



**Πανεπιστήμιο
Κύπρου**

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ

**Η ΧΩΡΙΚΗ ΑΝΤΙΛΗΨΗ ΚΑΙ Η ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ
ΣΥΛΛΗΨΗ ΤΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΗΛΙΚΙΑΣ 10 – 13 ΕΤΩΝ**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΠΑΝΑΓΙΩΤΑ ΚΑΛΟΓΗΡΟΥ

2014



**Πανεπιστήμιο
Κύπρου**

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ

**Η ΧΩΡΙΚΗ ΑΝΤΙΛΗΨΗ ΚΑΙ Η ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ
ΣΥΛΛΗΨΗ ΤΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΗΛΙΚΙΑΣ 10 – 13 ΕΤΩΝ**

ΠΑΝΑΓΙΩΤΑ ΚΑΛΟΓΗΡΟΥ

**Διατριβή η οποία υποβλήθηκε προς απόκτηση διδακτορικού
τίτλου σπουδών στο Πανεπιστήμιο Κύπρου**

Απρίλιος, 2014

ΠΑΝΑΓΙΩΤΑ ΚΑΛΟΓΗΡΟΥ

ΣΕΛΙΔΑ ΕΓΚΥΡΟΤΗΤΑΣ

Υποψήφιος Διδάκτορας: Παναγιώτα Καλογήρου

Τίτλος Διατριβής: Η Χωρική Αντίληψη και η Εννοιολογική Σύλληψη του Γεωμετρικού Σχήματος, των Μαθητών Ηλικίας 10 – 13 ετών.

*Η παρούσα Διδακτορική Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο σπουδών για απόκτηση Διδακτορικού Διπλώματος στο **Τμήμα Επιστημών της Αγωγής** και εγκρίθηκε στις 25 Απριλίου από τα μέλη της **Εξεταστικής Επιτροπής**.*

Εξεταστική Επιτροπή:

Ερευνητικός Σύμβουλος: _____
Αθανάσιος Γαγάτσης, Καθηγητής, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Μέλος Επιτροπής: _____
Δήμητρα Πίττα-Πανταζή, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Μέλος Επιτροπής: _____
Κωνσταντίνος Χρίστου, Καθηγητής, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Μέλος Επιτροπής: _____
Μάριος Αβρααμίδης, Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Ψυχολογίας, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Μέλος Επιτροπής: _____
Αρετή Παναούρα, Επίκουρη Καθηγήτρια, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Frederick

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥ ΔΙΔΑΚΤΟΡΑ

Η παρούσα διατριβή υποβάλλεται προς συμπλήρωση των απαιτήσεων για απονομή Διδακτορικού Τίτλου του Πανεπιστημίου Κύπρου. Είναι προϊόν πρωτότυπης εργασίας αποκλειστικά δικής μου, εκτός των περιπτώσεων που ρητώς αναφέρονται μέσω βιβλιογραφικών αναφορών, σημειώσεων ή και άλλων δηλώσεων.

Παναγιώτα Καλογήρου

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η χωρική αντίληψη έχει απασχολήσει πολλούς ερευνητές από τότε που θεμελιώθηκε ως μια ξεχωριστή διάσταση μέσα από τις παραγοντικές αναλύσεις που χρονολογούνται από τη δεκαετία του 1920 (Goldberg & Meredith, 1974). Σκοπός της συγκεκριμένης έρευνας είναι η μελέτη της ανάπτυξης της χωρικής αντίληψης σε σχέση με την εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος από τους μαθητές. Πιο συγκεκριμένα, τα ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας βασίζονται στους ακόλουθους άξονες διερεύνησης:

1. Η δομή της χωρικής αντίληψης των μαθητών της Ε΄ και Στ΄ τάξης του δημοτικού, Α΄ και Β΄ τάξης του γυμνασίου καθώς και της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος.
2. Η σχέση της χωρικής αντίληψης και της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος των μαθητών.
3. Η σύγκριση της χωρικής αντίληψης και της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος των μαθητών δημοτικής και μέσης εκπαίδευσης.

Η συλλογή των δεδομένων έγινε σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές. Τα υποκείμενα της πρώτης μέτρησης ήταν 1029 μαθητές του δημοτικού σχολείου και 591 μαθητές του γυμνασίου. Ενώ στη δεύτερη μέτρηση συμμετείχαν 992 μαθητές του δημοτικού και 553 μαθητές του γυμνασίου. Για το σκοπό της παρούσας εργασίας κατασκευάστηκαν δύο δοκίμια: ένα δοκίμιο χωρικής αντίληψης και ένα δοκίμιο εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Τα δύο δοκίμια κατασκευάστηκαν μετά από εκτεταμένη μελέτη της σχετικής βιβλιογραφίας της μαθηματικής εκπαίδευσης και της γνωστικής ψυχολογίας, σχετικά με τη χωρική αντίληψη και την εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η χωρική αντίληψη είναι μια μονοδιάστατη οντότητα, η οποία παραμένει αναλλοίωτη στις διαφορετικές χρονικές στιγμές και για τα δύο διαφορετικά ηλικιακά επίπεδα της έρευνας (δημοτικό και γυμνάσιο). Από την άλλη η εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος επηρεάζεται από την αντιληπτική, λειτουργική και λεκτική σύλληψη των γεωμετρικών σχημάτων από τους μαθητές. Η δομή και της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος, παραμένει αναλλοίωτη στις δύο διαφορετικές μετρήσεις και για τα δύο ηλικιακά επίπεδα (δημοτικό και γυμνάσιο).

Η παλινδρομική ανάλυση των δεδομένων έδειξε ότι η χωρική αντίληψη αποτελεί σημαντικό παράγοντα πρόβλεψης της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού

σχήματος. Συγκεκριμένα, η περαιτέρω ανάλυση της σχέσης, έδειξε ότι η χωρική αντίληψη μαζί με την αντιληπτική σύλληψη, δημιουργούν ένα νέο παράγοντα, τον παράγοντα «Ειδική Χωρική Αντίληψη», ο οποίος προβλέπει την επίδοση των μαθητών στη λειτουργική και λεκτική σύλληψη.

Αναφορικά με τη σύγκριση μεταξύ των μαθητών του δημοτικού και του γυμνασίου στην επίδοσή τους στη χωρική αντίληψη και την εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος, φάνηκε ότι καθώς αυξάνεται η ηλικία, αυξάνεται και η επίδοσή τους. Επιπλέον, μέσα από την ανάλυση ομοιότητας αποδείχτηκε ότι όλοι οι μαθητές αντιμετωπίζουν τα έργα χωρικής αντίληψης και εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος, με τον ίδιο τρόπο.

ABSTRACT

Spatial ability has been the focus of much research ever since it was documented as a distinct dimension by factor analytic studies dating from the 1920s (Goldberg & Meredith, 1974). The main aim of the present study was to investigate the development of spatial ability in relation to students' geometrical figure apprehension, according to Duval (1995, 1999). More specifically, the research questions are based on the following four main topics:

1. The structure of students' (age 10-13 years old) spatial ability and geometrical figure apprehension.
2. The relationship between students' spatial and geometrical abilities.
3. Comparing the spatial ability and geometrical figure apprehension of primary and secondary school students.

The collection of data derived from two measurements at distinct points in a period of time. The participants of the first measure were 1029 primary school students and 591 secondary school students while in the second measure the participants were 992 primary school students and 553 secondary school students. Data was collected through two tests which were constructed for the needs of the present study: a spatial ability test and a geometrical figure apprehensions test. The tests have been developed after an extensive review of the relevant literature in mathematics education and cognitive psychology in relation to the spatial ability and geometrical figure apprehension.

The results revealed that spatial ability is a unitary construct which remains invariant across the two different time periods and for the two different age groups (primary and secondary school students). On the other hand, geometrical figure apprehension influences students' perceptual, discursive and operative apprehension of geometrical figures, but also its structure remains invariant across time and for both age groups.

Regression analysis results suggest that students' spatial ability constitutes of a strong predictor of their geometrical figure apprehension. Particularly, the analysis carried out showed that spatial ability and perceptual apprehension generate a new factor, called "Spatial Perception", which can predict operative and discursive apprehension.

Regarding the comparison between primary and secondary school students on spatial ability and geometrical figure apprehension, it seemed that as students' age increased, their performance increased too. Moreover, the similarity analysis provided

evidence that students of all age groups generally confronted spatial ability tasks and geometrical figure apprehension tasks in the same way.

ΠΑΝΑΓΙΩΤΑ ΚΑΜΟΓΗΡΟΥ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η συγγραφή μιας διδακτορικής διατριβής αποτελεί μια σκληρή αλλά συγχρόνως εποικοδομητική εμπειρία. Φθάνοντας στο τέλος της συγγραφής της παρούσας διατριβής συνειδητοποίησα ότι αποτέλεσε τον καρπό προσωπικού αγώνα, αλλά συγχρόνως και συνδρομής και υποστήριξης πολλών ανθρώπων, στους οποίους θέλω να εκφράσω την ειλικρινή μου ευγνωμοσύνη.

Λίγες λέξεις σε μια σελίδα είναι αδύνατο να αποτιμήσουν τη συνεισφορά όλων. Σε όλους όσους αναφέρομαι παρακάτω αλλά και σε όλους εκείνους που είναι αδύνατο να αναφερθώ ονομαστικά, να γνωρίζουν ότι τους ευχαριστώ θερμά για την υποστήριξή τους. Έτσι, πρώτα από όλους, θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντά μου, καθηγητή Αθανάσιο Γαγάτση, ο οποίος μου έδωσε την ευκαιρία να εκπονήσω την παρούσα διατριβή. Το άρτιο θεωρητικό του υπόβαθρο και η ερευνητική του εμπειρία συνέβαλαν με τρόπο ουσιαστικό στην ολοκλήρωση αυτής της εργασίας. Εκφράζω τις θερμές μου ευχαριστίες για την αμέριστη συμπαράσταση και εμπιστοσύνη που έδειξε στο πρόσωπό μου.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά το Μάριο Πιτάλη, Ειδικό Εκπαιδευτικό Προσωπικό στο Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, ο οποίος με ιδιαίτερη προθυμία με βοήθησε στο στάδιο της επεξεργασίας και ανάλυσης των αποτελεσμάτων της έρευνας. Ιδιαίτερες ευχαριστίες θα ήθελα να εκφράσω σε όλα τα μέλη της εξεταστικής επιτροπής για την τιμή που μου έκαναν να εξετάσουν την διατριβή μου και ιδιαίτερα τον καθηγητή Κωνσταντίνο Χρίστου. Οι εύστοχες παρατηρήσεις τους συνέβαλαν στη διαμόρφωση του τελικού κειμένου της διατριβής.

Ευχαριστώ επίσης, την υποψήφια διδακτορικό Άντρη Πετρίδου, καθώς και τους διευθυντές και εκπαιδευτικούς των σχολείων, που με προθυμία παραχώρησαν μέρος του διδακτικού τους χρόνου για τη χορήγηση των δοκιμίων στους μαθητές τους. Εκφράζω τις θερμές μου ευχαριστίες στον καθένα ξεχωριστά.

Πάνω από όλα όμως θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου που είναι πάντοτε κοντά μου σε όλη τη διάρκεια της ζωής μου και μου παρέχει άπλετη αγάπη, κατανόηση και ουσιαστική συμπαράσταση σε οτιδήποτε και αν επιχειρώ. Η συνεισφορά τους έχει άπειρες διαστάσεις. Παρόλα αυτά θα προσπαθήσω λέγοντας ένα απέραντο ευχαριστώ στους γονείς μου Γεώργιο και Μαρία, για τις αξίες που μου καλλιέργησαν και μου ανέπτυξαν την ανάγκη για την συνεχή αναζήτηση της γνώσης. Ποτέ δεν έπαψαν να πιστεύουν σε εμένα και δεν σταμάτησαν ποτέ να μου θυμίζουν ότι το μόνο που μπορεί να σταματήσει έναν άνθρωπο που προσπαθεί, είναι ο ίδιος του ο εαυτός. Θερμές ευχαριστίες

εκφράζω και στα τρία αδέρφια μου, που πάντα με στηρίζουν με το δικό τους τρόπο. Βέβαια, η παρούσα διατριβή δεν θα ήταν εφικτή χωρίς την απεριόριστη αγάπη, ενθάρρυνση και εμπιστοσύνη, την πνευματική και ψυχολογική υποστήριξη και το μοναδικό χαρακτήρα του συζύγου μου, Δημήτρη.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ σε όλους!

Στην οικογένεια μου
και το Δημήτρη

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

	Σελίδα
ΠΕΡΙΛΗΨΗ	iii
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ	xiv
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ	xvi
ΚΕΦΑΛΑΙΟ1: ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ	1
Εισαγωγή	1
Το Πρόβλημα και ο Σκοπός της Εργασίας	2
Σκοπός της Εργασίας	4
Ερευνητικά Ερωτήματα	4
Σημασία και Πρωτοτυπία της Έρευνας	5
Περιορισμοί της Έρευνας	6
Εννοιολογικοί Ορισμοί	7
Χωρική Αντίληψη	7
Εννοιολογική Σύλληψη Γεωμετρικού Σχήματος	8
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ	9
Εισαγωγή	9
Προβλήματα στη Βιβλιογραφία της Χωρικής Αντίληψης	10
Ορισμοί για τη Χωρική Αντίληψη	11
Δομή της Χωρικής Αντίληψης	14
Οπτικοποίηση στο Χώρο (spatial visualization)	19
Προσανατολισμός στο Χώρο	22
Τεστ Χωρικής Αντίληψης	24
	x

Κατηγοριοποίηση των Τεστ στους Παράγοντες της Χωρικής Αντίληψης	27
Η Χωρική Αντίληψη ως Βασικό Συστατικό της Νοημοσύνης	30
Ανάπτυξη Χωρικής Αντίληψης	32
Παράγοντες που Επηρεάζουν την Ανάπτυξη της Χωρικής Αντίληψης	34
Χωρική Αντίληψη και Μαθηματικά	39
Η Χωρική Αντίληψη ως Πεδίο Έρευνας	41
Γεωμετρία και Εννοιολογική Σύλληψη Γεωμετρικού Σχήματος	41
Θεωρίες Γύρω από τη Γεωμετρία	42
Η Θεωρία των van Hiele	42
Η Θεωρία των Houdement και Kuzniak	47
Η Θεωρία του Duval	48
Δυσκολίες στο Γεωμετρικό Σχήμα	51
Εννοιολογική Σύλληψη του Γεωμετρικού Σχήματος και Χωρική Αντίληψη	54
Σύνοψη	56
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ	59
Εισαγωγή	59
Υποκείμενα	59
Διαδικασία Διεξαγωγής της Έρευνας	60
Εργαλεία Μέτρησης	62
Δοκίμιο Χωρικής Αντίληψης	63
Αναλυτική Περιγραφή των Έργων του Δοκιμίου Χωρικής Αντίληψης	64
Δοκίμιο Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος	69
Αναλυτική Περιγραφή των Έργων του Δοκιμίου Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος	70
Αξιοπιστία των δύο Οργάνων Μέτρησης	74

Επιβεβαίωση Εννοιολογικού Σχεδιασμού των δύο Οργάνων Μέτρησης	75
Επιβεβαίωση Εννοιολογικού Σχεδιασμού Οργάνου Μέτρησης της Χωρικής Αντίληψης	75
Επιβεβαίωση Εννοιολογικού Σχεδιασμού Οργάνου Μέτρησης της Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος	79
Βαθμολόγηση των Έργων	81
Μέθοδοι Ανάλυσης των Δεδομένων	81
Σύνοψη	83
ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ	84
Εισαγωγή	84
Η Δομή των Ικανοτήτων των Μαθητών Αναφορικά με τη Χωρική Αντίληψη	85
Αποτελέσματα Επιβεβαιωτικής Παραγοντικής Ανάλυσης	86
Έλεγχος Αμεταβλητότητας Μοντέλου της Χωρικής Αντίληψης	91
Ανάπτυξη Μοντέλου στο Σύνολο των Μαθητών για τη Δομή των Ικανοτήτων Αναφορικά με την Εννοιολογική Σύλληψη του Γεωμετρικού Σχήματος	95
Έλεγχος Αμεταβλητότητας Μοντέλου της Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος	101
Δομικό Μοντέλο Χωρικής Αντίληψης και της Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος των Μαθητών	105
Επίδοση των Μαθητών στη Χωρική Αντίληψη και στην Εννοιολογική Σύλληψη του Γεωμετρικού Σχήματος	108
Κατηγορίες Μαθητών στη Χωρική Αντίληψη και στην Εννοιολογική Σύλληψη του Γεωμετρικού Σχήματος	114
Σχέση μεταξύ της Χωρικής Αντίληψης και της Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος στις Τρεις Κατηγορίες Μαθητών	118

Σχέση Χωρικής Αντίληψης και Παραγόντων Εννοιολογικής Σύλληψης	120
Γεωμετρικού Σχήματος	
Σχέσεις Ομοιότητας Ανάμεσα στη Χωρική Αντίληψη και τους Παράγοντες της	125
Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος	
ΚΕΦΑΛΑΙΟ V: ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ	128
Εισαγωγή	128
Δομή της Χωρικής Αντίληψης και της Εννοιολογικής Σύλληψης του	129
Γεωμετρικού Σχήματος	
Δομή της Χωρικής Αντίληψης	129
Δομή της Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος	130
Σχέση μεταξύ Χωρικής Αντίληψης και Εννοιολογικής Σύλληψης του	132
Γεωμετρικού Σχήματος	
Σχέσεις Ομοιότητας Ανάμεσα στη Χωρική Αντίληψη και τους Παράγοντες	135
της Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος	
Επίδοση των Μαθητών στη Χωρική Αντίληψη και στην Εννοιολογική	137
Σύλληψη του Γεωμετρικού Σχήματος	
ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	141
Εισαγωγή	141
Γενικά Συμπεράσματα και Σχέση Αποτελεσμάτων με Άλλες Θεωρίες	142
Εκπαιδευτικές Εφαρμογές	146
Εισηγήσεις για Μελλοντικές Έρευνες	147
ΑΝΑΦΟΡΕΣ	150
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	170

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

	Σελίδα
3.1 Μοντέλο ελέγχου εννοιολογικού σχεδιασμού του τεστ χωρικής αντίληψης.	77
3.2 Μοντέλο ελέγχου εννοιολογικού σχεδιασμού του τεστ χωρικής αντίληψης ενός παράγοντα..	78
3.3 Μοντέλο ελέγχου εννοιολογικού σχεδιασμού του τεστ εννοιολογικής σύλληψης γεωμετρικού σχήματος.	80
4.1 Προτεινόμενο δομικό μοντέλο της χωρικής αντίληψης.	89
4.2 Το δομικό μοντέλο της χωρικής αντίληψης για τους μαθητές της πρώτης μέτρησης.	90
4.3 Το δομικό μοντέλο της χωρικής αντίληψης για τους μαθητές της δεύτερης μέτρησης.	93
4.4 Το δομικό μοντέλο της χωρικής αντίληψης για τους μαθητές του δημοτικού και του γυμνασίου της πρώτης μέτρησης.	94
4.5 Προτεινόμενο μοντέλο της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος.	96
4.6 Το μοντέλο της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος των μαθητών της πρώτης μέτρησης.	100
4.7 Το μοντέλο της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος για τους μαθητές της δεύτερης μέτρησης.	102
4.8 Το μοντέλο της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος για τους μαθητές του δημοτικού και του γυμνασίου της πρώτης μέτρησης.	104
4.9 Προτεινόμενο δομικό μοντέλο για τη σχέση ανάμεσα στη χωρική αντίληψη και την εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος.	106
4.10 Μοντέλο για τη σχέση ανάμεσα στη χωρική αντίληψη και την εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος με τα δεδομένα της πρώτης μέτρησης.	107

4.11	Μοντέλο για τη σχέση ανάμεσα στη χωρική αντίληψη και την εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος των τριών κατηγοριών.	119
4.12	Προτεινόμενο μοντέλο για τη σχέση ανάμεσα στη χωρική αντίληψη και των παραγόντων της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος.	121
4.13	Προτεινόμενο μοντέλο για τη σχέση ανάμεσα στη χωρική αντίληψη και των παραγόντων της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος.	122
4.14	Μοντέλο για τη σχέση ανάμεσα στη χωρική αντίληψη και των παραγόντων της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος των μαθητών της πρώτης μέτρησης.	123
4.15	Μοντέλο για τη σχέση ανάμεσα στη χωρική αντίληψη και των παραγόντων της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος των μαθητών της δεύτερης μέτρησης.	124
4.16	Διάγραμμα Ομοιότητας για τη Χωρική Αντίληψη και τους Παράγοντες της Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος για τους Μαθητές της Πρώτης και Δεύτερης Μέτρησης, αντίστοιχα.	126
4.17	Διάγραμμα Ομοιότητας για τη Χωρική Αντίληψη και τους Παράγοντες της Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος για τους Μαθητές του Δημοτικού της Πρώτης και της Δεύτερης Μέτρησης, αντίστοιχα.	127
4.18	Διάγραμμα Ομοιότητας για τη Χωρική Αντίληψη και τους Παράγοντες της Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος για τους Μαθητές του Γυμνασίου της Πρώτης και της Δεύτερης Μέτρησης, αντίστοιχα.	127

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

	Σελίδα	
2.1	Ερευνητές, Τεστ και Παράγοντες Χωρικής Αντίληψης	29
3.1	Υποκείμενα της Έρευνας	60
3.2	Παραδείγματα Έργων του Δοκιμίου Χωρικής Αντίληψης	67
3.3	Παραδείγματα Έργων του Δοκιμίου Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος	72
4.1	Συσχετίσεις Μεταξύ της Επίδοσης των Υποκειμένων στους Παράγοντες της Χωρικής Αντίληψης	87
4.2	Δείκτες Προσαρμογής Μοντέλων σε Διαφορετικούς Πληθυσμούς	92
4.3	Συσχετίσεις Μεταξύ της Επίδοσης των Υποκειμένων στα Έργα του Τεστ Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος	97
4.4	Οι Τιμές των Δεικτών Προσαρμογής των Μοντέλων για τη Δομή της Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος των Μαθητών της Πρώτης Μέτρησης	99
4.5	Δείκτες Προσαρμογής Μοντέλων σε Διαφορετικούς Πληθυσμούς	101
4.6	Περιγραφικά Αποτελέσματα στον Παράγοντα της Χωρικής Αντίληψης και τους Παράγοντες της Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος της Πρώτης Μέτρησης	109
4.7	Μέσοι Όροι και Τυπικές Αποκλίσεις των Μαθητών των Τεσσάρων Τάξεων στον Παράγοντα της Χωρικής Αντίληψης και τους Παράγοντες της Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος της Πρώτης Μέτρησης	110
4.8	Αποτελέσματα Πολλαπλής Ανάλυσης Διασποράς Πρώτης Μέτρησης	111
4.9	Σύγκριση της Επίδοσης των Μαθητών των Τεσσάρων Τάξεων στους Παράγοντες της Εργασίας	112
4.10	Ποσοστό Μαθητών στις Τρεις Κατηγορίες Υποκειμένων	115
4.11	Μέσοι Όροι και Τυπικές Αποκλίσεις των Τριών Κατηγοριών Υποκειμένων στη Χωρική Αντίληψη και στην Εννοιολογική Σύλληψη του Γεωμετρικού Σχήματος	116

4.12	Μέσοι Όροι και Τυπικές Αποκλίσεις των Τριών Κατηγοριών Υποκειμένων στους Παράγοντες της Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος	117
4.13	Χαρακτηριστικά των Τριών Κατηγοριών Υποκειμένων	118

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Εισαγωγή

Ο άνθρωπος ζει και κινείται σε έναν κόσμο μέσα στον οποίο οτιδήποτε υπάρχει έχει κάποια χωρική θέση. Για να επιζήσει ο άνθρωπος, θα πρέπει να οργανώσει τη δράση του τοποθετώντας τον εαυτό του στον εξωτερικό κόσμο και παρατηρώντας ταυτόχρονα τις σχέσεις που δημιουργούνται ανάμεσα στα αντικείμενα που υπάρχουν στον κόσμο αυτό (Newcombe & Huttenlocher, 2000). Οι Hegarty και Waller (2005), αναφέρουν ότι η χωρική αντίληψη είναι απαραίτητη ικανότητα σε ένα μεγάλο αριθμό καθημερινών δραστηριοτήτων, όπως τη μετακίνηση των επίπλων σε ένα δωμάτιο, την ετοιμασία των αποσκευών και τη μετακίνηση του ατόμου σε μια πόλη.

Παράλληλα, ο Freudenthal (1973) αναφέρει ότι η γεωμετρία είναι ένας χώρος στον οποίο το παιδί ζει, αναπνέει και κινείται και τον οποίο θα πρέπει να τον γνωρίσει, να τον εξερευνήσει και να τον κατακτήσει προκειμένου να ζει και να κινείται καλύτερα σε αυτόν (στους Ryu, Chong & Song, 2007). Η κατανόηση του χώρου, οι σχέσεις και ο οπτικός χειρισμός αντικειμένων στο χώρο αποτελούν σημαντικές συνιστώσες της γεωμετρικής και ευρείας μαθηματικής και επιστημονικής σκέψης (Michaelides, 2003). Ο Bishop (1983) εύστοχα αναφέρει ότι η γεωμετρία είναι τα μαθηματικά του χώρου.

Η χωρική αντίληψη είναι ένα θέμα το οποίο απασχόλησε τόσο ψυχολόγους όσο και ερευνητές της μαθηματικής παιδείας. Οι πρώτες μελέτες στον τομέα της χωρικής αντίληψης χρονολογούνται γύρω στη δεκαετία του '40 και τη δεκαετία του '50, στη βιβλιογραφία της μαθηματικής παιδείας. Εντούτοις, η έννοια προκάλούσε ενδιαφέρον στους ψυχολόγους (Spearman, 1927· Thurstone, 1938· στο Unal, 2005) μία δεκαετία νωρίτερα.

Από τη φύση της η χωρική αντίληψη αποτελεί ένα πολύπλοκο θέμα, με διαφορετικές ερμηνείες από κάθε ερευνητή. Οι αντιλήψεις των ερευνητών συγκρούονται

όχι μόνο στην προσπάθεια αποσαφήνισης του όρου της χωρικής αντίληψης, αλλά και στον καθορισμό του αριθμού των χωρικών ικανοτήτων, στην ονομασία των παραγόντων και στα τεστ που χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση του κάθε παράγοντα.

Σε εκείνες τις αρχικές μελέτες, πάρα πολλοί μαθηματικοί (Barakat, 1951· Wrigley, 1958· στο Unal, 2005) διερεύνησαν τη σχέση μεταξύ των χωρικών ικανοτήτων και των μαθηματικών ικανοτήτων σε διαφορετικό πλαίσιο, όπως η άλγεβρα και η γεωμετρία. Διαπίστωσαν ότι η χωρική αντίληψη συσχετίστηκε περισσότερο με την ικανότητα στη γεωμετρία παρά στην άλγεβρα (στο Bishop, 1983, σελ.181· στο Unal, 2005). Από τότε, η χωρική αντίληψη θεωρείται πολύ σημαντική για την απόκτηση υψηλών μαθηματικών ικανοτήτων (Battista, 1994, 1998, 1999· Battista & Clements, 1990, 1991, 1996, 2002· Battista, Wheatley & Talsma, 1982, 1989· Bishop, 1983· Clements & Battista, 1992· DelGrande, 1987· Guay & McDaniel, 1977· Wheatley, 1990, 1992· στο Unal, 2005). Για αυτό το National Council of Mathematics (2000) έχει θέσει ως κεντρικό στόχο στα μαθηματικά του σχολείου, την ανάπτυξη της χωρικής αντίληψης.

Το Πρόβλημα και ο Σκοπός της Εργασίας

Η χωρική αντίληψη έχει απασχολήσει πολλούς ερευνητές από τότε που θεμελιώθηκε ως μια ξεχωριστή διάσταση μέσα από τις παραγοντικές αναλύσεις που χρονολογούνται από τη δεκαετία του 1920 (Goldberg & Meredith, 1974). Γενικά η χωρική αντίληψη περιλαμβάνει την επίλυση οπτικών προβλημάτων ή έργων που απαιτούν από τους λύτες να υπολογίσουν, να προβλέψουν ή να κρίνουν τις σχέσεις ανάμεσα σε σχήματα διαφορετικών πλαισίων (Elliot & Smith, 1983). Συγκεκριμένα, η χωρική αντίληψη σχετίζεται με τις ικανότητες των ατόμων να αναζητούν σε ένα οπτικό πεδίο με σκοπό να εντοπίσουν μορφές, σχήματα και θέσεις των αντικειμένων, προκειμένου να δημιουργήσουν νοητικές παραστάσεις αυτών των μορφών, σχημάτων και θέσεων, ώστε να μπορούν να χειριστούν αυτές τις αναπαραστάσεις νοερά (Carroll, 1993).

Αν και έχουν χρησιμοποιηθεί αρκετοί ορισμοί για να περιγράψουν την ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου από ψυχολόγους και ερευνητές στον τομέα της μαθηματικής παιδείας (Lean & Clements, 1981· Linn & Petersen, 1985· Lohman, 1996·

Gorgorió, 1998), δεν υπάρχει ένας ενιαίος κοινά αποδεκτός λειτουργικός ορισμός. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η ορολογία που χρησιμοποιείται από τους ερευνητές διαφέρει αλλά και στο γεγονός ότι υπάρχουν διαφωνίες ως προς τη δομή της χωρικής αντίληψης η οποία προκύπτει μέσα από μελέτες ανάλυσης παραγόντων (Burton & Fogarty, 2003· Colom, Contreras, Botella & Santacreu, 2002· Kimura, 1999· Linn & Petersen, 1985· Lohman, 1993· McGee, 1979· Paivio, 1971). Η παρούσα ερευνητική εργασία επιβεβαίωσε, με βάση τη βιβλιογραφία που υπάρχει μέχρι τώρα, ένα θεωρητικό μοντέλο για τη χωρική αντίληψη.

Η ικανότητα οπτικοποίησης των εννοιών του χώρου αποτελεί θεμελιώδη στοιχείο του γεωμετρικού συλλογισμού και της μαθηματικής σκέψης ευρύτερα (Bishop, 1980, 1989· Goldenberg, Cuoco, & Mark, 1998). Από την άλλη, η γεωμετρία θεωρείται από τους μαθητές ως ένα από τα δυσκολότερα θέματα των μαθηματικών. Είναι σημαντικό ότι η αναγνώριση επίπεδων σχημάτων από τους μαθητές, επηρεάζεται από μεγάλο αριθμό παραγόντων, συμπεριλαμβανομένου και της οπτικής αντίληψης. Σύμφωνα με τους English και Warren (1995), ο τρόπος που οπτικοποιεί το άτομο ένα σχήμα, είναι ένας από τους σημαντικότερους παράγοντες που επηρεάζει την ανάπτυξη της χωρικής αντίληψης. Ωστόσο, πολλοί άνθρωποι αντιμετωπίζουν δυσκολίες με αυτή τη διαδικασία.

Πολλοί μαθηματικοί έχουν μελετήσει το γεωμετρικό συλλογισμό των μαθητών, στηριζόμενοι σε διαφορετικά θεωρητικά πλαίσια. Για παράδειγμα, το ζεύγος van Hiele (1986) αναφέρονται σε επίπεδα γεωμετρικής σκέψης, ο Fischbein (1993) εισήγαγε τη θεωρία των εννοιολογικών σχημάτων και ο Duval (1998) εισηγήθηκε τη γνωστική ανάλυση της γεωμετρικής σκέψης. Συγκεκριμένα, ο Duval (1995, 1999) διέκρινε τέσσερα είδη σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος: την αντιληπτική, τη σειριακή, τη λεκτική και τη λειτουργική σύλληψη.

Πρόσφατα οι Deliyianni, Elia, Gagatsis, Monoyiou και Panaoura (2009) έχουν επιβεβαιώσει ένα μοντέλο τρίτης τάξης σχετικά με το ρόλο της αντιληπτικής, λειτουργικής και λεκτικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Ωστόσο η σχέση μεταξύ της χωρικής αντίληψης και των ειδών εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος, όπως προτείνεται από τον Duval (1995, 1999), δεν έχει επαληθευτεί εμπειρικά ακόμη. Έτσι, κύριος στόχος της έρευνας αυτής είναι η διερεύνηση της χωρικής αντίληψης σε σχέση με την εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος από τους μαθητές.

Σκοπός Εργασίας

Σκοπός της συγκεκριμένης έρευνας είναι η μελέτη της χωρικής αντίληψης σε σχέση με την εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος από τους μαθητές. Συγκεκριμένα, η έρευνα στοχεύει να ερευνήσει: (α) τη δομή της χωρικής αντίληψης των μαθητών της Ε΄ και Στ΄ τάξης του δημοτικού, Α΄ και Β΄ τάξης του γυμνασίου καθώς και της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος, (β) τη σχέση της χωρικής αντίληψης και της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος των μαθητών, (γ) τις ομοιότητες και τις διαφορές μεταξύ των μαθητών του δημοτικού και του γυμνασίου ως προς τη συμπεριφορά τους στη χωρική αντίληψη και στην εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος, και (δ) να επισημάνει σημαντικές εισηγήσεις για τα αναλυτικά προγράμματα, τις διδακτικές μεθόδους και μέσα, όσον αφορά στη χωρική αντίληψη και στην εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος, στις τελευταίες τάξεις του δημοτικού και τις πρώτες τάξεις του γυμνασίου.

Ερευνητικά Ερωτήματα

Τα κύρια ερευνητικά ερωτήματα της εργασίας όπως απορρέουν από το σκοπό της εργασίας είναι:

(α) Ποιοι παράγοντες συνθέτουν τη χωρική αντίληψη των μαθητών της Ε΄ και Στ΄ τάξης του δημοτικού, Α΄ και Β΄ τάξης του Γυμνασίου και ποια είναι η δομή της χωρικής αντίληψης;

(β) Ποια είναι η δομή της εννοιολογικής σύλληψης των μαθητών της Ε΄ και Στ΄ τάξης του δημοτικού Α΄ και Β΄ τάξης του Γυμνασίου;

(γ) Η δομή της χωρικής αντίληψης και της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος είναι σταθερή ή διαφοροποιείται ανάλογα με την ηλικία;

(δ) Ποια η σχέση μεταξύ χωρικής αντίληψης και της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος των μαθητών;

(ε) Ποιοι παράγοντες της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος επηρεάζονται από τη χωρική αντίληψη;

(στ) Ποιες είναι οι διαφορές ανάμεσα στους μαθητές διαφορετικών ηλικιών ως προς τη χωρική τους αντίληψη και την εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος;

Σημασία και Πρωτοτυπία της Εργασίας

Η σημασία της παρούσας εργασίας εστιάζεται στο γεγονός ότι προσπαθεί να μελετήσει τη σχέση της χωρικής αντίληψης των μαθητών σε σχέση με την εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος, που προτείνεται από τον Duval (1995, 1999), πεδίο το οποίο δεν έχει μελετηθεί προηγουμένως. Αρχικά έγινε προσπάθεια, με βάση την υπάρχουσα βιβλιογραφία, να διασαφηνιστούν οι όροι που σχετίζονται με τη χωρική αντίληψη και στη συνέχεια, με βάση την προτεινόμενη δομή από διάφορους ερευνητές (Kimura, 1999· Linn & Petersen, 1985· Lohman, 1993· McGee, 1979· Paivio, 1971), έγινε προσπάθεια για επιβεβαίωση ενός θεωρητικού μοντέλου της χωρικής αντίληψης για παιδιά Ε΄ και Στ΄ τάξης δημοτικού, Α΄ και Β΄ τάξης γυμνασίου. Από τα αποτελέσματα διαφάνηκε ότι το μοντέλο αυτό αποτελείται από ένα και μοναδικό παράγοντα, παρ' όλες τις αντικρουόμενες απόψεις διαφόρων ερευνητών.

Ακολούθως διερευνήθηκε η σχέση της χωρικής αντίληψης και της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος, γιατί αν και έχει επιβεβαιωθεί η σχέση μεταξύ της χωρικής αντίληψης και της επίδοσης στα μαθηματικά (Battista, 1990· McGee, 1979· Sherman, 1979· Smith, 1964), ο ρόλος της χωρικής αντίληψης είναι πολύ σύνθετος στη γεωμετρία (Clements, 1997). Από τα αποτελέσματα φάνηκε ότι η χωρική αντίληψη μπορεί να προβλέψει την επίδοση των μαθητών στην εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος. Ένα από τα πιο σημαντικά αποτελέσματα της έρευνας προέκυψε από την περαιτέρω μελέτη της σχέσης της χωρικής αντίληψης και των επιμέρους παραγόντων της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Συγκεκριμένα, διαφάνηκε ότι εκτός από τη χωρική αντίληψη, απαιτείται και η καλλιέργεια της αντιληπτικής σύλληψης για να υπάρχει επίδραση στους επιμέρους παράγοντες της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος.

Αξιοσημείωτο, όσον αφορά την παρούσα εργασία, αποτελεί το γεγονός ότι η συλλογή των δεδομένων προέκυψε μέσα από δύο διαφορετικές μετρήσεις του ίδιου δείγματος και μας έδωσε σημαντικές πληροφορίες για το ρυθμό αλλαγής τόσο της χωρικής αντίληψης όσο και της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Συγκεκριμένα, φάνηκε ότι τόσο η δομή της χωρικής αντίληψης, όσο και η δομή της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος παραμένουν αναλλοίωτες τόσο στη δεύτερη χορήγηση των δεδομένων, όσο και τα δύο διαφορετικά ηλικιακά επίπεδα που έλαβαν μέρος στην έρευνα (δημοτικό και γυμνάσιο).

Παρόλο που η δομή της χωρικής αντίληψης και της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος παραμένει αναλλοίωτη, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η επίδοση των μαθητών αυξάνεται καθώς αυξάνεται το ηλικιακό τους επίπεδο. Στοιχείο που επιβεβαιώνει την άποψη των Clements και Battista (1992) ότι η επίδοση στα χωρικά έργα βελτιώνεται με το εκπαιδευτικό επίπεδο.

Τα αποτελέσματα της μελέτης αυτής συνέβαλαν στην έρευνα των σχέσεων μεταξύ χωρικής αντίληψης και γεωμετρίας σε διαφορετικές ηλικίες παιδιών και κυρίως για τη δημοτική και μέση εκπαίδευση. Παράλληλα, δόθηκαν απαντήσεις για την επίδραση της χωρικής αντίληψης στη μάθηση των μαθητών και πιο συγκεκριμένα στην εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος.

Περιορισμοί της Έρευνας

Ο σημαντικότερος περιορισμός της παρούσας εργασίας αφορούσε το δείγμα της εργασίας. Λόγω του πεισμένου εκπαιδευτικού προγράμματος των σχολείων δεν υπήρχαν πολλά τμήματα διαθέσιμα για την υλοποίηση της έρευνας. Έτσι μπορούμε να ισχυριστούμε ότι το δείγμα δεν ήταν αντιπροσωπευτικό.

Ένας άλλος περιορισμός της έρευνας, αφορά τα εργαλεία μέτρησης, από τα οποία ενδεχομένως να προκύπτουν σφάλματα στη μέτρηση. Πιο συγκεκριμένα τα έργα που μετρούν τη χωρική αντίληψη και την εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος, είναι συγκεκριμένα και αρκετά σύνθετα, ιδίως για τους μαθητές του δημοτικού. Επίσης, το γεγονός ότι τα δοκίμια που χρησιμοποιήθηκαν ήταν γραπτά, συνεπάγεται ότι τα έργα που

περιλήφθηκαν σε αυτά αναφέρονται μόνο σε ικανότητες που μπορούν να μετρηθούν μέσω γραπτού δοκιμίου. Συγκεκριμένα, οι γεωμετρικές ικανότητες που μετρήθηκαν αναφέρονται σε χειρισμού έργων που παρουσιάζονται με στατικές εικόνες σε ένα φύλλο χαρτιού, όπως δηλαδή είναι οι εικόνες που περιλαμβάνονται στα σχολικά εγχειρίδια. Οι χωρικές ικανότητες που μετρήθηκαν αφορούν χωρικές ικανότητες μικρής κλίμακας, οι οποίες αναφέρονται σε χειρισμό έργων όπου το άτομο μπορεί να δει τις χωρικές σχέσεις των αντικειμένων διαμιάς.

Εννοιολογικοί Ορισμοί

Χωρική Αντίληψη

Αν και έχουν χρησιμοποιηθεί αρκετοί ορισμοί για να περιγράψουν την ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου από ψυχολόγους και ερευνητές στον τομέα της μαθηματικής παιδείας, δεν υπάρχει ένας ενιαίος κοινά αποδεκτός λειτουργικός ορισμός. Στην παρούσα εργασία με τον όρο «χωρική αντίληψη» αναφερόμαστε στην πολυδιάστατη ικανότητα αντίληψης, επεξεργασίας, δημιουργίας και αποθήκευσης νοερών εικόνων (Lohman, 1993).

Η ικανότητα αυτή ορίζεται μέσω παραγόντων όπως η «οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου» (spatial visualization), ο «προσανατολισμός στο χώρο» (spatial orientation) και η «νοερή περιστροφή» (mental rotation). Η οπτικοποίηση του χώρου ορίζεται ως η ικανότητα νοερού χειρισμού δυσδιάστατων ή τρισδιάστατων αντικειμένων ή μέρος των αντικειμένων αυτών. Με τον παράγοντα «προσανατολισμό στο χώρο» εννοούμε τον προσδιορισμό των σχέσεων μεταξύ διαφορετικών αντικειμένων, την αναγνώριση ενός αντικειμένου καθώς κινείται από διαφορετικές οπτικές γωνίες, την παρατήρηση των μοτίβων του χώρου και σύγκριση μεταξύ τους και γενικά στην ικανότητα χειρισμού αλλαγών στον προσανατολισμού του αντικειμένου. Με τον παράγοντα «νοερής περιστροφής» εννοούμε την ικανότητα νοερής περιστροφής ενός αντικειμένου στο χώρο με ταχύτητα και ακρίβεια.

Στην παρούσα εργασία με τον όρο εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος αναφερόμαστε στους τρεις τύπους γνωστικής σύλληψης του Duval (1998), που βρίσκονται στο υπόβαθρο των διαδικασιών γεωμετρικής σκέψης: την αντιληπτική, τη λειτουργική και τη λεκτική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος.

(α) Η Αντιληπτική σύλληψη (perceptual apprehension) σχετίζεται με την αναγνώριση του σχήματος με την πρώτη ματιά. Συνίσταται στην κατανόηση της συνολικής μορφής του σχήματος και στη διάκριση των υποσχημάτων του, με τρόπο όμως που δεν επιτρέπει περαιτέρω επεξεργασία του. Συμπεριλαμβάνει δεξιότητες ονομασίας του σχήματος και αναγνώρισης υποσχημάτων του σχήματος.

(β) Η Λειτουργική σύλληψη (operative apprehension) εξασφαλίζει πρόσβαση στην επίλυση του προβλήματος. Εξαρτάται από τους διάφορους τρόπους τροποποίησης ενός σχήματος, οι οποίες μπορούν να οδηγήσουν σε μετασχηματισμούς που υποβοηθούν την επίλυση του προβλήματος.

- i. Οι οπτικές (optic) τροποποιήσεις επιτρέπουν τη σμίκρυνση ή μεγέθυνση του σχήματος ή το να εμφανίζεται λοξό, σαν να γίνεται χρήση φακών.
- ii. Η αλλαγής θέσης (place way) τροποποιεί τον προσανατολισμό του σχήματος στο επίπεδο της εικόνας
- iii. Οι μερεολογικές τροποποιήσεις (mereologic) αναφέρονται στη διάσπαση του ολόκληρου σχήματος σε διάφορα υποσχήματα, στο συνδυασμό των υποσχημάτων αυτών σε ένα άλλο ενιαίο σχήμα και στην εμφάνιση νέων υποσχημάτων.

(γ) Η Λεκτική σύλληψη (discursive apprehension) συνδέεται με την αδυναμία προσδιορισμού των μαθηματικών σχέσεων σε ένα σχήμα μόνο από την αντιληπτική σύλληψη, αφού απαιτείται και λεκτική περιγραφή του. Στην παρούσα εργασία για τη λεκτική σύλληψη (Discursive apprehension) λήφθηκε υπόψη η άποψη των Harada, Gallou-Dumiel και Nohda (2000), οι οποίοι υποστηρίζουν ότι η υποθετική – επαγωγική απόδειξη προκύπτει από αυτό το είδος σύλληψης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Εισαγωγή

Η χωρική αντίληψη αποτελεί ένα σημαντικό παράγοντα που συνδέεται άμεσα με τη γεωμετρική αντίληψη (Bishop, 1980). Πολυάριθμες μελέτες έχουν πραγματοποιηθεί με κύριο θέμα έρευνάς τους τη χωρική αντίληψη. Από την πολύχρονη μελέτη της ιστορία της έρευνας για τη χωρική αντίληψη, διαφαίνεται έντονα ότι η χωρική αντίληψη είναι ένα σύνολο πολύπλοκων, γνωστικών ικανοτήτων για τα οποία εξακολουθούν να υπάρχουν πολλές ερωτήσεις.

Στο πρώτο υποκεφάλαιο παρουσιάζονται οι τέσσερις κύριες περιοχές στις οποίες παρουσιάζονται διαφωνίες μεταξύ των ερευνητών. Οι περιοχές αυτές είναι ο ορισμός της χωρικής αντίληψης, ο αριθμός των παραγόντων που αποτελούν τη χωρική αντίληψη, η ονομασία αυτών των παραγόντων καθώς και τα τεστ που χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση του κάθε παράγοντα. Οι τέσσερις αυτές περιοχές αποτέλεσαν τη βάση για περαιτέρω ανάλυση και βιβλιογραφική ανασκόπηση.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται η ανάπτυξη της χωρικής αντίληψης. Διεθνείς οργανισμοί όπως το National Council of Teachers of Mathematics (2000) τονίζουν τη σημασία της ανάπτυξης της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου στη μαθηματική εκπαίδευση δίνοντας έμφαση στην αναγκαιότητα ανάπτυξης της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου σε όλους τους τομείς του αναλυτικού προγράμματος. Οι Piaget και Inhelder (1971) δηλώνουν ότι η γνωστική ανάπτυξη του ατόμου καθορίζει τις δυνατότητες του τι θα μπορούσε να επιτύχει. Στο υποκεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται και οι παράγοντες που επηρεάζουν την ανάπτυξη της χωρικής αντίληψης, όπως έχουν προσδιοριστεί από έρευνες στον τομέα της ψυχολογίας. Τέτοιοι παράγοντες είναι η ηλικία, το φύλο και η σχετική με το χώρο εμπειρία (Miller, 1996).

Ακολουθεί η παρουσίαση της σχέσης της χωρικής αντίληψης με τα μαθηματικά, σύμφωνα με έρευνες που έχουν γίνει (π.χ. Battista, 1990· McGee, 1979· Sherman, 1979· Smith, 1964). Οι έρευνες αυτές επισημαίνουν τον κεντρικό ρόλο της χωρικής αντίληψης σε πολλά θέματα των μαθηματικών (Bennett, Seashore, & Wesman, 1974· McNemar, 1964).

Ωστόσο, ο ρόλος της χωρικής αντίληψης είναι δύσκολο να διασαφηνιστεί και ακόμη και στη γεωμετρία πολύ σύνθετος (Clements, 1997). Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν η συσχέτιση της χωρικής αντίληψης με την εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος. Για αυτό και στη συνέχεια παρουσιάζεται ένα θεωρητικό κομμάτι που αφορά τη γεωμετρία. Συγκεκριμένα παρουσιάζονται η θεωρία των van Hiele (1986), η οποία αναφέρεται σε επίπεδα γεωμετρικής σκέψης· η θεωρία των Houdement και Kuzniak (2003), με τα τρία είδη Γεωμετρίας και η θεωρία του Duval (1998), η οποία αναφέρεται στην εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος.

Τέλος, παρουσιάζονται οι δυσκολίες που παρουσιάζουν τα παιδιά ως προς το γεωμετρικό σχήμα, μιας και η γεωμετρία αποτελεί τον πιο δύσκολο κλάδο των μαθηματικών για αρκετά παιδιά (Ben-Haim, Lappan & Houang, 1985· Bishop, 1980· Clements & Battista, 1992· English, 1993). Η ικανότητα αναγνώρισης σχημάτων από τους μαθητές επηρεάζεται από μία πλειάδα παραγόντων, συμπεριλαμβανομένου της οπτικής αντίληψης.

Προβλήματα στη Βιβλιογραφία της Χωρικής Αντίληψης

Μέσα από την πολύχρονη έρευνα για τη χωρική αντίληψη έχουν εντοπιστεί τέσσερις κύριες περιοχές στις οποίες παρουσιάζονται διαφωνίες μεταξύ των ερευνητών (D'Oliveira, 2004· Lohman, 1979a). Αυτές είναι:

1. Ορισμοί της χωρικής αντίληψης. Οι χωρικές ικανότητες και δεξιότητες έχουν οριστεί με διαφορετικούς τρόπους. Κάποιες ικανότητες έχουν παρόμοιες περιγραφές αλλά διαφορετικές ονομασίες (π.χ., νοερή περιστροφή (mental rotation) σύμφωνα με τους Dror, Kosslyn και Waag (1993) και χωρικές σχέσεις (spatial relations) σύμφωνα με το Boer (1991), ενώ παράλληλα ίδιοι όροι έχουν διαφορετικούς ορισμούς [π.χ., οπτικοποίηση του

χώρου (spatial visualization) σύμφωνα με τον ορισμό του Isaac (1995) και σύμφωνα με τον ορισμό του McGee (1979)].

2. Αριθμός παραγόντων. Ο αριθμός των παραγόντων που έχουν εντοπιστεί για τη χωρική αντίληψη διαφέρει αρκετά ανάμεσα στους ερευνητές και κυμαίνεται από 1 παράγοντα (π.χ. Burton και Fogarty, 2003· Colom, Contreras, Botella και Santacreu, 2002) μέχρι και 10 παράγοντες (π.χ. Lohman, 1979).

3. Ονομασία παραγόντων. Η ονομασία παραγόντων είναι επίσης μια περιοχή που παρουσιάζει διαφωνίες στη βιβλιογραφία της χωρικής αντίληψης, εμφανίζοντας κάθε φορά, διαφορές σε κάθε ερευνητή και από μελέτη σε μελέτη του ίδιου ερευνητή (π.χ. Lohman, 1988).

4. Τεστ που χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση κάθε παράγοντα. Τα τεστ που χρησιμοποιούνται για να μετρήσουν ή να αξιολογήσουν τις χωρικές ικανότητες αποτελεί στοιχείο διαφωνίας (Eliot και Smith, 1983· Lohman, 1979). Υπάρχει πληθώρα από τεστ στη χωρική αντίληψη αλλά και μια έντονη σύγχυση αναφορικά με το όνομα και το περιεχόμενό τους (D'Oliveira, 2004).

Ορισμοί για τη Χωρική Αντίληψη

Αν και έχουν χρησιμοποιηθεί αρκετοί ορισμοί για να περιγράψουν την ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου ή τη χωρική αντίληψη, από ψυχολόγους και ερευνητές στον τομέα της μαθηματικής παιδείας, δεν υπάρχει ένας ενιαίος κοινά αποδεκτός, λειτουργικός ορισμός. Ακόμη και η ονομασία της χωρικής αντίληψης διαφέρει από ερευνητή σε ερευνητή. Για παράδειγμα ο Elliot (2000), χρησιμοποιεί τον όρο χωρική νοημοσύνη (spatial intelligence), άλλοι ερευνητές χρησιμοποιούν τον όρο χωρική ικανότητα/ες (spatial ability/ies) ή δεξιότητες και άλλοι ως ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου. Σε μια σημαντική ανασκόπηση της βιβλιογραφίας (ChanLin, 2000), σχετικά με τη χωρική αντίληψη, αναφέρεται ότι ο όρος χωρική αντίληψη προσδιορίζει ότι έχει χαρακτηριστεί ως χωρική αίσθηση, χωρική αντίληψη, δημιουργία νοερών εικόνων, χωρική οπτικοποίηση, οπτικές δεξιότητες, χωρικό συλλογισμό, νοητικές περιστροφές και οπτικές διαδικασίες.

Η λέξη χωρική (spatial) έχει προσδιοριστεί ως «ως προς το χώρο ή η ύπαρξη στο χώρο» (Oxford Advanced Learner's Dictionary of Current English, 1992) ή “σχετιζόμενη με το χώρο” (Collins Dictionary of the English Language, 1986). Έχουν δοθεί πολλοί ορισμοί αλλά είναι γενικά αποδεχτό ότι η χωρική αντίληψη σχετίζεται με τις ικανότητες ανάκτησης, διατήρησης και μετασχηματισμού μιας οπτικής πληροφορίας σε ένα χωρικό πλαίσιο (Halpern, 2000). Για παράδειγμα ο Eckstrom και οι συνεργάτες του (1976), αναφέρουν ότι η αντίληψη των εννοιών του χώρου ενός ατόμου, συχνά αποδίδεται στην ικανότητα επιδέξιου χειρισμού ή στο μετασχηματισμό της εικόνας από το χώρο σε άλλες αναπαραστάσεις (Eckstrom et al., 1976). Με τον όρο χωρική αντίληψη ορίζεται η ικανότητα δημιουργίας νοερών εικόνων και ο χειρισμός αυτών των εικόνων στο μυαλό (Guay, McDaniel and Angelo, 1978· McGee, 1979·). Πιο συγκεκριμένα, η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου ορίστηκε από τους Lean και Clements (1981) ως «η ικανότητα το ατόμου να σχηματίζει νοητικές εικόνες και να χειρίζεται τις εικόνες αυτές στο μυαλό του» (σελ. 267).

Συγκεκριμένα, οι Linn και Petersen (1985), αναφέρουν ότι είναι γενικά αποδεκτό το γεγονός ότι η χωρική αντίληψη είναι μέρος της νοητικής ικανότητας, όμως αυτό που πρέπει να γίνει είναι να διασαφηνιστεί ο ορισμός της. Η χωρική αντίληψη αναφέρεται, γενικά, στη δεξιότητα αναπαραστάσης, μετασχηματισμού, γενίκευσης και μνήμης των συμβολικών, μη γλωσσικών πληροφοριών. Επίσης, οι ίδιοι ορίζουν τη χωρική αντίληψη ως τη νοητική διαδικασία, η οποία αντιλαμβάνεται, αποθηκεύει, ανασύρει, δημιουργεί, επεξεργάζεται εικόνες που αναφέρονται στο χώρο (Linn και Petersen, 1985).

Ο Lohman (1996), όρισε τη χωρική αντίληψη ως την ικανότητα του ατόμου να παράγει, να διατηρεί, να ανακαλεί και να μετασχηματίζει καλά δομημένες οπτικές εικόνες. Με ανάλογο τρόπο χρησιμοποιεί στη δική του έρευνα ο Gorgorió (1998), τον όρο «ικανότητα χωρικής επεξεργασίας», τον οποίο ορίζει ως την ικανότητα που χρειάζεται το άτομο για να πραγματοποιήσει τις συνδυασμένες νοητικές πράξεις που απαιτούνται για την επίλυση ενός χωρικού έργου. Περιλαμβάνει όχι μόνο την ικανότητα του ατόμου να φαντάζεται χωρικά αντικείμενα, σχέσεις και μετασχηματισμούς, αλλά και την ικανότητα αποκωδικοποίησης των δεδομένων αυτών με οπτικό τρόπο, καθώς και την ικανότητα κωδικοποίησής τους με λεκτικούς ή μικτούς τρόπους (Gorgorió, 1998). Ενώ, η χωρική αντίληψη, σύμφωνα με τους Connor και Serbin (1985), είναι μία γνωστική δεξιότητα αντίληψης των σχέσεων στο χώρο και νοητικών χειρισμών οπτικών και μη οπτικών αντικειμένων (Michaelides, 2003).

Η χωρική αντίληψη συσχετιζόμενη με τα μαθηματικά ορίζεται, ως «η ικανότητα του ατόμου να λύνει προβλήματα, που έχουν κυρίως οπτικό-χωρικό περιεχόμενο, χρησιμοποιώντας τουλάχιστον κάποιο εικονικό ή γεωμετρικό στυλ νοητικών αναπαραστάσεων και / ή δραστηριότητες που σχετίζονται λειτουργικά με το οπτικό ή γεωμετρικό περιεχόμενο των έργων» (Olkun & Knaupp, 1999).

Αξιοσημείωτο αποτελεί το γεγονός ότι ο Gardner (1983) στη θεωρία του για την πολλαπλή νοημοσύνη (theory of multiple intelligence), μια από τις επτά νοημοσύνες που εντοπίζει, είναι η χωρική νοημοσύνη (Spatial Intelligence). Σύμφωνα με το Gardner (1983) η χωρική νοημοσύνη είναι η ικανότητα δημιουργίας και χειρισμού νοητικών εικόνων με σκοπό την επίλυση προβλημάτων.

Όμοια η έρευνα στην εξειδίκευση ημισφαιρίων αναφέρει ότι οι διαφορές ανάμεσα στη λεκτική-σειριακή (sequential) διαδικασία και στη χωρική-αναλυτική διαδικασία είναι η βασική διχοτομία στην ανθρώπινη γνώση. Ο Ραϊνίο (1971) έχει υποστηρίξει το διπλό κώδικα θεωρίας μνήμης, στην οποία η λεκτική και χωρική πληροφορία αποθηκεύονται με διαφορετικούς κώδικες. Λίγα χρόνια αργότερα, ο Anderson (1983), προτείνει μια θεωρία μνήμης με πολλαπλούς κώδικες, με ξεχωριστούς κώδικες για τις προσωρινά διαταγμένες σειρές, τις χωρικές εικόνες και τις αφηρημένες προτάσεις (Lohman, 1993).

Σύμφωνα και με το Sjölander (1998) οι χωρικές ικανότητες είναι ένα μέρος της ρέουσας νοημοσύνης, όταν διαιρέσουμε τη γενική νοημοσύνη σε υπο-παράγοντες κάνοντας μια διάκριση ανάμεσα στη ρέουσα νοημοσύνη και την αποκρυσταλλωμένη νοημοσύνη. Οι Lohman, Pellegrino, Alderton και Regian, (1987), μιλούν επίσης για χωρική νοημοσύνη η οποία περιλαμβάνει το χειρισμό των πληροφοριών που παρουσιάζονται οπτικά, διαγραμματικά ή σε συμβολική μορφή σε αντίθεση με τη λεκτική μορφή που βασίζεται στη γλωσσική μορφή.

Η χωρική αντίληψη θα μπορούσε να θεωρηθεί ως μια ξεχωριστή ικανότητα σκέψης και επικοινωνίας για το χώρο (Diezmann & Watters, 2000). Για παράδειγμα ο Einstein (1949), ο πιο αναγνωρισμένος επιστήμονας του 20ου αιώνα, υπογραμμίζει τις διαδικασίες σκέψης στην ακόλουθη άποψη: «οι λέξεις ή η γλώσσα όπως είναι γραμμένη και έχει ομιληθεί δεν μοιάζει να διαδραματίζει κάποιο ρόλο σε κανένα μηχανισμό σκέψης. Οι φυσικές οντότητες που φαίνονται να χρησιμεύουν ως στοιχεία σκέψης είναι ξεκάθαρα σύμβολα (signs) και κάποιες ξεκάθαρες εικόνες που μπορούν να αναπαραχθούν εκούσια ή να συνδυαστούν. Τα πιο πάνω στοιχεία που έχουν αναφερθεί είναι στην περίπτωση μου

οπτικά και κάποια μυϊκού τύπου. Οι συμβατικές λέξεις ή άλλα σύμβολα (signs) πρέπει να διευκρινιστούν σε ένα δευτεροβάθμιο επίπεδο όταν ο ρόλος που διαδραματίζουν τα προαναφερθέντα έχουν καθιερωθεί επαρκώς και μπορούν να αναπαραχθούν” (σελ.147).

Η χωρική αντίληψη μπορεί να προκύψει από την ικανότητα επίκλησης και χρήσης συγκεκριμένων αναπαραστάσεων και συλλογισμών. Επιπρόσθετα για την εξεικόνιση όπως αναφέρει ο Einstein, οι χωρικές αναπαραστάσεις περιλαμβάνουν διαγράμματα, σχέδια, χάρτες και μοντέλα. Ο συλλογισμός με χωρικές αναπαραστάσεις διαφέρει ουσιαστικά από το διαδοχικό/παραγωγικό συλλογισμό (sequential reasoning) στον οποίο χρησιμοποιούνται γλωσσικές αναπαραστάσεις, όπως το κείμενο. Ο συλλογισμός με χωρικές αναπαραστάσεις περιλαμβάνει τη γνωστική αλληλεπίδραση με τις χωρικές πληροφορίες για την επίλυση προβλημάτων (Rogers, 1995).

Το χάσμα ανάμεσα στο παγκοσμίως αποδεχτό ορισμό της χωρικής αντίληψης μπορεί να οφείλεται στη μεγάλη ποικιλία τεστ χρησιμοποιώντας ψυχομετρικές μελέτες ή στην έλλειψη ικανότητας αντιγραφής των δομών των παραγόντων που εντοπίστηκαν σε διάφορα τεστ που χρησιμοποιήθηκαν (Voyer, Voyer and Bryden, 1995). Σύμφωνα με τους προσδιορισμούς των Voyer, Voyer και Bryden’s (1995) για τις διαφορετικές χωρικές ικανότητες σε σχέση με τα τεστ, κάθε τεστ θεωρείται ως ένας λειτουργικός ορισμός ενός συγκεκριμένου συστατικού της χωρικής αντίληψης. Όταν προσπαθούμε να εκτοπίσουμε τα διαφορετικά στοιχεία της χωρικής γνώσης σε σχέση με τις νοερές διαδικασίες, οι διαφορές ή οι κακοί συνδυασμοί ανάμεσα στα τεστ και τις διαδικασίες γίνονται ένα πρόβλημα. Στην επίλυση των έργων στα χωρικά τεστ μπορούν να χρησιμοποιηθούν διαφορετικές διαδικασίες και λόγω αυτού όταν προσδιορίσουμε τη χωρική αντίληψη ως διαφορετικές διαδικασίες, η επίλυση έργων σε ένα τεστ μπορεί να περιλαμβάνει τη χρήση αρκετών διαδικασιών (Sjölander, 1998).

Δομή της Χωρικής Αντίληψης

Ωστόσο, για να προσδιορίσουμε τη χωρική αντίληψη θα πρέπει κάποιος αρχικά να καθορίσει εάν είναι μια ενιαία δομή ή περιλαμβάνει ένα αριθμό διαφορετικών ικανοτήτων (Sjölander, 1998). Έχουν γίνει πολλές έρευνες και έχουν καταβληθεί αρκετές προσπάθειες

καθορισμού της δομής της χωρικής αντίληψης. Οι απόψεις, όμως, των ερευνητών δίστανται και έτσι δεν υπάρχει μία ευρέως αποδεκτή δομή χωρικής αντίληψης. Υπάρχουν ερευνητές, όπως οι Johnson και Meade (1987), Burton και Fogarty (2003) και Colom, Contreras, Botella και Santacreu (2002), που υποστηρίζουν ότι η χωρική αντίληψη είναι μια μονοδιάστατη οντότητα (Burton & Fogarty, 2003) και αμφισβητούν τα αποτελέσματα των ερευνών που διακρίνουν διαφορετικές ικανότητες αντίληψης του χώρου.

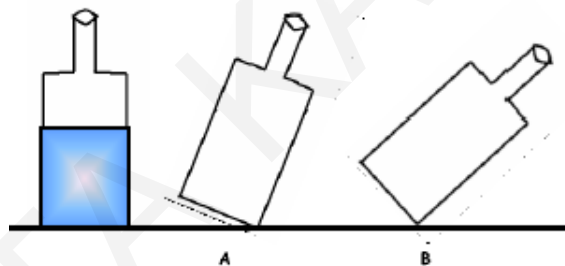
Από την άλλη, υπάρχει μία πλειάδα ερευνητών που υποστηρίζουν ότι η χωρική αντίληψη δεν μπορεί να είναι μια μοναδιαία δομή (Carrol, 1993· Kimura, 1999· Linn & Peterson, 1985· Lohman, 1988· McGee, 1979· Paivio, 1971). Συμμερίζονται την άποψη ότι υπάρχουν διάφορες χωρικές ικανότητες, που η καθεμιά δίνει έμφαση σε διαφορετικές πτυχές της διαδικασίας οπτικής δημιουργίας, αποθήκευσης, ανάκλησης και μετασχηματισμού (Lohman, 1993). Για να καθορίσουν το τι είναι η χωρική αντίληψη, χρησιμοποιούν τους παράγοντες που προέκυψαν μέσα από τις μελέτες τους από την παραγοντική ανάλυση (Carrol, 1993· Kimura, 1999· Linn & Peterson, 1985· Lohman, 1988· McGee, 1979). Οι κατηγορίες (παράγοντες) της χωρικής αντίληψης δεν είναι παγιωμένες, αφού δεν υπάρχει μία συγκεκριμένη γενικά αποδεκτή κατηγοριοποίηση. Αξίζει να σημειωθεί ότι με το πέρασμα του χρόνου έχουν δοθεί πολλές κατηγοριοποιήσεις από διάφορους ερευνητές, οι οποίες στηρίζονταν κάθε φορά στον καθορισμό των ερωτηματολογίων των ερευνών τους.

Όπως αναφέρθηκε και πιο πάνω, παρουσιάζονται διαφωνίες ανάμεσα στους ερευνητές, όσον αφορά τον αριθμό των παραγόντων και πως οι παράγοντες αυτοί συσχετίζονται μεταξύ τους (McGee, 1979). Παρόλα αυτά, οι πλείστοι ερευνητές, συμφωνούν στην ύπαρξη δύο παραγόντων: του παράγοντα της οπτικοποίησης (visualization) στο χώρο και του παράγοντα του προσανατολισμού και των σχέσεων στο χώρο (Gilmartin & Patton, 1984).

Ο McGee (1979) υποστηρίζει ότι η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου αποτελείται από τουλάχιστον δύο παράγοντες: α) τον παράγοντα Οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου (Spatial Visualization) και β) τον παράγοντα Προσανατολισμός στο Χώρο (Spatial Orientation). Η οπτικοποίηση ορίζεται ως η ικανότητα του ατόμου να χειρίζεται, να περιστρέφει, να αλλάζει τη θέση στο μυαλό ενός αντικειμένου που απεικονίζεται ως εικόνα. Με άλλα λόγια η ικανότητα, να χρησιμοποιεί τη νοερή εικόνα, για να περιστρέφει, να ταξινομεί ή να χειρίζεται ένα απεικονιζόμενο αντικείμενο. Ο

χωρικός προσανατολισμός ορίζεται από τον McGee (1979), ως «η αντίληψη της ρύθμισης των στοιχείων μέσα σε ένα μοντέλο οπτικού ερεθίσματος και η δεξιότητα του υποκειμένου να μην μπερδευτεί από την αλλαγή του προσανατολισμού, στον οποίο η χωρική σύνθεση μπορεί να παρουσιαστεί».

Οι Linn και Petersen (1985), ορίζουν ελαφρώς διαφορετικά τη χωρική αντίληψη, σε σχέση με το McGee (1979), αφού την κατηγοριοποιούν σε τρεις παράγοντες: τον παράγοντα Αντίληψη του Χώρου (Spatial Perception), τον παράγοντα Νοερή Περιστροφή (Mental Rotation) και τον παράγοντα Οπτικοποίηση του Χώρου (Spatial Visualization). Ο πρώτος παράγοντας, που αφορά την αντίληψη του χώρου (Spatial Perception), αναφέρεται στη χωρική σχέση με βάση τον προσανατολισμό του σώματος του ατόμου, παρ' όλες τις πληροφορίες που του αποσπούν την προσοχή. Τα έργα που εξετάζουν την αντίληψη του χώρου μπορεί να είναι αποτελεσματικά εάν χρησιμοποιηθούν σε αυτά κιναισθητικές διαδικασίες. Ένα παράδειγμα έργου, που θα μπορούσε να εξετάσει την αντίληψη του χώρου, είναι το πιο κάτω, στο οποίο το άτομο πρέπει να σχεδιάσει την οριζόντια γραμμή που θα σχηματίζει το νερό στις θέσεις A και B.



Ο δεύτερος παράγοντας, ο οποίος αναφέρεται στη νοερή περιστροφή (Mental Rotation), είναι η εσωτερική γνωστική διαδικασία μετακίνησης και αναδίπλωσης ενός αντικειμένου που υπάρχει στο χώρο. Οι Linn and Petersen (1985), υποστηρίζουν ότι τα αντικείμενα νοερής περιστροφής χρησιμοποιούνται για να μετρηθεί ο χρόνος επίλυσης, πάρα να μετρηθεί η ακρίβεια της λύσης τους.

Τέλος, η τρίτη κατηγορία, που αφορά την οπτικοποίηση στο χώρο (Spatial Visualization), αναφέρεται σε έργα πολύπλοκου, αναλυτικού και σταδιακού χειρισμού των πληροφοριών που παρουσιάζονται στο χώρο. Τα έργα αυτά διαφέρουν από τα έργα νοερής περιστροφής και αντίληψης του χώρου, λόγω του ότι εδώ μπορεί να χρησιμοποιηθεί μία ποικιλία στρατηγικών επίλυσης (χωρικές και μη χωρικές στρατηγικές), ενώ στα προηγούμενα δύο, υπήρχαν συγκεκριμένες χωρικές στρατηγικές επίλυσης. Η επιτυχία στα έργα αυτά καθορίζεται από το βαθμό ευελιξίας του ατόμου στην επιλογή της κατάλληλης

κάθε φορά στρατηγικής. Τα υποκείμενα θα πρέπει να αναπαραστήσουν νοερά το αντικείμενο του χώρου και στη συνέχεια να το διπλώσουν νοερά κρατώντας όμως σταθερή την αντίληψή τους, για το που βρίσκεται το κάθε χαρακτηριστικό του εκάστοτε αντικειμένου πριν και μετά την αναδίπλωση.

Ο Lohman (1979a), επίσης, κατέληξε σε τρεις παράγοντες: α) τον παράγοντα Οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου (spatial visualization), ο οποίος αναφέρεται στην ικανότητα αντίληψης φανταστικών κινήσεων στον τρισδιάστατο χώρο και στην ικανότητα νοερού χειρισμού αντικειμένων, β) τον παράγοντα Προσανατολισμό στο χώρο (spatial orientation) και γ) τον παράγοντα Γρήγορης Περιστροφής (speeded rotation), ο οποίος αναφέρεται στο χειρισμό οπτικών μοτίβων όπως νοερές περιστροφές και στην ικανότητα νοερής περιστροφής ενός αντικειμένου στο χώρο με ταχύτητα και ακρίβεια (Lohman, 1988).

Η διαφορά μεταξύ των παραγόντων «προσανατολισμός στο χώρο» και «γρήγορης περιστροφής», σύμφωνα με το McGee (1979), έγκειται στο γεγονός ότι στον παράγοντα «προσανατολισμός στο χώρο» καθοριστικό ρόλο διαδραματίζει ο προσανατολισμός του σώματος του παρατηρητή. Ο παράγοντας «γρήγορης περιστροφής» εμπλέκει τη νοερή περιστροφή ενός αντικειμένου ως ολότητα ενώ ο παράγοντας «οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου» απαιτεί τη μετακίνηση τμήματος του αντικειμένου (McGee, 1979).

Σύμφωνα με τους Hegarty και Waller (2005) η πιο περιεκτική ανασκόπηση παραγοντικής ανάλυσης της χωρικής αντίληψης διεξήχθη από τον John Carroll, το 1993. Ο Carroll (1993), βασίστηκε κυρίως στην κατηγοριοποίηση του Lohman και των συνεργατών του (1987), προσπαθώντας να προσδιορίσει με περισσότερη ακρίβεια τους παράγοντες. Ο Carroll (1993) ανέλυσε περισσότερα από 230 τεστ και εντόπισε πέντε παράγοντες: τον παράγοντα Οπτικοποίηση (Visualization), τον παράγοντα Σχέσεις των Εννοιών στο Χώρο (Spatial Relations), τον παράγοντα Ταχύτητας Διεκπεραίωσης (Closure Speed), τον παράγοντα Ευελιξίας Διεκπεραίωσης (Flexibility of Closure) και τον παράγοντα Αντιληπτικής Ταχύτητας (Perceptual Speed) (Carroll, 1993).

Ο ορισμός του παράγοντα οπτικοποίησης (Visualization), δε διαφέρει από τους πιο πάνω ερευνητές. Ο παράγοντας σχέσεις εννοιών στο χώρο (Spatial Relations), μπορεί να θεωρηθεί ως άλλο όνομα για τον παράγοντα γρήγορης περιστροφής του Lohman (1988), για τρισδιάστατα σχήματα. Ο παράγοντας ταχύτητας διεκπεραίωσης (Closure Speed), αφορά ατομικές διαφορές στη δυνατότητα πρόσβασης χωρικών αναπαραστάσεων στη

μακροπρόθεσμη μνήμη, όταν παρουσιάζονται ελλειπείς ή κρυμμένες νύξεις αυτών των αναπαραστάσεων. Οι ασκήσεις δεν αναφέρουν τι αναμένεται από τα άτομα να αναζητήσουν σε μια αναπαράσταση. Ο παράγοντας ευελιξίας διεκπεραίωσης (Flexibility of Closure) προϋποθέτει την εύρεση σχημάτων ή φιγούρων σε μια πιο σύνθετη εικόνα όταν τα άτομα είναι ενήμερα για τη φιγούρα ή το σχήμα που ψάχνουν. Από κάποιους ερευνητές ονομάζεται «πεδίο ανεξαρτησίας» (Field Independence) ή από-πλαισίωσης (Disembedding) (Velez, Silver, and Tremaine, 2005). Αν και ο Carroll (1993) αναφέρει ότι υπάρχει ο παράγοντας αυτός, αποδέχεται το γεγονός των «ψυχομετρικών αποδείξεων ότι η ύπαρξη του παράγοντα ευελιξίας είναι κάπως διαφορούμενη. Ο παράγοντας αντιληπτικής ταχύτητας (Perceptual Speed) χαρακτηρίζεται από την ταχύτητα στην εξεύρεση μιας δοσμένης φιγούρας σε μια ποικιλία διαφορετικών αντικειμένων. Το έργο μπορεί να περιλαμβάνει τη σύγκριση ζευγών στοιχείων, εντοπίζοντας ένα μοναδικό στοιχείο σε μια ομάδα των ίδιων στοιχείων, είτε εντοπίζοντας ένα οπτικό πρότυπο σε ένα εκτεταμένο οπτικό πεδίο.

Η Kimura (1999), όρισε έξι χωρικούς παράγοντες οι οποίοι έχουν ευρεία αποδοχή, γιατί μπορούν να εντοπιστούν μέσα από πειραματικές μετρήσεις. Οι παράγοντες αυτοί είναι: α) Προσανατολισμός στο Χώρο (Spatial Orientation), β) Μνήμη Εξακρίβωσης του Χώρου (Spatial Location Memory), η ικανότητα δηλαδή, ανάκλησης της θέσης του αντικειμένου σε μια παράταξη, γ) Στόχευση (Targeting), που αφορά την ικανότητα απόκρουσης βλημάτων (Projectiles) ή αποστολής σε συγκεκριμένο στόχο και σχετίζεται πολύ με την ικανότητα κίνησης, δ) ο παράγοντας Οπτικοποίηση του χώρου (Spatial Visualization), ε) η Από-πλαισίωση (Disembedding) και στ) η Αντίληψη του Χώρου (Spatial Perception).

Έρευνα των Kozhevnikov και Hegarty (2001), έδειξε ότι η ικανότητα χειρισμού αντικειμένων και η ικανότητα χωρικού προσανατολισμού είναι διακριτές χωρικές ικανότητες, οι οποίες συσχετίζονται. Επιπλέον έδειξαν ότι οι ικανότητες που σχετίζονται με το χωρικό προσανατολισμό είναι διαφορετικές από τις ικανότητες που σχετίζονται με την οπτικοποίηση του χώρου, ειδικά τη νοερή περιστροφή (Hegarty & Waller, 2004).

Σύμφωνα με το Yilmaz (2009), οι μελέτες παραγοντικής ανάλυσης της χωρικής αντίληψης παρουσιάζουν δύο μειονεκτήματα. Πρώτο, δεν παρέχουν τα ίδια αποτελέσματα (δεν εντοπίζουν τους ίδιους βασικούς παράγοντες), γεγονός που μπορεί να οδηγήσει σε σύγχυση και λανθασμένα συμπεράσματα. Δεύτερο, όλες οι μελέτες δε λαμβάνουν υπόψη τις Δυναμικές Χωρικές Ικανότητες και τις περιβαλλοντικές ικανότητες, οι οποίες

θεωρούνται ως ιδιαίτερα συστατικά του πεδίου της χωρικής αντίληψης (Hegarty and Waller, 2005). Παρόλο που υπάρχει μια ισχυρή απόδειξη για την ύπαρξη της Δυναμικής Χωρικής Αντίληψης και της Περιβαλλοντικής Ικανότητας για να λύσουμε τα περισσότερα προβλήματα που αντιμετωπίζουμε στην καθημερινή μας ζωή, οι πιο πολλοί ερευνητές αγνοούν αυτό το γεγονός στη βιβλιογραφία (Allen, 1999, 2003· Bell and Saucier, 2004).

Η Δυναμική Χωρική Αντίληψη (Dynamic Spatial Ability), αναφέρεται στις αποφάσεις σχετικά με ένα κινούμενο ερέθισμα (Halpern, 2000) και συνήθως μετριέται με τη χρήση ηλεκτρονικών τεστ (Colom, Contreas, Shih και Santacreu, 2003). Οι δείκτες της Δυναμικής Χωρικής Αντίληψης είναι η σχετική άφιξη του αντικειμένου (τα υποκείμενα καλούνται να αναφέρουν ποιο από τα δύο κινούμενα αντικείμενα θα φτάσει πρώτο σε ένα δεδομένο στόχο) και τα έργα εντοπισμού του σημείου τομής (Law, Pallegirino and Hunt, 1993). Η Περιβαλλοντική Ικανότητα (Environmental Ability) απαιτεί την ενσωμάτωση χωρικών πληροφοριών σχετικά με φυσικά και τεχνητά αντικείμενα και επιφάνειες, στο περιβάλλον του ατόμου. Αυτές οι ικανότητες θεωρούνται αναγκαίες για την πλοήγηση και τον εντοπισμό σημείων (Allen, 1999· Bell και Saucier, 2004).

Οπτικοποίηση στο Χώρο (spatial visualization)

Όπως έχει αναφερθεί, τα στοιχεία που συνθέτουν τη χωρική αντίληψη διαφέρουν από ερευνητή σε ερευνητή, αλλά ο παράγοντας οπτικοποίησης (visualization) θεωρείται από όλους, ως ένα σημαντικό στοιχείο της χωρικής αντίληψης. Σοβιετικοί μαθηματικοί στο παρελθόν, τόνισαν το ρόλο της χωρικής σκέψης στη γεωμετρία, ιδιαίτερα την ικανότητα οπτικοποίησης, υποστηρίζοντας ότι «η οπτικοποίηση χρησιμοποιείται ως βάση για την αφομοίωση της αφηρημένης γεωμετρικής γνώσης και των μεμονωμένων εννοιών» (Yakimanskaya, 1971).

Συγκεκριμένα, η οπτικοποίηση στο χώρο, ορίζεται ως η ικανότητα νοερού χειρισμού οπτικών ερεθισμάτων. Η ικανότητα αυτή, αναφέρεται τόσο σε αντικείμενα δύο διαστάσεων, όσο και σε αντικείμενα τριών διαστάσεων (Gilmartin και Patton, 1984).

Η «οπτικοποίηση του χώρου», σύμφωνα με το Lohman (1988) ορίζεται ως η ικανότητα του ατόμου να κατανοεί νοερές μετακινήσεις σε ένα τρισδιάστατο χώρο ή η

ικανότητα να χειρίζεται τα αντικείμενα στη φαντασία. Επίσης, η χωρική ικανότητα οπτικοποίησης ορίζεται ως η ικανότητα ταξινόμησης κομματιών ενός αντικειμένου για να ολοκληρωθεί το δίπλωμα χαρτιού ή το γενικό σχήμα (Christou, Pittalis, Mousoulides, Pitta, Jones, Sendova, & Boytchev, 2007).

Ο παράγοντας οπτικοποίηση του χώρου αναφέρεται στην ικανότητα του ατόμου να χειρίζεται νοερά και να αναδομεί τα συστατικά του οπτικού ερεθίσματος και περιλαμβάνει την αναγνώριση, τη διατήρηση και την ανάκληση του σχήματος όταν αυτό ή τα μέρη του κινούνται (Bodner & Guay, 1997· στον Unal, 2005). Ο Gutiérrez (1996) θεωρεί την «οπτικοποίηση» στα μαθηματικά ως είδος δραστηριότητας συλλογισμού βασισμένη στη χρήση οπτικών ή χωρικών στοιχείων, είτε νοητικών ή φυσικών, για να λύνει προβλήματα ή να αποδεικνύει ιδιότητες.

Η αρχή της οπτικοποίησης του χώρου έχει ένα ευρύ φάσμα ερμηνειών, βασισμένη στο πεδίο μέσα στο οποίο υλοποιείται. Από τη σκοπιά της μαθηματικής εκπαίδευσης, η οπτικοποίηση του χώρου αναφέρεται σε μια ομάδα στοιχείων που σχετίζονται με τη δημιουργία και τη χρήση νοερών αναπαραστάσεων (νοερές εικόνες) της μαθηματικής πληροφορίας (Dreyfus, 1991). Αυτή η ομάδα στοιχείων που ολοκληρώνουν την οπτικοποίηση του χώρου μπορούν να χωριστούν σε τρία μέρη: α) τις νοερές εικόνες (mental images), β) τη διαδικασία οπτικοποίησης (visual processing) και γ) τις δεξιότητες οπτικοποίησης (visualization abilities) (Gutierrez, 1997).

Οι νοερές εικόνες (mental images) είναι τα βασικά αντικείμενα για την οπτικοποίηση του χώρου. Σύμφωνα με την Presmeg (1986) νοερή εικόνα είναι ένα νοερό σχήμα το οποίο περιγράφει ένα οπτικό ή χωρικό ερέθισμα χωρίς να είναι απαραίτητη η ύπαρξη ενός εξωτερικού οπτικού ερεθίσματος. Οι μαθητές πρέπει να μάθουν να κατασκευάζουν, να μετασχηματίζουν και να αναλύουν τις νοερές εικόνες με σκοπό να αποκτήσουν άριστες δυνατότητες στην οπτικοποίηση του χώρου (Gutierrez, 1997). Κάποιοι τύποι νοερών εικόνων που περιγράφονται από την Presmeg (1986) είναι οι εξής: πραγματικές εικονογραφημένες εικόνες (concrete images), μνημονικές εικόνες κάποιου τύπου (memory images of formula), δυναμικές εικόνες (dynamic images) και κιναισθητικές εικόνες (kinaesthetic images).

Ο επιδέξιος χειρισμός των νοερών εικόνων δεν είναι εύκολη δουλειά. Απαιτεί τη χρήση κάποιων τεχνικών και φυσικά κάποια εκπαίδευση. Οι μαθητές παράγουν νοερές εικόνες τρισδιάστατων γεωμετρικών αντικειμένων γιατί πρέπει να λύσουν κάποια

προβλήματα. Μετά, υπάρχει μια νοερή διαδικασία κατασκευής μιας εικόνας (ή ανάκληση της από τη μνήμη, εξαρτώμενη από την περίπτωση), μετασχηματισμού της με κάποιο τρόπο, εξασφαλίζοντας κάποιες πληροφορίες με σκοπό να βοηθήσει στη λύση του προβλήματος. Επομένως υπάρχουν δυο σχετικές διαδικασίες που εμπλέκονται στο χειρισμό των νοερών εικόνων και τον έλεγχο των εισερχόμενων πληροφοριών μεταξύ εξωτερικών αντικειμένων και νοερών εικόνων: η επεξεργασία εικονικών πληροφοριών (visual processing) και η διαδικασία ερμηνείας πληροφοριών για σχήματα (interpreting figural information) (Bishop, 1983, 1989).

Η επεξεργασία εικονικών πληροφοριών (visual processing) αναφέρεται στη διαδικασία μετατροπής των αφηρημένων και χωρίς σχήμα δεδομένων, σε οπτικές εικόνες. Καθώς επίσης και στη μετατροπή της νοερής εικόνας σε μια άλλη. Η διαδικασία ερμηνείας πληροφοριών για σχήματα (interpreting figural information), αποτελείται από τη διαδικασία ανάγνωσης, ανάλυσης και κατανόησης των αναπαραστάσεων του χώρου, όπως οι απλές αναπαραστάσεις και οι νοερές εικόνες των τρισδιάστατων σχημάτων, με σκοπό να εξασφαλίσουν κάποια δεδομένα για αυτές.

Τέλος, η τρίτη συνιστώσα στη δραστηριότητα της οπτικοποίησης είναι οι δεξιότητες οπτικοποίησης (visual abilities), που πρέπει να υπάρχουν για να μπορούν να υλοποιηθούν οι προηγούμενες διαδικασίες. Η μάθηση και η βελτίωση αυτών των ικανοτήτων είναι το κλειδί για όλη τη διαδικασία της οπτικοποίησης του χώρου. Υπάρχουν διαφορετικού τύπου δεξιότητες, κάποιες από αυτές έχουν ως κύριο συστατικό την ψυχολογία και άλλες έχουν ψυχολογική φύση (Gutierrez, 1997). Πρόκειται για τις δεξιότητες που έχει συνθέσει ο Del Grande (1987), βασισμένος στις εργασίες των Frostig, Horne (1964) και Hoffer (1977). Συγκεκριμένα ο Del Grande (1987), πρότεινε επτά δεξιότητες οι οποίες φαίνεται να είναι από τις καλύτερες εφαρμογές στην ακαδημαϊκή ανάπτυξη της γεωμετρίας. Οι δεξιότητες αντίληψης του χώρου από το Del Grande (1987) είναι οι εξής:

α) Ο συντονισμός των κινήσεων του ματιού (eye-motor coordination), η ικανότητα δηλαδή, συντονισμού της όρασης με την κίνηση του ματιού.

β) Η αντίληψη του πλαισίου του σχήματος (figure-ground perception), η οποία αναφέρεται στη δεξιότητα αναγνώρισης ενός συγκεκριμένου σχήματος με την απομόνωση του από ένα περίπλοκο σύνολο. Για παράδειγμα, χρησιμοποιείται όταν οι μαθητές πρέπει να αναγνωρίσουν την έδρα ενός οκτάεδρου, παρατηρώντας τις κορυφές.

γ) Η αντιληπτική σταθερότητα (perceptual constancy), η δεξιότητα δηλαδή, αναγνώρισης αν είναι αντικείμενο έχει σταθερές ιδιότητες, όπως σχήμα ή γειτνίαση δυο εδρών, ανεξάρτητα από τη θέση του.

δ) Η αντίληψη της θέσης στο χώρο (perception of spatial positions), η οποία αναφέρεται στη δεξιότητα συσχέτισης ενός αντικειμένου, εικόνας ή οπτικής εικόνας με το ίδιο.

ε) Η οπτική διάκριση (visual discrimination), η οποία ανταποκρίνεται στη δεξιότητα σύγκρισης διαφορετικών αντικειμένων, εικόνων ή/και νοερών εικόνων, και αναγνώρισης των ομοιοτήτων και διαφορών τους.

στ) Η αντίληψη της συσχέτισης στο χώρο (perception of spatial relationship), η δεξιότητα δηλαδή, συσχέτισης διαφορετικών αντικειμένων, εικόνων ή/και νοερών εικόνων μεταξύ τους, ή ταυτοχρόνως στο ίδιο.

ζ) Η Οπτική Μνήμη (visual memory), η οποία αναφέρεται στην ικανότητα ακριβής ανάκλησης αντικειμένων και τη συσχέτιση των χαρακτηριστικών τους με άλλα αντικείμενα που είτε είναι ορατά είτε όχι.

Προσανατολισμός στο Χώρο

Εκτός από τον παράγοντα οπτικοποίηση, αρκετοί ερευνητές συμφωνούν ότι ένας από τους παράγοντες της χωρικής αντίληψης, είναι ο παράγοντας προσανατολισμός στο χώρο. Σύμφωνα με τον Gutierrez (1996), ο παράγοντας προσανατολισμός στο χώρο περιλαμβάνει: τον προσδιορισμό των σχέσεων μεταξύ διαφορετικών αντικειμένων, την αναγνώριση ενός αντικειμένου καθώς κινείται από διαφορετικές οπτικές γωνίες, την παρατήρηση των μοτίβων του χώρου και σύγκριση μεταξύ τους και τη διατήρηση του προσανατολισμού του αντικειμένου.

Συγκεκριμένα, ο παράγοντας προσανατολισμός και οι σχέσεις στο χώρο – αναφέρεται σε δύο επιμέρους ικανότητες, στην ικανότητα κατανόησης της διαρρύθμισης των οπτικών αντικειμένων σε ένα μοτίβο, διατηρώντας την, όταν βλέπουμε τα αντικείμενα αυτά από διαφορετικούς προσανατολισμούς και στην ικανότητα να καθορίζονται οι χωρικές σχέσεις σύμφωνα με τον προσανατολισμό προς τον εαυτό του ατόμου (Gilmartin

& Patton, 1984). Παρομοίως, ο Lohman (1988) και οι Bodner και Guay (1997· στον Unal, 2005), ορίζουν το «χωρικό προσανατολισμό» ως το μέτρο της ικανότητας κάποιου να μη μπερδεύεται από τις αλλαγές στον προσανατολισμό των οπτικών ερεθισμάτων που απαιτεί μόνο μια νοητική περιστροφή του σχήματος.

Οι Shepard και Cooper (1982), αναφέρουν ότι κατά τη διάρκεια της νοερής περιστροφής, η εσωτερική γνωστική διαδικασία έχει ένα προς ένα αντιστοιχία με την εξωτερική (φυσική) περιστροφή του αντικειμένου. Οι ίδιοι μέσα από την έρευνά τους ανακάλυψαν ότι όσο πιο μεγάλη είναι η γωνία στην οποία καλείται το υποκείμενο να περιστρέψει νοερά το αντικείμενο, τόσο πιο μεγάλο χρονικό διάστημα χρειάζεται. Κάποιοι ερευνητές ισχυρίζονται ότι η νοερή περιστροφή των τρισδιάστατων αντικειμένων είναι πιο δύσκολη από τη νοερή περιστροφή των δισδιάστατων (Michaelides, 2003). Παρόλα αυτά, οι Shepard και Cooper (1982), αναφέρουν ότι κάτι τέτοιο δε βρέθηκε στις δικές τους έρευνες. Μερικοί ερευνητές αναφέρουν ότι αυτό που διαδραματίζει ρόλο είναι η πολυπλοκότητα του αντικειμένου, είτε αυτό είναι τρισδιάστατο είτε είναι δισδιάστατο.

Αξίζει να αναφερθεί ότι ο Michaelides (2003), ορίζει τον προσανατολισμό ως το μετασχηματισμό που περιλαμβάνει τη λογική της «περιστροφής» ενός αντικειμένου και το οπτικοποιεί από διαφορετικές προοπτικές. Αποτελεί ένα θεμελιώδη τρόπο μετασχηματισμού και συλλογισμού για το χώρο. Τα παιδιά, πριν από την απόκτηση της συστηματικής γνώσης για την περιστροφή, έρχονται σε επαφή με την έννοια της περιστροφής μέσα από διάφορες δραστηριότητες της καθημερινότητάς τους, δηλαδή με την ανεπίσημη αντίληψη της περιστροφής.

Τόσο η οπτικοποίηση του χώρου, αλλά και ο προσανατολισμός στο χώρο, απαιτούν ορισμένη χρήση της βραχύχρονης οπτικής μνήμης. Τα ευρήματα διαφόρων ερευνών υποστηρίζουν ότι η οπτικοποίηση στο χώρο συσχετίζεται με την επιτυχία στα μαθηματικά, ενώ ο προσανατολισμός στο χώρο συσχετίζεται στενά με την αίσθηση της κατεύθυνσης και του ανεξάρτητου πεδίου ή εξαρτημένου πεδίου (McGee, 1979· στους Strong και Smith, 2002).

Παρόλα αυτά, άλλοι ερευνητές όπως οι French (1951), Fruchter (1954), Smith (1964) και Thurstone και Thurstone (1941), συμφωνούν ότι οι δύο μεγάλοι παράγοντες που χαρακτηρίζουν τη χωρική αντίληψη είναι η οπτικοποίηση και η αντίληψη του χώρου (Linn & Petersen, 1985). Η νοερή περιστροφή των αντικειμένων περιλαμβάνεται στην οπτικοποίηση του χώρου.

Τεστ Χωρικής Αντίληψης

Αξίζει να σημειωθεί ότι δεν είναι δυνατό να μετρηθεί άμεσα η χωρική αντίληψη ενός ατόμου. Όμως, μπορεί να μετρηθεί έμμεσα από την εξέταση του επιπέδου των δεξιοτήτων του, καθώς εκτελεί συγκεκριμένες εργασίες. Συνεπώς, προκειμένου να εξακριβωθούν οι χωρικές ικανότητες χρησιμοποιούνται τυποποιημένα τεστ για τη μέτρηση των χωρικών δεξιοτήτων και από τα αποτελέσματα των τεστ εξάγονται συμπεράσματα σχετικά με τις χωρικές ικανότητες ενός ατόμου (Górska & Juščákova, 2003).

Όπως αναφέρθηκε και πιο πάνω, τα τεστ που χρησιμοποιούνται για να μετρήσουν ή να αξιολογήσουν τις χωρικές ικανότητες αποτελούν στοιχείο διαφωνίας μεταξύ των ερευνητών (D'Oliveira, 2004· Eliot και Smith, 1983· Lohman, 1979). Υπάρχει πληθώρα από τεστ στη χωρική αντίληψη αλλά και μια έντονη σύγχυση αναφορικά με το όνομα και το περιεχόμενο τους (D'Oliveira, 2004). Αξίζει να σημειωθεί ότι τα δοκίμια χωρικής αντίληψης έχουν αρχικά επεξεργαστεί ως δοκίμια ψυχολογίας.

Η αξιολόγηση της χωρικής αντίληψης του ατόμου γίνεται με τέσσερις διαφορετικού τύπου δοκιμίων: τα δοκίμια συμπεριφοράς (performance tests), τα γραπτά δοκίμια (paper-and-pencil tests), τα προφορικά δοκίμια (verbal tests) και τα δυναμικά δοκίμια στον ηλεκτρονικό υπολογιστή (dynamic computer-based tests). Παράλληλα, τα τεστ χωρικής αντίληψης διαφέρουν στο είδος της απάντησης που απαιτείται, όπως η επιλογή μιας εναλλακτικής απάντησης, η απόδοση μιας γραπτής απάντησης ή μιας προφορικής απάντησης.

Τα δοκίμια συμπεριφοράς (performance tests), ήταν τα πρώτα που δημιουργήθηκαν και περιλάμβαναν ασκήσεις σύνθεσης σχημάτων (form board), χειρισμό κύβων (block manipulation) και δίπλωση σχημάτων (paper folding) (Binet & Simon, 1916). Πολλές από αυτές τις ασκήσεις χρησιμοποιούνται και για τη μέτρηση της νοημοσύνης των παιδιών (Lohman, 1993).

Ο γραπτός τύπος δοκιμίου (paper-and-pencil) έχει μία μεγάλη ιστορία. Με το πέρασμα του χρόνου έχουν κατασκευαστεί αρκετά δοκίμια αυτής της μορφής. Οι Eliot και Smith (1983) έδωσαν παραδείγματα για 392 δοκίμια χωρικής αντίληψης. Άγγλοι ερευνητές κατασκεύαζαν τεστ χωρικής αντίληψης που περιλάμβαναν ποικιλία διαφορετικών ασκήσεων με σκοπό τον εντοπισμό παραγόντων που προέκυπταν από συσχετίσεις διαφορετικών τεστ. Αμερικάνοι ερευνητές χρησιμοποίησαν διαφορετικές

μεθόδους ανάλυσης παραγόντων, πιο ομοιογενών τεστ, και προσδιόρισαν πολλούς διαφορετικούς παράγοντες χωρικής αντίληψης. Ο French (1951) έκανε μια αρχική προσπάθεια να κατηγοριοποιήσει αυτούς τους παράγοντες. Άλλοι ερευνητές (Eysenck, 1967· Guilford, 1967·) πρότειναν λογικά μοντέλα και ταξινόμησαν τους υπάρχοντες παράγοντες και εισηγήθηκαν ότι μπορούν να προσδιοριστούν και άλλοι παράγοντες. Οι πρόσφατες προσπάθειες για καθορισμό των διαστάσεων της χωρικής αντίληψης επιδιώκουν την ανάλυση παλαιών τεστ χρησιμοποιώντας τις σύγχρονες μεθόδους παραγοντικών αναλύσεων (Carroll, 1993· Lohman, 1979).

Ωστόσο προκύπτει μεγάλη ποικιλομορφία στα μοντέλα κατηγοριοποίησης των παραγόντων. Ανάλογα με τα τεστ που χρησιμοποιούνται εξάγονται διαφορετικά αποτελέσματα για τους παράγοντες που αποτελούν τη χωρική αντίληψη. Για αυτό θα πρέπει να χρησιμοποιείται ποικιλία τεστ για τον έλεγχο του κάθε παράγοντα (Carroll, 1993· Lohman, 1979).

Η χρήση γραπτών δοκιμίων «paper-and-pencil» διευκολύνει σημαντικά τη δυνατότητα των ερευνητών να λάβουν μεγάλο δείγμα. Για παράδειγμα: το «Space Relations Test of the Differential Aptitudes Test» (DAT· Bennett, Seashore, & Weisman, 1974), το «Spatial Relations Test of the Primary Mental Abilities Battery» (Thurstone & Thurstone, 1965), και πολλά «Educational Testing Service» τεστ χωρικής αντίληψης (French, Ekstrom & Price, 1963) έχουν όλα χρησιμοποιηθεί σε έρευνες με μεγάλο δείγμα (π.χ. Fennema & Sherman, 1978· Johnson & Meade, 1987· Yen, 1975).

Σχετικά λίγοι ερευνητές έχουν χρησιμοποιήσει τεστ του τύπου «paper-and-pencil» σε παιδιά ηλικίας κάτω των 13. Ο Richmond (1980) ασχολήθηκε επιτυχώς με τεστ «Educational Testing Service» (Figures, Cards, Flags, Hidden Figures και Paper Folding) με παιδιά 9 με 12 ετών. Ο VandenBerg (1975) έχει χρησιμοποιήσει τη δική του εκδοχή «Νοερής Περιστροφής» (mental rotation) με μαθητές έκτης τάξης. Η επιτυχία αυτών ερευνών δείχνει ότι μπορεί να είναι εφικτή η κατασκευή τεστ χωρικής αντίληψης του τύπου «paper-and-pencil» για παιδιά (Johnson & Meade, 1987).

Ένας άλλος τύπος δοκιμίου χωρικής αντίληψης είναι τα προφορικά δοκίμια, που λαμβάνουν τη λιγότερη προσοχή, παρά το γεγονός ότι συχνά δείχνουν υψηλή συσχέτιση με άλλα έργα χωρικής αντίληψης (Ackerman & Kanfer, 1993· Guilford & Lacey, 1947). Σε αυτού του είδους τεστ, οι εξεταζόμενοι πρέπει να ακούσουν ένα πρόβλημα, που κατά πάσα πιθανότητα απαιτεί κατασκευή μιας νοερής εικόνας, για να το επιλύσουν. Ένα

παράδειγμα τέτοιου προβλήματος είναι: «Φαντάσου ότι περπατάς βόρεια για λίγο, στη συνέχεια στρίβεις αριστερά, προχωράς ευθεία και στρίβεις πάλι αριστερά. Προς ποια κατεύθυνση είσαι;». Τέτοιου είδους τεστ απαιτούν περισσότερο τη χρήση ικανοτήτων χωρικής αντίληψης που εφαρμόζονται στην καθημερινή ζωή (Lohman, 1993).

Ο τελευταίος τύπος δοκιμίων χωρικής αντίληψης, που αναφέραμε, τα δυναμικά δοκίμια στον ηλεκτρονικό υπολογιστή (dynamic computer-based tests), δίνουν έμφαση στην ψυχολογική διαδικασία που εμπλέκεται στα έργα και όχι μόνο στην επίδοση (Grigorenko & Sternberg, 1998). Με άλλα λόγια, εξετάζουν στο τι ο εξεταζόμενος θα ήταν ικανός να κάνει ή πως θα μπορούσε να το κάνει, σε αντίθεση με τα παραδοσιακά τεστ ικανοτήτων, που μετράνε τι ο εξεταζόμενος γνωρίζει ήδη ή τι κάνει στην πραγματικότητα (Embretson, 2000). Ένα δυναμικό στοιχείο αντιπροσωπεύει μια ρύθμιση η οποία αλλάζει σύμφωνα με τη συνάρτηση του χρόνου, όπως κάνει η ανταπόκριση (Contreras, Rubio, Peña, Colom, and Santacreu, 2007). Όσον αφορά τις χωρικές ικανότητες, τα δυναμικά έργα χρησιμοποιούνται για να εξετάζουν την ικανότητα αντίληψης και προέκτασης της πραγματικής κίνησης, να προβλέπουν την τροχιά κινούμενων αντικειμένων και να εκτιμούν το χρόνο άφιξης δύο ή περισσότερων αντικειμένων (Colom, Contreras, Botella, & Santacreu, 2002· Contreras, Colom, Hernández, & Santacreu, 2003· D'Oliveira, 2004; Law, Pellegrino, Mitchell, Fischer, McDonald, & Hunt, 1993· Pellegrino & Hunt, 1989· Pellegrino, Hunt, Abate, & Farr, 1987).

Επίσης, τα δυναμικά τεστ, προσφέρουν την ευκαιρία συγκέντρωσης των λαθών των αντικειμένων (Ackerman & Lohman, 1990· Lohman, 1993). Η προσεκτική ανάλυση των λαθών που κάνουν τα υποκείμενα, δίνουν επιπρόσθετες πληροφορίες για τις ικανότητες τους (π.χ. Kyllonen, 1984).

Ακόμη μια σημαντική πτυχή των τεστ χωρικής αντίληψης είναι η σχετική έμφαση στην ταχύτητα, σε σχέση με το επίπεδο δυσκολίας. Τα τεστ που χορηγούνται υπό συνθήκες μεγάλης ταχύτητας τείνουν να μετρούν πιο συγκεκριμένες πτυχές της χωρικής αντίληψης, σε σχέση με τα τεστ που χορηγούνται χωρίς ταχύτητα. Οι αλλαγές στην πολυπλοκότητα των τεστ συνήθως σημαίνουν και μια αλλαγή στο χρόνο επίλυσής τους (Ackerman & Lohman, 1990· Lohman, 1993).

Κατηγοριοποίηση των Τεστ στους Παράγοντες της Χωρικής Αντίληψης

Ένας από τους τομείς της βιβλιογραφίας της χωρικής αντίληψης που παρουσιάζει ασυμφωνίες, όπως αναφέρθηκε πιο πάνω, είναι τα τεστ που μετρούν τον κάθε παράγοντα. Υπάρχει πληθώρα από τεστ που μετράνε τη χωρική αντίληψη αλλά και μια έντονη σύγχυση αναφορικά με το όνομα και το περιεχόμενό τους (D'Oliveira, 2004).

Οι Eliot και Smith (1983), κατηγοριοποίησαν τα γραπτά τεστ σε τρεις κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία διακρίνεται στα τεστ αναγνώρισης (Recognition-RE) και στα τεστ χειρισμού (Manipulation-MA). Αξίζει να σημειωθεί ότι η κατηγοριοποίηση τους δεν προέκυψε από οποιαδήποτε στατιστική ανάλυση. Η δεύτερη κατηγορία περιλαμβάνει τεστ δύο διαστάσεων στα οποία η επίλυση τους παραμένει στο δυσδιάστατο επίπεδο. Η τρίτη κατηγορία περιλαμβάνει τους νοερούς μετασχηματισμούς.

Οι Linn και Petersen (1985) αναφέρουν ότι ο παράγοντας αντίληψη του χώρου (Spatial Perception-SP) ορίζεται από το «rod-and-frame test» (Witkin & Asch, 1948) και το «Water Level Test» (Piaget & Inhelder, 1956). Ο παράγοντας Νοερή Περιστροφή (Mental Rotation-MR) προσδιορίζεται από τα τεστ: «Spatial Relations» υποσύνολο του «Primary Mental Abilities Test» (Thurstone, 1958), το «Cards Rotation Test» (Ekstrom, French, Harman & Derman 1976), στο οποίο οι συμμετέχοντες έπρεπε να εκτελέσουν μια νοερή περιστροφή δυσδιάστατων αντικειμένων. Συμπεριέλαβαν επίσης το «Mental Rotations Test» (Vandenberg & Kuse, 1978), το οποίο είναι μια έκδοση του τεστ «paper-and-pencil» των Shepard και Metzler (1971), χρησιμοποιώντας τρισδιάστατα αντικείμενα. Για τον παράγοντα Οπτικοποίηση (Visualization-Vz) χρησιμοποίησαν τα τεστ: Hidden Figures, Paper Folding, Paper Form Board, Surface Development, Differential Aptitude Test (spatial relations subtest), Block Design και το Guilford-Zimmerman Spatial Visualization.

Όπως αναφέρθηκε και πιο πάνω, η ανάλυση του Carroll (1993) είναι η πιο περιεκτική. Η κύρια κατηγοριοποίηση των τεστ είναι η ακόλουθη:

- Παράγοντας οπτικοποίηση (Visualization-Vz): περιλαμβάνει τεστ τα οποία αντικατοπτρίζουν τις διαδικασίες κατανόησης, κωδικοποίησης και νοερού μετασχηματισμού χωρικών μορφών. Ενδεικτικά τεστ είναι το Form Board, Block Rotation, Paper Folding, Surface Development και Perspective Tasks. Εξαιρούνται τα τεστ ταχύτητας όπως Cards, Figures, Flags, τα οποία σχετικά είναι απλά και

έχουν κατηγοριοποιηθεί στον παράγοντα Σχέσεις των Εννοιών στο Χώρο (Spatial Relations), σύμφωνα με το Lohman και τους συνεργάτες του (1987).

- Σχέσεις των Εννοιών στο Χώρο (Spatial Relations-SR): περιλαμβάνει σχετικά απλά τεστ ταχύτητας όπως τα Cards, Figures, Flags.
- Ταχύτητα Διεκπεραίωσης (Closure Speed-CS): τα έργα που φορτίζουν σε αυτό τον παράγοντα αποσκοπούν στην αντίληψη μορφών που κατά κάποιον τρόπο έχουν επικαλυφθεί από ένα πλαίσιο που αποσπά την προσοχή. Τέτοια τεστ είναι το Gestald Competition, το Concealed Words και το Mutilated Words.
- Ευελιξία Διεκπεραίωσης (Flexibility of Closure-CF): τα τεστ που φορτίζουν σε αυτό τον παράγοντα είναι τα Hidden Figures, Hidden Patterns, Copying. Στα τεστ αυτά το άτομο καλείται να αναζητήσει μια μορφή, η οποία του δίνεται, σε ένα περίπλοκο πλαίσιο.
- Αντιληπτική Ταχύτητα (Perceptual Speed-PS): περιλαμβάνει τα τεστ Finding As, Number Comparison, Identical Pictures, όπου το άτομο καλείται είτε να αναζητήσει σε ένα πεδίο μια συγκεκριμένη μορφή η οποία δεν επικαλύπτεται είτε να συγκρίνει δύο ή περισσότερες οπτικές εικόνες.

Όπως φαίνεται και από τον πιο κάτω συγκεντρωτικό πίνακα (Πίνακας 2.1), αλλά όπως αναφέρει και ο Carroll (1993), τα τεστ δεν φορτίζουν με συνέπεια σε διακριτούς παράγοντες. Σε κάποιο βαθμό αυτή η σύγχυση είναι μόνο φαινομενική, εξαιτίας της διαφορετικής ονομασίας των τεστ από τον κάθε ερευνητή ή της χρήσης ίδιου ονόματος για διαφορετικά τεστ.

Υπάρχουν όμως και πιο ουσιαστικοί λόγοι για αυτή τη σύγχυση, όπως το γεγονός ότι τα υποκείμενα που καλούνται να λύσουν τα συγκεκριμένα τεστ χρησιμοποιούν ποικιλία διαφορετικών στρατηγικών για να οδηγηθούν στην απάντηση. Ο French (1965), απέδειξε ότι τα διαφορετικά «γνωστικά στυλ» μπορούν να προκαλέσουν διακυμάνσεις στις φορτίσεις των παραγόντων. Επίσης, οι Kyllonen, Lohman, και Wotz (1984) έδειξαν ότι τα υποκείμενα μπορούν να χρησιμοποιήσουν διαφορετικές στρατηγικές για έργα του ίδιου τεστ.

Γενικά, η δυσκολία της κατηγοριοποίησης των τεστ σε παράγοντες της χωρικής αντίληψης, πηγάζει από το γεγονός ότι τα περισσότερα έργα των τεστ, ακόμη και τα πιο «απλά», είναι πραγματικά αρκετά σύνθετα. Τα έργα αυτά απαιτούν αντίληψη και κωδικοποίηση των χωρικών μορφών, εξέταση και πιθανόν νοερό μετασχηματισμό των μορφών αυτών, αποφάσεις για τις συγκρίσεις ή για τα στοιχεία του ερεθίσματος, και λήψη

απόφασης, συχνά κάτω από την πίεση να ανταποκριθείς όσο το δυνατόν γρηγορότερα. Όπως αναφέρει και ο Carroll (1993), είναι αναμενόμενο ότι είναι δύσκολο να κατασκευαστούν διαφορετικά τεστ για κάθε μια από τις πιο πάνω διαδικασίες και ταυτόχρονα να ελαχιστοποιούν την επίδραση των ατομικών διαφορών σε άλλες διαδικασίες.

Πίνακας 2.1

Ερευνητές, Τεστ και Παράγοντες Χωρικής Αντίληψης

ΕΡΕΥΝΗΤΕΣ	Mc Gee	Eliot &	Linn &	Lohman	Carroll
ΤΕΣΤ	(1979)	Smith	Petersen	(1988)	(1993)
		(1983)	(1985)		
Paper form board	Vz	RE		Vz	Vz
Paper folding	Vz	MA	Vz	Vz	Vz
Surface development		MA	Vz		Vz
Perspective tasks	Orientation	MA			Vz
Cube comparison	Orientation	MA	MR	Vz	SR
Hands		RE	MR		SR
Cards	Orientation	RE	MR	Speeded rotation	SR
Water level	Orientation		SP		
Hidden figures	Orientation	RE	Vz		CF
Hidden patterns	Orientation	RE			CF
Overlapping figures		RE			

Εν κατακλείδι, στη μελέτη της χωρικής αντίληψης, ενδείκνυται, να ακολουθήσουμε την υπόδειξη του Horn (1976), ότι κανένα τεστ δεν είναι επαρκές για τη μέτρηση μιας πολύπλοκης δομής. Τέτοιες πολύπλοκες δομές, όπως η χωρική αντίληψη, θα πρέπει να μετράται, «όχι μόνο με διαφορετικούς τρόπους αλλά και με ποικίλους τρόπους» (Johnson και Meade, 1987).

Η Χωρική Αντίληψη ως Βασικό Συστατικό της Νοημοσύνης

Ο Gardner (1983) στη θεωρία του για την πολλαπλή νοημοσύνη ισχυρίστηκε ότι μαθαίνουμε, επικοινωνούμε και λύνουμε προβλήματα με επτά τουλάχιστον διαφορετικούς τρόπους. Ο κάθε τρόπος (style) είναι και μια νοημοσύνη, η οποία έχει δικό της ιδιαίτερο νευρολογικό πρότυπο (pattern) και οι περισσότεροι άνθρωποι μαθαίνουν συνδυάζοντας κάποια από αυτά. Οι νοημοσύνες αυτές είναι: η οπτική/χωρική, η λεκτική/γλωσσική, η λογική/μαθηματική, η σωματική κιναισθητική, η μουσική/ρυθμική, η διαπροσωπική και η ενδοπροσωπική νοημοσύνη. Η χωρική νοημοσύνη στηρίζεται στην αίσθηση της όρασης και στη δυνατότητα οπτικοποίησης αντικειμένων με τη δημιουργία εσωτερικών νοερών εικόνων.

Η αναπτυξιακή πορεία του Gardner (1993a), παρέχει μια εικόνα για την ανάπτυξη της χωρικής αντίληψης σε τέσσερα στάδια για όλη τη διάρκεια της ζωής, ξεκινώντας από την παιδική ηλικία. Καταρχήν είναι σημαντικό να ληφθούν υπόψη οι παρατηρήσεις των γονιών σχετικά με την *ικανότητα κατασκευής ακατέργαστων μοτίβων*. Οι παρατηρήσεις αυτές παρέχουν πληροφορίες σχετικά με «την υπόσχεση» που δίνουν τα παιδιά που έχουν τη δυνατότητα να προχωρήσουν στο πεδίο της χωρικής αντίληψης μέσα από τη χωρική νοημοσύνη τους.

Δεύτερο, θα πρέπει να αναπτυχθεί η *κατανόηση όλων των χωρικών συμβολικών συστημάτων* των παιδιών. Οι θεμελιώδεις δεξιότητες που απαιτούνται για τη δημιουργία και την ερμηνεία των χωρικών συμβόλων, βασίζονται στη χωρική αντίληψη. Σύμφωνα με τον Del Grande (1990), οι δεξιότητες αυτές είναι: ο συντονισμός των κινήσεων των ματιών, η αντίληψη του σχήματος, η αντιληπτική σταθερότητα (ένα αντικείμενο έχει σταθερές ιδιότητες οι οποίες μπορεί να φαίνονται διαφορετικά από άλλες οπτικές γωνίες),

η αντίληψη της θέσης στο χώρο (η σχέση μεταξύ δύο αντικειμένων ή ενός αντικειμένου και του παρατηρητή π.χ. ο προσανατολισμός των γραμμών), η αντίληψη των χωρικών σχέσεων (π.χ. ανάκλαση, μεταφορά, στροφή), η οπτική διάκριση και η οπτική μνήμη.

Τρίτο, χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή η χρήση των σημειωτικών συστημάτων από τους μαθητές. Για παράδειγμα, η έρευνα σχετικά με τη χρήση των διαγραμμάτων αποκαλύπτει ότι τα παιδιά είναι απρόθυμοι να χρησιμοποιούν τα διαγράμματα (Yancey, Thompson, & Yancey, 1989) και δεν βλέπουν τα διαγράμματα ως μέσο για την επίλυση των μαθηματικών έργων (Dufoir-Janvier, Bednarz, & Belanger, 1987). Τα παιδιά επίσης, πρέπει να είναι σε θέση να ερμηνεύουν τα δυσδιάστατα σχέδια των τρισδιάστατων αντικειμένων και να κατασκευάζουν τρισδιάστατα αντικείμενα από ένα σχέδιο (Moses, 1990). Ως εκ τούτου, οι εκπαιδευτικοί πρέπει να διδάξουν τα παιδιά τις συγκεκριμένες αναπαραστάσεις και πως να κινούνται μεταξύ δυσδιάστατων και τρισδιάστατων αναπαραστάσεων. Υπάρχουν ενδείξεις ότι οι μαθητές μπορούν να επωφεληθούν από τα προγράμματα ανάπτυξης των χωρικών ικανοτήτων, τόσο στα μαθηματικά (Diezmann, 1999) όσο και στην επιστήμη (Small & Morton, 1983).

Τέταρτο, οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν την ποικιλία των επαγγελματικών και μη επαγγελματικών ασχολιών που σχετίζονται με τη χωρική νοημοσύνη. Αν και αυτό το στάδιο, δεν έχει ιδιαίτερη σημασία για τα μικρά παιδιά, μπορεί να προκύψουν ευκαιρίες για έκθεση των παιδιών σε επαγγέλματα και δραστηριότητες που ανήκουν στα ενδιαφέροντα τους (Diezmann & Watters, 2000).

Εκτός του Gardner (1993) και άλλοι ψυχολόγοι μελέτησαν τη χωρική αντίληψη ως ιδιαίτερο συστατικό της ανθρώπινης νοημοσύνης. Σύμφωνα με τη θεωρία του Δημητρίου (Δημητρίου, 1993· Demetriou, Christou, Spanoudis, & Platsidou, 2002), ο άνθρωπος νους είναι μια ιεραρχικά δομημένη δομή, η οποία αποτελείται από τρία επίπεδα. Το πρώτο επίπεδο οργάνωσης αφορά στην επεξεργασία των πληροφοριών (σύστημα επεξεργασίας). Το δεύτερο επίπεδο είναι προσανατολισμένο στο περιβάλλον και αφορά στα επιμέρους γνωστικά συστήματα (συστήματα εξειδικευμένων ικανοτήτων), τα οποία επεξεργάζονται πληροφορίες που προέρχονται από διαφορετικά πεδία του περιβάλλοντος. Το τρίτο επίπεδο (υπεργνωστικό σύστημα) είναι προσανατολισμένο κυρίως στον εαυτό και περιλαμβάνει τις διαδικασίες και τις γνώσεις που αφορούν στην κατανόηση του εαυτού μας, την κατανόηση των άλλων ανθρώπων και την αυτορρύθμιση.

Τα εξειδικευμένα δομικά συστήματα ή τα συστήματα εξειδικευμένων ικανοτήτων, που αποτελούν το δεύτερο επίπεδο οργάνωσης του ανθρώπινου νου, είναι τα ακόλουθα: το ποιοτικό-αναλυτικό, το ποσοτικό-συσχετιστικό, το αιτιώδες-πειραματικό, το εικονικό-χωροταξικό και το λεκτικό-προτασιακό (Δημητρίου, 1993). Πιο πρόσφατα ερευνητικά δεδομένα αποκαλύπτουν την ύπαρξη δύο ακόμη συστημάτων εξειδικευμένων ικανοτήτων: του κοινωνικού-διαπροσωπικού και του εικονογραφικού συστήματος (Demetriou & Kazi, 2001). Ακολούθως γίνεται αναφορά μόνο στο εικονικό-χωροταξικό σύστημα που εμπίπτει στο πλαίσιο διερεύνησης της παρούσας εργασίας.

Το εικονικό-χωροταξικό εξειδικευμένο δομικό σύστημα αφορά τον προσανατολισμό του ατόμου στο χώρο, την αναπαράσταση των αντικειμένων και την τοποθέτησή τους στο χώρο. Περιλαμβάνει τις ικανότητες που επιτρέπουν στο άτομο να εκτελεί στο επίπεδο της νοερής εικόνας τις ενέργειες που μπορεί να εκτελέσει και στα πραγματικά αντικείμενα. Για παράδειγμα, το άτομο μπορεί να μετατοπίζει, να αναμορφώνει ή να περιστρέφει νοερά ένα αντικείμενο, μπορεί να προσθέτει ή να αφαιρεί χαρακτηριστικά από την εικόνα ενός αντικειμένου. Οι συστατικές ικανότητες του εικονικού-χωροταξικού εξειδικευμένου δομικού συστήματος επιτρέπουν, δηλαδή, στο άτομο να χειρίζεται στοιχεία και σχέσεις του χώρου.

Στο πλαίσιο αυτό αναφέρονται τρεις συνιστώσες που σχετίζονται με το εικονικό-χωροταξικό εξειδικευμένο δομικό σύστημα του ανθρώπινου νου: η ικανότητα χειρισμού νοητικών εικόνων, η ικανότητα νοητικών περιστροφών και η ικανότητα συντονισμού των προοπτικών. Για την αξιολόγηση της καθεμιάς από τις συνιστώσες αυτές χρησιμοποιούνται συγκεκριμένα έργα (Demetriou & Kyriakides, 2006).

Ανάπτυξη Χωρικής Αντίληψης

Η ανάπτυξη της χωρικής αντίληψης περιγράφει τις αλλαγές στη χωρική σκέψη στη διάρκεια της ζωής του αναπτυσσόμενου ατόμου. Η χωρική ανάπτυξη περιγράφει το τι μπορεί και το τι δεν μπορεί να επιτύχει ένα άτομο στη διάρκεια της ζωής του όσον αφορά προβλήματα στα οποία εμπλέκονται έννοιες χώρου, δηλαδή ποια προβλήματα μπορεί να λύσει ένα άτομο σε μια δεδομένη στιγμή και τι είδους προβλήματα δεν μπορεί να λύσει.

Περιγράφει τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα της σκέψης του ατόμου στις διαφορετικές ηλικίες, τις κρίσιμες ηλικίες στις οποίες συμβαίνουν ποιοτικές αλλαγές στη χωρική σκέψη και προσπαθεί να περιγράψει τους λόγους για τους οποίους αυτές συμβαίνουν.

Το National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1989, 2000), έχει αναγνωρίσει την αναγκαιότητα ενσωμάτωσης του χωρικού συλλογισμού ως μια προσέγγιση στο σημείο εισαγωγής των μαθητών στη μαθηματική εκπαίδευση. Η χρονική στιγμή και το περιεχόμενο αποτελούν δύο κρίσιμα στοιχεία που λαμβάνονται υπόψη στο σχεδιασμό των εκπαιδευτικών εργαλείων για τη βελτίωση της χωρικής αντίληψης.

Οι Piaget και Inhelder (1971) δηλώνουν ότι η γνωστική ανάπτυξη του ατόμου καθορίζει τις δυνατότητες του τι θα μπορούσε να επιτύχει. Σύμφωνα με αυτούς τους ερευνητές, η ανάπτυξη της χωρικής αντίληψης των παιδιών ακολουθεί τρία στάδια. Στο αρχικό στάδιο (preoperational stage) βρίσκονται τα παιδιά μέχρι έξι ετών και στο στάδιο αυτό ένα παιδί παρουσιάζει μια καθαρά εγωκεντρική αντίληψη του κόσμου, όπου τοποθετούν τα αντικείμενα του περιβάλλοντος με αναφορά τον εαυτό τους. Κατανοούν πολύ περιορισμένες τοπολογικές σχέσεις, όπως το διαχωρισμό, τη γεινίαση και το ανοικτό/κλειστό. Το δεύτερο στάδιο (concrete operational stage) εμφανίζεται κατά τις ηλικίες επτά με εννέα ετών. Σε αυτό το στάδιο τα παιδιά αναπτύσσουν ένα γνωστικό χάρτη με συγκεκριμένο πεδίο αναφοράς, ο οποίος τους επιτρέπει να φανταστούν αντικείμενα έξω από το σώμα τους. Τα παιδιά αναπτύσσουν την κατανόηση πιο πολύπλοκων τοπολογικών σχέσεων όπως η σειροθέτηση και ο εγκλεισμός, και αρχίζουν να αναπτύσσουν τις προβολικές σχέσεις, όπως πριν/πίσω και αριστερά/δεξιά. Το τελευταίο στάδιο ανάπτυξης (*formal operational stage*) ξεκινά στην ηλικία των έντεκα ετών, περίπου. Σε αυτό το στάδιο τα παιδιά αναπτύσσουν ένα συντονισμένο πεδίο αναφοράς και αναπτύσσουν την κατανόηση των Ευκλείδειων σχέσεων, όπως την εκτίμηση σχετικών αποστάσεων των ευθειών και την παραλληλία (Piaget και Inhelder, 1967).

Η αρχή αυτή, γνωστή ως η αρχή της τοπολογικής προτεραιότητας, δεν υποστηρίζεται πλέον (Clements & Battista, 1992) και αποτελεί ένα από τα σημεία κριτικής των απόψεων του Piaget για την αναπαράσταση του χώρου. Αντίθετα, φαίνεται ότι είναι δυνατό, ιδέες και για τα τρία είδη σχέσεων (τοπολογικές, προβολικές και ευκλείδειες) να αναπτύσσονται με το πέρασμα του χρόνου και σταδιακά να συνδέονται μεταξύ τους και να δημιουργούν μια σύνθεση. Οι ιδέες αυτές είναι αρχικά διαισθήσεις που βασίζονται στη δράση του παιδιού μέσα στον κόσμο και τον ενεργό χειρισμό των αντικειμένων του κόσμου μέσα στον οποίο το παιδί κινείται και δρα.

Οι Newcomb και Huttenlocher (2000), εντόπισαν ότι μέχρι σήμερα τρεις προσεγγίσεις έχουν κυριαρχήσει γύρω από την ανάπτυξη της χωρικής αντίληψης:

- Η θεωρία των Piaget και Inhelder (1967), οι οποίοι υποστηρίζουν ότι τα νήπια γεννιούνται χωρίς τη γνώση του χώρου ή τη σύλληψη της μονιμότητας των αντικειμένων που καταλαμβάνουν το χώρο και αναπτύσσουν τέτοια γνώση μέσω της εμπειρίας και του χειρισμού του περιβάλλοντός τους.
- Οι «νατιβιστές», οι οποίοι προτείνουν ότι οι ουσιαστικές πτυχές της χωρικής κατανόησης είναι έμφυτες και ότι η βιολογική ωρίμανση συγκεκριμένων περιοχών του εγκεφάλου μπορεί να αποτελέσει τις πτυχές της χωρικής ανάπτυξης που δεν υπάρχουν στη γέννηση
- Η προσέγγιση του Vygotsky, η οποία υπογραμμίζει τη σημασία του πολιτιστικού παράγοντα στη διαμεσολάβηση για την ανάπτυξη των χωρικών δεξιοτήτων.

Οι ίδιες ερευνήτριες υποστηρίζουν μια αλληλεπιδραστική προσέγγιση (adaptive combination) στη χωρική ανάπτυξη που συνθέτει και συμπληρώνει τις βασικές ιδέες των τριών κλασικών προσεγγίσεων. Ισχυρίζονται ότι η βιολογική προπαρασκευή αλληλεπιδρά με το χωρικό περιβάλλον που τα νήπια αντιμετωπίζουν μετά τη γέννησή τους για να δημιουργήσουν τη χωρική ανάπτυξη και να ωριμάσουν τη χωρική αντίληψη.

Παράγοντες που Επηρεάζουν την Ανάπτυξη της Χωρικής Αντίληψης

Διάφορες έρευνες στον τομέα της ψυχολογίας έχουν προσδιορίσει τους παράγοντες που μπορεί να επηρεάσουν την ανάπτυξη της χωρικής αντίληψης του ατόμου. Τέτοιοι παράγοντες είναι: η ηλικία, το φύλο και η σχετική με το χώρο εμπειρία (Miller, 1996).

Ο παράγοντας ηλικία. Όσον αφορά τον παράγοντα ηλικία φαίνεται να φθάνει στο επίπεδο ωρίμανσης κατά την εφηβεία και να μειώνεται σταδιακά στα τέλη της ηλικίας των είκοσι, για το γενικό πληθυσμό, λόγω των επιδράσεων της ηλικίας, ακόμη και στα άτομα που χρησιμοποιούν τις ικανότητες αυτές στο επάγγελμά τους (Salthouse, Babcock, Skovronek, Mitchel & Palmon, 1990).

Ο Ben-Chaim και οι συνεργάτες του (1989), υποστηρίζουν ότι η καλύτερη ηλικία για την απόκτηση χωρικών δεξιοτήτων μέσω της διδασκαλίας είναι μεταξύ 11 και 12 ετών. Σύμφωνα με τους Newcombe και Huttenlocher (2000), τα παιδιά ολοκληρώνουν την ανάπτυξη της χωρικής τους αντίληψης μέχρι την ηλικία των εννέα με δέκα ετών.

Εξάλλου, η δυνατότητα διερεύνησης νοερών χειρισμών και πολύπλοκων μαθηματικών εννοιών είναι εφικτή από την ηλικία των 13 ετών και μετά. Η μέγιστη δυνατότητα των μαθητών επιτυγχάνεται στα 17 τους χρόνια, υπονοώντας ότι οι μαθητές στο λύκειο και στο πανεπιστήμιο σκέφτονται τυπικά λειτουργικά.

Αρκετές έρευνες εστιάζονται στην ανάπτυξη της χωρικής ικανότητας. Κάποιες έρευνες επικεντρώνονται στις ατομικές διαφορές της χωρικής αντίληψης σε διαφορετικά ηλικιακά επίπεδα (Battista, 1990· Burnett, Lane, & Dratt, 1979· Fennema & Tartre, 1985· Lohman & Kyllonen, 1983· Salthouse, 1987· Salthouse, Babcock, Mitchell, Palmon, & Skovronek, 1990· Vandenberg, 1975). Άλλες επικεντρώνονται στις ηλικίες που εμφανίζονται πιο έντονα διαφορετικές πτυχές της χωρικής αντίληψης (Geiringer & Hyde, 1976· Linn & Petersen, 1986· Maccoby & Jacklin, 1974· Piaget & Inhelder, 1967, 1971· Salthouse & Mitchell, 1990· Smith & Schroeder, 1979· Tartre, 1990· Vandenberg & Kruse, 1978). Επιπρόσθετα, άλλες έρευνες ασχολούνται με τον τρόπο αλλαγής της χωρικής αντίληψης με την πάροδο του χρόνου (Bishop, 1978· Brinkman, 1966· Clements, Battista, Sarama, & Swaminathan, 1997· Coleman & Gotch, 1998· Salthouse, Babcock, Mitchell, Palmon, & Skovronek, 1990).

Ο παράγοντας φύλο: Κατά τη διάρκεια των προηγούμενων τριών δεκαετιών, παράχθηκε μία ογκώδης βιβλιογραφία σχετικά με τις διαφορές φύλων στις γνωστικές ικανότητες (Halpern, 1986· Linn & Petersen, 1986· Maccoby & Jacklin, 1974). Μία γνωστική ικανότητα που έχει εξεταστεί λεπτομερώς, είναι η χωρική αντίληψη, μία περιοχή στην οποία τα αγόρια σημειώνουν συχνά ψηλότερη βαθμολογία από τα κορίτσια (Bouchard & McGee, 1977· Harris, 1978· McGee, 1979· Sanders, Soares & D'Aquila, 1982· Clements και Battista, 1992). Επίσης, υπάρχουν έρευνες που εξηγούν ότι αυτές οι διαφορές φύλου μπορεί να πηγάζουν από το περιβάλλον ή τις διαφορετικές εμπειρίες των ατόμων (Connor, Serbin & Schackman, 1978· Vandenberg, 1975).

Οι Linn και Petersen (1985), βρήκαν τις πιο μεγάλες διαφορές, στη χωρική αντίληψη μεταξύ των δύο φύλων, κατά τη μέτρηση της νοερής περιστροφής. Ακόμη, οι ίδιοι μέσα από την έρευνά τους βρήκαν ότι οι πιο μικρές διαφορές χωρικής αντίληψης

μεταξύ των δύο φύλων, παρουσιάζονται στη μέτρηση της χωρικής αντίληψης. Δεν παρουσιάστηκαν διαφορές για τη χωρική αντίληψη των δύο φύλων, όσον αφορά την οπτικοποίηση στο χώρο. Σε μια άλλη ανάλυση, οι Voyer, Voyer και Bryden (1995) βρήκαν τις πιο ισχυρές διαφορές φύλων στην κατηγορία της νοητικής περιστροφής, μεγάλες αλλά λιγότερο σταθερές για την κατηγορία χωρικής αντίληψης, και ιδιαίτερα μεταβλητές και συχνά ασήμαντες για την κατηγορία της χωρικής οπτικοποίησης (Manger & Eikeland, 1998).

Οι Connor και Serbin (1985) βρήκαν αντιφατικά αποτελέσματα στη μελέτη τους για τη χωρική οπτικοποίηση μεταξύ δεκατριών και δεκαεξάχρονων μαθητών, με τα κορίτσια να υπερέχουν. Η Tartre (1990) δεν εντόπισε διαφορές φύλων στη χωρική οπτικοποίηση ούτε στις έρευνές της στο Γυμνάσιο, ούτε στο Λύκειο. Τέλος, οι Manger & Eikeland (1998) διαπίστωσαν ότι τα δεκατριών κορίτσια έχουν σημαντικά καλύτερη επίδοση από τα αγόρια στη χωρική οπτικοποίηση.

Οι Silverman, Choi και Peters (2007), στην έρευνα τους εντόπισαν σημαντικές διαφορές ανάμεσα στη χωρική αντίληψη των ενήλικων ανδρών και γυναικών. Συγκεκριμένα, οι άνδρες παρουσίασαν πιο υψηλή επίδοση, από τις γυναίκες, στο τεστ νοερής περιστροφής τρισδιάστατων σχημάτων, στις επτά εθνικές διαφορετικές ομάδες και στις σαράντα χώρες που πήραν μέρος στην έρευνα αυτή. Από την άλλη, οι γυναίκες παρουσίασαν πολύ πιο υψηλές επιδόσεις, από τους άνδρες, στο τεστ μνήμης της θέσης που έχουν τα αντικείμενα στο χώρο, στις επτά διαφορετικές εθνικές ομάδες και στις τριανταπέντε από τις σαράντα χώρες που πήραν μέρος στην έρευνα.

Πολλές θεωρίες έχουν αναπτυχθεί, για να προσπαθήσουν να εξηγήσουν τη φύση και την προέλευση των διαφορών φύλων στην οπτικό-χωρική αντίληψη. Τουλάχιστον τρεις από αυτές τις θεωρίες έχουν τονίσει το ρόλο των βιολογικών παραγόντων.

Όλες αυτές οι προσεγγίσεις έχουν γίνει με ιδιαίτερο σκεπτικισμό. Οι Carplan, MacPherson και Tobin (1985), για παράδειγμα, έχουν επικρίνει αυτές τις βιολογικές προσεγγίσεις με πολυάριθμους λόγους, συμπεριλαμβανομένου του γεγονότος ότι οι αναφερόμενες διαφορές φύλων στη χωρική αντίληψη είναι ευμετάβλητες· αυτές οι διαφορές φύλων, όταν υπάρχουν, είναι συχνά εξαιρετικά μικρές· οι έρευνες στις οποίες αναφέρθηκαν αυτές οι διαφορές είναι συχνά μεθοδολογικά ατελείς. Αντ' αυτού, έχει προταθεί ότι οι διαφορές φύλων στη χωρική αντίληψη είναι αποτέλεσμα των πολιτιστικά

βασισμένων διαφορών στα σχέδια κοινωνικοποίησης και τις δραστηριότητες που σχετίζονται με το φύλο (Goldstein, Haldane & Mitchell, 1990· Serbin & Connor, 1979).

Ενδεχομένως ιδιαίτερη σημασία στο να δικαιολογηθούν οι διαφορές φύλου είναι οι επιπτώσεις των εμπειρικών παραγόντων και των παραγόντων στις ασκήσεις (ή γενικότερα των παραγόντων επίδοσης) στη συμπεριφορά στη χωρική αντίληψη των δύο φύλων. Ανεξάρτητα από το ρόλο, που ενδεχομένως, οι βιολογικοί παράγοντες μπορούν να διαδραματίσουν, οι μεταβλητές των ασκήσεων –όπως τα χρονικά περιθώρια ή η δυσκολία της άσκησης- και οι εμπειρικοί παράγοντες –όπως η προηγούμενη επαφή με ασκήσεις ή οι προσδοκίες για την επιτυχία των ασκήσεων- αναμφισβήτητα επηρεάζουν την επίδοση και μπορεί να συμβάλει στις διαφορές φύλων που αναφέρονται στη βιβλιογραφία. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η παρατήρηση των Maccoby και Jacklin (1974), οι οποίες αναφέρουν ότι τα αγόρια τείνουν να εκτελούν τις ασκήσεις πιο γρήγορα, ενώ τα κορίτσια εργάζονται πιο αργά και προσεκτικά (Goldstein, Haldane & Mitchell, 1990). Οι Gilmartin και Patton (1984), απαριθμούν τρεις άλλους παράγοντες διαφοροποίησης της χωρικής αντίληψης των δύο φύλων, τις ορμονικές επιδράσεις, τα ειδικευμένα μέρη του εγκεφάλου και τη διαδικασία κοινωνικοποίησης.

Ο βαθμός στον οποίο η κληρονομικότητα και το περιβάλλον εμπλέκονται στην ανάπτυξη των χωρικών δεξιοτήτων παραμένει αμφισβητούμενος (Tuross και Ervin, 2000). Τα βασισμένα στο φύλο περιβάλλοντα και οι δραστηριότητες, στις οποίες εμπλέκονται τα άτομα, μπορούν επίσης να επηρεάσουν την ανάπτυξη της χωρικής αντίληψης. Σε αυτό το πνεύμα, οι Baenniger και Newcombe (1989) υποστηρίζουν ότι κανονικά τα αρσενικά έχουν περιβάλλοντα που τους παρέχουν περισσότερες ευκαιρίες για να συμμετέχουν σε χωρικά έργα και ενθαρρύνονται να συμμετέχουν σε περισσότερες δραστηριότητες που απαιτούν τη χρήση της χωρικής αντίληψης από ότι οι γυναίκες.

Ο παράγοντας εκπαίδευσης. Οι Clements και Battista (1992) επισημαίνουν ότι η επίδοση στα χωρικά έργα βελτιώνεται με το εκπαιδευτικό επίπεδο. Πολυάριθμες μελέτες (Ben-Chaim *et al.*, 1988· Burnett & Lane, 1980· Lord, 1985) έχουν δείξει ότι η χωρική αντίληψη μπορεί να αναπτυχθεί μέσα από εκπαίδευση αν χρησιμοποιούνται τα κατάλληλα εργαλεία.

Ο Lohman (1993) αναφέρει ότι οι δεξιότητες της χωρικής αντίληψης μπορεί να αναπτυχθούν με πρακτική και εκπαίδευση. Έρευνες έχουν δείξει ότι δραστηριότητες με τη χρήση στερεών μπορούν να ενισχύσουν ικανότητες οπτικοποίησης των αντικειμένων

(Ben-Chaim, Lappan, & Houang, 1988· Izard, 1987). Άλλες έρευνες έχουν δείξει ότι οι μαθητές των δημοτικών σχολείων, όπου χρησιμοποιούν πολλά εποπτικά υλικά, τείνουν να έχουν καλύτερα αποτελέσματα στα χωρικά έργα από παιδιά που δεν χρησιμοποιούν εποπτικά υλικά στα σχολεία τους (Bishop, 1980).

Όπως αναφέρει και ο Greabell (1978), η χρήση ποικιλίας εποπτικών υλικών είναι επωφελής. Τέτοιες κιναισθητικές εμπειρίες, όπως η κίνηση του σώματος και η χρήση γεωμετρικών στερεών, βοηθά τα νεαρά παιδιά να μαθαίνουν γεωμετρικές έννοιες (Pigge, 1978). Εξαιτίας της αντιληπτικής – εννοιολογικής αλληλεπίδρασης στη χωρική νοημοσύνη, χρειάζονται κατάλληλες αντιληπτικές εμπειρίες για τη δημιουργία αναπαραστάσεων. Οι μαθητές χρειάζονται ευκαιρίες με σκοπό να αλληλεπιδράσουν με πληροφορίες που παρουσιάζονται σε χωρική μορφή, προκειμένου να κατασκευάσουν γνωστικές αναπαραστάσεις, οι οποίες είναι ανακατασκευές των εμπειριών και να μπορούν να εμπλακούν στο χωρικό συλλογισμό (Diezmann & Watters, 2000).

Οι Hershkowitz, Parzysz και van Dormolen (1996) αποδίδουν εξαιρετική σημασία στην αλληλεπίδραση του μαθητή με τα φυσικά αντικείμενα και σχήματα κατά τη διαδικασία της μάθησης των γεωμετρικών εννοιών. Η αλληλεπίδραση του μαθητή με τα φυσικά αντικείμενα περιλαμβάνει την κατανόηση του χώρου που τον περιβάλλει, την περιγραφή του, την κωδικοποίηση και την αποκωδικοποίηση ενός πλήθους οπτικών πληροφοριών. Αυτός είναι ο χώρος μέσα στον οποίο αντιμετωπίζουμε πραγματικές προβληματικές καταστάσεις – από προβλήματα της καθημερινής ζωής μέχρι προβλήματα στην αρχιτεκτονική, στην τέχνη, στη μηχανική. Επιπλέον, ο Freudenthal (1973), τονίζει ότι η διδασκαλία και η μάθηση της γεωμετρίας αποτελεί μια από τις καλύτερες ευκαιρίες προκειμένου να μάθει κανείς πώς να μαθηματικοποιήσει τον πραγματικό χώρο με τον οποίο αλληλεπιδρά.

Μέσα από την παρούσα έρευνα ερευνήθηκε κατά πόσο η διδασκαλία με τη χρήση εποπτικών υλικών μπορεί να βελτιώσει τη χωρική αντίληψη των μαθητών και να επηρεάσει την εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος.

Ερευνητές όπως ο Del Grande (1987) και ο Bishop (1980, 1983) επισήμαναν ότι η χωρική αντίληψη αποτελεί σημαντικό παράγοντα για την κατανόηση της γεωμετρίας και της στερεομετρίας. Αφού, σύμφωνα με τους Connor και Serbin (1985), οι παράγοντες της οπτικοποίησης (visualization) των εννοιών του χώρου και του προσανατολισμού στο χώρο μπορούν να αποτελέσουν ισχυρούς παράγοντες πρόβλεψης της μαθηματικής επίδοσης.

Ο Bishop (1980, 1983), εύστοχα διευκρίνισε την αναγκαιότητα των δεξιοτήτων του χώρου στη διδασκαλία των μαθηματικών, αφού η αντίληψη τρισδιάστατων σχημάτων είναι μια περίπλοκη διαδικασία, η οποία προϋποθέτει τη νοηματοδότηση των οπτικών και απτών δεδομένων (Saads & Davis, 1997β). Συγκεκριμένα, οι Saads και Davis (1997β), επισήμαναν τη σημασία της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου και της γλωσσικής ικανότητας, στη συνεχή ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης. Οι Tso και Liang (2002), βρήκαν ότι υπάρχει σημαντική συσχέτιση μεταξύ της αντίληψης εννοιών του χώρου και των επιπέδων van Hiele (1986), τα οποία αναφέρονται στη γεωμετρία. Εισηγούνται επίσης, ότι η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου αποτελεί σημαντικό γνωστικό παράγοντα στη μάθηση της γεωμετρίας και ότι οι δραστηριότητες που αναφέρονται στην αντίληψη των εννοιών του χώρου μπορούν να συμβάλουν αποτελεσματικά στην ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης.

Σύμφωνα με το Wheatley (1991), «η χωρική αντίληψη βρίσκεται στην καρδιά της απόκτησης σημασίας και νοήματος στα μαθηματικά» (σ. 35). Συγκεκριμένα, οι Wheatley και Reynolds (1999), υποστηρίζουν ότι η ικανότητα κατασκευής και μετασχηματισμού νοητικών εικόνων οδηγεί σε ευελιξία και ισχύ στα μαθηματικά. Υποστηρίζεται επίσης ότι τα άτομα με υψηλού επιπέδου χωρική αντίληψη είναι καλύτερα στο να μετασχηματίζουν, να ερμηνεύουν και να ταξινομούν γεωμετρικά σχήματα, μοτίβα και διαγράμματα (English & Warren, 1995).

Η χωρική σκέψη χρησιμοποιείται τόσο στην αναπαράσταση όσο και στο χειρισμό πληροφοριών κατά την επίλυση προβλημάτων (Clements & Battista, 1992). Σε μια διαχρονική έρευνα των Fennema και Tartre (1985) που πραγματοποιήθηκε ανάμεσα σε μαθητές γυμνασίου διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές με υψηλό επίπεδο χωρικής εξεικόνισης και χαμηλό επίπεδο λεκτικής ικανότητας μετέφραζαν το πρόβλημα σε εικόνα, καλύτερα από ότι οι μαθητές με χαμηλό επίπεδο χωρικής οπτικοποίησης.

Από την άλλη, από την έρευνα των Booth και Thomas (1999) συνάγεται το συμπέρασμα ότι, ενώ ένα υψηλότερο επίπεδο χωρικών ικανοτήτων καθιστά τους μαθητές ικανούς να έχουν καλύτερη επιτυχία στην ερμηνεία δεδομένου διαγράμματος ή εικόνας που σχετίζεται με ένα μαθηματικό πρόβλημα, οι ικανότητες αυτές δεν βοηθούν ιδιαίτερα σε σχέση με τη μετάφραση του προβλήματος σε διαγραμματική ή εικονική αναπαράσταση. Οι χωρικές δεξιότητες καθιστούν τους μαθητές ικανούς να ταξινομούν, να αναλύουν και να δομούν πληροφορίες. Η αντίστροφη διαδικασία της κατασκευής ενός κατάλληλου διαγράμματος από λεκτικές πληροφορίες είναι πιο δύσκολη, γιατί εμπεριέχει περισσότερα βήματα και απαιτεί τη μεσολάβηση άλλων δεξιοτήτων (Booth & Thomas, 1999).

Η σχέση ανάμεσα στη χωρική αντίληψη και τη μαθηματική ικανότητα βασίζεται στο γεγονός ότι οι πράξεις που διενεργούνται καθώς το άτομο αλληλεπιδρά με τα νοητικά μοντέλα στα μαθηματικά είναι συχνά οι ίδιες με εκείνες τις πράξεις που χρησιμοποιούνται για να λειτουργήσει σε χωρικά περιβάλλοντα (Battista, 1994). Οποιαδήποτε σχέση ανάμεσα στη μάθηση των μαθηματικών και τη χωρική αντίληψη εξαρτάται από τον τύπο χωρικής αντίληψης που εξετάζεται και από το δοκίμιο που χορηγείται για τη μέτρηση του επιπέδου της υπό εξέταση ικανότητας (Tartre, 1990).

Επιπρόσθετα, η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου συνδέεται συχνά με την ανάπτυξη της δημιουργικότητας, όχι μόνο στην τέχνη αλλά και στα μαθηματικά και στην επιστήμη (Shepard, 1978). Για παράδειγμα, ο Albert Einstein δήλωσε ότι οι λεκτικές διαδικασίες δεν διαδραμάτισαν κανένα ρόλο στη δημιουργική του σκέψη ενώ αντίθετα η ικανότητα οπτικής αντίληψης συνέβαλε στις διάφορες ανακαλύψεις.

Εν κατακλείδι, η μαθηματική εκπαίδευση δίνει έμφαση στη χωρική αντίληψη για δύο τουλάχιστον λόγους. Αρχικά, ο πρώτος λόγος είναι η δυνατή συσχέτιση της επίδοσης στα μαθηματικά και της χωρικής αντίληψης, που καθορίζεται από εγκεκριμένα τεστ ικανοτήτων. Ο άλλος λόγος, είναι η πεποίθηση ότι οι οπτικές προσεγγίσεις μπορούν να αποτελέσουν μία ισχυρή εισαγωγή για τις πολύπλοκες γενικεύσεις των μαθηματικών, παρέχοντας εμπειρικές και διαισθητικές αποδείξεις στο μαθητή (Olkun & Knaupp, 1999).

Η Χωρική Αντίληψη ως Πεδίο Έρευνας

Οι περισσότερες έρευνες για τη χωρική αντίληψη έχουν παραχθεί στηριζόμενες σε τέσσερις ερευνητικές προοπτικές: (α) την προοπτική της διαφορετικότητας (the differential perspective) που περιλαμβάνει τη σύγκριση της χωρικής αντίληψης διαφορετικών πληθυσμών (όπως γυναίκες και άντρες) (β) την ψυχομετρική προοπτική (the psychometric perspective), η οποία περιλαμβάνει τις σχέσεις ανάμεσα στα διαφορετικά χωρικά έργα με σκοπό να προσδιορίσει τους παράγοντες της χωρικής αντίληψης (γ) τη γνωστική προοπτική (the cognitive perspective) που περιλαμβάνει τον προσδιορισμό των διαδικασιών που χρησιμοποιούνται παγκόσμια για την επίλυση συγκεκριμένων έργων χωρικής αντίληψης που παρόλα αυτά διαφέρουν ποσοτικά στην αποδοτικότητα και (δ) την προοπτική στρατηγικής (the strategy perspective) η οποία περιλαμβάνει τον προσδιορισμό των ποιοτικά διαφορετικών στρατηγικών που χρησιμοποιούνται για την επίλυση ενός έργου χωρικής αντίληψης με διαφορετικούς λύτες. Αυτές οι τέσσερις αντιλήψεις φανερώνουν την πολυπλοκότητα αυτής της περιοχής. Οι ερευνητές κάθε μίας αντίληψης εξετάζουν πληροφορίες λεπτομερώς σε διαφορετικά επίπεδα και χρησιμοποιούν διαφορετικές ποιοτικές προσεγγίσεις (Linn and Petersen, 1985).

Γεωμετρία και Εννοιολογική Σύλληψη Γεωμετρικού Σχήματος

Σύμφωνα με τον Peletier «Η γεωμετρία αναπαριστά τη φύση, καθώς είναι καθρέφτης της και δεν κάνει τίποτα άλλο παρά να ανακαλύπτει τα γεωμετρικά σχήματα που υπάρχουν στην πραγματικότητα» (αναφορά στον Barbin, 2003). Η γεωμετρία συνέβαλε στο να βοηθήσει τον άνθρωπο να συσχετιστεί με το περιβάλλον του και να κατανοήσει το χώρο που βρίσκεται γύρω του (Τρούλης, 1992). Όπως είναι γνωστό η γεωμετρία δημιουργήθηκε λόγω της ανάγκης του ανθρώπου να μετρήσει τα κτήματά του και τα κτίσματά του. Πιο συγκεκριμένα ο Ηρόδοτος αναφέρει ότι η γεωμετρία αναπτύχθηκε ως εργαλείο για τη μέτρηση της γης και την οριοθέτηση των αγρών όταν αποσύρονταν τα νερά του Νείλου (Φιλίππου & Χρίστου, 2002).

Η γεωμετρία συχνά χαρακτηρίζεται ως «τα μαθηματικά του χώρου» και θεωρείται ένας τρόπος σύνδεσης των μαθηματικών με τον πραγματικό κόσμο (Bishop, 1983· Clements, 1998). Στην πραγματικότητα, η μάθηση της γεωμετρίας βασίζεται σε μια συνεχή αλληλεπίδραση ανάμεσα στη θεωρία της γεωμετρίας (φυσικός χώρος, μαθηματικά, φυσική) και στις γραφικές χωρικές ολότητες, με άλλα λόγια, μια αλληλεπίδραση ανάμεσα στη θεωρία και στα διαγράμματα. Η θεωρία στηρίζει τη γνώση και το θεωρητικό έλεγχο, ενώ τα σχήματα ενισχύουν την οπτική αντίληψη με την πιθανή βοήθεια γεωμετρικών οργάνων ή άλλων μέσων.

Περισσότερο από άλλες περιοχές των μαθηματικών, η γεωμετρία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανακάλυψη και ανάπτυξη διαφόρων τρόπων σκέψης (Duvai, 1998). Για τους λόγους αυτούς, τα σύγχρονα προγράμματα των μαθηματικών τονίζουν τη σπουδαιότητα της γεωμετρίας, τόσο ως αυτόνομου θέματος όσο και ως μέσου για την ανάπτυξη άλλων μαθηματικών εννοιών (NCTM, 2000).

Κατά τη διάρκεια των περασμένων είκοσι χρόνων, ο γεωμετρικός συλλογισμός εξετάστηκε από διάφορους μελετητές της Διδακτικής των Μαθηματικών, βασισμένοι ο καθένας σε διαφορετική θεωρητική θεώρηση. Λαμβάνοντας υπόψη τη σημαντικότητα του γεωμετρικού συλλογισμού στη μαθηματική εκπαίδευση, ο σχηματισμός ενός πλαισίου ικανοτήτων καθίσταται αναγκαίος, αφού οι ικανότητες αυτές θα μπορούσαν να αξιοποιηθούν για την ενδυνάμωση της επίδοσης των μαθητών στη Γεωμετρία.

Θεωρίες Σχετικές με τη Γεωμετρία

Η Θεωρία των van Hiele

Τις τελευταίες δεκαετίες, αρκετοί ερευνητές έχουν μελετήσει τη γεωμετρική αιτιολόγηση βασισμένοι σε διαφορετικά θεωρητικά πλαίσια. Οι Van Hiele ανέπτυξαν ένα μοντέλο που αναφέρεται σε ιεραρχικά επίπεδα της γεωμετρικής αντίληψης (Van Hiele, 1986). Το μοντέλο είναι αποτέλεσμα της διδακτορικής εργασίας των Dina van Hiele-Geldof and Pierre van Hiele στο Πανεπιστήμιο της Ουτρέχτης στην Ολλανδία (Crowley, 1987). Βασισμένοι σε παιδαγωγικές εμπειρίες και διδακτικά πειράματα, καθόρισαν ένα μοντέλο

μάθησης της γεωμετρίας, το οποίο περιλαμβάνει πέντε επίπεδα κατανόησης τα οποία αντανακλούν τα επίπεδα της γεωμετρικής σκέψης του μαθητή. Σύμφωνα με τη θεωρία, τα πέντε επίπεδα κατανόησης στη γεωμετρία είναι: το επίπεδο της σφαιρικής αντίληψης, το επίπεδο ανάλυσης, το επίπεδο άτυπης παραγωγικής σκέψης, το επίπεδο παραγωγικής σκέψης και το αυστηρό επίπεδο.

Στο επίπεδο 1, της «Σφαιρικής ή ολικής αντίληψης (οπτικοποίησης)» οι μαθητές αναγνωρίζουν τα σχήματα από τη συνολική μορφή τους, σαν μια ολότητα και όχι από τις ιδιότητες τους (Crowley, 1987· Shaughnessy & Burger, 1985). Αντιλαμβάνονται το χώρο που υπάρχει γύρω τους οπτικά. Για παράδειγμα, ονομάζουν ένα σχήμα ως ορθογώνιο, γιατί μοιάζει με μια πόρτα. Μπορούν να διακρίνουν και να αναπαραγάγουν τα διάφορα σχήματα (Crowley, 1987), αλλά δεν μπορούν να διακρίνουν τις ιδιότητες ενός γεωμετρικού σχήματος (Crowley, 1987· Shaughnessy & Burger, 1985). Επίσης, μπορούν να περιγράφουν τα σχήματα με ορθή ή άτυπη ορολογία. Οι μαθητές, για παράδειγμα, ονομάζουν ένα σχήμα ως ρόμβο επειδή έχει το συγκεκριμένο σχήμα που έχουν μάθει να το αποκαλούν «ρόμβο». Οι μαθητές που βρίσκονται στο επίπεδο αυτό μπορούν να μάθουν τη γεωμετρική ορολογία που είναι συνυφασμένη με τα δεδομένα σχήματα και να τα αναπαραγάγουν σχεδιάζοντας τα διαισθητικά ή κατασκευάζοντας τα με πρόχειρα υλικά.

Ακολούθως, στο επίπεδο 2 «Ανάλυσης ή Περιγραφής», οι μαθητές μπορούν να αναγνωρίσουν και να ονομάσουν ένα σχήμα βάσει των ιδιοτήτων του (Crowley, 1987· Prevost, 1985· Shaughnessy & Burger, 1985). Μπορούν επίσης να συγκρίνουν και να ταξινομούν σχήματα με βάση τις ιδιότητες τους (Crowley, 1987· Shaughnessy & Burger, 1985). Για παράδειγμα, ένας μαθητής μπορεί να σκεφτεί πως ένας ρόμβος είναι ένα σχήμα με τέσσερις ίσες πλευρές. Οι μαθητές βλέπουν τα σχήματα ως σύνολο ιδιοτήτων, παρά ως οπτικές ολότητες. Οι ιδιότητες των σχημάτων γίνονται κτήμα των μαθητών πειραματικά μέσω παρατήρησης, μέτρησης, σχεδιασμού και μοντελοποίησης. Δεν μπορούν όμως να κάνουν συσχετίσεις μεταξύ διαφόρων ιδιοτήτων του ίδιου σχήματος, ούτε μεταξύ διαφόρων σχημάτων. Για παράδειγμα ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι ένα σχήμα δεν μπορεί να είναι ορθογώνιο, γιατί είναι τετράγωνο.

Οι μαθητές στο επίπεδο 3 της «Άτυπης παραγωγική σκέψης», είναι σε θέση να αντιληφθούν τις σχέσεις ανάμεσα στο ίδιο το σχήμα (π.χ. για να είναι οι απέναντι πλευρές ενός τετραγώνου παράλληλες, πρέπει οι απέναντι γωνίες να είναι ίσες) και τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των σχημάτων (π.χ. ένα τετράγωνο αναγνωρίζεται ως ρόμβος με κάποιες επιπλέον ιδιότητες) (Prevost, 1985). Μπορούν να κάνουν απλούς παραγωγικούς

συλλογισμούς αλλά δεν μπορούν να κατανοήσουν ή να συνθέσουν πλήρεις αποδείξεις των ισχυρισμών τους. Μια ιδιότητα ενεργοποιεί άλλες ιδιότητες, με αποτέλεσμα ένας ορισμός να μην είναι μια απομονωμένη περιγραφή, αλλά μια μέθοδος λογικής οργάνωσης (Crowley, 1987· Prevost, 1985· Shaughnessy & Burger, 1985). Έτσι γίνεται σαφές γιατί, για παράδειγμα, ένα τετράγωνο είναι και ορθογώνιο (Crowley, 1987· Prevost, 1985· Shaughnessy & Burger, 1985). Ο τρόπος σκέψης είναι πιο σύνθετος από τα προηγούμενα επίπεδα.

Το τέταρτο επίπεδο σχετίζεται με την «Παραγωγική σκέψη». Οι μαθητές κατανοούν τη σημαντικότητα της απόδειξης (Crowley, 1987) και το ρόλο των αξιωμάτων, των θεωρημάτων και των αποδείξεων (Shaughnessy & Burger, 1985). Αναπτύσσουν συλλογισμούς για να αποδείξουν μια πρόταση χρησιμοποιώντας δεδομένα αξιώματα (Crowley, 1987· Shaughnessy & Burger, 1985). Μπορούν επίσης να κατανοήσουν ότι η απόδειξη μπορεί να γίνει με περισσότερους από ένα τρόπους (Crowley, 1987). Δεν αναγνωρίζουν όμως την ανάγκη για αυστηρότητα στην απόδειξη και δεν κατανοούν τις σχέσεις μεταξύ διαφόρων αξιωματικών συστημάτων.

Τέλος, στο επίπεδο 5 «Αυστηρό (τυπικό αξιωματικό)», τα άτομα είναι σε θέση να κατανοήσουν την αναγκαιότητα της αυστηρής αιτιολόγησης και είναι ικανοί να κάνουν αφηρημένους συλλογισμούς. Στο στάδιο αυτό γνωρίζουν την ύπαρξη και κατανοούν και άλλα αξιωματικά συστήματα, όπως οι μη-Ευκλείδεις γεωμετρίες (Crowley, 1987· Mayberry, 1983· Unal, Jakubowski, & Corey, 2009). Επίσης, μπορούν να συγκρίνουν διαφορετικά αξιωματικά συστήματα (Crowley, 1987· Shaughnessy & Burger, 1985).

Οι Clements και Battista (1992), πρότειναν την ύπαρξη του επιπέδου 0, το οποίο ονόμασαν προ-αναγνωριστικό (pre-recognition). Οι μαθητές σε αυτό το επίπεδο αναγνωρίζουν μόνο ένα υποσύνολο των οπτικών χαρακτηριστικών ενός σχήματος, ως αποτέλεσμα της αδυναμίας να διακρίνουν τα σχήματα. Για παράδειγμα, μπορούν να διαχωρίσουν τα τρίγωνα και τα τετράγωνα, αλλά μπορεί να μην είναι ικανοί να διαχωρίσουν ένα ρόμβο από ένα παραλληλόγραμμο.

Τα επίπεδα είναι διακριτά και διαφορετικά όσον αφορά τη γνωστική ικανότητα των μαθητών. Επιπλέον, η εξέλιξη από το από το ένα επίπεδο στο επόμενο είναι σειριακή και ιεραρχημένη. Κάθε επίπεδο σημαίνει μια βελτίωση στις ικανότητες αιτιολόγησης από ότι στο προηγούμενο επίπεδο. Ένας μαθητής μπορεί να περάσει στο επόμενο επίπεδο αν έχει κατακτήσει τα προηγούμενα (Gutierrez, 1992· Mason, 2005). Αυτό συμβαίνει σύμφωνα με

τους van Hiele (1986), όμως έρευνες που έγιναν στις Ηνωμένες Πολιτείες και σε άλλες χώρες (Crowley, 1987· Mason, 2005). υποστηρίζουν αυτή τη θέση με μια εξαίρεση. Κάποιοι μαθητές οι οποίοι είναι χαρισματικοί στα μαθηματικά, υπερπηδούν επίπεδα, μάλλον γιατί ανέπτυξαν λογικές δεξιότητες με άλλους τρόπους και όχι μέσα από τη γεωμετρία. Εξάλλου η μετάβαση από το ένα επίπεδο στο άλλο εξαρτάται κυρίως από τις μαθησιακές εμπειρίες του μαθητή και όχι από την ηλικία ή το βαθμό ωριμότητας του (Mason, 2005).

Η γλώσσα είναι ένα άλλο στοιχείο που παίζει σημαντικό ρόλο στη μάθηση. Η συζήτηση και η απόδοση με λέξεις των αρχών είναι σημαντικές για την απόκτηση γνώσεων (Mason, 2005). Στο πιο πάνω μοντέλο, κάθε επίπεδο έχει τη δική του γλώσσα και τη δική του επεξήγηση για τον ίδιο ορισμό. Για παράδειγμα, η λέξη απόδειξη (proof) εμφανίζεται με τρεις διαφορετικούς τρόπους σε τρία διαφορετικά επίπεδα: επαλήθευση (verification) στο επίπεδο 2, άτυπο πόρισμα (informal deduction) στο επίπεδο 3 και επίσημο πόρισμα (formal deduction) στο επίπεδο 4 (Gutierrez, 1992).

Σύμφωνα με τους van Hiele (1986) για να περάσει ένας μαθητής από το ένα επίπεδο στο άλλο, η διδασκαλία οργανώνεται σε πέντε «φάσεις διδασκαλίας». Οι φάσεις αυτές περιγράφονται πιο κάτω (Mason, 2005):

- Εισαγωγή της έννοιας (Information), όπου γίνεται η εισαγωγή των μαθητών στην έννοια. Μέσα από τη συζήτηση ο δάσκαλος αναγνωρίζει τι γνωρίζουν οι μαθητές και τους καθοδηγεί στην εκμάθηση των καινούριων εννοιών.
- Καθοδηγούμενη ανακάλυψη (Guided orientation), όπου οι μαθητές διερευνούν τις γεωμετρικές έννοιες μέσω καλά σχεδιασμένων καθοδηγούμενων δραστηριοτήτων.
- Έκφραση – Επεξήγηση (Explicitation), όπου οι μαθητές περιγράφουν τι έμαθαν για το σχετικό θέμα με δικές τους λέξεις. Ο δάσκαλος εισάγει την κατάλληλη ορολογία.
- Ελεύθερη διερεύνηση (Free Orientation), όπου οι μαθητές εφαρμόζουν τις σχέσεις που ανακάλυψαν για να λύσουν άλλα προβλήματα και να εξετάσουν πιο διευθετήσιμες καταστάσεις.
- Ολοκλήρωση (Integration), όπου οι μαθητές συνοψίζουν και ολοκληρώνουν αυτά που έμαθαν, αναπτύσσοντας ένα νέο δίκτυο αντικειμένων και σχέσεων.

Σύμφωνα με τους Jones και Swafford (1997), πολλοί μαθητές λυκείου και ενήλικες βρίσκονται στα χαμηλά επίπεδα του μοντέλου των van Hiele. Σε έρευνα της, η Mayberry (1983), διαπίστωσε ότι περισσότεροι από τους μισούς υποψήφιους εκπαιδευτικούς βρίσκονταν στο επίπεδο 2 ή σε χαμηλότερο επίπεδο. Επιπρόσθετα, οι Mason και Schell (1988) διαπίστωσαν ότι το 40% των υποψήφιων δασκάλων βρισκόταν κάτω από το επίπεδο 3. Σε καμία έρευνα δεν βρέθηκαν δάσκαλοι στο επίπεδο 4 ενώ ένα σημαντικό ποσοστό αποτύγγανε ακόμα και στο επίπεδο 0.

Το μοντέλο των van Hiele υιοθετήθηκε από τα πλείστα εκπαιδευτικά συστήματα και η διδασκαλία της γεωμετρίας οργανώθηκε με βάση αυτό. Χαρακτηριστικά στο «Curriculum and Evaluation Standards» του NCTM (1989) αναφέρεται πως:

«Η ανάπτυξη των γεωμετρικών ιδεών ακολουθεί μια ιεραρχία επιπέδων. Οι μαθητές πρώτα μαθαίνουν να αναγνωρίζουν ολόκληρα σχήματα και στη συνέχεια να αναλύουν τις σχετικές ιδιότητες του κάθε σχήματος. Αργότερα μπορούν να δουν σχέσεις μεταξύ των σχημάτων και να καταλήξουν σε απλά λογικά συμπεράσματα. Η ανάπτυξη αναλυτικών προγραμμάτων πρέπει να λαμβάνει υπόψη αυτή την ιεραρχία.»

Η επίδραση του μοντέλου των van Hiele στο κυρίακό εκπαιδευτικό σύστημα φαίνεται ξεκάθαρα αν ρίξουμε μια ματιά τόσο στο αναλυτικό πρόγραμμα, όσο και στα βιβλία των μαθηματικών. Παρατηρείται πως στις τρεις πρώτες τάξεις του δημοτικού οι στόχοι διδασκαλίας της γεωμετρίας δίνουν έμφαση στην οπτική αναγνώριση των σχημάτων με βάση το περίγραμμά τους, στην ονομασία και ταξινόμηση τους (ΑΠΔΕ, 1996), γεγονός που βρίσκεται σε πλήρη συμφωνία με το πρώτο επίπεδο των van Hiele. Θεωρείται, δηλαδή, πως οι μαθητές κατά τις τρεις πρώτες τάξεις του δημοτικού είναι ικανοί μόνο σε διαισθητική αναγνώριση και απλή κατασκευή των σχημάτων και αυτό επιτυγχάνεται μέσα από διάφορες δραστηριότητες που εισηγούνται τόσο τα βιβλία των μαθητών, όσο και τα βιβλία των δασκάλων των τάξεων αυτών. Το αποτέλεσμα αυτής της εμμονής στην οπτική αντίληψη των σχημάτων οδηγεί τους μαθητές στο να βλέπουν τη γεωμετρία εικονικά. Έτσι όταν μάθουν να αναγνωρίζουν με μια πρώτη ματιά τη μορφή που αναπαρίσταται, αντιμετωπίζουν στη συνέχεια πρόβλημα με τη γεωμετρία που πρέπει να διδαχτεί σε ανώτερο επίπεδο (Duval, 2004).

Στην τετάρτη τάξη του δημοτικού γίνεται μια προσπάθεια για μεταπήδηση στο δεύτερο επίπεδο των van Hiele. Έτσι εκτός από την ονομασία, αναγνώριση, σχεδιασμό

και ταξινόμηση των γεωμετρικών σχημάτων, αναμένεται από τους μαθητές να επισημαίνουν χαρακτηριστικές ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων και να γίνεται καταγραφή τους. Επίσης, γίνεται μια προσπάθεια οι μαθητές να βρίσκουν ιδιότητες που είναι κοινές σε διαφορετικά σχήματα (π.χ. το τετράγωνο και ο ρόμβος έχουν και τις τέσσερις πλευρές ίσες).

Στις δυο τελευταίες τάξεις επιδιώκεται εισαγωγή των μαθητών στο τρίτο επίπεδο των van Hiele, αφού σύμφωνα με το βιβλίο του δασκάλου της Ε΄ τάξης, οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να περιγράψουν ένα γεωμετρικό σχήμα με βάση τις ιδιότητες του και επιπλέον να δικαιολογούν την ταξινόμηση των σχημάτων με βάση αυτές τις ιδιότητες. Ταυτόχρονα η κατασκευή των σχημάτων με βάση τις ιδιότητες τους είναι ένας επιπλέον στόχος. Γίνεται, επίσης, κάποια προσπάθεια για χρήση βοηθητικών γραμμών, αποσύνδεση και μετασχηματισμό, αλλά μόνο στο επίπεδο της εύρεσης του εμβαδού του παραλληλογράμμου ή ακανόνιστου γεωμετρικού σχήματος.

Δυστυχώς, όμως, παρόλο που γίνεται μεγάλη προσπάθεια ώστε η αναγνώριση των γεωμετρικών σχημάτων να στηρίζεται στις ιδιότητές τους, φαίνεται πως υπερισχύει η οπτική αντίληψη των σχημάτων που έχει διαμορφωθεί στις πιο μικρές τάξεις. Ως αποτέλεσμα είναι η εμφάνιση διάφορων προβλημάτων όπως η «κατανόηση» του ρόμβου ως ένα τετράγωνο στραμμένο κατά 45° από την κανονική θέση (Γαγάτσης & Πατρώνης, 2003).

Η Θεωρία των Houdement και Kuzniak

Οι Houdement και Kuzniak (2003), διακρίνουν τρία διαφορετικά είδη Γεωμετρίας: τη Γεωμετρία 1 (Εμπειρική), τη Γεωμετρία 2 (Εμπειρική Αξιοματική) και τη Γεωμετρία 3 (Τυπική Αξιοματική). Με βάση το θεωρητικό πλαίσιο που έχουν αναπτύξει, γίνονται εμφανείς οι δυσκολίες μετάβασης από τον ένα τύπο γεωμετρίας στον άλλο και είναι δυνατό να ερμηνευθεί η αντιμετώπιση γεωμετρικών έργων από τους μαθητές.

Ο πρώτος τύπος γεωμετρίας, η Εμπειρική γεωμετρία, σχετίζεται άμεσα με τον πραγματικό φυσικό κόσμο. Τα αντικείμενα της είναι υλικά αντικείμενα (π.χ. γραμμές σε ένα φύλλο χαρτιού ή γραμμές στην οθόνη ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή). Πηγή της

εγκυρότητας στη Γεωμετρία 1 μπορεί να είναι οτιδήποτε προκύπτει από τις αισθήσεις (μετρήσεις, συγκρίσεις, «με το μάτι»). Στη Γεωμετρία 2, στη λεγόμενη Εμπειρική Αξιοματική Γεωμετρία, τα αντικείμενα είναι θεωρητικά, δηλαδή η ύπαρξή τους οφείλεται σε αξιώματα και ορισμούς. Περιέχει ορισμούς και αξιώματα που είναι κοντά στη διαίσθηση του χώρου των αισθήσεων. Παρά το γεγονός ότι το σύστημα αξιωμάτων δεν είναι ολοκληρωμένο, η πηγή εγκυρότητας βασίζεται στους υποθετικούς παραγωγικούς νόμους που διέπουν το αξιωματικό σύστημα. Τέλος, στη Τυπική Αξιοματική Γεωμετρία, το σύστημα των αξιωμάτων δεν έχει καμιά σχέση με τον πραγματικό φυσικό κόσμο και δε στηρίζεται με οποιοδήποτε τρόπο στις αισθήσεις. Είναι ένα ολοκληρωμένο αξιωματικό σύστημα, ανεξάρτητο από τις ενδεχόμενες εφαρμογές του στον πραγματικό κόσμο. Εδώ, το μοναδικό κριτήριο αλήθειας είναι η συνέπεια.

Η Θεωρία του Duval

Τόσο στη διδακτική των μαθηματικών, τόσο και στον κλάδο της Γνωστικής Ψυχολογίας οι ερευνητές προσπαθούν να βρουν απάντηση στο ερώτημα «Πώς αντιλαμβάνονται τα παιδιά ένα γεωμετρικό σχήμα;».

Σύμφωνα με τον Duval (2004), υπάρχουν δύο τρόποι προσέγγισης ενός γεωμετρικού αντικειμένου, «δια του λόγου» και «δια του σχήματος». Ο πρώτος τρόπος επικεντρώνεται στη γεωμετρική έννοια με βάση ορισμούς, θεωρήματα και αξιώματα. Στο δεύτερο τρόπο η γνωστική προσέγγιση επικεντρώνεται στην εξεικόνιση, δηλαδή πως βλέπει κανείς τις σχέσεις ανάμεσα σε γεωμετρικά αντικείμενα, ώστε να διευκολύνεται η επεξεργασία του γεωμετρικού προβλήματος. Διακρίνονται δύο τύποι εξεικόνισης: εικονική και μη εικονική εξεικόνιση. Στην εικονική εξεικόνιση γίνεται αναγνώριση του σχήματος με βάση την ομοιότητά του με το τυπικό μοντέλο. Βλέπουν το σχήμα ως μορφή, ανεξάρτητα από τις πράξεις σ' αυτό. Αντίθετα, στη μη εικονική εξεικόνιση η αναγνώριση του σχήματος στηρίζεται στις νοερές, εσωτερικές πράξεις οι οποίες θα βοηθήσουν στον εντοπισμό των ιδιοτήτων για προσδιορισμό του σχήματος. Αυτές οι πράξεις πραγματοποιούνται είτε μέσω της κατασκευής, είτε μέσω του μετασχηματισμού ενός σχήματος.

Ο Duval (2004) υποστηρίζει πως δεν πρέπει η διδασκαλία της γεωμετρίας να ξεκινά με την αναγνώριση των σχημάτων, αφού αυτό καθλώνει τους μαθητές στην εικονική εξεικόνιση. Χαρακτηριστικά αναφέρει πως «*όταν κάποιος βλέπει τα σχήματα εικονικά δεν μπορεί ποτέ του να μάθει γεωμετρία*». Επιπλέον εκφράζει τη διαφωνία του με την ύπαρξη ιεραρχικών επιπέδων, εξηγώντας πως η ανάπτυξη διαφόρων γνωστικών λειτουργιών που σχετίζονται με τη γεωμετρία γίνεται ταυτόχρονα και μπορεί να ξεκινήσει από τη νηπιακή ηλικία.

Σε αντίθεση με τη θεωρία των van Hiele που αναφέρεται σε επίπεδα γεωμετρικής σκέψης μέσα από τα οποία διέρχεται ένας μαθητής, πραγματοποιείται από τον Duval μια προσέγγιση από γνωστική σκοπιά και επιχειρείται μια προσπάθεια καθορισμού των γνωστικών διαδικασιών που βρίσκονται στο υπόβαθρο των διαδικασιών γεωμετρικής σκέψης. Στην ανάλυσή του, κεντρική θέση κατέχει η περιγραφή των τεσσάρων τύπων γνωστικής σύλληψης, μέσα από τους οποίους οι μαθητές προσεγγίζουν τη γεωμετρική εικόνα (Duval, 1998).

Η Αντιληπτική σύλληψη (perceptual apprehension) σχετίζεται με την αναγνώριση του σχήματος με την πρώτη ματιά. Συνίσταται στην κατανόηση της συνολικής μορφής του σχήματος και στη διάκριση των υποσχημάτων του, με τρόπο όμως που δεν επιτρέπει περαιτέρω επεξεργασία του. Περιλαμβάνει δεξιότητες, όπως την ονομασία του σχήματος και αναγνώρισης υποσχημάτων του σχήματος.

Η Σειριακή σύλληψη (sequential apprehension) απαιτείται κατά την κατασκευή ή την περιγραφή της κατασκευής ενός σχήματος. Η οργάνωση των στοιχειωδών μονάδων του σχήματος δεν εμπίπτει σε νόμους της αντίληψης, αλλά καθορίζεται από κατασκευαστικούς περιορισμούς και από μαθηματικές ιδιότητες.

Η Λεκτική σύλληψη (discursive apprehension) συνδέεται με την αδυναμία προσδιορισμού των μαθηματικών σχέσεων σε ένα σχήμα μόνο από την αντιληπτική σύλληψη, αφού απαιτείται και η λεκτική περιγραφή του.

Τέλος, η Λειτουργική σύλληψη (operative apprehension) μας εξασφαλίζει πρόσβαση στην επίλυση του προβλήματος. Εξαρτάται από τους διάφορους τρόπους τροποποίησης ενός σχήματος, όπου σε ένα γεωμετρικό πρόβλημα, μια από αυτές τις λειτουργίες μπορεί να οδηγήσει σε μετασχηματισμούς που υποβοηθούν την επίλυση του προβλήματος.

Ο Duval εισάγει τρία είδη τροποποιήσεων ενός γεωμετρικού σχήματος, τα οποία συνιστούν τη λειτουργική σύλληψη: η μερεολογική τροποποίηση, η οπτική τροποποίηση και τέλος η αλλαγή θέσης του σχήματος. Οι μερεολογικές τροποποιήσεις (mereologic) αναφέρονται στη διάσπαση του ολόκληρου σχήματος σε διάφορα υποσχήματα, στο συνδυασμό των υποσχημάτων αυτών σε ένα άλλο ενιαίο σχήμα και στην εμφάνιση νέων υποσχημάτων. Συνεπώς, προκύπτει μια αλλαγή του τρόπου με τον οποίο το σχήμα παρουσιάζεται με την πρώτη ματιά. Την πιο τυπική λειτουργία σε αυτό το είδος τροποποίησης αποτελεί η αναδιαμόρφωση του σχήματος (reconfiguration).

Οι οπτικές (optic) τροποποιήσεις επιτρέπουν τη σμίκρυνση ή μεγέθυνση του σχήματος ή το να εμφανίζεται λοξό, σαν να γίνεται χρήση φακών. Με τον τρόπο αυτό τα σχήματα αποκτούν τη δυνατότητα να εμφανίζονται διαφορετικά, χωρίς να έχουν υποστεί οποιαδήποτε αλλαγή. Επίπεδα σχήματα δύναται να θεωρηθούν ως τοποθετημένα σε ένα τρισδιάστατο χώρο. Επιπλέον, μια τυπική λειτουργία είναι η παρουσίαση δύο όμοιων σχημάτων επικαλυμμένα, στο βάθος, ώστε το μικρότερο σχήμα να φαίνεται σαν να ήταν το μεγαλύτερο από απόσταση.

Τέλος, η αλλαγής θέσης (place way) τροποποιεί τον προσανατολισμό του σχήματος στο επίπεδο της εικόνας. Αποτελεί τον ασθενέστερο μετασχηματισμό. Επηρεάζει κυρίως την αναγνώριση ορθών γωνιών, οι οποίες οπτικώς σχηματίζονται από οριζόντιες και κατακόρυφες γραμμές.

Οι διάφορες αυτές λειτουργίες μπορούν να εκτελεστούν είτε νοερά, είτε φυσικά. Συνθέτουν μια συγκεκριμένη επεξεργασία του σχήματος, η οποία του προσδίδει μια χειριστική λειτουργία. Όπως ο Polya (1945) αναφέρει, στο βιβλίο του “How to solve it”, οι λειτουργίες αυτές μπορούν να φανερώσουν την «ιδέα», η οποία θα μας οδηγήσει στη λύση του προβλήματος. Θα μπορούσαμε, συνεπώς, να πούμε πως η λειτουργική σύλληψη αποτελεί ένα είδος ευφυούς οργάνωσης του σχήματος, αφού κατά τον Piaget, η νοητική αντίληψη ενός αντικειμένου εμπεριέχει ευφυΐα. Με τη χρήση της ευφυΐας το άτομο καθίσταται ικανό να εντοπίζει ομοιότητες, διαφορές και χωρικές σχέσεις του αντικειμένου (Κολέζα, 2003).

Κάθε είδος σύλληψης έχει συγκεκριμένους νόμους οργάνωσης και επεξεργασίας του οπτικού ερεθίσματος. Ένα σχήμα για να λειτουργήσει ως γεωμετρικό σχήμα πρέπει να υπάρχει σίγουρα η αντιληπτική σύλληψη και τουλάχιστον ένα από τα άλλα είδη σύλληψης (Duval 1995, 1999).

Ο Duval (1999), επιχειρεί να κάνει σαφέστερη τη διαφορετικότητα της λειτουργικής από την αντιληπτική σύλληψη. Η διαφορά τους έγκειται στο ότι η αντιληπτική σύλληψη σταθεροποιεί με την πρώτη ματιά την όψη κάποιων σχημάτων, κάνοντας τα στατικά. Η λειτουργική σύλληψη εμπερικλείει νοητική αναδιοργάνωση του σχήματος, έτσι ώστε να προκύψουν σχέσεις μη προφανείς από την αντιληπτική σύλληψη. Αποτελεί, δηλαδή, μια ευρετική επεξεργασία του σχήματος, κατά την οποία οι ιδιότητες του σχήματος δεν αλλοιώνονται (von Sommers, 1984· Κολέζα, 2003).

Στη λειτουργική σύλληψη το δοσμένο σχήμα του προβλήματος αποτελεί σημείο αναφοράς για τη διερεύνηση άλλων σχηματοποιήσεων, μέσω των τροποποιήσεων που αναφέρονται πιο πάνω. Συνεπώς, δημιουργούνται πολλαπλές αλυσίδες σχημάτων, μια εκ των οποίων ανοίγει το δρόμο προς τη λύση του προβλήματος. Η ικανότητα σκέψης ή σχεδίασης επιπλέον μονάδων σε δοσμένο σχήμα υποδηλώνει την ύπαρξη λειτουργικής σύλληψης (Duval, 1999).

Πρόσφατα, οι Deliyianni, Elia, Gagatsis, Monoyiou και Panaoura (2009), έχουν ανακαλύψει ένα ιεραρχικό μοντέλο τριών επιπέδων για το ρόλο της αντιληπτικής (perceptual), λεκτικής (discursive) και λειτουργικής (operative) στην εννοιολογική σύλληψη των γεωμετρικών σχημάτων. Παρόλα αυτά η σχέση της χωρικής αντίληψης και των τεσσάρων ειδών εννοιολογικής σύλληψης του «γεωμετρικού σχήματος» που προτείνει ο Duval (1995, 1999) δεν έχει διερευνηθεί ακόμη. Γενικά, δεν υπάρχουν έρευνες, στη Μαθηματική Παιδεία, που να σχετίζουν την εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος και τη χωρική αντίληψη.

Δυσκολίες στο Γεωμετρικό Σχήμα

Η γεωμετρία αποτελεί τον πιο δύσκολο κλάδο των μαθηματικών για αρκετά παιδιά (Ben-Haim, Lappan & Houang, 1985· Bishop, 1980· Clements & Battista, 1992· English, 1993). Η ικανότητα αναγνώρισης σχημάτων από τους μαθητές επηρεάζεται από μία πλειάδα παραγόντων, συμπεριλαμβανομένου της οπτικής αντίληψης. Πρέπει να αναφερθεί ότι πολλοί άνθρωποι παρουσιάζουν προβλήματα με τη συγκεκριμένη διαδικασία οπτικοποίησης. Οι English και Warren (1995) υποστηρίζουν ότι ο τρόπος οπτικοποίησης

ενός αντικειμένου είναι ένας από τους πιο σημαντικούς παράγοντες που επηρεάζουν τη βελτίωση της χωρικής αντίληψης.

Ο Fischbein (1993) αναφέρεται στη διπλή φύση του γεωμετρικού σχήματος, επισημαίνοντας ότι κάθε γεωμετρικό σχήμα έχει ταυτόχρονα εννοιολογικές και σχηματικές ιδιότητες. Η πτυχή των σχημάτων αφορά στο γεγονός ότι οι γεωμετρικές έννοιες αναφέρονται στο χώρο, ενώ η εννοιολογική πτυχή αναφέρεται στη σύνοψη και στη θεωρητική φύση που οι γεωμετρικές έννοιες μοιράζονται με όλες τις άλλες έννοιες. Το γεωμετρικό σχήμα δεν είναι μια απλή έννοια, αλλά μια έννοια που σχετίζεται άμεσα με τη νοερή εικόνα της στο χώρο, μια ιδιότητα που δεν κατέχουν οι υπόλοιπες μαθηματικές έννοιες. Τη διττή λειτουργία των γεωμετρικών σχημάτων επισημαίνουν αρκετοί ερευνητές (Duval, 1988· Laborde, 1994· Parzyzs, 1988·). Η Mesquita (1998) αναφέρει σχετικά ότι τα γεωμετρικά σχήματα είναι αναπαραστάσεις με διπλή υπόσταση. Από τη μια το σχήμα στην ιδανική του αντικειμενικότητα, απαλλαγμένο από υλικούς περιορισμούς που χαρακτηρίζουν μια εξωτερική αναπαράσταση, και από την άλλη η ποικιλία πεπερασμένων μορφών.

Η Hershkowitz (1990), διαφοροποιεί την έννοια από τη νοερή εικόνα της. Συγκεκριμένα υποστηρίζει ότι η «έννοια» πηγάζει από το μαθηματικό ορισμό και η νοερή έννοια της εικόνας από την αναπαράστασή της στο μυαλό κάθε μαθητή. Η γεωμετρική έννοια χαρακτηρίζεται από κρίσιμες και μη κρίσιμες ιδιότητες. Οι κρίσιμες ιδιότητες είναι οι ιδιότητες που όλα τα παραδείγματα έννοιας πρέπει να έχουν, ενώ οι μη κρίσιμες ιδιότητες χαρακτηρίζουν μόνο μερικά παραδείγματα της έννοιας. Επίσης ο ορισμός της γεωμετρικής έννοιας διαχωρίζει τα σχήματα σε παραδείγματα και μη παραδείγματα της έννοιας. Η Hershkowitz (1990) τονίζει την εμφάνιση των «πρωτοτυπικών» παραδειγμάτων των γεωμετρικών εννοιών τα οποία κατέχουν όλες τις κρίσιμες ιδιότητες της έννοιας και ταυτόχρονα και κάποιες μη κρίσιμες ιδιότητες, οι οποίες όμως είναι οπτικά πιο ισχυρές. Σημαντικό είναι το γεγονός ότι οι μαθητές τείνουν να αντιλαμβάνονται πρώτα τα πρωτοτυπικά παραδείγματα των γεωμετρικών εννοιών τα οποία χρησιμοποιούν ως αντιπροσωπευτικά για να κρίνουν άλλα παραδείγματα των συγκεκριμένων εννοιών.

Ο Lemonidis (1997) επισημαίνει ότι σχεδιάζοντας ένα γεωμετρικό σχήμα ώστε να εξεταστούν ή να εφαρμοστούν κάποιες ιδιότητες, είναι γνωστό ότι δε γίνεται αναφορά στο συγκεκριμένο σχήμα, αλλά σε μια τάξη απείρων σχημάτων που υπακούουν στον ορισμό του. Στην Ευκλείδεια γεωμετρία τα χαρακτηριστικά των σχημάτων δεν εξαρτώνται από τη

θέση ή τον προσανατολισμό με τον οποίο σχεδιάζονται. Επιπλέον τα σχήματα παραμένουν αναλλοίωτα με το μετασχηματισμό της ομοιότητας. Δεν ενδιαφέρει δηλαδή το συγκεκριμένο μήκος των σχημάτων, αλλά οι σχέσεις και οι αναλογίες μεταξύ των σχηματικών οντοτήτων.

Η διττή λειτουργία των γεωμετρικών σχημάτων αποτελεί τη βασική πηγή δυσκολιών των μαθητών όταν επιλύουν προβλήματα γεωμετρίας (Fischbein & Nachlieli, 1998· Mesquita, 1998· Γαγάτσης, 2007). Αυτό συμβαίνει, σύμφωνα με τον Fischbein (1993), γιατί η εικόνα και η αρχή θα πρέπει να ενώνονται σε ένα μοναδικό νοερό αντικείμενο για να μπορεί να το κατανοήσει ο μαθητής.

Μια άλλη πιθανή αιτία των δυσκολιών των μαθητών στη γεωμετρία είναι ο τρόπος της διδακτικής προσέγγισης που ακολουθείται. Η διδασκαλία της γεωμετρίας και της στερεομετρίας, στο αναλυτικό πρόγραμμα αποτελούν μια γνωστική περιοχή η οποία είναι παραμελημένη (ΑΠΔΕ, 1996). Η διδασκαλία τους περιορίζεται στην αναγνώριση και την ονομασία των δυσδιάστατων και τρισδιάστατων σχημάτων και των κρίσιμων ιδιοτήτων τους χωρίς καμία νύξη για εμβάθυνση.

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι οποιαδήποτε απλή αναπαράσταση των στερεών αντικειμένων, όπως αυτές που εμφανίζονται συνήθως στα σχολικά εγχειρίδια, έχουν κάποιους περιορισμούς, όπως η δυσδιάστατη απεικόνιση των στερεών που συνάδει με την αδυναμία απεικόνισης ολόκληρου του αντικειμένου. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τα εγχειρίδια αυτά να αποτυγχάνουν στη μεταβίβαση μέρους των πληροφοριών (Parzysz, 1988). Για αυτό, στην προσπάθεια τους οι μαθητές να γνωρίσουν, μέσα από ένα σχολικό εγχειρίδιο, ένα καινούριο στερεό πρέπει να δημιουργήσουν στο μυαλό τους πολλές ξεχωριστές εικόνες και να προσπαθήσουν να τις συνδέσουν, πράγμα που σπάνια συμβαίνει (Gutierrez, 1992), αφού δεν τους έχουν δοθεί τα κατάλληλα ερεθίσματα. Επιπρόσθετα, οι Saads και Davis (1997a), αναφέρουν ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να αναπτύξουν σχήματα που δεν τους είναι ορατά και να αναμείξουν νοητικά τις τοπικές και ολικές πληροφορίες σχετικά με το στέρεο.

Ακόμη, βέβαια, και στις περιπτώσεις που οι μαθητές πειραματίζονται με τρισδιάστατα μοντέλα, οι δραστηριότητες περιορίζονται στην απλή αναγνώριση και αντιστοίχιση των ιδιοτήτων που περιλαμβάνει ο μαθηματικός ορισμός των στερεών. Οι μαθητές, έτσι, τείνουν να επικεντρώνονται στη μορφή του στερεού και στην απομνημόνευση του μαθηματικού ορισμού, χωρίς να αντιλαμβάνονται τις συσχετίσεις

μεταξύ των ιδιοτήτων του στερεού αλλά και το ρόλο των ιδιοτήτων στη διαμόρφωση του όλου στερεού. Αυτό, σε συνδυασμό με την κυριαρχία της μορφής του στερεού στην αντίληψη των μαθητών, έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση των «πρωτοτυπικών παραδειγμάτων», που αναφέρθηκαν πιο πάνω (Hershkowitz, 1990). Ο περιορισμένος αριθμός εμπειριών σχετικά με την αναπαράσταση του κύβου, για παράδειγμα, δεν επιτρέπει στους μαθητές να συσχετίζουν τη νοερή εικόνα που κατασκευάζουν με κρίσιμες ιδιότητες, όπως, για παράδειγμα, με την ισότητα των εδρών, αλλά τους οδηγεί στο να τη συσχετίσουν με μη κρίσιμες ιδιότητες, όπως είναι, για παράδειγμα, ο προσανατολισμός του στερεού.

Με αυτά τα δεδομένα οι μαθητές δεν έχουν στη διάθεση τους τα κατάλληλα εργαλεία για την εννοιολογική κατανόηση των δυσδιάστατων και τρισδιάστατων σχημάτων, αφού η εννοιολογική κατανόηση απαιτεί από τους μαθητές να κάνουν μετασχηματισμούς και προσαρμογές στις ήδη υπάρχουσες γνώσεις ως αποτέλεσμα των αντανάκλασεων των εμπειριών τους (Steffe, 1988).

Εννοιολογική Σύλληψη του Γεωμετρικού Σχήματος και Χωρική Αντίληψη

Η σχέση της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος με τη χωρική αντίληψη, είναι ένα πεδίο το οποίο δεν έχει μελετηθεί προηγουμένως. Υπάρχει όμως εκτεταμένη έρευνα στον τομέα της μαθηματικής παιδείας που επιβεβαιώνει τη σχέση της χωρικής αντίληψης και της γεωμετρίας γενικότερα. Δεν είναι τυχαίο άλλωστε, το γεγονός ότι σε πολλές χώρες για τη διδασκαλία της γεωμετρίας, βασικός πρωταρχικός στόχος είναι η ανάπτυξη της χωρικής αντίληψης (Clements & Battista, 1992).

Οι εκπαιδευτικοί των μαθηματικών, υποστηρίζουν ότι η χωρική αντίληψη αποτελεί απαραίτητο στοιχείο της γεωμετρίας, παρόλο που η χωρική γνώση δεν αποτελεί συνώνυμο της γεωμετρικής γνώσης (Gorgorió, 1998). Η καλλιέργεια και η ανάπτυξη της χωρικής αντίληψης θεωρείται ως βασικός στόχος της διδασκαλίας της γεωμετρίας. Ο Battista (1990) επισημαίνει στην έρευνά του, ότι η οπτικοποίηση του χώρου είναι σημαντικός παράγοντας στη μάθηση της γεωμετρίας. Επίσης, έρευνα των Panaoura, Gagatsis και Lemonides (2007), έδειξε ότι η επίδοση των μαθητών σε τεστ χωρικής αντίληψης ήταν ο

πιο σημαντικός παράγοντας πρόβλεψης της επίδοσης των μαθητών στη γεωμετρία. Πιο συγκεκριμένα, φάνηκε από τα αποτελέσματα της έρευνά τους ότι ο χειρισμός των εικόνων και η νοερή περιστροφή αποτελούν παράγοντες πρόβλεψης της επίδοσης των μαθητών δημοτικού και γυμνασίου, στη γεωμετρία.

Όσον αφορά την εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος και τη χωρική αντίληψη, υποθέτουμε με βάση τη βιβλιογραφία, που αναπτύχθηκε πιο πάνω, ότι υπάρχει σχέση μεταξύ των επιμέρους παραγόντων τους. Ειδικότερα, φαίνεται ότι οι παράγοντες της αντιληπτικής και λειτουργικής σύλληψης, σχετίζονται άμεσα με τη χωρική αντίληψη.

Η αντιληπτική σύλληψη, όπως αναφέρθηκε πιο πάνω, σύμφωνα με τον Duval (1995, 1999), αναφέρεται στην ικανότητα ονομασίας και αναγνώρισης των σχημάτων και υποσχημάτων. Η ικανότητα αυτή είναι όμοια με αυτή που απαιτείται στον παράγοντα ευελιξία διεκπεραίωσης (Carroll, 1993), της χωρικής αντίληψης, όπου τα υποκείμενα καλούνται να εντοπίσουν ένα σχήμα ή μια φιγούρα, σε πιο σύνθετη εικόνα.

Επίσης, όπως αναφέρουν οι Fishbein και Nachieli (1998), οι γεωμετρικές φιγούρες έχουν ταυτόχρονα σχηματικές και εννοιολογικές ιδιότητες (χωρικές αναπαραστάσεις). Δεν είναι απλές εικονικές αναπαραστάσεις, αλλά σημειωτικές. Η σημειωτική αναπαράσταση παρουσιάζει την οργάνωση των σχέσεων μεταξύ των στοιχείων που αναπαρίστανται. Στην περίπτωση των γεωμετρικών φιγούρων τα στοιχεία που αναπαρίστανται μπορεί να είναι δύο ή τριών διαστάσεων. Ωστόσο, στη μάθηση της γεωμετρίας δεν είναι αρκετή η αναγνώριση από την πρώτη ματιά. Εδώ εμφανίζεται και η διαφορά μεταξύ της οπτικής αντίληψης και της οπτικοποίησης. Αν και η οπτική αντίληψη είναι ένας από τους σημαντικότερους παράγοντες για την αναγνώριση επίπεδων σχημάτων (αντιληπτική σύλληψη), προσφέρει άμεση πρόσβαση στο σχήμα αλλά όχι πλήρης κατανόησή του. Αντίθετα, η οπτικοποίηση βασίζεται στην παραγωγή της σημειωτικής αναπαράστασης της έννοιας και δίνει άμεσα μια ολοκληρωμένη εικόνα για την κατανόηση των σχέσεων (Duval, 1999).

Πέρα από την αντιληπτική σύλληψη, η οπτικοποίηση σχετίζεται άμεσα και με τη λειτουργική σύλληψη. Βασική συνιστώσα της οπτικοποίησης αποτελεί η οπτική επεξεργασία (Gutiérrez, 1997). Σύμφωνα με τη Yakimanskaya (1991), η οπτική επεξεργασία περιλαμβάνει τις πιο κάτω διαδικασίες των νοερών εικόνων: α) αλλαγή στη θέση των αντικειμένων που αναπαρίστανται (π.χ. περιστροφή αντικειμένων), β) αλλαγή στη δομή των αντικειμένων που αναπαρίστανται. Η εικόνα μετασχηματίζεται έτσι ώστε να

έχει μόνο μια μικρή ομοιότητα με την αρχική μορφή του αντικειμένου και γ) συνδυασμός των πιο πάνω αλλαγών (Yakimanskaya, 1991). Όμοια, η λειτουργική σύλληψη, σύμφωνα με τον Duval (1999), είναι μια μορφή οπτικής επεξεργασίας των γεωμετρικών σχημάτων. Ο Duval (1995, 1999), αναφέρεται στην οπτικοποίηση των γεωμετρικών σχημάτων μέσα από τα τρία είδη τροποποιήσεων της λειτουργικής σύλληψης (μερεολογική τροποποίηση, αλλαγής θέσης τροποποίηση και οπτική τροποποίηση). Τα τρία είδη τροποποιήσεων της λειτουργικής σύλληψης επιτρέπουν την αλλαγή της αρχικής μορφής του σχήματος, διατηρώντας παράλληλα τις ιδιότητες του αρχικού σχήματος. Στη λειτουργική σύλληψη, η δοσμένη φιγούρα γίνεται σημείο εκκίνησης, προκειμένου να διερευνηθούν διαμορφώσεις της φιγούρας που μπορεί να προκύψουν μέσα από τις τροποποιήσεις. Ένα γεωμετρικό σχήμα μπορεί να διαμορφωθεί με πολλούς τρόπους, ένας από τους οποίους μπορεί να μας οδηγήσει στη λύση ενός προβλήματος. Για παράδειγμα, η σχεδίαση μιας βοηθητικής γραμμής, είναι ένδειξη λειτουργικής σύλληψης και μπορεί να μας βοηθήσει σε κάποιο πρόβλημα. Όμως, απαιτείται προηγουμένως η οπτικοποίηση του αποτελέσματος της διαμόρφωσης.

Με βάση τα όσα έχουν λεχθεί πιο πάνω, φαίνεται ότι αν και η σχέση της χωρικής αντίληψης και της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος, δεν έχει διερευνηθεί, υπάρχουν ενδείξεις ότι υπάρχει σημαντική συσχέτιση των δύο πεδίων. Θέμα το οποίο θα μελετηθεί στην παρούσα εργασία.

Σύνοψη

Από την πολύχρονη μελέτη της ιστορία της έρευνας για τη χωρική αντίληψη, διαφαίνεται έντονα ότι η χωρική αντίληψη είναι ένα σύνολο πολύπλοκων, γνωστικών ικανοτήτων. Ο D'Oliveira, (2004), εντόπισε τέσσερις κύριες περιοχές στις οποίες παρουσιάζονται διαφορές μεταξύ των ερευνητών. Οι περιοχές αυτές είναι ο ορισμός της χωρικής αντίληψης, ο αριθμός των παραγόντων που αποτελούν τη χωρική αντίληψη, η ονομασία αυτών των παραγόντων καθώς και τα τεστ που χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση του κάθε παράγοντα.

Η χωρική αντίληψη είναι γενικά αποδεχτό ότι σχετίζεται με τις ικανότητες ανάκτησης, διατήρησης και μετασχηματισμού μιας οπτικής πληροφορίας σε ένα χωρικό πλαίσιο (Halpern, 2000). Σύμφωνα με τη θεωρία του Gardner (1983), η χωρική αντίληψη είναι ένα είδος νοημοσύνης και απαιτείται στην επίλυση γεωμετρικών έργων. Διεθνείς οργανισμοί όπως το National Council of Teachers of Mathematics (2000) τονίζουν τη σημασία της ανάπτυξης της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου στη μαθηματική εκπαίδευση δίνοντας έμφαση στην αναγκαιότητα ανάπτυξης της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου σε όλους τους τομείς του αναλυτικού προγράμματος. Η χρονική στιγμή και το περιεχόμενο αποτελούν δύο κρίσιμα στοιχεία που λαμβάνονται υπόψη στο σχεδιασμό των εκπαιδευτικών εργαλείων για τη βελτίωση της χωρικής αντίληψης. Οι Piaget και Inhelder (1971) δηλώνουν ότι η γνωστική ανάπτυξη του ατόμου καθορίζει τις δυνατότητες του τι θα μπορούσε να επιτύχει. Επιπλέον, διάφορες έρευνες στον τομέα της ψυχολογίας έχουν προσδιορίσει τους παράγοντες που μπορεί να επηρεάσουν την ανάπτυξη της χωρικής αντίληψης του ατόμου. Τέτοιοι παράγοντες είναι η ηλικία, το φύλο και η σχετική με το χώρο εμπειρία (Miller, 1996).

Η χωρική αντίληψη συχνά, συνδέεται με τη δημιουργικότητα και την υψηλού επιπέδου σκέψη στην επιστήμη και στα μαθηματικά (Shepard, 1978· West, 1991). Έχουν γίνει εκτεταμένες έρευνες στα μαθηματικά οι οποίες επιβεβαιώνουν τη σχέση μεταξύ της χωρικής αντίληψης και της επίδοσης στα μαθηματικά (π.χ. Battista, 1990· McGee, 1979· Sherman, 1979· Smith, 1964) και επισημαίνουν τον κεντρικό ρόλο της χωρικής αντίληψης σε πολλά θέματα των μαθηματικών (Bennett, Seashore, & Wesman, 1974· McNemar, 1964).

Ωστόσο, ο ρόλος της χωρικής αντίληψης είναι δύσκολο να διασαφηνιστεί και ακόμη και στη γεωμετρία πολύ σύνθετος (Clements, 1997). Αν και η γεωμετρία συχνά χαρακτηρίζεται ως «τα μαθηματικά του χώρου» και θεωρείται ένας τρόπος σύνδεσης των μαθηματικών με τον πραγματικό κόσμο (Bishop, 1983· Clements, 1998).

Τα τελευταία χρόνια, πολλοί μαθηματικοί έχουν μελετήσει το γεωμετρικό συλλογισμό των μαθητών, στηριζόμενοι σε διαφορετικά θεωρητικά πλαίσια. Για παράδειγμα, το ζεύγος van Hiele (1986) ανέπτυξαν ένα μοντέλο αναφερόμενοι σε επίπεδα γεωμετρικής σκέψης και αργότερα ο Gutierrez και οι συνεργάτες του (Gutierrez, 1992) προσπάθησαν να μεταφέρουν το μοντέλο των van Hiele στη γεωμετρία του χώρου με έμφαση στην ανάπτυξη της ικανότητας οπτικοποίησης. Οι Houdement και Kuzniak (2003), διέκριναν τρία διαφορετικά είδη Γεωμετρίας: τη Γεωμετρία 1 (Εμπειρική), τη

Γεωμετρία 2 (Εμπειρική Αξιοματική) και τη Γεωμετρία 3 (Τυπική Αξιοματική). Ο Fischbein (1993) εισήγαγε τη θεωρία των εννοιολογικών σχημάτων και ο Duval (1998) εισηγήθηκε τη γνωστική ανάλυση της γεωμετρικής σκέψης.

Γενικά, η γεωμετρία αποτελεί τον πιο δύσκολο κλάδο των μαθηματικών για αρκετά παιδιά (Bishop, 1980· Ben-Haim, Lappan & Houang, 1985· Clements & Battista, 1992· English, 1993). Η ικανότητα αναγνώρισης σχημάτων από τους μαθητές επηρεάζεται από μία πλειάδα παραγόντων, συμπεριλαμβανομένου της οπτικής αντίληψης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Εισαγωγή

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι η διερεύνηση της χωρικής αντίληψης των μαθητών της Ε΄ και Στ΄ τάξης του δημοτικού, Α΄ και Β΄ τάξης του γυμνασίου, η επίδραση της αντιληπτικής, λεκτικής και λειτουργικής σύλληψης των γεωμετρικών σχημάτων των μαθητών αυτών καθώς και τη σχέση μεταξύ χωρικής αντίληψης και της αντιληπτικής, λεκτικής και λειτουργικής σύλληψης των μαθητών.

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα υποκείμενα της εργασίας, τα εργαλεία μέτρησης και η περιγραφή της διαδικασίας ανάπτυξης τους και η διαδικασία που ακολουθήθηκε για την πραγματοποίηση της έρευνας. Τέλος, επεξηγούνται οι στατιστικές αναλύσεις που χρησιμοποιήθηκαν για να απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας.

Υποκείμενα

Τα υποκείμενα της εργασίας αποτέλεσαν μαθητές από την Ε΄ τάξη του δημοτικού σχολείου μέχρι τη Β΄ τάξη του γυμνασίου, σε δύο διαφορετικές χορηγήσεις των ερευνητικών εργαλείων. Στην πρώτη μέτρηση συμμετείχαν συνολικά χίλιοι εξακόσιοι είκοσι μαθητές δημοτικού και γυμνασίου. Συγκεκριμένα, τετρακόσια εξήντα τρία υποκείμενα ήταν μαθητές της Ε΄ δημοτικού, πεντακόσια εξήντα έξι της Στ΄ δημοτικού, τριακόσια πέντε της Α΄ γυμνασίου και διακόσια ογδόντα έξι της Β΄ γυμνασίου. Στη δεύτερη μέτρηση συμμετείχαν συνολικά χίλιοι πεντακόσιοι σαράντα πέντε μαθητές δημοτικού και γυμνασίου. Συγκεκριμένα, τετρακόσια τριάντα επτά υποκείμενα ήταν

μαθητές της Ε΄ δημοτικού, πεντακόσια πενήντα πέντε της Στ΄ δημοτικού, διακόσιοι ογδόντα τρεις της Α΄ γυμνασίου και διακόσιοι εβδομήντα της Β΄ γυμνασίου.

Πίνακας 3.1

Υποκείμενα της Έρευνας

Μαθητές	Α΄ Μέτρηση	Β΄ Μέτρηση	Σύνολο
Δημοτικό	1029	992	2021
Γυμνάσιο	591	553	1144
Σύνολο	1620	1545	3165

Συνολικά έλαβαν μέρος είκοσι πέντε σχολεία δημοτικής εκπαίδευσης και οκτώ σχολεία μέσης εκπαίδευσης. Τα σχολεία που επιλέχθηκαν ήταν ιδιωτικά και δημόσια, αγροτικά και αστικά, από την επαρχία Λευκωσίας, Λάρνακας, Λεμεσού και Αμμόχωστου.

Διαδικασία Διεξαγωγής της Έρευνας

Η διεξαγωγή της έρευνας πραγματοποιήθηκε σε πέντε φάσεις. Η πρώτη φάση περιλάμβανε τη μελέτη της σχετικής βιβλιογραφίας. Η δεύτερη φάση αποσκοπούσε στην ανάπτυξη της αρχικής μορφής των δοκιμίων καθώς και στην προπilotική και πιλοτική χορήγηση των εργαλείων μέτρησης, ώστε να γίνει η τελική τους διαμόρφωση. Ο στόχος της τρίτης φάσης ήταν η χορήγηση του δοκιμίου στα υποκείμενα της έρευνας για τη συλλογή των ποσοτικών δεδομένων. Στην τέταρτη φάση επαναλήφθηκε η χορήγηση του δοκιμίου σε ολόκληρο το δείγμα. Στην πέμπτη φάση έγινε η τελική ανάλυση των δεδομένων και η εξαγωγή συμπερασμάτων. Πιο κάτω περιγράφονται αναλυτικά οι δραστηριότητες κάθε φάσης.

Πρώτη Φάση: Στην πρώτη φάση της έρευνας μελετήθηκε η σχετική βιβλιογραφία στη μαθηματική παιδεία και τη γνωστική ψυχολογία σε σχέση με τη χωρική αντίληψη και

την εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος. Η βιβλιογραφία ταξινομήθηκε με βάση τους παράγοντες που θα βοηθούσαν στην κατασκευή των ερευνητικών εργαλείων για τη μέτρηση της επίδοσης των μαθητών στα έργα χωρικής αντίληψης και στην αντιληπτική, λεκτική και λειτουργική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος. Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στον εντοπισμό των σημαντικών χαρακτηριστικών της κάθε ηλικίας.

Δεύτερη Φάση: Στη δεύτερη φάση της έρευνας καταρτίστηκαν τα ερευνητικά εργαλεία, τα οποία είναι απαραίτητα για τη συλλογή των ποσοτικών δεδομένων. Συγκεκριμένα, κατασκευάστηκαν:

- Δοκίμιο για τους μαθητές του δημοτικού (Ε΄ και Στ΄ τάξη) και του γυμνασίου (Α΄ και Β΄ τάξη) με σκοπό τη μελέτη της χωρικής αντίληψης των μαθητών
- Δοκίμιο για τους μαθητές του δημοτικού (Ε΄ και Στ΄ τάξη) και του γυμνασίου (Α΄ και Β΄ τάξη) με σκοπό τη διερεύνηση του ρόλου των τύπων εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος: της αντιληπτικής, λειτουργικής και λεκτικής σύλληψης.

Μετά την κατασκευή των ερευνητικών εργαλείων πραγματοποιήθηκε η προπilotική χορήγηση σε ένα τμήμα μαθητών της Στ΄ τάξης του δημοτικού. Στόχος της προπilotικής χορήγησης ήταν να εξεταστούν οι δυσκολίες των μαθητών στην εννοιολογική κατανόηση των οδηγιών των έργων, οι δυσκολίες εννοιολογικής κατανόησης των έργων καθώς και ο χρόνος συμπλήρωσης των δοκιμίων. Με βάση τα αποτελέσματα της προπilotικής χορήγησης έγιναν οι απαραίτητες διορθώσεις σε έργα στα οποία οι μαθητές αντιμετώπισαν δυσκολίες στην κατανόηση των λεκτικών οδηγιών των έργων. Αφαιρέθηκε επίσης ένα έργο από το τεστ της χωρικής αντίληψης, με σκοπό την αποφόρτιση του τεστ από πλευράς χρόνου και κούρασης των μαθητών.

Ακολούθησε η πilotική έρευνα σε 584 μαθητές (183 μαθητές δημοτικού και 401 μαθητές γυμνασίου) με σκοπό τον έλεγχο της αξιοπιστίας και της εγκυρότητάς των δύο δοκιμίων.

Τρίτη Φάση: Στην τρίτη φάση χορηγήθηκε το δοκίμιο στα υποκείμενα της έρευνας. Η χορήγηση του δοκιμίου πραγματοποιήθηκε από τον ερευνητή σε συνεργασία με τον εκπαιδευτικό του κάθε τμήματος. Πριν από τη συμπλήρωση κάθε τμήματος του τεστ μέτρησης της ικανότητας χωρικής αντίληψης προηγήθηκε επεξήγηση από τον ερευνητή των απαιτήσεων του κάθε τμήματος και παρουσίαση ενός παραδείγματος. Οι μαθητές είχαν στη διάθεσή τους συγκεκριμένο χρονικό περιθώριο για τη συμπλήρωση του κάθε

τμήματος του τεστ. Οι μαθητές που συμπλήρωναν ένα μέρος του τεστ δεν προχωρούσαν στα επόμενα μέχρι να τους δινόταν η κατάλληλη οδηγία. Για τη συμπλήρωση του τεστ μέτρησης της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος, οι μαθητές αφέθηκαν να εργαστούν με το δικό τους ρυθμό, σε συγκεκριμένο χρόνο, μιας και τα έργα ήταν πιο οικεία προς αυτούς. Για τη συμπλήρωση των 11 τμημάτων του τεστ μέτρησης της χωρικής αντίληψης δόθηκε συνολικά χρόνος 60 λεπτών και για τη συμπλήρωση του τεστ μέτρησης της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος, δόθηκε χρόνος 20 λεπτών. Ο χρόνος που δόθηκε στους μαθητές ήταν αρκετός για τη συμπλήρωση του κάθε μέρους του δοκιμίου.

Ακολούθησε η διόρθωση του τεστ, η καταχώρηση των δεδομένων σε λογιστικά φύλλα και η στατιστική τους ανάλυση. Για τη διόρθωση των ερωτήσεων ανοικτού τύπου του τεστ μέτρησης της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος, κωδικοποιήθηκαν οι πιθανές απαντήσεις. Στη συνέχεια έγιναν οι κατάλληλες στατιστικές αναλύσεις των ποσοτικών δεδομένων με βάση τα ερευνητικά ερωτήματα της εργασίας.

Τέταρτη Φάση: Στην τέταρτη φάση έγινε η χορήγηση του δοκιμίου σε όλα τα υποκείμενα της έρευνας, στο τέλος της σχολικής χρονιάς. Τα δεδομένα αυτά επέτρεψαν τη μελέτη της ανάπτυξης της χωρικής τους αντίληψης και της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος.

Πέμπτη Φάση: Στην τελευταία φάση στάδιο έγινε η ανάλυση των δεδομένων της προηγούμενης φάσης και η οργάνωση των αποτελεσμάτων της έρευνας, για την εξαγωγή των συμπερασμάτων. Τα δεδομένα των δύο μετρήσεων χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή δομικών μοντέλων, δυναμικών μοντέλων και μοντέλων μελέτης της σχέσης της χωρικής αντίληψης με την εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος.

Εργαλεία Μέτρησης

Για την πραγματοποίηση της έρευνας αναπτύχθηκαν δύο δοκίμια. Το πρώτο δοκίμιο αποσκοπούσε στη μέτρηση της χωρικής αντίληψης των μαθητών και το δεύτερο δοκίμιο στη μέτρηση της ικανότητας εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος.

Για την ανάπτυξη του δοκιμίου μέτρησης της χωρικής αντίληψης (Δείτε Παράρτημα) χρησιμοποιήθηκαν έργα από τα τεστ «Περιστροφή Καρτών» (Card-Rotation), «Κρυμμένες Φιγούρες» (Hidden Figures), «Κρυμμένα Μοτίβα» (Hidden Patterns), «Σύνθεση Σχημάτων» (Form Board), «Δίπλωση Σχημάτων» (Paper Folding), «Αναπτύγματα Σχημάτων» (Surface Development), «Σύγκριση Κύβων» (Cube Comparison) και «Επικάλυψη Σχημάτων» (Overlapping Figures), τα οποία συμπεριλαμβάνονται στο ETS kit (Ullstadius, Carlstedt & Gustafsson, 2004· Ekstrom, French, Harman, & Derman, 1976). Χρησιμοποιήθηκαν, επίσης, έργα από το τεστ «Προσανατολισμός Αντικειμένων στο Χώρο» (Object Perspective) των Kozhevnikov και Hegarty (2001), το τεστ «Χέρια» (Hands) από το «Dureman-Sälde test battery» (Psykologiförlaget, 1971) και το τεστ «Επίπεδο Νερού» (Water Level) από το «Water Level Test (WLT)» των Piaget και Inhelder (1956). Τα έργα από τα τεστ «Σύνθεση Σχημάτων» (Form Board), «Δίπλωση Σχημάτων» (Paper Folding), «Αναπτύγματα Σχημάτων» (Surface Development) και «Προσανατολισμός Αντικειμένων στο Χώρο» (Object Perspective) τροποποιήθηκαν ώστε να ανταποκρίνονται στις ικανότητες των μαθητών της έρευνας, γιατί τα πρωτότυπα έργα αναπτύχθηκαν για μαθητές μεγαλύτερης ηλικίας. Επίσης, προστέθηκαν δύο έργα στο τεστ «Επίπεδο Νερού» (Water Level), τα οποία χρησιμοποιήθηκαν σε προηγούμενες έρευνες (π.χ. Demetriou & Kazi, 2001· Demetriou και συνεργάτες, 2002). Στο τεστ «Επικάλυψη Σχημάτων» (Overlapping Figures), προστέθηκε ένα έργο όπου περιελάμβανε επικαλυπτόμενα φρούτα αντί γεωμετρικών σχημάτων με σκοπό να εξεταστεί κατά πόσο τα οικεία προς τους μαθητές αντικείμενα επηρεάζουν την επίδοσή τους. Ο Πίνακας 3.2 παρουσιάζει παραδείγματα από τα τεστ του δοκιμίου χωρικής αντίληψης.

Το δοκίμιο που αφορούσε τη χωρική αντίληψη ήταν διαχωρισμένο σε 11 μέρη. Συγκεκριμένα η δομή του δοκιμίου ήταν η ακόλουθη: (α) δέκα έργα από το τεστ «Περιστροφή Καρτών» (Card-Rotation), (β) δέκα έργα από το τεστ «Κρυμμένες Φιγούρες» (Hidden Figures), (γ) τριάντα πέντε έργα από το τεστ «Κρυμμένα Μοτίβα» (Hidden Patterns), (δ) δώδεκα έργα από το τεστ «Σύνθεση Σχημάτων» (Form Board), (ε) δέκα έργα από το τεστ «Δίπλωση Σχημάτων» (Paper Folding), (στ) τρία έργα από το τεστ «Προσανατολισμός Αντικειμένων στο Χώρο» (Object Perspective), (ζ) τέσσερα έργα από το τεστ «Αναπτύγματα Σχημάτων» (Surface Development), (η) δώδεκα έργα από το τεστ «Σύγκριση Κύβων» (Cube Comparison), (θ) τρία έργα από το τεστ «Επίπεδο Νερού»

(Water Level), (ι) είκοσι έργα από το τεστ «Χέρια» (Hands) και (κ) οκτώ έργα από το τεστ «Επικάλυψη Σχημάτων» (Overlapping Figures).

Αξίζει να σημειωθεί ότι ετοιμάστηκαν τρεις διαφορετικές μορφές του δοκιμίου όπου παρουσιάζονταν με διαφορετική σειρά τα 11 μέρη του δοκιμίου, για να διασφαλιστεί το ότι η σειρά τοποθέτησης των έργων δεν επηρεάζει τις μετρήσεις και τις επιδόσεις των μαθητών.

Αναλυτική Περιγραφή των Έργων του Δοκιμίου Χωρικής Αντίληψης

Για τη συμπλήρωση του δοκιμίου χωρικής αντίληψης δόθηκε συγκεκριμένος χρόνος στους μαθητές, ανάλογα με το βαθμό δυσκολίας της άσκησης και το μέγεθος της. Επίσης, πάντα δινόταν ένα παράδειγμα, με σκοπό να κατανοήσουν καλύτερα οι μαθητές τα έργα.

Στα έργα του τεστ «Περιστροφή Καρτών» (Card Rotation - CR), δινόταν ένα σχήμα μέσα στο πλαίσιο αριστερά και πέντε σχήματα δεξιά. Τα υποκείμενα καλούνταν να αναφέρουν ποιο από τα πέντε σχήματα που βρισκόταν δεξιά μπορεί να προκύψει από περιστροφή του σχήματος που βρισκόταν στα αριστερά και να το βάλουν σε κύκλο. Πρέπει να σημειωθεί ότι τα υποκείμενα δικαιούνταν να κυκλώσουν μόνο μία από τις επιλογές που βρίσκονταν δεξιά. Τα έργα του μέρους αυτού ήταν δέκα και έπρεπε να συμπληρωθούν μέσα στο χρονικό περιθώριο των πέντε λεπτών.

Στα έργα του τεστ «Κρυμμένες Φιγούρες» (Hidden Figures - HF), τα υποκείμενα έπρεπε να εντοπίσουν μια απλή μορφή που ήταν κρυμμένη σε ένα σύνθετο σχέδιο, αφού παρατηρούσαν προσεκτικά τις τρεις απλές μορφές (Α, Β, Γ) που δίνονταν και να προσπαθήσουν να βρουν ποια από αυτές κρύβεται σε κάθε σύνθετο σχέδιο. Η μορφή αυτή είχε το ίδιο μέγεθος και ήταν στην ίδια κατεύθυνση μέσα στο σύνθετο σχέδιο, όπως όταν παρουσιαζόταν μόνη της. Τα υποκείμενα καλούνταν να τη σχηματίσουν πιο έντονα και να γράψουν το γράμμα που αντιστοιχεί στη μορφή αυτή. Δόθηκαν δέκα σύνθετα σχέδια και ο διαθέσιμος χρόνος για τη συμπλήρωση του μέρους αυτού ήταν δέκα λεπτά.

Στα έργα του τεστ «Κρυμμένα Μοτίβα» (Hidden Patterns - HP), τα υποκείμενα καλούνταν να εντοπίσουν μια απλή μορφή, η οποία δινόταν σε σύνθετα σχέδια. Η μορφή αυτή είχε το ίδιο μέγεθος και κατεύθυνση μέσα στο σύνθετο σχέδιο, όπως όταν

παρουσιαζόταν μόνη της. Ακολούθως, έπρεπε να σημειώσουν \surd κάτω από το σύνθετο σχέδιο στην οποία υπήρχε η απλή φιγούρα. Δίνονταν τρία λεπτά για να εντοπίσουν 29 φιγούρες. Το μέρος αυτό αποτελούσε ένα τεστ αποπλαισίωσης.

Στα έργα του τεστ «Σύνθεση Σχημάτων» (Form Board – FB), δινόταν στα υποκείμενα ένα σχήμα πάνω από μια γραμμή και κάτω από αυτή άλλα σχήματα. Τα υποκείμενα έπρεπε να βάλουν σε κύκλο τα σχήματα που βρίσκονταν κάτω από τη γραμμή τα οποία όταν ενωθούν με τον κατάλληλο τρόπο σχηματίζουν το σχήμα που βρισκόταν πάνω από αυτή. Τα σχήματα που μπορούσαν να ενωθούν ήταν από 2 μέχρι 5. Τα σχήματα που βρίσκονταν κάτω από τη γραμμή μπορούσαν μόνο να περιστραφούν. Ο βαθμός δυσκολίας των έργων καθοριζόταν από τον αριθμό των σχημάτων που έπρεπε να ενωθούν και από τον αριθμό των περιστροφών που έπρεπε να γίνουν στα σχήματα για μπορέσουν να ενωθούν με τρόπο ώστε να σχηματίζουν το αρχικό σχήμα. Προτάθηκε στα υποκείμενα να ζωγραφίσουν στο αρχικό σχήμα τον τρόπο που ταιριάζουν τα σχήματα. Το μέρος αυτό αποτελείτο από 12 σχήματα και ο χρόνος που δόθηκε για τη συμπλήρωση του ήταν δέκα λεπτά.

Στα έργα του τεστ «Δίπλωση Σχημάτων» (Paper Folding - PF), παρουσιαζόταν στα υποκείμενα ο τρόπος με τον οποίο διπλώνεται ένα τετράγωνο φύλλο χαρτιού (σε μερικά έργα υπήρχαν περισσότερες από μία αναδιπλώσεις) και η θέση στην οποία ανοίγεται μια τρύπα όταν το φύλλο χαρτιού είναι διπλωμένο. Τα υποκείμενα καλούνταν να βάλουν σε κύκλο το σχήμα που δείχνει πως θα φαίνεται το φύλλο χαρτιού όταν ξεδιπλωθεί. Ο βαθμός δυσκολίας των έργων καθοριζόταν από τον αριθμό των διπλωμάτων και τον τρόπο που διπλώνεται το φύλλο χαρτιού. Δόθηκαν πέντε λεπτά για την διεκπεραίωση των δέκα ασκήσεων του τεστ αυτού.

Στα έργα του τεστ «Προσανατολισμός Αντικειμένων στο Χώρο» (Perspectives - P), παρουσιαζόταν στους μαθητές μια διάταξη επτά αντικειμένων. Σε κάθε έργο τα υποκείμενα καλούνταν να φανταστούν ότι βρίσκονταν σε ένα από τα αντικείμενα και κοίταζαν προς ένα από τα άλλα αντικείμενα. Στη συνέχεια έπρεπε να σημειώσουν την κατεύθυνση ενός τρίτου αντικειμένου σε ένα κύκλο όπου τους δινόταν στο κέντρο η αρχική τους θέση καθώς και η κατεύθυνση που κοίταζαν. Δεν επιτρεπόταν να περιστρέψουν το φύλλο της ερώτησης. Τα υποκείμενα είχαν τρία λεπτά να συμπληρώσουν τρία έργα.

Στα έργα του τεστ «Αναπτύγματα Σχημάτων» (Surface Development - SD), παρουσιαζόταν στα υποκείμενα ένα ανάπτυγμα ενός στερεού το οποίο όταν διπλωθεί κατά μήκος των διακεκομμένων γραμμών σχηματιζόταν το στερεό που τους δινόταν. Οι κορυφές του αναπτύγματος είχαν σημειωμένα γράμματα και τα υποκείμενα έπρεπε να αντιστοιχήσουν συγκεκριμένες ακμές του στερεού με τις πλευρές του αναπτύγματος. Ένα τμήμα του αναπτύγματος και η αντίστοιχη έδρα του στερεού ήταν σκιασμένα. Ο βαθμός δυσκολίας στα έργα καθοριζόταν από τη γωνία δίπλωσης των εδρών του αναπτύγματος και τον αριθμό των διπλώσεων κάθε έδρας. Στα υποκείμενα δόθηκαν πέντε λεπτά για την διεκπεραίωση των τεσσάρων ασκήσεων του τεστ αυτού.

Στα έργα του τεστ «Σύγκριση Κύβων» (Cube Comparison - CC), δινόταν στα υποκείμενα ένα ζεύγος από κύβους, στις έδρες των οποίων υπήρχαν σύμβολα. Τα υποκείμενα καλούνταν να αποφασίσουν κατά πόσο ο δεύτερος κύβος μπορεί να προκύψει από την περιστροφή του πρώτου κύβου. Ο βαθμός δυσκολίας καθοριζόταν από τον προσανατολισμό των συμβόλων στις έδρες των κύβων. Δόθηκαν δώδεκα ζευγάρια κύβων τα οποία έπρεπε να συμπληρώσουν στο χρονικό διάστημα των πέντε λεπτών.

Στα έργα του τεστ «Επίπεδο Νερού» (Water Level - WL), τα υποκείμενα καλούνταν να απαντήσουν σε τρία έργα σε τρία λεπτά. Τα δύο έργα αφορούσαν τα έργα με το κεκλιμένο μπουκάλι. Συγκεκριμένα στο πρώτο έργο παρουσιαζόταν μια εικόνα με ένα μισογεμάτο μπουκάλι και τα υποκείμενα καλούνταν να σχεδιάσουν τη γραμμή που καθορίζει το επίπεδο του νερού όταν το μπουκάλι αποκτήσει κλίση (α) 45 μοιρών και (β) 80 μοιρών. Στο δεύτερο έργο δινόταν μια εικόνα με τέσσερα ποτήρια γεμάτα με υγρό. Τα υποκείμενα καλούνται να κυκλώσουν ένα από τα τέσσερα ποτήρια που θεωρούν ότι είναι η σωστή αναπαράσταση του υγρού όταν αυτό πάρει τη συγκεκριμένη κλίση. Πρέπει να αναφερθεί ότι όλα τα ποτήρια είχαν την ίδια κλίση. Το τρίτο έργο με το βαρίδιο στο όχημα, παρουσιαζόταν η εικόνα ενός οχήματος που (α) ανεβαίνει και (β) κατεβαίνει ένα λόφο και τα υποκείμενα καλούνταν να σχεδιάσουν πως θα φαίνεται ένα νήμα, στο κάτω μέρος του οποίου βρισκόταν ένα βαρίδιο, που είναι κρεμασμένο από την οροφή του οχήματος.

Στα έργα του τεστ «Χέρια» (Hands - HA), δίνονταν στα υποκείμενα εικόνες από χέρια. Κάποιες από αυτές τις εικόνες αναπαριστούσαν δεξί χέρι και κάποιες εικόνες αριστερό χέρι. Εάν η εικόνα αναπαριστούσε δεξί χέρι τα υποκείμενα έπρεπε να σημειώσουν \surd στο δεξί τετράγωνο, εάν η εικόνα αναπαριστούσε αριστερό χέρι έπρεπε να σημειώσουν \surd στο αριστερό τετράγωνο. Στο χρονικό διάστημα των τριών λεπτών

κλήθηκαν τα υποκείμενα να αναγνωρίσουν 20 χειρονομίες αν γίνονται με το δεξί ή το αριστερό χέρι.

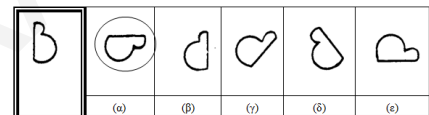
Στα έργα του τεστ «Επικάλυψη Σχημάτων» (Overlapping Figures - OF), παρουσιάζονταν στα υποκείμενα διάφορα μπλεγμένα γεωμετρικά σχήματα ή φρούτα, με κάποιους αριθμούς μέσα σε αυτά. Τα υποκείμενα έπρεπε να παρατηρήσουν προσεκτικά την κάθε εικόνα και να απαντήσουν στις τέσσερις ερωτήσεις που ακολουθούσαν. Οι ερωτήσεις αφορούσαν εντοπισμό αριθμών που βρίσκονται σε συγκεκριμένα σχήματα αλλά όχι σε κάποια άλλα. Το σύνολο των ερωτήσεων που έπρεπε να απαντηθούν ήταν οχτώ. Ο χρόνος που δινόταν, για τη διεκπεραίωση του τεστ αυτού, ήταν πέντε λεπτά.

Πίνακας 3.2

Παραδείγματα Έργων του Δοκιμίου Χωρικής Αντίληψης

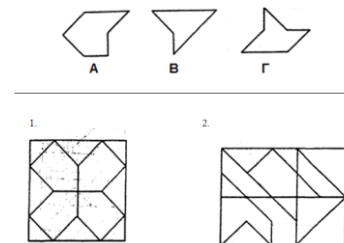
Περιστροφή Καρτών (Card-Rotation - CR):

Ποιο από τα σχήματα που βρίσκονται δεξιά μπορεί να προκύψει από περιστροφή του σχήματος που βρίσκεται στα αριστερά;



Κρυμμένες Φιγούρες (Hidden Figures - HF):

Ποια από τις φιγούρες Α, Β, Γ είναι κρυμμένη σε κάθε σύνθετη εικόνα. Η φιγούρα αυτή έχει το ίδιο μέγεθος και κατεύθυνση, όπως όταν παρουσιάζεται μόνη της.



Κρυμμένα Μοτίβα (Hidden Patterns - HP):

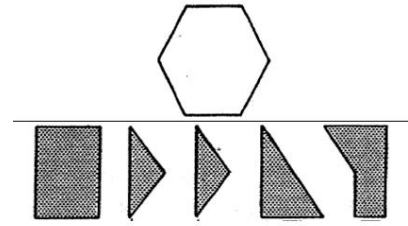
Να εντοπίσετε την απλή μορφή που είναι κρυμμένη στα σύνθετα σχέδια. Να βάλετε √ κάτω από τη σύνθετη εικόνα στην οποία υπάρχει ίδια η απλή μορφή.

Απλή μορφή:



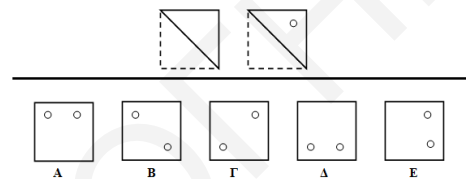
Σύνθεση Σχημάτων (Form Board – FB):

Ποια από τα σχήματα που βρίσκονται κάτω από τη γραμμή όταν ενωθούν μπορούν να σχηματίσουν το σχήμα που βρίσκεται πάνω από αυτή (τα σχήματα μπορούν μόνο να *περιστραφούν*). Τα σχήματα που θα ενωθούν μπορεί να είναι από 2 μέχρι 5.



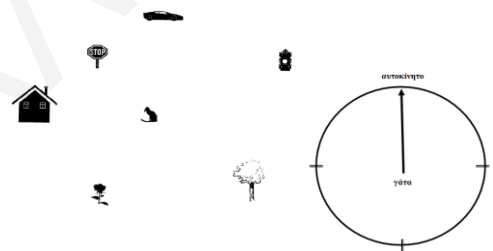
Δίπλωση Σχημάτων (Paper Folding - PF):

Πάνω από τη γραμμή παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο διπλώνεται ένα τετράγωνο χαρτόνι και η θέση στην οποία ανοίγουμε μια τρύπα όταν το χαρτόνι είναι διπλωμένο. Πως θα φαίνεται το χαρτόνι όταν ανοιχτεί;



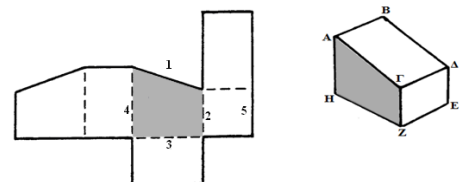
Προσανατολισμός Αντικειμένων στο Χώρο (Perspectives - P):

Να φανταστείς ότι βρίσκεσαι στη γάτα και κοιτάζεις προς το αυτοκίνητο. Να σημειώσεις στον κύκλο τη θέση του σπιτιού.



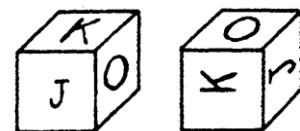
Αναπτύγματα Σχημάτων (Surface Development - SD):

Στα αριστερά παρουσιάζεται ένα κομμάτι χαρτόνι το οποίο όταν διπλωθεί κατά μήκος των διακεκομμένων γραμμών σχηματίζει το στερεό που υπάρχει στα δεξιά. Να σημειώσετε τις ακμές του στερεού που αντιστοιχούν στις αριθμημένες πλευρές του χαρτονιού.



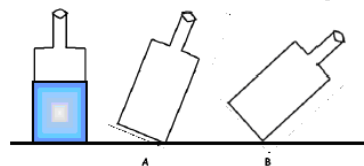
Σύγκριση Κύβων (Cube Comparison - CC):

Δεδομένου ότι οι πλευρές του κάθε κύβου είναι διαφορετικές, μα αποφασίσετε κατά πόσο οι δύο κύβοι είναι ίδιοι.



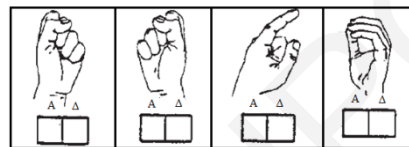
Επίπεδο Νερού (Water Level – WL):

Να ζωγραφίσετε πως θα φαίνεται το επίπεδο του νερού όταν το μπουκάλι γείρει από την όρθια θέση που βρίσκεται στις θέσεις Α και Β.



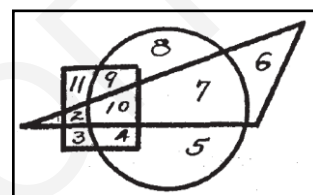
Χέρια (Hands - HA):

Ποιες από τις εικόνες αναπαριστούν δεξί χέρι και ποιες αναπαριστούν αριστερό χέρι;



Επικάλυψη Σχημάτων» (Overlapping Figures - OF):

Ποιος αριθμός είναι μέσα στο τρίγωνο και στο τετράγωνο, αλλά όχι στον κύκλο;



Δοκίμιο Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος

Το δεύτερο δοκίμιο αποσκοπούσε στη μέτρηση της ικανότητας των μαθητών στην εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος. Το δοκίμιο αυτό περιλάμβανε ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής και ερωτήσεις ανοικτού τύπου. Το περιεχόμενο του τεστ (δείτε Παράρτημα) βασίστηκε στα διαφορετικά είδη σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος όπως προτείνονται από τον Duval (1995, 1999). Συγκεκριμένα το δοκίμιο περιελάμβανε τρεις ομάδες έργων, οι οποίες αντιστοιχούν σε τρία είδη σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος: την αντιληπτική σύλληψη (Perceptual apprehension), τη λειτουργική σύλληψη (Operative apprehension) και τη λεκτική σύλληψη (Discursive apprehension). Για κάθε είδος σύλληψης δημιουργήθηκαν διάφορες υποκατηγορίες ικανοτήτων όπως υποδεικνύονται από την ταξινόμια του Duval (1995, 1999). Στη λεκτική σύλληψη (Discursive apprehension) λήφθηκε υπόψη η άποψη των Harada, Gallou-Dumiel και Nohda (2000), οι οποίοι υποστηρίζουν ότι η υποθετική – επαγωγική απόδειξη προκύπτει από αυτό το είδος σύλληψης.

Τα περισσότερα έργα που συμπεριλήφθηκαν στο δοκίμιο έχουν χρησιμοποιηθεί σε παλιότερες έρευνες για τη διερεύνηση της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος (δείτε Deliyianni, Elia, Gagatsis, Monoyiou, & Panaoura, 2009· Elia, Gagatsis, Deliyianni, Monoyiou, & Michael, 2009· Michael, Gagatsis, Deliyianni, Elia, & Monoyiou, 2009). Στο τεστ υπήρχαν συνολικά 11 έργα και οι μαθητές καλούνταν να επιλύσουν στο διάστημα των είκοσι λεπτών. Ο Πίνακας 3.3 παρουσιάζει παραδείγματα από το τεστ του δοκιμίου εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος.

Αναλυτική Περιγραφή των Έργων του Δοκιμίου Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος

Η πρώτη ομάδα έργων περιελάμβανε τρία έργα τα οποία αποσκοπούσαν στη μελέτη της αντιληπτικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος (PE). Συγκεκριμένα το πρώτο έργο (PE1) εξέταζε την ικανότητα των υποκειμένων να διακρίνουν, να αναγνωρίζουν και να ονομάζουν διάφορα υπο-σχήματα σε ένα ενιαίο σχήμα. Το δεύτερο έργο (PE2) εξέταζε την ικανότητα των υποκειμένων να εντοπίζουν και να ονομάζουν τα τετράγωνα σε ένα σύνθετο σχήμα. Το τρίτο έργο (PE3) εξέταζε την ικανότητα τους να αναγνωρίζουν μια πλευρά ως κοινή πλευρά ενός τετραγώνου και ενός τριγώνου. Το έργο αυτό απαιτούσε αυξημένη αντιληπτική ικανότητα των γεωμετρικών σχέσεων και βασικό γεωμετρικό συλλογισμό. Επίσης, τα υποκείμενα έπρεπε να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης τους για το πως οδηγήθηκαν στην απάντηση.

Η δεύτερη ομάδα έργων περιελάμβανε έξι έργα τα οποία εξέταζαν τη λειτουργική σύλληψη ενός γεωμετρικού σχήματος (OP - αναδιοργάνωση του δοσμένου σχήματος, αλλαγή της θέσης και του προσανατολισμού των δύο σχημάτων που δίνονται σε ένα νέο σχήμα). Τρία έργα (OPpw1, OPpw2 και OPpw3) εξέταζαν την αλλαγή θέσης του σχήματος (place way), που απαιτείται αναδιοργάνωση του σχήματος (Reconfiguration of a given figure) και αλλαγή στη θέση ή τον προσανατολισμό δύο δοσμένων σχημάτων σε ένα (Place way of modifying). Στο πρώτο έργο (OPpw1) του είδους αυτού, τα υποκείμενα καλούνταν να μετασχηματίσουν το σχήμα που δινόταν για να ανακαλύψουν το ζητούμενο (αναδιοργάνωση του σχήματος - Reconfiguration of a given figure). Παρουσιαζόταν ένα τραπέζιο και ένα ορθογώνιο που είχαν το ίδιο εμβαδόν και τα υποκείμενα καλούνταν να

βρουν το μήκος του ορθογωνίου, με βάση τις πλευρές του τραπέζιου που ήταν δεδομένες. Στο δεύτερο έργο (OPpw2) τα υποκείμενα καλούνταν να εντοπίσουν ποιο από τα σχήματα που τους δίνονταν είναι το ίδιο με το σχήμα αναφοράς, όταν αυτό περιστραφεί. Στο τρίτο έργο (OPpw3) απαιτείτο αλλαγή στη θέση ή στον προσανατολισμό δύο δοσμένων σχημάτων σε ένα. Συγκεκριμένα, δίνονταν δύο τρίγωνα, τα οποία όταν περιστραφούν με συγκεκριμένο τρόπο και ενωθούν, σχηματίζουν μια σύνθετη φιγούρα. Τα υποκείμενα καλούνταν να βρουν την περίμετρο της φιγούρας με βάση τις δεδομένες πλευρές που παρουσιάζονταν στα αρχικά τρίγωνα.

Τα τρία τελευταία έργα της ομάδας αυτής (OPme1, OPme2 και OPme) εξέταζαν τη μερεολογική τροποποίηση (mereologic) του γεωμετρικού σχήματος και συγκεκριμένα την αναδιοργάνωση του αρχικού σχήματος. Στο πρώτο έργο (OPme1) παρουσιαζόταν ένα ορθογώνιο χωρισμένο σε διάφορα υποσχήματα και τα υποκείμενα καλούνταν να συγκρίνουν δυο υποσχήματα ως προς το εμβαδόν τους. Στο δεύτερο έργο (OPme2) παρουσιαζόταν ένα ορθογώνιο και ένα ασύμμετρο σχήμα το οποίο με μια συγκεκριμένη τροποποίηση σχημάτιζε το ορθογώνιο. Τα υποκείμενα καλούνταν να συγκρίνουν τα εμβαδά των δύο σχημάτων. Στο τρίτο έργο (OPme3) τα υποκείμενα κλήθηκαν να εντοπίσουν και να ονομάσουν μέσα σε ένα διαμελισμένο τρίγωνο, τρία παραλληλόγραμμα και ένα τραπέζιο.

Η τρίτη ομάδα έργων αφορούσε τη λεκτική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος (DI) και απαρτιζόταν από δύο έργα (DI1 και DI2). Τα έργα αυτά απαιτούσαν από τα υποκείμενα τη χρήση ορισμών και ιδιοτήτων και εξέταζαν το συλλογισμό τους, αφού θα έπρεπε να ακολουθήσουν διαδοχικά βήματα για να φτάσουν στη ζητούμενη απόδειξη. Στο πρώτο έργο της ομάδας αυτής (DI1) δινόταν ένα σύνθετο σχήμα το οποίο αποτελείται από ένα ισόπλευρο τρίγωνο, ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και δύο τετράγωνα. Τα υποκείμενα καλούνταν να αποδείξουν, μέσα από μια σειρά συνεπαγωγών, την ισότητα των δύο ευθύγραμμων τμημάτων. Στο δεύτερο έργο (DI2) παρουσιαζόταν ένα τρίγωνο το οποίο σχηματιζόταν από την ένωση ενός ισοσκελούς και ενός αμβλυγωνίου τριγώνου. Τα υποκείμενα, με βάση το θεώρημα του αθροίσματος των γωνιών ενός τριγώνου, του θεωρήματος του αθροίσματος των παραπληρωματικών γωνιών και με τις ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου, καλούνταν να υπολογίσουν κάποιες από τις γωνίες του σχήματος.

Πίνακας 3.3

Παραδείγματα Έργων του Δοκιμίου Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος

Έργα Αντιληπτικής Σύλληψης Γεωμετρικού Σχήματος

(Perceptual apprehension – PE)

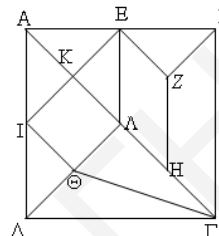
PE1:

Να ονομάσετε τα σχήματα:

Το σχήμα ΙΚΛΘ είναι

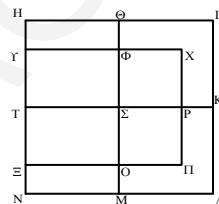
Το σχήμα ΕΖΗΛ είναι

Το σχήμα ΛΓΘ είναι



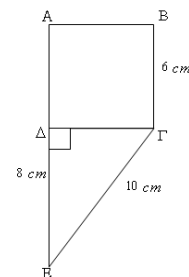
PE2:

Πόσα τετράγωνα βρίσκονται κρυμμένα στο σχήμα; Να τα εντοπίσετε και να τα ονομάσετε.



PE3:

Το σχήμα ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο και το σχήμα ΓΔΕ ορθογώνιο τρίγωνο. Να υπολογίσετε την πλευρά ΔΓ.



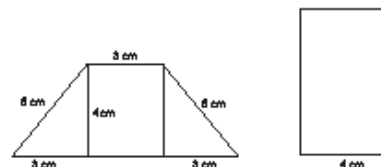
Έργα Λειτουργικής Σύλληψης Γεωμετρικού Σχήματος

(Operative apprehension - OP)

Έργα αλλαγής θέσης του σχήματος (place way - OPpw)

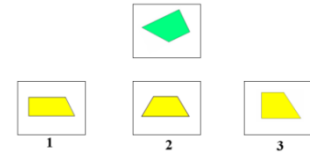
OPpw1:

Το τραπέζιο και το ορθογώνιο έχουν το ίδιο εμβαδό. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς του ορθογώνιου.



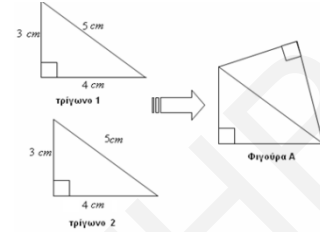
ΟΡρω2:

Ποια από τις κάρτες 1, 2 και 3 είναι η ίδια με την κάρτα που βρίσκεται στο πάνω μέρος;



ΟΡρω3:

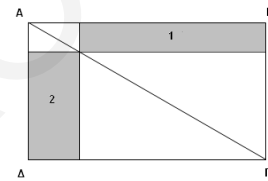
Η Φιγούρα Α σχηματίστηκε από το τρίγωνο 1 και το τρίγωνο 2. Ποια είναι η περίμετρος της Φιγούρας Α;



Έργα μερεολογικής τροποποίησης (mereologic - ΟΡμε)

ΟΡμε1:

Το σχήμα ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. Να συγκρίνετε το εμβαδόν των σκιασμένων ορθογώνιων 1 και 2.



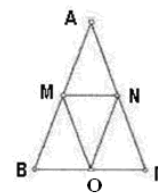
ΟΡμε2:

Να συγκρίνετε το εμβαδόν των σχημάτων Α και Β.



ΟΡμε3:

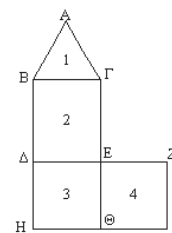
Να εντοπίσετε και να ονομάσετε 3 παραλληλόγραμμα και ένα τραπέζιο που βρίσκονται κρυμμένα στο τρίγωνο ΑΒΓ.



Έργα Λεκτικής Σύλληψης Γεωμετρικού Σχήματος (Discursive apprehension-DI)

DI1:

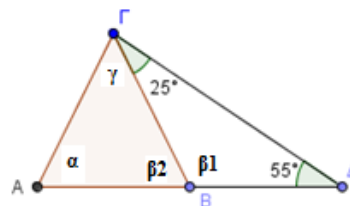
Το σχήμα 1 είναι ισόπλευρο τρίγωνο, το σχήμα 2 είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και τα σχήματα 3 και 4 είναι τετράγωνα. Να συγκρίνετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΘΙ.



DI2:

Το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές (GA = GB). Να

υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}1$, $\hat{\beta}2$ και $\hat{\gamma}$



Αξιοπιστία των δύο Οργάνων Μέτρησης

Για την εξέταση της αξιοπιστίας του οργάνου μέτρησης της χωρικής αντίληψης και του οργάνου μέτρησης της ικανότητας εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος των μαθητών υπολογίστηκαν οι τιμές του συντελεστή Cronbach α για τις επιδόσεις των μαθητών στα δύο όργανα μέτρησης. Η τιμή του συντελεστή Cronbach α για τη συνολική επίδοση στο όργανο μέτρησης της χωρικής αντίληψης ήταν 0.811. Με τη διαγραφή όμως δύο έργων ο δείκτης αξιοπιστίας φαίνεται να αυξάνεται σημαντικά. Συγκεκριμένα, με τη διαγραφή του έργου «Επίπεδο Νερού (WL)», ο δείκτης αξιοπιστίας αυξανόταν σε 0.817 και με τη διαγραφή του έργου «Προσανατολισμός Αντικειμένων στο Χώρο (P)», ο δείκτης αξιοπιστίας αυξανόταν σε 0.822. Αξίζει να σημειωθεί ότι η συσχέτιση και των δύο έργων (corrected item/total correlation) με τα υπόλοιπα έργα του δοκιμίου ήταν 0.289 και 0.218 αντίστοιχα, οι οποίες ήταν και οι χαμηλότερες από όλες. Διαφάνηκε λοιπόν ότι τα δύο αυτά έργα δεν είχαν εσωτερική συνάφεια με τις υπόλοιπες, άρα διαγράφηκαν και ο συντελεστής Cronbach α για τη συνολική επίδοση στο όργανο μέτρησης της χωρικής αντίληψης ανήλθε στο 0.830.

Ο δείκτης αξιοπιστίας των έργων του τεστ για την εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος ήταν Cronbach's Alpha=.840. Ενώ με τη διαγραφή ενός έργου «αλλαγής θέσης τροποποίηση της λειτουργικής σύλληψης (OPpw2)» ο δείκτης αυξανόταν σε α=.845, οπότε κρίθηκε σκόπιμη η διαγραφή του έργου αυτού για τις περαιτέρω αναλύσεις.

Οι τιμές του συντελεστή Cronbach α ήταν και στις δύο περιπτώσεις δοκιμίων, μεγαλύτερες από .75 και μπορούν να θεωρηθούν ως ικανοποιητικές (Cronbach, 1990).

Επιβεβαίωση Εννοιολογικού Σχεδιασμού των δύο Οργάνων Μέτρησης

Το όργανο μέτρησης της χωρικής αντίληψης κατασκευάστηκε για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας και περιλάμβανε ένα μεγάλο αριθμό έργων. Παρόλο που τα έργα του τεστ προέρχονταν από ευρέως αποδεκτά τεστ μέτρησης των εξεταζόμενων παραγόντων της χωρικής αντίληψης, Ως εκ τούτου, κρίθηκε σκόπιμο να επιβεβαιωθεί ο εννοιολογικός σχεδιασμός του συγκεκριμένου οργάνου μέτρησης. Στο υποκεφάλαιο που ακολουθεί παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής ανάλυσης του δοκιμίου που αναπτύχθηκε για τη μέτρηση των ικανοτήτων των μαθητών στα έργα χωρικής αντίληψης. Επιβεβαίωση εννοιολογικού σχεδιασμού πραγματοποιήθηκε και για το όργανο μέτρησης της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Παρά το γεγονός ότι τα έργα που περιλήφθηκαν στο όργανο αυτό έχουν χρησιμοποιηθεί σε προηγούμενες έρευνες (Deliyianni, Elia, Gagatsis, Monoyiou και Panaoura, 2009· Deliyianni, Michael, Monoyiou, Gagatsis, & Elia, 2011· Michael, 2012· Michael, Gagatsis, Avgerinos & Kuzniak, 2011· Michael, Elia, Gagatsis & Kalogirou, 2010· Michael, Gagatsis, Lamprianou, Deliyianni, & Monoyiou, 2011), κρίθηκε σκόπιμο να ελεγχθεί επιβεβαιωθεί ο εννοιολογικός σχεδιασμός και του συγκεκριμένου οργάνου για τις ηλικίες των παιδιών που έλαβαν μέρος στην παρούσα εργασία.

Επιβεβαίωση Εννοιολογικού Σχεδιασμού Οργάνου Μέτρησης της Χωρικής Αντίληψης

Λόγω του γεγονότος ότι τα έργα του τεστ χωρικής αντίληψης προέρχονταν από ευρέως αποδεκτά τεστ μέτρησης των εξεταζόμενων παραγόντων, πραγματοποιήθηκε επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση για να εξεταστεί ο εννοιολογικός σχεδιασμός του οργάνου μέτρησης.

Με βάση τη βιβλιογραφία, και συγκεκριμένα τη θεωρία του Carroll (1993) για τα τεστ που χρησιμοποιήθηκαν στο συγκεκριμένο όργανο ανταποκρίνονται σε τρεις παράγοντες: τον παράγοντα «Οπτικοποίησης (Vz)», τον παράγοντα «Σχέσεις Εννοιών στο Χώρο (SR)» και τον παράγοντα «Ευελιξία Διεκπεραίωσης (CF)». Συγκεκριμένα τα έργα από τα τεστ «Σύνθεση Σχημάτων (FB)», «Δίπλωση Σχημάτων (PF)» και «Αναπτύγματα

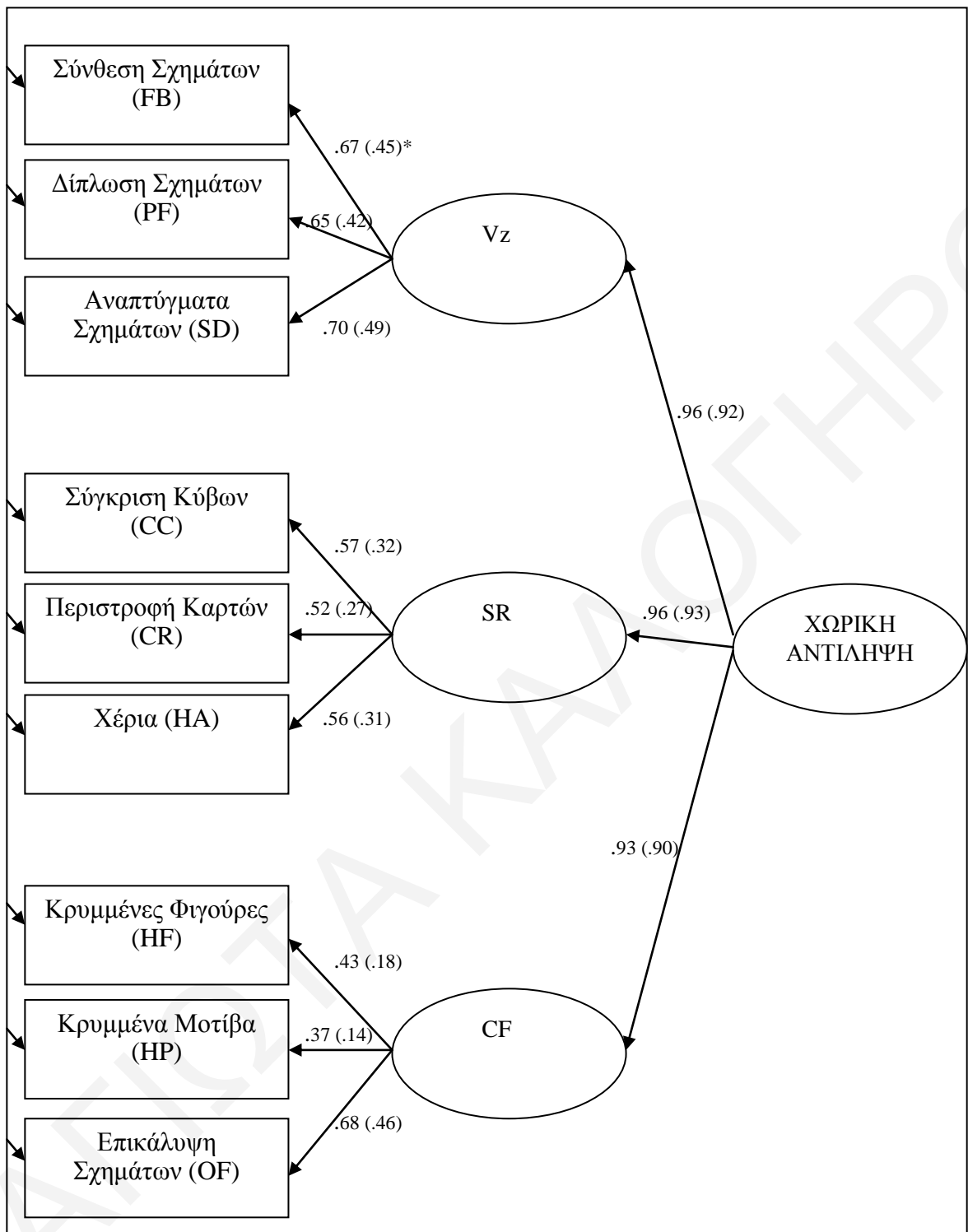
Σχημάτων (SD)» αποτελούν γνώρισμα του παράγοντα «οπτικοποίησης (Vz)», τα τεστ «Περιστροφή Καρτών (CR)», «Σύγκριση Κύβων (CC)» και «Χέρια (HA)» ανταποκρίνονται στον παράγοντα «Σχέσεις Εννοιών στο Χώρο (SR)» και ο παράγοντας «Ευελιξία Διεκπεραίωσης (CF)» χαρακτηρίζεται από τα τεστ «Κρυμμένες Φιγούρες (HF)» «Κρυμμένα Μοτίβα (HP)» και «Επικάλυψη Σχημάτων (OF)».

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης των δεδομένων της πιλοτικής χορήγησης έδειξαν ότι η προσαρμογή του μοντέλου στα δεδομένα ήταν οριακά ικανοποιητική, (CFI=.904, $\chi^2=74,909$, $df=24$, $\chi^2/df=3.12$, RMSEA=.080). Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης (δείτε Διάγραμμα 3.1) έδειξαν ότι όλα τα έργα είχαν στατιστικά σημαντικές φορτίσεις στους αντίστοιχους παράγοντες.

Λόγω του ότι τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής ανάλυσης της πιλοτικής χορήγησης ήταν οριακά, αποφασίστηκε όπως ελεγχθεί η λύση του ενός παράγοντα (δείτε Διάγραμμα 3.2). Τα αποτελέσματα ήταν ελαφρώς βελτιωμένα (CFI=.92, $\chi^2=79,377$, $df=27$, $\chi^2/df=2.94$, RMSEA=.062). Όλα τα έργα είχαν στατιστικές σημαντικές φορτίσεις στον παράγοντα πρώτης τάξης.

Ωστόσο, οι φορτίσεις των τεστ «Κρυμμένες Φιγούρες (HF)» και «Κρυμμένα Μοτίβα (HP)», και στις δύο περιπτώσεις δεν ήταν ικανοποιητικές, υποδηλώνοντας πιθανόν πρόβλημα κατανόησης από τους μαθητές. Για αυτό στη χορήγηση του τεστ κατά την κύρια φάση της έρευνας δόθηκε περισσότερη σημασία στην επεξήγηση των τεστ αυτών.

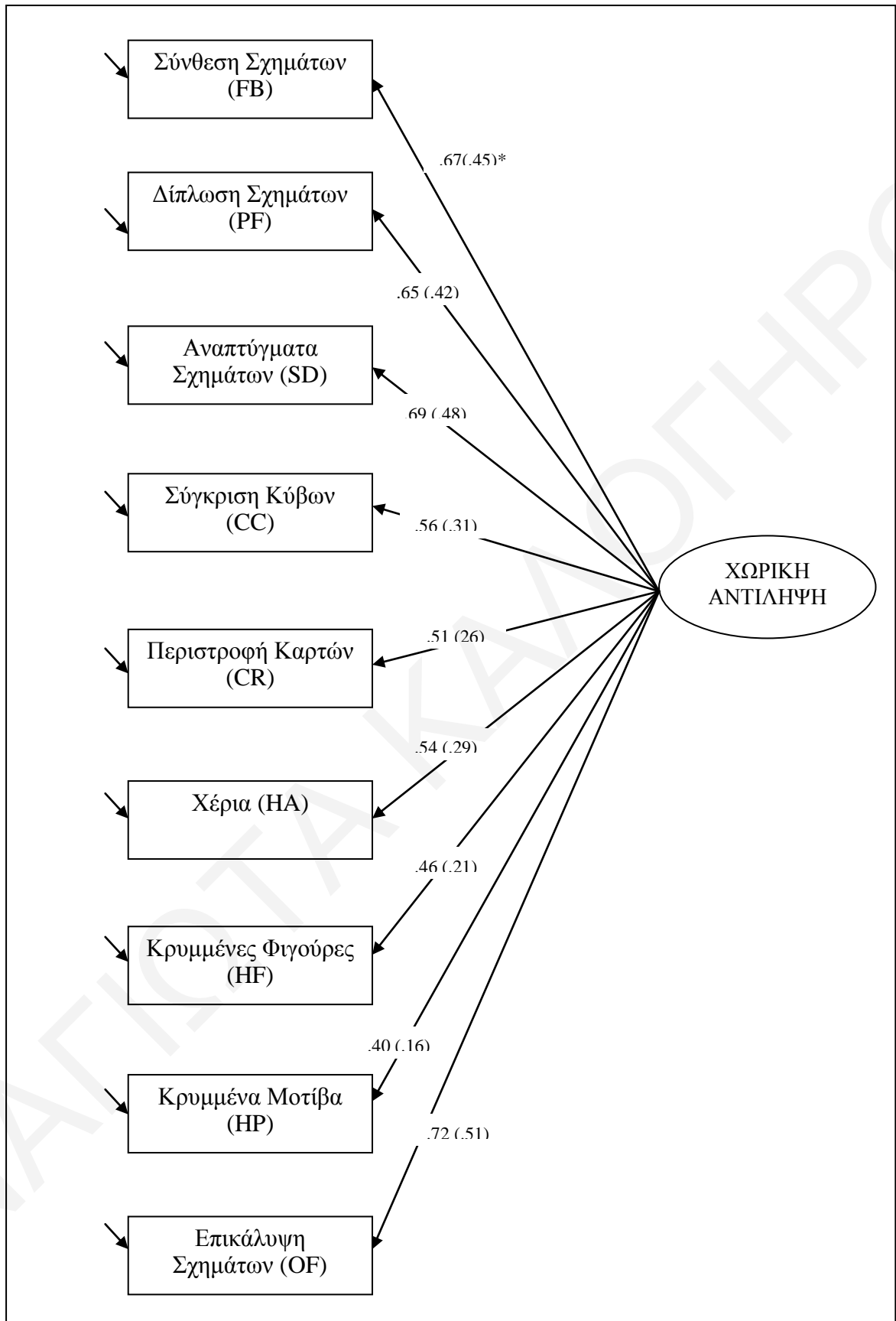
Με βάση τα πιο πάνω αποτελέσματα θεωρήσαμε ότι ο εννοιολογικός σχεδιασμός του εργαλείου μέτρησης της χωρικής αντίληψης ήταν ικανοποιητικός. Η επιλογή του πιο αντιπροσωπευτικού μοντέλου για τη δομή της χωρικής αντίληψης, θα γίνει στο κεφάλαιο των αποτελεσμάτων.



Διάγραμμα 3.1. Μοντέλο ελέγχου εννοιολογικού σχεδιασμού του τεστ χωρικής αντίληψης.

*Ο πρώτος αριθμός δείχνει το συντελεστή φόρτισης και ο αριθμός στην παρένθεση την αντίστοιχη ερμηνευόμενη διασπορά (r^2).

Σημείωση: Εξήγηση συμβολισμού: Vz – «Οπτικοποίηση», SR – «Σχέσεις Εννοιών στο Χώρο» και CF – «Ευελιξία Διεκπεραίωσης».



Διάγραμμα 3.2. Μοντέλο ελέγχου εννοιολογικού σχεδιασμού του τεστ χωρικής αντίληψης ενός παράγοντα.

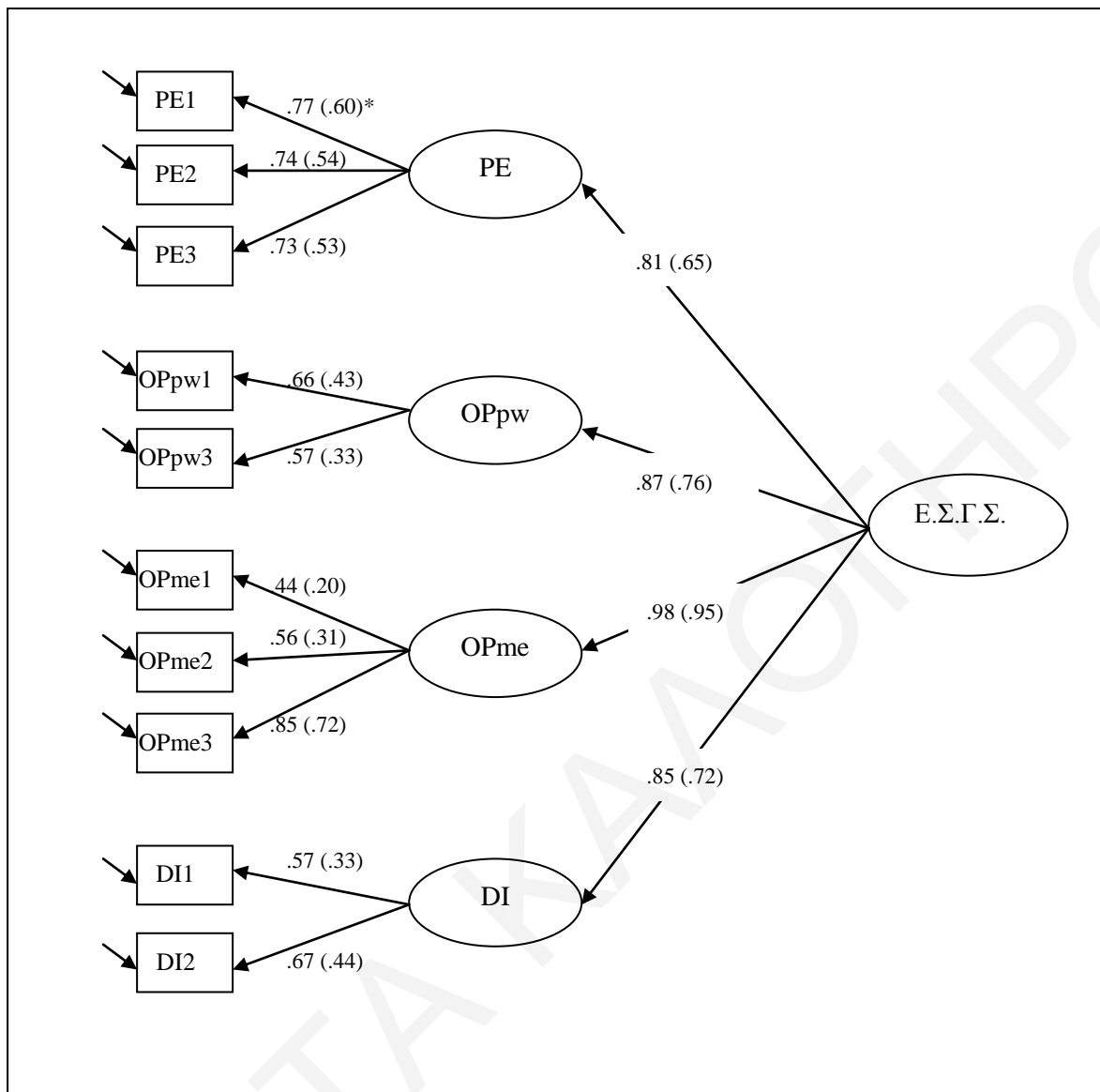
*Ο πρώτος αριθμός δείχνει το συντελεστή φόρτισης και ο αριθμός στην παρένθεση την αντίστοιχη ερμηνευόμενη διασπορά (r^2).

Επιβεβαίωση Εννοιολογικού Σχεδιασμού Οργάνου Μέτρησης της Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος

Επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση πραγματοποιήθηκε και για τον έλεγχο του εννοιολογικού σχεδιασμού του οργάνου μέτρησης της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Τα 10 έργα που χρησιμοποιήθηκαν στο τεστ εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος αποτελούσαν τις μεταβλητές του μοντέλου, οι οποίες φόρτιζαν σε τέσσερις παράγοντες πρώτης τάξης, που αντικατοπτρίζουν τέσσερις επιμέρους ικανότητες που σχετίζονται με τα είδη σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος όπως προτείνονται από τον Duval (1995, 1999): την «αντιληπτική σύλληψη (PE)» την «αλλαγή θέσης τροποποίηση της λειτουργικής σύλληψης (OPpw)» τη «μερεολογική τροποποίηση της λειτουργικής σύλληψης (OPme)» και τη «λεκτική σύλληψη (DI)». Οι τέσσερις παράγοντες πρώτης τάξης που αφορούν τις τροποποιήσεις της λειτουργικής σύλληψης, φορτίζουν σε ένα παράγοντα δευτέρας τάξης, τον παράγοντα «Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος (Ε.Σ.Γ.Σ.)».

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης των δεδομένων της πιλοτικής χορήγησης (Διάγραμμα 3.3) έδειξαν ότι η προσαρμογή του μοντέλου στα δεδομένα ήταν ικανοποιητική, επιβεβαιώνοντας τη δομή του προτεινόμενου μοντέλου ($CFI=.96$, $\chi^2=75.83$, $df=31$, $\chi^2/df= 2.44$, $RMSEA=.06$). Όλα τα έργα είχαν στατιστικά σημαντικές φορτίσεις στους αντίστοιχους παράγοντες. Δόθηκε όμως και σε αυτή την περίπτωση περισσότερη σημασία στην επεξήγηση των έργων κατά τη χορήγηση του τεστ στην κύρια φάση της έρευνας.

Η επιβεβαίωση του μοντέλου έδειξε ότι τα έργα του τεστ αποτελούν κατάλληλους δείκτες των αντίστοιχων παραγόντων. Με βάση αυτά τα αποτελέσματα θεωρήσαμε ότι ο εννοιολογικός σχεδιασμός του εργαλείου μέτρησης της χωρικής αντίληψης ήταν ικανοποιητικός.



Διάγραμμα 3.3. Μοντέλο ελέγχου εννοιολογικού σχεδιασμού του τεστ εννοιολογικής σύλληψης γεωμετρικού σχήματος

*Ο πρώτος αριθμός δείχνει το συντελεστή φόρτισης και ο αριθμός στην παρένθεση την αντίστοιχη ερμηνευόμενη διασπορά (r^2).

Σημείωση: Εξήγηση συμβολισμού (αναλυτική περιγραφή στη σελ. 70): PE - «Αντιληπτική Σύλληψη», OPpw - «Αλλαγή Θέσης Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης», OPme - «Μερεολογική Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης», DI - «Λεκτική Σύλληψη» και E.Σ.Γ.Σ. - «Εννοιολογική Σύλληψη Γεωμετρικού Σχήματος».

Βαθμολόγηση των Έργων

Τα έργα πολλαπλής επιλογής καθώς και τα υπόλοιπα έργα των δύο τεστ βαθμολογήθηκαν στη βάση σωστό-λάθος (με κλίμακα 0-1). Δηλαδή, κάθε έργο για το οποίο δόθηκε ορθή απάντηση πήρε ένα βαθμό, ενώ τα έργα με λανθασμένη ή καθόλου απάντηση, πήραν μηδέν βαθμούς.

Επίσης, όσον αφορά το τεστ χωρικής αντίληψης, λόγω του ότι αποτελείτο από έντεκα διαφορετικά τεστ, που το καθένα περιλάμβανε μια ποικιλία έργων, αποφασίστηκε όπως για την πραγματοποίηση των στατιστικών αναλύσεων, χρησιμοποιηθεί ο μέσος όρος επιτυχίας των μαθητών στα έργα του κάθε τεστ.

Μέθοδοι Ανάλυσης των Δεδομένων

Για την ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε κυρίως το λογισμικό γραμμικής δομικής ανάλυσης Mplus (Muthen & Muthen, 2004). Για να απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα της εργασίας ελέγχθηκε ο βαθμός προσαρμογής μοντέλων επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης CFA: Confirmatory Factor Analysis, δομικών μοντέλων (Structural Models).

Συγκεκριμένα, με σκοπό να μελετηθεί η δομή της χωρικής αντίληψης και της ικανότητας εννοιολογικής σύλληψης τους γεωμετρικού σχήματος των μαθητών πραγματοποιήθηκε επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση (Marcoulides & Schumacker, 1996· Ullstadius, Carlstedt, & Gustafsson, 2004). Στόχος της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης ήταν να ελεγχθεί ο βαθμός προσαρμογής των δεδομένων της εργασίας στη δομή των προτεινόμενων μοντέλων.

Σύμφωνα με τις εισηγήσεις των Thompson και Daniel (1996), για όλες τις αναλύσεις που έγιναν χρησιμοποιήθηκε μια ομάδα κριτηρίων για την αξιολόγηση της καταλληλότητας των μοντέλων. Όπως σημειώνει ο Kline (1998), για τη διασφάλιση της καταλληλότητας ενός μοντέλου απαιτείται ένα ελάχιστο σύνολο δεικτών, το οποίο πρέπει να περιλαμβάνει το κριτήριο χ^2 , τους βαθμούς ελευθερίας του και το επίπεδο σημαντικότητας, ένα δείκτη που περιγράφει τη συνολική αναλογία της διασποράς που

ερμηνεύεται (όπως οι δείκτες GFI, NFI ή CFI) και ένα δείκτη που βασίζεται στα σταθμισμένα υπόλοιπα (όπως οι δείκτες SRMR ή RMSEA).

Επειδή το κριτήριο χ^2 είναι ιδιαίτερο ευαίσθητο στο μέγεθος του δείγματος (Byrne, 1998), εξετάστηκε ο λόγος του κριτηρίου χ^2 προς τους βαθμούς ελευθερίας. Συγκεκριμένα, τιμές μικρότερες του 3, θεωρούνται ενδεικτικές για την καταλληλότητα του μοντέλου (Kline, 1998). Ο δείκτης CFI (τιμές της τάξεως 0.90 και άνω θεωρούνται ικανοποιητικές), καθώς και ο δείκτης RMSEA, ο οποίος βασίζεται στα σταθμισμένα υπόλοιπα (για την καταλληλότητα του μοντέλου απαιτούνται μικρές τιμές του δείκτη αυτού, κάτω από 0.8). Πέρα από τη γενική αξιολόγηση του μοντέλου με βάση τις τιμές των δεικτών που έχουν αναφερθεί, εξετάστηκε η κατανομή των υπολοίπων, καθώς και οι τιμές των παραμέτρων που υπολογίζονταν για κάθε μοντέλο.

Η παλινδρομική ανάλυση είχε ως στόχο να εξετάσει την ύπαρξη αιτιατών σχέσεων μεταξύ των παραγόντων της εργασίας. Συγκεκριμένα ελέγχθηκε η προσαρμογή ενός δομικού μοντέλου στο οποίο η χωρική αντίληψη αποτελεί παράγοντα πρόβλεψης της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Επίσης, ελέγχθηκε η επίδραση της χωρικής αντίληψης στους επιμέρους παράγοντες της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος.

Το στατιστικό πακέτο SPSS χρησιμοποιήθηκε για την περιγραφική ανάλυση των δεδομένων της έρευνας. Για να εξεταστούν κατά πόσο υπήρχαν διαφορές ανάμεσα στις διαφορετικές ηλικιακές ομάδες που έλαβαν μέρος στην έρευνας στην επίδοσή τους στη χωρική αντίληψη και το γενικό παράγοντα της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος, πραγματοποιήθηκε πολλαπλή ανάλυση διασποράς (MANOVA).

Τέλος, πραγματοποιήθηκαν αναλύσεις ομοιότητας χρησιμοποιώντας το λογισμικό πρόγραμμα CHIC (Bodin, Couturier, & Gras, 2000· Gras, Peter, Briand, & Philippe, 1997). Στα διαγράμματα ομοιότητας που προκύπτουν κατά την ανάλυση ομοιότητας τα έργα κατανέμονται σε ομάδες ανάλογα με την ομοιογένεια με την οποία έχουν αντιμετωπιστεί από τους μαθητές. Με άλλα λόγια, σε ένα διάγραμμα ομοιότητας σχηματίζονται ομάδες έργων τα οποία οι μαθητές έχουν αντιμετωπίσει με όμοιο τρόπο.

Σύνοψη

Για την παρούσα εργασία κατασκευάστηκαν δύο ερευνητικά εργαλεία για τη συλλογή των ποσοτικών δεδομένων της έρευνας: ένα δοκίμιο μέτρησης της χωρικής αντίληψης και ένα δοκίμιο μέτρησης της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Στο κεφάλαιο αυτό έχουν περιγραφεί τα έργα που χρησιμοποιήθηκαν και στα δύο δοκίμια. Τα δοκίμια αυτά χορηγήθηκαν σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές, στους μαθητές Ε΄ και Στ΄ δημοτικού, Α΄ και Β΄ γυμνασίου. Με τα δεδομένα της πιλοτικής φάσης επιβεβαιώθηκε ο εννοιολογικός σχεδιασμός του οργάνου μέτρησης της χωρικής αντίληψης και του οργάνου μέτρησης της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος.

Για την ανάλυση των δεδομένων που συγκεντρώθηκαν χρησιμοποιήθηκε το στατιστικό πακέτο SPSS (μέσοι όροι, πολλαπλή ανάλυση διασποράς), το πρόγραμμα MPLUS (επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση, παλινδρομική ανάλυση) και το πρόγραμμα CHIC (αναλύσεις ομοιότητας).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τις στατιστικές αναλύσεις των δεδομένων της παρούσας έρευνας. Η παρουσίαση των αποτελεσμάτων γίνεται με βάση τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν στην παρούσα εργασία. Το πρώτο υποκεφάλαιο αφορά τα πρώτα ερευνητικά ερωτήματα και συγκεκριμένα εξετάζει τη δομή των ικανοτήτων των μαθητών αναφορικά με τη χωρική αντίληψη. Στο πρώτο μέρος του υποκεφαλαίου παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης των μαθητών της πρώτης χορήγησης των ερευνητικών εργαλείων. Στο δεύτερο μέρος του υποκεφαλαίου, ελέγχεται η αμεταβλητότητα του μοντέλου της χωρικής αντίληψης, τόσο για τους μαθητές του δημοτικού και γυμνασίου της πρώτης μέτρησης, όσο και για τους μαθητές της δεύτερης μέτρησης.

Στο δεύτερο υποκεφάλαιο εξετάζεται η δομή των ικανοτήτων των μαθητών σχετικά με την εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος. Στο πρώτο μέρος παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης των μαθητών της πρώτης χορήγησης του ερευνητικού εργαλείου. Στο δεύτερο μέρος ελέγχεται η αμεταβλητότητα του μοντέλου της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος, τόσο για τους μαθητές του δημοτικού και γυμνασίου της πρώτης μέτρησης, όσο και για τους μαθητές της δεύτερης μέτρησης.

Το τρίτο υποκεφάλαιο ανταποκρίνεται στο τέταρτο ερευνητικό ερώτημα και αφορά τη μελέτη της σχέσης μεταξύ της χωρικής αντίληψης και της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Για το σκοπό αυτό εξετάζεται η επιβεβαίωση ενός δομικού μοντέλου το οποίο περιλαμβάνει τη σχέση μεταξύ της χωρικής αντίληψης και της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος.

Στο τέταρτο υποκεφάλαιο μελετάται η επίδοση των μαθητών στη χωρική αντίληψη και στην εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος στην πρώτη μέτρηση της έρευνας. Επιπρόσθετα, συζητούνται οι διαφορές στην επίδοση των μαθητών των διαφορετικών τάξεων στους παράγοντες αυτούς. Κατ' επέκταση της μελέτης της επίδοσης των μαθητών, γίνεται έλεγχος διαχωρισμού των υποκειμένων της έρευνας σε κατηγορίες μαθητών με βάση τη επίδοσή τους στον παράγοντα της χωρικής αντίληψης και τον παράγοντα της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Στόχος της ανάλυσης αυτής ήταν η διερεύνηση των επιπέδων ανάπτυξης της σκέψης των μαθητών της Ε΄ Δημοτικού μέχρι τη Β΄ Γυμνασίου στη χωρική αντίληψη και στην εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος.

Στο έκτο υποκεφάλαιο, με βάση τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τις πιο πάνω αναλύσεις, γίνεται μια πιο λεπτομερής μελέτη της σχέσης της χωρικής αντίληψης και των παραγόντων της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Για το σκοπό αυτό ελέγχθηκε η προσαρμογή διαφορετικών μοντέλων παλινδρόμησης. Επιπρόσθετα, όσον αφορά τη σχέση της χωρικής αντίληψης και των παραγόντων της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος, στο έβδομο υποκεφάλαιο περιγράφονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση ομοιότητας των δεδομένων για κάθε χορήγηση και για κάθε ηλικιακό επίπεδο (δημοτικό και γυμνάσιο).

Η Δομή των Ικανοτήτων των Μαθητών Αναφορικά με τη Χωρική Αντίληψη

Σύμφωνα με την υπόθεση ότι η χωρική αντίληψη των μαθητών αποτελείται από διαφορετικές συνιστώσες, ένα από τα βασικά ζητήματα που απασχολούν τη συγκεκριμένη έρευνα ήταν η δομή της χωρικής αντίληψης των μαθητών. Το ερώτημα αυτό εξετάστηκε στην παρούσα εργασία σε δύο επίπεδα. Σε ένα πρώτο επίπεδο διερευνήθηκαν οι παράγοντες που συναποτελούν τη χωρική αντίληψη. Σε ένα δεύτερο επίπεδο διερευνήθηκε σε ποιο βαθμό η δομή της συγκεκριμένης χωρικής αντίληψης των μαθητών παραμένει σταθερή και εντοπίστηκαν διαφορές που παρουσιάζονται ανάλογα με την ηλικία των μαθητών και κατ' επέκταση την τάξη στην οποία φοιτούν. Πραγματοποιήθηκε επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση στα δεδομένα, αρχικά για το σύνολο των μαθητών που έλαβαν μέρος στην πρώτη χορήγηση των εργαλείων μέτρησης της έρευνας (μαθητές

δημοτικού και γυμνασίου) και στη συνέχεια ελέγχθηκε η αμεταβλητότητα του μοντέλου στις δύο ηλικιακές ομάδες της πρώτης μέτρησης (δημοτικό και γυμνάσιο) καθώς και στο σύνολο των μαθητών της δεύτερης μέτρησης.

Αποτελέσματα Επιβεβαιωτικής Παραγοντικής Ανάλυσης

Μετά τον καθορισμό των 9 παραγόντων που προέκυψαν από το δοκίμιο χωρικής αντίληψης, εξετάστηκε με την πραγματοποίηση επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης (Confirmatory Factor Analysis, CFA) η δομή της χωρικής αντίληψης των μαθητών. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο κάθε παράγοντας του δοκιμίου χωρικής αντίληψης ανταποκρίνεται σε μια ομάδα έργων του συγκεκριμένου τεστ, όπου υπολογίστηκε ο μέσος όρος στην επίδοση των έργων αυτών. Σε αυτό το στάδιο της ανάλυσης, η επιβεβαίωση του θεωρητικού μοντέλου για τη δομή της χωρικής αντίληψης, αφορούσε το σύνολο των μαθητών που έλαβαν μέρος στην πρώτη χορήγηση του δοκιμίου της έρευνας.

Ο Πίνακας 4.1 παρουσιάζει τις συσχετίσεις μεταξύ όλων των παραγόντων του δοκιμίου της χωρικής αντίληψης. Όλες οι συσχετίσεις ήταν στατιστικά σημαντικές ($p < .01$). Η υψηλότερη συσχέτιση παρουσιάζεται μεταξύ της επίδοσης των μαθητών στους παράγοντες «Σύνθεση Σχημάτων (FB)» και «Κρυμμένες Φιγούρες (HF)» ($r = .478, p < .01$) και η χαμηλότερη συσχέτιση εμφανίζεται μεταξύ της επίδοσης των μαθητών στους παράγοντες «Χέρια (HA)» και «Κρυμμένα Μοτίβα (HP)» ($r = .180, p < .01$). Το γεγονός ότι όλες οι συσχετίσεις μεταξύ της επίδοσης των υποκειμένων στους εννιά παράγοντες του δοκιμίου χωρικής αντίληψης ήταν στατιστικά σημαντικές καταδεικνύει ότι οι εννιά παράγοντες φαίνεται να αποτελούν δείκτες της ίδιας κατηγορίας.

Πριν την πραγματοποίηση της επιβεβαιωτικής ανάλυσης ελέγχθηκε ο δείκτης αξιοπιστίας του δοκιμίου χωρικής αντίληψης. Η τιμή του συντελεστή Cronbach α για τη συνολική επίδοση στο όργανο μέτρησης της χωρικής αντίληψης ήταν 0.822.

Το Διάγραμμα 4.1 παρουσιάζει το προτεινόμενο μοντέλο, το οποίο αποτελεί την υπόθεση εργασίας για τη δομή της χωρικής αντίληψης και στηρίζεται στην ανάλυση του Carroll (1993). Πρόκειται για ένα μοντέλο το οποίο διακρίνεται από τρία επίπεδα παραγόντων. Οι 9 παράγοντες αποτελούν τις μεταβλητές του μοντέλου και φορτίζουν σε

τρεις παράγοντες πρώτης τάξης, που αντικατοπτρίζουν τρεις επιμέρους ικανότητες που συναποτελούν τη χωρική αντίληψη (παράγοντας δευτέρας τάξης).

Πίνακας 4.1

Συσχετίσεις Μεταξύ της Επίδοσης των Υποκειμένων στους Παράγοντες της Χωρικής Αντίληψης

	CR	HF	HP	FB	PF	SD	CC	HA	OF
CR	1								
HF	.387**	1							
HP	.300**	.397**	1						
FB	.447**	.478**	.377**	1					
PF	.347**	.365**	.281**	.449**	1				
SD	.357**	.358**	.259**	.407**	.358**	1			
CC	.372**	.335**	.227**	.384**	.333**	.345**	1		
HA	.265**	.232**	.180**	.253**	.249**	.249**	.228**	1	
OF	.389**	.384**	.274**	.438**	.405**	.420**	.376**	.304**	1

** $p < 0.01$

Παράγοντας 1: Παράγοντας οπτικοποίηση (Vz): αποτελείται από τις μεταβλητές «Σύνθεση Σχημάτων (FB)», «Δίπλωση Σχημάτων (PF)» και «Αναπτύγματα Σχημάτων (SD)». Η μεταβλητή «Σύνθεση Σχημάτων (FB)» ανταποκρινόταν στην ένωση σχημάτων για τη δημιουργία μιας συγκεκριμένης φιγούρας. Η μεταβλητή «Δίπλωση Σχημάτων(PF)» αναφέρεται στη δημιουργία φανταστικής κίνησης της δίπλωσης ενός κομματιού χαρτιού και στην εύρεση του τρόπου παρουσίασης του όταν ξεδιπλωθεί, αφού τρυπηθεί. Η μεταβλητή «Αναπτύγματα Σχημάτων (SD)» αναφέρεται στην αντιστοίχιση των πλευρών του αναπτύγματος με τις έδρες του στερεού, αφού διπλωθεί το ανάπτυγμα. Ο δείκτης αξιοπιστίας Cronbach's Alpha του Παράγοντα «Οπτικοποίησης (Vz)» ήταν 0.758

Παράγοντας 2: Σχέσεις των Εννοιών στο Χώρο (SR): περιλαμβάνει τις μεταβλητές «Σύγκριση Κύβων (CC)», η οποία αναφέρεται στη σύγκριση κύβων ανά ζεύγος, κατά πόσο ο ένας μπορεί να προκύψει από περιστροφή του άλλου, τη μεταβλητή «Περιστροφή Καρτών (CR)», η οποία αναφέρεται στην περιστροφή δυσδιάστατων φιγούρων και τη μεταβλητή «Χέρια (HA)», η οποία αναφέρεται στην αναγνώριση δεξιού ή αριστερού χεριού. Ο δείκτης αξιοπιστίας Cronbach's Alpha του Παράγοντα «Σχέσεις των Εννοιών στο Χώρο (SR)» ήταν 0.774.

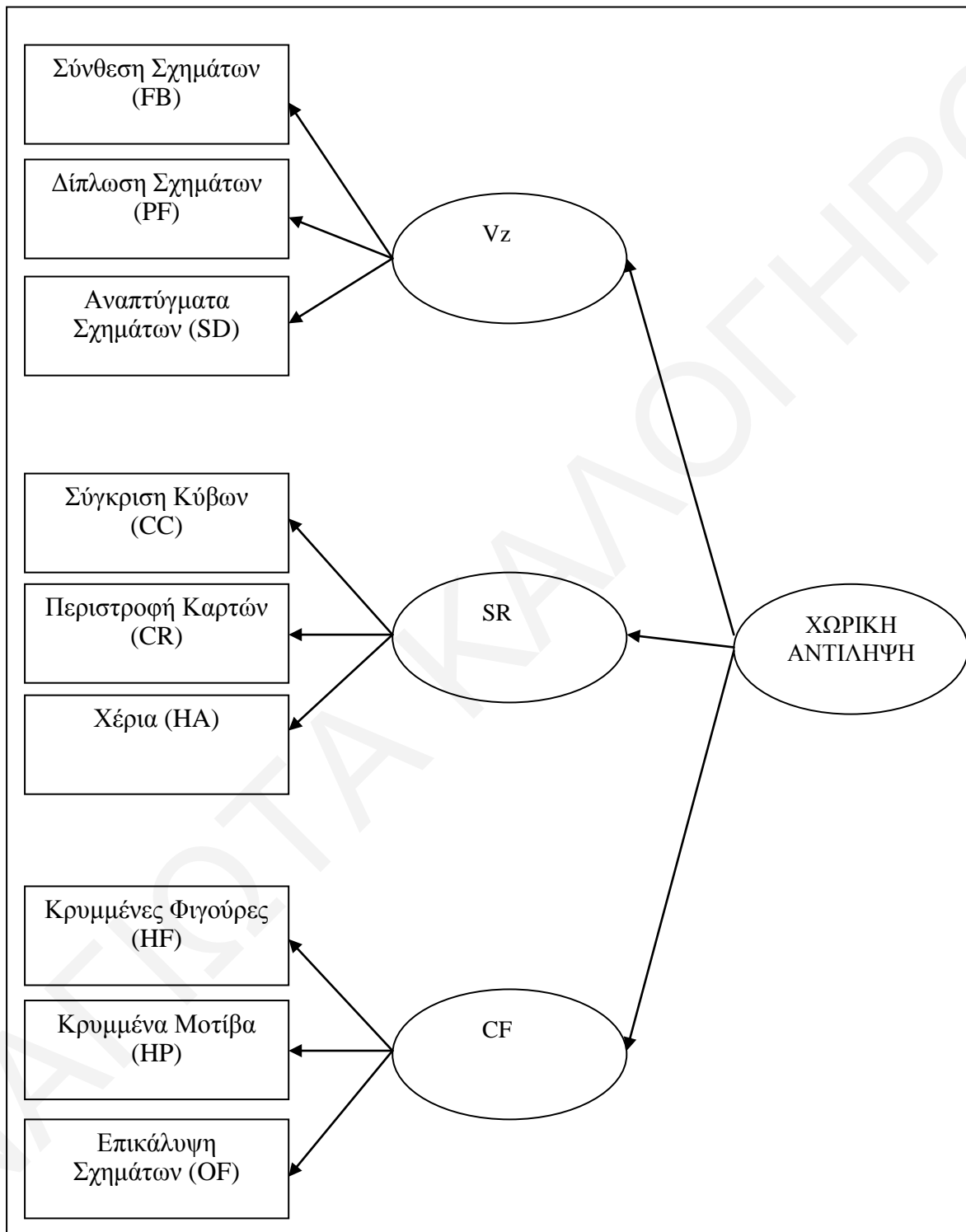
Παράγοντας 3: Ευελιξία Διεκπεραίωσης (CF): οι μεταβλητές που φορτίζουν σε αυτόν τον παράγοντα είναι οι «Κρυμμένες Φιγούρες (HF)» τα «Κρυμμένα Μοτίβα (HP)» και η «Επικάλυψη Σχημάτων (OF)». Οι μεταβλητές «Κρυμμένες Φιγούρες (HF)», τα «Κρυμμένα Μοτίβα (HP)» αναφέρονται στην εύρεση μιας δοσμένης μορφής σε σύνθετα σχέδια, ενώ και η «Επικάλυψη Σχημάτων (OF)» αναφέρεται στον εντοπισμό αριθμών που εμπεριέχονταν σε συγκεκριμένα σχήματα. Ο δείκτης αξιοπιστίας Cronbach's Alpha του Παράγοντα «Ευελιξία Διεκπεραίωσης (CF)» ήταν 0.747.

Όπως φαίνεται και από το Διάγραμμα 4.1, οι τρεις παράγοντες πρώτης τάξης συμβάλλουν στη δημιουργία ενός γενικού παράγοντα δευτέρας τάξης, του παράγοντα χωρικής αντίληψης.

Η προσαρμογή του ιεραρχικού μοντέλου που περιγράφηκε εξετάστηκε σε διαφορετικά στάδια. Σύμφωνα με τον Kline (1998), ακόμη και στην περίπτωση που υπάρχει ένα ακριβές θεωρητικό υπόβαθρο για τον αριθμό των παραγόντων ενός δομικού μοντέλου με παράγοντες πρώτης τάξης, ο ερευνητής θα πρέπει να εξετάσει κατά πόσο το θεωρητικό αυτό μοντέλο μπορεί να συγκριθεί ως προς την προσαρμογή του με ένα απλούστερο μοντέλο με ένα μόνο παράγοντα πρώτης τάξης. Συνεπώς, εξετάστηκε αρχικά ένα απλό μοντέλο με έναν και μοναδικό παράγοντα πρώτης τάξης, στο οποίο δηλαδή όλες οι μεταβλητές ορίστηκαν να φορτίζουν σε ένα και μόνο παράγοντα. Με άλλα λόγια, ελέγχθηκε κατά πόσο μπορεί να θεωρηθεί ότι υπάρχει ένας γενικός παράγοντας, ο οποίος προσδιορίζει τη χωρική αντίληψη. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήθηκαν τα δεδομένα της πρώτης μέτρησης.

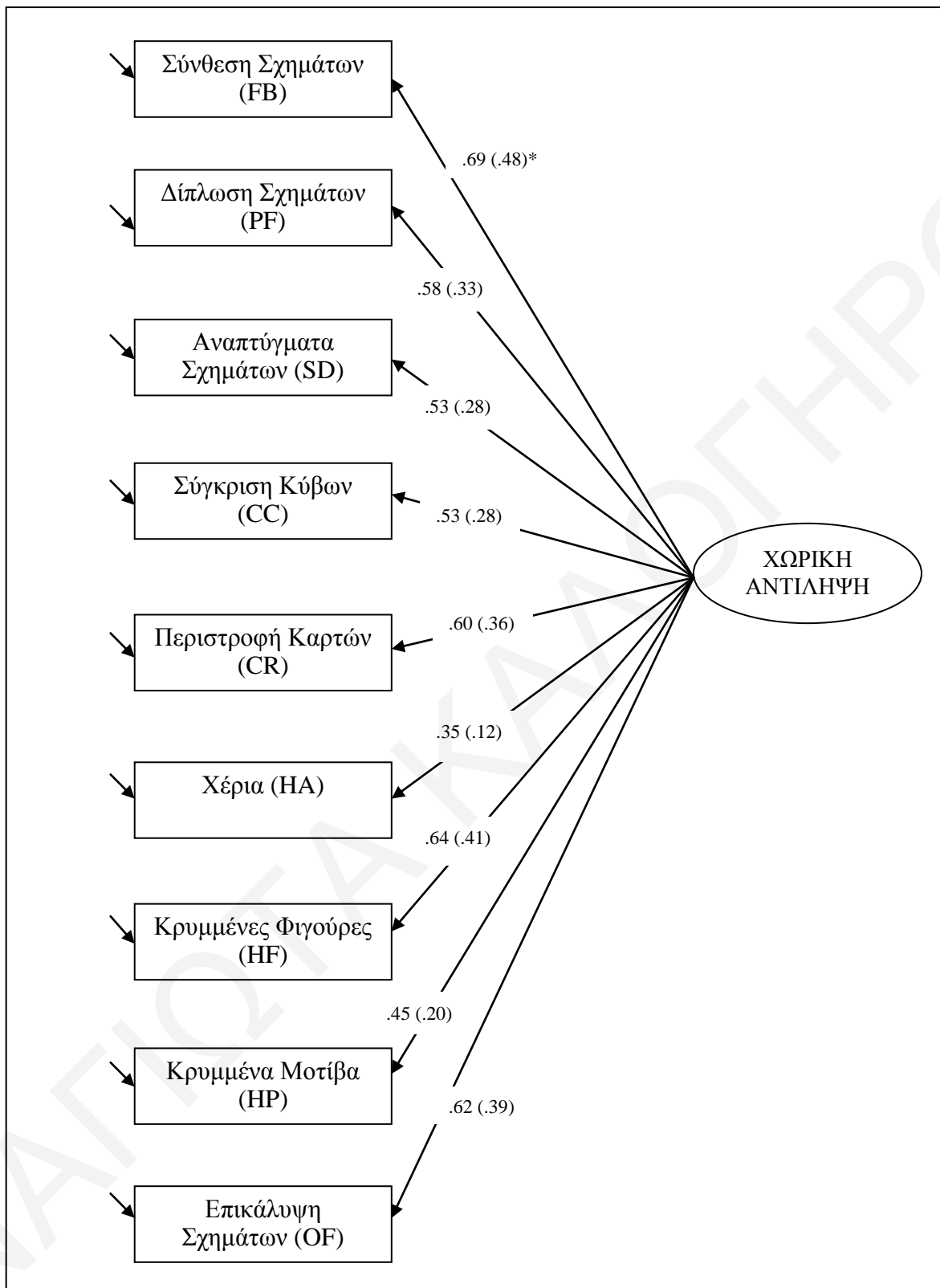
Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής ανάλυσης (δείτε Διάγραμμα 4.2) έδειξαν ότι η προσαρμογή των δεδομένων στο προτεινόμενο μοντέλο ήταν πολύ καλή (CFI=.992, $\chi^2=51.263$, $df=27$, $\chi^2/df=1.9$, $p<0,05$, RMSEA=0.024 με 90% διάστημα εμπιστοσύνης για το

RMSEA: 0.013-0.033), αφού οι δείκτες προσαρμογής CFI και RMSEA είναι ικανοποιητικοί (Byrne, 1998).



Διάγραμμα 4.1. Προτεινόμενο δομικό μοντέλο της χωρικής αντίληψης

Σημείωση: Εξήγηση συμβολισμού: Vz – «Οπτικοποίηση», SR – «Σχέσεις Εννοιών στο Χώρο» και CF – «Ευελιξία Διεκπεραίωσης».



Διάγραμμα 4.2. Το δομικό μοντέλο της χωρικής αντίληψης για τους μαθητές της πρώτης μέτρησης.

*Ο πρώτος αριθμός δείχνει το συντελεστή φόρτισης και ο αριθμός στην παρένθεση την αντίστοιχη ερμηνευόμενη διασπορά (r^2).

Η επιβεβαίωση του μοντέλου με βάση τα στοιχεία που έχουν αναφερθεί, αποτελεί ένδειξη ότι το προτεινόμενο μοντέλο προσαρμόζεται στα δεδομένα της έρευνας. Οι φορτίσεις στον παράγοντα που υπολογίστηκαν κατά την ανάλυση των δεδομένων ήταν στατιστικώς σημαντικές σε όλες τις περιπτώσεις, όπως παρουσιάζονται στο Διάγραμμα 4.2.

Όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 4.2, η ερμηνευόμενη διασπορά των έργων ήταν ικανοποιητική, δείχνοντας ότι μπορεί να ερμηνεύσει τη διασπορά του παράγοντα του μοντέλου. Επίσης, όπως φαίνεται, ο συντελεστής παλινδρόμησης όλων των μεταβλητών στον παράγοντα πρώτης τάξης ήταν στατιστικά σημαντικός και υψηλός. Η μεταβλητή «Σύνθεση Σχημάτων (FB)», έχει την υψηλότερη ικανότητα πρόβλεψης του παράγοντα «Χωρικής Αντίληψης» ($r^2=.69$), ενώ τη χαμηλότερη ικανότητα πρόβλεψης του παράγοντα «Χωρικής Αντίληψης», εμφανίζει η μεταβλητή «Χέρια (HA)» ($r^2=.35$).

Έλεγχος Αμεταβλητότητας Μοντέλου της Χωρικής Αντίληψης

Για τον έλεγχο της αμεταβλητότητας του προτεινόμενου μοντέλου ελέγχθηκε η εφαρμογή του σε διαφορετικούς πληθυσμούς (Chan & Schmitt, 2000). Συγκεκριμένα, ελέγχθηκε η εφαρμογή του μοντέλου ξεχωριστά για τη δεύτερη χορήγηση των δεδομένων της έρευνας καθώς επίσης και για τα δύο διαφορετικά επίπεδα, δημοτικό και γυμνάσιο της πρώτης μέτρησης. Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης, όπως παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.2, έδειξαν ότι η προσαρμογή των δεδομένων στη δεύτερη μέτρηση ($CFI=.985$, $\chi^2=76.466$, $df=27$, $\chi^2/df=2.83$, $p<0,05$, $RMSEA=0.034$), αλλά και στα δύο επίπεδα της πρώτης μέτρησης, δημοτικό ($CFI=.98$, $\chi^2=47.589$, $df=27$, $\chi^2/df=1.76$, $p<0,05$, $RMSEA=0.027$), και γυμνάσιο ($CFI=.996$, $\chi^2=30.783$, $df=27$, $\chi^2/df=1.14$, $p>0,05$, $RMSEA=0.015$), στο μοντέλο του ενός παράγοντα, ήταν ικανοποιητική, επιβεβαιώνοντας ότι η δομή του μοντέλου είναι σταθερή.

Πίνακας 4.2

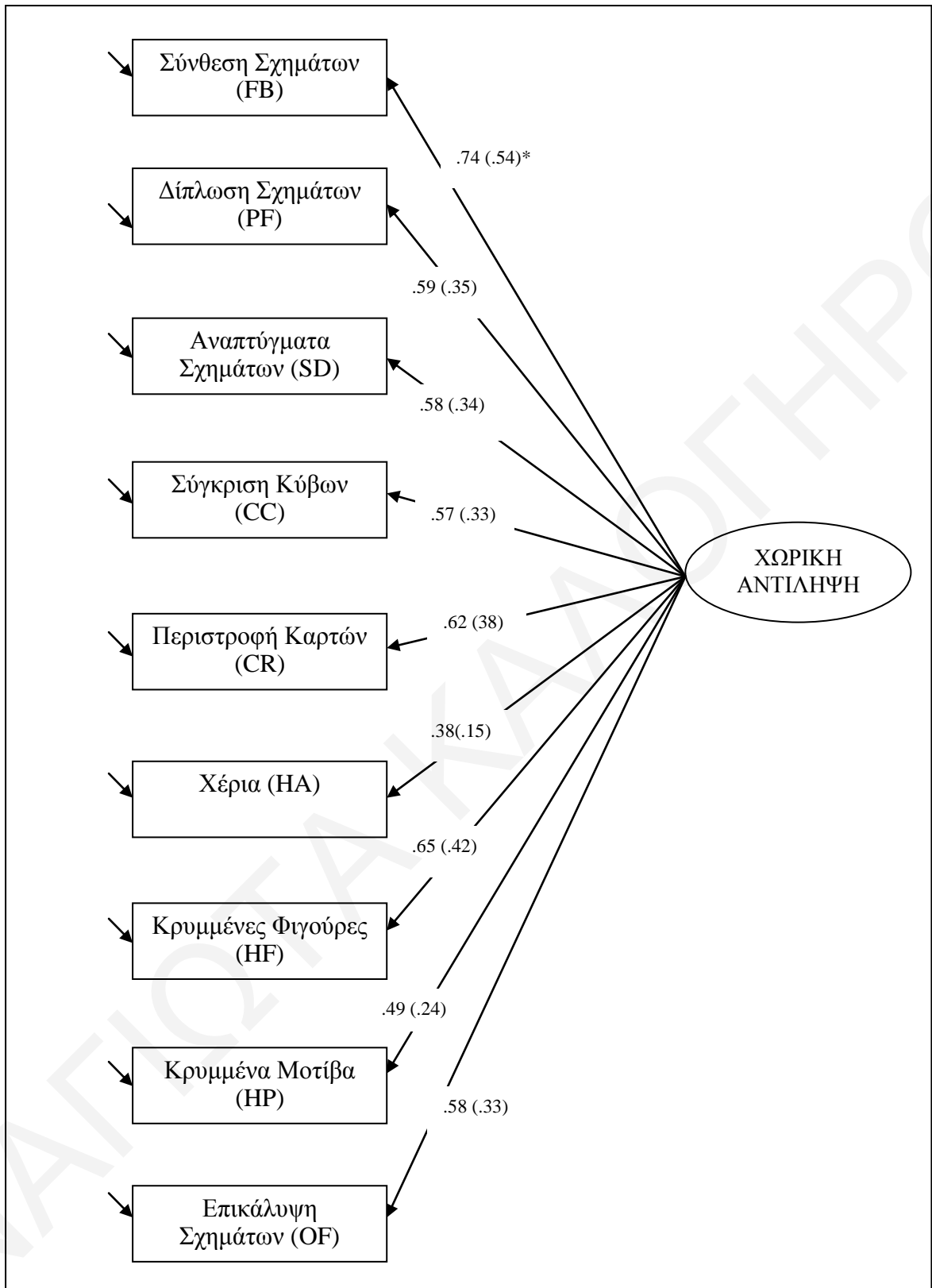
Δείκτες Προσαρμογής Μοντέλων σε Διαφορετικούς Πληθυσμούς

Μοντέλο	Δείκτες Προσαρμογής					
	CFI	χ^2	<i>df</i>	χ^2/df	<i>p</i>	RMSEA
2 ^η Μέτρηση	0.985	76.466	27	2.83	<.05	0.034
Δημοτικό 1 ^{ης} Μέτρησης	0.983	47.589	27	1.76	<.05	0.027
Γυμνάσιο 1 ^{ης} Μέτρησης	0.996	30.783	27	1.14	>.05	0.015

Όπως φαίνεται στα Διαγράμματα 4.3 και 4.4, όλα τα έργα είχαν στατιστικά σημαντικές φορτίσεις στον παράγοντα πρώτης τάξης. Μεγαλύτερη ικανότητα πρόβλεψης του παράγοντα «Χωρικής Αντίληψης», στην περίπτωση των μαθητών της δεύτερης μέτρησης, παρουσίασε η μεταβλητή «Σύνθεση Σχημάτων (FB)» ($r^2=.74$) και χαμηλότερη φόρτιση παρουσιάζει η μεταβλητή «Χέρια (HA)» ($r^2=.38$), όπως και στην πρώτη μέτρηση.

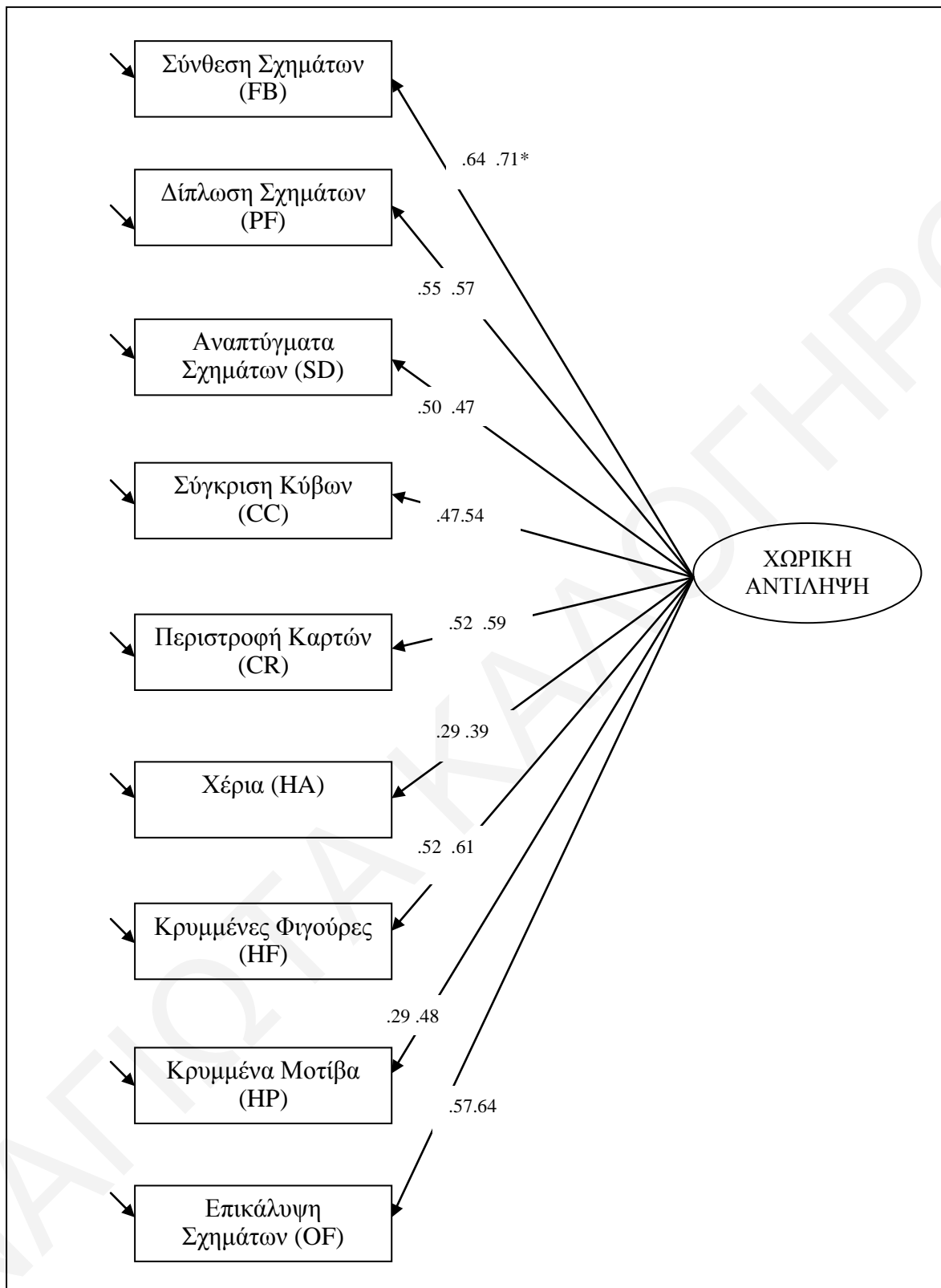
Στην περίπτωση των μαθητών του δημοτικού και του γυμνασίου της πρώτης μέτρησης, μεγαλύτερη ικανότητα πρόβλεψης έχει η μεταβλητή «Σύνθεση Σχημάτων (FB)» ($r^2=.64$ και $r^2=.71$ αντίστοιχα). Ενώ τη μικρότερη φόρτιση για τους μαθητές του δημοτικού, στον παράγοντα «Χωρικής Αντίληψης», παρουσιάζουν οι μεταβλητές «Χέρια (HA)» και «Κρυμμένα Μοτίβα (HP)» ($r^2=.29$). Ενώ στο γυμνάσιο η μικρότερη ικανότητα πρόβλεψης εμφανίζεται από τη μεταβλητή «Χέρια (HA)» ($r^2=.39$).

Με βάση τα πιο πάνω στοιχεία, διαφάνηκε ότι το μοντέλο δόμησης της χωρικής αντίληψης των μαθητών προσαρμόζεται ικανοποιητικά με τα δεδομένα της έρευνας, δείχνοντας ότι το μοντέλο ισχύει ως προς τη δομή της συγκεκριμένης χωρικής αντίληψης στην περίπτωση και των δύο ηλικιακών ομάδων που έλαβαν μέρος στην έρευνα. Με άλλα λόγια, τα αποτελέσματα της ανάλυσης έδειξαν ότι η βασική δομή της χωρικής αντίληψης των μαθητών αρχίζει να δημιουργείται από το δημοτικό σχολείο (Ε' τάξη – ηλικία 10 χρόνων) και παραμένει αναλλοίωτη στην ηλικία των 13 χρόνων (Β' γυμνασίου).



Διάγραμμα 4.3. Το δομικό μοντέλο της χωρικής αντίληψης για τους μαθητές της δεύτερης μέτρησης.

*Ο πρώτος αριθμός δείχνει το συντελεστή φόρτισης και ο αριθμός στην παρένθεση την αντίστοιχη ερμηνευόμενη διασπορά (r²).



Διάγραμμα 4.4. Το δομικό μοντέλο της χωρικής αντίληψης για τους μαθητές του δημοτικού και του γυμνασίου της πρώτης μέτρησης.

*Ο πρώτος αριθμός δείχνει το συντελεστή φόρτισης των μαθητών του δημοτικού και ο δεύτερος αριθμός την αντίστοιχη φόρτιση των μαθητών του γυμνασίου.

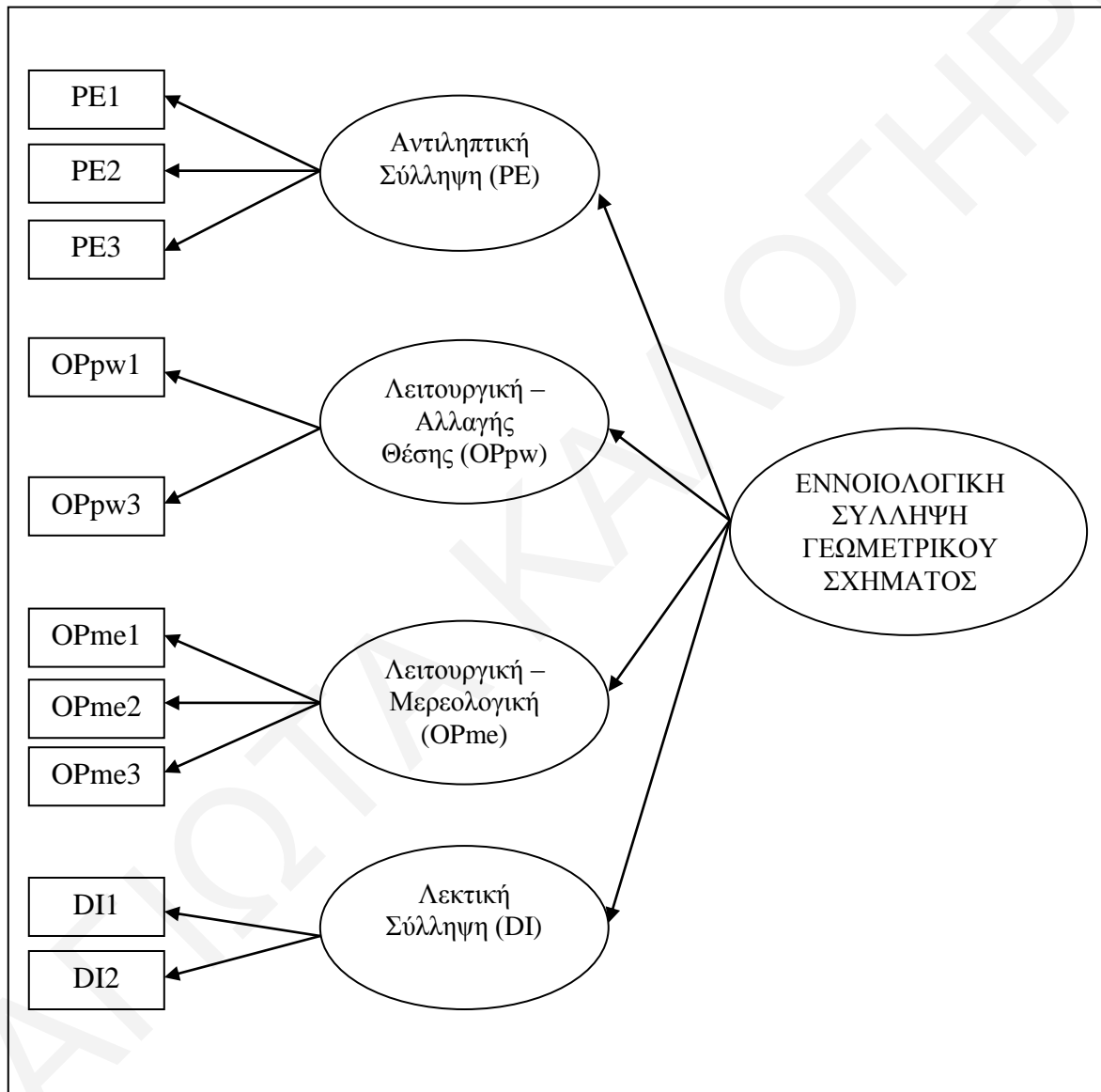
Ανάπτυξη Μοντέλου στο Σύνολο των Μαθητών για τη Δομή των Ικανοτήτων τους Αναφορικά με την Εννοιολογική Σύλληψη του Γεωμετρικού Σχήματος

Παρόλο που στην παρούσα εργασία, χρησιμοποιήθηκε μια ποικιλία από έργα τα οποία χρησιμοποιήθηκαν σε έρευνες που μελέτησαν τη δομή της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος (Deliyianni, Elia, Gagatsis, Monoyiou και Panaoura, 2009· Deliyianni, Michael, Monoyiou, Gagatsis, & Elia, 2011· Michael, 2012· Michael, Elia, Gagatsis, & Kalogirou, 2010· Michael, Gagatsis, Avgerinos & Kuzniak, 2011· Michael, Gagatsis, Lamprianou, Deliyianni, & Monoyiou, 2011) κρίθηκε σκόπιμο να γίνει επιβεβαίωση του μοντέλου της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος στους μαθητές της παρούσας εργασίας. Μιας και τα ερωτήματα της παρούσας εργασίας αφορούσαν τη μελέτη της σχέσης μεταξύ της χωρικής αντίληψης και των παραγόντων της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος, έπρεπε να επιβεβαιωθεί το μοντέλο της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος στο συγκεκριμένο πληθυσμό που έλαβε μέρος στην έρευνα. Αρχικά ελέγχθηκε η προσαρμογή του μοντέλου στους μαθητές της πρώτης μέτρησης.

Το Διάγραμμα 4.5 παρουσιάζει το προτεινόμενο μοντέλο, το οποίο αποτελεί την υπόθεση εργασίας για τη δομή της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Πρόκειται για ένα μοντέλο το οποίο διακρίνεται από τρία επίπεδα παραγόντων. Τα 10 έργα που χρησιμοποιήθηκαν στο τεστ εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος αποτελούν τις μεταβλητές του μοντέλου και φορτίζουν σε τέσσερις παράγοντες πρώτης τάξης, που αντικατοπτρίζουν τέσσερις επιμέρους ικανότητες που σχετίζονται με τα είδη σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος όπως προτείνονται από τον Duval (1995, 1999): την «Αντιληπτική Σύλληψη (PE)» την «Αλλαγή Θέσης Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPpw)» τη «Μερεολογική Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPme)» και τη «Λεκτική Σύλληψη (DI)». Οι τέσσερις παράγοντες πρώτης τάξης φορτίζουν σε ένα παράγοντα δευτέρας τάξης, τον παράγοντα «Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος (Ε.Σ.Γ.Σ.)».

Ο Πίνακας 4.3, παρουσιάζει τις συσχετίσεις μεταξύ όλων των έργων του τεστ μέτρησης της χωρικής αντίληψης του γεωμετρικού σχήματος, στην πρώτη χορήγηση των δεδομένων. Όλες οι συσχετίσεις ήταν στατιστικά σημαντικές ($p < 0.01$). Η υψηλότερη

συσχέτιση παρουσιάζεται μεταξύ της επίδοσης των μαθητών στο δεύτερο έργο «Λεκτικής Σύλληψης (DI2)» και το τρίτο έργο «Μερεολογική Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPme3)» ($r=.547, p<0.01$). Η χαμηλότερη συσχέτιση εμφανίζεται μεταξύ του δεύτερου έργου «Αντιληπτικής Σύλληψης (PE2)» και του πρώτου έργου «Λεκτικής Σύλληψης (DI1)» ($r=.197, p<0.01$). Ο δείκτης αξιοπιστίας των έργων του τεστ για την εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος ήταν Cronbach's Alpha=.794.



Διάγραμμα 4.5. Προτεινόμενο μοντέλο της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος.

Σημείωση: Εξήγηση συμβολισμού (αναλυτική περιγραφή στη σελ. 70): PE1, PE2, PE3 – έργα «Αντιληπτικής Σύλληψης», OPpw1, OPpw2 – έργα «Αλλαγής Θέσης Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης», OPme1, OPme2, OPme3 – έργα «Μερεολογικής Τροποποίησης της Λειτουργικής Σύλληψης» και DI1, DI2 – έργα «Λεκτικής Σύλληψης».

Πίνακας 4.3

Συσχετίσεις Μεταξύ της Επίδοσης των Υποκειμένων στα Έργα του Τεστ Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος.

	PE1	PE2	PE3	OPpw1	OPpw3	OPme1	OPme2	OPme3	DI1	DI2
PE1	1									
PE2	.468**	1								
PE3	.473**	.469**	1							
OPpw1	.243**	.248**	.282**	1						
OPpw3	.254**	.280**	.293**	.352**	1					
OPme1	.222**	.234**	.289**	.219**	.302**	1				
OPme2	.216**	.240**	.260**	.202**	.273**	.357**	1			
OPme3	.407**	.408**	.393**	.387**	.452**	.375**	.445**	1		
DI1	.221**	.197**	.214**	.223**	.281**	.282**	.340**	.453**	1	
DI2	.311**	.331**	.365**	.431**	.418**	.306**	.314**	.547**	.358**	1

** $p < 0.01$

Με τα δεδομένα της πρώτης μέτρησης, εξετάστηκε αρχικά ένα μοντέλο με έναν και μοναδικό παράγοντα πρώτης τάξης, στο οποίο δηλαδή όλες οι μεταβλητές ορίστηκαν να φορτίζουν σε ένα και μόνο παράγοντα. Με άλλα λόγια, ελέγχθηκε κατά πόσο μπορεί να θεωρηθεί ότι υπάρχει ένας γενικός παράγοντας, ο οποίος προσδιορίζει την εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος. Ακολούθως ελέγχθηκε ένα μοντέλο που αποτελείτο μόνο από τους τέσσερις παράγοντες πρώτης τάξης στους οποίους ορίστηκαν να φορτίζουν οι 10 μεταβλητές. Το μοντέλο αυτό υποθέτει ότι (α) οι 10 μεταβλητές που αφορούν τις επιδόσεις των μαθητών στα έργα εννοιολογικής σύλληψης μπορούν να επεξηγηθούν από τέσσερις παράγοντες, (β) κάθε μεταβλητή θα είχε μη μηδενικό συντελεστή φόρτισης πάνω στον παράγοντα που σχεδιάστηκε να μετρά και μηδενικούς συντελεστές φόρτισης πάνω σε όλους τους άλλους παράγοντες, (γ) οι τέσσερις παράγοντες συσχετίζονται μεταξύ τους και (δ) τα λάθη μέτρησης δεν συσχετίζονται. Τέλος, ελέγχθηκε το προτεινόμενο μοντέλο που παρουσιάστηκε στο Διάγραμμα 4.5, στο οποίο διακρίνονται δύο επίπεδα παραγόντων, όπως περιγράφηκαν παραπάνω.

Στον Πίνακα 4.4 παρουσιάζονται οι τιμές των δεικτών προσαρμογής των μοντέλων που εξετάστηκαν και στο Διάγραμμα 4.6 παρουσιάζεται το μοντέλο δόμησης της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος που είχε την καλύτερη προσαρμογή στα δεδομένα της έρευνας για το σύνολο των μαθητών.

Στο στάδιο αυτό εξετάστηκε η περίπτωση τα λάθη μέτρησης ορισμένων μεταβλητών να σχετίζονται μεταξύ τους. Με βάση τον πίνακα των υπολοίπων (residuals) και λαμβάνοντας υπόψη τις ικανότητες που εξετάζονται από τις μεταβλητές του μοντέλου, αποφασίστηκε να γίνουν 3 συνδέσεις σε λάθη μέτρησης μεταβλητών που αξιολογούν όμοιες ικανότητες, ως ακολούθως:

E_{OPme2} και E_{OPme1} (μερεολογική τροποποίηση)

E_{OPme3} και E_{OPme1} (μερεολογική τροποποίηση)

E_{DI1} και E_{OPme2} (η λεκτική σύλληψη εμπερικλείει μερεολογική τροποποίηση)

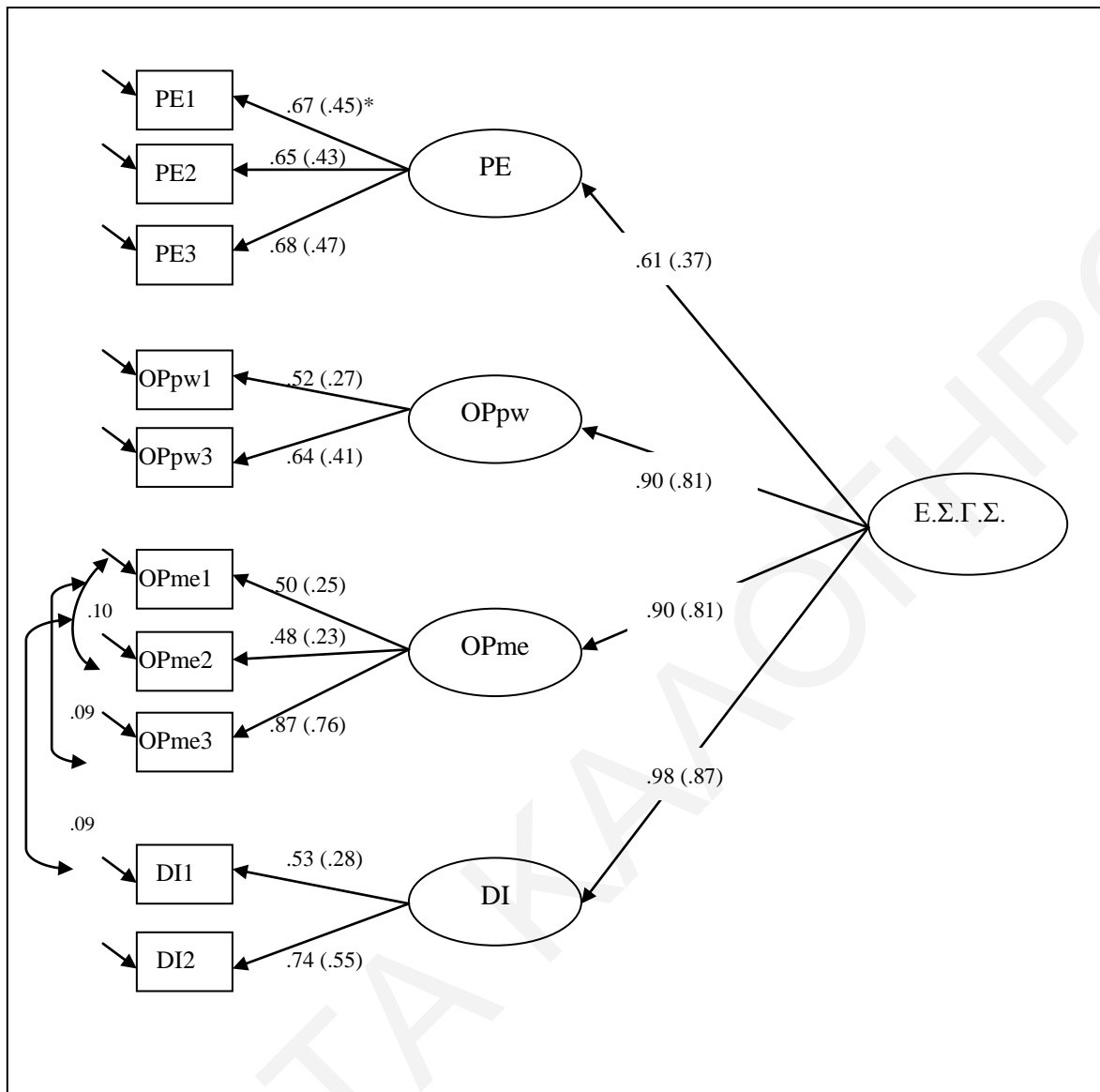
Οι συσχετίσεις μεταξύ των σφαλμάτων έργων δείχνουν ότι τα συγκεκριμένα έργα είχαν κοινό σφάλμα στη μέτρηση λόγω του τύπου και της διαδικασίας χορήγησης του δοκιμίου.

Πίνακας 4.4

Οι Τιμές των Δεικτών Προσαρμογής των Μοντέλων για τη Δομή της Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος των Μαθητών της Πρώτης Μέτρησης.

Μοντέλο	Δείκτες Προσαρμογής					
	CFI	χ^2	df	χ^2/df	p	RMSEA
Μοντέλο (Α) με ένα παράγοντα πρώτης τάξης	0.853	600.331	35	17.15	<.05	0.100
Μοντέλο (Β) με 4 παράγοντες πρώτης τάξης	0.970	132.902	29	4.58	<.05	0.047
Μοντέλο (Γ) με 1 παράγοντα δευτέρας τάξης	0.972	139.360	31	4.50	<.05	0.046
Μοντέλο (Δ) με 1 παράγοντα δευτέρας τάξης και συσχετίσεις	0.987	77.894	28	2.78	<.05	0.033

Έτσι, καταλήξαμε σε ένα πολύ βελτιωμένο μοντέλο με πάρα πολύ καλή εφαρμογή επιβεβαιώνοντας την εφαρμογή του μοντέλου και την καταλληλότητα του να περιγράψει τη δομή της χωρικής αντίληψης (CFI=0.987, $\chi^2=77.894$, $df=28$, $\chi^2/df=2.78$, $p<0.05$, RMSEA=0.033 με 90% διάστημα εμπιστοσύνης για το RMSEA: 0.025-0.042). Ο υπολογισμός της διαφοράς των χ^2 των μοντέλων Γ και Δ έδειξε ότι η προσθήκη των συσχετίσεων των σφαλμάτων είχε ως αποτέλεσμα τη στατιστικά σημαντική βελτίωση της προσαρμογής του μοντέλου [$\Delta\chi^2(3)=61.466$, $p<0.005$]. Οι φορτίσεις στον παράγοντα που υπολογίστηκαν κατά την ανάλυση των δεδομένων ήταν στατιστικώς σημαντικές σε όλες τις περιπτώσεις, όπως παρουσιάζονται στο Διάγραμμα 4.6.



Διάγραμμα 4.6. Το μοντέλο της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος των μαθητών της πρώτης μέτρησης.

*Ο πρώτος αριθμός δείχνει το συντελεστή φόρτισης και ο αριθμός στην παρένθεση την αντίστοιχη ερμηνευόμενη διασπορά (r^2).

Σημείωση: Εξήγηση συμβολισμού (αναλυτική περιγραφή στη σελ. 70): PE - «Αντιληπτική Σύλληψη», OPpw - «Αλλαγή Θέσης Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης», OPme - «Μερεολογική Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης», DI - «Λεκτική Σύλληψη» και Ε.Σ.Γ.Σ. - «Εννοιολογική Σύλληψη Γεωμετρικού Σχήματος».

Όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 4.6, η ερμηνευόμενη διασπορά των έργων ήταν ιδιαίτερα υψηλή, δείχνοντας ότι μπορεί να ερμηνεύσει τη διασπορά του παράγοντα του μοντέλου. Επίσης, όπως φαίνεται, ο συντελεστής παλινδρόμησης όλων των παραγόντων πρώτης τάξης στον αντίστοιχο παράγοντα δευτέρας τάξης ήταν σημαντικός και ιδιαίτερα

υψηλός. Ο παράγοντας «Λεκτική Σύλληψη (DI)» φαίνεται να έχει την ψηλότερη ικανότητα πρόβλεψης του παράγοντα «Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος (Ε.Σ.Γ.Σ.)» ($r^2=.99$). Ενώ τη χαμηλότερη ικανότητα πρόβλεψης του παράγοντα «Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος (Ε.Σ.Γ.Σ.)», εμφανίζει ο παράγοντας «Αντιληπτική Σύλληψη (PE)» ($r^2=.61$).

Έλεγχος Αμεταβλητότητας Μοντέλου της Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος

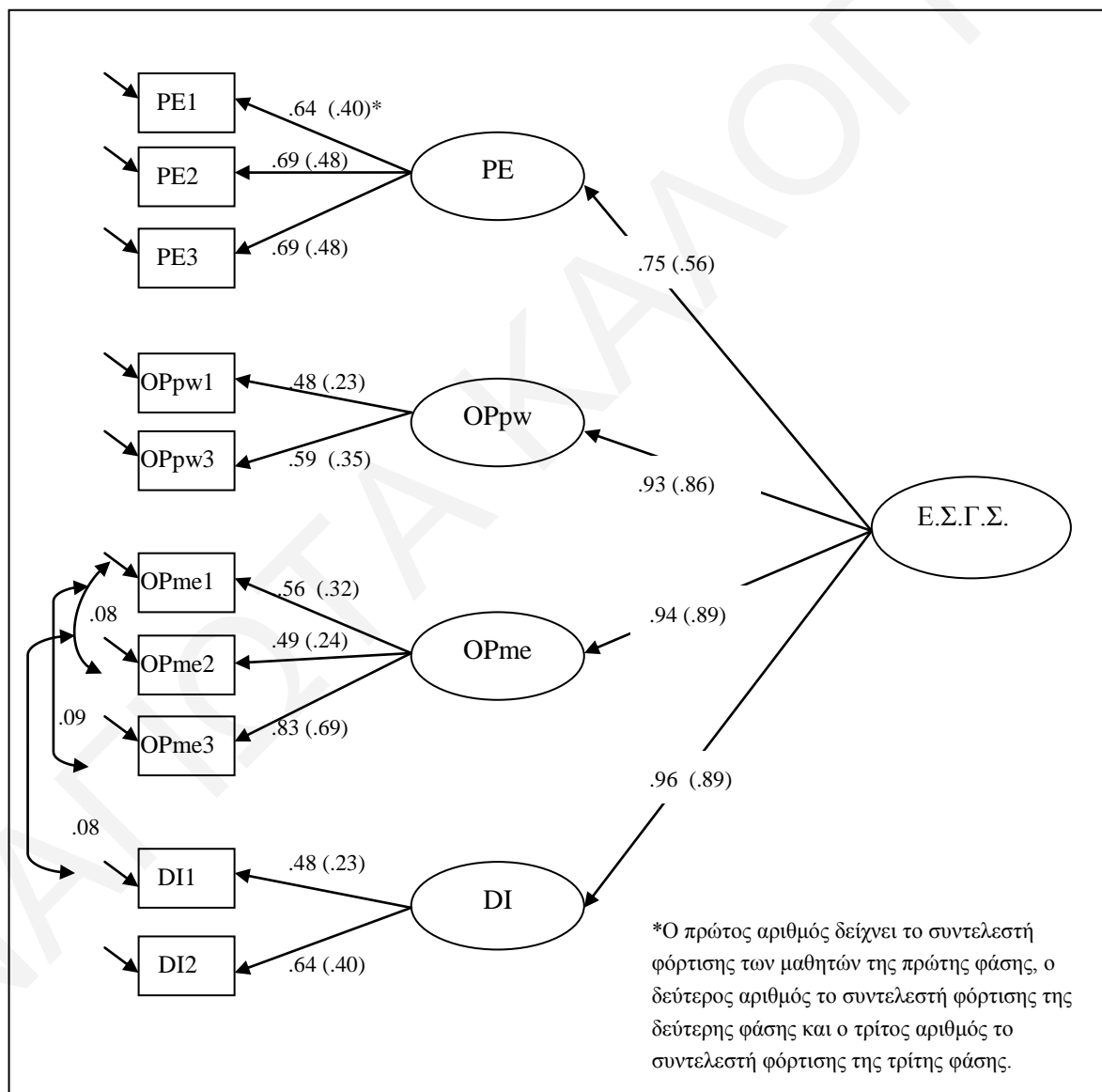
Για τον έλεγχο της αμεταβλητότητας του προτεινόμενου μοντέλου ελέγχθηκε η εφαρμογή του σε διαφορετικούς πληθυσμούς (Chan & Schmitt, 2000). Συγκεκριμένα, ελέγχθηκε η εφαρμογή του μοντέλου ξεχωριστά για τη δεύτερη μέτρηση της έρευνας καθώς επίσης και για τα δύο διαφορετικά επίπεδα, δημοτικό και γυμνάσιο, της πρώτης μέτρησης. Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης, όπως παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.5, έδειξαν ότι η προσαρμογή των δεδομένων στη δεύτερη μέτρηση ($CFI=0.975$, $\chi^2=83.134$, $df=28$, $\chi^2/df=2.97$, $p<0.05$, $RMSEA=0.046$), αλλά και στα δύο επίπεδα, δημοτικό ($CFI=0.961$, $\chi^2=79.884$, $df=28$, $\chi^2/df=2.85$, $p<0.05$, $RMSEA=0.042$) και γυμνάσιο ($CFI=0.990$, $\chi^2=29.503$, $df=28$, $\chi^2/df=1.05$, $p>0.05$, $RMSEA=0.010$), στο μοντέλο δευτέρας τάξης, ήταν ικανοποιητική, επιβεβαιώνοντας ότι η δομή του μοντέλου είναι σταθερή.

Πίνακας 4.5

Δείκτες Προσαρμογής Μοντέλων σε Διαφορετικούς Πληθυσμούς

Μοντέλο	Δείκτες Προσαρμογής					
	CFI	χ^2	df	χ^2/df	p	RMSEA
2 ^η Μέτρηση	0.975	83.134	28	2.97	<.05	0.046
Δημοτικό	0.961	79.884	28	2.85	<.05	0.042
1 ^η Μέτρησης						
Γυμνάσιο	0.990	29.503	28	1.05	>.05	0.010
1 ^η Μέτρησης						

Όπως φαίνεται στα Διαγράμματα 4.7 και 4.8, τα οποία παρουσιάζουν τα μοντέλα της εννοιολογικής σύλληψης για τους μαθητές της δεύτερης μέτρησης και τους μαθητές δημοτικού και γυμνασίου της πρώτης μέτρησης αντίστοιχα, όλα τα έργα είχαν στατιστικά σημαντικές φορτίσεις στον παράγοντα πρώτης τάξης. Συγκεκριμένα, όσον αφορά τους μαθητές της δεύτερης μέτρησης, φαίνεται ότι μεγαλύτερη ικανότητα πρόβλεψης του παράγοντα «Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος (Ε.Σ.Γ.Σ.)», έχει ο παράγοντας «Λεκτική Σύλληψη (DI)» ($r^2=.96$) και χαμηλότερη ικανότητα πρόβλεψης ο παράγοντας «Αντιληπτική Σύλληψη (PE)» ($r^2=.75$).



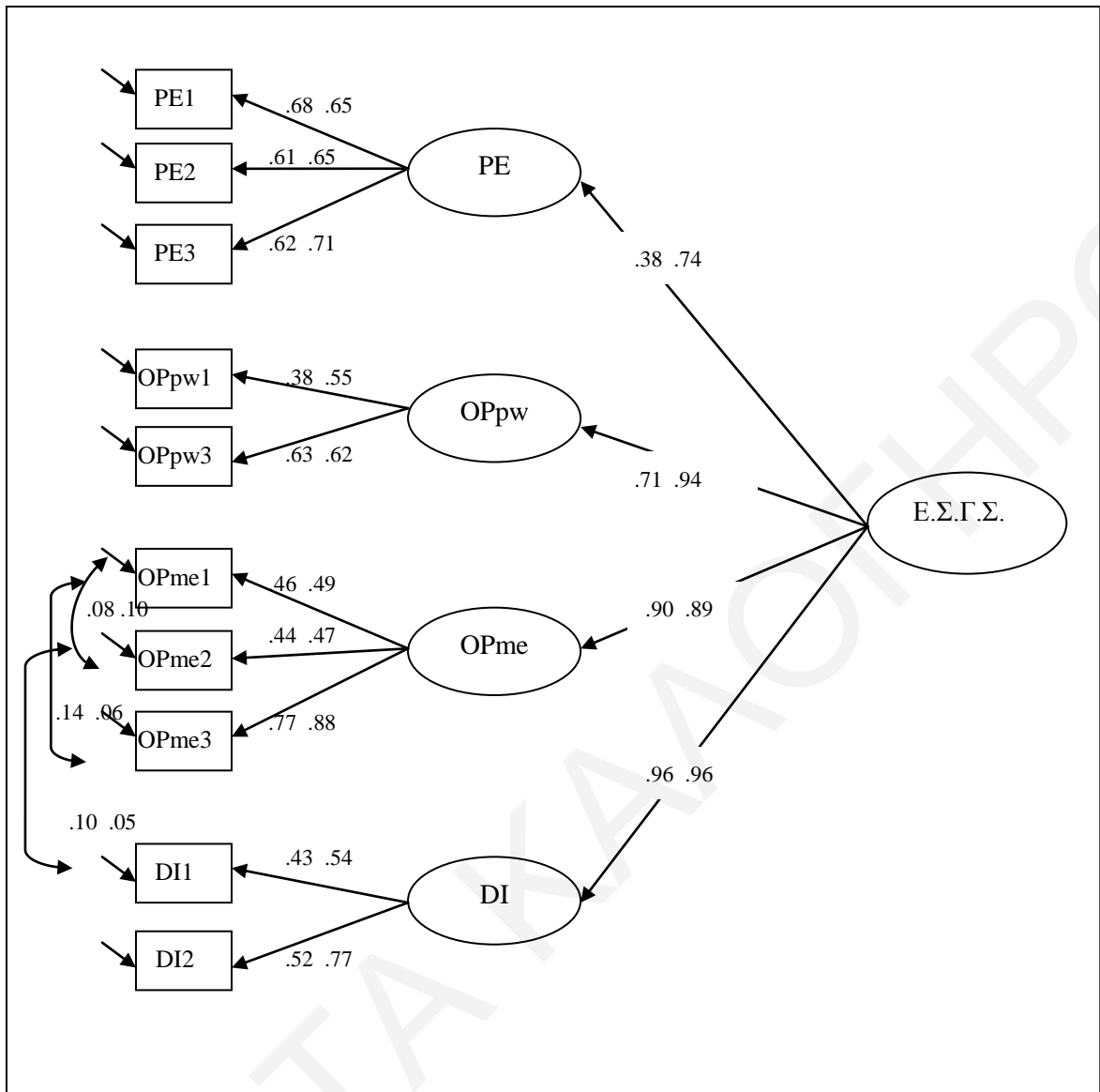
Διάγραμμα 4.7. Το μοντέλο της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος για τους μαθητές της δεύτερης μέτρησης.

*Ο πρώτος αριθμός δείχνει το συντελεστή φόρτισης και ο αριθμός στην παρένθεση την αντίστοιχη ερμηνευόμενη διασπορά (r^2).

Σημείωση: Εξήγηση συμβολισμού (αναλυτική περιγραφή στη σελ. 70): PE - «Αντιληπτική Σύλληψη», OPpw - «Αλλαγή Θέσης Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης», OPme - «Μερεολογική Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης», DI - «Λεκτική Σύλληψη» και Ε.Σ.Γ.Σ. - «Εννοιολογική Σύλληψη Γεωμετρικού Σχήματος».

Όσον αφορά τη σύγκριση των μαθητών του δημοτικού και του γυμνασίου (δείτε Διάγραμμα 4.8), φαίνεται ότι στην περίπτωση του γυμνασίου όλοι οι συντελεστές φόρτισης των μεταβλητών στους παράγοντες, αλλά και των παραγόντων πρώτης τάξης στον παράγοντα της «Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος (Ε.Σ.Γ.Σ.)», είναι υψηλότεροι από τους συντελεστές φόρτισης των μαθητών του δημοτικού. Και στις δύο περιπτώσεις όμως χαμηλότερο συντελεστή φόρτισης του παράγοντα δευτέρας τάξης «Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος (Ε.Σ.Γ.Σ.)», παρουσιάζει ο παράγοντας «Αντιληπτικής Σύλληψης (PE)» ($r^2=.38$ για το δημοτικό και $r^2=.74$ για το γυμνάσιο). Ενώ, ψηλότερο συντελεστή φόρτισης παρουσιάζει ο παράγοντας «Λεκτικής Σύλληψης (DI)» ($r^2=.99$ για το δημοτικό και $r^2=.96$ για το γυμνάσιο).

Με βάση τα παραπάνω στοιχεία, διαφάνηκε ότι το μοντέλο δόμησης της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος των μαθητών προσαρμόζεται ικανοποιητικά με τα δεδομένα της έρευνας, δείχνοντας ότι το μοντέλο ισχύει ως προς τη δομή της συγκεκριμένης ικανότητας εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος στην περίπτωση και των δύο ηλικιακών ομάδων που έλαβαν μέρος στην έρευνα. Με άλλα λόγια, τα αποτελέσματα της ανάλυσης έδειξαν ότι η βασική δομή της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος των μαθητών αρχίζει να δημιουργείται από το δημοτικό σχολείο (Ε΄ τάξη – ηλικία 10 χρόνων) και παραμένει αναλλοίωτη στην ηλικία των 13 χρόνων (Β΄ γυμνασίου).



Διάγραμμα 4.8. Το μοντέλο της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος για τους μαθητές του δημοτικού και του γυμνασίου της πρώτης μέτρησης.

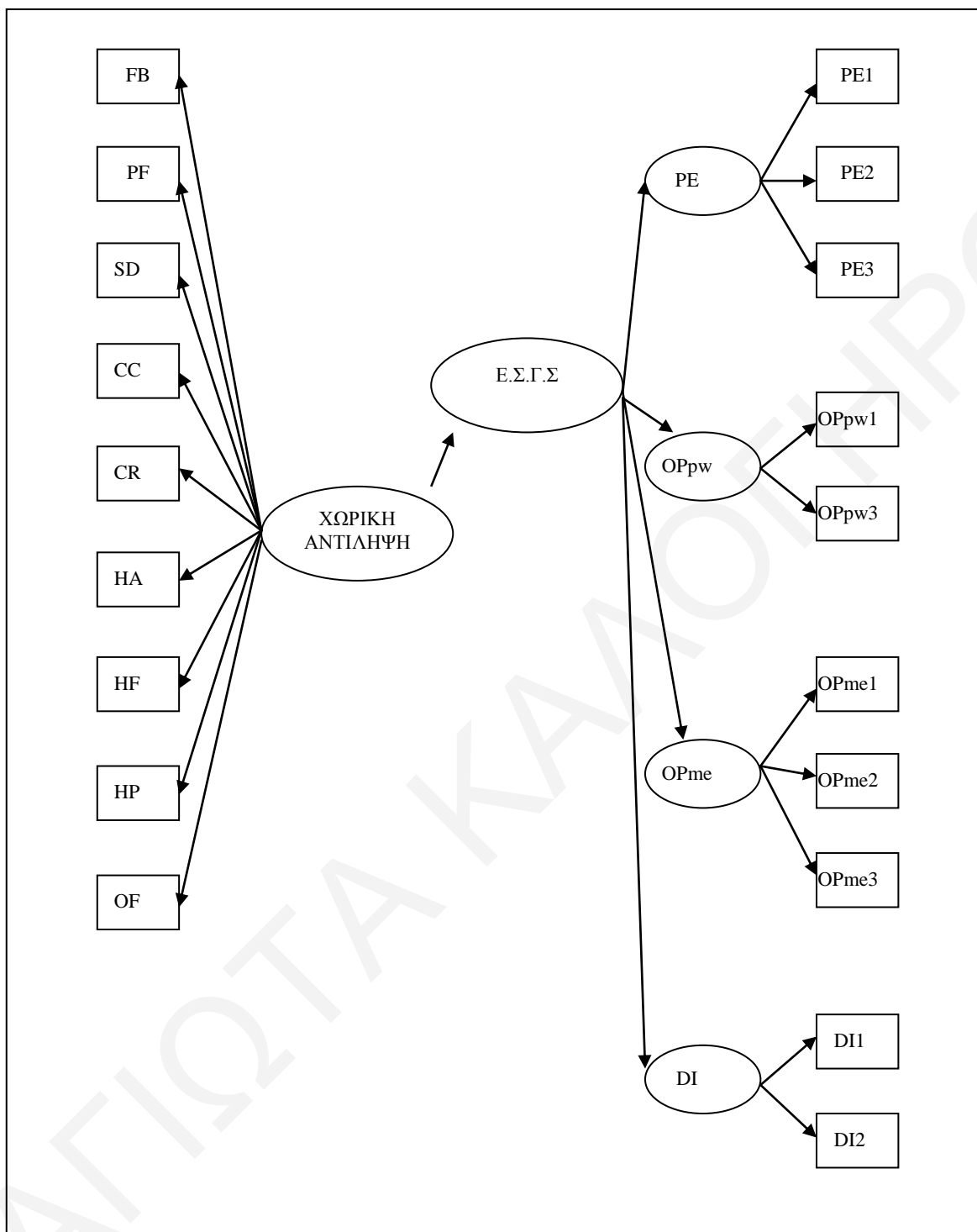
*Ο πρώτος αριθμός δείχνει το συντελεστή φόρτισης των μαθητών του δημοτικού και ο δεύτερος αριθμός το συντελεστή φόρτισης του γυμνασίου, της δεύτερης φάσης.

Σημείωση: Εξήγηση συμβολισμού (αναλυτική περιγραφή στη σελ. 70): PE - «Αντιληπτική Σύλληψη», OPpw - «Αλλαγή Θέσης Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης», OPme - «Μερεολογική Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης», DI - «Λεκτική Σύλληψη» και E.Σ.Γ.Σ. - «Εννοιολογική Σύλληψη Γεωμετρικού Σχήματος».

Δομικό Μοντέλο Χωρικής Αντίληψης και της Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος των Μαθητών

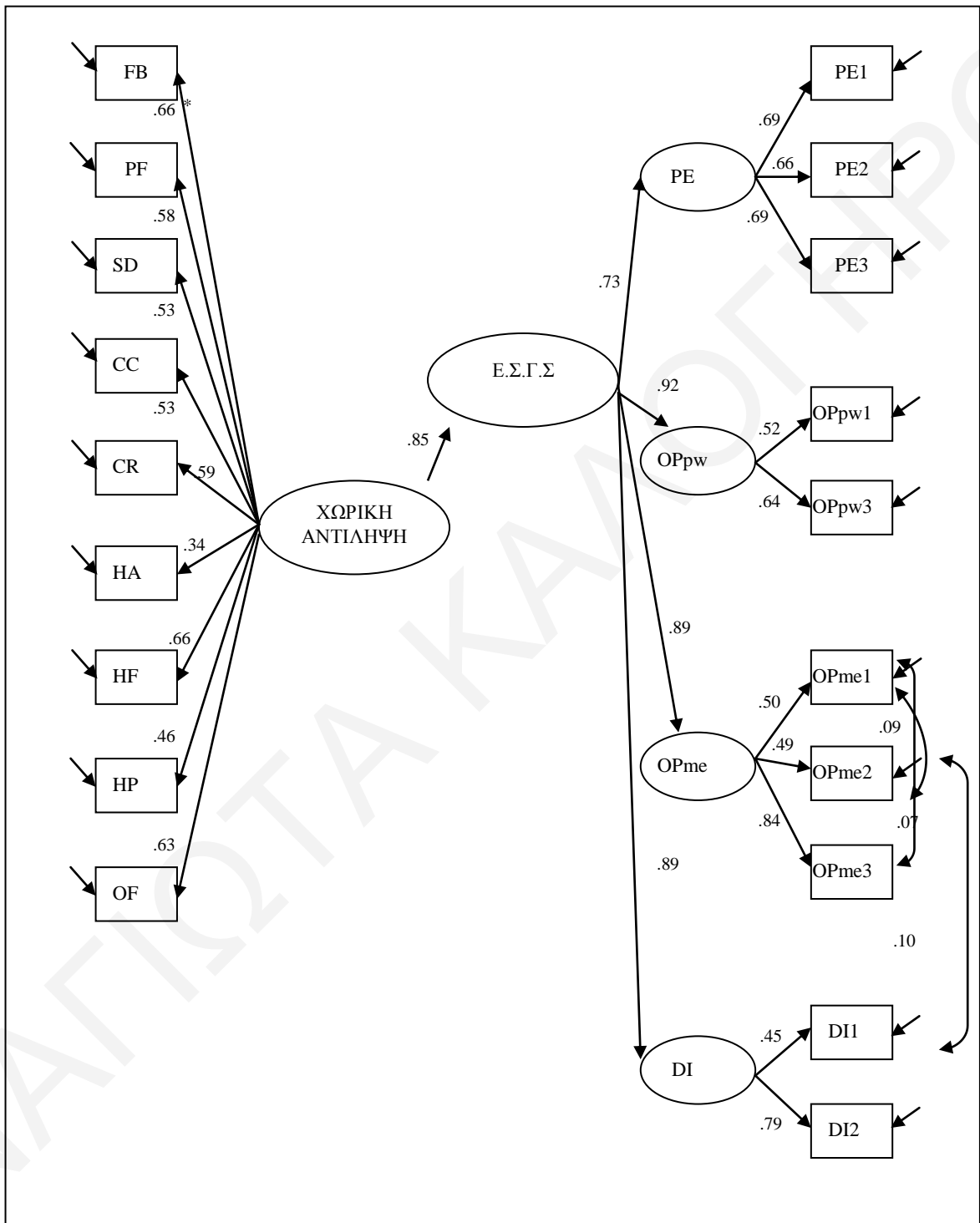
Για τη διερεύνηση της σχέσης ανάμεσα στη χωρική αντίληψη και την εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος των μαθητών, κρίθηκε σκόπιμο να εξεταστεί η επιβεβαίωση δομικού μοντέλου στο οποίο περιλαμβάνεται η σχέση ανάμεσα στη γενική χωρική αντίληψη και τη γενική ικανότητα εννοιολογικής σύλληψης των γεωμετρικών σχημάτων (Διάγραμμα 4.9). Στο ένα μέρος του προτεινόμενου μοντέλου εμφανίζεται ο παράγοντας «Χωρική Αντίληψη», όπως προέκυψε από το σχετικό δομικό μοντέλο (Διάγραμμα 4.2). Στο άλλο μέρος του προτεινόμενου μοντέλου εμφανίζεται ο παράγοντας «Εννοιολογική Σύλληψη του Γεωμετρικού Σχήματος (Ε.Σ.Γ.Σ.)», ο οποίος αναλύεται στην «Αντιληπτική Σύλληψη (PE)», στην «αλλαγή θέσης τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPpw)», στη «Μερεολογική Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPme)» και στη «Λεκτική Σύλληψη (DI)» (Διάγραμμα 4.6). Εμφανίζεται επίσης η υπόθεση ότι η χωρική αντίληψη αποτελεί παράγοντα πρόβλεψης της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος.

Η προσαρμογή του μοντέλου στα δεδομένα της πρώτης μέτρησης (Διάγραμμα 4.10) ήταν πολύ καλή ($CFI=0.952$, $\chi^2=414.783$, $df=145$, $\chi^2/df=2.86$, $p<0.05$, $RMSEA=0.041$ με 90% διάστημα εμπιστοσύνης για το $RMSEA$: 0.037-0.044). Συνεπώς το συγκεκριμένο μοντέλο θεωρήθηκε κατάλληλο, παρέχοντας εμπειρικές ενδείξεις που στηρίζουν την υπόθεση ότι η χωρική αντίληψη αποτελεί παράγοντα πρόβλεψης της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Ο συντελεστής παλινδρόμησης του παράγοντα χωρική αντίληψη πάνω στον παράγοντα της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος ήταν υψηλός (0.716).



Διάγραμμα 4.9. Προτεινόμενο δομικό μοντέλο για τη σχέση ανάμεσα στη χωρική αντίληψη και την εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος.

Σημείωση: Εξήγηση συμβολισμού (αναλυτική περιγραφή στις σελ. 64 και 70): CR – έργα από το τεστ «Περιστροφή Καρτών», HF - έργα από το τεστ «Κρυμμένες Φιγούρες», HP - έργα από το τεστ «Κρυμμένα Μοτίβα», έργα από το τεστ FB - «Σύνθεση Σχημάτων», PF - έργα από το τεστ «Δίπλωση Σχημάτων», SD - έργα από το τεστ «Αναπτύγματα Σχημάτων», CC - έργα από το τεστ «Σύγκριση Κύβων», HA - έργα από το τεστ «Χέρια», OF - έργα από το τεστ «Επικάλυψη Σχημάτων», PE - «Αντιληπτική Σύλληψη», OPpw - «Αλλαγή Θέσης Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης», OPme - «Μερεολογική Τροποποίηση της



Διάγραμμα 4.10. Μοντέλο για τη σχέση ανάμεσα στη χωρική αντίληψη και την εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος με τα δεδομένα της πρώτης μέτρησης.

*Ο αριθμός δείχνει το συντελεστή φόρτισης.

Σημείωση: Εξήγηση συμβολισμού (αναλυτική περιγραφή στις σελ. 64 και 70): CR – έργα από το τεστ «Περιστροφή Καρτών», HF - έργα από το τεστ «Κρυμμένες Φιγούρες», HP - έργα από το τεστ «Κρυμμένα

Μοτίβα», έργα από το τεστ FB - «Σύνθεση Σχημάτων», PF - έργα από το τεστ «Δίπλωση Σχημάτων», SD - έργα από το τεστ «Αναπτύγματα Σχημάτων», CC - έργα από το τεστ «Σύγκριση Κύβων», HA - έργα από το τεστ «Χέρια», OF - έργα από το τεστ «Επικάλυψη Σχημάτων», PE - «Αντιληπτική Σύλληψη», OPpw - «Αλλαγή Θέσης Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης», OPme - «Μερεολογική Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης», DI - «Λεκτική Σύλληψη» και Ε.Σ.Γ.Σ. - «Εννοιολογική Σύλληψη Γεωμετρικού Σχήματος».

Επίδοση των Μαθητών στη Χωρική Αντίληψη και στην Εννοιολογική Σύλληψη του Γεωμετρικού Σχήματος

Ο Πίνακας 4.6, παρουσιάζει τα περιγραφικά αποτελέσματα των υποκειμένων της έρευνας στον παράγοντα της Χωρικής Αντίληψης και τους τέσσερις επιμέρους παράγοντες της Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος («Αντιληπτική Σύλληψη (PE)», στην «Αλλαγή Θέσης Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPpw)», στη «Μερεολογική Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPme)» και στη «Λεκτική Σύλληψη (DI)»), στην πρώτη χορήγηση των δοκιμίων της έρευνας. Η επίδοση των μαθητών ήταν μικρότερη από 0.50 στους τρεις από τους πέντε παράγοντες ($M.O_{OPpw}=0.17$, $T.A_{OPpw}=0.30$, $M.O_{OPme}=0.36$, $T.A_{OPme}=0.35$ και $M.O_{DI}=0.24$, $T.A_{DI}=0.33$). Στους άλλους δύο παράγοντες ο μέσος όρος της επίδοσης των μαθητών ήταν ελαφρώς μεγαλύτερος από 0.50 ($M.O_{X.A.}=0.52$, $T.A_{X.A.}=0.16$ και $M.O_{PE}=0.57$, $T.A_{PE}=0.33$). Συνοψίζοντας, μπορεί να λεχθεί ότι τα υποκείμενα της έρευνας είχαν ικανοποιητική επίδοση στον παράγοντα Χωρικής Αντίληψης και τον παράγοντα «Αντιληπτική Σύλληψη (PE)» και καθόλου ικανοποιητική επίδοση στους παράγοντες «Αλλαγή Θέσης Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPpw)», «Μερεολογική Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPme)» και «Λεκτική Σύλληψη (DI)».

Γενικά, παρατηρείται ότι οι μαθητές δυσκολεύονται περισσότερο στα έργα «Αλλαγής Θέσης Τροποποίησης της Λειτουργικής Σύλληψης (OPpw)» και τα έργα «Λεκτικής Σύλληψης (DI)», τα οποία παρουσιάζουν και τους μικρότερους μέσους όρους επίδοσης. Τα έργα αυτά είναι πιο σύνθετα από τα έργα του παράγοντα «Αντιληπτικής Σύλληψης (PE)», τα οποία παρουσιάζουν και τη μεγαλύτερη επιτυχία.

Οι μεγάλες τιμές της τυπικής απόκλισης και του εύρους των πέντε παραγόντων υποδηλώνουν ότι δεν υπάρχει ομοιογένεια στην επίδοση των υποκειμένων. Οι τιμές της λοξότητας και κύρτωσης είναι μικρότερες από δύο, στοιχείο που υποδεικνύει ότι η

επίδοση των μαθητών στον παράγοντα της χωρικής αντίληψης και της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος, ακολουθούν κανονική τιμή.

Πίνακας 4.6

Περιγραφικά Αποτελέσματα στον Παράγοντα της Χωρικής Αντίληψης και τους Παράγοντες της Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος της Πρώτης Μέτρησης

Παράγοντας	Μέσος Όρος	Τυπική Απόκλιση	Εύρος	Λοξότητα	Κύρτωση
Χωρική Αντίληψη	0.52	0.16	0.80	0.27	-0.49
Εννοιολογική Σύλληψη Γεωμετρικού Σχήματος	0.34	0.25	1	0.84	-0.67
Αντιληπτική Σύλληψη (PE)	0.57	0.33	1	-0.28	-1.20
Λειτουργική Σύλ. – Αλλαγής Θέσης (OPpw)	0.17	0.30	1	1.62	1.46
Λειτουργική Σύλ. – Μερεολογική (OPme)	0.36	0.35	1	0.45	-1.11
Λεκτική Σύλληψη (DI)	0.24	0.33	1	1.01	-0.30

Με σκοπό να εξετάσουμε κατά πόσον υπάρχουν διαφορές στην επίδοση των τεσσάρων διαφορετικών τάξεων στον παράγοντα της χωρικής αντίληψης και στους παράγοντες της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος, πραγματοποιήθηκε πολλαπλή ανάλυση διασποράς (MANOVA). Πραγματοποιήθηκε μια ανάλυση για να εξεταστούν οι διαφορές στον παράγοντα της χωρικής αντίληψης με το γενικό παράγοντα της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος και μια ανάλυση για τις διαφορές στους επιμέρους παράγοντες της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Ο Πίνακας 4.7 παρουσιάζει τους μέσους όρους και τις τυπικές αποκλίσεις των μαθητών των τεσσάρων διαφορετικών τάξεων στους παράγοντες που αναφέρθηκαν πιο πάνω.

Γενικά, παρατηρείται ότι οι μαθητές όλων των τάξεων, παρουσιάζουν μεγαλύτερη επιτυχία στα έργα της χωρικής αντίληψης σε σχέση με τα έργα του γενικού παράγοντα της

εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Επίσης, όσον αφορά τους επιμέρους παράγοντες της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος, φαίνεται ότι η επίδοση των μαθητών, ιδιαίτερα του δημοτικού είναι εξαιρετικά χαμηλή. Μάλιστα σε δύο περιπτώσεις έργων («Αλλαγής Θέσης Τροποποίησης της Λειτουργικής Σύλληψης (OPpw)» και «Λεκτικής Σύλληψης (DI)»), οι μαθητές της πέμπτης τάξης του δημοτικού έχουν επίδοση, σχεδόν μηδέν. Παράλληλα όμως, από τον πίνακα διαφαίνεται ότι καθώς αυξάνεται η ηλικία των μαθητών, αυξάνεται και η επίδοσή τους, τόσο στα έργα της χωρικής αντίληψης, όσο και στα έργα εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος.

Πίνακας 4.7

Μέσοι Όροι και Τυπικές Αποκλίσεις των Μαθητών των Τεσσάρων Τάξεων στον Παράγοντα της Χωρικής Αντίληψης και τους Παράγοντες της Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος της Πρώτης Μέτρησης

Παράγοντας	Ε΄ τάξη		Στ΄ τάξη		Α΄ γυμν.		Β΄ γυμν.	
	Μ.Ο.	Τ.Α.	Μ.Ο.	Τ.Α.	Μ.Ο.	Τ.Α.	Μ.Ο.	Τ.Α.
Χωρική Αντίληψη	0.44	0.12	0.50	0.13	0.58	0.15	0.65	0.15
Εννοιολογική Σύλληψη Γεωμετρικού Σχήματος	0.19	0.14	0.31	0.19	0.44	0.26	0.52	0.29
Αντιληπτική Σύλληψη (PE)	0.39	0.30	0.59	0.32	0.67	0.31	0.71	0.33
Λειτουργική Σύλ. – Αλλαγής Θέσης (OPpw)	0.06	0.18	0.14	0.27	0.25	0.35	0.32	0.38
Λειτουργική Σύλ. – Μερεολογική (OPme)	0.21	0.27	0.31	0.32	0.49	0.35	0.58	0.37
Λεκτική Σύλληψη (DI)	0.09	0.20	0.19	0.28	0.36	0.37	0.47	0.39

Τα αποτελέσματα της πολλαπλής ανάλυσης διασποράς (MANOVA), έδειξαν ότι υπάρχουν διαφορές μεταξύ των μαθητών των τεσσάρων τάξεων που συμμετείχαν στην έρευνα, τόσο στην επίδοσή τους στη χωρική αντίληψη και το γενικό παράγοντα της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος ($Pillai's_F_{(3,1619)} = 89.50, p < 0.01$), όσο και στην επίδοσή τους στους παράγοντες της εννοιολογικής σύλληψης του

γεωμετρικού σχήματος (Pillai's $F_{(3,1619)} = 40.40, p < 0.01$). Όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.8, υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μαθητών των τεσσάρων τάξεων στη χωρική αντίληψη και το γενικό παράγοντα της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος και στους επιμέρους παράγοντες της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος.

Πίνακας 4.8

Αποτελέσματα Πολλαπλής Ανάλυσης Διασποράς Πρώτης Μέτρησης

Πηγή Διακύμανσης	Άθροισμα Τετραγώνων	Βαθμοί Ελευθερίας	Μέσο Τετράγωνο	F	Επίπεδο Σημαντικότητας
Χωρική Αντίληψη	9.15	3	3.05	163.56	.000
Εννοιολογική Σύλ. Γεωμ. Σχ.	23.79	3	7.93	171.89	.000
Αντιληπτική Σύλληψη (PE)	24.17	3	1	8.06	.000
Λειτουργική Σύλ. – Αλλαγής Θέσης (OPpw)	14.56	3	1	4.85	.000
Λειτουργική Σύλ. – Μερεολογική (OPme)	30.79	3	1	10.26	.000
Λεκτική Σύλληψη (DI)	30.87	3	1	10.29	.000

Στη συνέχεια πραγματοποιήθηκε post-hoc ανάλυση, με σκοπό να εντοπιστούν μεταξύ ποιων τάξεων υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές στον παράγοντα της χωρικής αντίληψης και τους παράγοντες της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.9, σε όλους τους παράγοντες, τόσο στον παράγοντα χωρικής αντίληψης και το γενικό παράγοντα εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος, αλλά και στους επιμέρους παράγοντες της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος, («Αντιληπτική Σύλληψη (PE)», στην «Αλλαγή

Θέσης Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPpw)», στη «Μερεολογική Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPme)» και στη «Λεκτική Σύλληψη (DI)», οι μαθητές της έκτης δημοτικού ($p<0.01$), της πρώτης ($p<0.01$) και δευτέρας γυμνασίου ($p<0.01$) είχαν στατιστικά ψηλότερη επίδοση από τους μαθητές της πέμπτης δημοτικού. Επίσης, η επίδοση των μαθητών της πρώτης ($p<0.01$) και δευτέρας γυμνασίου ($p<0.01$) ήταν στατιστικά ψηλότερη από την επίδοση των μαθητών της έκτης δημοτικού και η επίδοση των μαθητών της δευτέρας γυμνασίου ($p<0.01$) ήταν στατιστικά ψηλότερη από την επίδοση των μαθητών της πρώτης γυμνασίου.

Πίνακας 4.9

Σύγκριση της Επίδοσης των Μαθητών των Τεσσάρων Τάξεων στους Παράγοντες της Εργασίας

Εξαρτημένη Μεταβλητή	Τάξη (1)	Τάξη (2)	Επίπεδο Σημαντικότητας (Sheffe test)	
Χωρική Αντίληψη	Ε΄ δημοτικού	Στ΄ δημοτικού	$p<0.01$	
		Α΄ γυμνασίου	$p<0.01$	
		Β΄ γυμνασίου	$p<0.01$	
	Στ΄ δημοτικού	Α΄ γυμνασίου	$p<0.01$	
		Β΄ γυμνασίου	$p<0.01$	
		Α΄ γυμνασίου	$p<0.01$	
	Εννοιολογική Σύλ. Γεωμ. Σχήματος	Ε΄ δημοτικού	Στ΄ δημοτικού	$p<0.01$
			Α΄ γυμνασίου	$p<0.01$
			Β΄ γυμνασίου	$p<0.01$
Στ΄ δημοτικού		Α΄ γυμνασίου	$p<0.01$	
		Β΄ γυμνασίου	$p<0.01$	
		Α΄ γυμνασίου	$p<0.01$	

Αντιληπτική Σύλληψη (PE)	Ε΄ δημοτικού	Στ΄ δημοτικού	$p < 0.01$	
		Α΄ γυμνασίου	$p < 0.01$	
		Β΄ γυμνασίου	$p < 0.01$	
	Στ΄ δημοτικού	Α΄ γυμνασίου	$p < 0.01$	
		Β΄ γυμνασίου	$p < 0.01$	
		Α΄ γυμνασίου	$p < 0.01$	
Λειτουργική Σύλ. – Αλλαγής Θέσης (OPpw)	Ε΄ δημοτικού	Στ΄ δημοτικού	$p < 0.01$	
		Α΄ γυμνασίου	$p < 0.01$	
		Β΄ γυμνασίου	$p < 0.01$	
	Στ΄ δημοτικού	Α΄ γυμνασίου	$p < 0.01$	
		Β΄ γυμνασίου	$p < 0.01$	
		Α΄ γυμνασίου	$p < 0.01$	
	Λειτουργική Σύλ. – Μερεολογική (OPme)	Ε΄ δημοτικού	Στ΄ δημοτικού	$p < 0.01$
			Α΄ γυμνασίου	$p < 0.01$
			Β΄ γυμνασίου	$p < 0.01$
Στ΄ δημοτικού		Α΄ γυμνασίου	$p < 0.01$	
		Β΄ γυμνασίου	$p < 0.01$	
		Α΄ γυμνασίου	$p < 0.01$	
Λεκτική Σύλληψη (DI)		Ε΄ δημοτικού	Στ΄ δημοτικού	$p < 0.01$
			Α΄ γυμνασίου	$p < 0.01$
			Β΄ γυμνασίου	$p < 0.01$
	Στ΄ δημοτικού	Α΄ γυμνασίου	$p < 0.01$	
		Β΄ γυμνασίου	$p < 0.01$	
		Α΄ γυμνασίου	$p < 0.01$	

Εν κατακλείδι, από τον πιο πάνω πίνακα, διαφαίνεται ότι καθώς αυξάνεται το ηλικιακό επίπεδο των μαθητών, αυξάνεται στατιστικά σημαντικά, η επίδοσή τους, τόσο στα έργα χωρικής αντίληψης, όσο και στα έργα της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος και στους επιμέρους παράγοντες του.

Κατηγορίες Μαθητών στη Χωρική Αντίληψη και στην Εννοιολογική Σύλληψη του Γεωμετρικού Σχήματος

Για να εξεταστεί κατά πόσον υπάρχουν ομάδες υποκειμένων με παρόμοια συμπεριφορά ως προς την ικανότητα τους στη χωρική αντίληψη και στην εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος, ελέγχθηκαν οι μέσοι όροι επίδοσης των μαθητών στην χωρική αντίληψη και στην εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος. Με βάση σχετικές έρευνες, συνήθως εμφανίζονται τρεις κατηγορίες μαθητών.

Έτσι ελέγχθηκε η υπόθεση του διαχωρισμού των υποκειμένων της έρευνας σε τρεις κατηγορίες, με βάση την επίδοσή τους. Στην πρώτη κατηγορία ορίστηκαν να ανήκουν οι μαθητές των οποίων η επίδοσή τους στον παράγοντα της χωρικής αντίληψης και της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος, καθώς και στους επιμέρους παράγοντες της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος, ήταν μικρότερη από 0.50. Στην τρίτη κατηγορία ορίστηκαν να ανήκουν οι μαθητές που είχαν επίδοση μεγαλύτερη από 0.67, σε όλους τους παράγοντες. Ενώ στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν οι υπόλοιποι μαθητές. Η επίδοση μιας κατηγορίας υποκειμένων χαρακτηρίζεται ως πολύ καλή όταν υπερβαίνει το 0.67, ικανοποιητική όταν είναι μεγαλύτερη από 0.50 και μικρότερη από 0.67 και μη επαρκής όταν είναι μικρότερη από 0.50.

Το ποσοστό των υποκειμένων της έρευνας που ανήκουν με βάση την ανάλυση ομάδων που πραγματοποιήθηκε στην Κατηγορία 1 ήταν 50.3%. Στην Κατηγορία 2 ανήκει το 33.2% των υποκειμένων και στην Κατηγορία 3 το 16.5% (δείτε Πίνακα 4.10). Το ποσοστό των μαθητών που ανήκει σε κάθε κατηγορία διαφοροποιείται ανάλογα με την τάξη των μαθητών. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.10, το 44.9% των μαθητών της Ε΄ τάξης συμπεριλαμβάνεται στην Κατηγορία 1, το 17.1% στην Κατηγορία 2 και μόνο το 2.2% στην Κατηγορία 3. Όσον αφορά του μαθητές της Στ΄ τάξης, το ποσοστό των μαθητών που ανήκει στην Κατηγορία 1 περιορίζεται στο 35.8%, στην Κατηγορία 2 το 42.6% και στην Κατηγορία 3 το 16.5%. Ποσοστό 11.5 % των μαθητών της Α΄ Γυμνασίου ανήκουν στην

Κατηγορία 1, 22.5% ανήκουν στην Κατηγορία 2 και το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών της Α΄ Γυμνασίου ανήκουν στην Κατηγορία 3, με 33.7%. Όμοια συμπεριφορά παρουσιάζουν και οι μαθητές της Β΄ Γυμνασίου, με ποσοστό μόλις 7.7% στην Κατηγορία 1, 17.8% στην Κατηγορία 2 και 47.6% των μαθητών στην Κατηγορία 3.

Πίνακας 4.10

Ποσοστό Μαθητών στις Τρεις Κατηγορίες Υποκειμένων

	Κατηγορία 1	Κατηγορία 2	Κατηγορία 3
Ε΄ Δημοτικού	44.9%	17.1%	2.2%
Στ΄ Δημοτικού	35.8%	42.6%	16.5%
Α΄ Γυμνασίου	11.5%	22.5%	33.7%
Β΄ Γυμνασίου	7.7%	17.8%	47.6%
Σύνολο	50.3%	33.2%	16.5%

Με βάση τα ποσοστά αυτά, συνεπάγεται ότι οι μαθητές της Ε΄ τάξης του δημοτικού εκπροσωπούν κυρίως την Κατηγορία 1, αφού το 45%, σχεδόν των υποκειμένων της εντάσσονται στην κατηγορία αυτή. Οι μαθητές της Στ΄ δημοτικού χαρακτηρίζουν κυρίως την Κατηγορία 2, ενώ σημαντικό ποσοστό των μαθητών εντάσσεται στην Κατηγορία 1. Οι μαθητές της Α΄ και Β΄ Γυμνασίου εκπροσωπούν κυρίως την Κατηγορία 3, ενώ σημαντικό ποσοστό των μαθητών της Α΄ Γυμνασίου εντάσσεται στην Κατηγορία 2.

Τα αποτελέσματα της πολλαπλής ανάλυσης διασποράς έδειξαν ότι υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ της επίδοσης των μαθητών των τριών κατηγοριών στη χωρική αντίληψη και στο γενικό παράγοντα της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος ($Pillai's_F_{(2,1619)} = 636.83, p < 0.01$). Ο Πίνακας 4.11 παρουσιάζει το μέσο όρο της επίδοσης των υποκειμένων των τριών κατηγοριών στη χωρική αντίληψη και στο γενικό παράγοντα της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Ο μέσος όρος της επίδοσης της κάθε κατηγορίας και στους δύο παράγοντες ήταν στατιστικά ψηλότερος από τον αντίστοιχο μέσο όρο της προηγούμενης κατηγορίας. Ο μέσος όρος της επίδοσης της Κατηγορίας 1 στη χωρική αντίληψη και στο γενικό παράγοντα της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος ήταν μικρότερος από 0.50 ($M.O._{X.A.} = 0.42, T.A._{X.A.} = 0.10$ και $M.O._{E.S.T.S.} = 0.15, T.A._{E.S.T.S.} = 0.09$). Ο μέσος όρος της

επίδοσης της Κατηγορίας 2 ήταν μεγαλύτερος από 0.50 στον παράγοντα χωρικής αντίληψης (Μ.Ο._{Χ.Α.}=0.58, Τ.Α._{Χ.Α.}=0.10) και μικρότερος από 0.50 στο γενικό παράγοντα εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος (Μ.Ο._{Ε.Σ.Γ.Σ.}=0.40, Τ.Α._{Ε.Σ.Γ.Σ.}=0.11). Τέλος, ο μέσος όρος των υποκειμένων της Κατηγορίας 3 και στους δύο παράγοντες ήταν μεγαλύτερος από 0.67 (Μ.Ο._{Χ.Α.}=0.73, Τ.Α._{Χ.Α.}=0.10 και Μ.Ο._{Ε.Σ.Γ.Σ.}=0.79, Τ.Α._{Ε.Σ.Γ.Σ.}=0.12).

Πίνακας 4.11

Μέσοι Όροι και Τυπικές Αποκλίσεις των Τριών Κατηγοριών Υποκειμένων στη Χωρική Αντίληψη και στην Εννοιολογική Σύλληψη του Γεωμετρικού Σχήματος

Παράγοντας	Κατηγορία 1		Κατηγορία 2		Κατηγορία 3	
	Μ.Ο.	Τ.Α.	Μ.Ο.	Τ.Α.	Μ.Ο.	Τ.Α.
Χωρική Αντίληψη	0.42	0.10	0.58	0.10	0.73	0.10
Εννοιολογική Σύλληψη Γεωμετρικού Σχήματος	0.15	0.09	0.40	0.11	0.79	0.12

Τα αποτελέσματα πολλαπλής ανάλυσης διασποράς έδειξαν ότι υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στην επίδοση των μαθητών στους τέσσερις παράγοντες της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος (Pillai's $F_{(2,1619)} = 347.038, p < 0.01$) μεταξύ όλων των κατηγοριών υποκειμένων. Η επίδοση κάθε κατηγορίας υποκειμένων ήταν στατιστικά καλύτερη από την επίδοση της προηγούμενης κατηγορίας σε όλους τους παράγοντες που αναφέρθηκαν πιο πάνω. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.12, ο μέσος όρος των μαθητών της Κατηγορίας 1 ήταν σε όλους τους παράγοντες μικρότερος από 0.50. Ενώ, ο μέσος όρος της επίδοσης των μαθητών στην Κατηγορία 2 ήταν μεγαλύτερος από 0.67 στον παράγοντα «Αντιληπτική Σύλληψη (PE)» (Μ.Ο._{PE}=0.69, Τ.Α._{PE}=0.28). Ο μέσος όρος της Κατηγορίας 3 ήταν μεγαλύτερος από 0.67 σε όλους τους παράγοντες της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος.

Από τους Πίνακες 4.11 και 4.12, φαίνεται ότι οι μέσοι όροι της επίδοσης στα έργα του γενικού παράγοντα της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος και των επιμέρους παραγόντων του, είναι μικρότεροι από τους μέσους όρους επίδοσης των μαθητών στα έργα της χωρικής αντίληψης. Πιο συγκεκριμένα, τα έργα των παραγόντων «Αλλαγής Θέσης Τροποποίησης της Λειτουργικής Σύλληψης (ΟΡpw)» και τα έργα

«Λεκτικής Σύλληψης (DI)», παρουσιάζουν τους μικρότερους μέσους όρους, με την Κατηγορία 1, να μην μπορεί να επιλύσει καθόλου τα έργα των παραγόντων αυτών (μέσοι όροι κοντά στο μηδέν). Πέραν από τη δυσκολία και την πολυπλοκότητα που εμφανίζουν τα έργα αυτά, οι μαθητές που ανήκουν στην Κατηγορία 1, είναι οι μαθητές με τις πιο χαμηλές ικανότητες σε όλους τους παράγοντες.

Πίνακας 4.12

Μέσοι Όροι και Τυπικές Αποκλίσεις των Τριών Κατηγοριών Υποκειμένων στους Παράγοντες της Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος

Παράγοντας	Κατηγορία 1		Κατηγορία 2		Κατηγορία 3	
	Μ.Ο.	Τ.Α.	Μ.Ο.	Τ.Α.	Μ.Ο.	Τ.Α.
Αντιληπτική Σύλληψη (PE)	0.38	0.28	0.69	0.28	0.91	0.15
Λειτουργική Σύλ. – Αλλαγής Θέσης (OPpw)	0.02	0.10	0.16	0.26	0.67	0.35
Λειτουργική Σύλ. – Μερεολογική (OPme)	0.14	0.21	0.47	0.28	0.83	0.21
Λεκτική Σύλληψη (DI)	0.07	0.17	0.27	0.28	0.74	0.29

Στον Πίνακα 4.13 συνοψίζονται τα χαρακτηριστικά των τριών κατηγοριών υποκειμένων. Οι μαθητές της Κατηγορίας 1 δεν είχαν ούτε πολύ καλή γνώση ούτε ικανοποιητική επίδοση σε κανένα από τους παράγοντες της χωρικής αντίληψης και της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Οι μαθητές της Κατηγορίας 2 είχαν ικανοποιητική γνώση της χωρικής αντίληψης και πολύ καλή επίδοση στον παράγοντα της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος: «Αντιληπτική Σύλληψη (PE)». Τέλος, οι μαθητές της Κατηγορίας 3 είχαν πολύ καλή γνώση τόσο στη χωρική αντίληψη όσο και στην εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος, καθώς και σε όλους του επιμέρους παράγοντες της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος.

Πίνακας 4.13

Χαρακτηριστικά των Τριών Κατηγοριών Υποκειμένων

Επίπεδο Γνώσης	Κατηγορία 1	Κατηγορία 2	Κατηγορία 3
Πολύ Καλή Γνώση (Επίδοση >.67)		PE	X.A. E.Σ.Γ.Χ. PE, OPpw, OPme, DI
Ικανοποιητική Γνώση (.50<Επίδοση<.67)		X.A.	
Μη Επαρκής Γνώση (Επίδοση<.50)	X.A. E.Σ.Γ.Χ. PE, OPpw, OPme, DI	E.Σ.Γ.Χ. OPpw, OPme, DI	

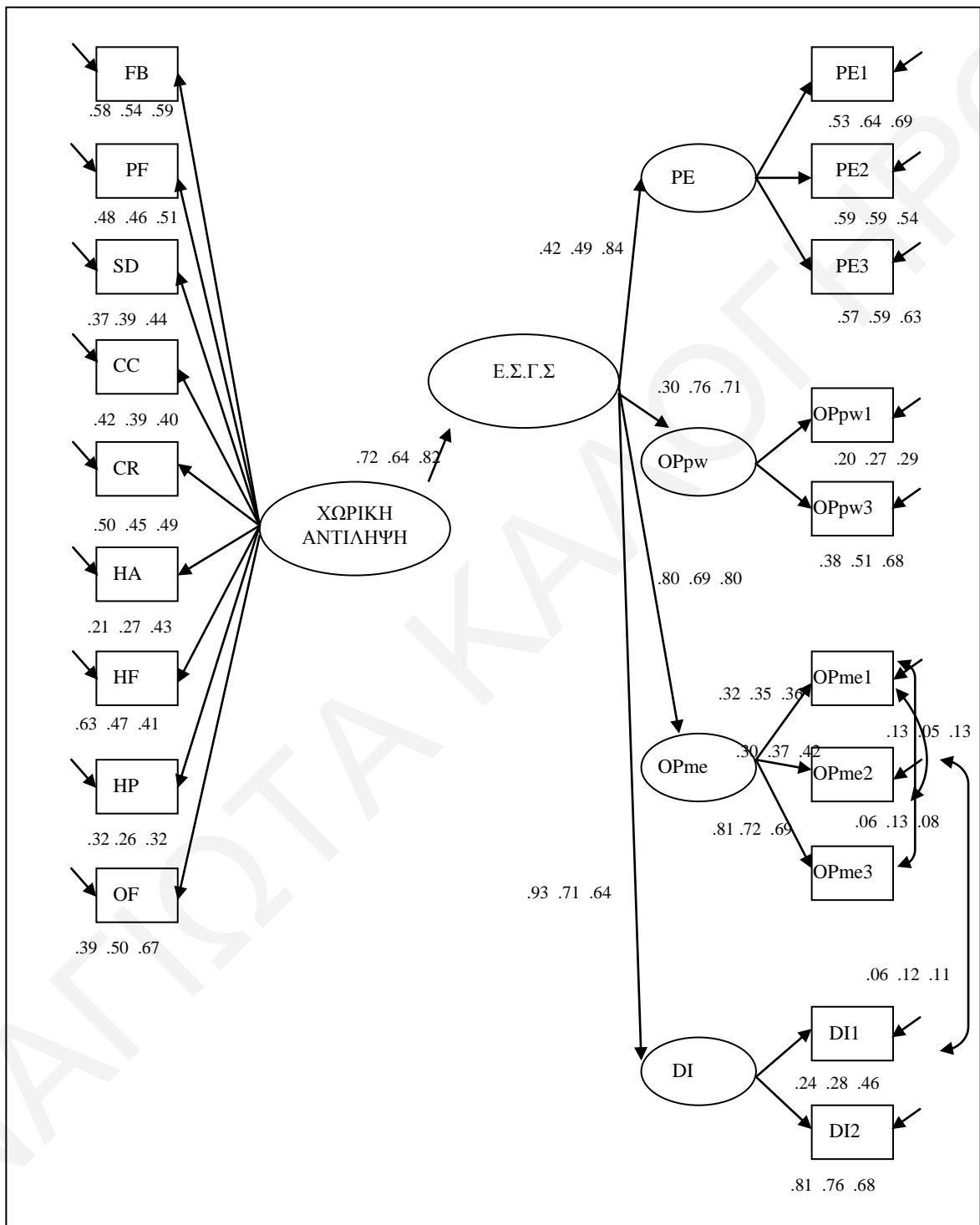
Σχέση μεταξύ της Χωρικής Αντίληψης και της Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος στις Τρεις Κατηγορίες Μαθητών

Πιο πάνω, φάνηκε από τα αποτελέσματα της παλινδρομικής ανάλυσης, ότι η χωρική αντίληψη αποτελεί παράγοντα πρόβλεψης της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος των μαθητών (Διάγραμμα 4.10). Με σκοπό να εξεταστεί κατά πόσο ισχύει η σχέση αυτή στις τρεις κατηγορίες μαθητών, εξετάστηκε η επιβεβαίωση του δομικού μοντέλου ανάμεσα στη χωρική αντίληψη και στην εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος με τη μέθοδο ανάλυσης ομάδων (Διάγραμμα 4.11).

Η προσαρμογή του μοντέλου στις τρεις κατηγορίες (Διάγραμμα 4.11) ήταν ικανοποιητική (CFI=.956, $\chi^2=949.823$, $df=463$, $\chi^2/df=2.05$, $p<0,05$, RMSEA=0.044 με 90% διάστημα εμπιστοσύνης για το RMSEA: 0.040-0.048). Συνεπώς το συγκεκριμένο μοντέλο θεωρήθηκε κατάλληλο, παρέχοντας εμπειρικές ενδείξεις που στηρίζουν την υπόθεση ότι η χωρική αντίληψη αποτελεί παράγοντα πρόβλεψης της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος και στις τρεις κατηγορίες μαθητών.

Από το Διάγραμμα 4.11, φαίνεται ότι μεγαλύτερη επίδραση στον παράγοντα «Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος (Ε.Σ.Γ.Σ.)» από τον παράγοντα «Χωρική Αντίληψη», παρουσιάζει η Κατηγορία 3 των μαθητών ($r^2=.82$), ακολουθεί η

Κατηγορία 1 ($r^2=.72$) και τέλος η Κατηγορία 2 ($r^2=.64$). Γενικά, παρατηρείται ότι όλες οι φορτίσεις της Κατηγορίας 3 των μαθητών είναι υψηλότερες από τις άλλες δύο κατηγορίες μαθητών.



Διάγραμμα 4.11. Μοντέλο για τη σχέση ανάμεσα στη χωρική αντίληψη και την εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος των τριών κατηγοριών.

*Ο πρώτος αριθμός δείχνει το συντελεστή φόρτισης των μαθητών που ανήκουν στην Κατηγορία 1, ο δεύτερος αριθμός το συντελεστή φόρτισης των μαθητών που ανήκουν στην Κατηγορία 2 και ο τρίτος αριθμός το συντελεστή φόρτισης των μαθητών που ανήκουν στην Κατηγορία 3.

Σημείωση: Εξήγηση συμβολισμού (αναλυτική περιγραφή στις σελ. 64 και 70): CR – έργα από το τεστ «Περιστροφή Καρτών», HF - έργα από το τεστ «Κρυμμένες Φιγούρες», HP - έργα από το τεστ «Κρυμμένα Μοτίβα», έργα από το τεστ FB - «Σύνθεση Σχημάτων», PF - έργα από το τεστ «Δίπλωση Σχημάτων», SD - έργα από το τεστ «Αναπτύγματα Σχημάτων», CC - έργα από το τεστ «Σύγκριση Κύβων», HA - έργα από το τεστ «Χέρια», OF - έργα από το τεστ «Επικάλυψη Σχημάτων», PE - «Αντιληπτική Σύλληψη», OPpw - «Αλλαγή Θέσης Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης», OPme - «Μερεολογική Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης», DI – «Λεκτική Σύλληψη» και Ε.Σ.Γ.Σ. – «Εννοιολογική Σύλληψη Γεωμετρικού Σχήματος».

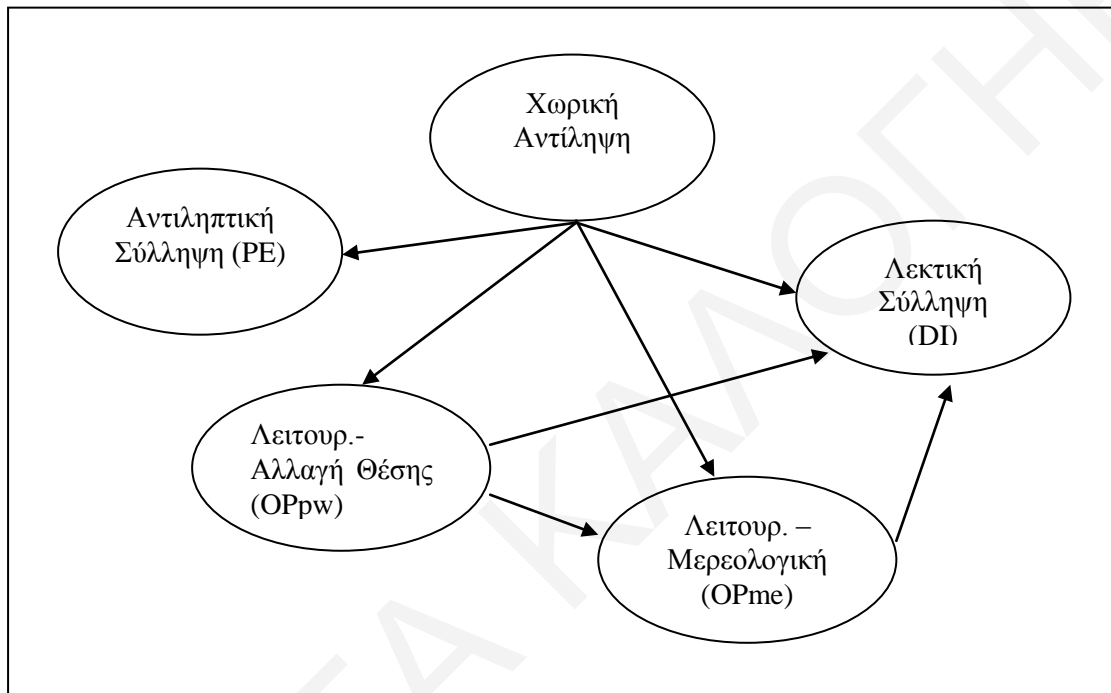
Σχέση Χωρικής Αντίληψης και Παραγόντων Εννοιολογικής Σύλληψης Γεωμετρικού Σχήματος

Με βάση την αρχική υπόθεση της παρούσας εργασίας, ότι η χωρική αντίληψη αποτελεί παράγοντα πρόβλεψης της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος, υποθέσαμε και ελέγξαμε την επιβεβαίωση ενός δομικού μοντέλου με βάση το οποίο η επίδοση των μαθητών στη «Χωρική Αντίληψη» προβλέπει την επίδοση των μαθητών στους τέσσερις παράγοντες της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος: «Αντιληπτική Σύλληψη (PE)», την «Αλλαγή Θέσης Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPpw)», τη «Μερεολογική Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPme)» και τη «Λεκτική Σύλληψη (DI)». Επίσης, οι δύο παράγοντες της Λειτουργικής Σύλληψης («Αλλαγής Θέσης - OPpw » και «Μερεολογικής Τροποποίησης - OPme») προβλέπουν την επίδοση στον παράγοντα «Λεκτικής Σύλληψης (DI)». Παράλληλα, ο παράγοντας «Αλλαγή Θέσης Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPpw)» προβλέπει τη «Μερεολογική Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPme)».

Το προτεινόμενο μοντέλο παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 4.12. Τα αποτελέσματα της δομικής ανάλυσης ήταν $CFI=.985$, $\chi^2=37.378$, $df=2$, $\chi^2/df=18.689$, $p<0,05$, $RMSEA=0.105$ με 90% διάστημα εμπιστοσύνης για το $RMSEA: 0.077-0.135$.

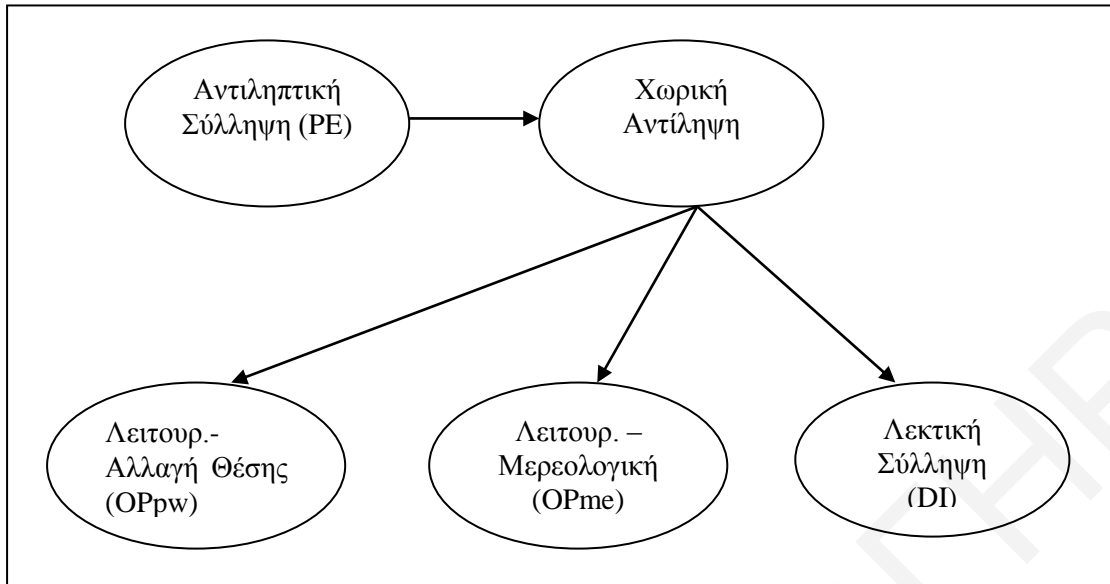
Λόγω του ότι ο λόγος του χ^2 με τους βαθμούς ελευθερίας (df), δεν ήταν καθόλου ικανοποιητικός ($\chi^2/df=18.689$) και ο δείκτης $RMSEA$, ήταν σχετικά ψηλός ($RMSEA=0.105$), υποθέσαμε και ελέγξαμε την εφαρμογή ενός άλλου δομικού μοντέλου, το οποίο στηρίχτηκε στα αποτελέσματα της επίδοσης των τριών διαφορετικών κατηγοριών, όπως προέκυψαν πιο πάνω. Με βάση το μοντέλο αυτό (δείτε Διάγραμμα 4.13), η επίδοση των μαθητών στην «Αντιληπτική Σύλληψη (PE)» προβλέπει την επίδοση στη Χωρική Αντίληψη, που με τη σειρά της προβλέπει την επίδοση στους υπόλοιπους

παράγοντες της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος: την «Αλλαγή Θέσης Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPrw)», τη «Μερεολογική Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPme)» και τη «Λεκτική Σύλληψη (DI)». Τα αποτελέσματα της δομικής ανάλυσης του προτεινόμενου μοντέλου ήταν CFI=.985, $\chi^2=38.964$, $df=3$, $\chi^2/df=12.988$, $p<0,05$, RMSEA=0.086 με 90% διάστημα εμπιστοσύνης για το RMSEA: 0.063-0.111.



Διάγραμμα 4.12. Προτεινόμενο μοντέλο για τη σχέση ανάμεσα στη χωρική αντίληψη και των παραγόντων της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος.

Και σε αυτή την περίπτωση ο λόγος του χ^2 με τους βαθμούς ελευθερίας (df), δεν ήταν καθόλου ικανοποιητικός ($\chi^2/df=12.988$) και ο δείκτης RMSEA, ήταν σχετικά ψηλός (RMSEA=0.086). Κοιτάζοντας προσεκτικά τα δύο προηγούμενα μοντέλα παρατηρήθηκε ότι ο παράγοντας «Αντιληπτική Σύλληψη (PE)» και Χωρική Αντίληψη, στη μία περίπτωση προβλέπει η Χωρική Αντίληψη την «Αντιληπτική Σύλληψη (PE)» και στην άλλη περίπτωση συμβαίνει το αντίθετο. Αποφασίστηκε έτσι να ελεγχθεί ένα νέο μοντέλο όπου δημιουργείται ένας νέος παράγοντας από τη Χωρική Αντίληψη και την «Αντιληπτική Σύλληψη (PE)». Ο παράγοντας αυτό ονομάστηκε για τους σκοπούς της παρούσας έρευνας, «Ειδική Χωρική Αντίληψη».

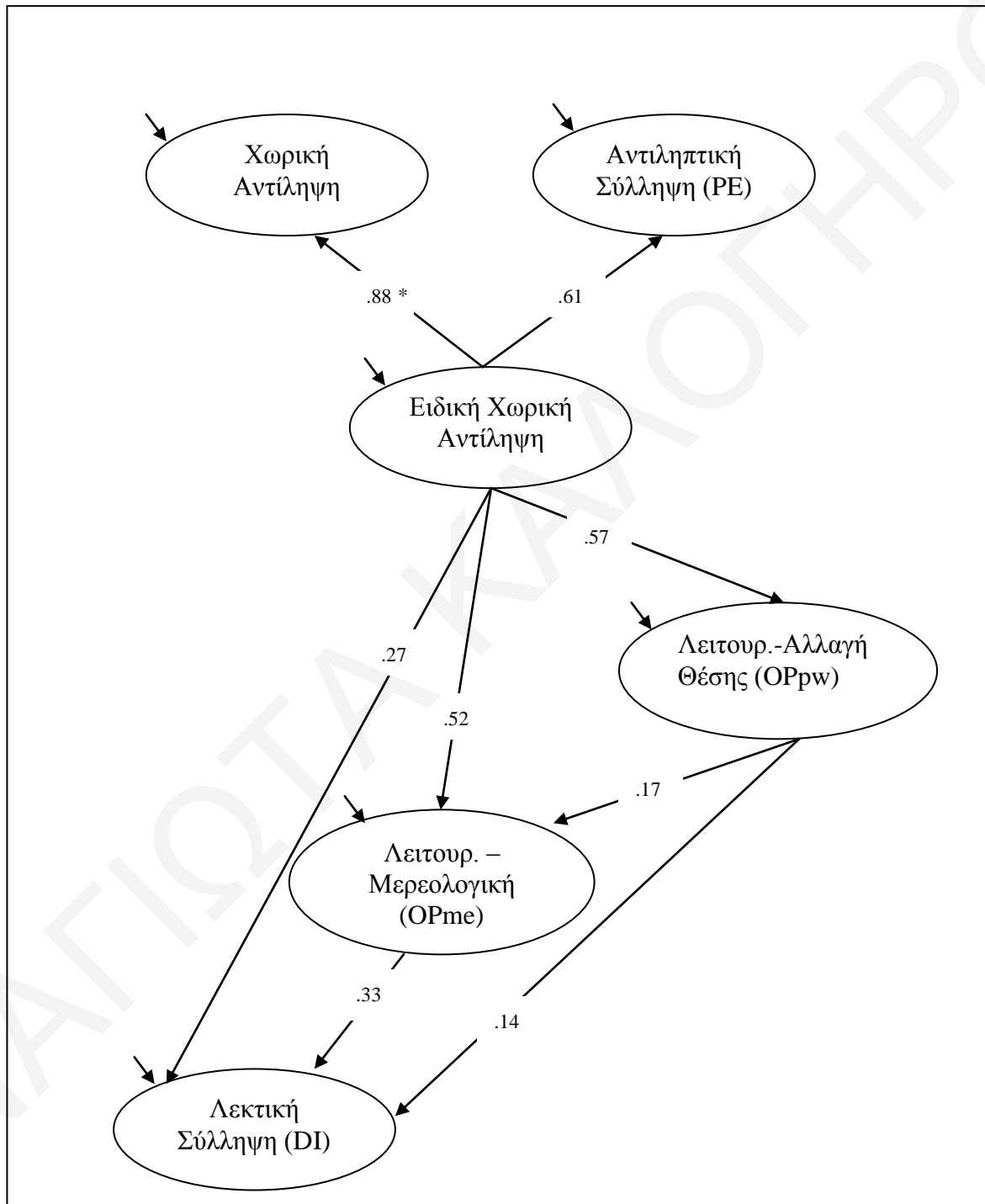


Διάγραμμα 4.13. Προτεινόμενο μοντέλο για τη σχέση ανάμεσα στη χωρική αντίληψη και των παραγόντων της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος.

Το Διάγραμμα 4.14 παρουσιάζει το εναλλακτικό μοντέλο της σχέσης ανάμεσα στη χωρική αντίληψη και την εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος. Συγκεκριμένα, ελέγχθηκε το μοντέλο όπου ο παράγοντας Χωρική Αντίληψη και ο παράγοντας της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος «Αντιληπτική Σύλληψη (PE)», δημιουργούν ένα νέο παράγοντα, τον παράγοντα «Ειδική Χωρική Αντίληψη». Ο παράγοντας «Ειδική Χωρική Αντίληψη», προβλέπει την επίδοση των μαθητών στους τρεις άλλους παράγοντες της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος: την «Αλλαγή Θέσης Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPrw)», τη «Μερεολογική Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPme)» και τη «Λεκτική Σύλληψη (DI)». Επίσης, οι δύο παράγοντες της Λειτουργικής Σύλληψης («Αλλαγής Θέσης - OPrw» και «Μερεολογικής Τροποποίησης - OPme») προβλέπουν την επίδοση στον παράγοντα «Λεκτικής Σύλληψης (DI)». Παράλληλα, ο παράγοντας «Αλλαγή Θέσης Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPrw)» προβλέπει τη «Μερεολογική Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPme)». Τα αποτελέσματα της δομικής ανάλυσης του προτεινόμενου μοντέλου ήταν ικανοποιητικά ($CFI=1.000$, $\chi^2= 1.822, df=2$, $\chi^2/df=0.911$, $p>0,05$, $RMSEA=0.000$ με 90% διάστημα εμπιστοσύνης για το $RMSEA: 0.000-0.048$). Οι συντελεστές παλινδρόμησης του μοντέλου ήταν στατιστικά σημαντικοί.

Από το Διάγραμμα 4.14, παρατηρείται ότι ο παράγοντας της Χωρικής Αντίληψης φορτίζει περισσότερο στο παράγοντα «Ειδική Χωρική Αντίληψη», με συντελεστή

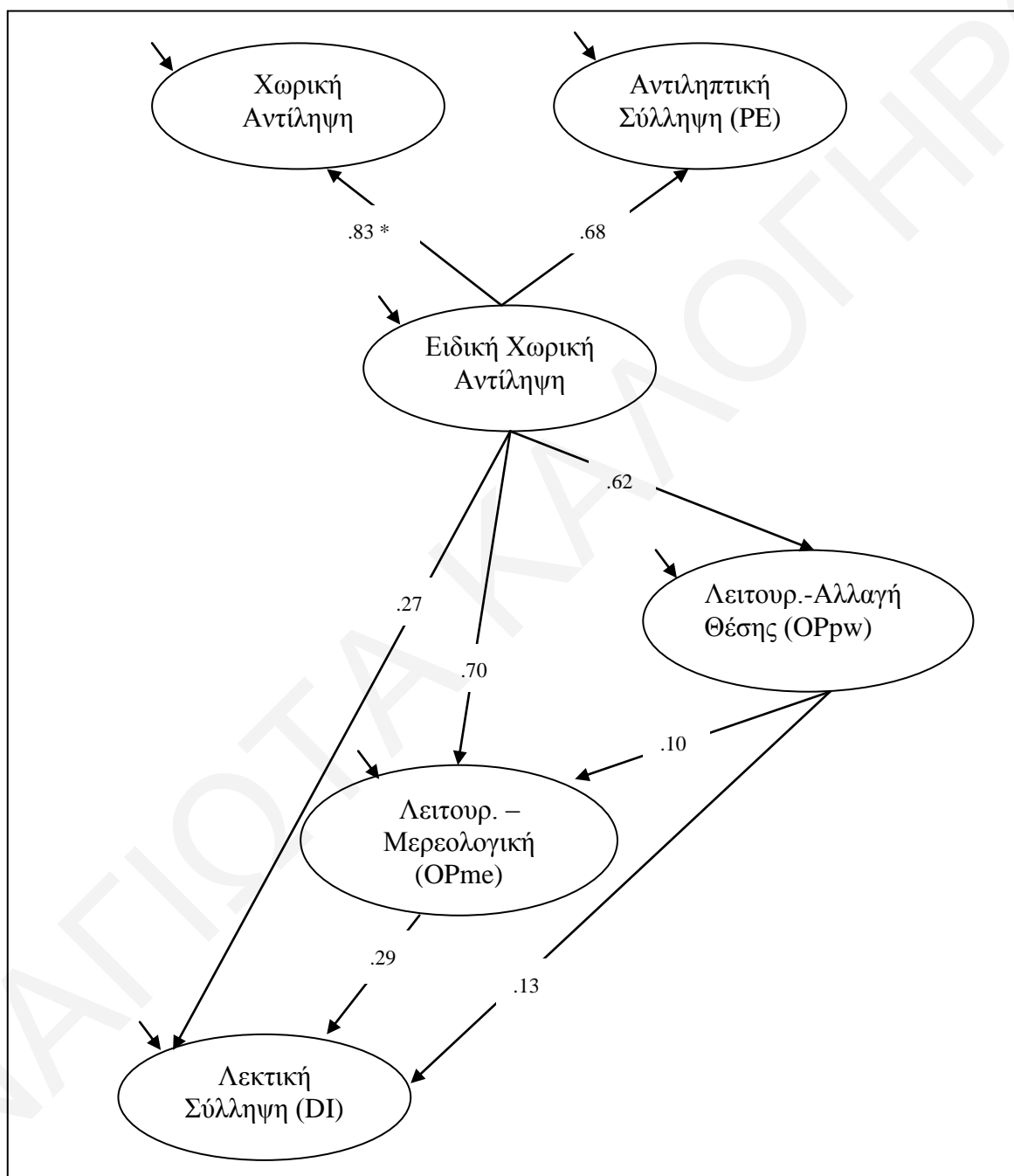
φόρτισης ($r^2=.88$). Ενώ από την άλλη ο παράγοντας «Ειδική Χωρική Αντίληψη», προβλέπει περισσότερο τους δύο παράγοντες «Λειτουργικής Σύλληψης – OPpw και OPme» ($r^2=.57$ και $r^2=.52$, αντίστοιχα) και λιγότερο τον παράγοντα «Λεκτική Σύλληψη (DI)» ($r^2=.27$).



Διάγραμμα 4.14. Μοντέλο για τη σχέση ανάμεσα στη χωρική αντίληψη και των παραγόντων της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος των μαθητών της πρώτης μέτρησης.

*Ο αριθμός δείχνει το συντελεστή φόρτισης.

Το μοντέλο αυτό επιβεβαιώθηκε και για τους μαθητές της δεύτερης μέτρησης, όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 4.15. Τα αποτελέσματα της δομικής ανάλυσης του προτεινόμενου μοντέλου ήταν ικανοποιητικά ($CFI=0.989$, $\chi^2= 5.764$, $df=2$, $\chi^2/df=2.882$, $p>0,05$, $RMSEA=0.035$ με 90% διάστημα εμπιστοσύνης για το RMSEA: 0.000-0.070. Οι συντελεστές παλινδρόμησης του μοντέλου ήταν στατιστικά σημαντικοί.



Διάγραμμα 4.15. Μοντέλο για τη σχέση ανάμεσα στη χωρική αντίληψη και των παραγόντων της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος των μαθητών της δεύτερης μέτρησης.

*Ο αριθμός δείχνει το συντελεστή φόρτισης.

Με βάση τους συντελεστές παλινδρόμησης του μοντέλου των μαθητών της δεύτερης μέτρησης, διαφαίνεται ότι και σε αυτή την περίπτωση η χωρική αντίληψη συμβάλει σε μεγαλύτερο βαθμό στη δημιουργία του παράγοντα «Ειδική Χωρική Αντίληψη», με συντελεστή φόρτισης ($r^2=.83$), σε αντίθεση με τον παράγοντα «αντιληπτικής σύλληψης (PE)» ($r^2=.68$). Ο παράγοντας «Ειδική Χωρική Αντίληψη», προβλέπει περισσότερο την επίδοση στον παράγοντα «Μερεολογική Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPme)» με δείκτη .70, ακολουθεί ο παράγοντας «Αλλαγή Θέσης Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPrw)», με δείκτη .57 και τέλος ο παράγοντας «Λεκτικής Σύλληψης (DI)» με δείκτη .27. Παρατηρείται μια μικρή αύξηση στους δείκτες της Λειτουργικής Σύλληψης στους μαθητές της δεύτερης μέτρησης, σε σχέση με τους μαθητές της πρώτης μέτρησης. Οι δείκτες παλινδρόμησης μεταξύ των τριών παραγόντων της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος, των δύο φάσεων είναι περίπου οι ίδιοι.

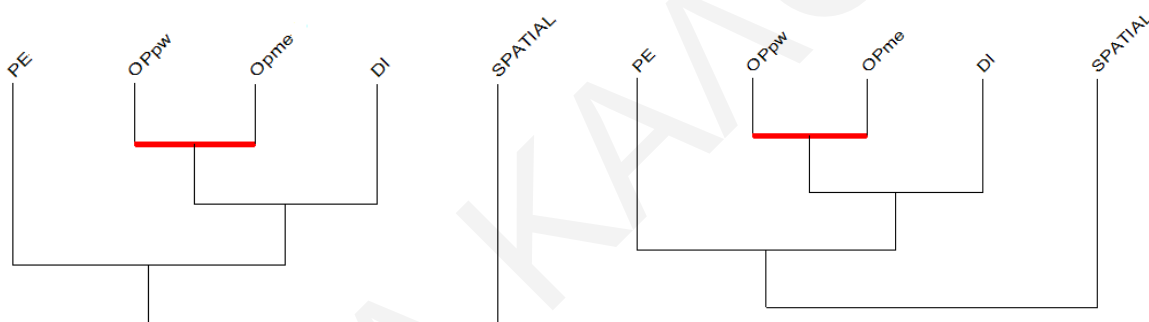
Σχέσεις Ομοιότητας Ανάμεσα στη Χωρική Αντίληψη και τους Παράγοντες της Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος

Στο υποκεφάλαιο που ακολουθεί παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης ομοιότητας που προέκυψαν από την ανάλυση των δεδομένων της έρευνας με το πρόγραμμα CHIC (Bodin, Coutourier, & Gras, 2000) και τα οποία αφορούν τις σχέσεις ανάμεσα στη χωρική αντίληψη και στους παράγοντες της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Συγκεκριμένα, μέσα από τις αναλύσεις ομοιότητας διερευνήθηκε σε ποιο βαθμό οι μαθητές που έλαβαν μέρος στην έρευνα έχουν αντιμετωπίσει με παρόμοιο ή διαφορετικό τρόπο τη χωρική αντίληψη και τους παράγοντες της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος, στις δύο διαφορετικές μετρήσεις της έρευνας. Οι αναλύσεις ομοιότητας πραγματοποιήθηκαν στο σύνολο των μαθητών των δύο διαφορετικών φάσεων και των δύο διαφορετικών επιπέδων (δημοτικό και γυμνάσιο).

Με βάση τις απαντήσεις των μαθητών στην πρώτη και στη δεύτερη χορήγηση των δοκιμίων, προέκυψαν τα πιο κάτω διαγράμματα (δείτε Διάγραμμα 4.16). Βασικά, τόσο στην πρώτη, όσο και στη δεύτερη χορήγηση των δοκιμίων της έρευνας προκύπτουν τα ίδια ακριβώς διαγράμματα. Αυτό υποδεικνύει ότι η συμπεριφορά των μαθητών είναι σταθερή

ως προς τον τρόπο που αντιμετωπίζουν τα έργα χωρικής αντίληψης και τα έργα εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος.

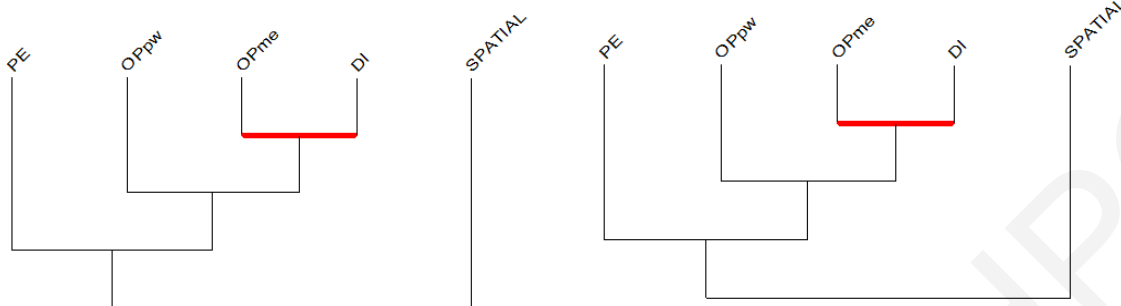
Στο Διάγραμμα αυτό δημιουργείται μία ομάδα ομοιότητας. Πιο συγκεκριμένα, μεγαλύτερο δείκτη ομοιότητας παρουσιάζουν οι παράγοντες της λειτουργικής σύλληψης: ο παράγοντας «Αλλαγής Θέσης Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPpw)», με τον παράγοντα «Μερεολογικής Τροποποίησης της Λειτουργικής Σύλληψης (OPme)». Μαζί τους ομαδοποιείται ο παράγοντας «Λεκτικής Σύλληψης (DI)» και ακολουθεί ο παράγοντας «Αντιληπτικής Σύλληψης (PE)». Τέλος, μαζί με τους τέσσερις παράγοντες της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος ομαδοποιείται και ο παράγοντας της «Χωρικής Αντίληψης (SPATIAL)». Από το διάγραμμα αυτό κατανοούμε ότι μαθητές αντιμετωπίζουν με όμοιο τρόπο τους παράγοντες της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος και τη χωρική αντίληψη.



Διάγραμμα 4.16. Διάγραμμα Ομοιότητας για τη Χωρική Αντίληψη και τους Παράγοντες της Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος για τους Μαθητές της Πρώτης και Δεύτερης Μέτρησης, αντίστοιχα.

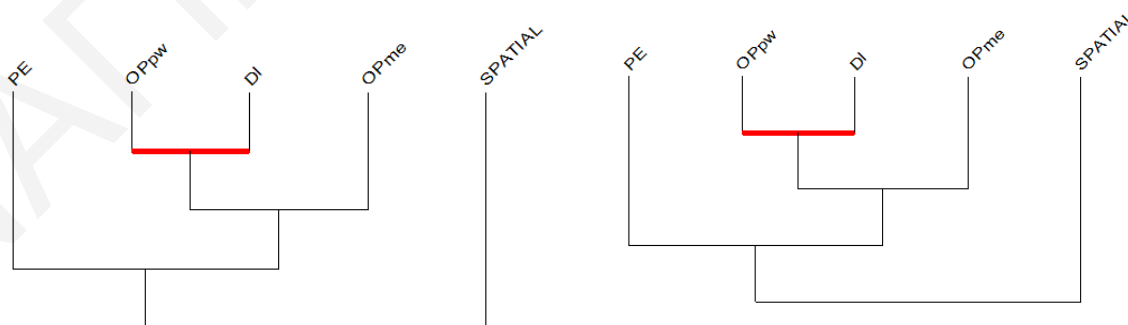
Όσον αφορά τους μαθητές του δημοτικού και σε αυτή την περίπτωση τα διαγράμματα ομοιότητας ήταν τα ίδια και στις δύο χορηγήσεις των εργαλείων της έρευνας (δείτε Διάγραμμα 4.17). Οι μαθητές του δημοτικού αντιμετωπίζουν με όμοιο τρόπο τη χωρική αντίληψη και τους παράγοντες της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος, με μόνη διαφορά να εμφανίζεται μεγαλύτερη ομοιότητα μεταξύ της λύσης των έργων που αφορούν τον παράγοντα «Μερεολογικής Τροποποίησης της Λειτουργικής Σύλληψης (OPme)» με τα έργα που αφορούν τον παράγοντα «Λεκτικής Σύλληψης (DI)». Μαζί με τους δύο αυτούς παράγοντες ομαδοποιείται ο παράγοντας «Αλλαγής Θέσης Τροποποίησης της Λειτουργικής Σύλληψης (OPpw)» και ακολουθεί ο παράγοντας «Αντιληπτικής Σύλληψης (DI)». Μαζί με όλη την υποομάδα που αποτελεί τους τέσσερις

παράγοντες εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος, ομαδοποιείται ο παράγοντας «χωρική αντίληψη (SPATIAL)».



Διάγραμμα 4.17. Διάγραμμα Ομοιότητας για τη Χωρική Αντίληψη και τους Παράγοντες της Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος για τους Μαθητές του Δημοτικού της Πρώτης και της Δεύτερης Μέτρησης, αντίστοιχα.

Την ίδια συμπεριφορά παρουσιάζουν και οι μαθητές του γυμνασίου των δύο διαφορετικών φάσεων χορήγησης των δεδομένων της έρευνας. Όπως παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 4.18, οι μαθητές του γυμνασίου και των δύο φάσεων αντιμετωπίζουν με όμοιο τρόπο τα έργα που ανταποκρίνονται στους τέσσερις παράγοντες της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος (σχηματίζεται μια υποομάδα) με τον παράγοντα της χωρικής αντίληψης. Πιο συγκεκριμένα, η μόνη διαφορά από τους μαθητές του δημοτικού παρουσιάζεται στο γεγονός ότι οι μαθητές του γυμνασίου αντιμετωπίζουν με μεγαλύτερη ομοιότητα τα έργα του παράγοντα «Αλλαγής Θέσης Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPpw)» με τα έργα που αφορούν τον παράγοντα «Λεκτικής Σύλληψης (DI)».



Διάγραμμα 4.18. Διάγραμμα Ομοιότητας για τη Χωρική Αντίληψη και τους Παράγοντες της Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος για τους Μαθητές του Γυμνασίου της Πρώτης και της Δεύτερης Μέτρησης, αντίστοιχα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό συζητούνται τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας. Παρουσιάζονται σε συντομία τα αποτελέσματα της έρευνας, με βασικό σκοπό την ερμηνεία των ευρημάτων και τον έλεγχο των υποθέσεων που τέθηκαν στην αρχή της έρευνας. Η οργάνωση του κεφαλαίου αντιστοιχεί στα ερευνητικά ερωτήματα που έθεσε η παρούσα εργασία με βάση τους ακόλουθους άξονες διερεύνησης:

1. Η δομή της χωρικής αντίληψης των μαθητών της Ε΄ και Στ΄ τάξης του δημοτικού, Α΄ και Β΄ τάξης του γυμνασίου καθώς και της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος.
2. Η σχέση χωρικής αντίληψης και της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος των μαθητών.
3. Η σύγκριση της χωρικής αντίληψης και της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος των μαθητών δημοτικής και μέσης εκπαίδευσης.

Στο πρώτο υποκεφάλαιο συζητείται η δομή της χωρικής αντίληψης και της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος, όπως έχουν προκύψει από την ανάλυση των δεδομένων που συγκεντρώθηκαν. Παρουσιάζονται οι παράμετροι των συγκεκριμένων γνωστικών συστημάτων και γίνεται ιδιαίτερη αναφορά στη διατήρηση της δομής τους στις διαφορετικές ηλικίες των μαθητών.

Στο δεύτερο υποκεφάλαιο βασικό θέμα συζήτησης είναι η σχέση ανάμεσα στη χωρική αντίληψη των μαθητών και την επίδοσή τους στα έργα εννοιολογική σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Γίνεται επίσης, ιδιαίτερη αναφορά της σχέσης μεταξύ της χωρικής αντίληψης και των επιμέρους παραγόντων της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος.

Στο τρίτο υποκεφάλαιο περιγράφονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη σύγκριση μαθητών δημοτικής και μέσης εκπαίδευσης αναφορικά με τη χωρική αντίληψη και τους παράγοντες που συνθέτουν την εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού

σχήματος. Γίνεται αναφορά στις επιδόσεις των μαθητών στους διαφορετικούς παράγοντες, ενώ ιδιαίτερη σημασία δίνεται στον τρόπο αντιμετώπισης των παραγόντων από τις τρεις διαφορετικές κατηγορίες μαθητών πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Δομή της Χωρικής Αντίληψης και της Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος

Δομή της Χωρικής Αντίληψης

Για την περιγραφή της δομής της χωρικής αντίληψης αξιοποιήθηκε η σχετική βιβλιογραφία στη γνωστική ψυχολογία σε σχέση με τη χωρική αντίληψη. Για την κατασκευή του δοκιμίου της χωρικής αντίληψης χρησιμοποιήθηκαν τεστ τα οποία χρησιμοποιούνται ευρέως στον τομέα της γνωστικής ψυχολογίας. Από την πιλοτική χορήγηση που έγινε, σε ορισμένο αριθμό μαθητών, αποφασίστηκε η διαγραφή δύο τεστ από το αρχικό δοκίμιο. Τα τεστ αυτά ήταν το «Επίπεδο Νερού (WL)» και «Προσανατολισμός Αντικειμένων στο Χώρο (P)». Συγκεκριμένα τα έργα αυτά δεν παρουσίασαν εσωτερική συνάφεια με τα υπόλοιπα έργα του δοκιμίου, μιας και με τη διαγραφή τους αυξανόταν ο δείκτης αξιοπιστίας Cronbach α και παράλληλα η συσχέτιση με τα υπόλοιπα τεστ ήταν η χαμηλότερη. Ένας πιθανός λόγος που δε δούλεψαν ικανοποιητικά τα έργα αυτά είναι η φύση τους. Και τα δύο αυτά έργα είναι σύνθετα αφού απαιτούν από το άτομο να είναι εξωτερικός παρατηρητής της σχέσης των αντικειμένων που παρουσιάζονται. Πέρα από αυτό τα συγκεκριμένα έργα χρειάζονται πολύ προσεκτική χορήγηση και επεξήγηση. Οπότε, το σφάλμα λόγω της χορήγησης επηρέασε σημαντικά τη διαγραφή των έργων αυτών.

Τα αποτελέσματα της εργασίας έδειξαν ότι η χωρική αντίληψη των μαθητών της Ε΄ δημοτικού σχολείου μέχρι τη Β΄ γυμνασίου, είναι μια μονοδιάστατη οντότητα, παρόλο που το προτεινόμενο μοντέλο της χωρικής αντίληψης, με βάση τη σχετική βιβλιογραφία, αποτελείται από τρεις παράγοντες πρώτης τάξης: τον παράγοντα Οπτικοποίηση (Vz), τον παράγοντα Σχέσεις των Εννοιών στο Χώρο (SR) και τον παράγοντα Ευελιξία Διεκπεραίωσης (CF). Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης έδειξαν ότι η χωρική αντίληψη αποτελείται από ένα και μοναδικό παράγοντα. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι γιατί ο κάθε παράγοντας από το προτεινόμενο μοντέλο, φαίνεται να

εμπερικλείει ικανότητες και από τους άλλους παράγοντες. Δηλαδή, δεν είναι αυτόνομες ικανότητες που συμβάλουν στην ανάπτυξη της χωρικής αντίληψης. Το αποτέλεσμα αυτό εξηγείται, εάν κοιτάξει προσεκτικά κανείς και τα τεστ που προτείνονται από τη μελέτη της σχετικής βιβλιογραφίας, ότι μετρούν συγκεκριμένους παράγοντες. Για παράδειγμα το τεστ «Σύνθεση Σχημάτων (FB)», το οποίο με βάση τη βιβλιογραφία ανταποκρίνεται στον παράγοντα «Οπτικοποίηση (Vz)», απαιτεί από το λύτη και περιστροφή, ικανότητα που προσδιορίζεται από τον παράγοντα «Σχέσεις Εννοιών στο Χώρο (SR)».

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον σε σχέση με το μοντέλο του ενός παράγοντα που επιβεβαιώθηκε στα πλαίσια της παρούσας εργασίας για τη δομή της χωρικής αντίληψης των μαθητών, παρουσιάζει το γεγονός ότι το μοντέλο αυτό ισχύει στην περίπτωση και των δύο χορηγήσεων των ερευνητικών εργαλείων, αλλά και στην περίπτωση των δύο ηλικιακών επιπέδων που λάμβαναν μέρος στην έρευνα, δημοτικό και γυμνάσιο. Με άλλα λόγια, τα αποτελέσματα της ανάλυσης έδειξαν ότι η βασική δομή της χωρικής αντίληψης των μαθητών αρχίζει να δημιουργείται από το δημοτικό σχολείο (Ε΄ τάξη – ηλικία 10 χρόνων) και παραμένει αναλλοίωτη στην ηλικία των 13 χρόνων (Β΄ γυμνασίου).

Επίσης, με βάση τα αποτελέσματα διαφαίνεται ότι το τεστ που συμβάλει περισσότερο στην πρόβλεψη του παράγοντα χωρικής αντίληψης είναι το τεστ «Σύνθεση Σχημάτων (FB)». Αυτό συμβαίνει σε όλες τις περιπτώσεις επιβεβαίωσης του μοντέλου της χωρικής αντίληψης, στις δύο διαφορετικές μετρήσεις και για τα δύο διαφορετικά ηλικιακά επίπεδα (δημοτικό και γυμνάσιο). Το τεστ αυτό απαιτεί από το υποκείμενο να εντοπίσει σχήματα τα οποία όταν ενωθούν δημιουργούν μια δοσμένη φιγούρα. Για να οδηγηθεί στην απάντηση το υποκείμενο θα πρέπει να χειριστεί νοερά τα δυσδιάστατα σχήματα που του δίνονται (Οπτικοποίηση), να περιστρέψει κατάλληλα τα σχήματα (Σχέσεις των Εννοιών στο Χώρο) και να εκτελέσει την αντίθετη διαδικασία της από-πλαισίωσης (Ευελιξία Διεκπεραίωσης). Οπότε κρίνουμε ότι για την επίλυση του κάθε έργου από το τεστ «Σύνθεση Σχημάτων (FB)» απαιτούνται όλες οι ικανότητες που προσδιορίζουν τον παράγοντα της χωρικής αντίληψης.

Δομή της Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος

Η δομή της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος έχει επιβεβαιωθεί από διάφορες έρευνες που έχουν γίνει στον τομέα της Μαθηματικής Παιδείας τα τελευταία

χρόνια. Ωστόσο κρίθηκε αναγκαίο για τους σκοπούς της συγκεκριμένης έρευνας όπως γίνει επιβεβαίωση του μοντέλου στους μαθητές της παρούσας εργασίας.

Το μοντέλο που προτάθηκε και επιβεβαιώθηκε από την παρούσα εργασία διακρίνεται από τρία επίπεδα παραγόντων. Τα 10 έργα που χρησιμοποιήθηκαν στο δοκίμιο εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος αποτέλεσαν τις μεταβλητές του μοντέλου, οι οποίες φόρτιζαν σε τέσσερις παράγοντες πρώτης τάξης, οι οποίοι αντικατοπτρίζουν τέσσερις επιμέρους ικανότητες που σχετίζονται με τα είδη σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος: την «Αντιληπτική Σύλληψη (PE)», την «Αλλαγή Θέσης Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPpw)», τη «Μερεολογική Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPme)» και τη «Λεκτική Σύλληψη (DI)». Οι τέσσερις παράγοντες πρώτης τάξης φορτίζουν σε ένα παράγοντα δευτέρας τάξης, τον παράγοντα «Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος».

Ο έλεγχος της αμεταβλητότητας του μοντέλου έδειξε ότι το μοντέλο αυτό επεξηγεί και περιγράφει την εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος από τους μαθητές και στις δύο χορηγήσεις των ερευνητικών εργαλείων, σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές, καθώς και στα δύο διαφορετικά ηλικιακά επίπεδα, δημοτικό και γυμνάσιο. Με άλλα λόγια, τα αποτελέσματα της ανάλυσης έδειξαν ότι η βασική δομή της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος των μαθητών αρχίζει να δημιουργείται από το δημοτικό σχολείο (Ε΄ τάξη – ηλικία 10 χρόνων) και παραμένει αναλλοίωτη στην ηλικία των 13 χρόνων (Β΄ γυμνασίου).

Όσον αφορά τις φορτίσεις των παραγόντων της πρώτης τάξης, στον παράγοντα δευτέρας τάξης, την εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος, αξίζει να σημειωθεί ότι και σε αυτή την περίπτωση παρατηρείται ίδια συμπεριφορά ανάμεσα στα μοντέλα της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος που επιβεβαιώθηκαν, στις δύο διαφορετικές μετρήσεις και για τα δύο διαφορετικά ηλικιακά επίπεδα (δημοτικό και γυμνάσιο). Συγκεκριμένα, παρατηρείται ότι μεγαλύτερη ικανότητα πρόβλεψης του παράγοντα εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος έχει ο παράγοντας «Λεκτική Σύλληψη (DI)» και ακολουθούν με περίπου ίδιους συντελεστές οι παράγοντες «Λειτουργικής Σύλληψης (OP)»: «Αλλαγή Θέσης Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPpw)» και «Μερεολογική Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPme)». Χαμηλότερη φόρτιση παρουσιάζει σε όλες τις περιπτώσεις επιβεβαίωσης των δομικών μοντέλων της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος, ο παράγοντας «Αντιληπτική Σύλληψη (PE)». Ένας λόγος που μπορεί να συμβαίνει αυτό είναι το γεγονός ότι η «Λεκτική Σύλληψη (DI)» είναι πιο σύνθετη ικανότητα και εμπερικλείει μέρος και

από τις άλλες ικανότητες εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Ο ίδιος ο ορισμός της «Λεκτικής Σύλληψης (DI)», αναφέρει ότι συνδέεται με την αδυναμία προσδιορισμού των μαθηματικών σχέσεων σε ένα σχήμα μόνο από την αντιληπτική σύλληψη, αφού απαιτείται και λεκτική περιγραφή του και έτσι εμπλέκει άμεσα την αντιληπτική σύλληψη. Παράλληλα, στη συγκεκριμένα έρευνα, ο ορισμός της «Λεκτικής Σύλληψης (DI)» στηρίχτηκε στην υποθετική – επαγωγική απόδειξη, όπου το υποκείμενο για να καταλήξει στην απάντηση θα πρέπει πρώτα να κάνει κάποιες τροποποιήσεις του σχήματος (Αλλαγή Θέσης Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPpw)) και «Μερεολογική Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPme)». Με βάση τα πιο πάνω, φαίνεται ότι η «Αντιληπτική Σύλληψη (PE)», είναι η πιο απλή μορφή σύλληψης και για αυτό ίσως παρουσιάζει τη μικρότερη ικανότητα πρόβλεψης της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος.

Σχέση μεταξύ Χωρικής Αντίληψης και Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος

Ένα από τα σημαντικά ερωτήματα της παρούσας εργασίας ήταν η εξέταση της σχέσης μεταξύ της χωρικής αντίληψης και της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Για το σκοπό αυτό ελέγχθηκε η εφαρμογή ενός δομικού μοντέλου όπου υποθέσαμε ότι η χωρική αντίληψη αποτελεί παράγοντα πρόβλεψης της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Τα αποτελέσματα κατέδειξαν ότι η χωρική αντίληψη αποτελεί ισχυρό παράγοντα πρόβλεψης της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος των μαθητών.

Συγκεκριμένα, με βάση τα αποτελέσματα της εργασίας φαίνεται ότι ο γενικός παράγοντας της χωρικής αντίληψης, ο οποίος προκύπτει από τη συμβολή των εννέα διαφορετικών παραγόντων – τεστ του δοκιμίου χωρικής αντίληψης, προβλέπει σε ικανοποιητικό βαθμό το γενικό παράγοντα δευτέρας τάξης, τον παράγοντα της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Πιο αναλυτικά, φαίνεται ότι μεγαλύτερη επίδραση στο γενικό παράγοντα χωρικής αντίληψης έχουν τα τεστ «Σύνθεση Σχημάτων (FB)», «Κρυμμένες Φιγούρες (HF)» και «Επικάλυψη Σχημάτων (OF)». Τα έργα του τεστ «Σύνθεση Σχημάτων (FB)», αναφέρονται σε έργα πολύπλοκου, αναλυτικού και σταδιακού χειρισμού των πληροφοριών που παρουσιάζονται στο χώρο και χρειάζεται να

χρησιμοποιηθεί μία ποικιλία στρατηγικών επίλυσης. Για αυτό και οι ερευνητές κατατάσσουν αυτό τα τεστ στα τεστ μέτρησης της οπτικοποίησης του χώρου. Τα άλλα δύο τεστ, «Κρυμμένες Φιγούρες (HF)» και «Επικάλυψη Σχημάτων (OF)», προϋποθέτουν την εύρεση σχημάτων ή φιγούρων σε μια πιο σύνθετη εικόνα όταν τα άτομα είναι ενήμερα για τη φιγούρα ή το σχήμα που ψάχνουν. Η ικανότητα αυτή ανταποκρίνεται σε μεγάλο βαθμό με την ικανότητα «Αντιληπτικής Σύλληψης (PE)» της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Βέβαια, όλοι οι παράγοντες – τεστ του δοκιμίου χωρικής αντίληψης έχουν στατιστικά σημαντικές φορτίσεις στο γενικό παράγοντα της χωρικής αντίληψης.

Από την άλλη, ο γενικός παράγοντας της εννοιολογικής σύλληψης παρουσιάζει μεγαλύτερες φορτίσεις από τους δύο παράγοντες πρώτης τάξης της «Λειτουργικής Σύλληψης (OPpw και OPme)» και τον παράγοντα πρώτης τάξης της «Λεκτικής Σύλληψης (DI)». Αυτό συμβαίνει, όπως αναφέρθηκε και πιο πάνω, λόγω της πιο πολύπλοκης φύσης των παραγόντων αυτών, που εμπερικλείουν μέρος και της «Αντιληπτικής Σύλληψης (PE)».

Πέρα από την επιβεβαίωση του δομικού μοντέλου της ικανότητας πρόβλεψης του γενικού παράγοντα της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος από το γενικό παράγοντα της χωρικής αντίληψης για τους μαθητές της πρώτης χορήγησης των ερευνητικών εργαλείων, το μοντέλο επιβεβαιώθηκε και για τις τρεις κατηγορίες μαθητών, που προέκυψαν από περαιτέρω αναλύσεις. Τα αποτελέσματα για τις τρεις κατηγορίες μαθητών θα αναλυθούν πιο κάτω, στο κεφάλαιο αυτό. Αξίζει να σημειωθεί ότι και στις τρεις περιπτώσεις ο γενικός παράγοντας της χωρικής αντίληψης αποτελεί ισχυρό παράγοντα του γενικού παράγοντα της εννοιολογικής σύλληψης.

Επιπρόσθετα, στην εργασία αυτή, διερευνήθηκε η σχέση μεταξύ του γενικού παράγοντα της χωρικής αντίληψης και των επιμέρους παραγόντων (πρώτης τάξης) της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Για το σκοπό αυτό ελέγχθηκαν διαδοχικά διάφορα δομικά μοντέλα. Αρχικά ελέγχθηκε η εφαρμογή ενός δομικού μοντέλου όπου η επίδοση των μαθητών στο γενικό παράγοντα της χωρικής αντίληψης προβλέπει την επίδοση των μαθητών στους τέσσερις παράγοντες της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος: την «Αντιληπτική Σύλληψη (PE)», την «Αλλαγή Θέσης Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPpw)», τη «Μερεολογική Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPme)» και τη «Λεκτική Σύλληψη (DI)». Παράλληλα, υπήρχαν και κάποιες σχέσεις πρόβλεψης μεταξύ των παραγόντων της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Οι δύο παράγοντες της Λειτουργικής

Σύλληψης («Αλλαγής Θέσης - OPpw » και «Μερεολογικής Τροποποίησης - OPme») προέβλεπαν την επίδοση στον παράγοντα «Λεκτικής Σύλληψης (DI)» και ο παράγοντας «Αλλαγή Θέσης Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPpw)» προέβλεπε τη «Μερεολογική Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPme)». Τα αποτελέσματα της δομικής ανάλυσης δεν ήταν ικανοποιητικά και για το σκοπό αυτό ελέγχθηκε ένα άλλο δομικό μοντέλο, με βάση τα αποτελέσματα της επίδοσης των τριών κατηγοριών μαθητών. Με βάση το μοντέλο αυτό, η επίδοση των μαθητών στην «Αντιληπτική Σύλληψη (PE)» προέβλεπε την επίδοση στη Χωρική Αντίληψη, που με τη σειρά της προέβλεπε την επίδοση στους υπόλοιπους παράγοντες της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος: την «Αλλαγή Θέσης Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPpw)», τη «Μερεολογική Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPme)» και τη «Λεκτική Σύλληψη (DI)». Η σειρά αυτή προέκυψε από τη σειρά με την οποία είχαν ικανοποιητική επίδοση οι μαθητές στις τρεις κατηγορίες. Και σε αυτή την περίπτωση το μοντέλο κρίθηκε ότι δεν ήταν ικανοποιητικό.

Με βάση, τα δυο πιο πάνω μοντέλα, διαφάνηκε ότι ο γενικός παράγοντας της χωρικής αντίληψης μαζί με τον παράγοντα «Αντιληπτικής Σύλληψης (PE)», της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος, παρουσίαζαν μια αμφίδρομη σχέση. Έτσι, ελέγχθηκε και εγκυροποιήθηκε ένα εναλλακτικό δομικό μοντέλο, όπου ο γενικός παράγοντας της Χωρικής Αντίληψης και ο παράγοντας της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος «Αντιληπτική Σύλληψη (PE)», δημιουργούν ένα νέο παράγοντα, τον παράγοντα «Ειδική Χωρική Αντίληψη». Ο παράγοντας «Ειδική Χωρική Αντίληψη», προβλέπει την επίδοση των μαθητών στους τρεις άλλους παράγοντες της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος: την «Αλλαγή Θέσης Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPpw)», τη «Μερεολογική Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPme)» και τη «Λεκτική Σύλληψη (DI)». Επίσης, οι δύο παράγοντες της Λειτουργικής Σύλληψης («Αλλαγή Θέσης - OPpw» και «Μερεολογικής Τροποποίησης - OPme») προβλέπουν την επίδοση στον παράγοντα «Λεκτικής Σύλληψης (DI)». Παράλληλα, ο παράγοντας «Αλλαγή Θέσης Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPpw)» προβλέπει τη «Μερεολογική Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPme)».

Αναλύοντας πιο προσεκτικά τα αποτελέσματα του δομικού μοντέλου, φαίνεται ότι ο γενικός παράγοντας της χωρικής αντίληψης συμβάλει περισσότερο στη δημιουργία του νέου παράγοντα «Ειδική Χωρική Αντίληψη». Γεγονός, αναμενόμενο, αφού σίγουρα είναι πιο σύνθετος παράγοντας και εμπερικλείει περισσότερες ικανότητες από το μονοδιάστατο

παράγοντα «Αντιληπτικής Σύλληψης (PE)», οποίος ανταποκρίνεται στην αναγνώριση του σχήματος με την πρώτη ματιά. Η αντιληπτική σύλληψη συνίσταται από την κατανόηση της συνολικής μορφής του σχήματος και στη διάκριση των υποσχημάτων του, με τρόπο όμως που δεν επιτρέπει περαιτέρω επεξεργασία του. Αποτελεί όμως απαραίτητη διαδικασία για την περαιτέρω επεξεργασία του σχήματος. Όσον αφορά τον παράγοντα της «Ειδικής Χωρικής Αντίληψης», με βάση τα αποτελέσματα φαίνεται ότι προβλέπει περίπου στον ίδιο βαθμό τους δύο παράγοντες της «Λειτουργικής Σύλληψης – Αλλαγής Θέσης (OPpw) και Μερεολογικής Τροποποίησης (OPme)», ενώ λιγότερο τον παράγοντα της «Λεκτικής Σύλληψης (DI)». Αυτό πιθανόν να συμβαίνει λόγω του ότι η λειτουργική σύλληψη παρουσιάζει μεγαλύτερες ομοιότητες στον τρόπο χειρισμού των σχημάτων μαζί με τη χωρική αντίληψη. Συγκεκριμένα, η λειτουργική σύλληψη προϋποθέτει τη χρήση διαφόρων μετασχηματισμών, όπως περιστροφή και αναδιαμόρφωση των σχημάτων, δηλαδή διάσπαση του ολόκληρου σχήματος σε διάφορα υποσχήματα, συνδυασμός των υποσχημάτων αυτών σε ένα άλλο ενιαίο σχήμα και στην εμφάνιση νέων υποσχημάτων. Οι ικανότητες αυτές αποτελούν μέρος των ικανοτήτων της χωρικής αντίληψης.

Αξιοσημείωτο αποτελεί το γεγονός ότι το μοντέλο αυτό επιβεβαιώθηκε και για τους μαθητές της δεύτερης χορήγησης των ερευνητικών εργαλείων, υποδεικνύοντας τη γενικευσιμότητα των αποτελεσμάτων.

Σχέσεις Ομοιότητας Ανάμεσα στη Χωρική Αντίληψη και τους Παράγοντες Εννοιολογικής Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος

Επιπρόσθετα, όσον αφορά το γενικό παράγοντα της χωρικής αντίληψης και τους παράγοντες της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος, πραγματοποιήθηκαν αναλύσεις ομοιότητας. Διερευνήθηκε δηλαδή, ο βαθμός στον οποίο οι μαθητές αντιμετώπισαν με παρόμοιο τρόπο τα έργα των παραγόντων αυτών. Οι αναλύσεις πραγματοποιήθηκαν στο σύνολο των μαθητών για τις δύο χορηγήσεις των ερευνητικών εργαλείων και για κάθε ηλικιακό επίπεδο ξεχωριστά.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές και των δύο φάσεων αντιμετωπίζουν με τον ίδιο ακριβώς τρόπο τα έργα χωρικής αντίληψης με τα έργα των παραγόντων της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος αφού προέκυψαν τα ίδια διαγράμματα ομοιότητας. Συγκεκριμένα, οι μαθητές αντιμετωπίζουν με μεγαλύτερη

ομοιότητα τα δύο έργα της «Λειτουργικής Σύλληψης – Αλλαγής θέσης (OPrw) και μερεολογικής τροποποίησης (OPme)». Ακολούθως συμπεριφέρονται με όμοιο τρόπο στα έργα της «Λεκτικής Σύλληψης (DI)», όπως ήταν αναμενόμενο, μιας και η λεκτική σύλληψη περιλαμβάνει ικανότητες της λειτουργικής σύλληψης, αφού η λεκτική περιγραφή και η υποθετική – επαγωγική απόδειξη, προϋποθέτουν τροποποιήσεις και μετασχηματισμούς στο σχήμα (λειτουργική σύλληψη). Μαζί τους ομαδοποιείται και ο παράγοντας «Αντιληπτικής Σύλληψης (PE)» και δημιουργείται έτσι η υποομάδα με τους παράγοντες της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Τέλος, μαζί με την υποομάδα των παραγόντων της εννοιολογικής σύλληψης, ομαδοποιείται ο παράγοντας της χωρικής αντίληψης. Αυτό υποδεικνύει ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν με όμοιο τρόπο τα έργα της χωρικής αντίληψης με τα έργα των παραγόντων της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος, διακρίνοντας παράλληλα τη διαφορά τους (δημιουργία υποομάδας των παραγόντων της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος).

Παρόμοια συμπεριφορά παρουσίασαν και οι μαθητές του δημοτικού και του γυμνασίου, παρουσιάζοντας κάθε φορά τα ίδια διαγράμματα ομοιότητας στην κάθε χορήγηση. Το γεγονός ότι οι μαθητές του δημοτικού και του γυμνασίου αντίστοιχα, είχαν την ίδια συμπεριφορά στις δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές διεξαγωγής της έρευνας, μας οδηγεί στη γενικευσιμότητα των αποτελεσμάτων.

Τόσο οι μαθητές του δημοτικού όσο και οι μαθητές του γυμνασίου, αντιμετώπισαν αρχικά τα έργα των παραγόντων της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος με τον ίδιο τρόπο, αφού σχηματίστηκε μια υποομάδα και μαζί με αυτά ομαδοποιήθηκαν τα έργα της χωρικής αντίληψης. Αυτό που φαίνεται να διαφοροποιείται στην περίπτωση του δημοτικού και του γυμνασίου είναι η αντιμετώπιση των μαθητών ως προς τα έργα των παραγόντων της «Λειτουργικής Σύλληψης (OP)» και της «Λεκτικής Σύλληψης (DI)». Συγκεκριμένα, οι μαθητές του δημοτικού αντιμετωπίζουν με μεγαλύτερη ομοιότητα τα έργα του παράγοντα «Λεκτικής Σύλληψης (DI)» με τα έργα του παράγοντα «Μερεολογική Τροποποίηση της Λειτουργικής Σύλληψης (OPme)». Ενώ, οι μαθητές του γυμνασίου αντιμετωπίζουν με μεγαλύτερη ομοιότητα τα έργα του παράγοντα «Λεκτικής Σύλληψης (DI)» με τα έργα του παράγοντα «Λειτουργικής Σύλληψης – Αλλαγής θέσης (OPrw)». Αυτό δείχνει ότι οι μαθητές του δημοτικού για τη λεκτική περιγραφή και την υποθετική – επαγωγική απόδειξη έργων με γεωμετρικά σχήματα, χρησιμοποιούν περισσότερο την αναδιαμόρφωση του σχήματος (reconfiguration). Ενώ, οι μαθητές του γυμνασίου τείνουν στη χρήση της αλλαγής θέσης και προσανατολισμού του σχήματος. Η διαφορά αυτή στη συμπεριφορά των μαθητών των δύο ηλικιακών επιπέδων, μπορεί να οφείλεται και στον

τρόπο διδασκαλίας. Στο δημοτικό απουσιάζει τελείως η Αξιοματική Γεωμετρία, η εκμάθηση δηλαδή θεωρημάτων και οι μαθητές ανταποκρίνονται στην Εμπειρική Γεωμετρία. Έτσι οι μαθητές έρχονται σε επαφή πιο διαισθητικά με τα σχήματα, παρά να είναι επηρεασμένοι από θεωρήματα και αξιώματα.

Επίδοση των Μαθητών στη Χωρική Αντίληψη και στην Εννοιολογική Σύλληψη του Γεωμετρικού Σχήματος

Ένα από τα ερωτήματα της έρευνας αφορούσε τη μελέτη της επίδοσης των μαθητών στα έργα της χωρικής αντίληψης και τα έργα της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Με βάση τα περιγραφικά αποτελέσματα φαίνεται ότι οι μαθητές δυσκολεύονται περισσότερο στα έργα της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος και συγκεκριμένα στα έργα «Αλλαγής Θέσης Τροποποίησης της Λειτουργικής Σύλληψης (OPpw)» και «Λεκτικής Σύλληψης (DI)». Αυτό συμβαίνει λόγω του ότι τα έργα αυτά είναι πιο σύνθετα από τα υπόλοιπα έργα της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Για την επίλυσή τους απαιτούν την ενεργοποίηση μιας σειράς από λειτουργίες. Μάλιστα, τα έργα «Λεκτικής Σύλληψης (DI)», πέρα από την εύρεση σχέσεων εντός του σχήματος απαιτούν και τη σύνδεση με μια σειρά από συλλογισμούς και τη λεκτική διατύπωσή τους. Από την άλλη τα έργα «Αλλαγής Θέσης Τροποποίησης της Λειτουργικής Σύλληψης (OPpw)», αφορούν την τροποποίηση του προσανατολισμού του σχήματος, διαδικασία η οποία εμφανίζεται και στα έργα της χωρικής αντίληψης. Όμως στην περίπτωση των έργων της χωρικής αντίληψης παρουσιάζεται ένας μέσος όρος όπου υπολογίζονται μια ποικιλία έργων και δεν παρουσιάζονται ξεχωριστά οι επιδόσεις στα έργα περιστροφής. Παραμένει ωστόσο μια διαδικασία που δυσκολεύει τους μαθητές. Πέρα από αυτό οι μαθητές φαίνεται να αντιμετωπίζουν διαφορετικά τα έργα χωρικής αντίληψης από τα έργα εννοιολογικής σύλληψης (αποτελέσματα αναλύσεων ομοιότητας).

Ως συνέχεια της μελέτης της επίδοσης των μαθητών στη χωρική αντίληψη και στην εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος, εξετάστηκαν και οι διαφορές στις επιδόσεις των τεσσάρων διαφορετικών τάξεων. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές στην επίδοση των μαθητών των τεσσάρων τάξεων τόσο στη χωρική αντίληψη και το γενικό παράγοντα της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος, όσο και στους επιμέρους παράγοντες της εννοιολογικής σύλληψης

του γεωμετρικού σχήματος. Πιο συγκεκριμένα, παρατηρείται ότι καθώς αυξάνεται το ηλικιακό επίπεδο των μαθητών αυξάνεται και η επίδοσή τους σε κάθε παράγοντα. Αυτό πιθανόν να οφείλεται τόσο στην ηλικιακή ωρίμαση των μαθητών αλλά και στην επίδραση της διδασκαλίας. Με βάση το εκπαιδευτικό σύστημα της Κύπρου, καθώς αυξάνεται το επίπεδο της τάξης αυξάνεται και η επαφή με τη γεωμετρία και το επίπεδο δυσκολίας των ασκήσεων που έρχονται σε επαφή οι μαθητές. Η χωρική αντίληψη είναι ένα από τα θέματα που δε διδάσκεται καθόλου. Έργα χωρικής αντίληψης εμφανίζονται πολύ μεμονωμένα στα βιβλία των μαθητών και συνήθως στα θέματα γεωμετρίας και μετασχηματισμών (συμμετρίας).

Για την περαιτέρω μελέτη της συμπεριφοράς των μαθητών προς τη χωρική αντίληψη και την εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος δημιουργήθηκαν τρεις ομάδες μαθητών με παρόμοια συμπεριφορά. Γύρω στους μισούς μαθητές του δείγματος ανήκαν στην Κατηγορία 1, περίπου το ένα τρίτο στην Κατηγορία 2 και οι υπόλοιποι στην Κατηγορία 3. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι περισσότεροι μαθητές της Κατηγορίας 1 ήταν μαθητές της Ε΄ τάξης του δημοτικού, οι περισσότεροι μαθητές της Κατηγορίας 2 ήταν μαθητές της Στ΄ τάξης του δημοτικού και στην Κατηγορία 3, οι περισσότεροι μαθητές ήταν της Α΄ και Β΄ γυμνασίου. Υπήρχαν όμως μαθητές από όλες τις τάξεις σε όλες τις κατηγορίες. Αυτό υποδεικνύει ότι οι διαφορές στην επίδοση των μαθητών στη χωρική αντίληψη και την εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος, δεν οφείλονται μόνο στη διδασκαλία αλλά και σε ατομικά χαρακτηριστικά και εμπειρίες των μαθητών. Βέβαια, οι ικανότητες των μαθητών σε κάθε κατηγορία διαφέρουν. Πιο κάτω γίνεται αναλυτική περιγραφή των χαρακτηριστικών της κάθε κατηγορίας μαθητών.

Κατηγορία 1

Οι μαθητές που ανήκουν στην κατηγορία αυτή έχουν τη χαμηλότερη επίδοση, η οποία μπορεί να χαρακτηριστεί ως μη επαρκής γνώση τόσο στα έργα της χωρικής αντίληψης και του γενικού παράγοντα της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος, όσο και τους επιμέρους παράγοντες της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Μάλιστα, είναι πολύ έντονες οι αδυναμίες των υποκειμένων που ανήκουν στην κατηγορία αυτή προς τα έργα «Αλλαγής Θέσης Τροποποίησης της Λειτουργικής Σύλληψης (ΟΡρω)» και «Λεκτικής Σύλληψης (DI)». Γενικά, όσον αφορά της ικανότητες που αφορούν την εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος, το μόνο που μπορούν να κάνουν οι μαθητές που ανήκουν στην κατηγορία αυτή, με αρκετές αδυναμίες όμως, είναι να αναγνωρίζουν σχήματα με την πρώτη ματιά. Μπορούν να διακρίνουν υποσχήματα, χωρίς

όμως οποιαδήποτε επεξεργασία του σχήματος (αντιληπτική σύλληψη). Παρ' όλα αυτά φαίνεται ότι πλησιάζουν προς ικανοποιητικά επίπεδα, όσον αφορά την επίδοσή τους στη χωρική αντίληψη. Μπορούν δηλαδή, σε κάποιο βαθμό να αντιλαμβάνονται, να επεξεργάζονται, να δημιουργούν και να αποθηκεύουν νοερές εικόνες.

Κατηγορία 2

Η επίδοση των μαθητών της Κατηγορίας 2, ήταν λίγο βελτιωμένη από την επίδοση των μαθητών της Κατηγορίας 1. Συγκεκριμένα, οι μαθητές που ανήκουν στην Κατηγορία 2 μπορούν να χειρίζονται πολύ καλά τα έργα αντιληπτικής σύλληψης. Δηλαδή έχουν πολύ καλή επίδοση στην αναγνώριση και ονομασία σχημάτων και υποσχημάτων τους. Επίσης, παρουσιάζουν ικανοποιητική επίδοση όσον αφορά τα έργα επεξεργασίας, δημιουργίας, αποθήκευσης και ανάκλησης νοερών εικόνων (χωρική αντίληψη). Δεν παρουσιάζουν όμως επαρκή γνώση όσον αφορά τη γενική ικανότητα εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος και συγκεκριμένα τις ικανότητες που αφορούν τις ικανότητες της «Λειτουργικής Σύλληψης (OP)» και της «Λεκτικής Σύλληψης (DI)». Πιο αναλυτικά, οι μαθητές δεν μπορούν να τροποποιήσουν τον προσανατολισμό ενός σχήματος στο επίπεδο της εικόνας και αδυνατούν να αναδιοργανώσουν νοερά ένα σχήμα για να φτάσουν στην επίλυση κάποιου έργου. Ως εκ τούτου παρουσιάζουν αδυναμίες στην εύρεση σχέσεων και τη χρήση τους σε μια επαγωγική απόδειξη.

Κατηγορία 3

Στην Κατηγορία 3 ανήκουν οι μαθητές οι οποίοι παρουσιάζουν πολύ καλή επίδοση τόσο στη χωρική αντίληψη όσο και στην εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος, καθώς και σε όλους του επιμέρους παράγοντες της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Οι μαθητές αυτοί δηλαδή μπορούν πολύ καλά να αντιλαμβάνονται, να επεξεργάζονται, να δημιουργούν και να αποθηκεύουν νοερές εικόνες, καθώς επίσης και να αναγνωρίζουν, να αλλάζουν προσανατολισμό, να αναδιαμορφώνουν ένα σχήμα αλλά και να χρησιμοποιούν λεκτικά σχέσεις και ιδιότητες του σχήματος για να καταλήξουν σε μια επαγωγική απόδειξη.

Γενικά, φαίνεται μέσα από τα χαρακτηριστικά της κάθε κατηγορίας, ότι υπάρχει μια διαβάθμιση στις ικανότητες των μαθητών. Ξεκινούν από μεγάλες αδυναμίες στο χειρισμό των σχημάτων και των νοερών εικόνων τους, ακολουθεί η ικανότητα αναγνώρισης των σχημάτων και χειρισμού των νοερών εικόνων, για να φτάσουν στο επίπεδο να μπορούν να χειριστούν άριστα ένα σχήμα αλλά και να μπορούν να το επεξεργαστούν νοερά. Παράλληλα, μπορεί να ειπωθεί ότι αφού αναπτυχθεί η χωρική αντίληψη των μαθητών μπορούν να χειριστούν και καλύτερα τα γεωμετρικά σχήματα.

Αξίζει να σημειωθεί ότι ελέγχθηκε για τις τρεις κατηγορίες μαθητών, το μοντέλο της παλινδρομικής ανάλυσης, όπου η χωρική αντίληψη αποτελεί παράγοντα πρόβλεψης της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Με βάση τα αποτελέσματα φάνηκε ότι στην περίπτωση των μαθητών της Κατηγορίας 3, παρουσιάζεται η μεγαλύτερη επίδραση του παράγοντα χωρικής αντίληψης στον παράγοντα εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Επίσης, όλες οι φορτίσεις στους παράγοντες του μοντέλου, ήταν υψηλότερες στην περίπτωση των μαθητών της Κατηγορίας 3. Γεγονός, αναμενόμενο αφού οι μαθητές της Κατηγορίας 3 έχουν κατακτήσει τη γνώση, τόσο της χωρικής αντίληψης και της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος, όσο και των επιμέρους παραγόντων της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Οι αμέσως επόμενες υψηλές φορτίσεις παρουσιάζονται στην Κατηγορία 1 των μαθητών, ενώ κάποιος θα ανέμενε ότι θα ακολουθούσε η Κατηγορία 2, μιας και είχε καλύτερες επιδόσεις. Φαίνεται όμως ότι επηρεάζει περισσότερο εάν οι μαθητές έχουν το ίδιο επίπεδο γνώσης στους παράγοντες της χωρικής αντίληψης και της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος, όπως στην Κατηγορία 1, που η επίδοση χαρακτηρίζεται ως μη επαρκής, σε όλους τους παράγοντες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Εισαγωγή

Η χωρική αντίληψη έχει απασχολήσει πολλούς ερευνητές από τότε που θεμελιώθηκε ως μια ξεχωριστή διάσταση μέσα από τις παραγοντικές αναλύσεις που χρονολογούνται από τη δεκαετία του 1920 (Goldberg & Meredith, 1975). Από τη φύση της η χωρική αντίληψη αποτελεί ένα πολύπλοκο θέμα, με διαφορετικές ερμηνείες από κάθε ερευνητή. Πολλοί μαθηματικοί (Barakat, 1951· Wrigley, 1958· στο Unal, 2005) διερεύνησαν τη σχέση μεταξύ των χωρικών ικανοτήτων και των μαθηματικών ικανοτήτων και διαπίστωσαν ότι η χωρική αντίληψη συσχετίστηκε περισσότερο με την ικανότητα στη γεωμετρία (στο Bishop, 1983, σελ.181· στο Unal, 2005). Το National Council of Teachers of Mathematics (2000) έχει θέσει ως κεντρικό στόχο στα μαθηματικά του σχολείου, την ανάπτυξη της χωρικής αντίληψης.

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν η μελέτη της ανάπτυξης της χωρικής αντίληψης σε σχέση με την εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος από τους μαθητές, όπως ορίζεται από Duval (1995, 1999). Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της εργασίας και γίνεται συσχέτιση με τα αποτελέσματα άλλων θεωριών. Επίσης, αναφέρονται οι εφαρμογές των αποτελεσμάτων στην εκπαίδευση για βελτίωση της μαθησιακής διαδικασίας και τέλος, παρουσιάζονται με βάση την παρούσα εργασία, εισηγήσεις για μελλοντικές έρευνες, με σκοπό την επέκταση των αποτελεσμάτων της παρούσας εργασίας.

Το πρώτο ερευνητικό ερώτημα της παρούσας εργασίας αφορούσε τη μελέτη της δομής της χωρικής αντίληψης. Ένα θέμα που απασχόλησε έντονα τους ερευνητές της χωρικής αντίληψης, αφού υπάρχουν διαφωνίες σχετικά με τον αριθμό των παραγόντων που αποτελούν τη χωρική αντίληψη, την ονομασία αυτών των παραγόντων καθώς και τα τεστ που χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση του κάθε παράγοντα (D'Oliveira, 2004). Στην παρούσα εργασία έγινε προσπάθεια όπως χρησιμοποιηθεί μια ποικιλία από τεστ, μετά από σχετική έρευνα της βιβλιογραφίας για τα τεστ και τους παράγοντες που μετρούν. Τα αποτελέσματα της εργασίας έδειξαν ότι η χωρική αντίληψη αποτελεί μια μοναδιαία δομή. Το αποτέλεσμα αυτό έρχεται σε αντίθεση με την άποψη μιας πλειάδας ερευνητών που υποστηρίζουν ότι η χωρική αντίληψη δεν μπορεί να είναι μια μοναδιαία δομή (Carroll, 1993· Kimura, 1999· Linn & Peterson, 1985· Lohman, 1988· McGee, 1979· Paivio, 1971), λόγω του ότι υπάρχουν διάφορες χωρικές ικανότητες, που η καθεμιά δίνει έμφαση σε διαφορετικές πτυχές της διαδικασίας οπτικής δημιουργίας, αποθήκευσης, ανάκλησης και μετασχηματισμού (Lohman, 1993).

Υπάρχει όμως και η άλλη πλευρά, όπου ερευνητές όπως οι Burton και Fogarty (2003) και Colom, Contreras, Botella και Santacreu (2001), θεωρούν ότι η χωρική αντίληψη είναι μια μονοδιάστατη οντότητα (Burton & Fogarty, 2003). Οι ερευνητές αυτοί, υποστηρίζουν ότι αν και έγιναν αρκετές προσπάθειες διάκρισης διαφορετικών ικανοτήτων αντίληψης εννοιών του χώρου, τα αποτελέσματα δεν είναι καθόλου πειστικά. Ένας από τους λόγους που προκύπτει το αποτέλεσμα ότι η χωρική αντίληψη είναι μια μονοδιάστατη οντότητα, είναι τα τεστ που χρησιμοποιούνται για να μετρήσουν την κάθε ικανότητα. Όπως αναφέρει και ο Carroll (1993), «τα τεστ δε φορτίζουν με συνέπεια σε διακριτούς παράγοντες ή μπορεί να φορτίζουν αδιακρίτως σε ένα αριθμό παραγόντων» (σελ.308). Αυτό μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι τα τεστ της χωρικής αντίληψης είναι αρκετά σύνθετα και εμπλέκουν ένα σύνολο από γνωστικές διαδικασίες για την επίλυσή τους, οπότε δεν μπορεί ένα τεστ να μετρά μία και μοναδική ικανότητα. Για το λόγο αυτό υπάρχει και η μεγάλη σύγχυση στον τομέα της έρευνας όσον αφορά τα τεστ που χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση κάθε παράγοντα (D'Oliveira, 2004).

Πέρα από αυτό, η σύγχυση που προκαλείται μπορεί να προέρχεται και από τα ίδια τα υποκείμενα, στα οποία χορηγούνται τα τεστ. Ο κάθε μαθητής μπορεί να χρησιμοποιήσει διαφορετικές στρατηγικές για την επίλυση του ίδιου έργου. Μάλιστα, ο French (1965) αποκάλυψε ότι τα διαφορετικά «γνωστικά στυλ» των μαθητών, μπορούν να

προκαλέσουν διακυμάνσεις στις φορτίσεις των παραγόντων. Επιπρόσθετα, έχει αποδειχθεί ότι τα υποκείμενα, μπορούν να χρησιμοποιήσουν διαφορετικές στρατηγικές για την επίλυση έργων του ίδιου τεστ (Kyllonen, Lohman, & Wotz, 1984).

Το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα της έρευνας αφορούσε τη δομή της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Οι Deliyianni, Elia, Gagatsis, Monoyiou και Panaoura (2009) έχουν επιβεβαιώσει ένα μοντέλο τρίτης τάξης σχετικά με το ρόλο της αντιληπτικής, λειτουργικής και λεκτικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Επίσης, έχει πραγματοποιηθεί εκτεταμένη έρευνα στην εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος τα τελευταία χρόνια (Deliyianni, Michael, Monoyiou, Gagatsis, & Elia, 2011·Michael, 2012· Michael, Elia, Gagatsis & Kalogirou, 2010· Michael, Gagatsis, Avgerinos & Kuzniak, 2011· Michael, Gagatsis, Lamprianou, Deliyianni, & Monoyiou, 2011), ωστόσο κρίθηκε σκόπιμο όμως να γίνει επιβεβαίωση του μοντέλου της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος στους μαθητές της παρούσας εργασίας, με τα συγκεκριμένα έργα που χρησιμοποιήθηκαν.

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης έδειξαν ότι η εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος των μαθητών Ε΄ δημοτικού μέχρι Β΄ γυμνασίου, αποτελεί μια πολυδιάστατη οντότητα. Το αποτέλεσμα αυτό επιβεβαιώνει την άποψη του Duval (1998), ότι οι μαθητές προσεγγίζουν το γεωμετρικό σχήμα, ενεργοποιώντας διαφορετικούς τύπους γνωστικής σύλληψης. Επίσης μέσα από τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας επιβεβαιώνεται ότι η αντιληπτική σύλληψη, η ικανότητα δηλαδή αναγνώρισης ενός σχήματος με την πρώτη ματιά, αποτελεί τον ασθενέστερο τύπο σύλληψης Duval (1999).

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον σε σχέση με το μοντέλο που επιβεβαιώθηκε στα πλαίσια της παρούσας εργασίας για τη δομή της χωρικής αντίληψης αλλά και της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος των μαθητών, παρουσιάζει το γεγονός ότι η δομή των μοντέλων ισχύουν στην περίπτωση των δύο διαφορετικών χρονικών χορηγήσεων των εργαλείων της έρευνας, αλλά και στην περίπτωση των δύο ηλικιακών ομάδων που έλαβαν μέρος στην έρευνα (μαθητές δημοτικού και γυμνασίου). Το συμπέρασμα που προκύπτει από το αποτέλεσμα αυτό είναι ότι η βασική δομή των ικανοτήτων των μαθητών που αφορούν τη χωρική αντίληψη και την εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος, αρχίζει να δημιουργείται από την Ε΄ τάξη του δημοτικού σχολείου και παραμένει αναλλοίωτη μέχρι τη Β΄ γυμνασίου. Το συμπέρασμα αυτό είναι σημαντικό, αν ληφθεί υπόψη η νοητική ανάπτυξη των ατόμων μεταξύ 10 και 13 χρόνων, καθώς και οι διαφορές στον τρόπο εργασίας σε θέματα γεωμετρίας ανάμεσα στην πρωτοβάθμια και τη

δευτεροβάθμια εκπαίδευση (στο πλαίσιο της Γεωμετρίας 1 και της Γεωμετρίας 2, αντίστοιχα - Houdement και Kuzniak, 2003).

Το ερώτημα της σχέσης ανάμεσα στις χωρικές και τις μαθηματικές ικανότητες των ατόμων δεν είναι καινούριο και έχει απασχολήσει ερευνητές τόσο από το χώρο της ψυχολογίας όσο και από το χώρο της μαθηματικής παιδείας (Clements & Battista, 1992). Οι Pittalis, Mousoulides και Christou (2007), επιβεβαίωσαν ένα δομικό μοντέλο, με Κύπριους μαθητές ηλικίας 11-12 χρόνων, σύμφωνα με το οποίο η χωρική ικανότητα αποτελεί ισχυρό παράγοντα πρόβλεψης της γεωμετρικής ικανότητας των μαθητών Ε΄ και Στ΄ τάξης δημοτικού σχολείου. Στην παρούσα εργασία, όμως, το ερώτημα εξειδικεύτηκε για τη σχέση ανάμεσα στη χωρική αντίληψη των μαθητών και την επίδοσή τους στην εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος, πεδίο το οποίο δεν έχει μελετηθεί προηγουμένως.

Τα αποτελέσματα της εργασίας επιβεβαίωσαν την υπόθεση ότι η γενική χωρική αντίληψη των μαθητών είναι σημαντικός παράγοντας πρόβλεψης της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Επιβεβαιώνεται έτσι το γενικό συμπέρασμα των Del Grande (1987) και ο Bishop (1980, 1983) ότι η χωρική αντίληψη αποτελεί σημαντικό παράγοντα για την κατανόηση της γεωμετρίας και της στερεομετρίας. Αξίζει να σημειωθεί ότι το μοντέλο αυτό επιβεβαιώθηκε και στην περίπτωση των 3 κατηγοριών μαθητών, όπως προέκυψαν με βάση την ανάλυση της επίδοσής τους. Αυτό σημαίνει ότι η χωρική αντίληψη έχει ικανότητα πρόβλεψης στην εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος, ασχέτως της επίδοσης των μαθητών στους δύο αυτούς γενικούς παράγοντες.

Ένα από τα σημαντικότερα συμπεράσματα της εργασίας, αποτελεί η εύρεση της σχέσης μεταξύ της χωρικής αντίληψης και των επιμέρους παραγόντων της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Πιο συγκεκριμένα, από τα αποτελέσματα φάνηκε ότι ο γενικός παράγοντας της χωρικής αντίληψης μαζί με τον παράγοντα της αντιληπτικής σύλληψης, συμβάλλουν στη δημιουργία ενός νέου παράγοντα. Για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας, ο παράγοντας αυτός ονομάστηκε «Ειδική Χωρική Αντίληψη». Αξίζει να σημειωθεί ότι ο παράγοντας αυτός προβλέπει την επίδοση των μαθητών στους τρεις άλλους παράγοντες της εννοιολογικής σύλληψης: τους δύο παράγοντες της λειτουργικής σύλληψης και τον παράγοντα της λεκτικής σύλληψης. Είναι δηλαδή αναγκαίο για την ανάπτυξη της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος, να καλλιεργηθούν εκτός από τη χωρική αντίληψη και η αντιληπτική σύλληψη. Η αντιληπτική σύλληψη σχετίζεται με την ικανότητα αναγνώρισης ενός σχήματος ή υποσχημάτων του και

σύμφωνα με το Duval (1995, 1999) είναι απαραίτητη μαζί με τουλάχιστον ένα από τα άλλα είδη σύλληψης για να λειτουργήσει ως γεωμετρικό σχήμα ένα σχήμα.

Επίσης, η δημιουργία του παράγοντα «Ειδική Χωρική Αντίληψη», έρχεται σε συμφωνία με τη θεωρία του Fischbein (1993) για τη διπλή φύση του γεωμετρικού σχήματος. Κάθε γεωμετρικό σχήμα έχει ταυτόχρονα εννοιολογικές και σχηματικές ιδιότητες. Οι σχηματικές ιδιότητες αφορούν τη σχέση των γεωμετρικών εννοιών με το χώρο, χωρική αντίληψη, ενώ η εννοιολογική πτυχή αναφέρεται στη σύνοψη και στη θεωρητική φύση που οι γεωμετρικές έννοιες μοιράζονται με όλες τις άλλες έννοιες, αντιληπτική σύλληψη. Για το λόγο αυτό, το γεωμετρικό σχήμα δεν είναι μια απλή έννοια, αλλά μια έννοια που σχετίζεται άμεσα με τη νοερή εικόνα της στο χώρο, μια ιδιότητα που δεν κατέχουν οι υπόλοιπες μαθηματικές έννοιες.

Μέσα από την περαιτέρω μελέτη της σχέσης της χωρικής αντίληψης και των παραγόντων της εννοιολογικής σύλληψης, φάνηκε ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν με όμοιο τρόπο τα έργα που ανταποκρίνονται στους παράγοντες αυτούς. Παρ' όλα αυτά διακρίνεται μια μορφή στεγανοποίησης ανάμεσα τους. Το γεγονός αυτό υποδηλώνει ότι οι διαδικασίες που ενεργοποιούνται από τους μαθητές κατά την ενασχόλησή τους με έργα εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος, είναι διαφορετικές από τις διαδικασίες που ενεργοποιούνται για την αντιμετώπιση των έργων της χωρικής αντίληψης.

Ένα άλλο σημαντικό ερώτημα της παρούσας εργασίας ήταν η σύγκριση της επίδοσης των μαθητών στη χωρική αντίληψη και την εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος. Αρχικά, αξίζει να αναφερθεί ότι με βάση τα αποτελέσματα φάνηκε ότι καθώς αυξάνεται το ηλικιακό επίπεδο, αυξάνεται στατιστικά σημαντικά και η επίδοση των μαθητών τόσο στα έργα χωρικής αντίληψης και της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος, όσο και στα έργα των επιμέρους παραγόντων της. Αυτό μπορεί να οφείλεται είτε στην ηλικιακή ωρίμανση (Piaget και Inhelder, 1967), αφού σύμφωνα και με ερευνητές η χωρική αντίληψη φθάνει στο επίπεδο ωρίμανσης κατά την εφηβεία και μειώνεται σταδιακά στα τέλη της ηλικίας των είκοσι (Salthouse, Babcock, Skovronek, Mitchel & Palmon, 1990). Ή μπορεί να οφείλεται την εκπαιδευτική διαδικασία. Πολυάριθμες μελέτες, τόσο στον τομέα της χωρικής αντίληψης (Ben-Chaim *et al.*, 1988· Lord, 1987· Burnett & Lane, 1980), όσο και στον τομέα της γεωμετρίας, έχουν δείξει ότι μπορούν να αναπτυχθούν οι ικανότητες μέσα από εκπαίδευση.

Επιπλέον, με βάση την επίδοση των μαθητών στη χωρική αντίληψη και την εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος, δημιουργήθηκαν τρεις κατηγορίες μαθητών. Οι κατηγορίες αυτές αντιπροσωπεύουν τρεις ομάδες υποκειμένων με

διαφορετικά χαρακτηριστικά ως προς την επίδοσή τους. Από την προσεκτική μελέτη των χαρακτηριστικών της κάθε Κατηγορίας, μπορεί να γίνει σύνδεση με τα διαφορετικά είδη Γεωμετρίας των Houdement και Kuzniak (2003). Πιο συγκεκριμένα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι Κατηγορίες 1 και 2, αντιστοιχούν στη Γεωμετρία 1 (Εμπειρική Γεωμετρία) και η Κατηγορία 3 αντιστοιχεί στη Γεωμετρία 2 (Εμπειρική Αξιοματική Γεωμετρία). Η Εμπειρική Γεωμετρία σχετίζεται άμεσα με τον πραγματικό, φυσικό κόσμο και η εγκυρότητά της προκύπτει από τις αισθήσεις. Οι μαθητές της Κατηγορίας 1 παρουσιάζουν αδυναμίες σε όλους τους τομείς της χωρικής αντίληψης και της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Ενώ, οι μαθητές της Κατηγορίας 2 έχουν πολύ καλή γνώση της αντιληπτικής σύλληψης και αρχίζουν να έχουν ικανοποιητική γνώση της χωρικής αντίληψης. Μόνοι οι μαθητές της Κατηγορίας 3, αρχίζουν να βλέπουν τα αντικείμενα θεωρητικά και αρχίζουν να κάνουν επαγωγικές αποδείξεις χρησιμοποιώντας ορισμούς και θεωρήματα.

Εκπαιδευτικές Εφαρμογές

Η χωρική αντίληψη αποτελεί ένα δυναμικό εργαλείο το οποίο βοηθά τους μαθητές, πέρα από τη γεωμετρία, στην αναπαράσταση και νοηματοδότηση του κόσμου που τους περιβάλλει (Bishop, 1985). Γενικά, η χωρική αντίληψη επιδρά θετικά σε όλους τους τομείς των μαθηματικών (Burnett, Lane, & Dratt, 1979· Casey, Nuttall, & Pezaris, 1997· Geary, Saults, Liu, & Hoard, 2000· Robinson, Abbott, Berninger, & Busse, 1996), αφού η ικανότητα κατασκευής και μετασχηματισμού νοητικών εικόνων οδηγεί σε ευελιξία και ισχύ στα μαθηματικά (Wheatley και Reynolds, 1999). Οργανισμοί, όπως το National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1989, 2000) έχουν αναγνωρίσει την αναγκαιότητα εισαγωγής της χωρικής αντίληψης στο αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών, ακριβώς στο σημείο που οι μαθητές έρχονται σε επαφή με τα μαθηματικά.

Στο αναλυτικό πρόγραμμα της Κύπρου, με την εκπαιδευτική μεταρρύθμιση, φαίνεται ότι οι υπεύθυνοι ανάπτυξης των αναλυτικών προγραμμάτων, έλαβαν υπόψη την ανάγκη εισαγωγής της χωρικής αντίληψης (Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών, 2010). Συγκεκριμένα, στο πλαίσιο διδασκαλίας της γεωμετρίας, έχουν εντάξει, πέρα από τη Διερεύνηση Σχημάτων και τη Διερεύνηση του Χώρου, καθώς και τη Διερεύνηση Μετασχηματισμών. Βέβαια, το πρόγραμμα αυτό δεν έχει ολοκληρωθεί, αλλά αναμένεται

ότι τα διδακτικά εγχειρίδια θα ανταποκρίνονται στους στόχους αυτούς. Όμως, μέσα από τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας, διαφαίνεται ότι για την ανάπτυξη της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος, θα πρέπει η διδασκαλία να στοχεύει πέρα από τη χωρική αντίληψη και στην ανάπτυξη της αντιληπτικής σύλληψης, αφού ο συνδυασμός αυτών των δύο ικανοτήτων μπορεί να επηρεάσει την ανάπτυξη των επιμέρους λειτουργιών της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος, απαραίτητη διαδικασία για τον περαιτέρω χειρισμό των γεωμετρικών σχημάτων.

Παράλληλα, στον εκπαιδευτικό σχεδιασμό θα πρέπει να ληφθεί σοβαρά υπόψη το γεγονός ότι η δομή της χωρικής αντίληψης παραμένει αναλλοίωτη για τους μαθητές ηλικίας 10 μέχρι 13 ετών. Αυτό υποδεικνύει ότι η ηλικία δεν επηρεάζει τη δομή της χωρικής αντίληψης. Φαίνεται ότι ένα χαρακτηριστικό της ανάπτυξης της χωρικής αντίληψης από το δημοτικό σχολείο στο γυμνάσιο είναι η δημιουργία «αναλλοίωτων εννοιών». Ως «αναλλοίωτο» ορίζεται το σύνολο των έργων για τα οποία ισχύει ότι οι μεταξύ τους σχέσεις παραμένουν ίδιες στους μαθητές διαφορετικών ηλικιών.

Επιπλέον, προσεκτική μελέτη και αναδιοργάνωση πρέπει να γίνει και στον τομέα της γεωμετρίας, με σκοπό τη βελτίωση της επίδοσης των μαθητών. Στο εκπαιδευτικό σύστημα της Κύπρου εμφανίζεται αυτό που επισημαίνει και ο Clements (2004), ότι δηλαδή, το περιεχόμενο της γεωμετρίας, συχνά τοποθετείται σε δευτερεύουσα θέση και στις περιπτώσεις που διδάσκεται συστηματικά, δίνεται έμφαση στην ονομασία των σχημάτων και τις ιδιότητες, παρά στο χωρικό συλλογισμό. Ο Duval (2004) υποστηρίζει πως δεν πρέπει η διδασκαλία της γεωμετρίας να ξεκινά με την αναγνώριση των σχημάτων, αφού αυτό καθλώνει τους μαθητές στην εικονική εξεικόνιση. Αδυνατεί επίσης να μεταβεί από το πλαίσιο της Εμπειρικής Γεωμετρίας στο πλαίσιο της Εμπειρικής Αξιοματικής Γεωμετρίας, αφού για τη μετάβαση, απαιτείται από το άτομο αλλαγή της θεωρίας του αναφορικά με τη φύση των γεωμετρικών αντικειμένων, τα οποία είναι υλικά στο πλαίσιο της Εμπειρικής Γεωμετρίας και θεωρητικά στο πλαίσιο της Εμπειρικής Αξιοματικής Γεωμετρίας (Houdement & Kuzniak, 2003).

Εισηγήσεις για Μελλοντικές Έρευνες

Η χωρική αντίληψη είναι ένα θέμα που έχει απασχολήσει αρκετούς ερευνητές εδώ και αρκετά χρόνια και ακόμη δεν έχει εξαντληθεί. Η παρούσα εργασία αποσκοπούσε στη

μελέτη της χωρικής αντίληψης, με σκοπό να διασαφηνιστεί αρχικά η δομή της χωρικής αντίληψης καθώς και να μελετηθεί η ανάπτυξή της σε σχέση με την ανάπτυξη της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος των μαθητών ηλικίας 10 μέχρι 13 ετών.

Για τη διεξαγωγή της παρούσας εργασίας χρησιμοποιήθηκαν γραπτού τύπου δοκίμια, θα ήταν ενδιαφέρον να χρησιμοποιηθούν σε μελλοντικές έρευνες συνδυασμός γραπτού τύπου δοκίμια και δυναμικά δοκίμια στον ηλεκτρονικό υπολογιστή (dynamic computer-based tests), τα οποία δίνουν έμφαση στην ψυχολογική διαδικασία που εμπλέκεται στα έργα και όχι μόνο στην επίδοση (Grigorenko & Sternberg, 1998). Θα μπορούσε έτσι να διερευνηθεί κατά πόσο η φύση των δοκιμίων διαφοροποιεί τη δομή του ενός παράγοντα που προτείνεται στην παρούσα εργασία. Σύμφωνα με το Yilmaz (2009), οι μελέτες παραγοντικής ανάλυσης της χωρικής αντίληψης παρουσιάζουν αδυναμία, λόγω του ότι δε λαμβάνουν υπόψη τη Δυναμική Χωρική Ικανότητα και τις περιβαλλοντικές ικανότητες, οι οποίες θεωρούνται ως ιδιαίτερα συστατικά του πεδίου της χωρικής αντίληψης.

Επίσης, όσον αφορά τη διατήρηση της δομής των μαθητών ηλικίας 10 μέχρι 13 ετών, μια καλή εισήγηση είναι η μελέτη της δομής σε ηλικίες μεγαλύτερες των 13 ετών. Οι ηλικίες μικρότερες των 10 ετών, δε συστήνονται, γιατί δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα δοκίμια χωρικής αντίληψης. Θα ήταν σημαντικό όμως να διερευνηθεί η ανάπτυξη της χωρικής αντίληψης σε μικρές ηλικίες, ξεκινώντας ακόμη και από το νηπιαγωγείο. Όπως αναφέρθηκε και πιο πάνω η χρήση εποπτικών υλικών επιδρά θετικά στην καλλιέργεια της χωρικής αντίληψης. Υλικά, όπως κύβοι, χρησιμοποιούνται από πολύ μικρές ηλικίες. Θα ήταν ενδιαφέρον έτσι, να μελετηθεί η επίδραση στην ανάπτυξη της χωρικής αντίληψης, η συστηματική και στοχευμένη ενασχόληση των παιδιών της προδημοτικής σε μια διαχρονική μελέτη.

Θα ήταν επίσης ενδιαφέρον, μιας και η επίλυση των έργων χωρικής αντίληψης, μπορεί να επηρεάζεται από το «γνωστικό στυλ» των μαθητών, να πραγματοποιηθεί μια έρευνα η οποία θα μελετά κατά πόσο ισχύει η επίδραση αυτή. Επιπλέον, θα ήταν σημαντικό να φανεί πως ακριβώς επηρεάζει το γνωστικό στυλ του μαθητή, τη χωρική αντίληψη και κατ' επέκταση την εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος των μαθητών.

Επιπρόσθετα, σε μια μελλοντική εργασία θα μπορούσε να αναπτυχθεί και να εφαρμοστεί ένα εκτεταμένο πρόγραμμα παρέμβασης με σκοπό να ερευνηθεί αν η καλλιέργεια της χωρικής αντίληψης μπορεί να επηρεάσει την επίδοση στην εννοιολογική

σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος. Στο σχεδιασμό του παρεμβατικού προγράμματος θα ήταν χρήσιμο να γίνει χρήση πραγματικών οπτικών υλικών, αφού σχετικές μελέτες έδειξαν ότι έχουν θετική επίδραση στην ανάπτυξη της χωρικής αντίληψης (Ben-Chaim, Lappan, & Houang, 1988· Izard, 1987). Όπως αναφέρει και ο Greabell (1978), η χρήση ποικιλίας οπτικών υλικών είναι επωφελής. Εξαιτίας της αντιληπτικής – εννοιολογικής αλληλεπίδρασης στη χωρική νοημοσύνη, χρειάζονται κατάλληλες αντιληπτικές εμπειρίες για τη δημιουργία αναπαραστάσεων. Οι μαθητές χρειάζονται ευκαιρίες με σκοπό να αλληλεπιδράσουν με πληροφορίες που παρουσιάζονται σε χωρική μορφή, προκειμένου να κατασκευάσουν γνωστικές αναπαραστάσεις, οι οποίες είναι ανακατασκευές των εμπειριών και να μπορούν να εμπλακούν στο χωρικό συλλογισμό (Diezmann & Watters, 2000).

Κάτι διαφορετικό επίσης, θα ήταν αν γινόταν συνδυασμός της χρήσης των πραγματικών οπτικών υλικών και ηλεκτρονικών υπολογιστών, στο παρεμβατικό πρόγραμμα. Σε ένα πρώτο στάδιο οι μαθητές, μπορεί να έχουν επαφή με τα πραγματικά αντικείμενα και σε ένα δεύτερο στάδιο, να γίνει διδασκαλία με τη χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών. Όπως αναφέρουν και οι Baturο και Cooper (2002), τα ψηφιακά οπτικά μέσα από τη μια είναι πιο αφηρημένα από τα συγκεκριμένα υλικά, λόγω του ότι δεν πρόκειται για πραγματικά αντικείμενα, και από την άλλη είναι πιο συγκεκριμένα από τις εικονικές αναπαραστάσεις, λόγω της δυναμικής τους υπόστασης. Σύμφωνα με τον Clements (1999), αυτή η δυναμική, καθαρή, ευέλικτη, επαναληπτική και ελεγχόμενη φύση των ψηφιακών χειριστικών, τους δίνει ισχυρό πλεονέκτημα έναντι των αντίστοιχων συγκεκριμένων χειριστικών μέσων. Θα μπορούσε επίσης να γίνει σύγκριση μεταξύ της επίδοσης των μαθητών που δέχθηκαν παρέμβαση με τα χειριστικά αντικείμενα με τους μαθητές που δέχθηκαν παρέμβαση με τη χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών.

Ένα από τα σημαντικά συμπεράσματα της έρευνας αυτής ήταν ότι την ανάπτυξη της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος δεν επηρεάζει μόνο η χωρική αντίληψη, αλλά ο συνδυασμός της χωρικής αντίληψης με την αντιληπτική σύλληψη. Οπότε, ως επέκταση της παρούσας εργασίας θα μπορούσε να διερευνηθεί κατά πόσο το αποτέλεσμα αυτό είναι υλοποιήσιμο. Να σχεδιαστεί δηλαδή, το απαραίτητο εκπαιδευτικό υλικό και να ελεγχθεί κατά πόσο η εφαρμογή του επιδρά θετικά στα αποτελέσματα της εννοιολογικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος.

Ένα πράγμα παραμένει σαφές, τόσο από την πλευρά της χωρικής αντίληψης, όσο και από την πλευρά της γεωμετρίας: και τα δύο θέματα αποτελούν ένα σύνολο πολύπλοκων, γνωστικών ικανοτήτων για τα οποία θα εξακολουθούν να υπάρχουν πολλές ερωτήσεις.

- Ackerman, P. L., & Kanfer, R. (1993). Integrating laboratory and field study for improving selection: Development of a battery for predicting Air Traffic Controller success. *Journal of Applied Psychology*, 78, 413-432.
- Ackerman, P. L., & Lohman, D. F. (1990). *An investigation of the effect of practice on the validity of spatial tests*. Final Report (NPRDC Contract N66001-88C-0291). Minneapolis, MN: Personnel Decisions Research Institute.
- Allen, G. L. (1999). Spatial abilities, cognitive maps, and way finding: Bases for individual differences in spatial cognition and behavior. In R. Golledge (Ed.), *Way finding behavior: Cognitive maps and other spatial processes* (pp. 46-80). Baltimore: Johns Hopkins University Press.
- Allen, G. L. (2003). Functional families of spatial abilities: Poor relations and rich prospects. *International Journal of Testing*, 3, 251-262.
- Baenniger, M., & Newcombe, N. (1989). The role of experience in spatial test performance: A meta-analysis. *Sex Roles*, 20, 327-345.
- Barakat, M. K. (1951), 'A factorial study of mathematical abilities', *British Journal of Psychology*, 4, 137-156.
- Battista, M. T. (1990). Spatial visualization and gender differences in high school geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(1), 47-60.
- Battista, M. T. (1994). On Greeno's environmental/model view of conceptual domains: a spatial/geometric perspective. *Journal for Research in Mathematics Education* 25(1), 86-94.
- Battista, M.T. (1998). *Shape Makers: Developing Geometric Reasoning with the Geometer's Sketchpad*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.
- Battista, M. (1999). Fifth graders' enumeration of cubes in 3D arrays: Conceptual progress in an inquiry – Based Classroom. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(4), 417 – 448.
- Battista, M. T., & Clements, D. H. (1990). Constructing Geometric Concepts in Logo. *Arithmetic Teacher*, 38(3), 15-17.

- Battista, M. T. & Clements, D. H. (1991). *Logo geometry*. Morristown, NJ: Silver Burdett & Ginn.
- Battista, M., & Clements, D.H. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 258-292.
- Battista, M. T., & Clements, D. H. (2002). Using spatial imagery in geometric reasoning. In D. L. Chambers (Ed.), *Putting research into practice in the elementary grades* (pp. 174-178). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Battista, M. T., Wheatley, G. H., & Talsma, G. (1982). The Importance of Spatial Visualization and Cognitive Development for Geometry Learning in Pre-service Elementary Teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13(5), 332-340.
- Battista, M., Wheatley, G., & Talsma, G. (1989). Spatial visualization, formal reasoning, and geometric problem-solving strategies of preservice elementary teachers. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(4), 17-30.
- Baturo, A. R., & Cooper, T. J. (2002). New era, new learning: Teaching elementary and middle school mathematics with virtual materials. In D. Edge, & Y. Ban Har (Eds.), *Mathematics education for a knowledge-based era*. (Proceedings of the 2nd EARCOME and 9th SEACME conferences, pp. 332-338). Singapore: Association of Mathematics Educators.
- Bell, S., & Saucier, D. (2004). Relationship among environmental pointing accuracy, mental rotation, sex, and hormones. *Environment and Behavior*, 36(2), 251-265.
- Ben-Chaim, D., Lappan, G., & Houang, R. (1985). Visualizing rectangular solids made of small cubes: Analyzing and effecting students' performance. *Educational Studies in Mathematics*, 16(4), 389-409.
- Ben-Chaim, D., Lappan, G. & Houang, R.T. (1988). The Effect of Instruction on Spatial Visualization Skills of Middle School Boys and Girls. *American Educational Research Journal*, 25 (Spring 1988), 51-71.
- Ben-Chaim, D., Lappan, G., & Houng, R. T. (1989). Adolescents' ability to communicate spatial information: Analyzing and effecting students' performance. *Educational Studies in Mathematics*, 20(2), 121-146.

- Bennett, G. K., Seashore, H. G., & Wesman, A. G. (1974). *Differential Aptitude Test* (5th ed.). New York: Psychological Corporation.
- Binet, A., & Simon, T. (1916). *The development of intelligence in children*. Baltimore, Williams & Wilkins. (Reprinted 1973, New York: Arno Press; 1983, Salem, NH: Ayer Company).
- Bishop, A.J. (1978). *Spatial Abilities in a Papua New Guinea Context*, Report No. 2. Mathematics Education Centre, University of Technology, Lae, Papua New Guinea.
- Bishop, A. J. (1980). Spatial Abilities and Mathematics Education: A review. *Educational Studies in Mathematics*, 11(3), 257-269.
- Bishop, A. J. (1983). Space and geometry. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Concepts and Processes* (pp. 176-203). New York: Academic Press.
- Bishop, A. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 7-16.
- Bodin, A., Coutourier, R., & Gras, R. (2000). *CHIC : Classification Hiérarchique Implicative et Cohésive-Version sous Windows – CHIC 1.2*. Rennes: Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques.
- Bodner, G. M., & Guay, R. B. (1997). The purdue visualization of rotation test. *The Chemical Educator*, 2(4), 1-18.
- Boer, L. C. (1991). Mental rotation in perspective problems. *Acta Psychologica*, 76, 1-9.
- Bohning, G., & Althouse, J. K. (1997). Using tangrams to teach geometry to young children. *Early Childhood Education Journal*, 24(4), 239-242.
- Booth, R., & Thomas, M. (1999). Visualization in mathematics learning: arithmetic problem-solving and student difficulties. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(2), 169-190.
- Bouchard, T. J., and McGee, M. G. (1977). Sex differences in human spatial ability: Not an X-linked recessive gene effect. *Soc. Biol.* 24, 332-335.
- Brinkmann, E. H. (1966), Programmed instruction as a technique for improving spatial visualisation. *J. Appl. Psychol.* 50,179-184.
- Burnett, S. A. & Lane, D. M. (1980). Effects of Academic Instruction on Spatial Visualization. *Intelligence*, 4 (July- September 1980): 233-242.

- Burnett, S. A., Lane, D. M., & Dratt, L. M. (1979). Spatial visualization and sex differences in quantitative ability. *Intelligence*, 3, 345–354.
- Burton, L. J., & Fogarty, G. J. (2003). The factor structure of visual imagery and spatial abilities. *Intelligence*, 31, 289-318.
- Byrne, D.S. (1998). *Complexity Theory and the Social Sciences*. London: Routledge.
- Caplan, P. J., MacPherson, G. M., & Tobin, P. (1985). Do sex-related differences in spatial abilities exist? A multilevel critique with new data. *American Psychologist*, 40, 786-799.
- Casey, M. B., Nuttall, R. L., & Pezaris, E. (1997). Mediators of gender differences in mathematics college entrance test scores: A comparison of spatial skills with internalized beliefs and anxieties. *Developmental Psychology*, 33, 669–680.
- Carroll, J. B. (1993). *Human cognitive abilities: A survey of factor analytic studies*. New York: Cambridge University Press.
- ChanLin, L. (2000). Attributes of Animation for learning Scientific Knowledge, *Journal of Instructional Psychology*. Dec. 2000, Retrieved on August 1st, 2009, from http://findarticles.com/p/articles/mi_m0FCG/is_4_27/ai_68998589/
- Clements, D.H. (1997). Constructing constructivism. *Teaching Children Mathematics*, 4(4), 198-200.
- Clements, D. H. (1998). *Geometric and spatial thinking in young children*. (ERIC Document Reproduction Service No. ED436232).
- Clements, D. H. (1999). 'Concrete' manipulatives, concrete ideas. *Contemporary Issues in Early Childhood*, 1(1), 45-60.
- Clements, D.H. (2004). Geometric and Spatial Thinking in Early Childhood Education. In D. H. Clements, J. Sarama, & A. M. DiBiase (Eds.). *Engaging Young Children in Mathematics. Standards for Early Childhood Mathematics Education* (pp. 267-297). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Clements, D. H. & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 420-464). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Clements, D. H., Battista, M. T., Sarama, J., & Swaminathan, S. (1997). Development of students' spatial thinking in a unit on geometric motions and area. *The Elementary School Journal*, 98, 171–186.

- Christou, C., Pittalis, M., Mousoulides, N., Pitta, D., Jones, K., Sendova, E., & Boytchev, P. (2007). Developing an active learning environment for the learning of stereometry. *Proceedings of the 8th International Conference on Technology in Mathematics Teaching*. University of Hradec Králové: Czech Republic.
- Collins Dictionary of the English Language (1986). Hanks, Patrick (Ed.). London: Collins.
- Colom, R., Contreras, M.J., Botella, J., & Santacreu, J. (2002). Vehicles of spatial ability. *Personality and Individual Differences*, 32, 903–912.
- Colom, R., Contreras, M. J., Shih, P. C., & Santacreu, J. (2003). The assessment of spatial ability through a single computerized test. *European Journal of Psychological Assessment*, 19, 92–100.
- Coleman, S. & Gotch, A. (1998). Spatial perception skills of chemistry students. *Journal of Chemical Education*, 75(2), 206-209.
- Connor, J. M. & Serbin, L. A. (1985). Visual-spatial skill: Is it important for mathematics? Can it be taught? In S. F. Chipman, L. R. Brush & D. M. Wilson (Eds), *Women and Mathematics: Balancing the Equation*, pp. 151-174. Hillsdale, NJ : Erlbaum.
- Connor, J. M., Schackman, M., and Serbin, L. A. (1978). Sex-related differences in response to practice on a visual-spatial test and generalisation to a related test. *Child Dev.* 49, 24-29.
- Contreras, M. J., Colom, R., Hernández, J.M., & Santacreu, J. (2003). Is static spatial performance distinguishable from dynamic spatial performance? A latent-variable analysis. *The Journal of General Psychology*, 130, 277-288.
- Contreras, M. J., Rubio, V., Peña, D., Colom, R., & Santacreu, J. (2007). *Sex differences in dynamic spatial ability: The un- solved question of performance factors*. *Memory and Cognition*, 35, 297–303.
- Crowley, M.L. (1987). The van Hiele model of the development of geometric thought. In M.M. Lindquist, Ed., *Learning and teaching geometry, K-12*(pp. 1-16). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- D'Oliveira, T. (2004). Dynamic spatial ability: an exploratory analysis and a confirmatory study. *The International Journal of Aviation Psychology*, 14, 19-38.
- Del Grande, J. J. (1987). Spatial Perception and Primary Geometry. In M. M. Lindquist (Ed.), *Learning and Teaching Geometry, K-12*, (pp 127-135). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- Del Grande, J. (1990). Spatial sense, *Arithmetic Teacher*, 37(6), pp. 14-20.
- Deliyianni, E., Elia, I., Gagatsis, A., Monoyiou, A., & Panaoura, A. (2009). A theoretical model of students' geometrical figure understanding. *The 6th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education: Working Group 5, Geometrical Thinking* (pp.696-705), Lyon, France: ERME, <http://www.inrp.fr/editions/editions-electroniques/cerme6/>
- Deliyianni, E., Michael, P., Monoyiou, A., Gagatsis, A. & Elia, I. (2011). A composite model of students' geometrical figure understanding. In Ubuz, B. (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol.2* (pp. 257 – 264). Turkey: PME.
- Demetriou, A., Christou, C., Spanoudis, G., & Platsidou, M. (2002). The development of mental processing: Efficiency, working memory, and thinking. *Monographs of the Society of Research in Child Development*, 67, Serial Number 268.
- Demetriou, A., & Kazi, S. (2001). *Unity and modularity in the mind and the self: Studies on the relationships between self-awareness, personality, and intellectual development from childhood to adolescence*. London: Routledge Demetriou & Kyriakides, 2006.
- Diezmann, C. M. (1999). Assessing diagram quality: Making a difference to representation, in J. M. Truran & K. M. Truran (Eds.), *Proceedings of the 22nd Annual Conference of Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 185-191), Adelaide: Mathematics Education Research Group of Australasia.
- Diezmann, C. M. & Watters, J. J. (2000). Identifying and supporting spatial intelligence in young children. *Contemporary Issues in Early Childhood* 1(3), 299-313.
- Dreyfus, T. (1991). On the Status of Visual Reasoning in Mathematics and mathematics Education, , *Proceedings of the 15th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of mathematics Education*, 1, 33-48.
- Dror, I. E., Kosslyn, S. M., & Waag, W. (1993). Visual-spatial abilities of pilots. *Journal of Applied Psychology*, 78(5), 763-773.
- Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 109-122). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

- Duval R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, ULP, IREM Strasbourg, 5, 37-65.
- Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processes. In R. Sutherland & J. Mason (eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematical education*. Berlin, Springer, 142-157.
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st century*. Dordrecht, Kluwer Academic, 37-51.
- Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. *Basic Issues for Learning*. Retrieved from ERIC ED 466 379.
- Duval, R. (2004). Geometrical Pictures: kind of representation and specific processings, Σημειώσεις διαλέξεων στα πλαίσια του μαθήματος “Χώρος, εξεικόνιση και συλλογισμός στη Γεωμετρία”.
- Eckstrom, R.B., French, J.W., Harman, H.H. & Derman, D. (1976). *Kit of Factor-referenced Cognitive Tests*. Princeton, NJ: Educational Testing Service.
- Ekstrom, R. B., French, J. W., Harman, H. H., and Derman, D. (1976). *Manual for kit of factor-referenced cognitive tests*. Princeton, NJ: Educational Testing Service.
- Elia, I., Gagatsis, A., Deliyianni, E., Monoyiou, A., & Michael, S. (2009). A structural model of primary school students' operative apprehension of geometrical figures, *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Thessaloniki, Greece.
- Eliot, J. (2000). *The nature and measurement of spatial intelligence*. College Park, MD: Institute for Child Study, College of Education, University of Maryland.
- Elliot, J. & Smith, I.M. (1983). *An International Dictionary of Spatial Tests*. Windsor, United Kingdom: The NFER-Nelson Publishing Company, Ltd. Embretson.
- English, L. D. (1993). Children's strategies for solving two- and three-dimensional combinatorial problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(3), 255–273.

- English, L. D., & Warren, E. A. (1995). General reasoning processes and elementary algebraic understanding: implications for initial instruction. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 17(4), 1-19.
- Fennema, E. & Sherman, J. (1978). Sex-related differences in mathematics achievement, spatial visualization and affective factors. *American Educational Research Journal*, 14, 51-71.
- Fennema, E., & Tartre, L. (1985). The use of spatial visualization in mathematics by girls and boys. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(3), 184-206.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139-162.
- Fischbein, E. & Nachlieli, T. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International Journal of Science Education*, 20(10), 1193-1211.
- French, J. W. (1951). *The description of aptitude and achievement tests in terms of rotated factors*. Chicago: University of Chicago Press.
- French, J.W. (1965). The relationship of problem-solving styles to the factor composition of tests. *Educational and Psychological Measurement*, 25, 9-28.
- French, J. W'., Ekstrom, R. B., and Price, L. A. (1963). *Manual for Kit of Reference Tests for Cognitive Factors*, Educational Testing Service, Princeton, N.J.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Frostig, M., & Horne, D. (1964). *The Frostig program for the development of visual perception: Teacher's guide*. Chicago: Follett.
- Fruchter, B. (1954). Measurement of spatial abilities: History and background. *Educational and Psychological Measurement*, 14(2), 387-395.
- Galton F. (1883). *Inquiries into Human Faculty and its Development*. London: Macmillan. pp. 261.
- Gardner, R. W. (1953). Cognitive styles in categorizing behavior. *Journal of Personality*, 22, 214-233.
- Gardner, R. W. (1957). Field-independence as a determinant of susceptibility to certain illusions. *American Psychologist*, 12.

- Gardner, M. (1983). *Martin Gardner's New Mathematical Diversions*. Chicago: University of Chicago Press.
- Gardner, H. (1993a). *Multiple Intelligences: The Theory in Practice*. New York: Basic Books.
- Geary, D. C., Saults, S. J., Liu, F., & Hoard, M. K. (2000). Sex differences in spatial cognition, computational fluency, and arithmetical reasoning. *Journal of Experimental Child Psychology*, 77, 337-353.
- Geiringer, E. R., & Hyde, J. S. (1976). Sex differences on Piaget's water-level task: Spatial ability incognito. *Perceptual and Motor Skills*, 42(3, Pt 2), 1323-1328.
- Gilmartin, P., and Patton, J. (1984). Comparing the Sexes on Spatial Abilities: Map-Use Skills. *Annals of the Association of the American Geographers* 74(4). 605-619.
- Goldenberg, E. P., Cuoco, A. A. & Mark, J. (1998). A role for geometry in general education. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.) *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 3-44.
- Goldberg, J., & Meredith, W. (1975). *A longitudinal study of spatial ability*. *Behav. Genet.*, 5, 127-135.
- Goldstein, D., Haldane, D. & Mitchell, C. (1990). Sex differences in visual-spatial ability: The role of performance factors. *Memory and Cognition*, 18, 546-550.
- Gorgorió, N. (1998). Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems. *Educational Studies in Mathematics*, 35(3), 207-231.
- Górska, R. A. & Juščáková, Z. (2003). A Pilot Study of a New Testing Method for spatial Abilities Evaluation. *Journal for Geometry and Graphics*, 7(2), 237-246.
- Gras, R., Peter, P., Briand, H. & Philippe, J. (1997). Implicative statistical analysis. In C. Hayashi, N. Ohsumi, N. Yajima, Y. Tanaka, H. Bock, & Y. Baba (Eds.), *Proceedings of the 5th Conference of the International Federation of Classification Societies* (Vol. 2, pp. 412-419). Tokyo, Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.
- Greabell, L. C. (1978). The effect of stimuli input on the acquisition of introductory geometry concepts by elementary school children. *School Science and Mathematics*, 78(4), 320-326.

- Grigorenko, E. L., & Sternberg, R. J. (1998). Dynamic testing. *Psychological Bulletin*, 124(1), 75–111.
- Guay, R. B. & McDaniel, E. D. (1977). The relationship between mathematics achievement and spatial ability among elementary school children. *Journal for Research in Mathematics Education*, 8, 211-215.
- Guay, R., McDaniel, E., & Angelo, S. (1978). *Analytic factor confounding spatial ability measurement*. Paper presented at the annual meeting of the American Psychological Association, Toronto.
- Guilford, J. P. (1967). *The nature of human intelligence*. New York: McGraw-Hill.
- Guilford, J. P., & Lacey, J. I. (1947). *Printed classification tests: Army Air Force Aviation Psychology Research Program (Report No. 5)*. Washington DC: Government Printing Office.
- Gutiérrez, A. (1992). Exploring the links between Van Hiele Levels and 3-dimensional geometry, *Structural Topology* 18, 31-48.
- Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-Dimensional Geometry: In search of a Framework. In L. Puig and A. Gutiérrez (eds.), *Proceedings of the 20th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, (1), 3-19. Valencia: Universidad de Valencia.
- Gutiérrez, A. (1997). Fronteras en el uso de las calculadoras gráficas, *Números* 32, 54-66.
- Halpern, H. (1986). Therapy for Agnosia, Apraxia and Dysarthria. In R. Chapey, & J. Butler (Ed), *Language Strategies in Aphasia and Related Neurogenic communication Disorders* (pp 420- 436). New York: Lippincott Williams & Wilkins.
- Halpern, D. F. (2000). *Sex Differences in Cognitive Abilities* (3rd ed.). Mahway, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Harris, L. J. (1978). Sex differences in spatial ability: Possible environmental, genetic, and neurological factors. In M. Kinsbourne (Ed.), *Asymmetrical function of the brain* (pp.405-521). London: Cambridge University.
- Hegarty, M., & Waller, D. (2004). A dissociation between mental rotation and perspective-taking spatial abilities. *Intelligence*, 32, 175-191.
- Hegarty, M. & Waller, D. (2005). *Individual differences in spatial abilities*. In P. Shah & A. Miyake (Eds). *The Cambridge handbook of visuospatial thinking*. New York, NY: Cambridge University Press.

- Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. Pearla Nesher & Jeremy Kilpatrick (Ed.): *Mathematics and cognition. A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Cambridge U.P., Cambridge, G. Britain, 70-95.
- Hershkowitz, R., Parzysz, B. and von Dormolen, J. (1996). Space and Shape, in A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, C. Laborde (eds.) *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers.
- Hoffer, A. (1977). *Mathematics resource project: Geometry and visualization*. Palo Alto, Calif.: Creative Publications.
- Horn, J. L. (1976). Human abilities: A review of research and theory in the early 1970s. *Annual Review of Psychology*, 27, 437-485.
- Houdement, C., & Kuzniak, A. (2003). Elementary geometry split into different geometrical paradigms. In M. Mariotti (Ed.), *Proceedings of CERME 3*. Bellaria, Italy. [On line] http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/draft/proceedings_draft
- Izard, C. (1987). Perspectives on emotional development. *Handbook of infant development*.
- Johnson, E. S., & Meade, A. C. (1987). Developmental patterns of spatial ability: An early sex difference. *Child Development*, 58, 725-740.
- Jones, G. A., & Swafford, J. O. (1997). Increased knowledge in geometry and instructional practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(4), 467-484.
- Kimura, D. (1999). *Sex and cognition*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Kline, R. B. (1998). *Principles and Practice of Structural Equation Modeling*. New York: The Guilford Press.
- Kozhevnikov, M., & Hegarty, M. (2001). A dissociation between object-manipulation and perspective-taking spatial abilities. *Memory & Cognition*, 29, 745-756.
- Kriegler, S. (1991). The tangram: it's more than an ancient puzzle. *Arithmetic Teacher*, 38(9), 38-43.
- Kyllonen, P. C. (1984). Information processing analysis of spatial ability. *Dissertation Abstracts International*, 45(3), 819.

- Kyllonen, P. C., Lohman, D. F., & Woltz, D. J. (1984). Componential modeling of alternative strategies for performing spatial tasks. *Journal of Educational Psychology*, 76, 1325- 1345.
- Laborde, C. (1994). Working in Small Groups: A Learning Situation. In R. Biehler, R. Scolz, R. Strasser, & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 147-158). Dordrecht: Kluwer.
- Law, D. J., Pellegrino, J. W., Mitchell, S. R., Fischer, S. C., McDonald, T. P., & Hunt, E. B. (1993). Perceptual and cognitive factors governing performance in comparative arrival-time judgments. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 19, 1183–1199.
- Lean, G., & Clements, M.A. (1981). Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance. *Educational Studies in Mathematics*, 12(3), 267-299.
- Lee, J., Lee, J. O., & Collins, D. (2009). Enhancing children's spatial sense using tangrams. *Childhood Education*, 86(2), 92-94
- Lemonidis, C. (1997). A few remarks regarding the teaching of geometry, through a theoretical analysis of geometrical figure, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Application*, 30(4), 2087-2095.
- Linn, C. M., & Petersen, C. A. (1985). Emergence and characterization of sex difference in spatial ability: A meta-analysis. *Child Development*, 56, 1479-1498.
- Lohman, D. F. (1979a). *Spatial ability: A review and re-analysis of the correlational literature* (Technical Report No. 8). Stanford, CA: Aptitudes Research Project, School of Education, Stanford University.
- Lohman, D. F. (1988). Spatial abilities as traits, processes, and knowledge. In R. J. Sternberg (Ed.), *Advances in the psychology of human intelligence* (Vol. 4, pp. 181-248). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lohman, D. (1993). Implications of cognitive psychology for ability testing: three critical assumptions. In: Rumsey, M., Walker, G., Harris, J (eds.) *Personnel Measurement: Directions for Research*. Hillsdale NJ: Erlbaum.
- Lohman, D.F. (1996). Spatial ability and g. In I. Dennis & P. Tapsfield (Eds.), *Human abilities: their nature and measurement* (pp.97-116). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

- Lohman, D. F., & Kyllonen, P. C. (1983). Individual differences in solution strategy on spatial tasks. In R. F. Dillon & R. R. Schmeck (Eds.), *Individual differences in cognition, 1*, 105-135. New York: Academic Press.
- Lohman, D. F., Pellegrino, J. W., Alderton, D. L., & Regian, J. W. (1987). Dimensions and components of individual differences in spatial abilities. In S. H. Irvine & S. N. Newstead (Eds.), *Intelligence and cognition: Contemporary frames of reference* (pp. 253-312). Dordrecht, Netherlands: Nijhoff.
- Lord, T. R. (1987). Spatial teaching, *The Science Teacher*, 54(2), 32-34.
- Maccoby, E. E., & Jacklin, C. N. (1974). *The psychology of sex differences*. Stanford, CA: Stanford University Press.
- Manger, T. & Eikeland, O. (1998). The effects of spatial visualization and students' sex on mathematical achievement. *British Journal of Psychology*, 89(1). British Psychological Society.
- Marcoulides, G. A. and Schumacher, R. E. (1996). *Advanced structural equation modeling*. Lawrence Earlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey.
- Mason, M. (2005). The van Hiele levels of geometric understanding. In *Professional Handbook for Teachers, Geometry: Explorations and applications* (pp. 4-8). McDougal Littell Inc.
- Mason, M. M., & Schell, V. (1988). Geometric understanding and misconceptions among preservice and inservice mathematics teachers. In M. J. Behr, B. C. Lacampagne, & M. M. Wheeler (Eds.), *Proceedings of the tenth annual meeting of the North American Chapter of the International group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.290-296). KeBalb, Illi : Northern Illinois University.
- Mayberry, J. (1983). The Van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers. *Journal for research in mathematics education*, 14, 58-69.
- McGee, M. G. (1979). Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences. *Psychological Bulletin*, 86(5), 889-918.
- McNemar, Q. (1964). Lost our intelligence? Why? *American Psychologist*, 19, 8714-8782.
- Mesquita, A. L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *Journal of mathematical behavior*, 17(2), 183-195.

- Michael, P. (2012). The Operative Apprehension of a Geometrical Figure through Students' Transition to a Next Educational Level. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 11(1-2), 147 – 165.
- Michael, P., Elia, I., Gagatsis, A. & Kalogirou, P. (2010). Primary school students' operative apprehension of geometrical figures. *Quaderni di Ricerca in Didattica Matematica*, 1(2), 47-62.
- Michael, P., Gagatsis, A., Avgerinos, E. & Kuzniak, A. (2011). Middle and High school students' operative apprehension of geometrical figures. *Acta Didactica Universitatis Comenianae – Mathematics*, 11, 45 –55.
- Michael, P., Gagatsis, A., Lamprinou, I., Deliyianni, E. & Monoyiou, A. (2011). Construct validity of a developmental assesment on *geometrical figure understanding: a Rasch model analysis*. In Ubuz, B. (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol.2 (pp. 233 – 240). Turkey: PME.
- Michael, P., Gagatsis, A., Deliyianni, E., Elia, I. & Monoyiou, A. (2009). Operative apprehension of geometrical figures of primary and secondary school students. *Proceedings of the 6th Mediterranean Conference on Mathematics Education*, Plovdiv, Bulgaria.
- Michealides, M. P. (2003). *Age and Gender differences in performance on a spatial rotation test*. Poster presented at the AERA Annual Meeting of American Education Research Association, Chicago, IL.
- Miller, C. L. (1996). A historical review of applied and theoretical spatial visualization publications in engineering graphics. *Engineering Design Graphics Journal*, 60(3), 12-33.
- Mohler, J. L. (2008). A review of spatial ability research. *Engineering Design Graphics Journal*, 72 (2), 19-30.
- Moses, B. (1990). Developing spatial thinking in the middle grades: Designing a space station, *The Arithmetic Teacher*, February, 59-63.
- Muthen, L.K. & Muthen, B.O. (2004). *Mplus User's Guide*. Fourth Edition. Los Angeles, CA: Muthen & Muthen.
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: VA, NCTM.
- Newcombe, N., & Huttenlocher, J. (2000). *Making space: The development of spatial representation and reasoning*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Olkun, S. (2003). Making Connections: Improving Spatial Abilities with Engineering Drawing Activities *International Journal of Mathematics Teaching and Learning*, April 2003.
- Olkun, S., & Knaupp, J. E. (1999). *Children's understanding of rectangular solids made of small cubes*. Paper presented at the Annual Meeting of the Southwest Education Research Association, San Antonio, TX.
- Panaoura, G., Gagatsis, A., & Lemonides, C. (2007). Spatial abilities in relation to performance in geometry tasks. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education: Working Group 7, Geometrical Thinking* (pp. 1062-1072). Larnaka, Cyprus: ERME, <http://www.cyprusisland.com/cerme/>
- Paivio, A (1971). *Imagery and verbal processes*. New York: Holt, Rinehart, and Winston.
- Parzyz, B. (1988). Knowing vs Seeing, Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19(1), 79-92.
- Pellegrino, J. and Hunt, E. (1989). Computer-controlled assesment of static and dynamic spatial reasoning. In Dillon, R. and Pellegrino, J. (Eds) *Testing: Theoretical and applied perspectives*. New York: Praeger.
- Pellegrino, J., Hunt, E., Abate, R. and Farr, S. (1987). A computer-based test battery for the assessment of static and dynamic spatial reasoning abilities. *Behavior Research Methods, Instruments and Computers*, 19, 231-236.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1956). *The child's conception of space*. London: Routledge & Regan Paul.
- Piaget, J. and B. Inhelder (1967). *A Child's Conception of Space* (F. J. Langdon & J. L. Lunzer, Trans.). New York: Norton.
- Piaget, J. & Inhelder, B. (1971). *The child's conception of space*. (F. J. Langdon & J. L. Lunzer, Trans.). London : Routledge and Kegan Paul Ltd.
- Pigge, F. L. (1978). Teacher competencies: Need, proficiency, and where proficiency was developed. *Journal of Teacher Education*, 29(4), 70-76.

- Pittalis, M., Mousoulides, N., & Christou, C. (2007). *Spatial ability as a predictor of geometry ability*. Paper presented at the CERME 5 Conference. Larnaka.
- Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Presmeg, N. C. (1986). Visualisation and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics* 17, 297-311.
- Prevost, F.J. (1985). Geometry in the junior high school. *Mathematics Teacher*, 78, 411-418.
- Psykologiförlaget (1971). *Manual for the Dureman-Sälde tests*. Stockholm, Psykologiförlaget AB.
- Richmond, P. G. (1980). A limited sex difference in spatial test scores with a preadolescent sample. *Child Development*, 51, 601-602.
- Robinson, N. M., Abbott, R. D., Berninger, V. W., & Busse, J. (1996). The Structure of Abilities in Math-Precocious Young Children: Gender Similarities and Differences. *Journal of Educational Psychology*, 88, 341-352.
- Rogers, E., (1995). *Diffusion of Innovations, 4th Edition*. The Free Press, New York.
- Ryu, H., Chong, Y. O., & Song, S. H. (2007). Mathematically gifted students' spatial visualization ability of solid figures. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (4), 137-144. Seoul: PME.
- Saads, S. and Davis, G. (1997). *Visual perception and image formation in three dimensional geometry*. Retrieved September 2009, from University of Southampton, Department of Education, Web-site:
<http://www.crme.soton.ac.uk/publications/gbpubs/Saads&Davis.html>
- Saads, S., & Davis, G. (1997b). Spatial abilities, van Hiele levels and language in three dimensional geometry. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 104-111). Lahti: Finland, University of Helsinki.
- Salthouse, T. A. (1987). Sources of age-related individual differences in block design tasks. *Intelligence*, 11, 245-262.
- Salthouse, T. A., Babcock, R. L., Skovronek, E., Mitchel D. R. D. & Palmon, R. (1990). Age and Experience Effects in Spatial Visualization. *Developmental Psychology* 26(January 1990), 128-136.

- Salthouse, T. A., & Mitchell, D. R. D. (1990). Effects of age and naturally occurring experience on spatial visualization performance. *Developmental Psychology*, *26*, 845-854.
- Sanders, B., Soares, M. P., & D'Aquila, J. M. (1982). The sex difference on one test of spatial visualization: A nontrivial difference. *Child Development*, *53*(4), 1106-1110.
- Serbin, I. A., & Connor, J. M. (1979). Sex-typing of children's play preferences and patterns of cognitive performance. *Journal of Genetic Psychology*, *134*, 315-316.
- Shaughnessy, J. M., & Burger, W. F. (1985). Spadework prior to deduction in geometry. *Mathematics Teacher*, *16*, 119-128.
- Shepard, R. N. (1978). The mental image. *American Psychology*, *33*, 125-137.
- Shepard, R. N., & Cooper, L. A. (1982). *Mental images and their transformations*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Shepard, R. N., & Metzler, J. (1971). Mental rotation of three-dimensional objects. *Science*, *171*, 701-703.
- Sherman, J. A. (1979). *Women and Mathematics: Summary of Research from 1977-1979*. NIE Grant. Unpublished manuscript.
- Silverman, I., Choi, J., & Peters, M. (2007). The Hunter-Gatherer theory of sex differences in spatial abilities: Data from 40 counties. *Archives of Sexual Behavior*, *36*, 261-268.
- Sjölinder, M. (1998). Individual differences in spatial cognition and hypermedia navigation, in Dahlbäck, N. (Ed.), *Exploring navigation: Towards a framework for design and evaluation of navigation in electronic spaces*, Stockholm, Swedish Institute of Computer Science, 61-72.
- Small, M. Y., & Morton, M. E. (1983). Spatial Visualization training improves performance in organic chemistry. *Journal of College Science Teaching*, *13*(1), 41-43.
- Smith, I. M. (1964). *Spatial ability, its educational and social significance*. San Diego, CA: Robert R. Knapp.
- Smith, W. S., & Schroeder, C. K. (1979). Instruction of fourth grade girls and boys on spatial visualization. *Science Education*, *63*(1), 61-66.
- Strong, S., & Smith, R. (2002). Spatial Visualization: Fundamental and trends in engineering Graphics. *Journal of Industrial Technology*, *18*(1).

- Spearman, C. (1927). *The abilities of man*. London: Macmillan.
- Steffe, L. P. (1988). Children's construction of number sequences and multiplying schemes. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.). *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 119-140). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics and Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Tartre, L. A. (1990). Spatial orientation skill and mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, 2(3), 216-229.
- Thompson, B. and Daniel, L. G. (1996). Factor Analytic Evidence for the Construct Validity of Scores: A Historical Overview and Some Guidelines. *Educational and Psychological Measurement*, 56(2), 197 – 208.
- Thurstone, L. L. (1938). *Primary mental abilities*. Chicago: University of Chicago Press.
- Thurstone, T. G. (1958). *Manual for the primary mental abilities*. Chicago: Science Research Associates.
- Thurstone, L. L., & Thurstone, T. G. (1941). *Factorial studies of intelligence*. Chicago: University of Chicago Press.
- Thurstone, L. L., & Thurstone, T. G. (1965). Spatial Relations Test of the Primary Mental Abilities Battery.
- Tso, T., & Liang, Y.N. (2002). The study of interrelationship between spatial abilities and van hiele levels of thinking in geometry of eight-grade students. *Journal of Taiwan Normal University*, 46(2).
- Turos, J. & Ervin, A. (2000). Training and gender differences on a Web-based mental rotation task. *The Penn State Behrend Psychology Journal*, 4(2), 3-12.
- Ullstadius, E., Carlstedt, B., Gustafsson, J.E. (2004). Multidimensional item analysis of ability factors in spatial test items. *Personality and Individual Differences*, 37, 1003-1012.
- Unal, H. (2005). *The influence of curiosity and spatial ability on preservice middle and secondary mathematics teachers' understanding of geometry*. A Dissertation submitted to the Department of Middle and Secondary Education. Florida State University.
- Unal, H., Jakubowski, E., & Corey, D. (2009). Differences in learning geometry among high and low spatial ability pre-service mathematics teachers. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology*, 40(8), 997-1012.

- Van Hiele, P. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. Orlando, FL: Academic Press.
- Vandenberg, S. G. (1975). Sources of variation in performance on spatial tasks In J. Eliot & N. J. Salkind (Eds.), *Children's spatial development*. Springfield, 111. Charles C Thomas.
- Vandenberg, S. G., & Kuse, A. R. (1978). *Mental rotations, a group test of three-dimensional spatial visualization*. *Perceptual and Motor Skills*, 47, 599–604.
- Velez, M. C., Silver, D., and Tremaine, M. (2005). Understanding visualization through spatial ability differences. *Proceedings of Visualization 2005*. IEEE, Minneapolis, MN, USA, 511-518.
- Von Sommers, P. (1984). *Drawing and Cognition, Descriptive and experimental studies of graphic production process*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Voyer, D., Voyer, S., & Bryden, M.P. (1995). Magnitude of sex differences in spatial abilities: A meta-analysis and consideration of critical variables. *Psychological Bulletin*, 117, 250-270.
- West, Th. (1991). *In the Mind's Eye*. Buffalo, NY: Prometheus Books.
- Wheatley, G.H. (1990). Spatial sense and mathematics learning. *Arithmetic Teacher*, 37(6), 10-11.
- Wheatley, G. H. (1991). Constructivist perspectives on science and mathematics learning. *Science Education*, 75(1), 9-21.
- Wheatley, G.H. (1992). The role of reflection in mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics* 23, 529-541.
- Wheatley, G. H., & Reynolds, A. (1999). Image maker: developing spatial sense. *Teaching Children Mathematics*, 5(6), 374-378.
- Witkin, H. A. & Asch, S. E. (1948). Studies in space orientation: IV. Further experiments on the perception of the upright with displaced visual fields. *Journal of Experimental Psychology*, 38, 762-782.
- Yakimanskays, I. S. (1971). The development of spatial concepts and their role in the mastery of elementary geometric knowledge. In J. Kilpatrick & I. Wirszup (Ed.), *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics* (Vol 5, pp. 145-168). Chicago, IL: University of Chicago Press.

- Yakimanskaya, I. S. (1991). *Soviet studies in mathematics education: The development of spatial thinking in schoolchildren*. Reston, VA: NCTM.
- Yancey, A. V., Thompson, C. S., & Yancey, J. S. (1989). Children must learn to draw diagrams, *Arithmetic Teacher*, 36(7), 15-23.
- Yen, W. M. (1975). Sex-linked major-gene influences on selected types of spatial performance. *Behav. Genet.* 5, 281-298.
- Yılmaz, H.B. (2009). On the Development and Measurement of Spatial Ability, *International Electronic Journal of Elementary Education*, 1(2), 83-96.
- Γαγάτσης, Α. (2007). *Προβλήματα μάθησης των Μαθηματικών κατά τη μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο*. Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου.
- Γαγάτσης, Α. & Πατρώνης, Τ. (2003). Χρήση γεωμετρικών μοντέλων στη διδασκαλία των μαθηματικών. Στου Α. Γαγάτση (Εκδ.), *Κείμενα Διδακτικής της Γεωμετρίας* (σ.77-92). Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου.
- Δημητρίου, Α. (1993). *Γνωστική Ανάπτυξη: Μοντέλα-Μέθοδοι-Εφαρμογές*. Θεσσαλονίκη: Art of text.
- Κολέζα, Ε. (2003). Νοητικές Διεργασίες Ανάπτυξης Γεωμετρικών Εννοιών. *Πρακτικά 2^ο Συνεδρίου για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση* [CD-ROM]. Αθήνα: Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών & Πανεπιστήμιο Κύπρου.
- Τρούλης, Γ. (1992). *Τα Μαθηματικά στο Δημοτικό Σχολείο: Διδακτική Προσέγγιση*. Αθήνα: Γρηγόρη.
- Φιλίππου, Γ. & Χρίστου, Κ. (2002). Ιστορία και Μάθηση των Μαθηματικών. Στο Μ. Καϊλα, Φ. Καλαβάσης, & Ν. Πολεμικός (Εκδ.), *Αποσπασμένα Σχέσεις στην Εκπαίδευση* (σ. 199-218). Αθήνα: Ατραπός.
- Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού (2010). *Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών*. Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΔΟΚΙΜΙΟ ΧΩΡΙΚΗΣ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑΣ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΜΑΘΗΤΗ:

ΤΑΞΗ:

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:

ΣΧΟΛΕΙΟ:.....

Οδηγίες:

Να απαντήσεις σε όσες περισσότερες ερωτήσεις από κάθε μέρος μπορείς.

Πρέπει να απαντηθούν ερωτήσεις από όλα τα μέρη.

Προσπάθησε να είσαι γρήγορος/η!

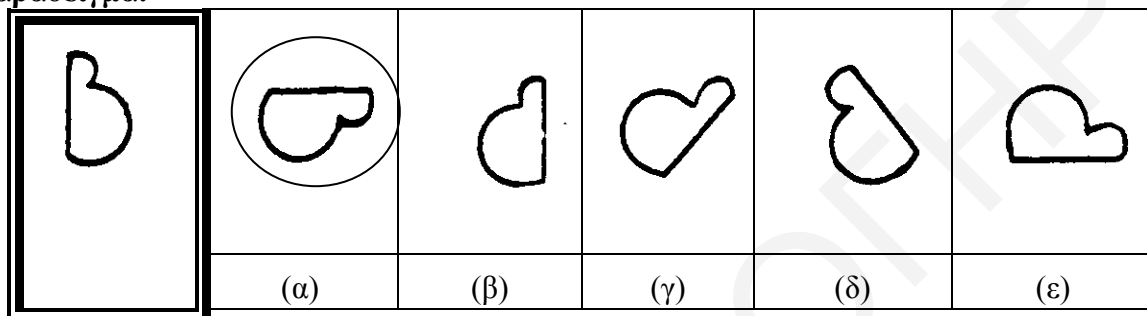
Πρέπει να ακολουθείς το χρόνο που σου δίνεται για κάθε μέρος.

Σε ευχαριστούμε για τη συνεργασία σου!

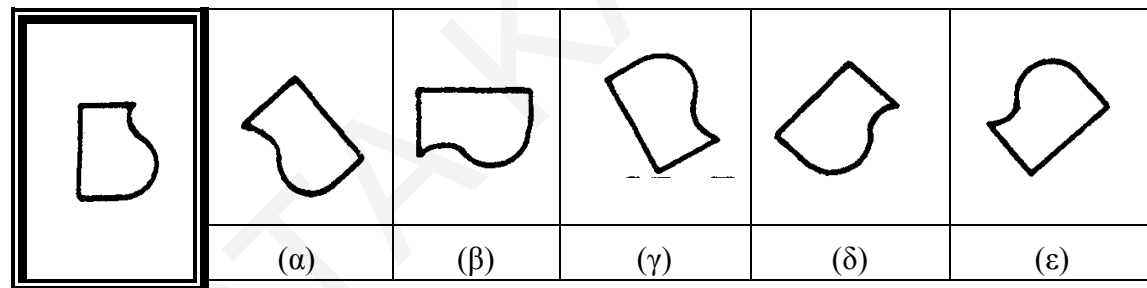
ΜΕΡΟΣ 1

Στο μέρος αυτό δίνεται ένα σχήμα μέσα στο πλαίσιο αριστερά και πέντε σχήματα δεξιά. Ποιο από τα πέντε σχήματα που βρίσκονται δεξιά μπορεί να προκύψει από περιστροφή του σχήματος που βρίσκεται στα αριστερά; Να το βάλεις σε κύκλο. Έχεις 5 λεπτά στη διάθεσή σου!

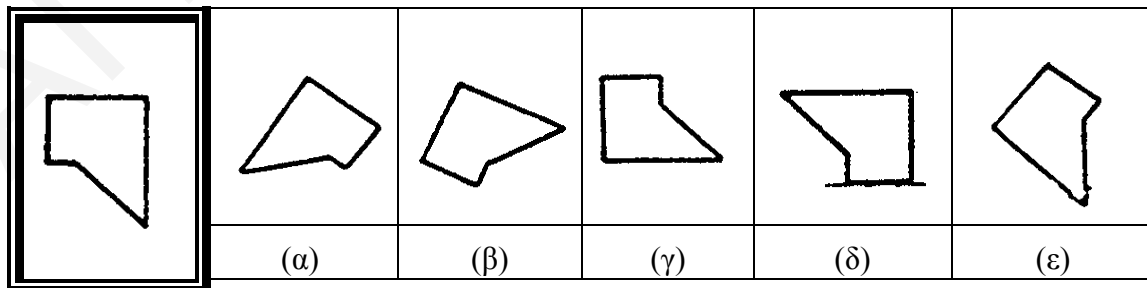
Παράδειγμα:



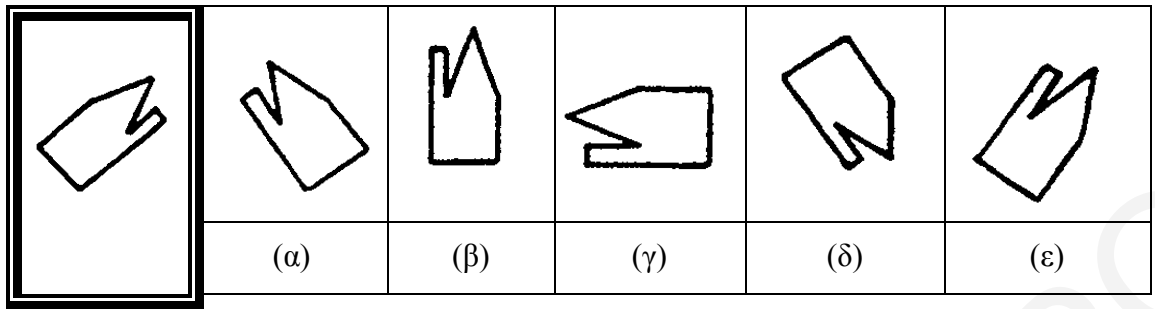
1.



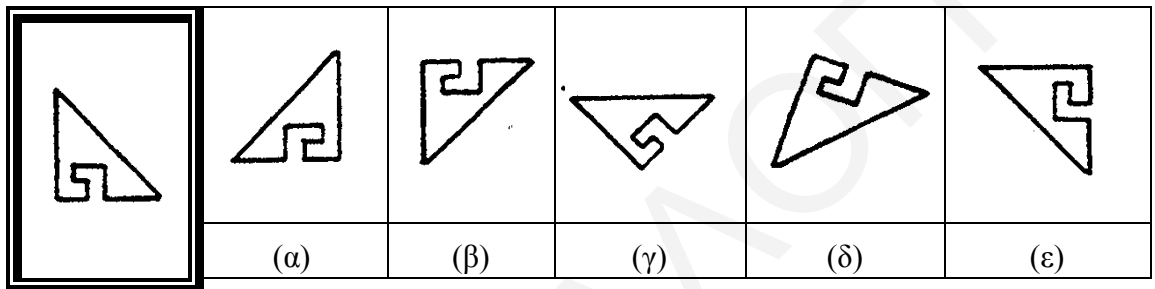
2.



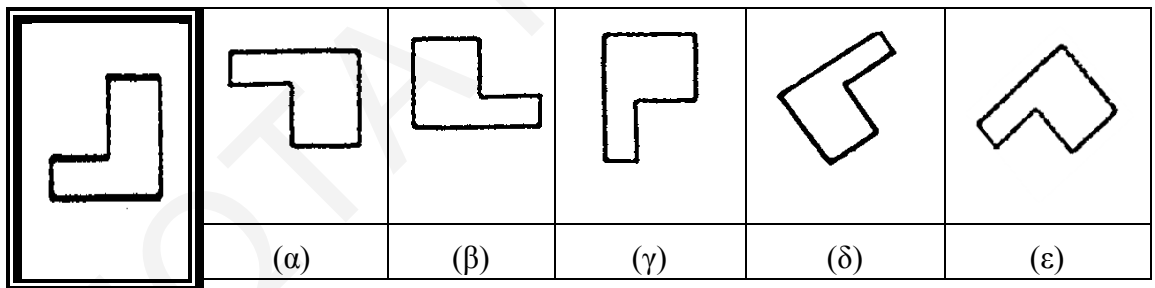
3.



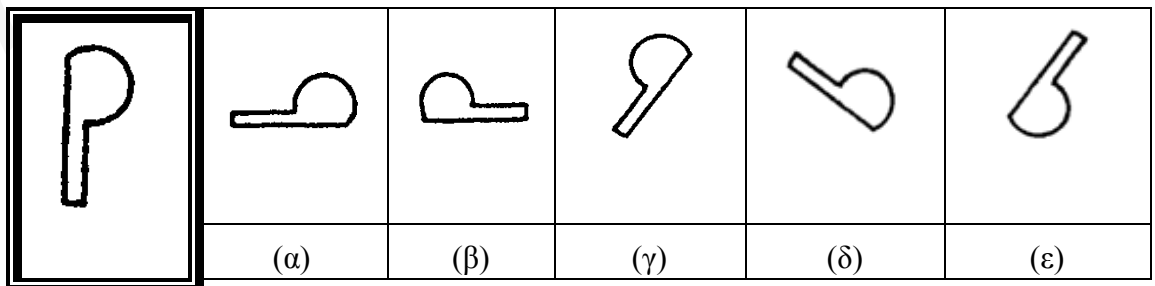
4.



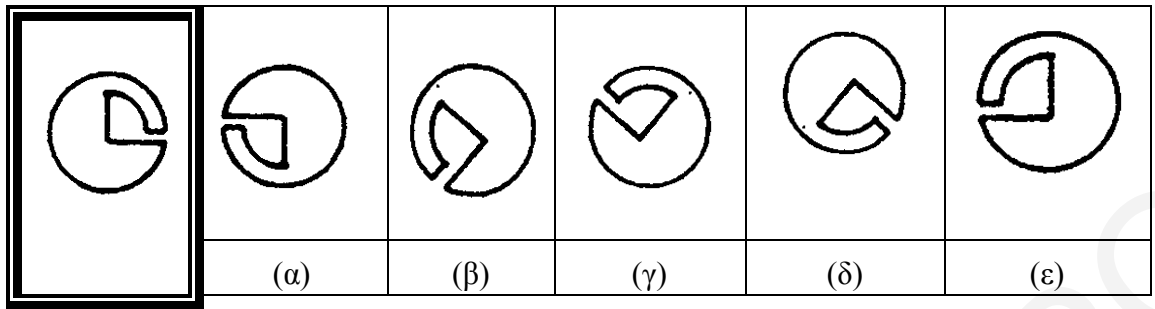
5.



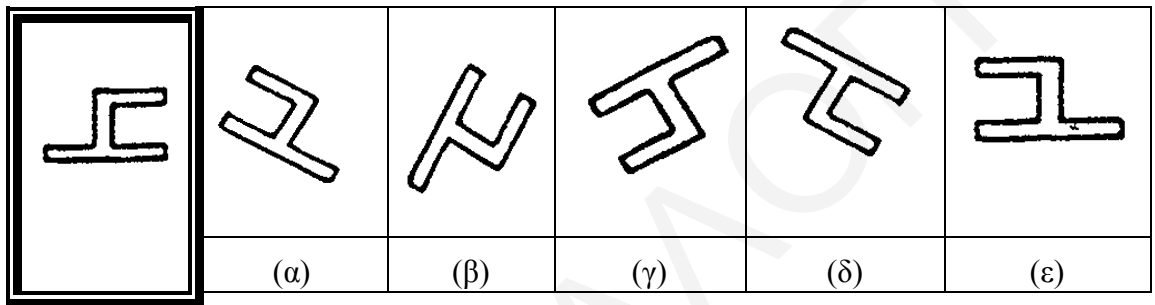
6.



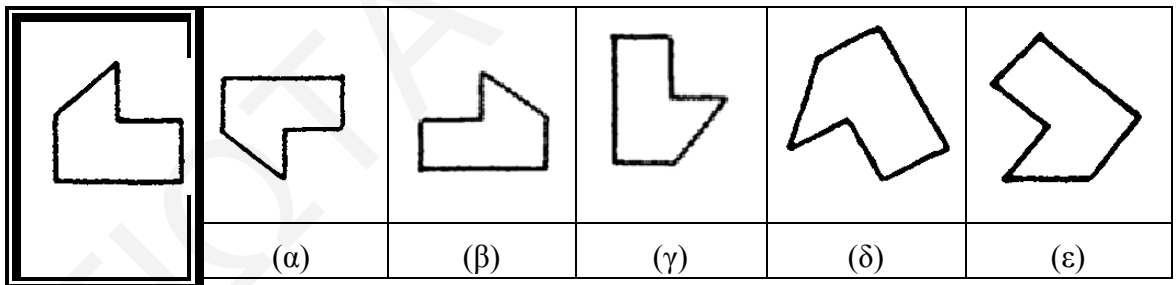
7.



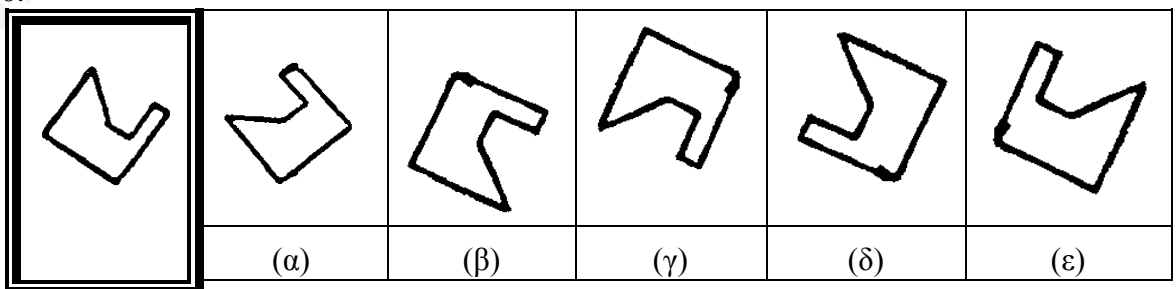
8.



9.



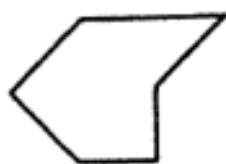
10.



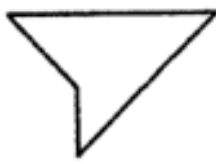
ΜΕΡΟΣ 2

Στο μέρος αυτό θα πρέπει να εντοπίσεις μια από τις φιγούρες Α, Β, Γ που είναι κρυμμένη σε κάθε σύνθετη εικόνα. Η μορφή αυτή είναι η ίδια, όπως όταν παρουσιάζεται μόνη της. Να τη σχηματίσεις πιο έντονα και να γράψεις το γράμμα που αντιστοιχεί στη μορφή αυτή.

Έχεις 10 λεπτά στη διάθεσή σου!



A

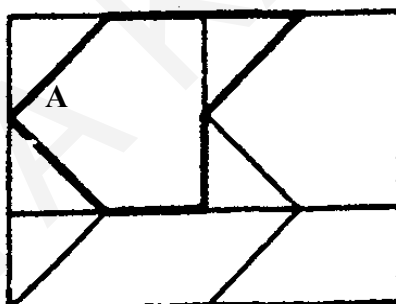


B



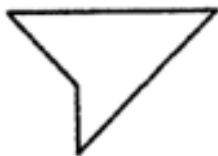
Γ

Παράδειγμα:





A

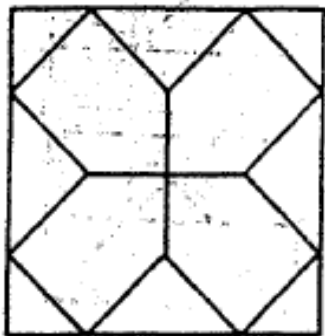


B

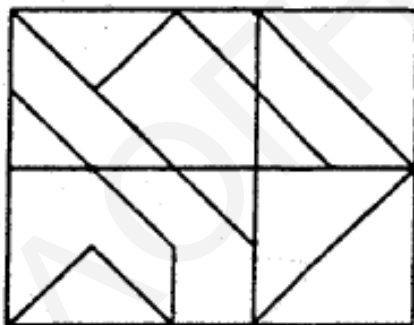


Г

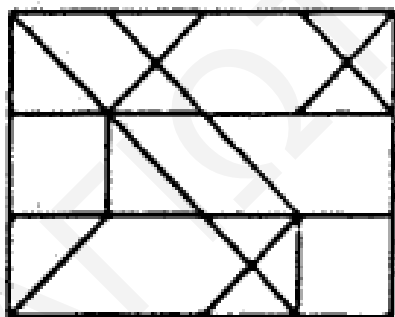
1.



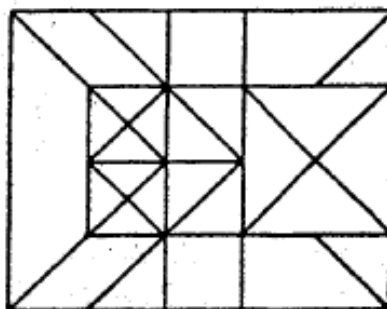
2.



3.

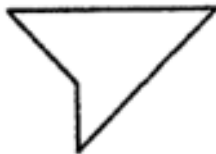


4.





A

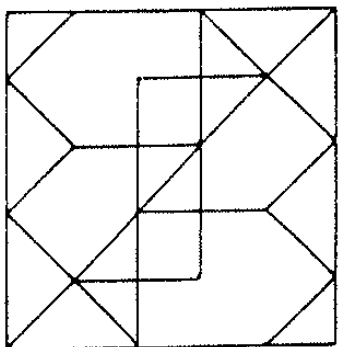


B

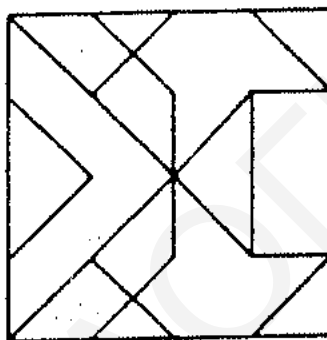


Г

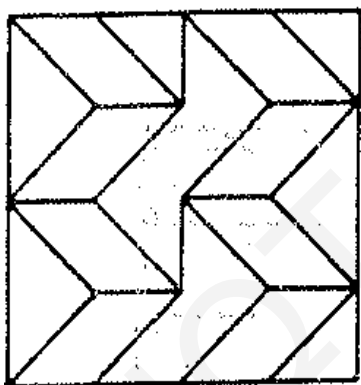
5.



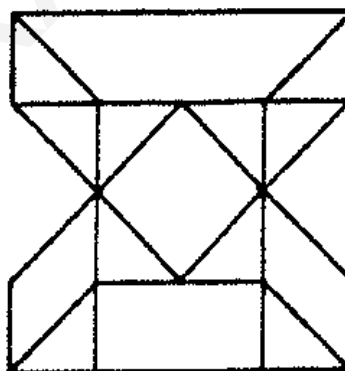
6.



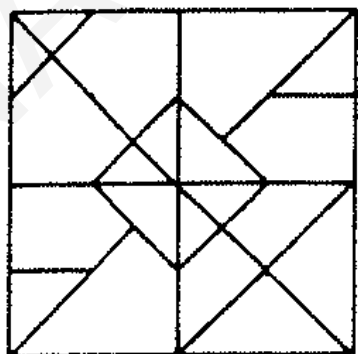
7.



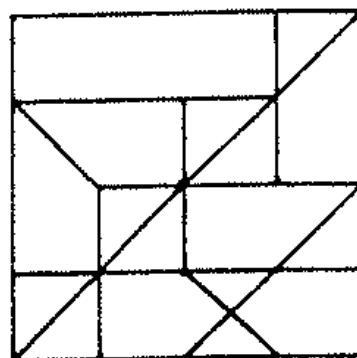
8.



9.



10.



ΜΕΡΟΣ 3

Στο μέρος αυτό θα πρέπει να εντοπίσεις την απλή μορφή που είναι κρυμμένη στα σύνθετα σχέδια. Να βάλεις ✓ κάτω από τη σύνθετη εικόνα στην οποία υπάρχει ίδια η απλή μορφή.

Έχεις 3 λεπτά στη διάθεση σου!

Απλή μορφή:



Παράδειγμα:



✓

✓



Απλή μορφή:



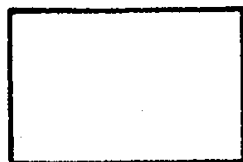
Απλή μορφή:



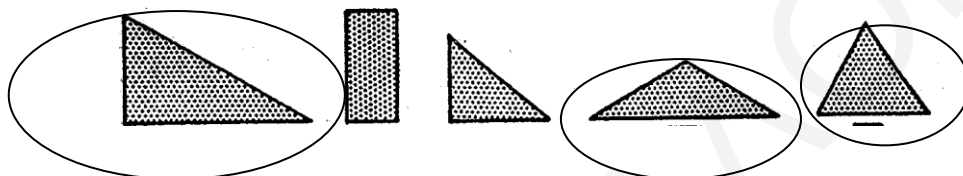
ΜΕΡΟΣ 4

Στο μέρος αυτό υπάρχει πάνω από τη γραμμή ένα σχήμα. Να βάλεις σε κύκλο ποια από τα σχήματα που βρίσκονται κάτω από τη γραμμή πρέπει να **ΕΝΩΘΟΥΝ** ώστε να κατασκευαστεί το σχήμα που βρίσκεται πάνω από αυτή (τα σχήματα μπορούν μόνο να *περιστραφούν*). Τα σχήματα που θα ενωθούν μπορεί να είναι από 2 μέχρι 5. Θα σε βοηθούσε αν ζωγράφιζες κάπου τον τρόπο που ταιριάζουν τα σχήματα.
Έχεις 10 λεπτά στη διάθεσή σου!

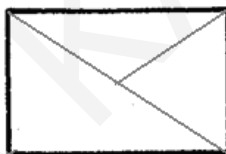
Παράδειγμα:



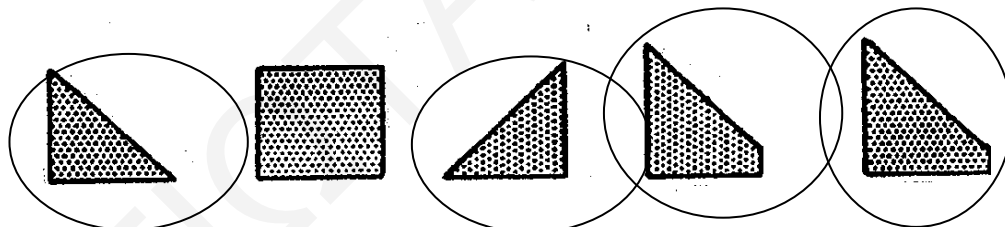
1



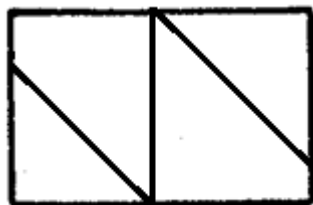
Σε αυτό το παράδειγμα χρειάζεται να ενωθούν τα τρία σχήματα που έχουν κυκλωθεί για να σχηματιστεί το ορθογώνιο που βρίσκεται πάνω από τη γραμμή, όπως φαίνεται πιο κάτω:



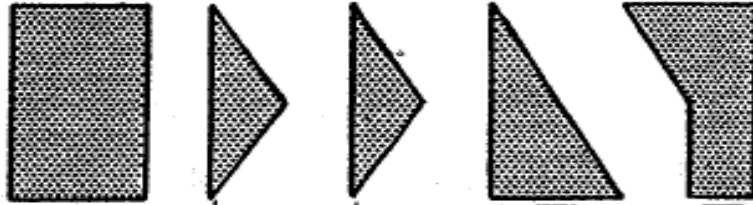
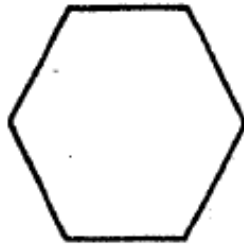
2



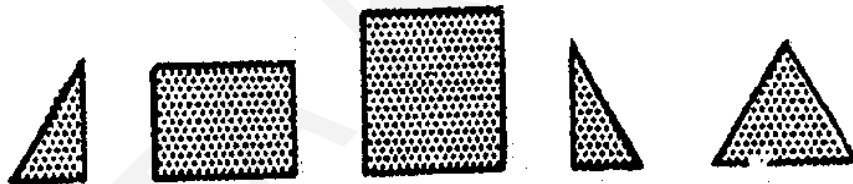
Σε αυτό το παράδειγμα χρειάζεται να ενωθούν τα τέσσερα σχήματα που έχουν κυκλωθεί για να σχηματιστεί το ορθογώνιο που βρίσκεται πάνω από τη γραμμή, όπως φαίνεται πιο κάτω:



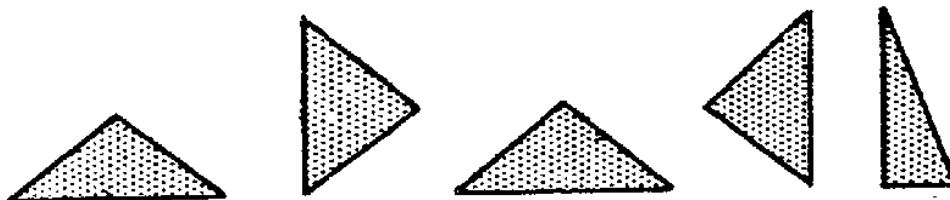
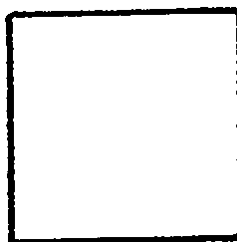
1.



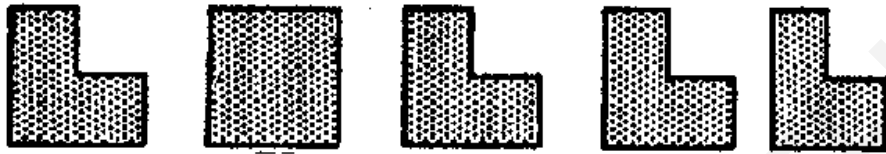
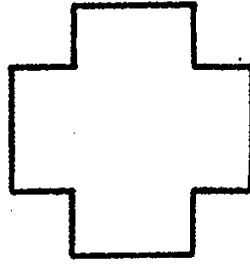
2.



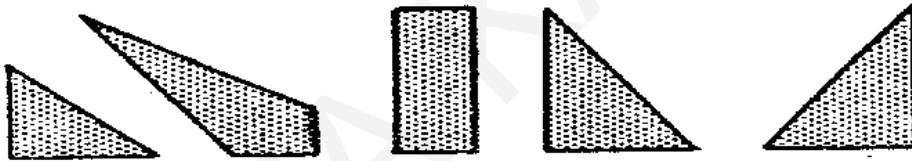
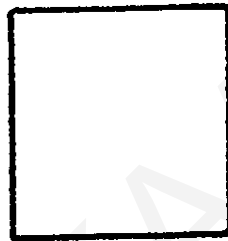
3.



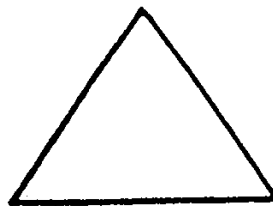
4.



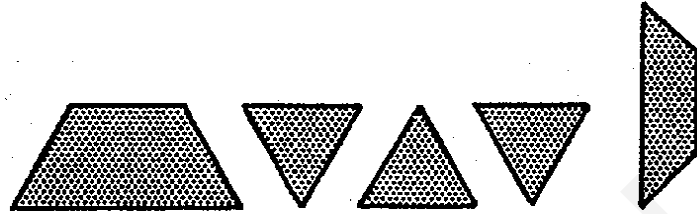
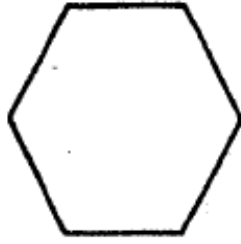
5.



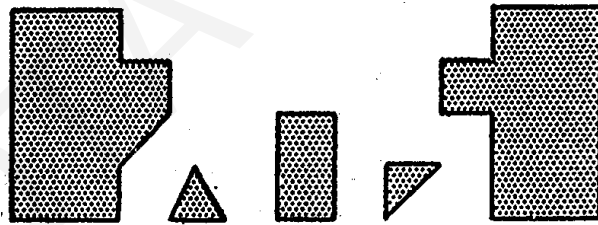
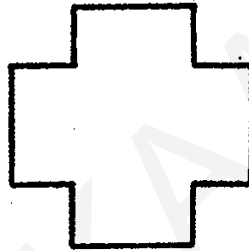
6.



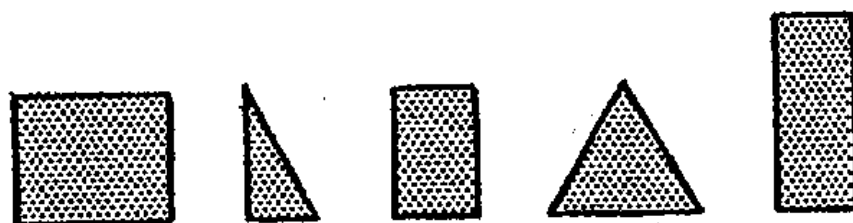
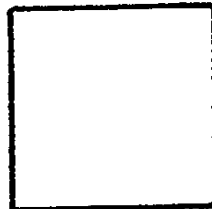
7.



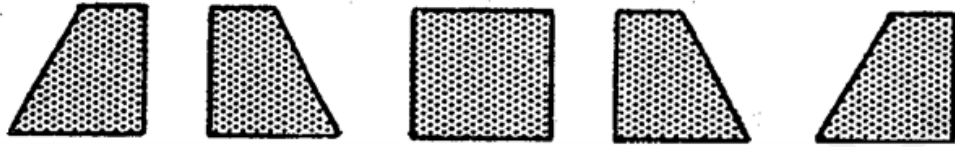
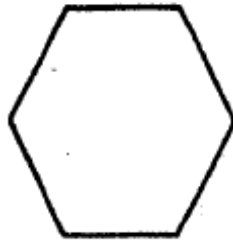
8.



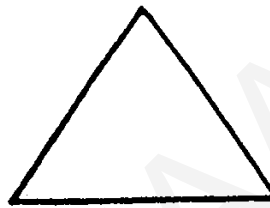
9.



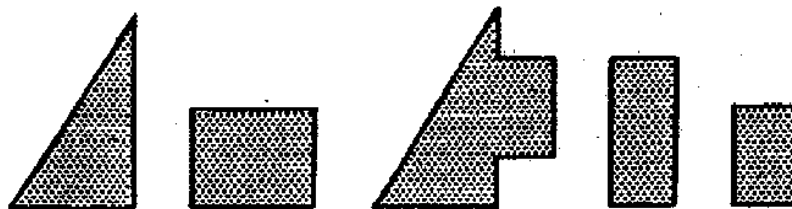
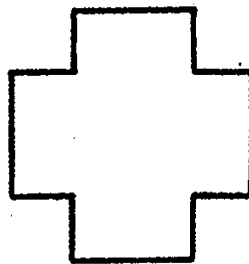
10.



11.



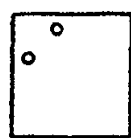
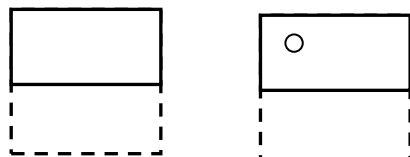
12.



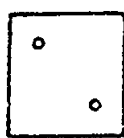
ΜΕΡΟΣ 5

Στο μέρος αυτό παρουσιάζεται πάνω από τη γραμμή ο τρόπος με τον οποίο διπλώνεται ένα τετράγωνο χαρτόνι και η θέση στην οποία ανοίγουμε μια τρύπα όταν το χαρτόνι είναι διπλωμένο. Να βάλεις σε κύκλο το σχήμα κάτω από τη γραμμή που δείχνει πώς θα φαίνεται το χαρτόνι όταν ανοιχτεί.
Έχεις 5 λεπτά στη διάθεσή σου!

Παράδειγμα:



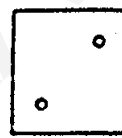
A



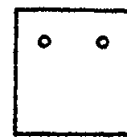
B



Γ

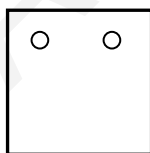
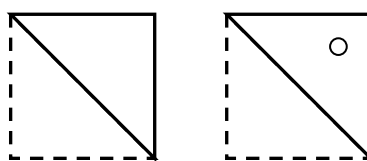


Δ

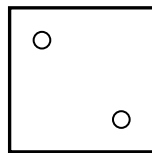


E

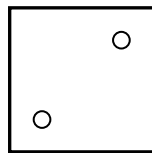
1.



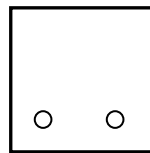
A



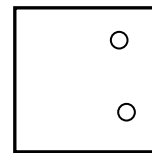
B



Γ

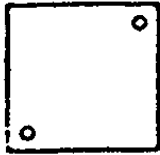
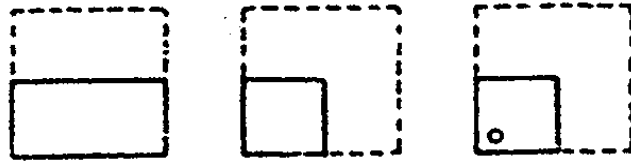


Δ

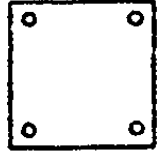


E

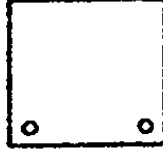
2.



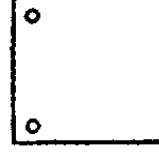
A



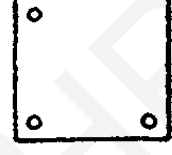
B



Г

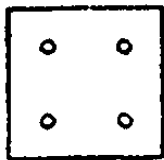
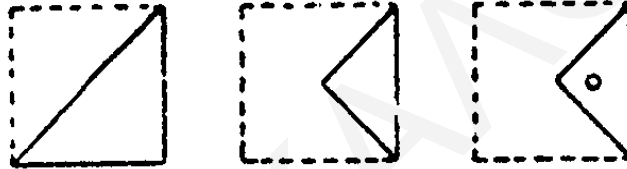


Д

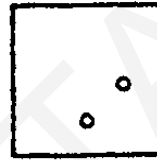


E

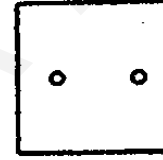
3.



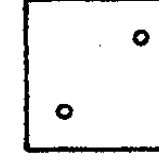
A



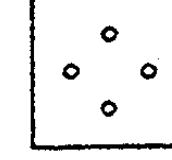
B



Г

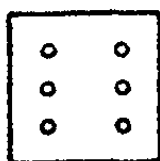


Д

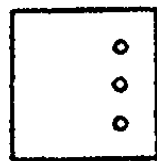


E

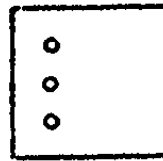
4.



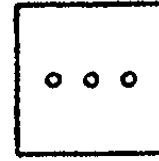
A



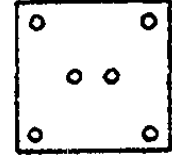
B



Г

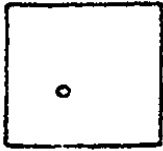
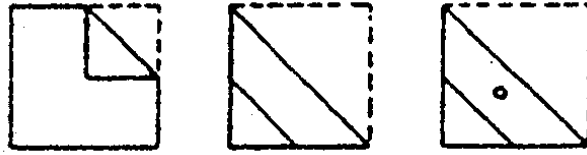


Д

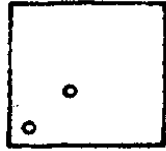


E

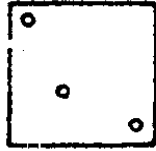
5.



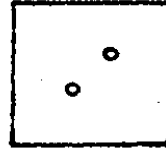
A



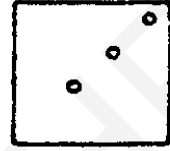
B



Г

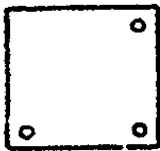


Δ

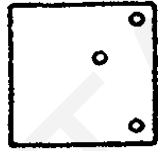


Е

6.



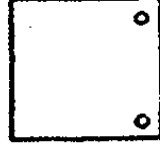
A



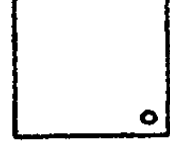
B



Г

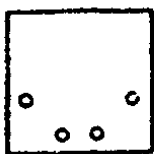


Δ

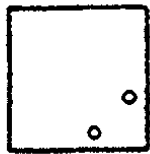


Е

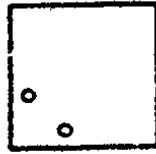
7.



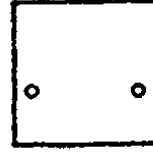
A



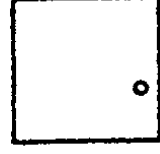
B



Г

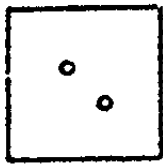
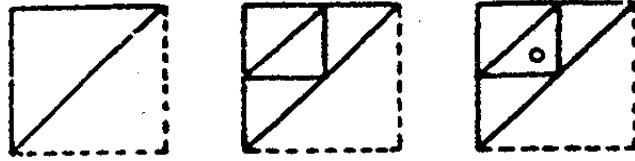


Δ

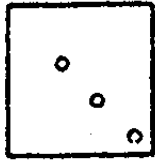


Е

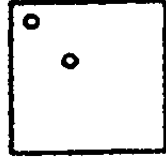
8.



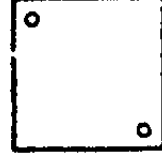
A



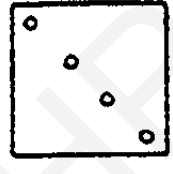
B



Г

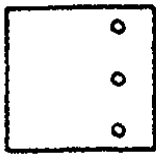


Δ

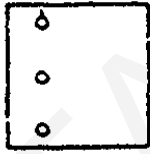


Е

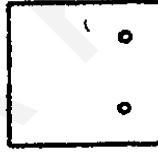
9.



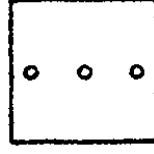
A



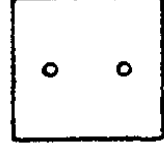
B



Г

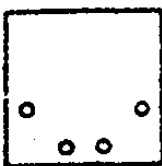
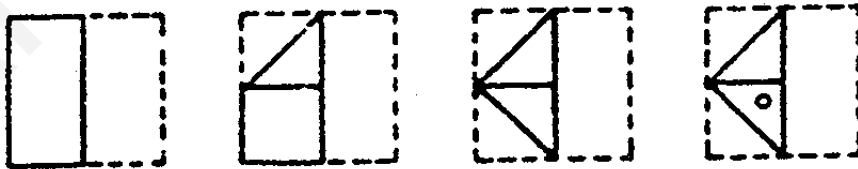


Δ

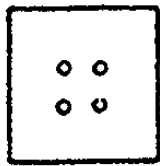


Е

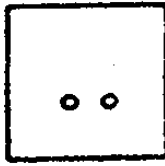
10.



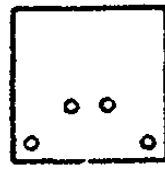
A



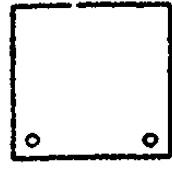
B



Г



Δ



Е

ΜΕΡΟΣ 6

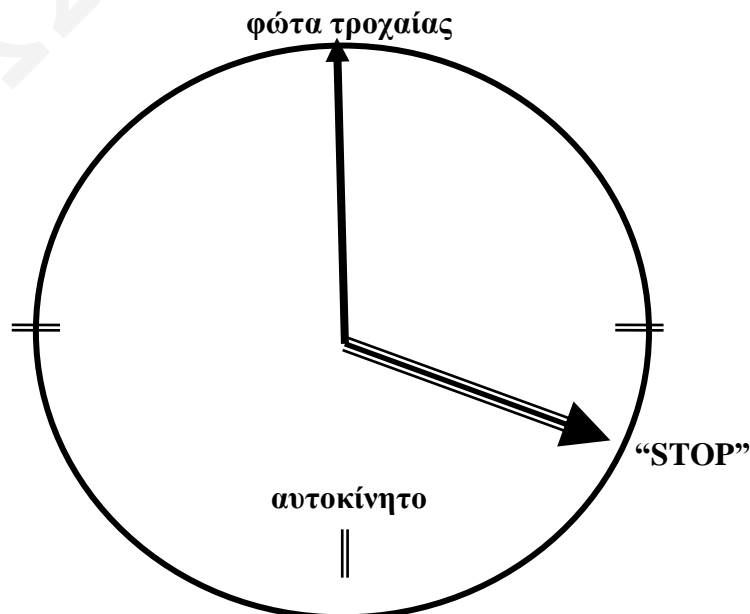
Στο μέρος αυτό πρέπει να **ΦΑΝΤΑΣΤΕΙΣ** ότι βρίσκεσαι σε ένα από τα 7 σημεία που φαίνονται στην εικόνα και ότι κοιτάζεις **ΠΡΟΣ** ένα από τα υπόλοιπα σημεία. Στο κέντρο του κύκλου είναι το σημείο στο οποίο βρίσκεσαι και το κατακόρυφο τόξο δείχνει το σημείο προς το οποίο κοιτάζεις. Πρέπει να σχεδιάσεις το κατάλληλο τόξο στον κύκλο που ακολουθεί για να δείξεις τη θέση ενός αντικειμένου. Έχεις 3 λεπτά στη διάθεσή σου!

Παράδειγμα:

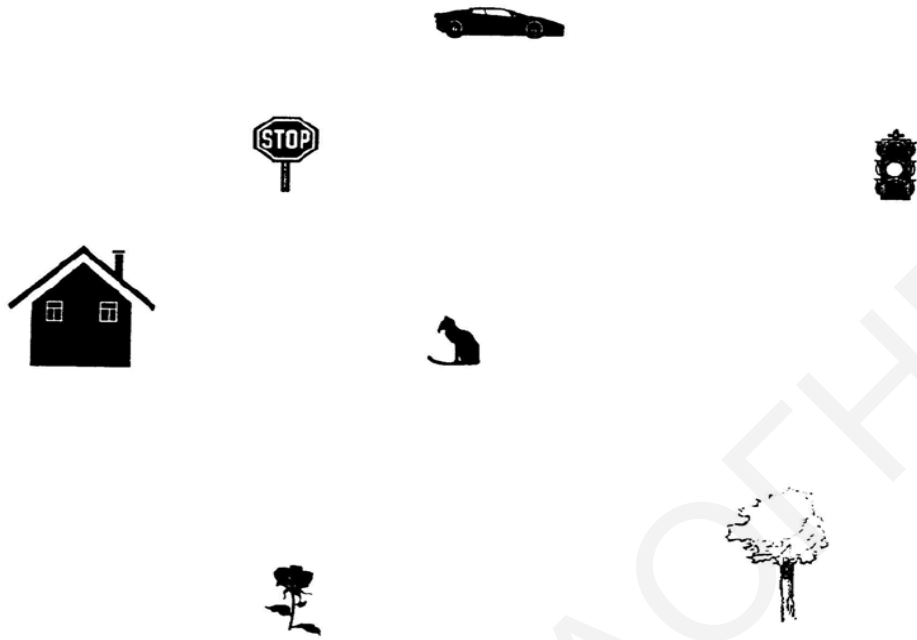


Να φανταστείς ότι βρίσκεσαι στο **ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟ** και βλέπεις προς τα **ΦΩΤΑ ΤΡΟΧΑΙΑΣ**.

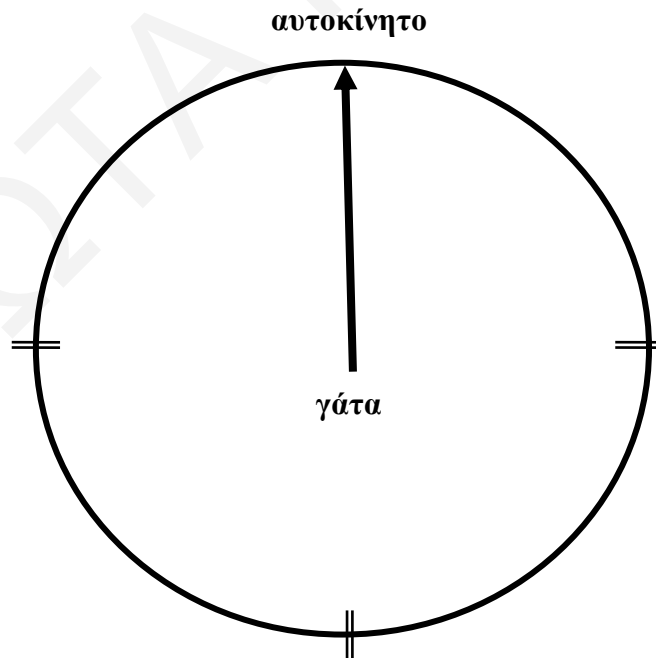
Να **ΔΕΙΞΕΙΣ** πιο κάτω τη θέση του σήματος “STOP”, σχεδιάζοντας το κατάλληλο τόξο.



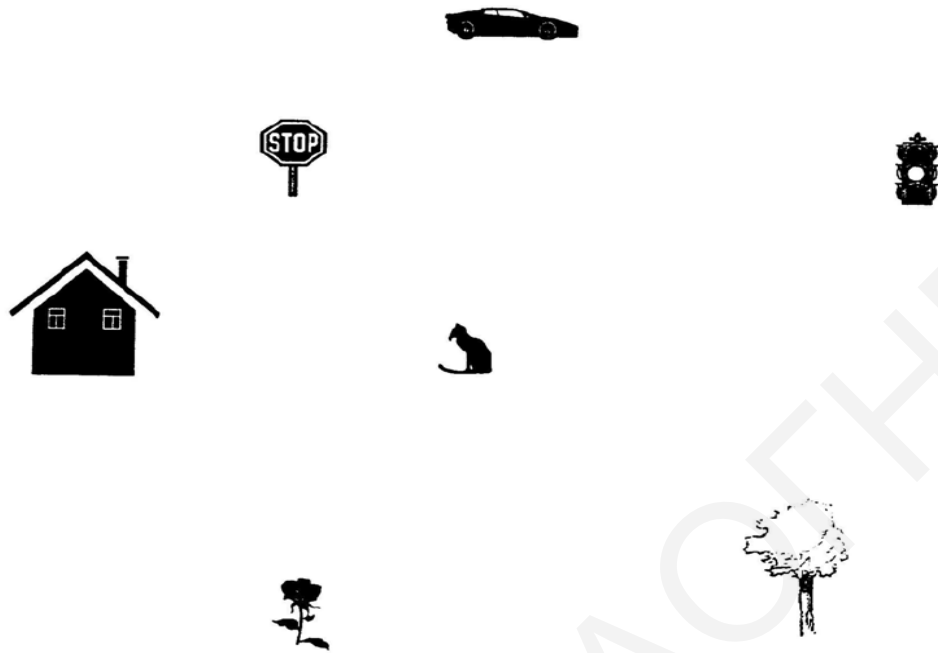
1.



Να φανταστείς ότι βρίσκεσαι στη **ΓΑΤΑ** και κοιτάξεις προς το **ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟ**.
Να **ΔΕΙΞΕΙΣ** πιο κάτω τη θέση του **ΣΠΙΤΙΟΥ**, σχεδιάζοντας το κατάλληλο τόξο.

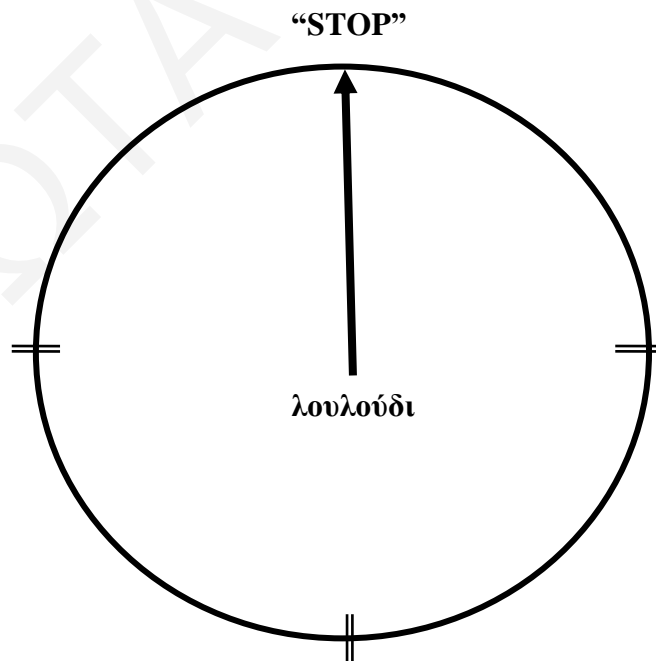


2.

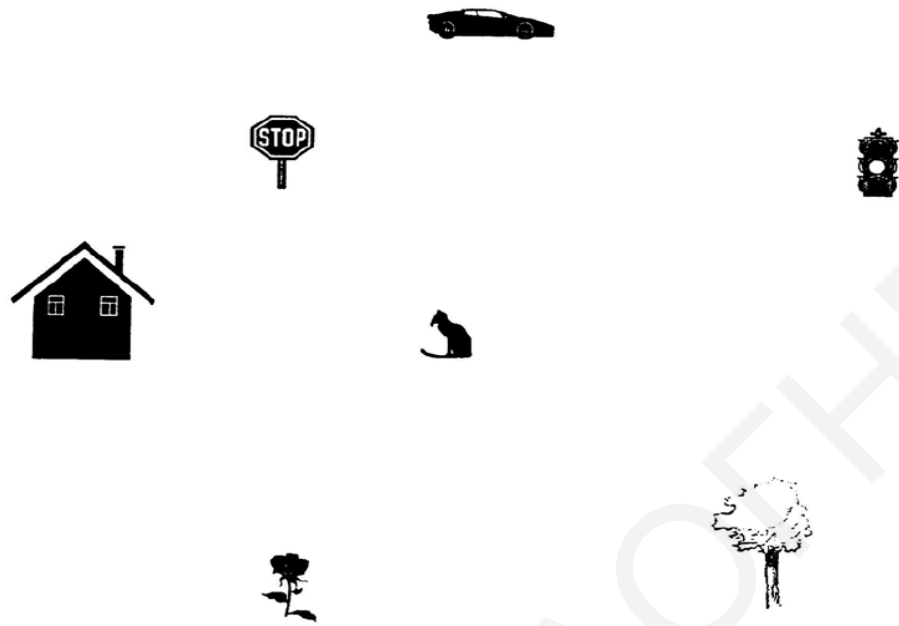


Να φανταστείς ότι βρίσκεσαι στη θέση του ΛΟΥΛΟΥΔΙΟΥ και κοιτάξεις προς τη του σήματος “STOP”.

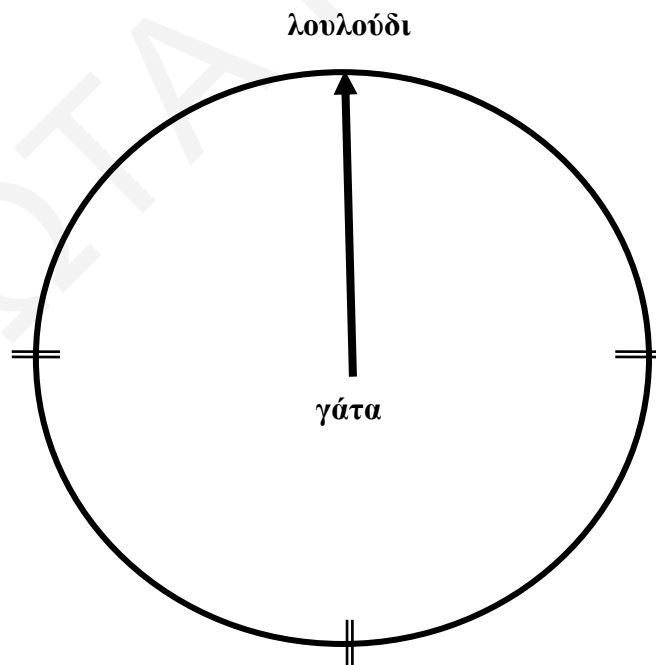
Να ΔΕΙΞΕΙΣ πιο κάτω τη θέση του ΔΕΝΤΡΟΥ, σχεδιάζοντας το κατάλληλο τόξο.



3.

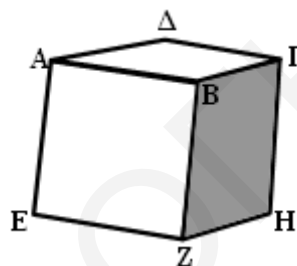
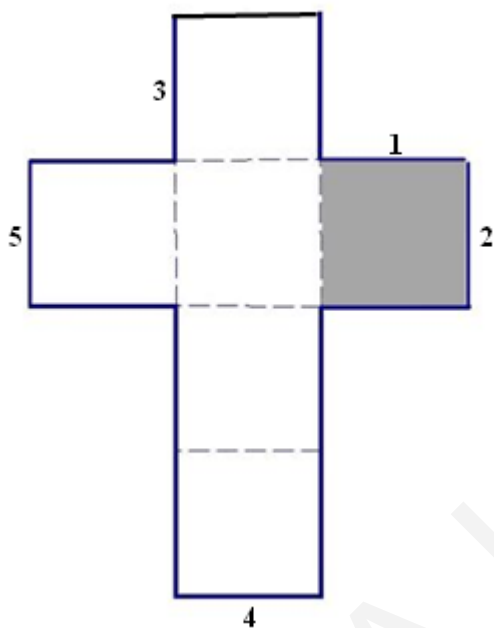


Να φανταστείς ότι βρίσκεσαι στη θέση της **ΓΑΤΑΣ** και κοιτάζεις προς το **ΛΟΥΛΟΥΔΙ**.
Να **ΔΕΙΞΕΙΣ** πιο κάτω τη θέση του **STOP**, σχεδιάζοντας το κατάλληλο τόξο.



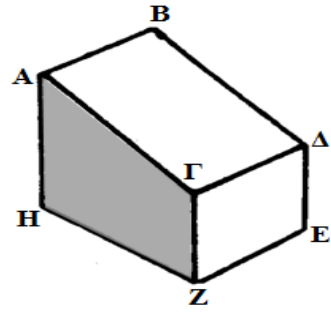
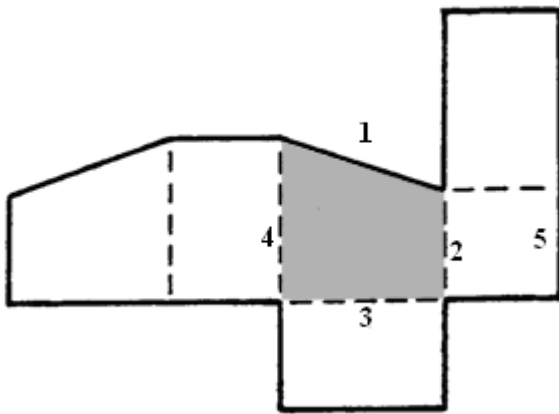
ΜΕΡΟΣ 7

Στο μέρος αυτό παρουσιάζεται στα αριστερά ένα κομμάτι χαρτόνι το οποίο θα διπλωθεί κατά μήκος των ΔΙΑΚΕΚΟΜΜΕΝΩΝ γραμμών για να σχηματιστεί το στερεό που υπάρχει στα δεξιά. Να σημειώσεις στον πίνακα την ΑΚΜΗ του στερεού που αντιστοιχεί στην αριθμημένη πλευρά του χαρτονιού.
Έχεις 5 λεπτά στη διάθεσή σου!



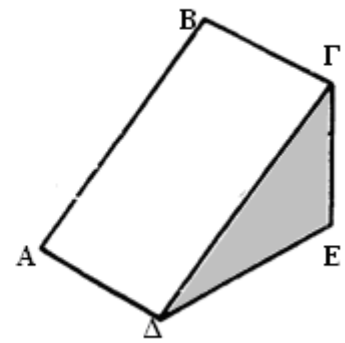
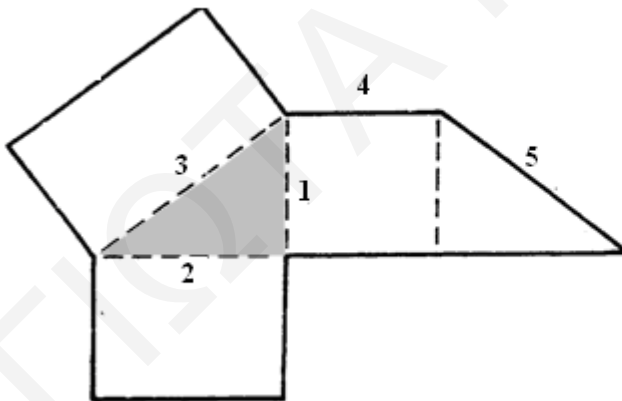
1	ΒΓ
2	ΓΗ
3	ΑΔ
4	ΔΓ
5	ΓΗ

1.



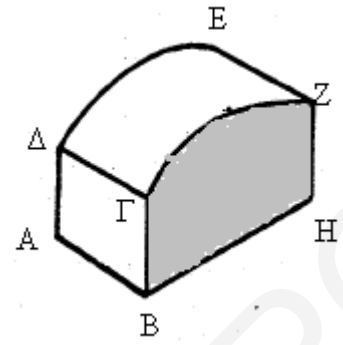
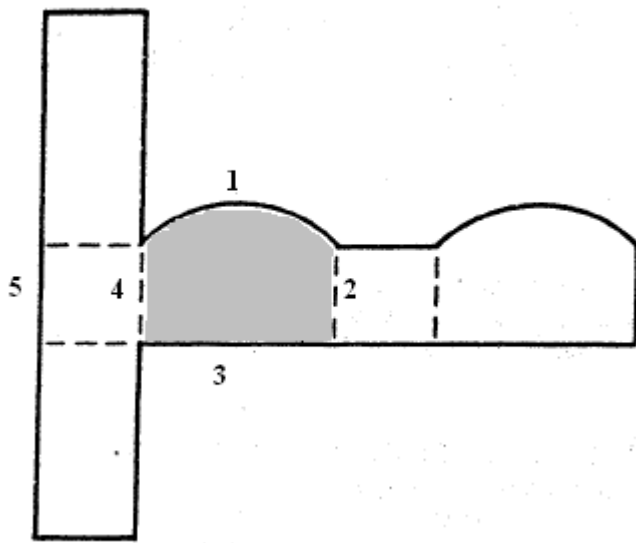
1	ΑΓ
2	
3	
4	
5	

2.



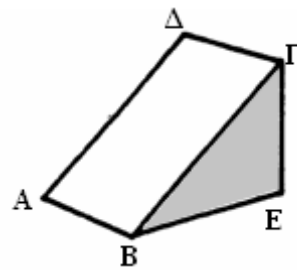
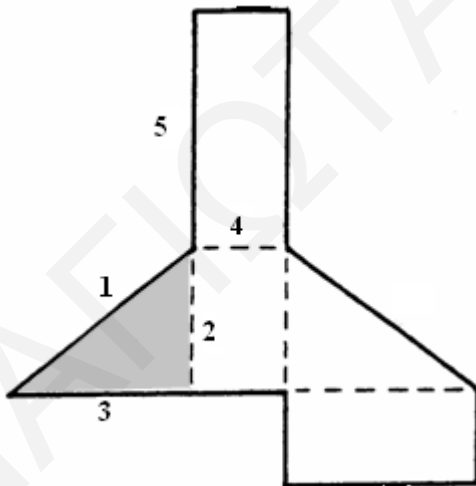
1	ΓΕ
2	
3	
4	
5	

3.



1	ΓZ
2	
3	
4	
5	

4.

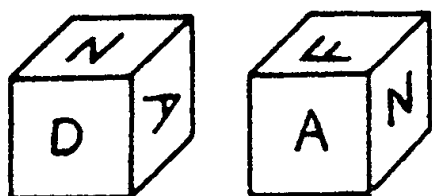


1	$B\Gamma$
2	
3	
4	
5	

ΜΕΡΟΣ 8

Στο μέρος αυτό δίνεται κάθε φορά ένα ζεύγος από κύβους με σύμβολα. Σε κάθε πλευρά υπάρχει ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΟ σύμβολο. Να αποφασίσεις κατά πόσο οι κύβοι μπορεί να είναι ΙΔΙΟΙ ή ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΟΙ. Οι κύβοι είναι ίδιοι αν ο ένας μπορεί να προκύψει από περιστροφή του άλλου.
Έχεις 5 λεπτά στη διάθεσή σου!

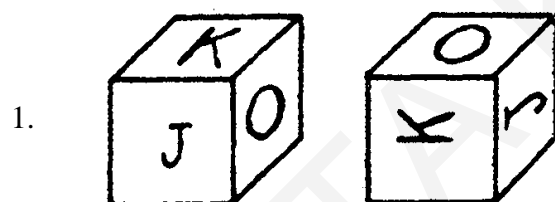
Παράδειγμα:



Ίδιοι

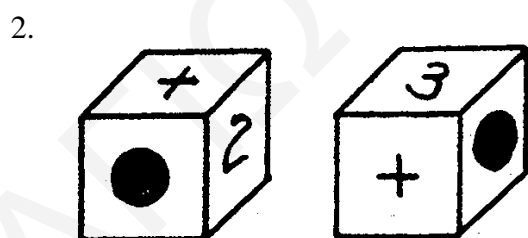
Διαφορετικοί

Στο παράδειγμα αυτό οι κύβοι είναι διαφορετικοί γιατί όταν περιστρέψουμε τον πρώτο κύβο προς τα αριστερά για να έχουμε το Α στην ίδια θέση που είναι στο δεύτερο κύβο, το Ν θα βρίσκεται στην αριστερή πλευρά του Α και όχι στη δεξιά του όπως εμφανίζεται στο δεύτερο κύβο.



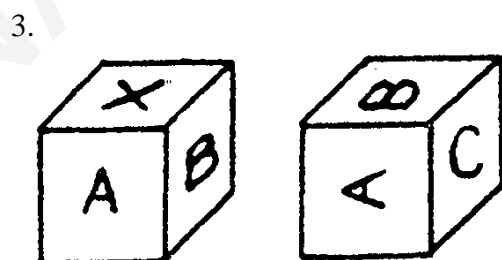
Ίδιοι

Διαφορετικοί



Ίδιοι

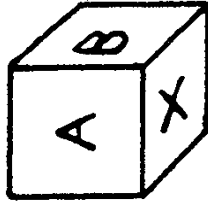
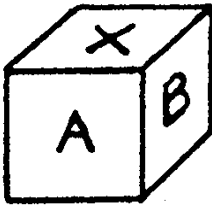
Διαφορετικοί



Ίδιοι

Διαφορετικοί

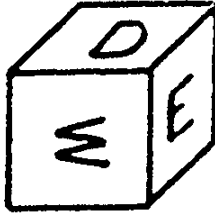
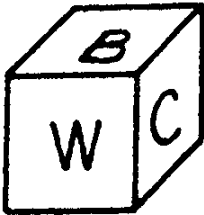
4.



Ίδιοι

Διαφορετικοί

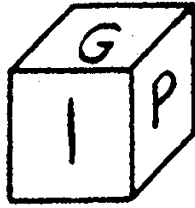
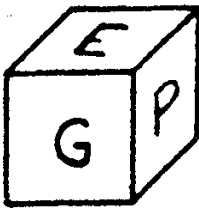
5.



Ίδιοι

Διαφορετικοί

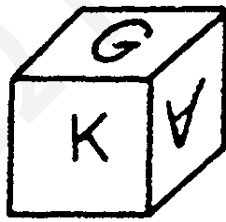
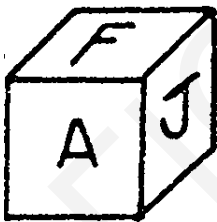
6.



Ίδιοι

Διαφορετικοί

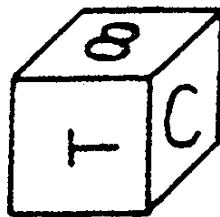
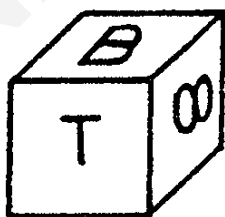
7.



Ίδιοι

Διαφορετικοί

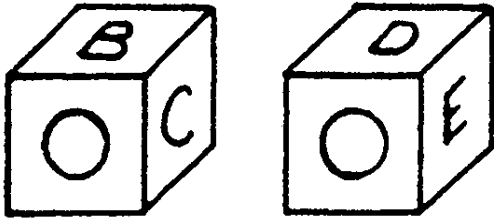
8.



Ίδιοι

Διαφορετικοί

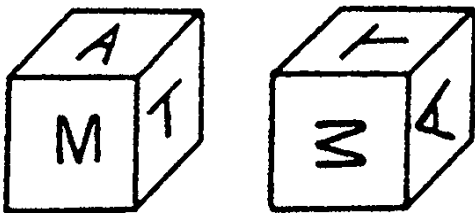
9.



Ίδιοι

Διαφορετικοί

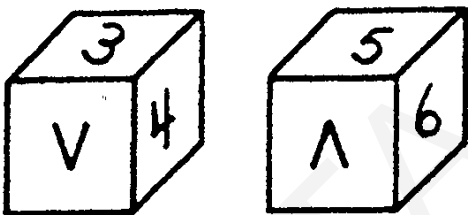
10.



Ίδιοι

Διαφορετικοί

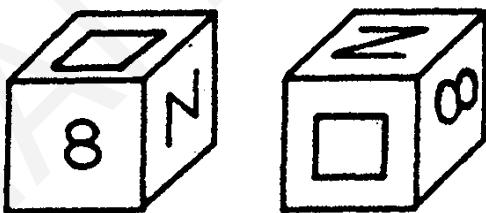
11.



Ίδιοι

Διαφορετικοί

12.



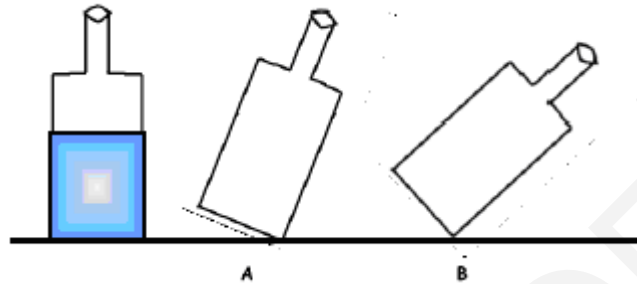
Ίδιοι

Διαφορετικοί

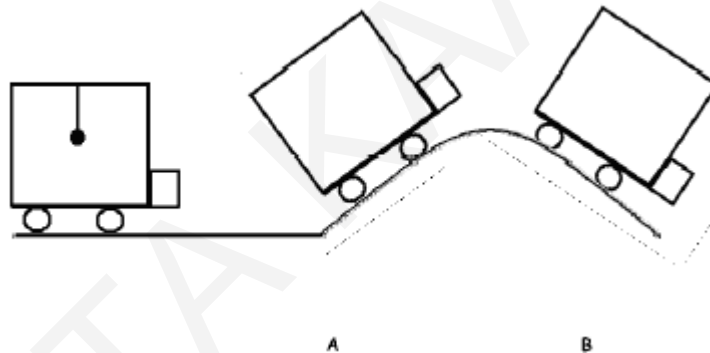
ΜΕΡΟΣ 9

1. Να ζωγραφίσεις πως θα φαίνεται το επίπεδο του νερού όταν το μπουκάλι γείρει από την όρθια θέση που βρίσκεται στις θέσεις A και B που φαίνονται πιο κάτω.

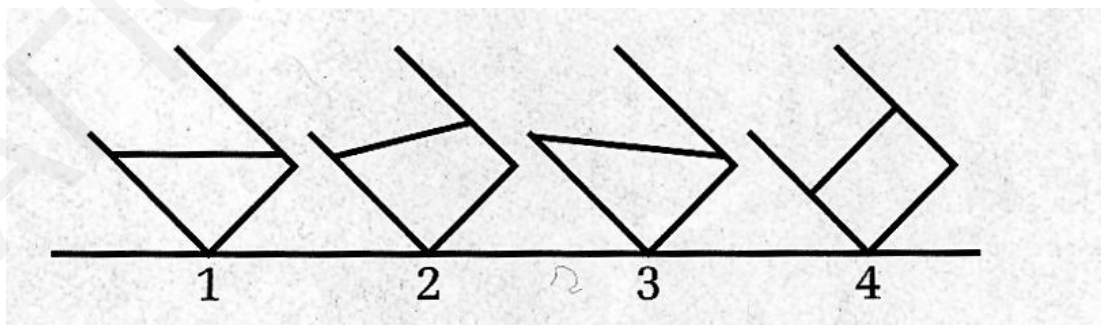
Έχεις 3 λεπτά στη διάθεσή σου!



2. Ένα νήμα με ένα βαρίδιο κρέμεται από την κορυφή του αυτοκινήτου, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Να ζωγραφίσεις πως θα φαίνεται το νήμα με το βαρίδιο στις δύο θέσεις πάνω στο λόφο.



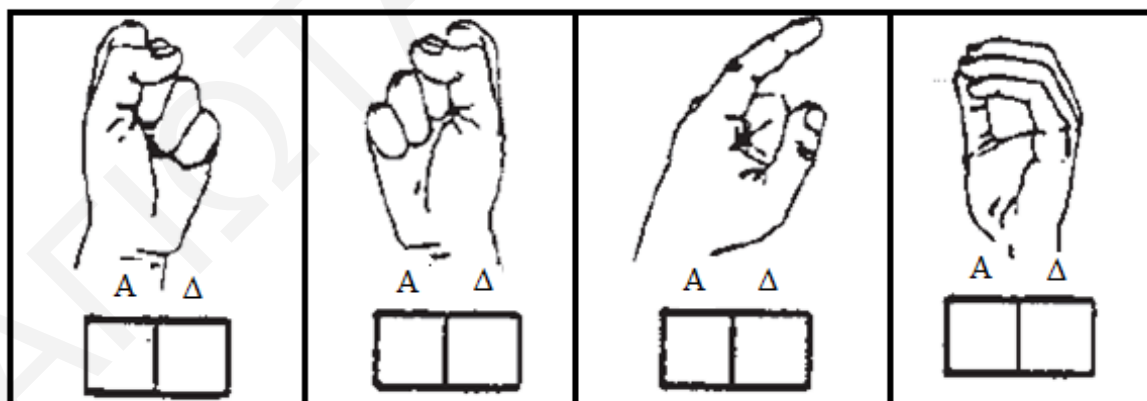
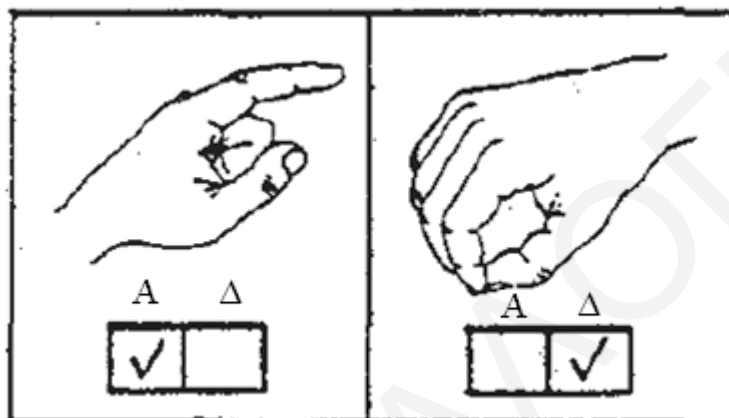
3. Πώς θα φαίνεται το νερό μέσα στο δοχείο όταν γείρει από την όρθια θέση που βρίσκεται; Να βάλεις σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

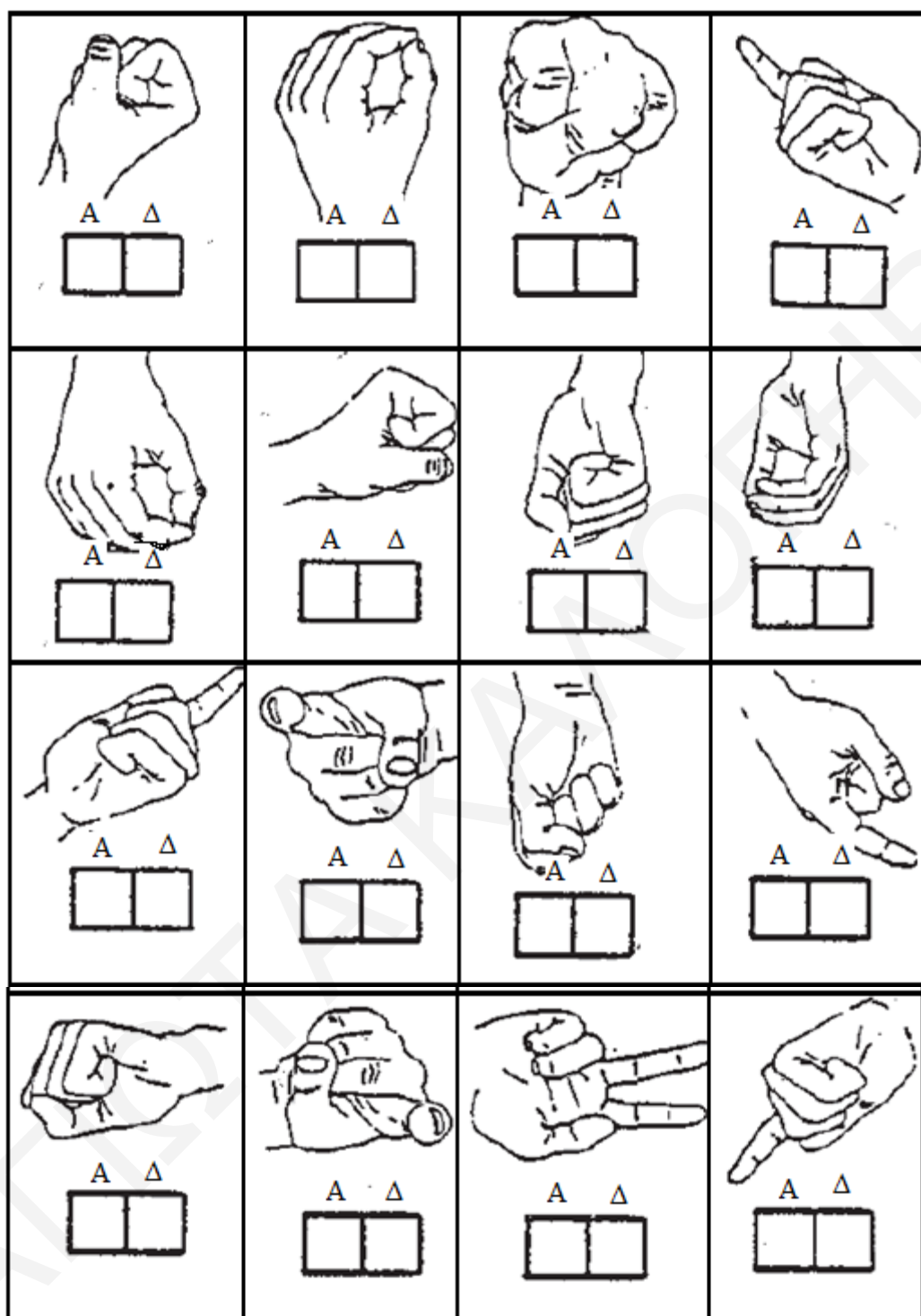


ΜΕΡΟΣ 10

Στο μέρος αυτό δίνονται εικόνες από χέρια. Κάποιες από αυτές τις εικόνες αναπαριστούν δεξί χέρι και κάποιες εικόνες αριστερό χέρι. Εάν η εικόνα αναπαριστά δεξί χέρι να σημειώσεις ✓ στο δεξί τετράγωνο, εάν αναπαριστά αριστερό χέρι να σημειώσεις ✓ στο αριστερό τετράγωνο.
Έχεις 3 λεπτά στη διάθεσή σου!

Παράδειγμα:





ΜΕΡΟΣ 11

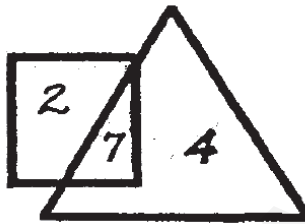
Στο μέρος αυτό δίνονται διάφορα μπλεγμένα σχήματα, με κάποιους αριθμούς μέσα σε αυτά. Να παρατηρήσεις προσεκτικά την κάθε εικόνα και να απαντήσεις στις ερωτήσεις που ακολουθούν.

Έχεις 5 λεπτά στη διάθεσή σου!

Παράδειγμα:

Στην πιο κάτω εικόνα, ποιος αριθμός είναι μέσα στο τετράγωνο, αλλά όχι μέσα στο τρίγωνο;

Απάντηση: το 2



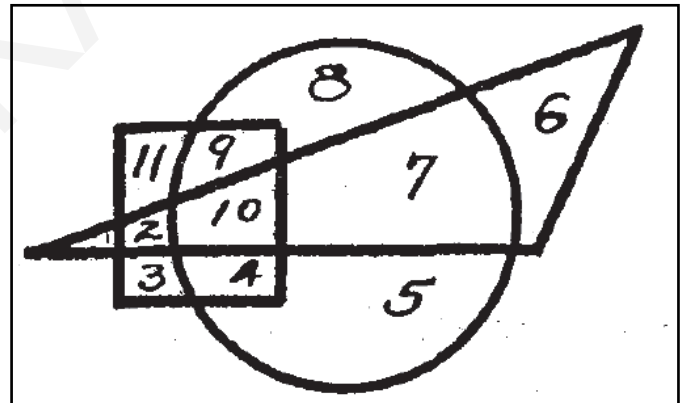
1. Στη διπλανή εικόνα:

- Ποιος αριθμός είναι μέσα και στα τρία σχήματα;

Απάντηση: _____

- Ποιος αριθμός είναι μέσα στο τρίγωνο και στο τετράγωνο, αλλά όχι στον κύκλο;

Απάντηση: _____



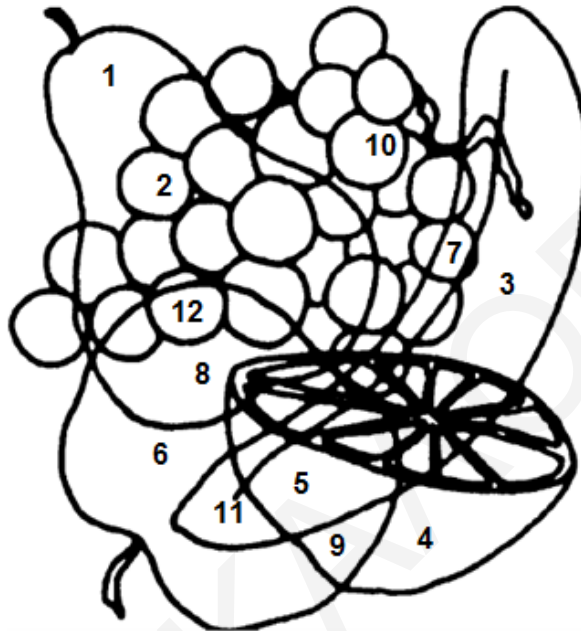
- Ποιο είναι το άθροισμα των αριθμών που είναι μέσα στο τετράγωνο, αλλά όχι στον κύκλο και το τρίγωνο;

Απάντηση: _____

- Ποια είναι η διαφορά του αθροίσματος των αριθμών που βρίσκονται μέσα στον κύκλο και όχι στο τρίγωνο και το τετράγωνο με τον αριθμό που βρίσκεται μέσα στο τρίγωνο και όχι μέσα στον κύκλο και το τετράγωνο;

Απάντηση: _____

2. Στην πιο κάτω εικόνα μπερδεύτηκαν ένα αχλάδι, μια μπανάνα, ένα μήλο, ένα λεμόνι και λίγο σταφύλι. Να παρατηρήσεις προσεκτικά την εικόνα και να απαντήσεις στις ερωτήσεις που ακολουθούν.



- Ποιος αριθμός βρίσκεται μόνο μέσα στο λεμόνι και στο μήλο;

Απάντηση: _____

- Ποιος αριθμός βρίσκεται μόνο μέσα στο μήλο, το λεμόνι και την μπανάνα και όχι στο σταφύλι και στο αχλάδι;

Απάντηση: _____

- Ποιος αριθμός βρίσκεται μόνο μέσα στο μήλο, το αχλάδι και το σταφύλι;

Απάντηση: _____

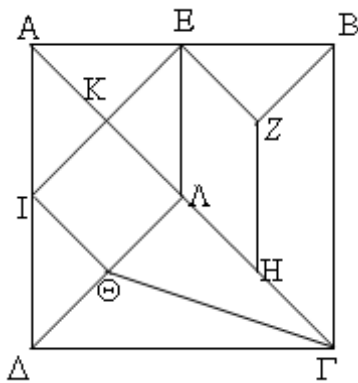
- Ποια η διαφορά του αριθμού που βρίσκεται μόνο μέσα στο σταφύλι και την μπανάνα με τον αριθμό που βρίσκεται μόνο μέσα στο σταφύλι και στο αχλάδι;

Απάντηση: _____

ΔΟΚΙΜΙΟ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Έχεις 20 λεπτά στη διάθεσή σου για αυτό το μέρος.

1. Να συμπληρώσεις τις παρακάτω φράσεις. Να χρησιμοποιήσεις τις λέξεις που νομίζεις ότι ταιριάζουν καλύτερα.

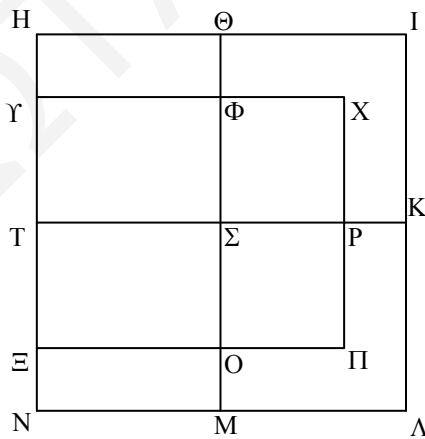


Το σχήμα ΙΚΛΘ είναι

Το σχήμα ΕΖΗΛ είναι

Το σχήμα ΛΓΘ είναι

2. Να μελετήσεις προσεκτικά το παρακάτω σχήμα.



A. Πόσα τετράγωνα βλέπεις στο σχήμα;

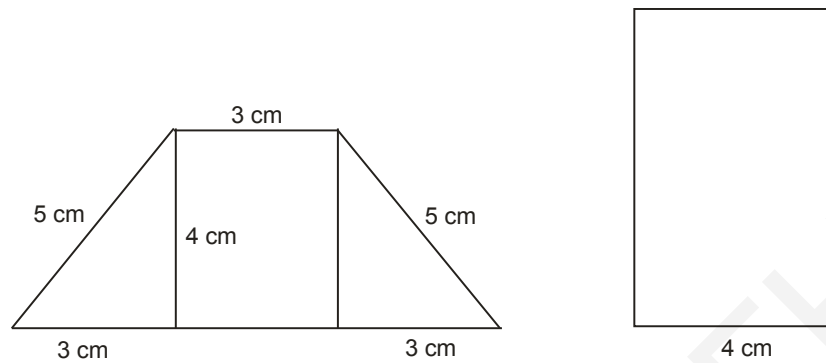
B. Να τα ονομάσεις:

.....

.....

.....

4. Το τραπέζιο και το ορθογώνιο έχουν το ίδιο εμβαδό. Να υπολογίσεις το μήκος της πλευράς του ορθογώνιου και να εξηγήσεις τον τρόπο που εργάστηκες.



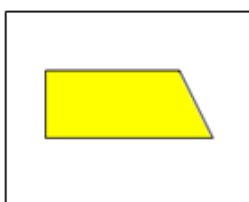
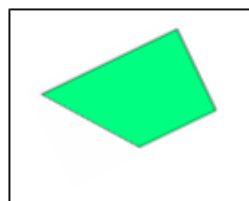
Το μήκος της πλευράς του ορθογώνιου είναι εκατοστά, γιατί.....

.....

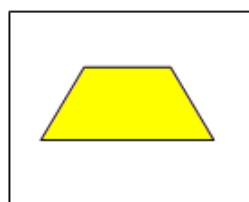
.....

.....

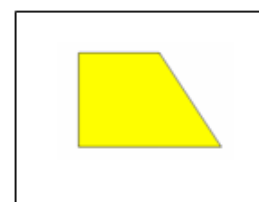
5. Η Μαρία πρέπει να ταιριάζει τις κάρτες που δείχνουν ίδια σχήματα. Να βάλεις σε κύκλο τον αριθμό της κάρτας που δείχνει ακριβώς το ίδιο σχήμα με την κάρτα της Μαρίας.



1

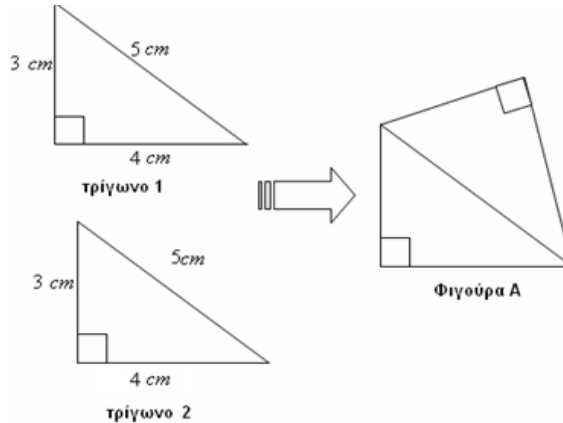


2



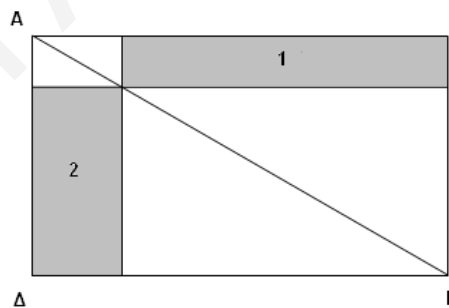
3

6. Ο Θεοδόσης ένωσε το τρίγωνο 1 και το τρίγωνο 2 με τον τρόπο που φαίνεται πιο κάτω και έφτιαξε τη φιγούρα Α. Να υπολογίσεις την περίμετρο της φιγούρας Α.



Η περίμετρος της φιγούρας Α είναι εκατοστά, γιατί.....

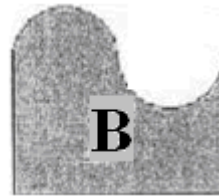
7. Το σχήμα ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. Να παρατηρήσεις τα σκιασμένα ορθογώνια 1 και 2. Να βάλεις σε κύκλο τη σωστή πρόταση και να αιτιολογήσεις την απάντησή σου.



- α. Το ορθογώνιο 1 έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από το ορθογώνιο 2,
- β. Το ορθογώνιο 1 έχει ίσο εμβαδόν με το ορθογώνιο 2,
- γ. Το ορθογώνιο 1 έχει μικρότερο εμβαδόν από το ορθογώνιο 2,

γιατί.....

8. Ένας βοσκός θέλει να βγάλει το κοπάδι του να βοσκήσει. Θέλει να βρει ένα χωράφι όπου να υπάρχει πολύ χορτάρι για τα πρόβατά του. Ο βοσκός δυσκολεύεται να διαλέξει μεταξύ του χωραφιού Α και Β. Να εισηγηθείς στο βοσκό ποιο χωράφι από τα δύο να επιλέξει, ώστε τα πρόβατά του να έχουν το περισσότερο χορτάρι και να εξηγήσεις την επιλογή σου.

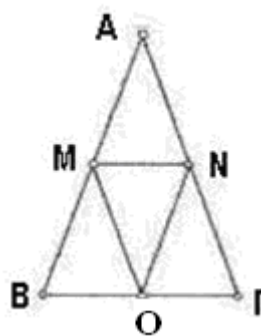


Ο βοσκός πρέπει να επιλέξει:

- α) Το Α
- β) Το Β
- γ) Έχουν και τα δύο το ίδιο χορτάρι

γιατί.....

9. Μέσα στο τρίγωνο ΑΒΓ υπάρχουν κρυμμένα 3 παραλληλόγραμμα και 1 τραπέζιο. Μπορείς να τα εντοπίσεις και να τα ονομάσεις;

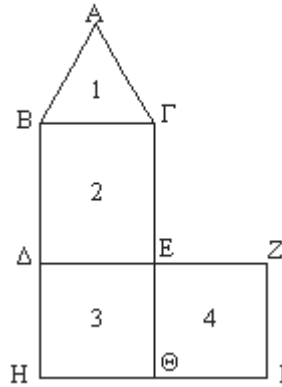


Παραλληλόγραμμα:

- 1.
- 2.
- 3.

Τραπέζιο:

10. Στην πιο κάτω εικόνα το σχήμα 1 είναι ισόπλευρο τρίγωνο, το σχήμα 2 είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και τα σχήματα 3 και 4 είναι τετράγωνα. Να συγκρίνεις τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΘΙ.



.....

.....

.....

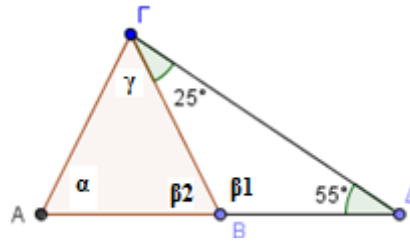
.....

.....

.....

.....

11. Στο πιο κάτω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($\Gamma A = \Gamma B$). Να υπολογίσεις τις γωνίες \hat{a} , $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ και $\hat{\gamma}$ και να εξηγήσεις τον τρόπο που εργάστηκες για να τις υπολογίσεις.



Η γωνία $\hat{\beta}_1$ είναι μοίρες,
 γιατί.....

Η γωνία $\hat{\beta}_2$ είναι μοίρες,
 γιατί.....

Η γωνία \hat{a} είναι μοίρες,
 γιατί.....

Η γωνία $\hat{\gamma}$ είναι μοίρες,
 γιατί.....

