ΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΙΚΑΝΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ ΤΗΣ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Συγκρίνοντας τη γεωμετρική σκέψη
μαθητών δημοτικής και μέσης εκπαίδευσης

Γεωργία Παναούρα

Υποβλήθηκε στο Τμήμα Επιστημών της Αγωγής
ως μέρος των υποχρεώσεων για απόκτηση
Διδακτορικού τίτλου
στη Μαθηματική Παιδεία,
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής
Πανεπιστήμιο Κύπρου
Απρίλιος, 2007

Η παρούσα διδακτορική διατριβή παρουσιάστηκε δημόσια σε πενταμελή εξεταστική επιτροπή και εγκρίθηκε στις 27 Απριλίου 2007.

Αποτελεί μέρος των υποχρεώσεων του Τμήματος Επιστημών της Αγωγής για απόκτηση διδακτορικού τίτλου στη Μαθηματική Παιδεία.

Ερευνητικός Σύμβουλος: Αθανάσιος Γαγάτσης, Καθηγητής,
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Συμβουλευτική Επιτροπή: Ανδρέας Δημητρίου, Καθηγητής,
Τμήμα Ψυχολογίας, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Λεωνίδας Κυριακίδης, Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

....

Αθανάσιος Γαγάτσης Ανδρέας Δημητρίου

....

Λεωνίδας Κυριακίδης

Εξεταστική Επιτροπή:

- Κωνσταντίνος Χρίστου (Πρόεδρος),
  Καθηγητής, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου
- Αθανάσιος Γαγάτσης,
  Καθηγητής, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου
- Ανδρέας Δημητρίου,
  Καθηγητής, Τμήμα Ψυχολογίας, Πανεπιστήμιο Κύπρου
- Λεωνίδας Κυριακίδης,
  Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου
- Χαράλαμπος Λεμονίδης,
  Καθηγητής, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης,
  Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

Στον Παντελή

τη Χριστίνα

και τον Αντρέα-Παναγιώτη

Στη μνήμη της μητέρας μου

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα τελευταία είκοσι χρόνια αρκετοί μαθηματικοί παιδαγωγοί έχουν διερευνήσει θέματα που αφορούν τη γεωμετρική σκέψη των μαθητών στα πλαίσια διάφορων θεωρητικών προσεγγίσεων που έχουν προταθεί. Παρά το μεγάλο αριθμό εργασιών που ασχολήθηκαν με το θέμα αυτό, απουσιάζουν τα μοντέλα δόμησης των γεωμετρικών ικανοτήτων που (α) να περιγράφουν τον τρόπο με τον οποίο οι μαθησιακές εμπειρίες των μαθητών στα θέματα γεωμετρίας που διδάσκονται στα πλαίσια της εκπαίδευσης αποκτούν δομή ή (β) να παρέχουν πληροφορίες για τη σχέση των ικανοτήτων αυτών με άλλες νοητικές ικανότητες.

Η παρούσα εργασία εξέτασε τις γεωμετρικές γνώσεις και ικανότητες μαθητών ηλικίας 10-14 χρόνων (Δ΄ και Στ΄ δημοτικού και Β΄ γυμνασίου) αναφορικά με το χειρισμό γεωμετρικών σχημάτων, καθώς και τις χωρικές τους ικανότητες στο μικρο-χώρο. Τα ερευνητικά ερωτήματα τέθηκαν με βάση τους ακόλουθους τρεις άξονες διερεύνησης:

1. Η δομή των γεωμετρικών ικανοτήτων των μαθητών ηλικίας 10-14 χρόνων σε θέματα χειρισμού διαφορετικών γεωμετρικών σχημάτων
2. Η σχέση χωρικής ικανότητας και γεωμετρικής ικανότητας των μαθητών
3. Η σύγκριση της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών δημοτικής και μέσης εκπαίδευσης

Με βάση την υπόθεση ότι η γεωμετρική ικανότητα χειρισμού έργων με διαφορετικά γεωμετρικά σχήματα είναι μια σύνθετη έννοια, διερευνήθηκαν οι επιμέρους συνιστώσες της. Κύρια συστατικά της ικανότητας αυτής, όπως προέκυψε από τις αναλύσεις των δομικών μοντέλων, είναι οι επιδόσεις των μαθητών στην επίλυση έργων που απαιτούσαν χειρισμό (α) γεωμετρικών σχημάτων δύο διαστάσεων, (β) γεωμετρικών σχημάτων τριών διαστάσεων και (γ) αναπτυγμάτων γεωμετρικών στερεών. Η παραπάνω δομή επιβεβαιώθηκε για τις τρεις ηλικιακές ομάδες της έρευνας. Επιπλέον, βρέθηκε ότι η επιμέρους δόμηση της ικανότητας χειρισμού τρισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων παραμένει αναλλοίωτη στις ηλικίες 10-14 χρόνων, ενώ διαφοροποιήσεις παρουσιάστηκαν στις σχέσεις ανάμεσα στα δύο άλλα συστατικά της γενικής γεωμετρικής ικανότητας, δηλαδή στην ικανότητα χειρισμού γεωμετρικών σχημάτων δύο διαστάσεων και στην ικανότητα χειρισμού αναπτυγμάτων γεωμετρικών στερεών.

Ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματα της εργασίας αφορά τη διαπίστωση ότι η χωρική ικανότητα αποτελεί σημαντικό δείκτη πρόβλεψης της ικανότητας χειρισμού γεωμετρικών έργων με διαφορετικά γεωμετρικά σχήματα. Από τις παλινδρομικές

αναλύσεις που πραγματοποιήθηκαν προέκυψε ότι οι συνιστώσες της χωρικής ικανότητας «χειρισμός νοητικών εικόνων», «νοητικές περιστροφές» και «συντονισμός των προοπτικών» αποτελούν δείκτες πρόβλεψης της επίδοσης των μαθητών σε έργα γεωμετρίας. Με τη διενέργεια αναλύσεων ομοιότητας και συνεπαγωγής διαπιστώθηκε το φαινόμενο της στεγανοποίησης στις απαντήσεις των μαθητών αναφορικά με τον τρόπο αντιμετώπισης έργων χωρικής ικανότητας και γεωμετρικών έργων με τρισδιάστατα σχήματα, δηλαδή διαφάνηκε ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν με διαφορετικό τρόπο τις δύο αυτές κατηγορίες έργων. Επιπλέον, διαπιστώθηκε μια διαβάθμιση με βάση την ηλικία των μαθητών ως προς την αντιμετώπιση έργων χειρισμού αναπτυγμάτων γεωμετρικών στερεών και χωρικών έργων. Συγκεκριμένα, ενώ οι μικρότεροι σε ηλικία μαθητές αντιμετώπισαν τα έργα χειρισμού αναπτυγμάτων με διαφορετικό τρόπο από τα χωρικά έργα, στην περίπτωση των μεγαλύτερων σε ηλικία μαθητών εντοπίστηκε αύξηση των συνδέσεων ανάμεσα στις δύο ομάδες έργων.

Ως προς τη διερεύνηση της ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης στο πλαίσιο της σύγκρισης μαθητών δημοτικής και μέσης εκπαίδευσης, διαφάνηκε ότι η αύξηση των μαθησιακών εμπειριών, κυρίως σε θέματα χειρισμού επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων, συνδέεται με βελτίωση της επίδοσης. Από τη σύγκριση του τρόπου χειρισμού και αντιμετώπισης των γεωμετρικών έργων ανάμεσα στις τρεις ομάδες μαθητών εντοπίστηκαν δυσκολίες και διδακτικά φαινόμενα που αφορούν τη μετάβαση των μαθητών από τη δημοτική στη μέση εκπαίδευση. Τα φαινόμενα αυτά αναφέρονται στη μετάβαση από το πλαίσιο της Εμπειρικής Γεωμετρίας (όπου τα αντικείμενα είναι υλικά) στο πλαίσιο της Εμπειρικής Αξιωματικής Γεωμετρίας (όπου τα αντικείμενα είναι θεωρητικά και η ύπαρξή τους απορρέει από αξιώματα και ορισμούς), στην ασυνέπεια του διδακτικού συμβολαίου που υφίσταται στη δημοτική και τη μέση εκπαίδευση, στη δυσκολία χειρισμού των γεωμετρικών αντικειμένων στο πλαίσιο γεωμετρική εικόνα-σχηματική έννοια και στην ισχύ του διδακτικού συμβολαίου κατά την εφαρμογή της Εμπειρικής Αξιωματικής Γεωμετρίας.

Οι δυσκολίες που έχουν επισημανθεί σε θέματα γεωμετρίας κατά τη σύγκριση μαθητών δημοτικής και μέσης εκπαίδευσης καταδεικνύουν ότι η διδασκαλία της γεωμετρίας θα πρέπει γενικά να στοχεύει συστηματικά στην ομαλή μετάβαση των μαθητών από το πλαίσιο της Εμπειρικής Γεωμετρίας στο πλαίσιο της Εμπειρικής Αξιωματικής Γεωμετρίας. Ειδικά στο εκπαιδευτικό πλαίσιο της Κύπρου υφίσταται η ανάγκη σχεδιασμού και εφαρμογής ενός αναλυτικού προγράμματος για τη γεωμετρία, το οποίο θα υποβοηθά τους μαθητές να συνδέουν την άμεση αντίληψη και τη γεωμετρική τους διαίσθηση με τις απαιτήσεις του επαγωγικού συλλογισμού, ώστε να μεταβαίνουν ομαλά από την αντίληψη των γεωμετρικών αντικειμένων ως εικόνων στη χρήση γεωμετρικών ιδιοτήτων και την εφαρμογή θεωρημάτων. Στα πλαίσια ενός τέτοιου αναλυτικού προγράμματος θα πρέπει επίσης οι αναπτυσσόμενες χωρικές ικανότητες των παιδιών να συνδέονται με τις αναπτυσσόμενες γεωμετρικές τους ικανότητες.

ABSTRACT

During the past twenty years several mathematics educators, based on different theoretical frames, have investigated students' geometrical reasoning. Although there are many studies on different aspects of geometrical reasoning, there is lack of structural models (a) describing the way students' experiences arising from geometry teaching at school are built into meaningful structures or (b) providing information about the relationship between geometrical abilities and other cognitive abilities.

The present study examined primary (grades 4 and 6) and secondary (grade 8) students' geometrical knowledge and abilities related to tasks involving different geometrical figures, as well as their spatial abilities in micro-space. The research questions are based on the following three main subjects:

1. The structure of students' (age 10-14 years old) geometrical abilities referring to tasks involving different geometrical figures.
2. The relationship between students' spatial and geometrical abilities.
3. Comparing the geometrical reasoning of primary and secondary school students.

Based on the assumption that students' ability to solve tasks involving different geometrical figures is not a unitary construct, we developed a model to investigate its subcomponents. Confirmatory factor analysis affirmed the existence of three constructs of this geometrical ability: (a) the students' ability to work with tasks involving 2D geometrical figures, (b) the ability to work with tasks involving 3D geometrical figures and (c) the ability to work with net-representations of 3D geometrical figures. Multiple group analysis results supported the invariance of this structure across the three age groups of students.

Results revealed that students' spatial ability constitutes a strong predictor of their geometry ability concerning tasks involving different geometrical figures. Regression analyses results suggest that image manipulation, mental rotation and coordination of perspectives are predicting factors of primary and secondary students' geometry performance. The similarity analysis provided evidence that students of all three age groups generally confronted spatial abilities tasks and geometry tasks involving 2D and 3D figures in a different way. The way students have confronted spatial ability tasks in relation to the geometry tasks involving net-representations of geometrical solids differentiated in relation with their age. More specifically, in the case of 4^{th} graders, tasks involving nets of solids were confronted in a different way that the spatial ability items. But in the case of 6^{th}

graders and more clearly in the case of 8th graders the involvement of spatial ability tasks in the same clusters with net-representations items provided evidence that the older students realize to a bigger extent that the same cognitive processes underlie spatial abilities and manipulating net-representations of 3D figures.

Comparing the geometrical reasoning of primary and secondary school students was mainly based on the way students confronted and solved different geometrical tasks, the strategies they used and the common errors appearing during the solution procedure. This comparison shed light to students’ difficulties and phenomena related to the transition from Natural Geometry (the objects of this paradigm of geometry are material objects) to Natural Axiomatic Geometry (definitions and axioms are necessary to create the objects in this paradigm of geometry) and to the inconsistency of the didactical contract implied in primary and secondary education. These findings stress the need for helping students progressively pass from a geometry where objects and their properties are controlled by perception to a geometry where they are controlled by explicitation of properties.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η εκπόνηση μιας διδακτορικής διατριβής είναι μια πνευματική αναζήτηση που απαιτεί χρόνο και κόπο. Με την ολοκλήρωση της παρούσας διατριβής αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω όλους όσοι συνέβαλαν στη διεκπεραίωσή της.

Η εμπλοκή μου με το θέμα της γεωμετρίας σε ερευνητικό επίπεδο οφείλεται στον καθηγητή Αθανάσιο Γαγάτση, ο οποίος, ως ερευνητικός μου σύμβουλος, συνέβαλε στην αποσαφήνιση των ερευνητικών μου αναζητήσεων, καθοδηγώντας με στο γοητευτικό κόσμο της γεωμετρικής σκέψης. Το άρτιο θεωρητικό του υπόβαθρο και η ερευνητική του εμπειρία σε συνδυασμό με τις εύστοχες παρατηρήσεις καθόλη τη διάρκεια της εκπόνησης της διατριβής συνέβαλαν με τρόπο ουσιαστικό στην υπέρβαση των δυσκολιών που μια τέτοια διαδικασία συνεπάγεται. Εκφράζω τις θερμές μου ευχαριστίες για τη βοήθεια, τη στήριξη και την καθοδήγηση.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες εκφράζω στον καθηγητή Ανδρέα Δημητρίου για την προθυμία που επέδειξε να βοηθήσει σε κάθε ερευνητικό στάδιο, παρά το ήδη βαρυφορτωμένο ακαδημαϊκό του πρόγραμμα. Η συμβολή του υπήρξε καθοριστική στο στάδιο του σχεδιασμού της όλης ερευνητικής προσπάθειας, ενώ οι κριτικές του παρατηρήσεις στη συνέχεια ήταν πολύτιμες.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επίκουρο καθηγητή Λεωνίδα Κυριακίδη, ο οποίος διέθεσε αρκετό από το χρόνο του στο στάδιο της επεξεργασίας και ανάλυσης των αποτελεσμάτων της έρευνας. Οι εισηγήσεις και οι επισημάνσεις του ήταν ιδιαίτερα υποβοηθητικές.

Επιθυμώ να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στον καθηγητή Κωνσταντίνο Χρίστου, ο οποίος με τις εύστοχες παρατηρήσεις του συνέβαλε στη διαμόρφωση του τελικού κειμένου της διατριβής. Ευχαριστίες εκφράζω και στον καθηγητή Χαράλαμπο Λεμονίδη για την προθυμία του να συζητήσει θέματα που αφορούσαν το θεωρητικό υπόβαθρο της εργασίας.

Η υλοποίηση του ερευνητικού σχεδίου στηρίζεται αποκλειστικά στους διευθυντές των σχολείων και τους εκπαιδευτικούς που με προθυμία παραχώρησαν μέρος του διδακτικού τους χρόνου για τη χορήγηση των δοκιμίων στους μαθητές τους. Εκφράζω τις θερμές μου ευχαριστίες στον καθένα ξεχωριστά.

Το μεγαλύτερο ευχαριστώ ανήκει βεβαίως στην οικογένειά μου. Στο σύζυγό μου Παντελή, που πάντοτε με στηρίζει και φρόντισε να διασφαλίσει ένα ισορροπημένο περιβάλλον ώστε να είναι εφικτή η ολοκλήρωση αυτής της εργασίας. Στα δύο παιδιά μας, τη Χριστίνα και τον Αντρέα-Παναγιώτη, που με έμαθαν να βλέπω τον κόσμο μέσα από τα δικά τους μάτια και να τον ζω μαζί τους μέσα από τη δική τους ματιά. Στους γονείς μου, δυο απλούς ανθρώπους που έδωσαν πάρα πολλά για τη μόρφωση και την καλλιέργεια των παιδιών τους. Στην αδελφή μου για τη στήριξη και τη βοήθεια καθόλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών μου. Στους γονείς του συζύγου μου, που είναι κοντά μας, πάντα με αγάπη.

Ένα θερμό ΕΥΧΑΡΙΣΤΩ σε όλους.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σελίδα

Κατάλογος Πινάκων i

Κατάλογος Διαγραμμάτων iii

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΡΕΥΝΑ

Εισαγωγή 1

Το πρόβλημα και ο σκοπός της έρευνας 6

Σημασία του θέματος 9

Περιορισμοί της έρευνας 11

Ορολογία 12

Δομή της εργασίας 13

Ανακεφαλαίωση 14

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Εισαγωγή 15

Η ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης 16

Τα επίπεδα για τη γεωμετρία στα προγράμματα μαθηματικών 32

Ερευνητικές προσπάθειες που αφορούν γεωμετρικά σχήματα 35

Χωρική ικανότητα και γεωμετρία 54

Ορισμοί της χωρικής ικανότητας 56

Χωρική ικανότητα και μαθηματικά 60

Ανακεφαλαίωση 63

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Εισαγωγή 65

Δείγμα 65

Διαδικασία 66

Βαθμολόγηση των έργων 74

Εγκυρότητα γνωρίσματος των δύο οργάνων μέτρησης 75

Μέθοδοι ανάλυσης των δεδομένων 82

Ανακεφαλαίωση 84

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Εισαγωγή 86

Η δομή των ικανοτήτων των μαθητών αναφορικά με το χειρισμό έργων με γεωμετρικά σχήματα 87

Διερεύνηση της σχέσης χωρικών ικανοτήτων των μαθητών και επίδοσης στα γεωμετρικά έργα 109

Σύγκριση μαθητών δημοτικού και γυμνασίου ως προς την επίδοση και την αντιμετώπιση των γεωμετρικών έργων 141

Ανακεφαλαίωση 191

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Εισαγωγή 193

Η δομή του συστήματος των γεωμετρικών ικανοτήτων σε θέματα χειρισμού διαφορετικών γεωμετρικών σχημάτων 194

Η σχέση χωρικών ικανοτήτων και γεωμετρικής ικανότητας αναφορικά με το χειρισμό γεωμετρικών σχημάτων 198

Σύγκριση της γεωμετρικής σκέψης μαθητών δημοτικής και μέσης εκπαίδευσης 201

Εισηγήσεις για περαιτέρω έρευνα 205

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

		Σελίδα
1	Κατανομή των έργων των δύο οργάνων μέτρησης σε δύο χορηγήσεις	67
2	Στατιστικά στοιχεία για τις κλίμακες των γεωμετρικών έργων (L=75) και των ικανοτήτων των μαθητών (N=1000)	79
3	Στατιστικά στοιχεία για τις κλίμακες των χωρικών έργων (L=14) και των ικανοτήτων των μαθητών (N=1000)	80
4	Οι τιμές των δεικτών προσαρμογής των μοντέλων για τη δομή της ικανότητας χειρισμού γεωμετρικών έργων με διαφορετικά γεωμετρικά σχήματα για το σύνολο των μαθητών	97
5	Οι τιμές των δεικτών προσαρμογής των μοντέλων για τη δομή της ικανότητας χειρισμού γεωμετρικών έργων με διαφορετικά γεωμετρικά σχήματα για τις τρεις ηλικιακές ομάδες (Δ΄ και Στ΄ Δημοτικού και Β΄ Γυμνασίου)	100
6	Ομαδοποίηση έργων γεωμετρίας σε πέντε επίπεδα με τιμές μοντέλου Rasch	105
7	Κατανομή μαθητών (ποσοστά %) ανά τάξη σε επίπεδα χωρικής ικανότητας	111
8	Κατανομή μαθητών (ποσοστά %) ανά τάξη σε επίπεδα γεωμετρικής ικανότητας	112
9	Πίνακας διασταυρούμενης συχνότητας των μαθητών που κατανεμήθηκαν στα υψηλά επίπεδα γεωμετρικής ικανότητας με τους μαθητές που κατανεμήθηκαν στα επίπεδα χωρικής ικανότητας 3-5	113
10	Πίνακας διασταυρούμενης συχνότητας των μαθητών που κατανεμήθηκαν στα υψηλά επίπεδα χωρικής ικανότητας με τους μαθητές που κατανεμήθηκαν στα επίπεδα γεωμετρικής ικανότητας 3-5	114
11	Ανάλυση πολλαπλής παλινδρόμησης για τις μεταβλητές που προβλέπουν την επίδοση στα έργα γεωμετρίας	115
12	Αναλύσεις πολλαπλής παλινδρόμησης για τις συνιστώσες χωρικής ικανότητας που προβλέπουν την επίδοση στα έργα γεωμετρίας κατά τάξη	116
13	Ανάλυση διασποράς της επίλυσης των γεωμετρικών έργων χειρισμού τρισδιάστατων σχημάτων με ανεξάρτητη μεταβλητή την τάξη στην οποία φοιτούσαν οι μαθητές	143

14	Ανάλυση διασποράς της επίλυσης των γεωμετρικών έργων χειρισμού δισδιάστατων σχημάτων με ανεξάρτητη μεταβλητή την τάξη στην οποία φοιτούσαν οι μαθητές	144
15	Ανάλυση διασποράς της επίλυσης των γεωμετρικών έργων χειρισμού αναπτυγμάτων στερεών με ανεξάρτητη μεταβλητή την τάξη στην οποία φοιτούσαν οι μαθητές	146
16	Ποσοστά επιτυχίας για τα έργα εύρεσης εμβαδού κατά τάξη	147
17	Ποσοστά επιτυχίας για τα έργα αναγνώρισης σχημάτων δύο διαστάσεων κατά τάξη	149
18	Ποσοστά επιτυχίας για έργα με σχήματα δύο διαστάσεων που απαιτούν γεωμετρικό συλλογισμό κατά τάξη	152
19	Ποσοστά επιτυχίας για τα έργα αναγνώρισης αναπαραστάσεων τρισδιάστατων σχημάτων κατά τάξη	153
20	Ποσοστά επιτυχίας για τα έργα που αφορούν τις έδρες γεωμετρικών στερεών κατά τάξη	153
21	Ποσοστά επιτυχίας για τα έργα αναφοράς της ονομασίας Γεωμετρικών στερεών και για το έργο κατασκευής στερεού από Κυβικές Μονάδες κατά τάξη	154
22	Ποσοστά επιτυχίας για τα έργα αναγνώρισης αναπτυγμάτων γεωμετρικών στερεών κατά τάξη	155
23	Ποσοστά επιτυχίας για έργα ειδικά για αναπτύγματα κύβου κατά τάξη	157
24	Ποσοστά επιτυχίας για τα έργα πολλαπλής επιλογής κατά τάξη	158
25	Ποσοστά επιτυχίας στα έργα Α7.2Δ, Α6.2Δ και Β9.2Δ ανά τάξη	159
26	Ποσοστά αποτυχίας στα έργα Α6.2Δ και Β9.2Δ κατά τάξη	161
27	Ποσοστά αποτυχίας στο έργο Α5.2Δ κατά τάξη	163
28	Ποσοστά αποτυχίας στο έργο Β16.2Δ κατά τάξη	164

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

		Σελίδα
1	Κλίμακα μέτρησης των ικανοτήτων χειρισμού έργων με γεωμετρικά σχήματα	78
2	Κλίμακα μέτρησης χωρικών ικανοτήτων	81
3	Προτεινόμενο μοντέλο δόμησης της ικανότητας χειρισμού έργων γεωμετρικά σχήματα.	94
4	Μοντέλο δόμησης της ικανότητας χειρισμού έργων με διαφορετικά γεωμετρικά σχήματα για το σύνολο των μαθητών	98
5	Μοντέλο δόμησης της ικανότητας χειρισμού έργων με διαφορετικά γεωμετρικά σχήματα για τις τρεις ηλικιακές ομάδες	102
6	Προτεινόμενο δομικό παλινδρομικό μοντέλο για τη σχέση ανάμεσα στη γενική γεωμετρική ικανότητα χειρισμού έργων με γεωμετρικά σχήματα και τη γενική χωρική ικανότητα	118
7	Δομικό παλινδρομικό μοντέλο για τη σχέση ανάμεσα στη γενική γεωμετρική ικανότητα χειρισμού έργων με γεωμετρικά σχήματα και τη γενική χωρική ικανότητα	119
8	Διάγραμμα ομοιότητας για έργα χωρικής ικανότητας και έργα που αφορούν γεωμετρικά σχήματα δύο διαστάσεων (Δ΄ δημοτικού)	121
9	Διάγραμμα ομοιότητας για έργα χωρικής ικανότητας και έργα που αφορούν γεωμετρικά σχήματα δύο διαστάσεων (Στ΄ δημοτικού)	122
10	Διάγραμμα ομοιότητας για έργα χωρικής ικανότητας και έργα που αφορούν γεωμετρικά σχήματα δύο διαστάσεων (Β΄ γυμνασίου)	123
11	Διάγραμμα ομοιότητας για έργα χωρικής ικανότητας και έργα που αφορούν γεωμετρικά σχήματα τριών διαστάσεων (Δ΄ δημοτικού)	125
12	Διάγραμμα ομοιότητας για έργα χωρικής ικανότητας και έργα που αφορούν γεωμετρικά σχήματα τριών διαστάσεων (Στ΄ δημοτικού)	126
13	Διάγραμμα ομοιότητας για έργα χωρικής ικανότητας και έργα που αφορούν γεωμετρικά σχήματα τριών διαστάσεων (Β΄ γυμνασίου)	126
14	Διάγραμμα ομοιότητας για έργα χωρικής ικανότητας και έργα που αφορούν αναπτύγματα στερεών (Δ΄ δημοτικού)	127
15	Διάγραμμα ομοιότητας για έργα χωρικής ικανότητας και έργα που αφορούν αναπτύγματα στερεών (Στ΄ δημοτικού)	128

16	Διάγραμμα ομοιότητας για έργα χωρικής ικανότητας και έργα που αφορούν αναπτύγματα στερεών (Β΄ γυμνασίου)	129
17	Συνεπαγωγικό διάγραμμα για έργα που αφορούν χωρική ικανότητα και έργα με γεωμετρικά σχήματα δύο διαστάσεων (Δ΄ δημοτικού)	132
18	Συνεπαγωγικό διάγραμμα για έργα που αφορούν χωρική ικανότητα και έργα με γεωμετρικά σχήματα δύο διαστάσεων (Β΄ γυμνασίου)	133
19	Συνεπαγωγικό διάγραμμα για έργα που αφορούν χωρική ικανότητα και έργα με γεωμετρικά σχήματα δύο διαστάσεων (Στ΄ δημοτικού)	133
20	Συνεπαγωγικό διάγραμμα για έργα που αφορούν χωρική ικανότητα και έργα με γεωμετρικά σχήματα τριών διαστάσεων (Δ΄ δημοτικού)	135
21	Συνεπαγωγικό διάγραμμα για έργα που αφορούν χωρική ικανότητα και έργα με γεωμετρικά σχήματα τριών διαστάσεων (Στ΄ δημοτικού)	136
22	Συνεπαγωγικό διάγραμμα για έργα που αφορούν χωρική ικανότητα και έργα με γεωμετρικά σχήματα τριών διαστάσεων (Β΄ γυμνασίου)	137
23	Συνεπαγωγικό διάγραμμα για έργα που αφορούν χωρική ικανότητα και έργα με αναπτύγματα στερεών (Δ΄ δημοτικού)	138
24	Συνεπαγωγικό διάγραμμα για έργα που αφορούν χωρική ικανότητα και έργα με αναπτύγματα στερεών (Στ΄ δημοτικού)	139
25	Συνεπαγωγικό διάγραμμα για έργα που αφορούν χωρική ικανότητα και έργα με αναπτύγματα στερεών (Β΄ γυμνασίου)	140
26	Διάγραμμα ομοιότητας για το σύνολο των γεωμετρικών έργων (Δ΄ δημοτικού)	168
27	Διάγραμμα ομοιότητας για το σύνολο των γεωμετρικών έργων (Στ΄ δημοτικού)	169
28	Διάγραμμα ομοιότητας για το σύνολο των γεωμετρικών έργων (Β΄ γυμνασίου)	170
29	Διάγραμμα ομοιότητας για έργα που αφορούν επίπεδα σχήματα (Δ΄ δημοτικού)	171
30	Διάγραμμα ομοιότητας για έργα που αφορούν επίπεδα σχήματα (Στ΄ δημοτικού)	172

31 Διάγραμμα ομοιότητας για έργα που αφορούν επίπεδα σχήματα (Β΄ γυμνασίου) 173

32 Διάγραμμα ομοιότητας για έργα που αφορούν τρισδιάστατα σχήματα (Δ΄ δημοτικού) 175

33 Διάγραμμα ομοιότητας για έργα που αφορούν τρισδιάστατα σχήματα (Στ΄ δημοτικού) 176

34 Διάγραμμα ομοιότητας για έργα που αφορούν τρισδιάστατα σχήματα (Β΄ γυμνασίου) 177

35 Διάγραμμα ομοιότητας για έργα που αφορούν αναπτύγματα στερεών (Δ΄ δημοτικού) 179

36 Διάγραμμα ομοιότητας για έργα που αφορούν αναπτύγματα στερεών (Στ΄ δημοτικού) 180

37 Διάγραμμα ομοιότητας για έργα που αφορούν αναπτύγματα στερεών (Β΄ γυμνασίου) 180

38 Συνεπαγωγικό διάγραμμα για έργα που αφορούν γεωμετρικά σχήματα δύο διαστάσεων (Δ΄ δημοτικού) 182

39 Συνεπαγωγικό διάγραμμα για έργα που αφορούν γεωμετρικά σχήματα δύο διαστάσεων (Στ΄ δημοτικού) 183

40 Συνεπαγωγικό διάγραμμα για έργα που αφορούν γεωμετρικά σχήματα δύο διαστάσεων (Β΄ γυμνασίου) 184

41 Συνεπαγωγικό διάγραμμα για έργα που αφορούν σχήματα τριών διαστάσεων (Δ΄ δημοτικού) 186

42 Συνεπαγωγικό διάγραμμα για έργα που αφορούν σχήματα τριών διαστάσεων (Στ΄ δημοτικού) 188

43 Συνεπαγωγικό διάγραμμα για έργα που αφορούν σχήματα τριών διαστάσεων (Β΄ γυμνασίου) 189

44 Συνεπαγωγικό διάγραμμα για έργα που αφορούν χειρισμό αναπτυγμάτων γεωμετρικών στερεών (Δ΄ δημοτικού) 190

45 Συνεπαγωγικό διάγραμμα για έργα που αφορούν χειρισμό αναπτυγμάτων γεωμετρικών στερεών (Στ΄ δημοτικού) 190

46 Συνεπαγωγικό διάγραμμα για έργα που αφορούν χειρισμό αναπτυγμάτων γεωμετρικών στερεών (Β΄ γυμνασίου) 191

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΡΕΥΝΑ

Εισαγωγή

Η γεωμετρία συχνά χαρακτηρίζεται ως «τα μαθηματικά του χώρου» και θεωρείται ένας τρόπος σύνδεσης των μαθηματικών με τον πραγματικό κόσμο (Bishop, 1983; Clements, 1998). Τα σύγχρονα προγράμματα των μαθηματικών τονίζουν τη σπουδαιότητα της γεωμετρίας τόσο ως αυτόνομου θέματος όσο και ως μέσου για την ανάπτυξη άλλων μαθηματικών εννοιών (NCTM, 2000). Στο πλαίσιο της διδασκαλίας της γεωμετρίας οι εκπαιδευτικοί στοχεύουν να βοηθήσουν τους μαθητές να αποκτήσουν γνώσεις και δεξιότητες σε σχέση με τη μαθηματική ερμηνεία του περιβάλλοντος (Bishop, 1983). Όπως υποστηρίζει ο Duval (1998), η ενασχόληση με τη γεωμετρία συμβάλλει στην ανάπτυξη διαφόρων ειδών σκέψης. Συγκεκριμένα, το περιεχόμενο της γεωμετρίας είναι κατάλληλο τόσο για την ανάπτυξη κατώτερης μαθηματικής σκέψης, όπως η αναγνώριση σχημάτων, όσο και ανώτερης μαθηματικής σκέψης, όπως η ανακάλυψη ιδιοτήτων των σχημάτων, η δημιουργία γεωμετρικών μοτίβων και η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων (NCTM, 1989). Επιπλέον οι γεωμετρικές ιδέες είναι χρήσιμες στην αναπαράσταση και επίλυση προβλημάτων σε άλλα μαθηματικά πεδία και σε καταστάσεις της πραγματικής ζωής.

Η εμπειρία των παιδιών σε σχέση με το σχήμα και το χώρο αποτελεί ένα θέμα που σχετίζεται άμεσα με το γεγονός ότι ζουν και δρουν καθημερινά μέσα στον κόσμο των τριών διαστάσεων (Doverborg & Pramling Samuelsson, 2001), άρα οι γνώσεις των παιδιών που αφορούν τις έννοιες που αναφέρονται στο σχήμα και το χρώμα είναι αρχικά αποτέλεσμα αλληλεπίδρασης με τον τρισδιάστατο αυτό κόσμο (Jurdak & Shahin, 2001). Η σχέση, όμως, ανάμεσα στις γεωμετρικές έννοιες και τη φυσική εμπειρία είναι αρκετά πολύπλοκη, εφόσον οι γεωμετρικές έννοιες έχουν μια ιδιαίτερη φύση, λόγω της σχέσης τους με τις χωρικές ιδιότητες της πραγματικότητας (Mariotti, 1995). Για παράδειγμα, ένα γεωμετρικό σχήμα δεν είναι μια απλή έννοια και αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι κατέχει χωρικές ιδιότητες όπως το σχήμα, η θέση και το μέγεθος. Σύμφωνα με τον Duval (1998), οι δυσκολίες που παρουσιάζονται σε σχέση με τα γεωμετρικά σχήματα ή γενικότερα τις γεωμετρικές έννοιες οφείλονται στο γεγονός ότι ο χώρος των αναπαραστάσεων δεν είναι ένας πραγματικά οπτικός χώρος, αλλά ένας χώρος που σχετίζεται με το σώμα μας και τη θέση του σ' αυτόν. Η γεωμετρία εμπεριέχει τρόπους δόμησης του χώρου, καθώς και τρόπους ανάλυσης των συνεπειών αυτής της δόμησης (Battista, 1999). Με άλλα λόγια, το άτομο δομεί το χώρο όταν τον οργανώνει μεταφέροντάς τον σε έννοιες όπως οι γραμμές, οι γωνίες, τα πολύγωνα και τα πολύεδρα. Δομεί το χώρο όταν τον μετασχηματίζει χρησιμοποιώντας στροφές, περιστροφές, μεγεθύνσεις και σμικρύνσεις.

Μια άλλη αιτία για τις δυσκολίες που παρουσιάζονται σε σχέση με τα γεωμετρικά σχήματα εντοπίζεται στη διπλή τους φύση. Σε αντίθεση με τον αριθμητικό κόσμο, όπου τα αντικείμενα (π.χ. οι αριθμοί) αντιπροσωπεύονται από «αφηρημένα σύμβολα», τα οποία δεν περικλείουν την ποσότητα στην οποία αναφέρονται, στο γεωμετρικό κόσμο οι αναπαραστάσεις των αντικειμένων συχνά παραμένουν χωρικά αντικείμενα (Houdement & Kuzniak, 2003). Έτσι, ενώ σε μαθηματικό επίπεδο τα γεωμετρικά σχήματα είναι νοητικές κατασκευές οι οποίες υφίστανται μόνο μέσω των ορισμών και των ιδιοτήτων τους, τα ίδια γεωμετρικά σχήματα στο μυαλό των μαθητών συνδέονται με πραγματικά αντικείμενα ή αντιμετωπίζονται ως εικόνες. Εντοπίζεται, δηλαδή ένα χάσμα ανάμεσα στα προσωπικά νοήματα των μαθητών για τα σχήματα και στα γεωμετρικά νοήματα των συγκεκριμένων εννοιών (Vighi, 2003).

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονιστεί ότι σε καμιά περίπτωση η γεωμετρική και η χωρική γνώση δεν θεωρούνται ταυτόσημες (Gorgorió, 1998), αλλά οι διάφορες συνιστώσες της χωρικής ικανότητας θεωρούνται απαραίτητες για την ερμηνεία, την κατανόηση και την εκτίμηση του γεωμετρικού κόσμου στον οποίο ζει και κινείται το άτομο (NCTM, 1989). Η αναπαράσταση των γεωμετρικών αντικειμένων και οι σύνδεσμοι ανάμεσα στα γεωμετρικά αντικείμενα και τις αναπαραστάσεις τους, όμως, δεν παύουν να αποτελούν σημαντικά προβλήματα στη γεωμετρία (Mesquita, 1998). Κατά συνέπεια, οι διάφορες γεωμετρικές έννοιες και η γεωμετρική σκέψη αποτελούν θέματα που έχουν συγκεντρώσει το ενδιαφέρον μεγάλου αριθμού μαθηματικών παιδαγωγών και διερευνώνται είτε ως αυτόνομα θέματα είτε σε συνδυασμό με την έννοια της χωρικής ικανότητας.

Στη διεθνή βιβλιογραφία παρουσιάζονται διάφορα θεωρητικά μοντέλα που είναι χρήσιμα για την περιγραφή και κατανόηση της ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης. Ένας μεγάλος αριθμός ερευνών που εξετάζουν τον τρόπο σκέψης των παιδιών σε σχέση με τη γεωμετρία στηρίζεται στη θεωρία των van Hiele. Οι Pierre και Dina van Hiele ανέπτυξαν μια θεωρία που αφορά τα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης από τα οποία διέρχονται οι μαθητές καθώς προχωρούν από την απλή αναγνώριση ενός σχήματος στην ικανότητα σύνθεσης μιας τυπικής γεωμετρικής απόδειξης (van Hiele, 1986). Το κρίσιμο σημείο σε αυτή την ανάπτυξη είναι, κατά τον Parzysz (1988), η εμφάνιση του παραγωγικού συλλογισμού, ο οποίος επιτρέπει τη μετάβαση των ατόμων από το «βλέπω» στο «γνωρίζω».

Θεωρώντας την προσέγγιση των van Hiele αυστηρά γραμμική και ανεπαρκή για την κατανόηση και ερμηνεία των εμποδίων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε θέματα γεωμετρίας, οι Houdement και Kuzniak (2003) μετέφεραν στη γεωμετρία την ιδέα των διαφορετικών Παραδειγμάτων όπως διατυπώθηκε από τον Kuhn (1970) και διακρίνουν τρία διαφορετικά παραδείγματα γεωμετρίας: τη Γεωμετρία 1 (Εμπειρική Γεωμετρία), τη Γεωμετρία 2 (Εμπειρική Αξιωματική Γεωμετρία) και τη Γεωμετρία 3 (Τυπική Αξιωματική Γεωμετρία). Με βάση το θεωρητικό πλαίσιο που έχουν αναπτύξει, στο οποίο περιλαμβάνονται τα χαρακτηριστικά του καθενός από τα τρία παραδείγματα γεωμετρίας, γίνονται εμφανείς οι δυσκολίες μετάβασης από τον ένα τύπο γεωμετρίας στον άλλο και είναι δυνατό να ερμηνευθεί η αντιμετώπιση γεωμετρικών έργων από τους μαθητές.

Ο Fischbein (1993) αναφέρεται στη διπλή φύση του γεωμετρικού σχήματος, επισημαίνοντας ότι κάθε γεωμετρικό σχήμα έχει ταυτόχρονα εννοιολογικές και σχηματικές ιδιότητες. Με βάση την υπόθεση αυτή, ο γεωμετρικός συλλογισμός χαρακτηρίζεται από την αλληλεπίδραση ανάμεσα στη σχηματική και την εννοιολογική πτυχή των γεωμετρικών εννοιών. Η λειτουργία των δύο αυτών πτυχών με αρμονία συμβάλλει στην ορθότητα και την αποτελεσματικότητα του γεωμετρικού συλλογισμού. Αντίθετα, οι λανθασμένες εκφάνσεις του γεωμετρικού συλλογισμού μπορούν να ερμηνευθούν με βάση τη δυσαρμονία μεταξύ της σχηματικής και της εννοιολογικής λειτουργίας των ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων.

Ο Duval (1995), προσεγγίζοντας τη γεωμετρία από μια γνωστική και αντιληπτική σκοπιά, παρουσιάζει ένα λεπτομερές πλαίσιο ανάλυσης των γεωμετρικών εικόνων, με βάση το οποίο εντοπίζει τέσσερις τύπους γνωστικής κατανόησης σε σχέση με τη γεωμετρία: αντιληπτική κατανόηση, διαδικαστική κατανόηση, λεκτική κατανόηση και λειτουργική κατανόηση. Επίσης υποστηρίζει ότι ο γεωμετρικός συλλογισμός εμπεριέχει τρία είδη γνωστικών διαδικασιών (εξεικόνιση, κατασκευή, συλλογισμός), η συνεργασία των οποίων είναι γνωστικά απαραίτητη για την επάρκεια του ατόμου στη γεωμετρία (Duval, 1998).

Ως μαθηματικό πεδίο, η γεωμετρία ασχολείται με συγκεκριμένα νοητικά αντικείμενα, τα γεωμετρικά σχήματα. Η διδασκαλία της γεωμετρίας στόχο έχει οι μαθητές να γνωρίσουν τα γεωμετρικά σχήματα και τις δομές τους, να μάθουν με ποιο τρόπο να αναλύουν τα χαρακτηριστικά και τις σχέσεις τους (NCTM, 2000). Στη διεθνή βιβλιογραφία εντοπίζονται τρεις βασικές κατηγορίες εργασιών που, χρησιμοποιώντας κάποιο από τα προαναφερθέντα θεωρητικά πλαίσια, ασχολούνται με τη σκέψη, τις γνώσεις και τις ικανότητες των μαθητών σε σχέση με τα γεωμετρικά σχήματα. Συγκεκριμένα, παρουσιάζονται ερευνητές που μελετούν θέματα γεωμετρίας στο χώρο των τριών διαστάσεων και άλλοι που ενδιαφέρονται για θέματα γεωμετρίας στο χώρο των δύο διαστάσεων, ενώ μια τρίτη ομάδα ερευνητών ασχολείται με τις αναπαραστάσεις των τρισδιάστατων σχημάτων στο επίπεδο. Με άλλα λόγια, οι ερευνητές αυτοί μελετούν τη μετάβαση από το χώρο των τριών διαστάσεων στο χώρο των δύο διαστάσεων και αντίστροφα.

Στην πρώτη ομάδα εντάσσονται εργασίες στις οποίες το ερευνητικό ενδιαφέρον έχει στραφεί προς την κατανόηση της αντίληψης των μαθητών σε θέματα γεωμετρίας τριών διαστάσεων γενικά (π.χ. Gutiérrez, 1996a; Lege, 1999) και ειδικότερα προς τη διερεύνηση θεμάτων που αφορούν άμεσα τα γεωμετρικά στερεά και τη διδασκαλία τους (π.χ. Leeson, 1994; Malara, 1998). Στο πλαίσιο αυτό εντοπίζονται εργασίες που διερευνούν ικανότητες των μαθητών σε έργα όπου παρουσιάζονται τρισδιάστατες κατασκευές που αποτελούνται από μικρούς κύβους (π.χ. Battista & Clements, 1996; Izard, 1990), αλλά και εργασίες που ασχολούνται με την ταξινόμηση των γεωμετρικών στερεών (π.χ. Lehrer & Curtis, 2000) και την κατασκευή τους στα πλαίσια της διδασκαλίας (π.χ. Brahier & Speer, 1997).

Σε μια δεύτερη ομάδα ανήκουν οι έρευνες που εξετάζουν τον τρόπο σκέψης των παιδιών σε σχέση με τα επίπεδα σχήματα. Οι περισσότερες από τις εργασίες αυτές στηρίζονται στη θεωρία των van Hiele (Fox, 2000). Για παράδειγμα, οι Gutiérrez και Jaime (1995), σε μια προσπάθεια εντοπισμού ενός πλαισίου για το σχεδιασμό δοκιμίων που αξιολογούν τα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης των μαθητών, έχουν σχεδιάσει ένα δοκίμιο που αποτελείται από έργα βασισμένα στα πολύγωνα, το οποίο αξιολογεί το επίπεδο συλλογισμού των μαθητών σύμφωνα με τη θεωρία των van Hiele. Σε άλλες εργασίες μελετάται η διαμόρφωση των εννοιών των επίπεδων σχημάτων (π.χ. Clements, Swaminathans, Hannibal, & Sarama, 1999; Hasegawa, 1997; Monagham, 2000; Vighi, 2003). Θέματα γεωμετρίας δύο διαστάσεων μελετώνται επίσης σε σχέση με θέματα μέτρησης (π.χ. Clements, Battista, & Sarama, 1998) ή χρησιμοποιούνται για να επεξηγήσουν τις διαδικασίες γεωμετρικού συλλογισμού των μαθητών σε έργα σύνθεσης και ανάλυσης (π.χ. Rahim & Olson, 1998; Brown & Wheatley, 1997).

Τέλος, ένας αριθμός ερευνητών που ασχολείται με την αναπαράσταση γεωμετρικών αντικειμένων επικεντρώνει το ενδιαφέρον του στη μελέτη της ικανότητας μετάφρασης ανάμεσα σε τρισδιάστατα σχήματα και μια μορφή δισδιάστατης αναπαράστασής τους. Συγκεκριμένα, εντοπίζονται εργασίες στις οποίες διερευνάται η ικανότητα των παιδιών να αναπαραστήσουν τρισδιάστατα στερεά μέσω δισδιάστατου σχεδίου (π.χ. Bremner, Morse, Hughes, & Andreasen, 2000; Doverborg & Pramling Samuelsson, 2001; Toomela, 1999), ενώ σε άλλες έρευνες εξετάζεται ο συλλογισμός των μαθητών σε σχέση με τα αναπτύγματα στερεών και διερευνάται η ικανότητά τους να αναγνωρίζουν και να κατασκευάζουν αναπτύγματα στερεών (π.χ. Potari & Spiliotopoulou, 2001; Stylianou, Leikin, & Silver, 1999). Στο πλαίσιο αυτό παρουσιάζονται επίσης εργασίες όπου αναλύονται σειρές μαθημάτων που έχουν εφαρμοστεί με παιδιά με βασικό άξονα τα στερεά και τα αναπτύγματά τους (π.χ. Meissner & Pirkernell, 2000; Woodward & Brown, 1994), καθώς και εργασίες που περιγράφουν συγκεκριμένες δραστηριότητες κατά τις οποίες οι μαθητές εμπλέκονται στην κατασκευή αναπτυγμάτων διάφορων στερεών (π.χ. Fowler, 1996; Leeson, 1994; Mistretta, 2000).

Από την επισκόπηση της διεθνούς βιβλιογραφίας σε σχέση με τη σκέψη, τις γνώσεις και τις ικανότητες των μαθητών για τα γεωμετρικά σχήματα εντοπίζονται τρεις κατευθύνσεις προς τις οποίες θα μπορούσε να επικεντρωθεί μια νέα έρευνα για διερεύνηση σχετικών θεμάτων. Το πρώτο θέμα που προκύπτει από τη μελέτη της σχετικής βιβλιογραφίας είναι ότι το ζήτημα των γνώσεων και των ικανοτήτων των μαθητών μελετάται αναφορικά με μια κατηγορία γεωμετρικών σχημάτων. Η συνηθισμένη πρακτική που ακολουθείται είναι να μελετώνται είτε μόνο θέματα που αφορούν τα επίπεδα γεωμετρικά σχήματα (αντιλήψεις των παιδιών σε διαφορετικές ηλικίες, δυσκολίες των μαθητών, εισηγήσεις για τη διδασκαλία), είτε μόνο θέματα που αφορούν τα γεωμετρικά στερεά, είτε μόνο θέματα χειρισμού αναπτυγμάτων στερεών. Προκύπτει στο σημείο αυτό η ανάγκη για διερεύνηση της γνώσης των μαθητών για τα γεωμετρικά σχήματα σε διαφορετικές διαστάσεις του χώρου ταυτόχρονα, με τρόπο ώστε να μελετηθούν οι σχέσεις που δημιουργούνται, σε όποιο βαθμό δημιουργούνται, ανάμεσα στις γνωστικές δομές των μαθητών αναφορικά με κάθε διάσταση ξεχωριστά.

Ένα δεύτερο σημείο που έχει εντοπιστεί από την επισκόπηση της βιβλιογραφίας είναι ότι η διερεύνηση των διάφορων θεμάτων που αφορούν τη γεωμετρική σκέψη των μαθητών (γνώσεις, ικανότητες, στρατηγικές, δυσκολίες) περιορίζεται ως επί το πλείστον σε ηλικιακές ομάδες που αφορούν μία βαθμίδα της εκπαίδευσης. Αποτελεί, άρα, ενδιαφέρουσα ερευνητική κατεύθυνση η διερεύνηση των θεμάτων αυτών σε ομάδες μαθητών που προέρχονται από διαφορετικές εκπαιδευτικές βαθμίδες. Τα δεδομένα που μπορούν να συγκεντρωθούν μέσα σε αυτό το ερευνητικό πλαίσιο είναι δυνατό να αποτελέσουν πηγές πολύτιμων πληροφοριών τόσο σε σχέση με θέματα διδασκαλίας στις δύο εκπαιδευτικές βαθμίδες όσο και σε σχέση με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές διαφορετικών ηλικιών.

Ένα τρίτο θέμα που προκύπτει είναι η σύνδεση της γεωμετρικής σκέψης με τις χωρικές ικανότητες των ατόμων. Σε θεωρητικό επίπεδο τα δύο ζητήματα συνδέονται, εφόσον η γεωμετρία αποτελεί ουσιαστικά τη μαθηματικοποίηση των εννοιών του χώρου. Ως μέρος της ατομικής ευφυίας, η χωρική ικανότητα θεωρείται ότι διαδραματίζει ένα σημαντικό ρόλο στην επίλυση προβλημάτων γεωμετρίας (Reinhold, 2002). Εντοπίζεται, όμως, η έλλειψη επαρκών μελετών που να παρέχουν εμπειρικά δεδομένα για τη σχέση ανάμεσα στη χωρική ικανότητα και την αντιμετώπιση γεωμετρικών έργων.

Η παρούσα εργασία κινείται προς τις τρεις κατευθύνσεις που έχουν αναφερθεί παραπάνω επιδιώκοντας αφενός να συμβάλει στη διερεύνηση πτυχών της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών που δεν έχουν μελετηθεί επαρκώς, όπως η δόμηση των ικανοτήτων των μαθητών αναφορικά με το χειρισμό γεωμετρικών σχημάτων, και αφετέρου να αποτελέσει πηγή για μελλοντική διερεύνηση νέων πτυχών του θέματος. Ακολούθως διατυπώνεται ο γενικός σκοπός και τα ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας και θεμελιώνεται η σπουδαιότητα των υπό μελέτη θεμάτων. Τέλος αναφέρονται ορισμένοι περιορισμοί της παρούσας εργασίας και δίνονται οι ορισμοί εννοιών που περιλαμβάνονται στο θεωρητικό πλαίσιο.

Το Πρόβλημα και ο Σκοπός της Έρευνας

Το θέμα της απόκτησης της μαθηματικής γνώσης και της οικοδόμησης της μαθηματικής δομής έχει περιγραφεί και μελετηθεί από αρκετές οπτικές γωνίες. Αναφέρονται, για παράδειγμα, η θεωρία της πραγμοσύνης (Sfard, 1991), η θεωρία της διαδικασιοέννοιας (Gray & Tall, 1994), η θεωρία της κατανόησης (Shierpinska, 1994) και η θεωρία της αφαίρεσης εντός πλαισίου (Dreyfus, Hershkowitz, Schwarz, 2001). Βασική παραδοχή της παρούσας έρευνας είναι ότι η γνώση αποκτάται μέσω εμπειριών οι οποίες αρχικά είναι ασύνδετες μεταξύ τους, ενώ στη συνέχεια μια νέα εμπειρία οδηγεί το άτομο στον εντοπισμό συνδέσεων ανάμεσα σε προϋπάρχουσες εμπειρίες, που έχει ως αποτέλεσμα το σχηματισμό ενός γνωστικού δικτύου. Η μελέτη των ερευνητικών προσπαθειών που έγιναν μέχρι τώρα καταδεικνύει ότι απουσιάζουν τα μοντέλα δόμησης των γεωμετρικών εμπειριών των μαθητών πρωτοβάθμιας ή δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Μια δεύτερη παραδοχή, που προκύπτει από την επισκόπηση της διεθνούς βιβλιογραφίας είναι ότι η μαθηματική ικανότητα των μαθητών συνδέεται με τη χωρική τους ικανότητα. Η παρούσα έρευνα εξειδίκευσε το θέμα αυτό και υπέθεσε ότι υπάρχει σύνδεση ανάμεσα στη χωρική ικανότητα και την επίδοση σε έργα γεωμετρίας.

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν η διερεύνηση των γνώσεων και των γνωστικών δομών μαθητών στο τέλος της δημοτικής εκπαίδευσης στην Κύπρο αναφορικά με τα γεωμετρικά σχήματα και η σύγκριση με τις αντίστοιχες γνωστικές δομές μαθητών Δ΄ δημοτικού και Β΄ γυμνασίου. Η διερεύνηση αυτή αναφερόταν (α) στις γνώσεις και ικανότητες των μαθητών για τα επίπεδα σχήματα, (β) στις γνώσεις και ικανότητες των μαθητών για τα τρισδιάστατα σχήματα και (γ) στις γνώσεις και ικανότητες των μαθητών για τα αναπτύγματα γεωμετρικών στερεών. Οι γνώσεις και ικανότητες των μαθητών στις τρεις διαστάσεις που έχουν αναφερθεί εξετάστηκαν σε σχέση και με τη χωρική ικανότητα των παιδιών, με σκοπό να διερευνηθεί σε ποιο βαθμό η χωρική ικανότητα σχετίζεται με την επίδοση των μαθητών σε θέματα γεωμετρίας.

Πρώτος στόχος της ερευνητικής προσπάθειας που αναπτύχθηκε ήταν η πρόταση και επιβεβαίωση ενός δομικού μοντέλου των γνώσεων και ικανοτήτων των μαθητών ηλικίας 10-14 χρόνων σε σχέση με το χειρισμό διαφορετικών γεωμετρικών σχημάτων (γεωμετρικά σχήματα δύο και τριών διαστάσεων και αναπτύγματα γεωμετρικών στερεών) που συναντούν στα πλαίσια της διδασκαλίας της γεωμετρίας. Ακολούθως διερευνήθηκε κατά πόσο η δομή των προαναφερθέντων ικανοτήτων είναι η ίδια ή παρουσιάζει διαφορές ανάμεσα στους μαθητές τριών ηλικιακών ομάδων (Δ΄ δημοτικού – 10 χρονών, Στ΄ δημοτικού – 12 χρονών, Β΄ γυμνασίου – 14 χρονών).

Δεύτερος στόχος της παρούσας εργασίας ήταν η διερεύνηση της σχέσης ανάμεσα στη χωρική ικανότητα των μαθητών και την επίδοση των μαθητών σε γεωμετρικά έργα χειρισμού διαφορετικών γεωμετρικών σχημάτων. Για το σκοπό αυτό εξετάστηκε κατά πόσο διαφορετικές συνιστώσες της χωρικής ικανότητας αποτελούν παράγοντες πρόβλεψης της επίδοσης σε έργα γεωμετρίας. Επιπλέον, στα πλαίσια του δεύτερου στόχου, μελετήθηκαν οι σχέσεις ομοιότητας και οι σχέσεις συνεπαγωγής που παρουσιάζονται ανάμεσα στα χωρικά και τα γεωμετρικά έργα που χρησιμοποιήθηκαν.

Τέλος, στόχος της μελέτης ήταν, μέσα από τη σύγκριση του τρόπου που οι μαθητές των τριών ηλικιακών ομάδων της έρευνας αντιμετώπισαν τα γεωμετρικά έργα, να επισημανθούν φαινόμενα που αφορούν τη μετάβαση των μαθητών από το πλαίσιο της Εμπειρικής Γεωμετρίας στο πλαίσιο της Εμπειρικής Αξιωματικής Γεωμετρίας. Ιδιαίτερη σημασία δόθηκε στον εντοπισμό και τη συζήτηση των δυσκολιών που παρουσιάζονται κατά τη μετάβαση αυτή.

Τα ερευνητικά ερωτήματα που εξετάστηκαν στην παρούσα εργασία κάτω από τους τρεις άξονες που έχουν αναφερθεί, συνοψίζονται στα ακόλουθα:

(Α) Πρώτος άξονας διερεύνησης: Η δόμηση των ικανοτήτων των μαθητών ηλικίας 10-14 χρόνων αναφορικά με το χειρισμό γεωμετρικών σχημάτων.

1. Ποιες είναι οι συνιστώσες που συνθέτουν τη γενική ικανότητα των μαθητών ηλικίας 10-14 χρόνων αναφορικά με το χειρισμό διαφορετικών γεωμετρικών σχημάτων;
2. Ποιες ομοιότητες και ποιες διαφορές παρουσιάζονται στη δόμηση των ικανοτήτων μαθητών 10, 12 και 14 χρόνων αναφορικά με το χειρισμό διαφορετικών γεωμετρικών σχημάτων;

(Β) Η σχέση της γεωμετρικής ικανότητας των μαθητών αναφορικά με το χειρισμό διαφορετικών γεωμετρικών σχημάτων με τη χωρική τους ικανότητα

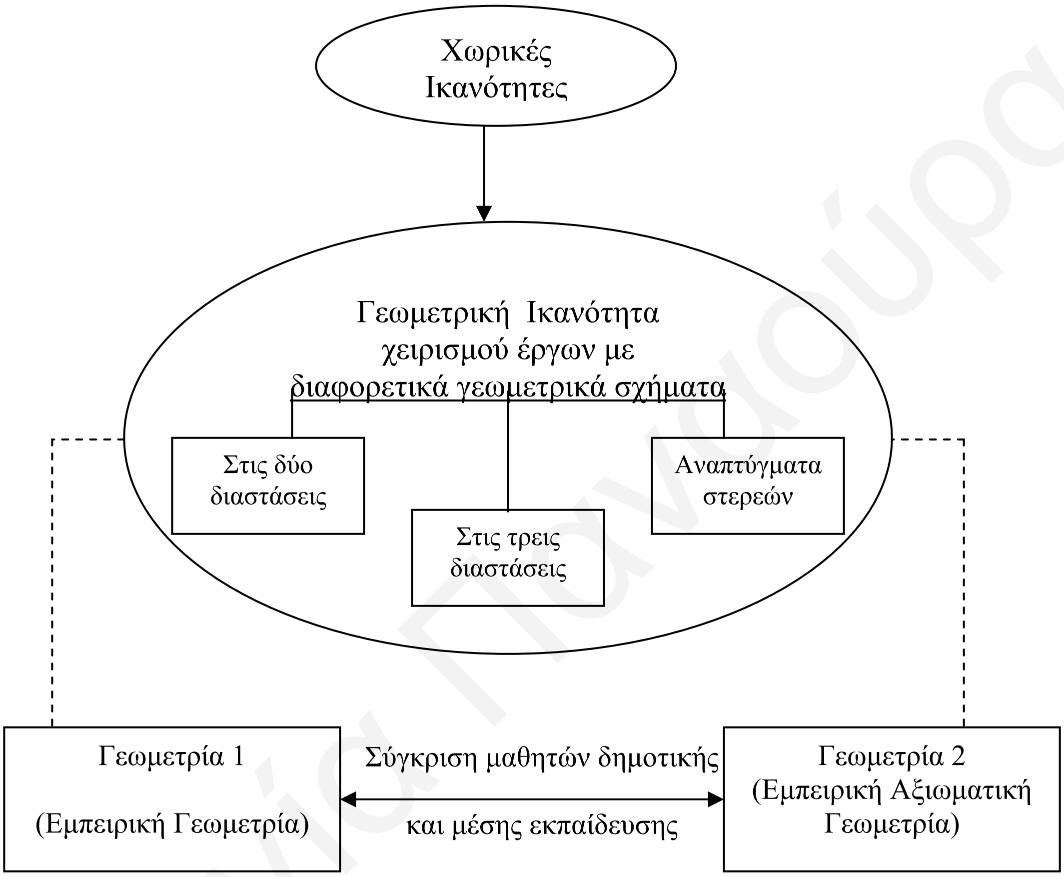
1. Με ποιο τρόπο το επίπεδο χωρικής ικανότητας των μαθητών σχετίζεται με την επίδοσή τους σε έργα χειρισμού γεωμετρικών σχημάτων;
2. Ποιες συνιστώσες της χωρικής ικανότητας αποτελούν δείκτες πρόβλεψης για την επίδοση των μαθητών σε έργα γεωμετρίας που απαιτούν χειρισμό διάφορων γεωμετρικών σχημάτων;
3. Ποιες διαφορές παρουσιάζονται στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές δημοτικού και γυμνασίου αντιμετωπίζουν τα χωρικά έργα σε σχέση με τα έργα γεωμετρίας που παρουσιάζουν (α) γεωμετρικά σχήματα δύο διαστάσεων, (β) γεωμετρικά σχήματα τριών διαστάσεων και (γ) αναπτύγματα γεωμετρικών στερεών;
4. Ποιες συνεπαγωγικές σχέσεις παρουσιάζονται ανάμεσα στα χωρικά έργα και τα έργα γεωμετρικής ικανότητας που απαιτούν χειρισμό διαφορετικών γεωμετρικών σχημάτων;

(Γ) Η ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης – Η σύγκριση μαθητών δημοτικής και μέσης εκπαίδευσης

1. Ποιες διαφορές υπάρχουν στις επιδόσεις των μαθητών Δ΄ και Στ΄ δημοτικού και στις επιδόσεις των μαθητών Β΄ γυμνασίου σε έργα χειρισμού (α) επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων, (β) τρισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων και (γ) αναπτυγμάτων γεωμετρικών στερεών;
2. Ποιες ομοιότητες και διαφορές παρουσιάζονται στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές δημοτικού και γυμνασίου αντιμετωπίζουν έργα γεωμετρίας που απαιτούν χειρισμό (α) γεωμετρικών σχημάτων δύο διαστάσεων, (β) γεωμετρικών σχημάτων τριών διαστάσεων και (γ) αναπτυγμάτων γεωμετρικών στερεών;
3. Ποιες συνεπαγωγικές σχέσεις παρουσιάζονται ανάμεσα στα γεωμετρικά έργα που απαιτούν χειρισμό (α) γεωμετρικών σχημάτων δύο διαστάσεων, (β) γεωμετρικών σχημάτων τριών διαστάσεων και (γ) αναπτυγμάτων γεωμετρικών στερεών για τους μαθητές ηλικίας 10-14 χρόνων;

4. Ποιες δυσκολίες εντοπίζονται κατά τη σύγκριση μαθητών δημοτικής και μέσης εκπαίδευσης αναφορικά με το χειρισμό έργων που παρουσιάζουν γεωμετρικά σχήματα;

Οι τρεις άξονες διερεύνησης των θεμάτων με τα οποία ασχολείται η παρούσα εργασία παρουσιάζονται στο ακόλουθο διάγραμμα:



Σημασία του Θέματος

Η μελέτη από τους παιδαγωγούς και η κατανόηση από τους εκπαιδευτικούς του τρόπου με τον οποίο οι μαθητές οικοδομούν τις γνώσεις τους για τα θέματα που διδάσκονται αποτελούν απαραίτητες προϋποθέσεις για την επίτευξη κατανόησης εκ μέρους των μαθητών στα θέματα αυτά (Battista, 1999). Είναι αποδεκτό ότι οι μαθητές αποκτούν, μέσω των εμπειριών που έχουν κατά τη διδασκαλία θεμάτων γεωμετρίας, ορισμένες γνώσεις οι οποίες αρχικά δεν είναι συνδεδεμένες μεταξύ τους (Hejný, 2002). Εκείνο που δεν έχει διευκρινιστεί μέχρι τώρα είναι με ποιο τρόπο και σε ποιο βαθμό οι ασύνδετες αυτές γνώσεις συνδέονται μετά την πάροδο κάποιων χρόνων διδασκαλίας σε δίκτυα (Hejný, 2003). Παρόλο που η οικοδόμηση της μαθηματικής γνώσης γενικά και της γεωμετρικής γνώσης ειδικότερα θεωρείται σήμερα ένα ιδιαίτερα σημαντικό θέμα (Gray, Pinto, Pitta, & Tall, 1999), απουσιάζουν τα μοντέλα εκείνα που περιγράφουν τη δόμηση των γεωμετρικών γνώσεων και ικανοτήτων των μαθητών, όπως αυτές αποκτώνται μέσα από τη διαδικασία της διδασκαλίας.

Οι μαθητές αποκτούν μέσα από τη διδασκαλία γνώσεις που αφορούν επίπεδα σχήματα, τρισδιάστατα σχήματα και αναπτύγματα στερεών. Είναι σημαντικό να μελετηθεί κατά πόσο και με ποιο τρόπο οι μαθητές συνδέουν τις διάφορες γνωστικές μονάδες της γεωμετρικής γνώσης που αποκτούν. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, επιδίωξη της παρούσας εργασίας ήταν η διαμόρφωση ενός δομικού μοντέλου των γνώσεων και ικανοτήτων των μαθητών αναφορικά με το χειρισμό διαφορετικών γεωμετρικών σχημάτων. Εξετάζοντας, δηλαδή, τη γνωστική βάση των μαθητών στη γεωμετρία διερευνήθηκε σε ποιο βαθμό και με ποιο τρόπο οι διάφορες μονάδες γεωμετρικής γνώσης που κατέχουν συνδέονται μεταξύ τους και διαμορφώνουν χρήσιμες και με νόημα δομές.

Παράλληλα ενδιαφέρον παρουσιάζει το ερώτημα σε ποιο βαθμό και με ποιο τρόπο οι γνωστικές αυτές δομές, που αφορούν διαφορετικές συνιστώσες της γεωμετρικής γνώσης, συνδέονται με συνιστώσες της χωρικής ικανότητας. Τα αποτελέσματα από τη διερεύνηση του ερωτήματος αυτού ενδέχεται να παρουσιάζουν ενδιαφέρουσες προεκτάσεις σε θέματα διδασκαλίας της γεωμετρίας σε σχέση με τη συμπερίληψη στο αναλυτικό πρόγραμμα στόχων και δραστηριοτήτων που να αφορούν την ανάπτυξη της χωρικής ικανότητας των μαθητών.

Στην παρούσα εργασία το ενδιαφέρον εστιάστηκε στις γνώσεις και ικανότητες των μαθητών στο τέλος της δημοτικής εκπαίδευσης στην Κύπρο για τα διαφορετικά γεωμετρικά σχήματα που συναντούν κατά τη διδασκαλία της γεωμετρίας. Ένας από τους βασικούς στόχους της παρούσας εργασίας ήταν ο προσδιορισμός των γεωμετρικών γνώσεων και ικανοτήτων των μαθητών της Στ΄ τάξης του Δημοτικού σχολείου, δηλαδή ακριβώς πριν από τη μετάβασή τους στη μέση εκπαίδευση, και η σύγκρισή τους με τις γνώσεις και ικανότητες μαθητών της Β΄ Γυμνασίου. Το ζήτημα αυτό παρουσιάζει ενδιαφέρον, καθώς κατά τη μετάβαση από το δημοτικό σχολείο στο γυμνάσιο οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες σε θέματα γεωμετρίας, οι οποίες οφείλονται σε πολλούς και διαφορετικής φύσης λόγους (Meletiou-Mavrotheri & Stylianou, 2003). Ο εντοπισμός και η αποσαφήνιση ενός μέρους αυτών των δυσκολιών, οι οποίες πιθανό να οφείλονται στο διαφορετικό τρόπο προσέγγισης και αντιμετώπισης του θέματος της γεωμετρίας στις δύο αυτές βαθμίδες της εκπαίδευσης (Houdement & Kuzniak, 2003), αποτελεί ένα επιμέρους στόχο της παρούσας εργασίας. Ειδικά στην περίπτωση της Κύπρου, η διερεύνηση της γεωμετρικής σκέψης και των γνώσεων των μαθητών σε θέματα γεωμετρίας πραγματοποιείται μέχρι τώρα είτε μόνο με μαθητές δημοτικού σχολείου (π.χ. Elia, Gagatsis, & Modestou, 2005; Γαγάτση, Τσακίρη και Ρούσου Μιχαηλίδου, 2004; Νεοκλέους, 2004), είτε μόνο με μαθητές μέσης εκπαίδευσης (π.χ. Deliyianni, Gagatsis, & Dimakos, 2005; Xistouri, Nikolaou, Koukkoufis, & Gagatsis, 2005). Είναι σημαντικό να συγκεντρωθούν δεδομένα που να επιτρέπουν τη σύγκριση της γεωμετρικής σκέψης μαθητών δημοτικής και μέσης εκπαίδευσης.

Περιορισμοί της Έρευνας

Ο πρώτος περιορισμός της έρευνας έγκειται στο γεγονός ότι τα υποκείμενα που έλαβαν μέρος προέρχονται μόνο από δύο τάξεις της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (Δ΄ και Στ΄ δημοτικού) και μια τάξη της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Β΄ γυμνασίου). Η επιλογή αυτή έγινε αφενός γιατί ένας από τους στόχους της εργασίας ήταν ο προσδιορισμός των γεωμετρικών γνώσεων και ικανοτήτων των μαθητών στο τέλος της δημοτικής εκπαίδευσης και αφετέρου γιατί η έρευνα αποσκοπούσε ταυτόχρονα στη σύγκριση μαθητών που προέρχονται από τις δύο βαθμίδες της εκπαίδευσης. Συνεπώς, έχοντας ως αρχική ομάδα αναφοράς τους μαθητές στο τέλος της Στ΄ δημοτικού (ηλικίας 12 χρόνων), αποφασίστηκε η συμμετοχή μαθητών δύο χρόνια μικρότερων και δύο χρόνια μεγαλύτερων σε ηλικία. Η συγκεκριμένη επιλογή στηρίχθηκε στην ιδέα ότι οι αλλαγές στο γνωστικό σύστημα των μαθητών στις ηλικίες 10-14 χρόνων είναι σημαντικές (Demetriou, Christou, Platsidou, & Spanoudis, 2002). Με βάση την ιδέα αυτή κρίθηκε ότι η συμμετοχή στην έρευνα μαθητών από τις τρεις ηλικιακές ομάδες 10, 12 και 14 χρόνων επιτρέπει τον εντοπισμό ενδεχόμενων αλλαγών στο χειρισμό διαφορετικών έργων που αφορούν τις γεωμετρικές και χωρικές έννοιες που εξετάστηκαν στην παρούσα έρευνα.

Ο δεύτερος περιορισμός της έρευνας προέρχεται από το γεγονός ότι για τη συλλογή των δεδομένων πραγματοποιήθηκε μόνο μία μέτρηση των γεωμετρικών και χωρικών ικανοτήτων των μαθητών. Το ενδιαφέρον επικεντρώθηκε στην περιγραφή της δόμησης των γεωμετρικών γνώσεων και ικανοτήτων των μαθητών και των σχέσεων με τις χωρικές τους ικανότητες σε μία χρονική στιγμή. Δεν πραγματοποιήθηκαν διαχρονικές μετρήσεις για γεωμετρικές ή τις χωρικές ικανότητες των μαθητών, ώστε να μελετηθεί ο ρυθμός ανάπτυξης των ικανοτήτων αυτών.

Η μέτρηση των γεωμετρικών και χωρικών ικανοτήτων των μαθητών πραγματοποιήθηκε μέσω ενός εργαλείου, από το οποίο ενδεχομένως να προκύπτουν σφάλματα στη μέτρηση. Το γεγονός ότι το εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε ήταν γραπτό δοκίμιο συνεπάγεται ότι τα έργα που περιλήφθηκαν σε αυτό αναφέρονται μόνο σε ικανότητες που μπορούν να μετρηθούν μέσω γραπτού δοκιμίου. Συγκεκριμένα, οι γεωμετρικές ικανότητες που μετρήθηκαν αναφέρονται σε χειρισμού έργων που παρουσιάζονται με στατικές εικόνες σε ένα φύλλο χαρτιού, όπως δηλαδή είναι οι εικόνες που περιλαμβάνονται στα σχολικά εγχειρίδια. Οι χωρικές ικανότητες που μετρήθηκαν αφορούν χωρικές ικανότητες μικρής κλίμακας, οι οποίες αναφέρονται σε χειρισμό έργων όπου το άτομο μπορεί να δει τις χωρικές σχέσεις των αντικειμένων διαμιάς.

Ορολογία

Χωρική Ικανότητα

Η έννοια της χωρικής ικανότητας χρησιμοποιείται για να δηλώσει ικανότητες που σχετίζονται γενικά με τη χρήση του χώρου από το άτομο. Οι ικανότητες αυτές αφορούν την παραγωγή, τη διατήρηση, την ανάκληση και το μετασχηματισμό νοητικών οπτικών εικόνων. Η χωρική ικανότητα δεν είναι μια μονοδιάστατη έννοια, αλλά αποτελείται από διαφορετικές συνιστώσες. Στην παρούσα εργασία, με βάση τη θεωρία του Δημητρίου (1993) για την οργάνωση του ανθρώπινου νου, υιοθετήθηκαν τρεις συνιστώσες της χωρικής ικανότητας: ικανότητα χειρισμού νοητικών εικόνων, ικανότητα νοητικών περιστροφών και ικανότητα συντονισμού των προοπτικών (Demetriou & Kyriakides, 2006).

Εμπειρική Γεωμετρία

Ο όρος Εμπειρική Γεωμετρία ή Γεωμετρία 1 χρησιμοποιείται στο θεωρητικό πλαίσιο που έχουν αναπτύξει οι Houdement και Kuzniak (Houdement & Kuzniak, 2003, Houdement, 2007) για τη μελέτη θεμάτων μάθησης της γεωμετρίας. Η Εμπειρική Γεωμετρία είναι ο πρώτος τύπος γεωμετρίας στον οποίο αναφέρονται και συνδέεται άμεσα με τον πραγματικό κόσμο. Τα αντικείμενα στη Φυσική Γεωμετρία είναι υλικά αντικείμενα. Οι αποδείξεις που παρουσιάζονται από τους μαθητές που εργάζονται στο πλαίσιο της Εμπειρική Γεωμετρίας είναι αντιληπτικής φύσης και γίνονται μέσω συγκρίσεων ή μετρήσεων.

Εμπειρική Αξιωματική Γεωμετρία

Ο όρος Εμπειρική Αξιωματική Γεωμετρία ή Γεωμετρία 2 χρησιμοποιείται στο θεωρητικό πλαίσιο που έχουν αναπτύξει οι Houdement και Kuzniak (Houdement & Kuzniak, 2003, Houdement, 2007) για τη μελέτη θεμάτων μάθησης της γεωμετρίας. Η Εμπειρική Αξιωματική Γεωμετρία είναι ο δεύτερος τύπος γεωμετρίας στον οποίο αναφέρονται. Στην Εμπειρική Αξιωματική Γεωμετρία τα αντικείμενα είναι θεωρητικά, δηλαδή η ύπαρξή τους απορρέει από αξιώματα και ορισμούς. Το σύστημα αξιωμάτων της Εμπειρικής Αξιωματικής Γεωμετρίας δεν είναι ολοκληρωμένο, γιατί περιέχει ορισμούς και αξιώματα που είναι κοντά στη διαίσθηση του χώρου των αισθήσεων. Παρά το γεγονός ότι το σύστημα αξιωμάτων δεν είναι ολοκληρωμένο, η πηγή εγκυρότητας βασίζεται στους υποθετικούς παραγωγικούς νόμους που διέπουν το αξιωματικό σύστημα.

Δομή της Εργασίας

Η παρουσίαση της ερευνητικής προσπάθειας γίνεται με βάση τους τρεις άξονες που εξετάστηκαν αναφορικά με τις γεωμετρικές ικανότητες των μαθητών ηλικίας 10-14 χρόνων σε σχέση με το χειρισμό έργων με διαφορετικά γεωμετρικά σχήματα. Τα ευρήματα σχετικών ερευνών που παρουσιάζονται, η ανάλυση των αποτελεσμάτων και η συζήτηση των συμπερασμάτων της εργασίας βρίσκονται σε αντιστοιχία με τα ερευνητικά ερωτήματα που έχουν τεθεί.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται η ανασκόπηση της διεθνούς βιβλιογραφίας για τα κύρια θέματα που εξετάστηκαν στην παρούσα εργασία. Περιγράφονται τα σημαντικότερα θεωρητικά πλαίσια που έχουν αναπτυχθεί για την κατανόηση της γεωμετρικής σκέψης και αναφέρονται οι απόψεις μαθηματικών παιδαγωγών σε θέματα διδασκαλίας της γεωμετρίας στη δημοτική και τη μέση εκπαίδευση. Επίσης παρουσιάζονται τα ευρήματα προηγούμενων ερευνών που αφορούν τη σχέση χωρικής και γεωμετρικής ικανότητας των μαθητών.

Στο τρίτο κεφάλαιο περιγράφονται τα γεωμετρικά και τα χωρικά έργα που χρησιμοποιήθηκαν και παρουσιάζονται τα στοιχεία για τη διαδικασία που ακολουθήθηκε κατά τη διεξαγωγή της έρευνας. Γίνεται επίσης περιγραφή της στατιστικής επεξεργασίας των δεδομένων.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας, όπως προέκυψαν από τις στατιστικές αναλύσεις των δεδομένων που συγκεντρώθηκαν, με βάση τα ερευνητικά ερωτήματα που έθεσε η εργασία. Αρχικά παρουσιάζεται η δομή της ικανότητας χειρισμού έργων με γεωμετρικά σχήματα και αναλύονται οι επιμέρους συνιστώσες της συγκεκριμένης ικανότητας. Στη συνέχεια γίνεται αναφορά στη σχέση χωρικής και γεωμετρικής ικανότητας των μαθητών και παρουσιάζονται οι συνιστώσες της χωρικής ικανότητας που αποτελούν παράγοντα πρόβλεψης της προαναφερθείσας γεωμετρικής ικανότητας. Τέλος, μέσα από τη σύγκριση της επίδοσης και της αντιμετώπισης των μαθητών δημοτικού και γυμνασίου στα γεωμετρικά έργα που χορηγήθηκαν, εντοπίζονται δυσκολίες που παρουσιάζονται σε σχέση με τη μελέτη της γεωμετρίας κατά τη μετάβαση των μαθητών από το πλαίσιο της Εμπειρικής Γεωμετρίας στο πλαίσιο της Εμπειρικής Αξιωματικής Γεωμετρίας.

Στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται συζήτηση των αποτελεσμάτων και σχολιασμός τους με βάση αντίστοιχες προηγούμενες έρευνες. Κατά τη συζήτηση των συμπερασμάτων γίνονται εισηγήσεις για μελλοντική διερεύνηση του θέματος.

Ανακεφαλαίωση

Η διπλή φύση της γεωμετρίας, ως ένα μαθηματικό πεδίο που μελετά θεωρητικά αντικείμενα από τη μια και ως αντικείμενο διδασκαλίας που συχνά συνδέεται στο μυαλό των μαθητών με υλικά αντικείμενα από την άλλη, έχει αποτελέσει ένα σημαντικό θέμα συζήτησης ανάμεσα σε μαθηματικούς παιδαγωγούς. Διάφορα θεωρητικά πλαίσια έχουν προταθεί αναφορικά με τη γεωμετρική σκέψη των ατόμων. Το ερευνητικό ενδιαφέρον για τις ικανότητες των μαθητών σε ότι αφορά το χειρισμό γεωμετρικών σχημάτων καλύπτει θέματα γύρω από τα επίπεδα και τα τρισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα, καθώς και γύρω από τα αναπτύγματα των γεωμετρικών στερεών. Επίσης το ενδιαφέρον ορισμένων ερευνητών έχει στραφεί προς τη διερεύνηση της σχέσης χωρικής και γεωμετρικής ικανότητας των μαθητών.

Η παρούσα εργασία εξέτασε τις γεωμετρικές γνώσεις και ικανότητες μαθητών ηλικίας 10-14 χρόνων αναφορικά με το χειρισμό γεωμετρικών σχημάτων. Με βάση την υπόθεση ότι η γεωμετρική ικανότητα είναι μια σύνθετη έννοια, διερευνήθηκαν οι επιμέρους συνιστώσες της, καθώς και η σχέση της με τις συνιστώσες της χωρικής ικανότητας των μαθητών. Τέλος, η εργασία επιχείρησε μέσα από τη σύγκριση των ικανοτήτων των μαθητών διαφορετικών ηλικιακών ομάδων να εντοπίσει κρίσιμα σημεία που αφορούν θέματα διδασκαλίας της γεωμετρίας στα πλαίσια της Εμπειρικής Γεωμετρίας και στα πλαίσια της Εμπειρικής Αξιωματικής Γεωμετρίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Εισαγωγή

Το θέμα της ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης γενικά και της γεωμετρικής σκέψης ειδικότερα έχει απασχολήσει ένα μεγάλο αριθμό μαθηματικών παιδαγωγών (π.χ. Fischbein, 1993; Houdement & Kuzniak, 2003; van Hiele, 1986), αλλά αποτελεί επίσης σημαντικό μέρος της εργασίας διαφόρων ψυχολόγων (π.χ. Duval, 1998; Piaget & Inhelder, 1967). Ακολούθως αναφέρονται οι βασικότερες απόψεις του Piaget για την αναπαράσταση του χώρου στο παιδί και στη συνέχεια παρουσιάζεται συνοπτικά η θεωρία των van Hiele για την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης. Πρόκειται για μια από τις πρώτες ολοκληρωμένες προσπάθειες περιγραφής της γεωμετρικής σκέψης, στην οποία έχει βασιστεί ένας μεγάλος αριθμός ερευνών για τη γεωμετρία (Fox, 2000). Παρόλα αυτά ο αυστηρά γραμμικός τρόπος θεώρησης της γεωμετρίας στο μοντέλο van Hiele (Houdement & Kuzniak, 2003) δεν ευνοεί τη μελέτη θεμάτων όπως η κατανόηση των εμποδίων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές. Ως εκ τούτου, απαιτούνται νέες θεωρητικές προσεγγίσεις για την καλύτερη ανάλυση και κατανόηση των δεδομένων που συγκεντρώνονται από τις πρόσφατες ερευνητικές εργασίες σε θέματα γεωμετρίας (Gutiérrez, Kuzniak, & Straesser, 2005). Ακολούθως παρουσιάζονται τρία άλλα θεωρητικά πλαίσια που σχετίζονται με τη μάθηση των γεωμετρικών ιδεών και την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης, τα οποία χρησιμοποιούνται για την ερμηνεία των αποτελεσμάτων της παρούσας εργασίας: η προσέγγιση των Houdement και Kuzniak (Houdement & Kuzniak, 2003; Houdement, 2007) για τρία πλαίσια γεωμετρίας στα οποία είναι πιθανό να λαμβάνει χώρα η ενασχόληση με θέματα γεωμετρίας, το γνωστικό μοντέλο του Duval (Duval, 1995, 1998, 2006) για το γεωμετρικό συλλογισμό και η θεωρία των σχηματικών εννοιών του Fischbein (Fischbein, 1993). Η προσέγγιση των Houdement και Kuzniak και το μοντέλο του Duval για το γεωμετρικό συλλογισμό, στα οποία στηρίζεται κατά ένα μέρος η παρούσα εργασία παρουσιάζονται αναλυτικά, ενώ γίνεται μόνο συνοπτική παρουσίαση των απόψεων του Piaget για την αναπαράσταση του χώρου στο παιδί, της θεωρίας των van Hiele για την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης και της θεωρίας των σχηματικών εννοιών του Fischbein.

Στο επόμενο υποκεφάλαιο παρουσιάζονται γενικές αρχές που έχουν διατυπωθεί από μαθηματικούς παιδαγωγούς για τα αναλυτικά προγράμματα της γεωμετρίας (π.χ. Clausen-May, Jones, McLean, & Rownalds, 2000; Fujita, Jones, & Yamamoto, 2004) και γίνεται αναφορά στην αντιμετώπιση του θέματος της γεωμετρίας στο αναλυτικό πρόγραμμα της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στην Κύπρο. Η επιλογή αυτή αποσκοπεί στην ένταξη της παρούσας έρευνας στο εκπαιδευτικό πλαίσιο από το οποίο λήφθηκαν τα δεδομένα της. Εφόσον στην εργασία διερευνήθηκαν οι γεωμετρικές γνώσεις και ικανότητες Κυπρίων μαθητών αναφορικά με διαφορετικά γεωμετρικά σχήματα (όπως προκύπτουν από τη διδασκαλία θεμάτων γεωμετρίας στα πλαίσια της εκπαίδευσης) και η κατασκευή του δοκιμίου μέτρησης των γεωμετρικών ικανοτήτων βασίστηκε στην ύλη που διδάσκονται οι μαθητές μέχρι το τέλος της δημοτικής εκπαίδευσης (δείτε λεπτομέρειες στο τρίτο κεφάλαιο της εργασίας), κρίθηκε σκόπιμο να παρουσιαστεί σε γενικές γραμμές το περίγραμμα ύλης που ακολουθείται στο κυπριακό αναλυτικό πρόγραμμα σε σχέση με τα γεωμετρικά σχήματα.

Ακολουθεί παρουσίαση προηγούμενων ερευνών που έχουν ασχοληθεί με τις γνώσεις και ικανότητες των μαθητών σε σχέση με τα γεωμετρικά σχήματα. Οι έρευνες αυτές διακρίνονται σε τρεις κατηγορίες, ανάλογα με το χώρο στον οποίο αναφέρονται οι γνώσεις των μαθητών: έρευνες για τα επίπεδα σχήματα, έρευνες για τα γεωμετρικά στερεά και έρευνες για τα αναπτύγματα στερεών. Από την παρουσίαση των ερευνών αυτών είναι εμφανές ότι το ζήτημα των γνώσεων και των ικανοτήτων των μαθητών μελετάται αναφορικά με μια κατηγορία γεωμετρικών σχημάτων σε κάθε εργασία και προκύπτει η ανάγκη για παράλληλη διερεύνηση του θέματος σε διαφορετικές διαστάσεις του χώρου, που επιχειρείται στην παρούσα εργασία. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας για το θέμα της χωρικής ικανότητας, οι συνιστώσες της οποίες διερευνώνται στην παρούσα εργασία υπό το πρίσμα της σχέσης με τις γεωμετρικές ικανότητες των μαθητών, και γίνεται ιδιαίτερη αναφορά σε εργασίες που συνδέουν τη χωρική ικανότητα με τη γεωμετρική σκέψη.

Η Ανάπτυξη της Γεωμετρικής Σκέψης

Οι Απόψεις του Piaget για την Αναπαράσταση του Χώρου

Σύμφωνα με τους Piaget και Inhelder (1967), η αναπαράσταση του χώρου στο παιδί είναι το αποτέλεσμα χειρισμού του περιβάλλοντος από το ίδιο το παιδί. Η βιολογική ωρίμανση του παιδιού επιδρά σημαντικά στους μετασχηματισμούς του πραγματικού χώρου σε νοερές αναπαραστάσεις. Η σκέψη του παιδιού κυριαρχείται αρχικά από τις ερμηνείες που δίνει για τις εμπειρίες που αποκτά μέσω των αισθήσεών του. Οι νοερές αναπαραστάσεις του χώρου οικοδομούνται στο παιδί μέσω της προοδευτικής οργάνωσης των κινήσεων και των εσωτερικευμένων δράσεων του παιδιού. Σημαντικό ρόλο στην οικοδόμηση των νοερών αναπαραστάσεων του χώρου διαδραματίζει η διαδικασία του αναστοχασμού πάνω σε προηγούμενες κινητικές ενέργειες.

Οι ίδιοι ερευνητές (Piaget & Inhelder, 1967) έχουν υποστηρίξει ότι η προοδευτική οργάνωση των γεωμετρικών ιδεών ακολουθεί μια συγκεκριμένη σειρά: αρχικά οικοδομούνται οι τοπολογικές σχέσεις (π.χ. εγκλεισμός, συνέχεια), ακολουθούν οι προβολικές σχέσεις και αργότερα οικοδομούνται οι ευκλείδειες σχέσεις (παραλληλία και απόσταση). Η αρχή αυτή, γνωστή ως η αρχή της τοπολογικής προτεραιότητας, δεν υποστηρίζεται πλέον (Clements & Battista , 1992) και αποτελεί ένα από τα σημεία κριτικής των απόψεων του Piaget για την αναπαράσταση του χώρου. Αντίθετα, φαίνεται ότι είναι δυνατό ιδέες και για τα τρία είδη σχέσεων (τοπολογικές, προβολικές και ευκλείδειες) να αναπτύσσονται με το πέρασμα του χρόνου και σταδιακά να συνδέονται μεταξύ τους και να δημιουργούν μια σύνθεση. Οι ιδέες αυτές είναι αρχικά διαισθήσεις που βασίζονται στη δράση του παιδιού μέσα στον κόσμο και τον ενεργό χειρισμό των αντικειμένων του κόσμου μέσα στον οποίο το παιδί κινείται και δρα.

Η Θεωρία των van Hiele

Οι Pierre και Dina van Hiele (van Hiele, 1986) ανέπτυξαν μια θεωρία που αφορά τα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης από τα οποία διέρχονται οι μαθητές στο πλαίσιο της διδασκαλίας των σχημάτων. Το μοντέλο van Hiele αποτελείται από δύο μέρη. Το πρώτο μέρος, τα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης, είναι μια περιγραφή των τρόπων σκέψης των μαθητών στη γεωμετρία. Βασική αρχή του μοντέλου είναι ότι κατά τη διαδικασία της μάθησης ένας μαθητής διέρχεται μέσα από διάφορα επίπεδα συλλογισμού. Η διαδικασία μετάβασης από το ένα επίπεδο στο άλλο εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από το είδος της διδασκαλίας. Το δεύτερο μέρος της θεωρίας, οι φάσεις της μάθησης, αποτελεί μια εισήγηση προς τους εκπαιδευτικούς για τον τρόπο οργάνωσης της διδασκαλίας της γεωμετρίας ώστε να υποβοηθείται η μετάβαση των μαθητών από το επίπεδο στο οποίο βρίσκονται στο επόμενο. Ακολούθως παρουσιάζονται συνοπτικά τα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης όπως αναλύονται στη θεωρία των van Hiele, καθώς και σημεία κριτικής της συγκεκριμένης θεωρίας.

Τα Επίπεδα Γεωμετρικής Σκέψης κατά τη Θεωρία των van Hiele

Το μοντέλο των van Hiele αφορά τα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης από τα οποία διέρχονται οι μαθητές καθώς προχωρούν από την απλή αναγνώριση ενός σχήματος στην ικανότητα σύνθεσης μιας τυπικής γεωμετρικής απόδειξης. Σύμφωνα με τη θεωρία τους (van Hiele, 1986), η μάθηση είναι μια ασυνεχής διαδικασία. Δηλαδή, παρουσιάζονται άλματα στην καμπύλη μάθησης, τα οποία αποκαλύπτουν την παρουσία διακριτών, ποιοτικά διαφορετικών επιπέδων σκέψης. Συγκεκριμένα, υπάρχουν πέντε επίπεδα, τα οποία ακολουθούν συγκεκριμένη σειρά και είναι ιεραρχικά . Η πρόοδος και η μετάβαση από το ένα επίπεδο στο επόμενο εξαρτάται τις μαθησιακές εμπειρίες που έχει το παιδί μέσα από τη διδασκαλία και όχι από την ηλικία ή τη βιολογική του ωρίμανση (Mason, 1998). Η κατάκτηση σε μεγάλο βαθμό των πρώτων επιπέδων της ιεραρχίας των van Hiele επιτρέπει στο μαθητή να λειτουργεί με επάρκεια σε ένα από τα επίπεδα που βρίσκονται υψηλότερα στην ιεραρχία. Στη θεωρία των van Hiele αναφέρονται πέντε επίπεδα γεωμετρικής σκέψης: οπτικό, αναλυτικό, άτυπο παραγωγικό, τυπικό αξιωματικό και αυστηρό. Κάθε επίπεδο έχει τη δική του γλώσσα και τη δική του ερμηνεία για τον ίδιο όρο. Η δομή της γλώσσας είναι ένας σημαντικός παράγοντας σε ό,τι αφορά τη μετάβαση από το ένα επίπεδο στο άλλο.

Επίπεδο 1 (Οπτικό Επίπεδο ή Επίπεδο Ολικής Ανάλυσης): Οι μαθητές αντιλαμβάνονται τις γεωμετρικές μορφές ως ενιαίες οντότητες. Αναγνωρίζουν τα σχήματα ως οπτικές ολότητες και έτσι μπορούν να τα αναπαριστούν νοητικά ως οπτικές εικόνες. Η αναγνώριση των σχημάτων στο στάδιο αυτό γίνεται μόνο με βάση την εμφάνισή τους και στηρίζεται συχνά στη σύγκριση με ένα γνωστό πρωτότυπο. Για παράδειγμα, ένα σχήμα ονομάζεται ορθογώνιο, γιατί μοιάζει με πόρτα. Οι ιδιότητες των σχημάτων δεν γίνονται αντιληπτές. Παρόλο που μπορούν να διακρίνουν ότι ένα σχήμα είναι διαφορετικό από κάποιο άλλο, δεν είναι σε θέση να αναφέρουν κάποιες ιδιότητες για το κάθε σχήμα. Στο επίπεδο αυτό οι μαθητές λαμβάνουν αποφάσεις βασισμένοι μόνο στην αντίληψη, η οποία κυριαρχεί στη σκέψη των παιδιών, και όχι στο συλλογισμό.

Επίπεδο 2 (Περιγραφικό ή Αναλυτικό Επίπεδο): Οι μαθητές βλέπουν τα σχήματα ως συλλογές ιδιοτήτων. Μπορούν να αναγνωρίσουν και να ονομάσουν τις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων, αλλά δεν βλέπουν τις σχέσεις ανάμεσα σε αυτές τις ιδιότητες. Όταν περιγράφει ένα αντικείμενο, ένας μαθητής που λειτουργεί σε αυτό το επίπεδο, μπορεί να αναφέρει όλες τις ιδιότητες που γνωρίζει, αλλά να μην διαβλέπει ποιες ιδιότητες είναι αναγκαίες και ποιες είναι επαρκείς για να περιγράψει το αντικείμενο. Σε αυτό το επίπεδο η γλώσσα αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο, εφόσον είναι απαραίτητη για την περιγραφή των γεωμετρικών σχημάτων.

Επίπεδο 3 (Άτυπο παραγωγικό): Οι μαθητές αντιλαμβάνονται τις σχέσεις ανάμεσα στις ιδιότητες των σχημάτων και ανάμεσα στα σχήματα. Σε αυτό το επίπεδο οι μαθητές μπορούν να δίνουν ορισμούς με νόημα και να προβάλουν άτυπα επιχειρήματα για να αιτιολογήσουν το συλλογισμό τους. Επίσης μπορούν να διακρίνουν ανάμεσα στις αναγκαίες και τις επαρκείς συνθήκες που απαιτούνται για μια έννοια. Η συμπερίληψη σχημάτων σε κλάσεις, όπως η συμπερίληψη των τετραγώνων ως ένα είδος ορθογωνίου, είναι κατανοητά. Δεν γίνεται στο επίπεδο αυτό κατανοητός ο ρόλος και η σημασία της τυπικής επαγωγής.

Επίπεδο 4 (Τυπικό αξιωματικό): Στο επίπεδο αυτό εδραιώνεται μια γεωμετρική θεωρία μέσα στα πλαίσια ενός συστήματος αξιωμάτων. Οι μαθητές μπορούν να κατασκευάσουν αποδείξεις, να κατανοήσουν το ρόλο των αξιωμάτων και των ορισμών, και γνωρίζουν το νόημα των αναγκαίων και επαρκών συνθηκών.

Επίπεδο 5 (Αυστηρό): Οι μαθητές σε αυτό το επίπεδο μπορούν να κατανοήσουν μη-Ευκλείδεια συστήματα. Εργάζονται σε διάφορα αξιωματικά επίπεδα και είναι σε θέση να τα συγκρίνουν.

Συχνά παρατηρείται το φαινόμενο ο εκπαιδευτικός να σκέφτεται σε ένα διαφορετικό επίπεδο της θεωρίας van Hiele από ότι οι μαθητές (Mason, 1998). Ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να θυμάται ότι παρόλο που εκπαιδευτικός και μαθητής χρησιμοποιούν την ίδια λέξη, είναι δυνατό να την ερμηνεύουν με εντελώς διαφορετικό τρόπο. Ως εκ τούτου, ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να αξιολογεί πώς ο μαθητής ερμηνεύει ένα θέμα, ούτως ώστε να επικοινωνεί αποτελεσματικά. Στην περίπτωση που ο εκπαιδευτικός προσπαθεί να διδάξει τους μαθητές σε ένα επίπεδο σκέψης πάνω από το επίπεδο στο οποίο βρίσκονται, οι μαθητές δεν θα κατανοήσουν το περιεχόμενο της διδασκαλίας. Συνήθως, ο μαθητής θα προσπαθήσει να απομνημονεύσει το υλικό και μπορεί να δείχνει ότι το κατέχει, αλλά στην πραγματικότητα δεν θα έχει κατανοήσει αυτό που διδάχθηκε. Οι μαθητές εύκολα ξεχνούν το υλικό που έχουν απομνημονεύσει, ή δεν είναι τελικά σε θέση να το χρησιμοποιήσουν, ειδικά σε μια άγνωστη κατάσταση.

Σημεία Κριτικής της Θεωρίας των van Hiele

Η θεωρία των van Hiele αποτελεί μια από τις πρώτες ολοκληρωμένες προσπάθειες περιγραφής της γεωμετρικής σκέψης, στην οποία αναλύονται επίπεδα από τα οποία διέρχονται οι μαθητές στο πλαίσιο της διδασκαλίας. Στη θεωρία αυτή έχει στηριχτεί ένας μεγάλος αριθμός ερευνών για τη γεωμετρία (Fox, 2000), ενώ έχει αποτελέσει αφορμή, μέσα από τα σημεία στα οποία δέχτηκε κριτική, να προστεθούν καινούρια στοιχεία από άλλους μαθηματικούς παιδαγωγούς που μελετούν τη γεωμετρική σκέψη των παιδιών (π.χ. Clements και Battista, 1992; Gutiérrez & Jaime, 1995; Houdement & Kuzniak, 2003).

Το «προ-αναγνωριστικό» επίπεδο και τα «πρωτοτυπικά σχήματα»

Οι Clements και Battista (1992) έχουν υποστηρίξει ότι το πρώτο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης δεν είναι το οπτικό επίπεδο που περιγράφουν οι van Hiele και έχουν προτείνει την ύπαρξη ενός επιπέδου πριν από το πρώτο επίπεδο (οπτικό) της ιεραρχίας των van Hiele, το «προ-αναγνωριστικό» (prerecognitive) επίπεδο (επίπεδο 0). Σε αυτό το επίπεδο, όπως υποστηρίζουν, τα παιδιά προσέχουν μόνο ένα υποσύνολο των οπτικών χαρακτηριστικών ενός σχήματος. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μην είναι ικανοί οι μαθητές να ξεχωρίσουν τα διάφορα σχήματα. Για παράδειγμα, είναι δυνατό να διακρίνουν τα τετράγωνα από τους κύκλους, αλλά να μην μπορούν να διακρίνουν ακόμη τα τετράγωνα από τα τρίγωνα. Επιπλέον, στο επίπεδο αυτό τα παιδιά αναπτύσσουν εικονικά «πρωτότυπα μοντέλα» ή «πρωτοτυπικά σχήματα» (prototypes) και σταδιακά αποκτούν λεκτική και περιγραφική ικανότητα σε σχέση με τα μοντέλα αυτά και τα σχήματα γενικότερα. Ως εκ τούτου, το οπτικό επίπεδο αποκτά μια νέα διάσταση, η οποία χαρακτηρίζεται από το συνδυασμό λεκτικής-περιγραφικής γνώσης και εικονικής αντίληψης, και ορίζεται ως «συγκρητικό» («syncretic») (Clements et al., 1999).

Ως «εικονικά πρωτότυπα μοντέλα» ή «πρωτοτυπικά σχήματα» θεωρούνται συγκεκριμένες εξωτερικές αναπαραστάσεις γεωμετρικών σχημάτων οι οποίες αντιστοιχούν σε μια «κανονική» οργάνωση της μορφής και του προσανατολισμού του σχήματος: ακολουθούν κανόνες εγκλεισμού (είναι κλειστά σχήματα), παρουσιάζονται σε συγκεκριμένες κατευθύνσεις (οριζόντιες ή κάθετες) και έχουν κανονική, απλή και συμμετρική μορφή (Mesquita, 1998). Για παράδειγμα, το ισοσκελές τρίγωνο μπορεί να θεωρηθεί ως το «καλύτερο» παράδειγμα για την αναπαράσταση της έννοιας του τριγώνου (Warren & English, 1995). Η ανάπτυξη πρωτοτυπικών σχημάτων θεωρείται αποτέλεσμα των οπτικών-αντιληπτικών περιορισμών οι οποίοι επηρεάζουν την ικανότητα των μικρών παιδιών να διακρίνουν τα γεωμετρικά σχήματα. Εξαιτίας, όμως, της εξάρτησής τους από τα οπτικά πρωτοτυπικά σχήματα, τα παιδιά που, κατά τη θεωρία των van Hiele, βρίσκονται στο οπτικό επίπεδο δεν είναι σε θέση να διακρίνουν γεωμετρικά σχήματα που ανήκουν στην ίδια ομάδα ή να συμπεριλάβουν την έννοια του τετραγώνου στην έννοια του ορθογωνίου (Gagatsis & Patronis, 1990). Κατά συνέπεια, η ικανότητα των παιδιών σε σχέση με την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων επηρεάζεται δυσμενώς στην περίπτωση που τα παιδιά χρησιμοποιούν ως μοντέλο τα πρωτοτυπικά παραδείγματα των γεωμετρικών σχημάτων (Hasegawa, 1997), εφόσον η γνώση σχημάτων σε τυποποιημένες μόνο μορφές εμποδίζει τους μαθητές να αναγνωρίσουν τα ίδια σχήματα σε μια μη τυποποιημένη τοποθέτηση (Laborde, 2003).

Η ασυνέχεια στην ιεραρχία των επιπέδων van Hiele

Παλαιότερες έρευνες έχουν επιβεβαιώσει σε γενικές γραμμές τα επίπεδα της θεωρίας των van Hiele ενισχύοντας τη χρησιμότητά τους στην περιγραφή του γεωμετρικού συλλογισμού των μαθητών (π.χ. Burger & Shaughnesy, 1986). Πιο πρόσφατα ερευνητικά αποτελέσματα θέτουν υπό αμφισβήτηση την ιδέα της ασυνέχειας μεταξύ των επιπέδων που εισηγείται το μοντέλο van Hiele (π.χ. Lehrer, Jenkins, & Osana, 1998), θεωρώντας ότι ο γεωμετρικός συλλογισμός των μαθητών δεν εντάσσεται πλήρως σε ένα και μόνο επίπεδο. Ο Gutiérrez και οι συνεργάτες του παρατηρούν ότι κανένα από τα επίπεδα του μοντέλου των van Hiele δεν μπορεί να θεωρηθεί ως μοναδική διαδικασία που είτε αποκτάται είτε δεν αποκτάται από τους μαθητές και οδηγούνται στο συμπέρασμα ότι κάθε επίπεδο θα πρέπει να θεωρείται ως ένα σύνολο διαδικασιών γεωμετρικού συλλογισμού (Gutiérrez & Jaime, 1995; Gutiérrez, Jaime, & Fortuny, 1991). Οι ίδιοι εντοπίζουν τέσσερις διαφορετικές διαδικασίες συλλογισμού, καθεμιά από τις οποίες, όπως υποστηρίζουν, είναι συστατικό δύο ή περισσοτέρων επιπέδων συλλογισμού. Οι διαδικασίες στις οποίες αναφέρονται είναι οι ακόλουθες: (α) αναγνώριση τύπων και οικογενειών γεωμετρικών σχημάτων, εντοπισμός συστατικών και ιδιοτήτων των σχημάτων, (β) ορισμός μιας γεωμετρικής έννοιας, (γ) ταξινόμηση γεωμετρικών σχημάτων ή εννοιών σε διαφορετικές κλάσεις και (δ) απόδειξη ιδιοτήτων ή προτάσεων. Έχοντας ως βάση την ιδέα ότι τα επίπεδα συλλογισμού θα πρέπει να θεωρούνται ως σύνολα διαδικασιών τα οποία μοιράζονται ορισμένα βασικά χαρακτηριστικά, προχώρησαν στην κατασκευή δοκιμίων αξιολόγησης των επιπέδων γεωμετρικής σκέψης των μαθητών τόσο για τα πολύγωνα (Gutiérrez & Jaime, 1995), όσο και για τα στερεά (Gutiérrez, Jaime, & Fortuny, 1991).

Αδυναμία του μοντέλου van Hiele να συμβάλει στην κατανόηση δυσκολιών κατά το γεωμετρικό συλλογισμό

Όπως επισημαίνουν οι Houdement και Kuzniak (2003) το μοντέλο van Hiele αποτελεί μια παιδαγωγική προσέγγιση στη γεωμετρία που βασίζεται στην ανάπτυξη της αντίληψης και του χειρισμού του σχήματος. Με βάση αυτή τη θεώρηση οι μαθητές διέρχονται από μια γενική και αντιληπτική προσέγγιση των σχημάτων σε ένα δομικό τρόπο αντιμετώπισης της γεωμετρίας. Ο συγκεκριμένος τρόπος θεώρησης της γεωμετρίας θεωρείται από τους δύο Γάλλους ερευνητές αυστηρά γραμμικός, με αποτέλεσμα να μην συμβάλλει στην κατανόηση εμποδίων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την ενασχόληση με θέματα γεωμετρίας. Ο Duval (1998, 2002) επισημαίνει επίσης ότι η προσέγγιση των van Hiele αποτυγχάνει να συμβάλει στην κατανόηση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη γεωμετρία. Ο ίδιος υποστηρίζει ότι για την επίτευξη κατανόησης αυτών των δυσκολιών απαιτείται μια γνωστική προσέγγιση του θέματος, η οποία θα επιτρέπει τον καθορισμό των γνωστικών λειτουργιών που βρίσκονται στο υπόβαθρο των μαθηματικών διαδικασιών. Συνεπώς, θεωρητικά πλαίσια όπως το μοντέλο van Hiele μπορούν να βοηθήσουν στην ανάλυση μερικών μόνο πτυχών της ποικιλίας των δεδομένων που προκύπτουν από τη σύγχρονη έρευνα σε θέματα διδασκαλίας και μάθησης της γεωμετρίας, ενώ άλλα θεωρητικά πλαίσια μπορούν να αξιοποιηθούν προς την κατεύθυνση αυτή (Gutiérrez, Kuzniak, & Straesser, 2005). Στο υποκεφάλαιο που ακολουθεί παρουσιάζεται η προσέγγιση των Houdement και Kuzniak για τη μελέτη θεμάτων μάθησης της γεωμετρίας.

Η Προσέγγιση των Houdement και Kuzniak για τη Μελέτη Θεμάτων Μάθησης της Γεωμετρίας

Το θεωρητικό πλαίσιο που έχουν αναπτύξει οι Houdement και Kuzniak (Houdement & Kuzniak, 2003; Houdement, 2007) στηρίζεται σε μια επιστημολογική προσέγγιση των θεμάτων γεωμετρίας και αναπτύχθηκε αρχικά κατά την εκπαίδευση φοιτητών που επρόκειτο να γίνουν εκπαιδευτικοί, σε μια προσπάθεια ευαισθητοποίησης των μελλοντικών εκπαιδευτικών στα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά τη μάθηση γεωμετρικών εννοιών. Για παράδειγμα, η διδασκαλία της γεωμετρίας στα πλαίσια της εκπαίδευσης έχει συνήθως ως αφετηρία τη μελέτη και χρήση πραγματικών αντικειμένων, ενώ σταδιακά η γεωμετρική παιδεία ασχολείται με νοητικά αντικείμενα. Είναι ιδιαίτερα σημαντικό οι εκπαιδευτικοί που θα διδάξουν γεωμετρία να γνωρίζουν ότι για τους μαθητές ένα γεωμετρικό σχήμα μπορεί να αντιμετωπίζεται ως φυσικό αντικείμενο ή ως εικόνα, ενώ για ένα μαθηματικό αποτελεί μια νοητική κατασκευή που υφίσταται μόνο μέσω των ιδιοτήτων του.

Οι Houdement και Kuzniak (2003) έχουν μεταφέρει την ιδέα των διαφορετικών Παραδειγμάτων (Paradigms) από την εργασία του Kuhn και την έχουν αναπτύξει στο πλαίσιο της γεωμετρίας. Αναφέρονται στη γεωμετρία ως μια θεωρία του χώρου και διακρίνουν τρία διαφορετικά Παραδείγματα (με την έννοια του Kuhn) ή τρεις διαφορετικούς τύπους γεωμετρίας.

Γεωμετρία 1 (Εμπειρική Γεωμετρία)

Το πρώτο Παράδειγμα γεωμετρίας συνδέεται άμεσα με τον πραγματικό φυσικό κόσμο. Τα αντικείμενα στην Εμπειρική Γεωμετρία είναι υλικά αντικείμενα (π.χ. γραμμές σε ένα φύλλο χαρτιού ή γραμμές στην οθόνη ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή). Οι τεχνικές που επικρατούν είναι οι τεχνικές σχεδίου με συνηθισμένα γεωμετρικά όργανα, αλλά και τεχνικές όπως η δίπλωση ή το κόψιμο σχημάτων. Πηγή της εγκυρότητας στο Παράδειγμα της Γεωμετρίας 1 μπορεί να είναι οτιδήποτε προκύπτει από τις αισθήσεις. Η διαίσθηση συχνά εξομοιώνεται με την άμεση αντίληψη, ενώ για την παραγωγή νέας γνώσης επιτρέπονται όλες οι μέθοδοι: ενδείξεις με βάση την αντίληψη, πραγματική ή εικονική εμπειρία, συλλογισμός. Εμφανίζεται μια μόνιμη κίνηση πίσω μπρος ανάμεσα στο μοντέλο και την πραγματικότητα, η οποία και καθιστά το άτομο ικανό να αποδεικνύει προτάσεις και να βρίσκει το ζητούμενο. Με άλλα λόγια οι αποδείξεις είναι αντιληπτικής φύσης και γίνονται «με το μάτι», μέσω συγκρίσεων ή μέσω μετρήσεων.

Γεωμετρία 2 (Εμπειρική Αξιωματική Γεωμετρία)

Στην Εμπειρική Αξιωματική Γεωμετρία τα αντικείμενα δεν είναι πλέον υλικά, αλλά ιδεατά, θεωρητικά. Η ύπαρξη των αντικειμένων απορρέει από αξιώματα και ορισμούς. Η πηγή εγκυρότητας βασίζεται στους υποθετικούς παραγωγικούς νόμους που διέπουν ένα αξιωματικό σύστημα. Όμως η Γεωμετρία 2 παραμένει ένα μοντέλο του πραγματικού φυσικού κόσμου, εφόσον οι ορισμοί και τα αξιώματα στο Παράδειγμα αυτό βρίσκονται κοντά στην αντίληψη του χώρου που υπάρχει γύρω από το άτομο. Παρά το γεγονός ότι το σύστημα αξιωμάτων δεν είναι ολοκληρωμένο, οι αποδείξεις εντός του συστήματος είναι απαραίτητες για την ύπαρξη προόδου και τη μετάβαση στη βεβαιότητα. Επιπλέον σε αυτό το Παράδειγμα Γεωμετρίας η λεκτική διατύπωση αποκτά μεγάλη σημασία. Όλα τα αντικείμενα ορίζονται από λεκτική διατύπωση, ενώ τα σχέδια αποτελούν απλές εικονογραφήσεις.

Γεωμετρία 3 (Τυπική Αξιωματική Γεωμετρία)

Στο Παράδειγμα της Τυπικής Αξιωματικής Γεωμετρίας το σύστημα των αξιωμάτων δεν έχει καμιά σχέση με τον πραγματικό φυσικό κόσμο και δεν στηρίζεται με οποιοδήποτε τρόπο στις αισθήσεις. Πρόκειται για ένα ολοκληρωμένο αξιωματικό σύστημα, ανεξάρτητο από τις ενδεχόμενες εφαρμογές του στον πραγματικό κόσμο. Ο τύπος συλλογισμού είναι στην περίπτωση αυτή ο ίδιος όπως και στη Γεωμετρία 2, αλλά το μοναδικό κριτήριο αλήθειας είναι η συνέπεια, δηλαδή η απουσία αντιφάσεων.

Στον πίνακα που παρατίθεται οι Houdement και Kuzniak (2003) συνοψίζουν τις διαφορετικές πτυχές των τριών παραδειγμάτων γεωμετρίας στα οποία αναφέρονται.

	Γεωμετρία I (Εμπειρική Γεωμετρία)	Γεωμετρία II (Εμπειρική Αξιωματική Γεωμετρία)	Γεωμετρία III (Τυπική Αξιωματική Γεωμετρία)
Διαίσθηση	Συνδέεται με την αντίληψη, εμπλουτίζεται από το πείραμα	Συνδεδεμένη με τα σχήματα	Εσωτερική στα μαθηματικά
Εμπειρία	Συνδεδεμένη με το χώρο που μπορεί να μετρηθεί	Συνδεδεμένη με νοητικά σχήματα της πραγματικότητας	Λογική
Παραγωγή	Κοντά στο πραγματικό και συνδεδεμένη με το πείραμα	Απόδειξη βασισμένη σε αξιώματα	Απόδειξη βασισμένη σε ένα ολοκληρωμένο σύστημα αξιωμάτων
Χώρος	Διαισθητικός και φυσικός χώρος	Φυσικός και γεωμετρικός χώρος	Αφηρημένος ευκλείδειος χώρος
Κατάσταση του σχεδίου	Το αντικείμενο μελέτης και επαλήθευσης	Υποστήριξη του συλλογισμού και της «σχηματικής έννοιας»	Νοητικό σχήμα ενός θεωρητικού αντικειμένου, ευρετικό εργαλείο
Απόδειξη	Αυτο-απόδειξη και κατασκευή	Ιδιότητες και απόδειξη	Απόδειξη και συνδέσεις ανάμεσα στα αντικείμενα. Δομή.

Βασική αρχή των Houdement και Kuzniak (2003) είναι ότι τα τρία διαφορετικά Παραδείγματα που προτείνουν είναι ομογενή. Είναι δηλαδή δυνατό το άτομο να κάνει συλλογισμούς που εμπίπτουν σε ένα από τα τρία Παραδείγματα χωρίς να γνωρίζει τη φύση των άλλων δύο Παραδειγμάτων. Επισημαίνουν επίσης ότι οι μαθητές και ο εκπαιδευτικός δεν εργάζονται κατ' ανάγκη στο ίδιο Παράδειγμα. Δηλαδή, ενώ ο εκπαιδευτικός εργάζεται στο Παράδειγμα της Τυπικής Αξιωματικής Γεωμετρίας σε ένα πλήρες αξιωματικό σύστημα όπου τα αντικείμενα είναι θεωρητικά, οι μαθητές μπορεί να βασίζονται στην οπτική τους αντίληψη και να εργάζονται στο Παράδειγμα της Εμπειρικής Γεωμετρίας, όπου τα αντικείμενα είναι υλικά.

Η μετάβαση από τον έναν τύπο γεωμετρίας στον άλλο είναι πολύπλοκο θέμα, γιατί ουσιαστικά αφορά την αλλαγή θεωρίας του ατόμου. Ιδιαίτερα σημαντική θεωρείται η μετάβαση από την Εμπειρική Γεωμετρία στην Εμπειρική Αξιωματική Γεωμετρία, γιατί απαιτεί από το άτομο αλλαγή της θεωρίας του αναφορικά με τη φύση των αντικειμένων (Houdement & Kuzniak, 2003). Τα δύο αυτά Παραδείγματα είναι διαφορετικά όσον αφορά τα αντικείμενα (υλικά έναντι εννοιολογικών), τις τεχνικές (υλικά εργαλεία έναντι παραγωγής εικασιών και λογικής αιτιολόγησης) και τον τρόπο αιτιολόγησης. Ο μαθητής θα πρέπει να αντιληφθεί ότι τα γεωμετρικά αντικείμενα δεν είναι υλικά (π.χ. οι γραμμές των γεωμετρικών εικόνων) και να υιοθετήσει την ύπαρξη θεωρητικών γεωμετρικών αντικειμένων, η ύπαρξη των οποίων απορρέει από τον ορισμό τους σε ένα πλαίσιο αξιωμάτων. Συνεπώς, θα πρέπει να υιοθετήσει νέες τεχνικές εργασίας που στηρίζονται στην παραγωγή εικασιών και στη λογική αιτιολόγηση.

Η έννοια του γεωμετρικού χώρου εργασίας

Οι Houdement και Kuzniak (2003) εισάγουν την έννοια του γεωμετρικού χώρου εργασίας ως το χώρο που οργανώνεται ώστε να πραγματοποιηθεί η γεωμετρική εργασία. Ο γεωμετρικός χώρος εργασίας συνδέει σε ένα δίκτυο τα τρία ακόλουθα συστατικά: (α) τα αντικείμενα, η φύση των οποίων εξαρτάται από το γεωμετρικό Παράδειγμα, (β) τα τεχνητά μέσα, όπως εργαλεία σχεδιασμού, ηλεκτρονικούς υπολογιστές και (γ) ένα θεωρητικό σύστημα αναφοράς το οποίο πιθανό να έχει οργανωθεί σε ένα θεωρητικό μοντέλο το οποίο εξαρτάται από το γεωμετρικό Παράδειγμα. Ο γεωμετρικός χώρος εργασίας μπορεί να αποτελέσει αντικείμενο χειρισμού από το άτομο, όταν το άτομο που τον χρησιμοποιεί μπορεί να συνδέσει και να ελέγξει τα τρία συστατικά που έχουν αναφερθεί.

Όταν ένα άτομο (μαθητής ή εκπαιδευτικός) βρίσκεται αντιμέτωπος με ένα πρόβλημα, το άτομο αυτό χειρίζεται το πρόβλημα με τον προσωπικό του γεωμετρικό χώρο εργασίας. Αυτός ο προσωπικός γεωμετρικός χώρος εργασίας γενικά βασίζεται πάνω στη γνώση του ατόμου αλλά και στο είδος των γεωμετρικών παραγωγών που γίνονται αποδεκτές στο εκπαιδευτικό πλαίσιο όπου το άτομο εργάζεται.

Ένας «ειδικός» κατά την επίλυση ενός προβλήματος στη γεωμετρία δημιουργεί ένα κατάλληλο γεωμετρικό χώρο εργασίας για να εργαστεί. Ο χώρος αυτός θα πρέπει να ικανοποιεί δύο συνθήκες: Τα συστατικά του θα πρέπει να είναι επαρκώς ισχυρά ώστε να μπορεί να χειριστεί το πρόβλημα στο σωστό γεωμετρικό Παράδειγμα και τα διάφορα συστατικά του θα πρέπει να τύχουν χρήσης και χειρισμού με ένα έγκυρο τρόπο. Όταν ο ειδικός έχει αποφασίσει ποιο γεωμετρικό Παράδειγμα είναι κατάλληλο για το πρόβλημα, τότε μπορεί να οργανώσει τη χρήση των τεχνητών μέσων και τον τύπο συλλογισμού που θα χρησιμοποιήσει χάρη στο γεωμετρικό χώρο εργασίας που ταιριάζει σε αυτό το Παράδειγμα (Houdement & Kuzniak, 2003). Σύμφωνα με τον Parzysz, (2003), ένας «ειδικός» κατά την επίλυση ενός προβλήματος στη γεωμετρία μπορεί να μετακινείται από το Παράδειγμα της Εμπειρικής Γεωμετρίας στο Παράδειγμα της Εμπειρικής Αξιωματικής ή της Τυπικής Αξιωματικής Γεωμετρίας, γνωρίζοντας σε ποιο Παράδειγμα γεωμετρίας εργάζεται σε κάθε φάση της επίλυσης του προβλήματος.

Τέλος, τα αναλυτικά προγράμματα, οι διδακτικές εισηγήσεις προς τους εκπαιδευτικούς και οι σημειώσεις για τον τρόπο με τον οποίο ένας μαθητής μπορεί να μάθει γεωμετρία, ορίζουν το διδακτικό γεωμετρικό χώρο εργασίας (Houdement, 2007). Οι δύο εισηγητές θεωρούν ότι με τη βοήθεια του διδακτικού γεωμετρικού χώρου εργασίας ως φίλτρο για τη σύγκριση ανάμεσα στα αναλυτικά προγράμματα διαφορετικών τάξεων θα μπορούσαν να προκύψουν πλούσιες συγκρίσεις τουλάχιστον στο επίπεδο του επιδιωκόμενου αναλυτικού προγράμματος και του προσφερόμενου αναλυτικού προγράμματος.

Συνοψίζοντας, η προσέγγιση των Houdement και Kuzniak για τη μελέτη θεμάτων μάθησης της γεωμετρίας στηρίζεται στη διάκριση τριών τύπων γεωμετρίας, της Εμπειρικής Γεωμετρίας, της Εμπειρικής Αξιωματικής Γεωμετρίας και της Τυπικής Αξιωματικής Γεωμετρίας. Η ανάλυσή τους επικεντρώνεται στα αντικείμενα, τις τεχνικές και τον τρόπο αιτιολόγησης σε κάθε τύπο γεωμετρίας και μπορεί να συμβάλει στην κατανόηση δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την επίλυση γεωμετρικών έργων. Στο υποκεφάλαιο που ακολουθεί παρουσιάζεται το γνωστικό μοντέλο του Duval για το γεωμετρικό συλλογισμό (Duval, 1995, 1998, 2006).

Το Γνωστικό Μοντέλο του Duval για το Γεωμετρικό Συλλογισμό

Ο Duval (1998) επισημαίνει ότι οι προσπάθειες συστηματοποίησης σταδίων από τα οποία διέρχονται οι μαθητές κατά την ανάπτυξη της αντίληψης εννοιών του χώρου, όπως είναι τα επίπεδα van Hiele, αποτυγχάνουν να βοηθήσουν στην κατανόηση των δυσκολιών που συχνά αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη γεωμετρία. Ο ίδιος υποστηρίζει ότι για την κατανόηση των δυσκολιών αυτών απαιτείται μια γνωστική προσέγγιση του θέματος, η οποία έχει ως ιδιαίτερο χαρακτηριστικό τον καθορισμό των γνωστικών λειτουργιών που βρίσκονται στο υπόβαθρο των μαθηματικών διαδικασιών.

Τύποι Γνωστικής Κατανόησης

Στην περίπτωση της γεωμετρίας ο Duval (1995) υποστηρίζει ότι τα γεωμετρικά σχέδια έχουν τη δική τους οργάνωση και για τη σύλληψή της απαιτούνται τέσσερις τύποι γνωστικής κατανόησης: η αντιληπτική, η διαδικαστική, η λεκτική και η λειτουργική κατανόηση.

Αντιληπτική κατανόηση: Πρόκειται για αυτό που αναγνωρίζει το άτομο σε ένα γεωμετρικό σχέδιο με την πρώτη ματιά. Η αντίληψη για αυτό που δείχνει η εικόνα προσδιορίζεται από γενικούς νόμους οργάνωσης των εικόνων. Στα πλαίσια αυτού του τύπου κατανόησης το άτομο μπορεί να αναγνωρίσει και να ονομάσει «υποσχήματα», τα οποία δεν σχετίζονται κατ' ανάγκη άμεσα με την κατασκευή του γεωμετρικού σχήματος. Αντίθετα, εκείνο που συχνά ισχύει είναι ότι μια γεωμετρική εικόνα περιλαμβάνει περισσότερα υποσχήματα από όσα απαιτούνται για την κατασκευή της. Η αντιληπτική σύλληψη μορφών είναι συγχρόνως άμεση και σταθερή.

Διαδικαστική κατανόηση: Χρησιμοποιείται όταν το άτομο κατασκευάζει ένα σχήμα ή όταν περιγράφει την κατασκευή του. Η οργάνωση των σχηματικών μονάδων δεν εξαρτάται από την αντίληψη, αλλά βασίζεται στις μαθηματικές ιδιότητες και σε τεχνικούς ή κατασκευαστικούς περιορισμούς. Οι περιορισμοί μπορεί να προέρχονται, για παράδειγμα, από τη χρήση ή μη του χάρακα και του διαβήτη ή τη χρησιμοποίηση των βασικών εργαλείων ενός προγράμματος στον υπολογιστή. Οι τεχνικοί περιορισμοί που αφορούν την κατασκευή του σχήματος προϋποθέτουν ότι το σχήμα που πρόκειται να κατασκευαστεί δεν μπορεί να γίνει αντιληπτό ενόσω δεν ικανοποιούνται συγκεκριμένες μαθηματικές ιδιότητες. Συνεπώς, σε αυτό το είδος κατανόησης ενός γεωμετρικού σχήματος απαιτείται γνώση των μαθηματικών ιδιοτήτων και των μεταξύ τους σχέσεων.

Λεκτική κατανόηση: Σύμφωνα με την ανάλυση του Duval (1995), σε οποιαδήποτε γεωμετρική αναπαράσταση η αντιληπτική αναγνώριση των γεωμετρικών ιδιοτήτων πρέπει να βρίσκεται υπό τον έλεγχο ορισμένων λεκτικών δηλώσεων, καθώς είναι ο συνδυασμός των δηλώσεων αυτών με την εικόνα που καθορίζει τι ακριβώς αναπαριστά το σχέδιο. Οι μαθηματικές ιδιότητες που αναπαραστάθηκαν σε ένα γεωμετρικό σχέδιο δεν μπορούν να προσδιοριστούν μόνο μέσω της αντιληπτικής σύλληψης, αλλά απαιτείται να καθοριστούν πρώτα μέσω της γλώσσας. Επισημαίνεται ότι είναι δυνατό να υπάρχει ασυμφωνία ανάμεσα σε αυτό που «δείχνει» η εικόνα και σε αυτό που αναπαριστά το συγκεκριμένο γεωμετρικό σχέδιο. Η αντίληψη για το τι δείχνει η εικόνα αφορά αυτό που βλέπει το άτομο χωρίς συνειδητή ανάλυση, ενώ αυτό που αναπαριστά η εικόνα προσδιορίζεται από τη λεκτική περιγραφή που συνοδεύει το σχέδιο.

Λειτουργική κατανόηση: Εμπεριέχει την έννοια του ατόμου που λειτουργεί πάνω στο σχήμα, είτε νοητικά είτε με φυσικό τρόπο, γεγονός που καθιστά δυνατή την ενόραση για την επίλυση ενός γεωμετρικού προβλήματος. Αυτό το είδος κατανόησης εξαρτάται από τις μεθόδους τροποποίησης του σχήματος. Μια μέθοδος τροποποίησης του σχήματος αφορά τη διάσπαση της εικόνας σε διάφορα υποσχήματα, τα οποία μπορούν να συνδυαστούν με τρόπο ώστε να συνθέσουν ένα καινούριο σχήμα. Ένας δεύτερος τρόπος αφορά μετασχηματισμούς ενός σχήματος (π.χ. επιμήκυνση, σμίκρυνση κτλ.). Επίσης η τροποποίηση μπορεί να αφορά την αλλαγή της θέσης ή του προσανατολισμού του σχήματος. Καθένας από τους μετασχηματισμούς αυτούς είναι δυνατό να συντελεστεί νοερά ή φυσικά. Τέτοιου είδους λειτουργίες σε μια γεωμετρική εικόνα συνιστούν διαδικασίες που προσδίδουν ένα χειριστικό ρόλο στις εικόνες, με την έννοια ότι σε ένα γεωμετρικό πρόβλημα μια από τις λειτουργίες αυτές μπορεί να οδηγήσει σε μετασχηματισμούς που υποβοηθούν την επίλυση του προβλήματος. Με άλλα λόγια, κάθε πεδίο διαμορφωτικών τροποποιήσεων σε ένα σχήμα επιφέρει μια αναπαραστατική πράξη. Αυτή ακριβώς η πράξη αποτελεί το ευρετικό ή το παραγωγικό στήριγμα του σχήματος. Παρόλα αυτά διάφοροι παράγοντες μπορούν να παρέμβουν για να ευκολύνουν ή αντίθετα για να αποκρύψουν την πράξη αυτή (Γαγάτσης, 2003). Σύμφωνα με τον Duval (αναφορά στους Χριστοδουλίδη και Παπαδόπουλο, 2003), οι διάφορες οπτικές αναδιοργανώσεις των συστατικών μερών ενός σχήματος που σχετίζεται με ένα γεωμετρικό πρόβλημα μπορούν είτε να λειτουργήσουν υποβοηθητικά για το μαθητή ως προς την επίλυση του προβλήματος είτε να αποτελέσουν εμπόδιο για το μαθητή και να τον οδηγήσουν σε αποτυχία ως προς την επίλυση του προβλήματος. Για την επιτυχή επίλυση ενός γεωμετρικού προβλήματος απαιτείται άσκηση συνεχούς ελέγχου του συλλογισμού εκ μέρους του μαθητή πάνω στη γεωμετρική μορφή και συνδυασμός της διαισθητικής σκέψης με τα φορμαλιστικά στοιχεία που προκύπτουν από τη γεωμετρική μορφή (Χριστοδουλίδης και Παπαδόπουλος, 2003).

Γνωστικές Διαδικασίες

Πέρα από τους τέσσερις τύπους κατανόησης ενός γεωμετρικού σχήματος που αναλύει, ο Duval (1998) υποστηρίζει ότι ο γεωμετρικός συλλογισμός εμπεριέχει τρία είδη γνωστικών διαδικασιών, οι οποίες επιτελούν συγκεκριμένες επιστημολογικές λειτουργίες. Οι γνωστικές αυτές διαδικασίες είναι οι διαδικασίες εξεικόνισης, κατασκευής και συλλογισμού.

Διαδικασίες εξεικόνισης. Εξεικόνιση είναι η διαδικασία η σχετική με την αναπαράσταση του χώρου για επεξήγηση μιας δήλωσης, για διερεύνηση πολύπλοκων καταστάσεων, για συνοπτική αντίληψη του χώρου ή για υποκειμενική επιβεβαίωση. Στις διαδικασίες εξεικόνισης εμπίπτει, για παράδειγμα, η οπτική αναπαράσταση μιας γεωμετρικής πρότασης. Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμο να αναφερθεί η διάκριση που κάνει ο Duval (2004, αναφορά στους Παναγίδου, Τσιαννή, & Γαγάτση, 2004) ανάμεσα στην εικονική και τη μη-εικονική εξεικόνιση. Εικονική εξεικόνιση αποκαλεί την περίπτωση της οπτικής αντίληψης των σχημάτων, κατά την οποία, δηλαδή, οι μαθητές αναγνωρίζουν ένα σχήμα διαισθητικά, με βάση το περίγραμμά του. Με άλλα λόγια η αναγνώριση του σχήματος στηρίζεται στην ομοιότητά του με το πρωτοτυπικό σχήμα που έχουν διαμορφώσει οι μαθητές. Οι μαθητές που παραμένουν σε αυτού του είδους την αντίληψη πολλές φορές είναι σε θέση να αναφέρουν τις ιδιότητες των σχημάτων, αλλά δεν προχωρούν στον εντοπισμό σχέσεων ανάμεσα στις διαφορετικές ιδιότητες. Αντίθετα, στην περίπτωση της μη-εικονικής εξεικόνισης η αναγνώριση ενός σχήματος είναι αποτέλεσμα νοερών πράξεων μέσω των οποίων εντοπίζονται οι ιδιότητες του σχήματος. Οι νοερές αυτές πράξεις πραγματοποιούνται με δραστηριότητες διάσπασης και επανασύνδεσης σχημάτων και με δραστηριότητες μετασχηματισμού σχημάτων. Οι δραστηριότητες αυτές καθιστούν τους μαθητές ικανούς να προβαίνουν σε οπτικές αναδιοργανώσεις των συστατικών μερών ενός σχήματος, οι οποίες διευκολύνουν την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων. Γίνεται επίσης αναφορά σε ένα ακόμη είδος μη εικονικής εξεικόνισης, τη διάσπαση της διάστασης των μορφών (Παναγίδου, Τσιαννή, & Γαγάτσης, 2004). Διακρίνονται δύο είδη διάσπασης της διάστασης των μορφών: η ευρετική διάσπαση, η οποία πραγματοποιείται σε συγκεκριμένη διάσταση (π.χ. στο χώρο των δύο διαστάσεων) και η διάσπαση ως προς τη διάσταση, κατά την οποία το άτομο διασπά μια μορφή σε μοναδιαία σχήματα με αριθμό διαστάσεων κατώτερο από τον αρχικό (π.χ. διασπά ένα σχήμα δύο διαστάσεων σε ευθύγραμμα τμήματα, δηλαδή μονάδες μίας διάστασης).

Διαδικασίες κατασκευής. Οι διαδικασίες αυτές αναφέρονται στη χρήση εργαλείων όπως ο χάρακας και ο διαβήτης ή τα βασικά εργαλεία ενός προγράμματος στον ηλεκτρονικό υπολογιστή. Η κατασκευή σχημάτων μπορεί να λειτουργήσει ως μοντέλο. Οι ενέργειες για την αναπαράσταση και το παρατηρούμενο αποτέλεσμα συσχετίζονται με τα μαθηματικά αντικείμενα τα οποία αναπαριστούν.

Διαδικασίες συλλογισμού. Κάθε γνωστική διαδικασία που ενεργοποιείται κατά την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων θεωρείται μια μορφή συλλογισμού. Οι διαδικασίες συλλογισμού καθιστούν τους μαθητές ικανούς από δοσμένες πληροφορίες να εξάγουν νέες πληροφορίες. Πρόκειται για λεκτικές κυρίως διαδικασίες που αφορούν επέκταση της γνώσης, εξήγηση, απόδειξη.

Όπως παρατηρεί ο Duval (1998), είναι δυνατό οι διαδικασίες εξεικόνισης, κατασκευής και συλλογισμού να λειτουργούν σε ορισμένες περιπτώσεις ως αυτόνομες διαδικασίες. Για παράδειγμα, η εξεικόνιση δεν εξαρτάται αναγκαστικά από την κατασκευή. Κατά παρόμοιο τρόπο, παρόλο που η κατασκευή οδηγεί σε εξεικόνιση, οι διαδικασίες κατασκευής εξαρτώνται μόνο από τις συνδέσεις ανάμεσα σε σχετικές μαθηματικές ιδιότητες και τους περιορισμούς των εργαλείων που χρησιμοποιούνται. Παρόλα αυτά, τα τρία αυτά είδη γνωστικών διαδικασιών είναι στενά συνδεδεμένα μεταξύ τους και η συνεργασία τους είναι γνωστικά απαραίτητη για επάρκεια στη γεωμετρία (Duval, 1998). Κατά συνέπεια, το κεντρικό θέμα είναι πώς να καταστούν οι μαθητές στο σχολείο ικανοί να αντιληφθούν την επικοινωνία ανάμεσα σε αυτά τα τρία είδη διαδικασιών. Από τις έρευνες που έχει διεξάγει ο ίδιος ο Duval στην προσπάθειά του να κατανοήσει την ανάπτυξη του γεωμετρικού συλλογισμού προκύπτει ότι τα τρία είδη διαδικασιών που εμπεριέχονται στο γεωμετρικό συλλογισμό (διαδικασίες εξεικόνισης, διαδικασίες κατασκευής και διαδικασίες συλλογισμού) πρέπει να αναπτυχθούν ξεχωριστά (Duval, 2002). Είναι, όμως, απαραίτητο στο αναλυτικό πρόγραμμα να είναι έκδηλη η διαφοροποίηση ανάμεσα στις διαδικασίες εξεικόνισης και ανάμεσα σε διαφορετικές διαδικασίες συλλογισμού. Εφόσον γίνει στα πλαίσια του αναλυτικού προγράμματος συστηματική εργασία για τη διαφοροποίηση αυτή, μπορεί πραγματικά να υπάρξει στη συνέχεια συνεργασία ανάμεσα στα τρία είδη διαδικασιών γεωμετρικού συλλογισμού που αναφέρει.

Ειδικά σε ό,τι αφορά στο θέμα της εξεικόνισης ο Duval (αναφορά στους Παναγίδη και Χριστοδούλου, 2004) επισημαίνει ότι στην περίπτωση που η διδασκαλία της γεωμετρίας έχει ως αφετηρία την αναγνώριση μεμονωμένων σχημάτων οι μαθητές καθηλώνονται στην εικονική εξεικόνιση. Αντίθετα, υποστηρίζει ότι θα πρέπει από τη νηπιακή και την πρώτη σχολική ηλικία να εντάσσονται στο πρόγραμμα διδασκαλίας της γεωμετρίας δραστηριότητες που απαιτούν διάσπαση των σχημάτων. Με αυτό τον τρόπο οι μαθητές δεν παραμένουν στο επίπεδο της απλής αναγνώρισης σχημάτων που στηρίζεται στην οπτική αντίληψη, αλλά επεμβαίνουν πάνω στο σχήμα, το μετασχηματίζουν και οδηγούνται στη μη-εικονική εξεικόνιση, που θα τους επιτρέπει αργότερα την επίλυση σύνθετων γεωμετρικών προβλημάτων.

Σε αντίθεση με τη θεωρία των van Hiele που αναφέρεται σε επίπεδα γεωμετρικής σκέψης μέσα από τα οποία διέρχεται ένας μαθητής, ο Duval προσεγγίζει το θέμα από τη γνωστική σκοπιά και προσπαθεί να καθορίσει τις γνωστικές λειτουργίες που βρίσκονται στο υπόβαθρο των διαδικασιών γεωμετρικής σκέψης. Κεντρική θέση στην ανάλυσή του κατέχει η περιγραφή των τεσσάρων τύπων γνωστικής κατανόησης μέσα από τους οποίους οι μαθητές προσεγγίζουν τη γεωμετρική εικόνα. Τα τελευταία χρόνια έχει πραγματοποιηθεί στην Κύπρο ένας αριθμός μελετών που είτε στηρίζονται στο πλαίσιο ανάλυσης του Duval (1995, 1998) για τη μελέτη της γεωμετρίας (π.χ. Βούργιας, Πέσκιας, & Βούργια, 2003; Παναγίδου, Τσιαννή, & Γαγάτσης, 2004; Χριστοδουλίδης και Παπαδόπουλος, 2003), είτε επιχειρούν να συγκρίνουν στοιχεία της θεωρίας των van Hiele με εισηγήσεις του Duval (π.χ. Παναγίδης και Χριστοδούλου, 2004).

Η Θεωρία των Σχηματικών Εννοιών του Fischbein

Η Θεωρία των Σχηματικών Εννοιών του Fischbein (1993) παρουσιάζεται συνοπτικά στη συνέχεια, γιατί θεωρείται ότι μπορεί να υπηρετήσει την ερμηνεία των αποτελεσμάτων της παρούσας εργασίας, κυρίως σε σχέση με το χειρισμό από τους μαθητές έργων με αναπτύγματα γεωμετρικών στερεών. Ο Fischbein έχει υποστηρίξει ότι όλα τα γεωμετρικά σχήματα αναπαριστούν νοητικά αντικείμενα που κατέχουν ταυτόχρονα ιδιότητες εννοιολογικές (με την έννοια ότι ελέγχονται από μια θεωρία) και σχηματικές (με την έννοια της γεωμετρικής μορφής σε επίπεδο οπτικής αντίληψης). Παρατηρεί ότι ένα γεωμετρικό σχήμα μπορεί να περιγραφεί με βάση τις εσωτερικές εννοιολογικές ιδιότητες που έχει, αλλά δεν είναι απλά μια έννοια · είναι επίσης και μια εικόνα. Δηλαδή κάθε γεωμετρικό σχήμα κατέχει μια ιδιότητα που οι συνηθισμένες έννοιες δεν κατέχουν: εμπεριέχει την ιδιότητα της νοητικής αναπαράστασης του χώρου. Σε αυτό το πλαίσιο κάθε γεωμετρικό αντικείμενο θεωρείται μια σχηματική έννοια και ο ορισμός ενός γεωμετρικού αντικειμένου καθορίζει τη δυναμική ανάμεσα στις σχηματικές και τις εννοιολογικές του ιδιότητες (Mariotti & Fischbein, 1997).

Σύμφωνα με την ιδέα των σχηματικών εννοιών, ο γεωμετρικός συλλογισμός χαρακτηρίζεται από την αλληλεπίδραση ανάμεσα στις δύο όψεις του σχήματος, τη σχηματική και την εννοιολογική. Η λειτουργία των δύο αυτών πτυχών με αρμονία συμβάλλει στην ορθότητα και την αποτελεσματικότητα του γεωμετρικού συλλογισμού (Mariotti, 1995). Σε αντίθετη περίπτωση, όταν δηλαδή παρουσιάζεται ρήξη και δυσαρμονία στη λειτουργία των σχηματικών και των εννοιολογικών ιδιοτήτων ενός γεωμετρικού σχήματος, παρουσιάζονται προβλήματα και κατά συνέπεια λάθη στο γεωμετρικό συλλογισμό.

Η διαδικασία οικοδόμησης σχηματικών εννοιών στο μυαλό των μαθητών σε καμιά περίπτωση δεν αποτελεί αποτέλεσμα της συνηθισμένης διδασκαλίας που γίνεται στη γεωμετρία (Fischbein, 1993). Αντίθετα, με βάση την προσέγγιση του Fischbein μπορεί να θεωρηθεί ότι ο μαθητής έχει τις δικές του εννοιολογικές εικόνες και προσωπικούς εννοιολογικούς ορισμούς για τα σχήματα, όπως αυτοί έχουν οικοδομηθεί ως αποτέλεσμα των εμπειριών του μαθητή κατά τη διδασκαλία της γεωμετρίας.

Η Γεωμετρία στα Προγράμματα Μαθηματικών

Η γεωμετρία αποτελεί το μέσο πραγμάτωσης των υπό έμφαση στόχων των μαθηματικών, δηλαδή της επίλυσης προβλήματος, της επικοινωνίας και της ενοποίησης των μαθηματικών (Φιλίππου και Χρίστου, 1995). Επιπλέον αποτελεί ένα φυσικό πεδίο για την ανάπτυξη των ικανοτήτων των μαθητών για συλλογισμό και αιτιολόγηση. Με καλά σχεδιασμένες δραστηριότητες, κατάλληλα εργαλεία και την υποστήριξη των εκπαιδευτικών, οι μαθητές μπορούν να διατυπώσουν και να διερευνήσουν εικασίες για θέματα γεωμετρίας και μπορούν να εμπλακούν στη διαδικασία συλλογισμού σε σχέση με τις γεωμετρικές ιδέες από τα πρώτα χρόνια στο σχολείο. Στη συνέχεια παρουσιάζονται γενικές αρχές που έχουν διατυπωθεί από μαθηματικούς παιδαγωγούς για τα αναλυτικά προγράμματα της γεωμετρίας και γίνεται σύντομη αναφορά στον τρόπο που παρουσιάζεται το θέμα της γεωμετρίας στο αναλυτικό πρόγραμμα της Κύπρου.

Γενικές Αρχές για τα Αναλυτικά Προγράμματα της Γεωμετρίας

Ένα πρόγραμμα γεωμετρίας, για να θεωρείται κατάλληλο για τη διδασκαλία, θα πρέπει να καθιστά όλους τους μαθητές στους οποίους απευθύνεται ικανούς να σκέφτονται και να εργάζονται σε σχέση με το σχήμα και το χώρο και παράλληλα να αναπτύσσει τη χωρική ικανότητα όλων των μαθητών (Clausen-May et al., 2000). Ο Clausen-May και οι συνεργάτες του υποστηρίζουν ότι οποιοδήποτε αναλυτικό πρόγραμμα γεωμετρίας θα πρέπει να βασίζεται στον τρισδιάστατο χώρο στον οποίο ζούμε και όχι στο δισδιάστατο χώρο της τυπωμένης σελίδας. Ως εκ τούτου, θεωρούν σοφότερο η διδασκαλία να ξεκινά με τις τρεις διαστάσεις, να βασίζεται στο σχήμα, το χώρο και την κίνηση και, τουλάχιστον στο επίπεδο του δημοτικού σχολείου, να περιλαμβάνει δραστηριότητες που προτρέπουν τους μαθητές να δράσουν, να εκφραστούν λεκτικά και να χρησιμοποιήσουν τη φαντασία τους.

Ειδικότερα το πρόγραμμα της γεωμετρίας στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου πρέπει να περιλαμβάνει δραστηριότητες που δίνουν έμφαση στον πειραματισμό των παιδιών με τη χρήση ποικίλων υλικών και που ενθαρρύνουν τους μαθητές να κατασκευάζουν και να σχεδιάζουν γεωμετρικά σχήματα (Fuys & Liebov, 1992). Πρωταρχικοί στόχοι στο πρόγραμμα της γεωμετρίας των πρώτων τάξεων του δημοτικού σχολείου πρέπει να είναι ο συντονισμός όρασης και κίνησης, η ερμηνεία των πληροφοριών που δέχονται οι μαθητές μέσω της οπτικής αντίληψης, η ανάπτυξη της οπτικής μνήμης και η ανακάλυψη σχέσεων μεταξύ των διαφόρων μερών ενός σχήματος (Fuys & Liebov, 1992).

Οι Fujita, Jones και Yamamoto (2004) έχουν επικεντρώσει την προσοχή τους στο ρόλο της διαίσθησης στη γεωμετρία, κυρίως για τους μαθητές των πρώτων τάξεων της μέσης εκπαίδευσης, όπου η διαίσθηση θεωρείται μια σημαντική δεξιότητα για τη γεωμετρία. Ως γεωμετρική διαίσθηση ορίζουν την ικανότητα του μαθητή να «βλέπει» γεωμετρικά σχήματα, επίπεδα και στερεά, να τα δημιουργεί και να τα χειρίζεται στο μυαλό του για να επιλύει προβλήματα στη γεωμετρία. Όπως έχει υποστηρίξει ο Jones (2000), η ανάγκη το αναλυτικό της γεωμετρίας να καθοριστεί με τρόπο ώστε να υποβοηθά τους μαθητές να συνδέουν τη γεωμετρική τους διαίσθηση με τις απαιτήσεις του επαγωγικού συλλογισμού είναι ίσως το πιο κρίσιμο θέμα στο σχεδιασμό ενός σύγχρονου αναλυτικού προγράμματος γεωμετρίας. Σημαίνει ότι θα συνδέει την αναπτυσσόμενη χωρική γνώση των μαθητών και την ικανότητά τους για εξεικόνιση με την αναπτυσσόμενη γνώση και κατανόησή τους και την ικανότητα να χρησιμοποιούν γεωμετρικές ιδιότητες και θεωρήματα.

Μια πρόσφατη συγκριτική έρευνα των Hoyles, Foxman και Kuchemann (αναφορά στους Fujita και Jones, 2003) για τα αναλυτικά προγράμματα της γεωμετρίας έδειξε σημαντικές διαφοροποιήσεις στις προσεγγίσεις για το σχεδιασμό των αναλυτικών προγραμμάτων γεωμετρίας ανάμεσα σε ένα μεγάλο αριθμό χωρών σε όλο τον κόσμο. Συγκεκριμένα, αναφέρεται ότι στην περίπτωση της Ολλανδίας βρέθηκε να υπάρχει μια «ρεαλιστική» ή πρακτική προσέγγιση, ενώ στη Γαλλία και την Ιαπωνία διακρίνεται μια θεωρητική προσέγγιση. Από την άλλη, στο ελληνικό αναλυτικό πρόγραμμα η γεωμετρία είναι αρκετά υποβαθμισμένη, τόσο από πλευράς κατανομής του διδακτικού χρόνου όσο και από πλευράς περιεχομένου των σχολικών βιβλίων και κατ' επέκταση της διδασκαλίας (Κούρκουλος κ.ά. 2000).

Σε γενικές γραμμές το μοντέλο του αναλυτικού προγράμματος που υιοθετείται από διαφορετικές χώρες καταλήγει στους μαθητές μέσα από τα σχολικά εγχειρίδια που χρησιμοποιούνται (Campell & Kyriakides, 2000). Παρά το γεγονός ότι τα εγχειρίδια και οι οδηγίες σχετικά με το αναλυτικό πρόγραμμα δεν είναι οι μόνες σημαντικές επιδράσεις στη μάθηση των μαθητών, εντούτοις επιδρούν σημαντικά και συνεπώς χρήζουν μελέτης. Ακολούθως παρουσιάζονται στοιχεία που αφορούν τη διδασκαλία της γεωμετρίας, όπως αυτή περιγράφεται στο αντίστοιχο αναλυτικό πρόγραμμα της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στην Κύπρο.

Η Διδασκαλία της Γεωμετρίας κατά το Αναλυτικό Πρόγραμμα της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης στην Κύπρο

Στην Κύπρο το αναλυτικό πρόγραμμα για το νηπιαγωγείο, τη δημοτική και τη μέση εκπαίδευση ετοιμάζεται από το Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού. Στο κυπριακό αναλυτικό πρόγραμμα δεν είναι έκδηλη η σχέση ανάμεσα στη φύση των μαθηματικών και στο σχεδιασμό του αναλυτικού προγράμματος για τα μαθηματικά (Campell & Kyriakides, 2000). Πάντως γίνεται διαχωρισμός διαφόρων τομέων στο αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών και ένας από τους τομείς αυτούς είναι η γεωμετρία.

Για κάθε τάξη του δημοτικού σχολείου αναφέρεται το περιεχόμενο της ύλης της γεωμετρίας που θα πρέπει να διδαχθούν οι μαθητές (Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού Κύπρου, 2002). Συγκεκριμένα, σε σχέση με το περιεχόμενο της γεωμετρίας που αφορά τα γεωμετρικά σχήματα, το περίγραμμα ύλης για τις δύο πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου περιλαμβάνει ταξινόμηση τρισδιάστατων σχημάτων και αναγνώριση της έδρας σχημάτων τριών διαστάσεων, ονομασία και ταξινόμηση πολυγώνων (διακρίνονται οι περιπτώσεις τριγώνων, τετραγώνων και ορθογωνίων) και αναγνώριση και ονομασία κύκλου. Για την Γ΄ τάξη του δημοτικού σχολείου στο περίγραμμα ύλης περιλαμβάνεται η μελέτη της έννοιας του κύβου και του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με αναγνώριση της έδρας των τρισδιάστατων αυτών σχημάτων, ενώ για την Δ΄ τάξη προστίθεται η αναγνώριση ακμής και κορυφής, καθώς και οι κατασκευές τρισδιάστατων σχημάτων. Για τα πολύγωνα η ύλη στην Γ΄ τάξη αφορά, όπως και στις δύο μικρότερες τάξεις, τρίγωνα, τετράγωνα και ορθογώνια, με τη διαφορά ότι περιλαμβάνεται παρουσίαση απλών ιδιοτήτων και κατασκευή των πολυγώνων αυτών. Στην Δ΄ τάξη του δημοτικού παρουσιάζεται η έννοια του παραλληλογράμμου, η περίπτωση πεντάγωνων και εξάγωνων σχημάτων, καθώς και διαφορετικά είδη τριγώνων, τα οποία αναμένεται ότι τα παιδιά θα ονομάζουν, θα ταξινομούν, και θα κατασκευάζουν. Παρουσιάζεται επίσης η έννοια της ακτίνας και της διαμέτρου του κύκλου.

Το περίγραμμα ύλης σε σχέση με τα γεωμετρικά σχήματα για την Ε΄ και Στ΄ τάξη δημοτικού σχολείου παρουσιάζει μεγάλες ομοιότητες. Σε σχέση με τα τρισδιάστατα σχήματα, στην έννοια του κύβου και του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου προστίθεται η έννοια της πυραμίδας και για όλα τα σχήματα που μελετώνται αναφέρεται, πέρα από την αναγνώριση των στοιχείων (έδρα, ακμή, κορυφή), η κατασκευή τους και η εύρεση του εμβαδού της εξωτερικής επιφάνειας. Η ύλη που αναφέρεται στις τάξεις αυτές για τα πολύγωνα είναι η ίδια με την αντίστοιχη ύλη της Δ΄ τάξης, ενώ για την περίπτωση του κύκλου, εκτός από την έννοια της ακτίνας και της διαμέτρου, περιλαμβάνεται η κατασκευή του κύκλου, η εύρεση της περιφέρειας και η εύρεση του εμβαδού (κατά προσέγγιση).

Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμο να διευκρινιστεί ότι το περίγραμμα ύλης για τις τάξεις του δημοτικού σε σχέση με τα θέματα γεωμετρίας περιλαμβάνει, εκτός από τα τρισδιάστατα σχήματα, τα πολύγωνα και τον κύκλο, ύλη που αφορά το θέμα της συμμετρίας, το θέμα της γραμμής, την έννοια και τα είδη γωνιών, θέματα για τα οποία δεν γίνεται εδώ αναφορά, καθώς δεν αφορούν τους σκοπούς και τα ερωτήματα της παρούσας εργασίας.

Ερευνητικές Προσπάθειες που Αφορούν Γεωμετρικά Σχήματα

Ακολούθως παρουσιάζονται έρευνες που εμφανίζονται στη διεθνή βιβλιογραφία σε σχέση με τις γνώσεις και τις ικανότητες των μαθητών στα γεωμετρικά σχήματα. Η παρουσίαση γίνεται με άξονα τις τρεις βασικές συνιστώσες της έρευνας γύρω από τα γεωμετρικά σχήματα. Αρχικά παρουσιάζονται εργασίες που αφορούν τα επίπεδα σχήματα και γίνεται σύντομη αναφορά σε θέματα χειρισμού έργων υπολογισμού εμβαδού. Στη συνέχεια γίνεται αναφορά σε εργασίες για τα γεωμετρικά στερεά και ακολούθως παρουσιάζονται τα αποτελέσματα ερευνών που αφορούν τα αναπτύγματα στερεών.

Ερευνητικές Προσπάθειες που Αφορούν Γεωμετρικά Σχήματα Δύο Διαστάσεων

Η αναγνώριση επίπεδων σχημάτων θεωρείται ένας πρωταρχικός στόχος της διδασκαλίας της γεωμετρίας και αποτελεί τη βάση για την ενασχόληση του ατόμου με θέματα που αφορούν γεωμετρικό συλλογισμό σε ανώτερο επίπεδο. Σύμφωνα με τους Cruikshang και Sheffield (αναφορά στους Φιλίππου και Χρίστου, 1995), οι μαθητές που είναι ικανοί να αναγνωρίζουν παρόμοια σχήματα σε διάφορες καταστάσεις ή που μπορούν να ζωγραφίσουν ένα σχήμα που τους δίνεται, μπορούν να προχωρήσουν σε πιο συστηματική μελέτη της ευκλείδειας γεωμετρίας. Οι Piaget και Inhelder (1967) έχουν δείξει ότι η μάθηση των σχημάτων προϋποθέτει δύο αλληλοεξαρτώμενες πράξεις. Η πρώτη αναφέρεται στην ικανότητα των παιδιών να δείχνουν με τα δάκτυλά τους το περίγραμμα ενός σχήματος και η δεύτερη αναφέρεται στην ικανότητά τους για οπτική αντίληψη του σχήματος. Τονίζουν, όμως, ότι δεν είναι αρκετό για τους μαθητές να δουν ένα σχήμα για να κατακτήσουν την αντίστοιχη έννοια. Αντίθετα, απαιτείται συστηματική παρουσίαση των σχημάτων με διάφορα εποπτικά μέσα κατά τη διδασκαλία και ενασχόληση των μαθητών με ποικιλία δραστηριοτήτων.

Ερευνητικές προσπάθειες που βασίζονται στη θεωρία van Hiele

Οι περισσότερες από τις έρευνες που εξετάζουν τον τρόπο σκέψης των παιδιών σε σχέση με τα επίπεδα σχήματα στηρίζονται στη θεωρία των Pierre και Dina van Hiele (Fox, 2000), μια θεωρία επιπέδων κατανόησης στη γεωμετρία δύο διαστάσεων. Η συγκεκριμένη θεωρία, όπως έχει ήδη αναφερθεί στο σχετικό υποκεφάλαιο, επισημαίνει ότι η πρόοδος των μαθητών και η μετάβαση από το ένα επίπεδο στο άλλο εξαρτάται περισσότερο από τη διδασκαλία και λιγότερο από την ηλικία ή τη βιολογική ωρίμανση των ατόμων. Επομένως, οι διαφορετικοί τύποι διδασκαλίας μπορούν να ενισχύσουν ή να εμποδίσουν τη γεωμετρική ανάπτυξη των μαθητών (van Hiele, 1999). Ως εκ τούτου ένας μεγάλος αριθμός μαθηματικών παιδαγωγών έχει ερευνήσει το θέμα της αναγνώρισης επίπεδων σχημάτων σε σχέση με τη διδασκαλία. Για παράδειγμα, η Hannibal (1999) στηρίζεται στη θεωρία των van Hiele και προσπαθεί να απαντήσει στο ερώτημα με ποιο τρόπο μπορεί να βελτιωθεί η διδασκαλία της γεωμετρίας στην προσχολική και την πρώτη σχολική ηλικία. Για το σκοπό αυτό στην έρευνά της έχει αναλύσει την κατανόηση παιδιών ηλικίας 3 μέχρι 6 χρόνων σχετικά με την έννοια του τριγώνου και του ορθογωνίου. Με βάση τις παρατηρήσεις της, υπογραμμίζει ότι είναι σημαντικό, καθώς τα παιδιά χειρίζονται και ταξινομούν σχήματα, οι εκπαιδευτικοί να τους ζητούν να περιγράφουν λεκτικά το συλλογισμό τους για τις κατηγορίες των σχημάτων. Η διαδικασία χρήσης λόγου παρέχει στον εκπαιδευτικό σημαντικές πληροφορίες για τον τρόπο που το παιδί αντιλαμβάνεται και κατανοεί μια έννοα, αλλά ταυτόχρονα βοηθά το ίδιο το παιδί να υιοθετήσει πιο επιστημονική κατανόηση της γνωσιολογικής του βάσης (Hannibal, 1999).

Σε μια άλλη εργασία με παιδιά προσχολικής ηλικίας (3 – 6 χρόνων) οι Clements, Swaminathan, Hannibal και Sarama (1999) διερεύνησαν τα κριτήρια που χρησιμοποιούν τα παιδιά σε αυτή την ηλικία για να διακρίνουν τα μέλη μιας κλάσης σχημάτων από άλλα σχήματα. Στις κλινικές συνεντεύξεις που πραγματοποιήθηκαν δόθηκε έμφαση στον εντοπισμό και τις περιγραφές των σχημάτων από τα παιδιά, καθώς και στην αιτιολόγηση των επιλογών των παιδιών σε σχέση με τη συμπερίληψη ενός σχήματος σε κάποια συγκεκριμένη κλάση σχημάτων. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνάς τους, τα μικρά παιδιά αρχικά σχηματίζουν γνωστικά σχήματα με βάση την ανάλυση των χαρακτηριστικών των οπτικών μορφών που βλέπουν. Καθώς τα γνωστικά αυτά σχήματα αναπτύσσονται, τα παιδιά συνεχίζουν να βασίζονται κυρίως στην οπτική αντίληψη για να διακρίνουν γεωμετρικά σχήματα, αλλά είναι επίσης ικανά να αναγνωρίζουν απλές ιδιότητες γνωστών τους σχημάτων (Clements et al., 1999).

Όπως επισημαίνει ο Clements (1998), τα παιδιά χρειάζεται να διερευνήσουν τα σχήματα εκτενώς για να τα κατανοήσουν πλήρως και μια καλή μέθοδος προς την επίτευξη του στόχου αυτού είναι η χρήση καλών παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων. Η οπτική αντίληψη και αναγνώριση των σχημάτων σε μια δεδομένη μορφή δεν αρκεί, εφόσον στην περίπτωση αυτή τα παιδιά απλώς αναγνωρίζουν και ονομάζουν τα σχήματα ως εικόνες. Κατά τη διδασκαλία θα πρέπει οι εκπαιδευτικοί να μεταβάλλουν το σχήμα, το υλικό, το χρώμα των παραδειγμάτων που χρησιμοποιούν, να αλλάζουν τον προσανατολισμό και τις διαστάσεις τους των σχημάτων με τα οποία ασχολούνται οι μαθητές (Clements & Sarama, 2000). Είναι σημαντικό τα παιδιά να διερευνήσουν τα μέρη και τις ιδιότητες των σχημάτων και να συζητούν για τα θέματα αυτά. Ειδικά στα πρώτα επίπεδα, τα παιδιά θα πρέπει να χειρίζονται χειροπιαστά γεωμετρικά αντικείμενα και υλικά. Να συνδέουν, να διπλώνουν και να δημιουργούν σχήματα ή να αντιγράφουν σχήματα στο βελονοπίνακα. Παράλληλα θα πρέπει τα παιδιά να έρθουν σε επαφή με δραστηριότητες που αφορούν τη σύνθεση επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων και την ανάλυση σχημάτων από άλλα σχήματα. Ιδιαίτερα εποικοδομητική μπορεί να είναι η χρήση προγραμμάτων στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές, τα οποία παρέχουν ευκαιρίες για δυναμικούς μετασχηματισμούς σχημάτων.

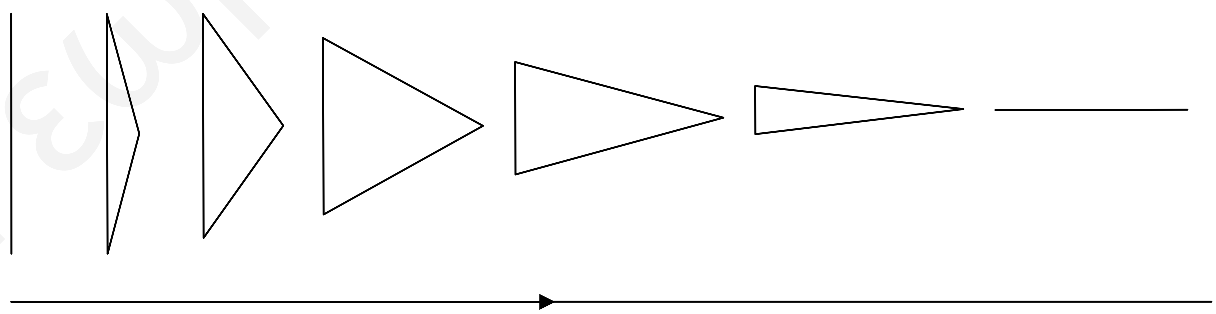
Η παρουσίαση παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων μιας έννοιας μπορεί να δώσει στους μαθητές μια διαισθητική αντίληψη της γεωμετρικής ιδέας (Geddes & Fortunato, 1993). Οι Fuys και Liebov (1997) εισηγούνται την κατασκευή μιας κάρτας για κάθε σχήμα δύο ή τριών διαστάσεων που αποτελεί αντικείμενο διδασκαλίας, στην οποία θα περιλαμβάνονται παραδείγματα και αντιπαραδείγματα της έννοιας, καθώς και σχήματα τα οποία δεν βρίσκονται σε αυτό που οι μαθητές θεωρούν «φυσιολογική θέση». Κατ' ανάλογο τρόπο οι Shaw, Thomas, Hoffman και Bulgren (1995) εισηγούνται την κατασκευή εννοιολογικού διαγράμματος για καλύτερη κατανόηση γεωμετρικών ιδεών. Στο διάγραμμα αυτό για την έννοια ή το σχήμα που μελετάται πρέπει να αναφέρεται η ονομασία της έννοιας ή του σχήματος, ο ορισμός, τα χαρακτηριστικά, καθώς και παραδείγματα και αντιπαραδείγματα. Η χρήση του εννοιολογικού διαγράμματος βοηθά τα παιδιά να οικοδομούν και να ξεκαθαρίζουν τις έννοιες, αφού η παρουσίασή τους γίνεται με οργανωμένο τρόπο.

Σε μια προσπάθεια εντοπισμού ενός πλαισίου για το σχεδιασμό δοκιμίων που αξιολογούν τα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης των μαθητών, οι Gutiérrez και Jaime (1995) έχουν σχεδιάσει ένα δοκίμιο που αποτελείται από έργα βασισμένα στα πολύγωνα, το οποίο αξιολογεί το επίπεδο συλλογισμού σύμφωνα με τη θεωρία των van Hiele. Συγκεκριμένα, προσπάθεια των ερευνητών ήταν να καθοριστεί ένας τρόπος αξιολόγησης της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών σε σχέση με τα πολύγωνα, τέτοιος που να διασφαλίζει, με τον ελάχιστο αριθμό έργων σε χαρτί και μολύβι, μια έγκυρη και αξιόπιστη διαδικασία αξιολόγησης. Βασική ιδέα στην κατασκευή ενός τέτοιου δοκιμίου ήταν ότι κανένα επίπεδο συλλογισμού της θεωρίας των van Hiele δεν μπορεί να θεωρηθεί ως μοναδική διαδικασία που είτε αποκτάται είτε δεν αποκτάται από τους μαθητές. Αντίθετα, τα επίπεδα θα πρέπει να θεωρούνται ως σύνολα διαδικασιών συλλογισμού, τα οποία μοιράζονται ορισμένα βασικά χαρακτηριστικά. Υπογραμμίζουν επίσης ότι κατά την κατασκευή του δοκιμίου έλαβαν υπόψη ότι το επίπεδο της γεωμετρικής σκέψης ενός μαθητή δεν ορίζεται από τον αριθμό των έργων που συμπληρώνει σε ένα δοκίμιο, αλλά από το είδος των απαντήσεων που δίνει στα έργα αυτά (Gutiérrez & Jaime, 1998).

Στον κυπριακό χώρο έχουν αναπτυχθεί ερευνητικές προσπάθειες γύρω από θέματα γεωμετρίας με σχήματα δύο διαστάσεων, οι οποίες βασίστηκαν (α) στην έννοια του γεωμετρικού μοντέλου (Gagatsis & Patronis, 1990) και (β) στο γνωστικό μοντέλο του Duval (1998, 2002).

Ερευνητικές προσπάθειες που βασίζονται στην έννοια του γεωμετρικού μοντέλου

Οι Gagatsis και Patronis (1990) προσεγγίζουν τις αντιλήψεις των παιδιών στη γεωμετρία δύο διαστάσεων από μια διαφορετική προοπτική, η οποία αναφέρεται στα γεωμετρικά μοντέλα και στη χρήση τους. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούν ότι γεωμετρικό μοντέλο του *Σ* είναι μια συλλογή S από σημεία, γραμμές ή άλλα σχήματα στον ν-διάστατο Ευκλείδειο χώρο, η οποία παριστά ένα σύστημα *Σ* αντικειμένων ή μια κατάσταση ή μια διαδικασία, αν οι εγγενείς γεωμετρικές ιδιότητες των στοιχείων της συλλογής S μας δίνουν όλες κάποια πληροφορία για το *Σ*, δηλαδή αντιστοιχούν σε πραγματικές ιδιότητες του *Σ*. Αν, με βάση τον ορισμό αυτό, εστιάσουμε την προσοχή μας στη μεταβολή του σχήματος (μορφής) ενός πολυγώνου, τότε παίρνουμε το γεωμετρικό μοντέλο της διαδικασίας συνεχούς μετασχηματισμού, που φαίνεται στο ακόλουθο διάγραμμα (γεωμετρικό μοντέλο της διαδικασίας συνεχούς μετασχηματισμού: Gagatsis & Patronis, 1990, σ. 37)



Ευθ.τμήμα Ισοσκελή τρίγωνα Ευθ.τμήμα

Τη διαδικασία συνεχούς παραμόρφωσης που φαίνεται στο διάγραμμα η Castelnuovo (1972) την ονόμασε «δυναμική ενόραση», η οποία έρχεται σε αντίθεση με τη στατική αναπαράσταση σχημάτων που δεν μεταβάλλονται. Τα σχήματα στο γεωμετρικό μοντέλο του παραπάνω διαγράμματος ορίζονται ως πολύτοπα. «Πολύτοπο» θεωρείται το κυρτό πλαίσιο οποιουδήποτε πεπερασμένου συνόλου σημείων στο ν-διάστατο ευκλείδιο χώρο (Gagatsis & Patronis, 1990). Οι διαστάσεις των πολυτόπων αντιστοιχούν με διαφορετικά γεωμετρικά αντικείμενα στο χώρο. Πιο συγκεκριμένα, τα 0-πολύτοπα είναι σημεία, τα 1-πολύτοπα είναι ευθύγραμμα τμήματα, τα 2-πολύτοπα είναι πολύγωνα.

Με βάση την προσέγγιση αυτή έχουν πραγματοποιηθεί έρευνες με βασικό στόχο τη διερεύνηση των γεωμετρικών αντιλήψεων μικρών παιδιών (ηλικίας 4-8 χρόνων) για σχήματα δύο διαστάσεων, όπου επιχειρείται η μελέτη της κατανόησης των σχημάτων από τα παιδιά μέσω της χρήσης γεωμετρικών μοντέλων τα οποία αναπαριστούν το μετασχηματισμό πολυγώνων (π.χ. Ηλία, Γαγάτση, Μοδέστου, Παχίτη και Δεληγιάννη,2003; Elia, Gagatsis and Modestou, 2005). Στις συγκεκριμένες έρευνες ζητήθηκε από τα παιδιά να σχεδιάσουν μια σειρά από τρίγωνα με τρόπο ώστε κάθε σχήμα να είναι μεγαλύτερο από το προηγούμενο και μια σειρά από τρίγωνα με τρόπο ώστε κάθε σχήμα να είναι μικρότερο από το προηγούμενο. Το ίδιο έργο παρουσιάστηκε για την περίπτωση ορθογωνίων και τετραγώνων. Από τα αποτελέσματα των ερευνών αυτών διαφάνηκε ότι τα παιδιά στις ηλικίες αυτές χρησιμοποιούσαν δύο κυρίως στρατηγικές για την προσέγγιση των έργων αυτών: (α) διατήρηση του σχήματος με αλλαγή και των δύο διαστάσεών του και (β) μεταβολή μόνο της μιας διάστασης του σχήματος. Κάθε στρατηγική αντανακλά διαφορετικό τρόπο σκέψης, ο οποίος πιθανόν να αντιστοιχεί σε διαφορετικό επίπεδο ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης. (Elia, Gagatsis and Modestou, 2005).

Ερευνητικές προσπάθειες που βασίζονται στο γνωστικό μοντέλο του Duval

Η προοπτική μέσα από την οποία ο Duval (1998, 2002) προσεγγίζει τις αντιλήψεις των παιδιών για τη γεωμετρία έχει αποτελέσει αφορμή για τη διεξαγωγή αριθμού ερευνών στον κυπριακό χώρο. Για παράδειγμα, οι Χριστοδουλίδης και Παπαδόπουλος (2003) έχουν διερευνήσει τους παράγοντες που επηρεάζουν την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων στα οποία απαιτείται η αναγνώριση γεωμετρικών μορφών. Από τις συνεντεύξεις που έχουν πραγματοποιήσει με μαθητές που παρουσιάζουν υψηλή επίδοση στα μαθηματικά και μαθητές που παρουσιάζουν χαμηλή επίδοση στο συγκεκριμένο μάθημα παρατηρούν ότι οι μαθητές και των δύο ομάδων αναγνωρίζουν με ευκολία πρωτοτυπικές γεωμετρικές μορφές, αλλά αποτυγχάνουν στην αναγνώριση μη πρωτοτυπικών μορφών, γεγονός που επηρεάζει και την επίδοσή τους στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων. Το ζήτημα της ύπαρξης σημασιολογικής συμφωνίας ή ασυμφωνίας ανάμεσα στη λεκτική έκφραση που χρησιμοποιείται για την παρουσίαση ενός θέματος γεωμετρίας και στο σχήμα που συνοδεύει το συγκεκριμένο θέμα, το οποίο απασχολεί τον Duval (2002), έχει διερευνηθεί από τους Βούργια, Πέσκια και Βούργια (2003). Ειδικότερα, η συγκεκριμένη έρευνα στόχευε στη διερεύνηση της αντιληπτικής σύλληψης μορφών και της πραξιακής σύλληψης των σχηματισμών από μαθητές Στ΄ δημοτικού και Α΄ γυμνασίου.

Άλλες έρευνες που χρησιμοποιούν το πλαίσιο του Duval (1998, 2002) για την προσέγγιση θεμάτων γεωμετρίας επικεντρώνονται στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονται έννοιες που αφορούν ορισμένα πολύγωνα. Η Νεοκλέους (2004) έχει εξετάσει τις προσπάθειες των μαθητών να διαφοροποιήσουν τετράγωνα, ορθογώνια και παραλληλόγραμμα. Κύριος σκοπός της εργασίας ήταν η ανάλυση της γλώσσας που χρησιμοποιούν παιδιά ηλικίας 11-12 χρόνων για την περιγραφή των διαφορών μεταξύ των σχημάτων που έχουν αναφερθεί, προκειμένου να διερευνηθεί η εννοιολογική κατανόηση σχημάτων από τα παιδιά. Στην εργασία των Γαγάτση, Τσακίρη και Ρούσου Μιχαηλίδου (2004) βασικός σκοπός ήταν να προσδιοριστούν και να μετρηθούν οι γεωμετρικές αντιλήψεις και η κατανόηση των παιδιών ηλικίας 12 ετών στην Ελλάδα και στην Κύπρο σε σχέση με τις γεωμετρικές έννοιες του τετραγώνου, του ορθογωνίου παραλληλογράμμου και του τριγώνου και να διερευνηθεί η ικανότητά τους σε έργα σχεδιασμού των πιο πάνω σχημάτων. Από τα αποτελέσματα της έρευνας προκύπτει ότι οι μαθητές τόσο της Κύπρου όσο και της Ελλάδας, ενώ μπορούν με σχετική ευκολία να αναγνωρίζουν και να κατασκευάζουν πρωτοτυπικά κυρίως υπό μελέτη γεωμετρικά σχήματα, δυσκολεύονται στη μάθηση και συσχέτιση των ιδιοτήτων αυτών των σχημάτων, καθώς επίσης και στην ειδική ορολογία που χρησιμοποιείται για την περιγραφή τους. Επίσης έχει διαφανεί ότι η ικανότητα των μαθητών και των δύο χωρών σε έργα αναγνώρισης συνδέεται με την ικανότητα σχεδιασμού των συγκεκριμένων γεωμετρικών σχημάτων (τετραγώνου, ορθογωνίου παραλληλογράμμου και τριγώνου).

Συνοψίζοντας, οι έρευνες που παρουσιάστηκαν σε σχέση με τα επίπεδα σχήματα μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε τρεις ομάδες. Σε μια ομάδα εντάσσονται οι εργασίες που έχουν την αφετηρία τους στη θεωρία των van Hiele και είτε διερευνούν κυρίως το θέμα της διδασκαλίας επίπεδων σχημάτων (π.χ. Hannibal, 1999), είτε ασκούν κριτική σε σημεία της συγκεκριμένης θεωρίας (π.χ. Gutiérrez & Jaime, 1995). Σε μια δεύτερη ομάδα αναφέρθηκαν εργασίες που στηρίζονται στην προσέγγιση των Gagatsis και Patronis (1990), η οποία αναφέρεται στη χρήση γεωμετρικών μοντέλων (π.χ. Ηλία κ.ά.,2003; Elia, Gagatsis, & Modestou, 2005). Τέλος, σε μια τρίτη ομάδα περιλαμβάνονται έρευνες που προσεγγίζουν τις αντιλήψεις των παιδιών για τα γεωμετρικά σχήματα δύο διαστάσεων μέσα από την προοπτική του Duval (1995, 1998). Η παρούσα εργασία χρησιμοποιεί κατά ένα μέρος το πλαίσιο του Duval σε σχέση με την προσέγγιση των επίπεδων σχημάτων από τα παιδιά και τις γνωστικές διαδικασίες που ενεργοποιούν.

Ερευνητικές Προσπάθειες που Αφορούν Γεωμετρικά Σχήματα Τριών Διαστάσεων

Στην καθημερινή ζωή εντοπίζεται ένα πλήθος γεωμετρικών εμπειριών, οι οποίες είναι γενικά τρισδιάστατες (Meissner & Pirkernell, 2000). Η εμπειρία των παιδιών σε σχέση με το σχήμα και το χώρο αποτελεί θέμα ύπαρξης μέσα στον τρισδιάστατο κόσμο (Doverborg & Pramling Samuelsson, 2001) και οι γνώσεις που αφορούν τις έννοιες αυτές είναι αποτέλεσμα αλληλεπίδρασης με τον κόσμο των τριών διαστάσεων (Jurdak & Shahin, 2001). Ορισμένοι ερευνητές υποστήριξαν την άποψη ότι εφόσον οι πρώτες γεωμετρικές έννοιες των παιδιών έχουν σχέση με τα τρισδιάστατα σχήματα, η διδασκαλία της γεωμετρίας θα έπρεπε να αρχίζει με τις έννοιες αυτές (π.χ. Piaget & Inhelder, 1967; Clausen-May et al., 2000). Παρ' όλα αυτά οι έρευνες έχουν δείξει ότι οι μαθητές μαθαίνουν εξίσου καλά τις γεωμετρικές έννοιες είτε η διδασκαλία αρχίσει με τα στερεά είτε με τα επίπεδα σχήματα (Φιλίππου και Χρίστου, 1995). Αυτό που έχει σημασία είναι η ποιότητα των δραστηριοτήτων που δίνονται στους μαθητές, καθώς και οι ευκαιρίες που παρέχονται στους μαθητές να ασχοληθούν με δραστηριότητες που εμπεριέχουν εργασίες για ταξινόμηση, κατασκευή και διερεύνηση, δραστηριότητες που στοχεύουν να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν τις ιδιότητες των στερεών σωμάτων που συναντούν στο περιβάλλον τους.

Η αναπαράσταση τρισδιάστατων σχημάτων

Στη διεθνή βιβλιογραφία εντοπίζονται εργασίες στις οποίες το ερευνητικό ενδιαφέρον έχει στραφεί προς την κατανόηση της αντίληψης των μαθητών σε θέματα γεωμετρίας τριών διαστάσεων γενικά (π.χ. Battista & Clements, 1996; Gutiérrez, 1996; Lege, 1999) και ειδικότερα προς τη διερεύνηση θεμάτων που αφορούν άμεσα τα γεωμετρικά στερεά και τη διδασκαλία τους (π.χ. Leeson, 1994; Malara, 1998; Woodward & Brown, 1994). Για τους μαθητές η κατανόηση και η διερεύνηση τρισδιάστατων δομών αποτελεί ένα πολύ σημαντικό μέρος της εκπαιδευτικής διαδικασίας (Butter, Eisenberg, Garcia, Lewis, & Nielsen, 2003). Υπάρχει μια ποικιλία πιθανών μέσων που μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει για να αναπαραστήσει τρισδιάστατες δομές: στατικές γραφικές αναπαραστάσεις (το είδος των εικόνων που παρουσιάζονται στα σχολικά εγχειρίδια), αναπαραστάσεις με κίνηση μέσω γραφικών στον ηλεκτρονικό υπολογιστή (π.χ. διαδραστικά προγράμματα για τρισδιάτατες δομές), φυσικά μοντέλα τρισδιάστατων αντικειμένων. Καθεμιά από τις τεχνικές αυτές έχει τα δικά της πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα. Είναι ιδιαίτερα σημαντικό για τη γεωμετρία του χώρου οι εκπαιδευτικοί να έχουν κατά νου ότι από κάθε είδος επίπεδης αναπαράστασης χωρικών αντικειμένων υπάρχει κάποιου βαθμού απώλεια πληροφοριών (Gutiérrez, 1996b). Ως εκ τούτου, ένα άτομο που διαβάζει μια επίπεδη αναπαράσταση ενός στερεού θα πρέπει να προσπαθήσει να ανακτήσει όσο το δυνατό περισσότερες από τις απολεσθείσες πληροφορίες.

Τα γεωμετρικά στερεά μπορούν να παρουσιαστούν ως στατικές γραφικές αναπαραστάσεις με τη χρήση διαφορετικών επίπεδων αναπαραστάσεων. Ο Gutiérrez (1996b) περιγράφει την αναπαράσταση στερεών με τέσσερις τρόπους: σε επίπεδα, ορθογώνια προβολή, κωδικοποιημένη ορθογώνια προβολή και ισομετρική προβολή. Αναλύει τις ιδιαιτερότητες της καθεμιάς από τις αναπαραστάσεις αυτές και προβαίνει σε εισηγήσεις προς τους εκπαιδευτικούς για τους τρόπους με τους οποίους θα μπορούσαν να τις διδάξουν αποτελεσματικότερα. Όπως τονίζει ο ίδιος, είναι βασικό για τα παιδιά να αποκτήσουν και να αναπτύξουν ικανότητες που να τους επιτρέπουν να χειρίζονται διαφορετικές δισδιάστατες αναπαραστάσεις τρισδιάστατων αντικειμένων, με άλλα λόγια ικανότητες που να τους επιτρέπουν να δημιουργούν, να μετακινούν, να μετασχηματίζουν και να αναλύουν νοητικές εικόνες τρισδιάστατων αντικειμένων που δημιουργούνται από τις πληροφορίες που φέρει ένα επίπεδο σχέδιο.

Η κατανόηση των τρισδιάστατων σχημάτων

Η οικοδόμηση και η κατανόηση τρισδιάστατων αναπαραστάσεων εμπεριέχει σύνθετες γνωστικές δραστηριότητες, όπως η σύνδεση πληροφοριών που προέρχονται από διαφορετικές πηγές, η οικοδόμηση νοήματος από δυσνόητα στοιχεία, η οικοδόμηση κρυμμένων πληροφοριών, η οικοδόμηση και διατήρηση τρισδιάστατων αναπαραστάσεων τόσο των συστατικών όσο και του ολοκληρωμένου αντικειμένου, η ανάκληση σχετικών γνωστικών σχημάτων, η κωδικοποίηση ή οικοδόμηση πληροφοριών από δεδομένες χωρικές αναπαραστάσεις και τέλος ο μετασχηματισμός αυτών των αναπαραστάσεων (Pillay, 1997).

Ο Battista (1999) διακρίνει τρεις μηχανισμούς που είναι απαραίτητοι για την κατανόηση των τρισδιάστατων σχημάτων: τη χωρική δομή, τα νοητικά μοντέλα και τα σχήματα. Η έννοια της χωρικής δομής αφορά τη νοητική ενέργεια που σχετίζεται με τη δόμηση της μορφής και του τρόπου οργάνωσης ενός αντικειμένου ή ενός συνόλου αντικειμένων. Η διαδικασία της χωρικής δομής περιλαμβάνει τις μονάδες που χρησιμοποιήθηκαν για το σχηματισμό του στερεού, τις σχέσεις μεταξύ των μονάδων (όπως ο τρόπος που τοποθετούνται η μία σε σχέση με την άλλη) και αναγνώριση υποσυνόλων του αντικειμένου. Σύμφωνα με τον Battista (1999), υπάρχουν δύο θεωρίες όσον αφορά τη χωρική σκέψη, οι οποίες συμβάλλουν στην κατανόηση του τρόπου με τον οποίο οι μαθητές δομούν αντιληπτικά στερεά. Η πρώτη θεωρία, η οποία υιοθετεί τα αποτελέσματα των σύγχρονων εμπειρικών ερευνών και τις απόψεις του Piaget, υποστηρίζει ότι σε ένα αρχικό στάδιο τα μικρά παιδιά αντιλαμβάνονται το στερεό ως ένα σύνολο από αποσυντονισμένες εικόνες. Στο επόμενο στάδιο ανάπτυξης οι μαθητές αντιλαμβάνονται τις διάφορες όψεις του στερεού, ενώ πολύ αργότερα καθίστανται ικανοί να τις συντονίζουν. Αυτή η αναπτυξιακή τάση φανερώνεται στις ζωγραφιές των παιδιών. Τα μικρά παιδιά αναπαριστούν ένα τρισδιάστατο αντικείμενο ζωγραφίζοντας μια κλειστή επιφάνεια ή ένα σύνολο αποσυντονισμένων επιφανειών, ενώ τα μεγαλύτερα παιδιά ζωγραφίζουν μια μοναδική συνεκτική μορφή, η οποία προσεγγίζει την πραγματική μορφή. Η δεύτερη θεωρία είναι αυτή της ολοκλήρωσης, η οποία αφορά την οικοδόμηση ενός συνεκτικού νοητικού μοντέλου του αντικειμένου. Η ολοκλήρωση απαιτεί το συντονισμό των διαφορετικών όψεων του στερεού (Battista & Clements, 1996). Είναι δυνατό ένας μαθητής να μπορεί να αντιληφθεί τον τρόπο που οι τρεις δοσμένες όψεις ενός αντικειμένου (πρόσοψη, πλάγια όψη και κάτοψη) πρέπει να συντονιστούν και να συνδυαστούν για να οικοδομήσει το στερεό, όπως και να είναι σε θέση να προβλέψει πώς οι αλλαγές σε μια όψη επηρεάζουν τις άλλες δύο, όμως να αδυνατεί να ολοκληρώσει το στερεό.

Ο δεύτερος μηχανισμός που θεωρείται απαραίτητος για την κατανόηση των τρισδιάστατων σχημάτων αφορά την κατασκευή νοητικών μοντέλων. Τα νοητικά μοντέλα αποτελούνται από ολοκληρωμένες αφηρημένες δομές, οι οποίες ενεργοποιούνται για να ερμηνεύσουν ή να αιτιολογήσουν καταστάσεις που το άτομο χειρίζεται είτε νοητικά είτε χειριστικά. Οι Battista και Clements (1996) περιγράφουν δύο διαδικασίες για την κατασκευή νοητικού μοντέλου ενός στερεού (νοητική ολοκλήρωση), οι οποίες εσωκλείουν το μηχανισμό του συντονισμού. Η πρώτη διαδικασία βασίζεται σε μεγάλο βαθμό στο μηχανισμό της ανάκλησης. Όταν ένας μαθητής προσπαθεί να συνδυάσει τις ορθογώνιες επιφάνειες ενός στερεού ώστε να κατασκευάσει το νοητικό του μοντέλο, είναι δυνατόν να ανακαλέσει από τη μνήμη του παρόμοια στερεά με τα οποία ενασχολήθηκε προηγουμένως. Στην περίπτωση αυτή ο μαθητής ταιριάζει, σε νοητικό επίπεδο, τις όψεις του πραγματικού στερεού με τις αντίστοιχες όψεις του νοητικού στερεού που ανακαλεί. Σύμφωνα με τους Battista και Clements (1996), αν πράγματι ισχύει η διαδικασία της ανάκλησης, θα πρέπει οι μαθητές να διαθέτουν, προκειμένου κάθε φορά να κατασκευάζουν τα καταλληλότερα νοητικά μοντέλα, ένα μεγάλο αριθμό εμπειριών σχετικά με το χειρισμό πραγματικών και νοητικών μοντέλων. Στην περίπτωση που δεν υπάρχει κατάλληλο νοητικό μοντέλο, τότε μια δεύτερη εναλλακτική διαδικασία ενεργοποιείται. Ο μαθητής αναπαριστά νοητικά το αντικείμενο, μετασχηματίζοντας εκείνη την εικόνα του αντικειμένου που είναι διαθέσιμη. Για παράδειγμα, ο μαθητής μπορεί να κατασκευάσει το νοητικό μοντέλο ενός κύβου εξεικονίζοντας την επαναληπτική μεταφορά του πρώτου στρώματος κυβικών μονάδων μέσω της τρίτης διάστασης. Ο μηχανισμός του συντονισμού είναι απαραίτητος και σε αυτή τη διαδικασία, γιατί ο μαθητής θα πρέπει ανά πάσα στιγμή να μπορεί να φανταστεί όλες τις όψεις του στερεού, όπως αυτές κατασκευάζονται με την επαναληπτική τοποθέτηση του πρώτου στρώματος κυβικών μονάδων κατά μήκος της τρίτης διάστασης.

Ο τρίτος μηχανισμός που απαιτείται για την κατανόηση των τρισδιάστατων σχημάτων αφορά την κατασκευή σχημάτων. Πρόκειται για μια οργανωμένη σειρά από δράσεις ή χειρισμούς που έχουν δημιουργηθεί μέσω της εμπειρίας και εφαρμόζονται για την αντιμετώπιση παρόμοιων καταστάσεων. Αποτελούνται από ένα μηχανισμό αναγνώρισης της κατάστασης, ένα νοητικό μοντέλο το οποίο ενεργοποιείται για την ερμηνεία των ενεργειών που σχετίζονται με την κατάσταση και ένα σύνολο προσδοκιών σχετικό με τα πιθανά αποτελέσματα (Battista, 1994). Φυσικά τα νοητικά μοντέλα και τα σχήματα συνεχώς εμπλουτίζονται με αποτέλεσμα να καθιστούν το άτομο ικανό να χειριστεί προβλήματα και καταστάσεις που παρόμοια δεν έχει αντιμετωπίσει προηγουμένως (Chinnapan, 1998).

Η κατανόηση τρισδιάστατων σχημάτων έχει διερευνηθεί και κάτω από το πρίσμα της απτικής αντίληψης, η οποία μπορεί να διαδραματίσει σημαντικό ρόλο στην οικοδόμηση νοερών εικόνων τρισδιάστατων μορφών (Kohanova, 2007). Οι Jirotková και Littler (2002) παρουσιάζουν ένα διαχρονικό ερευνητικό σχέδιο μέσα από το οποίο έχει διερευνηθεί η συνεισφορά της απτικής και της οπτικής αντίληψης στην κατανόηση τρισδιάστατων σχημάτων και στην οικοδόμηση γεωμετρικών ιδεών. Επισημαίνουν ότι οι μαθητές που χρησιμοποιούν μόνο οπτική αντίληψη για να μάθουν για τα στερεά έχουν χαμηλότερης ποιότητας κατανόηση των στερεών από τους μαθητές που εμπλέκονται σε δραστηριότητες που απαιτούν οπτική και απτική αντίληψη των στερεών, καθώς και χειρισμό των σχημάτων (για παράδειγμα εμπλέκονται σε εργασίες που απαιτούν κατασκευή, κόψιμο). Με την άποψη αυτή συμφωνεί και ο Triandafillidis (1995), ο οποίος υποστηρίζει ότι η απτική διερεύνηση μπορεί να παρέχει ένα τρόπο υπερπήδησης των όποιων οπτικών περιορισμών υπάρχουν στη διδασκαλία της γεωμετρίας. Περιγράφει υλικό που έχει αναπτυχθεί από τον ίδιο και αφορά σχήματα δύο και τριών διαστάσεων. Τα παιδιά καλούνται να αγγίξουν το υλικό αυτό χωρίς να βλέπουν, να συζητήσουν τις ιδιότητες του και να ονομάσουν τα στερεά με τα οποία εργάζονται. Οι Jirotková και Littler

(2002) θεωρούν ότι το αναλυτικό πρόγραμμα του δημοτικού σχολείου για τα μαθηματικά δεν προσφέρει αρκετές δραστηριότητες που να οδηγούν στη δημιουργία γεωμετρικής δομής. Αντίθετα, με βάση τα αποτελέσματα μιας διαχρονικής έρευνας που ξεκίνησε το 1994 από τους Hejný και Jirotková, υποστηρίζουν ότι η δομή που οικοδομούν οι μαθητές στο μυαλό τους αναφορικά με τα στερεά μέσω οπτικής και απτικής αντίληψης εξαρτάται κυρίως από τις εμπειρίες τους στην καθημερινή ζωή.

Μια άλλη ομάδα ερευνητών που ασχολείται με τις αντιλήψεις των μαθητών σε θέματα τρισδιάστατης γεωμετρίας χρησιμοποιεί έργα που αφορούν τρισδιάστατα αντικείμενα φτιαγμένα από μικρούς κύβους. Από τις πρώτες εργασίες του είδους αυτού είναι η μελέτη των Ben-Haim, Lappan, & Houang (1989), όπου παρουσιάζονται έργα του τύπου «πόσοι κύβοι χρειάζονται για να κατασκευάσουμε ένα δεδομένα στερεό», καθώς και η εργασία των Cooper και Sweller (1989) που σκοπό είχε να εξετάσει την ικανότητα μαθητών μέσης εκπαίδευσης να ερμηνεύουν διάφορες αναπαραστάσεις τρισδιάστατων αντικειμένων που ήταν κατασκευασμένα από κύβους. Με παρόμοια έργα οι Battista και Clements (1996) προσπαθούν να περιγράψουν τις διάφορες εννοιολογικές δομές που οικοδομούν οι μαθητές όταν καλούνται να μετρήσουν τους κύβους που χρησιμοποιήθηκαν σε τρισδιάστατες κατασκευές και να εισηγηθούν ποιες νοητικές πράξεις είναι απαραίτητες για την οικοδόμηση αυτή. Περιγράφουν τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές σε έργα του τύπου αυτού, καθώς και τα συχνότερα λάθη που εμφανίζονται. Στα πλαίσια αυτής της ερευνητικής κατεύθυνσης ο Πρωτοπαπάς (2003) έχει διερευνήσει τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν μαθητές Ε΄ τάξης δημοτικού σχολείου στη μέτρηση του όγκου τρισδιάστατων αντικειμένων, κυρίως ορθογώνιων παραλληλεπιπέδων. Στη συγκεκριμένη έρευνα δόθηκε έμφαση και στον εντοπισμό δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την ενασχόλησή τους με προβλήματα του τύπου αυτού. Όπως έχει διαφανεί, τα λάθη που εμφανίζονται κατά τη μέτρηση του όγκου οφείλονται, κατά κύριο λόγο, στην αδυναμία των μαθητών να συντονίσουν τις τρεις όψεις του στερεού (πρόσοψη, πλάγια όψη, κάτοψη).

Η τρισδιάστατη γεωμετρία και τα επίπεδα van Hiele

Ο Gutiérrez (1992) έχει επιχειρήσει να συνδέσει τα επίπεδα της θεωρίας των van Hiele με την τρισδιάστατη γεωμετρία. Αποτέλεσμα της προσπάθειας του ίδιου και των συνεργατών του ήταν η κατασκευή ενός δοκιμίου που αποσκοπούσε στην αξιολόγηση της ικανότητας των μαθητών σε έργα τρισδιάστατης γεωμετρίας (Gutiérrez, A., Jaime, A., & Fortuny, J.,1991). Σκοπός τους ήταν να παρουσιάσουν μια εναλλακτική μέθοδο αξιολόγησης του συλλογισμού των μαθητών κατά τα επίπεδα van Hiele, έτσι που να προσφέρεται ένας τρόπος εντοπισμού των μαθητών που βρίσκονται στη φάση της μετάβασης από ένα επίπεδο στο επόμενο. Η πρότασή τους βασίστηκε σε δύο επιχειρήματα. Πρώτον, έχουν υποστηρίξει ότι για να έχουμε μια πλήρη εικόνα του γεωμετρικού συλλογισμού των μαθητών, θα πρέπει να λάβουμε υπόψη την ικανότητά τους να χρησιμοποιούν καθένα από τα επίπεδα van Hiele, παρά να τους τοποθετούμε σε ένα και μοναδικό επίπεδο. Δεύτερον, θεωρούν ότι η συνέχεια στα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης που καθορίζει το μοντέλο των van Hiele σημαίνει ότι η απόκτηση ενός συγκεκριμένου επιπέδου δεν συμβαίνει τυχαία ή πολύ γρήγορα, αλλά μάλλον παίρνει αρκετούς μήνες ή ακόμα και χρόνια.

Η διδασκαλία της γεωμετρίας του χώρου

Παρά το γεγονός ότι έχει σημειωθεί πως η διδασκαλία της γεωμετρίας των στερεών μάλλον παραμελείται σε αρκετές χώρες (Malara, 1998), εντοπίζονται στη βιβλιογραφία εργασίες που έχουν άμεση σχέση με τη διδασκαλία, στις οποίες παρουσιάζονται εισηγήσεις για προσεγγίσεις του θέματος σε πρακτικό επίπεδο. Για παράδειγμα, οι Morgan και Knoll (2000) περιγράφουν δραστηριότητες κατασκευής μεγάλου μεγέθους πολυέδρων. Συγκεκριμένα, τα παιδιά που είχαν εμπλακεί κατασκεύασαν ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς ενός μέτρου σε διάφορα χρώματα, τα οποία χρησιμοποίησαν στη συνέχεια για να τα ενώσουν και να φτιάξουν διάφορα πολύεδρα. Όπως σημειώνουν, η εμπειρία ήταν πρωτόγνωρη για τα παιδιά, εφόσον λόγω του μεγέθους των κατασκευών μπορούσαν να μελετήσουν τα πολύεδρα που κατασκεύαζαν από έξω αλλά και από μέσα.

Σε ένα τυπικό εισαγωγικό μάθημα με θέμα τα στερεά οι μαθητές έρχονται σε επαφή με διάφορα πολύεδρα απλά και μόνο με τη χρήση εικόνων από κάποιο διδακτικό εγχειρίδιο (Woodward & Brown, 1994). Εναλλακτικά, έχει προταθεί μια σειρά μαθημάτων που έχουν εφαρμοστεί με μαθητές Ε΄ τάξης δημοτικού σχολείου, τα οποία περιλαμβάνουν δραστηριότητες πρακτικής φύσεως που στόχο έχουν τη διερεύνηση και ανακάλυψη εννοιών (Woodward & Brown, 1994). Για παράδειγμα, κατά τη διάρκεια των μαθημάτων αυτών οι μαθητές καλούνται να χρησιμοποιήσουν συγκεκριμένο μαθηματικό υλικό (polydrons) για να κατασκευάσουν πολύεδρα, να τα χαλάσουν και να τα ξανακατασκευάσουν, με στόχο να διερευνήσουν τις ιδιότητές τους.

Κατ’ ανάλογο τρόπο, άλλοι ερευνητές παρουσιάζουν δραστηριότητες που αφορούν την κατασκευή του σκελετού πολυέδρων, οι οποίες αποσκοπούν στην κατανόηση των ιδιοτήτων των στερεών (π.χ. Brahier & Speer, 1997) ή στη βελτίωση της χωρικής αντίληψης των μαθητών σε σχέση με τα τρισδιάστατα σχήματα (π.χ. Leeson, 1994). Για παράδειγμα, οι Brahier και Speer (1997) εισηγούνται την κατασκευή στερεών με πρακτικούς τρόπους, π.χ. με καλαμάκια. Στη συνέχεια καλούν τους μαθητές να καταγράψουν για το κάθε στερεό που κατασκευάζουν τον αριθμό των εδρών, τω ακμών και των κορυφών και με βάση την καταγραφή να κάμουν παρατηρήσεις. Σε παρόμοιου τύπου εργασίες (π.χ. Mistretta, 2000) οι μαθητές καλούνται να κατασκευάσουν τα δικά τους μοντέλα πρισμάτων και πυραμίδων χρησιμοποιώντας υλικά όπως οι οδοντογλυφίδες (αναπαριστούν τις ακμές) και καταγράφοντας στη συνέχεια τις παρατηρήσεις τους για τον αριθμό των εδρών, των ακμών και των κορυφών καταλήγουν στον τύπο του Euler.

Πρόσφατες έρευνες εξετάζουν θέματα που αφορούν την τρισδιάστατη γεωμετρία σε σχέση με τη χρήση διάφορων προγραμμάτων ηλεκτρονικών υπολογιστών. Για παράδειγμα, ο Gutiérrez (1996) εγείρει διάφορα ερωτήματα που σχετίζονται με την ανάλυση της συμπεριφοράς μαθητών δημοτικής και μέσης εκπαίδευσης όταν χρησιμοποιούν τρισδιάστατο δυναμικό λογισμικό. Στις έρευνες που έχει πραγματοποιήσει με μαθητές ηλικίας 7 μέχρι 17 χρόνων περιγράφει τη χρήση διάφορων προγραμμάτων ηλεκτρονικών υπολογιστών που αναπαριστούν πολύεδρα σε προοπτική και επιτρέπουν στους χρήστες να τα περιστρέψουν γύρω από οριζόντιο και κατακόρυφο άξονα. Βασικός στόχος ήταν η μελέτη των νοητικών εικόνων που δημιουργούν οι μαθητές όταν εργάζονται σε αυτού του είδους το περιβάλλον και η ανάλυση των ικανοτήτων οπτικοποίησης που χρησιμοποιούν.

Στον ελλαδικό χώρο οι Markopoulos & Potari (1999) έχουν διερευνήσει με ποιο τρόπο παιδιά Δ΄ και Στ΄ τάξης οικοδομούν σχέσεις ανάμεσα σε γεωμετρικά στερεά και τις ιδιότητές τους και ανάμεσα στα στερεά μεταξύ τους όταν εργάζονται με δυναμικά τρισδιάστατα μοντέλα. Βασικός στόχος της εργασίας είναι η διερεύνηση του ρόλου που μπορούν να διαδραματίσουν οι δυναμικοί μετασχηματισμοί γεωμετρικών στερεών στη δημιουργία ενός μαθησιακού περιβάλλοντος που ενθαρρύνει την ανάπτυξη της ικανότητας των παιδιών να επικεντρώνονται στις ιδιότητες κάθε στερεού και να οικοδομούν σχέσεις ανάμεσα στις ιδιότητες αυτές και, βάσει των σχέσεων αυτών, σε διαφορετικά στερεά. Επίσης έχει διερευνηθεί στις ίδιες ηλικίες με ποιο τρόπο ένας αριθμός διδακτικών υλικών τα οποία χαρακτηρίζονται από δυναμικούς μετασχηματισμούς στερεών λειτουργούν σε μια τάξη μαθηματικών σε σχέση με τα γεωμετρικά στερεά και τις ιδιότητές τους (Markopoulos & Potari, 2000).

Από την επισκόπηση της βιβλιογραφίας που αφορά θέματα τρισδιάστατης γεωμετρίας προκύπτει ότι ένας μεγάλος αριθμός ερευνών ασχολείται με εισηγήσεις σε σχέση με τη διδασκαλία των θεμάτων αυτών (π.χ. Brahier & Speer, 1992; Mistretta, 2000; Morgan & Knoll, 2000; Woodward & Brown, 1994). Παράλληλα παρουσιάζονται ορισμένες εργασίες στις οποίες βασικός στόχος είναι η διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο τα παιδιά κατανοούν τα τρισδιάστατα σχήματα (π.χ. Battista, 1999; Clements & Battista, 1996), θέμα το οποίο τα τελευταία χρόνια προσεγγίζεται σε σχέση και με τη χρήση προγραμμάτων στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές (π.χ. Gutiérrez, 1996; Markopoulos & Potari, 2000). Στην παρούσα εργασία οι γνώσεις των μαθητών για τα γεωμετρικά στερεά εξετάζονται σε σχέση με τις γνώσεις τους για τα επίπεδα σχήματα και τις γνώσεις τους για τα αναπτύγματα γεωμετρικών στερεών σε μια προσπάθεια διαμόρφωσης ενός δομικού μοντέλου στο οποίο συνδέονται οι τρεις προηγούμενες διαστάσεις, καθώς και η διάσταση της χωρικής ικανότητας των παιδιών.

Ερευνητικές Προσπάθειες που Αφορούν Αναπτύγματα Στερεών

Τα αναπτύγματα είναι δισδιάστατα σχήματα, τα οποία μπορούν να διπλωθούν με τρόπο ώστε να σχηματιστούν τρισδιάστατα αντικείμενα (NCTM, 2000). Σύμφωνα με την περιγραφή των Borowski και Borwein για το ανάπτυγμα (αναφορά στους Lawrie, Pegg, & Guttiérrez, 2000), πρόκειται για ένα διάγραμμα κενού στερεού, το οποίο αποτελείται από επίπεδα σχήματα των εδρών τοποθετημένα με τρόπο ώστε όταν το διάγραμμα κοπεί και διπλωθεί να σχηματιστεί το στερεό. Ακολουθώντας την αντίστροφη πορεία, το ανάπτυγμα ορίζεται επίσης ως το δισδιάστατο σχήμα που προκύπτει όταν ένα στερεό ξεδιπλωθεί με τρόπο ώστε η επιφάνεια όλων των εδρών των να ανήκει σε ένα επίπεδο (Cohen, 2003). Η ικανότητα των παιδιών να αναγνωρίζουν τη σχέση μεταξύ των στερεών και των αναπτυγμάτων τους είναι στενά συνδεδεμένη με τη γενικότερη αντίληψή τους για το χώρο (Πόταρη και Σπηλιωτοπούλου, 2003). Παρά το γεγονός ότι η μετάβαση από το χώρο των δύο διαστάσεων στον τρισδιάστατο χώρο και αντίστροφα δημιουργεί δυσκολίες στα παιδιά (Bremner et al., 2000; Ben-Chaim et al., 1989), η μετάφραση ανάμεσα σε τρισδιάστατα στερεά και τις δισδιάστατες αναπαραστάσεις τους αποτελεί μια σημαντική διαδικασία στα μαθηματικά (Stylianou et al., 1999). Επιπλέον, η αναπαράσταση τρισδιάστατων αντικειμένων μέσω της κατασκευής αναπτυγμάτων συμβάλλει στην κατανόηση των σχέσεων ανάμεσα στα στοιχεία ενός στερεού (Mitchelmore, 1980).

Στην έκδοση του Εθνικού Συμβουλίου Δασκάλων των Μαθηματικών για τα επίπεδα στα μαθηματικά (NCTM, 2000) σημειώνεται ότι οι μαθητές της Γ΄, Δ΄ και Ε΄ τάξης του δημοτικού σχολείου αναμένεται (α) να αναγνωρίζουν και να κατασκευάζουν ένα τρισδιάστατο αντικείμενο με βάση τις δισδιάστατες αναπαραστάσεις του και (β) να αναγνωρίζουν και κατασκευάζουν μια αναπαράσταση δύο διαστάσεων για ένα τρισδιάστατο αντικείμενο. Υπογραμμίζεται ότι αναπαριστώντας τρισδιάστατα σχήματα στις δύο διαστάσεις και κατασκευάζοντας τρισδιάστατα σχήματα από τις αναπαραστάσεις τους των δύο διαστάσεων, οι μαθητές των τάξεων αυτών μαθαίνουν για τα χαρακτηριστικά των στερεών. Για παράδειγμα, για να καθορίσουν εάν ένα δισδιάστατο σχήμα είναι ανάπτυγμα που μπορεί να διπλωθεί σε κύβο, οι μαθητές χρειάζεται να προσέξουν τον αριθμό τον εδρών, το σχήμα τους και τις σχετικές θέσεις τους (NCTM, 2000).

Στη διεθνή βιβλιογραφία παρουσιάζονται δύο βασικές κατηγορίες εργασιών που ασχολούνται με τα αναπτύγματα τρισδιάστατων σχημάτων. Στην πρώτη ομάδα ανήκουν οι έρευνες που εξετάζουν το συλλογισμό των μαθητών σε σχέση με τα αναπτύγματα και διερευνούν τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές όταν καλούνται να κατασκευάσουν ορισμένα στερεά ή τα αναπτύγματά τους (π.χ. Potari & Spiliotopoulou, 1992; Stylianou et al., 1999). Στη δεύτερη ομάδα εντάσσονται εργασίες στις οποίες παρουσιάζονται σειρές μαθημάτων που έχουν εφαρμοστεί με παιδιά δημοτικού (π.χ. Meissner & Pirkernell, 2000; Woodward & Brown, 1994) ή γυμνασίου (π.χ. Mistretta, 2000) με βασικό άξονα τα στερεά και τα αναπτύγματά τους, καθώς και εργασίες όπου περιγράφονται δραστηριότητες κατά τις οποίες οι μαθητές εμπλέκονται στην κατασκευή αναπτυγμάτων διάφορων στερεών (π.χ. Fowler, 1996; Leeson, 1994; Mistretta, 2000).

Ο γεωμετρικός συλλογισμός των μαθητών αναφορικά με τα αναπτύγματα

Η κατασκευή του αναπτύγματος ενός στερεού αποτελεί μια νοητική διεργασία κατά την οποία το άτομο επεξεργάζεται νοητικές εικόνες (Cohen, 2003). Η πολυπλοκότητα του ίδιου του γεωμετρικού στερεού επηρεάζει το συλλογισμό των μαθητών σε σχέση με τα αναπτύγματα. Η όλη διαδικασία κατασκευής ή αναγνώρισης του αναπτύγματος ενός στερεού είναι μια νοητική κατασκευή, η οποία απαιτεί από το μαθητή όχι μόνο να «δει» κάποιο αντικείμενο και να αναγνωρίσει τα επιμέρους στοιχεία του, αλλά επίσης να συνδυάσει τα στοιχεία αυτά σε μια μετασχηματισμένη θέση και να λάβει ταυτόχρονα υπόψη την αντίστροφη πορεία (Potari & Spiliotopoulou, 2001). Η διαδικασία αυτή υπονοεί ότι το άτομο πρέπει να χειριστεί νοητικές αναπαραστάσεις που αφορούν το σχήμα των επιφανειών του τρισδιάστατου αντικειμένου, την ισότητα γωνιών και πλευρών, τις διαστάσεις του. Πρόκειται για μαθηματικό συλλογισμό που απαιτεί τη συνολική συγχώνευση των αντιληπτικών και σχηματικών όψεων της έννοιας του στερεού με το οποίο ασχολείται ο μαθητής. Όπως υποστηρίζει ο Fischbein (1993), κατά τη διαδικασία κατασκευής αναπτυγμάτων, όπου εικόνες, ορισμοί και σημασίες συνυπάρχουν, οι πολύπλοκες νοητικές δραστηριότητες που λαμβάνουν χώρα αποτελούν ευκαιρία για εξάσκηση των μαθητών στο χειρισμό σχηματικών εννοιών στο γεωμετρικό συλλογισμό.

Μια από τις πρώτες εργασίες που εξετάζουν τα αναπτύγματα στερεών πραγματοποιήθηκε από τον Bourgeois (1986) με μαθητές τρίτης τάξης δημοτικού σχολείου προτού τα παιδιά έρθουν σε επαφή με το θέμα. Συγκεκριμένα, παρουσιάστηκαν στα παιδιά στερεά (π.χ. τετραγωνική πυραμίδα, τριγωνικό πρίσμα, κύβος, τετράεδρο) και σχέδια αναπτυγμάτων (για κάθε στερεό δίνονταν δύο αναπτύγματα), τα οποία θα έπρεπε να αντιστοιχίσουν με τα στερεά. Μια πρώτη παρατήρηση των αποτελεσμάτων κατέδειξε ότι οι μαθητές είχαν μεγαλύτερη ευκολία στη σύνδεση αναπτυγμάτων που είχαν τριγωνικές έδρες με τα αντίστοιχα στερεά από ότι στην περίπτωση των αναπτυγμάτων που αποτελούνταν εξολοκλήρου από ορθογώνιες έδρες. Επίσης παρατηρήθηκε ότι ήταν πιο εύκολο για τους μαθητές να αναγνωρίσουν τα αναπτύγματα των πυραμίδων και του τριγωνικού πρίσματος όταν οι έδρες ήταν κατανεμημένες (τοποθετημένες) γύρω από τη βάση. Γενικά ο βαθμός δυσκολίας ενός αναπτύγματος φάνηκε να είναι συνάρτηση του τύπου του στερεού καθώς και της διευθέτησης των εδρών στο ανάπτυγμα (Bourgeois, 1986).

Η Mariotti (1992) έχει χρησιμοποιήσει το θέμα των στερεών και των αναπτυγμάτων τους σε μια προσπάθεια να περιγράψει και να κατανοήσει τις νοητικές διαδικασίες που σχετίζονται με το γεωμετρικό συλλογισμό. Έχοντας ως αφετηρία τη θεωρητική ιδέα της σχηματικής έννοιας του Fischbein (1993), αξιοποίησε παραδείγματα που αφορούν στερεά όπως ο κύβος και το τριγωνικό πρίσμα, καθώς και έργα στα οποία εμπλέκονται τα αναπτύγματα των στερεών αυτών, για να αναλύσει ορισμένες πτυχές της αλληλεπίδρασης που υποστηρίζει ότι υπάρχει ανάμεσα στα σχηματικά και τα εννοιολογικά συστατικά μιας γεωμετρικής έννοιας. Το πειραματικό σχέδιο που περιγράφει πραγματοποιήθηκε με ατομικές συνεντεύξεις με μαθητές από διαφορετικές ηλικίες και επικεντρώθηκε στη διαδικασία «διπλώνω-ξεδιπλώνω» ένα πολύεδρο. Κατά τη διάρκεια της συνέντευξης τα υποκείμενα καλούνταν να απαντήσουν εάν ένα συγκεκριμένο σχέδιο μπορεί όταν διπλωθεί να δημιουργήσει ένα στερεό. Στην περίπτωση που η απάντηση ήταν θετική, οι μαθητές έπρεπε να χρωματίσουν με το ίδιο χρώμα τις πλευρές του αναπτύγματος που θα ενωθούν για να δημιουργηθεί μια ακμή στο στερεό. Μέσα από την παρουσίαση και την ανάλυση των πρωτοκόλλων συνεντεύξεων που έχουν ληφθεί καταλήγει ότι ο γεωμετρικός συλλογισμός βασίζεται σε μια διαλεκτική αλληλεπίδραση ανάμεσα στη σχηματική και την εννοιολογική πτυχή μιας έννοιας, με τρόπο που καλή λειτουργία επιτυγχάνεται μόνο όταν οι δύο αυτές πτυχές είναι καλά εναρμονισμένες. Συγκεκριμένα, παρατηρεί ότι το σχηματικό σύστημα ελέγχου εισηγείται το μετασχηματισμό του σχεδίου, τη μετακίνηση των μερών του (π.χ. με περιστροφή) για να σχηματιστεί ένα ανάπτυγμα του στερεού. Αλλά το εννοιολογικό σύστημα ελέγχου είναι εκείνο που θα επιβεβαιώσει τη δυνατότητα και την ορθότητα αυτής της διαδικασίας (Mariotti, 1992, 1995).

Αντικείμενο διερεύνησης έχουν αποτελέσει στο πλαίσιο ερευνητικών προσπαθειών που αφορούν τα αναπτύγματα και οι στρατηγικές των μαθητών για την κατασκευή αναπτυγμάτων μη γεωμετρικών αντικειμένων. Συγκεκριμένα, οι Potari και Spiliotopoulou (1992) έχουν μελετήσει τα αναπτύγματα διαφορετικών φυσικών αντικειμένων της καθημερινής ζωής που σχεδίασαν παιδιά ηλικίας 9 και 11 χρόνων. Από την ταξινόμηση των μοντέλων που κατασκεύασαν τα παιδιά έχουν προκύψει οι ακόλουθες κατηγορίες αναπτυγμάτων: ολιστικά μοντέλα, όπου το στερεό αναπαρίσταται από ένα δισδιάστατο σχήμα, μοντέλα με ενδείξεις προβολής, πλήρη γεωμετρικά στερεά, ημιτελή γεωμετρικά στερεά και φυσικά στερεά. Παράλληλα έγινε διερεύνηση των χαρακτηριστικών των αναπαραστάσεων των παιδιών σε σχέση με το βαθμό εξάρτησής τους από τη φύση των υλικών, τις φυσικές κατασκευές τους, τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά τους και την όλη εμπειρία των παιδιών με τα αντικείμενα (Potari & Spiliotopoulou, 2001). Οι ίδιες ερευνήτριες έχουν μελετήσει τις προσεγγίσεις που χρησιμοποιούν οι μαθητές Γ΄ και Ε΄ τάξης δημοτικού όταν κατασκευάζουν στερεά έχοντας στη διάθεσή τους επίπεδες επιφάνειες και έχουν αναλύσει τα είδη των κατασκευών αυτών και τις αντιλήψεις των παιδιών σχετικά με την έννοια του στερεού και τις ιδιότητές τους (Πόταρη και Σπηλιωτοπούλου, 2003). Στα πλαίσια της έρευνας αυτής έχει παρατηρηθεί ότι τα μικρότερα παιδιά (9 χρονών) κατασκεύασαν κυρίως ασυνεχή αναπτύγματα, ενώ τα μεγαλύτερα παιδιά (11 χρονών) παρουσίασαν κυρίως συνεχή μοντέλα. Στην περίπτωση του κύβου το μόνο συνεχές ανάπτυγμα που παρουσιάστηκε ήταν το σταυροειδές.

Η διερεύνηση των στρατηγικών που χρησιμοποιούν μαθητές μέσης εκπαίδευσης και φοιτητές κατά την κατασκευή διαφορετικών τύπων αναπτυγμάτων του ίδιου στερεού, όπως στην έρευνα των Stylianou et al. (1999) αναφορικά με διαφορετικά αναπτύγματα του κύβου συμβάλλει στην εμβάθυνση της κατανόησης γύρω από την εργασία των μαθητών σε έργα που εμπεριέχουν μεταφράσεις ανάμεσα σε τρισδιάστατα σχήματα και τα αναπτύγματά τους. Όπως παρατηρεί η Mariotti (1989), η κατασκευή από τα παιδιά του σωστού αναπτύγματος για ένα στερεό υποδηλώνει το συνδυασμό μιας πολύπλοκης νοητικής αναπαράστασης του αντικειμένου με την ανάλυση των στοιχείων του (έδρες, κορυφές και ακμές). Το σταυροειδές ανάπτυγμα φάνηκε και στην έρευνα των Stylianou et al. (1999), όπως και παλαιότερα στην εργασία της Mariotti, να είναι από τα ευκολότερα για τους μαθητές, επειδή μπορεί κατευθείαν κανείς να φανταστεί πώς διπλώνεται για να σχηματιστεί ο κύβος. Αντίθετα, αναφέρονται άλλα αναπτύγματα που φαίνεται να δυσκολεύουν περισσότερο τους μαθητές, επειδή απαιτούν μια στρατηγική στην οποία εμπεριέχονται περισσότεροι μετασχηματισμοί. Στο επίπεδο της διδακτικής πράξης απαιτείται η οργάνωση ποικιλίας δραστηριοτήτων και η χρήση του ανάλογου υλικού που θα επιτρέπει την κατασκευή από τους μαθητές διαφορετικών αναπτυγμάτων κύβου και άλλων στερεών (Jurdak & Shahin, 2001; Leeson, 1994; Woodward & Brown, 1994). Είναι σημαντικό οι εκπαιδευτικοί να παρέχουν στους μαθητές την ευκαιρία να έρθουν σε επαφή με διαφορετικούς τύπους αναπτυγμάτων, ώστε να κατέχουν ποικιλία στρατηγικών επίλυσης έργων που αναφέρονται στην κατασκευή αυτής της μορφής αναπαράστασης στερεών.

Στις περιπτώσεις των ερευνών που έχουν αναφερθεί μελετάται η ικανότητα των μαθητών σε έργα μετάφρασης ανάμεσα σε τρισδιάστατα σχήματα και μια δισδιάστατη μορφή αναπαράστασής τους, τα αναπτύγματα. Σε μια πρόσφατη εργασία (Παναούρα και Γαγάτσης, 2003) η ικανότητα αυτή έχει μελετηθεί σε δύο ταυτόχρονα μορφές αναπαράστασης των στερεών στο χώρο των δύο διαστάσεων: μέσω του δισδιάστατου σχεδίου και μέσω της κατασκευής αναπτύγματος. Συγκεκριμένα, σκοπός της έρευνας ήταν να εξετάσει πώς αντιλαμβάνονται τον κύβο μαθητές ηλικίας 10 και 12 χρόνων (Δ΄ και Στ΄ τάξη δημοτικού) και να διερευνήσει την ικανότητά τους σε έργα αναπαράστασης του κύβου στο χώρο των δύο διαστάσεων (α) μέσω δισδιάστατων σχεδίων και (β) μέσω αναπτυγμάτων. Στο πλαίσιο αυτό εξετάστηκαν ερωτήματα που αφορούσαν τα χαρακτηριστικά των δισδιάστατων σχεδίων μέσω των οποίων οι μαθητές αναπαριστούν τον κύβο, καθώς και ερωτήματα σχετικά με το βαθμό στον οποίο οι μαθητές είναι ικανοί να αναγνωρίσουν και να κατασκευάσουν αναπτύγματα κύβου. Πέρα από αυτού του είδους τα ερωτήματα, τα οποία αναφέρονται μόνο σε μια μορφή αναπαράστασης του κύβου, διερευνήθηκε σε ποιο βαθμό η ικανότητα χειρισμού έργων που αφορούν το ένα είδος αναπαράστασης (έργα αναγνώρισης και κατασκευής αναπτυγμάτων του κύβου) συνδέεται με την ικανότητα χειρισμού έργων που αναφέρονται στη δεύτερη αναπαραστατική μορφή του κύβου (σχεδιασμός δισδιάστατου σχεδίου κύβου).

Όπως έχει προκύψει από την εφαρμογή της συνεπαγωγικής ανάλυσης (Gras, Peter, Briand, & Philippe, 1997), οι δύο προαναφερθείσες ικανότητες συνδέονται. Η επιτυχία σε έργα όπως η κατασκευή δισδιάστατου σχεδίου κύβου και η κατασκευή αναπτύγματος κύβου συνεπάγονται επιτυχία σε έργα αναγνώρισης και κατασκευής μέσω συμπλήρωσης ορθών αναπτυγμάτων του στερεού, καθώς και επιτυχία σε έργα όπου συνδέεται το δισδιάστατο σχέδιο με το ανάπτυγμα του κύβου. Σημαντικό θεωρείται το γεγονός ότι η σύνδεση των δύο ικανοτήτων είναι εμφανής κυρίως στους μαθητές της Στ΄ τάξης, ενώ στην περίπτωση της Δ΄ τάξης έχουν παρουσιαστεί μόνο κάποιες ενδείξεις για πιο χαλαρή σύνδεση και αρκετά έργα έχουν επιλυθεί από τους μικρότερους μαθητές ως ανεξάρτητα μεταξύ τους. Τα αποτελέσματα αυτά καταδεικνύουν ότι πρόκειται για ικανότητες που δεν είναι ανεξάρτητες, γεγονός που θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη κατά τη διδασκαλία, ώστε να ενισχύονται σε ένα σωστό πλαίσιο οι συνδέσεις ανάμεσά τους.

Τα αναπτύγματα γεωμετρικών στερεών στη διδασκαλία της γεωμετρίας

Στη διεθνή βιβλιογραφία εντοπίζεται αριθμός εργασιών που αφορούν την πρακτική θεώρηση του θέματος των αναπτυγμάτων γεωμετρικών στερεών, στις οποίες παρουσιάζονται εφαρμογές ολοκληρωμένων προγραμμάτων με μαθητές σχετικά με τα στερεά και τα αναπτύγματά τους, καθώς και εισηγήσεις για τη διδασκαλία. Για παράδειγμα, οι Woodward και Brown (1994) παρουσιάζουν μια σειρά μαθημάτων με πρακτικές δραστηριότητες και χρήση του υλικού polydrons για την κατασκευή στερεών. Το υλικό αυτό μπορεί, όπως εισηγούνται, να χρησιμοποιηθεί και σε δραστηριότητες που αφορά την κατασκευή αναπτυγμάτων στερεών. Η Fowler (1996) εισηγείται μια δραστηριότητα που μπορεί να χρησιμοποιηθεί, σύμφωνα με την ίδια, από το νηπιαγωγείο μέχρι την τελευταία τάξη του δημοτικού σχολείου και στοχεύει στην κατανόηση της έννοιας του αναπτύγματος. Συγκεκριμένα, η εισήγηση αφορά τη χρήση κουτιών (π.χ. από δημητριακά), τα οποία όταν είναι κλειστά αποτελούν αντικείμενο παρατηρήσεων σε σχέση με την έδρες τους και άλλες ιδιότητές τους. Τα παιδιά καλούνται να ανοίξουν τα κουτιά, οπόταν έχουν μπροστά τους ένα ανάπτυγμα στερεού, το οποίο μπορούν να ξαναδιπλώσουν για να σχηματίσουν το αρχικό στερεό. Οι Meissner και Pinkernell (2000) αναφέρονται στο εκπαιδευτικό σύστημα της Γερμανίας, όπου, σύμφωνα με τους ίδιους, η διδασκαλία της γεωμετρίας δεν είναι επαρκής. Παρουσιάζουν μια σειρά μαθημάτων με θέμα τα στερεά, τα οποία οργανώθηκαν και εφαρμόστηκαν σε οκτώ τμήματα Γ΄ τάξης. Στο πλαίσιο των μαθημάτων αυτών οι μαθητές συνδέουν τα στερεά που μελετούν με καταστάσεις της πραγματικής ζωής, ανακαλύπτουν γεωμετρικές ιδιότητες, κατασκευάζουν τα αναπτύγματά τους.

Στην παρούσα εργασία εξετάζονται οι γνώσεις και ικανότητες των μαθητών που αφορούν τα αναπτύγματα κύβου και πυραμίδας σε σχέση με τις γνώσεις και ικανότητές τους για τα επίπεδα σχήματα και τις γνώσεις και ικανότητές τους για τα τρισδιάστατα σχήματα. Η έννοια του αναπτύγματος ουσιαστικά συνδέει τις γνώσεις για τα επίπεδα σχήματα και τις γνώσεις για τα τρισδιάστατα σχήματα, εφόσον αφορά τη μετάβαση από το χώρο των τριών διαστάσεων στο χώρο των δύο διαστάσεων και αντίστροφα. Παράλληλα αποτελεί μια γεωμετρική έννοια που, σε θεωρητικό τουλάχιστον επίπεδο, φαίνεται να συνδέεται άμεσα με την έννοια της χωρικής ικανότητας, εφόσον ο χειρισμός έργων με αναπτύγματα στερεών συνεπάγεται την ενεργοποίηση διαδικασιών όπως ο χειρισμός και η περιστροφή νοητικών εικόνων. Ως εκ τούτου, η διερεύνηση ερωτημάτων σε σχέση με τα αναπτύγματα στερεών συγκεντρώνει αρκετό ενδιαφέρον, από την άποψη των συνδέσεων που είναι πιθανό να προκύψουν ανάμεσα στην έννοια αυτή και τις υπόλοιπες διαστάσεις που εξετάζονται.

Στο επόμενο υποκεφάλαιο αναλύεται η έννοια της χωρικής ικανότητας, η οποία αποτελεί μια από τις μεταβλητές που η παρούσα έρευνα εξετάζει σε σχέση με τις γεωμετρικές γνώσεις και ικανότητες των μαθητών.

Χωρική Ικανότητα και Γεωμετρία

Ο προσανατολισμός του ανθρώπου στο χώρο αποτελεί αναγκαία συνθήκη της κοινωνικής πραγματικότητας και είναι προϋπόθεση για επιτυχή γνώση και ενεργό χειρισμό της πραγματικότητας. Ο άνθρωπος ζει και κινείται σε έναν κόσμο μέσα στον οποίο οτιδήποτε υπάρχει έχει κάποια χωρική θέση. Για να επιζήσει ο άνθρωπος, θα πρέπει να οργανώσει τη δράση του τοποθετώντας τον εαυτό του στον εξωτερικό κόσμο και παρατηρώντας ταυτόχρονα τις σχέσεις που δημιουργούνται ανάμεσα στα αντικείμενα που υπάρχουν στον κόσμο αυτό (Newcombe & Huttenlocher, 2000). Η ικανότητα αναπαράστασης και επεξεργασίας χωρικών πληροφοριών είναι απαραίτητη σε ένα μεγάλο αριθμό καθημερινών δραστηριοτήτων, όπως η μετακίνηση των επίπλων σε ένα δωμάτιο, η ετοιμασία των αποσκευών, η μετακίνηση του ατόμου σε μια πόλη (Hegarty & Waller, 2005). Η κατανόηση των χωρικών σχέσεων είναι ταυτισμένη με την κατανόηση των σχέσεων ανάμεσα στα αντικείμενα στο χώρο ή ανάμεσα στα χωρικά γνωρίσματα των αντικειμένων αυτών. Αυτές οι σχέσεις αντανακλούν έννοιες όπως η διεύθυνση (μπροστά, πίσω, πάνω, κάτω, δεξιά, αριστερά), η απόσταση (κοντά, μακριά), η θέση (στο κέντρο), οι διαστάσεις των αντικειμένων στο χώρο (ψηλό, χαμηλό, μακρύ, κοντό).

Η χωρική σκέψη είναι ζωτικής σημασίας και αποτελεί μια σημαντική πτυχή της ανθρώπινης νόησης, είναι μια έννοια η οποία έχει συγκεντρώσει μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον και έχει διερευνηθεί από ποικίλες οπτικές γωνίες. Αναγνωρίζεται εδώ και καιρό ως ένας παράγοντας που συνδέεται με την επιτυχία στα μαθηματικά, τις φυσικές επιστήμες, τη μηχανολογία, την αρχιτεκτονική και άλλα πεδία γνώσης.

Στο σημείο αυτό είναι σημαντικό να διευκρινιστεί ότι στη διεθνή βιβλιογραφία γίνεται αναφορά σε διαφορετικές έννοιες του χώρου. Για παράδειγμα, η Liben (2002) διακρίνει τον αντιληπτικό χώρο, τον οικολογικό χώρο, το νοητικό χώρο ως εξής. Ο όρος «αντιληπτικός χώρος» αναφέρεται σε εκείνες τις πτυχές του χωρικού κόσμου που αποτελούν αντικείμενο επεξεργασίας από τις αισθήσεις του ατόμου. Ο «οικολογικός χώρος» είναι ο χώρος που βρίσκεται όταν επεκταθεί προς τα έξω η φυσική απόσταση από τον αντιληπτικό χώρο ενός ατόμου. Ο οικολογικός χώρος δεν γίνεται αντιληπτός από το άτομο από ένα και μόνο σημείο. Το άτομο αντιλαμβάνεται το χώρο αυτό τμηματικά, καθώς μετακινείται στην καθημερινή του ζωή. Ως νοητικός χώρος θεωρείται ο χώρος των νοητικών εικόνων. Υφίσταται όταν το άτομο μετακινεί αντικείμενα μέσα στο μυαλό του, όπως για παράδειγμα όταν φαντάζεται πώς θα φαινόταν ένα αντικείμενο στο ράφι εάν το μετακινούσε μερικά εκατοστόμετρα αριστερά (μεταφορά), εάν το γύριζε 90 μοίρες (περιστροφή), εάν το τοποθετούσε σε ψηλότερο ράφι (αλλαγή στην οπτική γωνία και στην οπτική απόσταση).

Κατά ανάλογο τρόπο ο Brousseau (1983) υποστηρίζει ότι η φυσική γνώση του χώρου δομείται σε τρεις βασικές αναπαραστάσεις: το μικρο-χώρο, το μεσο-χώρο και το μακρο-χώρο. Ο μικρο-χώρος αντιστοιχεί σε φύλλο χαρτιού. Ο μεσο-χώρος αντιστοιχεί στις συνηθισμένες οικιακές αλληλεπιδράσεις, ενώ ο μακροχώρος αντιστοιχεί για παράδειγμα σε μια πόλη. Οι Quaiser-Pohl, Lehmann και Eid (2004) θεωρούν ότι όσον αφορά τη χωρική γνώση των παιδιών θα πρέπει να γίνεται διάκριση ανάμεσα σε χωρικές ικανότητες μικρής κλίμακας και μεγάλης κλίμακας. Οι ερευνητές αυτοί έχουν δείξει μέσα από την εργασία τους τη διάκριση ανάμεσα στα χωρικά έργα μεγάλης κλίμακας, όπου ο παρατηρητής είναι μέρος του περιβάλλοντος και δεν μπορεί να δει όλο το χώρο που τον ενδιαφέρει από ένα και μόνο σημείο και στα χωρικά έργα μικρής κλίμακας, όπου το άτομο μπορεί να δει τις χωρικές σχέσεις των αντικειμένων διαμιάς. Με βάση τη διάκριση αυτή υποστήριξαν και επιβεβαίωσαν με εμπειρικά δεδομένα ότι η έννοια της χωρικής ικανότητας (για το χώρο μικρής κλίμακας) και η έννοια της χωρικής χαρτογράφησης (για το χώρο μεγάλης κλίμακας) αποτελούν δύο έννοιες που δεν σχετίζονται μεταξύ τους (Quaiser-Pohl, Lehmann, & Eid, 2004).

Στην παρούσα εργασία η χωρική ικανότητα διερευνάται σε σχέση με την ικανότητα των παιδιών να χειρίζονται έργα γεωμετρίας. Κατά την παραδοσιακή διδασκαλία της γεωμετρίας η συνηθισμένη μάθηση γεωμετρικών εννοιών και η ενασχόληση με γεωμετρικές δραστηριότητες απαιτεί και καλλιεργεί δεξιότητες στο μικρο-χώρο (Berthelot & Salin, 1998). Ως εκ τούτου, η διερεύνηση αυτή αφορά μόνο τη χωρική ικανότητα που αφορά το χειρισμό έργων που παρουσιάζονται σε ένα φύλλο χαρτιού και δεν εξετάζεται εκείνη η πτυχή της χωρικής ικανότητας που αφορά το ευρύτερο περιβάλλον του ατόμου (Allen & Ondracek, 1995; Quaiser-Pohl, Lehmann, & Eid, 2004). Ακολούθως γίνεται αναφορά στην έννοια της χωρικής ικανότητας όπως έχει ορισθεί από διάφορους ερευνητές και παρουσιάζονται συνοπτικά εργασίες που σκοπό είχαν τη διερεύνηση της έννοιας αυτής. Ιδιαίτερη αναφορά γίνεται στη σχέση της χωρικής ικανότητας και των μαθηματικών γενικά και ειδικότερα στη σχέση της χωρικής ικανότητας και του γεωμετρικού συλλογισμού.

Ορισμοί της Χωρικής Ικανότητας

Γενικά, η έννοια της χωρικής ικανότητας χρησιμοποιείται για να δηλώσει ικανότητες που σχετίζονται με τη χρήση του χώρου. Ψυχολόγοι και μαθηματικοί παιδαγωγοί έχουν συμβάλει στη συζήτηση αναφορικά με την κατανόηση της έννοιας αυτής. Από τη μελέτη, όμως, της διεθνούς βιβλιογραφίας προκύπτει ότι έχουν δοθεί ποικίλοι ορισμοί για την έννοια της χωρικής ικανότητας. Ο τρόπος με τον οποίο έχουν ορισθεί όροι όπως «χωρική ικανότητα», «χωρική οπτικοποίηση», «χωρική αίσθηση», καθώς και τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν για τη συλλογή δεδομένων σε αντίστοιχες έρευνες είναι σχεδόν τόσα όσος και ο αριθμός των μελετών που χρησιμοποιούν τους όρους αυτούς (Wheatley, 1998).

Για παράδειγμα, οι Lean και Clements (1981) έχουν ορίσει τη χωρική ικανότητα ως «την ικανότητα το ατόμου να σχηματίζει νοητικές εικόνες και να χειρίζεται τις εικόνες αυτές στο μυαλό του» (σ. 267). Κατά τους Clements και Battista (1992), ο χωρικός συλλογισμός αποτελείται από ένα σύνολο γνωστικών διαδικασιών μέσω των οποίων κατασκευάζονται και τυγχάνουν επεξεργασίας νοητικές αναπαραστάσεις για χωρικά αντικείμενα . Ο όρος «χωρική ικανότητα» περιλαμβάνει, σύμφωνα με την Tartre (1990), εκείνες τις νοητικές ικανότητες που αφορούν «κατανόηση, χειρισμό, αναδιοργάνωση ή ερμηνεία σχέσεων με οπτικό τρόπο» (σ. 216). Ως «χωρική σκέψη» η Yakimanskaya περιγράφει «εκείνο το είδος της νοητικής δραστηριότητας το οποίο καθιστά δυνατή τη δημιουργία χωρικών εικόνων και επιτρέπει το χειρισμό των εικόνων αυτών στα πλαίσια διάφορων πρακτικών και θεωρητικών προβλημάτων» (Yakimanskaya, 1991, σ. 21). Με ανάλογο τρόπο χρησιμοποιεί στη δική του έρευνα ο Gorgorió (1998) τον όρο «ικανότητα χωρικής επεξεργασίας», τον οποίο ορίζει ως την ικανότητα που χρειάζεται το άτομο για να πραγματοποιήσει τις συνδυασμένες νοητικές πράξεις που απαιτούνται για την επίλυση ενός χωρικού έργου. Όπως εξηγεί, περιλαμβάνει όχι μόνο την ικανότητα του ατόμου να φαντάζεται χωρικά αντικείμενα, σχέσεις και μετασχηματισμούς, αλλά και την ικανότητα αποκωδικοποίησης των δεδομένων αυτών με οπτικό τρόπο, καθώς και την ικανότητα κωδικοποίησής τους με λεκτικούς ή μικτούς τρόπους (Gorgorió, 1998). Τέλος, σημειώνεται ο ορισμός του Lohman (1996) για τη χωρική ικανότητα ως η ικανότητα του ατόμου να παράγει, να διατηρεί, να ανακαλεί και να μετασχηματίζει καλά δομημένες οπτικές εικόνες.

Η έννοια της χωρικής ικανότητας του ατόμου συνδέεται με την έννοια της νοερής εξεικόνισης, την οποία η Presmeg (1986) έχει ορίσει ως «ένα νοητικό σχήμα που αποδίδει οπτικές ή χωρικές πληροφορίες» (σ. 42) και την οποία ο Dreyfus (1991) περιγράφει ως τη «χρήση νοητικών εικόνων που περιέχουν ένα ισχυρό οπτικό συστατικό» (σ. 3). Η Yakimanskaya (1991) υπογραμμίζει ότι η εικόνα είναι η βασική λειτουργική μονάδα της χωρικής σκέψης και εξηγεί ότι μπορούμε να απομονώσουμε δύο επίπεδα δραστηριότητας: τη δημιουργία της εικόνας και το χειρισμό ή τη χρήση της. Στο πλαίσιο αυτό είναι δυνατός ο εντοπισμός ποικίλων τύπων εικόνων, καθώς και διαφορετικών μέσων δημιουργίας και χειρισμού των εικόνων. Στην πιο αναπτυγμένη της μορφή η χωρική σκέψη χρησιμοποιεί εικόνες το περιεχόμενο των οποίων είναι η αναπαραγωγή και τροποποίηση των χωρικών ιδιοτήτων και σχέσεων των αντικειμένων, περιλαμβανομένου του σχήματος και του μεγέθους και τη σχετική θέση των μερών τους.

Η χωρική σκέψη αποτελεί ένα είδος αναπαραστατικής σκέψης (Yakimanskaya, 1991), στα πλαίσια του οποίου οι χρήσεις των χωρικών εικόνων μπορούν να συνοψιστούν σε τρεις βασικές περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση παρουσιάζεται αλλαγή στη θέση του αναπαριστώμενου αντικειμένου (π.χ. γίνεται περιστροφή του αντικειμένου). Στη δεύτερη περίπτωση σημειώνεται αλλαγή στη δομή του αντικειμένου που αναπαρίσταται, δηλαδή η εικόνα μεταβάλλεται τόσο ώστε ελάχιστη ομοιότητα έχει με την αρχική μορφή του αντικειμένου. Τέλος, υπάρχει η περίπτωση συνδυασμού των προηγούμενων μετασχηματισμών, οπόταν ουσιαστικά μια αρχική εικόνα μετασχηματίζεται κατ' επανάληψη.

Παρά τις διαφορετικές προσεγγίσεις του θέματος και τους ποικίλους όρους και ορισμούς που χρησιμοποιήθηκαν κατά καιρούς, όπως διαφάνηκε παραπάνω, οι ερευνητές σήμερα συμφωνούν ότι η χωρική ικανότητα δεν είναι μια μονοδιάστατη έννοια, αλλά αποτελείται από διαφορετικές συνιστώσες. Εκείνο που παραμένει ασαφές είναι ο καθορισμός των συνιστωσών της χωρικής ικανότητας και η διευκρίνηση της μεταξύ τους σχέσης (Quaiser-Pohl, Lehmann, & Eid, 2004). Καθεμιά από τις συνιστώσες αυτές (για τις οποίες προτάθηκαν ποικίλοι όροι) δίνει έμφαση σε διαφορετικές πτυχές της διαδικασίας παραγωγής, αποθήκευσης, ανάκλησης και μετασχηματισμού των νοητικών εικόνων.

Ο Bishop (1983), έχοντας ως αφετηρία την ιδέα ότι δεν είναι δυνατό να δοθεί ένας και μόνο ορισμός της χωρικής ικανότητας, είχε εισηγηθεί ότι θα πρέπει να αναφερόμαστε σε δύο διαφορετικές συνιστώσες της συγκεκριμένης ικανότητας: την ικανότητα ερμηνείας σχηματικών πληροφοριών και την ικανότητα για οπτική επεξεργασία. Η ικανότητα ερμηνείας σχηματικών πληροφοριών περιέχει κατανόηση των οπτικών αναπαραστάσεων και του χωρικού λεξιλογίου που χρησιμοποιείται σε γεωμετρικές εργασίες, χάρτες, διαγράμματα. Τα μαθηματικά που σχετίζονται με την ικανότητα αυτή αφορούν ανάγνωση, κατανόηση και ερμηνεία τέτοιων πληροφοριών. Πρόκειται για μια ικανότητα περιεχομένου και συγκειμένου και έχει ιδιαίτερη σχέση με τον τύπο του υλικού που αποτελεί το ερέθισμα. Από την άλλη, η ικανότητα για οπτική επεξεργασία περιέχει εξεικόνιση και τη μετάφραση αφηρημένων σχέσεων και μη σχηματικών πληροφοριών σε οπτικούς όρους. Επίσης περιλαμβάνει το χειρισμό και μετασχηματισμό οπτικών αναπαραστάσεων και εξεικόνισης. Πρόκειται για μια ικανότητα διαδικασίας και δεν συνδέεται με το υλικό που αποτελεί το ερέθισμα.

Αρκετοί ερευνητές έχουν ορίσει την έννοια της χωρικής ικανότητας χρησιμοποιώντας παράγοντες που έχουν προκύψει από ψυχομετρικές μελέτες με μεθόδους παραγοντικής ανάλυσης. Σύμφωνα με τον McGee (1979), η χωρική ικανότητα αποτελείται από δύο τουλάχιστον βασικά συστατικά, τη χωρική εξεικόνιση και το χωρικό προσανατολισμό. Οι Linn και Petersen (1985) εντόπισαν τρεις άλλους τύπους χωρικών δεξιοτήτων: (α) τη χωρική αντίληψη (ικανότητα του ατόμου να καθορίζει χωρικές σχέσεις σε αναφορά με την προσανατολισμό του δικού του σώματος), (β) τη νοητική περιστροφή (ικανότητα του ατόμου να περιστρέφει νοητικά ένα δισδιάστατο ή ένα τρισδιάστατο σχήμα με ταχύτητα και ακρίβεια) και (γ) τη χωρική εξεικόνιση (ικανότητα του ατόμου να χειρίζεται νοητικά πληροφορίες που παρουσιάζονται με χωρικό τρόπο).

Ο Lohman (1988), βασισμένος στα αποτελέσματα μιας μετα-ανάλυσης, έχει προτείνει ένα παρόμοιο μοντέλο τριών παραγόντων, το οποίο περιλαμβάνει την ικανότητα χωρικής εξεικόνισης, την ικανότητα χωρικού προσανατολισμού και τις χωρικές σχέσεις. Η διαφορά ανάμεσα στη χωρική εξεικόνιση και το χωρικό προσανατολισμό είναι ότι στην πρώτη περίπτωση απαιτείται η κίνηση μερών των αντικειμένων, ενώ στη δεύτερη περίπτωση απαιτείται η νοητική περιστροφή ενός αντικειμένου ως σύνολο. Από την άλλη η ειδοποιός διαφορά ανάμεσα στο χωρικό προσανατολισμό και τις χωρικές σχέσεις έγκειται στον προσανατολισμό του σώματος του παρατηρητή: στις καταστάσεις που γίνεται αναφορά στις χωρικές σχέσεις ο προσανατολισμός του σώματος του ατόμου που παρατηρεί αποτελεί ένα σημαντικό μέρος του προβλήματος (Carroll, 1993). Στις έρευνές τους οι Kozhevnikov και Hegarty (2001) παρουσιάζουν εμπειρικά δεδομένα που καταδεικνύουν ότι η ικανότητα χειρισμού αντικειμένων και η ικανότητα χωρικού προσανατολισμού είναι διακριτές χωρικές ικανότητες, οι οποίες συσχετίζονται. Επιπλέον έδειξαν ότι οι ικανότητες που σχετίζονται με το χωρικό προσανατολισμό είναι διαφορετικές από τις ικανότητες που σχετίζονται με τη χωρική εξεικόνιση, ειδικά τη νοητική περιστροφή (Hegarty & Waller, 2004).

Συνοψίζοντας, οι τρεις βασικές διαστάσεις της χωρικής ικανότητας που παρουσιάζονται συνήθως (παρά τις διαφορές στην ορολογία) είναι η χωρική εξεικόνιση, ο χωρικός προσανατολισμός και οι χωρικές σχέσεις. Στην παρούσα εργασία, έχοντας υπόψη τη θεωρία του Δημητρίου (1993) για την οργάνωση του ανθρώπινου νου, υιοθετούμε τρεις συνιστώσες της χωρικής ικανότητας: ικανότητα χειρισμού νοητικών εικόνων, ικανότητα νοητικών περιστροφών και ικανότητα συντονισμού των προοπτικών (Demetriou & Kyriakides, 2006). Οι ικανότητες αυτές ουσιαστικά βρίσκονται σε αντιστοιχία με τις τρεις προαναφερθείσες διαστάσεις της χωρικής ικανότητας. Η ικανότητα χειρισμού νοητικών εικόνων αντιστοιχεί με τη χωρική εξεικόνιση, η ικανότητα νοητικών περιστροφών αντιστοιχεί με τις χωρικές σχέσεις και η ικανότητα συντονισμού των προοπτικών αντιστοιχεί με το χωρικό προσανατολισμό. Ακολούθως γίνεται μια σύντομη αναφορά στην έννοια της χωρικής ικανότητας όπως παρουσιάζεται στη θεωρία του Δημητρίου.

Η Χωρική Ικανότητα στη Θεωρία του Δημητρίου

Σύμφωνα με τη θεωρία του Δημητρίου (Δημητρίου, 1993; Demetriou, et al., 2002), ο ανθρώπινος νους είναι μια ιεραρχικά δομημένη δομή, η οποία αποτελείται από τρία επίπεδα. Το πρώτο επίπεδο οργάνωσης αφορά στην επεξεργασία των πληροφοριών (σύστημα επεξεργασίας). Το δεύτερο επίπεδο είναι προσανατολισμένο στο περιβάλλον και αφορά στα επιμέρους γνωστικά συστήματα (συστήματα εξειδικευμένων ικανοτήτων), τα οποία επεξεργάζονται πληροφορίες που προέρχονται από διαφορετικά πεδία του περιβάλλοντος. Το τρίτο επίπεδο (υπεργνωστικό σύστημα) είναι προσανατολισμένο κυρίως στον εαυτό και περιλαμβάνει τις διαδικασίες και τις γνώσεις που αφορούν στην κατανόηση του εαυτού μας, την κατανόηση των άλλων ανθρώπων και την αυτορρύθμιση.

Τα εξειδικευμένα δομικά συστήματα ή τα συστήματα εξειδικευμένων ικανοτήτων, που αποτελούν το δεύτερο επίπεδο οργάνωσης του ανθρώπινου νου, είναι τα ακόλουθα: το ποιοτικό-αναλυτικό, το ποσοτικό-συσχετιστικό, το αιτιώδες-πειραματικό, το εικονικό-χωροταξικό και το λεκτικό-προτασιακό (Δημητρίου, 1993). Πιο πρόσφατα ερευνητικά δεδομένα αποκαλύπτουν την ύπαρξη δύο ακόμη συστημάτων εξειδικευμένων ικανοτήτων: του κοινωνικού-διαπροσωπικού και του εικονογραφικού συστήματος (Demetriou & Kazi, 2001). Ακολούθως γίνεται αναφορά μόνο στο εικονικό-χωροταξικό σύστημα που εμπίπτει στο πλαίσιο διερεύνησης της παρούσας εργασίας.

Το εικονικό-χωροταξικό εξειδικευμένο δομικό σύστημα αφορά τον προσανατολισμό του ατόμου στο χώρο, την αναπαράσταση των αντικειμένων και την τοποθέτησή τους στο χώρο. Περιλαμβάνει τις ικανότητες που επιτρέπουν στο άτομο να εκτελεί στο επίπεδο της νοερής εικόνας τις ενέργειες που μπορεί να εκτελέσει και στα πραγματικά αντικείμενα. Για παράδειγμα, το άτομο μπορεί να μετατοπίζει, να αναμορφώνει ή να περιστρέφει νοερά ένα αντικείμενο, μπορεί να προσθέτει ή να αφαιρεί χαρακτηριστικά από την εικόνα ενός αντικειμένου. Οι συστατικές ικανότητες του εικονικού-χωροταξικού εξειδικευμένου δομικού συστήματος επιτρέπουν, δηλαδή, στο άτομο να χειρίζεται στοιχεία και σχέσεις του χώρου.

Στο πλαίσιο αυτό αναφέρονται τρεις συνιστώσες που σχετίζονται με το εικονικό-χωροταξικό εξειδικευμένο δομικό σύστημα του ανθρώπινου νου: η ικανότητα χειρισμού νοητικών εικόνων, η ικανότητα νοητικών περιστροφών και η ικανότητα συντονισμού των προοπτικών. Για την αξιολόγηση της καθεμιάς από τις συνιστώσες αυτές χρησιμοποιούνται συγκεκριμένα έργα. (Demetriou & Kyriakides, 2006), τα οποία έχουν χρησιμοποιηθεί και στην παρούσα εργασία με την άδεια του καθηγητή Δημητρίου.

Χωρική Ικανότητα και Μαθηματικά

Όπως προκύπτει από την ανασκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας, η χωρική ικανότητα αποτελεί μια σημαντική συνιστώσα της μαθηματικής ικανότητας. Σε μια μετα-ανάλυση που περιλάμβανε 75 μελέτες, ο Friedman (1995) βρήκε ότι οι συσχετίσεις ανάμεσα στη χωρική και τη μαθηματική ικανότητα γενικά κυμαίνονται ανάμεσα στο 0.30 και το 0.45. Παρά το γεγονός ότι οι συσχετίσεις αυτές είναι μέτριες, εισηγούνται μια σημαντική σχέση ανάμεσα στις χωρικές και τις μαθηματικές ικανότητες.

Σύμφωνα με τον Wheatley (1991), «η χωρική ικανότητα βρίσκεται στην καρδιά της απόκτησης σημασίας και νοήματος στα μαθηματικά» (σ. 35). Συγκεκριμένα, οι Wheatley και Reynolds (1999) υποστηρίζουν ότι η ικανότητα κατασκευής και μετασχηματισμού νοητικών εικόνων οδηγεί σε ευελιξία και ισχύ στα μαθηματικά. Οι ερευνητές αυτοί περιγράφουν ένα πρόγραμμα που έχει σχεδιαστεί ειδικά για να ενθαρρύνει το σχηματισμό και το μετασχηματισμό νοητικών εικόνων και επισημαίνουν ότι η ανάπτυξη της νοητικής εξεικόνισης βοηθά όχι μόνο στο πεδίο της γεωμετρίας, αλλά και σε αριθμητικά πλαίσια και στην επίλυση προβλήματος (Reynolds & Wheatley, 1997). Υποστηρίζεται επίσης ότι τα άτομα με υψηλού επιπέδου χωρική ικανότητα είναι καλύτερα στο να μετασχηματίζουν, να ερμηνεύουν και να ταξινομούν γεωμετρικά σχήματα, μοτίβα και διαγράμματα (English & Warren, 1995). Για το λόγο αυτό η ανάπτυξη της χωρικής ικανότητας πρέπει να αρχίζει από τις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου (Liedtke, 1995) και να γίνεται με την οργάνωση ποικίλων δραστηριοτήτων μέσω εξειδικευμένων προγραμμάτων (Ambrose & Falkner, 2002; Everett, 2000; NCTM, 1993; Reinhold, 2002).

Η χωρική σκέψη χρησιμοποιείται τόσο στην αναπαράσταση όσο και στο χειρισμό πληροφοριών κατά την επίλυση προβλημάτων (Clements & Battista, 1992). Οι απόψεις, όμως, των ερευνητών όσον αφορά τη σχέση ανάμεσα στη χωρική ικανότητα και την επίδοση στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος δεν συμπίπτουν πάντοτε. Σε μια διαχρονική έρευνα των Fennema και Tartre (1985) που πραγματοποιήθηκε ανάμεσα σε μαθητές γυμνασίου διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές με υψηλό επίπεδο χωρικής εξεικόνισης και χαμηλό επίπεδο λεκτικής ικανότητας μετέφραζαν το πρόβλημα σε εικόνα καλύτερα από ότι οι μαθητές με χαμηλό επίπεδο χωρικής οπτικοποίησης. Από την άλλη, από την έρευνα των Booth και Thomas (1999) συνάγεται το συμπέρασμα ότι, ενώ ένα υψηλότερο επίπεδο χωρικών ικανοτήτων καθιστά τους μαθητές ικανούς να έχουν καλύτερη επιτυχία στην ερμηνεία δεδομένου διαγράμματος ή εικόνας που σχετίζεται με ένα μαθηματικό πρόβλημα, οι ικανότητες αυτές δεν βοηθούν ιδιαίτερα σε σχέση με τη μετάφραση του προβλήματος σε διαγραμματική ή εικονική αναπαράσταση. Η συγκεκριμένη μετάφραση φαίνεται να είναι δύσκολη για τους μαθητές, άσχετα με τις χωρικές τους ικανότητες. Το γεγονός αυτό ερμηνεύεται με τον ακόλουθο συλλογισμό: Οι χωρικές δεξιότητες καθιστούν τους μαθητές ικανούς να ταξινομούν, να αναλύουν και να δομούν πληροφορίες οι οποίες παρουσιάζονται τόσο οπτικά όσο και λεκτικά. Όμως, η αντίστροφη διαδικασία της κατασκευής ενός κατάλληλου διαγράμματος από λεκτικές πληροφορίες είναι πιο δύσκολη, γιατί εμπεριέχει περισσότερα βήματα και απαιτεί τη μεσολάβηση άλλων δεξιοτήτων (Booth & Thomas, 1999).

Η σχέση ανάμεσα στη χωρική ικανότητα και τη μαθηματική ικανότητα βασίζεται στο γεγονός ότι οι πράξεις που διενεργούνται καθώς το άτομο αλληλεπιδρά με τα νοητικά μοντέλα στα μαθηματικά είναι συχνά οι ίδιες με εκείνες τις πράξεις που χρησιμοποιούνται για να λειτουργήσει σε χωρικά περιβάλλοντα (Battista, 1994). Όμως, όπως παρατηρεί η Tartre (1990), οποιαδήποτε σχέση ανάμεσα στη μάθηση των μαθηματικών και τη χωρική ικανότητα εξαρτάται από τον τύπο χωρικής ικανότητας που εξετάζεται και από το δοκίμιο που χορηγείται για τη μέτρηση του επιπέδου της υπό εξέταση ικανότητας.

Πέρα από την τάση των ερευνητών που ασχολούνται με τις χωρικές και μαθηματικές ικανότητες των ατόμων για ταξινόμηση των μαθητών ανάλογα με την επάρκειά τους και την προτίμησή τους σε σχέση με τη χρήση συγκεκριμένων τρόπων επεξεργασίας των πληροφοριών, παρουσιάζεται αριθμός ερευνών όπου δίνεται έμφαση στην ανάλυση των στρατηγικών που χρησιμοποιούνται. Για παράδειγμα, ο Gorgorió (1998) μελετά τις στρατηγικές των μαθητών κατά την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων, εξετάζοντας συγκεκριμένα τη λειτουργικότητα οπτικών και μη οπτικών στρατηγικών. Στο δεύτερο μέρος του υποκεφαλαίου γίνεται εξειδικευμένη αναφορά στη σχέση ανάμεσα στη χωρική ικανότητα και τη γεωμετρία.

Χωρική Ικανότητα και Γεωμετρία

Όταν οι μαθηματικοί παιδαγωγοί συζητούν για τη γεωμετρία από θεωρητικής πλευράς, γίνεται καθολικά αποδεκτός ο σημαντικός ρόλος των χωρικών ικανοτήτων, παρά το γεγονός ότι η χωρική γνώση δεν θεωρείται συνώνυμο της γεωμετρικής γνώσης. (Gorgorió, 1998). Οι διάφορες συνιστώσες της χωρικής ικανότητας θεωρούνται απαραίτητες για την ερμηνεία, την κατανόηση και την εκτίμηση του γεωμετρικού μας κόσμου (NCTM, 1989) και, όπως έχει υποστηριχθεί, βασικός εκπαιδευτικός στόχος θα πρέπει να είναι η παροχή σε όλους τους μαθητές ευκαιριών να διερευνήσουν ποικιλία τύπων αναπαράστασης για χωρικές και γεωμετρικές πληροφορίες, καθώς και να επικοινωνήσουν για τις αναπαραστάσεις αυτές (Ben-Chaim, Lappan, & Houang, 1989). Κατά συνέπεια, η ανάπτυξη της χωρικής ικανότητας παρουσιάζεται ως ένας από τους κυριότερους στόχους της γεωμετρίας στο δημοτικό σχολείο (Reinhold, 2002). Όπως τονίζεται από το Εθνικό Συμβούλιο Δασκάλων των Μαθηματικών στις Ηνωμένες Πολιτείες, η χωρική εξεικόνιση θεωρείται σημαντική πτυχή για τη γεωμετρική σκέψη, εξ ου και η συμπερίληψη στο έγγραφο για τα επίπεδα των μαθηματικών (NCTM, 2000) στόχων που αναφέρονται στη χρήση εξεικόνισης και χωρικής σκέψης στους στόχους για τη διδασκαλία της γεωμετρίας.

Παρά το μικρό αριθμό εργασιών που να διερευνούν το εξειδικευμένο θέμα της σχέσης ανάμεσα σε χωρικές ικανότητες των μαθητών και την επίδοσή τους στη γεωμετρία, από τις απόψεις που παρουσιάζονται για τη σχέση ανάμεσα στη χωρική ικανότητα και την αντίληψη της γεωμετρίας συνάγεται το συμπέρασμα ότι υπάρχει μια αλληλεπίδραση ανάμεσα στις δύο έννοιες. Όχι μόνο το επίπεδο χωρικής ικανότητας μπορεί να επηρεάζει την επίδοση στη γεωμετρία, αλλά και η γεωμετρική γνώση μπορεί να αποτελεί παράγοντα ανάπτυξης της χωρικής σκέψης. Για παράδειγμα, ο Battista (1999) έχει παρατηρήσει στην έρευνά του ότι οι μαθητές που ήταν πιο προχωρημένοι ως προς τις βασικές γεωμετρικές γνώσεις παρουσίαζαν πιο ραγδαία πρόοδο στις χωρικές δεξιότητες και τις δεξιότητες λογικού συλλογισμού από ότι οι συνομήλικοί τους με χαμηλότερο επίπεδο γεωμετρικών γνώσεων. Επίσης, η ανάπτυξη στο άτομο της αντίληψης του σχήματος, θέμα που αποτελεί σημαντική πτυχή του γνωσιολογικού περιεχομένου της γεωμετρίας, καθώς και ο τρόπος με τον οποίο συντελείται η ανάπτυξη αυτή, φαίνεται να έχει ως αποτέλεσμα μεγαλύτερη επιτυχία σε έργα που αφορούν συνιστώσες της χωρικής ικανότητας (Capraro, 2001). Από την άλλη, σε μια έρευνα των Grübing και Hellmich (2001), όπου εξετάζεται ο ρόλος της χωρικής ικανότητας στη διαδικασία επίλυσης γεωμετρικού προβλήματος σε μαθητές δημοτικού σχολείου και μαθητές ειδικής εκπαίδευσης, δεν έχει εντοπιστεί σημαντική επίδραση της χωρικής ικανότητας στη γεωμετρική επίδοση. Οι Tso και Liang (2002) έδειξαν την ύπαρξη σημαντικής συσχέτισης ανάμεσα στις χωρικές ικανότητες των μαθητών και τα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης van Hiele. Θεωρώντας ότι οι χωρικές ικανότητες είναι σημαντικοί γνωστικοί παράγοντες στη μάθηση της γεωμετρίας, εισηγούνται ότι η ενσωμάτωση στη μαθησιακή διαδικασία δραστηριοτήτων που έχουν σχέση με τη χωρική εξεικόνιση θα μπορούσε να βελτιώσει τη μάθηση θεμάτων γεωμετρίας.

Η σχέση χωρικών ικανοτήτων και επίδοσης σε θέματα γεωμετρίας αποτελεί αντικείμενο διερεύνησης σε δύο πρόσφατες εργασίες που έχουν γίνει με Κύπριους μαθητές. Συγκεκριμένα, στην έρευνα των Xistouri και Pitta-Pantazi (2006) εξετάστηκε ο ρόλος δύο χωρικών ικανοτήτων μαθητών ηλικίας 10-12 χρονών (της ικανότητας νοητικών περιστροφών και της ικανότητας αντίληψης των προοπτικών) στην επίδοσή τους σε έργα συμμετρίας. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης εργασίας, η γενική μαθηματική ικανότητα των μαθητών, η ικανότητα αντίληψης των προοπτικών και η ικανότητα νοητικών περιστροφών αποτελούν, κατά σειρά προτεραιότητας, παράγοντες πρόβλεψης της επίδοσης σε έργα συμμετρίας. Σε εργασία των Pittalis, Mousoulides και Christou (2007) τα εμπειρικά δεδομένα που συγκεντρώθηκαν καταδεικνύουν ότι η χωρική ικανότητα (η οποία συνιστάται στη συγκεκριμένη έρευνα από δύο συνιστώσες, τη χωρική εξεικόνιση και τις χωρικές σχέσεις) αποτελεί σημαντικό παράγοντα πρόβλεψης της επίδοσης μαθητών ηλικίας 11-12 χρόνων σε έργα γεωμετρίας.

Ανακεφαλαίωση

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκε, μέσα από την επισκόπηση της διεθνούς βιβλιογραφίας, το θεωρητικό υπόβαθρο της παρούσας εργασίας, το οποίο κινείται σε τρία ερευνητικά πεδία. Το πρώτο ερευνητικό πεδίο αφορούσε τις σημαντικότερες θεωρητικές προσεγγίσεις στο θέμα της ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης. Η συνοπτική περιγραφή της θεωρίας των van Hiele (1986) για τα επίπεδα ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης, που για πολλά χρόνια έχει επικρατήσει στο χώρο της διερεύνησης θεμάτων γεωμετρίας, και η παρουσίαση σημείων κριτικής της συγκεκριμένης θεωρίας οδήγησαν στην αναζήτηση καταλληλότερων θεωρητικών πλαισίων για την κατανόηση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την ενασχόλησή τους με θέματα γεωμετρίας. Στο πλαίσιο αυτό περιγράφηκαν τρία άλλα θεωρητικά πλαίσια τα οποία έχουν αναπτυχθεί για να παρέχουν στήριξη στην ερμηνεία φαινομένων που προκύπτουν από σύγχρονες έρευνες που ασχολούνται με τη γεωμετρική σκέψη των παιδιών. Πρόκειται για την προσέγγιση των Houdement και Kuzniak (2003) για τρία πλαίσια γεωμετρίας στα οποία είναι πιθανό να λαμβάνει χώρα η ενασχόληση με θέματα γεωμετρίας, το γνωστικό μοντέλο του Duval (1995, 2002) για το γεωμετρικό συλλογισμό και τη θεωρία των σχηματικών εννοιών του Fischbein (1993).

Το δεύτερο ερευνητικό πεδίο του θεωρητικού υπόβαθρου προέρχεται από το χώρο της γεωμετρικής παιδείας και αφορά τις ερευνητικές προσπάθειες που έχουν γίνει για τη διερεύνηση θεμάτων χειρισμού διαφορετικών γεωμετρικών σχημάτων από τους μαθητές. Μεγάλο μέρος του παρόντος κεφαλαίου αφιερώθηκε στην παρουσίαση εργασιών που έχουν διερευνήσει θέματα χειρισμού γεωμετρικών έργων από τους μαθητές με γεωμετρικά σχήματα δύο διαστάσεων, τριών διαστάσεων και αναπτύγματα γεωμετρικών στερεών. Αναφέρθηκαν αποτελέσματα προηγούμενων εργασιών σε σχέση με το συλλογισμό των μαθητών, τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν αλλά και τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν κατά την ενασχόλησή τους με έργα που παρουσιάζουν γεωμετρικά σχήματα. Παράλληλα σημειώθηκαν εισηγήσεις διάφορων μαθηματικών παιδαγωγών για τη διδασκαλία της γεωμετρίας στα πλαίσια της εκπαίδευσης.

Το τρίτο ερευνητικό πεδίο του θεωρητικού υπόβαθρου αναφέρεται στην έννοια της χωρικής ικανότητας. Αξιοποιήθηκαν εργασίες από το χώρο της γνωστικής ψυχολογίας που ασχολήθηκαν με την έννοια της χωρικής ικανότητας, δίνοντας έμφαση στις έρευνες που αναφέρονται στις διαφορετικές συνιστώσες της συγκεκριμένης ικανότητας. Η έννοια της χωρικής ικανότητας ορίστηκε στο πλαίσιο της θεωρίας του Δημητρίου (1993) και αναλύθηκαν οι συνιστώσες της, όπως χρησιμοποιούνται στην παρούσα εργασία. Από την παρουσίαση εργασιών που συνδέουν τη χωρική ικανότητα των μαθητών με τη γεωμετρική τους σκέψη διαφάνηκε η έλλειψη επαρκών εμπειρικών δεδομένων που να συνδέουν τις διαφορετικές συνιστώσες της χωρικής ικανότητας με διαφορετικές γεωμετρικές ικανότητες των μαθητών, θέμα που αποτελεί αντικείμενο διερεύνησης της παρούσας εργασίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Εισαγωγή

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν να διερευνήσει τις γεωμετρικές γνώσεις και ικανότητες των μαθητών αναφορικά με διαφορετικά γεωμετρικά σχήματα στο τέλος του δημοτικού σχολείου στην Κύπρο σε σχέση με τις χωρικές τους ικανότητες και να τις συγκρίνει με τις αντίστοιχες ικανότητες μαθητών Δ΄ δημοτικού και Β΄ γυμνασίου. Η διερεύνηση των ικανοτήτων των μαθητών για το χειρισμό γεωμετρικών σχημάτων αφορούσε (α) ικανότητες χειρισμού έργων με σχήματα δύο διαστάσεων, (β) ικανότητες χειρισμού έργων με σχήματα τριών διαστάσεων και (γ) ικανότητες χειρισμού έργων με αναπτύγματα γεωμετρικών στερεών.

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται το δείγμα της έρευνας, περιγράφονται τα έργα που χορηγήθηκαν στους μαθητές και η διαδικασία που ακολουθήθηκε για την πραγματοποίηση της έρευνας. Γίνεται επίσης αναφορά στην ανάλυση των δεδομένων που εφαρμόστηκε. Ένα μέρος του κεφαλαίου στο οποίο περιγράφονται τα γεωμετρικά έργα που χρησιμοποιήθηκαν στα πλαίσια της παρούσας έρευνας κρίνεται σκόπιμο να αφιερωθεί στην παρουσίαση των στοιχείων που αναφέρονται στην εγκυρότητα γνωρίσματος του οργάνου που κατασκευάστηκε για τη μέτρηση της ικανότητας χειρισμού γεωμετρικών σχημάτων και του οργάνου που χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση των χωρικών ικανοτήτων.

Δείγμα

Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 1000 μαθητές από δημοτικά σχολεία και γυμνάσια της Κύπρου. Συγκεκριμένα, έλαβαν μέρος 332 μαθητές Δ΄ δημοτικού, ηλικίας 10 χρονών (173 αγόρια και 159 κορίτσια) που φοιτούσαν σε 15 τμήματα 9 διαφορετικών δημοτικών σχολείων (7 σε αστικές περιοχές και 2 σε αγροτικές περιοχές), 333 μαθητές Στ΄ δημοτικού, ηλικίας 12 χρονών (160 αγόρια και 173 κορίτσια) που φοιτούσαν σε 14 τμήματα 9 διαφορετικών δημοτικών σχολείων (7 σε αστικές περιοχές και 2 σε αγροτικές περιοχές) και 335 μαθητές Β΄ γυμνασίου, ηλικίας 14 χρονών (155 αγόρια και 180 κορίτσια), που φοιτούσαν σε 12 τμήματα 8 διαφορετικών γυμνασίων (6 σε αστικές περιοχές και 2 σε αγροτικές περιοχές). Οι μαθητές που συμμετείχαν προέρχονται από σχολεία των ελεύθερων επαρχιών της Κύπρου.

Διαδικασία

Η συλλογή των δεδομένων της έρευνας πραγματοποιήθηκε με τη χρήση δύο οργάνων μέτρησης. Το πρώτο όργανο μέτρησης αφορούσε τις γεωμετρικές γνώσεις και ικανότητες των μαθητών αναφορικά με το χειρισμό γεωμετρικών σχημάτων όπως αυτές προκύπτουν κυρίως μέσα από τη διδασκαλία της γεωμετρίας στα πλαίσια της δημοτικής εκπαίδευσης στην Κύπρο. Το όργανο αυτό κατασκευάστηκε για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας. Το δεύτερο όργανο μέτρησης αφορούσε το επίπεδο χωρικής ικανότητας των υποκειμένων και περιλάμβανε έργα που χρησιμοποιήθηκαν σε προηγούμενες έρευνες (Demetriou & Kazi, 2001; Demetriou et al., 2002; Demetriou & Kyriakides, 2006). Η διαδικασία κατασκευής του οργάνου μέτρησης των γεωμετρικών γνώσεων και ικανοτήτων και η επιβεβαίωση της εγκυρότητας γνωρίσματος των δύο οργάνων μέτρησης περιγράφεται στο υποκεφάλαιο που ακολουθεί.

Το σύνολο των γεωμετρικών και τα χωρικών έργων που χρησιμοποιήθηκαν για τη συλλογή των δεδομένων κατανεμήθηκε σε δύο γραπτά δοκίμια, τα οποία χορηγήθηκαν ξεχωριστά πριν το τέλος της σχολικής χρονιάς 2004-2005 (τέλη Απριλίου-αρχές Μαΐου του 2005) σε όλους τους μαθητές που έλαβαν μέρος στην έρευνα. Το δεύτερο δοκίμιο χορηγήθηκε μια βδομάδα μετά τη χορήγηση του πρώτου δοκιμίου. Η χορήγηση των δοκιμίων πραγματοποιήθηκε σε ώρα διδασκαλίας είτε από την υποφαινόμενη είτε από εκπαιδευτικούς που έχουν μεταπτυχιακά προσόντα σε θέματα μαθηματικής παιδείας και ακολούθησαν συγκεκριμένες γραπτές και προφορικές οδηγίες που τους δόθηκαν. Κατά τις δύο χορηγήσεις οι μαθητές είχαν στη διάθεσή τους 40 λεπτά για να εργαστούν. Ο Πίνακας 1 παρουσιάζει την κατανομή των έργων της έρευνας στις δύο χορηγήσεις. Τα έργα φαίνονται στο Παράρτημα 1. Η αρίθμηση των έργων που ακολουθείται εδώ είναι η ίδια με αυτή που εμφανίζεται στην έντυπη μορφή των δύο δοκιμίων που φαίνονται στο Παράρτημα 1. Ο συμβολισμός Α και Β αντιστοιχεί στα δύο δοκίμια που δημιουργήθηκαν, ενώ ο τελευταίος δείκτης κάθε έργου αφορά την ικανότητα που εξετάζει το έργο (Χ=έργο χωρικής ικανότητας, 2Δ=έργο με γεωμετρικά σχήματα δύο διαστάσεων, 3Δ=έργο με γεωμετρικά σχήματα τριών διαστάσεων, Αν=έργο με αναπτύγματα γεωμετρικών στερεών).

Για την καθεμιά από τις δύο χορηγήσεις δημιουργήθηκαν τρεις τύποι δοκιμίου, οι οποίοι διέφεραν μεταξύ τους μόνο ως προς τη σειρά παρουσίασης των έργων. Στόχος της τακτικής αυτής ήταν να διασφαλιστεί κατά το δυνατό ότι η σειρά με την οποία εμφανίζονταν τα έργα στα δοκίμια δεν θα επηρέαζε την επίδοση των μαθητών.

Πίνακας 1

Κατανομή των Έργων των δύο Οργάνων Μέτρησης σε δύο Χορηγήσεις

Χορήγηση	Έργα με Επίπεδα Σχήματα	Έργα με Στερεά	Έργα με Αναπτύγματα	Έργα Χωρικής Ικανότητας
$1^{η}$	Α1.2$\Delta_{(1-5)}$, Α5.2Δ, Α6.2Δ, Α7.2Δ	Α2.3$\Delta_{(1-16)}$, Α3.3$\Delta_{(1-8)}$	Α4.Αν	Α8.$X_{(1-3)}$, Α9.$X_{(1-3)}$, Α10.$X_{(1-3)}$, Α11.$X_{(1-2)}$, Α12.$X_{(1-2)}$
$2^{η}$	Β1.2$\Delta_{(1-5)}$, Β7.2Δ, Β9.2Δ, Β11.2Δ, Β12.2Δ, Β15.2Δ, Β16.2Δ	Β8.3Δ, Β10.3Δ, Β13.3Δ, Β14.3Δ	Β2.$Αν_{(1-10)}$, Β3.Αν, Β4.$Αν_{(1-2)}$, Β5.Αν, Β6.Αν	Β17.Χ

Ακολούθως παρουσιάζονται αναλυτικά τα έργα που περιλήφθηκαν στο όργανο μέτρησης των γνώσεων και ικανοτήτων των μαθητών αναφορικά με το χειρισμό διαφορετικών γεωμετρικών σχημάτων και στο όργανο μέτρησης της χωρικής ικανότητας. Κατά τη γενική περιγραφή των έργων ακολουθείται, όπως προηγουμένως, η αρίθμηση που παρουσιάζεται στην έντυπη μορφή των δύο δοκιμίων που χορηγήθηκαν στους μαθητές. Στο Παράρτημα 2 φαίνεται η κωδικοποίηση των έργων αναλυτικά.

Όργανο Μέτρησης Γεωμετρικών Γνώσεων και Ικανοτήτων

Το όργανο μέτρησης που κατασκευάστηκε για τη συλλογή δεδομένων αναφορικά με τις γνώσεις και τις ικανότητες των μαθητών να χειρίζονται γεωμετρικά σχήματα περιλαμβάνει έργα που, ως προς το περιεχόμενο, αφορούν (α) γεωμετρικά σχήματα δύο διαστάσεων, (β) γεωμετρικά σχήματα τριών διαστάσεων και (γ) αναπτύγματα γεωμετρικών στερεών. Η κατασκευή ή επιλογή των έργων που περιλήφθηκαν στο δοκίμιο στηρίχτηκε σε μεγάλο βαθμό στις κατευθύνσεις του αναλυτικού προγράμματος των μαθηματικών και σε ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών που χρησιμοποιούνται στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση στην Κύπρο. Εφόσον μια από τις επιδιώξεις της έρευνας ήταν να διερευνήσει τις γνώσεις και ικανότητες των μαθητών στο τέλος της δημοτικής εκπαίδευσης σε σχέση με το χειρισμό διαφορετικών γεωμετρικών σχημάτων, κρίθηκε σκόπιμο τα έργα που θα χορηγούνταν στους μαθητές να βασίζονται στο περιεχόμενο της διδασκαλίας για θέματα γεωμετρίας.

Επιπλέον η κατασκευή των έργων στηρίχτηκε σε δοκίμια προηγούμενων ερευνών που αφορούσαν αναγνώριση επίπεδων σχημάτων (π.χ. Clements, et al., 1999; Gutiérrez & Jaime, 1995), εργασίες για στερεά (π.χ. Gutiérrez, Jaime, & Fortuny, 1991), σε πρόσφατη έρευνα των Παναούρα και Γαγάτση (2003) για τα αναπτύγματα του κύβου και σε έργα που παρουσιάζει ο Duval (2002, 2006) στα πλαίσια της δικής του προσέγγισης για την ανάλυση της γεωμετρικής σκέψης. Κατά την κατασκευή και επιλογή των έργων λήφθηκε πρόνοια ώστε στο δοκίμιο να περιλαμβάνονται έργα στα οποία εμπλέκονται δύο γνωστικές διαδικασίες από το πλαίσιο ανάλυσης του Duval (1995, 1998) σε σχέση με τα γεωμετρικά σχήματα, η εξεικόνιση (π.χ. έργα Β1.2Δ, Β7.2Δ) και ο γεωμετρικός συλλογισμός (π.χ. έργα Α5.2Δ, Α6.2Δ, Β12.2Δ, Β16.2Δ). Επιπλέον όσον αφορά τα έργα που απαιτούσαν χειρισμό επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων λήφθηκε πρόνοια ώστε να περιληφθούν γεωμετρικά προβλήματα που θα μπορούσαν να επιλυθούν είτε με βάση την οπτική αντίληψη από μαθητές που εργάζονται στο πλαίσιο της Εμπειρικής Γεωμετρίας των Houdement και Kuzniak (2003) είτε με βάση την εφαρμογή των ιδιοτήτων των σχημάτων από μαθητές που εργάζονται στο πλαίσιο της Εμπειρικής Αξιωματικής Γεωμετρίας (π.χ. έργα Α5.2Δ, Α6.2Δ, Β9.2Δ, Β16.2Δ).

Κατά την ετοιμασία του οργάνου μέτρησης των γεωμετρικών γνώσεων και ικανοτήτων, τα έργα που κατασκευάστηκαν δόθηκαν αρχικά σε δύο μέλη του διδακτικού προσωπικού στο Τμήμα Επιστημών της Αγωγής του Πανεπιστημίου Κύπρου που έχουν ως αντικείμενο τη Μαθηματική Παιδεία, σε ένα κάτοχο διδακτορικού στο ίδιο θέμα και σε ένα καθηγητή γνωστικής ψυχολογίας στο Τμήμα Ψυχολογίας του Πανεπιστημίου Κύπρου. Με βάση τις παρατηρήσεις και τις εισηγήσεις τους κατασκευάστηκε μια αρχική μορφή του δοκιμίου, το οποίο περιλάμβανε τόσο γεωμετρικά όσο και χωρικά έργα. Το δοκίμιο αυτό χορηγήθηκε πιλοτικά σε ένα τμήμα Δ΄ δημοτικού (25 μαθητές) και σε ένα τμήμα Στ΄ δημοτικού (28 μαθητές) από δύο διαφορετικά σχολεία της Λεμεσού. Με βάση τις παρατηρήσεις που καταγράφηκαν για το χρόνο που χρειάστηκαν οι μαθητές των δύο τάξεων για τη συμπλήρωση του δοκιμίου αποφασίστηκε ότι το δοκίμιο μπορούσε να χορηγηθεί χωρίς πρόβλημα σε δύο σαραντάλεπτα. Ορισμένες διευκρινιστικές ερωτήσεις των μαθητών κατά τη συμπλήρωση των έργων είχαν ως αποτέλεσμα τις ακόλουθες αλλαγές στην παρουσίαση ορισμένων έργων του δοκιμίου.

Έργο Β7.2Δ: Στην ερώτηση «ποια τρίγωνα / ορθογώνια βλέπεις;» διευκρινίστηκε ότι οι μαθητές θα έπρεπε να ονομάσουν τα τρίγωνα / ορθογώνια που εντόπιζαν.

Έργο Β8.3Δ: Προστέθηκε η πρόταση «δεν υπάρχουν κενά στο εσωτερικό του στερεού».

Έργο Β15.2Δ: Προστέθηκε ξεχωριστά το ορθογώνιο ΑΒΓΔ.

Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί ότι από την πιλοτική χορήγηση του δοκιμίου παρατηρήθηκε ότι ο βαθμός δυσκολίας του χωρικού έργου Β17.Χ ήταν υψηλός, καθώς το έργο απαιτεί ικανότητες ανάλυσης και ανασύνθεσης γεωμετρικής εικόνας και ικανότητες νοητικής περιστροφής επίπεδων σχημάτων. Παρά το γεγονός αυτό, αποφασίστηκε η συμπερίληψη του έργου στο τελικό δοκίμιο, με βάση την υπόθεση ότι το έργο παρέχει τη δυνατότητα διάκρισης των ικανοτήτων νοητικής περιστροφής των μαθητών 10, 12 και 14 χρόνων που λαμβάνουν μέρος στην έρευνα.

Έργα που Αναφέρονται στο Χειρισμό Γεωμετρικών Σχημάτων Δύο Διαστάσεων

Το όργανο μέτρησης των γεωμετρικών γνώσεων και ικανοτήτων περιλαμβάνει έντεκα έργα με επίπεδα γεωμετρικά σχήματα, τα οποία αφορούν κυρίως ορθογώνια (περιλαμβάνεται η περίπτωση του τετραγώνου) και τρίγωνα. Στα αυτά περιλαμβάνονται έργα αναγνώρισης σχημάτων (α) ανάμεσα σε απλές γεωμετρικές μορφές (έργο Β1.2Δ) και (β) σε σύνθετη γεωμετρική μορφή (έργο Β7.2Δ), έργα που απαιτούν γεωμετρικό συλλογισμό (π.χ. έργα Α6.2Δ και Β16.2Δ) και έργα πολλαπλής επιλογής που αφορούν τις ιδιότητες σχημάτων (π.χ. έργα Α7.2Δ και Β11.2Δ). Τα έργα Α1.2Δ και Β12.2Δ αφορούν το εμβαδό και συγκεκριμένα αναφέρονται στον υπολογισμό εμβαδού απλών και σύνθετων γεωμετρικών σχημάτων, καθώς και στην περίπτωση ισοδύναμων (ισεμβαδικών) σχημάτων. Τα έργα αυτά ουσιαστικά αποτελούν θέματα μέτρησης (NCTM, 2000), αλλά η συμπερίληψή τους στο δοκίμιο δεν αφορά απλώς τη σύνδεση ενός θέματος γεωμετρίας (στην προκειμένη περίπτωση τα γεωμετρικά σχήματα) με το χειρισμό αριθμητικών δεδομένων. Κατά την κατασκευή των έργων λήφθηκε πρόνοια ώστε τα έργα πέρα από την απλή εφαρμογή τύπων για τον υπολογισμό εμβαδού απλών γεωμετρικών σχημάτων να απαιτούν την εφαρμογή ιδιοτήτων των σχημάτων, την ανάλυση σύνθετων σχημάτων σε απλά και η επίλυσή τους να διευκολύνεται με την ενεργοποίηση της διαδικασίας του γεωμετρικού συλλογισμού. Ακολουθεί αναλυτικότερη περιγραφή των έργων που περιλήφθηκαν στο όργανο μέτρησης των γεωμετρικών γνώσεων και ικανοτήτων των μαθητών και εξετάζουν την ικανότητα χειρισμού έργων με γεωμετρικά σχήματα δύο διαστάσεων.

Έργα αναγνώρισης σχημάτων δύο διαστάσεων. Χρησιμοποιήθηκαν έργα αναγνώρισης σχημάτων (α) ανάμεσα σε απλές γεωμετρικές μορφές (Β1.2Δ) και (β) ανάμεσα σε σύνθετες γεωμετρικές μορφές (Β7.2Δ). Στο έργο Β1.2Δ δόθηκαν 17 γεωμετρικές εικόνες, στις οποίες περιλαμβάνονται διαφορετικές αναπαραστάσεις ορθογωνίων (συμπεριλαμβάνεται η περίπτωση τετραγώνου) και τριγώνων, κύκλος και έλλειψη, πολύγωνα, διευθετήσεις γραμμών που δεν ορίζουν γεωμετρικό σχήμα και αναπαραστάσεις στερεών (κύβου και πυραμίδας). Οι μαθητές κλήθηκαν να καθορίσουν ποιες από τις γεωμετρικές εικόνες που δόθηκαν παρουσίαζαν (α) τρίγωνα, (β) τετράγωνα, (γ) ορθογώνια, (γ) τετράπλευρα και (ε) κύκλους. Η εμφάνιση ξεχωριστής κατηγορίας για τα «τετράγωνα» και τα «ορθογώνια» σκοπό είχε να ελέγξει την ικανότητα των μαθητών για συμπερίληψη των τετραγώνων στην κλάση των ορθογωνίων. Στο έργο B7.2Δ δόθηκε μια σύνθετη γεωμετρική εικόνα, στην οποία οι μαθητές κλήθηκαν να εντοπίσουν (ονομάζοντας τα) τρίγωνα και ορθογώνια. Με το έργο αυτό εξετάστηκε η ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίζουν υποσχήματα σε μια γεωμετρική εικόνα.

Έργα που απαιτούν γεωμετρικό συλλογισμό. Περιλήφθηκαν πέντε γεωμετρικά προβλήματα (A5.2Δ, A6.2Δ, B9.2Δ, B15.2Δ, B16.2Δ), μέσω των οποίων αξιολογήθηκαν οι ικανότητες των μαθητών να εντοπίζουν υποσχήματα σε σύνθετες γεωμετρικές εικόνες, να εφαρμόζουν ιδιότητες των σχημάτων, να ανασχηματίζουν ή να διασπούν δεδομένες γεωμετρικές εικόνες. Το έργο B16.2Δ με το ορθογώνιο και τον κύκλο δόθηκε σε Γάλλους μαθητές (Duval, 2002) και αξιολογεί την ικανότητα εντοπισμού υποσχημάτων και την εφαρμογή της ιδιότητας για την ισότητα ακτίνων του κύκλου. Ως ανάλογο κατασκευάστηκε για το σκοπό της παρούσας εργασίας το έργο A5.2Δ, στο οποίο παρουσιάζεται τετράγωνο και ορθογώνιο και για την επίλυσή του απαιτείται εφαρμογή της ιδιότητας της ισότητας των πλευρών τετραγώνου. Η βασική διαφορά των δύο έργων έγκειται στο γεγονός ότι στο έργο A5.2Δ τα υποσχήματα βρίσκονται το ένα «δίπλα» στο άλλο, ενώ στο έργο B16.2Δ τα υποσχήματα δημιουργούν ένα συσχηματισμό (το ένα βρίσκεται «μέσα» στο άλλο). Τα έργα A6.2Δ και B9.2Δ αξιολογούν την ικανότητα εντοπισμού υποσχημάτων (τετράγωνο και ορθογώνιο τρίγωνο) και την εφαρμογή της ιδιότητας της ισότητας των πλευρών τετραγώνου και στοχεύουν στον έλεγχο της επίδρασης του διδακτικού συμβολαίου στους μαθητές του γυμνασίου σε σχέση με την εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο. Το έργο B15.2Δ, στο οποίο οι μαθητές καλούνται να συγκρίνουν την περίμετρο δύο σχημάτων, αξιολογεί την ικανότητα των μαθητών να μεταβαίνουν από τις δύο στη μία διάσταση, δηλαδή να διασπούν ένα σχήμα δύο διαστάσεων στα ευθύγραμμα τμήματα από τα οποία αποτελείται.

Έργα πολλαπλής επιλογής. Περιλήφθηκαν δύο έργα πολλαπλής επιλογής (A7.2Δ, B11.2Δ) που σχετίζονται με ιδιότητες επίπεδων σχημάτων. Το έργο A7.2Δ χρησιμοποιήθηκε για να εντοπιστούν οι μαθητές που κατέχουν τη γνωστική μονάδα αναφορικά με την ιδιότητα της ισότητας των πλευρών τετραγώνου. Το έργο B11.2Δ εξετάζει την ικανότητα συμπερίληψης των τετραγώνων στην κλάση των ορθογωνίων.

Έργα που Αναφέρονται στο Χειρισμό Γεωμετρικών Σχημάτων Τριών Διαστάσεων

Στο όργανο μέτρησης των γεωμετρικών γνώσεων και ικανοτήτων περιλαμβάνονται έξι έργα που αφορούν στερεά: ένα έργο αναγνώρισης στερεών (Α2.3Δ), ένα έργο αναγνώρισης του σχήματος των εδρών και καθορισμού του αριθμού των εδρών στερεών (Α3.3Δ), ένα έργο ανάλυσης στερεού που είναι κατασκευασμένο από μικρούς κύβους (Β8.3Δ) και τρία έργα πολλαπλής επιλογής που αφορούν τις έδρες ή τις ιδιότητες στερεών (Β10.3Δ, Β13.3Δ, Β14.3Δ). Τα στερεά που περιλαμβάνονται στα έργα που χρησιμοποιήθηκαν είναι το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο (περιλαμβάνεται η περίπτωση κύβου) και η πυραμίδα.

Έργο αναγνώρισης στερεών. Στο έργο Α2.3Δ δόθηκαν στους μαθητές 16 γεωμετρικές εικόνες, στις οποίες περιλαμβάνονται διαφορετικές αναπαραστάσεις ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου (συμπεριλαμβάνεται η περίπτωση κύβου), πυραμίδων, κυλίνδρου, κώνου, καθώς και αναπαραστάσεις επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων. Οι μαθητές κλήθηκαν να καθορίσουν ποιες από τις γεωμετρικές εικόνες που δόθηκαν αποτελούσαν αναπαραστάσεις (α) κύβου, (β) πυραμίδας και (γ) γεωμετρικού στερεού. Η εμφάνιση της κατηγορίας «γεωμετρικά στερεά» αποσκοπούσε στην αξιολόγηση της ικανότητας των μαθητών να συμπεριλαμβάνουν γεωμετρικά σχήματα σε κλάσεις και της ικανότητας να διακρίνουν τις αναπαραστάσεις γεωμετρικών στερεών από τις αναπαραστάσεις επίπεδων σχημάτων.

Έργα ανάλυσης γεωμετρικών στερεών στα στοιχεία τους. Χρησιμοποιήθηκαν δύο έργα για την αξιολόγηση της ικανότητας των μαθητών να αναλύουν γεωμετρικά στερεά σε επιμέρους στοιχεία. Στο έργο Α3.3Δ οι μαθητές κλήθηκαν να αναλύσουν τέσσερα γεωμετρικά στερεά που δόθηκαν, αναφέροντας τον αριθμό και το σχήμα των εδρών από τα οποία αποτελούνται. Το έργο αυτό απαιτεί μετάβαση από το επίπεδο των τριών διαστάσεων στο επίπεδο των δύο διαστάσεων. Στο έργο Β8.3Δ παρουσιάστηκε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο κατασκευασμένες από κυβικές μονάδες και ζητήθηκε από τους μαθητές, χρησιμοποιώντας τα δεδομένα που έχουν από τις ορατές έδρες του στερεού, να καθορίσουν τον αριθμό των κυβικών μονάδων που απαιτούνται για την κατασκευή του.

Έργα πολλαπλής επιλογής. Περιλήφθηκαν τρία έργα πολλαπλής επιλογής (Β10.2Δ, Β13.3Δ, Β14.3Δ). Τα έργα Β10.3Δ και Β13.3Δ αξιολογούν γνώσεις των μαθητών για τις έδρες του κύβου και των πυραμίδων αντίστοιχα, ενώ το έργο Β14.3Δ αξιολογεί την ικανότητα των μαθητών να συμπεριλαμβάνουν τους κύβους στην κλάση των ορθογώνιων παραλληλεπιπέδων.

Έργα που Αναφέρονται στο Χειρισμό Αναπτυγμάτων Γεωμετρικών Στερεών

Το δοκίμιο περιλαμβάνει έξι έργα με αναπτύγματα στερεών. Εκτός από το έργο Β2.Αν, που αφορά αναγνώριση αναπτυγμάτων κύβου, ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου, πυραμίδας και αντιστοίχηση των αναπτυγμάτων με αναπαραστάσεις των στερεών, το ενδιαφέρον στα υπόλοιπα έργα επικεντρώνεται στο ανάπτυγμα κύβου. Συγκεκριμένα, περιλαμβάνονται έργα κατασκευής (Α4.Αν), συμπλήρωσης (Β4.Αν) και αναγνώρισης (Β3.Αν) αναπτύγματος κύβου, καθώς και έργα αντιστοίχησης του αναπτύγματος κύβου με το σχέδιο συγκεκριμένου κύβου με κωδικοποιημένες έδρες (έργα Β5.Αν και Β6.Αν).

Έργο αναγνώρισης αναπτυγμάτων διαφορετικών γεωμετρικών στερεών. Η ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίζουν τα αναπτύγματα γεωμετρικών στερεών (διακρίνοντας τις γεωμετρικές εικόνες που δεν αποτελούν αναπτύγματα στερεών) και να τα αντιστοιχίζουν με το στερεό εξετάστηκε με το έργο Β2.Αν. Στο έργο αυτό δόθηκαν δέκα γεωμετρικές εικόνες και οι μαθητές κλήθηκαν να καθορίσουν κατά πόσο η κάθε εικόνα αποτελούσε ανάπτυγμα στερεού (στην περίπτωση αυτή θα έπρεπε να αντιστοιχίσουν το ανάπτυγμα με το στερεό) και να διακρίνουν τις γεωμετρικές εικόνες που δεν αποτελούσαν αναπτύγματα στερεών.

Έργα κατασκευής αναπτυγμάτων κύβου. Για την ικανότητα των μαθητών να κατασκευάζουν ανάπτυγμα κύβου χρησιμοποιήθηκαν δύο έργα. Στο έργο Α4.Αν οι μαθητές κλήθηκαν σε άσπρο φύλλο χαρτιού να κατασκευάσουν εξολοκλήρου οποιοδήποτε ανάπτυγμα κύβου. Στο έργο Β4.Αν δόθηκε στους μαθητές ένα ατελές ανάπτυγμα κύβου και κλήθηκαν να το συμπληρώσουν με δύο διαφορετικούς τρόπους.

Έργα αναγνώρισης αναπτυγμάτων κύβου. Η ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίζουν αναπτύγματα κύβου εξετάστηκε με το έργο Β3.Αν, στο οποίο οι μαθητές κλήθηκαν να καθορίσουν ποιες από τις έξι γεωμετρικές εικόνες που δόθηκαν αποτελούν αναπτύγματα κύβου.

Έργα αντιστοίχησης αναπτύγματος και σχεδίου κύβου. Η ικανότητα των μαθητών να αντιστοιχίζουν το ανάπτυγμα κύβου με το σχέδιο συγκεκριμένου κύβου (με κωδικοποιημένες έδρες) εξετάστηκε με δύο έργα. Στο έργο Β5.Αν δόθηκε στους μαθητές το σχέδιο κύβου με κωδικοποιημένες έδρες (υπήρχαν γραμμένοι αριθμοί στις τρεις ορατές έδρες) και ζητήθηκαν να επιλέξουν από τέσσερα σταυροειδή αναπτύγματα που παρουσιάζονταν ποιο ήταν το ανάπτυγμα του συγκεκριμένου κύβου. Στο έργο Β6.Αν οι ορατές έδρες του κύβου που παρουσιάστηκε με σχέδιο ήταν κωδικοποιημένες με κεφαλαία ελληνικά γράμματα, τα οποία οι μαθητές κλήθηκαν να ζωγραφίσουν στο ανάπτυγμα κύβου που δινόταν.

Τα έργα που χρησιμοποιήθηκαν για τη μέτρηση του επιπέδου χωρικής ικανότητας των μαθητών έχουν επιλεγεί από σύνολο έργων που χρησιμοποιήθηκαν σε προηγούμενες έρευνες (π.χ. Demetriou & Kazi, 2001; Demetriou et al., 2002). Η χρησιμοποίηση των έργων έγινε με την άδεια του καθηγητή Δημητρίου. Η επιλογή έγινε με βάση την ηλικία των μαθητών που έλαβαν μέρος στην έρευνα. Συγκεκριμένα, στο όργανο μέτρησης του επιπέδου χωρικής ικανότητας που χρησιμοποιήθηκε στα πλαίσια της παρούσας εργασίας περιλαμβάνονται έργα που εξετάζουν την ικανότητα χειρισμού νοητικών εικόνων (αναφέρονται σε δίπλωμα σχημάτων) (Α8.Χ), έργα που εξετάζουν την ικανότητα νοητικής περιστροφής με επίπεδα σχήματα (Α10.Χ, Β17.Χ) και με στερεά (Α9.Χ) και έργα που αφορούν την ικανότητα συντονισμού των προοπτικών (Α11.Χ, Α12.Χ).

Ικανότητα Χειρισμού Νοητικών Εικόνων

Για την αξιολόγηση της ικανότητας χειρισμού νοητικών εικόνων χρησιμοποιήθηκαν τρία έργα δίπλωσης χαρτιού (στο έργο Α8.Χ), στα οποία ο μαθητής καλείται να επιλέξει από τέσσερις απαντήσεις που παρουσιάζονται πώς θα φαίνεται ένα κομμάτι χαρτί που διπλώνεται με βάση συγκεκριμένο άξονα.

Ικανότητα Νοητικής Περιστροφής

Για την αξιολόγηση της ικανότητας νοητικής περιστροφής χρησιμοποιήθηκαν έργα που περιλάμβαναν νοητική περιστροφή δισδιάστατων και τρισδιάστατων σχημάτων. Η ικανότητα νοητικής περιστροφής δισδιάστατων σχημάτων αξιολογήθηκε με τρία έργα τύπου «δείκτες ρολογιού» (στο έργο Α10.Χ). Σε καθένα από τα έργα αυτά παρουσιάζεται ένα ρολόι με τον ένα δείκτη να δείχνει πάντοτε στη θέση 12:00 και τον άλλο δείκτη να δείχνει 12:15, 12:30 ή 12:45. Ένα γεωμετρικό σχήμα (για παράδειγμα ένα τρίγωνο) είναι σχεδιασμένο στο δείκτη που βρίσκεται στη θέση 12:00 και ο μαθητής καλείται να φανταστεί πώς θα φαίνεται το σχήμα αυτό όταν ο συγκεκριμένος δείκτης περιστραφεί ώστε να βρεθεί πάνω από το δεύτερο δείκτη. Για την αξιολόγηση της ικανότητας νοητικής περιστροφής δισδιάστατων σχημάτων χρησιμοποιήθηκε επίσης το έργο Β17.Χ. Στο έργο αυτό παρουσιάζεται ένα σύνθετο γεωμετρικό σχήμα το οποίο αποτελείται από τέσσερα υποσχήματα, τα οποία διαφέρουν μεταξύ τους. Επιπλέον παρουσιάζονται 16 γεωμετρικά σχήματα, τα οποία οι μαθητές καλούνται να περιστρέψουν νοητικά, ούτως ώστε να επιλέξουν από αυτά τα τέσσερα σχήματα που αποτελούν το αρχικό γεωμετρικό σχήμα.

Η ικανότητα νοητικής περιστροφής τρισδιάστατων σχημάτων αξιολογήθηκε με τρία έργα στα οποία παρουσιάζονται ζεύγη στερεών (στο έργο Α9.Χ) και οι μαθητές καλούνταν να αποφασίσουν κατά πόσο τα σχήματα που είχαν σε κάθε ζεύγος ήταν όμοια ή ανόμοια μεταξύ τους.

Ικανότητα Συντονισμού των Προοπτικών

Δύο είδη έργων χρησιμοποιήθηκαν για την αξιολόγηση της ικανότητας συντονισμού των προοπτικών: τα έργα με το κεκλιμένο μπουκάλι (Α11.Χ) και τα έργα με το βαρίδιο στο όχημα (Α12.Χ). Στα έργα με το κεκλιμένο μπουκάλι (Α11.Χ) παρουσιάζεται μια εικόνα με ένα μισογεμάτο μπουκάλι και ο μαθητής καλείται να σχεδιάσει τη γραμμή που καθορίζει το επίπεδο του νερού όταν το μπουκάλι αποκτήσει κλίση (α) 45 μοιρών και (β) 80 μοιρών. Στα έργα με το βαρίδιο στο όχημα (Α12.Χ) παρουσιάζεται η εικόνα ενός οχήματος που (α) ανεβαίνει και (β) κατεβαίνει ένα λόφο και ο μαθητής καλείται να σχεδιάσει πώς θα φαίνεται ένα νήμα, στο κάτω μέρος του οποίου βρίσκεται ένα βαρίδιο, που είναι κρεμασμένο από την οροφή του οχήματος.

Βαθμολόγηση των Έργων

Τα έργα πολλαπλής επιλογής καθώς και τα έργα που αφορούσαν το επίπεδο χωρικής ικανότητας των μαθητών βαθμολογήθηκαν στη βάση σωστό-λάθος (με κλίμακα 0-1). Δηλαδή, κάθε έργο για το οποίο δόθηκε ορθή απάντηση πήρε ένα βαθμό, ενώ τα έργα με λανθασμένη ή καθόλου απάντηση βαθμολογήθηκαν με μηδέν. Ο ίδιος τρόπος βαθμολόγησης χρησιμοποιήθηκε για τα έργα που αφορούσαν αναγνώριση επίπεδων σχημάτων, στερεών και αναπτυγμάτων. Για τα υπόλοιπα έργα οι κωδικοποιήσεις έγιναν με χρήση κλίμακας 0-2. Με μηδέν βαθμολογήθηκαν τα έργα στα οποία δεν δόθηκε απάντηση ή δόθηκαν λανθασμένες απαντήσεις και με 2 βαθμολογήθηκαν τα έργα στα οποία δόθηκαν ορθές απαντήσεις. Ο βαθμός 1 δόθηκε στις περιπτώσεις έργων όπου ενώ ακολουθήθηκε ορθή διαδικασία επίλυσης δόθηκε λανθασμένη απάντηση (κυρίως λόγω λάθους στους υπολογισμούς). Επιπλέον στα έργα όπου η επίλυση απαιτούσε μια διαδικασία γεωμετρικού συλλογισμού έγινε μια δεύτερη κωδικοποίηση που αφορούσε τις στρατηγικές που ακολούθησαν οι μαθητές. Κατά την κωδικοποίηση αυτή έγινε διάκριση ανάμεσα σε στρατηγικές που στηρίζονταν στην οπτική αντίληψη της γεωμετρικής εικόνας, σε στρατηγικές που στηρίζονταν σε μετρήσεις με τη χρήση γεωμετρικών οργάνων, σε αλγοριθμικές προσεγγίσεις με χρήση των αριθμητικών δεδομένων που παρουσιάζονταν στα έργα και σε στρατηγικές που βασίζονταν σε εφαρμογή ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων.

Για κάθε μαθητή υπολογίστηκε η επίδοσή του στα έργα που σχετίζονται με επίπεδα σχήματα, στα έργα που σχετίζονται με στερεά, στα έργα που σχετίζονται με αναπτύγματα στερεών και στα έργα που αφορούν τη χωρική ικανότητα και έγινε αναγωγή όλων των βαθμών με βάση το 1. Για τους σκοπούς της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης χρησιμοποιήθηκε η μέση επίδοση των μαθητών.

Εγκυρότητα Γνωρίσματος των δύο Οργάνων Μέτρησης

Το όργανο μέτρησης των γεωμετρικών γνώσεων και ικανοτήτων κατασκευάστηκε για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας και περιλαμβάνει ένα μεγάλο αριθμό έργων. Ως εκ τούτου, κρίθηκε σκόπιμο να ελεγχθεί η εγκυρότητα γνωρίσματός του και να επιβεβαιωθεί ο εννοιολογικός σχεδιασμός του συγκεκριμένου οργάνου μέτρησης. Στο υποκεφάλαιο που ακολουθεί παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του ελέγχου εγκυρότητας γνωρίσματος του δοκιμίου που αναπτύχθηκε για τη μέτρηση των ικανοτήτων των μαθητών να χειρίζονται γεωμετρικά σχήματα δύο διαστάσεων, τριών διαστάσεων και αναπτύγματα στερεών. Έλεγχος εγκυρότητας γνωρίσματος πραγματοποιήθηκε και για το όργανο μέτρησης του επιπέδου χωρικής ικανότητας. Παρά το γεγονός ότι τα έργα που περιλήφθηκαν στο όργανο αυτό έχουν χρησιμοποιηθεί σε προηγούμενες έρευνες (π.χ. Demetriou & Kyriakides, 2006), κρίθηκε σκόπιμο να ελεγχθεί η εγκυρότητα γνωρίσματος και του συγκεκριμένου οργάνου για τις ηλικίες των παιδιών που έλαβαν μέρος στην παρούσα εργασία.

Τα δεδομένα που συγκεντρώθηκαν μέσω της χορήγησης των δύο παραπάνω οργάνων μέτρησης αναλύθηκαν με τη βοήθεια του μοντέλου Rasch (Andrich, 1988) με τη χρήση του λογιστικού προγράμματος QUEST (Adams & Khoo, 1996). Προέκυψε έγκυρη και αξιόπιστη ισοδιαστημική κλίμακα μέτρησης των ικανοτήτων των παιδιών να χειρίζονται γεωμετρικά σχήματα και έγκυρη και αξιόπιστη ισοδιαστημική κλίμακα μέτρησης των χωρικών ικανοτήτων των παιδιών, οι οποίες παρουσιάζονται στο υποκεφάλαιο που ακολουθεί. Από την ανάλυση, δηλαδή, των δεδομένων επιβεβαιώθηκε ο εννοιολογικός σχεδιασμός των συγκεκριμένων οργάνων μέτρησης.

Εγκυρότητα Γνωρίσματος Οργάνου Μέτρησης της Ικανότητας Χειρισμού Γεωμετρικών Σχημάτων

Ένα όργανο αξιολόγησης έχει εγκυρότητα γνωρίσματος εάν αποδειχθεί, με τη βοήθεια τεχνικών που δικαιολογούν την ύπαρξη κάθε διασποράς στις απαντήσεις του συγκεκριμένου δοκιμίου, ότι μετρά το θεωρητικό γνώρισμα το οποίο υποτίθεται ότι μετρά (Allen & Yen, 1979). Οι Wright και Masters (1981) σημειώνουν τα κριτήρια που πρέπει να ικανοποιούνται για να μπορεί μια κλίμακα να θεωρηθεί αξιόπιστη και έγκυρη. Συνοπτικά αναφέρεται ότι τα κριτήρια αυτά υποβάλλουν (α) τον υπολογισμό της σχετικής δυσκολίας κάθε έργου, (β) τον υπολογισμό της σχετικής ικανότητας κάθε ατόμου σε μια γραμμική σχέση και (γ) τη δημιουργία κλίμακας στην οποία είναι δυνατή η αντιπαραβολή του βαθμού δυσκολίας των έργων με την ικανότητα των μαθητών. Σημαντικό στοιχείο στη διαδικασία αυτή είναι να παραμένει σταθερός ο βαθμός δυσκολίας κάθε έργου ανεξάρτητα από την ομάδα ατόμων που απαντά στο συγκεκριμένο δοκίμιο. Χρησιμοποιώντας τις προσεγγίσεις της Σύγχρονης Θεωρίας Μέτρησης (Item Response Theory) έχει ελεγχθεί κατά πόσο ικανοποιούνται τα κριτήρια αυτά στην περίπτωση του οργάνου μέτρησης των γεωμετρικών γνώσεων και ικανοτήτων που κατασκευάστηκε και χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία.

Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας θεωρήθηκε επίσης σημαντικό να εξεταστεί κατά πόσο η επίδοση στα έργα του δοκιμίου γεωμετρίας θα μπορούσε να μειωθεί σε μια κλίμακα που να επιτρέπει τον καθορισμό μιας ιεραρχίας όσον αφορά τη δυσκολία των έργων. Το μοντέλο Rasch είναι κατάλληλο για τον καθορισμό μιας τέτοιας κλίμακας, επειδή καθιστά τον ερευνητή ικανό να εξετάσει το βαθμό στον οποίο τα δεδομένα ικανοποιούν το κριτήριο τόσο οι επιδόσεις των μαθητών στα έργα του δοκιμίου γεωμετρίας όσο και οι δυσκολίες των συγκεκριμένων έργων να σχηματίζουν μια σταθερή συνέχεια (στα πλαίσια πιθανολογικών περιορισμών) σε ένα μοναδικό συνεχές (Bond & Fox, 2001). Άρα ο καθορισμός της θέσης ενός ατόμου σε αυτό το συνεχές παρέχει πληροφορίες για την πιθανότητα επιτυχίας του συγκεκριμένου ατόμου στα έργα που βρίσκονται χαμηλότερα από τη θέση αυτή (μεγάλη πιθανότητα) και στα έργα που βρίσκονται ψηλότερα από τη θέση αυτή (μικρή πιθανότητα).

Πριν από την παρουσίαση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από την ανάλυση των δεδομένων με τη βοήθεια του μοντέλου Rasch, κρίνεται σκόπιμο να γίνει μια αναφορά στα στατιστικά κριτήρια προσαρμογής ενός μοντέλου Rasch. Πρόκειται (α) για τις σταθμισμένες τιμές (infit mean square) και τις μη σταθμισμένες τιμές (outfit mean square). Τα στατιστικά αυτά κριτήρια προσαρμογής του μοντέλου χρησιμοποιούνται για να αξιολογηθεί κατά πόσο η επίδοση ενός συγκεκριμένου ατόμου (ή ενός συγκεκριμένου έργου) είναι συνεπής με τις επιδόσεις άλλων ατόμων (ή έργων) και βασίζεται στις διαφορές ανάμεσα στις αναμενόμενες και παρατηρούμενες επιδόσεις. Τα μη σταθμισμένα στατιστικά στοιχεία (outfit statistics) βασίζονται μόνο πάνω στη διαφορά ανάμεσα στις παρατηρούμενες και τις αναμενόμενες επιδόσεις, ενώ όταν υπολογίζονται οι τιμές για τα σταθμισμένα στατιστικά στοιχεία (infit statistics), τα άτομα ή τα έργα που παρουσίαζαν ακραίες τιμές υποσταθμίζονται. Συνήθως τα έργα που θεωρούνται ότι προσαρμόζονται στο μοντέλο Rasch έχουν σταθμισμένα στοιχεία (infit square statistics) μέσα στο εύρος των τιμών από 0.77 μέχρι 1.30 κατά τους Adams και Khoo (1996), ενώ άλλοι ερευνητές συστήνουν ένα πιο αυστηρό εύρος για τις συγκεκριμένες τιμές από 0.83 μέχρι 1.20 (Keeves & Alagumalai, 1999). Κατά την εξέταση των στατιστικών τιμών των ατόμων σε σχέση με την προσαρμογή των δεδομένων στο μοντέλο Rasch θεωρείται ότι οι τιμές για τα μη σταθμισμένα στοιχεία (outfit square statistics) παρέχουν πιο χρήσιμες πληροφορίες από τις τιμές για τα σταθμισμένα στοιχεία (infit square statistics), εξαιτίας του γεγονότος ότι οι επιδόσεις ενός ατόμου τόσο στα ευκολότερα όσο και στα δυσκολότερα έργα λαμβάνονται εξίσου υπόψη. Επιπλέον, τα στατιστικά στοιχεία προσαρμογής του μοντέλου μπορούν να γίνουν κατά προσέγγιση κανονικά χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Wilson-Hilferty. Τα κανονικά στατιστικά στοιχεία, δηλαδή οι τιμές για τα infit t και τα outfit t, έχουν μέσο όρο κοντά στο μηδέν και τυπική απόκλιση κοντά στο 1 στην περίπτωση κατά την οποία τα δεδομένα ταιριάζουν με το μοντέλο.

Τα δεδομένα της παρούσας έρευνας αναλύθηκαν αρχικά με το σύνολο του δείγματος και το σύνολο των έργων γεωμετρίας. Δεν παρουσιάστηκε κανένα έργο που να μην ταιριάζει στο μοντέλο. Κατά συνέπεια οι αναλύσεις κατέστησαν δυνατή την αξιολόγηση του νοήματος, της εγκυρότητας και της αξιοπιστίας του δοκιμίου γεωμετρίας. Ακολούθως οι αναλύσεις επαναλήφθηκαν για κάθε ομάδα ηλικίας του δείγματος ξεχωριστά, για να διαπιστωθεί κατά πόσο το συγκεκριμένο όργανο μέτρησης ικανοτήτων χειρισμού γεωμετρικών έργων χρησιμοποιείται με συνέπεια από τους μαθητές των τριών ομάδων ηλικίας, στη συγκεκριμένη περίπτωση από τους μαθητές των τριών τάξεων.

Από την ανάλυση των δεδομένων για ολόκληρο το δείγμα προέκυψε το Διάγραμμα 1, το οποίο παρουσιάζει την κλίμακα μέτρησης των ικανοτήτων των παιδιών να χειρίζονται έργα με γεωμετρικά σχήματα (δύο διαστάσεων, τριών διαστάσεων και αναπτύγματα στερεών). Στην κλίμακα αυτή εμφανίζονται όλα τα έργα του δοκιμίου γεωμετρίας που χρησιμοποιήθηκε και παρουσιάζεται από τη μια ο βαθμός δυσκολίας των έργων και από την άλλη η επίδοση των μαθητών.

```
------------------------------------------------------------------
Ψηλή επίδοση                        Δύσκολα έργα
  5.0                            |
                             X   |
                                 |
                                 |
                                 |
                                 |
  4.0                            |
                                 |
                                 |
                                 |
                             X   |
                             X   |
  3.0                            |
                                 |
                            XX   |
                          XXXX   |
                           XXX   |      63
                           XXX   |      66
  2.0                    XXXXX   |      58.2
                      XXXXXXXX   |      46     64.2   74.2
                      XXXXXXXX   |
                     XXXXXXXXX   |      39     68.2   75.2
                XXXXXXXXXXXXXX   |       5.2   64.1   67
                 XXXXXXXXXXXXX   |      47     71.2
  1.0           XXXXXXXXXXXXXX   |       4.2    9     10     11     15
              XXXXXXXXXXXXXXXX   |       5.1    7     57.2   65     68.1
                XXXXXXXXXXXXXX   |       4.1   30.2
                 XXXXXXXXXXXXX   |       3     14     40     43     59.2
           XXXXXXXXXXXXXXXXXXX   |      45     50     55     60.2   69.2
            XXXXXXXXXXXXXXXXXX   |      36     56     73.1
            XXXXXXXXXXXXXXXXXX   |       8     41
   .0              XXXXXXXXXXX   |      31     32
                 XXXXXXXXXXXXX   |      12     17     18     19     30.1
                   XXXXXXXXXXX   |       6     13     26     37     44
                     XXXXXXXXX   |      21     57.1   72.1
                       XXXXXXX   |      58.1   69.1
                       XXXXXXX   |      33     42     59.1
 -1.0                     XXXX   |      23     24     27     28     54
                           XXX   |       2     25     38     48     70.1
                           XXX   |      22     29     34
                             X   |       1     35     53
                             X   |      52
                             X   |
 -2.0                            |      49
                                 |
                                 |
                                 |
                                 |
 -3.0                            |
                                 |
                                 |
                                 |      75.1
                                 |
                                 |
 -4.0
Χαμηλή επίδοση                      Εύκολα έργα
------------------------------------------------------------------
```

Κάθε X αντιπροσωπεύει 4 μαθητές

Διάγραμμα 1. Κλίμακα μέτρησης των ικανοτήτων χειρισμού έργων με γεωμετρικά σχήματα

Όπως φαίνεται από το Διάγραμμα 1, ο βαθμός δυσκολίας των έργων του δοκιμίου κυμαίνεται από -1.98 μέχρι 2.32, καλύπτοντας σε ικανοποιητικό βαθμό το προσδοκώμενο εύρος. Από την άλλη, οι δείκτες ικανοτήτων των μαθητών κυμαίνονται από -2.33 μέχρι 4.81, γεγονός που υποδηλώνει την ύπαρξη μεγάλων αποκλίσεων στις ικανότητες των μαθητών. Όπως γίνεται αντιληπτό, τα έργα που βρίσκονται στο κάτω άκρο της κλίμακας (εύκολα έργα) απαντήθηκαν με επιτυχία από την πλειοψηφία των μαθητών, ενώ αντίθετα τα έργα που βρίσκονται στο πάνω άκρο της κλίμακας (δύσκολα έργα) απαντήθηκαν ορθά μόνο από εκείνους τους μαθητές που έχουν υψηλή επίδοση με βάση το συγκεκριμένο δοκίμιο γεωμετρίας.

Στον Πίνακα 2 παρουσιάζονται οι στατιστικές τιμές της ανάλυσης του οργάνου μέτρησης της ικανότητας χειρισμού γεωμετρικών σχημάτων με τη βοήθεια του μοντέλου Rasch για ολόκληρο το δείγμα. Από τον Πίνακα 2 προκύπτουν οι ακόλουθες παρατηρήσεις. Οι τιμές αξιοπιστίας τόσο σε σχέση με την κλίμακα των έργων όσο και σε σχέση με την κλίμακα ικανοτήτων των ατόμων είναι ιδιαίτερα υψηλές, ξεπερνώντας την τιμή 0.90 (0.99 και 0.93 αντίστοιχα). Οι σταθμισμένες τιμές των Mean Infit mean square και οι μη σταθμισμένες τιμές των Mean Outfit mean square, οι οποίες κυμαίνονται από 0.99 μέχρι 1.03 (δηλαδή κοντά στο 1, όπως απαιτείται για καλή προσαρμογή του μοντέλου), καθώς και οι τιμές των Infit t και Outfit t, οι οποίες κυμαίνονται από -0.16 μέχρι 0.18 (δηλαδή κοντά στο 0, όπως απαιτείται για καλή προσαρμογή του μοντέλου), φανερώνουν ότι τα δεδομένα που προκύπτουν από τις απαντήσεις του δείγματος ταιριάζουν με τις προϋποθέσεις του μοντέλου Rasch. Συνεπώς, είναι δυνατή η χρήση του μοντέλου για σκοπούς δημιουργίας έγκυρης και αξιόπιστης κλίμακας μέτρησης των ικανοτήτων των παιδιών να χειρίζονται γεωμετρικά έργα που περιλαμβάνουν διαφορετικά γεωμετρικά σχήματα.

Πίνακας 2

Στατιστικά Στοιχεία για τις Κλίμακες των Γεωμετρικών Έργων (L=75) και των Ικανοτήτων των Μαθητών (N=1000)

Στατιστικοί δείκτες	Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση	Αξιοπιστία	Mean Infit mean square	Mean Outfit mean square	Infit t	Outfit t
Για έργα	0.00	1.01	0.99	1.00	0.99	-0.14	-0.16
Για άτομα	0.60	0.95	0.93	1.03	0.99	0.18	-0.03

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, που περιγράφηκε παραπάνω για τα γεωμετρικά έργα που χορηγήθηκαν, έγινε με τη βοήθεια του μοντέλου Rasch ανάλυση των δεδομένων που αναφέρονταν στα χωρικά έργα. Από την ανάλυση που πραγματοποιήθηκε για ολόκληρο το δείγμα προέκυψε το Διάγραμμα 2, το οποίο παρουσιάζει την κλίμακα μέτρησης των χωρικών ικανοτήτων των παιδιών. Στην κλίμακα αυτή εμφανίζονται όλα τα έργα του δοκιμίου χωρικών ικανοτήτων και παρουσιάζεται από τη μια ο βαθμός δυσκολίας των έργων και από την άλλη η επίδοση των μαθητών. Όπως φαίνεται από το Διάγραμμα 2, ο βαθμός δυσκολίας των έργων του δοκιμίου κυμαίνεται από -1.75 μέχρι 3.35, καλύπτοντας σε ικανοποιητικό βαθμό το προσδοκώμενο εύρος. Από την άλλη, οι δείκτες ικανοτήτων των μαθητών κυμαίνονται από -2.33 μέχρι 4.81, γεγονός που υποδηλώνει την ύπαρξη μεγάλων αποκλίσεων στις ικανότητες των μαθητών.

Οι στατιστικές τιμές της ανάλυσης του οργάνου μέτρησης των χωρικών ικανοτήτων που προέκυψαν με τη βοήθεια του μοντέλου Rasch για ολόκληρο το δείγμα παρουσιάζονται στον Πίνακα 3. Οι τιμές αξιοπιστίας είναι υψηλές τόσο σε σχέση με την κλίμακα των έργων όσο και σε σχέση με την κλίμακα των ικανοτήτων των μαθητών, (0.97 και 0.83 αντίστοιχα). Επίσης οι σταθμισμένες τιμές (Mean Infit mean square) και οι μη σταθμισμένες τιμές (Mean Outfit mean square) κυμαίνονται κοντά στο 1, ενώ οι τιμές των Infit t και Outfit t κυμαίνονται κοντά στο μηδέν, όπως απαιτείται για καλή προσαρμογή του μοντέλου. Συνεπώς, η χρήση του μοντέλου Rasch είναι δυνατή για σκοπούς δημιουργίας έγκυρης και αξιόπιστης κλίμακας μέτρησης των χωρικών ικανοτήτων των μαθητών.

Πίνακας 3

Στατιστικά Στοιχεία για τις Κλίμακες των Χωρικών Έργων (L=14) και των Ικανοτήτων των Μαθητών (N=1000)

Στατιστικοί δείκτες	Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση	Αξιοπιστία	Mean Infit mean square	Mean Outfit mean square	Infit t	Outfit t
Για έργα	0.00	0.76	0.97	1.00	0.99	-0.37	-0.09
Για άτομα	0.53	1.08	0.83	1.02	0.99	0.08	0.09

Ένα τελικό βήμα για τη διερεύνηση της ποιότητας ενός νέου οργάνου μέτρησης είναι η σύγκριση των τιμών ανάμεσα σε δύο ή περισσότερες διακριτές ομάδες για να εξεταστεί κατά πόσο τα έργα έχουν σημαντικά διαφορετικά νοήματα για τις διαφορετικές

```
-------------------------------------------------------------------
Ψηλή επίδοση                       Δύσκολα έργα

  4.0                            |
                                 |
                                 |
                                 |
                         XXXX    |       14.2
                                 |
                                 |
  3.0                            |
                                 |
                                 |
                       XXXXXX    |
                                 |
                                 |
                                 |
  2.0              XXXXXXXXXX    |
                                 |
                                 |
              XXXXXXXXXXXXXXX    |
                                 |
                                 |
                XXXXXXXXXXXXX    |
  1.0      XXXXXXXXXXXXXXXXXX    |        3.2
                                 |        9.2
             XXXXXXXXXXXXXXXX    |       10
                                 |        2.2      5      8.2   11
         XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX    |
                 XXXXXXXXXXXX    |       13
   .0                            |       14.1
                  XXXXXXXXXXX    |       12
                    XXXXXXXXX    |
                      XXXXXXX    |        7.2
                                 |        3.1      4      6
                      XXXXXXX    |        2.1
                        XXXXX    |        1.2
 -1.0                            |        8.1
                          XXX    |
                                 |        9.1
                          XXX    |
                          XXX    |        1.1
                                 |
                                 |        7.1
 -2.0                       X    |
                                 |
                                 |
                           XX    |
                                 |
                                 |
                                 |
 -3.0                            |
                            X    |
                                 |
                                 |
                                 |
                                 |
                                 |
 -4.0
Χαμηλή επίδοση                     Εύκολα έργα
-------------------------------------------------------------------

Κάθε X αντιπροσωπεύει 6 μαθητές
```

Διάγραμμα 2. Κλίμακα μέτρησης χωρικών ικανοτήτων ομάδες. Για να εξεταστεί εάν η κλίμακα των ικανοτήτων χειρισμού έργων με γεωμετρικά σχήματα (Διάγραμμα 1) και η κλίμακα μέτρησης των χωρικών ικανοτήτων (Διάγραμμα 2) είναι καθολικές και ελεύθερες από επιδράσεις οι οποίες αποδίδονται στις διαφορετικές ομάδες του πληθυσμού, η ανάλυση των δεδομένων εφαρμόστηκε στη συνέχεια ξεχωριστά για τις τρεις ομάδες του δείγματος. Από την ανάλυση προέκυψε ότι όλα τα γεωμετρικά και όλα τα χωρικά έργα παρουσιάζουν βαθμό δυσκολίας ο οποίος, στα πλαίσια του σφάλματος μέτρησης, μπορεί να θεωρηθεί ότι παραμένει αμετάβλητος ανάμεσα στους μαθητές Δ΄ και Στ΄ δημοτικού και Β΄ γυμνασίου.

Αξιοπιστία των δύο Οργάνων Μέτρησης

Για την εξέταση της αξιοπιστίας του οργάνου μέτρησης της ικανότητας χειρισμού γεωμετρικών σχημάτων και του οργάνου μέτρησης των χωρικών ικανοτήτων των μαθητών υπολογίστηκαν οι τιμές του συντελεστή Cronbach α για τις επιδόσεις των μαθητών στα δύο όργανα μέτρησης. Η τιμή του συντελεστή Cronbach α για τη συνολική επίδοση στο όργανο μέτρησης της ικανότητας χειρισμού γεωμετρικών σχημάτων ήταν 0.93 και για τη συνολική επίδοση το όργανο μέτρησης των χωρικών ικανοτήτων ήταν 0.78. Υπολογίστηκαν επίσης οι τιμές του συντελεστή Cronbach α για ην επίδοση στα έργα χειρισμού επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων (α=0.86), στα έργα χειρισμού τρισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων (α=0.91) και στα έργα χειρισμού αναπτυγμάτων γεωμετρικών στερεών (α=0.80). Οι τιμές του συντελεστή Cronbach α ήταν σε όλες τις περιπτώσεις μεγαλύτερες από .75 και μπορούν να θεωρηθούν ως ικανοποιητικές (Cronbach, 1990).

Μέθοδοι Ανάλυσης των Δεδομένων

Η διερεύνηση του πρώτου ερωτήματος της έρευνας αναφορικά με τη δόμηση των ικανοτήτων των μαθητών αναφορικά με το χειρισμό γεωμετρικών σχημάτων απαιτούσε την πραγματοποίηση επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης (Confirmatory Factor Analysis CFA). Εξαιτίας, όμως, του μεγάλου αριθμού των γεωμετρικών έργων που περιλήφθηκαν στο αντίστοιχο όργανο μέτρησης, πραγματοποιήθηκε αρχικά διερευνητική παραγοντική ανάλυση των δεδομένων που συγκεντρώθηκαν. Η ενέργεια αυτή αποσκοπούσε στην ομαδοποίηση των έργων που δόθηκαν στους μαθητές σε παράγοντες, οι οποίοι αποτέλεσαν στη συνέχεια τις μεταβλητές που χρησιμοποιήθηκαν για τη διενέργεια επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης για τον καθορισμό της δομής της ικανότητας των μαθητών να χειρίζονται έργα με γεωμετρικά σχήματα.

Η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση πραγματοποιήθηκε με το πρόγραμμα EQS (Bentler, 1995). Χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος maximum likelihood και οι αναλύσεις έγιναν με βάση τον πίνακα συνδιασποράς των μεταβλητών της έρευνας. Σύμφωνα με τις εισηγήσεις των Thompson και Daniel (1996), για όλες τις αναλύσεις που έγιναν χρησιμοποιήθηκε μια ομάδα κριτηρίων για την αξιολόγηση της καταλληλότητας των μοντέλων. Όπως σημειώνει ο Kline (1998), για τη διασφάλιση της καταλληλότητας ενός μοντέλου απαιτείται ένα ελάχιστο σύνολο δεικτών, το οποίο πρέπει να περιλαμβάνει το κριτήριο χ^2, τους βαθμούς ελευθερίας του και το επίπεδο σημαντικότητας, ένα δείκτη που περιγράφει τη συνολική αναλογία της διασποράς που ερμηνεύεται (όπως οι δείκτες GFI, NFI ή CFI), ένα δείκτη που προσαρμόζει την αναλογία της ερμηνευόμενης διασποράς στην πολυπλοκότητα του μοντέλου (όπως ο δείκτης NNFI) και ένα δείκτη που βασίζεται στα σταθμισμένα υπόλοιπα (όπως οι δείκτες SRMR ή RMSEA).

Επειδή το κριτήριο χ^2 είναι ιδιαίτερο ευαίσθητο στο μέγεθος του δείγματος (Byrne, 1998), εξετάστηκε ο λόγος του κριτηρίου χ^2 προς τους βαθμούς ελευθερίας (τιμές μικρότερες του 2.5 θεωρούνται ενδεικτικές για την καταλληλότητα του μοντέλου), οι δείκτες NNFI και CFI (τιμές της τάξεως 0.90 και άνω θεωρούνται ικανοποιητικές), καθώς και ο δείκτης RMSEA, ο οποίος βασίζεται στα σταθμισμένα υπόλοιπα (για την καταλληλότητα του μοντέλου απαιτούνται μικρές τιμές του δείκτη αυτού, κάτω από 0.5). Πέρα από τη γενική αξιολόγηση του μοντέλου με βάση τις τιμές των δεικτών που έχουν αναφερθεί, εξετάστηκε η κατανομή των υπολοίπων, καθώς και οι τιμές των παραμέτρων που υπολογίζονταν για κάθε μοντέλο.

Στο πρώτο στάδιο της ανάλυσης η επιβεβαίωση του θεωρητικού μοντέλου για τη δομή της συγκεκριμένης γεωμετρικής ικανότητας αφορούσε το σύνολο των μαθητών που έλαβαν μέρος στην έρευνα. Ακολούθως πραγματοποιήθηκε ανάλυση πολλαπλών ομάδων (multiple group analysis) που αποσκοπούσε στον εντοπισμό διαφοροποιήσεων της δόμησης της ικανότητας χειρισμού γεωμετρικών σχημάτων ανάμεσα στις τρεις ηλικιακές ομάδες της έρευνας.

Το πρόγραμμα EQS χρησιμοποιήθηκε και για την πραγματοποίηση ανάλυσης δομικού μοντέλου που αφορούσε τη σχέση ανάμεσα στη γεωμετρική και χωρική ικανότητα των μαθητών. Στα πλαίσια της διερεύνησης του ίδιου ερωτήματος πραγματοποιήθηκαν με τη χρήση του στατιστικού πακέτου SPSS παλινδρομικές αναλύσεις με τη μέθοδο Stepwise.

Το στατιστικό πακέτο SPSS χρησιμοποιήθηκε επίσης για να υπολογιστούν τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών των τριών ηλικιακών ομάδων που έλαβαν μέρος στην έρευνα σε καθένα από τα έργα που χορηγήθηκαν και να κατασκευαστούν πίνακες διασταυρούμενης συχνότητας όπου αυτό κρίθηκε σκόπιμο. Επίσης πραγματοποιήθηκαν αναλύσεις διακύμανσης με σκοπό τη σύγκριση των μέσων όρων ανάμεσα στις τρεις ομάδες της έρευνας.

Τέλος, πραγματοποιήθηκαν αναλύσεις ομοιότητας και αναλύσεις συνεπαγωγής χρησιμοποιώντας το λογισμικό πρόγραμμα CHIC (Bodin, Couturier, & Gras, 2000; Gras, Peter, Briand, & Philippe, 1997). Στα διαγράμματα ομοιότητας που προκύπτουν κατά την ανάλυση ομοιότητας τα έργα κατανέμονται σε ομάδες ανάλογα με την ομοιογένεια με την οποία έχουν αντιμετωπιστεί από τους μαθητές. Με άλλα λόγια, σε ένα διάγραμμα ομοιότητας σχηματίζονται ομάδες έργων τα οποία οι μαθητές έχουν αντιμετωπίσει με όμοιο τρόπο. Από την άλλη, στα διαγράμματα συνεπαγωγής παρουσιάζονται συνεπαγωγικές σχέσεις, οι οποίες υποδεικνύουν κατά πόσο και σε ποιο βαθμό η επιτυχία σε ένα συγκεκριμένο έργο (ή μια ομάδα έργων) συνεπάγεται την επιτυχία σε ένα άλλο έργο (ή σε μια ομάδα έργων). Στην παρούσα έρευνα ο μεγάλος αριθμός των μαθητών του δείγματος επέτρεπε τον υπολογισμό των συνεπαγωγικών σχέσεων με εφαρμογή του κανόνα της εντροπείας. Στην περίπτωση αυτή οι συνεπαγωγικές σχέσεις υποδεικνύουν επιπλέον ότι αποτυχία σε ένα συγκεκριμένο έργο (ή μια ομάδα έργων) συνεπάγεται αποτυχία σε ένα άλλο έργο (ή σε μια ομάδα έργων).

Η ανάλυση ομοιότητας και η συνεπαγωγική ανάλυση πραγματοποιήθηκε χωριστά για τους μαθητές καθεμιάς από τις τρεις ομάδες του δείγματος σε τρία στάδια. Στο πρώτο στάδιο έγιναν αναλύσεις ομοιότητας για το σύνολο των έργων γεωμετρίας, με στόχο να εντοπιστούν οποιεσδήποτε σχέσεις ομοιότητας ανάμεσα στις διαφορετικές κατηγορίες γεωμετρικών έργων που χορηγήθηκαν. Σε ένα δεύτερο στάδιο αναλύσεις ομοιότητας και συνεπαγωγής πραγματοποιήθηκαν ξεχωριστά για την καθεμιά κατηγορία γεωμετρικών έργων, δηλαδή (α) για τα έργα που αφορούσαν χειρισμό επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων, (β) για τα έργα που αφορούσαν χειρισμό τρισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων και (γ) για τα έργα που αφορούσαν αναπτύγματα γεωμετρικών στερεών. Επίσης αναλύσεις ομοιότητας και συνεπαγωγής πραγματοποιήθηκαν για τους μαθητές κάθε τάξης για τη διερεύνηση των σχέσεων ανάμεσα στα χωρικά έργα και καθεμιά από τις τρεις κατηγορίες γεωμετρικών έργων χωριστά.

Ανακεφαλαίωση

Για την παρούσα εργασία κατασκευάστηκε ένα όργανο μέτρησης των γεωμετρικών γνώσεων και ικανοτήτων των μαθητών αναφορικά με το χειρισμό έργων με διαφορετικά γεωμετρικά σχήματα. Επίσης δημιουργήθηκε μια κλίμακα μέτρησης της χωρικής ικανότητας, στην οποία περιλαμβάνονται έργα που χρησιμοποιήθηκαν σε προηγούμενες έρευνες. Στο κεφάλαιο αυτό έχουν περιγραφεί τα γεωμετρικά και τα χωρικά έργα που χρησιμοποιήθηκαν στα πλαίσια του ερευνητικού σχεδίου που αναπτύχθηκε. Το σύνολο των έργων κατανεμήθηκε σε δύο δοκίμια τα οποία χορηγήθηκαν σε μαθητές Δ΄ και Στ΄ δημοτικού και Β΄ γυμνασίου (10-14 χρόνων) με διάστημα μιας εβδομάδας μεταξύ των χορηγήσεων. Από την ανάλυση των δεδομένων με τη βοήθεια του μοντέλου Rasch επιβεβαιώθηκε ο εννοιολογικός σχεδιασμός του οργάνου μέτρησης γεωμετρικών ικανοτήτων χειρισμού έργων με γεωμετρικά σχήματα και του οργάνου μέτρησης χωρικών ικανοτήτων.

Για την ανάλυση των δεδομένων που συγκεντρώθηκαν χρησιμοποιήθηκε το στατιστικό πακέτο SPSS (ποσοστά επιτυχίας, πίνακες διασταυρούμενης συχνότητας, μέσοι όροι, ανάλυση διασποράς, παλινδρομική ανάλυση), το πρόγραμμα EQS (επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση) και το πρόγραμμα CHIC (αναλύσεις ομοιότητας και αναλύσεις διασποράς).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τις στατιστικές αναλύσεις των δεδομένων της παρούσας έρευνας. Η παρουσίαση των αποτελεσμάτων γίνεται σε τρία υποκεφάλαια και βρίσκεται σε αντιστοιχία με τα τρία κύρια ερωτήματα που τέθηκαν στην παρούσα εργασία. Το πρώτο υποκεφάλαιο αφορά τη δομή των ικανοτήτων των μαθητών αναφορικά με το χειρισμό γεωμετρικών σχημάτων. Στο πρώτο μέρος του υποκεφαλαίου παρουσιάζονται οι συνιστώσες της ικανότητας χειρισμού έργων με γεωμετρικά σχήματα όπως προέκυψαν από τις αναλύσεις των δομικών μοντέλων για το σύνολο των μαθητών. Συνιστώσες της ικανότητας αυτής είναι οι επιδόσεις των μαθητών στην επίλυση έργων που απαιτούσαν χειρισμό (α) γεωμετρικών σχημάτων δύο διαστάσεων, (β) γεωμετρικών σχημάτων τριών διαστάσεων και (γ) αναπτυγμάτων γεωμετρικών στερεών. Στο δεύτερο μέρος του υποκεφαλαίου αυτού παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης πολλαπλών ομάδων (multiple group analysis) με την οποία έγινε έλεγχος του δομικού μοντέλου ικανότητας χειρισμού γεωμετρικών έργων για τα δεδομένα κάθε ηλικιακής ομάδας ξεχωριστά. Τέλος, παρουσιάζεται η ιεράρχηση των γεωμετρικών έργων με βάση το βαθμό δυσκολίας τους, όπως προέκυψε από την εφαρμογή του μοντέλου Rasch, σε επίπεδα ικανοτήτων και επιχειρείται μια ερμηνεία της συγκεκριμένης διαβάθμισης με βάση τις ικανότητες που απαιτούνται για την επίλυση των έργων κάθε επιπέδου.

Στο δεύτερο υποκεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που σχετίζονται με το δεύτερο ερώτημα της έρευνας και αφορούν στη σχέση ανάμεσα στην ικανότητα χειρισμού γεωμετρικών έργων και στις χωρικές ικανότητες των μαθητών. Αρχικά παρουσιάζονται περιγραφικά στοιχεία που προέκυψαν από τη μελέτη των πινάκων διασταυρούμενης συχνότητας αναφορικά με τη σχέση ανάμεσα στο επίπεδο χωρικής ικανότητας των μαθητών και την επίδοσή τους στα γεωμετρικά έργα. Στη συνέχεια του δεύτερου υποκεφαλαίου παρουσιάζονται τα αποτελέσματα παλινδρομικών αναλύσεων που πραγματοποιήθηκαν με σκοπό να καθοριστούν οι συνιστώσες της χωρικής ικανότητας που αποτελούν δείκτες πρόβλεψης για την επίδοση των μαθητών στα έργα γεωμετρίας. Ακολούθως παρουσιάζεται δομικό μοντέλο που αφορά τη σχέση ανάμεσα στην ικανότητα χειρισμού έργων γεωμετρίας με διαφορετικά γεωμετρικά σχήματα και τις χωρικές ικανότητες των μαθητών. Τέλος, περιγράφονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση ομοιότητας και τη συνεπαγωγική ανάλυση των δεδομένων σε ότι αφορά (α) τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές δημοτικού και γυμνασίου αντιμετωπίζουν τα χωρικά έργα και τα έργα γεωμετρίας και (β) τις συνεπαγωγικές σχέσεις που υπάρχουν ανάμεσα στις δύο κατηγορίες έργων.

Στο τρίτο υποκεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που αφορούν τη σύγκριση ανάμεσα στις τρεις ηλικιακές ομάδες της έρευνας, με άξονα το τρίτο ερώτημα της εργασίας αναφορικά με τη σύγκριση των μαθητών δημοτικής και μέσης εκπαίδευσης. Παρουσιάζονται αναλυτικά και συγκρίνονται οι επιδόσεις των μαθητών στα έργα γεωμετρίας, με ιδιαίτερη αναφορά σε έργα όπου εμφανίζονται διαφορές σε σχέση με την αντιμετώπιση των έργων στο πλαίσιο της Εμπειρικής Γεωμετρίας και της Εμπειρικής Αξιωματικής Γεωμετρίας. Στο δεύτερο μέρος του υποκεφαλαίου παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τις σχέσεις ομοιότητας και τις σχέσεις συνεπαγωγής της επιτυχίας στις διαφορετικές κατηγορίες γεωμετρικών έργων.

Η Δομή των Ικανοτήτων των Μαθητών Αναφορικά με το Χειρισμό Έργων με Γεωμετρικά Σχήματα

Σύμφωνα με την υπόθεση ότι η γεωμετρική ικανότητα των μαθητών αποτελείται από διαφορετικές συνιστώσες, ένα από τα βασικά ζητήματα που απασχολούν τη συγκεκριμένη έρευνα είναι η δομή της γεωμετρικής ικανότητας των μαθητών σε ότι αφορά το χειρισμό έργων που παρουσιάζουν γεωμετρικά σχήματα. Το ερώτημα αυτό εξετάστηκε στην παρούσα εργασία σε δύο επίπεδα. Σε ένα πρώτο επίπεδο διερευνήθηκαν οι παράγοντες που συναποτελούν την ικανότητα χειρισμού γεωμετρικών σχημάτων. Σε ένα δεύτερο επίπεδο διερευνήθηκε σε ποιο βαθμό η δομή της συγκεκριμένης γεωμετρικής ικανότητας των μαθητών παραμένει σταθερή και εντοπίστηκαν διαφορές που παρουσιάζονται ανάλογα με την ηλικία των μαθητών και κατ' επέκταση την τάξη στην οποία φοιτούν. Πραγματοποιήθηκε επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση στα δεδομένα, αρχικά για το σύνολο των μαθητών που έλαβαν μέρος στην έρευνα (μαθητές Δ΄ και Στ΄ δημοτικού και Β΄ γυμνασίου) και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τα δεδομένα καθεμιάς από τις τρεις ηλικιακές ομάδες ξεχωριστά.

Αρχικά πραγματοποιήθηκε διερευνητική παραγοντική ανάλυση των δεδομένων που συγκεντρώθηκαν από τη χορήγηση του δοκιμίου γεωμετρικής ικανότητας, με σκοπό τη μείωση του μεγάλου αριθμού έργων που περιλαμβάνονταν στο δοκίμιο. Στην προκαταρκτική φάση εξέτασης των δεδομένων εντοπίστηκε αριθμός έργων τα οποία παρουσίαζαν πολύ μικρό συντελεστή συσχέτισης (κάτω από 0.3) με τα υπόλοιπα έργα. Πρόκειται για τα έργα πολλαπλής επιλογής (B10.3Δ, B11.2Δ, B13.3Δ, B14.3Δ), το έργο που αφορούσε σύγκριση περιμέτρου δύο σχημάτων (B15.2Δ) και το έργο που αξιολογούσε την ικανότητα αναγνώρισης σχημάτων που ανήκουν στην κλάση των ορθογωνίων (έργο B1.2Δ$_3$)και στην κλάση των τετραπλεύρων (έργο B1.2Δ$_4$). Αποφασίστηκε η μη συμπερίληψη των έργων αυτών στη διερευνητική παραγοντική ανάλυση. Ο συντελεστής αξιοπιστίας Cronbach's alpha για την κλίμακα των υπόλοιπων γεωμετρικών έργων ήταν α=0.91. Τα αποτελέσματα της παραγοντικής ανάλυσης σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα που αφορούν τους συντελεστές συσχέτισης ανάμεσα στα γεωμετρικά έργα και την ανάλυση περιεχομένου των έργων αυτών οδήγησαν τελικά στη δημιουργία 19 παραγόντων. Οι παράγοντες αυτοί αποτέλεσαν στη συνέχεια τις μεταβλητές που χρησιμοποιήθηκαν για τη διενέργεια επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης, για την επιβεβαίωση του προτεινόμενου μοντέλου που περιγράφει τη δόμηση της ικανότητας των μαθητών να χειρίζονται έργα με γεωμετρικά σχήματα.

Αποτελέσματα Διερευνητικής Παραγοντικής Ανάλυσης

Έχοντας υπόψη την άποψη του Rigdon (1998) ότι οι αναλύσεις δομικών μοντέλων που βασίζονται σε πολλαπλές κλίμακες παρέχουν πιο σταθερούς υπολογισμούς των παραμέτρων σε σύγκριση με μοντέλα που βασίζονται σε ξεχωριστά έργα, σε συνδυασμό με το μεγάλο αριθμό γεωμετρικών έργων της παρούσας έρευνας, τα δεδομένα που συγκεντρώθηκαν από το δοκίμιο γεωμετρικής ικανότητας χρησιμοποιήθηκαν αρχικά για την πραγματοποίηση διερευνητικής παραγοντικής ανάλυσης, με στόχο την ομαδοποίηση του μεγάλου αυτού αριθμού έργων. Χρησιμοποιήθηκε η περιστροφή varimax και προέκυψαν σε αυτό το στάδιο της ανάλυσης 15 παράγοντες (KMO=0.910, p=0.001), με τιμές eigenvalue πάνω από 1. Το μοντέλο αυτό των 15 παραγόντων ερμηνεύει ποσοστό 66.27% της διασποράς.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι παράγοντες που προέκυψαν από την αρχική παραγοντική ανάλυση των έργων του δοκιμίου και αναφέρονται τα έργα που περιλήφθηκαν σε κάθε παράγοντα. Παράλληλα περιγράφονται τα αποτελέσματα συμπληρωματικών αναλύσεων που οδήγησαν σε μικρή διαφοροποίηση της αρχικής παραγοντικής λύσης.

Παράγοντας 1: Ο παράγοντας 1 αποτελείτο από έργα αναγνώρισης διαφορετικών δισδιάστατων αναπαραστάσεων στερεών (Α2.3Δ_{2}, Α2.3Δ_{4}, Α2.3Δ_{5}, Α2.3Δ_{6}, Α2.3Δ_{10}, Α2.3Δ_{11}, Α2.3Δ_{15}). Συγκεκριμένα, πρόκειται για έργα αναγνώρισης διαφορετικών δισδιάστατων αναπαραστάσεων κύβου και πυραμίδων. Τα έργα Α2.3Δ_{2}, Α2.3Δ_{5}, Α2.3Δ_{11}και Α2.3Δ_{15}, που αφορούν αναπαραστάσεις κύβων, παρουσίασαν μεταξύ τους πολύ υψηλούς δείκτες συσχέτισης (από 0.86 μέχρι 0.93). Το ίδιο παρατηρήθηκε για τα έργα Α2.3Δ_{4}, Α2.3Δ_{6} και Α2.3Δ_{10}, τα οποία αφορούν αναπαραστάσεις πυραμίδων (συντελεστές συσχέτισης από 0.81 μέχρι 0.87). Επιπλέον η πρώτη ομάδα έργων είχε δείκτη αξιοπιστίας α=0.967, ενώ η δεύτερη ομάδα έργων είχε δείκτη αξιοπιστίας α=0.943. Η εννοιολογική διαφοροποίηση των δύο ομάδων έργων, με βάση το στερεό το οποίο αφορούσαν, καθώς και τα δεδομένα που έχουν αναφερθεί οδήγησαν στην επιλογή ο Παράγοντας 1 να αναλυθεί στην τελική παραγοντική λύση σε δύο επιμέρους παράγοντες: ένα παράγοντα που αφορά αναγνώριση αναπαραστάσεων κύβου (έργα Α2.3Δ_{2}, Α2.3Δ_{5}, Α2.3Δ_{11} και Α2.3Δ_{15}) και ένα παράγοντα που αφορά αναγνώριση αναπαραστάσεων πυραμίδων (έργα Α2.3Δ_{4}, Α2.3Δ_{6} και Α2.3Δ_{10}).

Παράγοντας 2: Με ανάλογο τρόπο αναλύθηκε σε δύο καινούριους παράγοντες και ο Παράγοντας 2 της αρχικής λύσης. Ο παράγοντας αυτό αποτελείτο από έργα που αφορούσαν ανάλυση στερεών στα επιμέρους στοιχεία τους και συγκεκριμένα στις έδρες των στερεών (έργα Α3.3$\Delta_{1\text{-}8}$). Τα τέσσερα από τα έργα αυτά αναφέρονταν στο σχήμα των εδρών, ενώ τα υπόλοιπα τέσσερα έργα αναφέρονταν στον αριθμό των εδρών που αποτελούσαν συγκεκριμένα στερεά. Η εννοιολογική αυτή διαφοροποίηση των έργων και οι δείκτες αξιοπιστίας της καθεμιάς από τις δύο ομάδες έργων (α=0.853 και α=0.782 αντίστοιχα) οδήγησαν στη διάκριση δύο παραγόντων.

Παράγοντας 3: Ο παράγοντας αποτελείται από έργα που αφορούσαν εμβαδό πολύπλοκων σχημάτων (έργα Α1.2Δ_{3}, Α1.2Δ_{4}, Β12.2Δ) και ένα γεωμετρικό πρόβλημα στο οποίο παρουσιάζεται σύνθετη γεωμετρική εικόνα με κύκλο και ορθογώνιο (έργο Β16.2Δ). Η ομοιότητα των έργων έγκειται στην πολυπλοκότητα των σχημάτων (αναλύονται σε υποσχήματα), αλλά εννοιολογικά διαφοροποιούνται, εφόσον τα τρία πρώτα έργα αναφέρονταν στην έννοια του εμβαδού σύνθετων σχημάτων, ενώ το τελευταίο έργο είχε ως ζητούμενο το μήκος ευθύγραμμου τμήματος που αποτελούσε μέρος σύνθετης γεωμετρικής εικόνας. Ο δείκτης αξιοπιστίας του παράγοντα αυτού με τη συμπερίληψη και των τεσσάρων έργων ήταν α=0.836, ενώ στην περίπτωση που το έργο Β16.2Δ αφαιρείτο από τον παράγοντα παρουσιάστηκε μικρή αύξηση στο δείκτη αξιοπιστίας (α=0.838). Με βάση τα δεδομένα αυτά, το έργο Β16.2Δ αφαιρέθηκε από το συγκεκριμένο παράγοντα και αποφασίστηκε να ελεγχθεί κατά πόσο θα ήταν προτιμότερο να αποτελέσει ξεχωριστό παράγοντα.

Παράγοντας 4: Αποτελείται από τα έργα που παρουσίαζαν αναπαραστάσεις δισδιάστατων σχημάτων, τα οποία οι μαθητές θα έπρεπε να μην είχαν συμπεριλάβει στην κατηγορία των στερεών σχημάτων (έργα Α2.3Δ_3, Α2.3Δ_7, Α2.3Δ_8, Α2.3Δ_{16}).

Παράγοντας 5: Αποτελείται από έργα αναγνώρισης αναπτύγματος στερεών (έργα Β2.Αν$_1$, Β2.Αν$_4$, Β2.Αν$_5$, Β2.Αν$_7$). Τα τέσσερα αυτά έργα παρουσιάζουν ένα κοινό στοιχείο: οι έδρες του στερεού βρίσκονται στα συγκεκριμένα αναπτύγματα τοποθετημένες γύρω από τη βάση. Αυτή είναι η απλούστερη μορφή αναπαράστασης αναπτυγμάτων στερεών, η οποία αναγνωρίζεται ευκολότερα από τους μαθητές.

Παράγοντας 6: Αποτελείται από έργα που αναφέρονται σε αναγνώριση αναπτυγμάτων κύβου (Β3.Αν$_1$, Β3.Αν$_2$, Β3.Αν$_3$, Β3.Αν$_4$, Β3.Αν$_5$, Β3.Αν$_6$) και σε έργα συμπλήρωσης αναπτύγματος κύβου (Β4.Αν$_1$, Β4.Αν$_2$).

Παράγοντας 7: Στον παράγοντα 1, όπως αναφέρθηκε παραπάνω παρουσιάστηκαν τα έργα που αφορούσαν αναπαραστάσεις κύβου και πυραμίδων. Στον παράγοντα 7 παρουσιάστηκαν τα έργα που αφορούσαν αναπαραστάσεις άλλων στερεών: κυλίνδρου, ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου και κώνου (έργα Α2.3Δ_1, Α2.3Δ_9, Α2.3Δ_{12}, Α2.3Δ_{13}, Α2.3Δ_{14}).

Παράγοντας 8: Τον παράγοντα αυτό συνιστούσαν τα έργα Α6.2Δ, Α5.2Δ, Α7.2Δ, Β9.2Δ και το έργο Α4.Αν. Και τα πέντε έργα απαιτούν κάποια μορφή γεωμετρικού συλλογισμού για την επίλυσή τους. Τα τέσσερα πρώτα έργα, όμως, αφορούν δισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα, ενώ το τελευταίο έργο αφορούσε το ανάπτυγμα κύβου. Λόγω της διαφοράς αυτής ελέγχθηκε ο δείκτης αξιοπιστίας του παράγοντα αυτού, οπόταν παρατηρήθηκε ότι με τη συμπερίληψη των πέντε έργων ο δείκτης αξιοπιστίας ήταν α=0.750, ενώ με την αφαίρεση του τελευταίου έργου ήταν α=0.752. Ως εκ τούτου, αποφασίστηκε η αφαίρεση του έργου Α4.Αν από τον παράγοντα 8 και η δημιουργία καινούριου παράγοντα για το συγκεκριμένο έργο.

Παράγοντας 9: Τα έργα που συνιστούν τον παράγοντα αυτό παρουσίαζαν μη-αναπαραστάσεις αναπτυγμάτων (έργα Β2.Αν$_6$, Β2.Αν$_8$, Β2.Αν$_{10}$). Οι μαθητές θα έπρεπε να είχαν αναγνωρίσει ότι ο αριθμός των εδρών ή και η διάταξη των εδρών στις συγκεκριμένες γεωμετρικές μορφές δεν τους επέτρεπε να ταξινομηθούν ως αναπτύγματα οποιουδήποτε στερεού.

Παράγοντας 10: Περιλαμβάνει τα έργα που απαιτούσαν υπολογισμό του εμβαδού απλών γεωμετρικών σχημάτων: ορθογωνίου, τετραγώνου και ορθογωνίου τριγώνου (έργα Α1.2Δ_1, Α1.2Δ_2, Α1.2Δ_3).

Παράγοντας 11: Περιλαμβάνει τα έργα που αφορούσαν αναγνώριση διαφορετικών αναπαραστάσεων δισδιάστατων σχημάτων: τριγώνου, κύκλου και τετραγώνου (έργα Β1.2Δ_1, Β1.2Δ_2, Β1.2Δ_5).

Παράγοντας 12: Τα έργα που συνιστούν τον παράγοντα αυτό αναφέρονται σε αναπαραστάσεις αναπτυγμάτων στερεών, όπου οι έδρες του στερεού, σε αντίθεση με τα έργα στον παράγοντα 5, δεν είναι τοποθετημένες γύρω από τη βάση (έργα Β2.Αν$_2$, Β2.Αν$_3$, Β2.Αν$_9$).

Παράγοντας 13: Αποτελείται από τα έργα που αναφέρονται σε χειρισμό αναπτύγματος κύβου με κωδικοποιημένες έδρες και ταυτόχρονο χειρισμό πληροφοριών από το δισδιάστατο σχέδιο του συγκεκριμένου κύβου (έργα Β5.Αν και Β6.Αν).

Παράγοντας 14: Περιλαμβάνει τα έργα Β7.2Δ_1 και Β7.2Δ_2, στα οποία οι μαθητές καλούνταν να εντοπίσουν σε σύνθετες γεωμετρικές εικόνες απλά γεωμετρικά σχήματα, ορθογώνια και τρίγωνα αντίστοιχα.

Παράγοντας 15: Αποτελείται από ένα μόνο έργο, το οποίο αναφέρεται σε ανάλυση στερεού που είναι φτιαγμένο από μικρούς κύβους (έργο Β8.3Δ). Παρά το γεγονός ότι ο παράγοντας αυτός αποτελείται από ένα μόνο έργο, αποφασίστηκε να παραμείνει στην παραγοντική λύση και να χρησιμοποιηθεί στις επόμενες αναλύσεις για τα δομικά μοντέλα, λόγω έλλειψης άλλου αντίστοιχου έργου στο δοκίμιο.

Μετά από τις τροποποιήσεις ορισμένων παραγόντων της αρχικής παραγοντικής λύσης, όπως αναφέρθηκαν παραπάνω, στην τελική παραγοντική λύση παρουσιάζονται 19 παράγοντες. Ακολούθως αναφέρονται οι παράγοντες και για τον καθένα σημειώνεται η κωδικοποίηση που έγινε για την αξιοποίησή του στη συνέχεια για την πραγματοποίηση επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης.

1. Αναπαραστάσεις κύβων (μεταβλητή Ακυ): έργα Α2.3Δ_2, Α2.3Δ_5, Α2.3Δ_{11}, Α2.3Δ_{15}
2. Αναπαραστάσεις πυραμίδων (μεταβλητή Απυ έργα) Α2.3Δ_4, Α2.3Δ_6, Α2.3Δ_{10}
3. Αναπαραστάσεις άλλων τρισδιάστατων σχημάτων (μεταβλητή Α3Δ^{+}): έργα Α2.3Δ_1, Α2.3Δ_9, Α2.3Δ_{12}, Α2.3Δ_{13}, Α2.3Δ_{14}
4. Μη-αναπαραστάσεις στερεών (μεταβλητή Α^{-}3Δ): έργα Α2.3Δ_3, Α2.3Δ_7, Α2.3Δ_8, Α2.3Δ_{16}
5. Σχήμα εδρών τρισδιάστατων σχημάτων (μεταβλητή Εσ3Δ): έργα έργα Α3.3Δ_1, Α3.3Δ_3, Α3.3Δ_5, Α3.3Δ_7

6. Αριθμός εδρών τρισδιάστατων σχημάτων (μεταβλητή Εα3Δ): έργα Α3.3Δ_2, Α3.3Δ_4, Α3.3Δ_6, Α3.3Δ_8
7. Ανάλυση τρισδιάστατου σχήματος που αποτελείται από κύβους (μεταβλητή Αλ3Δ): έργο Β8.3Δ
8. Εμβαδό απλών σχημάτων δύο διαστάσεων (μεταβλητή Εμ2Δ): έργα Α1.2Δ_1, Α1.2Δ_2, Α1.2Δ_3
9. Αναπαραστάσεις σχημάτων δύο διαστάσεων (μεταβλητή Α2Δ): έργα Β1.2Δ_1, Β1.2Δ_2, Β1.2Δ_5
10. Αναπαραστάσεις σχημάτων δύο διαστάσεων σε σύνθετες γεωμετρικές εικόνες (μεταβλητή Α2Δ^+): έργα Β7.2Δ_1, Β7.2Δ_2
11. Εμβαδό πολύπλοκων σχημάτων δύο διαστάσεων (μεταβλητή Εμ2Δ^+): έργα Α1.2Δ_3, Α1.2Δ_4, Β12.2Δ
12. Επίλυση προβλημάτων με δισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα – α΄ επίπεδο (μεταβλητή Πα2Δ): έργα Α6.2Δ, Α5.2Δ, Α7.2Δ, Β9.2Δ
13. Επίλυση προβλημάτων με δισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα – β΄ επίπεδο (μεταβλητή Πβ2Δ): έργο Β16.2Δ
14. Αναπαραστάσεις αναπτυγμάτων κύβου (μεταβλητή Αανκ): έργα Β3.Αν_1, Β3.Αν_2, Β3.Αν_3, Β3.Αν_4, Β3.Αν_5, Β3.Αν_6, Β4.Αν_1, Β4.Αν_2
15. Αναπτύγματα κύβου με κωδικοποιημένες έδρες (μεταβλητή Ανκυκ): έργα Β5.Αν, Β6.Αν
16. Κατασκευή αναπτύγματος κύβου (μεταβλητή ΚΑνκυ): έργο Α4.Αν
17. Μη-αναπαραστάσεις αναπτυγμάτων στερεών (μεταβλητή Αν^-3Δ): έργα Β2.Αν_6, Β2.Αν_8, Β2.Αν_{10}
18. Αναπαραστάσεις αναπτυγμάτων στερεών με διευθέτηση εδρών γύρω από τη βάση (μεταβλητή Αν3Δε): έργα Β2.Αν_1, Β2.Αν_4, Β2.Αν_5, Β2.Αν_7
19. Αναπαραστάσεις αναπτυγμάτων στερεών με άλλη διευθέτηση εδρών (μεταβλητή Αν3Δε^-):έργα Β2.Αν_2, Β2.Αν_3, Β2.Αν_9

Αποτελέσματα Επιβεβαιωτικής Παραγοντικής Ανάλυσης

Μετά τον καθορισμό των 19 παραγόντων που προκύπτουν από το δοκίμιο γεωμετρικής ικανότητας, εξετάστηκε με την πραγματοποίηση επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης (Confirmatory Factor Analysis CFA) η δομή της γεωμετρικής ικανότητας των μαθητών σε σχέση με το χειρισμό γεωμετρικών σχημάτων. Σε αυτό το στάδιο της ανάλυσης η επιβεβαίωση του θεωρητικού μοντέλου για τη δομή της συγκεκριμένης γεωμετρικής ικανότητας αφορούσε το σύνολο των μαθητών που έλαβαν μέρος στην έρευνα.

Το Διάγραμμα 3 παρουσιάζει το προτεινόμενο μοντέλο, το οποίο αποτελεί την υπόθεση εργασίας για τη δομή της ικανότητας χειρισμού γεωμετρικών σχημάτων. Πρόκειται για ένα μοντέλο το οποίο διακρίνεται από τρία επίπεδα παραγόντων. Οι 19 παράγοντες που προέκυψαν μετά από τη διερευνητική παραγοντική ανάλυση και τις αναλύσεις περιεχομένου των έργων του δοκιμίου γεωμετρίας, όπως παρουσιάστηκαν παραπάνω, αποτελούν τις μεταβλητές του μοντέλου και φορτίζουν σε έξι παράγοντες πρώτης τάξης, που αντικατοπτρίζουν έξι επιμέρους ικανότητες που σχετίζονται με το χειρισμό έργων με γεωμετρικά σχήματα, όπως περιγράφονται και ορίζονται στη συνέχεια. Σε όλες τις περιπτώσεις χρησιμοποιήθηκαν οι μέσοι όροι της επίδοσης των μαθητών σε κάθε ομάδα έργων.

Παράγοντας 1: Αναπαραστάσεις τρισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων (Α3Δ).

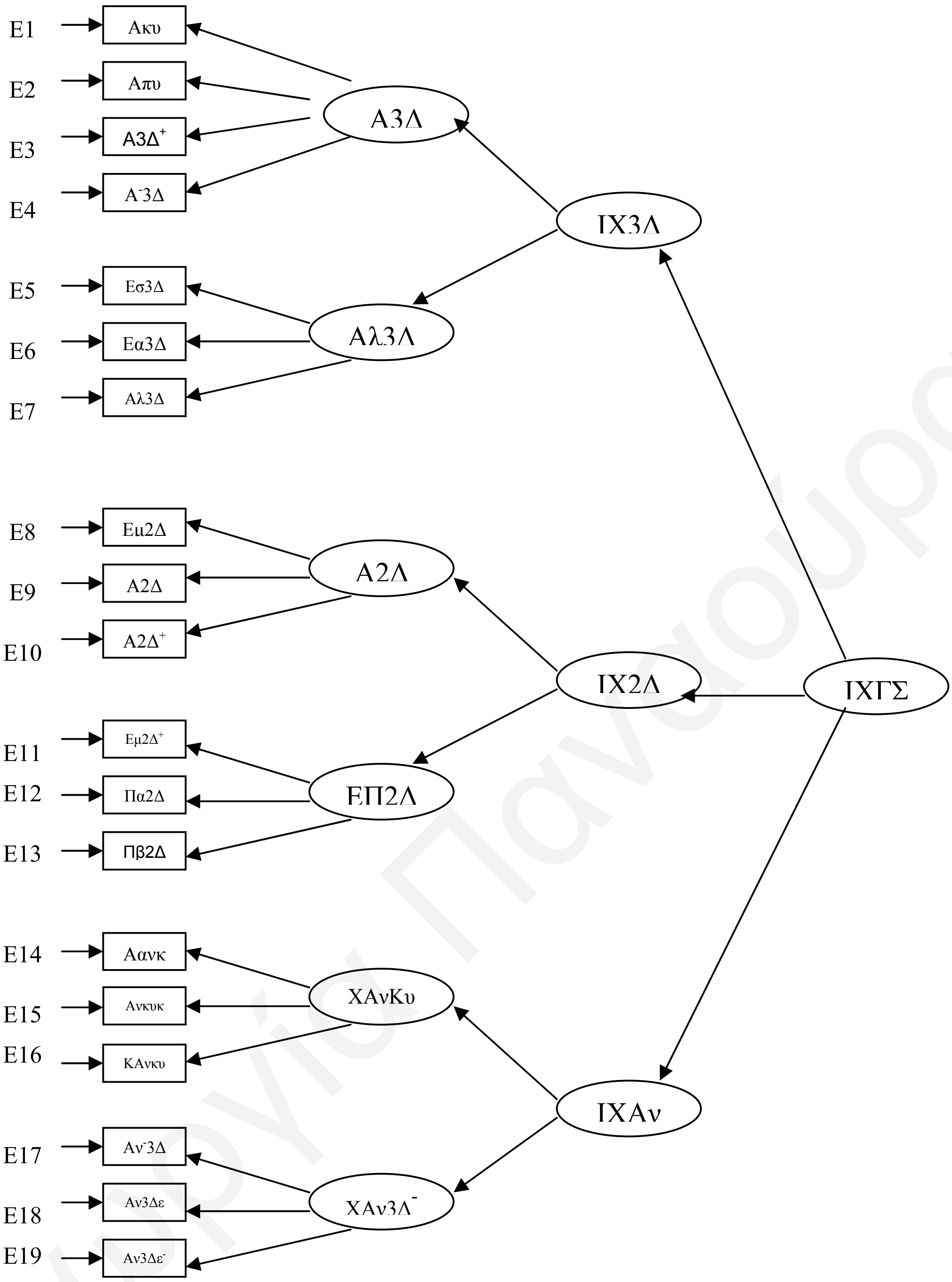
Οι μεταβλητές Ακυ, Απυ, Α3Δ^{+} και Α^{-}3Δ αποτελούν συνιστώσες του παράγοντα 1. Η μεταβλητή Ακυ αφορά διαφορετικές αναπαραστάσεις κύβου, η μεταβλητή Απυ αφορά διαφορετικές αναπαραστάσεις πυραμίδων, η μεταβλητή Α3Δ^{+} αφορά αναπαραστάσεις άλλων τρισδιάστατων σχημάτων (π.χ. κύλινδρος, κώνος, ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο), ενώ η μεταβλητή Α^{-}3Δ αφορά την ικανότητα διάκρισης αναπαραστάσεων στερεών από μη-αναπαραστάσεις στερεών. Κατά συνέπεια ο παράγοντας 1 ορίζεται ως «Ικανότητα αναγνώρισης αναπαραστάσεων τρισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων».

Παράγοντας 2: Ικανότητα ανάλυσης στοιχείων τρισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων (Αλ3Δ).

Ο παράγοντας 2 συνιστάται από τρεις μεταβλητές, οι οποίες αναφέρονται σε ανάλυση των στοιχείων που αποτελούν διάφορα γεωμετρικά στερεά. Η μεταβλητή Εσ3Δ αφορά το σχήμα των εδρών τρισδιάστατων σχημάτων, ενώ η μεταβλητή Εα3Δ αφορά τον αριθμό των εδρών τρισδιάστατων σχημάτων. Τέλος, η μεταβλητή Αλ3Δ αφορά την κατασκευή τρισδιάστατων σχημάτων από μικρότερες μονάδες.

Παράγοντας 3: Ικανότητες μέτρησης και αναγνώρισης αναπαραστάσεων σε δισδιάστατα σχήματα (Α2Δ).

Οι μεταβλητές Εμ2Δ, Α2Δ και Α2Δ^{+} αποτελούν συνιστώσες του παράγοντα 3. Η μεταβλητή Εμ2Δ αφορά εύρεση εμβαδού απλών γεωμετρικών σχημάτων δύο διαστάσεων. Η μεταβλητή Α2Δ αφορά αναγνώριση αναπαραστάσεων δισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων. Η μεταβλητή Α2Δ^{+} αφορά αναγνώριση δισδιάστατων σχημάτων σε σύνθετα γεωμετρικά σχήματα.



Διάγραμμα 3. Προτεινόμενο μοντέλο δόμησης της ικανότητας χειρισμού έργων με γεωμετρικά σχήματα.

*Εξήγηση συμβολισμού:

Οι 19 μεταβλητές Ακυ-Αν3Δε^{-} προέκυψαν από διερευνητική παραγοντική ανάλυση που πραγματοποιήθηκε λόγω του μεγάλου αριθμού γεωμετρικών έργων. Για αναλυτικές επεξηγήσεις για την καθεμιά δείτε σ.88-92. Α3Δ=ικανότητα αναγνώρισης αναπαραστάσεων τρισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων, Αλ3Δ=ικανότητα ανάλυσης στοιχείων τρισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων, Α2Δ=ικανότητα μέτρησης και αναγνώρισης αναπαραστάσεων σε δισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα, ΕΠ2Δ=ικανότητα επίλυσης προβλημάτων με δισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα, ΧΑνΚυ=ικανότητα χειρισμού έργων με αναπτύγματα κύβου, Χαν3Δ^{-}

=ικανότητα χειρισμού έργων με αναπτύγματα άλλων στερεών, ΙΧ3Δ=ικανότητα χειρισμού έργων με τρισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα, ΙΧ2Δ=ικανότητα χειρισμού έργων με δισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα, ΙΧΑν=ικανότητα χειρισμού έργων με αναπτύγματα στερεών, ΙΧΓΣ=ικανότητα χειρισμού έργων με γεωμετρικά σχήματα

Παράγοντας 4: Ικανότητα επίλυσης προβλημάτων με δισδιάστατα σχήματα (ΕΠ2Δ).

Ο παράγοντας αυτός αποτελείται από τις μεταβλητές Εμ2Δ^{+}, Πα2Δ και Πβ2Δ, οι οποίες αναφέρονται στην ικανότητα των μαθητών να επιλύουν γεωμετρικά προβλήματα στα οποία παρουσιάζονται σχήματα δύο διαστάσεων. Η μεταβλητή Εμ2Δ^{+} αφορά την ικανότητα εύρεσης εμβαδού σύνθετων γεωμετρικών σχημάτων δύο διαστάσεων, ενώ οι μεταβλητές Πα2Δ και Πβ2Δ αναφέρονται σε επίλυση προβλημάτων με δισδιάστατα σχήματα. Η διαφοροποίηση έγκειται στο βαθμό δυσκολίας των προβλημάτων και των δεξιοτήτων γεωμετρικού συλλογισμού που απαιτούνται.

Παράγοντας 5: Ικανότητα χειρισμού έργων με αναπτύγματα κύβου (ΧΑνΚυ).

Ο παράγοντας αυτός συνίσταται από τις μεταβλητές Αανκ, Ανκυκ και ΚΑνκυ, οι οποίες αναφέρονται σε ικανότητες χειρισμού έργων με αναπτύγματα κύβου. Συγκεκριμένα, αφορούν αναγνώριση αναπτυγμάτων κύβου (Αανκ), αντιστοίχηση σχεδίου και αναπτύγματος κύβου (Ανκυκ) και κατασκευή αναπτύγματος κύβου (ΚΑνκυ).

Παράγοντας 6: Ικανότητα χειρισμού έργων με αναπτύγματα άλλων στερεών (Χαν3Δ^{-}).

Οι μεταβλητές Αν^{-}3Δ, Αν3Δε και Αν3Δε^{-} αποτελούν τον παράγοντα 6, ο οποίος αναφέρεται σε ικανότητες χειρισμού έργων με αναπτύγματα στερεών άλλων εκτός από τον κύβο. Οι ικανότητες αυτές αφορούν τη διάκριση αναπτυγμάτων στερεών από μη-αναπτύγματα (μεταβλητή Αν^{-}3Δ), αναπτύγματα στερεών απλής μορφής, όπου δηλαδή η διαρρύθμιση των εδρών γίνεται γύρω από τη βάση του στερεού (μεταβλητή Αν3Δε) και αναπτύγματα στερεών πιο σύνθετης μορφής (μεταβλητή Αν3Δε^{-}).

Όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 3, κάθε ζεύγος παραγόντων πρώτης τάξης συνιστά ένα παράγοντα δεύτερης τάξης (οι παράγοντες Α3Δ και Αλ3Δ συνιστούν τον παράγοντα ΙΧ3Δ, οι παράγοντες Α2Δ και ΕΠ2Δ συνιστούν τον παράγοντα ΙΧ2Δ, οι παράγοντες ΧΑνΚυ και Χαν3Δ^{-} συνιστούν τον παράγοντα ΙΧΑν). Στην περίπτωση και των τριών παραγόντων δεύτερης τάξης (ΙΧ3Δ, ΙΧ2Δ, ΙΧΑν) οι παράγοντες πρώτης τάξης που τους συνιστούν διαφοροποιούνται ως προς το επίπεδο δυσκολίας και τις ικανότητες που απαιτούνται. Οι επιμέρους ικανότητες αναγνώρισης διαφορετικών αναπαραστάσεων τρισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων (παράγοντας Α3Δ) και ανάλυσης των στοιχείων τρισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων (παράγοντας Αλ3Δ) συναποτελούν ένα παράγοντα δεύτερης τάξης, ο οποίος αντικατοπτρίζει ακριβώς τις σχέσεις μεταξύ των παραγόντων Α3Δ και Αλ3Δ και ορίζεται ως η «ικανότητα χειρισμού τρισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων» (παράγοντας ΙΧ3Δ). Ο δεύτερος παράγοντας δεύτερης τάξης (παράγοντας ΙΧ2Δ) αποτελείται από τους παράγοντες Α2Δ και ΕΠ2Δ, οι οποίοι αφορούν τις ικανότητες μέτρησης και αναγνώρισης σε δισδιάστατα σχήματα και την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων με δισδιάστατα σχήματα, αντίστοιχα. Συνεπώς, ο παράγοντας αυτός ορίζεται ως η «ικανότητα χειρισμού δισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων». Οι ικανότητες χειρισμού έργων με αναπτύγματα κύβου (παράγοντας ΧΑνΚυ) και χειρισμού έργων με αναπτύγματα άλλων στερεών (παράγοντας Χαν3Δ^{-}) συνιστούν τον τρίτο παράγοντα δεύτερης τάξης που παρουσιάζεται στο μοντέλο (παράγοντας ΙΧΑν), ο οποίος ορίζεται ως η «ικανότητα χειρισμού αναπτυγμάτων γεωμετρικών στερεών». Οι τρεις παράγοντες δεύτερης τάξης συμβάλλουν στη δημιουργία του γενικού παράγοντα της ικανότητας των μαθητών για χειρισμό έργων με γεωμετρικά σχήματα (παράγοντας τρίτης τάξης – ΙΧΓΣ) με άμεσο τρόπο, ενώ οι παράγοντες πρώτης τάξης επηρεάζουν τη συγκεκριμένη γεωμετρική ικανότητα με έμμεσο τρόπο.

Η εγκυρότητα του ιεραρχικού μοντέλου που περιγράφηκε εξετάστηκε σε διαφορετικά στάδια. Σύμφωνα με τον Kline (1998), ακόμη και στην περίπτωση που υπάρχει ένα ακριβές θεωρητικό υπόβαθρο για τον αριθμό των παραγόντων ενός δομικού μοντέλου με παράγοντες πρώτης τάξης, ο ερευνητής θα πρέπει να εξετάσει κατά πόσο το θεωρητικό αυτό μοντέλο μπορεί να συγκριθεί ως προς την προσαρμογή του με ένα απλούστερο μοντέλο με ένα μόνο παράγοντα πρώτης τάξης. Συνεπώς, εξετάστηκε αρχικά ένα απλό μοντέλο με έναν και μοναδικό παράγοντα πρώτης τάξης, στο οποίο δηλαδή όλες οι μεταβλητές ορίστηκαν να φορτίζουν σε ένα και μόνο παράγοντα. Με άλλα λόγια, ελέγχθηκε κατά πόσο μπορεί να θεωρηθεί ότι υπάρχει ένας γενικός παράγοντας, ο οποίος προσδιορίζει την ικανότητα χειρισμού γεωμετρικών σχημάτων. Ακολούθως ελέγχθηκε ένα μοντέλο που αποτελείτο μόνο από τους έξι παράγοντες πρώτης τάξης στους οποίους ορίστηκαν να φορτίζουν οι 19 μεταβλητές. Το μοντέλο αυτό υποθέτει ότι (α) οι 19 μεταβλητές που αφορούν τις επιδόσεις των μαθητών στα έργα γεωμετρίας μπορούν να επεξηγηθούν από έξι παράγοντες, (β) κάθε μεταβλητή θα είχε μη μηδενικό συντελεστή φόρτισης πάνω στον παράγοντα που σχεδιάστηκε να μετρά και μηδενικούς συντελεστές φόρτισης πάνω σε όλους τους άλλους παράγοντες, (γ) οι έξι παράγοντες συσχετίζονται μεταξύ τους και (δ) τα λάθη μέτρησης δεν συσχετίζονται. Τέλος, ελέγχθηκε το προτεινόμενο μοντέλο που παρουσιάστηκε στο Διάγραμμα 3, στο οποίο διακρίνονται τρία επίπεδα παραγόντων, όπως περιγράφηκαν παραπάνω.

Στον Πίνακα 4 παρουσιάζονται οι τιμές των δεικτών προσαρμογής των μοντέλων που εξετάστηκαν και στο Διάγραμμα 4 παρουσιάζεται το μοντέλο δόμησης της ικανότητας χειρισμού έργων με διαφορετικά γεωμετρικά σχήματα που είχε την καλύτερη προσαρμογή στα δεδομένα της έρευνας για το σύνολο των μαθητών.

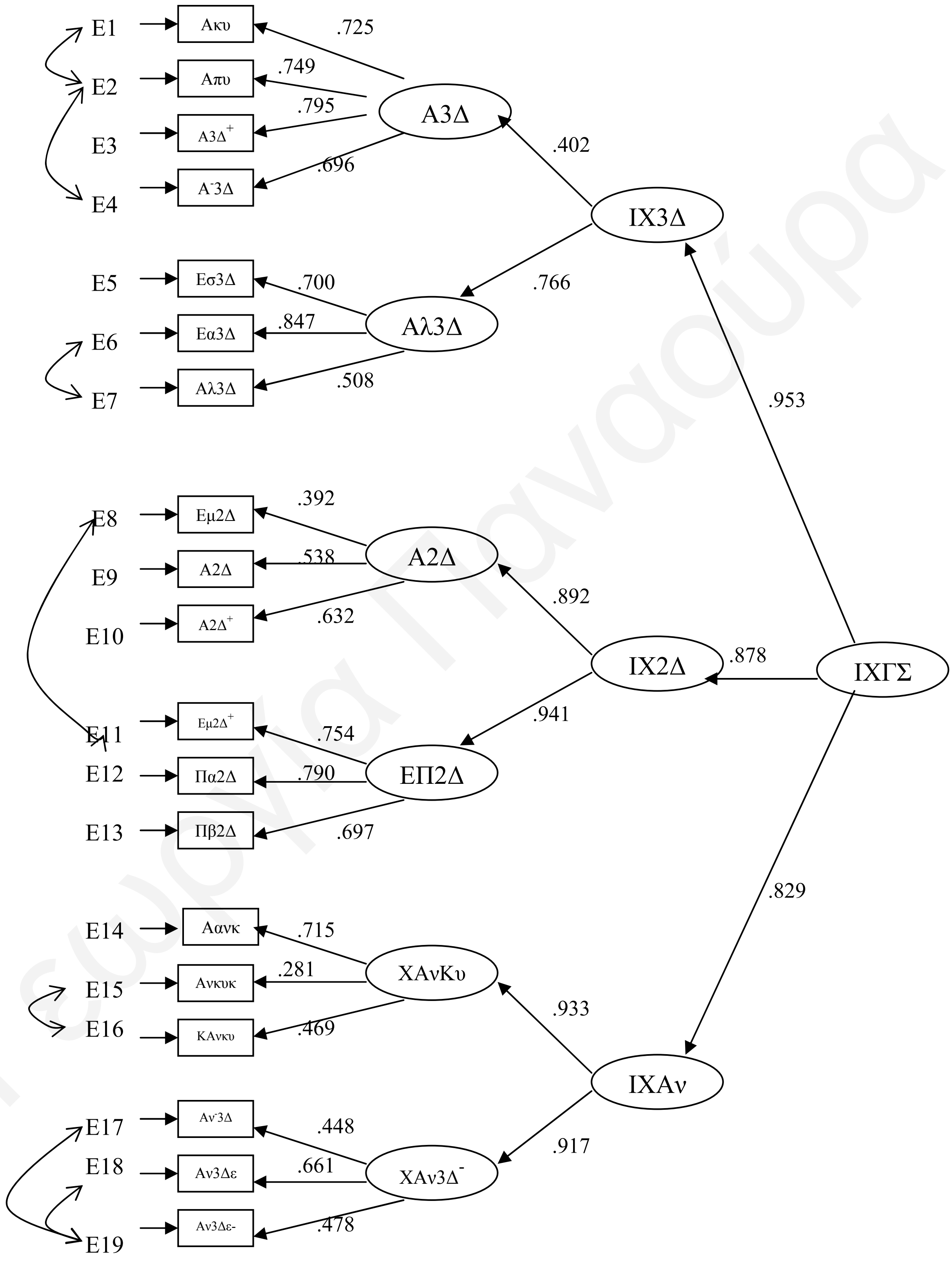
Πίνακας 4

Οι Τιμές των Δεικτών Προσαρμογής των Μοντέλων για τη Δομή της Ικανότητας Χειρισμού Γεωμετρικών Έργων με Διαφορετικά Γεωμετρικά Σχήματα για το Σύνολο των Μαθητών

Μοντέλο	X^2	df	X^2/df	CFI	NNFI	RMSEA
Μοντέλο (Α) με ένα παράγοντα πρώτης τάξης	3391.428 p=0.001	151	22.459	.530	.468	.147 (.142, .151)
Μοντέλο (Β) με 6 παράγοντες πρώτης τάξης	808.970 p=0.001	131	6.175	.906	.881	.069 (.064, .074)
Μοντέλο (Γ) με 6 παράγοντες πρώτης τάξης, 3 παράγοντες δεύτερης τάξης και ένα παράγοντα τρίτης τάξης	743.386 p=0.001	133	5.589	.911	.886	.068 (.063, .073)
Μοντέλο (Δ): Μοντέλο (Γ) με λάθη μέτρησης να σχετίζονται	309.510 p=0.001	126	2.456	.958	.942	.045 (.040, .051)

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 4, με βάση τους δείκτες προσαρμογής του πρώτου μοντέλου, στην περίπτωση δηλαδή όπου όλες οι μεταβλητές φορτίζουν σε ένα παράγοντα πρώτης τάξης [X^2 (151)=3391.428, CFI=0.530, RMSEA=0.147 με 90% διάστημα εμπιστοσύνης για το RMSEA: 0.142-0.151], το μοντέλο αυτό δεν μπορούσε να θεωρηθεί κατάλληλο για την ερμηνεία της ικανότητας χειρισμού έργων με γεωμετρικά σχήματα. Οι δείκτες προσαρμογής του δεύτερου μοντέλου που εξετάστηκε, όπου εμφανίζονται έξι παράγοντες πρώτης τάξης οι οποίοι σχετίζονται μεταξύ τους, [X^2 (131)=708.970, CFI=0.906, RMSEA=0.069 με 90% διάστημα εμπιστοσύνης για το RMSEA: 0.064-0.074] παρουσίασαν μεγάλη βελτίωση σε σύγκριση με το πρώτο μοντέλο. Παρόλα αυτά η τιμή του RMSEA ξεπερνά την τιμή 0.05. Στην περίπτωση του τρίτου μοντέλου, το οποίο αναφέρεται στο μοντέλο με τρία επίπεδα παραγόντων (έξι παράγοντες πρώτης τάξης, τρεις παράγοντες δεύτερης τάξης και ένα παράγοντα τρίτης τάξης) όσον αφορά τη δομή της ικανότητας των μαθητών να χειρίζονται γεωμετρικά σχήματα, [X^2 (133)=743.386, CFI=0.911, RMSEA=0.068 με 90% διάστημα εμπιστοσύνης για το RMSEA: 0.063-0.073] η τιμή του παραγοντικού δείκτη επιβεβαίωσης (CFI) έχει αυξηθεί στο 0.911, αλλά η τιμή του δείκτη RMSEA παραμένει υψηλή. Ο υπολογισμός της διαφοράς των X^2 των μοντέλων

Β και Γ έδειξε ότι η προσθήκη των παραγόντων δευτέρας και τρίτης τάξης είχε ως αποτέλεσμα της στατιστικά σημαντική βελτίωση της προσαρμογής του μοντέλου [$\Delta X^2(2)=65.58$, $p<0.005$].



Διάγραμμα 4. Μοντέλο δόμησης της ικανότητας χειρισμού έργων με διαφορετικά γεωμετρικά σχήματα για το σύνολο των μαθητών.

*Εξήγηση συμβολισμού:
Οι 19 μεταβλητές Ακυ-Αν3Δε^{-} προέκυψαν από διερευνητική παραγοντική ανάλυση που πραγματοποιήθηκε λόγω του μεγάλου αριθμού γεωμετρικών έργων. Για αναλυτικές επεξηγήσεις για την καθεμιά δείτε σ.88-92. Α3Δ=ικανότητα αναγνώρισης αναπαραστάσεων τρισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων, Αλ3Δ=ικανότητα ανάλυσης στοιχείων τρισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων, Α2Δ=ικανότητα μέτρησης και αναγνώρισης αναπαραστάσεων σε δισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα, ΕΠ2Δ=ικανότητα επίλυσης προβλημάτων με δισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα, ΧΑνΚυ=ικανότητα χειρισμού έργων με αναπτύγματα κύβου, Χαν3Δ^{-} =ικανότητα χειρισμού έργων με αναπτύγματα άλλων στερεών, ΙΧ3Δ=ικανότητα χειρισμού έργων με τρισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα, ΙΧ2Δ=ικανότητα χειρισμού έργων με δισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα, ΙΧΑν=ικανότητα χειρισμού έργων με αναπτύγματα στερεών, ΙΧΓΣ=ικανότητα χειρισμού έργων με γεωμετρικά σχήματα

Στο στάδιο αυτό εξετάστηκε η περίπτωση τα λάθη μέτρησης ορισμένων μεταβλητών να σχετίζονται μεταξύ τους (μοντέλο Δ). Με βάση τον πίνακα των υπολοίπων (residuals) και λαμβάνοντας υπόψη τις ικανότητες που εξετάζονται από τις μεταβλητές του μοντέλου, αποφασίστηκε να γίνουν 7 συνδέσεις σε λάθη μέτρησης μεταβλητών που αξιολογούν όμοιες ικανότητες, ως ακολούθως:
Ε2 και Ε1 (αναπαραστάσεις τρισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων)
Ε4 και Ε2 (αναπαραστάσεις τρισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων)
Ε7 και Ε6 (στοιχεία τρισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων)
Ε11 και Ε8 (εμβαδό δισδιάστατων σχημάτων)
Ε15 και Ε16 (αναπτύγματα κύβου)
Ε19 και Ε18 (αναπαραστάσεις αναπτυγμάτων στερεών)
Ε19 και Ε17 (αναπαραστάσεις αναπτυγμάτων στερεών)

Ο υπολογισμός της διαφοράς των X^2 των μοντέλων Γ και Δ έδειξε ότι η προσθήκη συσχετίσεων σε λάθη μέτρησης είχε ως αποτέλεσμα της στατιστικά σημαντική βελτίωση της προσαρμογής του μοντέλου [$\Delta X^2(7)=433.87$, $p<0.005$]. Όπως παρατηρείται από τις τιμές των υπόλοιπων δεικτών προσαρμογής του τέταρτου μοντέλου στον Πίνακα 4, ο παραγοντικός δείκτης επιβεβαίωσης αυξήθηκε σημαντικά, φτάνοντας στην τιμή 0.958, ενώ ο δείκτης RMSEA έχει μειωθεί σημαντικά, φτάνοντας στο 0.045. Η επιβεβαίωση του μοντέλου με βάση τα στοιχεία που έχουν αναφερθεί, αποτελεί ένδειξη ότι το προτεινόμενο μοντέλο έχει καλή προσαρμογή στα δεδομένα της έρευνας και είναι αξιόπιστο. Οι φορτίσεις στους παράγοντες που υπολογίστηκαν κατά την ανάλυση των δεδομένων ήταν στατιστικώς σημαντικές σε όλες τις περιπτώσεις (Διάγραμμα 4).

Με την ολοκλήρωση της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης στο σύνολο των μαθητών προέκυψε ότι η γεωμετρική ικανότητα των μαθητών σε ότι αφορά το χειρισμό γεωμετρικών σχημάτων αποτελεί ένα σύστημα αλληλοσυνδέσεων τριών παραγόντων (ικανότητες για χειρισμό έργων με τρισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα, ικανότητες για χειρισμό έργων με δισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα και ικανότητες για χειρισμό έργων με αναπτύγματα στερεών), οι οποίοι με τη σειρά τους αναλύονται σε δύο επιμέρους παράγοντες πρώτης τάξης ο καθένας.

Σύγκριση της Δομής των Ικανοτήτων των Μαθητών των Τριών Ηλικιακών Ομάδων Αναφορικά με το Χειρισμό Έργων με Γεωμετρικά Σχήματα

Μετά την παρουσίαση της δόμησης των ικανοτήτων των μαθητών αναφορικά με το χειρισμό έργων με γεωμετρικά σχήματα προκύπτει το ερώτημα κατά πόσο η συγκεκριμένη δομή παραμένει ίδια στις διαφορετικές, ως προς την ηλικία, ομάδες των μαθητών. Με στόχο τη διερεύνηση του παραπάνω ζητήματος πραγματοποιήθηκε ανάλυση πολλαπλών ομάδων με την οποία έγινε έλεγχος του μοντέλου για τα δεδομένα κάθε ηλικιακής ομάδας ξεχωριστά.

Αρχικά εξετάστηκε ένα μοντέλο με βάση το οποίο παρουσιάζεται η ίδια δομή σε ότι αφορά την ικανότητα των μαθητών να χειρίζονται γεωμετρικά σχήματα και στις τρεις ομάδες των μαθητών. Ο δείκτης επιβεβαίωσης των παραγόντων CFI παρουσίασε τιμή 0.905 [X^2 (396)=1138.082], ενώ ο δείκτης RMSEA είχε τιμή 0.040 με 90% διάστημα εμπιστοσύνης 0.039-0.042 (Πίνακας 5). Οι τιμές των δεικτών αυτών ήταν ικανοποιητικές για την επιβεβαίωση του δομικού μοντέλου σύμφωνα με το οποίο η δομή της ικανότητας των μαθητών να χειρίζονται έργα με γεωμετρικά σχήματα παραμένει η ίδια στις τρεις ηλικιακές ομάδες των μαθητών.

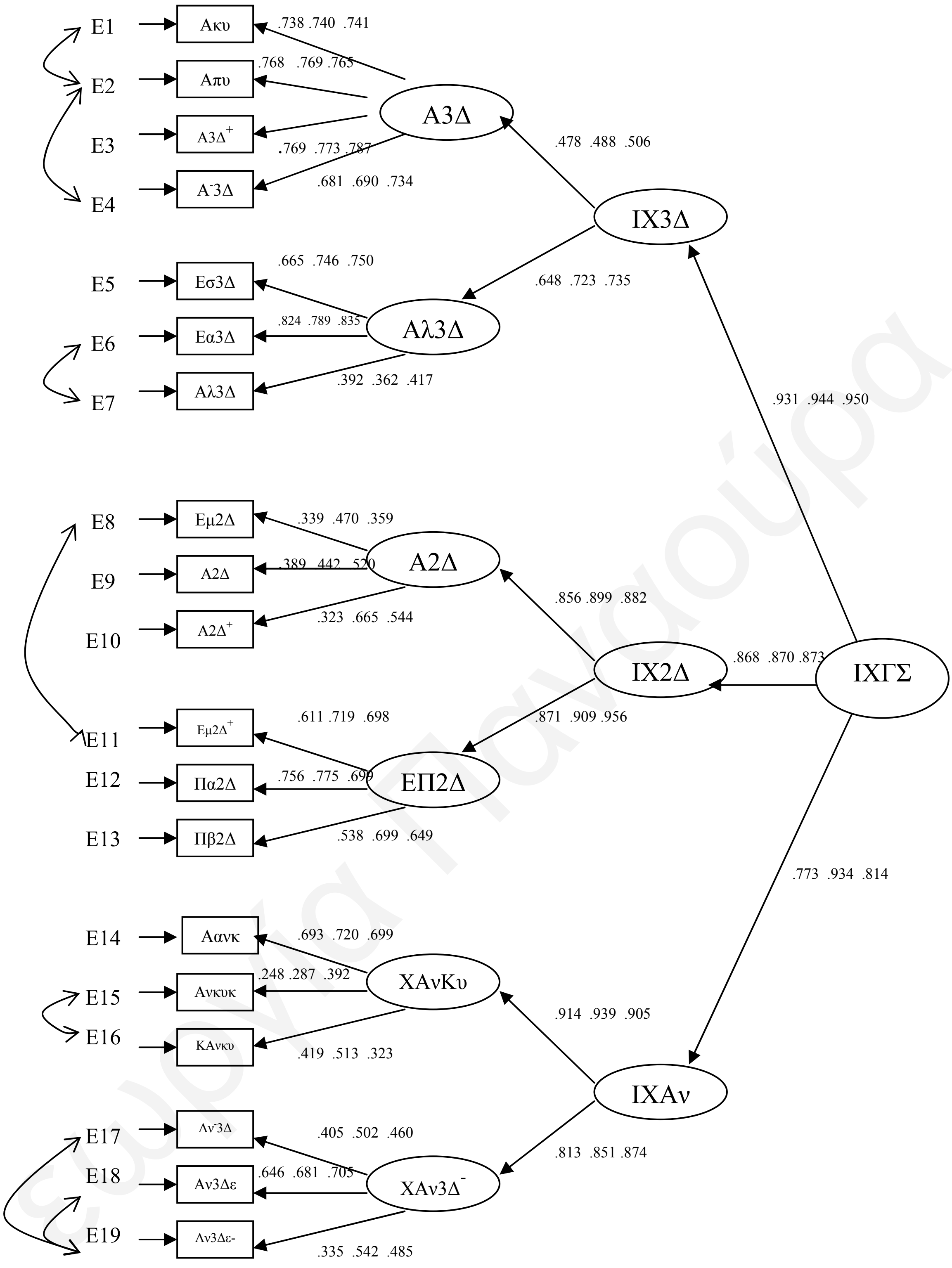
Πίνακας 5

Οι Τιμές των Δεικτών Προσαρμογής των Μοντέλων για τη Δομή της Ικανότητας Χειρισμού Γεωμετρικών Έργων με Διαφορετικά Γεωμετρικά Σχήματα για τις Τρεις Ηλικιακές Ομάδες (Δ΄ και Στ΄ Δημοτικού και Β΄ Γυμνασίου)

Μοντέλο	X^2	df	X^2/df	CFI	RMSEA
Μοντέλο (Α) με διατήρηση ίδιας δομής στις τρεις ομάδες	1138.082 p=0.001	396	2.873	.905	.040 (.039, .042)
Μοντέλο (Β) με διατήρηση ίδιας δομής στις τρεις ομάδες και ισότητα φορτίσεων για τον παράγοντα ΙΧ3Δ	1159.004 p=0.001	406	2.854	.905	.041 (.039, .042)

Ακολούθως εξετάστηκαν μοντέλα στα οποία τέθηκαν περιορισμοί ως προς τις φορτίσεις των μεταβλητών στους παράγοντες πρώτης τάξης. Στη φάση αυτή εξετάστηκε αρχικά μοντέλο στο οποίο θεωρήθηκαν ως ισοδύναμες οι φορτίσεις των μεταβλητών στους παράγοντες πρώτης τάξης «ικανότητα αναγνώρισης αναπαραστάσεων τρισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων» (Α3Δ) και «ικανότητα ανάλυσης στοιχείων τρισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων» (Αλ3Δ). Πρόκειται για τους παράγοντες που συνιστούσαν τον παράγοντα δεύτερης τάξης «ικανότητα χειρισμού έργων με τρισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα» (ΙΧ3Δ). Στην περίπτωση αυτή ο δείκτης επιβεβαίωσης των παραγόντων CFI παρουσίασε και πάλι τιμή 0.905 [X^2 (406)= 1159.004], ενώ ο δείκτης RMSEA είχε τιμή 0.041 με 90% διάστημα εμπιστοσύνης 0.039-0.042. Παρατηρήθηκαν, δηλαδή, τιμές στους δείκτες πολύ παρόμοιες με την περίπτωση του προηγούμενου μοντέλου, όπου δεν είχαν τεθεί περιορισμοί στις φορτίσεις των παραγόντων. Ο υπολογισμός της διαφοράς των X^2 των δύο μοντέλων έδειξε ότι η προσθήκη των περιορισμών, που ουσιαστικά οδηγεί σε απλούστερο μοντέλο, είχε ως αποτέλεσμα τη στατιστικά σημαντική βελτίωση της προσαρμογής του στα δεδομένα [$\Delta X^2(10)= 20.922$, $p<0.001$]. Προχωρώντας σε αναλύσεις με μοντέλα όπου τέθηκαν περισσότεροι περιορισμοί παρουσιάστηκαν μικρότερες τιμές στο δείκτη CFI, οπόταν τα μοντέλα εκείνα θεωρήθηκαν ακατάλληλα για την περιγραφή των δεδομένων της έρευνας. Καταλήγοντας, το μοντέλο Β (Πίνακας 4), για το οποίο ισχύει ότι τα συστατικά δόμησης της ικανότητας χειρισμού γεωμετρικών σχημάτων είναι τα ίδια στις τρεις ηλικιακές ομάδες και επιπλέον οι φορτίσεις στον παράγοντα «ικανότητας χειρισμού τρισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων» ισούνται, θεωρήθηκε ως το καταλληλότερο για την περιγραφή των δεδομένων. Στο Διάγραμμα 5 παρουσιάζονται για καθεμιά από τις τρεις ηλικιακές ομάδες οι φορτίσεις στους παράγοντες που συνιστούν τη γενική ικανότητα χειρισμού έργων με γεωμετρικά σχήματα.

Στο τελικό μοντέλο (Διάγραμμα 5) οι φορτίσεις των μεταβλητών στις ικανότητες χειρισμού έργων με επίπεδα γεωμετρικά σχήματα για τους μαθητές της Στ΄ δημοτικού ήταν πιο ψηλές από τις αντίστοιχες φορτίσεις για τους μαθητές των δύο άλλων τάξεων (εκτός από την περίπτωση της μεταβλητής «Αναγνώριση αναπαραστάσεων δισδιάστατων σχημάτων» [Α2Δ], όπου η φόρτιση είναι μεγαλύτερη για τους μαθητές της Β΄ γυμνασίου). Το ίδιο φαινόμενο παρουσιάστηκε για τις φορτίσεις των μεταβλητών στις ικανότητες χειρισμού έργων με αναπτύγματα (με εξαίρεση τις μεταβλητές «Αναπτύγματα κύβου με κωδικοποιημένες έδρες» [Ανκυκ] και «Αναπαραστάσεις αναπτυγμάτων στερεών με διευθέτηση εδρών γύρω από τη βάση» [Αν3Δε]).



Διάγραμμα 5. Μοντέλο δόμησης της ικανότητας χειρισμού έργων με διαφορετικά γεωμετρικά σχήματα για τις τρεις ηλικιακές ομάδες

*Εξήγηση συμβολισμού:

Οι 19 μεταβλητές Ακυ-Αν3Δε$^-$ προέκυψαν από διερευνητική παραγοντική ανάλυση που πραγματοποιήθηκε λόγω του μεγάλου αριθμού γεωμετρικών έργων. Για αναλυτικές επεξηγήσεις για την καθεμιά δείτε σ.88-92. Α3Δ=ικανότητα αναγνώρισης αναπαραστάσεων τρισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων, Αλ3Δ=ικανότητα ανάλυσης στοιχείων τρισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων, Α2Δ=ικανότητα μέτρησης και αναγνώρισης αναπαραστάσεων σε δισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα, ΕΠ2Δ=ικανότητα επίλυσης προβλημάτων με δισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα, ΧΑνΚυ=ικανότητα χειρισμού έργων με αναπτύγματα κύβου, Χαν3Δ$^-$ =ικανότητα χειρισμού έργων με αναπτύγματα άλλων στερεών, ΙΧ3Δ=ικανότητα χειρισμού έργων με τρισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα, ΙΧ2Δ=ικανότητα χειρισμού έργων με δισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα, ΙΧΑν=ικανότητα χειρισμού έργων με αναπτύγματα στερεών, ΙΧΓΣ=ικανότητα χειρισμού έργων με γεωμετρικά σχήματα

Με βάση τα παραπάνω στοιχεία, διαφάνηκε ότι το μοντέλο δόμησης των ικανοτήτων των μαθητών για χειρισμό γεωμετρικών σχημάτων προσαρμόζεται ικανοποιητικά με τα δεδομένα της έρευνας, δείχνοντας ότι το μοντέλο ισχύει ως προς τη δομή της συγκεκριμένης γεωμετρικής ικανότητας στην περίπτωση και των τριών ηλικιακών ομάδων που έλαβαν μέρος στην έρευνα. Με άλλα λόγια, τα αποτελέσματα της ανάλυσης πολλαπλών ομάδων έδειξαν ότι η βασική δομή των ικανοτήτων των μαθητών για χειρισμό γεωμετρικών σχημάτων αρχίζει να δημιουργείται από το δημοτικό σχολείο (Δ΄ τάξη – ηλικία 10 χρόνων) και παραμένει αναλλοίωτη στην ηλικία των 14 χρόνων (Β΄ γυμνασίου). Η έλλειψη διαφορών μεταξύ των τριών ομάδων του δείγματος στον παράγοντα «χειρισμός έργων με τρισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα» αποτελεί ένδειξη ότι οι μαθησιακές εμπειρίες των μαθητών για το συγκεκριμένο θέμα δεν είναι τέτοιες που να επιφέρουν ιδιαίτερες διαφοροποιήσεις. Αντίθετα, στην περίπτωση των δύο άλλων παραγόντων που συνιστούν τη γενική ικανότητα χειρισμού γεωμετρικών σχημάτων, δηλαδή την ικανότητα χειρισμού έργων με δισδιάστατα σχήματα και την ικανότητα χειρισμού έργων με αναπτύγματα γεωμετρικών στερεών φαίνεται ότι η αύξηση των μαθησιακών εμπειριών με την αύξηση της ηλικίας έχει ως αποτέλεσμα να διαφοροποιούνται οι σχέσεις ανάμεσα στα συστατικά δόμησης.

Στο τρίτο μέρος του παρόντος υποκεφαλαίου παρουσιάζεται η ιεράρχηση των γεωμετρικών έργων με βάση το βαθμό δυσκολίας τους, όπως προέκυψε από την εφαρμογή του μοντέλου Rasch, σε επίπεδα ικανοτήτων και επιχειρείται μια ερμηνεία της συγκεκριμένης διαβάθμισης με βάση τις ικανότητες που απαιτούνται για την επίλυση των έργων κάθε επιπέδου.

Επίπεδα Γεωμετρικής Ικανότητας σε Σχέση με το Χειρισμό Γεωμετρικών Σχημάτων

Οι στατιστικές τιμές που προέκυψαν από τις αναλύσεις των αποτελεσμάτων με τη βοήθεια του μοντέλου Rasch αποκαλύπτουν τη δυνατότητα δημιουργίας αξιόπιστης και έγκυρης ισοδιαστημικής κλίμακας, στην οποία είναι δυνατόν να αντιπαραβάλουμε τις ικανότητες των μαθητών σε σχέση με έργα που περιλαμβάνουν χειρισμό διαφορετικών γεωμετρικών σχημάτων και το βαθμό δυσκολίας των έργων. Έχοντας καταδείξει την αξιοπιστία του δοκιμίου γεωμετρίας στο σύνολό του, προκύπτει εύλογα το ερώτημα κατά πόσο τα διάφορα έργα του δοκιμίου ομαδοποιούνται με συστηματικό τρόπο σε επίπεδα δυσκολίας, τα οποία μπορεί να εκληφθούν ως ενδείξεις για μια ιεράρχηση επιπέδων αναφορικά με την ικανότητα χειρισμού έργων όπου παρουσιάζονται γεωμετρικά σχήματα.

Λαμβάνοντας υπόψη τις δυσκολίες των έργων που προκύπτουν από τις αναλύσεις σε ολόκληρο το δείγμα, χρησιμοποιήθηκε η διαδικασία εντοπισμού μοτίβων ομαδοποίησης που αναπτύχθηκε από τους Marcoulides και Drezner (1999), με σκοπό να εξεταστεί κατά πόσο μπορούν να καθοριστούν επίπεδα επιτυχίας σε σχέση με τα συγκεκριμένα έργα γεωμετρίας. Η διαδικασία αυτή καθιστά δυνατή την τμηματοποίηση των παρατηρούμενων μετρήσεων σε συνεπείς ομάδες ατόμων με τρόπο ώστε τα μέλη οποιασδήποτε ομάδας να είναι παρόμοια με τα υπόλοιπα, σύμφωνα με κάποιο κριτήριο (σχετικό με τη δυσκολία των έργων) που έχει τεθεί.

Από την εφαρμογή της μεθόδου αυτής και στοχεύοντας στην τμηματοποίηση του συνόλου των γεωμετρικών έργων με βάση το βαθμό δυσκολίας τους, όπως προέκυψε από το μοντέλο Rasch, διαφάνηκε ότι παρουσιάζονται πέντε επίπεδα σε σχέση με τις ικανότητες των παιδιών στη γεωμετρία, τα οποία βρίσκονται σε συνεχή σχέση μεταξύ τους. Στον Πίνακα 6 παρουσιάζονται τα πέντε επίπεδα που έχουν προκύψει. Για κάθε επίπεδο αναφέρονται τα έργα που αντιστοιχούν σε αυτό και σημειώνονται οι τιμές που προέκυψαν για τα συγκεκριμένα έργα από το μοντέλο Rasch.

Επίπεδο 1 (τιμές μέχρι -1.65). Στο πρώτο επίπεδο παρουσιάζονται μόνο έργα που αφορούσαν την ικανότητα αναγνώρισης αναπτυγμάτων κύβου. Πρόκειται για δύο από τα ευκολότερα έργα που αναφέρονται στη συγκεκριμένη ικανότητα (B3.Αν$_2$ και B3.Αν$_5$), στα οποία οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιήθηκαν αποτελούν στην πρώτη περίπτωση αντιπαράδειγμα της έννοιας του αναπτύγματος κύβου (με 7 τετραγωνάκια-έδρες) και στη δεύτερη περίπτωση τη συνηθέστερη αναπαράσταση αναπτύγματος κύβου (σταυροειδές ανάπτυγμα). Η επίλυση των δύο αυτών έργων δεν απαιτεί από το μαθητή παρά ανάκληση βασικών γνώσεων, οι οποίες μπορεί να στηρίζονται σε μεγάλο βαθμό στην οπτική αντίληψη ή και σε πρωτοτυπικές εικόνες σχημάτων.

Επίπεδο 2 (τιμές από -1.64 μέχρι -0.98). Το δεύτερο επίπεδο περιλαμβάνει έργα και από τις τρεις ομάδες έργων γεωμετρίας. Στο επίπεδο αυτό παρουσιάζονται τα ευκολότερα από τα έργα που περιλαμβάνουν δισδιάστατα σχήματα, τα ευκολότερα από τα έργα που αναφέρονται σε τρισδιάστατα σχήματα, καθώς και ορισμένα έργα με αναπτύγματα στερεών. Συγκεκριμένα, περιλαμβάνονται από την πρώτη ομάδα τα έργα υπολογισμού

Πίνακας 6

Ομαδοποίηση Έργων Γεωμετρίας σε Πέντε Επίπεδα με Τιμές Μοντέλου Rasch

Επίπεδο	Έργα γεωμετρίας			Τιμές Rasch
	Σε 2 διαστάσεις	Σε 3 διαστάσεις	Αναπτύγματα	
Επίπεδο 1	---	---	$B3.Αν_{B}$	-1.98
			$B3.Αν_{E}$	-1.65
Επίπεδο 2	---	---	$B3.Αν_{Z}$	-1.62
	$A1.2Δ_{1}$	---	---	-1.55
		$B2(α).3Δ_{B}$	---	-1.48
		$A3.3Δ_{2}$	---	-1.46
		$B2(α).3Δ_{A}$	---	-1.39
		$A3.3Δ_{7}$	---	-1.31
	$A1.2Δ_{2}$	---	---	-1.30
		$A2.3Δ_{π}(1)$	---	-1.25
			$B3.Αν_{A}$	-1.23
			$B2.Αν_{1}$	-1.18
		$A3.3Δ_{3}$	---	-1.16
		$A3.3Δ_{4}$	---	-1.13
		B10.3Δ	---	-1.04
		$A3.3Δ_{8}$	---	-1.02
		$A3.3Δ_{1}$	---	-1.00
		$A3.3Δ_{5}$	---	-0.98
Επίπεδο 3	$B7.2Δ_{2}$ (1)	---	---	-0.94
	A7.2Δ	---	---	-.090
			$B2.Αν_{5}$	-0.87
	$B7.2Δ_{1}$ (1)			-0.72
	$B1.2Δ_{1}$ (1)	---	---	-0.56
		$A2.3Δ_{T}$		-0.54
			$B2.Αν_{7}$	-0.47
		$A2.3Δ_{A}$		-0.44
		$B2(α).3Δ_{Δ}$		-0.40
		$A2.3Δ_{Θ}$		-0.37
		$A3.3Δ_{6}$		-0.37
		B8.3Δ(1)	---	-0.34
			$B3.Αν_{Δ}$	-0.29
		$A2.3Δ_{H}$		-0.27
	B9.2Δ	---	---	-0.23
		$A2.3Δ_{Π}$		-0.23
		$A2.3Δ_{N}$		-0.20
		$A2.3Δ_{P}$		-0.18
	A6.2Δ	---	---	-0.13
	A5.2Δ	---	---	-0.11
		$A2.3Δ_{Γ}$		0.01

			B2.Αν$_{4}$	0.11
		B2(α).3Δ$_{Γ}$		0.25
			B5.Αν	0.27
	B1.2Δ$_{2}$ (1)			0.31
		A2.3Δ$_{κ}$ (2)		0.34
			B3.Αν$_{Γ}$	0.36
	B1.2Δ$_{1}$ (2)			0.37
		B8.3Δ(2)		0.45
			B4.Αν	0.47
			B2.Αν$_{8}$	0.49
			B2.Αν$_{3}$	0.55
		A2.3Δ$_{K}$		0.56
	A1.2Δ$_{3}$			0.59
			B2.Αν$_{6}$	0.59
	B7.2Δ$_{2}$ (2)			0.63
Επίπεδο 4	A1.2Δ$_{4}$ (1)			0.72
			A4.Αν	0.81
	A1.2Δ$_{5}$ (1)			0.88
	B1.2Δ$_{2}$ (2)			0.91
			B6.Αν	0.92
	B16.2Δ(1)			0.94
		A2.3Δ$_{B}$		0.97
		B13.3Δ		0.99
		A2.3Δ$_{E}$		1.02
		A2.3Δ$_{Σ}$		1.02
	B1.2Δ$_{4}$(1)			1.03
		A2.3Δ$_{Δ}$		1.06
		A2.3Δ$_{M}$		1.08
	A1.2Δ$_{4}$ (2)			1.10
		A2.3Δ$_{Λ}$		1.12
		A2.3Δ$_{Z}$		1.15
			B2.Αν$_{10}$	1.17
		A2.3Δ$_{π}$ (2)		1.21
	A1.2Δ$_{5}$ (2)			1.38
	B15.2Δ			1.34
	B12.2Δ(1)			1.47
	B1.2Δ$_{5}$			1.49
	B16.2Δ(2)			1.56
			B2.Αν	1.61
			B2.Αν$_{9}$	1.83
Επίπεδο 5	B12.2Δ(2)			1.88
	B1.2Δ$_{4}$			1.93
	B7.2Δ$_{1}$ (2)			2.01
		B14.3Δ		2.20
	B11.2Δ			2.32

εμβαδού για ορθογώνιο και τετράγωνο, ενώ από τη δεύτερη ομάδα περιλαμβάνονται τα έργα αναγνώρισης και ονομασίας (τετραγωνικής) πυραμίδας και κύβου και όλα τα έργα που αφορούν καθορισμό του αριθμού και του σχήματος των εδρών τεσσάρων γεωμετρικών στερεών – εκτός από το έργο που αφορά καθορισμό του αριθμού των εδρών τετραέδρου. Τέλος, το επίπεδο αυτό περιλαμβάνει τρία σχετικά εύκολα έργα με αναπτύγματα: το έργο Β2.$Αν_1$, που αφορά αναγνώριση αναπτύγματος τετραγωνικής πυραμίδας με διάταξη των τριγωνικών εδρών γύρω από τη βάση και δύο έργα αναγνώρισης αναπτύγματος κύβου (Β3.$Αν_1$ και Β3.$Αν_6$). Γενικά, η επίλυση των έργων στο επίπεδο αυτό απαιτεί από το μαθητή ανάκληση βασικών γνώσεων, οι οποίες αφορούν είτε την οπτική αναγνώριση γνωστών γεωμετρικών σχημάτων είτε την εφαρμογή απλών διαδικασιών (όπως στην περίπτωση της εύρεσης εμβαδού ορθογωνίων και τετραγώνων, όπου γίνεται απλή εφαρμογή γνωστού τύπου).

Επίπεδο 3 (τιμές από -0.97 μέχρι 0.65). Πέρα από την ανάκληση βασικών γνώσεων που απαιτείτο στο προηγούμενο επίπεδο, στο επίπεδο αυτό η επιτυχής προσέγγιση των έργων απαιτεί και μια ολιστική αντίληψη των σχέσεων των συστατικών των προβλημάτων. Από τα έργα με δισδιάστατα σχήματα περιλαμβάνεται το έργο εύρεσης εμβαδού τριγώνου (Α1.$2Δ_3$), η αναγνώριση διαφορετικών αναπαραστάσεων τριγώνου (Β1.$2Δ_1$), η αναγνώριση ορθογωνίων σε σύνθετη γεωμετρική μορφή (Β7.$2Δ_2$), καθώς και έργα επίλυσης προβλημάτων που απαιτούν χρήση γεωμετρικού συλλογισμού (Α5.2Δ, Α6.2Δ και Β9.2Δ). Στην περίπτωση των τριών τελευταίων προβλημάτων η επίλυση στηρίζεται στον εντοπισμό υποσχημάτων σε σύνθετες γεωμετρικές εικόνες και στην εφαρμογή συγκεκριμένης ιδιότητας σχήματος (στην προκειμένη περίπτωση της γνωστικής μονάδας σχετικά με την ισότητα των πλευρών τετραγώνου). Συνεπώς, ο λύτης στο τρίτο επίπεδο γεωμετρικής ικανότητας είναι σε θέση να εντοπίζει «κρυμμένες» σχέσεις ή οντότητες ανάμεσα στα συστατικά του προβλήματος και να επιλύει το πρόβλημα εφαρμόζοντας γεωμετρικές ιδιότητες.

Από την ομάδα των έργων με τρισδιάστατα σχήματα στο επίπεδο αυτό περιλαμβάνονται τα έργα αναγνώρισης και ονομασίας ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου και τετράεδρου (δεκτή και η απάντηση «πυραμίδα»), η αναγνώριση αναπαραστάσεων κυλίνδρων, κώνων και ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων και η συμπερίληψή τους στην κατηγορία των στερεών, καθώς και η μη συμπερίληψη στα στερεά των αναπαραστάσεων τριγώνου και ορθογωνίου. Περιλαμβάνονται επίσης το έργο καθορισμού των αριθμών των εδρών του τετράεδρου και το έργο ανάλυσης ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου στα συστατικά του στοιχεία (μικροί κύβοι). Τέλος, από την ομάδα των έργων με αναπτύγματα το τρίτο επίπεδο περιλαμβάνει έργα αναγνώρισης γνωστών αναπτυγμάτων κύβου, τετράεδρου και παραλληλεπίπεδου με διάταξη των εδρών γύρω από τη βάση, αναγνώριση σχημάτων μη-αναπτυγμάτων στερεών, το έργο συμπλήρωσης αναπτύγματος κύβου και έργο πολλαπλής επιλογής που συνδέει το ανάπτυγμα κύβου με το αντίστοιχο στερεό με κωδικοποιημένες έδρες.

Επίπεδο 4 (τιμές από 0.66 μέχρι 1.83). Όπως και στα δύο προηγούμενα επίπεδα, το τέταρτο επίπεδο περιλαμβάνει έργα που προέρχονται και από τις τρεις ομάδες έργων. Από τα έργα με δισδιάστατα σχήματα περιλαμβάνονται τα δύσκολα έργα υπολογισμού εμβαδού, που αφορούσαν σύνθετα γεωμετρικά σχήματα (Α1.2Δ_4 και Α1.2Δ_5), το έργο που αφορούσε σχήματα με ίση περίμετρο (Β15.2Δ), το έργο Β16.2Δ που απαιτούσε ανάλυση των στοιχείων του σχήματος και εφαρμογή της γνωστικής μονάδας για την ισότητα των ακτίνων κύκλου, καθώς και τα έργα αναγνώρισης αναπαραστάσεων τετραγώνων - ορθογωνίων και τα έργα αναγνώρισης αναπαραστάσεων κύκλου (αποκλεισμός των περιπτώσεων έλλειψης).

Στο επίπεδο αυτό απαιτείται και πάλι ευελιξία σκέψης που καθιστά το λύτη ικανό να αντιλαμβάνεται τα συστατικά μια γεωμετρικής εικόνας σε σχέση με τα συστατικά μιας πιο σύνθετης γεωμετρικής εικόνας, καθώς και να μεταβάλλει την οπτική γωνία της ανάλυσής του. Το επίπεδο αυτό δεν φαίνεται να αποτελεί μετασχηματισμό του προηγούμενου επιπέδου. Εκείνο που σημειώνεται είναι μάλλον βελτίωση και εδραίωση των ικανοτήτων του λύτη.

Από τα έργα με τρισδιάστατα σχήματα περιλαμβάνονται στο επίπεδο αυτό έργα αναγνώρισης διαφορετικών αναπαραστάσεων κύβου και πυραμίδας. Τέλος από την ομάδα των έργων που αφορούν αναπτύγματα περιλαμβάνεται το έργο της κατασκευής αναπτύγματος κύβου, ένα έργο αναγνώρισης γεωμετρικής εικόνας που δεν αποτελεί ανάπτυγμα γεωμετρικού στερεού (η ολιστική αντίληψη παραπέμπει σε ανάπτυγμα ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου), δύο έργα αναγνώρισης αναπτυγμάτων πυραμίδας με διάταξη των εδρών όχι γύρω από τη βάση και ένα έργο που συνδέει το ανάπτυγμα κύβου με το σχέδιο συγκεκριμένου κύβου με κωδικοποιημένες έδρες.

Επίπεδο 5 (τιμές από 1.84 και άνω). Το πέμπτο επίπεδο περιλαμβάνει τα δυσκολότερα έργα που αφορούν δισδιάστατα σχήματα και ένα έργο που αναφέρεται σε τρισδιάστατα σχήματα. Τα τρία από τα έργα αφορούν την ικανότητα των μαθητών για συμπερίληψη γνωστών τους γεωμετρικών σχημάτων σε κλάσεις. Συγκεκριμένα, παρουσιάζεται στο επίπεδο αυτό το έργο που αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών να καθορίζουν γεωμετρικές εικόνες που παρουσιάζουν τετράπλευρα, το έργο που εξετάζει κατά πόσο οι μαθητές συμπεριλαμβάνουν το τετράγωνο στην κατηγορία «ορθογώνια» και το ανάλογο έργο στις τρεις διαστάσεις που εξετάζει κατά πόσο συμπεριλαμβάνουν τον κύβο στην κατηγορία «ορθογώνια παραλληλεπίπεδα». Η ικανότητα αυτή των μαθητών για συμπερίληψη σχημάτων σε κλάσεις παραπέμπει στο τρίτο επίπεδο του μοντέλου Van Hiele (άτυπο παραγωγικό), στο οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονται τις σχέσεις ανάμεσα στις ιδιότητες των σχημάτων και ανάμεσα στα σχήματα. Επίσης το πέμπτο επίπεδο περιλαμβάνει το έργο αναγνώρισης τριγώνων σε σύνθετη γεωμετρική μορφή, καθώς και το έργο που αναφερόταν σε ισεμβαδικά σχήματα, για την επίλυση του οποίου απαιτείται είτε δυναμικός ανασχηματισμός του αρχικού σχήματος είτε ανάλυση των υποσχημάτων και εφαρμογή αριθμού ιδιοτήτων των σχημάτων που εμπλέκονται. Άρα το επίπεδο αυτό περιλαμβάνει έργα τα οποία σαφώς απαιτούν ενεργοποίηση πολύπλοκων ή ανώτερων νοητικών διαδικασιών και συνδυασμό των δομών σε πολλαπλά επίπεδα.

Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφερθεί ότι υπάρχουν σημαντικές δομικές αλλαγές στην ανάπτυξη, οι οποίες επηρεάζουν την ίδια τη φύση της σκέψης. Υπάρχουν, όμως, και άλλες αλλαγές, οι οποίες σχετίζονται με την επέκταση και τη σταθεροποίηση διαδικασιών και ικανοτήτων που έχουν αποκτηθεί πρόσφατα. Με την ανάλυση που πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια αυτής της εργασίας με τη χρήση του μοντέλου Rasch δεν μπορούμε να καθορίσουμε για ποιου είδους αλλαγές πρόκειται (σε σχέση με τα πέντε επίπεδα). Σημειώνεται ότι ο Wilson έχει αναπτύξει το μοντέλο saltus (Mislevy & Wilson, 1996), μια μέθοδο με την οποία καθίσταται δυνατή η διαφοροποίηση των διαφορετικών τύπων επιπέδων ανάπτυξης. Με τη βοήθεια της συγκεκριμένης μεθόδου ο ερευνητής μπορεί να διακρίνει τις περισσότερο σημαντικές από τις λιγότερο σημαντικές αλλαγές στην ανάπτυξη. Η απάντηση του ερωτήματος αυτού, που ενδεχομένως ενδιαφέρει γνωστικούς ψυχολόγους που μελετούν θέματα ανάπτυξης του νου, ξεφεύγει από τα όρια και τα ερωτήματα της παρούσας εργασίας. Δεν παύει, όμως, να αποτελεί ένα ενδιαφέρον ζήτημα, το οποίο θα μπορούσε να τύχει μελέτης στο μέλλον.

Διερεύνηση της Σχέσης Χωρικών Ικανοτήτων των Μαθητών και Επίδοσης στα Γεωμετρικά Έργα

Ένας από τους σκοπούς της παρούσας εργασίας ήταν να διερευνήσει τη σχέση ανάμεσα στις χωρικές ικανότητες των μαθητών και τη γεωμετρική τους ικανότητα σε ό,τι αφορά το χειρισμό έργων με διαφορετικά γεωμετρικά σχήματα. Με άλλα λόγια, εξετάστηκε κατά πόσο και σε ποιο βαθμό οι χωρικές ικανότητες μαθητών δημοτικού και γυμνασίου σχετίζονται με την επίδοσή τους σε γεωμετρικά έργα που αφορούν χειρισμό δισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων, τρισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων και αναπτυγμάτων γεωμετρικών στερεών.

Τα σχετικά αποτελέσματα παρουσιάζονται σε τρία υποκεφάλαια. Στο πρώτο υποκεφάλαιο γίνεται σύντομη αναφορά στην ομαδοποίηση των μαθητών που έγινε με τη βοήθεια του μοντέλου Rasch (α) σε πέντε επίπεδα χωρικών ικανοτήτων και (β) σε πέντε επίπεδα γεωμετρικών ικανοτήτων αναφορικά με το χειρισμό έργων με γεωμετρικά σχήματα, με βάση την επίδοσή τους στα αντίστοιχα δοκίμια. Ακολούθως παρουσιάζονται περιγραφικά στοιχεία που προέκυψαν από τη μελέτη των πινάκων διασταυρούμενης συχνότητας αναφορικά με τη σχέση ανάμεσα στο επίπεδο χωρικών ικανοτήτων των μαθητών και την επίδοσή τους στα γεωμετρικά έργα. Στο δεύτερο υποκεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα παλινδρομικών αναλύσεων που πραγματοποιήθηκαν με εξαρτημένη μεταβλητή την επίδοση των μαθητών στα γεωμετρικά έργα διερευνώντας ποιες συνιστώσες της χωρικής ικανότητας αποτελούν δείκτες πρόβλεψης για την επίδοση των μαθητών σε έργα γεωμετρίας που απαιτούν χειρισμό διάφορων γεωμετρικών σχημάτων. Ακολούθως παρουσιάζεται δομικό μοντέλο που αφορά τη σχέση ανάμεσα στην ικανότητα χειρισμού έργων γεωμετρίας με διαφορετικά γεωμετρικά σχήματα και τις χωρικές ικανότητες των μαθητών. Τέλος, στο τρίτο υποκεφάλαιο περιγράφονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη συνεπαγωγική ανάλυση των δεδομένων σε ότι αφορά (α) τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές δημοτικού και γυμνασίου αντιμετωπίζουν τα χωρικά έργα και τα έργα γεωμετρίας που παρουσιάζουν διαφορετικά γεωμετρικά σχήματα (δύο διαστάσεων, τριών διαστάσεων και αναπτύγματα γεωμετρικών στερεών) και (β) τις συνεπαγωγικές σχέσεις που υπάρχουν ανάμεσα στα χωρικά έργα και τα έργα γεωμετρικής ικανότητας που απαιτούν χειρισμό διαφορετικών γεωμετρικών σχημάτων.

Διερεύνηση της Σχέσης ανάμεσα στα Πέντε Επίπεδα Χωρικών Ικανοτήτων και στα Πέντε Επίπεδα Γεωμετρικών Ικανοτήτων των Μαθητών

Όπως έχει αναφερθεί στο Κεφάλαιο 3, όπου παρουσιάστηκε η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε στην παρούσα εργασία, τα έργα που έχουν χρησιμοποιηθεί για τη μέτρηση του επιπέδου χωρικής ικανότητας έχουν επιλεγεί από σύνολο έργων που χρησιμοποιήθηκαν σε προηγούμενες έρευνες (Δημητρίου, 1993; Demetriou et al, 2002; Demetriou & Kyriakides, 2006). Συγκεκριμένα, στο δοκίμιο χωρικών ικανοτήτων που χρησιμοποιήθηκε για τους σκοπούς της παρούσας έρευνας έχουν περιληφθεί 14 έργα που εξετάζουν (α) την ικανότητα χειρισμού νοητικών εικόνων (έργα με δίπλωμα σχημάτων), (β) την ικανότητα νοητικής περιστροφής δισδιάστατων και τρισδιάστατων σχημάτων και (γ) την ικανότητα συντονισμού των προοπτικών. Σε πρώτο στάδιο τα δεδομένα που συγκεντρώθηκαν από τη χορήγηση των χωρικών έργων αναλύθηκαν με τη βοήθεια του μοντέλου Rasch και προέκυψε έγκυρη και αξιόπιστη ισοδιαστημική κλίμακα μέτρησης των χωρικών ικανοτήτων των παιδιών (δείτε λεπτομέρειες στο Κεφάλαιο 3).

Ακολούθως, με βάση τις δυσκολίες των 14 χωρικών έργων, όπως διαφάνηκαν από την ανάλυση Rasch, και χρησιμοποιώντας τη διαδικασία εντοπισμού μοτίβων ομαδοποίησης των Marcoulides και Drezner (1999) προέκυψαν 5 επίπεδα χωρικών ικανοτήτων των μαθητών. Στο χαμηλότερο επίπεδο (επίπεδο 1) βρίσκονται τα ευκολότερα έργα και οι μαθητές που πέτυχαν μόνο σε αυτά, ενώ αντίθετα στο υψηλότερο επίπεδο (επίπεδο 5) τοποθετούνται τα δυσκολότερα έργα και οι μαθητές που έχουν πετύχει στη μεγάλη πλειοψηφία των έργων, συμπεριλαμβανομένων και ορισμένων τουλάχιστον από τα δύσκολα. Με ανάλογο τρόπο και λαμβάνοντας υπόψη τις δυσκολίες των έργων του δοκιμίου γεωμετρίας, έγινε και ομαδοποίηση των μαθητών σε πέντε επίπεδα γεωμετρικής ικανότητας (όσον αφορά το χειρισμό διαφορετικών γεωμετρικών σχημάτων). Οι Πίνακες 7 και 8 παρουσιάζουν την κατανομή των μαθητών του δείγματος ανά τάξη στα πέντε επίπεδα χωρικής ικανότητας και στα πέντε επίπεδα γεωμετρικής ικανότητας, αντίστοιχα.

Πίνακας 7

Κατανομή Μαθητών (ποσοστά %) ανά Τάξη σε Επίπεδα Χωρικής Ικανότητας

Μαθητές	Επίπεδο 1	Επίπεδο 2	Επίπεδο 3	Επίπεδο 4	Επίπεδο 5
Δ΄ δημοτικού	19.9	13.3	32.8	19.0	15.0
Στ΄ δημοτικού	5.1	5.4	20.4	18.6	50.5
Β΄ γυμνασίου	3.0	1.5	16.4	27.5	51.6

Όπως προκύπτει από τα στοιχεία του Πίνακα 7, η πλειοψηφία των μαθητών της Δ΄ δημοτικού (32.8%) βρίσκεται στο τρίτο επίπεδο χωρικών ικανοτήτων, με τους υπόλοιπους μαθητές να ακολουθούν περίπου την καμπύλη κανονικής κατανομής στα χαμηλότερα και τα υψηλότερα επίπεδα. Στο τέταρτο επίπεδο παρουσιάζονται 19% των μαθητών, ενώ το αντίστοιχο ποσοστό για το πέμπτο επίπεδο ανέρχεται στο 15.1%. Η εικόνα, όμως, αυτή διαφοροποιείται εντελώς στην περίπτωση της κατανομής των μεγαλύτερων μαθητών της έρευνας. Η πλειοψηφία των μαθητών της Στ΄ δημοτικού και της Β΄ γυμνασίου, με ένα ποσοστό της τάξης του 50%, βρίσκεται στο ανώτερο επίπεδο χωρικής ικανότητας (επίπεδο 5). Για τις δύο αυτές ομάδες μαθητών παρατηρείται επιπλέον το φαινόμενο της ανάπτυξης των χωρικών ικανοτήτων με την αύξηση της ηλικίας, εφόσον, όπως προκύπτει από τη μελέτη των στοιχείων του Πίνακα 7, με την αύξηση της ηλικίας οι μαθητές μετακινούνται σε υψηλότερα επίπεδα χωρικών ικανοτήτων. Συγκεκριμένα, τα ποσοστά των μαθητών της Β΄ γυμνασίου που εμφανίζονται στα τρία πρώτα επίπεδα παρουσιάζουν μείωση σε σχέση με τα αντίστοιχα ποσοστά των μαθητών της Στ΄ δημοτικού, ενώ αυξάνεται παράλληλα το ποσοστό των μαθητών γυμνασίου που κατανέμεται στο τέταρτο επίπεδο χωρικών ικανοτήτων.

Πίνακας 8

Κατανομή Μαθητών (ποσοστά %) ανά Τάξη σε Επίπεδα Γεωμετρικής Ικανότητας

Μαθητές	Επίπεδο 1	Επίπεδο 2	Επίπεδο 3	Επίπεδο 4	Επίπεδο 5
Δ΄ δημοτικού	1.2	7.2	67.2	22.0	2.4
Στ΄ δημοτικού	0	2.4	48.3	36.6	12.6
Β΄ γυμνασίου	0.6	2.1	34.3	45.4	17.6

Η πλειοψηφία των μαθητών του δημοτικού σχολείου έχει κατανεμηθεί, όπως φαίνεται στον Πίνακα 8, στο τρίτο επίπεδο γεωμετρικής ικανότητας όσον αφορά το χειρισμό έργων με διαφορετικά γεωμετρικά σχήματα. Στην περίπτωση των μαθητών της Δ΄ δημοτικού το ποσοστό αυτό ανέρχεται στο 67.2% των μαθητών, ενώ, στην περίπτωση της Στ΄ δημοτικού μειώνεται στο 48.3%. Η μείωση αυτή, σε συνδυασμό με την παρουσία περισσότερων μαθητών της Στ΄ τάξης, σε σύγκριση με τους αντίστοιχους μαθητές της Δ΄ τάξης, στο τέταρτο επίπεδο γεωμετρικής ικανότητας, οφείλεται στην αύξηση της ηλικίας και κατά συνέπεια στις αυξημένες μαθησιακές εμπειρίες των μαθητών. Το ίδιο μοτίβο παρουσιάζεται κατά τη σύγκριση των μαθητών της Στ΄ δημοτικού και των μαθητών της Β΄ γυμνασίου, με τη διαφορά ότι η μείωση των μαθητών γυμνασίου που κατανέμονται στο τρίτο επίπεδο γεωμετρικής ικανότητας και η παράλληλη αύξηση του αριθμού των μαθητών που κατανέμονται στο τέταρτο και το πέμπτο επίπεδο έχει ως αποτέλεσμα η πλειοψηφία των μαθητών της Β΄ γυμνασίου (45.4%)) να επιτυγχάνει τελικά επιδόσεις που επιτρέπει την κατανομή τους στο τέταρτο επίπεδο γεωμετρικής ικανότητας. Στο σημείο αυτό θα πρέπει επίσης να επισημανθεί ότι στο υψηλότερο επίπεδο γεωμετρικής ικανότητας (επίπεδο 5) κατανέμονται 17.6% των μαθητών της Β΄ γυμνασίου, 12.6% των μαθητών της Στ΄ δημοτικού και, όπως ήταν αναμενόμενο, ένα πολύ χαμηλό ποσοστό (2.4%) των μαθητών της Δ΄ δημοτικού. Η μεγαλύτερη εξοικείωση των μαθητών των μεγαλύτερων τάξεων με έργα γεωμετρίας λόγω αυξημένων μαθησιακών εμπειριών γύρω από το θέμα, σε σχέση με τους μικρότερους μαθητές, είναι δυνατόν να ενισχύει αυτή τη διαφοροποίηση.

Μετά τη μελέτη της κατανομής των μαθητών των τριών ηλικιακών ομάδων της έρευνας σε πέντε επίπεδα χωρικών ικανοτήτων και σε πέντε επίπεδα γεωμετρικής ικανότητας με βάση την επίδοση στα αντίστοιχα δοκίμια, δημιουργήθηκαν οι πίνακες διασταυρούμενης συχνότητας για την επίδοση στη γεωμετρία σε σχέση με το επίπεδο χωρικών ικανοτήτων των μαθητών. Στόχος της διαπινακοποίησης αυτής ήταν (α) να διερευνηθεί το επίπεδο χωρικών ικανοτήτων των μαθητών που είχαν επιτύχει υψηλές επιδόσεις στο δοκίμιο γεωμετρίας και (β) να εξεταστεί σε ποιο επίπεδο επιδόσεων έφτασαν στο δοκίμιο γεωμετρίας οι μαθητές που έχουν υψηλό επίπεδο χωρικών ικανοτήτων. Στο σημείο αυτό σημειώνεται ότι για την επίδοση στη γεωμετρία χρησιμοποιήθηκαν οι βαθμοί που προέκυψαν από την ανάλυση των γεωμετρικών έργων με τη βοήθεια του μοντέλου Rasch. Τα αποτελέσματα των πινάκων διασταυρούμενης συχνότητας παρουσιάζονται στους Πίνακες 9 και 10.

Πίνακας 9

Πίνακας Διασταυρούμενης Συχνότητας των Μαθητών που Κατανεμήθηκαν στα Υψηλά Επίπεδα Γεωμετρικής Ικανότητας με τους Μαθητές που Κατανεμήθηκαν στα Επίπεδα Χωρικής Ικανότητας 3-5

	Επίπεδο Γ.Ι.* 4			Επίπεδο Γ.Ι.* 5		
	Δ΄ τάξη δημοτικού	Στ΄ τάξη δημοτικού	Β΄ τάξη γυμνασίου	Δ΄ τάξη δημοτικού	Στ΄ τάξη δημοτικού	Β΄ τάξη γυμνασίου
Επίπεδο Χ.Ι*. 3	41.1 %	15.6 %	13.2 %	0 %	2.4 %	5.1 %
Επίπεδο Χ.Ι.* 4	26.0 %	21.3 %	30.9 %	12.5 %	9.5 %	18.6 %
Επίπεδο Χ.Ι.* 5	23.3 %	58.2 %	54.6 %	87.5 %	88.1 %	76.3 %

(*Γ.Ι.=Γεωμετρική Ικανότητα, Χ.Ι.=Χωρική Ικανότητα)

Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στον Πίνακα 9 καταδεικνύουν ότι οι μαθητές που έχουν πετύχει υψηλές επιδόσεις στο δοκίμιο γεωμετρίας (επίπεδα γεωμετρικής ικανότητας 4 και 5) ανήκουν στην ομάδα των μαθητών που έχουν, με βάση τα χωρικά έργα που χορηγήθηκαν, υψηλό επίπεδο χωρικών ικανοτήτων (επίπεδα χωρικής ικανότητας 4 και 5). Η παρατήρηση ισχύει για όλους τους μαθητές, εκτός από την περίπτωση των μαθητών Δ΄ δημοτικού, όπου ένα ποσοστό 41.1% των μαθητών, οι οποίοι, με βάση την επίδοσή τους στο δοκίμιο γεωμετρίας εμφανίζονται στο τέταρτο επίπεδο γεωμετρικής ικανότητας παρουσιάζονται από την άλλη να βρίσκονται στο τρίτο επίπεδο χωρικής ικανότητας. Δηλαδή, το συγκεκριμένο ποσοστό των νεαρών μαθητών έχει καταφέρει να φτάσει σε αρκετά υψηλό επίπεδο όσον αφορά την επίδοση στα έργα γεωμετρίας, παρά το γεγονός ότι οι χωρικές τους ικανότητες βρίσκονται ακόμα σε μέτριο επίπεδο. Μια πιθανή ερμηνεία είναι ότι οι συγκεκριμένοι μαθητές της Δ΄ δημοτικού έχουν επιλύσει με επιτυχία ένα αριθμό έργων τα οποία απαιτούσαν απλή ανάκληση γνωστικών μονάδων ή εφαρμογή απλών διαδικασιών (π.χ. έργα εύρεσης εμβαδού). Από την άλλη, οι μεγαλύτεροι μαθητές που κατανεμήθηκαν στα υψηλά επίπεδα γεωμετρικής ικανότητας και ταυτόχρονα προέρχονται από την ομάδα των μαθητών με υψηλό επίπεδο χωρικών ικανοτήτων έχουν επιπλέον επιλύσει με επιτυχία αριθμό έργων που απαιτούν πιο σύνθετες νοητικές διεργασίες, παρόμοιες με αυτές που απαιτούνταν από τα χωρικά έργα (για παράδειγμα, χειρισμός νοητικών εικόνων, νοητικές περιστροφές υποσχημάτων των γεωμετρικών εικόνων).

Πίνακας 10

Πίνακας Διασταυρούμενης Συχνότητας των Μαθητών που Κατανεμήθηκαν στα Υψηλά Επίπεδα Χωρικής Ικανότητας με τους Μαθητές που Κατανεμήθηκαν στα Επίπεδα Γεωμετρικής Ικανότητας 3-5

	Επίπεδο Χ.Ι.* 4			Επίπεδο Χ.Ι.* 5		
	Δ΄ τάξη δημοτικού	Στ΄ τάξη δημοτικού	Β΄ τάξη γυμνασίου	Δ΄ τάξη δημοτικού	Στ΄ τάξη δημοτικού	Β΄ τάξη γυμνασίου
Επίπεδο Γ.Ι*. 3	63.5 %	50.0 %	33.7 %	50.0 %	35.7 %	24.9 %
Επίπεδο Γ.Ι.* 4	30.2 %	41.9 %	51.1 %	34.0 %	42.3 %	48.0 %
Επίπεδο Γ.Ι*. 5	1.6 %	6.5 %	12.0 %	14.0 %	22.0 %	26.0 %

(*Γ.Ι.=Γεωμετρική Ικανότητα, Χ.Ι.=Χωρική Ικανότητα)

Από τα στοιχεία που παρουσιάζονται στον Πίνακα 10, η πλειοψηφία των μαθητών Δ΄ και Στ΄ δημοτικού που κατανεμήθηκαν στα επίπεδα χωρικών ικανοτήτων 4 και 5 έχουν επιτύχει στο δοκίμιο γεωμετρίας επιδόσεις που τους κατατάσσουν στο τρίτο επίπεδο γεωμετρικής ικανότητας. Εξαίρεση αποτελούν οι μαθητές της Στ΄ τάξης που προέρχονται από την ομάδα με το υψηλότερο επίπεδο χωρικής ικανότητας, οι οποίοι πέτυχαν επιδόσεις που τους κατατάσσουν στο τέταρτο επίπεδο όσον αφορά τα γεωμετρικά έργα. Στην περίπτωση των μαθητών της Β΄ γυμνασίου η πλειοψηφία των μαθητών με υψηλό επίπεδο χωρικών ικανοτήτων εμφανίζεται να φτάνει στο τέταρτο επίπεδο γεωμετρικής ικανότητας. ενώ παρουσιάζεται και σε αυτή την ομάδα ένα ποσοστό μαθητών που παραμένουν στο τρίτο επίπεδο γεωμετρίας.

Συνοψίζοντας, τα δεδομένα από τους πίνακες διασταυρούμενης συχνότητας του επιπέδου χωρικών ικανοτήτων και του επιπέδου γεωμετρικής ικανότητας (Πίνακας 9 και Πίνακας 10) καταδεικνύουν ότι στην πλειοψηφία τους οι μαθητές που έχουν επιτύχει υψηλές επιδόσεις στο δοκίμιο γεωμετρίας ανήκουν στην ομάδα των μαθητών που βρίσκονται σε υψηλά επίπεδα χωρικών ικανοτήτων. Παρόλα αυτά, φαίνεται ότι το αντίθετο δεν ισχύει σε όλες τις περιπτώσεις, εφόσον οι μαθητές με υψηλό επίπεδο χωρικής ικανότητας δεν έχουν κατ' ανάγκη επιτύχει τις καλύτερες επιδόσεις στο δοκίμιο γεωμετρίας.

Αποτελέσματα Παλινδρομικών Αναλύσεων για τους Δείκτες Πρόβλεψης της Επίδοσης στα Έργα Γεωμετρίας

Αρχικά πραγματοποιήθηκε για το σύνολο των μαθητών ανάλυση πολλαπλής παλινδρόμησης με τη μέθοδο Stepwise, χρησιμοποιώντας ως εξαρτημένη μεταβλητή την επίδοση των μαθητών σε έργα που περιλαμβάνουν γεωμετρικά σχήματα (όπως προέκυψε από τους δείκτες ικανοτήτων των μαθητών στα γεωμετρικά έργα κατά την ανάλυση των δεδομένων με τη βοήθεια του μοντέλου Rasch). Οι ανεξάρτητες μεταβλητές που χρησιμοποιήθηκαν ήταν η επίδοση των μαθητών στο δοκίμιο χωρικής ικανότητας (όπως προέκυψε από τους δείκτες ικανοτήτων των μαθητών στα χωρικά έργα κατά την ανάλυση των δεδομένων με τη βοήθεια του μοντέλου Rasch), η ηλικία των μαθητών (τάξη στην οποία φοιτούσαν) και το φύλο των μαθητών.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της παλινδρομικής ανάλυσης, η επίδοση των μαθητών στο δοκίμιο χωρικής ικανότητας και η ηλικία των μαθητών αποτελούν δείκτες πρόβλεψης της επίδοσης στα γεωμετρικά έργα, επεξηγώντας το 30% της διασποράς (Πίνακας 11). Αντίθετα, το φύλο των μαθητών δεν αποτελεί δείκτη πρόβλεψης της επίδοσης στα έργα γεωμετρίας.

Πίνακας 11

Ανάλυση Πολλαπλής Παλινδρόμησης για τις Μεταβλητές που Προβλέπουν την Επίδοση στα Έργα Γεωμετρίας

Μεταβλητή	Standardized Beta	t	p
Επίδοση στο δοκίμιο χωρικής ικανότητας	0.449	15.660	0.0001*
Ηλικία μαθητών	0.191	6.676	0.0001*
Φύλο μαθητών	0.046	1.731	0.084

*p<.01

Δεδομένου του γεγονότος ότι η επίδοση των μαθητών στο δοκίμιο χωρικής ικανότητας και η ηλικία των μαθητών βρέθηκαν να αποτελούν δείκτες πρόβλεψης της ικανότητας χειρισμού έργων με γεωμετρικά σχήματα, κρίθηκε σκόπιμο να εξεταστεί στη συνέχεια κατά πόσο εμφανίζεται ένα μοτίβο μεταβλητών που αναφέρονται στις διαφορετικές συνιστώσες της χωρικής ικανότητας οι οποίες προβλέπουν την επίδοση σε έργα γεωμετρίας για κάθε ηλικιακή ομάδα μαθητών της έρευνας.

Για το σκοπό αυτό πραγματοποιήθηκαν αναλύσεις πολλαπλής παλινδρόμησης για καθεμιά από τις τρεις ομάδες ξεχωριστά, χρησιμοποιώντας ως ανεξάρτητες μεταβλητές την ικανότητα των μαθητών σε σχέση με (α) το χειρισμό νοητικών εικόνων, (β) τη νοητική περιστροφή και (γ) το συντονισμό των προοπτικών, για την πρόβλεψη της επίδοσης των μαθητών σε έργα γεωμετρίας με γεωμετρικά σχήματα. Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμο να σημειωθεί ότι οι τρεις προαναφερθείσες μεταβλητές έχουν προκύψει μετά από παραγοντική ανάλυση που πραγματοποιήθηκε για τα χωρικά έργα που δόθηκαν στους μαθητές. Συγκεκριμένα, μετά την αφαίρεση του έργο Β17.Χ, το οποίο παρουσίασε πολύ χαμηλή τιμή eigenvalue, από την παραγοντική ανάλυση των δεδομένων που συγκεντρώθηκαν από τα έργα χωρικής ικανότητας προέκυψε μοντέλο τριών παραγόντων, το οποίο ερμηνεύει ποσοστό 48 % της διασποράς. Οι παράγοντες που εμφανίστηκαν στο συγκεκριμένο μοντέλο αφορούσαν (α) την ικανότητα νοητικής περιστροφής, (β) την ικανότητα χειρισμού νοητικών εικόνων και (γ) το συντονισμό των προοπτικών. Οι σταθμισμένοι βαθμοί που προέκυψαν για κάθε μαθητή σε σχέση με τους τρεις αυτούς παράγοντες χρησιμοποιήθηκαν για τους σκοπούς της παλινδρομικής ανάλυσης. Τα αποτελέσματα των παλινδρομικών αναλύσεων συνοψίζονται στον Πίνακα 12.

Πίνακας 12

Αναλύσεις Πολλαπλής Παλινδρόμησης για τις Συνιστώσες Χωρικής Ικανότητας που Προβλέπουν την Επίδοση στα Έργα Γεωμετρίας κατά τάξη

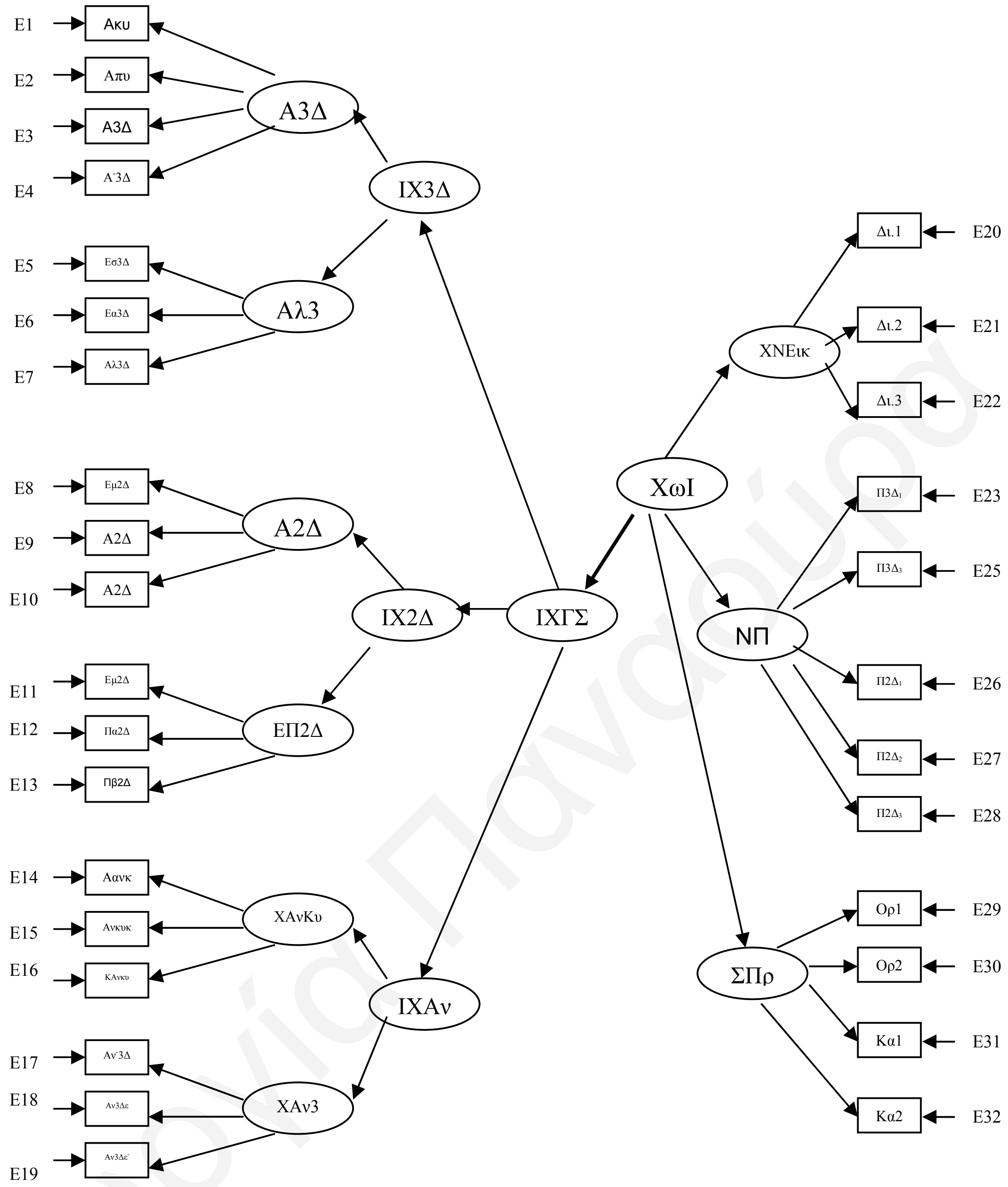
Μεταβλητές	Δ΄ δημοτικού			Στ΄ δημοτικού			Β΄ γυμνασίου		
	Stand. Beta	t	p	Stand. Beta	t	p	Stand. Beta	t	p
Χειρισμός εικόνων	0.281	5.603	0.001	0.352	7.250	0.001	0.326	6.564	0.001
Νοητική περιστροφή	0.271	5.414	0.001	0.284	5.848	0.001	0.342	6.820	0.001
Συντονισμός προοπτικών	0.194	3.872	0.001	0.222	4.587	0.001	0.176	3.504	0.001
R-Square	0.181			0.232			0.202		

Η σημαντικότερη παρατήρηση που προκύπτει από τη μελέτη του Πίνακα 12 είναι ότι στην περίπτωση των μαθητών του δημοτικού (Δ΄ και Στ΄ δημοτικού), οι μεταβλητές (α) χειρισμός νοητικών εικόνων, (β) νοητική περιστροφή και (γ) συντονισμός των προοπτικών, σε σειρά προτεραιότητας, είναι οι σημαντικότεροι δείκτες πρόβλεψης της επίδοσης των μαθητών στα έργα γεωμετρίας. Στην περίπτωση των μαθητών του γυμνασίου ο παράγοντας «νοητική περιστροφή» παρουσιάζεται να συμβάλλει σε κάπως μεγαλύτερο βαθμό στην πρόβλεψη της γεωμετρικής ικανότητας των μαθητών σε έργα χειρισμού γεωμετρικών σχημάτων σε σύγκριση με τον παράγοντα «χειρισμός νοητικών εικόνων».

Δομικό Μοντέλο Χωρικών Ικανοτήτων και Γεωμετρικών Ικανοτήτων των Μαθητών Αναφορικά με το Χειρισμό Έργων με Διαφορετικά Γεωμετρικά Σχήματα

Στο πρώτο υποκεφάλαιο του παρόντος κεφαλαίου παρουσιάστηκε το μοντέλο που προέκυψε από την επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση αναφορικά με τη δόμηση των γεωμετρικών ικανοτήτων των μαθητών σε σχέση με το χειρισμό έργων στα οποία παρουσιάζονται διαφορετικά γεωμετρικά σχήματα. Έγινε εμφανές ότι βασικές διαστάσεις της γενικής ικανότητας χειρισμού γεωμετρικών έργων που παρουσιάζουν γεωμετρικά σχήματα αποτελούν οι επιμέρους ικανότητες (α) χειρισμού έργων με σχήματα τριών διαστάσεων (αναλύεται σε ικανότητες αναγνώρισης αναπαραστάσεων τρισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων και ικανότητες ανάλυσης των στοιχείων τρισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων), (β) χειρισμού έργων με σχήματα δύο διαστάσεων (αναλύεται σε ικανότητες μέτρησης και αναγνώρισης σε δισδιάστατα σχήματα και ικανότητες επίλυσης προβλήματος με δισδιάστατα σχήματα) και (γ) χειρισμού έργων με αναπτύγματα γεωμετρικών στερεών (αναλύεται σε ικανότητες χειρισμού έργων με αναπτύγματα κύβου και ικανότητες χειρισμού έργων με αναπτύγματα άλλων γεωμετρικών στερεών).

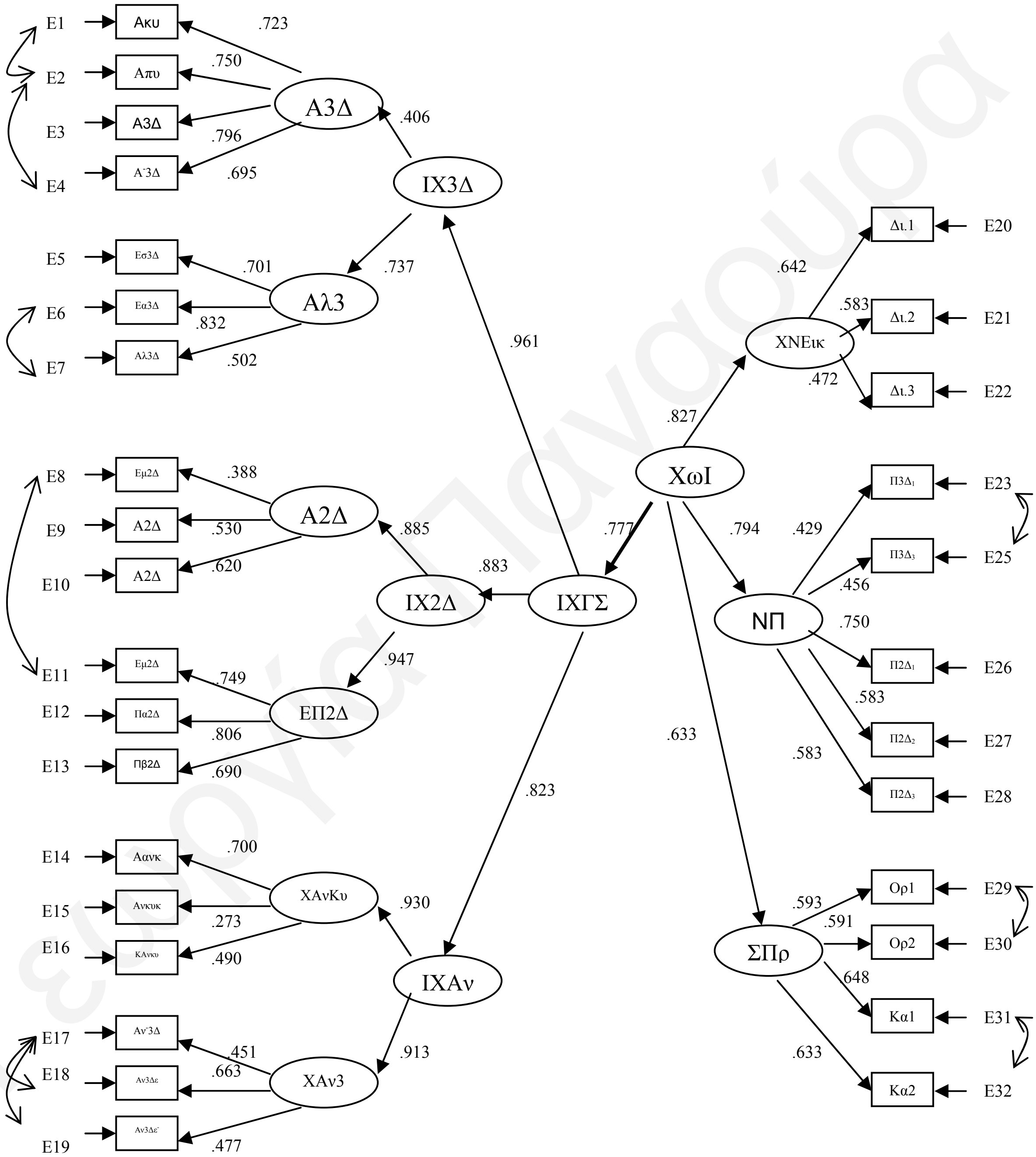
Για την περαιτέρω διερεύνηση της σχέσης ανάμεσα στη συγκεκριμένη γεωμετρική ικανότητα των μαθητών και τις χωρικές τους ικανότητες κρίθηκε σκόπιμο να εξεταστεί η επιβεβαίωση δομικού μοντέλου στο οποίο περιλαμβάνεται σχέση ανάμεσα στη γενική ικανότητα χειρισμού γεωμετρικών σχημάτων και τη γενική χωρική ικανότητα των μαθητών (Διάγραμμα 6). Στο ένα μέρος του προτεινόμενου μοντέλου εμφανίζεται ο παράγοντας «γενική ικανότητα χειρισμού γεωμετρικών σχημάτων», όπως προέκυψε από το σχετικό δομικό μοντέλο (Διαγράμματα 3 και 4). Στο άλλο μέρος του προτεινόμενου μοντέλου εμφανίζεται ο παράγοντας «γενική χωρική ικανότητα», ο οποίος αναλύεται στις ικανότητες χειρισμού νοητικών εικόνων, νοητικών περιστροφών και συντονισμού των προοπτικών. Εμφανίζεται επίσης η υπόθεση ότι η χωρική ικανότητα αποτελεί παράγοντα πρόβλεψης της ικανότητας χειρισμού γεωμετρικών σχημάτων.



Διάγραμμα 6. Προτεινόμενο δομικό μοντέλο για τη σχέση ανάμεσα στη γενική γεωμετρική ικανότητα χειρισμού έργων με γεωμετρικά σχήματα και τη γενική χωρική ικανότητα

*Εξήγηση συμβολισμού:

Οι 19 μεταβλητές Ακυ-Αν3Δε$^-$ προέκυψαν από διερευνητική παραγοντική ανάλυση που πραγματοποιήθηκε λόγω του μεγάλου αριθμού γεωμετρικών έργων. Για αναλυτικές επεξηγήσεις για την καθεμιά δείτε σ.88-92. Α3Δ=ικανότητα αναγνώρισης αναπαραστάσεων τρισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων, Αλ3Δ=ικανότητα ανάλυσης στοιχείων τρισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων, Α2Δ=ικανότητα μέτρησης και αναγνώρισης αναπαραστάσεων σε δισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα, ΕΠ2Δ=ικανότητα επίλυσης προβλημάτων με δισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα, ΧΑνΚυ=ικανότητα χειρισμού έργων με αναπτύγματα κύβου, Χαν3Δ$^-$=ικανότητα χειρισμού έργων με αναπτύγματα άλλων στερεών, ΙΧ3Δ=ικανότητα χειρισμού έργων με τρισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα, ΙΧ2Δ=ικανότητα χειρισμού έργων με δισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα, ΙΧΑν=ικανότητα χειρισμού έργων με αναπτύγματα στερεών, ΙΧΓΣ=ικανότητα χειρισμού έργων με γεωμετρικά σχήματα. Οι υπόλοιπες μεταβλητές αφορούν τα χωρικά έργα. ΧΝΕικ=ικανότητα χειρισμού νοητικών εικόνων, ΝΠ=ικανότητα νοητικών περιστροφών, ΣΠρ=ικανότητα συντονισμού προοπτικών, ΧωΙ=γενική χωρική ικανότητα



Διάγραμμα 7. Δομικό μοντέλο για τη σχέση ανάμεσα στη γενική γεωμετρική ικανότητα χειρισμού έργων με γεωμετρικά σχήματα και τη γενική χωρική ικανότητα

*Εξήγηση συμβολισμού:

Οι 19 μεταβλητές Ακυ-Αν3Δε^{-} προέκυψαν από διερευνητική παραγοντική ανάλυση που πραγματοποιήθηκε λόγω του μεγάλου αριθμού γεωμετρικών έργων. Για αναλυτικές επεξηγήσεις για την καθεμιά δείτε σ.88-92. Α3Δ=ικανότητα αναγνώρισης αναπαραστάσεων τρισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων, Αλ3Δ=ικανότητα ανάλυσης στοιχείων τρισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων, Α2Δ=ικανότητα μέτρησης και αναγνώρισης αναπαραστάσεων σε δισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα, ΕΠ2Δ=ικανότητα επίλυσης προβλημάτων με δισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα, ΧΑνΚυ=ικανότητα χειρισμού έργων με αναπτύγματα κύβου, Χαν3Δ^{-} =ικανότητα χειρισμού έργων με αναπτύγματα άλλων στερεών, ΙΧ3Δ=ικανότητα χειρισμού έργων με τρισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα, ΙΧ2Δ=ικανότητα χειρισμού έργων με δισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα, ΙΧΑν=ικανότητα χειρισμού έργων με αναπτύγματα στερεών, ΙΧΓΣ=ικανότητα χειρισμού έργων με γεωμετρικά σχήματα. Οι υπόλοιπες μεταβλητές αφορούν τα χωρικά έργα. ΧΝΕικ=ικανότητα χειρισμού νοητικών εικόνων, ΝΠ=ικανότητα νοητικών περιστροφών, ΣΠρ=ικανότητα συντονισμού προοπτικών, ΧωΙ=γενική χωρική ικανότητα

Η προσαρμογή του μοντέλου στα δεδομένα της έρευνας (Διάγραμμα 7) ήταν πολύ καλή [$X^2(397)$= 784.915, CFI=0.961, RMSEA=.033 με διάστημα εμπιστοσύνης για το RMSEA: .030-.036]. Συνεπώς το συγκεκριμένο μοντέλο θεωρήθηκε κατάλληλο, παρέχοντας εμπειρικές ενδείξεις που στηρίζουν την υπόθεση ότι η χωρική ικανότητα αποτελεί παράγοντα πρόβλεψης της ικανότητας χειρισμού γεωμετρικών σχημάτων. Ο συντελεστής παλινδρόμησης του παράγοντα χωρική ικανότητα πάνω στον παράγοντα της ικανότητας χειρισμού γεωμετρικών σχημάτων ήταν υψηλός (0.603).

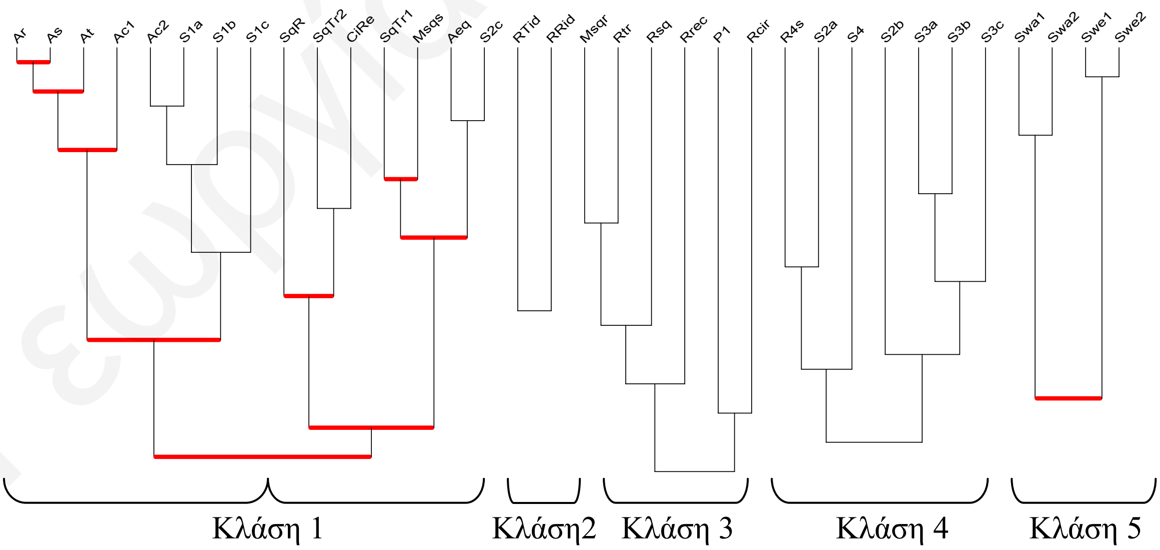
Σχέσεις Ομοιότητας και Συνεπαγωγής Ανάμεσα στα Χωρικά και τα Γεωμετρικά Έργα

Στο υποκεφάλαιο που ακολουθεί παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης ομοιότητας και της συνεπαγωγικής ανάλυσης που προέκυψαν από την ανάλυση των δεδομένων της έρευνας με το πρόγραμμα CHIC (Bodin, Coutourier, & Gras, 2000) και τα οποία αφορούν τις σχέσεις ανάμεσα στα χωρικά και τα γεωμετρικά έργα που έχουν χρησιμοποιηθεί (για την κωδικοποίηση των έργων στο πρόγραμμα CHIC δείτε Παράρτημα 2). Η παρουσίαση των αποτελεσμάτων γίνεται σε δύο μέρη. Το πρώτο μέρος αφορά τα αποτελέσματα των αναλύσεων ομοιότητας με τις οποίες διερευνήθηκε σε ποιο βαθμό οι μαθητές των τριών ηλικιών που έλαβαν μέρος στην έρευνα έχουν αντιμετωπίσει με παρόμοιο ή διαφορετικό τρόπο τα χωρικά έργα και τα έργα γεωμετρίας. Επιπλέον στο πρώτο μέρος γίνεται αναφορά στην εισαγωγή όλων των χωρικών έργων ως συμπληρωματικές μεταβλητές στις αναλύσεις ομοιότητας των έργων που αφορούσαν τα γεωμετρικά έργα, σε μια προσπάθεια συλλογής επιπρόσθετων πληροφοριών για τον τρόπο που συγκεκριμένες ομάδες μαθητών ενδεχομένως συμβάλλουν στην αντιμετώπιση των γεωμετρικών έργων με βάση συγκεκριμένα μοτίβα. Το δεύτερο μέρος αφορά τα αποτελέσματα των συνεπαγωγικών αναλύσεων που στόχο είχαν τον εντοπισμό πιθανών συνεπαγωγικών σχέσεων ανάμεσα στα έργα χωρικών ικανοτήτων και στα γεωμετρικά έργα. Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμο να σημειωθεί ότι η παρουσίαση των αποτελεσμάτων στο στάδιο αυτό επικεντρώνεται στις σχέσεις ανάμεσα στις δύο κατηγορίες έργων, τα γεωμετρικά και τα χωρικά. Περαιτέρω αναφορά στις σχέσεις εντός της κατηγορίας των γεωμετρικών έργων παρουσιάζεται στο τρίτο υποκεφάλαιο.

Σχέσεις Ομοιότητας Ανάμεσα στα Χωρικά και τα Γεωμετρικά Έργα

Χωρική Ικανότητα και Έργα Χειρισμού Γεωμετρικών Σχημάτων Δύο Διαστάσεων

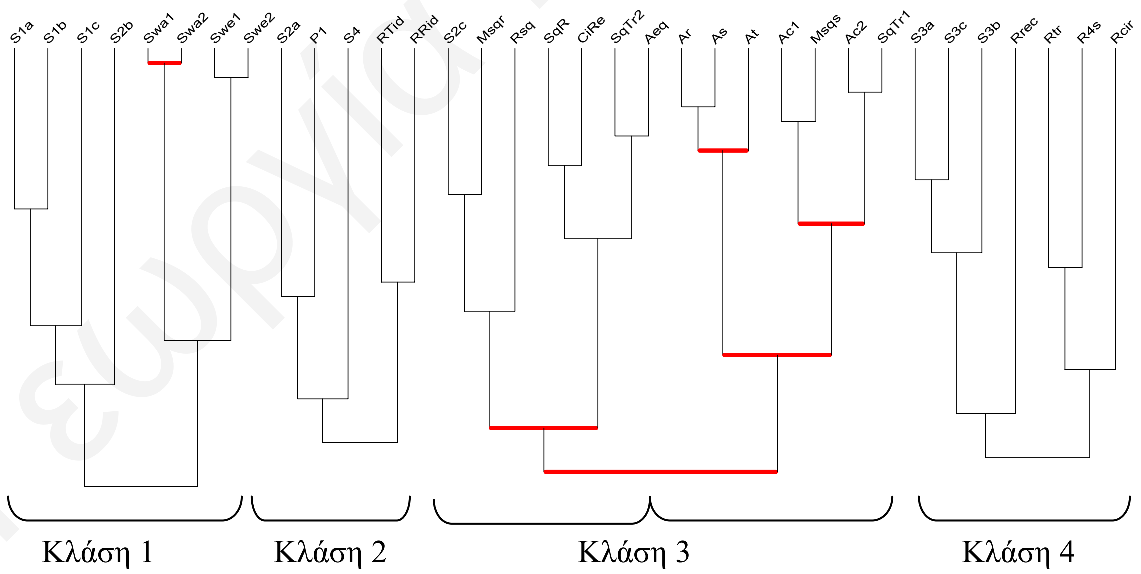
Στο διάγραμμα ομοιότητας για τους μαθητές Δ΄ δημοτικού που αφορά έργα χωρικής ικανότητας και έργα με δισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα (Διάγραμμα 8) η τελευταία κλάση έργων που παρουσιάζεται περιλαμβάνει τα τέσσερα χωρικά έργα που αφορούν την ικανότητα συντονισμού των προοπτικών (Swa1, Swa2, Swe1, Swe2). Τα έργα αυτά δεν συνδέονται ούτε με οποιαδήποτε άλλα έργα χωρικής ικανότητας ούτε με γεωμετρικά έργα. Στο διάγραμμα αυτό μία ακόμη κλάση έργων περιλαμβάνει μόνο έργα χωρικής ικανότητας (με την εξαίρεση του έργου R4s), τα οποία αναφέρονται στην ικανότητα περιστροφής τρισδιάστατων αντικειμένων (S2a, S2b) και δισδιάστατων σχημάτων (S3a, S3b, S3c, S4). Από την άλλη εμφανίζονται κλάσεις έργων στις οποίες παρουσιάζονται μόνο γεωμετρικά έργα.



Διάγραμμα 8. Διάγραμμα ομοιότητας για έργα χωρικής ικανότητας και έργα που αφορούν γεωμετρικά σχήματα δύο διαστάσεων (Δ΄ δημοτικού)

Μόνο τέσσερα από τα έργα χωρικής ικανότητας έχουν αντιμετωπιστεί από τους μαθητές της Δ΄ δημοτικού με τρόπο παρόμοιο με γεωμετρικά έργα, όπως προκύπτει από τον τρόπο που έχουν ομαδοποιηθεί με έργα που αφορούσαν γεωμετρικά σχήματα. Συγκεκριμένα, τα έργα που αφορούσαν την ικανότητα χειρισμού εικόνων, τα οποία εξέταζαν, δηλαδή, την ικανότητα των μαθητών να φανταστούν το σχήμα που προκύπτει από τη δίπλωση δεδομένων δισδιάστατων σχημάτων (S1a, S1b, S1c) ομαδοποιήθηκαν μαζί με τα έργα εύρεσης εμβαδού. Ενδεχομένως ένας τρόπος αντιμετώπισης των συγκεκριμένων χωρικών έργων από τους νεαρούς μαθητές είναι η επικέντρωση της προσοχής στην επιφάνεια του αρχικού σχήματος και την επιφάνεια του τελικού διπλωμένου σχήματος. Επίσης το έργο S2c διαφοροποιείται ως προς την αντιμετώπισή του από τους μαθητές από τα υπόλοιπα χωρικά έργα και εμφανίζεται στην ομάδα των έργων επίλυσης γεωμετρικού προβλήματος.

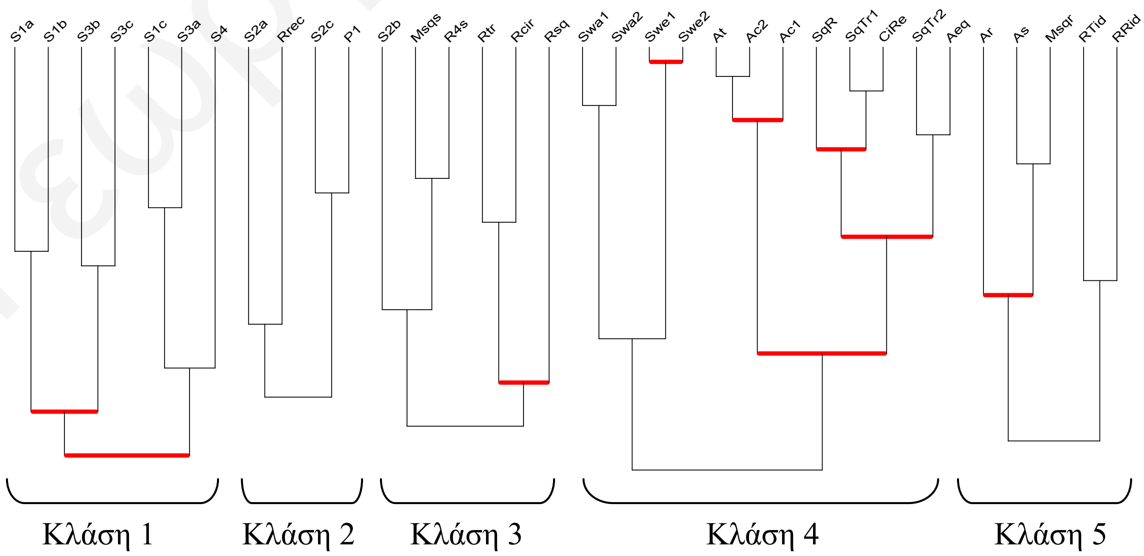
Στην περίπτωση των απαντήσεων των μαθητών της Στ΄ δημοτικού, στο σχετικό διάγραμμα (Διάγραμμα 9) τα περισσότερα έργα χωρικής ικανότητας περιλαμβάνονται στην πρώτη κλάση που δεν σχετίζεται με οποιοδήποτε έργο γεωμετρίας. Πρόκειται για τα έργα συντονισμού των προοπτικών, τα έργα δίπλωσης και το έργο νοητικής περιστροφής S2b. Τα έργα S2a και S4 εμφανίζονται σε μια μικρή ομάδα με έργα αναγνώρισης σχημάτων σε πολύπλοκες γεωμετρικές μορφές, ενώ το έργο S2c παρουσιάζεται, όπως και στο Διάγραμμα 8, στην ομάδα που έχει δημιουργηθεί από έργα επίλυσης γεωμετρικού προβλήματος.



Διάγραμμα 9. Διάγραμμα ομοιότητας για έργα χωρικής ικανότητας και έργα που αφορούν γεωμετρικά σχήματα δύο διαστάσεων (Στ΄ δημοτικού)

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η τελευταία κλάση έργων του διαγράμματος 9, όπου τα τρία έργα περιστροφής δισδιάστατων σχημάτων (S3a, S3b, S3c) εμφανίζονται με τα έργα αναγνώρισης γεωμετρικών σχημάτων, γεγονός που υποδηλώνει παρόμοιο τρόπο αντιμετώπισης των έργων αυτών από τους μαθητές. Είναι πιθανό κατά την προσέγγιση των συγκεκριμένων έργων περιστροφής οι μαθητές να προσπαθούν να εντοπίσουν την ορθή απάντηση επικεντρώνοντας την προσοχή τους κυρίως στο σχήμα της εικόνας που περιστρεφόταν.

Με βάση τις απαντήσεις των μαθητών της Β΄ γυμνασίου στα έργα χωρικής ικανότητας και στα έργα που αφορούσαν γεωμετρικά σχήματα δύο διαστάσεων τα έργα αυτά κατανεμήθηκαν στο διάγραμμα ομοιότητας σε πέντε περιοχές (Διάγραμμα 10). Στην πρώτη κλάση εμφανίζονται μόνο έργα χωρικής ικανότητας, ενώ στην τελευταία περιοχή εμφανίζονται μόνο έργα που αφορούν επίπεδα σχήματα. Το μεγαλύτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η συμπερίληψη έργων χωρικής ικανότητας και χειρισμού επίπεδων σχημάτων στην τέταρτη περιοχή του διαγράμματος ομοιότητας. Συγκεκριμένα, τα έργα που εξετάζουν την ικανότητα των μαθητών για συντονισμό των προοπτικών σχημάτισαν μια υποομάδα, η οποία συνδέεται με την υποομάδα που αποτελείται από τα έργα που απαιτούν γεωμετρικό συλλογισμό κατά το χειρισμό επίπεδων σχημάτων. Το γεγονός ότι οι δύο αυτές κατηγορίες έργων εμφανίστηκαν στην ίδια περιοχή του διαγράμματος ομοιότητας αποτελεί μια ένδειξη ότι οι μαθητές της Β΄ γυμνασίου τα αντιμετώπισαν με παρόμοιο τρόπο, ενεργοποιώντας ενδεχομένως παρόμοιες διαδικασίες. Η βασική ομοιότητα που εντοπίζεται είναι ότι τόσο τα συγκεκριμένα χωρικά έργα όσο και τα έργα επίλυσης γεωμετρικού προβλήματος που αποτελούν τη συγκεκριμένη κλάση είναι έργα που δεν μπορούν να αντιμετωπιστούν ως έργα ρουτίνας, αλλά απαιτούν την ενεργοποίηση διαδικασιών συλλογισμού και το συνδυασμό γνώσεων και γνωστικών ενεργειών.



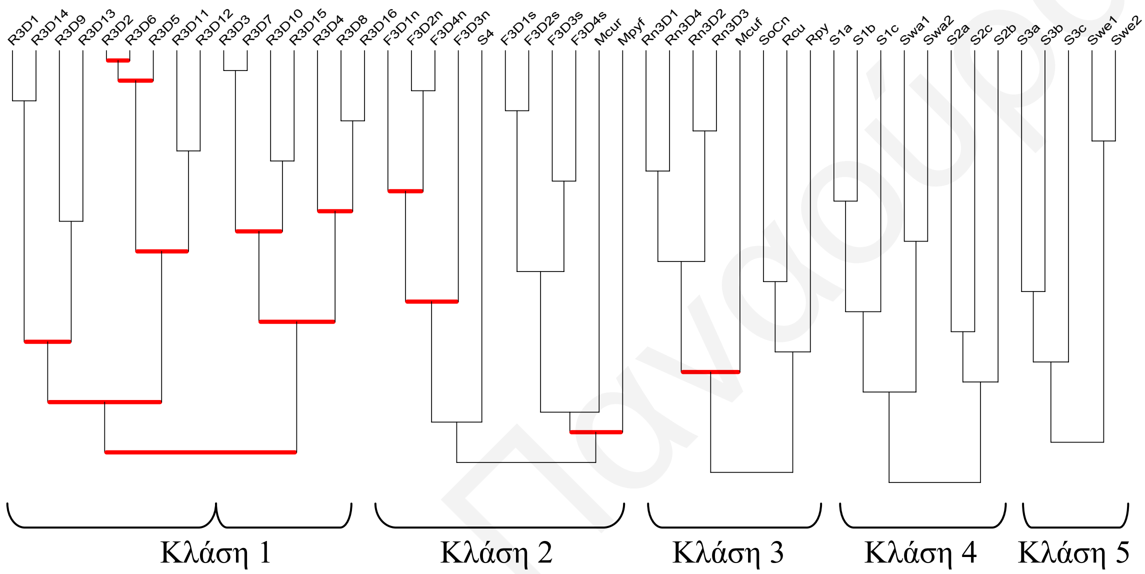
Διάγραμμα 10. Διάγραμμα ομοιότητας για έργα χωρικής ικανότητας και έργα που αφορούν γεωμετρικά σχήματα δύο διαστάσεων (Β΄ γυμνασίου)

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να σημειωθεί ότι στη δεύτερη και την τρίτη περιοχή του διαγράμματος ομοιότητας κάποια χωρικά έργα έχουν ομαδοποιηθεί με έργα που αφορούσαν επίπεδα γεωμετρικά σχήματα. Πρόκειται για τα έργα περιστροφής στερεών (S2a, S2b, S2c), τα οποία κατανεμήθηκαν στις δύο αυτές περιοχές με έργα αναγνώρισης γεωμετρικών σχημάτων. Μια πιθανή ερμηνεία είναι ότι οι μαθητές του γυμνασίου ενεργοποίησαν κατά την αναγνώριση διαφορετικών αναπαραστάσεων δισδιάστατων σχημάτων σε μη πρωτοτυπικές θέσεις διαδικασίες παρόμοιες με αυτές που απαιτούνται για τις νοητικές περιστροφές των συγκεκριμένων εικόνων στερεών.

Από τη μελέτη των τριών διαγραμμάτων που αφορούν έργα χωρικής ικανότητας και έργα με γεωμετρικά σχήματα δύο διαστάσεων είναι ευδιάκριτο το φαινόμενο της στεγανοποίησης στον τρόπο επίλυσης των μαθητών ανάμεσα στα έργα χωρικής ικανότητας και στα γεωμετρικά έργα με σχήματα δύο διαστάσεων. Τα χωρικά έργα έχουν στην πλειοψηφία τους ομαδοποιηθεί σε ξεχωριστές κλάσεις από τα γεωμετρικά έργα, γεγονός που φανερώνει ότι οι μαθητές και των τριών τάξεων γενικά έχουν αντιμετωπίσει με διαφορετικό τρόπο τα διάφορα έργα που αναφέρονταν σε γεωμετρικά σχήματα δύο διαστάσεων από τα έργα χωρικής ικανότητας. Υπάρχουν, όμως και στις τρεις τάξεις περιπτώσεις μερικών χωρικών έργων που, σύμφωνα με τα αντίστοιχα διαγράμματα ομοιότητας, έχουν αντιμετωπιστεί από τους μαθητές με τρόπο παρόμοιο με συγκεκριμένα γεωμετρικά έργα. Το γεγονός αυτό υποδηλώνει την ομοιότητα των διεργασιών που οι μαθητές ενεργοποιούσαν κατά την επίλυση των έργων αυτών. Συγκεκριμένα, οι μαθητές της Δ΄ τάξης αντιμετώπισαν τα έργα δίπλωσης σχημάτων και έργα εύρεσης εμβαδού επίπεδων σχημάτων με τρόπο παρόμοιο. Όπως έχει αναφερθεί, ενδεχομένως ένας τρόπος αντιμετώπισης των συγκεκριμένων χωρικών έργων είναι η επικέντρωση της προσοχής στην επιφάνεια του αρχικού σχήματος και την επιφάνεια του τελικού διπλωμένου σχήματος. Στην περίπτωση των μαθητών της Β΄ γυμνασίου τα έργα που εξετάζουν την ικανότητα των μαθητών για συντονισμό των προοπτικών σχηματίζουν μια υποομάδα, η οποία συνδέεται με την υποομάδα που αποτελούνται από τα έργα που απαιτούν γεωμετρικό συλλογισμό κατά το χειρισμό επίπεδων σχημάτων. Η παρόμοια αντιμετώπιση των δύο αυτών κατηγοριών φανερώνει την ενεργοποίηση διαδικασιών συλλογισμού και το συνδυασμό γνώσεων και γνωστικών ενεργειών για την επίλυσή τους.

Χωρική Ικανότητα και Έργα Χειρισμού Γεωμετρικών Σχημάτων Τριών Διαστάσεων

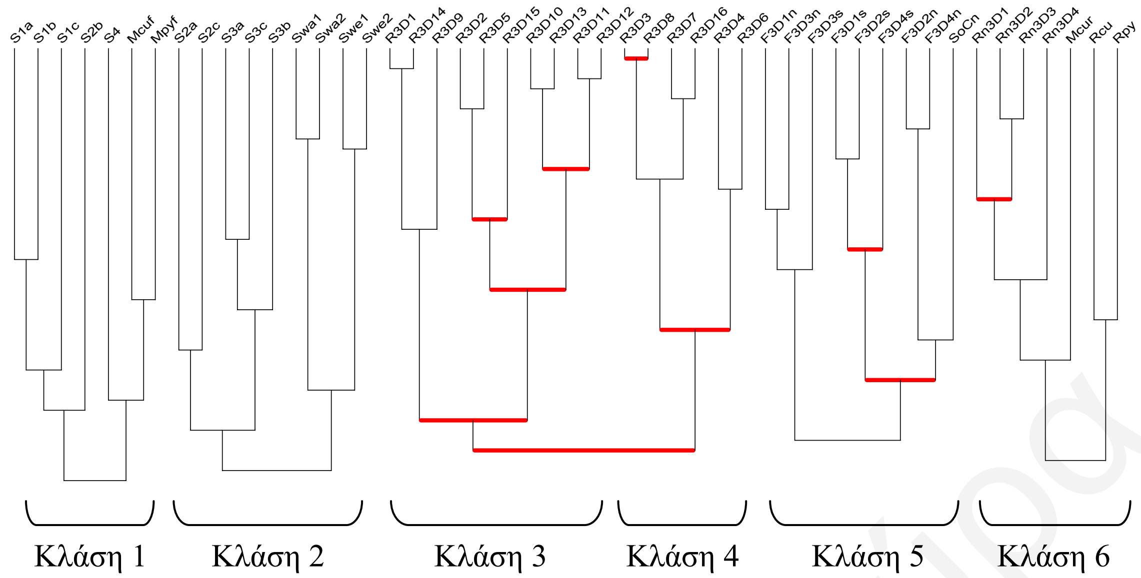
Στο διάγραμμα ομοιότητας που αφορά έργα χωρικής ικανότητας και γεωμετρικά έργα με στερεά για την περίπτωση των μαθητών της Δ΄ τάξης (Διάγραμμα 11) είναι ευδιάκριτο το φαινόμενο της στεγανοποίησης ανάμεσα στις δύο κατηγορίες έργων. Η κατανομή των απαντήσεων των μαθητών στα χωρικά και τα γεωμετρικά έργα σε διαφορετικές κλάσεις καταδεικνύει ότι οι δύο αυτές κατηγορίες έργων έχουν αντιμετωπιστεί από τους μαθητές της Δ΄ δημοτικού με διαφορετικό τρόπο. Όλα τα έργα χωρικής ικανότητας ομαδοποιήθηκαν σε μια κλάση, ενώ τα έργα που αφορούν γεωμετρικά σχήματα τριών διαστάσεων εμφανίστηκαν σε τρεις άλλες κλάσεις. Εξαίρεση αποτελεί το έργο S4, το οποίο παρουσιάστηκε στην ομάδα των έργων που αφορούσαν τις έδρες στερεών σχημάτων.



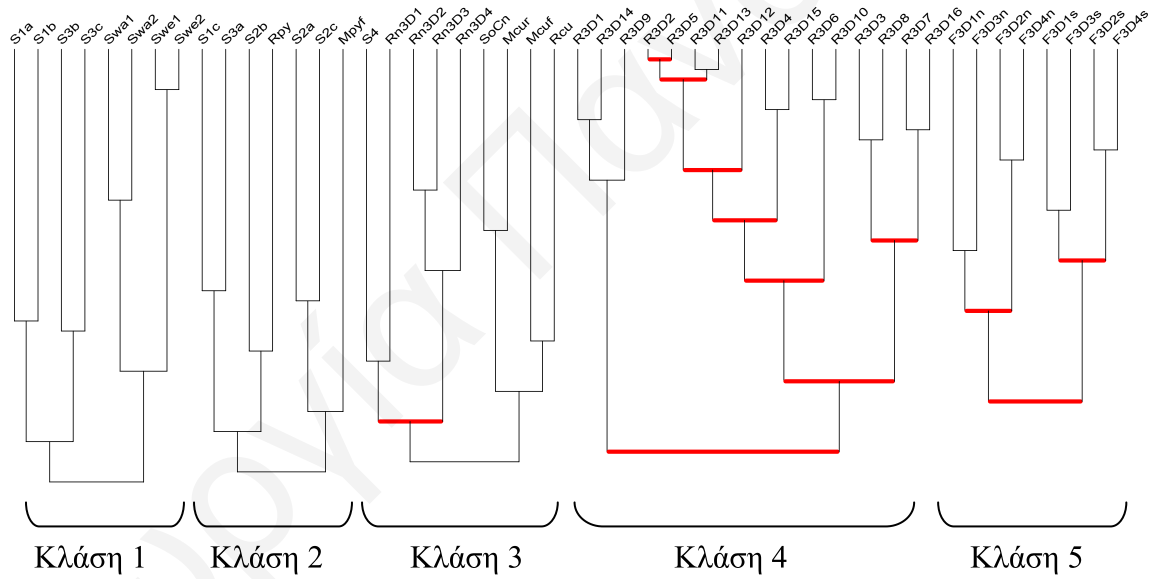
Διάγραμμα 11. Διάγραμμα ομοιότητας για έργα χωρικής ικανότητας και έργα που αφορούν γεωμετρικά σχήματα τριών διαστάσεων (Δ΄ δημοτικού)

Όπως και στην περίπτωση των μαθητών της Δ΄ δημοτικού, οι μαθητές της Στ΄ δημοτικού φαίνεται να έχουν αντιμετωπίσει τα έργα χωρικής ικανότητας με διαφορετικό τρόπο από τα έργα που αφορούν γεωμετρικά στερεά. Στο σχετικό διάγραμμα ομοιότητας (Διάγραμμα 12) τα έργα που αναφέρονται σε τρισδιάστατα σχήματα (με εξαίρεση δύο έργα πολλαπλής επιλογής για τις έδρες του κύβου και της πυραμίδας) έχουν σχηματίσει ξεχωριστές κατηγορίες από τα έργα χωρικής ικανότητας, οι οποίες δεν συνδέονται μεταξύ τους, καταδεικνύοντας και στην περίπτωση των μαθητών της Στ΄ δημοτικού την ύπαρξη του φαινομένου της στεγανοποίησης ανάμεσα στις δύο κατηγορίες έργων.

Παρόμοια εικόνα με ξεχωριστές κατηγορίες έργων χωρικής ικανότητας και έργων που αφορούν γεωμετρικά στερεά παρουσιάζεται και στο Διάγραμμα 13, το οποίο βασίζεται στις απαντήσεις των μαθητών της Β΄ γυμνασίου στα αντίστοιχα έργα. Εξαίρεση εδώ αποτελούν δύο έργα που αναφέρονται σε πυραμίδες (αναγνώριση και αριθμός εδρών), τα οποία ομαδοποιήθηκαν με χωρικά έργα περιστροφής.



Διάγραμμα 12. Διάγραμμα ομοιότητας για έργα χωρικής ικανότητας και έργα που αφορούν γεωμετρικά σχήματα τριών διαστάσεων (Στ΄ δημοτικού)

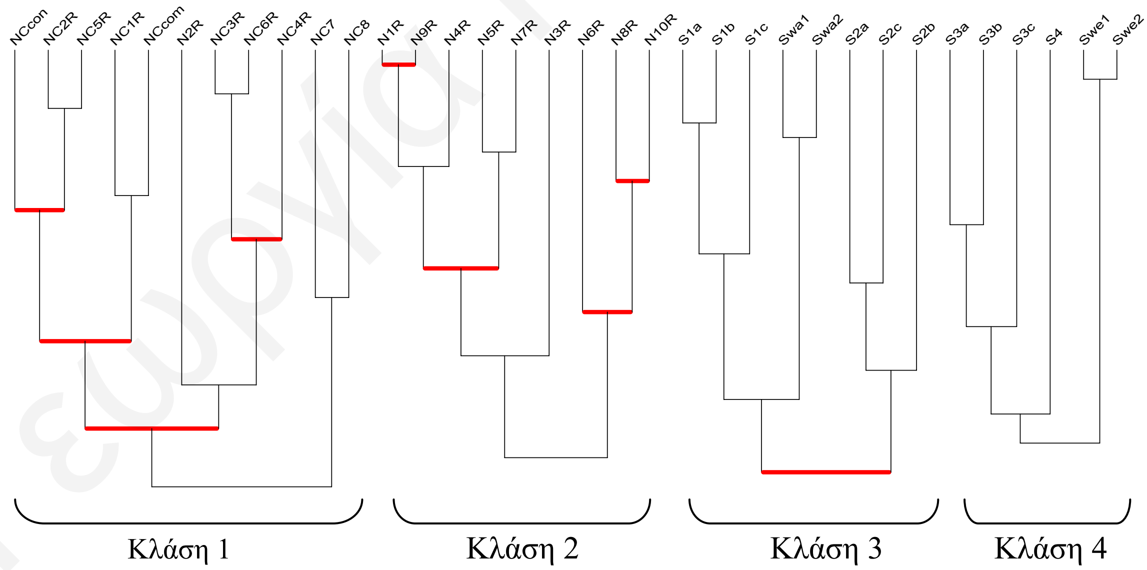


Διάγραμμα 13. Διάγραμμα ομοιότητας για έργα χωρικής ικανότητας και έργα που αφορούν γεωμετρικά σχήματα τριών διαστάσεων (Β΄ γυμνασίου)

Όπως προκύπτει από τη μελέτη και των τριών διαγραμμάτων που έχουν παρουσιαστεί παραπάνω, οι απαντήσεις των μαθητών και των τριών τάξεων στα έργα χωρικής ικανότητας και στα έργα που αφορούν χειρισμό γεωμετρικών στερεών καταδεικνύουν ότι έχουν αντιμετωπίσει τις δύο αυτές κατηγορίες έργων με διαφορετικό τρόπο. Είναι ευδιάκριτο και στις τρεις ηλικιακές ομάδες το φαινόμενο της στεγανοποίησης ανάμεσα στα έργα χωρικής ικανότητας και τα έργα χειρισμού γεωμετρικών σχημάτων τριών διαστάσεων. Η παρουσία του φαινομένου αυτού υποδηλώνει ότι οι διαδικασίες που ενεργοποιήθηκαν από τους μαθητές και των τριών τάξεων κατά την αντιμετώπιση έργων με τρισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα διαφέρουν από τις διαδικασίες που απαιτούνται για το χειρισμό των χωρικών έργων. Είναι αντιληπτό ότι τα έργα αναγνώρισης αναπαραστάσεων στερεών στηρίζονται ενδεχομένως σε μεγάλο βαθμό στην οπτική αντίληψη και την ανάκληση γνωστών γεωμετρικών εικόνων, για αυτό και δεν παρουσιάζουν ομοιότητα στην αντιμετώπιση με τα χωρικά έργα. Εφόσον, όμως, το ίδιο φαινόμενο παρατηρείται και στα έργα που απαιτούσαν ανάλυση των στερεών στα στοιχεία τους (έδρες, μονάδες κατασκευής), παρουσιάζεται μια ένδειξη για πιθανή αντιμετώπιση και αυτών των έργων με βάση και πάλι την οπτική αντίληψη ή την απλή ανάκληση γνωστικών μονάδων που οι μαθητές κατείχαν σχετικά με τα στοιχεία των υπό εξέταση στερεών.

Χωρική Ικανότητα και Έργα Χειρισμού Αναπτυγμάτων Στερεών

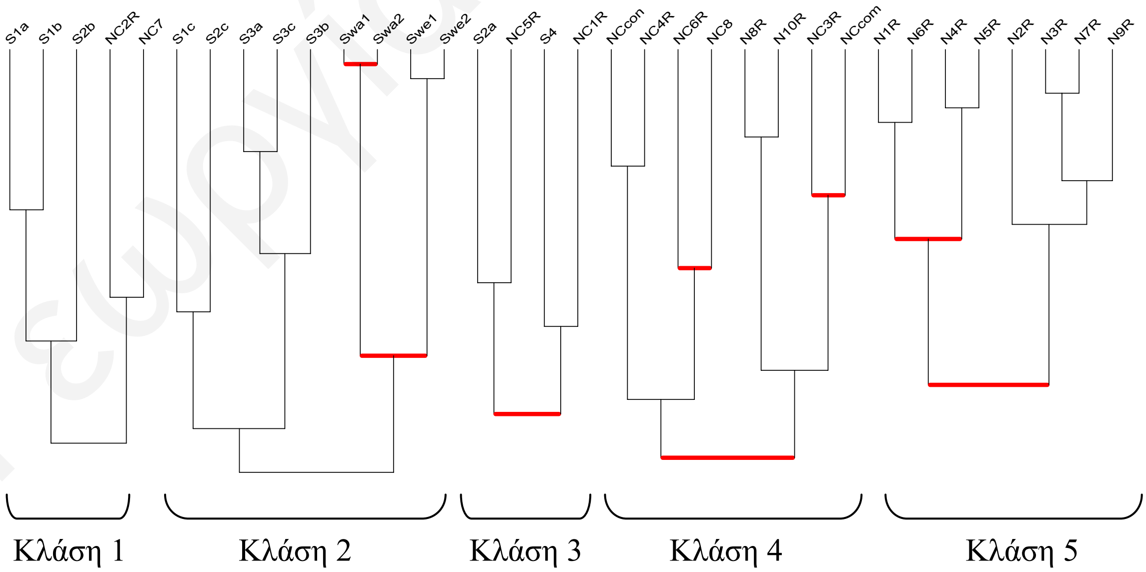
Το διάγραμμα ομοιότητας που αφορά την ομαδοποίηση των έργων χωρικής ικανότητας και των έργων που αναφέρονται σε αναπτύγματα γεωμετρικών στερεών στην περίπτωση των μαθητών της Δ΄ δημοτικού (Διάγραμμα 14) παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον.



Διάγραμμα 14. Διάγραμμα ομοιότητας για έργα χωρικής ικανότητας και έργα που αφορούν αναπτύγματα στερεών (Δ΄ δημοτικού)

Στο παραπάνω διάγραμμα εμφανίστηκαν τέσσερις κλάσεις έργων: στις δύο πρώτες περιλαμβάνονται έργα που αφορούν αναπτύγματα στερεών, ενώ στις δύο επόμενες έχουν ομαδοποιηθεί όλα τα έργα χωρικής ικανότητας. Το γεγονός ότι τα δύο είδη έργων ομαδοποιήθηκαν σε ξεχωριστές κλάσεις και ότι δεν υπάρχει σύνδεση ανάμεσα στις κλάσεις αυτές καταδεικνύει το φαινόμενο της στεγανοποίησης στον τρόπο επίλυσης των μαθητών ανάμεσα στις δύο κατηγορίες έργων, εφόσον οι μαθητές της Δ΄ δημοτικού έχουν αντιμετωπίσει τα έργα με αναπτύγματα με εντελώς διαφορετικό τρόπο από τα χωρικά έργα.

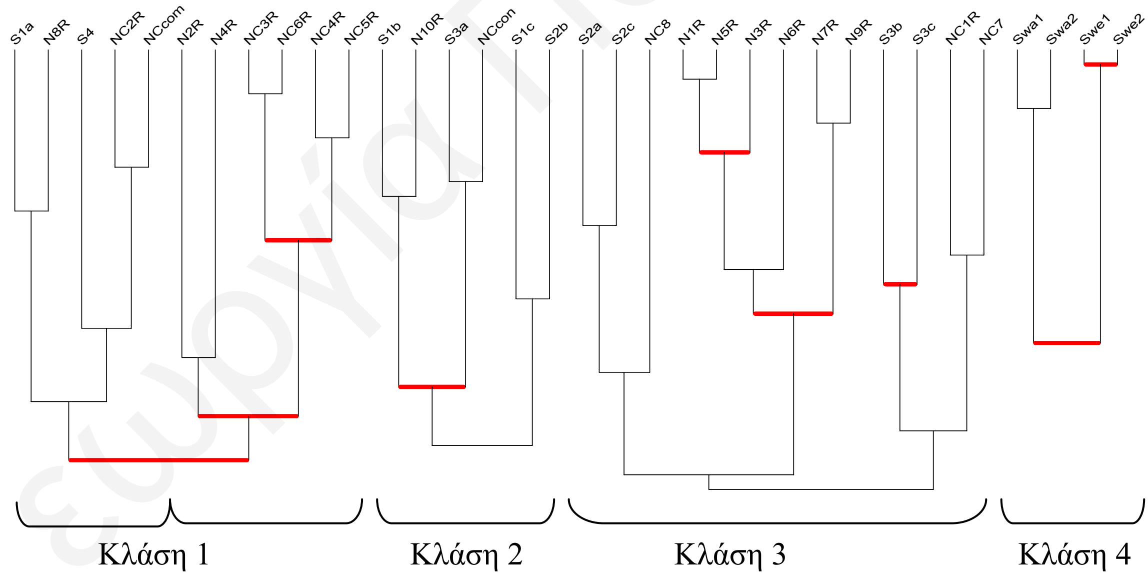
Το διάγραμμα ομοιότητας με έργα χωρικής ικανότητας και έργα που αφορούν αναπτύγματα στερεών που έχει προκύψει από τις απαντήσεις των μαθητών της Στ΄ δημοτικού παρουσιάζει πέντε ξεχωριστές ομάδες έργων (Διάγραμμα 15). Στις δύο τελευταίες περιοχές του Διαγράμματος 15 έχουν ομαδοποιηθεί τα έργα που αφορούν αναπτύγματα στερεών (στη μια ομάδα εμφανίζονται έργα με αναπτύγματα κύβου και στην άλλη ομάδα έργα για αντιστοίχηση διάφορων στερεών με τα αναπτύγματά τους), ενώ στη δεύτερη περιοχή του διαγράμματος περιλαμβάνονται μόνο χωρικά έργα. Κάποια ανάμειξη χωρικών έργων και έργων με αναπτύγματα εμφανίζεται στην τρίτη και την τέταρτη περιοχή του διαγράμματος. Συγκεκριμένα, τα τέσσερα έργα αναπτυγμάτων που στο Διάγραμμα 36 ομαδοποιήθηκαν σε ξεχωριστή κλάση ομαδοποιούνται εδώ σε μικρές υποομάδες μαζί με χωρικά έργα. Πρόκειται για τα έργα NC2R και NC7 που εμφανίζονται με τα έργα δίπλωσης σχημάτων (S1a S1b S2b), ενώ τα έργα NC5R και NC1R είναι στην ίδια ομάδα με τα χωρικά S2a και S4, φανερώνοντας ότι οι μαθητές τα έχουν αντιμετωπίσει ενεργοποιώντας ίδιες διεργασίες.



Διάγραμμα 15. Διάγραμμα ομοιότητας για έργα χωρικής ικανότητας και έργα που αφορούν αναπτύγματα στερεών (Στ΄ δημοτικού)

Τέλος, στο διάγραμμα ομοιότητας με έργα χειρισμού αναπτυγμάτων στερεών και έργα χωρικής ικανότητας στην περίπτωση των μαθητών της Β΄ γυμνασίου (Διάγραμμα 16) δημιουργήθηκαν τέσσερις περιοχές. Εκτός από την τελευταία περιοχή, όπου εμφανίστηκαν μόνα τους τα τέσσερα έργα που αφορούν την ικανότητα συντονισμού των προοπτικών, στις υπόλοιπες τρεις περιοχές παρουσιάστηκαν συνδυασμοί έργων χωρικής ικανότητας και έργων που αναφέρονται σε αναπτύγματα στερεών.

Ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές των τριών τάξεων έχουν αντιμετωπίσει τα έργα χωρικής ικανότητας σε σχέση με τα έργα χειρισμού αναπτυγμάτων γεωμετρικών στερεών παρουσιάζει ένα είδος διαβάθμισης ως προς την ηλικία τους. Συγκεκριμένα, είναι ευδιάκριτο το φαινόμενο της στεγανοποίησης στον τρόπο επίλυσης των μαθητών της Δ΄ δημοτικού ανάμεσα στα χωρικά έργα και τα έργα με αναπτύγματα γεωμετρικών στερεών. Λιγότερο έντονο παρουσιάζεται το ίδιο φαινόμενο ανάμεσα στην προσέγγιση των μαθητών της Στ΄ δημοτικού στις δύο κατηγορίες έργων. Αντίθετα, στην περίπτωση των μαθητών Β΄ γυμνασίου παρουσιάστηκε το φαινόμενο της ανάμειξης χωρικών έργων και έργων με αναπτύγματα, γεγονός που υποδηλώνει ενεργοποίηση παρόμοιων διεργασιών κατά την αντιμετώπισή τους.



Διάγραμμα 16. Διάγραμμα ομοιότητας για έργα χωρικής ικανότητας και έργα που αφορούν αναπτύγματα στερεών (Β΄ γυμνασίου)

Η ίδια η έννοια και ο ορισμός του αναπτύγματος παραπέμπει σε ενεργοποίηση διεργασιών που αφορούν χειρισμό νοητικών εικόνων, δίπλωση σχημάτων, νοητικές περιστροφές. Είναι λογικό να ανέμενε κανείς ότι τα έργα που αφορούσαν χειρισμό αναπτυγμάτων θα παρουσίαζαν μεγαλύτερο αριθμό σχέσεων ομοιότητας με τα χωρικά έργα που χρησιμοποιήθηκαν και εξέταζαν ικανότητες όπως οι νοητικές περιστροφές και ο χειρισμός νοητικών εικόνων. Η εμπειρική τεκμηρίωση ενός τέτοιου φαινομένου έγινε με πιο ξεκάθαρο τρόπο στην περίπτωση των μεγαλύτερων σε ηλικία μαθητών, της Β΄ γυμνασίου, όπου, σύμφωνα και με τα προηγούμενα αποτελέσματα, η πλειοψηφία των μαθητών βρίσκεται σε υψηλά επίπεδα χωρικής ικανότητας. Η απουσία σχέσεων ομοιότητας ανάμεσα στα έργα χωρικών ικανοτήτων και στα έργα με αναπτύγματα στερεών στην περίπτωση των μαθητών της Δ΄ δημοτικού οδηγεί στην υπόθεση ότι οι μικρότεροι μαθητές, οι οποίοι δεν φτάνουν ακόμα σε υψηλά επίπεδα χωρικής ικανότητας, αντιμετωπίζουν ενδεχομένως τα αναπτύγματα ενεργοποιώντας άλλες διαδικασίες από το χειρισμό νοητικών εικόνων και τις νοητικές περιστροφές. Πιθανό κάποιοι από τους μαθητές αυτούς να χειρίζονται τα αναπτύγματα ως εικόνες, ως ολότητες βασισμένοι σε πρωτοτυπικές μορφές, ενώ άλλοι μπορεί απλά να λαμβάνουν υπόψη των αριθμό ή και το σχήμα των εδρών των στερεών.

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα από την εξέταση των σχέσεων ομοιότητας που έγινε ανάμεσα στα έργα χωρικών ικανοτήτων και τις τρεις κατηγορίες γεωμετρικών έργων που περιλαμβάνονταν στο δοκίμιο γεωμετρίας σημειώνονται οι ακόλουθες παρατηρήσεις. Είναι ευδιάκριτο στην περίπτωση και των τριών ηλικιακών ομάδων της έρευνας το φαινόμενο της στεγανοποίησης ανάμεσα στα χωρικά έργα και τα έργα χειρισμού τρισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων. Το ίδιο φαινόμενο εμφανίστηκε στην περίπτωση των μαθητών της Δ΄ δημοτικού τόσο ανάμεσα στα χωρικά έργα και τα έργα χειρισμού γεωμετρικών σχημάτων δύο διαστάσεων όσο και ανάμεσα στα χωρικά έργα και τα έργα με αναπτύγματα γεωμετρικών στερεών. Αντίθετα, το φαινόμενο αυτό αποδυναμώνεται στους μεγαλύτερους μαθητές. Στην εξέταση των σχέσεων ανάμεσα στα έργα χωρικής ικανότητας και γεωμετρικών έργων με δισδιάστατα σχήματα εντοπίστηκαν στους μαθητές της Β΄ γυμνασίου σχέσεις ομοιότητας ανάμεσα στα έργα συντονισμού των προοπτικών και τα έργα που απαιτούν γεωμετρικό συλλογισμό. Εμφανείς επίσης ήταν στους μεγαλύτερους μαθητές οι σχέσεις ομοιότητας ανάμεσα στα χωρικά έργα και τα έργα χειρισμού αναπτυγμάτων, γεγονός που υπογραμμίζει την αντιμετώπιση των δύο αυτών κατηγοριών έργων με ενεργοποίηση παρόμοιων διεργασιών.

Εισαγωγή Χωρικών Έργων ως Συμπληρωματικών Μεταβλητών στην Ανάλυση Ομοιότητας Γεωμετρικών Έργων

Μετά από τις αναλύσεις ομοιότητας των έργων χωρικής ικανότητας με κάθε κατηγορία γεωμετρικών έργων έγινε ένα επιπλέον βήμα εισάγοντας στις αναλύσεις όλες τις μεταβλητές που αφορούσαν τα χωρικά έργα που χορηγήθηκαν ως συμπληρωματικές μεταβλητές. Η διαδικασία εισαγωγής συμπληρωματικών μεταβλητών κατά την ανάλυση ομοιότητας επιτρέπει στον ερευνητή να συλλέξει σημαντικές πληροφορίες για τον τρόπο με τον οποίο τα έργα κατανέμονται σε συγκεκριμένες ομάδες. Με τις πληροφορίες αυτές μπορεί, δηλαδή, ο ερευνητής να διερευνήσει ποιες ομάδες ατόμων που έλαβαν μέρος στην έρευνα ευθύνονται για τη δημιουργία συγκεκριμένων ομάδων έργων στα διαγράμματα ομοιότητας που έχουν προκύψει. Στην παρούσα εργασία η διαδικασία εισαγωγής των χωρικών έργων ως συμπληρωματικές μεταβλητές στις αναλύσεις ομοιότητας έγινε στα πλαίσια της γενικότερης προσπάθειας για διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο ενδεχομένως συγκεκριμένα χωρικά έργα σχετίζονται με κάποια έργα γεωμετρίας. Πιο συγκεκριμένα, όμως, η συγκεκριμένη διαδικασία αποσκοπούσε στη συλλογή πληροφοριών γύρω από τους μαθητές οι οποίοι, με κριτήριο την επίδοση στα χωρικά έργα, έχουν συμβάλει στην ομαδοποίηση των έργων που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο.

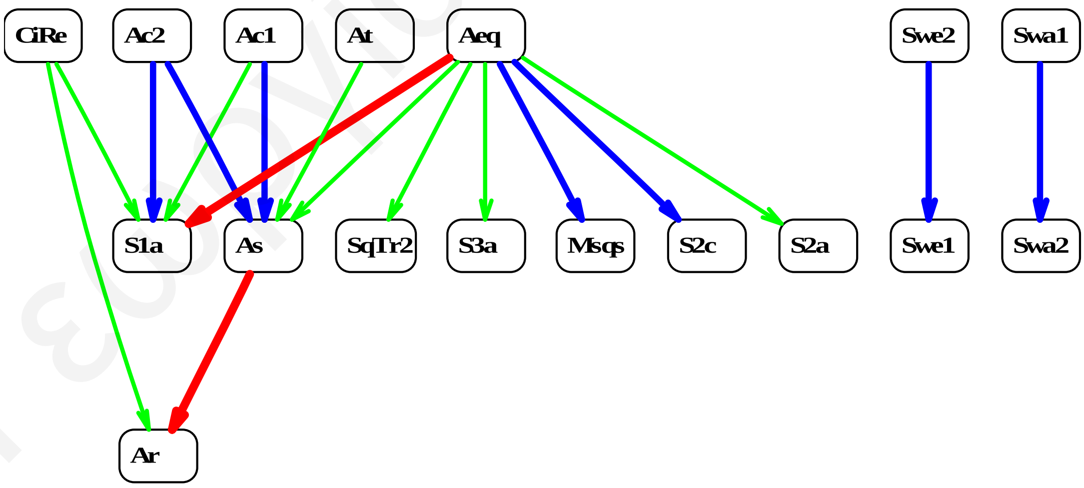
Όσον αφορά την κατανομή των απαντήσεων στα έργα χειρισμού δισδιάστατων σχημάτων που έχει παρουσιαστεί, από τα αποτελέσματα των αναλύσεων μετά την εισαγωγή των συμπληρωματικών μεταβλητών προκύπτει ότι στην περίπτωση και των τριών ομάδων του δείγματος (τρεις διαφορετικές τάξεις) οι μαθητές που έχουν επιτύχει στο έργο S3c (έργο νοητικής περιστροφής δισδιάστατου σχήματος) ήταν υπεύθυνοι για την ομαδοποίηση σε μια κατηγορία των έργων που απαιτούσαν γεωμετρικό συλλογισμό ($p=0.0184$ για τους μαθητές Δ΄ δημοτικού, $p=0.0326$ για τους μαθητές της Στ΄ δημοτικού και $p=0.0335$ για τους μαθητές Β΄ γυμνασίου). Η ίδια παρατήρηση ισχύει για τους μαθητές Στ΄ δημοτικού και Β΄ γυμνασίου που έλυσαν με επιτυχία το έργο S1b (έργο δίπλωσης), με πιθανότητα $p=0.0481$ για τους μαθητές της Στ΄ δημοτικού και $p=0.0117$ για τους μαθητές της Β΄ γυμνασίου). Με άλλα λόγια, οι μαθητές που έχουν επιτύχει στα δύο συγκεκριμένα χωρικά έργα έχουν αντιμετωπίσει τα έργα γεωμετρίας που απαιτούσαν κάποιο είδος γεωμετρικού συλλογισμού με παρόμοιο τρόπο. Δηλαδή, οι μαθητές αυτοί αντιλαμβάνονται, για παράδειγμα, ότι τα συγκεκριμένα γεωμετρικά έργα δεν είναι έργα ρουτίνας που μπορούν να επιλυθούν απλά και μόνο με το συνδυασμό των δεδομένων που παρουσιάζονται, αλλά πρόκειται για έργα τα οποία εμπεριέχουν κάποιο είδος μετασχηματισμού (για παράδειγμα, περιστροφή ενός υποσχήματος που υπάρχει στη γεωμετρική εικόνα που παρουσιάζεται).

Σχέσεις Συνεπαγωγής Ανάμεσα στα Χωρικά και τα Γεωμετρικά Έργα

Ακολούθως παρουσιάζονται για καθεμιά από τις τρεις τάξεις που έλαβαν μέρος στην έρευνα τα συνεπαγωγικά διαγράμματα που περιλαμβάνουν τα έργα χωρικής ικανότητας και τα έργα που αναφέρονται (α) σε γεωμετρικά σχήματα δύο διαστάσεων, (β) σε γεωμετρικά στερεά και (γ) σε αναπτύγματα στερεών. Στόχος των συναπαγωγικών αναλύσεων για τα συγκεκριμένα έργα ήταν ο εντοπισμός πιθανών συνεπαγωγικών σχέσεων ανάμεσά τους, οι οποίες δηλαδή να καταδεικνύουν ότι επιτυχία σε κάποια έργα (π.χ. χωρικά) συνεπάγεται επιτυχία σε ορισμένα άλλα έργα (π.χ. γεωμετρικά). Για τις συνεπαγωγικές αναλύσεις εφαρμόστηκε ο κανόνας της εντροπείας (εφόσον ο μεγάλος αριθμός του δείγματος το επέτρεπε), γεγονός που επιτρέπει την εξαγωγή συμπερασμάτων και σε σχέση με την αποτυχία σε κάποια έργα η οποία συνεπάγεται αποτυχία σε ορισμένα άλλα έργα. Σημειώνεται ότι δεν συζητούνται στο υποκεφάλαιο αυτό οι επιμέρους συνεπαγωγικές σχέσεις μεταξύ των γεωμετρικών έργων κάθε κατηγορίας, γιατί αυτές θα αναλυθούν στο επόμενο υποκεφάλαιο. Εδώ επισημαίνονται και συζητούνται οι σχέσεις που εμφανίστηκαν ανάμεσα στα έργα χωρικών ικανοτήτων και τα γεωμετρικά έργα.

Χωρική Ικανότητα και Έργα Χειρισμού Δισδιάστατων Γεωμετρικών Σχημάτων

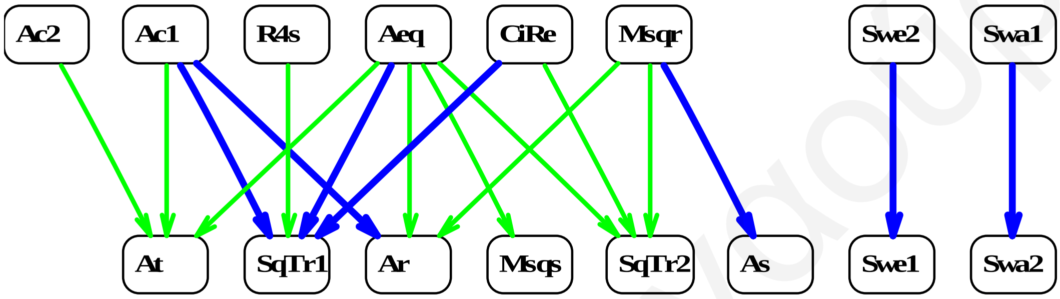
Στο συνεπαγαγωγικό διάγραμμα που προέκυψε από τις απαντήσεις των μαθητών της Δ΄ τάξης δημοτικού στα έργα χωρικών ικανοτήτων και στα έργα γεωμετρίας με δισδιάστατα σχήματα αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι από τα χωρικά έργα εμφανίζονται (Διάγραμμα 17) μόνο τα τέσσερα έργα που αφορούν την ικανότητα συντονισμού των προοπτικών.



Διάγραμμα 17. Συνεπαγωγικό διάγραμμα για έργα που αφορούν χωρική ικανότητα και έργα με γεωμετρικά σχήματα δύο διαστάσεων (Δ΄ δημοτικού)

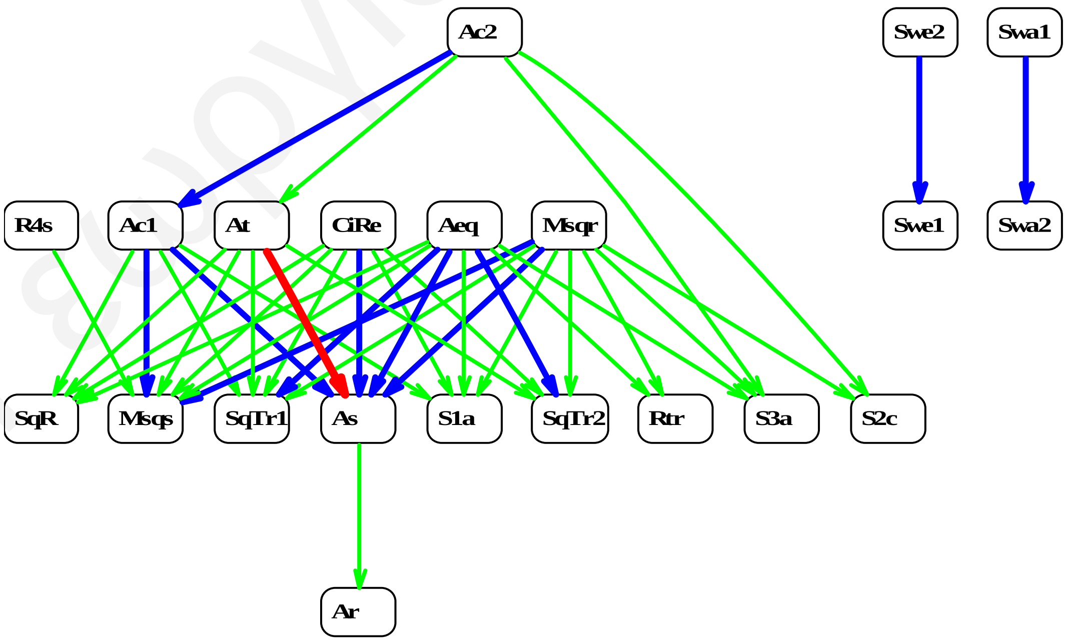
Τα προαναφερθέντα έργα έχουν παρουσιαστεί ανά ζεύγη σε δύο ξεχωριστές συνεπαγωγικές αλυσίδες (Swe2 → Swe1, Swa1 → Swa2), οι οποίες δεν συνδέονται καθόλου με τα έργα χειρισμού γεωμετρικών σχημάτων δύο διαστάσεων. Το γεγονός αυτό της απουσίας συνεπαγωγικών σχέσεων ανάμεσα στις δύο κατηγορίες έργων υποδηλώνει ότι ούτε η επιτυχία στα χωρικά έργα συνδέεται με επιτυχία στα έργα γεωμετρίας με δισδιάστατα σχήματα, αλλά ούτε και το αντίστροφο ισχύει.

Παρόμοια εικόνα παρουσιάστηκε και στην περίπτωση του συνεπαγωγικού διαγράμματος για τις απαντήσεις των μαθητών της Β΄ γυμνασίου στα έργα χωρικής ικανότητας και τα έργα με γεωμετρικά σχήματα δύο διαστάσεων (Διάγραμμα 18). Δηλαδή, εμφανίστηκαν μόνο τα τέσσερα χωρικά έργα που αναφέρονται στην ικανότητα συντονισμού των προοπτικών, χωρίς καμιά σύνδεση με τα γεωμετρικά έργα.



Διάγραμμα 18. Συνεπαγωγικό διάγραμμα για έργα που αφορούν χωρική ικανότητα και έργα με γεωμετρικά σχήματα δύο διαστάσεων (Β΄ γυμνασίου)

Η κατάσταση διαφοροποιείται στην περίπτωση του αντίστοιχου διαγράμματος που προέκυψε από τις απαντήσεις των μαθητών της Στ΄ δημοτικού (Διάγραμμα 19).

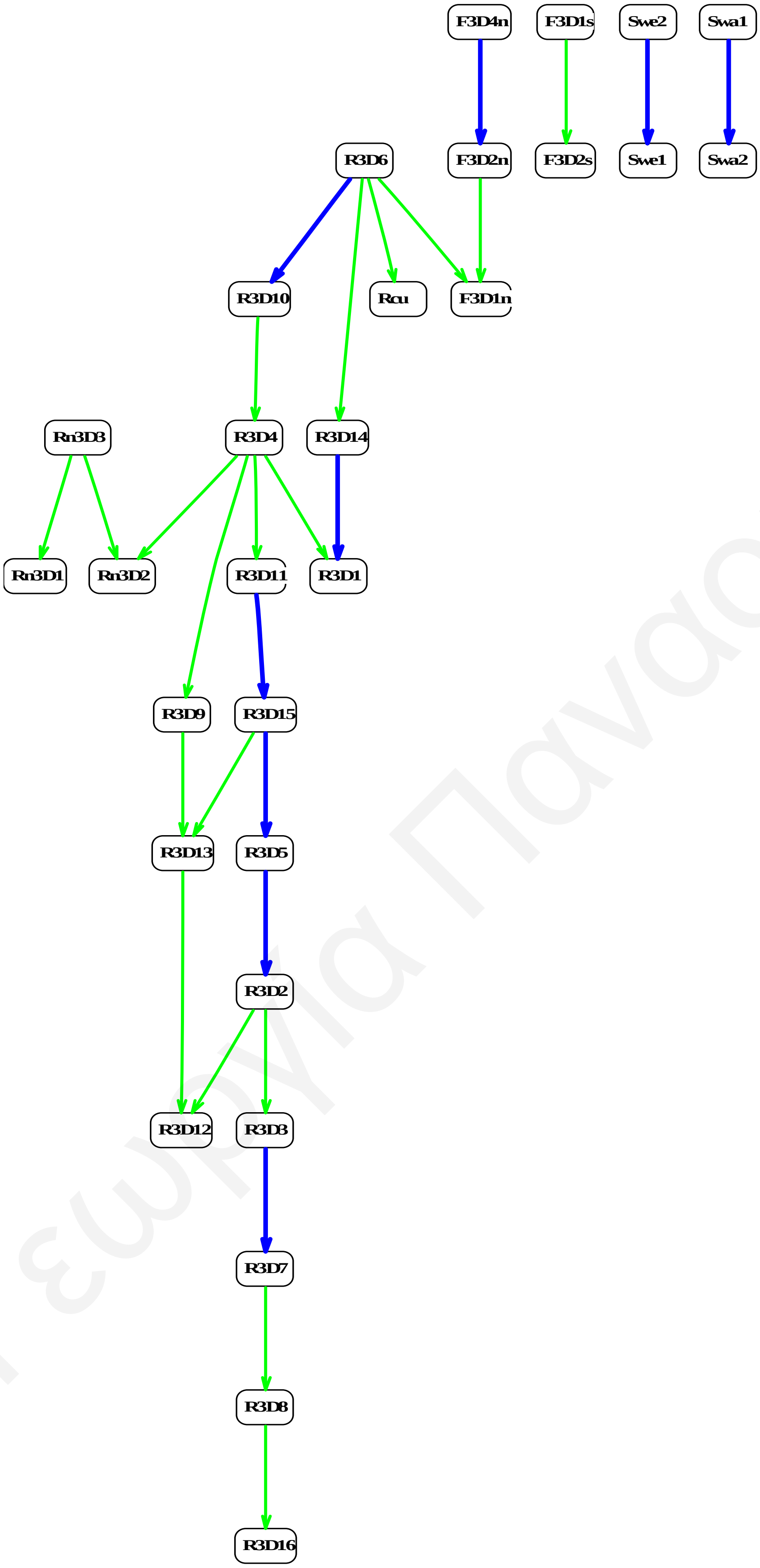


Διάγραμμα 19. Συνεπαγωγικό διάγραμμα για έργα που αφορούν χωρική ικανότητα και έργα με γεωμετρικά σχήματα δύο διαστάσεων (Στ΄ δημοτικού)

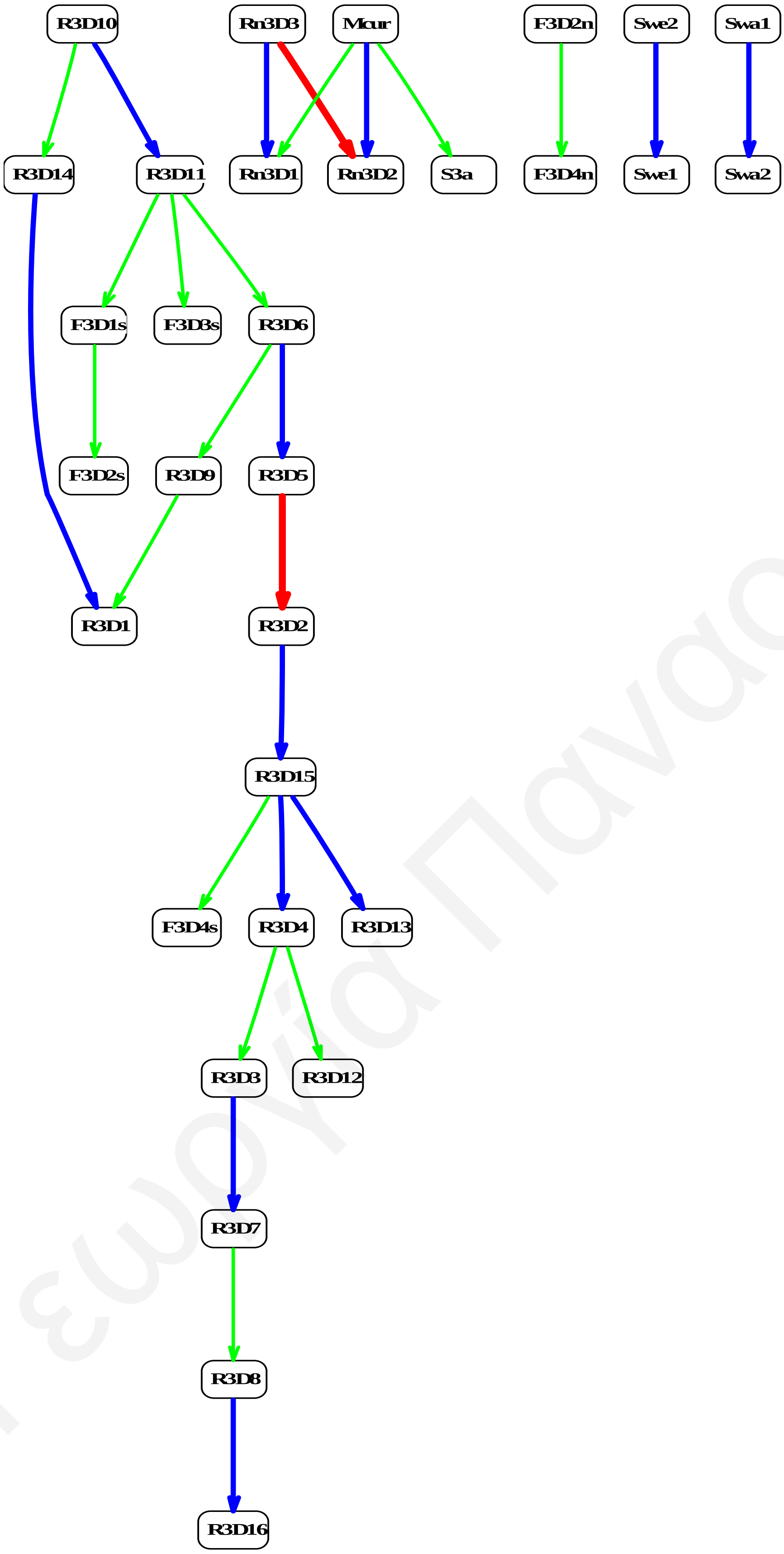
Σε αντίθεση με τις απαντήσεις των μαθητών της Δ΄ δημοτικού και της Β΄ γυμνασίου που είχαν ως αποτέλεσμα την απουσία συνεπαγωγικών σχέσεων ανάμεσα στα έργα χωρικών ικανοτήτων και στα γεωμετρικά έργα χειρισμού δισδιάστατων σχημάτων, στην περίπτωση των μαθητών της Στ΄ δημοτικού εντοπίστηκαν στο αντίστοιχο συνεπαγωγικό διάγραμμα (Διάγραμμα 19) συνεπαγωγικές σχέσεις ανάμεσα στα δύο είδη έργων. Συγκεκριμένα, οι συνεπαγωγικές αλυσίδες Ac2 → S3a, Ac2 → S2c, Ac2 → Ac1 → S1a φανερώνουν ότι επιτυχία στα δύο έργα εύρεσης εμβαδού σύνθετων γεωμετρικών σχημάτων συνεπάγεται επιτυχία στα συγκεκριμένα έργα χωρικών ικανοτήτων, καθένα από τα οποία ελέγχει μια από τις τρεις συνιστώσες χωρικής ικανότητας. Επιπλέον οι συνεπαγωγικές αλυσίδες CiRe → S1a, Aeq → S1a, Msqr → S1a φανερώνουν ότι τα τρία γεωμετρικά έργα που παρουσιάζονται (CiRe, Aeq, Msqr), τα οποία ήταν από τα δύσκολα έργα του δοκιμίου, είχαν μεγαλύτερο βαθμό δυσκολίας από το έργο χειρισμού νοητικής εικόνας S1a. Ταυτόχρονα είναι φανερό ότι επιτυχία στα συγκεκριμένα γεωμετρικά έργα, για την επίλυση των οποίων απαιτούνται ανώτερες γεωμετρικές ικανότητες, συνεπάγεται και επιτυχία στο χωρικό έργο.

Χωρική Ικανότητα και Έργα Χειρισμού Γεωμετρικών Στερεών

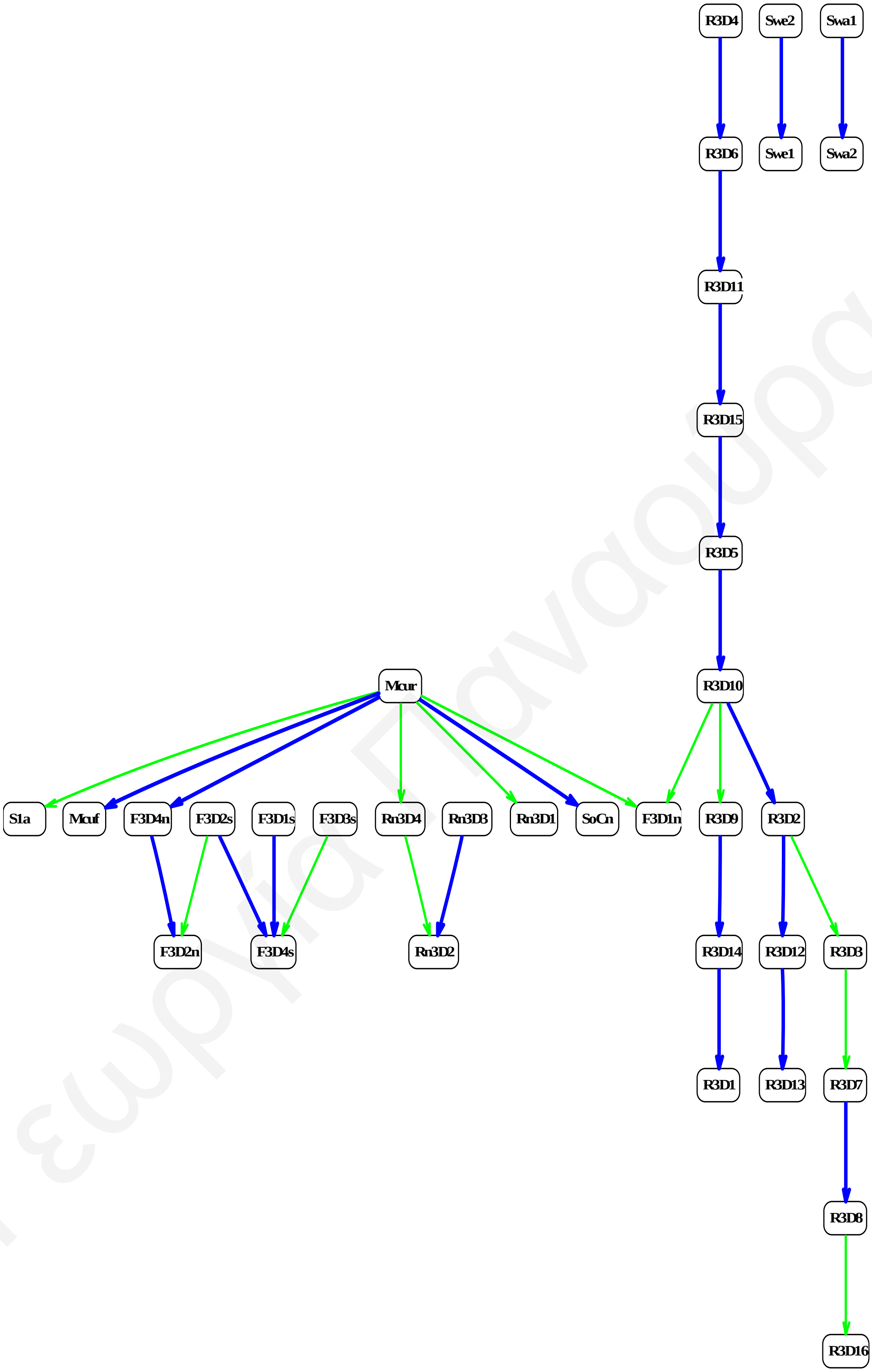
Από το γεγονός ότι στην περίπτωση των μαθητών και των τριών ηλικιακών ομάδων της έρευνας τα έργα χωρικής ικανότητας έχουν ομαδοποιηθεί σε ξεχωριστή κλάση από τα έργα που αφορούσαν γεωμετρικά σχήματα τριών διαστάσεων (Διαγράμματα 11,12,13) συνάγεται το συμπέρασμα ότι οι μαθητές έχουν αντιμετωπίσει τις δύο κατηγορίες έργων με διαφορετικό τρόπο. Είναι δηλαδή φανερό το φαινόμενο της στεγανοποίησης ανάμεσα στα έργα αυτά. Στα αντίστοιχα συνεπαγωγικά διαγράμματα (Διαγράμματα 20, 21 και 22) σημειώνεται η απουσία συνεπαγωγικών σχέσεων ανάμεσα στα χωρικά έργα και τα γεωμετρικά έργα χειρισμού γεωμετρικών στερεών. Το γεγονός αυτό καταδεικνύει, δηλαδή, ότι σε καμιά περίπτωση η επιτυχία σε έργα χωρικής ικανότητας δεν συνδέεται με την επιτυχία σε έργα με γεωμετρικά στερεά, ούτε η επιτυχία στα έργα με στερεά συνδέεται με οποιοδήποτε τρόπο με την επιτυχία στα χωρικά έργα. Στα διαγράμματα εμφανίστηκαν μόνο τα τέσσερα χωρικά έργα που αφορούν την ικανότητα συντονισμού των προοπτικών και αυτά παρουσιάστηκαν ανά ζεύγη σε δύο ξεχωριστές συνεπαγωγικές αλυσίδες, χωρίς να συνδέονται με οποιοδήποτε τρόπο με τα γεωμετρικά έργα που αναφέρονταν σε χειρισμό τρισδιάστατων σχημάτων.



Διάγραμμα 20. Συνεπαγωγικό διάγραμμα για έργα που αφορούν χωρική ικανότητα και έργα με γεωμετρικά σχήματα τριών διαστάσεων (Δ΄ δημοτικού)



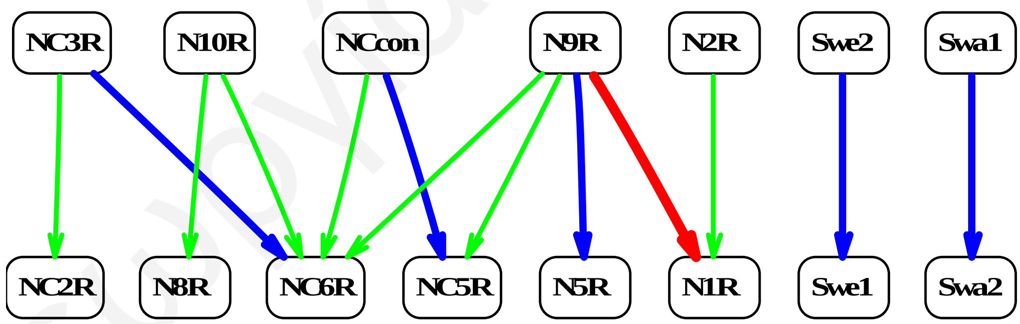
Διάγραμμα 21. Συνεπαγωγικό διάγραμμα για έργα που αφορούν χωρική ικανότητα και έργα με γεωμετρικά σχήματα τριών διαστάσεων (Στ΄ δημοτικού)



Διάγραμμα 22. Συνεπαγωγικό διάγραμμα για έργα που αφορούν χωρική ικανότητα και έργα με γεωμετρικά σχήματα τριών διαστάσεων (Β΄ γυμνασίου)

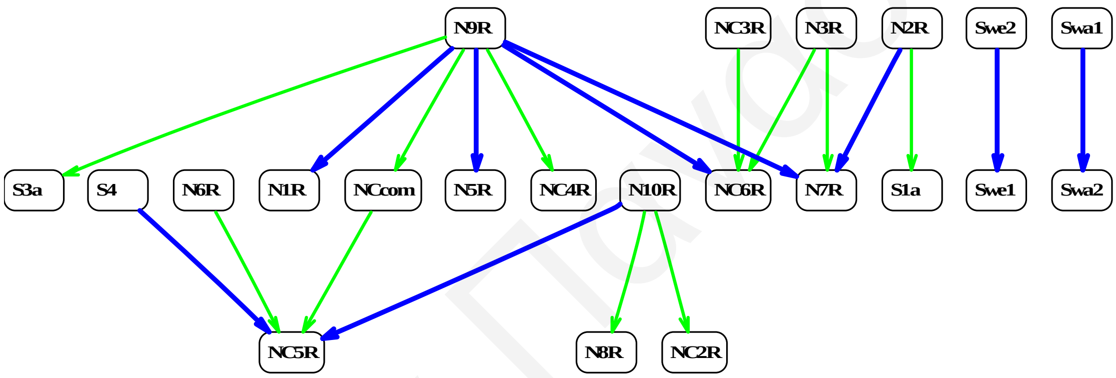
Στην περίπτωση των μαθητών της Δ΄ δημοτικού τα χωρικά έργα εμφανίστηκαν στο διάγραμμα ομοιότητας σε ξεχωριστή κλάση από τα γεωμετρικά έργα που αφορούσαν τα αναπτύγματα στερεών (Διάγραμμα 14). Στο αντίστοιχο συνεπαγωγικό διάγραμμα (Διάγραμμα 23) από τα έργα χωρικής ικανότητας εμφανίστηκαν μόνο τα τέσσερα έργα που αφορούσαν την ικανότητα συντονισμού των προοπτικών. Οι συνεπαγωγικές σχέσεις, όμως, που παρουσιάστηκαν αφορούν μόνο έργα που ανήκουν στην ίδια κατηγορία. Δηλαδή, στο ένα μέρος του διαγράμματος εμφανίστηκαν σχέσεις ανάμεσα σε έργα με αναπτύγματα, ενώ στο άλλο μέρος εμφανίστηκαν σχέσεις ανάμεσα στα χωρικά έργα. Καμιά συνεπαγωγική σχέση στην περίπτωση των μαθητών της Δ΄ δημοτικού δεν παρουσιάστηκε ανάμεσα σε χωρικά και γεωμετρικά έργα με αναπτύγματα στερεών.

Ενδεχομένως κάποιος να ανέμενε τα έργα δίπλωσης ή και τα έργα νοητικών περιστροφών να σχετίζονταν με τα έργα χειρισμού αναπτυγμάτων, αφού η έννοια του αναπτύγματος στηρίζεται σε τέτοιου είδους δεξιότητες. Είναι, όμως, πιθανό η μικρή επαφή των μαθητών με το θέμα των αναπτυγμάτων να μην τους επιτρέπει να χειριστούν τα αναπτύγματα μέσα από διαδικασίες δίπλωσης και περιστροφών σε νοητικό επίπεδο, οπόταν καταλήγουν ενδεχομένως να τα χειρίζονται ως εικόνες. Ο παραπάνω συλλογισμός αποτελεί μια ερμηνεία της απουσίας συνδέσεων ανάμεσα στα έργα χειρισμού αναπτυγμάτων και στα έργα χωρικής ικανότητας.



Διάγραμμα 23. Συνεπαγωγικό διάγραμμα για έργα που αφορούν χωρική ικανότητα και έργα με αναπτύγματα στερεών (Δ΄ δημοτικού)

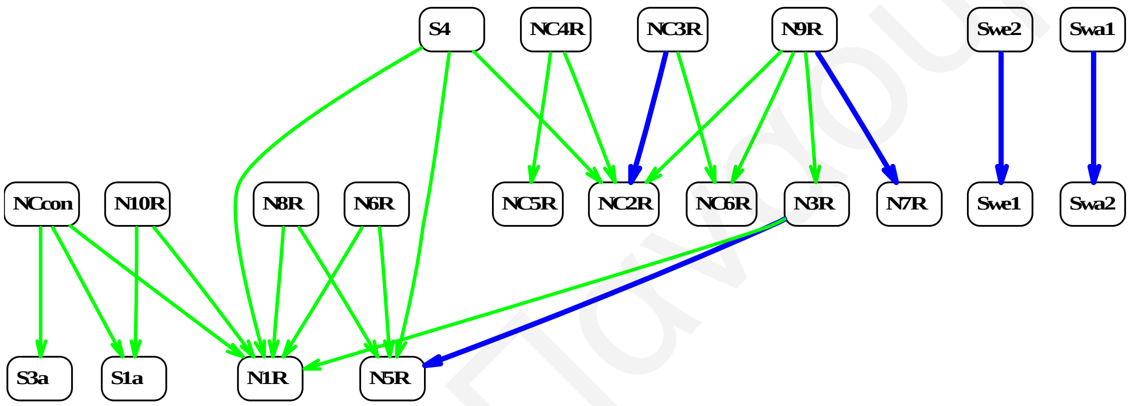
Στο αντίστοιχο διάγραμμα για τους μαθητές της Στ΄ δημοτικού (Διάγραμμα 24) παρουσιάστηκαν περισσότερες συνεπαγωγικές σχέσεις. Τα τέσσερα χωρικά έργα που αφορούν την ικανότητα συντονισμού των προοπτικών εμφανίστηκαν και πάλι ανά ζεύγη σε ξεχωριστό μέρος του διαγράμματος χωρίς να συνδέονται με τα γεωμετρικά έργα για τα αναπτύγματα ή με άλλα χωρικά έργα. Παρά το γεγονός, όμως, ότι οι υπόλοιπες συνεπαγωγικές σχέσεις που παρουσιάστηκαν είναι κυρίως σχέσεις ανάμεσα στα γεωμετρικά έργα, εμφανίστηκαν και τρεις περιπτώσεις συνεπαγωγικών σχέσεων ανάμεσα σε χωρικά έργα και έργα με αναπτύγματα στερεών. Συγκεκριμένα, επιτυχία στο έργο N9R συνεπάγεται επιτυχία στο χωρικό έργο S3a και επιτυχία στο έργο N2R συνεπάγεται επιτυχία στο χωρικό έργο S1a. Πρόκειται για δύο από τα δύσκολα έργα αναγνώρισης αναπτυγμάτων, όπου η διαρρύθμιση των εδρών του στερεού δεν γίνεται γύρω από τη βάση. Άρα, μαθητές που έχουν την ικανότητα να αναγνωρίζουν σε τέτοιου είδους γεωμετρικές εικόνες τις αναπαραστάσεις αναπτυγμάτων ενός στερεού επιτυγχάνουν επίσης σε εύκολα έργα χειρισμού νοητικών εικόνων (έργα δίπλωσης, π.χ. έργο S1a) και περιστροφής δισδιάστατων σχημάτων (π.χ. έργο S3a).



Διάγραμμα 24. Συνεπαγωγικό διάγραμμα για έργα που αφορούν χωρική ικανότητα και έργα με αναπτύγματα στερεών (Στ΄ δημοτικού)

Εκτός από τις περιπτώσεις όπου η επιτυχία σε έργα με αναπτύγματα στερεών συνεπάγεται επιτυχία σε χωρικά έργα, στο διάγραμμα 24 παρουσιάστηκε και η περίπτωση όπου επιτυχία σε ένα χωρικό έργο (έργο S4) συνεπάγεται επιτυχία σε ένα έργο για αναπτύγματα (έργο NC5R). Το συγκεκριμένο χωρικό έργο απαιτεί για την επίλυσή του ικανότητες περιστροφής σχημάτων και εντοπισμό υποσχημάτων σε σύνθετη γεωμετρική εικόνα. Τελικά επιτυχής χειρισμός του συνδέθηκε με ένα από τα εύκολα σχετικά έργα αναγνώρισης αναπτύγματος κύβου, το οποίο παρουσίαζε το γνωστό στους μαθητές σταυροειδές ανάπτυγμα

Η εικόνα που παρουσιάστηκε στην περίπτωση των μαθητών της Β΄ γυμνασίου (Διάγραμμα 25) ήταν παρόμοια με αυτή που παρουσιάστηκε για τους μαθητές της Στ΄ δημοτικού, με μια μικρή αύξηση των σχέσεων που εμφανίζονται στις συνεπαγωγικές αλυσίδες. Από τη μια εμφανίστηκαν τα τέσσερα χωρικά έργα που αφορούν την ικανότητα συντονισμού των προοπτικών, τα οποία συνδέονται μεταξύ τους χωρίς να λαμβάνουν μέρος στις συνεπαγωγικές αλυσίδες που αφορούν τα γεωμετρικά έργα για αναπτύγματα. Από την άλλη, ενώ στην πλειοψηφία τους οι σχέσεις που παρουσιάτηκαν είναι ανάμεσα στην κατηγορία των έργων για αναπτύγματα, εμφανίστηκαν περιπτώσεις σχέσεων που συνδέουν έργα από τις δύο κατηγορίες. Συγκεκριμένα, επιτυχία στα έργα NCcon (κατασκευή αναπτύγματος κύβου) και N10R (αναπαράσταση μη αναπτύγματος) συνεπάγεται επιτυχία στα χωρικά έργα S3a (έργο περιστροφής επίπεδου σχήματος) και S1a (έργο δίπλωσης). Από την αντίθετη κατεύθυνση επιτυχία στο έργο S4 συνεπάγεται επιτυχία στα έργα αναγνώρισης αναπτυγμάτων N1R, N5R και NC2R.



Διάγραμμα 25. Συνεπαγωγικό διάγραμμα για έργα που αφορούν χωρική ικανότητα και έργα με αναπτύγματα στερεών (Β΄ γυμνασίου)

Η σημαντικότερη παρατήρηση για τις συνεπαγωγικές σχέσεις ανάμεσα στα χωρικά έργα και τα έργα που απαιτούσαν χειρισμό αναπτυγμάτων γεωμετρικών στερεών αφορά την αύξηση του αριθμού των σχέσεων που σημειώθηκε στις ομάδες με τους μαθητές μεγαλύτερης ηλικίας. Ενώ στην περίπτωση των μαθητών της Δ΄ δημοτικού δεν παρουσιάστηκε καμιά συνεπαγωγική σχέση που να συνδέει την επιτυχία σε χωρικά έργα με οποιαδήποτε έργα χειρισμού αναπτυγμάτων, η εικόνα αυτή διαφοροποιήθηκε στις άλλες δύο ηλικιακές ομάδες της έρευνας σημειώνοντας το μεγαλύτερο αριθμό συνεπαγωγικών σχέσεων ανάμεσα στις δύο κατηγορίες έργων στην περίπτωση των μαθητών της Β΄ γυμνασίου. Στο σημείο αυτό, όμως, θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι συνεπαγωγικές σχέσεις που παρουσιάστηκαν και συνδέουν την επιτυχία σε χωρικά έργα με την επιτυχία σε έργα χειρισμού αναπτυγμάτων είναι περιορισμένες. Ενδεχομένως θα ανέμενε κανείς μεγαλύτερο αριθμό σχέσεων ανάμεσα σε έργα δίπλωσης ή σε έργα περιστροφής και σε έργα αναγνώρισης ή κατασκευής αναπτυγμάτων, εφόσον η ίδια η έννοια του αναπτύγματος αναφέρεται σε μια διαδικασία που εμπερικλείει ενέργειες δίπλωσης και περιστροφής. Με άλλα λόγια, λογικά αναμενόταν ότι μαθητές που είναι ικανοί σε έργα χειρισμού νοητικών εικόνων με δίπλωση ή και σε έργα νοητικών περιστροφών θα επιτυγχάνουν σε μεγαλύτερο βαθμό σε έργα με αναπτύγματα στερεών. Η απουσία περισσότερων σχέσεων που να συνδέουν τις δύο κατηγορίες έργων με βάση ένα πιο ξεκάθαρο μοτίβο μπορεί να ερμηνευθεί με δύο τρόπους. Από τη μια, για την έννοια των αναπτυγμάτων αφιερώνεται στα πλαίσια του διδακτικού χρόνου ένα αρκετά μικρό μέρος της διδασκαλίας της γεωμετρίας. Επιπλέον, κατά την ενασχόλησή τους με το συγκεκριμένο θέμα οι μαθητές καταλήγουν σε αρκετές περιπτώσεις να αντιμετωπίζουν τα αναπτύγματα ως γεωμετρικές εικόνες αντί να ενεργοποιούν νοητικές διαδικασίες περιστροφής και δίπλωσης εικόνας.

Σύγκριση Μαθητών Δημοτικού και Γυμνασίου ως προς την Επίδοση και την Αντιμετώπιση των Γεωμετρικών Έργων

Στο τρίτο υποκεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που αφορούν τη σύγκριση ανάμεσα στις τρεις ηλικιακές ομάδες της έρευνας, με άξονα το τρίτο ερώτημα της εργασίας αναφορικά με τη σύγκριση μαθητών δημοτικής και μέσης εκπαίδευσης. Παρουσιάζονται αναλυτικά και συγκρίνονται οι επιδόσεις των μαθητών στα έργα γεωμετρίας, με ιδιαίτερη αναφορά σε έργα όπου εμφανίζονται διαφορές σε σχέση με την αντιμετώπιση των έργων στο πλαίσιο της Εμπειρικής Γεωμετρίας και της Εμπειρικής Αξιωματικής Γεωμετρίας. Στο δεύτερο μέρος του υποκεφαλαίου παρουσιάζονται συγκριτικά για τους μαθητές των τριών ηλικιακών ομάδων τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τις σχέσεις ομοιότητας και τις σχέσεις συνεπαγωγής ανάμεσα στις τρεις διαφορετικές κατηγορίες γεωμετρικών έργων.

Η Επίδοση των Μαθητών Δημοτικού και Γυμνασίου στα Έργα Γεωμετρίας

Αρχικά παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων διασποράς (ANOVA) που πραγματοποιήθηκαν με σκοπό τη σύγκριση των μέσων όρων που πέτυχαν στα γεωμετρικά έργα οι μαθητές των τριών διαφορετικών τάξεων. Ακολούθως παρουσιάζονται τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών των τριών ηλικιακών ομάδων που έλαβαν μέρος στην έρευνα σε όλα τα έργα του δοκιμίου γεωμετρίας, δηλαδή στα έργα που αφορούσαν χειρισμό γεωμετρικών σχημάτων δύο διαστάσεων, τριών διαστάσεων και αναπτυγμάτων γεωμετρικών στερεών Στο δεύτερο μέρος του υποκεφαλαίου αυτού επιχειρείται μια σύγκριση των μαθητών δημοτικού και γυμνασίου ως προς την αντιμετώπιση ορισμένων γεωμετρικών έργων που απαιτούσαν χειρισμό γεωμετρικών σχημάτων δύο διαστάσεων στα πλαίσια της Εμπειρικής Γεωμετρίας και της Εμπειρικής Αξιωματικής Γεωμετρίας.

Ανάλυση Διασποράς

Για να καθοριστεί η επίδραση της ηλικίας των μαθητών που έλαβαν μέρος στην έρευνα (τάξη στην οποία φοιτούν) στην επίλυση των γεωμετρικών έργων που περιλαμβάνονταν στο δοκίμιο πραγματοποιήθηκε μια σειρά από αναλύσεις διασποράς (ANOVA) με εξαρτημένη μεταβλητή την επίδοση στα γεωμετρικά έργα και ανεξάρτητη μεταβλητή την τάξη στην οποία φοιτούσαν οι μαθητές. Για την αξιολόγηση των διαφορών που παρουσιάστηκαν ανάμεσα σε μαθητές των διαφορετικών τάξεων χρησιμοποιήθηκε το κριτήριο Scheffé. Τα αποτελέσματα των αναλύσεων αυτών παρουσιάζονται ξεχωριστά για τα έργα που αφορούσαν χειρισμό τρισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων (Πίνακας 13), για τα έργα που αφορούσαν χειρισμό επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων (Πίνακας 14) και τα έργα που αφορούσαν χειρισμό αναπτυγμάτων γεωμετρικών στερεών (Πίνακας 15).

Από τη μελέτη των στοιχείων του Πίνακα 13 προκύπτουν οι ακόλουθες παρατηρήσεις. Στα μισά από τα έργα αναγνώρισης αναπαραστάσεων γεωμετρικών στερεών οι διαφορές στην επίδοση των μαθητών των τριών ηλικιακών ομάδων δεν ήταν σημαντικές. Οι μαθητές έχουν αντιμετωπίσει τα έργα αυτά είτε με τον ίδιο βαθμό ευκολίας (π.χ. στα έργα Α2.3Δ_{H}, Α2.3Δ_{Θ}, Α2.3Δ_{T}, όπου παρουσιάζονταν επίπεδα γεωμετρικά σχήματα, και στα έργα Α2.3Δ_{N} και Α2.3Δ_{Π}, όπου δόθηκαν αναπαραστάσεις ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου) είτε με τον ίδιο βαθμό δυσκολίας (π.χ. στα έργα Α2.3Δ_{Γ}, Α2.3Δ_{Δ}, Α2.3Δ_{Σ}).

Για τα υπόλοιπα έργα αναγνώρισης αναπαραστάσεων στερεών εμφανίζονται στατιστικά σημαντικές διαφορές στην επίδοση των μαθητών του γυμνασίου και την επίδοση των μαθητών του δημοτικού (Δ΄ ή Στ΄ τάξης), ενώ σε καμιά περίπτωση δεν διαφέρουν οι επιδόσεις των μαθητών της Δ΄ δημοτικού από τις επιδόσεις των μαθητών της Στ΄ δημοτικού. Σε όλα τα έργα που αφορούν την ανάλυση στερεών σε επιμέρους στοιχεία (αριθμός και σχήμα εδρών, κυβικές μονάδες), με εξαίρεση το έργο Α3.3Δ_{2}, οι μαθητές της Στ΄ δημοτικού και της Β΄ γυμνασίου εμφανίζονται να έχουν επιτύχει στατιστικά καλύτερες επιδόσεις από τους μαθητές της Δ΄ δημοτικού. Το αποτέλεσμα αυτό ερμηνεύεται με βάση τις αυξημένες μαθησιακές εμπειρίες των μεγαλύτερων μαθητών, ενώ είναι πιθανό να συνδέεται με τις χωρικές ικανότητες υψηλότερου επιπέδου που κατέχουν οι μαθητές αυτοί. Τέλος, οι μαθητές και των τριών ομάδων έχουν επιτύχει με την ίδια ευκολία στα τέσσερα έργα ονομασίας στερεών (Β2(α).3Δ_{A} – Β2(α).3Δ_{Δ}).

Πίνακας 13

Ανάλυση Διασποράς της Επίλυσης των Γεωμετρικών Έργων Χειρισμού Τρισδιάστατων Σχημάτων με Ανεξάρτητη Μεταβλητή την Τάξη στην Οποία Φοιτούσαν οι Μαθητές

Μεταβλητή (Έργο)	Μέσος όρος ομάδας			*F*	df	Σύγκριση (Post-hoc Scheffé)
	Α	Β	Γ			
Α2.3Δ_{A}	0.65	0.67	0.80	10.490**	2	Γ>Α, Γ>Β
Α2.3Δ_{B}	0.37	0.42	0.47	3.602*	2	Γ>Β
Α2.3Δ_{Γ}	0.57	0.62	0.66	3.035*	2	Γ>Β
Α2.3Δ_{Δ}	0.37	0.40	0.44	1.789	2	---
Α2.3Δ_{E}	0.40	0.37	0.46	2.857	2	---
Α2.3Δ_{Z}	0.34	0.36	0.44	4.192*	2	Γ>Α
Α2.3Δ_{H}	0.69	0.64	0.69	1.274	2	---
Α2.3Δ_{Θ}	0.71	0.66	0.71	1.231	2	---
Α2.3Δ_{K}	0.45	0.47	0.60	8.786**	2	Γ>Α, Γ>Β
Α2.3Δ_{Λ}	0.34	0.36	0.46	6.145**	2	Γ>Α, Γ>Β
Α2.3Δ_{M}	0.35	0.39	0.45	3.170*	2	Γ>Β
Α2.3Δ_{N}	0.66	0.63	0.69	1.438	2	---
Α2.3Δ_{Π}	0.65	0.63	0.72	3.037	2	---
Α2.3Δ_{P}	0.59	0.60	0.78	18.138**	2	Γ>Α, Γ>Β
Α2.3Δ_{Σ}	0.40	0.37	0.45	2.363	2	---
Α2.3Δ_{T}	0.72	0.71	0.75	0.732	2	---
Α3.3Δ_{1}	0.82	0.87	0.87	2.148	2	---
Α3.3Δ_{2}	0.72	0.82	0.84	8.621**	2	Β>Α, Γ>Α
Α3.3Δ_{3}	0.73	0.83	0.89	15.145**	2	Β>Α, Γ>Α
Α3.3Δ_{4}	0.76	0.85	0.84	5.378**	2	Β>Α, Γ>Α
Α3.3Δ_{5}	0.62	0.72	0.73	6.092**	2	Β>Α, Γ>Α
Α3.3Δ_{6}	0.71	0.85	0.81	10.521**	2	Β>Α, Γ>Α
Α3.3Δ_{7}	0.69	0.84	0.87	20.870**	2	Β>Α, Γ>Α
Α3.3Δ_{8}	0.76	0.88	0.88	11.646**	2	Β>Α, Γ>Α
Β2(α).3Δ_{A}	0.84	0.85	0.85	0.028	2	---
Β2(α).3Δ_{B}	0.84	0.86	0.88	1.289	2	---
Β2(α).3Δ_{Γ}	0.53	0.58	0.60	2.229	2	---
Β2(α).3Δ_{Δ}	0.66	0.71	0.73	1.871	2	---
Β8.3Δ	0.31	0.62	0.70	66.152**	2	Β>Α, Γ>Α
Β10.3Δ	0.67	0.82	0.92	34.911**	2	Β>Α, Γ>Α, Γ>Β
Β13.3Δ	0.39	0.48	0.37	4.828**	2	Β>Γ
Β14.3Δ	0.11	0.26	0.23	12.599**	2	Β>Α, Γ>Α

*$p<0.05$, **$p<0.01$

Α = μαθητές Δ΄ δημοτικού (Ν=332), Β = μαθητές Στ΄ δημοτικού (Ν=333), Γ = μαθητές Β΄ γυμνασίου (Ν=335)

Όπως φαίνεται από τα αποτελέσματα της ανάλυσης διασποράς που περιλαμβάνονται στον Πίνακα 14, σε όλα τα έργα που αφορούσαν χειρισμό γεωμετρικών σχημάτων δύο διαστάσεων (με εξαίρεση την αναγνώριση κύκλου) παρουσιάζονται στατιστικά σημαντικές διαφορές στην επίδοση των μαθητών διαφορετικών ηλικιών. Σε όλα τα έργα η επίλυση των οποίων απαιτούσε ενεργοποίηση διαδικασιών γεωμετρικού συλλογισμού παρουσιάζεται έντονη διαφοροποίηση ως προς τις τρεις διαφορετικές ηλικίες. Όσο πιο μεγάλοι ήταν οι μαθητές τόσο μεγαλύτερη ήταν η διαφορά του μέσου όρου των έργων που απαιτούσαν γεωμετρικό συλλογισμό. Είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον να επισημανθεί ότι το φαινόμενο αυτό σημειώνεται τόσο για έργα που είχαν μεγάλο βαθμό δυσκολίας (π.χ. έργα Β12.2Δ, Β16.2Δ) όσο και σε ευκολότερα έργα (π.χ. έργα Α6.2Δ, Β9.2Δ).

Πίνακας 14

Ανάλυση Διασποράς της Επίλυσης των Γεωμετρικών Έργων Χειρισμού Δισδιάστατων Σχημάτων με Ανεξάρτητη Μεταβλητή την Τάξη στην Οποία Φοιτούσαν οι Μαθητές

Μεταβλητή (Έργο)	Μέσος όρος ομάδας			*F*	df	Σύγκριση (Post-hoc Scheffé)
	Α	Β	Γ			
Α1.2Δ_1	0.77	0.89	0.93	19.975**	2	Β>Α, Γ>Α
Α1.2Δ_2	0.73	0.87	0.90	19.563**	2	Β>Α, Γ>Α
Α1.2Δ_3	0.31	0.39	0.80	112.078**	2	Γ>Α, Γ>Β
Α1.2Δ_4	0.18	0.42	0.61	83.765**	2	Β>Α, Γ>Α, Γ>Β
Α1.2Δ_5	0.12	0.32	0.62	141.132**	2	Β>Α, Γ>Α, Γ>Β
Α5.2Δ	0.46	0.64	0.83	53.708**	2	Β>Α, Γ>Α, Γ>Β
Α6.2Δ	0.36	0.72	0.85	113.743**	2	Β>Α, Γ>Α, Γ>Β
Β9.2Δ	0.44	0.73	0.83	68.300**	2	Β>Α, Γ>Α, Γ>Β
Β12.2Δ	0.09	0.24	0.42	64.654**	2	Β>Α, Γ>Α, Γ>Β
Β15.2Δ	0.26	0.37	0.40	7.950**	2	Β>Α, Γ>Α
Β16.2Δ	0.15	0.33	0.52	56.507**	2	Β>Α, Γ>Α, Γ>Β
Β1.2Δ_1	0.71	0.77	0.81	10.962**	2	Β>Α, Γ>Α
Β1.2Δ_2	0.54	0.65	0.70	19.816**	2	Β>Α, Γ>Α
Β1.2Δ_3	0.27	0.30	0.31	7.934**	2	Β>Α, Γ>Α
Β1.2Δ_5	0.51	0.53	0.56	1.979	2	---
Β1.2Δ_4	0.26	0.39	0.41	14.516**	2	Β>Α, Γ>Α
Β7.2Δ_1	0.60	0.74	0.79	60.455**	2	Β>Α, Γ>Α
Β7.2Δ_2	0.35	0.54	0.56	60.317**	2	Β>Α, Γ>Α
Α7.2Δ	0.62	0.86	0.87	42.768**	2	Β>Α, Γ>Α
Β11.2Δ	0.06	0.24	0.25	28.420**	2	Β>Α, Γ>Α

*p<0.05, **p<0.01

Α = μαθητές Δ΄ δημοτικού (Ν=332), Β = μαθητές Στ΄ δημοτικού (Ν=333), Γ = μαθητές Β΄ γυμνασίου (Ν=335)

Το αποτέλεσμα αυτό υποδηλώνει ότι η αύξηση των μαθησιακών εμπειριών των μαθητών έχει ως αποτέλεσμα την αποτελεσματικότερη ενεργοποίηση διαδικασιών γεωμετρικού συλλογισμού σε έργα που αυτό απαιτείται και κατά συνέπεια την αύξηση των επιπέδων επιτυχίας. Αντίθετα στα έργα αναγνώρισης επίπεδων σχημάτων, στα έργα πολλαπλής επιλογής και στα έργα υπολογισμού εμβαδού απλών σχημάτων, όπου απαιτούνται απλές διαδικασίες ανάκλησης γνωστικών μονάδων, η διαφοροποίηση ήταν λιγότερο έντονη ως προς τις ηλικίες. Εκείνο που ισχύει είναι ότι για τα έργα αυτά υπερτερούν οι μαθητές των δύο μεγαλύτερων τάξεων έναντι των μαθητών της Δ΄ δημοτικού. Η μόνη διαφοροποίηση από την παραπάνω παρατήρηση εντοπίζεται στην περίπτωση του έργου που αφορούσε τον υπολογισμό εμβαδού ορθογωνίου τριγώνου (έργο Α1.2$Δ_3$), όπου παρουσιάστηκε παρόμοιος βαθμός δυσκολίας για τους μαθητές του δημοτικού, σε αντίθεση με την υψηλή επίδοση των μαθητών γυμνασίου στο συγκεκριμένο έργο. Ο χαμηλός μέσος όρος στο συγκεκριμένο έργο δικαιολογείται για τους μαθητές της Δ΄ δημοτικού, οι οποίοι έχουν έρθει σε επαφή με το συγκεκριμένο θέμα στη συγκεκριμένη σχολική χρονιά και δεν είχαν την ευκαιρία για αρκετή εξάσκηση, αλλά η εμφάνιση παρόμοιας χαμηλής επίδοσης σε απλό έργο εύρεσης εμβαδού ορθογωνίου τριγώνου των μαθητών που τελειώνουν το δημοτικό σχολείο καταδεικνύει ότι πρόκειται ενδεχομένως για μια έννοια που δεν έχει εμπεδωθεί επαρκώς.

Στα έργα που αφορούσαν χειρισμό αναπτυγμάτων γεωμετρικών στερεών παρουσιάζονται διαφοροποιήσεις στην επιτυχία ως προς τις διαφορετικές ηλικίες (Πίνακας 15). Εντονότερη εμφανίζεται η διαφοροποίηση στο έργο αναγνώρισης σταυροειδούς αναπτύγματος κύβου (έργο Β3.$Αν_Ε$) και στο έργο κατασκευής αναπτύγματος κύβου εξολοκλήρου από τους μαθητές (έργο Α4.Αν). Τα δύο αυτά έργα παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, γιατί, εκτός από την υπεροχή των μαθητών των μεγαλύτερων τάξεων έναντι των μαθητών της Δ΄ δημοτικού, φαινόμενο που θεωρείται αναμενόμενο, επισημαίνεται στατιστικά σημαντική διαφορά ανάμεσα στους μαθητές Στ΄ δημοτικού και της Β΄ γυμνασίου με τους πρώτους να έχουν καλύτερο μέσο όρο από τους δεύτερους. Το γεγονός αυτό μπορεί να αποδοθεί στη μη ενασχόληση των μαθητών του γυμνασίου με το θέμα των αναπτυγμάτων. Αποτελεί, όμως, πηγή ανησυχίας, εφόσον οι καλύτερες επιδόσεις των μαθητών συνδέονται στην προκειμένη περίπτωση με την τριβή που έχουν με ένα θέμα κατά τη διδασκαλία.

Στα υπόλοιπα έργα χειρισμού αναπτυγμάτων γεωμετρικών στερεών τα αποτελέσματα των αναλύσεων διασποράς καταδεικνύουν ότι γενικά οι μαθητές των δύο μεγαλύτερων ηλικιών είχαν στατιστικά καλύτερη επίδοση από τους μαθητές της Δ΄ δημοτικού. Στην περίπτωση των δύο δυσκολότερων έργων (Β2.$Αν_2$και Β2.$Αν_9$), όπου παρουσιάζονται αναπαραστάσεις πυραμίδων στις οποίες η διευθέτηση των εδρών δεν γίνεται γύρω από μια βάση, ο βαθμός δυσκολίας ήταν παρόμοιος για τους μαθητές των δύο τάξεων του δημοτικού, οπόταν η διαφοροποίηση που παρουσιάζεται αφορά μόνο τη σύγκριση μαθητών γυμνασίου και δημοτικού.

Πίνακας 15

Ανάλυση Διασποράς της Επίλυσης των Γεωμετρικών Έργων Χειρισμού Αναπτυγμάτων Στερεών με Ανεξάρτητη Μεταβλητή την Τάξη στην Οποία Φοιτούσαν οι Μαθητές

Μεταβλητή (Έργο)	Μέσος όρος ομάδας			*F*	df	Σύγκριση (Post-hoc Scheffé)
	Α	Β	Γ			
Β2.Αν$_1$	0.74	0.84	0.87	10.766**	2	Β>Α, Γ>Α
Β2.Αν$_2$	0.22	0.25	0.42	19.385**	2	Γ>Α, Γ>Β
Β2.Αν$_3$	0.37	0.53	0.61	20.818**	2	Β>Α, Γ>Α
Β2.Αν$_4$	0.55	0.64	0.60	2.533	2	---
Β2.Αν$_5$	0.64	0.81	0.87	29.671**	2	Β>Α, Γ>Α
Β2.Αν$_6$	0.41	0.61	0.47	14.412**	2	Β>Α, Γ>Β
Β2.Αν$_7$	0.58	0.78	0.77	20.207**	2	Β>Α, Γ>Α
Β2.Αν$_8$	0.49	0.62	0.45	11.287**	2	Β>Α, Γ>Β
Β2.Αν$_9$	0.20	0.23	0.35	12.322**	2	Γ>Α, Γ>Β
Β2.Αν$_{10}$	0.32	0.48	0.34	10.553**	2	Β>Α, Γ>Β
Β3.Αν$_Α$	0.81	0.86	0.81	1.774	2	---
Β3.Αν$_Β$	0.84	0.96	0.92	15.070**	2	Β>Α, Γ>Α
Β3.Αν$_Γ$	0.42	0.59	0.63	18.284**	2	Β>Α, Γ>Α
Β3.Αν$_Δ$	0.52	0.79	0.72	31.654**	2	Β>Α, Γ>Α
Β3.Αν$_Ε$	0.78	0.97	0.88	28.977**	2	Β>Α, Γ>Α, Β>Γ
Β3.Αν$_Ζ$	0.82	0.94	0.85	12.005**	2	Β>Α, Γ>Α
Α4.Αν	0.27	0.66	0.36	63.046**	2	Β>Α, Γ>Α, Β>Γ
Β5.Αν	0.50	0.59	0.60	4.731**	2	Β>Α, Γ>Α
Β6.Αν	0.54	0.61	0.62	4.672*	2	Β>Α, Γ>Α
Β4.Αν	0.43	0.80	0.75	110.750**	2	Β>Α, Γ>Α

*p<0.05, **p<0.01

Α = μαθητές Δ΄ δημοτικού (Ν=332), Β = μαθητές Στ΄ δημοτικού (Ν=333), Γ = μαθητές Β΄ γυμνασίου (Ν=335)

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα των αναλύσεων διασποράς για όλα τα γεωμετρικά έργα σημειώνεται ότι οι περισσότερες διαφοροποιήσεις ως προς τις τρεις ηλικίες των μαθητών παρουσιάστηκαν στα έργα χειρισμού δισδιάστατων σχημάτων και στα έργα χειρισμού αναπτυγμάτων στερεών, με πιο έντονη τη διαφοροποίηση στην περίπτωση των έργων που απαιτούσαν ενεργοποίηση διαδικασιών γεωμετρικού συλλογισμού. Καθόλου ή λιγότερο έντονες διαφοροποιήσεις ως προς τις ηλικίες υπήρχαν στα έργα χειρισμού έργων με σχήματα τριών διαστάσεων.

Η Επίδοση των Μαθητών Δημοτικού και Γυμνασίου στα Έργα Γεωμετρίας που Αφορούν Γεωμετρικά Σχήματα Δύο Διαστάσεων

Ποσοστά Επιτυχίας Έργων Εύρεσης Εμβαδού

Το δοκίμιο γεωμετρίας περιλαμβάνει πέντε έργα εύρεσης εμβαδού. Τα τρία από αυτά εξετάζουν την ικανότητα του υπολογισμού εμβαδού απλών γεωμετρικών σχημάτων (Α1.2Δ_1, Α1.2Δ_2, Α1.2Δ_3 για ορθογώνιο, τετράγωνο και ορθογώνιο τρίγωνο αντίστοιχα), ενώ τα άλλα δύο έργα (Α1.2Δ_4, Α1.2Δ_5) εξετάζουν την ικανότητα εύρεσης εμβαδού «σύνθετων» γεωμετρικών σχημάτων (σύνθετων με την έννοια ότι μπορούν να αναλυθούν σε απλά υποσχήματα). Τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών για τα πέντε έργα υπολογισμού εμβαδού παρουσιάζονται στον Πίνακα 16.

Όπως ήταν αναμενόμενο, τα έργα εύρεσης εμβαδού πολύπλοκων σχημάτων (έργα Α1.2Δ_4 και Α1.2Δ_5) παρουσιάζουν χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας από τα έργα εύρεσης εμβαδού απλών σχημάτων (έργα Α1.2Δ_1, Α1.2Δ_2 και Α1.2Δ_3). Από την ομάδα των έργων αυτών σημειώνεται ότι τα ποσοστά επιτυχίας είναι αρκετά ψηλά στην περίπτωση της εύρεσης εμβαδού τετραγώνου και ορθογωνίου, ενώ μειώνεται σημαντικά η επιτυχία εύρεσης εμβαδού ορθογωνίου τριγώνου στους μαθητές του δημοτικού σχολείου. Το γεγονός αυτό δικαιολογείται για τους μαθητές της Δ΄ δημοτικού, οι οποίοι έχουν έρθει σε επαφή με το συγκεκριμένο θέμα στη συγκεκριμένη σχολική χρονιά και δεν είχαν την ευκαιρία για αρκετή εξάσκηση, αλλά το 39% ως ποσοστό επιτυχίας σε απλό έργο εύρεσης εμβαδού ορθογωνίου τριγώνου των μαθητών που τελειώνουν το δημοτικό σχολείο θεωρείται χαμηλό και καταδεικνύει ότι πρόκειται ενδεχομένως για μια έννοια που δεν έχει εμπεδωθεί.

Πίνακας 16

Ποσοστά Επιτυχίας για τα Έργα Εύρεσης Εμβαδού κατά Τάξη

	Α1.2Δ_1	Α1.2Δ_2	Α1.2Δ_3	Α1.2Δ_4	Α1.2Δ_5
Δ΄δημοτικού	77.4	73.5	30.7	10.5	6.0
Στ΄δημοτικού	88.6	87.4	39.0	36.9	21.3
Β΄ γυμνασίου	93.4	89.9	79.7	56.1	56.7

Στην περίπτωση των μαθητών του δημοτικού τα χαμηλά ποσοστά επιτυχίας για τον υπολογισμό του εμβαδού ορθογωνίου τριγώνου καταδεικνύουν ότι οι μαθητές δεν έχουν εμπεδώσει την έννοια αυτή και δεν μπορούν να ανακαλέσουν τον τύπο ή άλλη μέθοδο εύρεσης του εμβαδού του συγκεκριμένου γεωμετρικού σχήματος. Το συνηθέστερο λάθος που παρουσιάζεται ανάμεσα στους μαθητές του δημοτικού σχολείου αναφορικά με το συγκεκριμένο έργο είναι η τυχαία χρήση των δεδομένων και ο συνδυασμός τους με τυχαίες μαθηματικές πράξεις προς την κατεύθυνση παραγωγής ενός αποτελέσματος (31.6% και 44.1% των μαθητών Δ΄ και Στ΄ δημοτικού αντίστοιχα καταφεύγουν στη λανθασμένη αυτή «στρατηγική»). Εντοπίζεται επίσης ένα ποσοστό 10.5% των μαθητών της Δ΄ τάξης οι οποίοι πολλαπλασιάζουν τις δύο κάθετες πλευρές μεταξύ τους και θεωρούν ότι με τον τρόπο αυτό έχουν υπολογίσει το εμβαδό του τριγώνου.

Ένα άλλο λάθος που παρουσιάζεται από μαθητές και των τριών τάξεων είναι ότι αντί να υπολογίσουν το εμβαδό των γεωμετρικών σχημάτων που δίνονται, προσθέτουν τις ενδείξεις πλάτους και μήκους και υπολογίζουν την περίμετρο. Στην περίπτωση των μαθητών Στ΄ δημοτικού και Β΄ γυμνασίου οι μαθητές αυτοί είναι λίγοι (1.5 – 5.7%), ενώ εντοπίζονται 14.2% , 16.6% και 14.5% των μαθητών της Δ΄ τάξης να υπολογίζουν την περίμετρο αντί του εμβαδού του ορθογωνίου, τετραγώνου και τριγώνου αντίστοιχα. Η συμπεριφορά αυτή μπορεί να οφείλεται στην ισχυροποίηση του αθροιστικού εννοιολογικού μοντέλου (Vergnaud, 1990) ή στην πρόωρη εισαγωγή τύπων για την εύρεση της περιμέτρου και του εμβαδού, η οποία δεν επιτρέπει την εμπέδωση των δύο αυτών εννοιών από τους μαθητές, αλλά αντίθετα συμβάλλει στη διαμόρφωση του επιστημολογικού εμποδίου που είναι γνωστό ως «σύγκρουση περιμέτρου και εμβαδού» (Marchett, Medici, Vighi, & Zaccomer, 2005).

Αναφορικά με τα ποσοστά επιτυχίας για τα έργα υπολογισμού εμβαδού σε σύνθετα γεωμετρικά σχήματα (Α1.2Δ_4 και Α1.2Δ_5) παρατηρείται ότι το έργο Α1.2Δ_4 ήταν ευκολότερο για τους μαθητές του δημοτικού από το έργο Α1.2Δ_5, ενώ δεν παρουσιάστηκε ουσιαστική διαφορά της επιτυχίας στα δύο έργα στην περίπτωση των μαθητών του γυμνασίου. Επιπλέον, σημειώνεται ότι, όπως προέκυψε και από την ανάλυση διασποράς, είναι έντονη στα έργα αυτά η διαφοροποίηση της επιτυχίας ως προς τις διαφορετικές ηλικίες.

Ποσοστά Επιτυχίας για Έργα Αναγνώρισης Αναπαραστάσεων Δισδιάστατων Σχημάτων

Σε ότι αφορά την αναγνώριση σχημάτων δύο διαστάσεων παρουσιάστηκαν στους μαθητές 17 γεωμετρικές εικόνες, από τις οποίες καλούνταν να καθορίσουν ποιες από αυτές είναι αναπαραστάσεις τριγώνου (έργο Β1.2Δ_1), τετραγώνου (έργο Β1.2Δ_2), ορθογωνίου (έργο Β1.2Δ_3) και κύκλου (έργο Β1.2Δ_5) και να καθορίσουν ποιες εικόνες παρουσίαζαν τετράπλευρα σχήματα (έργο Β1.2Δ_4). Επιπλέον, παρουσιάστηκε στους μαθητές μια σύνθετη γεωμετρική εικόνα και ζητήθηκε να μετρήσουν και να ονομάσουν τα τρίγωνα (έργο Β7.2Δ_1) και τα ορθογώνια (έργο Β7.2Δ_2) που μπορούσαν να εντοπίσουν. Τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών στα έργα που έχουν αναφερθεί παραπάνω παρουσιάζονται κατά τάξη στον Πίνακα 17.

Από τα τρία απλά γεωμετρικά σχήματα που κλήθηκαν οι μαθητές να αναγνωρίσουν μέσα από διαφορετικές αναπαραστάσεις παρατηρείται ότι ευκολότερα έχουν αναγνωριστεί τα τρίγωνα και με χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας αναγνωρίστηκαν τα τετράγωνα. Γενικά, όμως, θα μπορούσε να λεχθεί ότι τα ποσοστά επιτυχίας που παρουσιάζονται δεν είναι ικανοποιητικά, εάν ληφθεί υπόψη ότι η αναγνώριση επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων αποτελεί αντικείμενο διδασκαλίας από το νηπιαγωγείο και τις μικρές τάξεις του δημοτικού σχολείου. Η μείωση των ποσοστών επιτυχίας οφείλεται στη συμπερίληψη από ορισμένους μαθητές εικόνων που παρουσιάζουν πυραμίδα και τετράπλευρο σε σχήμα «βέλους» στην κλάση των τριγώνων, καθώς και τη συμπερίληψη της αναπαράστασης κύβου στην κλάση των τετραγώνων, γεγονός που αποτελεί πηγή προβληματισμού.

Πίνακας 17

Ποσοστά Επιτυχίας για τα Έργα Αναγνώρισης Σχημάτων Δύο Διαστάσεων κατά Τάξη

	Β1.2Δ_1	Β1.2Δ_2	Β1.2Δ_3	Β1.2Δ_4	Β1.2Δ_5	Β7.2Δ_1	Β7.2Δ_2
Δ΄δημοτικού	44.3	27.1	0	9.6	28.9	4.2	3.3
Στ΄δημοτικού	56.8	43.5	2.7	18.9	30.0	26.1	9.0
Β΄ γυμνασίου	61.8	48.1	2.4	24.2	35.5	32.2	5.7

Τα ποσοστά επιτυχίας για την αναγνώριση των ορθογωνίων (έργο Β1.2Δ_3) είναι ιδιαίτερα χαμηλά. Στις αναπαραστάσεις που παρουσιάστηκαν και οι μαθητές καλούνταν να αναγνωρίσουν και να ονομάσουν τα ορθογώνια συμπεριλαμβάνονταν τέσσερα ορθογώνια, δύο από τα οποία ήταν τετράγωνα. Η μεγάλη αποτυχία των μαθητών και των τριών τάξεων στο έργο Β1.2Δ_3 οφείλεται στη μη συμπερίληψη από τους μαθητές των τετραγώνων στην κατηγορία των ορθογωνίων. Συγκεκριμένα, ποσοστό 79.5% των μαθητών της Δ΄ δημοτικού, 81.7% των μαθητών της Στ΄ δημοτικού και 86.9% των μαθητών της Β΄ γυμνασίου αναγνωρίζει και ονομάζει ορθογώνια μόνο τα δύο ορθογώνια που έχουν διαφορετικό μήκος και πλάτος και συνεπώς δεν συμπεριλαμβάνει στην ομάδα των ορθογωνίων τα τετράγωνα.

Το ερώτημα που προκύπτει στο σημείο αυτό είναι κατά πόσο οι μαθητές γνωρίζουν ότι το τετράγωνο είναι ορθογώνιο. Μια από τις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής που έχουν περιληφθεί στο δοκίμιο, το έργο Α7.2Δ, ακριβώς εξετάζει σε ποιο βαθμό οι μαθητές κατέχουν τη συγκεκριμένη γνωστική μονάδα. Τα ποσοστά επιτυχίας στο έργο Α7.2Δ δείχνουν ότι 61.7% των μαθητών της Δ΄ δημοτικού, 85.9% των μαθητών της Στ΄ δημοτικού και 86.9% των μαθητών της Β΄ γυμνασίου έχουν επιλέξει ως ορθή τη δήλωση «Το τετράγωνο είναι ορθογώνιο». Παρά το γεγονός, όμως, ότι η συγκεκριμένη γνωστική μονάδα περιλαμβάνεται στο γνωσιολογικό τους υπόβαθρο σε θεωρητικό επίπεδο, στο πρακτικό επίπεδο, όταν κλήθηκαν να περιλάβουν στα ορθογώνια και τα τετράγωνα, η ανάκληση και εφαρμογή της δεν πραγματοποιήθηκε. Μια πιθανή ερμηνεία για τη μεγάλη διαφορά που παρουσιάζεται ανάμεσα στα ποσοστά επιτυχίας στο συγκεκριμένο έργο πολλαπλής επιλογής και στο έργο αναγνώρισης σχημάτων για το θέμα των ορθογωνίων (και τη συμπερίληψη των τετραγώνων στην κατηγορία αυτή) είναι το γεγονός ότι οι μαθητές στη δεύτερη περίπτωση στηρίχτηκαν σε μεγάλο βαθμό στην οπτική αντίληψη και τα πρωτοτυπικά σχήματα που έχουν δημιουργήσει για τα ορθογώνια και παραγνώρισαν τη σχετική γνωστική μονάδα. Στο σημείο αυτό υπογραμμίζεται ότι κατά τη διδασκαλία των επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων στο δημοτικό σχολείο, αλλά και κατά την ενασχόληση με το συγκεκριμένο θέμα στο νηπιαγωγείο, γίνεται εισαγωγή μιας κατηγορίας σχημάτων κάτω από την έννοια «ορθογώνια» και μια διαφορετική κατηγορία σχημάτων κάτω από την έννοια «τετράγωνα». Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία της λανθασμένης αντίληψης στους μαθητές ότι τα τετράγωνα ανήκουν σε διαφορετική κλάση σχημάτων από τα ορθογώνια. Η αντίληψη αυτή είναι, όπως καταδεικνύουν τα αποτελέσματα, αρκετά ισχυρή, εφόσον διατηρείται σε μεγάλο μέρος των μαθητών ακόμα και μετά που έχουν διδαχθεί, με βάση τις ιδιότητες των επιπέδων σχημάτων, ότι τα τετράγωνα ανήκουν στην κλάση των ορθογωνίων. Το πρόβλημα που εντοπίζεται εδώ έχει προεκτάσεις στις προσεγγίσεις του θέματος κατά τη διδασκαλία. Είναι φανερό ότι οι στατικές εικόνες με τις πρωτοτυπικές μορφές των σχημάτων που παρουσιάζονται και η έλλειψη ευκαιριών ανακάλυψης από τους μαθητές των ιδιοτήτων των σχημάτων αποτελεί πηγή λανθασμένων αντιλήψεων και έχει ως συνέπεια την προσκόλληση των μαθητών στην οπτική αντίληψη – στο πλαίσιο της Εμπειρικής Γεωμετρίας – και δυσκολία μετάβασης στο πλαίσιο της Εμπειρικής Αξιωματικής Γεωμετρίας.

Έκπληξη και προβληματισμό προκαλούν τα χαμηλά ποσοστά επιτυχίας στο έργο αναγνώρισης αναπαραστάσεων του κύκλου (28.9% , 30.0% και 35.5% των μαθητών της Δ΄ και Στ΄ δημοτικού και της Β΄ γυμνασίου, αντίστοιχα). Το συνηθέστερο λάθος που παρατηρήθηκε και αποτελεί ουσιαστικά την αιτία παρουσίασης αυτών των χαμηλών ποσοστών επιτυχίας είναι η συμπερίληψη και σχημάτων έλλειψης στην κατηγορία του κύκλου.

Τέλος, όσον αφορά την αναγνώριση απλών επίπεδων σχημάτων, σημειώνεται ότι τα ποσοστά των μαθητών και των τριών ηλικιακών ομάδων της έρευνας που έχουν σχηματίσει σωστά την ομάδα των τετράπλευρων σχημάτων (έργο Β1.2Δ_4) είναι χαμηλά (9.6%, 18.9% και 24.2% για τους μαθητές Δ΄ και Στ΄ δημοτικού και τους μαθητές της Β΄ γυμνασίου, αντίστοιχα). Η διαφοροποίηση ως προς τις διαφορετικές ηλικίες, με αύξηση των ποσοστών επιτυχίας στους μεγαλύτερους μαθητές, συνδέεται με την ικανότητα που επιδεικνύουν μαθητές που ανήκουν στο τρίτο επίπεδο van Hiele να συμπεριλαμβάνουν γεωμετρικά σχήματα σε κλάσεις.

Η ικανότητα αναγνώρισης υποσχημάτων σε μια γεωμετρική εικόνα, που εξετάζεται από τα έργα Β7.2Δ_1 και Β7.2Δ_2, σχετίζεται με τον πρώτο τύπο γνωστικής κατανόησης γεωμετρικών σημειωτικών σχεδίων, που αναφέρεται στην αντιληπτική κατανόηση (Duval, 1995). Για τα δύο αυτά έργα, όπου οι μαθητές κλήθηκαν να αναγνωρίσουν και να ονομάσουν ορθογώνια και τρίγωνα, αντίστοιχα, τα οποία αποτελούσαν υποσχήματα σύνθετης γεωμετρικής εικόνας, τα ποσοστά επιτυχίας ήταν πολύ χαμηλά στην περίπτωση των μαθητών της Δ΄ δημοτικού (4.2% για τα τρίγωνα και 3.3 % για τα ορθογώνια). Στους μαθητές των δύο μεγαλύτερων τάξεων η αποτυχία στο θέμα του εντοπισμού ορθογωνίων βρίσκεται σε ψηλά επίπεδα, ενώ τα ποσοστά επιτυχίας στην περίπτωση εντοπισμού τριγώνων φτάνουν μέχρι το 26.1% στους μαθητές Στ΄ δημοτικού και 32.2% στους μαθητές Β΄ γυμνασίου. Μια από τις αιτίες για τα χαμηλότερα ποσοστά στον εντοπισμό ορθογωνίων αποτελεί η μη συμπερίληψη από αρκετούς μαθητές του τετραγώνου που εμφανίζεται στη γεωμετρική εικόνα στην κλάση των ορθογωνίων. Από την άλλη, θα πρέπει να σημειωθεί ότι στην πλειοψηφία τους οι μαθητές εστίασαν την προσοχή τους στον εντοπισμό υποσχημάτων στη γεωμετρική εικόνα που τους δόθηκε, με αποτέλεσμα να μην συμπεριλάβουν το εξωτερικό ορθογώνιο στις απαντήσεις τους.

Ποσοστά Επιτυχίας για Έργα που Απαιτούσαν Γεωμετρικό Συλλογισμό

Στον Πίνακα 18 που ακολουθεί παρουσιάζονται τα ποσοστά επιτυχίας για τα έργα επίλυσης γεωμετρικών προβλημάτων με σχήματα δύο διαστάσεων (Β12.2Δ, Α5.2Δ, Α6.2Δ, Β9.2Δ, P1 και CiRe). Πρόκειται για έργα η επίλυση των οποίων απαιτεί ενεργοποίηση διαδικασιών γεωμετρικού συλλογισμού. Με εξαίρεση τα έργα Α6.2Δ και Β9.2Δ, τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών αυξάνονται από τις μικρότερες στις μεγαλύτερες ηλικίες.

Όπως διαφάνηκε από τα αποτελέσματα της ανάλυσης διασποράς (Πίνακας 14), οι διαφορές των μέσων όρων ήταν στατιστικά σημαντικές ανάμεσα στους μαθητές των τριών τάξεων. Μόνο στην περίπτωση του έργου Β15.2Δ για την περίμετρο η διαφορά που εντοπίστηκε αφορούσε υπεροχή των μαθητών Στ΄ δημοτικού και Β΄ γυμνασίου έναντι των μαθητών της Δ΄ δημοτικού. Περαιτέρω ανάλυση της αντιμετώπισης των παραπάνω έργων από τους μαθητές των τριών ηλικιακών ομάδων της έρευνας γίνεται στο δεύτερο μέρος του υποκεφαλαίου με άξονα το χειρισμό των συγκεκριμένων έργων στα πλαίσια της Εμπειρικής Γεωμετρίας και της Εμπειρικής Αξιωματικής Γεωμετρίας.

Πίνακας 18

Ποσοστά Επιτυχίας για Έργα με Σχήματα Δύο Διαστάσεων που Απαιτούν Γεωμετρικό Συλλογισμό κατά Τάξη

	Β12.2Δ	Α5.2Δ	Α6.2Δ	Β9.2Δ	Β15.2Δ	Β16.2Δ
Δ΄ δημοτικού	2.1	46.1	36.4	44.3	26.2	15.1
Στ΄ δημοτικού	6.3	62.2	71.8	72.7	37.2	33.3
Β΄ γυμνασίου	7.5	81.5	66.9	71.3	40.0	51.9

Η Επίδοση των Μαθητών Δημοτικού και Γυμνασίου στα Έργα Γεωμετρίας που Αφορούν Γεωμετρικά Σχήματα Τριών Διαστάσεων

Έργα Αναγνώρισης Τρισδιάστατων Σχημάτων

Τα έργα που εξέταζαν την ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίζουν διαφορετικές αναπαραστάσεις γεωμετρικών στερεών αποτελούν, σύμφωνα με τα ποσοστά επιτυχίας (Πίνακας 19), μια κατηγορία χαμηλού βαθμού δυσκολίας. Το στερεό με τα ψηλότερα ποσοστά αναγνώρισης ήταν ο κύλινδρος (Α2.3$\Delta_{Α}$, Α2.3$\Delta_{Ρ}$) (με ποσοστά γύρω στο 60% και άνω), ενώ λίγο χαμηλότερα παρουσιάζονται τα ποσοστά αναγνώρισης του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου (Α2.3$\Delta_{Ν}$, Α2.3$\Delta_{Π}$). Πολύ χαμηλότερα (γύρω στο 40-45%) εμφανίζονται τα ποσοστά συμπερίληψης του κύβου στα στερεά (Α2.3$\Delta_{Β}$, Α2.3$\Delta_{Ε}$, Α2.3$\Delta_{Μ}$ Α2.3$\Delta_{Σ}$).

Η αναγνώριση αναπαραστάσεων για τις πυραμίδες (Α2.3$\Delta_{Δ}$, Α2.3$\Delta_{Ζ}$, Α2.3$\Delta_{Λ}$) και η συμπερίληψή τους στα στερεά συγκέντρωσε τα χαμηλότερα ποσοστά (γύρω στα 35-45%). Πιθανές αιτίες για το φαινόμενο αυτό είναι από τη μια η σχετικά μικρή ενασχόληση με το συγκεκριμένο στερεό κατά τη διδασκαλία και από την άλλη οι συγκεκριμένες αναπαραστάσεις που περιλήφθηκαν στα αντίστοιχα έργα. Τέλος, αρκετά ψηλά ποσοστά επιτυχίας παρουσιάζονται, όπως είναι αναμενόμενο, για τη σωστή μη συμπερίληψη των αναπαραστάσεων τετραγώνου, ορθογωνίου και τριγώνου στα στερεά (Α2.3$\Delta_{Γ}$, Α2.3$\Delta_{Η}$, Α2.3$\Delta_{Θ}$, Α2.3$\Delta_{Τ}$).

Πίνακας 19

Ποσοστά Επιτυχίας για τα Έργα Αναγνώρισης Αναπαραστάσεων Τρισδιάστατων Σχημάτων κατά Τάξη

	$Α2.3Δ_{Α}$	$Α2.3Δ_{Β}$	$Α2.3Δ_{Γ}$	$Α2.3Δ_{Δ}$	$Α2.3Δ_{Ε}$	$Α2.3Δ_{Ζ}$	$Α2.3Δ_{Η}$	$Α2.3Δ_{Θ}$
Δ΄δημοτικού	64.8	41.9	62.3	36.7	40.4	34.3	68.7	71.1
Στ΄δημοτικού	67.3	36.9	57.1	39.6	36.6	36.0	64.0	66.1
Β΄ γυμνασίου	79.7	47.2	66.3	43.9	45.7	44.5	69.3	70.7

	$Α2.3Δ_{Κ}$	$Α2.3Δ_{Λ}$	$Α2.3Δ_{Μ}$	$Α2.3Δ_{Ν}$	$Α2.3Δ_{Π}$	$Α2.3Δ_{Ρ}$	$Α2.3Δ_{Σ}$	$Α2.3Δ_{Τ}$
Δ΄δημοτικού	44.9	36.1	38.6	65.7	65.1	58.7	40.1	71.7
Στ΄δημοτικού	46.8	33.9	35.4	63.1	63.1	60.1	37.2	70.6
Β΄ γυμνασίου	59.7	46.3	44.8	69.3	71.6	78.2	45.4	74.6

Ο Πίνακας 20 περιλαμβάνει έργα τα οποία αφορούσαν τις έδρες των γεωμετρικών στερεών που δόθηκαν (τετραγωνική πυραμίδα, κύβος, τετράεδρο, ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο). Συγκεκριμένα, εξετάζουν κατά πόσο οι μαθητές μπορούν να καθορίσουν, με βάση τη δισδιάστατη αναπαράσταση του στερεού, τον αριθμό ($Α3.3Δ_2$, $Α3.3Δ_4$, $Α3.3Δ_6$, $Α3.3Δ_8$) και το σχήμα ($Α3.3Δ_1$, $Α3.3Δ_3$, $Α3.3Δ_5$, $Α3.3Δ_7$) των εδρών του. Γενικά τα έργα αυτά παρουσιάζουν πολύ ψηλά ποσοστά επιτυχίας στους μαθητές και των τριών ομάδων του δείγματος. Εκεί που παρατηρείται μικρή μείωση (σε σύγκριση με όλα τα υπόλοιπα έργα του Πίνακα 20) στα ποσοστά επιτυχίας είναι στο έργο που αφορά τον αριθμό των εδρών τετραέδρου, στερεό με το οποίο ενδεχομένως αρκετοί μαθητές να μην είναι εξοικειωμένοι.

Πίνακας 20

Ποσοστά Επιτυχίας για τα Έργα που Αφορούν τις Έδρες Γεωμετρικών Στερεών κατά Τάξη

	$Α3.3Δ_1$	$Α3.3Δ_2$	$Α3.3Δ_3$	$Α3.3Δ_4$	$Α3.3Δ_5$	$Α3.3Δ_6$	$Α3.3Δ_7$	$Α3.3Δ_8$
Δ΄δημοτικού	72.3	82.2	76.2	72.6	71.4	62.0	75.9	68.7
Στ΄δημοτικού	82.0	87.1	85.3	83.2	85.3	72.1	87.7	83.8
Β΄ γυμνασίου	84.5	87.2	83.9	88.7	81.2	73.4	87.8	87.2

Η αναγνώριση και ονομασία των τεσσάρων στερεών που δόθηκαν ήταν από τα έργα με ψηλά ποσοστά επιτυχίας (Πίνακας 21). Τα υψηλότερα ποσοστά παρουσιάστηκαν στην περίπτωση της τετραγωνικής πυραμίδας και του κύβου (γύρω στο 85%). Ακολουθεί η τριγωνική πυραμίδα (ποσοστά επιτυχίας 60-70%), ενώ οι μαθητές του δημοτικού σχολείου παρουσιάζουν χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας στην ονομασία του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου (52-58%). Τα συνηθέστερα λάθη που σημειώθηκαν στην περίπτωση των πυραμίδων ήταν η αναφορά της ονομασίας «τρίγωνο», ενώ στην αναπαράσταση του κύβου η αναφορά της ονομασίας «τετράγωνο». Τα λάθη, όμως, αυτά παρουσιάστηκαν σε πολύ μικρή ομάδα μαθητών (6-8%). Το λάθος που παρουσιάστηκε σε μεγαλύτερη έκταση ήταν η περίπτωση ονομασίας του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου, όπου ποσοστό 26-31% των μαθητών έχουν σημειώσει ότι πρόκειται για ορθογώνιο.

Πίνακας 21

Ποσοστά Επιτυχίας για τα Έργα Αναφοράς της Ονομασίας Γεωμετρικών Στερεών και για το Έργο Κατασκευής Στερεού από Κυβικές Μονάδες κατά Τάξη

	Β2(α).3$Δ_Α$	Β2(α).3$Δ_Β$	Β2(α).3$Δ_Γ$	Β2(α).3$Δ_Δ$	Β8.3Δ
Δ΄δημοτικού	84.3	83.7	58.4	72.6	27.7
Στ΄δημοτικού	85.0	85.6	52.6	70.9	60.4
Β΄ γυμνασίου	84.8	88.1	60.3	66.0	68.7

Ποσοστά Επιτυχίας για Έργα που Αφορούσαν Χειρισμό Αναπτυγμάτων Γεωμετρικών Στερεών

Έργα Αναγνώρισης Αναπτυγμάτων

Στο δοκίμιο γεωμετρίας περιλήφθηκαν δέκα έργα αναγνώρισης αναπτυγμάτων στερεών (Β2.$Αν_1$- Β2.$Αν_{10}$) στα οποία οι μαθητές καλούνταν να σημειώσουν σε ποιο από τέσσερα δεδομένα στερεά (τετραγωνική πυραμίδα, κύβος, ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, τετράεδρο) αντιστοιχεί κάθε ανάπτυγμα και επιπλέον να δηλώσουν ποια γεωμετρικά σχέδια δεν αποτελούσαν αναπαράσταση αναπτύγματος οποιουδήποτε στερεού. Επιπλέον, σε σχέση με την αναγνώριση αναπτυγμάτων περιλήφθηκαν έξι έργα που εξέταζαν μόνο την ικανότητα αναγνώρισης αναπτυγμάτων κύβου (Β3.$Αν_Α$ - Β3.$Αν_Ζ$). Στον Πίνακα 22 παρουσιάζονται τα ποσοστά επιτυχίας για όλα τα έργα αναγνώρισης αναπτυγμάτων κατά τάξη.

Τα έξι έργα που αφορούσαν ειδικά την ικανότητα αναγνώρισης διαφορετικών αναπαραστάσεων αναπτύγματος κύβου (Β3.$Αν_Α$ - Β3.$Αν_Ζ$) συγκεντρώνουν αρκετά ψηλά ποσοστά επιτυχίας ανάμεσα στους μαθητές και των τριών τάξεων. Οι μαθητές δεν δυσκολεύτηκαν να εντοπίσουν τα γεωμετρικά σχέδια που δεν αποτελούσαν αναπαραστάσεις αναπτύγματος κύβου, στις οποίες τα τετράγωνα που αντιστοιχούν στις έδρες δεν ήταν έξι. Ταυτόχρονα έχουν αναγνωρίσει με μεγάλη ευκολία το σταυροειδές ανάπτυγμα κύβου (Β3.Αν$_{Ε}$), το οποίο αποτελεί για τους μαθητές μια από τις πλέον γνώριμες αναπαραστάσεις αναπτύγματος κύβου. Το φαινόμενο αυτό οφείλεται τόσο στη διδασκαλία του θέματος, μέσω της οποίας υπάρχει η πιθανότητα η συγκεκριμένη αναπαράσταση να αναγνωρίζεται τελικά ως πρωτοτυπική μορφή αναπτύγματος κύβου, όσο και στη διαρρύθμιση των εδρών στη συγκεκριμένη αναπαράσταση γύρω από μια βάση. Αρκετά χαμηλότερα, όμως, είναι τα ποσοστά επιτυχίας στο έργο Β3.Αν$_{Γ}$, στο οποίο παρουσιαζόταν μια άλλη ορθή αναπαράσταση αναπτύγματος κύβου.

Πίνακας 22

Ποσοστά Επιτυχίας για τα Έργα Αναγνώρισης Αναπτυγμάτων Γεωμετρικών Στερεών κατά Τάξη

	Β2.Αν$_{1}$	Β2.Αν$_{2}$	Β2.Αν$_{3}$	Β2.Αν$_{4}$	Β2.Αν$_{5}$	Β2.Αν$_{6}$	Β2.Αν$_{7}$	Β2.Αν$_{8}$
Δ΄δημοτικού	74.4	21.7	37.3	55.4	64.2	41.3	58.4	48.8
Στ΄δημοτικού	84.4	24.9	53.2	64.0	81.4	61.3	78.1	62.2
Β΄ γυμνασίου	87.5	41.8	61.5	60.0	87.5	47.2	76.7	44.8

	Β2.Αν$_{9}$	Β2.Αν$_{10}$	Β3.Αν$_{Α}$	Β3.Αν$_{Β}$	Β3.Αν$_{Γ}$	Β3.Αν$_{Δ}$	Β3.Αν$_{Ε}$	Β3.Αν$_{Ζ}$
Δ΄δημοτικού	19.6	32.2	81.0	83.7	41.6	52.1	77.7	82.2
Στ΄δημοτικού	22.5	47.7	85.9	95.8	58.9	79.3	96.7	94.3
Β΄ γυμνασίου	35.2	33.7	81.2	91.9	63.3	71.6	88.1	85.4

Εδώ αξίζει να επισημανθεί ότι ενώ στα υπόλοιπα πέντε έργα αναγνώρισης αναπτύγματος κύβου οι μαθητές της Στ΄ δημοτικού συγκεντρώνουν υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας από τους μαθητές των δύο άλλων τάξεων, στην περίπτωση του έργου Β3.Αν$_{Γ}$ είναι οι μαθητές της Β΄ γυμνασίου που έχουν επιτύχει σε μεγαλύτερο βαθμό. Το γεγονός ότι οι μαθητές της Στ΄ δημοτικού γενικά επιτυγχάνουν στα έργα αυτά οφείλεται στο γεγονός ότι έχουν εμπειρίες για το σχετικό θέμα ήδη από την Γ΄ δημοτικού – άρα υπερτερούν των μαθητών της Δ΄ δημοτικού που έχουν λιγότερες μαθησιακές εμπειρίες στο θέμα – ενώ αντίθετα οι αναπαραστάσεις αναπτυγμάτων γεωμετρικών στερεών δεν αποτελεί αντικείμενο διδασκαλίας για τους μαθητές του γυμνασίου. Είναι ενδιαφέρον, όμως, ότι σε μια αναπαράσταση αναπτύγματος που δεν είναι ιδιαίτερα διαδεδομένη μέσω της διδασκαλίας (όπως αυτή που παρουσιάζεται στο έργο Β3.Αν$_{Γ}$) οι μαθητές του γυμνασίου έχουν επιτύχει υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας, μη στηριζόμενοι σε γνώριμες πρωτοτυπικές μορφές αναπαραστάσεων, αλλά ενεργοποιώντας ενδεχομένως ουσιαστικές διαδικασίες αναγνώρισης αναπτυγμάτων, όπως η νοητική περιστροφή και ο νοητικός χειρισμός εικόνων για τη δίπλωση σχημάτων.

Ακολουθούν παρατηρήσεις αναφορικά με την επιτυχία των μαθητών στα έργα αναγνώρισης αναπτυγμάτων διαφορετικών γεωμετρικών στερεών (Β2.Αν$_{1}$- Β2.Αν$_{10}$). Για όλα τα είδη στερεών στα οποία αντιστοιχούν στα έργα αυτά ορισμένα αναπτύγματα παρατηρείται ότι οι μαθητές αναγνωρίζουν με μεγαλύτερη ευκολία και επιτυχία τις αναπαραστάσεις στις οποίες η διευθέτηση των εδρών γίνεται γύρω από μια έδρα που λειτουργεί ως βάση. Το φαινόμενο αυτό ισχύει τόσο για τα αναπτύγματα τετραγωνικής πυραμίδας και τετράεδρου όσο και για τα αναπτύγματα κύβου και ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Τα ποσοστά επιτυχίας είναι υψηλότερα στο έργο Β2.Αν$_{4}$ από ότι στο έργο Β2.Αν$_{2}$ (αναπτύγματα τετραέδρου) και στο έργο Β2.Αν$_{1}$ από ότι στο έργο Β2.Αν$_{9}$ (αναπτύγματα τετραγωνικής πυραμίδας). Από τις δύο αναπαραστάσεις αναπτυγμάτων κύβου επίσης που περιλαμβάνονταν σε αυτή τη σειρά έργων υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας παρουσιάστηκαν στο αντεστραμμένο σταυροειδές ανάπτυγμα (Β2.Αν$_{3}$) – κυρίως ανάμεσα στους μαθητές Στ΄ δημοτικού και Β΄ γυμνασίου – παρά στην αναπαράσταση Β2.Αν$_{7}$.

Η διευθέτηση των εδρών γύρω από μια έδρα-βάση θεωρείται υποβοηθητική στην αναγνώριση αναπτυγμάτων λόγω της μείωσης του φόρτου της λειτουργικής μνήμης από τις επιπλέον διαδικασίες που απαιτούνται στις περιπτώσεις άλλων μορφών αναπαράστασης αναπτυγμάτων. Επιπλέον, η συγκεκριμένη προσέγγιση αποτελεί μια συνηθισμένη πρακτική που χρησιμοποιείται από τους εκπαιδευτικούς κατά τη διδασκαλία των αναπτυγμάτων, οπόταν ενδεχομένως αρκετοί μαθητές να είναι εξοικειωμένοι με αυτή.

Τέλος, σχετικά με τα γεωμετρικά σχέδια που παρουσιάστηκαν στη σειρά των έργων αναγνώρισης αναπτυγμάτων ως αντιπαραδείγματα της έννοιας και οι μαθητές καλούνταν να σημειώσουν ότι δεν αποτελούν ανάπτυγμα οποιουδήποτε στερεού (έργα Β2.Αν$_{6}$, Β2.Αν$_{8}$, Β2.Αν$_{10}$) η αναπαράσταση στο έργο Β2.Αν$_{10}$ ήταν η πλέον παραπλανητική. Ένα ποσοστό 35-45% των μαθητών σημείωσαν ότι πρόκειται για ανάπτυγμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Πιθανή αιτία για το λάθος αυτό είναι ότι οι μαθητές στηρίχτηκαν για τη λήψη της συγκεκριμένης απόφασης στην οπτική αντίληψη. Έτσι, λόγω της ομοιότητας της συγκεκριμένης αναπαράστασης με την ορθή αναπαράσταση αναπτύγματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου στο έργο Β2.Αν$_{5}$, δεν προχώρησαν σε προσεκτική ανάλυση των στοιχείων του προτεινόμενου γεωμετρικού σχεδίου υπό το πρίσμα πιθανής μετατροπής του σε στερεό.

Στον Πίνακα 23 που ακολουθεί παρουσιάζονται τα ποσοστά επιτυχίας για τέσσερα έργα που περιλήφθηκαν στο δοκίμιο γεωμετρίας και αφορούν αναπτύγματα κύβου.

Πρόκειται για δύο έργα που εξετάζουν την ικανότητα κατασκευής αναπτύγματος κύβου (έργα Α4.Αν και Β4.Αν$_{1-2}$) και δύο έργα αντιστοίχησης αναπτύγματος κύβου με το σχέδιο του στερεού στην περίπτωση κωδικοποίησης των εδρών με χρήση συμβόλων (έργα Β5.Αν και Β6.Αν).

Οι μαθητές της Στ΄ τάξης έχουν επιτύχει να σχεδιάσουν ανάπτυγμα κύβου με σημαντική διαφορά σε σχέση με τους μαθητές των δύο άλλων τάξεων. Συγκεκριμένα, τα ποσοστά επιτυχίας ήταν 27.1% για την Δ΄ τάξη, 66.1% για την Στ΄ τάξη και 36.3% για τη Β΄ γυμνασίου. Η μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών που σχεδίασαν σωστό ανάπτυγμα κύβου παρουσίασε ένα σταυροειδές ανάπτυγμα, την πλέον γνώριμη και εύχρηστη για αυτούς αναπαράσταση αναπτύγματος κύβου. Το χαμηλό ποσοστό επιτυχίας στο συγκεκριμένο έργο ανάμεσα στους μαθητές της Δ΄ τάξης μπορεί να δικαιολογηθεί από το γεγονός ότι οι μαθητές αυτοί είχαν μια επαφή με την έννοια του αναπτύγματος στην Γ΄ τάξη, άρα οι μαθησιακές τους εμπειρίες για το θέμα είναι περιορισμένες. Από την άλλη, στη Β΄ γυμνασίου φαίνεται ότι οι μαθητές έχουν ξεχάσει την έννοια του αναπτύγματος, την οποία δεν έχουν συναντήσει κατά τη διδασκαλία στα δύο χρόνια φοίτησης στο γυμνάσιο. Η επικρατέστερη απάντηση ανάμεσα στους μαθητές αυτούς στο έργο κατασκευής αναπτύγματος κύβου, με ποσοστό 42.1%, είναι η παρουσίαση μιας δισδιάστατης εικόνας του στερεού. Η λανθασμένη αυτή απάντηση συναντάται σε πολύ μικρότερο ποσοστό στους μαθητές της Στ΄ δημοτικού (14.4%), αλλά στην περίπτωση των μαθητών της Δ΄ δημοτικού δόθηκε από 28.6% των μαθητών, ποσοστό μεγαλύτερο από το ποσοστό των μαθητών που απάντησαν ορθά.

Πίνακας 23

Ποσοστά Επιτυχίας για Έργα Ειδικά για Αναπτύγματα Κύβου κατά Τάξη

	Α4.Αν	Β4.Αν$_{1-2}$	Β5.Αν	Β6.Αν
Δ΄δημοτικού	27.1	23.2	49.7	38.9
Στ΄δημοτικού	66.1	70.9	59.5	40.8
Β΄ γυμνασίου	36.3	60.3	60.3	41.8

Στο τελευταίο μέρος αυτού του υποκεφαλαίου παρουσιάζονται τα ποσοστά επιτυχίας έργων πολλαπλής επιλογής (Πίνακας 24) που συμπεριλήφθηκαν στο δοκίμιο γεωμετρίας. Με τα έργα αυτά ελέγχεται η ύπαρξη συγκεκριμένων γνωστικών μονάδων που αφορούν θέματα γεωμετρίας στο γνωσιολογικό δίκτυο των μαθητών. Συγκεκριμένα, με το έργο Α7.2Δ ελέγχεται κατά πόσο οι μαθητές κατέχουν τη γνωστική μονάδα που αφορά την ιδιότητα της ισότητας των πλευρών του τετραγώνου. Η επιτυχία στο έργο αυτό βρίσκεται σε ψηλά επίπεδα, με 61.7% στους μαθητές της Δ΄ δημοτικού και ένα ποσοστό της τάξης του 86% στους μεγαλύτερους μαθητές. Τα έργα Β10.3Δ και Β13.3Δ αφορούν τις έδρες κύβου και πυραμίδων αντίστοιχα. Όπως είναι αναμενόμενο, η επιτυχία είναι πολύ μεγαλύτερη στην περίπτωση των εδρών του κύβου, εφόσον πρόκειται για ένα θέμα το οποίο οι μαθητές μαθαίνουν όχι μόνο κατά τη διδασκαλία, αλλά και μέσα από τα παιχνίδια τους (με ζάρια). Τέλος τα έργα Β11.2Δ και Β14.3Δ εξετάζουν κατά πόσο οι μαθητές περιλαμβάνουν τα τετράγωνα στην κλάση των ορθογωνίων και τους κύβους στην κλάση των ορθογώνιων παραλληλεπιπέδων, αντίστοιχα.

Πίνακας 24

Ποσοστά Επιτυχίας για τα Έργα Πολλαπλής Επιλογής κατά Τάξη

	Α7.2Δ	Β10.3Δ	Β11.2Δ	Β13.3Δ	Β14.3Δ
Δ΄δημοτικού	61.7	66.9	5.7	39.2	11.4
Στ΄δημοτικού	85.9	82.0	24.3	48.3	26.1
Β΄ γυμνασίου	86.9	91.6	25.4	37.3	23.0

Όπως καταδεικνύουν τα στοιχεία στον Πίνακα μόνο ένα ποσοστό γύρω στο 25% των μαθητών Στ΄ δημοτικού και Β΄ γυμνασίου έχουν επιτύχει στα δύο αυτά έργα, ενώ μόνο 5.7% των μαθητών της Δ΄ δημοτικού κατατάσσουν τα τετράγωνα στα ορθογώνια και 11.4% των μαθητών αυτών κατατάσσουν τους κύβους στα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα. Το αποτέλεσμα αυτό βρίσκεται σε συμφωνία με το ιεραρχικό μοντέλο γεωμετρικής σκέψης van Hiele, σύμφωνα με το οποίο η ικανότητα συμπερίληψης σχημάτων σε κλάσεις αποτελεί χαρακτηριστικό του τρίτου επιπέδου, όπου οι μαθητές αντιλαμβάνονται τις σχέσεις ανάμεσα στις ιδιότητες των σχημάτων και ανάμεσα στα σχήματα.

Σύγκριση Μαθητών Δημοτικού και Γυμνασίου ως προς την Αντιμετώπιση Γεωμετρικών Έργων στα Πλαίσια της Εμπειρικής Γεωμετρίας και της Εμπειρικής Αξιωματικής Γεωμετρίας

Στο υποκεφάλαιο που ακολουθεί επιχειρείται μια προσπάθεια σύγκρισης των μαθητών δημοτικού και γυμνασίου ως προς την αντιμετώπιση ορισμένων έργων στα πλαίσια της Εμπειρικής Γεωμετρίας και της Εμπειρικής Αξιωματικής Γεωμετρίας. Η συζήτηση αυτή καλύπτει έργα για την επίλυση των οποίων απαιτείται ενεργοποίηση διαδικασιών γεωμετρικού συλλογισμού που εμπίπτουν στο πλαίσιο της Εμπειρικής Αξιωματικής Γεωμετρίας (έργα Α6.2Δ, Β9.2Δ, Α5.2Δ, Β16.2Δ, Β12.2Δ) και τα οποία δεν επιλύονται σωστά από τους μαθητές που έχουν παραμείνει σε διαδικασίες του πλαισίου της Εμπειρικής Γεωμετρίας. Απώτερος στόχος, μέσα από τη συζήτηση των επικρατέστερων λαθών, είναι ο εντοπισμός και η συζήτηση κρίσιμων σημείων που αφορούν τη μετάβαση των μαθητών από τα πλαίσια της Εμπειρικής Γεωμετρίας στα πλαίσια της Εμπειρικής Αξιωματικής Γεωμετρίας. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται για κάθε έργο ξεχωριστά, με αναφορά στα φαινόμενα που προκύπτουν από τα υπό συζήτηση έργα.

Παρατηρήσεις για τα Έργα Α6.2Δ και Β9.2Δ

Στα έργα Α6.2Δ και Β9.2Δ δόθηκε σύνθετη γεωμετρική εικόνα όπου τα υποσχήματα που διακρίνονται είναι ένα τετράγωνο και ένα ορθογώνιο τρίγωνο. Για την επίλυση των συγκεκριμένων έργων είναι αρκετό ο μαθητής να παρατηρήσει ότι το ζητούμενο ευθύγραμμο τμήμα αποτελεί πλευρά τετραγώνου και ανακαλώντας την ιδιότητα που αναφέρεται στην ισότητα των πλευρών τετραγώνου να δώσει την ορθή απάντηση. Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι με το έργο πολλαπλής επιλογής Α7.2Δ που περιλήφθηκε στο δοκίμιο γεωμετρίας εξετάστηκε εάν οι μαθητές κατέχουν τη γνωστική μονάδα που σχετίζεται με αυτή την ιδιότητα του τετραγώνου. Κρίνεται σκόπιμο στο σημείο αυτό όπως τα αποτελέσματα για τα έργα Α6.2Δ και Β9.2Δ συζητηθούν παράλληλα με τα στοιχεία που αναφέρονται στο έργο Α7.2Δ. Τα ποσοστά επιτυχίας και των τριών αυτών έργων εμφανίζονται στον Πίνακα 25.

Όπως καταδεικνύουν τα στοιχεία στον Πίνακα 25, οι μαθητές που έχουν απαντήσει με επιτυχία στο έργο Α7.2Δ είναι περισσότεροι από τους μαθητές που έχουν επιλύσει σωστά τα έργα Α6.2Δ και Β9.2Δ. Η επιτυχία στα δύο αυτά έργα είναι μειωμένη σε σχέση με την επιτυχία στο έργο πολλαπλής επιλογής, με εμφανέστερο το φαινόμενο αυτό στους μικρότερους μαθητές, της Δ΄ δημοτικού.

Πίνακας 25

Ποσοστά Επιτυχίας στα Έργα Α7.2Δ, Α6.2Δ και Β9.2Δ ανά τάξη

	Α7.2Δ	Α6.2Δ	Β9.2Δ
Δ΄ τάξη	61.7	36.4	44.3
Στ΄ τάξη	85.9	71.8	72.7
Β΄ γυμνασίου	86.9	66.9	71.3

Για σκοπούς καλύτερης ανάλυσης των αποτελεσμάτων αυτών κατασκευάστηκαν και μελετήθηκαν οι πίνακες διασταυρούμενης συχνότητας (crosstabs tables) για τα τρία έργα που εμφανίζονται στον Πίνακα 25. Από τη μελέτη των πινάκων διασταυρούμενης συχνότητας προκύπτει ότι οι μισοί από τους μαθητές της Δ΄ δημοτικού οι οποίοι απάντησαν ορθά στο έργο Α7.2Δ (δηλαδή γνωρίζουν ότι οι πλευρές ενός τετραγώνου είναι ίσες μεταξύ τους) απέτυχαν να επιλύσουν με επιτυχία τα έργα Α6.2Δ και Β9.2Δ, στα οποία η ανάκληση και εφαρμογή της συγκεκριμένης γνωστικής μονάδας συνδέεται άμεσα με την ορθή επίλυση. Συγκεκριμένα, 51.2% των μαθητών της Δ΄ δημοτικού που έδωσε ορθή απάντηση στο έργο Α7.2Δ απέτυχε στο έργο Α6.2Δ, ενώ το αντίστοιχο ποσοστό για το έργο Β9.2Δ είναι 50.2%. Στην περίπτωση των μαθητών της Στ΄ δημοτικού ποσοστό 22% των μαθητών που πέτυχαν στο έργο Α7.2Δ απέτυχε στο έργο Α6.2Δ και 21.3% των μαθητών που πέτυχαν στο έργο πολλαπλής επιλογής απέτυχε στο έργο Β9.2Δ. Τα ποσοστά αυτά μειώνονται σημαντικά στους μαθητές της Β΄ γυμνασίου στο 10% και 12.4% αντίστοιχα.

Τα στοιχεία που αναφέρθηκαν παραπάνω καταδεικνύουν ότι από μόνη της η κατοχή της γνωστικής μονάδας που αφορά την ιδιότητα της ισότητας των πλευρών τετραγώνου δεν συνεπάγεται την ανάκληση και εφαρμογή της στα συγκεκριμένα έργα. Απαιτείται επιπλέον ικανότητα εντοπισμού υποσχημάτων σε μια σύνθετη γεωμετρική εικόνα, καθώς και μετάβαση από τις δύο διαστάσεις στη μία διάσταση. Ο μαθητής, δηλαδή, στα έργα αυτά θα πρέπει σε κάποια στιγμή να ξεφύγει από τα υποσχήματα που αντιλαμβάνεται στις δύο διαστάσεις και να δει τα ευθύγραμμα τμήματα που τα σχηματίζουν. Τέλος, χρειάζεται να ανακαλέσει από το γνωστικό του δίκτυο και να εφαρμόσει την ιδιότητα ισότητας των πλευρών τετραγώνου. Είναι ευδιάκριτο ότι οι μαθητές του γυμνασίου εμφανίστηκαν γενικά πιο ικανοί να εφαρμόσουν την ιδιότητα του τετραγώνου, λειτουργώντας δηλαδή στο πλαίσιο της Εμπειρικής Αξιωματικής Γεωμετρίας.

Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί ότι, ενώ με μια απλή εφαρμογή της ιδιότητας της ισότητας των πλευρών του τετραγώνου οι μαθητές θα έδιναν την ορθή απάντηση, παρουσιάστηκε ποσοστό μαθητών της Β΄ γυμνασίου οι οποίοι κατέφυγαν στην εφαρμογή πυθαγορείου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο με στόχο να υπολογίσουν το ζητούμενο ευθύγραμμο τμήμα (18.5% στο έργο Α6.2Δ και 11.6% στο έργο Β9.2Δ). Στις πλείστες δε των περιπτώσεων οι μαθητές μετά την εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος σημείωναν ότι η απάντηση που βρήκαν δικαιολογείται και από το γεγονός ότι το ζητούμενο ευθύγραμμο τμήμα αποτελούσε και πλευρά του δεδομένου τετραγώνου. Η συμπεριφορά αυτή των μαθητών προκαλείται από το διδακτικό συμβόλαιο που στη συγκεκριμένη περίπτωση έχει ως αποτέλεσμα την αυτόματη εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος σε όποιο σχήμα παρουσιάζεται ορθογώνιο τρίγωνο. Παράλληλα, όμως, καταδεικνύει μια δυσκολία που αφορά τη μετάβαση των μαθητών από το δημοτικό στο γυμνάσιο.

Συγκεκριμένα, η έμφαση στη χρήση αλγορίθμων κατά τη διδασκαλία στο γυμνάσιο έχει ως αποτέλεσμα σιγά σιγά οι μαθητές να αισθάνονται την ασφάλεια ενός αλγορίθμου πιο ισχυρή από την απλή εφαρμογή μιας ιδιότητας.

Τα συνηθέστερα λάθη που εντοπίστηκαν στα έργα Α6.2Δ και Β9.2Δ είναι (α) η τυχαία χρήση των δεδομένων που παρουσιάζονται στο σχήμα που δόθηκε στους μαθητές και (β) η χρήση ρίγας από ορισμένους μαθητές, οι οποίοι αγνόησαν τα δεδομένα του προβλήματος και θεώρησαν ότι για να βρουν το ζητούμενο μήκος θα έπρεπε να μετρήσουν με τη ρίγα τους το αντίστοιχο ευθύγραμμο τμήμα που παρουσιαζόταν στο σχήμα. Ο Πίνακας 26 παρουσιάζει για τους μαθητές κάθε τάξης τις ομάδες των μαθητών που απέτυχαν να δώσουν ορθή απάντηση εξαιτίας τυχαίας χρήσης των δεδομένων ή χρήσης της ρίγας. Τα ποσοστά αυτά είναι γενικά μικρά και οπωσδήποτε μειώνονται με την αύξηση της ηλικίας των μαθητών, συνεπώς με τη μετάβασή τους από το πλαίσιο της Εμπειρικής Γεωμετρίας στο πλαίσιο της Εμπειρικής Αξιωματικής Γεωμετρίας.

Πίνακας 26

Ποσοστά Αποτυχίας στα Έργα Α6.2Δ και Β9.2Δ κατά Τάξη

	Έργο Α6.2Δ		Έργο Β9.2Δ	
	Τυχαία χρήση δεδομένων	Χρήση χάρακα	Τυχαία χρήση δεδομένων	Χρήση χάρακα
Δ΄ τάξη	6.0	8.4	6.3	4.5
Στ΄ τάξη	4.8	2.1	3.9	2.1
Β΄ γυμνασίου	2.4	0	1.5	0

Παρατηρήσεις για το Έργο Β12.2Δ

Στο έργο αυτό παρουσιάζονται δύο σχήματα που έχουν το ίδιο εμβαδό και οι μαθητές καλούνται με τις δεδομένες διαστάσεις του πρώτου σχήματος (σύνθετη γεωμετρική εικόνα η οποία αναλύεται σε ένα ορθογώνιο και δύο ορθογώνια τρίγωνα) και δεδομένο το μήκος του δεύτερου σχήματος (ορθογωνίου) να βρουν το πλάτος. Το λάθος που σημειώθηκε στο μεγαλύτερο βαθμό κατά την προσπάθεια επίλυσης του έργου αυτού είναι η τυχαία χρήση των δεδομένων που εμφανίζονται στο πρώτο γεωμετρικό σχήμα και ο συνδυασμός τους με τυχαίες αριθμητικές πράξεις (17.2% 18.9% και 9.0% για τους μαθητές της Δ΄ δημοτικού, Στ΄ δημοτικού και Β΄ γυμνασίου, αντίστοιχα). Επιπλέον 8.4% των μαθητών της Δ΄ τάξης έχουν μετρήσει το ζητούμενο πλάτος με τη ρίγα και απαντούν «περίπου 2 εκ», ενώ 6.6% των μαθητών της ίδιας τάξης και 4.8% της Στ΄ απαντούν ότι το ζητούμενο πλάτος είναι 6 εκ., εξηγώντας ότι «από ότι φαίνεται στο σχήμα, είναι το μισό του δεδομένου μήκους του ορθογωνίου». Όπως παρατηρείται, τα παραπάνω λάθη συνδέονται με αντιμετώπιση έργων στο πλαίσιο της Εμπειρικής Γεωμετρίας, στο οποίο οι μαθητές είτε στηρίζονται στην οπτική αντίληψη είτε χρησιμοποιούν γεωμετρικά όργανα και κάνουν μετρήσεις πάνω στη δεδομένη αναπαράσταση του προβλήματος. Η χρήση των λανθασμένων αυτών προσεγγίσεων παρουσιάζεται κυρίως ανάμεσα στους μαθητές του δημοτικού σχολείου.

Συνολικά εντοπίζονται 7.2% μαθητών Δ΄ τάξης, 18.6% μαθητών Στ΄ τάξης και 33.8% που έλυσαν σωστά το έργο αυτό, το οποίο ήταν, όπως καταδεικνύουν τα ποσοστά αποτυχίας, από τα δυσκολότερα στο δοκίμιο. Από τους μαθητές αυτούς 2.1% 6.3% και 7.5% των μαθητών των τριών τάξεων αντίστοιχα έδωσαν την ορθή απάντηση μετά από ανασχηματισμό του σχήματος Α. Συγκεκριμένα, οι μαθητές αυτοί επέδειξαν δυναμική αντίληψη του σχήματος και μετακινώντας το ορθογώνιο τρίγωνο και παρατηρώντας τις διαστάσεις που δίνονται κατάλαβαν ότι σχηματίζεται το ορθογώνιο που παρουσιάζεται ως σχήμα Β. Ο ανασχηματισμός της πρώτης γεωμετρικής εικόνας συνδέεται με την ικανότητα αναγνώρισης των υποσχημάτων και τη νοητική περιστροφή τους με τρόπο ώστε το αποτέλεσμα να είναι συγκρίσιμο με το δεύτερο γεωμετρικό σχήμα. Πρόκειται, δηλαδή, για τη λειτουργική κατανόηση ενός σχήματος, για την οποία γίνεται αναφορά στο πλαίσιο ανάλυσης του Duval (1995, 2002), όπου το άτομο χρειάζεται να ενεργήσει πάνω στο σχήμα για να επιλύσει ένα έργο.

Σημειώνεται ότι έχουν καταγραφεί περιπτώσεις μαθητών που εργάστηκαν με αλγόριθμους για να βρουν το εμβαδό του πρώτου σχήματος και να διαιρέσουν διά του δεδομένου μήκους, αλλά στην πορεία αυτή έκαναν κάποια λάθη αριθμητικά ή δεν ολοκλήρωσαν τους υπολογισμούς: 3.3% των μαθητών της Δ΄ τάξης, 9.6% των μαθητών της Στ΄ τάξης και 23% των μαθητών της Β΄ γυμνασίου. Στην περίπτωση που ένας μαθητής χρησιμοποιήσει την αλγοριθμική προσέγγιση, το έργο αυτό απαιτεί για την επίλυσή του την ύπαρξη, την ανάκληση και ενεργοποίηση αρκετών νοητικών σχημάτων και συστατικών της γεωμετρικής γνώσης. Συγκεκριμένα, οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν την έννοια του εμβαδού και των ισεμβαδικών σχημάτων (αν και δίνεται στην εκφώνηση του έργου), να μπορούν να εφαρμόσουν ιδιότητα που αναφέρεται στην ισότητα των απέναντι πλευρών ορθογωνίου, να υπολογίζουν σωστά το εμβαδό ορθογωνίου και ορθογωνίου τριγώνου.

Παρατηρήσεις για το έργο Α5.2Δ και το έργο Β16.2Δ

Στη γεωμετρική εικόνα που παρουσιάστηκε στο έργο Α5.2Δ εμφανίζονται ως υποσχήματα ένα τετράγωνο και ένα ορθογώνιο. Για την επίλυση του συγκεκριμένου έργου απαιτείται ο λύτης να διακρίνει τα δύο υποσχήματα, να κατέχει και να χρησιμοποιήσει τη γνωστική μονάδα που αναφέρεται στην ιδιότητα της ισότητας των πλευρών του τετραγώνου. Τα ποσοστά επιτυχίας μπορούν να θεωρηθούν ικανοποιητικά για τους μαθητές του γυμνασίου (81.5 %), σε αντίθεση με τους μαθητές του δημοτικού, όπου τα ποσοστά επιτυχίας φτάνουν στο 62.2% των μαθητών της Στ΄ τάξης και μόλις στο 46.1% των μαθητών της Δ΄ τάξης.

Τα συνηθέστερα λάθη που παρουσιάστηκαν κατά την επίλυση του έργου Α5.2Δ είναι η τυχαία χρήση των δεδομένων που εμφανίζονται στο σχήμα που δόθηκε στους μαθητές και η προσκόλληση στην οπτική αντίληψη του δεδομένου σχήματος. Συγκεκριμένα, σε σχέση με το δεύτερο λάθος, έχει εντοπιστεί μικρός αριθμός μαθητών οι οποίοι, βασισμένοι μόνο στην οπτική αντίληψη, θεώρησαν ότι το σημείο Ε βρίσκεται στο κέντρο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ και συνεπώς απάντησαν ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΕΒ έχει μήκος 3.5 εκατοστόμετρα. Ο Πίνακας 27 που ακολουθεί παρουσιάζει το συνολικό ποσοστό αποτυχίας στο έργο Α5.2Δ ανά τάξη, διακρίνοντας τους μαθητές η αποτυχία των οποίων οφείλεται στην τυχαία χρήση των δεδομένων του σχήματος και στην οπτική αντίληψη του σχήματος, αντίστοιχα.

Πίνακας 27

Ποσοστά Αποτυχίας στο Έργο Α5.2Δ κατά Τάξη

	Τυχαία χρήση δεδομένων	Οπτική αντίληψη σχήματος	Συνολική αποτυχία
Δ΄ τάξη	11.4	3.3	53.9
Στ΄ τάξη	9.9	4.5	37.8
Β΄ γυμνασίου	2.1	0.6	18.5

Τα έργα Α5.2Δ και Β16.2Δ μπορούν να θεωρηθούν ανάλογα, με δύο όμως διαφορές. Η πρώτη διαφορά έγκειται ότι στο πρώτο έργο παρουσιάζονται ως υποσχήματα στη γεωμετρική εικόνα που δόθηκε ένα τετράγωνο και ένα ορθογώνιο, ενώ στο δεύτερο έργο παρουσιάζονται ένας κύκλος και ένα ορθογώνιο. Και στις δύο περιπτώσεις το ζητούμενο ευθύγραμμο τμήμα ΕΒ αποτελεί μέρος της μεγαλύτερης πλευράς του ορθογωνίου. Η διαφοροποίηση ανάμεσα στα δύο έργα, με βάση αυτό το συλλογισμό, έγκειται στο ρόλο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΕ. Στην περίπτωση του έργου Α5.2Δ το

ΑΕ αποτελεί πλευρά τετραγώνου, οπόταν για την επίλυση του έργου απαιτείται η εφαρμογή της ιδιότητας της ισότητας των πλευρών του τετραγώνου, ενώ στο έργο Β16.2Δ το ΑΕ αποτελεί ακτίνα κύκλου. Η δεύτερη διαφορά, όμως, που εντοπίζεται ανάμεσα στα δύο έργα αφορά την «ορατότητα» των υποσχημάτων. Ο όρος «ορατότητα» (Duval, 2002) αναφέρεται στο βαθμό ευκολίας ή δυσκολίας εντοπισμού των διαφορετικών υποσχημάτων που παρουσιάζονται σε μια σύνθετη γεωμετρική εικόνα. Η ορατότητα των υποσχημάτων είναι σαφώς μεγαλύτερη στην περίπτωση όπως τα υποσχήματα βρίσκονται το ένα δίπλα στο άλλο (έργο Α5.2Δ), ενώ η διαρρύθμιση των υποσχημάτων σε συσχηματισμό του ενός μέσα στο άλλο δυσχεραίνει την ορατότητα (έργο Β16.2Δ). Σημειώνεται ότι το έργο Β16.2Δ έχει χρησιμοποιηθεί σε έρευνα που διεξήχθηκε παλαιότερα με Γάλλους μαθητές (βλ. Duval, 2002), ενώ το έργο Α5.2Δ κατασκευάστηκε για τους σκοπούς της παρούσας έρευνας και περιλήφθηκε στο δοκίμιο γεωμετρίας ως ανάλογο του πρώτου έργου (στα πλαίσια των διαφοροποιήσεων που αναφέρθηκαν).

Τα συνηθέστερα λάθη που καταγράφηκαν στο έργο Β16.2Δ είναι, όπως και στην περίπτωση του έργου Α5.2Δ η τυχαία χρήση των δεδομένων που παρουσιάζονται στο σχήμα που δόθηκε στους μαθητές και η προσκόλληση στην οπτική αντίληψη του δεδομένου σχήματος. Συγκεκριμένα, σε σχέση με το δεύτερο λάθος, έχει εντοπιστεί αριθμός μαθητών οι οποίοι, βασισμένοι μόνο στην οπτική αντίληψη, θεώρησαν ότι το σημείο Ε βρίσκεται στο κέντρο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ και συνεπώς απάντησαν ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΕΒ έχει μήκος 3.5 εκατοστόμετρα. Ο Πίνακας 28 που ακολουθεί παρουσιάζει το συνολικό ποσοστό αποτυχίας στο έργο Β16.2Δ ανά τάξη, διακρίνοντας τους μαθητές η αποτυχία των οποίων οφείλεται στην τυχαία χρήση των δεδομένων του σχήματος και στην οπτική αντίληψη του σχήματος, αντίστοιχα.

Πίνακας 28

Ποσοστά Αποτυχίας στο Έργο Β16.2Δ κατά Τάξη

	Τυχαία χρήση δεδομένων	Οπτική αντίληψη σχήματος	Συνολική αποτυχία
Δ΄ τάξη	10.2	6.6	84.9
Στ΄ τάξη	5.4	16.5	66.7
Β΄ γυμνασίου	0.9	9.3	48.1

Στο σημείο αυτό θεωρείται απαραίτητο να σημειωθεί ότι η σύγκριση ανάμεσα στους μαθητές της Δ΄ τάξης και τους μαθητές των μεγαλύτερων τάξεων δεν έχει ουσιαστικά νόημα, εφόσον οι μαθητές της Δ΄ τάξης δεν έχουν διδαχθεί την έννοια της ακτίνας του κύκλου, άρα στερούνται του γνωστικού υπόβαθρου που απαιτείται για τη λύση του συγκεκριμένου έργου. Είναι, όμως, ενδεικτικό ότι (ενώ μεγάλο ποσοστό των μαθητών της Δ΄ τάξης δεν επιχείρησαν να επιλύσουν το συγκεκριμένο έργο) εμφανίζεται μέρος των μαθητών αυτών να επιχειρεί την επίλυση του έργου με βάση την οπτική αντίληψη, στρατηγική που ανήκει στο πλαίσιο της Εμπειρικής Γεωμετρίας.

Εξετάζοντας τα υπόλοιπα στοιχεία που παρουσιάζονται στον Πίνακα 28, εντοπίζεται μεγάλο ποσοστό αποτυχίας στο έργο αυτό, τόσο στους μαθητές Στ΄ δημοτικού όσο και στους μαθητές Β΄ γυμνασίου. Από τις δύο κατηγορίες λαθών που εμφανίζονται στον πίνακα, παρατηρείται ότι το ποσοστό αποτυχίας εξαιτίας της προσκόλλησης στην οπτική αντίληψη του σχήματος είναι σχετικά υψηλό (16.5% για τους μαθητές της Στ΄ δημοτικού και 9.3% για τους μαθητές της Β΄ γυμνασίου). Είναι μάλιστα υψηλότερο σε σχέση με το αντίστοιχο ποσοστό για το έργο Α5.2Δ. Οι υπόλοιποι μαθητές που απέτυχαν να δώσουν ορθή απάντηση στο έργο αυτό είτε έδωσαν τυχαία απάντηση είτε δεν επιχείρησαν καθόλου να λύσουν το συγκεκριμένο έργο.

Από τους πίνακες διασταυρούμενης συχνότητας που κατασκευάστηκαν για τα έργα Α5.2Δ και Β16.2Δ προκύπτει ότι ένα μεγάλο ποσοστό των μαθητών που έλυσαν ορθά το έργο Β16.2Δ έχουν επιτύχει και στο έργο Α5.2Δ. Συγκεκριμένα, 87.4% των μαθητών της Στ΄ δημοτικού που έλυσαν το έργο Β16.2Δ έχουν επιτύχει και στο έργο Α5.2Δ, ενώ το αντίστοιχο ποσοστό για τους μαθητές της Β΄ γυμνασίου ανέρχεται στο 90.8%. Αντίθετα, μόνο οι μισοί περίπου από τους μαθητές της Στ΄ δημοτικού και Β΄ γυμνασίου που πέτυχαν στο έργο Α5.2Δ έλυσαν τελικά με επιτυχία και το έργο Β16.2Δ. Παρά το γεγονός ότι τα δύο έργα θεωρούνται ανάλογα και απαιτούν παρόμοιες γνωστικές διαδικασίες, το έργο Β16.2Δ απαιτεί επιπλέον κατοχή και ανάκληση προς χρήση της γνωστικής μονάδας που αφορά την ιδιότητα της ισότητας των ακτίνων ενός κύκλου.

Συγκριτική Διερεύνηση των Σχέσεων Ομοιότητας και Συνεπαγωγής Ανάμεσα στις Τρεις Κατηγορίες Γεωμετρικών Έργων Μεταξύ των Τριών Ηλικιακών Ομάδων της Έρευνας

Στο υποκεφάλαιο που ακολουθεί παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων ομοιότητας και των αναλύσεων συνεπαγωγής που εφαρμόστηκαν για την ανάλυση των δεδομένων της παρούσας εργασίας χρησιμοποιώντας το λογισμικό πρόγραμμα CHIC. Με την εφαρμογή των αναλύσεων αυτών γίνονται εμφανείς οι σχέσεις ομοιότητας και συνεπαγωγής που ενδεχομένως να υπάρχουν μεταξύ των μεταβλητών (απαντήσεων των μαθητών στα έργα) μέσα από τα διαγράμματα ομοιότητας και συνεπαγωγής που δημιουργούνται.

Η ανάλυση ομοιότητας και η συνεπαγωγική ανάλυση πραγματοποιήθηκε χωριστά για τους μαθητές καθεμιάς από τις τρεις ομάδες του δείγματος σε δύο στάδια. Στο πρώτο στάδιο έγιναν αναλύσεις ομοιότητας για το σύνολο των έργων γεωμετρίας, με στόχο να εντοπιστούν οποιεσδήποτε σχέσεις ομοιότητας ανάμεσα στις διαφορετικές κατηγορίες γεωμετρικών έργων που χορηγήθηκαν. Σε ένα δεύτερο στάδιο αναλύσεις ομοιότητας και συνεπαγωγικές αναλύσεις πραγματοποιήθηκαν ξεχωριστά για την καθεμιά κατηγορία γεωμετρικών έργων, δηλαδή (α) για τα έργα που αφορούσαν χειρισμό επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων, (β) για τα έργα που αφορούσαν χειρισμό τρισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων και (γ) για τα έργα που αφορούσαν αναπτύγματα γεωμετρικών στερεών.

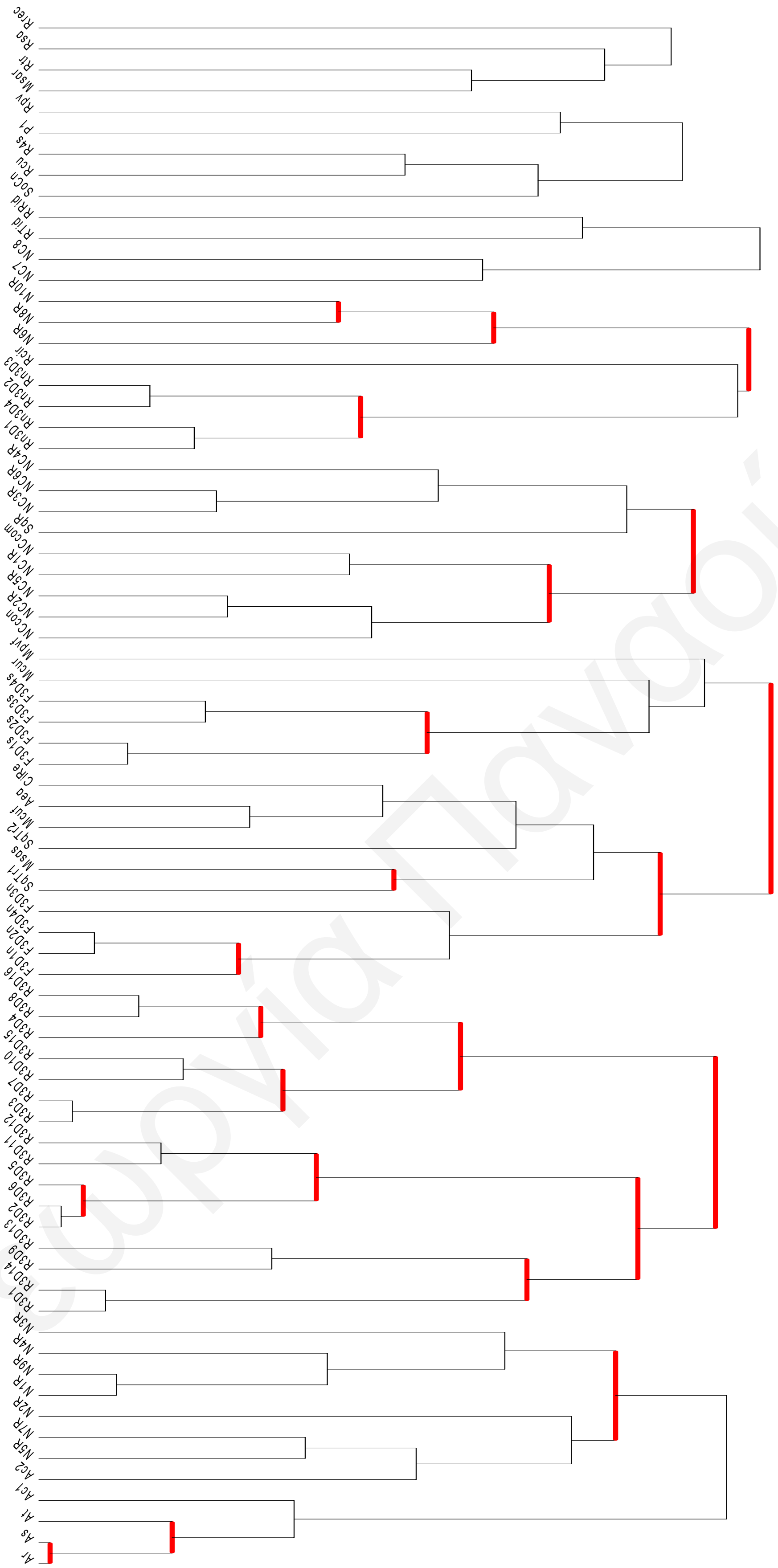
Αναλύσεις Ομοιότητας για το Σύνολο των Γεωμετρικών Έργων κατά Τάξη

Τα Διαγράμματα 26, 27 και 28 παρουσιάζουν την κατανομή των απαντήσεων των μαθητών Δ΄ και Στ΄ δημοτικού και Β΄ γυμνασίου, αντίστοιχα, αναφορικά με την επίλυση όλων των γεωμετρικών έργων που χορηγήθηκαν στους μαθητές. Στη συνέχεια συζητούνται σε συντομία σχέσεις ομοιότητας ανάμεσα σε έργα που ανήκουν σε διαφορετικές κατηγορίες.

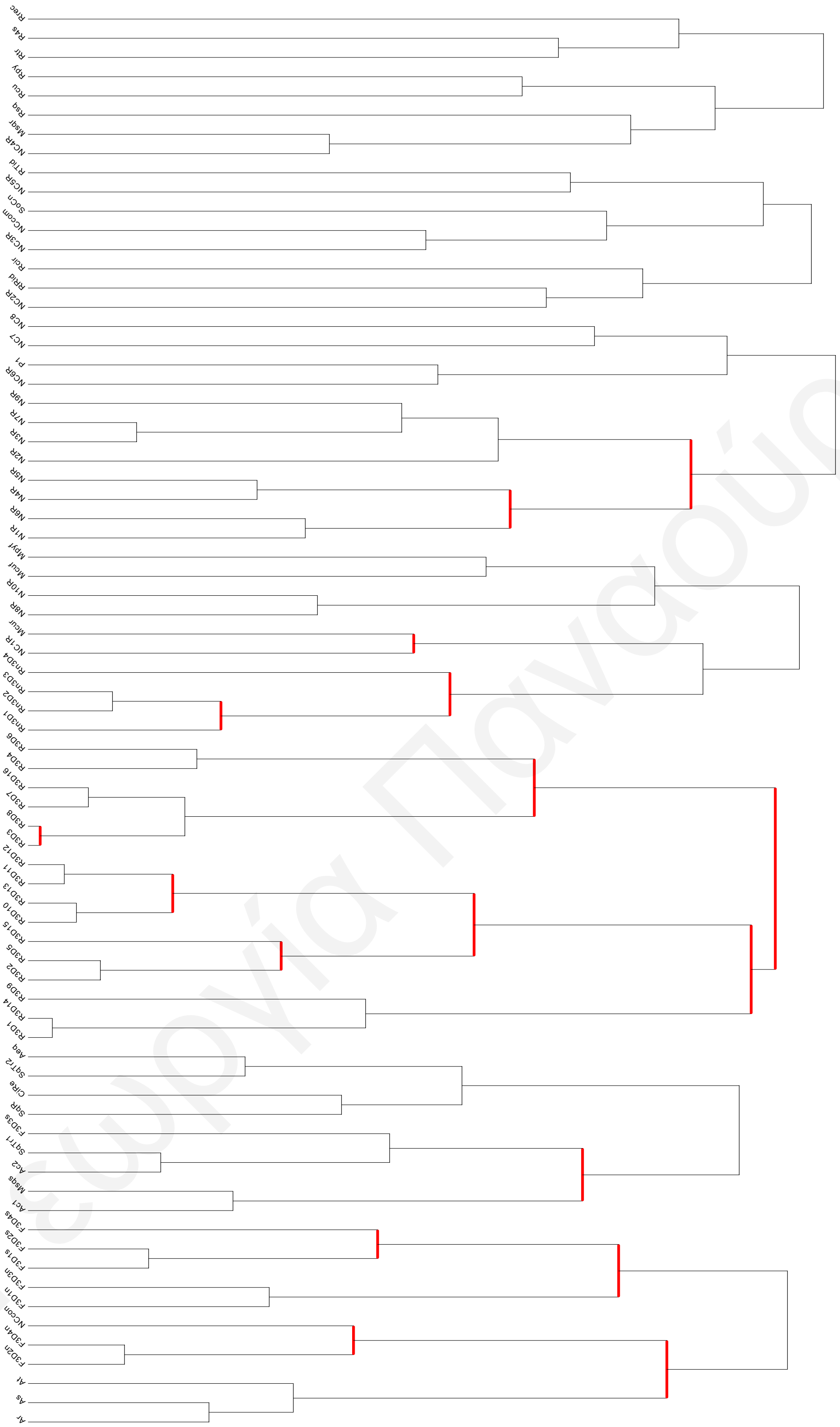
Με βάση τις απαντήσεις των μαθητών της Δ΄ τάξης δημοτικού στα γεωμετρικά έργα που χορηγήθηκαν, στο σχετικό διάγραμμα ομοιότητας παρουσιάζονται οκτώ κλάσεις έργων (Διάγραμμα 26). Στην πρώτη κλάση διακρίνονται δύο υποομάδες: στη μια περιλαμβάνονται τα έργα υπολογισμού εμβαδού, ενώ η δεύτερη αποτελείται από έργα αναγνώρισης αναπτυγμάτων γεωμετρικών στερεών. Στη δεύτερη κλάση παρουσιάζονται όλα τα έργα που αφορούν αναγνώριση αναπαραστάσεων τρισδιάστατων σχημάτων. Στην τρίτη περιοχή του διαγράμματος διακρίνεται μια ανάμειξη έργων που αφορούν τις έδρες γεωμετρικών στερεών με τα έργα γεωμετρικού συλλογισμού σε επίπεδα σχήματα. Είναι όμως ενδιαφέρον το γεγονός ότι η κατανομή των έργων αυτών έχει γίνει σε τρεις υποομάδες: στη μια εμφανίζονται τα έργα που αφορούν τον αριθμό των εδρών γεωμετρικών στερεών, στη δεύτερη τα έργα γεωμετρικού συλλογισμού και στην τρίτη τα έργα που αφορούν το σχήμα των εδρών γεωμετρικών στερεών. Η τέταρτη κλάση στο διάγραμμα 26 αποτελείται από έργα που αφορούν κυρίως αναγνώριση αναπτυγμάτων κύβου, ενώ τα δύο έργα χειρισμού κύβου με κωδικοποιημένες έδρες ομαδοποιήθηκαν στην έκτη κλάση με τα έργα αναγνώρισης τριγώνων και ορθογωνίων σε σύνθετες γεωμετρικές εικόνες. Στην πέμπτη κλάση ομαδοποιήθηκαν με τα έργα αναφοράς της ονομασίας στερεών τα τρία έργα που παρουσίαζαν μη-αναπαραστάσεις αναπτυγμάτων. Στις δύο τελευταίες κλάσεις παρουσιάζονται τα έργα αναγνώρισης επίπεδων και τρισδιάστατων σχημάτων που εξετάζουν ικανότητες συμπερίληψης των σχημάτων σε κλάσεις.

Οι απαντήσεις των μαθητών της Στ΄ δημοτικού στα γεωμετρικά έργα κατανεμήθηκαν σε επτά κλάσεις στο Διάγραμμα 27 με τέτοιο τρόπο ώστε οι περισσότερες περιοχές του διαγράμματος να περιλαμβάνουν έργα από μια κατηγορία. Συγκεκριμένα, στην πρώτη κλάση εμφανίζονται σε μια υποομάδα τα έργα υπολογισμού εμβαδού απλών γεωμετρικών σχημάτων και σε μια δεύτερη ομάδα όλα τα έργα που αφορούν τις έδρες γεωμετρικών στερεών. Η δεύτερη κλάση αποτελείται από τα έργα χειρισμού δισδιάστατων σχημάτων που απαιτούσαν ενεργοποίηση διαδικασιών γεωμετρικού συλλογισμού. Στην τρίτη κλάση έχουν ομαδοποιηθεί όλα τα έργα αναγνώρισης αναπαραστάσεων γεωμετρικών στερεών, ενώ στην τέταρτη κλάση εμφανίζονται τα έργα ονομασίας γεωμετρικών στερεών και τα έργα πολλαπλής επιλογής που αφορούσαν χειρισμό της ίδιας κατηγορίας έργων. Στην πέμπτη κλάση του διαγράμματος εμφανίζονται δύο υποομάδες: η πρώτη αποτελείται από έργα αναγνώρισης αναπτυγμάτων διάφορων στερεών και η δεύτερη από ορισμένα έργα χειρισμού αναπτυγμάτων κύβου. Τα υπόλοιπα έργα αναπτυγμάτων κύβου έχουν συγκεντρωθεί στην έκτη κλάση, ενώ η τελευταία περιοχή του διαγράμματος περιλαμβάνει τα έργα αναγνώρισης επίπεδων και τρισδιάστατων σχημάτων που εξετάζουν ικανότητες συμπερίληψης των σχημάτων σε κλάσεις.

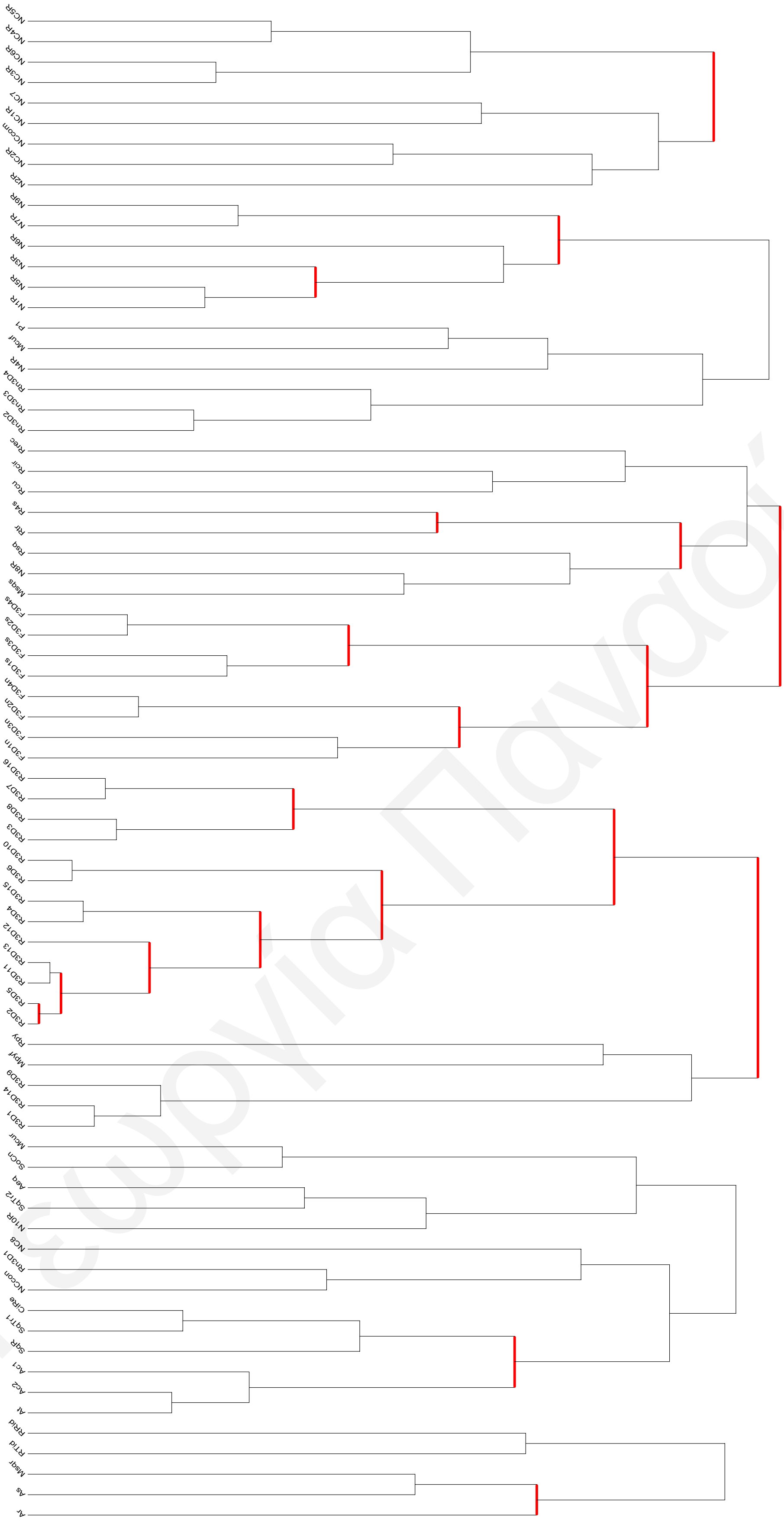
Στο Διάγραμμα 28 οι απαντήσεις των μαθητών της Β΄ γυμνασίου στα γεωμετρικά έργα κατανεμήθηκαν σε έξι κλάσεις. Στην πρώτη κλάση περιλαμβάνονται τα έργα υπολογισμού εμβαδού ορθογωνίου και τετραγώνου και τα έργα αναγνώρισης ορθογωνίου και τριγώνων σε σύνθετες γεωμετρικές μορφές. Η δεύτερη περιοχή του διαγράμματος περιλαμβάνει τα έργα χειρισμού δισδιάστατων σχημάτων που απαιτούσαν ενεργοποίηση διαδικασιών γεωμετρικού συλλογισμού. Στην κλάση αυτή έχουν περιληφθεί, συνεπώς έχουν αντιμετωπιστεί με παρόμοιο τρόπο, το έργο κατασκευής αναπτύγματος κύβου και έργο αντιστοίχησης σχεδίου κύβου με κωδικοποιημένες έδρες με το σχετικό ανάπτυγμα. Στην τρίτη κλάση εντοπίζονται όλα τα έργα αναγνώρισης αναπαραστάσεων γεωμετρικών στερεών. Στην τέταρτη περιοχή του διαγράμματος παρουσιάζονται δύο υποομάδες: στη μια κατανεμήθηκαν τα έργα που αφορούν τις έδρες τρισδιάστατων σχημάτων και στη δεύτερη έργα αναγνώρισης και συμπερίληψης σχημάτων σε κλάσεις. Η πέμπτη κλάση περιλαμβάνει μια υποομάδα με τα έργα αναφοράς της ονομασίας στερεών και μια υποομάδα με έργα αναγνώρισης αναπτυγμάτων διάφορων στερεών, ενώ στην έκτη κλάση εμφανίζονται έργα χειρισμού αναπτυγμάτων του κύβου.



Διάγραμμα 26. Διάγραμμα ομοιότητας για το σύνολο των γεωμετρικών έργων (Δ΄ δημοτικού)

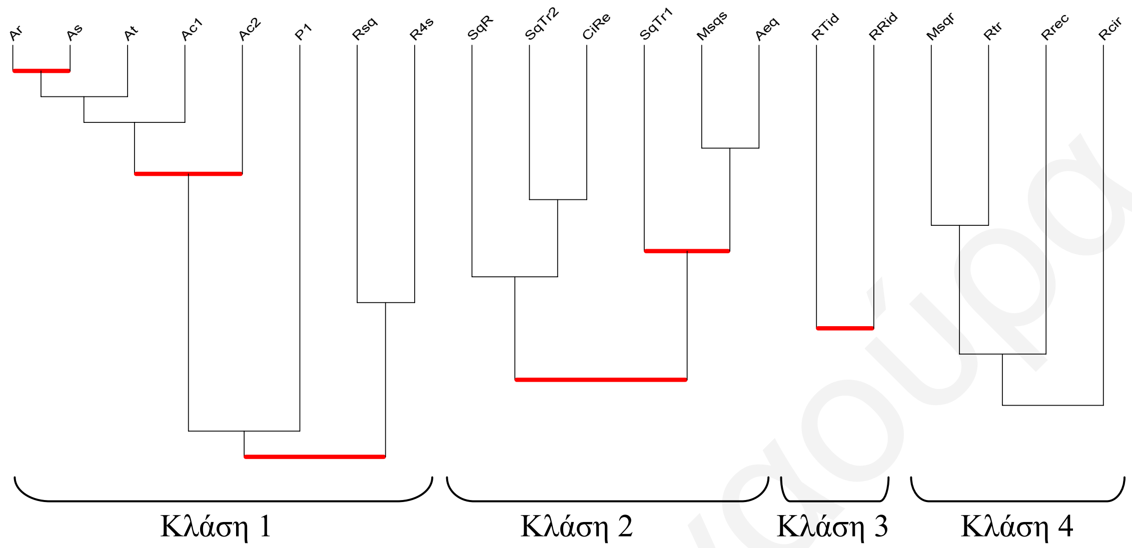


Διάγραμμα 27. Διάγραμμα ομοιότητας για το σύνολο των γεωμετρικών έργων (Στ΄ δημοτικού)



Διάγραμμα 28. Διάγραμμα ομοιότητας για το σύνολο των γεωμετρικών έργων (Β΄ γυμνασίου)

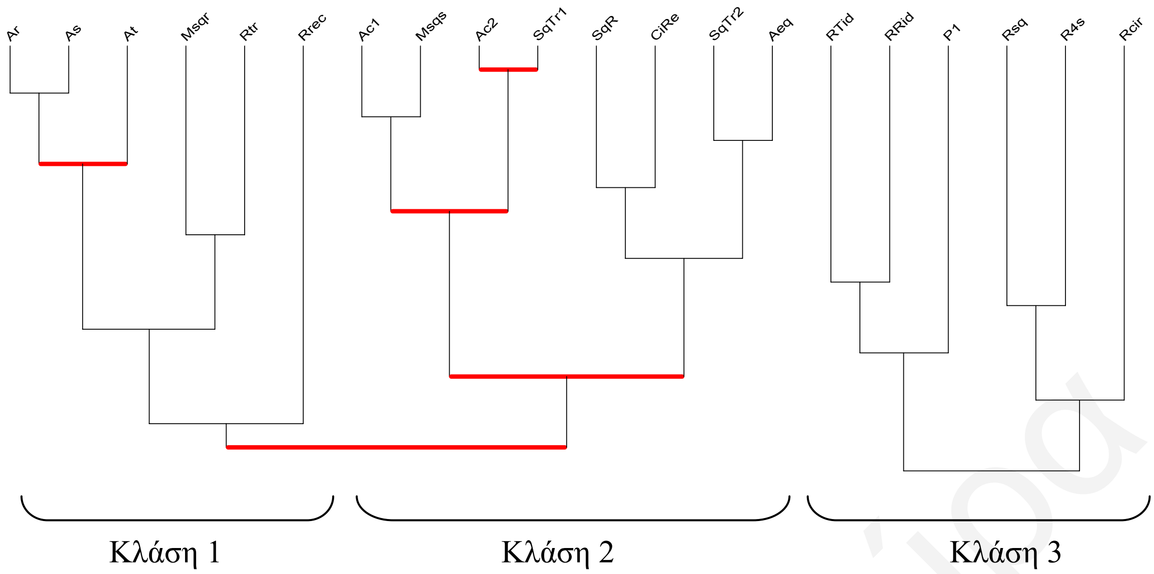
Με βάση τις απαντήσεις των μαθητών της Δ΄ τάξης δημοτικού στα έργα που αναφέρονται σε γεωμετρικά σχήματα δύο διαστάσεων, στο σχετικό διάγραμμα ομοιότητας παρουσιάζονται τέσσερις ομάδες έργων (Διάγραμμα 29).



Διάγραμμα 29. Διάγραμμα ομοιότητας για έργα που αφορούν επίπεδα σχήματα (Δ΄ δημοτικού)

Στην πρώτη περιοχή του Διαγράμματος 29 διακρίνονται δύο υποομάδες: στη μια περιλαμβάνονται τα έργα υπολογισμού εμβαδού, ενώ η δεύτερη αποτελείται από δύο έργα αναγνώρισης (Rsq, R4s), τα οποία, σύμφωνα με τα ποσοστά επιτυχίας, θεωρήθηκαν δύσκολα για τους μαθητές της Δ΄ τάξης. Στη δεύτερη ομάδα παρουσιάζονται τα έργα που αφορούν επίλυση γεωμετρικού προβλήματος, τα οποία, όπως φαίνεται στο διάγραμμα αυτό, αντιμετωπίζονται από τους μαθητές με παρόμοιο μεταξύ τους τρόπο. Οι δύο τελευταίες ομάδες έργων σχηματίζονται από τα έργα αναγνώρισης γεωμετρικών σχημάτων. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι τα δύο έργα στα οποία οι μαθητές κλήθηκαν να αναγνωρίσουν τρίγωνα και ορθογώνια σε πολύπλοκα γεωμετρικά σχήματα (RTid, RRid) εμφανίζονται σε διαφορετική ομάδα από τα υπόλοιπα έργα αναγνώρισης, που αναφέρονταν σε απλές γεωμετρικές μορφές (Rtr, Rrec, Rcir).

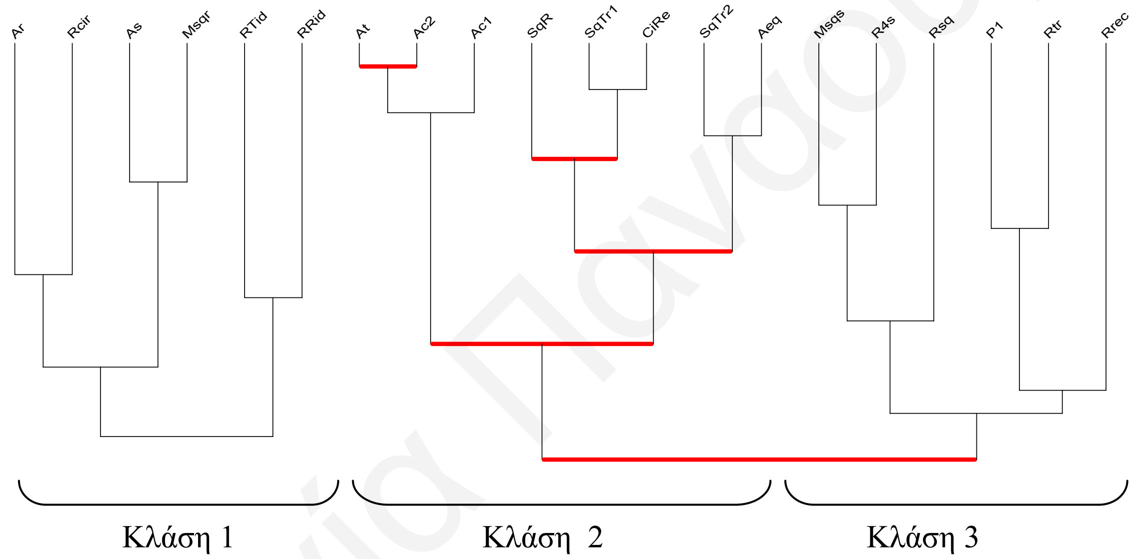
Στην περίπτωση της Στ΄ δημοτικού στο αντίστοιχο διάγραμμα ομοιότητας (Διάγραμμα 30) διακρίνονται τρεις ομάδες έργων, από τις οποίες οι δύο πρώτες συνδέονται μεταξύ τους. Η τρίτη ομάδα, η οποία δεν συνδέεται με τις υπόλοιπες ομάδες, αποτελείται από έργα αναγνώρισης γεωμετρικών σχημάτων σε απλές ή πολύπλοκες γεωμετρικές μορφές και το έργο που αφορά την περίμετρο.



Διάγραμμα 30. Διάγραμμα ομοιότητας για έργα που αφορούν επίπεδα σχήματα (Στ΄ δημοτικού)

Στην πρώτη ομάδα του Διαγράμματος 30 διακρίνονται τα τρία από τα έργα εύρεσης εμβαδού, τα οποία αφορούσαν εμβαδό απλών γεωμετρικών σχημάτων (Ar, As, At) και τρία έργα που αναφέρονταν σε γνώσεις των μαθητών σχετικά με συμπερίληψη του τετραγώνου στην κλάση των ορθογωνίων (Msqr) και αναγνώριση γνωστών γεωμετρικών σχημάτων (Rtr και Rrec). Η δεύτερη ομάδα δημιουργείται από τα έργα επίλυσης προβλήματος, όπως στην περίπτωση των μαθητών της Δ΄ τάξης, με την προσθήκη των δύο έργων εύρεσης εμβαδού που αφορούσαν πολύπλοκα γεωμετρικά σχήματα (Ac1 και Ac2). Η συμπερίληψη των έργων αυτών στη συγκεκριμένη ομάδα αποτελεί μια ένδειξη ότι οι μαθητές της Στ΄ δημοτικού αντιμετωπίζουν τα δύο έργα ως προβλήματα, για την επίλυση των οποίων πρέπει να ενεργοποιήσουν μορφές γεωμετρικού συλλογισμού, και όχι ως έργα ρουτίνας.

Τέλος, σύμφωνα με τις απαντήσεις των μαθητών της Β΄ γυμνασίου τα έργα που αναφέρονται σε δισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα ομαδοποιούνται σε τρεις ομάδες, με τρόπο που το διάγραμμα ομοιότητας για τους μαθητές του γυμνασίου (Διάγραμμα 31) να παρουσιάζει ελάχιστες διαφορές από το αντίστοιχο διάγραμμα για τους μαθητές της Στ΄ δημοτικού. Στο συγκεκριμένο διάγραμμα εμφανίζονται, όπως και στο προηγούμενο, τρεις ομάδες έργων. Η πρώτη ομάδα περιλαμβάνει έργα εύρεσης εμβαδού απλών γεωμετρικών σχημάτων (Ar, As) και έργα αναγνώρισης δισδιάστατων σχημάτων (RTid, RRid, Rcir). Στη δεύτερη ομάδα εμφανίζονται σε μια υποομάδα τα υπόλοιπα έργα εύρεσης εμβαδού (At, Ac1, Ac2) και σε μια δεύτερη υποομάδα τα έργα επίλυσης γεωμετρικού προβλήματος. Οι δύο υποομάδες σχετίζονται μεταξύ τους, ενώ ολόκληρη η ομάδα αυτή των έργων, τα οποία απαιτούν κάποιας μορφής γεωμετρικό συλλογισμό, σχετίζεται με την τρίτη κλάση έργων, η οποία αποτελείται ουσιαστικά από έργα αναγνώρισης γεωμετρικών σχημάτων. Η βασικότερη διαφορά του διαγράμματος ομοιότητας που αναφέρεται στην αντιμετώπιση των έργων από τους μαθητές του γυμνασίου με το αντίστοιχο διάγραμμα που αφορά τους μαθητές της Στ΄ δημοτικού αφορά τη συμπερίληψη του έργου At, που αναφέρεται σε εύρεση εμβαδού τριγώνου, στην ομάδα έργων επίλυσης γεωμετρικού προβλήματος. Αν και πρόκειται για έργο που αναφέρεται σε εφαρμογή τύπου και αποτελεί έργο ρουτίνας για τους μαθητές του γυμνασίου, από τις απαντήσεις των μαθητών φαίνεται ότι σχετίζεται σε μεγάλο βαθμό με το έργο Ac2, που αναφέρεται σε εύρεση εμβαδού σχήματος το οποίο αποτελείται από τρίγωνο και ορθογώνιο.



Διάγραμμα 31. Διάγραμμα ομοιότητας για έργα που αφορούν επίπεδα σχήματα (Β΄ γυμνασίου)

Από τη συγκριτική εξέταση των διαγραμμάτων ομοιότητας που αφορούν έργα με γεωμετρικά σχήματα δύο διαστάσεων, όπως προέκυψαν από τις απαντήσεις των μαθητών της Δ΄ και Στ΄ δημοτικού και της Β΄ γυμνασίου διαφαίνεται ότι και στις τρεις ηλικίες οι μαθητές αντιμετωπίζουν τα έργα επίλυσης γεωμετρικού προβλήματος με διαφορετικό τρόπο από ότι τα υπόλοιπα έργα. Είναι πιθανό να αντιλαμβάνονται ότι πρόκειται για έργα που διαφέρουν από τα έργα ρουτίνας, (π.χ. εφαρμογή τύπου για την εύρεση εμβαδού σχήματος) και από τα έργα που εξετάζουν το υπόβαθρο των γεωμετρικών γνώσεων του μαθητή (π.χ. έργα αναγνώρισης γεωμετρικών σχημάτων). Κατανοούν ότι η επίλυση των συγκεκριμένων έργων απαιτεί ενεργοποίηση διαδικασιών γεωμετρικού συλλογισμού και τα αντιμετωπίζουν ανάλογα. Όπως έχει επισημανθεί, οι μεγαλύτεροι μαθητές, της Στ΄

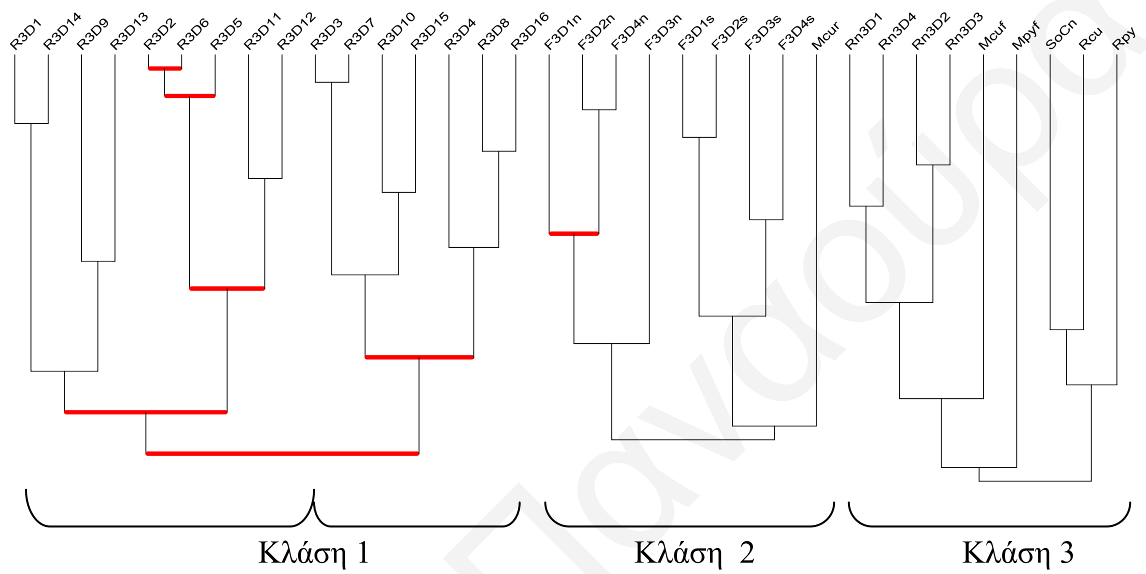
Δημοτικού και της Β΄ γυμνασίου αντιμετωπίζουν με παρόμοιο τρόπο και τα έργα εύρεσης εμβαδού πολύπλοκων σχημάτων (Ac1 και Ac2), εφόσον η επίλυσή τους απαιτεί χειρισμό που δεν εμπίπτει σε γνώσεις ρουτίνας, αλλά δηλώνει γεωμετρικό συλλογισμό. Αντίθετα, οι μικρότεροι μαθητές αντιμετωπίζουν τα συγκεκριμένα έργα με τον ίδιο τρόπο που αντιμετωπίζουν και τα υπόλοιπα έργα εύρεσης εμβαδού.

Αναλύσεις Ομοιότητας για Έργα με Τρισδιάστατα Γεωμετρικά Σχήματα

Στο διάγραμμα ομοιότητας που προκύπτει από τις απαντήσεις των μαθητών Δ΄ δημοτικού στα έργα που αφορούν γεωμετρικά στερεά (Διάγραμμα 32) τα έργα ομαδοποιούνται σε τρεις βασικές ομάδες. Στην πρώτη ομάδα έργα παρουσιάζονται σε υποομάδες όλα τα έργα που αναφέρονται στην αναγνώριση σχημάτων και τη συμπερίληψή τους ή μη στην κλάση των γεωμετρικών στερεών (R3D1-R3D16). Η ομαδοποίηση των έργων αυτών σε μια κλάση υποδηλώνει ότι οι μαθητές τα έχουν αντιμετωπίσει με παρόμοια τρόπο, εφόσον στηρίζονται σε όλες τις περιπτώσεις στις οπτικές πληροφορίες που λαμβάνουν από τις δεδομένες αναπαραστάσεις για να αποφασίσουν κατά πόσο κάθε γεωμετρική εικόνα αποτελεί αναπαράσταση στερεού σχήματος. Στην πρώτη αυτή κλάση εντοπίζονται τρεις μικρότερες ομάδες ως ακολούθως. Η πρώτη υποομάδα αποτελείται από έργα αναγνώρισης κυλίνδρου, κώνου και παραλληλεπιπέδου. Στη δεύτερη υποομάδα κυριαρχούν τα έργα αναγνώρισης κύβου (R3D2, R3D5, R3D11) και του συγγενικού ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου (R3D12). Τα υπόλοιπα έργα αναγνώρισης και συμπερίληψης σχημάτων στην κλάση των στερεών συναποτελούν την τρίτη υποομάδα αυτής της περιοχής του διαγράμματος ομοιότητας. Πρόκειται για τα έργα που παρουσίαζαν επίπεδα σχήματα (R3D3, R3D7, R3D8 και R3D16), καθώς και έργα που παρουσίαζαν αναπαραστάσεις πυραμίδας και κύβου οι οποίες δεν είναι ιδιαίτερα γνωστές στους μαθητές (R3D4, R3D10, R3D15).

Η δεύτερη κλάση στο διάγραμμα αποτελείται από όλα τα έργα που αφορούν τις έδρες γεωμετρικών στερεών, όπου οι μαθητές δεν στηρίζονται απλά στην οπτική αντίληψη (όπως στην περίπτωση των έργων της πρώτης κλάσης), αλλά αναλύουν το στερεό σε επιμέρους στοιχεία. Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάζεται μια υποομάδα με τα έργα που απαιτούσαν αναγνώριση του σχήματος των εδρών συγκεκριμένων γεωμετρικών στερεών και μια δεύτερη υποομάδα με τα έργα όπου οι μαθητές καλούνταν να καθορίσουν τον αριθμό των εδρών ενός στερεού. Με τα έργα της ομάδας αυτής παρουσιάζεται και ένα έργο πολλαπλής επιλογής που αφορούσε τη συμπερίληψη του κύβου στην κλάση των ορθογώνιων παραλληλεπιπέδων (Mcur).

Τα υπόλοιπα έργα έχουν ομαδοποιηθεί στην τρίτη κλάση του διαγράμματος. Πρόκειται για τα έργα αναγνώρισης και ονομασίας συγκεκριμένων γεωμετρικών στερεών, δύο έργα πολλαπλής επιλογής που αναφέρονται στον αριθμό των εδρών κύβου (Mcuf) και πυραμίδας (Mpyf), δύο έργα αναγνώρισης αναπαραστάσεων κύβου και πυραμίδας, καθώς και το έργο SoCn που αφορούσε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο φτιαγμένο από μικρούς κύβους.

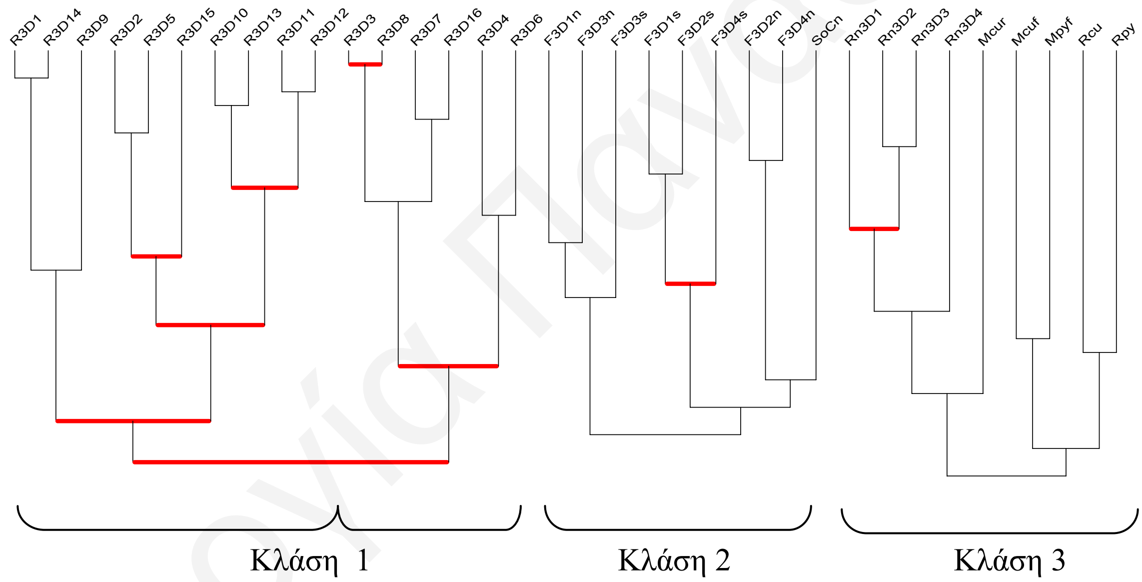


Διάγραμμα 32. Διάγραμμα ομοιότητας για έργα που αφορούν τρισδιάστατα σχήματα (Δ΄ δημοτικού)

Όπως φαίνεται από τη μελέτη του διαγράμματος ομοιότητας που προκύπτει από τις απαντήσεις των μαθητών της Στ΄ δημοτικού στα έργα που αφορούσαν γεωμετρικά στερεά (Διάγραμμα 33), τα έργα ομαδοποιούνται σε τρεις κλάσεις που παρουσιάζουν αρκετές ομοιότητες με τις κατηγορίες που εμφανίστηκαν στο αντίστοιχο διάγραμμα στην περίπτωση των μαθητών της Δ΄ δημοτικού. Η πρώτη κλάση αποτελείται από όλα τα έργα αναγνώρισης στερεών σχημάτων, όπως και στο Διάγραμμα 32. Μικρές διαφορές παρουσιάζονται στις υποομάδες που έχουν δημιουργηθεί, οι οποίες, όμως, αποτελούνται από έργα που αναφέρονται σε σχήματα της ίδιας κατηγορίας. Για παράδειγμα, η πρώτη υποομάδα αποτελείται από τα έργα αναγνώρισης κυλίνδρου και κώνου, ενώ τη δεύτερη υποομάδα συναποτελούν έργα αναγνώρισης κύβου (R3D2, R3D5, R3D15). Επίσης τα έργα που παρουσίαζαν σχήματα δύο διαστάσεων (R3D3, R3D8, R3D7, R3D16) εμφανίζονται σε μια ξεχωριστή υποομάδα.

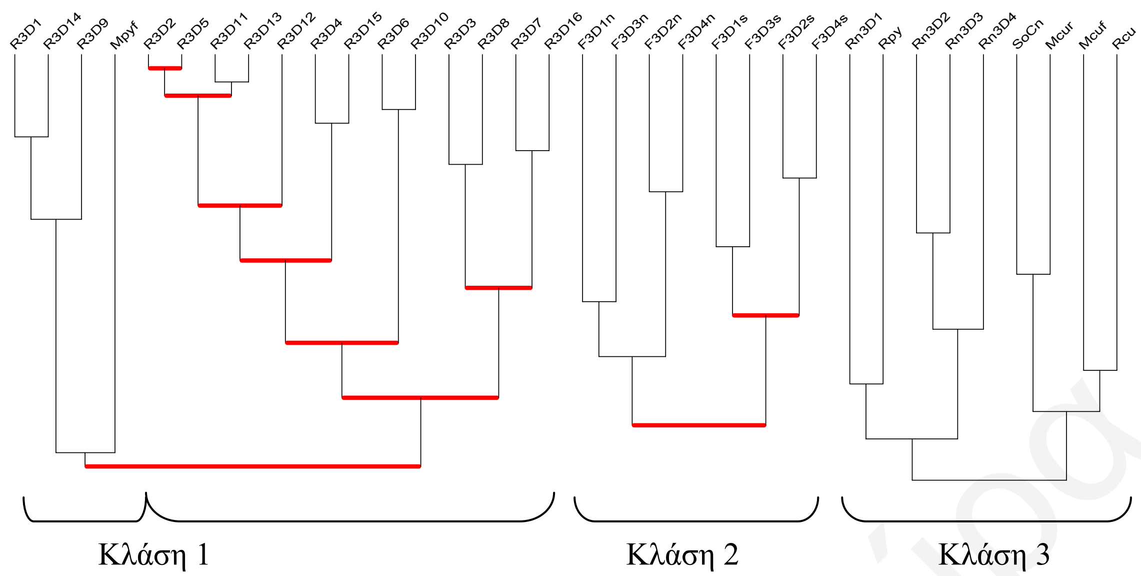
Η δεύτερη περιοχή του διαγράμματος ομοιότητας περιλαμβάνει, όπως και στην περίπτωση της Δ΄ δημοτικού, τα έργα που αναφέρονται στις έδρες γεωμετρικών στερεών, χωρίς να δημιουργούνται εδώ οι δύο υποομάδες που στο Διάγραμμα 32 σχετίζονταν ξεκάθαρα με τις δύο ικανότητες που εξετάζονταν (αναγνώριση σχήματος και καθορισμός αριθμού των εδρών των στερεών). Με τα έργα αυτά έχει ομαδοποιηθεί το έργο SoCn, για την επίλυση του οποίου μεγάλος αριθμός των μαθητών της Στ΄ τάξης καταφεύγει σε στρατηγικές ανάλυσης του στερεού που στηρίζονται στις έδρες του.

Στην τρίτη κλάση του διαγράμματος παρουσιάζονται τα υπόλοιπα έργα. Η διαφορά με το Διάγραμμα 32 εντοπίζεται στη συμπερίληψη στην ομάδα αυτή του έργου Mcur με τα άλλα δύο έργα πολλαπλής επιλογής. Μαζί με τα έργα πολλαπλής επιλογής παραμένουν τα έργα αναγνώρισης και ονομασίας γεωμετρικών στερεών. Ουσιαστικά σε αυτή την τελευταία περιοχή του διαγράμματος έχουν ομαδοποιηθεί έργα για τα οποία οι μαθητές θα πρέπει να έχουν ανακαλέσει από τη μνήμη τους συγκεκριμένες γνωστικές μονάδες, τις οποίες έχουν χρησιμοποιήσει χωρίς περαιτέρω επεξεργασία.



Διάγραμμα 33. Διάγραμμα ομοιότητας για έργα που αφορούν τρισδιάστατα σχήματα (Στ΄ δημοτικού)

Οι τρεις ομάδες έργων που παρουσιάστηκαν στα Διαγράμματα 32 και 33 εμφανίζονται με μικρές διαφορές και στο Διάγραμμα 34, που προκύπτει από τις απαντήσεις των μαθητών της Β΄ γυμνασίου στα έργα που αφορούν γεωμετρικά στερεά. Η μεγαλύτερη ομάδα έργων περιλαμβάνει όλα τα έργα αναγνώρισης αναπαραστάσεων στερεών και ένα έργο πολλαπλής επιλογής (Mpyf). Στην περίπτωση των μαθητών του γυμνασίου δημιουργούνται παρόμοιες υποομάδες έργων αναγνώρισης όπως και στις περιπτώσεις των δύο προηγούμενων διαγραμμάτων που βασίζονταν στις απαντήσεις των μαθητών του δημοτικού, με τη διαφορά ότι εδώ οι υποομάδες είναι πιο ξεκάθαρες.



Διάγραμμα 34. Διάγραμμα ομοιότητας για έργα που αφορούν τρισδιάστατα σχήματα (Β΄ γυμνασίου)

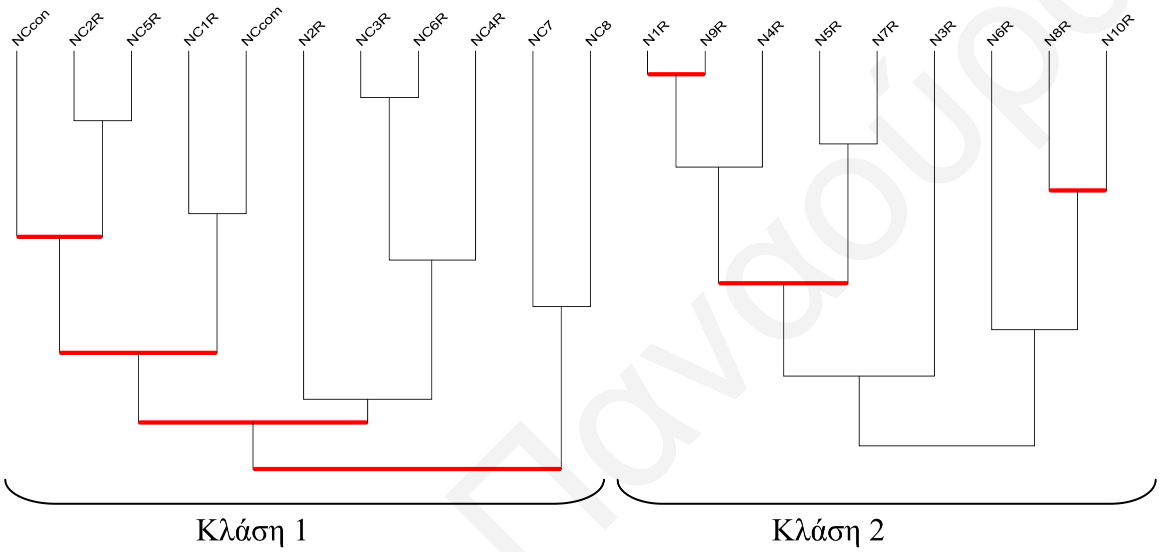
Συγκεκριμένα, η κλάση που αποτελείται από έργα αναγνώρισης πυραμίδας και κύβου – παραλληλεπιπέδου συνδέεται με την κλάση των έργων που παρουσίαζαν επίπεδα γεωμετρικά σχήματα και οι δύο αυτές συνδέονται τελικά με την πρώτη υποομάδα, στην οποία εμφανίζονται τα έργα αναγνώρισης κυλίνδρου και κώνου. Η συμπερίληψη των τελευταίων έργων σε ξεχωριστή υποομάδα υποδηλώνει, όπως ήταν αναμενόμενο, ότι τα έργα αυτά αντιμετωπίστηκαν από τους μαθητές με διαφορετικό τρόπο από τα έργα αναγνώρισης κύβου και πυραμίδας, με τα οποία οι μαθητές ασχολούνται εκτενέστερα κατά τη διδασκαλία. Τα έργα που αφορούν τις έδρες στερεών παρουσιάζονται και σε αυτή την περίπτωση στη δεύτερη περιοχή του διαγράμματος ομοιότητας, σχηματίζοντας δύο ξεκάθαρες υποομάδες ως προς τις ικανότητες που εξετάζουν, ενώ τα υπόλοιπα έργα (έργα αναγνώρισης και ονομασίας στερεών, έργα πολλαπλής επιλογής) ομαδοποιούνται σε μια τρίτη ομάδα.

Μελετώντας συγκριτικά τα διαγράμματα ομοιότητας που έχουν προκύψει από τις απαντήσεις των μαθητών των τριών τάξεων σε έργα με γεωμετρικά στερεά (Διαγράμματα 32, 33, 34) παρατηρείται ότι δεν παρουσιάζονται μεγάλες διαφοροποιήσεις μεταξύ τους. Συγκεκριμένα, και στις τρεις περιπτώσεις τα έργα ομαδοποιούνται σε τρεις βασικές ομάδες, οι οποίες δεν συνδέονται μεταξύ τους. Στην πρώτη ομάδα περιλαμβάνονται τα έργα που απαιτούν αναγνώριση και συμπερίληψη σχημάτων στην κλάση των στερεών, στη δεύτερη ομάδα εμφανίζονται τα έργα που αναφέρονται σε ικανότητες ανάλυσης στοιχείων (π.χ. έδρες) των γεωμετρικών στερεών και στην τρίτη ομάδα παρουσιάζονται τα υπόλοιπα έργα (αναγνώριση και ονομασία στερεών, έργα πολλαπλής επιλογής για ιδιότητες στερεών). Μικρές διαφοροποιήσεις παρατηρούνται στις υποομάδες που δημιουργούνται στις τρεις βασικές ομάδες έργων.

Από τις τρεις ομάδες που έχουν παρουσιαστεί στα παραπάνω διαγράμματα διαφαίνεται ότι οι μαθητές έχουν αντιμετωπίσει τα έργα που περιλαμβάνονταν στο δοκίμιο σχετικά με τα γεωμετρικά στερεά μέσα από τρεις διαφορετικές προσεγγίσεις. Οι προσεγγίσεις αυτές αποκαλύπτουν τις διαφορετικές γνωστικές διαδικασίες που έχουν ενδεχομένως ενεργοποιηθεί από τους μαθητές. Συγκεκριμένα, για τα έργα αναγνώρισης και ονομασίας γεωμετρικών στερεών οι μαθητές γνώριζαν από την εκφώνηση των έργων ότι είχαν μπροστά τους δισδιάστατες αναπαραστάσεις στερεών, οπόταν ανακαλώντας από τη μνήμη τους τις εικόνες αυτές έδιναν την απάντησή τους. Η ανάκληση συγκεκριμένων γεωμετρικών γνώσεων πιθανό να ήταν η προσέγγιση των μαθητών και σε σχέση με τα έργα πολλαπλής επιλογής, τα οποία αφορούσαν ιδιότητες του κύβου και της πυραμίδας, και ομαδοποιήθηκαν στην ίδια κατηγορία με τα έργα αναγνώρισης και ονομασίας στερεών. Αντίθετα, για τα έργα στα οποία οι μαθητές κλήθηκαν να αποφασίσουν εάν η γεωμετρική εικόνα που έβλεπαν παρουσίαζε αναπαράσταση ενός γεωμετρικού στερεού η απλή ανάκληση πληροφοριών από τη μνήμη δεν ήταν η μόνη απαιτούμενη διαδικασία. Πέρα από την ανάκληση γνωστών αναπαραστάσεων, οι μαθητές έχουν ενδεχομένως συγκρίνει τις αναπαραστάσεις που τους φαίνονται πιο γνώριμες με άλλες λιγότερο γνωστές, αλλά κυρίως έχουν διέλθει από τη διαδικασία διάκρισης σχεδίων που παρουσιάζουν τρισδιάστατα σχήματα από τα σχέδια που παρουσιάζουν δισδιάστατα σχήματα.

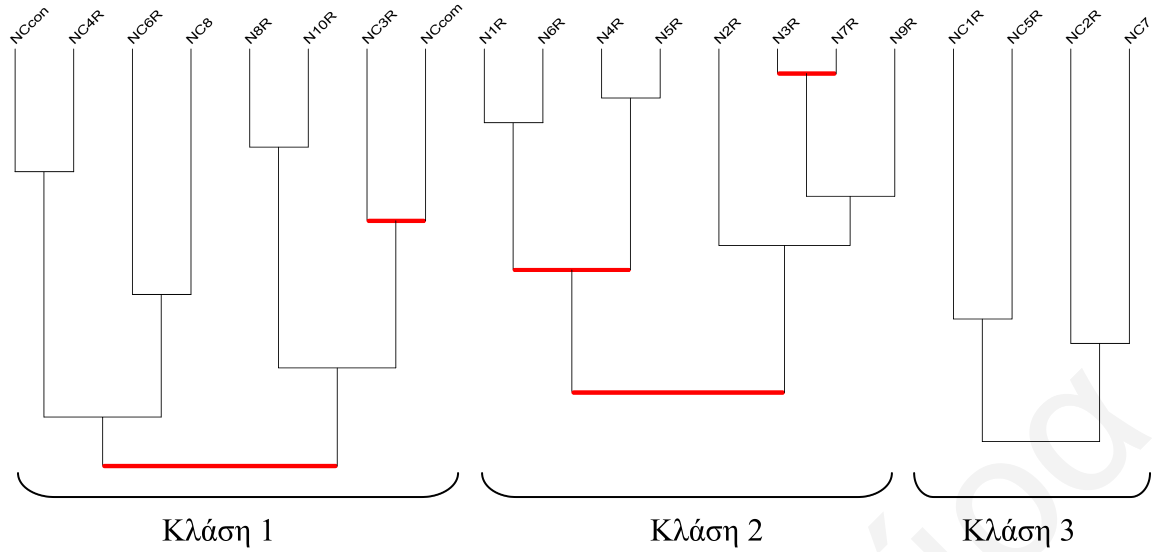
Αναλύσεις Ομοιότητας για Έργα με Αναπτύγματα Γεωμετρικών Στερεών

Με βάση τις απαντήσεις των μαθητών της Δ΄ δημοτικού στα έργα που αφορούν τα αναπτύγματα γεωμετρικών στερεών τα έργα έχουν ομαδοποιηθεί σε δύο βασικές κατηγορίες (Διάγραμμα 35). Στην πρώτη κλάση περιλαμβάνονται όλα τα έργα που αφορούν αναπτύγματα κύβου (με εξαίρεση το έργο N2R), στα οποία οι μαθητές κλήθηκαν (α) να αναγνωρίσουν εάν δεδομένες εικόνες αναπαριστούσαν ανάπτυγμα κύβου (NC1R – NC6R), (β) να σχεδιάσουν οι ίδιοι ανάπτυγμα κύβου (NCcon), (γ) να συμπληρώσουν εικόνες με τρόπο ώστε να αναπαριστούν ανάπτυγμα κύβου (NCcom) και (δ) να συνδέσουν σχέδιο κύβου με το ανάπτυγμά του στην περίπτωση που υπήρχε κωδικοποίηση στις ορατές έδρες με αριθμούς (NC7) ή γράμματα (NC8). Στη δεύτερη περιοχή του διαγράμματος ομοιότητας εμφανίζονται τα έργα στα οποία οι μαθητές κλήθηκαν να αποφασίσουν εάν οι δεδομένες εικόνες αναπαριστούσαν αναπτύγματα στερεών και να τις αντιστοιχίσουν με συγκεκριμένα γεωμετρικά στερεά. Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι υποομάδες που έχουν σχηματιστεί, οι οποίες καταδεικνύουν ότι οι μαθητές έχουν αντιμετωπίσει με παρόμοιο τρόπο τα έργα που τις συναποτελούν. Για παράδειγμα, μια υποομάδα αποτελείται από τα έργα που αφορούν αναπτύγματα πυραμίδας, με τα δύο έργα που αφορούν τετραγωνική πυραμίδα (N1R, N9R) να εμφανίζονται σε μια πρώτη κλάση και να συνδέονται ακολούθως με το έργο N4R, που αφορά τριγωνική πυραμίδα. Επίσης τα έργα N6R, N8R και N10R, στα οποία δίνονταν εικόνες που δεν αναπαριστούν ανάπτυγμα οποιουδήποτε στερεού, έχουν ομαδοποιηθεί σε μια ξεχωριστή υποομάδα.



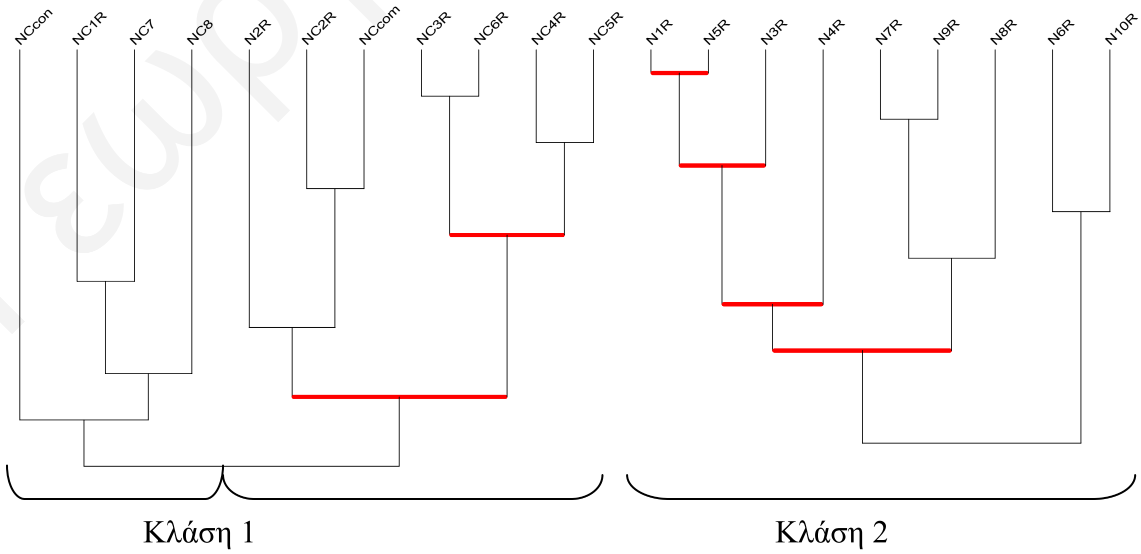
Διάγραμμα 35. Διάγραμμα ομοιότητας για έργα που αφορούν αναπτύγματα στερεών (Δ΄ δημοτικού)

Στην περίπτωση των μαθητών της Στ΄ δημοτικού οι απαντήσεις τους στα έργα με αναπτύγματα στερεών είχαν ως αποτέλεσμα την ομαδοποίηση των έργων σε τρεις κλάσεις (Διάγραμμα 36). Στην πρώτη και την τρίτη κλάση περιλαμβάνονται έργα που αφορούν αναπτύγματα κύβου (με εξαίρεση τα έργα N8R και N10R, τα οποία εμφανίζονται στην πρώτη κλάση ενώ παρουσιάζουν εικόνες που δεν αναπαριστούν αναπτύγματος οποιουδήποτε στερεού). Οι δύο αυτές κλάσεις, όμως, δεν παρουσιάζουν μεταξύ τους καμιά σύνδεση, παρά το γεγονός ότι αποτελούνται από έργα που αναφέρονται στα αναπτύγματα του ίδιου στερεού. Η δεύτερη κλάση του διαγράμματος αποτελείται από έργα αναγνώρισης αναπτυγμάτων μέσα από εικόνες διαφορετικών στερεών και αντιστοίχησή τους με τα στερεά.



Διάγραμμα 36. Διάγραμμα ομοιότητας για έργα που αφορούν αναπτύγματα στερεών (Στ΄ δημοτικού)

Το διάγραμμα ομοιότητας για τα έργα που αφορούν αναπτύγματα στερεών στην περίπτωση των μαθητών Β΄ γυμνασίου (Διάγραμμα 37) παρουσιάζει ομοιότητες με το αντίστοιχο διάγραμμα για τους μαθητές Δ΄ δημοτικού (Διάγραμμα 35). Σύμφωνα με τις απαντήσεις των μαθητών εμφανίζονται δύο βασικές κλάσεις έργων: στην πρώτη περιλαμβάνονται έργα που αφορούν αναπτύγματα κύβου, ενώ στη δεύτερη έργα αναγνώρισης και αντιστοίχησης διάφορων αναπτυγμάτων με γεωμετρικά στερεά. Όπως και στην περίπτωση της Δ΄ δημοτικού και στη Β΄ γυμνασίου το έργο N2R (ανάπτυγμα τριγωνικής πυραμίδας) έχει αντιμετωπιστεί από τους μαθητές με τρόπο παρόμοιο με τα έργα αναπτυγμάτων κύβου.



Διάγραμμα 37. Διάγραμμα ομοιότητας για έργα που αφορούν αναπτύγματα στερεών (Β΄ γυμνασίου)

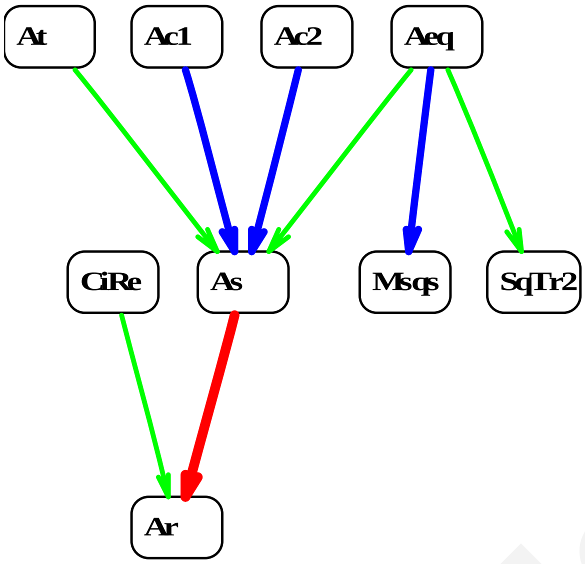
Παρά το γεγονός ότι στην περίπτωση των μαθητών της Στ΄ δημοτικού παρουσιάστηκε μια μικρή διαφοροποίηση, γενικά στην κατανομή των απαντήσεων των μαθητών και των τριών τάξεων στα έργα χειρισμού αναπτυγμάτων διαφαίνεται διαφορετική αντιμετώπιση των έργων που αφορούσαν χειρισμό αναπτυγμάτων κύβου από τη μια και των έργων που αφορούσαν χειρισμό αναπτυγμάτων άλλων στερεών από την άλλη. Οι μαθητές είναι πιο εξοικειωμένοι με τα αναπτύγματα του κύβου μέσω της διδασκαλίας που γίνεται στο δημοτικό σχολείο, γεγονός που σε ορισμένες περιπτώσεις έχει ως αποτέλεσμα μερικοί μαθητές να αντιμετωπίζουν σχετικά έργα με βάση πρωτοτυπικές εικόνες που διαθέτουν (π.χ. εικόνα σταυροειδούς διαγράμματος). Αντίθετα, η μη εξοικείωση των μαθητών με αναπτύγματα άλλων στερεών προβάλλει την ανάγκη για χειρισμό των σχετικών έργων με ενεργοποίηση άλλων διαδικασιών (π.χ. νοητικές περιστροφές, εντοπισμός του αριθμού και του σχήματος των εδρών).

Στο δεύτερο μέρος του υποκεφαλαίου αυτού παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων συνεπαγωγής αναφορικά με τις τρεις κατηγορίες γεωμετρικών έργων: (α) έργα με γεωμετρικά σχήματα δύο διαστάσεων, (β) έργα με γεωμετρικά σχήματα τριών διαστάσεων και (γ) έργα με αναπτύγματα γεωμετρικών στερεών. Στα διαγράμματα που παρουσιάζονται εμφανίζονται συνεπαγωγικές σχέσεις μέχρι το επίπεδο σημαντικότητας 90%.

Συνεπαγωγικές Αναλύσεις για Έργα Χειρισμού Δισδιάστατων Γεωμετρικών Σχημάτων

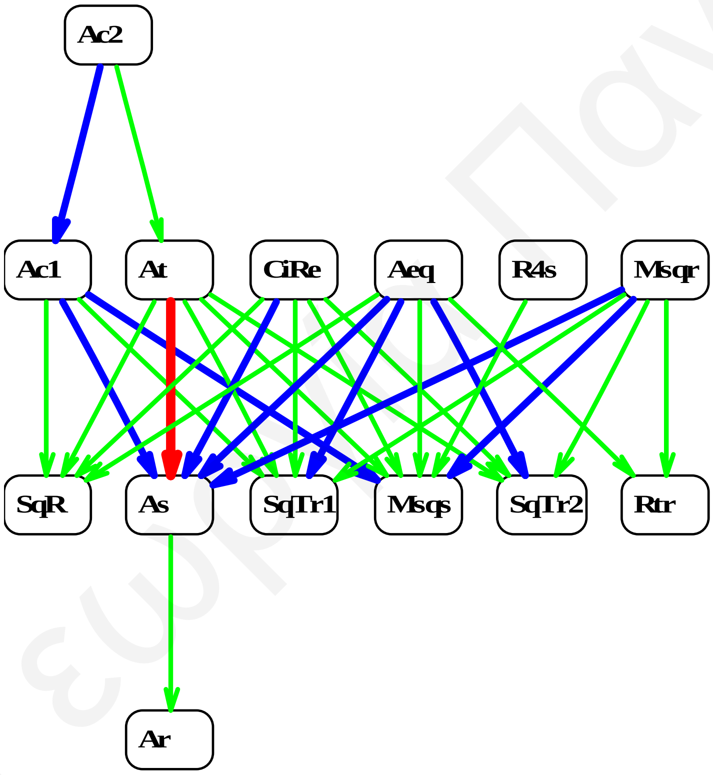
Στο συνεπαγωγικό διάγραμμα για τα έργα με δισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα που έλυσαν οι μαθητές της Δ΄ δημοτικού (Διάγραμμα 38) εμφανίζονται μόνο τα έργα εύρεσης εμβαδού (Ar, As, At, Ac1, Ac2) και έργα επίλυσης γεωμετρικού προβλήματος (SqTr2, Aeq, CiRe). Οι κυριότερες συνεπαγωγικές σχέσεις που εμφανίζονται αφορούν τα έργα στα οποία παρουσιάζεται η έννοια του εμβαδού. Η επιτυχία στα έργα Ac1, Ac2, At και Aeq συνεπάγεται επιτυχία στο έργο As, το οποίο συνεπάγεται επιτυχία στο έργο Ar. Οι συγκεκριμένες συνεπαγωγικές σχέσεις υποδηλώνουν την ιεράρχηση των έργων με κριτήριο το βαθμό δυσκολίας τους και υπογραμμίζουν το γεγονός ότι ο μαθητής που επιτυγχάνει σε έργα όπου η έννοια του εμβαδού αφορά πολύπλοκα γεωμετρικά σχήματα, επιτυγχάνει, όπως είναι αναμενόμενο, και σε έργα υπολογισμού του εμβαδού απλών γεωμετρικών σχημάτων. Με άλλα λόγια, αποτυχία υπολογισμού του εμβαδού απλών γεωμετρικών σχημάτων συνδέεται, όπως είναι αναμενόμενο, με αποτυχία σε έργα που αφορούν την έννοια του εμβαδού σε πολυπλοκότερα γεωμετρικά σχήματα.

Αξίζει επίσης να σημειωθεί η παρουσία μικρού αριθμού έργων στο συνεπαγωγικό διάγραμμα, γεγονός που φανερώνει την έλλειψη ισχυρών δικτύων που να συνδέουν εννοιολογικά τις γνωστικές μονάδες που κατέχουν οι μαθητές γύρω από το θέμα των επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων. Ειδικότερα σημειώνεται ότι δεν παρουσιάζεται κανένα έργο αναγνώρισης σχημάτων σε απλή ή σύνθετη γεωμετρική εικόνα, ενώ απουσιάζουν από το διάγραμμα σχέσεις που να υποδηλώνουν συνδέσεις ανάμεσα σε οποιαδήποτε από τα έργα που απαιτούσαν γεωμετρικό συλλογισμό.



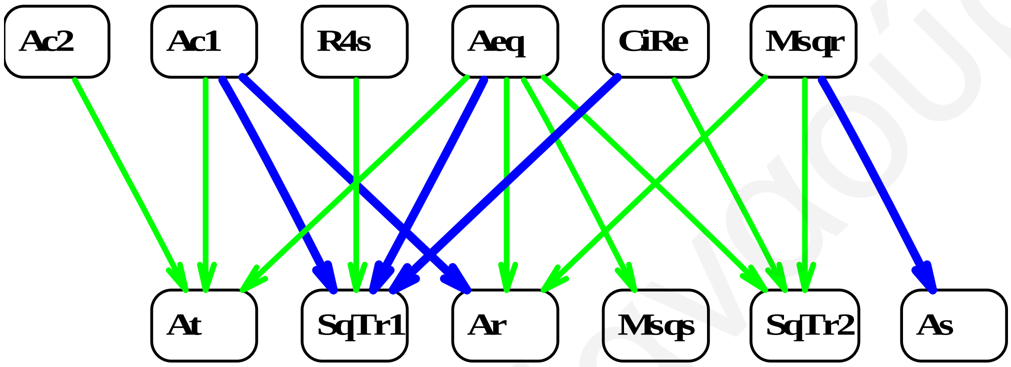
Διάγραμμα 38. Συνεπαγωγικό διάγραμμα για έργα που αφορούν γεωμετρικά σχήματα δύο διαστάσεων (Δ΄ δημοτικού)

Στο αντίστοιχο διάγραμμα που προέκυψε με βάση της επιδόσεις των μαθητών της Στ΄ τάξης (Διάγραμμα 39) εμφανίζονται περισσότερα έργα και πολύ περισσότερες συνεπαγωγικές σχέσεις. Όπως και στην περίπτωση των μαθητών της Δ΄ τάξης, παρουσιάζονται συνεπαγωγικές αλυσίδες που συνδέουν τα έργα που αφορούσαν την έννοια του εμβαδού. Επιπλέον, παρουσιάζονται αρκετές συνεπαγωγικές σχέσεις ανάμεσα σε ζεύγη έργων, με τρόπο ώστε να καθίσταται εμφανές ότι επιτυχία σε δυσκολότερα έργα (Ac1, Ac2, At, CiRe, Aeq, R4s, Msqr) συνεπάγεται επιτυχία σε ευκολότερα έργα. Ο βαθμός δυσκολίας των έργων καθορίζεται τόσο από την πολυπλοκότητα της γεωμετρικής εικόνας (π.χ. έργα Ac1, Ac2, CiRe, Aeq) όσο και από την έλλειψη μαθησιακών εμπειριών στους μαθητές. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι στην περίπτωση των μαθητών της Στ΄ δημοτικού επιτυχία σε ένα έργο μπορεί να συνεπάγεται επιτυχία σε πολλά άλλα έργα. Για παράδειγμα, επιτυχία στο έργο Aeq ή στο έργο CiRe, όπου απαιτείται χειρισμός πολύπλοκων γεωμετρικών εικόνων στις οποίες παρουσιάζονται διαφορετικά υποσχήματα, συνεπάγεται επιτυχία στα έργα SqR, As, SqTr1, Msqs, SqTr2. Από την άλλη, αξίζει να σημειωθεί ότι δεν παρουσιάζεται οποιαδήποτε συνεπαγωγική αλυσίδα που να συνδέει το έργο πολλαπλής επιλογής Msqs (που αφορούσε την ιδιότητα ισότητας των πλευρών τετραγώνου) με το έργο SqTr1 ή το έργο SqTr2 (όπου η εφαρμογή της συγκεκριμένης ιδιότητας δίνει την ορθή απάντηση). Παρά το γεγονός ότι η επιτυχής επίλυση των δύο τελευταίων έργων έχει ως προϋπόθεση την κατοχή από το μαθητή της γνωστικής μονάδας που αναφέρεται στην ισότητα των πλευρών του τετραγώνου, εδώ γίνεται φανερό ότι η κατοχή της συγκεκριμένης γνωστικής μονάδας δεν συνεπάγεται επιτυχία σε οποιοδήποτε από τα δύο αυτά έργα. Μια πιθανή ερμηνεία είναι ότι για να επιτύχει στα έργα αυτά ο μαθητής θα πρέπει, πέρα από την κατοχή της γνωστικής μονάδας που αφορά την ιδιότητα της ισότητας των πλευρών του τετραγώνου, να είναι ικανός να «δει» στη σύνθετη γεωμετρική εικόνα τα επιμέρους σχήματα και επιπλέον να ξεφύγει από τα υποσχήματα που διακρίνονται στις δύο διαστάσεις και να δει τα ευθύγραμμα τμήματα που τα αποτελούν στη μία διάσταση.



Διάγραμμα 39. Συνεπαγωγικό διάγραμμα για έργα που αφορούν γεωμετρικά σχήματα δύο διαστάσεων (Στ΄ δημοτικού)

Στην περίπτωση των μαθητών της Β΄ γυμνασίου στο συνεπαγωγικό διάγραμμα για τα έργα που αφορούν χειρισμό δισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων (Διάγραμμα 40) παρουσιάζονται αρκετά από τα έργα, όπως και στο Διάγραμμα 39 (εκτός από τα έργα SqR και Rtr). Η βασική και εμφανέστερη διαφορά των δύο διαγραμμάτων εντοπίζεται στη μείωση των συνεπαγωγικών σχέσεων στην περίπτωση των μαθητών του γυμνασίου. Τα έργα που εμφανίζονται, ως δυσκολότερα, στο πάνω μέρος του διαγράμματος είναι τα ίδια όπως και στην περίπτωση των μαθητών των Στ΄ δημοτικού, αλλά η επιτυχία σε καθένα από αυτά δεν συνεπάγεται επιτυχία σε πολλά έργα. Εξαίρεση αποτελεί το έργο Aeq, το οποίο αφορά ισεμβαδικά σχήματα, επιτυχία στο οποίο συνεπάγεται επιτυχία σε πέντε άλλα έργα (At, SqTr1, Ar, Msqs, SqTr2). Η μείωση του αριθμού των συνεπαγωγικών σχέσεων είναι ενδεχομένως μια ένδειξη φτωχότερων δικτύων στο μυαλό των μαθητών.



Διάγραμμα 40. Συνεπαγωγικό διάγραμμα για έργα που αφορούν γεωμετρικά σχήματα δύο διαστάσεων (Β΄ γυμνασίου)

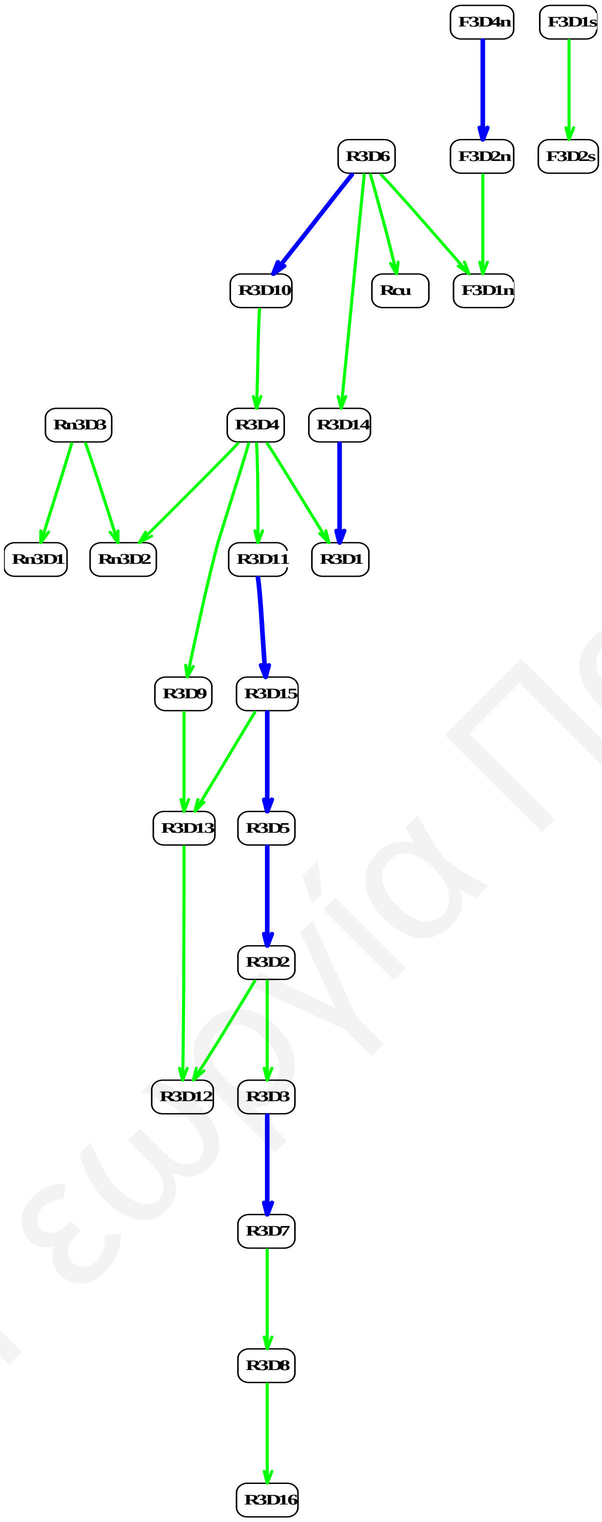
Από τη συγκριτική μελέτη των τριών διαγραμμάτων που προέκυψαν από τη συνεπαγωγική ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών και των τριών τάξεων σε σχέση με τις επιδόσεις τους σε έργα με γεωμετρικά σχήματα δύο διαστάσεων προκύπτουν ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις. Πρώτον, ο μικρός αριθμός συνεπαγωγικών σχέσεων που παρουσιάζονται στην περίπτωση των μαθητών της Δ΄ τάξης μετατρέπεται στην περίπτωση της Στ΄ τάξης σε πλέγματα πολλών σχέσεων, φανερώνοντας ότι στην ομάδα των μαθητών αυτών οι γνώσεις και οι δεξιότητες που κατέχουν συνδέονται σε αρκετά μεγαλύτερο βαθμό. Από την άλλη, όμως, στους μαθητές του γυμνασίου παρουσιάζεται ένα σημαντικά φτωχότερο δίκτυο γνωστικών μονάδων. Εξαιτίας του τρόπου διδασκαλίας και της προσέγγισης των θεμάτων στο γυμνάσιο, οι μαθητές περνούν σε ένα ανεξάρτητο εννοιολογικό πλαίσιο μέσα στο οποίο φαίνεται ότι οι γνωστικές μονάδες και οι δεξιότητες που κατέχουν εδραιώνονται ως ανεξάρτητες οντότητες. Το αποτέλεσμα αυτό αποτελεί πηγή προβληματισμού, γιατί από ένα σχετικά επαρκές δίκτυο γνωστικών μονάδων στους μαθητές που τελειώνουν το δημοτικό σχολείο καταλήγουμε δύο χρόνια αργότερα σε ένα αρκετά φτωχότερο δίκτυο ικανοτήτων.

Αξιοσημείωτο επίσης είναι το γεγονός ότι και στις τρεις ηλικίες των μαθητών επιτυχία στο έργο Aeq συνεπάγεται επιτυχία σε αριθμό άλλων έργων (τρία έργα για την Δ΄ δημοτικού και πέντε έργα για την Στ΄ Δημοτικού και τη Β΄ γυμνασίου). Το γεγονός αυτό αποτελεί ένδειξη της ανάγκης συμπερίληψης κατά τη διδασκαλία θεμάτων γεωμετρίας με έργα δύο διαστάσεων καταστάσεων που αναφέρονται στο χειρισμό παρόμοιων έργων. Η συστηματική και συνειδητή ενασχόληση των μαθητών με έργα στα οποία το γεωμετρικό σχήμα μπορεί να αναλυθεί σε υποσχήματα, μπορεί να αποτελέσει αφορμή για εντοπισμό σχέσεων και εφαρμογή των ιδιοτήτων των υποσχημάτων. Επιπλέον ευνοεί τον ανασχηματισμό του σχήματος μέσα από μια δυναμική αντίληψή του και αφύπνιση της γεωμετρικής διαίσθησης, άρα μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα επιτυχία σε έργα απλούστερης μορφής που εμπεριέχουν όμως αυτές τις διαδικασίες.

Συνεπαγωγικές Αναλύσεις για Έργα Χειρισμού Τρισδιάστατων Γεωμετρικών Σχημάτων

Το Διάγραμμα 41 αναφέρεται στα έργα που αφορούσαν σχήματα τριών διαστάσεων και έχει προκύψει από τις απαντήσεις των μαθητών της Δ΄ τάξης. Σε αυτό παρουσιάζονται όλα τα έργα αναγνώρισης σχημάτων και συμπερίληψης ή μη στην κλάση των στερεών (R3D1 – R3D16), έργα αναγνώρισης και ονομασίας στερεών και έργα που αφορούν τις έδρες γεωμετρικών στερεών (μέτρηση του αριθμού των εδρών και αναγνώριση του σχήματος των εδρών). Μικρές συνεπαγωγικές αλυσίδες σχηματίζονται με έργα των δύο τελευταίων κατηγοριών, ενώ αντίθετα τα έργα αναγνώρισης στερεών συνδέονται μεταξύ τους σε μεγάλες συνεπαγωγικές αλυσίδες. Η δημιουργία των μεγάλων συνεπαγωγικών αλυσίδων των απαντήσεων των μαθητών της Δ΄ δημοτικού στα έργα με τρισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα υποδηλώνει την ιεράρχησή τους με κριτήριο το βαθμό δυσκολίας τους. Μελετώντας τις συνεπαγωγικές σχέσεις που παρουσιάζονται παρατηρείται ότι αρκετές από αυτές αφορούν την ίδια κατηγορία στερεών. Για παράδειγμα, ένα μέρος της συνεπαγωγικής αλυσίδας αποτελείται από τα έργα που σχετίζονται με την αναγνώριση κύβου (R3D11 → R3D15 → R3D5 → R3D2), ενώ σε άλλο τμήμα της αλυσίδας συνδέονται τα έργα που αφορούν πυραμίδες (R3D6 → R3D10 → R3D4). Στο τελευταίο τμήμα της μίας συνεπαγωγικής αλυσίδας συνδέονται τα έργα που παρουσίαζαν επίπεδα γεωμετρικά σχήματα (R3D3 → R3D7 → R3D8 → R3D16).

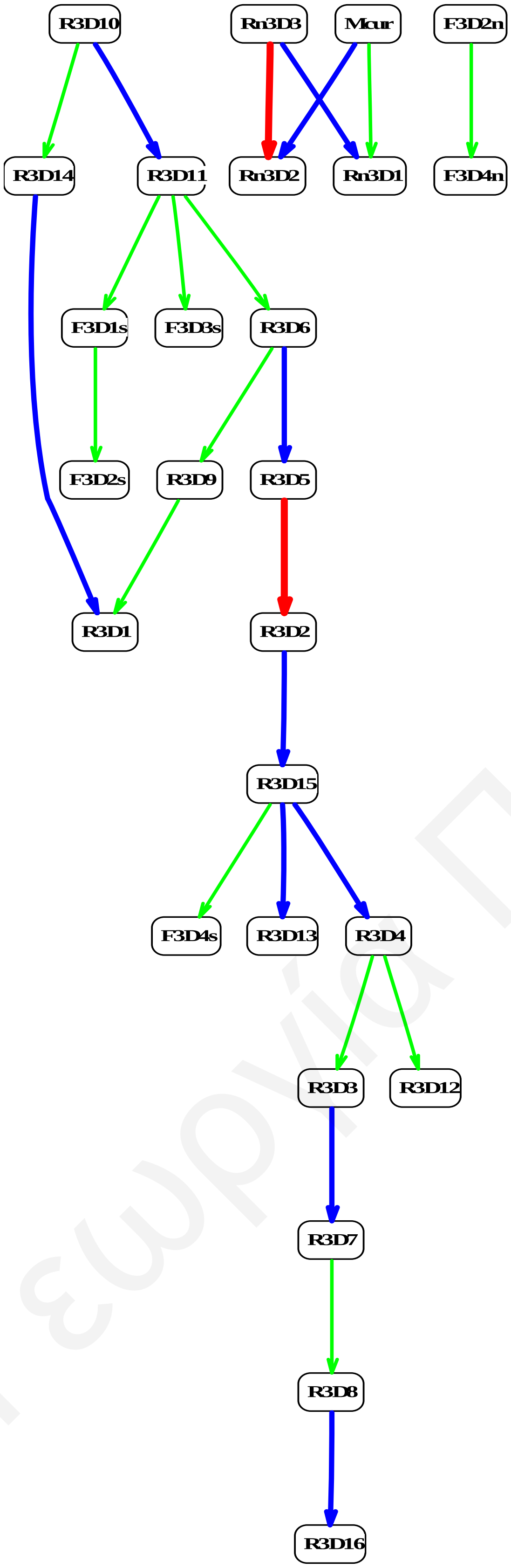
Τα έργα που αφορούν ανάλυση στερεών στα στοιχεία τους δεν λαμβάνουν μέρος στη μεγάλη συνεπαγωγική αλυσίδα όπου περιλαμβάνονται τα έργα αναγνώρισης στερεών. Συγκεκριμένα, τα έργα που εξετάζουν την ικανότητα καθορισμού του αριθμού των εδρών στερεού που παρουσιάζεται μέσω δισδιάστατου σχεδίου συνδέονται σε ξεχωριστό μέρος του συνεπαγωγικού διαγράμματος, ενώ εμφανίζονται σε ξεχωριστή συνεπαγωγική αλυσίδα δύο από τα έργα που αναφέρονται στο σχήμα των εδρών των στερεών.



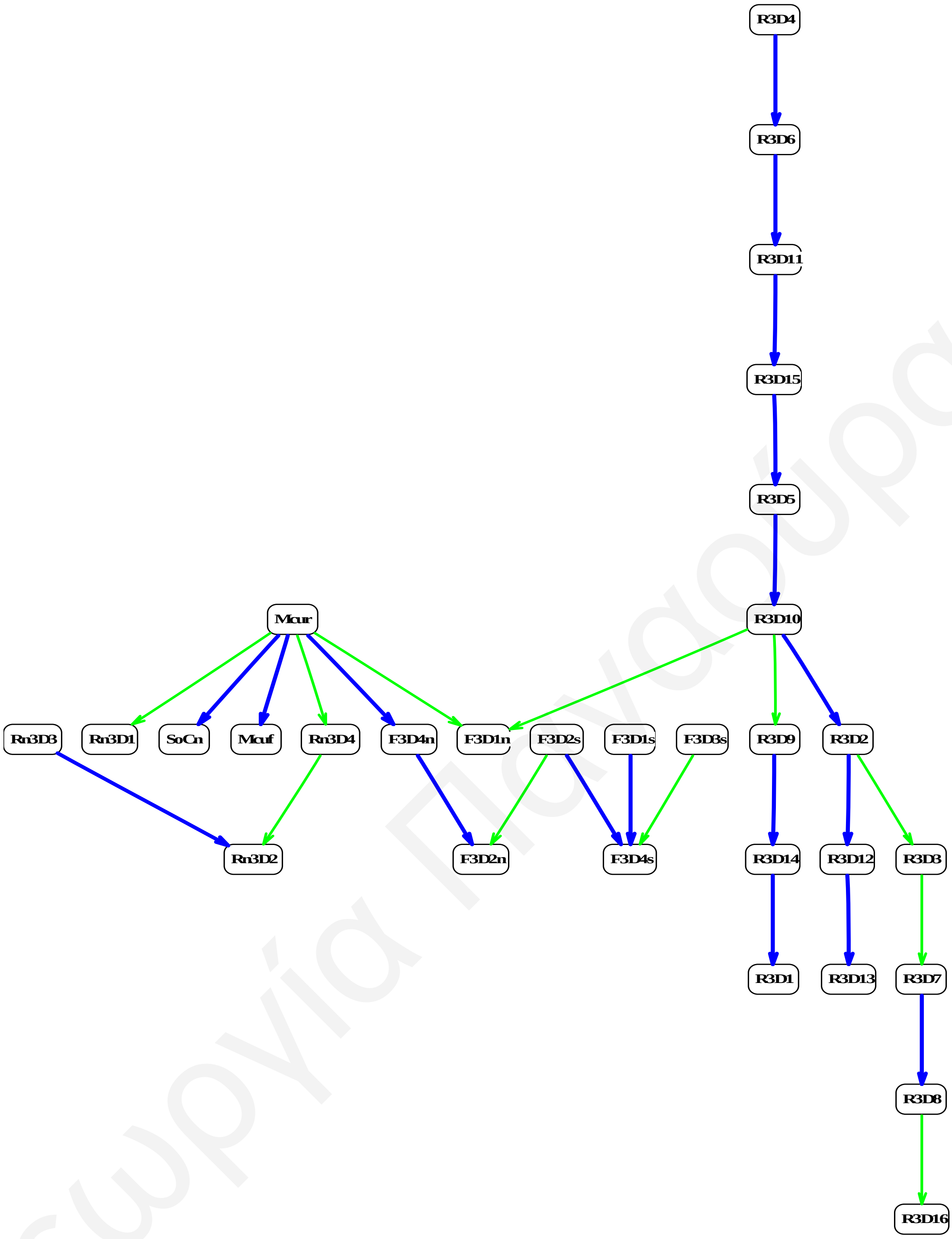
Διάγραμμα 41. Συνεπαγωγικό διάγραμμα για έργα που αφορούν σχήματα τριών διαστάσεων (Δ΄ δημοτικού)

Στην περίπτωση των μαθητών της Στ΄ τάξης (Διάγραμμα 42) παρουσιάζεται και πάλι μεγάλη συνεπαγωγική αλυσίδα με έργα αναγνώρισης στερεών, η οποία σε κάποια σημεία παρουσιάζει μικρές διακλαδώσεις, στις οποίες εμφανίζονται εκτός από τα έργα του Διαγράμματος 41 και έργα που αφορούσαν τις έδρες στερεών. Έξι έργα παρουσιάζονται στο διάγραμμα ξεχωριστά και δείχνουν συνεπαγωγικές σχέσεις ανάμεσα σε δύο έργα κάθε φορά. Πρόκειται για τρία έργα αναγνώρισης και ονομασίας στερεών (Rn3D1, Rn3D2, Rn3D3), ένα έργο πολλαπλής επιλογής (Mcur) και δύο έργα που αφορούσαν τον αριθμό των εδρών γεωμετρικών στερεών (F3D2n, F3D4n). Στη βασική συνεπαγωγική αλυσίδα εμφανίζονται, όπως και στην περίπτωση των μαθητών της Δ΄ δημοτικού, τμήματα με έργα που αφορούσαν το ίδιο γεωμετρικό σχήμα. Για παράδειγμα, το τμήμα R3D5 → R3D2 → R3D15 αναφέρεται στην αναγνώριση κύβου, ενώ το τμήμα R3D3 → R3D7 → R3D8 → R3D16 αφορά τα έργα που έδειχναν γεωμετρικά σχήματα δύο διαστάσεων.
Μικρές διαφοροποιήσεις παρουσιάζονται στο αντίστοιχο διάγραμμα για τους μαθητές της Β΄ γυμνασίου (Διάγραμμα 43). Εξακολουθεί να εμφανίζεται η μεγάλη συνεπαγωγική αλυσίδα στην οποία υποδηλώνεται η ιεράρχηση των έργων με βάση το βαθμό δυσκολίας τους. Από το διάγραμμα αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι επιτυχία στο έργο Mcur συνεπάγεται επιτυχία σε 6 άλλα έργα που αφορούν τον κύβο ή το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο (Rn3D1, SoCn, Mcuf, Rn3D4, F3D4n, F3D1n). Το συγκεκριμένο έργο πολλαπλής επιλογής, το οποίο εξετάζει εάν οι μαθητές συμπεριλαμβάνουν στην κλάση των ορθογώνιων παραλληλεπιπέδων τους κύβους, δεν λαμβάνει μέρος στις συνεπαγωγικές αλυσίδες του Διαγράμματος 41 (μαθητές Δ΄ δημοτικού), ενώ στο Διάγραμμα 42 (μαθητές Στ΄ δημοτικού) συνδέεται μόνο με δύο άλλα έργα. Η ικανότητα συμπερίληψης σχημάτων σε κλάσεις συνδέεται με το τρίτο επίπεδο του μοντέλου van Hiele, οπόταν δεν αποτελεί έκπληξη που το συγκεκριμένο έργο λαμβάνει μέρος στις συνεπαγωγικές αλυσίδες των απαντήσεων των μεγαλύτερων μαθητών της έρευνας.

Γενικά, δεν παρατηρούνται ουσιαστικές διαφορές ανάμεσα στις συνεπαγωγικές σχέσεις των τριών παραπάνω διαγραμμάτων αναφορικά με το χειρισμό έργων τρισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων. Οι απαντήσεις των μαθητών και των τριών ηλικιακών ομάδων είχαν ως αποτέλεσμα την εμφάνιση μεγάλων συνεπαγωγικών αλυσίδων στην οποίες υποδηλώνεται η ιεράρχηση των έργων με βάση το βαθμό δυσκολίας τους. Τα έργα που αναφέρονταν σε αναγνώριση αναπαραστάσεων πυραμίδας ήταν τα δυσκολότερα, ακολουθούσαν τα έργα αναγνώρισης αναπαραστάσεων κύβου και επιτυχία στις δύο αυτές κατηγορίες έργων φαίνεται να συνεπάγεται επιτυχία στα ευκολότερα έργα αναγνώρισης μη-αναπαραστάσεων γεωμετρικών στερεών.



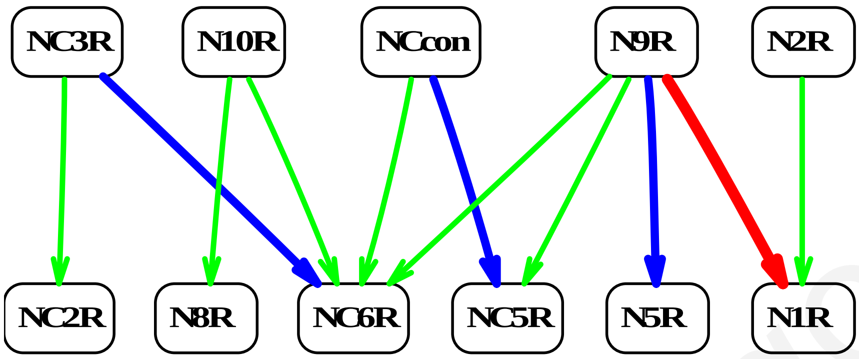
Διάγραμμα 42. Συνεπαγωγικό διάγραμμα για έργα που αφορούν σχήματα τριών διαστάσεων (Στ΄ δημοτικού)



Διάγραμμα 43. Συνεπαγωγικό διάγραμμα για έργα που αφορούν σχήματα τριών διαστάσεων (Β΄ γυμνασίου)

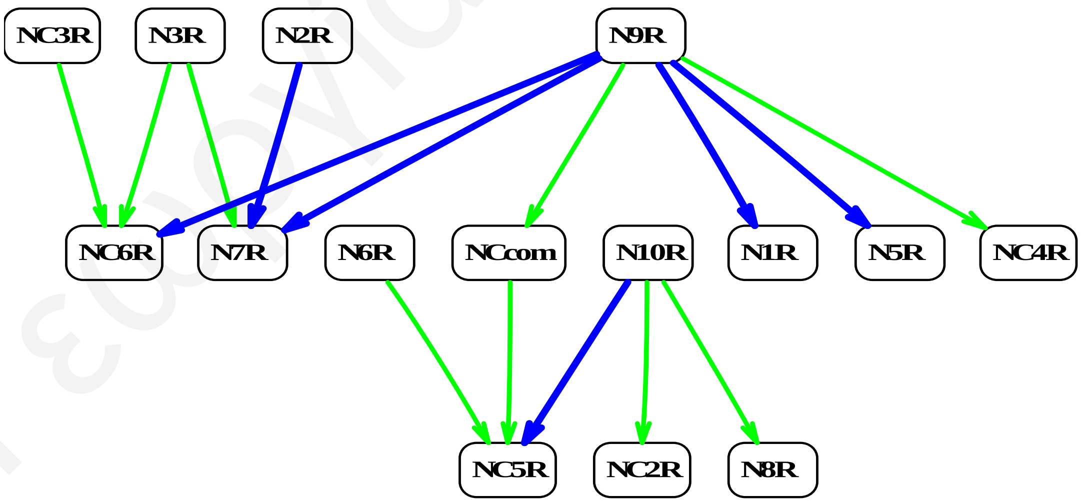
Έργα που Αφορούν Χειρισμό Αναπτυγμάτων Γεωμετρικών Στερεών

Η διαρρύθμιση των απαντήσεων των μαθητών της Δ΄ δημοτικού στα έργα που αφορούσαν χειρισμό αναπτυγμάτων στο Διάγραμμα 44 υποδηλώνει το διαχωρισμό των έργων σε δύο κατηγορίες με κριτήριο το βαθμό δυσκολίας τους. Συγκεκριμένα, ως δυσκολότερα παρουσιάζονται τα έργα NC3R, N2R και N9R στα οποία δεν διακρίνεται μια βάση γύρω από την οποία να τοποθετούνται οι υπόλοιπες έδρες και το έργο κατασκευής αναπτύγματος κύβου (έργο NCcon), σε αντίθεση με τα έργα N1R, N5R και NC5R που παρουσιάζουν αναπαραστάσεις αναπτυγμάτων με διευθέτηση των εδρών γύρω από τη βάση. Ο βαθμός δυσκολίας των έργων καθορίζεται, όπως προκύπτει από τη μελέτη του διαγράμματος, για τους μικρούς μαθητές από τη μη διαρρύθμιση των εδρών γύρω από μια έδρα-βάση, καθώς και από τις μειωμένες μαθησιακές εμπειρίες.



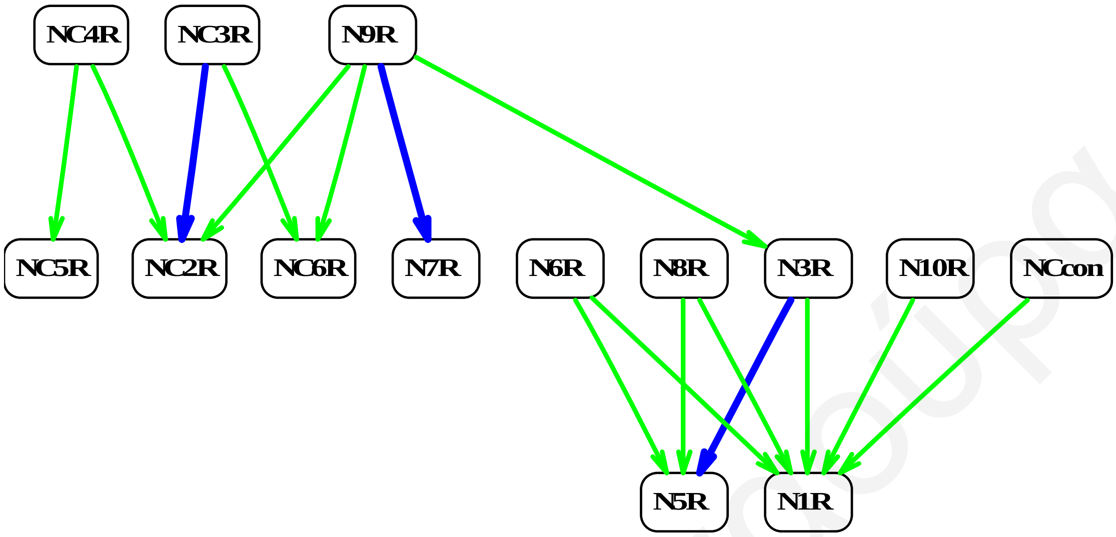
Διάγραμμα 44. Συνεπαγωγικό διάγραμμα για έργα που αφορούν χειρισμό αναπτυγμάτων γεωμετρικών στερεών (Δ΄ δημοτικού)

Ο αριθμός των έργων που παρουσιάζονται στο Διάγραμμα 44 είναι αρκετά μικρότερος από τον αριθμό των έργων στα Διαγράμματα 45 και 46, όπου εμφανίζονται οι απαντήσεις των μαθητών των δύο μεγαλύτερων τάξεων.



Διάγραμμα 45. Συνεπαγωγικό διάγραμμα για έργα που αφορούν χειρισμό αναπτυγμάτων γεωμετρικών στερεών (Στ΄ δημοτικού)

Κατά συνέπεια στην περίπτωση των μαθητών της Στ΄ δημοτικού και της Β΄ γυμνασίου παρουσιάζεται σχετικά αυξημένος ο αριθμός των συνεπαγωγικών σχέσεων, υποδηλώνοντας ένα πλουσιότερο γνωστικό δίκτυο. Οι περισσότερες συνεπαγωγικές σχέσεις αφορούν από τη μια τα έργα χειρισμού αναπτυγμάτων κύβου και από την άλλη έργα αναγνώρισης αναπτυγμάτων άλλων στερεών.



Διάγραμμα 46. Συνεπαγωγικό διάγραμμα για έργα που αφορούν χειρισμό αναπτυγμάτων γεωμετρικών στερεών (Β΄ γυμνασίου)

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι επιτυχία στο έργο N9R (ένα από τα δυσκολότερα έργα του δοκιμίου για αναπτύγματα) συνεπάγεται επιτυχία σε πολλά έργα, κυρίως στην περίπτωση των μαθητών της Στ΄ τάξης. Η δυσκολία του έργου έγκειται στη διαρρύθμιση των εδρών του όχι γύρω από μια βάση, που αναγκάζει τους μαθητές να ενεργοποιήσουν επιπρόσθετες διαδικασίες. Η σύνδεση του συγκεκριμένου έργου με αριθμό άλλων έργων που αφορούν αναπαραστάσεις αναπτυγμάτων απλούστερης μορφής καταδεικνύει την ανάγκη συμπερίληψης αυτών των μορφών αναπαράστασης και του σχετικού τρόπου σκέψης κατά τη διδασκαλία. Η ενασχόληση του θέματος κατά την προσέγγιση των αναπτυγμάτων στη διδασκαλία δεν θα πρέπει να εξαντλείται μόνο σε αναπτύγματα με διαρρύθμιση των εδρών γύρω από μια βάση. Είναι μια καλή τακτική κατά την επαφή των μαθητών με την έννοια, αλλά δεν θα πρέπει να είναι η μόνη προσέγγιση.

Ανακεφαλαίωση

Η παρουσίαση των αποτελεσμάτων έγινε σε τρία υποκεφάλαια, τα οποία βρίσκονται σε αντιστοιχία με τους τρεις άξονες διερεύνησης των ερωτημάτων που έθεσε η παρούσα εργασία. Αρχικά παρουσιάστηκε η δόμηση της ικανότητας χειρισμού έργων με γεωμετρικά σχήματα όπως προέκυψε από τις αναλύσεις των δομικών μοντέλων για το σύνολο των μαθητών. Κύρια συστατικά της ικανότητας αυτής βρέθηκαν να είναι οι επιδόσεις των μαθητών στην επίλυση γεωμετρικών έργων που απαιτούσαν χειρισμό (α) γεωμετρικών σχημάτων δύο διαστάσεων, (β) γεωμετρικών σχημάτων τριών διαστάσεων και (γ) αναπτυγμάτων γεωμετρικών στερεών. Ακολούθως η παραπάνω δομή επιβεβαιώθηκε για τις τρεις ηλικιακές ομάδες της έρευνας, ενώ συζητήθηκαν οι διαφοροποιήσεις που παρουσιάστηκαν ανάμεσα στα συστατικά της.

Με την επιβεβαίωση δομικού μοντέλου που προτάθηκε βρέθηκε ότι η γενική χωρική ικανότητα των μαθητών αποτελεί σημαντικό δείκτη πρόβλεψης της ικανότητας χειρισμού γεωμετρικών έργων με διαφορετικά γεωμετρικά σχήματα. Μια σειρά παλινδρομικών αναλύσεων που πραγματοποιήθηκαν κατέδειξε ότι οι συνιστώσες της χωρικής ικανότητας «χειρισμός νοητικών εικόνων», «νοητικές περιστροφές» και «συντονισμός των προοπτικών» αποτελούν δείκτες πρόβλεψης της επίδοσης των μαθητών σε έργα γεωμετρίας. Αναφορικά με τον τρόπο αντιμετώπισης χωρικών και γεωμετρικών έργων από τους μαθητές διαπιστώθηκε, με τη διενέργεια αναλύσεων ομοιότητας και συνεπαγωγής, το φαινόμενο της στεγανοποίησης στις απαντήσεις των μαθητών ανάμεσα σε γεωμετρικά έργα με τρισδιάστατα σχήματα και σε έργα αξιολόγησης της χωρικής ικανότητας. Επιπλέον, διαπιστώθηκε μια διαβάθμιση με βάση την ηλικία των μαθητών ως προς την αντιμετώπιση έργων χειρισμού αναπτυγμάτων γεωμετρικών στερεών και χωρικών έργων.

Αναφορικά με τη διερεύνηση της σύγκρισης της γεωμετρικής σκέψης μαθητών δημοτικής και μέσης εκπαίδευσης παρουσιάστηκαν οι επιδόσεις των μαθητών στα γεωμετρικά έργα που χορηγήθηκαν και συζητήθηκαν οι διαφορές τους. Επίσης αναλύθηκε ο τρόπος αντιμετώπισης των γεωμετρικών έργων από τους μαθητές των τριών ηλικιακών ομάδων της έρευνας και εντοπίστηκαν δυσκολίες ή διδακτικά φαινόμενα που αφορούν το χειρισμό έργων στα πλαίσια της Εμπειρικής Γεωμετρίας ή στα πλαίσια της Εμπειρικής Αξιωματικής Γεωμετρίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό συζητούνται τα συμπεράσματα της παρούσας έρευνας. Παρουσιάζονται σε συντομία τα αποτελέσματα της έρευνας, με βασικό σκοπό την ερμηνεία των ευρημάτων και τη συζήτησή τους σε αναφορά με τα ευρήματα προηγούμενων ερευνών. Κατά τη συζήτηση των αποτελεσμάτων και την εξαγωγή των συμπερασμάτων σημειώνονται εισηγήσεις για περαιτέρω μελλοντική διερεύνηση ορισμένων θεμάτων.

Η οργάνωση του κεφαλαίου αντιστοιχεί στα ερευνητικά ερωτήματα που έθεσε η παρούσα εργασία με βάση τους ακόλουθους άξονες διερεύνησης:

1. Η δομή των γεωμετρικών ικανοτήτων των μαθητών ηλικίας 10-14 χρόνων σε θέματα χειρισμού διαφορετικών γεωμετρικών σχημάτων
2. Η σχέση χωρικής ικανότητας και γεωμετρικής ικανότητας των μαθητών
3. Η σύγκριση της γεωμετρικής σκέψης μαθητών δημοτικής και μέσης εκπαίδευσης

Στο πρώτο υποκεφάλαιο συζητείται η δομή του συστήματος των γεωμετρικών ικανοτήτων σε θέματα χειρισμού διαφορετικών γεωμετρικών σχημάτων, όπως έχει προκύψει από την ανάλυση των δεδομένων που συγκεντρώθηκαν. Συζητούνται οι παράμετροι του συγκεκριμένου γνωστικού συστήματος και γίνεται ιδιαίτερη αναφορά στη διατήρηση της δομής του στις διαφορετικές ηλικίες των μαθητών.

Στο δεύτερο υποκεφάλαιο βασικό θέμα συζήτησης είναι η σχέση ανάμεσα στις χωρικές ικανότητες των μαθητών και την επίδοσή τους στα έργα γεωμετρίας. Συζητούνται ιδιαίτερα οι συνιστώσες της χωρικής ικανότητας που επηρεάζουν τη γεωμετρική ικανότητα των μαθητών για χειρισμό έργων με γεωμετρικά σχήματα.

Τέλος, συζητούνται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη σύγκριση μαθητών δημοτικής και μέσης εκπαίδευσης αναφορικά με το χειρισμό έργων με γεωμετρικά σχήματα. Γίνεται αναφορά στις επιδόσεις των μαθητών στα διαφορετικά είδη έργων, ενώ ιδιαίτερη σημασία δίνεται σε αριθμό φαινομένων που σχετίζονται με τον τρόπο αντιμετώπισης των γεωμετρικών έργων από τους μαθητές στα πλαίσια της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Η Δομή του Συστήματος των Γεωμετρικών Ικανοτήτων σε Θέματα Χειρισμού Διαφορετικών Γεωμετρικών Σχημάτων

Το ζήτημα της απόκτησης μαθηματικών γνώσεων και της οικοδόμησης μαθηματικής δομής έχει μελετηθεί από αρκετούς μαθηματικούς παιδαγωγούς μέσα από διαφορετικές οπτικές γωνίες (Gray et al., 1999; Hejny, 2003). Παρά το γεγονός ότι η μελέτη και η κατανόηση του τρόπου με τον οποίο οι μαθητές οικοδομούν τις γνώσεις που αποκτούν για τις γεωμετρικές έννοιες που διδάσκονται θεωρούνται σημαντικά θέματα (Battista, 1999), απουσιάζουν από τη βιβλιογραφία μοντέλα περιγραφής της δόμησης των γεωμετρικών ικανοτήτων των μαθητών.

Η παρούσα εργασία στηρίχτηκε στην υπόθεση ότι η γεωμετρική ικανότητα των μαθητών αναφορικά με το χειρισμό γεωμετρικών σχημάτων αποτελεί μια σύνθετη δομή με διαφορετικές συνιστώσες, οι οποίες είναι πιθανό να συνδέονται με τις μαθησιακές εμπειρίες των παιδιών στα θέματα της γεωμετρίας που διδάσκονται στα πλαίσια της εκπαίδευσης. Με βάση την υπόθεση αυτή προτάθηκε και τελικά επιβεβαιώθηκε με εμπειρικά δεδομένα ένα πολυδιάστατο μοντέλο για τη γεωμετρική ικανότητα των μαθητών αναφορικά με το χειρισμό γεωμετρικών σχημάτων.

Τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας καταδεικνύουν ότι η γενική ικανότητα χειρισμού γεωμετρικών σχημάτων σε μαθητές ηλικίας 10-14 χρόνων αποτελείται από τρεις ειδικές ικανότητες: ικανότητα χειρισμού έργων με γεωμετρικά σχήματα δύο διαστάσεων, ικανότητα χειρισμού έργων με γεωμετρικά σχήματα τριών διαστάσεων και ικανότητα χειρισμού έργων με αναπτύγματα γεωμετρικών στερεών. Η καθεμιά από τις τρεις αυτές ειδικές ικανότητες χειρισμού γεωμετρικών σχημάτων δομείται από δύο επιμέρους παράγοντες. Συγκεκριμένα, η ικανότητα χειρισμού γεωμετρικών σχημάτων δύο διαστάσεων συνιστάται από την ικανότητα μέτρησης και αναγνώρισης αναπαραστάσεων σε δισδιάστατα σχήματα και την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων όπου εμφανίζονται σχήματα δύο διαστάσεων. Η ικανότητα χειρισμού γεωμετρικών σχημάτων τριών διαστάσεων συνιστάται από την ικανότητα αναγνώρισης διαφορετικών αναπαραστάσεων τρισδιάστατων σχημάτων και την ικανότητα ανάλυσης των σχημάτων αυτών σε επιμέρους στοιχεία. Τέλος, η ικανότητα χειρισμού αναπτυγμάτων γεωμετρικών στερεών συνιστάται από την ικανότητα χειρισμού έργων με αναπτύγματα κύβου και την ικανότητα χειρισμού έργων με αναπτύγματα άλλων στερεών.

Η δομή αυτή δείχνει ότι το σύστημα γεωμετρικών ικανοτήτων αναφορικά με το χειρισμό γεωμετρικών σχημάτων είναι εναρμονισμένο με τις μαθησιακές εμπειρίες των μαθητών με τρόπο ώστε οι εμπειρίες που αφορούν στο ίδιο πεδίο να οργανώνονται σε κοινές δομές. Με άλλα λόγια, το σύστημα αυτό είναι δομημένο έτσι που να επεξεργάζεται σε διαφορετικές δομές τις πληροφορίες που αφορούν διαφορετικά γεωμετρικά σχήματα. Παρότι δεν υπάρχουν στο χώρο της μαθηματικής παιδείας έρευνες που να παρουσιάζουν τη δόμηση γεωμετρικών ικανοτήτων, τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας επιβεβαιώνουν προηγούμενες έρευνες που στηρίζονται στην αρχιτεκτονική του νου όπως προτείνεται από το Δημητρίου και τους συνεργάτες του (Δημητρίου, 1993; Demetriou et al., 2002), οι οποίες έχουν υποστηρίξει με εμπειρικά δεδομένα την οργάνωση των εμπειριών που αφορούν στο ίδιο πεδίο σε κοινές δομές (π.χ. Demetriou 1998; Demetriou, 2004; Demetriou & Panaoura, 2006).

Η περιγραφή της δόμησης των γνωστικών ικανοτήτων των μαθητών που αφορούν θέματα χειρισμού διαφορετικών γεωμετρικών σχημάτων αποτελεί μια συνεισφορά της παρούσας εργασίας στη μελέτη των γεωμετρικών ικανοτήτων, εφόσον πρόκειται για μια διάσταση που δεν έχει μελετηθεί από προηγούμενους ερευνητές. Οι έρευνες σε θέματα γεωμετρίας συνήθως ασχολούνται με μια κατηγορία γεωμετρικών αντικειμένων.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον σε σχέση με το μοντέλο που προτάθηκε και επιβεβαιώθηκε στα πλαίσια της παρούσας εργασίας για τη δομή των γεωμετρικών ικανοτήτων των μαθητών παρουσιάζει το γεγονός ότι το μοντέλο αυτό ισχύει ως προς τα συστατικά δόμησης των ικανοτήτων των μαθητών για χειρισμό γεωμετρικών σχημάτων στην περίπτωση και των τριών ηλικιακών ομάδων που έλαβαν μέρος στην έρευνα. Το συμπέρασμα που προκύπτει από το αποτέλεσμα αυτό είναι ότι η βασική δομή των ικανοτήτων των μαθητών που αφορούν χειρισμό γεωμετρικών σχημάτων αρχίζει να δημιουργείται από την Δ΄ τάξη του δημοτικού σχολείου και παραμένει αναλλοίωτη ως προς τις επιμέρους συνιστώσες της μέχρι τη Β΄ γυμνασίου. Το συμπέρασμα αυτό είναι σημαντικό, αν ληφθεί υπόψη η νοητική ανάπτυξη των ατόμων μεταξύ 10 και 14 χρόνων, καθώς και οι διαφορές στον τρόπο εργασίας σε θέματα γεωμετρίας ανάμεσα στην πρωτοβάθμια και τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (στο πλαίσιο της Γεωμετρίας 1 και της Γεωμετρίας 2, αντίστοιχα).

Επιπλέον, έχει διαπιστωθεί ότι η δόμηση της ικανότητας χειρισμού έργων με τρισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα παραμένει αναλλοίωτη στις τρεις ηλικιακές ομάδες και ως προς τις σχέσεις ανάμεσα στα στοιχεία που την αποτελούν. Το αποτέλεσμα αυτό καταδεικνύει ότι ένα χαρακτηριστικό της ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης από το δημοτικό σχολείο στο γυμνάσιο είναι η δημιουργία «αναλλοίωτων εννοιών». Ως «αναλλοίωτο» ορίζεται το σύνολο των έργων για τα οποία ισχύει ότι οι μεταξύ τους σχέσεις παραμένουν ίδιες στους μαθητές διαφορετικών ηλικιών. Το φαινόμενο αυτό το ονομάζουμε «διατήρηση γεωμετρικών δομών».

Μια ερμηνεία που μπορεί να δοθεί για το φαινόμενο της διατήρησης της δομής της ικανότητας χειρισμού έργων με τρισδιάστατα σχήματα στις τρεις ηλικιακές ομάδες είναι ότι η διδασκαλία του συγκεκριμένου θέματος με βάση το αναλυτικό πρόγραμμα της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης για τη γεωμετρία περιορίζεται ουσιαστικά στις έννοιες τρισδιάστατων σχημάτων (έννοια κύβου, ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, πυραμίδας) και την αναγνώριση εδρών, ακμών και κορυφών. Η ενασχόληση με τα τρισδιάστατα σχήματα γίνεται συνήθως σε περιορισμένο χρόνο και μέσα από ένα σχετικά παρόμοιο μεταξύ τους αριθμό δραστηριοτήτων που δεν ευνοεί την απόκτηση πολλών μαθησιακών εμπειριών (Brahier & Speer, 1997; Woodward & Brown, 1994). Γενικά η έμφαση στο αναλυτικό πρόγραμμα και στη διδασκαλία του μαθήματος της γεωμετρίας δίνεται στις έννοιες που αφορούν τα επίπεδα γεωμετρικά σχήματα, ενώ η διδασκαλία θεμάτων τρισδιάστατης γεωμετρίας είναι υποβαθμισμένη (Malara, 1998). Επιπλέον, όπως παρατηρούν οι Jirotková και Littler (2002), τα αναλυτικά προγράμματα του δημοτικού σχολείου για τα μαθηματικά δεν συμβάλλουν στη δημιουργία γεωμετρικής δομής για τα στερεά. Η δόμηση των ικανοτήτων των μαθητών αναφορικά με τα τρισδιάστατα σχήματα βασίζεται στην οπτική και την απτική τους αντίληψη και εξαρτάται κυρίως από τις εμπειρίες τους στην καθημερινή ζωή (Jirotková & Littler, 2002).

Η ερμηνεία του φαινομένου της διατήρησης της δομής της ικανότητας χειρισμού έργων με γεωμετρικά σχήματα τριών διαστάσεων που έχει προταθεί παραπάνω στηρίζεται στην υπόθεση ότι η δόμηση των γεωμετρικών ικανοτήτων των μαθητών συνδέεται με τη διδασκαλία θεμάτων γεωμετρίας στα πλαίσια της εκπαίδευσης. Για να εξακριβωθεί η ορθότητα της υπόθεσης αυτής απαιτείται η διεξαγωγή συγκριτικών ερευνών, οι οποίες να παρέχουν πληροφορίες για τη δόμηση των γεωμετρικών ικανοτήτων μαθητών από διαφορετικές χώρες, οι οποίοι έχουν διδαχθεί γεωμετρικές έννοιες μέσα σε διαφορετικά εκπαιδευτικά πλαίσια. Επίσης χρήσιμα στοιχεία σχετικά με το βαθμό στον οποίο η διδασκαλία της γεωμετρίας συνδέεται με τη δόμηση των γεωμετρικών ικανοτήτων των μαθητών σε θέματα χειρισμού γεωμετρικών σχημάτων μπορούν να συγκεντρωθούν με την πραγματοποίηση πειραματικής έρευνας στα πλαίσια της οποίας ομάδα μαθητών που ακολουθεί το υφιστάμενο αναλυτικό πρόγραμμα (ομάδα ελέγχου) να συγκρίνεται με ομάδα μαθητών που ακολουθεί διαφοροποιημένο πρόγραμμα στα θέματα γεωμετρίας (πειραματική ομάδα).

Από τον εντοπισμό του φαινομένου της διατήρησης της δομής της ικανότητας χειρισμού έργων με τρισδιάστατα σχήματα στις τρεις ηλικιακές ομάδες της παρούσας έρευνας εύλογα προκύπτει το ερώτημα γιατί παρουσιάζεται διαφοροποίηση στη δόμηση των επιμέρους σχέσεων της ικανότητας χειρισμού έργων με γεωμετρικά σχήματα δύο διαστάσεων και της ικανότητας χειρισμού έργων με αναπτύγματα στερεών. Η απάντηση στο πρώτο σκέλος του ερωτήματος αναφορικά με το χειρισμό έργων με γεωμετρικά σχήματα δύο διαστάσεων μπορεί να στηριχθεί στις μαθησιακές εμπειρίες των μαθητών. Το μεγαλύτερο μέρος της διδασκαλίας της γεωμετρίας αφιερώνεται στην ενασχόληση με έννοιες που αφορούν επίπεδα γεωμετρικά σχήματα (Berthelot & Salin, 1998; Malara, 1998). Η προσέγγιση των σχετικών θεμάτων γίνεται αρχικά στο πλαίσιο της Γεωμετρίας 1 (Εμπειρική Γεωμετρία), όπου κύριο ρόλο κατέχουν η οπτική αντίληψη και η μέτρηση μέσω γεωμετρικών οργάνων, ενώ σταδιακά γίνεται μια προσπάθεια μετάβασης στο πλαίσιο της Γεωμετρίας 2 (Εμπειρική Αξιωματική Γεωμετρία), όπου δίνεται μεγαλύτερη έμφαση στις ιδιότητες των σχημάτων (Rolet, 2003). Παρά το γεγονός ότι η μετάβαση αυτή δεν αποτελεί ξεκάθαρο στόχο και επιδίωξη του αναλυτικού προγράμματος, και κατ' επέκταση των εκπαιδευτικών, η άδηλη προσπάθεια μετακίνησης σε μια γεωμετρία που δίνει έμφαση στις ιδιότητες των γεωμετρικών αντικειμένων, σε συνδυασμό με τη συχνή ενασχόληση των μαθητών με θέματα γεωμετρίας στο χώρο των δύο διαστάσεων, φαίνεται να έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών σε σχέση με το χειρισμό έργων στα οποία παρουσιάζονται επίπεδα γεωμετρικά σχήματα.

Η απάντηση στο δεύτερο σκέλος του ερωτήματος αναφορικά με τη διαφοροποίηση στη δόμηση των επιμέρους σχέσεων της ικανότητας χειρισμού έργων με αναπτύγματα γεωμετρικών στερεών στηρίζεται στη σύνδεση ανάμεσα στην ικανότητα των παιδιών να αναγνωρίζουν σχέσεις μεταξύ των στερεών και των αναπτυγμάτων τους και τη γενικότερη αντίληψή τους για το χώρο (Πόταρη & Σπηλιωτοπούλου, 2003). Οι χωρικές ικανότητες των παιδιών, οι οποίες μεταβάλλονται στα πλαίσια της γενικότερης νοητικής ανάπτυξης (Δημητρίου, 1993; Demetriou, 1998), συνδέονται με τις ικανότητες χειρισμού έργων με αναπτύγματα γεωμετρικών στερεών (Panaoura & Gagatsis, 2006). Συγκεκριμένα, έχει παρατηρηθεί αύξηση των σχέσεων ανάμεσα στις ικανότητες χειρισμού χωρικών έργων και τις ικανότητες χειρισμού έργων με αναπτύγματα γεωμετρικών στερεών με την αύξηση της ηλικίας των μαθητών (Panaoura, Gagatsis, & Lemonides, 2007). Κατ' αυτό τον τρόπο μπορεί να ερμηνευθεί η διαφοροποίηση που παρουσιάστηκε στη δόμηση των επιμέρους σχέσεων της ικανότητας χειρισμού έργων με αναπτύγματα γεωμετρικών στερεών ανάμεσα στις τρεις ηλικιακές ομάδες των μαθητών.

Η Σχέση Χωρικών Ικανοτήτων και Γεωμετρικής Ικανότητας
Αναφορικά με το Χειρισμό Γεωμετρικών Σχημάτων

Το ερώτημα της σχέσης ανάμεσα στις χωρικές και τις μαθηματικές ικανότητες των ατόμων δεν είναι καινούριο και έχει απασχολήσει ερευνητές τόσο από το χώρο της ψυχολογίας όσο και από το χώρο της μαθηματικής παιδείας (Clements & Battista, 1992). Στην παρούσα εργασία το ερώτημα εξειδικεύτηκε για τη σχέση ανάμεσα στη χωρική ικανότητα των μαθητών και την επίδοσή τους σε γεωμετρικά έργα που απαιτούσαν χειρισμό διαφορετικών γεωμετρικών σχημάτων. Η διερεύνηση αυτή έγινε σε μια προσπάθεια επέκτασης της έρευνας γύρω από τη σχέση γεωμετρίας και χωρικής σκέψης προς τρεις κατευθύνσεις. Πρώτο, με την αποδοχή της άποψης ότι η χωρική ικανότητα είναι μια πολυδιάστατη έννοια, η οποία αποτελείται από διαφορετικές συνιστώσες (Hegarty & Waller, 2005; Wheatley, 1998), εξετάστηκε εδώ ο ρόλος διαφορετικών χωρικών ικανοτήτων, όπως παρουσιάζονται στο πλαίσιο της θεωρίας του Δημητρίου (Δημητρίου 1993; Demetriou & Kazi, 2001; Demetriou et al., 2002) για την αρχιτεκτονική του νου (χειρισμός νοητικών εικόνων, νοητική περιστροφή, συντονισμός των προοπτικών) σε σχέση με την επίδοση στη γεωμετρία. Δεύτερο, διερευνήθηκε η σχέση των συγκεκριμένων χωρικών ικανοτήτων με τη γεωμετρική ικανότητα, όπως αυτή πιθανό να διαφοροποιείται ανάλογα με τα γεωμετρικά σχήματα που παρουσιάζονται σε διαφορετικά γεωμετρικά έργα (σχήματα δύο διαστάσεων, σχήματα τριών διαστάσεων και αναπτύγματα γεωμετρικών στερεών). Τρίτο, έγινε ένα επιπλέον βήμα στη διερεύνηση της σχέσης ανάμεσα στις χωρικές ικανότητες και την επίλυση έργων γεωμετρίας με την προσπάθεια συλλογής πληροφοριών στο επίπεδο των έργων, όπου διερευνήθηκε ο τρόπος αντιμετώπισης των χωρικών και των διαφορετικών γεωμετρικών έργων από τους μαθητές των τριών ηλικιακών ομάδων της έρευνας.

Ένα από τα σημαντικότερα συμπεράσματα της εργασίας αποτελεί η εμπειρική υποστήριξη της υπόθεσης ότι, σύμφωνα με το δομικό μοντέλο που επιβεβαιώθηκε από τα δεδομένα της έρευνας, η γενική χωρική ικανότητα των μαθητών είναι σημαντικός παράγοντας πρόβλεψης της ικανότητας χειρισμού γεωμετρικών σχημάτων. Το εύρημα αυτό επιβεβαιώνει τα αποτελέσματα πρόσφατης έρευνας των Pittalis, Mousoulides και Christou (2007) με Κύπριους μαθητές ηλικίας 11-12 χρόνων, σύμφωνα με τα οποία η χωρική ικανότητα αποτελεί ισχυρό παράγοντα πρόβλεψης της γεωμετρικής ικανότητας των μαθητών Ε΄ και Στ΄ τάξης δημοτικού σχολείου. Πέρα από τη διαφορετική προσέγγιση στον τρόπο ορισμού της γεωμετρικής ικανότητας, θα πρέπει να σημειωθεί ότι στην προαναφερθείσα έρευνα παρουσιάζονται ως συνιστώσες της χωρικής ικανότητας μόνο η «χωρική εξεικόνιση» και οι «χωρικές σχέσεις» (σύμφωνα με τους ορισμούς που παρουσιάζονται στη διεθνή βιβλιογραφία, αντιστοιχούν στους παράγοντες «χειρισμός νοητικών εικόνων» και «νοητικές περιστροφές»), ενώ στην παρούσα εργασία περιλαμβάνεται στις συνιστώσες της γενικής χωρικής ικανότητας και ο παράγοντας «συντονισμός των προοπτικών».

Από τα αποτελέσματα των παλινδρομικών αναλύσεων που έγιναν ξεχωριστά για καθεμιά από τις τρεις ηλικιακές ομάδες διαφάνηκε ότι οι χωρικές ικανότητες «χειρισμός νοητικών εικόνων», «νοητικές περιστροφές» και «συντονισμός των προοπτικών» είναι, με σειρά προτεραιότητας, δείκτες πρόβλεψης της επίδοσης των μαθητών Δ΄ και Στ΄ τάξης του δημοτικού σχολείου στα έργα γεωμετρίας. Η προβλεπτική ισχύς των τριών επιμέρους χωρικών ικανοτήτων είναι παρόμοια στις δύο ομάδες μαθητών του δημοτικού σχολείου. Στην περίπτωση των μαθητών του γυμνασίου ο παράγοντας «νοητική περιστροφή» παρουσιάστηκε να συμβάλλει σε μεγαλύτερο βαθμό από τον παράγοντα «χειρισμός νοητικών εικόνων» στην πρόβλεψη της επίδοσης των μαθητών στο δοκίμιο γεωμετρίας, γεγονός που μπορεί να ερμηνευθεί με βάση τα ευρήματα ερευνών που αναφέρονται στη διαφοροποίηση της ικανότητας των ατόμων για νοητικές περιστροφές με την αύξηση της ηλικίας (Band & Kok, 2000). Τα ευρήματα που έχουν προκύψει από τις παλινδρομικές αναλύσεις σε σχέση με τον τρόπο που διαφορετικές συνιστώσες της χωρικής ικανότητας αποτελούν δείκτες πρόβλεψης της επίδοσης των μαθητών σε έργα γεωμετρίας βρίσκονται σε συμφωνία με το πλαίσιο των αποτελεσμάτων έρευνας των Xistouri και Pitta-Pantazi (2006) που πραγματοποιήθηκε με Κύπριους μαθητές ηλικίας 10-12 χρόνων. Σύμφωνα με την έρευνα αυτή, η ικανότητα αντίληψης των προοπτικών και η ικανότητα νοητικής περιστροφής αποτελούν μαζί με τη γενική μαθηματική ικανότητα των μαθητών παράγοντες πρόβλεψης της επίδοσης σε έργα συμμετρίας (Xistouri & Pitta-Pantazi, 2006).

Αναφορικά με τη σχέση ανάμεσα στον τρόπο αντιμετώπισης των χωρικών και των γεωμετρικών έργων που απαιτούσαν χειρισμό διαφορετικών γεωμετρικών σχημάτων προέκυψαν ενδιαφέροντα αποτελέσματα, σε ένα θέμα που δεν έχει τύχει διερεύνησης μέχρι τώρα. Από τις απαντήσεις των μαθητών και των τριών ηλικιακών ομάδων της έρευνας στα έργα χωρικής ικανότητας και στα έργα που αφορούν χειρισμό γεωμετρικών στερεών είναι ευδιάκριτο το φαινόμενο της στεγανοποίησης ανάμεσα στις δύο αυτές κατηγορίες έργων. Το γεγονός αυτό υποδηλώνει ότι οι διαδικασίες που ενεργοποιούνται από τους μαθητές κατά την ενασχόλησή τους με έργα με σχήματα τριών διαστάσεων είναι διαφορετικές από τις διαδικασίες που ενεργοποιούνται για την αντιμετώπιση χωρικών έργων. Τα έργα αναγνώρισης αναπαραστάσεων γεωμετρικών στερεών στηρίζονται σε μεγάλο βαθμό στην οπτική αντίληψη και την ανάκληση γνωστών γεωμετρικών εικόνων από το γεωμετρικό γνωστικό δίκτυο των μαθητών (Jirotková & Littler, 2002). Συνεπώς, δεν αναμένεται κατά την αντιμετώπιση των έργων αυτών να παρουσιάζονται διαδικασίες παρόμοιες με τις χωρικές ικανότητες. Εφόσον, όμως, το ίδιο φαινόμενο σημειώθηκε και για τα έργα ανάλυσης των γεωμετρικών στερεών, παρουσιάζεται μια ένδειξη ότι πιθανώς και αυτά τα έργα να αντιμετωπίστηκαν με βάση την απλή ανάκληση γνωστικών μονάδων που οι μαθητές κατείχαν σχετικά με τα επιμέρους στοιχεία των υπό εξέταση στερεών. Αυτό μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι στα έργα περιλαμβάνονται γεωμετρικά στερεά που ήταν γνωστά στους μαθητές. Θα ήταν ενδιαφέρον να διερευνηθεί σε μελλοντική εργασία εάν οι μαθητές ενεργοποιούν άλλες διαδικασίες, που παρουσιάζουν ομοιότητα με το χειρισμό έργων χωρικών ικανοτήτων, στην περίπτωση κατά την οποία καλούνται να χειριστούν έργα με μη γνώριμα στερεά.

Το φαινόμενο της στεγανοποίησης παρουσιάστηκε επίσης στις απαντήσεις των μαθητών της Δ΄ δημοτικού τόσο ανάμεσα στα χωρικά έργα και τα γεωμετρικά έργα με δισδιάστατα σχήματα όσο και ανάμεσα στα χωρικά έργα και τα έργα χειρισμού αναπτυγμάτων. Το συμπέρασμα που προκύπτει από το προαναφερθέν αποτέλεσμα είναι ότι το σύστημα γεωμετρικών ικανοτήτων αναφορικά με το χειρισμό γεωμετρικών σχημάτων είναι οργανωμένο στην περίπτωση των μαθητών ηλικίας 10 χρόνων με τρόπο ώστε να επεξεργάζεται τις πληροφορίες με διαφορετικό τρόπο από το σύστημα χωρικών ικανοτήτων.

Η αποδυνάμωση του φαινομένου της στεγανοποίησης με την αύξηση της ηλικίας των μαθητών ανάμεσα στις απαντήσεις σε έργα με γεωμετρικά σχήματα δύο διαστάσεων και χωρικά έργα υποδηλώνει την αντιμετώπιση ορισμένων έργων από τις δύο αυτές κατηγορίες με ενεργοποίηση παρόμοιων διεργασιών. Η αντιμετώπιση των γεωμετρικών έργων με βάση την οπτική αντίληψη (από τους μικρότερους σε ηλικία μαθητές) φαίνεται ότι δίνει σε κάποιο βαθμό τη θέση της στην ενεργοποίηση διαδικασιών νοητικού χειρισμού των γεωμετρικών εικόνων (στους μεγαλύτερους σε ηλικία μαθητές). Παρόλα αυτά οι ενδείξεις που υπάρχουν, με βάση τα αποτελέσματα, είναι ότι η διαφοροποίηση αυτή συναντάται σε μικρή μόνο έκταση.

Τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας παρουσιάζουν μια διαβάθμιση στην εξάλειψη του φαινομένου της στεγανοποίησης στις απαντήσεις των μαθητών στα έργα χωρικών ικανοτήτων και στα έργα χειρισμού αναπτυγμάτων γεωμετρικών στερεών. Συγκεκριμένα, ενώ οι μαθητές της Δ΄ δημοτικού αντιμετωπίζουν, όπως έχει αναφερθεί, με διαφορετικό τρόπο τα χωρικά έργα και τα έργα με αναπτύγματα, το φαινόμενο αυτό αποδυναμώνεται στην περίπτωση των μαθητών της Στ΄ δημοτικού και σχεδόν εξαλείφεται στην περίπτωση των μαθητών της Β΄ γυμνασίου. Με άλλα λόγια, οι μεγαλύτεροι σε ηλικία μαθητές ενεργοποιούν κατά το χειρισμό έργων με αναπτύγματα γεωμετρικών στερεών διεργασίες παρόμοιες με αυτές που απαιτούνται κατά το χειρισμό χωρικών έργων. Οι διαδικασίες κατασκευής ή αναγνώρισης αναπτυγμάτων στερεών αποτελούν νοητικές διεργασίες, κατά τις οποίες το άτομο επεξεργάζεται νοητικές εικόνες (Cohen, 2003; Potari & Spiliotopoulou, 2001). Όπως σημειώνει η Mariotti (1992), το ανάπτυγμα είναι μια σχηματική έννοια. Συνεπώς, για να υφίσταται ορθός γεωμετρικός συλλογισμός σε έργα χειρισμού αναπτυγμάτων απαραίτητη προϋπόθεση είναι η εναρμονισμένη αλληλεπίδραση ανάμεσα στη σχηματική και την εννοιολογική πτυχή της συγκεκριμένης έννοιας. Με βάση την ίδια την έννοια του αναπτύγματος (Borowski & Borwein, 1981; Cohen, 2003) αναμένεται ότι οι διαδικασίες που ενεργοποιούνται για την αντιμετώπιση έργων με αναπτύγματα θα είναι παρόμοιες με αυτές που ενεργοποιούνται για την αντιμετώπιση έργων που αφορούν νοητικές περιστροφές ή δίπλωση σχημάτων. Τα ευρήματα της παρούσας εργασίας καταδεικνύουν ότι μόνο στην περίπτωση των μαθητών γυμνασίου οι χωρικές ικανότητες νοητικής περιστροφής και χειρισμού νοητικών εικόνων συνδέονται ικανοποιητικά με την έννοια και το χειρισμό των αναπτυγμάτων. Είναι πιθανό σε μικρότερες ηλικίες οι μαθητές να αντιμετωπίζουν τα αναπτύγματα γεωμετρικών στερεών βασισμένοι σε άλλες διεργασίες. Για παράδειγμα, είναι πιθανό να στηρίζονται στην οπτική αντίληψη ή στη σύγκριση της εικόνας ενός αναπτύγματος με πρωτοτυπικές μορφές αναπτυγμάτων που οι μαθητές κατέχουν, όπως στην περίπτωση του σταυροειδούς αναπτύγματος του κύβου (Παναούρα & Γαγάτσης, 2003; Stylianou et al., 1999). Η διεξαγωγή ποιοτικής έρευνας με την πραγματοποίηση συνεντεύξεων με μαθητές κατά την επίλυση έργων χειρισμού αναπτυγμάτων γεωμετρικών στερεών θα μπορούσε να συμβάλει στη συλλογή χρήσιμων δεδομένων για τον τρόπο που οι μαθητές αντιμετωπίζουν τα έργα αυτά και για τις νοητικές διεργασίες που ενεργοποιούν κατά την ενασχόλησή τους με αναπτύγματα.

Σύγκριση της Γεωμετρικής Σκέψης Μαθητών Δημοτικής και Μέσης Εκπαίδευσης

Στο υποκεφάλαιο αυτό συζητούνται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη σύγκριση της γεωμετρικής σκέψης μαθητών δημοτικής και μέσης εκπαίδευσης (ηλικίας 10, 12 και 14 χρόνων) αναφορικά με το χειρισμό έργων με γεωμετρικά σχήματα. Η γεωμετρική εκπαίδευση στο πλαίσιο του δημοτικού σχολείου θεωρείται κρίσιμη, γιατί οι μαθητές θα πρέπει να αποκτήσουν με τρόπο ξεκάθαρο τις βασικές γνώσεις για τα γεωμετρικά σχήματα, εφόσον από αυτές εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό η επιτυχία σε προβλήματα γεωμετρίας στη μέση εκπαίδευση (Perrin-Glorian, 2003). Όπως παρατηρούν οι Meletiou-Mavrotheri και Stylianou (2003) αναλύοντας δεδομένα που συγκεντρώθηκαν στην Κύπρο στα πλαίσια της έρευνας TIMSS, κατά τη μετάβαση από το δημοτικό σχολείο στο γυμνάσιο οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες σε θέματα γεωμετρίας. Ένας από τους επιμέρους στόχους της παρούσας εργασίας ήταν η αποσαφήνιση ενός μέρους αυτών των δυσκολιών. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήθηκε ως θεωρητικό υπόβαθρο η προσέγγιση των Houdement και Kuzniak (Houdement & Kuzniak, 2003; Houdement, 2007) σε σχέση με τους τύπους γεωμετρίας στα πλαίσια των οποίων εργάζονται οι μαθητές, καθώς και το γνωστικό μοντέλο του Duval για το γεωμετρικό συλλογισμό (Duval, 1995, 1998, 2002). Οι δύο αυτές θεωρητικές προσεγγίσεις, που αφορούν τη γεωμετρική σκέψη, επιτρέπουν την κατανόηση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά το χειρισμό γεωμετρικών έργων, σε αντίθεση με τη θεωρία των van Hiele (1967) για τα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης, που δεν ευνοεί τη μελέτη και κατανόηση των δυσκολιών αυτών (Gutiérrez, Kuzniak, & Straesser, 2005). Ακολούθως συνοψίζονται τα συμπεράσματα που αφορούν αριθμό φαινομένων τα οποία εντοπίστηκαν στα πλαίσια της παρούσας εργασίας σε σχέση με τον τρόπο αντιμετώπισης των γεωμετρικών έργων από μαθητές δημοτικής και μέσης εκπαίδευσης.

Μετάβαση από το Πλαίσιο της Εμπειρικής Γεωμετρίας στο Πλαίσιο της Εμπειρικής Αξιωματικής Γεωμετρίας. Δυσκολία Γεωμετρικής Εικόνας – Σχηματικής Έννοιας

Η μετάβαση από το πλαίσιο της Εμπειρικής Γεωμετρίας στο πλαίσιο της Εμπειρικής Αξιωματικής Γεωμετρίας θεωρείται ιδιαίτερα σημαντική, γιατί απαιτεί από το άτομο αλλαγή της θεωρίας του αναφορικά με τη φύση των γεωμετρικών αντικειμένων, τα οποία είναι υλικά στο πλαίσιο της Εμπειρικής Γεωμετρίας και θεωρητικά στο πλαίσιο της Εμπειρικής Αξιωματικής Γεωμετρίας (Houdement & Kuzniak, 2003). Όπως διαφάνηκε από τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας, οι μαθητές του δημοτικού σχολείου αντιμετωπίζουν σε μεγαλύτερο βαθμό τα γεωμετρικά σχήματα ως εικόνες παρά ως θεωρητικά αντικείμενα που είναι φορείς συγκεκριμένων ιδιοτήτων. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να «επιλύουν» τα γεωμετρικά προβλήματα συχνά βασισμένοι στην οπτική αντίληψη και όχι σε μια μαθηματική παραγωγή συμπερασμάτων με βάση τις ιδιότητες των σχημάτων. Τη δυσκολία αυτή την ονομάζουμε «δυσκολία γεωμετρικής εικόνας – σχηματικής έννοιας» και συνδέεται άμεσα με τη δυσκολία των μαθητών να αντιμετωπίσουν τα γεωμετρικά σχήματα ως «σχηματικές έννοιες» (Fischbein, 1993). Ο ορθός και αποτελεσματικός συλλογισμός χαρακτηρίζεται από την αλληλεπίδραση και την αρμονική λειτουργία των σχηματικών και των εννοιολογικών ιδιοτήτων του γεωμετρικού σχήματος (Mariotti, 1995; Mariotti & Fischbein, 1997). Όπως προέκυψε στην παρούσα εργασία, οι μαθητές που εργάζονται στο πλαίσιο της Εμπειρικής Γεωμετρίας (μαθητές κυρίως του δημοτικού σχολείου) στηρίζουν το γεωμετρικό συλλογισμό στην αντιληπτική κατανόηση της γεωμετρικής εικόνας που δίνεται στην εκφώνηση ενός έργου, με αποτέλεσμα να δίνουν λανθασμένες απαντήσεις, εφόσον οι γεωμετρικές ιδιότητες δεν μπορούν να προσδιοριστούν μόνο μέσω αυτού του τύπου κατανόησης. Η αντιληπτική κατανόηση ενός γεωμετρικού σχήματος πρέπει να βρίσκεται υπό τον έλεγχο των λεκτικών δηλώσεων που δίνονται σε ένα έργο γεωμετρίας (Duval, 1995, 2002), ώστε μέσα από το συνδυασμό των λεκτικών δηλώσεων και της γεωμετρικής εικόνας να προκύψει ορθός γεωμετρικός συλλογισμός. Σε αντίθεση με τους μαθητές που εργάζονται στο πλαίσιο της Εμπειρικής Γεωμετρίας, οι μαθητές που εργάζονται στο πλαίσιο της Εμπειρικής Αξιωματικής Γεωμετρίας (εντοπίστηκε κυρίως σε μαθητές γυμνασίου) επικεντρώνουν τις προσπάθειές τους στον εντοπισμό γεωμετρικών σχέσεων και αντιμετωπίζουν τα έργα με βάση τις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων (Houdement & Kuzniak, 2003).

Στην παρούσα εργασία διαπιστώθηκε επίσης μια διαφορά ανάμεσα στους μαθητές δημοτικής και μέσης εκπαίδευσης ως προς την ικανότητα αντίληψης σχέσεων ή ιδιοτήτων σε σύνθετα κυρίως γεωμετρικά σχήματα, η οποία οφείλεται ακριβώς στα διαφορετικά πλαίσια Γεωμετρίας που εργάζονται οι μαθητές. Άρα μια δυσκολία που αντιμετωπίζουν κυρίως οι μαθητές δημοτικής εκπαίδευσης, που εργάζονται στο πλαίσιο της Εμπειρικής Γεωμετρίας, αφορά τη δυσκολία εντοπισμού «προφανών» σχέσεων (με βάση τις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων) σε σύνθετα γεωμετρικά σχήματα.

Ασυνέπεια του Διδακτικού Συμβολαίου που Υφίσταται στη Δημοτική και τη Μέση Εκπαίδευση

Οι στρατηγικές που επέδειξαν οι μαθητές κατά την επίλυση ορισμένων γεωμετρικών έργων, κυρίως σε θέματα χειρισμού επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων, αποτελούν ενδείξεις ότι το διδακτικό συμβόλαιο που ισχύει ανάμεσα σε εκπαιδευτικούς και μαθητές στα πλαίσια της γεωμετρίας στο επίπεδο της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (α) δεν αποθαρρύνει την εξαγωγή συμπερασμάτων που στηρίζονται στην οπτική αντίληψη ενός γεωμετρικού σχήματος και (β) περιλαμβάνει τη χρήση των δεδομένων που παρουσιάζονται στην εκφώνηση ενός προβλήματος για την εφαρμογή αλγορίθμων που θα βοηθήσουν στον καθορισμό της απάντησης. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να διευκρινιστεί ότι η δεύτερη πτυχή του διδακτικού συμβολαίου που έχει αναφερθεί έχει τις ρίζες της στις μεθόδους επίλυσης αριθμητικών προβλημάτων, τα οποία είναι συνηθέστερα από τα γεωμετρικά προβλήματα στο δημοτικό σχολείο και στα οποία επικρατεί ως στρατηγική επίλυσης ο συνδυασμός των αριθμητικών δεδομένων μέσω αλγόριθμων. Προφανώς καμιά από τις δύο προαναφερθείσες πτυχές του διδακτικού συμβολαίου δεν υφίσταται κατά τη διδασκαλία της γεωμετρίας στο επίπεδο του γυμνασίου, στο πλαίσιο της Εμπειρικής Αξιωματικής Γεωμετρίας, όπου δίνεται έμφαση στις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων. Το φαινόμενο αυτό το ονομάζουμε «ασυνέπεια του διδακτικού συμβολαίου» μεταξύ των δύο σχολικών βαθμίδων και χρήζει περαιτέρω διερεύνησης με τη συλλογή δεδομένων που αφορούν άμεσα τη διδασκαλία της γεωμετρίας στη δημοτική και τη μέση εκπαίδευση. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσίασε στα πλαίσια της παρούσας εργασίας το φαινόμενο μαθητών γυμνασίου οι οποίοι σε ορισμένες περιπτώσεις περνούσαν από την εφαρμογή ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων στη χρήση του χάρακα πάνω σε δεδομένη γεωμετρική εικόνα, χωρίς να αντιλαμβάνονται αυτή την «ολίσθηση» από το διδακτικό συμβόλαιο της Εμπειρικής Αξιωματικής Γεωμετρίας στο διδακτικό συμβόλαιο της Εμπειρικής Γεωμετρίας.

Η Ισχύς του Διδακτικού Συμβολαίου στην Εμπειρική Αξιωματική Γεωμετρία στους Μαθητές του Γυμνασίου

Η εκμάθηση θεωρημάτων στα πλαίσια της Εμπειρικής Αξιωματικής Γεωμετρίας στο επίπεδο της διδασκαλίας του γυμνασίου και η συνεχής εξάσκηση των μαθητών με συγκεκριμένες ασκήσεις για την εφαρμογή των θεωρημάτων μπορεί να έχει ως συνέπεια την εφαρμογή τους ακόμα και όταν αυτό δεν είναι απαραίτητο. Για παράδειγμα, η συνεχής εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος έχει ως συνέπεια οι μαθητές να θεωρούν, στα πλαίσια του διδακτικού συμβολαίου που εδραιώνεται κατά τη διδασκαλία, ότι η εφαρμογή του συγκεκριμένου θεωρήματος απαιτείται σε κάθε περίπτωση εντοπισμού ορθογωνίου τριγώνου σε ένα γεωμετρικό σχήμα. Όπως σημειώθηκε στα αποτελέσματα σχετικού έργου στα πλαίσια της παρούσας έρευνας, ενώ μια απλή εφαρμογή της ιδιότητας της ισότητας των πλευρών του τετραγώνου θα έδινε αμέσως την απάντηση, το ένα πέμπτο σχεδόν των μαθητών της Β΄ γυμνασίου εφάρμοσε το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο που παρουσιαζόταν. Άρα, η ισχύς του διδακτικού συμβολαίου στη γεωμετρία του γυμνασίου σε ό,τι αφορά θεωρήματα της γεωμετρίας οδηγεί σε ορισμένες περιπτώσεις σε μηχανική εφαρμογή των θεωρημάτων από τους μαθητές, οι οποίοι αισθάνονται την ασφάλεια ενός αλγορίθμου πιο ισχυρή από την απλή εφαρμογή ιδιοτήτων.

Εισηγήσεις για Περαιτέρω Έρευνα

Η διαδικασία του διδακτικού μετασχηματισμού, που παρουσιάστηκε αρχικά από τον Chevallard (1985), αναφέρεται στις αλλαγές που θα πρέπει να υποστεί ένα σύνολο γνώσεων ούτως ώστε να είναι δυνατό να αποτελέσει αντικείμενο διδασκαλίας και μάθησης στα πλαίσια της εκπαίδευσης. Κατά το διδακτικό μετασχηματισμό η αρχική μαθηματική γνώση (που παράγεται, για παράδειγμα, από τους μαθηματικούς) διαμορφώνεται και περιγράφεται στα αναλυτικά προγράμματα ως η γνώση που πρόκειται να διδαχθεί στους μαθητές. Μέσα από τη διαδικασία του διδακτικού μετασχηματισμού ακολουθεί η μαθηματική γνώση που πραγματικά διδάσκεται από τους εκπαιδευτικούς στις αίθουσες διδασκαλίας και τέλος η μαθηματική γνώση που πραγματικά μαθαίνουν οι μαθητές (Bosch, Chevallard, & Gascón, 2005). Στην παρούσα εργασία η ερευνητική προσπάθεια στηρίχτηκε στο τμήμα εκείνο της γεωμετρικής γνώσης το οποίο κατέχουν οι μαθητές, συλλέγοντας στοιχεία από τον τελευταίο θεσμό που εμπλέκεται στη διαδικασία του διδακτικού μετασχηματισμού. Είναι φανερό ότι έρευνες που αφορούν τη μάθηση μαθηματικών θεμάτων και διερευνούν δυσκολίες που παρουσιάζονται κατά τη μάθηση θα πρέπει να βασίζονται σε στοιχεία που προέρχονται από τους ίδιους τους μαθητές (Duval, 2006). Σε μελλοντική διερεύνηση της γεωμετρικής γνώσης που διδάσκεται στο σχολείο θα μπορούσε να γίνει συλλογή στοιχείων που αφορούν τους εκπαιδευτικούς, τόσο σε σχέση με τις αντιλήψεις τους γύρω από θέματα διδασκαλίας της γεωμετρίας όσο και σε σχέση με τις διδακτικές προσεγγίσεις που εφαρμόζουν κατά τη διδασκαλία συγκεκριμένων θεμάτων γεωμετρίας.

Οι Berthelot και Salin (1998), που διεξήγαγαν έρευνες με Γάλλους μαθητές, θεωρούν ότι μια από τις βασικές πηγές μαθησιακών δυσκολιών στη γεωμετρία προέρχεται από τον τρόπο με τον οποίο τα γεωμετρικά σχήματα αντιμετωπίζονται, κατά τη διδακτική διαδικασία, σαν πραγματικά αντικείμενα. Οι περισσότερες από τις δυσκολίες που έχουν επισημανθεί στην παρούσα εργασία αναφορικά με το χειρισμό γεωμετρικών έργων από μαθητές δημοτικής και μέσης εκπαίδευσης επικεντρώνονται στη δυσκολία μετάβασης από το πλαίσιο της Εμπειρικής Γεωμετρίας (όπου τα αντικείμενα είναι υλικά) στο πλαίσιο της Εμπειρικής Αξιωματικής Γεωμετρίας (όπου τα αντικείμενα είναι θεωρητικά). Θεωρείται ιδιαίτερα σημαντικό πρώτα οι εκπαιδευτικοί να γνωρίζουν τις διαφορές που προκύπτουν από την εργασία σε κάθε πλαίσιο γεωμετρίας (Houdement & Kuzniak, 2003) και ακολούθως μέσα από τη διδασκαλία να στοχεύουν συστηματικά στην ομαλή μετάβαση των μαθητών από μια γεωμετρία όπου τα αντικείμενα και οι ιδιότητές τους ελέγχονται από την αντίληψη σε μια γεωμετρία όπου τα γεωμετρικά αντικείμενα θα ελέγχονται από την αποσαφήνιση των ιδιοτήτων τους (Rolet, 2003). Δεν υπάρχουν, όμως, ερευνητικά δεδομένα που να δείχνουν κατά πόσο οι εκπαιδευτικοί είναι ενήμεροι για τις διαφορές που παρουσιάζονται ανάμεσα στα διαφορετικά πλαίσια γεωμετρίας και για τις δυσκολίες που ενδεχομένως αντιμετωπίζουν οι μαθητές. Συνεπώς, αντικείμενο διερεύνησης σε μελλοντική έρευνα θα μπορούσε να αποτελέσει η διδασκαλία της γεωμετρίας στα πλαίσια της δημοτικής και της μέσης εκπαίδευσης, ούτως ώστε να είναι εφικτή η περιγραφή και η σύγκριση του τρόπου προσέγγισης των θεμάτων γεωμετρίας από τους εκπαιδευτικούς στις δύο βαθμίδες της εκπαίδευσης, αλλά και η ερμηνεία των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές.

Η διερεύνηση των γεωμετρικών και χωρικών ικανοτήτων των μαθητών που πραγματοποιήθηκε στην παρούσα εργασία θα μπορούσε να αποτελέσει αντικείμενο διαχρονικής έρευνας, στα πλαίσια της οποίας η συλλογή διαχρονικών δεδομένων θα επέτρεπε τη μελέτη του ρυθμού ανάπτυξης των γεωμετρικών και χωρικών ικανοτήτων των μαθητών. Επίσης σημειώνεται ότι στην παρούσα εργασία η μελέτη των γεωμετρικών ικανοτήτων των μαθητών έγινε μόνο σε έργα που αφορούσαν το μικρο-χώρο, που ορίζεται στη συγκεκριμένη περίπτωση, από το φύλλο χαρτιού όπου εργάζονταν οι μαθητές. Το ίδιο ισχύει για τη μελέτη των χωρικών τους ικανοτήτων, που πραγματοποιήθηκε μόνο μέσω γραπτού δοκιμίου. Κατά συνέπεια η σύγκριση ανάμεσα στις συγκεκριμένες χωρικές και γεωμετρικές ικανότητες των μαθητών αφορά μόνο το μικρο-χώρο. Ο περιορισμός αυτός προέρχεται ουσιαστικά από τον περιορισμό του αναλυτικού προγράμματος για τη γεωμετρία, που αναφέρεται στην ανάπτυξη ικανοτήτων στο μικρο-χώρο, και κατ' επέκταση από τις επιδιώξεις της παρούσας εργασίας που έχει μελετήσει θέματα που σχετίζονται άμεσα με τη σχολική γεωμετρία στο επίπεδο της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Θα ήταν ενδιαφέρον στα πλαίσια κάποιας άλλης ερευνητικής εργασίας να διερευνηθούν οι σχέσεις ανάμεσα στις χωρικές ικανότητες μεγάλης κλίμακας (Hegarty & Waller, 2005; Quaiser-Pohl, Lehmann, & Eid, 2004) και τις γεωμετρικές ικανότητες των παιδιών στο μεσο-χώρο.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Adams, R.J., & Khoo, S.T. (1996). *Quest: The Interactive Test Analysis System.* Camberwell, Victoria: ACER.

Allen, G., & Ondracek, P. (1995). Age-sensitive cognitive abilities related to children's acquisition of spatial knowledge. *Developmental Psychology, 31*(6), 934-945.

Allen, M. J., & Yen, W. M. (1979). *Introduction to Measurement Theory*. Monterey: Brooks and Cole.

Ambrose, R., & Falkner, K. (2002). Developing spatial l understanding through building polyhedrons. *Teaching Children Mathematics, 8* (8), 442-447.

Andrich, D. (1988). A general form of Rasch's Extended Logistic Model for Partial Credit Scoring. *Applied Measurement in Education, 1*(4), 363-378.

Band, G., & Kok, A. (2000). Age effects on response monitoring in a mental-rotation task. *Biological Psychology, 51*, 201-221.

Battista, M. T. (1994). On Greeno's environmental/model view of conceptual domains: a spatial/geometric perspective. *Journal for Research in Mathematics Education 25*(1), 86-94.

Battista, M. T. (1999). The importance of spatial structuring in geometric reasoning. *Teaching Children Mathematics, 6*(3), 170-177.

Battista, M. (1999). Geometry results from the Third International Mathematics and Science Study. *Teaching Children Mathematics, 5*(6), 367-374.

Battista, M., & Clements, D. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education, 27* (3), 258-292.

Ben-Chaim, D., Lappan, G., & Houang, R. (1989). Adolescents' ability to communicate spatial information: Analyzing and effecting students' performance. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 121-146.

Bentler, P. (1990). *EQS: Structural Equations Program Manual*. Los Angeles, CA: BMDP Statistical Software.

Berthelot, R., & Salin, M.H. (1998). The role of pupils' spatial knowledge in the elementary teaching of geometry. In C. Mammana and V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp.71-78). Dordrecht: Kluwer Academic.

Bishop, A. (1983). Space and geometry. In R. Lesh and M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (175-203). New York: Academic Press.

Bodin, A., Couturier, R., & Gras,R. (2000). *CHIC: Classification Hierarchique Implicative et Cohesive – Version sous Windows*. Rennes: Association pour le Recherche en Didactique des Mathematiques.

Bond, T.G., & Fox, C.M. (2001). *Applying the Rasch model: Fundamental Measurement in the Human Sciences*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Booth, R., & Thomas, M. (1999). Visualization in mathematics learning: arithmetic problem-solving and student difficulties. *Journal of Mathematical Behavior, 18* (2), 169-190.

Borowski, E., & Borwein, J. (1991). *The Harper Collins Dictionary of Mathematics*. New York: Harper Collins Publishers.

Bosch, M., Chevallard, Y., & Gascón, J. (2005). Science or magic? The use of models and theories in didactics of mathematics. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the IV Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME 4* (pp.1254-1263). Sant Feliu de Guixols: CERME.

Bourgeois, R. D. (1986). Third graders' ability to associate foldout shapes with polyhedra. *Journal for Research in Mathematics Education, 17* (3), 222-230.

Brahier, D., & Speer, W. (1997). Worthwhile tasks: exploring mathematics connections through geometric solids. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(1), 20-28.

Bremner, J.G., Morse, R., Hughes, S., & Andreasen, G. (2000). Relations between drawing cubes and copying line diagrams of cubes in 7- to 10-year-old children. *Child Development, 71* (3), 621-634.

Brousseau, G. (1983). Etudes de questions d'enseignement. Un exemple: la géométrie. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, no 45* (pp.183-226). Grenoble: Institut IMAG.

Brown, D., & Wheatley, G. (1997). Components of imagery and mathematical teaching. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 19* (1), 45-70.

Butter, D., Eisenberg, M., Garcia, J., Lewis, R., & Nielsen, T. (2003). Three-dimensional printing on a budget: a classroom-friendly technique for viewing and visualizing solid objects. *World Conference on Educational Multimedia, Hypermedia and Telecommunications* (1), 990-993. [Online]. Available: http://dl.aace.org/12925

Byrne, B. M. (1994). *Structural Equation Modeling with EQS and EQS/windows: Basic Concepts, Applications and Programming*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Carroll, J.B. (1993). *Human Cognitive Abilities: a Survey of Factor Analytic Studies*. Cambridge: Cambridge University Press.

Campell, R. J., & Kyriakides, L. (2000). The national curriculum and standards in primary schools: a comparative perspective. *Comparative Education, 36* (4), 383-395.

Capraro, R.M. (2001). Exploring the influences on geometric spatial visualization, gender and ethnicity on the acquisition of geometry content knowledge. Paper presented at the Annual Meeting of the Southwest Educational Research Association (New Orleans, LA, February 1-3, 2001). (ERIC Document Reproduction Service No. ED 451057)

Castelnuovo, E. (1972). *Documenti di un' esposizione de Matematica*, Torino : Boringhieri.

Chevallard, Y, (1985). *La Transposition Didactique du Savoir Savant au Savoir Enseigné*. Grenoble: Editions de Pensée Sauvage.

Chinnappan, M. (1998). Schemas and mental models in geometry problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 36* (3), 201-217.

Clausen-May, T., Jones, K., McLean, A., & Rowlands, S. (2000). Perspectives on the design of the school geometry curriculum. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 20* (1&2), 34-41.

Clements, D. H. (1998). *Geometric and spatial thinking in young children*. (ERIC Document Reproduction Service No. ED436232)

Clements, D. H. & Battista, M. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.420-464). New York: MacMillan.

Clements, D. H., Battista, M.T., & Sarama, J. (1998). Students' development of geometric and measurement ideas. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds), *Designing learning* *environments for developing understanding of geometry and space* (pp.201-225). Lawrence Erlbaum Associates.

Clements, D. H, & Sarama, J. (2000). Standards for preschoolers. *Teaching Children Mathematics, 7* (1), 38-41.

Clements, D. H., Swaminathans, S., Hannibal, M.A, & Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30, 192-212.

Cohen, N. (2003). Curved solid nets. In N. Paterman, B. J. Doughery, & J. Zillox (Eds.), *Proceeding of the 27th International Conference of Psychology in Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 229-236).

Cooper, M., & Sweller, J. (1989). Secondary school students' representations of solids. *Journal for Research in Mathematics Education, 20* (2), 202-212.

Cronbach, L. J. (1990). *Essentials of Psychological testing* (3rd ed.). New York. Harper and Row.

Deliyianni, E., Gagatsis, A., & Dimakos, G. (2005). The interaction between conceptual and figural components of geometrical figures. In A. Gagatsis, F. Spagnolo, Gr. Makrides, & V. Farmaki (Eds.), *Proceedings of the 4th Mediterranean Conference on Mathematics Education, 1* (175-186). Nicosia.

Demetriou, A. (1998). Cognitive development. In A. Demetriou, W. Doise, & C.F.M. van Lieshout (Eds.), *Life-Span Developmental Psychology* (pp. 179-270). New York: John Wiley & Sons Ltd.

Demetriou, A. (2004). Mind, intelligence, and development: A general cognitive, differential, and developmental theory of the mind. In A. Demetriou & A. Raftopoulos (Eds.), *Developmental change: Theories, models and measurement* (pp. 21-73). Cambridge: Cambridge University Press.

Demetriou, A., & Kazi, S. (2001). *Unity and Modularity in the Mind and the Self*. London: Routledge.

Demetriou, A., & Kyriakides, L. (2006). The functional and developmental organization of cognitive developmental sequences. *British Journal of Educational Psychology, 76*, 209-242.

Demetriou, A., & Panaoura A. (2006). The development of mathematical reasoning: It's interplay with processing efficiency, self-awareness and self-regulation. In L.

Verschaffel, F. Dochy, M. Boekaerts & S. Vosniadou (Eds.), *Essays in honor of Erik de Corte – Advances in learning and instruction* (pp.19-37). EARLI.

Demetriou, A., Christou, K., Spanoudis, G., & Platsidou, M. (2002). The development of mental processing: efficiency, working memory, and thinking. *Monographs of the Society for Research in Child Development*, 67 (1). Serial No. 268.

Doverborg, E. & Pramling Samuelsson, I. (2001). Children's experience of shape in space. *For the Learning of Mathematics, 21* (3), 32-38.

Dreyfus, T. (1991). Imagery for diagrams. In R. Sutherland and J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp.3-19). Berlin: Springer-Verlag.

Dreyfus, T., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2001). Abstraction in context II: The case of peer interaction. *Cognitive Science Quarterly, 1*(3/4), 307-368.

Duval, R. (1995). Geometrical pictures: kinds of representation and specific processings. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (142-157). Berlin: Springer-Verlag.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the* 21^{st} *century* (pp.37-52). Dordrecht: Kluwer Academic.

Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematic. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 1*(2), 1-16.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies n Mathematics, 61*, 103-131.

Elia, I., Gagatsis, A., & Modestou, M. (2005). Young children's aptitude to transform geometric figures: the role of geometrical modes. In A. Gagatsis, F. Spagnolo, Gr. Makrides, & V. Farmaki (Eds.), *Proceedings of the* 4^{th} *Mediterranean Conference on Mathematics Education, 1* (pp.149-162). Nicosia.

English, L. D., & Warren, E. A. (1995). General reasoning processes and elementary algebraic understanding: implications for initial instruction. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 17* (4), 1-19.

Everett, S. (2000). Spatial thinking strategies. *Science and Children, 37* (7), 36-39.

Fennema, E., & Tartre, L. (1985). The use of spatial visualization in mathematics by girls and boys. *Journal for Research in Mathematics Education, 16* (3), 184-206.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24* (2), 139-162.

Fowler, M. (1996). The inside-out box: an analysis of structures and space. *Teaching Children Mathematics, 3* (2), 68-71.

Fox, T. (2000). Implications of research on children's understanding of geometry. *Teaching Children Mathematics, 6*, 572-574.

Friedman, L. (1995). The space factor in mathematics: Gender differences. *Review of Educational Research, 65*, 22-50.

Fujita, T., & Jones, K. (2003). *Interpretation of national curricula: the case of geometry in popular textbooks in Japan and the UK*. Paper presented at the British Educational Research Association annual conference. Heriot-Watt University, Edinburgh. [Also available online http://www.soton.ac.uk/~dkj/publications/BERA2003_Fujita&Jones.pdf]

Fujita, T., Jones, K., &Yamamoto, S. (2004). *The role of intuition in geometry education: learning from the teaching practice in the early 20th century*. Paper presented to Topic Study Group 29 at the 10th International Congress on Mathematical Education. Copenhagen, Denmark.

Fuys, D., & Liebov, A. (1992). Geometry and spatial sense. In R. Jensen (Ed.), *Research ideas for the classroom. Early childhood mathematics*. New York: NCTM & Macmillan Publishing Company.

Fuys, D., & Liebov, A. (1997). Concept learning in geometry. *Teaching Children Mathematics,* 248-251.

Gagatsis, A., & Patronis, T. (1990). Using Geometric Models in a Process of Reflective Thinking in Learning and Teaching Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 21*, 29-54.

Geddes, D., & Fortunato, Ir. (1993). Geometry: Research and classroom activities. In D. T. Owens (Ed.) *Research ideas for the classroom. Middle grades mathematics* (pp.199-222). New York: Macmillan Publishing Company.

Goldenberg, E. P., Cuoco, A. A., & Mark, J. (1998). A role for geometry in general education. In R. Lehrer and D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for* *developing understanding of geometry and space* (pp.3-44) Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Gorgorió, N. (1998). Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems.

Gray, E.M., & Tall, D.O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: a perceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 115-141.

Gray, E., Pinto, M., Pitta, D., & Tall, D. (1999). Knowledge construction and diverging thinking in elementary and advanced mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 38*, 111-133.

Gras, R., Peter, P., Briand, H., & Philippe, J. (1997). Implicative Statistical Analysis. In C. Hayashi, N. Ohsumi, N. Yajima, Y. Tanaka, H. Bock, & Y. Baba (Eds.), *Proceedings of the 5th Conference of the International Federation of Classification Societies* (Vol. 2, pp. 412-419). Tokyo, Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.

Grübing, M., & Hellmich, F. (2001). Spatial ability and geometry learning. In Marja van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* vol. 1 (p.396). The Netherlands: Utrecht University.

Gutiérrez, A. (1992). Exploring the links between van Hiele levels and 3-dimensional geometry. *Structural Topology, 18*, 31-48.

Gutiérrez, A. (1996a). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In L. Puig and A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol 1. (pp3-19). Spain: University of Valencia.

Gutiérrez, A. (1996b). Children's ability for using different plane representations of space figures. In A. R. Batturo (Ed.), *New directions in geometry education* (pp.33-42). Brisbane, Australia.

[Available: http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/archivos1/textospdf/Gut96b.pdf]

Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1995). Towards the design of a standard test for the assessment of the students' reasoning in geometry. In L. Meira and D. Carraher (Edw.), *Proceedings of the 19th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol 3. (11-18). Brazil: University of Recife.

Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 20*(2/3), 27-46.

Gutiérrez, A., Jaime, A., & Fortuny, J. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education, 22* (3), 237-251.

Gutiérrez, A., Kuzniak, A., & Straesser, R. (2005). Research on geometrical thinking. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the IV Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME 4* (pp.725-726). Sant Feliu de Guixols: CERME.

Hannibal, M. A.(1999).Young children's developing understanding of geometric shapes. *Teaching Children Mathematics, 5* (6), 353-357.

Hasegawa, J. (1997). Concept formation of triangles and quadrilaterals in the second grade. *Educational Studies in Mathematics, 32*, 157-179.

Hegarty, M., & Waller, D. (2004). A dissociation between mental rotation and perspective-taking spatial abilities. *Intelligence, 32*, 175-191.

Hegarty, M., & Waller, D. (2005). Individual differences in spatial abilities. In P. Shah & A. Miyake (Eds.), *The Cambridge handbook of visuospatial thinking* (pp.121-169). Cambridge: Cambridge University Press.

Hejny, M. (2002). Creating mathematical structure. In J. Novotná (Ed.), *Proceedings of CERME2* (pp. 14-24). Prague, Pedf UK.

Hejny, M. (2003). Understanding and structure. In M. Mariotti (Ed.), *Proceedings of CERME3*. Bellaria, Italy. [On line] http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/draft/proceedings_draft

Houdement, C. (2007). Geometrical working space, a tool for comparison. Paper presented at the CERME 5 Conference. Larnaka.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (2003). Elementary geometry split into different geometrical paradigms. In M. Mariotti (Ed.), *Proceedings of CERME 3*. Bellaria, Italy.[On line] http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/draft/proceedings_draft

Izard, J. (1990). Developing spatial skills with three dimensional puzzles. *Arithmetic Teacher, 37* (6), 44-47.

Jirotková, D., & Littler, G. (2002). Investigating cognitive and communicative processes through children's handling of solids. In A. Cockburn and E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 3 (pp.145-152). Norwich: University of East Anglia.

Jones, K. (2000). Critical issues in the design of the school geometry curriculum. In B. Barton (Ed.), *Readings in Mathematics Education* (pp.75-91). Auckland, New Zeland: University of Auckland.

Jurdak, M., & Shahin, I. (2001). Problem solving activity in the workplace and the school: the case of constructing solids. *Educational Studies in Mathematics, 47*, 297-315.

Keeves, J. P., & Alagumalai, S. (1999). New approaches to measurement. In G. N. Masters & J. P. Keeves (Eds.), *Advances in measurement in educational research and assessment* (pp. 23-42). Oxford: Pergamon.

Kline, R. B. (1998). *Principles and Practice of Structural Equation Modeling*. New York: The Guilford Press.

Kohanová, I. (2007). Comparison of observation of new space and its objects by sighted and non-sighted pupils. Paper presented at the CERME 5 Conference. Larnaka.

Kozhevnikov, M., & Hegarty, M. (2001). A dissociation between object manipulation spatial ability and spatial orientation ability. *Memory & Cognition, 29*(5), 745-756.

Kuhn, T. (1970). *The Structure of Scientific Revolutions*. Chicago: University of Chicago Press.

Laborde, C. (2003). Η μάθηση της γεωμετρίας με τη βοήθεια του υπολογιστή. Επαγωγικές και κονστρουκτιβιστικές πλευρές. Στου Α. Γαγάτση (Εκδ.), *Κείμενα Διδακτικής της Γεωμετρίας* (173-188). Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Lawrie, C., Pegg, J., & Gutiérrez, A. (2000). Coding the nature of thinking displayed in responses on nets of solids. In T. Nakahara and M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 3 (pp.215-222). Hiroshima, Japan.

Lean, G., & Clements, M.A. (1981). Spatial ability, visual imagery and mathematics performance. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 267-299.

Leeson, N. (1994). Improving students' sense of three-dimensional shapes. *Teaching Children Mathematics 1* (1), 8-11.

Lege, S. (1999). Why not three dimensions? *Mathematics Teacher, 92* (7), 560-563.

Lehrer, R., & Curtis, C. (2000). Why are some solids perfect? *Teaching Children Mathematics, 6* (5), 324-329.

Liben, L.S. (2002). Spatial development in childhood: where are we now? In U. Goswami (Ed.), *Blackwell Handbook of Childhood Cognitive Development* (pp.326-348). Blackwell Publishings.

Liedtke, W. (1995). Developing spatial abilities in the early grades. *Teaching Children Mathematics, 2* (1), 12-18.

Linn, M. C., & Petersen, A. C. (1985). Emergence and characterization of sex differences: A meta-analysis. *Child Development, 56*, 1479-1498.

Lohman, D. (1988). Spatial abilities as traits, processes and knowledge. In R. J. Sternberg (Ed.), *Advances in the psychology of human intelligence* (Vol. 4). Hillsdale, NJ: LEA.

Lohman, D.F. (1996). Spatial ability and g. In I. Dennis & P. TApsfield (Eds.), *Human abilities: their nature and measurement* (pp.97-116). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Malara, N. (1998). On the difficulties of visualization and representation of 3D objects in middle school teachers. In A. Olivier and K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 3 (pp.239-246). South Africa: University of Stellenbosch.

Marchett, P., Medici, D., Vighi, P., & Zaccomer, E. (2005). Comparing perimeters and areas children's pre-conceptions and spontaneous procedures. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the IV Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME 4* (pp.766-776). Sant Feliu de Guixols, Spain.

Marcoulides, G. A., & Drezner, Z. (1999). A procedure for detecting pattern clustering in measurement designs. In M. Wilson & G. Engelhard (Eds.), *Objective measurement: Theory into practice* (vol. 5, pp. 261-277). Greenwich CT: Ablex Publishing.

Mariotti, M. A. (1989). Mental images: some problems related to the development of solids. In G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artique (Eds.), *Proceedings of the 13rd International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 258-265). Paris, France.

Mariotti, M. A. (1992). Geometrical reasoning as a dialectic between the figural and the conceptual aspects. *Structural Topology, 18*, 9-18.

Mariotti, M. A. (1995). Images and concepts in geometrical reasoning. In R. Sutherland and J. Mason (Eds.), *Exploring mental imagery with computers in mathematics education* (pp.97-116). Berlin: Spinger-Verlag.

Mariotti, M. A., & Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics, 34*, 219-248.

Markopoulos, C., & Potari, D. (1999). Forming relationships in three dimensional geometry through dynamic environments. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 3 (pp.273-280). Israel: University of Haifa.

Markopoulos, C., & Potari, D. (2000). Dynamic transformations of solids in the mathematics classroom. In T. Nakahara and M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 3 (pp.263-270). Hiroshima, Japan.

Mason, M. (1998). The van Hiele levels of geometric understanding. In D. B. Aichelle (Ed.), *Professional Handbook for teachers. Geometry: Explorations and Applications* (pp.4-8). McDougal Littell Inc. [Online] www.mcdougallittell.com/state/tx/corr/levels.pdf

McGee, M. G. (1979). Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences. *Psychological Bulletin, 86*, 889-918.

Meissner, H., & Pirkernell, G. (2000). Spatial abilities in primary schools. In T. Nakahara and M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 3* (pp.287-295). Japan: University of Hiroshima.

Meletiou-Mavrotheris, M., & Stylianou, D. (2003). Advancing from elementary to secondary school mathematics in Cyprus: a step or a leap? In L Rogers and J. Novotná (Eds.), *Effective learning and teaching of mathematics form primary to secondary school* (pp.53-81). Bologna, Italy: Pitagora. [Online] http://www.pedf.cuni.cz/kmdm/download/aktivity/eltmaps/Theory/TextPart2.pdf]

Mesquita, A. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *Journal of Mathematical Behavior, 17* (2), 183-195.

Mislevy, R. J., & Wilson, M. (1996). Marginal maximum likelihood estimation for a psychometric model of discontinuous development. *Psychometrica, 61*, 41-71.

Mistretta, R. (2000). Enhancing geometric reasoning. *Adolescence, 35* (138), 365-379.

Mitchelmore, M. C. (1980). Prediction of developmental stages in the representation of regular space figures. *Journal for Research in Mathematics Education, 11*(2), 83-93.

Morgan, S., & Knoll, E. (2000). *Polyhedra, learning by building: design and use of a math-ed tool*. Retrieved November 26, 2004, from http://www.math.umn/edu/~morgan/Trianglelessons.pdf

Monagham, F. (2000). What difference does it make? Children's views of the differences between some quadrilaterals. *Educational Studies in Mathematics, 42*, 179-196.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics, (1993). Curriculum and evaluation standards for school mathematics: Geometry and spatial sense. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics, (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Newcombe, N., & Huttenlocher, J. (2000). Making space. The development of spatial representation and reasoning. Massachesetts: MIT Press.

Panaoura, G., & Gagatisis, A. (2006). Net-representations of three-dimensional figures and spatial abilities. In S. Dodunekov, Gr. Makrides & I. Kortezov (Eds.), *MASSEE International Congress on Mathematics (MICOM 2006) – Abstracts* (p. 95). Paphos: MASSEE, Cyprus Mathematical Society.

Panaoura, G., Gagatsis, A., & Lemonides, C. (2007). *Spatial abilities in relation to performance in geometry tasks*. Paper presented at the CERME 5 Conference. Larnaka.

Parzysz, B. (1988). Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics, 19*(1), 79-92.

Parzysz, B. (2003). Pre-service elementary teachers and the fundamental ambiguity of diagrams in geometry problem-solving. *Proceedings of CERME 3*. Bellaria, Italy. [Online] http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/draft/proceedings_draft

Perrin-Glorian, M. (2003). Studying geometric figures at primary school from surfaces to points. [Online] http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG7/TG7PerrinGlorian_cerme3.pdf

Piaget, J., & Inhelder, B. (1967). *The Child's Conception of Space*. New York: W. W. Norton & Co.

Pillay, H. (1997). Cognitive processes and strategies employed by children to learn spatial representations. *Learning and Instruction, 8*(1), 1-18.

Pittalis, M., Mousoulides, N., & Christou, C. (2007). *Spatial ability as a predictor of geometry ability*. Paper presented at the CERME 5 Conference. Larnaka.

Potari, D., & Spiliotopoulou, V. (1992). Children's representations of the development of solids. *For the Learning of Mathematics, 12*(1), 38-46.

Potari, D., & Spiliotopoulou, V. (2001). Patterns in children's drawings and actions while constructing nets of solids: the case of conical surfaces. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 23* (4), 41-62.

Presmeg, N. (1986). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics, 6* (3), 42-46.

Quaiser-Pohl, C., Lehmann, W., & Eid, M. (2004). The relationship between spatial abilities and representations of large-scale space in children – a structural equation modeling analysis. *Personality and Individual Differences, 36*, 95-107.

Rahim, M. H., & Olson, A. (1998). Qualitative patterns in plane geometry. *Journal of Mathematical Behavior, 17* (3), 373-389.

Rasch, G. (1980). *Probabilistic Models for Some Intelligence and Attainment Tests*. Chicago: University of Chicago Press.

Rigdon, E. E. (1998). Structural equation modeling. In G. A. Marcoulides (Ed.), *Modern methods for business research* (pp. 251-294). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Reinhold, S. (2002). Topology in elementary school mathematics – a contribution to the improvement of children's spatial ability? YERME Summer School Klagenfurt.

Reynolds, A., & Wheatley, G. H. (1997). A student's imaging in solving a nonroutine task. *Teaching Children Mathematics, 4* (2), 100-104.

Rolet, C. (2003). Teaching and learning plane geometry in primary school: acquisition of a first geometric thinking. *Proceedings of CERME 3*. Bellaria, Italy. [Online] http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/draft/proceedings_draft

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Shaw, J., Thomas, C., Hoffman, A., & Bulgren, J. (1995). Using concept diagrams to promote understanding in geometry. *Teaching Children Mathematics, 2* (3), 184-189.

Shierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London: Palmer Press.

Stylianou, D., Leikin, R., & Silver, E. (1999). Exploring students' solution strategies in solving a spatial visualization problem involving nets. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 4* (pp.241-248). Israel: University of Haifa.

Tartre, L. A. (1990). Spatial orientation skill and mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education, 2* (3), 216-229.

Thompson, B., & Daniel, L. G. (1996). Factor analytic evidence for the construct validity of scores: A historical overview and some guidelines. *Educational and Psychological Measurement, 56*, 197-208.

Toomela, A. (1999). Drawing development: stages in the representation of a cube and a cylinder. *Child Development, 70* (5), 1141-1150.

Tso, T., & Liang, Y.N. (2002). The study of interrelationship between spatial abilities and van Hiele levels of thinking in geometry of eight-grade students. *Journal of Taiwan Normal University, 46*(2).

Triandafillidis, T. A. (1995). Circumventing visual limitations in teaching the geometry of shapes. *Educational Studies in Mathematics, 29*, 225-233.

van Hiele, P. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. Orlando, FL: Academic Press.

van Hiele, P. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics, 5* (6), 310-316.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques, 10*, 133-170.

Vighi, P. (2003). The triangle as a mathematical object. *Proceedings of CERME 3*. Bellaria, Italy. [Online] http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/draft/proceedings_draft

Warren, E., & English, L. (1995). Facility with plane shapes: a multifaceted skill. *Educational Studies in Mathematics, 28* (4), 365-383.

Wheatley, G. H. (1991). Enhancing mathematics learning through imagery. *Arithmetic Teacher, 39* (1), 34-36.

Wheatley, G. H. (1998). Imagery and mathematics learning. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 20*(2/3), 65-77.

Wheatley, G. H., & Reynolds, A. (1999). Image maker: developing spatial sense. *Teaching Children Mathematics, 5* (6), 374-378.

Woodward, E., & Brown, R. (1994). Polydrons and three-dimensional geometry. *Arithmetic Teacher, 41* (8), 451-458.

Wright, B. D., & Masters, G. (1981). *The Measurement of Knowledge and Attitude (Research Memorandum no. 30)*. Chicago: University of Chicago, Department of Education, Statistical Laboratory.

Xistouri, X., & Pitta-Pantazi, D. (2006). Spatial rotation and perspective taking abilities in relation to performance in reflective symmetry tasks. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehliková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education : Vol.5* (pp.425-432). Prague: PME.

Xistouri, X., Nikolaou, A., Koukkoufis, A, & Gagatsis, A. (2005). The nature of external representation in geometry and the solution of mathematical problems. In A. Gagatsis, F. Spagnolo, Gr. Makrides, & V. Farmaki (Eds.), *Proceedings of the 4th Mediterranean Conference on Mathematics Education, 1* (pp.163-174). Nicosia.

Yakimanskaya, I. S. (1991). *Soviet studies in mathematics education: The development of spatial thinking in schoolchildren*. Reston, VA: NCTM.

Βούργιας, Δ. Χ., Πέσκιας, Α,& Βούργια, Σ (2003). Η ικανότητα αντιληπτικής σύλληψης γεωμετρικών σχημάτων. Στων Α. Γαγάτση και Ι. Ηλία (Εκδ.), *Οι αναπαραστάσεις και τα γεωμετρικά μοντέλα στη μάθηση των μαθηματικών* (σσ.179-198). Λευκωσία: Intercollege Press.

Γαγάτσης, Α. (2003). *Κείμενα Διδακτικής της Γεωμετρίας*. Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Γαγάτσης, Α., Τσακίρη, Μ., & Ρούσου Μιχαηλίδου, Π. (2004). Πώς ορίζουν, αναγνωρίζουν και αναπαριστούν τα γεωμετρικά σχήματα του τετραγώνου, ορθογωνίου παραλληλογράμμου και τριγώνου οι μαθητές της Στ΄ δημοτικού. Μια συγκριτική μελέτη μεταξύ Κυπρίων και Ελλαδιτών μαθητών δημοτικού. Στων Α.

Γαγάτση, Α. Ευαγγελίδου, Ι. Ηλία και Π. Σπύρου (Εκδ.), *Αναπαραστάσεις και μάθηση των μαθηματικών* (Τόμος 2, 105-138).

Δημητρίου, Α. (1993). *Γνωστική Ανάπτυξη: Μοντέλα-Μέθοδοι-Εφαρμογές*. Θεσσαλονίκη: Art of text.

Ηλία, Ι., Γαγάτσης, Α. Μοδέστου, Μ., Παχίτη, Σ., & Δεληγιάννη, Ε. (2003). Πώς αντιλαμβάνονται οι μαθητές τα γεωμετρικά σχήματα. Ο ρόλος των γεωμετρικών μοντέλων. Στων Τ. Τριανταφυλλίδη, Κ. Χατζηκυριάκου, Π. Πολίτη, και Α. Χρονάκη (Εκδ.), *Πρακτικά 6ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Διδακτικής των Μαθηματικών και Πληροφορικής στην Εκπαίδευση* (σσ.191-199). Βόλος.

Κούρκουλος, Μ. (2000). Η ευκλείδεια γεωμετρία στο δημοτικό σχολείο: παραδείγματα και πειραματική διερεύνηση. *Σύγχρονη Εκπαίδευση, 113*, 64-76.

Νεοκλέους, Ε. (2004). Οι απόψεις των παιδιών για τις διαφορές που υπάρχουν μεταξύ ορισμένων τετραπλεύρων. Στων Α. Γαγάτση, Α. Ευαγγελίδου, Ι. Ηλία και Π. Σπύρου (Εκδ.), *Αναπαραστάσεις και μάθηση των μαθηματικών*, (Τόμος 2, 89-103). Λευκωσία: Intercollege Press.

Παναγίδης, Ν., & Χριστοδούλου, Α. (2004). Μη εικονική εξεικόνιση και επίλυση προβλημάτων γεωμετρίας από μαθητές Στ΄ τάξης δημοτικού. Στων Α. Γαγάτση, Α. Ευαγγελίδου, Ι. Ηλία και Π. Σπύρου (Εκδ.), *Αναπαραστάσεις και μάθηση των μαθηματικών*, (Τόμος 2, 203-224). Λευκωσία: Intercollege Press.

Παναγίδου, Ε., Τσιαννή, Μ., & Γαγάτσης, Α. (2004). Ο ρόλος των διδακτικών μεταβλητών και της αντιληπτικής σύλληψης του σχήματος στην εύρεση της περιμέτρου. Στων Α. Γαγάτση, Α. Ευαγγελίδου, Ι. Ηλία και Π. Σπύρου (Εκδ.), *Αναπαραστάσεις και μάθηση των μαθηματικών*, (Τόμος 2, 37-49). Λευκωσία: Intercollege Press.

Παναούρα, Γ., & Γαγάτσης, Α. (2003). Από τον τρισδιάστατο χώρο στο χώρο των δύο διαστάσεων: οι αναπαραστάσεις του κύβου. Στων Α. Γαγάτση και Ι. Ηλία (Εκδ.), *Οι αναπαραστάσεις και τα γεωμετρικά μοντέλα στη μάθηση των μαθηματικών* (Τόμος 2, 153-178). Λευκωσία: Intercollege Press.

Πόταρη, Δ., & Σπηλιωτοπούλου, Β. (2003). Αντιλήψεις των μαθητών κατά την κατασκευή στερεών. Στο Α. Γαγάτσης (Εκδ.), *Κείμενα διδακτικής της γεωμετρίας* (σσ.237-254). Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Πρωτοπαπάς, Π. (2003). Στρατηγικές υπολογισμού όγκου από μαθητές Ε΄ δημοτικού. Στων Α. Γαγάτση και Ι. Ηλία (Εκδ.), *Οι αναπαραστάσεις και τα γεωμετρικά μοντέλα στη μάθηση των μαθηματικών* (Τόμος 2, 127-152). Λευκωσία: Intercollege Press.

Φιλίππου, Γ., & Χρίστου, Κ. (1995). *Διδακτική τωνΜαθηματικών*. Αθήνα: Δαρδανός.

Χριστοδουλίδης, Μ., & Παπαδόπουλος, Γ. (2003). Η αναγνώριση γεωμετρικών μορφών και η επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων στην Στ΄ δημοτικού. Στων Α. Γαγάτση και Ι. Ηλία (Εκδ.), *Οι αναπαραστάσεις και τα γεωμετρικά μοντέλα στη μάθηση των μαθηματικών* (Τόμος 2, 199-214). Λευκωσία: Intercollege Press.

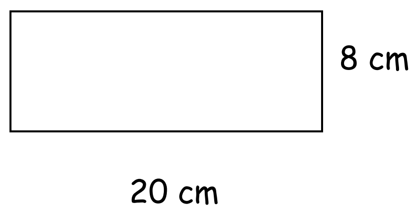
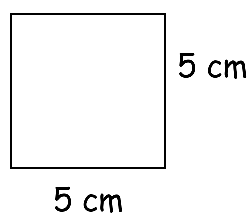
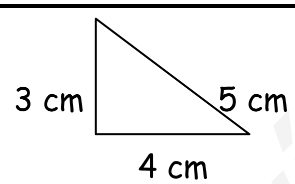
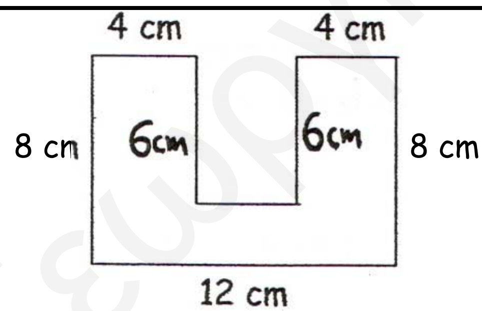
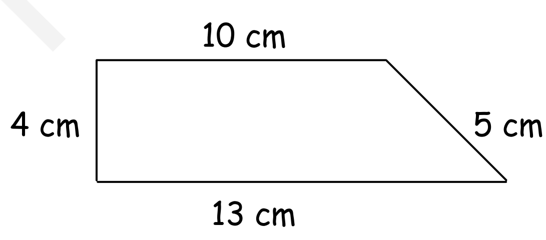
Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού Κύπρου (2002). *Αναλυτικά Προγράμματα Δημοτικής Εκπαίδευσης*. Λευκωσία: Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού.

Παράρτημα 1

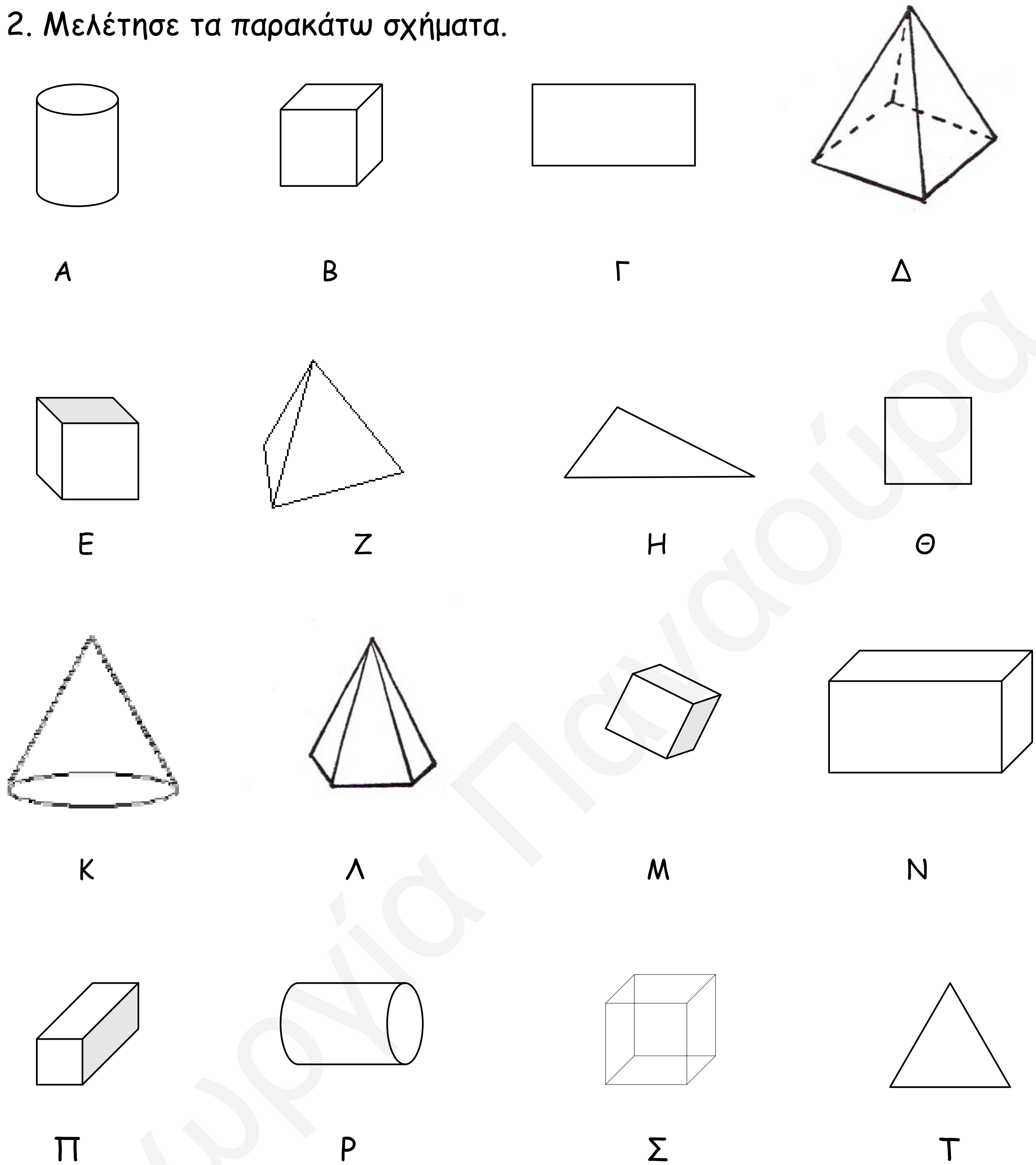
Δοκίμιο Α

1. Υπολόγισε το εμβαδό των παρακάτω σχημάτων

Δείξε τον τρόπο που εργάστηκες για κάθε σχήμα.

Σχήμα	Υπολογισμός εμβαδού
	
	
	
	
	

2. Μελέτησε τα παρακάτω σχήματα.



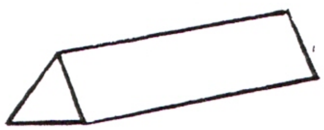
Γράψε ποια από τα παραπάνω σχήματα είναι:

κύβοι __________________________

πυραμίδες __________________________

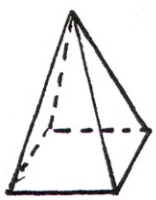
στερεά __________________________

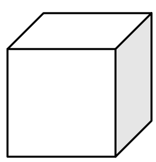
3. Το στερεό που βλέπεις έχει 5 έδρες.
Οι 2 έδρες έχουν σχήμα τρίγωνο και οι 3 έδρες έχουν σχήμα ορθογώνιο.

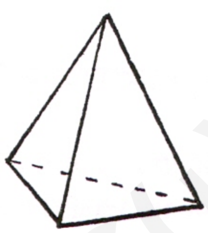


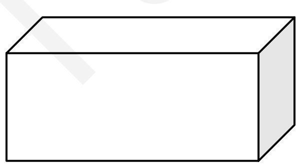
→ 5 έδρες : 2 τρίγωνα και 3 ορθογώνια

Γράψε δίπλα σε καθένα από τα παρακάτω στερεά πόσες έδρες έχει και τι σχήμα έχουν οι έδρες του, όπως στο παράδειγμα.

 → ______________________________

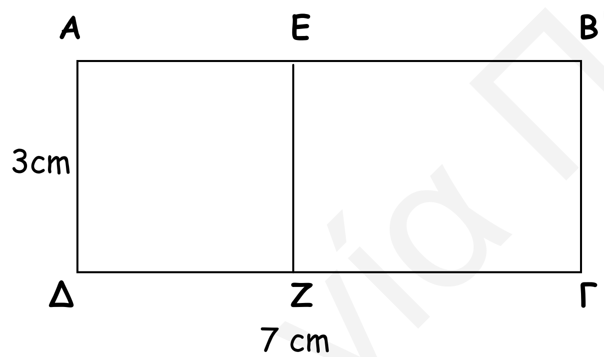
 → ______________________________

 → ______________________________

 → ______________________________

4. Κατασκεύασε **<u>ένα ανάπτυγμα κύβου</u>**

5. Στο σχήμα που ακολουθεί το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με μήκος ΔΓ = 7cm και πλάτος ΑΔ = 3cm.
Το σχήμα ΑΕΖΔ είναι τετράγωνο.
Πόσο είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΕΒ;

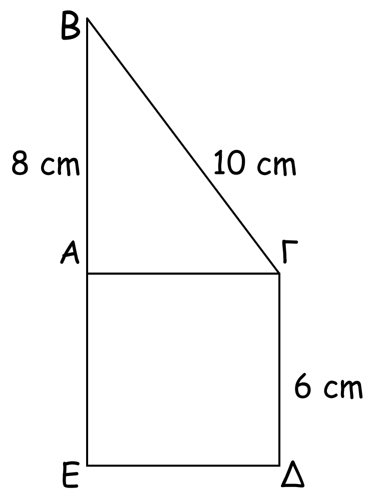


<u>Προσοχή</u>: Λύσε το πρόβλημα χωρίς να χρησιμοποιήσεις τη ρίγα σου, γιατί οι διαστάσεις του σχήματος δεν είναι οι πραγματικές!

Απάντηση : ____

☞ Εξήγησε εδώ πώς βρήκες την απάντηση.

6. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με ΒΓ = 10cm και ΑΒ = 8cm.
Το σχήμα ΑΓΔΕ είναι τετράγωνο με πλευρά ΓΔ = 6 cm.
Πόσο είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ;



<u>Προσοχή</u>: Λύσε το πρόβλημα χωρίς να χρησιμοποιήσεις τη ρίγα σου, γιατί οι διαστάσεις του σχήματος δεν είναι οι πραγματικές!

Απάντηση : ____

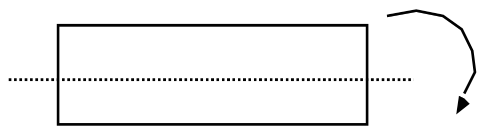
☞ Εξήγησε εδώ πώς βρήκες την απάντηση.

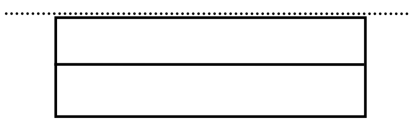
7. <u>Βάλε σε κύκλο την πρόταση που είναι σωστή:</u>

Α. Το ορθογώνιο έχει όλες τις πλευρές ίσες.
Β. Το τετράγωνο δεν έχει όλες τις πλευρές ίσες.
Γ. Το τετράγωνο έχει όλες τις πλευρές ίσες.
Δ. Το ορθογώνιο έχει δύο ορθές γωνίες.

8. Το πιο κάτω σχήμα θα διπλωθεί γύρω από τον άξονα που φαίνεται με τη διακεκομμένη γραμμή. Πώς θα φαίνεται το κάθε σχήμα όταν διπλωθεί; Να βάλεις σε κύκλο τη σωστή απάντηση. Το βέλος δείχνει πώς θα γυρίσει το σχήμα κατά το δίπλωμα. Πιο κάτω δίνεται ένα παράδειγμα.

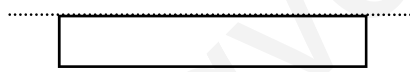
Παράδειγμα



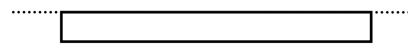


α)

β)



γ)

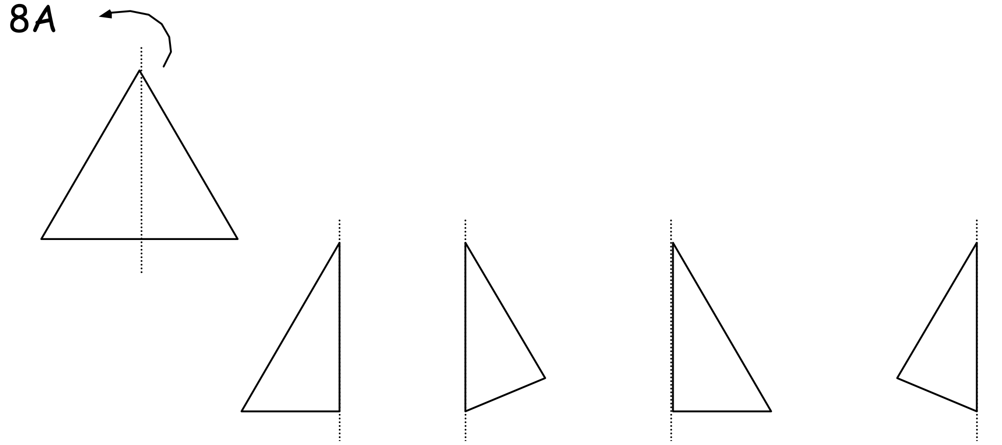


δ)

Η απάντηση είναι το γ.

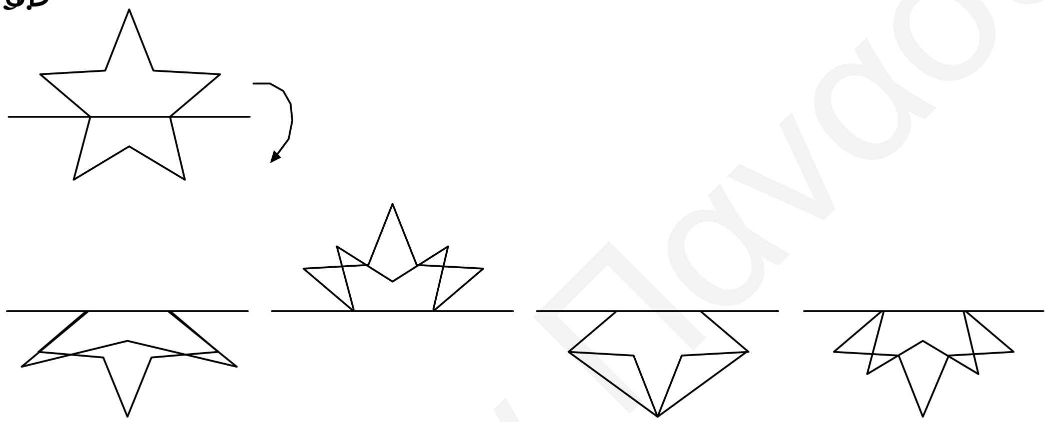
Παρακάτω ακολουθούν τα προβλήματα που πρέπει να λύσεις.
Να βάλεις σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

8A



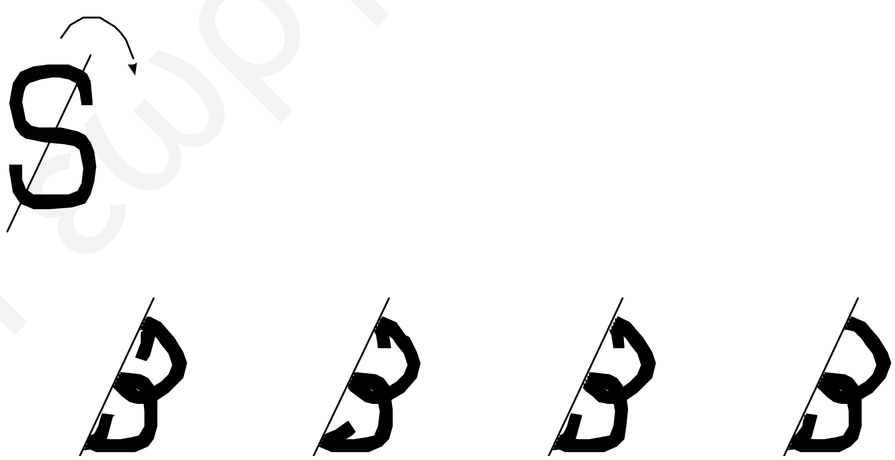
α) β) γ) δ)

8B



α) β) γ) δ)

8Γ



α) β) γ) δ)

9. Τα ζευγάρια

Εδώ έχουμε ζευγάρια από σχήματα. Εσύ πρέπει να βρεις αν τα σχήματα σε κάθε ζευγάρι είναι όμοια (δηλαδή ίδια) ή ανόμοια (δηλαδή δεν είναι τα ίδια).

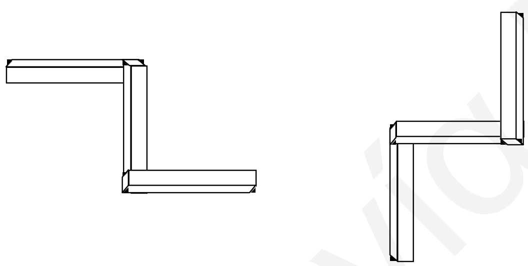
Παράδειγμα

α) Τα σχήματα είναι όμοια
β) Τα σχήματα είναι ανόμοια

Η ορθή απάντηση είναι το α).

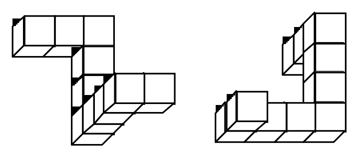
Παρακάτω ακολουθούν τα προβλήματα που έχεις να λύσεις

1)



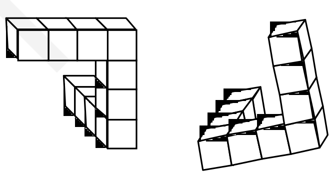
α) Τα σχήματα είναι όμοια
β) Τα σχήματα είναι ανόμοια

2)



α) Τα σχήματα είναι όμοια
β) Τα σχήματα είναι ανόμοια

3)



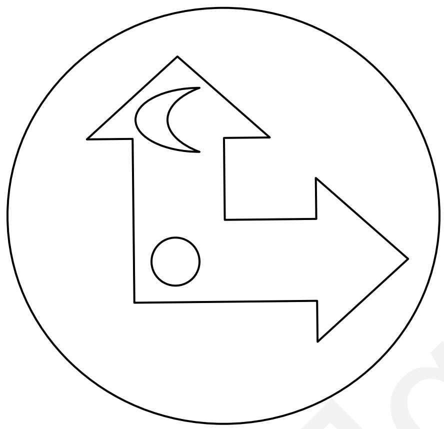
α) Τα σχήματα είναι όμοια
β) Τα σχήματα είναι ανόμοια

10. <u>Τα ρολόγια</u>

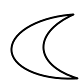
Στο έργο αυτό βλέπεις ένα δείκτη ρολογιού στον οποίο είναι τοποθετημένο ένα σχήμα. Ο δείκτης βρίσκεται στη θέση Α και θα μετακινηθεί στη θέση Β.
Το έργο σου είναι να διαλέξεις από τις επιλογές που υπάρχουν **πώς θα είναι το σχήμα πάνω στον δείκτη όταν αυτός περιστραφεί (μετακινηθεί) από τη θέση Α στη θέση Β**.

Παράδειγμα

A



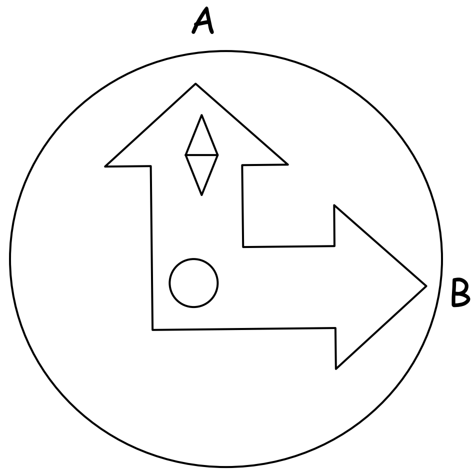
B

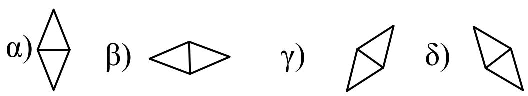
α)  β)  γ)  δ) 

Η απάντηση είναι το α

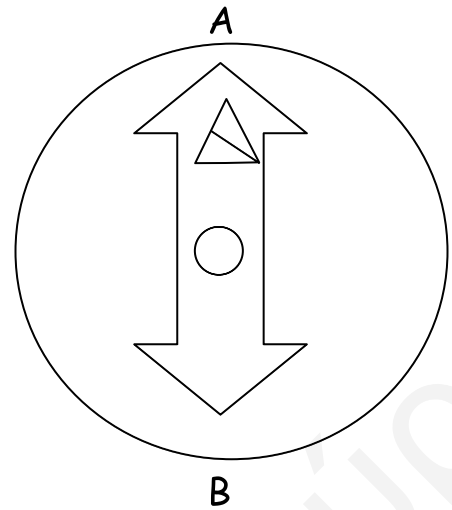
Στην επόμενη σελίδα ακολουθούν τα προβλήματα που έχεις να λύσεις.

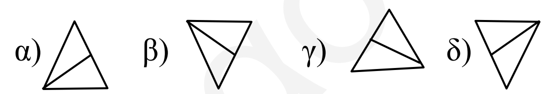
1)



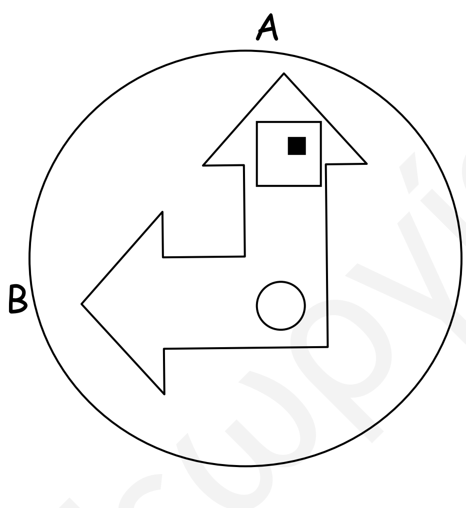


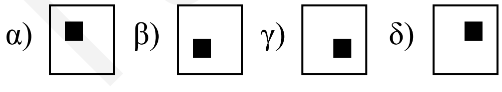
2)



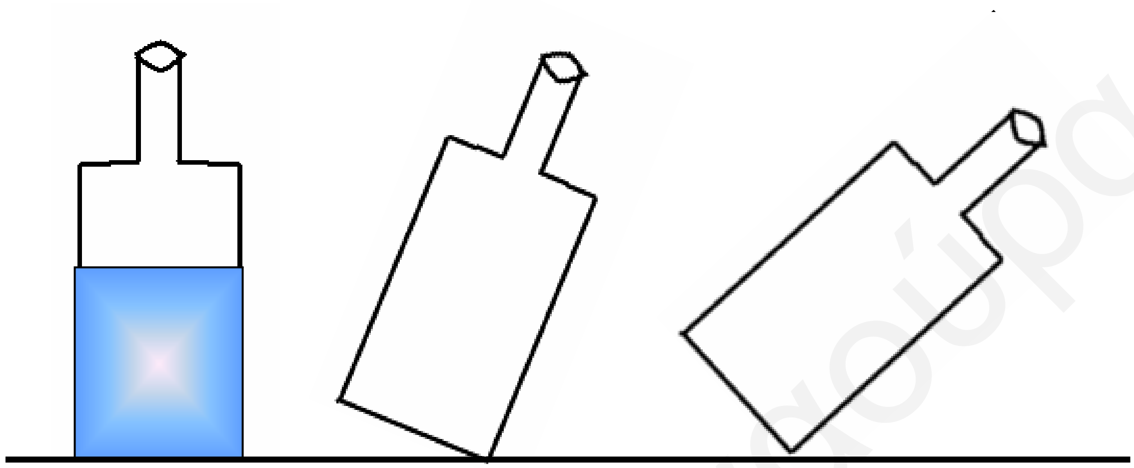


3)



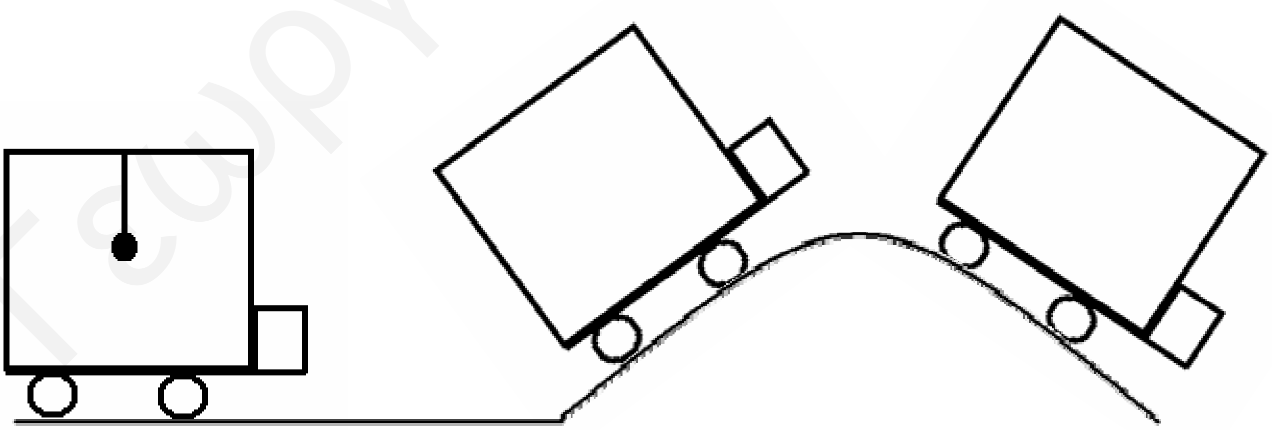


11. Ζωγράφισε πώς θα φαίνεται το επίπεδο του νερού όταν το μπουκάλι γείρει από την όρθια θέση που βρίσκεται στις θέσεις Α και Β που φαίνονται πιο κάτω.



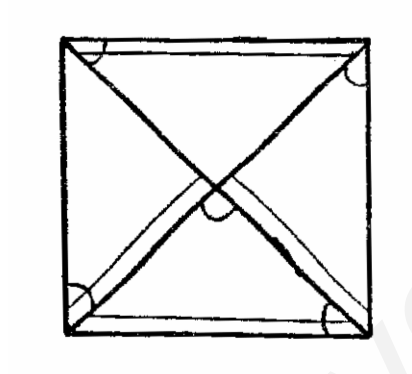
Α Β

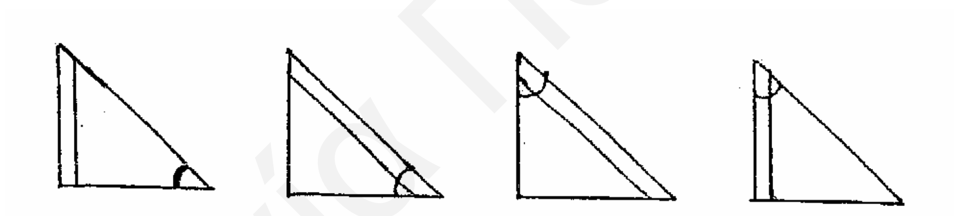
12. Ένα νήμα με ένα βαρίδιο κρέμεται από την κορυφή του αυτοκινήτου, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Ζωγράφισε πώς θα φαίνεται το νήμα με το βαρίδιο στις δύο θέσεις πάνω στο λόφο.



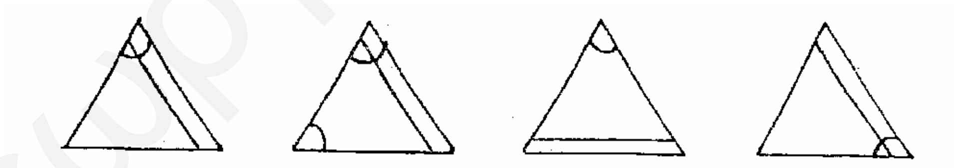
Α Β

17. Πιο κάτω σου δίνονται μερικά σχήματα. Ένα μεγάλο σχήμα χωρίς αριθμούς και μερικά άλλα σχήματα με αριθμούς. Με τη φαντασία σου θα τραβήξεις και θα περιστρέψεις τα σχήματα με τους αριθμούς για να τα τοποθετήσεις στην κατάλληλη θέση του μεγάλου σχήματος. Όταν βρεις ποια σχήματα ταιριάζουν, να γράψεις τον αριθμό τους στην αντίστοιχη θέση του μεγάλου σχήματος (Μη δίνεις σημασία στο μέγεθος). Δικαιούσαι να ΠΕΡΙΣΤΡΕΨΕΙΣ αλλά ΟΧΙ να ΑΝΑΠΟΔΟΓΥΡΙΣΕΙΣ τα σχήματα.

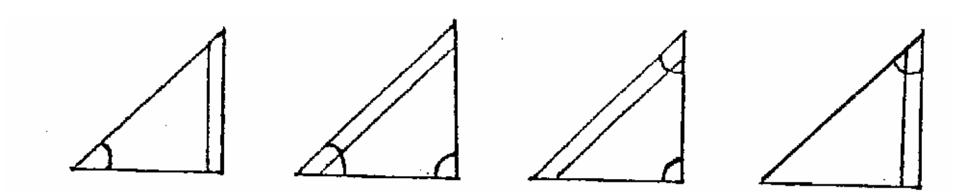




1 2 3 4



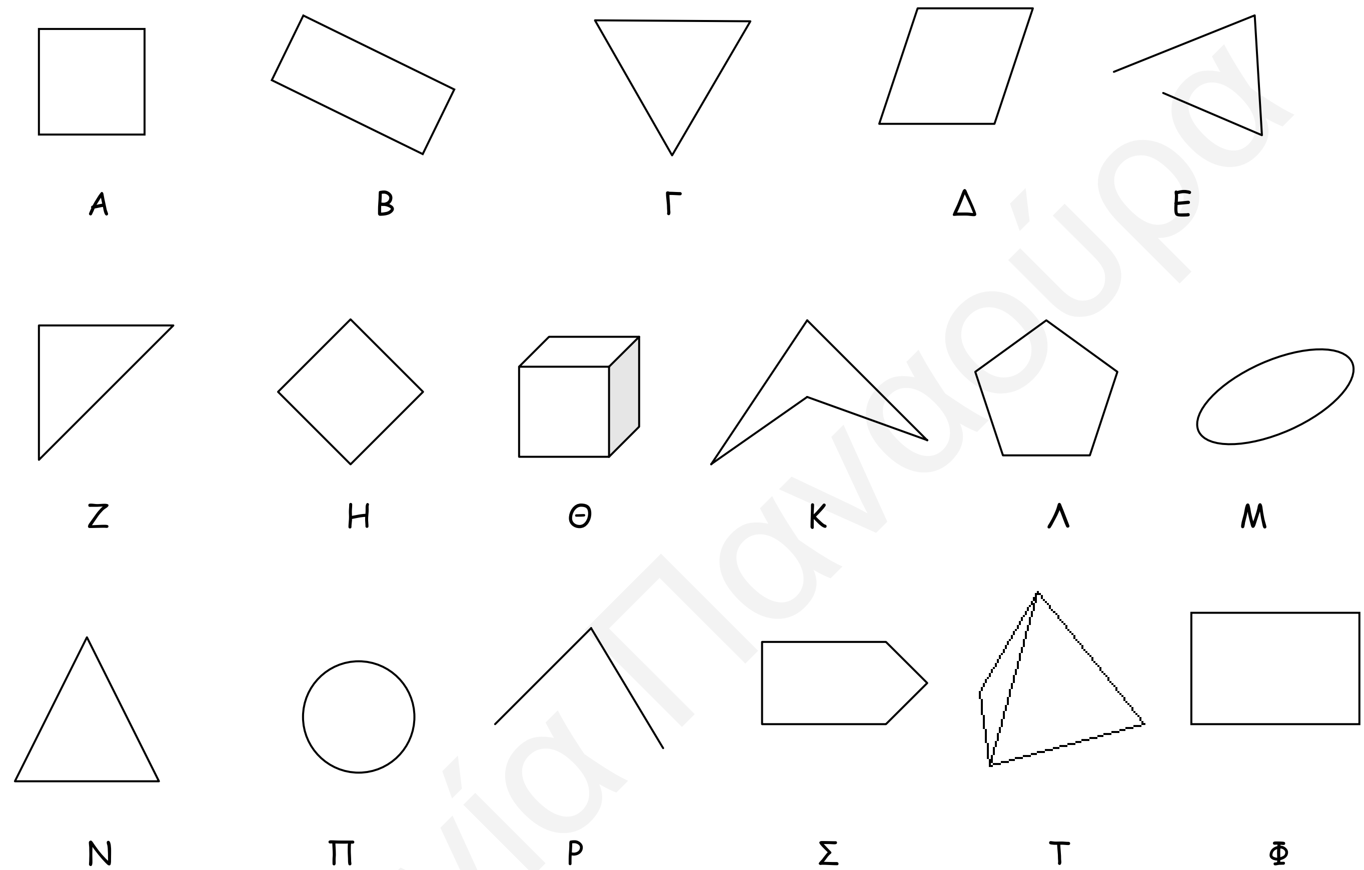
5 6 7 8



9 10 11 12

Δοκίμιο Β

1. Μελέτησε προσεκτικά τα ακόλουθα σχήματα.



Γράψε ποια από τα παραπάνω σχήματα είναι

τρίγωνα ____________________

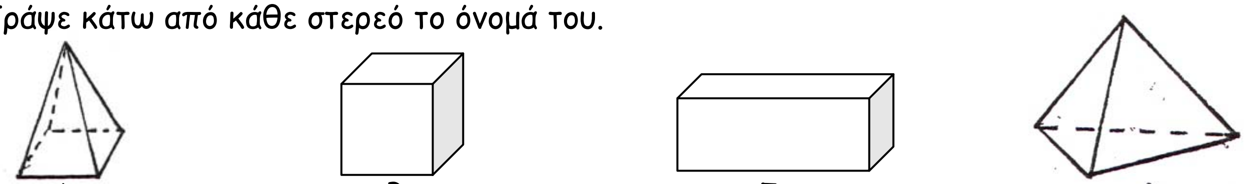
τετράγωνα ____________________

ορθογώνια ____________________

τετράπλευρα ____________________

κύκλοι ____________________

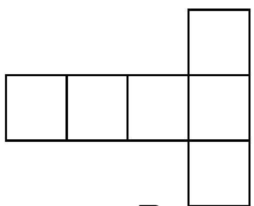
2. Κοίταξε προσεκτικά τα ακόλουθα στερεά.
(α) Γράψε κάτω από κάθε στερεό το όνομά του.



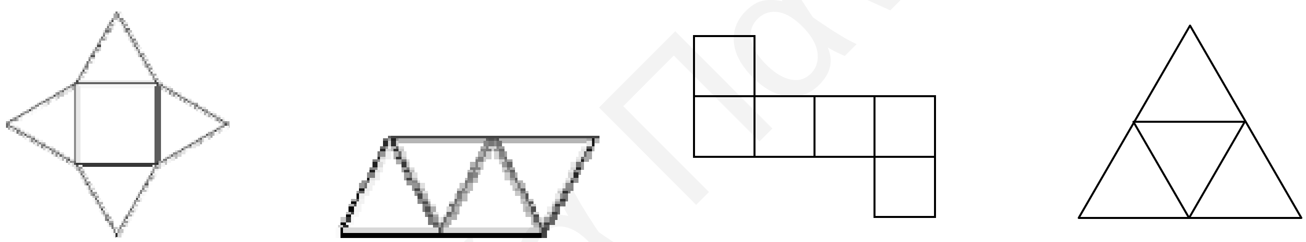
Α Β Γ Δ

________________ ______________ __________________ _______________

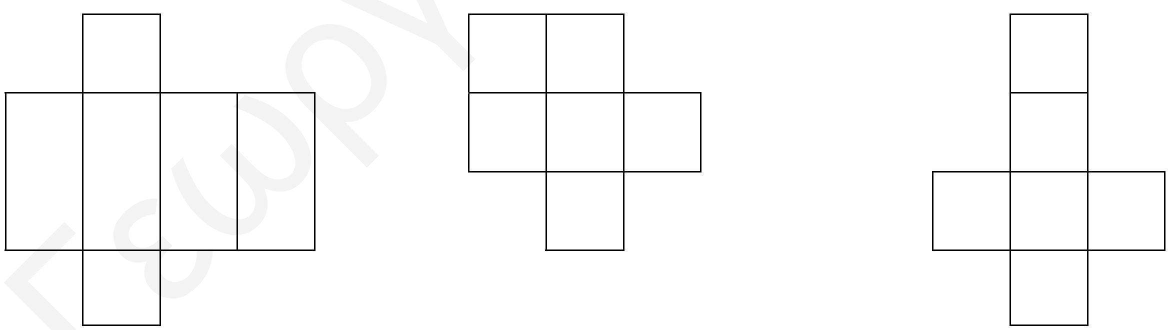
(β) Παρακάτω βλέπεις τα αναπτύγματα διάφορων στερεών. Γράψε κάτω από κάθε ανάπτυγμα το γράμμα του στερεού στο οποίο αντιστοιχεί (Α ή Β ή Γ ή Δ). Αν βλέπεις κάποιο ανάπτυγμα που δεν ανήκει σε κανένα από τα τέσσερα στερεά, γράψε από κάτω Χ.
Παράδειγμα:



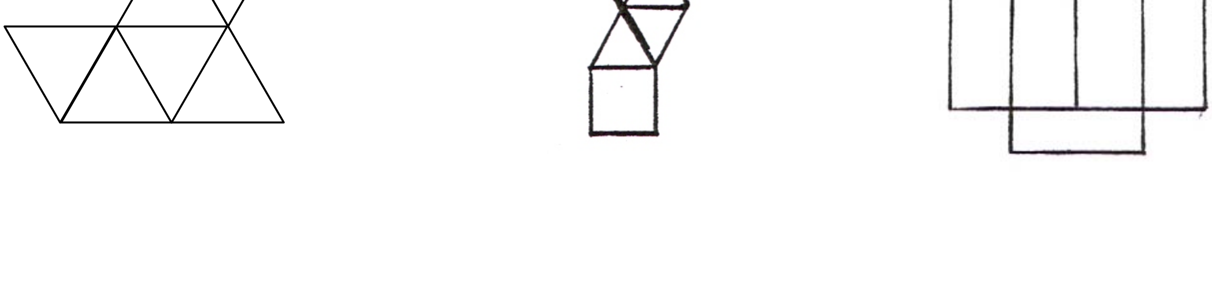
Β



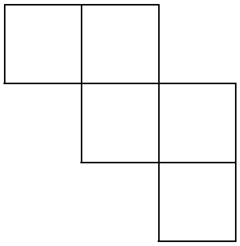
______ _______ _______ _______



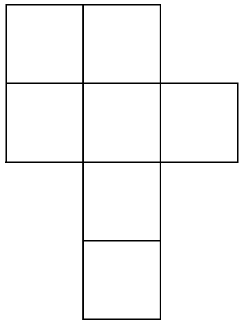
______ _______ _______



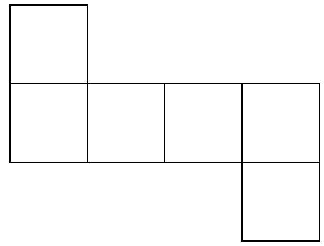
3. Ποιο ή ποια από τα παρακάτω σχήματα <u>είναι αναπτύγματα του κύβου</u>; Κύκλωσέ τα.



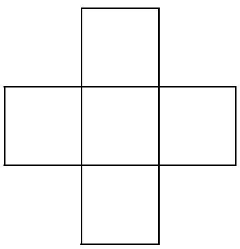
Α



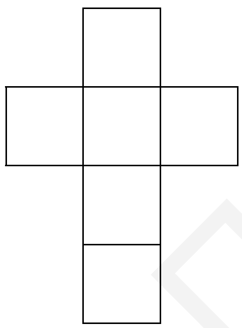
Β



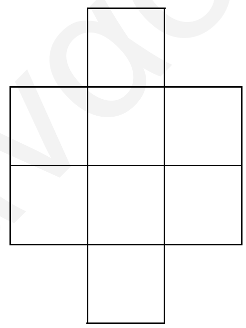
Γ



Δ



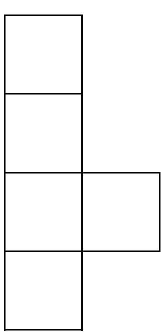
Ε



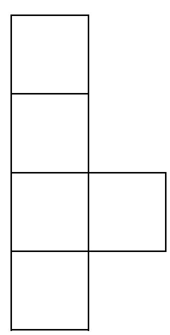
Ζ

4. Το ακόλουθο ανάπτυγμα κύβου είναι ατέλειωτο. **<u>Τοποθέτησε ένα τετράγωνο στη σωστή θέση</u>**, για να συμπληρωθεί το ανάπτυγμα.
Αν μπορείς, <u>δείξε δύο διαφορετικούς τρόπους</u> με τους οποίους μπορεί να συμπληρωθεί το ανάπτυγμα.

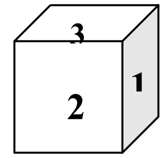
Πρώτος τρόπος

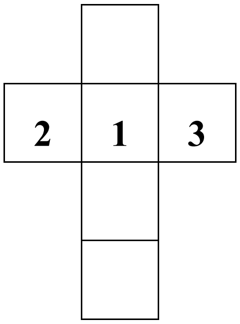


Δεύτερος τρόπος

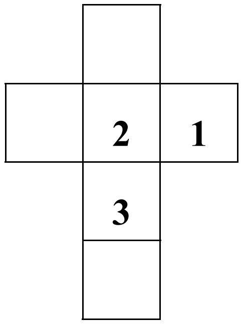


5. Παρατήρησε προσεκτικά τους αριθμούς που είναι ζωγραφισμένοι πάνω στον κύβο. Ποιο από τα παρακάτω είναι <u>το σωστό ανάπτυγμα για τον κύβο αυτό</u>; Κύκλωσέ το.

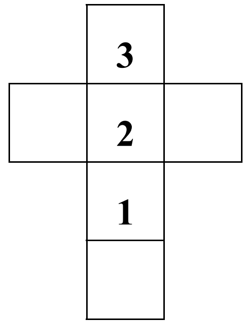




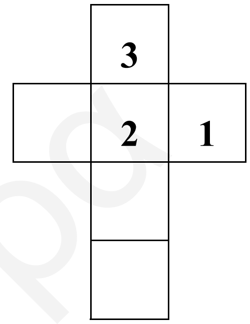
Α



Β

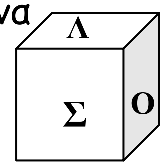


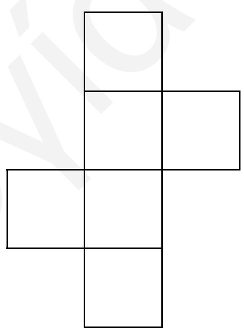
Γ



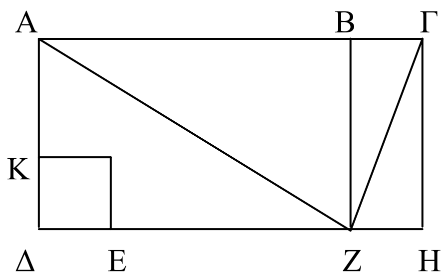
Δ

6. Παρατήρησε προσεκτικά τα γράμματα που είναι ζωγραφισμένα πάνω στον κύβο. Τώρα <u>ζωγράφισε τα γράμματα αυτά πάνω στο ανάπτυγμα</u> που βλέπεις παρακάτω.





7. Μελέτησε προσεκτικά το ακόλουθο σχήμα.

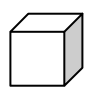


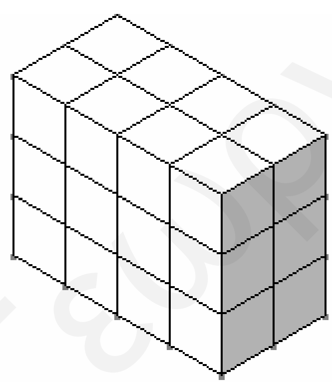
Πόσα τρίγωνα βλέπεις σε αυτό; ____________________________________
Ποια τρίγωνα βλέπεις; (ονόμασέ τα)

____

Πόσα ορθογώνια βλέπεις σε αυτό; ________________________________
Ποια ορθογώνια βλέπεις; (ονόμασέ τα)

____

8. Πόσους μικρούς κύβους  χρειαζόμαστε για να φτιάξουμε το παρακάτω στερεό;
ΠΡΟΣΟΧΗ: Δεν υπάρχουν κενά στο εσωτερικό του στερεού.



Χρειαζόμαστε ________ μικρούς κύβους.

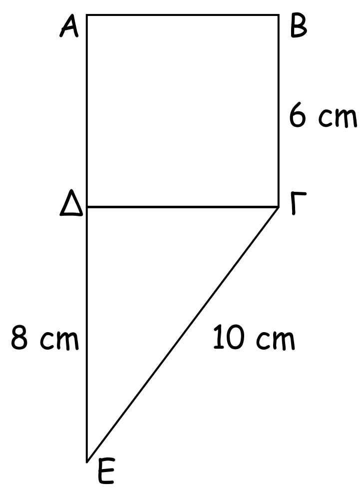
Εξήγησε με ποιο τρόπο βρήκες πόσους μικρούς κύβους χρειαζόμαστε για το στερεό αυτό.

____

____

____

9. Το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ορθογώνιο με ΓΕ = 10cm και ΔΕ = 8cm.
Το σχήμα ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο με πλευρά ΒΓ = 6 cm.
Πόσο είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ;



<u>Προσοχή</u>: Λύσε το πρόβλημα χωρίς να χρησιμοποιήσεις τη ρίγα σου, γιατί οι διαστάσεις του σχήματος δεν είναι οι πραγματικές!

Απάντηση : ____

☞ Εξήγησε εδώ πώς βρήκες την απάντηση.

10. <u>Βάλε σε κύκλο το σωστό</u>:

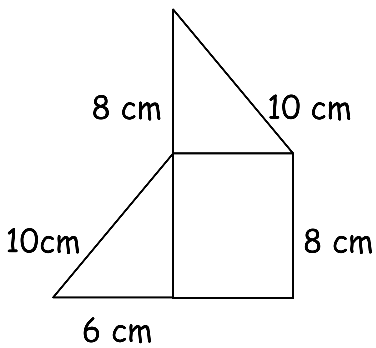
Ένας κύβος έχει ___________ έδρες.

Α. Τέσσερις   Β. Έξι   Γ. Οκτώ   Δ. Δώδεκα

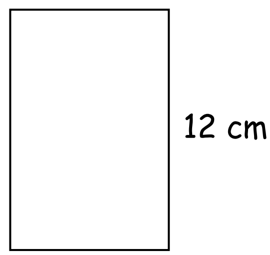
11. <u>Βάλε σε κύκλο την πρόταση που είναι σωστή:</u>

Α. Το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.
Β. Το τετράγωνο είναι ορθογώνιο.
Γ. Το ορθογώνιο τρίγωνο έχει δύο ορθές γωνίες.
Δ. Ο ρόμβος είναι τετράγωνο.

12. Τα σχήματα Α και Β που βλέπετε παρακάτω είναι ισεμβαδικά, δηλαδή έχουν το ίδιο εμβαδό. (Το σχήμα Α αποτελείται από ένα ορθογώνιο και δύο ορθογώνια τρίγωνα)
Να βρείτε το πλάτος του ορθογωνίου (σχήμα Β).



σχήμα Α



σχήμα Β

Απάντηση : ____

☞ Εξήγησε εδώ πώς βρήκες την απάντηση.

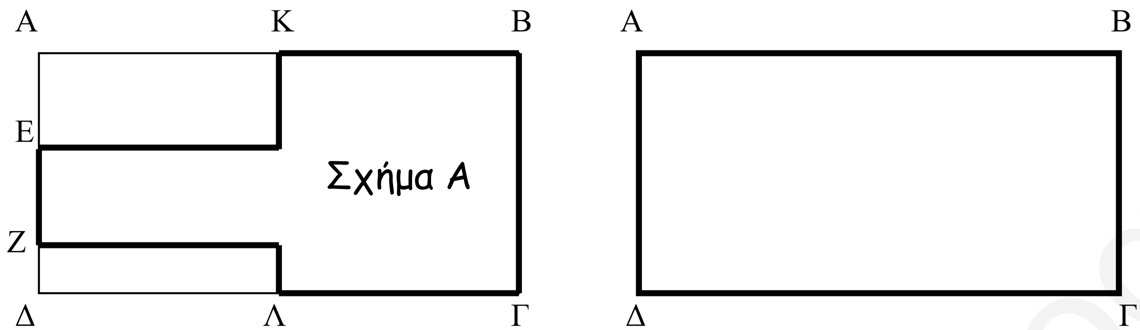
13. Βάλε σε κύκλο την πρόταση που είναι σωστή:

Α. Μια πυραμίδα μπορεί να έχει μόνο δύο έδρες.
Β. Μια πυραμίδα μπορεί να έχει μόνο τρεις έδρες.
Γ. Μια πυραμίδα μπορεί να έχει μόνο τέσσερις έδρες.
Δ. Μια πυραμίδα έχει πάντοτε πέντε έδρες.

14. Βάλε σε κύκλο την πρόταση που είναι σωστή:

Α. Το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο είναι κύβος.
Β. Το τετράγωνο είναι κύβος.
Γ. Ο κύβος είναι τετράγωνο.
Δ. Ο κύβος είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

15. Παρατήρησε προσεκτικά το παρακάτω σχήμα.
Τα ΑΒΓΔ, ΑΚΠΕ και ΖΡΛΔ είναι ορθογώνια.

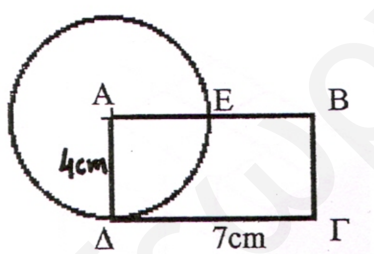


Έστω ότι ονομάζουμε <u>Σχήμα Α</u> το <u>σχήμα ΕΠΚΒΓΛΡΖ</u>, που φαίνεται σχεδιασμένο με έντονες γραμμές.

<u>Ποια πρόταση είναι σωστή</u>; Βάλε κύκλο.

Α. Το σχήμα ΑΒΓΔ έχει μεγαλύτερη περίμετρο από το σχήμα Α.
Β. Το σχήμα ΑΒΓΔ έχει μικρότερη περίμετρο από το σχήμα Α.
Γ. Το σχήμα ΑΒΓΔ έχει ίση περίμετρο με το σχήμα Α.

16. Στο σχήμα παριστάνεται ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ και ένας κύκλος που περνά από το σημείο Δ, με κέντρο το Α.
Πόσο είναι το μέγεθος του ευθύγραμμου τμήματος ΕΒ;



<u>Προσοχή</u>: Λύσε το πρόβλημα χωρίς να χρησιμοποιήσεις τη ρίγα σου, γιατί οι διαστάσεις του σχήματος δεν είναι οι πραγματικές!

Απάντηση : ____

☞ Εξήγησε εδώ πώς βρήκες την απάντηση.

Παράρτημα 2

Κωδικοποίηση έργων χωρικής ικανότητας

Συμβολισμός στις αναλύσεις με τη βοήθεια του μοντέλου Rasch	Συμβολισμός στις αναλύσεις ομοιότητας και συνεπαγωγής	Αρίθμηση με βάση τα δοκίμια (Α και Β) που δόθηκαν στους μαθητές (Τύπος Α)
1. Χειρισμός νοητικών εικόνων	S1a	$A8_{A}$.X
2. Χειρισμός νοητικών εικόνων	S1b	$A8_{B}$.X
3. Χειρισμός νοητικών εικόνων	S1c	$A8_{\Gamma}$.X
4. Νοητική περιστροφή με τρισδιάστατα σχήματα	S2a	$A9_{1}$.X
5. Νοητική περιστροφή με τρισδιάστατα σχήματα	S2b	$A9_{2}$.X
6. Νοητική περιστροφή με τρισδιάστατα σχήματα	S2c	$A9_{3}$.X
7. Νοητική περιστροφή με επίπεδα σχήματα	S3a	$A10_{1}$.X
8. Νοητική περιστροφή με επίπεδα σχήματα	S3b	$A10_{2}$.X
9. Νοητική περιστροφή με επίπεδα σχήματα	S3c	$A10_{3}$.X
10. Επίπεδο νερού	Swa1	$A11_{A}$.X
11. Επίπεδο νερού	Swa2	$A11_{B}$.X
12. Βαρίδιο σε όχημα	Swe1	$A12_{A}$.X
13. Βαρίδιο σε όχημα	Swe2	$A12_{B}$.X
14. Ανασύνθεση με περιστροφές	S4	B17.X

Κωδικοποίηση γεωμετρικών έργων

Συμβολισμός στις αναλύσεις με τη βοήθεια του μοντέλου Rasch	Συμβολισμός στις αναλύσεις ομοιότητας και συνεπαγωγής	Αρίθμηση με βάση τα δοκίμια (Α και Β) που δόθηκαν στους μαθητές (Τύπος Α)
1. Εμβαδό ορθογωνίου	Ar	Α1.2$Δ_1$
2. Εμβαδό τετραγώνου	As	Α1.2$Δ_2$
3. Εμβαδό τριγώνου	At	Α1.2$Δ_3$
4. Εμβαδού σύνθετου σχήματος	Ac1	Α1.2$Δ_4$
5. Εμβαδό σύνθετου σχήματος	Ac2	Α1.2$Δ_5$
6. Αναπαραστάσεις στερεών Κύλινδρος	R3D1	Α2.3$Δ_Α$
7. Αναπαραστάσεις στερεών Κύβος	R3D2	Α2.3$Δ_Β$
8. Αναπαραστάσεις στερεών Ορθογώνιο	R3D3	Α2.3$Δ_Γ$
9. Αναπαραστάσεις στερεών Πυραμίδα	R3D4	Α2.3$Δ_Δ$
10. Αναπαραστάσεις στερεών Κύβος	R3D5	Α2.3$Δ_Ε$
11. Αναπαραστάσεις στερεών Πυραμίδα	R3D6	Α2.3$Δ_Ζ$
12. Αναπαραστάσεις στερεών Τρίγωνο	R3D7	Α2.3$Δ_Η$
13. Αναπαραστάσεις στερεών Τετράγωνο	R3D8	Α2.3$Δ_Θ$
14. Αναπαραστάσεις στερεών Κώνος	R3D9	Α2.3$Δ_Κ$
15. Αναπαραστάσεις στερεών Πυραμίδα	R3D10	Α2.3$Δ_Λ$

16. Αναπαραστάσεις στερεών Κύβος	R3D11	A2.3Δ_{M}
17. Αναπαραστάσεις στερεών Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο	R3D12	A2.3Δ_{N}
18. Αναπαραστάσεις στερεών Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο	R3D13	A2.3Δ_{Π}
19. Αναπαραστάσεις στερεών Κύλινδρος	R3D14	A2.3Δ_{P}
20. Αναπαραστάσεις στερεών Κύβος	R3D15	A2.3Δ_{Σ}
21. Αναπαραστάσεις στερεών Τρίγωνο	R3D16	A2.3Δ_{T}
22. Έδρες πυραμίδας	F3D1s	A3.3Δ_{1}
23. Έδρες πυραμίδας	F3D1n	A3.3Δ_{2}
24. Έδρες κύβου	F3D2s	A3.3Δ_{3}
25. Έδρες κύβου	F3D2n	A3.3Δ_{4}
26. Έδρες πυραμίδας	F3D3s	A3.3Δ_{5}
27. Έδρες πυραμίδας	F3Dsn	A3.3Δ_{6}
28. Έδρες ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου	F3D4s	A3.3Δ_{7}
29. Έδρες ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου	F3D4n	A3.3Δ_{8}
30. Κατασκευή αναπτύγματος κύβου	NCcon	A4.Aν
31. Γεωμετρικό πρόβλημα 2Δ	SqR	A5.2Δ
32. Γεωμετρικό πρόβλημα 2Δ	SqTr1	A6.2Δ
33. Ίσες πλευρές τετραγώνου	Msqs	A7.2Δ
34. Ονομασία στερεών	Rn3D1	B2(α).3Δ_{A}
35. Ονομασία στερεών	Rn3D2	B2(α).3Δ_{B}

36. Ονομασία στερεών	Rn3D3	B2(α).3Δ$_{\Gamma}$
37. Ονομασία στερεών	Rn3D4	B2(α).3Δ$_{\Delta}$
38. Ανάπτυγμα πυραμίδας	N1R	B2.Αν$_{1}$
39. Ανάπτυγμα πυραμίδας	N2R	B2.Αν$_{2}$
40. Ανάπτυγμα κύβου	N3R	B2.Αν$_{3}$
41. Ανάπτυγμα πυραμίδας	N4R	B2.Αν$_{4}$
42. Ανάπτυγμα ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου	N5R	B2.Αν$_{5}$
43. Μη-ανάπτυγμα	N6R	B2.Αν$_{6}$
44. Ανάπτυγμα κύβου	N7R	B2.Αν$_{7}$
45. Μη-ανάπτυγμα	N8R	B2.Αν$_{8}$
46. Ανάπτυγμα πυραμίδας	N9R	B2.Αν$_{9}$
47. Μη-ανάπτυγμα	N10R	B2.Αν$_{10}$
48. Ανάπτυγμα κύβου	NC1R	B3.Αν$_{A}$
49. Ανάπτυγμα κύβου	NC2R	B3.Αν$_{B}$
50. Ανάπτυγμα κύβου	NC3R	B3.Αν$_{\Gamma}$
51. Ανάπτυγμα κύβου	NC4R	B3.Αν$_{\Delta}$
52. Ανάπτυγμα κύβου	NC5R	B3.Αν$_{E}$
53. Ανάπτυγμα κύβου	NC6R	B3.Αν$_{Z}$
54. Συμπλήρωση αναπτύγματος κύβου	NCcom1	B4.Αν$_{1}$
55. Συμπλήρωση αναπτύγματος κύβου	NCcom2	B4.Αν$_{2}$
56. Ανάπτυγμα κωδικοποιημένου κύβου	NC7	B5.Αν
57. Ανάπτυγμα	NC8	B6.Αν

κωδικοποιημένου κύβου		
58. Τρίγωνα σε σύνθετο σχήμα	RTid	B7.2Δ_1
59. Ορθογώνια σε σύνθετο σχήμα	RRid	B7.2Δ_2
60. Στερεό από κυβικές μονάδες	SoCn	B8.3Δ
61. Γεωμετρικό πρόβλημα 2Δ	SqTr2	B9.2Δ
62. Έδρες κύβου	Mcuf	B10.3Δ
63. Τετράγωνο στην κλάση ορθογωνίων	Msqr	B11.2Δ
64. Γεωμετρικό πρόβλημα 2Δ (Ισεμβαδικά σχήματα)	Aeq	B12.2Δ
65. Έδρες πυραμίδας	Mpyf	B13.3Δ
66. Κύβος στην κλάση παραλληλεπιπέδων	Mcur	B14.3Δ
67. Γεωμετρικό πρόβλημα 2Δ	P1	B15.2Δ
68. Γεωμετρικό πρόβλημα 2Δ	CiRe	B16.2Δ
69. Αναγνώριση ορθογωνίων	Rrec	B1.2Δ_3
70. Αναγνώριση κύβων	Rcu	A2.3Δ_κ
71. Αναγνώριση πυραμίδων	Rpy	A2.3Δ_π
72. Αναγνώριση τριγώνων	Rtr	B1.2Δ_1
73. Αναγνώριση τετραγώνων	Rsq	B1.2Δ_2
74. Αναγνώριση τετραπλεύρων	R4s	B1.2Δ_4
75. Αναγνώριση κύκλου	Rcir	B1.2Δ_5

Μέσοι όροι, τυπικές αποκλίσεις και συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών για τα χωρικά έργα που χρησιμοποιήθηκαν στο δομικό μοντέλο (για το σύνολο των μαθητών)

	Δι.1	Δι.1	Δι.1	Π3Δ1	Π3Δ2	Π3Δ3	Π2Δ1	Π2Δ2	Π2Δ3	Ορ1	Ορ2	Κα1	Κα2	Π2Δ4
Δι.1	1													
Δι.2	0.383**	1												
Δι.3	0.294**	0.271**	1											
Π3Δ1	0.239**	0.201**	0.145**	1										
Π3Δ2	0.135**	0.081*	0.177**	0.071*	1									
Π3Δ3	0.232**	0.206**	0.168**	0.338**	0.128**	1								
Π2Δ1	0.331**	0.258**	0.254**	0.305**	0.211**	0.326**	1							
Π2Δ2	0.242**	0.163**	0.176**	0.237**	0.144**	0.260**	0.441**	1						
Π2Δ3	0.247**	0.1895**	0.166**	0.196**	0.135**	0.223**	0.454**	0.395**	1					
Ορ1	0.178**	0.177**	0.136**	0.187**	0.074*	0.158**	0.252**	0.136**	0.134**	1				
Ορ2	0.180**	0.178**	0.103**	0.190**	0.056	0.158**	0.234**	0.164**	0.143**	0.818**	1			
Κα1	0.205**	0.181**	0.119**	0.196**	0.114**	0.171**	0.285**	0.171**	0.183**	0.389**	0.380**	1		
Κα2	0.198**	0.169**	0.110**	0.201**	0.107**	0.180**	0.285**	0.179**	0.188**	0.369**	0.379**	0.792**	1	
Π2Δ4	0.152**	0.152**	0.109**	0.135**	0.143**	0.085**	0.219**	0.133**	0.153**	0.099**	0.109**	0.119**	0.103**	1
Mean	1.71	1.23	1.11	0.71	0.50	0.70	1.60	1.29	1.24	0.45	0.48	0.62	0.56	0.63
SD	0.626	0.812	0.789	0.455	0.500	0.458	0.646	0.776	0.721	0.498	0.500	0.487	0.497	0.589

* Οι σχέσεις είναι στατιστικά σημαντικές σε επίπεδο σημαντικότητας .05
** Οι σχέσεις είναι στατιστικά σημαντικές σε επίπεδο σημαντικότητας .01

Μέσοι όροι, τυπικές αποκλίσεις και συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών για τα γεωμετρικά έργα που χρησιμοποιήθηκαν στο δομικό μοντέλο (για το σύνολο των μαθητών)

	Ακυ	Απυ	Α3Δ	Α¯3Δ	Εσ3Δ	Εα3Δ	Αλ3Δ	Εμ2Δ	Α2Δ	Α2Δ	Εμ2Δ	Πα2Δ	Πβ2Δ	Αανκ	Ανκυκ	ΚΑνκυ	Αν¯3Δ	Αν3Δε	Αν3Δε
Ακυ	1																		
Απυ	0.912**	1																	
Α3Δ	0.570**	0.588**	1																
Α¯3Δ	0.512**	0.501**	0.558**	1															
Εσ3Δ	0.121**	0.134**	0.160**	0.105**	1														
Εα3Δ	0.175**	0.178**	0.213**	0.174**	0.633**	1													
Αλ3Δ	0.130**	0.153**	0.134**	0.077*	0.233**	0.235**	1												
Εμ2Δ	0.140**	0.141**	0.155**	0.068*	0.151**	0.200**	0.165**	1											
Α2Δ	0.311**	0.325**	0.241**	0.198**	0.257**	0.274**	0.287**	0.222**	1										
Α2Δ	0.127**	0.154**	0.133**	0.073*	0.280**	0.292**	0.333**	0.235**	0.319**	1									
Εμ2Δ	0.212**	0.235**	0.260**	0.176**	0.257**	0.318**	0.357**	0.349**	0.461**	0.457**	1								
Πα2Δ	0.209**	0.233**	0.257**	0.139**	0.406**	0.389**	0.383**	0.303.**	0.410**	0.471**	0.586**	1							
Πβ2Δ	0.179**	0.205**	0.217**	0.139**	0.280**	0.268**	0.325**	0.241**	0.351**	0.451**	0.548**	0.554**	1						
Αανκ	0.130**	0.150**	0.139**	0.056	0.318**	0.371**	0.323**	0.253**	0.310**	0.344**	0.269**	0.397**	0.272**	1					
Ανκυκ	0.082**	0.096**	0.144**	0.074*	0.110**	0.156**	0.129**	0.73*	0.067*	0.145**	0.108**	0.143**	0.080*	0.252**	1				
ΚΑνκυ	0.130**	0.177**	0.197**	0.102**	0301**	0.286**	0.293**	0.196**	0.247**	0.259**	0.297**	0.386**	0.292**	0.317**	0.090**	1			
Αν¯3Δ	0.078*	0.080*	0.077*	0.039	0.212**	0.200**	0.129**	0.151**	0.237**	0.177**	0.175**	0.199**	0.20**	0.307**	0.078*	0.193**	1		
Αν3Δε	0.145**	0.150**	0.151**	0.081**	0.292**	0.318**	0.237**	0.188**	0.239**	0.267**	0.293**	0.333**	0.239**	0.465**	0.178**	0.244**	0.299**	1	
Αν3Δε	0.076*	0.095**	0.133**	0.057	0.196**	0.228**	0.181**	0.065*	0.207**	0.254**	0.228**	0.242**	0.191**	0.335**	0.137**	0.132**	-0.017	0.422**	1
Mean	0.4085	0.3907	0.6338	0.6770	0.8113	0.7903	0.6330	0.8505	0.5210	0.4853	0.3519	0.6843	0.4430	0.7533	0.5827	0.5740	0.4657	0.7268	0.3825
SD	0.46928	0.46264	0.37523	0.41964	0.32564	0.31331	0.42129	0.33243	0.24880	0.25995	0.35882	0.34801	0.44604	0.24791	0.36112	0.41677	0.40728	0.33111	0.38156

* Οι σχέσεις είναι στατιστικά σημαντικές σε επίπεδο σημαντικότητας .05

** Οι σχέσεις είναι στατιστικά σημαντικές σε επίπεδο σημαντικότητας .01

Μέσοι όροι, τυπικές αποκλίσεις και συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών για τα γεωμετρικά έργα που χρησιμοποιήθηκαν στο δομικό μοντέλο (μαθητές Δ΄ δημοτικού)

	Ακυ	Απυ	Α3Δ	Α¯3Δ	Εσ3Δ	Εα3Δ	Αλ3Δ	Εμ2Δ	Α2Δ	Α2Δ	Εμ2Δ	Πα2Δ	Πβ2Δ	Αανκ	Ανκυκ	ΚΑνκυ	Αν¯3Δ	Αν3Δε	Αν3Δε
Ακυ	1																		
Απυ	0.902**	1																	
Α3Δ	0.569**	0.599**	1																
Α¯3Δ	0.484**	0.462**	0.515**	1															
Εσ3Δ	0.068	0.087	0.099	0.022	1														
Εα3Δ	0.161**	0.172**	0.154**	0.118*	0.577**	1													
Αλ3Δ	0.175**	0.193**	0.140*	0.051	0.137*	0.152**	1												
Εμ2Δ	0.167**	0.148**	0.180**	0.016	0.102	0.177**	0.123*	1											
Α2Δ	0.305**	0.343**	0.192**	0.118*	0.184**	0.197**	0.186**	0.220**	1										
Α2Δ	0.034	0.056	-0.036	-0.017	0.161**	0.134*	0.158**	0.080	0.077	1									
Εμ2Δ	0.278**	0.282**	0.202**	0.166**	0.130*	0.190**	0.222**	0.297**	0.277**	0.264**	1								
Πα2Δ	0.245**	0.273**	0.232**	0.141**	0.299**	0.275**	0.230**	0.165**	0.342**	0.248**	0.435**	1							
Πβ2Δ	0.146**	0.188**	0.172**	0.076	0.168**	0.128*	0.218**	0.148**	0.183**	0.210**	0.374**	0.428**	1						
Αανκ	0.226**	0.241**	0.152**	0.062	0.224**	0.286**	0.149**	0.207**	0.201**	0.113*	0.157**	0.318**	0.124*	1					
Ανκυκ	0.076	0.100	0.128*	0.083	0.074	0.179**	0.070	0.002	0.014	0.025	0.040	0.070	-0.026	0.203**	1				
ΚΑνκυ	0.168**	0.229**	0.213**	0.033	0.257**	0.202**	0.051	0.071	0.126*	0.137*	0.204**	0.343**	0.262**	0.270**	0.068	1			
Αν¯3Δ	0.077	0.079	0.014	-0.033	0.153**	0.134*	0.021	0.126*	0.142**	0.087	0.121*	0.123*	0.060	0.247**	0.074	0.121*	1		
Αν3Δε	0.235**	0.219**	0.109*	0.064	0.183**	0.257**	0.068	0.165*	0.164**	0.082	0.246**	0.213**	0.116*	0.386**	0.084	0.144**	0.262**	1	
Αν3Δε	0.039	0.042	0.042	0.017	0.127*	0.150**	0.051	-0.083	0.060	0.070	0.153**	0.146**	0.035	0.204**	0.067	0.069	-0.195**	0.359**	1
Mean	0.4021	0.3574	0.5982	0.6845	0.7395	0.7139	0.4262	0.7545	0.4447	0.3373	0.1506	0.4714	0.2359	0.6303	0.5251	0.4142	0.4076	0.6310	0.2846
SD	0.45886	0.45112	0.37874	0.41366	0.36702	0.34245	0.41294	0.41404	0.22724	0.22843	0.22960	0.33929	0.37219	0.25573	0.38828	0.41426	0.39952	0.37299	0.35558

* Οι σχέσεις είναι στατιστικά σημαντικές σε επίπεδο σημαντικότητας .05

** Οι σχέσεις είναι στατιστικά σημαντικές σε επίπεδο σημαντικότητας .01

Μέσοι όροι, τυπικές αποκλίσεις και συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών για τα γεωμετρικά έργα που χρησιμοποιήθηκαν στο δομικό μοντέλο (μαθητές Στ΄ δημοτικού)

	Ακυ	Απυ	Α3Δ	Α¯3Δ	Εσ3Δ	Εα3Δ	Αλ3Δ	Εμ2Δ	Α2Δ	Α2Δ	Εμ2Δ	Πα2Δ	Πβ2Δ	Αανκ	Ανκυκ	ΚΑνκυ	Αν¯3Δ	Αν3Δε	Αν3Δε
Ακυ	1																		
Απυ	0.891**	1																	
Α3Δ	0.568**	0.575**	1																
Α¯3Δ	0.507**	0.508**	0.546**	1															
Εσ3Δ	0.166**	0.178**	0.150**	0.143**	1														
Εα3Δ	0.134**	0.112*	0.146**	0.128*	0.598**	1													
Αλ3Δ	0.053	0.073	0.034	0.005	0.242**	0.184**	1												
Εμ2Δ	0.176**	0.176**	0.100	0.087	0.236**	0.245**	0.106	1											
Α2Δ	0.288	0.253**	0.155**	0.185**	0.280**	0.248**	0.226**	0.207**	1										
Α2Δ	0.165**	0.151**	0.067	0.048	0.310**	0.293**	0.282**	0.338**	0.331**	1									
Εμ2Δ	0.212**	0.201**	0.214**	0.159**	0.287**	0.283**	0.229**	0.317**	0.429**	0.451**	1								
Πα2Δ	0.188**	0.171**	0.147**	0.078	0.504**	0.395**	0.276**	0.318**	0.372**	0.467**	0.538**	1							
Πβ2Δ	0.166**	0.150**	0.070	0.055	0.289**	0.204**	0.278**	0.246**	0.323**	0.479**	0.536**	0.539**	1						
Αανκ	0.106	0.089	0.060	0.031	0.400**	0.391**	0.255**	0.354**	0.358**	0.400**	0.287**	0.421**	0.324**	1					
Ανκυκ	0.077	0.085	0.095	0.053	0.044	0.068	0.104	0.176**	0.017	0.181**	0.117*	0.075	0.170**	0.151**	1				
ΚΑνκυ	0.133*	0.164**	0.185**	0.135*	0.316**	0.33**	0.240**	0.257**	0.299**	0.180**	0.31\9**	0.359**	0.178**	0.341**	0.047	1			
Αν¯3Δ	0.030	0.013	0.030	-0.024	0.228**	0.220**	0.183**	0.223**	0.259**	0.234**	0.244**	0.228**	0.241**	0.332**	-0.001	0.103	1		
Αν3Δε	0.084	0.095	0.099	0.067	0.326**	0.284**	0.182**	0.180**	0.251**	0.297**	0.311**	0.341**	0.262**	0.415**	0.108*	0.306**	0.340**	1	
Αν3Δε	0.099	0.071	0.087	0.070	0.218**	0.245**	0.161**	0.191**	0.202**	0.221**	0.243**	0.234**	0.208**	0.357**	0.062	0.208**	0.016	0.434**	1
Mean	0.3656	0.3654	0.6006	0.6441	0.8506	0.8153	0.7102	0.8799	0.5387	0.5405	0.3265	0.7350	0.4805	0.8401	0.6066	0.7327	0.5706	0.7695	0.3784
SD	0.46056	0.41153	0.38039	0.43068	0.28121	0.29564	0.39111	0.30258	0.24670	0.25502	0.35324	0.32259	0.43450	0.18112	0.34671	0.40035	0.41002	0.30740	0.35915

* Οι σχέσεις είναι στατιστικά σημαντικές σε επίπεδο σημαντικότητας .05

** Οι σχέσεις είναι στατιστικά σημαντικές σε επίπεδο σημαντικότητας .01

Μέσοι όροι, τυπικές αποκλίσεις και συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών για τα γεωμετρικά έργα που χρησιμοποιήθηκαν στο δομικό μοντέλο (μαθητές Β΄ γυμνασίου)

	Ακυ	Απυ	Α3Δ	Α΄3Δ	Εσ3Δ	Εα3Δ	Αλ3Δ	Εμ2Δ	Α2Δ	Α2Δ	Εμ2Δ	Πα2Δ	Πβ2Δ	Αανκ	Ανκυκ	ΚΑνκυ	Αν΄3Δ	Αν3Δε	Αν3Δε
Ακυ	1																		
Απυ	0.941**	1																	
Α3Δ	0.566**	0.581**	1																
Α΄3Δ	0.540**	0.530**	0.621**	1															
Εσ3Δ	0.146**	0.136*	0.224**	0.183**	1														
Εα3Δ	0.231**	0.227**	0.323**	0.302**	0.717**	1													
Αλ3Δ	0.164**	0.154**	0.157**	0.203**	0.226**	0.242**	1												
Εμ2Δ	0.060	0.068	0.124**	0.147**	0.045	0.063	0.060	1											
Α2Δ	0.344**	0.358**	0.329**	0.296**	0.249**	0.298**	0.276**	0.123*	1										
Α2Δ	0.186**	0.212**	0.299**	0.219**	0.276**	0.329**	0.229**	0.106	0.337**	1									
Εμ2Δ	0.180**	0.216**	0.264**	0.243**	0.282**	0.373**	0.315**	0.365**	0.504**	0.312**	1								
Πα2Δ	0.228*	0.241**	0.354**	0.2967**	0.394**	0.419**	0.327**	0.298**	0.361**	0.347**	0.513**	1							
Πβ2Δ	0.217**	0.236**	0.337**	0.295**	0.304**	0.351**	0.210**	0.193**	0.361**	0.374**	0.462**	0.471**	1						
Αανκ	0.095	0.107	0.176**	0.109*	0.285**	0.381**	0.324**	0.080	0.266**	0.268**	0.161**	0.218**	0.164**	1					
Ανκυκ	0.090	0.087	0.193**	0.091	0.169**	0.160**	0.122*	-0.009	0.102	0.125*	0.047	0.190**	-0.010	0.325**	1				
ΚΑνκυ	0.142**	0.160**	0.232**	0.200**	0.261**	0.259**	0.110*	0.206**	0.216**	0.241**	0.318**	0.319**	0.316**	0.127*	0.081	1			
Αν΄3Δ	0.166**	0.170**	0.243**	0.211**	0.236**	0.242**	0.130*	0.083	0.297**	0.154**	0.238**	0.265**	0.298**	0.292**	0.139*	0.242**	1		
Αν3Δε	0.103	0.100	0.227**	0.135*	0.348**	0.360**	0.338**	0.091	0.210**	0.264**	0.203**	0.308**	0.193**	0.522**	0.311**	0.179**	0.281**	1	
Αν3Δε	0.064	0.105	0.194**	0.074	0.194**	0.218**	0.160**	0.001	0.226**	0.284**	0.056	0.140*	0.131*	0.380**	0.223**	0.053	0.107	0.435**	1
Mean	0.4575	0.4488	0.7170	0.7022	0.8433	0.8410	0.7612	0.9164	0.5791	0.5771	0.5765	0.8448	0.6109	0.7888	0.6159	0.5746	0.4189	0.7791	0.4936
SD	0.48466	0.48043	0.35483	0.41351	0.31205	0.28459	0.38065	0.23636	0.25296	0.22913	0.32248	0.26696	0.44477	0.25016	0.34085	0.37366	0.39285	0.28709	0.40268

* Οι σχέσεις είναι στατιστικά σημαντικές σε επίπεδο σημαντικότητας .05

** Οι σχέσεις είναι στατιστικά σημαντικές σε επίπεδο σημαντικότητας .01