studies*, 64(10), 998-1030. doi: 10.1016/j.ijhcs.2006.06.001

Jones, L. (1993). Barriers to creativity and their relationship to individual, group, and organizational behavior. In S. G. Isaksen, M. C. Murdock, R. L. Firestien, D. J. Treffinger (Eds.), *Nurturing and Developing Creativity: The Emergence of a Discipline* (pp. 133-154). Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation.

Kandemir, M. A. & Gur, H. (2007). Creativity training in problem solving: A model of creativity in mathematics teacher education. *New Horizons in Education, 55*(3), 107-122.

Kaput, J. J. (1992). Technology and Mathematics Education. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook on research in mathematics teaching and learning* (pp. 515-556). New York: McMillan.

Kattou, M., Christou, C., & Pitta-Pantazi, D. (2012). Technology as a means to differentiate prospective teachers' mathematical creativity. In L. Gómez Chova, I. Candel Torres, A. López Martínez (Eds.), *Proceedings of the 4th International Conference on Education and New Learning Technologies* (pp. 1974-1984).

Barcelona, Spain: International Association of Technology, Education and Development.

Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D., Christou, C., & Cleanthous, E. (2010). Predicting mathematical creativity. In M. Avotiņa, D. Bonka, H. Meissner, L. Ramāna, L. Sheffield, & E. Velikova (Eds.), *Proceedings of the 6th International Conference on Creativity in Mathematics Education and the Education of Gifted students* (pp. 110 – 113). Riga, Latvia: University of Latvia and International Group for Mathematical Creativity and Giftedness (MCG).

Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2011). Does mathematical creativity differentiate mathematical ability? In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Conference of the European Research in Mathematics Education* (pp. 1056 – 1065). Rzeshów, Poland: University of Rzeszów.

Katz, J. (2001). Analytic induction. In N. J. Smelser & P. B. Baltes (Eds.), *International Encyclopedia of the Social and Behavioral Sciences* (pp. 480-484). London: Elsevier.

Kaufman, J. C. (2002). Narrative and paradigmatic thinking styles in creative writing and journalism students. *Journal of Creative Behavior, 36*(3), 201-220. doi: 10.1002/j.2162-6057.2002.tb01064.x

Kaufman, J. C., & Baer, J. (2004). The Amusement Park Theoretical (APT) model of creativity. *Korean Journal of Thinking and Problem Solving, 14*, 15-25.

Kaufman, J. C. & Baer, J. (Eds.). (2005). *Creativity across domains: faces of the muse.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaufman, J., Plucker, J., & Baer, J. (2008). *Essentials of Creativity Assessment*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

Kilgour, M. (2006). Improving the creative process: Analysis of the effects of divergent thinking techniques and domain specific knowledge on creativity. *International Journal of Business and Society, 7*(2), 79-107.

Kim, K. H. (2008). Meta-analyses of the relationship of creative achievement to both IQ and divergent thinking test scores. *Journal of Creative Behavior, 42*, 106−130.

Kim, H., Cho, S., & Ahn, D. (2003). Development of mathematical creative problem solving ability test for identification of the gifted in math. *Gifted Education International, 18*(2), 164-175. doi: 10.1177/026142940301800206

Klavir, R. & Gorodetsky, M. (2009). On excellence and creativity: A study of gifted and expert students. In R. Leikin, A. Berman, B. Koichu (Eds.), *Creativity in*

Mathematics and the Education of Gifted Students (pp. 221-242). Rotterdam: Sense Publishers.

Klavir, R. & Hershkovitz, S. (2008). Teaching and evaluating 'open- ended' problems. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. Retrieved September 25, 2012 from http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/default.htm

Kleiman, P. (2005). *Beyond the tingle factor: creativity and assessment in higher education.* Paper presented at the ESRC Creativity Seminar, University of Strathclyde, 7 October 2010. Retrieved from http://opencreativity.open.ac.uk/assets/pdf/strathclyde/Beyond%20the%20Tingle%20Facto.pdf

Koichu, B. & Orey, D. (2010). Creativity or ignorance: Inquiry in calculation strategies of mathematically disadvantaged (immigrant) high school students. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 9*(2), 75-92.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren.* Chicago: University of Chicago Press.

Kurtzberg, R. L. & Reale, A. (1999). Using Torrance's problem identification techniques to increase fluency and flexibility in the classroom. *Journal of Creative Behaviour, 33*(3), 202–207.

Kwon, O. H., Park, J. S., & Park, J. S. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. *Asia-Pacific Education Review, 7*(1), 51–61. doi: 10.1007/BF03036784

La Greca, A. (1980). Can Children remember to be creative? An interview study of children's thinking processes. *Child Development, 51*(2), 572-575.

Lee, K. S., Hwang, D. J., & Seo, J. J. (2003). A development of the test for mathematical creative problem solving ability. *Journal of Korea Society of Mathematical Education Series, 7*(3), 163-189.

Leikin, R. (2007). Habits of mind associated with advanced mathematical thinking and solution spaces of mathematical tasks. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2330-2339). Retrieved from http://ermeweb.free.fr/Cerme5.pdf

Leikin, R. (2008). Teaching mathematics with and for creativity: An intercultural perspective. In P. Ernest, B. Greer, B. Sriraman (Eds.), *Critical Issues in*

Mathematics Education (pp. 39-43). USA: Information Age Publishing Inc. & The Montana Council of Teachers of Mathematics.

Leikin, R. (2009). Bridging research and theory in mathematics education with research and theory in creativity and giftedness. In R. Leikin, A. Berman, B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students*. (pp. 385-411). Rotterdam, Netherlands: Sense Publisher.

Leikin, R., Koichu, B., & Berman, A. (2009). Mathematical giftedness as a quality of problem-solving acts. In R. Leikin, A. Berman, B. Koichu (Eds.), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 115-127). Rotterdam: Sense Publishers.

Leikin, R. & Lev, M. (2007). Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 161-168). Korea: The Korea Society of Educational Studies in Mathematics.

Leikin, R. & Levav-Waynberg, A. (2007). Exploring mathematics teacher knowledge to explain the gap between theory-based recommendations and school practice in the use of connecting tasks. *Educational Studies in Mathematics, 66,* 349-371. doi: 10.1007/s10649-006-9071-z

Lesh, R. A. & Doerr, H. M. (2003). *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Teaching, Learning, and Problem Solving.* Mahawah, N.J.: Lawrence Erlbaum.

Leung, S. S. (1997). On the role of creative thinking in problem posing. *ZDM, 97*(2), 48-52.

Leung, S. K. & Silver, E. A. (1997). The role of task format, mathematics knowledge, and creative thinking on the arithmetic problem posing of prospective elementary school teachers. *Mathematics Education Research Journal, 9*(1), 5-24.

Lev-Zamir, H. & Leikin, R. (2011). Creative mathematics teaching in the eye of the beholder: focusing on teachers' conceptions. *Research in Mathematics Education, 13*(1), 17-32. doi: 10.1080/14794802.2011.550715

Levav-Waynberg, A. and Leikin, R. (2012). The role of multiple solution tasks in developing knowledge and creativity in geometry. *Journal of Mathematical Behavior, 31*, 73–90.

Lewis, T. (2008). Creativity in technology education: Providing children with glimpses of their inventive potential. *International Journal of Technology and Design Education.* (Online), doi: 10.1077/S10798-008-9051-y.

Liljedahl, P. (2004). *The AHA! experience: Mathematical contexts, pedagogical implications.* Doctoral Dissertation, Simon Fraser University.

Liljedahl, P. & Sriraman, B. (2006). Musings on mathematical creativity. *For The Learning of Mathematics, 26*, 20–23.

Lindsley, O. R. (1996). Is fluency free-operant response-response chaining? *The Behavior Analyst, 19*, 211-224.

Livne, N. L. & Milgram, R. M. (2006). Academic versus creative abilities in mathematics: Two components of the same construct? *Creativity Research Journal, 18*(2),199 – 212. doi: 10.1207/s15326934crj1802_6

Loveless, A. (1995). *The role of IT: Practical issues for primary teachers*. London: Continuum.

Loveless, A. (2003). Creating spaces in the primary curriculum: ICT in creative subjects. *The Curriculum Journal*, *14*(1), 5–21.

Loveless, A. (2006). *Literature Review in Creativity, New Technologies and Learning*. Retrieved September 25, 2012 from http://www.futurelab.org.uk/resources/documents/lit_reviews/Creativity_Review.pdf

Lubart, T. I. (1994). Creativity. In R. J. Sternberg (Ed.), *Thinking and problem solving* (pp. 289-332). San Diego: Academic Press.

Lubart, T. (2001). Models of the creative process: Past, present and future, *Creativity Research Journal, 13*(3-4), 295-308. doi: 10.1207/S15326934CRJ1334_07

Lubart, T. I. & Sternberg, R. J. (1995). An investment approach to creativity: Theory and data. In S. M. Smith, T. B. Ward, R. A. Finke (Eds.), *The creative cognition approach* (pp. 269–302). Cambridge, MA: MIT Press.

Lupkowski-Shoplik, A. E. & Assouline, S. G. (1994). Evidence of extreme mathematical precocity: Case studies of talented youths. *Roeper Review, 16*(3), 144-151. doi: 10.1080/02783199409553561

MacKinnon, D. W. (1970). Creativity: A multi-faceted phenomenon. In D. J. Roslansky (Ed.), *Creativity: A discussion at the Nobel conference* (pp. 17-32). Amsterdam: North Holland.

MacKinnon, D. W. (1978). *In search of human effectiveness: Identifying and developing creativity*. Buffalo, NY: Creative Education Foundation.

Mackworth, N. H. (1965). Originality. *American Psychologist, 20*, 51–66.

Madjar, N. & Shalley, C. (2008). Multiple tasks' and multiple goals' effect on creativity: Forced incubation or just a distraction? *Journal of Management, 34*, 786-805. doi: 10.1177/0149206308318611

Makel, M. C. & Plucker, J. (2007). An exciting – but not necessarily comprehensive – tour of the globe: A review of The International Handbook of Creativity. *Psychology of Aesthetics, Creativity and the Arts, 1*, 49-51.

Mann, E. (2005). *Mathematical creativity and school mathematics: indicators of mathematical creativity in middle school students* (Doctoral dissertation). Retrieved from www.gifted.uconn.edu/siegle/Dissertations/Eric%20Mann.pdf

Mann, E. (2006). Creativity: The essence of mathematics. *Journal for the Education of the Gifted, 30*(2), 236-260. doi: 10.4219/jeg-2006-264

Mann, E. L. (2009). The search for mathematical creativity: Can we identify creative potential in middle school students?. *Creativity Research Journal, 21,* 338-348. doi: 10.1080/ 10400410903297402

Marcoulides, G. A., & Schumacker, R. E. (1996). A*dvanced capacity equation modelling: Issues and techniques*. NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Mayer, R. E. (1999). Fifty years of creativity research. In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook of Creativity* (pp. 449-460). London: Cambridge University Press.

Meissner, H. (2000, August). *Creativity in Mathematics Education*. Paper presented at the meeting of the International Congress on Mathematics Education, Tokyo, Japan.

Middleton, J. A. & Spanias, P. A. (1999). Motivation for achievement in mathematics: Findings, generalizations, and criticisms of the research. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*, 65-88. doi: 10.2307/749630

Miell, D. & Littleton, K. (2008). Musical collaboration outside school: Processes of negotiation in band rehearsals. *International Journal of Educational Research, 47*(1), 41–49. doi: 10.1016/j.ijer.2007.11.006

Milgram, R. & Arad, R. (1981). Ideational fluency as a pre-dictor of original problem-solving. *Journal of Educational Psychology, 73*, 568-572. doi: 10.1037/0022-0663.73

Milgram, R. & Hong, E. (2009). Talent loss in mathematics: Causes and solutions. In R. Leikin, A. Berman, B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 149–163). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Milgram, R. M. & Livne, N. L. (2005). Creativity as a general and a domain-specific ability: The domain of mathematics as an exemplar. In J. C. Kaufman & J. Baer (Eds.), *Creativity across domain: Faces of the muse* (pp. 187–204). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Mooney, R. L. (1963). A conceptual model for integrating four approaches to the identification of creative talent. In C. W. Taylor & F. Barron (Eds.), *Scientific creativity: Its recognition and development* (pp. 331-340). New York: Wiley.

Mumford, M. D. (2001). Something old, something new: Revisiting Guilford's conception of creative problem solving. *Creativity Research Journal, 13(*3-4), 267-276. doi: 10.1207/S15326934CRJ1334_04

Mumford, M. & Gustafson, S. (1988). Creativity syndrome: integration, application, and innovation. *Psychological Bulletin, 103*, 27–43. doi: 10.1037/0033-2909

Mumford, M. D., Mobley, M. I., Uhlman, C. E., Reiter-Palmon, R., & Doares, L. M. (1991). Process analytic models of creative capacities. *Creativity Research Journal, 4,* 91 – 122.

Munro, J. (2000). Mathematical giftedness and talent: Thinking creatively in mathematics. *Exceptional Learning and Gifted Education, 4*, 19–24.

Murphy, K. & Davidshofer, C. (2001). *Psychological Testing* (5th ed.) NJ: Prentice Hall.

Muthén, L. K. & Muthén, B. O. (1998). *Mplus user's guide*. Los Angeles, CA: Muthén & Muthén.

Naglieri, J. A. (1997). *Naglieri nonverbal ability test technical manual*. San Antonio. TX: The Psychological Corporation.

Naglieri, J. A. & Ford, D. Y. (2003). Addressing underrepresentation of gifted minority children using the Naglieri Nonverbal Ability Test (NNAT). *Gifted Child Quarterly, 47*(2), 155-160.doi: 10.1177/001698620304700206

National Advisory Committee on Creative and Cultural Education (NACCCE). (1999). *All our futures: Creativity, culture & education*. Sudbury: DfEE.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Neumann, C. J. (2007). Fostering creativity. A model for developing a culture of collective creativity in science. *EMBO Reports, 8,* 202-206. doi: 10.1038/sj.embor.7400913

Noscal, C. S. (1995). Variety of creative minds: A holistic approach. In T. Marvszewski & C. S. Noscal, (Eds.), *Creative Information Processing*. Netherlands: Eburon Publishers.

Nuessel, F. H., Stewart, A. V., & Cedeño, A. A. (2001). Course on humanistic creativity in later life: Literature review, case histories, and recommendations. *Educational Gerontology, 27,* 697–715.

Office for Standards in Education (2003). *Expecting the unexpected: Developing creativity in primary and secondary schools*. London: Office for standards in education.

Oral, G., Kaufman, J. C., & Agars, M. D. (2007). Examining creativity in Turkey: Do Western findings apply? *High Ability Studies, 18,* 235-246. doi: 10.1080/13598130701709590

Osborn, A. F. (1963). *Applied imagination* (3rd ed.). New York: Scribner's.

Palmiero, M., Nakatani, C., Raver, D., Belardinelli, M. O., & and van Leeuwen, C. (2010). Abilities within and across visual and verbal domains: How specific is their influence on creativity? *Creativity Research Journal, 22(*4), 369 - 377. doi: 10.1080/10400419.2010.523396

Patton, M. Q. (1990). *Qualitative evaluation and research methods* (2nd ed.). Newbury Park, CA: Sage.

Patton, M. Q. (2002). Variety in qualitative inquiry: theoretical orientations. In C. D. Laughton, V. Novak, D. E. Axelsen, K. Journey, & K. Peterson (Eds.), *Qualitative research & evaluation methods* (pp. 75-138). Thousands Oaks, London: Sage Publications.

Paul, E. T. & Kathy, P. G. (1990). *Fostering academic creativity in gifted students*. Retrieved November 23, 2011, from http://ericae.net/edo/ED321489/484

Pehkonen, E. (1997). The state-of-art in mathematical creativity, *ZDM , 29*(3), 63-67. doi: 10.1007/s11858-997-0001-z

Pelczer, I. & Rodríguez, F. G. (2011). Creativity assessment in school settings through problem posing tasks. *The Montana Mathematics Enthusiast*, *8*(1&2), 383-398.

Piaget, J. (1950). *The Psychology of Intelligence*. London: Routledge and Kegan Paul.

Piirto, J. (1999). *Talented children and adult: Their development and education*. New Jersey: Prentice-Hall Inc.

Plucker, J. A. (1998). Beware of simple conclusions: The case for the content generality of creativity. *Creativity Research Journal, 11*, 179-182. doi: 10.1207/s15326934crj1102_8

Plucker, J. A. & Beghetto, R. A. (2004). Why creativity is domain general, why it looks domain specific, and why the distinction does not matter. In R. J. Sternberg, E. L. Grigorenk, J. L. Singer (Eds.), *Creativity: From potential to realization* (pp. 153–167). Washington, DC: American Psychological Association.

Plucker, J. A., Beghetto, R. A., & Dow, G. T. (2004). Why isn't creativity more important to educational psychologists? Potential, pitfalls, and future directions in creativity research. *Educational Psychologist, 39*(2), 83–96. doi: 10.1207/s15326985ep3902_1

Plucker, J. & Renzulli, J. (1999). Psychometric approaches to the study of human creativity. In R. Sternberg, *Handbook of Creativity* (pp. 35-60), Cambridge: Cambridge University Press.

Plucker, J. A. & Runco, M. A. (1998). The death of creativity measurement has been greatly exaggerated. *Roeper Review, 21*(1), 36–39. doi: 10.1080/02783199809553924

Plucker, J. & Zabelina, D. (2009). Creativity and interdisciplinarity: One creativity or many creativities? *ZDM, 41*, 5–11. doi: 10.1007/s11858-008-0155-3

Poincaré, H. (1948). *Science and method*. New York: Dover.

Poincaré, H. (1952). *Science and method*. New York, NY: Dover Publications, Inc.

Polya, G. (1954/1973). *How to solve it.* Princeton, NJ: Princeton University.

Presmeg, N. (2003). Creativity, mathematizing and didactizing: Leen Streefland's work continues. *Educational Studies in Mathematics*, *54*, 127–137. doi: 10.1023/B:EDUC.0000005255.04769.89

Prince, A. (2006). *Creative Maths Activities for Able Students: Ideas for Working with Children Aged 11 to 14*. UK: Paul Chapman Publishing

Proctor, R. & Burnett, P. (2004). Measuring cognitive and dispositional characteristics of creativity in elementary students. *Creativity Research Journal, 16*(4), 421 - 429. doi: 10.1080/10400410409534553

Prouse, H. L. (1967). Creativity in school mathematics. *The Mathematics Teacher, 60*, 876-879.

Pyryt, M. C. (1999). Effectiveness of training children's divergent thinking: A meta-analytic review. In A. S. Fishkin, B. Cramond, & P. Olszewski-Kubilius (Eds.), *Investigating creativity in youth: Research and methods* (pp. 351–365). Cresskill, NJ: Hampton.

Rhodes, M. (1961). An analysis of creativity. *Phi Delta Kappan, 42*, 305-310.

Rietzschel, E., Nijstad, B., & Stroebe, W. (2007). Relative accessibility of domain knowledge and creativity: The effects of knowledge activation on the quantity and originality of generated ideas. *Journal of Experimental Social Psychology. 43,* 933–946. doi:10.1016/j.jesp.2006.10.014

Ripple, R. E. & May, F. B. (1962). Caution in Comparing Creativity and IQ. *Psychological Reports, 10,* 229–30.

Rosenblatt, E. & Winner, E. (1988). The art of children's drawing. *Journal of Aesthetic Education, 22*, 3-15.

Runco, M. A. (1986). Divergent thinking and creative performance in gifted and nongifted children. *Educational and Psychological Measurement, 46*, 375-384.

Runco, M. A. (1991). The evaluative, valuative, and divergent thinking in children. *The Journal of Creative Behavior*, *25*, 311-319.

Runco, M. A. (2003). Idea evaluation, divergent thinking, and creativity. In M. A. Runco (Ed.), *Critical creative processes* (pp. 69-94). Cresskill, NJ: Hampton Press.

Runco, M. A. (2007). *Creativity: Theories, themes, practice*. Philadelphia, CA: Academic Press.

Runco, M. & Jaeger, G. J. (2012). The standard definition of creativity. *Creativity Research Journal. 24*(1), 92-96. doi: 10.1080/10400419.2012.650092

Ruscio, A. M. & Amabile, T. M. (1999). Effects of instructional style on problem-solving creativity. *Creativity Research Journal, 12*, 251–266.

Sak, U. & Maker, C. J. (2006). Developmental variation in children's creative mathematical thinking as a function of schooling, age, and knowledge. *Creativity Research Journal, 18,* 279–291.

Salkind, N. (2002). *An Introduction to Theories of Human Development*. NY: Sage.

Sarmiento, J. & Stahl, G. (2007). Group creativity in virtual math teams: Interactional mechanisms for referencing, remembering and bridging. *Proceedings of the 6th ACM SIGCHI conference on Creativity & cognition* (pp. 37 – 44). New York: USA

Saxon, J. A., Treffinger, D. J., Young, G. C., & Witting, C. V. (2003). Camp Invention: A creative, inquiry-based summer enrichment program for elementary students. *Journal of Creative Behavior, 37*, 64–74.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* Orlando, FL: Academic Press.

Schwartz, J. L., Yerushalmy, M., & Wilson, B., (Eds.). (1993*). The Geometric Supposer: What is it a Case of?* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. H., Burkhardt, H., Daro, P., Ridgway, J., Schwartz, J., & Wilcox, S. (1999). *High school assessment*. White Plains, NY: Dale Seymour.

Selby, E., Shaw, E., & Houtz, J. (2005). The creative personality. *Gifted Child Quarterly, 49*(4), 300-314. doi: 10.1177/001698620504900404

Seo, H. A., Lee, E. A., & Kim, K. H. (2005). Science teachers' understandings of creativity in gifted education in Korea. *Journal of Secondly Gifted Education. 16*, 98-105.

Sharp, J., Potter, J., Allen, J., & Loveless, A. (2000). *Primary ICT: Knowledge, Understanding and Practice*. Exeter: Learning Matters.

Shaughnessy, M. F. (1998). An Interview with E. Paul Torrance: About Creativity. *Educational Psychology Review, 10*(4), 441-452.

Sheffield, L. J. (2000). Creating and developing promising young mathematicians. *Teaching Children Mathematics, 6*(6), 416 – 419.

Sheffield, L. (2003) *Extending the Challenge in Mathematics: developing mathematical promise in K-8 students.* Thousand Oaks: Corwin Press.

Sheffield, L. J. (2008). Questioning mathematical creativity – questions may be the answers. In R. Leikin (Ed.), *Proceedings of the 5th International Conference on Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students*. (pp. 29-34). Tel Aviv, Israel: The Center for Educational Technology.

Sheffield, L. (2009). Developing Mathematical Creativity-Questions may be the answer. In R. Leikin, A. Berman, B. Koichu (Eds.), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 87-100). Rotterdam: Sense Publishers.

Shneiderman, B. (2000). Creating creativity: User interfaces for supporting innovation. *ACM transactions on Computer-Human Interactions, 7*(1), 114-138.

Shriki, A. (2010). Working like real mathematicians: Developing prospective teachers' awareness of mathematical creativity through generating new concepts. *Educational Studies in Mathematics, 7*3, 159–179. doi: 10.1007/s10649-009-9212-2

Shye, S. & Yuhas, I. (2004). *Creativity in problem solving: a multidimensional approach to its definition and measurement*. Jerusalem: Van Leer Jerusalem Institute.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the learning of mathematics, 14*(1), 19-28.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity though instruction rich mathematical problem solving and problem posing. *International Reviews on Mathematical Education, 29*(3), 75-80. doi: 10.1007/s11858-997-0003-x

Silver, E. A., Ghousseini, H., Gosen, D., Charalambous, C., & Strawhun, B. T. F. (2005). Moving from rhetoric to praxis: Issues faced by teachers in having students consider multiple solutions for problems in the mathematics classroom. *Journal for Mathematical Behavior*, *24,* 287-301.

Silver, E. A., Mamona, J., Leung, S. S., & Kenney, P. A. (1996). Posing mathematical problems: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(3), 293-309.

Silvia, P. (2008). creativity and intelligence revisited: A latent variable analysis of Wallach and Kogan, *Creativity Research Journal, 20*(1), 34-39. doi: 10.1080/10400410701841807

Simonton, D. K. (1990). Creativity and wisdom in aging. In J. E. Birren & K. W. Schaie (Eds.), *Handbook of the psychology of aging* (3rd ed., pp. 320–329). San Diego, CA: Academic.

Simonton, D. K. (1998). Creativity, genius, and talent development. *Roeper Review: A Journal on Gifted Education, 21,* 86-87.

Simonton, D. K. (2000). Creativity: Cognitive, developmental, personal, and social aspects. *American Psychologist*, *55,* 151-158.

Siswono, T. Y. (2008). Promoting creativity in learning mathematics using open-ended problems. Paper presented in *the 3rd International conference on mathematics and statistics*. Indonesia: Institut Pertanian Bogor.

Slavkin, M. L. (2004). *Authentic learning: How learning about the brain can shape the development of students.* Lanham, MD: ScarecrowEducation.

Smith, M. S. & Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(5), 344-350.

Sriraman, B. (2004). Discovering a mathematical principle: The case of Matt. *Mathematics in School, 33*(2), 25–31.

Sriraman, B. (2005). Are giftedness and creativity synonyms in mathematics? An analysis of constructs within the professional and school realms. *The journal of secondary gifted education, 17,* 20–36. doi: 10.4219/jsge-2005-389

Sriraman, B. (2008). Are mathematical giftedness and mathematical creativity synonyms? A theoretical analysis of constructs. In B. Sriraman (Ed.), *Creativity, Giftedness, and Talent Development in Mathematics* (pp. 85-112). USA: Information Age Publishing, INC.

Sriraman, B. (2009). The characteristics of mathematical creativity. *ZDM*, *41*, 13–27.

Sriraman, B. & English, L. (2004). Combinatorial mathematics: Research into practice. Connecting research into teaching. *The Mathematics Teacher, 98*(3), 182-191.

Srivastava, S. & Thomas, A. (1991). Creativity of pre-school children effect of sex, age, birth order and intelligence. *Journal of Psychological Researches, 36*(2), 92–98.

Star, J. & Newton, K. J. (2009). The nature and development of experts' strategy flexibility for solving equations. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 41*, 557-567.

Starko, A. J. (1994). *Creativity in the classroom*. New York: Longman.

Starko, A. J. (1995). *Developing creativity in the classroom: Schools of curious delight.* White Plains, NY: Longman.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: a casebook for professional development*. New York: Teachers College Press, Columbia University.

Sternberg, R. J. (1985). *Beyond IQ: A triarchic theory of human intelligence*. New York: Cambridge University Press.

Sternberg, R. J. (Ed.). (1988). *The nature of creativity: Contemporary psychological perspectives*. New York: Cambridge University Press.

Sternberg, R. J. (1997). *Successful intelligence*. New York, USA: Plume.

Sternberg, R. J. (2006). The nature of creativity. *Creativity Research Journal, 18*(1), 87-98. doi: 10.1207/s15326934crj1801_10

Sternberg, R. J. (2012). The assessment of creativity: An investment-based approach, *Creativity Research Journal, 24*(1), 3-12. doi: 10.1080/10400419.2012.652925

Sternberg, R. J. & Lubart, T. I. (1993). Creative giftedness: A multivariate investment approach. *Gifted Child Quarterly, 37*(1), 7–15. doi: 10.1177/001698629303700102

Sternberg, R. J. & Lubart, T. I. (1995). *Defying the crowd: Cultivating creativity in a culture of conformity*. New York: Free Press.

Sternberg, R. J. & Lubart, T. I. (1996). Investing in creativity. *American Psychologist, 51*(7), 677-688.

Sternberg, R. J. & Lubart, T. I. (2000). The concept of creativity: Prospects and paradigms. In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook of creativity* (pp. 93–115). New York: Cambridge University Press.

Sternberg, R. J. & O'Hara, L. A. (1999). Creativity and intelligence. In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook of creativity* (pp. 251–272). Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Sternberg, R. J., O' Hara, L. A, & Lubart, T. L. (1997). Creativity as investment. *California Management Review, 40*(1), 8–21.

Taylor, P. (2009). Challenge in mathematics learning. In R. Leikin, A. Berman, B. Koichu (Eds.), *Mathematical creativity and the education of gifted students* (pp. 71-86). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Taylor, S. J. & Bogdan, R. (1984). *Introduction to qualitative research methods: The search for meanings*. New York: John Wiley & Sons.

Terman, L. M. (1954). Scientists and non-scientists in a group of 800 gifted men. *Psychological Monographs, 68*(7), 1-44.

Torrance, E. P. (1962). *Guiding creative talent*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Torrance, E. P. (1966). *The Torrance Tests of Creative Thinking–Norms—Technical Manual Research Edition—Verbal Tests, Forms A and B—Figural Tests, Forms A and B.* Princeton NJ: Personnel Press.

Torrance, E. P. (1968). Comparative studies of stress-seeking in the imaginative stories of preadolescents in twelve different subcultures. In S. Z. Klausner (Ed.), *Why man takes chances* (pp. 193-233). Garden City, NY: Doubleday.

Torrance, E. P. (1974). *The Torrance Tests of Creative Thinking-Norms-Technical Manual Research Edition-Verbal Tests, Forms A and B- Figural Tests, Forms A and B*. Princeton, NJ: Personnel Press.

Torrance, E. P. (1988). The Nature of creativity as manifest in its testing. In R.J. Sternberg (Ed.), *The Nature of Creativity* (pp. 43-75). Cambridge, England: Cambridge University Press.

Torrance, E. P. (1995). *The beyonders' in why fly? A philosophy of creativity*. Norwood, NJ: Ablex.

Torrance, E. P. (2002). *The manifesto: A guide to developing a creative career*. Westport, CT: Ablex.

Treffinger, D. J. (1985). Review of the Torrance Tests of Creative Thinking. In J. V. Mitchell (Ed.), *The ninth mental measurements yearbook* (pp. 1632–1634). Lincoln: University of Nebraska, Buros Institute of Mental Measurements.

Treffinger, D. J. (1987). Research on creativity assessment. In S. G. Isaksen (Ed.), *Frontiers of creativity research: Beyond the basics* (pp. 103-119). Buffalo, NY: Bearly.

Treffinger, D. J. (1988). Components of creativity: Another look. *Creative Learning Today*, *2*(5), 1-4.

Treffinger, D. J. (1991). Creative productivity: Understanding its sources and nurture. *Illinois Council for Gifted Journal, 10,* 6-8.

Treffinger, D. J. (1995). *Creativity, creative thinking, and critical thinking: In search of definitions*. Sarasota, FL: Center for Creative Learning.

Treffinger, D. J. (2003). Assessment and measurement in creativity and creative problem solving. In J. C. Houtz (Ed.), *The educational psychology of creativity* (pp. 59-93), Cresskill, NJ: Hampton Press.

Treffinger, D. J., Isaksen, S. G., & Dorval, K. B. (1994). Creative problem solving: An overview. In M. A. Runco (Ed.), *Problem finding, problem solving, and creativity* (pp. 223-236). Norwood, NJ: Ablex.

Treffinger, D., Young, G., Selby, E., & Shepardson, C. (2002). *Assessing creativity: A guide for educators.* The National Research Center on the Gifted and Talented: University of Connecticut.

Tulving, E. & Pearlstone, Z. (1996). Availability versus accessibility of information in memory for words. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior, 5*, 381–391.

Vartanian, O., Martindale, C., & Kwiatkowski, J. (2003). Creativity and inductive reasoning: The relationship between divergent thinking and performance on Wason's 2-4-6 task. *Quarterly Journal of Experimental Psychology, 56A*, 641-655.

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education, 24*(3), 335-359.

Vidal, R. V. V. (2005). Creativity for operational researchers. *Investigacao Operacional*, *25*(1), 1-24.

Vidal, R. V. (2009). Creativity for problem solvers. *AI & Soc*, *23*, 409–432. doi: 10.1007/s00146-007-0118-1

Walberg, H. (1988). Creativity and talent as learning. In R. J. Sternberg (Ed.), *The nature of creativity* (pp. 340–361). New York: Cambridge University Press.

Walberg, H. J. & Herbig, M. P. (1991). Developing talent, creativity, and eminence. In N. Colangelo & G. A. Davis (Eds.), *Handbook of gifted education* (pp. 245-255). Boston: Allyn and Bacon.

Wallach, M. A. & Kogan, N. (1965). *Modes of thinking in young children: A study of the creativity-intelligence distinction*. New York: Holt, Rinehart, & Winston.

Wallas, G. (1926). *The art of thought*. New York: Franklin Watts.

Watkins, J. (1999). Educating professionals: the changing role of UK professional associations. *Journal of Education and Work, 12*(1), 37-56.

Wechsler, S. (2006). Validity of the Torrance Tests of Creative Thinking to the Brazilian Culture. *Creativity Research Journal,18*(1), 15-25. doi: 10.1207/s15326934crj1801_3

Weisberg, R. W. (1986). *Creativity: Genius and other myths*. New York: Freeman.

Weisberg, R. W. (1993). *Creativity: Beyond the myth of genius*. New York: Freeman.

Weisberg, R. W. (1995). Case studies of creative thinking: Reproduction versus restructuring in the real world. In S. Smith, T. B. Ward, R. A. Finke (Eds.), *The creative cognition approach* (pp. 53-72). Cambridge: MIT Press.

Weisberg, R. W. (1999). Creativity and knowledge: A challenge to theories. In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook of creativity* (pp. 226-250). Cambridge, England: Cambridge University Press.

Weisberg, R. W. (2006). Expertise and reason in creative thinking: Evidence from case studies and the laboratory. In J. C. Kauffman & J. Baer (Eds.), *Creativity and reason in cognitive development* (pp. 7 – 42). New York: Cambridge University Press.

Wheeler, S., Waite, S., & Bromfield, C. (2002). Promoting creative thinking through the use of ICT. *Journal of Computer Assisted Learning*, *18*, 367-378. doi: 10.1046/j.0266-4909.2002.00247.x

Wood, R. & Ashfield, J. (2008). The use of the interactive whiteboard for creative teaching and learning in literacy and mathematics: a case study. *British Journal of Educational Technology*, *39*(1), 84–96. doi: 10.1111/j.1467-8535.2007.00699.x

Woods, P. (1995). *Creative teachers in primary schools*. Buckingham: Open University Press.

Yang, Y. & Chin, W. (1996). Motivational analyses on the effects of type of instructional control on learning from computer-based instruction. *Journal of Educational Technology System*, *2*5(1), 25-35.

Yerushalmy, M. (2009). Educational technology and curricular design: Promoting mathematical creativity for all students. In R. Leikin, A. Berman, B. Koichu (Eds.), *Mathematical creativity and the education of gifted students* (pp. 101-113). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Yushau, B., Mji, A., & Wessels, D. C. J. (2003). C*reativity and computer in the teaching and learning of mathematics*. Retrieved May 4, 2012, from www.kfupm.edu.sa/math/UPLOAD/Tech_Reports/311.pdf

Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων Κύπρου. (2008). *Βιβλία αξιολόγησης των μαθηματικών*. Λευκωσία: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου.

Zazkis, R. & Holton, D. (2009). Snapshots of creativity in undergraduate mathematics education. In R. Leikin, A. Berman, B. Koichu (Eds.), *Mathematical creativity and the education of gifted students* (pp. 345-365). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Zhang, L. & Sternberg, R. J. (2011). Revisiting the Investment Theory of Creativity. *Creativity Research Journal, 23*(3), 229-238. doi: 10.1080/10400419.2011.595974

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1

Ονοματεπώνυμο: ________________________________ **Τάξη:** ________________

Σχολείο: ________________________________ **Ημερ.:**________________

Τα πιο κάτω προβλήματα έχουν περισσότερες από μία ορθές απαντήσεις. Να λύσεις τα προβλήματα και να προσπαθήσεις να δώσεις:
(α) **όσες πιο πολλές** λύσεις μπορείς,
(β) **διαφορετικές** λύσεις,
(γ) λύσεις που **κανένας άλλος** στην τάξη σου δεν θα μπορέσει να σκεφτεί.

1. Να σχηματίσεις ομάδες αριθμών χρησιμοποιώντας τους αριθμούς που δίνονται πιο κάτω και να τις ονομάσεις:

   2, 3, 7, 9, 13, 15, 17, 25, 36, 39, 49, 51, 60, 64, 91, 119, 121, 125, 136, 143, 150

ΠΡΟΣΟΧΗ: Κάθε ομάδα πρέπει να έχει περισσότερους από δύο αριθμούς.

Π.χ. Οι αριθμοί ______2, 3, 7, 9 ____________ είναι _____μονοψήφιοι αριθμοί________

Οι αριθμοί ____________________________ είναι ____________________________

____

Οι αριθμοί ____________________________ είναι ____________________________

____

Οι αριθμοί ____________________________ είναι ____________________________

____

Οι αριθμοί ____________________________ είναι ____________________________

____

Οι αριθμοί ____________________________ είναι ____________________________

____

Οι αριθμοί ____________________________ είναι ____________________________

____

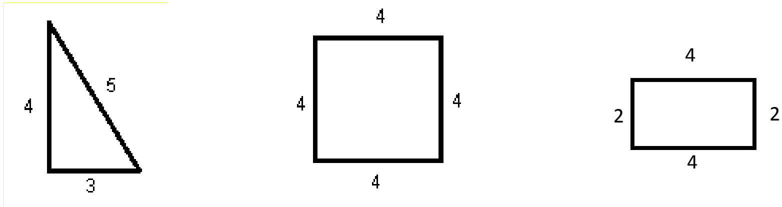
Οι αριθμοί ____________________________ είναι ____________________________

____

Οι αριθμοί ____________________________ είναι ____________________________

____

2. Να γράψεις όσες πιο πολλές προτάσεις μπορείς, που να δηλώνουν ποιο από τα πιο κάτω σχήματα διαφέρει από τα υπόλοιπα και να εξηγήσεις την απάντησή σου.



Α Β Γ

Το σχήμα _________ διαφέρει από τα υπόλοιπα, γιατί ______________________________

____

Το σχήμα _________ διαφέρει από τα υπόλοιπα, γιατί ______________________________

____

Το σχήμα _________ διαφέρει από τα υπόλοιπα, γιατί ______________________________

____

Το σχήμα _________ διαφέρει από τα υπόλοιπα, γιατί ______________________________

____

Το σχήμα _________ διαφέρει από τα υπόλοιπα, γιατί ______________________________

____

Το σχήμα _________ διαφέρει από τα υπόλοιπα, γιατί ______________________________

____

Το σχήμα _________ διαφέρει από τα υπόλοιπα, γιατί ______________________________

____

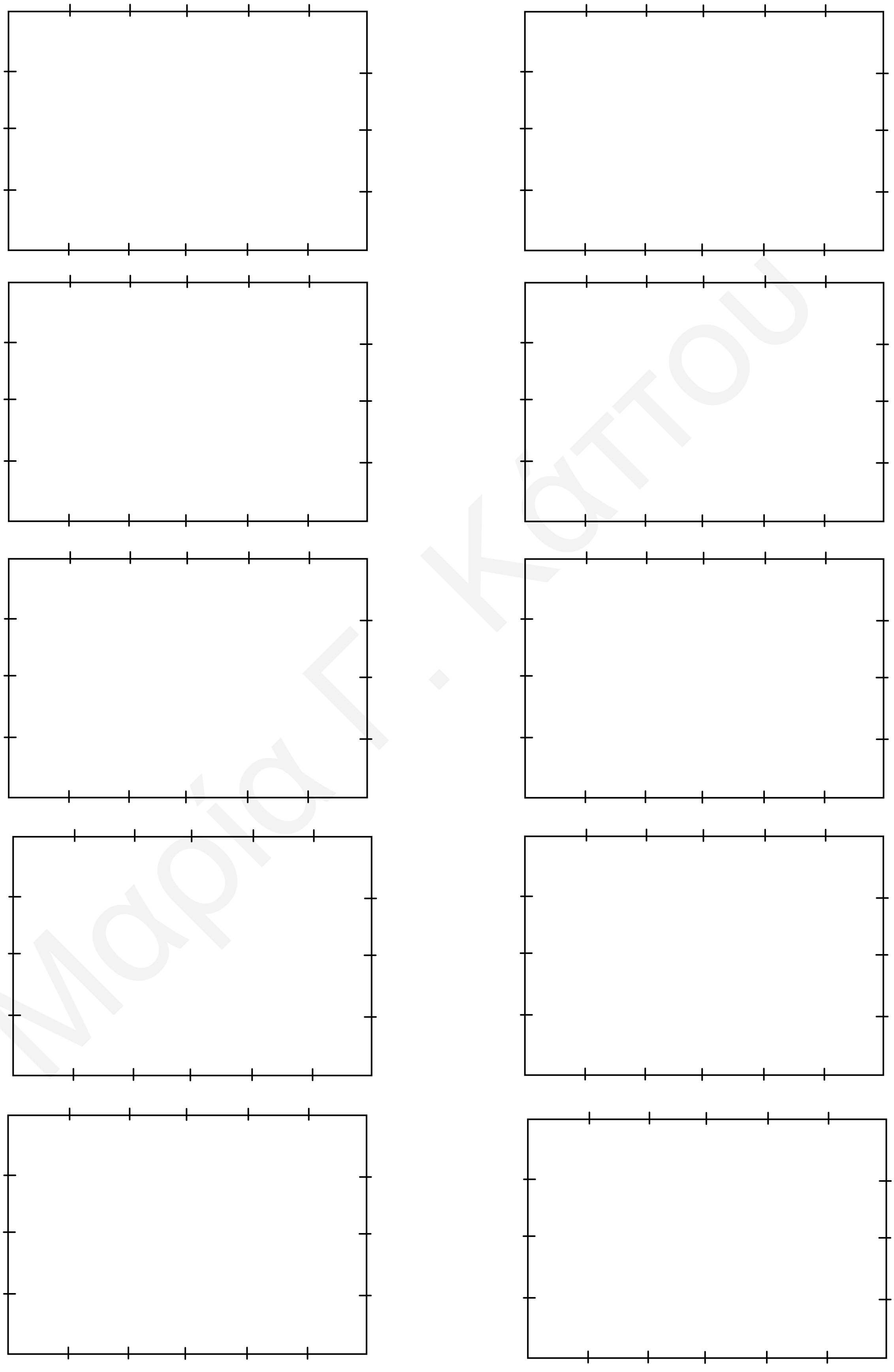
Το σχήμα _________ διαφέρει από τα υπόλοιπα, γιατί ______________________________

____

Το σχήμα _________ διαφέρει από τα υπόλοιπα, γιατί ______________________________

____

3. Να χρωματίσεις το $\frac{1}{2}$ του ορθογωνίου, με όσο το δυνατόν περισσότερους και διαφορετικούς τρόπους.



4. Να διαβάσεις την πιο κάτω ιστορία. Να γράψεις **ερωτήσεις** που μπορούν να απαντηθούν με τα δεδομένα της ιστορίας.

Η εταιρεία «Κατοικίες για όλους» πωλεί διαμερίσματα και σπίτια. Ο πιο κάτω πίνακας δίνει πληροφορίες για τις πωλήσεις της εταιρείας κατά τους μήνες Ιανουάριο-Ιούνιο.

Μήνας	**Διαμερίσματα (€150 000)**	**Σπίτια (€300 000)**	**Είσπραξη εταιρείας**
Ιανουάριος	2	3	
Φεβρουάριος	1	4	
Μάρτιος	6	0	
Απρίλιος	5	3	
Μάιος			€900 000
Ιούνιος			€600 000

Ο ιδιοκτήτης της εταιρείας ανέφερε ότι για κάθε κατοικία που πωλείται, η εταιρεία κερδίζει το 30% της τιμής πώλησης ενώ ταυτόχρονα πληρώνει φόρο 15% στο κράτος.

Π.χ. Πόση ήταν η είσπραξη της εταιρείας τον Ιανουάριο;

1. ____

____

2. ____

____

3. ____

____

4. ____

____

5. ____

____

6. ____

____

7. ____

____

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2

Ονοματεπώνυμο: ________________________________ **Τάξη:** Δ_________

Σχολείο: ____ **Ημερ.:**__________

1. Κάνε τις πιο κάτω πράξεις.

Α) $\begin{array}{r} 437 \\ +\underline{\ 285} \end{array}$ Β) $\begin{array}{r} 300 \\ \underline{-138} \end{array}$ Γ) $\begin{array}{r} 24 \\ \underline{\times\ 23} \end{array}$ Δ) $568 \,|\, 4$

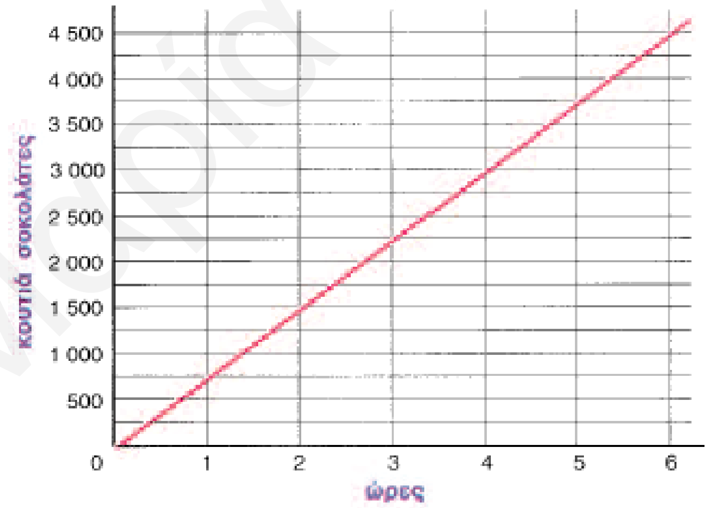
Ε) $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} =$ ΣΤ) $1 - \frac{2}{7} =$

2. Συμπλήρωσε τις πιο κάτω αριθμητικές σειρές (μοτίβα).

Α)

Β)

3. Ο Ορέστης πήρε πληροφορίες για την παραγωγή σοκολάτων από το εργοστάσιο «Η ΓΛΥΚΑ». Έμαθε ότι κάθε ώρα παράγεται ο ίδιος αριθμός κουτιών σοκολάτας. Πάρε πληροφορίες από τη γραφική παράσταση και απάντησε στις ερωτήσεις.



Α) Πόσα κουτιά σοκολάτες παράγει το εργοστάσιο σε 4 ώρες; ……………………

Β) Πόσες ώρες πρέπει να εργαστεί το εργοστάσιο, για να παράξει 3750 κουτιά σοκολάτες; ....…………………

Γ) Πόσες ώρες πρέπει να εργαστεί το εργοστάσιο, για να παράξει 9000 κουτιά σοκολάτες; ……………………

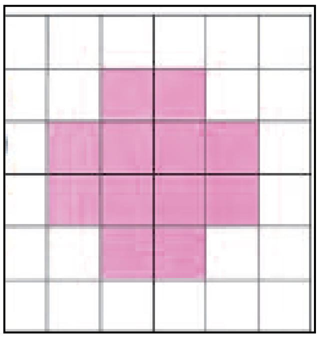
4. Λύσε το πιο κάτω πρόβλημα.

Μια σοκολάτα ζυγίζει 250 g. Μια γκοφρέτα ζυγίζει 100 g λιγότερο από τη σοκολάτα. Ένα κουτί μπισκότα ζυγίζει όσο η σοκολάτα και η γκοφρέτα μαζί.

Πόσο ζυγίζει η γκοφρέτα; …………………………………………………..

Πόσο ζυγίζουν τα μπισκότα; …………………………………………………

5. **Παρατήρησε το πιο κάτω σχήμα και συμπλήρωσε τις πιο κάτω προτάσεις. Το κάθε τετραγωνάκι έχει εμβαδόν ίσο με ένα τετραγωνικό εκατοστόμετρο.**



Περίμετρος σκιασμένου σχήματος: ……………………cm

Εμβαδόν σκιασμένου σχήματος: …………………… cm^2

Ονοματεπώνυμο: ___________________________ **Τάξη:** Ε______________

Σχολείο: ___________________________________ **Ημερ.:**________________

1. Κάνε τις πράξεις.

Α) $\begin{array}{r} 2\,538 \\ +\,3\,863 \\ \hline \end{array}$

Β) $\begin{array}{r} 4\,983 \\ -\,2\,874 \\ \hline \end{array}$

Γ) $\begin{array}{r} 545 \\ \times \quad 34 \\ \hline \end{array}$

Δ) $5\,850 \;\big|\; 26$

Ε) $5\frac{3}{7} + 2\frac{5}{7} =$

ΣΤ) $1\frac{2}{5} - \frac{3}{5} =$

2. Συνέχισε τα μοτίβα.

Α)	908 405	908 400	908 395	....	....	....
Β)	15 000	30 000	60 000	....	....	....

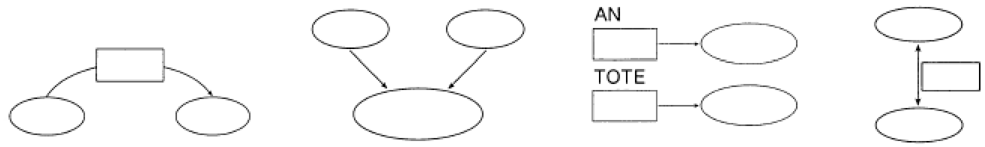
3. Μελέτησε τη γραφική παράσταση και απάντησε στα πιο κάτω ερωτήματα.

Α) Πόσα θα πληρώσω για 4 kg μήλα; ………………………………

Β) Με €7.20, πόσα κιλά μήλα μπορώ να αγοράσω; ……………………………....

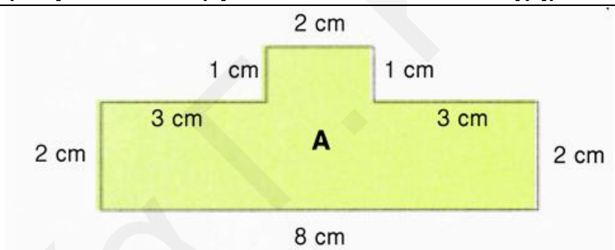
Γ) Πόσα θα πληρώσω για 24 kg μήλα; ………………………………

4. **Λύσε το πιο κάτω πρόβλημα χρησιμοποιώντας το κατάλληλο συνδυασμό σχεδιαγραμμάτων ή με όποιο άλλο τρόπο θέλεις.**



Το χωριό του Γιώργου έχει 1250 κατοίκους. Το χωριό της Σοφίας έχει 170 κατοίκους λιγότερους από το χωριό του Γιώργου. Το χωριό του Νίκου έχει τόσους κατοίκους όσους το χωριό του Γιώργου και της Σοφίας μαζί. Πόσους κατοίκους έχει το χωριό του Νίκου;

5. **Βρες την περίμετρο και το εμβαδόν του πιο κάτω σχήματος.**



Περίμετρος: ……………………………………………………………………………...…

Εμβαδόν: …………………………………………………………………………………

Ονοματεπώνυμο: ______________________________ **Τάξη:** Στ________

Σχολείο: ______________________________________ **Ημερ.:**__________

1. Βρες την απάντηση.

Α, Β) (4200 – 2560) + 560 = Γ) 1605 x 38 =

Δ) 9463 : 32 = Ε, ΣΤ) $1 - (\frac{3}{8} + \frac{1}{3}) =$

2. Συμπλήρωσε τους αριθμούς που λείπουν.

Α) 30, 60, 120, _______ , _______ , _______

Β) 2, 6, 12, 20, _______ , _______ , _______

3. Μελέτησε τη γραφική παράσταση και απάντησε στις ερωτήσεις.

Α) Ποιος είναι ο μήνας με τις περισσότερες εισπράξεις;__________________________

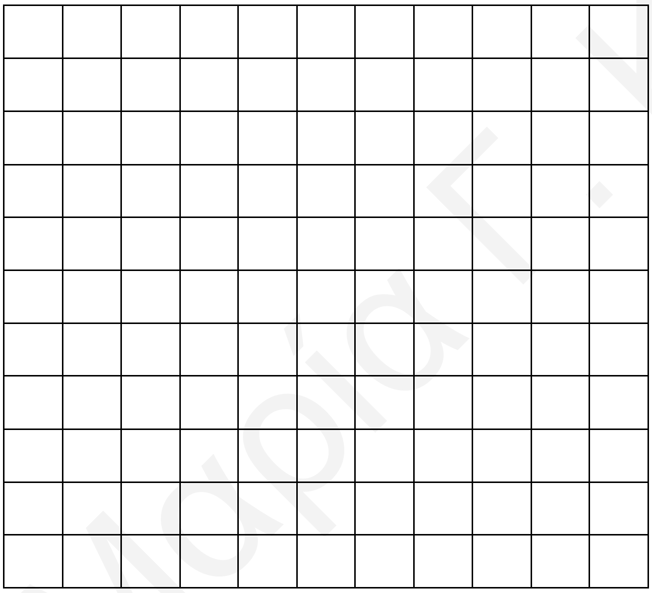
Β) Ποιος είναι ο μήνας με τις λιγότερες εισπράξεις;_____________________________

Γ) Πόση είναι η διαφορά των εισπράξεων μεταξύ του μήνα με τις περισσότερες εισπράξεις από το μήνα με τις λιγότερες εισπράξεις; ______________________________________

4. Λύσε το πρόβλημα.

Η Μαρία και η Δήμητρα συλλέγουν γραμματόσημα. Η συλλογή της Μαρίας έχει 143 γραμματόσημα περισσότερα από τη συλλογή της Δήμητρας που έχει 376 γραμματόσημα. Πόσα γραμματόσημα έχουν και οι δυο μαζί;

5. Σχεδίασε ένα ορθογώνιο με περίμετρο 18 cm. Βρες το εμβαδόν του.



Εμβαδόν: …………………………..

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 3

Ονοματεπώνυμο: ______________________________ Τάξη: ______________

Σχολείο: ______________________________________ Ημερ.: ____________

Να διαβάσεις τις πιο κάτω δηλώσεις προσεκτικά και να **βάλεις σε κύκλο** τον αριθμό που δείχνει το βαθμό συμφωνίας σου. Να χρησιμοποιήσεις τον αριθμό «**7**» για να δείξεις ότι **συμφωνείς απόλυτα** και τον αριθμό «**1**» για να δείξεις ότι **διαφωνείς απόλυτα** με τη δήλωση. Να χρησιμοποιήσεις τους ενδιάμεσους αριθμούς, για να δείξεις τον ενδιάμεσο βαθμό στον οποίο συμφωνείς με τις δηλώσεις. Είναι σημαντικό να απαντήσεις σε όλες τις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου.

		Διαφωνώ απόλυτα						Συμφωνώ απόλυτα
1	Όταν συγκρίνω δύο προβλήματα, καταλαβαίνω σε τι μοιάζουν και σε τι διαφέρουν.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
2	Μπορώ να εξηγήσω στο δάσκαλό μου με ποιο τρόπο έλυσα ένα πρόβλημα.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
3	Ανακαλύπτω νέους τρόπους, για να επιλύσω μαθηματικές ασκήσεις.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
4	Λύνω τις μαθηματικές ασκήσεις με διαφορετικούς τρόπους.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
5	Όταν περιμένω ρέστα χρησιμοποιώ τα μαθηματικά που ξέρω, για να κάνω υπολογισμούς.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
6	Αυτά που μαθαίνω στα μαθηματικά τα εφαρμόζω στην καθημερινή μου ζωή (π.χ. στα καταστήματα).	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
7	Εντοπίζω εύκολα μοτίβα αριθμών ή σχημάτων.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
8	Λύνω τα μαθηματικά προβλήματα στο μυαλό μου.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
9	Συζητώ με τους γονείς μου για τα μαθηματικά που κάνω στο σχολείο.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
10	Χρησιμοποιώ και βελτιώνω τις ιδέες των συμμαθητών μου στα μαθηματικά.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
11	Όταν θέλω να κάνω κάτι, είμαι σίγουρος/σίγουρη ότι θα το καταφέρω.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
12	Μου αρέσει να είμαι διαφορετικός από τους άλλους.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
13	Απολαμβάνω την εργασία στα μαθηματικά.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
14	Απολαμβάνω να παίζω μαθηματικά παιχνίδια.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
15	Μπορώ με ευκολία να φανταστώ και να γυρίσω στο μυαλό μου τρισδιάστατα σχήματα (π.χ. κύβο, πυραμίδα).	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
16	Είμαι πολύ καλός/ καλή στο να φτιάχνω σκίτσα.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
17	Όταν κλείσω τα μάτια μου, μπορώ εύκολα να φανταστώ μια εικόνα, μια σκηνή ή ένα πρόσωπο που έχω ξαναδεί.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
18	Θυμάμαι πολλές λεπτομέρειες που άλλοι μπορεί να μην έχουν προσέξει.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
19	Όταν μιλώ, σκέφτομαι διαφορετικούς τρόπους, για να εξηγήσω αυτά που σκέφτομαι.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
20	Όταν γράφω κάνω ελάχιστα ή καθόλου γραμματικά και ορθογραφικά λάθη.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 4

Ονοματεπώνυμο: ______________________________________ **Τάξη:** ___________

Σχολείο: ____ **Ημερ.:**___________

1. Οι περισσότεροι άνθρωποι πετάνε στα σκουπίδια τα άδεια τενεκεδάκια. Τα τενεκεδάκια έχουν πολλές ασυνήθιστες χρήσεις. Να γράψεις πιο κάτω όσες πιο πολλές ασυνήθιστες χρήσεις μπορείς να σκεφτείς για ένα τενεκεδάκι.

1……………………………………………………………………………………
2……………………………………………………………………………………
3……………………………………………………………………………………
4……………………………………………………………………………………
5……………………………………………………………………………………
6……………………………………………………………………………………
7……………………………………………………………………………………
8……………………………………………………………………………………
9……………………………………………………………………………………
10…………………………………………………………………………………
11…………………………………………………………………………………
12…………………………………………………………………………………
13…………………………………………………………………………………
14…………………………………………………………………………………
15…………………………………………………………………………………
16…………………………………………………………………………………
17…………………………………………………………………………………
18…………………………………………………………………………………
19…………………………………………………………………………………
20…………………………………………………………………………………
21…………………………………………………………………………………
22…………………………………………………………………………………
23…………………………………………………………………………………
24…………………………………………………………………………………

2. Να συμπληρώσεις όσο το δυνατόν περισσότερους κύκλους, ώστε να σχηματίσεις πολλές και διαφορετικές εικόνες. Προσπάθησε να σκεφτείς εικόνες που κανένας άλλος δεν θα σκεφτεί. Να γράψεις ένα συναρπαστικό τίτλο κάτω από κάθε εικόνα.

……………………… ……………………… ………………………

……………………… ……………………… ………………………

……………………… ……………………τίτλο… ………………………

……………………… ……………………… ………………………

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 5

Έργο 1 – Ομάδες αριθμών

Αριθμός ψηφίων	• Μονοψήφιοι αριθμοί • Διψήφιοι αριθμοί • Τριψήφιοι αριθμοί • Μονοψήφιοι και διψήφιοι αριθμοί • Διψήφιοι και τριψήφιοι αριθμοί • Μονοψήφιοι και τριψήφιοι αριθμοί • Μονοψήφιοι, διψήφιοι και τριψήφιοι αριθμοί
Σύγκριση ψηφίων	• Αριθμοί με κοινό ψηφίο • Αριθμοί με δύο κοινά ψηφία • Αριθμοί με ίδια ψηφία • Αριθμοί με συγκεκριμένο ψηφίο μονάδων • Αριθμοί με συγκεκριμένο ψηφίο δεκάδων • Αριθμοί με συγκεκριμένο ψηφίο εκατοντάδων • Αριθμοί που δεν περιλαμβάνουν συγκεκριμένο ψηφίο
Πράξεις με τα ψηφία των αριθμών	• Άθροισμα ψηφίων • Άθροισμα ομάδας αριθμών • Άθροισμα του ψηφίου των εκατοντάδων με το ψηφίο των μονάδων ισούται με το ψηφίο των δεκάδων κ.λ.π. • Πρόσθεση αριθμού στα ψηφία του αριθμού οδηγούν σε συγκεκριμένο αποτέλεσμα
Διαιρέτες/ πολλαπλάσια αριθμών	• Πολλαπλάσια του αριθμού Χ • Πολλαπλάσια των αριθμών Χ και Ψ • Διαιρετοί με τον αριθμό Χ • Διαιρετοί με τους αριθμούς Χ και Ψ • Παράγοντες αριθμών

Μέγεθος αριθμών	• Αριθμοί μικρότεροι από ένα συγκεκριμένο αριθμό • Αριθμοί μεγαλύτεροι από ένα συγκεκριμένο αριθμό • Αριθμοί μεταξύ των αριθμών Χ-Ψ • Αριθμοί που έχουν τουλάχιστον Χ μονάδες
Κατηγορίες αριθμών	• Πρώτοι αριθμοί • Σύνθετοι αριθμοί • Τρίγωνοι αριθμοί • Τετράγωνοι αριθμοί • Περιττοί αριθμοί • Ζυγοί αριθμοί • Ακέραιοι αριθμοί
Μοτίβα αριθμών	• Αριθμοί με σταθερή διαφορά • Διαδοχικοί αριθμοί • Αριθμοί που το πρώτο τους ψηφίο ανήκει σε αριθμητική σειρά • Αριθμοί που το τελευταίο τους ψηφίο ανήκει σε αριθμητική σειρά
Μη μαθηματικές ιδιότητες	• Ετοιμολογία λέξης
Συνδυασμός μαθηματικών ιδεών	• Αριθμοί με συγκεκριμένο αριθμό ψηφίων που εμπίπτουν σε συγκεκριμένη κατηγορία αριθμών (π.χ. μονοψήφιοι περιττοί αριθμοί) • Αριθμοί με συγκεκριμένο αριθμό ψηφίων που είναι πολλαπλάσια/ διαιρέτες κάποιου αριθμού • Αριθμοί με συγκεκριμένο ψηφίο που είναι πολλαπλάσιο/ διαιρέτης κάποιου αριθμού • Αριθμοί με συγκεκριμένο αριθμό ψηφίων που έχουν κοινά ψηφία

Έργο 2 – Διαφοροποίηση σχήματος

Ονομασία σχημάτων	• Το σχήμα Α είναι τρίγωνο • Το σχήμα Α είναι σκαληνό τρίγωνο • Το σχήμα Α είναι ορθογώνιο τρίγωνο • Το σχήμα Α δεν είναι τετράπλευρο • Το σχήμα Α δεν είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο • Το σχήμα Β είναι τετράγωνο • Το σχήμα Β είναι ρόμβος • Το σχήμα Γ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο
Ιδιότητες σχημάτων ως προς τις γωνίες	• Το σχήμα Α έχει τρεις γωνίες • Το σχήμα Α έχει μόνο μια ορθή γωνία • Στο σχήμα Α όλες οι γωνίες είναι άνισες • Στο σχήμα Α όλες οι γωνίες είναι οξείες • Στο σχήμα Α το άθροισμα των γωνιών είναι 180°
Ιδιότητες σχημάτων ως προς τις πλευρές	• Το σχήμα Α έχει τρεις πλευρές • Το σχήμα Α έχει τις πλευρές του άνισες • Το σχήμα Α έχει την πιο μικρή βάση • Το σχήμα Α έχει μόνο μια πλευρά με μήκος 4 μονάδες • Το σχήμα Α έχει πλευρά με μήκος 3 μονάδες • Το σχήμα Α έχει πλευρά με μήκος 5 μονάδες • Το σχήμα Β έχει τις πλευρές του ίσες • Το σχήμα Β έχει όλες τις πλευρές του ίσες με 4 • Στο σχήμα Β το μήκος και το πλάτος είναι ίσα • Το σχήμα Γ έχει δύο πλευρές ίσες • Στο σχήμα Γ ανά δύο οι πλευρές είναι ίσες • Το σχήμα Γ είναι τετράπλευρο στο οποίο δεν είναι όλες οι πλευρές ίσες

	• Το σχήμα Γ έχει πλευρά με μήκος 2 μονάδες • Στο σχήμα Γ το μήκος και το πλάτος είναι άνισα
Μετρικές σχέσεις (περίμετρος/ εμβαδόν)	• Το εμβαδόν του σχήματος Α είναι 6 τετραγωνικές μονάδες • Το σχήμα Α έχει το μικρότερο εμβαδόν • Το σχήμα Α έχει διαφορετικό τρόπο υπολογισμού του εμβαδού • Το εμβαδόν του σχήματος Β είναι 16 τετραγωνικές μονάδες • Η περίμετρος του σχήματος Β είναι 16 μονάδες • Στο σχήμα Β η περίμετρος και το εμβαδόν είναι ίσα • Το σχήμα Β έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν • Το σχήμα Β έχει τη μεγαλύτερη περίμετρο • Το σχήμα Β έχει διαφορετική περίμετρο από τα άλλα δύο σχήματα • Το εμβαδόν του σχήματος Γ είναι 8 τετραγωνικές μονάδες
Αριθμητικές σχέσεις	• Το σχήμα Α έχει πλευρές με μήκος περιττό αριθμό • Στο σχήμα Α το μήκος των πλευρών είναι διαδοχικοί αριθμοί • Στο σχήμα Γ το μήκος είναι διπλάσιο από το πλάτος • Στο σχήμα Γ το μήκος των πλευρών είναι πολλαπλάσιο του 2
Μη εμφανείς ιδιότητες	• Στο σχήμα Α δεν υπάρχουν παράλληλα ευθύγραμμα τμήματα • Το σχήμα Α δεν έχει άξονα συμμετρίας • Η σύνθεση δύο σχημάτων όμοια με το Α σχηματίζει ορθογώνιο

Έργο 3 – Σκίαση ορθογωνίου

Διαμοιρασμός με μια γραμμή	• Κατακόρυφος διαμοιρασμός • Οριζόντιος διαμοιρασμός • Διαγώνιος διαμοιρασμός • Διαγώνιος διαμοιρασμός (όχι από κάποια κορυφή του σχήματος)
Επαναλαμβανόμενο μοίρασμα και σκίαση των μισών μονάδων	• Διαμοιρασμός σε λωρίδες κάθετα • Διαμοιρασμός σε λωρίδες οριζόντια • Διαμοιρασμός σε λωρίδες διαγώνια • Διαμοιρασμός σε 24 τετραγωνάκια • Διαμοιρασμός σε 4 ορθογώνια • Διαμοιρασμός σε 6 ορθογώνια • Διαμοιρασμός σε 8 ορθογώνια • Διαμοιρασμός σε 12 ορθογώνια • Διαμοιρασμός σε τριγωνάκια
Συμμετρικά σχήματα	• Διαμοιρασμός σε μορφή σκάλας • Διαμοιρασμός σε μορφή L • Διαμοιρασμός σε μορφή «κύματος» • Διαμοιρασμός σε μορφή τριγωνικής σκάλας
Συνδυασμός ιδεών/ Αναπροσαρμογή	• Διαμοιρασμός σε λωρίδες και τετράγωνα • Διαμοιρασμός σε λωρίδες και τρίγωνα • Διαμοιρασμός σε τρίγωνα και τετράγωνα • Διαμοιρασμός σε λωρίδες, τετράγωνα και τρίγωνα • Πιο σύνθετος διαμοιρασμός

Έργο 4 – Διατύπωση προβλημάτων

Άθροισμα είσπραξης	• Είσπραξη της εταιρείας για ένα μήνα • Είσπραξη της εταιρείας για μερικούς μήνες • Συνολική είσπραξη της εταιρείας

	• Εύρεση μηνών με συγκεκριμένη είσπραξη • Είσπραξη από σπίτια ή/και διαμερίσματα • Είσπραξη από συγκεκριμένο αριθμό σπιτιών και διαμερισμάτων
Σύγκριση εισπράξεων	• Σύγκριση εισπράξεων μεταξύ όλων των μηνών • Σύγκριση εισπράξεων μεταξύ μερικών μηνών • Σύγκριση εισπράξεων μεταξύ σπιτιών και διαμερισμάτων • Υπολογισμός διαφοράς είσπραξης μεταξύ δύο μηνών • Εύρεση μηνών με είσπραξη λιγότερη/ περισσότερη από συγκεκριμένο ποσό
Άθροισμα κτισμάτων	• Άθροισμα σπιτιών ή/και διαμερισμάτων σε ένα ή μερικούς μήνες • Άθροισμα σπιτιών και διαμερισμάτων
Σύγκριση κτισμάτων	• Σύγκριση κτισμάτων σε δύο μήνες • Σύγκριση σπιτιών με διαμερίσματα σε ένα μήνα • Εύρεση μηνών με λιγότερο/ περισσότερο αριθμών σπιτιών/ διαμερισμάτων
Φόρος-Κέρδος εταιρείας	• Υπολογισμός φόρου σε μερικούς μήνες • Υπολογισμός συνολικού φόρου • Υπολογισμός φόρου από σπίτια ή διαμερίσματα • Υπολογισμός κέρδους σε μερικούς μήνες • Υπολογισμός συνολικού κέρδους • Υπολογισμός κέρδους από σπίτια ή διαμερίσματα • Σύγκριση κέρδους- φόρου
Μέσος όρος	• Υπολογισμός μέσου όρου εισπράξεων • Υπολογισμός μέσου όρου εισπράξεων από διαμερίσματα ή σπίτια

	• Υπολογισμός μέσου όρου κτισμάτων • Υπολογισμός μέσου όρου διαμερισμάτων ή σπιτιών
Εμφανείς απαντήσεις	• Αναπαραγωγή δεδομένων που υπάρχουν στον πίνακα
Επέκταση/ προσθήκη παραμέτρων	• Επέκταση για τις πωλήσεις άλλων μηνών • Υποθέσεις για τον αριθμό των σπιτιών/ διαμερισμάτων με δεδομένη την είσπραξη από τον πίνακα • Υπολογισμός του χρονικού διαστήματος που θα πληρώνει κάποιος για την αγορά ενός κτίσματος, δεδομένης της μηνιαίας δόσης • Εύρεση διαφορετικών απαντήσεων για τον αριθμό των σπιτιών και των διαμερισμάτων που πωλήθηκαν σε κάποιους μήνες, δεδομένης της συνολικής είσπραξης • Εύρεση διαφορετικών απαντήσεων για τον αριθμό των κτισμάτων που πωλήθηκαν σε κάποιους μήνες, δεδομένης της συνολικής είσπραξης • Υπόθεση για το ποσό της είσπραξης της εταιρείας για ένα μήνα και εύρεση τι μπορεί να πωλήθηκε

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 6

Πρωτόκολλο Συνεντεύξεων

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι βασικές ερωτήσεις που έγιναν στους μαθητές κατά τη διάρκεια της συνέντευξης, χωρίς κατ' ανάγκη να ακολουθείται κάθε φορά η ίδια σειρά. Με αρίθμηση φαίνονται οι ερωτήσεις που έγιναν, ενώ με κουκκίδες παρουσιάζονται ενδεικτικά στοιχεία που λαμβάνονταν υπόψη κατά την παρατήρηση της εργασίας των μαθητών.

Αναφέρουμε στο/η μαθητή/μαθήτρια ότι ο λόγος της συνέντευξης είναι για να καταλάβουμε τον τρόπο σκέψης του/της, καθώς λύνει ένα μαθηματικό πρόβλημα. Για αυτό, ζητούμε από το/τη μαθητή/μαθήτρια να μας εξηγεί τι κάνει καθώς εργάζεται.

Κατανόηση:

1. Έχεις καταλάβει το πρόβλημα;
2. Μπορείς να μου εξηγήσεις με δικά σου λόγια τι θα πρέπει να κάνεις;
    - Διαβάζει αρκετές φορές το πρόβλημα;
    - Υπογραμμίζει σημεία που θα το/τη βοηθήσουν;
    - Κάνει ερωτήσεις που μπορεί να το/τη διευκολύνουν να αντιληφθεί το πρόβλημα;
    - Κατά την εξήγηση της άσκησης απλώς ξαναδιαβάζει το πρόβλημα ή υπάρχουν στοιχεία που δείχνουν ότι πράγματι κατανοεί;
    - Δίνει παραδείγματα κατά την εξήγηση του προβλήματος;

Διερεύνηση:

1. Πώς σκέφτεσαι να εργαστείς, για να λύσεις το πρόβλημα; Θα ήθελα καθώς εργάζεσαι να μου εξηγείς πώς σκέφτεσαι.
2. Πόσες λύσεις νομίζεις ότι μπορείς να βρεις; Γιατί το λες αυτό; Έχεις κάποια στρατηγική που θα σε βοηθήσει να βρεις πολλές λύσεις;
    - Αναλύει την προβληματική κατάσταση σε υποπροβλήματα, υποερωτήματα, υποπεριπτώσεις;

- Εντοπίζει ιδέες σχετικές με το πρόβλημα;
- Εντοπίζει σχέσεις μεταξύ των αριθμών 2 και 8;
- Σκέφτεται να χρησιμοποιήσει διαφορετικά είδη πράξεων ή αριθμών;
- Χρησιμοποιεί συστηματικά τον ίδιο τρόπο;
- Βρίσκει άλλα ζευγάρια που έχουν την ίδια σχέση;

Συσχέτιση:

1. Τι σκέφτεσαι να χρησιμοποιήσεις;
2. Πώς ήρθε αυτή η λύση στο μυαλό σου; Σχετίζεται με κάποια άλλη λύση;
3. Μετά από μια λύση, πώς καταλήγεις σε επόμενη;
4. Τι σε βοήθησε να σκεφτείς αυτή την απάντηση;
    - Συσχετίζει λύσεις ή μαθηματικές ιδέες;
    - Αναφέρει ότι η άσκηση είναι δύσκολη ή διαφορετική από άλλες φορές;
    - Σκέφτεται αν έχει λύσει παρόμοια άσκηση προηγουμένως;
    - Συζητά για τις ομοιότητες και τις διαφορές με άλλου είδους ασκήσεις;
    - Αναφέρεται σε προϋπάρχουσες γνώσεις ή εμπειρίες;

Κατασκευή:

1. Ποιες είναι οι λύσεις που μπορείς να σκεφτείς; Σκέψου και άλλα ζευγάρια που προκύπτουν όταν περάσουν από την αριθμητική μηχανή και γίνει η ίδια διαδικασία.
2. Πώς σκέφτηκες την πρώτη σου λύση; Γιατί πρότεινες αυτή πρώτα;
3. Πώς εργάζεσαι για να βρίσκεις άλλες λύσεις;
    - Τι είδους λύσεις προτείνονται;
        - Όλες ακολουθούν τον ίδιο τρόπο σκέψης;
        - Επικεντρώνονται σε ένα είδος μαθηματικής ιδέας ή έννοιας ή αφού βρήκε όλες τις σχέσεις μεταξύ του 2 και 8 εναλλάσσει συνεχώς λύσεις;
    - Πώς γίνεται η μετάβαση σε άλλο είδος σκέψης;
        - Χρειάζεται παρότρυνση ή από μόνος/η του/της σκέφτεται άλλη σχέση;
        - Γιατί άλλαξε τρόπο σκέψης;
        - Φαίνεται να ακολουθεί κάποια στρατηγική;

- Αυξάνεται ο βαθμός συνθετότητας των απαντήσεων που προτείνονται;
    - Υπάρχει λογική εναλλαγή μεταξύ των απαντήσεων;
    - Υπάρχει σχέση μεταξύ της προηγούμενης και της επόμενης απάντησης;
    - Υπάρχει λογική σειρά/ εξέλιξη στις μαθηματικές ιδέες που εμφανίζονται ή είναι τυχαία;
    - Φαίνεται να ακολουθεί συγκεκριμένη διαδικασία για να καταλήξει στη λύση;
    - Προκύπτει μετά από αναλογισμό των μειονεκτημάτων και των πλεονεκτημάτων κάθε λύσης;
- Πώς προέκυψε η δημιουργική ιδέα/ λύση;
    - Εμφανίστηκε ξαφνικά;
    - Ήταν λογικό επακόλουθο των ιδεών που προηγήθηκαν;
    - Ο/Η μαθητής/μαθήτρια σταμάτησε να προσπαθεί χωρίς συγκεκριμένο λόγο;
- Προτού εμφανιστεί η δημιουργική απάντηση προηγείται στάδιο περισυλλογής ή υπάρχει ενεργητικότητα;
    - Σκεφτόταν συνειδητά ή ασχολήθηκε με κάτι άλλο, π.χ. μιλά για κάτι άσχετο;
    - Οι απαντήσεις έρχονταν η μια μετά την άλλη ή ο μαθητής σταματούσε για να σκεφτεί;

Αξιολόγηση:

1. Ποια θεωρείς ως την πιο δημιουργική σου απάντηση;
2. Γιατί διαλέγεις τη συγκεκριμένη απάντηση; Τι διαφέρει σε σχέση με τις υπόλοιπες λύσεις σου;
    - Ο μαθητής/ η μαθήτρια αιτιολογεί ποια από τις απαντήσεις του/της είναι η πιο δημιουργική;
        - Αναφέρεται σε πολλούς αριθμούς, σύμβολα;
        - Είναι λύση που δεν θα σκεφτεί άλλος συμμαθητής του/της;
        - Γενικά επιχειρηματολογεί για να υποστηρίξει το βαθμό δημιουργικότητας και πρωτοτυπίας της ιδέας/λύσης;

Επικοινωνία:

1. Μπορείς να μου εξηγήσεις πώς εργάστηκες; Πώς ξεκίνησες και πού κατέληξες;
2. Πώς θα περιέγραφες στο/στη δάσκαλο/ δασκάλα σου τον τρόπο εργασίας σου;
3. Τι θα συμβούλευες άλλους μαθητές να κάνουν για να βρουν τέτοιες απαντήσεις όπως τις δικές σου;
   - Ο/Η μαθητής/ μαθήτρια εξηγά με σαφήνεια τον τρόπο σκέψης του;
   - Διαβάζει απλώς τις λύσεις που έγραψε;
   - Κάνει αναφορά σε γενικές ιδέες που υπάρχουν στις λύσεις του/της;

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 7

Ονοματεπώνυμο: ....

Τάξη: .... Ημερομηνία: ....

1. Να γράψεις λέξεις που σου έρχονται στο μυαλό, όταν ακούς τη λέξη «Δημιουργικότητα»;

....

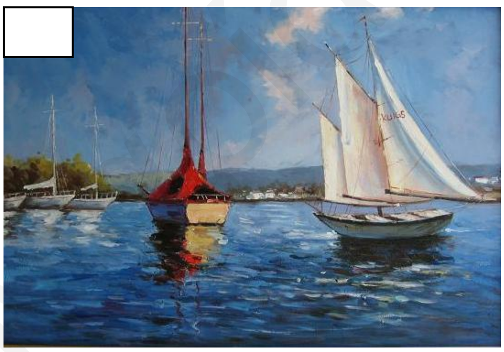
.... ↖ ↑ ↗ ....

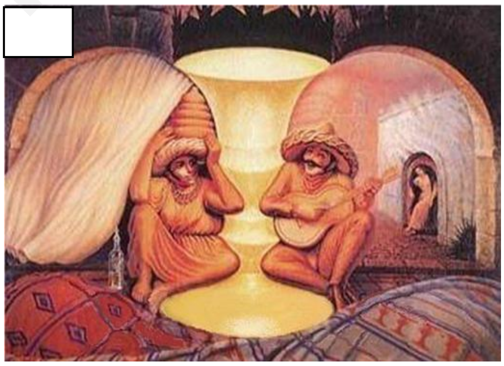
.... ← **Δημιουργικότητα** → ....

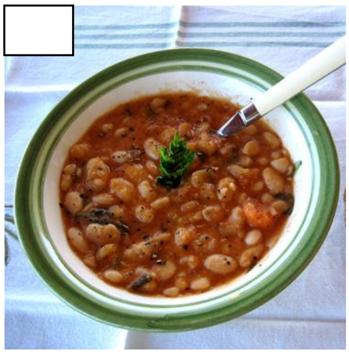
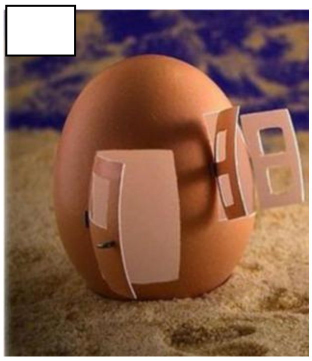
.... ↙ ↓ ↘ ....

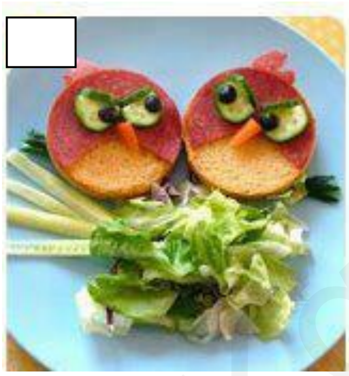
....

2. Να σημειώσεις με ✓ στις εικόνες που παρουσιάζουν δημιουργική συμπεριφορά και να εξηγήσεις τους λόγους.



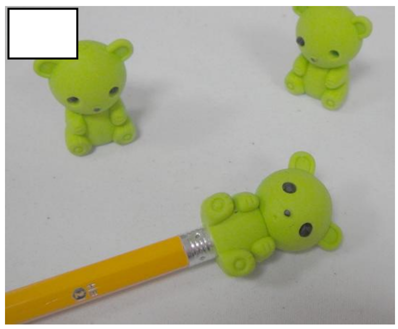









Erase


3. Να συμπληρώσεις τις πιο κάτω προτάσεις. Μπορείς να ψάξεις στο διαδίκτυο, για να βρεις ιδέες.

(α) Άλλες δημιουργικές ιδέες/ αντικείμενα που είδα ή γνωρίζω είναι:

(β) Οι δημιουργικές ιδέες έχουν τα πιο κάτω χαρακτηριστικά:

(γ) Οι λόγοι που κάποιος μπορεί να καταλήξει σε δημιουργικές ιδέες είναι:

4. Να σκεφτείς και να γράψεις με ποιους τρόπους μπορεί ένα άτομο να καταλήξει σε δημιουργικές ιδέες.

1...

2...

3...

4...

5...

6...

7...

8...

5. Ας κατασκευάσουμε κάτι χρήσιμο για τους συμμαθητές και τους δασκάλους μας.

ΘΕΜΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ:

Η ομάδα μας θα εργαστεί για:

____

ΙΔΕΕΣ ΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗ/ ΒΕΛΤΙΩΣΗ ΤΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ:

……………………………………

…………………………………… ……………………………………

Ιδέες

…………………………………… ……………………………………

…………………………………… ……………………………………

……………………………………

ΕΠΙΛΟΓΗ ΙΔΕΑΣ:

Η ομάδα μας θα ____

____

Η πιο πάνω ιδέα επιλύει την προβληματική κατάσταση γιατί ________________________

____

ΣΧΕΔΙΑΖΟΝΤΑΣ ΤΗΝ ΙΔΕΑ:

6. Να γράψεις τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα που έχει η ιδέα σου, στην επίλυση της προβληματικής κατάστασης.

ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ	ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ
………………………………………………………………	………………………………………………………………
………………………………………………………………	………………………………………………………………
………………………………………………………………	………………………………………………………………
………………………………………………………………	………………………………………………………………
………………………………………………………………	………………………………………………………………

7. Να σκεφτείς και να γράψεις ένα όνομα για το προϊόν που θα κατασκευάσει η ομάδα σου. Έπειτα, να φτιάξεις στο Power Point μια διαφήμιση για το προϊόν σου.

Το προϊόν ονομάζεται ____, λόγω

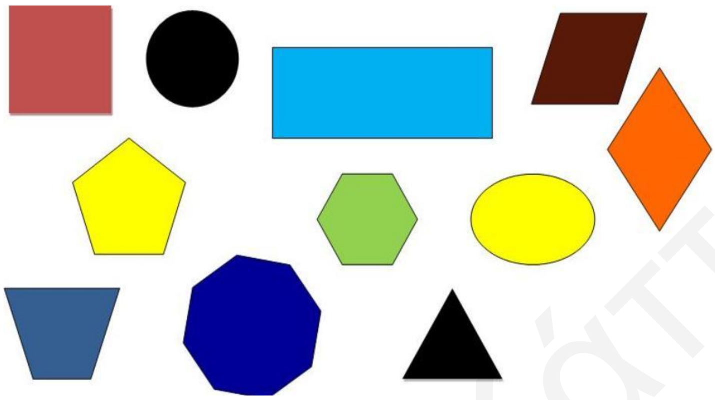
____

____

Ονοματεπώνυμο: ....

Τάξη: .... Ημερομηνία: ....

1. Να παρατηρήσεις τα πιο κάτω σχήματα. Να γράψεις ερωτήσεις που θα σε βοηθήσουν να μαντέψεις ποιο σχήμα επέλεξε ο διπλανός σου. Να θυμάσαι ότι οι ερωτήσεις που θα γράψεις, θα πρέπει να απαντώνται με «Ναι» ή «Όχι».



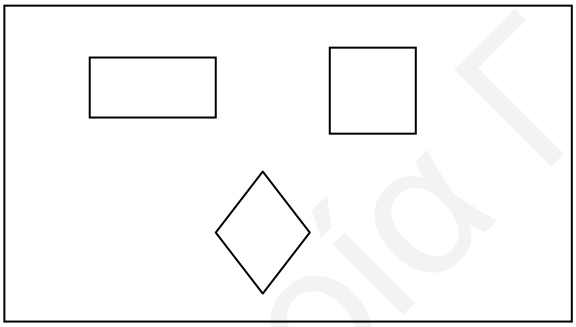
2. Να απαντήσεις στα πιο κάτω ερωτήματα.

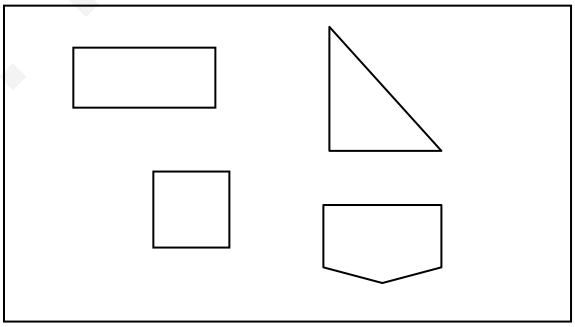
(α) Αν το κρυμμένο σχήμα είναι τετράγωνο ή ρόμβος, ποια ερώτηση θα έκανες για να μαντέψεις σωστά το σχήμα; Να εξηγήσεις την απάντησή σου. Να σκεφτείς και άλλες τέτοιες ερωτήσεις.

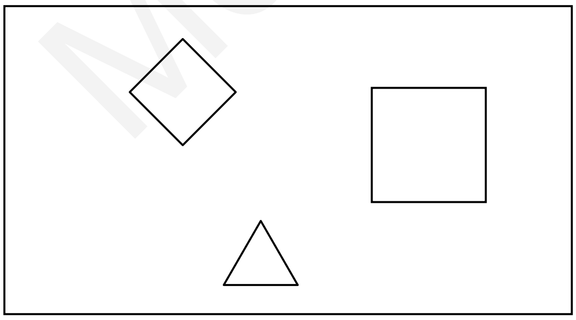
(β) Αν το κρυμμένο σχήμα είναι ορθογώνιο ή κύκλος, ποια ερώτηση θα έκανες για να μαντέψεις σωστά το σχήμα; Να εξηγήσεις την απάντησή σου. Να σκεφτείς και άλλες τέτοιες ερωτήσεις.

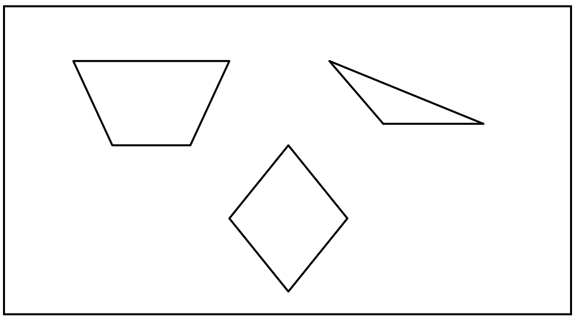
(γ) Αν το κρυμμένο σχήμα είναι ισοσκελές τρίγωνο ή τραπέζιο, ποια ερώτηση θα έκανες για να μαντέψεις σωστά το σχήμα; Να εξηγήσεις την απάντησή σου. Να σκεφτείς και άλλες τέτοιες ερωτήσεις.

3. Να παρατηρήσεις τις πιο κάτω ομάδες σχημάτων και να τις ονομάσεις με βάση μια κοινή ιδιότητα.









4. Να κατασκευάσεις τρεις διαφορετικές ομάδες σχημάτων, χρησιμοποιώντας το σύνδεσμο http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=34. Να αποθηκεύσεις τις ομάδες σχημάτων με το όνομα «Sximata4». Να γράψεις πιο κάτω το όνομα των ομάδων.

<u>Οδηγίες</u>:

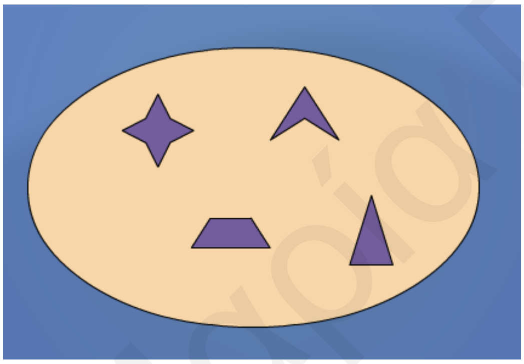
- Να επιλέξεις το κουμπί «Select a rule» που βρίσκεται κάτω αριστερά και να πατήσεις σε οποιαδήποτε επιλογή για να εμφανιστεί ένα οβάλ σχήμα.
- Να μεταφέρεις από τη λίστα σχημάτων που βρίσκεται στο πάνω μέρος της οθόνης τα σχήματα της ομάδας σου.

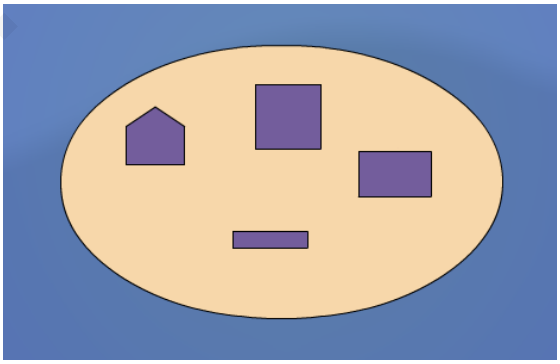
Ομάδα 1: ____

Ομάδα 2: ____

Ομάδα 3: ____

5. Να παρατηρήσεις τις πιο κάτω ομάδες σχημάτων και να τις ονομάσεις με βάση κάποια ιδιότητα. Να ονομάσεις τις ομάδες σχημάτων με διαφορετικούς τρόπους.





______________________________ ______________________________

______________________________ ______________________________

______________________________ ______________________________

______________________________ ______________________________

______________________________ ______________________________

6. Να κατασκευάσεις τρεις διαφορετικές ομάδες σχημάτων που να μπορούν να ονομαστούν με διαφορετικούς τρόπους, χρησιμοποιώντας το σύνδεσμο http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=34. Να αποθηκεύσεις κάθε ομάδα με το όνομα «Sximata6». Να γράψεις πιο κάτω τις ιδιότητες που ικανοποιούν οι ομάδες σχημάτων.

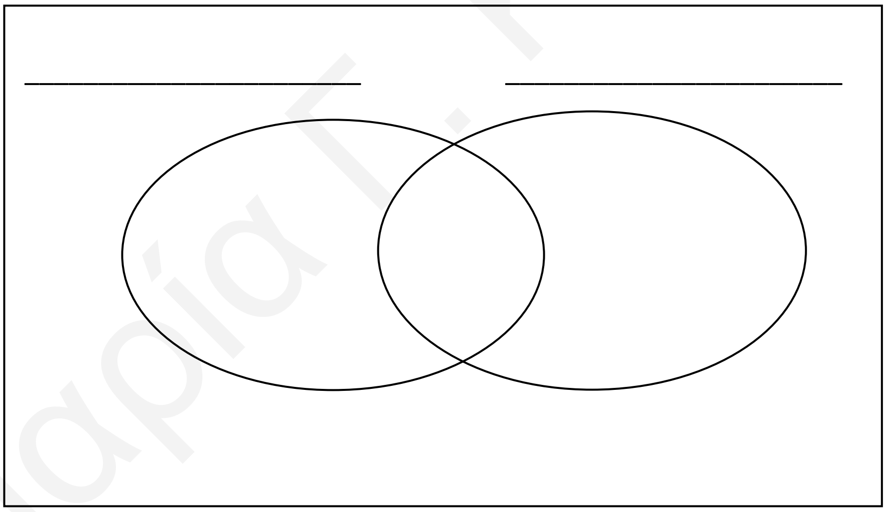
Ομάδα 1: ____

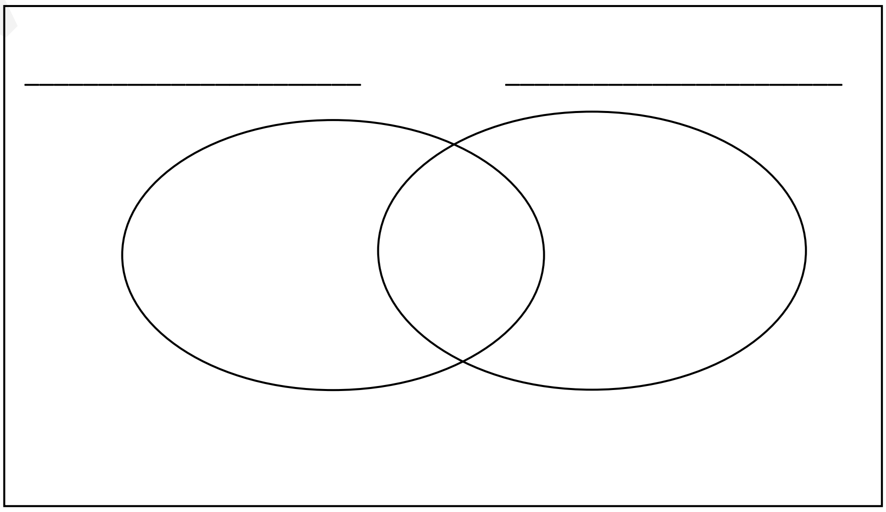
Ομάδα 2: ____

Ομάδα 3: ____

7. Να κατασκευάσεις τρία βέννεια διαγράμματα, χρησιμοποιώντας το σύνδεσμο http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=34.

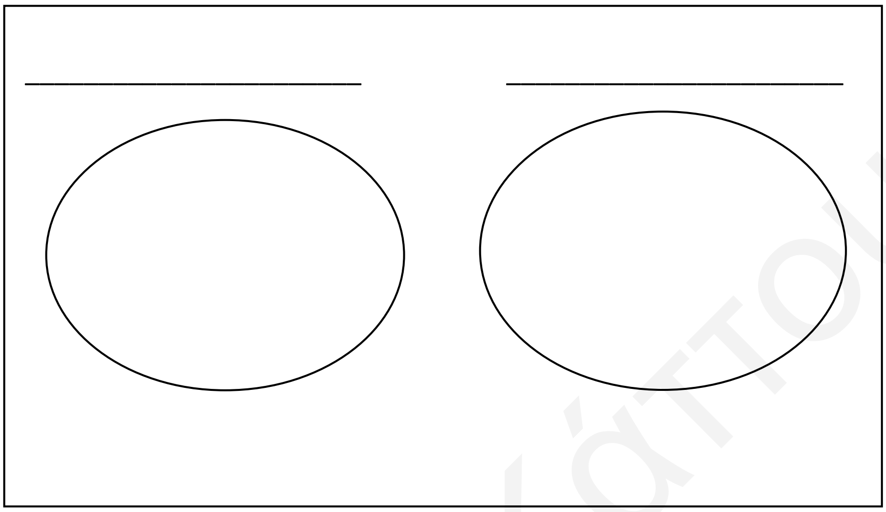
- Για να προσθέσεις δεύτερο οβάλ σχήμα, να επιλέξεις το κουμπί «Select a rule» που βρίσκεται κάτω δεξιά και να πατήσεις σε οποιαδήποτε επιλογή.
- Να αποθηκεύσεις τα διαγράμματα με το όνομα «Sximata7».



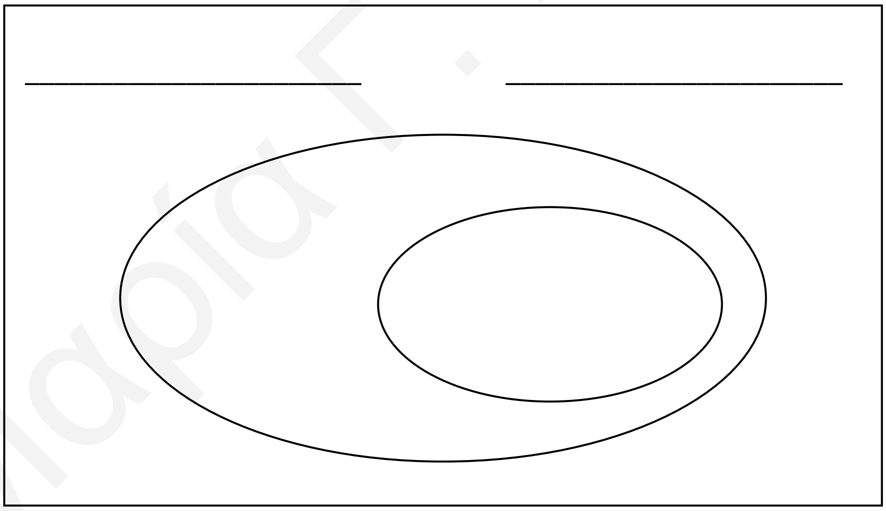


8. Να κατασκευάσεις βέννεια διαγράμματα, χρησιμοποιώντας το σύνδεσμο http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=34, ακολουθώντας τις οδηγίες.

(α) Να μην μπορεί να τοποθετηθεί κανένα σχήμα στον κοινό χώρο μεταξύ των σχημάτων.



(β) Όλα τα σχήματα που ανήκουν στη μία ομάδα να ανήκουν και στην άλλη.



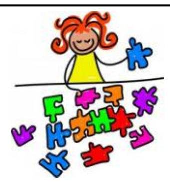
Ονοματεπώνυμο: ....

Τάξη: .... Ημερομηνία: ....

1. Να χρησιμοποιήσεις το εφαρμογίδιο http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=7, για να «κόψεις» ένα ορθογώνιο, ακολουθώντας τους πιο κάτω κανόνες:
   - Να φέρεις δύο ευθύγραμμα τμήματα στο ορθογώνιο.
   - Τα ευθύγραμμα τμήματα θα πρέπει να ξεκινάνε από μια πλευρά του ορθογωνίου και να καταλήγουν σε άλλη (όχι όμως από γωνία).

Να σχεδιάσεις τα «κοψίματα» που έφερες στο ορθογώνιο, για να σχηματίσεις το παζλ σου.

2. Να ανακατέψεις τα κομμάτια του παζλ σου και να προσπαθήσεις να το συναρμολογήσεις. Να ζητήσεις από το διπλανό σου να συναρμολογήσει το παζλ. Να συμπληρώσεις τα πιο κάτω ερωτήματα.



(α) Να γράψεις ποια στοιχεία σε βοήθησαν να συναρμολογήσεις το παζλ.

(β) Να αναφέρεις τι είδους σχήματα υπάρχουν στο παζλ.

(γ) Να εξηγήσεις τι θα έκανε ένα παζλ πιο δύσκολο;

3. Να χρησιμοποιήσεις το εφαρμογίδιο, για να κόψεις τα ορθογώνια με **δύο** ευθύγραμμα τμήματα, ώστε να κατασκευάσεις ένα παζλ με (α) το μεγαλύτερο αριθμό κομματιών και ένα παζλ με (β) το μικρότερο αριθμό κομματιών.
Να σχεδιάσεις στα πιο κάτω ορθογώνια τα δύο ευθύγραμμα τμήματα.

Μεγαλύτερος αριθμός κομματιών

Μικρότερος αριθμός κομματιών

4. Να χρησιμοποιήσεις το εφαρμογίδιο, για να κόψεις τα ορθογώνια με **τρία** ευθύγραμμα τμήματα, ώστε να κατασκευάσεις ένα παζλ με (α) το μεγαλύτερο αριθμό κομματιών και ένα παζλ με (β) το μικρότερο αριθμό κομματιών.
Να σχεδιάσεις στα πιο κάτω ορθογώνια τα τρία ευθύγραμμα τμήματα.

Μεγαλύτερος αριθμός κομματιών

Μικρότερος αριθμός κομματιών

Για να κατασκευάσω ένα παζλ με το μεγαλύτερο αριθμό κομματιών____________________

____

____

Για να κατασκευάσω ένα παζλ με το μικρότερο αριθμό κομματιών____________________

____

____

5. Να ανακατέψεις τα κομμάτια του παζλ σου και να προσπαθήσεις να το συναρμολογήσεις. Να απαντήσεις στο πιο κάτω ερώτημα.

Ποιο παζλ ήταν πιο εύκολο στη συναρμολόγηση, αυτό της Δραστηριότητας 2 ή της Δραστηριότητας 5; Να αιτιολογήσεις την απάντησή σου.

____

____

____

6. Να χρησιμοποιήσεις το εφαρμογίδιο, για να κόψεις τα ορθογώνια με **τρία** ευθύγραμμα τμήματα, έτσι ώστε:

(α) να μην σχηματιστούν τρίγωνα

(β) να σχηματιστούν τρία τρίγωνα και ένα τετράπλευρο

(γ) να σχηματιστούν μόνο τετράπλευρα

(δ) να σχηματιστεί ένα πεντάπλευρο.

Να σχεδιάσεις στα πιο κάτω ορθογώνια τα τρία ευθύγραμμα τμήματα.

7. Να χρησιμοποιήσεις το εφαρμογίδιο, για να κόψεις τα ορθογώνια με **δύο ή τρία** ευθύγραμμα τμήματα, έτσι ώστε να σχηματιστούν όμοια (=ίδια) σχήματα.

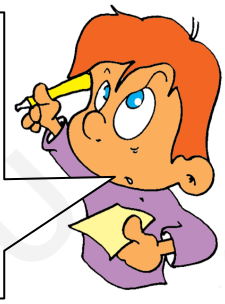
Να σχεδιάσεις στα πιο κάτω ορθογώνια τα ευθύγραμμα τμήματα.
Να προσπαθήσεις να βρεις όσες πιο πολλές λύσεις μπορείς.

Ονοματεπώνυμο: ....

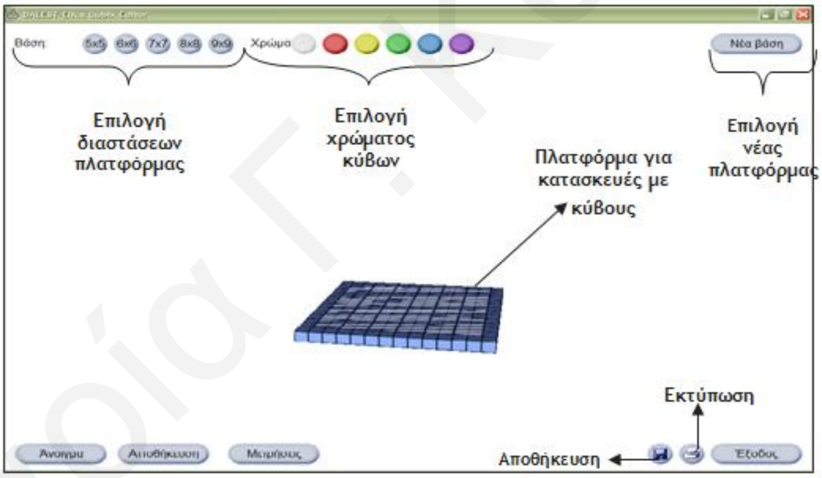
Τάξη: ....   Ημερομηνία: ....

1. Να διαβάσεις το πιο κάτω πρόβλημα και στη συνέχεια, να ακολουθήσεις τις οδηγίες των δραστηριοτήτων.

Η οικοδομική εταιρεία «Στέγη» θέλει τη βοήθειά σου. Ο αρχιτέκτονας της εταιρείας παραιτήθηκε στο μέσο διεκπεραίωσης μιας εργασίας. Στα πλαίσια αυτής της εργασίας, ο διευθυντής και τα μέλη της εταιρείας επιδιώκουν την κατασκευή πρωτότυπων σπιτιών με κύβους σε χαμηλές τιμές και μειωμένο κόστος. Εσύ μπορείς να τους βοηθήσεις να ολοκληρώσουν αυτή την εργασία;



(α) Να ανοίξεις την εφαρμογή “Κυβοκατασκευές” (βλέπε Εικόνα 1) και αφού ελέγξεις τις λειτουργίες του προγράμματος, να εξηγήσεις στους συνεργάτες σου με ποιο τρόπο θα μπορούσαν να το αξιοποιήσουν, για να σχεδιάσουν τα σπίτια.



Εικόνα 1. Εφαρμογή “Κυβοκατασκευές”.

2. Να κατασκευάσεις με τη βοήθεια της εφαρμογής “Κυβοκατασκευές”, όσα περισσότερα και διαφορετικά σπίτια μπορείς με τέσσερις κύβους του ίδιου μεγέθους. Να αποθηκεύσεις τα αρχεία με κάθε κατασκευή σου, με το όνομα *spiti1.txt, spiti2.txt κ.τ.λ.*

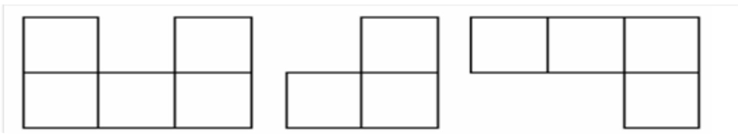
(α) Πόσα ισόγεια σπίτια μπορείς να κατασκευάσεις; ____________________________

(β) Πόσα σπίτια με ένα όροφο μπορείς να κατασκευάσεις; _______________________

(γ) Πόσα σπίτια με δύο ορόφους μπορείς να κατασκευάσεις; _____________________

(δ) Πόσα σπίτια με τρεις ορόφους μπορείς να κατασκευάσεις; ____________________

3. Να κατασκευάσεις το πιο κάτω σπίτι με βάση τις όψεις που σου δίνονται. Να αποθηκεύσεις τα αρχεία με κάθε κατασκευή σου, με το όνομα *opseis1.txt, opseis2.txt*.

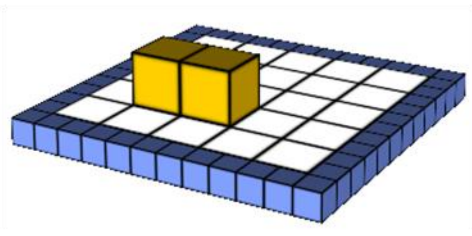


ΠΡΟΣΟΨΗ ΠΛΑΓΙΑ ΟΨΗ ΚΑΤΟΨΗ

4. Ο διευθυντής της εταιρείας θέλει να υπολογίσει το κόστος κατασκευής κάθε σπιτιού. Να απαντήσεις στα πιο κάτω ερωτήματα, για να τον βοηθήσεις να πάρει τις αποφάσεις που χρειάζεται.

(α) Να γράψεις τα έξοδα που έχει η εταιρεία, κατά την κατασκευή των σπιτιών.

(β) Τα έξοδα της εταιρείας θα είναι τελικά: το κόστος του οικοπέδου, το κόστος για το βάψιμο των εξωτερικών τοίχων του σπιτιού, το κόστος για την κατασκευή της στέγης και το κόστος για την κατασκευή των τοίχων. Να περιγράψεις τρόπους υπολογισμού των εξόδων της εταιρείας, με αναφορά στην πιο κάτω κατασκευή:



5. Να απαντήσεις στα πιο κάτω ερωτήματα. Να υπολογίσεις το κόστος κατασκευής κάθε σπιτιού που πρότεινες στη Δραστηριότητα 2 και να συμπληρώσεις τον πίνακα που ακολουθεί, έχοντας υπόψη τις ακόλουθες τιμές:

- €10 000 για κάθε τετραγωνική μονάδα γης του οικοπέδου (το εμβαδόν του οικοπέδου είναι διπλάσιο του εμβαδού της βάσης του σχεδίου - σπιτιού)
- €4 000 για κάθε τετραγωνική μονάδα του εξωτερικού τοίχου που βάφεται
- €6 000 για κάθε τετραγωνική μονάδα της στέγης.

(α) Ποια νομίζεις ότι είναι η πιο φθηνή κατασκευή; Ποια νομίζεις ότι είναι η πιο ακριβή κατασκευή;

____

____

	Οικόπεδο (τ.μ.)	**Κόστος Οικοπέδου (€)**	**Εξωτερικός τοίχος (τ.μ.)**	**Κόστος Βαψίματος (€)**	**Στέγη (τ. μ.)**	**Κόστος Στέγης (€)**	**ΣΥΝΟΛΙΚΟ ΚΟΣΤΟΣ (€)**
Κατασκευή 1							
Κατασκευή 2							
Κατασκευή 3							
Κατασκευή 4							
Κατασκευή 5							
Κατασκευή 6							
Κατασκευή 7							
Κατασκευή 8							
Κατασκευή 9							
Κατασκευή 10							
Κατασκευή 11							
Κατασκευή 12							

(β) Ποια είναι η πιο ακριβή κατασκευή και γιατί; Είχες δίκαιο στο ερώτημα (α);

____

____

____

(γ) Ποια είναι η πιο φθηνή κατασκευή και γιατί; Είχες δίκαιο στο ερώτημα (α);

____

____

____

(δ) Είναι απαραίτητο να υπολογιστεί το κόστος των κύβων σε κάθε κατασκευή; Να δικαιολογήσεις την απάντησή σου.

____

____

____

6. Να επιλέξεις ένα από τα σπίτια που σχεδίασες και να συμπληρώσεις το διαφημιστικό φυλλάδιο που ακολουθεί. Το διαφημιστικό φυλλάδιο θα περιλαμβάνει τις πιο κάτω πληροφορίες:

- μια σύντομη περιγραφή του σπιτιού (π.χ., έχει ένα/δύο ορόφους, σε μεγάλο/μικρό οικόπεδο, κτλ)
- το σχέδιο του σπιτιού
- το κόστος για το οικόπεδο, το κόστος για το βάψιμο, το κόστος για τη στέγη και το συνολικό κόστος του σπιτιού
- τα πλεονεκτήματά του

ΣΠΙΤΙ

1. Περιγραφή σπιτιού:

2. Σχέδιο σπιτιού

3. Κόστος σπιτιού:

Κόστος Οικοπέδου (€)	
Κόστος Βαψίματος (€)	
Κόστος Στέγης (€)	
Συνολικό κόστος (€)	

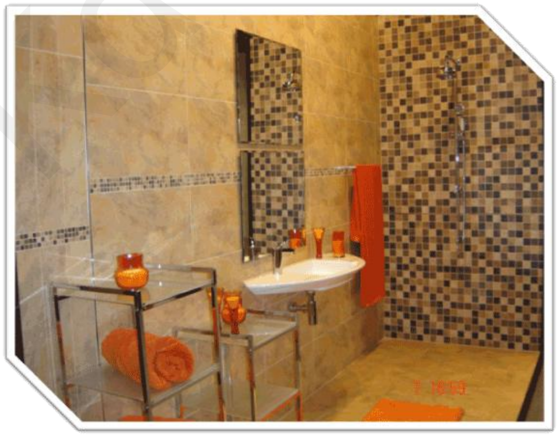
4. Πλεονεκτήματα σπιτιού:

Οικοδομική Εταιρεία «ΣΤΕΓΗ»

Ονοματεπώνυμο: ....

Τάξη: ....   Ημερομηνία: ....

1. Να παρατηρήσεις τις πιο κάτω εικόνες και να αναφέρεις ποια μοτίβα παρατηρείς στα σπίτια. Να εξηγήσεις την απάντησή σου.



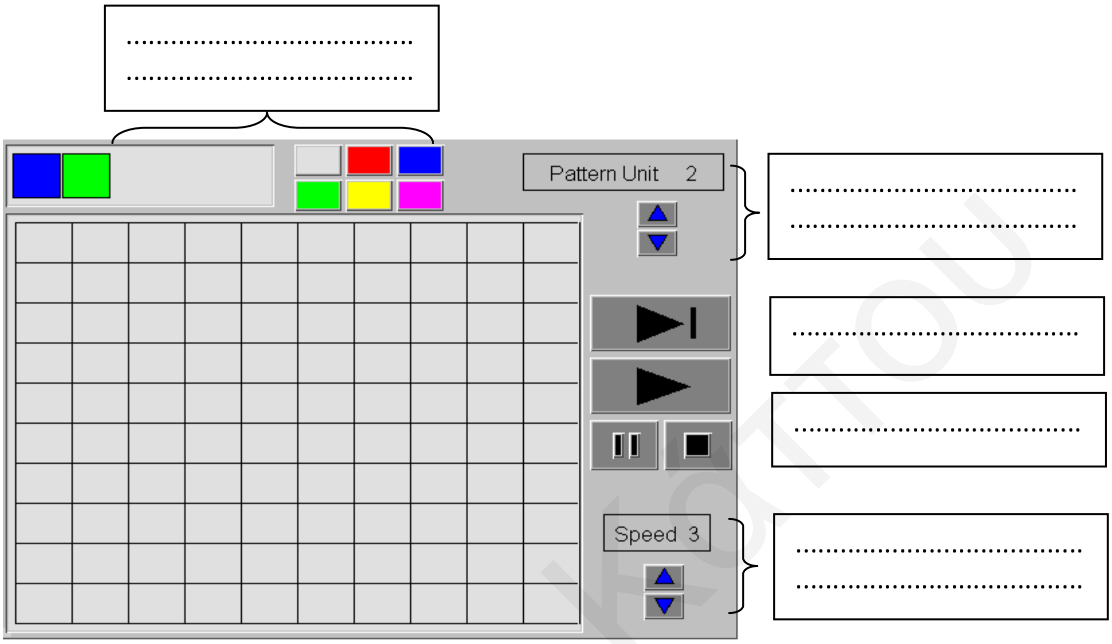
Μοτίβα:

____

____

2. Να ανοίξεις το σύνδεσμο http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=24462, για να σχεδιάσεις την ψηφίδα που θα τοποθετηθεί στην κουζίνα και στο μπάνιο. Να ακολουθήσεις τις πιο κάτω οδηγίες και να απαντήσεις στα ερωτήματα.

(α) Να εντοπίσεις τις λειτουργίες κάθε κουμπιού και να τις καταγράψεις στο πιο κάτω σχεδιάγραμμα.



(β) Να κατασκευάσεις τέσσερα διαφορετικά μοτίβα (αλλάζοντας τον αριθμό των ψηφίδων που επαναλαμβάνεται) στα οποία να σχηματίζονται στήλες με το ίδιο χρώμα ψηφίδων. Να γράψεις πιο κάτω το μέρος του μοτίβου που επαναλαμβάνεται.

Μοτίβο 1: ______________________________

Μοτίβο 2: ______________________________

Μοτίβο 3: ______________________________

Μοτίβο 4: ______________________________

Παρατήρηση:

____

____

(γ) Να κατασκευάσεις δύο διαφορετικά μοτίβα (αλλάζοντας τον αριθμό των ψηφίδων που επαναλαμβάνεται) στα οποία να σχηματίζονται διαγώνιες γραμμές που οι ψηφίδες να έχουν κόκκινο χρώμα. Να γράψεις πιο κάτω το μέρος που επαναλαμβάνεται.

Μοτίβο 1: ______________________________

Μοτίβο 2: ______________________________

(δ) Να κατασκευάσεις τέσσερα διαφορετικά μοτίβα (αλλάζοντας τον αριθμό των ψηφίδων που επαναλαμβάνεται) στα οποία ή εικοστή ψηφίδα να είναι μπλε.

Με 2 ψηφίδες:______________________________

Με 3 ψηφίδες:______________________________

Με 4 ψηφίδες:______________________________

Με 5 ψηφίδες:______________________________

(ε) Να κατασκευάσεις το δικό σου μοτίβο για την κουζίνα και το μπάνιο. Να αποθηκεύσεις τα μοτίβα σου και να τα περιγράψεις πιο κάτω.

Μοτίβο για κουζίνα: ______________________________

Μοτίβο για μπάνιο: ______________________________

3. Να ανοίξεις το σύνδεσμο
http://www.apples4theteacher.com/math/games/blank-100-number-chart.html, για να σχεδιάσεις το πάτωμα στο καθιστικό, ακολουθώντας τις πιο κάτω οδηγίες:

- Το πάτωμα θα αποτελείται από δύο χρώματα.
- Το μισό πάτωμα θα είναι χρωματισμένο με το ένα χρώμα και το υπόλοιπο με το άλλο χρώμα.

Να προτείνεις όσους πιο πολλούς και διαφορετικούς τρόπους μπορείς, για τη δημιουργία του πατώματος (χρησιμοποιώντας τα ίδια χρώματα). Να αποθηκεύσεις τις απαντήσεις σου με το όνομα Patoma.

(α) Πόσες απαντήσεις βρήκες; ______________________________

(β) Νομίζεις ότι μπορείς να βρεις και άλλες απαντήσεις; Να εξηγήσεις την απάντησή σου.

____

____

____

____

(γ) Μπορείς να σχηματίσεις ομάδες μοτίβων; Αν ναι ποιες;

____

____

4. Να περιγράψεις τα κάγκελα που θα τοποθετηθούν στον περίγυρο του σπιτιού. Οι ράγες για τα κάγκελα ακολουθούν ένα αριθμητικό μοτίβο. Να συνεχίσεις με διαφορετικούς τρόπους το πιο κάτω μοτίβο.

1, 2, ____

1, 2, ____

1, 2, ____

1, 2, ____

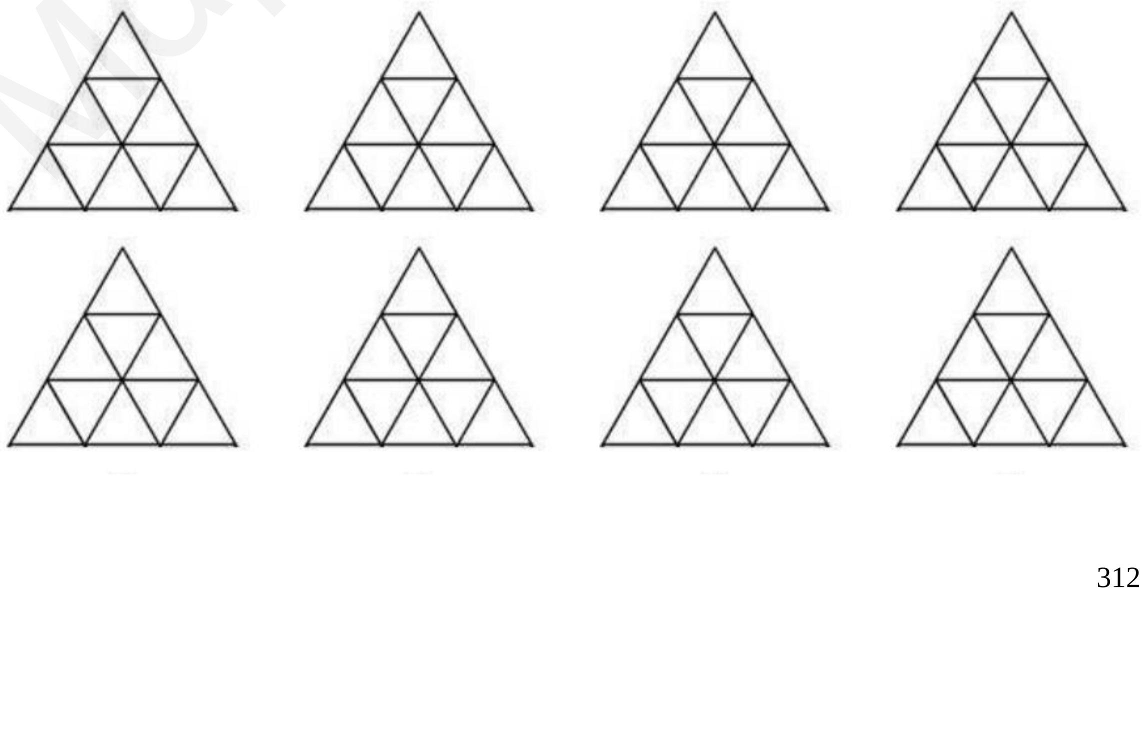
1, 2, ____

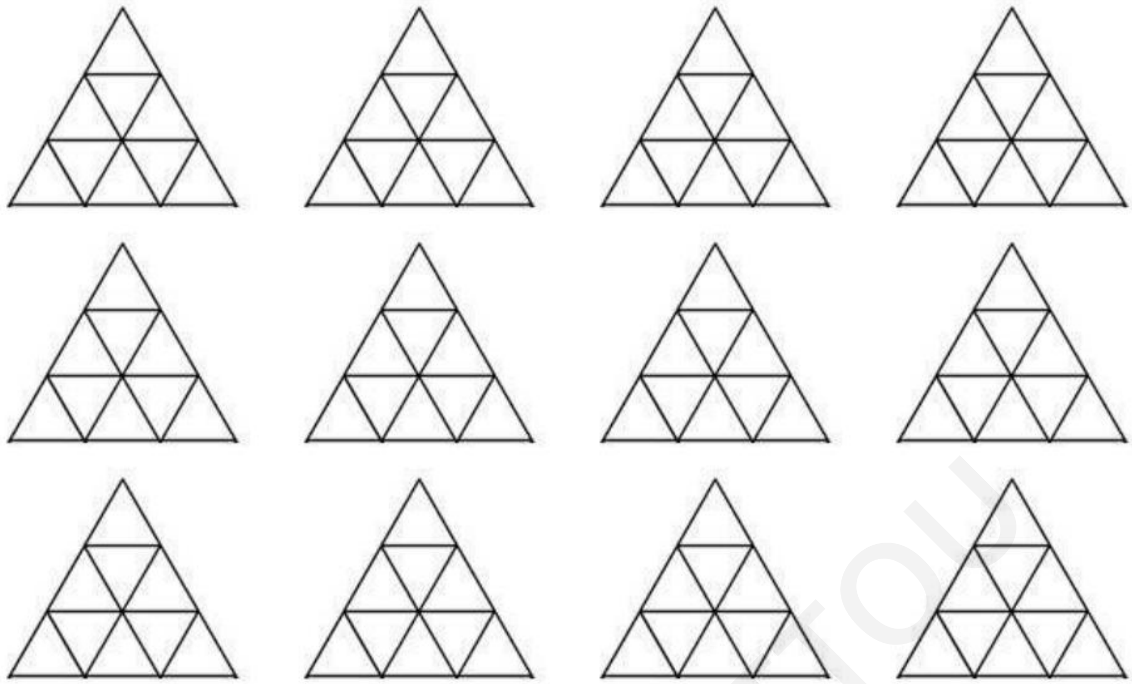
1, 2, ____

1, 2, ____

1, 2, ____

5. Ας σχεδιάσουμε τη στέγη του σπιτιού... Η στέγη θα είναι τριγωνική και τα κεραμίδια θα είναι τοποθετημένα *συμμετρικά*. Να χρωματίσεις όσες πιο πολλές στέγες μπορείς και να απαντήσεις στα ερωτήματα που ακολουθούν.





(α) Πόσες διαφορετικές στέγες μπορείς να φτιάξεις με ένα, δύο τρία, τέσσερα χρωματιστά κεραμίδια;

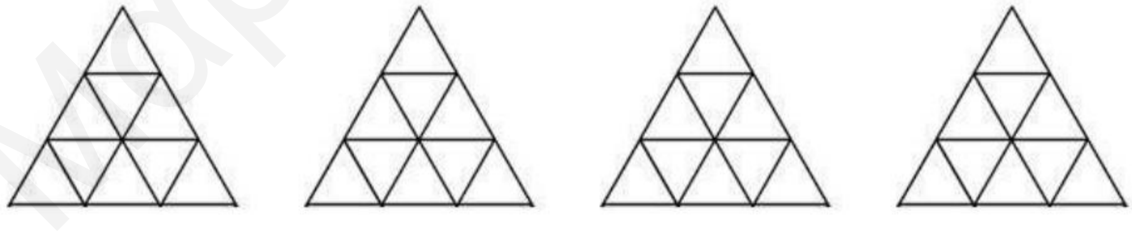
Ένα: ______________________________

Δύο: ______________________________

Τρία: ______________________________

Τέσσερα: ______________________________

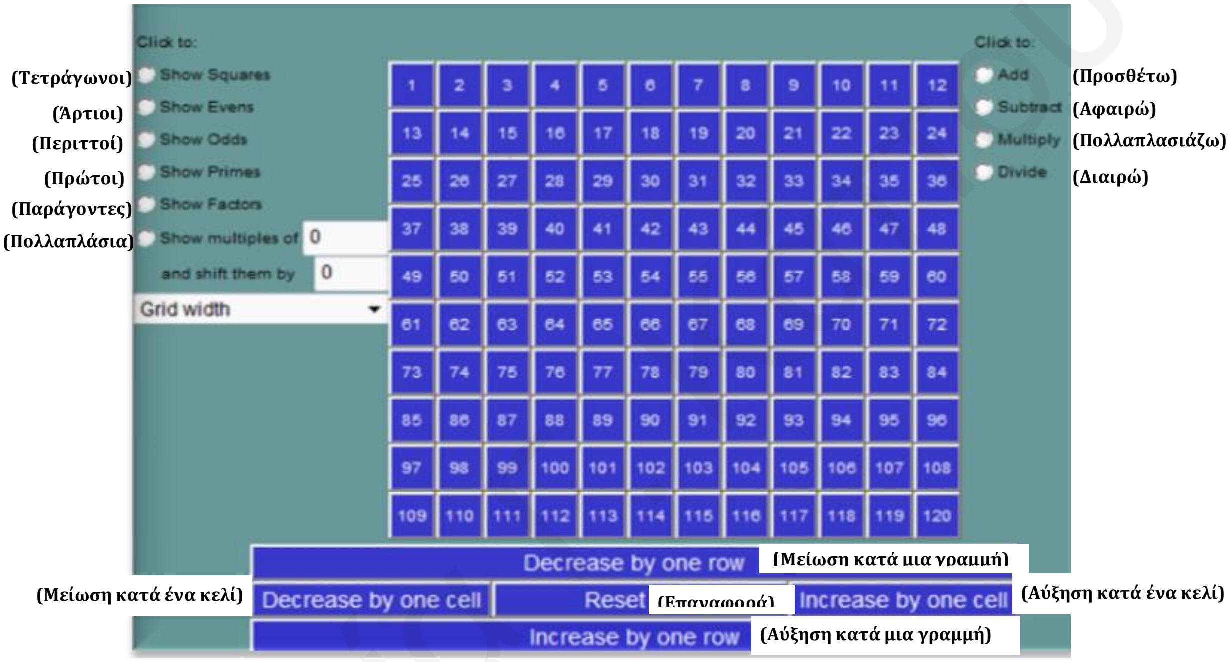
(β) Να φτιάξεις μια στέγη με μόνο ένα άξονα συμμετρίας και τρεις άξονες συμμετρίας.



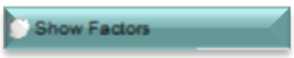
Ονοματεπώνυμο: ....

Τάξη: .... Ημερομηνία: ....

1. Να ανοίξεις την ιστοσελίδα: *www.math.msu.edu/~nathsinc/java/NumberWorlds/*, όπου βρίσκεται το εφαρμογίδιο “Number Worlds” (βλέπε Εικόνα 1) και να απαντήσεις τα πιο κάτω ερωτήματα.



Εικόνα 1. Εφαρμογίδιο “Number Worlds”.

(α) Να επιλέξεις το εικονίδιο 

ι μετά τον αριθμό 10.

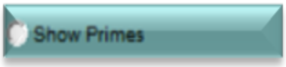
(i) Να γράψεις τους αριθμούς που παρουσιάζονται με γαλάζιο χρώμα.

____

(ii) Να περιγράψεις τη σχέση που έχει ο αριθμός 10 με τους συγκεκριμένους αριθμούς και να τους ονομάσεις.

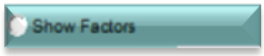
____

____

(β) Να επιλέξεις το εικονίδιο 

.

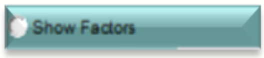
(i) Να γράψεις πέντε από τους αριθμούς που παρουσιάζονται με γαλάζιο χρώμα. Οι αριθμοί αυτοί είναι οι **πρώτοι** (=primes) αριθμοί.

(ii) Να ελέγξεις τους διαιρέτες των πρώτων αριθμών (διάλεξε τέσσερις από τους αριθμούς που έγραψες πιο πάνω), επιλέγοντας το εικονίδιο 

Τι παρατηρείς;

(γ) Να επιλέξεις το εικονίδιο 

(i) Να γράψεις πέντε από τους αριθμούς που παρουσιάζονται με γαλάζιο χρώμα. Οι αριθμοί αυτοί είναι οι **τετράγωνοι** (=squares) αριθμοί.

(ii) Να ελέγξεις τους διαιρέτες των τετράγωνων αριθμών (διάλεξε τέσσερις από τους αριθμούς που έγραψες πιο πάνω), επιλέγοντας το εικονίδιο 

Τι παρατηρείς;

(δ) Να γράψεις με ποια εντολή μπορούν να επιλεγούν οι αριθμοί: 7, 14, 21, 28, . . .

(ε) Να γράψεις με ποια εντολή μπορούν να επιλεγούν οι αριθμοί: 8, 15, 22, 29, . . .

____

____

(στ) Να βρεις δύο τρόπους, για να επιλέξεις τους άρτιους αριθμούς και να γράψεις τις εντολές που έχεις χρησιμοποιήσει σε κάθε περίπτωση.

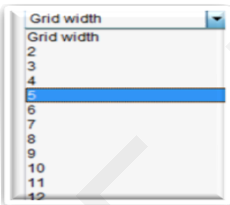
____

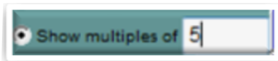
____

(ζ) Να βρεις δύο τρόπους, για να επιλέξεις τους περιττούς αριθμούς και να γράψεις τις εντολές που έχεις χρησιμοποιήσει σε κάθε περίπτωση.

____

____

(η) Να επιλέξεις αρχικά 

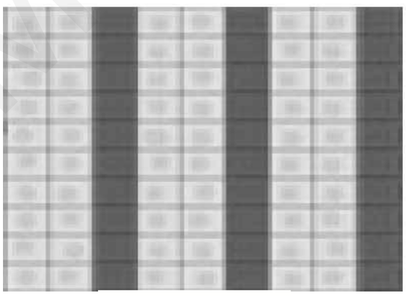
στη συνέχεια 

Να περιγράψεις το πλέγμα αριθμών που έχει κατασκευαστεί στην οθόνη σου.

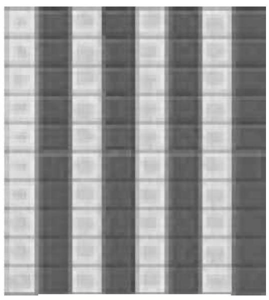
____

____

2. Να παρατηρήσεις την Εικόνα 2 και την Εικόνα 3. Οι εικόνες αυτές παρουσιάζουν πλέγματα αριθμών, στα οποία οι επιλεγμένοι αριθμοί είναι ομαδοποιημένοι σε στήλες.



Εικόνα 2.



Εικόνα 3.

(α) Να βρεις και να γράψεις, με την κατάλληλη σειρά, τις εντολές που χρειάζονται για την κατασκευή του πλέγματος της Εικόνας 2.

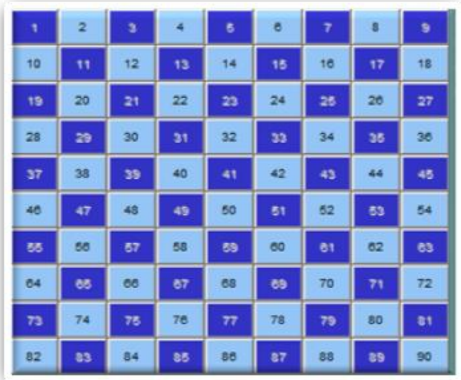
(β) Να βρεις και να γράψεις, με την κατάλληλη σειρά, τις εντολές που χρειάζονται για την κατασκευή του πλέγματος της Εικόνας 3.

(γ) Να συγκρίνεις τις εντολές που έχεις γράψει στα δύο προηγούμενα ερωτήματα, για να καταλήξεις σε ένα γενικό κανόνα κατασκευής πλέγματος με επιλεγμένες στήλες αριθμών.

ΓΕΝΙΚΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ ΓΙΑ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ ΜΕ ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΕΣ ΣΤΗΛΕΣ ΑΡΙΘΜΩΝ

(δ) Να περιγράψεις με ποιο τρόπο μπορεί να υπολογιστεί ο αριθμός των επιλεγμένων στηλών.

3. Να παρατηρήσεις την Εικόνα 4. Η εικόνα αυτή παρουσιάζει ένα πλέγμα αριθμών με μορφή σκακιέρας.



Εικόνα 4.

(α) Να βρεις και να γράψεις, με την κατάλληλη σειρά, τις εντολές που χρειάζονται για την κατασκευή του πλέγματος της Εικόνας 4.

____

____

____

(β) Να γράψεις, με την κατάλληλη σειρά, τις εντολές που χρειάζονται για την κατασκευή άλλων δύο πλεγμάτων με μορφή σκακιέρας.

____

____

____

(γ) Να συγκρίνεις τις εντολές που έχεις γράψει στα δύο προηγούμενα ερωτήματα, για να καταλήξεις σε ένα γενικό κανόνα κατασκευής πλέγματος με μορφή σκακιέρας.

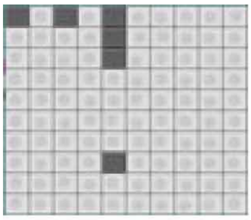
ΓΕΝΙΚΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ ΓΙΑ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ ΜΕ ΜΟΡΦΗ ΣΚΑΚΙΕΡΑΣ

____

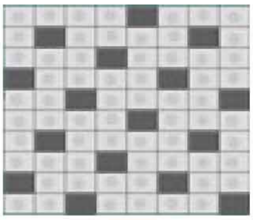
____

____

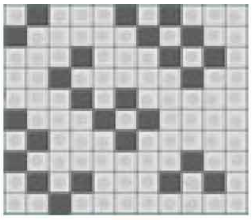
4. Να παρατηρήσεις τις πιο κάτω εικόνες και να αναγνωρίσεις σε ποια εικόνα είναι επιλεγμένοι: *οι τετράγωνοι αριθμοί*, *οι πρώτοι αριθμοί*, *τα πολλαπλάσια ενός αριθμού* και *οι παράγοντες ενός αριθμού*. Να αιτιολογήσεις σε κάθε περίπτωση, την απάντησή σου.



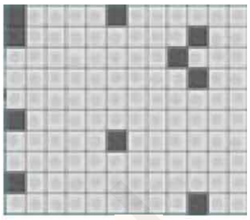
Α



Β



Γ



Δ

Εικόνα Α: ____

____

____

Εικόνα Β: ____

____

____

Εικόνα Γ: ____

____

____

Εικόνα Δ: ____

____

____

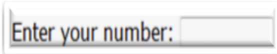
5. Να επιλέξεις πέντε αριθμούς από το πλέγμα για να φτιάξεις μια ομάδα αριθμών, με βάση κάποιο κοινό χαρακτηριστικό. Να σκεφτείς άλλες ομαδοποιήσεις, χρησιμοποιώντας άλλους αριθμούς.

Ομάδα	Αριθμοί	Χαρακτηριστικό
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Ονοματεπώνυμο: ....

Τάξη: .... Ημερομηνία: ....

1. Να ανοίξεις την ιστοσελίδα: *http://nrich.maths.org/7044*. Στην ιστοσελίδα αυτή υπάρχει το εφαρμογίδιο "Light the Lights". Να ακολουθήσεις τις πιο κάτω οδηγίες και να απαντήσεις στα ερωτήματα.

(α) Να εισάγεις στην εντολή 

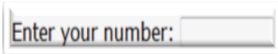
διαφορετικούς αριθμούς και να παρατηρήσεις τα χρώματα φωτός που ανάβουν σε κάθε περίπτωση. Να καταγράψεις τα αποτελέσματα των δοκιμών σου στον πιο κάτω πίνακα.

ΑΡΙΘΜΟΙ	Κίτρινο	Κόκκινο	Μπλε	Πράσινο

(β) Να εντοπίσεις σχέσεις ανάμεσα στους αριθμούς του πίνακα (της Δραστηριότητας 1α) και να συμπληρώσεις τα πιο κάτω **συμπεράσματα**.

- Το κίτρινο φως ανάβουν οι αριθμοί: ____.
- Το κόκκινο φως ανάβουν οι αριθμοί:____.
- Το μπλε φως ανάβουν οι αριθμοί:____.
- Το πράσινο φως ανάβουν οι αριθμοί:_______________________________________.
- Ο _______________________ είναι ο μικρότερος αριθμός που ανάβει όλα τα φώτα της μηχανής, γιατί ____.
- Τρεις αριθμοί, οι οποίοι δεν ανάβουν κανένα φως της μηχανής είναι:_____________, γιατί____.

2. Να ανοίξεις την ιστοσελίδα: *http://nrich.maths.org/7035*. Στην ιστοσελίδα αυτή υπάρχει το εφαρμογίδιο “Light the Lights” σε μια διαφορετική εκδοχή. Δηλαδή, αλλάζουν οι κανόνες, στους οποίους ανταποκρίνονται τα χρωματιστά φώτα της μηχανής.

(α) Να εισάγεις στην εντολή 

διαφορετικούς αριθμούς και να παρατηρήσεις τα χρώματα φωτός που ανάβουν σε κάθε περίπτωση. Να καταγράψεις τα αποτελέσματα των δοκιμών σου στον πιο κάτω πίνακα.

ΑΡΙΘΜΟΙ	**Κίτρινο**	**Κόκκινο**	**Μπλε**	**Πράσινο**

(β) Να εντοπίσεις σχέσεις ανάμεσα στους αριθμούς του πίνακα και να συμπληρώσεις τα πιο κάτω **συμπεράσματα**.

- Το κίτρινο φως ανάβουν οι αριθμοί: ______________________________________.
- Το κόκκινο φως ανάβουν οι αριθμοί:______________________________________.
- Το μπλε φως ανάβουν οι αριθμοί:____.
- Το πράσινο φως ανάβουν οι αριθμοί:_____________________________________.
- Ο _______________________ είναι ο μικρότερος αριθμός που ανάβει όλα τα φώτα της μηχανής, γιατί ____.
- Τρεις αριθμοί, οι οποίοι δεν ανάβουν κανένα φως της μηχανής είναι:______________,γιατί____

____

3. Να διαβάσεις με προσοχή, τις οδηγίες που δίνονται πιο κάτω. Οι οδηγίες αυτές περιγράφουν ένα παιχνίδι, το οποίο θα παίξεις με το διπλανό σου.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΑΙΧΝΙΔΙΟΥ

(1) Ο μαθητής Α και ο μαθητής Β γράφουν από πέντε κανόνες, τους οποίους δεν ανταλλάσουν μεταξύ τους. Οι κανόνες πρέπει να περιγράφουν ένα αριθμητικό μοτίβο.

(2) Ο κάθε μαθητής θα αναλάβει ένα ρόλο, για να παίξουν το πρώτο γύρο του παιχνιδιού. Συγκεκριμένα, ο μαθητής Β θα προσπαθήσει να βρει τους κανόνες του μαθητή Α. Ο μαθητής Β θα αναφέρει αριθμούς και ο μαθητής Α θα σημειώνει σε έναν πίνακα τους αριθμούς που ικανοποιούν κάποιο/κάποιους κανόνες του.

(3) Ο μαθητής Β αναφέρει αριθμούς, μέχρι να αισθανθεί σίγουρος ότι βρήκε τους πέντε κανόνες του μαθητή Α.

(4) Ο μαθητής Β ανακοινώνει τους κανόνες και ακολουθεί συζήτηση σχετικά με την ορθότητα της απάντησής του.

(5) Οι μαθητές αλλάζουν ρόλους, για να παίξουν το δεύτερο γύρο του παιχνιδιού. Συγκεκριμένα, ο μαθητής Β προκαλεί το μαθητή Α να βρει τους μυστικούς κανόνες. Θα επαναλάβουν τα βήματα 2, 3 και 4.

Να γράψεις τους πέντε κανόνες που θα πρέπει να βρει ο διπλανός σου. ΠΡΟΣΟΧΗ: Ο διπλανός σου δεν πρέπει να δει αυτούς τους κανόνες.

ΚΑΝΟΝΑΣ Α: ____

ΚΑΝΟΝΑΣ Β: ____

ΚΑΝΟΝΑΣ Γ: ____

ΚΑΝΟΝΑΣ Δ: ____

ΚΑΝΟΝΑΣ Ε: ____

Α’ ΠΑΙΧΝΙΔΙ

Να σημειώσεις στον πιο κάτω πίνακα, τους αριθμούς που αναφέρει ο διπλανός σου και με ✓ να δηλώσεις τον/ τους κανόνα/κανόνες που ικανοποιεί ο κάθε αριθμός.

ΑΡΙΘΜΟΙ	Κανόνας 1	Κανόνας 2	Κανόνας 3	Κανόνας 4	Κανόνας 5

Να γράψεις τα **συμπεράσματα** του διπλανού σου και να ελέγξεις την ορθότητά τους.

ΚΑΝΟΝΑΣ Α:______________________________________

ΚΑΝΟΝΑΣ Β:______________________________________

ΚΑΝΟΝΑΣ Γ:______________________________________

ΚΑΝΟΝΑΣ Δ:______________________________________

ΚΑΝΟΝΑΣ Ε:______________________________________

Β' ΠΑΙΧΝΙΔΙ

Να σημειώσεις στον πιο κάτω πίνακα, τους αριθμούς που αναφέρει ο διπλανός σου και με ✓ να δηλώσεις τον/ τους κανόνα/κανόνες που ικανοποιεί ο κάθε αριθμός.

ΑΡΙΘΜΟΙ	Κανόνας 1	Κανόνας 2	Κανόνας 3	Κανόνας 4	Κανόνας 5

Να γράψεις τα **συμπεράσματα** του διπλανού σου και να ελέγξεις την ορθότητά τους.

ΚΑΝΟΝΑΣ Α:____

ΚΑΝΟΝΑΣ Β:____

ΚΑΝΟΝΑΣ Γ:____

ΚΑΝΟΝΑΣ Δ:____

ΚΑΝΟΝΑΣ Ε:____

Ονοματεπώνυμο: ....
Τάξη: .... Ημερομηνία: ....

1. Να διαβάσεις το πιο κάτω κείμενο και να απαντήσεις στις ερωτήσεις που ακολουθούν.

Το φετινό πρωτάθλημα ήταν πολύ εντυπωσιακό και συνάμα πολύ δύσκολο. Νίκες, ήττες, ισοπαλίες, αποκλεισμοί αγωνιστικών και ποινές χαρακτήριζαν τη φετινή σεζόν. Η απόφαση για τη νικήτρια ομάδα ήταν ιδιαίτερα δύσκολη, λόγω των διαφορετικών δεδομένων που είχε να λάβει υπόψη της η Επιτροπή Αντισφαίρισης. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τα δεδομένα ως έχουν αυτή τη στιγμή, πριν από την τελευταία αγωνιστική. Μέχρι την επόμενη βδομάδα θα μπορέσουμε να αποφασίσουμε για τη νικήτρια ομάδα!

Ομάδα	Παιχνίδια	Νίκες	Ήττες	Ισοπαλίες
Μαχητές	24	12	7	5
Λέοντες	21	11	0	10
Αθλητική Ενότητα	22	9	9	4
Ανίκητοι	25	13	12	0
Ένδοξα αστέρια	30	6	23	1

Εκ μέρους της Επιτροπής Αντισφαίρισης

(α) Να εξηγήσεις για ποιο λόγο «... η απόφαση για τη νικήτρια ομάδα ήταν ιδιαίτερα δύσκολη».

(β) Να αναφέρεις ποια δεδομένα θα πρέπει να λάβει υπόψη της η Επιτροπή Αντισφαίρισης, για να αποφασίσει ποια είναι η νικήτρια ομάδα.

2. Να εργαστείς με την ομάδα σου, για να εντοπίσετε σχέσεις μεταξύ των αριθμών του πίνακα. Να καταγράψεις τις σχέσεις που βρήκες.

3. Να εργαστείς με την ομάδα σου, για να καταγράψετε πιθανούς τρόπους που θα μπορούσατε να χειριστείτε τα δεδομένα. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη Microsoft Excel, αν χρειαστεί.

4. Να εργαστείς με την ομάδα σου, για να αποφασίσετε με αυτά τα δεδομένα ποια είναι η νικήτρια ομάδα. Να εξηγήσεις τον τρόπο σκέψης σου και να δώσεις λεπτομέρειες στην Επιτροπή για τον τρόπο που θα πρέπει να εργαστεί, για να αποφασίσει ποια είναι η νικήτρια ομάδα.

Ομάδα	Παιχνίδια	Νίκες	Ήττες	Ισοπαλίες		
Μαχητές	24	12	7	5		
Λέοντες	21	11	0	10		
Αθλητική Ενότητα	22	9	9	4		
Ανίκητοι	25	1□	□2	0		
Ένδοξα αστέρια	30	6	23	1		

5. Να γράψεις ερωτήσεις της μορφής «Τι θα συνέβαινε αν...» για την τελευταία αγωνιστική, ώστε να τις απαντήσει ο διπλανός σου. Προσπάθησε να γράψεις όσες πιο πολλές και πρωτότυπες ερωτήσεις μπορείς.

Ονοματεπώνυμο: ....

Τάξη: .... Ημερομηνία: ....

1. Να παρακολουθήσεις προσεκτικά τα δύο βίντεο. Το πρώτο βίντεο είναι από τον αγώνα δρόμου 100m γυναικών από τους Ολυμπιακούς αγώνες στο Λονδίνο και το δεύτερο βίντεο από ένα ποδοσφαιρικό αγώνα. Να απαντήσεις στα ερωτήματα που ακολουθούν.

(α) Ποιες ομοιότητες και ποιες διαφορές παρατηρείς ανάμεσα στα δύο βίντεο που παρακολούθησες, όσον αφορά την κίνηση των αθλητών;

Ομοιότητες:

____

____

____

____

Διαφορές:

____

____

____

____

(β) Να παρακολουθήσεις ξανά τα δύο βίντεο και να γράψεις πιο κάτω την περιγραφή που θα έκανε ένας ρεπόρτερ που μεταδίδει τους αγώνες.

Αγώνας δρόμου:

____

____

____

Αγώνας ποδοσφαίρου:

(γ) Να φτιάξεις ένα σχεδιάγραμμα που να δείχνει την κίνηση των ποδοσφαιριστών.

Αγώνας δρόμου:

Αγώνας ποδοσφαίρου:

2. Να ανοίξεις το λογισμικό πρόγραμμα “SimCalc MathWorlds®” και να επιλέξεις το αρχείο podosfairo1.2mw. Να ακολουθήσεις την πιο κάτω διαδικασία και να απαντήσεις στα ερωτήματα που ακολουθούν.

(α) Να επιλέξεις το εικονίδιο  για να παρακολουθήσεις ένα απόσπασμα από τον ποδοσφαιρικό αγώνα μεταξύ της Κόκκινης και της Μπλε Ομάδας.

(β) Ο ποδοσφαιριστής που προηγείται είναι αυτός που κρατά την μπάλα. Αν ξέρουμε ότι ο ποδοσφαιριστής που έφτασε πρώτος στο κέντρο του γηπέδου, είναι αυτός που σκόραρε, ποια ομάδα προηγείται; Γιατί;

(γ) Πόσα μέτρα έτρεξε κάθε ποδοσφαιριστής; Να εξηγήσεις την απάντησή σου.

(δ) Σε ποιο λεπτό του βίντεο ο ποδοσφαιριστής σκόραρε; Να εξηγήσεις την απάντησή σου.

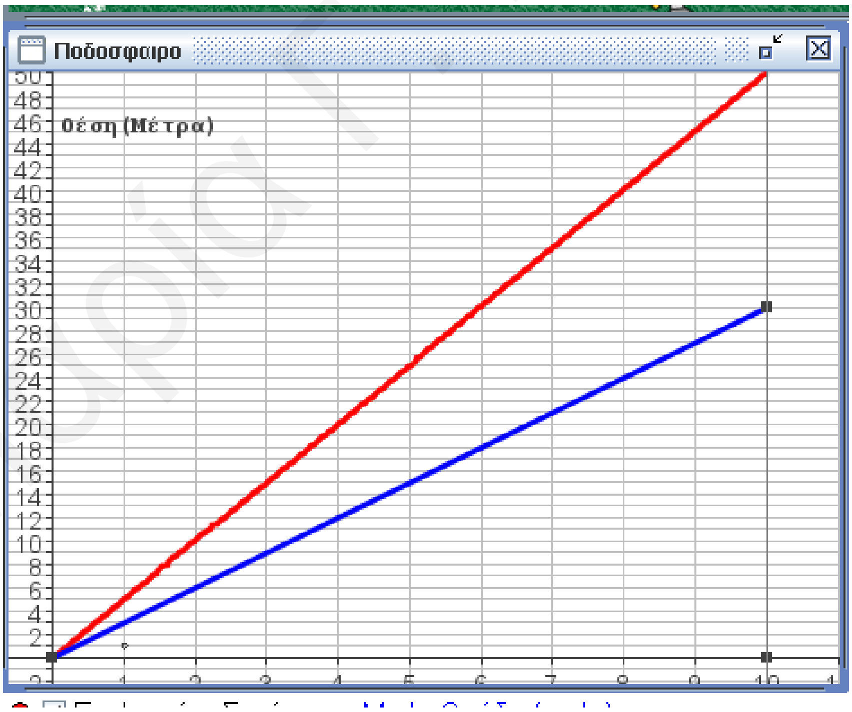
(ε) Να γράψεις την περιγραφή που θα έκανε ο ρεπόρτερ που μεταδίδει τον αγώνα.

(στ) Να επιλέξεις κάθε αθλητή με διπλό κλικ και να επιλέξεις την εντολή «Η επιλογή για ίχνη είναι απενεργοποιημένη» ώστε να γίνει «Η επιλογή για ίχνη είναι ενεργοποιημένη». Με αυτό τον τρόπο θα βλέπει τα ίχνη του καθώς τρέχει.

(ζ) Τι νομίζεις ότι δείχνουν τα ίχνη;

(η) Να συγκρίνεις τα ίχνη κάθε ποδοσφαιριστή και να γράψεις τι παρατηρείς.

(θ)Την επόμενη μέρα οι εφημερίδες παρουσίασαν την πιο κάτω γραφική παράσταση:



Να παρακολουθήσεις ξανά το απόσπασμα του αγώνα (podosfairo1.2mw) και ταυτόχρονα να παρατηρείς τη γραφική παράσταση. Να εξηγήσεις τι παρουσιάζει η γραφική παράσταση.

(ι) Δίπλα από τη γραφική παράσταση, οι εφημερίδες παρουσίαζαν τον πιο κάτω πίνακα.

Πίνακας

Χρόνος	Κόκκινη ομάδα -- Pos	Μπλε Ομάδα -- Pos
00,00	0,00	0,00
01,00	5,00	3,00
02,00	10,00	6,00
03,00	15,00	9,00
04,00	20,00	12,00
05,00	25,00	15,00
06,00	30,00	18,00
07,00	35,00	21,00
08,00	40,00	24,00
09,00	45,00	27,00
10,00	50,00	30,00

Χρόνος	Κόκκινη ομάδα	Μπλε Ομάδα
10,00	50,00	30,00

Να παρακολουθήσεις ξανά το απόσπασμα του αγώνα (podosfairo1.2mw) και ταυτόχρονα να παρατηρείς τον πίνακα. Μπορείς να χρησιμοποιήσεις τα εικονίδια  και . Να εξηγήσεις τι παρουσιάζει ο πίνακας.

Να εντοπίσεις μοτίβα στα δεδομένα του πίνακα και να τα καταγράψεις πιο κάτω.

Ποια σχέση έχουν τα μοτίβα που εντόπισες στον πίνακα με τη γραφική παράσταση;

____

____

____

____

3. Να ανοίξεις το αρχείο podosfairo2.2mw και να παρακολουθήσεις τον αγώνα. Να απαντήσεις στα ερωτήματα που ακολουθούν.

(α) Να συγκρίνεις τον αγώνα που είδες με τον προηγούμενο. Τι παρατηρείς;

____

____

____

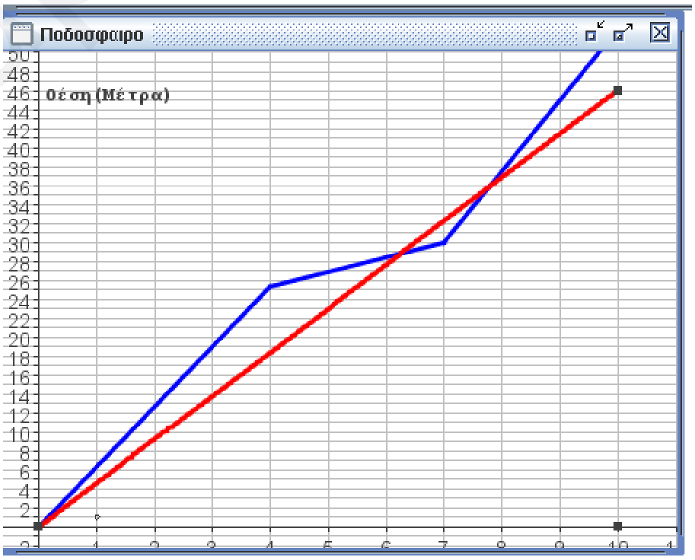
____

(β) Ποιος από τους ποδοσφαιριστές άλλαξε ταχύτητα; Σε ποιες χρονικές στιγμές. Να χρησιμοποιήσεις τα ίχνη για να βοηθηθείς.

____

____

(γ)Την επόμενη μέρα οι εφημερίδες παρουσίασαν την πιο κάτω γραφική παράσταση:



Ποια είναι η γραφική παράσταση που δείχνει την κίνηση του ποδοσφαιριστή της μπλε ομάδας. Να εξηγήσεις την απάντησή σου.

Να εξηγήσεις τι δείχνει κάθε κομμάτι της γραφικής παράστασης (να χρησιμοποιήσεις πληροφορίες για τη θέση των αθλητών και τη χρονική στιγμή).

(γ) Δίπλα από τη γραφική παράσταση, οι εφημερίδες παρουσίαζαν τον πιο κάτω πίνακα.

Πίνακας

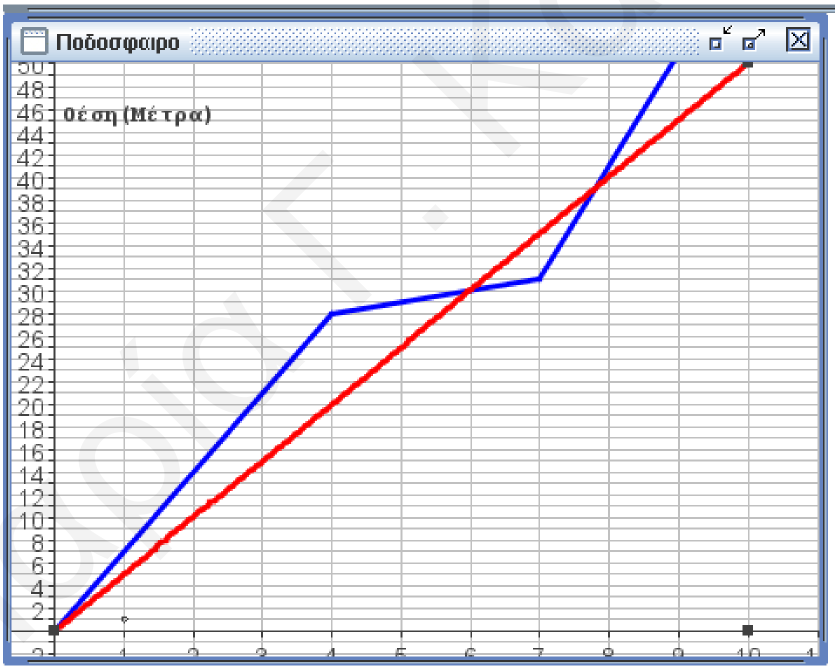
Χρόνος	Κόκκινη ομάδα -- Pos	Μπλε Ομάδα -- Pos
00,00	0,00	0,00
01,00	5,00	7,00
02,00	10,00	14,00
03,00	15,00	21,00
04,00	20,00	28,00
05,00	25,00	29,00
06,00	30,00	30,00
07,00	35,00	31,00
08,00	40,00	41,00
09,00	45,00	51,00
10,00	50,00	

Χρόνος	Κόκκινη ομάδα	Μπλε Ομάδα
10,00	50,00	0,00

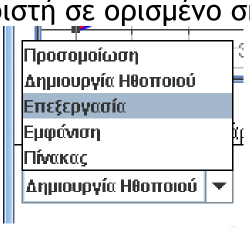
Να εντοπίσεις μοτίβα στα δεδομένα του πίνακα και να τα καταγράψεις πιο κάτω.

(δ) Να περιγράψεις με λεπτομέρεια την κίνηση των ποδοσφαιριστών (Μην ξεχάσεις να γράψεις πληροφορίες για τη θέση των ποδοσφαιριστών στο γήπεδο, για τη διάρκεια του αποσπάσματος, για τις χρονικές στιγμές και για την ταχύτητα των ποδοσφαιριστών).

4. Να μετακινήσεις τους δείκτες που φαίνονται στην πιο κάτω εικόνα και να γράψεις πιο κάτω τις παρατηρήσεις σου.



5. Να κάνεις τις απαραίτητες αλλαγές στη γραφική παράσταση που υπάρχει στο αρχείο podosfairo3.2mw, για να κατέχει πάντα την μπάλα ο ποδοσφαιριστής της μπλε ομάδας όταν φτάνει στο κέντρο του γηπέδου (δηλαδή, να φτάνει πρώτος στο κέντρο του γηπέδου που βρίσκεται 50 m από το τέρμα). Να μεταφέρεις τις απαντήσεις σου στο πιο κάτω τετραγωνισμένο χαρτί. Για κάθε περίπτωση να περιγράψεις τον αγώνα.

Μπορείς να αλλάξεις την ταχύτητα του ποδοσφαιριστή σε ορισμένο σημείο αν επιλέξεις από το εικονίδιο στο κάτω αριστερό μέρος της οθόνης 

και μετά το πρώτο εικονίδιο  .

Αλλαγές:

____

____

____

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 8

Ονοματεπώνυμο: ....

Τάξη: ....   Ημερομηνία: ....

Να διαβάσεις τις πιο κάτω δηλώσεις προσεκτικά και να **βάλεις σε κύκλο** τον αριθμό που δείχνει το βαθμό συμφωνίας σου. Να χρησιμοποιήσεις τον αριθμό «**7**» για να δείξεις ότι **συμφωνείς απόλυτα** και τον αριθμό «**1**» για να δείξεις ότι **διαφωνείς απόλυτα** με τη δήλωση. Να χρησιμοποιήσεις τους ενδιάμεσους αριθμούς, για να δείξεις τον ενδιάμεσο βαθμό στον οποίο συμφωνείς με τις δηλώσεις. Είναι σημαντικό να απαντήσεις σε όλες τις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου.

		Διαφωνώ απόλυτα						Συμφωνώ απόλυτα
1	Για να είναι κάποιος καλός/ή στα μαθηματικά, αρκεί να είναι καλός/ή στην εκτέλεση πράξεων (+, -, Χ, :).	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
2	Τα μαθηματικά είναι δημιουργικά.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
3	Στα μαθηματικά μπορείς να χρησιμοποιήσεις τη φαντασία και τη δημιουργικότητά σου.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
4	Στα μαθηματικά υπάρχει πάντα μόνο μια σωστή απάντηση.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
5	Υπάρχει μόνο ένας σωστός τρόπος, για να λύσεις μια άσκηση στα μαθηματικά.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
6	Είμαι δημιουργικός.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
7	Ανακαλύπτω νέους τρόπους, για να επιλύσω ασκήσεις.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
8	Μπορώ να σκεφτώ διαφορετικούς τρόπους, για να εξηγήσω αυτά που σκέφτομαι στα μαθηματικά.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
9	Εντοπίζω εύκολα μοτίβα αριθμών ή σχημάτων.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
10	Λύνω τις μαθηματικές ασκήσεις με διαφορετικούς τρόπους.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
11	Βρίσκω ασυνήθιστες και έξυπνες λύσεις στις μαθηματικές ασκήσεις.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
12	Μπορώ να μαντέψω τι θα συμβεί, αν αλλάξει κάποιο στοιχείο του προβλήματος.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 9

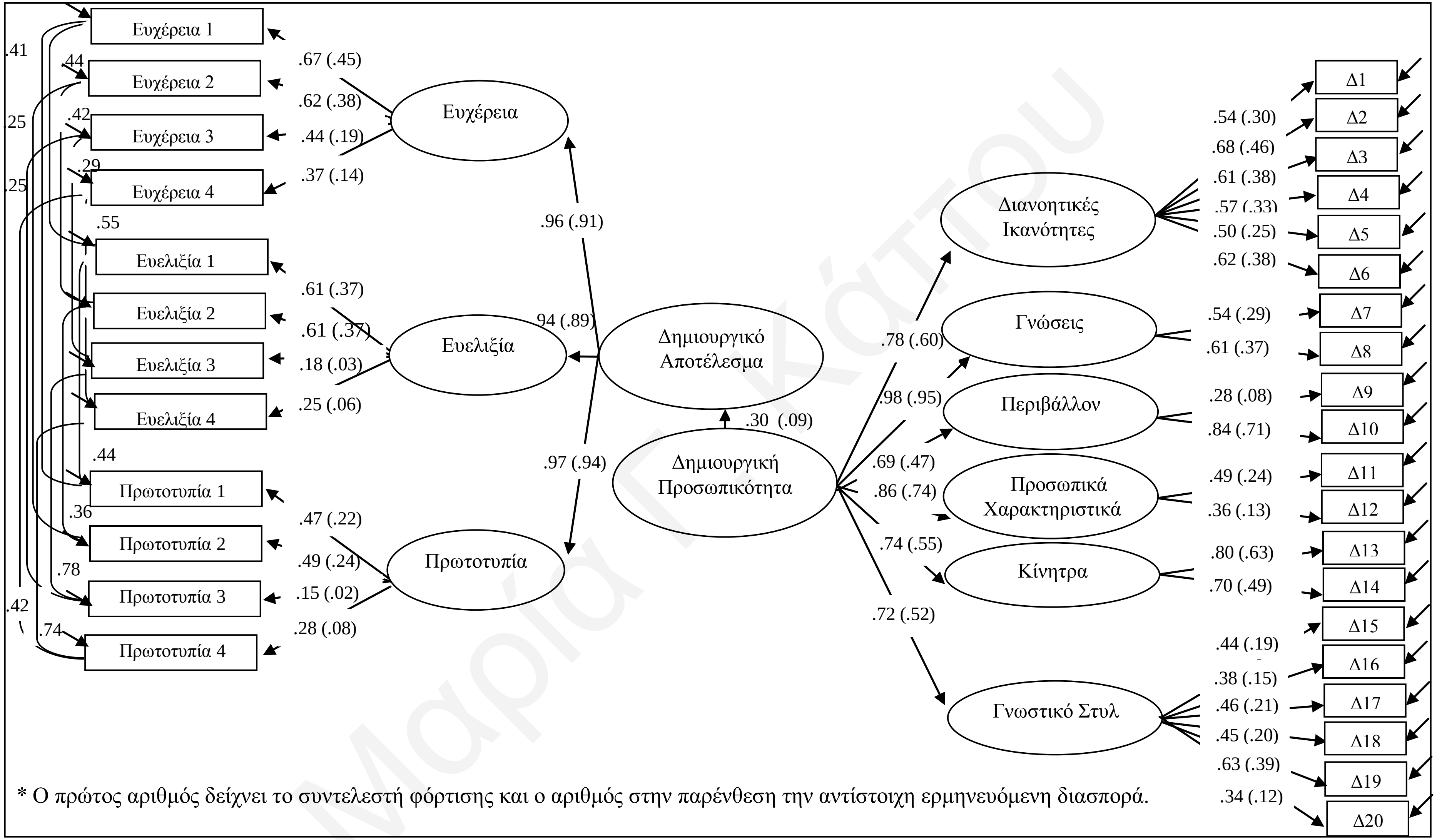
Πίνακας Π.1

Συσχετίσεις μεταξύ των ικανοτήτων Ευχέρειας, Ευελιξίας και Πρωτοτυπίας.

Έργα		Έργο 1			Έργο 2			Έργο 3			Έργο 4		
		Ευχέρεια	Ευελιξία	Πρωτοτυπία	Ευχέρεια	Ευελιξία	Πρωτοτυπία	Ευχέρεια	Ευελιξία	Πρωτοτυπία	Ευχέρεια	Ευελιξία	Πρωτοτυπία
Έργο 1	Ευχέρεια	1	.815**	.699**	.409**	.368**	.324**	.332**	.181**	.160**	.249**	.213**	.228**
	Ευελιξία	.815**	1	.709**	.347**	.349**	.328**	.269**	.146**	.140**	.229**	.213**	.243**
	Πρωτοτυπία	.699**	.709**	1	.287**	.296**	.279**	.201**	.178**	.161**	.076	.142**	.186**
Έργο 2	Ευχέρεια	.409**	.347**	.287**	1	.759**	.517**	.234**	.090*	.060	.234**	.151**	.124 **
	Ευελιξία	.368**	.349**	.296**	.759**	1	.634**	.167**	.110*	.109*	.188**	.156**	.155**
	Πρωτοτυπία	.324**	.328**	.279**	.517**	.634**	1	.123**	.056	.041	.118*	.106*	.127**
Έργο 3	Ευχέρεια	.332**	.269**	.201**	.234**	.167**	.123**	1	.369**	.316**	.199**	.075	.098*
	Ευελιξία	.181**	.146**	.178**	.090*	.110*	.056	.369**	1	.807**	.048	.069	.159**
	Πρωτοτυπία	.160**	.140**	.161**	.060	.109*	.041	.316**	.807**	1	.053	.068	.138**
Έργο 4	Ευχέρεια	.249**	.229**	.076	.234**	.188**	.118*	.199**	.048	.053	1	.643**	.514**
	Ευελιξία	.213**	.213**	.142**	.151**	.156**	.106*	.075	.069	.068	.643**	1	.812**
	Πρωτοτυπία	.228**	.243**	.186**	.124**	.155**	.127**	.098*	.159**	.138**	.514**	.812**	1

** Οι συσχετίσεις είναι στατιστικά σημαντικές σε επίπεδο p<.01 (2-tailed).
* Οι συσχετίσεις είναι στατιστικά σημαντικές σε επίπεδο p<.05 (2-tailed).

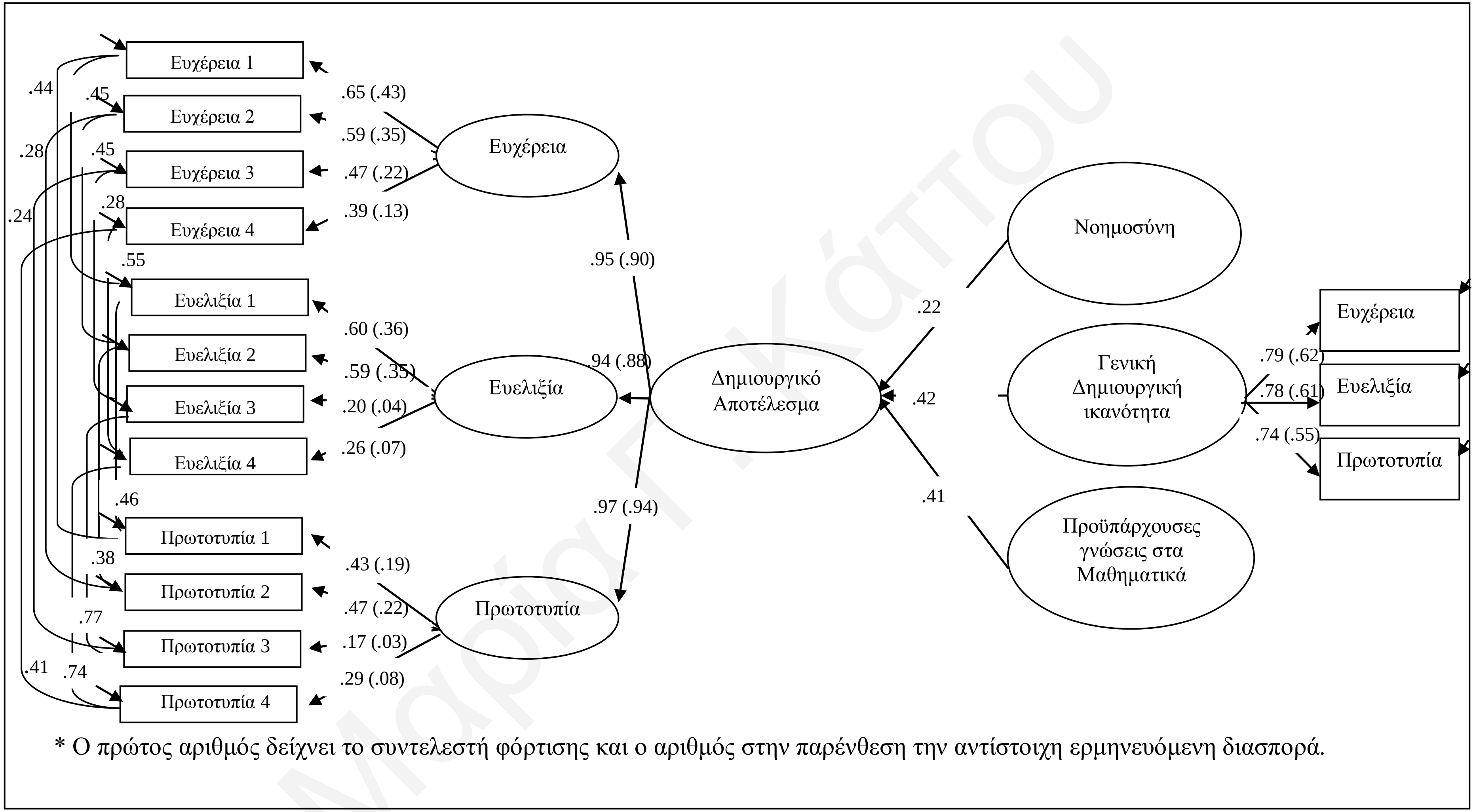
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 10



* Ο πρώτος αριθμός δείχνει το συντελεστή φόρτισης και ο αριθμός στην παρένθεση την αντίστοιχη ερμηνευόμενη διασπορά.

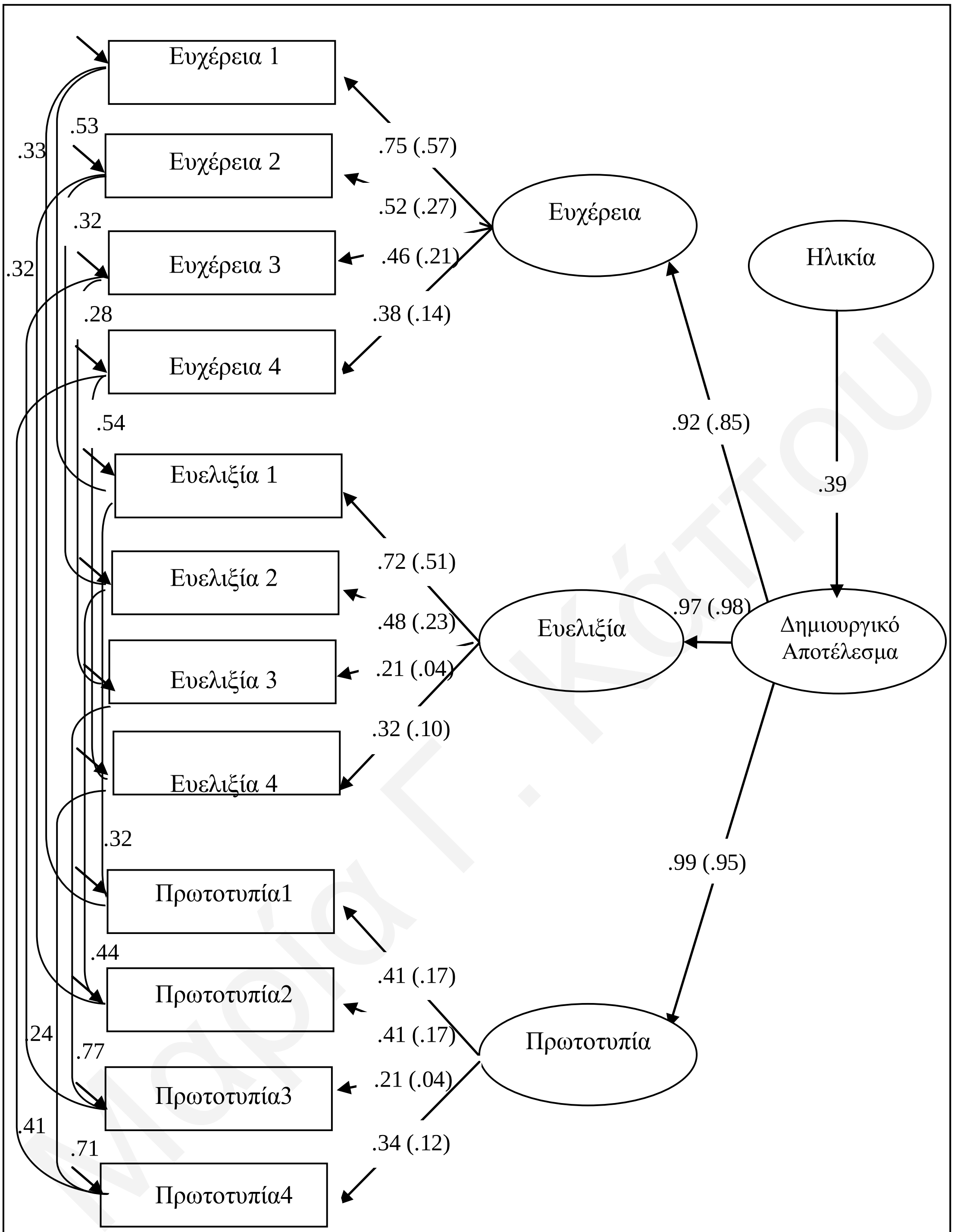
Διάγραμμα Π.1. Η Ικανότητα Πρόβλεψης της Μαθηματικής Δημιουργικότητας από τη Δημιουργική Προσωπικότητα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 11



Διάγραμμα Π.2. Η Ικανότητα Πρόβλεψης της Μαθηματικής Δημιουργικότητας από τα Γνωστικά Χαρακτηριστικά.

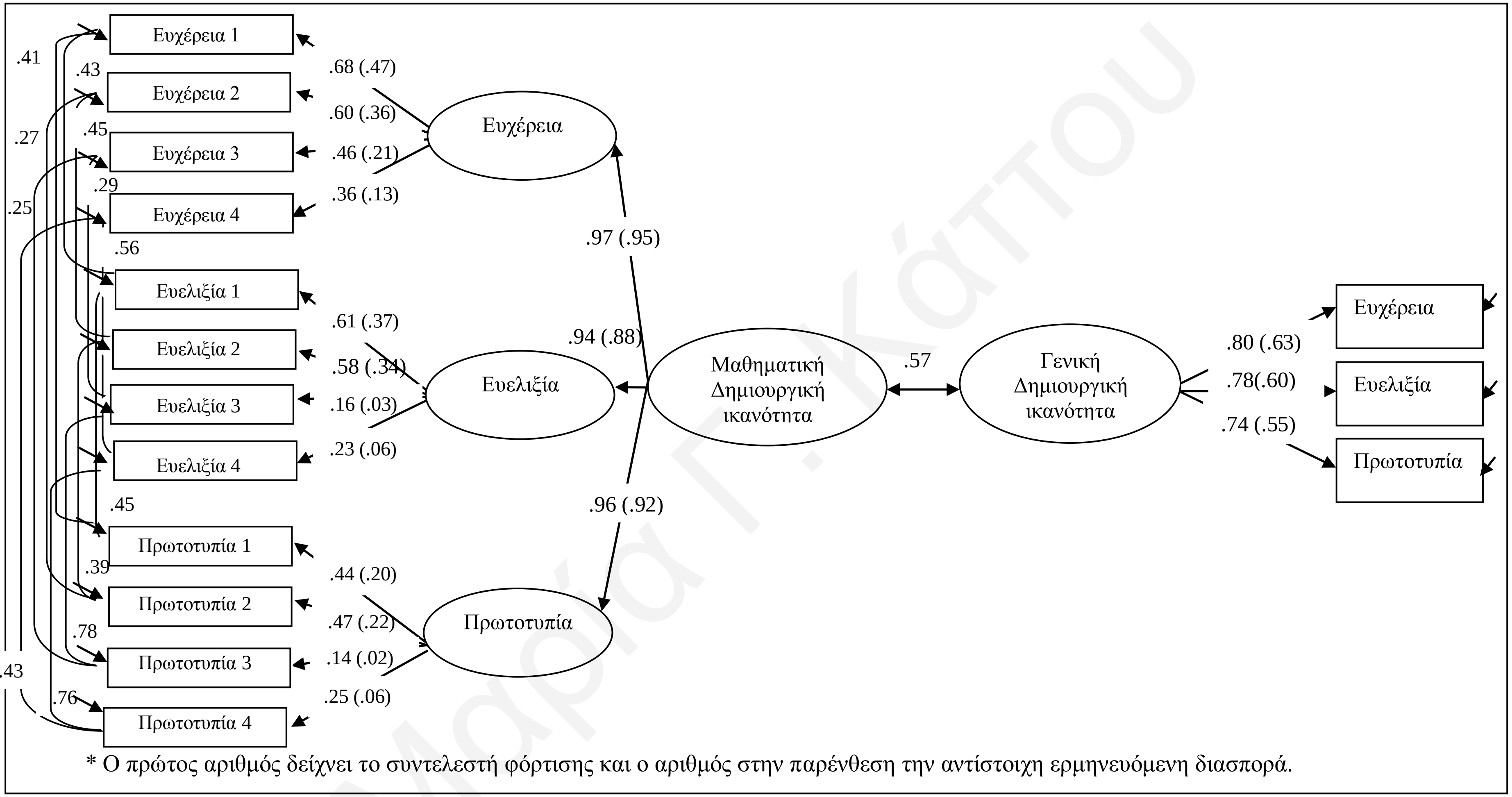
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 12



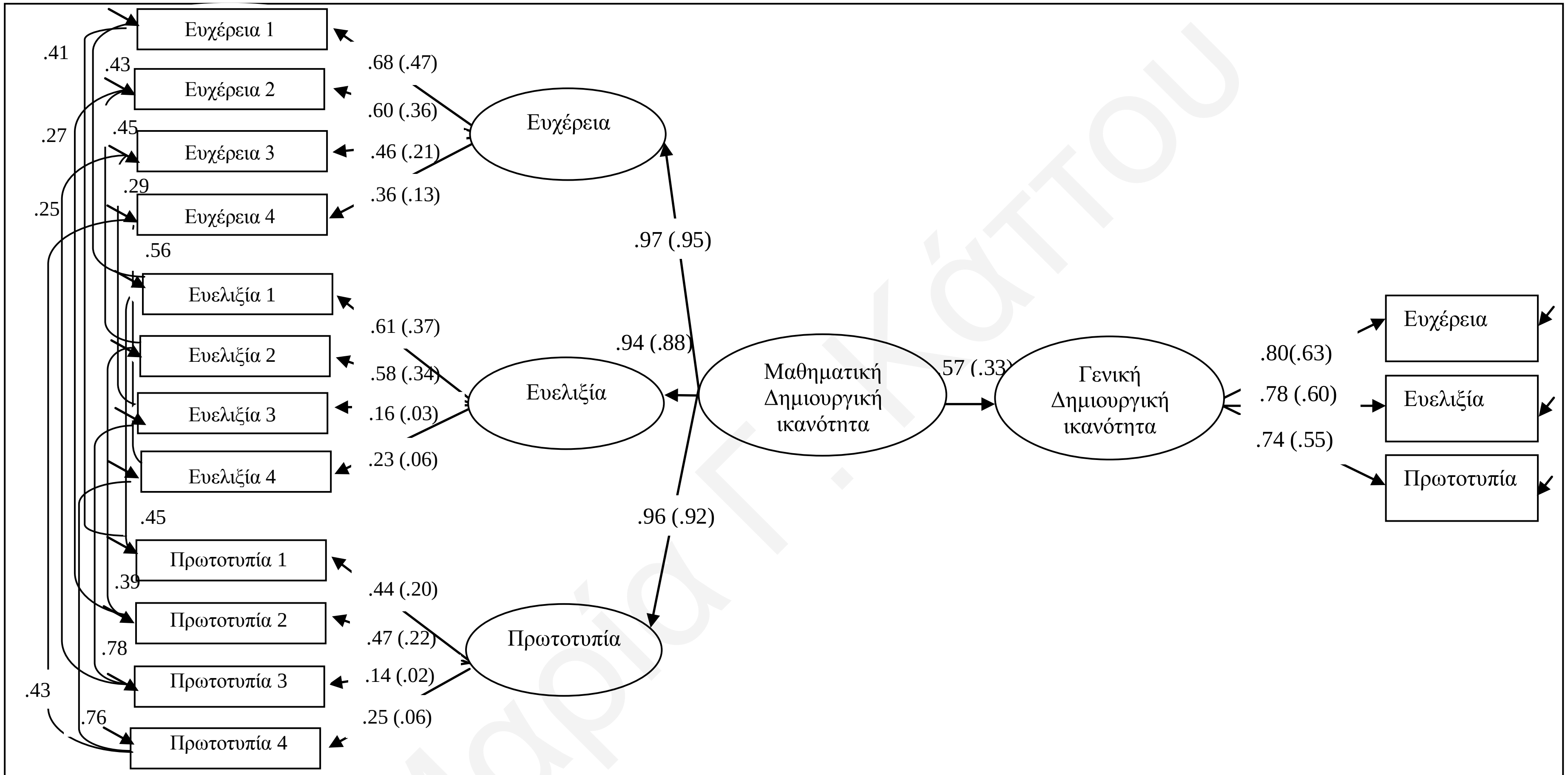
* Ο πρώτος αριθμός δείχνει το συντελεστή φόρτισης και ο αριθμός στην παρένθεση την αντίστοιχη ερμηνευόμενη διασπορά.

Διάγραμμα Π.3. Η Ικανότητα Πρόβλεψης της Μαθηματικής Δημιουργικότητας από την Ηλικία των μαθητών.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 13

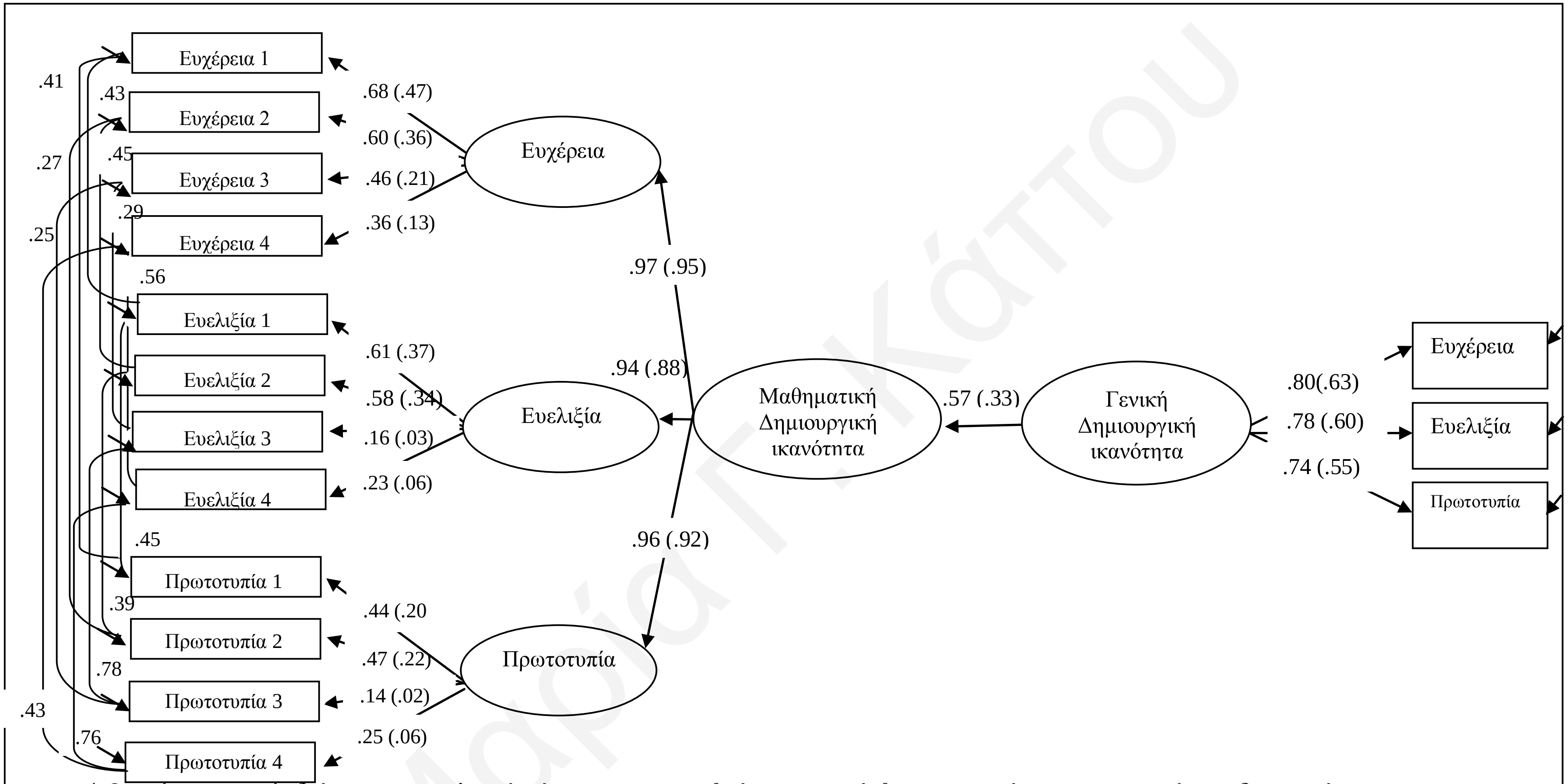


Διάγραμμα Π.4. Συσχέτιση μεταξύ Μαθηματικής Δημιουργικότητας και Γενικής Δημιουργικής Ικανότητας.



* Ο πρώτος αριθμός δείχνει το συντελεστή φόρτισης και ο αριθμός στην παρένθεση την αντίστοιχη ερμηνευόμενη διασπορά.

Διάγραμμα Π.5. Πρόβλεψης της Γενικής Δημιουργικής Ικανότητας από τη Μαθηματική Δημιουργικότητα.



* Ο πρώτος αριθμός δείχνει το συντελεστή φόρτισης και ο αριθμός στην παρένθεση την αντίστοιχη ερμηνευόμενη διασπορά.

Διάγραμμα Π.6. Πρόβλεψης της Μαθηματικής Δημιουργικότητας από τη Γενική Δημιουργική Ικανότητα.