Πανεπιστήμιο Κύπρου

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ

Η ΔΟΜΗ ΚΑΙ Η ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΜΑΡΙΛΕΝΑ ΒΑΡΒΑΡΑ ΧΡΥΣΟΣΤΟΜΟΥ

2014

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ

Η ΔΟΜΗ ΚΑΙ Η ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ

Μαριλένα Βαρβάρα Χρυσοστόμου

Υποβλήθηκε στο Τμήμα Επιστημών της Αγωγής
ως μέρος των υποχρεώσεων για απόκτηση
Διδακτορικού Τίτλου
στη Μαθηματική Παιδεία,
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής
Πανεπιστήμιο Κύπρου

Απρίλιος, 2014

ΣΕΛΙΔΑ ΕΓΚΥΡΟΤΗΤΑΣ

Με το παρόν έγγραφο πιστοποιείται η διδακτορική διατριβή που ετοιμάστηκε

Από την Μαριλένα Βαρβάρα Χρυσοστόμου

Με τίτλο Η Δομή και η Ανάπτυξη της Αλγεβρικής Σκέψης

Η παρούσα Διδακτορική Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για απόκτηση Διδακτορικού Διπλώματος στη Μαθηματική Παιδεία στο Τμήμα Επιστημών της Αγωγής. Η διατριβή παρουσιάστηκε δημόσια σε πενταμελή εξεταστική επιτροπή και εγκρίθηκε στις 4 Απριλίου, 2014.

Ερευνητικός Σύμβουλος: Κωνσταντίνος Χρίστου, Καθηγητής
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Συμβουλευτική Επιτροπή: Αθανάσιος Γαγάτσης, Καθηγητής
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Δήμητρα Πίττα-Πανταζή, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

……………………………… ……………………………………
Κωνσταντίνος Χρίστου Δήμητρα Πίττα-Πανταζή

……………………………….
Αθανάσιος Γαγάτσης

Εξεταστική Επιτροπή:

Αθανάσιος Γαγάτσης (Πρόεδρος)
Καθηγητής, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Κωνσταντίνος Χρίστου
Καθηγητής, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Δήμητρα Πίττα-Πανταζή
Αναπληρώτρια Καθηγήτρια, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Θεοδόσης Ζαχαριάδης
Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Δέσποινα Πόταρη
Αναπληρώτρια Καθηγήτρια, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥ ΔΙΔΑΚΤΟΡΑ

Η παρούσα διατριβή υποβάλλεται προς συμπλήρωση των απαιτήσεων για απονομή Διδακτορικού Τίτλου του Πανεπιστημίου Κύπρου. Είναι προϊόν πρωτότυπης εργασίας αποκλειστικά δικής μου, εκτός των περιπτώσεων που ρητώς αναφέρονται μέσω βιβλιογραφικών αναφορών, σημειώσεων ή και άλλων δηλώσεων.

Μαριλένα Βαρβάρα Χρυσοστόμου

…………………………………..

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της εργασίας ήταν η ανάπτυξη ενός θεωρητικού μοντέλου που να περιγράφει την ικανότητα αλγεβρικής σκέψης μαθητών ηλικίας δέκα με δεκατριών ετών. Η ικανότητα αλγεβρικής σκέψης εξετάστηκε ως προς τέσσερις πτυχές: (α) τη δομή της ικανότητας, (β) την περιγραφή της ανάπτυξης της ικανότητας, (γ) τη σχέση της με την ικανότητα αναλογικού συλλογισμού και (δ) τον αναλογικό συλλογισμό ως μέσο για την έκφραση και ανάπτυξη της ικανότητας. Συγκεκριμένα, όσον αφορά στην τέταρτη πτυχή, αξιοποιήθηκαν έργα αναλογικού συλλογισμού με αλγεβρικό περιεχόμενο για τη διερεύνηση των προσεγγίσεων αναλογικού συλλογισμού και του τρόπου εμφάνισής τους στους μαθητές διαφορετικής ικανότητας αλγεβρικής σκέψης. Παράλληλα, εξετάστηκε κατά πόσο τα συγκεκριμένα έργα ενθάρρυναν τους μαθητές να επιδείξουν βελτιωμένη ικανότητα αλγεβρικής σκέψης.

Στην έρευνα συμμετείχαν 803 μαθητές Ε΄ και Στ΄ δημοτικού και Α΄ γυμνασίου. Χορηγήθηκε ένα εργαλείο για τη μέτρηση της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης και ένα για τη μέτρηση της ικανότητας αναλογικού συλλογισμού. Ακολούθησαν ατομικές συνεντεύξεις στις οποίες 101 μαθητές κλήθηκαν να λύσουν επτά έργα αναλογικού συλλογισμού με αλγεβρικό περιεχόμενο.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η ικανότητα αλγεβρικής σκέψης αποτελείται από τρεις παράγοντες δεύτερης τάξης και οκτώ παράγοντες πρώτης τάξης: (α) την «ικανότητα συλλογισμού για τη συμμεταβολή» που αναλύεται στη «γενίκευση μοτίβων συμμεταβολής» και στη «μεταβολή των τιμών δύο μεταβλητών με βάση κανόνες», (β) την «ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων από την αριθμητική» η οποία αναλύεται στη «γενίκευση ιδιοτήτων των πράξεων», στη «γενίκευση ιδιοτήτων των αριθμών» και στη «γενίκευση των ιδιοτήτων της ισότητας» και (γ) τις «ικανότητες που είναι άμεσα συνυφασμένες με την αλγεβρική σύνταξη», παράγοντας που αναλύεται στην «εύρεση της τιμής του αγνώστου», στη «μοντελοποίηση σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων» και στην «απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων». Εμφανίστηκαν στατιστικά σημαντικές συσχετίσεις μεταξύ των παραγόντων δεύτερης τάξης και ιεραρχική σχέση μεταξύ των παραγόντων πρώτης τάξης εντός κάθε παράγοντα δεύτερης τάξης.

Εντοπίστηκαν τέσσερις ομάδες μαθητών διαφορετικής ικανότητας αλγεβρικής σκέψης. Η δραστηριότητά της πρώτης ομάδας χαρακτηρίστηκε ως «προ-αλγεβρική» εφόσον ενέπλεκε υπολογισμούς με αριθμούς για την εύρεση του αμέσως επόμενου όρου ενός μοτίβου και του αγνώστου σε απλές εξισώσεις και οι μαθητές παρουσίασαν χαμηλή

επίδοση σε όλες τις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης. Η δραστηριότητα της δεύτερης ομάδας χαρακτηρίστηκε ως «διαδικαστική-πρωτοαλγεβρική δραστηριότητα» καθώς παρουσιάστηκε επιτυχία σε έργα γενίκευσης, επίλυσης εξισώσεων και συλλογισμού για τη συμμεταβολή τα οποία επέτρεπαν διαδικαστική προσέγγιση και απαιτούσαν διαδικαστική αντίληψη του συμβόλου της ισότητας. Η δραστηριότητα της τρίτης ομάδας χαρακτηρίστηκε ως «συσχετιστική-συμβολική δραστηριότητα αλγεβρικής σκέψης» λόγω της ικανότητας των μαθητών να μοντελοποιούν σχέσεις μέσω αλγεβρικών συμβόλων και να συλλογίζονται για τις εξισώσεις και τις ισότητες με συσχεσιακό τρόπο. Η δραστηριότητα της τέταρτης ομάδας χαρακτηρίστηκε ως «δομική-καθολική δραστηριότητα αλγεβρικής σκέψης» αφού παρουσιάστηκε ικανότητα απλοποίησης αλγεβρικών εκφράσεων και ψηλή επίδοση σε όλες τις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης.

Η ικανότητα αναλογικού συλλογισμού των μαθητών αποτελεί ισχυρό παράγοντα πρόβλεψης της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης. Εντοπίστηκαν τρεις διαφορετικές προσεγγίσεις αναλογικού συλλογισμού οι οποίες εμφανίζονται σειριακά: η επιφανειακή, η μεταβατική και η δομική. Η υιοθέτηση των τριών προσεγγίσεων διαφοροποιείται ανάμεσα στους μαθητές των τεσσάρων ομάδων αλγεβρικής σκέψης. Τέλος, παρουσιάστηκαν ενδείξεις βελτίωσης της επίδοσης στις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης, από μαθητές της δεύτερης και της τρίτης ομάδας αλγεβρικής σκέψης, κατά την επίλυση των έργων των συνεντεύξεων.

ABSTRACT

The purpose of this study was to develop a theoretical model regarding ten to thirteen year old students' algebraic thinking ability. Algebraic thinking ability was investigated according to four aspects: (a) the structure of this ability, (b) the description of the way it develops, (c) its relation to analogical reasoning and (d) analogical reasoning as means for revealing and developing this ability. Regarding the fourth aspect, analogical reasoning tasks with algebraic content were used to investigate the analogical reasoning approaches and the way they appeared to students who varied in algebraic thinking ability. At the same time, another examination was carried out regarding the usefulness of this type of tasks in encouraging students to show improved algebraic thinking ability.

Eight hundred and three students, aged 10-13, participated in this study. Two tests were administered, one measuring algebraic thinking ability and another one measuring analogical reasoning ability. Clinical interviews with 101 students were conducted in which students had to solve seven analogical reasoning tasks with algebraic content.

The results showed that algebraic thinking ability consists of three second order and eight first order factors: (a) the "ability to reason about covariation", which is analyzed in "generalization of patterns-relations concerning covarying quantities" and "finding corresponding values of variables based on rules", (b) the "ability to generalize properties from arithmetic" which is analyzed in "generalization of properties of operations", "generalization of properties of numbers" and "generalization of properties of equality" and (c) "abilities related to algebraic syntax" which is analyzed in "finding the value of the unknown", "modeling relations using algebraic symbols" and "simplification of algebraic expressions". Statistically significant relations were found among the second order factors, as well as, a hierarchical relation among the first order factors within each second order factor.

Four distinct groups of algebraic thinking ability were identified. Students of the first group indicated low achievement in all algebraic thinking abilities and used calculations with numbers to find only the next term of a pattern and the unknown in simple equations; thus, their activity was named as "pre-algebraic". Students of the second group were successful in tasks that allowed procedural approaches and involved only the procedural conception of the equal sign; thus, their activity was named as "protoalgebraic-procedural". Students of the third group were able to model relations through algebraic symbols and to reason about equalities and equations relationally; thus, their activity was

named as “relational-symbolic algebraic thinking activity”. Students of the fourth group were able to simplify algebraic expressions and showed high performance in all algebraic thinking abilities; thus, their activity was named as “structural-global algebraic thinking ability”.

Analogical reasoning ability is a strong predictive factor of algebraic thinking ability. Three different analogical reasoning approaches were identified which appear sequentially: surface similarity, transitive and structural similarity. The adoption of the three approaches was differentiated among the students of the four algebraic thinking groups. Finally, students of the second and third algebraic thinking groups provided indications of improvement regarding algebraic thinking abilities while they were solving the interview tasks.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ολοκληρώνοντας τη διδακτορική διατριβή θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της συμβουλευτικής επιτροπής που βοήθησαν σημαντικά για τη διεκπεραίωση αυτής της εργασίας. Πρώτα από όλους, ευχαριστώ ιδιαίτερα τον ερευνητικό μου σύμβουλο, Καθηγητή Κωνσταντίνο Χρίστου, για την καθοδήγηση που μου παρείχε σε όλα τα στάδια της διδακτορικής διατριβής και τις πολύτιμες συμβουλές του, τα οποία ήταν καθοριστικά στην πορεία ολοκλήρωσης της διατριβής. Ένα πολύ μεγάλο ευχαριστώ οφείλω και στην Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Δήμητρα Πίττα Πανταζή καθώς οι συμβουλές και εισηγήσεις της αποτέλεσαν πολύτιμη ανατροφοδότηση σε διάφορα στάδια αυτής της πορείας. Τα ενθαρρυντικά σχόλια της Δρ. Πίττα Πανταζή και η προθυμία της να μοιραστώ τους προβληματισμούς μου ήταν για μένα πολύ σημαντικά στην προσπάθεια ολοκλήρωσης της διατριβής. Ευχαριστώ επίσης, τον Καθηγητή Αθανάσιο Γαγάτση για τις σημαντικές εισηγήσεις και τα σχόλιά του τα οποία διαδραμάτισαν σημαντικό ρόλο στην παρούσα εργασία. Η βοήθεια που μου προσέφεραν τα τρία μέλη της συμβουλευτικής επιτροπής δεν περιορίζεται στην παρούσα διατριβή, καθώς τα τελευταία έξι χρόνια μου έδωσαν την ευκαιρία να αποκτήσω χρήσιμες ερευνητικές και επαγγελματικές εμπειρίες. Αισθάνομαι λοιπόν την ανάγκη να τους εκφράσω την αμέριστη ευγνωμοσύνη μου για τη βοήθειά τους.

Θερμές ευχαριστίες θα ήθελα να εκφράσω και στα άλλα δύο μέλη της εξεταστικής επιτροπής, στην Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Δέσποινα Πόταρη και στον Καθηγητή Θεοδόση Ζαχαριάδη για τις εξαιρετικά χρήσιμες εισηγήσεις και τις ουσιαστικές υποδείξεις σχετικά με τη βελτίωση της εργασίας. Θέλω να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον Δρ. Μάριο Πιττάλη για τις σημαντικές συμβουλές και εισηγήσεις του οι οποίες διαδραμάτισαν καθοριστικό ρόλο στο στάδιο της επεξεργασίας των δεδομένων. Δεν μπορώ να παραλείψω να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στον κύριο Τάκη Γαβριηλίδη, στους διευθυντές, εκπαιδευτικούς και μαθητές των σχολείων που συμμετείχαν στην έρευνα, για την προθυμία τους να στηρίξουν την προσπάθειά μου. Ευχαριστώ επίσης, τη συνάδελφο Παρασκευή Σοφοκλέους για τη διάθεσή της να βοηθήσει τις φορές που χρειάστηκα συμβουλή για κάποιο διαδικαστικό θέμα που προέκυπτε.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω όλη την οικογένειά μου και τους φίλους μου που έδειξαν κατανόηση για τις πολλές ώρες μελέτης και στάθηκαν δίπλα μου σε όλη αυτή την πορεία. Θα ήθελα να εκφράσω τις μεγαλύτερες ευχαριστίες μου στους γονείς μου που στήριξαν την επιθυμία μου να συνεχίσω τις σπουδές μου και στον αδελφό μου για τη βοήθειά του.

Στην οικογένειά μου

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Σελίδα

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Σελίδα

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Σελίδα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Εισαγωγή

Η άλγεβρα είναι σημαντική όχι μόνο για ακαδημαϊκούς σκοπούς αλλά και για τη σημερινή πραγματικότητα (Gan, 2008). Η εξέλιξη της χρήσης της τεχνολογίας και της κυριαρχίας της στον πολιτισμό, επιτάσσει την ανάγκη για ανάπτυξη κατανόησης των βασικών αρχών της άλγεβρας και ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης, από όλα τα μέλη της κοινωνίας (Swafford & Langrall, 2000). Λόγω της σημαντικότητάς της, αλλά και της όλο αυξανόμενης ανησυχίας για την ανεπαρκή κατανόηση και προετοιμασία των μαθητών για την άλγεβρα, τα αναλυτικά προγράμματα και η διδασκαλία της άλγεβρας αποτελούν επίκεντρο της προσοχής των αρμοδίων χάραξης πολιτικής αλλά και των ερευνητών του πεδίου της μαθηματικής παιδείας (Kieran, 2007; NCTM, 2000). Σημαντική έμφαση, κοινή σε όλο τον κόσμο, αποτελεί η ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών μικρότερων τάξεων. Ως αποτέλεσμα, ένας από τούς βασικούς στόχους των αναλυτικών προγραμμάτων των μαθηματικών πολλών χωρών, αλλά και του νέου αναλυτικού προγράμματος των μαθηματικών στην Κύπρο, είναι η ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης και των μικρότερων ηλικιακά μαθητών.

Σε χώρες όπως η Κίνα και η Ρωσία, η εισαγωγή αλγεβρικών εννοιών στη διδασκαλία των μαθηματικών του δημοτικού σχολείου ήταν εμφανής από τις δεκαετίες του 1950 και 1960, ενώ στην Ευρώπη και στη Βόρεια Αμερική η συζήτηση για τη συμπερίληψη των αλγεβρικών εννοιών στο αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών μικρότερων τάξεων άρχισε τη δεκαετία του 1970 (Cai & Knuth, 2011). Παρόλα αυτά, την τελευταία δεκαετία (Cai & Knuth, 2011) υπήρξε ένα αυξανόμενο ενδιαφέρον και μια πιο ευρεία αποδοχή της ανάπτυξης αλγεβρικών ιδεών και σκέψης στις μικρότερες τάξεις, κάτι που είναι εμφανές και σε επίσημα έγγραφα (NCTM, 2000). Στο επίσημο έγγραφο των Εθνικών Επιπέδων του οργανισμού National Council of Teachers of Mathematics (2000), τονίζεται η σπουδαιότητα της άλγεβρας και η σημασία της ανάπτυξης της αλγεβρικής σκέψης, αρχίζοντας από το νηπιαγωγείο, ώστε οι μαθητές να αναπτύξουν τις αλγεβρικές δεξιότητες και τον αλγεβρικό τρόπο σκέψης που χρειάζονται για την επιτυχία στο λύκειο και πέρα από αυτό. Είναι κοινώς αποδεκτό ότι για να πετύχουμε τον στόχο «Άλγεβρα για όλους», οι μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης θα πρέπει να έχουν εμπειρίες οι οποίες θα τους προετοιμάσουν για την πιο τυπική διδασκαλία της άλγεβρας σε επόμενες τάξεις (Cai, Lew, Cheongwon, Morris, Moyer, Ng & Schmittau, 2005; NCTM, 2000).

Για την κατανόηση των όλο και πιο σύνθετων μαθηματικών του 21ου αιώνα, χρειάζεται οι μαθητές να αποκτήσουν ένα εύρος εμπειριών από το δημοτικό σχολείο οι οποίες θα επεκτείνονται πέρα από την αριθμητική και υπολογιστική ευχέρεια και θα αφορούν στην υποβόσκουσα δομή των μαθηματικών (Romberg & Kaput, 1999). Η ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης στις μικρές τάξεις απαιτεί την ανάπτυξη συγκεκριμένων τρόπων σκέψης, συμπεριλαμβανομένης της ανάλυσης σχέσεων μεταξύ ποσοτήτων, της παρατήρησης της δομής, της μελέτης της μεταβολής, της γενίκευσης, της επίλυσης προβλήματος, της μοντελοποίησης, της αιτιολόγησης, της απόδειξης και της πρόβλεψης (Kieran, 2004). Ως εκ τούτου, η άλγεβρα στις μικρές τάξεις αναπτύσσει όχι μόνο νέα εργαλεία για την κατανόηση μαθηματικών σχέσεων αλλά επίσης, νέες συνήθειες του μυαλού (Cai & Knuth, 2011).

Η έρευνα σχετικά με την αλγεβρική σκέψη στις μικρότερες τάξεις έχει εστιάσει στις ικανότητες των μαθητών (δημοτικού και γυμνασίου) σχετικά με διάφορες έννοιες, όπως για παράδειγμα στη γενίκευση επαναλαμβανόμενων και αναπτυσσόμενων μοτίβων και στον εντοπισμό της δομής (π.χ. Lannin, 2005; Radford, 2008; Warren & Cooper, 2008), στο συλλογισμό για συναρτησιακές σχέσεις εξετάζοντας τις έννοιες της συνδυακύμανσης και της αντιστοιχίας (π.χ. Blanton & Kaput, 2011; Moss & McNab, 2011), στη γενίκευση των ιδιοτήτων αριθμών ή/και των πράξεων (π.χ. Carpenter, Franke & Levi, 2003; Kaput, 2008), στην κατανόηση της συσχεσιακής αντίληψης του συμβόλου της ισότητας (π.χ. Carpenter, Levi, Berman & Pligge, 2005; Matthews, Rittle-Johnson, McEldoon & Taylor, 2012; Molina & Ambrose, 2008), στη διατύπωση, χρήση και επίλυση εξισώσεων (π.χ. Brizuela & Schliemann, 2004; Swafford & Langrall, 2000), στο χειρισμό και πράξεις με αλγεβρικά σύμβολα (π.χ. Bills, Ainley & Wilson, 2003; Carraher, Schliemann & Brizuela, 2001; Hewitt, 2012), στο συλλογισμό για τις ιδιότητες της ισότητας (π.χ. Blanton, Levi, Crites, & Dougherty, 2011), στην επίδοση σε αλγεβρικά λεκτικά προβλήματα (π.χ. Johanning, 2004).

Ωστόσο, «παρόλο που υπάρχει κάποια συμφωνία στο ότι η άλγεβρα έχει θέση στο δημοτικό, η ερευνητική βάση η οποία χρειάζεται για την ενσωμάτωση της άλγεβρας στο αναλυτικό πρόγραμμα του δημοτικού ακόμη *αναπτύσσεται*, αυτά που γνωρίζουμε είναι λίγα και ακόμη σημαντικότερο, αυτά που ήδη γνωρίζουμε δεν έχουν μέχρι στιγμής συγκεντρωθεί ή οργανωθεί με κάποιο τρόπο» (Carraher & Schliemann, 2007, σ. 671).

Διατύπωση του Προβλήματος

Παρόλη την αυξανόμενη έρευνα στο πεδίο της αλγεβρικής σκέψης την τελευταία δεκαετία, οι περισσότερες εργασίες επικεντρώνονται σε μια αλγεβρική έννοια ή ικανότητα κάθε φορά, ενώ οι προσπάθειες καθολικής περιγραφής της αλγεβρικής σκέψης είναι ελάχιστες (Carraher & Schliemann, 2007). Αν και τα αποτελέσματά των ερευνών παρέχουν πολύτιμα στοιχεία για την ικανότητα των μαθητών να αντιμετωπίζουν έργα αλγεβρικής σκέψης, η αποσπασματική προσέγγιση των αλγεβρικών εννοιών δεν έχει επιτρέψει την ανάπτυξη ενός ολοκληρωμένου θεωρητικού μοντέλου για τη δομή και την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης στις μικρότερες τάξεις. Όπως υποδεικνύει η βιβλιογραφία, η μάθηση της άλγεβρας και η ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης αποτελεί ένα σύνθετο έργο, το οποίο αποτελείται από διάφορες πτυχές. Η βιβλιογραφία στερείται ενός περιεκτικού και ολοκληρωμένου μοντέλου, το οποίο θα βασίζεται σε εμπειρικά δεδομένα, για τις διαφορετικές ικανότητες αλγεβρικής σκέψης και το οποίο θα αφορά στη φύση της αλγεβρικής σκέψης στις μικρές τάξεις (Ε΄-Στ΄ τάξεις δημοτικού και Α΄ γυμνασίου), μικρότερες δηλαδή από ότι συνηθιζόταν να εξετάζεται η άλγεβρα. Αυτό που φαίνεται να απουσιάζει είναι η κατανόηση του πώς αυτές οι ικανότητες σχετίζονται μεταξύ τους, όχι μόνο στη θεωρία, αλλά με βάση τη συμπεριφορά των μαθητών (Oldenburg, 2012). Αυτή η γνώση αναμένεται να ενημερώσει τη συζήτηση για τους διαφορετικούς τρόπους διδασκαλίας και μάθησης για την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης.

Η πληθώρα των ερευνών την τελευταία δεκαετία για την αλγεβρική σκέψη ανέδειξε τις ικανότητες των μαθητών και την επιτυχία τους σε αλγεβρικά έργα. Για να είναι όμως εφικτό να αξιοποιηθούν αυτές οι ικανότητες των μαθητών και να οδηγηθούμε σε μια αναδιοργάνωση της διδασκαλίας της αριθμητικής και της άλγεβρας, απαιτείται μια διασαφήνιση όχι μόνο του «τι είναι σε θέση να κάνουν» οι μικρότεροι μαθητές σε σχέση με την αλγεβρική σκέψη, αλλά και του μέχρι *πού* φτάνουν αυτές οι δυνατότητες. Μια ολοκληρωμένη περιγραφή των θεμάτων αυτών καθίσταται εφικτή μέσα από τον εντοπισμό ομάδων υποκειμένων με διαφορετική συμπεριφορά ως προς όλες τις ικανότητες της αλγεβρικής σκέψης. Η ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών και στην προκειμένη περίπτωση των αλγεβρικών εννοιών, διέρχεται μέσα από διαδοχικά επίπεδα ανάπτυξης. Σύμφωνα όμως με τον Radford (2012), παρόλο που η άλγεβρα αποτελεί πλέον ένα ενεργό πεδίο έρευνας εντός της μαθηματικής παιδείας, γνωρίζουμε πολύ λίγα για το πώς αναπτύσσεται η αλγεβρική σκέψη στους μικρούς μαθητές. Η ανάγκη ενός γενικού μοντέλου το οποίο θα χαρακτηρίζει την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών με τα χρόνια, προτείνεται ως ιδέα για μελλοντική εργασία σε κάποια κεφάλαια-κριτικές που αφορούν στην αλγεβρική σκέψη (π.χ. Jones, Langrall, Thornton & Nisbet, 2002; Kieran, 2007). Παρά τις μεταρρυθμίσεις των αναλυτικών προγραμμάτων και το ερευνητικό ενδιαφέρον για την αλγεβρική σκέψη στις μικρότερες τάξεις, φαίνεται να υπήρχε μια στασιμότητα ως προς τον εντοπισμό επιπέδων ανάπτυξης της ικανότητας εύρεσης μοτίβων (Mulligan & Verganud, 2006). Αν και πλέον εντοπίζονται προσπάθειες περιγραφής των επιπέδων ανάπτυξης για την ικανότητα γενίκευσης μοτίβων και την επίλυση εξισώσεων μέσω της υιοθέτησης μοντέλων όπως την ταξινομία SOLO (Biggs & Collis, 1982), η στασιμότητα τώρα έγκειται στην απουσία επιπέδων ανάπτυξης της αλγεβρικής σκέψης στα οποία θα προσδιορίζονται χαρακτηριστικά των μαθητών ως προς όλες τις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης. Όπως υποστηρίζουν οι Lim και Noraini Idris (2006), δεν υπάρχει μια ολοκληρωμένη περιγραφή της ανάπτυξης της αλγεβρικής ικανότητας των μαθητών. Η διαμόρφωση ομάδων επίδοσης με διαφορετική συμπεριφορά και χαρακτηριστικά ως προς *όλες* τις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης, είναι απαραίτητη για την ανάπτυξη ενός ολοκληρωμένου πλαισίου στο οποίο θα ήταν δυνατό να στηριχθούν τόσο η διδασκαλία της άλγεβρας όσο και ο σχεδιασμός αναλυτικών προγραμμάτων σε σχέση με την αλγεβρική σκέψη στις μικρότερες τάξεις. Η μελέτη της ανάπτυξης της αλγεβρικής σκέψης απαιτεί τον καθορισμό ομάδων επίδοσης και των χαρακτηριστικών τους, ώστε τόσο οι ερευνητές όσο και οι εκπαιδευτικοί να είναι σε θέση να μελετήσουν την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών.

Ελάχιστη προσοχή έχει δοθεί και στη διερεύνηση των διαδικασιών συλλογισμού στις οποίες πιθανό να οφείλεται η *επιτυχία* ή η *αποτυχία* των μαθητών σε έργα αλγεβρικής σκέψης. Δεν είμαστε ενήμεροι για τα χαρακτηριστικά των μαθητών που επιτυγχάνουν ή αποτυγχάνουν να επιδείξουν αλγεβρική σκέψη (Warren, 1997). Η αλγεβρική σκέψη εμπλέκει και αφορά στη γενίκευση και αφαίρεση ιδεών και σχέσεων. Στη γενίκευση και αφαίρεση ιδεών και σχέσεων, διαδραματίζει σημαντικό ρόλο ο εντοπισμός συσχεσιακών μοτίβων και η ανάπτυξη της σκέψης για τη δομή. Η διαδικασία συλλογισμού η οποία σχετίζεται άμεσα με τον εντοπισμό συσχεσιακών μοτίβων και την εστίαση της προσοχής στη δομή είναι ο αναλογικός συλλογισμός, όπως αυτός ορίζεται στο πεδίο της ψυχολογίας αλλά και από την English (2004). Ο αναλογικός συλλογισμός περιλαμβάνει την αναγνώριση και μεταφορά δομικών πληροφοριών από ένα σύστημα (πηγή) σε ένα άλλο (στόχο) και πραγματοποιείται με την εύρεση της αντιστοιχίας ανάμεσα στις διαδικασίες και τους μηχανισμούς που χαρακτηρίζουν τα δύο συστήματα (Vosniadou, 1989). Έρευνες που εξέτασαν τη σχέση μεταξύ μαθηματικού και αναλογικού συλλογισμού (π.χ. Buehl &

Alexander, 2004) εντόπισαν ότι συνδετικό κρίκο μεταξύ των δύο μορφών συλλογισμού αποτέλεσε ο εντοπισμός μαθηματικών μοτίβων. Ο εντοπισμός μαθηματικών μοτίβων βρίσκεται στην καρδιά της αλγεβρικής σκέψης, επομένως τέτοια στοιχεία καθιστούν τη διερεύνηση της σχέσης του αναλογικού συλλογισμού και της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών αναγκαία. Αν εξαιρέσουμε ελάχιστες έρευνες (English & Warren, 1994; Novick, 1992), δεν έχει διερευνηθεί η σχέση της ικανότητας αναλογικού συλλογισμού με την ικανότητα και επίδοση σε έργα αλγεβρικής σκέψης. Οι συγκεκριμένες έρευνες (English & Warren, 1994; Novick, 1992), παρέχουν στοιχεία ότι η ικανότητα αναλογικού συλλογισμού σχετίζεται με την επίδοση σε έργα αλγεβρικής σκέψης, ωστόσο δεν μας ενημερώνουν για τη φύση της σχέσης. Για την ολοκληρωμένη εξέταση της προαναφερθείσας σχέσης, χρειάζεται να ληφθεί υπόψη το πρόβλημα που εντοπίζεται στη βιβλιογραφία και αφορά στη μονοδιάστατη μέτρηση του αναλογικού συλλογισμού μέσα από κλασσικές αναλογίες, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη το διαφορετικό είδος σχέσεων που εμπλέκεται στις αναλογίες αυτές (αριθμητικές, λεκτικές, με σχήματα). Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τον Goswami (2004), ο εντοπισμός εννοιολογικών σχέσεων (σε λεκτικές αναλογίες) πιθανό να έχει διαφορετική επίδραση στο μαθηματικό συλλογισμό (ή την αλγεβρική σκέψη) από ότι ο εντοπισμός αντιληπτικών σχέσεων (perceptual relations) (σε αναλογίες με σχήματα). Οι ατομικές διαφορές στην ικανότητα αναλογικού συλλογισμού και εντοπισμού σχέσεων στα διαφορετικά πλαίσια, αναμένεται να συνεισφέρουν στην ερμηνεία της επιτυχίας ή της αποτυχίας των μαθητών σε έργα αλγεβρικής σκέψης.

Το δεύτερο πρόβλημα που εντοπίζεται στη βιβλιογραφία σχετικά με τον αναλογικό συλλογισμό αφορά στο ότι ελάχιστες έρευνες εξετάζουν τον αναλογικό συλλογισμό ως μέσο το οποίο ενδέχεται να βοηθήσει τους μαθητές να εκφράσουν και να αναπτύξουν αλγεβρικές έννοιες και ικανότητες. Όπως αναφέρουν οι English και Sharry (1996), ενώ υπάρχουν θεωρίες μάθησης οι οποίες καταπιάνονται με την ανάπτυξη και αφαίρεση των εννοιών (διαδικασία-αντικείμενο), αυτές δεν εξηγούν *το πώς το* άτομο καταλήγει σε γενικεύσεις. Οι ίδιοι προτείνουν ότι ο αναλογικός συλλογισμός διαδραματίζει σημαντικό ρόλο σε αυτή τη διαδικασία και παρέχουν στοιχεία με μεγαλύτερους ηλικιακά μαθητές (λυκείου) τα οποία αναδεικνύουν τη σημασία του αναλογικού συλλογισμού στην αλγεβρική ικανότητα. Κρίνεται επομένως αναγκαίο να εξεταστεί ο αναλογικός συλλογισμός *και* μέσα από ανοικτά έργα αναλογικού συλλογισμού με μαθηματικό περιεχόμενο (Lee & Sriraman, 2011), τα οποία θα εμπλέκουν συγκεκριμένα αλγεβρική σκέψη και πλαίσιο. Με αυτό τον τρόπο καθίσταται δυνατή η διερεύνηση του κατά πόσο τα συγκεκριμένα έργα αναλογικού συλλογισμού παρακινούν τους μαθητές μικρότερων τάξεων να παρατηρήσουν τη δομή των καταστάσεων και τους ενθαρρύνουν να εκφράσουν ή να αναπτύξουν ικανότητα αλγεβρικής σκέψης.

Χρειάζεται επομένως, να διερευνηθεί σε ένα ενιαίο πλαίσιο η δομή και η περιγραφή της ανάπτυξης της σκέψης των μαθητών σε σχέση με τις διαφορετικές ικανότητες αλγεβρικής σκέψης (γενίκευση ιδιοτήτων των πράξεων, γενίκευση ιδιοτήτων των αριθμών, γενίκευση σχέσεων-μοτίβων για την ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών, αντίληψη και εύρεση της τιμής του αγνώστου, μεταβολή των τιμών της εξαρτημένης σε σχέση με την ανεξάρτητη μεταβλητή με βάση κανόνες και συλλογισμός για τη σχέση μεταβολής, γενίκευση για τις ιδιότητες της ισότητας, μοντελοποίηση σχέσεων αλγεβρικών συμβόλων, απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων) το οποίο θα ενσωματώνει την επίδραση της ικανότητας αναλογικού συλλογισμού των μαθητών σε διαφορετικά πλαίσια (λεκτικές, αριθμητικές και οπτικο-χωρικές αναλογίες) και θα αξιοποιεί τον αναλογικό συλλογισμό ως μέσο έκφρασης και ανάπτυξης της αλγεβρικής σκέψης.

Σκοπός της Εργασίας

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν η ανάπτυξη ενός ολοκληρωμένου θεωρητικού μοντέλου για τη φύση και την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης μαθητών 10-13 ετών. Η αλγεβρική σκέψη εξετάστηκε ως προς τέσσερις πτυχές. Η πρώτη πτυχή αφορά στη διερεύνηση της δομής της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης, εξετάζοντας τις διαφορετικές ικανότητες της αλγεβρικής σκέψης και τις μεταξύ τους σχέσεις. Η δεύτερη πτυχή αναφέρεται στην εξέταση και περιγραφή του τρόπου ανάπτυξης των ικανοτήτων που συνθέτουν την ικανότητα αλγεβρικής σκέψης και στον εντοπισμό ομάδων μαθητών διαφορετικής συμπεριφοράς και επίδοσης ως προς όλες τις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης. Η τρίτη πτυχή αφορά στη διερεύνηση της σχέσης μεταξύ αλγεβρικής σκέψης και του αναλογικού συλλογισμού στα διαφορετικά πλαίσια. Η τέταρτη πτυχή εμπλέκει την αξιοποίηση έργων αναλογικού συλλογισμού με αλγεβρικό περιεχόμενο για την εξέταση του αναλογικού συλλογισμού ως *μέσου* έκφρασης και ανάπτυξης της αλγεβρικής σκέψης. Συγκεκριμένα, η τέταρτη πτυχή αφορά στη διερεύνηση των προσεγγίσεων αναλογικού συλλογισμού και τρόπου εμφάνισής τους στους μαθητές διαφορετικής ικανότητας αλγεβρικής σκέψης και στη μελέτη του κατά πόσο τα έργα αναλογικού συλλογισμού με αλγεβρικό περιεχόμενο ενθάρρυναν τους μαθητές να επιδείξουν βελτιωμένη ικανότητα αλγεβρικής σκέψης.

Ερευνητικά Ερωτήματα

Τα βασικά ερευνητικά ερωτήματα όπως προκύπτουν από το σκοπό της εργασίας αναλύονται ως εξής:

(α) Ποιοι παράγοντες συνθέτουν την ικανότητα αλγεβρικής σκέψης των μαθητών;

(β) Ποιες είναι οι διαφορές ανάμεσα στους μαθητές διαφορετικών ηλικιών ως προς την ικανότητα αλγεβρικής σκέψης;

(γ) Ποιες είναι οι διαφορετικές ομάδες επίδοσης μαθητών ηλικίας 10-13 ετών ως προς την ικανότητα αλγεβρικής σκέψης;

(δ) Ποια είναι η δομή της ικανότητας του αναλογικού συλλογισμού;

(ε) Ποια είναι η σχέση μεταξύ αλγεβρικής σκέψης και αναλογικού συλλογισμού;

(στ) Πώς αντιμετωπίζουν και που εστιάζουν οι μαθητές διαφορετικών ομάδων αλγεβρικής σκέψης κατά την επίλυση έργων αναλογικού συλλογισμού τα οποία αφορούν συγκεκριμένα στην αλγεβρική σκέψη;

Σημασία και Πρωτοτυπία της Εργασίας

Η σημασία της παρούσας εργασίας συνίσταται στο ότι εξετάζει τη φύση και την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης σε μικρές τάξεις στην οποία αν και τα τελευταία χρόνια δόθηκε αρκετή έμφαση, οι αποσπασματικές προσπάθειες εξέτασης δεν επέτρεψαν μέχρι στιγμής τη δημιουργία ενός ολοκληρωμένου θεωρητικού μοντέλου για την αλγεβρική σκέψη το οποίο θα βασίζεται σε εμπειρικά δεδομένα. Ενώ η έρευνα στις δεκαετίες του 1980 και 1990 τόνισε στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην άλγεβρα, οι πιο πρόσφατες έρευνες παρέχουν στοιχεία ότι μικρότεροι μαθητές (από 8 ετών) έχουν την ικανότητα να εκφράσουν αλγεβρικές σχέσεις, να αναπαραστήσουν άγνωστες τιμές μέσω μεταβλητών, να χειριστούν αλγεβρικές εκφράσεις (Hewitt, 2012; Schliemann, Carraher, Goodrow, Caddle & Porter, 2013). Τα αντικρουόμενα αποτελέσματα της παλαιότερης και της σύγχρονης έρευνας υποδεικνύουν την ανάγκη συστηματικής εξέτασης όλων των ικανοτήτων αλγεβρικής σκέψης των μικρότερων ηλικιακά μαθητών, με απώτερο σκοπό τη δημιουργία ενός μοντέλου για την ολοκληρωμένη περιγραφή του τι είναι σε θέση να κάνουν και τι δεν είναι σε θέση να κάνουν οι μαθητές στο πλαίσιο της αλγεβρικής σκέψης. Ως εκ τούτου, σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να γεφυρώσει το χάσμα μεταξύ παλιότερων και πιο σύγχρονών ευρημάτων. Δεδομένης της σημασίας ανάπτυξης της αλγεβρικής σκέψης από τις μικρότερες τάξεις (NCTM, 2000), η σημαντικότητα της παρούσας έρευνας εδράζεται συγκεκριμένα στο ότι αποσκοπεί στην εξέταση: (α) της δομής της ικανότητας των μαθητών σε σχέση με την αλγεβρική σκέψη, εντοπίζοντας τις διαφορετικές ικανότητες αλγεβρικής σκέψης που θα πρέπει να αναπτύξουν οι μικρότεροι μαθητές αλλά και οι οποίες θα αποτελέσουν βάση για τη μάθηση της άλγεβρας σε μεγαλύτερες τάξεις, στο λύκειο και πέρα από αυτό και (β) στη διερεύνηση της συμπεριφοράς και των χαρακτηριστικών των διαφορετικών ομάδων επίδοσης ως προς τις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης. Ο εντοπισμός των διαφορετικών ικανοτήτων μέσα από τη συμπεριφορά των ίδιων των μαθητών και των διαφορετικών ομάδων επίδοσης, θα μας επιτρέψουν να κατανοήσουμε τη φύση της αλγεβρικής σκέψης σε μικρότερες τάξεις. Στη διερεύνηση της φύσης και της ανάπτυξης της αλγεβρικής σκέψης και των διαφορετικών ικανοτήτων αλγεβρικής σκέψης αναμένεται να συνεισφέρουν τα διαφορετικά είδη αναλογικού συλλογισμού, και συγκεκριμένα η ικανότητα εντοπισμού και μεταφοράς οπτικο-χωρικών σχέσεων, εννοιολογικών-σημασιολογικών σχέσεων και αριθμητικών σχέσεων. Η ικανότητα αναλογικού συλλογισμού αποσκοπεί στο να μας ενημερώσει κατά πόσο η επιτυχία ή η αποτυχία των μαθητών σε έργα αλγεβρικής σκέψης επηρεάζεται από την ικανότητά τους να εντοπίζουν τη δομή σε διαφορετικά πλαίσια.

Καινοτομία της παρούσας εργασίας αποτελεί η ανάπτυξη ενός ολοκληρωμένου θεωρητικού μοντέλου για τη φύση και την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης στις μικρότερες τάξεις. Συγκεκριμένα, το μοντέλο επικεντρώνεται στην εξέταση των διαφορετικών ικανοτήτων αλγεβρικής σκέψης, όχι με μόνο με βάση τη θεωρία, αλλά και μέσα από εμπειρικά δεδομένα, αλλά και στην διερεύνηση των σχέσεων μεταξύ αυτών των ικανοτήτων κάτι που απουσιάζει ακόμη από τη βιβλιογραφία (Mulligan & Vergnaud, 2006; Oldenburg, 2012). Το θεωρητικό μοντέλο συνδυάζει τα σημαντικότερα ευρήματα στους τομείς της ψυχολογίας και μαθηματικής παιδείας και αναφέρεται στις έννοιες του αναλυτικού προγράμματος στην περιοχή της αλγεβρικής σκέψης: γενίκευση των ιδιοτήτων των αριθμών, γενίκευση ιδιοτήτων των πράξεων, και γενίκευση ιδιοτήτων της ισότητας, γενίκευση μοτίβων-σχέσεων μεταβλητών που μεταβάλλονται ταυτόχρονα, μεταβολή των τιμών δύο μεταβλητών με βάση κανόνες και συλλογισμός για τη σχέση μεταβολής, εύρεση της τιμής του αγνώστου, μοντελοποίηση σχέσεων μέσω της χρήσης αλγεβρικών συμβόλων, χειρισμός και πράξεις με αλγεβρικά σύμβολα για την απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων. Στην παρούσα εργασία υιοθετείται η προσέγγιση διάφορων ερευνητών οι οποίοι παρουσιάζουν ενδιαφέρον για τη μαθηματική κατανόηση και το συλλογισμό τα οποία οι μικροί μαθητές επιδεικνύουν προτού ακόμη εκτεθούν στην τυπική διδασκαλία συγκεκριμένων θεμάτων (English, 1997; Resnick & Omanson, 1987; Saxe, 1991). Οι μαθητές έχουν την ικανότητα αλγεβρικής σκέψης προτού ακόμη παρακολουθήσουν τυπική διδασκαλία (Carpenter et al., 2003). Υιοθετώντας αυτές τις απόψεις, γίνεται εφικτή η προσπάθεια εξέτασης και κάποιων ικανοτήτων των μαθητών (π.χ. ικανότητα χειρισμού και πράξεις με αφηρημένα σύμβολα) για τις οποίες οι μαθητές του δημοτικού δεν έχουν παρακολουθήσει τυπική διδασκαλία. Παρουσιάζεται επομένως, για πρώτη φορά ένα ενιαίο θεωρητικό μοντέλο για τη φύση και την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης το οποίο (α) περιγράφει τη δομή και τις σχέσεις μεταξύ των ικανοτήτων αλγεβρικής σκέψης, (β) περιγράφει τα χαρακτηριστικά και τη συμπεριφορά των ομάδων μαθητών διαφορετικής ικανότητας αλγεβρικής σκέψης, ενσωματώνοντας και λαμβάνοντας υπόψη όλες τις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης, (γ) λαμβάνει υπόψη τα ατομικά χαρακτηριστικά των μαθητών εξετάζοντας την ικανότητα αναλογικού συλλογισμού τους σε διαφορετικά πλαίσια και την επίδραση του στην ανάπτυξη αλγεβρικής σκέψης (και το αντίστροφο) και (δ) αναδεικνύει τη σημασία του αναλογικού συλλογισμού ως μέσου επίδειξης και ανάπτυξης της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης προτείνοντας «Έργα Αναλογικού Συλλογισμού Αλγεβρικής Σκέψης» (ΕΑΣ) τα οποία επιτρέπουν εξέταση της ικανότητας των μαθητών να σκέφτονται αναλογικά σε αλγεβρικό πλαίσιο-περιεχόμενο και της καταλληλότητας των έργων να βοηθήσουν τους μαθητές να επιδείξουν βελτιωμένη ικανότητα αλγεβρικής σκέψης. Παράλληλα, η διερεύνηση της αξιοποίησης των έργων ΕΑΣ συνεισφέρει στη συζήτηση για τη δυνατότητα συμπερίληψής τέτοιων έργων στη διδασκαλία των μαθηματικών (Lee & Sriraman, 2011). Το ολοκληρωμένο θεωρητικό μοντέλο της παρούσας εργασίας αναμένεται να αποτελέσει χρήσιμο εργαλείο για τους ερευνητές της μαθηματικής παιδείας για περαιτέρω έρευνα σχετικά με τη φύση και ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης στις μικρότερες τάξεις και την επιβεβαίωση ή τροποποίηση του προτεινόμενου μοντέλου.

Τα αποτελέσματα αναμένεται να συνεισφέρουν στη διδασκαλία και αξιολόγηση της αλγεβρικής σκέψης στις μικρότερες τάξεις (δημοτικό και πρώτες τάξεις του γυμνασίου) και στην προσπάθεια ανάπτυξης της αλγεβρικής σκέψης. Η πρακτική αυτή συνεισφορά πιθανό να αποτελέσει οδηγό για την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών και βάση για το σχεδιασμό μιας διαφορετικής διδακτικής προσέγγισης από τους εκπαιδευτικούς η οποία θα βασίζεται στην πολυδιάστατη φύση της αλγεβρικής σκέψης για την ανάπτυξη και τη διερεύνηση των ικανοτήτων και εννοιών της αλγεβρικής σκέψης. Το θεωρητικό μοντέλο αναμένεται να υποδείξει στους εκπαιδευτικούς το πώς η διδασκαλία των διαφορετικών ικανοτήτων αλγεβρικής σκέψης ενισχύει η μία την άλλη ή η διδασκαλία άλλων διαδικασιών συλλογισμού (συγκεκριμένα η ικανότητα αναλογικού συλλογισμού) συνεισφέρει στην ικανότητα αλγεβρικής σκέψης, και το πώς αυτά αναμένεται να αξιοποιηθούν στη διδασκαλία τους. Θα αποτελεί επίσης, εργαλείο για τη μελέτη της ανάπτυξης της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών. Επιπρόσθετα, αποσκοπεί να ενημερώσει τους αρμόδιους σχεδιασμού αναλυτικών προγραμμάτων στο πώς να δομήσουν τον αναλυτικό πρόγραμμα της άλγεβρας, κυρίως στις μικρότερες τάξεις. Τέλος, αναμένεται να προτείνει τόσο σε ερευνητικό επίπεδο όσο και σε διδακτικό επίπεδο έργα αναλογικού συλλογισμού με περιεχόμενο αλγεβρικής σκέψης (ΕΑΣ), ως μέσο έκφρασης και ανάπτυξης της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης και ως έναν πιθανό τρόπο διδασκαλίας αλγεβρικών εννοιών ο οποίος επικεντρώνει την προσοχή των μαθητών στη δομή.

Περιορισμοί της Εργασίας

Περιορισμό της έρευνας αποτελεί το γεγονός ότι δεν πραγματοποιήθηκαν διαχρονικές μετρήσεις της ανάπτυξης των ικανοτήτων αλγεβρικής σκέψης των μαθητών, με αποτέλεσμα να μη καθίσταται δυνατή η εξέταση αναπτυξιακών μοντέλων για τη συμπεριφορά των μαθητών. Ως εκ τούτου, η έρευνα περιορίζεται στην περιγραφή διαφορετικών ομάδων μαθητών ως προς την επίδοση και τη συμπεριφορά τους στις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης.

Ένας δεύτερος περιορισμός σχετίζεται με το δείγμα τη έρευνας και το γεγονός ότι τα υποκείμενα προέρχονται μόνο από τις τάξεις Ε' και Στ' δημοτικού και Α' γυμνασίου. Η εξέταση επομένως της ανάπτυξης της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης μελετήθηκε σε ένα περιορισμένο εύρος ηλικιών και όχι σε όλο το ηλικιακό φάσμα της εκπαίδευσης. Επιπρόσθετα, η επιλογή των υποκειμένων δεν πραγματοποιήθηκε με τυχαία δειγματοληψία, αλλά η επιλογή έγινε με σχολεία πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στα οποία υπήρχε η σύμφωνη γνώμη των διευθυντών και των εκπαιδευτικών για τη χορήγηση των δοκιμίων. Για το λόγο αυτό, τα αποτελέσματα δεν είναι δυνατό να γενικευτούν για όλους τους μαθητές της Κύπρου, αλλά αφορούν μόνο στα υποκείμενα της παρούσας εργασίας.

Δομή της Εργασίας

Στα κεφάλαια που ακολουθούν περιγράφεται το θεωρητικό υπόβαθρο, η μεθοδολογία, τα αποτελέσματα καθώς και τα συμπεράσματα της εργασίας. Συγκεκριμένα, στο δεύτερο κεφάλαιο, στο θεωρητικό υπόβαθρο, παρουσιάζεται εκτεταμένα η σχετική βιβλιογραφία η οποία αποτέλεσε τη βάση για το σχεδιασμό της εργασίας. Το κεφάλαιο αυτό αναφέρεται αρχικά σε έρευνες στο πεδίο της μαθηματικής παιδείας και συγκεκριμένα της αλγεβρικής σκέψης που αφορούν σε θεωρίες ολοκληρωμένης περιγραφής της αλγεβρικής σκέψης, στις διαφορετικές ικανότητες αλγεβρικής σκέψης που προκύπτουν από τη βιβλιογραφία και αποτελέσματα ερευνών σχετικά με αυτές και σε θεωρίες γνωστικής ανάπτυξης για τη διερεύνηση της ανάπτυξης αλγεβρικής σκέψης. Στη συνέχεια με στόχο τη διερεύνηση άλλων γνωστικών παραγόντων και της σχέσης τους με την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης, γίνεται αναφορά σε έρευνες τόσο από το πεδίο της μαθηματικής παιδείας και του πεδίου της γνωστικής ψυχολογίας για τον αναλογικό συλλογισμό, τα έργα που χρησιμοποιούνται για τη μέτρησή του, την ανάπτυξή του και τη σχέση του με το μαθηματικό συλλογισμό και την αλγεβρική σκέψη. Παρουσιάζονται επίσης εργασίες που προτείνουν και αξιοποιούν τον αναλογικό συλλογισμό ως μέσο για τη διδασκαλία και ανάπτυξη μαθηματικών και συγκεκριμένα αλγεβρικών εννοιών.

Στο τρίτο κεφάλαιο περιγράφεται η μεθοδολογία και συγκεκριμένα τα υποκείμενα, τα εργαλεία μέτρησης της αλγεβρικής σκέψης και του αναλογικού συλλογισμού, η διαδικασία διεξαγωγής της έρευνας, ο σχεδιασμός κλινικών συνεντεύξεων, οι τεχνικές ανάλυσης των δεδομένων και η διόρθωση-βαθμολόγηση των απαντήσεων των μαθητών στα εργαλεία της εργασίας.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων των ποσοτικών και των ποιοτικών δεδομένων και τα οποία αφορούν στον έλεγχο για την επιβεβαίωση των προτεινόμενων μοντέλων, στον εντοπισμό ομάδων μαθητών ως προς την ικανότητα αλγεβρικής σκέψης και στην περιγραφή των χαρακτηριστικών των μαθητών διαφορετικής ικανότητας αλγεβρικής σκέψης. Παρουσιάζονται επίσης, τα αποτελέσματα για τη σχέση μεταξύ αλγεβρικής σκέψης και αναλογικού συλλογισμού, η αναλυτική περιγραφή των διαφορετικών προσεγγίσεων αναλογικού συλλογισμού που υιοθέτησαν οι μαθητές των τεσσάρων ομάδων αλγεβρικής σκέψης κατά την επίλυση των έργων ΕΑΣ και η βελτίωση που ενδέχεται να επέδειξαν στις διάφορες ικανότητες αλγεβρικής σκέψης κατά την επίλυση των συγκεκριμένων έργων.

Στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται συζήτηση των αποτελεσμάτων και προσπάθεια περιγραφής ενός ενιαίου ολοκληρωμένο μοντέλου το οποίο θα ενσωματώνει ταυτόχρονα τα ποιοτικά και ποσοτικά δεδομένα. Τέλος, στο έκτο κεφάλαιο ακολουθεί παρουσίαση των συμπερασμάτων της εργασίας, συζήτηση για πιθανές εφαρμογές στην εκπαίδευση των αποτελεσμάτων της παρούσας εργασίας και εισηγήσεις για μελλοντικές ερευνητικές εργασίες.

Εννοιολογικοί Ορισμοί Κυριότερων Εννοιών

Αλγεβρική σκέψη - Ικανότητες αλγεβρικής σκέψης

Στην παρούσα εργασία η *αλγεβρική σκέψη* ορίζεται με βάση τις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης που αναδύονται από τη βιβλιογραφία και ανιχνεύεται μέσα από την ικανότητα των μαθητών:

(α) να γενικεύουν ιδιότητες των πράξεων και ιδιότητες των αριθμών (Blanton et al., 2011; Kaput, 2008) και *να αιτιολογούν* τις γενικεύσεις τους,

(β) να γενικεύουν μοτίβα για τη ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών μέσα από τον εντοπισμό του κανόνα που περιγράφει τη σχέση (Blanton et al., 2011; Blanton & Kaput, 2004, 2011; Kaput, 2008; Kieran, 2004), εκφράζουν αυτές τις γενικεύσεις με οποιοδήποτε μέσο (π.χ. φυσική γλώσσα, διάγραμμα) και *αιτιολογούν* τις γενικεύσεις τους,

(γ) να μεταβάλουν τις τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με την ανεξάρτητη μεταβλητή (είτε σε γραφικές παραστάσεις είτε με βάση την αντικατάσταση σε κανόνες) και να συλλογίζονται για τη σχέση μεταβολής των δύο μεταβλητών (Goodrow & Schliemann, 2003; Moyer, Huinker & Cai, 2004; Swafford & Langrall, 2000),

(δ) να αντιλαμβάνονται και να εντοπίζουν την τιμή του αγνώστου που ικανοποιεί την εξίσωση (ή το εύρος τιμών για μια ανίσωση) (Blanton et al., 2011; Cai, Moyer, Wang, &

Nie, 2011; Kieran, 2004) αντιμετωπίζοντας έργα τα οποία περιγράφονται και στην πτυχή «περιορισμοί» (restrictions) που προτείνουν οι Drijvers, Coddijn και Kindt (2010),

(στ) να συλλογίζονται για τις ιδιότητες της ισότητας (Blanton et al., 2011),

(ε) να μοντελοποιούν σχέσεις οι οποίες εκφράζονται λεκτικά χρησιμοποιώντας αλγεβρικά σύμβολα (Blanton & Kaput, 2011; Kaput, 2008; Kieran, 2004) και

(στ) να χειρίζονται και να εκτελούν πράξεις με αλγεβρικά σύμβολα για απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων (Carraher et al., 2001; Hewitt, 2012).

Η αλγεβρική σκέψη στις μικρές τάξεις, εμπλέκει την ανάπτυξη τρόπων σκέψης, όπως «η ανάλυση σχέσεων μεταξύ ποσοτήτων, ο εντοπισμός της δομής, η μελέτη της αλλαγής/μεταβολής, η γενίκευση, η μοντελοποίηση, η αιτιολόγηση, η απόδειξη και η πρόβλεψη» (Kieran, 2004, σ. 149). Ωστόσο, δεν παραβλέπονται και οι ικανότητες πιο διαδικαστικής φύσης όπως η επίλυση εξισώσεων και ο χειρισμός και πράξεις με αφηρημένα σύμβολα, οι οποίες χαρακτήριζαν για χρόνια τον περιορισμένο ορισμό της άλγεβρας. Ο συνδυασμός αυτών των ικανοτήτων επιτρέπει μια ολοκληρωμένη θεώρηση για την αλγεβρική σκέψη.

Αναλογικός συλλογισμός

Ο αναλογικός συλλογισμός (analogical reasoning) όπως ορίζεται στο πεδίο της ψυχολογίας, αφορά στη μεταφορά δομικών πληροφοριών από ένα σύστημα (πηγή) σε ένα άλλο (στόχο), μέσα από τον εντοπισμό της αντιστοιχίας ανάμεσα στα δύο συστήματα (Vosniadou, 1989). Τα συστήματα αυτά πιθανό να αποτελούν θεωρίες, ιδιότητες, έννοιες, αντικείμενα ή και προβληματικές καταστάσεις, ενώ ενδέχεται να ανήκουν και σε εντελώς διαφορετικά πεδία τα οποία έχουν όμως όμοια δομή. Η εξαγωγή πληροφοριών για το ένα φαινόμενο (στόχος) από τα στοιχεία του δεύτερου φαινομένου (πηγή) μέσω της εύρεσης των συσχεσιακών αντιστοιχιών μεταξύ τους (Gentner & Smith, 2012), βασίζεται στις σχέσεις ομοιότητας των δύο φαινομένων (π.χ. αντικειμένων, περιστατικών, ιδεών) είτε αυτά *διαφέρουν σημασιολογικά* (semantically) ή *αντιληπτικά* (perecptually) (Chuderska & Chuderski, 2009).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Εισαγωγή

Η μελέτη και διερεύνηση αλγεβρικών εννοιών και της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης απέσπασε το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών για αρκετά χρόνια (Cai & Knuth, 2011). Ωστόσο, εντοπίζονται βασικές διαφορές μεταξύ των προσεγγίσεων που υιοθετούν και των αποτελεσμάτων που εντοπίζουν οι ερευνητές (Carraher & Schliemann, 2008). Ενώ οι περισσότεροι ερευνητές εξέταζαν μια συγκεκριμένη ικανότητα ή έννοια κάθε φορά, ελάχιστοι προσπάθησαν να περιγράψουν ολοκληρωμένα τη φύση ή την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης (Carraher & Schliemann, 2008; Oldenburg, 2012). Επίσης, τα αποτελέσματα των πιο σύγχρονων ερευνών σχετικά με την ικανότητα αλγεβρικής σκέψης των μικρότερων ηλικιακά μαθητών είναι πολύ πιο ενθαρρυντικά σε σχέση με τα αποτελέσματα που παρουσιάζονταν δύο δεκαετίες προηγουμένως τα οποία τόνιζαν την αποτυχία των μεγαλύτερων ηλικιακά μαθητών στην άλγεβρα (Lins & Kaput, 2004). Ακόμη μια διαφορά μεταξύ των ερευνών, αποτελεί το ότι ελάχιστες έρευνες αποσκοπούσαν να ερμηνεύσουν την αποτυχία ή την επιτυχία των μαθητών σε έργα αλγεβρικής σκέψης και παρέχουν στοιχεία ότι η ικανότητα αναλογικού συλλογισμού σχετίζεται και διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην ικανότητα αλγεβρικής σκέψης (English & Sharry, 1996; English & Warren, 1994).

Το θεωρητικό υπόβαθρο αποτελεί σύνθεση των ερευνητικών αποτελεσμάτων από το πεδίο της μαθηματικής παιδείας και της γνωστικής ψυχολογίας σχετικά με την αλγεβρική σκέψη και τον αναλογικό συλλογισμό και οργανώθηκε σε τέσσερις άξονες. Όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 2.1. οι δύο πρώτοι άξονες αφορούν στη φύση, δομή και ανάπτυξη της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης και αναφέρονται σε θεωρίες και ερευνητικές εργασίες κυρίως από το πεδίο της μαθηματικής παιδείας. Οι δύο τελευταίοι άξονες εμπλέκουν έρευνες τόσο από το πεδίο της μαθηματικής παιδείας και από το πεδίο της γνωστικής ψυχολογίας, οι οποίες αφορούν στον αναλογικό συλλογισμό.

Συγκεκριμένα, ο πρώτος άξονας αφορά στις προσπάθειες ορισμού της αλγεβρικής σκέψης μέσα από τη διασαφήνιση της διαφοράς της από την παραδοσιακή αντίληψη της άλγεβρας και την αριθμητική, καθώς και μέσα από τις θεωρίες του Kaput (2008) και της Kieran (2004) για την ολοκληρωμένη περιγραφή της αλγεβρικής σκέψης. Οι θεωρίες αυτές σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα ερευνών για συγκεκριμένες ικανότητες αλγεβρικής σκέψης, συνθέτουν τις παραμέτρους της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης όπως ορίστηκε στην παρούσα εργασία. Ο δεύτερος άξονας αναφέρεται σε προσπάθειες περιγραφής της ανάπτυξης πτυχών, εννοιών και ικανοτήτων της αλγεβρικής σκέψης. Παρουσιάζεται η περιγραφή της ιστορικής εξέλιξης της άλγεβρας και του παραλληλισμού της με τη γνωστική ανάπτυξη (Sfard, 1995), της ανάπτυξης της αντίληψης της έννοιας της μεταβλητής και της αντίληψης του συμβόλου της ισότητας. Γίνεται ακόμη αναφορά σε ερευνητικές εργασίες που υιοθέτησαν την ταξινομία SOLO (Biggs & Collis, 1982), η οποία προέρχεται από το πεδίο της γνωστικής ψυχολογίας, για την περιγραφή της ανάπτυξης συγκεκριμένων ικανοτήτων αλγεβρικής σκέψης. Ο τρίτος άξονας αναφέρεται σε προσπάθειες ορισμού της ικανότητας αναλογικού συλλογισμού, στην περιγραφή των διαφορετικών έργων αναλογικού συλλογισμού, στην ανάπτυξη του αναλογικού συλλογισμού και στη σχέση του με το μαθηματικό συλλογισμό και την ικανότητα αλγεβρικής σκέψης. Ο τέταρτος άξονας αναφέρεται επίσης, στην ικανότητα αναλογικού συλλογισμού, αποσκοπεί ωστόσο, να αναδείξει τον αναλογικό συλλογισμό ως *μέσο* για την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης και τη διδασκαλία αλγεβρικών και γενικότερα μαθηματικών εννοιών.

Διάγραμμα 2.1. Η δομή του θεωρητικού πλαισίου.

Ορισμός της Αλγεβρικής Σκέψης στις Μικρές Τάξεις

Η αλγεβρική σκέψη και η διαφοροποίησή της από την παραδοσιακή αντίληψη της άλγεβρας

Ο ορισμός της άλγεβρας και της αλγεβρικής σκέψης στις μικρότερες τάξεις αποτελεί ένα σύνθετο έργο (Kaput, 2008). Η περιορισμένη αντίληψη της άλγεβρας η οποία έχει επικρατήσει στη σχολική άλγεβρα για πολλά χρόνια σε αρκετές χώρες και τονίζει το χειρισμό συμβόλων με βάση συντακτικούς κανόνες, υποτιμά σε τεράστιο βαθμό τις πολλαπλές πτυχές της άλγεβρας και αποτελεί ανεπαρκή βάση για την αναθεώρηση της θέσης της άλγεβρας στα σχολικά μαθηματικά. Όπως αναφέρει η Kieran (2004), από την εποχή του Al-Khowarizmi, η άλγεβρα αντιμετωπιζόταν ως η επιστήμη για την επίλυση εξισώσεων και για αρκετούς αιώνες η αντίληψη αυτή δεν είχε αλλάξει αρκετά. Με κάποιες μεταρρυθμίσεις στα τέλη της δεκαετίας του 1980, διατυπώθηκαν οι υποθέσεις ότι αν γινόταν μια αναθεώρηση του τι αποτελεί βασικό στοιχείο της άλγεβρας και αν γινόταν εισαγωγή συγκεκριμένων στοιχείων πιο νωρίς στο αναλυτικό προγράμματα των μαθηματικών της πρωτοβάθμια εκπαίδευσης, τότε ίσως η άλγεβρα να ήταν προσιτή σε μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών (Kieran, 2004).

Οι ερευνητές του πεδίου της αλγεβρικής σκέψης στις μικρότερες τάξεις (π.χ. Blanton et al., 2011; Kaput, 2008; Kieran, 2004; Lew, 2004) συμφωνούν ότι χρειάζεται μια ευρύτερη και βαθύτερη αντίληψη της άλγεβρας, εάν ο στόχος είναι να αξιοποιηθεί η άλγεβρα για την ενσωμάτωση των μαθηματικών κατά μήκος όλων των τάξεων και των θεμάτων. Υιοθετείται επομένως μια πιο ευρεία αντίληψη του συμβολισμού στην άλγεβρα, η οποία *δεν περιορίζεται* στη χρήση των αλγεβρικών συμβόλων, ώστε να εξυπηρετεί τόσο τις διαφοροποιήσεις των δραστηριοτήτων συμβολισμού που προκύπτουν στις μικρότερες τάξεις, όσο και την αυξανόμενη ποικιλία συμβολικών συστημάτων, συμπεριλαμβανομένων και των γραφικών αναπαραστάσεων (Kaput, 2008, σ.10). Η αλγεβρική σκέψη στις μικρές τάξεις αποτελεί έναν τρόπο σκέψης που είναι δυνατόν να αναπτυχθεί στο πλαίσιο του μαθηματικού περιεχομένου που διδάσκεται στο δημοτικό σχολείο. Ο στόχος είναι τα παιδιά να μάθουν να σκέφτονται αλγεβρικά και να αρχίσουν να αποκτούν την συμβολική αλγεβρική γλώσσα, για να εκφράζουν και να δικαιολογούν τις ιδέες τους (Blanton, et al., 2011). Απαιτείται για αυτό κατάλληλη τροποποίηση του υπάρχοντος περιεχομένου, αλλά και *κάποιες προσθήκες*, προκειμένου να αναδειχτεί ο αλγεβρικός χαρακτήρας του. Ως ένα ορισμένο βαθμό, αυτός ο μετασχηματισμός απαιτεί τον αλγεβρικό συμβολισμό. Επομένως, ενώ η αλγεβρική σκέψη δεν περιορίζεται στη χρήση του αλγεβρικού συμβολισμού (Kieran, 2004), δεν παραγνωρίζεται το ότι ακόμη και στις μικρές τάξεις, ο αλγεβρικός συμβολισμός διαδραματίζει έναν υποστηρικτικό ρόλο στην εκμάθηση των μαθηματικών (Van Amerom, 2003).

Με στόχο να απαντήσει στα ερωτήματα «Τι είναι η άλγεβρα;» και «Τι είναι η αλγεβρική σκέψη» ο Kaput (2008) χρησιμοποιεί δύο τρόπους για να περιγράψει τα μαθηματικά γενικότερα και την άλγεβρα συγκεκριμένα. Τα μαθηματικά αποτελούν ένα πολιτιστικό κατασκεύασμα (cultural artifact), κάτι το οποίο δεχόμαστε ως μέρος της πολιτιστικής μας κληρονομιάς. Τα μαθηματικά είναι όμως και ένα σύνολο δραστηριοτήτων, κάτι το οποίο κάνουν οι άνθρωποι. Για παράδειγμα εμπλέκουν την παραγωγή αναπαραστάσεων για την διατύπωση γενικεύσεων και εμπλέκουν το μετασχηματισμό αυτών των αναπαραστάσεων. Το ερώτημα «Τι είναι η άλγεβρα;» τονίζει την άλγεβρα ως ένα *αυτόνομο πεδίο γνώσης*, ως πολιτιστικό κατασκεύασμα. Το δεύτερο ερώτημα «Τι είναι η αλγεβρική σκέψη;» τονίζει την άλγεβρα ως *ανθρώπινη δραστηριότητα* (Kaput, 2008). Ο Kaput (2008) στην περιγραφή της αλγεβρικής σκέψης στις μικρές τάξεις αναφέρεται σε δύο βασικές πτυχές της αλγεβρική σκέψης και η περιγραφή αυτή συγχωνεύει τις δύο ταυτότητες τις άλγεβρας που προαναφέρθηκαν. Η πρώτη πτυχή που περιγράφει, αφορά στη γενίκευση και διατύπωση γενικεύσεων με όλο και πιο συμβατικά/τυπικά συμβολικά συστήματα ενώ η δεύτερη πτυχή αναφέρεται στη δράση και χειρισμό συμβόλων με βάση συντακτικούς κανόνες εντός οργανωμένων συμβολικών συστημάτων.

Στην περιγραφή της σχολικής άλγεβρας επικεντρώθηκε η Kieran (1991), η οποία όρισε την άλγεβρα ως «το πεδίο των μαθηματικών το οποίο αφορά στο συμβολισμό γενικευμένων αριθμητικών σχέσεων και μαθηματικών δομών και στο χειρισμό αυτών των δομών» (σ. 391). Αυτό υπονοεί ότι η άλγεβρα έχει τόσο μια διαδικαστική όσο και μια δομική (structural) πτυχή. Η διαδικαστική πτυχή αναφέρεται στις αριθμητικές πράξεις, όπως τον υπολογισμό της τιμής της έκφρασης 4x+y, όπου το x=2 και το y=3 και το αποτέλεσμα είναι 11. Ένα δεύτερο παράδειγμα είναι η επίλυση μιας εξίσωσης όπως 2x+3=7, μέσω της αντικατάστασης διαφορετικών τιμών για το «x». Τα αντικείμενα τα οποία χειρίζεται κάποιος σε αυτή την περίπτωση είναι αριθμητικά παραδείγματα παρά αλγεβρικές εκφράσεις (Kieran, 1991). Η δομική πτυχή εμπλέκει θέματα όπως την απλοποίηση και την παραγοντοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων, την επίλυση εξισώσεων μέσω της εκτέλεσης της ίδιας πράξης και στα δύο μέλη της εξίσωσης και το χειρισμό εξισώσεων. Η δομική πτυχή αναφέρεται σε πράξεις σε αλγεβρικές εκφράσεις παρά σε αριθμούς, όπως το συνδυασμό των όρων στην έκφραση 3x+2y+x η οποία απλοποιείται και μετατρέπεται σε 4x+2y ή 2(2x+y). Επομένως, η άλγεβρα με τη διαδικαστική και τη δομική πτυχή αποτελεί μια γλώσσα, όπου πρέπει να αποδοθεί νόημα στα αντικείμενα (Kieran, 1991).

Ενώ η παραδοσιακή διδασκαλία της άλγεβρας τονίζει το χειρισμό μεταβλητών, την επίλυση εξισώσεων και την απλοποίηση εκφράσεων (Kieran, 1996), η αλγεβρική σκέψη, παρόλο που περιλαμβάνει μεταβλητές και εκφράσεις, έχει μια πιο ευρεία έννοια από τον όρο άλγεβρα. Για παράδειγμα, η Kieran (1996) περιέγραψε τον όρο αλγεβρική σκέψη ως «τη χρήση οποιουδήποτε είδους αναπαραστάσεων οι οποίες χειρίζονται τις ποσοτικές καταστάσεις με ένα συσχεσιακό τρόπο» (σσ. 4, 5). Οι Swafford και Langrall (2000) αναφέρουν ότι η αλγεβρική σκέψη αποτελεί «την ικανότητα να χειρίζεσαι μια άγνωστη ποσότητα λες και η ποσότητα αυτή είναι γνωστή, σε αντίθεση με την αριθμητική η οποία εμπλέκει πράξεις σε γνωστές ποσότητες» (σ. 2). Από τον τελευταίο ορισμό τίθεται ένα άλλο θέμα το οποίο προκύπτει στην προσπάθεια ορισμού της αλγεβρικής σκέψης στις μικρές τάξεις και αυτό αποτελεί τη διασαφήνιση της διαφοράς και των ορίων της αλγεβρικής σκέψης σε σχέση με την αριθμητική.

Προσπάθεια διασαφήνισης των ορίων της αριθμητικής και της αλγεβρικής σκέψης

Αρκετές έρευνες καταπιάνονται με τη σχέση και τη μετάβαση μεταξύ αριθμητικής και άλγεβρας στις μικρές τάξεις, ωστόσο το ερώτημα για το που τελειώνει η αριθμητική και που αρχίζει η άλγεβρα στις μικρές τάξεις, δεν έχει ακόμη απαντηθεί πλήρως. Μεταξύ των μαθηματικών, η άλγεβρα γίνεται αντιληπτή ως γενικευμένη αριθμητική και κάποιος θα τροποποιούσε αυτό τον χαρακτηρισμό διευκρινίζοντας ότι είναι η γενικευμένη αριθμητική με νόημα (Filloy & Rojano, 1989; Sriraman & Lee, 2011). Με άλλα λόγια, υπάρχει μια σημαντική αλλαγή (αφαίρεση) από το να αναφέρεται κάποιος συγκεκριμένα σε βασικές αριθμητικές πράξεις, στο να εκφράζεται για τις πράξεις αυτές με πιο αφηρημένο-γενικό τρόπο. Ενώ παραδοσιακά, η αριθμητική ενέπλεκε κυρίως την ικανότητα εκτέλεσης υπολογισμών και την ακρίβεια, ένα μεγάλο μέρος της επίλυσης προβλήματος στην άλγεβρα αφορά στο συλλογισμό για τις πράξεις (Blanton et al., 2011). Όταν κάποιος συλλογίζεται για τις πράξεις μαθαίνει γενικές ιδιότητες που περιγράφουν το πώς «λειτουργούν» πράξεις. Όπως αναφέρουν οι Malara και Navarra (2003), διαφορά αποτελεί επίσης, το ότι η αλγεβρική σκέψη αναφέρεται στη διαδικασία ενώ η αριθμητική αναφέρεται στο αποτέλεσμα, δηλαδή στην εύρεση της απάντησης.

Υπήρξαν ακόμη μερικές προσπάθειες οι οποίες κάνουν αναφορά στο διαχωρισμό και στο χάσμα μεταξύ του αριθμητικού και του αλγεβρικού τρόπου σκέψης. Οι MacGregor & Stacey (1993), αναφέρονται σε ένα γνωστικό χάσμα μεταξύ αριθμητικής και αλγεβρικής σκέψης το οποίο αφορά στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά τη μετάφραση λεκτικών προβλημάτων σε εκφράσεις με αλγεβρικά σύμβολα. Οι Herscovics και Linchevski (1994) διεξήγαγαν μια έρευνα στην οποία οι μαθητές έλυσαν πενήντα αλγεβρικές εξισώσεις διαφορετικών τύπων και δήλωσαν ότι υπάρχει ένα γνωστικό χάσμα μεταξύ της αριθμητικής και της άλγεβρας το οποίο χαρακτηρίζεται από την αδυναμία των μαθητών να χειριστούν και να κάνουν πράξεις αυθόρμητα με τον άγνωστο.

Σύμφωνα με την Kieran (2004) οι μαθητές που «λειτουργούν» σε ένα αριθμητικό πλαίσιο αναφοράς τείνουν να μην βλέπουν τις συσχεσιακές πτυχές των πράξεων και η προσοχή τους κατευθύνεται μόνο στους υπολογισμούς. Ως εκ τούτου, χρειάζεται ιδιαίτερη αναπροσαρμογή για την ανάπτυξη του αλγεβρικού τρόπου σκέψης ο οποίος περιλαμβάνει, (αλλά δεν περιορίζεται) στα εξής: (α) επικέντρωση της προσοχής στις σχέσεις και όχι απλώς στους υπολογισμούς αριθμητικών απαντήσεων, (β) έμφαση στις πράξεις όπως και στις αντίστροφες πράξεις τους και στις σχετικές ιδέες του κάνω/αναιρώ, (γ) εμπλοκή σε δραστηριότητες αναπαράστασης και επίλυσης προβλήματος και όχι μόνο επίλυσης, (δ) ενασχόληση με αλγεβρικά σύμβολα τα οποία ενδέχεται να είναι είτε άγνωστοι, μεταβλητές ή παράμετροι, αποδοχή των ("μη κλειστών") αλγεβρικών εκφράσεων ως απαντήσεις και σύγκριση των εκφράσεων για την ισότητα με βάση τις ιδιότητες παρά με βάση αριθμητικούς υπολογισμούς και (ε) επαναπροσδιορισμός του νοήματος του συμβόλου της ισότητας (Kieran, 2004).

Θεωρίες για την ολοκληρωμένη περιγραφή των διαστάσεων της αλγεβρικής σκέψης

Μια σημαντική πτυχή της αλγεβρικής σκέψης που τονίζεται με βάση τα όσα προαναφέρθηκαν είναι η ανάπτυξη της κατανόησης για τη δομή και τις ιδιότητες του αριθμητικού συστήματος και των πράξεων. Ωστόσο, εκφράζεται η άποψη ότι η αλγεβρική σκέψη *εμπλέκει περισσότερα από τη γενίκευση των αριθμητικών δομών* (Carpenter & Levi, 2000; Mutschler, 2005; Zevenbergen, Dolce & Wright, 2004) . Για παράδειγμα, η Mutschler (2005) αναφέρει ότι η Blanton σε διάλεξή στο συνέδριο της διδακτικής των μαθηματικών του 2004, περιέγραψε μια αντίληψη για την άλγεβρα στις μικρές τάξεις η οποία εμπλέκει τη γενικευμένη αριθμητική, τη συναρτησιακή σκέψη και τη μοντελοποίηση, ενώ οι Zevenbergen et al. (2004) τονίζουν τρεις πτυχές της αλγεβρικής σκέψης: την ισότητα, τη μεταβολή και τη γενίκευση. Οι Carpenter και Levi (2000) αναγνωρίζουν ως βασικές πτυχές της άλγεβρας στις μικρές τάξεις: (α) τη γενίκευση και (β) τη χρήση των συμβόλων για την αναπαράσταση και επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Σύμφωνα με τα εθνικά επίπεδα του οργανισμού National Council of Teachers of Mathematics (2000), οι μαθητές του δημοτικού σχολείου θα πρέπει να: (α) κατανοούν μοτίβα, σχέσεις και συναρτήσεις, (β) αναπαριστούν και αναλύουν μαθηματικές καταστάσεις και δομές, χρησιμοποιώντας αλγεβρικά σύμβολα, (γ) χρησιμοποιούν μοντέλα για την αναπαράσταση και κατανόηση ποσοτικών σχέσεων και (δ) αναλύουν την αλλαγή σε διάφορα πλαίσια (σ. 37).

Στη βιβλιογραφία παρουσιάζονται μερικά άρθρα και κεφάλαια (Kaput, 2008; Kieran, 1996) τα οποία αναφέρονται σε μια πιο ολοκληρωμένη περιγραφή της αλγεβρικής σκέψης στις μικρότερες τάξεις ή της αλγεβρικής δραστηριότητας γενικότερα. Οι περιγραφές αυτές αποτελούν θεωρίες οι οποίες δεν έχουν εξεταστεί με βάση εμπειρικά δεδομένα. Όπως επισημαίνει σε σχετικά πρόσφατο κεφάλαιο η Kieran (2011), η περιγραφή των τριών δραστηριοτήτων που πρότεινε και συγκεκριμένα το πώς και το αν είναι δυνατό να υιοθετηθούν στο πεδίο της αλγεβρικής σκέψης σε μικρότερες τάξεις, δεν έχει τύχει διερεύνησης. Στο μέρος αυτό γίνεται ανάλυση των πιο γνωστών περιγραφών της αλγεβρικής σκέψης, αυτών της Kieran (1996; 2004) και του Kaput (2008), καθώς και μια συνοπτική περιγραφή των ικανοτήτων μαθηματικής σκέψης στις οποίες βασίζεται η επιτυχία στην άλγεβρα από τον Lew (2004) και των πυλώνων της άλγεβρας που προτείνουν οι Drijvers et al. (2010).

Η Kieran (1996) περιγράφει την αλγεβρική δραστηριότητα στα σχολεία να αποτελείται από τρεις συνιστώσες: (α) τις παραγωγικές (generational) δραστηριότητες οι οποίες εμπλέκουν τη διατύπωση εκφράσεων και εξισώσεων οι οποίες αποτελούν αντικείμενα της άλγεβρας, όπως για παράδειγμα εξισώσεις με έναν άγνωστο οι οποίες αναπαριστούν μια προβληματική κατάσταση, γενικευμένες εκφράσεις οι οποίες προκύπτουν από γεωμετρικά μοτίβα ή ακολουθίες με αριθμούς, διατύπωση κανόνων που διέπουν αριθμητικές σχέσεις, (β) τις μετασχηματιστικές (transformational) δραστηριότητες (βασίζονται σε κανόνες) όπως παραγοντοποίηση, επέκταση, αντικατάσταση, επίλυση εξισώσεων, απλοποίηση εκφράσεων, χειρισμός ισοδύναμων εκφράσεων και εξισώσεων και (γ) τις καθολικές δραστηριότητες μετά-επιπέδου οι οποίες αποτελούν δραστηριότητες όπου η άλγεβρα χρησιμοποιείται ως εργαλείο ωστόσο, δεν αφορούν αποκλειστικά και μόνο στην άλγεβρα. Περιλαμβάνουν την επίλυση προβλήματος, τη μοντελοποίηση, την παρατήρηση της δομής, τη μελέτη της αλλαγής, τη γενίκευση, την ανάλυση σχέσεων, την αιτιολόγηση και απόδειξη, την πρόβλεψη, δραστηριότητες στις οποίες είναι δυνατόν κάποιος να εμπλακεί χωρίς τη χρήση καθόλου άλγεβρας. Αυτού του είδους οι δραστηριότητες είναι απαραίτητες για τις υπόλοιπες δραστηριότητες της άλγεβρας, συγκεκριμένα στην οικοδόμηση νοήματος στις παραγωγικές δραστηριότητες, διαφορετικά όλο το νόημα και ο σκοπός χάνονται (Kieran, 1996).

Ο ορισμός της Kieran (2004) για την αλγεβρική σκέψη βασίζεται στην τρίτη ομάδα δραστηριοτήτων του μοντέλου, τις «καθολικές δραστηριότητας μετα-επιπέδου». Όπως προαναφέρθηκε οι δραστηριότητες επιτρέπουν εμπλοκή χωρίς τη χρήση αλγεβρικών συμβόλων και είναι δυνατό στη συνέχεια να τύχουν κατάλληλης επεξεργασίας ώστε να εμπλέκουν τη χρήση αλγεβρικών συμβόλων. Για αυτό το λόγο οι συγκεκριμένες δραστηριότητες αποτελούν ιδανικό μέσο για την περιγραφή και αντίληψη της μη-συμβολικής ή της προ-συμβολικής προσέγγισης της αλγεβρικής σκέψης στις μικρότερες τάξεις (Kieran, 2004, σ.148). Η Kieran (2004) διευκρινίζει ότι με το να αντιμετωπίζουμε τις δραστηριότητες αυτές ως απαραίτητες, όχι μόνο ως τρόπο οικοδόμησης νοήματος στην άλγεβρα, αλλά και ως ανάπτυξη τρόπων σκέψης οι οποίοι είναι εξαιρετικής σημασίας για την επιτυχία στην άλγεβρα, γίνεται δυνατό να έχουμε ένα όραμα για την αλγεβρική σκέψη στις μικρές τάξεις το οποίο να είναι απόλυτα συμβατό με τις τρέχουσες προοπτικές για την αλγεβρική δραστηριότητα στις μεγαλύτερες τάξεις. Αυτές οι δραστηριότητες επομένως, μπορούν να θεωρηθούν όχι μόνο ως μέρος της αλγεβρικής δραστηριότητας με αλγεβρικά σύμβολα, αλλά και ως «πρόδρομοι» των παραγωγικών και των μετασχηματιστικών δραστηριοτήτων στις οποίες θα εμπλακούν οι μαθητές αργότερα. Η Kieran (2004) καταλήγει στο άρθρο στον εξής ορισμό για την αλγεβρική σκέψη:

> Η αλγεβρική σκέψη στις μικρότερες τάξεις εμπλέκει την ανάπτυξη τρόπων σκέψης σε δραστηριότητες όπου η συμβολική άλγεβρα είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί ως εργαλείο … και στους οποίους κάποιος έχει την ευκαιρία να εμπλακεί χωρίς τη χρήση της συμβολικής άλγεβρας, όπως η ανάλυση σχέσεων μεταξύ ποσοτήτων, η παρατήρηση και εντοπισμός της δομής, η μελέτη της μεταβολής, η γενίκευση, η επίλυση προβλήματος, η μοντελοποίηση, η αιτιολόγηση, η απόδειξη και η πρόβλεψη (Kieran, 2004, σ. 149).

Σε παρόμοια προσέγγιση βασίζεται και ο Lew (2004) ο οποίος στην περιγραφή της αλγεβρικής σκέψης στις μικρότερες τάξεις αναφέρεται σε έξι ικανότητες μαθηματικής σκέψης (mathematical thinking abilities) (γενίκευση, αφαίρεση, μοντελοποίηση, αναλυτική σκέψη, οργάνωση, δυναμική σκέψη), οι οποίες δεν αφορούν αποκλειστικά στην άλγεβρα, αλλά όπως υποστηρίζει σε αυτές βασίζεται η επιτυχία στην άλγεβρα.

Εκτός από την περιγραφή των δραστηριοτήτων της άλγεβρας από την Kieran (2004) που αφορούσε και σε δραστηριότητες για τη διδασκαλία της άλγεβρας στο γυμνάσιο, εντοπίζεται ακόμη μια προσπάθεια περιγραφής της άλγεβρας στη *δευτεροβάθμια εκπαίδευση* από τους Drijvers et al. (2010). Οι τρεις πυλώνες της άλγεβρας που προτείνουν οι Drijvers et al. (2010) είναι: (α) τα μοτίβα και οι φόρμουλες, (β) οι περιορισμοί και (γ) οι συναρτήσεις. Ο πρώτος πυλώνας εμπλέκει τον εντοπισμό μοτίβων και τη γενίκευση, ο δεύτερος την επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων και ο τρίτος τη διαμόρφωση και διερεύνηση σχέσεων μεταξύ μεταβλητών. Επισημαίνουν ότι μια τέταρτη σημαντική πτυχή αφορά στην άλγεβρα ως συμβολική γλώσσα.

Ενώ η Kieran (2004) υποστηρίζει ότι η αλγεβρική σκέψη στις μικρές τάξεις είναι δυνατό να οικοδομηθεί στη βάση των καθολικών δραστηριοτήτων μετα-επιπέδου και να επιτρέπει εμπλοκή χωρίς τη χρήση αλγεβρικών συμβόλων, η έμφαση του Kaput (2008) επικεντρώνεται στον πρωταρχικό ρόλο της γενίκευσης και του σταδιακού συμβολισμού της (Kieran, 2011). Ο Kaput (2008) προτείνει μια εν μέρει διαφορετική προσέγγιση για την άλγεβρα. Στο κεφάλαιο του στο βιβλίο "Algebra in the early grades" προσδιορίζει τις δύο βασικές *πτυχές* του αλγεβρικού συλλογισμού, τη γενίκευση και την έκφραση γενικεύσεων με όλο κι πιο συστηματικά, τυπικά συμβολικά συστήματα και τη συντακτικά καθοδηγούμενη δράση σε σύμβολα εντός οργανωμένων συμβολικών συστημάτων. Η δεύτερη πτυχή θεωρείται τυπικά ότι αναπτύσσεται μετά την πρώτη πτυχή διότι οι χειρισμοί συμβόλων με βάση κανόνες βασίζονται στη γνώση του ποιοι είναι οι επιτρεπτοί συνδυασμοί συμβόλων και στη γνώση του πώς σχετίζονται μεταξύ τους (Kaput, 2008).

Φαίνεται να υπάρχει αρκετή διαφοροποίηση στις απόψεις για το ρόλο που διαδραματίζουν οι δύο αυτές πτυχές στη μάθηση της άλγεβρας στις μικρές τάξεις (Kaput, 2008). Οι μαθηματικοί και οι ερευνητές του πεδίου της μαθηματική παιδείας, διαφέρουν στις απόψεις τους για το ποια από τις δύο βασικές πτυχές της άλγεβρας είναι πιο σημαντική για τον ορισμό της άλγεβρας. Μερικοί αντιμετωπίζουν τον χειρισμό συμβόλων με βάση κανόνες ως το χαρακτηριστικό γνώρισμα του αλγεβρικού συλλογισμού, είτε αυτές οι ενέργειες υπηρετούν τη γενίκευση και τη μοντελοποίηση είτε όχι και έτσι δεν θεωρούν τη δραστηριότητα που περιγράφεται στο ερευνητικό πεδίο της αλγεβρικής σκέψης στις μικρές τάξεις, ως «πραγματικά» αλγεβρική (Kaput, 2008). Άλλοι, υποβαθμίζουν τη «συμβατική σύνταξη» (conventional syntax) για χάρη της έκφρασης των γενικεύσεων και μοντέλων των καταστάσεων μέσω οποιονδήποτε μέσων είναι διαθέσιμα, αλλά κυρίως μέσω της φυσικής γλώσσας και των σχεδίων (Resnick, 1982). Οι μαθητές εισάγονται στον αλγεβρικό συμβολισμό, στις γραφικές παραστάσεις και σε άλλες τυπικές αναπαραστάσεις αφού έχουν αποκτήσει ήδη αρκετές εμπειρίες έκφρασης μέσω της φυσικής γλώσσας και των σχεδίων. Υπάρχει ωστόσο και η άποψη ότι η δεύτερη πτυχή (που εμπλέκει αλγεβρικό συμβολισμό) αξίζει να τύχει προσοχής αρκετά νωρίς στη μάθηση της άλγεβρας (Kaput, 2008). Από τα πολύ αρχικά στάδια της διδασκαλίας της άλγεβρας, οι μαθητές ενθαρρύνονται να παρατηρήσουν μοτίβα και να κάνουν γενικεύσεις, χρησιμοποιώντας τα δικά τους μέσα, αλλά σύντομα ενθαρρύνονται να χρησιμοποιήσουν τυπικές μορφές αναπαράστασης. Η υποβόσκουσα υπόθεση είναι ότι οι συμβατικές μορφές αναπαράστασης (συμβολική άλγεβρα, γραφικές παραστάσεις, αριθμητικές γραμμές, πίνακες και φυσική γλώσσα) δεν αποτελούν μόνο μέσο έκφρασης της αλγεβρικής σκέψης αλλά είναι δυνατό να συνεισφέρουν στην ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης (Kaput, 2008).

Σύμφωνα με τον Kaput (2008), οι δύο πτυχές εμφανίζονται σε διαφορετικό βαθμό στους ακόλουθους τρεις *πυλώνες* της άλγεβρας: (α) άλγεβρα ως η μελέτη των δομών που προκύπτουν στην αριθμητική, (β) άλγεβρα ως η μελέτη συναρτήσεων και (γ) άλγεβρα ως η εφαρμογή γλωσσών μοντελοποίησης (modeling languages). Ο πρώτος πυλώνας στον οποίο ο Kaput (2008) εφαρμόζει τις δύο πτυχές αφορά στις γενικεύσεις από την αριθμητική. Περιλαμβάνει τη γενίκευση των αριθμητικών πράξεων και των ιδιοτήτων τους και το συλλογισμό για πιο γενικές σχέσεις (π.χ. ιδιότητα του μηδενός, αντιμεταθετική ιδιότητα, αντίστροφες πράξεις). Εμπλέκει ωστόσο και τη συντακτική πτυχή της άλγεβρας από τη δομή της αριθμητικής, οικοδομώντας την ιδέα ότι κάποιος έχει τη δυνατότητα να αντικαταστήσει μια έκφραση με μια άλλη ισοδύναμη (Kaput, 2008).

Ο δεύτερος πυλώνας εμπλέκει τη γενίκευση ενός συγκεκριμένου είδους, της ιδέας της συνάρτησης, όπου η έκφραση ή η διατύπωση γενικεύσεων θεωρείται ως περιγραφή μιας συστηματικής μεταβολής περιπτώσεων κατά μήκους ενός πεδίου. Η συντακτική πτυχή της άλγεβρας εφαρμόζεται συνήθως, για να αλλάξει τη μορφή των εκφράσεων που δηλώνουν μια κανονικότητα, μέσα από τη σύγκριση διαφορετικών εκφράσεων ενός μοτίβου για τη διαπίστωση αν είναι ισοδύναμες ή για τη διαπίστωση του πότε οι συναρτήσεις παίρνουν συγκεκριμένες τιμές (π.χ. ρίζες) ή κατά πόσο ικανοποιούν διάφορους περιορισμούς (κατασκευή και επίλυση εξισώσεων). Εισαγωγικές δραστηριότητες σχετικές με το συγκεκριμένο πυλώνα αποτελούν οι δραστηριότητες μοτίβων. Αυτός ο πυλώνας όμως δεν έχει ξεκάθαρα όρια υπό την έννοια ότι οι ιδέες που συνδέονται με την ιδέα της συνάρτησης είναι πλούσιες και με μεγάλος εύρος. Περιλαμβάνουν για παράδειγμα διάφορα είδη μεταβολής-αλλαγής και έτσι εμπλέκει τις ιδέες της γραμμικότητας, του ρυθμού μεταβολής κλπ. Αυτός ο πυλώνας εμπλέκει επίσης τη χρήση ενός μεγάλου εύρους συμβολικών συστημάτων συμπεριλαμβανομένων των πινάκων και των γραφικών παραστάσεων (Kaput, 2008).

Ο τρίτος πυλώνας, η μοντελοποίηση ως αλγεβρική δραστηριότητα περιλαμβάνει περιπτώσεις που απαιτούν αντίληψη της μεταβλητής ως άγνωστο αριθμό ή ως μεταβλητή η οποία αναπαριστά μια τάξη-σύνολο καταστάσεων και σχετίζεται με την έννοια της γενικής τάξης καταστάσεων οι οποίες πρέπει να μοντελοποιηθούν (Kaput, 2008). Στην πρώτη περίπτωση εμπλέκονται εξισώσεις οι οποίες προκύπτουν από αριθμητικά προβλήματα και απαιτούν στη συνέχεια τη χρήση της συντακτικής άλγεβρας για την εύρεση της λύσης. Στη δεύτερη περίπτωση αξιοποιείται η πτυχή της άλγεβρας για τη γενίκευση και την έκφραση μοτίβων και κανονικοτήτων σε καταστάσεις ή φαινόμενα τα οποία προκύπτουν είτε έξω από τα μαθηματικά ή μέσα από τα μαθηματικά (π.χ. γεωμετρικά μοτίβα). Όπως εξηγεί ο Kaput (2008), εδώ το πεδίο της γενίκευσης είναι η κατάσταση η οποία μοντελοποιείται και συνήθως οι εκφράσεις της γενίκευσης εμπλέκουν τη χρήση μιας ή και περισσότερων μεταβλητών οι οποίες εκφράζουν μια συνάρτηση ή μια ομάδα-σύνολο συναρτήσεων. Φυσικά, η ενασχόληση με αλγεβρικά σύμβολα για τη μοντελοποίηση της κατάστασης εμπλέκει συνήθως και τη συντακτική πτυχή της άλγεβρας (Kaput, 2008).

Ικανότητες Αλγεβρικής Σκέψης

Οι έρευνες σχετικά με την αλγεβρική σκέψη στις μικρές τάξεις που παρουσιάζονται σε αυτό το μέρος, αναφέρονται τόσο στις δυνατότητες των μαθητών να εμπλακούν σε έργα αλγεβρικής σκέψης όσο και στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν κατά την ενασχόλησή τους με αυτού του είδους έργα. Η βιβλιογραφία σε αυτό το μέρος οργανώθηκε στη βάση των οκτώ διαφορετικών *ικανοτήτων της αλγεβρικής σκέψης*. Ως εκ τούτου, στη συνέχεια, επιχειρείται η περιγραφή κάθε ικανότητας μέσα από την παρουσίαση της έρευνας που εστίασε σε αυτή και η οποία περιλαμβάνει τα εξής: (α) αποτελέσματα για την επίδοση και τις δυνατότητες των μαθητών (δημοτικού ή γυμνασίου) σε σχέση με τη συγκεκριμένη ικανότητα, (β) δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε σχέση με την ικανότητα, (γ) έργα που χρησιμοποιήθηκαν για την εξέταση της ικανότητας και (δ) έρευνες που περιγράφουν κάποια επίπεδα ανάπτυξης της ικανότητας ή των εννοιών που αφορούν άμεσα στη συγκεκριμένη ικανότητα.

Κάτι το οποίο είναι εμφανές στην περιγραφή όλων των ικανοτήτων αλγεβρικής σκέψης είναι η ποικιλία των αναπαραστάσεων που εμφανίζονται στα έργα αλγεβρικής σκέψης και σε πολλές περιπτώσεις η ανάγκη μετάβασης μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων (π.χ. από πίνακες σε γραφικές παραστάσεις, από πίνακες ή λεκτικές περιγραφές σε αλγεβρικά σύμβολα κτλ.). Όπως υποστηρίζεται και από διάφορους ερευνητές (Behr, Lesh, Post & Silver, 1983; Brizuela & Earnest 2008; Goldin & Shteingold 2001), η έρευνα συμπεριλαμβανομένης της πρώιμης άλγεβρας εισηγείται ότι η ευελιξία των μαθητών με τις πολλαπλές αναπαραστάσεις αντανακλά και προωθεί πιο βαθιά μαθηματική κατανόηση.

Ίσως η πιο αισθητή διαφορά μεταξύ των οκτώ ικανοτήτων που περιγράφονται στη συνέχεια αφορά στη χρήση του αλγεβρικού συμβολισμού. Στις πρώτες πέντε ικανότητες η παρουσία του αλγεβρικού συμβολισμού δεν είναι απαραίτητη ή πιθανό να προκύψει ως αποτέλεσμα της δραστηριότητας του μαθητή. Από την άλλη, στις τελευταίες τρεις ικανότητες (μοντελοποίηση σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων, χειρισμός και πράξεις με αφηρημένα σύμβολα, εύρεση της τιμής του αγνώστου μέσω της επίλυσης εξισώσεων) η χρήση της αλγεβρικής γλώσσας είναι συνυφασμένη με τις ικανότητες και η παρουσία της στα έργα είναι απαραίτητη. Αυτή η έντονη διαφορά στη χρήση του αλγεβρικού συμβολισμού μεταξύ των ικανοτήτων, θυμίζει άλλη μια έντονη διαφορά που εμφανίζεται στις διάφορες ερευνητικές εργασίες ως προς το σημείο που γίνεται η εισαγωγή των αλγεβρικών συμβόλων. Ενώ σε κάποιες περιπτώσεις η εισαγωγή των αλγεβρικών συμβόλων σε μικρότερες τάξεις (από την Α' ή Β' δημοτικού) είναι εμφανής σε διάφορες ερευνητικές εργασίες (π.χ. Carraher et al., 2001; Hewitt, 2012) ή σε κάποιο αναλυτικό πρόγραμμα (π.χ. Davydov, Gorbov, Mikulina, Saveleva, & Tabachnikova, 2001), σε άλλες περιπτώσεις η χρήση αλγεβρικών συμβόλων απουσιάζει σχεδόν εντελώς από το αναλυτικό πρόγραμμα Α' - Ε' δημοτικού.

Γενίκευση μοτίβων-σχέσεων για την ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών

Στα τέλη περίπου της δεκαετίας του 1980 και παράλληλα με την έρευνα που αφορούσε στη χρήση της τεχνολογίας για τη μάθηση της άλγεβρας, άρχισε να υιοθετείται η συναρτησιακή προσέγγιση με στόχο την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης (Kieran, 2004).

Παρά τη διαφωνία κάποιων για το κατά πόσο οι συναρτήσεις αποτελούν μέρος της άλγεβρας, η συναρτησιακή αντίληψη των εκφράσεων και των εξισώσεων και της άλγεβρας γενικότερα και η προσέγγιση διδασκαλίας της μεταβλητής μέσω δραστηριοτήτων που εμπλέκουν συναρτησιακή σκέψη, εκφράζεται από πληθώρα ερευνητών (Blanton et al., 2011; Blanton & Kaput, 2004, 2011; Kaput, 2008; Radford, 2010, 2012; Romberg, Fennema, & Carpenter, 1993; Smith, 2003; Stephens, Isler, Marum, Blanton, Knuth, Gardiner, 2012) και από το National Council of Teachers of Mathematics (2000).

Σύμφωνα με την Blanton (2008) η συναρτησιακή σκέψη αποτελεί τη διαδικασία σκέψης η οποία χρησιμοποιείται κατά τη γενίκευση ενός συνόλου δεδομένων. Όπως υποστηρίζουν οι Blanton et al. (2011), η συναρτησιακή σκέψη εμπλέκει τη γενίκευση σχέσεων μεταξύ ποσοτήτων που μεταβάλλονται ταυτόχρονα, την έκφραση αυτών των σχέσεων με λέξεις (λεκτικές περιγραφές), σύμβολα, πίνακες ή γραφικές παραστάσεις και συλλογισμό με αυτές τις αναπαραστάσεις για την ανάλυση της συμπεριφοράς των συναρτήσεων. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να αναπτύξουν συναρτησιακή σκέψη μέσω έργων εντοπισμού και γενίκευσης μοτίβων (Blanton & Kaput, 2004). Το National Council of Teachers of Mathematics (2000) υποστηρίζει ότι τα μοτίβα θα πρέπει να διδάσκονται από τα πρώτα χρόνια του σχολείου με την προσδοκία ότι οι μαθητές, μέχρι την Β' δημοτικού θα έχουν την ικανότητα να αναλύουν πώς παράγονται τόσο τα επαναλαμβανόμενα όσο και τα αναπτυσσόμενα μοτίβα και μέχρι το τέλος της Ε' δημοτικού θα είναι σε θέση να αναπαριστούν μοτίβα και συναρτήσεις με λεκτικές περιγραφές, πίνακες και γραφικές παραστάσεις (NCTM, 2000).

Ο Smith (2008), έχοντας ως στόχο να δημιουργήσει ένα πλαίσιο για τα είδη του συναρτησιακού συλλογισμού τα οποία παρουσιάζονται στην τάξη, περιγράφει τρεις μορφές/τρόπους ανάλυσης μοτίβων και σχέσεων: (α) επαναλαμβανόμενα μοτίβα όπου απαιτείται ο εντοπισμός της μεταβολής σε μια ακολουθία, (β) σκέψη συνδιακύμανσης η οποία απαιτεί ανάλυση του πώς δύο ποσότητες μεταβάλλονται ταυτόχρονα διατηρώντας όμως την αλλαγή αυτή ως ένα δυναμικό μέρος της περιγραφής της συνάρτησης (π.χ. «καθώς το χ αυξάνεται κατά 1 το ψ αυξάνεται κατά 3») και (γ) σχέση αντιστοιχίας η οποία εμπλέκει τον εντοπισμό της σχέσης μεταξύ των μεταβλητών (π.χ. «το ψ είναι δύο φορές το χ συν 3»). Η προσέγγιση της αντιστοιχίας επομένως, βασίζεται στην εύρεση ενός κανόνα ο οποίος συσχετίζει την ανεξάρτητη και την εξαρτημένη μεταβλητή (Confrey & Smith, 1994). Όπως υποδεικνύουν οι έρευνες (Billings, Tiedt & Slater, 2008; Moritz (2004), παρατηρείται μια συγκεκριμένη αναπτυξιακή τάση σε σχέση με τις τρεις προσεγγίσεις, από τον εντοπισμό της μεταβολής, στη σκέψη συνδυακύμανσης και ακολούθως στην προσέγγιση της αντιστοιχίας.

Οι Blanton και Kaput (2004, 2011) και Blanton (2008) εντόπισαν ότι οι μαθητές έχουν την ικανότητα να κατασκευάζουν και να συλλογίζονται για πίνακες συναρτήσεων και να εντοπίζουν σχέσεις συνδυακύμανσης (covariational relationships) και απλούς κανόνες αντιστοιχίας από την πρώτη τάξη, ενώ οι μεγαλύτεροι μαθητές του δημοτικού μπορούν να μεταβαίνουν επιτυχώς από τη χρήση της φυσικής γλώσσας στη χρήση συμβόλων για την πιο τυπική αναπαράσταση σχέσεων αντιστοιχίας. Αξίζει όμως να σημειωθεί ότι η έκφραση της σχέσης αντιστοιχίας μέσω λεκτικής περιγραφής είναι αρκετή για να υποδείξει ότι ο μαθητής έχει γενικεύσει το μοτίβο. Η ικανότητα να μεταφράζει κανείς τη γενίκευση σε αλγεβρικά σύμβολα, εμπίπτει στην ικανότητα μοντελοποίησης σχέσεων (είτε συναρτησιακών σχέσεων είτε απλών σχέσεων) μέσω αλγεβρικών συμβόλων, η οποία περιγράφεται στη συνέχεια, σε άλλη υποενότητα της εργασίας. Με τον τρόπο αυτό τηρείται η κυρίαρχη άποψη ότι η γενίκευση συντελείται πριν την συμβολική έκφρασή της.

Σύμφωνα με τους Moss και McNab (2011), μια εκτενής βιβλιογραφική ανασκόπηση για την έρευνα σχετικά με τα μοτίβα (κυρίως με μεγαλύτερους μαθητές) αποκαλύπτει ότι χωρίς συγκεκριμένη στοχευόμενη παιδαγωγική υποστήριξη ακόμη και οι μεγαλύτεροι ηλικιακά μαθητές αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες να εντοπίσουν αλγεβρικούς κανόνες για μοτίβα (π.χ. Blanton & Kaput, 2004; English & Warren 1998; Kieran 1992; Lannin, Barker & Townsend, 2006). Γενικά, οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές για να εντοπίσουν πώς ένα σύνολο δεδομένων μεταβάλλεται (μονοδιάστατη μεταβολή) είναι περιορισμένες, ωστόσο η δυσκολία αυτή μεγεθύνεται όταν κληθούν να εντοπίσουν πώς δύο σύνολα δεδομένων μεταβάλλονται το ένα σε σχέση με το άλλο (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu, 2002; Warren, 2005; Warren & Cooper, 2008). Επιπρόσθετα, κατά τη μετάβαση από τη μελέτη των μοτίβων στην άλγεβρα, οι μαθητές τείνουν να χρησιμοποιούν προσθετικές στρατηγικές για τον εντοπισμό και περιγραφή μοτίβων. Πιο συγκεκριμένα, εστιάζουν στη μεταβολή μόνο του ενός συνόλου δεδομένων παρά στη σχέση μεταξύ των δύο συνόλων δεδομένων (π.χ. Orton, Orton & Roper, 1999; Rivera & Becker 2007; Warren 2006). Ενώ αυτή η επαναληπτική (recursive) προσέγγιση επιτρέπει στους μαθητές να προβλέψουν τον επόμενο όρο του μοτίβου, δεν υποστηρίζει τη σκέψη συνδυακύμανσης για τη σχέση μεταξύ των συνόλων δεδομένων και για την εύρεση του κανόνα. Ωστόσο, όπως αναφέρεται στους Moss και McNab (2011) ακόμη και όταν οι μαθητές αρχίζουν να παρουσιάζουν κανόνες μοτίβων που εμπλέκουν τα δύο σύνολα, συνήθως χρησιμοποιούν λανθασμένα λόγους και αναλογίες για να κάνουν προβλέψεις για τον αριθμό στοιχείων σε μεγαλύτερες θέσεις μιας ακολουθίας (π.χ. English & Warren 1998; Lee 1996; Orton, 1997). Άλλες δυσκολίες που παρουσιάζονται σε έργα που απαιτούν εντοπισμό του κανόνα για τη σχέση δύο μεταβλητών, είναι η δυσκολία των μαθητών να συσχετίζουν τη θέση του σχήματος (μοτίβο) με το ίδιο το σχήμα (MacGregor & Stacey 1995), να εκφράζουν τις γενικεύσεις τους με φυσική γλώσσα (Redden 1996) και να μετατρέπουν ένα μοτίβο σε έναν πίνακα με τιμές και να ψάχνουν για σχέσεις στον πίνακα. Για το λόγο αυτό εντοπίζονται αρκετές έρευνες (π.χ. Moss & McNab, 2011; Papic & Mulligan, 2007; Stephens et al., 2012) οι οποίες αποσκοπούσαν μέσα από παρεμβατικά προγράμματα να βοηθήσουν τους μαθητές να αναπτύξουν την ικανότητα γενίκευσης αναπτυσσόμενων μοτίβων.

Για την ανάπτυξη της συναρτησιακής σκέψης και της ικανότητας των μαθητών να προχωρούν από την προσέγγιση συνδυακύμανσης στην προσέγγιση της αντιστοιχίας, οι ερευνητές υιοθετούν έργα γενίκευσης αναπτυσσόμενων μοτίβων. Τα έργα όμως αυτά ενδέχεται να εμπλέκουν είτε πίνακες με δύο σύνολα αριθμητικών τιμών (εισαγωγή - αποτέλεσμα, input-output) είτε γεωμετρικά αναπτυσσόμενα μοτίβα. Σε αυτά οι μαθητές καλούνται να εντοπίσουν τους επόμενους όρους του μοτίβου, μεγαλύτερους όρους καθώς και να περιγράψουν το γενικό κανόνα με φυσική γλώσσα ή σύμβολα. Η βιβλιογραφία υποδεικνύει ότι οι πίνακες τιμών είναι αποτελεσματικοί στο να εστιάζουν την προσοχή των μαθητών στη σχέση μεταξύ των αντίστοιχων τιμών, να διευκολύνουν τους μαθητές να γενικεύουν κανόνες και προωθούν τη συναρτησιακή σκέψη (Carraher & Earnest, 2003; Smith, 2008; Warren, Cooper & Lamb, 2006). Παρόλα αυτά, η Blanton (2008) εντόπισε ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν συνήθως τα δεδομένα του πίνακα για να εντοπίσουν έναν επαναλαμβανόμενο κανόνα παρατηρώντας από πάνω προς τα κάτω μόνο τη στήλη της εξαρτημένης μεταβλητής. Υπάρχει ωστόσο και η άποψη ότι τα αριθμητικά (αναπτυσσόμενα) μοτίβα (τα οποία πιθανό να παρέχονται σε πίνακες) είναι προφανώς πιο δύσκολα, όχι λόγω των δυσκολιών που πιθανόν να αντιμετωπίζουν οι μαθητές ώστε να εντοπίσουν την ομοιότητα, αλλά λόγω του ότι οι μαθητές τείνουν να αποτυγχάνουν να διαμορφώσουν έναν άμεσο κανόνα με νόημα (Becker & Rivera, 2006; Radford, 2008). Όπως χαρακτηριστικά αναφέρουν οι Becker και Rivera (2006) «οι μαθητές εφαρμόζουν συνήθως δοκιμή και έλεγχο ως στρατηγική για την ανάπτυξη κλειστών τύπων ή μερικώς ορθών σχέσεων επανάληψης, χωρίς να έχουν καμιά αίσθηση του τι αναπαριστά ο συντελεστής και η σταθερά στο γραμμικό μοτίβο» (σ. 96).

Κάτι παρόμοιο εισηγούνται και οι Harel (2001), Cooper και Warren (2011) και ο Lannin (2005), οι οποίοι αναφέρουν ότι η οπτική ανάλυση στην περίπτωση των εικονικών γεωμετρικών αναπτυσσόμενων μοτίβων ενθαρρύνει περισσότερο τη διαδικασία της γενίκευσης και οδηγεί στη διαμόρφωση ενός γενικού κανόνα με νόημα. Στα εικονικά γεωμετρικά αναπτυσσόμενα μοτίβα οι μαθητές καλούνται να εντοπίσουν τη σχέση μεταξύ του σχήματος του μοτίβου και της θέσης του και να χρησιμοποιήσουν αυτή τη γενίκευση για να συμπληρώσουν όρους του μοτίβου σε άλλες θέσεις. Συνήθως όμως σε τέτοιες δραστηριότητες οι μαθητές δημιουργούν μια οπτική-εικονική αναπαράσταση του μοτίβου (εάν αυτή δεν παρέχεται), καταγράφουν τα δεδομένα σε πίνακα (για τη θέση και τον αριθμό στοιχείων του σχήματος κάθε θέσης) και από τον πίνακα εντοπίζουν τη σχέση μεταξύ των δύο συνόλων δεδομένων. Ωστόσο, αυτή η διαδικασία είναι διαφορετική από την αναγνώριση μοτίβου η οποία χρησιμοποιείται στην μαθηματική επαγωγή (Harel 2001). Οι μαθητές θα πρέπει να ενθαρρύνονται να καταλήγουν σε γενίκευση με βάση την οπτική αναπαράσταση.

Συνεπώς, στα έργα γενίκευσης μοτίβων ένα θέμα που έχει αποσπάσει το ενδιαφέρον τω ερευνητών, αφορά στις στρατηγικές που υιοθετούν οι μαθητές στην προσπάθεια γενίκευσης αναπτυσσόμενων μοτίβων. Ο Radford (2008) διευκρινίζει τη διαφορά μεταξύ της αλγεβρικής γενίκευσης μοτίβων, της αριθμητικής γενίκευσης και της «αφελούς» γενίκευσης. Η αριθμητική γενίκευση σύμφωνα με τον Radford (2008) ή αλλιώς η επαναλαμβανόμενη/αναδρομική (recursive) στρατηγική (π.χ. Ainley, Wilson, & Bills, 2003; Swafford & Langrall, 2000) ή η μη-σαφής στρατηγική (Lannin, 2005) αφορά στις περιπτώσεις όπου ο μαθητής εντοπίζει τη σταθερή διαφορά αλλά με αυτό τον τρόπο δεν έχει τη δυνατότητα να υπολογίσει αμέσως οποιοδήποτε όρο («αρχίζω με τον αριθμό 1 και προσθέτω κάθε φορά δύο μέχρι να βρω τον αριθμό των κύκλων που θέλω»). Η «αφελής γενίκευση» εμπλέκει την εφαρμογή της στρατηγικής «δοκιμή και έλεγχος» μέχρι να εντοπιστεί ένας κανόνας που να ικανοποιεί τα δεδομένα. Η αλγεβρική γενίκευση από την άλλη εμπλέκει αρχικά την ικανότητα εντοπισμού ενός κοινού μεταξύ κάποιων όρων της ακολουθίας (Π1,Π2,Π3,...,Πκ), επέκταση ή γενίκευση αυτού του κοινού σε όλους τους επόμενους όρους (Πκ+1, Πκ+2, Πκ+3, ...) και την ικανότητα κάποιου να χρησιμοποιήσει αυτό το κοινό ώστε να παρέχει μια έκφραση που θα επιτρέπει την απευθείας εύρεση οποιουδήποτε όρου της ακολουθίας. Η αλγεβρική γενίκευση ή αλλιώς η «σαφής στρατηγική» (π.χ. Ainley et al.,2003; Lannin, 2005; Swafford & Langrall, 2000) οδηγεί σε αποτελέσματα τα οποία δεν είναι δυνατόν κάποιος να πετύχει μέσω της αριθμητικής γενίκευσης. Επίσης, η αλγεβρική γενίκευση δεν είναι αλγεβρική μόνο λόγω της χρήσης αλγεβρικού συμβολισμού αλλά και εξαιτίας του τρόπου με τον οποίο γίνεται αντιληπτό το «γενικό».

Μεταβολή των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με την ανεξάρτητη και συλλογισμός για τη σχέση μεταβολής

Η ικανότητα μεταβολής των τιμών δύο μεταβλητών και ο συλλογισμός για τη συμμεταβολή, εντοπίζεται τόσο σε έργα όπου απαιτείται αντικατάσταση τιμών σε κανόνες αλλά και σε έργα που εμπλέκουν αναπαράσταση της σχέσης δύο μεταβλητών μέσω γραφικών παραστάσεων. Αρχικά παρουσιάζεται η βιβλιογραφία σχετικά με την αντικατάσταση τιμών σε κανόνες και στη συνέχεια οι σχετικές έρευνες για την αναπαράσταση σχέσεων μέσω γραφικών παραστάσεων.

Στην πρώτη περίπτωση οι μαθητές καλούνται να αντικαταστήσουν τιμές είτε σε έργα στα οποία παρέχεται ήδη ο αλγεβρικός κανόνας, είτε σε έργα που ο κανόνας έχει εντοπιστεί από τους μαθητές και αφού ο κανόνας διατυπωθεί αλγεβρικά θα πρέπει να τον αξιοποιήσουν ώστε να υπολογίσουν την τιμή του μοτίβου σε πολύ μεγαλύτερες θέσεις. Στις μικρότερες τάξεις, τέτοιες δραστηριότητες βοηθούν τους μαθητές να αναπτύξουν κατανόηση ότι σε ένα σύμβολο μπορούν να αντικατασταθούν διάφορες τιμές (Watanabe, 2011), να κατανοήσουν το νόημα των λύσεων τους αλλά και να εξασκηθούν στην προτεραιότητα των πράξεων (Kriegler, 2008). Παρόλο που η ικανότητα αυτή είναι διαφορετική από εκείνη της δοκιμής και ελέγχου τιμών για τον υπολογισμό του αγνώστου σε μια εξίσωση πρώτου βαθμού και οι δύο βρίσκονται σε ένα διαδικαστικό επίπεδο μιας και οι μαθητές αντιμετωπίζουν σε αυτές τις περιπτώσεις την εξίσωση ή τη συνάρτηση υπό τους όρους του αποτελέσματος της αντικατάστασης τιμών σε μια έκφραση (Kota & Thomas, 1998). Σύμφωνα και με τη θεωρία της Sfard (1991), η αντικατάσταση τιμών εισηγείται μια διαδικαστική αντίληψη του μοτίβου ή αλλιώς της συνάρτησης.

Σε μερικές έρευνες εντοπίζεται η δυσκολία των μαθητών μεγαλύτερων τάξεων του δημοτικού και της πρώτης τάξης του γυμνασίου (Bishop, 2000; Samo, 2009; Swafford & Langrall, 2000) ως προς την ικανότητα αντικατάστασης τιμών σε κανόνες. Στην έρευνα τους οι Swafford και Langrall (2000) διερεύνησαν την ικανότητα των μαθητών Στ΄ δημοτικού (πριν την τυπική διδασκαλία της άλγεβρας) να καταλήγουν σε γενικεύσεις για διάφορες προβληματικές καταστάσεις και να χρησιμοποιούν εξισώσεις για την αναπαράστασή τους. Τα προβλήματα αυτά αφορούσαν σε γραμμικές και μη-γραμμικές καταστάσεις. Οι μαθητές παρουσίασαν επιτυχία στη γενίκευση των προβληματικών καταστάσεων και στην αναπαράσταση των γενικεύσεων μέσω της χρήσης εξισώσεων με αλγεβρικά σύμβολα. Παρόλο όμως που οι μαθητές ήταν σε θέση να καταλήξουν και να διατυπώσουν τις εξισώσεις, πολύ σπάνια χρησιμοποίησαν αυτές τις εξισώσεις για να λύσουν παρόμοια προβλήματα. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές δυσκολεύονταν να χρησιμοποιήσουν την εξίσωση και να αντικαταστήσουν τιμές στις μεταβλητές (Swafford & Langrall, 2000). Δυσκολίες εντοπίστηκαν και σε άλλες έρευνες στις οποίες εξετάστηκε μέσα από ένα έργο (x+y=12) του Kuchemann (1981) η κατανόηση του ότι η μεταβλητή καθορίζεται με βάση τη σχέση της με άλλους όρους του αλγεβρικού κανόνα (Warren, 1997). Η πλειοψηφία των μαθητών σε αυτού του είδους έργα δίνει μια συγκεκριμένη τιμή στο αλγεβρικό σύμβολο, υποδεικνύοντας ότι δεν έχει αναπτύξει αντίληψη ότι στην προκειμένη περίπτωση η μεταβλητή παίρνει περισσότερες από μια τιμές (Samo, 2009).

Στην έρευνά του Bishop (2000) οι 23 μαθητές Α' και Β' γυμνασίου, κλήθηκαν να λύσουν προβλήματα που σχετίζονταν με τέσσερα αναπτυσσόμενα γεωμετρικά μοτίβα στα οποία εμπλέκονταν το εμβαδόν και η περίμετρος. Σε ένα από αυτά τα έργα οι μαθητές κλήθηκαν να αναγνωρίσουν ποιες από τις εκφράσεις που δίνονταν αναπαριστούσαν την περίμετρο του σχήματος που παρουσιαζόταν και άρα ποια έκφραση έδειχνε τη σωστή σχέση μεταξύ του αριθμού του σχήματος και της περιμέτρου. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές χρησιμοποίησαν διαφορετικές στρατηγικές για να αξιολογήσουν την εγκυρότητα των εκφράσεων. Πολλοί μαθητές χρησιμοποίησαν την αντικατάσταση τιμών, όπου αντικατέστησαν μερικές ή όλες τις τιμές στα αλγεβρικά σύμβολα της έκφρασης και εξέτασαν κατά πόσο οι τιμές που προέκυπταν ως αποτέλεσμα ήταν ορθές. Ωστόσο, οι μαθητές σε κάποιες περιπτώσεις, κατέληγαν σε απόφαση βασισμένοι σε μια μόνο ορθή δοκιμή, ενώ αν συνέχιζαν, οι υπόλοιπες δοκιμές θα έδειχναν ότι η έκφραση ήταν λανθασμένη.

Σε άλλες έρευνες με μεγαλύτερους ηλικιακά μαθητές εντοπίστηκε η επιτυχία των μαθητών ως προς την αντικατάσταση τιμών σε κανόνες (Dindyal, 2004; Ledesma, 2012). Στην έρευνα του Dindyal (2004), οι μαθητές κλήθηκαν να λύσουν και ένα έργο που απαιτούσε αξιοποίηση μιας φόρμουλας για τον εντοπισμό του αριθμού των διαγωνίων του τετραπλεύρου, το πενταγώνου και το εξαγώνου. Το συγκεκριμένο πρόβλημα απαιτούσε από τους μαθητές να αντικαταστήσουν τιμές για το «ν», στην έκφραση υπολογισμού του αριθμού των διαγωνίων. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η αντικατάσταση, η οποία οδηγεί στη μετάβαση σε ένα και μόνο άγνωστο στη φόρμουλα (Bednarz & Janvier, 1996), δεν δυσκόλεψε καθόλου τους μαθητές και δεν αποτέλεσε απαιτητικό έργο. Σε μια πρόσφατη έρευνά της η Ledesma (2012) εξετάζει την ικανότητα φοιτητών στην επίλυση έργων με συσχετισμένες γραμμικές συναρτήσεις της μορφής y=ax+b (De Bock, Van Dooren, Janssens & Verschaffel, 2007) στα οποία καλούνταν να αντικαταστήσουν τιμές στην ανεξάρτητη μεταβλητή για να υπολογίσουν την τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής. Τα αποτελέσματα έδειξαν και σε αυτή την περίπτωση όπως και στην έρευνα του Dindyal (2004), ότι τα υποκείμενα της έρευνας δεν αντιμετώπισαν καμία δυσκολία και μέσω της αντικατάστασης υπολόγισαν με επιτυχία τις αντίστοιχες τιμές των δύο μεταβλητών (Ledesma, 2012).

Η μεταβολή των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με την ανεξάρτητη εντοπίζεται και σε έργα τα οποία εμπλέκουν τη χρήση γραφικών παραστάσεων. Οι γραφικές παραστάσεις αποτελούν τυπικά συμβολικά συστήματα για την αναπαράσταση της μεταβολής σε ποσότητες και καταστάσεις. Οι συμβάσεις που υιοθετούνται σε μια γραφική παράσταση, ακολουθούν ένα συνεκτικό σύνολο κανόνων ώστε οι χωρικές σχέσεις σε μια γραφική παράσταση να συνάδουν λογικά με τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των ποσοτήτων και των καταστάσεων που περιγράφει (Mitchell & Sunae, 2007; Schliemann, Goodrow & Roth, 2001). Στην περίπτωση των γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων, μια ευθεία αναπαριστά άπειρα ζεύγη αριθμών τα οποία θα ικανοποιούν συγκεκριμένη συνάρτηση. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης αποτυπώνει οπτικά την ουσία μια συναρτησιακής σχέσης (Schliemann et al., 2001).

Σύμφωνα με τους Leinhardt, Zaslavsky και Stein (1990) τα έργα συναρτήσεων σε σχέση με τις γραφικές παραστάσεις ενδέχεται να είναι έργα ερμηνείας ή έργα κατασκευής. Με την ερμηνεία αναφερόμαστε στη δράση με την οποία ο μαθητής κατανοεί κάτι από μια γραφική παράσταση, μια κατάσταση. Ο μαθητής πιθανό να προσπαθεί να αποφασίσει κάτι σε σχέση με ένα μοτίβο (π.χ. τι γίνεται στο χ καθώς αυξάνεται το ψ;) ή να εντοπίσει πότε δύο περιστατικά συμβαίνουν ταυτόχρονα. Με τα έργα κατασκευής αναφερόμαστε στην κατασκευή μιας γραφικής παράστασης ή την τοποθέτηση σημείων με βάση δεδομένα τα οποία παρέχονται, είτε μέσω ενός κανόνα ή μέσω ενός πίνακα (Leinhardt et al., 1990).

Σύμφωνα με τους Goodrow και Schliemann (2003) ελάχιστες έρευνες έχουν εξετάσει την κατανόηση των μαθητών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης για τις γραφικές παραστάσεις και όπως φαίνεται καμιά έρευνα δεν έχει αναλύσει την κατανόηση των μικρότερων ηλικιακά μαθητών για τις γραφικές παραστάσεις γραμμικών συναρτήσεων. Οι ίδιοι υποστηρίζουν ότι η εισαγωγή των γραφικών παραστάσεων συνάρτησης στο δημοτικό σχολείο συμβάλλει στην κατανόηση των γραφικών παραστάσεων και του πολλαπλασιαστικού συλλογισμού (Goodrow & Schliemann, 2003). Η έρευνα των Schliemann et al. (2001) έδειξε ότι οι μαθητές Γ' δημοτικού έχουν την ικανότητα να ασχοληθούν αποτελεσματικά με τα σημεία μιας γραφικής παράστασης και μπορούν ακόμη να σκέφτονται για το λόγο που προκύπτει σε κάθε ζεύγος αριθμών (ο λόγος των καραμελών προς τις καρέκλες στο σημείο Α και στο σημείο Β είναι ίσοι) και να κατανοήσουν ότι η ευθεία (η οποία διέρχεται από το κέντρο των αξόνων) σε μια γραφική παράσταση αναπαριστά ίσους λόγους (δείτε Schliemann et al., 2001). Όπως αναφέρουν, το πιο ενδιαφέρον στοιχείο των ερευνών τους σχετίζεται με το πώς ο αλγεβρικός συμβολισμός και οι γραφικές παραστάσεις αποτέλεσαν εργαλεία τα οποία βοήθησαν τους μαθητές να μεταβούν από υπολογισμούς σε απομονωμένες ποσότητες σε γενικεύσεις για το πώς δύο σύνολα δεδομένων σχετίζονται.

Σε συνεντεύξεις που πραγματοποίησαν οι Goodrow και Schliemann (2003) στο τέλος της Δ' δημοτικού, εντόπισαν ότι το 78% των μαθητών της έρευνάς τους αναγνώριζαν ορθά τη γραφική παράσταση μια δοσμένης συνάρτησης ανάμεσα σε άλλες και το 39% παρείχαν γενικές αιτιολογήσεις οι οποίες υποδήλωναν ότι οι μαθητές λάμβαναν υπόψη τους οποιοδήποτε ζεύγος αριθμών (π.χ. «Επειδή όταν πολλαπλασιάσεις τα χρήματα του Γιάννη με το τρία τότε αυτό δείχνει τα χρήματα που έχει η Μαίρη»). Στοιχεία ότι οι μαθητές του δημοτικού έχουν την ικανότητα να συλλογίζονται για την ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών σε γραφικές παραστάσεις, παρέχει και η έρευνα της Fitzallen (2012). Στόχος της έρευνας της Fitzallen (2012) ήταν η διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο το TinkerPlots συνεισφέρει, υποστηρίζει και επηρεάζει την ανάπτυξη κατανόησης από μέρους των μαθητών για την συνδυακύμανση καθώς κατασκεύαζαν και ερμήνευαν γραφικές παραστάσεις. Η ανάλυση των συνεντεύξεων έδειξε ότι οι μαθητές Ε' και Στ' δημοτικού αξιοποιούν την κατανόησή τους για τη συνδυακύμανση ώστε να καταλήξουν σε συμπεράσματα για τις τάσεις των δεδομένων που παρουσιάστηκαν στις γραφικές παραστάσεις που κατασκεύασαν. Φάνηκε ότι οι μαθητές των μεγαλύτερων τάξεων του δημοτικού ήταν σε θέση να αξιολογήσουν τη σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών και να αναπτύξουν κατανόηση για τη συνδυακύμναση (Fitzallen, 2012).

Από την άλλη, προηγούμενες έρευνες παρέχουν στοιχεία που δείχνουν ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν σύγχυση για το νόημα και τις χρήσεις των γραφικών παραστάσεων (π.χ. Friel, Curcio, & Bright, 2001). Συνήθως οι μαθητές τείνουν να ερμηνεύουν τις γραφικές παραστάσεις κυριολεκτικά, αναμένοντας ότι το σχήμα της γραφικής παράστασης θα πρέπει να ταιριάζει με το σχήμα της κατάστασης προς αναπαράσταση (Smith, diSessa, & Roschelle, 1993) και όχι ως μια ποσοτική σχέση μεταξύ των τιμών (π.χ. χρόνου και ταχύτητας). Επιπρόσθετα, οι Chazan και Bethell (1994) αναφέρουν ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν τις μεταβλητές, να αποφασίσουν ποιες είναι οι ανεξάρτητες και ποιες οι εξαρτημένες μεταβλητές και να αποφασίσουν κατά πόσο πρέπει να αναπαραστήσουν μια συνεχή ευθεία ή διακριτά σημεία. Επίσης, σε αρκετές έρευνες φάνηκε ότι οι μαθητές κατασκευάζουν και διαβάζουν τις γραφικές παραστάσεις ως απομονωμένα αριθμητικά σημεία και δεν τις αντιμετωπίζουν ως «ολότητα» (Bell, Brekke, & Swan, 1987; Brasell & Rowe, 1993).

Γενίκευση ιδιοτήτων των πράξεων

Η αριθμητική έχει έναν εγγενή αλγεβρικό χαρακτήρα. Μια από τις πιθανές προσεγγίσεις επομένως για την ανάπτυξη ης αλγεβρικής σκέψης βασίζεται στον αλγεβρικό χαρακτήρα της αριθμητικής, και με άλλα λόγια στη γενικευμένη αριθμητική. Σύμφωνα με τους Blanton et al. (2011) και τον Kaput (2008), η γενικευμένη αριθμητική εμπλέκει ανάμεσα σε άλλα και την οικοδόμηση γενικεύσεων για τις ιδιότητες των πράξεων.

Οι δραστηριότητες αλγεβρικής σκέψης που απαιτούν εννοιολογική κατανόηση αφορούν κυρίως σε αυτές που απαιτούν εφαρμογή και επεξήγηση των ιδιοτήτων των πράξεων, όπως της αντιμεταθετικής ή επιμεριστικής ιδιότητας (Kieran, 1992). Οι μαθητές θα πρέπει να έχουν κατανοήσει πώς και γιατί αυτοί οι κανόνες ή οι ιδιότητες «λειτουργούν», ώστε να είναι σε θέση να εξηγήσουν την εφαρμογή τους. Στην τυπική διδασκαλία, ωστόσο, αυτές οι ιδιότητες συνήθως θεωρούνται δεδομένες ή ακόμη χειρότερα αντιμετωπίζονται ως κάτι το οποίο πρέπει οι μαθητές να αποστηθίσουν από το βιβλίο (Malara & Navara, 2009). Οι μαθητές επομένως δεν έχουν την ευκαιρία να κατανοήσουν το νόημα αυτών των ιδιοτήτων και να αναγνωρίσουν την αξία τους. Όπως τονίζουν οι Blanton et al. (2011), η αλγεβρική κατανόηση των ιδιοτήτων περιλαμβάνει: (α) την κατανόηση ότι αυτές οι ιδιότητες αναπαριστούν γενικεύσεις που ισχύουν για όλους τους πραγματικούς αριθμούς, (β) την ικανότητα αναπαράστασης των ιδιοτήτων συμβολικά και (γ) την αναγνώριση της χρήσης τους στους υπολογισμούς (Blanton et al., 2011). Ο Kaput (2008) επισημαίνει ότι δραστηριότητα στα έργα της ικανότητας γενίκευσης των ιδιοτήτων πράξεων είναι δυνατό να χαρακτηριστεί ως αλγεβρική στην περίπτωση που ο μαθητής εκφράζει αυτές τις ιδιότητες ξεκάθαρα και εξετάζει τη γενικότητά τους και όχι όταν τις χρησιμοποιεί αυθόρμητα χωρίς να το δηλώνει.

Εντοπίζονται στη βιβλιογραφία έρευνες που εξετάζουν την κατανόηση των μικρότερων μαθητών για τις ιδιότητες των πράξεων και την ικανότητά τους να καταλήγουν σε γενικεύσεις αυτών των ιδιοτήτων (π.χ. Bastable & Schifter, 2008; Malara & Navara, 2009; Soares, Blanton, & Kaput, 2006; Vermeulen, Olivier & Human, 1996). Αρκετές έρευνες παρέχουν στοιχεία ότι οι μαθητές του δημοτικού μπορούν να καταλήξουν σε γενικεύσεις για τις ιδιότητες των πράξεων (π.χ. Bastable & Schifter, 2008; Blanton & Kaput, 2005; Carpenter et al., 2003; Carpenter & Levi, 2000; Carraher, Schliemann, Brizuela, & Earnest, 2006). Όταν οι μαθητές γενικεύουν ιδιότητες των πράξεων και των αριθμών, διαμορφώνουν μια γενική δήλωση η οποία ισχύει σε πολλές περιπτώσεις (Kaput et al., 2008). Αυτές οι γενικεύσεις εκφράζονται είτε με λόγια είτε με σύμβολα (Soares et al., 2006). Οι μαθητές αρχικά εκφράζουν τις ιδιότητες με τη χρήση της φυσικής γλώσσας και καθώς «ωριμάζουν μαθηματικά», μαθαίνουν να εκφράζουν αυτή την ιδέα με πιο τυπικούς τρόπους, χρησιμοποιώντας σύμβολα για την αναπαράσταση οποιονδήποτε δύο αριθμών. Για παράδειγμα, η δήλωση «το α+β=β+α ισχύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α, β» αποτελεί μια τυπική έκφραση της γενίκευσης για την αντιμεταθετική ιδιότητα (Blanton et al., 2011). Εντοπίζονται έρευνες που δείχνουν ότι οι μικροί μαθητές έχουν τη γνωστική ικανότητα να γενικεύουν τις ιδέες που έχουν κατανοήσει με διάφορους και εξελιγμένους τρόπους και αντιμετωπίζουν τις μεταβλητές ως δυναμικές ποσότητες (Kaput & Blanton, 2001; Warren, 2005). Ωστόσο, όπως αναφέρουν οι Bastable και Schifter (2008), οι μαθητές έχουν την περιέργεια να καταλήγουν σε γενικεύσεις για τις ιδιότητες των πράξεων και χρησιμοποιούν διαγράμματα ή φυσική γλώσσα για να εκφράσουν τις ιδιότητες των πράξεων, παρά σύμβολα.

Στην ερευνά τους οι Carpenter και Levi (2000) περιγράφουν την ικανότητα μαθητών Β' δημοτικού να καταλήγουν σε γενικεύσεις για την ιδιότητα του μηδενός στην πρόσθεση αλλά και τη διατύπωση άλλων γενικεύσεων όπως «78 - 49 + 49 = 78». Οι μαθητές συνήθως προσπαθούσαν να εκφράσουν τη γενίκευσή τους μέσα από συγκεκριμένο παράδειγμα (π.χ. 7+0=7), ενώ κάποιοι μαθητές ήταν σε θέση να εκφράσουν λεκτικά πιο γενικές δηλώσεις. Οι γενικές επεξηγήσεις των μαθητών για το λόγο που μια αριθμητική έκφραση είναι ακριβής όπως «65 - 12 + 12 = 65» και η ικανότητά τους να χρησιμοποιούν συγκεκριμένα παραδείγματα (αυτά που στη συνέχεια θα γίνουν αντιληπτά ως γενικευμένες σχέσεις a – b + b = a), έχουν περιγραφεί ως σκέψη με «ημιμεταβλητές» (quasi-variable thinking) (Fujii & Stephens, 2008). Η έκφραση «ημιμεταβλητή» (quasi-variable) ορίζεται ως «μια αριθμητική πρόταση ή ένα σύνολο αριθμητικών προτάσεων που υποδεικνύουν μια υποβόσκουσα μαθηματική σχέση η οποία παραμένει αληθής οποιοιδήποτε αριθμοί και να χρησιμοποιούνται» (Fujii, 2003, σ. 59). Με αυτή την προοπτική, οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουν ένα σύνολο αριθμητικών εκφράσεων ώστε να μελετήσουν τη δομή των εκφράσεων και να συζητήσουν και να εκφράσουν την αλγεβρική γενίκευση προτού γίνει η εισαγωγή στον αλγεβρικό συμβολισμό.

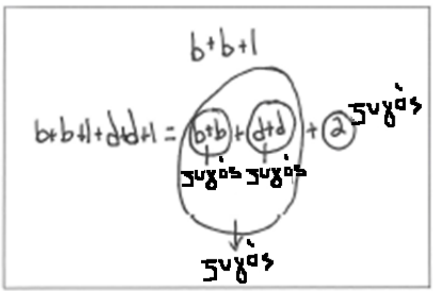
Οι Bastable και Schifter (2008) περιγράφουν ένα από τα επεισόδια που διαδραματίστηκαν σε μια Γ' τάξη και αφορά στην αντιμεταθετική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό. Αφού οι μαθητές παρατήρησαν μέσα από συγκεκριμένα αριθμητικά παραδείγματα ότι ίσχυε σε κάποιες περιπτώσεις, κλήθηκαν να απαντήσουν και να εξηγήσουν αν αυτό που παρατήρησαν σε μερικά παραδείγματα θα ισχύει πάντοτε. Μια μαθήτρια, στην προσπάθεια της να αποδείξει ότι ισχύει σε όλες τις περιπτώσεις, χρησιμοποίησε τους κύβους unifix δείχνοντας ότι οι επιφάνειες που δημιουργούνται με τρεις λωρίδες με επτά κυβάκια (3×7) και οι επτά λωρίδες με τρία κυβάκια (7×3) είναι ίσες, καταλήγοντας στο συμπέρασμα ότι με οποιουσδήποτε αριθμούς το επαναλάβεις, οι δύο επιφάνειες θα ταυτίζονται. Όπως αναφέρουν, «από την εμπειρία μας στις τάξεις του δημοτικού (Α'-Στ'), γνωρίζαμε ότι όταν κάποιος ακούσει τις συζητήσεις των μαθητών για αριθμητικές ιδέες, θα εντοπίσει ότι σε αυτές εμπλέκεται ένα επίπεδο γενίκευσης το οποίο θεωρείται αλγεβρικό» (Bastable & Schifter, 2008, σ. 165).

Παρά τα ενθαρρυντικά αποτελέσματα που περιγράφηκαν προηγουμένως, εντοπίζονται και έρευνες που υποδεικνύουν τις δυσκολίες των μαθητών σε σχέση με το συλλογισμό για τις ιδιότητες των πράξεων. Ενώ σε κάποιες περιπτώσεις έχει διαφανεί ότι οι μαθητές επινοούν μόνοι τους στρατηγικές για υπολογισμούς στους οποίους εμπλέκεται η διαισθητική χρήση των ιδιοτήτων (και συγκεκριμένα της επιμεριστικής ιδιότητας) (π.χ. Murray, Olivier & Human, 1994), οι μαθητές δεν φαίνεται να έχουν ξεκάθαρη επίγνωση της επιμεριστικής ιδιότητας (Vermeulen et al., 1996). Όπως αναφέρουν οι Vermeulen et al. (1996), σε συνεντεύξεις με μαθητές Ε' δημοτικού μόνο δύο από τους 16 μαθητές αναγνώρισαν την επιμεριστική ιδιότητα. Από την άλλη, σε ένα ερωτηματολόγιο για μαθητές Ε' και Στ΄ δημοτικού το οποίο περιλάμβανε έργο αναγνώρισης της επιμεριστικής ιδιότητας, εντοπίστηκε ότι 159 μαθητές από τους 240 αναγνώρισαν την επιμεριστική ιδιότητα και είχαν την ικανότητα να εξηγήσουν την απάντησή τους (Vermeulen et al., 1996). Βασισμένοι στις παρατηρήσεις τους οι Vermeulen et al. (1996) πρότειναν ένα μοντέλο για τα επίπεδα επίγνωσης της επιμεριστικής ιδιότητας. Από το χαμηλότερο επίπεδο που αφορά στην αυθόρμητη χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας κατά την προσπάθεια των μαθητών νε επινοήσουν δικές τους στρατηγικές υπολογισμού, υπάρχει μετάβαση στην αναγνώριση της επιμεριστικής ιδιότητας, στη συνέχεια στην αξιοποίηση της ιδιότητας με πρόθεση για την απλοποίηση ενός υπολογισμού και στη συνέχεια μετάβαση στη γενίκευση της ιδιότητας όπου ο μαθητής αναγνωρίζει την εφαρμογή της σε όλους τους πραγματικούς αριθμούς. Τέλος, στο ψηλότερο επίπεδο ο μαθητής έχει αναγνωρίσει την ιδιότητα, αλλά παρουσιάζει και την ικανότητα να τεκμηριώσει την ιδιότητα μέσω γενικών δηλώσεων κάνοντας αναφορά ή συνδέσεις με προηγούμενες εμπειρίες (Vermeulen et al., 1996).

Γενίκευση ιδιοτήτων των αριθμών

Γενικεύσεις από το πλαίσιο της αριθμητικής εμφανίζονται και στα έργα συλλογισμού και γενίκευσης των ιδιοτήτων των αριθμών και εντοπίζονται ερευνητικές προσπάθειες για την εξέταση της ικανότητας των μαθητών να καταλήγουν σε γενικεύεις κυρίως για τις ιδιότητες των άρτιων και των περιττών αριθμών και να τις αιτιολογούν.

Όταν κάποιος έχει διαμορφώσει μια γενίκευση, η προσπάθεια να την αιτιολογήσει υποστηρίζει την αλγεβρική σκέψη, επειδή εστιάζει την προσοχή στη δομή που αποτελεί τη βάση των υπολογισμών (Blanton et al., 2011). Οι Blanton et al. (2011) επικεντρώνονται στις τάξεις Γ'-Ε' δημοτικού και περιγράφουν το συλλογισμό μιας μαθήτριας στην προσπάθεια της να καταλήξει σε μια γενίκευση για το αποτέλεσμα που προκύπτει μετά την πρόσθεση δύο περιττών αριθμών (δείτε Διάγραμμα 2.2). Η μαθήτρια αξιοποίησε και εξήγησε ανάμεσα σε άλλα ότι μπορούμε να προσθέσουμε τους αριθμούς με οποιαδήποτε σειρά και ότι η πρόσθεση ενός αριθμού με τον εαυτό του δίνει άρτιο αριθμό ως αποτέλεσμα. Αυτή η έμφαση στον συλλογισμό και αιτιολόγηση μαθηματικών σχέσεων είναι απαραίτητη όχι μόνο για τη μάθηση της άλγεβρας αλλά και για την ανάπτυξη κατανόησης της αριθμητικής (Blanton et al., 2011).



Διάγραμμα 2.2. Η λύση μιας μαθήτριας για την πρόσθεση δύο περιττών αριθμών όπως παρουσιάζεται στους Blanton et al. (2011).

Η απόδειξη αποτελεί ένα σημαντικό στοιχείο του αλγεβρικού συλλογισμού. Ωστόσο, στις τάξεις του δημοτικού χρησιμοποιείται καλύτερα ο όρος *αιτιολόγηση* (Blanton et al., 2011; Carpenter et al., 2003). Όπως αναφέρουν οι Carpenter et al. (2003) «έχουμε επιλέξει τον όρο αιτιολόγηση ο οποίος περιλαμβάνει ένα μεγαλύτερο εύρος επιχειρημάτων τα οποία χρησιμοποιούν οι μαθητές για να δείξουν ότι μια υπόθεση είναι ορθή» (σ.71). Οι ίδιοι κάνουν αναφορά σε τρία επίπεδα αιτιολόγησης τα οποία χρησιμοποιούνται από τους μαθητές του δημοτικού (Carpenter et al., 2003). Το πρώτο επίπεδο αιτιολόγησης αφορά στις περιπτώσεις όπου οι μαθητές επικαλούνται λόγους που δεν αφορούν σε μαθηματικές αιτιολογήσεις, αλλά βασίζονται στο τι άκουσαν από άλλα άτομα τα οποία έχουν κάποια εξουσία. Για παράδειγμα, το επιχείρημά τους αφορά σε έναν κανόνα ή μια διαδικασία την οποία ξεκαθαρίζουν ότι διδάχτηκαν ή άκουσαν από τον εκπαιδευτικό ή από κάποιο άλλο άτομο. Το δεύτερο επίπεδο αφορά στην αιτιολόγηση με παραδείγματα όπου οι αιτιολογήσεις των μαθητών βασίζονται μόνο σε συγκεκριμένα αριθμητικά παραδείγματα. Όταν γίνεται χρήση παραδειγμάτων για την αιτιολόγηση των υποθέσεων οι μαθητές συνήθως υπολογίζουν τη μια αριθμητική πρόταση μετά την άλλη. Όταν κληθούν να απαντήσουν «πώς γνωρίζεις ότι η υπόθεση είναι αληθής/ορθή», απαντούν «επειδή δοκίμασα με όλες αυτές τις αριθμητικές προτάσεις και ήταν πάντα ορθή, έτσι νομίζω είναι ορθή». Το τρίτο επίπεδο αιτιολόγησης αφορά σε γενικευμένες δηλώσεις με επεξήγηση όπου οι μαθητές παρουσιάζουν ένα γενικό επιχείρημα (μέσω λεκτικής, αριθμητικής ή συμβολικής αναπαράστασης) με το οποίο αιτιολογούν το γιατί η υπόθεση ισχύει σε όλες τις περιπτώσεις.

Οι Carpenter et al. (2003) εντόπισαν ότι η αιτιολόγηση με παράδειγμα ήταν ο πιο συχνός τρόπος αιτιολόγησης από τους μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Αρκετοί μαθητές οι οποίοι χρησιμοποιούν παραδείγματα για να αιτιολογήσουν, πιθανό να έχουν μια ιδέα ότι αυτού του είδος αιτιολόγηση δεν είναι αρκετή για την απόδειξη του ότι η υπόθεση είναι πάντοτε ορθή για όλους τους αριθμούς, ωστόσο δεν είναι σίγουροι σε πιο άλλο επιχείρημα θα μπορούσαν να βασιστούν. Σε παρόμοια επίπεδα κατέληξαν οι Harel και Sowder (1998), οι οποίοι εργάστηκαν με μαθητές λυκείου. Τα επίπεδα είναι: (α) απόδειξη η οποία βασίζεται σε εξωτερικές πηγές, όπως εκπαιδευτικό, γονείς, βιβλία, (β) η εμπειρική απόδειξη όπου οι μαθητές βασίζονται σε ένα παράδειγμα ή ένα σύνολο παραδειγμάτων και (γ) η αναλυτική απόδειξη η οποία αφορά σε επιχειρήματα τα οποία εμπλέκουν μαθηματικό συλλογισμό και η φύση τους είναι πιο γενική. Οι Bastable και Schifter (1998), θέτουν ερωτήματα όπως «Εντοπίζουν οι μαθητές διαφορές μεταξύ των διαφορετικών επιχειρημάτων που χρησιμοποιούν;», «Αναγνωρίζουν ότι κάποια επιχειρήματα έχουν μεγαλύτερη ισχύ από άλλα;».

Η γενικευμένη αριθμητική εμπλέκει και την έννοια της ισότητας (Mestre & Oliveira, 2012). Οι περιορισμένες προσεγγίσεις της αριθμητικής αφήνουν εκτός τις ιδιότητες της ισότητας (Carraher & Schliemann, 2007), ενώ χρειάζεται να παρέχονται ευκαιρίες για τη γενίκευση των ιδιοτήτων της ισότητας μέσα από την «αφαίρεση» των παρατηρήσεων που προκύπτουν από τους υπολογισμούς.

Η ικανότητα των μαθητών να συλλογίζονται για την ισότητα, αξιοποιώντας και εφαρμόζοντας τις ιδιότητες της ισότητας (Blanton et al., 2011; Brizuela & Schliemann, 2004) τυγχάνει διερεύνησης μέσα από έργα τα οποία απαιτούν την άμεση χρήση των ιδιοτήτων αυτών για την επίλυσή τους. Οι ιδιότητες της ισότητας όπως αναφέρονται στους Blanton et al. (2011) είναι οι εξής: (1) «η ιδιότητα της αφαίρεσης στην ισότητα»: αν α=β, τότε α-γ=β-γ, για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α, β και γ, (2) Η ιδιότητα της πρόθεσης στη ισότητα, αν α=β, τότε α+γ=β+γ, (3) η ιδιότητα του πολλαπλασιασμού στην ισότητα, α=β, τότε α×γ=β×γ, και (δ) η ιδιότητα της διαίρεσης στην ισότητα, α=β και γ≠0, τότε α÷γ=β÷γ (Blanton et al., 2011).

Ο συλλογισμός για τις ιδιότητες αυτές και τη χρήση τους, είναι απαραίτητα για την ορθή επίλυση έργων όπου στην ισότητα περιλαμβάνονται διαφορετικά αλγεβρικά σύμβολα τα οποία πρέπει να ερμηνευτούν ως γενικευμένοι αριθμοί (Kuchemann, 1981) και στα οποία ο μαθητής δεν καλείται να εντοπίσει μια αριθμητική τιμή για τη μεταβλητή. Αυτά τα έργα ενθαρρύνουν και τη συσχεσιακή σκέψη (relational thinking) όπως προτείνεται από τους Carpenter, Madison, Franke και Zeringue (2005) η οποία αφορά στο να αντιληφθεί κάποιος τις εκφράσεις ως ολότητες παρά ως διαδικασίες που πρέπει να εκτελεστούν βήμα προς βήμα.

Η επιτυχία ωστόσο, σε τέτοιου είδους έργα φαίνεται να είναι πιο δύσκολη (Akgun & Ozdemir, 2006; Matthews et al., 2012). Για παράδειγμα, στην έρευνα τους οι Akgun και Ozdemir (2006), εξέτασαν τις απαντήσεις 158 μαθητών Β' γυμνασίου στο έργο «Πότε θα ισχύει η ισότητα $x + y = z + y$;». Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι 35 μαθητές απάντησαν σε αυτή την ερώτηση λανθασμένα και 25 μαθητές απάντησαν «ποτέ». Μόνο 31 μαθητές (20% του δείγματος) απάντησαν «κάποιες φορές» με ορθή εξήγηση «για κάθε τιμή του y όταν $x = z$». Παρόλο που 78 από τους 158 απάντησαν «μερικές φορές», δεν έδωσαν μια επεξήγηση για το πότε θα ισχύει η ισότητα. Δύο μαθητές χρειάστηκε να αντικαταστήσουν συγκεκριμένες τιμές ώστε να ελέγξουν τη σχέση (π.χ. 2+1=3+1) και 12 μαθητές δεν απάντησαν καθόλου. Επίσης, στη ερώτηση να δηλώσουν όλες τις τιμές που είναι δυνατό να πάρει το «x» στη σχέση «x+ 2 = 2+x», οι μαθητές αντιλήφθηκαν αυτή τη σχέση ως εξίσωση και προσπάθησαν να τη λύσουν. Λόγω αυτού, 39 μαθητές ισχυρίστηκαν ότι το «x» αντιπροσώπευε ένα συγκεκριμένο αριθμό. Μόνο 25 μαθητές (15%) αντιλαμβάνονταν τη μεταβλητή στη συγκεκριμένη σχέση ως γενικευμένο αριθμό και 19 από αυτούς (μόνο το 12%) έδωσαν την ορθή απάντηση (το «x» είναι δυνατό να είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός) (Akgun & Ozdemir, 2006).

Σε μια πρόσφατη έρευνα των Matthews et al. (2012) χρησιμοποιήθηκαν έργα για τις ιδιότητες της ισότητας τα οποία ενέπλεκαν αριθμούς (π.χ. «το 76+42=121 είναι ορθό, ισχύει, το 76+45-9=121-9 είναι ορθό ή λανθασμένο; Πώς το γνωρίζεις;»). Από τους 29 μαθητές (13% του δείγματος) οι οποίοι έδωσαν ορισμό για το σύμβολο ίσον ο οποίος υποδήλωνε συσχεσιακή αντίληψη, οι 13 από αυτούς φάνηκε να είναι πιο πιθανό να επιτύχουν στα πιο δύσκολα έργα του τεστ, τα οποία καλούσαν τους μαθητές να παρέχουν επεξηγήσεις χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της ισότητας (Matthews et al., 2012).

Συλλογισμό για την ισότητα και τις σχέσεις ισότητας, εμπλέκουν και άλλες ιδιότητες και συγκεκριμένα η μεταβατική, συμμετρική και ανακλαστική ιδιότητα της ισότητας και η μεταβατική ιδιότητα της ανισότητας (π.χ. Α=Β και Β=Γ τότε Α=Γ ή Α>Β και Β>Γ τότε Α>Γ). Ο Piaget (1987) αναφέρει ότι «η μεταβατικότητα αποτελεί μέρος της βαθιάς διαίσθησης της ισότητας (για τους αριθμούς, για τα σύνολα, για γεωμετρικά σημεία)» (σ. 10). Όπως υποστηρίζουν οι Carraher & Schliemann (2007), τα έργα που εμπλέκουν την ανακλαστική και συμμετρική ιδιότητα της ισότητας είναι σημαντικά, ωστόσο, επισημαίνουν ότι η παραδοσιακή διδασκαλία της αριθμητικής παραβλέπει τα συγκεκριμένα έργα. Αντίθετα, με βάση το αναλυτικό πρόγραμμα του Davydov οι μαθητές από την πρώτη κιόλας τάξη του δημοτικού καταπιάνονται με τέτοιου είδους έργα στα οποία μαθαίνουν να χρησιμοποιούν αλγεβρικά σύμβολα για να αναπαριστούν τις ιδιότητες αντικειμένων (μέγεθος, μάζα, όγκος κτλ.) και οδηγούνται σε συγκρίσεις (Davydov et al., 2001; Schmittau & Morris, 2004). Οι μαθητές μαθαίνουν ότι σε μερικές περιπτώσεις, με το να αξιοποιείς πληροφορίες για την ισότητα και τις σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων, έχεις τη δυνατότητα να καταλήξεις λογικά σε νέες σχέσεις χωρίς να χρειαστεί να μετρήσεις (Davydov et al., 2001). Οι αναπαραστάσεις αυτών των σχέσεων μεταξύ των ποσοτήτων παρέχουν μια ισχυρή βάση για την άλγεβρα, όχι μόνο λόγω της χρήσης των μεταβλητών, αλλά και εξαιτίας της απεικόνισης των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των ποσοτήτων σε γενικευμένες μορφές (Dougherty, 2008).

Η συγκεκριμένη ικανότητα εμπλέκει την ερμηνεία της μεταβλητής ως συγκεκριμένο άγνωστο αριθμό. Οι μαθητές καλούνται να επιλύσουν την εξίσωση για να εντοπίσουν την τιμή του αγνώστου. Η ικανότητα να επιλύει κάποιος εξισώσεις και να συλλογίζεται για την ισότητα αποτελεί βασική πτυχή της αλγεβρικής σκέψης (Cai et al., 2011). Παρόλο που τα τελευταία χρόνια παρατηρείται μια μεγάλη αλλαγή στην περιοχή των μαθηματικών (Chazan, 2008), η επίλυση εξισώσεων εξακολουθεί να αποτελεί σημαντικό στοιχείο της μελέτης της άλγεβρας (Cai et al., 2011).

Αυτό που εντοπίζεται στη βιβλιογραφία είναι ο διαχωρισμός μεταξύ της επίλυσης εξισώσεων με τον άγνωστο να βρίσκεται στο ένα μέλος της εξίσωσης και της επίλυσης εξισώσεων με τον άγνωστο να βρίσκεται και στα δύο μέλη της εξίσωσης. Τα αποτελέσματα ερευνών (π.χ. Johanning, 2004) για την επίλυση εξισώσεων με τον άγνωστο στο ένα μέλος, δείχνουν ότι οι μαθητές εφαρμόζουν κυρίως άτυπες στρατηγικές, με τη στρατηγική «δοκιμή και έλεγχο» να είναι η πιο συχνή προσέγγιση, αλλά και τη στρατηγική της ανάδρομης πορείας (χρησιμοποιούν αντίστροφες πράξεις με σκοπό να απομονώσουν την άγνωστη ποσότητα). Όπως αναφέρουν οι Herscovics και Linchevski (1994) οι μικροί μαθητές επιλύνουν προβλήματα που περιλαμβάνουν αγνώστους (π.χ., 5 + α = 8), χωρίς να χρειαστεί να αναπαραστήσουν και να χειριστούν τον άγνωστο, αντίθετα χρησιμοποιούν διαδικασίες μέτρησης ή αντίστροφες πράξεις για να καταλήξουν στο αποτέλεσμα. Επιπρόσθετα, στις εξισώσεις αυτές που δεν υπάρχει άγνωστος και στο δεξί μέλος της εξίσωσης, εμπλέκεται η αντίληψη του συμβόλου της ισότητας ως «ακολουθεί το αποτέλεσμα» η οποία σχετίζεται άμεσα με τη χρήση της εξίσωσης ως διαδικασία παρά ως αντικείμενο το οποίο είναι δυνατό κάποιος να χειριστεί (Sfard, 1991). Τα παιδιά αρχικά αντιλαμβάνονται τις εξισώσεις ως την περιγραφή μιας αριθμητικής διαδικασίας (π.χ. 2×3+4= x) και όταν κληθούν να αντιμετωπίσουν εξισώσεις του τύπου «2x+4 =10», τις βλέπουν ομοίως ως περιγραφή της αριθμητικής διαδικασίας, με τη «δοκιμή και έλεγχο» να αποτελεί τον τρόπο εύρεσης του «x».

Ένας αριθμός ερευνητών υποστηρίζουν ότι οι μαθητές εμπλέκονται στην άλγεβρα, μόνο όταν είναι σε θέση να κατανοήσουν και να χρησιμοποιήσουν τη σύνταξη της άλγεβρας και να επιλύνουν εξισώσεις με αγνώστους και δεξιά και αριστερά από το σύμβολο της ισότητας (π.χ. Filloy & Rojano, 1989). Οι Filloy και Rojano (1989), αναφέρουν ότι το σημείο που αποτελεί διαχωρισμό της άλγεβρας και της αριθμητικής αφορά στο αν το αλγεβρικό σύμβολο εμφανίζεται και στα δύο μέλη μιας εξίσωσης. Από την άλλη, για τους Herscovics και Linchevski (1994) το θέμα διαχωρισμού αφορούσε περισσότερο στο πώς κάποιος αντιμετωπίζει και χειρίζεται την εξίσωση και τους αγνώστους και όχι στη μορφή της εξίσωσης, κάνοντας αναφορά σε ένα γνωστικό χάσμα όπου αρκετοί μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολία να χειρίζονται αυθόρμητα τον άγνωστο. Για παράδειγμα, η εξίσωση «2x+4=19-3x» είναι δυνατό να επιλυθεί δοκιμάζοντας διάφορους αριθμούς για το σύμβολο «x», ενώ κάποιος άλλος ίσως να προσπαθήσει να αλλάξει την εξίσωση και να καταλήξει στη μορφή «5x=15» κάτι που δείχνει ότι έχει χειριστεί τους αγνώστους.

Στην έρευνα των Wilson, Ainley και Bills (2003), δωδεκάχρονοι μαθητές κλήθηκαν ανάμεσα σε άλλα να επιλύσουν δύο εξισώσεις με τον άγνωστο να βρίσκεται μόνο στο ένα μέλος της εξίσωσης και δύο εξισώσεις με τον άγνωστο και στα δύο μέλη. Τόσο οι μαθητές ψηλής, μέτριας και όσο και οι μαθητές χαμηλής επίδοσης στα μαθηματικά, είχαν επιλύσει τις πρώτες εξισώσεις με επιτυχία τις περισσότερες φορές και χωρίς μεγάλες διαφορές μεταξύ τους. Ωστόσο, κανείς δεν είχε επιλύσει το έργο «7+4u=70-3u» με τον άγνωστο να βρίσκεται και στα δύο μέλη της εξίσωσης, ενώ μόνο ένας μαθητής από την ομάδα ψηλότερης επίδοσης είχε επιλύσει την εξίσωση «3t=t+3». Αυτό συνάδει και ενισχύει τις απόψεις άλλων ερευνητών ότι η επίλυση εξίσωσης με τον άγνωστο στο ένα μέλος και της εξίσωσης με τους αγνώστους και στα δυο μέλη, απαιτούν διαφορετικό τρόπο σκέψης ή τουλάχιστον έχουν μεγαλύτερη διαφορά στο βαθμό δυσκολίας. Στην παρούσα εργασία υιοθετείται η άποψη ότι χρειάζονται και οι δύο μορφές εξισώσεων ώστε να υπάρχει μια πιο ολοκληρωμένη εξέταση της ικανότητας των μαθητών να αντιλαμβάνονται την έννοια της μεταβλητής ως συγκεκριμένο άγνωστο αριθμό αλλά και των προσεγγίσεων που ακολουθούν ώστε να εντοπίσουν την τιμή του αγνώστου σε κάθε περίπτωση.

Η υιοθέτηση των άτυπων στρατηγικών για την επίλυση των εξισώσεων με αλγεβρικά σύμβολα κρίνεται ως αποδεκτή μέθοδος επίλυσης μιας και στις μικρότερες τάξεις (Ε', Στ', Α ' γυμνασίου), οι στρατηγικές αυτές θεωρούνται σημαντικές για την αλγεβρική σκέψη (Driscoll, 1999; Rojano, 1996; Sfard & Linchevski,1994). Η αξιοποίηση αυτών των άτυπων στρατηγικών ακόμη και από μεγαλύτερους μαθητές είναι εμφανής στη βιβλιογραφία, όχι μόνο στην επίλυση εξισώσεων με τον άγνωστο στο ένα μέλος αλλά και στην επίλυση εξισώσεων με αγνώστους και στα δύο μέλη (Herscovics & Linchevski, 1994; Linsell, 2009). Σύμφωνα με τον Rojano (1996) οι στρατηγικές όπως η δοκιμή και έλεγχος «αντιμετωπίζονται μερικές φορές ως εμπόδιο για τη μάθηση αλγεβρικών μεθόδων, όπως όμως εισηγείται η στρατηγική αυτή (μαζί με άλλες οι οποίες θεωρούνται άτυπες) και παρουσιάζονται από μαθητές κατά τα πρώτα στάδια μελέτης άλγεβρας, αποτελούν πράγματι μια βάση πάνω στην οποία κτίζονται οι μέθοδοι ή οι στρατηγικές της αλγεβρικής σκέψης» (σ. 137). Παρόμοια, ο Driscoll (1999) εισηγείται ότι τα όρια για το νόημα της αλγεβρικής σκέψης χρειάζεται να είναι πιο «ανοικτά». Υποστηρίζει ότι «η ευχέρεια με την αλγεβρική σκέψη περιλαμβάνει την ικανότητα κάποιου να σκέφτεται για τις συναρτήσεις και του πώς λειτουργούν» και να σκέφτεται για την επίδραση που έχει η δομή ενός συστήματος στους υπολογισμούς. Συγκεκριμένα, για τη δοκιμή και έλεγχο, εξηγεί ότι οι μαθητές μπορούν να μαντέψουν έναν αριθμό και να τον δοκιμάσουν ώστε να δουν τι είδους αποτέλεσμα δίνει. Μέσα από την επαναξιολόγηση και τη δοκιμή άλλων αριθμών οι μαθητές ελέγχουν αριθμητικά μια πιο γενική αλγοριθμική δήλωση την οποία θεωρούν αντιπροσωπευτική της κατάστασης του προβλήματος. Αυτού του είδους ο συλλογισμός είναι αντιπροσωπευτικός του συλλογισμού που χρησιμοποιεί κάποιος όταν κατασκευάζει κανόνες για να αναπαραστήσει συναρτήσεις (Discroll, 1999). Παρόμοια, οι Sfard και Linchevski (1994) θεωρούν τη στρατηγική της «ανάδρομης πορείας» για την επίλυση εξισώσεων σημαντική, χαρακτηρίζοντας την ως «πρώιμη» αλγεβρική σκέψη (early algebraic thinking).

Πέρα από την υιοθέτηση των άτυπων στρατηγικών, της δοκιμής και ελέγχου και της ανάδρομης πορείας, υπάρχουν στοιχεία (Blanton et al., 2011; Brizuela & Schliemann, 2004) που υποδεικνύουν ότι σε ελάχιστες περιπτώσεις οι μαθητές αξιοποιούν τις ιδιότητες της ισότητας για την επίλυση των εξισώσεων με τον άγνωστο και στα δύο μέλη της εξίσωσης. Στην έρευνα των Brizuela και Schliemann (2004) φάνηκε ότι οι μαθητές Δ΄ δημοτικού χρησιμοποίησαν κυρίως άτυπες στρατηγικές για την επίλυσή εξισώσεων με τον άγνωστο και στα δύο μέλη της εξίσωσης, ενώ μόνο λίγοι μαθητές πρότειναν διαγραφή των ίσων ποσοτήτων στα δύο μέλη της εξίσωσης.

Μοντελοποίηση σχέσεων μέσω της χρήσης αλγεβρικών συμβόλων

Ένα ιδιαίτερα σημαντικό στοιχείο της άλγεβρας στις μικρές τάξεις αποτελεί η μετάβαση από τη φυσική γλώσσα στο συμβολικό σύστημα αναπαράστασης (Blanton & Kaput, 2011). Ένας από τους στόχους του National Council of Teachers of Mathematics (2000), που αναφέρεται στον πυλώνα της άλγεβρας είναι η αναπαράσταση και ανάλυση μαθηματικών καταστάσεων μέσω της χρήσης αλγεβρικών συμβόλων.

Η διαφορετική έμφαση που δίνεται σε αυτό το στόχο σε διάφορες χώρες τονίζει τους διαφορετικούς τρόπους διδασκαλίας και προσεγγίσεων που εφαρμόζονται στη διδασκαλία της άλγεβρας στις μικρές τάξεις, ανά τον κόσμο. Στη σύγκριση που παραθέτουν οι Cai et al. (2005) για την έμφαση που δίνουν τα αναλυτικά προγράμματα της Κίνας, της Κορέας, των Ηνωμένων πολιτειών της Αμερικής, της Ρωσίας και της Σιγκαπούρης στο στόχο που προαναφέρθηκε, επιβεβαιώνονται οι διαφορές που υπάρχουν. Ενώ σε όλα αυτά τα αναλυτικά προγράμματα υπάρχει έμφαση στην αναπαράσταση μαθηματικών καταστάσεων μέσω της χρήσης αλγεβρικών συμβόλων, στο αναλυτικό πρόγραμμα της Αμερικής αυτό δεν ισχύει. Κάτι παρόμοιο διαφαίνεται και στην περίπτωση των σχολικών βιβλίων των μαθηματικών της Κύπρου (που ισχύουν μέχρι στιγμής στις τάξεις Ε' και Στ' δημοτικού) όπου η εισαγωγή αλγεβρικών συμβόλων και η χρήση τους για αναπαράσταση μαθηματικών σχέσεων εμφανίζεται στην Ε' τάξη του δημοτικού, όμως σε περιορισμένο βαθμό. Παρόλα αυτά, στο νέο αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών στην Κύπρο και στα νέα σχολικά εγχειρίδια τα οποία άρχισαν να εφαρμόζονται στις μικρότερες τάξεις, πραγματοποιείται εισαγωγή στη μοντελοποίηση καταστάσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων από την κλίμακα 2 (Β'-Γ' τάξεις του δημοτικού). Σύμφωνα με έρευνες η γρήγορη εισαγωγή στον αλγεβρικό συμβολισμό είναι σημαντική. Τα αποτελέσματα του Bodanskii (1991) εισηγούνται ότι οι μαθητές δέκα ετών στους οποίους είχε γίνει εισαγωγή στα αλγεβρικά προβλήματα και στο *συμβολισμό για την αναπαράσταση εξισώσεων* από την πρώτη τάξη (έξι-επτά ετών) είχαν σημαντικά καλύτερη επίδοση στην επίλυση εξισώσεων από τους μεγαλύτερους μαθητές ηλικίας 12-13 ετών στους οποίους η εισαγωγή στην άλγεβρα έγινε στην ηλικία των 11 ετών.

Αρκετές έρευνες παρέχουν στοιχεία για την επιτυχία των μικρότερων ηλικιακά μαθητών να μεταφράζουν λεκτικά προβλήματα-καταστάσεις σε αλγεβρική συμβολική αναπαράσταση (Schliemann et al., 2013). Αποτελέσματα ερευνών δείχνουν την ικανότητα των μικρών μαθητών να γενικεύουν μοτίβα που εμπλέκουν συναρτησιακές σχέσεις και να διατυπώνουν τις γενικεύσεις αυτές μέσω της χρήσης αλγεβρικών συμβόλων (π.χ. Warren, 2005; Warren & Cooper, 2008). Παρόμοια, οι Carraher et al. (2006) εντόπισαν οι μαθητές Γ' δημοτικού έχουν την ικανότητα να εμπλακούν στον αλγεβρικό συλλογισμό και να εργαστούν με πίνακες συναρτήσεων χρησιμοποιώντας αλγεβρικό συμβολισμό για να αναπαραστήσουν συναρτησιακές σχέσεις (Blanton & Kaput, 2004; Carraher, Brizuela & Schliemann, 2000; Schliemann, et al., 2001).

Εντοπίζονται επίσης, έρευνες που δείχνουν ότι πολύ μικρά παιδιά (μέχρι και τριών με πέντε ετών) έχουν την ικανότητα να επινοήσουν σύμβολα για να αναπαραστήσουν ποσότητες ή αριθμητικές πράξεις (Hughes, 1990; Steffe & Olive, 1996). Το να δίνει όμως κανείς μια ετικέτα για κάτι, αποτελεί μια φυσική δραστηριότητα στην οποία όλα τα παιδιά μπορούν να εμπλακούν από μικρή ηλικία (Hewitt, 2012). Ωστόσο, είναι δύσκολο κάποιος να ερμηνεύσει το συμβολισμό που χρησιμοποίησε κάποιος άλλος (Hewitt, 20012; Sáenz-Ludlow & Walgamuth, 1998). Για τους μαθητές που μαθαίνουν τη χρήση του τυπικού συμβολισμού, το μόνο που τους δίνεται είναι ένα σύνολο συμβόλων «κάποιου άλλου» και για αυτούς δεν είναι θέμα επιλογής, αλλά θέμα του να το αντιληφθούν ορθά ή λανθασμένα (Hewitt, 2012). Επομένως, η αναπαράσταση σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων δεν αποτελεί εύκολη δραστηριότητα (Sfard & Linchevski, 1994) λόγω του ότι οι μαθητές χρειάζεται να χρησιμοποιήσουν ένα συγκεκριμένο τρόπο συμβολισμού με βάση συγκεκριμένους κανόνες.

Η έρευνα υποδεικνύει δυσκολίες των μαθητών να μοντελοποιούν λεκτικές δηλώσεις μέσω αλγεβρικών συμβολικών εκφράσεων ή εξισώσεων (Capraro & Joffrion, 2006; MacGregor & Stacey, 1993; Van Amerom, 2002, 2003). Ο Rosnick, (1981) αναφέρει ότι η μετάφραση λεκτικών δηλώσεων που υποδηλώνουν σχέσεις σε συμβολικές εξισώσεις, προκαλεί στους μαθητές όλων των ηλικιών αρκετή σύγχυση. Όπως επισημαίνει ο Lodholz (1990) τα παιδιά ενδέχεται να μεταφράσουν λεκτικές προτάσεις σε μαθηματικές εκφράσεις, προχωρώντας απλά από τα αριστερά στα δεξιά. Το «τρία λιγότερο από ένα αριθμό» ερμηνεύεται από πολλούς μαθητές ως «3-χ» καθώς οι λέξεις «λιγότερο από» (οι οποίες σημαίνουν να αφαιρέσουμε) ακολουθούν μετά τον αριθμό τρία (Lodholz, 1990). Η διατύπωση εξισώσεων με βάση λεκτικά προβλήματα αποτελεί δύσκολη δεξιότητα και για τους μαθητές του γυμνασίου, είτε λόγω γνωστικών παρανοήσεων είτε λόγω της κατά γράμμα μετάφρασης (Capraro & Joffrion, 2006). Η τάση τους να μεταφράζουν απευθείας τις λεκτικές προτάσεις σε αλγεβρικές εκφράσεις, πιθανό να ενισχύεται λόγω της διαδικαστικής μεθόδου που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί όταν διδάσκουν το συγκεκριμένο θέμα. Οι εκπαιδευτικοί συνήθως ενθαρρύνουν τους μαθητές να ψάχνουν για λέξεις κλειδιά στα λεκτικά προβλήματα οι οποίες δηλώνουν μια συγκεκριμένη πράξη. Ωστόσο, οι Wagner και Parker (1993) αναφέρουν ότι «παρόλο που αυτό αποτελεί μια βοηθητική ευρετική επίλυσης προβλήματος, ίσως να οδηγήσει σε υπερβολική εξάρτηση στον *απευθείας τρόπο* και όχι στον *αναλυτικού τρόπο* μετάφρασης λεκτικών προβλημάτων σε εξισώσεις» (σ. 128).

Από την άλλη, σε άλλες έρευνες εντοπίζεται ότι ακόμη και στις περιπτώσεις που μια διαδικαστική μετάφραση, λέξη προς λέξη, θα έδινε ορθή απάντηση, οι μαθητές και πάλι αντιμετώπισαν δυσκολίες (Capraro & Joffrion, 2006; MacGregor & Stacey, 1993).

Όπως ανέφεραν οι MacGregor και Stacey (1993) «σε έργα τα οποία κατασκευάστηκαν ώστε η συντακτική μετάφραση να οδηγεί σε ορθή εξίσωση, οι περισσότεροι μαθητές δεν μετέφρασαν τις λέξεις σε σύμβολα διαδοχικά από τα αριστερά στα δεξιά, αλλά προσπάθησαν να εκφράσουν το νόημα και κατέληξαν σε λανθασμένες εξισώσεις» (σ. 217). Οι Radford και Puig (2007), εξέτασαν το πώς μαθητές Β' γυμνασίου αντιλαμβάνονται το νόημα των συμβόλων και των νοημάτων της άλγεβρας. Όπως αναφέρουν μια από τις δυσκολίες στη μετάφραση του λεκτικού προβλήματος σε εξίσωση, είναι ότι απαιτεί από το μαθητή να μετατρέψει τη λεκτική περιγραφή του προβλήματος σε μια πιο σύντομη μορφή. Παρόλο που η εξίσωση εξακολουθεί να αφηγείται την ιστορία, το κάνει με ένα αρκετά διαφορετικό τρόπο. Οι συγκριτικές εκφράσεις δεν έχουν μόνο μετατραπεί σε υπολογιστικές φόρμουλες, αλλά έχουν επίσης αναδιοργανωθεί σε μια *οπτική* έκφραση (Radford & Puig, 2007).

Η Van Amerom, (2002, 2003) εξέτασε την ικανότητα μαθητών δημοτικού ('Ε' και Στ' τάξεων) και γυμνασίου (Α' τάξης) να αναπαριστούν με τη χρήση αλγεβρικών συμβόλων λεκτικές δηλώσεις και προβλήματα (Van Amerom, 2002, 2003). Συγκεκριμένα, η Van Ameron (2002) εστίασε στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων και στο να εντοπίσει ποιες δυσκολίες αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά τη μετάβαση από την αριθμητική στη άλγεβρα. Όπως αναφέρει το βασικό συμπέρασμα που προέκυψε ήταν ότι οι μαθητές αναπτύσσουν αλγεβρικό συλλογισμό και αλγεβρικό συμβολισμό ως ξεχωριστές δεξιότητες. Ο συλλογισμός προέκυψε πιο γρήγορα στους περισσότερους μαθητές από ότι ο αλγεβρικός συμβολισμός. Τη σχέση «περισσότερα από» τη συμβόλισαν ως «dB = +3 dA» και όχι ως «dB = dA + 3». Τα αποτελέσματα με τους μαθητές της Α γυμνασίου ήταν σχετικά καλύτερα, ωστόσο, οι μαθητές δεν φάνηκε να είναι τόσο προετοιμασμένοι όσο αναμενόταν για τον αλγεβρικό συμβολισμό και πολλές φορές οι άγνωστοι παραλείπονταν, δηλαδή δεν εμφανίζονταν καθόλου στη διαδικασία επίλυσης. Φάνηκε ότι μόνο λίγοι μαθητές χρησιμοποιούσαν τον τυπικό συμβολισμό (Van Amerom, 2002).

Χειρισμός και πράξεις με αφηρημένα σύμβολα για την απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων

Παρόλο που είναι γενικά αποδεκτό ότι η άλγεβρα έχει να διαδραματίσει σημαντικό ρόλο στο αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών του δημοτικού, το αν οι μαθητές του δημοτικού είναι έτοιμοι αναπτυξιακά να χρησιμοποιήσουν αλγεβρική σύνταξη και να κατανοήσουν τους συντακτικούς κανόνες της άλγεβρας αποτελεί ακόμη θέμα συζητήσεων (Schliemann et al., 2013).

Τα αποτελέσματα παλιότερων ερευνών αναδεικνύουν τη δυσκολία των μαθητών να χειρίζονται αλγεβρικά σύμβολα και να απλοποιούν αλγεβρικές εκφράσεις. Για παράδειγμα, οι Δεμίρη, Μαρκέτος και Μπάρμπας (1992) διεξήγαγαν μια έρευνα με μαθητές Στ΄ δημοτικού όπου διαπίστωσαν την αδυναμία τους να χειριστούν τα αλγεβρικά σύμβολα και να εκτελούν πράξεις με αυτά. Στην αλγεβρική έκφραση «3μ+2μ» όπου απαιτείται από το μαθητή η ικανότητα να αντιμετωπίσει το αλγεβρικό σύμβολο όπως και τον αριθμό για να εκτελέσει την πράξη, μόνο το 21,6% των μαθητών έδωσαν απάντηση «5μ» (στο Λεμονίδης, 1996).

Από την άλλη, πιο πρόσφατες έρευνες παρέχουν στοιχεία ότι οι μαθητές είναι σε θέση με κατάλληλη διδασκαλία να εκτελούν πράξεις με αλγεβρικά σύμβολα ακόμη και σε σύνθετες αλγεβρικές εκφράσεις (π.χ. Carraher et al., 2001; Hewitt, 2012; Schliemann et al., 2013).Τα αποτελέσματα της έρευνας των Schliemann et al. (2013) έδειξαν ότι οι μαθητές των Γ΄- Ε΄ τάξεων του δημοτικού, μετά τη συμμετοχή τους σε ένα παρεμβατικό πρόγραμμα είχαν την ικανότητα να χρησιμοποιήσουν αλγεβρική σύνταξη για την αναπαράσταση σχέσεων (ικανότητα που έχει περιγραφεί στο προηγούμενο μέρος) αλλά έδειξαν σε κάποιο βαθμό επιτυχία και στο *χειρισμό αλγεβρικών συμβόλων* για την επίλυση εξισώσεων οι οποίες περιλάμβαναν τον άγνωστο και στα δυο μέλη. Όπως υποστηρίζουν, οι δυσκολίες των μαθητών πολύ πιθανό να σχετίζονται με το αναλυτικό πρόγραμμα της αριθμητικής με το οποίο έρχονται σε επαφή στο δημοτικό σχολείο και όχι στο ότι δεν είναι έτοιμοι αναπτυξιακά να αντιμετωπίσουν τέτοιου είδους έργα (Schliemann et. al., 2013).

Σε έρευνά τους οι Carraher et al. (2001) παρουσιάζουν παραδείγματα με μαθητές εννέα ετών οι οποίοι χρησιμοποιούν αλγεβρικό συμβολισμό για να αναπαραστήσουν ένα πρόβλημα με διάφορες σχέσεις. Οι μαθητές καλούνταν να ασχοληθούν με εκφράσεις όπως «N+3-5=N-2». Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι μαθητές όχι μόνο εκτελούσαν πράξεις και χειρίζονταν αλγεβρικά σύμβολα, αλλά έδειξαν να κατανοούν ότι το αλγεβρικό σύμβολο αναπαριστούσε όλες τις τιμές που ήταν δυνατό να πάρει η μεταβλητή (Carraher et al., 2001). Ωστόσο, το κατά πόσο οι μαθητές στην έρευνα των Carraher et al. (2001) έκαναν πράξεις και χειρίζονταν τους αγνώστους αποτέλεσε θέμα συζήτησης και διαφωνίας (Tall, 2001). Όπως αναφέρει ο Tall (2001), όλες οι εκφράσεις στο άρθρο των Carraher et al. (2001) αποτελούνται από έναν άγνωστο N τον οποίο ακολουθεί ένας αριθμός πράξεων, με αποτέλεσμα το πλαίσιο να επιτρέπει στα παιδιά να εργάζονται στην ουσία με έναν αριθμητικό τρόπο. Εστιάζει ωστόσο, σε ακόμη ένα σημείο του άρθρου των Carraher et al.

(2001) όπου ένας μαθητής για να δείξει ότι η έκφραση «N-2+2» ισούται με «N» χρησιμοποίησε ένα παράδειγμα δίνοντας τιμή στο «N» (συγκεκριμένα N=150). Όπως σχολιάζει αυτό αποτελεί ένα ενδιάμεσο στάδιο το οποίο οι Thomas και Tall (2001) ονομάζουν υπολογιστική άλγεβρα (evaluation algebra) όπου οι εκφράσεις χρησιμοποιούνται για να αναπαραστήσουν μια γενική αριθμητική πράξη. Αυτό αποτελεί ένα προηγούμενο στάδιο από την εμφάνιση του χειρισμού αλγεβρικών συμβόλων όπου τα σύμβολα αποτελούν οντότητες. Στην υπολογιστική άλγεβρα (evalutation algebra) οι συμβολικές εκφράσεις αντιμετωπίζονται ως διαδικασίες για υπολογισμό, ενώ η άλγεβρα χειρισμού συμβόλων τις αντιμετωπίζει ως διαδικασιοέννοιες οι οποίες αναπαριστούν είτε διαδικασίες είτε έννοιες οι οποίες μπορούν να τύχουν χειρισμού (Thomas & Tall, 2001).

Η σκόπιμη αντικατάσταση τιμών (και η ορθή αξιοποίησή της με μετάβαση από το αλγεβρικό πλαίσιο στο αριθμητικό και μετά ξανά πίσω στο αλγεβρικό πλαίσιο) για την εύρεση της απάντησης σε αλγεβρικές εκφράσεις τις οποίες οι μαθητές συναντούν για πρώτη φορά, αντιμετωπίζεται ως αποδεκτή από άλλους ερευνητές (Bazzini, Boero, & Garuti, 2001; Bills et al., 2003). Οι Bills et al. (2003) στην έρευνα τους εξέτασαν την ικανότητα μαθητών 12 ετών να χειρίζονται αλγεβρικές εκφράσεις. Αναφέρονται σε δύο είδη δραστηριοτήτων τα οποία αξιοποιούν την εμπειρία στην αριθμητική, την απλοποίηση εκφράσεων μέσω χειρισμού συμβόλων (η οποία τείνει να ενθαρρύνει την αντίληψη του αλγεβρικού συμβόλου ως αντικείμενο) και τον υπολογισμό των εκφράσεων μέσω της αντικατάστασης (η οποία τείνει να ενθαρρύνει την αντίληψη ότι το αλγεβρικό σύμβολο είναι δυνατό να είναι οποιοσδήποτε αριθμός). Στην έρευνα αυτή εξετάζουν τον τρόπο με τον οποίοι οι μαθητές Α' γυμνασίου αξιοποιούν την κατανόησή τους στην αριθμητική κατά την επίλυση προβλημάτων που απαιτούν χειρισμό αλγεβρικών συμβόλων. Οι συγγραφείς κάνουν την υπόθεση ότι όταν ένας μαθητής αντιλαμβάνεται τη χρησιμότητα του να αντικαταστήσει μια συγκεκριμένη τιμή σε ένα αλγεβρικό σύμβολο, τότε αυτό αποτελεί μια περίπτωση αυτού που ο Mason (1996)[1] ονομάζει «βλέποντας το συγκεκριμένο στο γενικό» και αποτελεί ένδειξη του ότι ο μαθητής βλέπει τη γενικότητα και όχι μόνο το σύμβολο. Η προσοχή τους στην έρευνα αυτή εστίασε στη διερεύνηση της ικανότητας των μαθητών να χρησιμοποιούν δύο είδη συλλογισμού: «το αλγεβρικό σύμβολο ως αντικείμενο» (letter as object) και το αλγεβρικό σύμβολο ως γενικευμένο αριθμό (Küchemann, 1981). Το πρώτο είδος χαρακτηρίζεται από υποστασιοποίηση (reification) αφού αντιμετωπίζεται ως αντικείμενο το ίδιο («το *x*») και υπάρχει αναφορά

[1] Η δεύτερη περίπτωση στην οποία αναφέρεται ο Mason (1996) είναι το «βλέποντας το γενικό στο συγκεκριμένο» το οποίο αφορά περισσότερο σε ικανότητες που περιγράφηκαν σε προηγούμενο μέρος, τη γενίκευση κανόνων και τη γενίκευση των ιδιοτήτων των αριθμών και των πράξεων.

στη μετακίνηση του αλγεβρικού συμβόλου. Το δεύτερο είδος συλλογισμού ανέμεναν να εντοπιστεί από την αναφορά *σε πράξεις* με την τιμή («διαίρεσε το 3α με το τρία») ή από την αντικατάσταση συγκεκριμένων τιμών στις αλγεβρικές εκφράσεις. Τα αποτελέσματα των συνεντεύξεων έδειξαν ότι οι μαθητές είχαν την ικανότητα να συλλογίζονται με το «αλγεβρικό σύμβολο ως αντικείμενο» όχι μόνο στα απλά ερωτήματα, αλλά και στα πιο απαιτητικά πλαίσια. Καταλήγουν επίσης στο ότι η αξιοποίηση της αντικατάστασης από τους μαθητές με το σωστό τρόπο (μετάβαση από το αλγεβρικό πλαίσιο στο αριθμητικό και επιστροφή στο αλγεβρικό πλαίσιο για τη διατύπωση της απάντησης) και άρα η ικανότητα να βλέπουν το «συγκεκριμένο στο γενικό», επιτρέπει στους μαθητές να ενεργοποιήσουν διαφορετικές αισθήσεις και να αντιμετωπίσουν έργα με τα οποία δεν είναι εξοικειωμένοι (Bazzini et al., 2001; Bills et al., 2003).

Η ικανότητα των μαθητών να χειρίζονται τα αλγεβρικά σύμβολα ακόμη και σε δύσκολες αλγεβρικές εκφράσεις και εξισώσεις, αντιμετωπίζοντας τα και ως αντικείμενα και ως διαδικασίες, παρουσιάζεται σε μια πρόσφατη έρευνα του Hewitt (2012). Στην έρευνα αυτή συμμετείχαν 21 μαθητές Ε' τάξης του δημοτικού μεικτής ικανότητας (ηλικίας εννέα με δέκα ετών) οι οποίοι δεν είχαν προηγουμένως παρακολουθήσει κάποιο μάθημα για εισαγωγή στον τυπικό αλγεβρικό συμβολισμό. Πραγματοποιήθηκαν τρία μαθήματα με τη χρήση του λογισμικού Grid Algebra όπου οι μαθητές άρχισαν να καταπιάνονται με τον τυπικό συμβολισμό και έλυναν εξισώσεις πρώτου βαθμού, με κάποιο βαθμό επιτυχίας μέχρι το τέλος των μαθημάτων. Οι μαθητές επέδειξαν ιδιαίτερη αυτοπεποίθηση κατά την ενασχόληση τους με σύνθετες αλγεβρικές εκφράσεις πρώτου βαθμού (Hewitt, 2012).

Σχέσεις Μεταξύ των Ικανοτήτων Αλγεβρικής Σκέψης

Οι έρευνες που εξετάζουν τη σχέση μεταξύ των διαφορετικών ικανοτήτων αλγεβρικής σκέψης είναι σχεδόν ανύπαρκτες, για αυτό και δεν έχουμε αρκετά στοιχεία που να μας ενημερώνουν για τις μεταξύ τους σχέσεις. Εντοπίζονται ωστόσο, απομονωμένα σε ελάχιστες εργασίες κάποια συμπεράσματα με βάση ποιοτικές αναλύσεις τα οποία υποδεικνύουν ότι δύο συγκεκριμένες ικανότητες δεν σχετίζονται ή δεν αναπτύσσονται ταυτόχρονα. Για παράδειγμα, τα αποτελέσματα του πειράματος της Van Amerom (2003) σε μια τάξη Α' γυμνασίου έδειξαν ότι η αλγεβρική επίλυση εξισώσεων δεν σχετίζεται απαραίτητα και δεν αναπτύσσεται ταυτόχρονα με την ικανότητα αλγεβρικού συμβολισμού. Η περιγραφή της λύσης ενός μαθητή υποδεικνύει ότι ενώ εφάρμοσε επιτυχώς μια τυπική αλγεβρική στρατηγική με την διαγραφή του ενός αγνώστου μέσα από το χειρισμό των εξισώσεων, ο συμβολισμός που χρησιμοποίησε ήταν ακόμη σε πολύ αρχικά στάδια (Van Amerom, 2003).

Βασισμένοι επίσης σε ποιοτική ανάλυση, οι Wilson et al. (2003) δείχνουν ότι ενώ μερικοί μαθητές (χαμηλής, μέτριας και ψηλής επίδοσης στα μαθηματικά) δεν διέφεραν σημαντικά ως προς την ικανότητα επίλυσης εξισώσεων (με τον άγνωστο να βρίσκεται μόνο στο ένα μέλος της εξίσωσης) και την ικανότητα χειρισμού αλγεβρικών συμβόλων για απλοποίηση (π.χ. σε έργα όπως το «2α+3α»), διέφεραν σημαντικά ως προς την ικανότητά τους να μεταφράζουν λεκτικές καταστάσεις-σχέσεις σε αλγεβρικές εκφράσεις και εξισώσεις. Εισηγούνται κατά κάποιο τρόπο ότι η ικανότητα μοντελοποίησης μέσω αλγεβρικών συμβόλων δεν σχετίζεται απαραίτητα με τις άλλες δύο ικανότητες.

Η επισήμανση ότι δεν γνωρίζουμε το πώς οι ικανότητες-πτυχές της αλγεβρικής σκέψης σχετίζονται μεταξύ τους, έγινε πρόσφατα και από τον Oldenburg (2012). Όπως αναφέρει, αυτό που φαίνεται ακόμη να απουσιάζει από τη βιβλιογραφία είναι η κατανόηση του πώς οι διάφορες πτυχές/ικανότητες της αλγεβρικής σκέψης αλληλεπιδρούν και πώς σχετίζονται, όχι μόνο στη θεωρία, αλλά με *βάση τη συμπεριφορά των μαθητών*. Τα αποτελέσματα της εργασίας του Oldenburg (2012) που αφορούσαν σε μαθητές λυκείου έδειξαν ότι η ικανότητα συλλογισμού για συναρτησιακές σχέσεις δεν σχετίζεται με την ικανότητα επίλυσης εξισώσεων. Επιπρόσθετα, το μοντέλο που παρουσιάζει δείχνει ότι δεν υπάρχει *άμεση* σχέση μεταξύ της ικανότητας του ατόμου να χειρίζεται έργα που απαιτούν από το άτομο να εκτελεί πράξεις με αλγεβρικά σύμβολα με βάση συντακτικούς κανόνες με (α) την ικανότητα του ατόμου να εκφράζει γενικές δηλώσεις μέσω αλγεβρικών συμβόλων και να συλλογίζεται με αυτές και με (β) την ικανότητα συσχέτισης γενικών εκφράσεων. Όπως αναφέρει, αυτό συνάδει και με προηγούμενα αποτελέσματά του (Oldenburg, 2009) όπου εντόπισε να υπάρχει χαμηλή συσχέτιση μεταξύ των ικανοτήτων που εμπλέκουν συντακτική κατανόηση και των ικανοτήτων που απαιτούν σημασιολογική κατανόηση.

Προσπάθειες Περιγραφής της Ανάπτυξης της Αλγεβρικής Σκέψης

Στο μέρος αυτό αναλύονται οι προσπάθειες *περιγραφής* της ανάπτυξης πτυχών και εννοιών οι οποίες αφορούν γενικά στην αλγεβρική σκέψη και εμπλέκονται ταυτόχρονα σε πολλές από τις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης που παρουσιάστηκαν αναλυτικά στο προηγούμενο μέρος. Αρχικά, παρουσιάζεται η περιγραφή της ιστορικής εξέλιξης της άλγεβρας και ο παραλληλισμός της με τη γνωστική ανάπτυξη, ενώ στη συνέχεια αναλύονται οι περιγραφές της ανάπτυξης της αντίληψης της έννοιας της μεταβλητής και της αντίληψης του συμβόλου της ισότητας. Στο τέλος, παρουσιάζονται και αναλύονται οι προσπάθειες αξιοποίησης ενός μοντέλου από τη γνωστική ψυχολογία, συγκεκριμένα της ταξινομίας SOLO, για την περιγραφή του τρόπου ανάπτυξης διαφόρων ικανοτήτων αλγεβρικής σκέψης.

Ιστορική εξέλιξη της άλγεβρας και ο παραλληλισμός της με τη γνωστική ανάπτυξη

Έχοντας ως γνώμονα την ιδέα ότι σε *κάποιο βαθμό* η οντογένεση αναπαράγει τη φυλογένεση, η εξέταση του πώς εξελίχθηκε ιστορικά η άλγεβρα αναμένεται να μας διαφωτίσει για τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν και οι ίδιοι οι μαθητές κατά τη μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα (Radford & Puig, 2007; Sfard, 1995). Είναι γενικά αποδεκτή η άποψη ότι η άλγεβρα, όσον αφορά στον τρόπο αναπαράστασής της, πέρασε από τρία βασικά στάδια εξέλιξης: το ρητορικό, το συγκοπτόμενο και το συμβολικό (Katz & Barton, 2007; Λεμονίδης, 1996; Sfard, 1995; Van Amerom, 2002). Το ρητορικό στάδιο της άλγεβρας χαρακτηρίζεται από τη χρήση της φυσικής γλώσσας για την περιγραφή και επίλυση των προβλημάτων και συγκεκριμένων αριθμών για την αναπαράσταση της λύσης και την εύρεση του αγνώστου. Σύμφωνα με τη Sfard (1995) η προσοχή εστιάζει στην αριθμητική διαδικασία και σε αυτό το στάδιο δεν παρουσιάζεται χρήση συμβόλων για την αναπαράσταση του αγνώστου. Αυτό είναι και το είδος της άλγεβρας που συναντούν οι μαθητές στο σχολείο προτού γίνει η εισαγωγή στον τυπικό συμβολισμό της άλγεβρας. Φυσικά, αυτό που αναμένεται να λύσουν οι μαθητές «ρητορικά» είναι αρκετά πιο απλό και οι λέξεις με τις οποίες εκφράζουν τις λύσεις τους πολύ διαφορετικές, παρόλα αυτά, είναι βασικά ο ίδιος τύπος μαθηματικών: λεκτικός και διαδικαστικός (Sfard, 1995).

Αργότερα το στάδιο της συγκοπτόμενης άλγεβρας χαρακτηρίζεται από τη χρήση γραμμάτων για τις άγνωστες ποσότητες (Λεμονίδης, 1996; Sfard & Linchevsky, 1994). Η χρήση των γραμμάτων εισάγεται από το Διόφαντο ο οποίος λύνει εξισώσεις με ένα ή δύο αγνώστους χρησιμοποιώντας μόνο ένα σύμβολο (και ο δεύτερος άγνωστος εκφράζεται σε συνάρτηση με τον πρώτο) και γενικά το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στην ανακάλυψη των τιμών που παίρνουν τα αλγεβρικά σύμβολα και όχι στην αξιοποίηση τους για την έκφραση γενικότητας (Λεμονίδης, 1996). Αυτό ουσιαστικά που ανέπτυξε ο Διόφαντος ήταν η άλγεβρα της «συγκεκριμένης τιμής» (fixed value) και όχι η άλγεβρα που εμπλέκει τις συναρτήσεις στην οποία τα γράμματα αναπαριστούν μεταβολή παρά σταθερά μεγέθη (Sfard & Linchevski, 1994).

Στο τρίτο στάδιο, της συμβολικής άλγεβρας, όλα αλλάζουν καθώς υπάρχει ένας πλήρης συμβολισμός, όλοι οι αριθμοί, οι πράξεις, οι σχέσεις εκφράζονται μέσω ενός συνόλου αναγνωρίσιμών συμβόλων και εμφανίζονται οι χειρισμοί (πράξεις) με τα σύμβολα σύμφωνα με καθορισμένους κανόνες (Kats & Barton, 2007). Στο στάδιο αυτό εμφανίζεται η χρήση των γραμμάτων και για τις δεδομένες ποσότητες, αφού για παράδειγμα στην έκφραση «x+ψ=α» το «α» ίσως να θεωρηθεί ότι είναι μια δεδομένη ποσότητα ή ότι αναπαριστά κάποιον ή και όλους τους αριθμούς. (Λεμονίδης, 1996). Επομένως, «φαίνεται ξεκάθαρα ότι η νοητική λειτουργία που απαιτείται είναι διαφορετική από εκείνη που χρησιμοποιείται όταν ενδιαφερόμαστε να προσδιορίζουμε την αριθμητική τιμή που ικανοποιεί μια εξίσωση» (π.χ. «x+2=7», «x+ψ=7») (Λεμονίδης, 1996, σ. 62). Η χρήση των γραμμάτων ως μη καθορισμένων αριθμών (π.χ. 3(x + 5) + 1), έθεσε στους μαθηματικούς το θέμα του δυισμού διεργασίας-αντικειμένου μιας αλγεβρικής έκφρασης (Sfard, 1995). Οι υπολογισμοί σε τέτοιες εκφράσεις δεν μπορούσαν να εφαρμοστούν, επομένως για να είναι σε θέση κάποιος να κάνει κάτι στις εκφράσεις αυτές, θα έπρεπε να αναφέρεται στην έκφραση ως κάτι που αναπαριστούσε το αποτέλεσμα των υπολογισμών (Sfard & Linchevski, 1994). Όταν οι αλγεβρικές εκφράσεις έγιναν αποδεκτές ότι αναπαριστούν συγκεκριμένα αντικείμενα, πραγματοποιήθηκε αναφορά σε συγκεκριμένους τρόπους-κανόνες με τους οποίους κάποιος ήταν σε θέση να χειριστεί εξισώσεις και να τις επιλύσει (Kats & Barton, 2007). Αυτό αποτελούσε τεράστια αλλαγή σε σχέση με την υπολογιστική άλγεβρα όπου τα προβλήματα ήταν δυνατό να επιλυθούν κυρίως μέσω της αντιστροφής των υπολογιστικών διαδικασιών (Sfard & Linchevski, 1994)..

Η ιστορική ανάλυση μας επιτρέπει να δούμε την ανάπτυξη της άλγεβρας διαμέσου των αιώνων η οποία αντανακλά και τη γνωστική ανάπτυξη της αλγεβρικής ικανότητας του ατόμου (Sfard, 1995) και μας βοηθά να κατανοήσουμε τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές. Η γνωστική ανάπτυξη αντιμετωπίζεται ως ένας κύκλος διαδικαστικής-δομικής (procedural-structural) εξέλιξης με μια ιεραρχική δομή, όπου ότι γίνεται αντιληπτό διαδικαστικά (operationally) αρχικά σε ένα επίπεδο, πρέπει να γίνει αντιληπτό δομικά (structurally) σε ένα μεταγενέστερο επίπεδο. Ως εκ τούτου, σύμφωνα με τη Sfard (1995) η διαδικαστική αντίληψη προκύπτει πρώτη ενώ η δομική αντίληψη (structural conception) αναπτύσσεται αργότερα. Η διαδικαστική αντίληψη αναφέρεται σε αριθμητικές πράξεις οι οποίες εκτελούνται σε αριθμούς ώστε να προκύψει ένας αριθμός. Από την άλλη, η δομική αντίληψη αναφέρεται σε ένα διαφορετικό σύνολο πράξεων οι οποίες εκτελούνται όχι σε αριθμούς αλλά σε αλγεβρικές εκφράσεις. Για παράδειγμα, «γράψε μια εξίσωση χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές για να αναπαραστήσεις την κατάσταση». Επομένως, η γνωστική ανάπτυξη της αλγεβρικής ικανότητας επίλυσης εστιάζει σε αυτές τις δύο μεταβάσεις οι οποίες ακολουθούν ιεραρχική δομή, συγκεκριμένα από την καθαρά διαδικαστική άλγεβρα (operational algebra), στην άλγεβρα μιας δεδομένης τιμής (ενός αγνώστου) και ακολούθως στην άλγεβρα που εμπλέκει τη συνάρτηση (τη μεταβλητή) (Sfard, 1995).

Το θέμα δυισμού διεργασίας-αντικειμένου(process-object duality) που εμφανίστηκε στο συμβολικό στάδιο της άλγεβρας, αποτελεί μια σημαντική δυσκολία για τους μαθητές στη μάθηση της άλγεβρας (Dubisnky,1991; Gray & Tall, 1994; Sfard, 1991). Για παράδειγμα, το σύμβολο «+» στην άλγεβρα έχει ένα διαδικαστικό αλλά και ένα δομικό χαρακτήρα και η κατανόηση στην άλγεβρα προϋποθέτει και περιλαμβάνει και τη δομική πτυχή και τη διαδικαστική πτυχή, αλλά και την ευελιξία μετάβασης και εναλλαγής μεταξύ των δύο αυτών αντιλήψεων (Gray &Tall, 1994). Ωστόσο, για τους μαθητές κυριαρχεί αρχικά η πτυχή της διαδικασίας αφού αυτήν έχουν μάθει στο πλαίσιο της αριθμητικής και δυσκολεύονται να «υπερβούν» το επίπεδο της διαδικασίας για να ενσωματώσουν την προοπτική της διαδικασίας και του αντικειμένου (Sajka, 2003). Αρκετοί μαθητές τείνουν να θεωρούν το «+» στο «3+5» ως σύνθημα για να εκτελέσουν την πρόσθεση. Στην άλγεβρα από την άλλη το σύμβολο «+» έχει ένα πιο διφορούμενο νόημα (Gray & Tall, 1994). Ο υπολογισμός του «x+3 ή $α+β$» δεν είναι δυνατός εκτός και αν οι τιμές των μεταβλητών είναι γνωστές. Ως αποτέλεσμα το «α+β» έχει νόημα μόνο όταν ο μαθητής το αντιμετωπίσει ως αλγεβρικό αντικείμενο και αν ο μαθητής αποδεχτεί το ότι η απάντηση είναι δυνατό να είναι μια έκφραση. Για να αποδεχτούν οι μαθητές ότι η απάντηση ενδέχεται να είναι μια αλγεβρική έκφραση θα πρέπει να ξεπεράσουν αυτό που ο Collis (1974, στους Herscovics & Linchevski, 1994) ονόμασε "lack of closure". Πιο συγκεκριμένα, οι μικρότεροι ηλικιακά μαθητές λόγω της προηγούμενης εμπειρίας τους με την αριθμητική αναμένουν ότι η πρόσθεση δύο αριθμών οδηγεί σε ένα συγκεκριμένο αριθμό ως απάντηση. Παρόλα αυτά, στην άλγεβρα οι προσθέσεις «x+3 και 2x-1» δεν γίνεται να «περιοριστούν» περισσότερο και δεν υπάρχει ένας συγκεκριμένος αριθμός ως απάντηση. Οι μαθητές προσπαθούν να «περιορίσουν» αλγεβρικές εκφράσεις συνδυάζοντας όρους λανθασμένα, δίνοντας την απάντηση «4x» για το «x+4» ή την απάντηση «x» για το «2x-1» (MacGregor & Stacey, 1997).

Η ιστορική εξέλιξη της άλγεβρας που προαναφέρθηκε τονίζει το διαχωρισμό μεταξύ της αναπαράστασης του αγνώστου σε εξισώσεις και της χρήση του αλγεβρικού συμβόλου για την αναπαράσταση και έκφραση γενικών λύσεων (Sfard & Linchevski, 1994). Κατανόηση για τις διαφορετικές χρήσεις της μεταβλητής καλούνται να αναπτύξουν και οι μαθητές αφού η χρήση μεταβλητών αποτελεί μια από τις πιο σημαντικές έννοιες στην άλγεβρα και εμφανίζεται στη διδασκαλία από τις τάξεις του δημοτικού, με διαφοροποιήσεις όμως σε διάφορες χώρες ως προς τη χρονική στιγμή της εισαγωγής τους (πρώτες τάξεις του ή τελευταίες τάξεις του δημοτικού). Αρκετοί ερευνητές τόνισαν ότι οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με την έννοια της μεταβλητής οφείλονται στις διαφορετικές χρήσεις και ερμηνείες των μεταβλητών στην άλγεβρα (Kuchemann, 1978; Oldenburg, 2009; Usiskin, 1988).

Οι τρεις βασικές διαφορετικές χρήσεις της μεταβλητής είναι οι εξής: (α) ως «γενικευμένος αριθμός» (π.χ. στο α+β=β+α), (β) ως «άγνωστος» (π.χ. στο α+5=10) και (γ) «κατανόηση της μεταβλητής σε συναρτησιακές σχέσεις» (π.χ. y=x+5) (Blanton et al., 2011; Trigueros & Ursini, 2003). Για αρκετά χρόνια το επικρατέστερο μοντέλο (με ψυχολογικές διαστάσεις) ήταν αυτό του Kuchemann (1978) ο οποίος ταξινόμησε τις απαντήσεις των μαθητών σε ερωτήσεις οι οποίες ενέπλεκαν μεταβλητές σε γενικές κατηγορίες και τις σειροθέτησε με βάση τα στάδια του Piaget. Οι ιεραρχικές κατηγορίες περιέγραφαν το χειρισμό αλγεβρικών συμβόλων από τους μαθητές, ενσωματώνοντας μια δομική ιεραρχία. Για παράδειγμα, η κατηγορία «αλγεβρικό σύμβολο που χρησιμοποιείται ως συγκεκριμένος άγνωστος» περιγράφεται να είναι κατώτερου επιπέδου από την κατηγορία «αλγεβρικό σύμβολο ως γενικευμένος αριθμός» (όπου το αλγεβρικό σύμβολο εμπλέκει την ερμηνεία ότι παίρνει διάφορες τιμές). Στην έρευνά του για τις ερμηνείες της μεταβλητής από τους μαθητές, ο Kuchemann (1978, 1981) εντόπισε τα εξής έξι διαφορετικά στάδια:

(α) Απόδοση τιμής στο αλγεβρικό σύμβολο: Οι μαθητές δίνουν αριθμητικές τιμές στα γράμματα από την αρχή. Όταν κληθούν να περιγράψουν την έκφραση «2+3x» συνήθως δίνουν μια τιμή για το «x» και υπολογίζουν την απάντηση. Άλλοι ερευνητές (π.χ. MacGregor & Stacey, 1997) εντόπισαν ότι οι μαθητές αποδίδουν αριθμητικές τιμές στα γράμματα σύμφωνα με τη διάταξη τους στο αλφάβητο (π.χ το α=1, το γ=3).

(β) Το αλγεβρικό σύμβολο δεν χρησιμοποιείται: Οι μαθητές αγνοούν τα αλγεβρικά σύμβολα ή στην καλύτερη περίπτωση αναγνωρίζουν την ύπαρξή τους αλλά δεν αποδίδουν κάποιο νόημα σε αυτά. Για παράδειγμα η αλγεβρική έκφραση «2x +8y+3x» θεωρείται ότι ισούται με το «13xy».

(γ) Τα αλγεβρικά σύμβολα ως αντικείμενα: Οι μαθητές θεωρούν το αλγεβρικό σύμβολο ως συντομογραφία για ένα αντικείμενο ή ότι το ίδιο το αλγεβρικό σύμβολο είναι ένα αντικείμενο. Για παράδειγμα, το «2α+ 3π» αναπαριστά την πρόσθεση δύο αχλαδιών και τριών πορτοκαλιών ('fruit salad' algebra) (Booth, 1988).

(δ) Το αλγεβρικό σύμβολο ως ένας συγκεκριμένος άγνωστος ή σταθερά: Σε αυτό το στάδιο οι μαθητές αντιλαμβάνονται το αλγεβρικό σύμβολο ως ένα συγκεκριμένο, αλλά άγνωστο αριθμό. Για παράδειγμα οι μαθητές απαντούν ότι η έκφραση «L+M+N» δεν θα μπορούσε να ισούται με την «L+P+N», καθώς το «N» δεν γίνεται να ισούται με το «P». Παρόλο που τόσο το «N» όσο και το «P» αναγνωρίζονται ως μεταβλητές, υπάρχει η αντίληψη ότι θα πρέπει πάντοτε να έχουν διαφορετικές τιμές μιας για την αναπαράστασή τους χρησιμοποιούνται διαφορετικά γράμματα του αλφαβήτου (Wagner & Parker, 1993).

(ε) Το αλγεβρικό σύμβολο ως γενικευμένος αριθμός: Εδώ οι μαθητές αντιλαμβάνονται το αλγεβρικό σύμβολο ως κάτι το οποίο αναπαριστά ή τουλάχιστον παίρνει διάφορες τιμές. Για παράδειγμα αν κληθούν να σημειώσουν όλες τις τιμές που είναι δυνατό να πάρει ο κανόνας «x+y=10», θα σημειώσουν περισσότερες από μια αριθμητικές τιμές οι οποίες θα ικανοποιούν την κατάσταση. Παρόλα αυτά, δεν φαίνεται να αντιλαμβάνονται ότι απαιτούνται όλοι οι αριθμοί που ικανοποιούν την κατάσταση

(στ) Το αλγεβρικό σύμβολο ως μεταβλητή: Σε αυτό το στάδιο, οι μαθητές αντιμετωπίζουν το αλγεβρικό σύμβολο ως κάτι που αναπαριστά ένα εύρος μη καθορισμένων τιμών συμπεριλαμβανομένων όλων των ρητών και άρρητων αριθμών. Οι μαθητές κατανοούν ότι η μεταβλητή καθορίζεται με βάση τη σχέση της με άλλους όρους της έκφρασης (στην έκφραση «x+y=10» η τιμή του «x» εξαρτάται από την τιμή του «y») και έχουν την ικανότητα να λύσουν έργα όπως, ποιο είναι μεγαλύτερο το «2ν ή το ν+2»; (Warren, 1997).

Ο Kuchemann (1981) εντόπισε ότι η πλειοψηφία των μαθητών (13-15 ετών) δεν είχαν την ικανότητα να αντιμετωπίσουν σωστά τα έργα τα οποία απαιτούσαν τη χρήση του αλγεβρικού συμβόλου ως μεταβλητή. Ο ίδιος ανέφερε ότι τα τρία πρώτα στάδια υποδεικνύουν απαντήσεις χαμηλού επιπέδου. Όπως υποστηρίζει ο Oldenburg (2009), οι τρείς πρώτες χρήσεις που περιγράφει ο Kuchemann (1981) αποτελούν παρανοήσεις των μαθητών και ως εκ τούτου, δεν πρέπει να λαμβάνονται υπόψη στις ικανότητες τις οποίες πρέπει να αναπτύξουν οι μαθητές. Ο Oldenburg (2009) τονίζει ότι είναι σημαντικό και αξίζει να ξεκαθαρίσουμε τις ικανότητες που πρέπει να αναπτύξουν οι μαθητές και το πώς αυτές συνδέονται με τους διαφορετικούς ρόλους της μεταβλητής.

Η διαφορετική αντιμετώπιση κάποιων συμβόλων στην αριθμητική και στην άλγεβρα αποτελεί αιτία δυσκολιών για τους μαθητές (Kieran, 1981; Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg, & Stephens, 2005; Linsell & Allan, 2010). Στο δημοτικό σχολείο η έμφαση που δίνεται εστιάζει στη σημασία του «=» ως «ακολουθεί το αποτέλεσμα» παρά στη σημασία της «ισοδυναμίας». Στο πεδίο της άλγεβρας όμως χρειάζεται οι μαθητές να ερμηνεύουν το σύμβολο «=» με όλες του τις σημασίες. Οι τρεις βασικές ερμηνείες του συμβόλου της ισότητας είναι οι εξής:

(α) Διαδικαστική αντίληψη - ακολουθεί το αποτέλεσμα/δίνει ένα αποτέλεσμα: σε αυτή την περίπτωση το «=» έχει μια διαδικαστική υφή και αντιμετωπίζεται ως ένδειξη του ότι πρέπει να ακολουθήσει η απάντηση (4+25=29) (Blanton et al., 2011; Kieran 1981; McNeil & Alibali 2005). Σύμφωνα με τους Rittle-Johnson, Matthews, Taylor και McEldoon (2011), στην αυστηρά διαδικαστική αντίληψη του συμβόλου οι μαθητές αναμένεται ότι επιτυγχάνουν σε εξισώσεις οι οποίες έχουν την τυπική μορφή των εξισώσεων όπου μετά το σύμβολο ίσον (=) ακολουθεί η απάντηση και αποτυγχάνουν σε εξισώσεις με διαφορετική μορφή-δομή. Παράδειγμα εξίσωσης είναι το «α+β=γ» και άρα οι πράξεις βρίσκονται αριστερά από το σύμβολο ίσον (=).

(β) Προσδιορισμός: το σύμβολο ίσον (=) έχει πολλές φορές τη σημασία του ορισμού ή του προσδιορισμού για κάτι που βρίσκεται αριστερά από αυτό. Στη συνάρτηση «f(x)=5x+2», το ίσον προσδιορίζει την αναλυτική έκφραση της συνάρτησης f(x) (Cortes, Vergnaud & Kavafian,1990 στο Λεμονίδης, 1996, σ. 64). Όπως αναφέρουν οι Rittle-Johnson et al. (2011), οι μαθητές που έχουν αυτή την αντίληψη για το σύμβολο, έχουν την ικανότητα να λύνουν εξισώσεις οι οποίες δεν έχουν την τυπική μορφή, αλλά οι οποίες όμως εξακολουθούν να συνάδουν με τη διαδικαστική αντίληψη του συμβόλου της ισότητας. Αυτές οι εξισώσεις παραμένουν συμβατές με τη διαδικαστική αντίληψη λόγω του ότι η «ανάκλασή τους» αποτελεί τις τυπικές εξισώσεις (π.χ. οι μαθητές αλλάζουν την εξίσωση από $\square$=4+5 σε 5+4=$\square$).Οι συγκεκριμένες εξισώσεις (backwords) έχουν τη μορφή «γ=α+β» και άρα οι πράξεις βρίσκονται δεξιά από το σύμβολο της ισότητας (Rittle-Johnson et al., 2011).

(γ) Συσχεσιακή αντίληψη του συμβόλου: το σύμβολο υποδηλώνει ισοδυναμία μεταξύ των εκφράσεων ή των ποσοτήτων που εμφανίζονται στην εξίσωση ή την ισότητα (π.χ. α+4=2α+2) (Blanton et al., 2011). Οι Rittle-Johnson et al. (2011), εξηγούν ότι οι μαθητές οι οποίοι αρχίζουν να αναπτύσσουν αυτή την αντίληψη εκδηλώνουν επιτυχία σε εξισώσεις όπου υπάρχουν πράξεις και στα δύο μέλη της εξίσωσης (π.χ. $4 + 5 + 8 = \square + 8$). Ωστόσο, η βασική ικανότητα των μαθητών που έχουν ήδη αναπτύξει συσχεσιακή αντίληψη του συμβόλου (και η οποία τους διαφοροποιεί) είναι η κατανόηση των συμβολικών μετασχηματισμών που μεταβάλλουν τη μορφή της έκφρασης χωρίς να μεταβάλλεται η σχέση ισότητας που συμβολίζεται με το ίσον (Rittle-Johnson et al., 2011). Για παράδειγμα, οι μαθητές με αυτή την κατανόηση γνωρίζουν ότι η εκτέλεση των ίδιων πράξεων σε κάθε μέλος της εξίσωσης διατηρεί την ισότητα των ποσοτήτων που υπάρχουν στα δύο μέλη της εξίσωσης και έτσι η εμπλοκή σε πλήρεις υπολογισμούς φαίνεται αχρείαστη. Οι συγκεκριμένοι μαθητές παρέχουν ενδείξεις για τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν ή για το συσχεσιακό συλλογισμό που εφάρμοσαν (Rittle-Johnson et al., 2011).

Στη βιβλιογραφία εντοπίζεται πληθώρα ερευνών οι οποίες δείχνουν ότι οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται στο σύμβολο ίσον ως σύμβολο της ισότητας (ένα σύμβολο το οποίο υποδηλώνει σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων), αλλά ως δήλωση του αποτελέσματος ή της απάντησης σε μια αριθμητική πράξη (π.χ. Alexandrou-Leonidou & Philippou,2007; Kieran 1981; McNeil & Alibali 2005). Η Kieran (1981) βρήκε ότι οι μαθητές 12-13 ετών περιέγραφαν το σύμβολο ίσον (=) «ως ακολουθεί το αποτέλεσμα» και έδιναν παραδείγματα για τη χρήση του τα οποία περιλάμβαναν μια πράξη στα αριστερά του συμβόλου και το αποτέλεσμα στα δεξιά (π.χ. 4+5=9). Οι Bhehr, Erlwanger& Nichols (1980) έδειξαν ότι οι μαθητές ηλικίας έξι με επτά ετών αντιλαμβάνονταν το σύμβολο της ισότητας ως το σύμβολο που υποδηλώνει να «κάνεις κάτι» ή ότι «ακολουθεί το αποτέλεσμα». Όπως φαίνεται και από πιο πρόσφατες έρευνες, αυτά τα θέματα με το σύμβολο της ισότητας εξακολουθούν να ισχύουν (Knuth et al., 2005; Linsell & Allan, 2010). Οι McNeil και Alibali (2005) εντόπισαν την ίδια αντίληψη για το σύμβολο ίσον μέσα από τους ορισμούς που έδωσαν μαθητές Γ'-Ε' τάξεων του δημοτικού.

Ωστόσο, η περιορισμένη αυτή αντίληψη του συμβόλου της ισότητας δεν εμφανίζεται μόνο με τους μικρούς μαθητές, αλλά είναι κάτι το οποίο οι μαθητές μεταφέρουν στο λύκειο ή μέχρι και στο κολλέγιο (Kieran, 1981; Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg & Stephens, 2011). Η περιορισμένη προσοχή που δίνεται σε αυτή την έννοια σε μεγαλύτερες τάξεις εξηγεί σε μεγάλο βαθμό γιατί πολλοί μαθητές συνεχίζουν να επιδεικνύουν ανεπαρκή κατανόηση του νοήματος του συμβόλου της ισότητας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (π.χ., McNeil & Alibali, 2005). Αυτό αποτελεί σημαντικό πρόβλημα αφού η αντίληψη των μαθητών γυμνασίου για το σύμβολο της ισότητας διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην επιτυχία τους στην επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων και απλών αλγεβρικών λεκτικών προβλημάτων (Knuth, Stephens, McNeil & Alibali, 2006; Knuth et al., 2011).

Περιγραφή της ανάπτυξης της αλγεβρικής σκέψης μέσω του μοντέλου SOLO

Τα τελευταία 20 περίπου χρόνια, ένα εύρος θεωριών μάθησης έχουν εμφανιστεί στις οποίες χρησιμοποιούνται συγκεκριμένοι βασικοί κύκλοι μάθησης για την περιγραφή της ανάπτυξης μαθηματικών εννοιών. Μια τέτοια θεωρία είναι αυτή της Sfard (1995) που προαναφέρθηκε. Για την περιγραφή της ανάπτυξης της αλγεβρικής σκέψης στους μικρότερους ηλικιακά μαθητές, το μοντέλο το οποίο χρησιμοποιήθηκε σε κάποιες έρευνες, αποτελεί ή ταξινομία SOLO (Structured of the observed learning outcome). Η ταξινομία αυτή προτάθηκε από τους Biggs και Collis (1982) και αποτελεί ένα μοντέλο της γνωστικής ψυχολογίας το οποίο εστιάζει περισσότερο στις εσωτερικές διαδικασίες και ενδιαφέρεται να εξετάσει πώς χειρίζονται και αντιμετωπίζουν οι μαθητές ένα πρόβλημα, παρά στο αν οι απαντήσεις είναι ορθές. Στην ταξινομία προτείνονται πέντε «είδη σκέψης» τα οποία αντιστοιχούν σε μεγάλο βαθμό με τα στάδια ανάπτυξης του Piaget, ωστόσο οι δύο θεωρίες δεν ταυτίζονται. Σε αυτό που επικεντρώνονται, ωστόσο, οι εργασίες που αξιοποιούν την ταξινομία, είναι στους κύκλους που εμφανίζονται σε καθένα από τα πέντε «είδη σκέψης».

Σε κάθε είδος σκέψης εντοπίστηκαν τα εξής διαφορετικά επίπεδα απαντήσεων μέσα από τα οποία διαμορφώθηκε ένας κύκλος επιπέδων γνωστός ως «Μονοδομικό-Πολυδομικό-Συσχετιστικό-ΜΠΣ» (Unistructural-Multistructural_Relational-UMR) (Pegg & Tall, 2010). Μια απάντηση προκαλείται και ενεργοποιείται από μια ερώτηση που περιλαμβάνει κάποια δεδομένα, ωστόσο, η ερώτηση και τα δεδομένα αποτελούν επίσης ενδείξεις για την απάντηση (Biggs & Collis, 1982). Κάθε απάντηση εντάσσεται σε έναν από τους πέντε βαθμούς/επίπεδα πολυπλοκότητας της ταξινομίας SOLO: (α) Αδόμητη (Prestructural): Η απάντηση δεν έχει καμία σχέση με την κατάσταση και τα δεδομένα του προβλήματος, (β) Μονοδομική (Unistructural): Ο μαθητής/τρια επικεντρώνει την προσοχή του στο πρόβλημα αλλά χρησιμοποιεί μόνο μια πληροφορία ή ένα μόνο σχετικό δεδομένο για την επίλυση του προβλήματος, (γ) Πολυδομική (Multistructural): Χρησιμοποιούνται περισσότερες από μια έννοιες ή αρχές σε περισσότερα από ένα ή δύο δεδομένα του θέματος, χωρίς όμως να υπάρχει καμιά συσχέτιση ή σύνδεση μεταξύ των δεδομένων αυτών, (δ) Συσχετιστικό (Relational): Μια συσχετιστική απάντηση χαρακτηρίζεται από τη σύνθεση πληροφοριών, διαδικασιών και ενδιάμεσων αποτελεσμάτων και δείχνει την πλήρη κατανόηση του μαθητή/τριας για τις μεταξύ τους σχέσεις, (ε) Εκτεταμένης αφαίρεσης (Extended abstract): Όταν η απάντηση χρησιμοποιεί τις αφηρημένες γενικές αρχές που πηγάζουν από τα δεδομένα και τις καταστάσεις της ερώτησης (Φιλίππου & Χρίστου, 2002, σ. 50).

Οι Pegg και Tall (2002, 2010) αντιπαραβάλλουν τους κύκλους UMR της ταξινομίας SOLO με άλλες θεωρίες γνωστικής ανάπτυξης πιο συγκεκριμένες στη μαθηματική παιδεία και ψυχολογία, όπως τη θεωρία APOS του Dubinsky, τη θεωρία διαδικασιο-έννοιας των Gray και Tall (1994) και τη θεωρία της Sfard (1991). Οι συγγραφείς καταλήγουν ότι αυτό που υποβόσκει όλες αυτές τις θεωρίες, είναι ότι ο κύκλος της οικοδόμησης της έννοιας είναι η μετακίνηση από τη δράση «κάνω κάτι» στην «έννοια» (Pegg & Tall, 2010).

Αξίζει να σημειωθεί ότι τα παρά την αξιοποίηση του μοντέλου SOLO από έρευνες για την περιγραφή της ανάπτυξης μαθηματικών εννοιών και την ανάδειξη της χρησιμότητάς του στη διδασκαλία και μάθηση, υπάρχει και η αντίθετη άποψη. Αυτή η αντίθετη άποψη υποστηρίζει ότι ενώ η ταξινομία SOLO είναι χρήσιμη σε άλλα πεδία, στα μαθηματικά δεν είναι δυνατό να ανιχνεύσει καμία εξέλιξη λόγω του ότι στα μαθηματικά η εξέλιξη σχετίζεται με το περιεχόμενο, την οποία η ταξινομία SOLO, λόγω της έμφασης της σε ρήματα (δείτε Πίνακα 2.1), δεν είναι δυνατό να περιγράψει (Brabrand & Dahl, 2008).

Πίνακας 2.1

Παραδείγματα των Ρημάτων Εντός του SOLO 2-5 με Βάση τον Biggs (2003, σ. 48)

Ποιοτικά		Ποσοτικά	
SOLO 2- Μονοδομικό	SOLO 3- Πολυδομικό	SOLO 4- Συσχετιστικό	SOLO 5- Εκτεταμένης αφαίρεσης
-παραφράζω -εντοπίζω -μετρώ -ονομάζω -διηγούμαι -ακολουθώ απλές οδηγίες ...	-συνδυάζω -ταξινομώ -δομώ -περιγράφω -απαριθμώ -καταγράφω -εκτελώ τον αλγόριθμο -εφαρμόζω τη μέθοδο ...	-αναλύω -συγκρίνω -αντιπαραβάλλω -ενσωματώνω -συσχετίζω -επεξηγώ τις αιτίες -εφαρμόζω τη θεωρία (στο πεδίο της) ...	-σχηματίζω θεωρία -γενικεύω -υποθέτω -προβλέπω -κρίνω -αναστοχάζομαι -μεταφέρω τη θεωρία (σε νέο πλαίσιο)...

Από την άλλη, ένας αριθμός παλιότερων αλλά *κυρίως* πρόσφατων ερευνών (Kamol & Ban Har, 2010; Lim & Wun, 2012; Pegg & Tall, 2002) αξιοποιούν την ταξινομία SOLO για να εξετάσουν την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και εισηγούνται ότι η ταξινομία αυτή αποτελεί ένα καλό πλαίσιο για την περιγραφή της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών. Σύμφωνα με τους Lim & Wun (2012), η βιβλιογραφία δεν παρέχει τη συνεκτική εικόνα για την αλγεβρική ικανότητα των μαθητών που χρειάζεται για τις σύγχρονες προσεγγίσεις αξιολόγησης και διδασκαλίας. Στο άρθρο τους οι Lim και Wun (2012) παρουσιάζουν ένα έργο επαναλαμβανόμενου μοτίβου το οποίο ο εκπαιδευτικός έχει τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσει για την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης αξιοποιώντας το μοντέλο SOLO. Οι ερευνητές παρουσιάζουν ένα επαναλαμβανόμενο μοτίβο με σχήματα. Ως ερώτηση μονοδιάστατου επιπέδου δίνουν το ερώτημα «Τι σχήμα θα είναι το 12ο σχήμα;», ως ερώτηση πολυδιάστατου επιπέδου «Τι σχήματα θα είναι τα σχήματα 13, 14 και 15;» και ως ερώτηση συσχετιστικού επιπέδου «Τι σχήματα θα είναι το 96 σχήμα;». Όπως αναφέρουν, αυτό το πλαίσιο επιτρέπει στους εκπαιδευτικούς να διαμορφώνουν ερωτήσεις για σχεδόν οποιοδήποτε είδος επαναλαμβανόμενου μοτίβου (Lim & Wun, 2012).

Οι Kamol και Ban Har (2010) διεξήγαγαν έρευνα με 128 μαθητές Δ'-Στ' τάξεων του δημοτικού για να αναπτύξουν ένα πλαίσιο για την περιγραφή της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Με βάση τις απαντήσεις των μαθητών σε έργα μοτίβων και ανοικτών αριθμητικών προτάσεων, εντόπισαν τέσσερα επίπεδα αλγεβρικής σκέψης. Το πρώτο έργο περιλάμβανε ένα αναπτυσσόμενο εικονικό μοτίβο με άσπρες και μαύρες χάντρες, ενώ το δεύτερο έργο περιλάμβανε ανοικτές αριθμητικές προτάσεις (π.χ. 8 + 5 = ____ + 8). Στο πρώτο επίπεδο, οι μαθητές απέτυχαν να κατανοήσουν τα έργα ή απαντούσαν με άσχετα δεδομένα. Στο δεύτερο επίπεδο οι μαθητές κατανοούσαν τα έργα, όμως δεν ήταν σε θέση να προχωρήσουν περισσότερο. Στο τρίτο επίπεδο οι μαθητές είχαν την ικανότητα να συμπληρώσουν τα έργα, ωστόσο, δεν μπορούσαν να συνδέσουν το ένα στοιχείο του έργου με το άλλο. Στο τέταρτο επίπεδο οι μαθητές κατανοούσαν τη σχέση μεταξύ των διαφόρων στοιχείων των δεδομένων και χρησιμοποιούσαν όλες τις πτυχές των δεδομένων. Το προφίλ των επιπέδων αλγεβρικής σκέψης των μαθητών έδειξε ισχυρή συνέπεια/συνοχή μεταξύ των δύο συνιστωσών. Το 72,22% του δείγματος επέδειξε επίπεδα σκέψης στις δύο ικανότητες τα οποία συνάδουν σε μεγάλο βαθμό.

Στην εργασία τους οι Lim και Noraini Idris (2006), αξιοποιούν το μοντέλο SOLO με τα τέσσερα επίπεδα, ώστε να προτείνουν ένα πλαίσιο για την περιγραφή της αλγεβρικής ικανότητας μαθητών λυκείου. Σκοπός τους ήταν να αξιολογήσουν τα επίπεδα αλγεβρικής ικανότητας των μαθητών, χρησιμοποιώντας εξισώσεις πρώτου βαθμού σε τέσσερις περιοχές, γραμμικό μοτίβο, έννοια της συνάρτησης, αριθμητική ακολουθία και ευθέως ανάλογη σχέση. Στόχος τους ήταν επίσης, να εξετάσουν το πώς οι μαθητές λύνουν τα τέσσερα ερωτήματα που αντιστοιχούσαν σε κάθε επίπεδο του SOLO: διερεύνηση του μοτίβου, αναπαράσταση και γενίκευση του μοτίβου, εφαρμογή του κανόνα σε μια σχετική κατάσταση, παραγωγή μιας εναλλακτικής λύσης για την επίλυση μια νέας κατάστασης. Εντόπισαν έξι επίπεδα πολυπλοκότητας για την αλγεβρική ικανότητα των μαθητών: μονοδομικό, πολυδομικό, συσχετιστικό χαμηλού επιπέδου, συσχετιστικό ψηλότερου επιπέδου και εκτεταμένης αφαίρεσης. Τα ποσοτικά αποτελέσματα έδειξαν ότι η αλγεβρική ικανότητα της πλειοψηφίας των μαθητών (62%) βρισκόταν στο μονοδομικό και πολυδομικό επίπεδο. Οι περισσότεροι είχαν την ικανότητα να λύσουν αριθμητικά διάφορα προβλήματα στα οποία εμπλέκονταν συγκεκριμένες περιπτώσεις, εστίαζαν στη διαφορά μεταξύ διαδοχικών όρων για να εξηγήσουν την ακολουθία ενός μοτίβου, και αντιμετώπισαν δυσκολίες να κάνουν γενικεύσεις για το πρόβλημα χρησιμοποιώντας εξισώσεις πρώτου βαθμού. Μέσα από τις συνεντεύξεις, οι ερευνητές εντόπισαν ότι οι μαθητές ψηλής επίδοσης ήταν σε θέση να συντονίσουν όλες τις πληροφορίες που δίνονταν και να γενικεύσουν το μοτίβο διαμορφώνοντας μια αλγεβρική έκφραση και εξίσωση πρώτου βαθμού. Οι μαθητές χαμηλής επίδοσης απέτυχαν να συσχετίσουν τα χαρακτηριστικά του γραμμικού μοτίβου που δίνονταν στην ερώτηση λόγω έλλειψης κατανόησης των αλγεβρικών εννοιών, κυρίως του αγνώστου και της εξίσωσης πρώτου βαθμού. Οι συγγραφείς τονίζουν ότι χρειάζονται περισσότερες έρευνες οι οποίες θα διερευνήσουν κατά πόσο το πλαίσιο είναι κατάλληλο για τους μαθητές άλλων τάξεων, ώστε να εντοπιστεί ο βαθμός στον οποίο είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί για να ενημερώσει τη διδασκαλία και την αξιολόγηση (Lim & Noraini Idris, 2006).

Ο Αναλογικός Συλλογισμός και η Σχέση του με την Αλγεβρική Σκέψη και τον Μαθηματικό Συλλογισμό

Προσπάθεια ορισμού του αναλογικού συλλογισμού

Παρόλο που δεν υπάρχει πλήρης συμφωνία για το τι είναι η αναλογία, σύμφωνα με την English (2004) η αναλογία αποτελεί γενικά την ικανότητα συλλογισμού με συσχεσιακά μοτίβα. Ο συλλογισμός με αναλογίες φαίνεται να είναι ένας από τους πιο σημαντικούς μηχανισμούς που διέπουν την ανθρώπινη νόηση, είναι απαραίτητος για την πλήρη γνωστική ανάπτυξη και είναι άμεσα συνυφασμένος με τον επαγωγικό συλλογισμό (Novick & Holyoak, 1991), τη διαδικασία που οδηγεί σε εξαγωγή συμπερασμάτων από ειδικές περιπτώσεις. Ο αναλογικός συλλογισμός αναφέρεται στην ικανότητα του ατόμου να αντιλαμβάνεται και να οικοδομεί την αντίστοιχη δομική ομοιότητα (ή αλλιώς συσχεσιακή ομοιότητα) σε αντικείμενα των οποίων τα επιφανειακά χαρακτηριστικά δεν είναι απαραίτητα ίδια (Richland, Holyoak, & Stigler, 2004, p. 37).

Σύμφωνα με τη Vosniadou (1989) ο αναλογικός συλλογισμός ορίζεται ως η μεταφορά δομικών πληροφοριών από ένα σύστημα (πηγή) σε ένα άλλο σύστημα (στόχος) με αποτέλεσμα οι σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των αντικειμένων της πηγής να υπάρχουν και μεταξύ των αντικειμένων του στόχου. Αυτή η μεταφορά της γνώσης επιτυγχάνεται μέσω διαδικασιών αντιστοίχισης, οι οποίες συνεπάγονται τον εντοπισμό συσχεσιακών αντιστοιχιών (relational correspondences) μεταξύ των δύο συστημάτων. Συνήθως, η πηγή είναι το μέρος το οποίο είναι ήδη γνωστό, ενώ ο στόχος είναι αυτό που πρέπει να «ανακαλυφθεί». Με απλά λόγια, ο αναλογικός συλλογισμός απαιτεί την κατανόηση μιας νέας κατάστασης μέσα από την αναλογία με κάτι που είναι ήδη γνωστό. Η αναλογία αξιοποιεί πληροφορίες οι οποίες είναι αποθηκευμένες στη μνήμη (Halford, 1992). Παρόλα αυτά, όπως αναφέρει ο Halford (1992) οι αναλογίες προχωρούν πέρα από τις πληροφορίες που ανακαλούνται επειδή η αλληλεπίδραση της πηγής και του στόχου παράγει μια νέα δομή η οποία επεκτείνεται πέρα από την προηγούμενη εμπειρία (English, 1993). Η απόκτηση αυτής της νέας δομής είναι σύμφωνη με τις οικοδομιστικές αντιλήψεις για τη μάθηση των παιδιών, όπου η μάθηση αποτελεί μια ενεργό διαδικασία οικοδόμησης η οποία είναι δυνατή μόνο στη βάση της προηγούμενης γνώσης (Duit, 1991). Με άλλα λόγια, η μάθηση αφορά ουσιαστικά στην οικοδόμηση ομοιοτήτων μεταξύ της νέας και της προϋπάρχουσας ιδέας.

Ο συλλογισμός με αναλογίες στην επίλυση προβλήματος και στη μεταφορά, απέσπασε το ενδιαφέρον των ερευνητών κυρίως στο πεδίο των φυσικών επιστημών (Clement, 1993), στη γνωστική ψυχολογία και γνωστική ανάπτυξη (π.χ. Holyoak & Thagard, 1995). Ωστόσο, σύμφωνα με τους Hatano και Sakakibara (2004) τα εμπειρικά δεδομένα σχετικά με τον αναλογικό συλλογισμό των μαθητών και της μάθηση των μαθηματικών είναι ελάχιστα (π.χ. English & Warren, 1994; Modestou & Gagatsis, 2010). Η έρευνα στον αναλογικό συλλογισμό στην επίλυση προβλήματος είναι περιορισμένη και αφορούσε κυρίως σε μαθητές λυκείου και φοιτητές (Novick & Holyoak, 1991; Reed, 1987). Σύμφωνα με την English (2004) αυτό προκαλεί έκπληξη αν αναλογιστούμε ότι ο Polya (1957) τόνισε το σημαντικό ρόλο της αναλογίας στην επίλυση προβλήματος 40 χρόνια πριν. Οι προτάσεις του είχαν τεράστια επίδραση στην αναμόρφωση της επίλυσης προβλήματος στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, όπου μέρος της εμπλέκει την εφαρμογή στρατηγικών επίλυσης προβλήματος όπως «σκέψου ένα παρόμοιο/σχετικό πρόβλημα», «χρησιμοποίησε ένα πιο απλοποιημένο πρόβλημα», «Ψάξε για μοτίβο» (English, 1998).

Η English (2004) τονίζει ότι μόνο τα τελευταία χρόνια παρουσιάζονται μελέτες για την ικανότητα των μικρών παιδιών να συλλογίζονται με αναλογίες, λόγω της άποψης που επικρατούσε για χρόνια ότι αυτού του είδους ο συλλογισμός αναπτύσσεται αργότερα (π.χ. Inhelder & Piaget, 1958). Σύμφωνα με τον Piaget το παιδί δεν είναι ικανό να συλλογίζεται αναλογικά όταν είναι μικρότερο από 11 ή 12 ετών, γιατί δεν είναι σε θέση να εντοπίσει δευτέρου επιπέδου σχέσεις μεταξύ των όρων μιας αναλογίας (Alexander & Buehl, 2004; Goswami, 1992). Ωστόσο, οι προηγούμενες έρευνες οι οποίες υποστήριζαν τη δυσκολία των μικρότερων μαθητών να σκεφτούν αναλογικά, δεν είχαν εξετάσει κατά πόσο τα παιδιά είχαν την απαιτούμενη γνωστική βάση για να λύσουν τα έργα. Δηλαδή τα έργα τα ίδια ήταν αρκετά δύσκολα για τη συγκεκριμένη ηλικιακή ομάδα (π.χ. πού σύνθετες αριθμητικές αναλογίες) και άρα δεν αποτελούσαν ουσιαστικά αξιόπιστο εργαλείο για να εξετάσουν τον αναλογικό συλλογισμό. Πλέον υπάρχουν στοιχεία που υποδεικνύουν ότι υπό κατάλληλες συνθήκες, ακόμη και τα μικρά παιδιά χρησιμοποιούν αναλογικό συλλογισμό (π.χ., Alexander,White & Daugherty, 1997; Chen, 1996; Goswami, 1992; Holyoak & Thagard, 1995).

Έργα αναλογικού συλλογισμού

Με βάση τις έρευνες που πραγματοποιήθηκαν για τον αναλογικό συλλογισμό στη μαθηματική εκπαίδευση, φαίνεται να υπάρχουν τρεις τύποι αναλογιών οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν: οι κλασσικές αναλογίες, οι αναλογίες προβλήματα και αναλογίες που εμπλέκουν αναπαράσταση αφηρημένων εννοιών (English, 2004). Ο πρώτος τύπος είναι οι κλασσικές αναλογίες οι οποίες αναφέρονται στο συλλογισμό για έργα τύπου Α:Β::Γ:Δ, όπου οι όροι Γ και Δ θα πρέπει να σχετίζονται μεταξύ τους με τον ίδιο τρόπο που σχετίζονται οι όροι Α και Β (English, 2004; Goswami, 1992). Οι κλασσικές αυτές αναλογίες αποτελούν τον παραδοσιακό τρόπο μέτρησης του αναλογικού συλλογισμού και περιλαμβάνονται και σε IQ tests μιας χρησιμοποιήθηκαν από ψυχολόγους για την μέτρηση της ευφυΐας. Οι όροι των αναλογιών αυτών πιθανό να είναι λέξεις (π.χ. ψωμί:μαχαίρι::χαρτί:__), αριθμοί (π.χ. 4:5::14:__) ή εικόνες (π.χ. ) και έτσι αναφερόμαστε σε λεκτικές, αριθμητικές και γραφικές (εικονικές) αναλογίες (Goswami, 1992). Οι μαθητές είναι δυνατό να επωφεληθούν από την επίλυση τέτοιων έργων αφού ένας αριθμός μαθηματικών ιδεών μαθαίνονται ή αιτιολογούνται διαισθητικά μέσω των αναλογιών (Hatano & Sakakibara, 2004). Το βασικό στοιχείο στην επίλυση των συγκεκριμένων έργων είναι η εστίαση στη δομική ομοιότητα μεταξύ των όρων και όχι στις αντιληπτικές ομοιότητες. Αξίζει να σημειωθεί ότι γίνεται αναφορά σε δύο επίπεδα σχέσεων σε αυτές τις αναλογίες. Οι σχέσεις πρώτου επιπέδου είναι πιο απλές και αφορούν στις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των κοντινών όρων Α:Β και Γ:Δ (Goswami, 1992). Από την άλλη, οι σχέσεις δευτέρου επιπέδου σχετίζονται με τον καθορισμό κάποιου είδους δομικής ομοιότητας μεταξύ των πιο απομακρυσμένων όρων και οι οποίες συνδέουν με κάποιο τρόπο τις πρώτου επιπέδου σχέσεις, δηλαδή την Α:Β με την Γ:Δ (Goswami, 1992). Γνωστό τεστ για τη μέτρηση του αναλογικού συλλογισμού με βάση τις κλασσικές αναλογίες που προαναφέρθηκαν είναι το Miller Analogies Test (MAT) (Meagher, 2008).

Μια άλλη κατηγορία κλασσικών αναλογιών είναι αυτή στην οποία εμπλέκονται αντιληπτικά μοτίβα (perceptual patterms) και όχι εννοιολογικά μοτίβα (όπως στις λεκτικές αναλογίες) και αυτές περιλαμβάνουν σχήματα. Για τις πολύ μικρές ηλικίες (νηπιαγωγείο) αυτού του είδους οι αναλογίες περιλαμβάνονται στο τεστ αναλογικού συλλογισμού για παιδιά (Test of Analogical Reasoning in Children or TARC) (Alexander, Willson, White & Fuqua, 1987). Το τεστ περιλαμβάνει 16 προβλήματα της μορφής Α:Β::Γ: ; , όπου οι όροι αντιστοιχούν σε πλαστικά σχήματα ιδιοτήτων και τα προβλήματα σειροθετούνται με τρόπο που να αυξάνεται ο βαθμός δυσκολίας. Αυτή η σειρά επιτυγχάνεται μέσα από τη συστηματική αλλαγή των σχέσεων μεταξύ του Α και του Β ως προς τις διαστάσεις του χρώματος, σχήματος και μεγέθους (Alexander & Buehl, 2004). Σε μεγαλύτερες ηλικίες οι όροι της αναλογίας αποτελούν γεωμετρικά σύνολα-μοτίβα όπου και πάλι η δυσκολία σχετίζεται με τον αριθμό των ιδιοτήτων που αλλάζουν, αλλά και την αύξηση των επιλογών-απαντήσεων (Alexander & Buehl, 2004). Άλλα γνωστά τεστ τα οποία χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση του αναλογικού συλλογισμού και εμπλέκουν αναλογίες με σχήματα, στα οποία οι μαθητές καλούνται να εντοπίσουν συσχεσιακά μοτίβα και να εστιάσουν σε εντοπισμό οπτικο-χωρικών σχέσεων είναι το Raven's Progressive Matrices Test (RPM) (Raven, 1938) ή το Figural Analogy Test (TAO) (Orzechowski & Chuderski, unpublished). Το Figural Analogy Test (TAO) διατηρεί ακριβώς τη μορφή των κλασσικών αναλογιών Α:Β::Γ:Δ σε αντίθεση με το Raven's Test στο οποίο η δομή των έργων δεν έχει ακριβώς αυτή τη μορφή. Τα συγκεκριμένα τεστ απαιτούν τον εντοπισμό/διαμόρφωση σχέσεων υψηλότερου επιπέδου (higher order relations) μεταξύ των οντοτήτων που δίνονται. Όπως υποστηρίζεται από διάφορους ερευνητές όλα τα τεστ που προαναφέρθηκαν αποτελούν αξιόπιστες μετρήσεις του αναλογικού συλλογισμού (Alexander et al., 1987; Chuderski & Chuderska, 2009) και χρησιμοποιούνται για να μετρήσουν την ικανότητα των ατόμων να εντοπίζουν συσχεσιακά μοτίβα (Goswami, 2004).

Δεύτερο είδος έργων του αναλογικού συλλογισμού το οποίο χρησιμοποιήθηκε στα μαθηματικά, πέρα από τις κλασσικές αναλογίες, αποτελούν έργα στα οποία ο μαθητής καλείται συλλογιστεί μέσα από αναλογίες για την επίλυση προβλημάτων. Τα έργα αυτά αφορούν στον αναλογικό συλλογισμό σε έργα επίλυσης προβλήματος όπου απαιτείται αναγνώριση της ομοιότητας μεταξύ ενός ήδη γνωστού προβλήματος και ενός νέου προβλήματος. (English, 2004). Σε αυτού του είδους τα λεκτικά προβλήματα η ανάγκη να εφαρμόσει κάποιος αναλογικό συλλογισμό υπονοείται, ενώ στις κλασσικές αναλογίες απαιτείται και είναι ξεκάθαρη μιας και εμπλέκεται και απαιτείται από τη δομή του έργου.

Τα λεκτικά προβλήματα τα οποία εμπλέκουν συγκεκριμένο περιεχόμενο, όπως συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες, δεν χρησιμοποιήθηκαν αρκετά σε έρευνες αναλογικού συλλογισμού με παιδιά (English, 1997, 1998). Παρόλα αυτά, η επίλυση τέτοιου είδους προβλημάτων συνεισφέρει στην εννοιολογική ανάπτυξη κατά την επίλυση μαθηματικού προβλήματος και μας ενημερώνει για την κατανόηση του περιεχομένου από μέρους των μαθητών (English,1997; Holyoak & Thagard, 1995). Στην έρευνα της English (1997) με 75 μαθητές ΣΤ' δημοτικού (11 ετών), παρουσιάστηκαν στους μαθητές σύνολα προβλημάτων τα οποία αποτελούσαν την πηγή και στα οποία εμπλέκονταν η σύγκριση πολλαπλασιασμού διαίρεσης, συνδυαστικός συλλογισμός και διαίρεση. Τα προβλήματα που αποτελούσαν την πηγή σχεδιάστηκαν ώστε τα προβλήματα με ίδια μαθηματική δομή να έχουν διαφορετικό πλαίσιο-ιστορία, ενώ αυτά με διαφορετική μαθηματική δομή να έχουν ίδιο πλαίσιο-ιστορία. Εντοπίστηκε ότι οι αναπαραστάσεις των μαθητών για τα προβλήματα στερούνταν των κατάλληλων συσχεσιακών δομών που χρειάζονταν για το συλλογισμό με αναλογίες και τα παιδιά εστίαζαν σε κοινά επιφανειακά χαρακτηριστικά των προβλημάτων. Όπως επισημαίνεται στη βιβλιογραφία, αυτό που είναι κάπως παράδοξο, είναι το γεγονός ότι αρκετές έρευνες έχουν δείξει ότι τα υποκείμενα σε πειραματικές καταστάσεις εστιάζουν σε επιφανειακά χαρακτηριστικά όταν επιχειρούν να χρησιμοποιήσουν αναλογικό συλλογισμό, ενώ τα άτομα που βρίσκονται σε μη-πειραματικά πλαίσια συνήθως χρησιμοποιούν πιο δομικά χαρακτηριστικά όταν συλλογίζονται αναλογικά (English, 2004).

Η τρίτη κατηγορία έργων είναι αναλογίες οι οποίες σχεδιάζονται για να παρέχουν μια συγκεκριμένη (concrete) αναπαράσταση των αφηρημένων ιδεών (English, 2004, σσ. 4-8). Ένα εμφανές παράδειγμα βασίζεται στο συλλογισμό που χρειάζεται για την ερμηνεία των εποπτικών υλικών και των εικονικών αναπαραστάσεων (English & Halford, 1995). Το εποπτικό υλικό-αναπαράσταση αποτελεί την πηγή και η έννοια που θα πρέπει να μάθουν οι μαθητές αποτελεί το στόχο. Η σημασία αυτών των αναλογιών είναι το ότι «αντικατοπτρίζουν» τη δομή της έννοιας και έτσι επιτρέπουν στο μαθητή να χρησιμοποιήσει τη δομή της αναπαράστασης για να οικοδομήσει ένα νοητικό μοντέλο για την έννοια.

Παρά τις εμφανείς διαφορές τους, οι κλασσικές αναλογίες, τα λεκτικά προβλήματα που απαιτούν αναλογικό συλλογισμό για την επίλυσή τους και οι αναλογίες για την αναπαράσταση αφηρημένων μαθηματικών εννοιών, έχουν μια βασική ομοιότητα. Όλα απαιτούν από το άτομο να αναγνωρίσει και να κατανοήσει τη συσχεσιακή ή δομική ομοιότητα και να κάνει τις απαραίτητες συσχεσιακές αντιστοιχίσεις μεταξύ των ανάλογων περιπτώσεων (Enlgish, 2004). Ωστόσο, τα παιδιά φαίνεται να έχουν χαμηλότερη επίδοση σε μελέτες με κλασσικές αναλογίες από ότι σε μελέτες με προβλήματα που απαιτούν αναλογικό συλλογισμό για την επίλυση (Goswami & Brown, 1989). Σύμφωνα με τους Goswami & Brown (1989), αυτό πιθανό να οφείλεται στο ότι οι κλασσικές αναλογίες εμπλέκουν δυσκολότερες σχέσεις από ότι τα έργα με προβλήματα και στερούνται ενός πλαισίου, το οποίο υπάρχει στα λεκτικά προβλήματα.

Ανάπτυξη του αναλογικού συλλογισμού

Μια νέα πρόταση έργων μέτρησης και αξιοποίησης του αναλογικού συλλογισμού στη διδασκαλία των μαθηματικών, προτείνεται σε μια πρόσφατη έρευνα των Lee και Sriraman (2011), στην οποία οι κλασσικές αναλογίες λαμβάνουν πλέον μαθηματικό περιεχόμενο. Ουσιαστικά θα ήταν δυνατό να ειπωθεί ότι τα έργα που προτείνονται στη συγκεκριμένη έρευνα αποτελούν ένα είδος συγχώνευσης των «κλασσικών αναλογιών», «των προβλημάτων που απαιτούν αναλογικό συλλογισμό σε σχέση με ένα γνωστό πρόβλημα για την επίλυσή τους», αλλά και του παιδαγωγικού στοιχείου της τρίτης ομάδας έργων που προαναφέρθηκε μιας και προτείνονται για τη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών. Όπως αναφέρουν οι Lee και Sriraman (2011), η οικοδόμηση ή η ανάπτυξη της γνώσης στη μαθηματική εκπαίδευση έχει περιγραφεί ως επαναλαμβανόμενη αφαίρεση (Boero, Dreyfus, Gravemeijer, Gray, Hershkowitz, Schwarz, Sierpinska & Tall, 2002). Ο αναλογικός συλλογισμός διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στη διαδικασία της αφαίρεσης μέσα από τη διερεύνηση ομοιοτήτων και απαιτητικών δομών (Lee & Sriraman, 2011). Παρόλα αυτά, υπάρχει μια αυξανόμενη ανησυχία ότι παρά την καθημερινή χρήση, οι μαθητές δεν έχουν την ικανότητα να μεταφέρουν τον αναλογικό συλλογισμό σε μαθησιακές καταστάσεις (Leech, Mareschal, & Cooper, 2008; Lobato, Ellis & Muñoz, 2003). Ως εκ τούτου, η μαθηματική εκπαίδευση πιθανό να επωφεληθεί εξαιρετικά από μελέτες για τη *χρήση του αναλογικού συλλογισμού ως ένα διδακτικό μέσο* στις τάξεις των μαθηματικών (Lee & Shriraman, 2011). Έτσι οι Lee και Sriraman (2011), εισηγούνται μια πιο δυναμική εκδοχή των κλασσικών αναλογιών η οποία παρέχει στους μαθητές την ευκαιρία να επιλέξουν το αντικείμενο-πηγή και την ιδιότητά του. Συγκεκριμένα, καταπιάστηκαν με την έννοια του τριγώνου και εξέτασαν και ανέλυσαν πώς οι ανοικτές κλασσικές αναλογίες (OCA) βοήθησαν τους μαθητές να αποκτήσουν επίγνωση των κρυμμένων συσχεσιακών ομοιοτήτων και να τις χρησιμοποιήσουν (χωρίς να λαμβάνουν υπόψη τους άλλες ομοιότητες) ώστε να διατυπώσουν υποθέσεις. Σχεδίασαν τρεις τύπους προβλημάτων OCA ανάλογα με το ποιοι όροι δίνονταν ήδη από τον εκπαιδευτικό (Β, Γ και Δ) και ποιοί ήταν ανοικτοί για το μαθητή.

Οι ίδιοι υπέθεσαν ότι υπάρχουν τρία διαφορετικά επίπεδα επίλυσης προβλήματος των συγκεκριμένων έργων (OCA). Οι μαθητές στο πρώτο επίπεδο πιθανόν να εστιάζουν μόνο στην «επιφανειακή ομοιότητα» των αντικειμένων (Gentner & Rattermann, 1991) και να τη χρησιμοποιούν ως την ιδέα για την ομοιότητα στα προβλήματα OCA. Το δεύτερο επίπεδο επίλυσης προβλήματος (OCA) εμπλέκει την αναγνώριση ή τη δημιουργία της έννοιας την οποία ονομάζουν «μεταβατική ομοιότητα», η οποία είναι συσχεσιακή όμως δεν συνδέεται με το πλαίσιο της αιτιολόγησης. Το ψηλότερο επίπεδο επίλυσης προβλήματος (OCA) αφορά στη «συσχεσιακή ομοιότητα» όπου ο μαθητής έχει την ικανότητα να οικοδομήσει νέες έννοιες ή νέες ιδιότητες του αντικειμένου-στόχος ως υποθέσεις οι οποίες πρέπει να επιβεβαιωθούν. Η ανάλυσή τους για τις διαδικασίες εντοπισμού σχέσεων και διατύπωσης υποθέσεων σε διάφορες δραστηριότητες, υποστηρίζει τη σημαντικότητα της χρήσης των κλασσικών αναλογιών με αυτή τη νέα εκδοχή τους στις τάξεις των μαθηματικών (Lee & Sriraman, 2011).

Τα τρία επίπεδα που περιγράφουν οι Lee και Sriraman (2011) από την επιφανειακή ομοιότητα στη συσχεσιακή ομοιότητα, συνάδουν με αποτελέσματα άλλων ερευνών. Αρκετές έρευνες έδειξαν ότι τα άτομα που αντιμετωπίζουν για πρώτη φορά έργα αναλογικού συλλογισμού τα οποία εμπλέκουν σχέσεις ψηλότερου επιπέδου (σχέσεις δευτέρου επιπέδου), είτε είναι παιδιά είτε ενήλικες, αντιμετωπίζουν δυσκολία να εντοπίσουν δομικές ομοιότητες μεταξύ των προβλημάτων τα οποία έχουν διαφορετικό πλαίσιο (English, 2004). Στην προσπάθειά τους να εντοπίσουν τα σημαντικά χαρακτηριστικά μιας νέας κατάστασης, βασίζονται κυρίως στην εμφανή ομοιότητα (Vosniadou, 1989) που είναι πιο εύκολη να ανακτηθεί, ανεξάρτητα από το αν αυτή αντανακλά περιγραφικές, συσχεσιακές, αντιληπτικές ή εννοιολογικές ιδιότητες. Επομένως, τείνουν να εστιάζουν στα επιφανειακά χαρακτηριστικά όπως σε συγκεκριμένα σημεία ή αντικείμενα, παρά στην υποβόσκουσα δομή των ιδιοτήτων ή των αρχών του πλαισίου. Η ομοιότητα στην οποία εστιάζουν και εντοπίζουν οι μαθητές αλλάζει με την ανάπτυξη, μιας και ο εντοπισμός κοινών στοιχείων στα επιφανειακά χαρακτηριστικά προηγείται του εντοπισμού κοινών συσχεσιακών δομών, δηλαδή των βασικών ιδιοτήτων (Gentner, 1988). Επομένως, με την ανάπτυξη τα παιδιά θεωρείται ότι παρουσιάζουν μια αλλαγή στην ικανότητά τους να εντοπίζουν δομικές σχέσεις και άρα μεταβαίνουν από την επεξεργασία επιφανειακών ομοιοτήτων στην επεξεργασία ψηλότερου επιπέδου συσχεσιακών ομοιοτήτων (Gentner, 1988; Novick, 1992).

Αναλογικός συλλογισμός και η σχέση του με τη μαθηματική ικανότητα

Η σχέση μεταξύ του μαθηματικού και του αναλογικού συλλογισμού επισημαίνεται από διάφορους ερευνητές (Buehl & Alexander, 2004; Deal & Hardy, 2004; English, 1997, 2004; Goswami, 2004). Η English (2004) ορίζει την αναλογία ως την ικανότητα συλλογισμού για συσχεσιακά μοτίβα. Όπως αναφέρει, η αναλογία εμπλέκει τον εντοπισμό μοτίβων και την αναγνώριση της επανάληψης των μοτίβων μέσα από την παρατήρηση της μεταβολής των στοιχείων τους. Καθώς οι σύγχρονες απόψεις για το μαθηματικό συλλογισμό τονίζουν τη διαμόρφωση γενικεύσεων και την «αφαίρεση» (abstraction) των ιδεών και των σχέσεων και με δεδομένο ότι η αναγνώριση, επέκταση και γενίκευση μοτίβων είναι σημαντικά για τον αναλογικό συλλογισμό, είναι λογικό να αναμένουμε ότι ο μαθηματικός και αναλογικός συλλογισμός σχετίζονται (Goswami, 2004). Η ικανότητα του ατόμου να εντοπίζει συνδέσεις και σχέσεις μεταξύ μαθηματικών ιδεών και να τις εφαρμόζει σε νέα προβλήματα είναι βασική για το μαθηματικό συλλογισμό και αυτή η οικοδόμηση σχέσεων και αντιστοιχίσεων εμπλέκει διαδικασίες αναλογικού συλλογισμού (Goswami, 2004). Ο μαθηματικός συλλογισμός απαιτεί και στα πιο αρχικά του στάδια, οι μαθητές να αναγνωρίζουν πώς ένας όρος (αντικείμενο ή σύμβολο) αναπαριστά μια αφηρημένη έννοια ή οποία δεν είναι δυνατό να αποδοθεί απευθείας. Η οικοδόμηση των σχέσεων ή των αντιστοιχιών μεταξύ κάποιας φυσικής ή συμβολικής οντότητας και της αφηρημένης έννοιας που αναπαριστά, εμπλέκει σημαντικές διαδικασίες αναλογικού συλλογισμού (Goswami, 1992; Vosniadou, 1989). Με βάση αυτή την ανάλυση, η αναλογία θα πρέπει να είναι το επίκεντρο της μαθηματικής προόδου οποιουδήποτε είδους (Goswamy, 2004).

Στην έρευνα των Deal και Hardy (2004), η ανάπτυξη του αναλογικού συλλογισμού τριών παιδιών φάνηκε να αντανακλά την ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού τους, παρόλο που δεν είχαν παρακολουθήσει συγκεκριμένη διδασκαλία για τον αναλογικό συλλογισμό (Deal & Hardy, 2004). Παρόμοια αποτελέσματα παρατηρήθηκαν και από τους Buehl και Alexander (2004), όπου οι ικανότητες αναλογικού συλλογισμού των παιδιών φάνηκε να συνεισφέρουν στις μελλοντικές τους ικανότητες μαθηματικού συλλογισμού και αντίστροφα, οι μαθηματικές ικανότητες των παιδιών φάνηκε να επηρεάζουν το μελλοντικό αναλογικό συλλογισμό τους.

Στις έρευνες αυτές (Alexander & Buehl, 2004; Buehl & Alexander, 2004; Deal & Hardy, 2004), η μέτρηση του αναλογικού συλλογισμού πραγματοποιήθηκε μέσα από το TARC τεστ (στο οποίο απλά οι ερευνητές διαφοροποιούσαν το βαθμό δυσκολίας ανάλογα με την ηλικία) ενώ σε κάποιες περιπτώσεις η χρήση του TARC συνοδευόταν και από τη χρήση λεκτικών αναλογιών και εικονικών αναλογιών (όπου οι όροι αποτελούσαν εικόνες). Όπως όμως προτείνεται από την English (2004) και τον Goswami (2004), πιθανό οι δύο μορφές κλασσικών αναλογιών, τα αντιληπτικά μοτίβα (perceptual patterns, TARC, μοτίβα με γεωμετρικά σχήματα) και τα εννοιολογικά μοτίβα (λεκτικές αναλογίες ή αναλογίες με εικόνες αντικειμένων) να έχουν διαφορετικές συνδέσεις με το μαθηματικό συλλογισμό. Ίσως να υπάρχει ισχυρότερη σχέση μεταξύ της αναγνώρισης εννοιολογικών μοτίβων και του μαθηματικού συλλογισμού παρά μεταξύ της αναγνώρισης αντιληπτικών μοτίβων και του μαθηματικού συλλογισμού. Αυτό αποτελεί ένα σημαντικό θέμα το οποίο αξίζει περαιτέρω διερεύνησης (Goswami, 2004). Ένα άλλο ερώτημα για την ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού είναι το κατά πόσο η αναγνώριση εννοιολογικών μοτίβων και αντιληπτικών μοτίβων σχετίζονται (English 2004; Gowsami, 2004).

Συνεπώς, οι προαναφερθείσες έρευνες παρέχουν τη θεωρητική βάση η οποία υποστηρίζει την διερεύνηση της σχέσης του αναλογικού συλλογισμού με την αλγεβρική σκέψη, καθώς η αλγεβρική σκέψη αποτελεί μέρος της ευρύτερης έννοιας του μαθηματικού συλλογισμού (English, 2004). Με δεδομένο ότι οι έρευνες των Deal και Hardy (2004) και των Buehl και Alexander (2004) εντόπισαν ότι ο βασικός συνδετικός κρίκος στη σχέση μεταξύ του αναλογικού συλλογισμού και μαθηματικού συλλογισμού, ήταν ο εντοπισμός μαθηματικών μοτίβων, ενισχύεται η ιδέα του ότι η επίδοση σε έργα αλγεβρικής σκέψης (κυρίως σε αυτά που εμπλέκουν εντοπισμό μοτίβων και συλλογισμό για τη δομή) θα επηρεάζεται από την ικανότητα του αναλογικού συλλογισμού. Παρόλα αυτά, οι έρευνες που ακολουθούν παρέχουν επιπρόσθετα στοιχεία που υποδεικνύουν την ανάγκη διερεύνησης της επίδρασης της ικανότητας εντοπισμού της δομής και κατ' επέκταση του αναλογικού συλλογισμού στην αλγεβρική σκέψη.

Ο αναλογικός συλλογισμός και η σχέση του με την ικανότητα αλγεβρικής σκέψης

Ελάχιστη σημασία έχει δοθεί στη διερεύνηση της σχέσης μεταξύ της ικανότητας αναλογικού συλλογισμού και της επίδοσης σε έργα αλγεβρικής σκέψης με εξαίρεση κάποιες έρευνες (π.χ. Alexander et al., 1997; English & Warren, 1994; Novick, 1992; Warren, 1997). Αυτό που ανέφερε η Warren (1997), ότι ο ρόλος του αναλογικού συλλογισμού στο πεδίο της αλγεβρικής σκέψης δεν έχει ακόμη καθοριστεί, φαίνεται να ισχύει μέχρι και σήμερα.

Εντοπίζονται ελάχιστες εργασίες (Alexander et al., 1997; English & Warren, 1994; Novick, 1992; Warren, 1997) οι οποίες παρέχουν ενδείξεις για το ότι η ικανότητα αναλογικού συλλογισμού σχετίζεται με την αλγεβρική σκέψη. Τα αποτελέσματα της έρευνας των English και Warren (1994), τονίζουν ιδιαίτερα τη συνεισφορά του αναλογικού συλλογισμού στο πεδίο της άλγεβρας μιας και φάνηκε να σχετίζεται στατιστικά σημαντικά με την κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής, της γενίκευσης από πίνακες με δεδομένα και της εφαρμογής των αλγεβρικών εννοιών και διαδικασιών. Επιπρόσθετα, η έρευνα των Alexander et al. (1997) με παιδιά ηλικίας 4-5 ετών έδειξε ότι η ικανότητα αναλογικού συλλογισμού, η οποία μετρήθηκε με τις κλασσικές αναλογίες της μορφής Α:Β::Γ:Δ, σχετίζεται σημαντικά με την ικανότητα επέκτασης μοτίβων. Η έρευνα της Warren (1997) η οποία επικεντρώθηκε στην περιγραφή του γιατί προκύπτουν δυσκολίες κατά τη γενίκευση μέσα από οπτικά μοτίβα και πίνακες με δεδομένα, εντοπίστηκε ότι οι μαθητές οι οποίοι είχαν επιτυχία στην γενίκευση των οπτικών αναπτυσσόμενων μοτίβων είχαν και την ικανότητα να σκέφτονται αναλογικά.

Η Novick (1992) εξέτασε τη σχέση αναλογικής και αλγεβρικής σκέψης μέσα από τη διερεύνηση της ικανότητας των παιδιών να εντοπίζουν την κοινή δομή δύο αλγεβρικών προβλημάτων. Συγκεκριμένα, εξέτασε εάν η εξοικείωση με την άλγεβρα (δηλαδή η ικανότητα επίλυσης αλγεβρικών προβλημάτων) συνεισφέρει στην επίλυση αριθμητικών και αλγεβρικών προβλημάτων μέσω αναλογίας. Η αναλογική μεταφορά εμπλέκει όπως εξηγεί την «ανάκληση ενός κατάλληλου παραδείγματος-προβλήματος», την «οικοδόμηση αντιστοίχισης μεταξύ των στοιχείων του παραδείγματος και του προβλήματος στόχος» και την «υιοθέτηση/προσαρμογή της διαδικασίας επίλυσης του παραδείγματος ώστε να ταιριάζει με τις απαιτήσεις του προβλήματος στόχος». Τα αποτελέσματά της έδειξαν ότι το επίπεδο εξοικείωσης στην άλγεβρα επηρεάζει το επιτυχημένο αποτέλεσμα και των τριών διαδικασιών της αναλογικής μεταφοράς. Αντίθετα, το επίπεδο εξοικείωσης με την άλγεβρα δεν φάνηκε να επηρεάζει την πιθανότητα της κατασκευής ενός αφηρημένου σχήματος (πχ. την αναγνώριση της ύπαρξης μιας νέας τάξης προβλημάτων τα οποία προηγουμένως το άτομο δεν γνώριζε ότι σχετίζονταν), το οποίο αποτελεί ένα είδος μάθησης που προκύπτει από την επιτυχημένη μεταφορά. Ένα τέτοιο σχήμα είναι σημαντικό γιατί τονίζει τα κοινά χαρακτηριστικά των προβλημάτων-πηγή (παραδειγμάτων) με τα προβλήματα στόχος, απομακρύνει τα επιφανειακά χαρακτηριστικά των έργων διατηρώντας τα κοινά τους δομικά στοιχεία. Παρόλο που οι λιγότερο εξοικειωμένοι με την άλγεβρα μαθητές δεν είναι το ίδιο πιθανόν να επιτύχουν στη μεταφορά όπως οι μαθητές που είναι περισσότερο εξοικειωμένοι με την άλγεβρα, όταν επιτύχουν έχουν την ίδια πιθανότητα με τους δεύτερους να οδηγηθούν σε κατασκευή (αφηρημένου) σχήματος για την επίλυση, το οποίο θα ενσωματώνει τα προβλήματα-πηγή και τα προβλήματα-στόχος.

Ο Αναλογικός Συλλογισμός ως Μέσο Έκφρασης και Ανάπτυξης Ικανοτήτων Αλγεβρικής Σκέψης και Αλγεβρικών Εννοιών ή Γενικότερα Μαθηματικών Εννοιών

Αυτό που επισημαίνεται από διάφορους ερευνητές είναι το ότι ελάχιστη σημασία έχει δοθεί στο ερευνητικό πεδίο της μαθηματικής παιδείας για τον αναλογικό συλλογισμό ως μια δεξιότητα ανάπτυξης της έννοιας και ως ένα μέσο για την αφαίρεση αλγεβρικών ιδεών (English & Sharry, 1996; Lee & Shriraman, 2011).

Όπως αναφέρουν οι English και Sharry (1996), ενώ οι θεωρίες ανάπτυξης εννοιών της Sfard (1991) του Dubinsky (1991) και των Gray και Tall (1994) περιγράφουν την ανάπτυξη των εννοιών και άρα την αφαίρεση των εννοιών, δεν μας ενημερώνουν για τα μέσα με τα οποία το άτομο καταλήγει στη γενίκευση. Ο αναλογικός συλλογισμός αναμένεται να μας διαφωτίσει καλύτερα αφού η διαδικασία του αναλογικού συλλογισμού αποτελεί το μέσο με το οποίο το άτομο οδηγείται σε γενικεύσεις, τις οποίες στη συνέχεια χειρίζεται ως μαθηματικά αντικείμενα (English & Sharry, 1996). Οι English και Sharry (1996) υποστηρίζουν ότι η διαμόρφωση μιας έκφρασης γενίκευσης από το άτομο προκύπτει μέσα από τη διαδικασία του αναλογικού συλλογισμού, όπου οι συγκρίσεις ομοιότητας μεταξύ των αλγεβρικών παραδειγμάτων οδηγούν στην εξαγωγή των συσχεσιακών ομοιοτήτων. Με την εξαγωγή της κοινή συσχεσιακής δομής διαμορφώνεται η γνωστική βάση και συγκεκριμένα η οικοδόμηση ενός νοητικού μοντέλου για την έκφραση των γενικεύσεων που παρατηρήθηκαν. Από αυτή την περιγραφή τονίζεται και πάλι ότι ενώ τα επιφανειακά χαρακτηριστικά και οι σχέσεις διαδραματίζουν και τα δύο ένα ρόλο στον καθορισμό της ομοιότητας, αυτό που διαδραματίζει κρίσιμο ρόλο είναι οι συσχεσιακές αντιστοιχίες. Ωστόσο, η πρώιμη μάθηση στο αλγεβρικό πεδίο αναμένεται ότι επηρεάζεται σημαντικά από επιφανειακές ομοιότητες, καθώς είναι αυτά τα χαρακτηριστικά τα οποία ταιριάζουν πιο εύκολα στη υπάρχουσα γνωστική βάση του μαθητή (English & Sharry, 1996).

Οι Engish και Sharry (1996) ανέλυσαν τις προσεγγίσεις τριών μαθητών Α' και Γ' λυκείου, στην ταξινόμηση ενός συνόλου σύνθετων αλγεβρικών εξισώσεων. Οι μαθητές κλήθηκαν να ταξινομήσουν τις 21 εξισώσεις που τους δόθηκαν σε ομάδες εξισώσεων, με βάση το ποιες θεώρησαν ότι είναι του ίδιου τύπου. Οι ερευνητές επιθυμούσαν να εξετάσουν την ικανότητα των μαθητών να διαχωρίσουν τα παραδείγματα αυτά με βάση τις συσχεσιακές τους ιδιότητες. Οι απαντήσεις μιας μαθήτριας έδειξαν ότι είχε την ικανότητα να δει πέρα από τα συντακτικά επιφανειακά χαρακτηριστικά των εξισώσεων ενώ έψαχνε για τη βασική σημασιολογική δομή τους. Ήταν ικανή να εντοπίσει και να διατυπώσει τις βασικές συσχεσιακές ιδιότητες κάτι που υποδηλώνει ότι είχε οικοδομήσει γενικευμένα νοητικά μοντέλα για τη δομή πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Αντίθετα, οι άλλοι δύο μαθητές (παρόλο που φοιτούσαν στη Γ' λυκείου και είχαν ήδη διδαχτεί για πέντε χρόνια άλγεβρα), εστίασαν την προσοχή τους στα επιφανειακά χαρακτηριστικά των εξισώσεων και στις υπολογιστικές διαδικασίες που απαιτούσε η επίλυσή τους (English & Sharry, 1996).

Η εργασία των Lee και Sriraman (2011) η οποία προαναφέρθηκε για τα τρία επίπεδα προσεγγίσεων αναλογικού συλλογισμού, προτείνει ουσιαστικά την αξιοποίηση του αναλογικού συλλογισμό ως μέσου διδασκαλίας στις τάξεις των μαθηματικών. Η συγκεκριμένη εργασία αφορούσε, ωστόσο, σε περιεχόμενο γεωμετρίας. Όπως υποστηρίζουν οι Lee και Sriraman (2011), χρειάζονται περισσότερες μελέτες οι οποίες θα εμπλέκουν προβλήματα OCA με διαφορετικό περιεχόμενο από αυτό της γεωμετρίας και θα στοχεύουν να επιβεβαιώσουν την πιθανότητα συμπερίληψης προβλημάτων OCA στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών. Όπως προτείνει και η English (2004) οι αναλογίες μπορούν να συνεισφέρουν στην οικοδόμηση και επανοικοδόμηση της γνώσης των παιδιών, συμπεριλαμβανομένης της μαθηματικής γνώσης και διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην εννοιολογική αλλαγή (English, 2004).

Με τη διδασκαλία η οποία αποσκοπεί στην εστίαση της προσοχής των μαθητών στη δομή και την αποδυνάμωση της σημασίας των επιφανειακών χαρακτηριστικών, καταπιάνονται ακόμη μερικές έρευνες οι οποίες δεν προβαίνουν σε άμεση αναφορά στον όρο του αναλογικού συλλογισμού. Με την ικανότητα ταξινόμησης επίλυσης και κατασκευής εξισώσεων, μικρότερων ηλικιακά μαθητών (Α' γυμνασίου) καταπιάστηκαν οι Li, Peng και Song (2011). Στόχος τους ήταν να δείξουν πώς η διδασκαλία με τη «μεταβολή» (variation) η οποία αξιοποιείται στην Κίνα, βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν τις αλγεβρικές εξισώσεις. Η διδασκαλία με μεταβολή βασίζεται στη λογική της διδασκαλίας η οποία θα αναδεικνύει τα απαραίτητα-βασικά χαρακτηριστικά χρησιμοποιώντας διάφορα είδη οπτικών υλικών, τονίζοντας την ουσία ενός αντικειμένου, μεταβάλλοντας απλά τα μη σημαντικά (επιφανειακά) χαρακτηριστικά. Σκοπός της διδασκαλίας είναι η ανάπτυξη της κατανόησης του αντικειμένου και η διαμόρφωση μιας έννοιας από το άτομο καθώς αυτό αγνοεί τα μη σημαντικά στοιχεία (Li, Peng & Song, 2011). Σε μια τέτοια διδασκαλία γίνεται διαφοροποίηση των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούνται, από λεκτικές αναπαραστάσεις σε οπτικές και από πιο συγκεκριμένες σε πιο αφηρημένες. Έτσι και στην περίπτωση των εξισώσεων ο μαθητής έχει την ευκαιρία να κατανοήσει τις αλγεβρικές εξισώσεις από διαφορετικές προοπτικές (Li, Peng & Song, 2011). Μια από τις δραστηριότητες που εφάρμοσαν και αφορούσε στην ταξινόμηση εξισώσεων, ζητούσε από τους μαθητές να κατηγοριοποιήσουν τις εξισώσεις που τους δίνονταν και να εντοπίσουν πόσοι διαφορετικοί τύποι υπήρχαν αναφέροντας τα κριτήρια ταξινόμησης. Τα αποτελέσματά τους έδειξαν ότι η μεταβολή αποτελεί ισχυρό μέσο για την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών.

Οι Lobato et al. (2003), στην προσπάθεια τους να εξετάσουν τη φύση των γενικεύσεων των μαθητών για την κλίση και τις γραμμικές συναρτήσεις, εφάρμοσαν μια διδακτική προσέγγιση με θέμα «εστιάζοντας στα φαινόμενα», η οποία σχετίζεται με τη διαδικασία της αφαίρεσης. Ο εκπαιδευτικός στην έρευνα των Lobato et al. (2003), βασίστηκε στην ιδέα ότι «κατευθύνοντας την προσοχή των μαθητών σε συγκεκριμένες πτυχές της μαθηματικής δραστηριότητας» (σ. 3), αυτό θα επέτρεπε στους μαθητές να αποκτήσουν επίγνωση της κρυμμένης σχέσης και να τη χρησιμοποιήσουν ενώ θα αποδυνάμωναν άλλες (Lobato et al., 2003). Σε παρόμοια λογική βασίζεται και η προσέγγιση για τη διδασκαλία των White και Mitchelmore (2010), οι οποίοι προτείνουν ένα μοντέλο που έχει ως στόχο να βοηθήσει τους μαθητές να αναγνωρίσουν τις ομοιότητες και διαφορές μεταξύ διαφορετικών δομών, βοηθώντας τους τελικά να οδηγηθούν σε «αφαίρεση» των εννοιών. Ο σκοπός του μοντέλου που προτείνουν οι White και Mitchelmore (2010) είναι να κατευθύνει την προσοχή των μαθητών σε πιο βαθιές και μαθηματικά σημαντικές ομοιότητες, βοηθώντας τους να αποφύγουν την επιφανειακή αφαίρεση και τη διαμόρφωση ψεύτικων αναλογικών (π.χ. οι μαθητές ενδέχεται να αναφέρουν ότι επειδή το $2(α+β)=2α+2β$ τότε το $(α+β)^2=α^2+β^2$) (English & Halford, 1995).

Στη λογική του εντοπισμού της κοινής δομής μεταξύ διαφορετικών προβλημάτων βασίστηκε και ο Radford (2008) ο οποίος σχεδίασε μια διδακτική ακολουθία προβλημάτων (από τα πιο απλά στα πιο σύνθετα) ώστε να παρέχει στους μαθητές ένα περιβάλλον διδασκαλίας και μάθησης στο οποίο θα είχαν την ευκαιρία να αναστοχαστούν αλγεβρικά για τις γενικεύσεις των μοτίβων. Το πρώτο πρόβλημα με τα σπίρτα και γενικό κανόνα «2ν+1», αποτέλεσε τη *βάση για την επίλυση* των άλλων τριών προβλημάτων. Όπως προέκυψε από τις αναλύσεις της επίλυσης των άλλων τριών προβλημάτων από μέρους των μαθητών, φάνηκε ότι δύο διαφορετικές διαδικασίες επηρέασαν την εξέλιξη της μαθηματικής εμπειρίας των μαθητών. Η πρώτη διαδικασία ονομάζεται σύμφωνα με τον Radford (2008) ως εικονικότητα (iconicity) η οποία βασίζεται στην προβολή μιας προηγούμενης εμπειρίας σε μια νέα και οδηγεί στον εντοπισμό του *όμοιου και του διαφορετικού*, κάνοντας τελικά πιθανή την εμφάνιση μιας δεύτερης εννοιολογικής μορφής (στην προκειμένη περίπτωση, μιας γενικευμένης διαδικασίας). Η δεύτερη διαδικασία ονομάζεται σύμπτυξη (contraction) και αποτελεί το μηχανισμό που βοηθά στον περιορισμό της προσοχής στις πτυχές που φαίνονται να είναι σχετικές και «απομακρύνει» τα μη σημαντικά στοιχεία ώστε να τονιστούν τα κύρια στοιχεία που αποτελούν τη μαθηματική εμπειρία (Radford, 2008).

Περίληψη

Στο κεφάλαιο αυτό έχει παρουσιαστεί εκτενής ανασκόπηση της βιβλιογραφίας που αφορά στη φύση και την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης, καθώς και στη σχέση μεταξύ της ικανότητας αναλογικού συλλογισμού και αλγεβρικής σκέψης. Συγκεκριμένα, η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας αφορούσε αρχικά στην προσπάθεια ορισμού της αλγεβρικής σκέψης και στην περιγραφή βασικών θεωριών οι οποίες καταπιάνονται με την περιγραφή της φύσης της αλγεβρικής σκέψης και δραστηριότητας, ενώ στη συνέχεια επικεντρώθηκε στις οκτώ διαφορετικές ικανότητες αλγεβρικής σκέψης οι οποίες θα αποτελέσουν τις διαστάσεις του θεωρητικού μοντέλου, το οποίο προτείνεται για επιβεβαίωση. Η προσπάθεια ορισμού της αλγεβρικής σκέψης όπως και οι θεωρίες ολοκληρωμένης περιγραφής της που παρουσιαστήκαν (Kaput, 2008; Kieran, 1996, 2004) είχαν ως στόχο να αναδείξουν την πολύπλευρη φύση της αλγεβρικής σκέψης και να αιτιολογήσουν την ύπαρξη των διαφορετικών ικανοτήτων αλγεβρικής σκέψης που προτείνονται στην παρούσα εργασία. Σε κάθε ικανότητα αναλύθηκαν έρευνες που εστιάζουν στην επιτυχία των μαθητών, στις στρατηγικές που υιοθετούν στην επίλυση των έργων των διαφορετικών ικανοτήτων, στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν όταν κληθούν να λύσουν έργα των διαφορετικών ικανοτήτων αλγεβρικής σκέψης, στα έργα που αξιοποιηθήκαν για την αξιολόγηση της επίδοσης στις ικανότητες αυτές, καθώς και σε κάποια επίπεδα ανάπτυξης της ικανότητας (ή των εννοιών που εμπλέκονται σε αυτή).

Στη συνέχεια, αναλύθηκαν οι προσπάθειες περιγραφής της εξέλιξης της άλγεβρας ή της ανάπτυξης εννοιών και στοιχείων που εμπλέκονται και αφορούν σε διάφορες ικανότητες αλγεβρικής σκέψης (όχι σε μια συγκεκριμένη ικανότητα), μέσα από αναφορά στην ιστορική εξέλιξη της άλγεβρας και τον παραλληλισμό της με την γνωστική ανάπτυξη, καθώς και στις προσπάθειες περιγραφής της ανάπτυξης της αντίληψης σχετικά με την έννοια της μεταβλητής και του συμβόλου της ισότητας. Πραγματοποιήθηκε επίσης, αναφορά στην υιοθέτηση του μοντέλου SOLO ως πλαισίου για την περιγραφή της ανάπτυξης διαφόρων αλγεβρικών εννοιών και ικανοτήτων.

Ακολούθως, η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας εστίασε στον ορισμό του αναλογικού συλλογισμού, στα έργα που χρησιμοποιήθηκαν για τη μέτρησή του, στην ανάπτυξη του αναλογικού συλλογισμού, στη σχέση του με το μαθηματικό συλλογισμό και στη σχέση του με την ικανότητα αλγεβρικής σκέψης. Τέλος, παρουσιάστηκαν εργασίες οι αξιοποίησαν τον αναλογικό συλλογισμό (αλλά και γενικότερα την προσέγγιση του διαχωρισμού μεταξύ επιφανειακών και βασικών χαρακτηριστικών των εννοιών) ως μέσο για τη διδασκαλία αλγεβρικών και γενικότερα μαθηματικών εννοιών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφεται η μεθοδολογία, τα υποκείμενα της εργασίας, τα μέσα συλλογής δεδομένων και η διαδικασία κατασκευής των δοκιμίων. Στη συνέχεια αναλύεται ο σχεδιασμός των συνεντεύξεων και τα έργα που κατασκευάστηκαν για τις συνεντεύξεις καθώς και ο τρόπος επιλογής των υποκειμένων για τη συμμετοχή στις συνεντεύξεις. Γίνεται επίσης αναφορά των στατιστικών αναλύσεων που πραγματοποιήθηκαν, του τρόπου βαθμολόγησης-διόρθωσης των δοκίμων και παρουσίαση των αναλύσεων των δεδομένων της πιλοτικής χορήγησης των δοκιμίων και των προτεινόμενων μοντέλων.

Ο σχεδιασμός της εργασίας στηρίχθηκε στο συνδυασμό ποσοτικών και ποιοτικών μεθόδων αξιοποιώντας τη χορήγηση δοκιμίων και τη διεξαγωγή κλινικών συνεντεύξεων (Kelly & Lesh, 2000). Τα εκπαιδευτικά φαινόμενα είναι πολύπλοκα και δεν είναι δυνατό να μελετηθούν επαρκώς με τη χρήση μιας μόνο προσέγγισης (Patton, 2002). Για παράδειγμα ενώ η ποσοτική μέθοδος είναι δυνατό να μας ενημερώσει για τη σχέση γενικού αναλογικού συλλογισμού και αλγεβρικής σκέψης, τα ποιοτικά δεδομένα μπορούν να μας ενημερώσουν για το πώς οι μαθητές εφαρμόζουν τον αναλογικό συλλογισμό συγκεκριμένα σε έργα αλγεβρικής σκέψης. Επιπρόσθετα, ενώ η ποσοτική ανάλυση επιτρέπει την αναγνώριση διαφορετικών ομάδων επίδοσης ως προς την ικανότητα αλγεβρικής σκέψης των μαθητών, η ποιοτική προσέγγιση επιτρέπει μια πιο λεπτομερή περιγραφή των χαρακτηριστικών των συγκεκριμένων ομάδων.

Υποκείμενα

Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 803 μαθητές, από 46 τμήματα Ε' και Στ' δημοτικού και Α' Γυμνασίου δέκα διαφορετικών σχολείων της Κύπρου. Συγκεκριμένα, συμμετείχαν 237 μαθητές της Ε΄ δημοτικού, 280 μαθητές της Στ΄ δημοτικού και 286 μαθητές της Α΄ γυμνασίου. Οι μαθητές του δημοτικού προέρχονται από τέσσερα δημοτικά σχολεία της αστικής Λευκωσίας και τρία δημοτικά σχολεία της αστικής Λεμεσού ενώ οι μαθητές του γυμνασίου προέρχονται από τρία αστικά σχολεία της Λεμεσού. Η επιλογή των συγκεκριμένων τάξεων έγινε λόγω του ότι οι μικρότεροι μαθητές δεν θα ήταν σε θέση να ανταποκριθούν στο ίδιο δοκίμιο με τους μαθητές Ε' και Στ΄ δημοτικού και Α' γυμνασίου. Η εισαγωγή στη χρήση αλγεβρικών συμβόλων πραγματοποιείται στην Ε' τάξη του δημοτικού με βάση τα υπάρχοντα εγχειρίδια των μαθηματικών της Ε΄ και Στ΄ δημοτικού. Οι μαθητές Β' και Γ΄γυμνασίου δεν συμπεριλήφθηκαν στο δείγμα λόγω του ότι έρχονται σε επαφή σε πολύ μεγαλύτερο χρονικό διάστημα με αλγεβρικές έννοιες και στο δοκίμιο θα έπρεπε να περιλαμβάνονταν και πιο σύνθετα έργα (με πιο σύνθετο περιεχόμενο) στα οποία δεν θα μπορούσαν να ανταποκριθούν οι μαθητές μικρότερων τάξεων.

Μετά την ποσοτική ανάλυση και τον εντοπισμό ομάδων με βάση την επίδοση στο τεστ αλγεβρικής σκέψης, επιλέγηκαν άτομα από κάθε κατηγορία για συμμετοχή σε κλινικές συνεντεύξεις. Στις κλινικές συνεντεύξεις συμμετείχαν 101 μαθητές, συγκεκριμένα είκοσι έξι μαθητές από την πρώτη ομάδα, τριάντα μαθητές από τη δεύτερη ομάδα, είκοσι πέντε μαθητές από την τρίτη ομάδα και είκοσι μαθητές από την τέταρτη ομάδα.

Οι μαθητές των τάξεων Ε΄ και Στ΄ δημοτικού και Α΄ γυμνασίου, διαφοροποιούνται ως προς το περιεχόμενο που διδάσκονται με βάση το αναλυτικό πρόγραμμα και τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών. Οι μαθητές της Α’ γυμνασίου που συμμετείχαν στη έρευνα διδάσκονταν με βάση τα νέα εγχειρίδια των μαθηματικών (που σχετίζονται με το νέο αναλυτικό πρόγραμμα μαθηματικών της Κύπρου) και είχαν αρχίσει να έχουν επαφή με την επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων, με δραστηριότητες οι οποίες ενέπλεκαν συναρτησιακές σχέσεις και με χειρισμό της αλγεβρικής σύνταξης. Από την άλλη, οι μαθητές της Ε΄ και Στ΄ δημοτικού που συμμετείχαν στην εργασία, δεν διδάσκονταν με βάση τα νέα εγχειρίδια των μαθηματικών και δεν είχαν παρακολουθήσει τυπική διδασκαλία για κάποια θέματα της άλγεβρας όπως οι μαθητές της Α΄ γυμνασίου. Ωστόσο, οι μαθητές του δημοτικού είχαν την ευκαιρία, μέσα από δραστηριότητες που υπάρχουν στα εγχειρίδια των μαθηματικών που χρησιμοποιούν (περισσότερο της Στ’ δημοτικού και λιγότερο της Ε΄ δημοτικού): (α) να γνωρίσουν τα αλγεβρικά σύμβολα μέσα από έργα που αφορούσαν στη χρήση αλγεβρικών συμβόλων για αναπαράσταση-μοντελοποίηση σχέσεων που εκφράζονταν λεκτικά, (β) να καταπιαστούν με έργα για τον υπολογισμό της τιμής αλγεβρικών εκφράσεων όταν δίνονταν οι τιμές των συμβόλων, (γ) να εντοπίσουν αναλογικές σχέσεις μεταξύ δύο μεταβλητών, (γ) να διερευνήσουν πράξεις με περιττούς και άρτιους αριθμούς, (ε) να αναγνωρίσουν ποιες ισότητες οι οποίες εκφράζονταν με αλγεβρικά σύμβολα αναπαριστούσαν ιδιότητες των πράξεων, (στ) να γενικεύσουν μοτίβα με τη μεταβολή μόνο σε μια διάσταση (επαναλαμβανομενα μοτίβα, είτε με αριθμούς είτεμε σχήματα) αλλά και μοτίβα με τη μεταβολή σε δύο διαστάσεις-μεταβλητές που μεταβάλλονταν ταυτόχρονα, (ζ) να εντοπίσουν τις τιμές των αγνώστων σε λεκτικά προβλήματα και σε ζυγαριές με σχήματα, αλλά και σε απλές αλγεβρικές εξισώσεις με έναν άγνωστο και (η) να ερμηνεύσουν γραφικές παραστάσεις οι οποίες αναπαριστούν σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών. Λόγω του ότι οι συγκεκριμένες δραστηριότητες εντοπίζονται σκόρπιες μέσα στα τεύχη των μαθηματικών του δημοτικού (χωρίς να είναι οργανωμένες σε ενότητες) και στη έρευνα συμμετείχαν μαθητές από πολλές διαφορετικές τάξεις και διαφορετικά σχολεία, δεν είναι βέβαιο ότι οι όλοι οι μαθητές του δημοτικού είχαν προλάβει να καταπιαστούν με όλες τις προαναφερθείσες δραστηριότητες.

Εργαλεία μέτρησης

Για τη συλλογή δεδομένων μέσω γραπτών δοκιμίων, αναπτύχθηκε ένα δοκίμιο για τις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης και χρησιμοποιήθηκαν τρία δοκίμια για τη μέτρηση του αναλογικού συλλογισμού σε διαφορετικά πλαίσια. Η ανάπτυξη των δοκιμίων και συγκεκριμένα η επιλογή και η κατασκευή έργων (και η όλη δομή των δοκιμίων), βασίστηκε στην ανασκόπηση της βιβλιογραφίας για τις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης. Στη συνέχεια περιγράφονται τα έργα του δοκιμίου αλγεβρικής σκέψης και τα διαφορετικά δοκίμια που χρησιμοποιήθηκαν για τη μέτρηση του αναλογικού συλλογισμού.

Δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης

Για τη μέτρηση της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών αναπτύχθηκε ένα γραπτό τεστ (δείτε Παράρτημα Α) το οποίο περιλαμβάνει τόσο ερωτήσεις ανοικτού τύπου όσο και ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής. Για την ανάπτυξη του δοκιμίου και τη μέτρηση των διαφορετικών ικανοτήτων αλγεβρικής σκέψης χρησιμοποιήθηκαν και προσαρμόστηκαν κυρίως έργα που είχαν αξιοποιηθεί σε προηγούμενες έρευνες σχετικά με την αλγεβρική σκέψη. Λήφθηκαν υπόψη και μερικά έργα από τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών και προσαρμόστηκαν ανάλογα ώστε να ανταποκρίνονται στη μέτρηση συγκεκριμένης ικανότητας αλγεβρικής σκέψης. Επιπρόσθετα, κατασκευάστηκαν και έργα ειδικά για την παρούσα εργασία, τα οποία κρίθηκαν αναγκαία για την ολοκληρωμένη εξέταση κάποιων ικανοτήτων αλγεβρικής σκέψης. Η κατασκευή των έργων όπως και η διαφοροποίηση και προσαρμογή έργων τα οποία είχαν χρησιμοποιηθεί σε προηγούμενες σχετικές έρευνες ή στα σχολικά βιβλία των μαθηματικών, είχαν ως στόχο κάθε έργο να μετρά μια συγκεκριμένη ικανότητα. Για αυτό το λόγο έγινε προσπάθεια κάθε έργο να αφορά σε συγκεκριμένη ικανότητα και να μην υπάρχει επικάλυψη με κάποια άλλη ικανότητα. Επίσης, στην κατασκευή και επιλογή των έργων λήφθηκε υπόψη σε κάποιο βαθμό και το μοντέλο SOLO, ώστε να υπάρχουν και έργα τα οποία να ανταποκρίνονται σε διαφορετικά επίπεδα του μοντέλου (μονοδομικό, πολυδομικό, συσχετιστικό, εκτεταμένης αφαίρεσης) τα οποία προτείνονταν και στις έρευνες που έχουν προαναφερθεί στο θεωρητικό πλαίσιο. Το περιεχόμενο του τεστ για την αλγεβρική σκέψη (δείτε Παράρτημα Α) αναφέρεται στις εξής οκτώ ικανότητες αλγεβρικής σκέψης: (α) γενίκευση μοτίβων-σχέσεων της ταυτόχρονης μεταβολής δύο μεταβλητών, (β) ικανότητα μεταβολής των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με την ανεξάρτητη με βάση κανόνες και συλλογισμός για τη σχέση μεταβολής των δύο μεταβλητών, (γ) γενίκευση ιδιοτήτων των πράξεων, (δ) γενίκευση ιδιοτήτων της ισότητας, (ε) γενίκευση ιδιοτήτων των αριθμών, (στ) ικανότητα αντίληψης και εύρεσης της τιμής του αγνώστου (ή και εύρους των τιμών που ικανοποιούν ανίσωση), (ζ) ικανότητα μοντελοποίησης σχέσεων μέσω της χρήσης αλγεβρικών συμβόλων και (η) χειρισμός αφηρημένων συμβόλων και εκτέλεση πράξεων με αυτά για απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων.

Στην κατασκευή των έργων για την *ικανότητα γενίκευσης μοτίβων-σχέσεων της ταυτόχρονης μεταβολής δύο μεταβλητών* λήφθηκαν υπόψη έργα σχετικών ερευνών όπως του Lannin (2005), των Blanton & Kaput (2011), των Blanton et al. (2011) και του Radford (2008). Τα έργα απαιτούν εντοπισμό του κανόνα για τη σχέση των δύο μεταβλητών μέσω *λεκτικών εκφράσεων*. Τα έργα 1, 9 (δείτε Παράρτημα Α) και 22 (δείτε Πίνακα 3.1 ή Παράρτημα Α) περιλαμβάνουν μεταβολή σε δύο ακολουθίες και οι μαθητές καλούνταν να συντονίσουν τη μεταβολή στις δύο ακολουθίες και να καταλήξουν σε μια γενίκευση η οποία συνδέει τη μια μεταβλητή με την άλλη. Ενώ τα έργα 1 και 22 ήταν εικονικά-αναπτυσσόμενα μοτίβα (σε συνδυασμό με δεδομένα σε πίνακα στο έργο 22) το έργο 9 απαιτεί εντοπισμό μοτίβου μόνο με αριθμητικά δεδομένα τα οποία παρουσιάζονταν σε πίνακα τιμών. Στο έργο 9 οι μαθητές καλούνταν να συμπληρώσουν τη γενίκευση της σχέσης λεκτικά ενώ στα έργα 1 και 22 οι μαθητές καλούνταν επιπρόσθετα να συμπληρώσουν στην αρχή τον αμέσως επόμενο όρο του μοτίβου (μονοδομικό επίπεδο του SOLO), τους επόμενους δύο όρους (πολυδομικό επίπεδο) και έναν πολύ μεγάλο όρο του μοτίβου (π.χ 100^{ο} όρο, που αντιστοιχεί με το συσχετιστικό επίπεδο του SOLO). Στο έργο 22 (δείτε Πίνακα 3.1) οι μαθητές μετά τη γενίκευση καλούνταν να μεταφέρουν το συλλογισμό τους σε ένα παρόμοιο πλαίσιο (κάτι που αντιστοιχεί στο επίπεδο εκτεταμένης αφαίρεσης με βάση το μοντέλο SOLO). Το τελευταίο ερώτημα του έργου 9, και το προτελευταίο ερώτημα του έργου 22 όπου οι μαθητές καλούνται να εκφράσουν με αλγεβρικά σύμβολα τον κανόνα, αφορά σε άλλη ικανότητα, συγκεκριμένα στην «ικανότητα μοντελοποίησης σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων», για αυτό το λόγο αναφέρονται πιο κάτω, στη συγκεκριμένη ικανότητα.

Για την *ικανότητα μεταβολής των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με την ανεξάρτητη και το συλλογισμό για τη σχέση μεταβολής* υιοθετήθηκαν έργα από τους Blanton et al. (2011), τη Ledesma (2012), τους Moyer et al. (2004) και τον Moritz (2004). Τα έργα τα οποία αφορούν στη συγκεκριμένη ικανότητα είναι τα έργα 7, 21, 24, 26 (δείτε Παράρτημα Α). Στόχος ήταν να εξεταστεί αρχικά, η κατανόηση του ότι δύο μεταβλητές μεταβάλλονται ταυτόχρονα, η ικανότητα υπολογισμού των τιμών της ανεξάρτητης και των αντίστοιχων τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής με βάση κανόνες (αλγεβρικά ή λεκτικά διατυπωμένους), η ικανότητα συλλογισμού για τη σχέση μεταβολής δύο μεταβλητών (π.χ. καθώς αυξάνονται οι τιμές της μιας μειώνονται οι τιμές της άλλης) είτε μέσα από γραφικές παραστάσεις είτε με βάση αλγεβρικά διατυπωμένους κανόνες και η ικανότητα συλλογισμού για το πώς οι τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής αυξάνονται με βάση δύο διαφορετικούς κανόνες. Στο έργο 7 (δείτε Πίνακα 3.1) οι μαθητές καλούνταν να μεταφράσουν τη λεκτική κατάσταση σε γραφική παράσταση και να εντοπίσουν τη γραφική παράσταση που δείχνει ότι αυξάνεται το ποσό στο λογαριασμό του κατά δέκα ευρώ την εβδομάδα αλλά και να αιτιολογήσουν την επιλογή τους. Το έργο 21 σχετίζεται με το έργο της Ledesma (2012), με τη διαφορά ότι είναι ευκολότερο ώστε να ανταποκρίνεται σε πιο μικρές ηλικίες και σε αυτό περιλαμβάνονται τρία ερωτήματα (δείτε Πίνακα 3.1). Στα δύο πρώτα ερωτήματα οι μαθητές καλούνται να αντικαταστήσουν τιμές στην ανεξάρτητη μεταβλητή για να βρουν την τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής. Ο μαθητής γνωρίζει το κανόνα και καλείται να αξιοποιήσει τα στοιχεία που του δίνονται για να υπολογίσει την εξαρτημένη μεταβλητή, επιδεικνύοντας κατανόηση του ότι (α) οι τιμές που παρέχονται αντιστοιχούν στην ανεξάρτητη μεταβλητή της συνάρτησης, και (β) ότι αξιοποιώντας τις τιμές που δίνονται για την τιμή (ανεξάρτητη μεταβλητή) υπάρχει η δυνατότητα υπολογισμού των αντίστοιχων τιμών του αριθμού ατόμων (εξαρτημένης μεταβλητής). Σε επόμενο ερώτημα καλούνται να επιδείξουν συλλογισμό για τη σχέση μεταβολής των δύο μεταβλητών εξηγώντας τι συμβαίνει στον «αριθμό ατόμων» καθώς η τιμή του παιχνιδιού αυξάνεται. Στο έργο 21 εμπλέκεται το σύμβολο του ίσον ως προσδιορισμός (το ίσον «=» έχει το νόημα του προσδιορισμού αυτού που βρίσκεται στα αριστερά του). Το έργο 24 απαιτούσε από τους μαθητές να συμπληρώσουν πίνακες τιμών για την εξαρτημένη και ανεξάρτητη μεταβλητή με βάση δύο διαφορετικούς κανόνες (οι οποίοι εκφράζονταν και λεκτικά και αλγεβρικά) και στη συνέχεια να εξηγήσουν ποιος από τους δύο κανόνες συμφέρει στο να αυξάνονται τα χρήματα περισσότερο. Στο έργο 26 (δείτε Παράρτημα Α) οι μαθητές καλούνταν να κατασκευάσουν την γραφική παράσταση με βάση τα δεδομένα που δίνονταν στον πίνακα για την ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών και επομένως να μεταφράσουν την αναπαράσταση του πίνακα σε γραφική παράσταση.

Για την *ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων των αριθμών* λήφθηκαν υπόψη σχετικές έρευνες και χρησιμοποιήθηκαν έργα τα οποία προτείνονται από τους Blanton et al. (2011) και Carpenter et al. (2003). Όπως φαίνεται και στον Πίνακα 3.1, το έργο 14 και το έργο 17 (δείτε Παράρτημα Α) απαιτούν μια γενίκευση από μέρους των μαθητών η οποία θα βασίζεται στις ιδιότητες των άρτιων και περιττών αριθμών. Ακόμη ένα έργο το οποίο απαιτεί συλλογισμό για τις ιδιότητες των αριθμών είναι το έργο 6 (δείτε Παράρτημα Α) όπου οι μαθητές θα πρέπει να καταλήξουν σε γενίκευση για την πρόσθεση δύο περιττών αριθμών. Στα συγκεκριμένα έργα απαιτείται από το μαθητή να αιτιολογήσει την απάντησή του μέσω γενικευμένων δηλώσεων βασισμένος σε ιδιότητες, ενώ αντίθετα η αιτιολόγηση μόνο μέσα από αριθμητικά παραδείγματα δεν θεωρείται σε καμία περίπτωση ολοκληρωμένη γενίκευση.

Για την *ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων των πράξεων* λήφθηκαν υπόψη σχετικές έρευνες και χρησιμοποιήθηκαν έργα τα οποία προτείνονται από τους Blanton et al. (2011) και Carpenter et al. (2003). Το έργο 19 που παρουσιάζεται στη συγκεκριμένη ικανότητα στον Πίνακα 3.1, αφορά στη γενίκευση των ιδιοτήτων των πράξεων και απαιτεί από τους μαθητές να αιτιολογήσουν (χωρίς να εκτελέσουν πράξεις) κατά πόσο οι δύο προτάσεις θα δώσουν το ίδιο αποτέλεσμα διατυπώνοντας μια γενίκευση για την επιμεριστική ιδιότητα. Τα έργα 12 και 15 απαιτούν γενίκευση της αντιμεταθετικής ιδιότητας στον πολλαπλασιασμό, αναφορά και επεξήγηση του αν ισχύει σε όλους τους αριθμούς (ακέραιους, κλάσματα, δεκαδικούς) και επεξήγηση του κατά πόσο η γενίκευση αυτή ισχύει στη διαίρεση. Στο έργο 12(α) χρησιμοποιήθηκαν τετραψήφιοι αριθμοί μιας και είναι κάτι που προτείνεται από διάφορους ερευνητές (Blanton et al., 2011) για την «μετατροπή» αριθμητικών έργων σε αλγεβρικά. Στα έργα 12(β) και 15 παρουσιάζονται αλγεβρικές εκφράσεις (π.χ. $α×β$ και $β×α$) σε συνδυασμό με τη λεκτική τους επεξήγηση, πάνω στις οποίες οι μαθητές καλούνται να αναστοχαστούν και να εκφράσουν τις γενικεύσεις τους.

Σχετικά με την *ικανότητα συλλογισμού για ιδιότητές της ισότητας,* χρησιμοποιήθηκαν έργα όπου οι μαθητές καλούνται να συλλογιστούν για την ισότητα και να αντιμετωπίσουν το σύμβολο του ίσον (=) ως κάτι που υποδηλώνει σχέση ισοδυναμίας, ωστόσο, εδώ η μεταβλητή αντιμετωπίζεται ως γενικευμένος αριθμός και οι μαθητές δεν είναι δυνατό να εντοπίσουν την τιμή της μεταβλητής, αλλά καλούνται να συλλογιστούν με βάση τις ιδιότητες της ισότητας (π.χ. αν σε μια ισότητα προσθέσω το ίδιο ποσό και στα δύο μέλη η ισότητα εξακολουθεί να ισχύει). Τα έργα 18 (δείτε Πίνακα 3.1) και 27 (δείτε Παράρτημα Α) παρουσιάζουν δύο ισότητες όπου και στα δύο μέλη των ισοτήτων υπάρχουν είτε εικονίδια είτε αλγεβρικά σύμβολα. Στο έργο 18 εμπλέκεται μόνο πρόσθεση και οι όροι συμβολίζονται με σχήματα ενώ στο έργο 27 εμπλέκεται αφαίρεση και οι όροι συμβολίζονται με αλγεβρικά σύμβολα. Στις δύο αυτές περιπτώσεις οι μαθητές καλούνται να συλλογιστούν για την ισότητα και να βάλουν σε κύκλο ποια δύο σχήματα (στο έργο 18) και ποια δύο αλγεβρικά σύμβολα (έργο 27) ισούνται σίγουρα με βάση την ισότητα και να εξηγήσουν την επιλογή τους. Ενθαρρύνονται με αυτό τον τρόπο να αναφερθούν και να επεξηγήσουν ιδιότητες της ισότητας. Στο έργο 13(α)(β)(γ) (δείτε Παράρτημα Α) εξετάζεται η μεταβατική ιδιότητα της ισότητας και ανισότητας μέσα από τη χρήση αλγεβρικών συμβόλων. Δίνονται αλγεβρικά σύμβολα και μερικές σχέσεις και θα πρέπει να καταλήξουν σε κάποιο συμπέρασμα για συγκεκριμένες σχέσεις μεταξύ των αλγεβρικών συμβόλων. Καλούνται να συμπληρώσουν τα σύμβολα >,<,= ώστε να δείξουν τη σχέση. Η μεταβατικότητα αποτελεί μέρος της διαίσθησης της ισότητας (Piaget, 1987), επομένως, για την ολοκληρωμένη αξιολόγηση της μεταβατικής ιδιότητας, αξιοποιήθηκαν και ανισότητες.

Σχετικά με την *ικανότητα αντίληψης και εύρεσης της τιμής του άγνωστου* χρησιμοποιήθηκαν έργα επίλυσης εξισώσεων όπου η μεταβλητή πρέπει να αντιμετωπιστεί ως συγκεκριμένος άλλα άγνωστος αριθμός. Χρησιμοποιούνται εξισώσεις με τον άγνωστο να βρίσκεται μόνο στο ένας μέλος της εξίσωσης, όπως στα ερωτήματα του έργου 3 όπου στις εξισώσεις εμπλέκεται μόνο πρόσθεση και στα ερωτήματα του έργου 8 όπου ο άγνωστος είναι ο πρώτος όρος και στις εξισώσεις εμπλέκεται ή αφαίρεση ή διαίρεση, ενώ στο έργο 10 ο άγνωστος παρουσιάζεται και στα δύο μέλη της εξίσωσης και απαιτείται κατανόηση του συμβόλου ίσον (=) ως ισοδυναμία και όχι ως «ακολουθεί το αποτέλεσμα» (Blanton et al., 2011). Αξίζει να σημειωθεί ότι στο έργο 10, ενώ υπάρχει ο άγνωστος και στα δύο μέλη της εξίσωσης ($\alpha+4=2\cdot\alpha+2$), διευκρινίστηκε στους μαθητές της Α' γυμνασίου, οι οποίοι οδηγήθηκαν σε χειρισμό συμβόλων για την επίλυσή του (μεταφορά των αλγεβρικών συμβόλων από το ένα μέλος στο άλλο με βάση διαδικαστικούς κανόνες), ότι ήταν δυνατό να λύσουν το έργο και με άλλους τρόπους, φτάνει να επεξηγούσαν τον τρόπο που εργάστηκαν. Στόχος ήταν η ενθάρρυνση των μαθητών να αντιμετωπίσουν το έργο με μια πιο δομική προσέγγιση (π.χ. αντιστοίχιση των όρων του ενός μέλους της εξίσωσης με τους όρους του άλλου μέλους και εύρεση της τιμής του «α»). Αποδεκτές τελικά θεωρήθηκαν, ωστόσο, όλες οι απαντήσεις η οποίες περιλάμβαναν την ορθή τιμή του αγνώστου και συνοδεύονταν από επεξήγηση του τρόπου επίλυσης, είτε αυτός ήταν η δομική προσέγγιση, είτε η στρατηγική δοκιμή και έλεγχος είτε η αξιοποίηση διαδικαστικών κανόνων μεταφοράς των συμβόλων από το ένα μέλος στο άλλο. Αυτό έγινε επειδή στόχος του έργου ήταν η εξέταση της ικανότητας αντίληψης και εύρεσης της τιμής του αγνώστου και όχι της ικανότητας αξιοποίησης ιδιοτήτων της ισότητας και κανόνων χειρισμού πράξεων με αλγεβρικά σύμβολα, μιας και αυτά τα δύο εξετάζονται σε έργα άλλων ικανοτήτων στα οποία η ανάγκη εμφάνισής τους είναι απαραίτητη. Η «ικανότητα αντίληψης και εύρεσης της τιμής του αγνώστου» διευρύνεται ελάχιστα ώστε να περιλαμβάνει και ένα έργο επίλυσης απλής ανίσωσης (έργο 23). Αυτό έγινε κυρίως για να μας ενημερώσει για το βαθμό αντίληψης της έννοιας της μεταβλητής ως «συγκριμένος άγνωστος» αριθμός από μέρους των μαθητών, εξετάζοντας εάν οι μαθητές θα αναγνωρίσουν την περίπτωση όπου το αλγεβρικό σύμβολο δεν θα έχει μια συγκεκριμένη τιμή. Το απλό έργο ανίσωσης (έργο 23), καλούσε τους μαθητές να υπολογίσουν ένα εύρος τιμών για το «κ» και να επεξηγήσουν.

Για την *ικανότητα μοντελοποίησης σχέσεων μέσω της χρήσης αλγεβρικών συμβόλων* αξιοποιήθηκαν έργα κυρίως από τα εγχειρίδια των μαθηματικών Ε' και Στ' δημοτικού και ένα έργο του Kuchemann (1981). Το έργο 4 περιλαμβάνει ερωτήματα που αφορούν στη μοντελοποίηση σχέσεων μέσω αλγεβρικών εκφράσεων. Συγκεκριμένα, το 4(α) καλούσε τους μαθητές να αξιοποιήσουν λεκτικές πληροφορίες ώστε να διατυπώσουν μια αλγεβρική έκφραση. Το ερώτημα 4(β) (δείτε Πίνακα 3.1) αποτελεί έργο που αξιοποιήθηκε και σε προηγούμενες έρευνες στο οποίο παρουσιάζονται κάποιες λεκτικές πληροφορίες και στη συνέχεια συνδυασμό αυτών των πληροφοριών σε μια αλγεβρική έκφραση και οι μαθητές καλούνται να εξηγήσουν με λόγια τι αναπαριστά η αλγεβρική έκφραση (Kuchemann, 1981). Στα ερωτήματα του 4(γ) οι μαθητές καλούνται να διαβάσουν τις λεκτικές καταστάσεις και να βάλουν σε κύκλο ποια από τις αλγεβρικές εκφράσεις αναπαριστά αυτό που περιγράφει ή λεκτική κατάσταση. Το έργο 25 (δείτε Παράστημα Α) αφορά σε μοντελοποίηση σχέσεων μέσω διατύπωσης αλγεβρικών εξισώσεων. Στο ερώτημα 25(α) παρουσιάζεται μια εξίσωση με ένα αλγεβρικό σύμβολο ως άγνωστο και οι μαθητές καλούνται να διατυπώσουν ένα λεκτικό πρόβλημα που για την επίλυσή του θα χρησιμοποιούσαν την αλγεβρική εξίσωση που δόθηκε, ενώ στο 25(β) οι μαθητές καλούνται να διαβάσουν τη λεκτική κατάσταση και να βάλουν σε κύκλο ποια από τις αλγεβρικές εξισώσεις αναπαριστά αυτό περιγράφεται στην κατάσταση. Συμπεριλήφθηκαν ωστόσο και ερωτήματα για τη μοντελοποίηση σχέσεων μέσω αλγεβρικά διατυπωμένων κανόνων. Συγκεκριμένα, στο έργο 9(β), 20 και 22(ε) οι μαθητές καλούνται να μεταφράσουν μια λεκτική γενίκευση σε αλγεβρικά διατυπωμένο κανόνα. Αξίζει ακόμη να σημειωθεί ότι στα ερωτήματα μοντελοποίησης μέσω κανόνων με αλγεβρικά σύμβολα, το σύμβολο του ίσον (=) έχει την ερμηνεία του προσδιορισμού αυτού που βρίσκεται από αριστερά (y=ax+b), αλλά και σύμφωνα με τους Rittle-Johnson et al. (2011) σε αυτό εμπερικλείεται περισσότερο μια διαδικαστική αντίληψη του συμβόλου, παρά μια συσχεσιασκή αντίληψη.

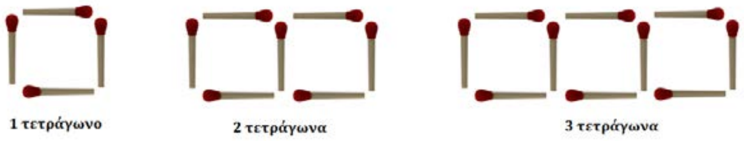
Τέλος, στην *ικανότητα χειρισμού και πράξεων με αλγεβρικά σύμβολα για την απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων* χρησιμοποιήθηκαν τρία έργα διαφορετικού βαθμού δυσκολίας. Το πρώτο και πιο εύκολο έργο, 2(α) και 2(β) το οποίο μοιάζει σε κάποιο βαθμό με το έργο των Carraher et al. (2001) που αφορούσε σε μαθητές δημοτικού, παρουσιάζει μια προβληματική κατάσταση και μια αλγεβρική έκφραση με ένα αλγεβρικό σύμβολο και έναν αριθμό. Η ιστορία παρακινεί τους μαθητές να προσθέσουν ή να αφαιρέσουν έναν αριθμό από την αλγεβρική έκφραση που δίνεται. Στην παρούσα εργασία, λόγω του ότι δεν υπάρχει η βοήθεια του εκπαιδευτικού και η χρήση της αριθμητικής γραμμής, θεωρείται ότι αυτά τα έργα θα μας παρέχουν κάποιες πρώτες ενδείξεις για την ικανότητα των μαθητών να χειρίζονται το αλγεβρικό σύμβολο, έστω και αν το αλγεβρικό σύμβολο στην έκφραση είναι ένα και οι προσθέσεις και οι αφαιρέσεις έχουν να κάνουν με αριθμούς. Το δεύτερο έργο (έργο 11) υιοθετήθηκε από την έρευνα των Bills et al. (2003) (δείτε Πίνακα 3.1). Αξίζει να σημειωθεί ότι στην έρευνα των Bills et al. (2003) χρησιμοποιήθηκε το έργο $\frac{\alpha+\alpha+\alpha}{3}=\alpha$ ορθό/λάθος, ενθαρρύνοντας τους μαθητές να αντιμετωπίσουν τη μεταβλητή ως γενικευμένο αριθμό και ενθαρρύνοντας τους κατά κάποιο τρόπο να αντικαταστήσουν τιμές στη μεταβλητή για να ελέγξουν την ορθότητα. Στην παρούσα εργασία το έργο διαφοροποιείται σε κάποιο βαθμό (δείτε Πίνακα 3.1, έργο 11) ώστε να εξεταστεί η ικανότητα των μαθητών να χειρίζονται το αλγεβρικό σύμβολο ως αντικείμενο και να κάνουν πράξεις για την απλοποίηση της έκφρασης. Το τρίτο έργο (έργο 16 α,β,γ) περιλαμβάνει διάφορα ερωτήματα και απαιτεί από τους μαθητές να αντιμετωπίσουν το αλγεβρικό σύμβολο ως αντικείμενο ώστε να εκτελέσουν πράξεις με αυτό και να απλοποιήσουν τις αλγεβρικές εκφράσεις. Τέτοιου είδους έργα όπως αυτά του έργου 16 χρησιμοποιήθηκαν και από τον Kuchemann (1981).

Πίνακας 3.1

Παραδείγματα Έργων του Δοκιμίου Αλγεβρικής Σκέψης

Ικανότητα γενίκευσης μοτίβων συμμεταβολής

22. Ο Φώτης φτιάχνει τετράγωνα με σπίρτα όπως φαίνεται πιο κάτω. Για ένα τετράγωνο χρειάζεται 4 σπίρτα, για δύο τετράγωνα 7 σπίρτα, για τρία τετράγωνα χρειάζεται 10 σπίρτα κτλ.



(α) Θα συνεχίσει να φτιάχνει τετράγωνα με αυτό τον τρόπο. Να συμπληρώσεις τον πιο κάτω πίνακα.

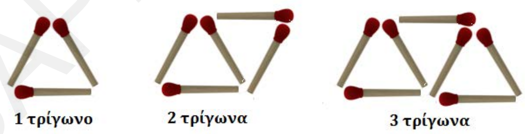
Αριθμός τετραγώνων	Αριθμός σπίρτων
1	4
2	7
3	10
4	
5	

(β) Για 10 τετράγωνα θα χρειαστεί _____ σπίρτα.

(γ) Για 100 τετράγωνα θα χρειαστεί _____ σπίρτα.

(δ) Να περιγράψεις με λόγια πώς μπορεί να υπολογίσει κάποιος τον αριθμό των σπίρτων που θα χρειαστεί, αν γνωρίζει τον αριθμό των τετραγώνων που θέλει να φτιάξει.

(στ) Με βάση αυτό που ανακάλυψες πιο πάνω, να περιγράψεις σε κάποιον πώς μπορεί να υπολογίσει τον αριθμό των σπίρτων που θα χρειαστεί, αν γνωρίζει πόσα τρίγωνα θέλει να φτιάξει.



Ικανότητα μεταβολής των τιμών της ανεξάρτητης μεταβλητής σε σχέση με την εξαρτημένης και συλλογισμός για τη σχέση μεταβολής

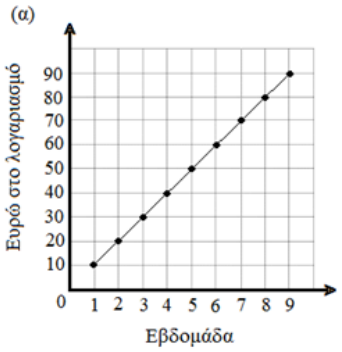
21. Ο ιδιοκτήτης του καταστήματος παιχνιδιών "ΜΠΑΖ" κατέληξε σε μια εξίσωση η οποία δείχνει περίπου πόσα άτομα θα αγοράσουν ένα παιχνίδι. Όπως λέει ο ιδιοκτήτης και όπως φαίνεται και από την πιο κάτω εξίσωση, ο αριθμός των ατόμων που θα αγοράσουν ένα παιχνίδι εξαρτάται από την τιμή του παιχνιδιού.

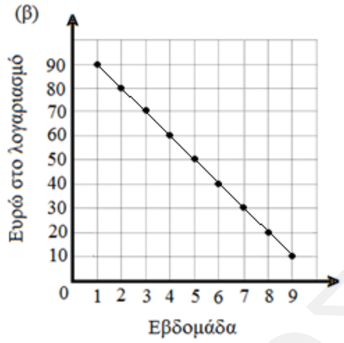
Η εξίσωση είναι η εξής: **Α = 1000 - (2×Τ), όπου,**
Α = αριθμός ατόμων που αγοράζουν το παιχνίδι
Τ = η τιμή του παιχνιδιού (ακέραιος αριθμός, Τ<501)

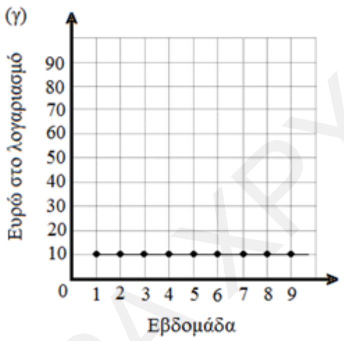
Με βάση την εξίσωση να απαντήσεις στα πιο κάτω ερωτήματα:

(α) Αν η τιμή του παιχνιδιού είναι €1, πόσα άτομα θα αγοράσουν το παιχνίδι;
(β) Αν η τιμή του παιχνιδιού γίνει €2, πόσα άτομα θα αγοράσουν το παιχνίδι;
(γ) Με βάση την εξίσωση, όσο μεγαλώνει η τιμή του παιχνιδιού, ο αριθμός των ατόμων που θα το αγοράσουν αυξάνεται ή μειώνεται; Να εξηγήσεις.

7. Ο Γιώργος έκανε ένα νέο λογαριασμό στην τράπεζα και αποταμιεύει σε αυτόν 10 ευρώ, κάθε εβδομάδα. Την πρώτη εβδομάδα που δημιουργήθηκε ο λογαριασμός κατέθεσε τα πρώτα 10 ευρώ και συνέχισε έτσι τις επόμενες εβδομάδες, έτσι το ποσό στο λογαριασμό του αυξάνεται συνεχώς. Να βάλεις σε κύκλο τη γραφική παράσταση που αναπαριστά την κατάσταση που περιγράφεται πιο πάνω.







Να εξηγήσεις γιατί επέλεξες τη συγκεκριμένη γραφική παράσταση και όχι κάποια άλλη.

Ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων των αριθμών

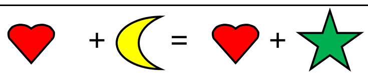
14. Όταν προσθέσω έναν ακέραιο αριθμό με τον εαυτό του, το αποτέλεσμα θα είναι άρτιος ή περιττός αριθμός; Να εξηγήσεις πώς σκέφτηκες.

Ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων των πράξεων

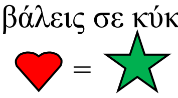
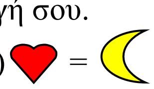
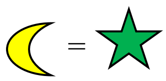
19. Χωρίς να κάνεις τις πράξεις, να εξηγήσεις αν οι δύο μαθηματικές προτάσεις θα έδιναν το ίδιο αποτέλεσμα.

(α) 65 × (50 + 81) **(β)(65 × 50) + (65 × 81)**

Ικανότητα συλλογισμού για τις ιδιότητες της ισότητας

18. Έχουμε την ισότητα: 

Με βάση την πιο πάνω ισότητα μπορούμε να πούμε ότι μια από τις πιο κάτω επιλογές ισχύει σίγουρα. Να βάλεις σε κύκλο την επιλογή σου.

(α)  (β)  (γ) 

Να εξηγήσεις την επιλογή σου.

Ικανότητα αντίληψης και εύρεσης της τιμής του αγνώστου

3. (β) Αν $\gamma + 1 = 15$ και $\gamma + 1 + \sigma = 19$, τότε σ = __   8. (β) Αν $\frac{3+\nu}{5} = 2$ τότε ν =__

10. Αν $\alpha + 4 = 2\times\alpha + 2$, τότε α= ____ (και επεξήγηση του τρόπου επίλησης στο 8(β) και στο 10)

Ικανότητα μοντελοποίησης σχέσεων μέσω της χρήσης αλγεβρικών συμβόλων

4. (α) Το Μ αντιπροσωπεύει τον αριθμό των βιβλίων που έχει ο Ηλίας. Η Ντίνα έχει 10 βιβλία λιγότερα από τον Ηλία. Να γράψεις τη μαθηματική πρόταση η οποία αναπαριστά τον αριθμό των βιβλίων της Ντίνας. ______________________

4. (β) Τα πουκάμισα στοιχίζουν **δ ευρώ** το ένα και τα παντελόνια **β ευρώ** το ένα. Θα αγοράσω 3 πουκάμισα και 4 παντελόνια. Να σημειώσεις τι αναπαριστά η μαθηματική πρόταση **3×δ + 4×β.**

25. (β) **<u>Να βάλεις σε κύκλο</u>** τη μαθηματική πρόταση που αναπαριστά την κατάσταση που περιγράφεται στο πιο κάτω μαθηματικό πρόβλημα:

Πρόβλημα 3: Άνοιξα το βιβλίο σε ένα σημείο. Ο αριθμός της αριστερής και της δεξιάς σελίδας είναι μυστικός. Να συμβολίσεις με ν τον αριθμό της αριστερής σελίδας και με βάση αυτό να συμβολίσεις και τη δεξιά σελίδα. Αν προσθέσεις τον αριθμό της δεξιάς και της αριστερής σελίδας θα πάρεις αποτέλεσμα 243.

(α) $\nu + 1 = 243$ (β) $(\nu + 1) + 1 = 243$ (γ) $\nu + (\nu+1) = 243$ (δ) $\nu + 2 = 243$

(αποτελεί ερώτημα του έργου 22 με το μοτίβο με τα σπίρτα που παρουσιάστηκε πιο πάνω)

22. (ε) Συμβολίζουμε τον αριθμό των σπίρτων με Σ και τον αριθμό τετραγώνων με Τ. Να συμπληρώσεις την πιο κάτω μαθηματική πρόταση με την οποία θα μπορεί να υπολογίζει κάποιος τον αριθμό των σπίρτων (Σ) που θα χρειάζεται, για να φτιάξει οποιοδήποτε αριθμό τετραγώνων (Τ).

Σ = ________________

Ικανότητα πράξεων και χειρισμού αλγεβρικών συμβόλων

2. (β) Η Λίνα είχε Κ μολύβια στην κασετίνα της και έδωσε χτες στη Ρίτα 1 μολύβι. Δηλαδή τώρα έχει **Κ -1** μολύβια. Αύριο η μαμά της θα της χαρίσει 4 μολύβια. Να σημειώσεις πόσα μολύβια θα έχει αύριο η Λίνα.

11. Να βρεις το αποτέλεσμα.

$\frac{\alpha+\alpha}{2} =$ $\frac{\alpha+\alpha+\alpha}{3} =$

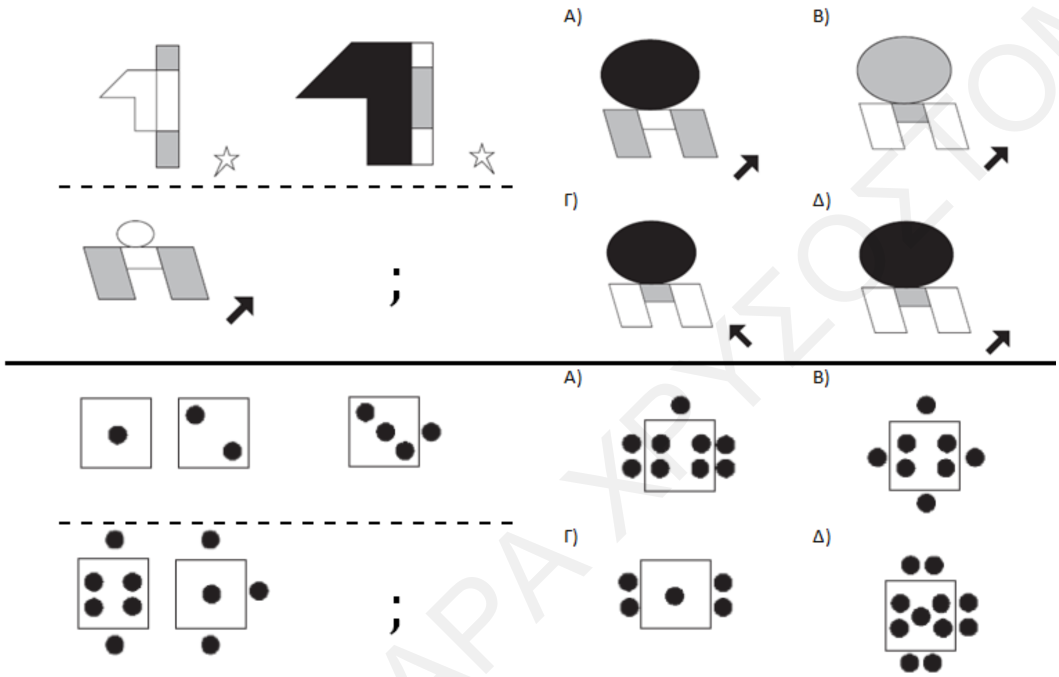
16. Να κάνεις τις πράξεις, για να βρεις το αποτέλεσμα.

$\alpha + \alpha =$ $2 \times \alpha + 5 \times \alpha =$ $2 \times \alpha + \beta + \alpha =$

Για τη μέτρηση του αναλογικού συλλογισμού λήφθηκαν υπόψη η φύση και η γνώση των μαθητών των συγκεκριμένων ηλικιών, ώστε να είναι εφικτή η μέτρηση του αναλογικού συλλογισμού στα διαφορετικά πλαίσια (English, 1998; Goswami, 1992). Παρόλο που προτείνονται διαφορετικοί τρόποι μέτρησης του αναλογικού συλλογισμού, στην παρούσα εργασία, η συλλογή δεδομένων μέσω χορήγησης δοκιμίων εμπλέκει την αξιοποίηση αναλογιών, δεν περιορίζεται όμως στις κλασσικές λεκτικές αναλογίες. Λαμβάνοντας υπόψη ότι ο αναλογικός συλλογισμός εμπλέκει τη σύγκριση εννοιολογικών (conceptual) και αντιληπτικών (perceptual experiences) εμπειριών (Holyoak & Thagard, 1995), για τη μέτρησή του χρησιμοποιούνται τρία διαφορετικά τεστ. Στο πρώτο τεστ περιλαμβάνονται αναλογίες με σχήματα όπου εμπλέκονται αντιληπτικές σχέσεις (perceptual relations) (Goswami, 2004), στο δεύτερο τεστ περιλαμβάνονται λεκτικές αναλογίες οι οποίες απαιτούν εντοπισμό εννοιολογικών σχέσεων (Goswami, 2004), ενώ στο τρίτο τεστ περιλαμβάνονται αριθμητικές αναλογίες και απαιτείται εντοπισμός αριθμητικών σχέσεων.

Το πρώτο δοκίμιο (δείτε Παράρτημα Β) αποτελεί το Figural Analogy Test (TAO) το οποίο αναπτύχθηκε από τους Orzechowski και Chuderski (unpublished manuscript) και απαιτεί αναλογικό συλλογισμό για την επίλυση αναλογιών των οποίων οι όροι είναι σχήματα. Όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 3.1, σε κάθε έργο υπάρχουν κάποια σχήματα, πάνω και κάτω από μια διακεκομμένη γραμμή και δίπλα από αυτά υπάρχουν τέσσερις επιλογές Α, Β, Γ, Δ. Οι μαθητές καλούνται αρχικά να παρατηρήσουν τα δύο σχήματα που βρίσκονται πάνω από τη διακεκομμένη γραμμή. Το αριστερό σχήμα είναι το αρχικό σχήμα και αφού έγιναν κάποιες αλλαγές σε αυτό, προέκυψε το σχήμα που βρίσκεται ακριβώς δίπλα. Αφού οι μαθητές εντοπίσουν τις αλλαγές που έγιναν στο σχήμα πάνω από τη διακεκομμένη γραμμή, καλούνται να εφαρμόσουν τις ίδιες αλλαγές και στο σχήμα που βρίσκεται κάτω από τη διακεκομμένη γραμμή και να βάλουν σε κύκλο ποια από τις τέσσερις επιλογές Α-Δ, δείχνει το σωστό σχήμα το οποίο θα προκύψει.

Απαιτείται επομένως εντοπισμός οπτικο-χωρικών σχέσεων στο πρώτο ζεύγος σχημάτων και εφαρμογή τους στο δεύτερο ζεύγος σχημάτων. Ο βαθμός δυσκολίας των έργων είναι διαφορετικός μιας και σε κάποιες περιπτώσεις οι δύο όροι (Α και Β) σχετίζονται ως προς ένα ή δύο κανόνες (οι οποίοι δεν δηλώνονται) (π.χ. συμμετρία, περιστροφή, αλλαγή στο μέγεθος, στο χρώμα, στο πάχος της γραμμής, στον αριθμό των αντικειμένων που εμπλέκονται κτλ.) και τα έργα θεωρούνται χαμηλής συσχεσιακής περιπλοκότητας, ή ως προς τρεις, τέσσερις, πέντε κανόνες όπου τα έργα θεωρούνται υψηλής συσχεσιακής ομοιότητας. Το πρότυπο τεστ περιλαμβάνει 36 έργα ενώ στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκαν 15 έργα του συγκεκριμένου τεστ (P1-P15, δείτε Παράρτημα Β), λόγω της μεγαλύτερης δυσκολίας των υπολοίπων και της μη καταλληλότητάς τους για τους μαθητές του δημοτικού. Η προ-πιλοτική χορήγησή του βοήθησε στον εντοπισμό των ιδιαίτερα δύσκολων έργων τα οποία έπρεπε να αφαιρεθούν.

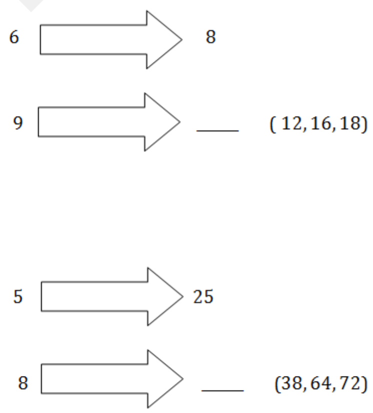


Διάγραμμα 3.1. Παραδείγματα έργων από το πρώτο δοκίμιο αναλογικού συλλογισμού.

Το δεύτερο δοκίμιο (δείτε Παράρτημα Γ) περιλαμβάνει έργα λεκτικών αναλογιών. Οι 11 λεκτικές αναλογίες (C1-C11) βασίζονται τόσο στις κατηγορίες που προτείνουν οι Chaffin και Herrmann (1984) και στις κατηγορίες του Miller Analogies Test (MAT) (Meagher, 2008). Από αυτά λήφθηκαν οι περισσότερες λεκτικές αναλογίες αλλά και οι ιδέες για τη δημιουργία επιπρόσθετων λεκτικών αναλογιών. Οι αναλογίες οργανώνονται σε τρεις κατηγορίες ανάλογα με τις σχέσεις που εμπλέκουν: (α) ταξινόμησης, (β) σημασιολογίας (συνώνυμα, αντίθετα, σχέσεις έντασης) και (γ) συσχέτισης.

Για τη συμπλήρωση του κενού σε κάθε έργο οι μαθητές είχαν τέσσερις επιλογές από τις οποίες έπρεπε να επιλέξουν και να βάλουν σε κύκλο αυτή που ταίριαζε με βάση τις σχέσεις. Στην κατηγορία της ταξινόμησης απαιτείται μια ιεράρχηση λέξεων ή εννοιών και οι σχέσεις που περιλαμβάνουν ίσως να είναι σχέσεις: (α) κατηγοριοποίησης όπου ο ένας όρος αποτελεί παράδειγμα του άλλου (π.χ. C4), (β) σχέσεις σχηματισμού ομάδας όπου και οι δύο όροι αποτελούν μέλη μιας κατηγορίας (π.χ. C5) και (γ) σχέσεις μέρους-όλου όπου ο ένας όρος αποτελεί μέρος του άλλου (π.χ. C6). Στη σημασιολογική κατηγορία οι σχέσεις έχουν να κάνουν με τους ορισμούς των λέξεων που αποτελούν τους όρους της αναλογίας. Οι σχέσεις που συνδέουν το πρώτο ζευγάρι λέξεων έχουν σημασιολογικό χαρακτήρα και είναι δυνατό να είναι σχέσεις: (α) συνωνυμίας όπου οι δύο πρώτοι όροι έχουν ίδιο ή παρόμοιο νόημα (π.χ. C2), (β) αντίθεσης όπου οι δύο πρώτοι όροι έχουν αντίθετο νόημα (π.χ. C7) και (γ) έντασης όπου ο ένας όρος εκφράζει σε μεγαλύτερο βαθμό αυτό που περιγράφεται από τον άλλο όρο (π.χ. C1). Η κατηγορία συσχέτισης αφορά σε σχέσεις μεταξύ δύο διαφορετικών αλλά σχετιζόμενων εννοιών. Οι σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των δύο όρων ενδέχεται να είναι: (α) σχέσεις σειροθέτησης όπου οι δύο όροι τους ζεύγους βρίσκονται σε χρονική σειρά (C11), (β) σχέσεις χαρακτηρισμού όπου ο ένας όρος αποτελεί χαρακτηριστικό ή ιδιότητα του άλλου όρου και (γ) σχέσεις λειτουργίας όπου ο ένας όρος περιγράφει το σκοπό ή τη λειτουργία του άλλου (π.χ. C10) ή ο ένας όρος προκαλεί ως αποτέλεσμα, δημιουργεί ή χρησιμοποιεί αυτό που περιγράφεται στον άλλον όρο.

Το τρίτο δοκίμιο αναλογικού συλλογισμού (δείτε Παράρτημα Δ) περιλαμβάνει αριθμητικές αναλογίες (N1-N8) και αφορά στον εντοπισμό σχέσεων μεταξύ του πρώτου ζεύγους αριθμών και εφαρμογή τους στο δεύτερο ζεύγος αριθμών. Οι αριθμητικές αναλογίες αυτού του μέρους βασίστηκαν επίσης, στις αριθμητικές αναλογίες που περιλαμβάνονταν στο Miller Analogies Test (MAT) (Meagher, 2008). Δύο παραδείγματα έργων παρουσιάζονται στο Διάγραμμα 3.2.



Διάγραμμα 3.2. Παραδείγματα έργων από το τρίτο δοκίμιο αναλογικού συλλογισμού.

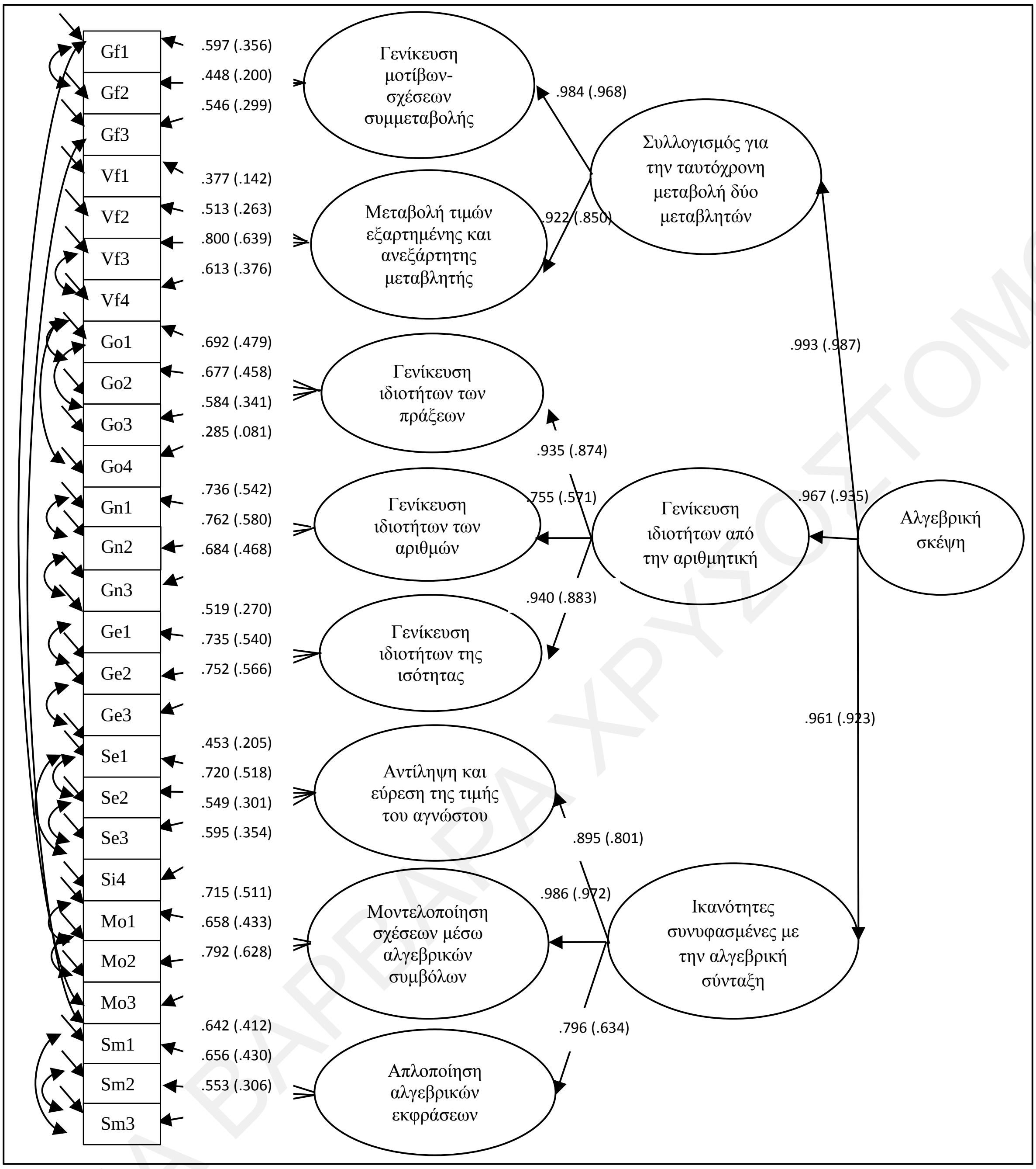
Οι μαθητές καλούνται να εντοπίσουν μια σχέση μεταξύ του πρώτου ζεύγους αριθμών την οποία αν εφαρμόσουν στο κάτω ζεύγος αριθμών θα προκύψει ο τέταρτος όρος ο οποίος πρέπει να είναι ένας από τις επιλογές που παρέχονταν στην παρένθεση. Οι μαθητές καλούνται να σημειώσουν στο τόξο που υπάρχει σε κάθε έργο, τη σχέση που εντοπίζουν και εφαρμόζουν. Επομένως, για να θεωρείται ολοκληρωμένη μια απάντηση, εκτός από την επιλογή στην παρένθεση για τη συμπλήρωση του τέταρτου όρου, οι μαθητές καλούνται να σημειώσουν στο τόξο τον κανόνα που εφαρμόζουν στα ζεύγη αριθμών. Οι αριθμητικές αναλογίες που περιλαμβάνονταν στο μέρος αυτό είναι οκτώ και ο βαθμός δυσκολίας των έργων είναι διαφορετικός. Στις τέσσερις πρώτες αναλογίες ο λόγος ανάμεσα στους όρους είναι ακέραιος, οι δύο επόμενες έχουν μη ακέραιο λόγο, στην έβδομη αναλογία οι όροι συνδέονται με σχέση στο τετράγωνο, ενώ στην τελευταία αναλογία οι μαθητές καλούνται να εντοπίσουν ότι οι όροι συνδέονται με σχέση στον κύβο ή με μια προσθετική σχέση.

Αναλύσεις Δεδομένων της Πιλοτικής Χορήγησης των Εργαλείων

Δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης

Για την κατασκευή του δοκιμίου αλγεβρικής σκέψης χρησιμοποιήθηκαν και προσαρμόστηκαν ανάλογα έργα τα οποία προτείνονται στη βιβλιογραφία, παραδείγματα από εγχειρίδια μαθηματικών αλλά και έργα τα οποία αναπτύχθηκαν συγκεκριμένα για του σκοπούς της παρούσας έρευνας. Ως εκ τούτου, ήταν απαραίτητο να εξεταστεί η καταλληλότητα των έργων για τη μέτρηση των θεωρητικών παραγόντων της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης. Το δοκίμιο κατασκευάστηκε για τη μέτρηση οκτώ ικανοτήτων αλγεβρικής σκέψης, δύο από τις οποίες αφορούσαν στη ικανότητα συλλογισμού για την ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών (γενίκευση σχέσης δύο μεταβλητών που μεταβάλλονται ταυτόχρονα μέσω λεκτικής έκφρασης, μεταβολής των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με την ανεξάρτητη και συλλογισμός για τη σχέση μεταβολής), τρεις οι οποίες αφορούσαν στη γενίκευση ιδιοτήτων από την αριθμητική (γενίκευση ιδιοτήτων των αριθμών, γενίκευση ιδιοτήτων των πράξεων, γενίκευση ιδιοτήτων της ισότητας) και τρεις που αφορούσαν σε ικανότητες άμεσα συνυφασμένες με την αλγεβρική σύνταξη (αντίληψη και εύρεση της τιμής του αγνώστου, μοντελοποίηση σχέσεων μέσω αλγεβρικών εκφράσεων, απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων).

Για τον έλεγχο της καταλληλότητας του δοκιμίου αλγεβρικής σκέψης πραγματοποιήθηκε πιλοτική χορήγηση του δοκιμίου. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης (δείτε Διάγραμμα 3.3) των δεδομένων από την πιλοτική χορήγηση του δοκιμίου έδειξαν ότι η προσαρμογή του μοντέλου στα δεδομένα ήταν εξαιρετική, επιβεβαιώνοντας τη δομή του προτεινόμενου μοντέλου για την ικανότητα αλγεβρικής σκέψης (*CFI*=1.00, χ^2=288.928, *df*=296, χ^2/df=0.976, p=0.605, *RMSEA*=0.00). Τα αποτελέσματα έδειξαν επίσης, ότι οι φορτίσεις των έργων στους παράγοντες ήταν στατιστικά σημαντικές. Στην περίπτωση του έργου γενίκευσης και συλλογισμού για την επιμεριστική ιδιότητα η φόρτιση φάνηκε να είναι χαμηλή, αλλά και η επίδοση των μαθητών στο συγκεκριμένο έργο δεν ήταν υψηλή κάτι που υποδείκνυε κάποιο πρόβλημα με το συγκεκριμένο έργο. Λαμβάνοντας υπόψη αυτά, στη κύρια χορήγηση του δοκιμίου πραγματοποιήθηκε κάποια αλλαγή στο συγκεκριμένο έργο το οποίο ενώ στην πιλοτική φάση περιλάμβανε αλγεβρικά σύμβολα, στην κύρια φάση τα αλγεβρικά σύμβολα αντικαταστάθηκαν από τετραψήφιους αριθμούς. Ωστόσο, έγινε η διευκρίνηση ότι δεν θα έπρεπε να καταφύγουν σε πράξεις με τους αριθμούς γιατί αυτό θα κρινόταν ως λανθασμένη απάντηση, αλλά θα έπρεπε να καταφύγουν σε συλλογισμό και αιτιολόγηση, ώστε να διατηρηθεί ο σκοπός του έργου.



Σημείωση. Ο πρώτος αριθμός υποδεικνύει τη φόρτιση στον παράγοντα και ο αριθμός στην παρένθεση υποδεικνύει την αντίστοιχη ερμηνευόμενη διασπορά (r^2).Τα Gf1-Sm3 αναφέρονται στα έργα του δοκιμίου ικανότητας αλγεβρικής σκέψης στην πιλοτική φάση.

Διάγραμμα 3.3. Μοντέλο για τη δομή της αλγεβρικής σκέψης με βάση την πιλοτική χορήγηση του δοκιμίου αλγεβρικής σκέψης.

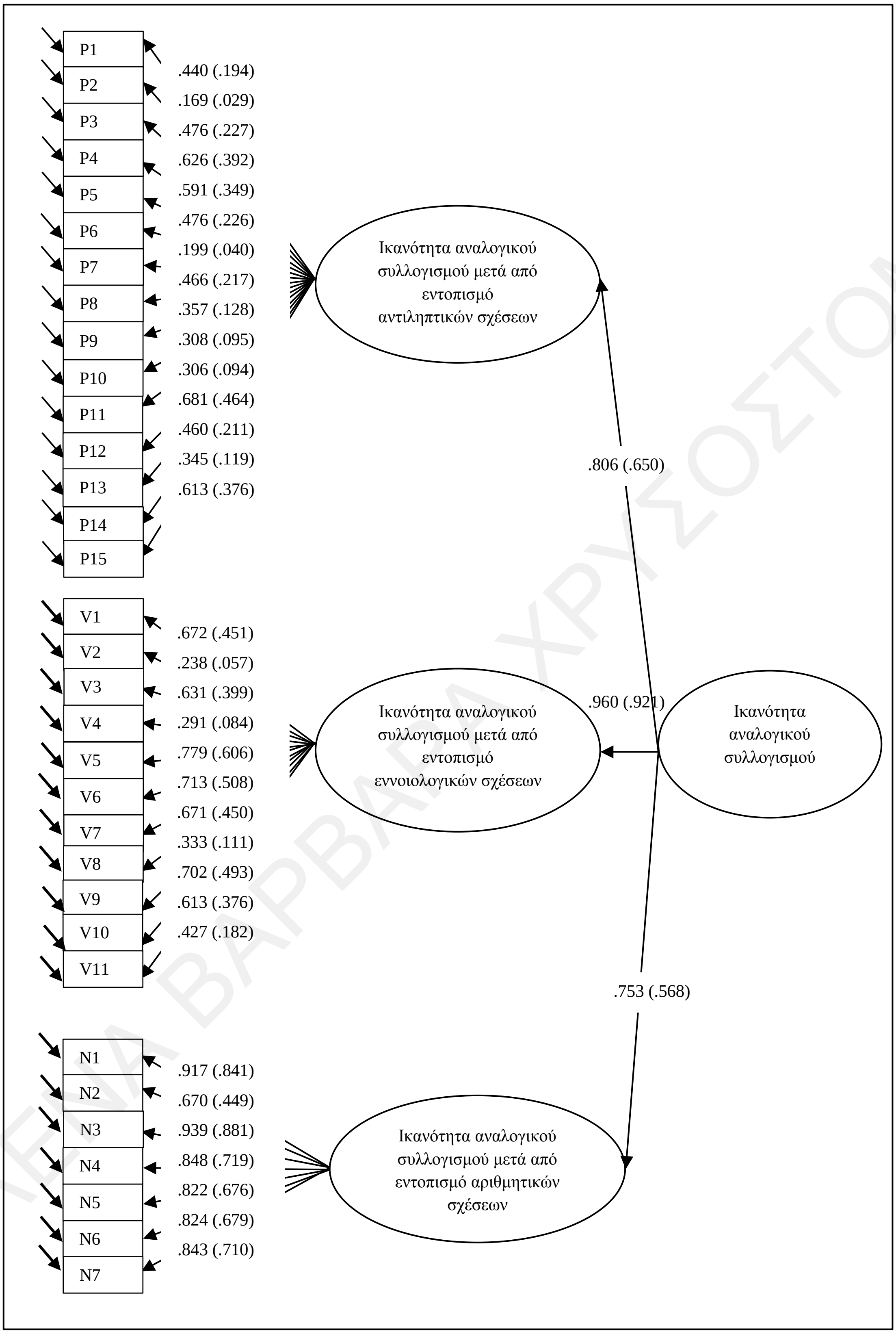
Δοκίμιο αναλογικού συλλογισμού

Τα έργα του δοκιμίου ικανότητας αναλογικού συλλογισμού προέρχονται από αποδεκτά τεστ για τη μέτρηση της ικανότητας αναλογικού συλλογισμού. Για τον λόγο αυτό πραγματοποιήθηκε επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση ώστε να εξεταστεί η προσαρμογή των δεδομένων στο προτεινόμενο μοντέλο. Λαμβάνοντας υπόψη τα δοκίμια αναλογικού συλλογισμού που χρησιμοποιήθηκαν σε έρευνες και τα οποία εμπλέκουν εντοπισμό σχέσεων και αναλογικού συλλογισμού σε διαφορετικά πλαίσια εξετάστηκε ένα μοντέλο στο οποίο, μερικά έργα από το Figural Analogy Test των Orzechowski και Chuderski (unpublished manuscript) αποτελούν γνώρισμα του παράγοντα αναλογικού συλλογισμού με εντοπισμό οπτικο-χωρικών σχέσεων, κάποια έργα λεκτικών αναλογιών από το Millers analogy test (Meagher, 2008) αποτελούν γνώρισμα του παράγοντα αναλογικού συλλογισμού με εντοπισμό εννοιολογικών σχέσεων και μερικά έργα αριθμητικών αναλογιών από το Millers analogy test (Meagher, 2008) αποτελούν γνώρισμα του παράγοντα αναλογικού συλλογισμού με εντοπισμό αριθμητικών σχέσεων.

Για να εξεταστεί η καταλληλότητα των έργων του δοκιμίου ικανότητας αναλογικού συλλογισμού και του προτεινόμενου μοντέλου, πραγματοποιήθηκε πιλοτική χορήγηση και για αυτό το δοκίμιο. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης (δείτε Διάγραμμα 3.4) της πιλοτικής χορήγησης έδειξαν ότι η προσαρμογή του μοντέλου στα δεδομένα ήταν καλή, επιβεβαιώνοντας έτσι τη δομή του προτεινόμενου μοντέλου για την ικανότητα αναλογικού συλλογισμού (*CFI*=.967, *TLI*=.973, χ^2=119.746, *df*=103, χ^2/df=1.163, p=.124, *RMSEA*=.027). Η ανάλυση έδειξε ότι οι φορτίσεις των έργων στους αντίστοιχους παράγοντες είναι στατιστικά σημαντικές.

Αξίζει να σημειωθεί ότι στην πιλοτική χορήγηση το μέρος του δοκιμίου με τις αριθμητικές αναλογίες περιλάμβανε επτά έργα κάποια από τα οποία διαφοροποιούνταν ως προς το βαθμό δυσκολίας. Αν και οι φορτίσεις των έργων αυτών στων παράγοντα ήταν στατιστικά σημαντικές και ψηλές, κρίθηκε αναγκαία η συμπερίληψη ακόμη ενός έργου αριθμητικής αναλογίας το οποίο να εμπλέκει μεγαλύτερο βαθμό δυσκολίας (παρόμοιου βαθμού δυσκολίας με άλλα δύο έργα που περιλαμβάνονταν ήδη στο δοκίμιο).

Ως εκ τούτου, τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης τόσο στην περίπτωση του δοκιμίου αλγεβρικής σκέψης όπως και στην περίπτωση αναλογικού συλλογισμού, έδειξαν ότι τα έργα αποτελούσαν κατάλληλους δείκτες των παραγόντων για τους οποίους προορίζονταν. Φάνηκε ότι το εργαλείο μέτρησης της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης ήταν πάρα πολύ καλό και ότι το εργαλείου μέτρησης της ικανότητας αναλογικού συλλογισμού ήταν καλό.



Σημείωση. Ο πρώτος αριθμός υποδεικνύει τη φόρτιση στον παράγοντα ενώ ο αριθμός στην παρένθεση την αντίστοιχη ερμηνευόμενη διασπορά (r^2). Τα P1-N7 αναφέρονται στα έργα του δοκιμίου ικανότητας αναλογικού συλλογισμού στην πιλοτική φάση.

Διάγραμμα 3.4. Μοντέλο για τη δομή της ικανότητας αναλογικού συλλογισμού με βάση την πιλοτική χορήγηση του δοκιμίου αναλογικού συλλογισμού.

Τα Προτεινόμενα Μοντέλα στην Παρούσα Εργασία

Προτεινόμενο μοντέλο για την ικανότητα αλγεβρικής σκέψης

Μέσα από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας και τις προσπάθειες περιγραφής της αλγεβρικής σκέψης που προτείνονται (π.χ. Kaput, 2008; Lew, 2004) διαφαίνεται ότι η ικανότητα αλγεβρικής σκέψης δεν είναι δυνατό να αντιμετωπιστεί ως μια μονοδιάστατη ικανότητα αλλά περιλαμβάνει και εμπλέκει διάφορες έννοιες και διαδικασίες, όπως την ικανότητα γενίκευσης μοτίβων και σχέσεων και έκφρασης των γενικεύσεων με διάφορα μέσα (όπως φυσική γλώσσα), την ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων των πράξεων, των αριθμών της ισότητας, την ικανότητας επίλυσης εξισώσεων, την ικανότητα αναπαράστασης σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων, την ικανότητα εκτέλεσης πράξεων με αφηρημένα σύμβολα για απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων, τη μελέτη της σχέσης μεταβολής δύο μεταβλητών μέσα από αντικατάσταση τιμών σε αλγεβρικούς κανόνες και αναπαράσταση της μεταβολής μέσω γραφικών παραστάσεων και το συλλογισμό για τη σχέση μεταβολής των δύο μεταβλητών. Λαμβάνοντας υπόψη και συνθέτοντας τις προτάσεις και τα αποτελέσματα των ερευνών του πεδίου της αλγεβρικής σκέψης προτάθηκε και εξετάστηκε ένα μοντέλο. Στο μοντέλο που προτείνεται, η «ικανότητα γενίκευσης μοτίβων και σχέσεων με δύο μεταβλητές που μεταβάλλονται ταυτόχρονα και αιτιολόγησης», «η ικανότητα μεταβολής των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με την ανεξάρτητη και ο συλλογισμός για τη σχέση μεταβολής», «η ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων των πράξεων», «γενίκευσης ιδιοτήτων των αριθμών», «γενίκευσης των ιδιοτήτων της ισότητας», «η ικανότητα αντίληψης και εύρεσης της τιμής του αγνώστου», «η ικανότητα μοντελοποίησης σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων» και «η ικανότητα απλοποίησης αλγεβρικών εκφράσεων» αποτελούν τους παράγοντες πρώτης τάξης του προτεινόμενου μοντέλου. Παράγοντες δεύτερης τάξης όπως φαίνεται και στο Διάγραμμα 3.5, αποτελούν «η ικανότητα συλλογισμού για την ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών», «η ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων από την αριθμητική» και «οι ικανότητες οι οποίες είναι άμεσα συνυφασμένες με την αλγεβρική σύνταξη».

Με βάση το προτεινόμενο μοντέλο (α) τα έργα γενίκευσης μοτίβων και σχέσεων μεταξύ δύο μεταβλητών που μεταβάλλονται ταυτόχρονα (στα οποία οι γενικεύσεις εκφράζονται λεκτικά) (δείτε έργα Gf1-Gf3 στον Πίνακα 3.2) αποτελούν δείκτες του παράγοντα «γενίκευση μοτίβων-σχέσεων μεταξύ δύο μεταβλητών που συμμεταβάλλονται», (β) τα έργα που αφορούν στη μεταβολή των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με την ανεξάρτητη είτε σε αλγεβρικούς κανόνες είτε σε γραφικές παραστάσεις και στο συλλογισμό για τη σχέση της μεταβολής των δύο μεταβλητών (δείτε έργα Vf1-Vf4 στον Πίνακα 3.2) αποτελούν δείκτες του παράγοντα «μεταβολή των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με την ανεξάρτητη και συλλογισμός για τη μεταβολή», (γ) τα έργα που αναφέρονται στη γενίκευση ιδιοτήτων των πράξεων (δείτε έργα Gn1-Gn4 στον Πίνακα 3.2) αποτελούν δείκτες του παράγοντα «γενίκευση ιδιοτήτων των πράξεων», (δ) τα έργα που αφορούν στη γενίκευση ιδιοτήτων των αριθμών (δείτε έργα Gn1-Gn3 στον Πίνακα 3.2) αποτελούν δείκτες του παράγοντα «γενίκευση ιδιοτήτων των αριθμών», (ε) τα έργα που αναφέρονται στη γενίκευση ιδιοτήτων της ισότητας (δείτε έργα Ge1-Ge3 στον Πίνακα 3.2) αποτελούν δείκτες του παράγοντα «γενίκευση ιδιοτήτων της ισότητας», (στ) τα έργα που αφορούν στην εύρεση της τιμής του αγνώστου μέσω της επίλυσης εξισώσεων (δείτε έργα Se1-Si4 στον Πίνακα 3.2) αποτελούν δείκτες μέτρησης του παράγοντα «αντίληψη και εύρεση της τιμής του αγνώστου», (ζ) τα έργα που αφορούν στη μοντελοποίηση σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων (δείτε έργα Mo1-Mo3 στον Πίνακα 3.2) αποτελούν δείκτες μέτρησης του παράγοντα «Μοντελοποίηση σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων» και (η) τα έργα που αφορούν σε πράξεις με σύμβολα για την απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων (δείτε έργα Sm1-Sm3 στον Πίνακα 3.2) αποτελούν δείκτες μέτρησης του παράγοντα «απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων».

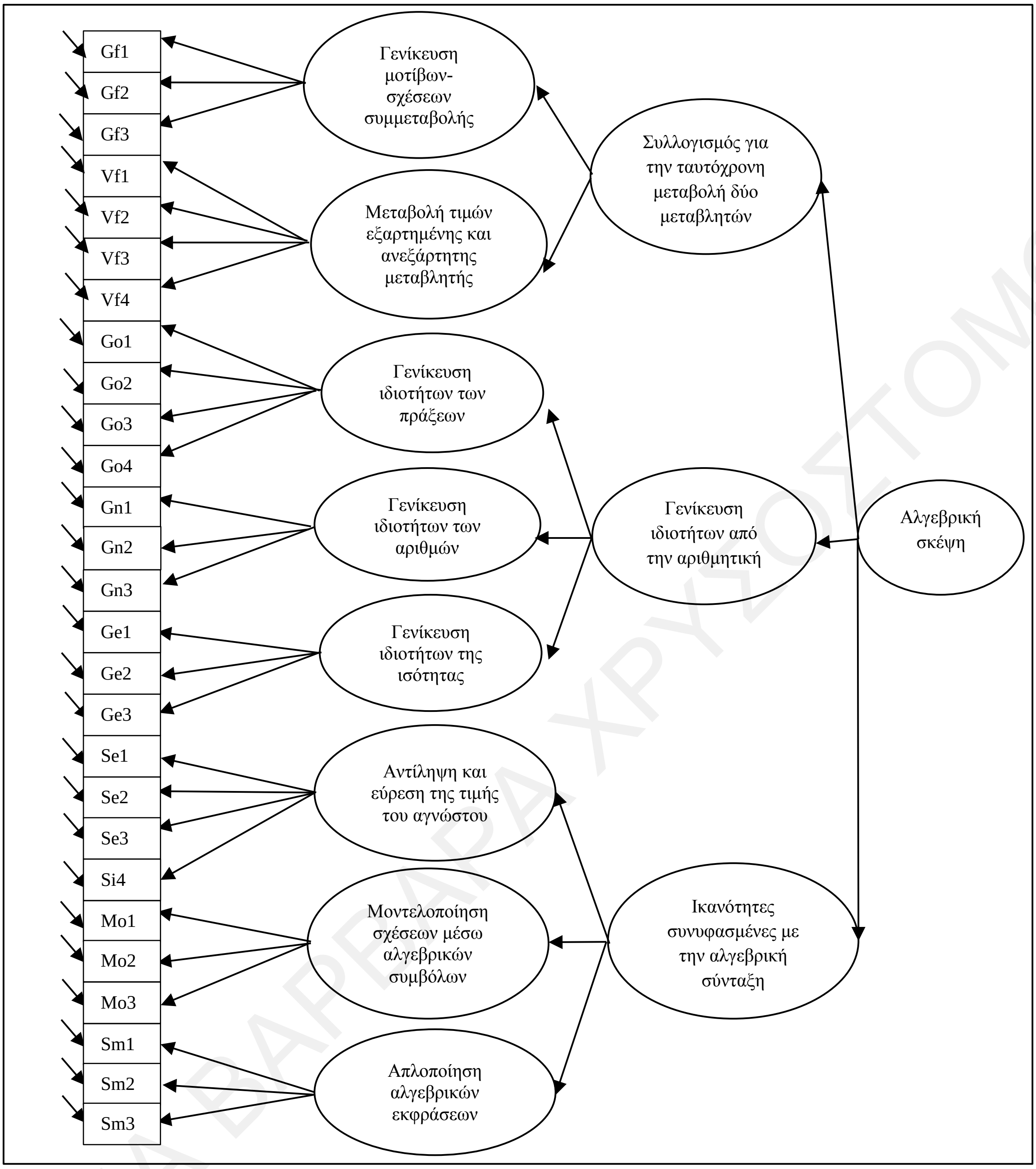
Πίνακας 3.2

Περιγραφή των Παραγόντων και Έργων Παραγόντων της Ικανότητας Αλγεβρικής Σκέψης

Περιγραφή Παράγοντα 2ης Τάξης	Περιγραφή Παράγοντα 1ης Τάξης	Περιγραφή Έργων
Ικανότητα συλλογισμού για την ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών	Γενίκευση μοτίβων-σχέσεων μεταξύ δύο μεταβλητών που συμμεταβάλλονται (λεκτική έκφραση)	Gf1: Γενίκευση μοτίβου με τιμές σε πίνακα και γενικό κανόνα $Η=3\times Δ$ Gf2: Γενίκευση γεωμετρικού μοτίβου (εικονική αναπαράσταση) με γενικό κανόνα $Μ=2\times ν+1$ Gf3: Γενίκευση γεωμετρικού μοτίβου (εικονική αναπαράσταση και πίνακας με τιμές) με γενικό κανόνα $Σ=3\times ν+1$ και μεταφορά της γενίκευσης σε νέο πλαίσιο με γεωμετρικό μοτίβο και γενικό κανόνα $Σ=2\times ν+1$

	Μεταβολή των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με την ανεξάρτητη και συλλογισμός για τη σχέση μεταβολής	Vf1:Κατασκευή γραφικής παράστασης με βάση πίνακα τιμών για δύο μεταβλητές που μεταβάλλονται ταυτόχρονα (ψ=χ) Vf2:Ερμηνεία και επιλογή γραφικής παράστασης για την κατάσταση με γενικό κανόνα Ε=10×ν Vf3:Μεταβολή των τιμών των δύο μεταβλητών με βάση το Α=1000-(2×Τ) και συλλογισμός για τη σχέση μεταξύ των δύο μεταβλητών Vf4:Μεταβλητών τιμών δύο μεταβλητών που μεταβάλλονται ταυτόχρονα με βάση δύο κανόνες Χ=3×ν και Χ=ν×ν και συλλογισμός σε ποιο από τους δύο κανόνες οι τιμές της εξαρτημένης αυξάνονται πιο γρήγορα
Ικανότητα γενίκευση ιδιοτήτων από την αριθμητική	Γενίκευση ιδιοτήτων των πράξεων	Go1: Γενίκευση για το προσθετικό και το πολλαπλασιαστικό αντίστροφο Go2: Γενίκευση για την αντιμεταθετική ιδιότητα Go3: Συλλογισμός-γενίκευση για το αν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στη διαίρεση Go4: Γενίκευση για την επιμεριστική ιδιότητα
	Γενίκευση ιδιοτήτων των αριθμών	Gn1: Γενίκευση για το αποτέλεσμα της πρόσθεσης περιττού αριθμού με περιττό αριθμό Gn2: Γενίκευση για το αποτέλεσμα της πρόσθεσης ενός αριθμού με τον εαυτό του (άρτιος/περιττός;) Gn3: Γενίκευση για το αποτέλεσμα της πρόσθεσης ενός αριθμού με τον εαυτό του συν 3 (άρτιος/περιττός;)
	Γενίκευση ιδιοτήτων της ισότητας	Ge1: Γενίκευση για τη μεταβατική ιδιότητα της ισότητας και της ανισότητας Ge2: Γενίκευση για την ιδιότητα της ισότητας: όταν προσθέτω ίση ποσότητα και στα δύο μέλη η ισότητα διατηρείται Ge3: Γενίκευση για την ιδιότητα της ισότητας: όταν αφαιρώ ίση ποσότητα και από τα δύο μέλη η ισότητα διατηρείται

		Se1: Εύρεση της τιμής του αγνώστου σε δύο εξισώσεις όπου υπάρχει πρόσθεση και ο άγνωστος βρίσκεται μόνο στο αριστερό μέλος της εξίσωσης
	Αντίληψη και εύρεση της τιμής του αγνώστου	Se2: Εύρεση της τιμής του αγνώστου σε δύο εξισώσεις όπου υπάρχει αφαίρεση ή διαίρεση και ο άγνωστος είναι ο πρώτος όρος και βρίσκεται μόνο στο αριστερό μέλος της εξίσωσης
		Se3: Εύρεση της τιμής του αγνώστου σε μια εξίσωση όπου ο άγνωστος βρίσκεται και στα δύο μέλη της εξίσωσης και επεξήγηση του τρόπου επίλυσης
		Si4: Επίλυση απλής ανίσωσης (κ+3>10)
		Mo1: Μοντελοποίηση σχέσεων μέσω διατύπωσης αλγεβρικών εκφράσεων (4 ερωτήματα, 1 κατασκευή αλγεβρικής έκφρασης, 1 ερμηνεία αλγεβρικής έκφρασης, 2 επιλογής ορθής αλγεβρικής έκφρασης)
Ικανότητες άμεσα συνυφασμένες με την αλγεβρική σύνταξη	Μοντελοποίηση σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων	Mo2: Μοντελοποίηση σχέσεων μέσω διατύπωσης αλγεβρικών εξισώσεων (2 ερωτήματα, 1 επιλογή ορθής αλγεβρικής εξίσωσης, ερμηνεία αλγεβρικής εξίσωσης)
		Mo3: Μοντελοποίηση σχέσεων μέσω διατύπωσης κανόνων με αλγεβρικά σύμβολα (3 ερωτήματα, κατασκευή κανόνα Υ=Μ×Μ, Η=3×Δ, Σ=3×ν+1)
		Sm1: Απλοποίηση αλγεβρικής έκφρασης με ένα αλγεβρικό σύμβολο και δύο αριθμούς (2 ερωτήματα)
	Απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων	Sm2: Απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων με το αλγεβρικό σύμβολο να επαναλαμβάνεται και η πράξη να είναι σε μορφή κλάσματος (2 ερωτήματα)
		Sm3: Απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων (3 ερωτήματα)

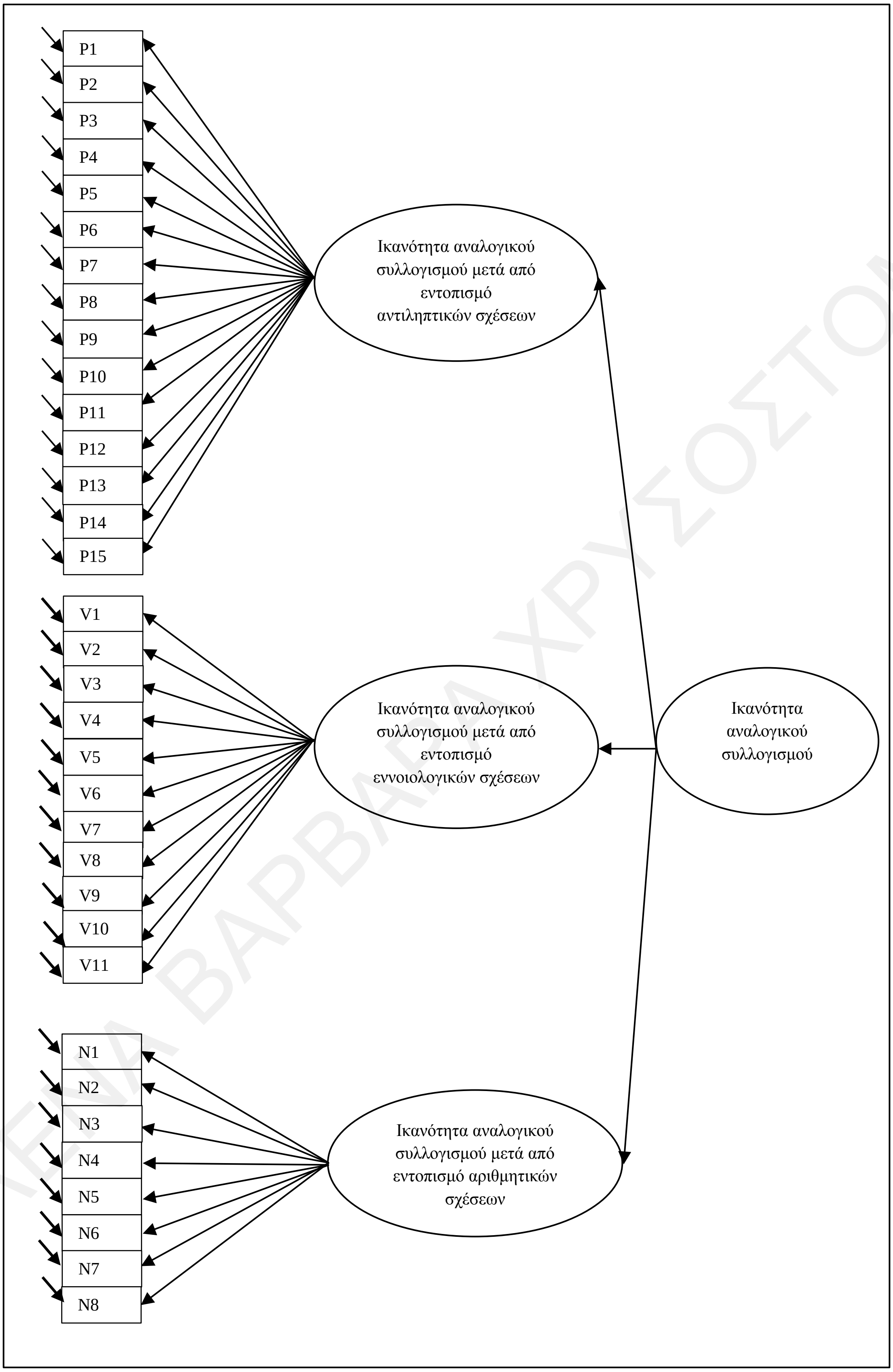


Διάγραμμα 3.5. Προτεινόμενο μοντέλο για την ικανότητα αλγεβρικής σκέψης.

Προτεινόμενο μοντέλο για την ικανότητα αναλογικού συλλογισμού

Η παρούσα εργασία αποσκοπούσε επίσης στην περιγραφή της ικανότητας αναλογικού συλλογισμού των μαθητών. Λαμβάνοντας υπόψη ότι η μέτρηση της ικανότητας αναλογικού συλλογισμού όπως αυτή ορίζεται στο πεδίο της ψυχολογίας πραγματοποιήθηκε κυρίως μέσω έργων κλασσικών αναλογιών αλλά και το ότι ο αναλογικός συλλογισμός εμπλέκει τη σύγκριση εννοιολογικών (conceptual) και αντιληπτικών (perceptual experiences) εμπειριών (Holyoak & Thagard, 1995) αλλά και αριθμητικών σχέσεων, προτείνεται ένα μοντέλο για την περιγραφή της ικανότητας αναλογικού συλλογισμού. Ο διαχωρισμός της ικανότητας αναλογικού συλλογισμού ανάλογα με το πλαίσιο που εμπλέκεται στις κλασσικές αναλογίες, βασίστηκε και στις προτάσεις των Goswami (2004) και English (2004) ότι η ικανότητα αναλογικού συλλογισμού πολύ πιθανό να διαφοροποιείται αν τα έργα αναλογιών εμπλέκουν εντοπισμό αντιληπτικών ή εννοιολογικών σχέσεων. Το προτεινόμενο μοντέλο στην παρούσα εργασία για την ικανότητα αναλογικού συλλογισμού όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 3.6, αποτελείται από τρεις παράγοντες πρώτης τάξης «Ικανότητα αναλογικού συλλογισμού μετά από εντοπισμό οπτικο-χωρικών σχέσεων», «η ικανότητα αναλογικού συλλογισμού μετά από εντοπισμό εννοιολογικών σχέσεων», «η ικανότητα αναλογικού συλλογισμού μετά από εντοπισμό αριθμητικών σχέσεων» οι οποίοι μπορούν να ερμηνεύσουν την επίδοση των μαθητών στα έργα του δοκιμίου μέτρησης της ικανότητας αναλογικού συλλογισμού και συνθέτουν τον παράγοντα δεύτερης τάξης «Ικανότητα Αναλογικού Συλλογισμού» (Analogical Reasoning).

Αξίζει να σημειωθεί ότι τα αποτελέσματα της εργασίας για την ικανότητα αναλογικού συλλογισμού δεν περιγράφουν τη συγκεκριμένη ικανότητα αποκλειστικά με ψυχολογικούς όρους, αλλά σε ένα ευρύτερο πλαίσιο που αξιοποιείται και στο πεδίο των μαθηματικών. Με τη συμπερίληψη των έργων κλασσικών αναλογιών με αριθμούς αλλά και των αναλογιών με εντοπισμό οπτικο-χωρικών σχέσεων επιτυγχάνεται συνάφεια και με έργα που σχετίζονται άμεσα και αξιοποιούνται στη διδασκαλία των μαθηματικών. Η επίλυση έργων που εμπλέκουν αναλογίες με αριθμούς αλλά και ο συλλογισμός για μοτίβα με σχήματα τα οποία που εμπλέκουν οπτικο-χωρικές σχέσεις αποτελούν έργα τα οποία εντοπίζονται και στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών. Οι αναλογίες με αριθμούς των εγχειριδίων σχετίζονται κατά κάποιο τρόπο με τις αριθμητικές αναλογίες του δοκιμίου της παρούσας εργασίας (στις οποίες ωστόσο οι σχέσεις των αριθμών δεν είναι πάντα αναλογικές με την έννοια του proportional reasoning που χρησιμοποιείται στο πεδίο των μαθηματικών). Επίσης, τα έργα μοτίβων των εγχειριδίων των μαθηματικών που εμπλέκουν οπτικο-χωρικές σχέσεις, σχετίζονται κατά κάποιο τρόπο με τις αναλογίες με σχήματα (και εντοπισμό οπτικο-χωρικών σχέσεων) του δοκιμίου της παρούσας εργασίας για την ικανότητα αναλογικού συλλογισμού.



Διάγραμμα 3.6. Προτεινόμενο μοντέλο για την ικανότητα αναλογικού συλλογισμού.

Διαδικασία

Η έρευνα αυτή πραγματοποιήθηκε σε πέντε φάσεις. Η πρώτη φάση αφορά στη μελέτη της σχετικής βιβλιογραφίας και στην κατασκευή των εργαλείων μέτρησης με βάση τις σχετικές έρευνες. Στη δεύτερη φάση πραγματοποιήθηκε η προ-πιλοτική και η πιλοτική χορήγηση των δοκιμίων ώστε να γίνουν τυχόν διορθώσεις (αφαίρεση ή διαφοροποίηση έργων) και να οδηγηθούμε στην τελική μορφή των εργαλείων μέτρησης. Στην τρίτη φάση ακολούθησε η χορήγηση των εργαλείων μέτρησης για τη συλλογή των δεδομένων και μια πρώτη ανάλυση των ποσοτικών δεδομένων για τη διαμόρφωση κατηγοριών/ομάδων με βάση την επίδοση στα έργα αλγεβρικής σκέψης. Στην τέταρτη φάση πραγματοποιήθηκε η επιλογή ατόμων από όλες τις ομάδες και η συμμετοχή τους σε κλινικές συνεντεύξεις. Στην τελευταία φάση πραγματοποιήθηκε η τελική ανάλυση των ποσοτικών και των ποιοτικών δεδομένων και η εξαγωγή συμπερασμάτων.

Στην πρώτη φάση της έρευνας πραγματοποιήθηκε αρχικά η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας και η μελέτη των σχετικών ερευνών και θεωριών για τη διαμόρφωση του θεωρητικού πλαισίου της εργασίας. Στη συνέχεια ακολούθησε η κατασκευή των εργαλείων μέτρησης με βάση τα έργα και τα αποτελέσματα των προηγούμενων ερευνών. Στην ανάπτυξη του δοκιμίου αλγεβρικής σκέψης αξιοποιήθηκαν και προσαρμόστηκαν έργα τόσο από έρευνες και κεφάλαια που μελετούσαν και καταπιάνονταν με τη φύση της αλγεβρικής σκέψης, αλλά χρησιμοποιήθηκαν και έργα από εγχειρίδια των μαθηματικών και διαφοροποιήθηκαν με τρόπο ώστε να συνάδουν με τη φύση της αλγεβρικής σκέψης όπως αναδύεται από τη βιβλιογραφία και όπως ορίζεται στην παρούσα εργασία. Για την κατασκευή του δοκιμίου της ικανότητας του αναλογικού συλλογισμού λήφθηκαν υπόψη έργα και δοκίμια που χρησιμοποιήθηκαν ευρέως για τη μέτρηση του αναλογικού συλλογισμού και εκτός των μαθηματικών, καθένα από τα οποία αποσκοπούσε τη μέτρηση του αναλογικού συλλογισμού σε διαφορετικά πλαίσια (λεκτικές αναλογίες, αριθμητικές αναλογίες, οπτικο-χωρικές αναλογίες). Στόχος ήταν η μέτρηση του αναλογικού συλλογισμού και στα τρία πλαίσια ώστε να λαμβάνεται υπόψη η πρόταση ερευνητών που καταπιάστηκαν με την ικανότητα αναλογικού συλλογισμού ότι ο εντοπισμός διαφορετικού είδους σχέσεων σε έργα αναλογικού συλλογισμού (εντοπισμός εννοιολογικών ή αντιληπτικών σχέσεων) πιθανό να επηρεάζει διαφορετικά την ικανότητα αναλογικού συλλογισμού των μαθητών (English, 2004; Goswami, 2004).

Στη δεύτερη φάση της εργασίας πραγματοποιήθηκε αρχικά η προ-πιλοτική χορήγηση των δύο εργαλείων μέτρησης σε δύο τμήματα Ε΄ και δύο τμήματα Στ΄ τάξης δημοτικού (συνολικά 84 μαθητές) σε δύο διαφορετικά σχολεία, ώστε να εξεταστεί ο βαθμός δυσκολίας των έργων και οι πιθανές δυσκολίες εννοιολογικής κατανόησης των έργων και ο χρόνος που χρειαζόταν για την συμπλήρωση των εργαλείων. Εντοπίστηκαν επίσης και οι δυσκολίες των μαθητών που σχετίζονταν με τη λεκτική εκφώνηση των έργων. Ως αποτέλεσμα έγιναν οι απαραίτητες διορθώσεις σε εκφωνήσεις των έργων στα οποία φάνηκε ότι οι μαθητές αντιμετώπισαν πρόβλημα κατανόησης και παράλληλα έγιναν και οι εξής διορθώσεις: (α) Στο δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης αφαιρέθηκαν δύο έργα τα οποία είχαν ως πλαίσιο το εμβαδόν ορθογωνίου για τη γενίκευση και αιτιολόγηση της αντιμεταθετικής και της επιμεριστικής ιδιότητας μιας και βαθμός επιτυχίας ήταν πάρα πολύ χαμηλός. Τα έργα αυτά αντικαταστάθηκαν από δύο άλλα έργα που αφορούσαν στην αντιμεταθετική και επιμεριστική ιδιότητα και λόγω του ότι φάνηκαν κατάλληλα και στην πιλοτική φάση που ακολούθησε, παρέμειναν και στην τελική μορφή του εργαλείου. Επιπρόσθετα, αφαιρέθηκαν έργα στα οποία υπήρχε μεγάλος βαθμός επιτυχίας από τους μαθητές και ως εκ τούτου κρίθηκαν πολύ εύκολα (π.χ. έργο με ζυγαριές και αντικείμενα για την εύρεση των τιμών των αντικειμένων, αριθμητικά και γεωμετρικά μοτίβα με μεταβολή μόνο σε μια ακολουθία π.χ. 20, 16, 12, 8, _____, _____.), και αντικαταστάθηκαν από άλλα έργα. (β) Στο εργαλείο για την ικανότητα αναλογικού συλλογισμού, στο μέρος με τις αριθμητικές αναλογίες οι μαθητές καλούνταν απλά να βάλουν σε κύκλο τον κατάλληλο αριθμό για τη συμπλήρωση του κενού. Ωστόσο, φάνηκε ότι αρκετοί μαθητές απαντούσαν τυχαία και κρίθηκε αναγκαίο αφού υπήρχε η ικανότητα επεξήγησης της απάντησης να συμπεριληφθεί στα έργα αυτά η οδηγία οποία καλούσε τους μαθητές να σημειώσουν την πράξη την οποία ακολούθησαν για να καταλήξουν στην επιλογή τους. Στο μέρος με τις λεκτικές αναλογίες, λόγω της ψηλής επίδοσης των μαθητών σε δύο έργα κρίθηκε αναγκαία η αφαίρεσή τους και η πρόσθεση δύο άλλων έργων μεγαλύτερου βαθμού δυσκολίας. Στο μέρος με τις οπτικο-χωρικές αναλογίες αφαιρέθηκαν δύο έργα τα οποία φάνηκαν εξαιρετικά δύσκολα για τους μαθητές και προστέθηκαν δύο άλλα.

Στη δεύτερη φάση, μετά την προ-πιλοτική χορήγηση ακολούθησε η πιλοτική χορήγηση των εργαλείων σε 217 μαθητές Ε΄ και Στ΄ δημοτικού και Α΄ γυμνασίου (με μικρή συμμετοχή από το γυμνάσιο, μόνο 14 μαθητές). Σκοπός της πιλοτικής χορήγησης ήταν να ελεγχθεί η αξιοπιστία των δύο εργαλείων και το κατά πόσο τα έργα που περιλαμβάνονταν στα δοκίμια αποτελούσαν κατάλληλους δείκτες μέτρησης των παραγόντων των μοντέλων. Στόχος ήταν επίσης, να εξεταστεί ο βαθμός δυσκολίας των έργων μιας και προστέθηκαν νέα έργα μετά την προ-πιλοτική χορήγηση. Τα δύο εργαλεία χορηγήθηκαν σε διαφορετικές μέρες μιας και για τη συμπλήρωση του δοκιμίου αλγεβρικής σκέψης χρειάζονταν τέσσερις διδακτικές περίοδοι (των 40΄) και μια διδακτική περίοδος για το εργαλείο της ικανότητας αναλογικού συλλογισμού. Τα αποτελέσματα της πιλοτικής χορήγησης οδήγησαν στην τελική μορφή των εργαλείων. Όσον αφορά στο δοκίμιο μέτρησης της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης τα αποτελέσματα της πιλοτικής χορήγησης οδήγησαν στις εξής αλλαγές: (α) Το έργο που αφορούσε στη γενίκευση και συλλογισμό για την επιμεριστική ιδιότητα και περιλάμβανε δύο διαφορετικές προτάσεις με αλγεβρικά σύμβολα φάνηκε ότι προκάλεσε κάποια δυσκολία σε αρκετούς μαθητές (πιθανό λόγω της ύπαρξης τριών διαφορετικών συμβόλων) και δεν τους επέτρεψε να κατανοήσουν το ζητούμενο επομένως οι μαθηματικές προτάσεις με αλγεβρικά σύμβολα αντικαταστάθηκαν από μαθηματικές προτάσεις οι οποίες περιλάμβαναν πλέον τετραψήφιους αριθμούς. Στο συγκεκριμένο έργο προστέθηκε η διευκρίνηση ότι δεν θα έπρεπε να γίνει εκτέλεση πράξεων (γιατί αυτό δεν θα οδηγούσε σε αποδεκτή απάντηση) αλλά απαιτούσε συλλογισμό και επεξήγηση, ώστε να διατηρηθεί ο σκοπός του έργου, (β) Διαφοροποιήθηκε μια επιλογή στο έργο αναπαράστασης της μεταβολής τιμών δύο μεταβλητών σε γραφική παράσταση στο οποίο παρουσιάστηκε σχετικά ψηλή επίδοση. Συγκεκριμένα, αφαιρέθηκε η μια από τις δύο επιλογές που έδειχναν αρνητική κλίση (και δεν ήταν οι ορθές) και προστέθηκε μια επιλογή όπου υπήρχε αναπαράσταση της ευθείας «y=10», ώστε και οι τρεις επιλογές να είναι εντελώς διαφορετικές και η επεξήγηση του μαθητή για το λόγο που οι δύο γραφικές είναι λανθασμένες να αφορά σε δύο διαφορετικές περιπτώσεις, (γ) Στην περίπτωση του έργου μεταβολής τιμών δύο μεταβλητών με βάση δύο διαφορετικούς κανόνες και τη σύγκριση του ποιος από τους δύο κανόνες είναι η καλύτερη επιλογή, εκτός από τους αλγεβρικά διατυπωμένους κανόνες δόθηκε η λεκτική τους επεξήγηση λόγω του ότι αρκετοί μαθητές κυρίως Ε΄ δημοτικού ζητούσαν διευκρινήσεις για την εκφώνηση του έργου και των κανόνων και (δ) το έργο μεταβολής των τιμών των δύο μεταβλητών με βάση τον κανόνα «α+β=12» (όπου το α είναι πάντα μεγαλύτερο από το β), αφαιρέθηκε από την ανάλυση των δεδομένων της πιλοτική χορήγησης (για τον έλεγχο της επιβεβαίωσης των εργαλείων) και από το δοκίμιο γενικότερα λόγω της φόρτισής του σε περισσότερους από ένα παράγοντες.

Στην περίπτωση του εργαλείου μέτρησης της ικανότητας αναλογικού συλλογισμού πραγματοποιήθηκαν αλλαγές μόνο στο μέρος αριθμητικών αναλογιών. Συγκεκριμένα, διαφοροποιήθηκε μια επιλογή σε δύο έργα αριθμητικών αναλογιών στα οποία φάνηκε ότι η ορθή επιλογή ήταν κάπως πιο ξεκάθαρη και καθιστούσε τα δύο έργα κάπως πιο εύκολα. Προστέθηκε ακόμη ένα έργο αριθμητικών αναλογιών (Ν6, δείτε Παράρτημα Δ) το οποίο ήταν κάπως μεγαλύτερου βαθμού δυσκολίας από τα περισσότερα έργα που υπήρχαν ήδη στο μέρος αριθμητικών αναλογιών και στο οποίο εμπλεκόταν πολλαπλασιασμός με κλάσμα ή συλλογισμός για δυο πράξεις ταυτόχρονα (παρόμοιος συλλογισμός εμπλεκόταν σε ακόμη ένα έργο που υπήρχε ήδη στο δοκίμιο).

Στην τρίτη φάση πραγματοποιήθηκε η χορήγηση των δύο εργαλείων μέτρησης στα υποκείμενα της εργασίας. Η χορήγηση των δοκιμίων πραγματοποιήθηκε από τον ερευνητή στην παρουσία του εκπαιδευτικού που είχε την ευθύνη της τάξης τις συγκεκριμένες περιόδους χορήγησης των δοκιμίων. Πριν από τη συμπλήρωση του δοκιμίου αλγεβρικής σκέψης έγινε η επισήμανση από τον ερευνητή για κάποια θέματα, όπως το ότι όταν κάποιο έργο απαιτούσε επεξήγηση του τρόπου σκέψης ή εργασίας θα έπρεπε να δοθεί για να θεωρείται συμπληρωμένο. Επίσης, έγινε η επισήμανση ότι στην περίπτωση των έργων γενίκευσης ιδιοτήτων των αριθμών εάν οι μαθητές δεν ήταν σε θέση να καταλήξουν σε αιτιολόγηση σύντομα, θα έπρεπε να προχωρήσουν στη συμπλήρωση των υπόλοιπων έργων και να επέστρεφαν στο τέλος στα συγκεκριμένα έργα ώστε να σκεφτούν περισσότερο για κάποια αιτιολόγηση. Πριν από τη συμπλήρωση του δοκιμίου αναλογικού συλλογισμού δόθηκαν οδηγίες από την αρχή και για τα τρία μέρη καθώς και παραδείγματα για κάθε μέρος. Ο λόγος που δόθηκαν οδηγίες και για τα τρία μέρη εξ αρχής ήταν ο διαφορετικός ρυθμός με τον οποίο εργάζονται οι μαθητές. Για τη συμπλήρωση του δοκιμίου αλγεβρικής σκέψης (όπως και στην πιλοτική χορήγηση), δόθηκαν τέσσερις περίοδοι σαράντα λεπτών η καθεμία ενώ για τη συμπλήρωση του δοκιμίου αναλογικού συλλογισμού δόθηκε μια περίοδος σαράντα λεπτών.

Μετά τη χορήγηση, ακολούθησε η διόρθωση των δοκιμίων. Η αναλυτική διόρθωση και βαθμολόγηση των απαντήσεων για το δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης και αναλογικού συλλογισμού παρουσιάζεται σε επόμενο μέρος του κεφαλαίου. Στη συνέχεια, ακολούθησε η καταχώρηση των δεδομένων και ακολούθως οι κατάλληλες στατιστικές αναλύσεις των ποσοτικών δεδομένων.

Στην επόμενη φάση της εργασίας (τέταρτη φάση) πραγματοποιήθηκε η επιλογή υποκειμένων οι οποίοι θα συμμετείχαν στις κλινικές συνεντεύξεις. Η επιλογή των μαθητών έγινε με βάση την προκαταρκτική ποσοτική ανάλυση των δεδομένων από την οποία προέκυψαν τέσσερις ομάδες μαθητών διαφορετικής επίδοσης στα έργα αλγεβρικής σκέψης. Στόχος ήταν συμμετέχουν σε συνεντεύξεις συνολικά περίπου 100 μαθητές, και συγκεκριμένα 25 μαθητές από κάθε ομάδα. Παρόλα αυτά ο τελικός αριθμός μαθητών από κάθε ομάδα διαφοροποιήθηκε ελάχιστα μιας και διαμορφώθηκε με βάση το οποίοι μαθητές ήταν τελικά πρόθυμοι να συμμετέχουν στις συνεντεύξεις. Στις συνεντεύξεις συμμετείχαν συνολικά 103 μαθητές, ωστόσο ο τελικός αριθμός μαθητών των οποίων λήφθηκαν υπόψη οι συνεντεύξεις είναι 101 λόγω του ότι δύο μαθητές δεν συμμετείχαν ιδιαίτερα ενεργά στην επίλυση των έργων της συνέντευξης. Επιπρόσθετα, βάση των αποτελεσμάτων της προκαταρκτικής ανάλυσης των ποσοτικών δεδομένων η οποία έδειξε την πολύ ψηλή συσχέτιση μεταξύ της ικανότητας αναλογικού συλλογισμού και της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης, κατασκευάστηκαν τα έργα τα οποία κλήθηκαν να λύσουν οι μαθητές των τεσσάρων ομάδων στη συνέντευξη. Η λεπτομερής περιγραφή των συγκεκριμένων έργων περιγράφεται στη συνέχεια, στο μέρος για τις κλινικές συνεντεύξεις.

Πραγματοποιήθηκαν ημι-δομημένες κλινικές συνεντεύξεις με μαθητές και των τεσσάρων ομάδων επίδοσης και των τριών τάξεων που συμμετείχαν στην εργασία (Ε΄, Στ΄ δημοτικού και Α΄ γυμνασίου). Στις συνεντεύξεις οι μαθητές κλήθηκαν να λύσουν επτά έργα «αλγεβρικής σκέψης αναλογικού συλλογισμού» (ΕΑΣ) και κάθε συνέντευξη δεν είχε καθορισμένο χρόνο, ωστόσο ο ο χρόνος διάρκειας κάθε συνέντευξης κυμάνθηκε από 25 λεπτά μέχρι και 40 λεπτά. Στόχος των συνεντεύξεων ήταν: (α) Να εξεταστεί ο τρόπος προσέγγισης των τεσσάρων ομάδων μαθητών διαφορετικής ικανότητας αλγεβρικής σκέψης στην επίλυση των έργων ΕΑΣ, (β) Να εξεταστούν οι στρατηγικές και τα λάθη των μαθητών των τεσσάρων ομάδων επίδοσης ώστε να γίνει εφικτή η διαπίστωση της συνάφειας των αποτελεσμάτων της ποσοτικής ανάλυσης και των χαρακτηριστικών που προκύπτουν από τις συνεντεύξεις και η περαιτέρω ενημέρωση για τα λάθη και τις στρατηγικές των μαθητών των τεσσάρων ομάδων οι οποίοι αντιπροσωπεύουν διαφορετικές συμπεριφορές, (γ) Να εξεταστεί κατά πόσο τα έργα ΕΑΣ είναι δυνατό να βοηθήσουν τους μαθητές να επιδείξουν στοιχεία βελτίωσης στην επίδοσή τους στις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης. Στη συνέχεια γίνεται πιο λεπτομερής περιγραφή της διεξαγωγής και των έργων της συνέντευξης.

Στην πέμπτη και τελευταία φάση της εργασίας πραγματοποιήθηκε η τελική ανάλυση των δεδομένων και η εξαγωγή συμπερασμάτων.

Σχεδιασμός Κλινικών Συνεντεύξεων και Κατασκευή των Έργων Αναλογικού Συλλογισμού Αλγεβρική Σκέψης

Στις ημι-δομημένες κλινικές συνεντεύξεις συμμετείχαν μαθητές και από τις τέσσερις ομάδες αλγεβρικής σκέψης που προέκυψαν από την προκαταρκτική ανάλυση των ποσοτικών δεδομένων, στις οποίες οι μαθητές κλήθηκαν να επιλύσουν κάποια έργα. Τα έργα των συνεντεύξεων κατασκευάστηκαν από τον ερευνητή και ενώ αποτελούν νέα έργα, περιλαμβάνουν και στοιχεία τα οποία οι μαθητές κλήθηκαν να λύσουν και το δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης. Αυτό καθιστά εφικτό τον πρώτο σκοπό των συνεντεύξεων, συγκεκριμένα, την περαιτέρω και πιο αναλυτική εξέταση των στρατηγικών και των λαθών που παρουσιάζουν οι μαθητές των τεσσάρων ομάδων κατά την επίλυση έργων αλγεβρικής σκέψης. Με αυτό τον τρόπο επιτεύχθηκε και η μελέτη του κατά πόσο τα αποτελέσματα της ποσοτικής ανάλυσης για τις στρατηγικές, τα λάθη και τις ικανότητες των μαθητών σε έργα αλγεβρικής σκέψης, συνάδουν με τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τα δεδομένα των συνεντεύξεων.

Ο επόμενος σκοπός της διεξαγωγής συνεντεύξεων ήταν αυτός που επηρέασε άμεσα τη δομή των έργων που χρησιμοποιήθηκαν στη συνέντευξη μιας και τα έργα αυτά είχαν τη μορφή των έργων κλασσικών αναλογιών και απαιτούν ξεκάθαρα το να συλλογίζεται κανείς αναλογικά για την επίλυσή τους. Ο δεύτερος σκοπός επομένως ήταν η διερεύνηση του πώς οι μαθητές διαφορετικών ομάδων (διαφορετικής συμπεριφοράς) αλγεβρικής σκέψης προσεγγίζουν τα έργα αναλογικού συλλογισμού συγκεκριμένα στην αλγεβρική σκέψη. Με αυτό τον τρόπου έγινε εφικτή η διερεύνηση των διαφορετικών προσεγγίσεων αναλογικού συλλογισμού.

Βασισμένοι στη σημασία που έχει ο αναλογικός συλλογισμός και άρα ο συλλογισμός και ο εντοπισμός της δομής στην επίδοση έργων αλγεβρικής σκέψης (κάτι που φάνηκε και από τα αποτελέσματα της προκαταρκτικής ανάλυσης των ποσοτικών δεδομένων), κατασκευάστηκαν έργα «αναλογικού συλλογισμού αλγεβρικής σκέψης» (ΕΑΣ) (δείτε Παράρτημα Ε) τα οποία είχαν ως στόχο να επιστήσουν την προσοχή των μαθητών στη δομή. Τα έργα είναι παρόμοιας φιλοσοφίας με αυτά των Lee και Sriraman (2011), τα οποία έχουν τη μορφή κλασσικών αναλογιών Α:Β::Γ:Δ, μόνο που στην παρούσα εργασία παρέχονται μόνο οι δύο όροι (Α και Γ) και τα έργα εμπλέκουν περιεχόμενο που αφορά στην αλγεβρική σκέψη. Για τη συμπλήρωση των όρων που λείπουν (Β και Δ), οι μαθητές κλήθηκαν αφού εξετάσουν τις δύο καταστάσεις των έργων να εξηγήσουν τι θα συμπλήρωναν στους όρους Β και Δ, με τρόπο που να δείχνει ως προς τι είναι αντίστοιχες οι δύο καταστάσεις. Αναμενόταν επίσης, ότι μέσα από συνεχή σύγκριση της πρώτης πιο απλής κατάστασης (η οποία λειτουργούσε ως βάση) με την πιο σύνθετη, οι μαθητές θα άρχιζαν να «αποκωδικοποιούν» και τη δεύτερη πιο σύνθετη κατάσταση, καθιστώντας έτσι πιο εύκολο τον εντοπισμό και αιτιολόγηση της δομικής ομοιότητας των δυο καταστάσεων μέσω γενικεύσεων, επιδεικνύοντας ικανότητα αλγεβρικής σκέψης και αναλογικού συλλογισμού. Η λογική που διέπει επομένως, την κατασκευή των έργων είναι ότι παρέχεται μια πιο εύκολη κατάσταση αρχικά, (ίσως πιο οικεία για τους μαθητές) και μια πιο δύσκολη και οι μαθητές θα πρέπει να σκεφτούν αναλογικά και να εντοπίσουν ως προς τι είναι αντίστοιχες οι δύο καταστάσεις. Η μια από τις δύο καταστάσεις που περιλαμβάνεται σε κάθε έργο είναι κατάσταση η οποία δόθηκε και στο γραπτό τεστ αλγεβρικής σκέψης.

Η ανάλυση των δεδομένων των συνεντεύξεων, αποσκοπούσε στο να μας ενημερώσει κατά πόσο οι μαθητές που επιτυγχάνουν στην αλγεβρική σκέψη (με βάση το τεστ επίδοσης) είναι αυτοί που μπορούν να συλλογίζονται αναλογικά στο πλαίσιο της αλγεβρικής σκέψης και να εστιάζουν στη δομή. Υπάρχει επομένως, η δυνατότητα αναλυτικής εξέτασης για το πού εστιάζουν οι μαθητές διαφορετικών ομάδων αλγεβρικής σκέψης και τι τους διευκολύνει ή τους εμποδίζει στο να επιτυγχάνουν σε έργα αλγεβρικής σκέψης. Αφετέρου αναμένεται να μας ενημερώσει στο κατά πόσο τα συγκεκριμένα έργα ενθαρρύνουν τους μαθητές (κυρίως τους μαθητές των ομάδων με μέτρια και χαμηλή επίδοση αλγεβρικής σκέψης) να σκεφτούν και να εμπλακούν περισσότερο στα έργα αλγεβρικής σκέψης.

Κάποια παραδείγματα των έργων αυτών παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.3, ενώ όλα τα έργα της συνέντευξης παρουσιάζονται τόσο στο Παράρτημα Ε, όσο και στο μέρος των αποτελεσμάτων των συνεντεύξεων. Τα έργα αυτά κατασκευάστηκαν έχοντας ως στόχο να εξετάσουν την ικανότητα των μαθητών να εστιάζουν στη δομή (και να εντοπίζουν ανάλογες/αντίστοιχες σχέσεις, ιδιότητες) και όχι στα επιφανειακά χαρακτηριστικά των έργων. Τα τελικά έργα ΕΑΣ τα οποία κλήθηκαν να λύσουν οι μαθητές ήταν επτά και αφορούσαν στις οκτώ ικανότητες αλγεβρικής σκέψης. Για την κατασκευή των έργων λήφθηκε υπόψη η δομή των έργων των Lee και Sriraman (2011) και μερικές ιδέες από τα έργα των English & Sharry (1996) και του Radford (2008).

Η διάρκεια κάθε συνέντευξης δεν ήταν προκαθορισμένη και διαφοροποιήθηκε ανάλογα με τις ικανότητες των μαθητών. Πριν την έναρξη της συνέντευξης προηγήθηκε μια συζήτηση με το μαθητή ώστε να κατανοήσει το ζητούμενο των έργων ΕΑΣ. Στις περιπτώσεις όπου ο μαθητής άρχιζε την επίλυση κάποιου έργου ΕΑΣ με μια λανθασμένη αντίληψη ή κάποια δυσκολία αλλά στην πορεία της συνέντευξης επιδείκνυε βελτίωση στην επίδοσή του, ο ερευνητής καλούσε τον μαθητή να αναφέρει τι ήταν αυτό που τον βοήθησε να ξεπεράσει τη δυσκολία ή να διορθώσει τη λανθασμένη αντίληψη.

Πίνακας 3.3

Παραδείγματα Έργων ΕΑΣ των Συνεντεύξεων

Έργο για την ικανότητα γενίκευσης μοτίβων/σχέσεων συμμεταβολής

Να εξηγήσεις ως προς τι είναι αντίστοιχες οι δύο πιο κάτω καταστάσεις.

Α Ο Ηλίας εργάζεται σε μια εταιρία, φτιάχνει τετράγωνα πλακάκια και πληρώνεται στο τέλος κάθε εβδομάδας. Παίρνει σίγουρα 100 ευρώ την εβδομάδα αλλά και 3 ευρώ για κάθε επιπρόσθετη ώρα που εργάζεται μέσα στην εβδομάδα. Την ερχόμενη εβδομάδα θα εργαστεί ν επιπρόσθετες ώρες.

Β

Γ

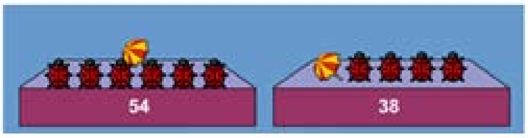
1 τετράγωνο **2 τετράγωνα** **3 τετράγωνα** **…** **ν τετράγωνα**

Δ

Έργο για την ικανότητα αντίληψης και εύρεσης της τιμής του αγνώστου

Να εξηγήσεις τι συμβαίνει στην πρώτη κατάσταση που είναι αντίστοιχο με αυτό που συμβαίνει στη δεύτερη κατάσταση.

Α



Β

Γ

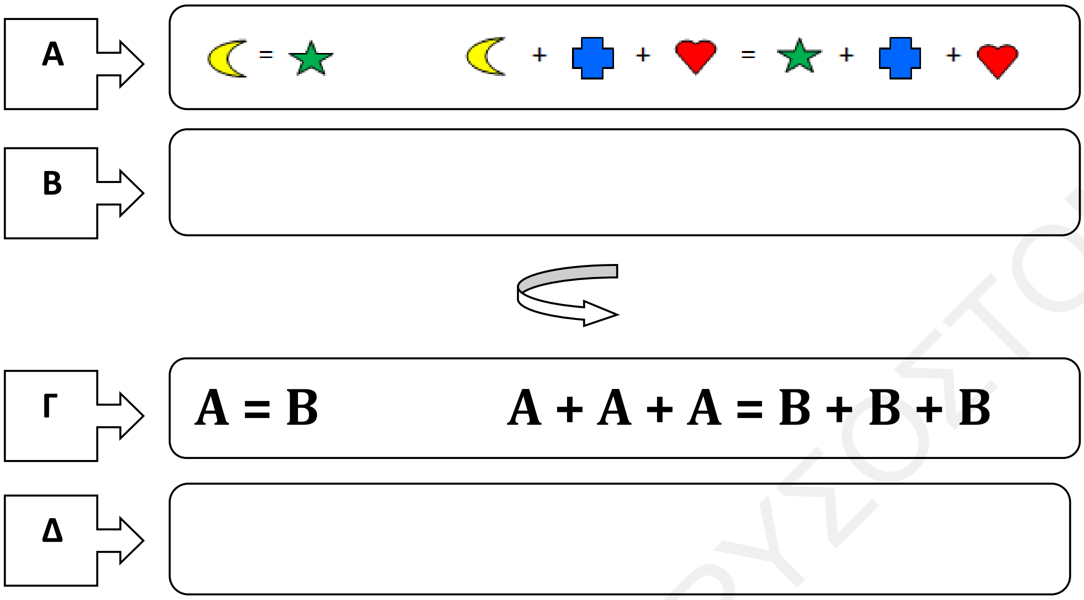
Α+Α+Β=14

Α+Α+Α+Α+Β=26

Δ

Έργο για την ικανότητα συλλογισμού για τις ιδιότητες της ισότητας

Να εξηγήσεις ως προς τι είναι αντίστοιχες οι δύο πιο κάτω καταστάσεις.



Ανάλυση των δεδομένων

Η συλλογή των δεδομένων πραγματοποιήθηκε μέσα από χορήγηση γραπτών δοκιμίων αλλά και μέσα από τη διεξαγωγή κλινικών συνεντεύξεων, επομένως υπήρξε συνδυασμός ποσοτικών και ποιοτικών μεθόδων (Kelly & Lesh, 2000). Για το λόγο αυτό, χρησιμοποιήθηκαν διαφορετικές τεχνικές για την ανάλυση των ποσοτικών και των ποιοτικών δεδομένων.

Τεχνικές ανάλυσης ποσοτικών δεδομένων

Για την ανάλυση των δεδομένων που προέκυψαν από τα δύο εργαλεία πραγματοποιήθηκαν διαφορετικές αναλύσεις ώστε να είναι εφικτή η μελέτη και απάντηση των ερευνητικών ερωτημάτων που τέθηκαν και περιγράφηκαν πιο πάνω. Για την ανάλυση των ποσοτικών δεδομένων χρησιμοποιήθηκε κυρίως το λογισμικό γραμμικής δομικής ανάλυσης Mplus (Muthen & Muthen, 1998-2012) και το στατιστικό πακέτο SPSS.

Για την απάντηση των ερωτημάτων της εργασίας εξετάστηκε ο βαθμός προσαρμογής μοντέλων επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης (CFA: Confirmatory Factor Analysis), μοντέλων ανάλυσης ομάδων (Latent Class) και δομικών μοντέλων (Structural Models). Η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση πραγματοποιήθηκε για τον έλεγχο της καταλληλότητας των εργαλείων μέτρησης και των προτεινόμενων μοντέλων σύνθεσης των ικανοτήτων αλγεβρικής σκέψης και του αναλογικού συλλογισμού. Μέσα από την επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση έγινε εφικτή εξέταση του βαθμού προσαρμογής των δεδομένων της παρούσας εργασίας στη δομή των προτεινόμενων μοντέλων. Η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση εφαρμόστηκε σε ολόκληρο το δείγμα των μαθητών, αλλά μέσω της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης πολλαπλών ομάδων (multiple group confirmatory factor analysis) εξετάστηκε η προσαρμογή του και για κάθε τάξη μαθητών ('Ε και Στ' δημοτικού και Α' γυμνασίου) ταυτόχρονα, ώστε να εξεταστεί η σταθερότητα του μοντέλου σε διαφορετικές ηλικιακές ομάδες. Για τον έλεγχο του βαθμού προσαρμογής των μοντέλων χρησιμοποιήθηκαν τρεις δείκτες: (α) ο δείκτης comparative fit index (CFI) όπου μια τιμή μεγαλύτερη από .95 δείχνει καλή προσαρμογή, (β) ο δείκτης RMSEA του οποίου η τιμή πρέπει να είναι μικρότερη από .8 ενώ για να υποδηλώνει πολύ καλή προσαρμογή πρέπει να είναι μικρότερη από .5 και (γ) ο λόγος x^2 προς τους βαθμούς ελευθερίας του μοντέλου (x^2/df) του οποίου η τιμή πρέπει να είναι μικρότερη από το δύο (MacCallum, Browne & Sugawara, 1996; Marcoulides & Schumacker, 1996).

Για τον εντοπισμό κατηγοριών (ομάδων) μαθητών οι οποίες αντιπροσωπεύουν διαφορετικά επίπεδα αλγεβρικής σκέψης πραγματοποιήθηκε ανάλυση latent class (LCA) η οποία επιτρέπει τον εντοπισμό ομάδων ατόμων με παρόμοια συμπεριφορά (Marcoulides & Schumacker, 1996). Αρχικά εξετάστηκαν τα μοντέλα με δύο, τρεις ,τέσσερις και πέντε ομάδες και εξετάστηκε σε ποια από αυτά εμφανιζόταν επανάληψη της καλύτερης τιμής του Loglikelihood αρκετές φορές, κάτι που αποτελεί προϋπόθεση ώστε να προχωρήσουμε σε περαιτέρω έλεγχο των δεικτών του μοντέλου (AIC, BIC). Η απόφαση για τον αριθμό ομάδων βασίστηκε (α) στις τιμές AIC και BIC των μοντέλων με βάση τις οποίες το καλύτερο μοντέλο θεωρείται αυτό με τις χαμηλότερες τιμές AIC και BIC και (β) λήφθηκαν υπόψη τα αποτελέσματα των δύο άλλων τεστ που παρέχονται στην ανάλυση latent class, τα οποία περιλαμβάνονται στο TECH 11 και στο TECH 14 (Asparouhov & Muthén, 2012) όπου πραγματοποιείται έλεγχος-σύγκριση του μοντέλου ν ομάδων με το μοντέλο ν-1 ομάδων. Σύμφωνα με τους Asparouhov και Muthén (2012), συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του TECH 11 και TECH 14, λαμβάνουμε περισσότερο υπόψη μας τα αποτελέσματα του TECH 14 .

Με τον έλεγχο εγκυρότητας γραμμικών δομικών μοντέλων στόχος ήταν να εξεταστεί η ύπαρξη αιτιατών σχέσεων μεταξύ των παραγόντων της εργασίας, δηλαδή της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης και του αναλογικού συλλογισμού. Εξετάστηκε (α) η εγκυρότητα ενός δομικού μοντέλου όπου η ικανότητα αναλογικού συλλογισμού προβλέπει την επίδοση στις τρεις ικανότητες-παράγοντες δεύτερης τάξης του μοντέλου αλγεβρικής σκέψης, (β) η εγκυρότητα ενός δομικού μοντέλου όπου η ικανότητα αλγεβρικής σκέψης προβλέπει την επίδοση στις τρεις ικανότητες-παράγοντες πρώτης τάξης του μοντέλου αναλογικού συλλογισμού και (γ) ένα μοντέλο όπου η ικανότητα αλγεβρικής σκέψης και η ικανότητα αναλογικού συλλογισμού αποτελούσαν παράγοντες μιας πιο γενικής ικανότητας (ενός άλλου παράγοντα υψηλότερης τάξης). Επιπρόσθετα, με τον έλεγχο εγκυρότητας γραμμικών δομικών μοντέλων εξετάστηκε η σχέση μεταξύ των παραγόντων της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης και πιο συγκεκριμένα οι σχέσεις μεταξύ των ικανοτήτων πρώτης τάξης που ανήκουν στον ίδιο παράγοντα δεύτερης τάξης.

Εφαρμόστηκε επίσης, παραμετρική στατιστική με τη βοήθεια του στατιστικού πακέτου SPSS. Στόχος εδώ ήταν η εύρεση των μέσων τιμών και των τυπικών αποκλίσεων των απαντήσεων των μαθητών στα διάφορα έργα των δύο δοκιμίων. Με την ανάλυση διασποράς (ANOVA) και την ανάλυση πολλαπλής ανάλυσης διασποράς (MANOVA) επιτεύχθηκε (α) η διερεύνηση τυχόν στατιστικά σημαντικών διαφορών ανάμεσα στις διαφορετικές ηλικιακές ομάδες ως προς την επίδοση στις διαφορετικές ικανότητας αλγεβρικής σκέψης αλλά και στη γενική ικανότητα αλγεβρικής σκέψης και στη γενική ικανότητα αναλογικού συλλογισμού και (β) η διερεύνηση τυχόν στατιστικά σημαντικών διαφορών ανάμεσα στις διαφορετικές ομάδες μαθητών αλγεβρικής σκέψης (οι οποίες προέκυψαν από την ανάλυση latent class) ως προς την επίδοση στις διαφορετικές ικανότητες αλγεβρικής σκέψης αλλά και στη γενική ικανότητα αλγεβρικής σκέψης και στη γενική ικανότητα αναλογικού συλλογισμού.

Τεχνικές ανάλυσης ποιοτικών δεδομένων

Για την καλύτερη περιγραφή των διαφορετικών ομάδων αλγεβρικής σκέψης και τη διερεύνηση της ικανότητας των μαθητών να εφαρμόζουν τον αναλογικό συλλογισμό συγκεκριμένα σε έργα αλγεβρικής σκέψης, πραγματοποιήθηκε ανάλυση των συνεντεύξεων. Η ανάλυση των συνεντεύξεων έγινε με τη μέθοδο της σταθερής σύγκρισης (Constant Comparative method) (Miles & Huberman, 1994). Η μέθοδος της σταθερής σύγκρισης εμπλέκει την ανάλυση των δεδομένων σε διακριτά «περιστατικά» ή σε «μονάδες» (Lincoln & Guba, 1985) και την κωδικοποίησή τους σε κατηγορίες. Η διαδικασία της σταθερής σύγκρισης «ενεργοποιεί» τη σκέψη η οποία οδηγεί τόσο σε περιγραφικές κατηγορίες όσο και σε επεξηγηματικές κατηγορίες (Lincoln & Guba, 1985, pp. 334-341). Με τη μέθοδο αυτή εντοπίζονται «μονάδες» λέξεων και φράσεων οι οποίες υποδεικνύουν αντιλήψεις, στρατηγικές και παρανοήσεις ή συνηθισμένα λάθη των μαθητών, διαμορφώνονται κατηγορίες με νόημα, διερευνώνται σχέσεις και περιγράφεται η συμπεριφορά των μαθητών. Η εφαρμογή της μεθόδου της σταθερής σύγκρισης περιλαμβάνει τέσσερα στάδια: (α) την κωδικοποίηση κατηγοριών επαγωγικά και την ταυτόχρονη σύγκριση των «μονάδων» νοήματος κατά μήκος των κατηγοριών, (β) τη βελτίωση-τελειοποίηση των κατηγοριών, (γ) τη διερεύνηση σχέσεων και μοτίβων κατά μήκος των κατηγοριών και (δ) την ενσωμάτωση των δεδομένων αποδίδοντας κατανόηση των ατόμων και των πλαισίων που μελετώνται (Denzin & Lincoln, 2000).

Διόρθωση των Εργαλείων Μέτρησης

Στο παράρτημα Ι παρουσιάζεται ολοκληρωμένο το δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης από το οποίο προέκυψαν οι μεταβλητές που αναφέρονται στη συνέχεια. Δίπλα από τον αριθμό του κάθε έργου στο δοκίμιο, αναγράφεται η μεταβλητή στην οποία αντιστοιχεί το έργο. Κάθε μεταβλητή προέκυψε από το σκορ επίδοσης σε ένα έργο. Στην περίπτωση που το έργο όπως αυτό παρουσιάζεται στο δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης στο παράρτημα, έχει δύο ή περισσότερα ερωτήματα, τότε η μεταβλητή για το συγκεκριμένο έργο προέκυψε από την άθροιση της βαθμολόγησης των ερωτημάτων του έργου. Για παράδειγμα αν το έργο 6 παρουσιάζεται στο δοκίμιο να έχει δύο ερωτήματα, τότε από το σκορ των μαθητών σε εκείνα τα δύο ερωτήματα προέκυψε η μεταβλητή για το έργο 6. Μόνη εξαίρεση αποτελεί η μεταβλητή «Μο3» η οποία αντιστοιχεί στη μοντελοποίηση σχέσεων μέσω κανόνων με αλγεβρικά σύμβολα και η οποία προέκυψε από τρία ερωτήματα που περιλαμβάνονταν σε διαφορετικά έργα (9β, 20 και 22ε), έτσι και στο παράρτημα δίπλα από κάθε ερώτημα (9β, 20 και 22ε), αναγράφεται ο κωδικός «Μο3». Στη συνέχεια παρουσιάζεται αναλυτικά η βαθμολόγηση των έργων αλλά και των ερωτημάτων στην περίπτωση όπου το έργο περιλάμβανε ερωτήματα.

Στα έργα γενίκευσης μοτίβων συμμεταβολής (Gf1, Gf2, Gf3) (δείτε Παράρτημα Α), περιλαμβάνονταν ερωτήματα όπου ο μαθητής έπρεπε να συμπληρώσει έναν αριθμό εντοπίζοντας τους επόμενους όρους του μοτίβου ή έναν πολύ μεγάλο όρο. Στην περίπτωση των ερωτημάτων αυτών, αποδόθηκαν οι τιμές ένα και μηδέν για τις ορθές και λανθασμένες απαντήσεις, αντίστοιχα. Στο πρώτο και τρίτο έργο γενίκευσης μοτίβου (Gf1 και Gf3) υπήρχε και μια δεύτερη περίπτωση ερωτημάτων, όπου οι μαθητές καλούνταν να εκφράσουν με λόγια τη γενίκευση του συναρτησιακού κανόνα. Στις περιπτώσεις αυτές αποδόθηκε η τιμή μηδέν για τις λανθασμένες απαντήσεις, η τιμή 0.5 όταν οι μαθητές υιοθέτησαν την προσέγγιση της συμμεταβολής ως γενίκευση του κανόνα (π.χ. όσο το ψ αυξάνεται κατά ένα το χ αυξάνεται κατά τρία) και η τιμή ένα στις περιπτώσεις όπου οι μαθητές διατύπωσαν τον κανόνα αντιστοιχίας (πολλαπλασιάζω το χ επί τρία και προσθέτω ένα για να βρω το ψ).

Στις περιπτώσεις των έργων απλοποίησης αλγεβρικών εκφράσεων (Sm1, Sm2, Sm3), αποδόθηκαν οι τιμές ένα και μηδέν για τις ορθές και λανθασμένες απαντήσεις αντίστοιχα. Στο δεύτερο έργο (Sm2) αποδόθηκε και η τιμή 0.5 στις περιπτώσεις που ο μαθητής εκτελούσε κάποια πράξη με τα αλγεβρικά σύμβολα, ωστόσο, η απάντησή του δεν ήταν στην πιο απλοποιημένη της μορφή. Παρόμοια, στην περίπτωση του πρώτου έργου (Sm1) εκτός από τις τιμές ένα και μηδέν για τις ορθές και λανθασμένες απαντήσεις αντίστοιχα, αποδόθηκε η τιμή 0.25 όταν ο μαθητής εκτελούσε κάποιες πράξεις μεταξύ των αριθμών όμως παρέλειψε να χρησιμοποιήσει το σύμβολο της πρόσθεσης μεταξύ του αλγεβρικού συμβόλου και του αριθμού (π.χ. έδινε ως απάντηση Τ3 αντί Τ+3) και στην περίπτωση που ο μαθητής διατύπωνε την αλγεβρική έκφραση ορθά επιδεικνύοντας κατανόηση του ότι οι αριθμοί προσθέτονται στο αλγεβρικό σύμβολο, αλλά δεν παρουσιαζόταν προσπάθεια απλοποίησης (π.χ. σημείωνε Τ-1+4 αντί για Τ+3).

Στα έργα επίλυσης εξισώσεων όπου οι μαθητές κλήθηκαν να συμπληρώσουν την τιμή του αγνώστου (Se1, Se2) αποδόθηκε η τιμή ένα και μηδέν για τις ορθές και λανθασμένες απαντήσεις αντίστοιχα. Στην περίπτωση του τρίτου έργου (Se3) όπου οι μαθητές καλούνταν να εντοπίσουν την τιμή του αγνώστου και να εξηγήσουν πώς έλυσαν την εξίσωση αποδόθηκαν οι εξής τιμές: (α) μηδέν στις περιπτώσεις που ο μαθητές δεν κατέληξε στην σωστή τιμή για τον άγνωστο, (β) την τιμή 0.5 στις περιπτώσεις που ο μαθητής βρήκε τη σωστή τιμή για τον άγνωστο άλλα δεν αιτιολόγησε/επεξήγησε τον τρόπο που εργάστηκε και (γ) την τιμή ένα στις περιπτώσεις που οι μαθητές βρήκαν την ορθή τιμή του αγνώστου και αιτιολόγησαν τον τρόπο που εργάστηκαν ή σκέφτηκαν για να καταλήξουν στη συγκεκριμένη τιμή. Στο τέταρτο έργο (Si4) για την επίλυση της ανίσωσης αποδόθηκαν οι εξής τιμές: (α) 0.25 όταν ο μαθητής έβαλε σε κύκλο την ορθή επιλογή ωστόσο η αιτιολόγηση ήταν λανθασμένη, (β) 0.5 στην περίπτωση όπου ο μαθητής έβαλε σε κύκλο την ορθή επιλογή αλλά δεν έδωσε κάποια αιτιολόγηση, (γ) 0.75 στην περίπτωση που ο μαθητής επέλεξε την ορθή απάντηση και έδωσε μια αιτιολόγηση η οποία όμως δεν ήταν πλήρης ή ολοκληρωμένη, (δ) η τιμή ένα όταν ο μαθητής έβαλε σε κύκλο την ορθή επιλογή και έδωσε μια ολοκληρωμένη αιτιολόγηση και (ε) η τιμή μηδέν όταν ο μαθητής έβαλε σε κύκλο λανθασμένη επιλογή. Ακριβώς ίδιος τρόπος βαθμολόγησης υιοθετήθηκε και για άλλα έργα τα οποία απαιτούσαν από το μαθητή να βάλει σε κύκλο την ορθή απάντηση και να αιτιολογήσει την απάντησή του. Τα έργα αυτά είναι τα δύο έργα γενίκευσης ιδιοτήτων της ισότητας (Ge2, Ge3), και το δεύτερο έργο μεταβολής των τιμών της εξαρτημένης σε σχέση με την ανεξάρτητη σε γραφική παράσταση (Vf2).

Στο έργο γενίκευσης ιδιοτήτων της ισότητας που απομένει (Ge1, μιας και τα Ge2, G3 προαναφέρθηκαν) αποδόθηκε η τιμή ένα όταν συμπληρώθηκαν ορθά και οι τρεις προτάσεις, 0.66 όταν συμπληρώθηκαν ορθά οι δύο προτάσεις, η τιμή 0.33 όταν συμπληρώθηκε ορθά μόνο η μία πρόταση και η τιμή μηδέν όταν δεν συμπληρώθηκε ορθά καμία πρόταση.

Σε όλα τα έργα μοντελοποίησης σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων, είτε καλούσαν τους μαθητές να μεταφράσουν τη λεκτική περιγραφή και να διατυπώσουν οι ίδιοι την αλγεβρική έκφραση, εξίσωση ή συναρτησιακό κανόνα ή να εντοπίσουν την ορθή αλγεβρική έκφραση ή εξίσωση ανάμεσα σε διάφορες επιλογές, βαθμολογήθηκαν με ένα ή μηδέν, για τις ορθές και λανθασμένες απαντήσεις αντίστοιχα. Εξαίρεση αποτελεί μόνο η περίπτωση του έργου 25 διατύπωσης προβλήματος για μια συγκεκριμένη αλγεβρική εξίσωση, όπου αποδόθηκαν οι εξής τιμές: (α) η τιμή μηδέν στην περίπτωση που το πρόβλημα ήταν λανθασμένο, (β) 0.5 στην περίπτωση που ο μαθητής ερμήνευσε ορθά τα στοιχεία της εξίσωσης ωστόσο παρέλειψε να διατυπώσει την ερώτηση για το πρόβλημα ή κάποιο άλλο στοιχείο, και (γ) η τιμή ένα στην περίπτωση που ο μαθητής διατύπωσε ένα ολοκληρωμένο ορθό πρόβλημα το όποιο αναπαριστά την αλγεβρική εξίσωση που δόθηκε.

Στα υπόλοιπα έργα μεταβολής των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με την ανεξάρτητη (Vf1, Vf3, Vf4), υιοθετήθηκε διαφορετικός τρόπος βαθμολόγησης από ότι στο δεύτερο έργο της συγκεκριμένη ικανότητας το οποίο προαναφέρθηκε (Vf2). Για το έργο κατασκευής γραφικής παράστασης με βάση πίνακα δεδομένων για αναπαράσταση της συμμεταβολής αποδόθηκε η τιμή ένα για την ορθή γραμμική γραφική παράσταση, η τιμή 0.75 στις περιπτώσεις όπου οι μαθητές τοποθέτησαν ορθά όλα τα σημεία και φαίνεται η σχέση των δύο μεταβλητών αλλά δεν σχημάτισαν την ευθεία, η τιμή 0.5 στις περιπτώσεις όπου η τελική γραφική παράσταση περιλάμβανε ευθύγραμμα τμήματα τα οποία είχαν σχηματίσει οι μαθητές για να εντοπίσουν τα σημεία αλλά το μόνο φαινόταν είναι τα ευθύγραμμα τμήματα χωρίς να επισημαίνονται ξεκάθαρα τα σημεία, η τιμή 0.25 όπου οι μαθητές έδειχναν να λαμβάνουν υπόψη τους τα δεδομένα του πίνακα αλλά η γραφική παράσταση ήταν κάποιο ραβδόγραμμα και η τιμή μηδέν για τις εντελώς λανθασμένες γραφικές παραστάσεις που δεν είχαν κανένα νόημα. Στο τρίτο έργο (Vf3), στο ερώτημα αντικατάστασης τιμών στο συναρτησιακό κανόνα αποδόθηκαν οι τιμές ένα αν οι μαθητές έδειχναν να μεταβάλλουν την τιμή της μίας μεταβλητής για να εντοπίσουν τη δεύτερη μεταβλητή, η τιμή 0.5 όταν αντικαθιστούσαν ορθά μόνο μια τιμή και η τιμή μηδέν για τις λανθασμένες απαντήσεις. Στο ερώτημα του ίδιου έργου για το συλλογισμό για τη σχέση μεταβολής των δύο μεταβλητών και επεξήγηση, αποδόθηκε η τιμή ένα για την ορθή απάντηση η οποία συνοδευόταν από ολοκληρωμένη επεξήγηση με βάση τη δομή του αλγεβρικού κανόνα, η τιμή 0.5 αν η απάντηση ήταν ορθή αλλά δεν συνοδευόταν από επεξήγηση ή η επεξήγηση ήταν απλά η αναφορά σε αριθμητικό παράδειγμα και η τιμή μηδέν όταν η απάντηση ήταν λανθασμένη. Στο τέταρτο έργο (Vf4) και συγκεκριμένα, στα ερωτήματα για τη μεταβολή τιμών της εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής με βάση λεκτικά διατυπωμένους κανόνες σε εντελώς ασυμπλήρωτους πίνακες, αποδόθηκε η τιμή ένα για κάθε ορθά συμπληρωμένο πίνακα και υπήρχε αφαίρεση της τιμής 0.17 για κάθε λανθασμένο συνδυασμό τιμών (μιας και οι γραμμές του πίνακα ήταν έξι). Στο ερώτημα του ίδιου έργου για το συλλογισμό και επεξήγηση του ποιος από τους δύο κανόνες αποτελεί καλύτερη λύση αποδόθηκε η τιμή ένα για την ορθή απόφαση η οποία συνοδευόταν από επεξήγηση και βασιζόταν στη δομή των κανόνων, η τιμή 0.5 για την ορθή απόφαση η οποία δεν συνοδευόταν από επεξήγηση και η τιμή μηδέν για τη λανθασμένη απόφαση.

Στα έργα γενίκευσης των ιδιοτήτων των αριθμών (Gn1,Gn2, Gn3) αποδόθηκε: (α) η τιμή ένα στην περίπτωση που ο μαθητής κατέληξε σε γενίκευση και η αιτιολόγησή του ήταν πλήρης (βασιζόταν σε σκέψη και εννοιολογική κατανόηση και όχι σε αριθμητικά παραδείγματα), (β) η τιμή 0.75 όπου ο μαθητής κατέληξε σε γενίκευση και η αιτιολόγησή του βασιζόταν σε σκέψη και εννοιολογική κατανόηση αλλά παρέλειψε κάποιο στοιχείο με αποτέλεσμα να μην είναι πλήρης, (γ) η τιμή 0.5 στις περιπτώσεις όπου ο μαθητής κατέληγε σε ορθή γενίκευση αλλά η αιτιολόγησή του βασιζόταν σε αριθμητικά παραδείγματα, (δ) η τιμή 0.25 στις περιπτώσεις όπου ο μαθητής ανάφερε το σωστό συμπέρασμα αλλά η αιτιολόγηση βασιζόταν σε λανθασμένο λόγο και (ε) η τιμή μηδέν όταν ο μαθητής κατέληγε σε λάθος γενίκευση αναφέροντας λανθασμένο συμπέρασμα.

Στα έργα γενίκευσης των ιδιοτήτων των πράξεων (Go1, Go2, Go3, Go4) υιοθετήθηκε επίσης, μια λεπτομερής βαθμολόγηση των απαντήσεων. Στο έργο όπου οι μαθητές καλούνταν να συμπληρώσουν το κενό σε δύο μαθηματικές προτάσεις και να εξηγήσουν τον τρόπο που σκέφτηκαν (Go1), αποδόθηκαν οι εξής τιμές: (α) η τιμή ένα στην περίπτωση όπου ο μαθητής συμπλήρωσε ορθά το κενό αλλά αιτιολόγησε πλήρως τον τρόπο που σκέφτηκε κάνοντας αναφορά στο προσθετικό και πολλαπλασιαστικό αντίστροφο αντίστοιχα και (β) η τιμή μηδέν στην περίπτωση που ο μαθητής συμπλήρωσε λανθασμένα το κενό ή ορθά αλλά δεν αιτιολόγησε την απάντησή του κάτι που υποδεικνύει ότι πολύ πιθανό να βρήκε την απάντηση μέσα από υπολογισμούς με τους αριθμούς. Σύμφωνα με τον Kaput (2008), γενίκευση των ιδιοτήτων πράξεων και αλγεβρικής σκέψη έχουμε στην περίπτωση όπου ο μαθητής αναφέρεται ξεκάθαρα στην ιδιότητα που χρησιμοποιεί με γενικό τρόπο και όχι όταν την χρησιμοποιεί σε έργα με συγκεκριμένους αριθμούς αυθόρμητα. Για αυτό το λόγο, αν η ορθή απάντηση δεν συνοδευόταν από ξεκάθαρη αναφορά στο προσθετικό η πολλαπλασιαστικό αντίστροφο τότε η βαθμολογία που της αντιστοιχούσε ήταν το μηδέν. Στο έργο για τη γενίκευση και συλλογισμό για την αντιμεταθετική ιδιότητα (Go2), στο πρώτο ερώτημα για το αν οι δύο μαθηματικές προτάσεις θα έδιναν το ίδιο αποτέλεσμα αποδόθηκε η τιμή ένα στις περιπτώσεις όπου ο μαθητής απαντούσε ορθά και διατύπωνε μια γενικευμένη δήλωση για την αντιμεταθετική ιδιότητα, η τιμή 0.75 στις περιπτώσεις όπου ο μαθητής απαντούσε ορθά και διατύπωνε μια γενίκευση η οποία όμως δεν ήταν ολοκληρωμένη, η τιμή 0.5 στις περιπτώσεις όπου ο μαθητής απαντούσε ορθά αλλά δεν επεξηγούσε καθόλου την απάντησή του και επομένως δεν υπήρχε καμιά αναφορά στην αντιμεταθετική ιδιότητα ή στην περιγραφή της αντιμεταθετικής ιδιότητας, η τιμή 0.25 όταν ο μαθητής απαντούσε ορθά αλλά η επεξήγηση ήταν λανθασμένη και η τιμή μηδέν όταν η απάντηση του μαθητή ήταν λανθασμένη. Στο δεύτερο ερώτημα του έργου (Go2) η απάντηση βαθμολογήθηκε: (α) με ένα, αν ο μαθητής ανέφερε ότι η αντιμεταθετική ιδιότητα ισχύει και στις τρεις περιπτώσεις αριθμών και παρείχε πλήρη επεξήγηση, (β) με 0.80 αν ο μαθητής ανέφερε ότι ισχύει και στις τρεις περιπτώσεις αριθμών αλλά έδινε μόνο ελάχιστα αριθμητικά παραδείγματα ως επεξήγηση, (γ) με 0.6 αν ο μαθητής ανέφερε ότι θα ισούνται μόνο σε δύο από τις τρεις περιπτώσεις αριθμών (π.χ. ακεραίους και κλάσματα) και παρείχε αριθμητικά παραδείγματα, (δ) η τιμή 0.4 αν ο μαθητής ανέφερε ότι ισχύει μόνο σε μια περίπτωση αριθμών (π.χ. ακεραίους) και παρείχε αριθμητικά παραδείγματα, (ε) η τιμή 0.20 αν ο μαθητής ανέφερε απλά ότι οι δύο προτάσεις θα έδιναν το ίδιο αποτέλεσμα, χωρίς να απαντά το ερώτημα στο σε ποιες περιπτώσεις αριθμών ισχύει το συμπέρασμα και (στ) η τιμή μηδέν στις περιπτώσεις όπου ο μαθητής απάντησε λανθασμένα λέγοντας ότι οι δύο προτάσεις δεν θα έδιναν το ίδιο αποτέλεσμα. Στο έργο για το αν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στη διαίρεση (Go3) αποδόθηκε η τιμή ένα στην περίπτωση που ο μαθητής έδωσε την ορθή απάντηση και επεξήγησε μέσω της χρήσης γενικευμένης δήλωσης, η τιμή 0.75 στην περίπτωση που ο μαθητής απάντησε ορθά αλλά χρησιμοποίησε μόνο αριθμητικά παραδείγματα για την αιτιολόγηση, η τιμή 0.5 στην περίπτωση που δόθηκε η ορθή απάντηση χωρίς καθόλου αιτιολόγηση, η τιμή 0.25 στην περίπτωση που δόθηκε η ορθή απάντηση αλλά λανθασμένη αιτιολόγηση και η τιμή μηδέν όταν η απάντηση ήταν λανθασμένη. Στο έργο γενίκευσης και συλλογισμού για την επιμεριστική ιδιότητα (Go4) αποδόθηκε: (α) η τιμή ένα στην περίπτωση που ο μαθητής έδινε την ορθή απάντηση αλλά παράλληλα επεξηγούσε μέσω γενικευμένης δήλωσης την απάντηση του ή αναφερόταν ξεκάθαρα στην επιμεριστική ιδιότητα, (β) η τιμή 0.75 όταν ο μαθητής έδινε ορθή απάντηση και ορθή αιτιολόγηση η οποία ωστόσο δεν ήταν ολοκληρωμένη, (γ) η τιμή 0.5 στις περιπτώσεις όπου ο μαθητής έδινε την ορθή απάντηση αλλά δεν έδινε επεξήγηση, (δ) η τιμή 0.25 στις περιπτώσεις όπου ο μαθητής έδινε ορθή απάντηση αλλά η αιτιολόγηση ήταν λανθασμένη και (ε) η τιμή μηδέν στις περιπτώσεις που η απάντηση ήταν λανθασμένη ή ακόμη και ορθή, αλλά φάνηκε ότι ο μαθητής κατέφυγε στον εκτέλεση των πράξεων με τους αριθμούς.

Εκτός από την αναλυτική βαθμολόγηση για το σκορ επίδοσης και τις ορθές ή λανθασμένες απαντήσεις, σε κάποια έργα υπήρξε κωδικοποίηση των στρατηγικών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές (έργα γενίκευσης μοτίβων Gf1, Gf3, έργα επίλυσης εξισώσεων Se2, Se3) ή του λάθους που εμφάνισαν (έργα απλοποίησης αλγεβρικών εκφράσεων Sm1, Sm2, Sm3, έργο επίλυσης ανίσωσης Si4, έργο μεταβολής των τιμών των δύο μεταβλητών σε γραφική παράσταση Vf2).

Στην περίπτωση του δοκιμίου μέτρησης της ικανότητας αναλογικού συλλογισμού τα έργα και στα τρία μέρη βαθμολογήθηκαν με ένα ή μηδέν για τις ορθές και λανθασμένες απαντήσεις, αντίστοιχα. Αξίζει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση του τρίτου μέρους που αφορούσε στις αριθμητικές αναλογίες, η απάντηση κρίθηκε ορθή και βαθμολογήθηκε με ένα, μόνο αν η επιλογή της ορθής απάντησης συνοδευόταν και από συμπλήρωση της πράξης που αξιοποίησαν οι μαθητές για την επιλογή της συγκεκριμένης απάντησης. Επιπρόσθετα, στα έργα λεκτικών αναλογιών (δείτε Παράρτημα Δ) στα οποία θα έπρεπε να συμπληρωθούν δύο κενά (και όχι ένα όπως στις περισσότερες περιπτώσεις) η απάντηση κρίθηκε ορθή και βαθμολογήθηκε με ένα όταν και τα δύο κενά συμπληρώθηκαν ορθά.

Η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από τη χορήγηση του δοκιμίου αλγεβρικής σκέψης και του δοκιμίου αναλογικού συλλογισμού, εξετάστηκε με τον υπολογισμό του συντελεστή Cronbach's Alpha. Ο συντελεστής Cronbach's Alpha μας ενημερώνει για την εσωτερική συνέπεια του ερευνητικού εργαλείου. Ο συντελεστής αξιοπιστίας για το δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης είναι Cronbach's Alpha = .914, τιμή η οποία βρίσκεται σε ψηλά επίπεδα και κρίνεται ως εξαιρετική (George & Mallery, 2003). Ο δείκτης αξιοπιστίας για το δοκίμιο αναλογικού συλλογισμού είναι Cronbach's Alpha = . 877, τιμή η οποία θεωρείται καλή (George & Mallery, 2003).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα ποσοτικά και τα ποιοτικά αποτελέσματα όπως αυτά προέκυψαν από την ανάλυση των δεδομένων του δοκιμίου της αλγεβρικής σκέψης, του δοκιμίου του αναλογικού συλλογισμού και των κλινικών συνεντεύξεων. Η παρουσίαση των αποτελεσμάτων ακολουθεί τη σειρά διατύπωσης των ερευνητικών ερωτημάτων. Αρχικά περιγράφεται η δομή και τα στοιχεία που απαρτίζουν την αλγεβρική σκέψη από την Ε΄ δημοτικού μέχρι και την Α΄ γυμνασίου και εξετάζεται η σταθερότητά τους με την μεταβολή της ηλικίας των μαθητών.

Ακολούθως, εξετάζεται το μοντέλο για την κατάταξη των υποκειμένων σε ομάδες ανάλογα με τις απαντήσεις τους στο δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης. Σκοπός της συγκεκριμένης ανάλυσης ήταν να εντοπιστούν ομάδες μαθητών διαφορετικής επίδοσης σε έργα αλγεβρικής σκέψης και να περιγραφούν τα χαρακτηριστικά των μαθητών των διαφορετικών ομάδων επίδοσης. Εξετάζονται επίσης, οι διαφορές των μαθητών διαφορετικών ομάδων επίδοσης ως προς τις ικανότητες που απαρτίζουν την αλγεβρική σκέψη.

Στη συνέχεια περιγράφεται η δομή του αναλογικού συλλογισμού από την Ε΄ δημοτικού μέχρι και την Α΄ γυμνασίου και εξετάζεται η σχέση της ικανότητας αναλογικού συλλογισμού και της αλγεβρικής σκέψης. Σε επόμενο στάδιο, ακολουθεί η ανάλυση των ποιοτικών δεδομένων τα οποία προέκυψαν από τη διεξαγωγή των κλινικών συνεντεύξεων. Συγκεκριμένα, γίνεται περιγραφή των στρατηγικών και των λαθών των μαθητών διαφορετικών ομάδων ικανότητας αλγεβρικής σκέψης, καθώς και των προσεγγίσεων αναλογικού συλλογισμού που υιοθετούν κατά την επίλυση έργων «αναλογικού συλλογισμού αλγεβρικής σκέψης». Επιπρόσθετα, εξετάζεται κατά πόσο τα έργα «αλγεβρικής σκέψης αναλογικού συλλογισμού» βοήθησαν τους μαθητές διαφορετικής ικανότητας αλγεβρικής σκέψης (με βάση το αρχικό δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης) να επιδείξουν στοιχεία βελτίωσης στην επίδοσή τους ως προς την ικανότητα αλγεβρικής σκέψης.

Στο μέρος αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που αφορούν στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα της παρούσας εργασίας σχετικά με τη δομή και τα στοιχεία που απαρτίζουν την ικανότητα αλγεβρικής σκέψης και την περιγραφή της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών. Συγκεκριμένα η ανάλυση αφορά στο εξής ερευνητικό ερώτημα:

(α) Ποιοι παράγοντες συνθέτουν την ικανότητα μαθητών ηλικίας 10-13 ετών στην αλγεβρική σκέψη;

Για την εξέταση του συγκεκριμένου ερωτήματος χρησιμοποιήθηκαν τα δεδομένα του δοκιμίου αλγεβρικής σκέψης. Αρχικά παρουσιάζονται τα στοιχεία περιγραφικής στατιστικής για το δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης, ενώ στη συνέχεια εξετάζεται η επιβεβαίωση του προτεινόμενου μοντέλου για τη δομή της αλγεβρικής σκέψης. Ακολούθως, παρουσιάζεται ο έλεγχος για την επιβεβαίωση της σταθερότητας του μοντέλου στους μαθητές των τριών τάξεων (Ε΄, Στ΄ δημοτικού και Α΄ γυμνασίου).

Στοιχεία περιγραφικής στατιστικής για το δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης

Στον Πίνακα 4.1 παρουσιάζονται τα στοιχεία περιγραφικής στατιστικής (μέσος όρος, τυπική απόκλιση, εύρος, λοξότητα, κύρτωση) του δοκιμίου αλγεβρικής σκέψης για καθεμία από τις οκτώ ομαδοποιήσεις έργων, οι οποίες αποτελούν και τους οκτώ παράγοντες πρώτης τάξης στο μοντέλο αλγεβρικής σκέψης. Οι μέσοι όροι επίδοσης κυμαίνονταν από τις τιμές που εμφανίστηκαν στα έργα «Μεταβολής της τιμής της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με την ανεξάρτητη μεταβλητή» (M=.625) και στα έργα «Αντίληψης και εύρεσης της τιμής του αγνώστου» (M=.608) μέχρι την τιμή που παρουσιάστηκε στα έργα «Απλοποίησης αλγεβρικών εκφράσεων» (M=.364). Το εύρος της επίδοσης των μαθητών στα οκτώ είδη έργων του δοκιμίου ήταν μια μονάδα, υποδεικνύοντας ότι υπήρχαν υποκείμενα που απάντησαν ορθά σε όλα τα έργα ενός τμήματος του δοκιμίου και υποκείμενα που δεν απάντησαν ορθά σε κανένα έργο ενός τμήματος του δοκιμίου. Όπως φαίνεται και στον Πίνακα 4.1 όλες οι τιμές της λοξότητας και κύρτωσης ήταν μικρότερες από την τιμή δύο, στοιχείο που δείχνει ότι οι μεταβλητές της επίδοσης των μαθητών στα οκτώ είδη έργων του δοκιμίου αλγεβρικής σκέψης ακολουθούν την κανονική κατανομή.

Πίνακας 4.1

Στοιχεία Περιγραφικής Στατιστικής του Δοκιμίου Αλγεβρικής Σκέψης Σύμφωνα με το Είδος του Έργου

Έργα δοκιμίου	Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση	Εύρος	Λοξότητα	Κύρτωση
Gf	.585	.275	1	-.306	-.782
Vf	.625	.228	1	-.482	-.424
Gn	.415	.223	1	-.058	.335
Go	.464	.228	1	.112	-.495
Ge	.593	.294	1	-.174	-.994
Se	.608	.255	1	-.319	-.518
Mo	.483	.271	1	.001	-.950
Sm	.364	.324	1	.512	-1.021

Σημείωση. Ο κωδικός Gf αντιστοιχεί στον παράγοντα «Γενίκευση μοτίβων συνδυακύμανσης», Vf στον παράγοντα «Μεταβολή των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με την ανεξάρτητη», Gn στον παράγοντα «Γενίκευση ιδιοτήτων των αριθμών», Go στον παράγοντα «Γενίκευση ιδιοτήτων των πράξεων», Ge στον παράγοντα «Γενίκευση ιδιοτήτων της ισότητας», Se «Αντίληψη και εύρεση της τιμής του αγνώστου», Mo «Μοντελοποίηση σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων», Sm «Απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων».

Στον Πίνακα ΣΤ.1 (δείτε Παράρτημα ΣΤ) παρουσιάζονται οι συσχετίσεις μεταξύ των έργων του δοκιμίου αλγεβρικής σκέψης. Οι 27 μεταβλητές που παρουσιάζονται στον Πίνακα ΣΤ.1, αντιστοιχούν στα έργα του δοκιμίου αλγεβρικής σκέψης. Όλες οι συσχετίσεις μεταξύ των έργων που ανήκουν στην ίδια ομάδα (δηλαδή αφορούν στον ίδιο παράγοντα πρώτης τάξης) αλλά και μεταξύ των έργων που δεν ανήκουν στην ίδια ομάδα, ήταν στατιστικά σημαντικές. Οι συντελεστές συσχέτισης κυμαίνονταν από την τιμή .855 μέχρι την τιμή .110.

Στον Πίνακα 4.2 παρουσιάζονται οι συσχετίσεις μεταξύ της επίδοσης στις οκτώ διαφορετικές ομάδες έργων, οι οποίες αποτελούν τους οκτώ παράγοντες πρώτης τάξης του μοντέλου αλγεβρικής σκέψης. Όπως φαίνεται και στον Πίνακα 4.2, όλες οι συσχετίσεις, μεταξύ όλων των ικανοτήτων ήταν στατιστικά σημαντικές και οι συντελεστές συσχέτισης παρουσίασαν τιμές από το .942 μέχρι το .581. Για παράδειγμα, η συσχέτιση μεταξύ της επίδοσης στην ικανότητα «γενίκευσης μοτίβων συμμεταβολής» (Gf) και της επίδοσης στην ικανότητα «μεταβολής των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με την ανεξάρτητη και συλλογισμού για τη σχέση συμμεταβολής» ήταν ψηλή ($r=.930$, $p<.05$).

Πίνακας 4.2

Συσχετίσεις μεταξύ των Οκτώ Ικανοτήτων Αλγεβρικής Σκέψης

	Gf	Vf	Gn	Go	Ge	Se	Mo	Sm
Gf	1							
Vf	**.930***	1						
Gn	.689*	.673*	1					
Go	.876*	.856*	.680*	1				
Ge	.903*	.882*	.701*	.891*	1			
Se	.885*	.865*	.669*	.850*	.876*	1		
Mo	.913*	.892*	.690*	.877*	.762*	**.942***	1	
Sm	.769*	.752*	.581*	.739*	.904*	.794*	.819*	1

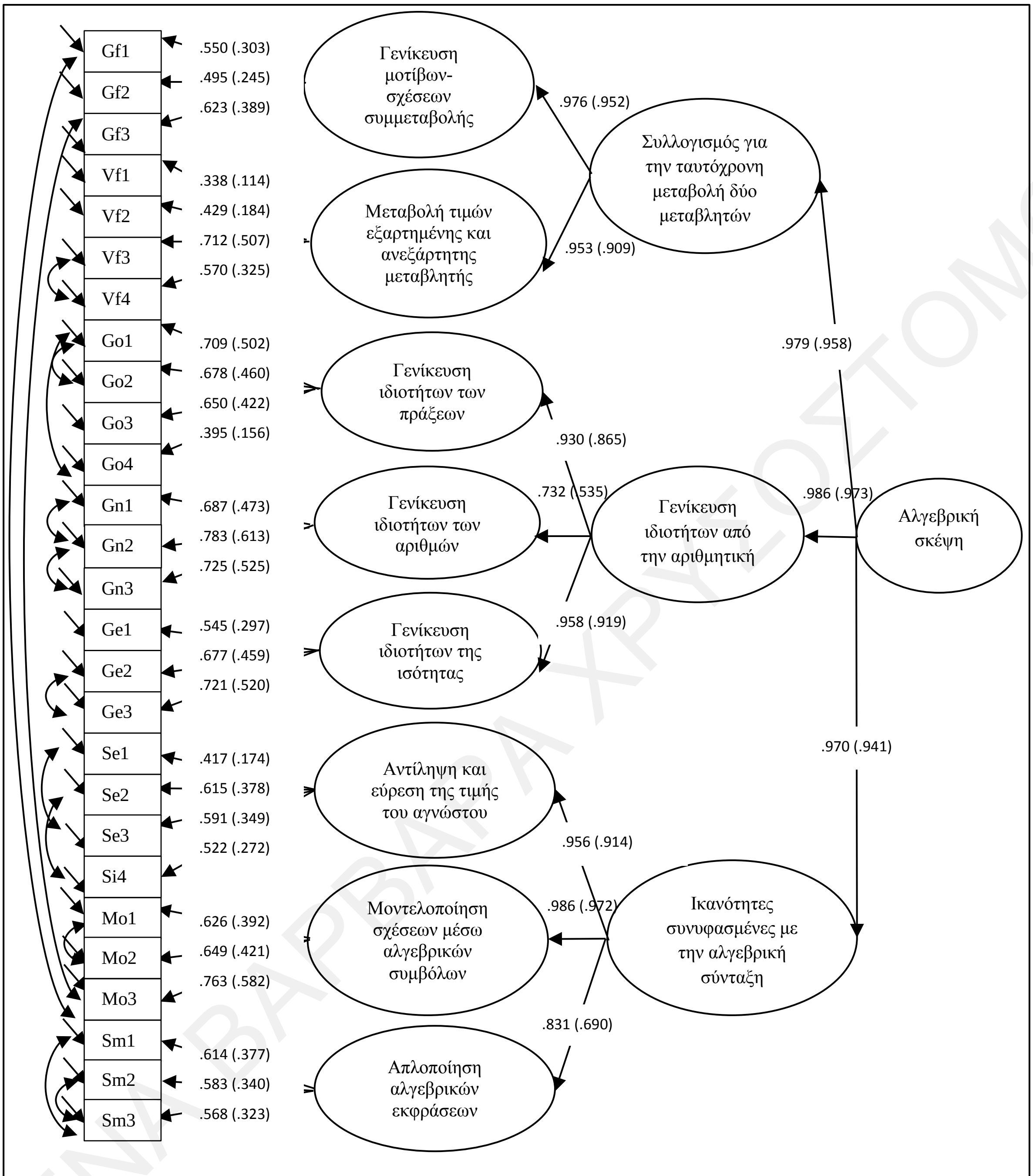
Σημείωση. Ο κωδικός Gf αντιστοιχεί στον παράγοντα «Γενίκευση μοτίβων συνδυακύμανσης», Vf στον παράγοντα «Μεταβολή των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με την ανεξάρτητη», Gn στον παράγοντα «Γενίκευση ιδιοτήτων των αριθμών», Go στον παράγοντα «Γενίκευση ιδιοτήτων των πράξεων», Ge στον παράγοντα «Γενίκευση ιδιοτήτων της ισότητας», Se «Αντίληψη και εύρεση της τιμής του αγνώστου», Mo «Μοντελοποίηση σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων», Sm «Απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων».
*$p<.05$

Η δομή της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης

Για να διερευνηθεί η δομή της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης, εξετάστηκε ένα μοντέλο που εισηγείται ότι η αλγεβρική σκέψη αποτελείται από: (α) την ικανότητα «συλλογισμού για τη ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών» και η οποία αναλύεται στην ικανότητα «γενίκευσης μοτίβων/σχέσεων συμμεταβολής» και στην ικανότητα «μεταβολής των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με την ανεξάρτητη μεταβλητή και συλλογισμού για τη σχέση συμμεταβολής», (β) την ικανότητα «γενίκευσης ιδιοτήτων από την αριθμητική», η οποία αναλύεται στην ικανότητα «γενίκευσης ιδιοτήτων των αριθμών», «γενίκευσης των ιδιοτήτων των πράξεων» και «γενίκευσης ιδιοτήτων της ισότητας» και (γ) τις «ικανότητες που είναι άμεσα συνυφασμένες με την αλγεβρική σύνταξη», η οποία αναλύεται στην ικανότητα «αντίληψης και εύρεσης της τιμής του αγνώστου», στην ικανότητα «μοντελοποίησης σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων» και στην ικανότητα «απλοποίησης αλγεβρικών εκφράσεων».

Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης τα οποία παρουσιάζονται στο Διάγραμμα 4.1, έδειξαν ότι η προσαρμογή των δεδομένων στο προτεινόμενο μοντέλο ήταν πάρα πολύ καλή, επιβεβαιώνοντας τη δομή του μοντέλου και την καταλληλότητα του να περιγράψει τη δομή της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης (*CFI*=.996, *TLI*=.995, x^2 =325.748, *df*=295, x^2/df =1.14, p>.05, *RMSEA*=.011, *SRMR*=.025). Οι φορτίσεις όλων των έργων του μοντέλου στους αντίστοιχους παράγοντες (δείτε Διάγραμμα 4.1) ήταν στατιστικά σημαντικές. Η προσαρμογή των δεδομένων στη δομή του μοντέλου επιβεβαιώνει ότι τα έργα που χρησιμοποιήθηκαν αποτελούν κατάλληλα έργα μέτρησης των οκτώ άδηλων παραγόντων. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης έδειξαν ότι η ερμηνευόμενη διασπορά των έργων είναι σχετικά ψηλή (δείτε Διάγραμμα 4.1). Οι φορτίσεις των παραγόντων πρώτης και δεύτερης τάξης στους αντίστοιχους ψηλότερους τάξης παράγοντες ήταν στατιστικά σημαντικές και πολύ ψηλές. Τα ποσοστά ερμηνευόμενης διασποράς των παραγόντων πρώτης τάξης είναι όλα στατιστικά σημαντικά και τα περισσότερα κυμαίνονται από το .865 με .972, με μόνη εξαίρεση δύο περιπτώσεις όπου ήταν .535 και .690. Όσον αφορά στα ποσοστά ερμηνεύομενης διασποράς των παραγόντων δεύτερης τάξης («συλλογισμός για τη συμμεταβολή», «γενίκευση ιδιοτήτων από την αριθμητική» και «ικανότητες άμεσα συνυφασμένες με την αλγεβρική σύνταξη»), ήταν επίσης στατιστικά σημαντικά και ψηλά (r^2=.958, p<.01, r^2=.973, p<.01, r^2=.941, p<.01, αντίστοιχα).

Όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 4.1, στη δομή του μοντέλου συμπεριλήφθηκαν έντεκα στατιστικά σημαντικές συσχετίσεις μεταξύ του σφάλματος έργων που ανήκουν στον ίδιο παράγοντα. Οι συσχετίσεις αυτές δείχνουν ότι τα συγκεκριμένα έργα είχαν κοινό σφάλμα στη μέτρηση λόγω του τύπου και της διαδικασίας χορήγησης του δοκιμίου. Συγκεκριμένα, υπήρχε στατιστικά σημαντική συσχέτιση μεταξύ του σφάλματος μεταβλητών του παράγοντα «μεταβολή των τιμών της εξαρτημένης σε σχέση με την ανεξάρτητη» (Vf3 και Vf4: r= -.157), του παράγοντα «γενίκευση ιδιοτήτων των πράξεων» (Go1 και Go2: r= -.232, Go1 και Go4: r= -.153), του παράγοντα «γενίκευση ιδιοτήτων των αριθμών» (Gn1 και Gn2: r= -.148, Gn2 και Gn3: r=.674), του παράγοντα γενίκευση ιδιοτήτων της ισότητας (Ge2 και Ge3: r=.476), του παράγοντα «αντίληψη και εύρεση της τιμής του αγνώστου» (Se1 και Se3: r=.102, Se2 και Se4: r=.-.094), του παράγοντα «μοντελοποίηση σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων» (Mo1 και Mo2: r=.186) και του παράγοντα «απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων» (Sm1 και Sm3: r=.125, Sm2 και Sm3: r=.244). Συμπεριλήφθηκαν επίσης και δύο στατιστικά σημαντικές συσχετίσεις μεταξύ του σφάλματος μεταβλητών που ανήκουν σε διαφορετικό παράγοντα («μοντελοποίηση σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων» και «γενίκευση μοτίβων συμμεταβολής), αφού το σκορ των συγκεκριμένων μεταβλητών προέκυψε από διαφορετικά ερωτήματα, τα οποία προέρχονταν από το ίδιο έργο (Mo3 και Gf1: r=.261, Mo3 και Gf3: r=.304).



Σημείωση. Ο πρώτος αριθμός υποδεικνύει τη φόρτιση στον παράγοντα και ο αριθμός στην παρένθεση υποδεικνύει την αντίστοιχη ερμηνευόμενη διασπορά (r^2).

Διάγραμμα 4.1. Το μοντέλο για την ικανότητα αλγεβρικής σκέψης.

Η ικανότητα αλγεβρικής σκέψης των υποκειμένων

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα στοιχεία περιγραφικής στατιστικής των υποκειμένων για την επίδοσή τους στις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης (Πίνακας 4.3). Οι μέσοι όροι στις τρεις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης κυμαίνονταν σε μέτρια επίπεδα από το .605 μέχρι το .484. Οι τιμές τυπικής απόκλισης και εύρους υποδεικνύουν ότι υπάρχει μεγάλη διαφοροποίηση στην επίδοση των υποκειμένων. Οι τιμές λοξότητας και κύρτωσης ήταν μικρότερες από την τιμή δύο και μεγαλύτερες από το πλην δύο, στοιχείο που δείχνει ότι οι μεταβλητές της επίδοσης των μαθητών στα έργα των τριών ικανοτήτων αλγεβρικής σκέψης ακολουθούν κανονική κατανομή.

Πίνακας 4.3

Στοιχεία Περιγραφικής Στατιστικής για την Επίδοση των Υποκειμένων στις Ικανότητες Αλγεβρικής Σκέψης

	Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση	Εύρος	Λοξότητα	Κύρτωση
Rc	.605	.217	1	-.287	-.593
Ga	.490	.204	1	-.012	-.405
Syn	.484	.233	1	.126	-.776
Αλγεβρική σκέψη	.535	.193	.93	-.044	-.553

Σημείωση. Ο κωδικός Rc αντιστοιχεί στην ικανότητα «Συλλογισμός για την ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών», ο κωδικός Ga στην ικανότητα «Γενίκευση ιδιοτήτων από την αριθμητική» και ο κωδικός Syn στις «Ικανότητες άμεσα συνυφασμένες με την αλγεβρική σύνταξη».

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.4, οι συσχετίσεις μεταξύ της επίδοσης των μαθητών στις τρεις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης (δεύτερης τάξης παράγοντες του μοντέλου αλγεβρικής σκέψης) ήταν στατιστικά σημαντικές. Οι συνετελεστές συσχέτισης και στις τρεις περιπτώσεις ήταν κοντά στην τιμή .95.

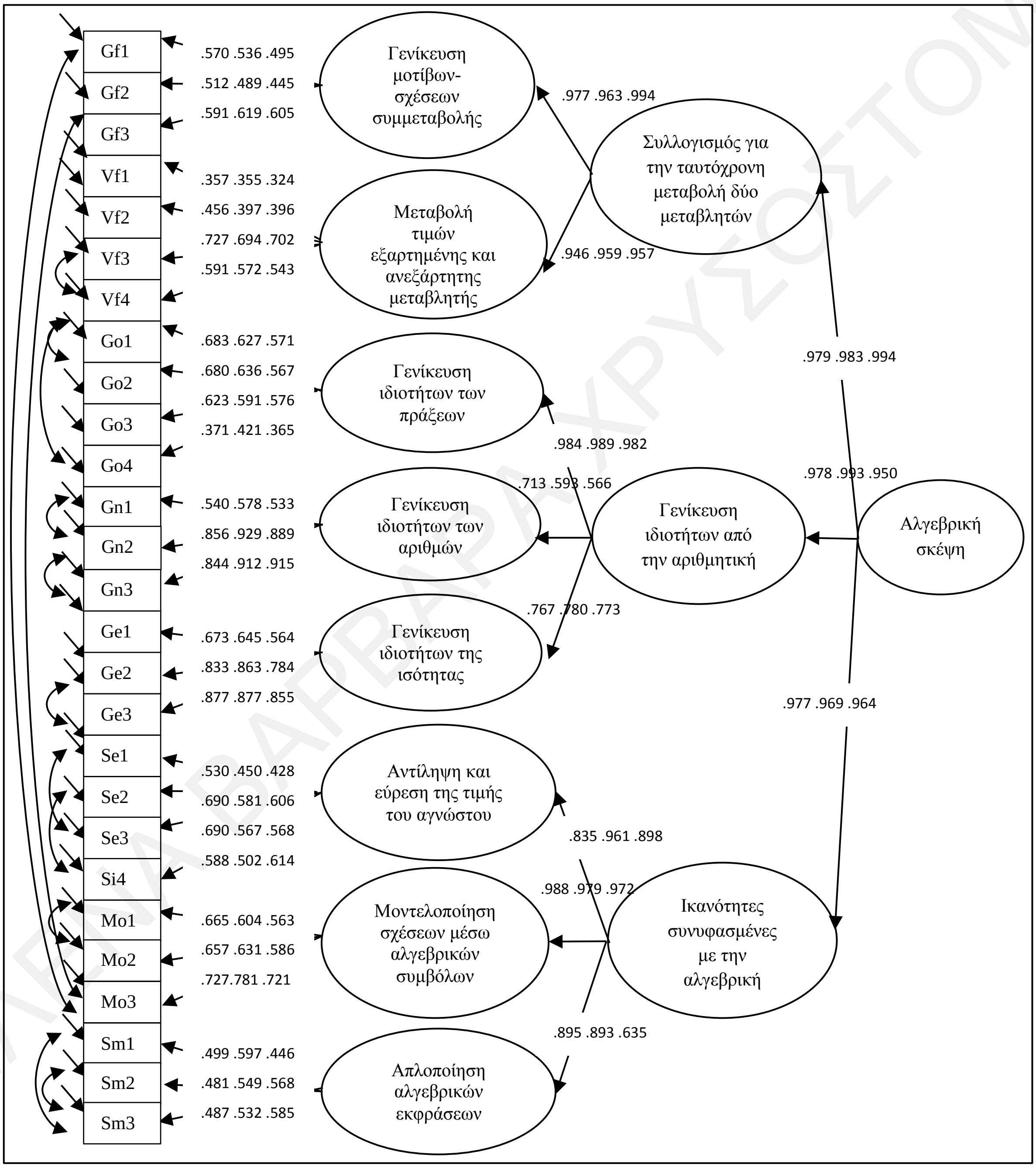
Πίνακας 4.4

Συσχετίσεις μεταξύ των Τριών Ικανοτήτων/Διαστάσεων Αλγεβρικής Σκέψης

	Rc	Ga	Syn
Rc	1		
Ga	.965*	1	
Syn	.949*	.957*	1

Σημείωση. Ο κωδικός Rc αντιστοιχεί στην ικανότητα «Συλλογισμός για την ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών», ο κωδικός Ga στην ικανότητα «Γενίκευση ιδιοτήτων από την αριθμητική» και ο κωδικός Syn στις «Ικανότητες άμεσα συνυφασμένες με την αλγεβρική σύνταξη».
$p^* < .05$

Για να εξεταστεί η σταθερότητα της δομής του μοντέλου της αλγεβρικής σκέψης στις τρεις τάξεις (Ε΄ δημοτικού, Στ΄ δημοτικού, Α΄ γυμνασίου), πραγματοποιήθηκε επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση πολλαπλών ομάδων (δείτε Διάγραμμα 4.2).



Σημείωση. Ο πρώτος αριθμός υποδεικνύει τη φόρτιση στον παράγοντα για την Α’ γυμνασίου, ο δεύτερος για την Στ’ δημοτικού και ο τρίτος για την Ε’ δημοτικού.

Διάγραμμα 4.2. Το μοντέλο για την αλγεβρική σκέψη για την Ε΄, Στ΄ δημοτικού και Α΄ γυμνασίου.

Τα αποτελέσματα (δείτε Διάγραμμα 4.2) έδειξαν ότι η προσαρμογή των δεδομένων των τριών τάξεων στο προτεινόμενο μοντέλο ήταν ικανοποιητική (*CFI*=.965, *TLI*=.962, x^2=1196.553, *df*=966, x^2/*df*=1.239, p<.05, *RMSEA*=.030). Όλα τα έργα παρουσίασαν στατιστικά σημαντικές φορτίσεις στους αντίστοιχους παράγοντες, όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 4.2. Αυτά τα αποτελέσματα εισηγούνται ότι το μοντέλο είναι σταθερό και για τους τρεις πληθυσμούς.

Η επίδοση των υποκειμένων στις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης ανά τάξη

Σε αυτό το μέρος παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που αφορούν στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα: (β) Ποιες είναι οι διαφορές ανάμεσα στους μαθητές διαφορετικών ηλικιών ως προς την ικανότητα αλγεβρικής σκέψης;

Για να εξεταστεί κατά πόσο υπάρχουν διαφορές στην επίδοση των υποκειμένων διαφορετικών τάξεων ως προς τη γενική ικανότητα αλγεβρική σκέψης, πραγματοποιήθηκε ανάλυση διασποράς (ANOVA) στην οποία εξαρτημένη μεταβλητή ήταν η γενική ικανότητα αλγεβρικής σκέψης ενώ ανεξάρτητη μεταβλητή η τάξη των υποκειμένων. Στον Πίνακα 4.5, παρουσιάζονται οι μέσοι όροι και οι τυπικές αποκλίσεις της επίδοσης των μαθητών διαφορετικών τάξεων στη γενική ικανότητα αλγεβρικής σκέψης. Οι μέσοι όροι επίδοσης αυξάνονταν με την μετακίνηση από μικρότερη σε μεγαλύτερη τάξη. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης διασποράς (ANOVA) (Πίνακας 4.6) έδειξαν ότι υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στην επίδοση των μαθητών στην αλγεβρική σκέψη διαφορετικών τάξεων ($F_{(2,800)}$= 44.535, p<.01). Η ανάλυση Post-hoc που παρουσιάζεται στον Πίνακα ΣΤ.2 (δείτε Παράρτημα ΣΤ), έδειξε ότι στατιστικά σημαντικές διαφορές ως προς την ικανότητα αλγεβρικής σκέψης υπήρχαν μεταξύ των μαθητών και των τριών τάξεων.

Πίνακας 4.5

Μέσοι Όροι και Τυπικές Αποκλίσεις της Συνολικής Επίδοσης των Υποκειμένων Διαφορετικών Τάξεων στη Γενική Ικανότητα Αλγεβρική Σκέψη

Παράγοντας	Ε΄ δημοτικού		Στ΄ δημοτικού		Α΄ γυμνασίου	
	M	*TA*	*M*	*TA*	*M*	*TA*
Αλγεβρική σκέψη	.440	.172	.530	.191	.594	.192

Πίνακας 4.6

Τα Αποτελέσματα της Πολλαπλής Ανάλυσης Διασποράς για τη Γενική Ικανότητα Αλγεβρικής Σκέψης ανά Τάξη

	Άθροισμα Τετραγώνων	Βαθμοί Ελευθερίας	Μέσο Τετράγωνο	F	Επίπεδο Σημαντικότητας
Μεταξύ Ομάδων	3.007	2	1.538	44.535	.000
Εντός Ομάδων	26.635	800	.035		

Στη συνέχεια, για να εξεταστεί κατά πόσο υπάρχουν διαφορές στην επίδοση μεταξύ των μαθητών διαφορετικών τάξεων ως προς τις τρεις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης (δεύτερης τάξης παράγοντες του μοντέλου αλγεβρικής σκέψης) πραγματοποιήθηκε πολλαπλή ανάλυση διασποράς (MANOVA). Στην πολλαπλή ανάλυση διασποράς εξαρτημένες μεταβλητές ήταν οι τρεις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης και ανεξάρτητη μεταβλητή η τάξη (Ε΄, Στ΄ δημοτικού, Α΄ γυμνασίου) των υποκειμένων. Στον Πίνακα 4.7 παρουσιάζονται οι μέσοι όροι και οι τυπικές αποκλίσεις της επίδοσης των μαθητών διαφορετικών τάξεων στις τρεις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης. Οι μέσοι όροι επίδοσης αυξάνονταν με τη μετακίνηση από μικρότερη σε μεγαλύτερη τάξη.

Πίνακας 4.7

Μέσοι Όροι και Τυπικές Αποκλίσεις της Επίδοσης των Υποκειμένων Διαφορετικών Τάξεων στους Τρεις Παράγοντες Δεύτερης Τάξης του μοντέλου Αλγεβρικής Σκέψης

Παράγοντες	Ε΄ δημοτικού		Στ΄ δημοτικού		Α΄ γυμνασίου	
	Μ	*ΤΑ*	*Μ*	*ΤΑ*	*Μ*	*ΤΑ*
Rc	.556	.214	.605	.214	.645	.216
Ga	.416	.185	.496	.196	.544	.209
Syn	.348	.188	.490	.224	.592	.217

Σημείωση. Ο κωδικός Rc αντιστοιχεί στην ικανότητα «Συλλογισμός για την ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών», ο κωδικός Ga στην ικανότητα «Γενίκευση ιδιοτήτων από την αριθμητική» και ο κωδικός Syn στις «Ικανότητες άμεσα συνυφασμένες με την αλγεβρική σύνταξη».

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης (δείτε Πίνακα 4.8) έδειξαν ότι υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μαθητών των τριών τάξεων που συμμετείχαν στην έρευνα ως προς την επίδοσή τους στις τρεις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης (Pillai's

$F_{(6,1598)}$=31.536, p<.01). Στον Πίνακα ΣΤ.3 (δείτε Παράρτημα ΣΤ), παρουσιάζεται η ανάλυση Post-hoc η οποία έδειξε ότι στατιστικά σημαντικές διαφορές υπάρχουν μεταξύ και των τριών ομάδων μαθητών διαφορετικών τάξεων και στις τρεις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης (δεύτερης τάξης παράγοντες του μοντέλου αλγεβρικής σκέψης).

Πίνακας 4.8

Τα Αποτελέσματα της Πολλαπλής Ανάλυσης Διασποράς για την Επίδοση στους Τρεις Παράγοντες Δεύτερης Τάξης του μοντέλου Αλγεβρικής Σκέψης ανά Τάξη

	Άθροισμα Τετραγώνων	Βαθμοί Ελευθερίας	Μέσο Τετράγωνο	F	Επίπεδο Σημαντικότητας
Rc	1.034	2	.517	11.237	.000
Ga	2.159	2	1.080	27.663	.000
Syn	7.721	2	3.861	86.439	.000

Σημείωση. Ο κωδικός Rc αντιστοιχεί στην ικανότητα «Συλλογισμός για την ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών», ο κωδικός Ga στην ικανότητα «Γενίκευση ιδιοτήτων από την αριθμητική» και ο κωδικός Syn στις «Ικανότητες άμεσα συνυφασμένες με την αλγεβρική σύνταξη».

Πραγματοποιήθηκε δεύτερη πολλαπλή ανάλυση διασποράς (MANOVA) για να εξεταστεί κατά πόσο υπάρχουν διαφορές μεταξύ της επίδοσης των υποκειμένων των τριών τάξεων ως προς τις οκτώ ικανότητες αλγεβρικής σκέψης (παράγοντες πρώτης τάξης του μοντέλου αλγεβρικής σκέψης). Στον Πίνακα 4.9 παρουσιάζονται οι μέσοι οροί και οι τυπικές αποκλίσεις της επίδοσης των μαθητών διαφορετικών τάξεων στις οκτώ ικανότητες αλγεβρικής σκέψης. Οι μέσοι όροι επίδοσης αυξάνονταν με τη μετακίνηση από μικρότερη σε μεγαλύτερη τάξη.

Τα αποτελέσματα της δεύτερης ανάλυσης πολλαπλής διασποράς (δείτε Πίνακα 4.10) έδειξαν ότι υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των τριών ομάδων μαθητών διαφορετικών τάξεων (Pillai's $F_{(16,1532)}$=25.973). Η ανάλυση Post-hoc παρουσιάζεται στον Πίνακα ΣΤ.4 (δείτε Παράρτημα ΣΤ) και έδειξε ότι στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ και των τριών τάξεων παρουσιάζονται στις τέσσερις ικανότητες «Γενίκευση μοτίβων/σχέσεων συμμεταβολής», «Γενίκευση ιδιοτήτων των πράξεων», «Συλλογισμός για τις ιδιότητες της ισότητας, και «Απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων». Σε τρεις ικανότητες («Γενίκευση ιδιοτήτων των αριθμών», «Αντίληψη και εύρεση της τιμής του αγνώστου» και «Μοντελοποίηση σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων») *δεν* εμφανίζονται στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ Στ΄ δημοτικού και Α΄ γυμνασίου. Τέλος, στην ικανότητα «Μεταβολής των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με την ανεξάρτητη», εμφανίζεται στατιστικά σημαντική διαφορά μόνο μεταξύ των μαθητών της Ε΄ δημοτικού και Α΄ γυμνασίου.

Πίνακας 4.9

Μέσοι Όροι και Τυπικές Αποκλίσεις της Επίδοσης των Υποκειμένων Διαφορετικών Τάξεων στους Οκτώ Παράγοντες Πρώτης Τάξης του Μοντέλου Αλγεβρικής Σκέψης

Ικανότητες	Ε΄ δημοτικού		Στ΄ δημοτικού		Α΄ γυμνασίου	
	M	*TA*	*M*	*TA*	*M*	*TA*
Gf	.530	.267	.597	.268	.648	.263
Vf	.591	.227	.629	.222	.661	.225
Gn	.364	.201	.426	.222	.455	.229
Go	.409	.213	.456	.203	.531	.244
Ge	.485	.288	.620	.294	.674	.268
Se	.536	.253	.650	.242	.642	.246
Mo	.376	.252	.520	.271	.556	.255
Sm	.141	.206	.320	.295	.608	.272

Σημείωση. Ο κωδικός Gf αντιστοιχεί στον παράγοντα «Γενίκευση μοτίβων συνδυακύμανσης», Vf στον παράγοντα «Μεταβολή των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με την ανεξάρτητη», Gn στον παράγοντα «Γενίκευση ιδιοτήτων των αριθμών», Go στον παράγοντα «Γενίκευση ιδιοτήτων των πράξεων», Ge στον παράγοντα «Γενίκευση ιδιοτήτων της ισότητας», Se «Αντίληψη και εύρεση της τιμής του αγνώστου», Mo «Μοντελοποίηση σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων», Sm «Απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων».

Πίνακας 4.10

Τα Αποτελέσματα της Πολλαπλής Ανάλυσης Διασποράς για την Επίδοση στους Οκτώ Παράγοντες Πρώτης Τάξης του Μοντέλου Αλγεβρικής Σκέψης ανά Τάξη

	Άθροισμα Τετραγώνων	Βαθμοί Ελευθερίας	Μέσο Τετράγωνο	F	Επίπεδο Σημαντικότητας
Gf	1.756	2	.878	12.396	.000
Vf	.617	2	.309	6.117	.002
Gn	1.073	2	.536	11.242	.000
Go	1.931	2	.965	19.743	.000
Ge	4.685	2	2.343	29.260	.000
Se	1.975	2	.988	16.189	.000
Mo	4.444	2	2.222	32.873	.000
Sm	28.357	2	14.179	205.375	.000

Σημείωση. Οι κωδικοί των μεταβλητών είναι οι ίδιοι με τον προηγούμενο πίνακα.

Σε αυτό το μέρος παρουσιάζονται τα αποτελέσματα τα οποία αφορούν στο τρίτο ερευνητικό ερώτημα για την περιγραφή των διαφορετικών ομάδων επίδοσης σχετικά με την ικανότητα αλγεβρικής σκέψης και των χαρακτηριστικών των διαφορετικών ομάδων μαθητών. Συγκεκριμένα, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για το εξής ερευνητικό ερώτημα:

(γ) Ποιες είναι οι διαφορετικές ομάδες επίδοσης μαθητών ηλικίας 10-13 ετών ως προς την ικανότητα αλγεβρικής σκέψης;

Για τη διερεύνηση και περιγραφή των διαφορετικών ομάδων επίδοσης ως προς την ικανότητα αλγεβρικής σκέψης αξιοποιήθηκαν τα σκορ των μαθητών στις 27 μεταβλητές που προέκυψαν από το δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης. Αρχικά, παρουσιάζονται οι στατιστικές αναλύσεις για την ταξινόμηση των μαθητών στις ομάδες με βάση της επίδοσή τους στα έργα του δοκιμίου αλγεβρικής σκέψης. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά των διαφορετικών ομάδων με βάση τα δεδομένα του δοκιμίου αλγεβρικής σκέψης τα οποία σε αυτή την περίπτωση δεν αφορούν μόνο στην επίδοση αλλά και στις στρατηγικές και τα λάθη των μαθητών.

Ομάδες μαθητών ανάλογα με την ικανότητα αλγεβρικής σκέψης

Για την εξέταση του κατά πόσο υπάρχουν ομάδες παρόμοιας συμπεριφοράς ως προς την ικανότητα αλγεβρικής σκέψης, πραγματοποιήθηκε ανάλυση latent class με βάση τα σκορ των μαθητών στις 27 μεταβλητές αλγεβρικής σκέψης που προέκυψαν από το δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης. Εξετάστηκαν τέσσερα διαδοχικά μοντέλα σύμφωνα με τα οποία οι μαθητές μπορούσαν να χωριστούν σε δύο, τρεις, τέσσερις ή πέντε ομάδες παρόμοιας συμπεριφοράς στο δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης.

Το μοντέλο με τις πέντε ομάδες δεν λήφθηκε υπόψη λόγω του ότι δεν ήταν δυνατό να παρουσιαστεί επανάληψη της καλύτερης τιμής loglikelihood τουλάχιστον πέντε φορές (ακόμη και με πολύ ψηλές τιμές στην εντολή starts) (Asparouhov & Muthén, 2012), κάτι που υποδηλώνει ότι υπάρχει πρόβλημα με το συγκεκριμένο μοντέλο το οποίο προσπαθεί να «διαβάσει» πολύ περισσότερα από τα δεδομένα (Muthen, 2008). Αντίθετα, παρουσιάστηκε επανάληψη της καλύτερης τιμής loglikelihood αρκετές φορές για τα μοντέλα με τις δύο, τρεις και τέσσερις ομάδες (επανάληψη εικοσιοκτώ φορές, πενήντα επτά φορές και εξήντα φορές, αντίστοιχα για το μοντέλο με τις δύο, τρεις και τέσσερις ομάδες), έτσι ακολούθησε η σύγκρισή τους μέσω των τιμών AIC και BIC, καθώς και μέσω των ελέγχων των TECH 11 και TECH 14. Τα αποτελέσματα των αναλύσεων για τα μοντέλα με δύο, τρεις και τέσσερις ομάδες, έδειξαν ότι το καλύτερο μοντέλο με τις χαμηλότερες τιμές για τους δείκτες AIC και BIC (δείτε Πίνακα 4.11), ήταν το μοντέλο με τις τέσσερις ομάδες. Το ίδιο συμπέρασμα, ότι το καλύτερο μοντέλο είναι αυτό με τις τέσσερις ομάδες, έδειξε και το bootstrapped parametric likelihood ratio test (TECH 14 στο Mplus) (του οποίου η τιμή φαίνεται να είναι p=.000, μετά από πέντε επιτυχημένα bootstrap draws), υποδεικνύοντας ότι η λύση των τεσσάρων ομάδων ήταν καλύτερη από τη λύση των τριών ομάδων. Η τιμή εντροπίας για το μοντέλο των τεσσάρων ομάδων ήταν .884.

Πίνακας 4.11

Δείκτες Προσαρμογής για τα Μοντέλα με Διαφορετικό Αριθμό Ομάδων

Δείκτες	AIC	BIC	Adjusted BIC
Μοντέλο με 2 ομάδες	9733.604	10118.049	9857.652
Μοντέλο με 3 ομάδες	8419.328	8935.047	8585.735
Μοντέλο με 4 ομάδες	8049.749	8696.742	8258.514

Στον Πίνακα 4.12 παρουσιάζεται η μέση τιμή πιθανότητας των υποκειμένων κάθε ομάδας να ανήκουν στην κατηγορία που τους εντάσσει η ανάλυση (Average Latent Class Probabilities) με βάση το μοντέλο των τεσσάρων ομάδων και φαίνεται ότι ήταν ικανοποιητική.

Πίνακας 4.12

Μέση Τιμή Πιθανότητας Κάθε Ομάδας (Average Latent Class Probabilities)

Πιθανότητα να ανήκουν	Ομάδα 1	Ομάδα 2	Ομάδα 3	Ομάδα 4
Υποκ. Ομάδας 1	.958	.042	.000	.000
Υποκ. Ομάδας 2	.000	.930	.000	.000
Υποκ. Ομάδας 3	.000	.065	.916	.019
Υποκ. Ομάδας 4	.027	.000	.043	.939

Στοιχεία περιγραφικής στατιστικής για τις τέσσερις ομάδες υποκειμένων στην ικανότητα αλγεβρικής σκέψης

Το ποσοστό των μαθητών που ανήκουν με βάση την ανάλυση στην πρώτη ομάδα ήταν 23.4%, ενώ στη δεύτερη ομάδα φαίνεται να εμπίπτει το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών (39.2%). Στην τρίτη ομάδα ανήκει το 28.4% των μαθητών, ενώ στην τέταρτη ομάδα εμπίπτει το μικρότερο ποσοστό των μαθητών (9%) (δείτε Πίνακα 4.13). Το ποσοστό των μαθητών που εμπίπτουν σε κάθε ομάδα διαφοροποιείται σύμφωνα με την τάξη των μαθητών. Το 34.6% των μαθητών της Ε΄ δημοτικού συμπεριλαμβάνεται στην πρώτη ομάδα, το 48.5% στη δεύτερη ομάδα, το 13.9% στην τρίτη ομάδα, ενώ μόνο το 3% στην τέταρτη ομάδα. Όσον αφορά στους μαθητές Στ΄ δημοτικού, το 22.9% των μαθητών ανήκουν στην πρώτη ομάδα, το 36.4% στη δεύτερη ομάδα, το 31.1% στην τρίτη ομάδα, ενώ το 9.6% των μαθητών στην τέταρτη ομάδα. Το 14.7% των μαθητών της Α΄ γυμνασίου ανήκουν στην πρώτη ομάδα, το 37.8% των μαθητών στη δεύτερη ομάδα, το 38.1% των μαθητών στην τρίτη ομάδα, ενώ το 13.3% των μαθητών Α΄ γυμνασίου στην τέταρτη ομάδα. Γενικά, φαίνεται ότι στην πρώτη και στη δεύτερη ομάδα, τα ποσοστά μειώνονταν με τη μετακίνηση από μικρότερη σε μεγαλύτερη τάξη, ενώ στην τρίτη και τέταρτη ομάδα τα ποσοστά αυξάνονταν με τη μετακίνηση από μικρότερη σε μεγαλύτερη τάξη.

Πίνακας 4.13

Ποσοστά Μαθητών για Κάθε Ομάδα Ικανότητας Αλγεβρικής Σκέψης

	Ομάδα 1	Ομάδα 2	Ομάδα 3	Ομάδα 4
Ε΄ δημοτικού	**34.6 %**	**48.5 %**	13.9 %	3.0 %
ΣΤ΄ δημοτικού	22.9 %	**36.4 %**	**31.1 %**	9.6 %
Α΄ γυμνασίου	14.7 %	34.3 %	**37.8 %**	**13.3 %**
Σύνολο	23.4 %	39.2 %	28.4 %	9.0 %

Όπως φαίνεται και στον Πίνακα 4.13, η πλειοψηφία των μαθητών της Ε΄ δημοτικού ανήκουν στην πρώτη και στη δεύτερη ομάδα. Η πλειοψηφία των μαθητών της Στ΄ δημοτικού ανήκουν περισσότερο στη δεύτερη και στην τρίτη ομάδα (ωστόσο, το 22.9% εμπίπτει στην πρώτη ομάδα). Η πλειοψηφία των μαθητών του γυμνασίου εμπίπτουν στην τρίτη ομάδα ωστόσο, ένα μεγάλο ποσοστό βρίσκεται στη δεύτερη ομάδα. Το μεγαλύτερο ποσοστό μαθητών της τέταρτης ομάδας προέρχονταν από το γυμνάσιο, χωρίς όμως να υπάρχει μεγάλη διαφορά από το ποσοστό των μαθητών της Στ΄ δημοτικού που ανήκουν στην τέταρτη ομάδα.

Για να εξεταστεί κατά πόσο οι τέσσερις ομάδες μαθητών (που προέκυψαν από την ανάλυση latent class) διαφέρουν μεταξύ τους ως προς τη γενική ικανότητα αλγεβρικής σκέψης, πραγματοποιήθηκε ανάλυση διασποράς. Στον Πίνακα 4.14 παρουσιάζονται οι μέσοι όροι της γενικής ικανότητας των μαθητών των τεσσάρων ομάδων επίδοσης. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης διασποράς (ANOVA) (Πίνακας 4.15) έδειξαν ότι υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στην γενική ικανότητα αλγεβρικής σκέψης των μαθητών ($F_{(3,799)}$=1793.837, p<.01). Η ανάλυση Post-hoc που παρουσιάζεται στον Πίνακα ΣΤ.5 (δείτε Παράρτημα ΣΤ), έδειξε ότι οι στατιστικά σημαντικές διαφορές υπήρχαν μεταξύ και των τεσσάρων ομάδων. Ο μέσος όρος επίδοσης κάθε ομάδας στη γενική ικανότητα αλγεβρικής σκέψης ήταν στατιστικά σημαντικά ψηλότερος από το μέσο όρο της προηγούμενης ομάδας.

Πίνακας 4.14

Μέσοι Όροι και Τυπικές Αποκλίσεις των Τεσσάρων Ομάδων για τη Γενική Ικανότητα Αλγεβρικής Σκέψης

	Πρώτη ομάδα		Δεύτερη ομάδα		Τρίτη ομάδα		Τέταρτη ομάδα	
	M	*TA*	*M*	*TA*	*M*	*TA*	*M*	*TA*
Γενική ικανότητα αλγεβρικής σκέψης	.266	.080	.494	.070	.680	.067	.865	.056

Πίνακας 4.15

Τα Αποτελέσματα της Πολλαπλής Ανάλυσης Διασποράς για τη Γενική Ικανότητα Αλγεβρικής Σκέψης ανά Ομάδα Αλγεβρικής Σκέψης

	Άθροισμα Τετραγώνων	Βαθμοί Ελευθερίας	Μέσο Τετράγωνο	F	Επίπεδο Σημαντικότητας
Μεταξύ Ομάδων	26.741	3	8.914	1793.837	.000
Εντός Ομάδων	3.970	799	.005		

Για να εξεταστεί κατά πόσο οι τέσσερις ομάδες μαθητών διαφέρουν ως προς τις τρεις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης (παράγοντες δεύτερης τάξης του μοντέλου αλγεβρικής σκέψης), πραγματοποιήθηκε ανάλυση πολλαπλής διασποράς. Στον Πίνακα

4.16 παρουσιάζονται οι μέσοι όροι επίδοσης των τεσσάρων ομάδων μαθητών στις τρεις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης.

Πίνακας 4.16

Μέσοι Όροι και Τυπικές Αποκλίσεις της Επίδοσης των Τεσσάρων Ομάδων στους Τρεις Παράγοντες Δεύτερης Τάξης του μοντέλου Αλγεβρικής Σκέψης

	Πρώτη ομάδα		Δεύτερη ομάδα		Τρίτη ομάδα		Τέταρτη ομάδα	
	M	*TA*	*M*	*TA*	*M*	*TA*	*M*	*TA*
Rc	.336	.136	.592	.128	.751	.132	.904	.071
Ga	.247	.116	.456	.112	.626	.094	.839	.086
Syn	.213	.108	.433	.130	.663	.125	.853	.103

Σημείωση. Ο κωδικός Rc αντιστοιχεί στην ικανότητα «Συλλογισμός για την ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών», ο κωδικός Ga στην ικανότητα «Γενίκευση ιδιοτήτων από την αριθμητική» και ο κωδικός Syn στις «Ικανότητες άμεσα συνυφασμένες με την αλγεβρική σύνταξη».

Η πολλαπλή ανάλυση διασποράς (MANOVA) (Πίνακας 4.17) έδειξε ότι υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των ομάδων στις τρεις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης (Pillai's $F_{(9,2397)}$=116.420). Η ανάλυση Post-hoc (Πίνακας ΣΤ.6) (δείτε Παράρτημα ΣΤ), έδειξε ότι οι στατιστικά σημαντικές διαφορές εμφανίστηκαν μεταξύ και των τεσσάρων ομάδων και στις τρεις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης. Ο μέσος όρος επίδοσης κάθε ομάδας και για τρεις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης ήταν στατιστικά σημαντικά ψηλότερος από το μέσο όρο επίδοσης της προηγούμενης ομάδας. Όλες οι διαφορές ήταν στατιστικά σημαντικές σε επίπεδο σημαντικότητας $p<.01$.

Πίνακας 4.17

Τα Αποτελέσματα της Πολλαπλής Ανάλυσης Διασποράς για την Επίδοση στους Τρεις Παράγοντες Δεύτερης Τάξης του μοντέλου Αλγεβρικής Σκέψης ανά Ομάδα Αλγεβρικής Σκέψης

Ικανότητες	Άθροισμα Τετραγώνων	Βαθμοί Ελευθερίας	Μέσο Τετράγωνο	F	Επίπεδο Σημαντικότητας
Rc	24.906	3	8.302	513.004	.000
Ga	24.391	3	8.130	722.820	.000
Syn	31.662	3	10.554	715.235	.000

Σημείωση. Ο κωδικός Rc αντιστοιχεί στην ικανότητα «Συλλογισμός για την ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών», ο κωδικός Ga στην ικανότητα «Γενίκευση ιδιοτήτων από την αριθμητική» και ο κωδικός Syn στις «Ικανότητες άμεσα συνυφασμένες με την αλγεβρική σύνταξη».

Για να εξεταστεί κατά πόσο οι τέσσερις ομάδες μαθητών διαφέρουν ως προς την επίδοσή τους στις οκτώ ικανότητες αλγεβρικής σκέψης (πρώτης τάξης παράγοντες του μοντέλου) πραγματοποιήθηκε πολλαπλή ανάλυση διασποράς. Οι μέσοι όροι επίδοσης των τεσσάρων ομάδων στις οκτώ ικανότητες αλγεβρικής σκέψης παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.18. Η ανάλυση πολλαπλής διασποράς (MANOVA) (Πίνακας 4.19) έδειξε ότι οι μέσοι όροι επίδοσης των τεσσάρων ομάδων στις οκτώ ικανότητες αλγεβρικής σκέψης διέφεραν στατιστικά σημαντικά (Pillai's $F_{(24,2298)}=47.256$, $p<.01$).

Πίνακας 4.18

Μέσοι Όροι και Τυπικές Αποκλίσεις των Τεσσάρων Ομάδων στους Οκτώ Παράγοντες Πρώτης Τάξης του Μοντέλου Αλγεβρικής Σκέψης

Ικανότητα	Πρώτη ομάδα		Δεύτερη ομάδα		Τρίτη ομάδα		Τέταρτη ομάδα	
	Μ	ΤΑ	Μ	ΤΑ	Μ	ΤΑ	Μ	ΤΑ
Gf	.288	.195	.575	.194	.742	.194	.941	.086
Vf	.389	.194	.607	.170	.762	.159	.866	.103
Gn	.218	.187	.403	.172	.480	.138	.756	.196
Go	.228	.149	.428	.158	.593	.147	.809	.129
Ge	.287	.201	.535	.224	.805	.183	.953	.087
Se	.344	.200	.577	.190	.768	.161	.906	.126
Mo	.183	.156	.427	.183	.679	.152	.880	.115
Sm	.105	.154	.292	.263	.541	.302	.773	.232

Σημείωση. Ο κωδικός Gf αντιστοιχεί στον παράγοντα «Γενίκευση μοτίβων συνδυακύμανσης», Vf στον παράγοντα «Μεταβολή των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με την ανεξάρτητη», Gn στον παράγοντα «Γενίκευση ιδιοτήτων των αριθμών», Go στον παράγοντα «Γενίκευση ιδιοτήτων των πράξεων», Ge στον παράγοντα «Γενίκευση ιδιοτήτων της ισότητας», Se «Αντίληψη και εύρεση της τιμής του αγνώστου», Mo «Μοντελοποίηση σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων», Sm «Απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων».

Η ανάλυση Post-hoc που παρουσιάζεται στον Πίνακα ΣΤ.7 (δείτε Παράρτημα ΣΤ) έδειξε ότι στατιστικά σημαντικές διαφορές υπήρχαν μεταξύ και των τεσσάρων ομάδων και στις οκτώ ικανότητες αλγεβρικής σκέψης. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι ο μέσος όρος κάθε ομάδας και για τις οκτώ ικανότητες αλγεβρικής σκέψης ήταν στατιστικά σημαντικά ψηλότερος από το μέσο όρο προηγούμενης ομάδας, σε καθεμία από τις οκτώ ικανότητες. Όλες οι διαφορές είναι στατιστικά σημαντικές σε επίπεδο σημαντικότητας $p<.01$.

Πίνακας 4.19

Τα Αποτελέσματα της Πολλαπλής Ανάλυσης Διασποράς για την Επίδοση στους Οκτώ Παράγοντες Πρώτης Τάξης του Μοντέλου Αλγεβρικής Σκέψης ανά Ομάδα Αλγεβρικής Σκέψης

Ικανότητα	Άθροισμα Τετραγώνων	Βαθμοί Ελευθερίας	Μέσο Τετράγωνο	F	Επίπεδο Σημαντικότητας
Gf	29.562	3	9.854	282.526	.000
Vf	17.941	3	5.980	213.173	.000
Gn	15.883	3	5.294	185.334	.000
Go	22.167	3	7.389	325.224	.000
Ge	36.277	3	12.092	308.587	.000
Se	24.269	3	8.090	251.462	.000
Mo	36.204	3	12.068	455.548	.000
Sm	32.047	3	10.682	166.024	.000

Σημείωση. Οι κωδικοί των μεταβλητών είναι οι ίδιοι με τον προηγούμενο πίνακα.

Στον Πίνακα 4.20 παρουσιάζονται συνοπτικά τα χαρακτηριστικά των τεσσάρων ομάδων των υποκειμένων ως προς τους μέσους όρους στις οκτώ ικανότητες αλγεβρικής σκέψης. Η επίδοση των μαθητών της ομάδας θεωρείται ψηλή όταν είναι ίση ή ψηλότερη από .66, μέτρια όταν είναι μικρότερη από .66 και μεγαλύτερη ή ίση από το .49 και χαμηλή όταν είναι μικρότερη από .49. Ο λόγος που το .49 αποτέλεσε το όριο μεταξύ χαμηλής και μέτριας επίδοσης ήταν το γεγονός ότι ο μέσος όρος επίδοσης της δεύτερης ομάδας ως προς τη «γενική ικανότητα αλγεβρικής σκέψης» ήταν .494 (δείτε Πίνακα 4.14). Το .66 επιλέγηκε ως το όριο μέτριας και υψηλής επίδοσης λόγω του ότι ο μέσος όρος που συγκέντρωσε η τρίτη ομάδα στη «γενική ικανότητα αλγεβρικής σκέψης» ήταν .68 (δείτε Πίνακα 4.14) και αποφασίστηκε το όριο να είναι κοντά στη συγκεκριμένη τιμή. Ο λόγος που επιλέγηκε συγκεκριμένα το .66 ήταν τα αποτελέσματα της ανάλυσης latent class τα οποία υποδείκνυαν ότι η συγκεκριμένη τιμή αποτελούσε την κατώτερη τιμή της υψηλής επίδοσης σε μερικά έργα.

Οι μαθητές της πρώτης ομάδας φαίνεται ότι είχαν χαμηλή επίδοση και στις οκτώ ικανότητες αλγεβρικής σκέψης. Τα υποκείμενα της δεύτερης ομάδας παρουσίασαν μέτρια επίδοση στις τέσσερις ικανότητες *«Γενίκευση μοτίβων συνδυακύμανσης», «Μεταβολή των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με την ανεξάρτητη», «Γενίκευση ιδιοτήτων της ισότητας» και «Αντίληψη και εύρεση της τιμής του αγνώστου»* και χαμηλή επίδοση στις υπόλοιπες ικανότητες. Οι μαθητές της τρίτης ομάδας παρουσίασαν ψηλή επίδοση στις ικανότητες *«Γενίκευση μοτίβων συνδυακύμανσης», «Μεταβολή των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με την ανεξάρτητη», «Γενίκευση ιδιοτήτων της ισότητας», «Αντίληψη και εύρεση της τιμής του αγνώστου» και «Μοντελοποίηση σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων»*, μέτρια επίδοση στις ικανότητες, *«Απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων» και «Γενίκευση ιδιοτήτων των πράξεων» και χαμηλή επίδοση στην «Γενίκευση ιδιοτήτων των αριθμών»*. Οι μαθητές της τέταρτης ομάδας είχαν ψηλή επίδοση σε όλες τις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης.

Πίνακας 4.20

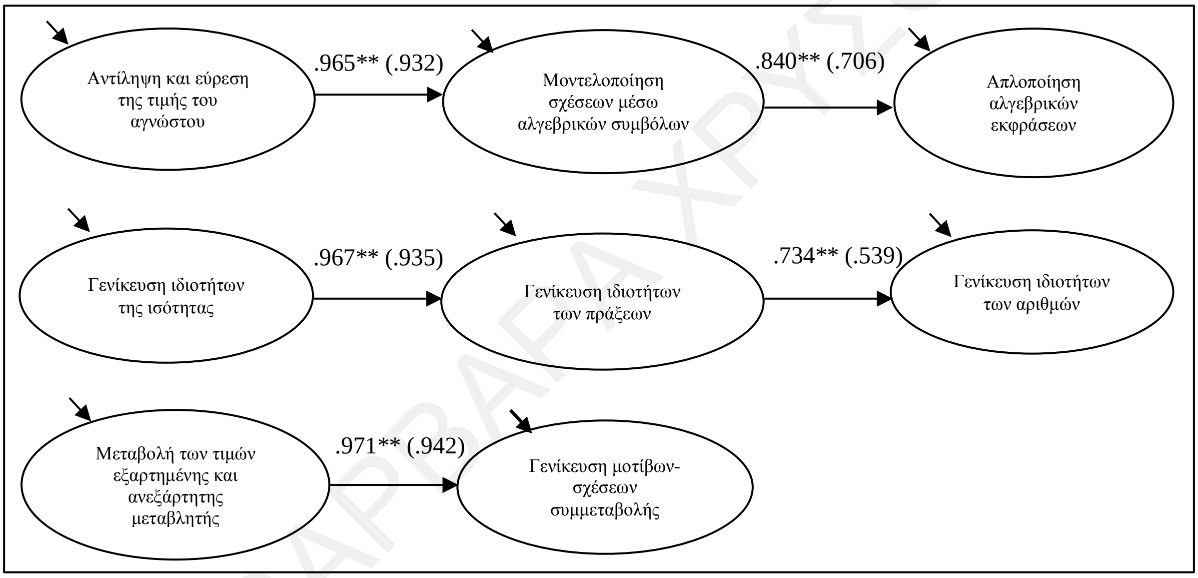
Χαρακτηριστικά των Τεσσάρων Ομάδων Υποκειμένων

	Πρώτη ομάδα	Δεύτερη ομάδα	Τρίτη ομάδα	Τέταρτη ομάδα
Ψηλή επίδοση ($M \geq .66$)			Gf, Vf, Ge, Se Mo	Gf, Vf, Gn, Go, Ge, Se, Mo, Sa
Μέτρια επίδοση ($.66 < M \leq .49$)		Gf, Vf, Ge, Se	Sa, Go	
Χαμηλή επίδοση ($M < .49$)	Gf, Vf, Gn, Go, Ge, Se, Mo, Sa	Gn, Go, Mo, Sa	Gn	

Σημείωση. Ο κωδικός Gf αντιστοιχεί στον παράγοντα «Γενίκευση μοτίβων συνδυακύμανσης», Vf στον παράγοντα «Μεταβολή των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με την ανεξάρτητη», Gn στον παράγοντα «Γενίκευση ιδιοτήτων των αριθμών», Go στον παράγοντα «Γενίκευση ιδιοτήτων των πράξεων», Ge στον παράγοντα «Γενίκευση ιδιοτήτων της ισότητας», Se «Αντίληψη και εύρεση της τιμής του αγνώστου», Mo «Μοντελοποίηση σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων», Sa «Απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων».

Ανάπτυξη ικανοτήτων αλγεβρικής σκέψης

Η ύπαρξη ενός σταθερού μοτίβου σχετικά με επίπεδο δυσκολίας των ικανοτήτων αλγεβρικής σκέψης (πρώτης τάξης παράγοντες) *εντός κάθε δεύτερης τάξης παράγοντα*, υποστηρίζει την υπόθεση για την ύπαρξη μια συγκεκριμένης αναπτυξιακής τάσης. Για να διερευνηθεί η υπόθεση αυτή εξετάστηκε ένα μοντέλο το οποίο εισηγείται ότι: (α) η ικανότητα εύρεσης της τιμής του αγνώστου προβλέπει την ικανότητα μοντελοποίησης σχέσεων μέσω αλγεβρικών εκφράσεων και η ικανότητα μοντελοποίησης σχέσεων μέσω αλγεβρικών εκφράσεων προβλέπει την ικανότητα απλοποίησης αλγεβρικών εκφράσεων, (β) η ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων της ισότητας προβλέπει την ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων των πράξεων και η ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων των πράξεων προβλέπει την ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων των αριθμών και (γ) η ικανότητα μεταβολής των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με την ανεξάρτητη (και ο συλλογισμός για τη σχέση των δύο) προβλέπει την ικανότητα γενίκευσης μοτίβων/σχέσεων συμμεταβολής. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η προσαρμογή των δεδομένων στο προτεινόμενο μοντέλο ήταν παρά πολύ καλή (*CFI*=.996, *TLI*=.995, x^2= 326.068, *df*=295, x^2/df=1.105, *RMSEA*=.011). Οι συντελεστές παλινδρόμησης του μοντέλου ήταν στατιστικά σημαντικοί και ψηλοί. Στο Διάγραμμα 4.3 παρουσιάζονται οι συντελεστές παλινδρόμησης και τα αντίστοιχα ποσοστά ερμηνευόμενης διασποράς.



Σημείωση. Ο πρώτος αριθμός αποτελεί το συντελεστή παλινδρόμησης και ο αριθμός στην παρένθεση το ποσοστό ερμηνευόμενης διασποράς (r^2). **p<.01

Διάγραμμα 4.3. Ανάπτυξη των ικανοτήτων αλγεβρικής σκέψης με βάση το πρώτο μοντέλο.

Με βάση το μοντέλο αυτό φαίνεται ότι οι μαθητές: (α) κατακτούν πρώτα την ικανότητα αντίληψης και εύρεσης της τιμής του αγνώστου, στη συνέχεια την ικανότητα μοντελοποίησης σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων και στη συνέχεια την ικανότητα απλοποίησης αλγεβρικών εκφράσεων, (β) κατακτούν πρώτα την ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων της ισότητας, στη συνέχεια την ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων των πράξεων και στη συνέχεια την ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων των αριθμών και (γ) κατακτούν πρώτη την ικανότητα μεταβολής των τιμών της εξαρτημένης σε σχέση με την ανεξάρτητη και στη συνέχεια την ικανότητα γενίκευσης σχέσεων δύο μεταβλητών που μεταβάλλονται ταυτόχρονα.

Αναλυτική περιγραφή των χαρακτηριστικών και της συμπεριφοράς των τεσσάρων ομάδων μαθητών ως προς τις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά των μαθητών των τεσσάρων ομάδων επίδοσης στις οκτώ ικανότητες αλγεβρικής σκέψης. Σε κάθε μέρος από τα οκτώ που ακολουθούν, παρουσιάζεται η επίδοση των τεσσάρων ομάδων μαθητών στα έργα καθεμιάς από τις οκτώ ικανότητες αλγεβρικής σκέψης, ενώ ταυτόχρονα περιγράφονται και τα λάθη ή οι στρατηγικές των μαθητών των τεσσάρων ομάδων στα έργα των ικανοτήτων αλγεβρικών σκέψης.

Περιγραφή των τεσσάρων ομάδων επίδοσης ως προς την ικανότητα γενίκευσης σχέσεων συμμεταβολής

Ο Πίνακας 4.21, παρουσιάζει συγκεντρωτικά την επίδοση των μαθητών των τεσσάρων ομάδων διαφορετικής ικανότητας στα έργα του παράγοντα «γενίκευση σχέσεων-μοτίβων συμμεταβολής» *(Gf)*. Οι μαθητές της πρώτης ομάδας παρουσίασαν χαμηλή επίδοση σε όλα τα έργα του συγκεκριμένου παράγοντα. Συγκεκριμένα, το 82% των μαθητών δεν ήταν σε θέση να εκφράσουν τη γενίκευση για το μοτίβο που εμπλέκει αναλογική σχέση (Η=3Δ) (Gf1) και άρα δεν μπορούσαν να εκφράσουν λεκτικά τον κανόνα. Με βάση τον τρόπο εργασίας τους στο γραπτό δοκίμιο φάνηκε ότι η πλειοψηφία των μαθητών (53%) υιοθέτησαν μια επαναλαμβανόμενη/αναδρομική (recursive) στρατηγική εστιάζοντας απλά στη διαφορά μεταξύ των όρων της μια μεταβλητής, ενώ το 20% των μαθητών προσπάθησαν να οδηγηθούν σε γενίκευση, ωστόσο, αντί να εκφράσουν τον κανόνα που περιγράφει τη σχέση των δύο μεταβλητών, υιοθέτησαν την προσέγγιση της συμμεταβολής (covariation), αναφέροντας ότι «Κάθε φορά που η ομάδα Δίας βάζει ένα τέρμα η ομάδα Ήφαιστος βάζει 3». Το 98% των μαθητών συγκέντρωσαν βαθμολογία .5 και κάτω στο έργο γενίκευσης γεωμετρικού μοτίβου με γενικό κανόνα «Σ=3ν+1» (Gf3), κάτι που δείχνει ότι το μέγιστο που είχαν επιτύχει ήταν να εντοπίσουν απλά τους αμέσως επόμενους όρους του μοτίβου. Επίσης, το 84% των μαθητών της πρώτης ομάδας, συγκέντρωσαν βαθμολογία .5 και κάτω στο έργο γενίκευσης γεωμετρικού μοτίβου με κανόνα 2ν+1 (Gf2) κάτι που υποδεικνύει ότι το μέγιστο που είχαν επιτύχει ήταν να εντοπίσουν τον αμέσως επόμενο ή τους δύο αμέσως επόμενους όρους του μοτίβου. Από τον τρόπο εργασίας τους στα έργα με γενικό κανόνα «2ν+1» και «3ν+1» (Gf2 και Gf3), αλλά και από την επεξήγηση που έδωσαν στο έργο με γενικό κανόνα «2ν+1» (Gf2) φάνηκε και πάλι ότι πολλοί μαθητές υιοθέτησαν την επαναλαμβανόμενη (recursive) στρατηγική (47% και 48% αντίστοιχα σε κάθε έργο) και πολλοί άλλοι δεν κατάφεραν να αντιμετωπίσουν καθόλου τα έργα αφού ο τρόπος εργασίας τους δεν παρουσίαζε κάποιο νόημα.

Οι μαθητές της δεύτερης ομάδας παρουσίασαν ψηλή επίδοση στο έργο γενίκευσης μοτίβου με τις τιμές των δύο μεταβλητών να παρουσιάζονται σε πίνακα (οι στήλες του πίνακα με τις τιμές παρουσιάζονται οριζόντια) (Gf1). Συγκεκριμένα, το 73% των μαθητών είχαν την ικανότητα να εκφράσουν με λόγια το γενικευμένο κανόνα για το πρώτο έργο (Gf1). Από τον τρόπο εργασίας των μαθητών και τις επεξηγήσεις τους φάνηκε ότι η πλειοψηφία των μαθητών εντόπιζαν μια σχέση την οποία έλεγχαν εάν ισχύει, μέχρι να καταλήξουν στην ορθή η οποία ίσχυε για όλες τις περιπτώσεις. Ωστόσο, οι συγκεκριμένοι μαθητές παρουσίασαν μέτρια επίδοση στο γεωμετρικό αναπτυσσόμενο μοτίβο με γενικό κανόνα «2ν+1» (Gf2) (το 57% συγκέντρωσε βαθμολογία .5 και κάτω), δείχνοντας ότι στην καλύτερη περίπτωση είχαν εντοπίσει απλά τους αμέσως επόμενους όρους του μοτίβου, αλλά και χαμηλή επίδοση στο γεωμετρικό μοτίβο με γενικό κανόνα «3ν+1» (Gf3) στο οποίο απαιτείται ανάμεσα σε άλλα και μεταφορά της γενίκευσης σε νέο πλαίσιο (το 88% των μαθητών συγκέντρωσε βαθμολογία .5 και κάτω). Ο τρόπος εργασίας των μαθητών στα δύο αυτά έργα με αναπτυσσόμενα γεωμετρικά μοτίβα έδειξε ότι οι μαθητές υιοθέτησαν κυρίως την επαναλαμβανόμενη (recursive) στρατηγική (46% και 60% των μαθητών στο έργο Gf2 και Gf3 αντίστοιχα), σημειώνοντας τη διαφορά μεταξύ των όρων της μιας μεταβλητής στις εικόνες των μοτίβων ή και στον πίνακα του έργου (Gf3).

Από την άλλη, οι μαθητές της τρίτης ομάδας παρουσίασαν ψηλή επίδοση στα δύο έργα (Gf1, Gf2), εκτός από το έργο με γενικό κανόνα «Σ=3ν+1» (Gf3), στο οποίο εκτός από τη γενίκευση του μοτίβου απαιτείται και μεταφορά της γενίκευσης σε νέο πλαίσιο. Στην περίπτωση του έργου με κανόνα «Η=3Δ» (Gf1) η πλειοψηφία των μαθητών εξήγησαν ότι είδαν τον κανόνα στον πίνακα αμέσως, ενώ λίγοι μαθητές ανέφεραν ότι δοκίμασαν μια σχέση και αν δεν ίσχυε δοκίμασαν μια άλλη μέχρι που εντόπισαν την ορθή. Στο έργο με κανόνα «2ν+1» (Gf2) η πλειοψηφία των μαθητών εξήγησαν ότι εντόπισαν τον κανόνα με βάση την εικόνα και το 47% των μαθητών εξήγησαν πιο συγκεκριμένα, κάνοντας αναφορά στις άσπρες και μαύρες μπάλες του μοτίβου. Στο έργο με γενικό κανόνα «Σ=3ν+1» (Gf3) η πλειοψηφία των μαθητών (69%) της τρίτης ομάδας δεν μπόρεσαν να εντοπίσουν το μεγαλύτερο όρο ($100^{ο}$ όρο) του γεωμετρικού μοτίβου, το 65% των μαθητών δεν κατάφεραν να εκφράσουν λεκτικά τον ορθό κανόνα και το 68% των μαθητών δεν ήταν σε θέση να μεταφέρουν τη γενίκευση σε νέο πλαίσιο. Ως προς τις στρατηγικές που υιοθέτησαν στο συγκεκριμένο έργο, το 29% των μαθητών της τρίτης ομάδας υιοθέτησαν την επαναλαμβανόμενη (recursive) στρατηγική στο ερώτημα για τη γενίκευση του κανόνα «3ν+1» και το 40% των μαθητών υιοθέτησαν επαναλαμβανόμενη στρατηγική στο τελευταίο ερώτημα του ίδιου έργου (Gf3) που αφορούσε στη γενίκευση του μοτίβου με γενικό κανόνα «2ν+1».

Οι μαθητές της τέταρτης ομάδας παρουσίασαν ψηλή επίδοση σε όλα τα έργα το συγκεκριμένου παράγοντα. Συγκεκριμένα, στο έργο με κανόνα «Σ=3ν+1» (Gf3) το οποίο φαίνεται να είναι το πιο δύσκολο έργο του συγκεκριμένου παράγοντα, το 86% των μαθητών εντόπισαν τον 100^{o} όρο του μοτίβου, το 97% διατύπωσαν λεκτικά τον ορθό κανόνα και το 79% των μαθητών μετέφεραν τη γενίκευση σε νέο πλαίσιο. Επίσης, στο έργο με το εικονικά γεωμετρικό αναπτυσσόμενο μοτίβο (Gf2) όπου οι μαθητές καλούνταν να εξηγήσουν πώς εντόπισαν τον κανόνα, σχεδόν όλοι οι μαθητές εξήγησαν τον κανόνα με βάση την εικόνα (το πλαίσιο) του αναπτυσσόμενου μοτίβου.

Πίνακας 4.21

Χαρακτηριστικά των Τεσσάρων Ομάδων στον Παράγοντα Γενίκευσης Σχέσεων/Μοτίβων Συμμεταβολής

Επίπεδο επίδοσης	Πρώτη ομάδα	Δεύτερη ομάδα	Τρίτη ομάδα	Τέταρτη ομάδα
Ψηλή επίδοση (Μ≥.66)		Gf1	Gf1, Gf2	Gf1, Gf2, Gf3
Μέτρια επίδοση (.66<Μ≤.49)		Gf2	Gf3	
Χαμηλή επίδοση (Μ<.49)	Gf1, Gf2,Gf3	Gf3		

Σημείωση. Gf1: Γενίκευση μοτίβου με τιμές σε πίνακα και γενικό κανόνα Η=3×Δ
Gf2: Γενίκευση γεωμετρικού μοτίβου (εικονική αναπαράσταση) με γενικό κανόνα Μ=2×ν+1
Gf3: Γενίκευση γεωμετρικού μοτίβου (εικονική αναπαράσταση και πίνακας με τιμές) με γενικό κανόνα Σ=3×ν+1 και μεταφορά της γενίκευσης σε νέο πλαίσιο με γεωμετρικό μοτίβο και γενικό κανόνα Σ=2×ν+1

Περιγραφή των τεσσάρων ομάδων επίδοσης ως προς την ικανότητα μεταβολής των τιμών της εξαρτημένης σε σχέση με την ανεξάρτητη μεταβλητή

Ο Πίνακας 4.22, παρουσιάζει συγκεντρωτικά την επίδοση των μαθητών των τεσσάρων ομάδων διαφορετικής ικανότητας στα έργα του παράγοντα «μεταβολή των τιμών της εξαρτημένης σε σχέση με την ανεξάρτητη μεταβλητή» *(Vf)*. Η πρώτη ομάδα μαθητών παρουσίασε ψηλή επίδοση μόνο στο έργο κατασκευής γραφικής παράστασης με βάση έναν πίνακα που περιλαμβάνει τις τιμές δυο μεταβλητών που μεταβάλλονται ταυτόχρονα (Vf1). Το 38% των μαθητών κατασκεύασαν ορθά τη γραφική παράσταση παρουσιάζοντας την ευθεία με θετική κλίση, το 22% των μαθητών τοποθέτησαν ορθά τα σημεία χωρίς ωστόσο, να σχηματίσουν την ευθεία, το 19% των μαθητών παρουσίασαν ως γραφική παράσταση τα σημεία σε συνδυασμό με τον κατακόρυφο και οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα που σχημάτιζαν μέχρι να τα εντοπίσουν, ενώ το 8% τοποθέτησαν τα σημεία λανθασμένα σε ραβδόγραμμα, ιστόγραμμα ή σε ένα εντελώς λανθασμένο σχήμα το οποίο θύμιζε τη μορφή σκάλας. Στα υπόλοιπα τρία έργα οι μαθητές παρουσίασαν χαμηλή επίδοση. Συγκεκριμένα, στο έργο όπου κλήθηκαν να επιλέξουν τη γραφική παράσταση που αναπαριστά μια κατάσταση (Vf2), το 24% επέλεξαν τη γραφική παράσταση που δείχνει το ποσό να παραμένει σταθερό (οριζόντια ευθεία) και το 14% επέλεξαν τη γραφική παράσταση με την ευθεία σε αρνητική κλίση. Ακόμη, το 26% των μαθητών επέλεξαν την ορθή γραφική παράσταση με την ευθεία σε θετική κλίση ωστόσο, δεν ήταν σε θέση να αιτιολογήσουν καθόλου την επιλογή αυτή και το 13% παρείχαν μια αιτιολόγηση η οποία δεν ήταν ολοκληρωμένη. Στο έργο όπου χρειάζεται αντικατάσταση τιμών σε κανόνα με αλγεβρικά σύμβολα και στη συνέχεια επεξήγηση για τη σχέση μεταξύ των δύο μεταβλητών του κανόνα (Vf3), το 57% των μαθητών συγκέντρωσαν βαθμολογία μηδέν. Συγκεκριμένα, το 89% των μαθητών δεν είχαν την ικανότητα να μεταβάλλουν τις τιμές των δύο μεταβλητών με βάση τον αλγεβρικό κανόνα και το 55% δεν είχαν την ικανότητα να εξηγήσουν τη σχέση των δύο μεταβλητών με βάση τον κανόνα. Στο έργο όπου απαιτείται μεταβολή των δύο μεταβλητών σε δύο διαφορετικούς κανόνες (λεκτικά διατυπωμένους) και σύγκριση του ποιος από τους δύο αυξάνεται πιο γρήγορα (Vf4), το 45% συγκέντρωσαν συνολική βαθμολογία μηδέν και συγκεκριμένα το 51% δεν είχαν επιτύχει στη μεταβολή των τιμών στον κανόνα «3ν», το 76% δεν είχαν την ικανότητα να μεταβάλουν τις τιμές στον κανόνα «ν επί ν» και το 80% δεν είχαν την ικανότητα να συγκρίνουν τους δύο κανόνες και να εξηγήσουν σε ποια από τις δύο περιπτώσεις τα χρήματα αυξάνονται πιο γρήγορα.

Όσον αφορά στη δεύτερη ομάδα, οι μαθητές παρουσίασαν ψηλή επίδοση στα δύο έργα γραφικών παραστάσεων (Vf1 και Vf2). Το 44% των μαθητών κατασκεύασαν ορθή γραφική παράσταση (Vf1) και το 27% τοποθέτησαν ορθά τα σημεία αλλά δεν είχαν σχηματίσει την ευθεία. Στο έργο ερμηνείας γραφικής παράστασης (Vf2) το 49% των μαθητών επέλεξαν την ορθή γραφική παράσταση και αιτιολόγησαν ορθά και το 16% αιτιολόγησαν την ορθή επιλογή αλλά η αιτιολόγηση δεν ήταν ολοκληρωμένη. Οι μαθητές της δεύτερης ομάδας παρουσίασαν ωστόσο, μέτρια και χαμηλή επίδοση στα άλλα δύο έργα του συγκεκριμένου παράγοντα (Vf3 και Vf4, αντίστοιχα).

Οι μαθητές της τρίτης ομάδας εμφάνισαν ψηλή επίδοση σε όλα τα έργα εκτός από το έργο όπου απαιτείται μεταβολή των τιμών δύο μεταβλητών με βάση δύο διαφορετικούς κανόνες και σύγκρισή τους (Vf4). Συγκεκριμένα, στο έργο αυτό (Vf4), το 93% των μαθητών της τρίτης ομάδας κατάφεραν να μεταβάλουν με επιτυχία τις τιμές στον κανόνα «3ν», το 67% μπορούσαν να μεταβάλουν με επιτυχία τις τιμές στον κανόνα «ν επί ν», το 51% επέλεξαν ορθά τον κανόνα στον οποίο οι τιμές αυξάνονταν πιο γρήγορα, ωστόσο δεν εξήγησαν την απάντησή τους.

Από την άλλη, οι μαθητές της τέταρτης ομάδας είχαν ψηλή επίδοση και στα τέσσερα έργα της συγκεκριμένης ικανότητας. Συγκεκριμένα, στο έργο όπου δεν παρουσίασε ψηλή επίδοση η προηγούμενη ομάδα (Vf4), οι μαθητές της τέταρτης ομάδας φάνηκε ότι μπορούσαν με ευκολία να μεταβάλουν τις τιμές δύο μεταβλητών με βάση και τους δύο κανόνες. Επιπρόσθετα, το 51% των μαθητών ήταν σε θέση να αιτιολογήσουν ορθά σε ποιο από τους δύο κανόνες οι τιμές της εξαρτημένης αυξάνονται πιο γρήγορα και το 33% επέλεξαν ορθά τον κανόνα στον οποίο οι τιμές αυξάνονται πιο γρήγορα αλλά δεν αιτιολόγησαν την επιλογή τους.

Πίνακας 4.22

Χαρακτηριστικά των Τεσσάρων Ομάδων στον Παράγοντα Μεταβολής των Τιμών της Εξαρτημένης Μεταβλητής σε Σχέση με την Ανεξάρτητη (και Συλλογισμός για τη Μεταβολή)

Επίπεδο επίδοσης	Πρώτη ομάδα	Δεύτερη ομάδα	Τρίτη ομάδα	Τέταρτη ομάδα
Ψηλή επίδοση (M≥.66)	Vf1	Vf1, Vf2	Vf1, Vf2, Vf3	Vf1, Vf2, Vf3, Vf4
Μέτρια επίδοση (.66<M≤.49)		Vf3	Vf4	
Χαμηλή επίδοση (M<.49)	Vf2 Vf3 Vf4	Vf4		

Σημείωση. Vf1: Κατασκευή γραφικής παράστασης με βάση πίνακα τιμών για δύο μεταβλητές που μεταβάλλονται ταυτόχρονα (ψ=χ)
Vf2: Ερμηνεία και επιλογή γραφικής παράστασης για την κατάσταση με γενικό κανόνα Ε=10×ν
Vf3: Μεταβολή των τιμών των δύο μεταβλητών με βάση το Α=1000-(2×Τ) και συλλογισμός για τη σχέση μεταξύ των δύο μεταβλητών
Vf4: Μεταβλητών τιμών δύο μεταβλητών που μεταβάλλονται ταυτόχρονα με βάση δύο κανόνες Χ=3×ν και Χ=ν×ν και συλλογισμός σε ποιο από τους δύο κανόνες οι τιμές της εξαρτημένης αυξάνονται περισσότερο και πιο γρήγορα

Περιγραφή των τεσσάρων ομάδων επίδοσης ως προς την ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων των πράξεων

Ο Πίνακας 4.23, παρουσιάζει συγκεντρωτικά την επίδοση των μαθητών των τεσσάρων ομάδων διαφορετικής ικανότητας στα έργα του παράγοντα «*γενίκευση ιδιοτήτων των πράξεων*» (Go). Οι μαθητές της πρώτης ομάδας επέδειξαν χαμηλή επίδοση σε όλα τα έργα. Στο πρώτο ερώτημα (του έργου Go2) για τη γενίκευση της αντιμεταθετικής ιδιότητας, το 52% των μαθητών υποστήριξαν ότι οι δύο μαθηματικές προτάσεις (2005x1294 και 1294x2005) ισούνται αλλά δεν αιτιολόγησαν μέσω ολοκληρωμένων γενικών δηλώσεων. Το 45% των μαθητών απέτυχαν στο επόμενο ερώτημα (του έργου Go2) όπου στη θέση των αριθμών εμφανίζονται μεταβλητές (αxβ και βxα, και η ερώτηση αν τα δύο θα ισούνται οποιοιδήποτε αριθμοί και αν είναι τα α και β), συγκεντρώνοντας βαθμολογία μηδέν. Το 21% των μαθητών υποστήριξαν απλά ότι οι δυο μαθηματικές προτάσεις θα έδιναν το ίδιο αποτέλεσμα και το 23% των μαθητών ανέφεραν ότι οι δύο προτάσεις ισούνται μόνο όταν τα α και β είναι ακέραιοι αριθμοί. Στην περίπτωση του έργου που αφορά στο αν η αντιμεταθετική ιδιότητα ισχύει στη διαίρεση (α÷β και β÷α) (Go3), το 77% των μαθητών της συγκεκριμένης ομάδας υποστήριξαν ότι θα δώσουν το ίδιο αποτέλεσμα. Στο έργο γενίκευσης-συλλογισμού για το προσθετικό και πολλαπλασιαστικό αντίστροφο (Go1), το 87% των μαθητών δεν συμπλήρωσαν ορθά το κενό με βάση το πολλαπλασιαστικό αντίστροφο και άρα δεν αιτιολόγησαν και το 43% των μαθητών δεν συμπλήρωσαν ορθά το κενό στην πρώτη εξίσωση για το προσθετικό αντίστροφο. Όσον αφορά στο έργο για τη γενίκευση/συλλογισμό για την επιμεριστική ιδιότητα (Go4), το 76% των μαθητών υποστήριξαν ότι οι δυο μαθηματικές προτάσεις «(65×(50+81) και (65×50)+(65×81)», δεν θα έδιναν το ίδιο αποτέλεσμα

Οι μαθητές της δεύτερης ομάδας φάνηκε ότι είχαν ψηλή επίδοση στο έργο για το προσθετικό και πολλαπλασιαστικό αντίστροφο (Go1), όπου το 89% συμπλήρωσαν ορθά το κενό της εξίσωσης λαμβάνοντας υπόψη και αιτιολογώντας το προσθετικό αντίστροφο, ενώ το 50% συμπλήρωσαν ορθά το κενό της δεύτερης εξίσωσης (του ίδιου έργου Go1) λαμβάνοντας υπόψη και επεξηγώντας το πολλαπλασιαστικό αντίστροφο. Παρουσίασαν ωστόσο, μέτρια επίδοση στο έργο για την αντιμεταθετική ιδιότητα (Go2). Συγκεκριμένα, το 69% υποστήριξαν ότι οι δύο μαθηματικές προτάσεις (2005x1294 και 1294x2005) ισούνται αλλά δεν αιτιολόγησαν μέσω ολοκληρωμένων γενικών δηλώσεων, ενώ στο επόμενο ερώτημα του έργου (Go2) όπου υπάρχουν μεταβλητές στη θέση των αριθμών (αxβ και βxα) το 24% θεώρησαν ότι τα «αxβ και βxα» θα ισούνται μόνο όταν τα α και β είναι ακέραιοι και το 24% ότι ανέφεραν ότι θα ισούνται όταν τα και β είναι ακέραιοι, κλάσματα ή δεκαδικοί, ωστόσο το αιτιολόγησαν μέσω συγκεκριμένων αριθμητικών παραδειγμάτων χωρίς να εκφράσουν μια γενική δήλωση. Στο έργο «α÷β και β÷α» (Go3), το 43% υποστήριξαν ότι οι δύο μαθηματικές προτάσεις *θα έδιναν* το ίδιο αποτέλεσμα, το 19% υποστήριξαν ότι δεν θα έδιναν το ίδιο αποτέλεσμα αλλά παρείχαν λανθασμένη αιτιολόγηση και το 24% υποστήριξαν ότι δεν θα δώσουν το ίδιο αποτέλεσμα αιτιολογώντας την απάντησή τους μέσω αριθμητικού παραδείγματος και όχι γενικής δήλωσης-επεξήγησης. Στο έργο για την επιμεριστική ιδιότητα (Go4) το 69% των μαθητών απάντησαν ότι οι δύο μαθηματικές προτάσεις «(65×(50+81) και (65×50)+(65×81)» δεν θα έδιναν το ίδιο αποτέλεσμα.

Οι μαθητές της τρίτης ομάδας παρουσίασαν ψηλή επίδοση στο έργο για το προσθετικό και πολλαπλαστικό αντίστροφο (Go1). Συγκεκριμένα, το 97% και το 83% των μαθητών συμπλήρωσαν ορθά τις εξισώσεις λαμβάνοντας υπόψη το προσθετικό και πολλαπλασιαστικό αντίστροφο, αντίστοιχα. Παρουσίασαν μέτρια επίδοση στο έργο «α÷β και β÷α» (Go3) αφού το 21% υποστήριξαν ότι οι δύο μαθηματικές προτάσεις δεν θα δώσουν το ίδιο αποτέλεσμα και αιτιολόγησαν με λανθασμένη εξήγηση και το 45% υποστήριξαν ότι δεν θα δώσουν το ίδιο μαθηματικό αποτέλεσμα και αιτιολόγησαν μέσω συγκεκριμένων αριθμητικών παραδειγμάτων (και όχι μέσω γενικής δήλωσης και αιτιολόγησης). Στο έργο για την αντιμεταθετική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό (Go2), παρουσίασαν επίσης μέτρια επίδοση, αφού το 66% υποστήριξαν ότι οι δύο μαθηματικές προτάσεις (2005x1294 και 1294x2005) θα έδιναν το ίδιο αποτέλεσμα, ωστόσο δεν αιτιολόγησαν μέσω γενικής δήλωσης-αιτιολόγησης. Επίσης, το 46% υποστήριξαν ότι οι δύο μαθηματικές προτάσεις (αxβ και βxα) θα δώσουν ίδιο αποτέλεσμα όταν οι αριθμοί είναι ακέραιοι, κλάσματα και δεκαδικοί αλλά αιτιολόγησαν μέσω συγκεκριμένων αριθμητικών παραδειγμάτων. Το 18% θεώρησαν ότι οι δύο μαθηματικές προτάσεις (αxβ και βxα) θα δώσουν ίδιο αποτέλεσμα μόνο όταν οι αριθμοί είναι ακέραιοι. Οι μαθητές της τρίτης ομάδας παρουσίασαν χαμηλή επίδοση στο έργο για την επιμεριστική ιδιότητα (Go4).

Οι μαθητές της τέταρτης ομάδας επέδειξαν ψηλή επίδοση και στα τέσσερα έργα του συγκεκριμένου παράγοντα. Συγκεκριμένα, στο πρώτο ερώτημα του έργου για την αντιμεταθετική ιδιότητα (2005x1294 και 1294x2005, του έργου Go2), το 50% αιτιολόγησαν μέσω γενικευμένης δήλωσης ότι οι δύο προτάσεις ισούνται, ενώ το 49% αιτιολόγησαν την ίδια απάντηση μέσω γενικής αιτιολόγησης η οποία ωστόσο δεν ήταν εντελώς ολοκληρωμένη. Ακόμη το 41% υποστήριξαν ότι προτάσεις (αxβ και βxα) θα δώσουν ίδιο αποτέλεσμα όταν οι αριθμοί είναι ακέραιοι, κλάσματα και δεκαδικοί, και αιτιολόγησαν ορθά μέσω γενικευμένων δηλώσεων και το 39% αιτιολόγησαν μέσω αριθμητικών παραδειγμάτων. Στο έργο «α÷β και β÷α» (Go3), το 53% και το 33% υποστήριξαν ότι η μαθηματικές προτάσεις δεν θα έδιναν το ίδιο αποτέλεσμα και αιτιολόγησαν την απάντησή τους είτε μέσω γενικευμένων δηλώσεων είτε μέσω αριθμητικών παραδειγμάτων, αντίστοιχα. Επιπρόσθετα, το 100% και το 99% παρουσίασαν επιτυχία στα ερωτήματα για το προσθετικό και πολλαπλασιαστικό αντίστροφο, αντίστοιχα. Όσον αφορά στο έργο για την επιμεριστική ιδιότητα (Go4), το 53% των μαθητών της τέταρτης ομάδας απάντησαν ορθά ότι οι δύο μαθηματικές προτάσεις «65×(50+81) και (65×50)+(65×81)» θα έδιναν το ίδιο αποτέλεσμα και αιτιολόγησαν μέσω γενικής δήλωσης. Το 36% των μαθητών αιτιολόγησαν την ίδια απάντηση που προαναφέρθηκε αλλά μέσω μη ολοκληρωμένης επεξήγησης και το 11% των μαθητών δεν αιτιολόγησαν καθόλου.

Πίνακας 4.23

Χαρακτηριστικά των Τεσσάρων Ομάδων στον Παράγοντα Γενίκευσης Ιδιοτήτων των Πράξεων

Επίπεδο επίδοσης	Πρώτη ομάδα	Δεύτερη ομάδα	Τρίτη ομάδα	Τέταρτη ομάδα
Ψηλή επίδοση ($M \geq .66$)		Go1	Go1	Go1, Go2, Go3, Go4
Μέτρια επίδοση ($.66 < M \leq .49$)		Go2	Go2, Go3	
Χαμηλή επίδοση ($M < .49$)	Go1, Go2, Go3, Go4	Go3, Go4	Go4	

Σημείωση. Go1: Γενίκευση για το προσθετικό και το πολλαπλασιαστικό αντίστροφο
Go2: Γενίκευση για την αντιμεταθετική ιδιότητα
Go3: Συλλογισμός-γενίκευση για το αν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στη διαίρεση
Go4: Γενίκευση για την επιμεριστική ιδιότητα

Περιγραφή των τεσσάρων ομάδων επίδοσης ως προς την ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων των αριθμών

Ο Πίνακας 4.24, παρουσιάζει συγκεντρωτικά την επίδοση των μαθητών των τεσσάρων ομάδων διαφορετικής ικανότητας στα έργα του παράγοντα «*γενίκευση ιδιοτήτων των* *αριθμών» (Gn)*. Οι μαθητές της πρώτης ομάδας εμφάνισαν χαμηλή επίδοση και στα τρία έργα του συγκεκριμένου παράγοντα. Στο έργο γενίκευσης για το αποτέλεσμα της πρόσθεσης περιττού με περιττό αριθμό (Gn1), το 54% των μαθητών της πρώτης ομάδας απέτυχαν εντελώς και συγκέντρωσαν βαθμολογία μηδέν, ενώ το 41% των μαθητών υποστήριξαν ότι το αποτέλεσμα είναι άρτιος αριθμός ωστόσο, το αιτιολόγησαν μόνο μέσα από αριθμητικά παραδείγματα. Στο έργο για την πρόσθεση κάποιου αριθμού με τον εαυτό του (Gn2), το 46% των μαθητών συγκέντρωσαν βαθμολογία μηδέν, ενώ το 37% υποστήριξαν ότι είναι άρτιος αριθμός, ωστόσο, αιτιολόγησαν μόνο μέσα από αριθμητικά παραδείγματα. Στο έργο για την «πρόσθεση ενός αριθμού με τον εαυτό του συν τρία» (Gn3), το 47% των μαθητών απέτυχαν στο συγκεκριμένο έργο και συγκέντρωσαν βαθμολογία μηδέν, το 35% των μαθητών υποστήριξαν ότι το αποτέλεσμα είναι περιττός ωστόσο, το αιτιολόγησαν μόνο μέσα από αριθμητικά παραδείγματα και το 19% υποστήριξαν ότι είναι περιττός αριθμός αλλά η αιτιολόγησή τους ήταν λανθασμένη.

Οι μαθητές της δεύτερης ομάδας παρουσίασαν χαμηλή επίδοση σε όλα τα έργα. Συγκεκριμένα, στο έργο γενίκευσης για το αποτέλεσμα της πρόσθεσης περιττού με περιττό αριθμό (Gn1), το 73% υποστήριξαν ότι το αποτέλεσμα είναι άρτιος αριθμός αλλά αιτιολόγησαν μόνο μέσω αριθμητικών παραδειγμάτων, κάτι που δεν ήταν αρκετό μιας και απαιτείται αιτιολόγηση η οποία να βασίζεται σε ιδιότητες. Στο έργο για την πρόσθεση κάποιου αριθμού με τον εαυτό του (Gn2), το 73% υποστήριξαν ότι το αποτέλεσμα είναι άρτιος αριθμός και το αιτιολόγησαν μόνο μέσα από αριθμητικά παραδείγματα. Στο έργο για την «πρόσθεση ενός αριθμού με τον εαυτό του συν τρία» (Gn3), το 72% των μαθητών υποστήριξαν ότι είναι περιττός αριθμός αιτιολόγησαν ωστόσο και πάλι μέσα από αριθμητικά παραδείγματα.

Οι μαθητές της τρίτης ομάδας παρουσίασαν μέτρια επίδοση μόνο στο έργο για την πρόσθεση ενός αριθμού με τον εαυτό του (Gn2) και χαμηλή επίδοση στα υπόλοιπα έργα. Συγκεκριμένα, στο έργο για την πρόσθεση ενός αριθμού με τον εαυτό του (Gn2), το 75% των μαθητών αιτιολόγησαν μέσω αριθμητικών παραδειγμάτων ότι το αποτέλεσμα είναι άρτιος αριθμός και το 11% αιτιολόγησαν ότι το αποτέλεσμα είναι άρτιος αριθμός μέσω γενικής δήλωσης η οποία δεν ήταν ολοκληρωμένη. Στα υπόλοιπα δύο έργα (Gn1, Gn3) η πλειοψηφία των μαθητών (82% και 79% αντίστοιχα) υποστήριξαν την ορθή απάντηση, ωστόσο, αιτιολόγησαν κυρίως μέσω αριθμητικών παραδειγμάτων.

Οι μαθητές της τέταρτης ομάδας επέδειξαν ψηλή επίδοση και στα τρία έργα. Συγκεκριμένα, το 46% αιτιολόγησαν μέσω γενικευμένων δηλώσεων ότι το αποτέλεσμα της πρόσθεσης περιττού με περιττό είναι άρτιος και το 17% αιτιολόγησαν το ίδιο αποτέλεσμα μέσω γενική δήλωσης η οποία όμως δεν ήταν ολοκληρωμένη. Το 36% των μαθητών αιτιολόγησαν την προαναφερθείσα απάντηση μέσω αριθμητικών παραδειγμάτων. Στο έργο για την πρόσθεση ενός αριθμού με τον εαυτό του (Gn2), το 46% των μαθητών αιτιολόγησαν μέσω γενικευμένης δήλωσης ότι το αποτέλεσμα είναι άρτιος και το 28% των μαθητών αιτιολόγησαν την ίδια απάντηση μέσω γενικής δήλωσης η οποία όμως δεν ήταν ολοκληρωμένη. Στο έργο για την «πρόσθεση ενός αριθμού με τον εαυτό του συν τρία» (Gn3) το 44% των μαθητών αιτιολόγησαν ότι το αποτέλεσμα είναι περιττός αριθμός μέσω γενικευμένης δήλωσης, το 15% έκαναν το ίδιο αλλά η γενικευμένη δήλωση δεν ήταν ολοκληρωμένη και το 39% αιτιολόγησαν ότι είναι περιττός αριθμός μέσω αριθμητικών παραδειγμάτων.

Πίνακας 4.24

Χαρακτηριστικά των Τεσσάρων Ομάδων στον Παράγοντα Γενίκευσης Ιδιοτήτων των Αριθμών

Επίπεδο επίδοσης	Πρώτη ομάδα	Δεύτερη ομάδα	Τρίτη ομάδα	Τέταρτη ομάδα
Ψηλή επίδοση (M≥.66)				Gn1, Gn2, Gn3
Μέτρια επίδοση (.66<M≤.49)			Gn2	
Χαμηλή επίδοση (M<.49)	Gn1, Gn2, Gn3	Gn1, Gn2, Gn3	Gn1, Gn3	

Σημείωση. Gn1: Γενίκευση για το αποτέλεσμα της πρόσθεσης περιττού αριθμού με περιττό αριθμό
Gn2: Γενίκευση για το αποτέλεσμα της πρόσθεσης ενός αριθμού με τον εαυτό του (άρτιος/περιττός;)
Gn3: Γενίκευση για το αποτέλεσμα της πρόσθεσης ενός αριθμού με τον εαυτό του συν 3 (άρτιος/περιττός;)

Περιγραφή των τεσσάρων ομάδων επίδοσης ως προς την ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων της ισότητας

Ο Πίνακας 4.25, παρουσιάζει συγκεντρωτικά την επίδοση των μαθητών των τεσσάρων ομάδων διαφορετικής ικανότητας στα έργα του παράγοντα «*γενίκευση ιδιοτήτων της ισότητας» (Ge)*. Οι μαθητές της πρώτης ομάδας παρουσίασαν χαμηλή επίδοση σε όλα τα έργα του συγκεκριμένου παράγοντα. Συγκεκριμένα, στο έργο για τη γενίκευση της ιδιότητας της ισότητας στην πρόσθεση (Ge2), το 62% των μαθητών δεν επέλεξαν την ορθή επιλογή και δεν κατέληξαν στη γενίκευση ότι όταν προσθέτω ίση ποσότητα στα δύο μέλη της ισότητας, η ισότητα διατηρείται. Το 26% των μαθητών επέλεξαν την ορθή επιλογή αλλά δεν την αιτιολόγησαν και έτσι δεν κατέληξαν στη γενίκευση που προαναφέρθηκε. Στο έργο για τη γενίκευση της ιδιότητας της ισότητας στην αφαίρεση (Ge3), το 58% των μαθητών απέτυχαν και συγκέντρωσαν βαθμολογία μηδέν και το 25% των μαθητών επέλεξαν την ορθή επιλογή αλλά δεν αιτιολόγησαν και δεν κατέληξαν στη γενίκευση ότι όταν αφαιρείς ίση ποσότητα και από τα δύο μέλη της ισότητας η ισότητα διατηρείται. Στο έργο όπου υπάρχουν τρεις δηλώσεις για τη μεταβατική ιδιότητα της ισότητας και της ανισότητας (Ge1) οι οποίες πρέπει να συμπληρωθούν, το 23% δεν συμπλήρωσαν ορθά καμία από αυτές και το 30% συμπλήρωσαν ορθά μόνο μια από τις τρεις.

Οι μαθητές της δεύτερης ομάδας είχαν ψηλή επίδοση μόνο στο έργο με τις δηλώσεις για τη μεταβατική ιδιότητα της ισότητας και της ανισότητας (Ge1). Συγκεκριμένα, το 52% των μαθητών συμπλήρωσαν ορθά και τις τρεις δηλώσεις του έργου ενώ το 24% συμπλήρωσαν ορθά τις δύο από τις τρεις δηλώσεις. Μέσα από τον τρόπο εργασίας τους στο δοκίμιο η πλειοψηφία των μαθητών της συγκεκριμένης ομάδας (55%) που απάντησε ορθά στις δύο ή και στις τρεις δηλώσεις, έδειξαν ότι πάνω από τα αλγεβρικά σύμβολα (π.χ. Α=Β, Β=Γ, Α=Γ) δοκίμαζαν κάποιο αριθμό, ελέγχοντας με αυτό τον τρόπο τις δηλώσεις. Παρουσίασαν ωστόσο, χαμηλή επίδοση στα έργα γενίκευσης της ιδιότητας της ισότητας στην πρόσθεση και στην αφαίρεση (Ge2 και Ge3). Στο έργο για τη γενίκευση της ιδιότητας της ισότητας στην πρόσθεση (Ge2), το 27% απέτυχαν εντελώς ενώ το 38% αν και επέλεξαν την ορθή επιλογή δεν ήταν σε θέση να την αιτιολογήσουν και να εκφράσουν τη γενική δήλωση για την ιδιότητα της ισότητας. Στο έργο για τη γενίκευση της ιδιότητας της ισότητας στην αφαίρεση (Ge3), το 21% των μαθητών απέτυχαν εντελώς, ενώ το 50% αν και επέλεξαν την ορθή επιλογή δεν είχαν την ικανότητα να την αιτιολογήσουν και να εξηγήσουν ότι όταν αφαιρούμε ίδια ποσότητα και από τα δύο μέλη της ισότητας, τότε η ισότητα διατηρείται.

Οι μαθητές της τρίτης και της τέταρτης ομάδας παρουσίασαν ψηλή επίδοση και στα τρία έργα του παράγοντα. Οι μαθητές της τέταρτης ομάδας που είχαν επιλύσει ορθά τα τρία έργα (Ge2, Ge3 και Ge1) είναι 88%, 94%, και 88%, αντίστοιχα. Οι μαθητές της τρίτης ομάδας που έλυσαν ορθά τα έργα (συγκέντρωσαν μέγιστη βαθμολογία σε κάθε έργο) ήταν κάπως λιγότεροι από αυτούς της τέταρτης ομάδας. Οι μαθητές της τρίτης ομάδας που έλυσαν ορθά τα έργα (Ge2, Ge3 και Ge1) ήταν 52% , 52% και 72% αντίστοιχα. Το 26% και το 28% των μαθητών της τρίτης ομάδας επέλεξαν την ορθή επιλογή στα έργα γενίκευσης της ιδιότητας της ισότητας στην πρόσθεση και στην αφαίρεση (Ge2 και Ge3) αντίστοιχα, ωστόσο δεν αιτιολόγησαν την επιλογή τους.

Πίνακας 4.25

Χαρακτηριστικά των Τεσσάρων Ομάδων στον Παράγοντα Γενίκευσης Ιδιοτήτων της Ισότητας

Επίπεδο επίδοσης	Πρώτη ομάδα	Δεύτερη ομάδα	Τρίτη ομάδα	Τέταρτη ομάδα
Ψηλή επίδοση (M≥.66)		Ge1	Ge1, Ge2, Ge3	Ge1, Ge2, Ge3
Μέτρια επίδοση (.66<M≤.49)				
Χαμηλή επίδοση (M<.49)	Ge1, Ge2, Ge3	Ge2, Ge3		

Σημείωση.Ge1: Γενίκευση για τη μεταβατική ιδιότητα της ισότητας και της ανισότητας
Ge2: Γενίκευση για την ιδιότητα της ισότητας: όταν προσθέτω ίση ποσότητα και στα δύο μέλη η ισότητα διατηρείται
Ge3: Γενίκευση για την ιδιότητα της ισότητας: όταν αφαιρώ ίση ποσότητα και από τα δύο μέλη η ισότητα διατηρείται

Περιγραφή των τεσσάρων ομάδων επίδοσης ως προς την ικανότητα αντίληψης και εύρεσης της τιμής του αγνώστου

Ο Πίνακας 4.26, παρουσιάζει συγκεντρωτικά την επίδοση των μαθητών των τεσσάρων ομάδων διαφορετικής ικανότητας στα έργα του παράγοντα «*αντίληψη και εύρεση της τιμής του αγνώστου» (Se).* Η πρώτη ομάδα παρουσίασε μέτρια επίδοση μόνο στο έργο που αφορά σε επίλυση δύο εξισώσεων όπου ο άγνωστος εμφανίζεται μόνο στο αριστερό μέλος της εξίσωσης (Se1) και η πράξη που συνδέει τον άγνωστο με τους αριθμούς είναι πρόσθεση. Το 49% των μαθητών είχαν επιλύσει ορθά και τις δύο εξισώσεις του έργου ενώ το 37% είχαν επιλύσει ορθά μόνο μια από τις δύο. Το 84% των μαθητών είχαν επιλύσει ορθά την εξίσωση «δ+δ+δ=15» και το 57% είχαν επιλύσει ορθά την εξίσωση «γ+1=15, γ+1+σ=19, σ=___». Χαμηλή επίδοση παρουσίασαν στα υπόλοιπα έργα (Se2, Se3, Si4). Συγκεκριμένα, στο έργο επίλυσης εξισώσεων με τον άγνωστο να αποτελεί τον πρώτο όρο της εξίσωσης και με πράξη διαίρεση ή αφαίρεση (Se2), το 48% των μαθητών απέτυχαν και στις δύο εξισώσεις του έργου, ενώ το 40% είχαν επιλύσει ορθά τη μια από τις δύο εξισώσεις. Στο έργο επίλυσης εξίσωσης με τον άγνωστο και στα δύο μέλη της εξίσωσης (Se3) και επίλυσης ανίσωσης (Si4), η μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών (77% και 71% αντίστοιχα) συγκέντρωσαν βαθμολογία μηδέν.

Οι μαθητές της δεύτερης ομάδας παρουσίασαν ψηλή επίδοση στο πρώτο έργο επίλυσης εξισώσεων (Se1) και συγκεκριμένα το 82% είχαν επιλύσει ορθά και τις δύο εξισώσεις του συγκεκριμένου έργου. Ψηλή επίδοση επέδειξαν και στο δεύτερο έργο επίλυσης εξισώσεων (Se2) όπου το 62% είχαν επιλύσει ορθά την πρώτη εξίσωση του έργου (λ-15=5) και το 69% είχαν επιλύσει ορθά τη δεύτερη εξίσωση του έργου ($\frac{3+\nu}{5} = 2$). Στην επεξήγηση για το πώς έλυσαν την εξίσωση που εμπλέκει διαίρεση, ανεξάρτητα από το αν κατέληξαν σε ορθή απάντηση ή όχι, το 45% των μαθητών υιοθέτησαν τη στρατηγική «δοκιμή και έλεγχος» και το 31% τη στρατηγική η οποία θυμίζει τη στρατηγική «ανάδρομη πορεία». Μέτρια επίδοση παρουσίασαν στο έργο επίλυσης εξίσωσης με τον άγνωστο και στα δύο μέλη της εξίσωσης (Se3), όπου το 42% των μαθητών συγκέντρωσαν βαθμολογία μηδέν, ενώ το 41% ανέφεραν την ορθή τιμή του αγνώστου χωρίς να αιτιολογούν τον τρόπο που εντόπισαν την τιμή. Στο έργο επίλυσης ανίσωσης (κ+3 > 10) (Si4) το 61% συγκέντρωσαν βαθμολογία μηδέν, μιας και το 35% επέλεξαν ως ορθή απάντηση το «κ=13», το 5% το «κ<7» και το 21% επέλεξαν ως ορθή απάντηση «κανένα από αυτά».

Στην τρίτη ομάδα παρουσιάστηκε ψηλή επίδοση στα τρία έργα (Se1, Se2, Se3) αφού το ποσοστό μαθητών που τα είχαν επιλύσει ορθά ήταν πάνω από το 75% και στις τρεις περιπτώσεις. Στην επεξήγηση για το πώς είχαν επιλύσει τη μια εξίσωση που εμπλέκει διαίρεση ($\frac{3+\nu}{5} = 2$) (στο έργο Se2) το 59% των μαθητών δεν βασίστηκαν στη στρατηγική «δοκιμή και έλεγχος», αλλά αντιμετώπισαν την εξίσωση ως ολότητα, εντοπίζοντας όπως ανέφεραν σχεδόν «αυτόματα» τη λύση, ενώ μερικοί μαθητές (15%) υιοθέτησαν μια προσέγγιση η οποία θυμίζει τη στρατηγική «ανάδρομη πορεία». Παρόμοια, στο έργο επίλυσης εξίσωσης η οποία εμπλέκει τον άγνωστο και στα δύο μέλη (Se3), το 63% των μαθητών είχαν επιλύσει την εξίσωση (συσχεσιακά) μέσω της αντιστοίχησης των όρων των δύο μελών της εξίσωσης και λίγοι μαθητές κατέφυγαν στη στρατηγική «δοκιμή και έλεγχος». Στο έργο επίλυσης ανίσωσης (Si4) παρουσίασαν χαμηλή επίδοση μιας και το 35% είχαν επιλύσει λανθασμένα το έργο, ενώ το 12% επέλεξαν την ορθή επιλογή αλλά για λανθασμένο λόγο και το 14% επέλεξαν την ορθή απάντηση αλλά δεν αιτιολόγησαν.

Οι μαθητές της τέταρτης ομάδας παρουσίασαν ψηλή επίδοση και στα τέσσερα έργα. Η πλειοψηφία των μαθητών έδωσαν ορθή απάντηση στα έργα (Se1, Se2, Se3) με ποσοστά 96%, 83% και 93%, αντίστοιχα. Όσον αφορά στην επεξήγηση των μαθητών για την εξίσωση που εμπλέκει διαίρεση (του έργου Se2), η πλειοψηφία των μαθητών (68%) αντιμετώπισαν την εξίσωση «ως όλο» με μια πιο δομική προσέγγιση εντοπίζοντας σχεδόν αυτόματα την απάντηση και λιγότεροι μαθητές (13%) υιοθέτησαν την προσέγγιση η οποία εμπλέκει έμμεσα τη στρατηγική «ανάδρομη πορεία» και σχεδόν κανένας μαθητής της συγκεκριμένης ομάδας δεν έδειξε να χρησιμοποιεί τη στρατηγική «δοκιμής και ελέγχου». Στο έργο με τον άγνωστο και στα δύο μέλη της εξίσωσης (Se3), η πλειοψηφία των μαθητών οδηγήθηκε στη λύση μέσω της αντιστοίχισης των όρων των δύο μελών της εξίσωσης, ενώ σε κάποιες περιπτώσεις των μαθητών Α΄ γυμνασίου φάνηκε η χρήση διαδικαστικών κανόνων μεταφοράς όρων από το ένα μέλος της εξίσωσης στο άλλο. Στο έργο επίλυσης ανίσωσης (Si4) το 71% των μαθητών έδωσαν την ορθή απάντηση για την ανίσωση και αιτιολόγησαν.

Πίνακας 4.26

Χαρακτηριστικά των Τεσσάρων Ομάδων στον Παράγοντα Αντίληψης και Εύρεσης της Τιμής του Αγνώστου

Επίπεδο επίδοσης	Πρώτη ομάδα	Δεύτερη ομάδα	Τρίτη ομάδα	Τέταρτη ομάδα
Ψηλή επίδοση (Μ≥.66)		Se1, Se2	Se1, Se2, Se3	Se1, Se2, Se3, Si4
Μέτρια επίδοση (.66<Μ≤.49)	Se1	Se3		
Χαμηλή επίδοση (Μ<.49)	Se2, Se3, Si4	Si4	Si4	

Σημείωση. Se1: Εύρεση της τιμής του αγνώστου σε δύο εξισώσεις όπου υπάρχει πρόσθεση και ο άγνωστος βρίσκεται μόνο στο αριστερό μέλος της εξίσωσης
Se2: Εύρεση της τιμής του αγνώστου σε δύο εξισώσεις όπου υπάρχει αφαίρεση ή διαίρεση και ο άγνωστος είναι ο πρώτος όρος και βρίσκεται μόνο στο αριστερό μέλος της εξίσωσης
Se3: Εύρεση της τιμής του αγνώστου σε μια εξίσωση όπου ο άγνωστος βρίσκεται και στα δύο μέλη της εξίσωσης και επεξήγηση του τρόπου επίλυσης
Si4: Επίλυση απλής ανίσωσης (κ+3>10)

Περιγραφή των τεσσάρων ομάδων επίδοσης ως προς την ικανότητα μοντελοποίησης σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων

Ο Πίνακας 4.27, παρουσιάζει συγκεντρωτικά την επίδοση των μαθητών των τεσσάρων ομάδων διαφορετικής ικανότητας στα έργα του παράγοντα «*μοντελοποίηση σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων» (Mo).* Η πρώτη ομάδα παρουσίασε χαμηλή επίδοση και στα τρία έργα. Συγκεκριμένα, στο έργο όπου περιλαμβάνονται τρία ερωτήματα για τη μοντελοποίηση σχέσεων μέσω κανόνων με αλγεβρικά σύμβολα (Mo3) το 76% των μαθητών συγκέντρωσαν βαθμολογία μηδέν. Επίσης, στο έργο που αφορά στη μοντελοποίηση εξισώσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων (Μο2) το 67% των μαθητών συγκέντρωσαν βαθμολογία μηδέν. Συγκεκριμένα, το 83% απάντησαν λανθασμένα στο ερώτημα διατύπωσης εξίσωσης με αλγεβρικά σύμβολα στο οποίο απαιτείται συμπερίληψη του ίδιου αλγεβρικού συμβόλου δύο φορές (ν+ν+1) και το 75% των μαθητών δεν διατύπωσαν ένα πρόβλημα για την εξίσωση «ν-30=20». Στο έργο το οποίο περιλαμβάνει τέσσερα ξεχωριστά ερωτήματα για τη μοντελοποίηση σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων (Μο 1), το 64% των μαθητών συγκέντρωσαν βαθμολογία μηδέν ή έδωσαν ορθή απάντηση μόνο σε ένα από τα τέσσερα ερωτήματα του έργου.

Οι μαθητές της δεύτερης ομάδας παρουσίασαν μέτρια επίδοση μόνο στο έργο μοντελοποίησης σχέσεων μέσω αλγεβρικών εκφράσεων (Μο 1). Συγκεκριμένα, το 39% των μαθητών απάντησαν ορθά στα δύο από τα τέσσερα ερωτήματα του έργου και το 32% των μαθητών απάντησαν ορθά στα τρία από τα τέσσερα ερωτήματα. Παρουσίασαν ωστόσο, χαμηλή επίδοση στο έργο μοντελοποίησης σχέσεων μέσω εξισώσεων με αλγεβρικά σύμβολα (Μο2) μιας και το 67% των μαθητών δεν μοντελοποίησαν ορθά την κατάσταση που απαιτεί το αλγεβρικό σύμβολο να εμφανιστεί δύο φορές στην εξίσωση (ν+ν+1) και το 43% δεν κατασκεύασαν πρόβλημα για την εξίσωση «ν-30=20». Στο έργο μοντελοποίησης σχέσεων μέσω κανόνων με αλγεβρικά σύμβολα (Μο 3) εμφάνισαν επίσης χαμηλή επίδοση, αφού το 59% των μαθητών συγκέντρωσαν βαθμολογία μηδέν ή απάντησαν ορθά μόνο στο ένα από τα τρία ερωτήματα του έργου.

Στην τρίτη ομάδα παρουσιάστηκε ψηλή επίδοση στο έργο μοντελοποίησης σχέσεων μέσω αλγεβρικών εκφράσεων (Μο1) μιας και το 71% των μαθητών απάντησαν ορθά στα τρία ή και στα τέσσερα ερωτήματα του έργου. Παρουσίασαν ψηλή επίδοση και στο έργο μοντελοποίησης σχέσεων μέσω εξισώσεων (Μο2) μιας και το 56% των μαθητών έδωσαν ορθή απάντηση στο ερώτημα όπου απαιτείται επανάληψη του ίδιου αλγεβρικού συμβόλου στη εξίσωση (ν+ν+1=243), ενώ το 71% των μαθητών έδωσαν ορθή απάντηση στο ερώτημα κατασκευής προβλήματος για την κατάσταση «ν-30=20». Ψηλή επίδοση παρουσίασαν και στο έργο μοντελοποίησης σχέσεων μέσω κανόνων με αλγεβρικά σύμβολα (Μο 3), όπου το 78% των μαθητών διατύπωσαν τον ορθό κανόνα με αλγεβρικά σύμβολα για τα δύο ή τρία ερωτήματα του έργου.

Στην τέταρτη ομάδα οι μαθητές παρουσίασαν ψηλή επίδοση και στα τρία έργα. Συγκεκριμένα, το 89% των μαθητών της τέταρτης ομάδας απάντησαν ορθά στα τρία ή τέσσερα ερωτήματα του έργου μοντελοποίησης αλγεβρικών εκφράσεων (Μο1), το 75% των μαθητών απάντησαν ορθά σε όλα τα ερωτήματα του έργου μοντελοποίησης εξισώσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων (Μο2) και το 83% των μαθητών έδωσαν την ορθή απάντηση σε όλα στα ερωτήματα του έργου μοντελοποίησης σχέσεων δυο μεταβλητών μέσω αλγεβρικών συμβόλων (Mo3).

Πίνακας 4.27

Χαρακτηριστικά των Τεσσάρων Ομάδων στον Παράγοντα Μοντελοποίησης Σχέσεων Μέσω Αλγεβρικών Συμβόλων

Επίπεδο επίδοσης	Πρώτη ομάδα	Δεύτερη ομάδα	Τρίτη ομάδα	Τέταρτη ομάδα
Ψηλή επίδοση (M≥.66)			Mo1, Mo2, Mo3	Mo1, Mo2, Mo3
Μέτρια επίδοση (.66<M≤.49)		Mo1		
Χαμηλή επίδοση (M<.49)	Mo1, Mo2, Mo3	Mo2, Mo3		

Σημείωση. Mo1: Μοντελοποίηση σχέσεων μέσω διατύπωσης αλγεβρικών εκφράσεων (4 ερωτήματα, 1 κατασκευή αλγεβρικής έκφρασης, 1 ερμηνεία αλγεβρικής έκφρασης, 2 επιλογής ορθής αλγεβρικής έκφρασης)
Mo2: Μοντελοποίηση σχέσεων μέσω διατύπωσης αλγεβρικών εξισώσεων (2 ερωτήματα, 1 επιλογή ορθής αλγεβρικής εξίσωσης, ερμηνεία αλγεβρικής εξίσωσης)
Mo3: Μοντελοποίηση σχέσεων μέσω διατύπωσης κανόνων με αλγεβρικά σύμβολα (3 ερωτήματα, διατύπωση κανόνα Y=M×M, H=3×Δ, Σ=3×ν+1)

Περιγραφή των τεσσάρων ομάδων επίδοσης ως προς την ικανότητα απλοποίησης αλγεβρικών εκφράσεων

Ο Πίνακας 4.28, παρουσιάζει συγκεντρωτικά την επίδοση των μαθητών των τεσσάρων ομάδων διαφορετικής ικανότητας στα έργα του παράγοντα «*απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων» (Sm).* Οι μαθητές της πρώτης ομάδας είχαν χαμηλή επίδοση και στα τρία έργα. Συγκεκριμένα, το 63% των μαθητών της πρώτης ομάδας συγκέντρωσαν βαθμολογία μηδέν στο έργο όπου απαιτείται απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων στις οποίες το αλγεβρικό σύμβολο εμφανίζεται μόνο μια φορά (Sm1) ενώ υπάρχουν περισσότεροι αριθμοί (π.χ. Τ-1+4). Το 90% των μαθητών απέτυχαν εντελώς σε όλα τα ερωτήματα του έργου όπου το αλγεβρικό σύμβολο επαναλαμβάνεται και η πράξη είναι σε μορφή κλάσματος ($\frac{\alpha+\alpha}{2}$= , $\frac{\alpha+\alpha+\alpha}{3}$=) (Sm2). Συγκεκριμένα, στο πρώτο και δεύτερο ερώτημα του έργου (Sm2) το 59% και το 58% των μαθητών αντίστοιχα, έδωσαν ως απάντηση συγκεκριμένο αριθμό, κάτι που υποδηλώνει ότι αντικατέστησαν έναν οποιοδήποτε αριθμό στο «α». Ακόμη, το 18% και το 19% των μαθητών έδωσαν ως απάντηση τον αριθμό ένα στο πρώτο και δεύτερο ερώτημα του συγκεκριμένου έργου (Sm2), αντίστοιχα. Το 77% των μαθητών συγκέντρωσαν βαθμολογία μηδέν στο έργο του οποίου τα ερωτήματα απαιτούν απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων όπου το αλγεβρικό σύμβολο επαναλαμβάνεται (α+α= , 2×α+5×α=) (Sm3) και σε ένα από αυτά εμφανίζεται επιπρόσθετα και δεύτερο διαφορετικό αλγεβρικό σύμβολο (2×α+β+α=). Το 66%, το 71% και το 71% των μαθητών της πρώτης ομάδας έδωσαν ως απάντηση στο πρώτο, δεύτερο και τρίτο ερώτημα του συγκεκριμένου έργου (Sm3) αντίστοιχα, κάποιο αριθμό.

Χαμηλή επίδοση και στα τρία έργα επέδειξαν και οι μαθητές της δεύτερης ομάδας. Συγκεκριμένα, στο πρώτο έργο (Sm1) το 26% των μαθητών συγκέντρωσαν βαθμολογία 0, και το 31% των μαθητών έδωσαν απάντηση η οποία δεν είναι στην πιο απλοποιημένη μορφή (π.χ. Τ-1+4) ή στην οποία απουσιάζει το σύμβολο της πράξης (Τ3 αντί Τ+3). Το 75% των μαθητών συγκέντρωσαν βαθμολογία μηδέν στο δεύτερο έργο (Sm2) του παράγοντα και το 56% συγκέντρωσαν βαθμολογία μηδέν στο τρίτο έργο (Sm3). Στο πρώτο και δεύτερο ερώτημα του δεύτερου έργου (Sm2), το 40% και το 41% των μαθητών (αντίστοιχα) έδωσαν ως απάντηση κάποιο αριθμό. Επίσης, στο πρώτο και δεύτερο ερώτημα του ίδιου έργου (Sm2), το 28% και το 28% των μαθητών (αντίστοιχα), έδωσαν ως απάντηση τον αριθμό ένα. Στα τρία ερωτήματα του τρίτου έργου (Sm3) το 46%, το 50% και το 53% των μαθητών αντίστοιχα, έδωσαν ως απάντηση και πάλι κάποιο αριθμό.

Οι μαθητές της τρίτης ομάδας παρουσίασαν μέτρια επίδοση και στα τρία έργα. Συγκεκριμένα, στο πρώτο έργο (Sm1) το 40% των μαθητών έδωσαν απάντηση η οποία δεν είναι στην πιο απλοποιημένη μορφή (π.χ. Τ-1+4) ή στην οποία απουσιάζει το σύμβολο της πράξης (Τ3 αντί Τ+3), ενώ το 42% των μαθητών έδωσαν ορθή απάντηση στα δύο ερωτήματα του έργου. Στο τρίτο έργο (Sm3), το 64% των μαθητών απάντησαν λανθασμένα και στα τρία ερωτήματα ή στα δύο ερωτήματα του έργου. Το 21%, το 27% και το 26% των μαθητών έδωσαν ως απάντηση στα τρία ερωτήματα του τρίτου έργου (Sm3), αντίστοιχα, κάποιο αριθμό. Στα δύο ερωτήματα του δεύτερου έργου (Sm2), το 15% και το 14% των μαθητών αντίστοιχα, έδωσαν ως αποτέλεσμα κάποιο αριθμό και το 23% και το 23% των μαθητών αντίστοιχα, έδωσαν ως απάντηση τον αριθμό ένα.

Στην τέταρτη ομάδα παρουσιάστηκε ψηλή επίδοση και στα τρία έργα του συγκεκριμένου παράγοντα. Συγκεκριμένα, το 60% των μαθητών έδωσαν ορθή απάντηση και στα δύο ερωτήματα του έργου απλοποίησης αλγεβρικών εκφράσεων (Sm1), το 80% των μαθητών απάντησαν ορθά και στα δύο ερωτήματα του δεύτερου έργου (Sm2) και το 61% των μαθητών έδωσαν ορθή απάντηση και στα τρία ερωτήματα του τρίτου έργου (Sm3). Επίσης, οι μαθητές της τέταρτης ομάδας, λόγω της επιτυχίας τους στα έργα αυτά απέφυγαν το σύνηθες λάθος που παρουσιάστηκε σε μεγαλύτερο βαθμό στις προηγούμενες ομάδες, της απόδοσης αριθμητικής απάντησης στα συγκεκριμένα έργα.

Πίνακας 4.28

Χαρακτηριστικά των Τεσσάρων Ομάδων στον Παράγοντα Απλοποίησης Αλγεβρικών Εκφράσεων

Επίπεδο επίδοσης	Πρώτη ομάδα	Δεύτερη ομάδα	Τρίτη ομάδα	Τέταρτη ομάδα
Ψηλή επίδοση (Μ≥.66)				Sm1,Sm2,Sm3
Μέτρια επίδοση (.66<Μ≤.49)			Sm1,Sm2,Sm3	
Χαμηλή επίδοση (Μ<.49)	Sm1,Sm2,Sm3	Sm1,Sm2,Sm3		

Σημείωση. Sm1: Απλοποίηση αλγεβρικής έκφρασης με ένα αλγεβρικό σύμβολο και δύο αριθμούς (2 υποερωτήματα, Τ+2+3, Τ-1+4)
Sm2: Απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων με το αλγεβρικό σύμβολο να επαναλαμβάνεται και η πράξη να είναι σε μορφή κλάσματος (2 υποερωτήματα)
Sm3: Απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων με το αλγεβρικό σύμβολο να επαναλαμβάνεται (3 υποερωτήματα)

Σύνοψη των χαρακτηριστικών των τεσσάρων ομάδων αλγεβρικής σκέψης

Στο μέρος αυτό παρουσιάζεται μια σύνοψη των χαρακτηριστικών των τεσσάρων ομάδων αλγεβρικής σκέψης. Όπως φαίνεται και στον συγκεντρωτικό Πίνακα 4.29, οι μαθητές της πρώτης ομάδας παρουσίασαν ψηλή επίδοση μόνο στο έργο επίλυσης εξισώσεων όπου εμπλέκεται πρόσθεση και στο έργο κατασκευής γραφικής παράστασης με βάση πίνακα τιμών για αναπαράσταση της ταυτόχρονης μεταβολής των δύο μεταβλητών. Φαίνεται επομένως, ότι οι μαθητές της πρώτης ομάδας είχαν ψηλή επίδοση μόνο στα δύο έργα τα οποία δεν εμπλέκουν επεξεργασία και εντοπισμό κάποιας σχέσης που δεν παρέχεται άμεσα, αλλά απαιτούν απλά εκτέλεση αυτού που φαίνεται και μάλιστα μπορούν να επιλυθούν «αυτόματα» μέσα από τα δεδομένα που παρέχονται (απλή αναπαράσταση των τιμών που δίνονται στο έργο Vf1, και εντοπισμό της τιμής του αγνώστου στο έργο Se1 ο οποίος είναι δυνατό να επιτευχθεί αυτόματα, μόνο οπτικά, χωρίς ανάγκη ιδιαίτερων υπολογισμών).

Οι μαθητές της δεύτερης ομάδας είχαν επιτυχία στα έργα που επιτυγχάνουν οι μαθητές της πρώτης ομάδας αλλά παρουσίασαν ψηλή επίδοση και στο έργο γενίκευσης μοτίβου με τιμές σε πίνακα (input/output) και γενικό κανόνα «Η=3Δ», στο έργο εύρεσης της τιμής του αγνώστου όπου ο άγνωστος είναι ο πρώτος όρος στις εξισώσεις στις οποίες εμπλέκεται αφαίρεση ή διαίρεση, στο έργο συλλογισμού για τη μεταβατική ιδιότητα στην ισότητα και στην ανισότητα, στο έργο ερμηνείας γραφικής παράστασης για αναπαράσταση της σχέσης δύο μεταβλητών και στο έργο συμπλήρωσης του κενού σε εξισώσεις αξιοποιώντας και εξηγώντας το συλλογισμό για το πολλαπλασιαστικό και προσθετικό αντίστροφο. Στα έργα στα οποία είχαν επιτυχία οι μαθητές της δεύτερης ομάδας, εμπλέκεται εκτέλεση υπολογισμών με αριθμούς ή στρατηγικές όπως «δοκιμή και έλεγχος» για τον εντοπισμό σχέσεων και συμπερασμάτων. Στα συγκεκριμένα έργα ωστόσο, δεν απαιτείται συσχεσιακή αντίληψη του συμβόλου της ισότητας αλλά ούτε και ιδιαίτερη ανάγκη αιτιολόγησης των συμπερασμάτων (με βάση κάποιο πλαίσιο).

Τα υποκείμενα της τρίτης ομάδας είχαν επιτυχία σε όλα τα έργα που είχαν επιτυχία και οι μαθητές της δεύτερης ομάδας, αλλά παρουσίασαν επιτυχία και (α) σε έργα που απαιτούν συσχεσιακή αντίληψη του συμβόλου της ισότητας (Ge2, Ge3, Se3, Go1), (β) στα έργα μοντελοποίησης σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων (διατύπωση αλγεβρικών εκφράσεων, εξισώσεων, κανόνων για τη σχέση δύο μεταβλητών), (γ) σε ακόμη ένα έργο γενίκευσης μοτίβου συμμεταβολής το οποίο όμως εμπλέκει γεωμετρικό μοτίβο, (δ) σε ακόμη δυο έργα επίλυσης εξισώσεων, αυτό που εμπλέκει και εξίσωση με αφαίρεση και εξίσωση με διαίρεση (και ο άγνωστος είναι πρώτος όρος στην εξίσωση) και σε αυτό που περιλαμβάνει επίλυση εξίσωσης με τον άγνωστο και στα δύο μέλη της εξίσωσης και (ε) σε ακόμη ένα έργο μεταβολής των τιμών της εξαρτημένης σε σχέση με την ανεξάρτητη μεταβλητή στο οποίο δίνεται ο κανόνας και απαιτείται συλλογισμός και για τη σχέση των δύο μεταβλητών. Η διαφορά των μαθητών της τρίτης ομάδας από τους μαθητές της δεύτερης ομάδας έγκειται στο ότι οι μαθητές της τρίτης ομάδας: (α) επέδειξαν συσχεσιακή αντίληψη του συμβόλου της ισότητας, (β) χρησιμοποίησαν ορθά αλγεβρικά σύμβολα για αναπαράσταση σχέσεων και γενικότερα παρουσίασαν μεγαλύτερη εξοικείωση με την αλγεβρική σύνταξη (είχαν επιλύσει πιο δύσκολης μορφής εξισώσεις, αντικατέστησαν τιμές σε αλγεβρικά διατυπωμένους κανόνες) και (γ) κατέληξαν σε γενίκευση για ένα λίγο πιο δύσκολο μοτίβο (γεωμετρικό μοτίβο) με γενικό κανόνα «2ν+1» στο οποίο απαιτείται οπτική ανάλυση της εικονικής αναπαράστασης.

Οι μαθητές της τέταρτης ομάδας παρουσίασαν ψηλή επίδοση και σε έργα απλοποίησης αλγεβρικών εκφράσεων και σε έργα γενίκευσης ιδιοτήτων των αριθμών (έργα στα οποία δεν παρουσιάστηκε ψηλή επίδοση σε προηγούμενες ομάδες). Η διαφορά των μαθητών της τέταρτης ομάδας από τους μαθητές της τρίτης ομάδας υφίσταται στο ότι οι μαθητές της τέταρτης ομάδας: (α) είχαν επιτυχία στην απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων, (β) παρουσίασαν επιτυχία σε έργα αιτιολόγησης ιδιοτήτων των πράξεων και των αριθμών, επιδεικνύοντας εννοιολογική κατανόηση, (γ) επέδειξαν τη μεγαλύτερη εξοικείωση με την αλγεβρική σύνταξη από όλους τους υπόλοιπους μαθητές του δείγματος και (δ) είχαν ψηλή επίδοση στα πιο δύσκολα έργα κάθε ικανότητας, στα οποία μαθητές των προηγούμενων ομάδων δεν είχαν ψηλή επίδοση. Για παράδειγμα, κατέληξαν σε γενίκευση για το πιο δύσκολο γεωμετρικό μοτίβο του δοκιμίου με γενικό κανόνα «3ν+1» και μετέφεραν τη συγκεκριμένη γενίκευση σε παρόμοιο πλαίσιο.

Πίνακας 4.29

Σύνοψη των Χαρακτηριστικών των Τεσσάρων Ομάδων Διαφορετικής Ικανότητας Αλγεβρικής Σκέψης με Βάση Όλα τα Έργα του Δοκιμίου Αλγεβρικής Σκέψης

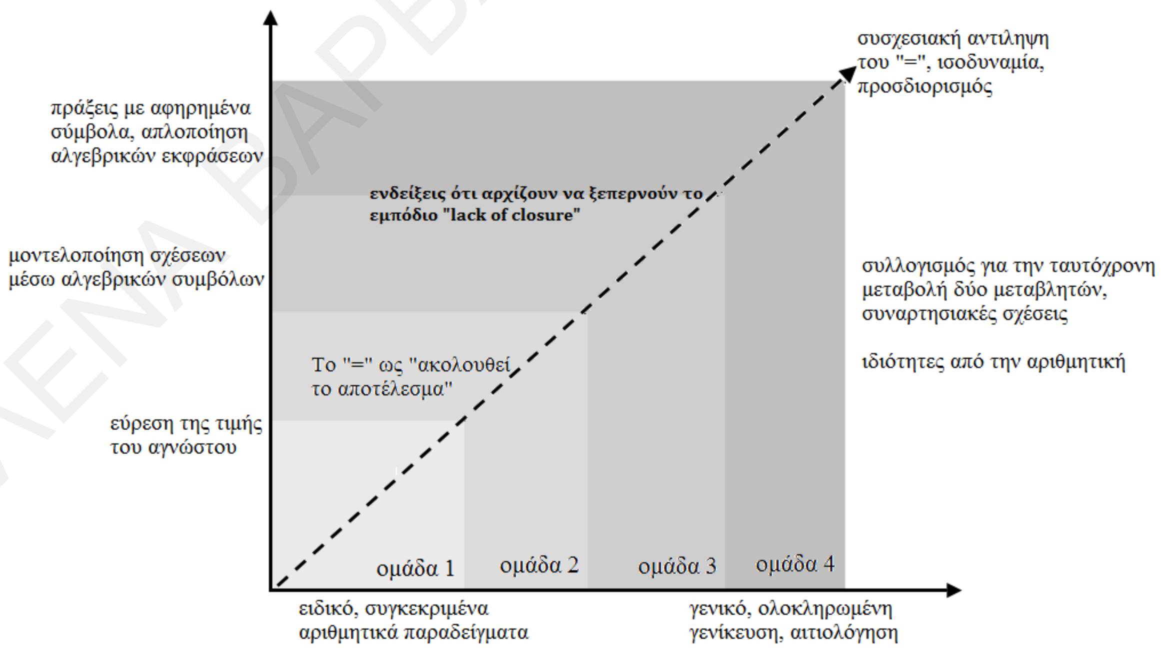
Επίπεδο επίδοσης	Πρώτη ομάδα	Δεύτερη ομάδα	Τρίτη ομάδα	Τέταρτη ομάδα
Ψηλή επίδοση (M≥.66)	Se1, Vf1	Gf1,Se1, Se2, Ge1, Vf1, Vf2, Go1	Gf1, Gf2, Se1, Se2, Se3, Mo1,Mo2, Mo3, Ge1, Ge2, Ge3, Go1, Vf1, Vf2, Vf3	Gf1, Gf2, Gf3, Se2, Se3, Si4, Sm1, Sm2, Sm3, Mo1, Mo2,Mo3, Gn1, Gn2, Gn3, Go1, Go2, Go3, Go4, Ge1, Ge2, Ge3, Ff2, Vf3, Vf4
Μέτρια επίδοση (.66<M≤.49)		Gf2, Se3, Mo1, Go2	Gf3, Sm1, Sm2, Sm3, Gn2, Go2, Go3, Vf4	
Χαμηλή επίδοση (M<.49)	Gf1, Gf2, Gf3, Se2, Se3, Si4, Sm1, Sm2, Sm3, Mo1, Mo2,Mo3, Gn1, Gn2, Gn3, Go1, Go2, Go3, Go4, Ge1, Ge2, Ge3, Ff2, Vf3, Vf4	Gf3, Sm1,Sm2, Sm3, Mo2,Mo3, Gn1, Gn2, Gn3, Go3, Go4, Ge2, Si4, Vf3, Ge3, Vf4	Gn1, Gn3, Go4, Si4	

Αξίζει να σημειωθεί ότι ενδείξεις επιτυχίας (ψηλή επίδοση σε ένα από τα έργα) για την ικανότητα επίλυσης εξισώσεων και την ικανότητα μεταβολής των τιμών της ανεξάρτητης σε σχέση με την εξαρτημένη, εμφανίστηκαν από την πρώτη ομάδα, ενώ για την ικανότητα συλλογισμού για τις ιδιότητες της ισότητας, την ικανότητα γενίκευσης σχέσεων-μοτίβων συμμεταβολής και την ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων των πράξεων, από τη δεύτερη ομάδα. Οι προαναφερθείσες ικανότητες φαίνεται ότι ενισχύονταν (εμφάνιση επιτυχίας σε περισσότερα έργα της ικανότητας) σε επόμενες ομάδες. Η επιτυχία στην ικανότητα μοντελοποίησης σχέσεων μέσω της χρήσης αλγεβρικών συμβόλων εμφανίστηκε πρώτη φορά στην τρίτη ομάδα. Η επιτυχία (ψηλή επίδοση) στην ικανότητα απλοποίησης αλγεβρικών εκφράσεων και στην ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων των αριθμών εμφανίστηκε πρώτη φορά στην τέταρτη ομάδα.

Στο Διάγραμμα 4.4 παρουσιάζονται συνοπτικά τα χαρακτηριστικά των τεσσάρων ομάδων αλγεβρικής σκέψης. Παρατηρώντας το Διάγραμμα 4.4, η πρώτη διάσταση στην οποία διαφοροποιούνται οι μαθητές των τεσσάρων ομάδων είναι η «εκτέλεση πράξεων με αριθμούς, η αναφορά σε ειδικές περιπτώσεις και η χρήση συγκεκριμένων αριθμητικών παραδειγμάτων» στο ένα άκρο και η «γενίκευση και αιτιολόγηση» στο άλλο άκρο (οριζόντιος άξονας). Όπως φαίνεται και στο Διάγραμμα 4.4, αυτή η διάσταση εφαρμόζεται τόσο στον πυλώνα του «συλλογισμού για την ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών» όσο και των «ιδιοτήτων από την αριθμητική». Στην περίπτωση του συλλογισμού για την ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών, έχουμε για παράδειγμα στο ένα άκρο μαθητές με χαμηλή επίδοση οι οποίοι έχουν την ικανότητα «να εντοπίσουν μόνο ειδικές περιπτώσεις του μοτίβου και συγκεκριμένα τους αμέσως επόμενους όρους μέσα από την εκτέλεση αριθμητικών υπολογισμών», ενώ στο άλλο άκρο έχουμε τους μαθητές που είναι σε θέση «να γενικεύσουν ένα γεωμετρικό μοτίβο (στο οποίο υπάρχει πλαίσιο) και να εντοπίσουν σχέσεις μεταξύ δύο μεταβλητών, αιτιολογώντας την απάντησή τους». Στην περίπτωση των ιδιοτήτων της αριθμητικής φάνηκε ότι από «το συλλογισμό μέσα από συγκεκριμένα αριθμητικά παραδείγματα (τα οποία δεν είναι αρκετά για την αιτιολόγηση γενικεύσεων)» στο ένα άκρο, καταλήγουμε «στις ολοκληρωμένες γενικευμένες δηλώσεις με αιτιολόγηση και οι οποίες επιδεικνύουν εννοιολογική κατανόηση», στο άλλο άκρο. Η συγκεκριμένη διάσταση αφορά και στη διαφοροποίηση των ομάδων ως προς την ικανότητα μεταβολής των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με την ανεξάρτητη, μιας και σε αυτή την περίπτωση τα ίδια τα έργα του παράγοντα διαφοροποιούνται ως προς το βαθμό που απαιτούν εκτέλεση υπολογισμών με αριθμούς (και λιγότερο αιτιολόγηση) ή περισσότερο συλλογισμό (διατύπωση γενικών συμπερασμάτων) για τη μεταβολή και αιτιολόγηση

Η δεύτερη διάσταση η οποία στο Διάγραμμα 4.4 παρουσιάζεται διαγώνια, είναι ένα συνεχές για την αντίληψη του συμβόλου της ισότητας (=). Οι μαθητές των ομάδων χαμηλότερης επίδοσης παρουσιάζουν την αντίληψη για το σύμβολο της ισότητας ως «ακολουθεί το αποτέλεσμα» ενώ στο άλλο άκρο εντοπίζεται η αντίληψη για το συμβόλου «ως ισοδυναμία ποσοτήτων ή στοιχείων και ως προσδιορισμός (στην περίπτωση των κανόνων για τη σχέση δύο μεταβλητών)».

Η τρίτη διάσταση στην οποία διαφοροποιούνται οι μαθητές των ομάδων αποτελεί η ικανότητά τους να επιτυγχάνουν στα έργα του παράγοντα «ικανότητες άμεσα συνυφασμένες με την αλγεβρική σύνταξη», τα οποία αφορούν σε έργα επίλυσης εξισώσεων, σε έργα μοντελοποίησης σχέσεων μέσω αλγεβρικών εκφράσεων και στα έργα απλοποίησης αλγεβρικών εκφράσεων. Στο ένα άκρο εντοπίζεται η ικανότητα επίλυσης εξισώσεων όπου ενδείξεις για επιτυχία σε αυτή την ικανότητα εμφανίζονται ήδη από την πρώτη ομάδα μαθητών ενώ αναπτύσσεται περισσότερο σε επόμενες ομάδες. Στη συνέχεια ακολουθεί η μοντελοποίηση σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων, ενδείξεις επιτυχίας για την οποία εμφανίζονται από την τρίτη ομάδα. Η επιτυχία των μαθητών στα έργα μοντελοποίησης (ένα από τα οποία αφορά στη μοντελοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων) σε συνδυασμό με τη μέτρια επίδοση στα έργα απλοποίησης αλγεβρικών εκφράσεων υποδεικνύουν ότι οι μαθητές της τρίτης ομάδας *αρχίζουν* πιθανόν να ξεπερνούν το εμπόδιο 'lack of closure" (αυτό επισημαίνεται στο Διάγραμμα 4.4). Στο άλλο άκρο της συγκεκριμένης διάστασης εντοπίζεται η ικανότητα απλοποίησης αλγεβρικών εκφράσεων και άρα πράξεων με αφηρημένα αλγεβρικά σύμβολα, ενδείξεις επιτυχίας για την οποία εμφανίζονται στην τέταρτη ομάδα.



Διάγραμμα 4.4. Συνοπτική παρουσίαση των χαρακτηριστικών των τεσσάρων διαφορετικών ομάδων ως προς την ικανότητα αλγεβρικής σκέψης.

Στο μέρος αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα σχετικά με το τέταρτο και πέμπτο ερευνητικό ερώτημα της εργασίας για τη δομή της ικανότητας αναλογικού συλλογισμού και για τη διερεύνηση της σχέσης της με την ικανότητας αλγεβρικής σκέψης. Συγκεκριμένα, τα ερευνητικά ερωτήματα που εξετάζονται είναι τα εξής:

(δ) Ποια είναι η δομή της ικανότητας του αναλογικού συλλογισμού;

(ε) Ποια είναι η σχέση μεταξύ αλγεβρικής σκέψης και αναλογικού συλλογισμού;

Προτού εξεταστεί η σχέση μεταξύ αναλογικού συλλογισμού και αλγεβρικής σκέψης, εξετάζεται η δομή της ικανότητας αναλογικού συλλογισμού για την οποία αξιοποιούνται τα δεδομένα από το δοκίμιο αναλογικού συλλογισμού. Αρχικά παρουσιάζονται κάποια στοιχεία περιγραφικής στατιστικής για το δοκίμιο του αναλογικού συλλογισμού ενώ στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης για τη δομή της ικανότητας του αναλογικού συλλογισμού. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για το αν υπάρχουν διαφορές ανάμεσα στους μαθητές διαφορετικών ηλικιών και διαφορετικών ομάδων ικανότητας αλγεβρικής σκέψης, ως προς την ικανότητα αναλογικού συλλογισμού. Τέλος, περιγράφονται τα αποτελέσματα για τη σχέση μεταξύ αναλογικού συλλογισμού και αλγεβρικής σκέψης.

Στοιχεία περιγραφικής στατιστικής για την ικανότητα αναλογικού συλλογισμού

Στον Πίνακα ΣΤ.8 (δείτε Παράρτημα ΣΤ) παρουσιάζονται οι συσχετίσεις μεταξύ των έργων του δοκιμίου του αναλογικού συλλογισμού που χρησιμοποιήθηκαν για την επιβεβαίωση του μοντέλου. Οι μεταβλητές αντιστοιχούν στα 34 έργα του δοκιμίου του αναλογικού συλλογισμού. Όλες οι συσχετίσεις μεταξύ των έργων που ανήκουν στην ίδια ομάδα (π.χ. αριθμητικές αναλογίες, λεκτικές αναλογίες, οπτικο-χωρικές αναλογίες) ήταν στατιστικά σημαντικές και οι τιμές των συντελεστών συσχέτισης κυμαίνονταν από το .798 μέχρι το .071.

Οι συσχετίσεις μεταξύ της επίδοσης των υποκειμένων στους τρεις παράγοντες πρώτης τάξης (κάθε παράγοντας αντιστοιχεί σε μια από τις τρεις ομάδες έργων, λεκτικές αναλογίες, αριθμητικές αναλογίες, οπτικο-χωρικές αναλογίες) του μοντέλου του αναλογικού συλλογισμού παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.30. Όλες οι συσχετίσεις ήταν στατιστικά σημαντικές σε επίπεδο p<.01 και οι συντελεστές συσχέτισης κυμαίνονταν από το .535 στο .405.

Πίνακας 4.30

Συσχετίσεις μεταξύ της Επίδοσης των Υποκειμένων στις Ομάδες έργων του Δοκιμίου του Αναλογικού Συλλογισμού

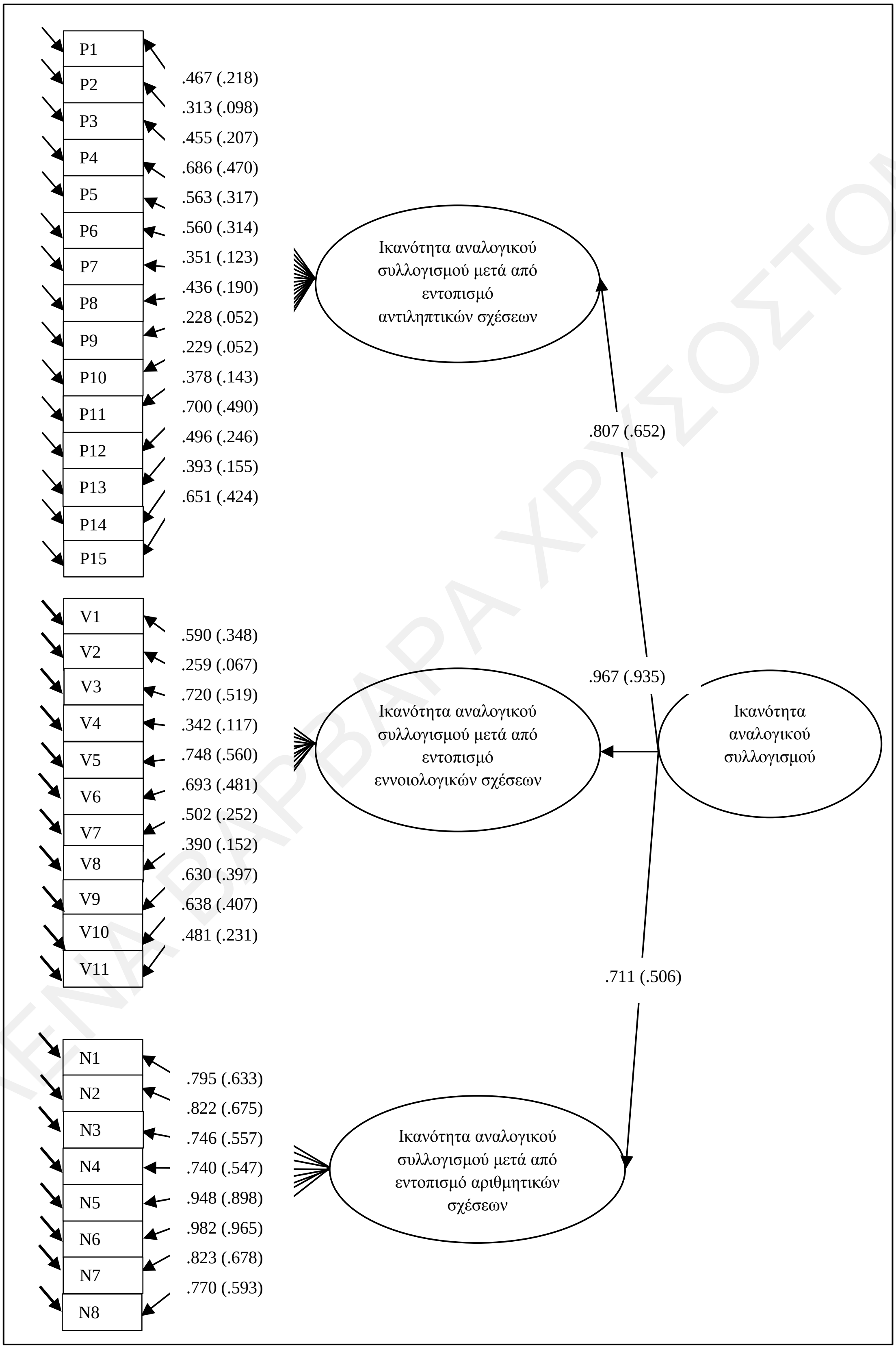
	Αριθμητικές σχέσεις	Εννοιολογικές σχέσεις	Αντιληπτικές σχέσεις
Αριθμητικές σχέσεις	1		
Εννοιολογικές σχέσεις	.688*	1	
Αντιληπτικές σχέσεις	.574*	.781*	1

Σημείωση. Αντιληπτικές σχέσεις= Ικανότητα αναλογικού συλλογισμού μετά από εντοπισμό αντιληπτικών σχέσεων, Εννοιολογικές σχέσεις= Ικανότητα αναλογικού συλλογισμού μετά από εντοπισμό εννοιολογικών σχέσεων, Αριθμητικές σχέσεις= Ικανότητα αναλογικού συλλογισμού μετά από εντοπισμό αριθμητικών σχέσεων.
*p<.05

Η δομή της ικανότητας αναλογικού συλλογισμού

Για να εξεταστεί η δομή της ικανότητας του αναλογικού συλλογισμού εξετάστηκε το μοντέλο που προτείνεται στην εργασία και το οποίο εισηγείται ότι η ικανότητα αναλογικού συλλογισμού αποτελεί μια πολυδιάστατη ικανότητα η οποία αποτελείται από τρεις παράγοντες: (α) την ικανότητα αναλογικού συλλογισμού μετά από εντοπισμό εννοιολογικών σχέσεων (στις λεκτικές αναλογίες), (β) την ικανότητα αναλογικού συλλογισμού μετά από εντοπισμό αντιληπτικών σχέσεων (στις οπτικο-χωρικές αναλογίες) και (γ) την ικανότητα αναλογικού συλλογισμού μετά από εντοπισμό αριθμητικών σχέσεων (στις αριθμητικές αναλογίες).

Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης επιβεβαίωσαν το μοντέλο για την περιγραφή της δομής της ικανότητας αναλογικού συλλογισμού και έδειξαν ότι η προσαρμογή δεδομένων της έρευνας στο προτεινόμενο μοντέλο ήταν καλή (*CFI*=.971, *TLI*=.981, x^2=370.838, *df*=239, x^2/*df*=1.552, *p*<.05, *RMSEA*=.026). Οι φορτίσεις των έργων στους παράγοντες ήταν όλες στατιστικά σημαντικές και παρουσιάζονται στο Διάγραμμα 4.5. Όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 4.5, η ερμηνευόμενη διασπορά των έργων ήταν αρκετά ψηλή. Όλες οι φορτίσεις των παραγόντων πρώτης τάξης στον παράγοντα δεύτερης τάξης ήταν επίσης αρκετά ψηλές και στατιστικά σημαντικές. Τα ποσοστά ερμηνευόμενης διασποράς των παραγόντων πρώτης τάξης ήταν στατιστικά σημαντικά με τις τιμές να βρίσκονται μεταξύ του .935 και του .506.



Σημείωση. Ο πρώτος αριθμός υποδεικνύει τη φόρτιση στον παράγοντα ενώ ο αριθμός στην παρένθεση την αντίστοιχη ερμηνευόμενη διασπορά (r^2).

Διάγραμμα 4.5. Το μοντέλο για τη δομή του αναλογικού συλλογισμού.

Η επίδοση των υποκειμένων στους παράγοντες του μοντέλου του αναλογικού συλλογισμού

Στον Πίνακα 4.31 παρουσιάζονται τα στοιχεία περιγραφικής στατιστικής για τους τρεις παράγοντες πρώτης τάξης του μοντέλου του αναλογικού συλλογισμού. Οι μέσοι όροι στις τρεις ικανότητες ήταν μεταξύ των τιμών .677 και .516. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.31, το εύρος τιμών στους τρεις παράγοντες αναλογικού συλλογισμού ήταν το ένα, κάτι που δείχνει ότι υπήρχαν υποκείμενα τα οποία απάντησαν ορθά σε όλα τα έργα μιας κατηγορίας όπως και υποκείμενα που δεν απάντησαν ορθά σε κανένα από τα έργα μιας κατηγορίας. Οι τιμές λοξότητας και κύρτωσης ήταν μικρότερες από το δύο κάτι που υποδεικνύει ότι οι μεταβλητές για την επίδοση των υποκειμένων στα τρία μέρη του δοκιμίου του αναλογικού συλλογισμού ακολουθούν την κανονική κατανομή.

Πίνακας 4.31

Στοιχεία Περιγραφικής Στατιστικής για τους Τρεις Παράγοντες Πρώτης Τάξης του Αναλογικού Συλλογισμού

	Μέσος Όρος	Τυπική Απόκλιση	Εύρος	Λοξότητα	Κύρτωση
Αντιληπτικές σχέσεις	.516	.205	.1	.055	-.734
Εννοιολογικές σχέσεις	.636	.225	1	-.302	-.714
Αριθμητικές σχέσεις	.677	.237	1	-.673	.408
Γενική ικανότητα αναλογικού συλλογισμού	.607	.183	.98	.086	-.341

Σημείωση. Αντιληπτικές σχέσεις= Ικανότητα αναλογικού συλλογισμού μετά από εντοπισμό αντιληπτικών σχέσεων, Εννοιολογικές σχέσεις= Ικανότητα αναλογικού συλλογισμού μετά από εντοπισμό εννοιολογικών σχέσεων, Αριθμητικές σχέσεις= Ικανότητα αναλογικού συλλογισμού μετά από εντοπισμό αριθμητικών σχέσεων.

Η επίδοση των υποκειμένων στο δοκίμιο του αναλογικού συλλογισμού ανά τάξη

Στον Πίνακα 4.32 παρουσιάζοντα τα στοιχεία περιγραφικής στατιστικής για τη γενική ικανότητα αναλογικού συλλογισμού των μαθητών διαφορετικών ηλικιών (Ε΄ δημοτικού, Στ΄ δημοτικού, Α΄ γυμνασίου). Η ανάλυση διασποράς (ANOVA) που πραγματοποιήθηκε (Πίνακας 4.33) έδειξε ότι υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μαθητών των τριών τάξεων στην ικανότητα αναλογικού συλλογισμού ($F_{(2,800)}$=25.767, p<.01) (δείτε

Πίνακα 4.33). Η ανάλυση Post-hoc που παρουσιάζεται στον Πίνακα ΣΤ.9 (δείτε Παράρτημα ΣΤ) έδειξε ότι οι στατιστικά σημαντικές διαφορές υπήρχαν μεταξύ όλων των ομάδων μαθητών διαφορετικών τάξεων ως προς την ικανότητα αναλογικού συλλογισμού και η επίδοση αυξανόταν με τη μετακίνηση από μικρότερη σε μεγαλύτερη τάξη.

Πίνακας 4.32

Μέσοι Όροι και Τυπικές Αποκλίσεις για την Επίδοση των Μαθητών στο Δοκίμιο Αναλογικού Συλλογισμού ανά Τάξη

	Ε΄ δημοτικού		Στ΄ δημοτικού		Α΄ γυμνασίου	
	Μέσος όρος	Τυπική Απόκλιση	Μέσος όρος	Τυπική Απόκλιση	Μέσος όρος	Τυπική Απόκλιση
Γενική ικανότητα αναλογικού συλλογισμού	.542	.172	.618	.182	.652	.177

Πίνακας 4.33

Τα Αποτελέσματα της Ανάλυσης Διασποράς για τη Γενική Ικανότητα Αναλογικού Συλλογισμού ανά Τάξη

	Άθροισμα Τετραγώνων	Βαθμοί Ελευθερίας	Μέσο Τετράγωνο	F	Επίπεδο Σημαντικότητας
Μεταξύ Ομάδων	1.618	2	.809	25.767	.000
Εντός Ομάδων	25.125	800	.031		

Η επίδοση των υποκειμένων στο δοκίμιο του αναλογικού συλλογισμού ανά ομάδα αλγεβρικής σκέψης

Στον Πίνακα 4.34 παρουσιάζοντα τα στοιχεία περιγραφικής στατιστικής για τη γενική ικανότητα αναλογικού συλλογισμού των μαθητών διαφορετικών ομάδων αλγεβρικής σκέψης (όπως αυτές προέκυψαν από την ανάλυση Latent class που προαναφέρθηκε). Η ανάλυση διασποράς (ANOVA) (Πίνακας 4.35) που πραγματοποιήθηκε έδειξε ότι υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μαθητών των τεσσάρων ομάδων διαφορετικής ικανότητας αλγεβρικής σκέψης ως προς την ικανότητα αναλογικού συλλογισμού ($F_{(3,799)}$=218.456, p<.01) (δείτε Πίνακα 4.35). Η ανάλυση Post-hoc που παρουσιάζεται στον Πίνακα ΣΤ.10 (δείτε Παράρτημα ΣΤ), έδειξε ότι οι στατιστικά σημαντικές διαφορές υπήρχαν μεταξύ όλων των ομάδων διαφορετικής ικανότητας αλγεβρικής σκέψης ως προς την ικανότητα αναλογικού συλλογισμού, με την επίδοση να αυξάνεται καθώς μετακινούμαστε από μικρότερη σε μεγαλύτερη τάξη.

Πίνακας 4.34

Μέσοι Όροι και Τυπικές Αποκλίσεις για την Επίδοση των Μαθητών στο Δοκίμιο Αναλογικού Συλλογισμού ανά Ομάδα Αλγεβρικής Σκέψης

	Πρώτη ομάδα		Δεύτερη ομάδα		Τρίτη ομάδα		Τέταρτη ομάδα	
	Μ	ΤΑ	Μ	ΤΑ	Μ	ΤΑ	Μ	ΤΑ
Γενική ικανότητα αναλογικού συλλογισμού	.432	.140	.580	.125	.710	.140	.826	.108

Πίνακας 4.35

Τα Αποτελέσματα της Ανάλυσης Διασποράς για την Γενική Ικανότητα Αναλογικού Συλλογισμού ανά Ομάδα Μαθητών Αλγεβρικής Σκέψης

	Άθροισμα Τετραγώνων	Βαθμοί Ελευθερίας	Μέσο Τετράγωνο	F	Επίπεδο Σημαντικότητας
Μεταξύ των Ομάδων	12.051	3	4.017	218.456	.000
Εντός των Ομάδων	14.692	799	.018		

Η σχέση μεταξύ αναλογικού συλλογισμού και αλγεβρικής σκέψης

Στον Πίνακα 4.36 παρουσιάζονται οι συσχετίσεις μεταξύ των παραγόντων δεύτερης τάξης του μοντέλου αλγεβρικής σκέψης και του μοντέλου αναλογικού συλλογισμού. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.36, όλες οι συσχετίσεις μεταξύ όλων των παραγόντων είναι στατιστικά σημαντικές και ψηλές. Για παράδειγμα, όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.36, η επίδοση των υποκειμένων σε όλες τις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης σχετίζεται στατιστικά σημαντικά με την ικανότητα αναλογικού συλλογισμού ($r_{\text{συλλογισμός για ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών}}$=.924, $r_{\text{Γενίκευση ιδιοτήτων από την αριθμητική}}$=.895, $r_{\text{Ικανότητες συνυφασμένες με την αλγεβρική σύνταξη}}$=.873).

Πίνακας 4.36

Συσχετίσεις μεταξύ της Επίδοσης των Υποκειμένων στους Παράγοντες Αλγεβρικής Σκέψης και στους Παράγοντες του Αναλογικού Συλλογισμού

	Συλλογισμός για την ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών	Γενίκευση ιδιοτήτων από την αριθμητική	Ικανότητες συνυφασμένες με την αλγεβρική σύνταξη	Αλγεβρική σκέψη
Αντιληπτικές σχέσεις	.704*	682*	.665*	.707*
Εννοιολογικές σχέσεις	.770*	.746*	.727*	.773*
Αριθμητικές σχέσεις	.787*	.762*	.743*	.790*
Αναλογικός συλλογισμός	.924*	.895*	.873*	**.927***

Σημείωση. Αντιληπτικές σχέσεις= Ικανότητα αναλογικού συλλογισμού μετά από εντοπισμό αντιληπτικών σχέσεων, Εννοιολογικές σχέσεις= Ικανότητα αναλογικού συλλογισμού μετά από εντοπισμό εννοιολογικών σχέσεων, Αριθμητικές σχέσεις= Ικανότητα αναλογικού συλλογισμού μετά από εντοπισμό αριθμητικών σχέσεων. *p<.05

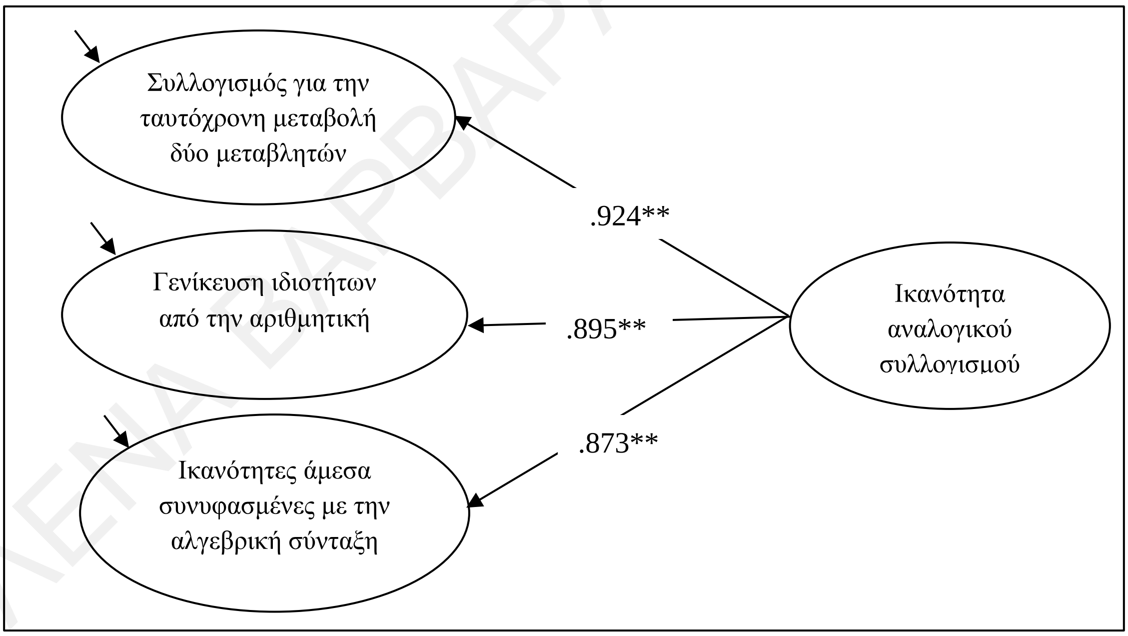
Για να εξεταστεί η φύση της σχέσης μεταξύ αναλογικού συλλογισμού και αλγεβρικής σκέψης, εξετάστηκε η δομή τριών διαφορετικών μοντέλων. Το πρώτο μοντέλο εισηγείται ότι η ικανότητα αλγεβρικής σκέψης (παράγοντας τρίτης τάξης του μοντέλου αλγεβρικής σκέψης) ως μια πολυδιάστατη ικανότητα, η οποία αποτελείται από «το συλλογισμό για την ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών», «τη γενίκευση ιδιοτήτων από την αριθμητική και τον ποσοτικό συλλογισμό» και «τις ικανότητες που είναι άμεσα συνυφασμένες με την αλγεβρική σύνταξη», προβλέπει την ικανότητα στους τρεις παράγοντες πρώτης τάξης του μοντέλου του αναλογικού συλλογισμού. Το δεύτερο μοντέλο εισηγείται ότι ο αναλογικός συλλογισμός ως μια πολυδιάστατη ικανότητα, η οποία αποτελείται από «τον εντοπισμό αντιληπτικών σχέσεων», «τον εντοπισμό εννοιολογικών σχέσεων», και «τον εντοπισμό αριθμητικών σχέσεων», προβλέπει την ικανότητα στους τρεις παράγοντες δεύτερης τάξης (τρεις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης) του μοντέλου αλγεβρικής σκέψης. Το τρίτο μοντέλο εισηγείται ότι οι παράγοντες δεύτερης τάξης του μοντέλου αλγεβρικής σκέψης και οι παράγοντες πρώτης τάξης του μοντέλου αναλογικού συλλογισμού αποτελούν υπο-παράγοντες μιας πιο γενικής ικανότητας.

Τα αποτελέσματα της δομικής ανάλυσης όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.37, έδειξαν ότι η προσαρμογή του δεύτερου μοντέλου ήταν καλύτερη από ότι των άλλων δύο μοντέλων. Φαίνεται επομένως, ότι η ικανότητα αναλογικού συλλογισμού αποτελεί ισχυρό παράγοντα πρόβλεψης των τριών παραγόντων της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης (CFI=.959, TLI=.989, x^2=549.689, df=407, x^2/df=1.351, p<.05, RMSEA=.021). Οι συντελεστές πρόβλεψης (δείτε Διάγραμμα 4.6) της ικανότητας αναλογικού συλλογισμού στους τρεις παράγοντες της αλγεβρικής σκέψης ήταν πολύ ψηλοί και στατιστικά σημαντικοί ($r_{\text{συλλογισμός για την ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών}}$=.924 , $z_{\text{συλλογισμός για την ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών}}$=26.506, $r_{\text{γενίκευση ιδιοτήτων από την αριθμητική}}$=.895, $z_{\text{γενίκευση ιδιοτήτων από την αριθμητική}}$=29.339, $r_{\text{ικανότητες συνυφασμένες με την αλγεβρική σύνταξη}}$=.873, $z_{\text{ικανότητες συνυφασμένες με την αλγεβρική σύνταξη}}$=29.433)

Πίνακας 4.37

Δείκτες Προσαρμογής για τα Διαφορετικά Μοντέλα που Αφορούν στη Σχέση μεταξύ Αναλογικού Συλλογισμού και Αλγεβρικής Σκέψης

	CFI	x^2	*df*	x^2/df	*p*	*RMSEA*
Μοντέλο 1	.953	573.677	407	1.410	<.05	.023
Μοντέλο 2	.959	549.689	407	1.351	<.05	.021
Μοντέλο 3	.951	576.312	404	1.427	<.05	.023



**p<.01

Διάγραμμα 4.6. Σχέση μεταξύ της Ικανότητας Αναλογικού Συλλογισμού και των Παραγόντων της Ικανότητας Αλγεβρικής Σκέψης.

Επίλυση των Έργων Αναλογικού Συλλογισμού Αλγεβρικής σκέψης (ΕΑΣ) από τις Τέσσερις Ομάδες Μαθητών Αλγεβρικής Σκέψης

Σε αυτό το μέρος παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση των δεδομένων των κλινικών συνεντεύξεων και αποσκοπούσαν στην εξέταση του ερευνητικού εξής ερευνητικού ερωτήματος:

(στ) Πώς αντιμετωπίζουν και που εστιάζουν οι μαθητές διαφορετικών ομάδων αλγεβρικής σκέψης κατά την επίλυση έργων αναλογικού συλλογισμού τα οποία αφορούν συγκεκριμένα στην αλγεβρική σκέψη;

Οι μαθητές κλήθηκαν να λύσουν επτά έργα «Αναλογικού συλλογισμού αλγεβρικής σκέψης (ΕΑΣ)». Μέσα από τον τρόπο που αντιμετώπισαν και έλυσαν οι μαθητές τα έργα ΕΑΣ εντοπίζεται τόσο η προσέγγισή τους και η ικανότητά τους να σκέφτονται αναλογικά σε έργα με αλγεβρικό περιεχόμενο αλλά και τα λάθη ή οι στρατηγικές των μαθητών που αφορούν συγκεκριμένα στις αλγεβρικές ικανότητες μιας και αυτά είναι συνυφασμένα με την προσέγγιση που υιοθετούν οι μαθητές.

Σε αυτό το μέρος πραγματοποιείται αρχικά παρουσίαση των αποτελεσμάτων που αφορούν στα λάθη και στις στρατηγικές των μαθητών των τεσσάρων ομάδων αλγεβρικής σκέψης όπως αυτά εντοπίστηκαν στην αρχική φάση της επίλυσης των έργων ΕΑΣ από τους μαθητές (συνεισφορά επομένως και στο ερευνητικό ερώτημα γ). Στη συνέχεια πραγματοποιείται επεξήγηση των τριών προσεγγίσεων επίλυσης των έργων ΕΑΣ, ενώ ακολούθως παρουσιάζονται αναλυτικά οι προσεγγίσεις των τεσσάρων ομάδων μαθητών σε όλα τα έργα ΕΑΣ. Η παρουσίαση των αποτελεσμάτων αυτών βασίζεται στη σειρά των επτά έργων ΕΑΣ των συνεντεύξεων και τα οποία αφορούν στις οκτώ ικανότητες αλγεβρικής σκέψης. Για κάθε έργο παρουσιάζεται ο τρόπος προσέγγισης των μαθητών των τεσσάρων ομάδων σε πίνακες. Με έντονη γραμματοσειρά, παρουσιάζεται στους πίνακες η τελική προσέγγιση της πλειοψηφίας των μαθητών της κάθε ομάδας για την επίλυση του έργου ΕΑΣ. Παρόλα αυτά, σε κάθε πίνακα για κάθε έργο ΕΑΣ παρουσιάζονται όλες οι προσεγγίσεις που εμφάνισαν οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας κατά τη διάρκεια της επίλυσης του έργου ΕΑΣ ασχέτως αν αυτές ήταν απαραίτητα οι τελικές τους προσεγγίσεις. Για παράδειγμα, είναι πιθανό όλοι οι μαθητές της τέταρτης ομάδας να υιοθέτησαν τελικά μια δομική προσέγγιση για την επίλυση ενός έργου ΕΑΣ, ωστόσο αν στα αρχικά στάδια της επίλυσης του έργου υιοθέτησαν μια μεταβατική προσέγγιση αυτό θα φαίνεται στον πίνακα του συγκεκριμένου έργου. Ο τρόπος προσέγγισης των μαθητών (είτε στα αρχικά στάδια επίλυσης των έργων ΕΑΣ είτε η τελική προσέγγιση) εντοπίστηκε μέσα από την ξεκάθαρη ολοκληρωμένη τους απάντηση για το τι εντόπισαν ως κοινό στις δύο καταστάσεις αλλά και από τον τρόπο που εκφράστηκαν για τη συμπλήρωση των όρων Β και Δ. Αξίζει να σημειωθεί ότι στις περιπτώσεις όπου μαθητές μιας ομάδας αρχίζουν με λανθασμένη αντίληψη ή με κάποια επιφύλαξη ή δυσκολία για κάποιες αλγεβρικές έννοιες που εμπλέκονταν στις καταστάσεις των έργων ΕΑΣ, αλλά κατά τη διάρκεια της συνέντευξης προέκυψαν στοιχεία για το πώς το έργο ΕΑΣ τους βοήθησε να διορθώσουν το λάθος τους ή απλά να ξεπεράσουν κάποια δυσκολία, παρουσιάζονται αντιπροσωπευτικά χαρακτηριστικά αποσπάσματα των συνεντεύξεων με τους συγκεκριμένους μαθητές.

Στη συνέχεια, πραγματοποιείται σύνοψη των προσεγγίσεων των μαθητών των τεσσάρων ομάδων στα έργα ΕΑΣ. Τέλος, παρουσιάζεται σύνοψη των αποτελεσμάτων για τη βελτίωση που επέδειξαν οι μαθητές των τεσσάρων ομάδων στη διάρκεια των συνεντεύξεων κατά την επίλυση των έργων ΕΑΣ.

Οι στρατηγικές, οι δυσκολίες και τα λάθη των μαθητών των τεσσάρων ομάδων αλγεβρικής σκέψης τα οποία παρουσιάστηκαν στην αρχική φάση της επεξεργασίας του κάθε έργου ΕΑΣ

Στον Πίνακα 4.38 παρουσιάζονται οι στρατηγικές, τα λάθη και οι δυσκολίες τα οποία παρουσίασαν οι μαθητές των τεσσάρων ομάδων αλγεβρικής σκέψης στην αρχική επεξεργασία των έργων ΕΑΣ. Πιο συγκεκριμένα, στις περιπτώσεις που οι μαθητές παρουσίασαν στην αρχική φάση επίλυσης κάθε έργου ΕΑΣ κάποια δυσκολία, λανθασμένη αντίληψη ή στρατηγική (ανεξάρτητα από το αν στη συνέχεια βελτίωσαν την επίδοσή τους αντλώντας βοήθεια από το έργο ΕΑΣ), λήφθηκαν υπόψη αυτά τα λάθη και οι στρατηγικές μιας και αυτά χαρακτήριζαν την ικανότητα και επίδοση του μαθητή. Η βελτίωση που επέδειξαν μερικοί μαθητές προς το τέλος της επίλυσης κάποιου έργου ΕΑΣ (λόγω της «βοήθειας» που παρείχαν τα συγκεκριμένα έργα), αποτελεί ξεχωριστό θέμα το οποίο αναλύεται στο τέλος αυτού του μέρους.

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.38, τα αποτελέσματα των συνεντεύξεων για τα χαρακτηριστικά των μαθητών των τεσσάρων ομάδων συνάδουν με τα αποτελέσματα της ποσοτικής ανάλυσης, ωστόσο, παρέχουν επιπρόσθετες πληροφορίες. Οι μαθητές της πρώτης και δεύτερης ομάδας αντιμετώπισαν το σύμβολο ίσον ως ένδειξη του ότι ακολουθεί το αποτέλεσμα σε αντίθεση με τους μαθητές της τρίτης και τέταρτης ομάδας οι οποίοι παρουσίασαν συσχεσιακή αντίληψη του συμβόλου της ισότητας αντιμετωπίζοντας το τόσο ως ισοδυναμία μεταξύ ποσοτήτων και ως προσδιορισμό αυτού που βρίσκεται αριστερά από τον ίσον. Οι μαθητές της πρώτης ομάδας φάνηκε ότι δεν αντιλαμβάνονταν τη χρήση του αλγεβρικού συμβόλου (π.χ. ν) στη γενίκευση και δεν κατανοούσαν την ανάγκη διατύπωσης γενικής έκφρασης για τη γενίκευση ενός μοτίβου με αποτέλεσμα να κάνουν αναφορά σε μεμονωμένες περιπτώσεις ή στον εντοπισμό των αμέσως επόμενων όρων του μοτίβου. Επιπρόσθετα, αντιμετώπισαν δυσκολία με τη χρήση αλγεβρικών συμβόλων σε κάποια ισότητα (π.χ. $\frac{\alpha+\alpha+\alpha+\alpha}{4}=\alpha$), αφού θεώρησαν ότι το α είναι συγκεκριμένα ο αριθμός ένα, λόγω της θέσης του στο αλφάβητο ή ότι είναι κάποιος άλλος συγκεκριμένο αριθμός. Σε καταστάσεις που εμπλέκουν αλγεβρικούς κανόνες όπως «Α+Κ=850», θεώρησαν ότι το Α και το Κ έχουν μια συγκεκριμένη τιμή. Αν και οι μαθητές της πρώτης ομάδας αντιμετώπισαν τα αλγεβρικά σύμβολα σε όλες τις περιπτώσεις ως συγκεκριμένους άγνωστους αριθμούς και ενώ είχαν καταφέρει να εντοπίσουν ορθά την τιμή του αγνώστου σε μια απλή εξίσωση (κάτι που φάνηκε και στην ποσοτική ανάλυση), απέτυχαν στην επίλυση ενός συστήματος εξισώσεων με δύο αγνώστους (ΕΑΣ 3), λόγω της δυσκολίας τους να αντιληφθούν ότι οι τιμές θα πρέπει να ικανοποιούν και τις δύο εξισώσεις ταυτόχρονα.

Οι μαθητές της δεύτερης ομάδας παρουσίασαν μεγαλύτερη επιτυχία στα έργα των ικανοτήτων αλγεβρικής σκέψης από τους μαθητές της πρώτης ομάδας, ωστόσο, είναι η ομάδα μαθητών η οποία βασίστηκε περισσότερο από όλες τις άλλες στην υιοθέτηση της στρατηγικής δοκιμής και ελέγχου και στη χρήση συγκεκριμένων αριθμητικών παραδειγμάτων. Συγκεκριμένα, στην επίλυση συστήματος δύο εξισώσεων και στον έλεγχο της ισότητας «$\frac{\alpha+\alpha+\alpha+\alpha}{4}=\alpha$», κατέφυγαν στη στρατηγική δοκιμής και ελέγχου με αριθμητικά παραδείγματα. Παρόμοια, στο έργο γενίκευσης του αποτελέσματος της πρόσθεσης ενός αριθμού με τον εαυτό του και του πολλαπλασιασμού περιττού αριθμού με άρτιο, αλλά και στο έργο μεταβολής των τιμών δύο μεταβλητών με βάση αλγεβρικό κανόνα (Α+Κ=850), περιορίστηκαν στη χρήση αριθμητικών παραδειγμάτων χωρίς ικανότητα αιτιολόγησης των σχέσεων που εντοπίστηκαν (πέρα από την αναφορά σε αριθμητικά παραδείγματα). Συγκεκριμένα, στην περίπτωση μεταβολής των τιμών δύο μεταβλητών με βάση αλγεβρικό κανόνα της μορφής «Α+Κ=850», ενώ υπολόγισαν με επιτυχία τις αντίστοιχες τιμές των δύο μεταβλητών δεν ήταν σε θέση να σχολιάσουν και να εστιάσουν την προσοχή τους στη σχέση ταυτόχρονης μεταβολής των δύο μεταβλητών (π.χ. όσο αυξάνονται οι τιμές της μιας μεταβλητής μειώνονται οι τιμές της άλλης). Αυτό εξηγεί τη χαμηλή επίδοση στα αντίστοιχα έργα της ποσοτικής ανάλυσης (έργο Vf3 και Vf4) όπου πέρα από μεταβολή τιμών με βάση αλγεβρικούς κανόνες χρειαζόταν και συλλογισμός για τη σχέση μεταβολής των δύο μεταβλητών. Από την άλλη, οι μαθητές της δεύτερης ομάδας στην ποσοτική ανάλυση που προηγήθηκε, εμφάνισαν ψηλό μέσο όρο στα έργα μεταβολής τιμών δύο μεταβλητών σε γραφική παράσταση και συγκεκριμένα στο έργο το οποίο απαιτούσε συλλογισμό για τη σχέση μεταβολής των τιμών των δύο μεταβλητών η οποία παρουσιαζόταν στη γραφική παράσταση (Vf2). Επομένως, οι συγκεκριμένοι μαθητές φαίνεται να είχαν αντίληψη της ταυτόχρονης μεταβολής δύο μεταβλητών, ωστόσο ήταν σε θέση να περιγράφουν τη σχέση μεταβολής των δύο μεταβλητών όταν αυτή είναι εμφανής (σε γραφική παράσταση) και όχι με βάση κάποιο αλγεβρικό κανόνα. Η επιτυχία τους να υπολογίζουν μερικές αντίστοιχες τιμές μεταβλητών με βάση κάποιο κανόνα περιορίστηκε στον κανόνα της μορφής «Α+Κ=850» αφού σε κανόνες της μορφής «Α=800-2Τ» δεν κατανοούσαν την εξίσωση λόγω περιορισμένης αντίληψης του συμβόλου «ίσον». Στην περίπτωση γενίκευσης σχέσεων, ενώ παρουσίασαν την ικανότητα να εκφράσουν λεκτικά τη γενίκευση για τον υπολογισμό του μισθού κάποιου υπαλλήλου (όπου παρέχεται ο βασικός μισθός 100 ευρώ και τρία ευρώ για κάθε επιπρόσθετη ώρα εργασίας), δεν κατάφεραν να εντοπίσουν τη γενίκευση για ένα γεωμετρικό αναπτυσσόμενο μοτίβο (κάτι που συνάδει με την ποσοτική ανάλυση) και περιορίστηκαν στην επαναλαμβανόμενη στρατηγική όπου απλά εντόπισαν τη διαφορά μεταξύ των όρων της μιας μεταβλητής παρά στον συντονισμό της μεταβολής των δυο μεταβλητών. Οι μαθητές της δεύτερης ομάδας αντιμετώπισαν επίσης δυσκολία να ερμηνεύσουν μια απλή έκφραση με σύμβολα η οποία αναπαριστά μια κατάσταση σε μια εικόνα και ακόμη περισσότερο να ερμηνεύσουν μια αλγεβρική έκφραση η οποία αναπαριστά την πρόσθεση διαδοχικών ημερομηνιών στην εικόνα με το ημερολόγιο.

Οι μαθητές της τρίτης ομάδας παρουσίασαν επιτυχία στις εξής ικανότητες κάτι που συνάδει με τα αποτελέσματα της ποσοτικής ανάλυσης: (α) αναγνώρισαν τη χρήση της ιδιότητας της ισότητας αιτιολογώντας ότι μια ισότητα εξακολουθεί να ισχύει και μετά την πρόσθεση ίσης ποσότητας και στα δύο μέλη της ισότητας, (β) ερμήνευσαν τις αλγεβρικές εκφράσεις οι οποίες αναπαριστούν μια κατάσταση αιτιολογώντας τη χρήση κάθε αλγεβρικής έκφρασης για την αναπαράσταση διαδοχικών στοιχείων/ημερομηνιών, (γ) διατύπωσαν μέσω αλγεβρικών συμβόλων τη γενίκευση με την οποία κάποιος υπολογίζει το μισθό του υπαλλήλου ο οποίος πληρώνεται σίγουρα 100 ευρώ συν τρία ευρώ για κάθε επιπρόσθετη ώρα εργασίας (3ν+100) και (δ) Αναγνώρισαν τη δυνατότητα και μπορούσαν να μεταβάλουν τις τιμές των δύο μεταβλητών σε απλό αλγεβρικό κανόνα της μορφής «α+β=850» αλλά και σε κανόνα της μορφής «α=800-γ» και ήταν σε θέση να εντοπίσουν και να εξηγήσουν τη σχέση μεταβολής των δύο μεταβλητών (π.χ. καθώς αυξάνονται οι τιμές της μιας μεταβλητής, μειώνονται οι τιμές της δεύτερης μεταβλητής), κυρίως με βάση αριθμητικά παραδείγματα και λιγότερο με βάση τη δομή των κανόνων. Ακόμη, στο έργο που εμπλέκει πράξεις με αλγεβρικά σύμβολα, οι μαθητές εξέτασαν μέσω δοκιμής και ελέγχου με διάφορους αριθμούς ότι το «(α+α+α+α)/4=α» ισχύει, αιτιολογώντας ότι αυτό συμβαίνει επειδή εκτελούνται αντίστροφες πράξεις, επομένως, δεν έκαναν άμεση αναφορά σε πράξεις με τα αλγεβρικά σύμβολα. Αυτό φάνηκε και μέσα από την ποσοτική ανάλυση όπου οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας δεν είχαν ψηλή επίδοση στα έργα της ικανότητας απλοποίησης αλγεβρικών εκφράσεων. Ωστόσο, τα δεδομένα της συνέντευξης έδειξαν ότι οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας ήταν σε θέση να απλοποιήσουν μια κατάσταση με αλγεβρικά σύμβολα στην οποία τα σύμβολα αναπαριστούν συγκεκριμένο άγνωστο αριθμό. Συγκεκριμένα, οι μαθητές της τρίτης ομάδας (πέρα από την επιτυχία τους στην επίλυση εξισώσεων στο δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης) φαίνεται ότι στο έργο της συνέντευξης για την επίλυση συστήματος δύο εξισώσεων (Α+Α+Β=14, Α+Α+Α+Α+β=26), αφαίρεσαν τα αντίστοιχα μέλη των δύο εξισώσεων για απλοποίηση και εντόπισαν τις τιμές των αγνώστων που ικανοποιούν και τις δύο εξισώσεις. Οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας παρουσίασαν δυσκολία όταν: (α) δεν είχαν την ικανότητα να αιτιολογήσουν πέρα από τη χρήση αριθμητικών παραδειγμάτων τη γενίκευση στην οποία κατέληξαν ότι «όταν προσθέτω ένα αριθμό με τον εαυτό του ή όταν πολλαπλασιάζω κάποιο περιττό αριθμό με κάποιο άρτιο το αποτέλεσμα και στις δύο περιπτώσεις είναι άρτιος αριθμός» και (β) παρόλο που αναγνώρισαν την ανάγκη γενίκευσης ενός μοτίβου και τη χρήση ενός γενικευμένου κανόνα, στην περίπτωση του γεωμετρικού αναπτυσσόμενου μοτίβου με τα σπίρτα και γενικό κανόνα «3ν+1» (Έργο ΕΑΣ 2, δείτε Παράρτημα Ε), οι μαθητές εντόπισαν μόνο το «3ν» και δεν κατάφεραν να εντοπίσουν τη σταθερά. Οι περισσότεροι μαθητές ανέφεραν ότι σταθερά είναι ο αριθμός τέσσερα, αν και ταυτόχρονα αναγνώρισαν ότι ο κανόνας «3ν+4» είναι λανθασμένος. Αυτό το αποτέλεσμα είχε φανεί και στην ποσοτική ανάλυση όπου οι μαθητές της τρίτης ομάδας δεν είχαν παρουσιάσει ψηλή επίδοση στο μοτίβο με τα σπίρτα και γενικό κανόνα «3ν+1 ή 4+3(ν-1)». Παρόλα αυτά, αξίζει κανείς να παρατηρήσει τα εξής δύο σημεία: (α) οι μαθητές κατά τη διάρκεια της συνέντευξης έδειξαν να ψάχνουν για τη σταθερά και να παρασύρονται ότι η σταθερά είναι το τέσσερα γιατί ήταν το πρώτο τετράγωνο πάνω στο οποίο κτίζονταν τα υπόλοιπα και (β) οι συγκεκριμένοι μαθητές στο γραπτό δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης (με βάση την ποσοτική ανάλυση) είχαν ψηλή επίδοση στο έργο με γεωμετρικό αναπτυσσόμενο μοτίβο με γενικό κανόνα «2ν+1» (στο οποίο όμως η σταθερά «συν ένα» ήταν πιο εμφανής). Οι δύο προαναφερθείσες παρατηρήσεις δείχνουν ότι οι μαθητές αντιμετώπισαν δυσκολία να ολοκληρώσουν την προσπάθειά τους και να εντοπίσουν τη σταθερά λόγω του ότι η εικόνα του γεωμετρικού μοτίβου ήταν κάπως πιο περίπλοκη και χρειάζεται περισσότερη επεξεργασία και ερμηνεία μέσω οπτικής ανάλυσης. Ως εκ τούτου, φαίνεται ότι οι μαθητές της τρίτης ομάδας αναγνωρίζουν την ανάγκη γενίκευσης, αλλά η ικανότητά τους να εντοπίσουν ένα γενικό κανόνα εξαρτάται από την περιπλοκότητα του γενικού κανόνα και άρα και της εικόνας του γεωμετρικού αναπτυσσόμενου μοτίβου.

Οι μαθητές της τέταρτης ομάδας παρουσίασαν επιτυχία στα έργα όλων των ικανοτήτων αλγεβρικής σκέψης κάτι που είχε προκύψει και στα αποτελέσματα της ποσοτικής ανάλυσης. Συγκεκριμένα, τα αποτελέσματα της ανάλυσης των δεδομένων των κλινικών συνεντεύξεων έδειξαν ότι οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας: (α) ερμήνευσαν σύνθετες αλγεβρικές εκφράσεις για την αναπαράσταση της πρόσθεσης διαδοχικών στοιχείων, (β) εκτελούσαν πράξεις με αλγεβρικά σύμβολα για την απλοποίηση των εκφράσεων, (γ) είχαν επιτυχία στην επίλυση συστήματος εξισώσεων μέσω «αφαίρεσης» και συγκεκριμένα εντοπισμού της διαφοράς των δύο μελών των δύο εξισώσεων (Α+Α+β=14 και Α+Α+Α+Α+Β=26, 2Α=12, Α=6), (δ) εντόπισαν το γενικό κανόνα για αναπτυσσόμενα γεωμετρικά μοτίβα και αιτιολόγησαν τη γενίκευση τους με βάση την εικόνα του μοτίβου, (ε) μπορούσαν να μεταβάλουν τις τιμές δύο μεταβλητών με βάση αλγεβρικούς κανόνες και να εξηγήσουν τη σχέση της ταυτόχρονης μεταβολής δύο μεταβλητών με βάση τον αλγεβρικό κανόνα. Επιπρόσθετα, οι μαθητές της τέταρτης ομάδας κατάφεραν να αναγνωρίσουν την εφαρμογή ιδιοτήτων της ισότητας, χωρίς να περιορίζονται σε αναφορά σε συγκεκριμένη πράξη, αλλά εκφράζοντας το γενικό συμπέρασμα ότι μια ισότητα διατηρείται αν εφαρμόζεται και στα δύο μέλη της ισότητας ακριβώς η ίδια πράξη. Επέδειξαν ακόμη την ικανότητα αξιοποίησης των ιδιοτήτων των αριθμών για την αιτιολόγηση του αποτελέσματος της γενίκευσης ότι «πολλαπλασιάζοντας έναν περιττό αριθμό με έναν άρτιο αριθμό το αποτέλεσμα είναι άρτιος αριθμός». Οι μαθητές της τέταρτης ομάδας είχαν ψηλή επίδοση στα έργα γενίκευσης ιδιοτήτων των αριθμών στο δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης, ωστόσο, η προαναφερθείσα κατάσταση δεν υπήρχε στο δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης, επομένως οι συγκεκριμένοι μαθητές επέδειξαν την ευελιξία τους να αιτιολογούν τις γενικεύσεις τους βασισμένοι στις ιδιότητες των αριθμών και σε νέες καταστάσεις.

Πίνακας 4.38

Οι Στρατηγικές και οι Δυσκολίες των Τεσσάρων Ομάδων Αλγεβρικής Σκέψης με Βάση τα Ποιοτικά Δεδομένα

1η Ομάδα	2η Ομάδα	3η Ομάδα	4η Ομάδα
	ΕΑΣ 1		
Αντίληψη του ίσον ως «ακολουθεί το αποτέλεσμα».	Αντίληψη του ίσον ως «ακολουθεί το αποτέλεσμα».	Αντίληψη του ίσον με όλες τις σημασίες («ακολουθεί το αποτέλεσμα», ως ισοδυναμία ποσοτήτων, ως προσδιορισμός).	Αντίληψη του ίσον με όλες τις σημασίες («ακολουθεί το αποτέλεσμα», ως ισοδυναμία ποσοτήτων, ως προσδιορισμός).
		Αναγνωρίζουν την ιδιότητα της ισότητας για την πρόσθεση ίσων ποσοτήτων/στοιχείων στα δύο μέλη της ισότητας.	Αναγνωρίζουν γενικά τις ιδιότητες της ισότητας χωρίς περιορισμό στην πράξη της πρόσθεσης.
	ΕΑΣ 2		
Στη διατύπωση γενίκευσης για την κατάσταση στην οποία παρέχεται ο σταθερός μισθός (€100) αλλά και το επιπρόσθετο ποσό ανά ώρα (€3), οι μαθητές κάνουν απλά αναφορά σε μεμονωμένες περιπτώσεις (αν εργαστεί δύο επιπρόσθετες ώρες θα πάρει €106) δείχνοντας δυσκολία να αντιληφθούν την ανάγκη διατύπωσης πιο γενικής δήλωσης (δεν αντιλαμβάνονται το «ν» στις δυο καταστάσεις).	Στη διατύπωση γενίκευσης για την κατάσταση στην οποία παρέχεται ο σταθερός μισθός (€100) αλλά και το επιπρόσθετο ποσό ανά ώρα (€3), οι μαθητές εκφράζουν λεκτικά τη γενίκευση ότι θα παίρνει 100 ευρώ συν τρία ευρώ επί τις επιπρόσθετες ώρες.	Στη διατύπωση γενίκευσης για την κατάσταση στην οποία παρέχεται ο σταθερός μισθός (€100) αλλά και το επιπρόσθετο ποσό ανά ώρα (€3), αναφέρουν το «3ν+100» ως γενικό κανόνα για τον υπολογισμό των χρημάτων για ν επιπρόσθετες ώρες.	Στη διατύπωση γενίκευσης για την κατάσταση στην οποία παρέχεται ο σταθερός μισθός (€100) αλλά και το επιπρόσθετο ποσό ανά ώρα (€3), αναφέρουν το «3ν+100» ως γενικό κανόνα για τον υπολογισμό των χρημάτων για ν επιπρόσθετες ώρες.

Στην προσπάθεια γενίκευσης γεωμετρικών αναπτυσσόμενων μοτίβων με τις δύο μεταβλητές να μεταβάλλονται ταυτόχρονα, εστιάζουν στη μεταβολή της μιας μεταβλητής εντοπίζοντας μόνο τη διαφορά μεταξύ των όρων εφαρμόζοντας έτσι επαναλαμβανόμενη στρατηγική (+3 +3 …)	Στην προσπάθεια γενίκευσης γεωμετρικών αναπτυσσόμενων μοτίβων με τις δύο μεταβλητές να μεταβάλλονται ταυτόχρονα, εστιάζουν στη μεταβολή της μιας μεταβλητής εντοπίζοντας μόνο τη διαφορά μεταξύ των όρων εφαρμόζοντας έτσι επαναλαμβανόμενη στρατηγική (+3 +3 …)	Στην προσπάθεια γενίκευσης γεωμετρικών αναπτυσσόμενων μοτίβων με τις δύο μεταβλητές να μεταβάλλονται ταυτόχρονα, εντοπίζουν τον συντελεστή της μεταβλητής (3ν) ωστόσο, δυσκολεύονται να εντοπίσουν τη σταθερά μιας και δεν είναι τόσο εμφανής στην εικόνα του συγκεκριμένου μοτίβου.	Στην προσπάθεια γενίκευσης γεωμετρικών αναπτυσσόμενων μοτίβων με τις δύο μεταβλητές να μεταβάλλονται ταυτόχρονα, εντοπίζουν το γενικό κανόνα (3ν+1) και μπορούν να αιτιολογήσουν τον κανόνα με βάση την εικόνα.
ΕΑΣ 3			
Στο έργο επίλυσης συστήματος δύο εξισώσεων, δεν αντιλαμβάνονται την ανάγκη εντοπισμού τιμών για τους αγνώστους ώστε να ικανοποιούνται οι δύο εξισώσεις ταυτόχρονα.	Στο έργο επίλυσης συστήματος δύο εξισώσεων, εντοπίζουν μέσω δοκιμής και ελέγχου τις τιμές που ικανοποιούν και τις δύο εξισώσεις ταυτόχρονα	Στο έργο επίλυσης συστήματος δύο εξισώσεων, αφαιρούν τα αντίστοιχα μέλη των εξισώσεων (εντοπίζουν τη διαφορά των δύο εξισώσεων) για απλοποίηση και εντοπίζουν τις τιμές των αγνώστων.	Στο έργο επίλυσης συστήματος δύο εξισώσεων, αφαιρούν τα αντίστοιχα μέλη των εξισώσεων (εντοπίζουν τη διαφορά των δύο εξισώσεων) για απλοποίηση και εντοπίζουν τις τιμές των αγνώστων.
ΕΑΣ 4			
Στην προσπάθειά τους να αντιμετωπίσουν την κατάσταση (α+α+α+α)/4=α αποφασίζουν ότι το α είναι ένας συγκεκριμένος αριθμός (π.χ. ο αριθμός ένα, μιας και το α είναι το πρώτο στο αλφάβητο).	Εξετάζουν μέσω δοκιμής ελέγχου με διάφορους αριθμούς ότι το $\frac{α+α+α+α}{4} = α$ ισχύει.	Εξετάζουν μέσω δοκιμής ελέγχου με διάφορους αριθμούς ότι το (α+α+α+α)/4=α ισχύει και αιτιολογούν ότι αυτό συμβαίνει επειδή πραγματοποιούνται αντίστροφες πράξεις.	Οι μαθητές αναφέρονται ξεκάθαρα σε πράξεις με αλγεβρικά σύμβολα. Γίνεται επίσης, αναφορά είτε σε διαγραφή του αριθμού τέσσερα, είτε στο ότι πραγματοποιήθηκαν αντίστροφες πράξεις στο α.

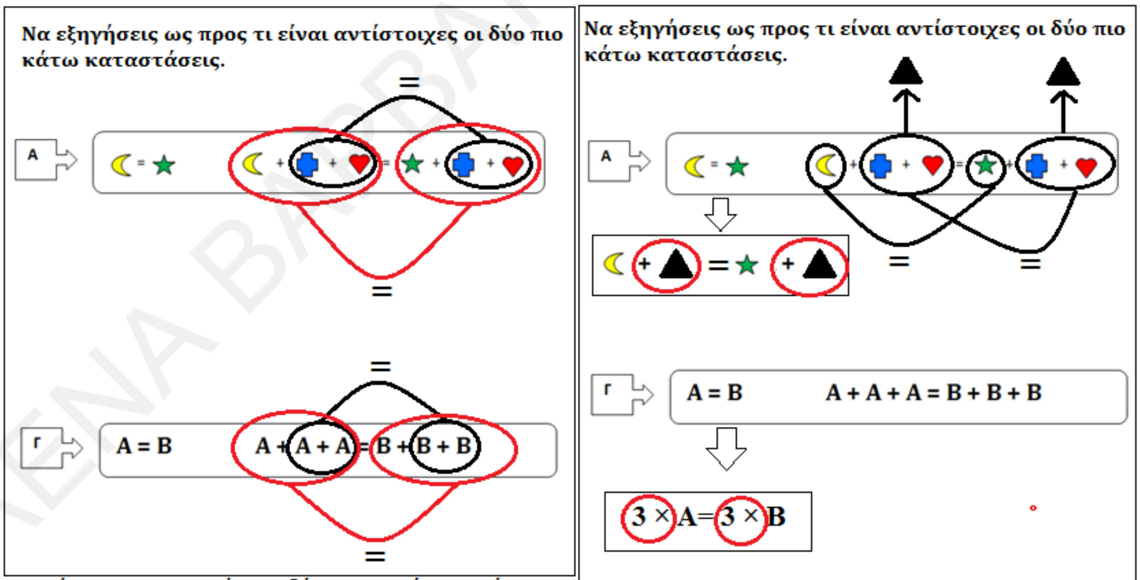
ΕΑΣ 5			
Οι μαθητές καταλήγουν σε γενίκευση για το αποτέλεσμα της πρόσθεσης ενός αριθμού με τον εαυτό του ή για το αποτέλεσμα πολλαπλασιασμού άρτιου με περιττό (άρτιος αριθμός), αλλά δεν αιτιολογούν πέρα από αριθμητικά παραδείγματα.	Οι μαθητές καταλήγουν σε γενίκευση για το αποτέλεσμα της πρόσθεσης ενός αριθμού με τον εαυτό του ή για το αποτέλεσμα πολλαπλασιασμού άρτιου με περιττό, αλλά δεν αιτιολογούν πέρα από αριθμητικά παραδείγματα ή αναφέρουν ότι αυτό έμαθαν στο μάθημα με το δάσκαλό τους.	Οι μαθητές καταλήγουν σε γενίκευση για το αποτέλεσμα της πρόσθεσης ενός αριθμού με τον εαυτό του ή για το αποτέλεσμα πολλαπλασιασμού άρτιου με περιττό, αλλά δεν αιτιολογούν πέρα από αριθμητικά παραδείγματα.	Οι μαθητές καταλήγουν σε γενίκευση για το αποτέλεσμα της πρόσθεσης ενός αριθμού με τον εαυτό του (άρτιος αριθμός) ή για το αποτέλεσμα πολλαπλασιασμού άρτιου με περιττό (άρτιος αριθμός), αιτιολογούν τις γενικεύσεις τους με βάση τις ιδιότητες των αριθμών.
ΕΑΣ 6			
Δεν είναι σε θέση να ερμηνεύσουν μια αλγεβρική έκφραση η οποία αναπαριστά σχέσεις μιας εικόνας/σχήματος.	Ερμηνεύουν τη χρήση συμβόλων τα οποία αξιοποιούνται για αναπαράσταση διαδοχικών στοιχείων αριθμών.	Ερμηνεύουν τη χρήση συμβόλων τα οποία αξιοποιούνται για αναπαράσταση διαδοχικών στοιχείων αριθμών.	Ερμηνεύουν τη χρήση συμβόλων τα οποία αξιοποιούνται για αναπαράσταση διαδοχικών στοιχείων αριθμών.
ΕΑΣ 7			
Πιθανό να έχουν την αντίληψη ότι στο σύμβολο Α και Κ (Α+Κ=850), αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη τιμή. Στον κανόνα Α=800-2×Τ, αναφέρουν ότι αυτό που φαίνεται είναι ότι το Α=800.	Μεταβάλλουν τις τιμές των δύο μεταβλητών σε αλγεβρικό κανόνα της μορφής α+β=850, παρέχοντας συγκεκριμένα παραδείγματα. Δεν είναι σε θέση να συλλογίζονται για τη σχέση μεταβολής δύο μεταβλητών όταν η σχέση παρουσιάζεται μέσα από αλγεβρικό κανόνα.	Μεταβάλλουν τις τιμές των δύο μεταβλητών σε απλό κανόνα της μορφής α+β=850 και α=800-γ. Εντοπίζουν και εξηγούν τη σχέση μεταβολής των δύο μεταβλητών και αιτιολογούν κυρίως με βάση αριθμητικά παραδείγματα και λιγότερο με βάση τη δομή των δύο κανόνων.	Μεταβάλλουν τις τιμές των δύο μεταβλητών σε απλό αλγεβρικό κανόνα της μορφής α+β=850 και α=800-γ. Εντοπίζουν και εξηγούν τη σχέση μεταβολής των δύο μεταβλητών και αιτιολογούν κυρίως με βάση τη δομή των δύο κανόνων.

Μέσα από την ανάλυση των δεδομένων των κλινικών συνεντεύξεων στα επτά έργα ΕΑΣ εντοπίστηκαν τρεις προσεγγίσεις επίλυσης των συγκεκριμένων έργων: (α) η επιφανειακή προσέγγιση, (β) η μεταβατική προσέγγιση και (γ) η δομική προσέγγιση. Η επιφανειακή προσέγγιση αφορά στις περιπτώσεις όπου οι μαθητές εστιάζουν σε επιφανειακά χαρακτηριστικά των δύο καταστάσεων καταλήγοντας στο ότι το κοινό των δύο καταστάσεων υφίσταται σε κοινά επιφανειακά χαρακτηριστικά (π.χ. αναφορά σε αριθμούς στην εκφώνηση των έργων χωρίς προσπάθεια ερμηνείας των αριθμών, σύγκριση αριθμού αντικειμένων στις δύο καταστάσεις, εντοπισμός κοινών συμβόλων στις δύο καταστάσεις). Η μεταβατική προσέγγιση αναφέρεται στις περιπτώσεις όπου οι μαθητές εντοπίζουν μια σχέση μεταξύ των δύο καταστάσεων χωρίς όμως να είναι σε θέση να αιτιολογήσουν τη σχέση που έχει εντοπίσει. Γενικότερα, η προσέγγισή τους εμπλέκει μεν ερμηνεία των δύο καταστάσεων αλλά το συμπέρασμα για το κοινό των δύο καταστάσεων (κάθε έργου ΕΑΣ) αλλά και ο τρόπος ανάλυσής τους δεν δείχνει πλήρη εστίαση της προσοχής στη δομή παρά μόνο σε κάποια στοιχεία, κάτι που δεν τους επιτρέπει να εντοπίσουν και να αναφερθούν ξεκάθαρα στην κοινή δομή των δύο καταστάσεων. Επίσης, οι μαθητές που υιοθετούν αυτή την προσέγγιση ακόμη και αν εκφράζουν το ορθό συμπέρασμα ή υπόθεση, έχουν καταλήξει σε αυτό μέσα από στρατηγικές όπως δοκιμή και έλεγχο (και όχι μελέτη της δομής) ή δεν είναι σε θέση να αιτιολογήσουν το συμπέρασμα ή την υπόθεσή τους παρά μόνο μέσα από αριθμητικά παραδείγματα. Η δομική-συσχεσιακή προσέγγιση εμπλέκει τις περιπτώσεις όπου οι μαθητές επιδεικνύουν πλήρη εστίαση της προσοχής τους στη δομή των καταστάσεων και σύγκριση των δύο καταστάσεων ως προς τη δομή κάτι που τους επιτρέπει να καταλήξουν σε συμπέρασμα για τη συσχεσιακή ομοιότητα και πλήρη αιτιολόγηση της συγκεκριμένης σχέσης και της υπόθεσης που διατύπωσαν.

Όπως θα φανεί πιο αναλυτικά στη συνέχεια, καθεμία από τις τέσσερις ομάδες μαθητών δεν εμφάνισε όλες τις προσεγγίσεις για την επίλυση των έργων, αλλά κάποιες από αυτές, ή ακόμη και μόνο μια από αυτές. Ωστόσο, τόσο από την ίδια τη φύση των προσεγγίσεων (το βαθμό ανάλυσης των έργων ΕΑΣ) και από τον τρόπο εμφάνισης των προσεγγίσεων από μέρους των μαθητών, προκύπτει το συμπέρασμα ότι οι τρεις προσεγγίσεις προκύπτουν γραμμικά. Από την επιφανειακή προσέγγιση υπάρχει μετάβαση στην μεταβατική προσέγγιση και από τη μεταβατική προσέγγιση υπάρχει μετάβαση σε μια δομική-συσχεσιακή προσέγγιση. Σε καμία περίπτωση δεν υπήρξε μαθητής ο οποίος να έχει προχωρήσει σε μια μεταβατική προσέγγιση και να επιστρέψει στην επιφανειακή προσέγγιση, ούτε και κάποιος μαθητής ο οποίος να υιοθέτησε μια δομική προσέγγιση και στην συνέχεια να επιστρέψει σε μεταβατική προσέγγιση. Στις ελάχιστες περιπτώσεις όπου ένας μαθητής άρχιζε από επιφανειακή προσέγγιση και κατέληγε σε δομική προσέγγιση, ενδιάμεσα προτού καταλήξει στη δομική προσέγγιση υιοθετούσε μια μεταβατική προσέγγιση. Αξίζει, ωστόσο, να σημειωθεί ότι η πλειοψηφία των μαθητών που κατέληγε σε δοκιμή-συσχεσιακή προσέγγιση δεν άρχιζε με επιφανειακή προσέγγιση αλλά συνήθως από μια μεταβατική προσέγγιση.

Χαρακτηριστικά μαθητών των τεσσάρων ομάδων ως προς την ικανότητα συλλογισμού για τις ιδιότητες της ισότητας

Στον Πίνακα 4.39 παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι προσεγγίσεις των μαθητών στο έργο της συνέντευξης (ΕΑΣ 1) (δείτε Παράρτημα Ε) το οποίο παρουσιάζεται συμπληρωμένο και στο Διάγραμμα 4.7 και αφορούσε στην ικανότητα συλλογισμού για τις ιδιότητες της ισότητας.



Συμπέρασμα: Το κοινό των δύο καταστάσεων είναι ότι και στις δύο αρχικές ισότητες προσθέτει ίση ποσότητα και στα δύο μέλη και έτσι διατηρείται η ισότητα.

Συμπέρασμα: Το κοινό των δύο περιπτώσεων είναι ότι εφαρμόζει και στις δύο αρχικές ισότητες την ίδια πράξη και στα δύο μέλη της κάθε ισότητας (πρόσθεση ή πολλαπλασιασμό) και έτσι η ισότητα διατηρείται.

Διάγραμμα 4.7. Χαρακτηριστική λύση των μαθητών της τρίτης ομάδας (αριστερά) και των μαθητών της τέταρτης ομάδας (δεξιά) στο έργο ΕΑΣ 1 το οποίο χρησιμοποιήθηκε στις κλινικές συνεντεύξεις.

Πίνακας 4.39

Προσεγγίσεις των Μαθητών των Τεσσάρων Ομάδων στο Έργο ΕΑΣ για την Ικανότητα Γενίκευσης Ιδιοτήτων της Ισότητας

Ομάδα 1	Ομάδα 2	Ομάδα 3	Ομάδα 4
	Επιφανειακή		
Εστιάζουν στον αριθμό αντικειμένων που υπάρχουν στις δύο ισότητες και αναφέρουν ότι η ομοιότητά τους υφίσταται στο ότι έχουν και οι δύο ίδιο αριθμό στοιχείων. Καθόλου ερμηνεία.	Εστιάζουν στον αριθμό αντικειμένων που υπάρχουν στις δύο ισότητες και αναφέρουν ότι η ομοιότητά τους υφίσταται στο ότι έχουν και οι δύο ίδιο αριθμό στοιχείων.		
	Μεταβατική		
	Αναφέρουν ότι και στις δυο περιπτώσεις προσθέτει στην αρχική ισότητα, δύο στοιχεία δεξιά και αριστερά από το σύμβολο ίσον.	Αναφέρουν ότι και στις δυο περιπτώσεις προσθέτει στην αρχική ισότητα δύο στοιχεία δεξιά και αριστερά από το σύμβολο ίσον.	
	Δομική		
	Εξηγούν ότι και στις δύο αρχικές ισότητες προσθέτει ίση ποσότητα και στα δύο μέλη και έτσι διατηρείται η ισότητα.	**Εξηγούν ότι και στις δύο αρχικές ισότητες προσθέτει ίση ποσότητα και στα δύο μέλη και έτσι διατηρείται η ισότητα.**	Εξηγούν ότι και στις δύο αρχικές ισότητες προσθέτει ίση ποσότητα και στα δύο μέλη και έτσι διατηρείται η ισότητα. **Εξηγούν ότι και στις δύο περιπτώσεις διατηρείται η ισότητα επειδή εφαρμόζει την ίδια πράξη και στα δύο μέλη (πρόσθεση, πολλαπλασιασμό).**

Σημείωση. Με έντονα γράμματα επισημαίνονται οι τελικές προσεγγίσεις της πλειοψηφίας των μαθητών της συγκεκριμένης ομάδας.

Οι μαθητές της πρώτης ομάδας δεν ανταποκρίθηκαν στο έργο ΕΑΣ για το συλλογισμό και γενίκευση ιδιοτήτων της ισότητας. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.39, οι μαθητές της πρώτης ομάδας εστίασαν σε επιφανειακά χαρακτηριστικά των καταστάσεων και ανέφεραν ότι η ομοιότητα των δύο καταστάσεων υφίσταται μόνο στο ότι ο αριθμός των στοιχείων και στις δύο περιπτώσεις είναι ίδιος (έξι στοιχεία και στις δύο καταστάσεις) χωρίς καμία προσπάθεια ερμηνείας της παρατήρησής τους (ακόμη και μετά από παρότρυνση να παρατηρήσουν την αρχική ισότητα φεγγάρι=αστέρι και το πώς άλλαξε). Σχεδόν όλοι οι μαθητές της πρώτης ομάδας που συμμετείχαν στις κλινικές συνεντεύξεις, όταν κλήθηκαν να εξηγήσουν τι συμβαίνει αρχικά στην πρώτη κατάσταση (η οποία εμπλέκει σχήματα) ανέφεραν χαρακτηριστικά «φεγγάρι συν σταυρός συν καρδία ίσον αστέρι» παραλείποντας τα στοιχεία που ακολουθούσαν μετά το αστέρι. Ως εκ τούτου, λόγω του ότι οι μαθητές της πρώτης ομάδας αντιλαμβάνονταν το ίσον ως κάτι που υποδεικνύει ότι «ακολουθεί το αποτέλεσμα», δεν κατάφεραν να ερμηνεύσουν τις δύο καταστάσεις με αποτέλεσμα να ανατρέξουν μόνο στα επιφανειακά χαρακτηριστικά των δύο καταστάσεων. Οι συγκεκριμένοι μαθητές συγκέντρωσαν μέσο όρο στη γενική ικανότητα αναλογικού συλλογισμού κάτω από το .5 (συγκεκριμένα M=.432) κάτι που πιθανό να επηρεάζει και την ικανότητά τους να σκεφτούν αναλογικά στα έργα ΕΑΣ και να εστιάσουν στη δομή και όχι στα επιφανειακά χαρακτηριστικά.

Οι μαθητές της δεύτερης ομάδας διαφοροποιήθηκαν σε κάποιο βαθμό από τους μαθητές της πρώτης ομάδας ως προς την ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων της ισότητας μιας και ενώ μερικοί μαθητές της δεύτερης ομάδας εστίασαν αρχικά σε επιφανειακά χαρακτηριστικά, κανένας δεν παρουσίασε ως τελική προσέγγιση μια επιφανειακή προσέγγιση αφού προχώρησαν σε ερμηνεία των καταστάσεων του έργου. Ωστόσο, η βασική δυσκολία των μαθητών της δεύτερης ομάδας ήταν επίσης, το ότι δεν φάνηκε να κατέχουν συσχεσιακή αντίληψη του συμβόλου της ισότητας κάτι που συνάδει με τα αποτελέσματα της ποσοτικής ανάλυσης. Αρχικά, καθώς διάβαζαν τις ισότητες με τα τρία στοιχεία δεξιά και αριστερά από το ίσον, σχεδόν όλοι οι μαθητές φάνηκε να λαμβάνουν υπόψη τους μόνο το πρώτο στοιχείο που εμφανιζόταν μετά το ίσον. Μετά από την επισήμανση του ερευνητή αν εξέτασαν όλα τα στοιχεία κάθε κατάστασης, οι περισσότεροι άρχισαν να παρατηρούν ότι στην κάθε κατάσταση υπήρχε μια αρχική ισότητα (φεγγάρι=αστέρι, Α=Β) στην οποία έγιναν κάποιες αλλαγές και ότι και στις δύο καταστάσεις προσθέτει στην αρχική ισότητα δύο στοιχεία και στα δύο μέλη της ισότητας. Ωστόσο, τα δύο τρίτα περίπου των μαθητών δεν μπορούσαν να ερμηνεύσουν το αποτέλεσμα της πρόσθεσης στοιχείων όταν κλήθηκαν να ερμηνεύσουν τη νέα ισότητα στην ολότητά της και έτσι δεν είχαν την ικανότητα να εξηγήσουν αν η ισότητα εξακολουθεί να ισχύει (σε καμιά από τις δύο καταστάσεις). Η δυσκολία τους να καταλήξουν σε συμπέρασμα και να αιτιολογήσουν, οφείλεται στο ότι δεν είχαν αναπτύξει συσχεσιακή αντίληψη του συμβόλου της ισότητας και το έργο ΕΑΣ 1 δεν τους βοήθησε να αντιληφθούν την κατάσταση διαφορετικά. Από την άλλη, το ένα τρίτο περίπου των μαθητών της δεύτερης ομάδας (εννέα μαθητές), οι οποίοι δεν είχαν ψηλή επίδοση στα έργα γενίκευσης ιδιοτήτων της ισότητας (Ge2 και Ge3) στο δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης, και στην αρχή της συνέντευξης έδειξαν την περιορισμένη αντίληψη του ίσον που προαναφέρθηκε, με το συγκεκριμένο έργο ΕΑΣ 1 κατάφεραν να ερμηνεύσουν τις δύο καταστάσεις και να επιδείξουν βελτίωση στην επίδοσή τους. Οι συγκεκριμένοι μαθητές φάνηκε ότι τη στιγμή που επεξεργάζονταν τις δύο καταστάσεις και παρατηρώντας ότι και στις δύο περιπτώσεις πρόσθεσε στην αρχική ισότητα δύο στοιχεία δεξιά και αριστερά από το ίσον, εξέφρασαν ξεκάθαρα τη «νέα τους ανακάλυψη» ότι τα τρία στοιχεία αριστερά από το ίσον (=) πρέπει να ισούνται με τα τρία στοιχεία δεξιά από το ίσον (=). Η φράση «νέα ανακάλυψη» χρησιμοποιείται λόγω του ότι οι συγκεκριμένοι μαθητές αρχικά έδειχναν να μην έχουν συσχεσιακή αντίληψη του συμβόλου ίσον. Στη συνέχεια όμως υποστήριξαν ότι το γεγονός ότι υπήρχε μια αρχική ισότητα (φεγγάρι=αστέρι, Α=Β) και το ότι πρόσεξαν ότι σε αυτή προστέθηκαν δύο στοιχεία και στα δύο μέλη, τους βοήθησε να αντιληφθούν ότι το δεξί μέλος «μεγάλωσε» όπως και το αριστερό μέρος (επειδή προστέθηκαν δύο νέα στοιχεία) και άρα έπρεπε να λάβουν υπόψη τους ολόκληρο το δεξί μέλος και όχι μόνο το πρώτο στοιχείο του δεύτερου μέλους (κάτι που θα έδειχνε την περιορισμένη αντίληψη του συμβόλου ίσον). Ως αποτέλεσμα κατάφεραν να εξηγήσουν ότι η ισότητα και στις δύο καταστάσεις εξακολουθεί να ισχύει και ότι κοινό των δύο καταστάσεων αποτελεί η πρόσθεση ίσης ποσότητας και στα δύο μέλη της ισότητας και άρα η διατήρηση της ισότητας. Η προσέγγιση των συγκεκριμένων μαθητών της δεύτερης ομάδας που βελτίωσαν την επίδοσή τους, είναι η ίδια προσέγγιση που υιοθέτησαν οι μαθητές της τρίτης ομάδας και παρουσιάζεται στα αριστερά στο Διάγραμμα 4.7. Χαρακτηριστικό απόσπασμα των μαθητών της δεύτερης ομάδας οι οποίοι βελτίωσαν την επίδοσή τους στη διάρκεια της συνέντευξης αποτελεί το εξής με ένα μαθητή της Ε΄ δημοτικού:

> Ερευνητής (Ε): Ηλία μπορείς να μου εξηγήσεις τι συμβαίνει στην πρώτη κατάσταση;
>
> Μαθητής (Μ): Μας λέει ότι φεγγάρι συν σταυρός συν καρδία ισούνται με αστέρι εμ….
>
> Ε: Έχεις δει όλα τα στοιχεία στην πρώτη κατάσταση;
>
> Μ: Εμ… ξέχασα κάτι, μας λέει στην αρχή ότι φεγγάρι ίσον με αστέρι.
>
> Ε: Μπορείς να σκεφτείς τι έγινε λοιπόν στην πρώτη κατάσταση;
>
> Μ: Βασικά είχε κάτι αρχικό με δύο σχήματα να ισούνται και στη συνέχεια έβαλε και άλλα σχήματα δίπλα.
>
> Ε: Δες λίγο και τη δεύτερη κατάσταση με τα σύμβολα Α και Β. Εσύ πρέπει να σκεφτείς τι αντίστοιχο γίνεται και στις δύο καταστάσεις.

Μ: Πάλι αρχικά μας λέει ότι τα δύο σύμβολα ισούνται και μετά βάζει περισσότερα να ισούνται. Ααα, βλέπω ότι και στις δύο καταστάσεις καταλήγει με τρία πράγματα δεξιά και τρία πράγματα αριστερά από το ίσον.

Ε: Μπορείς να εντοπίσεις και κάτι άλλο που γίνεται και στις δύο περιπτώσεις; Δες τα προσεκτικά.

Μ: Βλέπω ότι και στις δύο περιπτώσεις έγιναν τρία στοιχεία δεξιά και αριστερά από το ίσον, γιατί αρχικά είχε ένα πράγμα να ισούται μόνο με ένα άλλο, ενώ μετά πρόσθεσε δύο ίδια πράγματα δεξιά και αριστερά από το ίσον και στις δύο περιπτώσεις.

Ε: Στην αρχή όμως που μου διάβασες τη μεγάλη ισότητα στην πρώτη κατάσταση εσύ μου είπες ότι «φεγγάρι συν σταυρός συν καρδία ισούνται με αστέρι» και τα άλλα δύο σχήματα μετά το αστέρι δεν τα έλαβες πολύ υπόψη.

Μ: Ναι στην αρχή όπως το είδα σκέφτηκα αμέσως ότι η απάντηση στην πρόσθεση «φεγγάρι συν σταυρός συν καρδία» είναι το αστέρι γιατί είναι το πρώτο μετά από το ίσον.

Ε: Τώρα τι πιστεύεις;

Μ: Βασικά ξέρω σίγουρα ότι φεγγάρι ίσον αστέρι γιατί μου το λέει. Μετά μεγαλώνει το αριστερά κομμάτι γιατί του βάλαμε σταυρό συν καρδία, όμως ξέρω ότι μεγάλωσε και το δεξί κομμάτι με σταυρό συν καρδία.

Ε: Τι σημαίνει αυτό;

Μ: Ότι όπως μεγάλωσε το αριστερά κομμάτι μεγάλωσε και το δεξί και άρα αφού δέχομαι αυτά που προστέθηκαν στο δεξί και ότι μεγάλωσε, πρέπει να σκεφτώ ότι και όλο το αριστερό κομμάτι μεγάλωσε και δεν είναι πια μόνο αστέρι.

Ε: Καταλήγεις λοιπόν σε κάποιο συμπέρασμα;

Μ: Βασικά νομίζω ότι όλο το κομμάτι αριστερά ισούται με όλο το κομμάτι δεξιά.

Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις γιατί;

Μ: Αφού τα αρχικά σχήματα ήταν ίσα και μετά πρόσθεσα και στα δύο κομμάτια ίδια πράγματα, άρα ολόκληρα τα δύο κομμάτια που μεγάλωσαν θα συνεχίσουν να είναι ίδια.

Ε: Στη δεύτερη κατάσταση τι γίνεται:

Μ: Εμμ…λέει ότι το Α είναι ίσον με το Β…εμμ και μετά προσθέτει ακόμη δύο σύμβολα Α στο αριστερό κομμάτι και δύο Β στο δεξί.

Ε: Τι ίδιο συμβαίνει και στις δύο καταστάσεις;

Μ: Βασικά και εδώ με τα σύμβολα Α και Β πρόσθεσε δεξιά και αριστερά ίδια πράγματα.

Ε: Πώς το ξέρεις ότι πρόσθεσε δύο ίδια πράγματα δεξιά και αριστερά;

Μ: Επειδή μου το λέει στην αρχή ότι Α ίσον Β, άρα το Α και το Β είναι ίδια και προσθέτει δύο Α αριστερά και δύο Β δεξιά που είναι ίδια, άρα τελικά όλο το αριστερά κομμάτι είναι ίδιο με όλο το δεξί.

Ε: Άρα σε ποιο συμπέρασμα καταλήγεις; Τι συμβαίνει στη μια κατάσταση που συμβαίνει και στην άλλη;

Μ: Και στις δύο καταστάσεις πρόσθεσε ίδια πράγματα στο δεξί και στο αριστερό κομμάτι και έτσι ολόκληρο το αριστερό κομμάτι ισούται με ολόκληρο το δεξί κομμάτι.

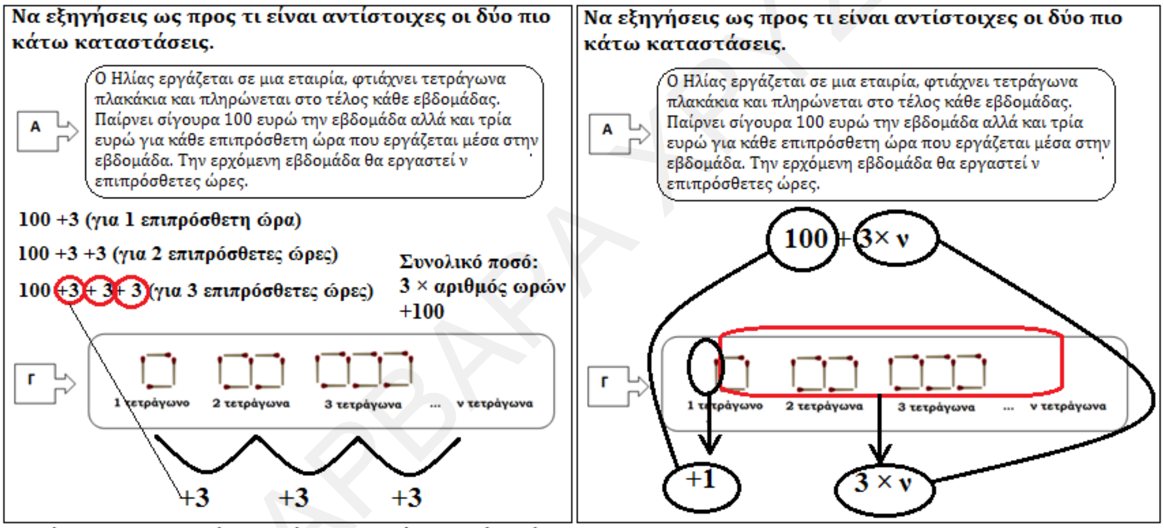
Οι μαθητές της τρίτης ομάδας διαφοροποιούνται αρκετά από τους μαθητές της δεύτερης ομάδας μιας και όλοι οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας παρουσίασαν από την αρχή συσχεσιακή αντίληψη του συμβόλου της ισότητας και κατ' επέκταση δεν φάνηκε να εστιάζουν καθόλου σε επιφανειακά χαρακτηριστικά αλλά προσπάθησαν από την αρχή να ερμηνεύσουν τις δύο καταστάσεις. Η πλειοψηφία των μαθητών παρατήρησαν ότι και στις δύο καταστάσεις προσθέτει δύο στοιχεία και στα δύο μέλη της ισότητας, αλλά στη συνέχεια αιτιολόγησαν το ότι οι ισότητες ισχύουν. Όλοι οι μαθητές της τρίτης ομάδας στην επίλυση του έργου ΕΑΣ 1, εξήγησαν τελικά ότι το κοινό των δύο περιπτώσεων υφίσταται στο ότι η ισότητα εξακολουθεί να διατηρείται και μετά την πρόσθεση ίσης ποσότητας και στα δύο μέλη της ισότητας (δείτε Διάγραμμα 4.7).

Οι μαθητές της τέταρτης ομάδας, εμφάνισαν την ίδια συμπεριφορά με τους μαθητές της τρίτης ομάδας με τη διαφορά όμως ότι οι μαθητές της τέταρτης ομάδας κατέληξαν σε γενίκευση της ιδιότητας της ισότητας, χωρίς να περιορίζονται μόνο σε αναφορά στην πράξη της πρόσθεσης. Ελάχιστοι μαθητές της τέταρτης ομάδας περιορίστηκαν σε αναφορά στην πράξη της πρόσθεσης. Οι περισσότεροι μαθητές εξήγησαν ότι η ομοιότητα των δύο καταστάσεων οφείλεται στο ότι και στις δύο καταστάσεις παρά τις προσθήκες στις αρχικές ισότητες, οι ισότητες εξακολουθούν να ισχύουν. Διευκρίνισαν ωστόσο, ότι στην πρώτη κατάσταση προσθέτουμε ίση ποσότητα και στα δύο μέλη της ισότητας, ενώ στη δεύτερη περίπτωση εκτός από πρόσθεση ίσης ποσότητας αναφέρουν ότι μπορεί να θεωρηθεί και ως πολλαπλασιασμός των δύο μελών της ισότητας με τον αριθμό τρία (δείτε Διάγραμμα 4.7).

Ως εκ τούτου, εξέφρασαν το πιο γενικό συμπέρασμα ότι η ισότητα διατηρείται όταν εκτελούμε ακριβώς την ίδια πράξη και στα δύο μέλη της ισότητας.

Χαρακτηριστικά μαθητών των τεσσάρων ομάδων ως προς την ικανότητα γενίκευσης σχέσεων συμμεταβολής

Στον Πίνακα 4.40 παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι προσεγγίσεις των μαθητών στο έργο της συνέντευξης (ΕΑΣ 2) (δείτε Παράρτημα Ε) το οποίο παρουσιάζεται και στο Διάγραμμα 4.8 και αφορούσε στην ικανότητα γενίκευσης της σχέσης δύο μεταβλητών που μεταβάλλονται ταυτόχρονα.



Συμπέρασμα: Το κοινό των δύο καταστάσεων είναι ότι προσθέτει +3 κάθε φορά για να φτιάξει ένα περισσότερο τετράγωνο ή για να υπολογίσει το ποσό για μια επιπρόσθετη ώρα εργασίας.

Συμπέρασμα: Το κοινό στις δύο περιπτώσεις είναι ο γενικός κανόνας όπου πολλαπλασιάζουμε με το τρία εκείνο που μεταβάλλεται (αριθμό τετραγώνων και ωρών) και προσθέτουμε ένα σταθερό ποσό (το 100 και το 1).

Διάγραμμα 4.8. Χαρακτηριστική λύση των μαθητών της δεύτερης ομάδας (αριστερά) και των μαθητών της τέταρτης ομάδας (δεξιά) στο έργο ΕΑΣ 2 το οποίο χρησιμοποιήθηκε στις κλινικές συνεντεύξεις.

Οι μαθητές της πρώτης ομάδας δεν ανταποκρίθηκαν στο έργο ΕΑΣ 2 το οποίο αφορούσε στη γενίκευση σχέσεων συμμεταβολής. Συγκεκριμένα, όλοι οι μαθητές της πρώτης ομάδας εστίασαν στα επιφανειακά χαρακτηριστικά των δύο καταστάσεων και ανέφεραν ότι η ομοιότητα υφίσταται στο ότι εμπλέκουν και οι δύο τον αριθμό τρία (στην εκφώνηση της πρώτης κατάσταση και στην εικόνα της δεύτερης κατάστασης).

Πίνακας 4.40

Προσεγγίσεις των Μαθητών των Τεσσάρων Ομάδων στο Έργο ΕΑΣ για την Ικανότητα Γενίκευσης Σχέσεων/Μοτίβων Δύο Μεταβλητών που Μεταβάλλονται Ταυτόχρονα

Ομάδα 1	Ομάδα 2	Ομάδα 3	Ομάδα 4
	Επιφανειακή		
Αναφέρουν ότι η ομοιότητα υφίσταται στο ότι και οι δύο καταστάσεις περιλαμβάνουν τον αριθμό τρία (χωρίς ερμηνεία του αριθμού τρία). **Και οι δύο καταστάσεις περιλαμβάνουν το ν.**	Αναφέρουν ότι η ομοιότητα υφίσταται στο ότι και οι δύο καταστάσεις περιλαμβάνουν τον αριθμό τρία.		
	Μεταβατική		
Προσπάθεια ερμηνείας του αριθμού τρία, ωστόσο παραμένουν στην επαναλαμβανόμενη (recursive) στρατηγική +3, +3.., υποστηρίζοντας ότι το κοινό των δύο καταστάσεων είναι η επανάληψη του +3.	**Προσπάθεια ερμηνείας του αριθμού τρία, ωστόσο παραμένουν στην επαναλαμβανόμενη (recursive) στρατηγική +3, +3, +3, υποστηρίζοντας ότι το κοινό των δύο καταστάσεων είναι η επανάληψη του +3.**	Προσπάθεια ερμηνείας του αριθμού τρία, ωστόσο παραμένουν στην επαναλαμβανόμενη (recursive) στρατηγική +3, +3, +3, υποστηρίζοντας ότι το κοινό των δύο καταστάσεων είναι η επανάληψη του +3.	
	Δομική		
		Και στις δύο καταστάσεις υπάρχει ο ίδιος συντελεστής για τη μεταβλητή (3 επί ν) ωστόσο δεν συγκρίνουν τις δύο καταστάσεις ως προς το ότι εμπλέκουν και μια σταθερά.	
		Εξηγούν ότι η ομοιότητα των δύο καταστάσεων είναι ο γενικευμένος κανόνας 3x+c, και αιτιολογούν το γενικευμένο κανόνα (3ν+1) με βάση τα πλαίσιο του προβλήματος.	**Εξηγούν ότι η ομοιότητα των δύο καταστάσεων είναι ο κανόνας 3x+c, και αιτιολογούν το γενικευμένο κανόνα (3ν+1) ή 4+(ν-1)×3 με βάση τα πλαίσιο του προβλήματος.**

Δεν υπάρχει επομένως, καμία προσπάθεια ερμηνείας του τρία από τους μαθητές της πρώτης ομάδας, αλλά μια εντελώς επιφανειακή παρατήρηση. Η πλειοψηφία των μαθητών της πρώτης ομάδας που έδωσαν τη συγκεκριμένη απάντηση ανέφεραν επίσης, ότι οι δύο καταστάσεις μοιάζουν και στο ότι γίνεται αναφορά στο σύμβολο «ν». Ακόμη και μετά από την παρότρυνση του ερευνητή, με την οποία προσπάθησαν να ερμηνεύσουν την πρώτη κατάσταση, οι μαθητές αυτοί κατέληξαν και πάλι στα επιφανειακά χαρακτηριστικά των δύο καταστάσεων, δείχνοντας ότι τα θεωρούν σημαντικά.

Οι μαθητές της δεύτερης ομάδας διαφοροποιούνται σε κάποιο βαθμό με τους μαθητές της πρώτης ομάδας. Αρχικά, η πλειοψηφία των μαθητών της δεύτερης ομάδας επικεντρώθηκαν στα επιφανειακά χαρακτηριστικά στα οποία εστίασαν και οι μαθητές της πρώτης ομάδας. Παρόλα αυτά, οι περισσότεροι μαθητές της δεύτερης ομάδας στη συνέχεια άρχισαν την προσπάθεια ερμηνείας του τι συμβαίνει στις δυο καταστάσεις. Συγκεκριμένα, η πλειοψηφία των μαθητών της δεύτερης ομάδας εντόπισαν ότι και στις δύο περιπτώσεις υπάρχει πρόσθεση του αριθμού τρία. Ανέφεραν ότι στην πρώτη περίπτωση, για να υπολογίσει κάποιος το συνολικό μισθό θα πρέπει να προσθέτει τρία για κάθε επιπρόσθετη ώρα που εργάζεται, ενώ στη δεύτερη κατάσταση κάποιος θα πρέπει να προσθέτει τρία για να φτιάξει ένα περισσότερο τετράγωνο. Αξίζει να σημειωθεί ότι στην πρώτη κατάσταση, οι περισσότεροι μαθητές μετά από τη δομική με συγκεκριμένα αριθμητικά παραδείγματα (δείτε Διάγραμμα 4.8) ανέφεραν ότι για να υπολογίσουμε το συνολικό ποσό που πληρώνεται κάποιος θα κάνουμε «100 ευρώ συν τρία επί τις επιπρόσθετες ώρες εργασίας». Ωστόσο, στην επανάληψη της ερώτησης του τι αντίστοιχο συμβαίνει στις δύο καταστάσεις, οι μαθητές της δεύτερης ομάδας επανέλαβαν ως κοινό των καταστάσεων μόνο το «συν τρία», δείχνοντας: (α) ότι δεν κατάφεραν να εντοπίσουν τον «πολλαπλασιασμό του αριθμού των νέων τετραγώνων με το τρία» (όπως είχαν κάνει με τις επιπρόσθετες ώρες) και (β) δεν εντόπισαν ότι υπάρχει κάτι αντίστοιχο με τη σταθερά 100 και στη δεύτερη κατάσταση. Γενικά ο «εγκλωβισμός» στην προσέγγιση της επαναλαμβανόμενης (recursive) στρατηγικής στη δεύτερη κατάσταση δεν τους βοήθησε να εστιάσουν στο «συντονισμό της μεταβολής των δύο μεταβλητών» και αν και άρχισαν να παρατηρούν κάποια σχέση, δεν κατάφεραν να ερμηνεύσουν και να εξηγήσουν στοιχεία του πλαισίου και δεν κατέληξαν σε γενίκευση. Τα αποτελέσματα αυτά συνάδουν με τα αποτελέσματα της ποσοτικής ανάλυσης, αφού οι μαθητές της δεύτερης ομάδας είχαν χαμηλή επίδοση στο έργο με το γεωμετρικό αναπτυσσόμενο μοτίβο με τα σπίρτα (Gf3), αλλά ψηλή επίδοση στο έργο γενίκευσης της αναλογικής σχέσης «3ν» με βάση αριθμητικά δεδομένα σε πίνακα (όπου δεν υπήρχε γεωμετρικό μοτίβο) (Gf1).

Οι μαθητές της τρίτης ομάδας διαφοροποιούνται αρκετά από τους μαθητές της δεύτερης ομάδας. Κανένας μαθητής της τρίτης ομάδας δεν εστίασε σε επιφανειακά χαρακτηριστικά, αλλά όλοι προσπάθησαν από την αρχή να ερμηνεύσουν τους αριθμούς που εμπλέκονται στις δύο καταστάσεις. Η πλειοψηφία των μαθητών αρχικά εντόπισε ότι και στις δύο περιπτώσεις εμπλέκεται το «συν τρία» κάθε φορά που προστίθεται μια ώρα εργασίας (πρώτη κατάσταση) ή ένα τετράγωνο (δεύτερη κατάσταση). Στη συνέχεια όλοι οι μαθητές ανέφεραν ότι στις δύο περιπτώσεις για να υπολογίζουμε πιο γρήγορα αυτό που ζητούμε (συνολικό ποσό ή συνολικό αριθμό σπίρτων για οποιοδήποτε αριθμό ωρών εργασίας ή τετραγώνων), χρησιμοποιούμε το «ν επί τρία» το οποίο αποτελεί κοινό και στις δύο περιπτώσεις. Ωστόσο, ενώ όλοι οι μαθητές στην πρώτη περίπτωση συμπλήρωσαν το γενικό κανόνα «3ν+100», είτε λεκτικά είτε αλγεβρικά, αρκετοί από αυτούς δεν κατάφεραν να εντοπίσουν στη δεύτερη περίπτωση το αντίστοιχο αρχικό «ποσό» (τη σταθερά) για την κατασκευή τετραγώνων μέσω σπίρτων, αναφέροντας λανθασμένα ότι η σταθερά είναι το τέσσερα. Μετά από παρότρυνση να εξετάσουν αν ο γενικός κανόνας «3ν+4» ισχύει, αντιλήφθηκαν το λάθος τους, αλλά λόγω του ότι δεν εστίασαν στη δομή του έργου παρέμειναν στο συμπέρασμα που προανέφεραν ότι το κοινό των δυο περιπτώσεων είναι το «3ν». Τα αποτελέσματα αυτά συνάδουν με τα αποτελέσματα της ποσοτικής ανάλυσης μιας και οι μαθητές της τρίτης ομάδας είχαν μέτρια επίδοση στο έργο γενίκευσης γεωμετρικού αναπτυσσόμενου μοτίβου με τα σπίρτα (Gf3).

Ωστόσο, ένας αριθμός μαθητών της τρίτης ομάδας (έξι μαθητές) οι οποίοι δεν είχαν καταφέρει να καταλήξουν σε ορθή γενίκευση για το αναπτυσσόμενο μοτίβο με τα σπίρτα στο δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης και στην αρχή της συνέντευξης για την επίλυση του έργου ΕΑΣ 2 εξέφρασαν δυσκολίες, διευκρίνισαν στη συνέχεια ότι με το έργο ΕΑΣ 2 κατάφεραν να κατανοήσουν και να ερμηνεύσουν το μοτίβο των σπίρτων. Οι συγκεκριμένοι μαθητές της τρίτης ομάδας κατάφεραν όπως ανέφεραν μέσω του γενικού κανόνα στην πρώτη κατάσταση να σκεφτούν ότι πέρα από το «ν επί τρία» υπάρχει και κάτι άλλο το οποίο προσθέτουμε. Οι μισοί μαθητές από αυτούς φάνηκε ότι εντόπισαν τον κανόνα και συγκεκριμένα τη σταθερά που αναζητούσαν μέσω δοκιμής και ελέγχου, ωστόσο, μετά από ερώτηση του ερευνητή να ερμηνεύσουν τον κανόνα με βάση την εικόνα, το πέτυχαν μετά από κάποια λεπτά επεξεργασίας της εικόνας. Οι υπόλοιποι τρεις μαθητές ανέφεραν ότι εντόπισαν το αρχικό ποσό καθώς μελετούσαν την εικόνα του μοτίβου όπου αν κρύψεις τα τρία σπίρτα που προσθέτεις κάθε φορά, διαφαίνεται ότι υπάρχει πάντα «ένα αρχικό σπίρτο» πάνω στο οποίο κτίζονται όλα τα υπόλοιπα. Οι μαθητές οι οποίοι κατέληξαν σε γενίκευση για την κατάσταση με τα σπίρτα εξήγησαν ότι το κοινό των δύο καταστάσεων είναι ότι «πολλαπλασιάζουμε επί τρία αυτό που μεταβάλλεται (τετράγωνα, ή ώρες) δηλαδή το ν, αλλά θυμόμαστε να προσθέσουμε το βασικό ποσό που υπάρχει από την αρχή». Η διαφορά επομένως, έγκειται στο ότι οι συγκεκριμένοι μαθητές της τρίτης ομάδας εντόπισαν ορθά τη σταθερά στην κατάσταση με τα σπίρτα. Χαρακτηριστικό απόσπασμα από τις συνεντεύξεις των μαθητών της τρίτης ομάδας οι οποίοι βελτίωσαν την επίδοσή τους κατά τη διάρκεια της συνέντευξης παρέχεται στη συνέχεια. Το απόσπασμα που ακολουθεί αποτελεί μέρος της συνέντευξης με ένα μαθητή της Στ΄ δημοτικού:

Μ: Στην πρώτη περίπτωση υπάρχουν και τα 100 ευρώ που παίρνει σίγουρα, άρα εκτός από το «τρία επί ν» πρέπει να προσθέσουμε και τα 100 ευρώ για να βρούμε το συνολικό ποσό. Βασικά κάνουμε «3ν+100».
Ε: Στη δεύτερη περίπτωση τι συμβαίνει; Μας ενδιαφέρει τι αντίστοιχο ισχύει στη μια περίπτωση που ισχύει και στην άλλη.
Μ: Στη δεύτερη περίπτωση πάλι προσθέτει τρία σπίρτα για κάθε νέο τετράγωνο και άρα πάλι θα έχω ν που είναι ο αριθμός τετραγώνων κάθε φορά επί τρία, αλλά …εμμ … πρέπει να βρω και άλλα στοιχεία.
Ε: Τι εννοείς άλλα στοιχεία;
Μ: Επειδή στην πρώτη περίπτωση η κατάσταση με ανάγκασε να βρω έναν κανόνα από τον οποίο κάποιος θα βρίσκει το συνολικό ποσό για οποιεσδήποτε επιπρόσθετες ώρες, έτσι σκέφτομαι και στη δεύτερη κατάσταση.
Ε: Τι εννοείς έτσι σκέφτεσαι και στη δεύτερη κατάσταση;
Μ: Και στη δεύτερη κατάσταση ψάχνω να βρω κανόνα που να με βοηθήσει να υπολογίζω τα σπίρτα για οποιαδήποτε περίπτωση, επειδή βλέπω κιόλας ότι μου δείχνει στην εικόνα «ν τετράγωνα».
Ε: Τι βλέπεις να γίνεται στη δεύτερη κατάσταση;
Μ: Εμ… σκέφτομαι ότι στη δεύτερη κατάσταση για να βρει κάποιος το συνολικό αριθμό σπίρτων για «ν» τετράγωνα, θα κάνει «3 επί ν» αλλά θα προσθέσει και κάτι αρχικό όπως στην πρώτη κατάσταση, νομίζω σε αυτή την περίπτωση είναι το τέσσερα που είναι τα σπίρτα του αρχικού τετραγώνου, [ο μαθητής σκέφτεται], εννοώ θα κάνει «3ν+4».
Ε: Επομένως, έχεις βρει τον κανόνα και για τα σπίρτα;
Μ: Ένα λεπτό.. εμ… αλλά δεν νομίζω.. δεν ξέρω.
Ε: Τι είναι αυτό που σε προβληματίζει;
Μ: Κάνω δοκιμές για τρία τετράγωνα και δύο τετράγωνα και δεν βγαίνει σωστά με τον κανόνα «3ν+4», γι' αυτό.

Ε: Έχεις χρόνο να σκεφτείς, δες τα προσεκτικά. Τι είναι αυτό για το οποίο είσαι σίγουρος;

Μ: Είμαι σίγουρος και το βλέπω στην εικόνα ότι κάθε φορά για να φτιάξει ένα ακόμη τετράγωνο προσθέτει τρία σπίρτα. Απλά δεν ξέρω το αρχικό ποσό στο οποίο προσθέτω τρία κάθε φορά…

Ε: Που ψάχνεις να βρεις το αρχικό ποσό;

Μ: Εμ.. δεν ξέρω, τώρα κάνω δοκιμές και με άλλο κανόνα… ένα λεπτό [ο μαθητής σκέφτεται κάποια λεπτά]… το βρήκα, βρήκα τον κανόνα.

Ε: Ποιος είναι ο κανόνας;

Μ: Είναι τρία επί ν συν ένα.

Ε: Και πώς το βρήκες;

Μ: Έκανα δοκιμή με αυτό τον κανόνα και βγήκε …σκέφτηκα να προσθέσω όσο πιο λίγα σπίρτα γίνεται γιατί στα δύο τετράγωνα το «3ν» μου έδινε έξι και επειδή η εικόνα δείχνει επτά σκέφτηκα να προσθέσω ένα και βγαίνει και με τα άλλα παραδείγματα που δοκιμάζω.

Ε: Βασίλη μπορείς δεις την εικόνα και να μου εξηγήσεις γιατί ο κανόνας είναι το «3ν+1»; Το βρήκες με παραδείγματα και δοκιμές αλλά θα ήθελα να σκεφτείς να μου εξηγήσεις τον κανόνα αυτό και με βάση την εικόνα.

Μ: Εμμμ… το «3ν» το είπαμε και πριν είναι τα τρία σπίρτα που προσθέτει για κάθε νέο τετράγωνο γι’ αυτό και το πολλαπλασιάζει με το τρία το «ν», μας μένει το συν ένα… [ο μαθητής βλέπει την εικόνα για λίγο]..

Ε: Έχεις βρει γιατί έχουμε το συν ένα με βάση την εικόνα;

Μ: Ναι… το συν ένα που βρήκα πρέπει να είναι το πρώτο σπίρτο και μετά πάνω σε αυτό βάζει τα τρία σπίρτα για να φτιάξει το πρώτο τετράγωνο και έτσι συνεχίζει.

Ε: Επομένως, τι αντίστοιχο συμβαίνει στη μια κατάσταση που συμβαίνει και στη δεύτερη;

Μ: Τώρα φαίνεται ξεκάθαρα και στις δύο περιπτώσεις ότι ο κανόνας μοιάζει αφού πολλαπλασιάζουμε με το τρία τα τετράγωνα ή τις ώρες και προσθέτουμε ένα σταθερό ποσό, δηλαδή το 100 στη μια περίπτωση και το ένα στη δεύτερη περίπτωση...

Ε: Στο δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης στο έργο με τα σπίρτα θυμάσαι να εργάστηκες με τον ίδιο τρόπο όπως τώρα;

Μ: Σίγουρα όχι, μου φαινόταν δύσκολο ενώ τώρα όχι.

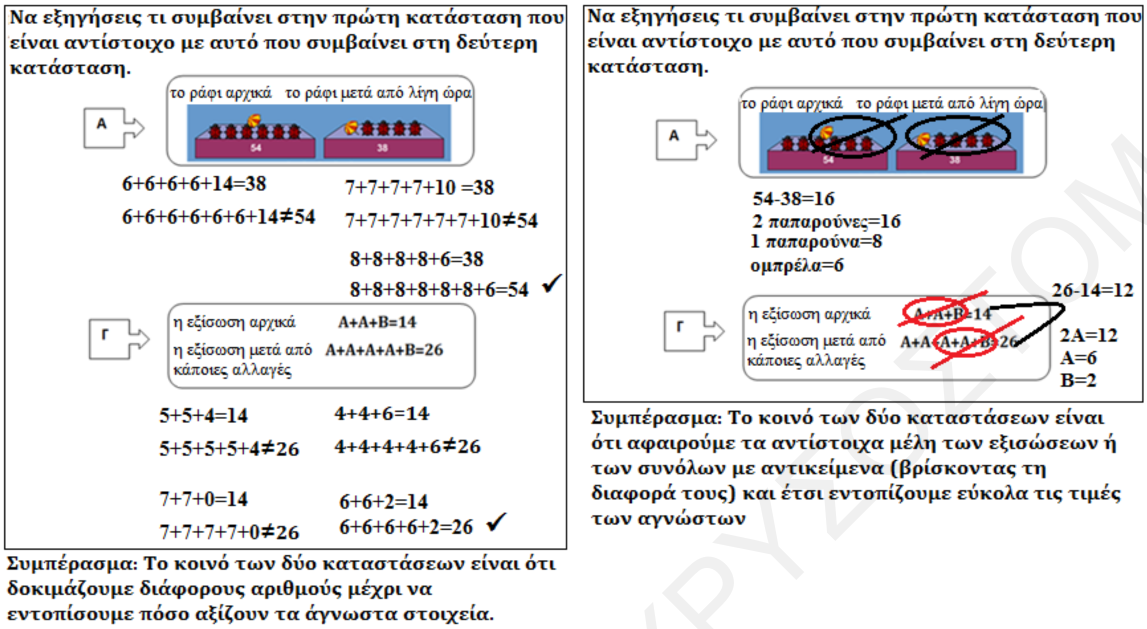
Ε: Τι ήταν αυτό που σε βοήθησε τώρα να το λύσεις;

Μ: Εμ…δεν ξέρω ακριβώς κυρία αλλά… νομίζω επειδή στην πρώτη κατάσταση βρήκα τον κανόνα από την αρχή, το είχα στο μυαλό μου και έψαχνα κάτι παρόμοιο για την κάτω περίπτωση.

Οι μαθητές της τέταρτης ομάδας διαφοροποιούνται από τους υπόλοιπους μαθητές μιας και στο συγκεκριμένο έργο η προσοχή όλων κατευθύνθηκε αμέσως στη δομή των δύο καταστάσεων και στη σύγκριση των γενικών κανόνων. Αφού περιέγραψαν με μεγάλη ευκολία το γενικό κανόνα για την πρώτη περίπτωση προχώρησαν στη γενίκευση του μοτίβου με τα σπίρτα, την οποία περιέγραψαν επίσης με επιτυχία. Εξήγησαν ότι το κοινό των δύο περιπτώσεων αποτελεί ο πολλαπλασιασμός της μιας μεταβλητής με το τρία και πρόσθεση με ένα αρχικό ποσό για τον υπολογισμό της δεύτερης μεταβλητής. Παρόλα αυτά, ήταν αναμενόμενο το ότι οι μαθητές της τέταρτης ομάδας θα είχαν την ικανότητα να γενικεύσουν το μοτίβο με τα σπίρτα μιας και στο ίδιο έργο με τα σπίρτα στο δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης (Gf3) είχαν επιτυχία. Το θέμα στην προκειμένη περίπτωση ήταν ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές εντόπισαν το γενικό κανόνα «3ν+1» στην κατάσταση με τα σπίρτα στο έργο ΕΑΣ 2. Φάνηκε ότι οι αρκετοί μαθητές (περίπου οι μισοί) εντόπισαν τον κανόνα μέσω δοκιμής και ελέγχου των τιμών (σπίρτων και τετραγώνων) αλλά όταν κλήθηκαν να αιτιολογήσουν τον κανόνα με βάση την εικόνα, το έκαναν με επιτυχία. Υπήρχαν όμως αρκετοί μαθητές (περίπου οι μισοί μαθητές της τέταρτης ομάδας) οι οποίοι εντόπισαν από την αρχή τον κανόνα μέσα από την οπτική ανάλυση της εικόνας (δείτε Διάγραμμα 4.8), οι οποίοι, ωστόσο, στη συνέχεια κατέφυγαν σε δοκιμή και έλεγχο τιμών στον κανόνα για να βεβαιωθούν ότι ισχύει. Ενώ αρκετοί μαθητές της τέταρτης ομάδας κατέληξαν στον κανόνα «3ν+1» υποστηρίζοντας ότι «πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό σπίρτων επί τρία και προσθέτουμε ένα σπίρτο», άλλοι τόσοι μαθητές της τέταρτης ομάδας κατέληξαν στη γενίκευση «προσθέτω τέσσερα και πολλαπλασιάζω επί τρία τον αριθμό των τετραγώνων που θέλω να φτιάξω πλην ένα» διατυπώνοντας την έκφραση «4+ (ν-1)×3». Η δεύτερη γενίκευση «4+(ν-1)×3», παρουσιάστηκε μόνο από τους μαθητές της τέταρτης ομάδας.

Χαρακτηριστικά μαθητών των τεσσάρων ομάδων ως προς την ικανότητα επίλυσης εξισώσεων

Στον Πίνακα 4.41 παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι προσεγγίσεις των μαθητών στο έργο της συνέντευξης (ΕΑΣ 3) (δείτε Παράρτημα Ε) το οποίο παρουσιάζεται συμπληρωμένο στο Διάγραμμα 4.9 και αφορούσε στην ικανότητα αντίληψης και εύρεσης της τιμής του αγνώστου.



Διάγραμμα 4.9. Χαρακτηριστική λύση των μαθητών της δεύτερης ομάδας (αριστερά) και των μαθητών της τρίτης και τέταρτης ομάδας (δεξιά) στο έργο ΕΑΣ 3 το οποίο χρησιμοποιήθηκε στις κλινικές συνεντεύξεις.

Όλοι οι μαθητές της πρώτης ομάδας αρχικά εστίασαν στα επιφανειακά χαρακτηριστικά των δύο καταστάσεων, αναφέροντας ότι το κοινό των δύο περιπτώσεων είναι το ότι και στις δύο υπάρχουν στοιχεία (αντικείμενα ή αλγεβρικά σύμβολα) τα οποία επαναλαμβάνονται και ότι κάθε κατάσταση περιλαμβάνει δύο διαφορετικά «σύνολα» συμβόλων ή αντικείμενων όπου τα ένα έχει λιγότερα στοιχεία από το άλλο. Στη συνέχεια αφού άρχισαν να εξετάζουν περισσότερο την κάθε κατάσταση ξεχωριστά, εξέφρασαν το συμπέρασμα ότι «και στις δύο περιπτώσεις έχουμε αριθμούς αλλά και στοιχεία τα οποία δεν γνωρίζουμε πόσο αξίζουν» ή ότι «και στις δύο καταστάσεις το ένα στοιχείο εμφανίζεται δύο φορές (το Β και η ομπρέλα) ενώ το άλλο στοιχείο (η παπαρούνα και το Α) επαναλαμβάνεται πιο πολλές φορές». Οι περισσότεροι μαθητές της πρώτης ομάδας παρέμειναν στα δύο συμπεράσματα που προαναφέρθηκαν για την επιφανειακή ομοιότητα μιας και (ακόμη μετά από προτροπή να εξετάσουν περισσότερο το τι μπορούν να κάνουν) δεν δοκίμασαν να εντοπίσουν τις τιμές των αγνώστων. Ελάχιστοι μαθητές της πρώτης ομάδας προσπάθησαν και στις δύο περιπτώσεις να δοκιμάσουν τιμές, τόσο για τα αντικείμενα όσο και για τα αλγεβρικά σύμβολα, ώστε να εντοπίσουν τις τιμές τους. Ωστόσο, οι συγκεκριμένοι μαθητές δεν εντόπισαν τις ορθές τιμές ούτε στην πρώτη κατάσταση (αντικείμενα) ούτε στη δεύτερη κατάσταση (σύμβολα) και έδωσαν ως απάντηση διάφορες τιμές για τα αντικείμενα και στα σύμβολα γιατί αντιμετώπισαν κάθε σύνολο αντικειμένων και κάθε εξίσωση ξεχωριστά.

Πίνακας 4.41

Προσεγγίσεις των Μαθητών των Τεσσάρων Ομάδων στο Έργο ΕΑΣ για την Ικανότητα Αντίληψης και Εύρεσης της Τιμής του Αγνώστου

Ομάδα 1	**Ομάδα 2**	**Ομάδα 3**	**Ομάδα 4**
	Επιφανειακή		
Και στις δύο περιπτώσεις υπάρχουν άγνωστοι, υπάρχουν αριθμοί, οι άγνωστοι επαναλαμβάνονται. **Υπάρχουν δύο ομπρέλες όπως δύο Β, υπάρχουν πολλές παπαρούνες όπως και πολλά Α.** **Και στις δύο περιπτώσεις υπάρχουν δύο σύνολα και με ίδια στοιχεία όπου το ένα έχει λιγότερα στοιχεία από το άλλο.**	Υπάρχουν δύο ομπρέλες όπως δύο Β, υπάρχουν πολλές παπαρούνες όπως και πολλά Α.		
	Μεταβατική		
Δοκιμάζουν και ελέγχουν αριθμούς και στις δύο περιπτώσεις για να βρουν την τιμή των αγνώστων.	**Δοκιμάζουν και ελέγχουν αριθμούς και στις δύο περιπτώσεις για να βρουν την τιμή των αγνώστων.**	Δοκιμάζουν και ελέγχουν αριθμούς και στις δύο περιπτώσεις για να βρουν την τιμή των αγνώστων.	
	Δομική		
		Εντοπίζουν τη διαφορά μεταξύ των δύο καταστάσεων και εξισώσεων (π.χ. διαγράφουν) με σκοπό την απλοποίηση και εντοπίζουν τις τιμές των αγνώστων.	**Εντοπίζουν τη διαφορά μεταξύ των δύο καταστάσεων και εξισώσεων (π.χ. διαγράφουν) με σκοπό την απλοποίηση και εντοπίζουν τις τιμές των αγνώστων.**

Οι συγκεκριμένοι μαθητές της πρώτης ομάδας δεν αντιλήφθηκαν το ότι τα δύο σύνολα αντικειμένων και οι δύο εξισώσεις πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα, ακόμη και όταν έγινε η επισήμανση να εξετάσουν όλες τις πληροφορίες που παρέχονταν στις εικόνες του έργου. Το συμπέρασμα των ελάχιστων μαθητών της πρώτης ομάδας *που προσπάθησαν να βρουν τις τιμές των αγνώστων* και απέτυχαν, αποτέλεσε το ότι «και στις δύο περιπτώσεις πρέπει να δοκιμάσουμε τιμές για να βρούμε πόσα αξίζουν αυτά που δεν γνωρίζουμε (αντικείμενα, αλγεβρικά σύμβολα)».

Οι μαθητές της δεύτερης ομάδας παρουσίασαν παρόμοια συμπεριφορά ως προς τον τρόπο προσέγγισης με τους μαθητές της πρώτης ομάδας, διαφοροποιήθηκαν ωστόσο, ως προς την επιτυχία τους στην εύρεση των ορθών τιμών των αγνώστων. Οι μισοί περίπου μαθητές της δεύτερης ομάδας εστίασαν αρχικά στα επιφανειακά χαρακτηριστικά των καταστάσεων. Στη συνέχεια, οι συγκεκριμένοι μαθητές όπως και οι υπόλοιποι που δεν στάθηκαν καθόλου σε επιφανειακά χαρακτηριστικά, προχώρησαν και ανέφεραν ότι το κοινό των δύο περιπτώσεων αποτελεί το ότι και στις δύο θα πρέπει κάποιος να δοκιμάσει αριθμούς για να εντοπίσει την τιμή των αγνώστων. Σχεδόν όλοι μαθητές της δεύτερης ομάδας (με εξαίρεση μόνο τρεις μαθητές) εντόπισαν ορθά μέσω δοκιμής και ελέγχου την τιμή των αγνώστων και στις δύο καταστάσεις, δείχνοντας κατανόηση του ότι και στις δύο καταστάσεις θα έπρεπε να βρουν τιμές που να ικανοποιούν και τα δύο σύνολα αντικειμένων ταυτόχρονα (πρώτη κατάσταση) και τις δύο εξισώσεις ταυτόχρονα (δεύτερη κατάσταση). Μερικοί μάλιστα από αυτούς τους μαθητές (έξι μαθητές), οι οποίοι εξέφρασαν αρχικά δυσκολία για την κατάσταση με τα αλγεβρικά σύμβολα έδειξαν ότι ο τρόπος που εργάστηκαν στην πρώτη κατάσταση ήταν αυτός που τους βοήθησε να αντιληφθούν πώς θα έπρεπε να χειριστούν και τη δεύτερη κατάσταση μιας και εντόπισαν αντιστοίχιση μεταξύ των αντικειμένων της πρώτης κατάστασης και των αλγεβρικών συμβόλων της δεύτερης κατάστασης. Παρόλα αυτά, κανένας από τους μαθητές της δεύτερης ομάδας δεν εστίασε στη δομή των δύο καταστάσεων, έτσι όλοι παρέμειναν στη μεταβατική προσέγγιση που προαναφέρθηκε εντοπίζοντας τις τιμές μέσω δοκιμής και ελέγχου (δείτε Διάγραμμα 4.9). Η δυσκολία που αντιμετώπισαν οι μαθητές αρχικά και το γεγονός ότι την ξεπέρασαν κρίνεται ως βελτίωση, ωστόσο στην προκειμένη περίπτωση δεν είναι εφικτό να πραγματοποιηθεί σύγκριση με την επίδοση στο δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης μιας και σε αυτό δεν περιλαμβανόταν έργο επίλυσης συστήματος εξισώσεων. Παρουσιάζεται χαρακτηριστικό απόσπασμα από τις συνεντεύξεις με τους μαθητές της δεύτερης ομάδας οι οποίοι έδειξαν ότι βελτίωσαν την επίδοση τους μέσα από την αξιοποίηση της πρώτης κατάστασης. Το απόσπασμα με μια μαθήτρια της Ε΄ δημοτικού είναι το εξής:

Μ: Βρήκα πόσο αξίζει η παπαρούνα, αξίζει οκτώ και η ομπρέλα έξι. Το δοκίμασα και στα δύο ράφια και ταιριάζει.
Ε: Πώς τα βρήκες;
Μ: Στην αρχή σκέφτηκα την παπαρούνα να είναι πέντε αλλά δεν ταίριαζε γιατί στη μια περίπτωση η ομπρέλα θα άξιζε διαφορετικά από ότι στην άλλη και δεν γίνεται αφού είναι ακριβώς το ίδιο αντικείμενο.
Ε: Και πώς κατέληξες στις τιμές που ανέφερες, το οκτώ και το έξι;
Μ: Είδα το δεύτερο ράφι και τυχαία επειδή κάνουν σύνολο 38 σκέφτηκα αμέσως το τέσσερα επί οκτώ ότι είναι 32 και άρα έμεναν έξι για την ομπρέλα και αυτό ίσχυε και στο άλλο ράφι που έχει επίσης ομπρέλες και παπαρούνες άρα είμαι σίγουρη ότι είναι σωστά.
Ε: Δες τώρα και την κάτω κατάσταση με τα αλγεβρικά σύμβολα. Τι αντίστοιχο συμβαίνει σε αυτή την κατάσταση με εκείνη με τα αντικείμενα;
Μ: Πρέπει να σκεφτώ... είναι λίγο πιο δύσκολα εδώ.
Ε: Τι σε δυσκολεύει;
Μ: Επειδή έχουμε εξισώσεις που είναι μεγάλες και πολλά σύμβολα.
Ε: Βλέπω εδώ ότι στο γραπτό δοκίμιο είχες βρει τις σωστές τιμές για τους αγνώστους στις εξισώσεις που είχαν αλγεβρικά σύμβολα αριστερά από το ίσον και μια αριθμητική τιμή μετά το ίσον.
Μ: Μα εκεί τις περισσότερες φορές το γράμμα που εμφανιζόταν ήταν ένα ή ακόμη και αν ήταν πολλά ήταν το ίδιο γράμμα, και είχαμε και μόνο μια εξίσωση… εδώ είναι δύο… πρέπει να σκεφτώ..
Ε: Εμάς μας ενδιαφέρει τι κοινό έχει η πρώτη κατάσταση με τη δεύτερη κατάσταση.
Μ: Αυτό θα έλεγα κυρία τώρα ότι οι δύο εξισώσεις έχουν ίδια σύμβολα αλλά η μια είναι πιο μεγάλη από την άλλη και αυτό γινόταν και πάνω με τα αντικείμενα.
Ε: Σε τι σου χρησιμεύει αυτή η παρατήρηση που μόλις έκανες;
Μ: Βασικά όπως έκανα και πάνω για να βρω τις τιμές θα κάνω και εδώ… θα δοκιμάσω αριθμούς που να ταιριάζουν και στις δύο εξισώσεις αφού και με τα ράφια αντικειμένων έτσι έκανα.
Ε: Τι εννοείς θα βρεις αριθμούς που να ταιριάζουν και στις δύο;
Μ: Θα βρω κάποιο αριθμό για το Α και το Β που να δίνουν το αποτέλεσμα της πρώτης εξίσωσης αλλά να δίνουν και το αποτέλεσμα της

δεύτερης εξίσωσης… και στις δύο εξισώσεις το Α θα είναι ο ίδιος αριθμός αφού φαίνεται και στην άσκηση ότι είναι η ίδια εξίσωση απλά έγιναν κάποιες αλλαγές.

Ε: Αφού λες η κατάσταση με τα αντικείμενα μοιάζει με εκείνη με τα σύμβολα πώς θα το χρησιμοποιήσεις αυτό;

Μ: Δοκιμάζω και εδώ αριθμούς στη μικρή εξίσωση να βρω τι ισχύει και μετά το εξετάζω στη μεγάλη να δω αν ισχύει και εκεί.

Ε: Βρήκες τις τιμές για τα Α και Β;

Μ: Ναι το Α είναι έξι και το Β είναι δύο… σκέφτηκα εύκολα από την πρώτη εξίσωση Α+Α+Β=14 ότι το άλφα μπορεί να είναι πέντε και το Β να είναι τέσσερα αλλά δεν βγήκε και μετά προχώρησα στο έξι για το Α και στο δύο για το Β και βγήκαν αυτά είναι.... ισχύουν και στην κάτω εξίσωση.

Ε: Τι αντίστοιχο έχει η μια κατάσταση με την άλλη; Μπορείς τα δεις και να σκεφτείς;

Μ: Και στις δύο έχουμε άγνωστα και δοκιμάζουμε αριθμούς για να βρούμε εκείνους τους αριθμούς που θα ισχύουν και στα δύο παραδείγματα, δηλαδή στα δύο ράφια τη μια φορά και στις δύο εξισώσεις τη δεύτερη φορά.

Οι μαθητές της τρίτης και της τέταρτης ομάδας διαφοροποιούνται σε μεγάλο βαθμό από τους μαθητές της δεύτερης ομάδας ως προς τον τρόπο προσέγγισης και επιτυχίας στο έργο ΕΑΣ 3. Όλοι σχεδόν οι μαθητές της τρίτης και της τέταρτης ομάδας εντόπισαν και ανέφεραν ως κοινό των δύο καταστάσεων ότι αν αφαιρέσουμε το μικρότερο σύνολο από το μεγάλο καταλήγουμε σε μια πιο απλοποιημένη κατάσταση, μέσα από την οποία εντοπίζουμε πολύ εύκολα την τιμή της μιας μεταβλητής και αξιοποιώντας την βρίσκουμε εύκολα την τιμή και της δεύτερης μεταβλητής (δείτε Διάγραμμα 4.9). Μερικοί μαθητές της τρίτης ομάδας (πέντε μαθητές) οι οποίοι εξέφρασαν δυσκολία στη δεύτερη κατάσταση με τις εξισώσεις, διευκρίνισαν στη συνέχεια ότι η προαναφερθείσα «ανακάλυψη» στην πρώτη κατάσταση ήταν αυτή που τους βοήθησε να σκεφτούν να την εφαρμόσουν και στη δεύτερη κατάσταση. Αξίζει να σημειωθεί ότι μια μικρή διαφοροποίηση των μαθητών της τρίτης και της τέταρτης ομάδας αποτέλεσε το γεγονός ότι ενώ κανένας μαθητής της τέταρτης ομάδας δεν χρειάστηκε να ανατρέξει στην στρατηγική της δοκιμής και ελέγχου για τον εντοπισμό των τιμών των αγνώστων, ένας πολύ μικρός αριθμός των μαθητών της τρίτης ομάδας (τρεις μαθητές) που δεν εστίασαν στη δομή των καταστάσεων και δεν εντόπισαν την προσέγγιση της αφαίρεσης, υιοθέτησαν τη στρατηγική δοκιμής και ελέγχου. Στη συνέχεια παρουσιάζεται χαρακτηριστικό απόσπασμα από τη συνέντευξη με ένα μαθητή της Ε΄ δημοτικού από την τρίτη ομάδα, ο οποίος φάνηκε ότι αξιοποίησε την πρώτη κατάσταση στην προσπάθεια ερμηνείας και επίλυσης της δεύτερης κατάστασης με τα αλγεβρικά σύμβολα:

> Μ: Όπως βλέπω την πρώτη κατάσταση, το ένα ράφι περιλαμβάνει ίδια αντικείμενα με το άλλο, απλά είναι περισσότερα στο ένα ράφι και γι' αυτό αξίζουν και περισσότερα.
> Ε: Επομένως τι μπορείς να κάνεις σε αυτή την κατάσταση;
> Μ: Μπορώ σίγουρα να βρω πόσα αξίζει η παπαρούνα και η ομπρέλα αφού η διαφορά μεταξύ των ραφιών είναι δύο παπαρούνες οι οποίες αξίζουν μαζί 16, γιατί αφαίρεσα από το 54 το 38. Κάθε παπαρούνα αξίζει οκτώ.
> Ε: Επομένως για την πρώτη κατάσταση εντόπισες όλα όσα μπορούσες να βρεις;
> Μ: Όχι πρέπει να βρω και την τιμή της ομπρέλας που είναι πολύ εύκολο, αφού βρήκα ότι κάθε παπαρούνα είναι οκτώ, αν πάρω το δεύτερο ράφι τέσσερις παπαρούνες επί οκτώ κάνουν 32, μέχρι το 38 μένουν έξι και άρα η ομπρέλα είναι έξι.
> Ε: Τι αντίστοιχο συμβαίνει στην πρώτη κατάσταση με τη δεύτερη κατάσταση με τα σύμβολα;
> Μ: Εμμ.. να σκεφτώ λίγο.. είναι λίγο δύσκολο γιατί εδώ έχει δύο εξισώσεις μαζί και όχι μία και έχει δύο διαφορετικά σύμβολα και Α και Β.
> Ε: Εσύ πρέπει απλά να σκεφτείς τι αντίστοιχο συμβαίνει στις δύο περιπτώσεις. Την κατάσταση με τα αντικείμενα τη μελέτησες, τώρα πρέπει να δεις προσεκτικά τη δεύτερη κατάσταση.
> Μ: Βασικά είναι αυτό που σας είπα, εδώ έχει δύο εξισώσεις μαζί που είναι όπως τα δύο ράφια που είχα πριν …εμ.. όπως έκανα με τα ράφια για να ανακαλύψω τις τιμές των πραγμάτων έτσι θα προσπαθήσω και εδώ.
> Ε: Τι θα κάνεις δηλαδή;
> Μ: Και πάλι αν δούμε τις δύο εξισώσεις έχουν ίδια σύμβολα απλά στη μια το ένα σύμβολο επαναλαμβάνεται πιο πολλές φορές. Και στα ράφια αυτό γινόταν και έτσι είχα σκεφτεί, ότι με τη διαφορά τους θα βρω εύκολα πόσα αξίζει το καθένα, έτσι και εδώ η διαφορά τους είναι 2Α που κάνουν 12 επειδή αφαίρεσα το 14 από το 26. Κάθε Α αξίζει έξι.
> Ε: Άρα βρήκαμε όλα τα στοιχεία για τη δεύτερη κατάσταση;

Μ: Ναι το Α είναι έξι… εμ και το Β βρίσκω, αν κάνω άλφα συν άλφα θα βγει 12, όμως μέχρι το 14 που μας λέει η πρώτη εξίσωση έχω ακόμη.. άρα το Β είναι δύο.

Ε: Επομένως τι αντίστοιχο συμβαίνει στη μια κατάσταση που συμβαίνει και στην άλλη;

Μ: Και στις δύο περιπτώσεις είχες δύο πράγματα που περιλάμβαναν ίδια στοιχεία απλά το ένα λίγο περισσότερα από το διπλανό και αν έβρισκες τη διαφορά των πραγμάτων και τη διαφορά της συνολικής αξίας μπορείς εύκολα να βρεις τις τιμές των πραγμάτων που περιέχονται σε αυτά.

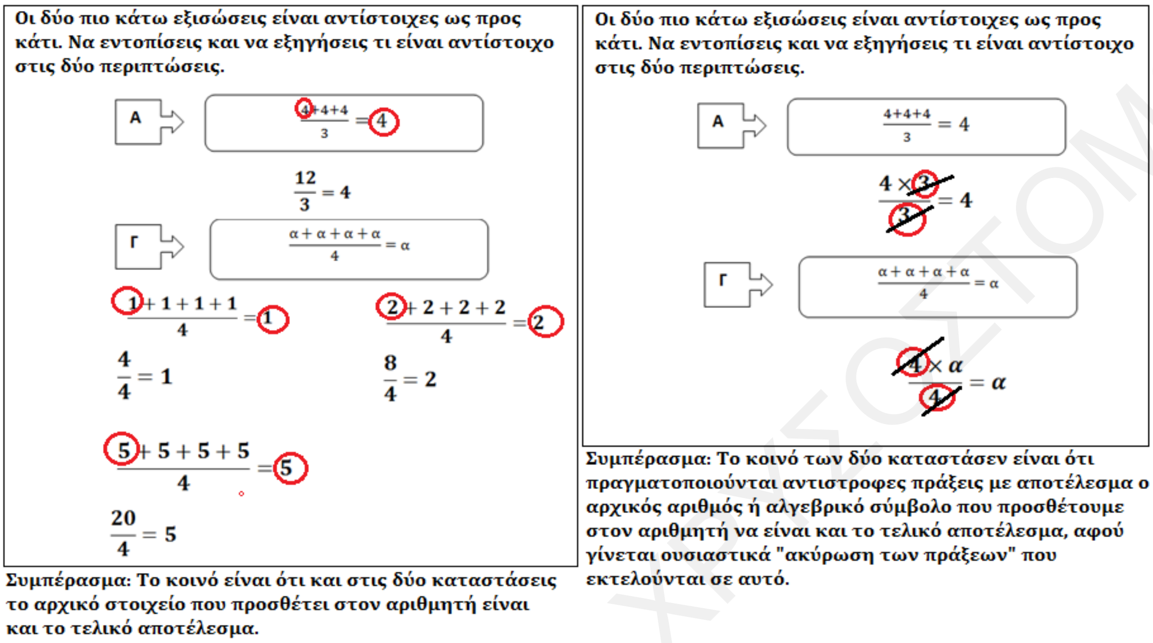
Ε: Αρχικά μόλις είδες τη δεύτερη κατάσταση σου φάνηκε λίγο δύσκολη, τι είναι αυτό νομίζεις που σε βοήθησε στη συνέχεια να βρεις μέχρι και τις τιμές των συμβόλων;

Μ: Όταν τέλειωσα με την πρώτη κατάσταση και βρήκα το κόλπο το σκεφτόμουν και επειδή έψαχνα τι αντίστοιχο συμβαίνει στις δύο περιπτώσεις είδα ότι το ίδιο κόλπο θα με βοηθούσε να κάνω τα ίδια και στη δεύτερη περίπτωση.

Χαρακτηριστικά μαθητών των τεσσάρων ομάδων ως προς την ικανότητα απλοποίησης αλγεβρικών εκφράσεων και γενίκευσης ιδιοτήτων των πράξεων

Στον Πίνακα 4.42 παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι προσεγγίσεις των μαθητών στο έργο της συνέντευξης (ΕΑΣ 4) (δείτε Παράρτημα Ε) το οποίο παρουσιάζεται συμπληρωμένο στο Διάγραμμα 4.10 και αφορούσε στην ικανότητα απλοποίησης αλγεβρικών εκφράσεων και γενίκευσης ιδιοτήτων των πράξεων.

Οι μαθητές της πρώτης ομάδας δεν ανταποκρίθηκαν στο έργο ΕΑΣ 4. Όλοι σχεδόν οι μαθητές κατέληξαν στο ότι το κοινό των δύο περιπτώσεων υφίσταται στο ότι εμπλέκουν τον αριθμό «τέσσερα» και την πράξη της διαίρεσης. Οι συγκεκριμένοι μαθητές δεν κατάφεραν να εντοπίσουν κάποιο άλλο κοινό ακόμη και μετά από την παρότρυνση του ερευνητή να εξετάσουν προσεκτικά την κάθε κατάσταση. Μερικοί μαθητές στην προσπάθειά τους να εντοπίσουν κάτι άλλο, αναφέρουν εντελώς επιφανειακά χωρίς καθόλου ερμηνεία ότι και στις δύο περιπτώσεις το ίδιο σύμβολο που βλέπουν στον αριθμητή υπάρχει ξανά και μετά το σύμβολο του ίσον. Παρόλα αυτά, δεν ερμήνευσαν καθόλου την παρατήρηση αυτή. Στην πρώτη κατάσταση ανέφεραν απλά ότι ισχύει το αποτέλεσμα. Ωστόσο, στη δεύτερη περίπτωση αρκετοί μαθητές φαίνεται ότι θεώρησαν ότι το «α» πρέπει να είναι ο αριθμός ένα μιας και το «α» είναι το πρώτο γράμμα στο αλφάβητο, ενώ μερικοί μαθητές απέδωσαν αυθαίρετα μια συγκεκριμένη τιμή στο «α».



Διάγραμμα 4.10. Χαρακτηριστική λύση των μαθητών της δεύτερης ομάδας (αριστερά) και των μαθητών της τέταρτης ομάδας (δεξιά) στο έργο ΕΑΣ 4 το οποίο χρησιμοποιήθηκε στις κλινικές συνεντεύξεις.

Οι μαθητές της δεύτερης ομάδας διαφοροποιούνται από τους μαθητές της πρώτης ομάδας. Ελάχιστοι μαθητές από τη δεύτερη ομάδα εστίασαν αρχικά στα επιφανειακά χαρακτηριστικά που προαναφέρθηκαν και στη συνέχεια προχώρησαν περισσότερο. Η πλειοψηφία των μαθητών της δεύτερης ομάδας αναφέρει ότι το κοινό των δύο περιπτώσεων είναι το ότι το αποτέλεσμα και στις δύο περιπτώσεις είναι ο αρχικός αριθμός που επαναλαμβάνεται στην πρόσθεση στον αριθμητή. Οι συγκεκριμένοι μαθητές δεν ήταν σε θέση, ωστόσο, να αιτιολογήσουν με γενίκευση την απάντηση τους μιας και δεν εντόπισαν τις αντίστροφες πράξεις, ενώ αντίθετα στη δεύτερη κατάσταση που ενέπλεκε αλγεβρικά σύμβολα αντικαθιστούσαν διάφορους αριθμούς για να επιβεβαιώσουν ότι ο αριθμός που προσθέτουν στον παρονομαστή είναι ο αριθμός που προκύπτει και ως αποτέλεσμα (δείτε Διάγραμμα 4.10). Οι μαθητές της δεύτερης ομάδας αν και στο γραπτό δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης είχαν συγκεντρώνει ψηλό μέσο όρο στο έργο που αφορούσε στο προσθετικό και πολλαπλασιαστικό αντίστροφο (Gn1) (και άρα επέδειξαν επιτυχία σε απλό έργο αξιοποίησης και επεξήγησης ιδιοτήτων των πράξεων), στην προκειμένη περίπτωση με τον τρόπο που ήταν διατυπωμένες οι αλγεβρικές εξισώσεις (πρόσθεση του ίδιου στοιχείου στον αριθμητή τρεις ή τέσσερις φορές και μετά διαίρεση με το τρία ή τέσσερα αντίστοιχα) δεν εντόπισαν ότι εφαρμόστηκαν αντίστροφες πράξεις. Για αυτούς τους λόγους περιορίστηκαν στην μεταβατική προσέγγιση που περιγράφηκε όπου κατέληξαν στο συμπέρασμα τους αλλά δεν μπορούσαν να το αιτιολογήσουν μέσα από αναφορά σε ιδιότητες των πράξεων.

Πίνακας 4.42

Προσεγγίσεις των Μαθητών των Τεσσάρων Ομάδων στο Έργο ΕΑΣ για την Ικανότητα Απλοποίησης Αλγεβρικών Εκφράσεων και Γενίκευσης Ιδιοτήτων των Πράξεων

Ομάδα 1	**Ομάδα 2**	**Ομάδα 3**	**Ομάδα 4**
	Επιφανειακή		
Και στις δύο περιπτώσεις υπάρχει το «τέσσερα» και διαίρεση. Εντελώς επιφανειακά βλέπουν ότι το ίδιο σύμβολο που υπάρχει στον αριθμητή είναι και το αποτέλεσμα.	Και στις δύο περιπτώσεις υπάρχει ο αριθμός τέσσερα και η πράξη της διαίρεσης.		
	Μεταβατική		
	Δοκιμάζουν αριθμούς στη δεύτερη περίπτωση και αναφέρουν ότι το κοινό των δύο περιπτώσεων είναι το ότι δίνουν ως αποτέλεσμα τον αριθμό που προστίθεται στον αριθμητή. Αιτιολογούν μόνο μέσα από αριθμητικά παραδείγματα.	Δοκιμάζουν αριθμούς στη δεύτερη περίπτωση και αναφέρουν ότι το κοινό των δύο περιπτώσεων είναι το ότι δίνουν ως αποτέλεσμα τον αριθμό που προστίθεται στον αριθμητή.	
	Δομική		
		Εξηγούν ότι και στις δυο περιπτώσεις γίνονται οι αντίστροφες πράξεις και έτσι καταλήγουμε στο αρχικό σύμβολο. Πιθανό στο τέλος να αναφερθούν σε πράξη με αναφορά στο α.	**Εξηγούν ότι και στις δυο περιπτώσεις γίνονται οι αντίστροφες πράξεις και έτσι καταλήγουμε στο αρχικό σύμβολο. Δείχνουν εξ αρχής εκτέλεση πράξεων με το α.**

Οι μαθητές της τρίτης ομάδας διαφοροποιούνται σε μεγάλο βαθμό από τους μαθητές των προηγούμενων ομάδων μιας και κανένας από τους μαθητές δεν υιοθέτησε επιφανειακή προσέγγιση. Οι μαθητές εντόπισαν ότι και στις δύο περιπτώσεις πολλαπλασιάζει και διαιρεί με τον ίδιο αριθμό, έτσι μένει ως αποτέλεσμα ο αρχικός αριθμός προτού πολλαπλασιαστεί, εξηγώντας ότι αυτό συμβαίνει γιατί είναι σαν ακύρωση της αρχική πράξης (του πολλαπλασιασμού). Ωστόσο, οι περισσότεροι μαθητές της ομάδας τρία (15 μαθητές) για να καταλήξουν στο συμπέρασμα που προαναφέρθηκε, αντικατέστησαν τιμές στο «α» για να εξετάσουν την ορθότητα της δεύτερης πρότασης και στη συνέχεια (μετά από τις αντικαταστάσεις) εξήγησαν ότι σε όλα τα παραδείγματα με αριθμούς καταλήγουμε στον ίδιο αριθμό γιατί έγιναν αντίστροφες πράξεις. Το ότι οι μαθητές της τρίτης ομάδας κατάφεραν να αναγνωρίσουν την εκτέλεση αντίστροφων πράξεων συνάδει με την επιτυχία που είχαν επιδείξει σε ένα απλό έργο του δοκιμίου αλγεβρικής σκέψης το οποίο αφορούσε σε χρήση και επεξήγηση ιδιοτήτων των πράξεων (και αφορούσε στο προσθετικό και πολλαπλασιαστικό αντίστροφο). Οι συγκεκριμένοι μαθητές επομένως, κατέληξαν μεν σε δομική προσέγγιση μιας και αιτιολόγησαν το συμπέρασμά τους, ωστόσο, στην προσπάθεια επεξήγησης δεν έκαναν αναφορά σε πράξεις με το ίδιο το «α», αλλά σε αριθμούς. Παρόλα αυτά, αρκετοί μαθητές της τρίτης ομάδας (14 μαθητές) μετά την αντικατάσταση τιμών, προχώρησαν περισσότερο και εξήγησαν ότι δεν χρειάζεται τελικά να εκτελείς πράξεις με αριθμούς για να εξετάσεις αν κάτι ισχύει μιας και γίνεται να σκεφτείς αμέσως ότι «ένας οποιοσδήποτε αριθμός δηλαδή α, επί τέσσερα δια τέσσερα, μας δίνει τον αρχικό αριθμό ή αλλιώς α, γιατί εφαρμόστηκαν στο α αντίστροφες πράξεις». Αξίζει να σημειωθεί ότι οι μαθητές της τρίτης ομάδας είχαν μέτρια επίδοση στα έργα απλοποίησης αλγεβρικών εκφράσεων στο δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης. Για το λόγο αυτό, οι μαθητές της τρίτης ομάδας οι οποίοι κατάφεραν να λύσουν ορθά τη δεύτερη κατάσταση του ΕΑΣ 4, κάνοντας ξεκάθαρη αναφορά σε πράξεις με το αλγεβρικό σύμβολο, κλήθηκαν να απαντήσουν τι τους βοήθησε στην προκειμένη περίπτωση να επιδείξουν βελτιωμένη επίδοση. Σχεδόν όλοι οι μαθητές εξήγησαν ότι όταν έλυναν το αρχικό δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης, (συγκεκριμένα το έργο Sm2), δεν ήταν σίγουροι πώς να χειριστούν το «α» και κατέφυγαν στα δύο λάθη που περιγράφονται στα δύο αποσπάσματα που ακολουθούν. Αντίθετα, εξήγησαν ότι το έργο ΕΑΣ 4 τους βοήθησε να δουν με τη μελέτη των δύο καταστάσεων ότι είναι δυνατό να εκτελούμε πράξεις και με σύμβολα όπως το «α». Επίσης, ο τρόπος διατύπωσης της δεύτερης κατάστασης στο έργο ΕΑΣ όπου δόθηκε ως αποτέλεσμα το «α», έδωσε την ευκαιρία στους μαθητές να εξετάσουν τι συμβαίνει, σε αντίθεση με το αντίστοιχο έργο του δοκιμίου όπου η απάντηση έπρεπε να δοθεί από τους μαθητές. Χαρακτηριστικό απόσπασμα των μαθητών της τρίτης ομάδας που επέδειξαν μεγαλύτερη κατανόηση και βελτίωση κατά διάρκεια της συνέντευξης στην επίλυση του έργου ΕΑΣ 4 είναι το εξής απόσπασμα από τη συνέντευξη με ένα μαθητή της Στ΄ δημοτικού:

Ε: Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να εντοπίσουμε τι αντίστοιχο συμβαίνει στις δύο καταστάσεις.

Μ: Βασικά όπως σας είπα πριν για την πρώτη κατάσταση, όσες φορές προσθέτει τον αριθμό κάνοντας ουσιαστικά επί τρία, με τον ίδιο αριθμό το διαιρεί και καταλήγουμε, στον αρχικό αριθμό γιατί ουσιαστικά ακυρώνουμε την πρώτη πράξη…. Αυτό φαίνεται να γίνεται και στην κάτω περίπτωση.

Ε: Πώς κατέληξες σε αυτό το συμπέρασμα για την περίπτωση με το αλγεβρικό σύμβολο «α»;

Μ: Δοκίμασα κάποιους αριθμούς και είδα ότι ισχύει;

Ε: Τι εννοείς δοκίμασες κάποιους αριθμούς;

Μ: Έκανα για παράδειγμα πέντε συν πέντε συν πέντε συν πέντε μας δίνει 20 δια τέσσερα μου δίνει πέντε. Βασικά πολλαπλασίασα τον αριθμό πέντε τόσες φορές όσες το διαίρεσα και καταλήγω πάλι στον αρχικό αριθμό. Είδα έτσι ότι ισχύει γιατί ο αρχικός αριθμός πέντε που έβαλα στην αρχή στη θέση του «α» βρέθηκε πάλι ως αποτέλεσμα στη θέση του «α».

Ε: Άρα μετά από το παράδειγμα με τον αριθμό πέντε σιγουρεύτηκες ότι ισχύει;

Μ: Δοκίμασα πολλούς αριθμούς όχι μόνο το πέντε. Αλλά βασικά και να μην έβαζα άλλους αριθμούς τώρα ξέρω σίγουρα ότι ισχύει.

Ε: Πώς ξέρεις ότι ισχύει χωρίς παραδείγματα;

Μ: Γιατί όταν λέμε «αν πολλαπλασιάσω οποιοδήποτε αριθμό με το τέσσερα και μετά διαιρέσω με το τέσσερα» είναι λες και σκέφτομαι «$(4\times\alpha)\div 4$» όπου τα τεσσάρια διαγράφονται αφού ακυρώνονται μεταξύ τους και μένει μόνο του το «α».

Ε: Στο έργο του δοκιμίου όπου υπήρχε το «$(\alpha+\alpha)/2$», σημείωσες ως αποτέλεσμα τον αριθμό πέντε. Πώς είχες σκεφτεί σε εκείνη την περίπτωση;

Μ: Βασικά είχα κάνει δοκιμή με αριθμό και έβαλα πέντε γιατί είχα αντικαταστήσει τον αριθμό πέντε στο «α».

Ε: Ποιο πιστεύεις ήταν το λάθος που έκανες;

Μ: Αντί για πέντε, θα έπρεπε να δώσω ως απάντηση το «α» και δεν έπρεπε να βάζω τιμές στο «α» γιατί είδα ότι μπορείς να σκεφτείς και αλλιώς, γίνονται αντίστροφες πράξεις και σκέφτομαι αμέσως το αποτέλεσμα.

Ε: Αν κάποιος δηλαδή επιλέξει να αντικαθιστά τιμές στη θέση του «α» για να μελετήσει την κατάσταση, είναι λάθος;

Μ: Θα τον βοηθήσει να δει τι γίνεται, απλά πρέπει να προσέξει την απάντηση.

Ε: Δηλαδή; Τι εννοείς να προσέξει την απάντηση;

Μ: Πρέπει να θυμηθεί αφού αντικαθιστά τους αριθμούς στο «α» για να ελέγξει τι γίνεται, στη συνέχεια το αποτέλεσμα που θα πάρει και είναι αριθμός πρέπει να το αλλάξει πίσω με «α» γιατί οι τιμές που έβαζε ήταν δοκιμές, εκείνο που μένει είναι το «α».

Σε αυτό το σημείο αξίζει να παρουσιαστεί ακόμη ένα μικρό απόσπασμα με ακόμη ένα μαθητή της τρίτης ομάδας ο οποίος ακολούθησε παρόμοια πορεία επίλυσης του έργου ΕΑΣ με την μαθήτρια που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο απόσπασμα, με τη μικρή διαφορά ότι ο συγκεκριμένος μαθητής παρέμεινε ελάχιστη ώρα στη αντικατάσταση τιμών. Οδηγήθηκε πιο γρήγορα στο συμπέρασμα ότι «πολλαπλασιάζοντας το α με το τέσσερα και διαιρώντας με το τέσσερα, παραμένει το α και ότι μπορούμε να εκτελούμε πράξεις με το α». Η τάση του μαθητή να σκεφτεί λίγο πιο γενικά φάνηκε και από τον τρόπο που εξήγησε το λάθος που έκανε στο σχετικό έργο στο δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης. Ο λόγος που παρουσιάζεται είναι το γεγονός ότι παρόμοια συμπεριφορά στο έργο ΕΑΣ και ίδια επεξήγηση του λάθους στο δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης παρουσίασαν ακόμη μερικοί μαθητές της τρίτης ομάδας. Στο απόσπασμα φαίνεται η επεξήγηση του λάθους στο δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης από ένα μαθητή της Στ΄ δημοτικού:

Μ: Άρα και στις δύο καταστάσεις το κοινό είναι ότι πολλαπλασιάζεις με έναν αριθμό και διαιρείς με τον ίδιο αριθμό, έτσι οι πράξεις ακυρώνονται και καταλήγουμε στον αρχικό αριθμό πριν τον πολλαπλασιασμό.

Ε: Τώρα που κατέληξες σε συμπέρασμα θέλω να σου θυμίσω ότι στο έργο (α+α)/2 του δοκιμίου που συμπληρώσατε έδωσες ως αποτέλεσμα τον αριθμό ένα. Πως εργάστηκες;

Μ: Βασικά είχα σκεφτεί ότι (α συν α) δια δύο μου μένει ένα, γιατί ήταν δύο πράγματα που τα διαίρεσα δια δύο και άρα σκέφτηκα ότι μένει ένα πράγμα και έβαλα ένα.

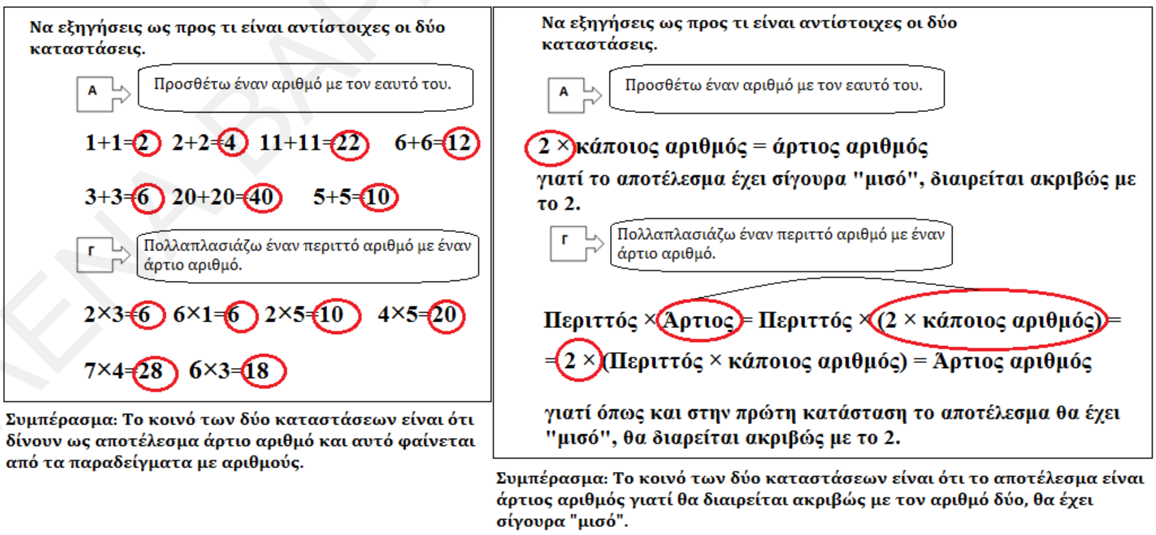
Ε: Ποιο ήταν το λάθος σου νομίζεις;

Μ: Ότι αφού έμεινε ένα πράγμα έπρεπε να βάλω το ίδιο το α, δηλαδή «1α» και όχι μόνο τον αριθμό ένα.

Όλοι οι μαθητές της τέταρτης ομάδας εστίασαν από την αρχή στη δομή των δύο καταστάσεων και αιτιολόγησαν ότι και στις δυο καταστάσεις μέσω των αντίστροφων πράξεων καταλήγουμε στον αρχικό αριθμό ή αλγεβρικό σύμβολο (προτού πολλαπλασιαστούν). Αρκετοί μαθητές ανέφεραν από την αρχή ότι θα πρέπει το «επί τρία» με το «δια τρία» να διαγραφούν, όπως και το «επί τέσσερα» με το «δια τέσσερα». Όλοι οι μαθητές ανέφεραν χαρακτηριστικά ότι «τέσσερις φορές το α δια τέσσερα μας δίνει α», δείχνοντας ξεκάθαρη αναφορά σε πράξη με αλγεβρικά σύμβολα, χωρίς να προηγηθεί αντικατάσταση τιμών (δείτε Διάγραμμα 4.10).

Χαρακτηριστικά μαθητών των τεσσάρων ομάδων ως προς την ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων των αριθμών

Στον Πίνακα 4.43 παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι προσεγγίσεις των μαθητών στο έργο της συνέντευξης (ΕΑΣ 5) (δείτε Παράρτημα Ε) το οποίο παρουσιάζεται συμπληρωμένο στο Διάγραμμα 4.11 και αφορούσε στην ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων των αριθμών.



Διάγραμμα 4.11. Χαρακτηριστική λύση των μαθητών της δεύτερης ομάδας (αριστερά) και των μαθητών της τέταρτης ομάδας (δεξιά) στο έργο ΕΑΣ 5 το οποίο χρησιμοποιήθηκε στις κλινικές συνεντεύξεις.

Πίνακας 4.43

Προσεγγίσεις των Μαθητών των Τεσσάρων Ομάδων στο Έργο ΕΑΣ για την Ικανότητα Γενίκευσης Ιδιοτήτων των Αριθμών

Ομάδα 1	**Ομάδα 2**	**Ομάδα 3**	**Ομάδα 4**
	Επιφανειακή		
Δίνουν ίδιο αριθμό στις δύο καταστάσεις (π.χ. 5+5, 5×2) εξηγώντας ότι το κοινό των δύο καταστάσεων είναι όταν περιλαμβάνουν ίδιο αριθμό. Και στις δύο περιπτώσεις εκτελούνται πράξεις με αριθμούς που δεν γνωρίζουμε.	Δίνουν ίδιο αριθμό στις δύο καταστάσεις (π.χ. 5+5, 5×2) εξηγώντας ότι το κοινό των δύο καταστάσεων είναι όταν περιλαμβάνουν ίδιο αριθμό.		
	Μεταβατική		
Δοκιμάζουν αριθμούς και στις δύο περιπτώσεις και βλέπουν ότι βγαίνει πάντα άρτιος, αλλά δεν μπορούν να αντιλογήσουν πέρα από τα αριθμητικά παραδείγματα.	**Δοκιμάζουν αριθμούς και στις δύο περιπτώσεις και βλέπουν ότι βγαίνει πάντα άρτιος, αλλά δεν μπορούν να αντιλογήσουν πέρα από τα αριθμητικά παραδείγματα.**	**Δοκιμάζουν αριθμούς και στις δύο περιπτώσεις και βλέπουν ότι βγαίνει πάντα άρτιος, αλλά δεν μπορούν να αντιλογήσουν πέρα από τα αριθμητικά παραδείγματα.**	
	Δομική		
			Αναφέρουν ότι και στις δύο περιπτώσεις το αποτέλεσμα είναι άρτιος και αιτιολογούν (πέρα από τα αριθμητικά παραδείγματα).

Οι μαθητές της πρώτης ομάδας, δεν κατάφεραν να ανταποκριθούν καθόλου στο έργο ΕΑΣ 5. Όλοι οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας εστίασαν σε επιφανειακά χαρακτηριστικά των δύο καταστάσεων. Οι περισσότεροι μαθητές της ομάδας σχολίασαν ότι το κοινό των δύο καταστάσεων είναι ότι εμπλέκουν και οι δύο κάποια πράξη με αριθμούς που δεν γνωρίζουμε. Πολλοί από αυτούς έδωσαν επίσης, ίδιο αριθμό στις δύο καταστάσεις (π.χ. «5+5, 5×2») εξηγώντας ότι το κοινό των δύο καταστάσεων υφίσταται στο ότι περιλαμβάνουν ίδιο αριθμό ή ότι δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα. Μερικοί μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας κατάφεραν να προχωρήσουν και να εντοπίσουν κάποια σχέση υποστηρίζοντας ότι και στις δύο καταστάσεις βγαίνει πάντα άρτιος αριθμός, αλλά δεν είχαν την ικανότητα να αιτιολογήσουν πέρα από τα αριθμητικά παραδείγματα.

Όλοι σχεδόν οι μαθητές της δεύτερης ομάδας δοκίμασαν αριθμούς και στις δύο περιπτώσεις και εντόπισαν ότι και στις δύο περιπτώσεις το αποτέλεσμα είναι άρτιος αριθμός, ωστόσο, δεν κατάφεραν να αιτιολογήσουν πέρα από τα αριθμητικά παραδείγματα γιατί το αποτέλεσμα ήταν άρτιος αριθμός (δείτε Διάγραμμα 4.11). Μερικοί μαθητές ανέφεραν επίσης, ως αιτιολόγηση ότι αυτό τους είπε ο δάσκαλός τους ή ότι έτσι έμαθαν στο μάθημά τους. Ως εκ τούτου, παρουσίασαν μια μεταβατική προσέγγιση καθώς εντόπισαν μια σχέση την οποία όμως δεν ήταν σε θέση να αιτιολογήσουν. Ελάχιστοι μαθητές της δεύτερης ομάδας παρέμειναν σε επιφανειακά χαρακτηριστικά των δύο καταστάσεων.

Οι μαθητές της τρίτης ομάδας, δεν διαφοροποιούνται σε μεγάλο βαθμό από τους μαθητές της δεύτερης ομάδας. Οι μαθητές υιοθέτησαν μια μεταβατική προσέγγιση μιας και αντικαθιστούσαν αριθμούς και έβλεπαν ότι το κοινό των δύο περιπτώσεων είναι ότι δίνουν άρτιο αριθμό ως αποτέλεσμα, ωστόσο, δεν ήταν σε θέση να αιτιολογήσουν. Αρκετοί μαθητές από τη συγκεκριμένη ομάδα ανέφεραν ότι και οι δύο περιπτώσεις είναι δυνατό να θεωρηθούν ως πολλαπλασιασμός περιττού επί άρτιο αριθμό, με δεδομένο όμως ότι στην πρώτη κατάσταση ο αριθμός που προσθέτω με τον εαυτό του είναι περιττός. Κανένας από τους μαθητές της τρίτης ομάδας δεν κατάφερε να προχωρήσει σε μια δομική προσέγγιση.

Οι μαθητές της τέταρτης ομάδας διαφοροποιούνται ξεκάθαρα από τους μαθητές των άλλων ομάδων μιας και οι συγκεκριμένοι μαθητές ανέφεραν ότι το κοινό των δύο περιπτώσεων είναι ότι δίνουν άρτιο αριθμό και αιτιολόγησαν γιατί το αποτέλεσμα είναι άρτιος αριθμός (πέρα από τα αριθμητικά παραδείγματα). Σχεδόν όλοι οι μαθητές (18 μαθητές), εξήγησαν ότι η πρώτη κατάσταση του ΕΑΣ 5 τους βοήθησε να καταλήξουν στο γιατί η δεύτερη κατάσταση δίνει άρτιο αριθμό ως αποτέλεσμα. Συγκεκριμένα, ανέφεραν ότι στην πρώτη κατάσταση όπου προσθέτουμε αριθμό με τον εαυτό του παίρνουμε σίγουρα άρτιο αριθμό μιας και ο αριθμός θα έχει σίγουρα μισό και άρα θα διαιρείται ακριβώς με τον αριθμό δύο. Σχεδόν όλοι οι μαθητές εξήγησαν ότι στη δεύτερη περίπτωση πολλαπλασιάζοντας έναν άρτιο με έναν περιττό αριθμό θα μπορούσαμε να έχουμε «το δύο επί έναν περιττό» (όπως στην πρώτη περίπτωση). Συνέχισαν αναφέροντας ότι αν ο άρτιος ήταν μεγαλύτερος του δύο, τότε αυτός είναι δυνατό να εκφραστεί και πάλι ως δύο επί «κάτι» έχοντας επομένως «δύο επί κάτι επί περιττό» και εξήγησαν ότι αυτό θα είναι σίγουρα άρτιος αριθμός γιατί όπως στην πρώτη κατάσταση θα έχει μισό, δηλαδή θα διαιρείται ακριβώς με το δύο (δείτε Διάγραμμα 4.11). Στη συνέχεια παρουσιάζεται χαρακτηριστικό απόσπασμα από τη συνέντευξη των μαθητών της τέταρτης ομάδας, όπου φαίνεται το πως η πρώτη κατάσταση του έργου ΕΑΣ 5, βοήθησε τους μαθητές να αιτιολογήσουν τη γενίκευση τους για το αποτέλεσμα περιττού επί άρτιο αριθμό (κατάσταση που δεν συμπεριλαμβανόταν στο δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης). Το απόσπασμα που ακολουθεί αποτελεί μέρος της συνέντευξης με ένα μαθητή της Στ΄ τάξης:

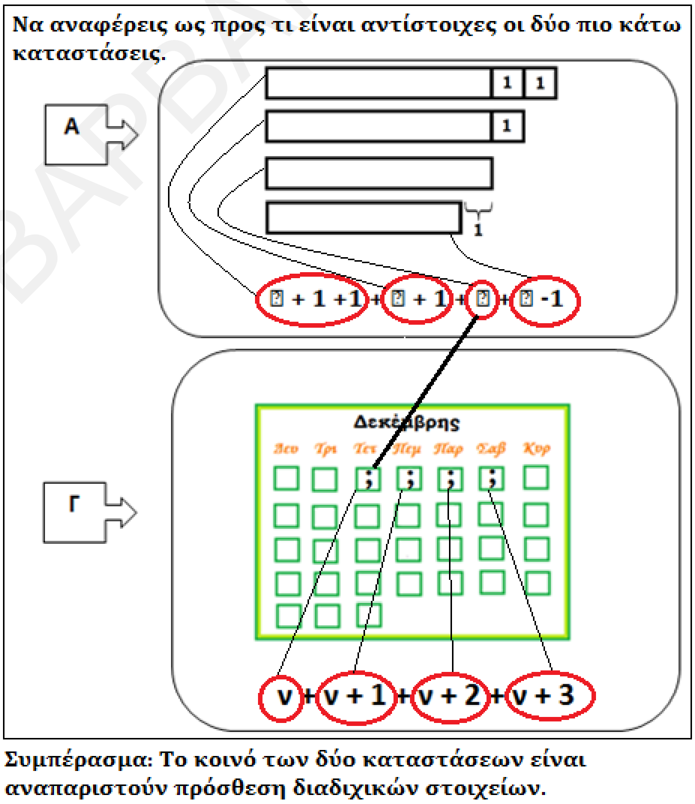
> Ε: Γιατί λες ότι και στα δύο το αποτέλεσμα είναι άρτιος αριθμός;
> Μ: Αφού στη μια πολλαπλασιάζει με το δύο που είναι άρτιος ενώ στην κάτω περίπτωση πολλαπλασιάζει με οποιοδήποτε άρτιο.
> Ε: Και γιατί όταν πολλαπλασιάζω κάτι με έναν άρτιο βγαίνει άρτιος αριθμός το αποτέλεσμα;
> Μ: Στην πρώτη περίπτωση όταν κάνω κάτι φορές δύο αυτό που παίρνω έχει σίγουρα έχει μισό, διαιρείται ακριβώς με το δύο άρα είναι άρτιος.
> Ε: Και στην κάτω περίπτωση;
> Μ: Στην κάτω περίπτωση έχω περιττό επί κάποιο άρτιο, τον άρτιο μπορούμε να τον σκεφτούμε και ως δύο επί κάτι άλλο, έτσι έχουμε «δύο επί κάτι άλλο επί περιττό αριθμό», που σας εξήγησα πριν γιατί είναι άρτιος.

Χαρακτηριστικά μαθητών των τεσσάρων ομάδων ως προς την ικανότητα μοντελοποίησης σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων

Στον Πίνακα 4.44 παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι προσεγγίσεις των μαθητών στο έργο της συνέντευξης (ΕΑΣ 6) (δείτε Παράρτημα Ε) το οποίο παρουσιάζεται συμπληρωμένο στο Διάγραμμα 4.12 και αφορούσε στην ικανότητα μοντελοποίησης σχέσεων μέσα αλγεβρικών συμβόλων.

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.44, οι μαθητές της πρώτης ομάδας δεν ανταποκρίθηκαν στο έργο ΕΑΣ 6. Όλοι οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας εντόπισαν ότι η ομοιότητα των δύο καταστάσεων υφίσταται απλά στο ότι και οι δύο εμπλέκουν αριθμούς, πρόσθεση και σύμβολα. Ακόμη και μετά από παρότρυνση του ερευνητή να εξετάσουν περισσότερο την κάθε κατάσταση, οι μαθητές δεν κατάφεραν να ερμηνεύσουν τις δύο καταστάσεις και παρέμειναν στο συμπέρασμα που ανέφεραν αρχικά.

Οι μαθητές της δεύτερης ομάδας αρχικά, δεν διαφοροποιούνται σε μεγάλο βαθμό από τους μαθητές της πρώτης ομάδας μιας και η πλειοψηφία των μαθητών εστίασαν στα επιφανειακά χαρακτηριστικά των καταστάσεων που εστίασαν και οι μαθητές της πρώτης ομάδας. Στη συνέχεια, ωστόσο, η πλειοψηφία των μαθητών προχώρησαν πέρα από τα επιφανειακά χαρακτηριστικά σε μια προσπάθεια ερμηνείας των καταστάσεων, δείχνοντας μια μεταβατική προσέγγιση, χωρίς τελικά να αιτιολογούν. Συγκεκριμένα, αρκετοί μαθητές ανέφεραν ότι το «ν» και το ερωτηματικό αναπαριστούν τις «ποσότητες» που δεν γνωρίζουμε (εμβαδόν των μεγάλων ορθογωνίων, άγνωστες ημερομηνίες). Παρόλα αυτά, δεν εντόπισαν στις εικόνες ποιο ακριβώς είναι το ερωτηματικό και το «ν» (τα οποία αποτελούν τη βάση στην οποία κτίζονται οι εκφράσεις για τους επόμενους και προηγούμενους όρους) και δεν κατάφεραν να ερμηνεύσουν ολόκληρες τις μαθηματικές προτάσεις. Επίσης, μερικοί μαθητές της δεύτερης ομάδας μετά από κάποια «επεξεργασία» της μαθηματικής πρότασης στην πρώτη κατάσταση («?+1+1+?+1+?+?-1») εντόπισαν ότι και στις δύο μαθηματικές προτάσεις (των δύο καταστάσεων) περιλαμβάνεται ανάμεσα σε άλλα το εξής κοινό: «η ποσότητα που δεν γνωρίζω συν ένα, συν την ποσότητα που δεν γνωρίζω συν δύο», χωρίς όμως να εντοπίσουν τι ακριβώς αναπαριστούν αυτά στις δύο καταστάσεις-εικόνες.



Διάγραμμα 4.12. Χαρακτηριστική λύση των μαθητών της τέταρτης ομάδας και των περισσότερων μαθητών της τρίτης ομάδας στο έργο ΕΑΣ 6.

Πίνακας 4.44

Προσεγγίσεις των Μαθητών των Τεσσάρων Ομάδων στο Έργο ΕΑΣ για την Ικανότητα Μοντελοποίησης Σχέσεων μέσω Αλγεβρικών Συμβόλων

Ομάδα 1	Ομάδα 2	Ομάδα 3	Ομάδα 4
	Επιφανειακή		
Η ομοιότητα των δύο καταστάσεων υφίσταται στο ότι εμπλέκουν μεγάλες πράξεις με πρόσθεση, αριθμούς και σύμβολα.	**Η ομοιότητα των δύο καταστάσεων υφίσταται στο ότι εμπλέκουν μεγάλες πράξεις με πρόσθεση, αριθμούς και σύμβολα.**		
	Μεταβατική		
	Αναφέρουν ότι και στις δύο περιπτώσεις, στη μαθηματική πρόταση περιλαμβάνεται (ανάμεσα σε άλλα) το «σύμβολο+1+σύμβολο +2» ωστόσο δεν εντοπίζουν ποια ακριβώς στοιχεία αναπαριστούν αυτές οι εκφράσεις στις εικόνες.		
	Εντοπίζουν ότι το ερωτηματικό και το ν αναπαριστούν τις ποσότητες που δεν γνωρίζουμε (εμβαδόν κουτιού και αριθμός-ημερομηνία).	Εντοπίζουν ότι το ερωτηματικό και το ν αναπαριστούν τις ποσότητες που δεν γνωρίζουμε (εμβαδόν κουτιού και αριθμός-ημερομηνία).	
	Δομική		
		Αιτιολογούν ότι η ομοιότητα των δύο καταστάσεων υφίσταται στο ότι αφορούν και τα σε δύο πρόσθεση διαδοχικών αριθμών.	**Αιτιολογούν ότι η ομοιότητα των δύο καταστάσεων υφίσταται στο ότι αφορούν και τα δύο σε πρόσθεση διαδοχικών αριθμών.**

Οι μαθητές της τρίτης ομάδας διαφοροποιούνται σε μεγάλο βαθμό από τους μαθητές της δεύτερης ομάδας. Κανένας από τους μαθητές της τρίτης ομάδας δεν ανέφερε ως κοινό των δύο καταστάσεων επιφανειακά χαρακτηριστικά. Όλοι οι μαθητές της τρίτης ομάδας ανέφεραν αρχικά ότι το κοινό των δυο καταστάσεων αποτελεί το ότι υπάρχουν άγνωστα στοιχεία τα οποία συμβολίζονται με το σύμβολο ν ή το ερωτηματικό. Η πλειοψηφία των μαθητών κατάφερε στη συνέχεια να ερμηνεύσει τις μαθηματικές προτάσεις των δύο καταστάσεων με βάση τις εικόνες και να καταλήξει στο ότι το κοινό των δύο καταστάσεων είναι η πρόσθεση διαδοχικών στοιχείων. Μερικοί μαθητές αν και κατανόησαν σύντομα την πρώτη κατάσταση, αντιμετώπισαν κάποια δυσκολία και χρειάστηκαν περισσότερο χρόνο να ερμηνεύσουν την αλγεβρική έκφραση στη δεύτερη κατάσταση. Οι συγκεκριμένοι μαθητές (τέσσερις μαθητές) διευκρίνισαν ότι αυτό που τους βοήθησε να ερμηνεύσουν και να αντιληφθούν τελικά την αλγεβρική κατάσταση στην εικόνα με το ημερολόγιο, ήταν η λογική που είχαν ακολουθήσει στην πρώτη κατάσταση με το ερωτηματικό και τα ορθογώνια. Αξίζει να σημειωθεί ότι ένας μικρός αριθμός μαθητών (4 μαθητές) αν και προσπάθησαν να εστιάσουν περισσότερο στη δομή των καταστάσεων δεν κατάφεραν να εντοπίσουν ότι το κοινό ήταν η πρόσθεση διαδοχικών όρων λόγω του ότι δυσκολεύτηκαν να ερμηνεύσουν τη δεύτερη κατάσταση όπου το αλγεβρικό σύμβολο «ν» αναπαριστούσε κάποια ημερομηνία. Οι μαθητές ενώ κατάφεραν να ερμηνεύσουν το «σ+1, σ+2, σ και σ-1» στις εικόνες (τα οποία ουσιαστικά αναπαριστούν ποσότητες-εμβαδόν), δεν μπόρεσαν να ερμηνεύσουν το «ν, ν+1,ν+2, ν+3» όπου η πρόσθεση στο «ν» αποσκοπούσε να αναπαραστήσει διαδοχικές ημερομηνίες. Αξίζει να σημειωθεί ότι ενώ οι μαθητές της ομάδας είχαν παρουσιάσει ψηλή επίδοση στα έργα μοντελοποίησης σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων στο γραπτό δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης, δικαιολογημένα κάποιοι μαθητές αντιμετώπισαν κάποια δυσκολία στο έργο ΕΑΣ 6 της συνέντευξης μιας και στο συγκεκριμένο έργο χρησιμοποιείται το ίδιο σύμβολο αρκετές φορές στην αλγεβρική έκφραση για την αναπαράσταση τεσσάρων διαδοχικών αριθμών. Στο δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης υπήρχε παρόμοιο έργο το οποίο όμως αφορούσε σε αναπαράσταση της πρόσθεσης δύο μόνο διαδοχικών αριθμών. Στη συνέχεια παρουσιάζεται χαρακτηριστικό απόσπασμα από τις συνεντεύξεις με τους μαθητές της τρίτης ομάδας, οι οποίοι κατάφεραν να ερμηνεύσουν τη δεύτερη κατάσταση αξιοποιώντας την πρώτη κατάσταση του έργου ΕΑΣ 6. Το απόσπασμα αποτελεί συνέντευξη με μαθήτρια της Στ΄ δημοτικού:

> Ε: Ανέφερες τελικά ότι στην πρώτη κατάσταση το σ αναπαριστά το ορθογώνιο που είναι μόνο του, ενώ το «σ+1, σ+2 και το σ-1» αναπαριστούν την αύξηση του εμβαδού του ορθογωνίου κατά ένα κατά δύο και τη μείωση του κατά ένα, αντίστοιχα. Υπάρχει κάτι αντίστοιχο με αυτό που ανέφερες και στη δεύτερη κατάσταση;
>
> Μ: Βλέπω ότι υπάρχουν τέσσερα ερωτηματικά στη δεύτερη εικόνα και καθένα από αυτά σίγουρα θα συμβολίζεται με ν….
>
> Ε: Πώς προέκυψε όμως η πρόταση που δείχνει «ν+ν+1+ν+2+ν+3»;

Μ: Προσπαθώ να καταλάβω, διότι αν τα ερωτηματικά συμβολίζονταν μόνο με ν τότε θα είχαμε απλά «ν+ν+ν+ν»…

Ε: Επομένως, τι πιστεύεις γίνεται στην κάτω κατάσταση που είναι αντίστοιχο με αυτό που γίνεται στην πρώτη κατάσταση που εξέτασες προηγουμένως;

Μ: Αυτό προσπαθώ να δω… στην πρώτη κατάσταση χρησιμοποίησε το σ και μετά το αξιοποίησε για να δείξει κάτι επόμενο από το σ και κάτι προηγούμενο.

Ε: Σε αυτή την περίπτωση έχεις το ν και πρέπει να βρεις πώς το αξιοποιεί.

Μ: Αυτό με προβληματίζει, ποιο ερωτηματικό θα είναι το ν πάνω στο οποίο θα βασιστώ για να αναπαραστήσω τα υπόλοιπα όπως έγινε στην πρώτη κατάσταση.

Ε: Επομένως…;

Μ: Βασικά εδώ δεν έχω πλην άρα στο πρώτο κουτί που αντιστοιχεί ο πιο μικρός αριθμός θα πρέπει είναι το ν… αφού δεν έχει πλην.. [ο μαθητής σκέφτεται για λίγο].. Ναι είμαι σίγουρος …το πρώτο κουτάκι είναι το ν… Αα!! Τα βρήκα όλα τώρα …κατάλαβα τι γίνεται.

Ε: Δηλαδή;

Μ: Η πρώτη ημερομηνία που λείπει συμβολίζεται με το ν, η επόμενη που είναι κατά ένα μεγαλύτερη συμβολίζεται με «ν+1», αυτή που είναι κατά δύο μεγαλύτερη από την πρώτη θα είναι «ν+2» και αυτή που είναι τρία μεγαλύτερη από την πρώτη θα είναι «ν+3».

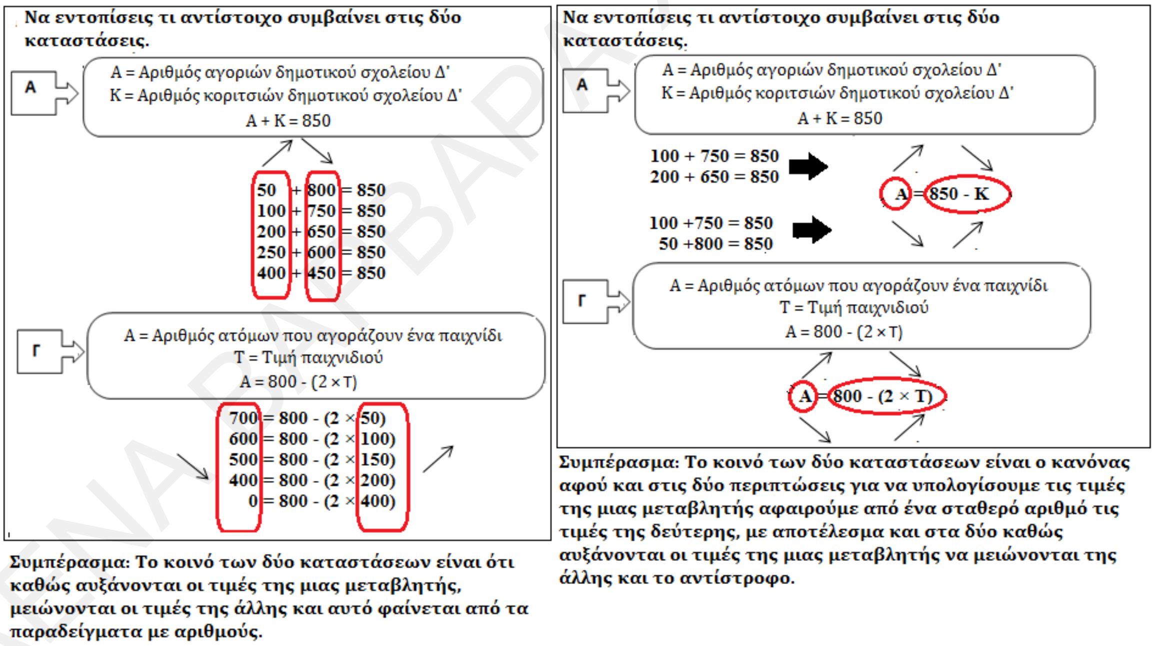
Ε: Επομένως τι αντίστοιχο συμβαίνει στις δύο καταστάσεις;

Μ: Ένα λεπτό…. φαίνεται ότι και στις δύο περιπτώσεις προσθέτει στοιχεία, πράγματα ή αριθμούς που το ένα είναι το αμέσως επόμενο του άλλου, όλα αυτά που προσθέτει μεταξύ τους διαφέρουν από το διπλανό τους κατά ένα.

Οι μαθητές της τέταρτης ομάδας διαφοροποιούνται λίγο από τους μαθητές της τρίτης ομάδας. Όλοι οι μαθητές της τέταρτης ομάδας κατάφεραν να ερμηνεύσουν τις δύο καταστάσεις, εστιάζοντας στη δομή εξηγώντας ότι το κοινό των δύο περιπτώσεων είναι η αναπαράσταση και πρόσθεση διαδοχικών στοιχείων-όρων (δείτε Διάγραμμα 4.12). Κανένας από τους μαθητές της τέταρτης ομάδας δεν εστίασε σε επιφανειακά χαρακτηριστικά και δεν εντόπισε σχέσεις μέσα από μια μεταβατική προσέγγιση τις οποίες δεν ήταν σε θέση να αιτιολογήσει. Μερικοί μαθητές της τέταρτης ομάδας χρειάστηκαν λίγο περισσότερο χρόνο να ερμηνεύσουν τη δεύτερη κατάσταση που αφορούσε διαδοχικές ημερομηνίες. Κατάφεραν, ωστόσο, να σκεφτούν όπως και οι περισσότεροι μαθητές της τρίτης ομάδας ότι στην πρώτη κατάσταση το «σ» δεν ήταν ο πιο μικρός όρος γιατί υπήρχε και το «σ-1», σε αντίθεση με τη δεύτερη κατάσταση όπου δεν υπήρχε το «πλην» άρα ο μικρός όρος έπρεπε να ήταν το «ν».

Χαρακτηριστικά μαθητών των τεσσάρων ομάδων ως προς την ικανότητα μεταβολής των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με την ανεξάρτητη (και συλλογισμός για τη μεταβολή)

Στον Πίνακα 4.45 παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι προσεγγίσεις των μαθητών στο έργο της συνέντευξης (ΕΑΣ 7) (δείτε Παράρτημα Ε) το οποίο παρουσιάζεται συμπληρωμένο στο Διάγραμμα 4.13 και αφορούσε στην ικανότητα μεταβολής των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με την ανεξάρτητη (και συλλογισμός για τη μεταβολή).



Διάγραμμα 4.13. Λύση μερικών μαθητών της τρίτης ομάδας (αριστερά) και χαρακτηριστική λύση των μαθητών της τέταρτης ομάδας (δεξιά) στο έργο ΕΑΣ 7 το οποίο χρησιμοποιήθηκε στις κλινικές συνεντεύξεις.

Οι μαθητές της πρώτης ομάδας εστίασαν στα επιφανειακά χαρακτηριστικά των δυο καταστάσεων υποστηρίζοντας ότι το κοινό τους στοιχείο υφίσταται στο ότι και στις δύο υπάρχει το αλγεβρικό σύμβολο Α και ότι και τα δυο εμπλέκουν αριθμό ατόμων και κάποιες πράξεις. Οι συγκεκριμένοι μαθητές δεν κατάφεραν να εντοπίσουν κάποιο άλλο κοινό μεταξύ των δύο καταστάσεων. Επιπρόσθετα, φάνηκε ότι δεν κατανόησαν τη δεύτερη κατάσταση στην οποία απαιτείται αντίληψη του συμβόλου ίσον ως προσδιορισμός. Ήδη από την πρώτη κατάσταση του έργου ΕΑΣ 7 μερικοί μαθητές της πρώτης ομάδας παρουσίασαν επίσης, την αντίληψη ότι στο αλγεβρικό σύμβολο Α και Κ αντιστοιχεί μια συγκεκριμένη τιμή.

Πίνακας 4.45

Προσεγγίσεις των Μαθητών των Τεσσάρων Ομάδων στο Έργο ΕΑΣ για την Ικανότητα Μεταβολής των Τιμών της Εξαρτημένης Μεταβλητής σε Σχέση με την Ανεξάρτητη (και Συλλογισμός για τη Μεταβολή)

Ομάδα 1	**Ομάδα 2**	**Ομάδα 3**	**Ομάδα 4**
		Επιφανειακή	
Και στις δυο περιπτώσεις υπάρχει το σύμβολο Α, αναφορά σε άτομα, σε πολύ κοντινούς αριθμούς (800 και 850).	Και στις δυο περιπτώσεις υπάρχει το σύμβολο Α, υπάρχει αναφορά σε άτομα, και υπάρχει μια πράξη + ή -.		
		Μεταβατική	
	Δοκιμάζουν κάποιες τιμές και στις δύο περιπτώσεις και αναφέρουν ότι η ομοιότητα των δύο καταστάσεων υφίσταται στο ότι μπορούμε να υπολογίσουμε διάφορες τιμές των δύο μεταβλητών.	Αναφέρουν ότι η ομοιότητα των δύο καταστάσεων υφίσταται στο ότι υπολογίζουμε διάφορες τιμές των δύο μεταβλητών. **Εξηγούν ότι και στις δύο περιπτώσεις καθώς αυξάνονται οι τιμές της μιας μεταβλητής, μειώνονται οι τιμές της δεύτερης, ωστόσο αιτιολογούν μόνο μέσα από αριθμητικά παραδείγματα.**	Δοκιμάζουν τιμές και στις δύο περιπτώσεις.
		Δομική	
		Εξηγούν ότι και στις δύο περιπτώσεις καθώς αυξάνονται οι τιμές της μιας μεταβλητής, μειώνονται οι τιμές της δεύτερης μεταβλητής και αιτιολογούν με βάση δομή των δύο κανόνων.	**Εξηγούν ότι και στις δύο περιπτώσεις καθώς αυξάνονται οι τιμές της μιας μεταβλητής, μειώνονται οι τιμές της δεύτερης και αιτιολογούν με βάση τη δομή των κανόνων.**

Οι μαθητές της δεύτερης ομάδας διαφοροποιούνται σε κάποιο βαθμό από τους μαθητές της πρώτης ομάδας. Η πλειοψηφία των μαθητών επικεντρώθηκε αρχικά σε επιφανειακά χαρακτηριστικά, όπως και οι μαθητές της πρώτης ομάδας. Παρόλα αυτά, όλοι οι μαθητές της δεύτερης ομάδας με εξαίρεση ελάχιστους, προχώρησαν πέρα από τα επιφανειακά χαρακτηριστικά. Προσπάθησαν να εξετάσουν τι συμβαίνει στην κάθε κατάσταση, έτσι προχώρησαν σε αντικατάσταση τιμών στους δύο κανόνες. Στην πρώτη κατάσταση μερικοί μαθητές αντικατέστησαν με επιτυχία τιμές για το Α και Κ, ενώ στη δεύτερη κατάσταση αντικατέστησαν τιμές στο Τ, αλλά οι περισσότεροι δεν κατέληξαν σε ορθά αποτελέσματα λόγω της θέσης του συμβόλου ίσον και της δυσκολίας τους να το κατανοήσουν. Παρόλα αυτά, υποστήριξαν ότι το κοινό των δύο καταστάσεων είναι το ότι μέσω της αντικατάστασης τιμών στη μία μεταβλητή εντοπίζουμε τις αντίστοιχες τιμές της δεύτερης μεταβλητής. Δεν κατάφεραν να καταλήξουν σε κάποιο άλλο συμπέρασμα. Ήταν κάπως αναμενόμενο να δυσκολευτούν στην αντικατάσταση τιμών στη δεύτερη κατάσταση, με κανόνα Α=800-(2×Τ) που απαιτούσε αντίληψη του ίσον ως προσδιορισμός. Από την άλλη, οι συγκεκριμένοι μαθητές είχαν ψηλό μέσο όρο με βάση την ποσοτική ανάλυση στα έργα μεταβολής τιμών της εξαρτημένης σε σχέση με την ανεξάρτητη σε γραφικές παραστάσεις (Vf1, Vf2) κάτι που συνάδει με την αντίληψη που επέδειξαν για ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών στην περίπτωση του απλού κανόνα «Α+Κ=850» του έργου ΕΑΣ7.

Παρόλα αυτά, παρά τη δυσκολία των μαθητών της δεύτερης ομάδας με την αντίληψη του συμβόλου ίσον ως προσδιορισμός, μερικοί μαθητές της δεύτερης ομάδας (επτά μαθητές) ενώ αρχικά δεν κατανοούσαν τη θέση του συμβόλου ίσον στον κανόνα «Α=800-(2×Τ)», στη συνέχεια αξιοποιώντας την πρώτη κατάσταση ερμήνευσαν τη δεύτερη κατάσταση και αντικατέστησαν με επιτυχία τις τιμές. Συγκεκριμένα, οι μαθητές λαμβάνοντας υπόψη την πρώτη κατάσταση άρχισαν να αντιμετωπίζουν και τη δεύτερη κατάσταση (Α=800-2Τ) ως «αντίστροφη» εξίσωση (800-2Τ=Α). Η αντίστροφη εξίσωση παραμένει συμβατή με τη διαδικαστική αντίληψη λόγω του ότι η «ανάκλασή της» οδηγεί στις τυπικές εξισώσεις της μορφής «α-β=γ». Επομένως, οι συγκεκριμένοι μαθητές κατάφεραν με αυτό τον τρόπο να αντιμετωπίσουν ορθά το σύμβολο ίσον, ξεφεύγοντας από την περιορισμένη αντίληψη του ίσον ως «ακολουθεί το αποτέλεσμα». Ωστόσο, παρά την επιτυχημένη προσπάθεια αντικατάστασης και στο δεύτερο κανόνα «Α=800-(2×Τ)», οι συγκεκριμένοι μαθητές της δεύτερης ομάδας δεν κατάφεραν να καταλήξουν στο συμπέρασμα για τη σχέση μεταβολής των δύο μεταβλητών (π.χ. καθώς αυξάνονται οι τιμές της μιας μεταβλητής, μειώνονται οι τιμές της δεύτερης). Το ότι παρέμειναν απλά στο συμπέρασμα ότι κοινό των δύο καταστάσεων αποτελεί το ότι «αντικαθιστούμε και στις δύο περιπτώσεις τιμές στη μία μεταβλητή για να υπολογίσουμε την άλλη», συνάδει με τα αποτελέσματα του γραπτού δοκιμίου αλγεβρικής σκέψης. Συγκεκριμένα, οι μαθητές της δεύτερης ομάδας στο δοκίμιο φάνηκε ότι μπορούσαν να συλλογίζονται για τον τρόπο μεταβολής των δύο μεταβλητών μόνο στην περίπτωση γραφικών παραστάσεων (Vf1, Vf2) όπου η σχέση μεταβολής ήταν πιο εμφανής, ενώ δυσκολεύτηκαν στο συλλογισμό για τη σχέση μεταβολής των μεταβλητών με βάση κανόνες (αλγεβρικούς ή λεκτικούς) όπου η μεταβολή δεν είναι τόσο εμφανής αλλά απαιτείται από το μαθητή να την εντοπίσει. Χαρακτηριστικό απόσπασμα από τη συνέντευξη με ένα μαθητή της δεύτερης ομάδας της Ε΄ δημοτικού ο οποίος κατά τη διάρκεια της συνέντευξης βελτίωσε την αντίληψη του για το σύμβολο ίσον και προχώρησε από την επιφανειακή προσέγγιση σε μεταβατική στο έργο ΕΑΣ 7, είναι το εξής:

Ε: Ψάχνουμε τι αντίστοιχο συμβαίνει στην πρώτη κατάσταση που συμβαίνει και στη δεύτερη.

Μ: Ναι… βασικά βλέπω ότι στην πρώτη περίπτωση μας λέει ότι κορίτσια συν αγόρια ισούνται με 850.

Ε: Άρα τι μπορείς να συμπεράνεις με βάση αυτό;

Μ: Εμ… μπορώ να πω ότι αν τα κορίτσια είναι 500 τα αγόρια είναι 350…

Ε: Γιατί χρησιμοποίησες τους συγκεκριμένους αριθμούς;

Μ: Δεν ξέρω τυχαία, μπορώ να βάλω άλλους οτιδήποτε.

Ε: Δηλαδή;

Μ: Μπορεί τα κορίτσια να είναι 200 και τα αγόρια 650.

Ε: Δηλαδή τι ακριβώς κάνεις;

Μ: Βάζω αριθμούς για το ένα πράγμα που δεν ξέρω και βρίσκω το άλλο.

Ε: Τι αντίστοιχο συμβαίνει στη δεύτερη περίπτωση;

Μ: Πάλι μας δίνει πράξεις και σύμβολα που δεν ξέρουμε ποιος αριθμός είναι το καθένα.

Ε: Τι μπορείς να κάνεις σε αυτή την περίπτωση;

Μ: Πάλι βάζω αριθμούς για το ένα από τα δύο που δεν ξέρω για να βρω το άλλο.

Ε: Δηλαδή πες μου αν μπορείς τι θα κάνεις ακριβώς στη δεύτερη κατάσταση.

Μ: Είναι λίγο πιο δύσκολη, επειδή λέει Α=800 και μετά όμως από το 800 συνεχίζει και το -2Τ.

Ε: Πώς θα υπολογίσεις τις τιμές σε αυτή την περίπτωση;

Μ: Βασικά φαίνεται να έχει Α=800, άρα ίσως το Α είναι 800.

Ε: Άρα δεν θα αλλάζει το Α;

Μ: Βασικά επειδή έχει και το -2Τ που και αυτό πρέπει να έχει κάποια σημασία λογικά θα εννοεί από το 800 να αφαιρώ δύο φορές το Τ.

Ε: Και γιατί να κάνει 800 πλην δύο φορές το Τ;

Μ: Εμ… [σκέφτεται] για να υπολογίζω πόσο είναι το Α;

Ε: Πώς το σκέφτηκες;

Μ: Εμ…. μου μοιάζει λίγο ανάποδη η εξίσωση, το Α= νομίζω θα έπρεπε να ήταν στο τέλος, εννοώ μπορεί να ήταν 800-2×Τ =Α. Έτσι με την πράξη που κάνω 800-2Τ υπολογίζω το Α.

Ε: Πώς κατέληξες σε αυτό το συμπέρασμα;

Μ: Θυμίζει λίγο την πρώτη κατάσταση «Α+Κ=850», όπου στη μια μεριά του ίσον έχει μόνο ένα στοιχείο, απλά στη δεύτερη κατάσταση το στοιχείο αυτό αντί να είναι στα δεξιά μόνο του, βρίσκεται στα αριστερά.

Ε: Τι θα κάνεις λοιπόν σε αυτή την περίπτωση;

Μ: Ότι έκανα και στην πρώτη κατάσταση, απλά τώρα θα κάνω την πράξη που είναι αριστερά από το ίσον και θα βρω το αποτέλεσμα που βρίσκεται δεξιά από το ίσον. Παράδειγμα, αν το Τ είναι 50 τότε το Α=800-100 άρα Α=700.

Ε: Υπάρχει κάποιος λόγος που επέλεξες το Τ να είναι 50;

Μ: Όχι τυχαία, θα βάλω και άλλους αριθμούς. Αν το Τ είναι 100 το Α είναι 600.

Ε: Τι κοινό έχουν λοιπόν οι δύο καταστάσεις;

Μ: Και στις δύο περιπτώσεις αντικαθιστούμε τιμές για τη μια μεταβλητή και υπολογίζουμε έτσι την άλλη μεταβλητή.

Οι μαθητές της τρίτης ομάδας διαφοροποιούνται σε μεγάλο βαθμό από τους μαθητές της δεύτερης ομάδας. Κανένας από τους μαθητές της τρίτης ομάδας δεν ανέφερε ως κοινό των δύο καταστάσεων κάποιο επιφανειακό χαρακτηριστικό. Οι μαθητές της τρίτης ομάδας αντικαθιστούσαν τιμές στους δύο κανόνες στη μια μεταβλητή υπολογίζοντας με επιτυχία την αντίστοιχη τιμή της δεύτερης μεταβλητής. Η πλειοψηφία των μαθητών ανέφεραν ως συμπέρασμα ότι το κοινό των δύο καταστάσεων είναι το ότι καθώς αυξάνονται οι τιμές της μιας μεταβλητής μειώνονται οι τιμές της δεύτερης μεταβλητής (δείτε Διάγραμμα 4.13). Οι περισσότεροι μαθητές όταν κλήθηκαν να εξηγήσουν το συμπέρασμά που προαναφέρθηκε πέρα από τα αριθμητικά παραδείγματα, δεν το έκαναν και επικαλέστηκαν τα αριθμητικά παραδείγματα. Λιγότεροι μαθητές αιτιολόγησαν πέρα από τα αριθμητικά παραδείγματα και προχώρησαν σε ερμηνεία των ίδιων των κανόνων, εξηγώντας ότι και στις δύο περιπτώσεις αφαιρούμε ουσιαστικά από το 850 ή το 800 την τιμή της μιας μεταβλητής (π.χ. αριθμό αγοριών ή κοριτσιών στη μια περίπτωση, την τιμή του παιχνιδιού στη δεύτερη κατάσταση). Ελάχιστοι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας, μετά την επιτυχημένη αντικατάσταση τιμών στους κανόνες ανέφεραν απλά ως κοινό των δύο καταστάσεων το ότι και στις δύο περιπτώσεις μπορούμε να δίνουμε τιμές στη μια μεταβλητή για να υπολογίζουμε τη δεύτερη και δεν κατάφεραν να εστιάσουν στη δομή των δύο καταστάσεων και να αναφερθούν στη σχέση μεταβολής των δύο μεταβλητών, παραμένοντας τελικά σε μεταβατική προσέγγιση.

Οι μαθητές της τέταρτης ομάδας παρουσίασαν παρόμοια συμπεριφορά με τους μαθητές της τρίτης ομάδας, ωστόσο, όλοι οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας κατάφεραν να αιτιολογήσουν τη σχέση μεταβολής των δύο μεταβλητών που εντόπισαν με βάση την ερμηνεία των κανόνων (πέρα από τα αριθμητικά παραδείγματα). Οι περισσότεροι μαθητές αντικατέστησαν κάποιες τιμές στους δύο κανόνες με επιτυχία, αλλά πολύ σύντομα σταμάτησαν να σχολιάζουν συγκεκριμένες τιμές και επικεντρώθηκαν στους ίδιους τους αλγεβρικούς κανόνες, εξηγώντας ότι και στους δύο φαίνεται ότι καθώς αυξάνεται η τιμή της μιας μεταβλητής οι τιμές της δεύτερης θα μειώνονται. Οι μαθητές εξήγησαν ότι οι δυο κανόνες φαίνεται εξ αρχής ότι μοιάζουν, αφού στην πρώτη περίπτωση για να εντοπίσω την τιμή των αγοριών αφαιρώ τον αριθμό των κοριτσιών από το 850 και στη δεύτερη περίπτωση αφαιρώ κάτι από το 800 (τη διπλάσια τιμή) για να βρω την άλλη μεταβλητή (τον αριθμό ατόμων). Κατέληξαν μετά από αυτές τις παρατηρήσεις στο συμπέρασμα ότι και στις δύο καταστάσεις καθώς αυξάνονται οι τιμές της μιας μεταβλητής μειώνονται οι τιμές της άλλης (δείτε Διάγραμμα 4.13). Επεξήγησαν επίσης, το συμπέρασμα με φράσεις όπως «είναι ξεκάθαρο ότι καθώς αυξάνουμε το Τ, θα μειώνεται το Α μιας και αφαιρούμε περισσότερα από το 800». Αξίζει να σημειωθεί ότι υπήρχαν και μαθητές οι οποίοι σχολίασαν και ερμήνευσαν απευθείας τους ίδιους τους κανόνες, καταλήγοντας στα συμπεράσματα που προαναφέρθηκαν, χωρίς να ανατρέξουν σε αριθμητικά παραδείγματα.

Σύνοψη των προσεγγίσεων των τεσσάρων ομάδων υποκειμένων στα έργα ΕΑΣ

Στον Πίνακα 4.46 παρουσιάζεται μια σύνοψη του βαθμού στον οποίο υιοθετήθηκαν οι τρεις προσεγγίσεις από τις τέσσερις ομάδες υποκειμένων. Ο συγκεκριμένος πίνακας αφορά στις τελικές προσεγγίσεις που υιοθέτησαν οι μαθητές των ομάδων. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές των τεσσάρων ομάδων κατά την αρχική επεξεργασία των έργων εμφάνιζαν μια προσέγγιση, αλλά στη συνέχεια κατέληγαν σε μια άλλη προσέγγιση υψηλότερου επιπέδου. Στον συγκεκριμένο πίνακα, αναφερόμαστε στην τελική προσέγγιση των μαθητών η οποία δείχνει και το μέχρι πού κατάφεραν να φτάσουν οι συγκεκριμένοι μαθητές και η οποία καθόρισε την τελική απάντηση των μαθητών στα έργα ΕΑΣ..

Όπως φαίνεται και στον Πίνακα 4.46, οι μαθητές της τέταρτης ομάδας υιοθέτησαν κυρίως μια δομική προσέγγιση για την επίλυση των έργων ΕΑΣ σε αντίθεση με τους μαθητές της πρώτης ομάδας οι οποίοι υιοθέτησαν κυρίως μια επιφανειακή προσέγγιση. Οι μαθητές της τέταρτης ομάδας ήταν αυτοί με την μεγαλύτερη επιτυχία και στο γραπτό δοκίμιο του γενικού αναλογικού συλλογισμού. Όπως φαίνεται, οι συγκεκριμένοι μαθητές οι οποίοι εφάρμοσαν αναλογικό συλλογισμό σε έργα με μη μαθηματικό/αλγεβρικό περιεχόμενο εφάρμοσαν αναλογικό συλλογισμό και στα έργα αναλογικού συλλογισμού με αλγεβρικό περιεχόμενο (ΕΑΣ). Κανένας από τους μαθητές της τέταρτης ομάδας δεν υποστήριξε σε καμία στιγμή της συνέντευξης ως κοινό δυο καταστάσεων κάποιο επιφανειακό χαρακτηριστικό, παρόλο που στα έργα ΕΑΣ υπήρχαν και ομοιότητες σε επιφανειακά στοιχεία. Από την άλλη, οι μαθητές της πρώτης ομάδας οι οποίοι είχαν το χαμηλότερο μέσο όρο στο δοκίμιο γενικού αναλογικού συλλογισμού, στα έργα αναλογικού συλλογισμού με μαθηματικό περιεχόμενο (ΕΑΣ) δεν κατάφεραν να ανταποκριθούν και εστίασαν σε επιφανειακά χαρακτηριστικά. Όλοι σχεδόν οι μαθητές της πρώτης ομάδας, υποστήριξαν ως κοινό των καταστάσεων στα έργα ΕΑΣ κάποιο επιφανειακό χαρακτηριστικό. Μόνο ελάχιστοι μαθητές κατάφεραν να προχωρήσουν λίγο πέρα από τα επιφανειακά χαρακτηριστικά και να υιοθετήσουν μια μεταβατική προσέγγιση.

Οι μαθητές της δεύτερης ομάδας και της τρίτης ομάδας υιοθέτησαν κυρίως μια μεταβατική προσέγγιση, με τους μαθητές της δεύτερης ομάδας, ωστόσο, να εμφανίζουν σε κάποιο βαθμό και επιφανειακή προσέγγιση, ενώ τους μαθητές της τρίτης ομάδας να εμφανίζουν σε κάποιο βαθμό και δομική προσέγγιση. Αξίζει να σημειωθεί ότι σχεδόν κανένας μαθητής της τρίτης ομάδας δεν επικεντρώθηκε σε επιφανειακά χαρακτηριστικά των καταστάσεων των έργων ΕΑΣ. Η διαφοροποίηση ως προς την προσέγγιση που υιοθέτησαν οι μαθητές των τεσσάρων ομάδων συνάδει με τα αποτελέσματα για τις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης και γενικού αναλογικού συλλογισμού που εμφάνισαν στην ποσοτική ανάλυση (στα αρχικά δοκίμια).

Πίνακας 4.46

Τελικές Προσεγγίσεις που Υιοθέτησαν οι Μαθητές των Τεσσάρων Ομάδων στην Επίλυση των Έργων ΕΑΣ

	Επιφανειακή προσέγγιση	Μεταβατική προσέγγιση	Δομική προσέγγιση
Ομάδα 1	+	-	×
Ομάδα 2	=	+	-
Ομάδα 3	×	+	=
Ομάδα 4	×	-	+

Σημείωση. «+»: Εμφανίστηκε σε μεγάλο βαθμό, «=»: Εμφανίστηκε σε ουδέτερο βαθμό, «-»: Εμφανίστηκε ελάχιστα, «×»:Δεν εμφανίστηκε καθόλου. Τρόπος παρουσίασης ποιοτικών δεδομένων ο οποίος προτείνεται στους Miles και Huberan (1994).

Σύνοψη της βελτίωσης που επέδειξαν οι μαθητές των τεσσάρων ομάδων κατά τη διάρκεια της επίλυσης των έργων ΕΑΣ

Παρόλα αυτά, όπως προαναφέρθηκε και παρουσιάστηκε μέσα από χαρακτηριστικά αποσπάσματα συνεντεύξεων με τους μαθητές των τεσσάρων ομάδων, τα συγκεκριμένα έργα ΕΑΣ φάνηκε ότι βοήθησαν μερικούς μαθητές να εμφανίσουν βελτιωμένη επίδοση σε κάποιες ικανότητες. Συγκεκριμένα, βοήθησαν σε μερικές περιπτώσεις τους μαθητές κυρίως της δεύτερης και της τρίτης ομάδας, να επιδείξουν βελτιωμένη επίδοση σε μια ικανότητα ή σε ένα συγκεκριμένο έργο στα οποία με βάση την ποσοτική ανάλυση (από το γραπτό δοκίμιο) παρουσίαζε ψηλή επίδοση η αμέσως επόμενη ομάδα μαθητών από αυτούς. Για τη μελέτη του ποιοι μαθητές παρουσίασαν βελτίωση, λήφθηκαν υπόψη (α) οι μαθητές οι οποίοι έδειξαν ή δήλωσαν αρχικά στη συνέντευξη κάποια δυσκολία για κάποια κατάσταση του έργου ΕΑΣ, αλλά διευκρίνισαν στην πορεία (και φάνηκε) ότι αξιοποίησαν τη μια κατάσταση του ΕΑΣ για να ξεπεράσουν τις δυσκολίες τους στη δεύτερη κατάσταση και (β) μαθητές που παρουσίασαν λάθη, ωστόσο, φάνηκε στην πορεία της συνέντευξης να αξιοποιούν την πρώτη κατάσταση του έργου ΕΑΣ για την ερμηνεία της δεύτερης κατάστασης διορθώνοντας το λάθος τους, επιδεικνύοντας τελικά βελτιωμένη επίδοση στη συγκεκριμένη ικανότητα.

Αξίζει να σημειωθεί ότι τα λάθη και οι δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι μαθητές των ομάδων σε μερικές καταστάσεις των έργων ΕΑΣ συνάδουν με τα αποτελέσματα της ποσοτικής ανάλυσης μιας και οι μαθητές των ομάδων αυτών αντιμετώπισαν τις ίδιες δυσκολίες και στο δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης (στις περιπτώσεις που παρόμοια κατάσταση με το έργο ΕΑΣ περιλαμβανόταν και στο δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης). Με αυτό τον τρόπο επιβεβαιώθηκε κατά κάποιο τρόπο το λάθος των μαθητών σε δύο αξιολογήσεις (γραπτό δοκίμιο και συνέντευξη), κάτι που επέτρεψε τελικά να εξεταστεί κατά πόσο η διαδικασία της συνέντευξης με το έργο ΕΑΣ ήταν αυτό που βοήθησε το μαθητή να επιδείξει βελτιωμένη επίδοση.

Στον Πίνακα 4.47 παρουσιάζεται η σχετική βελτίωση που επέδειξαν οι μαθητές των ομάδων στις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης κατά την επίλυση των έργων ΕΑΣ κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων (αλλά όπως φαίνεται και σε σχέση με την επίδοση που επέδειξαν στο δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης). Τα έργα ΕΑΣ φάνηκε ότι βοήθησαν σε μεγαλύτερο βαθμό τους μαθητές της τρίτης ομάδας και τους μαθητές της δεύτερης ομάδας, σε μικρότερο βαθμό τους μαθητές της τέταρτης ομάδας, ενώ δεν βοήθησαν καθόλου τους μαθητές της πρώτης ομάδας.

Οι μαθητές της δεύτερης ομάδας, κατά την επίλυση των έργων ΕΑΣ 1 και ΕΑΣ 7, έδειξαν να διορθώνουν την περιορισμένη αντίληψη του ίσον ως «ακολουθεί το αποτέλεσμα» και να αντιμετωπίζουν το ίσον τόσο ως ισοδυναμία ποσοτήτων (ΕΑΣ1) (εννιά μαθητές) και ως προσδιορισμό (ΕΑΣ 7) (επτά μαθητές). Αξίζει να σημειωθεί ότι οι επτά μαθητές ήταν κοινοί και στις δύο περιπτώσεις, δηλαδή επέδειξαν βελτίωση της αντίληψης του ίσον και στο έργο ΕΑΣ 1 και στο έργο ΕΑΣ 7. Επιπρόσθετα, μερικοί μαθητές της δεύτερης ομάδας (οκτώ μαθητές) επέδειξαν βελτίωση στο έργο ΕΑΣ 3 για την επίλυση συστήματος δύο εξισώσεων όπου αξιοποιώντας την πρώτη κατάσταση ανέπτυξαν αντίληψη του ότι πρέπει να εντοπίσουν τιμές για τα αλγεβρικά σύμβολα οι οποίες να ικανοποιούν και τις δύο εξισώσεις ταυτόχρονα. Παρόλα αυτά, εντόπισαν τις τιμές μέσω δοκιμής και ελέγχου και δεν προχώρησαν σε μια δοκιμή προσέγγιση. Από τους οκτώ μαθητές που επέδειξαν τη βελτίωση που προαναφέρθηκε στο έργο ΕΑΣ 3, οι πέντε μαθητές ήταν οι ίδιοι πέντε μαθητές από τους επτά μαθητές της δεύτερης ομάδας οι οποίοι βελτίωσαν την αντίληψη τους για το σύμβολο ίσον στα έργα ΕΑΣ 1 και ΕΑΣ 7.

Μερικοί μαθητές της τρίτης ομάδας επέδειξαν βελτίωση: (α) στο έργο ΕΑΣ 2 για τη γενίκευση μοτίβων συμμεταβολής (έξι μαθητές) όπου κατάφεραν από την αποσπασματική εστίαση της προσοχής στη δομή του μοτίβου (3ν) να καταλήξουν στο γενικευμένο κανόνα (3ν+1), επιδεικνύοντας πλήρη εστίαση της προσοχής στη δομή του μοτίβου, (β) στο έργο ΕΑΣ 3 για την ικανότητα αντίληψης και εύρεσης της τιμής του αγνώστου (πέντε μαθητές) όπου κατάφεραν να εστιάσουν στη δομή των καταστάσεων και να εντοπίσουν ότι μέσω της αφαίρεσης αντίστοιχων μελών των δύο εξισώσεων ή συνόλων οδηγούνται σε απλοποίηση της κατάστασης για την πιο εύκολη εύρεση των τιμών των αγνώστων, (γ) στο έργο ΕΑΣ 6 για τη μοντελοποίηση σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων (τέσσερις μαθητές), όπου κατάφεραν να εστιάσουν στη δομή των δύο καταστάσεων και να επιδείξουν αντίληψη της αξιοποίησης ενός συμβόλου για αναπαράσταση τεσσάρων διαδοχικών στοιχείων-ποσοτήτων και (δ) αρκετοί μαθητές της τρίτης ομάδας (δεκατέσσερις μαθητές) επέδειξαν βελτίωση στο έργο ΕΑΣ 4 για γενίκευση ιδιοτήτων των πράξεων και απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων, όπου από την αντικατάσταση τιμών για τον έλεγχο μιας ισότητας με αλγεβρικό σύμβολο, οδηγήθηκαν στο συμπέρασμα ότι κάποιος είναι δυνατό να εκτελεί πράξεις με αλγεβρικά σύμβολα απευθείας χωρίς ανάγκη αντικατάστασης. Αξίζει να σημειωθεί ότι από τους μαθητές της τρίτης ομάδας οι οποίοι προαναφερθήκαν και επέδειξαν βελτίωση σε κάποιο έργο ΕΑΣ, μόνο τέσσερις μαθητές ήταν κοινοί σε όλες τις περιπτώσεις και επέδειξαν βελτίωση και στα τέσσερα έργα ΕΑΣ.

Οι μαθητές της τέταρτης ομάδας λόγω της ψηλής τους επίδοσης γενικότερα δεν είναι δυνατό να ειπωθεί ότι παρουσίασαν βελτίωση στα έργα ΕΑΣ, ωστόσο, τα συγκεκριμένα έργα τους βοήθησαν ίσως σε κάποιες περιπτώσεις να επιδείξουν ακόμη πιο πολλές ικανότητες σε κάποιες νέες καταστάσεις. Η μόνη περίπτωση στην οποία οι μαθητές της τέταρτης ομάδας φάνηκε να επωφελούνται από το έργο ΕΑΣ ήταν στην περίπτωση της γενίκευσης ιδιοτήτων των αριθμών όπου σχεδόν όλοι οι μαθητές (18 μαθητές) διευκρίνισαν ότι αυτό που τους βοήθησε να αιτιολογήσουν την απάντησή τους στη δεύτερη κατάσταση ήταν η πρώτη κατάσταση. Κατάφεραν επομένως από αιτιολόγηση του γιατί η «πρόσθεση ενός αριθμού με τον εαυτό του» δίνει άρτιο αριθμό αποτέλεσμα, να μεταβούν στο γιατί «περιττός επί άρτιος» δίνει άρτιο αριθμό ως αποτέλεσμα.

Πίνακας 4.47

Συχνότητες και Ποσοστά των Μαθητών των Τεσσάρων Ομάδων οι οποίοι Επέδειξαν Βελτίωση στην Επίδοση τους Κατά τη Διάρκεια των Συνεντεύξεων στην Επίλυση των Έργων ΕΑΣ

	Ομάδα 1		Ομάδα 2		Ομάδα 3		Ομάδα 4	
	N	%	N	%	N	%	N	%
ΕΑΣ 1: Γενίκευση ιδιοτήτων της ισότητας								
Από την αντίληψη για το σύμβολο «=» ως «ακολουθεί το αποτέλεσμα» στην αντίληψη ως «σχέση ισοδυναμίας»	-	-	9	30%	-	-	-	-

ΕΑΣ 2: Γενίκευση μοτίβων συμμεταβολής Από το 3ν στον εντοπισμό του γενικού κανόνα 3ν+1.	-	-	-	-	6	24%	-	-
ΕΑΣ 3: Αντίληψη και εύρεση της τιμής του αγνώστου (σύστημα εξισώσεων) Αντίληψη του ότι και οι δύο εξισώσεις πρέπει να ικανοποιούνται ταυτόχρονα	-	-	8	27%	-	-	-	-
Απλοποίηση της κατάστασης για εύρεση της τιμής των αγνώστων μέσω της αφαίρεσης των μελών των δύο εξισώσεων	-	-	-	-	5	20%	-	-
ΕΑΣ 4: Γενίκευση ιδιοτήτων των πράξεων και Απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων Από την αντικατάσταση τιμών σε ισότητα με αλγεβρικό σύμβολο, στην αντίληψη του ότι εκτελούνται πράξεις με αλγεβρικά σύμβολα, χωρίς ανάγκη αντικατάστασης	-	-	-	-	14	56%	-	-
ΕΑΣ 5:Γενίκευση ιδιοτήτων των αριθμών Από αιτιολόγηση του γιατί το α+α δίνει άρτιο αριθμό αποτέλεσμα, στο γιατί το «περιττός επί άρτιος» δίνει άρτιο αριθμό ως αποτέλεσμα	-	-	-	-	-	-	18	90%
ΕΑΣ 6: Μοντελοποίηση σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων Βελτίωση της αντίληψης του ότι μέσω ενός συμβόλου μπορώ να αναπαραστήσω διαδοχικούς αριθμούς	-	-	-	-	4	16%	-	-
ΕΑΣ 7: Μεταβολή των τιμών της εξαρτημένης σε σχέση με την ανεξάρτητη Από την αντίληψη του «=» ως «ακολουθεί το αποτέλεσμα» στην αντίληψή του ως «προσδιορισμός», σε εξισώσεις τη μορφής α=β-γ	-	-	7	23%	-	-	-	-

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Εισαγωγή

Η προσπάθεια ανάπτυξης της αλγεβρικής σκέψης από τις μικρότερες τάξεις προετοιμάζει καλύτερα τους μαθητές για τα μαθηματικά που θα συναντήσουν αργότερα και τους βοηθά να έχουν μελλοντικά περισσότερες επαγγελματικές επιλογές (π.χ. Kieran, 1992) αφού η άλγεβρα είναι σημαντική ή απαραίτητη σε πολλά επαγγέλματα. Το αυξανόμενο ενδιαφέρον την τελευταία δεκαετία (Cai & Knuth, 2011) για τη διερεύνηση, περιγραφή και ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης από την πρωτοβάθμια εκπαίδευση, αρχίζει να παρέχει την απαραίτητη βάση για το συγκεκριμένο ερευνητικό πεδίο (Papic, Mulligan & Mitchelmore, 2011). Αρκετές έρευνες, έχουν επικεντρωθεί στη μελέτη των ικανοτήτων των μικρότερων ηλικιακά μαθητών σε σχέση με διάφορες πτυχές της αλγεβρικής σκέψης (Blanton & Kaput, 2011; Carpenter et al., 2005; Matthews et al., 2012; Moss & McNab, 2011; Lannin, 2005; Radford, 2008; Warren & Cooper, 2008), ενώ μερικές έρευνες έχουν εστιάσει στην περιγραφή της ανάπτυξης συγκεκριμένων ικανοτήτων αλγεβρικής σκέψης ή αλγεβρικών εννοιών από μέρους των μαθητών (Kamol & Ban Har, 2010; Lim & Noraini Idris, 2006; Lim & Wun, 2012; Pegg & Tall, 2002). Δεν εντοπίζονται, ωστόσο, εργασίες για την ολοκληρωμένη περιγραφή της δομής και της ανάπτυξης της αλγεβρικής σκέψης.

Ελάχιστες έρευνες επίσης, αποσκοπούσαν στη διερεύνηση των διαδικασιών συλλογισμού στις οποίες οφείλεται η επιτυχία ή η αποτυχία των μαθητών στα έργα αλγεβρικής σκέψης. Η διαδικασία συλλογισμού η οποία φαίνεται να συνδέεται με την ικανότητας αλγεβρικής σκέψης και σχετίζεται άμεσα με τον εντοπισμό συσχεσιακών μοτίβων και την εστίαση της προσοχής στη δομή είναι ο αναλογικός συλλογισμός. Οι λίγες έρευνες που έχουν εστιάσει στη σχέση αναλογικού συλλογισμού και αλγεβρικής σκέψης (English & Warren, 1997; Warren, 1997) ή στη σημασία του αναλογικού συλλογισμού για την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης (English & Sharry, 1996), παρέχουν στοιχεία τα οποία αναδεικνύουν τη σημασία αυτής της σχέσης, αλλά παράλληλα καθιστούν αναγκαία την περαιτέρω διερεύνησή της με έναν πιο συστηματικό τρόπο.

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν η ανάπτυξη ενός ολοκληρωμένου θεωρητικού μοντέλου για τη φύση και την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης μαθητών δέκα έως δεκατριών ετών, το οποίο θα αναφέρεται στις διαφορετικές ικανότητες της αλγεβρικής σκέψης, στις μεταξύ τους σχέσεις, σε ομάδες διαφορετικής συμπεριφοράς και επίδοσης ως προς την ικανότητα αλγεβρικής σκέψης και επίσης θα ενσωματώνει τη σχέση μεταξύ αλγεβρικής σκέψης και του αναλογικού συλλογισμού στα διαφορετικά πλαίσια. Οι συγκεκριμένοι στόχοι της παρούσας εργασίας ήταν (α) η διερεύνηση των στοιχείων που απαρτίζουν την ικανότητα αλγεβρικής σκέψης και της δομής της συγκεκριμένης ικανότητας, (β) η διερεύνηση της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης των μαθητών, (γ) ο εντοπισμός και η περιγραφή ομάδων μαθητών διαφορετικής συμπεριφοράς και επίδοσης στα έργα αλγεβρικής σκέψης, (δ) η διερεύνηση της σχέσης μεταξύ αλγεβρικής σκέψης και αναλογικού συλλογισμού σε διαφορετικά πλαίσια και (ε) η διερεύνηση των προσεγγίσεων αναλογικού συλλογισμού των μαθητών διαφορετικών ομάδων (με βάση την ικανότητα αλγεβρικής σκέψης) στην επίλυση των έργων «Αναλογικού Συλλογισμού Αλγεβρικής Σκέψης» (ΕΑΣ), καθώς και η διερεύνηση του ενδεχομένου εμφάνισης στοιχείων βελτίωσης στην επίδοση των μαθητών κατά τη διάρκεια επίλυσης των συγκεκριμένων έργων. Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο παρουσιάζεται η συζήτηση των αποτελεσμάτων που αφορούν στο σκοπό και στους στόχους της εργασίας.

Η Δομή της Ικανότητας Αλγεβρικής Σκέψης

Από τα αποτελέσματα της εργασίας προκύπτει ότι η ικανότητα αλγεβρικής σκέψης των μαθητών αναλύεται στους εξής τρεις παράγοντες: (α) ικανότητα συλλογισμού για την ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών, (β) ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων από την αριθμητική και (γ) ικανότητες άμεσα συνυφασμένες με την αλγεβρική σύνταξη. Ο πρώτος παράγοντας (ικανότητα συλλογισμού για την ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών) αναφέρεται στην ικανότητα επίλυσης έργων τα οποία εμπλέκουν γενίκευση, μελέτη ή αναπαράσταση της ταυτόχρονης μεταβολής δύο μεταβλητών. Ο δεύτερος παράγοντας (γενίκευσης ιδιοτήτων από την αριθμητική) αφορά στην ικανότητα επίλυσης έργων όπου απαιτείται γενίκευση, συλλογισμός και αιτιολόγηση για ιδιότητες από την αριθμητική. Ο τρίτος παράγοντας (ικανότητες άμεσα συνυφασμένες με την αλγεβρική σύνταξη) αφορά στην επίλυση έργων μέσα από κάποια ικανότητα η οποία εμπλέκει απαραίτητα την αντίληψη και τη χρήση της αλγεβρικής σύνταξης και την ορθή ερμηνεία των αλγεβρικών συμβόλων (π.χ. ως άγνωστος ή ως γενικευμένος αριθμός).

Καθένας από τους τρεις παράγοντες που αναφέρονται στην ικανότητα αλγεβρικής σκέψης αναλύονται περισσότερο σε συγκεκριμένες ικανότητες. Συγκεκριμένα, η ικανότητα συλλογισμού για την ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών αναλύεται στον παράγοντα «ικανότητα γενίκευσης μοτίβων συμμεταβολής» και στον παράγοντα «μεταβολή των τιμών της εξαρτημένης σε σχέση με την ανεξάρτητη μεταβλητή και συλλογισμός για τη σχέση μεταβολής των δύο μεταβλητών». Η ικανότητα γενίκευσης μοτίβων για τη συμμεταβολή αναφέρεται στην ικανότητα εντοπισμού και περιγραφής μέσω λεκτικών εκφράσεων του κανόνα για τη σχέση των δύο μεταβλητών που μεταβάλλονται ταυτόχρονα, είτε σε έργα με εικονικά αναπτυσσόμενα μοτίβα είτε σε έργα με πίνακες και τιμές (input/output). Η ικανότητα μεταβολής των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με την ανεξάρτητη μεταβλητή και ο συλλογισμός για τη σχέση μεταβολής, αναφέρεται στην ικανότητα υπολογισμού των αντίστοιχων τιμών της εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής με βάση ένα λεκτικά ή αλγεβρικά διατυπωμένο κανόνα, στην αναπαράσταση της μεταβολής μέσω γραφικών παραστάσεων και στο συλλογισμό και επεξήγηση της σχέσης με την οποία μεταβάλλονται οι δύο μεταβλητές.

Ο δεύτερος παράγοντας για την ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων από την αριθμητική αναλύεται σε τρεις παράγοντες: στην ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων των πράξεων, στην ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων των αριθμών και στην ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων της ισότητας. Συγκεκριμένα, η ικανότητα γενίκευσης των ιδιοτήτων των πράξεων αναφέρεται στην ικανότητα επίλυσης έργων όπου κάποιος χρειάζεται να καταλήξει σε γενικεύσεις και σε αναφορά και επεξήγηση κάποιας ιδιότητας των πράξεων (π.χ. αντιμεταθετική, επιμεριστική, το πολλαπλασιαστικό και προσθετικό αντίστροφο κλπ.). Η ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων των αριθμών αφορά στην επίλυση έργων όπου χρειάζεται γενίκευση και αιτιολόγηση της γενίκευσης για τις ιδιότητες των αριθμών (π.χ. ιδιότητες άρτιων και περιττών αριθμών). Η ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων της ισότητας αναφέρεται στην ικανότητα επίλυσης έργων όπου απαιτείται απαραίτητα γενίκευση και συλλογισμός για τις ιδιότητες της ισότητας (π.χ. εκτέλεση ίδιας πράξης και στα δύο μέλη της ισότητας ώστε να διατηρείται η ισότητα, συμμετρική, ανακλαστική και μεταβατική ιδιότητα της ισότητας, μεταβατική ιδιότητα της ανισότητας).

Ο τρίτος παράγοντας ικανότητες άμεσα συνυφασμένες με την αλγεβρική σύνταξη αναλύεται στην ικανότητα αντίληψης και εύρεσης της τιμής του αγνώστου, στην ικανότητα μοντελοποίησης σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων και στην ικανότητα απλοποίησης αλγεβρικών εκφράσεων. Συγκεκριμένα, η ικανότητα αντίληψης και εύρεσης της τιμής του αγνώστου αναφέρεται στην ικανότητα εύρεσης της τιμής του αγνώστου σε αλγεβρικές εξισώσεις (με τον άγνωστο ή στο ένα μέλος της εξίσωσης ή και στα δύο) με οποιοδήποτε τρόπο ή στρατηγική. Η ικανότητα μοντελοποίησης σχέσεων μέσω αλγεβρικών εκφράσεων αναφέρεται στην αναπαράσταση σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων για τη διατύπωση ή ερμηνεία αλγεβρικών εκφράσεων, αλγεβρικών εξισώσεων, η αλγεβρικά διατυπωμένων κανόνων της μορφής y=ax+c. Η ικανότητα απλοποίησης αλγεβρικών εκφράσεων αναφέρεται στην ικανότητα εκτέλεσης πράξεων με αφηρημένα αλγεβρικά σύμβολα για την απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων.

Τα αποτελέσματα της εργασίας για τη δομή της αλγεβρικής σκέψης υποδεικνύουν αυτό που υποστηρίζει ο Kaput (2008) και αυτό που διαφαίνεται από την πληθώρα των ερευνών οι οποίες εστιάζουν σε πολλές και διαφορετικές ικανότητες και έννοιες της αλγεβρικής σκέψης, ότι η αλγεβρική σκέψη είναι μια πολυδιάστατη ικανότητα. Επιπρόσθετα, όπως υποστηρίζουν οι Carraher και Schlieamnn (2007), οι προσπάθειες καθολικής περιγραφής της αλγεβρικής σκέψης είναι ελάχιστες και οι κατηγοριοποιήσεις της δομής σε αυτές τις περιπτώσεις παρουσιάζουν ασυνέπειες και επικαλύψεις. Όπως αναφέρουν η ανάλυση της άλγεβρας σε γενίκευση, επίλυση προβλήματος, μοντελοποίηση και συναρτήσεις περιπλέκει διαδικασίες συλλογισμού (γενίκευση και επίλυση προβλήματος) μαζί με συγκριμένα θέματα των μαθηματικών (συναρτήσεις ή μοντελοποίηση) (Carraher & Schliemann, 2007). Όπως αναφέρουν οι Carraher και Schliemann (2007) οι διαφορετικές προσεγγίσεις της αλγεβρικής σκέψης στις μικρές τάξεις, πιθανό να είναι δύσκολο να ταιριάξουν σε μια ταξινομία και προτείνουν ότι ένας συγκεκριμένος βαθμός επιλεκτικότητας ενδέχεται να είναι ορθός και απαραίτητος.

Στην παρούσα εργασία, η δομή βασίζεται σε διαφορετικές ικανότητες οι οποίες ωστόσο, εμπλέκουν όλες και αφορούν *συγκεκριμένα στην αλγεβρική σκέψη*, αποφεύγονται πιο γενικοί όροι όπως «επίλυση προβλήματος» και επίσης, η ικανότητα γενίκευσης εφαρμόζεται και αφορά σε συγκεκριμένο περιεχόμενο (γενίκευση σχέσεων δύο μεταβλητών που συμμεταβάλλονται, γενίκευση ιδιοτήτων από την αριθμητική). Ακόμη, στην παρούσα εργασία για να αποφευχθούν επικαλύψεις, η γενίκευση μοτίβων τα οποία αφορούν στη συμμεταβολή, εμπλέκει την διατύπωση γενικεύσεων μέσω λεκτικών εκφράσεων (χωρίς την απαραίτητη παρουσία συμβόλων) για δύο λόγους. Πρώτον, γιατί υιοθετείται η άποψη ότι η αλγεβρική σκέψη εμπλέκει την ικανότητα γενίκευσης χωρίς ωστόσο, να είναι απαραίτητη η παρουσία συμβόλων (π.χ. Kaput, 2008). Δεύτερο, η ικανότητα μοντελοποίησης (διατύπωσης και αναπαράστασης) σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων (όπως φάνηκε και από τα αποτελέσματα της εργασίας), αποτελεί μια ξεχωριστή ικανότητα. Συγκεκριμένα, ένας μαθητής πιθανό να καταλήξει σε μια γενίκευση για μια συναρτησιακή σχέση την οποία μπορεί να εκφράσει λεκτικά, ωστόσο, το αν είναι σε θέση να τη μεταφράσει σε αλγεβρικά σύμβολα αποτελεί μια ξεχωριστή ικανότητα (την ικανότητα μοντελοποίησης σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων).

Το μοντέλο το οποίο προτείνεται στην παρούσα εργασία αξιοποιεί τις δύο βασικές πτυχές και τους τρεις πυλώνες από τη θεωρία του Kaput (2008), ωστόσο, τα εμπειρικά δεδομένα στη παρούσα εργασία δείχνουν μια διαφορετική κατηγοριοποίηση αυτών των πτυχών και πυλώνων. Στην παρούσα εργασία η πτυχή της γενίκευσης του Kaput εφαρμόζεται στους δύο πυλώνες (τη μελέτη συναρτήσεων και τη μελέτη των δομών από την αριθμητική) και οι οποίες όπως φαίνεται ανήκουν σε διαφορετικούς παράγοντες της αλγεβρική σκέψης, η μια ανήκει στον παράγοντα γενίκευσης ιδιοτήτων από την αριθμητική, ενώ η άλλη στον παράγοντα για το συλλογισμό για την ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών. Αξίζει να σημειωθεί ότι στην παρούσα εργασία στον παράγοντα «συλλογισμός για την ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών» εκτός από την ικανότητα γενίκευσης σχέσεων μεταβλητών που συμμεταβάλλονται, συμπεριλήφθηκε όπως προαναφέρθηκε και η σχετικά «αντίστροφη» ικανότητα, η μεταβολή των τιμών δύο μεταβλητών με βάση έναν κανόνα που παρέχεται. Από την άλλη, η πτυχή για τις συντακτικά καθοδηγούμενες δράσεις (χειρισμό αλγεβρικών συμβόλων) αλλά και ο πυλώνας για τη μοντελοποίηση μέσω αλγεβρικών συμβόλων που προτείνει ο Kaput (2008), στην παρούσα εργασία αποτελούν έναν παράγοντα ο οποίος εμπλέκει τις ικανότητες που είναι άμεσα συνυφασμένες με την αλγεβρική σύνταξη. Ως εκ τούτου, ενώ οι δύο δεύτερης τάξης παράγοντες του μοντέλου (συλλογισμός για την ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών και γενίκευση ιδιοτήτων από την αριθμητική) δεν εμπλέκουν απαραίτητα τη χρήση αλγεβρικών συμβόλων, ο τρίτος παράγοντας του μοντέλου (ικανότητες συνυφασμένες με την αλγεβρική σύνταξη) εμπλέκει ικανότητες οι οποίες απαιτούν αντίληψη και χρήση της αλγεβρικής σύνταξης. Με αυτό τον τρόπο τηρούνται και εκφράζονται ταυτόχρονα δύο απόψεις: (α) ότι οι μαθητές έχουν την ικανότητα να περιγράψουν αλγεβρικές έννοιες και να διατυπώνουν γενικεύσεις χρησιμοποιώντας φυσική γλώσσα η μια άλλη οικεία αναπαράσταση για αυτούς (Kaput, Carraher & Blanton, 2008) και (β) ότι ακόμη και στις μικρές τάξεις, ο αλγεβρικός συμβολισμός διαδραματίζει έναν υποστηρικτικό ρόλο στην εκμάθηση των μαθηματικών (Van Amerom, 2003).

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι συσχετίσεις μεταξύ των οκτώ παραγόντων πρώτης τάξης ήταν στατιστικά σημαντικές και συγκεκριμένα, οι συσχετίσεις μεταξύ των παραγόντων πρώτης τάξης οι οποίοι ανήκουν στον ίδιο παράγοντα δεύτερης τάξης ήταν ψηλές. Επιπρόσθετα, οι συσχετίσεις μεταξύ των τριών παραγόντων δεύτερης τάξης ήταν στατιστικά σημαντικές και πολύ ψηλές, με τη συσχέτιση να κυμαίνεται κοντά στο .95 και στις τρεις περιπτώσεις. Αυτό υποδηλώνει ότι καθώς αυξάνεται η επίδοση των μαθητών σε μια ικανότητα, αυξάνεται και η επίδοσή τους σε άλλη ικανότητα αλγεβρικής σκέψης. Φαίνεται ότι η επίδοση στις ικανότητες-παράγοντες που εμπλέκουν γενίκευση είτε για τη συμμεταβολή είτε από το πλαίσιο της αριθμητικής, σχετίζονται σε μεγάλο βαθμό μεταξύ τους, αλλά σχετίζονται σε μεγάλο βαθμό και με τις ικανότητες που είναι άμεσα συνυφασμένες με την αλγεβρική σύνταξη (και στις οποίες δίνεται έμφαση στην «παραδοσιακή» διδασκαλία της άλγεβρας). Τα αποτελέσματα αυτά έρχονται σε κάποια αντίθεση με τα αποτελέσματα του Oldenburg (2009, 2012) που αφορούσαν σε μαθητές λυκείου και έδειχναν χαμηλές συσχετίσεις μεταξύ της ικανότητας του ατόμου να εκτελεί πράξεις με βάση συντακτικούς κανόνες (έργα συντακτικής πτυχής) και της ικανότητας γενίκευσης σχέσεων ή συσχεσιακού συλλογισμού (περισσότερο σημασιολογικής πτυχής).

Τα αποτελέσματα της εργασίας έδειξαν ότι η δομή του μοντέλου της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης είναι σταθερή για τους μαθητές δέκα έως δεκατριών ετών. Οι διαστάσεις της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης είναι οι ίδιες για όλους τους μαθητές παρά το ότι υπάρχουν διαφορές μεταξύ των μαθητών διαφορετικών ηλικιών ως προς την ανάπτυξη της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης και του γνωστικού τους συστήματος γενικότερα. Ακόμη, παρά το γεγονός ότι το περιεχόμενο που διδάσκονται οι μαθητές με βάση το αναλυτικό πρόγραμμα του δημοτικού και γυμνασίου διαφοροποιείται, αυτό δεν φαίνεται να επηρεάζει τη δομή της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης. Με τις διαφορές που επισημάνθηκαν στο κεφάλαιο της μεθοδολογίας ως προς το περιεχόμενο που διδάσκονται οι μαθητές της Ε΄ δημοτικού, Στ΄ δημοτικού και Α΄ γυμνασίου, τονίζεται η καταλληλότητα και σημασία του προτεινόμενου μοντέλου αλγεβρικής σκέψης αφού φαίνεται ότι η ικανότητα αλγεβρικής σκέψης των μαθητών των τελευταίων τάξεων του δημοτικού και της πρώτης τάξης του γυμνασίου αποτελεί σύνθεση των τριών παραγόντων δεύτερης τάξης και των οκτώ παραγόντων πρώτης τάξης που προαναφέρθηκαν.

Η Ικανότητα Αλγεβρικής Σκέψης των Μαθητών

Τα αποτελέσματα της εργασίας έδειξαν ότι η επίδοση των μαθητών στα έργα αλγεβρικής σκέψης είναι μέτρια. Ωστόσο, η επίδοση των μαθητών των διαφορετικών τάξεων και η σύγκρισή τους, αναδεικνύει και περιγράφει με μεγαλύτερη ακρίβεια την ικανότητα αλγεβρικής σκέψης των μαθητών. Συγκεκριμένα, φάνηκε ότι υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μαθητών και των τριών τάξεων (Ε΄, Στ΄ δημοτικού και Α΄ γυμνασίου) τόσο στη γενική ικανότητα αλγεβρικής σκέψης όσο και στις τρεις ικανότητες (δεύτερης τάξης παράγοντες) της αλγεβρικής σκέψης, με την επίδοση να αυξάνεται όσο μετακινούμαστε από μικρότερη σε μεγαλύτερη τάξη. Η επίδοση των μαθητών της Ε΄ δημοτικού στη γενική ικανότητα αλγεβρικής σκέψης (σε όλα τα έργα συνολικά) κρίνεται χαμηλή, των μαθητών Στ΄ δημοτικού ήταν ψηλότερη και κρίνεται ως μέτρια και των μαθητών Α΄ γυμνασίου ήταν επίσης ψηλότερη (από αυτή των μαθητών Στ' δημοτικού) αλλά κρίνεται επίσης, ως μέτρια.

Τα αποτελέσματα για τις διαφορές μεταξύ των μαθητών των τριών τάξεων ως προς τις οκτώ ικανότητες αλγεβρικής σκέψης (πρώτης τάξης παράγοντες) έδειξαν ότι υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μαθητών των τριών τάξεων, ωστόσο, σε κάποιες ικανότητες οι στατιστικά σημαντικές διαφορές εμφανίζονται μεταξύ των μαθητών κάποιων τάξεων και όχι μεταξύ όλων των τάξεων. Συγκεκριμένα, στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ και των τριών τάξεων παρουσιάστηκαν στις τέσσερις ικανότητες «Γενίκευση μοτίβων/σχέσεων συμμεταβολής», «Γενίκευση ιδιοτήτων των πράξεων», «Συλλογισμός για τις ιδιότητες της ισότητας, και «Απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων». Σε τρεις ικανότητες («Γενίκευση ιδιοτήτων των αριθμών», «Αντίληψη και εύρεση της τιμής του αγνώστου» και «Μοντελοποίηση σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων») οι μόνοι μαθητές που δεν παρουσίασαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ τους ήταν αυτοί της Στ΄ δημοτικού και Α΄ γυμνασίου. Τέλος, στην ικανότητα «Μεταβολής των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με την ανεξάρτητη», εμφανίστηκε στατιστικά σημαντική διαφορά μόνο μεταξύ των μαθητών Ε΄ δημοτικού και Α΄ γυμνασίου.

Οι διαφορές στην επίδοση των μαθητών στις διαφορετικές ικανότητες (πρώτης και δεύτερης τάξης παράγοντες) φαίνεται να σχετίζονται με τη σχολική γνώση, αφού στην Α΄ γυμνασίου πραγματοποιείται τυπική διδασκαλία για συναρτησιακές σχέσεις, για απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων, για την επίλυση εξισώσεων, για τις ιδιότητες της ισότητας, ενώ συνεχίζεται και η διδασκαλία για τις ιδιότητες των πράξεων και των αριθμών (η οποία αρχίζει από το δημοτικό). Ως αποτέλεσμα, οι μαθητές της Α΄ γυμνασίου υπερτερούν έναντι των μαθητών του δημοτικού στις προαναφερθείσες ικανότητες, αλλά και οι μαθητές της Στ΄ δημοτικού υπερτερούν έναντι των μαθητών της Ε΄ δημοτικού, πιθανόν λόγω των περισσότερων εμπειριών με μαθηματικά έργα γενικότερα και της περισσότερης εμβάθυνσης και εξοικείωσης με κάποια θέματα τα οποία σχετίζονται με τις αυτές τις ικανότητες. Ωστόσο, όσον αφορά στην ικανότητα μοντελοποίησης σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων και στην εύρεση της τιμής του αγνώστου, η μη ύπαρξη στατιστικά σημαντικών διαφορών μεταξύ των μαθητών Στ΄ δημοτικού και Α΄ γυμνασίου υποδεικνύει ότι η έστω και πιο μικρή επαφή των μαθητών της Στ΄ δημοτικού με δραστηριότητες αυτών των ικανοτήτων, η οποία πραγματοποιείται μέσα από έργα στα εγχειρίδια των μαθηματικών, τους επιτρέπει να αντιμετωπίσουν τέτοιου είδους έργα και να εμφανίσουν παρόμοια συμπεριφορά με τους μαθητές του γυμνασίου. Το γεγονός ότι δεν παρουσιάστηκε στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των μαθητών Α΄ γυμνασίου και Στ΄ δημοτικού στην επίδοση τους στην ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων των αριθμών και αιτιολόγησης, οφείλεται πολύ πιθανό στη δυσκολία που παρουσιάζουν τα έργα της συγκεκριμένης ικανότητας για τους μαθητές (ανεξάρτητα από το αν οι μαθητές παρακολούθησαν τυπική διδασκαλία της άλγεβρας ή όχι) και την εννοιολογική κατανόηση που απαιτούν (Kieran,1992) για την επίλυσή τους. Τέλος, στην περίπτωση της «ικανότητας μεταβολής των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με την ανεξάρτητη» εντοπίστηκε στατιστικά σημαντική διαφορά μόνο μεταξύ των μαθητών Ε΄ δημοτικού και Α΄ γυμνασίου. Αυτό πιθανόν να οφείλεται στο ότι τα έργα της συγκεκριμένης ικανότητας δεν προκάλεσαν ιδιαίτερες δυσκολίες στους μαθητές της Στ’ δημοτικού, ενδεχωμένως λόγω της περισσότερης επαφής τους με σχετικά έργα (από ότι οι μαθητές της Ε’ δημοτικού), με αποτέλεσμα η συγκεκριμένη διαφορά να γίνεται εμφανής μόνο μεταξύ των άκρων (της μικρότερης και της μεγαλύτερης τάξης του δείγματος).

Επομένως, η σχολική γνώση και εκπαιδευτική εμπειρία φαίνεται να διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην επίδοση στα έργα αλγεβρικής σκέψης. Οι δυσκολίες των μικρών μαθητών της παρούσας εργασίας, όπως και μεγαλύτερων μαθητών άλλων ερευνών φαίνεται το πιθανότερο να προκύπτουν από περιορισμούς στη διδασκαλία και στο αναλυτικό πρόγραμμα (Schliemann, Carraher & Brizuela, 2007). Τα αποτελέσματα της εργασίας υποδεικνύουν, επίσης, ότι ακόμη και μαθητές οι οποίοι δεν είχαν παρακολουθήσει συστηματική τυπική διδασκαλία σχετικά με τις ικανότητες της αλγεβρικής σκέψης ή και καθόλου διδασκαλία, κατάφεραν να καταπιαστούν με τέτοιου είδους έργα και μάλιστα μερικοί μαθητές από αυτούς εμφάνισαν επιτυχία σε αυτά. Υπάρχουν επομένως στοιχεία ώστε να διατυπωθεί η υπόθεση ότι οι μικρότεροι μαθητές είναι σε θέση να επιτύχουν πολύ περισσότερα και σε πολύ περισσότερα θέματα από όσα τους παρέχεται ευκαιρία να αντιμετωπίσουν την παρούσα στιγμή στη διδασκαλία των μαθηματικών και της αλγεβρικής σκέψης συγκεκριμένα. Η υπόθεση αυτή συνάδει με αυτό που ανέφερε ο Mason (1996) ότι οι μικρότεροι μαθητές έχουν τις δυνατότητες να κάνουν περισσότερα μιας και έρχονται στο σχολείο έχοντας ήδη τη φυσική ικανότητα γενίκευσης και τις ικανότητες έκφρασης της γενίκευσης (σ. 2).

Ωστόσο, δεν παραγνωρίζεται το θέμα της «αναπτυξιακής ετοιμότητας» (developmental readiness) των μαθητών η οποία φαίνεται επίσης, να διαδραματίζει ρόλο στην ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών μιας και εντοπίστηκαν συγκεκριμένες ικανότητες οι οποίες όπως φαίνεται χρειάζονται περισσότερο χρόνο να αναπτυχθούν και να ωριμάσουν με αποτέλεσμα να επιδεικνύουν επιτυχία σε αυτές λιγότεροι μαθητές και συγκεκριμένα οι μαθητές της τέταρτης ομάδας αλγεβρικής σκέψης (ομάδα υψηλότερης επίδοσης). Για παράδειγμα, η ικανότητα απλοποίησης αλγεβρικών εκφράσεων και γενίκευσης ιδιοτήτων των αριθμών, φάνηκε ότι δυσκόλεψαν περισσότερους μαθητές, ενώ επιτυχία σε αυτήν παρουσίασαν οι μαθητές της τέταρτης ομάδας. Παρόλα αυτά, ο Hewitt (2012) μετά από παρέμβαση με συγκεκριμένο λογισμικό εντόπισε ότι ακόμη και μαθητές ηλικίας εννέα με δέκα ετών ήταν σε θέση να μάθουν να χειρίζονται με ευκολία την αλγεβρική σύνταξη, την αντικατάσταση και μετασχηματισμό σύνθετων αλγεβρικών εκφράσεων ή εξισώσεων.

Ομάδες Μαθητών ως προς την Ικανότητα Αλγεβρικής Σκέψης

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι υπάρχουν τέσσερις ομάδες μαθητών με διαφορετικά χαρακτηριστικά ως προς την επίδοσή τους στην ικανότητα αλγεβρικής σκέψης. Ακολουθεί, μια περιγραφή των χαρακτηριστικών και της επίδοσης κάθε ομάδας μαθητών ώστε να διαφανούν οι μεταξύ τους διαφορές. Η πρώτη ομάδα μαθητών παρουσίασε χαμηλή επίδοση και στις οκτώ ικανότητες αλγεβρικής σκέψης. Η δεύτερη ομάδα μαθητών εμφάνισε μέτρια επίδοση στις τέσσερις ικανότητες «Γενίκευση μοτίβων συνδυακύμανσης», «Μεταβολή των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με την ανεξάρτητη», «Γενίκευση ιδιοτήτων της ισότητας» και «Αντίληψη και εύρεση της τιμής του αγνώστου» και χαμηλή επίδοση στις υπόλοιπες τέσσερις ικανότητες. Οι μαθητές της τρίτης ομάδας παρουσίασαν ψηλή επίδοση σε πέντε ικανότητες («Γενίκευση μοτίβων συνδυακύμανσης», «Μεταβολή των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με την ανεξάρτητη», «Γενίκευση ιδιοτήτων της ισότητας», «Αντίληψη και εύρεση της τιμής του αγνώστου» και «Μοντελοποίηση σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων»), μέτρια επίδοση στις ικανότητες, «Απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων» και «Γενίκευση ιδιοτήτων των πράξεων» και χαμηλή επίδοση στην «Γενίκευση ιδιοτήτων των αριθμών. Οι μαθητές της τέταρτης ομάδας παρουσίασαν ψηλή επίδοση και στις οκτώ ικανότητες αλγεβρικής σκέψης.

Η πρώτη ομάδα μαθητών, με την πιο χαμηλή επίδοση, απαρτίζεται κυρίως από τους μαθητές της Ε΄ δημοτικού, αφού το ένα τρίτο των μαθητών της Ε΄ δημοτικού ανήκει στη συγκεκριμένη ομάδα. Η δεύτερη ομάδα αποτελείται κυρίως από τους μαθητές της Ε΄ δημοτικού αφού το 50% των μαθητών Ε΄ τάξης εμπίπτουν σε αυτή την ομάδα, ωστόσο, στη συγκεκριμένη ομάδα ανήκουν περίπου το ένα τρίτο των μαθητών της Στ΄ δημοτικού και περίπου το ένα τρίτο των μαθητών της Α΄ γυμνασίου. Η τρίτη ομάδα απαρτίζεται κυρίως από τους μαθητές της Α΄ γυμνασίου αλλά και από μαθητές της Στ΄ δημοτικού, μιας και το ένα τρίτο περίπου των μαθητών της Στ΄ δημοτικού εμπίπτει στη συγκεκριμένη ομάδα. Η τέταρτη ομάδα αποτελείται κυρίως από μαθητές της Α΄ γυμνασίου, αλλά και από μαθητές της Στ΄ δημοτικού.

Ως εκ τούτου, ενώ στην πρώτη και δεύτερη ομάδα το μεγαλύτερο ποσοστό μαθητών προέρχεται από τους μαθητές της Ε΄ δημοτικού, στην τρίτη και τέταρτη ομάδα το μεγαλύτερο ποσοστό μαθητών προέρχεται από τους μαθητές της Α΄ γυμνασίου. Όσον αφορά στη Στ΄ δημοτικού (των οποίων οι μαθητές δεν αντιπροσώπευαν το μεγαλύτερο ποσοστό σε κάποια ομάδα συγκριτικά με τις άλλες δύο τάξεις), το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών Στ΄ τάξης εμπίπτει στη δεύτερη και τρίτη ομάδα. Εντοπίστηκε επομένως, μια μετάβαση από τις ομάδες ένα και δυο, στις ομάδες δύο και τρία και τέλος στις ομάδες τρία και τέσσερα καθώς μετακινούμαστε από μικρότερη σε μεγαλύτερη τάξη. Επομένως, στο ηλικιακό εύρος των δέκα με δεκατριών ετών μπορούμε να υποθέσουμε ότι προκύπτουν τρία ηλικιακά στάδια τα οποία αντιστοιχούν στις τρεις τάξεις Ε΄, Στ΄ δημοτικού, Α γυμνασίου: τους μαθητές Ε΄ δημοτικού των οποίων η ηλικία κυμαίνεται από δέκα έως έντεκα ετών, τους μαθητές Στ΄ δημοτικού των οποίων η ηλικία κυμαίνεται από έντεκα έως δώδεκα ετών (όπου σύμφωνα και με άλλες θεωρίες αποτελεί τις ηλικίες όπου οι μαθητές βρίσκονται σε ένα μεταβατικό στάδιο) και τους μαθητές Α΄ γυμνασίου των οποίων η ηλικία κυμαίνεται από δώδεκα έως δεκατριών ετών. Τα αποτελέσματα αυτά συνάδουν και με τα στάδια γνωστικής ανάπτυξης που περιγράφονται σε θεωρίες γνωστικής ανάπτυξης (Inhleder & Piaget, 1958).

Ανάπτυξη των ικανοτήτων αλγεβρικής σκέψης

Λαμβάνοντας υπόψη (α) ότι η γνωστική ανάπτυξη αντιμετωπίζεται ως ένας κύκλος διαδικαστικής-δομικής (procedural-structural) εξέλιξης με μια ιεραρχική δομή, όπου η διαδικαστική αντίληψη προκύπτει πρώτη ενώ η δομική αντίληψη (structural conception) αναπτύσσεται αργότερα (Sfard, 1995), (β) τον παραλληλισμό της γνωστικής ανάπτυξης με την ιστορική εξέλιξη της άλγεβρας (ανάπτυξη τρόπου αναπαράστασης λύσεων), αλλά και (γ) τις δύο πτυχές της άλγεβρας που περιγράφει η Kieran (1991), εξετάστηκε ένα μοντέλο για την ανάπτυξη των ικανοτήτων της αλγεβρικής σκέψης. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης επιβεβαίωσαν το προτεινόμενο μοντέλο από το οποίο προκύπτουν τα εξής: (α) η αντίληψη και εύρεσης της τιμής του αγνώστου προκύπτει πρώτη, στη συνέχεια αναπτύσσεται η ικανότητα μοντελοποίησης σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων και στη συνέχεια αναπτύσσεται η ικανότητα απλοποίησης αλγεβρικών εκφράσεων, (β) η ικανότητα μεταβολής των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με την ανεξάρτητη αναπτύσσεται πρώτη ενώ ακολουθεί η ικανότητα γενίκευσης μοτίβων της ταυτόχρονης μεταβολής δύο μεταβλητών και (γ) η ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων της ισότητας αναπτύσσεται πρώτη, στη συνέχεια αναπτύσσεται η ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων των πράξεων ενώ ακολουθεί η ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων των αριθμών.

Ως εκ τούτου, σύμφωνα με τα αποτελέσματα της εργασίας υπάρχουν ενδείξεις ότι η ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης και των εννοιών που εμπλέκονται σε αυτές συνάδουν, πρώτο με τις δύο πτυχές της άλγεβρας που προτείνει η Kieran (1991) (διαδικαστική και δομική πτυχή) και αυτό που αναφέρει η Sfard (1995) όπου η διαδικαστική αντίληψη προκύπτει πρώτη ενώ η δομική αντίληψη αναπτύσσεται αργότερα. Συγκεκριμένα, φάνηκε ότι οι ικανότητες οι οποίες συνάδουν περισσότερο με τη διαδικαστική πτυχή της άλγεβρας (π.χ. επίλυση απλών εξισώσεων, μεταβολή τιμών δύο μεταβλητών με βάση κανόνες) προκύπτουν με βάση τα αποτελέσματα πρώτες, ενώ οι ικανότητες οι οποίες σχετίζονται με τη δομική πτυχή της άλγεβρας (π.χ. χειρισμός συμβόλων για απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων, γενίκευση μοτίβων) είναι δυσκολότερες για τους μαθητές και προκύπτουν αργότερα. Φαίνεται ακόμη ότι από τη γενίκευση ιδιοτήτων της ισότητας η οποία συνδέεται και με μια διαδικαστική αντίληψη (π.χ. προσθέτω ίση ποσότητα και στα δύο μέλη της ισότητας για να διατηρείται η ισότητα) και η οποία προκύπτει πρώτη, καταλήγουμε στη γενίκευση ιδιοτήτων των αριθμών όπου απαιτείται δομική αντίληψη.

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης συνάδουν και με την ιστορική εξέλιξη της άλγεβρας (ανάπτυξη του τρόπου αναπαράσταση των λύσεων) αφού η ικανότητα αντίληψης και εύρεσης της τιμής του αγνώστου στην επίλυση εξισώσεων φάνηκε ότι προκύπτει πρώτη και συνάδει κατά κάποιο τρόπο με το στάδιο της συγκοπτόμενης άλγεβρας. Στη συνέχεια φάνηκε ότι προκύπτει η ικανότητα «μοντελοποίησης σχέσεων μέσω αλγεβρικών εκφράσεων» η οποία συνάδει με το συμβολικό στάδιο της άλγεβρας (Swafford & Langrall, 2000), ενώ ακολούθως προκύπτει η ικανότητα «εκτέλεσης πράξεων με αλγεβρικά σύμβολα για απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων (ή για μετασχηματισμό εξισώσεων)» η οποία επίσης συνάδει με το συμβολικό στάδιο της άλγεβρας. Η ικανότητα μοντελοποίησης σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων προκύπτει πριν από την απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων πιθανό λόγω του ότι στην πρώτη περίπτωση οι αλγεβρικές εκφράσεις, αλγεβρικές εξισώσεις ή αλγεβρικοί κανόνες εξακολουθούν να συνδέονται με ένα πλαίσιο, είτε λεκτικό είτε εικονικό (Radford & Puig,2007). Αντίθετα η ικανότητα εκτέλεσης πράξεων με αλγεβρικά σύμβολα για απλοποίηση και μετασχηματισμό αλγεβρικών εκφράσεων και εξισώσεων είναι δυσκολότερη αφού σε αυτή την περίπτωση χρειάζεται αντιμετώπιση των αλγεβρικών συμβόλων ως αντικείμενα χωρίς κανένα πλαίσιο (Radford & Puig,2007).

Τα δεδομένα για τον τρόπο αντιμετώπισης κάποιων έργων (στρατηγικές και προσεγγίσεις) παρέχουν και αυτά στοιχεία για την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης μιας και συνάδουν με αυτό που αναφέρει η Sfard (1995), «ότι γίνεται αντιληπτό διαδικαστικά (operationally) αρχικά σε ένα επίπεδο, πρέπει να γίνει αντιληπτό δομικά (structurally) σε ένα πιο μεταγενέστερο επίπεδο». Για παράδειγμα, όπως έδειξαν τα αποτελέσματα η επίλυση εξισώσεων ενώ αρχικά αντιμετωπίζεται περισσότερο διαδικαστικά μέσω στρατηγικών όπως δοκιμή και έλεγχος ή ανάδρομη πορεία, στη συνέχεια (σε επόμενες ομάδες) οι εξισώσεις αντιμετωπίζονται περισσότερο ως ολότητες, ή στις περιπτώσεις που είναι εφικτό αντιμετωπίζονται συσχεσιακά μέσα από αντιστοίχιση των όρων των εξισώσεων. Επίσης, στο συλλογισμό για τη σχέση μεταβολής δύο μεταβλητών με βάση αλγεβρικά διατυπωμένους κανόνες, ενώ αρχικά υπάρχει ανάγκη υπολογισμών στη συνέχεια (σε επόμενες ομάδες) γίνεται εμφανής ο συλλογισμός για τη σχέση μέσα από τη δομική ανάλυση του ίδιου του κανόνα. Στις περιπτώσεις γενίκευσης ιδιοτήτων των πράξεων και των αριθμών, ενώ αρχικά οι μαθητές εστιάζουν σε υπολογισμούς με αριθμούς και σε μια διαδικαστική αντίληψη, στη συνέχεια χρειάζεται να αναπτύξουν μια πιο δομική αντίληψη και κατανόηση.

Περιγραφή των Χαρακτηριστικών των Τεσσάρων Ομάδων Μαθητών Διαφορετικής Ικανότητας Αλγεβρικής Σκέψης

Στη συνέχεια περιγράφονται τα χαρακτηριστικά των τεσσάρων ομάδων μαθητών όπως προέκυψαν από τα ποσοτικά και τα ποιοτικά δεδομένα της εργασίας. Οι τέσσερις ομάδες περιγράφονται αρχικά με βάση τις ικανότητες και επίδοση των μαθητών στους οκτώ παράγοντες-ικανότητες της αλγεβρικής σκέψης, τις στρατηγικές που υιοθέτησαν και τα τυπικά λάθη που παρουσίασαν στα έργα των ικανοτήτων αλγεβρικής σκέψης. Αξίζει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση των ποιοτικών δεδομένων και συγκεκριμένα των μερικών περιπτώσεων όπου οι μαθητές κάποιων ομάδων επέδειξαν βελτίωση λόγω της συνέντευξης με τα έργα ΕΑΣ, λήφθηκαν υπόψη οι ικανότητες, τα λάθη και οι δυσκολίες που επέδειξαν στην αρχική φάση επίλυσης κάθε έργου και τα οποία αποτελούν τα χαρακτηριστικά των συγκεκριμένων μαθητών, προτού δεχτούν κάποια «βοήθεια». Στην περιγραφή της επίδοσης, των στρατηγικών και των τυπικών λαθών καθεμιάς από τις τέσσερις ομάδες διαφορετικής ικανότητας, υπάρχει και μια σύντομη ανάλυση του παραλληλισμού των τυπικών χαρακτηριστικών και της συμπεριφοράς των μαθητών της ομάδας με τους βαθμούς/επίπεδα πολυπλοκότητας της ταξινομίας SOLO.

Χαρακτηριστικά της πρώτης ομάδας ικανότητας αλγεβρικής σκέψης

Οι μαθητές της πρώτης ομάδας παρουσίασαν χαμηλή επίδοση στα έργα όλων ικανοτήτων αλγεβρικής σκέψης, με εξαίρεση μόνο δύο έργα. Οι συγκεκριμένοι μαθητές φάνηκε ότι είχαν την ικανότητα να εντοπίσουν την τιμή του αγνώστου σε δύο απλές εξισώσεις (στις οποίες υπήρχε απλά πρόσθεση) και ήταν σε θέση να κατασκευάσουν γραφική παράσταση με βάση δοσμένο πίνακα τιμών για δύο μεταβλητές που μεταβάλλονταν ταυτόχρονα. Παρόλο που οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας παρουσίασαν ψηλή επιτυχία στο έργο εύρεσης της τιμής του αγνώστου σε απλές εξισώσεις με πρόσθεση, η επιτυχία αυτή δεν ισχύει και στα υπόλοιπα έργα επίλυσης εξισώσεων (και στο έργο επίλυσης της ανίσωσης), δείχνοντας ότι η ικανότητα να επιλύουν εξισώσεις εξαρτάται από την περιπλοκότητα και τη δομή της εξίσωσης (πράξη που εμπλέκεται σε αυτές, η θέση του αγνώστου στο πρώτο μέλος της εξίσωσης, το αν υπάρχει άγνωστος και στα δύο μέλη τη εξίσωσης). Η επιτυχία τους μόνο στα δύο έργα που προαναφέρθηκαν τα οποία απαιτούσαν απλή εκτέλεση κάποιας οδηγίας (δεν χρειαζόταν οποιαδήποτε επεξεργασία ή εντοπισμός κάποια σχέσης η οποία δεν φαινόταν άμεσα) και ταυτόχρονα η αποτυχία τους στα υπόλοιπα έργα όλων των ικανοτήτων, υποδηλώνουν τη δυσκολία τους να επιδείξουν ικανότητα αλγεβρικής σκέψης.

Η δυσκολία των μαθητών να επιτύχουν στα υπόλοιπα έργα οφειλόταν τόσο σε λανθασμένες αντιλήψεις όσο και στην υιοθέτηση μη κατάλληλων στρατηγικών. Συγκεκριμένα, οι μαθητές απέτυχαν να λύσουν ορθά τα έργα γενίκευσης μοτίβων είτε γιατί δεν μπορούσαν να ερμηνεύσουν καν την κατάσταση είτε γιατί αξιοποιούσαν την επαναλαμβανόμενη (recursive) στρατηγική με την οποία εντόπιζαν απλά τη διαφορά μεταξύ των όρων μόνο της μιας μεταβλητής με αποτέλεσμα να εντοπίζουν μόνο τους αμέσως επόμενους όρους του μοτίβου. Φαίνεται ότι η γενικότερη δυσκολία των μαθητών να κατευθύνουν την προσοχή τους στη δομή των καταστάσεων δεν τους επέτρεψε να εντοπίσουν άλλο τρόπο προσέγγισης και γενικότερα να επιδείξουν ικανότητα γενίκευσης της σχέσης μεταξύ δύο μεταβλητών.

Οι μαθητές έδειξαν περιορισμένη αντίληψη για το σύμβολο ίσον αντιμετωπίζοντας το μόνο από τη διαδικαστική του έννοια ως «ακολουθεί το αποτέλεσμα» κάτι που αποτέλεσε μια από τις αιτίες αποτυχίας στα έργα γενίκευσης ιδιοτήτων της ισότητας, στο έργο επίλυσης εξίσωσης όπου μετά το ίσον δεν ακλουθούσε απλά ένας αριθμός, αλλά και στο έργο μεταβολής των τιμών δύο μεταβλητών με βάση αλγεβρικό κανόνα στον οποίο το ίσον είχε την έννοια του προσδιορισμού αυτού που βρίσκεται αριστερά από το ίσον. Επίσης, οι μαθητές της πρώτης ομάδας δεν είχαν αναπτύξει αντίληψη για τη χρήση αλγεβρικών συμβόλων για αναπαράσταση σχέσεων, παρουσιάζοντας έτσι χαμηλή επίδοση σε όλα τα έργα μοντελοποίησης σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων. Χαμηλή επίδοση παρουσίασαν και σε όλα τα έργα απλοποίησης αλγεβρικών εκφράσεων. Υπήρχαν πολλές ενδείξεις ότι συγκεκριμένοι μαθητές αντιμετώπιζαν το γνωστό εμπόδιο “lack of closure” (Tall & Thomas, 1991) όπου έδιναν αριθμητική απάντηση σε αλγεβρικές εκφράσεις, αποδίδοντας συγκεκριμένες τιμές σε αλγεβρικά σύμβολα ή δεν αποδέχονταν μια αλγεβρική έκφραση ως απάντηση σε κάποιο έργο.

Η λανθασμένη απόδοση συγκεκριμένων τιμών σε αλγεβρικά σύμβολα εντοπίστηκε και στις περιπτώσεις όπου οι μαθητές είχαν έναν αλγεβρικά διατυπωμένο κανόνα και λανθασμένα θεωρούσαν ότι οι δύο μεταβλητές «κρύβουν» μια συγκεκριμένη τιμή. Η δυσκολία τους να μεταβάλλουν τις τιμές δύο μεταβλητών που μεταβάλλονται ταυτόχρονα με βάση έναν κανόνα και να συλλογίζονται για τη σχέση της ταυτόχρονης μεταβολής των δύο μεταβλητών, είναι εμφανής στα υπόλοιπα έργα της συγκεκριμένης ικανότητας στο δοκίμιο αλγεβρική σκέψης αλλά και στο αντίστοιχο έργο της συνέντευξης. Φαίνεται επομένως, ότι οι μαθητές της πρώτης ομάδας δεν ήταν εξοικειωμένοι με την ιδέα της ταυτόχρονης μεταβολής δύο μεταβλητών. Η επιτυχία τους στο απλό έργο κατασκευής γραφικής παράστασης με βάση πίνακα τιμών οφειλόταν στο γεγονός ότι οι αντίστοιχες τιμές των δύο μεταβλητών παρέχονταν και οι μαθητές απλά καλούνταν να μεταφέρουν τις πληροφορίες στη γραφική παράσταση. Αυτό το συμπέρασμα ενισχύεται και από το γεγονός ότι στο δεύτερο έργο με γραφική παράσταση όπου οι τιμές δεν παρέχονταν και οι μαθητές έπρεπε να επιλέξουν την ορθή γραφική παράσταση η οποία να αναπαριστά τη σχέση μεταβολής των δύο μεταβλητών, οι μαθητές της πρώτης ομάδας παρουσίασαν χαμηλή επίδοση.

Οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας παρουσίασαν χαμηλή επίδοση σε όλα τα έργα γενίκευσης ιδιοτήτων των πράξεων και ιδιοτήτων των αριθμών, τα οποία αποτελούν τα έργα αλγεβρικής σκέψης που απαιτούν εννοιολογική κατανόηση (Kieran, 1992). Συγκεκριμένα, αντιμετώπισαν δυσκολίες και απέτυχαν να αναγνωρίσουν και να επεξηγήσουν τη χρήση του προσθετικού και πολλαπλασιαστικού αντίστροφου, την επιμεριστική ιδιότητα, την αντιμεταθετική ιδιότητα και μάλιστα στην περίπτωση της αντιμεταθετικής ιδιότητας υποστήριξαν λανθασμένα ότι ισχύει και στη διαίρεση. Στα έργα γενίκευσης ιδιοτήτων των αριθμών, αντιμετώπισαν δυσκολία να καταλήξουν σε κάποια γενίκευση ακόμη και μέσα από τη χρήση αριθμητικών παραδειγμάτων. Ωστόσο, ακόμη στις περιπτώσεις που κατέληξαν σε γενίκευση δεν κατάφεραν να την αιτιολογήσουν πέρα από τη χρήση αριθμητικών παραδειγμάτων. Οι μαθητές φαίνεται ότι στερούνταν εννοιολογικής κατανόησης ως προς τα συγκεκριμένα θέματα, αλλά και η δυσκολία τους γενικότερα να αντιληφθούν τη δομή ακόμη και σε πλαίσια εκτός της αλγεβρικής σκέψης (ή εκτός μαθηματικού περιεχομένου), καθιστούσε τον εντοπισμό της δομής σε έργα με μαθηματικό περιεχόμενο ακόμη πιο απίθανο σενάριο για τους συγκεκριμένους μαθητές.

Λόγω της αποτυχίας των μαθητών στα περισσότερα έργα αλγεβρικής σκέψης, της δυσκολίας τους να καταλήξουν σε γενικεύσεις, της υιοθέτησης επαναλαμβανόμενων στρατηγικών-αριθμητικών στρατηγικών (Radford, 2008) για την εύρεση μόνο των αμέσως επόμενων όρων ενός μοτίβου, της περιορισμένης αντίληψης για το σύμβολο ίσον και της δυσκολίας τους να χειριστούν την αλγεβρική σύνταξη και να ερμηνεύσουν το αλγεβρικό σύμβολο ορθά ανάλογα με την περίσταση, και την επιτυχία τους μόνο στα δύο απλά έργα που προαναφέρθηκαν, η δραστηριότητα των μαθητών κρίνεται ως *προαλγεβρική*. Παρόμοιος όρος προτείνεται από τους Aké, Godino, Gonzato και Wilhelmi (2013) στην εργασία τους, για το πιο χαμηλό επίπεδο επίδοσης στις περιπτώσεις όπου δεν παρατηρείται καθόλου η ικανότητα γενίκευσης. Η συγκεκριμένη εργασία αφορούσε ωστόσο, μόνο σε γενίκευση μοτίβων ενώ στην παρούσα εργασία ο συγκεκριμένο όρος προσαρμόζεται και εμπλουτίζεται με χαρακτηριστικά από όλες τις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης.

Λαμβάνοντας επίσης, υπόψη ότι η ταξινομία SOLO αξιοποιήθηκε για το χαρακτηρισμό της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών είτε: (α) με βάση την αξιολόγηση της απάντησης τους σε διάφορα έργα, είτε (β) με βάση το σε ποια έργα απάντησαν ορθά και τα οποία κατασκευάστηκαν ώστε να αντιστοιχούν το καθένα σε διαφορετικό επίπεδο, είναι εφικτό και στην παρούσα εργασία να εξεταστεί κατά πόσο οι τέσσερις ομάδες επίδοσης ως προς την ικανότητα αλγεβρικής σκέψης συνάδουν με τα χαρακτηριστικά των διαφορετικών επιπέδων/βαθμών πολυπλοκότητας της ταξινομίας SOLO. Με βάση τα όσα προαναφέρθηκαν για την πρώτη ομάδα και την επιτυχία των μαθητών σε μόνο δύο έργα του δοκιμίου τα οποία απαιτούσαν απλή εκτέλεση των οδηγιών και ήταν δυνατό να επιλυθούν «αυτόματα» χωρίς κάποια επεξεργασία, (ή μέσω απλής μέτρησης), θα μπορούσε να ειπωθεί ότι οι μαθητές της πρώτης ομάδας παρουσιάζουν κάποια χαρακτηριστικά του «μονοδομικού» επιπέδου/βαθμού πολυπλοκότητας όπως αυτά που αναφέρει ο Biggs (2003, σ. 48): ακολουθώ απλές οδηγίες, μετρώ.

Χαρακτηριστικά της δεύτερης ομάδας ικανότητας αλγεβρικής σκέψης

Οι μαθητές της δεύτερης ομάδας παρουσίασαν ψηλή επίδοση σε λίγα έργα μερικών ικανοτήτων αλγεβρικής σκέψης. Ωστόσο, τα έργα στα οποία είχαν επιτυχία, αν και απαιτούσαν γενίκευση, εύρεση της τιμής του αγνώστου σε απλές αλγεβρικές εξισώσεις και μεταβολή των τιμών δύο μεταβλητών που μεταβάλλονται ταυτόχρονα με βάση κάποιο κανόνα, τα περισσότερα από αυτά ήταν δυνατό να τύχουν επεξεργασίας και μέσω στρατηγικών όπως «δοκιμή και έλεγχος» ή «ανάδρομη πορεία» και γενικότερα μέσα από υπολογισμούς με αριθμούς.

Συγκεκριμένα, οι μαθητές παρουσίασαν επιτυχία σε έργα εύρεσης της τιμής του αγνώστου όχι μόνο σε εξισώσεις με πρόσθεση (όπως η πρώτη ομάδα), αλλά και σε εξισώσεις με αφαίρεση και διαίρεση όπου ο άγνωστος ήταν ο πρώτος όρος στην εξίσωση. Οι μαθητές της δεύτερης ομάδας, ωστόσο, λόγω της περιορισμένης αντίληψης που είχαν για το σύμβολο ίσον, δυσκολεύτηκαν στην επίλυση εξισώσεων όπου απαιτείται συσχεσιακή αντίληψη του συμβόλου της ισότητας. Επίσης, δεν παρουσίασαν επιτυχία στην επίλυση απλής ανίσωσης μιας και δεν ήταν σε θέση να εντοπίσουν το εύρος τιμών το οποίο ικανοποιεί την ανίσωση ή αντιμετώπισαν την ανίσωση ως εξίσωση. Με βάση τα ποιοτικά δεδομένα, φαίνεται ότι οι μαθητές μπορούσαν να επιλύσουν ένα σύστημα εξισώσεων με δύο αγνώστους (επιδεικνύοντας αντίληψη ότι πρέπει να εντοπιστούν τιμές που να ικανοποιούν και τις δύο εξισώσεις ταυτόχρονα), ωστόσο η στρατηγική η οποία εφάρμοζαν για να εντοπίσουν τις τιμές στην προκειμένη περίπτωση αλλά και στα έργα επίλυσης εξισώσεων του δοκιμίου, ήταν η στρατηγική «δοκιμή και έλεγχος», ενώ στην περίπτωση κάποιων έργων του δοκιμίου υιοθέτησαν και τη στρατηγική «ανάδρομη πορεία».

Τη στρατηγική δοκιμής και ελέγχου αξιοποίησαν και στο έργο γενίκευσης για τον εντοπισμό του κανόνα, στο έργο όπου οι τιμές των δύο μεταβλητών περιλαμβάνονταν σε πίνακα και μέσω της συγκεκριμένης στρατηγικής κατάφεραν να εντοπίσουν και να εκφράσουν λεκτικά το γενικευμένο κανόνα, επιδεικνύοντας επομένως με βάση τον Radford (2008) την «αφελή γενίκευση». Ωστόσο, στα άλλα δύο έργα γενίκευσης μοτίβων τα οποία αποτελούσαν γεωμετρικά αναπτυσσόμενα μοτίβα οι μαθητές δεν παρουσίασαν την ίδια επιτυχία. Στο έργο γενίκευσης με κανόνα «2ν+1», στην καλύτερη περίπτωση κατάφεραν να εντοπίσουν απλά τους αμέσως επόμενους όρους μέσω της επαναλαμβανόμενης στρατηγικής, ενώ στο έργο με γενικό κανόνα «3ν+1» το οποίο στη συνέχεια απαιτούσε και μεταφορά του γενικού κανόνα σε νέο πλαίσιο, οι μαθητές παρουσίασαν χαμηλή επίδοση και υιοθέτησαν και πάλι επαναλαμβανόμενη στρατηγική. Την ίδια προσέγγιση παρουσίασαν και στις συνεντεύξεις. Ως εκ τούτου, η ικανότητα των μαθητών της δεύτερης ομάδας να εντοπίσουν και να εκφράσουν λεκτικά έναν κανόνα εξαρτάται από το είδος του μοτίβου (αναπτυσσόμενο εικονικό γεωμετρικό μοτίβο ή τιμές σε πίνακα) και την περιπλοκότητα του κανόνα (3ν σε αντίθεση με το 2ν+1 και το 3ν+1). Φαίνεται ότι τα έργα γενίκευσης μοτίβων σε πίνακες με τιμές (input/output) και ένα σχετικά εύκολο κανόνα (π.χ. αναλογική σχέση) είναι αποτελεσματικά στο να οδηγήσουν την προσοχή των μαθητών στη σχέση μεταξύ των αντίστοιχων τιμών, για να γενικεύουν κανόνες και προωθούν τη συναρτησιακή σκέψη (Carraher & Earnest, 2003; Smith, 2008; Warren et al., 2006). Αντίθετα, τα γεωμετρικά αναπτυσσόμενα μοτίβα τα οποία αν και είναι πιο σημαντικά γιατί εμπλέκουν οπτική ανάλυση η οποία επιτρέπει τη διαμόρφωση ενός γενικού κανόνα με νόημα, είναι πιο δύσκολα για τους μαθητές.

Οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας παρουσίασαν επιτυχία και στα δύο έργα γραφικών παραστάσεων για την ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών. Είχαν ψηλή επίδοση όχι μόνο στο πιο απλό έργο κατασκευής γραφικής παράστασης με βάση πίνακα τιμών (που επιτυγχάνει η πρώτη ομάδα μαθητών), αλλά και στο έργο επιλογής της ορθής γραφικής παράστασης στην οποία οι μαθητές καλούνται να εντοπίσουν τις αντίστοιχες τιμές των δύο μεταβλητών με βάση το λεκτικό κανόνα και να εντοπίσουν ποια γραφική παράσταση αναπαριστά την ορθή σχέση μεταβολής των δύο μεταβλητών (καθώς αυξάνονται οι τιμές της μιας αυξάνονται και οι τιμές της άλλης). Ωστόσο, οι μαθητές αντιμετώπισαν δυσκολίες στο έργο μεταβολής των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με την ανεξάρτητη όταν ο κανόνας παρουσιάζεται αλγεβρικά και έχει τη μορφή

«Α=800-2Τ». Η δυσκολία αυτή οφείλεται στην περιορισμένη αντίληψη που είχαν για το σύμβολο ίσον, αφού στον κανόνα που προαναφέρθηκε απαιτείται η αντίληψη του ίσον ως προσδιορισμός (αυτού που βρίσκεται αριστερά από το ίσον). Το συμπέρασμα αυτό ενισχύεται από το γεγονός ότι στα ποιοτικά δεδομένα φαίνεται ότι οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας κατάφεραν να εντοπίσουν αντίστοιχες τιμές των δύο μεταβλητών με βάση αλγεβρικό κανόνα της μορφής «α+β=850», αναγνωρίζοντας ότι οι τιμές μεταβάλλονται χωρίς να αντιμετωπίζουν τα αλγεβρικά σύμβολα ως συγκεκριμένο άγνωστο αριθμό. Επιπρόσθετα, οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας αντιμετώπισαν δυσκολία να εντοπίσουν και να εξηγήσουν τη σχέση μεταβολής των δύο μεταβλητών όταν η σχέση παρουσιάζεται μέσω αλγεβρικού κανόνα (α+β=850, Α=800-2Τ), ωστόσο ήταν σε θέση να εξηγήσουν τη σχέση μεταβολής δύο μεταβλητών όταν οι πληροφορίες παρουσιάζονται οπτικά σε γραφική παράσταση. Οι μαθητές παρόλο που επέδειξαν αντίληψη της ταυτόχρονης μεταβολής δύο ποσοτήτων, φαίνεται ότι δυσκολεύτηκαν να συμπληρώσουν έναν (εντελώς άδειο) πίνακα με αντίστοιχες τιμές δυο μεταβλητών με βάση κανόνες (λεκτικά και αλγεβρικά διατυπωμένους) (3ν, ν×ν), πολύ πιθανό λόγω του ότι εμπλέκεται το θέμα του τρόπου οργάνωσης ενός εντελώς άδειου πίνακα. Επομένως, αποτυγχάνουν εντελώς να εντοπίσουν ποιος από τους δύο κανόνες (3ν, ν×ν) οδηγεί πιο γρήγορα σε αύξηση των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής.

Λόγω της περιορισμένης αντίληψης του συμβόλου του ίσον ως «ακολουθεί το αποτέλεσμα», οι συγκεκριμένοι μαθητές απέτυχαν στα έργα συλλογισμού για τις ιδιότητες της ισότητας (π.χ. όταν προσθέτω ή αφαιρώ το ίδιο ποσό και στα δύο μέλη η ισότητα διατηρείται) όπου καλούνταν να αντιμετωπίσουν τον σύμβολο ίσον ως ισοδυναμία ποσοτήτων. Από την άλλη, οι συγκεκριμένοι μαθητές παρουσίασαν επιτυχία στο έργο για συλλογισμό για τη μεταβατική ιδιότητα της ισότητας και της ανισότητας, στο οποίο οι δηλώσεις περιλάμβαναν το σύμβολο της ισότητας και της ανισότητας αλλά δεν χρειαζόταν συσχεσιακή αντίληψη του συμβόλου ίσον. Πολλοί μαθητές κατά την επίλυση του συγκεκριμένου έργου, δοκίμασαν κάποια τιμή στα αλγεβρικά σύμβολα (για έλεγχο) προτού να συμπληρώσουν τις δηλώσεις για τη μεταβατική ιδιότητα της ισότητας και της ανισότητας.

Οι μαθητές της δεύτερης ομάδας κατάφεραν να αναγνωρίσουν και να επεξηγήσουν με ευκολία το προσθετικό αντίστροφο και κάπως πιο δύσκολα το πολλαπλασιαστικό αντίστροφο. Δεν κατάφεραν, ωστόσο, να αναγνωρίσουν και να επεξηγήσουν την αντιμεταθετική ιδιότητα και αντιμετώπισαν δυσκολία να επεξηγήσουν σε ποιες περιπτώσεις ισχύει (σε ποιους αριθμούς και σε ποιες πράξεις), ενώ απέτυχαν σε μεγάλο βαθμό να αναγνωρίσουν και να επεξηγήσουν την επιμεριστική ιδιότητα. Επίσης, από τα ποιοτικά δεδομένα διαφαίνεται ότι αντιμετώπισαν δυσκολία να εντοπίσουν και να επεξηγήσουν τις περιπτώσεις όπου πραγματοποιούνται αντίστροφες πράξεις (π.χ. $\frac{\alpha+\alpha+\alpha}{3} = , \frac{4+4+4}{3}$), όταν αυτό δεν φαίνεται ξεκάθαρα (όπως στις πράξεις που δόθηκαν ως παράδειγμα). Σε παρόμοιο έργο στις συνεντεύξεις το οποίο ενέπλεκε ισότητα με αλγεβρικά σύμβολα ($\frac{\alpha+\alpha+\alpha+\alpha}{4} = \alpha$), οι μαθητές έδειξαν να αντιλαμβάνονται και να αντιμετωπίζουν το «α» ως οποιαδήποτε αριθμό αποδίδοντας σε αυτό διάφορες τιμές. Ωστόσο, αυτό αποτελεί ένδειξη μιας αντίληψης που πιθανό να αρχίζουν να αναπτύσσουν και δεν είναι δυνατό να ειπωθεί ότι οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη μεταβλητή ως γενικευμένο αριθμό μιας και δεν παρουσίασαν επιτυχία σε κάποιο έργο του δοκιμίου το οποίο να επιβεβαιώνει μια τέτοια διαπίστωση. Αποτυχία παρουσίασαν και στα έργα γενίκευσης ιδιοτήτων των αριθμών αφού ενώ κατέληγαν σε μια γενίκευση μέσα από αριθμητικά παραδείγματα, δεν κατάφεραν να αιτιολογήσουν την απάντησή τους πέρα από τη χρήση αριθμητικών παραδειγμάτων.

Στα έργα χειρισμού της αλγεβρικής σύνταξης, δηλαδή στα έργα απλοποίησης αλγεβρικών εκφράσεων και στα δύο από τα τρία έργα μοντελοποίησης σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων (διατύπωση κανόνων για τη σχέση δύο μεταβλητών, διατύπωση εξισώσεων με άγνωστο) παρουσίασαν χαμηλή επίδοση. Εξαίρεση αποτέλεσε το έργο μοντελοποίησης μέσω της διατύπωσης αλγεβρικών εκφράσεων στο οποίο παρουσίασαν μέτρια επίδοση, υποδεικνύοντας ότι απάντησαν ορθά σε μερικά ερωτήματα του συγκεκριμένου έργου, κάτι που δεν είναι αρκετό για να ισχυριστούμε ότι έχουν αναπτύξει την ικανότητα μοντελοποίησης σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων.

Ως εκ τούτου, οι μαθητές της δεύτερης ομάδας παρουσίασαν μερικά κοινά στοιχεία με τους μαθητές της πρώτης ομάδας όπως η περιορισμένη αντίληψη του ίσον, το ότι αντιμετώπισαν δυσκολίες σε έργα μοντελοποίησης σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων και απλοποίησης αλγεβρικών εκφράσεων, το ότι χρησιμοποίησαν αριθμητικά παραδείγματα σε κάποια έργα (γενίκευσης ιδιοτήτων των αριθμών) για την διαμόρφωση γενικεύσεων χωρίς ικανότητα να αιτιολογήσουν πέρα από αυτά τα αριθμητικά παραδείγματα και το ότι σε έργα γενίκευσης γεωμετρικών αναπτυσσόμενων μοτίβων υιοθετούν κυρίως επαναλαμβανόμενη στρατηγική. Οι μαθητές της δεύτερης ομάδας, ωστόσο, παρουσίασαν επιτυχία σε κάποια γενίκευσης (μοτίβου με πίνακα τιμών, μεταβατικής ιδιότητας ισότητας και ανισότητας, προσθετικό και πολλαπλασιαστικό αντίστροφο), σε έργα εύρεσης της τιμής του αγνώστου στα οποία υιοθετούσαν κυρίως τη στρατηγική «δοκιμή και έλεγχος» (και σε λιγότερο βαθμό, εκεί που επιτρεπόταν τη στρατηγική ανάδρομη πορεία), αλλά και στο έργο *υπολογισμού των τιμών* της εξαρτημένης σε σχέση με την ανεξάρτητη μεταβλητή με βάση λεκτικό κανόνα για την αναπαράσταση της σχέσης σε γραφική παράσταση. Η δραστηριότητα των συγκεκριμένων μαθητών χαρακτηρίζεται ως «διαδικαστική-πρωτοαλγεβρική δραστηριότητα» γιατί παρουσιάζει χαρακτηριστικά από (α) τον όρο «διαδικαστική άλγεβρα» της Kieran (1991) υπό την έννοια ότι στα έργα που επιτυγχάνον οι συγκεκριμένοι μαθητές, τα αντικείμενα τα οποία χειρίζεται κάποιος είναι αριθμητικά παραδείγματα παρά αλγεβρικές εκφράσεις και (β) από τον όρο «πρωτο-αλγεβρική» των Aké et al. (2013) με την έννοια ότι παρουσιάζονται μεν ενδείξεις ικανότητας γενίκευσης οι οποίες ωστόσο προκύπτουν μετά από δοκιμή και έλεγχο και ταυτόχρονα δεν υπάρχει επιτυχία στον πραγματικό χειρισμό αλγεβρικών συμβόλων (μοντελοποίηση σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων και απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων). Η τάση των μαθητών της συγκεκριμένης ομάδας να αξιοποιούν κάποια στρατηγική ή μέθοδο που γνωρίζουν ήδη, ώστε να αντιμετωπίσουν έργα τα οποία πιθανό να συναντούν για πρώτη φορά, υποδεικνύει ότι παρουσιάζουν κάποια χαρακτηριστικά του δεύτερου επιπέδου της ταξινομίας SOLO, του «πολυδομικού» επιπέδου τα οποία αναφέρει ο Biggs (2003) όπως: συνδυάζω, εφαρμόζω τη μέθοδο ή στρατηγική, ταξινομώ.

Χαρακτηριστικά της τρίτης ομάδας ικανότητας αλγεβρικής σκέψης

Οι μαθητές της τρίτης ομάδας παρουσίασαν ψηλή επίδοση στις περισσότερες ικανότητες αλγεβρικής σκέψης εκτός από την ικανότητα *απλοποίησης αλγεβρικών εκφράσεων* και την ικανότητα *γενίκευσης ιδιοτήτων των αριθμών και ιδιοτήτων των πράξεων*.

Ενώ οι συγκεκριμένοι μαθητές εμφάνισαν επιτυχία στα έργα γενίκευσης μοτίβων συμμεταβολής, η επιτυχία τους φαίνεται να εξαρτάται από το είδος του μοτίβου και από την περιπλοκότητα του γενικού κανόνα. Πιο συγκεκριμένα, ενώ οι μαθητές παρουσίασαν ψηλή επίδοση στο μοτίβο με τις τιμές των δύο μεταβλητών σε πίνακα και με γενικό κανόνα «3ν» και στο γεωμετρικό αναπτυσσόμενο μοτίβο με γενικό κανόνα «2ν+1», αντιμετώπισαν δυσκολίες στο αναπτυσσόμενο γεωμετρικό μοτίβο με γενικό κανόνα «3ν+1» το οποίο έπρεπε μάλιστα στη συνέχεια να μεταφέρουν σε νέο πλαίσιο (2ν+1). Φαίνεται επομένως, ότι ενώ οι μαθητές ήταν σε θέση γενικά να καταλήγουν σε γενικεύσεις για μερικές καταστάσεις, δυσκολεύονταν να εντοπίσουν τη σχέση που συνδέει τις δύο μεταβλητές όταν η εικόνα του αναπτυσσόμενο μοτίβου δεν «τόνιζε» από μόνη της το γενικό κανόνα του γεωμετρικού μοτίβου. Ενώ είχαν επιτυχία στην περίπτωση του γεωμετρικού μοτίβου του οποίου η εικόνα οδηγούσε ξεκάθαρα στο κανόνα «2ν+1», στο μοτίβο με τα σπίρτα όπου περιλαμβανόταν επίσης σε κάποιο ερώτημα γενίκευση μοτίβου με γενικό κανόνα «2ν+1» (όπου στην εικόνα δεν ήταν τόσο εμφανής ο γενικός κανόνας) οι μαθητές δυσκολεύτηκαν. Στο αρχικό γεωμετρικό μοτίβο με τα σπίρτα με γενικό κανόνα «3ν+1» παρόλο που οι μαθητές δυσκολεύτηκαν να δουν τον κανόνα στην εικόνα, ακόμη και στον πίνακα τιμών έδειξαν να υιοθετούν επαναλαμβανόμενη στρατηγική κάτι που δείχνει ότι όταν ο κανόνας είναι κάπως πιο περίπλοκος (3ν+1) οι συγκεκριμένοι μαθητές δυσκολεύονται να καταλήξουν σε γενίκευση ακόμη και μέσα από δοκιμή και έλεγχο (με βάση τις αριθμητικές τιμές των μεταβλητών). Πιθανό, ο συνδυασμός εικόνας του αναπτυσσόμενου μοτίβου και ενός πίνακα τιμών να δυσκολεύει την κατάσταση γιατί δεν είναι ξεκάθαρο για τους μαθητές σε ποια αναπαράσταση να επικεντρώσουν την προσοχή τους. Επιπρόσθετα, στο γεωμετρικό μοτίβο με τον πιο περίπλοκο κανόνα (3ν+1) εκτός από επαναλαμβανόμενη στρατηγική, στην προσπάθεια τους να ερμηνεύσουν την εικόνα του μοτίβου εντόπισαν το σωστό συντελεστή για τη μεταβλητή του αριθμού τετραγώνων (3ν), αλλά είτε παρέμειναν στην αναλογική αυτή σχέση, είτε αναγνώρισαν ότι χρειάζεται να εντοπίσουν και κάτι άλλο. Ωστόσο, δεν κατάφεραν να εντοπίσουν την σταθερά (συν ένα). Επομένως, η ικανότητά τους να γενικεύουν μοτίβα εξαρτάται από τις συνθήκες του έργου.

Οι μαθητές φαίνεται ότι είχαν επιτυχία στα έργα μεταβολής των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με την ανεξάρτητη και στο συλλογισμό για τη σχέση μεταβολής των δύο μεταβλητών, είτε το έργο εμπλέκει γραφική παράσταση, είτε εμπλέκει αλγεβρικό κανόνα. Οι μαθητές ήταν σε θέση να μεταβάλουν τις τιμές τις ανεξάρτητης μεταβλητής και να εντοπίζουν τις αντίστοιχες τιμές της εξαρτημένης με βάση αλγεβρικά διατυπωμένους κανόνες στους οποίους το σύμβολο ίσον απαιτούσε αντίληψη του ίσον ως προσδιορισμός. Η μόνη περίπτωση στην οποία παρουσίασαν μέτρια επίδοση ήταν στην περίπτωση όπου καλούνταν να εξηγήσουν ποιος κανόνας από τους δύο (3ν ή ν×ν) οδηγούσε σε πιο γρήγορη αύξηση των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής. Οι μαθητές ενώ επέλεξαν τον ορθό κανόνα δεν κατάφεραν να εξηγήσουν την απάντησή τους. Αυτό υποδεικνύει πιθανόν ότι οι μαθητές βασίστηκαν κυρίως στα αριθμητικά αποτελέσματα που συμπλήρωσαν στους πίνακες (τιμές της εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής) και δεν ήταν σε θέση να αιτιολογήσουν την απάντησή τους με βάση τους ίδιους τους κανόνες.

Οι μαθητές της τρίτης ομάδας σε αντίθεση με τους μαθητές της δεύτερης ομάδας παρουσίασαν επιτυχία στα έργα γενίκευσης ιδιοτήτων της ισότητας και στο έργο επίλυσης εξίσωσης (με τον άγνωστο και στα δύο μέλη της ισότητας) στα οποία απαιτείται συσχεσιακή αντίληψη του συμβόλου της ισότητας. Στην επίλυση του έργου επίλυσης εξίσωσης που προαναφέρθηκε, αλλά και στα έργα επίλυσης εξισώσεων στις συνεντεύξεις, οι μαθητές της τρίτης ομάδας έδειξαν ότι δεν βασίζονται ιδιαίτερα στη στρατηγική δοκιμή και έλεγχο, αλλά αντιμετώπισαν τις εξισώσεις περισσότερο στην ολότητά τους, εντοπίζοντας κάπως αυτόματα την τιμή του αγνώστου, ενώ σε λίγες περιπτώσεις στράφηκαν στη στρατηγική «ανάδρομη πορεία». Συγκεκριμένα, κατά την επίλυση εξισώσεων στις οποίες μετά τον ίσον ακολουθεί και άγνωστος αλλά και αριθμός, οι μαθητές αξιοποίησαν κυρίως αντιστοίχιση των όρων των δύο μελών της εξίσωσης (αντιμετωπίζοντας της εξίσωση συσχεσιακά) εντοπίζοντας τελικά την τιμή του αγνώστου. Ακόμη, φάνηκε ότι κατά την επίλυση συστήματος εξισώσεων οι μαθητές δεν βασίστηκαν τόσο στη δοκιμή και έλεγχο τιμών, αλλά εντόπισαν κυρίως τη διαφορά των δύο εξισώσεων για απλοποίηση της κατάστασης και εύρεση της τιμής των αγνώστων πιο εύκολα. Ωστόσο, οι μαθητές της τρίτης ομάδας παρουσίασαν χαμηλή επίδοση στο έργο επίλυσης απλής ανίσωσης και φαίνεται επομένως ότι δεν αντιλήφθηκαν το ότι η ορθή απάντηση εμπλέκει εύρος τιμών και όχι μια συγκεκριμένη τιμή. Αυτό πιθανό να οφείλεται στη μεγαλύτερη επαφή των μαθητών με εξισώσεις και όχι με ανισώσεις (ιδίως για τους μαθητές του δημοτικού) με αποτέλεσμα να μη γνωρίζουν πώς να αντιμετωπίσουν την κατάσταση ή να αντιμετωπίζουν την ανίσωση ως εξίσωση.

Η μεγάλη διαφορά των μαθητών της τρίτης ομάδας με αυτούς της δεύτερης ομάδας υφίσταται στο ότι παρουσίασαν ψηλή επίδοση σε όλα τα έργα μοντελοποίησης σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων, επιδεικνύοντας αντίληψη της χρήσης συμβόλων για αναπαράσταση μέσω της διατύπωσης αλγεβρικών εκφράσεων, αλγεβρικών εξισώσεων και αλγεβρικά διατυπωμένων κανόνων. Οι συγκεκριμένοι μαθητές παρουσίασαν επιτυχία ακόμη και στην ερμηνεία και χρήση αλγεβρικών εκφράσεων ή εξισώσεων στα οποία χρησιμοποιείται ένα σύμβολο για αναπαράσταση διαδοχικών αριθμών και στην ερμηνεία αλγεβρικών εκφράσεων οι οποίες περιλαμβάνουν περισσότερα από ένα αλγεβρικά σύμβολα. Ωστόσο, αντιμετώπισαν δυσκολίες στα έργα απλοποίησης αλγεβρικών εκφράσεων. Οι μαθητές της τρίτης ομάδας δεν παρουσίασαν ψηλή επίδοση στα έργα απλοποίησης αλγεβρικών εκφράσεων, αλλά μέτρια επίδοση, αφού σε αρκετές περιπτώσεις η απάντηση που έδιναν δεν ήταν στην πιο απλοποιημένη της μορφή ή υπήρχαν και κάποιες περιπτώσεις όπου οι μαθητές έδιναν ως αποτέλεσμα κάποιο αριθμό. Παρόλα αυτά, η ικανότητά τους να διατυπώνουν αλγεβρικές εκφράσεις για τη μοντελοποίηση σχέσεων στις οποίες δεν νιώθουν την ανάγκη να δώσουν ως αποτέλεσμα κάποιο αριθμό αλλά και το γεγονός ότι στα έργα απλοποίησης εκφράσεων παρουσίασαν μέτρια επίδοση (σε αντίθεση με τις προηγούμενες ομάδες που έχουν χαμηλή επίδοση στα συγκεκριμένα έργα), αποτελούν ενδείξεις ότι οι συγκεκριμένοι μαθητές *άρχισαν* πιθανόν να ξεπερνούν το εμπόδιο “lack of closure”. Μέσα από τα ποιοτικά δεδομένα εντοπίστηκε το ότι οι μαθητές της τρίτης ομάδας (κυρίως του δημοτικού) που δίνουν ως αποτέλεσμα κάποιο αριθμό, στην προσπάθειά τους να αντιμετωπίσουν κάποιο έργο απλοποίησης αλγεβρικών εκφράσεων, αντικαθιστούσαν αριθμούς στα αλγεβρικά σύμβολα (αναγνωρίζοντας ωστόσο ότι το αλγεβρικό σύμβολο μπορούσε να έχει οποιαδήποτε τιμή), ώστε να εξετάσουν τι συμβαίνει. Οι συγκεκριμένοι μαθητές, ωστόσο, όταν έπρεπε να δώσουν την τελική απάντηση παρέβλεψαν το στάδιο όπου από τη δομική με αριθμούς έπρεπε να επιστρέψουν πίσω στα αλγεβρικά σύμβολα, και έτσι δεν ερμήνευσαν την αριθμητική απάντηση ώστε να την αντικαταστήσουν με το κατάλληλο αλγεβρικό σύμβολο.

Οι μαθητές της τρίτης ομάδας παρουσίασαν χαμηλή επίδοση σχεδόν σε όλα έργα γενίκευσης ιδιοτήτων των πράξεων και σε όλα τα έργα γενίκευσης ιδιοτήτων των αριθμών. Συγκεκριμένα, οι μαθητές της τρίτης ομάδας δεν επέδειξαν ιδιαίτερη διαφορά από τους μαθητές της δεύτερης ομάδας ως προς την ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων των πράξεων. Οι μαθητές της τρίτης ομάδας φάνηκε ότι ήταν σε θέση να αναγνωρίσουν και να επεξηγήσουν με επιτυχία το πού χρησιμοποιούν το προσθετικό και πολλαπλασιαστικό αντίστροφο, παρουσίασαν όμως μέτρια επίδοση στα έργα της αντιμεταθετικής ιδιότητας και χαμηλή επίδοση στο έργο επιμεριστικής ιδιότητας. Συγκεκριμένα, οι μαθητές αναγνώρισαν τη χρήση της αντιμεταθετικής ιδιότητας, αναγνώρισαν με επιτυχία αν ισχύει ή όχι σε συγκεκριμένη πράξη (πολλαπλασιασμό ή διαίρεση) και το αν ισχύει σε όλους τους αριθμούς (ακέραιους κλάσματα, δεκαδικούς), δεν εξήγησαν, ωστόσο, την ιδιότητα αυτή χωρίς να κάνουν αναφορά σε κάποιο συγκεκριμένο παράδειγμα, με αποτέλεσμα να μην εκφράζουν γενικευμένες δηλώσεις και ολοκληρωμένη αιτιολόγηση. Χαμηλότερη επίδοση παρουσίασαν στην περίπτωση της επιμεριστικής ιδιότητας μιας και δεν είχαν την ικανότητά να την αναγνωρίσουν και πολύ περισσότερο δεν ήταν σε θέση να την επεξηγήσουν μέσω γενικών δηλώσεων. Όσον αφορά στην ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων των αριθμών, οι μαθητές της τρίτης ομάδας δεν παρουσίασαν ψηλή επίδοση, αφού ενώ κατέληξαν σε ορθή γενίκευση-συμπέρασμα με βάση αριθμητικά παραδείγματα, δεν κατάφεραν να αιτιολογήσουν τη γενίκευσή τους με αποτέλεσμα να επικαλούνται αριθμητικά παραδείγματα ως αιτιολόγηση. Ως εκ τούτου οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας φάνηκε ότι αντιμετώπισαν δυσκολίες όπως και οι προηγούμενες δύο ομάδες, στα έργα γενίκευσης ιδιοτήτων των πράξεων και των αριθμών, τα οποία απαιτούν εννοιολογική κατανόηση (Kieran, 1992).

Επομένως, οι μαθητές της τρίτης ομάδας σε αντίθεση με τις προηγούμενες ομάδες, εμφάνισαν συσχεσιακή αντίληψη του συμβόλου της ισότητας και αντίληψη του ίσον ως προσδιορισμός με αποτέλεσμα να απαντούν ορθά σε έργα επίλυσης εξισώσεων και έργα ιδιοτήτων της ισότητας τα οποία δεν είχαν την ικανότητα να επιλύσουν οι μαθητές των προηγούμενων ομάδων. Παράλληλα, οι συγκεκριμένοι μαθητές ενίσχυσαν περισσότερο κάποιες ικανότητες που άρχισαν να εμφανίζονται από προηγούμενες ομάδες και αφορούσαν στο συλλογισμό για την ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών (γενίκευση μοτίβων/σχέσεων συμμεταβολής και μεταβολή τιμών των μεταβλητών με βάση κανόνες). Επιπρόσθετα, οι μαθητές της τρίτης ομάδας δεν φαίνεται να βασίζονται στη στρατηγική δοκιμή και έλεγχος στο βαθμό που βασίζονται οι μαθητές της δεύτερης ομάδας. Λόγω των ικανοτήτων των μαθητών της τρίτης ομάδας (που εμφανίζονται πρώτη φορά στη συγκεκριμένη ομάδα και όχι σε προηγούμενες): (α) να συλλογίζονται και να επιλύουν έργα επίλυσης εξισώσεων και συλλογισμού για τις ιδιότητες τις ισότητας συσχετίζοντας και αντιπαραβάλλοντας τα δύο μέλη των ισοτήτων και εξισώσεων, (β) λόγω της ικανότητας να αναπαριστούν σχέσεις μέσω αλγεβρικών συμβόλων, και (γ) της ικανότητας τους να γενικεύουν γεωμετρικό αναπτυσσόμενο μοτίβο εστιάζοντας στη δομή της εικόνας του μοτίβου, συσχετίζοντας τελικά τον κανόνα με την εικόνα και αιτιολογώντας τον (χωρίς τυχαία ανακάλυψη του κανόνα μέσω δοκιμής και ελέγχου), η δραστηριότητα των μαθητών χαρακτηρίζεται ως «*συσχετιστική-συμβολική δραστηριότητα αλγεβρικής σκέψης*». Η δραστηριότητα των μαθητών της συγκεκριμένης ομάδας παρουσιάζει κάποια χαρακτηριστικά του «συσχετιστικο» επιπέδου της Ταξινομίας SOLO τα οποία αναφέρει ο Biggs (2003) όπως: συγκρίνω, αντιπαραβάλλω, ενσωματώνω, συσχετίζω.

Χαρακτηριστικά της τέταρτης ομάδας ικανότητας αλγεβρικής σκέψης

Οι μαθητές της τέταρτης ομάδας παρουσίασαν επιτυχία σε όλα τα έργα, όλων των ικανοτήτων αλγεβρικής σκέψης. Οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας, σε αντίθεση με τους μαθητές προηγούμενων ομάδων, παρουσίασαν ψηλή επίδοση και στην ικανότητα απλοποίησης αλγεβρικών εκφράσεων, στην ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων των αριθμών και των ιδιοτήτων των πράξεων.

Οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας, σε αντίθεση με τους μαθητές της τρίτης ομάδας εντόπισαν το γενικό κανόνα τόσο σε έργα με τις τιμές των δύο μεταβλητών σε πίνακα, όσο και σε έργα με γεωμετρικά αναπτυσσόμενα μοτίβα, ανεξάρτητα από την περιπλοκότητα του κανόνα που εμπλέκεται στα μοτίβα. Στην περίπτωση ενός γεωμετρικού μοτίβου όπου η εικόνα τονίζει τον κανόνα που διέπει το μοτίβο, οι μαθητές της τέταρτης ομάδας (όπως και οι μαθητές της τρίτης ομάδας) κατέληξαν σε γενίκευση με βάση την εικόνα. Ωστόσο, οι μαθητές παρουσίασαν επιτυχία και στη γενίκευση γεωμετρικού αναπτυσσόμενου μοτίβου με κάπως πιο δύσκολο κανόνα από τα υπόλοιπα έργα και του οποίου μάλιστα η εικόνα χρειαζόταν κάποια επεξεργασία για να διαφανεί ο κανόνας. Στις περιπτώσεις των γεωμετρικών αναπτυσσόμενων μοτίβων όπου η εικόνα χρειάζεται κάποια επεξεργασία μιας και δεν διαφαίνεται ξεκάθαρα εξ αρχής ο γενικευμένος κανόνας (π.χ. στην περίπτωση του έργου με τα σπίρτα), φαίνεται ότι ακόμη και οι μαθητές της τέταρτης ομάδας που δεν εντόπισαν τον κανόνα με βάση την οπτική ανάλυση της εικόνας του μοτίβου (αλλά μέσα από δοκιμή και έλεγχο με τις τιμές των μεταβλητών), κατάφεραν στη συνέχεια να ερμηνεύσουν τον κανόνα που εντόπισαν με βάση την εικόνα και τον τρόπο που αναπτύσσεται το μοτίβο. Σημαντικό είναι το ότι οι μαθητές της τέταρτης ομάδας ήταν σε θέση στη συνέχεια να μεταφέρουν τη γενίκευση του μοτίβου που εντόπισαν σε παρόμοιο πλαίσιο. Η ικανότητα των μαθητών της τέταρτης ομάδας να επικεντρώνονται στη δομή και σε έργα με μη μαθηματικό περιεχόμενο, πιθανό να συνεισφέρει στην ικανότητα των μαθητών αυτών να καταλήγουν στη δομή των μοτίβων και να αιτιολογούν τη γενίκευση τους με βάση το πλαίσιο και την εικόνα του μοτίβου, αλλά και να μεταφέρουν τη γενίκευση σε νέο πλαίσιο.

Οι μαθητές της τέταρτης ομάδας είχαν την ικανότητα να μεταβάλλουν τις τιμές δύο μεταβλητών είτε σε γραφικές παραστάσεις είτε με βάση αλγεβρικά διατυπωμένους κανόνες. Οι μαθητές κατάφεραν επίσης να εξηγήσουν τη σχέση μεταβολής δύο μεταβλητών (π.χ. όσο αυξάνονται οι τιμές της μιας μειώνονται οι τιμές της άλλης) όχι μόνο παρατηρώντας μια γραφική παράσταση αλλά βλέποντας και τον κανόνα ο οποίος είναι διατυπωμένος με αλγεβρικά σύμβολα. Η ικανότητα των μαθητών να εντοπίζουν και να εξηγούν ποιος από τους δύο αυξάνει πιο γρήγορα τις τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής βλέποντας απλά τους κανόνες, οφείλεται στην ικανότητά τους να μελετούν και να ερμηνεύουν τη δομή του κανόνα χωρίς να αναγκάζονται να καταφύγουν σε αναφορά σε συγκεκριμένα αριθμητικά παραδείγματα.

Οι μαθητές παρουσίασαν μεγάλη επιτυχία στα έργα εύρεσης της τιμής του αγνώστου σε αλγεβρικές εξισώσεις, ανεξάρτητα από τη δομή της εξίσωσης, αλλά είχαν επιτυχία και στην επίλυση απλών ανισώσεων και στην επίλυση συστήματος δύο εξισώσεων το οποίο απλοποίησαν αφαιρώντας τα αντίστοιχα μέλη των δύο εξισώσεων. Οι συγκεκριμένοι μαθητές, φάνηκε να ήταν εξοικειωμένοι με τη χρήση αλγεβρικών συμβόλων για την αναπαράσταση σχέσεων, ενώ ταυτόχρονα παρουσίασαν επιτυχία και στα έργα απλοποίησης αλγεβρικών εκφράσεων. Ως εκ τούτου, υπάρχουν αρκετές ενδείξεις ότι οι μαθητές της τέταρτης ομάδας πιθανό να είχαν ξεπεράσει το εμπόδιο "lack of closure".

Ψηλή επίδοση παρουσίασαν και στα έργα γενίκευσης ιδιοτήτων της ισότητας, ιδιοτήτων των πράξεων και ιδιοτήτων των αριθμών. Συγκεκριμένα, αναγνώρισαν και επεξήγησαν το προσθετικό και πολλαπλασιαστικό αντίστροφο, αναγνώρισαν και επεξήγησαν την αντιμεταθετική ιδιότητα (σε ποιες πράξεις ισχύει, αν ισχύει σε όλους τους αριθμούς) και αναγνώρισαν και επεξήγησαν την επιμεριστική ιδιότητα. Όσον αφορά στις ιδιότητες της ισότητας, οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας κατέληξαν με επιτυχία σε γενικεύσεις για τη μεταβατική ιδιότητα της ισότητας και της ανισότητας, και για τις ιδιότητες της ισότητας (π.χ. προσθέσω ή αφαιρώ ίσο ποσό και στα δύο μέλη της ισότητας ώστε να διατηρείται η ισότητα). Στις συνεντεύξεις κατέληξαν σε ακόμη πιο γενικευμένη δήλωση αναγνωρίζοντας ότι η ισότητα διατηρείται όταν εκτελείται ακριβώς η ίδια πράξη και στα δύο μέλη της ισότητας, χωρίς να περιορίζονται σε αναφορά μόνο στις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Στα έργα γενίκευσης ιδιοτήτων των αριθμών οι μαθητές κατέληξαν με επιτυχία σε ορθές γενικεύσεις, τις οποίες οι περισσότεροι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας κατάφεραν να αιτιολογήσουν πέρα από τη χρήση αριθμητικών παραδειγμάτων (κάτι που αδυνατούσαν να κάνουν οι μαθητές των προηγούμενων ομάδων). Ωστόσο, λόγω του ότι τα συγκεκριμένα έργα απαιτούσαν εννοιολογική κατανόηση για την αιτιολόγηση της γενίκευσης και αποτέλεσαν τα δυσκολότερα έργα, μερικοί μαθητές ακόμη και της τέταρτης ομάδας μετά από κάποιες αποτυχημένες προσπάθειες να εντοπίσουν ολοκληρωμένη αιτιολόγηση, περιορίστηκαν στη χρήση αριθμητικών παραδειγμάτων.

Οι μαθητές της τέταρτης ομάδας παρουσίασαν καθολική επιτυχία σε όλες τις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης. Διαφοροποιούνται από τους υπόλοιπους μαθητές κυρίως ως προς την ανεπτυγμένη ικανότητά τους να «ανιχνεύουν» τη δομή και να αιτιολογούν γενικεύσεις, και την ικανότητά τους να εκτελούν πράξεις με αφηρημένα αλγεβρικά σύμβολα για απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων δείχνοντας ότι η δραστηριότητα τους εμπλέκει μεγαλύτερο βαθμό αφαίρεσης. Ως εκ τούτου, η δραστηριότητα των μαθητών της τέταρτης ομάδας χαρακτηρίζεται ως «δομική- καθολική δραστηριότητα αλγεβρικής σκέψης», δομική υπό τους όρους της Kieran (1991) αφού παρουσιάζονται περισσότερο πράξεις σε αλγεβρικές εκφράσεις (από τις υπόλοιπες ομάδες) παρά σε αριθμούς, και «καθολική δραστηριότητα αλγεβρικής σκέψης» λόγω του ότι συνδυάζει την επιτυχία σε όλες τις διαστάσεις που χαρακτηρίζουν την αλγεβρική σκέψη. Η δραστηριότητα της συγκεκριμένης ομάδας παρουσιάζει μερικά χαρακτηριστικά του επιπέδου «εκτεταμένης αφαίρεσης» της ταξινομίας SOLO τα οποία αναφέρει ο Biggs (2003) όπως: σχηματίζω θεωρία, γενικεύω, αναστοχάζομαι, μεταφέρω τη θεωρία (σε νέο πλαίσιο). Αξίζει να σημειωθεί ότι επιτυχία σε κάποια έργα γενίκευσης παρουσίασαν και οι μαθητές προηγούμενων ομάδων, ωστόσο, η μόνη ομάδα που παρουσίασε ψηλή επίδοση σε όλα τα έργα γενίκευσης και αιτιολόγησης της γενίκευσης (είτε αφορούσαν σε ιδιότητες από την αριθμητική είτε σε μοτίβα που ενέπλεκαν κανόνες) ήταν οι μαθητές της τέταρτης ομάδας. Για το λόγο αυτό, η ανεπτυγμένη ικανότητα γενίκευσης παρουσιάζεται ως χαρακτηριστικό των μαθητών της συγκεκριμένης ομάδας.

Η Σχέση μεταξύ της Ικανότητας Αναλογικού Συλλογισμού και Αλγεβρικής Σκέψης

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η ικανότητα αναλογικού συλλογισμού των μαθητών δέκα έως δεκατριών ετών αποτελεί μια πολυδιάστατη ικανότητα. Λαμβάνοντας υπόψη τις εισηγήσεις των Goswami (2004) και της English (2004), ότι η ικανότητα αναλογικού πιθανό να διαφοροποιείται και να έχει και διαφορετική σχέση με τη μαθηματική ικανότητα αν απαιτεί εντοπισμό εννοιολογικών σχέσεων (π.χ. σε λεκτικές αναλογίες) ή εντοπισμό αντιληπτικών σχέσεων (π.χ. σε αναλογίες με σχήματα οι οποίες εμπλέκουν οπτικο-χωρικές σχέσεις), εξετάστηκε και επιβεβαιώθηκε το εξής μοντέλο: Η γενική ικανότητα αναλογικού συλλογισμού αναλύεται σε τρεις παράγοντες, την ικανότητα αναλογικού συλλογισμού μετά από εντοπισμό οπτικο-χωρικών (αντιληπτικών) σχέσεων, την ικανότητα αναλογικού συλλογισμού μετά από εντοπισμό εννοιολογικών σχέσεων και την ικανότητα αναλογικού συλλογισμού μετά από εντοπισμό αριθμητικών σχέσεων.

Αυτή η διάκριση των ικανοτήτων του αναλογικού συλλογισμού είναι σημαντική τόσο για το μαθηματικό συλλογισμό όσο και για την ικανότητα αλγεβρικής σκέψη συγκεκριμένα. Ο λόγος είναι το ότι παρόλο που ο αναλογικός συλλογισμός αποτελεί μια γνωστική ικανότητα η οποία εμπλέκεται σε πολλές καθημερινές και μαθηματικές δραστηριότητες και συγκεκριμένα στα έργα αναλογικού συλλογισμού όπως ορίζεται στο πεδίο των μαθηματικών (proportional reasoning), δεν υπάρχει ξεκάθαρη διδασκαλία για την ανάπτυξή του. Ενώ το αναλυτικό πρόγραμμα περιλαμβάνει διδασκαλία της αναλογίας και του αναλογικού συλλογισμού στο πλαίσιο των μαθηματικών (proportional reasoning) παραβλέπεται η γενική ικανότητα αναλογικού συλλογισμού η οποία μάλιστα πραγματοποιείται και σε διαφορετικά πλαίσια στα οποία δεν εμπλέκονται απαραίτητα αριθμοί. Μάλιστα λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας ότι η γενική ικανότητα αναλογικού συλλογισμού σε διάφορα πλαίσια, διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην ικανότητα αλγεβρικής σκέψης, χρειάζεται να δοθεί περισσότερη σημασία στη διδασκαλία και ανάπτυξη του αναλογικού συλλογισμού τόσο στο αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών όσο και στο γενικό αναλυτικό πρόγραμμα. Η πρόταση αυτή ενισχύεται και από το γεγονός ότι στην παρούσα εργασία η επίδοση στην ικανότητα αλγεβρικής σκέψης σχετίζεται σε μεγάλο βαθμό όχι μόνο με την «ικανότητα αναλογικού συλλογισμού μετά από εντοπισμό αριθμητικών σχέσεων» (η οποία προσομοιάζει κάπως με κάποια τυπικά έργα του Proportional reasoning στα μαθηματικά λόγω της εμφάνισης αριθμών και στα δύο), αλλά και με την «ικανότητα αναλογικού συλλογισμού μετά από εντοπισμό εννοιολογικών σχέσεων» και την «ικανότητα αναλογικού συλλογισμού μετά από εντοπισμό αντιληπτικών σχέσεων». Επίσης, η «ικανότητα αναλογικού συλλογισμού μέσω εντοπισμού οπτικο-χωρικών (αντιληπτικών) σχέσεων» εμπλέκει ουσιαστικά και τη χωρική ικανότητα και ως εκ τούτου η σχέση της συγκεκριμένης ικανότητας με την αλγεβρική σκέψη συνάδει και με τα αποτελέσματα άλλων ερευνών που ανέδειξαν της σχέση χωρικής ικανότητας και αλγεβρικής σκέψης (Chrysostomou, Pitta-Pantazi, Tsingi, Cleanthous & Christou, 2013; English & Warren, 1994; Tolar, Lederberg, & Fletcher, 2009; Warren,1997)

Για τη διερεύνηση του ενδεχομένου η ικανότητα αναλογικού συλλογισμού να αποτελεί παράγοντα πρόβλεψης της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης, αλλά και το αντίστροφο, εξετάστηκαν δύο μοντέλα, αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα της δομικής ανάλυσης έδειξαν ότι η ικανότητα αναλογικού συλλογισμού αποτελεί ισχυρό παράγοντα πρόβλεψης των τριών παραγόντων δεύτερης τάξης της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης. Τα αποτελέσματα αυτά δικαιολογούνται από το γεγονός ότι ο αναλογικός συλλογισμός είναι άμεσα συνυφασμένος με τον επαγωγικό συλλογισμό (Novick & Holyoak, 1991), τη διαδικασία που οδηγεί σε εξαγωγή συμπερασμάτων από ειδικές περιπτώσεις, όπως και η έννοια της γενίκευσης. Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη ότι οι δύο παράγοντες αλγεβρικής σκέψης εμπλέκουν άμεσα την ικανότητα γενίκευσης, αλλά και το ότι ο τρίτος παράγοντας απαιτεί μεγάλο βαθμό «αφαίρεσης», η ισχυρή σχέση που εντοπίστηκε μεταξύ αναλογικού συλλογισμού και αλγεβρικής σκέψης επεξηγείται σε μεγάλο βαθμό και καθιστά την περαιτέρω διερεύνηση της συγκεκριμένης σχέσης αναγκαία. Γενικότερα, το αποτέλεσμα ότι η ικανότητα αναλογικού συλλογισμού προβλέπει την ικανότητα αλγεβρικής σκέψης συνάδει με τα αποτελέσματα άλλων ερευνών οι οποίες ωστόσο περιορίστηκαν στο βαθμό συσχέτισης των δύο και εντόπισαν ότι οι δύο ικανότητες σχετίζονται (English & Warren, 1994). Ο βαθμός συσχέτισης στην έρευνα των English και Warren (1994) περιοριζόταν στο .410, σε αντίθεση με την παρούσα εργασία όπου οι συντελεστές συσχέτισης και παλινδρόμησης είναι πολύ ψηλοί. Αυτό πιθανό να οφείλεται στο γεγονός ότι στην παρούσα εργασία υπήρξε μια πιο ολοκληρωμένη μέτρηση τόσο της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης όσο και της ικανότητας αναλογικού συλλογισμού.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές από δέκα έως δεκατριών ετών έχουν στο σύνολό τους μέτρια ικανότητα αναλογικού συλλογισμού και ότι η επίδοση των μαθητών των τριών τάξεων Ε΄, Στ΄ δημοτικού και Α΄ γυμνασίου διαφέρει στατιστικά σημαντικά, με την ικανότητα αυτή να αυξάνεται όσο μετακινούμαστε από μικρότερη σε μεγαλύτερη τάξη. Εντοπίστηκε ακόμη ότι υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές ως προς την ικανότητα αναλογικού συλλογισμού μεταξύ και των τεσσάρων ομάδων διαφορετικής ικανότητας αλγεβρικής σκέψης. Συγκεκριμένα, οι μαθητές της πρώτης ομάδας αλγεβρικής σκέψης παρουσίασαν χαμηλή επίδοση στην ικανότητα αναλογικού συλλογισμού, η δεύτερη ομάδα μαθητών παρουσίασε μέτρια ικανότητα αναλογικού συλλογισμού, η τρίτη ομάδα παρουσίασε σχετικά ψηλή επίδοση στην ικανότητα αναλογικού συλλογισμού και η τέταρτη ομάδα παρουσίασε την πιο ψηλή επίδοση στην ικανότητα αναλογικού συλλογισμού. Αυτό εξηγεί σε κάποιο βαθμό τη μεγαλύτερη δυσκολία των μαθητών της πρώτης κι της δεύτερης ομάδας να επικεντρώσουν την προσοχή τους στη δομή των έργων αλγεβρικής σκέψης και κατ' επέκταση τη δυσκολία τους να καταλήγουν σε γενικεύσεις.

Οι προσεγγίσεις των Μαθητών των Τεσσάρων Ομάδων Αλγεβρικής Σκέψης κατά την Επίλυση των Έργων ΕΑΣ

Τα έργα ΕΑΣ κατασκευάστηκαν ώστε να διερευνηθεί περαιτέρω η ικανότητα των μαθητών των τεσσάρων ομάδων να σκέφτονται αναλογικά, σε έργα αλγεβρικής σκέψης αυτή τη φορά. Με αυτό τον τρόπο, πρώτος στόχος ήταν να εξεταστεί το πώς οι μαθητές των τεσσάρων ομάδων προσεγγίζουν τα συγκεκριμένα έργα, λαμβάνοντας περισσότερα στοιχεία τόσο για την ικανότητά τους να σκέφτονται αλγεβρικά όσο και για τις προσεγγίσεις αναλογικού συλλογισμού που υιοθετούν, οι οποίες «αποκαλύπτουν» την ικανότητα τους να σκέφτονται αναλογικά σε έργα με μαθηματικό περιεχόμενο. Τα αποτελέσματα της εργασίας υπέδειξαν ότι υπάρχουν τρεις διαφορετικές προσεγγίσεις επίλυσης των έργων ΕΑΣ, τα οποία συνάδουν με τα τρία επίπεδα επίλυσης που υπέθεσαν οι Lee και Sriraman (2012) ότι υπάρχουν και αφορούσαν σε περιεχόμενο γεωμετρίας. Η πρώτη προσέγγιση εμπλέκει τις περιπτώσεις όπου οι μαθητές επικεντρώνουν την προσοχή τους στα επιφανειακά χαρακτηριστικά των έργων καταλήγοντας ότι η ομοιότητα των καταστάσεων υφίσταται στην ομοιότητα αυτών των επιφανειακών χαρακτηριστικών, χωρίς να μπορούν να ερμηνεύσουν περισσότερο τις δύο καταστάσεις. Η δεύτερη προσέγγιση επίλυσης, η μεταβατική προσέγγιση, αναφέρεται στις περιπτώσεις όπου ο μαθητής εντοπίζει κάποια σχέση μεταξύ των δύο καταστάσεων χωρίς όμως να είναι σε θέση να αιτιολογήσει τη σχέση που έχει εντοπίσει. Επίσης, οι μαθητές που υιοθετούν αυτή την προσέγγιση ακόμη και αν εκφράζουν το ορθό συμπέρασμα ή υπόθεση, έχουν καταλήξει σε αυτό μέσα από στρατηγικές όπως δοκιμή και έλεγχο (και όχι μέσα από μελέτη της δομής των καταστάσεων) και δεν είναι σε θέση να αιτιολογήσουν το συμπέρασμα ή την υπόθεσή τους παρά μόνο μέσα από αριθμητικά παραδείγματα. Η τρίτη προσέγγιση, η δομική-συσχεσιακή προσέγγιση, εμπλέκει τις περιπτώσεις όπου οι μαθητές επιδεικνύουν πλήρη εστίαση της προσοχής τους στη δομή των δύο καταστάσεων και σύγκριση των δύο καταστάσεων ως προς τη δομή τους, κάτι που τους επιτρέπει να καταλήξουν σε συμπέρασμα για τη σχέση των δύο καταστάσεων και πλήρη αιτιολόγηση της συγκεκριμένης σχέσης. Οι τρεις προσεγγίσεις εμφανίζονται γραμμικά μιας και σε όλες τις περιπτώσεις οι μαθητές είτε: (α) άρχιζαν από επιφανειακή προσέγγιση και ακολούθως κατέληγαν σε μεταβατική προσέγγιση, (β) άρχιζαν από μεταβατική προσέγγιση και στη συνέχεια προχωρούσαν σε δομική προσέγγιση, (γ) σε ελάχιστες περιπτώσεις εμφάνισαν και τις τρεις προσεγγίσεις, μεταβαίνοντας από την επιφανειακή προσέγγιση, στη μεταβατική και ακολούθως στη δομική προσέγγιση και (δ) υιοθετούσαν εξ αρχής δομική προσέγγιση (κάτι που παρουσιάστηκε μόνο από τους μαθητές της τέταρτης ομάδας).

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την επίλυση των επτά έργων ΕΑΣ, έδειξαν ότι οι μαθητές της πρώτης ομάδας αλγεβρικής σκέψης υιοθετούσαν και παρέμεναν στην επιφανειακή προσέγγιση και σε ελάχιστες περιπτώσεις παρουσίασαν μετάβαση στη μεταβατική προσέγγιση. Οι μαθητές της δεύτερης ομάδας υιοθετούσαν και παρέμεναν κυρίως στη μεταβατική προσέγγιση, ενώ σε λίγες περιπτώσεις οι μαθητές παραμένουν στην επιφανειακή προσέγγιση χωρίς καν να προχωρούν σε μεταβατική προσέγγιση. Οι μαθητές της τρίτης ομάδας υιοθετούσαν κυρίως μεταβατική προσέγγιση και σε λίγες περιπτώσεις εμφάνιζαν μετάβαση στη δομική προσέγγιση. Οι μαθητές της τέταρτης ομάδας ήταν οι μόνοι μαθητές που κατάφεραν να υιοθετήσουν δομική προσέγγιση σε όλα τα έργα ενώ κανένας μαθητής της συγκεκριμένης ομάδας δεν έλαβε υπόψη, ούτε καν στην αρχική επεξεργασία των επτά έργων, επιφανειακά χαρακτηριστικά. Αυτό που διαφαίνεται ξεκάθαρα είναι το ότι η επίδοση των μαθητών στις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης με βάση το δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης, συνάδει με τον τρόπο που οι μαθητές των τεσσάρων ομάδων αντιμετώπισαν τα έργα ΕΑΣ. Προκύπτει το ότι ένας σημαντικός παράγοντας στο πώς οι μαθητές των τεσσάρων ομάδων αλγεβρικής σκέψης προσέγγισαν τα έργα ΕΑΣ επηρεάστηκε από την ικανότητα αλγεβρικής σκέψης των μαθητών. Ωστόσο, προκύπτει επίσης, το ότι και η ικανότητα αναλογικού συλλογισμού των μαθητών των τεσσάρων ομάδων επηρέασε τον τρόπο που αντιμετώπισαν τα έργα ΕΑΣ. Συγκεκριμένα, οι μαθητές της τέταρτης ομάδας οι οποίοι είχαν και την πιο ψηλή επίδοση στα έργα αναλογικού συλλογισμού του δοκιμίου, δεν είχαν προβεί σε κανένα έργο ΕΑΣ σε σύγκριση των δύο καταστάσεων ως προς τα επιφανειακά χαρακτηριστικά, παρόλο που οι δύο καταστάσεις παρουσίαζαν και επιφανειακή ομοιότητα. Αυτό υποδηλώνει ότι οι συγκεκριμένοι μαθητές είχαν ανεπτυγμένη αντίληψη ότι η επιφανειακή ομοιότητα δεν ήταν «αρκετή». Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ακόμη ότι οι μαθητές της τέταρτης ομάδας μετέφεραν την ικανότητα αναλογικού συλλογισμού που είχαν και σε πλαίσιο με μαθηματικό περιεχόμενο και συγκεκριμένα σε πλαίσιο με περιεχόμενο αλγεβρικής σκέψης. Επίσης, οι μαθητές της πρώτης ομάδας αλγεβρικής σκέψης οι οποίοι είχαν και χαμηλή επίδοση στην ικανότητα αναλογικού συλλογισμού, ενώ θα μπορούσαν να προχωρήσουν σε ερμηνεία της πρώτης κατάστασης σε όλα τα έργα ΕΑΣ (μιας και ήταν μια πιο εύκολη και οικεία κατάσταση), δεν το έκαναν και φάνηκε να θεωρούν την επιφανειακή ομοιότητα σημαντική.

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η ικανότητα αναλογικού συλλογισμού διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην ικανότητα αλγεβρικής σκέψης (με βάση τα αποτελέσματα της ποσοτικής ανάλυσης), υπήρξε η υπόθεση ότι κατασκευάζοντας έργα ΕΑΣ «αναλογικού συλλογισμού αλγεβρικής σκέψης» τα οποία απαιτούν σύγκριση και ενθαρρύνουν τον εντοπισμό και τη μελέτη της δομής, πιθανόν οι μαθητές των διαφορετικών ομάδων να είχαν την ευκαιρία να εξετάσουν ξανά αλγεβρικές καταστάσεις με τρόπο που να τους επιτρέπει να επιδείξουν στοιχεία βελτιωμένης επίδοσης σε κάποιες ικανότητες αλγεβρικής σκέψης. Η υπόθεση αυτή επιβεβαιώθηκε μιας και μερικοί μαθητές, κυρίως της δεύτερης και τρίτης ομάδας, επέδειξαν στοιχεία βελτίωσης στην επίδοσή τους κατά τη διάρκεια της συνέντευξης, διορθώνοντας λανθασμένες αντιλήψεις ή δυσκολίες τις οποίες παρουσίασαν τόσο στην αρχική επεξεργασία του έργου στη συνέντευξη, αλλά και στο δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης. Συγκεκριμένα, φάνηκε ότι τα έργα ΕΑΣ βοήθησαν μερικούς μαθητές της δεύτερης και της τρίτης ομάδας να επιδείξουν βελτιωμένη επίδοση σε μια ικανότητα ή σε ένα συγκεκριμένο έργο στα οποία με βάση την ποσοτική ανάλυση (από το γραπτό δοκίμιο) παρουσίαζε ψηλή επίδοση η αμέσως επόμενη ομάδα μαθητών από αυτούς. Οι συγκεκριμένοι μαθητές πιθανό να βρίσκονταν σε ένα μεταβατικό στάδιο όπου με κάποια βοήθεια (π.χ. τα έργα ΕΑΣ) κατάφεραν να επιδείξουν χαρακτηριστικά της επόμενης ομάδας.

Ένας αριθμός μαθητών της δεύτερης ομάδας κατάφεραν να επιδείξουν στοιχεία βελτίωσης στο έργο της ικανότητας «Μεταβολή των τιμών της εξαρτημένης σε σχέση με την ανεξάρτητη» και της ικανότητας «Γενίκευση ιδιοτήτων της ισότητας». Μέσα από τη σύγκριση των δύο καταστάσεων σε καθεμιά από τις δύο περιπτώσεις, κατάφεραν να ξεφύγουν από την περιορισμένη αντίληψη του ίσον ως «ακολουθεί το αποτέλεσμα», αναπτύσσοντας κατανόηση του ίσον ως σχέση ισοδυναμίας και ως προσδιορισμός αυτού που βρίσκεται αριστερά από το ίσον. Κατάφεραν επίσης, να επιδείξουν βελτίωση στο έργο της ικανότητας «Αντίληψης και εύρεσης της τιμής του αγνώστου» όπου μέσα από τη σύγκριση των δύο καταστάσεων του έργου αντιλήφθηκαν ότι κατά την επίλυση των εξισώσεων που ίσχυαν ταυτόχρονα (σύστημα εξισώσεων) θα έπρεπε να εντοπίσουν τιμές που να ικανοποιούν και τις δύο εξισώσεις ταυτόχρονα, τις οποίες ωστόσο εντόπισαν μέσω δοκιμής και ελέγχου. Από την άλλη, μερικοί μαθητές της τρίτης ομάδας, παρουσίασαν στοιχεία βελτίωσης στο έργο της ικανότητας «Γενίκευση μοτίβων συμμεταβολής» όπου μέσα από τη σύγκριση των δύο καταστάσεων κατεύθυναν περισσότερο την προσοχή τους στη δομή των καταστάσεων και κατέληξαν τελικά στη γενίκευση του αναπτυσσόμενου γεωμετρικού μοτίβου με γενικό κανόνα «3ν+1» (έργο το οποίο δεν είχαν επιλύσει ορθά στο δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης). Οι μαθητές της τρίτης ομάδας παρουσίασαν επίσης βελτίωση στο έργο της ικανότητας «Αντίληψη και εύρεση της τιμής του αγνώστου (επίλυση εξισώσεων)» όπου συγκρίνοντας τις δύο καταστάσεις εντόπισαν ότι αφαιρώντας τα αντίστοιχα μέλη των εξισώσεων (σε ένα σύστημα εξισώσεων) η κατάσταση απλοποιείται και ο εντοπισμός της τιμής των αγνώστων καθίσταται ευκολότερος. Ακόμη, ένας αριθμός μαθητών της τρίτης ομάδας επέδειξαν βελτίωση και στο έργο «Γενίκευσης ιδιοτήτων των πράξεων και απλοποίησης αλγεβρικών εκφράσεων» και στο έργο «Μοντελοποίησης σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων». Συγκεκριμένα, μέσα από τη σύγκριση των δύο καταστάσεων του κάθε έργου κατάφεραν στη μια περίπτωση να αναφερθούν σε πράξεις με αλγεβρικά σύμβολα (ξεφεύγοντας από την αναφορά σε πράξεις με συγκεκριμένους αριθμούς) και στη δεύτερη περίπτωση οδηγήθηκαν σε ερμηνεία αλγεβρικών εκφράσεων οι οποίες αναπαριστούσαν πρόσθεση διαδοχικών στοιχείων μέσω αλγεβρικών συμβόλων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Εισαγωγή

Η παρούσα εργασία προτείνει ένα μοντέλο για την περιγραφή της δομής και της ανάπτυξης της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης σε μικρότερες τάξεις, το οποίο βασίζεται σε εμπειρικά δεδομένα, κάτι που απουσίαζε από τη βιβλιογραφία μέχρι στιγμής. Ενώ εντοπίζεται μια θεωρία για την περιγραφή της φύσης της αλγεβρικής σκέψης στις μικρότερες τάξεις (Kaput, 2008), δεν υπάρχει ένα μοντέλο καθολικής περιγραφής της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών (Carraher & Schliemann, 2007) με βάση εμπειρικά δεδομένα. Σε αντίθεση με προηγούμενες έρευνες, η παρούσα εργασία αποσκοπούσε στην καθολική περιγραφή της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης με βάση τη συμπεριφορά των ίδιων των μαθητών και για την οποία λήφθηκαν υπόψη η θεωρία του Kaput (2008), ο ορισμός της Kieran (2004) για την αλγεβρική σκέψη στις μικρότερες τάξεις, αλλά και τα διάφορα θέματα, έννοιες και ικανότητες αλγεβρικής σκέψης με τις οποίες καταπιάστηκαν οι διάφορες εργασίες που εντοπίστηκαν στη βιβλιογραφία.

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα όπως προκύπτουν από τη συζήτηση των αποτελεσμάτων της εργασίας. Στη συνέχεια, γίνεται παρουσίαση και συζήτηση των εκπαιδευτικών εφαρμογών των αποτελεσμάτων. Τέλος, περιγράφονται οι εισηγήσεις για μελλοντικές έρευνες.

Συνοπτική Περιγραφή του Μοντέλου

Στο προτεινόμενο μοντέλο λαμβάνονται υπόψη και οι «δύο σχολές» απόψεων οι οποίες διαφοροποιούνται ως προς το ποιά πτυχή της αλγεβρικής σκέψης είναι πιο σημαντική για τον ορισμό της αλγεβρικής σκέψης: «η γενίκευση, εντοπισμός της δομής και αιτιολόγηση» ή «οι ενέργειες σε αλγεβρικά σύμβολα με βάση κανόνες» (Kaput,2008). Η μια σχολή «υποβιβάζει» τη χρήση της τυπικής αλγεβρικής σύνταξης για χάρη της σκόπιμης έκφρασης γενικεύσεων και μοντέλων διαφόρων καταστάσεων χρησιμοποιώντας οποιοδήποτε μέσο είναι διαθέσιμο για το μαθητή, αλλά κυρίως τη φυσική γλώσσα και σχεδιαγράμματα. Από αυτή την άποψη, αλλά και από τους δύο πυλώνες που προτείνει ο Kaput (2008) στη θεωρία του, προκύπτουν οι δύο παράγοντες του μοντέλου «γενίκευση ιδιοτήτων από την αριθμητική» (γενίκευση ιδιοτήτων της ισότητας, των πράξεων, των αριθμών) και «ο συλλογισμός για την ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών» (που εμπλέκει τη γενίκευση μοτίβων συμμεταβολής, αλλά και τη μεταβολή τιμών δύο μεταβλητών με βάση κανόνες και συλλογισμό για τη σχέση ταυτόχρονης μεταβολής). Στους δύο αυτούς παράγοντες η χρήση αλγεβρική σύνταξης από τους μαθητές δεν είναι απαραίτητη, μιας και δεν συνδέεται άμεσα με τη φύση των συγκεκριμένων ικανοτήτων και οι μαθητές εκφράζουν τις γενικεύσεις τους μέσω της φυσικής γλώσσας.

Η δεύτερη «σχολή» αντιμετωπίζει τις ενέργειες σε αλγεβρικά σύμβολα με βάση συγκεκριμένους κανόνες ως την «καρδιά» της αλγεβρικής σκέψης, είτε αυτές οι ενέργειες υπηρετούν τη γενίκευση είτε όχι. Από αυτή τη δεύτερη άποψη, προκύπτει ο τρίτος παράγοντας του προτεινόμενου μοντέλου, οι «ικανότητες άμεσα συνυφασμένες με την αλγεβρική σύνταξη», που αναλύεται στην αντίληψη και εύρεση της τιμής του αγνώστου, στη μοντελοποίηση σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων και στην απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων. Στις ικανότητες του τρίτου παράγοντα «ικανότητες συνυφασμένες με την αλγεβρική σύνταξη», η παρουσία αλγεβρικής σύνταξης είναι απαραίτητη και εμπλέκεται άμεσα στη φύση των συγκεκριμένων ικανοτήτων. Με βάση τα εμπειρικά δεδομένα της εργασίας, η μοντελοποίηση ανήκει στον τρίτο αυτό παράγοντα, σε αντίθεση με τη θεωρία του Kaput (2008) η οποία αντιμετωπίζει τη μοντελοποίηση ως ξεχωριστό πυλώνα της αλγεβρικής σκέψης (όπως και τις περιοχές «γενίκευση από την αριθμητική» και τη «συναρτησιακή σκέψη»).

Ως εκ τούτου, το προτεινόμενο μοντέλο, ενσωματώνει μέσω των τριών παραγόντων και τις δύο απόψεις που εκφράζονται από τις δύο διαφορετικές «σχολές» που προαναφέρθηκαν και ταυτόχρονα υποδεικνύει τη διάκριση των δύο περιοχών που εμφανίζονται στη βιβλιογραφία, «τη γενικευμένη αριθμητική» και «το συλλογισμό για τη συμμεταβολή» (Blanton et al., 2011; Kaput, 2008). Επιπρόσθετα, το μοντέλο επιβεβαιώθηκε και για τη σταθερότητά του στις τρεις διαφορετικές ηλικιακές ομάδες, συγκεκριμένα για την εφαρμογή του στους μαθητές της Ε΄ δημοτικού, στους μαθητές της Στ΄ δημοτικού και στους μαθητές της Α΄ γυμνασίου.

Με βάση τα αποτελέσματα σχετικά με τις διαστάσεις της ικανότητες αλγεβρικής σκέψης, η παρούσα εργασία περιγράφει τέσσερις διαφορετικές ομάδες επίδοσης με σκοπό την περιγραφή της ανάπτυξης των ικανοτήτων αλγεβρικής σκέψης. Σε αντίθεση με τις θεωρίες και εργασίες για τη μελέτη της ανάπτυξης της αλγεβρικής ικανότητας: (α) με βάση την ιστορική εξέλιξη της άλγεβρας και τον παραλληλισμό της με τη γνωστική ανάπτυξη (Sfard, 1995), (β) με βάση την ανάπτυξη της έννοιας της μεταβλητής (Kuchemann, 1978; Usiskin, 1988), (γ) με βάση τα επίπεδα αιτιολόγησης γενικεύσεων (Carpenter et al, 2003), (δ) με βάση την ανάπτυξη της αντίληψης του συμβόλου της ισότητας (Rittle-Johnson et al., 2011), αλλά και (ε) με εργασίες που περιγράφουν την ανάπτυξη συγκεκριμένης ικανότητας αλγεβρικής σκέψης (π.χ. από την αριθμητική γενίκευση στην αλγεβρική γενίκευση) (Radford, 2008), η παρούσα εργασία χρησιμοποιεί ένα αμάλγαμα όλων αυτών πτυχών και περιγραφών στην προσπάθεια μιας καθολικής περιγραφής των χαρακτηριστικών διαφορετικών ομάδων. Η προσπάθεια καθολικής περιγραφής της αλγεβρικής σκέψης στην παρούσα εργασία, προέκυψε από την ανάγκη που τονίζεται σε κεφάλαια-κριτικές σχετικά με την αλγεβρική σκέψη (π.χ. Jones et al., 2002; Kieran, 2007) για τη δημιουργία ενός γενικού μοντέλου το οποίο θα χαρακτηρίζει και θα περιγράφει την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών με τα χρόνια. Τα αποτελέσματα εισηγούνται ότι η ικανότητα αλγεβρικής σκέψης των μαθητών δέκα έως δεκατριών ετών αναπτύσσεται και μπορεί να περιγραφεί με βάση τέσσερις ομάδες διαφορετικής επίδοσης. Ο τρόπος με τον οποίο προσέγγισαν οι μαθητές των τεσσάρων ομάδων κάποια έργα (στρατηγικές, λάθη), η ικανότητά τους να εντοπίζουν τη δομή (και το να σκέφτονται αναλογικά) και το σε ποια έργα κατάφεραν να επιδείξουν ψηλή επίδοση, επέτρεψαν έναν πιο λεπτομερή χαρακτηρισμό και την απόδοση ονομασίας των τεσσάρων ομάδων ικανότητας αλγεβρικής σκέψης. Επέτρεψαν επιπρόσθετα και έναν σύντομο παραλληλισμό των τεσσάρων ομάδων με τα τέσσερα επίπεδα διαφορετικής πολυπλοκότητας της ταξινομίας SOLO (Biggs & Collis,1982), ο οποίος έχει περιγραφεί στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Η δραστηριότητα και συμπεριφορά της πρώτης ομάδας μαθητών ονομάστηκε «προαλγεβρική» αφού οι μαθητές παρουσίασαν χαμηλή επίδοση σε όλες τις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης και δεν επέδειξαν ικανότητα γενίκευσης ή χειρισμού της αλγεβρικής σύνταξης. Η επιτυχία τους περιορίστηκε μόνο σε ένα απλό έργο εύρεσης της τιμής του άγνωστου σε αλγεβρικές εξισώσεις με πρόσθεση και σε ένα έργο αναπαράστασης της μεταβολής των τιμών δύο μεταβλητών σε γραφική παράσταση οι οποίες παρέχονταν σε πίνακα, έργα τα οποία απαιτούσαν απλή εκτέλεση της οδηγίας και δεν ενέπλεκαν κάποια επεξεργασία. Στην προσπάθεια γενίκευσης μοτίβων οι συγκεκριμένοι μαθητές, στην καλύτερη περίπτωση, εντόπισαν μόνο τον αμέσως επόμενο όρο του μοτίβου μέσω επαναλαμβανόμενης (recursive) στρατηγικής (Aké et al., 2013) ή αριθμητικής στρατηγικής όπως την ονομάζει ο Radford (2008) και απέτυχαν στα έργα γενίκευσης ιδιοτήτων από την αριθμητική επιδεικνύοντας ότι στερούνται εννοιολογικής κατανόησης

(Kieran,1992). Οι μαθητές παρουσίασαν περιορισμένη αντίληψη του «ίσον» «ως ακολουθεί το αποτέλεσμα» (Rittle-Johnson et al., 2011), δεν επέδειξαν αντίληψη της μεταβλητής (του αλγεβρικού συμβόλου) ως γενικευμένο αριθμό ή ως μεταβαλλόμενη ποσότητα σε σχέση με μια άλλη και υπάρχουν λίγες ενδείξεις ότι αντιλαμβάνονταν τη μεταβλητή ως συγκεκριμένο άγνωστο αριθμό στην επίλυση εξισώσεων (Kuchemann, 1978; Usiskin, 1988). Εμφάνισαν ωστόσο, την τάση να ερμηνεύουν τη μεταβλητή σε κανόνες ή σε ισότητες με αλγεβρικά σύμβολα, ως συγκεκριμένο άγνωστο αριθμό, ενώ στα έργα απλοποίησης εκφράσεων έδωσαν ως αποτέλεσμα κάποιο αριθμό, δείχνοντας ότι αντιμετωπίζουν το εμπόδιο lack of closure (Collis, 1974) .

Η δραστηριότητα της δεύτερης ομάδας μαθητών χαρακτηρίζεται ως «διαδικαστική-πρωτοαλγεβρική» παρουσιάζοντας κατά κάποιο τρόπο χαρακτηριστικά από τον όρο «διαδικαστική πτυχή της άλγεβρας» της Kieran (1991) και τον όρο «πρωτο-αλγεβρική δραστηριότητα» των Aké et al. (2013). Οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας παρουσίασαν επιτυχία σε έργα αλγεβρικής σκέψης τα οποία ήταν δυνατό να επιλυθούν και μέσω υπολογισμών με αριθμούς και μέσω της στρατηγικής δοκιμής και ελέγχου και σε λιγότερες περιπτώσεις μέσω της ανάδρομης πορείας. Λαμβάνοντας υπόψη, το γεγονός ότι οι Sfard και Linchevski (1994) θεωρούν τον εντοπισμό του αγνώστου μέσω στρατηγικών όπως «ανάδρομη πορεία» ως αρχή της αλγεβρικής σκέψης, η δραστηριότητα της συγκεκριμένης ομάδας στα διάφορα έργα μέσω παρόμοιων («άτυπων») στρατηγικών κρίνεται ως «πρωτοαλγεβρική». Συγκεκριμένα, οι μαθητές επέδειξαν ψηλή επίδοση σε τρία έργα γενίκευσης (κανόνα με βάση πίνακα τιμών, μεταβατικής ιδιότητας ισότητας και ανισότητας, προσθετικό και πολλαπλασιαστικό αντίστροφο) και σε έργα εύρεσης της τιμής του αγνώστου, στα οποία υιοθετούσαν τη στρατηγική «δοκιμή και έλεγχος», αλλά και στο έργο *υπολογισμού των τιμών* της εξαρτημένης σε σχέση με την ανεξάρτητη μεταβλητή με βάση λεκτικό κανόνα για την αναπαράσταση της σχέσης μεταβολής δύο μεταβλητών σε γραφική παράσταση. Όσον αφορά στο έργο συμπλήρωσης κενού σε ισότητα με αριθμούς το οποίο απαιτούσε αναγνώριση, χρήση και επεξήγηση για το προσθετικό και πολλαπλασιαστικό αντίστροφο, η τελική επεξήγηση των μαθητών αν και έδειχνε γενίκευση και κρίθηκε ως ολοκληρωμένη και αποδεκτή, στην αρχή είχε βασιστεί σε δοκιμές με αριθμούς. Η δραστηριότητα τους και η επιτυχία τους στα πιο πάνω έργα αν και έχει ως αποτέλεσμα τη γενίκευση, αν και δείχνει ικανότητα επίλυσης αλγεβρικών εξισώσεων και συλλογισμό για τη σχέση μεταβολής δυο μεταβλητών, βασίζεται κυρίως σε υπολογισμούς με αριθμούς και δοκιμές, επομένως τα αντικείμενα χειρισμού είναι αριθμοί και η βασική δραστηριότητα είναι διαδικαστική. Οι συγκεκριμένοι μαθητές επέδειξαν μόνο διαδικαστική αντίληψη του ίσον ως «ακολουθεί το αποτέλεσμα» (Rittle-Johnson et al., 2011). Αντιμετώπισαν δυσκολία να καταλήξουν σε γενικεύσεις για *γεωμετρικά αναπτυσσόμενα μοτίβα* αφού υιοθετούσαν κυρίως επαναλαμβανόμενη (recursive) στρατηγική (Radford, 2008) και δεν κατάφεραν να εκφράσουν ολοκληρωμένες γενικεύσεις με αιτιολόγηση για ιδιότητες των αριθμών, αφού περιορίστηκαν σε γενίκευση με βάση αριθμητικά παραδείγματα και αιτιολόγηση με βάση αυτά (Carpenter et al., 2003). Όσον αφορά στη χρήση αλγεβρικής σύνταξης, αντιμετώπισαν δυσκολία να εκφράσουν σχέσεις μέσω αλγεβρικών συμβόλων και να απλοποιήσουν αλγεβρικές εκφράσεις. Συγκεκριμένα, στην απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων, αν και (πιθανόν) αναγνώριζαν ότι το αλγεβρικό σύμβολο δεν λαμβάνει μόνο μια συγκεκριμένη τιμή, δεν γνώριζαν πώς να χειριστούν την κατάσταση και έδιναν ως αποτέλεσμα κάποιο αριθμό. Αυτό σε συνδυασμό με το ότι δεν παρουσίασαν επιτυχία στα έργα μοντελοποίησης μέσω αλγεβρικών εκφράσεων, αποτελούν ενδείξεις ότι δεν είχαν ξεπεράσει το εμπόδιο “lack of closure” (Collis, 1974). Τα ποσοτικά δεδομένα για τη συγκεκριμένη ομάδα παρέχουν ακόμη περισσότερες ενδείξεις (από ότι στην πρώτη ομάδα) ότι οι μαθητές αντιλαμβάνονταν την έννοια της μεταβλητής ως συγκεκριμένο άγνωστο αριθμό σε έργα επίλυσης εξισώσεων (Kuchemann, 1978; Usiskin, 1988). Ωστόσο, τα ποιοτικά δεδομένα παρέχουν κάποιες ενδείξεις ότι μερικοί μαθητές της δεύτερης ομάδας αναγνώριζαν ότι το αλγεβρικό σύμβολο σε ισότητα λαμβάνει διάφορες τιμές (στο έργο ΕΑΣ4) και ότι σε απλό κανόνα οι μεταβλητές παίρνουν διάφορες τιμές (στο έργο ΕΑΣ 7). Παρόλα αυτά, λόγω του ότι από την ποσοτική ανάλυση δεν υπήρχαν καθόλου στοιχεία ότι οι μαθητές της δεύτερης ομάδας (στο σύνολό τους) ερμήνευσαν στο κατάλληλο πλαίσιο τη μεταβλητή ως γενικευμένο αριθμό ή ως μεταβαλλόμενη ποσότητα, δεν είναι δυνατό να ειπωθεί σε καμία περίπτωση ότι οι συγκεκριμένοι μαθητές είχαν αναπτύξει τέτοιου είδους αντίληψη.

Η δραστηριότητα της τρίτης ομάδας χαρακτηρίζεται ως «συσχετιστική δραστηριότητα αλγεβρικής σκέψης», αφού οι μαθητές συγκεκριμένης ομάδας εκτός από την ακόμη ψηλότερη επίδοση που επέδειξαν στα έργα που είχαν επιτυχία και οι προηγούμενες ομάδες, παρουσίασαν επίσης: (α) συσχεσιακή αντίληψη του συμβόλου της ισότητας (Rittle-Johnson et al., 2011) κάτι που τους επέτρεψε να επιλύσουν αλγεβρικές εξισώσεις και να γενικεύσουν ιδιότητες της ισότητας συσχετίζοντας και αντιπαραβάλλοντας τα δύο μέλη των ισοτήτων και εξισώσεων, (β) ψηλή επίδοση στην ικανότητα μοντελοποίησης σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων συσχετίζοντας με ορθό τρόπο τις πληροφορίες των καταστάσεων, (γ) γενίκευση και αιτιολόγηση γεωμετρικού αναπτυσσόμενου μοτίβου μέσα από συσχέτιση του κανόνα με την εικόνα του μοτίβου και (δ) αντίληψη του ίσον ως «προσδιορισμός αυτού που βρίσκεται αριστερά από το ίσον» σε αλγεβρικούς κανόνες (Rittle-Johnson et al., 2011), επιτρέποντας τους σε *μερικές* περιπτώσεις (όχι στην πλειοψηφία των μαθητών) και την ικανότητα επεξήγησης της σχέσης μεταβολής δύο μεταβλητών μέσα από την συσχέτιση των δύο μελών της εξίσωσης του κανόνα και άρα ερμηνεία του κανόνα (χωρίς την ανάγκη αναφοράς σε συγκεκριμένα παραδείγματα). Γενικότερα, οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας σε αντίθεση με τους μαθητές της δεύτερης ομάδας, δεν βασίστηκαν τόσο στη στρατηγική δοκιμής και ελέγχου και στους υπολογισμούς με αριθμούς και φάνηκε να επικεντρώνονται περισσότερο στη δομή των καταστάσεων. Εξαίρεση αποτελούν τα έργα γενίκευσης ιδιοτήτων των αριθμών και ιδιοτήτων των πράξεων, τα οποία απαιτούν εννοιολογική κατανόηση και οι συγκεκριμένοι μαθητές δεν παρουσίασαν ψηλή επίδοση λόγω της δυσκολίας τους να αιτιολογήσουν τις γενικεύσεις πέρα από τη χρήση αριθμητικών παραδειγμάτων (Carpenter et al., 2003). Επίσης, οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας παρουσίασαν μέτρια επίδοση σε έργα απλοποίησης αλγεβρικών εκφράσεων και σε συνδυασμό με την επιτυχία τους στη χρήση αλγεβρικών εκφράσεων για αναπαράσταση σχέσεων (χωρίς να αποδίδουν συγκεκριμένη τιμή στις αλγεβρικές εκφράσεις), παρείχαν ενδείξεις ότι είχαν άρχισαν πιθανόν να ξεπερνούν το εμπόδιο “lack of closure” (Collis, 1974). Ενώ αναγνώρισαν ότι το αλγεβρικό σύμβολο στα έργα απλοποίησης αλγεβρικών εκφράσεων δεν είναι ένας συγκεκριμένος άγνωστος αριθμός, μετά την αντικατάσταση τιμών γα τη μελέτη της κατάστασης (την οποία δεν μπορούν να χειριστούν αλλιώς), παρέβλεψαν το στάδιο όπου θα έπρεπε από την αντικατάσταση αριθμού και το αριθμητικό αποτέλεσμα να οδηγηθούν πίσω στο πλαίσιο των αλγεβρικών συμβόλων. Αξίζει να σημειωθεί ότι ως προς την ερμηνεία της μεταβλητής: (α) παρουσιάστηκαν ενδείξεις, όπως και στις προηγούμενες ομάδες, για την αντίληψη της μεταβλητής ως συγκεκριμένο άγνωστο αριθμό σε έργα επίλυσης εξισώσεων, (β) υπήρχαν ενδείξεις από την ποσοτική ανάλυση (για πρώτη φορά) για την αντίληψη της έννοιας της μεταβλητής ως γενικευμένο αριθμό στα έργα γενίκευσης ιδιοτήτων της ισότητας και στα έργα μοντελοποίησης σχέσεων μέσω αλγεβρικών εκφράσεων και (γ) εμφανίστηκαν ενδείξεις για την αντίληψη της έννοιας της μεταβλητής ως μεταβαλλόμενη ποσότητα που μεταβάλλεται σε σχέση με μια άλλη, τόσο στο έργο μεταβολής τιμών δύο μεταβλητών με βάση αλγεβρικά διατυπωμένο κανόνα όσο και στα έργα μοντελοποίησης σχέσεων μέσω αλγεβρικά διατυπωμένων κανόνων (Kuchemann, 1978; Usiskin, 1988).

Οι μαθητές της τέταρτης ομάδας παρουσίασαν ψηλή επίδοση σε όλα τα έργα όλων των ικανοτήτων αλγεβρικής σκέψης και η δραστηριότητά τους χαρακτηρίζεται ως «δομική-καθολική δραστηριότητα αλγεβρικής σκέψης». Πέρα από την υψηλότερη επίδοση που παρουσίασαν στις ικανότητες που επιτυγχάνει και η προηγούμενη ομάδα μαθητών είχαν επιπρόσθετα επιτυχία στα εξής: (α) στα έργα απλοποίησης αλγεβρικών εκφράσεων παρέχοντας στοιχεία ότι είχαν ξεπεράσει το εμπόδιο του “lack of closure”, (β) επέδειξαν ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων των πράξεων και των αριθμών η οποία συνοδεύεται από ολοκληρωμένη αιτιολόγηση (Carpenter et al., 2003) η οποία υποδηλώνει εννοιολογική κατανόηση των εννοιών που εμπλέκονται στα συγκεκριμένα έργα και (γ) παρουσίασαν ικανότητα γενίκευσης γεωμετρικών αναπτυσσόμενων μοτίβων και αιτιολόγησης των γενικεύσεων με βάση το πλαίσιο, στα οποία η εικόνα του μοτίβου δεν αποκαλύπτει άμεσα το γενικό κανόνα, αλλά απαιτεί κάποια επεξεργασία και μελέτη της δομής, (δ) μετέφεραν τη γενίκευση ενός γεωμετρικού αναπτυσσόμενου μοτίβου σε νέο παρόμοιο πλαίσιο και (ε) εντόπισαν το εύρος τιμών που ικανοποιεί μια ανίσωση υποδεικνύοντας ότι η επίδοση τους σε έργα που εμπλέκουν περιορισμούς (Drijvers et al., 2010) δεν περιορίζεται στην εύρεση της τιμής του αγνώστου σε εξισώσεις, αλλά και της αντίληψης ότι στην περίπτωση των ανισώσεων η τιμή του αγνώστου δεν είναι μία, αλλά ένα εύρος τιμών. Οι προσεγγίσεις και στρατηγικές που υιοθέτησαν οι μαθητές της τέταρτης ομάδας κατά την επίλυση έργων αλγεβρικής σκέψης υποδεικνύουν την ικανότητά τους να εντοπίζουν τη δομή των καταστάσεων. Παρουσίασαν αντίληψη του συμβόλου της ισότητας με όλες του τις έννοιες (Rittle-Johnson et al., 2011) όπως και ορθή αντίληψη της έννοιας της μεταβλητής ανάλογα με το πλαίσιο στο οποίο εντοπίζεται (ως συγκεκριμένο άγνωστο αριθμό, ως γενικευμένο αριθμό και ως μεταβαλλόμενη ποσότητα σε σχέση με μια άλλη ποσότητα) (Kuchemann, 1978; Usiskin, 1988). Το γεγονός ότι οι μεγαλύτεροι μαθητές της τέταρτης ομάδας είναι δεκατριών ετών και παρέχονται στοιχεία γενικά από τους μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας ότι είχαν ξεπεράσει το εμπόδιο “lack of closure”, έρχεται σε κάποια αντίθεση με αυτό που προτείνει ο Orton (2004) ότι οι μαθητές, περίπου στην ηλικία των 15 ετών, μετά από κάποια χρόνια διδασκαλίας της άλγεβρας, φτάνουν στο επίπεδο όπου αποδέχονται το εμπόδιο "lack of closure".

Τα αποτελέσματα της εργασίας έδειξαν ακόμη ότι η ικανότητα αλγεβρικής σκέψης εξαρτάται σε σημαντικό βαθμό από την ικανότητα αναλογικού συλλογισμού των μαθητών, κάτι που συνάδει με τα αποτελέσματα των ελάχιστων εργασιών (English & Warren, 1994; Novick,1992) που εξέτασαν τη συγκεκριμένη σχέση. Συγκεκριμένα, η ικανότητα αναλογικού συλλογισμού η οποία αποτελεί σύνθεση της επίδοσης των μαθητών στους παράγοντες «αναλογικός συλλογισμός μετά από εντοπισμό εννοιολογικών σχέσεων», «αναλογικός συλλογισμός μετά από εντοπισμό οπτικο-χωρικών σχέσεων» και «αναλογικός συλλογισμός μετά από εντοπισμό αριθμητικών σχέσεων» αποτελεί ισχυρό παράγοντα πρόβλεψης της επίδοσης των μαθητών στις τρεις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης (δεύτερης τάξης παράγοντες του μοντέλου αλγεβρικής σκέψης). Η σχέση αυτή αν και είναι ισχυρή, δεν απέσπασε το ανάλογο ερευνητικό ενδιαφέρον (Warren, 1997). Η σχέση μεταξύ των δύο ικανοτήτων θεωρείται ιδιαίτερα σημαντική γιατί μας ενημερώνει για την ακριβή σχέση που υφίσταται μεταξύ τους και οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η κατάλληλη διδασκαλία που θα είχε ως στόχο την ανάπτυξη της ικανότητας αναλογικού συλλογισμού θα μπορούσε πιθανό να επιφέρει βελτίωση και στην επίδοση των μαθητών στις διαστάσεις της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης.

Τα αποτελέσματα υποδεικνύουν επίσης, ότι η ικανότητα αναλογικού συλλογισμού των μαθητών των τεσσάρων ομάδων αλγεβρικής σκέψης κατά την επίλυση των έργων ΕΑΣ, τα οποία κατασκευάστηκαν ώστε να εμπλέκουν ταυτόχρονα αναλογικό συλλογισμό και αλγεβρική σκέψη, διαφοροποιείται. Συγκεκριμένα, ενώ η πρώτη ομάδα υιοθέτησε και παρέμεινε κυρίως στην επιφανειακή προσέγγιση δίνοντας έμφαση στα επιφανειακά χαρακτηριστικά των καταστάσεων, οι μαθητές της δεύτερης και τρίτης ομάδας υιοθέτησαν κυρίως μια μεταβατική προσέγγιση εντοπίζοντας σχέση μεταξύ των δύο καταστάσεων την οποία δεν ήταν σε θέση να αιτιολογήσουν ή ο τρόπος εργασίας τους δεν ενέπλεκε πλήρη εστίαση της προσοχής στη δομή των δύο καταστάσεων. Από την άλλη, οι μαθητές της τέταρτης ομάδας αλγεβρικής σκέψης υιοθέτησαν κυρίως τη δομική προσέγγιση εντοπίζοντας την κοινή δομή των δύο καταστάσεων σε κάθε έργο ΕΑΣ. Η ικανότητα των μαθητών υψηλής επίδοσης να εντοπίζουν τα σημαντικά χαρακτηριστικά των καταστάσεων και να απομακρύνουν τα μη σημαντικά στοιχεία (επιφανειακά χαρακτηριστικά) αλλά και η προσκόλληση των αδύνατων μαθητών στην επιφανειακή ομοιότητα, συνάδει με τα αποτελέσματα και άλλων ερευνών (Chrysostomou et al., 2013; English & Sharrry, 1996).

Παρουσιάστηκαν ενδείξεις βελτίωσης ενός αριθμού μαθητών κυρίως της δεύτερης και τρίτης ομάδας και ελάχιστα της τέταρτης ομάδας, σε μερικές ικανότητες αλγεβρικής σκέψης ή έννοιες που εμπλέκονταν στα συγκεκριμένα έργα, κατά τη διάρκεια της συνέντευξης. Τα έργα ΕΑΣ έδωσαν επομένως, την ευκαιρία σε μαθητές της δεύτερης και τρίτης ομάδας αλγεβρικής σκέψης να επιδείξουν χαρακτηριστικά της επόμενης ομάδας από αυτούς. Φυσικά αυτά αποτελούν ενδείξεις βελτίωσης από μέρους των μαθητών, χωρίς να υπάρχει απόλυτη βεβαιότητα ότι για τη συγκεκριμένη βελτίωση οφείλονταν τα έργα ΕΑΣ. Τίθεται επίσης, το θέμα ότι το περιβάλλον της συνέντευξης, είναι πιθανόν από μόνο του πιο «ευνοϊκό» ή «κατάλληλο» για το μαθητή να επιδείξει τις δυνατότητές του. Παρόλα αυτά, οι ενδείξεις βελτίωσης των συγκεκριμένων μαθητών αφήνουν ανοικτό το ενδεχόμενο τα έργα αναλογικού συλλογισμού με μαθηματικό περιεχόμενο, να είναι χρήσιμα για τη διδασκαλία (Lee & Sriraman, 2011) και στην προσπάθεια ανάπτυξης της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών.

Το θεωρητικό μοντέλο αυτής της εργασίας θα ήταν δυνατό να αποτελέσει ένα σημαντικό εργαλείο για εκπαιδευτικούς και ερευνητές του πεδίου της μαθηματικής παιδείας. Αυτό το μοντέλο αναμένεται να υποδείξει στους εκπαιδευτικούς τις πιο σημαντικές διαστάσεις της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης και τονίζει τη σημασία του να παρέχεται στους μαθητές μια ποικιλία δραστηριοτήτων που αναφέρονται στις διαφορετικές διαστάσεις αυτής της ικανότητας, ώστε να διευκολύνεται και η ανάπτυξή της. Τα αποτελέσματα εισηγούνται επίσης, την ανάγκη για περισσότερη έμφαση στη διδασκαλία των εννοιών και ικανοτήτων αλγεβρικής σκέψης.

Η ιεραρχική ανάταξη των ικανοτήτων αλγεβρικής σκέψης εισηγείται ότι είναι καλυτέρα ο σχεδιασμός της διδασκαλίας για την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης να βασίζεται στον τρόπο με τον οποίο αναπτύσσονται οι παράγοντες πρώτης τάξης του μοντέλου εντός κάθε δεύτερης τάξης παράγοντα, π.χ. (α) πρώτα η αντίληψη και εύρεση της τιμής του αγνώστου, ακολούθως η μοντελοποίηση σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων και μετά η απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων, (β) αρχικά η ικανότητα μεταβολής τιμών δύο μεταβλητών με βάση κανόνες και στη συνέχεια η ικανότητα γενίκευση μοτίβων-σχέσεων δύο μεταβλητών που μεταβάλλονται ταυτόχρονα, (γ) αρχικά η ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων της ισότητας, ακολούθως η ικανότητα γενίκευσης των ιδιοτήτων των πράξεων και τέλος η ικανότητα γενίκευσης των ιδιοτήτων αριθμών. Για αυτό το λόγο, οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να δίνουν περισσότερη έμφαση στην ανάπτυξη της πιο εύκολης ικανότητας-παράγοντα πρώτης τάξης και ακολούθως να προχωρούν στην επόμενη ικανότητα του συγκεκριμένου παράγοντα δεύτερης τάξης. Ωστόσο, οι τρεις παράγοντες δεύτερης τάξης οι οποίοι αποτελούν την «ικανότητα συλλογισμού για την ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών», η «ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων από την αριθμητική» και οι «ικανότητες που είναι άμεσα συνυφασμένες με την αλγεβρική σκέψη» θα ήταν προτιμότερο να διδάσκονται παράλληλα, αφού η χρήση του αλγεβρικού συμβολισμού που εμπλέκεται κυρίως στις ικανότητες του παράγοντα «ικανότητες συνυφασμένες με την αλγεβρική σύνταξη» διαδραματίζει έναν υποστηρικτικό ρόλο στην εκμάθηση και των υπόλοιπων ικανοτήτων αλγεβρικής σκέψης (Kaput,2008; Van Amerom, 2003). Επίσης, με την παράλληλη διδασκαλία της ικανότητας γενίκευσης ιδιοτήτων από την αριθμητική και της ικανότητας γενίκευσης μοτίβων και σχέσεων που αφορούν σε ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών, επιτυγχάνεται πιο σφαιρική διδασκαλία επιτρέποντας στους μαθητές να αναπτύσσουν ταυτόχρονα και τις δύο ικανότητες και πιθανό να αποφύγουν τυχόν περιορισμένη αντίληψη για έννοιες, μεταβλητές και σύμβολα.

Η περιγραφή διαφορετικών ομάδων επίδοσης ως προς την ικανότητα αλγεβρικής σκέψης είναι δυνατόν να αποτελέσει διαγνωστικό και θεραπευτικό εργαλείο για τους εκπαιδευτικούς. Η μελέτη της συμπεριφοράς των μαθητών κατά την επίλυση έργων αλγεβρικής σκέψης και η σύγκριση της με τα χαρακτηριστικά των τεσσάρων ομάδων επίδοσης αποσκοπεί να καθοδηγήσει τους εκπαιδευτικούς στην ταξινόμηση της συμπεριφοράς των μαθητών. Η ταξινόμηση της συμπεριφοράς τους ενδέχεται να καταστήσει και πιο εύκολο τον εντοπισμό και την αναγνώριση των λαθών ή των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές. Επιπρόσθετα, το μοντέλο με τις διαφορετικές ικανότητες αλγεβρικής σκέψης παρέχει στον εκπαιδευτικό πολύτιμες πληροφορίες σχετικά με την επιλογή κατάλληλων δραστηριοτήτων για τη διευκόλυνση και υπερπήδηση των δυσκολιών που κάθε μαθητής αντιμετωπίζει. Για παράδειγμα, αν ένας μαθητής αντιμετωπίζει δυσκολίες οι οποίες υποδεικνύουν χαρακτηριστικά της δεύτερης ομάδας επίδοσης, ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να επενδύσει σε δραστηριότητες για τη διόρθωση της περιορισμένης αντίληψης του συμβόλου της ισότητας και δραστηριότητες που έχουν ως στόχο να κατανοήσει ο μαθητής τη χρήση αλγεβρικών συμβόλων για αναπαράσταση σχέσεων. Τα έργα ΕΑΣ τα οποία κατασκευάστηκαν ώστε να εμπλέκουν ταυτόχρονα αλγεβρική σκέψη και αναλογικό συλλογισμό θα ήταν χρήσιμο να αξιοποιηθούν από τον εκπαιδευτικό στη διδασκαλία, με απώτερο στόχο την πιθανή βελτίωση των ικανοτήτων της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών που εμπλέκονται στα συγκεκριμένα έργα (μέσα από τυχόν διόρθωση λανθασμένων αντιλήψεων ή βοήθειας για υπερπήδηση δυσκολιών) ή ακόμη και βελτίωση και της ικανότητας αναλογικού συλλογισμού.

Από την ισχυρή σχέση μεταξύ της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης και της ικανότητας αναλογικού συλλογισμού προκύπτει η ανάγκη απόδοσης μεγαλύτερης έμφασης στην ανάπτυξη των διαστάσεων του αναλογικού συλλογισμού («αναλογικός συλλογισμός μέσα από εντοπισμό εννοιολογικών σχέσεων», «αναλογικός συλλογισμός μέσα από εντοπισμό αριθμητικών σχέσεων», «αναλογικός συλλογισμός μέσα από εντοπισμό οπτικο-χωρικών σχέσεων») μέσα από ποικιλία δραστηριοτήτων, όχι μόνο μέσα από το αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών, αλλά και από το γενικό εκπαιδευτικό αναλυτικό πρόγραμμα.

Εισηγήσεις για Μελλοντικές Έρευνες

Η παρούσα εργασία εξέτασε τη δομή της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης και επιβεβαίωσε ότι η ικανότητα αλγεβρική σκέψης αποτελείται από τρεις γενικές ικανότητες «το συλλογισμό για την ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών», «τη γενίκευση ιδιοτήτων από την αριθμητική» και «τις ικανότητες που είναι άμεσα συνυφασμένες με την αλγεβρική σύνταξη». Η πρώτη γενική ικανότητα αναλύεται σε δύο άλλες ικανότητες την «γενίκευση μοτίβων συμμεταβολής», «τη μεταβολή των τιμών δύο μεταβλητών με βάση κανόνες και το συλλογισμό για τη σχέση μεταβολής». Η δεύτερη γενική ικανότητα αναλύεται στην ικανότητα «γενίκευσης ιδιοτήτων της ισότητας», στην «γενίκευση ιδιοτήτων των πράξεων» και στην «γενίκευση ιδιοτήτων των αριθμών», ενώ η τρίτη γενική ικανότητα αναλύεται στην ικανότητα «αντίληψης και εύρεσης της τιμής του αγνώστου», στην ικανότητα «μοντελοποίησης σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων» και στην ικανότητα «απλοποίησης αλγεβρικών εκφράσεων». Λόγω της απουσίας προηγούμενων σχετικών ερευνών οι οποίες να αποσκοπούν σε καθολική περιγραφή της φύσης της αλγεβρικής σκέψης στις μικρότερες τάξεις, η παρούσα εργασία βασίστηκε σε συνδυασμό σχετικών θεωριών και εργασιών των τελευταίων χρόνων. Για αυτό το λόγο, είναι αναγκαία η διεξαγωγή παρόμοιων ερευνών οι οποίες να εξετάζουν τη φύση και την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης και μικρότερων αλλά και μεγαλύτερων μαθητών. Συγκεκριμένα, μελλοντικές εργασίες θα ήταν ενδιαφέρον να εξετάσουν τις διαστάσεις της αλγεβρικής σκέψης διεξάγοντας την έρευνα και με μεγαλύτερους ηλικιακά μαθητές κάτι που θα επιτρέψει τη συμπερίληψη έργων και από την τυπική διδασκαλία συναρτήσεων (π.χ. έργα ορισμού συναρτήσεων), έργων γενίκευσης πιο σύνθετων γεωμετρικών αναπτυσσόμενων μοτίβων, έργων επίλυσης πιο σύνθετων εξισώσεων και έργων μετασχηματισμού αλγεβρικών παραστάσεων ως προς μια μεταβλητή.

Σε αυτή την εργασία εξετάστηκε και η ανάπτυξη της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης των μαθητών μέσα από τον εντοπισμό διαφορετικών ομάδων επίδοσης ως προς τις διαστάσεις της αλγεβρικής σκέψης. Εντοπίστηκαν τέσσερις ομάδες με βάση τις ικανότητες, τις αντιλήψεις, τις στρατηγικές και τις δυσκολίες των μαθητών ηλικίας δέκα με δεκατριών ετών. Χρειάζεται να πραγματοποιηθούν παρόμοιες μελέτες για την επιβεβαίωση της ύπαρξης των συγκεκριμένων ομάδων επίδοσης και για τη διερεύνηση ομάδων με ακόμη περισσότερες ικανότητες και ψηλότερη επίδοση από αυτήν της τέταρτης ομάδας, σε μαθητές μεγαλύτερων τάξεων. Θα ήταν πολύ χρήσιμο επίσης, να μελετηθεί σε μελλοντική εργασία ο τρόπος με τον οποίο αναπτύσσεται η ικανότητα αλγεβρικής σκέψης των μαθητών μέσω ενός κατάλληλου παρεμβατικού προγράμματος, το οποίο μάλιστα θα ενσωμάτωνε και τη χρήση σύγχρονων λογισμικών και εφαρμογιδίων (Hewitt, 2012). Με βάση τις ενδείξεις της παρούσας εργασίας ότι μερικοί μαθητές οι οποίοι δεν έχουν παρακολουθήσει τυπική διδασκαλία για τις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης κατάφεραν να καταπιαστούν ή να επιτύχουν σε αυτές, σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα της έρευνας του Hewiit (2012), χρειάζεται περισσότερη έρευνα η οποία πιθανό να οδηγήσει σε ακόμη περισσότερα στοιχεία για την ετοιμότητα των μικρότερων ηλικιακά μαθητών να καταπιάνονται με έργα αλγεβρικής σκέψης και με έργα που εμπλέκουν απαραίτητα την αλγεβρική σύνταξη.

Λαμβάνοντας υπόψη το αποτέλεσμα της παρούσας εργασίας ότι η ικανότητα αναλογικού συλλογισμού αποτελεί ισχυρό παράγοντα πρόβλεψης της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης, θα ήταν ενδιαφέρον να εξεταστεί κατά πόσο ένα μακροχρόνιο παρεμβατικό πρόγραμμα το οποίο θα αποσκοπούσε στην ανάπτυξη της ικανότητας αναλογικού συλλογισμού σε διάφορα πλαίσια και θα περιλάμβανε και τη χρήση των έργων ΕΑΣ (Lee & Sriraman, 2011), θα είχε ως συνεπακόλουθο τη βελτίωση και την ανάπτυξη της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης των μαθητών. Απαραίτητη κρίνεται και η διεξαγωγή περισσότερων ερευνών που να εξετάζουν τη συγκεκριμένη σχέση (μεταξύ αναλογικού συλλογισμού και αλγεβρικής σκέψης) με απώτερο σκοπό να αποσπάσει το ανάλογο ερευνητικό ενδιαφέρον και να αξιοποιηθεί στην προσπάθεια βελτίωσης και ανάπτυξης και των δύο ικανοτήτων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ξενόγλωσση

Ainley, J., Wilson, K., & Bills, L. (2003). Generalising the context and generalising the calculation. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the twenty-fifth conference of PME-NA*, (Vol. 2, pp. 9–16).

Aké, L. P., Godino, J. D., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2013). Proto-algebraic levels of mathematical thinking. Lindmeier, A. M. & Heinze, A. (Eds.). *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 2, pp. 1-8). Kiel, Germany: PME.

Akgün, L., & Özdemir, M. E. (2006). Students` understanding of the variable as general number and unknown: a case study. *The Teaching of Mathematics, 9*(1), 45-51.

Alexander, P. A., & Buehl, M. M. (2004). Seeing the possibilities: Constructing and validating new measures of mathematical and analogical reasoning for young children. In L. D. English (Ed.), *Mathematical and analogical reasoning of young learners* (pp. 23-45). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Alexander, P. A., White, C. S., & Daugherty, M. (1997). Children's use of analogical reasoning in early mathematics learning. In L. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images* (pp. 117-147). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Alexander, P. A., Willson, V. L., White, C. S., & Fuqua, J. D. (1987). Analogical reasoning in young children. *Journal of Educational Psychology, 79,* 401-408.

Alexandrou-Leonidou, V., & Philippou, G. (2007). Elementary school students' understanding and use of the equal sign. In Pitta-Pantazi, D. and Philippou, G. (Eds). *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp.825-834). Larnaca, Cyprus: University of Cyprus.

Asparouhov, T., & Muthén, B. (2012). *Using Mplus TECH11 and TECH14 to test the number of latent classes*. Mplus Web Notes, No. 14. May 22, 2012.

Bastable, V., & Schifter, D. (2008). Classroom stories: Examples of elementary students engaged in early algebra. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 165–184). Mahwah, NJ: Erlbaum Associates.

Bazzini, L., Boero, P., & Garuti, R. (2001). Moving Symbols Around or Developing Understanding: The Case of Algebraic Expressions. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.) *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol 2, pp. 121-128). Utrecht, Netherlands.

Becker, J. R., & Rivera, F. (2006). Sixth graders' figural and numerical strategies for generalizing patterns in algebra. In S. Alatorre, J. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Math Education* (Vol. 2, pp. 95-101). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Bednarz, N., & Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 115–136). Boston, MA: Kluwer Academic Publishers.

Behr, M., Erlwanger, S., & Nichols, E. (1980). How children view the equals sign. *Mathematics Teaching*, *92*, 13-15.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). Rational-number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 91–126). New York: Academic Press.

Bell, A., Brekke, G., & Swan, M. (1987). Diagnostic teaching: 4 Graphical interpretations. *Mathematics Teaching, 119*, 56–59.

Biggs, J. B. (2003). *Teaching for quality learning at university*. Maidenhead: Open University Press.

Biggs, J. B., & Collis, K. F. (1982). *Evaluating the quality of learning: the SOLO taxonomy (structure of the observed learning outcome).* New York: Academic Press.

Bills, L., Ainley, J., & Wilson, K. (2003). Particular and General in Early Symbolic Manipulation. In N. Pateman, B. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.). *Paper presented at the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Honolulu, Hawaii.

Billings, E. M., T. Tiedt, & L. H. Slater. (2008). Algebraic thinking and pictorial growth patterns. *Teaching Children Mathematics*, *14*, 302-308.

Bishop, J. (2000). Linear geometric number patterns: Middle school students' strategies. *Mathematics Education Research Journal*, *12*(2), 107-126.

Blanton, M. (2008). *Algebra and the Elementary Classroom: Transforming Thinking, Transforming Practice*. Portsmouth, NA: Heinemann.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. In M. J. Hoines, & A. Fuglestad (Ed.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Oslo: PME.

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Blanton, M., & Kaput, J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. In J. Cai and E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*. Advances in Mathematics Education Monograph Series. New York: Springer.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. W., & Dougherty, B. J. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3–5*. Essential Understanding Series. Reston, VA: NCTM.

Bodanskii, F. (1991). The formation of an algebraic method of problem solving in primary school children. In Davydov, V. (ed.), *Survey of applied Soviet research in school mathematics education, the University of Chicago, Soviet studies in mathematics education 6, Psychological abilities of primary school children in learning mathematics*, (pp. 275-338). Reston, VA, NCTM.

Boero, P., Dreyfus, T., Gravemeijer, K., Gray, E., Hershkowitz, R., Schwarz, B., Sierpinska, A., & Tall, D. (2002). Abstraction: Theories about the emergence of knowledge structures. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 113–138). Norwich: PME.

Booth, L. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford & W. P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra K-12* (pp. 20-32). Reston, VA: NCTM.

Brabrand, C., & Dahl, B. (2009). Using the SOLO taxonomy to analyze competence progression of university science curricula. *Higher Education*, *58*(4), 531- 549.

Brasell, H. M., & Rowe, M. B. (1993). Graphing skills among high school physics students. *School. Science and Mathematics*, *93*(2), 63–70.

Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2008). Multiple notational systems and algebraic understandings: The case of the "best deal" problem. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 273-301). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum and Associates.

Brizuela, B. M., & Schliemann, A. D. (2004). Ten-year-old students solving linear equations. *For the Learning of Mathematics*, *24*(2), 33-40.

Buehl, M. M., & Alexander, P. A. (2004). Longitudinal and cross-cultural trends in young children's analogical and mathematical reasoning abilities. In L. D. English (Ed.), *Mathematical and analogical reasoning of young learners* (pp. 47-73). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cai, J., & Knuth, E. (2011). Introduction: A global dialogue about early algebraization. In J. Cai & Knuth, E., (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. vii-xi). New York, NY: Springer.

Cai, J., Lew, H. C., Morris, A., Moyer, J. C., Ng, S. F., & Schmittau, J. (2005). The Development of Students' Algebraic Thinking in Earlier Grades: A Cross-Cultural Comparative Perspective. Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik (International Review on Mathematics Education), *37*(1), 5-15.

Cai, J., Moyer, J. C., Wang, N., & Nie, B. (2011). Examining Students' Algebraic Thinking in a Curricular Context: A longitudinal study. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: Cognitive, curricular, and instructional perspectives*. New York: Springer.

Capraro, M. M., & Joffrion, H. (2006). Algebraic equations: Can middleschool students meaningfully translate from words to mathematical symbols? *Reading Psychology*, *27*, 147-164.

Carlson, M., Jacobs, S.,Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 352-378.

Carpenter, T., Franke, M., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carpenter, T., & Levi, L. (2000). Building a foundation for algebra in the elementary Grades. *In Brief*, *1*(2), 1-6.

Carpenter, T. P., Levi, L., Berman, P., & Pligge, M. (2005). Developing algebraic reasoning in the elementary school. In T. A. Romberg, T. P. Carpenter, & F. Dremock (Eds.), *Understanding Mathematics and Science Matters* (pp. 81–98). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Carpenter, T. P., Madison, L., Franke, M. L., & Zeringue, J. K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *International Review on Mathematics Education*, *31*(1), 53-59.

Carraher, D.W., Brizuela, B. M., & Schliemann, A.D. (2000). Bringing out the algebraic character of arithmetic. Instantiating variables in addition and subtraction. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.) *Proceedings of the 24th Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, 145-152). Hiroshima, Japan: PME.

Carraher, D., & Earnest, D. (2003). Guess My Rule Revisited. In N. Pateman, B. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.). *Proceedings of the 27th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 173-180). Honolulu, HI.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 669–706). Charlotte, NC: Information Age Publishing; Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Carraher, D., Schliemann, A. D., & Brizuela, B. M. (2001). Can young students operate on unknowns? In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 130-140). Utrecht, The Netherlands: PME.

Carraher, D., Schliemann, A. D., Brizuela, B., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37*(2), 87-115.

Carraher, D., Schliemann, A., & Schwartz, J. L. (2008). Early algebra is not algebra early. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 235-272). New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Chaffin, R., & Herrmann, D.J. (1984). The similarity and diversity of semantic relations. *Memory and Coginition*, *12*, 134-141.

Chazan, D. (2008). The shifting landscape of school algebra in the United States. In C. E. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics* (pp. 19–33). Reston, VA: NCTM.

Chazan, D., & Bethell, S. C. (1994). Sketching graphs of an independent and a dependent quantity: Difficulties in learning to make stylized, conventional "pictures." In J. P. da Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol. 2, pp.176–184). Lisbon: University of Lisbon.

Chen, A. (1996). Children's analogical problem solving: The effects of superficial, structural, and procedural similarity. *Journal of Experimental Child Psychology, 62,* 410-431.

Chrysostomou, M., Pitta-Pantazi, D., Tsingi, C., Cleanthous, E., & Christou, C. (2013). Examining number sense and algebraic reasoning through cognitive styles. *Educational studies in mathematics*, *83*, 205-223.

Chuderska, A., & Chuderski, A. (2009). Executive control in analogical reasoning: Beyond interference resolution. In N. Taatgen, & H. van Rijn (Eds.), *Proceedings of the 31st Annual Conference of the Cognitive Science Society* (pp. 1758-1763). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Clement, J. (1993). Using bridging analogies and anchoring intuitions to deal with students' preconceptions in physics. *Journal of Research in Science Teaching, 30(10),* 1241-1257.

Collis, K. (1974). What do we know about K - 14 students' learning of algebra? Paper presented at the National Council of Teachers of Mathematics national symposium, *The Nature and Role of Algebra in the K - 14 Curriculum,* Washington, D. C.

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential Functions, Rates of Change and the Multiplicative Unit. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 135-164.

Cooper, T., & Warren, E. (2011). Year 2 to Year 6 students' ability to generalize: Models, representations and theory for teaching and learning. In J. Cai & E. Knuth (eds.), *Early Algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*, (pp. 187-214). Heidelberg: Springer.

Cortes, A., Vergnaud, G., & Kavafian, N. (1990). From arithmetic to algebra: negotiating a jump in the learning process. In G. Booker, P. Cobb, & T. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 27-34). Mexico: PME.

Davydov, V. V., Gorbov, S. F., Mikulina, G. G., Saveleva, O. V., & Tabachnikova, N. L. (2001). *Mathematics 3rd Grade*. J. Schmittau (Ed.). Binghamton, NY: State University of New York.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2007). *The illusion of linearity: From analysis to improvement*. New York: Springer.

Deal, D., & Hardy, S. (2004). Portraying mathematical and analogical reasoning in the young: Three case studies. In L. D. English (Ed.), *Mathematical and analogical reasoning of young learners* (pp. 97-125). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Denzin, N., & Lincoln Y. (Eds.) (2000). *Handbook of Qualitative Research*. London: Sage Publication Inc.

Dindyal, J. (2004). Algebraic Thinking in Geometry at High School Level: Students' Use of Variables and Unknowns. In Putt, R. Faragher, & *M. McLean (Eds.)*, *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010. Proceedings of the 27th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*. (pp. 183-190). Sydney: MERGA.

Dougherty, B. J. (2008). Measure up: A quantitative view of early algebra. In Kaput, J. J., Carraher, D. W., & Blanton, M. L. (Eds.), *Algebra in the early grades*, (pp. 389–412). Mahweh, NJ: Erlbaum.

Drijvers, P., Goddijn, A., & Kindt, M. (2010). Algebra education: exploring topics and themes. In P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education. Revisiting topics and themes and exploring the unknown* (pp. 5–26). Rotterdam: Sense

Driscoll, M. (1999). *Fostering algebraic thinking: A guide for teachers grades 6-10*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95–123). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Duit, R. (1991). On the role of analogies and metaphors in learning science. *Science Education*, *75*(6), 649-672.

English, L. (1993). Reasoning by analogy in constructing mathematical ideas. In G. Bell, B. Wright, N. Leeson, & J. Geake (Eds.), *Challenges in mathematics education: Constraints on construction* (pp. 213-222). Lismore, Australia: Mathematics Education Group of Australasia.

English, L. D. (1998). Reasoning by analogy in solving comparison problems. *Mathematical Cognition*, *4*(2), 125-146

English, L. D. (1997). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

English, L. D. (2004) Mathematical and Analogical Reasoning in Early Childhood. In English, Lyn D. (Ed.) *Mathematical and Analogical Reasoning of Young Learners* (pp. 1-21). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

English, L. D., & Halford, G. S. (1995). *Mathematics education: Models and processes.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

English, L. D., & Sharry, P. V. (1996). Analogical reasoning and the development of algebraic abstraction. *Educational Studies in Mathematics*, *30*, 135-157.

English, L. D., & Warren, E. (1994). The interaction between general reasoning process and achievement algebra and novel problem solving. In G. Bell, B. Wright, N. Leeson, & J. Geeke (Eds.), *Challenges in mathematics education: Constraints on construction, Proceedings of the 17th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 223-231).. Lismore, NSW: MERGA.

English, L. D., & Warren, E. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The Mathematics Teacher*, *91*(2), 166-171.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, *9*(2), 19–25.

Fitzallen, N. (2012). Interpreting Graphs: Students Developing an Understanding of Covariation. In J. Dindyal, L. P. Cheng & S. F. Ng (Eds.), *Mathematics education:*

Expanding horizons. Proceedings of the 35th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Singapore: MERGA.

Friel, S. N., Curcio, F. R., & Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal of Research in Mathematics Education*, *32*, 124–158.

Fujii, T. (2003). Probing students' understanding of variables through cognitive conflict problems: Is the concept of a variable so difficult for students to understand? In N. A. Pateman, B. J. Dougherty & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 49-65). Honolulu, Hawaii: PME.

Fujii, T., & Stephens, M. (2008). Using number sentences to introduce the idea of variable. In C. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics: Seventieth Yearbook* (pp. 127-149). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Gan, W. L. (2008). *A Research Into Year Five Pupils' Pre-Algebraic Thinking In Solving Pre-Algebraic Problems. Unpublished Doctoral Dissertation.* University Sains Malaysia.

Gentner, D. (1988). Metaphor as structure mapping: The relational shift. *Child Development*, *59*(1), 47-59.

Gentner, D., & Rattermann, M. J. (1991). Language and the career of similarity. In S. A. Gelman & J. P. Brynes (Eds.), *Perspectives on language and thought: Interrelations in development* (pp. 225–277). London: Cambridge University Press.

Gentner, D., & Smith, L. (2012). Analogical reasoning. In V. S. Ramachandran (Ed.) *Encyclopedia of Human Behavior* (2nd Ed.) (pp. 130-136). Oxford, UK: Elsevier.

George, D., & Mallery, P. (2003). *SPSS for Windows step by step: A simple guide and reference. 11.0 update* (4th ed.). Boston: Allyn & Bacon

Goldin, G. A., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1-23). Reston, VA: NCTM.

Goodrow, A., & Schliemann, A.D. (2003). Linear Function Graphs and Multiplicative Reasoning in Elementary School. *Proceedings of the 27th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Honolulu, HI.

Goswami, U., & Brown, A. L. (1989). Melting chocolate and melting snowmen: Analogical reasoning and causal relations. *Cognition, 35,* 69-95.

Goswami, U. (1992). *Analogical reasoning in children.* Hove, UK: Lawrence Erlbaum Associates.

Goswami, U. (2004). Commentary: Analogical reasoning and mathematical development. In L.D. English (Ed.), *Mathematical and Analogical Reasoning of Young Learners* (pp.169-186). Lawrence Erlbaum & Associates

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(2), 115–141.

Halford, G. S. (1992). Analogical reasoning and conceptual complexity in cognitive development. *Human Development, 35(4), 193-217.*

Harel, G. (2001). The development of mathematical induction as a proof scheme: A model for DNRbased instruction. In S. Campbell & R. Zazkis (Eds.), *Learning and teaching number theory. Journal of Mathematical Behavior* (pp. 185–212). New Jersey, Ablex Publishing Corporation.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from an exploratory study. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research in College Mathematics Education III* (pp. 234-283). Providence, RI: AMS.

Hatano, G., & Sakakibara, T. (2004). Commentary: Toward a cognitive-sociocultural psychology of mathematical and analogical reasoning development. In L. D.English (Ed.), *Mathematical and analogical reasoning of young learners* (pp. 187-213). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics, 27*(1), 59–78.

Hewitt, D. (2012). Young students learning formal algebraic notation and solving linear equations: are commonly experienced difficulties avoidable? *Educational Studies in Mathematics*, *81*(2), 139-159.

Holyoak, K. J., & Thagard, P. (1995). *Mental leaps: Analogy in creative thought*. Cambridge, MA: MIT Press.

Hughes, M. (1990). *Children and number. Difficulties in learning mathematics*. Oxford: Basil Blackwell.

Inhelder, B., & Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence.* New York: Basic Books.

Johanning, D. I. (2004). Supporting the development of algebraic thinking in middle school: a closer look at students' informal strategies. *Journal of Mathematical Behavior*, *23*, 371-388.

Jones, G., Langrall, C., Thornton, C., & Nisbet, S. (2002). Elementary students' access to powerful mathematical ideas. In L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 113–142). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kamol, N., & Ban Har, Y. (2010). Upper Primary School Students' Algebraic Thinking. L. Sparrow, B. Kissane, & C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia.* Fremantle: MERGA.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 235-272). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum/Taylor & Francis Group & National Council of Teachers of Mathematics.

Kaput, J., & Blanton, M. (2001). Student achievement in algebraic thinking: A comparison of third-graders' performance on a state fourth-grade assessment. In R. Speiser, C. Maher, & C. Walter (Eds.), *Proceedings of the 23rd Annual Meeting of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 99-108). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse.

Kaput, J., Carraher, D., & Blanton, M. (2008). (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. Mahwah, NJ, Erlbaum.

Katz, V., & Barton, B. (2007). Stages in the history of algebra with implications for teaching. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 185-201.

Kelly, A. E., & Lesh, R.A. (2000). Trends and shifts in research methods. In A.E. Kelly & R.A. Lesh (Eds), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 35-44). Mahwah, NJ, Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 317–326.

Kiearn, C. (1991). A procedural-structural perspective on algebra research. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the Fifteenth International Conference for the*

Psychology of Mathematics Education, (Vol. 2, pp. 245-253). Genova: Università di Genova.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan Publishing Company.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In C. Alsina, J.M. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde, & A. Pérez (Eds.), *Eighth International Conference on Mathematics Education. Selected Lectures* (pp. 271-290). Seville, Spain: S.A.E.M. Thales.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator, 8*(1), 139-151.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. K. Lester, Jr., (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Kieran, C. (2011). Overall commentary on early algebraization: Perspectives for research and teaching. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 579-593). New York, NY: Springer.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A., & Stephens, A. C. (2005). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: equivalence & variable. *ZDM, 37*(1), 68-76.

Knuth, E., Alibali, W., McNeil, M., Weinberg, A., & Stephens, A. (2011). Middle School Students' Understanding of Core Algebraic Concepts: Equivalence & Variable. In Cai, J. & Knuth, E. (Ed.). *Early Algebraization A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 259-276). London: Springer Heidenberg.

Knuth, E., Stephens, A., McNeil, N., & Alibali, M. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(4), 297–312.

Kota, S., & Thomas, M.O.J. (1998). Students' arithmetic preferences: Effect on problem solving ability. *Hiroshima Journal of Mathematics Education, 6*, 33-48.

Kriegler, S. (2008). Just what is algebraic thinking? Ανακτήθηκε 12 Ιουνίου 2012 από http www,math.ucla.edu/~kriegler/pub/algebrat. Html.

Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in School*, *7*(4), 23-26.

Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. M. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics*: 11-16 (pp. 102-119). London: John Murray.

Lannin, J. K. (2005).Generalization and Justification: The challenge of Introducing Algebraic Reasoning Through Patterning Activities, *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(3), 231-258.

Lannin, J., Barker, D., & Townsend, B. (2006). Recursive and explicit rules: How can we build student algebraic understanding. *Journal of Mathematical Behavior*, *25*, 299–317.

Ledesma, E. F. R. (2012). The variation concept: In the elementary school and college. *Educational Research*, *3*(11), 860-865.

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee. (Eds.), *Approaches to algebra* (pp. 87-106). Dortrecht: Kluwer Academic.

Lee, K., & Sriraman, B. (2011). Conjecturing via reconceived classical analogy. *Educational Studies in Mathematics*, *76*, 2, 123-140.

Leech, R., Mareschal, D., & Cooper, R. P. (2008). Analogy as relational priming: A developmental and computational perspective on the origins of a complex cognitive skill. *The Behavioral and Brain Sciences*, *31*, 357–378.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, *60*, 1-64.

Lew, H. C. (2004). Developing algebraic thinking in the earlier grades: A case study of the South Korean elementary school mathematics curriculum. *The Mathematics Educator*, *8*(1), 88–106.

Li, J., Peng, A., & Song, N. (2011). Teaching Algebraic Equations with Variation in Chinese Classroom. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 529–555). Berlin, Germany: Springer-Verlag.

Lim, H. L., & Noraini Idris (2006). Assessing algebraic solving ability of Form Four students. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *1*(1), 55-76.

Lim, L. H., & Wun, T. Y. (2012). Assessing Algebraic Solving Ability: A Theoretical Framework. *International Education Studies*, *5*(6), 177-188.

Lincoln, Y. S., & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Beverly Hills, CA: Sage.

Lins, R., & Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The Future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 47–70). Boston: Kluwer.

Linsell, C. (2009). A Hierarchy of Strategies for Solving Linear Equations. In R. Hunter, B. Bicknell, & T. Burgess (Eds.), *Crossing divides: Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 1). Palmerston North, NZ: MERGA.

Linsell, C., & Allan, R. (2010). Prerequisite skills for learning algebra. In M. Pinto, M and T. Kawasaki, F (Eds), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 217-224). Belo Horizonte, Brazil, PME.

Lobato, J., Ellis, A. B., & Muñoz, R. (2003). How "focusing phenomena" in the instructional environment afford students' generalizations. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 1–36.

Lodholz, R. (1990). The transition from arithmetic to algebra. In E. L. Edwards, Jr. (Ed.), *Algebra for everyone* (pp. 24–33). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

MacCallum, R. C., Browne, M. W., & Sugawara, H. M. (1996). Power analysis and determination of sample size for covariance structure modeling. *Psychological Methods*, *1*, 130-149.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1993). Cognitive models underlying students' formulation of simple linear equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*, 217–232.

MacGregor, M. & Stacey, K. (1995). The Effect of Different Approaches to Algebra on Students' Perceptions of Functional Relationships. *Mathematics Education Research Journal*, *7*(1), 69-85.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11-15. *Educational Studies in Mathematics*, *33*, 1-19.

Malara, N. A., & Navarra, G. (2003). Influences of a procedural vision of arithmetic in algebra learning. *Proceedings of the 3th Conference of the European society for Research in Mathematics Education.* Bellaria, Italy.

Malara, N., & Navara, G. (2009). Approaching the distributive law with young pupils. *PNA*, *3*(2), 73-85.

Marcoulides, G. A., & Schumacker, R.E. (1996). *Advanced structural equation modeling.* Mahwah, NJ: Erlbaum.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee. (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for learning and teaching* (pp. 65-86). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Matthews, P. G., Rittle-Johnson, B., McEldoon, K., & Taylor, R.T. (2012). Measure for Measure: What Combining Diverse Measures Reveals About Children’s Understanding of the Equal Sign as an Indicator of Mathematical Equality. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*, 316-350.

McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2005). Knowledge change as a function of mathematics experience:All contexts are not created equal. *Journal of Cognition and Development*, *6*, 285–306.

Meagher, D. (2008). *Introduction to the Miller Analogies Test*. San Antonio, TX: Pearson Education.

Mestre, C., & Oliveira, H. (2012). From quasi-variable thinking to algebraic thinking: A study with grade 4 students. *Proceedings of ICME 12*, (pp. 2091-2098). Seoul: ICME.

Miles, M. B., & Huberman, M. A. (1994). *Qualitative data analysis: A sourcebook of new methods* (2nd ed.). Newbury Park, CA: Sage.

Mitchell, J. N., & Sunae K. (2007). Pattern Generalization with Graphs and Words: A Cross-Sectional and Longitudinal Analysis of Middle School Students' Representational Fluency. *Mathematical Thinking and Learning*, *9*(3), 193-219.

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2010). Cognitive and metacognitive aspects of proportional reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*, 36-53.

Molina, M., & Ambrose, R. (2008). From an operational to a relational conception of the equal sign. Thirds graders’ developing algebraic thinking. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *30*(1), 61-80.

Moritz, J. (2004). Reasoning about covariation. In D. Ben-Zvi, & J. Garfield, (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 227-255). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Moss, J., & McNab, S. L. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-variation. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 277–301). Berlin, Germany: Springer-Verlag.

Moyer, J. C., Huinker, D., & Cai, J. (2004). Developing algebraic thinking in the earlier grades: A case study of the U.S. Investigation series. *Journal of Mathematics Educators (Singapore)*, *8*(1), 6-38.

Mulligan, J. T., & Vergnaud, G. (2006). Research on children's early mathematical development: Towards integrated perspectives. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 261 - 276). London: Sense Publishers.

Murray, H., Olivier, A., & Human, P. (1994). Fifth graders' multi-digit multiplication and division strategies after five years' problem-centered learning. In J. P. da Ponte & J. . Matos (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol. 3, 399-406). Lisbon, Portugal.

Muthen, B. (2008, July 15). Re: Mplus questions [Online discussion]. Ανακτήθηκε από http://www.statmodel.com/discussion/messages/13/458.html?1370971870.

Muthen, L. K., & Muthen, B. O. (1998-2012). *Mplus user's guide* (7th ed.). Los Angeles: Muthen & Muthen.

Mutschler, B. J. (2005). Early algebra processes ad concepts of fourth graders solving algebraic problem. In M. Bosch (Ed.), Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME 4. San Feliu de Guíxols, Spain.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: Va, NCTM.

Novick, L. R. (1992). The role of expertise in solving arithmetic and algebra word problems by analogy. In J. I. D. Campbell (Ed.), *The nature and origins of mathematical skills* (pp.155-188). Amsterdam: Elsevier.

Novick, L. R., & Holyoak, K. J. (1991). Mathematical problem solving by analogy. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, & Cognition*, *17*, 398-415.

Oldenburg, R. (2009). Structure of algebraic competencies. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the 6th Congress of the*

European Society for Research in Mathematics Education (pp. 579- 588). Lyon, France.

Oldenburg, R. (2012). Structure of Algebraic Proficiency. *Research Paper ICME 12*.

Orton, J. (1997). Matchsticks, Pattern and Generalisation. *Education 3-13*, *25*(1), 61-65.

Orton, A. (2004). *Learning mathematics: issues, theory and classroom practice*. London: Continuum International Publishing Group.

Orton, A., Orton, J., & Roper, T. (1999). Pictorial and practical contexts and the perception of pattern. In Orton, A. (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics*. London: Cassell.

Orzechowski, J., & Chuderski, A. (unpublished). *TAO Figural Analogy Test: Test & manual*. Krakow: Institute of Psychology, Jagiellonian University.

Papic, M., & Mulligan, J. T. (2007). The growth of early mathematical patterning: An intervention study. In J. Watson, & K. Beswick (Eds.), *Mathematics: Essential research, essential practice. Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Hobart* (Vol. 2, pp. 591-600). Adelaide: MERGA.

Papic, M., Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the development of preschoolers'mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42*(3), 237–268.

Patton, M.Q. (2002). *Qualitative Research and Evaluation Methods* (3rd ed.). London: Sage Publications.

Pegg, J., & Tall, D. O., (2002). Fundamental cycles of cognitive growth. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 41- 48). Norwich, UK: PME.

Pegg, J., & Tall, D. (2005) The fundamental cycle of concept construction underlying various theoretical frameworks. *ZDM*, *37*(6), 468-475.

Pegg, J., & Tall, D. (2010). The fundamental cycle of concept construction underlying various theoretical framework. In B. Sriraman, & L. English (Eds.), *Theories of mathematics education-seeking new frontiers* (pp. 173-192). New Work: Springer.

Piaget, J. (1987). *Possibility and Necessity* (*Vols. 1 and 2)*. Minneapolis: U. of Minnesota Press.

Polya, G. (1957). *How to solve it.* Princeton, NJ: University Press.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM Mathematics Education*, *40*(2), 83-96.

Radford, L. (2010). Elementary forms of algebraic thinking in young students. In M. M. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4 (pp. 73–80). Belo Horizonte, Brazil: PME.

Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. *PNA*, *6*(4), 117-133.

Radford, L., & Puig, L. (2007). Syntax And Meaning As Sensuous, Visual, Historical Forms Of Algebraic Thinking. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 145-164.

Redden, T. (1996). Patterns language and algebra: A longitudinal study. In P. Clarkson (Ed.), *Technology in Mathematics Education. Proceedings of the 19th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group* (pp. 469–476). Rotorua: MERGA.

Reed, S. K. (1987). A structure-mapping model for word problems. Journal of *Experimental Psychology: Learning, Memory, & Cognition*, *13*, 124-139.

Resnick, L. B. (1982). Syntax and semantics in learning to subtract. In T. P. Carpenter, J. M. Moser & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 135-155). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Resnick, L. B., & Omanson, S. F. (1987). Learning to understand arithmetic. In R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology* (Vol. 3, pp. 41-95). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Richland, L. E., Holyoak, K.J., & Stigler, J. W. (2004). Analogy generation in eighth-grade mathematics classrooms. *Cognition and Instruction, 22(1),* 37-60.

Rittle-Johnson, B., Matthews, P. G., Taylor, R. S., & McEldoon, K. (2011). Assessing Knowledge of Mathematical Equivalence: A Construct Modeling Approach. *Journal of Educational Psychology, 103,* 85-104.

Rivera, F., & Becker, J. (2007). Abduction in pattern generalization. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 4, pp. 97-104). Seoul: PME.

Rojano, T. (1996). Problem solving in a spreadsheet environment. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 137–145). Boston, MA: Kluwer Academic Publishers.

Romberg, T. A., Fennema, E., & Carpenter, T. P. (Eds.). (1993). *Integrating research on the graphical representation of functions*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Romberg, T., & Kaput, J. (1999). Mathematics worth teaching, mathematics worth understanding. In E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 3-18). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Rosnick, P. (1981). Some misconceptions concerning the concept of variable. Are you careful about defining your variables? *Mathematics Teacher, 74*(6), 418–420, 450.

Sáenz-Ludlow, A., & Walgamuth, C. (1998). Third graders' interpretations or equality and the equal symbol. *Educational Studies in Mathematics, 35*, 153–187.

Sajka, M. (2003). A secondary school student understands of the concept of function – a case study. *Educational Studies in Mathematics*, *53*, 229-254.

Samo, M. A. (2009). Students' perceptions about the symbols, letters and signs in algebra and how do these affect their learning of algebra: A case study in a government girls secondary school Karachi. *International Journal for Mathematics*. Ανακτήθηκε από http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/samo.pdf

Saxe, G. B. (1991). *Culture and cognitive development: Studies in mathematical understanding.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schliemann, A. D., Carraher, D.W., & Brizuela, B. (2007). *Bringing Out the Algebraic Character of Arithmetic: From Children's Ideas to Classroom Practice.* Lawrence Erlbaum Associates.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Goodrow, A., Caddle, M. C., & Porter, M. (2013). Equations in elementary school. In Lindmeier, A. M. & Heinze, A. (Eds.). *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 4, pp. 161-168). Kiel,Germany: PME.

Schliemann, A. D., Goodrow, A., & Lara-Roth, S. (2001). Functions and Graphs in Third Grade. Symposium Paper. NCTM 2001 Research Presession, Orlando, FL.

Schmittau, J., & Morris, A. (2004). The development of algebra in Davydov's elementary curriculum. *The Mathematics Educator*, *8*(1), 60-87.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36.

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspective. *Journal of mathematical behavior*, *14*, 15-39

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification: The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics , 26*, 191-228.

Smith, E. (2003). Stasis and change: Integrating patterns, functions, and algebra throughout the K-12 curriculum. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 136-150). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates/Taylor & Francis Group and National Council of Teachers of Mathematics.

Smith, J., diSessa, A., & Roschelle, J. (1993). Misconceptions reconceived: A constructivist analysis of knowledge in transition. *Journal of the Learning Sciences*, *3*, 115–163.

Soares, J., Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2006). Thinking algebraically across the elementary school curriculum. *Teaching Children Mathematics*, *12*(5), 228-235.

Sriraman, B., & Lee, K. (2011). Commentary on the Cognitive aspects of Early Algebraization. In J. Cai & E. Knuth (Eds). *Early Algebraization- Curricular, Cognitive and Instructional Perspectives*. Advances in Mathematics Education, (Vol. 2, pp. 367-373). Springer Science, Berlin/Heidelberg.

Steffe, L. P., & Olive, J. (1996). Symbolizing as a constructive activity in a computer microworld. *Journal of Educational Computing Research*, *14*(2), 113–138.

Stephens, A. C., Isler, I. , Marum, T. , Blanton, M. L., Knuth, E. J., & Murphy Gardiner, A. (2012). From Recursive Pattern to Correspondence Rule: Developing Students' Abilities to Engage in Functional Thinking. In Van Zoest, L. R., Lo, J.-J., & Kratky, J. L. (Eds.). *Proceedings of the 34th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Kalamazoo (pp. 821-828). Michigan, USA.

Swafford, J. O., & Langrall, C. W. (2000). Grade 6 students' preinstructional use of equations to describe and represent problem situations. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1), 89–112.

Tall, D (2001). Reflections on early algebra. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.) *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, 149-152). Utrecht, Netherlands.

Tall, D., & Thomas, M. (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 125–147.

Thomas, M., & Tall, D. (2001). The long-term cognitive development of symbolic algebra. International Congress of Mathematical Instruction (ICMI) Working Group Proceedings – *The Future of the Teaching and Learning of Algebra*, (Vol. 2, pp. 590-597). Melbourne.

Tolar, T. D., Lederberg, A. R., & Fletcher, J. M. (2009). A structural model of algebra achievement: Computational fluency and spatial visualization as mediators of the effect of working memory on algebra achievement. *Educational Psychology, 29*, 39-266. doi: 10.1080/01443410802708903

Trigueros, M., & Ursini, S. (2003). First-year Undergraduates' Difficulties in Working with Different Uses of Variable. In A. Selden, E. Dubinsky, G. Harel & F. Hitt (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education* (Vol. 12, pp. 1-29). Providence, RI: American Mathematical Society.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. Coxford & A. Shulte (Eds.). *The Ideas of Algebra, K-12. 1988 Yearbook* (pp. 8-19). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Van Amerom, B. (2002). *Reinvention Early Algebra. Developmental Research on the Transition from Arithmetic to Algebra*. Freudenthal Institute, Utrecht, The Netherlands.

Van Amerom, B. (2003). Focusing on Informal Strategies When Linking Arithmetic to Early Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *54*(1), 63-75.

Vermeulen, N., Olivier, A., & Human, P. (1996). Student's awareness of the distributive property. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the Twentieth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 4, pp. 379-386). Valencia, Spain.

Vosniadou, S. (1989). Analogical reasoning as a mechanism in knowledge acquisition: A developmental perspective. In S. Vosniadou and A. Ortony (eds.), *Similarity and Analogical Reasoning (*pp. 413-437). Cambridge University Press, Cambridge.

Wagner, S., & Parker, S. (1993). *Advancing algebra. Research ideas for the classroom: high school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Warren, E. (1997). Generalising from and transferring between algebraic representation systems: Characteristics that support this process. F. Biddulph & K. Carr (Eds.), *People in mathematics education*, *Proceedings of the 20th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 560 –567). Rotorua, New Zealand: MERGA.

Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. In H. L. Chick, & J. L. Vincent (Ed.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 305-312). Melbourne: PME.

Warren, E. (2006). Teacher actions that assist young students write generalizations in words and in symbols. Novotna, J., et al (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the international group for the psychology of mathematics education*, (Vol.5, pp. 377-384). PME: Prague.

Warren, E., & Cooper, T. J. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics, 67*, 171–185.

Warren, E. A., Cooper, T. J., & Lamb, J. T. (2006). Investigating functional thinking in the elementary classroom: Foundations of early algebraic reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, *25*, 208-223.

Watanabe, T. (2011). Shiki: A critical foundation for school algebra in Japanese elementary school mathematics. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 109-124). London: Springer.

White, P., & Mitchelmore, M. C. (2010). Teaching for abstraction: A model. *Mathematical Thinking and Learning, 12*, 205-226.

Wilson, K., Ainley, J., & Bills, L. (2003). Comparing competence in transformational and generational algebraic activities. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.) *Proceedings of the twenty-seventh conference of the International Group for the*

Psychology of Mathematics Education held jointly with the twenty-fifth conference of PME-NA, (Vol. 4, 427-434). Hawaii.

Zevenbergen, R., Dole, S., & Wright, R. J. (2004). *Teaching mathematics in primary schools*. Crows Nest: Allen & Unwin.

Ελληνική

Δεμίρη, Ε., Μαρκέτος, Α., & Μπάρμπας, Γ. (1992). Οι αντιλήψεις των μαθητών της Στ' δημοτικού για τη μεταβλητή. *Διάσταση 3-4*. Θεσσαλονίκη.

Λεμονίδης, Χ. (1996). Δυσκολίες και αντιλήψεις των μαθητών κατά το πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα. *Ευκλείδης Γ', 13*(45), 61-70.

Φιλίππου, Γ., & Χρίστου, Κ. (2002). *Διδακτική των μαθηματικών*. Εκδόσεις Δαρδάνος: Αθήνα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

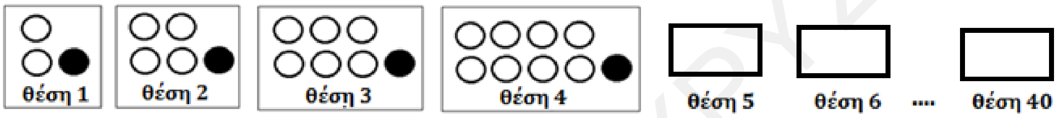
Δοκίμιο Ι

ΔΟΚΙΜΙΟ Ι

Όνομα:.. Τάξη: ....

Σχολείο: ....

(Gf2) 1. Να συμπληρώσεις στα κουτιά **<u>τον αριθμό</u>** των κύκλων που θα υπάρχουν σε κάθε θέση.



Να εξηγήσεις πώς εντόπισες τον αριθμό των κύκλων για τη θέση 40.

....

....

(Sm1) 2. (α) Έχω Τ ευρώ στον κουμπαρά μου και 2 ευρώ στη τσάντα μου. Δηλαδή έχω συνολικά **Τ + 2** ευρώ. Μου έδωσαν τώρα ακόμη 3 ευρώ. Να σημειώσεις πόσα χρήματα έχω τώρα.

____

(β) Η Λίνα είχε Κ μολύβια στην κασετίνα της και έδωσε χτες στη Ρίτα 1 μολύβι. Δηλαδή τώρα έχει **Κ -1** μολύβια. Αύριο η μαμά της θα της χαρίσει 4 μολύβια. Να σημειώσεις πόσα μολύβια θα έχει αύριο η Λίνα.

____

(Se1) 3. Να συμπληρώσεις τους αριθμούς στα κενά.

(α) Αν $\delta + \delta + \delta = 15$ τότε $\delta =$ _____

(β) Αν $\gamma + 1 = 15$ και $\gamma + 1 + \sigma = 19$, τότε $\sigma =$ ______

(Mo1) 4. (α) Το Μ αντιπροσωπεύει τον αριθμό των βιβλίων που έχει ο Ηλίας. Η Ντίνα έχει 10 βιβλία λιγότερα από τον Ηλία. Να γράψεις τη μαθηματική πρόταση η οποία αναπαριστά τον αριθμό των βιβλίων της Ντίνας.

____

(β) Τα πουκάμισα στοιχίζουν **δ ευρώ** το ένα και τα παντελόνια **β ευρώ** το ένα. Θα αγοράσω 3 πουκάμισα και 4 παντελόνια. Να σημειώσεις τι αναπαριστά η μαθηματική πρόταση **$3\times\delta + 4\times\beta$.**

....

....

(γ) **<u>Να βάλεις σε κύκλο</u>** τη μαθηματική πρόταση που αναπαριστά την κατάσταση που περιγράφεται σε κάθε μαθηματικό πρόβλημα:

Πρόβλημα 1: Το **Κ** αντιπροσωπεύει τον αριθμό των γλυκών που τρώει ο Γιώργος κάθε βδομάδα. Ο Αντρέας τρώει 4 γλυκά περισσότερα από το Γιώργο. Πόσα γλυκά τρώνε ο Γιώργος και ο Αντρέας μαζί κάθε εβδομάδα.

(α) $4 + \mathbf{K}$ (β) $(\mathbf{K} + 4) + \mathbf{K}$ (γ) $(\mathbf{K} - 4) + \mathbf{K}$ (δ) $(\mathbf{K} + 4) + 4$

Πρόβλημα 2: Πώς θα συμβολίσουμε την ηλικία της Γεωργίας, αν ο Χρίστος είναι λ χρονών και η Γεωργία είναι 3 χρόνια μεγαλύτερη από το διπλάσιο της ηλικίας του Χρίστου;

(α) $3 + \lambda$ (β) $2 \times \lambda$ (γ) $2 \times \lambda - 3$ (δ) $2 \times \lambda + 3$

(Go1) 5. Να συμπληρώσεις τα κενά ώστε να ισχύει η ισότητα.

(α) (5180 + _____) – 670 = 5180

Να εξηγήσεις πώς σκέφτηκες για να συμπληρώσεις **το κενό στο ερώτημα (α)**.

....

....

(β) 50 × 8 = ______ × 16

Να εξηγήσεις πώς σκέφτηκες για να συμπληρώσεις **το κενό στο ερώτημα (β)**.

....

....

(Gn1) 6. Όταν προσθέσω έναν περιττό αριθμό με έναν περιττό αριθμό, το αποτέλεσμα που παίρνω είναι περιττός ή άρτιος αριθμός; Να δείξεις τον τρόπο με τον οποίο εργάστηκες, για να απαντήσεις στο ερώτημα (περιττοί αριθμοί: 1, 3 , 5, ..., άρτιοι αριθμοί: 2, 4, 6, ...).

Γιατί νομίζεις συμβαίνει αυτό;

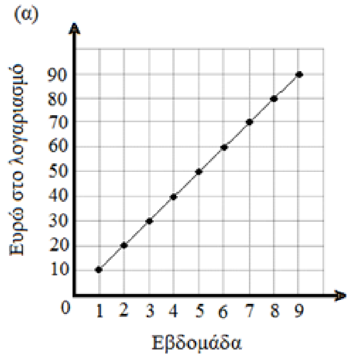
....

....

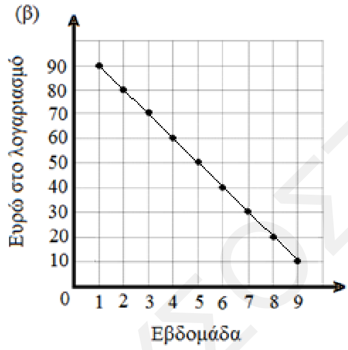
....

(Vf2) 7. Ο Γιώργος έκανε ένα νέο λογαριασμό στην τράπεζα και αποταμιεύει σε αυτόν 10 ευρώ, κάθε εβδομάδα. Την πρώτη εβδομάδα που δημιουργήθηκε ο λογαριασμός κατέθεσε τα πρώτα 10 ευρώ και συνέχισε έτσι τις επόμενες εβδομάδες, έτσι το ποσό στο λογαριασμό του αυξάνεται συνεχώς. Να βάλεις σε κύκλο τη γραφική παράσταση που αναπαριστά την κατάσταση που περιγράφεται πιο πάνω.

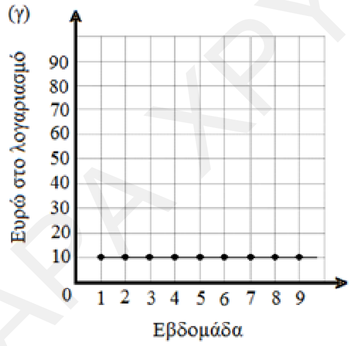
(α)



(β)



(γ)



Να εξηγήσεις γιατί επέλεξες τη συγκεκριμένη γραφική παράσταση και όχι κάποια άλλη.

....

....

(Se 2) 8. Να συμπληρώσεις τους αριθμούς στα κενά.

(α) Αν $\lambda - 15 = 5$ τότε $\lambda =$ _____

(β) Αν $\frac{3+\nu}{5} = 2$ τότε $\nu =$ _____

Να εξηγήσεις πώς σκέφτηκες, για να συμπληρώσεις το κενό στο ερώτημα (β).

....

....

(Gf1) 9. Στον πιο κάτω πίνακα παρουσιάζονται τα τέρματα που πέτυχαν δύο ομάδες σε καθένα από τα παιχνίδια που έπαιξαν. Όταν η ομάδα Δίας πέτυχε 1 τέρμα, η ομάδα Ήφαιστος πέτυχε 3, όταν η ομάδα Δίας πέτυχε 2 τέρματα, η ομάδα Ήφαιστος πέτυχε 6 κτλ.

Τέρματα ομάδας Δίας	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Τέρματα ομάδας Ήφαιστου	**3**	**6**	**9**	**12**	**15**

(α) Να περιγράψεις με λόγια πώς μπορεί κάποιος να υπολογίζει τα τέρματα της ομάδας Ήφαιστος όταν γνωρίζει τα τέρματα της ομάδας Δίας.

....

....

(Mo3) (β) Συμβολίζουμε με Δ τον αριθμό των τερμάτων της ομάδας Δίας και με Η τον αριθμό των τερμάτων της ομάδας Ήφαιστος. Να συμπληρώσεις την πιο κάτω μαθηματική πρόταση ώστε να φαίνεται πώς υπολογίζουμε τον αριθμό των τερμάτων της ομάδας Ήφαιστος (Η), αν γνωρίζουμε τον αριθμό τερμάτων της ομάδας Δίας (Δ).

Η =______________________

(Se3) 10. Να συμπληρώσεις τον αριθμό στα κενό

Αν $\alpha + 4 = 2\times\alpha + 2$, τότε α= _____

Να εξηγήσεις πώς σκέφτηκες, για να συμπληρώσεις **το κενό.**

....

....

(Sm2) 11. Να βρεις το αποτέλεσμα.

$\frac{\alpha+\alpha}{2} =$ $\qquad\qquad$ $\frac{\alpha+\alpha+\alpha}{3} =$

(Go2) 12. (α) Να εξηγήσεις κατά πόσο οι δύο πιο κάτω αριθμητικές προτάσεις θα δώσουν το ίδιο αποτέλεσμα.

2005 × 1294 **1294 × 2005**

....

....

(β) Να εξηγήσεις κατά πόσο οι πιο κάτω μαθηματικές προτάσεις θα έδιναν το ίδιο αποτέλεσμα. (Οι δύο προτάσεις δείχνουν ότι πολλαπλασιάζουμε δύο αριθμούς και στη συνέχεια τους πολλαπλασιάζουμε με διαφορετική σειρά).

Αν σημείωσες ότι θα δώσουν το ίδιο αποτέλεσμα όταν τα α και β είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί (2, 3, 4, κτλ.), να εξηγήσεις αν αυτό θα ισχύει όταν τα α και β είναι κλάσματα (1/2, 1/5 κτλ.) και όταν τα α και β είναι δεκαδικοί αριθμοί (0.4, 0.7 κτλ.).

α × β **β × α**

....

....

(Ge1) 13. Να συμπληρώσεις το κατάλληλο σύμβολο (>, <, =) στο κενό.

(α) Αν **Α = Β** και **Β = Γ**, τότε σίγουρα **Α ___ Γ**

(β) Αν **Δ > Ρ** και **Ρ > Ο**, τότε σίγουρα **Δ ___Ο**

(γ) Αν **Κ < Τ** και **Τ < Λ**, τότε σίγουρα **Λ ___ Κ**

(Gn2) 14. Όταν προσθέσω έναν ακέραιο αριθμό με τον εαυτό του, το αποτέλεσμα θα είναι άρτιος ή περιττός αριθμός; Να εξηγήσεις πώς σκέφτηκες.

....

....

....

(Go3) 15. Να εξηγήσεις κατά πόσο οι δύο πιο κάτω μαθηματικές προτάσεις θα έδιναν το ίδιο αποτέλεσμα. (Οι προτάσεις δείχνουν ότι διαιρούμε δύο αριθμούς και στη συνέχεια τους διαιρούμε με διαφορετική σειρά).

α ÷ β **β ÷ α**

....

....

(Sm3) 16. Να κάνεις τις πράξεις, για να βρεις το αποτέλεσμα.

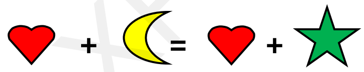
$\alpha + \alpha =$ $\qquad$ $2 \times \alpha + 5 \times \alpha =$ $\qquad$ $2 \times \alpha + \beta + \alpha =$

(Gn3)17. Όταν προσθέσω έναν ακέραιο αριθμό με τον εαυτό του και στη συνέχεια προσθέσω ακόμη 3, το αποτέλεσμα θα είναι άρτιος ή περιττός αριθμός; Να εξηγήσεις πώς σκέφτηκες.

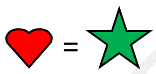
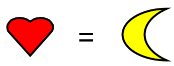
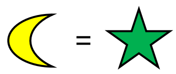
....

....

....

(Ge2)18. (α) Έχουμε την ισότητα: 

Με βάση την πιο πάνω ισότητα μπορούμε να πούμε ότι μια από τις πιο κάτω επιλογές ισχύει σίγουρα. Να βάλεις σε κύκλο την επιλογή σου.

(α)  $\qquad$ (β)  $\qquad$ (γ) 

Να εξηγήσεις την επιλογή σου.

....

....

(Go4)19. <u>Χωρίς να κάνεις τις πράξεις</u>, να εξηγήσεις αν οι δύο μαθηματικές προτάσεις θα έδιναν το ίδιο αποτέλεσμα.

(α) 65 × (50 + 81) $\qquad$ **(β)(65 × 50) + (65 × 81)**

....

....

(Mo3) 20. Κάποιοι ερευνητές έκαναν ένα πείραμα, για να εξετάσουν την επίδραση που έχει το φυτοφάρμακο Α σε ένα φυτό. Οι ερευνητές μετρούσαν το ύψος του φυτού κάθε μήνα, όπως φαίνεται στον πίνακα.

«Ανακάλυψαν με βάση τον Πίνακα, ότι για να υπολογίζει κάποιος το ύψος του φυτού κάθε μήνα θα πρέπει να πολλαπλασιάζει τον αριθμό του μήνα με τον αριθμό του μήνα».

Φυτοφάρμακο Α - Φυτό

Μήνας	**Ύψος (cm)**
1	1
2	4
3	9
4	16

Το **ύψος του φυτού** συμβολίζεται με **Υ** και οι **μήνες** με **Μ**. Να συμπληρώσεις τη μαθηματική πρόταση, ώστε να φαίνεται πώς μπορεί κάποιος να υπολογίζει το ύψος του φυτού (Υ) με βάση τους μήνες που πέρασαν από τη φύτευσή του (Μ).

Υ=

(Vf3) 21. Ο ιδιοκτήτης του καταστήματος παιχνιδιών "ΜΠΑΖ" κατέληξε σε μια εξίσωση η οποία δείχνει περίπου πόσα άτομα θα αγοράσουν ένα παιχνίδι. Όπως λέει ο ιδιοκτήτης και όπως φαίνεται και από την πιο κάτω εξίσωση, ο αριθμός των ατόμων που θα αγοράσουν ένα παιχνίδι εξαρτάται από την τιμή του παιχνιδιού.

Η εξίσωση είναι η εξής: **Α = 1000 - (2×Τ), όπου**

Α = αριθμός ατόμων που αγοράζουν το παιχνίδι

Τ = η τιμή του παιχνιδιού (ακέραιος αριθμός, Τ<501)

Με βάση την εξίσωση να απαντήσεις στα πιο κάτω ερωτήματα:

(α) Αν η τιμή του παιχνιδιού είναι €1, πόσα άτομα θα αγοράσουν το παιχνίδι;

....

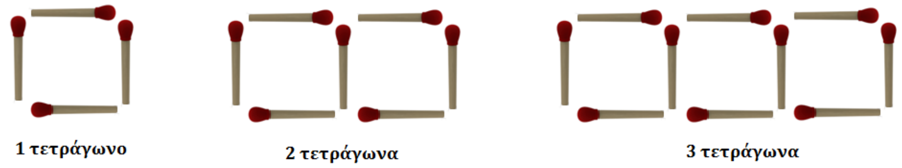
(β) Αν η τιμή του παιχνιδιού γίνει €2, πόσα άτομα θα αγοράσουν το παιχνίδι;

....

(γ) Με βάση την εξίσωση, όσο μεγαλώνει η τιμή του παιχνιδιού, ο αριθμός των ατόμων που θα το αγοράσουν αυξάνεται ή μειώνεται; Να εξηγήσεις.

....

(Gf3) 22. Ο Φώτης φτιάχνει τετράγωνα με σπίρτα όπως φαίνεται πιο κάτω. Για ένα τετράγωνο χρειάζεται 4 σπίρτα, για δύο τετράγωνα 7 σπίρτα, για τρία τετράγωνα χρειάζεται 10 σπίρτα κτλ.



(α) Θα συνεχίσει να φτιάχνει τετράγωνα με αυτό τον τρόπο. Να συμπληρώσεις τον πιο κάτω πίνακα.

Αριθμός τετραγώνων	**Αριθμός σπίρτων**
1	4
2	7
3	10
4	
5	

(β) Για 10 τετράγωνα θα χρειαστεί ____ σπίρτα.

(γ) Για 100 τετράγωνα θα χρειαστεί ____ σπίρτα.

(δ) Να περιγράψεις με λόγια πώς μπορεί να υπολογίσει κάποιος τον αριθμό των σπίρτων που θα χρειαστεί, αν γνωρίζει τον αριθμό των τετραγώνων που θέλει να φτιάξει.

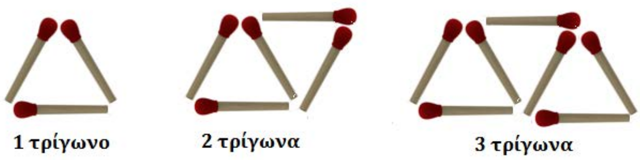
....

....

(Mo3) (ε) Συμβολίζουμε τον αριθμό των σπίρτων με Σ και τον αριθμό τετραγώνων με Τ. Να συμπληρώσεις την πιο κάτω μαθηματική πρόταση με την οποία θα μπορεί να υπολογίζει κάποιος τον αριθμό των σπίρτων (Σ) που θα χρειάζεται, για να φτιάξει οποιοδήποτε αριθμό τετραγώνων (Τ).

Σ = ________________

(στ) Με βάση αυτό που ανακάλυψες πιο πάνω, να περιγράψεις σε κάποιον πώς μπορεί να υπολογίσει τον αριθμό των σπίρτων που θα χρειαστεί, αν γνωρίζει πόσα τρίγωνα θέλει να φτιάξει.



....

....

(Si4) 23. Έχουμε την ανισότητα: **$\kappa + 3 > 10$** (Δηλαδή το $\kappa + 3$ είναι μεγαλύτερο από το 10).

Με βάση το πιο πάνω, προκύπτει ένα συμπέρασμα για το **κ**. Να βάλεις σε κύκλο ποια από τις επιλογές δείχνει το σωστό συμπέρασμα.

(α) $\kappa < 7$ **(β) $\kappa > 7$** **(γ) $\kappa = 13$** **(δ) κανένα από αυτά**

Να εξηγήσεις την επιλογή σου.

....

....

(Vf4) 24. Ο Αλέξανδρος φύλαξε κάποια χρήματα, δεν ξέρουμε ακριβώς πόσα. Το ποσό όμως που συγκέντρωσε είναι πάνω από 2 ευρώ και είναι θετικός ακέραιος αριθμός (π.χ. 3, 4, 5 κτλ.). Η γιαγιά του, του πρότεινε:

είτε (α) **Να του τριπλασιάσει τα λεπτά που φύλαξε** (δηλαδή αν είχε 2 ευρώ, η γιαγιά του θα του έδινε 6 ευρώ (3×2), δηλαδή αν το αρχικό ποσό είναι ν, θα γίνει $3 \times \nu$).

είτε (β) **Να του πολλαπλασιάσει το ποσό που συγκέντρωσε ξανά με το ίδιο ποσό** (δηλαδή αν είχε 2 ευρώ, η γιαγιά του θα του έδινε 4 ευρώ (2×2), δηλαδή αν το αρχικό ποσό είναι ν, θα γίνει $\nu \times \nu$).

Να συμπληρώσεις τους πίνακες ώστε να δείξεις πώς αλλάζει το ποσό που μπορεί να έχει ο Αλέξανδρος με τις δύο προσφορές.

Αρχικό ποσό Αλέξανδρου	**Ποσό του Αλέξανδρου μετά την προσφορά (α)**

Αρχικό ποσό Αλέξανδρου	**Ποσό του Αλέξανδρου μετά την προσφορά (β)**

Να εξηγήσεις στον Αλέξανδρο ποια από τις δύο προσφορές τον συμφέρει να διαλέξει, για να πάρει περισσότερα χρήματα.

....

....

....

(Mo 2) 25. (α) Να γράψεις ένα πρόβλημα στο οποίο θα χρησιμοποιούσες την πιο κάτω εξίσωση για να το λύσεις. Το" ν" είναι αυτό που δεν γνωρίζουμε.

ν - 30 = 20

....

....

....

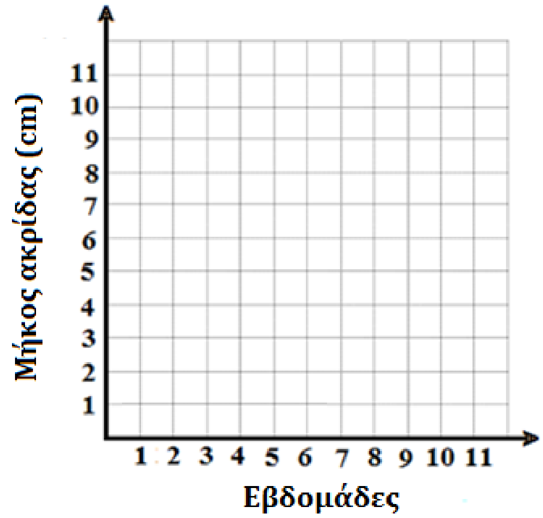
(β) **<u>Να βάλεις σε κύκλο</u>** τη μαθηματική πρόταση που αναπαριστά την κατάσταση που περιγράφεται στο πιο κάτω μαθηματικό πρόβλημα:

Πρόβλημα 3: Άνοιξα το βιβλίο μου σε ένα σημείο. Ο αριθμός της αριστερής και της δεξιάς σελίδας είναι μυστικός. Να συμβολίσεις με ν τον αριθμό της αριστερής σελίδας και με βάση αυτό να συμβολίσεις και τη δεξιά σελίδα. Αν προσθέσεις τον αριθμό της δεξιάς και της αριστερής σελίδας θα πάρεις αποτέλεσμα 243.

(α) ν +1 = 243 (β) (ν + 1) + 1 = 243 (γ) ν+ (ν+1)= 243 (δ) ν + 2 = 243

(Vf1) 26. Ο πίνακας παρουσιάζει το μήκος μιας ακρίδας σε εκατοστά για μερικές εβδομάδες. Με βάση τα δεδομένα αυτά να κατασκευάσεις στους πιο κάτω άξονες μια γραφική παράσταση για την ανάπτυξη της ακρίδας.

Εβδομάδα	1	2	3	4	5	6
Μήκος ακρίδας	1	2	3	4	5	6



(Ge3) 27. Έχουμε την ισότητα: **Α - Γ = Β - Γ**

Με βάση την πιο πάνω ισότητα, μπορούμε να πούμε ότι μια από τις πιο κάτω επιλογές ισχύει σίγουρα. Να βάλεις σε κύκλο την επιλογή αυτή.

(α) Α = Γ (β) Β = Γ (γ) Α = Β

Να εξηγήσεις την επιλογή σου.

....

....

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Δοκίμιο ΙΙ

ΔΟΚΙΜΙΟ ΙΙ

Όνομα:.. Τάξη: ....

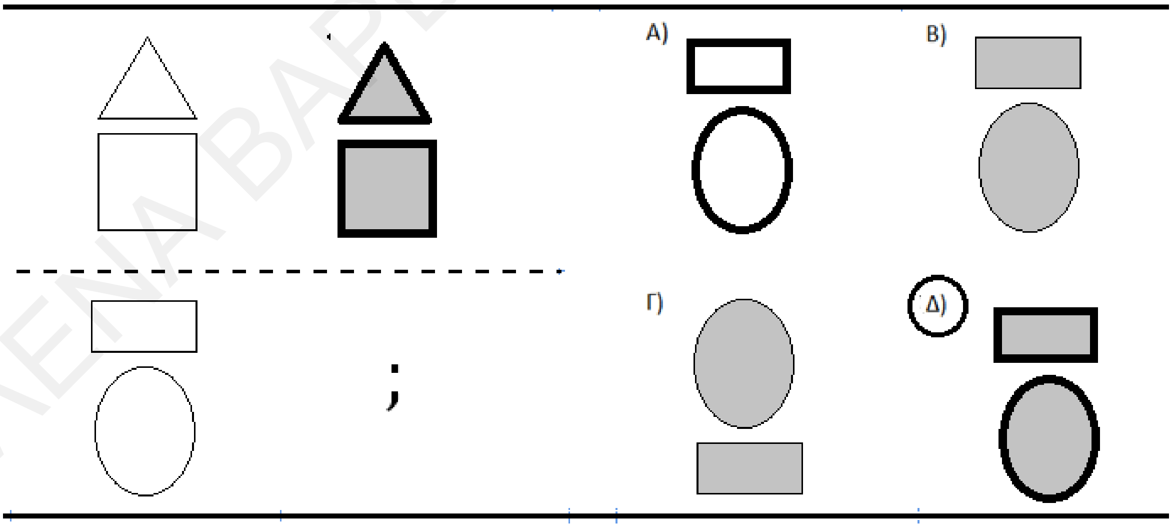
Σχολείο: ....

Στο μέρος αυτό υπάρχουν 20 ασκήσεις. Σε κάθε άσκηση υπάρχουν κάποια σχήματα, πάνω και κάτω από μια διακεκομμένη γραμμή, και δίπλα από αυτά υπάρχουν 4 επιλογές Α, Β, Γ, Δ.

Αρχικά πρέπει να παρατηρήσεις τα δύο σχήματα που βρίσκονται πάνω από τη διακεκομμένη γραμμή. Το αριστερό σχήμα είναι το αρχικό σχήμα και αφού έγιναν κάποιες αλλαγές σε αυτό, προέκυψε το σχήμα που βρίσκεται ακριβώς δίπλα.

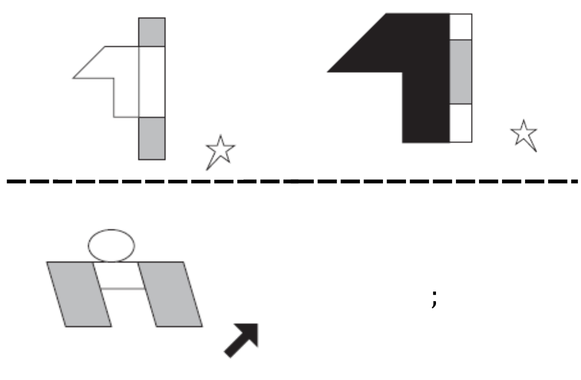
Αυτές οι αλλαγές που εντόπισες ότι έγιναν στο σχήμα πάνω από τη διακεκομμένη γραμμή, θα γίνουν και στο σχήμα που βρίσκεται κάτω από τη διακεκομμένη γραμμή. Εσύ, πρέπει να βρεις και <u>να βάλεις σε κύκλο</u> ποια από τις τέσσερις επιλογές Α-Δ, δείχνει το σωστό σχήμα το οποίο θα προκύψει μετά τις αλλαγές.

<u>Παράδειγμα</u>



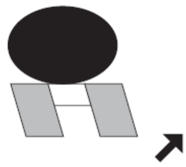
Οι αλλαγές που έγιναν εδώ, είναι η αλλαγή του χρώματος του σχήματος και του πάχους της γραμμής. Επομένως η σωστή επιλογή είναι το Δ.

P1

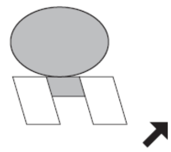


;

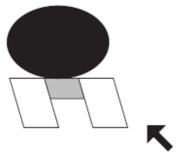
A)



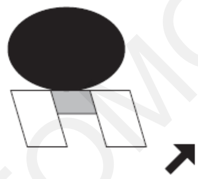
B)



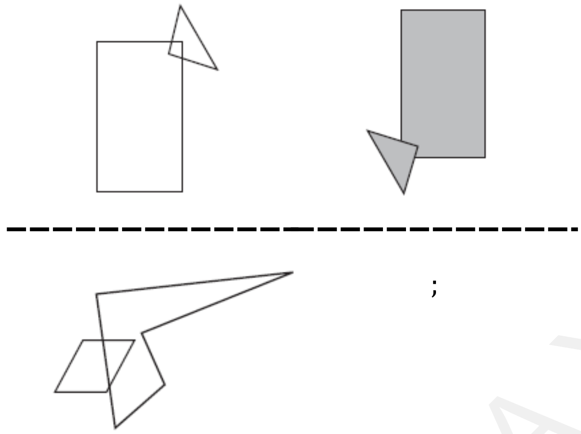
Γ)



Δ)

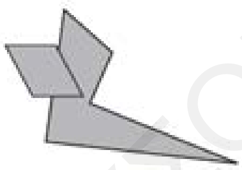


P2

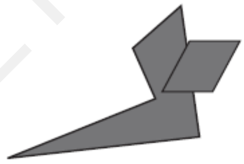


;

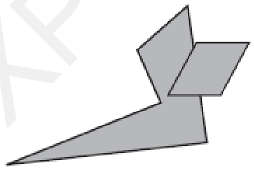
A)



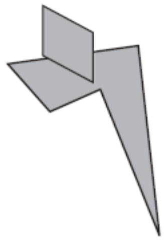
B)



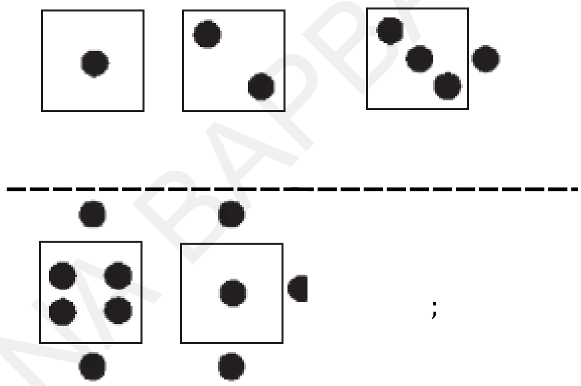
Γ)



Δ)

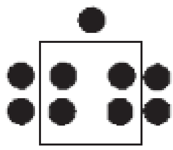


P3

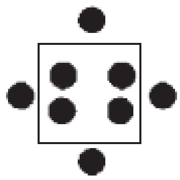


;

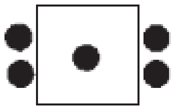
A)



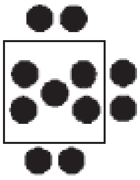
B)



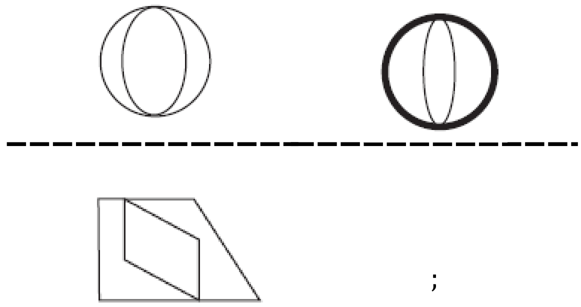
Γ)



Δ)



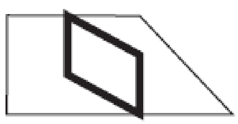
P4



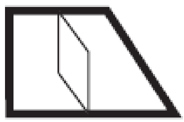
;

A)

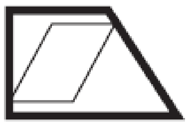
B)



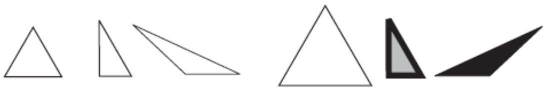
Γ)



Δ)



P5



;

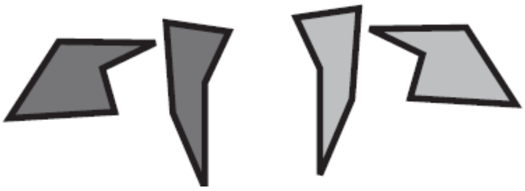
A)

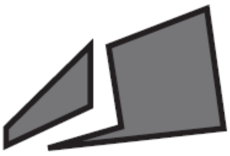
B)

Γ)

Δ)

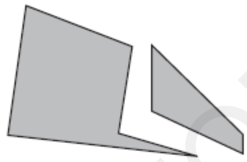
P6



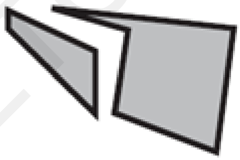


;

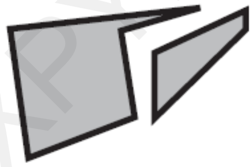
A)



(B)



(Γ)

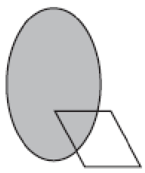


Δ)

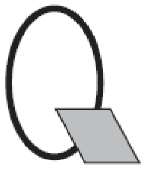
P7

;

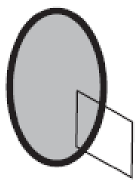
A)



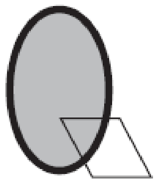
B)



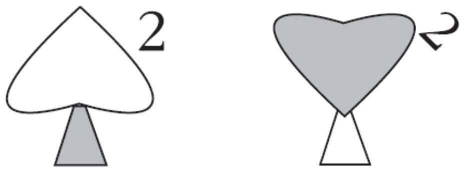
Γ)

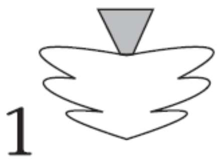


Δ)



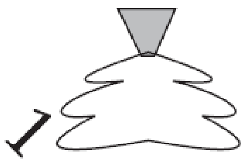
P8



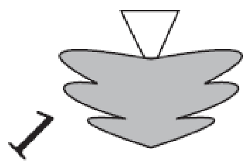


;

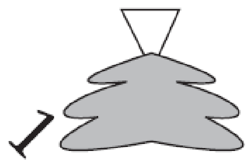
A)



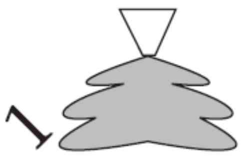
B)



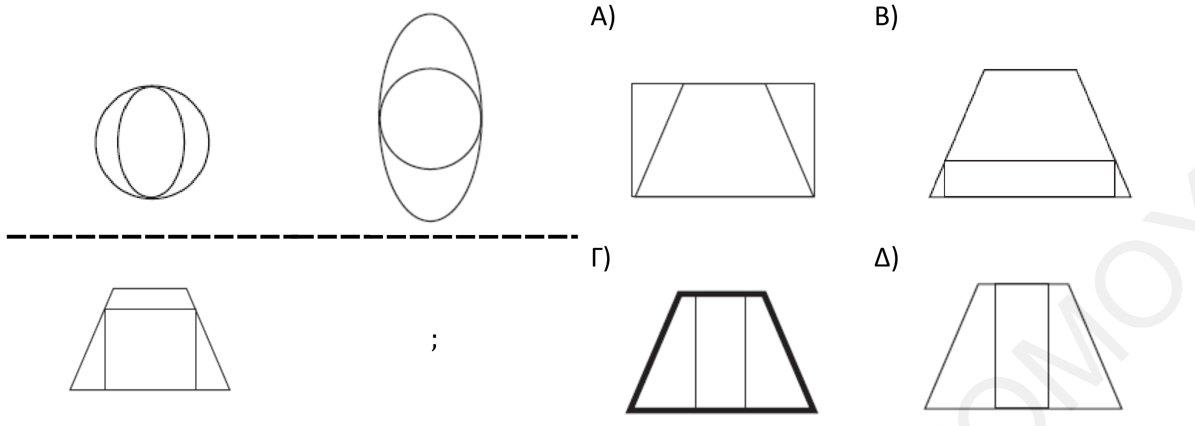
Γ)



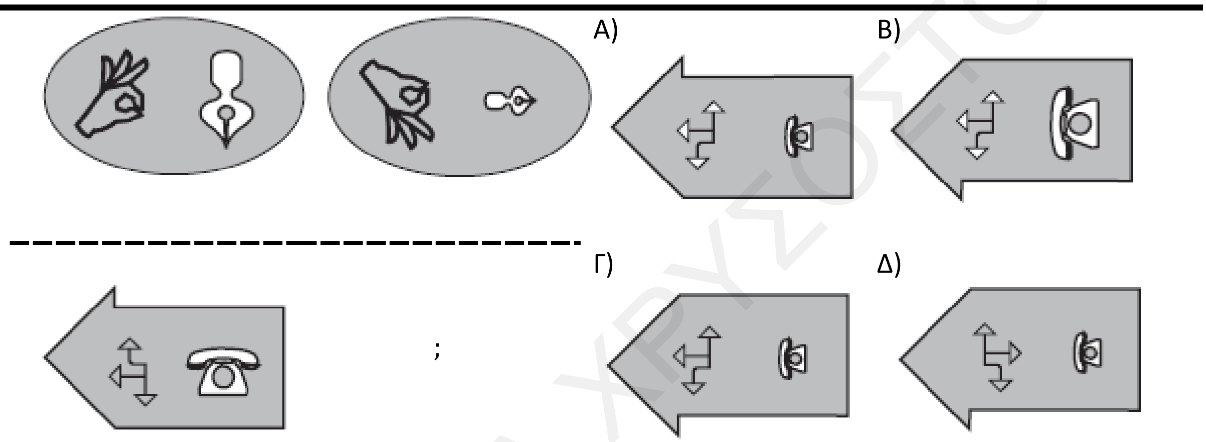
Δ)



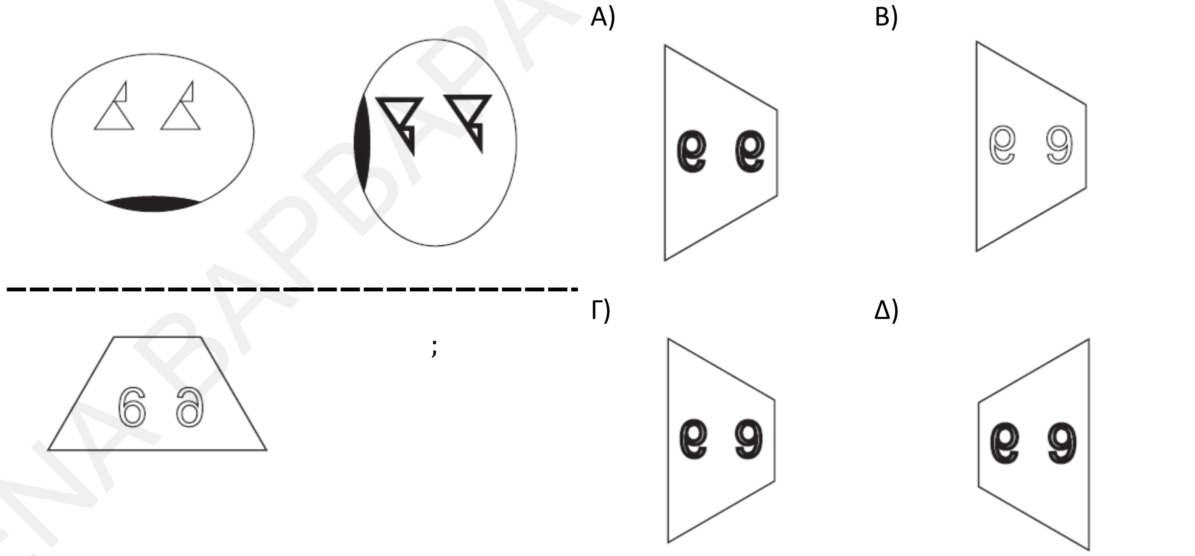
P9



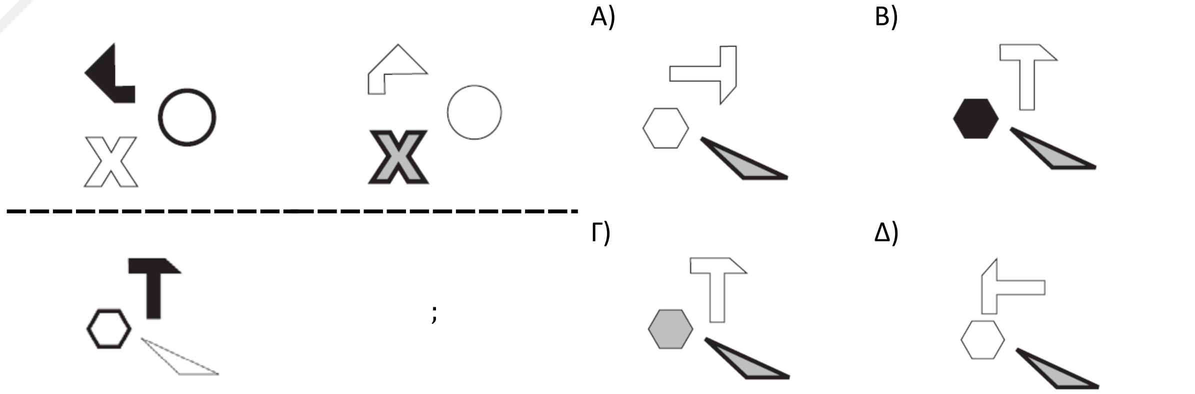
P10



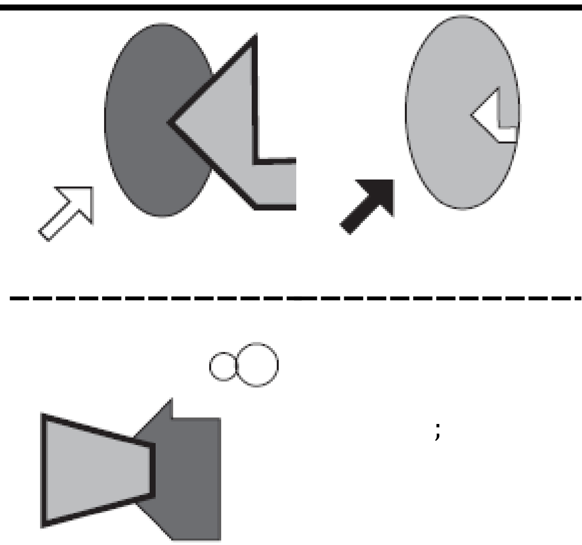
P11



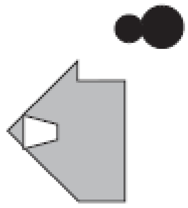
P12



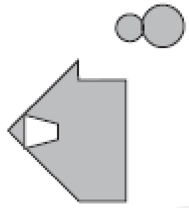
P13



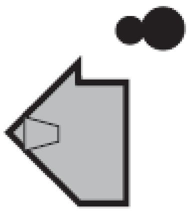
A)



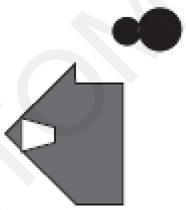
B)



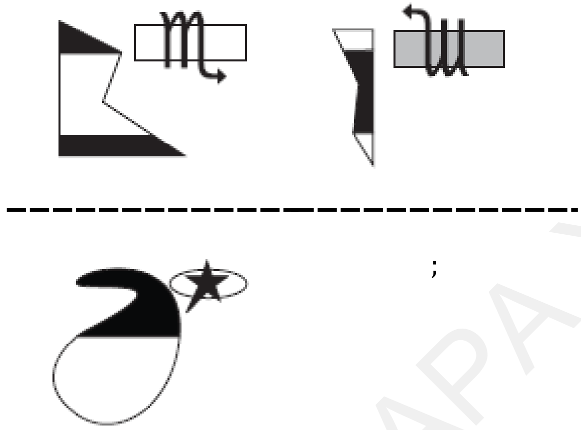
Γ)



Δ)

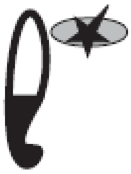


P14

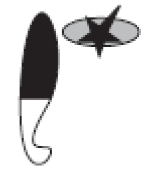


A)

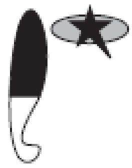
B)



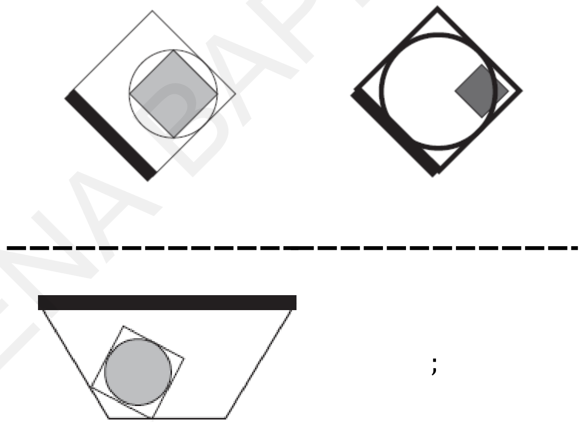
Γ)



Δ)

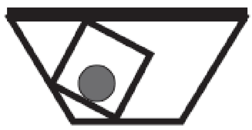


P15



A)

B)



Γ)

Δ)

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

Δοκίμιο ΙΙΙ

ΔΟΚΙΜΙΟ ΙΙΙ

Όνομα:……………………………………………………………………………………………… Τάξη: ....

Σχολείο: ....

Στα προβλήματα που ακολουθούν, να βρεις τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στις λέξεις του πρώτου ζευγαριού (π.χ. **μολύβι:κασετίνα)** για να συμπληρώσεις το κενό που υπάρχει στο άλλο ζευγάρι. Κάθε φορά σου δίνονται τέσσερις λέξεις και εσύ θα πρέπει να διαλέγεις ποια λέξη από αυτές <u>ταιριάζει καλύτερα</u> στο κενό. Να βάλεις σε κύκλο τη λέξη που διαλέγεις.

<u>Παράδειγμα</u>

μολύβι:κασετίνα :: πουκάμισο:____________

κρεμάστρα
δωμάτιο
ντουλάπα
κουτί

C1. έξυπνος:ευφυής :: ____________:πανούργος

πονηρός
αφελής
ειλικρινής
αθώος

C2. ακάθαρτο:λερωμένο :: λαμπερό:____________

σκοτεινό
θαμπό
αστραφτερό
διαφανές

C3. άγνωστος:γνωστός :: ήρεμος:____________

ήσυχος
ταραγμένος
ακίνητος
σιωπηλός

C4. γρίππη:ασθένεια :: σοκολατίνα:____________

μαύρη
γλυκό
τάρτα
ζάχαρη

C5. (βιολί:πιάνο :: μουσικό όργανο) :: (____________:αεροπλάνο :: ____________)

θάλασσα	ταξίδι
πλοίο	ταξιδιωτικό γραφείο
φτερό	μεταφορικό μέσο
πιλότος	διαδρομή

C6. δέντρο:δάσος :: πρόβατο:____________

ζώο
κοπάδι
άσπρο
βοσκός

C7. είσοδος:έξοδος :: αγορά: ____________

χρήματα
πώληση
προϊόντα
κατάστημα

C8. (παιδιά:γονείς :: οικογένεια) :: (μαθητές:δάσκαλοι:: ____________)

μάθημα
βαθμοί
παιδεία
διευθυντής

C9. ψωμί:μαχαίρι :: χαρτί: ____________

μελάνι
ψαλίδι
ξυράφι
βιβλίο

C10. κρεβάτι:ύπνος :: ____________:____________

χαρτί	βιβλίο
τραπέζι	βροχή
νερό	φαγητό
ραδιόφωνο	τηλεόραση

C11. μεσημέρι:απόγευμα :: Πέμπτη:____________

Τρίτη
Τετάρτη
Παρασκευή
ημέρα

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ

Δοκίμιο IV

ΔΟΚΙΜΙΟ IV

Όνομα:……………………………………………………………………………………… Τάξη: ……………

Σχολείο: ………………………………………………………………………………………………

Πιο κάτω δίνονται διάφορες σχέσεις με αριθμούς. Να <u>βρεις τη σχέση</u> που υπάρχει στο πρώτο ζευγάρι των αριθμών, για να την εφαρμόσεις στο δεύτερο ζευγάρι ώστε να συμπληρώσεις το κενό. <u>Να συμπληρώσεις στο κενό τον αριθμό που ταιριάζει</u>, διαλέγοντας έναν από τους τρεις αριθμούς που βρίσκονται στην παρένθεση. Να σημειώνεις μέσα στο τόξο τη σχέση που χρησιμοποίησες για να συμπληρώσεις το κενό.

<u>Παράδειγμα 1</u>

1 → **επί 2** → 2

3 → **επί 2** → ____ (1, 5, 6) Η ορθή απάντηση είναι το 6.

<u>Παράδειγμα 2</u>

2 → **διαιρώ τον αριθμό με τον εαυτό του** → 1

3 → **διαιρώ τον αριθμό με τον εαυτό του** → ____ (0, 1, 3) Η ορθή απάντηση είναι το 1.

(Ν1) 6 → → 24

8 → → ____ (4, 16, 32)

(N2) 12 → 6

8 → ____ (4, 6, 16)

(N3) 5 → 30

2 → ____ (10, 12, 16)

(N4) 3 → 1

6 → ____ (2, 3, 9)

(N5) 6 → 8

9 → ____ (12, 16, 18)

(N6) 6 → 4

9 → ____ (1, 3, 6)

(N7) 5 $\Rightarrow$ 25

8 $\Rightarrow$ ______ (38, 64, 72)

(N8) 3 $\Rightarrow$ 27

4 $\Rightarrow$ ______ (12, 28, 64)

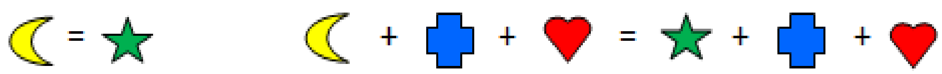
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε

Έργα Αναλογικού Συλλογισμού Αλγεβρικής Σκέψης (ΕΑΣ) των Κλινικών Συνεντεύξεων

Έργο ΕΑΣ 1

Να εξηγήσεις ως προς τι είναι αντίστοιχες οι δύο πιο κάτω καταστάσεις.

Α



Β

Γ

Α = Β   **Α + Α + Α = Β + Β + Β**

Δ

Έργο ΕΑΣ 2

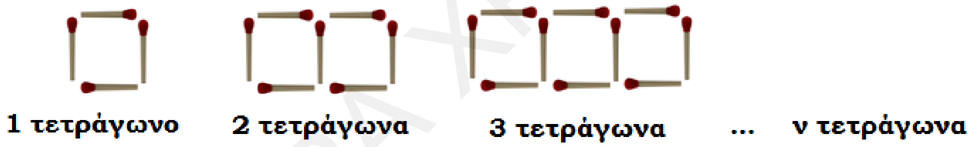
Να εξηγήσεις ως προς τι είναι αντίστοιχες οι δύο πιο κάτω καταστάσεις.

Α

Ο Ηλίας εργάζεται σε μια εταιρία, φτιάχνει τετράγωνα πλακάκια και πληρώνεται στο τέλος κάθε εβδομάδας. Παίρνει σίγουρα 100 ευρώ την εβδομάδα αλλά και 3 ευρώ για κάθε επιπρόσθετη ώρα που εργάζεται μέσα στην εβδομάδα. Την ερχόμενη εβδομάδα θα εργαστεί ν επιπρόσθετες ώρες.

Β

Γ



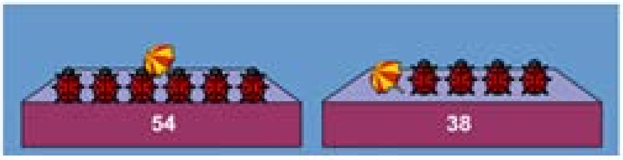
Δ

Έργο ΕΑΣ 3

Να εξηγήσεις τι συμβαίνει στην πρώτη κατάσταση που είναι αντίστοιχο με αυτό που συμβαίνει στη δεύτερη κατάσταση.

Α

Το ράφι αρχικά **Το ράφι μετά από λίγη ώρα**



Β

Γ

Η εξίσωση αρχικά $A+A+B=14$

Η εξίσωση μετά από κάποιες αλλαγές

$A+A+A+A+B=26$

Δ

Έργο ΕΑΣ 4

Οι δύο πιο κάτω εξισώσεις είναι αντίστοιχες ως προς κάτι. Να εντοπίσεις και να εξηγήσεις τι είναι αντίστοιχο στις δύο περιπτώσεις.

Α $\dfrac{4+4+4}{3} = 4$

Β

Γ $\dfrac{\alpha + \alpha + \alpha + \alpha}{4} = \alpha$

Δ

Έργο ΕΑΣ 5

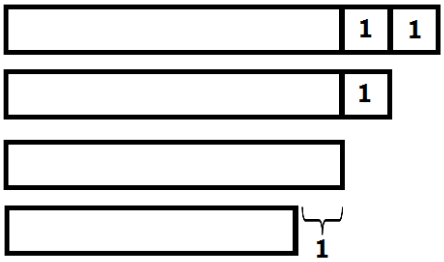
Να εντοπίσεις και να εξηγήσεις γιατί οι δύο περιπτώσεις έχουν κάτι αντίστοιχο.

Α	Προσθέτω έναν αριθμό με τον εαυτό του.
Β	
Γ	Πολλαπλασιάζω έναν άρτιο αριθμό με έναν περιττό αριθμό.
Δ	

Έργο ΕΑΣ 6

Να αναφέρεις ως προς τι είναι αντίστοιχες οι δύο πιο κάτω καταστάσεις.

Α



$\square + 1 + 1 + \square + 1 + \square + \square - 1$

Β

Γ

$\nu + \nu + 1 + \nu + 2 + \nu + 3$

Δ

Έργο ΕΑΣ 7

Να εντοπίσεις τι αντίστοιχο συμβαίνει στις δύο καταστάσεις.

Α

Α= Αριθμός αγοριών του δημοτικού σχολείου Δ'

Κ= Αριθμός κοριτσιών του δημοτικού σχολείου Δ'

Α + Κ = 850

Β

Γ

Α= Αριθμός ατόμων που αγοράζουν ένα παιχνίδι

Τ= Τιμή παιχνιδιού

Α = 800 - (2 × Τ)

Δ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΤ

Πίνακες Ποσοτικής Ανάλυσης

Πίνακας ΣΤ.1

Συσχετίσεις μεταξύ της Επίδοσης των Υποκειμένων στα Έργα του Δοκιμίου Αλγεβρικής Σκέψης

	Gf1	Gf2	Gf3	Se1	Se2	Se3	Si4	Sm1	Sm2	Sm3	Mo1	Mo2	Mo3
Gf1	1												
Gf2	.206**	1											
Gf3	.320**	.329**	1										
Se1	.262**	.176**	.215**	1									
Se2	.310**	.284**	.315**	.314**	1								
Se3	.296**	.228**	.324**	.322**	.390**	1							
Si4	.230**	.236**	.339**	.179**	.250**	.295**	1						
Sm1	.228**	.232**	.286**	.198**	.298**	.282**	.232**	1					
Sm2	.238**	.245**	.328**	.148**	.256**	.247**	.288**	.357**	1				
Sm3	.204**	.210**	.324**	.150**	.236**	.231**	.251**	.430**	.494**	1			
Mo1	.325**	.274**	.346**	.293**	.366**	.365**	.293**	.370**	.295**	.278**	1		
Mo2	.310**	.273**	.400**	.225**	.393**	.382**	.340**	.328**	.319**	.298**	.516**	1	
Mo3	.521**	.325**	.583**	.285**	.412**	.423**	.380**	.385**	.397**	.385**	.478**	.467**	1
Gn1	.285**	.280**	.336**	.217**	.303**	.268**	.184**	.244**	.218**	.202**	.281**	.312**	.366**
Gn2	.337**	.201**	.354**	.239**	.353**	.307**	.268**	.264**	.275**	.248**	.319**	.327**	.400**
Gn3	.319**	.218**	.342**	.211**	.321**	.270**	.251**	.234**	.262**	.213**	.273**	.296**	.375**
Go1	.390**	.314**	.344**	.281**	.380**	.360**	.272**	.343**	.295**	.310**	.386**	.393**	.482**
Go2	.359**	.218**	.352**	.265**	.347**	.341**	.288**	.306**	.272**	.272**	.392**	.386**	.462**
Go3	.275**	.276**	.332**	.224**	.364**	.327**	.270**	.302**	.255**	.335**	.340**	.413**	.425**
Go4	.239**	.205**	.253**	.147**	.187**	.236**	.211**	.175**	.190**	.206**	.187**	.186**	.318**
Ge1	.267**	.176**	.273**	.240**	.329**	.326**	.230**	.261**	.264**	.256**	.326**	.322**	.387**
Ge2	.331**	.343**	.391**	.210**	.323**	.377**	.360**	.300**	.302**	.280**	.354**	.375**	.483**
Ge3	.350**	.373**	.436**	.246**	.386**	.386**	.329**	.336**	.325**	.294**	.380**	.395**	.502**
Vf1	.133**	.156**	.196**	.177**	.182**	.195**	.186**	.170**	.144**	.123**	.165**	.180**	.220**
Vf2	.182**	.212**	.208**	.179**	.223**	.253**	.157**	.214**	.182**	.222**	.231**	.244**	.293**
Vf3	.342**	.341**	.430**	.279**	.391**	.359**	.356**	.326**	.285**	.284**	.397**	.411**	.476**
Vf4	.334**	.280**	.314**	.201**	.297**	.235**	.299**	.213**	.221**	.227**	.353**	.344**	.392**

*p<.05, p**<.01

(*ο πίνακας συνεχίζεται*)

	Gn1	Gn2	Gn3	Go1	Go2	Go3	Go4	Ge1	Ge2	Ge3	Vf1	Vf2	Vf3	Vf4
Gn1	1													
Gn2	.473**	1												
Gn3	.498**	.856**	1											
Go1	.301**	.342**	.293**	1										
Go2	.347**	.401**	.373**	.362**	1									
Go3	.308**	.381**	.347**	.385**	.467**	1								
Go4	.182**	.209**	.213**	.193**	.227**	.234**	1							
Ge1	.246**	.309**	.292**	.364**	.320**	.303**	.178**	1						
Ge2	.322**	.372**	.340**	.438**	.366**	.375**	.301**	.354**	1					
Ge3	.362**	.399**	.379**	.461**	.398**	.418**	.286**	.396**	.731**	1				
Vf1	.113**	.074	.100**	.213**	.211**	.119**	.129**	.188**	.188**	.210**	1			
Vf2	.211**	.235**	.184**	.287**	.276**	.245**	.158**	.204**	.272**	.281**	.208**	1		
Vf3	.326**	.378**	.366**	.403**	.419**	.363**	.223**	.342**	.452**	.486**	.263**	.295**	1	
Vf4	.251**	.318**	.304**	.390**	.364**	.311**	.198**	.237**	.320**	.313**	.177**	.217**	.317**	1

*p<.05, p**<.01

Πίνακας ΣΤ.2

Συγκρίσεις μεταξύ των Επιδόσεων των Υποκειμένων Σχετικά με τη Γενική Ικανότητα Αλγεβρικής Σκέψης στις Τρεις Διαφορετικές Τάξεις

Εξαρτημένη μεταβλητή	Σχολική τάξη (Χ)	Σχολική τάξη (Ψ)	Post-hoc significance
Αλγεβρική Σκέψη	Ε΄ δημ.	ΣΤ΄ δημ.	.000
		Α΄ γυμ.	.000
	ΣΤ΄ δημ.	Ε΄ δημ.	.000
		Α΄ γυμ.	.000
	Α΄ γυμ.	Ε΄ δημ.	.000
		ΣΤ΄ δημ.	.000

Πίνακας ΣΤ.3

Συγκρίσεις Μεταξύ των Επιδόσεων των Υποκειμένων στους Τρεις Παράγοντες Δεύτερης Τάξης του Μοντέλου Αλγεβρικής Σκέψης στις Τρεις Διαφορετικές Τάξεις

Εξαρτημένη μεταβλητή	Σχολική τάξη (Χ)	Σχολική τάξη (Ψ)	Post-hoc significance
Συλλογισμός για την ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών	Ε΄ δημ.	ΣΤ΄ δημ.	.010
		Α΄ γυμ.	.000
	ΣΤ΄ δημ.	Ε΄ δημ.	.010
		Α΄ γυμ.	.025
	Α΄ γυμ.	Ε΄ δημ.	.000
		ΣΤ΄ δημ.	.025
Γενίκευση ιδιοτήτων από την αριθμητική	Ε΄ δημ.	ΣΤ΄ δημ.	.000
		Α΄ γυμ.	.000
	ΣΤ΄ δημ.	Ε΄ δημ.	.000
		Α΄ γυμ.	.004
	Α΄ γυμ.	Ε΄ δημ.	.000
		ΣΤ΄ δημ.	.004
Ικανότητες άμεσα συνυφασμένες με την αλγεβρική σύνταξη	Ε΄ δημ.	ΣΤ΄ δημ.	.000
		Α΄ γυμ.	.000
	ΣΤ΄ δημ.	Ε΄ δημ.	.000
		Α΄ γυμ.	.000
	Α΄ γυμ.	Ε΄ δημ.	.000
		ΣΤ΄ δημ.	.000

Πίνακας ΣΤ.4

Συγκρίσεις Μεταξύ των Επιδόσεων των Υποκειμένων στους Οκτώ Παράγοντες Πρώτης Τάξης του Μοντέλου Αλγεβρικής Σκέψης στις Τρεις Διαφορετικές Τάξεις

Εξαρτημένη μεταβλητή	Σχολική τάξη (Χ)	Σχολική τάξη (Ψ)	Post-hoc significance
Γενίκευση μοτίβων/σχέσεων συμμεταβολής	Ε΄ δημ.	ΣΤ΄ δημ.	.005
		Α΄ γυμ.	.000
	ΣΤ΄ δημ.	Ε΄ δημ.	.004
		Α΄ γυμ.	.025
	Α΄ γυμ.	Ε΄ δημ.	.000
		ΣΤ΄ δημ.	.025
Μεταβολής των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με την ανεξάρτητη	Ε΄ δημ.	ΣΤ΄ δημ.	.059
		Α΄ γυμ.	.000
	ΣΤ΄ δημ.	Ε΄ δημ.	.059
		Α΄ γυμ.	.097
	Α΄ γυμ.	Ε΄ δημ.	.000
		ΣΤ΄ δημ.	.097
Γενίκευση ιδιοτήτων των αριθμών	Ε΄ δημ.	ΣΤ΄ δημ.	.002
		Α΄ γυμ.	.000
	ΣΤ΄ δημ.	Ε΄ δημ.	.002
		Α΄ γυμ.	.118
	Α΄ γυμ.	Ε΄ δημ.	.000
		ΣΤ΄ δημ.	.118
Γενίκευση ιδιοτήτων των πράξεων	Ε΄ δημ.	ΣΤ΄ δημ.	.017
		Α΄ γυμ.	.000
	ΣΤ΄ δημ.	Ε΄ δημ.	.017
		Α΄ γυμ.	.000
	Α΄ γυμ.	Ε΄ δημ.	.000
		ΣΤ΄ δημ.	.000
Συλλογισμός για τις ιδιότητες της ισότητας	Ε΄ δημ.	ΣΤ΄ δημ.	.000
		Α΄ γυμ.	.000
	ΣΤ΄ δημ.	Ε΄ δημ.	.000
		Α΄ γυμ.	.026
	Α΄ γυμ.	Ε΄ δημ.	.000
		ΣΤ΄ δημ.	.026
Αντίληψη και εύρεση της τιμής του αγνώστου	Ε΄ δημ.	ΣΤ΄ δημ.	.000
		Α΄ γυμ.	.000

	ΣΤ΄ δημ.	Ε΄ δημ.	.000
		Α΄ γυμ.	.699
	Α΄ γυμ.	Ε΄ δημ.	.000
		ΣΤ΄ δημ.	.699
Μοντελοποίηση σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων	Ε΄ δημ.	ΣΤ΄ δημ.	.000
		Α΄ γυμ.	.000
	ΣΤ΄ δημ.	Ε΄ δημ.	.000
		Α΄ γυμ.	.109
	Α΄ γυμ.	Ε΄ δημ.	.000
		ΣΤ΄ δημ.	.109
Απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων	Ε΄ δημ.	ΣΤ΄ δημ.	.000
		Α΄ γυμ.	.000
	ΣΤ΄ δημ.	Ε΄ δημ.	.000
		Α΄ γυμ.	.000
	Α΄ γυμ.	Ε΄ δημ.	.000
		ΣΤ΄ δημ.	.000

Πίνακας ΣΤ.5

Συγκρίσεις μεταξύ των Επιδόσεων των Υποκειμένων Σχετικά με τη Γενική Ικανότητα Αλγεβρικής Σκέψης στις Τέσσερις Ομάδες Αλγεβρικής Σκέψης

Εξαρτημένη μεταβλητή	Ομάδα (Χ)	Ομάδα (Ψ)	Post-hoc significance
Γενική ικανότητα αλγεβρικής σκέψης	Ομάδα 1	Ομάδα 2	.000
		Ομάδα 3	.000
		Ομάδα 4	.000
	Ομάδα 2	Ομάδα 1	.000
		Ομάδα 3	.000
		Ομάδα 4	.000
	Ομάδα 3	Ομάδα 1	.000
		Ομάδα 2	.000
		Ομάδα 4	.000
	Ομάδα 4	Ομάδα 1	.000
		Ομάδα 2	.000
		Ομάδα 3	.000

Πίνακας ΣΤ.6

Συγκρίσεις Μεταξύ των Επιδόσεων των Υποκειμένων στους Τρεις Παράγοντες Δεύτερης Τάξης του Μοντέλου Αλγεβρικής Σκέψης στις Τέσσερις Ομάδες Αλγεβρικής Σκέψης

Εξαρτημένη μεταβλητή	Ομάδα (Χ)	Ομάδα (Ψ)	Post-hoc significance
Συλλογισμός για την ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών	Ομάδα 1	Ομάδα 2	.000
		Ομάδα 3	.000
		Ομάδα 4	.000
	Ομάδα 2	Ομάδα 1	.000
		Ομάδα 3	.000
		Ομάδα 4	.000
	Ομάδα 3	Ομάδα 1	.000
		Ομάδα 2	.000
		Ομάδα 4	.000
	Ομάδα 4	Ομάδα 1	.000
		Ομάδα 2	.000
		Ομάδα 3	.000
Γενίκευση ιδιοτήτων από την αριθμητική	Ομάδα 1	Ομάδα 2	.000
		Ομάδα 3	.000
		Ομάδα 4	.000
	Ομάδα 2	Ομάδα 1	.000
		Ομάδα 3	.000
		Ομάδα 4	.000
	Ομάδα 3	Ομάδα 1	.000
		Ομάδα 2	.000
		Ομάδα 4	.000
	Ομάδα 4	Ομάδα 1	.000
		Ομάδα 2	.000
		Ομάδα 3	.000
Ικανότητες άμεσα συνυφασμένες με την αλγεβρική σύνταξη	Ομάδα 1	Ομάδα 2	.000
		Ομάδα 3	.000
		Ομάδα 4	.000
	Ομάδα 2	Ομάδα 1	.000
		Ομάδα 3	.000
		Ομάδα 4	.000
	Ομάδα 3	Ομάδα 1	.000
		Ομάδα 2	.000
		Ομάδα 4	.000
	Ομάδα 4	Ομάδα 1	.000
		Ομάδα 2	.000
		Ομάδα 3	.000

Πίνακας ΣΤ.7

Συγκρίσεις Μεταξύ των Επιδόσεων των Υποκειμένων στους Οκτώ Παράγοντες Πρώτης Τάξης του Μοντέλου Αλγεβρικής Σκέψης στις Τέσσερις Ομάδες Αλγεβρικής Σκέψης

Εξαρτημένη μεταβλητή	Ομάδα (Χ)	Ομάδα (Ψ)	Post-hoc significance
Γενίκευση μοτίβων/σχέσεων συμμεταβολής	Ομάδα 1	Ομάδα 2	.000
		Ομάδα 3	.000
		Ομάδα 4	.000
	Ομάδα 2	Ομάδα 1	.000
		Ομάδα 3	.000
		Ομάδα 4	.000
	Ομάδα 3	Ομάδα 1	.000
		Ομάδα 2	.000
		Ομάδα 4	.000
	Ομάδα 4	Ομάδα 1	.000
		Ομάδα 2	.000
		Ομάδα 3	.000
Μεταβολής των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με την ανεξάρτητη	Ομάδα 1	Ομάδα 2	.000
		Ομάδα 3	.000
		Ομάδα 4	.000
	Ομάδα 2	Ομάδα 1	.000
		Ομάδα 3	.000
		Ομάδα 4	.000
	Ομάδα 3	Ομάδα 1	.000
		Ομάδα 2	.000
		Ομάδα 4	.000
	Ομάδα 4	Ομάδα 1	.000
		Ομάδα 2	.000
		Ομάδα 3	.000
Γενίκευση ιδιοτήτων των αριθμών	Ομάδα 1	Ομάδα 2	.000
		Ομάδα 3	.000
		Ομάδα 4	.000
	Ομάδα 2	Ομάδα 1	.000
		Ομάδα 3	.000
		Ομάδα 4	.000
	Ομάδα 3	Ομάδα 1	.000
		Ομάδα 2	.000
		Ομάδα 4	.000
	Ομάδα 4	Ομάδα 1	.000
		Ομάδα 2	.000
		Ομάδα 3	.000
Γενίκευση ιδιοτήτων των πράξεων	Ομάδα 1	Ομάδα 2	.000

		Ομάδα 3	.000
		Ομάδα 4	.000
	Ομάδα 2	Ομάδα 1	.000
		Ομάδα 3	.000
		Ομάδα 4	.000
	Ομάδα 3	Ομάδα 1	.000
		Ομάδα 2	.000
		Ομάδα 4	.000
	Ομάδα 4	Ομάδα 1	.000
		Ομάδα 2	.000
		Ομάδα 3	.000
Συλλογισμός για τις ιδιότητες της ισότητας	Ομάδα 1	Ομάδα 2	.000
		Ομάδα 3	.000
		Ομάδα 4	.000
	Ομάδα 2	Ομάδα 1	.000
		Ομάδα 3	.000
		Ομάδα 4	.000
	Ομάδα 3	Ομάδα 1	.000
		Ομάδα 2	.000
		Ομάδα 4	.000
	Ομάδα 4	Ομάδα 1	.000
		Ομάδα 2	.000
		Ομάδα 3	.000
Αντίληψη και εύρεση της τιμής του αγνώστου	Ομάδα 1	Ομάδα 2	.000
		Ομάδα 3	.000
		Ομάδα 4	.000
	Ομάδα 2	Ομάδα 1	.000
		Ομάδα 3	.000
		Ομάδα 4	.000
	Ομάδα 3	Ομάδα 1	.000
		Ομάδα 2	.000
		Ομάδα 4	.000
	Ομάδα 4	Ομάδα 1	.000
		Ομάδα 2	.000
		Ομάδα 3	.000
Μοντελοποίηση σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων	Ομάδα 1	Ομάδα 2	.000
		Ομάδα 3	.000
		Ομάδα 4	.000
	Ομάδα 2	Ομάδα 1	.000
		Ομάδα 3	.000
		Ομάδα 4	.000

	Ομάδα 3	Ομάδα 1	.000
		Ομάδα 2	.000
		Ομάδα 4	.000
	Ομάδα 4	Ομάδα 1	.000
		Ομάδα 2	.000
		Ομάδα 3	.000
Απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων	Ομάδα 1	Ομάδα 2	.000
		Ομάδα 3	.000
		Ομάδα 4	.000
	Ομάδα 2	Ομάδα 1	.000
		Ομάδα 3	.000
		Ομάδα 4	.000
	Ομάδα 3	Ομάδα 1	.000
		Ομάδα 2	.000
		Ομάδα 4	.000
	Ομάδα 4	Ομάδα 1	.000
		Ομάδα 2	.000
		Ομάδα 3	.000

Πίνακας ΣΤ.8

Συσχετίσεις μεταξύ της Επίδοσης των Υποκειμένων στα Έργα του Δοκιμίου του Αναλογικού Συλλογισμού

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	V1	V2
P1	1																
P2	.175**	1															
P3	.212**	.248**	1														
P4	.336**	.255**	.253**	1													
P5	.262**	.145*	.260**	.453**	1												
P6	.259**	.222**	.309**	.365**	.365**	1											
P7	.176**	.099	.197**	.282**	.220**	.267**	1										
P8	.160**	.189**	.172**	.290**	.245**	.248**	.181**	1									
P9	.109	.171**	.037	.123	.084	.113	.089	.020	1								
P10	.134*	.042	.133*	-.030	.145*	.143*	.107	.105	.115	1							
P11	.200**	.130*	.141*	.264**	.079	.160**	.105	.206**	.117*	.194**	1						
P12	.390**	.186**	.295**	.468**	.424**	.317**	.271**	.344**	.137*	.171**	.244**	1					
P13	.253**	.038	.241**	.316**	.181**	.262**	.156**	.257**	.092	.152*	.237**	.419**	1				
P14	.246**	.158**	.060	.166*	.235**	.208**	.091	.117*	.081	.173**	.147*	.273**	.225**	1			
P15	.251**	.128*	.198**	.485**	.422**	.357**	.317**	.308**	.137*	-.003	.162**	.466**	.313**	.246**	1		
V1	.289**	.043	.351**	.334**	.319**.	.268**	.143	.277**	.162*	.084	.205**	.368**	.218**	.216**	.309**	1	
V2	.050	.151*	.066	.235**	190**	.112	.095	.061	-.039	-.017	.138*	.203**	.041	.094	.155**	.379**	1

*p<.05, p**<.01

(*ο πίνακας συνεχίζεται*)

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	V1	V2
V3	.308**	.177**	.290**	.437**	.303**	.321**	.143*	.271**	.120*	.082	.261**	.379**	.294**	.235**	.388**	.411**	-.006
V4	.096	.117*	.275**	.267**	.268**	.199**	.070	.059	.050	.026	.144*	.164**	.111	.045	.160**	.204**	.237**
V5	.201**	.175**	.298**	.275**	.296**	.368**	.234**	.340**	.096	.181**	.217**	.442**	.306**	.246**	.338**	.366**	.154**
V6	.262**	.081	.181**	.463**	.290**	.288**	.160**	.182**	.022	.089	.146*	.341**	.165**	.260**	.339**	.364**	.239**
V7	.150**	.164**	.195**	.269**	.233**	.248**	.030	.116*	.141*	.149*	.126*	.179**	.250**	.236**	.195**	.201**	.166**
V8	.174**	.032	.081	.180*	.256*	.315**	.118*	.068	.016	.165**	.138*	.141*	.158**	.101	.197**	.060	.024
V9	.263**	.113	.195**	.348**	.274**	.254**	.096	.215**	.243**	.048	.147*	.218**	.270**	.217**	.341**	.313**	.098
V10	.259**	.096	.204**	.295**	.281**	.315**	.192**	.178**	.199**	.028	.153*	.364**	.329**	.264**	.292**	.300**	.004
V11	.158*	.072	.217**	.248**	.284**	.170*	.125	.107	.128	.110	.237**	.229**	.195**	.148*	.184**	.192*	-.037
N1	.207*	.263**	.216*	.265**	.256**	.217**	.062	.266**	.060	.139	.100	.239**	.144	.137	.330**	.300**	.181**
N2	.271**	.208*	.226**	.268**	.162*	.205**	.038	.081	.090	.190*	.157*	.345**	.245**	.210*	.278**	.292**	.080
N3	.002	.105	.276**	.120	.036	.112	-.047	.047	.138	.060	.256**	.258**	.216*	.129	.307**	.266**	.110
N4	.085	.178*	.167*	.229**	.112	.150*	-.065	.182*	.102	.117	.136	.270**	.211**	.120	.269**	.393**	.202**
N5	.157*	.223**	.255**	.336**	.259**	.347**	.248**	.325**	.133	.233**	.348**	.370**	.304**	.219**	.417**	.391**	.141
N6	.217**	.231**	.310**	.395**	.398**	.318**	.289**	.278**	.193**	.222**	.347**	.487**	.274**	.239**	.443**	.456**	.172*
N7	.257**	.253**	.196**	.392**	.237**	.268**	.195**	.193**	.177*	.058	.114	.441**	.169*	.172*	.340**	.399**	.252**
N8	.218**	.084	.194**	.416**	.230**	.163*	.208**	.138*	.126	.118	.198**	.305**	.149*	.106	.401**	.356**	.199**

*p<.05, p**<.01

(ο πίνακας συνεχίζεται)

	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	V10	V11	N1	N2	N3	N4	N5	N6	N7	N8
V3	1																
V4	.201**	1															
V5	.548**	.224**	1														
V6	.537**	.266**	.537**	1													
V7	.414**	.151*	.393**	.374**	1												
V8	.289**	.158*	.368**	.387**	.161*	1											
V9	.345**	.144*	.448**	.476**	.377**	.326**	1										
V10	.442**	.147*	.511**	.422**	.241**	.209**	.509**	1									
V11	.365**	.169*	.270**	.276**	.321**	.243**	.379**	.405**	1								
N1	.437**	.131	.266**	.253**	.375**	.113	.205*	.490**	.204*	1							
N2	.435**	.167*	.302**	.264**	.277**	.158	.291**	.328**	.179*	.782**	1						
N3	.410**	.086	.234**	.187*	.252**	.211*	.248**	.294**	.199*	.763**	.781**	1					
N4	.395**	.156*	.319**	.280**	.302**	.089	.399**	.272**	.263**	.638**	.743**	.737**	1				
N5	.377**	.158*	.567**	.534**	.251**	.251**	.452**	.430**	.295**	.533**	.629**	.444**	.531**	1			
N6	.455**	.150	.571**	.540**	.352**	.233**	.405**	.421**	.380**	.487**	.588**	.436**	.602**	.948**	1		
N7	.423**	.326**	.461**	.482**	.240**	.129	.403**	.392**	.316**	.645**	.635**	.563**	.594**	.725**	.759**	1	
N8	.360**	.268**	.436**	.392**	.252**	.234**	.380**	.253**	.278**	.608**	.571**	.551**	..545**	.742**	.731**	.658**	1

*p<.05, p**<.01

Πίνακας ΣΤ.9

Συγκρίσεις μεταξύ των Επιδόσεων των Υποκειμένων των Τριών Διαφορετικών Τάξεων σχετικά με την Ικανότητα Αναλογικού Συλλογισμού

Εξαρτημένη μεταβλητή	Σχολική τάξη (Χ)	Σχολική τάξη (Ψ)	Post-hoc significance
Αναλογικός συλλογισμός	Ε΄ δημ.	ΣΤ΄ δημ.	.000
		Α΄ γυμ.	.000
	ΣΤ΄ δημ.	Ε΄ δημ.	.000
		Α΄ γυμ.	.000
	Α΄ γυμ.	Ε΄ δημ.	.000
		ΣΤ΄ δημ.	.000

Πίνακας ΣΤ.10

Συγκρίσεις μεταξύ των Επιδόσεων των Υποκειμένων των Τεσσάρων Ομάδων Αλγεβρικής Σκέψης σχετικά με την Ικανότητα Αναλογικού Συλλογισμού

Εξαρτημένη μεταβλητή	Ομάδας (Χ)	Ομάδα (Ψ)	Post-hoc significance
Αναλογικός συλλογισμός	Ομάδα 1	Ομάδα 2	.000
		Ομάδα 3	.000
		Ομάδα 4	.000
	Ομάδα 2	Ομάδα 1	.000
		Ομάδα 3	.000
		Ομάδα 4	.000
	Ομάδα 3	Ομάδα 1	.000
		Ομάδα 2	.000
		Ομάδα 4	.000