ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ

Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ – ΕΝΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

ΚΑΛΛΙΣΘΕΝΗ ΜΑΤΘΑΙΟΥ

Διατριβή η οποία υποβλήθηκε προς απόκτηση διδακτορικού τίτλου σπουδών στο Πανεπιστήμιο Κύπρου

Δεκέμβριος 2014

Σελίδα Εγκυρότητας

Υποψήφιος Διδάκτορας: Καλλισθένη Ματθαίου

Τίτλος Διατριβής: Η Διδασκαλία της Έννοιας της Παραγώγου – Ένα Θεωρητικό Μοντέλο

Η παρούσα Διδακτορική Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για απόκτηση Διδακτορικού Διπλώματος στο Τμήμα Επιστημών της Αγωγής και εγκρίθηκε στις 20 Νοεμβρίου 2014 από τα μέλη της Εξεταστικής Επιτροπής.

Εξεταστική Επιτροπή:

Ερευνητικός Σύμβουλος: Κωνσταντίνος Χρίστου, Καθηγητής

____

Πρόεδρος Επιτροπής: Δήμητρα Πίττα-Πανταζή, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια

____

Εσωτερικό Μέλος Επιτροπής: Αθανάσιος Γαγάτσης, Καθηγητής

____

Εξωτερικό Μέλος Επιτροπής: Θεοδόσης Ζαχαριάδης, Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

____

Εξωτερικό Μέλος Επιτροπής: Δέσποινα Πόταρη, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Πανεπιστημίου Αθηνών

____

Υπεύθυνη Δήλωση Υποψήφιου Διδάκτορα

Η παρούσα διατριβή υποβάλλεται προς συμπλήρωση των απαιτήσεων για απονομή Διδακτορικού Τίτλου του Πανεπιστημίου Κύπρου. Είναι προϊόν πρωτότυπης εργασίας αποκλειστικά δικής μου, εκτός των περιπτώσεων που ρητώς αναφέρονται μέσω βιβλιογραφικών αναφορών, σημειώσεων ή και άλλων δηλώσεων.

Καλλισθένη Ματθαίου

Περίληψη

Η Ανάλυση αποτελεί το βασικό πυρήνα για πολλές επιστήμες και ένα από τα δυσκολότερα κεφάλαια που αναπτύσσονται στη Μέση και στην Ανώτερη εκπαίδευση. Οι μαθητές παρουσιάζουν ιδιαίτερα προβλήματα στην εννοιολογική κατανόηση των εννοιών και στην επίλυση προβλήματος κατά τη διδασκαλία της Ανάλυσης. Η παρούσα έρευνα αποσκοπούσε να συνεισφέρει στην επίλυση προβλημάτων που σχετίζονται με τις δυσκολίες των μαθητών στον τομέα αυτό. Σκοπός της ήταν αφενός η ανάπτυξη και η εμπειρική εγκυροποίηση ενός θεωρητικού μοντέλου που να λαμβάνει υπόψη τους παράγοντες που συνθέτουν τη θεωρητική γνώση των μαθητών, η οποία οδηγεί στην κατανόηση της έννοιας της παραγώγου στα πλαίσια της διδασκαλία της Ανάλυσης. Το μοντέλο βασίστηκε στη θεωρία των Sierpinska, Nnadozie και Okta (2002; Sierpinska, 2005). Αφετέρου, η έρευνα αποσκοπούσε στο σχεδιασμό και την εφαρμογή ενός παρεμβατικού προγράμματος για τη διδασκαλία, στο οποίο να λαμβάνονται υπόψη οι υπάρχουσες θεωρίες μάθησης των μαθηματικών και να εμπλέκονται και να χρησιμοποιούνται οι δυνατότητες της τεχνολογίας σε διαφορετικά πλαίσια της έννοιας της παραγώγου.

Για την υλοποίηση του σκοπού της παρούσας έρευνας αναπτύχθηκε ένα θεωρητικό μοντέλο μέσα από την ανασκόπηση της υπάρχουσας βιβλιογραφίας. Αναπτύχθηκε, επίσης, ένα παρεμβατικό πρόγραμμα στο οποίο ενσωματώθηκε η τεχνολογία για τη διδασκαλία της παραγώγου. Το υλικό που ετοιμάστηκε τέθηκε σε εφαρμογή πιλοτικά σε 88 μαθητές Β’ Λυκείου. Αξιοποιώντας τα αποτελέσματα της πιλοτικής εφαρμογής, τόσο το παρεμβατικό πρόγραμμα όσο και τα εργαλεία που αναπτύχθηκαν για τη μέτρηση της επίδοσης των μαθητών τροποποιήθηκαν αναλόγως. Στη συνέχεια εφαρμόστηκε το διαμορφωμένο παρεμβατικό πρόγραμμα (4 διδασκαλίες των 45’ λεπτών) και χορηγήθηκαν τα τελικά δοκίμια σε 214 μαθητές (97 μαθητές πειραματική ομάδα και 117 ομάδα ελέγχου) Β’ Λυκείου. Τα δοκίμια χορηγήθηκαν αμέσως μετά την εφαρμογή του παρεμβατικού και 1 μήνα μετά για εξέταση του βαθμού διατήρησης της επίδρασης του παρεμβατικού προγράμματος. Τα δεδομένα που συλλέχθηκαν αναλύθηκαν με εξειδικευμένες στατιστικές αναλύσεις (π.χ. επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση, ανάλυση υπολανθανουσών ομάδων).

Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης τόσο αμέσως μετά το παρεμβατικό πρόγραμμα όσο και 1 μήνα μετά έδειξαν ότι το προτεινόμενο μοντέλο παρέχει ένα ολοκληρωμένο πλαίσιο περιγραφής της κατανόησης της έννοιας της

παραγώγου από τους μαθητές της Β’ Λυκείου. Η επιβεβαίωση του μοντέλου δίνει τη δυνατότητα ανάλυσης της θεωρητικής γνώσης των μαθητών για την έννοια της παραγώγου σε 3 μετρήσιμους παράγοντες, τη στοχαστική, τη συστημική και την αναλυτική γνώση, με την τελευταία να επηρεάζει περισσότερο τη θεωρητική γνώση των μαθητών για την έννοια της παραγώγου. Η σταθερότητα της δομής του προτεινόμενου μοντέλου με την πάροδο του χρόνου ενισχύει την καταλληλότητα του μοντέλου και τη σημασία των παραγόντων που προτείνονται για την εξήγηση της θεωρητικής γνώσης των μαθητών.

Μέσα από τα αποτελέσματα επισημαίνεται ότι η ομάδα των μαθητών που παρακολούθησε το παρεμβατικό πρόγραμμα επιτυγχάνει μονιμοποίηση της θετικής διαφοράς της στην αρχική μέτρηση στη συστημική και την αναλυτική γνώση σε σχέση με την ομάδα που παρακολούθησε παραδοσιακή διδασκαλία, μετά και την πάροδο ενός χρονικού διαστήματος, καθώς και βελτίωση στην επίδοσή της στη στοχαστική γνώση.

Τα αποτελέσματα της έρευνας ενισχύουν τον ισχυρισμό για τα θετικά αποτελέσματα που μπορεί να επιφέρει η χρήση της τεχνολογίας στην ερμηνεία και την απεικόνιση των εννοιών παρά στην εκτέλεση χρονοβόρων διαδικασιών. Επίσης, δίνουν την ευχέρεια στους εκπαιδευτικούς να χρησιμοποιήσουν τις δυνατότητες που παρέχει η τεχνολογία για ενίσχυση της εννοιολογικής κατανόησης των μαθητών.

Abstract

Calculus is the core for many sciences and one of the most difficult chapters taught in Secondary and Higher education. Students present particular problems in the conceptual understanding of the meanings and the problem solution during the Calculus teaching. This research aims at contributing to resolving of problems related to the students' difficulties in this area. Its goal was to develop and empirically validate a theoretical model taking into consideration the factors that form the theoretical thinking of the students, which leads to the understanding of the concept of derivatives in the framework of Calculus teaching. The model was based on the theory of Sierpinska, Nnadozie and Okta (2002; Sierpinska, 2005). Moreover, the research aims at designing and implementing an intervention teaching program, in which all the existing theories of learning mathematics were be taken into account, using, at the same time, the technological potentials in various frameworks of the concept of derivative.

For the realization of the goal of the current research, a theoretical model was developed through the existing bibliography. An intervention program was also developed, integrating the technology for the teaching of derivatives. The material was piloted in 88 students of the 2nd Grade of Lyceum. Assessing the results of the pilot implementation, both the intervention program and the tools developed for measuring the performance of the students were modified accordingly. Then, the modified intervention program was implemented (4 teaching periods of 45' each) and the final tests were given to 214 students (97 students in the experimental group and 117 in the control group) of the 2nd Grade of Lyceum. The tests were given immediately after the implementation of the intervention program and after a month to evaluate the extent of the influence of the intervention program. The data collected were analyzed through specialized statistical analyses (e.g. Confirmatory Factor Analysis, Latent Class Analysis).

The results of the confirmatory factor analysis both immediately after the intervention program and a month following the program showed that the suggested model provides a comprehensive framework for the description of the understanding of the concept of derivative by the students at the 2nd Grade of Lyceum. The verification of the model gives the potential to analyze the theoretical thinking of the students for the concept of derivative in three quantifiable factors: reflective, systemic and analytic thinking, with the latter exercising more influence in the theoretical thinking of the students for the concept of derivative. The stability of the structure of the suggested model over time

enhances its suitability and the importance of the factors recommended for the explanation of the theoretical thinking of students.

The results underline that the group of students taught the intervention program accelerates the establishment of its positive difference in the initial measuring in the systemic and analytical thinking, compared to the group taught in the traditional way, after the course of a period of time, and improves the performance in the reflective thinking.

The results of the research reinforce the claim for the positive results of the use of technology in interpreting and representing the concepts, despite the time-consuming procedures. Also, they provide the educators the option to use the potentials of the technology for the reinforcement of the conceptual understanding of students.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της Συμβουλευτικής Επιτροπής για τη βοήθεια που μου παρείχαν κατά τη διάρκεια των σπουδών μου. Οι συμβουλές και τα σχόλιά τους αποτέλεσαν σημαντική ανατροφοδότηση στο σχεδιασμό, την υλοποίηση και τη συγγραφή της παρούσας εργασίας. Ιδιαίτερα, όμως, με όλη μου την αγάπη και την εκτίμηση, ευχαριστώ τον ερευνητικό μου σύμβουλο, Καθηγητή Κωνσταντίνο Χρίστου, που με ανέχτηκε και με άντεξε στη μεγάλη αυτή πορεία, που μου συμπαραστάθηκε και με υποστήριξε για την επίτευξη των προσωπικών μου στόχων.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ακόμα, τους συνάδελφους εκπαιδευτικούς, καθηγητές των μαθηματικών που αφιέρωσαν από το διδακτικό τους χρόνο για να παρέχουν στους μαθητές τους τα δοκίμια που είχαν ετοιμαστεί για τη διεξαγωγή της έρευνας. Ιδιαίτερα ευχαριστώ τους Νικόλα Γιασουμή, Κυριάκο Ματθαίου, Γιώργο Μυλωνά και Μιχάλη Χρυσαφίνη γιατί εφάρμοσαν τα μαθήματα του παρεμβατικού προγράμματος στις τάξεις τους, αφιερώνοντας τον προσωπικό τους χρόνο για τη διαμόρφωση της διδασκαλίας τους.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω την οικογένειά μου που με τη στήριξη και τη συμπαράστασή τους όλα αυτά τα χρόνια κατάφερα να δημιουργήσω τη δική μου οικογένεια, να μεγαλώσω την κόρη μου και ταυτόχρονα να συνεχίσω τις σπουδές μου, φέρνοντας εις πέρας την παρούσα εργασία. Η ανοχή, η υπομονή και οι προτροπές τους τόσο των γονιών μου, όσο και του συζύγου μου, για ό,τι καλύτερο με βοήθησαν να φτάσω ως εδώ και να συνεχίσω την πορεία μου με γερά θεμέλια.

Πίνακας Περιεχομένων

Κατάλογος Πινάκων

Κατάλογος Διαγραμμάτων

Η Διδασκαλία της Έννοιας της Παραγώγου – Ένα Θεωρητικό Μοντέλο

Εισαγωγή

Η Ανάλυση αποτελεί το βασικό πυρήνα για τις θετικές επιστήμες, την εφαρμοσμένη μηχανική και τις οικονομικές και διοικητικές επιστήμες και ένα από τα δυσκολότερα κεφάλαια που αναπτύσσονται στη Μέση και στην Ανώτερη εκπαίδευση, σε προπτυχιακό επίπεδο (Bezuidenhout, 2001; Rasmussen, Marrongelle, & Borba, 2014).

Εισαγωγικά μαθήματα Ανάλυσης αποτελούν μέρος των αναλυτικών προγραμμάτων της Μέσης Εκπαίδευσης σε πολλές χώρες, τα οποία επιλέγουν να παρακολουθήσουν μαθητές με καλό υπόβαθρο στα μαθηματικά λόγω του ότι είναι προϋπόθεση για την εισαγωγή τους στα πανεπιστήμια. Επιπλέον, αρκετές έρευνες δείχνουν ότι οι μαθητές βρίσκονται αντιμέτωποι με έννοιες της Ανάλυσης και μετά τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Artique, Batanero, & Kent, 2007; Harel, Selden, & Selden, 2006). Για την αντιμετώπιση των διάφορων προκλήσεων της διδασκαλίας της Ανάλυσης έχουν εξεταστεί διάφορες καινοτόμες διδακτικές προσεγγίσεις οι οποίες χρησιμοποιούν την τεχνολογία για την ενίσχυση της κατανόησης των μαθητών (Biza, 2011; Tall, Smith, & Piez, 2008).

Βασικός σκοπός της διδασκαλίας της Ανάλυσης είναι η ανάπτυξη εννοιολογικής κατανόησης του μαθηματικού περιεχομένου (έννοιες, σύμβολα, αλγόριθμοι, κτλ.). Όπως οι Zazkis, Liljedahl και Chernoff (2008) αναφέρουν, ο ρόλος του εκπαιδευτικού κατά τη μαθησιακή διαδικασία είναι πολύ σημαντικός για την επιλογή των κατάλληλων παραδειγμάτων και κυρίως για την ανάπτυξη των εξειδικευμένων στρατηγικών μάθησης από τους μαθητές ανάλογα με το περιεχόμενο διδασκαλίας. Ωστόσο, συχνά καθηγητές μαθηματικών εκφράζουν ανησυχίες για την επιτυχία υλοποίησης του σκοπού της Ανάλυσης και κυρίως σε σχέση με την οικοδόμηση εννοιολογικής και συσχετιστικής κατανόησης των εννοιών της Ανάλυσης από τους μαθητές (Bezuidenhout, 2001; Ferini-Mundy & Graham, 1991; Tall, 1991).

Οι μαθητές ανταποκρίνονται σε τυποποιημένες ερωτήσεις και παρουσιάζουν δυσκολίες να ανταποκριθούν σε μη τυποποιημένες καταστάσεις. Προηγούμενες εμπειρίες τους είναι δυνατόν να έχουν αρνητικές επιπτώσεις στην κατανόηση των εννοιών της Ανάλυσης κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών. Για παράδειγμα, έρευνες έχουν δείξει ότι η προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών για την εφαπτομένη του κύκλου επηρεάζει την κατανόησή τους σχετικά με την εφαπτομένη καμπύλης (Biza, Christou, & Zachariades, 2008; Castela, 1995; Downs & Mamona-Downs, 2000; Tall, 1987). Ταυτόχρονα, τα ίδια τα μαθηματικά ως αντικείμενο, ακόμα και αν τυποποιηθούν σε ένα συνεπή διδακτικό πλαίσιο, είναι δυνατόν να προκαλέσουν περαιτέρω δυσκολίες (Tall, 1991).

Πέρα από τα προβλήματα που παρουσιάζουν οι μαθητές στην κατανόηση εννοιών της Ανάλυσης, προβλήματα παρατηρούνται και στις μεθόδους και τεχνικές διδασκαλίας, όπως επίσης και στη μονομερή επικέντρωση κατά τη διδασκαλία της Ανάλυσης είτε σε αλγοριθμικούς και αλγεβρικούς υπολογισμούς είτε σε θεωρητικά θέματα (Cornu, 1991).

Το Πρόβλημα και ο Σκοπός της Εργασίας

Μεταξύ των ερευνητών της μαθηματικής εκπαίδευσης έχουν προταθεί διάφορες θεωρίες για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές και την οικοδόμηση της γνώσης με βάση αυτές τις έννοιες. Σύμφωνα με πρόσφατες θεωρίες στη διδασκαλία των μαθηματικών, υπάρχουν δύο τρόποι που μπορούν να οδηγήσουν στην απόκτηση της γνώσης στα μαθηματικά. Ο ένας αφορά στη φυσική ή νοερή μετατροπή αντικειμένων που οδηγούν στην οικοδόμηση νέων αντικειμένων. Για παράδειγμα, στη θεωρία APOS (Action–Process–Object-Schema) μια δράση εσωτερικεύεται και γίνεται διαδικασία στην οποία το άτομο έχει ενσυνείδητο έλεγχο και την οποία μετατρέπει κατάλληλα και δημιουργεί νέα αντικείμενα με την ενθυλάκωση μιας διαδικασίας (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews, & Thomas, 1996; Dubinsky, 1994). Όμοια, στη θεωρία της Sfard (1991), το άτομο μπορεί να δει μια νέα ολότητα ως ένα ολοκληρωμένο αντικείμενο.

Ο δεύτερος τρόπος απόκτησης της μαθηματικής γνώσης σχετίζεται με τη θεωρία των Gray και Tall (2001), σύμφωνα με την οποία η φυσική ή νοερή μετατροπή αντικειμένων αρχίζει από την αντίληψη του αντικειμένου και τη δράση του ατόμου με το αντικείμενο. Οι Gray και Tall ονομάζουν το εξεταζόμενο αντικείμενο ενσωματωμένο αντικείμενο. Τα ενσωματωμένα αντικείμενα αποτελούν οι νοερές αντιλήψεις της αντικειμενικής πραγματικότητας του ατόμου, οι οποίες μέσα από μετασχηματισμούς διαμορφώνονται σε αφηρημένες έννοιες, που δεν αναφέρονται πλέον σε συγκεκριμένα αντικείμενα του πραγματικού κόσμου.

Οι θεωρίες μάθησης για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές και την οικοδόμηση της γνώσης με χρήση αυτών των εννοιών βοηθούν στη διαμόρφωση της διδασκαλίας και των μεθόδων προσέγγισης των μαθηματικών εννοιών. Εντούτοις, θεωρούμε ότι είναι σημαντικό να προταθεί ένα θεωρητικό μοντέλο, το οποίο θα αναλύει με ποσοτικά δεδομένα τις συνιστώσες της θεωρητικής γνώσης μιας έννοιας, ώστε να είναι μετρήσιμη η συνεισφορά της κάθε συνιστώσας στην αντίληψη των μαθητών για την έννοια που καλούνται να κατανοήσουν κατά τη διδασκαλία. Το θεωρητικό μοντέλο που διαμορφώθηκε στην παρούσα μελέτη είχε αυτή την κατεύθυνση. Στόχος ήταν ο εντοπισμός τόσο των παραγόντων που συνθέτουν τη θεωρητική γνώση των μαθητών, όσο και του βαθμού συνεισφοράς τους στην απόκτηση της θεωρητικής γνώσης για την έννοια της παραγώγου στην Ανάλυση. Για την επιτυχία αυτού του στόχου, η μελέτη βασίστηκε κυρίως στη θεωρία των Sierpinska, Nnadozie και Okta (2002) για τη θεωρητική γνώση στη γραμμική άλγεβρα, καθώς και στις θεωρίες που έχουν αναπτυχθεί τα τελευταία χρόνια στα πλαίσια της μαθηματικής εκπαίδευσης αναφορικά με παράγοντες που είναι σημαντικοί για την ανάπτυξη της αντίληψης των μαθητών για τις μαθηματικές έννοιες της Ανάλυσης.

Οι Sierpinska et al. (2002) αναφέρονται στον ορισμό της θεωρητικής γνώσης ως αντικείμενο με αξιωματικό χαρακτήρα. Ο ορισμός της θεωρητικής γνώσης είναι εμπνευσμένος από εμπειρική έρευνα στη μαθηματική γνώση των μαθητών αλλά δεν διαχωρίζεται από τις άλλες λειτουργίες του ανθρώπινου οργανισμού (όπως είναι ο μεταβολισμός, η όραση κτλ.). Ταυτόχρονα, αναπτύσσουν ένα θεωρητικό μοντέλο ανάπτυξης μαθηματικών εννοιών και επεξήγησης της γνώσης των μαθητών κατά τη μαθηματική διαδικασία, το οποίο αναφέρεται στο στοχαστικό, στο συστηματικό και στον αναλυτικό τρόπο σκέψης και θεωρείται χρήσιμο ως μεθοδολογικό ή αναλυτικό εργαλείο. Η διάκριση αυτή της θεωρητικής γνώσης των μαθητών οδηγεί στη θέση ότι αποτελεί τη γνώση στην οποία ο τρόπος σκέψης και τα αντικείμενά του ανήκουν σε διακριτά επίπεδα δράσης και της οποίας σκοπός είναι η παραγωγή συνεπών εσωτερικών εννοιολογικών συστημάτων, βασισμένων σε ειδικά δημιουργημένα σημειακά συστήματα (Sierpinska, 2005).

Για την ενίσχυση των αποτελεσμάτων των μαθητών στους παράγοντες που συνθέτουν την ανάπτυξη της θεωρητικής γνώσης σε έννοιες της Ανάλυσης είναι σημαντικό να διαμορφωθεί η διδασκαλία ώστε να αποσκοπεί στη βελτίωση της αντίληψης των μαθητών για αυτές της έννοιες. Ερευνητές υποστηρίζουν ότι οι εκπαιδευτικοί μπορούν να χρησιμοποιήσουν τις δυνατότητες που παρέχει η τεχνολογία για την επίλυση των προβλημάτων των μαθητών που παρουσιάζονται στην εννοιολογική κατανόηση των εννοιών και στην επίλυση προβλήματος κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών (Barak & Dory, 2011; Hahkioniemi, 2006a; Heid, 1988; Hillel, 1993). Η ενσωμάτωση της τεχνολογίας των ηλεκτρονικών υπολογιστών, κυρίως των ηλεκτρονικών συστημάτων άλγεβρας (CAS - Computer Algebra System) τα οποία δίνουν δυνατότητα πειραματικών προσεγγίσεων, χρησιμοποιώντας γραφική, αριθμητική και συμβολική αναλυτική ικανότητα, συμβάλλει στη διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών (Fuchs, 2001; Zbiek, Hied, Blume, & Dick, 2007; Zeller & Barzel, 2010).

Ο υπολογισμός, η απεικόνιση και η δυνατότητα δυναμικής κίνησης που μας δίνουν οι υπολογιστές μπορούν να αποτελέσουν βάση στην ανάπτυξη νέων προσεγγίσεων στη διδασκαλία των εννοιών της Ανάλυσης και να βοηθήσουν τους μαθητές να υπερβούν τις δυσκολίες στην κατανόηση σημαντικών εννοιών. Επιπλέον, προβάλλεται η άποψη ότι οι αδύνατοι μαθητές μπορούν να ωφεληθούν από την άμεση ανατροφοδότηση που παρέχουν τα CAS, αφού είναι δυνατόν να ξεπεράσουν τις στερεότυπες διαδικασίες και να οδηγηθούν σε πιο σύνθετους στόχους όπως την ανάπτυξη συνδέσεων μεταξύ μιας αλγεβρικής έκφρασης και μιας γραφικής παράστασης (Kuzler, 2000).

Οι Asiala, Cottrill, Dubinsky και Schwingendorf (1997), βασισμένοι στη θεωρία του Dubinsky (APOS – theory), περιγράφουν τον αναλυτικό και το γραφικό τρόπο με τον οποίο οικοδομούν οι μαθητές την έννοια της παραγώγου. Οι μαθητές που διδάχθηκαν έννοιες της Ανάλυσης, βασισμένοι σε αυτή τη θεωρία, παρουσίασαν μεγαλύτερη επιτυχία σε σχέση με αυτούς που παρακολούθησαν παραδοσιακή διδασκαλία (Asiala et al., 1997). Τα ίδια αποτελέσματα παρουσιάζουν στην έρευνα τους οι Lehtinen και Repo (1996), όπου εφάρμοσαν σειρά μαθημάτων ανάλυσης, βασισμένων στη θεωρία APOS και κατά τα οποία έδιναν έμφαση σε διαφορετικές αναπαραστάσεις της έννοιας της παραγώγου.

Σύμφωνα με τους Kendal και Stacey (2000), οι εκπαιδευτικοί που δίνουν έμφαση σε συγκεκριμένες αναπαραστάσεις της έννοιας της παραγώγου, επηρεάζουν τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές ανταποκρίνονται σε διάφορες αναπαραστάσεις της έννοιας. Σύμφωνα με τους Watson και Tall (2002), οι μαθητές που παρακολουθούν διδασκαλία βασισμένη σε αναπαραστάσεις που οδηγούν στην αντίληψη και κατανόηση της έννοιας έχουν καλύτερα αποτελέσματα από τους μαθητές που παρακολουθούν τυποποιημένη διδασκαλία. Τα αποτελέσματα οφείλονται στο γεγονός ότι οι αναπαραστάσεις παρουσιάζουν στους μαθητές διαφορετικές διαδικασίες που φέρουν το ίδιο αποτέλεσμα με σύμβολα που προσλαμβάνονται είτε ως δράσεις είτε ως έννοιες.

Η παρούσα μελέτη αποσκοπεί στο συνδυασμό των σημαντικότερων ερευνητικών αποτελεσμάτων της μαθηματικής παιδείας σε σχέση με την ενσωμάτωση της εκπαιδευτικής τεχνολογίας στη διδασκαλία των μαθηματικών ώστε να προτείνει συγκεκριμένο παρεμβατικό πρόγραμμα για τη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου στην Ανάλυση. Συγκεκριμένα, η οργάνωση του παρεμβατικού προγράμματος για τη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου, στηρίχτηκε σε μεγάλο βαθμό στις ευκαιρίες που δίνουν τα δυναμικά συστήματα CAS (Geogebra και μαθηματικά εφαρμογίδια που ενσωματώνουν τα χαρακτηριστικά των CAS) για δημιουργία μαθηματικών δραστηριοτήτων που αφορούν στην αντίληψη, στην απεικόνιση-αναπαράσταση, στη γενίκευση, στο συμβολισμό και στη μοντελοποίηση και στην αλληλεπίδραση των σχετικών εφαρμογίδιων.

Βασικός σκοπός της παρούσας μελέτης είναι η ανάπτυξη ενός θεωρητικού μοντέλου για τη μάθηση και τη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου στην Ανάλυση. Το μοντέλο βασίζεται στη θεωρία των Sierpinska, Nnadozie και Okta (2002; Sierpinska, 2005) για τη θεωρητική γνώση, σε συνδυασμό με στοιχεία από τις υπάρχουσες θεωρίες μάθησης για το σχεδιασμό του προτεινόμενου παρεμβατικού προγράμματος, το οποίο εμπλέκει ταυτόχρονα τη χρήση και τις δυνατότητες που δίνει η τεχνολογία στη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου στην Ανάλυση.

Συγκεκριμένα, οι στόχοι της παρούσας μελέτης είναι:

1. Η αναγνώριση και η περιγραφή των θεωρητικών μοντέλων διδασκαλίας των μαθηματικών.
2. Η διερεύνηση της επίδρασης της τεχνολογίας στην ανάπτυξη της αντίληψης των μαθητών για την έννοια της παραγώγου και στην ανάπτυξη της ικανότητάς εφαρμογής της έννοιας σε διαφορετικά πλαίσια.
3. Η ανάπτυξη ενός παρεμβατικού προγράμματος για τη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου το οποίο θα λαμβάνει υπόψη τις υπάρχουσες θεωρίες μάθησης και τις δυνατότητες που δίνει η τεχνολογία στους μαθητές και στη διαμόρφωση της διδασκαλίας.
4. Η ανάπτυξη και η εμπειρική επιβεβαίωση ενός θεωρητικού μοντέλου για τη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου το οποίο θα λαμβάνει υπόψη τις μεθόδους που αναπτύσσουν οι μαθητές για την οικοδόμηση της έννοιας.

Τα ερευνητικά ερωτήματα που απαντώνται στην παρούσα μελέτη είναι τα εξής:

1. Σε ποιο βαθμό επιβεβαιώνεται το προτεινόμενο μοντέλο για τη θεωρητική γνώση στη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου στην Ανάλυση;
2. Ποιες συνιστώσες (παράγοντες) αποτελούν τη θεωρητική γνώση των μαθητών για την έννοια της παραγώγου στην Ανάλυση και πόσο συνεισφέρει ο κάθε παράγοντας στη διαμόρφωση της θεωρητικής γνώσης των μαθητών για τη συγκεκριμένη έννοια;
3. Το προτεινόμενο θεωρητικό μοντέλο παραμένει σταθερό με την πάροδο του χρόνου;

4. Ποιες κατηγορίες μαθητών μπορούν να δημιουργηθούν με βάση τη θεωρητική τους γνώση και την αντίληψή τους για την έννοια της παραγώγου;
5. Υπάρχουν διαφορές στα αποτελέσματα στους παράγοντες που συνθέτουν τη θεωρητική γνώση για την παράγωγο των μαθητών της κάθε κατηγορίας που διαμορφώθηκε όταν συμμετέχουν ή όχι στο παρεμβατικό πρόγραμμα;
6. Υπάρχουν διαφορές στα αποτελέσματα στους παράγοντες που συνθέτουν τη θεωρητική γνώση για την παράγωγο των μαθητών της κάθε κατηγορίας όταν συμμετέχουν ή όχι στο παρεμβατικό πρόγραμμα μετά την πάροδο ενός χρονικού διαστήματος;

Σημασία και Πρωτοτυπία της Διατριβής

Η πρωτοτυπία αυτής της μελέτης έγκειται στην ανάπτυξη και τον έλεγχο ενός νέου θεωρητικού μοντέλου για τους παράγοντες που συνθέτουν τη θεωρητική γνώση των μαθητών της Β’ Λυκείου, της έννοιας της παραγώγου στην Ανάλυση και στην ανάπτυξη ενός σχετικού με το θεωρητικό μοντέλο παρεμβατικού προγράμματος το οποίο θα εμπλέκει ταυτόχρονα τη χρήση και τις δυνατότητες της τεχνολογίας στη διδασκαλία. Το θεωρητικό πλαίσιο της παρούσας μελέτης στηρίζεται στη θεωρία της Sierpinska και των συνεργατών της (Sierpinska, 2005; Sierpinska et al., 2002) για τη θεωρητική γνώση στη γραμμική άλγεβρα και στις θεωρίες που έχουν αναπτυχθεί τα τελευταία χρόνια στα πλαίσια τη μαθηματικής εκπαίδευσης και συνδυάζει τα σημαντικότερα ερευνητικά αποτελέσματα της μαθηματικής παιδείας σε σχέση με την ενσωμάτωση της εκπαιδευτικής τεχνολογίας στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Καινοτομία του προτεινόμενου θεωρητικού μοντέλου αποτελεί η δυνατότητα εντοπισμού και περιγραφής τόσο των παραγόντων που συνθέτουν τη θεωρητική γνώση των μαθητών, όσο και του βαθμού συνεισφοράς τους στην απόκτηση της θεωρητικής γνώσης για την έννοια της παραγώγου στην Ανάλυση. Είναι δηλαδή εφικτή η ποσοτική ανάλυση των παραγόντων που συνθέτουν τη θεωρητική γνώση της υπό εξέταση έννοιας, ώστε να είναι μετρήσιμη η συνεισφορά του κάθε παράγοντα στην απόκτηση της θεωρητικής γνώσης των μαθητών για την έννοια της παραγώγου στην Ανάλυση.

Με την επιβεβαίωση της ύπαρξης του προτεινόμενου μοντέλου εντοπίζονται οι αναγκαίοι παράγοντες που πρέπει να αναπτύξουν οι μαθητές, ώστε να εστιαστεί η διδασκαλία σε αυτούς με βάση και την επίδρασή που παρουσιάζουν στην απόκτηση της θεωρητικής γνώσης των μαθητών για την έννοια της παραγώγου στην Ανάλυση. Το σημαντικό αυτό δεδομένο αναμένεται να συμβάλει στην ανάπτυξη μιας θεωρίας για τη διδασκαλία της Ανάλυσης και κυρίως στη διδακτική της έννοιας της παραγώγου. Παράλληλα, με την ένταξη της τεχνολογίας στη διδασκαλία γίνεται προσπάθεια για υπερπήδηση των προβλημάτων που συνδέονται με τη δυσκολία κατανόησης βασικών εννοιών της Ανάλυσης καθώς και με τη διάσταση που υπάρχει μεταξύ του «αλγεβρικού» και του «αναλυτικού» τρόπου σκέψης. Τα αποτελέσματα της εφαρμογής του παρεμβατικού προγράμματος μπορούν να αποτελέσουν εφαλτήριο για αναθεώρηση των διδακτικών μεθόδων και βιβλίων των μαθηματικών στη βάση των νέων αναλυτικών προγραμμάτων του Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού της Κύπρου (Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο & Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων, 2010α).

Δομή της Μελέτης

Η παρούσα μελέτη έχει ως στόχο την ανάπτυξη ενός νέου θεωρητικού μοντέλου με παράγοντες που συνθέτουν τη θεωρητική γνώση των μαθητών για την έννοια της παραγώγου στη διδασκαλία της Ανάλυσης και το σχεδιασμό παρεμβατικού προγράμματος, το οποίο θα εμπλέκει ταυτόχρονα τη χρήση και τις δυνατότητες που μπορεί να δώσει η τεχνολογία στη διδασκαλία. Στο πρώτο κεφάλαιο έχουν παρουσιαστεί ορισμένα εισαγωγικά στοιχεία αναφορικά με τις θεωρίες μάθησης των μαθηματικών και έχει περιγραφεί αναλυτικά ο σκοπός, η σημασία και η πρωτοτυπία της διατριβής. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με τους εννοιολογικούς ορισμούς.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας, μέσα από την οποία αναφέρονται οι διάφορες θεωρίες μάθησης που έχουν προκύψει για να εξηγήσουν και να προβλέψουν τη γνωστική ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης στην εκπαίδευση των μαθηματικών, κατά τη διάρκεια των τελευταίων ετών. Ιδιαίτερη αναφορά γίνεται στη θεωρία APOS του Ed Dubinsky, στη θεωρία της Πραγμάτωσης της Anna Sfard, στη θεωρία των Τριών Κόσμων των Μαθηματικών του David Tall και στη θεωρία της Anna Sierpinska για τη θεωρητική γνώση. Το μοντέλο που αναπτύσσουν οι Sierpinska et al. (2002) θα χρησιμοποιηθεί στα επόμενα κεφάλαια, μαζί με στοιχεία από τις άλλες θεωρίες που γίνεται ιδιαίτερη αναφορά, για να αποτελέσει στη συνέχεια βάση για τη διαμόρφωση της έρευνας που θα ακολουθήσει και για το προτεινόμενο μοντέλο μάθησης για τη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου στην Ανάλυση.

Στη συνέχεια στο ίδιο κεφάλαιο συζητούνται τα ερευνητικά αποτελέσματα από την εκπαιδευτική τεχνολογία και οι δυνατότητες που παρέχονται στη διδασκαλία της Ανάλυσης. Τέλος, γίνεται αναφορά στη διδασκαλία της Ανάλυσης, στις παρανοήσεις, παρερμηνείας και στα λάθη που παρουσιάζονται κατά τη διδασκαλία της Ανάλυσης και ιδιαίτερα κατά τη διδασκαλία των παραγώγων καθώς και στην έννοια της παραγώγου και πως αυτή παρουσιάζεται στα βιβλία μαθηματικών κατεύθυνσης της Β’ Λυκείου της Κύπρου.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε για την υλοποίηση του σκοπού της έρευνας και για την απάντηση των ερευνητικών ερωτημάτων. Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται αναλυτικά τα στάδια που ακολουθεί ο σχεδιασμός του ερευνητικού μέρους της εργασίας. Γίνεται εκτενής αναφορά στις διάφορες φάσεις που ακολουθεί η έρευνα, στο δείγμα, στα εργαλεία μέτρησης, στην κωδικοποίηση και βαθμολόγηση των απαντήσεων των μαθητών στα δοκίμια που αναπτύσσονται και στις στατιστικές αναλύσεις που χρησιμοποιούνται για την απάντηση των ερευνητικών ερωτημάτων. Ταυτόχρονα, περιγράφεται το παρεμβατικό πρόγραμμα και ο τρόπος διδασκαλίας που ακολουθεί η κάθε ομάδα μαθητών.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας με τη βοήθεια στατιστικών αναλύσεων που διενεργήθηκαν ώστε να απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα. Γίνεται εκτενής αναφορά στα ευρήματα με βάση τη σειρά των ερευνητικών ερωτημάτων.

Στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται συζήτηση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν με βάση τα ερευνητικά ερωτήματα. Ταυτόχρονα, παρουσιάζεται μια προσπάθεια για επεξήγηση των ευρημάτων και συσχέτισή τους με άλλες έρευνες.

Τέλος, στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της εργασίας και γίνονται εισηγήσεις για περαιτέρω έρευνα.

Εννοιολογικοί Ορισμοί

Για τους σκοπούς της παρούσας μελέτης θεωρούμε ότι ο όρος *θεωρητική γνώση* αναφέρεται στον ορισμό που δίνουν στη θεωρία τους, οι Sierpinska et al. (2002) εμπνευσμένοι από την εμπειρική έρευνα στη μαθηματική γνώση των μαθητών. Οι ερευνητές διακρίνουν αυτή τη θεωρητική γνώση των μαθητών ως τη γνώση στην οποία ο τρόπος σκέψης και τα αντικείμενά του, ανήκουν σε διακριτά επίπεδα δράσης. Ταυτόχρονα, σκοπός της θεωρητικής γνώσης είναι η παραγωγή συνεπών εσωτερικών εννοιολογικών συστημάτων, βασισμένων σε ειδικά δημιουργημένα σημειακά συστήματα (Sierpinska, 2005). Οι Sierpinska et al. (2002) αναπτύσσουν ένα θεωρητικό μοντέλο ανάπτυξης μαθηματικών εννοιών και επεξήγησης της γνώσης των μαθητών κατά τη μαθηματική διαδικασία (τη θεωρητική γνώση), το οποίο αναφέρεται στη *στοχαστική*, στη *συστηματική* και στην *αναλυτική* γνώση.

Η *στοχαστική γνώση* «σκέφτεται για τη γνώση» (Sierpinska et al., 2002). Η γνώση θεωρείται στοχαστική δεδομένου ότι δεν παίρνει τεχνικές ή διαδικασίες για συγκεκριμένες δράσεις ως δεδομένες αλλά τις θεωρεί πάντα ανοικτές για διερεύνηση και αλλαγή (Sierpinska, 2005).

Η *συστημική γνώση,* από την άλλη είναι η γνώση για τα συστήματα των εννοιών, όπου η κατανόηση μιας έννοιας βασίζεται στις σχέσεις της με άλλες έννοιες (Sierpinska et al., 2002). Ο συστημικός χαρακτήρας της θεωρητικής γνώσης συνεπάγεται την ευαισθησία στις αντιφάσεις, η οποία ενισχύει την ύπαρξη των εννοιολογικών συστημάτων. Η συστημική γνώση είναι βασισμένη στην προσδιοριστική και υποθετική γνώση. (Sierpinska, Bobos, & Pruncut, 2011).

Τέλος, η *αναλυτική γνώση* είναι η γνώση που δεν επηρεάζεται μόνο από τα σημειακά συστήματα, αλλά παίρνει τα σημειακά συστήματα ως αντικείμενο στοχασμού και επινοήσεων οπότε έχει μια αναλυτική σχέση με τα ίδια τα σημειακά συστήματα (Sierpinska, 2005).

Θεωρητικό Πλαίσιο

Εισαγωγή

Η έρευνα στην εκπαίδευση των μαθηματικών ενισχύεται με διάφορους τρόπους όταν βασίζεται σε μια θεωρητική οπτική. Η ανάπτυξη και η οικοδόμηση μιας θεωρητικής προσέγγισης για την εκπαίδευση στα μαθηματικά πρέπει να είναι μέρος μιας προσπάθειας για να κατανοήσουμε τον τρόπο μάθησης του αντικειμένου καθώς και τον τρόπο που ένα εκπαιδευτικό αναλυτικό πρόγραμμα μπορεί να βοηθήσει αυτή τη μάθηση. Ταυτόχρονα, οφείλει να επικεντρώνεται στην εξεύρεση τρόπου με τον οποίο μια θεωρία μάθησης των μαθηματικών μπορεί να βοηθήσει να αντιληφθούμε τη διαδικασία μάθησης, παρέχοντάς τις απαραίτητες επεξηγήσεις των φαινομένων που παρατηρούνται στους μαθητές, οι οποίοι προσπαθούν να κατανοήσουν τις δομές των μαθηματικών εννοιών. Επίσης, οφείλει να δίνει εισηγήσεις για την παιδαγωγική κατεύθυνση που μπορεί να βοηθήσει τη διαδικασία μάθησης.

Όπως αναφέρουν οι Dubinsky και McDonald (2001), οι θεωρίες στην εκπαίδευση των μαθηματικών μπορούν

- να υποστηρίξουν την πρόβλεψη,
- να έχουν επεξηγηματική δυνατότητα,
- να έχουν ισχύ σε ένα ευρύ πεδίο φαινομένων,
- να βοηθήσουν στην οργάνωση της σκέψης του ατόμου για σύνθετα, αλληλοσχετιζόμενα φαινόμενα,
- να χρησιμοποιηθούν ως εργαλείο για ανάλυση δεδομένων, και
- να παρέχουν μια γλώσσα για επικοινωνία των ιδεών στη μάθηση που υπερβαίνει τις εξωτερικές περιγραφές.

Έχουν προταθεί πολλές θεωρίες στην πορεία του χρόνου για τη μάθηση, την κατανόηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών. Σύμφωνα με πρόσφατες θεωρίες στη διδασκαλία των μαθηματικών, υπάρχουν δύο τρόποι που μπορούν να οδηγήσουν στην απόκτηση της γνώσης στα μαθηματικά. Ο ένας αφορά στη φυσική ή νοερή μετατροπή αντικειμένων που οδηγούν στην οικοδόμηση νέων αντικειμένων (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews, & Thomas, 1996; Dubinsky, 1994; Sfard, 1991). Ο δεύτερος σχετίζεται με τη θεωρία των Gray και Tall (2001), σύμφωνα με την οποία η φυσική ή νοερή μετατροπή αντικειμένων αρχίζει από την αντίληψη του αντικειμένου και τη δράση του ατόμου με το αντικείμενο.

Στα πλαίσια αυτού του κεφαλαίου γίνεται αρχικά ανασκόπηση των θεωρητικών προσεγγίσεων που έχουν παρουσιαστεί τις τελευταίες δεκαετίες και έχουν οδηγήσει στις διάφορες θεωρίες μάθησης για τα μαθηματικά και στη συνέχεια γίνεται ιδιαίτερη αναφορά σε θεωρίες που αντιπροσωπεύουν τους δύο τρόπους απόκτησης της μαθηματικής γνώσης. Έχουν επιλεγεί αντιπροσωπευτικές θεωρίες των δύο αυτών τρόπων, οι οποίες θεωρείται ότι είναι οι επικρατέστερες κατά τη μαθησιακή διαδικασία την παρούσα χρονική στιγμή και ειδικότερα κατά τη διδασκαλία των εννοιών της Ανάλυσης. Πιο συγκεκριμένα, μετά την ιστορική αναφορά στις διάφορες θεωρίες μάθησης των μαθηματικών παρουσιάζονται εκτενώς η θεωρία APOS του Ed Dubinsky, η θεωρία της Πραγμάτωσης της Anna Sfard και η θεωρία των Τριών Κόσμων των Μαθηματικών του David Tall. Ταυτόχρονα, για την υλοποίηση του σκοπού της έρευνας που αφορά στην πρόταση ενός θεωρητικού μοντέλου, το οποίο αναλύει με ποσοτικά δεδομένα τις συνιστώσες της θεωρητικής γνώσης μιας έννοιας, παρουσιάζεται εκτενώς και η θεωρία της Anna Sierpinska για τη θεωρητική γνώση. Το μοντέλο που αναπτύσσουν οι Sierpinska et al. (2002) για τη θεωρητική γνώση στη γραμμική άλγεβρα σε συνδυασμό με στοιχεία από τις υπάρχουσες θεωρίες μάθησης που παρουσιάζονται σε αυτό το κεφάλαιο, χρησιμοποιείται στα επόμενα κεφάλαια ως βάση για την έρευνα που ακολουθεί και για το προτεινόμενο μοντέλο μάθησης και το προτεινόμενο παρεμβατικό πρόγραμμα για τη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου στην Ανάλυση.

Για τη διερεύνηση της υπόθεσης, που αναπτύσσεται στην παρούσα έρευνα, ότι οι δυνατότητες που προσφέρει η τεχνολογία μπορούν να οδηγήσουν τους μαθητές σε καλύτερα αποτελέσματα γίνεται στη συνέχεια αναφορά και συζητούνται τα ερευνητικά αποτελέσματα από την εκπαιδευτική τεχνολογία και τις δυνατότητες που παρέχει στη διδασκαλία της Ανάλυσης και ιδιαίτερα στη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου. Ακολούθως, γίνεται αναφορά στη διδασκαλία της Ανάλυσης, στις παρανοήσεις, παρερμηνείας και στα λάθη που παρουσιάζονται κατά τη διδασκαλία της Ανάλυσης και ιδιαίτερα κατά τη διδασκαλία των παραγώγων καθώς και στην έννοια της παραγώγου και πως αυτή παρουσιάζεται στα βιβλία μαθηματικών κατεύθυνσης της Β’ Λυκείου της Κύπρου.

Θεωρίες Μάθησης – Θεωρητικές Προσεγγίσεις

Μέσα από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας που αφορά στη μαθηματική, στη ψυχολογική και στη φιλοσοφική πτυχή των θεωριών εντοπίζονται αρκετές διακρίσεις δύο ή τριών τύπων απόκτησης της γνώσης-σκέψης-κατανόησης. Η εστίαση των ερευνών και της ανάλυσης σε θεμελιώδεις δομές μάθησης παρέχει μια εμπειρική βάση από την οποία οι σημαντικές ερωτήσεις σχετικά με την μάθηση των μαθηματικών μπορούν και πρέπει να εξεταστούν (Pegg & Tall, 2005).

Στις αρχές τις δεκαετίας του ’60 η ψυχολογία χαρακτηριζόταν από τη θεωρία του συμπεριφορισμού, με τη διδασκαλία των μαθηματικών κατά ένα μεγάλο μέρος να αφήνεται ουσιαστικά στα χέρια των εκπαιδευτικών. Μόνο ορισμένοι σημαντικοί θεωρητικοί, όπως ο Piaget (1965), ο Dienes (1960) και ο Bruner (1966), αναφέρθηκαν στη θεωρία τους με στοιχεία, τα οποία είχαν ιδιαίτερη σχέση και εφαρμογή στα μαθηματικά. Στο συγκεκριμένο χρόνο, οι θεωρίες του Piaget επικρατούσαν, με έμφαση στα διαδοχικά στάδια ανάπτυξης και ιδιαίτερη συγκέντρωση στη μετάβαση μεταξύ των σταδίων. Το βασικό στοιχείο στη θεωρία του Piaget ήταν η θεωρία της αφαίρεσης χωρισμένη σε τρία μέρη: (α) την *εμπειρική αφαίρεση* που εστιαζόταν στον τρόπο με τον οποίο το παιδί οικοδομεί την κατανόησή του για τις ιδιότητες των αντικειμένων, (β) στη *ψευδο-εμπειρική αφαίρεση*, που εστιαζόταν στην οικοδόμηση της κατανόησης για τις ιδιότητες των δράσεων στα αντικείμενα, και (γ) στη *στοχαστική αφαίρεση* που εστιαζόταν στον τρόπο με τον οποίο οι δράσεις και οι διαδικασίες γίνονται αντικείμενα της γνώσης ή της αφομοίωσης (Piaget, 1985). Ταυτόχρονα, σε μια διαφορετική κατεύθυνση, ο Bruner (1966) εστίασε σε τρεις διακριτούς τρόπους στους οποίους «το άτομο μεταφράζει την εμπειρία σε ένα πρότυπο του πραγματικού κόσμου»: (α) το *πραξιακό (enactive),* (β) τον *εικονικό* και (γ) το *συμβολικό*. Διακρίνει ως βασικό στο συμβολικό σύστημα τη γλώσσα και αναφέρει ως σημαντικά, ιδιαίτερα σχετικά με τα μαθηματικά, τους αριθμούς και τη λογική.

Τρεις διακριτές πτυχές της μαθηματικής γνώσης προτείνει και ο Efraim Fischbein (1987), ο οποίος ασχολήθηκε αρκετά με τη ψυχολογία και τα μαθηματικά. Αυτές είναι: (α) η διαίσθηση που θεωρείται ότι έχει μεγάλη συμμετοχή, (β) οι αλγόριθμοι και η δυνατότητα χειρισμού των συμβόλων που οδηγούν σε υπολογισμούς και (γ) η τυπική μορφή των αξιωμάτων, των ορισμών και των τυπικών αποδείξεων.

Ο Richard Skemp (1971, 1979) παρήγαγε τη δική του σειρά εγχειριδίων για την πρωτοβάθμια και τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και ανέπτυξε μια γενική θεωρία της σύνθετης ανθρώπινης μάθησης, ισορροπώντας την επαγγελματική γνώση των μαθηματικών και της ψυχολογίας τόσο με τη θεωρία όσο και με την πράξη. Όπως αναφέρει, το άτομο έχει δέκτες - αισθητήρια όργανα για να λαμβάνει πληροφορίες από το περιβάλλον και τελεστές (effectors) για να ενεργήσει στο περιβάλλον διαμορφώνοντας ένα σύστημα που το ονομάζει ως «δέλτα-ένα». Στη συνέχεια, διαμορφώνει ένα νέο σύστημα ανώτερου επιπέδου («δέλτα-δύο») που απεικονίζει τις διαδικασίες του δέλτα-ένα. Αυτά τα δύο επίπεδα του συστήματος ενσωματώνουν τρεις διακριτούς τύπους δραστηριοτήτων: (α) τη διαίσθηση (input-εισαγωγή), (β) τη δράση (output- παραγωγή) και (γ) το στοχασμό, ο οποίος περιλαμβάνει ανώτερα επίπεδα κατανόησης και δράσης.

Οι εμφάσεις σε ερμηνείες με τρεις διακριτούς τύπους της γνωστικής ανάπτυξης είναι πολύ διαφορετικές, αλλά υπάρχουν θεμελιώδη στοιχεία που εμφανίζονται. Αρχικά υπάρχει μια υπόθεση για τον τρόπο με τον οποίο το άτομο κατασκευάζει και κατανοεί τις μαθηματικές ιδέες. Στη συνέχεια υπάρχουν διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους αυτή η κατασκευή αναπτύσσεται, από τις αντιλήψεις και δράσεις του πραγματικού κόσμου, τις πραγματικές και εικονικές αναπαραστάσεις βασικών διαισθήσεων, οι οποίες διαχωρίζονται μέσω της ανάπτυξης κουλτούρας για χρήση της γλώσσας (ως υποστηρικτικής στις περισσότερο αφηρημένες έννοιες συμπεριλαμβανομένου του συμβολισμού των αριθμών, της ανάπτυξης τρόπου αιτιολόγησης της περιγραφής, του ορισμού) και της δυνατότητας αφαίρεσης, που οδηγεί στις τυπικές αξιωματικές θεωρίες.

Στη γεωμετρία, ο van Hiele (1959, 1986) έχει επισημάνει τη γνωστική ανάπτυξη μέσω της όλο και περισσότερο σύνθετης διαδοχής των επιπέδων. Η θεωρία του αρχίζει με τα μικρά παιδιά που θεωρούν τα αντικείμενα ως ολότητες με τέλεια μορφή, παρατηρώντας τις διάφορες ιδιότητες που μπορούν να περιγραφούν και να χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια στους λεκτικούς ορισμούς που δίνουν τις ιεραρχίες των μορφών-εικόνων. Μέσω των λεκτικών αφαιρέσεων που υποδεικνύουν ότι εάν συγκεκριμένες ιδιότητες υπάρχουν, τότε άλλες ακολουθούν, καταλήγει σε πιο αυστηρά, τυπικά αξιωματικά μαθηματικά.

Αρκετοί ερευνητές έχουν προτείνει διάφορες διχοτομίες στη μάθηση των μαθηματικών. Σύμφωνα με τους ερευνητές αυτούς, τα μαθηματικά μπορούν να διαιρεθούν σε *αφηρημένα* και *αλγοριθμικά* (Halmos, 1985) ή σε *δηλωτικά-επεξηγηματικά* και *διαδικαστικά* (Anderson, 1976). Τα ονόματα που χρησιμοποιούνται από μόνα τους επεξηγούν τους τρόπους διαχωρισμού, έτσι ώστε να γίνονται κατανοητοί χωρίς οποιουσδήποτε τυπικούς ορισμούς. Οι Kaput (1979) και Davis (1975) αναφέρονται στη δυαδικότητα *διαδικασία-προϊόν* του μαθηματικού συμβολισμού.

Δύο διαφορετικοί τρόποι μαθηματικής γνώσης έχουν διακριθεί και από τον Piaget (1970): (α) *ο εικονικός,* ο οποίος αναφέρεται «στην αντίληψη των δηλώσεων-καταστάσεων ως στιγμιαίων και στατικών» κάτι αντίστοιχο με τη δομική αντίληψη της Sfard (1991) και (β) *ο λειτουργικός,* που ασχολείται με τους μετασχηματισμούς, έτσι συγκλίνει με τη λειτουργική προσέγγισή της Sfard (1991). Παρενθετικά, αυτή η διάκριση είναι άμεσα συσχετισμένη στη θεωρία του Piaget της στοχαστικής αφαίρεσης που, ειδικά στην περαιτέρω επεξεργασία της (Dubinsky & Lewin, 1986; Thompson, 1985), έχει αγγίξει το ρόλο των διαδικασιών και των αντικειμένων στη μαθηματική γνώση. Οι θεωρίες *διαδικασίας-αντικειμένου* (process-object) όπως η θεωρία APOS του Dubinsky (Czarnocha *et al.,* 1999) και η *λειτουργικό - δομική* θεωρία της Sfard (1991), που θα αναφέρουμε εκτενώς στη συνέχεια, έδωσαν νέα ώθηση στην οικοδόμηση των μαθηματικών αντικειμένων από τις αναφερόμενες διαδικασίες της στοχαστικής αφαίρεσης του Piaget. Μια άλλη κατηγοριοποίηση, που είναι σχετική με την πρόταση της Sfard (1991), είναι αυτή που χωρίζει τα μαθηματικά σε *διαλεκτικά* και *αλγοριθμικά* (Henrici, 1974). Καθώς τα αλγοριθμικά μαθηματικά ασχολούνται κυρίως με όλα τα είδη υπολογιστικών διαδικασιών, τα διαλεκτικά μαθηματικά είναι μια αυστηρά λογική επιστήμη, όπου οι δηλώσεις είναι είτε αληθείς είτε ψευδείς, και τα αντικείμενα με συγκεκριμένες ιδιότητες είτε υπάρχουν είτε δεν υπάρχουν. Άλλες αποδεκτές κατηγοριοποιήσεις της μαθηματικής γνώσης είναι η διάκρισή της σε *εννοιολογική* και *διαδικαστική* (Lesh & Landau, 1983) ή σε *οργανική* και *συσχετιστική* (Skemp, 1976).

Από μία άποψη, η εκπαίδευση των μαθηματικών έχει σχέση πάντα με τη διχοτομία πρακτικής και θεωρητικής γνώσης. Μέσα από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας της εκπαίδευσης των μαθηματικών, υπάρχουν πολλές διακρίσεις παρόμοιες με αυτήν που παρουσιάζεται μεταξύ της θεωρητικής και πρακτικής γνώσης χωρίς τη συγκεκριμένη αναφορά σε αυτούς τους όρους. Στην πραγματικότητα, τέτοιες διακρίσεις παρουσιάζονται σε όλες τις θεωρίες μάθησης των μαθηματικών που χρησιμοποιούνται ή που αναπτύσσονται στην έρευνα για την εκπαίδευση των μαθηματικών. Αυτή η αντίθεση θεωρήθηκε συνήθως ως διαλεκτική, υπό την έννοια ότι η οικοδόμηση της μαθηματικής κατανόησης περιέλαβε μια αλληλεπίδραση μεταξύ δύο συγκρουόμενων τρόπων γνώσης, ενός που συνδέεται με άμεση δράση, και του άλλου που αντανακλώντας σε αυτήν την δράση οδηγεί στην εννοιολογική οικοδόμησή της γνώσης.

Η διατήρησης της ισορροπίας μεταξύ πρακτικής και θεωρητικής γνώσης αποτέλεσε πρόβλημα που χρειάστηκε τρόπους επίλυσης. Μερικές φορές η διδασκαλία θεωρήθηκε πολύ θεωρητική και υπήρξαν προτροπές ώστε να ενσωματωθούν στη διδασκαλία των μαθηματικών και αναφορές στο πραγματικό κόσμο, στην κουλτούρα και στον αυθόρμητο τρόπο σκέψης των μαθητών. Παράλληλα, οι εκπαιδευτικοί ανησυχούσαν για το ότι η διδασκαλία των μαθηματικών «σε πλαίσια» μπορεί να οδηγήσει σε συμβιβασμό το θεωρητικό χαρακτήρα της μαθηματικής γνώσης. Συγκεκριμένα, η εργασία του Steinbring ανέπτυξε πολλά παραδείγματα του τρόπου με τον οποίο ο θεωρητικός χαρακτήρας της μαθηματικής γνώσης μπορεί να χαθεί με μια προσέγγιση βασισμένη στην αρχή «μετάβαση από το ειδικό στο γενικό» (Seeger & Steinbring, 1992; Steinbring, 1991). Έχουν υπάρξει προσπάθειες να επιτευχθεί ισορροπία μεταξύ των δύο τρόπων σκέψης/γνώσης, με την άποψη ότι, ενώ δεν υπάρχει καμία μαθηματική γνώση χωρίς θεωρητική γνώση, η τελευταία πρέπει να στηριχτεί σε μια ανάκλαση στην πρακτική. Η πρακτική μπορεί να αφορά στη μοντελοποίηση και την εφαρμογή σε προβληματικές καταστάσεις καθώς επίσης και την επίλυση θεωρητικών προβλημάτων. Αυτή η άποψη της ισορροπίας μεταξύ της θεωρητικής και πρακτικής γνώσης στα μαθηματικά αναπτύχθηκε έντονα από τον Freudenthal, για τον οποίο τα μαθηματικά ήταν μια ανθρώπινη δραστηριότητα μαθηματικοποίησης τόσο του περιεχομένου που προέρχεται από την πραγματικότητα όσο και του μαθηματικού περιεχομένου (Freudenthal, 1973; Gravemeijer, 1997). Η Sierpinska υιοθέτησε αυτή την άποψη για μία πιθανή τέτοια ισορροπία στη διδασκαλία και μάθηση της γραμμικής άλγεβρας (Sierpinska, 1995; Sierpinska et al., 2002).

Βρίσκουμε αυτή τη βασική πρακτική - θεωρητική διαλεκτική στη θεωρία του Brousseau των διδακτικών καταστάσεων δράσης, της διατύπωσης και της επιβεβαίωσης (Brousseau, 1997). Τη βρίσκουμε, επίσης, στη θεωρία της Sfard της διπλής λειτουργικής - δομικής φύσης των μαθηματικών εννοιών (Sfard, 1992). Η διαλεκτική είναι επίσης στη θεωρία APOS, η οποία προτείνει έναν μηχανισμό για τη μαθηματική γνώση (Dubinsky, 1997). Αυτή, προσδιορίζει διάφορα στάδια ή συστατικά: εσωτερίκευση των δράσεων που οδηγούν στην κατασκευή των διαδικασιών και ενθυλάκωση των διαδικασιών σε γνωστικά αντικείμενα, τα οποία μπορούν, στη συνέχεια, να γίνουν αντικείμενα των νέων δράσεων. Η θεωρία των «procepts» (Gray & Tall, 1994) στηρίζεται επίσης στη βασική διαλεκτική μεταξύ του «να κάνω» και του «να σκέφτομαι» μαθηματικά.

Με αυτή τη θεωρία τους, οι Gray και Tall (1994), έδωσαν νέα έμφαση στο ρόλο των συμβόλων, ιδιαίτερα στην αριθμητική και την άλγεβρα, τα οποία ενεργούν ως άξονας μεταξύ μιας πραγματοποιήσιμης διαδικασίας και μιας νοερά πιθανής έννοιας, την οποία μπορούμε να διαχειριστούμε ως νοερό αντικείμενο (a *procept*). Αυτό, με τη σειρά του, ενισχύει και επεκτείνει τον αλγοριθμικό τρόπο σκέψης του Fischbein, για να περιληφθούν όχι μόνο οι διαδικασίες, αλλά και οι έννοιές τους σε μια ολοκληρωμένη θεωρία. Συγχρόνως, η μαθηματική ομάδα του PME, που οργανώνεται από τον Gontran Ervynck προς το τέλος της δεκαετίας του '80, ερεύνησε τη μετάβαση από την τυπική γνώση και άρχισε να επεκτείνει τις γνωστικές θεωρίες στην οικοδόμηση των αξιωματικών συστημάτων.

Πιο πρόσφατα, η συγκεκριμένη θεωρία των Gray και Tall έχει επεκταθεί για να συζητήσει την επιτυχία και την αποτυχία στα μαθηματικά (Gray, Pinto, Pitta, & Tall, 1999; Tall, Gray, Bin Ali, Crowley, DeMarois, McGowen, Pitta, Pinto, Thomas, & Yusof, 2001). Η εργασία των Sierpinska et al. (2002) έχει κάποια συγγένεια με την εργασία αυτών των ερευνητών, για τη συγκέντρωση των ζητημάτων της ακαδημαϊκής επιτυχίας και τη θεωρητική γνώση. Οι Sierpinska et al. (2002) ανέπτυξαν ένα μοντέλο με αξιωματικό χαρακτήρα για τη θεωρητική γνώση, την οποία διακρίνουν σε στοχαστική, συστημική και αναλυτική. Αναφέρονται στη θεωρητική γνώση ως τη γνώση στην οποία ο τρόπος σκέψης και τα αντικείμενά του ανήκουν σε διακριτά επίπεδα δράσης, της οποίας σκοπός είναι η παραγωγή συνεπών εσωτερικών εννοιολογικών συστημάτων, βασισμένων σε ειδικά δημιουργημένα σημειακά συστήματα (Sierpinska, 2005).

Παράλληλα με τα πιο πάνω το 1990 – 2000, από τη μια, το Αμερικανικό Συνέδριο (American Congress) κήρυξε «τη δεκαετία του εγκεφάλου» στην οποία οι πόροι προσφέρθηκαν για να επεκτείνουν την έρευνα στη δραστηριότητα του εγκεφάλου και από την άλλη ο γλωσσολόγος Lakoff συνεργάστηκε με τους συναδέλφους του και εστιάστηκαν στην ενσωμάτωση στη γνωστική επιστήμη όπου θεωρούσαν ότι όλες οι γνωστικές διαδικασίες ενσωματώνονται στη βιολογική δραστηριότητα.

Αρχικά, αυτές οι τεχνικές γνωστικής απεικόνισης χρησιμοποιήθηκαν για να καθορίσουν τους αρχικούς σημειακούς χάρτες όπου οι γνωστικές δραστηριότητες εμφανίζονται. Τέτοιες μελέτες εστιάστηκαν κυρίως στις στοιχειώδεις αριθμητικές δραστηριότητες (π.χ. Butterworth, 1999; Dehaene, 1997), ενώ άλλες αποκάλυψαν ότι η λογική σκέψη, ιδιαίτερα όταν περιλαμβάνονταν αρνητικές λογικές δηλώσεις, προκαλούσε μια μετατόπιση στη γνωστική δραστηριότητα του εγκεφάλου, από τις οπτικές αισθητήριες περιοχές, στο πίσω μέρος του εγκεφάλου (Houdé et al., 2000). Αυτό αποκαλύπτει μια ευδιάκριτη αλλαγή στη γνωστική δραστηριότητα, σύμφωνη με μια σημαντική μετατόπιση από τις πληροφορίες από ερεθίσματα, στην τυπική γνώση. Από την άλλη, οι μελέτες βρεφών (Wynn, 1992) αποκάλυψαν μια ενσωματωμένη αίσθηση της αρίθμησης για τη διάκριση μικρών σχηματισμών των δυάδων και των τριάδων, πολύ πριν το παιδί κατακτήσει τη γλώσσα. Ο ανθρώπινος εγκέφαλος έχει τις οπτικές περιοχές που αντιλαμβάνονται τα διαφορετικά χρώματα, τις μορφές και τις αλλαγές τους, τις άκριες, τα περιγράμματα και τα αντικείμενα, τα οποία μπορούν να ακολουθηθούν δυναμικά καθώς κινούνται. Συνεπαγόμενο σε αυτήν τη δομή είναι η δυνατότητα να αναγνωρίσουν μικρές ομάδες αντικειμένων (ένα, δύο ή τρία), παρέχοντας στο μικρό παιδί μια θεμελιώδη διαίσθηση για τους μικρούς αριθμούς.

Στη δεύτερη επέκταση των γνωστικών αυτών θεωριών, ο Lakoff και οι συνάδελφοι του ανάπτυξαν τη θεωρία ότι η ανθρώπινη ενσωμάτωση διαχεόταν σε όλη την ανθρώπινη γνώση, καταλήγοντας σε μια ανάλυση για το «Από που τα μαθηματικά προέρχονται» (Lakoff & Nunez, 2000). Έτσι, ξαφνικά, όλα τα μαθηματικά θεωρούνταν ότι ενσωματώνονται. Αυτό είναι μια δυναμική ιδέα αφ' ενός, αλλά μια ταξινόμηση με μόνο μια κατηγορία δεν είναι χρήσιμη στη δημιουργία διακρίσεων.

Αν κάποιος αξιοποιεί την ενσωμάτωση κατά την καθημερινή του αντίληψη και κατανόηση, τότε συσχετίζεται περισσότερο με τη χρήση των φυσικών αισθήσεων και δράσεων και με τις οπτικο-χωρικές ιδέες στη θεωρία του Bruner που παρουσιάζει δύο κατηγορίες αναπαραστάσεων, τις πραξιακές και τις εικονικές. Ακολουθώντας τη θεωρία της ανάπτυξης που προτείνει ο van Hiele, η οπτική ενσωμάτωση των φυσικών αντικειμένων γίνεται πιο σύνθετη και οι έννοιες όπως η «ευθεία γραμμή» παίρνουν μια εννοιολογική σημασία της ύπαρξης τέλειας ευθείας, και δεν έχουν καθόλου πάχος, με τρόπο που δεν μπορεί να εμφανίζονται στον πραγματικό κόσμο. Αυτή η ανάπτυξη, από τη φυσική ενσωμάτωση στις όλο και περισσότερο σύνθετες εννοιολογικές ενσωματώσεις είναι αρκετά διαφορετική από τη συμβολική ανάπτυξη που παρουσιάζεται στην αριθμητική όπου οι δράσεις στα αντικείμενα (όπως η αρίθμηση και η καταμέτρηση) μπορούν να γίνουν συμβολικά και τα ίδια τα σύμβολα χαρακτηρίζονται από τη δυνατότητα χειρισμού τους σε ένα ψηλό νοητικό επίπεδο. Τα σύμβολα μπορούν λειτουργικά να ενσωματωθούν (δεδομένου ότι χρησιμοποιούμε τα χέρια μας για να γράψουμε τα σύμβολα και να σκεφτούμε μεταφορικά για τη μετακίνηση συμβόλων) αλλά η ενθυλάκωση των διαδικασιών σε νοητικά αντικείμενα είναι πλήρως διαφορετική από τη στοχαστική αισθητήρια εστίαση στα ίδια τα αντικείμενα, επαρκείς για να τη τοποθετήσουμε σε μια διαφορετική κατηγορία, ανάλογη με τη διάκριση της Sfard (1991) μεταξύ λειτουργικού και δομικού κόσμου.

Η κατηγορία που εστιάζει στην αυξανόμενη θεωρητική αιτιολόγηση των αναπαραστάσεων των αντικειμένων περιλαμβάνει δύο από τρεις μορφές που προτείνει ο Bruner για τις αναπαραστάσεις: πραξιακή και εικονική μορφή. Εν τω μεταξύ, οι συμβολικές αναπαραστάσεις περιλαμβάνουν τις τεχνικές μορφές των αριθμών και της λογικής που αντιστοιχούν με τις αλγοριθμικές και τυπικές κατηγορίες του Fischbein.

Αυτές οι επανατοποθετήσεις των κατηγοριών είναι χρήσιμες σε σχέση με τη θεωρία SOLO (Structure of Observed Learning Outcomes) του Kevin Collis (Biggs & Collis, 1982). Αυτή ενσωματώνει μια αναθεωρημένη σταδιακή θεωρία που στηρίζεται στις θέσεις του Piaget και του Bruner, με τα διαδοχικά στάδια να ονομάζονται αισθητικοκινητικό, εικονικό, πραγματικό-συμβολικό, τυπικό και μετα-τυπικό. Μια ουσιαστική πτυχή αυτής της θεωρίας είναι ότι, μόλις οικοδομηθεί ένα στάδιο, γίνεται διαθέσιμο μαζί με τα προηγούμενα στάδια. Αντιλαμβανόμενοι τη γνωστική ανάπτυξη με ένα αθροιστικό τρόπο, μπορούμε να συνδυάσουμε τις αισθητικοκινητικές επιδράσεις και τις εικονικές, οπτικο-χωρικές ιδέες για να δώσουμε μια ενσωματωμένη βάση για τα μαθηματικά. Αυτό οδηγεί από την μία προς τη γεωμετρία μέσω της εστίασης στις ιδιότητες των αντικειμένων που υποστηρίζονται με τη γλώσσα, και από την άλλη, οι δράσεις στα ενσωματωμένα αντικείμενα οικοδομούν μια διακριτή ανάπτυξη που λειτουργεί με τα σύμβολα στην αριθμητική και την άλγεβρα. Όλες αυτές οι δραστηριότητες αναπτύσσονται μέσα από τη θεωρία με συνθετικό τρόπο και η μελέτη των ιδιοτήτων οδηγεί στη συνέχεια σε πιο τυπικές, αφαιρετικές, λογικές πτυχές. Η γλώσσα συνεχίζει να στηρίζει όλη αυτή την δραστηριότητα. Μια οπτική εικόνα δεν είναι τίποτα χωρίς να δοθεί η σημασία αυτού που αναπαριστά. Καθώς η ενσωμάτωση είναι θεμελιώδης στην ανθρώπινη ανάπτυξη, η γλώσσα είναι ουσιαστική για να δώσει τις λογικές πτυχές που προκύπτουν στην ανθρώπινη σκέψη.

Με κατεύθυνση από τον Collis, αντιμετωπίζοντας τις διαδοχικές δομές ως αθροιστικές-συσσωρευτικές, παρά ως αντικαταστάτες των προηγούμενων, μπορούμε να δούμε τη μαθηματική ανάπτυξη πριν από τη γλώσσα με μια ενδεχόμενη αίσθηση της αρίθμησης. Τη στιγμή που το παιδί φτάνει στο σχολείο, οι αισθητικοκινητικές και εικονικές αντιλήψεις ήδη λειτουργούν μαζί με τη γλώσσα καθιστώντας, τις σύνθετες αντιλήψεις πιθανά κατανοητές. Αυτό είναι η αρχή της θεωρίας της ανάπτυξης του van Hiele για τις οπτικο-χωρικές ιδέες των μορφών στις ειδικές και σε άλλες γραφικές έννοιες γενικά. Η εισαγωγή της αριθμητικής (πραγματικό - συμβολικό) οδηγεί έναν διακριτό τρόπο λειτουργίας που εστιάζει στο συμβολισμό των αριθμητικών διαδικασιών ως αριθμητικών αντιλήψεων. Οι ιδιότητες που αντιμετωπίστηκαν στα βασικά μαθηματικά της Αριθμητικής, της Άλγεβρας, της Γεωμετρίας και της Ανάλυσης οδηγούν σε μία εστίαση στις ιδιότητες που χρησιμοποιούν αξιωματικούς ορισμούς και αποδείξεις.

Βασισμένος στην ιστορική ανασκόπηση των θεωριών, ο Tall (2004), οδηγήθηκε σε μια πιθανή κατηγοριοποίηση της γνωστικής ανάπτυξης σε τρεις διακριτές αλλά που αλληλεπιδρούν δομές, τις οποίες ονομάζει «οι τρεις κόσμοι των μαθηματικών». Ο *ενσωματωμένος* κόσμος της αντίληψης και της δράσης, που περιλαμβάνει την ανάκλαση στην αντίληψη και τη δράση που αναπτύσσεται σε μία περισσότερο περίπλοκη πλατωνική μορφή. Ο *διαδικασιο-εννοιολογικός* κόσμος των συμβόλων στην Αριθμητική, την Άλγεβρα και την Ανάλυση που ενεργούν τόσο ως διαδικασίες «να κάνω μαθηματικά» (π.χ. 4+3 ως διαδικασία της πρόσθεσης) όσο και ως έννοιες «να σκεφτώ μαθηματικά» (π.χ. 4+3 ως έννοια της ποσότητας) και ο *αξιωματικός κόσμος* των τυπικών ορισμών και της τυπικής απόδειξης.

Στη συνέχεια γίνεται εκτενής αναφορά σε αυτή τη θεωρία του David Tall καθώς και στη θεωρία APOS του Ed Dubinsky, στη θεωρία της Πραγμάτωσης της Anna Sfard και στη θεωρία της Anna Sierpinska για τη θεωρητική γνώση. Με βάση το μοντέλο της θεωρητικής γνώσης και στοιχεία από τις άλλες θεωρίες οργανώθηκε η διεξαγωγή της έρευνας για τη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου.

Θεωρία APOS – Ed Dubinsky. Η θεωρία APOS προέκυψε από μια προσπάθεια να γίνει κατανοητός ο μηχανισμός στοχαστικής αφαίρεσης, που αναφέρει πρώτος ο Piaget για να περιγράψει την ανάπτυξη της λογικής σκέψης στα παιδιά, και να επεκτείνει την ιδέα αυτή σε πιο προηγμένες μαθηματικές έννοιες (Dubinsky, 1991). Ο Piaget ερεύνησε την κρίση εφήβων και ενηλίκων, συμπεριλαμβανομένων των ερευνητών των μαθηματικών. Μέσα από αυτές τις έρευνες οδηγήθηκε στην ανακάλυψη κοινών χαρακτηριστικών, συγκεκριμένων ιδιαίτερων νοητικών δομών και μηχανισμών που οδηγούν στην κατανόηση των εννοιών (Piaget, 1970). Η εργασία του Piaget έχει συνεχιστεί από μια μικρή ομάδα ερευνητών οι οποίοι ονομάζονται Research in Undergraduate Mathematics Education Community (RUMEC) και έχουν συνεργαστεί σε συγκεκριμένα ερευνητικά προγράμματα χρησιμοποιώντας τη θεωρία APOS μέσα σε ένα ευρύτερο πλαίσιο έρευνας και ανάπτυξης προγράμματος σπουδών. Το πλαίσιο αποτελείται από τρία ουσιαστικά στοιχεία: μια θεωρητική ανάλυση συγκεκριμένης μαθηματικής έννοιας, την ανάπτυξη και την εφαρμογή της εκπαιδευτικής επεξεργασίας (χρησιμοποιώντας διάφορες μη τυποποιημένες παιδαγωγικές στρατηγικές όπως η συνεργατική μάθηση και η οικοδόμηση μαθηματικών εννοιών με τη χρήση υπολογιστή) βασισμένης σε αυτή την θεωρητική ανάλυση, και τη συλλογή και ανάλυση στοιχείων για να εξετάσουν και να καθορίσουν την αρχική θεωρητική ανάλυση και τη διδασκαλία. Αυτός ο κύκλος επαναλαμβανόταν όσο συχνά υπήρχε ανάγκη για την αντίληψη της επιστημολογίας της έννοιας και για την απόκτηση αποτελεσματικών παιδαγωγικών στρατηγικών που να βοηθούν τους μαθητές στη μάθηση.

Οι Dubinsky και McDonald (2001) υποστηρίζουν ότι η θεωρία APOS είναι πολύ χρήσιμη στην προσπάθεια να κατανοήσουμε τον τρόπο μάθησης των μαθητών μιας μεγάλης σειράς θεμάτων στην Ανάλυση, στην Άλγεβρα, στη Στατιστική, στα διακριτά μαθηματικά, και σε άλλους τομείς των προπτυχιακών μαθηματικών.

Η θεωρία APOS (Dubinsky & McDonald, 2001) υποδεικνύει ότι ένα άτομο πρέπει να έχει τις κατάλληλες νοητικές δομές για να κατανοήσει μια δεδομένη μαθηματική έννοια. Αρχίζει με την υπόθεση ότι η μαθηματική γνώση συνίσταται στην τάση ενός ατόμου να ασχοληθεί, μέσα σε ένα κοινωνικό πλαίσιο, με τις διακριτές προβληματικές μαθηματικές καταστάσεις οικοδομώντας νοερές *δράσεις (Actions), διαδικασίες (Processes),* και *αντικείμενα (Objects)* και οργανώνοντάς τα σε *σχήματα (Schemas)* ώστε να κατανοήσει τις καταστάσεις και να λύσει τα προβλήματα. Οι νοητικές δομές της δράσης, της διαδικασίας, του αντικειμένου και του σχήματος αποτελούν το ακρωνύμιο APOS.

Οι κύριοι νοητικοί μηχανισμοί για την οικοδόμηση των νοητικών δομών για τη δράση, τη διαδικασία, το αντικείμενο και το σχήμα ονομάζονται *εσωτερίκευση (interiorization)* και *ενθυλάκωση (encapsulation)* (Dubinsky, 2010; Weller, Clark, Dubinsky, Loch, McDonald, & Merkovsky, 2003). Οι περιγραφές της δράσης, της διαδικασίας, του αντικειμένου και του σχήματος που δίνονται πιο κάτω είναι βασισμένος σε εκείνες που δόθηκαν από τους Dubinsky και McDonald (2001) και τους Weller, Arnon και Dubinsky (2009).

Μία *δράση* είναι ένας μετασχηματισμός αντικειμένων που για την εκτέλεσή του γίνεται αντιληπτός από το άτομο ως οδηγίες, βήμα προς βήμα, εξωτερικές και προαπαιτούμενες, σαφείς ή από τη μνήμη. Για παράδειγμα, ένας μαθητής που χρειάζεται ρητή έκφραση και σαφή αναπαράσταση για να αντιληφθεί την παράγωγο συνάρτησης, $f^{'}(x)$, όπου $f(x) = x^2$ και μπορεί να εφαρμόσει πέραν από την εκτέλεση της πράξης $f^{'}(x) = 2x$, μελετά πιο προσεκτικά ώστε να διαμορφώσει μία δράση για την κατανόηση της παραγώγου της συνάρτησης.

Όταν μια δράση επαναλαμβάνεται και το άτομο επιδρά σε αυτήν, τότε μπορεί να *εσωτερικεύσει* μια νοητική *διαδικασία,* την οποία μπορεί να επαναφέρει ως μια νοητική δομή καθώς εκτελεί ίδιου είδους δράσεις, αλλά όχι για περισσότερο από όσο υπάρχει ανάγκη από τα εξωτερικά ερεθίσματα. Ένα άτομο μπορεί να εκτελεί μια διαδικασία νοητικά, χωρίς να πρέπει να εκτελεσθεί ρητά κάθε βήμα και επομένως μπορεί να τη μετασχηματίσει και να τη συσχετίσει με άλλες διαδικασίες. Για παράδειγμα, ένα άτομο με διαδικαστική κατανόηση της συνάρτησης, για την $g(x) = (x^2 + 1)^2$ θα οικοδομήσει μια νοητική διαδικασία, η οποία μπορεί να συμπεριλάβει ότι η $g(x)$ πρέπει πρώτα να γραφτεί σε απλούστερη μορφή σε σχέση με το διώνυμο $(x^2 + 1)$ και στη συνέχεια να βρει την παράγωγο εφαρμόζοντας τον κανόνα, «η παράγωγος αθροίσματος συναρτήσεων ισούται με το άθροισμα των παραγώγων που παίρνουμε από την κάθε συνάρτηση ξεχωριστά».

Ένα *αντικείμενο* οικοδομείται από μια διαδικασία όταν το άτομο μπορεί να την αντιληφθεί ως σύνολο και μπορεί να συνειδητοποιήσει ότι οι μετασχηματισμοί της είναι δυνατόν να ενεργήσουν σε αυτήν. Με τον τρόπο αυτό, γίνεται η *ενθυλάκωση* της διαδικασία σε ένα γνωστικό *αντικείμενο*. Για παράδειγμα, κατά την εύρεση της παραγώγου συνάρτησης το άτομο είναι δυνατόν να αντιμετωπίσει καταστάσεις που απαιτούν την εφαρμογή διαφόρων δράσεων ή/και διαδικασιών. Αυτές θα μπορούσαν να περιλαμβάνουν τη γνώση για τη σύνθετη συνάρτηση. Π.χ. η συνάρτηση $h(x) = (x^2 + 1)^{100}$ είναι η σύνθεση των συναρτήσεων $f(x) = x^{100}$ και $g(x) = x^2 + 1$, όπου $h(x) = f(g(x))$. Για να βρεθεί η παράγωγος της $h(x)$ πρέπει πρώτα να γίνει αντιληπτή ως αντικείμενο που περιλαμβάνει τη σύνθεση των δύο συναρτήσεων. Σε αυτή τη συνάρτηση - αντικείμενο, η διαδικασία αντίληψης για την εύρεση των παραγώγων πρέπει να ενθυλακωθεί στα πλαίσια του κανόνα των σύνθετων συναρτήσεων για να βρεθεί η παράγωγος $h'(x)$.

Τέλος, το *σχήμα* για μια ορισμένη μαθηματική έννοια είναι η συλλογή των δράσεων, των διαδικασιών, των αντικειμένων και άλλων σχημάτων, τα οποία συνδέονται από τις ίδιες γενικές αρχές για τη διαμόρφωση ενός πλαισίου στην αντίληψη του ατόμου, που μπορεί να εφαρμοστεί πάνω σε μια κατάσταση προβλήματος που περιλαμβάνει εκείνη την έννοια. Αυτό το πλαίσιο πρέπει να είναι συνεπές υπό την έννοια ότι δίνει, σαφή ή εν δυνάμει σημασία που ορίζει ποια φαινόμενα είναι στο πεδίο του σχήματος και ποια όχι. Επειδή αυτή η θεωρία οδηγεί στο συμπέρασμα ότι όλες οι μαθηματικές οντότητες μπορούν να αντιπροσωπευθούν από την αμοιβαία σχέση των δράσεων, των διαδικασιών, των αντικειμένων και των σχημάτων, η ιδέα του σχήματος είναι πολύ παρεμφερής με την εικόνα της έννοιας (concept image) που οι Tall και Vinner (1981) έχουν εισαγάγει. Η ανάγκη όμως συνάφειας που οι Dubinsky και McDonald (2001) θέτουν, διακρίνει τις δύο έννοιες.

Οι τέσσερις συνιστώσες, δράση, διαδικασία, αντικείμενο και σχήμα παρουσιάζονται σε διάφορες περιπτώσεις (Dubinsky & McDonald, 2001; Maharaj, 2013) ως μία ιεραρχικά, διατεταγμένη λίστα. Με αυτό τον τρόπο παρουσίασης, από μία άποψη, κάθε δομή στη λίστα πρέπει να οικοδομηθεί πριν το επόμενο βήμα να είναι δυνατό. Στην πραγματικότητα, όταν ένα άτομο αναπτύσσει την αντίληψή του για μία έννοια, οι δομές δεν ακολουθούνται με γραμμικό τρόπο. Για παράδειγμα, σε μια δράση στη συνάρτηση, ένα άτομο μπορεί να περιοριστεί στη σκέψη για τους τύπους που περιλαμβάνουν τα γράμματα που μπορεί να χειριστεί ή να αντικαταστήσει με αριθμούς, με τα οποία είναι δυνατόν να γίνουν οι υπολογισμοί. Σκέφτεται αυτήν την έννοια ως να προηγήθηκε μια δομή διαδικασίας, στην οποία μια συνάρτηση οργανώνεται ως μια μηχανή εισόδου-εξόδου. Αυτό που συμβαίνει πραγματικά είναι ότι ένα άτομο θα αρχίσει με τον περιορισμό σε ορισμένα συγκεκριμένα είδη τύπων, θα εξετάσει τους υπολογισμούς και θα αρχίσει να σκέφτεται για τη διαδικασία, να επιστρέψει σε μια ερμηνεία δράσης, ίσως με πιο σύνθετους τύπους, να αναπτύξει περαιτέρω μια δομή διαδικασίας και τα λοιπά. Με άλλα λόγια, η οικοδόμηση αυτών των πολλαπλών αντιλήψεων μιας συγκεκριμένης μαθηματικής ιδέας είναι περισσότερο διαλεκτική (μέθοδος εξαγωγής συμπερασμάτων) παρά γραμμικής ακολουθίας.

Η έρευνα βασισμένη σε αυτή την θεωρία αναφέρει ότι για μια δεδομένη έννοια, οι πιθανές νοητικές δομές πρέπει να ανιχνευθούν και έπειτα οι κατάλληλες δραστηριότητες μάθησης πρέπει να σχεδιαστούν με σκοπό να υποστηρίξουν την οικοδόμηση αυτών των νοητικών δομών (Maharaj, 2013). Σύμφωνα με τον Dubinsky (2010), η θεωρία APOS και η εφαρμογή της στη διδασκαλία είναι βασισμένη στις ακόλουθες υποθέσεις για τη μαθηματική γνώση και για τη μάθηση των μαθηματικών:

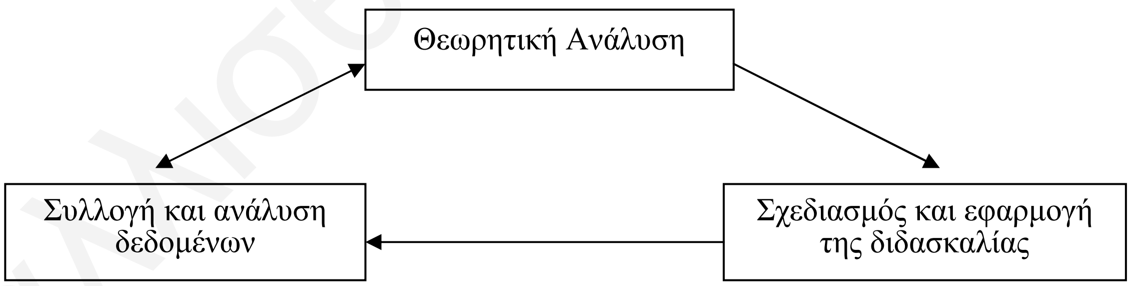
- Υπόθεση για τη μαθηματική γνώση: Η μαθηματική γνώση του ατόμου είναι η τάση του να ανταποκριθεί στις διακριτές μαθηματικές καταστάσεις προβλήματος και τις λύσεις τους με (α) την απεικόνιση τους σε ένα κοινωνικό πλαίσιο, και (β) την δόμηση ή την αναδόμηση των νοητικών δομών ώστε να συμφωνούν με την προβληματική κατάσταση.
- Υπόθεση για τη μάθηση: Ένα άτομο δεν μαθαίνει τις μαθηματικές έννοιες άμεσα. Εφαρμόζει τις νοητικές δομές για να κατανοήσει μια έννοια (Piaget, 1964). Η μάθηση διευκολύνεται εάν το άτομο κατέχει τις κατάλληλες νοητικές δομές για μια δεδομένη μαθηματική έννοια. Εάν οι κατάλληλες νοητικές δομές δεν υπάρχουν, τότε η μάθηση της έννοιας είναι σχεδόν αδύνατη.

Με βάση τα πιο πάνω συμπεραίνουμε ότι ο σκοπός της διδασκαλίας πρέπει να επιτελείται μέσα από στρατηγικές που (α) βοηθούν τους μαθητές να οικοδομήσουν τις κατάλληλες νοητικές δομές, και (β) τους καθοδηγούν για να εφαρμόσουν τις δομές αυτές στην οικοδόμηση της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών. Στη θεωρία APOS, οι νοητικές δομές είναι δράσεις, διαδικασίες, αντικείμενα και σχήματα.

Χρησιμοποιώντας τη θεωρία APOS στην ανάλυση δεδομένων ένας ερευνητής μπορεί να συγκρίνει την επιτυχία ή την αποτυχία των μαθητών σε ένα μαθηματικό στόχο με τις συγκεκριμένες νοητικές δομές που μπορεί ή όχι να οικοδομήσουν. Εάν εμφανίζονται δύο μαθητές που συμφωνούν στην απόδοσή τους μέχρι ένα πολύ συγκεκριμένο μαθηματικό σημείο και έπειτα ο ένας μαθητής μπορεί να πάει ακόμα ένα βήμα ενώ ο άλλος δεν μπορεί, ο ερευνητής είναι δυνατόν να εξηγήσει τη διαφορά με την υπόδειξη των νοητικών δομών δράσεων, διαδικασιών, αντικειμένων ή/και σχημάτων τα οποία ο ένας μαθητής εμφανίζεται να επιτυγχάνει ενώ ο άλλος όχι. Στη συνέχεια, με τη θεωρία μπορεί να δώσει ελεγχόμενες προβλέψεις με τις οποίες αν μια συγκεκριμένη συλλογή δράσεων, διαδικασιών, αντικειμένων και σχημάτων οικοδομούνται με έναν ορισμένο τρόπο από ένα μαθητή, στην πορεία αυτό το άτομο θα είναι πιθανώς επιτυχημένο στη χρήση συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών σε συγκεκριμένες καταστάσεις προβλήματος.

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης με βάση τη θεωρία APOS ονομάζονται *γενετική ανάλυση (genetic decomposition)*. Μια γενετική ανάλυση μιας έννοιας είναι ένα δομημένο σύνολο νοητικών δομών, οι οποίες περιγράφουν πώς η έννοια μπορεί να αναπτυχθεί στην αντίληψη ενός ατόμου (Asiala et al., 1996). Έτσι, μια γενετική ανάλυση προϋποθέτει συγκεκριμένες δράσεις, διαδικασίες και αντικείμενα τα οποία παίζουν ρόλο στην οικοδόμηση ενός νοητικού σχήματος για την εξέταση μιας δεδομένης μαθηματικής κατάστασης.

Οι Asiala et al. (1996) προτείνουν ένα συγκεκριμένο πλαίσιο για την έρευνα και ανάπτυξη αναλυτικών προγραμμάτων σπουδών των μαθηματικών προπτυχιακού επιπέδου βασισμένων στη θεωρία APOS. Το πλαίσιο αποτελείται από τις ακόλουθες τρεις συνιστώσες: (α) θεωρητική ανάλυση, (β) εκπαιδευτική επεξεργασία, και (γ) παρατήρηση και αξιολόγηση της μάθησης των μαθητών. Σύμφωνα με τους Asiala et al. (1996), η έρευνα που είναι βασισμένη στη θεωρία APOS πρέπει να γίνεται με βάση το παράδειγμα που απεικονίζεται στο πιο Διάγραμμα 1.



Διάγραμμα 1. Παράδειγμα ερευνητικού προγράμματος (Asiala et al., 1996).

Σε αυτό το παράδειγμα, η θεωρητική ανάλυση εμφανίζεται να σχετίζεται με τη γνώση των ερευνητών για την έννοια που αναφερόμαστε και τις γνώσεις τους για τη θεωρία APOS. Η θεωρητική ανάλυση βοηθά στην πρόβλεψη των νοητικών δομών που απαιτούνται για τη μάθηση της έννοιας. Για μια συγκεκριμένη μαθηματική έννοια, η θεωρητική ανάλυση ενημερώνει το σχεδιασμό και την εφαρμογή της διδασκαλίας. Αυτά, στη συνέχεια, χρησιμοποιούνται για τη συλλογή και την ανάλυση των δεδομένων. Η θεωρητική ανάλυση καθοδηγεί τα τελευταία, τα οποία όπως παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 1, μπορούν να οδηγήσουν στη διαμόρφωση της αρχικής θεωρητικής ανάλυσης της δεδομένης μαθηματικής έννοιας.

Θεωρία πραγμάτωσης (Reification theory) - Anna Sfard. Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό γνώρισμα της μαθηματικής γνώσης είναι ότι οι μαθηματικές έννοιες μπορούν να αντιμετωπισθούν ως διαδικασίες ή ως αντικείμενα (Asiala et al, 1996; Gray & Tall, 2001; Sfard, 1991).

Η θεωρία APOS (Asiala et al., 1996, Dubinsky & McDonald, 2001) και η θεωρία πραγμάτωσης της Sfard (1991) είναι βασισμένες στο δυισμό των μαθηματικών εννοιών και στην υπόθεση ότι η κατανόηση της διαδικασίας προηγείται της κατανόησης του αντικειμένου. Ο δυισμός των μαθηματικών δομών μπορεί να παρατηρηθεί όχι μόνο στις λεκτικές περιγραφές, αλλά και μέσω των διαφορετικών συμβολικών αναπαραστάσεων. Σύμφωνα με τη Sfard (1991) και την ιστορία των μαθηματικών, διάφορες έννοιες έχουν γίνει αντιληπτές πρώτα ως διαδικασίες και μόνο στην πορεία ως αντικείμενα. Παρόμοια ανάπτυξη παρατηρείται στον καθένα ατομικά. Για παράδειγμα, η έννοια του αριθμού μαθαίνεται συνήθως μέσω της αρίθμησης. Ο αριθμός ως αντικείμενο απομονώνεται από τη διαδικασία της αρίθμησης. Όσον αφορά τις έννοιες της Ανάλυσης (π.χ. όριο, παράγωγος) η Sfard (1991) θεωρεί ότι η λειτουργική σκέψη πρέπει αμετάβλητα να προηγηθεί της δομικής. Για παράδειγμα, κατά τη διδασκαλία της παραγώγου πρέπει πρώτα η έννοια να παρουσιαστεί ως μέσος ρυθμός μεταβολής της αξίας μιας μεταβλητής και στη συνέχεια να δομηθεί ο ορισμός της έννοιας και η γραφική παράσταση που μπορεί να έχει.

Η ανάλυση διαφορετικών μαθηματικών ορισμών και αναπαραστάσεων οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι αφηρημένες έννοιες, όπως οι αριθμοί ή οι συναρτήσεις, μπορούν να γίνουν κατανοητές με αυτούς τους δύο πλήρως διαφορετικούς τρόπους: *δομικά* - ως αντικείμενα, και *λειτουργικά* - ως διαδικασίες. Η Sfard (1991) καλεί την κατανόηση της διαδικασίας *λειτουργική (operational)* και την κατανόηση του αντικειμένου *δομική (structural).* Υπάρχει ένα μεγάλο οντολογικό χάσμα μεταξύ των λειτουργικών και δομικών αντιλήψεων/κατανοήσεων. Είναι σημαντικό να υπογραμμίσουμε ότι οι λειτουργικές και δομικές αντιλήψεις/κατανοήσεις της ίδιας μαθηματικής έννοιας δεν είναι αποκλειστικά κοινές. Αν και φαινομενικά είναι ασυμβίβαστες (πώς μπορεί κάτι να είναι διαδικασία και αντικείμενο συγχρόνως;), είναι στην πραγματικότητα *συμπληρωματικές.*

Δύο βασικά χαρακτηριστικά της διάκρισής αυτής της θεωρίας της Sfard (1991) - ο συνδυασμός οντολογικής-ψυχολογικής φύση και η συμπληρωματικότητά της - τη διαχωρίζουν από την πλειοψηφία άλλων ταξινομήσεων. Αρχικά, οι περισσότεροι από εκείνους που προτείνουν ένα είδος διχοτομίας, σπάνια δίνουν προσοχή στο θέμα των σιωπηρών - υπονοούμενων φιλοσοφικών υποθέσεων που κρύβονται μέσα σε οποιαδήποτε μαθηματική δραστηριότητα και αναφέρονται κυρίως σε πιο προφανείς πτυχές του θέματος που ασχολούνται (όπως η δομή του ή ο ρόλος των διαφορετικών συστατικών του στην επίλυση προβλήματος) ή στις γνωστικές διαδικασίες που συνθέτουν τη γνώση.

Οι διαδικασίες μάθησης και επίλυσης προβλήματος συνίστανται σε μια περίπλοκη αλληλεπίδραση μεταξύ των λειτουργικών και δομικών συλλήψεων των ίδιων εννοιών. Λόγω των ιστορικών παραδειγμάτων, και λαμβάνοντας υπόψη τη γνωστική θεωρία σχημάτων, η Sfard υποθέτει ότι η λειτουργική κατανόηση είναι, για τους περισσότερους ανθρώπους, το πρώτο βήμα στην απόκτηση των νέων μαθηματικών εννοιών. Η λεπτομερής ανάλυση των σταδίων στο σχηματισμό έννοιας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η μετάβαση από τις υπολογιστικές διαδικασίες στα αφηρημένα αντικείμενα είναι μια μακροχρόνια και ενυπάρχουσα δύσκολη διαδικασία, που ολοκληρώνεται σε τρία στάδια: *εσωτερίκευση, συμπύκνωση,* και *πραγμάτωση.* Σύμφωνα με τη θεωρία πραγμάτωσης της Sfard (1991, 1992; Sfard & Linchevsky, 1994) η διαδικασία μάθησης διαμορφώνεται μέσω τριών σταδίων.

Στο πρώτο στάδιο ο μαθητής *εσωτερικεύει (interiorize)* μια διαδικασία που εκτελείται σε ένα ήδη υπάρχον αντικείμενο. Εκπαιδεύεται στην εκτέλεση της διαδικασίας και μπορεί να εξετάσει τη διαδικασία χωρίς πραγματικά να την εκτελέσει. Στο δεύτερο στάδιο μεγάλες ακολουθίες διαδικασιών *συμπυκνώνονται (condensed)* σε πιο εύχρηστες αυτόνομες μονάδες. Ένα άτομο γίνεται πιο ικανό στην αντίληψη της διαδικασίας ως ολότητας και δεν είναι απαραίτητο να ψάξει τις λεπτομέρειες. Η διαδικασία θεωρείται ως σχέση εισόδου-εξόδου παρά ως διαδικασία. Στο τρίτο στάδιο μια μαθηματική οντότητα *πραγματώνεται (reified).* Αυτό σημαίνει ότι η έννοια γίνεται αντιληπτή ως ολοκληρωμένο αντικείμενο και αποσυνδέεται από τη διαδικασία που την παρήγαγε. Το αντικείμενο κερδίζει την έννοιά του από την ύπαρξη ως μέλος μιας ορισμένης κατηγορίας παρά από τη διαδικασία. Σε αυτή τη φάση οι διαδικασίες μπορεί να εκτελεστούν σε αυτό το νέο αντικείμενο.

Οι διάφορες διαδικασίες αφού μετατραπούν σε συμπυκνωμένες στατικές ολότητες γίνονται οι βασικές μονάδες μιας νέας, ανώτερου επιπέδου θεωρίας. Κατά τη διερεύνηση των υποθέσεων μιας έρευνας και την εξέταση των μαθηματικών (ή τουλάχιστον των περισσότερων μερών/τμημάτων τους) ως ολότητα, συνειδητοποιούμε ότι υπάρχει ένα είδος ιεραρχίας, στο οποίο το τι είναι με σαφήνεια αντιληπτό λειτουργικά σε ένα επίπεδο πρέπει να γίνει αντιληπτό δομικά σε ανώτερο επίπεδο. Τέτοια ιεραρχία προκύπτει σε μια μεγάλης διάρκειας ακολουθία πραγματώσεων, οι κάθε μία από τις οποίες αρχίζουν όπου η προηγούμενη τελειώνει, και η κάθε μια προσθέτει ένα νέο επίπεδο-στρώμα στο σύνθετο και πολύπλοκο σύστημα των αφηρημένων εννοιών (Sfard, 1991).

Η Sfard αναφέρει μια εξαίρεση σε αυτό το είδος ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης, την οποία ονομάζει *ψευδο-δομική (pseudo-structural)* (Sfard, 1992; Sfard & Linchevsky, 1994) ή *ημι-δομική (quasi-structural)* (Sfard, 1991) κατανόηση. Αυτό οδηγεί στο γεγονός ότι ο μαθητής χειρίζεται μια έννοια σύμφωνα με ορισμένους κανόνες σαν να ήταν ένα αντικείμενο, αλλά το αντικείμενο δεν έχει τη βασική λειτουργική δομή που απαιτείται (Sfard, 1991, 1992; Sfard & Linchevsky, 1994). Η αναπαράσταση της έννοιας υπάρχει από μόνη της χωρίς οποιοδήποτε νόημα. Σύμφωνα με τους Sfard και Linchevsky (1994), ένα παράδειγμα αυτού είναι στην περίπτωση της άλγεβρας, η αλλαγή του ονόματος μιας μεταβλητής που οδηγεί σε μια ολοκληρωτικά διαφορετική εξίσωση.

Οι τρεις κόσμοι των μαθηματικών (Three worlds of mathematics) – David Tall. Η έρευνα τωνWatson, Spirou και Tall (2003) οδηγεί στην αντίληψη ότι όχι μόνο υπήρξαν τρεις διακριτοί τύποι μαθηματικών εννοιών (γεωμετρικός, συμβολικός και αξιωματικός), αλλά στην πραγματικότητα τρεις πολύ διαφορετικοί τύποι γνωστικών αναπτύξεων που οδηγούσαν σε τρεις διακριτούς μαθηματικούς κόσμους.

Ο πρώτος κόσμος αναπτύσσεται μέσα από τις αντιλήψεις για τον πραγματικό κόσμο και αποτελείται από τη γνώση του ατόμου για πράγματα που διακρίνει, παρατηρεί και αισθάνεται, όχι μόνο στο φυσικό κόσμο, αλλά και στο δικό του νοητικό κόσμο με τον οποίο αντιλαμβάνεται τις έννοιες. Με τον αναστοχασμό και την χρήση της όλο και περισσότερο σύνθετης γλώσσας, μπορεί το άτομο να εστιάσει στις πτυχές της εμπειρίας που παίρνει από τις αισθήσεις του, η οποία του επιτρέπει να οραματιστεί τις συλλήψεις που δεν υπάρχουν πλέον στο εξωτερικό κόσμο, όπως π.χ. μια γραμμή «που είναι τελείως ευθεία». Ο Altiparmak (2014) αναφέρει ότι παραδείγματα αυτού του κόσμου αποτελούν η αυξομείωση των συναρτήσεων, οι διαδικασίες του ορίου, της συνέχειας, της διαμόρφωσης μιας καμπύλης σε συγκεκριμένο διάστημα, της απόστασης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης, οι οποίες είναι βασικές και θεωρούνται αναγκαίες γνώσεις για την ανάπτυξη των δυνατοτήτων παραγώγισης μιας συνάρτησης. Αυτό τον κόσμο ο Tall τον ονομάζει *εννοιολογικό-ενσωματωμένο* κόσμο ή *ενσωματωμένο* κόσμο για συντομία.

Ο δεύτερος κόσμος είναι ο κόσμος των συμβόλων που το άτομο χρησιμοποιεί για τους υπολογισμούς και το χειρισμό της αριθμητική, της άλγεβρα, της ανάλυσης κλπ. Αρχίζοντας με *τις δράσεις* (όπως η υπόδειξη και ο υπολογισμός), συμπυκνώνονται σε έννοιες με τη χρήση των συμβόλων που μας επιτρέπουν να μετατρέψουμε χωρίς δυσκολία τις διαδικασίες - να κάνω μαθηματικά, στις έννοιες - να σκεφτώ για τα μαθηματικά. Όπως αναφέρει ο Tall (2004) κατά τη συνεργασία του με τον Eddie Gray, συνειδητοποίησαν ότι τα σύμβολα όπως 3+2 στην αριθμητική είχαν διπλές υποδηλώσεις, ως διαδικασία (πρόσθεση) και ως έννοια (ποσό). Το φαινόμενο από το οποίο ένα σύμβολο μπορεί να μας επιτρέψει να μετατρέψουμε με ευκολία τις διαδικασίες του κάνω και τις έννοιες του σκέφτομαι οδήγησε στη διατύπωση του όρου «precept» (Gray & Tall, 1994). Αυτός ο δεύτερος κόσμος ονομάστηκε από το Tall *διαδικασιο-εννοιολογικός – συμβολικός* κόσμος ή για συντομία *διαδικασιο-εννοιολογικός* κόσμος.

Ο τρίτος κόσμος είναι βασισμένος στις ιδιότητες, που εκφράζονται σε σχέση με τους τυπικούς ορισμούς και χρησιμοποιούνται ως αξιώματα για να συγκεκριμενοποιήσουν τις μαθηματικές δομές (π.χ. «ομάδα», «πεδίο», «διανυσματικός χώρος», «τοπολογικός χώρος» κ.α). Αυτός ονομάζεται από τον Tall *τυπικός - αξιωματικός* κόσμος ή *αξιωματικός* κόσμος, για συντομία. Στον αξιωματικό κόσμο, προηγούμενη εμπειρία επαναφέρεται στους μαθητές, που λειτουργούν όχι με γνωστά από την εμπειρία αντικείμενα, αλλά με αξιώματα που διατυπώνονται προσεκτικά ώστε να καθορίσουν τις μαθηματικές δομές, διακρίνοντας τις ιδιότητές τους. Άλλες ιδιότητες συνεπάγονται με αφαίρεση έπειτα από την αξιωματική απόδειξη ώστε να οικοδομηθεί μια ακολουθία θεωρημάτων. Μέσα στο αξιωματικό σύστημα, οι νέες έννοιες μπορούν να οριστούν και οι ιδιότητές τους να οδηγήσουν στην οικοδόμηση μιας συνεπούς, λογικής, συνεπαγόμενης θεωρίας.

Κάθε κόσμος αναπτύσσει τη δική του φιλοσοφία και το άτομο διανύει διαφορετική πορεία μέσω αυτών των κόσμων για τη δική του μαθηματική ανάπτυξη. Καθώς ένα άτομο διανύει τον κάθε κόσμο, εμφανίζονται διάφορα εμπόδια, τα οποία αξιώνουν επανεξέταση και αναδημιουργία προηγούμενων ιδεών, με αποτέλεσμα η διαδρομή αυτή να μην είναι η ίδια για τον καθένα ξεχωριστά. Αντίθετα, τα διαφορετικά άτομα χειρίζονται τα διάφορα εμπόδια με διαφορετικούς τρόπους που οδηγούν σε ένα εύρος προσωπικών δομών, μερικές από τις οποίες επιτρέπουν στο άτομο να αναπτύξει τη δική του φιλοσοφία με νόημα και άλλες οδηγούν στις εναλλακτικές συλλήψεις ή ακόμα και σε αποτυχία για να συνεχίσουν (Tall, 2004).

Παράλληλα, η οικοδόμηση της απόδειξης αποκαλύπτει χαρακτηριστικά γνωρίσματα που διακρίνουν τον έναν κόσμο από τον άλλο. Στα αρχικά στάδια του ενσωματωμένου κόσμου, η αλήθεια καθιερώνεται με την εκτέλεση ενός πειράματος για να παρατηρήσουμε εάν το αναμενόμενο αποτέλεσμα εμφανίζεται. Η αλήθεια καθιερώνεται επειδή φαίνεται να είναι αληθινή. Στο διαδικασιο-εννοιολογικό κόσμο, η αλήθεια καθιερώνεται με υπολογισμούς με αριθμούς και με χειρισμό αλγεβρικών συμβόλων. Στον αξιωματικό κόσμο, η αλήθεια καθιερώνεται από την τυπική απόδειξη μέσω των αξιωμάτων (Tall, 2002).

Ο κάθε ένας από τους τρεις κόσμους των μαθηματικών έχει να επιδείξει ευδιάκριτα τα πλεονεκτήματά του:

- ο ενσωματωμένος δίνει μια βάση της ανθρώπινης νόησης που μπορεί να μεταφραστεί με ελεύθερο συμβολισμό,
- ο διαδικασιο-εννοιολογικός προσφέρει ένα ισχυρό εργαλείο για κατάλληλα ακριβή υπολογισμό και ακριβείς συμβολικές λύσεις, και
- ο αξιωματικός προσφέρει την ακριβή λογική αφαίρεση που θα λειτουργήσει μέσα σε οποιοδήποτε πλαίσιο όπου τα αξιώματα και οι ορισμοί ικανοποιούνται (Tall, 2010).

Λόγω του γενικού χαρακτήρα του πλαισίου που αναπτύσσονται τα μαθηματικά, ο Tall (2010) εξετάζει μέσα από την έρευνά του με ποιο τρόπο το πλαίσιο των τριών κόσμων των μαθηματικών μπορεί να βοηθήσει τους μαθηματικούς να ενθαρρύνουν τους μαθητές και φοιτητές τους να σκέφτονται με επιτυχημένο μαθηματικό τρόπο.

Αν και η ενσωμάτωση αρχίζει νωρίτερα από τον λειτουργικό συμβολισμό και ο αξιωματικός ορισμός εμφανίζεται πολύ αργότερα, όταν πλέον και οι τρεις δυνατότητες είναι διαθέσιμες στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και σε πανεπιστημιακό επίπεδο, το πλαίσιο των μαθηματικών δεν ορίζει τίποτα για την ανάπτυξη της διδασκαλίας. Στην μάθηση της μαθηματικής Ανάλυσης μερικοί μαθητές ή φοιτητές ακολουθούν μια σαφή, φυσική προσέγγιση βασισμένη σε εμπειρική γνώση και λογική ενώ άλλοι είναι πιο άνετοι να εργάζονται σε πιο καθαρά τυπικό περιβάλλον. Όχι μόνο είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν τα ενσωματωμένα παραδείγματα για να δοθεί νόημα σε μια τυπική θεωρία, είναι επίσης δυνατό να χρησιμοποιηθεί μια τέτοια θεωρία για να δώσει έμφαση στις βασικές ιδιότητες σε ένα ενσωματωμένο παράδειγμα.

Υπάρχει μια σαφής διάκριση μεταξύ μιας φυσικής προσέγγισης στη στοιχειώδη Ανάλυση και μιας τυπικής προσέγγισης στη μαθηματική Ανάλυση. Η στοιχειώδης Ανάλυση συνδυάζει μαζί την εμπειρία στην ενσωμάτωση και το συμβολισμό χωρίς να εμπλέκει την περιπλοκότητα του τυπικού κόσμου της μαθηματικής Ανάλυσης που χαρακτηρίζεται από τον πολύ-ποσοτικοποιημένο έψιλον-δέλτα ορισμό του ορίου.

Στην έρευνα του Hahkioniemi (2005), παρουσιάζεται μία θετική ως προς τα αποτελέσματά της, ανοικτή προσέγγιση της διδασκαλίας της παραγώγου η οποία βασίζεται στη θεωρία των τριών κόσμων. Προτείνεται και εξετάζεται το γεγονός ότι η διαδικασία μάθησης της παραγώγου μπορεί να αρχίσει από την εξέταση της κίνησης, ειδικά της μέσης και της στιγμιαίας ταχύτητας. Υπάρχει η υπόθεση ότι οι μαθητές είναι συνήθως ικανοί να εξετάσουν επαρκώς κάποιες πτυχές της στιγμιαίας ταχύτητας. Για παράδειγμα, μπορούν να παρατηρήσουν πότε η ταχύτητα ενός κινούμενου αντικειμένου είναι μεγάλη και πότε μικρή. Αρχικά, οι μαθητές μπορούν να εργαστούν στον ενσωματωμένο κόσμο ώστε να μάθουν να εξετάζουν κατάλληλα το ρυθμό μεταβολής μιας συνάρτησης από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Οι συναρτήσεις απόστασης-χρόνου δυνατόν να τους βοηθήσουν στην ενεργοποίηση προηγούμενων εμπειριών. Μέσα από την ταχύτητα ως ειδική περίπτωση του ρυθμού αλλαγής, είναι δυνατή η εξέταση του τρόπου μεταβολής των τιμών μιας συνάρτησης. Οι αναπαραστάσεις που εξετάζονται είναι δυνατόν να βοηθήσουν τους μαθητές να αντιληφθούν σωστά την ταχύτητα ή το ρυθμό αλλαγής. Οι μαθητές μπορούν επίσης να υπολογίσουν το μέσο ρυθμό αλλαγής από τις διαφορετικές αναπαραστάσεις, για παράδειγμα, ως κλίση τέμνουσας ευθείας, από το πηλίκο της αλλαγής στις τιμές σε σχέση με την αντίστοιχη αλλαγή στην παράμετρο, ή από το πηλίκο διαφοράς. Αυτή η εργασία των μαθητών που οδηγεί στην εξοικείωσή τους με το στιγμιαίο ρυθμό αλλαγής γίνεται στον ενσωματωμένο και στο συμβολικό κόσμο, έχοντας ενδεχομένως κατασκευάσει πολλές αναπαραστάσεις. Συνδυάζοντας αυτούς τους κόσμους, οι μαθητές μπορούν να αρχίσουν να εξετάζουν πώς να υπολογίσουν την αξία του στιγμιαίου ρυθμού αλλαγής. Η επίλυση αυτού του προβλήματος δίνει τη λογική για τον καθορισμό μιας νέας έννοιας, της παραγώγου. Με αυτό τον τρόπο, οι μαθητές μαθαίνουν σημαντικές ιδιότητες της παραγώγου στην αρχή της διαδικασίας μάθησης της έννοιας ώστε να μπορέσουν να φτάσουν με επιτυχία στον ορισμό, ο οποίος εμπίπτει στον αξιωματικό κόσμο.

Ο Tall (2010) αναφέρει ότι με τη θεωρία του βοηθά αρκετά τους μαθητές ή τους φοιτητές στην απόκτηση επίγνωσης της στρατηγικής, την οποία πολλοί εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν αλλά σπάνια γίνονται σαφείς. Η στρατηγική αυτή αφορά το γεγονός ότι τα τυπικά μαθηματικά διευκρινίζουν τα ζητήματα με ρητή συγκεκριμενοποίηση αξιωμάτων που έχουν τον ρόλο των «κανόνων του παιχνιδιού» και οι τυπικές αποδείξεις που συνεπάγονται, χρησιμοποιώντας αυτούς τους κανόνες, αποδεικνύονται μια για πάντα και οι κανόνες εφαρμόζονται σε οποιαδήποτε κατάσταση. Η αρχική αφαίρεση από τους κανόνες είναι συχνά τεχνική και αποτελεί εμπόδιο για πολλούς μαθητές. Μόλις όμως αποδειχθεί μια δομική θεωρία, οι τεχνικές που αναπτύσσονται λειτουργούν πλέον σε όλες τις καταστάσεις, είτε είναι σήμερα γνωστές είτε μπορεί να αντιμετωπιστούν στο μέλλον. Η τυπική θεμελίωση είναι μία αξιόλογη γνώση και μπορεί να αποκτηθεί με τυπικό στοχασμό που αποκτάται αφαιρετικά μόνο από τα αξιώματα χρησιμοποιώντας την τυπική απόδειξη, ή από το φυσικό στοχασμό που φέρει γενικεύσεις μαζί με πολλές εμπειρίες και δίνει νόημα στις διατυπώσεις.

Η κατανόηση των τριών διαφορετικών προσεγγίσεων στα μαθηματικά είναι ανεκτίμητη, αφού οδηγεί με σαφήνεια τόσο τους εκπαιδευτικούς όσο και τους μαθητές να γνωρίσουν τους διαφορετικούς στόχους της μαθηματικής γνώσης, η οποία αποτελείται από:

- ιδέες βασισμένες στις ανθρώπινες αντιλήψεις και δράσεις με τις εμπειρικές γνώσεις να υποδηλώνουν την αλήθεια,
- διαδικασίες βασισμένες στις δράσεις που δίνουν λογικές μαθηματικές διαδικασίες για να εκφράσουν και να λύσουν προβλήματα με συμβολικό τρόπο, και
- τυπικά αξιώματα, ορισμούς και απόδειξη που δίνουν ένα συνεπές πλαίσιο των μαθηματικών, ενισχύοντας τις αντιλήψεις και τις διαδικασίες και δίνοντας έμφαση σε τυπικές δομές που εφαρμόζονται σε οποιαδήποτε κατάσταση όπου τα αξιώματα και οι ορισμοί εξακολουθούν να ισχύουν (Tall, 2010).

Θεωρητική γνώση – Anna Sierpinska. Για τον ορισμό του μοντέλου της θεωρητικής γνώσης, οι Sierpinska, Nnadozie και Okta (2002) θεωρούν τον πολιτισμό και την κοινωνία όχι ως «παράγοντες» που *επηρεάζουν* την ανάπτυξη του ατόμου αλλά ως περιβάλλοντα με τα οποία το άτομο αλληλεπιδρά. Έχουν ως υποθέσεις ότι ο πολιτισμός ενεργεί στο άτομο τόσο όσο και το άτομο ενεργεί στο πολιτισμό και η κοινωνία είναι μια ανάγκη που προκύπτει από τις πολλές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των συμμετεχόντων. Με την ανάπτυξη του θεωρητικού μοντέλου γίνεται προσπάθεια να τονιστεί η τοποθέτηση του θεωρητικά σκεπτόμενου ατόμου, της ανεξάρτητης και κριτικής συμμετοχής, στην οικοδόμηση της γνώσης, η οποία θα του επέτρεπε να υπερνικήσει τις νοητικές συνήθειες που του «παρέχονται» από τις «ιστορικά αναπτυγμένες μορφές δραστηριότητας της κοινωνίας».

Η θεωρητική γνώση μπορεί να εμφανιστεί μόνο στα άτομα που δεν προσπαθούν συνεχώς μόνο να αλλάξουν την κοινωνία αλλά συμμετέχουν στην κοινωνία με δράσεις και με αναζήτηση των υπονοούμενων πεποιθήσεων και υποθέσεων των προσπαθειών για αλλαγή της κοινωνίας. Με αυτή την υπόθεση οι Sierpinska et al. (2002) οδηγούνται στο συμπέρασμα ότι τα μαθηματικά έχουν εξελιχθεί επειδή μερικά άτομα άρχισαν να βλέπουν γενικούς τύπους σε πρακτικές δραστηριότητες και άρχισαν να οικοδομούν θεωρητικούς τρόπους για παρουσίαση αυτών των τύπων. Παράλληλα, ανασκοπώντας τη βιβλιογραφία που αφορά στη σχέση θεωρητικής και πρακτικής γνώσης οδηγούνται στο συμπέρασμα ότι κάποιος πρέπει να εφαρμόσει μια θεωρία προκειμένου να γίνει ικανός να σκεφτεί θεωρητικά για αυτήν και να υπερβεί τις εφαρμογές που προτείνονται από αυτήν. Κατά συνέπεια, η κατανόηση των μαθηματικών θεωριών απαιτεί και την πρακτική γνώση και τη θεωρητική γνώση. Η πρακτική γνώση είναι το έδαφος έναντι στο οποίο η θεωρητική γνώση αποκτά λόγο ύπαρξης και χωρίς αυτό χάνει την επιστημολογική σημασία της. Είναι από αυτή την άποψη το γεγονός ότι η πρακτική γνώση αποτελεί ένα επιστημολογικό εμπόδιο. Είναι ένα γνωστικό και πολιτισμικό φαινόμενο, το οποίο στέκεται στο δρόμο ορισμένων δομών στα μαθηματικά, ενώ συγχρόνως είναι ένα απαραίτητο συστατικό της οικοδόμησης της μαθηματικής γνώσης (Sierpinska, 1990; 1992; 1994). Είναι για αυτό το λόγο που επιλέγουν να διατυπώσουν τον ορισμό της θεωρητικής γνώσης από την άποψη του περιορισμού και της δέσμευσής της με την πρακτική γνώση.

Ο ορισμός της θεωρητικής γνώσης κατά τους Sierpinska et al. (2002) έχει αξιωματικό χαρακτήρα. Είναι εμπνευσμένος από την εμπειρική έρευνα στη μαθηματική γνώση μαθητών και φοιτητών αλλά δεν διαχωρίζεται από τις άλλες λειτουργίες του ανθρώπινου οργανισμού (όπως είναι ο μεταβολισμός, η όραση). Οι Sierpinska και οι συνεργάτες της δεν κάνουν προσπάθεια για περιγραφή μιας «ανώτερης νοητικής λειτουργίας», της θεωρητικής γνώσης, αλλά θέτουν ως αξίωμα ένα συγκεκριμένο θεωρητικό εργαλείο το οποίο θεωρούν χρήσιμο ως μεθοδολογικό ή αναλυτικό εργαλείο. Με αυτό τον τρόπο ο ορισμός της θεωρητικής γνώσης δεν μπορεί να αντικρουστεί με εμπειρική έρευνα και αντίστοιχα, αποτελέσματα από οποιαδήποτε εμπειρική έρευνα στη θεωρητική γνώση πρέπει να συσχετίζεται με ένα υποθετικό ορισμό της θεωρητικής γνώσης.

Οι Sierpinska et al. (2002) αναφέρουν ότι η θεωρητική γνώση στοχεύει στη γνώση, στην κατανόηση εμπειριών και στην έκφραση δυνατόν αποτελεσμάτων μιας εφαρμογής. Έχει ως αντικείμενο το πλαίσιο της γνώσης. Εμπλέκεται με την κατανόηση της έννοιας. Ταυτόχρονα, κάνουν αναφορά στις βασικές υποθέσεις της θεωρητικής γνώσης για την αντίληψη των εννοιών, τις εννοιολογικές συσχετίσεις, την επιστημονική εγκυρότητα και τον υποθετικό της χαρακτήρα και τη μεθοδολογία.

Συγκεκριμένα, η θεωρητική γνώση θέτει ερωτήσεις που αφορούν υποθετικές αντιλήψεις εννοιών (π.χ. τη σημασία τους, το αποτέλεσμά τους) και πιθανές συνέπειες για τη σημασία άλλων, σχετικών εννοιών όπως για παράδειγμα: «Είναι οι έννοιες καλά επιλεγμένες; Που βασίζεται η σημασία τους; Υπάρχουν συνεπαγόμενες υποθέσεις τις οποίες δεν γνωρίζουμε; Οι ορισμένες συνθήκες οδηγούν στο επιθυμητό αποτέλεσμα;». Ταυτόχρονα, στοχεύει στην αποστασιοποίηση των ατόμων από συγκεκριμένα γεγονότα και συγκεκριμένες προσωπικές εμπειρίες και προσπαθεί να στρέψει την προσοχή στην απόδειξη και εξέταση σχέσεων μεταξύ εννοιών όπως παρουσιάζονται μέσα σε ένα σύστημα άλλων εννοιών.

Η εννοιολογική συνάφεια και η εσωτερική συνοχή του συστήματος των συμβολικών αναπαραστάσεων (επιστημολογική εγκυρότητα) αποτελεί την ασχολία της θεωρητικής γνώσης. Λόγω της απόστασης της θεωρητικής γνώσης από την εμπειρία δεν αξιώνει την «αλήθεια» στην εμπειρία. Η θεωρητική γνώση παράγει «προτάσεις», οι οποίες αποτελούν υποθετικές δηλώσεις. Είναι σημαντικό για τη θεωρητική γνώση να δημιουργεί όσον το δυνατόν πιο σαφείς υποθέσεις σε αυτές τις αναφορές. Επιπλέον, η θεωρητική γνώση ασχολείται πέραν από ότι παρουσιάζεται ως αληθοφανή ή ρεαλιστικό και με ότι είναι υποθετικά πιθανό: αυτό οδηγεί στην ανάλυση όλων των λογικά πιθανών περιπτώσεων ή των συνεπειών μιας υπόθεσης έστω και αν είναι πρακτικά αδύνατο.

Επίσης, η θεωρητική γνώση, λειτουργεί σε δύο επίπεδα. Επιχειρηματολογεί για τις έννοιες και για αυτή την επιχειρηματολογία. Σκοπεύει σε μία σαφή διατύπωση της μεθοδολογίας της. Ειδικότερα, ασχολείται με τις συμβολικές αναπαραστάσεις και τις μορφές των γραφικών αναπαραστάσεων σε πολλές γνωστικές περιοχές, με τους κανόνες, τις αρχές του συλλογισμού και την εγκυρότητα που τις χαρακτηρίζει. Επιδιώκει να έχει αναπαραστάσεις οι οποίες μπορούν να εφαρμοστούν για την έκφραση ιδεών και σχέσεων σε πολλές γνωστικές περιοχές, αντί να χρησιμοποιούνται μόνο για συγκεκριμένο σκοπό, και οι οποίες να διαφέρουν στην επίλυση κάθε διαφορετικού προβλήματος. Στον καθορισμό των εννοιών, η θεωρητική γνώση ασχολείται όχι μόνο με τη σαφήνεια και τη μη-ασάφεια αλλά και με τα ζητήματα της συνάφειας και ανεξαρτησίας από τις ορισμένες συνθήκες. Τέλος, τα αποτελέσματα της θεωρητικής γνώσης αποτελούν θεωρίες και εξειδικευμένες αναπαραστάσεις (Sierpinska et al., 2002).

Σύμφωνα με τη Sierpinska (2005), η θεωρητική γνώση είναι η γνώση στην οποία ο τρόπος σκέψης και τα αντικείμενά του ανήκουν σε διακριτά επίπεδα δράσης. Είναι η γνώση, της οποίας σκοπός είναι η παραγωγή συνεπών εσωτερικών εννοιολογικών συστημάτων, βασισμένων σε ειδικά δημιουργημένα σημειακά συστήματα. Η θεωρητική γνώση επομένως, είναι στοχαστική, συστημική και αναλυτική.

Η στοχαστική γνώση «σκέφτεται για τη γνώση» (Sierpinska et al., 2002). Δεν αφορά στις τεχνικές ή στις διαδικασίες για συγκεκριμένες δράσεις, αν και αυτές μπορούν να παραχθούν ή να εξηγηθούν από τις θεωρίες. Ειδικότερα, είναι *στοχαστική* δεδομένου ότι δεν παίρνει τέτοιες τεχνικές ή διαδικασίες ως δεδομένες αλλά τις θεωρεί πάντα ανοικτές για διερεύνηση και αλλαγή (Sierpinska, 2005). Από αυτή την άποψη, η θεωρητική γνώση αντιτάσσεται στη μυθική γνώση, στην οποία η γνώση εξετάζεται ως «φυσική» ή «ιερή» και επομένως δεν υπάρχει ανάγκη για αιτιολόγηση (Steinbring, 1991). Σύμφωνα με τους Sierpinska, Bobos, και Pruncut, (2011) οι θεωρίες δεν αναπτύσσονται μέσα από μία απλή προσθήκη νέων εννοιών, αλλά οι νέες δομές μπορούν να προκαλέσουν μια αναδιάρθρωση ολόκληρου του συστήματος. Το σύστημα απεικονίζεται πάντα ως σύνολο. Επομένως, ένα άτομο που εκφράζει στοχαστική γνώση μπορεί να επανεξετάσει δικές του λύσεις, να ερευνήσει διαφορετικές προσεγγίσεις, και να παρατηρήσει τις σχέσεις με προηγούμενες λύσεις σε προβλήματα. Εκφράζεται, δηλαδή, από μια ερευνητική στάση έναντι στα μαθηματικά προβλήματα: αναστοχαζόμενος κάποιος τη λύση του, ερευνά κάτι διαφορετικό, π.χ. πιο γρήγορη προσέγγιση, παρατήρηση των σχέσεων με προηγούμενες λύσεις σε προβλήματα. Είναι ακριβώς το αντίθετο από το να εφαρμόσει απλά μια γνωστή διαδικασία και να την ξεχάσει όταν πλέον το πρόβλημα επιλυθεί. Τα άτομα που σκέφτονται στα πλαίσια της στοχαστικής γνώσης είναι πιθανόν να υποστηρίξουν την επιστημολογική θέση των «δομημένων αντιλήψεων» παρά των «διαδικαστικών αντιλήψεων» (Sierpinska et al., 2002), μια διάκριση που αναφέρθηκε και από τους Belenky, Clinchy, Goldberger και Tarule (1997).

Από μια επιστημολογική οπτική, οι συνθήκες ενός ορισμού είναι μερικές φορές το αποτέλεσμα μιας διαδικασίας κατηγοριοποίησης σε ένα πεδίο προϋπάρχων εννοιών. Στη θεωρητική γνώση, αυτή η κατηγοριοποίηση υποθέτεται ότι είναι συστημική, ότι έχει ένα καλά ορισμένο χαρακτηριστικό γνώρισμα, που εξυπηρετεί, ως μια βάση για τον διαχωρισμό των εννοιών σε διακριτές κατηγορίες (Sierpinska et al., 2002). Επομένως, η συστημική γνώση είναι η γνώση για τα συστήματα των εννοιών, όπου η κατανόηση μιας έννοιας βασίζεται στις σχέσεις της με άλλες έννοιες και όχι με πράγματα ή γεγονότα (Sierpinska et al., 2002). Ο συστημικός χαρακτήρας της θεωρητικής γνώσης συνεπάγεται την ευαισθησία στις αντιφάσεις, διαφορετικά, τα εννοιολογικά συστήματα θα κατέρρεαν. Ο Vygotsky έχει ειδικά τονίσει αυτό το χαρακτηριστικό επιστημονικότητας, σε αντιδιαστολή με τις καθημερινές αντιλήψεις (Vygotsky 1987, 234). Στην πραγματικότητα, η ίδια η έννοια της αντίφασης δεν έχει κανένα νόημα έξω από ένα σύστημα εννοιών. Αποτελεί ένα τύπο λογικής σχέσης μεταξύ των προτάσεων και δεν μπορεί να υπάρξει μεταξύ των γεγονότων που εμφανίζονται στο χώρο και στο χρόνο. Η σημασία των αντιφάσεων αλλάζει μέσα στο πλαίσιο στο οποίο πραγματοποιούνται, είναι για αυτό το λόγο που απαιτείται η σταθερότητα των εννοιών στο πλαίσιο του συλλογισμού. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί από τους ορισμούς και άλλα συμβατά με τα χαρακτηριστικά τους (Sierpinska, 2005).

Οι Sierpinska et al. (2011) αναφέρουν ότι η συστημική γνώση είναι βασισμένη στην προσδιοριστική και υποθετική γνώση. Η προσδιοριστική γνώση αναφέρεται στις έννοιες που καθορίζονται από άλλες έννοιες μέσα στο σύστημα. Ενδιαφέρεται για τα προβλήματα του επαρκούς, απαραίτητου, ουσιαστικού και πλήρους χαρακτήρα των όρων της αλήθειας σε κάθε περίπτωση. Οι αποφάσεις για την αλήθεια μιας δήλωσης λαμβάνονται με τη βοήθεια των αποδείξεων που στηρίζονται σε αποδεκτούς ορισμούς, εννοιολογικές και λογικές σχέσεις μέσα σε ένα σύστημα και όχι στις εικόνες που προκαλούνται από τις σχέσεις, τις κοινές πεποιθήσεις ή «τις ενδόμυχες διαισθήσεις». Η υποθετική γνώση αναφέρεται στην αντίληψη του ατόμου για τις συνθήκες που χαρακτηρίζουν τις μαθηματικές δηλώσεις. Τίθεται δηλαδή η ερώτηση: «Είναι αυτή η δήλωση αληθινή;» αλλά και «ποια είναι η ισχύς των μεθόδων μας που επιβεβαιώνουν ότι είναι αληθινή;». Κατά συνέπεια η θεωρητική γνώση πάντα παίρνει μια απόσταση από τα δικά της αποτελέσματά. Η γνώση μέσα στα εννοιολογικά συστήματα μπορεί μόνο να παραγάγει υποθετικές αλήθειες.

Με την αναφορά στον ορισμό, στην υπόθεση ότι η θεωρητική γνώση είναι η γνώση στην οποία ο τρόπος σκέψης και τα αντικείμενά του ανήκουν σε διακριτά επίπεδα δράσης, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η θεωρητική σχέση μεταξύ του τρόπου σκέψης και του αντικειμένου του είναι *αναλυτική,* με μεσολαβητή τα σημειακά συστήματα. Αλλά, εάν υποθέσουμε ότι τα αποτελέσματα της θεωρητικής γνώσης είναι εννοιολογικά συστήματα ή θεωρίες, οι οποίες πρέπει να διατυπωθούν σε μια συνεπή ορολογία και συμβολική σημειολογία, στη συνέχεια πρέπει επίσης να αξιώσουμε ότι η θεωρητική γνώση έχει μια αναλυτική σχέση με τα ίδια τα σημειακά συστήματα. Η θεωρητική γνώση όχι μόνο επηρεάζεται από τα σημειακά συστήματα, παίρνει τα σημειακά συστήματα ως αντικείμενο στοχασμού και επινοήσεων (Sierpinska, 2005). Η αναλυτική γνώση αναφέρεται στις ευαισθησίες στις τυπικές συμβολικές σημάνσεις και στην εξειδικευμένη ορολογία (linguistic sensitivity - γλωσσική ευαισθησία), και στη δομή και τη λογική της μαθηματικής γλώσσας (meta-linguistic sensitivity - μεταγλωσσική ευαισθησία). Η αναλυτική ευαισθησία βοηθά στην αποφυγή συντακτικών και λογικών λαθών και αυξάνει την προσοχή στο τεχνικό νόημα των μαθηματικών όρων. Από την άλλη, η επιλογή των κατάλληλων διαδικασιών και η μεταφορά τους ενισχύονται από τη συστημική γνώση. (Sierpinska et al., 2002).

Στο Διάγραμμα 2 φαίνεται το μοντέλο της θεωρητικής γνώσης που έχουν αναπτύξει οι Sierpinska et al. (2002), όπως το έχουν αναλύσει σε διάφορα χαρακτηριστικά γνωρίσματα, τα οποία απαριθμούν με τη χρήση ετικετών όπως «στοχαστική», «συστημική», «αναλυτική» κ.α. Αυτό το μοντέλο θα χρησιμοποιηθεί στα επόμενα κεφάλαια, για την ανάπτυξη του θεωρητικού μοντέλου για τη θεωρητική γνώση των μαθητών για την έννοια της παραγώγου στην Ανάλυση. Τα στοιχεία από τις άλλες θεωρίες που αναπτύχθηκαν πιο πάνω, χρησιμοποιούνται για την ανάπτυξη του παρεμβατικού προγράμματος στη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου ώστε να οδηγηθούν οι μαθητές που συμμετέχουν στην κατανόηση της έννοιας της παραγώγου. Στο επόμενο κεφάλαιο διαγράφεται ο τρόπος με τον οποίο χρησιμοποιήθηκαν όλες οι θεωρίες για τη διεκπεραίωση της παρούσας εμπειρικής έρευνας.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΓΝΩΣΗ

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ - REFLECTIVE: Η θεωρητική γνώση στοχεύει στη γνώση

ΣΥΣΤΗΜΙΚΗ - SYSTEMIC: Η θεωρητική γνώση στοχεύει στο πλαίσιο των εννοιών, όπου η σημασία μιας έννοιας επαληθεύεται βασισμένη στη σχέση της με άλλες έννοιες και όχι με γεγονότα ή παρατηρήσεις.

- ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΚΗ - DEFINITIONAL: Η σημασία των εννοιών συγκεκριμενοποιείται με τη βοήθεια των ορισμών
- ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ - PROVING: Η θεωρητική γνώση ασχολείται με την εσωτερική συνέπεια (εγκυρότητα) του εννοιολογικού συστήματος
- ΥΠΟΘΕΤΙΚΗ - HYPOTHETICAL: Η θεωρητική γνώση αναγνωρίζει τον υποθετικό χαρακτήρα των δηλώσεών της.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ - ANALYTIC: Η θεωρητική γνώση έχει αναλυτική προσέγγιση των συμβόλων

- ΓΛΩΣΣΙΚΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑ - LINGUISTIC SENSITIVITY
  - Ευαισθησία στις τυπικές συμβολικές αναπαραστάσεις
  - Ευαισθησία στην εξειδικευμένη ορολογία
- ΜΕΤΑ-ΓΛΩΣΣΙΚΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑ – META-LINGUISTIC SENSITIVITY
  - Συμβολική απόσταση μεταξύ συμβόλων και αντικειμένων
  - Ευαισθησία στη δομή και στη λογική της μαθηματικής ορολογίας

Διάγραμμα 2: Το μοντέλο της θεωρητικής γνώσης (Sierpinska et al., 2002).

Ανάπτυξη της Τεχνολογίας στη Διδασκαλία της Ανάλυσης

Παράλληλα με την ανάπτυξη των θεωριών μάθησης παρατηρήθηκε και η ανάπτυξη της τεχνολογίας, η οποία φέρει μαζί νέους προσανατολισμένους στόχους στην αγορά, για τους οποίους αναγκάζονται μεγάλες επιχειρήσεις να συνεργαστούν με τους εκπαιδευτικούς ώστε να αναπτύξουν νέα εργαλεία μάθησης. Αρχικά, τα πρώτα υλικά που αναπτύχθηκαν οδηγούσαν σε ανταγωνιστικές καταστάσεις. Πιο κάτω γίνεται αναφορά και συζητούνται τα ερευνητικά αποτελέσματα από την εκπαιδευτική τεχνολογία και τις δυνατότητες που παρέχει στη διδασκαλία, με ιδιαίτερη έμφαση στη διδασκαλία της Ανάλυσης και της έννοιας της παραγώγου στην Ανάλυση.

Όπως αναφέρουν οι Torner, Potari, και Zachariades (2014), η χρήση των τεχνολογικών εργαλείων άρχισε να αναπτύσσεται στη διδασκαλία της Ανάλυσης στις περισσότερες χώρες. Εντούτοις, σε ορισμένες χώρες η διδασκαλία της Ανάλυσης στην τάξη συνεχίζει να είναι συνήθως παραδοσιακή και να επικεντρώνεται στις διαδικασίες.

Τα πρώτα χρόνια που χρησιμοποιήθηκε η τεχνολογία στην Ανάλυση χαρακτηρίστηκαν από ένα αισιόδοξο ενθουσιασμό και βασίστηκαν σε σύντομη τεκμηρίωση της πραγματικής επιτυχίας των νέων ιδεών και αντιλήψεων. Το σύστημα ήταν σύνθετο και τα ευρύτερα αποτελέσματα των αλλαγών θα διαρκούσαν αρκετά χρόνια ώστε να γίνουν διακριτά. Υπήρχαν πολλές γνώμες, αλλά ταυτόχρονα λίγες τεκμηριωμένες παρατηρήσεις. Κατά τη διάρκεια των πιο πρόσφατων χρόνων, οι αξιολογήσεις των αλλαγών και των μεταρρυθμίσεων και η έρευνα στη διδασκαλία της Ανάλυσης έχουν αρχίσει να δίνουν μερικές απαντήσεις για τα αποτελέσματα της χρήσης της τεχνολογίας στη διδασκαλία και τη μάθηση του αντικειμένου, αποτελέσματα τα οποία μπορεί να χαρακτηριστούν ως θετικά, αρνητικά ή ουδέτερα (Ganter, 2001; Hurley, Kohn & Ganter, 1999).

Στις αρχές της δεκαετίας του '80, οι υψηλής ευκρίνειας γραφικές παραστάσεις έφεραν νέες προσεγγίσεις στη διδασκαλία της Ανάλυσης που είχαν ως στόχο να βοηθήσουν τους μαθητές να αναπαραστήσουν και να απεικονίσουν μαθηματικές ιδέες. Σε σύντομο χρονικό διάστημα υπήρξαν αξιοσημείωτα αποτελέσματα όσον αφορά στην οπτική προσέγγιση των γραφικών παραστάσεων, η οποία βοήθησε τους μαθητές να έχουν μια ευρύτερη εννοιολογική κατανόηση χωρίς απαραιτήτως να επηρεάσει τη δυνατότητά τους να αντιμετωπίσουν τη αντίστοιχη συμβολική αναπαράσταση (Beckmann, 1988; Heid, 1988). Από την άλλη πλευρά παρουσιάστηκε στα αποτελέσματα το γεγονός ότι ο σχεδιασμός των γραφικών παραστάσεων περιελάμβανε αρκετά περίπλοκες τεχνικές. Υπήρξε ανάγκη επιλογής του κατάλληλου πεδίου ορισμού ώστε να δοθεί η κατάλληλη εικόνα. Ταυτόχρονα, με την παρουσίαση σε διαφορετικές οθόνες, με διαφορετικές κλίμακες στους άξονες, οι γραφικές παραστάσεις παρουσιάζονταν πολύ διαφορετικές και ταυτόχρονα η εικόνα της αναπαράστασης τους αποτύγχανε να δώσει σωστή και πλήρη εικόνα της συνάρτησης που μελετούσαν οι μαθητές (Goldenberg, 1988).

Επίσης, η εικονική αναπαράσταση των αναλυτικών εννοιών - στις οποίες κυρίως το όριο περιλαμβάνεται (π.χ. συνέχεια, παράγωγος) - συχνά αντιπαραβάλλεται με την τυπική αντιστοιχία των εννοιών. Ο Giaquinto (2007) αναφέρει ότι υπάρχει αναντιστοιχία μεταξύ αυτών των εννοιών και της απεικόνισής τους. Υποστηρίζει ότι για την εμπλοκή των εποπτικών μέσων στη διαμόρφωση αναλυτικών πεποιθήσεων πρέπει να εισαχθούν υποθέσεις που συνδέουν τις αντιλήψεις με τον αναλυτικό τρόπο σκέψης. Εντούτοις, αναγνωρίζει ότι η απεικόνιση των εννοιών μπορεί να εμπλουτίσει την αντίληψη των μαθητών. Επιπλέον, η χρήση της τεχνολογίας στη διδασκαλία των αναλυτικών εννοιών μπορεί να επηρεαστεί από τους περιορισμούς των τεχνολογικών περιβαλλόντων λόγω της πεπερασμένης δομής τους (π.χ. πεπερασμένος αριθμός υπολογισμών, γραφική παράσταση μέσω πολυγωνικής εκτίμησης, κ.λπ.). Οι Giraldo, Carvalho και Tall (2003) εισήγαγαν τον όρο *θεωρητική-υπολογιστική σύγκρουση* για να περιγράψουν τις καταστάσεις στις οποίες μια αναπαράσταση για μια μαθηματική έννοια είναι αντιφατική στο σχετικό θεωρητικό ορισμό. Εάν αυτές οι συγκρούσεις αξιοποιηθούν μέσα σε μια κατάλληλη παιδαγωγική προσέγγιση - παρά να αποφευχθούν - μπορούν να διευκολύνουν στον εμπλουτισμό της κατανόησης των μαθητών (Giraldo & Carvalho, 2006). Είναι για αυτό το λόγο που οι Biza και Giraldo (2011) μέσα από την έρευνά τους για την έννοια της παραγώγου σημειώνουν ότι χρειάζονται ισχυρές και δυναμικές προδιαγραφές για τα εργαλεία που οδηγούν στην απεικόνιση των μαθηματικών αντικειμένων και των ιδιοτήτων τους και συγχρόνως είναι σημαντικό να αναγνωρίζονται οι περιορισμοί αυτών των προδιαγραφών.

Είναι αντιληπτό ότι μέσα από την χρήση της τεχνολογίας και την έρευνα παρουσιάστηκαν διάφορα προβλήματα στη διδασκαλία, για τα οποία ήταν σημαντικό να βελτιώσουμε τα μέσα και τις μεθόδους διδασκαλίας ώστε να περιοριστούν όσο το δυνατόν περισσότερο. Είναι για αυτό το λόγο που η έρευνα στη μαθηματική εκπαίδευση έπρεπε να εξετάσει και το σχεδιασμό των λογισμικών για υπολογιστές. Οι Kaput και Thompson (1994) αναφέρουν ότι για να χρησιμοποιεί κάποιος την τεχνολογία πρέπει συνεχώς να επανεξετάζουν τα παιδαγωγικά και διδακτικά κίνητρα και πλαίσια. Για να εκμεταλλευτεί θετικά την πραγματική δυναμική της τεχνολογίας πρέπει να υπερβεί τα περιοριστικά όρια που θέτουν οι περισσότερες τυποποιημένες πρακτικές που εφαρμόζονται στα σχολικά μαθηματικά.

Με τον ίδιο τρόπο τεκμηριώνει και ο Kaput (1994) τους λόγους για τους οποίους η έρευνα για την εφαρμογή της τεχνολογίας στη μαθηματική εκπαίδευση είναι δύσκολη και απαιτητική. Συγκεκριμένα αναφέρει ότι:

- Η τεχνολογία απαιτεί συνεχή επανεξέταση των παιδαγωγικών και διδακτικών κινήτρων και πλαισίων.
- Η έρευνα στις αίθουσες διδασκαλίας είναι δύσκολη, λόγω του ότι για την αξιοποίηση των πραγματικών δυνατοτήτων της τεχνολογίας που είναι διαθέσιμη απαιτούνται τέτοιες καινοτόμες προσεγγίσεις οι οποίες είναι ακατάλληλες σε σχέση με την παραδοσιακή τάξη.
- Η περιπλοκότητα της πρακτικής πρόσβασης των μαθητών στον υπολογιστή, χρειάζεται λογισμικά και ανάπτυξη διδακτικού υλικού, που συχνά οδηγούν σε υπέρογκους προϋπολογισμούς για τη διεξαγωγή μιας έρευνας.
- Λόγω των γρήγορων αλλαγών στην τεχνολογία, τα αποτελέσματα της έρευνα μέχρι να ολοκληρωθεί ουσιαστικά είναι δυνατόν να μην υφίστανται πλέον.

Υπό κανονικές συνθήκες, μια αποτελεσματική τεχνολογία ξεπερνά εύκολα τα όρια της δραστηριότητας για την οποία έχει σχεδιαστεί (Kaput & Thompson, 1994). Συχνά τέτοια βασισμένα στην τεχνολογία εργαλεία σχεδιάζονται από ανθρώπους που ειδικεύονται στην τεχνολογία αλλά χωρίς εξειδίκευση στα προβλήματα της μαθηματικής εκπαίδευσης (Kaput & Thompson, 1994). Τα άτομα που αναπτύσσουν το λογισμικό και το υλικό είναι αναγκαίο να εργαστούν για να ανακαλύψουν τη διαδικασία μάθησης που το υποστηρίζει (Ferrini – Mundy & Graham, 1991). Οι Damarin και White (1986) αναφέρουν τα πιο κάτω χαρακτηριστικά που πρέπει να έχει ένα υψηλής ποιότητας εκπαιδευτικό λογισμικό:

1. Καταλληλότητα: Το λογισμικό πρέπει να συντηρήσει την ακεραιότητα του περιεχομένου και να σέβεται το μαθητή. Οι εκπαιδευτικοί στόχοι του προγράμματος πρέπει να είναι κατάλληλοι για το χρήστη που προορίζονται και η τυποποίηση της παρουσίασης του πρέπει να έχει ως σκοπό να ενσωματώσει την κατάλληλη θεωρία μάθησης.
2. Φιλικό: Το λογισμικό πρέπει να είναι όσο το δυνατό λιγότερο περίπλοκο ώστε ο χρήστης πρέπει να είναι σε θέση να αλληλεπιδρά εύκολα και φυσικά.
3. Απλό: Η δομή του λογισμικού πρέπει να είναι ευδιάκριτη και να χαρακτηρίζεται από αμεσότητα. Οι κανόνες για το λογισμικό δεν πρέπει να είναι περίπλοκοι.

4. Προσαρμοστικότητα: Το λογισμικό πρέπει να δίνει τη δυνατότητα χρήσης σε ποικίλες σχετικές καταστάσεις μάθησης. Να είναι προσαρμόσιμο στις διάφορες ανάγκες των εκπαιδευτικών και των μαθητών.
5. Δυνατό: Το λογισμικό πρέπει να σχεδιαστεί ώστε να είναι ικανό να αντέξει τις ασυνήθιστες απαντήσεις και να είναι σε θέση να τις επεξεργαστεί με τέτοιο τρόπο ώστε να δίνουν την απαραίτητη σχετική πληροφορία στο χρήστη.
6. Κατασκευάσιμο: Το θέμα που επιλέγεται για να κατασκευαστεί πρέπει να είναι τέτοιο ώστε ένα σημαντικό εκπαιδευτικό πρόγραμμα να μπορεί να σχεδιαστεί μέσα από τους περιορισμούς των διαθέσιμων υλικών και λογισμικών.
7. Επαληθεύσιμο: Το λογισμικό, που ενσωματώνει την έννοια που διδάσκεται, πρέπει να επαληθεύεται, μέσα από την εφαρμογή για την οποία προγραμματίστηκε από τους σχεδιαστές.
8. Φειδωλό: Το λογισμικό πρέπει να κάνει αποτελεσματική χρήση των διαθέσιμων δυναμικών δυνατοτήτων των υπολογιστών.

Δυνατότητες της τεχνολογίας. Οι μαθητές και φοιτητές που επιλέγουν τις θετικές επιστήμες και εκπαιδεύονται με τη χρήση τεχνολογικών περιβαλλόντων φαίνεται να αναπτύσσουν περισσότερα κίνητρα για μάθηση σε σχέση με αυτούς που παρακολουθούν παραδοσιακή διδασκαλία. Η τεχνολογία επηρεάζει θετικά την αυτορρύθμιση και την αυτοβελτίωση που παρουσιάζουν, το ενδιαφέρον και την ευχαρίστηση τους σε σχέση με την ενασχόλησή τους με τις θετικές επιστήμες, τις συνδέσεις που κάνουν με την καθημερινή ζωή και τη σημασία που τους προσδίδουν για το μέλλον τους. Διαπιστώνεται ότι η χρήση των πολυμέσων και το γεγονότος ότι οι μαθητές και οι φοιτητές μπορούν να ερευνήσουν τις νέες έννοιες, οι οποίες ήταν σχετικές με τις εμπειρίες της καθημερινής τους ζωής, μπορεί να εξηγήσει τα θετικά αποτελέσματα (Altiparmak, 2014). Η τεχνολογία μπορεί να αλλάξει τη φύση των ευκαιριών που δίνονται για δημιουργία μαθηματικών δραστηριοτήτων που αφορούν στην αντίληψη, στην απεικόνιση-αναπαράσταση, στη γενίκευση, στο συμβολισμό και στη μοντελοποίηση (Heid & Blume, 2008).

Αντίληψη. Η τεχνολογία περιορίζει και επεκτείνει τις ευκαιρίες για καλύτερη αντίληψη της άλγεβρας. Για παράδειγμα, τα λογιστικά φύλλα (spreadsheets) αποτελούν νέους τρόπους εργασίας στην άλγεβρα αλλά ταυτόχρονα περιορίζουν το επίπεδο εμπλοκής των μαθητών με την άλγεβρα.

Από την μία οι υπολογισμοί με λογιστικό φύλλο αντιμετωπίζονται από πολλούς ως ενδιάμεσο βήμα μεταξύ αριθμητικής και άλγεβρας. Όπως αναφέρει ο Haspekian (2005) «τα λογιστικά φύλλα συμπληρώνουν μιαν αλγεβρική δομή σε ένα αριθμητικό αποτέλεσμα». Από την άλλη, με τη χρήση πολλών λογιστικών φύλλων δεν μπορούμε να χειριστούμε τις μεταβλητές και τις σχέσεις άμεσα και έτσι περιορίζεται η πρόσβαση σε θεμελιώδεις αλγεβρικές έννοιες.

Παράλληλα όμως, εργαλεία όπως τα CAS (Computer Algebra System) προκαλούν την επεξεργασία των συναρτήσεων ως αντικείμενα, διαχειρίσιμα ως μαθηματικές οντότητες. Αυτή η αναλυτική ικανότητα, συνδέεται με τη δυνατότητα να αντιμετωπιστούν κανόνες των συναρτήσεων αριθμητικά και ταυτόχρονα, παρέχει το χώρο στον οποίο οι μαθητές μπορούν να δουν τη συνάρτηση τόσο ως διαδικασία όσο και ως μαθηματικό αντικείμενο. Όπως έχουμε αναφέρει υπάρχουν ερευνητές που έχουν χρησιμοποιήσει τον όρο «procept» που χαρακτηρίζει τη συνάρτηση και ως διαδικασία και ως αντικείμενο (Gerny & Alpers, 2004; Gray & Tall, 1994).

Τέλος, διάφοροι ερευνητές έχουν μελετήσει τη διαφάνεια (transparency) σε σχέση με την ανάπτυξη της εννοιολογικής κατανόησης των μαθητών στο πλαίσιο της τεχνολογίας (Ainley, 2000; Doerr & Zangor, 2000; Meira, 1998). Όπως και οι πραγματιστές (activity theorists) (π.χ., Wertsch, 1998), οι ερευνητές, αυτοί δεν αποδέχονται ότι οι μαθηματικές έννοιες εμπεριέχονται ως έμφυτες στην τεχνολογία, αλλά θεωρούν ότι μάλλον προκύπτουν ως συνάρτηση της δραστηριότητας του χρήστη με την τεχνολογία (Lave & Wenger, 1991; Meira, 1998).

Απεικόνιση – Αναπαράσταση. Η τεχνολογία παρέχει ευκαιρίες στους μαθητές να γνωρίσουν και να χρησιμοποιήσουν μια σειρά εναλλακτικές εξωτερικές αναπαραστάσεις και μέσα από μαθηματικές δραστηριότητες, αυτές οι αναπαραστάσεις μπορούν να μεσολαβήσουν στη διαμόρφωση της αντίληψης των μαθητών διαφορετικών όψεων της ίδιας μαθηματικής έννοιας που αναπαριστάται. Η δυναμικότητα της τεχνολογίας σε σχέση με την ικανότητα για άμεσες συνδέσεις, αποτελεί πρόκληση για τους αρμόδιους της ανάπτυξης των Αναλυτικών Προγραμμάτων ώστε να γενικεύουν τις προσεγγίσεις στη μελέτη των συναρτήσεων με βάση πρόσφατα διαθέσιμες αναπαραστάσεις (Heid, Zbiek, Blume & Choate, 2004; Nachmias & Arcavi,1990).

Η διαθεσιμότητα των πολλαπλών αναπαραστάσεων μπορεί να επιτρέψει μια εξ ολοκλήρου νέα προοπτική για μια έννοια. Παρέχει στους μαθητές την ευκαιρία να εμπλουτίσουν τις αντιλήψεις τους για την έννοια που μελετούν και διευκολύνει στην ανάπτυξη και κατανόηση της έννοιας. Οι Schwarz και Hershkowitz (1999) επισημαίνουν συγκεκριμένους τρόπους, με τους οποίους περιβάλλοντα πολλαπλών αναπαραστάσεων μπορούν να επηρεάσουν την κατανόηση της συνάρτησης. Για παράδειγμα, βλέπουν τη μεγέθυνση, τη χρήση κλίμακας, τον κατάλογο δυναμικών εργαλείων και τη δυνατότητα εργασίας με μετασχηματισμούς ως επίδραση στο συλλογισμό των μαθητών όσον αφορά τις συσχετίσεις (ολικές, μερικές) μεταξύ διαφορετικών γραφικών αναπαραστάσεων της ίδιας συνάρτησης. Έρευνες έχουν δείξει ότι οι προσεγγίσεις που χρησιμοποιούν ηλεκτρονικά περιβάλλοντα με εργαλεία μεγέθυνσης, μπορούν να διευκολύνουν τη συσχέτιση των μαθητών με τις αναλυτικές έννοιες (Maschietto 2008; Tall et al.,2008).

Επιπλέον, οι διαφορετικές αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης μπορούν να δώσουν έμφαση σε διαφορετικά χαρακτηριστικά γνωρίσματα μιας συγκεκριμένης συνάρτησης για ένα μαθητή (Confrey & Smith, 1992). O Hahkioniemi (2004) αναφέρει πως οι μαθητές αντιλαμβάνονται καλύτερα την έννοια της παραγώγου μέσα από την εμπλοκή τους με πολλαπλές αναπαραστάσεις. Οι μαθητές μπορούν να αντιληφθούν σαφώς πιο ξεκάθαρα μια γραφική αναπαράσταση σε καρτεσιανές συντεταγμένες, απ' ότι μέσω μιας συμβολικής αναπαράστασης, μπορούν να μελετήσουν διαφορετικούς ρυθμούς αλλαγής ευκολότερα μέσω της σύγκρισης σε ένα δυναμικό φύλλο, καθώς και μια φυσική παρουσίαση της συνάρτησης μέσω ενός δυναμικού γεωμετρικού μοντέλου (Hoyos, 1999). Όταν οι μαθητές είναι σε θέση να προσδιορίσουν το χαρακτηριστικό γνώρισμα μιας αναπαράστασης που είναι ιδιαίτερα εμφανής στη σκέψη τους, η τεχνολογία μπορεί να παρέχει την ευκαιρία για εξερεύνηση (Confrey & Smith 1992).

Γενίκευση. Τα τεχνολογικά εργαλεία δεν υποστηρίζουν μόνο δραστηριότητες γενίκευσης αλλά μπορούν επίσης να επηρεάσουν την ίδια την φύση αυτών των δραστηριοτήτων (Hershkowitz et al., 2002; Kieran, Boileau, & Garançon, 1996). Με την αναλυτική δυνατότητά τους για γρήγορη και εύκολη δημιουργία μεγάλου αριθμού συμβολικών, αριθμητικών και γραφικών παραδειγμάτων, τα τεχνολογικά εργαλεία παρέχουν κατάλληλα περιβάλλοντα που μπορούν να υποστηρίξουν τους μαθητές στη διάκριση των μοτίβων και των σχέσεων και στην ανάπτυξη γενικεύσεων. Τα διαφορετικά εργαλεία υποστηρίζουν διαφορετικές στρατηγικές γενίκευσης και παρέχουν ένα χώρο όπου οι εκπαιδευτικοί μπορούν να δώσουν έμφαση σε συσχετίσεις μεταξύ μιας συγκεκριμένης συνάρτησης και των περιοδικών αντίστοιχων συναρτήσεων της (Hershkowitz et al., 2002). Τα CAS μαζί με τα δυναμικά εργαλεία γεωμετρίας μπορούν να κάνουν τη διερεύνηση των αλγεβρικών σταθερών (αμετάβλητων) ιδιοτήτων ως ένα φυσικό πόρισμα. Η τεχνολογία επίσης παρέχει τη δυνατότητα να εξετάζουμε τα αποτελέσματα των αλλαγών στις παραμέτρους διαφορετικών οικογενειών συναρτήσεων. Η ικανότητα αυτή για άμεσο χειρισμό των παραμέτρων φάνηκε όπως αναφέρει ο Hoyos (1999), να ενθαρρύνει την αναγνώριση των σταθερών γεωμετρικών ιδιοτήτων.

Οι γενικεύσεις μπορούν να προκύψουν όχι μόνο από τα παραδείγματα που χαρακτηρίζονται από τις ίδιες αντιπροσωπευτικές αναπαραστάσεις όπως π.χ. γραφική, συμβολική αριθμητική, αλλά και από την ταυτόχρονη πρόσβαση την οποία οι διαφορετικές αναπαραστάσεις παρέχουν σε πολλαπλές προσεγγίσεις του ιδίου προβλήματος. Η τεχνολογία παρέχει δηλαδή πρόσβαση στους μαθητές σε πολλαπλές προσεγγίσεις, αλλά ταυτόχρονα, η δυνατότητα που δίνεται στους μαθητές να επιλέξουν την προσέγγιση που θα ακολουθήσουν με την τεχνολογία είναι λιγότερο «δαπανηρή» από άποψη χρόνου και προσπάθειας που θα καταβάλουν από ότι αν εργάζονταν χωρίς την τεχνολογία. Επίσης, κατά τη διάρκεια του μαθήματος με τη χρήση τεχνολογίας, οι μαθητές συχνά ανακαλύπτουν νέες σχέσεις και δεδομένου ότι δεν υπάρχει μεγάλο κόστος να ακολουθήσουν αυτή τη διαδρομή επίλυσης του προβλήματος είναι πιο πιθανόν να την επιλέξουν (Dreyfus & Hillel, 1998). Η τεχνολογία δίνει ακόμα το χώρο για ανάπτυξη αφαιρετικών ικανοτήτων, μέσω της δυνατότητάς της να παρέχει την ταυτόχρονη πρόσβαση στις γενικές και τοπικές όψεις των μαθηματικών αντικειμένων (Hillel, Lee, Laborde, & Linchevski, 1992).

Συμβολισμός. Η πρόσβαση σε τεχνολογικά εργαλεία που επιτρέπουν αυτόματες δημιουργίες και εφαρμογές σε συμβολικές εκφράσεις δίνει έμφαση στην ανάγκη για επανακαθορισμό του ρόλου της συμβολικής εργασίας στα σχολικά μαθηματικά.

Ορισμένοι τύποι τεχνολογιών παρέχουν πρόσβαση στους χρήστες σε ειδικές όψεις της συμβολικής εργασίας. Για παράδειγμα, η εργασία με τα λογιστικά φύλλα δίνει έμφαση στην ανάγκη για χρήση των συμβόλων δεδομένου ότι οι χρήστες επιδιώκουν να προσδιορίσουν τα κελιά από τη σχέση τους με άλλα κελιά, με βάση τη θέση τους. Η εργασία με τις μετατροπές των συμβολικών αναπαραστάσεων στα CAS παράγει την ανάγκη να διατηρούνται οι ισοδυναμίες. Η προσφορά της δυνατότητας στους μαθητές επιλογής για εργασία σε διαφορετικές αντιπροσωπευτικές αναπαραστάσεις (συμπεριλαμβανομένου και της συμβολικής) αποκαλύπτει τις προτιμήσεις των μαθητών για μια αναπαράσταση σε σχέση με μια άλλη. Οι Bills, Ainley, και Wilson (2006) έδειξαν πως τα λογιστικά φύλλα χρησιμοποιήθηκαν από ορισμένους μαθητές στη μελέτη τους, ως σημειολογική αναφορά για τη διαμόρφωση της σημασίας του αλγεβρικού συμβολισμού.

Τα CAS δίνουν τη δυνατότητα στους μαθητές να αναπτύξουν ικανότητα για αυτοματοποιημένη επεξεργασία των συμβολικών εκφράσεων. Τα τεχνολογικά πακέτα που περιλαμβάνουν ένα πλήρες CAS μαζί με τα δυναμικά εργαλεία κατασκευής παρέχουν στους μαθητές την ευκαιρία να αποφορτιστούν από την εργασία με τα σύμβολα, να συνδέσουν τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται από τις συμβολικές εκφράσεις με τις γραφικές και αριθμητικές αναπαραστάσεις και να αντιληφθούν τις δυναμικές γραφικές, εικονικές και αριθμητικές αναπαραστάσεις των συμβολικών κανόνων, μεταβάλλοντας τις παραμέτρους. Όπως ακριβώς οι μαθητές που χειρίζονται τις συμβολικές εκφράσεις με το χέρι παρουσιάζουν συγκεκριμένες παρανοήσεις, υπάρχουν και οι μαθητές που έχουν παρόμοιες δυσκολίες και βρίσκουν κοινά εμπόδια που μπορούν να ξεπεραστούν με την εργασία τους με τα CAS (Drijvers, 2000). Οι Drijvers και van Herwaarden (2001) παρατήρησαν ότι οι αυξημένες δυσκολίες που είχαν οι μαθητές που εργάζονταν με τα CAS διακρίνονταν σε σχέση με το διαφορετικό ρόλων των γραμμάτων (ως μεταβλητές και ως παράμετροι). Με την ικανότητα των CAS να αντιμετωπιστούν οι περίπλοκες εκφράσεις που περιλαμβάνουν τα γράμματα και ως μεταβλητές και ως παραμέτρους, οι μαθητές που χρησιμοποιούν τα CAS είναι πιθανότερο να έρθουν αντιμέτωποι με την ανάγκη να διακρίνουν τις μεταβλητές από τις παραμέτρους.

Τα CAS είναι πιθανό να δημιουργήσουν την ανάγκη εξέτασης της ισοδυναμίας των συμβολικών εκφράσεων. Η Artigue (2002) προσδιορίζει το συμβολικό συλλογισμό ως ένα από τα δύο στοιχεία συνεισφοράς που τα CAS έχουν τη δυνατότητα να πετύχουν στην ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης, αλλά σημείωσε ότι η χρήση των CAS είναι απίθανο να αναπτύξει το συμβολικό συλλογισμό. Εντούτοις, ο Ruthven (2002), επισημαίνει ότι πρόσφατες έρευνες (Heid, 1988) έχουν δώσει στοιχεία ότι ο συμβολικός συλλογισμός ενός συγκεκριμένου μοντέλου μπορεί να αναπτυχθεί στα πλαίσια των CAS.

Μοντελοποίηση. Η τεχνολογία στην υπηρεσία της μαθηματικής μοντελοποίησης φέρνει νέα άτομα στη συζήτηση που αφορά στις ποσοτικές σχέσεις στις προσωπικές τοποθετήσεις. Οι γραφικές παραστάσεις που προέρχονται από τα βίντεο μπορούν να καταστήσουν εμφανείς ορισμένες πτυχές της κατάστασης (Boyd & Rubin, 1996). Μερικά προγράμματα υπολογιστών έχουν κατασκευαστεί με σκοπό να παρέχουν ένα ενδιάμεσο επίπεδο μεταξύ της φυσικής γλώσσας και της συμβολικής αναπαράστασης ώστε να βοηθά τους μαθητές να ενισχύσουν την κατανόηση της μαθηματικής μοντελοποίησης (Schwartz & Yerushalmy, 1995). Η τεχνολογία, επίσης, μπορεί να παρέχει άμεση πρόσβαση στις παραγόμενες ποσότητες, και είναι για αυτό που οι Noble και Nemirovsky (1997), αποκαλύπτουν ορισμένες από τις παρανοήσεις και δυσκολίες στην κατανόηση των μαθητών όσον αφορά στην ερμηνεία εκείνων των ποσοτήτων που οι ίδιοι οι μαθητές χειρίζονται τα χαρακτηριστικά τους. Σε αυτήν την αλληλεπίδραση μεταξύ της τεχνολογίας, της φυσικής κατάστασης, του μαθητή και του εκπαιδευτικού, ο υπολογιστής μπορεί να γίνει ένα λόγος συζήτησης για τους εκπαιδευτικούς και τους μαθητές (Tinker & Thornton, 1992).

Οι Borba και Villarreal (2005) και ο Soares (2012) έχουν εξετάσει το ρόλο της νοερής απεικόνισης που αναπτύσσεται με διαφορετικά λογισμικά στη μοντελοποίηση ή σε δραστηριότητες επίλυσης προβλήματος. Η Zbiek (1998) ερεύνησε τις στρατηγικές μοντελοποίησης των φοιτητών σε Τμήμα Μαθηματικών για να αναπτύξει και να επιβεβαιώσει συναρτήσεις ως μαθηματικά μοντέλα πραγματικών καταστάσεων. Προσδιόρισε τέσσερις γενικές στρατηγικές, που διακρίνονται από το μέγεθος και τη φύση της καταλληλότερης καμπύλης που χρησιμοποιείται και τη σχετική επικράτηση των μαθηματικών έναντι της πραγματικότητας που έχει επιπτώσεις στην ανάπτυξη και την αξιολόγηση των μοντέλων:

1. Επιλογέας κατάλληλης συνάρτησης: Ο φοιτητής χρησιμοποιεί άμεσα την κατάλληλη καμπύλη για να δημιουργήσει κάθε μια από τις συγκεκριμένες συναρτήσεις που είναι διαθέσιμες στα εργαλεία και επιλέγει αυτή που προσαρμόζεται καλύτερα. Αυτό αφήνει την επιλογή του μοντέλου στα εργαλεία και δεν υπάρχει καμία κρίση από το χρήστη.
2. Δημιουργός πιθανής συνάρτησης: Ο φοιτητής δημιουργεί όλους τους πιθανούς κανόνες αλλά δεν στηρίζεται μόνο στο ποσοστό καταλληλότητας για να αποφασίσει ποιος κανόνας είναι καλύτερος. Αντ' αυτού, η επιλογή εξαρτάται από τον βαθμό, τον οποίο τα χαρακτηριστικά κάθε μιας από τις συναρτήσεις ταιριάζουν με τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα των πραγματικών καταστάσεων.
3. Καρτεσιανά γραφικά εργαλεία: Ο φοιτητής χρησιμοποιεί το εργαλείο για να δημιουργήσει γραφικές παραστάσεις σε καρτεσιανές συντεταγμένες αλλά εξετάζει τις συναρτήσεις πέραν από αυτές που το εργαλείο είναι δυνατόν να δημιουργήσει.
4. Αχρείαστο ή αχρησιμοποίητο εργαλείο: Οι φοιτητές στηρίζονται στις προσδοκίες από τις σχέσεις στον πραγματικό κόσμο μεταξύ των ποσοτήτων, ορισμένων αλλά όχι όλων των διαταγμένων ζευγών των δεδομένων τους.

Η έρευνα της Zbiek οδηγεί σε ένα σημαντικό ζήτημα όσον αφορά στη χρήση της τεχνολογίας στη μαθηματική μοντελοποίηση, δηλαδή, στο βαθμό στον οποίο οι χρήστες επιτρέπουν στα εργαλεία να λαμβάνουν αποφάσεις για τους ίδιους. Όταν οι φοιτητές χρησιμοποιούν τα δυναμικά εργαλεία για να αναπτύξουν μοντέλα, οι εκπαιδευτικοί οφείλουν να δώσουν ιδιαίτερη προσοχή στην έκταση στην οποία οι φοιτητές λαμβάνουν αποφάσεις σε αντιδιαστολή με την επιλογή να έχουν το εργαλείο να λαμβάνει αποφάσεις γι' αυτούς. Αυτό το ζήτημα αναδεικνύεται ιδιαίτερα στα πλαίσια της μοντελοποίησης, αλλά προκύπτει και σε άλλα πλαίσια όπως για παράδειγμα, στο βαθμό στον οποίο οι φοιτητές λαμβάνουν τις αποφάσεις κατά τη χρήση των CAS για το χειρισμό των μαθηματικών συμβόλων και των συμβολικών αναπαραστάσεων.

Ενσωμάτωση σύγχρονων τεχνολογιών στη διδασκαλία της Ανάλυσης. Υπάρχουν θέματα στα μαθηματικά που μας δίνουν την προοπτική εφαρμογών στους υπολογιστές αφού έχουν τέτοιες πτυχές που μπορούν να αναπαρασταθούν πολύ καλά σε μια οθόνη υπολογιστή. Ταυτόχρονα, υπάρχει η δυνατότητα μετασχηματισμού της έννοιας και αυτών των πτυχών-προοπτικών της, η οποία απαιτεί μια δυναμική εφαρμογή, ή υπάρχουν οι τεχνικές υπολογιστικές πτυχές οι οποίες είναι πολύ σχετικές με την ουσία του θέματος που είναι καλύτερα να επιλύονται ή να παρουσιάζονται από ένα υπολογιστή. Ακόμα αν το θέμα έχει άμεση σχέση ή μπορεί να παρουσιαστεί με δύο διαφορετικές αναπαραστάσεις της ίδιας έννοιας αυτές οι αναπαραστάσεις μπορούν να εξεταστούν ευκολότερα και παράλληλα με τη βοήθεια ενός λογισμικού στον υπολογιστή (Dreyfus & Halevi, 1991).

Η αντίληψη των μαθητών όσον αφορά στη μαθηματική γνώση και ειδικότερα στην Άλγεβρα και στην Ανάλυση, η οποία αναπτύσσεται με τεχνολογικά εργαλεία αποτελεί ένα σημαντικό πεδίο έρευνας τις τελευταίες δεκαετίες (Swidan & Yerushlmy, 2014). Οι έρευνες εστιάζενται στη μαθηματικοποίηση πραγματικών καταστάσεων και εξετάζουν τις γνωστικές προκλήσεις που παρουσιάζονται μέσα από την οικοδόμηση σύνθετων μαθηματικών μοντέλων με τη χρήση δυναμικών εργαλείων για τις αναπαραστάσεις των συναρτήσεων και των διαδικασιών (Noble, Nemirovsky, Wright, & Tierney, 2001; Ubuz, 2007; Yerushalmy, 1997). Με βάση τα πιο πάνω αρκετές έρευνες εξετάζουν την κατανόηση των μαθητών για το ρυθμό αλλαγής που οδηγεί στην κατανόηση των εννοιών της Ανάλυσης, όπως η παράγωγος ή το όριο (Thompson Byerley, & Hatfield, 2013; Yerushalmy & Swidan, 2012; Yiasoumis, Mattheou, & Christou, 2009).

Η κατανόηση των μαθητών για τις έννοιες της Ανάλυσης έχει συνδεθεί με τους τρόπους με τους οποίους αυτές οι έννοιες αναπαριστούνται (Presmeg 2006). Για παράδειγμα, με σκοπό τη βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση στην Ανάλυση, οι κατευθύνσεις στη διδασκαλία που δίνονται πρέπει να εστιαστούν όχι μόνο στη χρήση των αλγεβρικών αναπαραστάσεων αλλά ταυτόχρονα πρέπει να λαμβάνουν υπόψη τις γεωμετρικές και διαισθητικές αναπαραστάσεις των αντίστοιχων μαθηματικών αντικειμένων καθώς επίσης και τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ αυτών των πολλαπλών αναπαραστάσεων (Kaput, 1994). Τέτοιες κατευθύνσεις έχουν αναπτυχθεί λόγω της προόδου που παρουσιάζει η τεχνολογία και της ανάπτυξης δυναμικών μαθηματικών λογισμικών (Habre & Abboud, 2006).

Είναι κοινά αποδεκτό ότι οι μαθητές έχουν δυσκολίες στην εφαρμογή της γνώσης για την Ανάλυση σε πραγματικά πλαίσια. Οι Crouch και Haines (2004) παρουσιάζουν αυτές τις δυσκολίες, στην εφαρμογή της έννοιας της παραγώγου στη φυσική και τα οικονομικά. Η χρήση του υπολογιστή ως εργαλείο για την εκτέλεση των διαδικασιών μπορεί να δώσει μεγαλύτερη ελευθερία στους μαθητές για να ερευνήσουν διάφορες εφαρμογές (Hsaio, 1984/85). Με αυτό το τρόπο το μάθημα των Μαθηματικών μπορεί στη συνέχεια να επικεντρωθεί σε δεξιότητες και σε βασικές και θεμελιώδης έννοιες. Οι μαθητές στην έρευνα της Heid (1988) δήλωσαν ότι απόλαυσαν την εργασία τους με τους υπολογιστές, γιατί τους ελευθέρωσε από την εκτέλεση τυπικής διαδικαστικής εργασίας και τους έδωσε αυτοπεποίθηση για τα αποτελέσματά τους που βασίζονταν στο συλλογισμό τους. Τους επέτρεψε επίσης να δώσουν περισσότερη προσοχή πιο σφαιρικά στις πτυχές της λύσης του προβλήματος. Η έρευνα της Heid (1988) έδειξε επίσης, ότι οι μαθητές που χρησιμοποιούν τους υπολογιστές, στην πειραματική ομάδα, καταλαβαίνουν τις έννοιες στις περισσότερες περιπτώσεις καλύτερα από τους μαθητές στην ομάδα ελέγχου που εργάστηκαν με τον παραδοσιακό τρόπο. Μετά από μόνο τρεις εβδομάδες εργασίας, η πειραματική ομάδα απέδωσε σχεδόν το ίδιο καλά στην τελική εξέταση (skill test) όπως την ομάδα ελέγχου η οποία εργαζόταν 200 λεπτά εβδομαδιαίως για 15 εβδομάδες.

Η ενσωμάτωση της τεχνολογίας των ηλεκτρονικών υπολογιστών συμβάλλει στη διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών στην Ανάλυση. Αυτή η εξέλιξη είναι κυρίως επηρεασμένη από την παρουσία των CAS. Τα CAS δίνουν τη δυνατότητα πειραματικών προσεγγίσεων, χρησιμοποιώντας γραφική, αριθμητική και συμβολική αναλυτική ικανότητα. Οι μαθητές μπορούν να έχουν εμπειρίες σε μαθηματικό περιεχόμενο «ενεργώντας γραφικά, αριθμητικά ή συμβολικά» (Fuchs, 2001; Zeller & Barzel, 2010). Με αυτόν τον τρόπο ο ηλεκτρονικός υπολογιστής αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο και χρήσιμη ενίσχυση στη διδασκαλία και στη μάθηση των μαθηματικών. Ο υπολογισμός, η απεικόνιση και η δυνατότητα δυναμικής κίνησης που μας δίνουν οι υπολογιστές μπορούν να αποτελέσουν βάση στην ανάπτυξη νέων προσεγγίσεων στη διδασκαλία των εννοιών της Ανάλυσης και να βοηθήσουν τους μαθητές να υπερβούν τις δυσκολίες στην κατανόηση σημαντικών εννοιών.

Ο Dorfler (1991, αναφορά στον Fuchs, 2001) αναφέρει ότι βασική αρχή για να «κάνεις μαθηματικά» είναι να οδηγηθείς σε γενικές ιδέες, τις οποίες ονομάζει πρωτότυπα. Τα CAS βοηθούν τους μαθητές στην ανακάλυψη των πρωτοτύπων. «Ενεργώντας γραφικά» οι μαθητές μπορούν να μετατρέπουν τις γραφικές παραστάσεις πραγματικών συναρτήσεων πολύ εύκολα και ταυτόχρονα να συγκεντρώνονται στα βασικά χαρακτηριστικά του μαθηματικού αντικειμένου που εξετάζουν. «Ενεργώντας αριθμητικά» οι μαθητές μπορούν να εμβαθύνουν στις μαθηματικές έννοιες καθώς χειρίζονται τους αριθμούς και τις αριθμητικές πράξεις με τη βοήθεια των CAS. «Ενεργώντας συμβολικά» οι μαθητές βασίζονται σε τυπικές μαθηματικές αναπαραστάσεις.

Τα CAS εκτελούν υπολογισμούς γρήγορα και με ακρίβεια. Οι μαθητές μπορούν να λάβουν ακριβή και κατά προσέγγιση αποτελέσματα χωρίς να τους απασχολούν διαδικαστικά προβλήματα ή λάθη στις πράξεις. Οι ερευνητές υποστηρίζουν ότι οι δάσκαλοι μπορούν να χρησιμοποιήσουν την αποδοτικότητα που παρέχουν τα CAS, για να εστιάσουν την προσοχή τους στην εννοιολογική κατανόηση και στην επίλυση προβλήματος (Heid, 1988; Hillel, 1993). Επιπλέον, προτείνουν ότι οι αδύνατοι μαθητές μπορούν να ωφεληθούν από την άμεση ανατροφοδότηση που παρέχουν τα CAS, αφού είναι δυνατόν να ξεπεράσουν τις στερεότυπες διαδικασίες και να οδηγηθούν σε πιο σύνθετους στόχους όπως την ανάπτυξη συνδέσεων μεταξύ μιας αλγεβρικής έκφρασης και μιας γραφικής παράστασης (Kuzler, 2000).

Οι ερευνητές Heid, (1988), Porzio, (1999), και Kaput (1996) έχουν υποστηρίξει ότι τα CAS βοηθούν τους μαθητές στη διερεύνηση προβλημάτων και εννοιών με την παροχή διαφορετικών μορφών αναπαραστάσεων για κάθε αλγεβρική έκφραση. Ένας εκπαιδευτικός μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν τα μαθηματικά και να μάθουν στρατηγικές ώστε να αναπτύξουν αφαιρετικές δομές αλγεβρικής κατανόησης, εστιάζοντας την προσοχή του κυρίως στην ερμηνεία και την απεικόνιση των εννοιών παρά στην εκτέλεση διαδικασιών (Arnold, 2004; Pierce & Stacey, 2007).

Υπάρχουν αρκετές έρευνες σχετικά με τη χρήση της τεχνολογίας και των δυναμικών δυνατοτήτων απεικόνισής της σε σχέση με διαδικασίες προσέγγισης σε αριθμητικό και γραφικό επίπεδο (Caballero-Gonzales & Bernal-Rodriguez, 2011; Henning & Hoffkamp 2013; Kidron & Zehavi, 2002; Martinovic & Karadag 2012; Ματθαίου, Γιασουμής, & Χρίστου, 2009). Σε αυτές προτείνεται η εργασία με πραγματικές τιμές συνεχών συναρτήσεων και η δυναμική απεικόνιση (με προγράμματα όπως το Geogebra ή Cinderella) του ορίου με μια ακολουθία τεμνουσών που συγκλίνουν στην εφαπτομένη σημείου μιας γραφικής παράστασης συνάρτησης, καθώς και η αριθμητική διαδικασία της σύγκλισης στο πλαίσιο ενός πίνακα (σε έναν υπολογισμό με λογιστικό φύλλο - spreadsheet). Η απαραίτητη μετάβαση από τη συνεχή προοπτική στην σταδιακή διαδικασία σε σχέση με τη διαδικασία ορίου, που περιλαμβάνει την επιλογή είτε μιας ακολουθίας σημείων στη γραφική παράσταση είτε μιας ακολουθίας αριθμητικών τιμών που συγκλίνουν σε μια επιλεγμένη αξία της συνάρτησης, είτε σε ένα σημείο στη γραφική παράσταση, πρέπει να γίνει από τους ίδιους τους μαθητές (Weigand, 2014).

Η Heid (1989) μέσα από έρευνα αναφέρεται στα χαρακτηριστικά των συμβολικών δυναμικών συστημάτων, συνοψίζοντάς τα σε τέσσερις περιοχές:

1. Τα συμβολικά – δυναμικά αποτελέσματα είναι ακριβή και δεν εμπεριέχουν χειριστικά λάθη,
2. τα συμβολικά – δυναμικά αποτελέσματα γενικεύονται γρήγορα,
3. ένα μεγάλο εύρος συμβολικών αναλυτικών ικανοτήτων είναι διαθέσιμο σε απλά περιβάλλοντα,
4. τα συμβολικά – δυναμικά αποτελέσματα μπορούν να οδηγήσουν στην επίλυση δυσκολότερων προβλημάτων από εκείνα που οι περισσότεροι μαθητές μπορούν αν επιλύσουν με τις παραδοσιακές μεθόδους.

Τα τεχνολογικά υποστηριζόμενα περιβάλλοντα συνήθως μπορούν να διαμορφώνουν την αντίληψη για τις μαθηματικές έννοιες στους μαθητές. Η ερμηνεία αυτών των αντιλήψεων που δίνεται από τους μαθητές δεν είναι απαραίτητα κοινή από όλους στην τάξη και είναι πιθανόν να εμφανιστεί σύγκρουση στις αντιλήψεις των συμμετεχόντων στη διδασκαλία. Αυτή η σύγκρουση μπορεί να επιλυθεί μέσω της συζήτησης και της χρήσης των κατάλληλων παραδειγμάτων. Σε αυτήν την διαδικασία ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι πολύ σημαντικός ώστε να αντιληφθεί την κατάσταση της τάξης και να πάρει τις αποφάσεις που πιθανόν να αλλάζουν τον αρχικό σχεδιασμό του μαθήματος. Ο εκπαιδευτικός οφείλει να επιλέξει τα κατάλληλα παραδείγματα και να κατευθύνει με τέτοιο τρόπο τη συζήτηση προκειμένου να διαμορφώσει σωστά τις αντιλήψεις των μαθητών ώστε να επιτευχθούν οι στόχοι του μαθήματος (Biza, 2010).

Η Διδασκαλία της Ανάλυσης - Δυσκολίες στη Διδασκαλία της Ανάλυσης

Η Ανάλυση αποτελεί το βασικό πυρήνα για τις θετικές επιστήμες και την εφαρμοσμένη μηχανική και μια από τις δυσκολότερες πτυχές τόσο στη Μέση όσο και στην Ανώτερη εκπαίδευση, σε προπτυχιακό επίπεδο (Bezuidenhout, 2001; Rasmussen et al., 2014). Εντούτοις, μέσα από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας που αφορά στη μαθηματική εκπαίδευση, διαπιστώνετε ότι η έρευνα για τη διδασκαλία της Ανάλυσης σε πραγματικές τάξεις δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης είναι αρκετά σπάνια (Torner, Potari, & Zachariades, 2014).

Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται αναφορά στη διδασκαλία της Ανάλυσης και εντοπίζονται οι παρανοήσεις, οι παρερμηνείες και τα λάθη που παρουσιάζονται κατά τη διδασκαλία της Ανάλυσης και ιδιαίτερα κατά τη διδασκαλία των παραγώγων. Ακολούθως, γίνεται ιδιαίτερη αναφορά στη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου και στον τρόπο που η έννοια αυτή παρουσιάζεται στα βιβλία μαθηματικών κατεύθυνσης της Β' Λυκείου της Κύπρου, με τα οποία εργάζονται τα υποκείμενα της παρούσας έρευνάς.

Η διδασκαλία της Ανάλυσης. Η ανάπτυξη της Ανάλυσης στην πορεία του χρόνου, φαίνεται να καθορίζεται μέχρι τις αρχές της δεκαετίας του '80, σε ένα μεγάλο βαθμό από τους Καθηγητές των Πανεπιστημίων του κλάδου των Μαθηματικών, οι οποίοι ανέπτυσσαν τις αρχές που διέπουν τα αναλυτικά προγράμματα της Ανάλυσης και τη διδασκαλία στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (δεδομένου ότι ενδιαφέρονταν ιδιαίτερα για το γεφύρωμα του χάσματος που υπήρχε μεταξύ δευτεροβάθμιας και τριτοβάθμιας εκπαίδευσης). Εντούτοις, η αυστηρότερη προσέγγιση της Ανάλυσης που απαιτήθηκε από τους μαθηματικούς απέτυχε σε όλες τις Ευρωπαϊκές χώρες (Freudenthal, 1978).

Από τις αρχές της δεκαετίας του '80 μέχρι σήμερα, η έρευνα στη μαθηματική εκπαίδευση τυγχάνει μεγαλύτερης αναγνώρισης, πράγμα που οδηγεί στη διαμόρφωση της διδασκαλίας των σχολικών μαθηματικών και αναλυτικών προγραμμάτων της Ανάλυσης, με τέτοιο τρόπο ώστε να χαρακτηρίζονται από περισσότερη κοινωνική ευαισθησία (Kilpatrick, 1992). Αυτό φαίνεται από την επικράτηση της μαθητοκεντρικής προσέγγισης διδασκαλίας, από την ένταξη της επίλυσης προβλημάτων σε πραγματικές καταστάσεις, των εφαρμογών και της μοντελοποίησης στη διδασκαλία καθώς και από τη διαμόρφωση του ρόλου της τεχνολογίας στη διδασκαλία και τη μάθηση και του τρόπου οικοδόμησης μαθηματικών ικανοτήτων (Torner et al., 2014).

Όπως αναφέρει ο Weigand (2014), σε αυτές, τις τελευταίες δεκαετίες, η διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου στις τάξεις του σχολείου έχει αλλάξει. Η χρήση μιας συμβατικής προσέγγιση της διδασκαλίας της Ανάλυσης με αυτή που χρησιμοποιείται σε πανεπιστημιακό επίπεδο βασισμένη στην αλληλουχία της έννοια, έχει μετασχηματιστεί ή έχει αντικατασταθεί από μια νέα προσέγγιση. Η διαισθητική προσέγγιση των εννοιών του ορίου και της παραγώγου μέσω του ρυθμού αλλαγής έχει επικρατήσει στη διδασκαλία της Μέσης εκπαίδευσης. Περιλαμβάνει εργασία από την αρχή της διδασκαλίας των εννοιών με πραγματικές συναρτήσεις, έμφαση στις γραφικές παραστάσεις και χρήση των νέων τεχνολογιών.

Η έρευνα για τη μάθηση και τη διδασκαλία της Ανάλυσης κυρίως σε θέματα που αφορούν στο όριο, στην παράγωγο και στο ολοκλήρωμα, έχει ακολουθήσει την εξής πορεία:

1. Προσδιορισμός και μελέτη των δυσκολιών των μαθητών που οδηγούν σε γνωστικά εμπόδια (τα οποία ερευνά ως συνέπεια των δυσκολιών).
2. Διερεύνηση των διαδικασιών με τις οποίες οι μαθητές αντιλαμβάνονται και μαθαίνουν τις συγκεκριμένες έννοιες.
3. Εξέταση εφαρμογών στις τάξεις, συμπεριλαμβανομένων των αποτελεσμάτων των νέων αναλυτικών προγραμμάτων και των διδακτικών και παιδαγωγικών καινοτομιών στη μάθηση των μαθητών και
4. Διερεύνηση των γνώσεων, πεποιθήσεων και πρακτικών των εκπαιδευτικών ή των μελλοντικών εκπαιδευτικών, αποφοίτων τριτοβάθμιας εκπαίδευσης (Rasmussen et al., 2014).

Η πορεία αυτή ασχολείται κυρίως με τη μάθηση των εκπαιδευόμενων και ειδικά σε πανεπιστημιακό επίπεδο. Όσον αφορά στη μάθηση της Ανάλυσης στη Μέση εκπαίδευση, έρευνες εστιάζονται κυρίως στην κατανόηση και στις διαισθητικές αντιλήψεις των μαθητών, καθώς επίσης και στις δυσκολίες και τα επιστημολογικά εμπόδια που σχετίζονται με τις έννοιες της Ανάλυσης όπως η συνάρτηση, το όριο, η συνέχεια, η παράγωγος και το ολοκλήρωμα (Biza et al., 2008; Hahkioniemi, 2006a; Sierpinska, 1987; Tsamir, 2002; Elia, Gagatsis, Panaoura, Zachariades, & Zoulinaki, 2009).

Δυσκολίες στη διδασκαλία της Ανάλυσης. Η ανάπτυξη εννοιολογικής κατανόησης του μαθηματικού περιεχομένου (έννοιες, σύμβολα, αλγόριθμοι, κτλ.) είναι βασικός στόχος της διδασκαλία της Ανάλυσης. Εντούτοις, οι καθηγητές μαθηματικών συχνά εκφράζουν ανησυχίες ότι οι μαθητές τους, παρόλο που μπορούν να βρουν όρια, να ολοκληρώσουν ή να διαφορίσουν, δεν οικοδομούν συσχετιστική κατανόηση των εννοιών της Ανάλυσης (Bezuidenhout, 2001).

Οι Ferrini-Mundy και Graham (1991) υποστήριξαν ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν τα μαθηματικά ως ένα στατικό σώμα εννοιών και δεξιοτήτων που μπορούν να κατανοηθούν το κάθε ένα ξεχωριστά. Οι μαθητές καλούνται να λύσουν, να σχεδιάσουν, να βρουν, να κάνουν γραφική παράσταση, να αξιολογήσουν, να καθορίσουν και να υπολογίσουν με μια καθορισμένη σειρά βημάτων (Ferrini-Mundy & Graham 1991). Αυτή η αποτυχία του παραδοσιακού αναλυτικού προγράμματος σπουδών για την Ανάλυση έχει οδηγήσει στην προσπάθεια μεταρρύθμισης και αλλαγής του. Λόγω της σημασίας της

Ανάλυσης σε πολλές πτυχές των μαθηματικών έχουν υπάρξει πολλές έρευνες στην κατανόηση της Ανάλυσης από τους μαθητές.

Ταυτόχρονα, πολλές έρευνες έχουν επιβεβαιώσει τις δυσκολίες των μαθητών στην εννοιολογική κατανόηση της Ανάλυσης (Ferini-Mundy & Graham, 1991; Tall, 1991). Όπως αναφέρει ο Tall (1991), οι μαθητές μαθαίνουν να ανταποκρίνονται σε τυποποιημένες ερωτήσεις με προβλέψιμο τρόπο και παρουσιάζουν δυσκολίες να ανταποκριθούν σε μη τυποποιημένες καταστάσεις. Οι μαθητές φέρουν προηγούμενες εμπειρίες στην τάξη των μαθηματικών, οι οποίες έχουν επιπτώσεις στην κατανόησή τους. Ταυτόχρονα, τα ίδια τα μαθηματικά ως αντικείμενο, ακόμα και αν τυποποιηθούν σε ένα συνεπή διδακτικό πλαίσιο, βασισμένο σε ενδεχόμενες και σαφείς συμβατικές συμφωνίες μεταξύ των καθηγητών μαθηματικών είναι δυνατόν να προκληθούν περαιτέρω δυσκολίες.

Τα προβλήματα που παρουσιάζουν οι μαθητές στην κατανόηση εννοιών της Ανάλυσης αποτελούν το ένα από τα δύο συμπεράσματα των ερευνών που αφορούν στη διδασκαλία της Ανάλυσης τα τελευταία χρόνια. Το δεύτερο είναι ότι οι συνήθεις μέθοδοι και οι τεχνικές διδασκαλίας έχουν αποτύχει, όπως επίσης έχει αποτύχει και η μονομερής επικέντρωση της Ανάλυσης είτε σε αλγοριθμικούς και αλγεβρικούς υπολογισμούς είτε σε θεωρητικά θέματα (Cornu, 1991).

Στην προσπάθειά τους οι εκπαιδευτικοί να καλύψουν συγκεκριμένη ύλη, οργανώνουν τη διδασκαλία τους σε ενότητες, όπου κάθε ενότητα περιέχει ορισμούς, θεωρήματα, αποδείξεις και εφαρμογές, τα οποία μπαίνουν στη σειρά ώστε να υπάρχει μια λογική δομή. Με αυτό τον τρόπο, τα Μαθηματικά που διδάσκονται παρουσιάζονται ως ένα ολοκληρωμένο και τελειωμένο προϊόν, η διδασκαλία έχει καθαρά χαρακτήρα διεκπεραίωσης και ο μαθητής απλώς παρακολουθεί χωρίς να συμμετέχει και συνήθως χωρίς να καταλαβαίνει (Tall, 1991).

Είναι σημαντικό ο εκπαιδευτικός να γνωρίζει ότι τα Μαθηματικά καταλήγουν στην τελική και βέλτιστη μορφή μέσα από προσπάθειες και λάθη, μέσα από μερικώς σωστές και μερικώς λανθασμένες προτάσεις, μέσα από διαισθητικές τυποποιήσεις στις οποίες όροι και ανακρίβειες έχουν εσκεμμένα εισαχθεί, μέσα από αναπαραστάσεις που προσπαθούν να παρουσιάσουν εποπτικά μέρη των μαθηματικών που είναι προς διερεύνηση και μέσα από δυναμικές αλλαγές που γίνονται σε αυτές τις αναπαραστάσεις (Tall, 1991).

Παρανοήσεις και λάθη κατά τη διδασκαλία της Ανάλυσης. Μια παρανόηση συμβαίνει όταν ένα πρόσωπο πιστεύει σε μια έννοια που είναι αντικειμενικά λανθασμένη. Λόγω της υποκειμενικότητας που παρουσιάζεται στους ανθρώπους είναι δυνατόν να υποθέσει κανείς ότι όλοι έχουν κάποιες παρανοήσεις ή παρερμηνείες. Εάν μια έννοια δεν μπορεί να αποδειχθεί αν είναι σωστή ή λανθασμένη τότε δεν μπορεί να υποστηριχτεί ότι αυτοί που δεν την πιστεύουν έχουν παρανοήσει την έννοια σε σχέση με αυτούς που την πιστεύουν έστω και αν οι δεύτεροι θέλουν την έννοια να είναι σωστή και αντίστροφα (Yusof, 2003).

Η λανθασμένη αναπαράσταση μιας έννοιας δεν είναι μια παρανόηση αλλά μπορεί να οδηγήσει σε παρανόηση. Σύμφωνα με το Li (2006) τα λάθη των μαθητών είναι το παράγωγα λανθασμένων αντιλήψεων ή λανθασμένης κατανόησης. Μεταξύ πολλών και διαφορετικών τύπων λαθών, συστηματικά λάθη εμφανίζονται σε πολλούς μαθητές κατά τη διάρκεια ενός μεγάλου χρονικού διαστήματος και είναι σχετικά εύκολο να ερευνηθεί με τη σημερινή γνώση και εργαλεία. Η αιτία των συστηματικών λαθών μπορεί να αφορά τη διαδικαστική γνώση, την εννοιολογική γνώση, ή τις συνδέσεις μεταξύ των δύο. Γενικά, οι παρανοήσεις παρουσιάζονται μέσω των λαθών. Ένα λάθος μπορεί γίνει λόγω σφάλματος ή λόγω άγνοιας ή λανθασμένου υπολογισμού ή λανθασμένης εκτίμησης, κατηγορίες οι οποίες οδηγούν σε μη συστηματικά λάθη.

Η πρόκληση όμως που υπάρχει σε σχέση με τις παρανοήσεις είναι το γεγονός ότι αρκετοί άνθρωποι παρουσιάζουν δυσκολία στην εγκατάλειψη των παρανοήσεών τους λόγω του ότι λανθασμένες αντιλήψεις εννοιών είναι δυνατόν να έχουν τόσο βαθιά και δυνατά κατακτηθεί από το άτομο. Μερικοί άνθρωποι δεν αρέσκονται να αποδεικνύονται λανθασμένοι και οπότε συνεχίζουν την παρανόηση παρόλο που έχουν στοιχεία για το σωστό (Muzangwa & Chifamba, 2012).

Αυτή η άποψη συμφωνεί με αυτήν του Hammer (1996), ο οποίος παρουσιάζει τις παρανοήσεις των μαθητών με τα εξής χαρακτηριστικά:

1. Έντονα ελεγχόμενες με σταθερές γνωστικές δομές
2. Διαφορετικές από την ειδική κατανόηση
3. Έχουν επιπτώσεις στη θεμελιώδη γνώση που αφορά στην αντίληψη από τους μαθητές των φυσικών φαινομένων και των επιστημονικών εξηγήσεων και
4. Ως κάτι που πρέπει να ξεπεραστεί, να αποφευχθεί, ή να αποβληθεί ώστε οι μαθητές να επιτύχουν την ειδική κατανόηση.

Ένας από τους παράγοντες που οδηγούν τους μαθητές σε λανθασμένες επιλογές ή λύσεις των καταστάσεων που έχουν να αντιμετωπίσουν είναι οι παρερμηνείες και οι παρανοήσεις των μαθητών. Μια από τις κύριες μεθόδους που χρησιμοποιούνται για να αναλύσουν τα λάθη των μαθητών είναι η ταξινόμηση σε κατηγορίες βασισμένες στην ανάλυση της συμπεριφοράς των μαθητών. Μέσω της χρήσης του γνωστικού μοντέλου και της εξέτασης των ξεχωριστών αντικειμένων των μαθηματικών, ο Radatz (1979) ταξινόμησε τα λάθη σε σχέση με:

1. Τις γλωσσικές δυσκολίες. Τα μαθηματικά είναι όπως μια «ξένη γλώσσα» για τους μαθητές που πρέπει να γνωρίσουν και να κατανοήσουν τις μαθηματικές έννοιες, τα σύμβολα, και το λεξιλόγιο. Παρανόηση της σημασιολογίας της μαθηματικής γλώσσας μπορεί να προκαλέσει λάθη από την αρχή της επίλυσης προβλήματος από τους μαθητές.
2. Δυσκολίες στην επεξεργασία της εικονικής και οπτικής αναπαράστασης της μαθηματικής γνώσης.
3. Ανεπάρκεια στις απαραίτητες δεξιότητες, δεδομένα, και έννοιες, όπως για παράδειγμα όταν οι μαθητές είναι δυνατόν να ξεχάσουν ή να μην μπορούν να ανακαλέσουν προηγούμενες σχετικές πληροφορίες και γνώσεις κατά την επίλυση του προβλήματος.
4. Ανακριβής σχέση - διασύνδεση ή στερεότυπα δηλαδή αρνητική μεταφορά που προκαλείται με την αποκωδικοποίηση και την κωδικοποίηση πληροφοριών.
5. Εφαρμογή άσχετων κανόνων ή στρατηγικών.

Ο Orton (1983b) μέσα από την έρευνά του έδωσε τη δική του ταξινόμηση στα λάθη που παρουσίαζαν οι μαθητές, σε τρεις κατηγορίες ως εξής:

1. Δομικό λάθος: το λάθος που προκύπτει από την αποτυχία εκτίμησης της σχέσης που περιλαμβάνεται στο πρόβλημα ή στην αποτυχία αντίληψης μιας θεμελιώδους αρχής ουσιαστικής για τη λύση.
2. Αυθαίρετο λάθος: το λάθος στο οποίο το άτομο συμπεριφέρεται αυθαίρετα και αποτυγχάνει να λάβει υπόψη τους περιορισμούς που καθορίστηκαν στην κατάσταση που έχει να αντιμετωπίσει
3. Εκτελεστικό λάθος: το λάθος όπου ο μαθητής αποτυγχάνει να χειριστεί παρανοήσεις, αν και στην αρχική συσχέτιση μπορεί να είχαν γίνει κατανοητοί.

Η μαθηματική γνώση είναι αλληλένδετη και παρανοήσεις σε έναν τομέα των μαθηματικών ίσως μεταφερθούν και σε άλλους τομείς των μαθηματικών. Μια φτωχή γνώση βασικών εννοιών μπορεί να περιορίσει ένα μαθητή στην αντιμετώπιση και εξέταση άλλων ενοτήτων μελέτης. Επιπλέον η Ανάλυση είναι σειρά πυρηνικών γνώσεων σε οποιοδήποτε μαθηματικό πρόγραμμα προπτυχιακών σπουδών.

Η Διδασκαλία της Έννοιας της Παραγώγου - Παρανοήσεις και Λάθη Κατά τη Διδασκαλία.

Η ανάπτυξη της κατανόησης της έννοιας της παράγωγου αποτελεί βασικό στόχο στη διδασκαλία της Ανάλυσης. Η σωστή κατανόηση είναι πολύ περισσότερο από τη γνώση των τυπικών κανόνων παραγώγισης. Περιλαμβάνει την απόκτηση συγκεκριμένων αντιλήψεων για τη δομή των εννοιών, καθώς επίσης και τη δυνατότητα χρήσης των εννοιών μέσα και πέραν από τις μαθηματικές καταστάσεις και τα προβλήματα (Weigand, 2014).

Όπως αναφέρει ο Weigand (2014) είναι κοινά αποδεκτό ότι αρκετοί μαθητές παρουσιάζουν προβλήματα με τους τυπικούς ορισμούς των εννοιών του ορίου και της παραγώγου. Είτε δεν είναι ικανοί να χρησιμοποιήσουν κατάλληλα τον ορισμό σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο, είτε επιλύουν προβλήματα σε ένα τυπικό επίπεδο χωρίς να αντιλαμβάνονται κατάλληλα την έννοια που χρησιμοποιούν.

Στις νέες προσεγγίσεις για τη διδασκαλία, επικρατεί η άποψη ότι η κατανόηση της έννοιας της παραγώγου απαιτεί μια ξεκάθαρη και σε ευρεία διαισθητική βάση παραδειγμάτων και σχετικών αντιλήψεων, που να σχετίζονται κυρίως με την έννοια του ρυθμού αλλαγής σε πραγματικά προβλήματα, όπως για παράδειγμα η μέση ταχύτητα κινητού, η μέση εισροή νερού σε μια δεξαμενή, η μέση κλίση για αναρρίχηση, ή η μέση θερμοκρασία αέρα κατά τη διάρκεια μιας ημέρας (π.χ. NCTM, 2000).

«Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο α αν το

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$ είναι πραγματικός αριθμός.

Σ' αυτήν την περίπτωση, το όριο συμβολίζεται με *f'(a)* και λέγεται **παράγωγος της *f* στα *α*.** (Λέμε ακόμα ότι η f είναι παραγωγίσιμη, αν η f είναι παραγωγίσιμη στο α για κάθε α στο πεδίο ορισμού της *f)*» (Spivak, 1993, σσ. 123).

Η «απλή» παράγωγος μιας συνάρτησης f σε σχέση με το x αναφέρεται ως f'(x). Οι μαθητές έχουν μερικές παρερμηνείες, παρανοήσεις ή λάθη σε σχέση με την παράγωγο. Οι παρερμηνείες με βάση και με τα πιο πάνω ορίζονται ως η λανθασμένη αντίληψη, λανθασμένη εκτίμηση, ή λανθασμένη κατανόηση. Μελέτες για την παράγωγο και σχετικές με αυτήν, ιδέες (όπως η εφαπτομένη) υπογραμμίζουν και δίνουν έμφαση στις παρερμηνείες των μαθητών και στα κοινά λάθη (e.g., Amit & Vinner, 1990; Artique, 1991;

Cipra, 1989; Donaldson, 1963; Krutetski, 1980; Maurer, 1987; Orton, 1983a; Norman & Pritchard, 1994; Ubuz, 2001).

Ο Ubuz (2001) έδειξε ότι οι κοινές παρερμηνείες των μαθητών στην παράγωγο αφορούσαν στις ακόλουθες αντιλήψεις:

1. η τιμή της παραγώγου σε ένα σημείο δίνει τη συνάρτηση της παραγώγου,
2. η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η συνάρτηση της παραγώγου,
3. η παράγωγος σε ένα σημείο είναι η εξίσωση της εφαπτομένης, και
4. η παράγωγος σε ένα σημείο είναι η τιμή της εξίσωσης της εφαπτομένης σε εκείνο το σημείο.

Ο Ubuz (2001) επίσης διαπίστωσε ότι οι μαθητές φαίνεται να θεωρούν διαφορετικές έννοιες ως ίδιες. Χαρακτηριστικά αναφέρεται στις εξής περιπτώσεις:

1. η έλλειψη διάκρισης των εννοιών που εμφανίζονται στο ίδιο πλαίσιο ή η σύγχυση μιας έννοιας με μια άλλη, περιγράφουν ένα διαφορετικό χαρακτηριστικό γνώρισμα της ίδιας κατάστασης,
2. η ακατάλληλη προέκταση μιας συγκεκριμένης περίπτωσης σε μια γενική περίπτωση, και
3. η έλλειψη αντίληψης μιας γραφικής αναπαράστασης.

Έρευνες που αφορούσαν την εφαπτομένη συνάρτησης έδειξαν ότι η προηγούμενη γνώση των μαθητών για την εφαπτομένη σημείου σε κύκλο, τους επηρεάζει αρνητικά στην γενική περίπτωση της εφαπτομένης σημείου σε μια γραφική παράσταση οποιασδήποτε συνάρτησης (Biza et al., 2008; Biza & Zachariades, 2010; Castela, 1995; Downs & Mamona – Downs, 2000).

Άλλες έρευνες έχουν εστιάσει κυρίως στην οικοδόμηση της μαθηματικής γνώσης μέσα από μια θεωρητική οπτική παρά τις παρανοήσεις και τις παρερμηνείες των μαθητών και τα κοινά λάθη (Dubinsky & Schwingendorf, 1991).

Από την άλλη, υπάρχουν οι εμπειρικοί ερευνητές όπως ο Tall (1986a), ο οποίος αναφέρει ότι το 67% της πειραματικής ομάδας των φοιτητών που χρησιμοποίησαν γραφική μαθηματική ανάλυση (Tall, 1986b) επέλεξε τη σωστή απάντηση με σωστή εξήγηση, κάτι που έκανε μόνο το 8% της ομάδας ελέγχου. Κατά συνέπεια, είναι πιθανόν ότι η νοερή απεικόνιση στο γραφικό πλαίσιο μπορεί να βοηθήσει τους φοιτητές να αντιληφθούν τις σχέσεις μεταξύ της διαφοροποίησης και της ολοκλήρωσης.

Όσον αφορά στις δυσκολίες κατά την εξέταση των παραγώγων, οι Sabella και Redish (n.d.) συμπεραίνουν ότι οι φοιτητές παρουσιάζουν δυσκολίες στα ακόλουθα:

- Στο ρυθμό αλλαγής από τη γραφική παράσταση ευθείας.
- Στο μέσο ρυθμό αλλαγής καμπύλης.
- Στη χρήση των συμβόλων.
- Στο ρυθμό αλλαγής, το μέσο και στιγμιαίο ρυθμό αλλαγής.
- Στη διαφοροποίηση ως όριο.

Ακόμα, ο Orton εντοπίζει δυσκολίες στους φοιτητές που έχουν σχέση με την έννοια της εφαπτομένης ως όριο ενός συνόλου τεμνουσών ευθειών και με την αντίληψη του ρυθμού αλλαγής σε ένα σημείο έναντι του μέσου ρυθμού αλλαγής σε ένα διάστημα (Orton, 1983a). Άλλα πεδία που ο Orton (1983a) έδειξε μέσα από την έρευνά του ότι οι φοιτητές έχουν δυσκολίες κατά την εξέταση των παραγώγων είναι η μικρή διαισθητική κατανόηση όπως επίσης και μερικές θεμελιώδεις παρερμηνείες για την παράγωγο. Οι στερεότυπες πτυχές του διαφορικού θα μπορούσαν να ερμηνευτούν και να εκτελεστούν αρκετά καλά από σχεδόν όλους τους φοιτητές που εξετάζει η έρευνά του. Εντούτοις, όταν οι φοιτητές είχαν να αντιμετωπίσουν μία συνάρτηση που δεν είχαν ξαναδεί, παρουσιάστηκε αύξηση στη συχνότητα των λαθών γεγονός που δείχνουν την ισχυρή εξάρτηση σε αλγοριθμικά βήματα - στάδια χωρίς μια εννοιολογική κατανόηση.

Η Heid (1988) επίσης επισημαίνει ότι «η έννοια του παραγώγου ως κλίση ή ως ρυθμός αλλαγής, εξασθενίζει γρήγορα αν δεν χρησιμοποιείται λόγω του ότι φοιτητές μαθαίνουν να στηρίζονται σε διαδικασίες που απομνημονεύουν για έναν μικρό αριθμό τύπων άσκησης».

Όπως φαίνεται από τις πιο πάνω έρευνες αρκετές από τις βασικές έννοιες στην εκπαίδευση χρειάζεται να τύχουν επαναπροσδιορισμού. Η αρχική προσέγγιση στην Ανάλυση πρέπει να είναι άτυπη και πρέπει να εμπλέκει τόσο την αριθμητική όσο και γραφική διερεύνηση, χρησιμοποιώντας πρώτα δεδομένα από την πραγματική ζωή τα οποία να οδηγούν σε μια πιο αλγεβρική ανάπτυξη και αξιοποίηση των θεμελιωδών ιδεών (Orton, 1983b).

Η διδασκαλία των μαθηματικών συνδέεται άμεσα με τη μάθηση και η κατανόηση από τους μαθητές και τους φοιτητές, της έννοιας της παραγώγου και είναι σχετική με προγενέστερη γνώση. Ταυτόχρονα, σχετίζεται με τις δυνατότητες και τις γνώσεις των εκπαιδευτικών όσον αφορά στο μαθηματικό περιεχόμενο της Ανάλυσης και στις διδακτικές προσεγγίσεις (Biza, Nardi, & Zachariades, 2009; Gür & Barak, 2007; Kendal, 2001; Potari et al., 2007).

Είναι για αυτό το λόγο που ο Kendal (2001) αναφέρει ότι η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων στη διδασκαλία είναι σημαντική στην ανάπτυξη της κατανόησης της έννοιας της παραγώγου (Kendal, 2001), ενώ οι Gür και Barak (2007) αφού αποδέχονται ότι τη γενική ανάλυση της επίδοσης των μαθητών καθορίζει μια παρερμηνεία ή παρανόηση ή λάθη στην παράγωγο, συμπεραίνουν ότι οι εκπαιδευτικοί πρέπει να είναι σε θέση να αντιληφθούν λάθη, παρανοήσεις και παρερμηνείες στις λύσεις των μαθητών στα θέματα των μαθηματικών και ταυτόχρονα, να εφαρμόζουν κατάλληλες στρατηγικές μάθησης και να χρησιμοποιούν μέσα διδασκαλίας ώστε να δίνουν νόημα για τους μαθητές, οι μαθηματικές έννοιες, όπως η παράγωγος.

Η σχέση της έννοιας του ορίου με την έννοια της παραγώγου. Κατά τη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην ενυπάρχουσα έννοια του ορίου (Hahkioniemi, 2006a). Η έννοια του ορίου δημιουργεί προβλήματα στους μαθητές. Οι Davis και Vinner (1986) αναφέρονται στην αποτυχία των μαθητών να εξηγήσουν γιατί η έννοια του ορίου είναι θεμελιώδης στην Ανάλυση. Οι μαθητές αποτυγχάνουν να δώσουν σημαντικές ερμηνείες για το ρόλο της έννοιας του ορίου στην Ανάλυση πράγμα που οφείλεται κυρίως στις λανθασμένες, αναποτελεσματικές και αδύνατες νοερές συνδέσεις που έχουν αναπτύξει για την έννοια του ορίου σε σχέση με τις άλλες έννοιες της Ανάλυσης όπως π.χ. η συνέχεια, η παράγωγος και το ολοκλήρωμα (Bezuidenhout, 2001).

Ο Cornu (1991) επισημαίνει ότι η έννοια του ορίου είναι για τους περισσότερους μαθητές το πρώτο θέμα που συναντούν στα μαθηματικά και το οποίο δεν περιορίζεται σε ένα πεπερασμένο υπολογισμό. Κατά τους Cottrill et al. (1996) αποτελεί μια διάκριση μεταξύ δράσης και διαδικασίας. Από τη στιγμή που ένας υπολογισμός αφορά άπειρο αριθμό βημάτων, είναι δυνατόν να γίνει κατανοητός μέσω διαδικαστικής κατανόησης.

Οι Asiala et al. (1997) για παράδειγμα, δίνουν έμφαση σε δύο μορφές της έννοιας του ορίου που έχουν σχέση με την παράγωγο: ο μέσος ρυθμός αλλαγής που προσεγγίζει το στιγμιαίο ρυθμό αλλαγής και η κλίση των τεμνουσών ευθειών που πλησιάζουν την κλίση της εφαπτομένης. Οι Cottrill et al. (1996) αναφέρουν ότι η άμεση σχέση της έννοιας της παραγώγου με την έννοια του ορίου μίας συνάρτησης έχει ως αποτέλεσμα στην έννοια της παραγώγου να εμπλέκονται πολλές διαδικασίες. Για παράδειγμα, η κλίση των τεμνουσών ευθειών που πλησιάζουν την κλίση της εφαπτομένης περιλαμβάνει ένα σημείο που πλησιάζει ένα άλλο σημείο, τις τέμνουσες να πλησιάζουν την εφαπτομένη και την κλίση των τεμνουσών να πλησιάζει την κλίση της εφαπτομένης.

Η μέση ταχύτητα που πλησιάζει τη στιγμιαία ταχύτητα (Doorman, 2005; Lehtinen & Repo, 1996) και η αριθμητική αναπαράσταση του διαφορικού πηλίκου που πλησιάζει την παράγωγο αποτελούν και άλλες διαδικασίες που συμπεριλαμβάνουν την έννοια του ορίου σε σχέση με την έννοια της παραγώγου. Επίσης, ο Tall (2003) αναφέρθηκε στην έννοια της τοπικής ευθύτητας ως όριο, η οποία οδηγεί σε γραφική παράσταση που φαίνεται ως ευθεία.

Η έννοια της παραγώγου. Η παράγωγος είναι μια μαθηματική έννοια που συναντάμε συνήθως σε στάδιο ειδίκευσης στα μαθηματικά. Για αυτό η ενασχόληση του ατόμου με τη θεμελιώδη δομή της έννοιας και η διαμόρφωση σχετικών δομών κατά τη διάρκεια της ζωής του είναι πολύ περιορισμένη. Παράδειγμα που μπορεί να έχουμε αντιμετωπίσει πριν από τη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου είναι η στιγμιαία ταχύτητα, η οποία αποτελεί μια ειδική περίπτωση της παραγώγου. Η στιγμιαία ταχύτητα ενός αντικειμένου έχει την έννοια του ρυθμού μετατόπισης της θέσης του κινητού αντικειμένου σε σχέση με το χρόνο. Αυτό ονομάζεται συνήθως ρυθμός αλλαγής ή ρυθμός μεταβολής της θέσης του κινητού σε σχέση με το χρόνο. Για τη διδασκαλία των παραγώγων χρησιμοποιείται συνήθως ένα παράδειγμα ρυθμού μεταβολής της θέσης ενός αντικειμένου σε κάποια χρονική στιγμή. Οδηγούμε δηλαδή τους μαθητές στην εξεύρεση της στιγμιαίας ταχύτητας χρησιμοποιώντας τις μέχρι στιγμής γνώσεις τους για το όριο και για την εξεύρεση της μέσης ταχύτητας (Ανδρεαδάκης κ.α., 1999; Ιγνατίου & Ζώτος, 2007). Υπάρχουν επίσης και άλλα παραδείγματα ρυθμού μεταβολής, όπως για παράδειγμα στην οικονομία όταν αναφερόμαστε στα ολικά έσοδα όταν μεταβάλλονται οι πωλήσεις, όπου μπορούμε να βρούμε το μέσο όρο των εσόδων για ένα διάστημα ή τα οριακά έσοδα σε ένα συγκεκριμένο σημείο αναφοράς εσόδων.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε αρκετά πράγματα από την ταχύτητα και τα άλλα παραδείγματα ρυθμού μεταβολής. Για παράδειγμα, κατά την οδήγηση ενός ποδηλάτου είναι δυνατόν να παρατηρήσουμε πότε η ταχύτητα είναι μεγάλη ή μικρή, πότε αυξάνεται ή μειώνεται, πότε είναι σταθερή, πότε είναι μηδέν ή είναι μέγιστη με βάση το διάστημα που εξετάζουμε. Μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση ταχύτητά σε ένα σχολικό ταξίδι διαιρώντας την απόσταση του ταξιδιού με το χρόνο που χρειάστηκε για να τη διανύσουμε. Επιπλέον, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η ταχύτητα σε ένα ορισμένο σημείο του ταξιδιού δεν είναι απαραίτητα ίση με τη μέση ταχύτητα. Ταυτόχρονα, μια εταιρεία για παράδειγμα μπορεί να διαφυλάξει το θετικό ρυθμό μεταβολής των δεδομένων της. Τα δεδομένα μπορεί να είναι για παράδειγμα η αύξηση της πελατείας, η αύξηση των θέσεων εργασίας, τα οποία συνεπάγονται την αύξηση του κύκλου εργασιών.

Η έννοια της παραγώγου στα σχολικά εγχειρίδια. Στα βιβλία της Κύπρου και της Ελλάδας γίνεται παρουσίαση και διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου ξεκινώντας από ένα παράδειγμα ταχύτητας. Βασικός στόχος αποτελεί αρχικά η ερμηνεία της έννοιας της παραγώγου ως ρυθμού μεταβολής και στη συνέχεια ως συντελεστή κατεύθυνσης, έτσι ώστε να μπορούν οι μαθητές να τη χρησιμοποιούν στη μελέτη συνάρτησης.

Πιο κάτω παρουσιάζεται ο τρόπος διδασκαλίας την έννοιας της παραγώγου στους μαθητές που εμπλέκονται στην έρευνά. Συγκεκριμένα, στο βιβλίο των μαθηματικών κατεύθυνσης της Β’ Ενιαίου Λυκείου - Άλγεβρα-Ανάλυση - των σχολείων της Κύπρου αρχίζει με ένα παράδειγμα μεταβολής μιας μεταβλητής μιας συνεχούς συνάρτησης ώστε να οριστούν τα Δx και Δy, ως η μεταβολή της μεταβλητής και της συνάρτησης αντίστοιχα. Στη συνέχεια ορίζεται ο λόγος των δύο ($\frac{\Delta y}{\Delta x}$) ως η τιμή του ρυθμού μεταβολής και γίνεται χρήση του σε παραδείγματα εύρεσης της μέσης ταχύτητας κινητού. Με αναφορά σε ιστορικά γεγονότα όπως στις προσπάθειες στις αρχές του $17^{ου}$ αιώνα των Newton και Leibniz για εξεύρεση λύσεων σε προβλήματα ταχύτητας και εφαπτομένης σε σημείο καμπύλης αναφέρεται το βιβλίο στην ανακάλυψη του διαφορικού λογισμού. Χρησιμοποιώντας, όλα τα πιο πάνω εισάγεται η έννοια της παραγώγου σε σημείο και ορίζεται η παράγωγος συνάρτησης.

Μετά την εισαγωγή του ορισμού αποδεικνύεται ότι όταν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο τότε είναι συνεχής στο σημείο αυτό και με τη χρήση του ορισμού οι μαθητές καλούνται να βρουν παραγώγους βασικών συναρτήσεων όπως της σταθερής συνάρτησης ή της συνάρτησης x^{ν} ($\nu \in N$) ή της εκθετικής συνάρτησης e^{x}. Στη συνέχεια διδάσκονται κανόνες παραγώγισης αθροίσματος, γινομένου και πηλίκου παραγωγίσιμων συναρτήσεων καθώς και τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Ακολούθως, οι μαθητές καλούνται να βρουν την παράγωγο σύνθετης συνάρτησης, να ορίσουν, να αναγνωρίσουν και να βρουν την παράγωγο μίας πεπλεγμένης συνάρτησης, να βρουν παραγώγους ανώτερης τάξης αν υπάρχουν και να βρουν την παράγωγο της αντίστροφης μιας συνάρτησης αν υπάρχει. Τέλος, δίνονται εφαρμογές των παραγώγων μέσα από προβλήματα ώστε να αντιληφθούν οι μαθητές την ευρεία χρήση της παραγώγου ως στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής. Γίνεται ιδιαίτερη αναφορά στην παράγωγο ως κλίση εφαπτομένης καμπύλης και στη μη ύπαρξη εφαπτομένης σε γωνιακό σημείο.

Μεθοδολογία

Εισαγωγή

Βασικός σκοπός της ερευνητικής εργασίας είναι η ανάπτυξη ενός θεωρητικού μοντέλου για τη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου. Το μοντέλο βασίζεται στη θεωρία της Sierpinska (Sierpinska, 2005; Sierpinska et al., 2002) για τη θεωρητική γνώση, σε συνδυασμό με στοιχεία από τις υπάρχουσες θεωρίες μάθησης για το σχεδιασμό του προτεινόμενου παρεμβατικού προγράμματος. Η παρούσα έρευνα αξιοποιεί τη συμπληρωματική επιρροή των διαφορετικών θεωρητικών προσεγγίσεων στην ερευνητική διαδικασία στη μαθηματική εκπαίδευση. Έχουν επιλεγεί αντιπροσωπευτικές θεωρίες, οι οποίες θεωρείται ότι είναι οι επικρατέστερες κατά τη μαθησιακή διαδικασία την παρούσα χρονική στιγμή και ειδικότερα κατά τη διδασκαλία των εννοιών της Ανάλυσης. Το παρεμβατικό πρόγραμμα που αναπτύσσεται εμπλέκει τη χρήση και τις δυνατότητες που παρέχει η τεχνολογία στη διδασκαλία και στην ανάπτυξη της αντίληψης και της ικανότητάς εφαρμογής των μαθητών, σε διαφορετικά πλαίσια, της έννοιας της παραγώγου στην Ανάλυση.

Η παρούσα έρευνα έχει ως βασικά στοιχεία τον έλεγχο του προτεινόμενου μοντέλου αρχικά σε πιλοτική φάση, το σχεδιασμό και την εφαρμογή ενός παρεμβατικού προγράμματος για τη βελτίωση της θεωρητικής γνώσης των μαθητών για την έννοια της παραγώγου στην διδασκαλία της Ανάλυσης και τον εντοπισμό των παραγόντων που συνθέτουν τη θεωρητική γνώση των μαθητών για την έννοια της παραγώγου. Τέλος, τον έλεγχο της επίδρασης στους παράγοντες που εντοπίζονται, της χρήση της τεχνολογίας από τους μαθητές, τόσο τη δεδομένη στιγμή όσο και στην πορεία του χρόνου.

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται αναλυτικά τα στάδια της έρευνας και γίνεται εκτενής αναφορά στις διάφορες φάσεις της έρευνας. Μέσα από την περιγραφή των φάσεων παρουσιάζεται το δείγμα των ατόμων που συμμετείχε στην έρευνα, το παρεμβατικό πρόγραμμα και ο τρόπος διδασκαλίας που ακολούθησε η κάθε ομάδα μαθητών, τα εργαλεία μέτρησης που χρησιμοποιήθηκαν, η κωδικοποίηση των απαντήσεων των μαθητών που ακολουθήθηκε και οι στατιστικές αναλύσεις που έγιναν για την απάντηση των ερευνητικών ερωτημάτων.

Πορεία Διεξαγωγής της Έρευνας

Πιο κάτω παρουσιάζονται συνοπτικά οι διάφορες φάσεις της έρευνας όπως έχουν σχεδιαστεί. Στη συνέχεια γίνεται συγκεκριμένη αναφορά στην κάθε φάση.

Φάσεις Διεκπεραίωσης της Έρευνας.

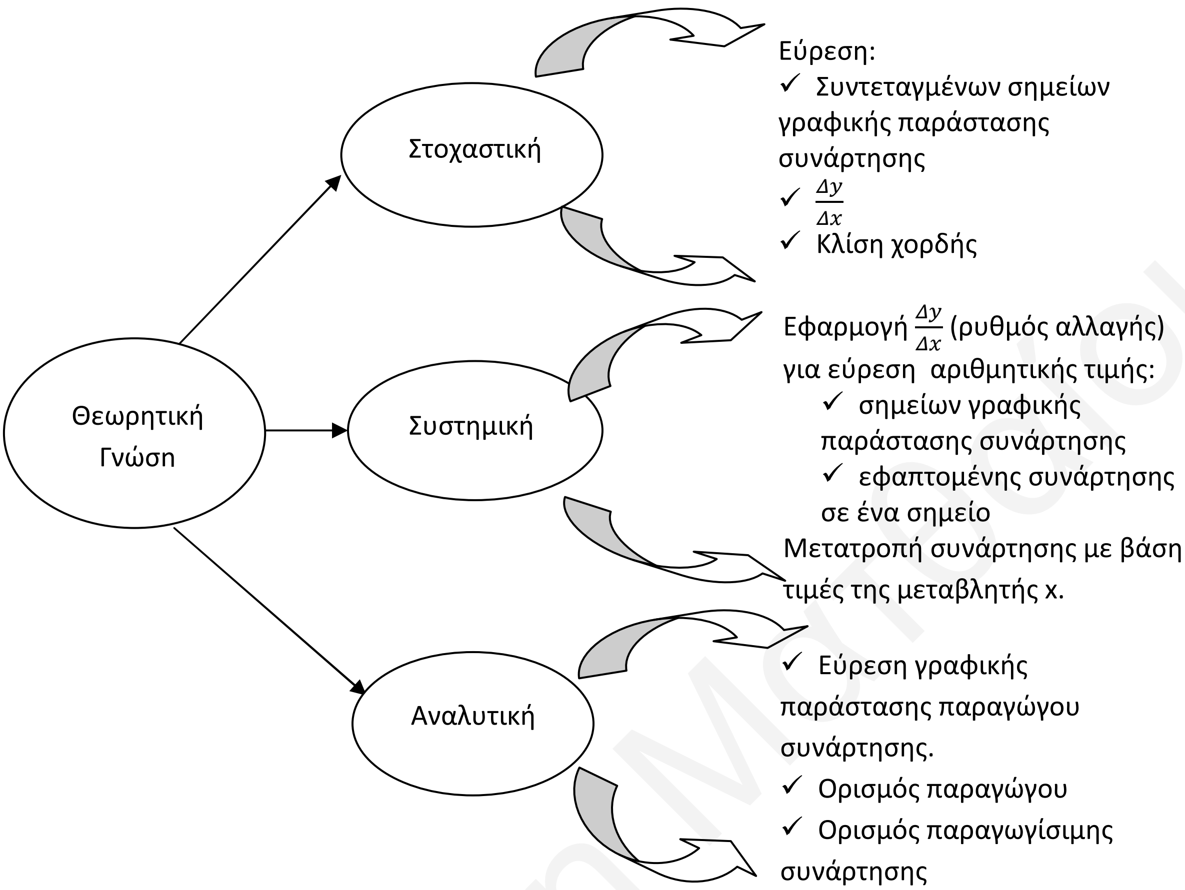
1. Ανασκόπηση της υπάρχουσας βιβλιογραφίας με ιδιαίτερη αναφορά στις θεωρίες μάθησης των μαθηματικών εννοιών.
2. Ανάπτυξη ενός μοντέλου διδασκαλίας της έννοιας της παραγώγου
3. Ανάπτυξη εργαλείων μέτρησης της θεωρητικής γνώσης των μαθητών σχετικά με την έννοια της παραγώγου.
4. Ανάπτυξη παρεμβατικού προγράμματος για τη διδασκαλία της παραγώγου.
5. Διεξαγωγή πιλοτικής έρευνας.
6. Αξιολόγηση της πιλοτικής έρευνας και του παρεμβατικού προγράμματος με βάση τα εργαλεία που αναπτύχθηκαν στις Φάσεις 3 και 4.
7. Επανασχεδιασμός της έρευνας και διαμόρφωση του παρεμβατικού προγράμματος με βάση τα αποτελέσματα της Φάσης 6.
8. Επανασχεδιασμός της έρευνας και διαμόρφωση των εργαλείων μέτρησης με βάση τα αποτελέσματα της Φάσης 6.
9. Εφαρμογή του διαμορφωμένου παρεμβατικού προγράμματος και χορήγηση των τελικών δοκιμίων για ποσοτική ανάλυση των δεδομένων όσον αφορά στους παράγοντες που συνθέτουν τη θεωρητική γνώση των μαθητών για την έννοια της παραγώγου στην Ανάλυση.
10. Στατιστικές αναλύσεις των δεδομένων, απάντηση των ερευνητικών ερωτημάτων και εξαγωγή συμπερασμάτων.

Φάση 1: Ανασκόπηση της υπάρχουσας βιβλιογραφίας με ιδιαίτερη αναφορά στις θεωρίες μάθησης των μαθηματικών εννοιών. Κατ' αρχάς για τη διεκπεραίωση της έρευνας έγινε ενδελεχής ανασκόπηση της υπάρχουσας βιβλιογραφίας με ιδιαίτερη αναφορά στις θεωρίες μάθησης των μαθηματικών εννοιών. Μέσα από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας αναφέρονται οι θεωρητικές προσεγγίσεις που έχουν παρουσιαστεί τις τελευταίες δεκαετίες και έχουν οδηγήσει στις διάφορες θεωρίες μάθησης για τα μαθηματικά. Παρουσιάζονται εκτενέστερα η θεωρία APOS του Ed Dubinsky, η θεωρία της Πραγμάτωσης της Anna Sfard και η θεωρία των Τριών Κόσμων των Μαθηματικών του David Tall, των οποίων στοιχεία συνδυάζονται ώστε να ενισχύσουν το μοντέλο των

Sierpinska et al. (2002) για τη θεωρητική γνώση στη γραμμική άλγεβρα. Ταυτόχρονα, για την υλοποίηση του σκοπού της έρευνας που αφορά στην πρόταση ενός θεωρητικού μοντέλου, το οποίο αναλύει με ποσοτικά δεδομένα τις συνιστώσες της θεωρητικής γνώσης μιας έννοιας, παρουσιάζεται εκτενώς και η θεωρία της Anna Sierpinska (Sierpinska, 2005; Sierpinska et al., 2002) για τη θεωρητική γνώση.

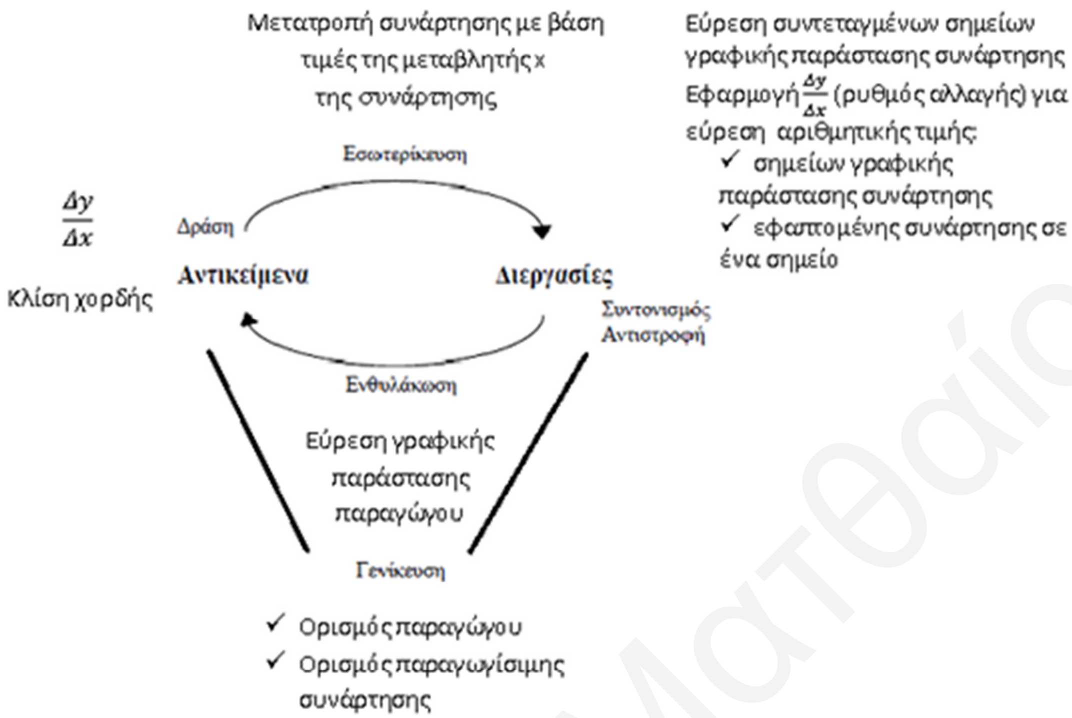
Στη συνέχεια, μέσα από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας παρουσιάζονται ερευνητικά αποτελέσματα από την εκπαιδευτική τεχνολογία και τις δυνατότητες που παρέχουν στη διδασκαλία της Ανάλυσης. Γίνεται αναφορά στη διδασκαλία της Ανάλυσης καθώς και στις παρανοήσεις, παρερμηνείες και λάθη που παρουσιάζονται κατά τη διδασκαλία. Ταυτόχρονα, αυτά τα προβλήματα συγκεκριμενοποιούνται στην έννοια της παραγώγου. Τέλος, παρουσιάζεται η έννοια της παραγώγου και ο τρόπος που διδάσκεται στα βιβλία μαθηματικών κατεύθυνσης της Β’ Λυκείου της Κύπρου, τα οποία χρησιμοποιούνται για τη διδασκαλία των μαθητών που συμμετέχουν στην έρευνα.

Φάση 2: Ανάπτυξη ενός μοντέλου διδασκαλίας της έννοιας της παραγώγου. Μέσα από το συγκερασμό των διάφορων θεωριών για τη διδασκαλία των Μαθηματικών προτείνεται ένα μοντέλο για τη διδασκαλία της παραγώγου που έχει στόχο τη θεωρητική γνώση της έννοιας. Το μοντέλο που προτείνεται είναι ευέλικτο, ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη διδασκαλία πολλών μαθηματικών εννοιών της Ανάλυσης. Βασίζεται στη θεωρία των Sierpinska et al. (2002) για τη θεωρητική γνώση στη γραμμική άλγεβρα, σε συνδυασμό με αντιπροσωπευτικές θεωρίες που έχουν αναπτυχθεί τα τελευταία χρόνια στα πλαίσια της μαθηματικής εκπαίδευσης αναφορικά με παράγοντες που είναι σημαντικοί για την ανάπτυξη της αντίληψης των μαθητών για τις μαθηματικές έννοιες της Ανάλυσης και θεωρούνται επικρατέστερες κατά τη μαθησιακή διαδικασία την παρούσα χρονική στιγμή. Εντοπίζονται οι παράγοντες που συνθέτουν τη θεωρητική γνώση των μαθητών για την έννοια της παραγώγου στην Ανάλυση. Το μοντέλο στην πιλοτική φάση παρουσιάζεται σχηματικά στο Διάγραμμα 3.



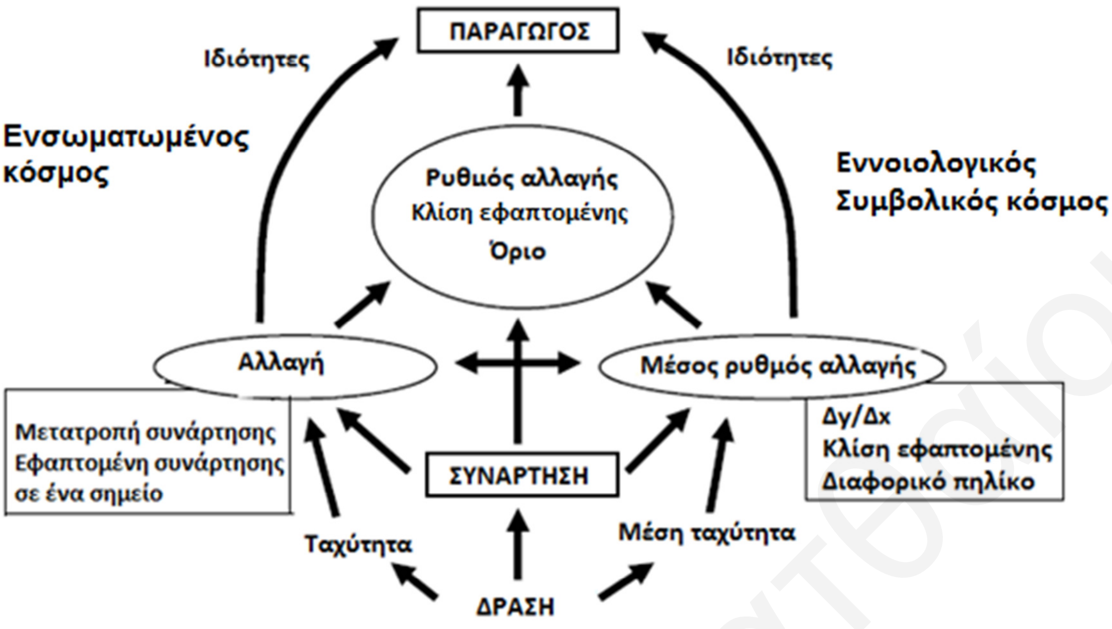
Διάγραμμα 3: Το προτεινόμενο μοντέλο

Ο διαχωρισμός και η επιλογή των έργων στους παράγοντες που προτείνουν οι Sierpinska et al. (2002), ο οποίος παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 3 βασίστηκε ταυτόχρονα και στους δύο τρόπους που έχουμε εντοπίσει στις βιβλιογραφία, οι οποίοι μπορούν να οδηγήσουν στην απόκτηση της γνώσης στα μαθηματικά. Ο ένας αφορά στη φυσική ή νοερή μετατροπή αντικειμένων που οδηγούν στην οικοδόμηση νέων αντικειμένων (Dubinsky, 1994; Sfard, 1991), όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 4.



Διάγραμμα 4: Προσαρμογή στη θεωρία του Dubinsky (1991) και της Sfard (1991) των έργων της έρευνας

Ο δεύτερος τρόπος απόκτησης της μαθηματικής γνώσης σχετίζεται με τη θεωρία των Gray και Tall (2001), σύμφωνα με την οποία η φυσική ή νοερή μετατροπή αντικειμένων αρχίζει από την αντίληψη του αντικειμένου και τη δράση του ατόμου με το αντικείμενο. Οι Gray και Tall ονομάζουν το εξεταζόμενο αντικείμενο ενσωματωμένο αντικείμενο. Τα ενσωματωμένα αντικείμενα αποτελούν οι νοερές αντιλήψεις της αντικειμενικής πραγματικότητας του ατόμου, οι οποίες μέσα από μετασχηματισμούς διαμορφώνονται σε αφηρημένες έννοιες, που δεν αναφέρονται πλέον σε συγκεκριμένα αντικείμενα του πραγματικού κόσμου. Η θεωρία αυτή στη συνέχεια οδήγησε τον Tall (2004) στη διάκριση των τριών κόσμων των μαθηματικών. Η έρευνα των Watson, Spirou και Tall (2003) οδηγεί στην αντίληψη ότι υπήρξαν τρεις πολύ διαφορετικοί τύποι γνωστικών αναπτύξεων που οδηγούσαν σε τρεις διακριτούς μαθηματικούς κόσμους. Στο Διάγραμμα 5 φαίνεται πως διαμορφώνεται η μαθησιακή διαδικασία των παραγώγων με βάση τη θεωρία του Tall (2004).



Διάγραμμα 5: Προσαρμογή στη θεωρία του Tall (2004) των έργων της έρευνας (Hahkioniemi, 2006b)

Φάση 3: Ανάπτυξη εργαλείων μέτρησης της ικανότητας και δεξιοτήτων των μαθητών σχετικά με την έννοια της παραγώγου. Μετά την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας και τη διαμόρφωση του προτεινόμενου μοντέλου της έρευνας κατασκευάστηκαν 2 δοκίμια. Για την κατασκευή των δοκιμίων λήφθηκαν υπόψη οι ανάγκες για την ποσοτική ανάλυση των δεδομένων όσον αφορά στους παραγόντων του προτεινόμενου μοντέλου καθώς και οι δυσκολίες που παρουσιάζουν οι μαθητές στη διδασκαλία της Ανάλυσης.

Τα δύο δοκίμια που κατασκευάστηκαν και χορηγήθηκαν στην πιλοτική φάση (βλέπε Παράρτημα) περιλαμβάνουν 21 και 18 έργα αντίστοιχα, τα οποία μπορούσαν να κατανεμηθούν στους τρεις παράγοντες (στοχαστική, συστημική, αναλυτική γνώση) που συνθέτουν τη θεωρητική γνώση, με βάση το μοντέλο που φαίνεται στη Φάση 2.

Στο πρώτο δοκίμιο που χορηγήθηκε πριν από τη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου υπήρχαν έργα που εξέταζαν τις αντιλήψεις των μαθητών για τη συνέχεια και το όριο, έννοιες απαραίτητες για τη διδασκαλία της παραγώγου καθώς και έργα που οδηγούσαν στην εισαγωγή της έννοιας της παραγώγου.

Στο δεύτερο δοκίμιο που χορηγήθηκε μετά τη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου επαναλήφθηκαν τα έργα που αφορούσαν στην παράγωγο και τα υπόλοιπα έργα αντικαταστάθηκαν. Τα νέα έργα εξέταζαν την αντίληψη των μαθητών για την παράγωγο, με στόχο να επιβεβαιωθεί η ύπαρξη του προτεινόμενου μοντέλου για τη θεωρητική γνώση των μαθητών στην έννοια της παραγώγου όπως φαίνεται στο μοντέλο της έρευνας.

Μερικά έργα ήταν παρόμοια με έργα που χρησιμοποιήθηκαν σε προηγούμενες έρευνες και τροποποιήθηκαν ώστε να ικανοποιούν την έρευνά και άλλα ήταν όμοια με αυτά των βιβλίων του σχολείου της Ελλάδας και της Κύπρου ή ερευνητών που στόχο είχαν την αναδιαμόρφωση σε πιο άμεσο και παραστατικό τρόπο της διδασκαλίας της Ανάλυσης. Πιο κάτω περιγράφονται τα έργα του κάθε δοκιμίου

Πρώτο δοκίμιο πιλοτικής έρευνας. Στο πρώτο δοκίμιο εφτά έργα είχαν σκοπό να διερευνήσουν τις ικανότητες των μαθητών στη στοχαστική γνώση, εφτά έργα αφορούσαν στη συστημική γνώση και εφτά στην αναλυτική γνώση. Τα έργα που εξέταζαν τις ικανότητες των μαθητών στη στοχαστική γνώση αφορούσαν στην αναγνώριση σημείων ασυνέχειας σε γραφικές παραστάσεις και την απλοποίηση μιας συνάρτησης (ασκήσεις 1Β, 2Α, 2Β, 2Γ, 2Δ, 2Ε και 4). Αυτά που αφορούσαν στις ικανότητες των μαθητών στη συστημική γνώση εξέταζαν τη δυνατότητα των μαθητών να χρησιμοποιούν ορισμούς και να βρίσκουν την τιμή του ορίου, αν υπήρχαν, σε δοσμένες γραφικές παραστάσεις, οι οποίες είχαν σημεία ασυνέχειας. Ακόμα αφορούσαν στη δυνατότητα των μαθητών να δίνουν συγκεκριμένη τιμή σε μια δοσμένη συνάρτηση ώστε να την μετατρέπουν, βασισμένοι σε δοσμένες τιμές της μεταβλητής x της συνάρτησης (ασκήσεις 1Γα, 1Γβ, 1Γγ, 1Γδ, 1Γε, 6α και 6β). Τα έργα που αφορούσαν στις ικανότητες των μαθητών στην αναλυτική γνώση εστιάζονταν στην εξεύρεση των συμβολικών αναπαραστάσεων και του πεδίου ορισμού δοσμένης γραφικής παράστασης και σε ερωτήματα που οδηγούσαν στην εύρεση του τύπου του ρυθμού μεταβολής μιας συνάρτησης και της μέσης τιμής της συνάρτησης σε ένα δοσμένο πεδίο ορισμού (ερωτήσεις 1Α, 3i, 3ii, 3iii, 5, 6γ και 6δ).

Η άσκηση 1 του δοκιμίου διαμορφώθηκε από τη διδασκαλία όπως παρουσιάζεται στο βιβλίο της Β’ Λυκείου της Κύπρου για τη συνέχεια συνάρτησης καθώς και στο βιβλίο της Γ’ Λυκείου – Θετικής κατεύθυνσης της Ελλάδας. Η άσκηση 2 έχει διαμορφωθεί από το κεφάλαιο για τη συνέχεια συνάρτησης του βιβλίου της Γ’ Λυκείου – Θετικής κατεύθυνσης της Ελλάδας. Υπάρχει ως παρόμοιο παράδειγμα (με διαφορετικές τιμές) στη θεωρία του κεφαλαίου (σελ. 188, 206), στο οποίο παρουσιάζει περιπτώσεις συνεχών και ασυνεχών συναρτήσεων με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεών τους. Η άσκηση 3 είναι η αντίστοιχη που βρίσκεται και πάλι στο βιβλίο της Ελλάδας (σελ147), ως άσκηση στο κεφάλαιο «όριο – συνέχεια συνάρτησης». Η άσκηση 4 επιλέχθηκε για να εξετάσει κατά πόσο οι μαθητές μπορούν να εργαστούν σε απλές τροποποιήσεις μίας εξίσωσης με σύμβολα. Η άσκηση 5 πάρθηκε από τη διδακτορική έρευνα του Derar Serham (2006) που ασχολείται με την επίδραση υπολογιστικών μηχανών γραφικών παραστάσεων στην αντίληψη των μαθητών για την παράγωγων σε ένα σημείο. Τέλος, η άσκηση 6 είναι διαμόρφωση έργου που παρουσιάζεται στη διδακτορική έρευνα του Marcus Hahkioniemi (2006b) που αφορά στο ρόλο των αναπαραστάσεων στη μάθηση των παραγώγων. Τέσσερις από τις έξι ασκήσεις είναι παρμένες ουσιαστικά από τα βιβλία που χρησιμοποιούνται στην εκπαίδευση της Κύπρου και της Ελλάδας, λόγω του ότι θέλαμε να εξετάσουμε τις γνώσεις των μαθητών με βάση την υφιστάμενη διδασκαλία, χωρίς καμία παρέμβαση. Τα έργα του δοκιμίου φαίνονται στο Παράρτημα.

Δεύτερο δοκίμιο πιλοτικής έρευνας. Από τα έργα του δεύτερου δοκιμίου, πέντε είχαν σκοπό να διερευνήσουν τις ικανότητες των μαθητών στη στοχαστική γνώση, πέντε αφορούσαν στη συστημική γνώση και οχτώ στην αναλυτική γνώση. Τα έργα που εξέταζαν τις ικανότητες των μαθητών στη στοχαστική γνώση αφορούσαν στην αναγνώριση των παραγώγων συγκεκριμένων σημείων σε μια γραφική παράσταση, την εξεύρεση συντεταγμένων σημείων με δοσμένη την τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό, την εξεύρεση της κλίσης δοσμένης χορδής και τον ορισμό των $\Delta x, \Delta y$ (ασκήσεις 3α, 3γ, 5, 6α και 7α). Τα έργα που αφορούσαν στις ικανότητες των μαθητών στη συστημική γνώση εξέταζαν τη δυνατότητα των μαθητών να χρησιμοποιούν το λόγο $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ για να βρίσκουν: (α) την αριθμητική τιμή σημείων σε μια γραφική παράσταση με δοσμένες κάποιες συντεταγμένες των σημείων της γραφικής και (β) την αριθμητική τιμή της εφαπτομένης συνάρτησης σε ένα σημείο. Ακόμα εξέταζαν τη δυνατότητα των μαθητών να δίνουν συγκεκριμένη τιμή σε μια δοσμένη συνάρτηση ώστε να την μετατρέπουν με βάση ορισμένες τιμές της μεταβλητής x της συνάρτησης (ασκήσεις 2α, 2β, 6β, 6γ και 7β). Τα έργα που αφορούσαν στις ικανότητες των μαθητών στην αναλυτική σκέψη εστιάζονταν σε ερωτήματα που οδηγούσαν στον ορισμό της παραγώγου και στην εξεύρεση της γραφικής παράστασης της παραγώγου, γραφικά δοσμένης συνάρτησης καθώς και στον ορισμό της παραγωγίσιμης συνάρτησης (ερωτήσεις 1, 2γ, 2δ, 3β, 3δ, 4α, 4β και 4γ).

Οι ασκήσεις 5 και 6 του πρώτου δοκιμίου, όπως έχει αναφερθεί πιο πάνω είχαν επαναληφθεί και στο δεύτερο δοκίμιο ως ασκήσεις 1 και 2 αντίστοιχα, γιατί αφορούσαν στον ορισμό της έννοιας της παραγώγου, την οποία εξετάζει η έρευνα. Η άσκηση 3 αποτελεί συνέχεια της άσκησης 2, η οποία χρησιμοποιήθηκε με σχετική διαφοροποίηση από τον Marcus Hahkioniemi (2006b) στη διδακτορική του έρευνα. Οι ασκήσεις 4-7 προτείνονται στο δεύτερο κεφάλαιο του βιβλίου "Calculus: Single Variable" της Deborah Hughes-Hallett et al. (6th edition, 2012), το οποίο γράφτηκε στα πλαίσια της προσπάθειας για δημιουργία ενός νέου αναλυτικού προγράμματος σπουδών για την Ανάλυση, του «Calculus Consortium» που έδρευε στο Χάρβαρντ. Το βιβλίο παρουσιάζει μια ριζικά διαφορετική προσέγγιση στη διδασκαλία και τη μάθηση της Ανάλυσης, με κατευθυντήριες αρχές ότι η κάθε μαθηματική έννοια πρέπει να παρουσιάζεται γεωμετρικά, αριθμητικά και αλγεβρικά καθώς και ότι οι τυπικοί ορισμοί και οι διαδικασίες αναπτύσσονται και εξελίσσονται μέσα από τη διερεύνηση πρακτικών προβλημάτων. Είναι για αυτό το λόγο που χρησιμοποιήθηκαν κυρίως έργα που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο για την παράγωγο του βιβλίου αυτού. Τα έργα του δοκιμίου φαίνονται στο Παράρτημα.

Φάση 4: Ανάπτυξη παρεμβατικού προγράμματος για τη διδασκαλία της παραγώγου. Για τη διερεύνηση των ερωτημάτων αναπτύχθηκε παρεμβατικό πρόγραμμα για τη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου στην πειραματική ομάδα. Αυτό αφορούσε σε πέντε διδασκαλίες 45 λεπτών. Οι διδασκαλίες αυτές είχαν ως πρώτιστο στόχο τη βελτίωση της θεωρητικής γνώσης των μαθητών στην έννοια της παραγώγου, την ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης με χρήση των ορισμών των εννοιών και την εμπλοκή της τεχνολογίας και των δυνατοτήτων που παρέχει στη διδασκαλία και στην αντίληψη μίας έννοιας της Ανάλυσης. Ως δευτερεύοντας στόχος ήταν η διερεύνηση της επίδρασης της τεχνολογίας στην ανάπτυξη της θεωρητικής γνώσης των μαθητών τη δεδομένη στιγμή καθώς και στην πορεία του χρόνου.

Στο παρεμβατικό πρόγραμμα που αναπτύχθηκε στην πιλοτική φάση οι μαθητές μπορούσαν να διερευνήσουν με τη βοήθεια ιστοσελίδων και εφαρμογιδίων που αναπτύχθηκαν ή επιλέχθηκαν για το σκοπό αυτό καθώς και των ορισμών των εννοιών που αναπτύσσονται μέσα από τη διδασκαλία, για να ανακαλύψουν τη νέα γνώση που αφορούσε στη διδασκαλία των παραγώγων. Πιο κάτω περιγράφονται οι πέντε διδασκαλίες που έγιναν κατά την πιλοτική φάση στην πειραματική ομάδα. Στο Παράρτημα φαίνονται τα φύλλα εργασίας και οι οθόνες με τις οποίες οι μαθητές καλέστηκαν να εργαστούν.

Διδασκαλία 1: Οι συμβολισμοί Δx και Δy. Στόχος της πρώτης διδασκαλίας ήταν οι μαθητές να ορίσουν τα Δx και Δy και να μπορούν να βρουν τις τιμές τους είτε σε μεταβαλλόμενες τιμές του άγνωστου x σε δεδομένη συνάρτηση, είτε γενικεύοντας μέσα από σημεία μιας γραφικής παράστασης.

Οι μαθητές εργάζονταν με ηλεκτρονικό υπολογιστή. Στην πρώτη δραστηριότητα καλούνταν να ανοίξουν ένα εφαρμογίδιο όπου με τη βοήθεια γραφικής παράστασης ευθείας μπορούσαν να δουν τις συντεταγμένες δύο σημείων της ευθείας και να βρουν τη διαφορά τους. Μετακινώντας τα σημεία κατέγραφαν στον πίνακα τις τιμές που διαμορφώνονταν κάθε φορά. Με αυτό τον τρόπο μπορούσαν να ταυτίσουν τη διαφορά των τετμημένων των δύο σημείων με την τιμή του Δx που παρουσιαζόταν στο εφαρμογίδιο και αντίστοιχα τη διαφορά των τεταγμένων των δύο σημείων με την τιμή του Δy.

Στη συνέχεια, στη δραστηριότητα 2 οι μαθητές επαναλάμβαναν τις παρατηρήσεις τους χρησιμοποιώντας μία εφαρμογή που σχεδιάστηκε στο πλαίσιο του προγράμματος Διαδικτυακού Σχολείου, ΔΙΑ.Σ, του Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού, η οποία τους έδινε τη δυνατότητα να παρατηρήσουν καμπύλη γραφική παράσταση.

Με βάση τις παρατηρήσεις των μαθητών από τις δύο δραστηριότητες αναμενόταν να δώσουν τον ορισμό των Δx και Δy, ως τη διαφορά των τιμών της ανεξάρτητης μεταβλητής x σε δύο σημεία ή τη μεταβολή της μεταβλητής και ως τη διαφορά των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής y σε δύο σημεία ή τη μεταβολή της συνάρτησης, αντίστοιχα.

Στην τρίτη δραστηριότητα, οι μαθητές καλούνταν να εφαρμόσουν σε δοσμένη συνάρτηση $y = f(x)$, τη θεωρία τους ώστε να βρουν τη μεταβολή Δy αν η μεταβλητή x παίρνει τιμές από α ως β με $\alpha < \beta$ με σκοπό να καταλήξουν στη γενίκευση του Δy.

Σε συνέχεια αυτής της γενίκευσης είχαν να απαντήσουν στη δραστηριότητα 4, η οποία καλούσε τους μαθητές να αντικαταστήσουν ουσιαστικά τα α και β της προηγούμενης δραστηριότητας με x_0 και $(x_0 + \Delta x)$, να τα τοποθετήσουν ως σημεία μιας καμπύλης πάνω σε γραφική παράσταση και να ορίσουν τη μεταβολή Δy όταν η μεταβλητή x από x_0 γίνει$(x_0 + \Delta x)$. Με αυτόν τον τρόπο σταδιακά οι μαθητές οδηγούνται στην παράσταση της μεταβολής Δy ως $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ κάτι που θα βοηθήσει στα επόμενα μαθήματα για τον ορισμό της παραγώγου συνάρτησης.

Τέλος οι μαθητές καλούνται να εφαρμόσουν αυτό που βρήκαν στη συνάρτηση με τύπο $y = x^2$.

Διδασκαλία 2: Η έννοια της παραγώγου. Η δεύτερη διδασκαλία αποσκοπούσε στον ορισμό της έννοιας της παραγώγου. Δηλαδή, χρησιμοποιώντας δραστηριότητες που οι μαθητές καλούνταν να εφαρμόσουν τις προηγούμενές τους γνώσεις για τα Δx και Δy, την εφαπτομένη καμπύλης και το όριο συνάρτησης, γίνεται προσπάθεια να οδηγηθούν μέσω διερεύνησης με συγκεκριμένα ερωτήματα, στον ορισμό της παραγώγου συνάρτησης.

Συγκεκριμένα, με τη χρήση της ιστοσελίδας http://www.calculusapplets.com/ και του εφαρμογιδίου *«derivative at a point»* που παρουσιάζεται στη συγκεκριμένη ιστοσελίδα, οι μαθητές καλούνταν να παρατηρήσουν τι συμβαίνει με την κλίση της χορδής που ενώνει δύο σημεία μίας καμπύλης και την κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης στο ένα από τα δύο σημεία, όταν το δεύτερο σημείο πλησιάζει το σημείο που δινόταν η εφαπτομένη του. Στη συνέχεια ζητήθηκε από τους μαθητές να επαναλάβουν τη διαδικασία τοποθετώντας το σημείο με τη δοσμένη εφαπτομένη σε άλλες θέσεις και να γράψουν τις παρατηρήσεις τους. Αναμενόταν οι μαθητές να παρατηρήσουν ότι όσο το ένα σημείο τείνει να ταυτιστεί με το δεύτερο σημείο, τότε η κλίση της χορδής που ενώνει τα δύο σημεία τείνει να γίνει ίση με την κλίση της εφαπτομένης στο σημείο που δεν μετακινείται.

Ταυτόχρονα, οι μαθητές μπορούσαν να παρατηρήσουν από το εφαρμογίδιο ότι όταν τα δύο σημεία ταυτίζονταν τότε η κλίση της χορδής που ένωνε αυτά τα δύο σημεία δεν μπορούσε να προσδιοριστεί. Στη συνέχεια, οι μαθητές καλούνταν να εφαρμόσουν την ίδια διαδικασία σε διαφορετικές συναρτήσεις ώστε να καταγράψουν τις παρατηρήσεις τους, οι οποίες δεν διέφεραν από την πρώτη περίπτωση.

Στη δεύτερη δραστηριότητα οι μαθητές καλούνταν ουσιαστικά να βρουν το μαθηματικό τύπο που συνδέει τις πληροφορίες και τις παρατηρήσεις που έκαναν στην πρώτη δραστηριότητα. Σε δοσμένη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $y = f(x)$, οι μαθητές καλούνταν να βρουν την κλίση της χορδής AB, όπου τα A και B ήταν σημεία στη γραφική παράσταση της συνάρτησης με συντεταγμένες $(x_0, f(x_0))$ και $(x_1, f(x_1))$, αντίστοιχα. Στη συνέχεια με το ίδιο σενάριο όπως στο εφαρμογίδιο, ότι δηλαδή το σημείο B κινείται πάνω στην καμπύλη, με κατεύθυνση το σημείο A, οι μαθητές καλούνταν μελετώντας και τις παρατηρήσεις τους στην πρώτη δραστηριότητα να βρουν ένα μαθηματικό τύπο που να συνδέει την κλίση της χορδής AB όταν το B τείνει στο A και της εφαπτομένης στο σημείο A. Με αυτό τον τρόπο και με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού οι μαθητές οδηγούνταν στο ότι η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο A είναι το όριο των κλίσεων των τεμνουσών AB όταν το B τείνει στο A και στον μαθηματικό τύπο της παραγώγου συνάρτησης σε ένα σημείο x_0, $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Στο τέλος της δεύτερης διδασκαλίας δόθηκε στους μαθητές φυλλάδιο με τη θεωρία που διδάχτηκαν στα δύο μαθήματα για τον ορισμό των Δx και Δy, για την παράγωγο συνάρτησης σε ένα σημείο x_0 και για το πότε μία συνάρτηση λέγεται παραγωγίσιμη στο x_0, το οποίο φαίνεται στο Παράρτημα.

Διδασκαλία 3: Παράγωγος βασικών συναρτήσεων. Πριν από την τρίτη διδασκαλία υπήρχε ενδιάμεσο μάθημα στο οποίο οι μαθητές προσέγγιζαν την τιμή του ρυθμού μεταβολής ($\frac{\Delta y}{\Delta x}$) της συνάρτησης ως προς x και υπολόγιζαν την παράγωγο δοσμένης συνάρτησης με εφαρμογή στον τύπο της παραγώγου συνάρτησης, συγκεκριμένου σημείου x_0.

Η τρίτη διδασκαλία του παρεμβατικού προγράμματος είχε ως στόχο τη διερεύνηση και εξεύρεση του μαθηματικού τύπου της παραγώγου σταθερής συνάρτησης και της συνάρτησης x^{ν}, όπου $\nu \in N$.

Στην πρώτη δραστηριότητα οι μαθητές εργάζονταν στην ιστοσελίδα http://www.calculusapplets.com/ με το εφαρμογίδιο *«derivative function»*. Στο συγκεκριμένο εφαρμογίδιο οι μαθητές μπορούσαν να ορίσουν τη συνάρτηση, γράφοντας τον τύπο της και να παρατηρήσουν στις δύο οθόνες που παρουσιάζονταν, στα αριστερά τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και στα δεξιά τη γραφική παράσταση της παραγώγου της συγκεκριμένης συνάρτησης. Σε αυτή τη δραστηριότητα οι μαθητές καλούνταν να ορίσουν σταθερή συνάρτηση, να παρατηρήσουν τη μορφή της γραφικής της παράστασης και της γραφικής παράστασης της παραγώγου της και να καταγράψουν τις παρατηρήσεις τους. Στη συνέχεια καλούνταν να χρησιμοποιήσουν τον ορισμό που διδάχτηκαν στο προηγούμενο μάθημα για τον υπολογισμό της παραγώγου συνάρτησης, στη συνάρτηση $f(x) = 3$, ώστε να επαληθεύσουν τις παρατηρήσεις τους. Τέλος, για να γενικεύσουν το συμπέρασμά τους για την παράγωγο σταθερής συνάρτησης οι μαθητές καλούνταν να χρησιμοποιήσουν τον ορισμό για τον υπολογισμό της παραγώγου της συνάρτησης $f(x) = c$, όπου c είναι σταθερός αριθμός.

Με τον ίδιο τρόπο οι μαθητές εργάστηκαν στις επόμενες δραστηριότητες, ώστε να βρουν την παράγωγο συνάρτησης x^{ν}, όπου $\nu \epsilon N$, με τη χρήση των συναρτήσεων $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = x^4$. Μέσα από αυτήν την εργασία των μαθητών θεωρούμε ότι εμπλέκονται η διερεύνηση και η παρατήρηση που κάνουν στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων και των παραγώγων τους. Ακόμα εμπλέκεται και η χρήση των ορισμών ώστε να οδηγηθούν στην παράγωγο της συνάρτησης x^{ν}, για κάθε $\nu \epsilon N$ και στην παρατήρηση ότι η μορφή της παραγώγου τέτοιας συνάρτησης είναι αντίστοιχη της μορφής της παραγώγου συνάρτησης προηγούμενης τάξης του x.

Διδασκαλία 4: Κανόνες παραγώγισης. Η τέταρτη διδασκαλία είχε ως στόχο οι μαθητές να ανακαλύψουν τον τύπο της παραγώγου του γινομένου σταθεράς επί συνάρτηση καθώς και της παραγώγου αθροίσματος συναρτήσεων. Για να επιτευχθεί αυτός ο στόχος οι μαθητές εργάστηκαν με τη χρήση της ιστοσελίδας http://www.yteach.co.uk/ page.php/resources/view_all?id=differentiation_function_gradient_function_t_page_1&fro

m=search όπου μπορούσαν στην αριστερή οθόνη να κατασκευάσουν της γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha x + \beta$, ορίζοντας τιμές για τα α και β και στη δεξιά οθόνη να παρατηρήσουν τη γραφική παράσταση της παραγώγου $f'(x)$ της $f(x)$ που είχαν κατασκευάσει.

Αρχικά, στην πρώτη δραστηριότητα οι μαθητές καλούνταν να κρατήσουν το $\beta = 0$ και να δώσουν διάφορες τιμές για το α, καταγράφοντας σε πίνακα τις τιμές που έπαιρνε η παράγωγος $f'(x)$ της συνάρτησης. Στη συνέχεια καλούνταν να γράψουν τις παρατηρήσεις τους για τις τιμές της $f'(x)$, και να προσπαθήσουν να γενικεύσουν τις παρατηρήσεις τους για την $f(x) = \alpha x, \alpha \epsilon R$. Τέλος, σε αυτή τη δραστηριότητα οι μαθητές καλούνται να χρησιμοποιήσουν τον ορισμό για τον υπολογισμό της παραγώγου της $f(x) = \alpha x, \alpha \epsilon R$, ώστε να επαληθεύσουν τα συμπεράσματά της διερεύνησής τους.

Στην επόμενη δραστηριότητα, με τη χρήση του ίδιου εφαρμογιδίου, οι μαθητές καλούνταν να κρατήσουν το $\alpha = 1$ και να δώσουν διάφορες τιμές για το β, καταγράφοντας σε πίνακα τις τιμές που έπαιρνε η παράγωγος $f'(x)$ της συνάρτησης. Στη συνέχεια καλούνταν να γράψουν τις παρατηρήσεις τους για τις τιμές της $f'(x)$, και να προσπαθήσουν να γενικεύσουν τις παρατηρήσεις τους για την $f(x) = x + \beta, \beta \epsilon R$. Τέλος, σε αυτή τη δραστηριότητα οι μαθητές καλούνται να χρησιμοποιήσουν τον ορισμό για τον υπολογισμό της παραγώγου της $f(x) = x + \beta, \beta \epsilon R$, ώστε να επαληθεύσουν τα συμπεράσματά της διερεύνησής τους.

Στη δραστηριότητα 3 γίνεται μια σύζευξη των δύο περιπτώσεων που οι μαθητές διερεύνησαν στις δύο προηγούμενες δραστηριότητες, ώστε να αντιληφθούν ότι η παράγωγος αθροίσματος συνάρτησης με σταθερά ισούται με την παράγωγο της συνάρτησης. Σε αυτή τη δραστηριότητα οι μαθητές καλούνταν να δώσουν διάφορες τιμές στα α και β, καταγράφοντας και πάλι σε πίνακα τις τιμές που έπαιρνε η παράγωγος $f'(x)$ της συνάρτησης. Στη συνέχεια καλούνταν να γράψουν τις παρατηρήσεις τους για τις τιμές της $f'(x)$, και να προσπαθήσουν να γενικεύσουν τις παρατηρήσεις τους για την $f(x) = \alpha x + \beta, \alpha, \beta \epsilon R$. Τέλος, σε αυτή τη δραστηριότητα οι μαθητές καλούνται να χρησιμοποιήσουν τον ορισμό για τον υπολογισμό της παραγώγου της $f(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \epsilon R$, ώστε να επαληθεύσουν τα συμπεράσματά της διερεύνησής τους.

Στη δραστηριότητα 4 χρησιμοποιείται η ιστοσελίδα http://www.yteach.co.uk/page.php/resources/view_all?id=differentiation_function_gradient_polynomial_binomial_derivative_t_page_6&from=search όπου οι μαθητές μπορούσαν να παρατηρήσουν στην αριστερή οθόνη κατασκευασμένη τη γραφική παράσταση μιας ορισμένης συνάρτησης και μετακινώντας το σημείο Α της συνάρτησης, να παρατηρήσουν τις τιμές που παίρνει το σημείο Β της παραγώγου της συνάρτησης με βάση την τετμημένη στο Α και πως η γραφική παράσταση της παραγώγου διαγράφεται στη δεξιά οθόνη.

Σε αυτή τη δραστηριότητα οι μαθητές καλούνταν να περάσουν διαδοχικά από τις τέσσερις εφαρμογές ($f(x) = x^2 + x$, $f(x) = -x^2 + 4$, $f(x) = 2x^2 - 3x$, $f(x) = 3x^2 - x + 1$) που τους έδινε τη δυνατότητα το εφαρμογίδιο, να παρατηρήσουν τις συντεταγμένες του σημείου Β στις διάφορες θέσεις του σημείου Α και να βρουν τον τύπο της παραγώγου $f'(x)$ της συνάρτησης $f(x)$. Στη συνέχεια καλούνταν να γράψουν τις παρατηρήσεις τους για τις τιμές της $f'(x)$ σε κάθε περίπτωση και να προσπαθήσουν να γενικεύσουν τις παρατηρήσεις τους για την $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha, \beta, \gamma \epsilon R$. Τέλος, σε αυτή τη δραστηριότητα οι μαθητές καλούνται να χρησιμοποιήσουν τον ορισμό για τον υπολογισμό της παραγώγου της $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha, \beta, \gamma \epsilon R$,ώστε να επαληθεύσουν τα συμπεράσματά της διερεύνησής τους.

Με βάση τις παρατηρήσεις τους στις προηγούμενες δραστηριότητες, οι μαθητές καλούνταν στην τελευταία δραστηριότητα να δώσουν την παράγωγο των συναρτήσεων $f(x) = c \cdot \mathrm{u}(x)$, και $f(x) = u(x) + v(x)$, όπου $u(x)$ και $v(x)$ είναι συναρτήσεις του x και $c \in R$. Τέλος, καλούνταν να επαληθεύσουν τα συμπεράσματά τους για τις συγκεκριμένες συναρτήσεις με τη χρήση του ορισμού για τον υπολογισμό της παραγώγου.

Διδασκαλία 5: Εφαρμογές των παραγώγων – Κλίση εφαπτομένης καμπύλης. Στόχος της διδασκαλίας του πέμπτου μαθήματος του παρεμβατικού ήταν οι μαθητές να ανακαλύψουν τη σχέση της παραγώγου με την κλίση της εφαπτομένης καμπύλης. Πριν από αυτή τη διδασκαλία, οι μαθητές διδάχτηκαν αλγεβρικά την εξεύρεση της παραγώγου πηλίκου συναρτήσεων, με τη βοήθεια της οποίας μπορούσαν να αποδείξουν τον κανόνα παραγώγισης δύναμης (x^{ν}) όπου η δύναμη (ν) είναι αρνητικός αριθμός, καθώς και την εξεύρεση της παραγώγου τριγονομετρικών συναρτήσεων.

Για να επιτευχθεί ο στόχος της πέμπτης διδασκαλίας οι μαθητές εργάστηκαν με τη χρήση της ιστοσελίδας http://www.calculusapplets.com/ στο εφαρμογίδιο *«derivative at a point»*. Για τις τέσσερις διαφορετικές περιπτώσεις $f(x) = x^2$, $f(x) = \eta\mu x$, $f(x) = 2^x$, $f(x) = \frac{1}{x}$, που το εφαρμογίδιο έδινε τη δυνατότητα διερεύνησης, οι μαθητές καλούνταν αρχικά να βρουν την παράγωγο και στη συνέχεια να συμπληρώσουν σε πίνακα για συγκεκριμένες τιμές του x, τις τιμές που παίρνει η παράγωγος $f'(x)$ και η κλίση $\lambda_{\varepsilon\varphi}$ της εφαπτομένης της καμπύλης σε αυτό το σημείο.

Με βάση τα αποτελέσματα στους τέσσερις πίνακες που οι μαθητές είχαν να συμπληρώσουν, καλούνταν να παρατηρήσουν τη σχέση της κλίσης της εφαπτομένης και της αριθμητικής τιμής της παραγώγου για τις διάφορες τιμές του x και στη συνέχεια να δώσουν ένα γενικό κανόνα για την κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης σε οποιοδήποτε σημείο της καμπύλης. Στο τελευταίο ερώτημα οι μαθητές καλούνταν να αιτιολογήσουν τη σχέση της κλίσης της εφαπτομένης της καμπύλης σε ένα σημείο και της παραγώγου της συνάρτησης σε αυτό το σημείο.

Φάση 5: Διεξαγωγή πιλοτικής έρευνας.

Δείγμα πιλοτικής έρευνας. Στην πιλοτική έρευνα συμμετείχαν 88 μαθητές δύο αστικών Λυκείων της Λευκωσίας, που φοιτούσαν σε πέντε τάξεις της Β' Λυκείου, με επιλογή τα μαθηματικά κατεύθυνσης. Η επιλογή των σχολείων ήταν σκόπιμη με κριτήριο ποια σχολεία θα μπορούσαν να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις της πιλοτικής φάσης. Από αυτούς, οι 33 μαθητές από τις δύο τάξεις που συμμετείχαν αποτελούσαν την πειραματική ομάδα και οι άλλοι 55 μαθητές την ομάδα ελέγχου.

Χορήγηση δοκιμίων. Η έννοια της παραγώγου είναι πρωτόγνωρη στους μαθητές. Δεν την αντιμετωπίζουν στην καθημερινότητά τους όπως άλλες μαθηματικές έννοιες της Ανάλυσης (π.χ. όριο). Ταυτόχρονα, διδάσκεται στο τρίτο τρίμηνο της Β' Λυκείου. Για τη διερεύνηση των ερευνητικών ερωτημάτων έγινε χορήγηση στην πιλοτική φάση των δύο δοκιμίων σε όλους τους μαθητές που συμμετείχαν. Η διάρκεια της χορήγησης ήταν 45 λεπτά κάθε φορά.

Το πρώτο δοκίμιο χορηγήθηκε πριν τη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου, εξετάζοντας κυρίως σχετικές έννοιες με την παράγωγο, τις οποίες οι μαθητές είχαν διδαχτεί. Με αυτό τον τρόπο εξετάστηκαν μαθηματικές γνώσεις των μαθητών σε έργα που είχαν έμμεση σχέση με την έννοια και οδηγούσαν στην εισαγωγή της έννοιας της παραγώγου. Χορηγήθηκε δηλαδή, αμέσως μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου που αφορούσε στη συνέχεια συνάρτησης. Κατά τη διδασκαλία της συνέχειας συνάρτησης, οι μαθητές εργάστηκαν αλγεβρικά καθώς και με τη βοήθεια γραφικών παραστάσεων συγκεκριμένων συναρτήσεων (συνεχών και ασυνεχών). Με βάση τις παρατηρήσεις τους κατέληξαν στον ορισμό της συνεχούς συνάρτησης. Επιλέγηκε αυτό το χρονικό σημείο, ώστε να υπάρχει χρόνος για την ανάλυση των δεδομένων πριν από το δεύτερο δοκίμιο.

Τη χορήγηση του πρώτου δοκιμίου ακολούθησε η διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου. Η ομάδα ελέγχου διδάχτηκε με τον παραδοσιακό τρόπο μέσα από δραστηριότητες του βιβλίου ενώ η πειραματική ομάδα διδάχτηκε με χρήση τεχνολογίας, όπως περιγράφεται στο παρεμβατικό πρόγραμμα που αναπτύχθηκε στη φάση 4, μέσα από ιστοσελίδες και άλλα εφαρμογίδια. Το δεύτερο δοκίμιο, το οποίο χορηγήθηκε μερικές μέρες μετά τη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου από τις δύο ομάδες εστιάστηκε στην υπό εξέταση έννοια. Κρίθηκε αναγκαία η αντικατάσταση όσων έργων του πρώτου δοκιμίου δεν είχαν άμεση σχέση με την έννοια της παραγώγου, ώστε να διερευνήσουμε εμπειρικά την ισχύ του προτεινόμενου μοντέλου για τη θεωρητική γνώση των μαθητών στην έννοια της παραγώγου.

Φάση 6: Αξιολόγηση της πιλοτικής έρευνας και του παρεμβατικού προγράμματος με βάση τα εργαλεία που αναπτύχθηκαν στις Φάσεις 3 και 4. Τα δοκίμια που χορηγήθηκαν περιλάμβαναν έργα τα οποία ανταποκρίνονταν στο μοντέλο της Sierpinska et al. (2002) για τη θεωρητική γνώση. Μέσα από την πιλοτική έρευνα δόθηκε η ευκαιρία να κάνουμε αξιολόγηση των εργαλείων μας. Ο αριθμός των ατόμων που συμμετείχαν στην έρευνα, επειδή ήταν μικρός, έδωσε μια αρχική ένδειξη για την εμπειρική ισχύ του προτεινόμενου μοντέλου, παρουσίαζε δηλαδή φαινομενική εγκυρότητα. Μετά την εξέταση των αποτελεσμάτων και από δύο ειδικούς (Καθηγητές Διδακτικής των Μαθηματικών), διατηρήθηκε το μοντέλο ως έχει και μέσα από την κύρια έρευνα εξετάστηκε πιο εκτεταμένα η ερευνητική πρόταση για το μοντέλο.

Από τις παρατηρήσεις στο παρεμβατικό πρόγραμμα φαίνεται ότι οι μαθητές όταν καλούνται να εργαστούν από μόνοι τους σε μια διερεύνηση, αναζητούν συγκεκριμένες κατευθυντήριες γραμμές. Αυτό οφείλεται κυρίως στις εμπειρίες που έχουν οι μαθητές με την παραδοσιακή διδασκαλία κατά την οποία το βιβλίο αποτελεί το μοναδικό εργαλείο μάθησης. Υπήρχε δηλαδή ανάγκη να διασαφηνιστούν κάποια ερωτήματα ή να δοθούν περισσότερες και καλύτερες κατευθυντήριες γραμμές στους μαθητές για τη διερεύνησή τους.

Μέσα από τα φύλλα εργασία φαίνεται ακόμα οι μαθητές δυσκολεύονται να επαληθεύσουν τα αποτελέσματά τους με αλγεβρικό τρόπο χρησιμοποιώντας τους ορισμούς. Για παράδειγμα όταν ζητήθηκε από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν τον ορισμό για τον υπολογισμό της παραγώγου για να βρουν την παράγωγο της $f(x) = c$, όπου c είναι σταθερός αριθμός κατέληγαν σε απροσδιοριστία γιατί αντικαθιστούσαν λανθασμένα το $f(x + \Delta x)$ με το $c + \Delta x$.

Ακόμα κάποιες δραστηριότητες μετά την συμπλήρωσή τους από τους μαθητές φάνηκε ότι ήταν χρονοβόρες και δεν είχαν αποτέλεσμα στην μαθησιακή διαδικασία, όπως για παράδειγμα η συμπλήρωση πινάκων για την εξεύρεση των Δx και Δy, τα οποία μπορούσαν εύκολα οι μαθητές να τα παρατηρήσουν και να τα βρουν αλγεβρικά με πολύ λιγότερες περιπτώσεις.

Όσον αφορά στο τεχνικό κομμάτι της διδασκαλίας, το γεγονός ότι για να εργαστούν οι μαθητές χρειάζονταν σύνδεση στο διαδίκτυο σε πολλές περιπτώσεις κρίθηκε ως περιορισμός στη διδασκαλία. Περιορισμός κρίθηκε ότι ήταν και η ανάγκη να μαζεύονται για παρατήρηση τα φύλλα εργασίας των μαθητών, με αποτέλεσμα να μην έχουν την εργασία τους και τη θεωρία που διδάσκονταν ώστε να μπορούν να ανατρέχουν όταν χρειάζεται είτε κατά την εργασία τους στο σπίτι είτε κατά την επόμενη διδασκαλία.

Αξιολογώντας τις απαντήσεις στα δοκίμια που χορηγήθηκαν στην πιλοτική φάση φαίνεται ότι οι μαθητές αυτής της ηλικίας δεν απαντούν ή απαντούν μονολεκτικά σε ανοικτές ερωτήσεις. Ταυτόχρονα, λόγω του ότι το πρώτο δοκίμιο δόθηκε πριν από τη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου, τα έργα του εξέταζαν τις γνώσεις των μαθητών και την επίδοσή τους αφορούσαν κυρίως σε θέματα σχετικά με τον ορισμό και τη συνέχεια συνάρτησης. Μεταξύ τους τα δύο δοκίμια είχαν μεγάλες διαφορές οπότε δεν μπορούσαν να αντιστοιχηθούν και να θεωρούνταν ως συνέχεια το ένα του άλλου. Για την εξέταση της έννοιας της παραγώγου και την απάντηση των ερευνητικών ερωτημάτων χρειαζόταν η ύπαρξη δύο τουλάχιστον δοκιμίων που να εξετάζουν το ίδιο αντικείμενο σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα.

Φάση 7: Επανασχεδιασμός της έρευνας και διαμόρφωση του παρεμβατικού προγράμματος με βάση τα αποτελέσματα της Φάσης 6. Μετά το τέλος της πιλοτικής φάσης, όπως γίνεται αναφορά και στη φάση 6, έγινε αξιολόγηση της πιλοτικής φάσης με βάση τις απαντήσεις των μαθητών στα δοκίμια που αναπτύχθηκαν, τα φύλλα εργασίας που είχαν οι μαθητές, το χρόνο που χρειάζονταν για να κάνουν εφαρμογές καθώς και τη διαθεσιμότητα των ιστοσελίδων και των λογισμικών που χρησιμοποιήθηκαν.

Με βάση τις παρατηρήσεις κρίθηκε αναγκαίο να ξεπεραστούν τα προβλήματα που μπορεί να παρουσιαστούν στη διδασκαλία και δεν είναι προβλέψιμα από τον εκπαιδευτικό. Για αυτό το λόγο σχεδιάστηκαν όλες οι εφαρμογές με ανοικτό λογισμικό ώστε να μην εξαρτάται το μάθημα από την παροχή διαδικτύου ή τη διαθεσιμότητα κάποιας ιστοσελίδας τη δεδομένη στιγμή. Χρησιμοποιήθηκε το ανοικτό λογισμικό GeoGebra, το οποίο εγκαταστάθηκε σε όλους τους Ηλεκτρονικούς Υπολογιστές των τάξεων που συμμετείχαν στο παρεμβατικό πρόγραμμα και σχεδιάστηκαν κατάλληλες εφαρμογές, αντίστοιχες με αυτές που χρησιμοποιήθηκαν στην πιλοτική φάση για τη διδασκαλία.

Ταυτόχρονα, διαμορφώθηκαν κάποιες δραστηριότητες που κρίθηκαν χρονοβόρες και ότι δεν είχαν αποτέλεσμα στην μαθησιακή διαδικασία. Διαμορφώθηκαν οι διδασκαλίες και επικεντρώθηκαν σε πτυχές που αφορούσαν την παράγωγο όπου οι διαδικασίες της οπτικοποίησης, της διερεύνησης και της διάδρασης με τους μαθητές ήταν ιδιαίτερα σημαντικές στην ανάπτυξη της αντίληψης και της κατανόησης των μαθητών για την έννοια. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα στην έρευνα να εφαρμοστούν 4 διδασκαλίες με πιο συγκεκριμένες δραστηριότητες που κάλυπταν το περιεχόμενο που κρίθηκε σημαντικότερο χρησιμοποιώντας την τεχνολογία ως εργαλείο που αλλάζει τη φύση των ευκαιριών που δίνονται για δημιουργία μαθηματικών δραστηριοτήτων.

Επίσης, διασαφηνίστηκαν κάποια ερωτήματα ή δόθηκαν καλύτερες κατευθυντήριες γραμμές στους μαθητές για τη διερεύνησή τους ώστε να μπορούν να καταλήγουν από μόνοι τους σε συμπεράσματα με την όσο λιγότερη δυνατόν παρέμβαση των εκπαιδευτικών.

Τέλος, μετά από κάθε μάθημα, λόγω ελλείψεων που παρατηρήθηκαν, ετοιμάστηκε είτε επιπρόσθετο φύλλο για ανακεφαλαίωση, είτε δινόταν κάποιο μέρος της εργασίας των μαθητών στους ίδιους με τη θεωρία που διδάσκονταν μέσα από κάθε διδασκαλία ώστε να μπορούν να ανατρέχουν όταν χρειάζεται είτε κατά την εργασία τους στο σπίτι είτε κατά την επόμενη διδασκαλία.

Πιο κάτω γίνεται αναλυτική περιγραφή των διδασκαλιών της κυρίως έρευνας. Στο Παράρτημα φαίνονται τα φύλλα εργασίας, τα επιπρόσθετα φύλλα για ανακεφαλαίωση και οι οθόνες με τις οποίες οι μαθητές καλούνταν να εργαστούν.

Διδασκαλία 1: Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου. Στόχος της πρώτης διδασκαλίας είναι οι μαθητές να κατανοήσουν τη σημασία των συμβόλων Δx και Δy και να ερμηνεύουν γεωμετρικά την παράγωγο. Για την επίτευξη του στόχου αυτού χρησιμοποιήθηκε στην πρώτη δραστηριότητα η κλίση ευθείας, η οποία είναι γνωστή στους μαθητές από προηγούμενα κεφάλαια.

Στη πρώτη δραστηριότητα δόθηκε η γραφική παράσταση μιας καμπύλης, μια χορδή ΑΒ και η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο Α. Ζητήθηκε από τους μαθητές να υπολογίσουν την κλίση της χορδής ΑΒ με δεδομένα τα σημεία $A(x_0, f(x_0))$ και $B(x_1, f(x_1))$. Στη συνέχεια ορίζονται τα Δx και Δy ως οι διαφορές των τετμημένων και των τεταγμένων των σημείων Α και Β αντίστοιχα και ζητήθηκε από τους μαθητές να γράψουν τη συνάρτηση που χαρακτηρίζει αυτές τις διαφορές και να δώσουν τη σχέση που διαμορφώνεται για την κλίση της ΑΒ με βάση τα Δx και Δy. Τέλος, σε αυτή τη δραστηριότητα αναμένεται από τους μαθητές να καταγράψουν την υπόθεσή τους για το αποτέλεσμα της μετακίνησης του σημείου Β πάνω στην καμπύλη ώστε να πλησιάζει συνεχώς το σημείο Α.

Η δεύτερη δραστηριότητα είχε στόχο οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν τις αλγεβρικές παραστάσεις που ανακάλυψαν στην προηγούμενη δραστηριότητα ώστε να ορίσουν την παράγωγο μιας συνάρτησης. Σε αυτή τη δραστηριότητα οι μαθητές καλούνταν να ανοίξουν και να εργαστούν σε ένα διαμορφωμένο αρχείο paragogos.ggb στο ανοικτό λογισμικό GeoGebra. Στο εφαρμογίδιο που σχεδιάστηκε μπορούσαν να παρατηρήσουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2$ και με τη βοήθεια του δρομέα Δx να εφαρμόσουν δυναμικά το τελευταίο ερώτημα της δραστηριότητας 1 που είχαν να υποθέσουν τι θα γινόταν αν σύρουν το σημείο Β της καμπύλης προς το σημείο Α, πάνω στην καμπύλη. Στη συγκεκριμένη περίπτωση μπορούσαν πλέον να παρατηρήσουν και όχι να υποθέσουν, τι συμβαίνει με τη χορδή ΑΒ και την κλίση της, σε σχέση με την εφαπτομένη της καμπύλης στο Α και την κλίση της. Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία για άλλες θέσεις του Α, οι μαθητές καλούνταν να καταγράψουν τις παρατηρήσεις τους.

Στη συνέχεια με βάση την παρατήρησή τους, οι μαθητές καλούνταν να ορίσουν την κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο Α σε σχέση με την κλίση της τέμνουσας $\lambda_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ που είχαν ορίσει στην πρώτη δραστηριότητα. Τέλος, με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού, οι μαθητές αναμενόταν να γράψουν ένα γενικό συμπέρασμα για την παράγωγο της συνάρτησης f στο x_0.

Διδασκαλία 2: Παράγωγος βασικών συναρτήσεων. Στη δεύτερη διδασκαλία αφιερώθηκε λίγος χρόνος για να επαναληφθεί ο ορισμός της παραγωγίσιμης συνάρτησης f σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, της παραγώγου της f στο x_0 καθώς και της παραγώγου συνάρτησης $f(x)$. Τέλος, επαναλήφθηκε η παρατήρηση ότι η παράγωγος της f στο x_0 μπορεί να θεωρηθεί ως η κλίση της εφαπτομένης της f στο x_0. Για τους πιο πάνω ορισμούς ετοιμάστηκε φύλλο εργασίας που δόθηκε στους μαθητές ώστε να μπορούν να ανατρέξουν στους ορισμούς κατά τη διδασκαλία.

Στόχος αυτής της διδασκαλίας ήταν η διερεύνηση και εξεύρεση του μαθηματικού τύπου της παραγώγου σταθερής συνάρτησης και της συνάρτησης x^ν, όπου $\nu \epsilon N$. Για την υλοποίηση αυτού του στόχου οι μαθητές εργάστηκαν στο αρχείο paragogos_1.ggb, όπου σχεδιάστηκε εφαρμογίδιο στο GeoGebra με το οποίο είχαν τη δυνατότητα να παρατηρήσουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^\nu + \gamma$, ορίζοντας τις τιμές των παραμέτρων α, γ και ν. Ταυτόχρονα, επιλέγοντας το κουτί επιλογής για εμφάνιση του ίχνους της παραγώγου, μπορούσαν να δουν την τιμή της παραγώγου συνάρτησης στην τετμημένη ενός σημείου Α και μετακινώντας το σημείο Α, να διαγράψουν τη γραφική παράσταση της παραγώγου.

Στην πρώτη δραστηριότητα οι μαθητές καλούνταν να δώσουν τιμές στις παραμέτρους, ώστε να κατασκευάσουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3$ καταγράφοντας τις παρατηρήσεις τους για τη μορφή της γραφικής παράστασης της $f(x)$. Στη συνέχεια καλούνταν να μετακινήσουν το σημείο Α και να διαγράψουν τη γραφική παράσταση της συγκεκριμένης συνάρτησης. Μετά την επανάληψη αυτής της δραστηριότητας για $f(x) = 4$ και $f(x) = -2$, οι μαθητές καλούνταν να σημειώσουν τη μορφή της γραφικής παράστασης της παραγώγου αυτών των συναρτήσεων και να γράψουν την εξίσωση της.

Στο εφαρμογίδιο υπήρχαν ένα κουτί επιλογής *«παράγωγος»* που οι μαθητές μπορούσαν να επαληθεύσουν τις απαντήσεις τους για την παράγωγο της συνάρτησης που κατασκεύαζαν και ένα κουτί επιλογής *«κλίση»* που μπορούσαν να εμφανίσουν την κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο Α.

Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα οι μαθητές καλούνταν να επιλέξουν το κουμπί *«παράγωγος»* για να επαληθεύσουν τις απαντήσεις τους. Στη συνέχεια, για να επαληθεύσουν και αλγεβρικά αλλά και για να γενικεύσουν το συμπέρασμά τους για την παράγωγο σταθερής συνάρτησης, οι μαθητές καλούνταν να χρησιμοποιήσουν τον ορισμό για τον υπολογισμό της παραγώγου των συναρτήσεων $f(x) = 3$ και $f(x) = c$, όπου c είναι σταθερός αριθμός.

Με τον ίδιο τρόπο οι μαθητές εργάστηκαν στις επόμενες δραστηριότητες ώστε να βρουν την παράγωγο συνάρτησης x^{ν}, όπου $\nu \epsilon N$, με τη χρήση των συναρτήσεων $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ και $f(x) = x^3$. Μέσα από αυτές τις δραστηριότητες που καλούνταν να εφαρμόσουν οι μαθητές, ήταν δυνατή η εμπλοκή με τη διερεύνηση και την παρατήρηση σε γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων και των παραγώγων τους. Επίσης, οι μαθητές εμπλέκονταν στη χρήση των ορισμών ώστε να οδηγηθούν στην παράγωγο και στο γενικό τύπο της παραγώγου της συνάρτησης x^{ν}, για κάθε $\nu \epsilon N$. Ταυτόχρονα, μπορούσαν να παρατηρήσουν ότι η μορφή της παραγώγου τέτοιας συνάρτησης είναι αντίστοιχη της μορφής της παραγώγου συνάρτησης προηγούμενης τάξης του x.

Διδασκαλία 3: Κανόνες παραγώγισης. Η τρίτη διδασκαλία είχε ως στόχους οι μαθητές να ανακαλύψουν τον τύπο της παραγώγου του γινομένου σταθεράς επί συνάρτηση και να ανακαλύψουν τον τύπο της παραγώγου αθροίσματος συναρτήσεων. Για να επιτευχθεί ο πρώτος στόχος οι μαθητές εργάστηκαν με στο αρχείο paragogos_1.ggb, που χρησιμοποίησαν στην προηγούμενη διδασκαλία, ενώ για να επιτευχθεί ο δεύτερος στόχος δημιουργήθηκε ένα νέο αρχείο paragogos_1a.ggb, στο οποίο οι μαθητές μπορούσαν να επεξεργαστούν και να δημιουργήσουν τη συνάρτηση $f(x) = \alpha x^{\nu} + \beta x^{\mu} + \gamma$, δίνοντας τιμές στις παραμέτρους $\alpha, \beta, \gamma, \nu$ και μ και στο οποίο υπήρχαν οι ίδιες δυνατότητες με κουμπιά επιλογής όπως το αρχείο paragogos_1.ggb.

Στην πρώτη δραστηριότητα οι μαθητές εργάζονταν στο αρχείο paragogos_1.ggb. Καλούνταν να κατασκευάσουν γραφικές παραστάσεις του τύπου $f(x) = \alpha x + \gamma$ (π.χ. $f(x) = x, f(x) = 3x, f(x) = -2x + 3$) και να καταγράψουν σε πίνακα τις τιμές που παίρνει η παράγωγος $f\,'(x)$ της συνάρτησης. Στη συνέχεια καλούνταν να καταγράψουν τις παρατηρήσεις τους για την $f\,'(x)$, και να προσπαθήσουν να γενικεύσουν τις παρατηρήσεις τους για την $f(x) = \alpha x + \gamma, \alpha, \gamma \epsilon R$.

Στην επόμενη δραστηριότητα οι μαθητές εργάζονταν στο αρχείο paragogos_1a.ggb. Όπως και στη δραστηριότητα 1 καλούνταν να κατασκευάσουν γραφικές παραστάσεις του τύπου $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha, \beta, \gamma \epsilon R$ (π.χ. $f(x) = x^2$, $f(x) = -x^2 + 4$, $f(x) = 3x^2 - x + 1$), να καταγράψουν σε πίνακα τις τιμές που παίρνει η παράγωγος $f\,'(x)$ της συνάρτησης και στη συνέχεια να αναφέρουν τις παρατηρήσεις τους για την $f\,'(x)$, και να προσπαθήσουν να γενικεύσουν τις παρατηρήσεις τους για την $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \alpha, \beta, \gamma \epsilon R$.

Η τρίτη δραστηριότητα είναι επανάληψη της δεύτερης για γραφικές παραστάσεις της μορφής $f(x) = \alpha x^{\nu} + \beta x^{\mu}$, $\alpha, \beta \epsilon R$ και $\mu, \nu \in N$, όπου οι μαθητές καλούνται να γενικεύσουν τις παρατηρήσεις τους για τις συγκεκριμένες συναρτήσεις.

Με βάση τις παρατηρήσεις τους στις προηγούμενες δραστηριότητες, οι μαθητές καλούνταν στην τελευταία δραστηριότητα να δώσουν την παράγωγο των συναρτήσεων $f(x) = c \cdot \mathrm{u}(x), \mathrm{c} \in \mathrm{R}$ και $f(x) = u(x) + v(x)$. Τέλος, καλούνταν να επαληθεύσουν τα συμπεράσματά τους για τις συγκεκριμένες συναρτήσεις με τη χρήση του ορισμού για τον υπολογισμό της παραγώγου.

Διδασκαλία 4: Παράγωγος τριγωνομετρικών συναρτήσεων και εκθετικής συνάρτησης e^x - Εφαρμογές των παραγώγων. Στόχοι της διδασκαλίας του τέταρτου μαθήματος του παρεμβατικού προγράμματος ήταν οι μαθητές να εξετάσουν την παράγωγο συναρτήσεων όπως τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις και την εκθετική συνάρτηση e^x και να διερευνήσουν τι συμβαίνει με την εφαπτομένη στην ειδική περίπτωση που παρουσιάζεται γωνιακό σημείο σε μια συνάρτηση. Πριν από αυτή τη διδασκαλία, οι μαθητές διδάχτηκαν αλγεβρικά την εξεύρεση της παραγώγου γινομένου και πηλίκου συναρτήσεων.

Για την επίτευξη των στόχων της τέταρτης διδασκαλίας κατασκευάστηκαν τα αρχεία sinxcosx.ggb, paragogos3.ggb και goniako1.ggb. Στο πρώτο αρχείο sinxcosx.ggb, οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα να κατασκευάσουν τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = ημx$ και $f(x) = συνx$, να μετακινήσουν ένα σημείο Α της συνάρτησης και να διαγράψουν την παράγωγό της, αφού παρουσιάζεται το ίχνος που δίνει την τιμή της παράγωγο της $f(x)$ σε κάθε θέση που παίρνει το σημείο Α σύροντάς το πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Στο αρχείο υπάρχουν επίσης κουτιά επιλογής ώστε οι μαθητές να επαληθεύουν την απάντησή τους για την παράγωγο της κάθε συνάρτησης ξεχωριστά.

Στο δεύτερο αρχείο paragogos3.ggb, οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα να παρατηρήσουν τη γραφική παράσταση της $f(x) = e^x$ και με τον ίδιο τρόπο όπως στο πρώτο αρχείο να παρατηρήσουν και να επαληθεύσουν την παράγωγο της συνάρτησης.

Στο τρίτο αρχείο goniako1.ggb οι μαθητές μπορούσαν να παρατηρήσουν τη γραφική παράσταση μιας καμπύλης $f(x)$, η οποία παρουσιάζει ένα γωνιακό σημείο Γ και να μετακινήσουν δύο σημεία Α και Β πάνω στην καμπύλη, δεξιά και αριστερά του σημείου Γ ώστε να παρατηρήσουν πως μεταβάλλονται οι κλίσεις των ευθειών ΑΓ και ΒΓ. Τέλος, μπορούσαν να παρατηρήσουν τι γίνεται με τα πλευρικά όρια του γωνιακού σημείου και κατά πόσο υπάρχει η παράγωγος της συνάρτησης στο συγκεκριμένο σημείο.

Στην πρώτη δραστηριότητα οι μαθητές εργάζονταν στο αρχείο sinxcosx.ggb. Επιλέγοντας τη συνάρτηση $f(x) = ημx$ καλούνταν να μετακινήσουν το σημείο Α, να παρατηρήσουν την κλίση της εφαπτομένης της συνάρτησης στο σημείο Α και το ίχνος της παραγώγου που δίνει την τιμή της παραγώγου της συνάρτησης στο Α. Στη συνέχεια καλούνταν να καταγράψουν την μορφή της γραφικής παράστασης της παραγώγου της συνάρτησης και αν μπορούσαν από τις παρατηρήσεις τους να βρουν την εξίσωσή της παραγώγου της συνάρτησης $f(x) = ημx$. Μετά από αυτή την εργασία τους, οι μαθητές καλούνταν να επαληθεύσουν την απάντησή τους επιλέγοντας το κουτί επιλογής *«παράγωγος ημx»*, το οποίο δίνει την εξίσωσή και διαγράφει τη γραφική παράσταση της παραγώγου της συνάρτησης $f(x) = ημx$.

Στη δεύτερη δραστηριότητα οι μαθητές καλούνταν στο ίδιο αρχείο να επαναλάβουν την εργασία που έκαναν στην πρώτη δραστηριότητα επιλέγοντας τη συνάρτηση $f(x) = συνx$ ώστε να καταλήξουν στην εύρεση της μορφής και της εξίσωσης της παραγώγου της συγκεκριμένης συνάρτησης και να επαληθεύσουν τα αποτελέσματά τους επιλέγοντας το κουμπί επιλογής *«παράγωγος* $συνx$*»*.

Στην τρίτη δραστηριότητα οι μαθητές καλούνταν να εργαστούν στο αρχείο paragogos3.ggb και να επαναλάβουν την εργασία που έκαναν στις προηγούμενες δραστηριότητες για τη συνάρτηση $f(x) = e^x$, της οποίας η γραφική παράσταση παρουσιάζεται στην οθόνη τους. Αναμενόταν από τους μαθητές να καταλήξουν στην εύρεση της μορφής και της εξίσωσης της παραγώγου της συγκεκριμένης συνάρτησης και να επαληθεύσουν τα αποτελέσματά τους επιλέγοντας το κουμπί επιλογής *«παράγωγος»*.

Στην τέταρτη δραστηριότητα οι μαθητές καλούνταν να παρατηρήσουν πως μεταβάλλονταν οι κλίσεις των ευθειών ΑΓ και ΒΓ, με Γ γωνιακό σημείο και Α, Β σημεία καμπύλης αριστερά και δεξιά του σημείου Γ αντίστοιχα, και στη συνέχεια να βρουν τα πλευρικά όρια της συνάρτησης όταν τα σημεία Α και Β συμπίπτουν με το σημείο Γ. Υπήρχε σημείωση για τους μαθητές ότι *«Καθώς πλησιάζει το Α στο Γ η κλίση της ΑΓ τείνει προς την παράγωγο της συνάρτησης στο Γ από αριστερά και καθώς πλησιάζει το Β στο Γ η κλίση της ΒΓ τείνει προς την παράγωγο της συνάρτησης στο Γ από δεξιά»*.

Όταν βρήκαν οι μαθητές τα πλευρικά όρια, τους ζητήθηκε να γράψουν τις παρατηρήσεις τους για την παράγωγο της f από τα αριστερά σε σχέση με την παράγωγο της f από τα δεξιά. Με βάση αυτή την παρατήρηση, κλήθηκαν να γράψουν αν υπάρχει η παράγωγος της f στο σημείο Γ και να δικαιολογήσουν την απάντησή τους και τέλος να γράψουν αν υπάρχει η εφαπτομένη της f στο σημείο Γ.

Φάση 8: Επανασχεδιασμός της έρευνας και διαμόρφωση των εργαλείων μέτρησης με βάση τα αποτελέσματα της Φάσης 6. Μετά την αξιολόγηση του παρεμβατικού προγράμματος και των αποτελεσμάτων από τα δοκίμια που αναπτύχθηκαν στην πιλοτική φάση, τα οποία περιγράφονται στη Φάση 6, έγινε διαμόρφωση του παρεμβατικού προγράμματος (Φάση 7) και των δοκιμίων.

Τα δοκίμια επικεντρώθηκαν στην έννοια της παραγώγου, οπότε δόθηκαν και τα δύο μετά τη διδασκαλία της έννοιας. Το περιεχόμενό τους ήταν το ίδιο με απλή ανακατάταξη των ασκήσεων και αλλαγές στους αριθμούς ή στη μορφή της γραφικής παράστασης που δινόταν στις ασκήσεις, με τέτοιο τρόπο ώστε να μην αλλάζει το μαθηματικό περιεχόμενο. Οι ασκήσεις που χρησιμοποιήθηκαν ήταν αυτές του δεύτερου δοκιμίου της πιλοτικής έρευνας με ελάχιστες διαφοροποιήσεις, οι οποίες περιγράφονται πιο κάτω. Για την αξιολόγηση των μαθητών πριν την εφαρμογή του παρεμβατικού, ώστε να διασφαλιστεί ότι η πειραματική ομάδα και η ομάδα ελέγχου ήταν όσο το δυνατόν ισοδύναμες χρησιμοποιήθηκαν οι βαθμοί των εκπαιδευτικών που έδωσαν στους μαθητές τα δύο τρίμηνα που προηγήθηκαν της διδασκαλίας της παραγώγου.

Δοκίμια έρευνας. Τα δοκίμια της έρευνας διαμορφώθηκαν με βάση την αξιολόγηση που έγινε στη Φάση 6. Για τη διαμόρφωση του τελικού δοκιμίου χρησιμοποιήθηκε το δεύτερο δοκίμιο της πιλοτικής φάσης. Αφαιρέθηκαν τα ερωτήματα 1 και 2, λόγω του ότι στα ανοικτά ερωτήματα παρουσιάστηκε μια τάση από τους μαθητές να απαντούν μονολεκτικά ή να μην απαντούν καθόλου. Το ερώτημα 1 ενσωματώθηκε με ελάχιστη διαφοροποίηση στην άσκηση 3, αλλάζοντας το ερώτημα 3β σε δύο υποερωτήματα που οδηγούσαν στην εξεύρεση του μαθηματικού τύπου της παραγώγου. Το ερώτημα 2 αντικαταστάθηκε με άσκηση που τα έργα της αφορούσαν σε συστημική γνώση των μαθητών και ασχολείται με εξεύρεση της παραγώγου συνάρτησης αν υπάρχει σε διάφορα σημεία δοσμένης γραφικής παράστασης. Το συγκεκριμένο ερώτημα παρουσιάζεται και σε ασκήσεις του βιβλίου τόσο της Κύπρου όσο και της Ελλάδας κατά τη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου. Τα υπόλοιπα έργα ήταν ακριβώς τα ίδια με αυτά του δεύτερου δοκιμίου της πιλοτικής φάσης.

Στο δεύτερο δοκίμιο (retention test) χρησιμοποιήθηκαν τα έργα του πρώτου δοκιμίου με άλλη σειρά και με μερικές αλλαγές στους αριθμούς. Ουσιαστικά άλλαζε η απάντηση στις πράξεις που χρειαζόταν να εφαρμόσει κάποιος αλλά όχι η διαδικασία ή ο τρόπος σκέψης για την επίλυση του προβλήματος. Ελαφρώς διαφοροποιημένη παρουσιάζεται η άσκηση 4 του πρώτου τεστ στα έργα της οποίας οι μαθητές κλήθηκαν να αναγνωρίσουν την παράγωγο συγκεκριμένων σημείων μιας γραφικής παράστασης, ενώ στο δεύτερο τεστ οι μαθητές κλήθηκαν να βάλουν σε σειρά τα σημεία με βάση την αριθμητική τιμή της παραγώγου στα σημεία αυτά. Το συγκεκριμένο έργο αφορούσε στη συστημική γνώση των μαθητών και προτείνεται επίσης από τους Deborah Hughes-Hallett et al. (2012). Ο Πίνακας 1 παρουσιάζει το διαχωρισμό των έργων με βάση την αρίθμηση του πρώτου δοκιμίου της έρευνας για τον καθένα από τους τρεις παράγοντες του μοντέλου της έρευνας.

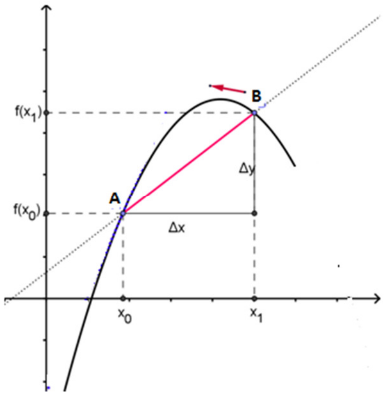
Πίνακας 1

Διαχωρισμός Έργων των Εργαλείων Μέτρησης στους Τρεις Παράγοντες του Μοντέλου της Έρευνας

<u>Στοχαστική Γνώση</u>

Έργα 1α και 1β

Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$.

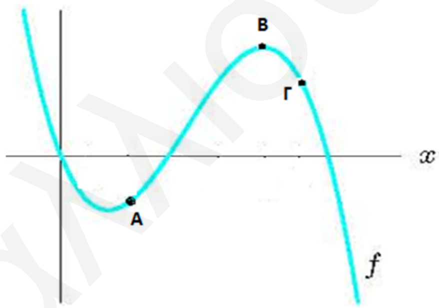


α) Να βρείτε τη κλίση της χορδής ΑΒ.

β) Να περιγράψετε τι παριστάνουν τα Δx και Δy;

Έργα 4α, 4β και 4γ

Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$. Να αντιστοιχίσετε τις παραγώγους που φαίνονται στον πίνακα με τα σημεία Α, Β και Γ στη γραφική παράσταση.



Σημείο	$f'(x)$
	0
	0.5
	-2

Έργο που αντικατέστησε στο δεύτερο δοκίμιο τα έργα 4Α, 4Β και 4Γ

Από τη γραφική παράσταση $y = f(x)$ που δίνεται στο σχήμα, να βάλετε σε σειρά τους π κάτω αριθμούς από τον μικρότερο στο μεγαλύτερο (π.χ. Ε<Στ):

Α) Η κλίση της γραφικής παράστασης στο σημείο Α

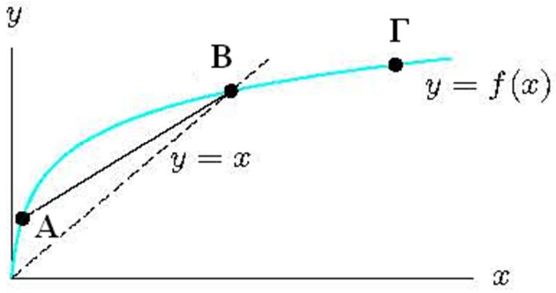
Β) Η κλίση της γραφικής παράστασης στο σημείο Β

Γ) Η κλίση της γραφικής παράστασης στο σημείο Γ

Δ) Η κλίση της ευθείας ΑΒ

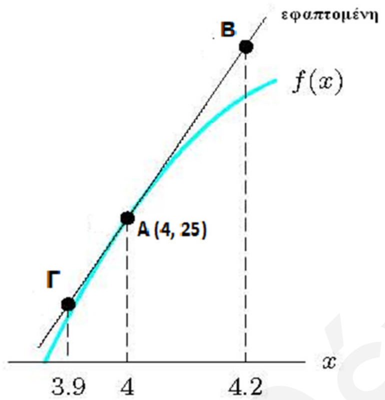
Ε) Ο αριθμός 0

Στ) Ο αριθμός 1



Έργο 5

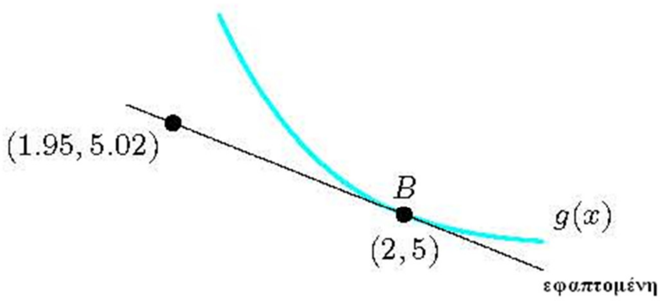
Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$. Ισχύει ότι $f(4) = 25$ και $f^{'}(4) = 1{,}5$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Β και Γ.



Έργο 6α

Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = g(x)$. Με τη βοήθεια του σχήματος να συμπληρώσετε τα κενά στην πιο κάτω ισότητα αν αναφερόμαστε στο σημείο Β.

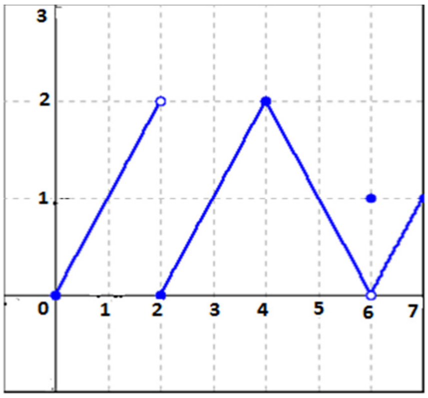
α) $g(2)$ = ______



Συστημική Γνώση

Έργα 3α, 3β, 3γ, 3δ, 3ε και 3στ

Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$, που βλέπετε πιο κάτω, να απαντήσετε στα ερωτήματα:



Να βρείτε την τιμή της παραγώγου της συνάρτησης $f(x)$ στα διάφορα σημεία, αν υπάρχει. Αν δεν υπάρχει παράγωγος σημειώστε «δεν υπάρχει»:

α) $f'(1) =$

β) $f'(2) =$

γ) $f'(3) =$

δ) $f'(4) =$

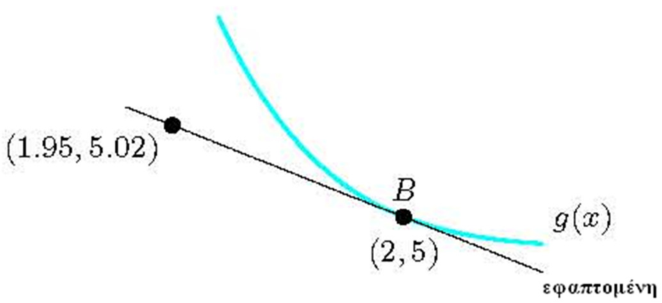
ε) $f'(5) =$

στ) $f'(6) =$

Έργο 6β

Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = g(x)$. Με τη βοήθεια του σχήματος να συμπληρώσετε τα κενά στην πιο κάτω ισότητες αν αναφερόμαστε στο σημείο Β.

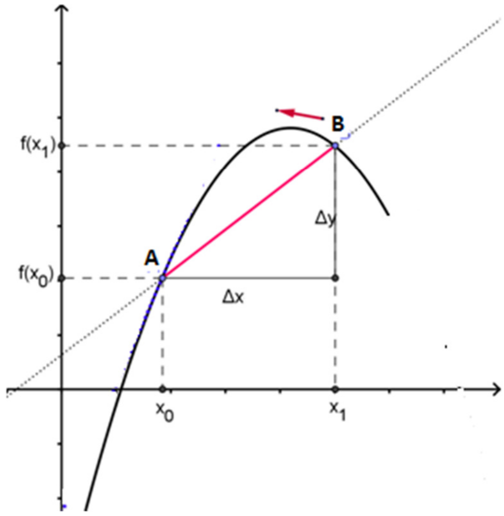
β) $g'(2) =$ ______



Αναλυτική Γνώση

Έργα 1γ, 1δ και 1ε

Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$.



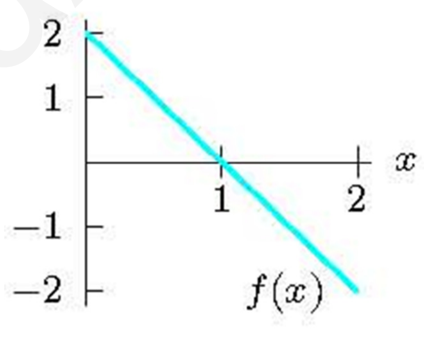
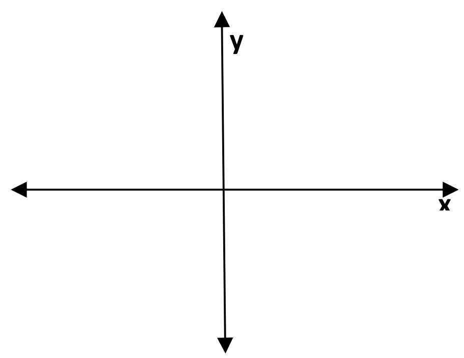
γ) Τι θα συμβεί με τη χορδή ΑΒ αν θεωρήσουμε ότι το σημείο Β κινείται πάνω στην καμπύλη και πλησιάζει συνεχώς το σημείο Α;

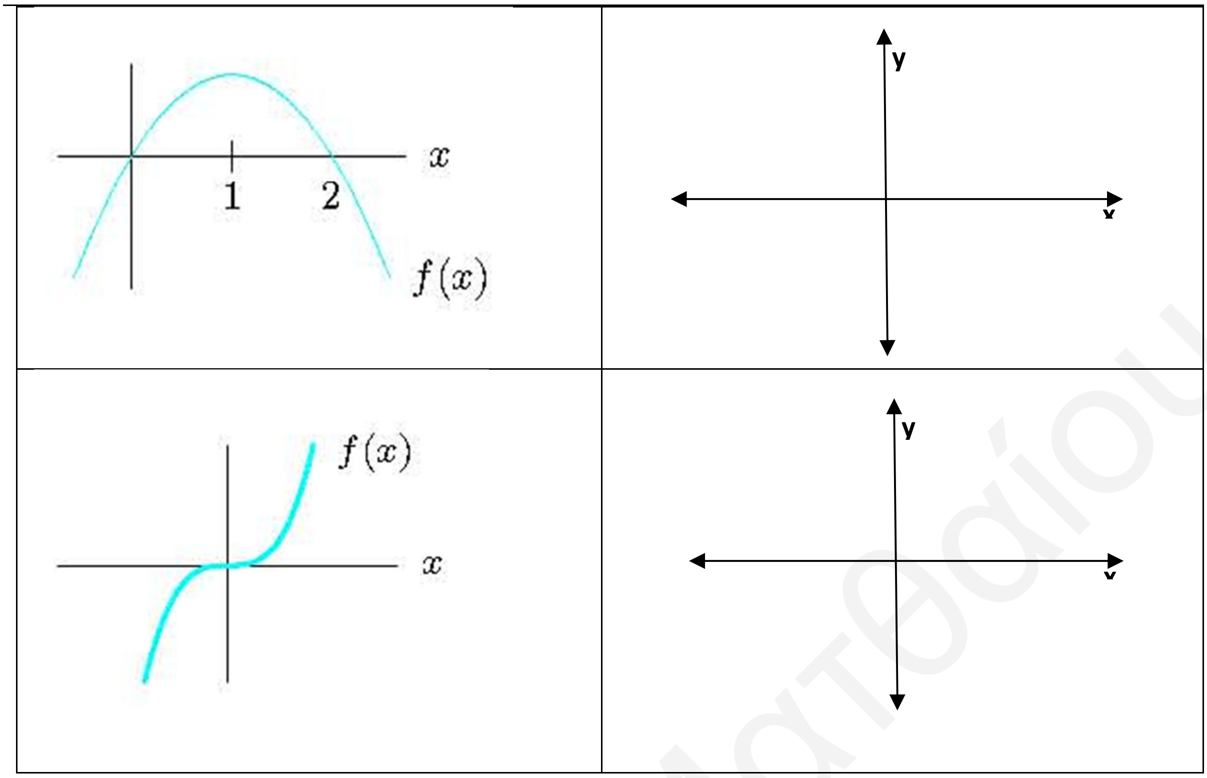
δ) Αν θεωρήσουμε ότι το σημείο Β κινείται πάνω στην καμπύλη και πλησιάζει συνεχώς το σημείο Α, να βρείτε ένα μαθηματικό τύπο που να συνδέει την κλίση της χορδής ΑΒ και της εφαπτομένης στο σημείο Α.

ε) Πότε μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη;

Έργα 2α, 2β και 2γ

Στην στήλη Α βλέπετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$. Να παραστήσετε γραφικά την παράγωγο της $f(x)$, στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων που υπάρχει στη στήλη Β. (όχι με απόλυτη ακρίβεια).

A $f(x)$	**B** $f'(x)$
	



Φάση 9: Εφαρμογή του διαμορφωμένου παρεμβατικού προγράμματος και χορήγηση των τελικών δοκιμίων για ποσοτική ανάλυση των δεδομένων όσον αφορά στους παραγόντων που συνθέτουν τη θεωρητική γνώση των μαθητών για την έννοια της παραγώγου στην Ανάλυση.

Δείγμα έρευνας. Το δείγμα στην έρευνα αποτέλεσαν 214 μαθητές, έντεκα τάξεων Β' Λυκείου από επτά σχολεία, διάφορων επαρχιών της Κύπρου. Στο δείγμα υπήρχαν σχολεία από αστικές και αγροτικές περιοχές. Η επιλογή των σχολείων ήταν και πάλι σκόπιμη με κριτήριο ποια σχολεία θα μπορούσαν να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις της έρευνας και ποιοι εκπαιδευτικοί θα μπορούσαν να εφαρμόσουν το παρεμβατικό πρόγραμμα στις τάξεις τους. Συγκεκριμένα στην πειραματική ομάδα συμμετείχαν πέντε τμήματα, με συνολικά 97 μαθητές και στην ομάδα ελέγχου συμμετείχαν έξι τμήματα, με συνολικά 117 μαθητές. Από τους μαθητές αυτούς, στη χορήγηση του πρώτου δοκιμίου συμμετείχαν 209 μαθητές (94 μαθητές της πειραματικής ομάδας και 115 μαθητές της ομάδας ελέγχου). Στη χορήγηση του δεύτερου δοκιμίου, η οποία έγινε λίγο πριν τη λήξη των μαθημάτων, συμμετείχαν 183 μαθητές (92 μαθητές της πειραματικής ομάδας και 91 μαθητές της ομάδας ελέγχου).

Χορήγηση δοκιμίων. Για τη διεξαγωγή της έρευνας χρησιμοποιήθηκαν ως αρχική μέτρηση οι βαθμολογίες των μαθητών από τους καθηγητές τους στα δύο πρώτα τρίμηνα της σχολικής χρονιάς, οι οποίες δόθηκαν πριν από τη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου που εξετάσαμε. Από τις στατιστικές αναλύσεις αυτών των βαθμολογιών που θα παρουσιαστούν στο επόμενο κεφάλαιο φαίνεται ότι οι δύο ομάδες (πειραματική και ελέγχου) των μαθητών είναι ισοδύναμες. Για τις άλλες μετρήσεις δόθηκαν τα δοκίμια όπως είχαν διαμορφωθεί στη Φάση 8 της έρευνας.

Κατά την ακαδημαϊκή χρονιά που ακολούθησε αυτήν που εφαρμόστηκε η πιλοτική έρευνα, έγινε εφαρμογή του διαμορφωμένου παρεμβατικού προγράμματος για την έννοια της παραγώγου στην πειραματική ομάδα. Η ομάδα ελέγχου διδάχτηκε με τον παραδοσιακό τρόπο με τη βοήθεια των σχολικών εγχειριδίων. Αμέσως μετά τη διδασκαλία της έννοιας χορηγήθηκε το πρώτο δοκίμιο. Ένα μήνα μετά τη διδασκαλία, (η έννοια διδάσκεται προς το τέλος της ακαδημαϊκής χρονιάς οπότε δεν υπήρχε άλλο περιθώριο καθυστέρησης για το δεύτερο δοκίμιο) χορηγήθηκε το δεύτερο δοκίμιο για να διαπιστωθεί η μονιμότητα των αποτελεσμάτων του παρεμβατικού προγράμματος (retention test).

Φάση 10: Στατιστικές αναλύσεις των δεδομένων, απάντηση των ερευνητικών ερωτημάτων και εξαγωγή συμπερασμάτων. Μετά τη συλλογή των δεδομένων έγιναν η βαθμολόγηση των απαντήσεων των μαθητών και οι στατιστικές αναλύσεις για την απάντηση των ερευνητικών ερωτημάτων και την εξαγωγή των συμπερασμάτων της έρευνας.

Βαθμολόγηση των απαντήσεων. Για τη βαθμολόγηση των απαντήσεων των μαθητών έγινε πρώτα κωδικοποίηση των πιθανών απαντήσεων. Η κωδικοποίηση κρίθηκε αναγκαία γιατί σε κάποια έργα οι μαθητές ήταν δυνατόν να δώσουν απάντηση που να μην ικανοποιούσε πλήρως το ερώτημα, αλλά να ήταν μερικώς ορθή, οπότε υπήρχε η αντίστοιχη κλιμάκωση στη βαθμολογία. Λόγω του ότι επιλέχθηκαν κυρίως έργα με κλειστές ερωτήσεις, όπως αντιστοίχιση τιμών ή εύρεση ορίων ή συντεταγμένων σημείων μιας καμπύλης, χρησιμοποιήθηκε η βαθμολογία 0 ή 1 (ασκήσεις 1α, 3, 4, 5 και 6α). Για τα έργα που ζητούνταν ορισμοί ή περιγραφή για το τι θα συμβεί με βάση μιαν υπόθεση καθώς και για τα έργα που οι μαθητές είχαν να παραστήσουν γραφικά την παράγωγο μιας συνάρτησης f με δοσμένο το γράφημά της, χρησιμοποιήθηκε και το 0.5, ως κλιμάκωση της απάντησης των μαθητών (ασκήσεις 1-εκτός 1α-, 2, 6β και η αντίστοιχη της 4 του πρώτου δοκιμίου στο δεύτερο δοκίμιο). Για παράδειγμα όταν δινόταν η γραφική παράστασης της συνάρτησης $f(x) = -x^2$, και οι μαθητές καλούνταν να παραστήσουν τη παράγωγό, αν έδιναν τη γραφική παράσταση της παραγώγου ως $f^{'}(x) = 2x \text{ ή } x$ τότε έπαιρναν ως βαθμολογία το 0,5 γιατί αναπαριστούσαν ευθεία με λανθασμένη όμως κλίση.

Στατιστικές αναλύσεις. Βασική ανάλυση αποτέλεσε η Δομική Ανάλυση Εξισώσεων (Structural Equation Modeling) με το λογισμικό γραμμικής δομικής ανάλυσης MPLUS (Muthén & Muthén, 2004). Πιο συγκεκριμένα, για τον έλεγχο του βαθμού προσαρμογής του προτεινόμενου μοντέλου χρησιμοποιήθηκε στις δύο μετρήσεις της κυρίως έρευνας η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση (Confirmatory Factor Analysis). Χρησιμοποιήθηκαν τρεις δείκτες του βαθμού προσαρμογής των μοντέλων. Ο πρώτος δείκτης σύμφωνα με τους Muthén και Muthén (2004), είναι ο λόγος του χ^2 προς τους βαθμούς ελευθερίας του μοντέλου (χ^2/df) που πρέπει να έχει τιμή μικρότερη του 2. Ο δεύτερος δείκτης είναι ο δείκτης Comparative Fit Index (CFI), του οποίου η τιμή για να είναι αποδεκτή πρέπει να είναι μεγαλύτερη από .90. Ο τρίτος είναι ο δείκτης RMSEA, που πρέπει να έχει τιμή μικρότερη του .08 (Marcoullides & Schumacker, 1996). Η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση χρησιμοποιήθηκε και για να βρεθεί πόσο συνεισφέρει ο κάθε παράγοντας στην ανάπτυξη της θεωρητικής γνώσης των μαθητών για την έννοια της παραγώγου στην Ανάλυση και κατά πόσον το προτεινόμενο μοντέλο παραμένει σταθερό στο ίδιο δείγμα μαθητών στην πορεία του χρόνου.

Στο στατιστικό πακέτο MPUS χρησιμοποιήθηκε, επίσης, η ανάλυση υπολανθανουσών ομάδων (Latent Class - LCA), για την εξέταση του αν τα υποκείμενα συμπεριφέρονται ως ενιαίο σύνολο ή υπάρχουν ομάδες μαθητών που συμπεριφέρονται με διαφορετικό τρόπο σε σχέση με τη θεωρητική γνώση και αν ισχύει η δεύτερη υπόθεση τότε ποιες και πόσες κατηγορίες μαθητών μπορούν να δημιουργηθούν. Με βάση αυτή την ανάλυση ήταν δυνατή η ανίχνευση ομάδων μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα με παρόμοια συμπεριφορά (Marcoullides & Schumacker, 1996). Η ανάλυση LCA έγινε με βάση την ανάπτυξη της θεωρητικής γνώσης στην πρώτη μέτρηση, αμέσως μετά τη διδασκαλία της παραγώγου. Το λογισμικό προσφέρει τη δυνατότητα ελέγχου διαφορετικών μοντέλων διαχωρισμού των υποκειμένων σε ομάδες επιλέγοντας το μοντέλο με τον ψηλότερο δείκτη εντροπίας και τις χαμηλότερες τιμές στους δείκτες AIC και BIC.

Στα δεδομένα του δείγματος εφαρμόστηκαν και στατιστικές αναλύσεις με το στατιστικό πακέτο SPSS. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκαν αναλύσεις για τα περιγραφικά αποτελέσματα (μέσος όρος, τυπική απόκλιση) για τους παράγοντες της θεωρητικής γνώσεις που διαμορφώθηκαν από το μοντέλο μας και για τις συσχετίσεις μεταξύ των έργων του κάθε παράγοντα, για τους παράγοντες σε σχέση με το είδος της ομάδας (πειραματική, ελέγχου) που ανήκαν οι μαθητές και σε σχέση με την κατηγορία που δημιουργήσαμε με την ανάλυση LCA. Ακόμα, για τον έλεγχο της ισοδυναμίας της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου χρησιμοποιήθηκε το κριτήριο *t* για ανεξάρτητα δείγματα με εξαρτημένη μεταβλητή τη βαθμολογία των μαθητών στα τρίμηνα και ανεξάρτητη μεταβλητή το είδος της ομάδας. Για να διερευνηθεί κατά πόσο υπήρχαν διαφορές στα αποτελέσματα των μαθητών ανάλογα με την κατηγορία που τους έχει εντάξει η ανάλυση LCA και την ομάδα που ανήκαν στην έρευνα (πειραματική, ελέγχου) διενεργήθηκε διπλή πολυμεταβλητή ανάλυση διακύμανσης τριών εξαρτημένων και δύο ανεξάρτητων μεταβλητών (two-way MANOVA-Multivariate Analysis of Variance).

Στα αποτελέσματα των μαθητών που παρουσιάστηκε αλληλεπίδραση της κατηγορίας και της ομάδας που ανήκαν διενεργήθηκε ανάλυση διασποράς μιας ανεξάρτητης μεταβλητής (one-way ANOVA) με 6 ομάδες (κατηγορία x ομάδα), η οποία έδειξε αν υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των ομάδων αυτών στο συγκεκριμένο παράγοντα. Στη συνέχεια με το τεστ Scheffe (Scheffe’s test) διαπιστώθηκε μεταξύ ποιων κατηγοριών υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές.

Όσον αφορά στα αποτελέσματα των μαθητών στους παράγοντες που δεν υπήρχε αλληλεπίδραση, εξετάστηκε ξεχωριστά αν υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές σε σχέση με την κατηγορία και την ομάδα των μαθητών. Για να εξεταστεί κατά πόσον υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μαθητών των τριών κατηγοριών ως προς κάποιο παράγοντα της θεωρητικής γνώσης χρησιμοποιήθηκε και πάλι η ανάλυση διασποράς μίας ανεξάρτητης μεταβλητής (one-way ANOVA) με εξαρτημένη μεταβλητή τα αποτελέσματα των μαθητών για τον παράγοντα και ανεξάρτητη μεταβλητή την κατηγορία στην οποία ανήκαν οι μαθητές καθώς και το τεστ Scheffe για να διαπιστωθεί μεταξύ ποιων κατηγοριών υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές. Τέλος, για να εξεταστεί κατά πόσον υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μαθητών των δύο ομάδων (ελέγχου, πειραματική) ως προς τα αποτελέσματά τους σε κάποιο παράγοντα, έγινε έλεγχος με το *t*-τεστ για ανεξάρτητα δείγματα.

Στη συνέχεια, με βάση τις στατιστικές αναλύσεις απαντήθηκαν τα ερευνητικά ερωτήματα και δόθηκαν εξηγήσεις για τα αποτελέσματα των αναλύσεων σε συνδυασμό και με την υπάρχουσα βιβλιογραφία. Τέλος, δόθηκαν διάφορες εισηγήσεις με βάση τα εξαχθείσα συμπεράσματα για περαιτέρω έρευνα και βελτίωση της διδασκαλίας στην παράγωγο και στις έννοιες της Ανάλυσης γενικότερα.

Αποτελέσματα

Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται παρουσίαση των αποτελεσμάτων της έρευνας μέσω των στατιστικών αναλύσεων που διενεργήθηκαν ώστε να απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα. Γίνεται εκτενής αναφορά στα ευρήματα με βάση τη σειρά των πιο κάτω ερευνητικών ερωτημάτων:

1. Σε ποιο βαθμό επιβεβαιώνεται το προτεινόμενο μοντέλο για τη θεωρητική γνώση στη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου στην Ανάλυση;
2. Ποιες συνιστώσες (παράγοντες) αποτελούν τη θεωρητική γνώση των μαθητών για την έννοια της παραγώγου στην Ανάλυση και πόσο συνεισφέρει ο κάθε παράγοντας στη διαμόρφωση της θεωρητικής γνώσης των μαθητών για τη συγκεκριμένη έννοια;
3. Το προτεινόμενο θεωρητικό μοντέλο παραμένει σταθερό με την πάροδο του χρόνου;
4. Ποιες κατηγορίες μαθητών μπορούν να δημιουργηθούν με βάση τη θεωρητική τους γνώση και την αντίληψή τους για την έννοια της παραγώγου;
5. Υπάρχουν διαφορές στα αποτελέσματα στους παράγοντες που συνθέτουν τη θεωρητική γνώση για την παράγωγο των μαθητών της κάθε κατηγορίας που διαμορφώθηκε όταν συμμετέχουν ή όχι στο παρεμβατικό πρόγραμμα;
6. Υπάρχουν διαφορές στα αποτελέσματα στους παράγοντες που συνθέτουν τη θεωρητική γνώση για την παράγωγο των μαθητών της κάθε κατηγορίας όταν συμμετέχουν ή όχι στο παρεμβατικό πρόγραμμα μετά την πάροδο ενός χρονικού διαστήματος;

Αρχικά, για την εξέταση της ισοδυναμία της ομάδας ελέγχου και της πειραματικής ομάδας χρησιμοποιήθηκε η βαθμολογία των εκπαιδευτικών που είχαν δώσει στους μαθητές τους στα δύο τρίμηνα φοίτησής τους. Αυτό έγινε με βάση το γεγονός ότι ένα κριτήριο για το διαμοιρασμό των τμημάτων στα σχολεία ήταν και η επίδοσή τους στην Α' τάξη του Λυκείου. Όπως έχει αναφερθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο λόγω του ότι η ερευνητική εργασία επικεντρώνεται στην έννοια της παραγώγου στη διδασκαλία της Ανάλυσης, ήταν δυνατή η εξέτασή της μόνο μετά τη διδασκαλία της έννοιας.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για την απάντηση των ερευνητικών ερωτημάτων. Για το πρώτο ερώτημα, που αφορά στον έλεγχο του προτεινόμενου μοντέλου, χρησιμοποιήθηκε η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση (Confirmatory Factor Analysis – CFA). Εφαρμόζοντας την CFA και στις δύο μετρήσεις που είχαν διενεργηθεί μετά τη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου στην Ανάλυση έγινε έλεγχος του βαθμού προσαρμογής του μοντέλου της έρευνας. Η ίδια ανάλυση χρησιμοποιήθηκε και για την απάντηση τόσο του δεύτερου όσο και του τρίτου ερωτήματος και έγινε έλεγχος του βαθμού συνεισφοράς του κάθε παράγοντα στη διαμόρφωση της θεωρητικής γνώσης των μαθητών για την έννοια της παραγώγου στην Ανάλυση και αν το μοντέλο παραμένει σταθερό με την πάροδο ενός χρονικού διαστήματος.

Για τη διακρίβωση της ύπαρξης κατηγοριών μαθητών στο δείγμα με παρόμοια συμπεριφορά ως προς τη θεωρητική γνώση για την έννοια της παραγώγου στη διδασκαλία της Ανάλυσης ώστε να απαντηθεί το τέταρτο ερώτημα, εφαρμόστηκε η ανάλυση Latent Class (LCA) στην πρώτη μέτρηση. Η συγκεκριμένη ανάλυση εξετάζει αν τα υποκείμενα της έρευνας συμπεριφέρονται ως ενιαίο σύνολο ή υπάρχουν ομάδες μαθητών που συμπεριφέρονται με διαφορετικό τρόπο σε σχέση με τη θεωρητική γνώση και αν ισχύει η δεύτερη υπόθεση τότε ποιες και πόσες κατηγορίες μαθητών μπορούν να δημιουργηθούν. Με βάση αυτή την ανάλυση ήταν δυνατή η ανίχνευση ομάδων μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα με παρόμοια συμπεριφορά (Marcoullides & Schumacker, 1996).

Για την απάντηση του πέμπτου και του έκτου ερωτήματος χρησιμοποιήθηκε η διπλή πολυμεταβλητή ανάλυση διακύμανσης (two way MANOVA) με στόχο να εξετάσει κατά πόσο τα αποτελέσματα των μαθητών στους τρεις παράγοντες (εξαρτημένες μεταβλητές) που συνθέτουν τη θεωρητική γνώση για την παράγωγο στη διδασκαλία της ανάλυσης διαφέρουν ανάλογα με την κατηγορία ή την ομάδα των μαθητών (ανεξάρτητες μεταβλητές) τόσο στη πρώτη μέτρηση όσο και στη δεύτερη.

Στις περιπτώσεις που παρουσιάστηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές της αλληλεπίδρασης της κατηγορίας και της ομάδας των μαθητών στα αποτελέσματα τους σε κάποιο από τους τρεις παράγοντες που συνθέτουν τη θεωρητική γνώση, διενεργήθηκε ανάλυση διασποράς ανεξάρτητων μεταβλητών (one-way ANOVA) με 6 ομάδες (Κατηγορία x Ομάδα) ώστε να διερευνηθεί κατά πόσον υπήρχαν διαφορές μεταξύ αυτών των ομάδων. Στη συνέχεια χρησιμοποιήθηκε το τεστ Scheffe, για να διαπιστωθεί μεταξύ ποιων κατηγοριών υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές. Το τεστ Scheffe, είναι ένα post hoc τεστ το οποίο εφαρμόζεται όταν στα αποτελέσματα της ανάλυσης διακύμανσης προκύψουν στατιστικά σημαντικές διαφορές και οι ομάδες είναι περισσότερες από δύο. Ένα post hoc τεστ επιτρέπει πολλαπλές συγκρίσεις των μέσων όρων ανά ζεύγη για τον εντοπισμό στατιστικά σημαντικών διαφορών.

Στις άλλες περιπτώσεις, εξετάστηκε ξεχωριστά η κατηγορία στην οποία ανήκαν οι μαθητές και η ομάδα στην οποία ανήκαν. Συγκεκριμένα, όπου παρουσιάζονταν στατιστικά σημαντικές διαφορές σε σχέση με την κατηγορία στην οποία ανήκαν οι μαθητές εξετάστηκε κατά πόσο υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μαθητών των τριών κατηγοριών ως προς το συγκεκριμένο παράγοντα με τη χρήση της ανάλυσης διασποράς μίας ανεξάρτητης μεταβλητής (one-way ANOVA). Στη συνέχεια χρησιμοποιήθηκε το τεστ Scheffe, για να διαπιστωθεί μεταξύ ποιων κατηγοριών υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές. Όπου παρουσιάζονταν στατιστικά σημαντικές διαφορές σε σχέση με την ομάδα στην οποία ανήκαν οι μαθητές εξετάστηκε κατά πόσο υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μαθητών των δύο ομάδων ως προς το συγκεκριμένο παράγοντα με τη χρήση του ελέγχου *t*-τεστ για ανεξάρτητα δείγματα ώστε να συγκριθούν οι δύο ομάδες μαθητών.

Ισοδυναμία της Ομάδας Ελέγχου και της Πειραματικής Ομάδας Πριν από τη Διδασκαλία της Έννοιας της Παραγώγου

Λόγω του ότι οι μαθητές πριν από τη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου δεν είχαν άλλη επαφή με τη συγκεκριμένη υπό εξέταση έννοια και λόγω του ότι η ερευνητική εργασία εστιάζεται στη συγκεκριμένη έννοια δεν ήταν δυνατή η εφαρμογή μέτρησης πριν από τη διδασκαλία στους μαθητές του δείγματός μας. Είναι για αυτούς τους λόγους που για τη μέτρηση της ισοδυναμίας της ομάδας ελέγχου και της πειραματικής ομάδας χρησιμοποιήθηκε η βαθμολογία των εκπαιδευτικών που είχαν δώσει στους μαθητές τους στα δύο τρίμηνα φοίτησής τους. Έγινε έλεγχος με το *t*-test ώστε να διαπιστωθεί ότι δεν υπήρχε στατιστικά σημαντική διαφορά στην επίδοση των μαθητών στα δύο τρίμηνα που είχαν προηγηθεί της διδασκαλίας της έννοιας της παραγώγου στην Ανάλυση.

Πίνακας 2

Διαφορές Μεταξύ Μέσων Όρων των Δύο Ομάδων των Μαθητών ως Προς τα Αποτελέσματα τους στο Πρώτο και στο Δεύτερο Τρίμηνο Φοίτησής τους στη Β' Λυκείου

	Ελέγχου		Πειραματική				
Φοίτηση	$\overline{X}$	*SD*	$\overline{X}$	*SD*	*t*	*df*	*p*
$1^{ο}$ τρίμηνο	14.91	3.05	14.41	3.01	-1.19	212	.237
$2^{ο}$ τρίμηνο	14.81	3.31	14.99	3.04	.41	212	.685

Από τον Πίνακα 2 φαίνεται ότι δεν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές στους μέσους όρους της ομάδας ελέγχου και της πειραματικής ομάδας ως προς τα αποτελέσματα τους στο πρώτο και στο δεύτερο τρίμηνο φοίτησής τους στη Β' Λυκείου, οπότε θεωρούμε ότι η ομάδα ελέγχου και η πειραματική ομάδα με βάση τις συγκεκριμένες βαθμολογίες είναι ισοδύναμες.

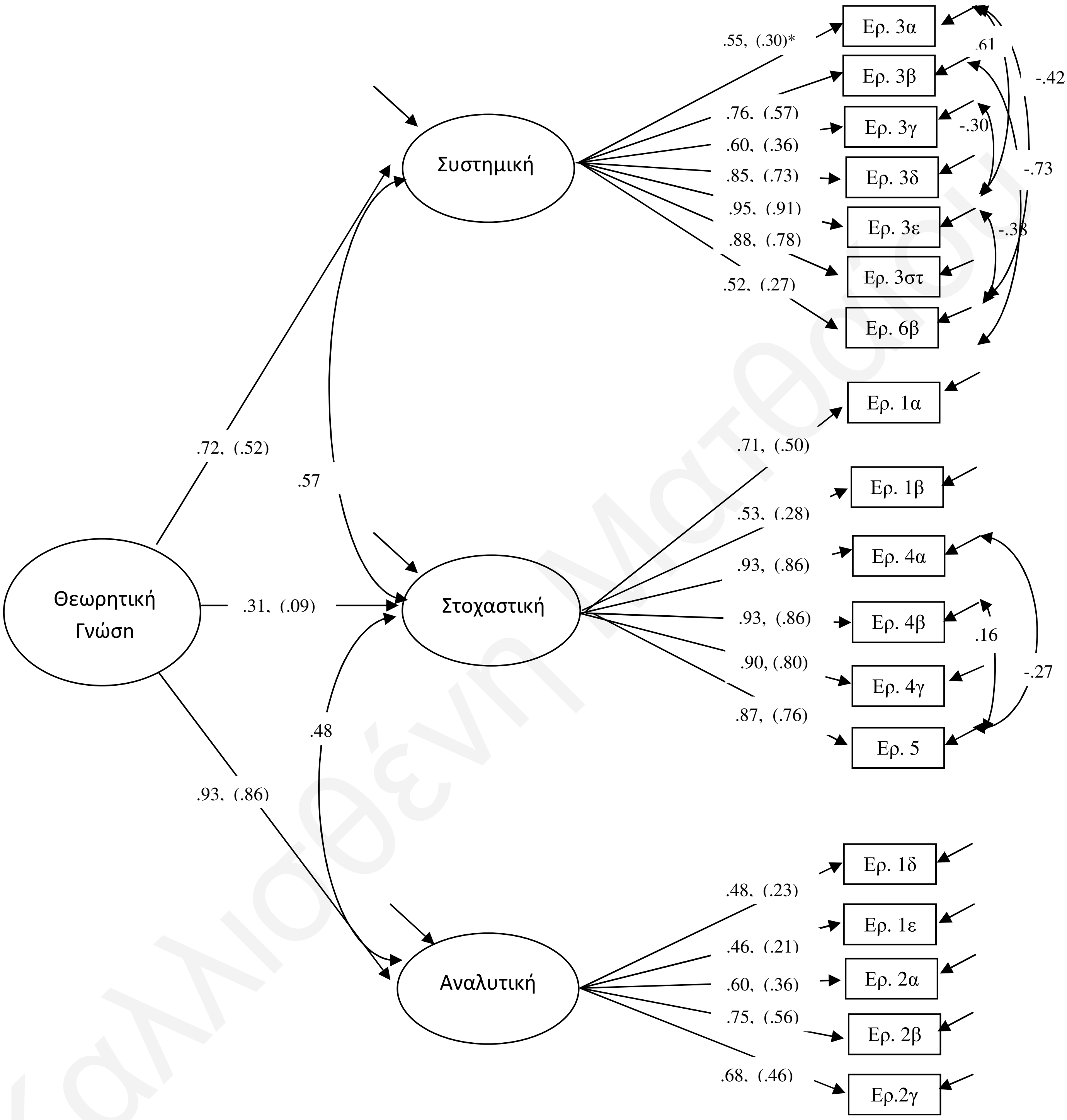
Ερώτημα 1: Σε ποιο Βαθμό Επιβεβαιώνεται Εμπειρικά το Προτεινόμενο Μοντέλο για τη Θεωρητική Γνώση στη Διδασκαλία της Έννοιας της Παραγώγου στην Ανάλυση;

Για να επιβεβαιωθεί το προτεινόμενο μοντέλο θεωρητικής γνώσης της έννοιας της παραγώγου διενεργήθηκε επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση. Πιο κάτω παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης και τα περιγραφικά αποτελέσματα για τους παράγοντες που συνθέτουν τη θεωρητική γνώση της έννοιας της παραγώγου και οι συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών (έργα του 1^{ου} δοκιμίου και 2^{ου} δοκιμίου) που χρησιμοποιήθηκαν για τον έλεγχο της εγκυρότητας του μοντέλου.

Επιβεβαίωση του προτεινόμενου μοντέλου. Με βάση το μοντέλο που διαμορφώθηκε, οι παράγοντες που συνθέτουν τη θεωρητική γνώση των μαθητών για την έννοια της παραγώγου στην Ανάλυση είναι η στοχαστική, η συστημική και η αναλυτική γνώση των μαθητών όπως αυτοί παρουσιάζονται στο μοντέλου που προτείνουν οι Sierpinska et al. (2002) για τη θεωρητική γνώση. Στην επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση για την προσαρμογή του μοντέλου, χρειάστηκε να προστεθεί και η συσχέτιση μεταξύ της στοχαστικής γνώσης και των άλλων δύο παραγόντων. Με τη συγκεκριμένη προσθήκη τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης δείχνουν ότι η προσαρμογή των δεδομένων στο προτεινόμενο μοντέλο ήταν πολύ καλή, επιβεβαιώνοντας με αυτό τον τρόπο την καταλληλότητά της δομής του μοντέλου να περιγράψει τη θεωρητική γνώση των μαθητών στην έννοια της παραγώγου (CFI = .989, $\chi^2 = 78.2$, df = 34, $\chi^2/df = 2.3$, $p < 0.05$, RMSEA = 0.078). Όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 3, οι τρεις παράγοντες στοχαστική, συστημική και αναλυτική γνώση συνθέτουν μια ανώτερη θεωρητική δομή, τη θεωρητική γνώση των μαθητών για την έννοια της παραγώγου στην Ανάλυση. Η προσαρμογή των δεδομένων στη δομή του προτεινόμενου μοντέλου, με την προσθήκη που έχει αναφερθεί πιο πάνω επιβεβαιώνει ότι τα έργα που χρησιμοποιήθηκαν αποτελούν κατάλληλα έργα μέτρησης των άδηλων παραγόντων. Όλα τα έργα εκτός από δύο είχαν σημαντικές φορτίσεις στους αντίστοιχους παράγοντες. Εξαίρεση αποτελούσαν το έργο 1γ, που αφορούσε στην υπόθεση των μαθητών για το πώς θα διαμορφωθεί η χορδή ΑΒ, με Α και Β σημεία δοσμένης καμπύλης, αν θεωρήσουμε ότι το σημείο Β κινείται πάνω στην καμπύλη και πλησιάζει συνεχώς το σημείο Α και εξέταζε αναλυτική γνώση και το έργο 6α, που αφορούσε την εξεύρεση της τιμής της συνάρτησης σε συγκεκριμένο σημείο με δοσμένες τις συντεταγμένες του σημείου και εξέταζε στοχαστική γνώση. Τα δύο αυτά έργα εξαιρέθηκαν γιατί θεωρήθηκε ότι είχαν χαμηλές φορτίσεις και ταυτόχρονα ερμήνευαν ένα πολύ μικρό ποσοστό της διασποράς του αντίστοιχου άδηλου παράγοντα που μετρούσαν (έργο 1γ: φόρτιση=0.40 και ερμηνευόμενη διασπορά=0.16, έργο 6α: φόρτιση = 0.37 και ερμηνευόμενη διασπορά=0.14).

Οι συσχετίσεις μεταξύ των σφαλμάτων των έργων που ανήκουν στον ίδιο παράγοντα που παρουσιάζονται στο Διάγραμμα 6 δείχνουν ότι οι συγκεκριμένοι δείκτες είχαν κοινό σφάλμα στη μέτρηση, εξαιτίας του τύπου και της διαδικασίας χορήγησης του δοκιμίου.

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης, όπως παρουσιάζονται στο Διάγραμμα 6, έδειξαν ότι η ερμηνευόμενη διασπορά των έργων του κάθε παράγοντα (στοχαστική, συστημική και αναλυτική γνώση) ήταν ικανοποιητική, δείχνοντας ότι η διασπορά των έργων του δοκιμίου μπορεί να ερμηνεύσει τη διασπορά των τριών παραγόντων του μοντέλου. Παρουσιάζεται, επίσης, ότι η ερμηνευόμενη διασπορά των δύο από τους τρεις παράγοντες στο γενικό παράγοντα είναι αρκετά ψηλή. Ειδικότερα, ο παράγοντας που αναφέρεται στην αναλυτική γνώση (r^2=.86) ερμηνεύει ένα πολύ μεγάλο ποσοστό της διασποράς του γενικού παράγοντα θεωρητική γνώση των μαθητών για την έννοια της παραγώγου στη διδασκαλία της Ανάλυσης.



Διάγραμμα 6: Το μοντέλο της θεωρητικής γνώσης μετά την πρώτη μέτρηση

* Ο πρώτος αριθμός δείχνει το συντελεστή φόρτισης και ο αριθμός στην παρένθεση την αντίστοιχη ερμηνευόμενη διασπορά (r^2)

Περιγραφικά αποτελέσματα για τους παράγοντες που συνθέτουν τη θεωρητική γνώση για την έννοια της παραγώγου στην πρώτη μέτρηση. Ο Πίνακας 3 παρουσιάζει το μέσο όρο και την τυπική απόκλιση των αποτελεσμάτων των μαθητών για τον κάθε παράγοντα που επηρεάζει στην ανάπτυξη της θεωρητικής γνώσης και της κατανόησης της έννοιας της παραγώγου κατά τη μέτρηση αμέσως μετά την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος.

Πίνακας 3

Περιγραφικά Αποτελέσματα των Παραγόντων που Συνθέτουν τη Θεωρητική Γνώση για την Έννοια της Παραγώγου στην Ανάλυση στην Πρώτη Μέτρηση

Παράγοντας	Μέσος όρος	Τυπική Απόκλιση
Στοχαστική	.374	.316
Συστημική	.368	.283
Αναλυτική	.261	.267

Από τον Πίνακα 3 φαίνεται ότι ο μέσος όρος των απαντήσεων των μαθητών είναι ψηλότερος για τη στοχαστική (Μ.Ο.=.374) και τη συστημική γνώση (Μ.Ο.=.368) και πιο χαμηλός για την αναλυτική γνώση (Μ.Ο.=.261). Στα επόμενα ερωτήματα θα εξετάσουμε κατά πόσο διαμορφώνονται με βάση την ομάδα ή την κατηγορία στην οποία ανήκουν οι μαθητές.

Στον Πίνακα 4 παρουσιάζονται οι συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών που χρησιμοποιήθηκαν για τον έλεγχο της εγκυρότητας του μοντέλου. Οι μεταβλητές αντιστοιχούν στα 18 έργα του πρώτου δοκιμίου που χρησιμοποιήθηκαν για τη μέτρηση των παραγόντων που συνθέτουν την θεωρητική γνώση των μαθητών στην έννοια της παραγώγου. Οι μεταβλητές ήταν αναλογικές και ανήκαν στην ισοδιαστημική κλίμακα για αυτό χρησιμοποιήθηκε ο συντελεστής συσχέτισης του Pearson. Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης του Pearson (r) παίρνει τιμές στο κλειστό διάστημα [-1 , 1] και μπορεί να δώσει ένα μέτρο του μεγέθους της γραμμικής συσχέτισης μεταξύ δύο μεταβλητών.

Πίνακας 4

Συσχετίσεις Μεταξύ της Επίδοσης των Υποκειμένων στα Έργα του Πρώτου Δοκιμίου

Έργο	Q1α	Q1β	Q5	Q4α	Q4β	Q4γ	Q3α	Q3β	Q3γ
Q1α	1								
Q1β	.335**	1							
Q5	.318**	.285**	1						
Q4α	.337**	.283**	.290**	1					
Q4β	.262**	.320**	.495**	.513**	1				
Q4γ	.269**	.306**	.518**	.498**	.909**	1			
Q3α	.303**	.184**	.116*	.170*	.117	.171*	1		
Q3β	.206**	.227**	.162*	.454**	.282**	.293**	.224**	1	
Q3γ	.353**	.221**	.140*	.174*	.186**	.198**	.727**	.290**	1
Q3δ	.233**	.302**	.316**	.476**	.436**	.402**	.018	.407**	.135
Q3ε	.183**	.240**	.439**	.213**	.366**	.360**	.259**	-.028	.292**
Q3στ	.300**	.223**	.244**	.396**	.374**	.359**	.276*	.495**	.342**
Q6β	.250**	.271**	.617**	.280**	.452**	.443**	.166*	.325**	.157*
Q1δ	.232**	.110	.535**	.306**	.421**	.443**	-.011	.184**	.047
Q1ε	.229**	.312**	.397**	.185**	.283**	.276**	.223**	.144*	.208**
Q2α	.338**	.171*	.316**	.297**	.271**	.289**	.247**	.328**	.238**
Q2β	.312**	.239**	.367**	.530**	.337**	.341**	.341**	.316**	.336**
Q2γ	.266**	.241**	.476**	.382**	.311**	.326**	.213**	.259**	.159*

Έργο	Q3δ	Q3ε	Q3στ	Q6β	Q1δ	Q1ε	Q2α	Q2β	Q2γ
Q3δ	1								
Q3ε	.263**	1							
Q3στ	.495**	.167*	1						
Q6β	.413**	.304**	.312**	1					
Q1δ	.272**	.188**	.180**	.400**	1				
Q1ε	.082	.332**	.074	.368**	.229**	1			
Q2α	.233**	.175*	.379**	.386**	.268**	.219**	1		
Q2β	.341**	.220**	.352**	.441**	.393**	.357**	.468**	1	
Q2γ	.353**	.231**	.273**	.534**	.386**	.295**	.486**	.578**	1

$*p<0.05$, $**p<0.01$

Από τον Πίνακα 4 φαίνεται ότι οι συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών των έξι έργων (1α, 1β, 5, 4α, 4β και 4γ) που αφορούν στη στοχαστική γνώση είναι όλες στατιστικά σημαντικές. Ψηλότερη βρέθηκε να είναι η συσχέτιση των έργων 4β και 4γ (r = .909, p < .01). Το ίδιο αποτέλεσμα παρουσιάζεται και στις συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών των πέντε έργων (1δ, 1ε, 2α, 2β και 2γ) που αφορούν στη αναλυτική γνώση. Ψηλότερη συσχέτιση βρέθηκε να παρουσιάζεται μεταξύ των έργων 2β και 2γ (r= .578, p < *.01*). Αναφορικά με τις συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών των εφτά έργων (3α, 3β, 3γ,3δ, 3ε, 3στ και 6β) που αφορούν τη συστημική γνώση, οι περισσότερες είναι στατιστικά σημαντικές (εξαίρεση αποτελούν οι συσχετίσεις μεταξύ των έργων 3α και 3δ και μεταξύ των έργων 3β και 3ε, με ψηλότερη τη συσχέτιση μεταξύ των έργων 3α και 3γ (*r* = .727*, p* < .01).

Ο Πίνακας 5 παρουσιάζει τις συσχετίσεις μεταξύ των αποτελεσμάτων των μαθητών στους τρεις παράγοντες (στοχαστική γνώση, συστημική γνώση, αναλυτική γνώση) που συνθέτουν τη θεωρητική γνώση των μαθητών για την έννοια της παραγώγου στην Ανάλυση.

Πίνακας 5

Συσχετίσεις Μεταξύ των Αποτελεσμάτων των Μαθητών στους Παράγοντες που Συνθέτουν τη Θεωρητική Γνώση στην Πρώτη Μέτρηση

Παράγοντας	Στοχαστική	Συστημική	Αναλυτική
Στοχαστική	1		
Συστημική	.642**	1	
Αναλυτική	.636**	.575**	1

**p<0.01

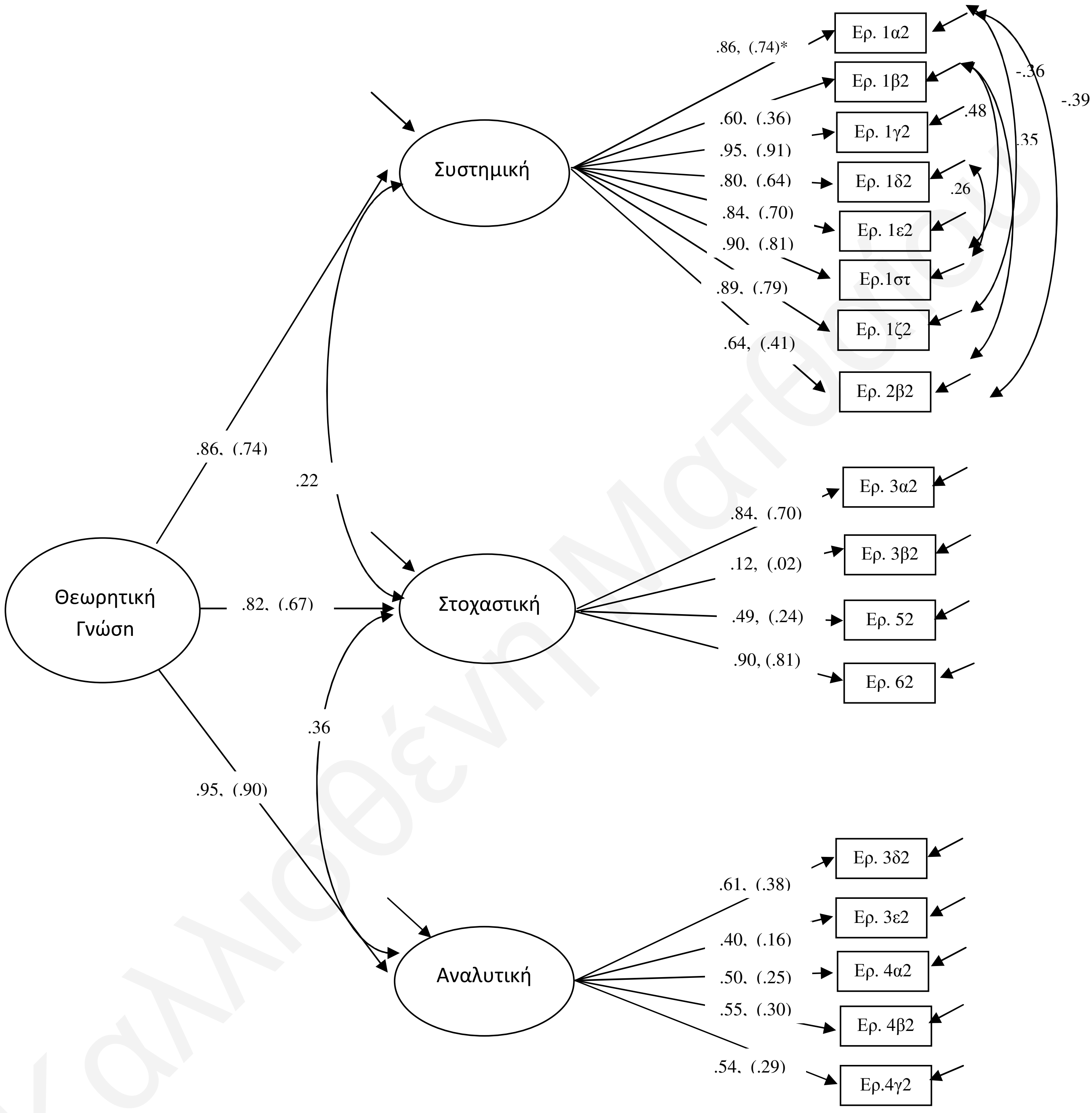
Από τον Πίνακα 5 φαίνεται ότι οι συσχετίσεις που παρουσιάζει ο παράγοντας στοχαστική γνώση μαζί με τη συστημική (*r* = .642*, p* < .01) και την αναλυτική γνώση (*r* = .636, *p* < .01), τους άλλους δηλαδή παράγοντες είναι πιο ψηλές σε σχέση με τη συσχέτιση μεταξύ των άλλων δύο παραγόντων (*r* = .575, *p* < .01). Όλες οι συσχετίσεις είναι στατιστικά σημαντικές και αρκετά ψηλές. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι τρεις αυτοί παράγοντες φαίνεται να συνθέτουν έναν «ανώτερο» παράγοντα.

Ο δείκτης αξιοπιστίας του δοκιμίου μέτρησης των τριών παραγόντων που προτείνονται για τη σύνθεση της θεωρητικής γνώσης των μαθητών για την έννοια της παραγώγου στην Ανάλυση είναι ο Gronbach's Alfa=.83, ο οποίος θεωρείται πολύ ικανοποιητικός αφού δίνει ψηλό επίπεδο εσωτερικής συνέπειας μεταξύ των παραγόντων μας. Οι δείκτες αξιοπιστίας για τον κάθε παράγοντα ήταν $\alpha_{\text{στοχαστική γνώση}} = .79$, $\alpha_{\text{συστημική γνώση}} = .74$, $\alpha_{\text{αναλυτική γνώση}} = .74$, οι οποίοι θεωρούνται ικανοποιητικοί (α > .70).

Επιβεβαίωση του προτεινόμενου μοντέλου στη δεύτερη μέτρηση, ένα μήνα μετά την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος (retention test). Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης για τη μέτρηση ένα μήνα μετά την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος ήταν ακόμα πιο βελτιωμένα σε σχέση με αυτά της πρώτης μέτρησης. Η προσαρμογή των δεδομένων του προτεινόμενου μοντέλου όπως είχε διαμορφωθεί μετά την πρώτη μέτρηση, ήταν πολύ καλή, επιβεβαιώνοντας την καταλληλότητά της δομής του μοντέλου να περιγράψει τη θεωρητική γνώση των μαθητών για την έννοια της παραγώγου στην Ανάλυση (CFI = .960, χ^2 = 20.8, df = 10, χ^2/df = 2.1, p< 0.05, RMSEA = 0.071). Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης που φαίνονται στο Διάγραμμα 7 επιβεβαιώνουν την υπόθεση ότι οι τρεις παράγοντες στοχαστική, συστημική και αναλυτική γνώση συνθέτουν μια ανώτερη θεωρητική δομή, τη θεωρητική γνώση των μαθητών για την έννοια της παραγώγου στην Ανάλυση και στη δεύτερη μέτρηση μετά την πάροδο ενός μηνός από τη διδασκαλία της παραγώγου στην Ανάλυση. Η προσαρμογή των δεδομένων στη δομή του προτεινόμενου μοντέλου, επιβεβαιώνει ότι τα έργα που χρησιμοποιήθηκαν αποτελούν κατάλληλα έργα μέτρησης των άδηλων παραγόντων. Τα έργα 2α2 και 3γ2 που είχαν εξαιρεθεί στην προηγούμενη ανάλυση λόγω των φορτίσεων και της ερμηνευόμενης διασποράς που είχαν στους αντίστοιχους παράγοντες που μετρούσαν δεν χρησιμοποιήθηκαν ούτε σε αυτήν τη μέτρηση η οποία αποτελούσε επιβεβαίωση της πρώτης (retention test). Όλα τα έργα πλην ενός (έργο 3β2, ορισμός των Δx και Δy – στοχαστική γνώση) είχαν σημαντικές φορτίσεις στους αντίστοιχους παράγοντες. Οι συσχετίσεις μεταξύ των σφαλμάτων των έργων που ανήκουν στον ίδιο παράγοντα δείχνουν ότι οι συγκεκριμένοι δείκτες είχαν κοινό σφάλμα στη μέτρηση, εξαιτίας του τύπου και της διαδικασίας χορήγησης του δοκιμίου.

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης που παρουσιάζονται στο Διάγραμμα 7 έδειξαν ότι η ερμηνευόμενη διασπορά των έργων πλην ενός (έργο 3β2, ορισμός των Δx και Δy – στοχαστική γνώση) του κάθε παράγοντα (στοχαστική, συστημική και αναλυτική γνώση) ήταν ικανοποιητική, δείχνοντας ότι η διασπορά των έργων του δοκιμίου μπορεί να ερμηνεύσει τη διασπορά των τριών παραγόντων του μοντέλου. Παρουσιάζεται, επίσης, ότι η ερμηνευόμενη διασπορά των τριών παραγόντων στο γενικό παράγοντα είναι αρκετά ψηλή και φαίνονται αρκετά βελτιωμένη σε σχέση με την πρώτη μέτρηση.

Ειδικότερα, οι παράγοντες που αναφέρονται στη συστημική (r^2=.74) και στην αναλυτική γνώση (r^2=.90) ερμηνεύουν ένα πολύ μεγάλο ποσοστό της διασποράς του γενικού παράγοντα θεωρητική γνώση των μαθητών για την έννοια της παραγώγου στη διδασκαλία της Ανάλυσης.



Διάγραμμα 7: Το μοντέλο της θεωρητικής γνώσης μετά τη δεύτερη μέτρηση (retention test)
* Ο πρώτος αριθμός δείχνει το συντελεστή φόρτισης και ο αριθμός στην παρένθεση την αντίστοιχη ερμηνευόμενη διασπορά (r^2)

Περιγραφικά αποτελέσματα για τους παράγοντες που συνθέτουν τη θεωρητική γνώση για την έννοια της παραγώγου στη δεύτερη μέτρηση, ένα μήνα μετά την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος (retention test). Ο Πίνακας 6 παρουσιάζει το μέσο όρο και την τυπική απόκλιση των αποτελεσμάτων των μαθητών για τον κάθε παράγοντα που επηρεάζει στην ανάπτυξη της θεωρητικής γνώσης και της κατανόησης της έννοιας της παραγώγου κατά τη δεύτερη μέτρηση, ένα μήνα μετά την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος.

Πίνακας 6

Περιγραφικά Αποτελέσματα των Παραγόντων που Συνθέτουν τη Θεωρητική Γνώση για την Έννοια της Παραγώγου στην Ανάλυση στη Δεύτερη Μέτρηση (Retention Test)

Παράγοντας	Μέσος όρος	Τυπική Απόκλιση
Στοχαστική	.348 (.374)*	.288 (.316)**
Συστημική	.258 (.368)*	.269 (.283)**
Αναλυτική	.290 (.261)*	.269 (.267)**

*Ο πρώτος αριθμός δείχνει το μέσο όρο στη δεύτερη μέτρηση και ο αριθμός στην παρένθεση τον αντίστοιχο μέσο όρο στην πρώτη μέτρηση
**Ο πρώτος αριθμός δείχνει την τυπική απόκλιση στη δεύτερη μέτρηση και ο αριθμός στην παρένθεση την αντίστοιχη τυπική απόκλιση στην πρώτη μέτρηση

Τα αποτελέσματα φαίνεται να διαφοροποιούνται ελάχιστα από την πρώτη μέτρηση. Παρουσιάζεται ο μέσος όρος στη στοχαστική γνώση το ίδιο ψηλός όπως και στην πρώτη μέτρηση, ενώ ο μέσος όρος της αναλυτικής γνώσης είναι πιο ψηλός από αυτό της συστημικής γνώσης κάτι που διαφέρει από την προηγούμενη μέτρηση. Στη συνέχεια για να απαντηθούν τα επόμενα ερευνητικά ερωτήματα και να διερευνηθεί κατά πόσο αυτές οι διαφορές μεταξύ των μέσων όρων των παραγόντων στην πρώτη και στη δεύτερη μέτρηση έχουν στατιστική σημαντικότητα θα εξετάσουμε πόσο διαφοροποιούνται τα αποτελέσματά σε σχέση με την ομάδα στην οποία ανήκουν οι μαθητές.

Στον Πίνακα 7 παρουσιάζονται οι συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών που χρησιμοποιήθηκαν για τον έλεγχο της εγκυρότητας του μοντέλου στη μέτρηση ένα μήνα μετά την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος. Οι μεταβλητές αντιστοιχούν στα 17 έργα του δεύτερου δοκιμίου που χρησιμοποιήθηκαν για τη μέτρηση των παραγόντων που συνθέτουν την θεωρητική γνώση των μαθητών στην έννοια της Παραγώγου.

Πίνακας 7

Συσχετίσεις Μεταξύ της Επίδοσης των Υποκειμένων στα Έργα του Δεύτερου Δοκιμίου

Έργο	Q3α2	Q3β2	Q52	Q62	Q1α2	Q1β2	Q1γ2	Q1δ2
Q3α2	1							
Q3β2	.458**	1						
Q52	.259**	.300**	1					
Q62	.298**	.292**	.420**	1				
Q1α2	.278**	.214**	.217**	.307**	1			
Q1β2	.200**	.200**	.288**	.175*	.116	1		
Q1γ2	.415**	.364**	.295**	.348**	.582**	.224**	1	
Q1δ2	.206**	.150*	.354**	.263**	.101	.818**	.274**	1
Q1ε2	.198**	.169*	.399**	.365**	.089	.545**	.252**	.673**
Q1στ2	.364**	.304**	.370**	.453**	.586**	.170*	.554**	.203**
Q1ζ2	.246**	.262**	.420**	.442**	.224**	.479**	.332**	.548**
Q2β2	.297**	.336**	.470**	.778**	.312**	.275**	.384**	.345**
Q3δ2	.319**	.345**	.467**	.605**	.204**	.200**	.311**	.303**
Q3ε2	.296**	.274**	.266**	.415**	.061	.108	.085	.120
Q4α2	.259**	.080	.193**	.361**	.347**	.151*	.339**	.215**
Q4β2	.364**	.286**	.228**	.275**	.249**	.211**	.307**	.227**
Q4γ2	.325**	.288**	.198**	.398**	.298**	.158*	.409**	.218**

Έργο	Q1ε2	Q1στ2	Q1ζ2	Q2β2	Q3δ2	Q3ε2	Q4α2	Q4β2	Q4γ2
Q1ε2	1								
Q1στ2	.256**	1							
Q1ζ2	.515**	.345**	1						
Q2β2	.362**	.474**	.468**	1					
Q3δ2	.305**	.347**	.460**	.465**	1				
Q3ε2	.080	.151*	.275**	.378**	.328**	1			
Q4α2	.224**	.397**	.242**	.414**	.255**	.079	1		
Q4β2	.276**	.401**	.324**	.313**	.240**	.032	.490**	1	
Q4γ2	.178*	.311**	.271**	.452**	.304**	.131	.498**	.560**	1

*p<0.05, **p<0.01

Τα αποτελέσματα είναι παρόμοια με αυτά του Πίνακα 4 για την προηγούμενη μέτρηση. Από τον Πίνακα 7 φαίνεται ότι οι συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών των τεσσάρων έργων που αφορούν στη στοχαστική γνώση είναι όλες στατιστικά σημαντικές. Ψηλότερη βρέθηκε να είναι η συσχέτιση των έργων 3α2 και 3β2 (r = .458, p < .01). Αναφορικά με τις συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών των οκτώ έργων που αφορούν τη συστημική γνώση, οι περισσότερες είναι στατιστικά σημαντικές (εξαίρεση αποτελούν οι συσχετίσεις μεταξύ του έργου 1α2 με τα έργα 1β2, 1δ2 και 1ε2), με ψηλότερη τη συσχέτιση μεταξύ των έργων 1β2 και 1δ2 (r = .818, p < .01). Το ίδιο αποτέλεσμα παρουσιάζεται και στις συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών των πέντε έργων που αφορούν στη αναλυτική γνώση (εξαίρεση αποτελούν οι συσχετίσεις μεταξύ του έργου 3ε2 με τα έργα 4α2, 4β2 και 4γ2), με ψηλότερη τη συσχέτιση μεταξύ των έργων 4γ2 και 4β2 ($r = .560, p < .01$).

Ο Πίνακας 8 παρουσιάζει τις συσχετίσεις μεταξύ των αποτελεσμάτων των μαθητών στους τρεις παράγοντες (στοχαστική γνώση, συστημική γνώση, αναλυτική γνώση) που προτείνονται στο θεωρητικό μοντέλο ότι συνθέτουν τη θεωρητική γνώση των μαθητών για την έννοια της παραγώγου στην Ανάλυση, στη δεύτερη μέτρηση.

Πίνακας 8

Συσχετίσεις Μεταξύ των Αποτελεσμάτων των Μαθητών στους Παράγοντες που Συνθέτουν τη Θεωρητική Γνώση στη Δεύτερη Μέτρηση (Retention Test)

Παράγοντας	Στοχαστική	Συστημική	Αναλυτική
Στοχαστική	1		
Συστημική	.647** (.642**)*	1	
Αναλυτική	.628** (.636**)*	.621** (.575**)*	1

*Ο πρώτος αριθμός δείχνει τη συσχέτιση μεταξύ των παραγόντων στη δεύτερη μέτρηση και ο αριθμός στην παρένθεση την αντίστοιχη συσχέτιση στην πρώτη μέτρηση
**p<0.01

Όπως και στην πρώτη μέτρηση ψηλότερη συσχέτιση έχει η στοχαστική γνώση μαζί με τη συστημική ($r = .647, p < .01$) και την αναλυτική γνώση ($r = .628, p < .01$), ενώ ελάχιστα πιο χαμηλή είναι η συσχέτιση μεταξύ της συστημικής και της αναλυτικής γνώσης ($r = .621, p < .01$). Από τον πίνακα 8 φαίνεται ότι οι συσχετίσεις που παρουσιάζουν μεταξύ τους οι παράγοντες συνεχίζουν να είναι στατιστικά σημαντικές και αρκετά ψηλές. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι τρεις αυτοί παράγοντες φαίνεται να συνθέτουν έναν «ανώτερο» παράγοντα, όπως και στην πρώτη μέτρηση.

Ο δείκτης αξιοπιστίας του δεύτερου δοκιμίου μέτρησης των τριών παραγόντων που προτείνονται να συνθέτουν τη θεωρητική γνώση των μαθητών για την έννοια της παραγώγου στην Ανάλυση είναι ο Gronbach's Alfa= .84, ο οποίος θεωρείται πολύ ικανοποιητικός. Οι δείκτες αξιοπιστίας για τον κάθε παράγοντα ήταν $\alpha_{\text{στοχαστική γνώση}} = .66$, $\alpha_{\text{συστημική γνώση}} = .81$, $\alpha_{\text{αναλυτική γνώση}} = .68$. Ο δείκτης για τη συστημική γνώση θεωρείται πολύ ικανοποιητικός, ενώ οι δείκτες για τη στοχαστική και την αναλυτική γνώση θεωρούνται οριακά καλοί.

Ερώτημα 2: Πόσο Συνεισφέρει ο Κάθε Παράγοντας στη Διαμόρφωση της Θεωρητικής Γνώσης των Μαθητών για την Κατανόηση της Έννοιας της Παραγώγου στην Ανάλυση;

Για τη διερεύνηση αυτού του ερωτήματος χρησιμοποιήθηκαν τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης στις δύο μετρήσεις.

Μέτρηση αμέσως μετά την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος. Ο Πίνακας 9 παρουσιάζει τους συντελεστές φόρτισης και την ερμηνευόμενη διασπορά για τον καθένα από τους τρεις παράγοντες που φάνηκε να συνθέτουν τη θεωρητική γνώση των μαθητών αμέσως μετά την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος.

Πίνακας 9

Συντελεστές Φόρτισης και Ερμηνευόμενη Διασπορά των Παραγόντων που Συνθέτουν τη Θεωρητική Γνώση στην Πρώτη Μέτρηση

Άδηλος παράγοντας	Συντελεστής φόρτισης (r)	Ερμηνευόμενη διασπορά (r^2)
Στοχαστική	.31**	.09
Συστημική	.72**	.52
Αναλυτική	.93**	.86

**p<0.01

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 9 οι συντελεστές φόρτισης όλων των παραγόντων στον παράγοντα ανώτερης τάξης (θεωρητική γνώση) ήταν στατιστικά σημαντικοί. Ιδιαίτερα ψηλός είναι ο συντελεστής φόρτισης του παράγοντα «αναλυτική γνώση», με ψηλό ποσοστό συνεισφοράς στη θεωρητική γνώση των μαθητών ($r = .93$, $r^2 = .86$, μπορεί να ερμηνεύσει το 86% της διασποράς της θεωρητικής γνώσης). Δεύτερος παράγοντας με αρκετά μεγάλη συνεισφορά και ψηλή ερμηνεία της διασποράς της θεωρητικής γνώσης είναι η συστημική γνώση ($r = .72$, $r^2 = .52$), ενώ η στοχαστική γνώση παρουσιάζεται με τη μικρότερη συνεισφορά στον παράγοντα ανώτερης τάξης και αρκετά μικρή δυνατότητα ερμηνείας της διασποράς της θεωρητικής γνώσης ($r = .31$, $r^2 = .09$). Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης φανερώνουν τη σημασία των τριών παραγόντων για την ανάπτυξη της θεωρητικής γνώσης των μαθητών για την έννοια της παραγώγου στη διδασκαλία της Ανάλυσης, αλλά και ότι οι δύο από τους τρεις παράγοντες ερμηνεύουν ένα μεγάλο ποσοστό της διασποράς της θεωρητικής γνώσης.

Δεύτερη μέτρηση - ένα μήνα μετά την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος. Ο Πίνακας 10 παρουσιάζει τους συντελεστές φόρτισης και την ερμηνευόμενη διασπορά για τον καθένα από τους τρεις παράγοντες που φάνηκε να συνθέτουν τη θεωρητική γνώση των μαθητών ένα μήνα μετά την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος.

Πίνακας 10

Συντελεστές Φόρτισης και Ερμηνευόμενη Διασπορά των Παραγόντων που Συνθέτουν τη Θεωρητική Γνώση στη Δεύτερη Μέτρηση

Άδηλος παράγοντας	Συντελεστής φόρτισης (r)	Ερμηνευόμενη διασπορά (r^2)
Στοχαστική	.82** (.31**)*	.67 (.09)*
Συστημική	.86** (.72**)*	.74 (.52)*
Αναλυτική	.95** (.93**)*	.90 (.86)*

*Ο πρώτος αριθμός δείχνει το συντελεστή φόρτισης ή την ερμηνευόμενη διασπορά του παράγοντα στη δεύτερη μέτρηση και ο αριθμός στην παρένθεση τον αντίστοιχο συντελεστή φόρτισης ή ερμηνευόμενη διασπορά στην πρώτη μέτρηση
**$p<0.01$

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 10 οι συντελεστές φόρτισης όλων των παραγόντων στον παράγοντα ανώτερης τάξης (θεωρητική γνώση) ήταν σημαντικοί, αρκετά ψηλοί ($r \geq .82$, $r^2 \geq .67$) και βελτιωμένοι σε σχέση με την προηγούμενη μέτρηση. Ιδιαίτερα ψηλός είναι και πάλι ο συντελεστής φόρτισης του παράγοντα «αναλυτική γνώση», με ψηλό ποσοστό συνεισφοράς στη θεωρητική γνώση των μαθητών ($r = .95$, $r^2 = .90$, μπορεί να ερμηνεύσει το 90% της διασποράς της θεωρητικής γνώσης). Οι άλλοι δύο παράγοντες φαίνεται να παρουσιάζουν μικρότεροι συνεισφορά, αρκετά όμως ψηλή (συστημική γνώση $r = .86$, $r^2 = .74$, στοχαστική γνώση $r = .82$, $r^2 = .67$). Πρέπει να τονίσουμε ότι η διαφορά στη συνεισφορά σε αυτή την περίπτωση μεταξύ των τριών παραγόντων είναι αρκετά μικρή. Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης για τη δεύτερη μέτρηση φανερώνουν μέσα από τους συντελεστές φόρτισης αλλά και την δυνατότητα μεγάλης ερμηνείας της διασποράς της θεωρητική γνώσης που παρουσιάζουν, τη μεγάλη σημασία των τριών παραγόντων για την ανάπτυξη της θεωρητικής γνώσης των μαθητών για την κατανόηση της έννοιας της παραγώγου στη διδασκαλία της Ανάλυσης.

Ερώτημα 3: Το Μοντέλο Παραμένει Σταθερό με την Πάροδο του Χρόνου;

Για την εξέταση της σταθερότητας του μοντέλου με την πάροδο του χρόνου χρησιμοποιήθηκαν τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης για τις δύο μετρήσεις. Η σταθερότητα του μοντέλου μπορεί να εξεταστεί αν οι παράγοντες που συνθέτουν τη θεωρητική γνώση των μαθητών για την έννοια της παραγώγου στη διδασκαλία της Ανάλυσης παραμένουν αμετάβλητοι. Από τα πιο πάνω αποτελέσματα (Διαγράμματα 6, 7) φαίνεται ότι η δομή του μοντέλου παραμένει αμετάβλητη με την πάροδο του χρόνου και σε κάποια σημεία βελτιώνεται (π.χ. συντελεστής φόρτισης και ερμηνευόμενη διασπορά των τριών παραγόντων στον παράγοντα ανώτερης τάξης). Το προτεινόμενο μοντέλο, έχει δηλαδή την ίδια δομή για τις δύο μετρήσεις και όπως φαίνεται τα έργα των δοκιμίων είχαν στατιστικά σημαντικές φορτίσεις που οδηγούν στη διαμόρφωση των άδηλων παραγόντων με τέτοιο τρόπο ώστε αυτοί με τη σειρά τους να παρουσιάζουν στατιστικά σημαντικούς συντελεστές φόρτισης στον παράγοντα ανώτερης τάξης.

Ερώτημα 4: Ποιες Κατηγορίες Μαθητών Μπορούν να Δημιουργηθούν με Βάση τη Θεωρητική τους Γνώση και την Αντίληψή τους για την Έννοια της Παραγώγου;

Για την εξέταση της ύπαρξης κατηγοριών μαθητών στο δείγμα μας με παρόμοια συμπεριφορά ως προς τη θεωρητική γνώση για την έννοια της παραγώγου στη διδασκαλία της Ανάλυσης πραγματοποιήθηκε ανάλυση υπολανθανουσών ομάδων (Latent Class Analysis – LCA) με βάση τη συνολική επίδοση των μαθητών στα έργα του πρώτου δοκιμίου που διενεργήθηκε αμέσως μετά τη διδασκαλία της παραγώγου με ή χωρίς παρέμβαση ανάλογα με την ομάδα που ανήκαν οι μαθητές. Η διακρίβωση αυτή ήταν αναγκαία για την εξακρίβωση της αποτελεσματικότητας του παρεμβατικού προγράμματος και της μονιμότητας των αποτελεσμάτων. Επίσης, εξετάστηκε η επίδραση της κατηγορίας των μαθητών στα αποτελέσματά τους, στην αποτελεσματικότητα δηλαδή που τους χαρακτηρίζει σε κάθε παράγοντα που διακρίνεται από το προτεινόμενο μοντέλο και διαμορφώνει την θεωρητική γνώση των μαθητών.

Από την ανάλυση θεωρήθηκε πιο ικανοποιητικό το μοντέλο με τις 3 κατηγορίες το οποίο είχε μικρότερο δείκτη BIC από τις άλλες λύσεις που εξετάστηκαν και παρουσίαζε αρκετά ψηλή εντροπία (εντροπία = .934, AIC = 2707.75 και BIC = 2919.80).

Στη συνέχεια εξετάστηκαν τα περιγραφικά αποτελέσματα της λύσης που επιλέγηκε. Η λύση των τριών κατηγοριών δίνει ομάδες ατόμων με ένα σημαντικό αριθμό υποκειμένων. Η μεγαλύτερη κατηγορία μαθητών αριθμεί 107 άτομα, η δεύτερη σε αριθμό κατηγορία να είναι της τάξης των 63 ατόμων και τη μικρότερη κατηγορία να έχει 39 άτομα. Να σημειωθεί ότι με βάση την ανάλυση διασποράς μιας ανεξάρτητης μεταβλητής (one-way ANOVA) που διενεργήθηκε για την διερεύνηση της ύπαρξης διαφορών στα αποτελέσματα των μαθητών στους τρεις παράγοντες του μοντέλου ανάλογα με την κατηγορία στην οποία ανήκουν, φάνηκε ότι όντως υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά στα αποτελέσματα των μαθητών ανάλογα με την κατηγορία στην οποία ανήκουν. Στον Πίνακα 11 παρουσιάζεται η μέση τιμή πιθανότητας να ανήκουν οι μαθητές στην κατηγορία που τους εντάσσει η ανάλυση LCA με βάση τη λύση του μοντέλου των τριών κατηγοριών.

Πίνακας 11

Μέση Τιμή Πιθανότητας Κάθε Κατηγορίας (Average Latent Class Probabilities)

Πιθανότητα να ανήκουν στην	Κατηγορία 1	Κατηγορία 2	Κατηγορία 3
Υποκ. κατηγορίας 1 (39 άτομα)	1.000	.000	.000
Υποκ. κατηγορίας 2 (63 άτομα)	.000	. 954	.046
Υποκ. κατηγορίας 3 (107 άτομα)	.000	.027	.973

Στη συνέχεια, εξετάσαμε κατά πόσο η λύση αυτή ανταποκρινόταν και στη βαθμολογία στην οποία έπαιρναν οι μαθητές κατά τα προηγούμενα τρίμηνα φοίτησής τους. Διενεργήθηκε ανάλυση διασποράς μιας ανεξάρτητης μεταβλητής (one-way ANOVA), η οποία έδειξε ότι υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μέσων όρων των βαθμολογιών τόσο στο πρώτο ($F(2, 206) = 11.65$, $p < .001$) όσο και στο δεύτερο τρίμηνο φοίτησης ($F(2, 206) = 11.83$, $p < .001$) των μαθητών της κάθε κατηγορίας. Στη συνέχεια χρησιμοποιήθηκε το τεστ Scheffe, για να διαπιστωθεί μεταξύ ποιων κατηγοριών υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές. Στους Πίνακες 12 και 13 που ακολουθούν παρουσιάζονται οι μέσοι όροι και οι τυπικές αποκλίσεις των αποτελεσμάτων των μαθητών στο πρώτο και στο δεύτερο τρίμηνο, αντίστοιχα, για κάθε μία από τις 3 κατηγορίες μαθητών.

Πίνακας 12

Μέσος Όρος και Τυπική Απόκλιση των Τριών Κατηγοριών των Μαθητών ως προς τα Αποτελέσματα τους στο Πρώτο Τρίμηνο Φοίτησης

Κατηγορία	Μέσος Όρος	Τυπική Απόκλιση
Κατηγορία 1	16.62	2.94
Κατηγορία 2	14.59	3.02
Κατηγορία 3	14.04	2.73

Από τον έλεγχο Scheffe φαίνεται ότι στατιστικά σημαντικές διαφορές υπάρχουν μεταξύ των μαθητών της Κατηγορίας 1 σε σχέση με τους μαθητές των άλλων δύο κατηγοριών, ενώ οι μαθητές της κατηγορίας 2 και της κατηγορίας 3 δεν φαίνεται να διαφοροποιούνται σε σχέση με τα αποτελέσματά τους στο πρώτο τρίμηνο φοίτησής τους. Οι μαθητές της Κατηγορίας 1 παρουσιάζουν σημαντικά ψηλότερους μέσους όρους από τις άλλες δύο κατηγορίες.

Πίνακας 13

Μέσος Όρος και Τυπική Απόκλιση των Τριών Κατηγοριών των Μαθητών ως προς τα Αποτελέσματα τους στο Δεύτερο Τρίμηνο Φοίτησης

Κατηγορία	Μέσος Όρος	Τυπική Απόκλιση
Κατηγορία 1	16.97	3.18
Κατηγορία 2	14.81	3.06
Κατηγορία 3	14.22	2.96

Από τον έλεγχο Scheffe φαίνεται ότι και στο δεύτερο τρίμηνο φοίτησης των μαθητών οι στατιστικά σημαντικές διαφορές σε σχέση με την κατηγορία που ανήκουν με βάση τα αποτελέσματά τους στην πρώτη μέτρηση, είναι οι ίδιες. Δηλαδή παρουσιάζεται σημαντική διαφορά μεταξύ των μαθητών της Κατηγορίας 1 σε σχέση με τους μαθητές των άλλων δύο κατηγοριών, ενώ οι μαθητές της κατηγορίας 2 και της κατηγορίας 3 δεν φαίνεται να διαφοροποιούνται σε σχέση με τα αποτελέσματά τους στο δεύτερο τρίμηνο φοίτησής τους. Οι μαθητές της Κατηγορίας 1 συνεχίζουν και στο δεύτερο τρίμηνο φοίτησής τους να παρουσιάζουν σημαντικά ψηλότερους μέσους όρους από τις άλλες δύο κατηγορίες.

Ερώτημα 5: Υπάρχουν Διαφορές στα Αποτελέσματα στους Τρεις Παράγοντες που Συνθέτουν τη Θεωρητική Γνώση για την Παράγωγο των Μαθητών της Κάθε Κατηγορίας Όταν Συμμετέχουν ή Όχι στο Παρεμβατικό Πρόγραμμα;

Για τη διερεύνηση της ύπαρξης διαφορών στα αποτελέσματα των μαθητών ανάλογα με την κατηγορία που τους έχει εντάξει η ανάλυση LCA και την ομάδα που ανήκαν στην έρευνα (πειραματική, ελέγχου) διενεργήθηκε διπλή πολυμεταβλητή ανάλυση διακύμανσης τριών εξαρτημένων και δύο ανεξάρτητων μεταβλητών (two-way MANOVA). Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι δεν υπήρχε στατιστικά σημαντική διαφορά της αλληλεπίδρασης της κατηγορίας και της ομάδας των μαθητών με το συνδυασμό των τριών εξαρτημένων μεταβλητών (στοχαστική, συστημική, αναλυτική γνώση) (πολυμεταβλητή επίδραση $F(6, 402) = 1.58$, $p > .1$, Wilks' Lambda = .96). Ταυτόχρονα, όμως, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι υπήρχε στατιστικά σημαντική διαφορά τόσο μεταξύ των μαθητών των τριών κατηγοριών ($F(6, 402) = 65.60$, $p < .001$, Wilks' Lambda = .26) όσο και μεταξύ των ομάδων ($F(3, 201) = 11.21$, $p < .001$, Wilks' Lambda = .86) που συμμετείχαν στο συνδυασμό των τριών εξαρτημένων μεταβλητών.

Όταν τα αποτελέσματα των εξαρτημένων μεταβλητών διερευνήθηκαν ξεχωριστά βρέθηκε ότι η αλληλεπίδραση της κατηγορίας και της ομάδας των μαθητών στα αποτελέσματα των μαθητών στους τρεις παράγοντες που συνθέτουν την θεωρητική γνώση για την παράγωγο ήταν στατιστικά σημαντική μόνο για τη στοχαστική γνώση ($F\ (2, 203) = 3.76$, $p < .05$). Ως εκ τούτου, διενεργήθηκε ανάλυση διασποράς μιας ανεξάρτητης μεταβλητής (one-way ANOVA) με 6 ομάδες (Κατηγορία x Ομάδα), η οποία έδειξε ότι υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των ομάδων αυτών ($F(5, 203) = 51.52$, $p < .001$). Στη συνέχεια χρησιμοποιήθηκε το τεστ Scheffe, για να διαπιστωθεί μεταξύ ποιων κατηγοριών υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές. Στον Πίνακα 14 που ακολουθεί παρουσιάζονται οι μέσοι όροι και οι τυπικές αποκλίσεις των αποτελεσμάτων των μαθητών στη στοχαστική γνώση για κάθε μία από τις 6 ομάδες που έχουν δημιουργηθεί. Οι 6 αυτές ομάδες συγκρινόμενες μεταξύ τους μπορούν να δώσουν 15 διαφορετικές σχέσεις, τις οποίες εξετάζουμε ως διαφορετικές περιπτώσεις πιο κάτω.

Πίνακας 14

Μέσος Όρος και Τυπική Απόκλιση των Αποτελεσμάτων των Μαθητών στον Παράγοντα Στοχαστική Γνώση σε Σχέση με την Κατηγορία και την Ομάδα που Ανήκουν στην Πρώτη Μέτρηση

	Κατηγορία 1	Κατηγορία 2	Κατηγορία 3
Ομάδα	Μ.Ο (Τ.Α.)	Μ.Ο (Τ.Α.)	Μ.Ο (Τ.Α.)
Ομάδα Ελέγχου	.78 (.27)	.67 (.24)	.17 (.15)
Πειραματική Ομάδα	.70 (.31)	.44 (.24)	.15 (.17)

Μ.Ο.: Μέσος Όρος
Τ.Α.: Τυπική Απόκλιση

Με τη χρήση του ελέγχου Scheffe φαίνεται ότι υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές των μέσων όρων των μαθητών στα αποτελέσματα στη στοχαστική γνώση στις 11 από τις 15 περιπτώσεις που συγκρίνονται. Εξαίρεση αποτελούσαν τέσσερις περιπτώσεις. Της 1^{ης} κατηγορίας μαθητών της πειραματικής ομάδας και της 1^{ης} και της 2^{ης} κατηγορίας μαθητών της ομάδας ελέγχου, οι οποίες μεταξύ τους δεν φαίνεται να έχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές, όπως και της 3^{ης} κατηγορία μαθητών της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου.

Όσον αφορά στα αποτελέσματα των μαθητών στους άλλους δύο παράγοντες που συνθέτουν τη θεωρητική γνώση, τη συστημική και την αναλυτική γνώση, διερευνήθηκε κατά πόσο υπήρχε στατιστικά σημαντικές διαφορές σε σχέση με την κατηγορία και την ομάδα των μαθητών ξεχωριστά. Από τα αποτελέσματα φαίνεται ότι τόσο στη συστημική γνώση ($F(2, 203) = 106.23$, $p < .001$) όσο και στην αναλυτική γνώση ($F(2, 203) = 132.17$, $p < .001$) τα αποτελέσματα των μαθητών είχαν στατιστική διαφορά σε σχέση με την κατηγορία που ανήκουν. Παρόμοιο αποτέλεσμα φαίνεται να ισχύει και σε σχέση με την ομάδα που ανήκουν οι μαθητές, με τα αποτελέσματα των μαθητών στην αναλυτική γνώση ($F(1, 203) = 10.47$) να είναι στατιστικά σημαντικά σε επίπεδο $\alpha = 0.001$ και τα αποτελέσματα στη συστημική γνώση ($F(1, 203) = 2.65$) να είναι στατιστικά σημαντικά σε επίπεδο $\alpha = 0.1$.

Για να εξεταστεί κατά πόσον υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μαθητών των τριών κατηγοριών ως προς τη συστημική και την αναλυτική γνώση, έγινε ανάλυση διασποράς μίας ανεξάρτητης μεταβλητής (one-way ANOVA) με εξαρτημένη μεταβλητή τα αποτελέσματα των μαθητών αρχικά για τη συστημική γνώση και στη συνέχεια για την αναλυτική γνώση στην πρώτη μέτρηση και ανεξάρτητη μεταβλητή την κατηγορία στην οποία ανήκαν οι μαθητές. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης διασποράς έδειξαν ότι υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μαθητών των τριών κατηγοριών τόσο στα αποτελέσματά τους για τη συστημική γνώση ($F(2, 206) = 131.21$, $p < .001$), όσο και στα αποτελέσματά τους για την αναλυτική γνώση ($F(2, 206) = 159.93$, $p < .001$). Στη συνέχεια χρησιμοποιήθηκε το τεστ Scheffe, για να διαπιστωθεί μεταξύ ποιων κατηγοριών υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές. Στους Πίνακες 15 και 16 που ακολουθούν παρουσιάζονται οι μέσοι όροι και οι τυπικές αποκλίσεις των αποτελεσμάτων των μαθητών στη συστημική και στην αναλυτική γνώση, αντίστοιχα, για κάθε μία από τις 3 κατηγορίες μαθητών.

Πίνακας 15

Μέσος Όρος και Τυπική Απόκλιση των Τριών Κατηγοριών των Μαθητών ως προς τα Αποτελέσματα τους στη Συστημική Γνώση

Κατηγορία	Μέσος Όρος	Τυπική Απόκλιση
Κατηγορία 1	.71	.17
Κατηγορία 2	.48	.18
Κατηγορία 3	.18	.20

Από τον έλεγχο Scheffe φαίνεται ότι στατιστικά σημαντικές διαφορές υπάρχουν μεταξύ και των τριών κατηγοριών στα αποτελέσματά τους στον παράγοντα συστημική γνώση, με την Κατηγορία 1 να παρουσιάζει σημαντικά ψηλότερους μέσους όρους από τις άλλες δύο κατηγορίες και την Κατηγορία 2 να παρουσιάζει σημαντικά ψηλότερο μέσο όρο από την Κατηγορία 3. Επομένως, οι μαθητές της Κατηγορίας 1 είναι εκείνοι με τα ψηλότερα αποτελέσματα σε αυτόν τον παράγοντα, εκείνοι της Κατηγορίας 3 παρουσιάζουν τα χαμηλότερα αποτελέσματα ενώ οι μαθητές της Κατηγορίας 2 βρίσκονται σε μια μέση κατάσταση σε σχέση με τα αποτελέσματά τους στον παράγοντα συστημική γνώση στην πρώτη μέτρηση.

Πίνακας 16

Μέσος Όρος και Τυπική Απόκλιση των Τριών Κατηγοριών των Μαθητών ως προς τα Αποτελέσματα τους στην Αναλυτική Γνώση

Κατηγορία	Μέσος Όρος	Τυπική Απόκλιση
Κατηγορία 1	.61	.21
Κατηγορία 2	.37	.20
Κατηγορία 3	.07	.13

Από τον έλεγχο Scheffe φαίνεται ότι στατιστικά σημαντικές διαφορές υπάρχουν και πάλι μεταξύ και των τριών κατηγοριών στα αποτελέσματά τους στον παράγοντα αναλυτική γνώση, με την Κατηγορία 1 να παρουσιάζει σημαντικά ψηλότερους μέσους όρους από τις άλλες δύο κατηγορίες και τη Κατηγορία 2 να παρουσιάζει σημαντικά ψηλότερο μέσο όρο από την Κατηγορία 3. Επομένως, οι μαθητές της Κατηγορίας 1 είναι εκείνοι με τα ψηλότερα αποτελέσματα σε αυτόν τον παράγοντα, οι μαθητές της Κατηγορίας 3 παρουσιάζουν τα χαμηλότερα αποτελέσματα ενώ οι μαθητές της Κατηγορίας 2 βρίσκονται σε μια μέση κατάσταση σε σχέση με τα αποτελέσματά τους στον παράγοντα συστημική γνώση στην πρώτη μέτρηση.

Για να εξεταστεί κατά πόσον υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μαθητών των δύο ομάδων (ελέγχου, πειραματική) ως προς τα αποτελέσματά τους στη συστημική και στην αναλυτική γνώση, έγινε έλεγχος με το *t*-τεστ για ανεξάρτητα δείγματα ώστε να συγκριθούν οι δύο ομάδες μαθητών ως προς τα αποτελέσματά τους σε κάθε παράγοντα ξεχωριστά.

Πίνακας 17

Διαφορές Μεταξύ Μέσων Όρων των Δύο Ομάδων των Μαθητών ως προς τα Αποτελέσματα τους στη Συστημική και στην Αναλυτική Γνώση

	Ελέγχου		Πειραματική				
Παράγοντας	$\overline{X}$	*SD*	$\overline{X}$	*SD*	*t*	*df*	*p*
Συστημική	.29	.29	.46	.24	4.68	207	.000
Αναλυτική	.17	.24	.37	.26	5.67	207	.000

Από τον Πίνακα 17 φαίνεται ότι υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές στους μέσους όρους της ομάδας ελέγχου και της πειραματικής ομάδας και στους δύο παράγοντες που εξετάζονται, στη συστημική και στην αναλυτική γνώση.

Ερώτημα 6: Υπάρχουν Διαφορές στα Αποτελέσματα στους Τρεις Παράγοντες που Συνθέτουν τη Θεωρητική Γνώση για την Παράγωγο των Μαθητών της Κάθε Κατηγορίας Όταν Συμμετέχουν ή Όχι στο Παρεμβατικό Πρόγραμμα Μετά την Πάροδο Ενός Χρονικού Διαστήματος;

Για να διερευνηθεί κατά πόσο υπήρχαν διαφορές στα αποτελέσματα των μαθητών ανάλογα με την κατηγορία που τους έχει εντάξει η ανάλυση LCA και την ομάδα που ανήκαν στην έρευνα (πειραματική, ελέγχου) μετά την πάροδο ενός χρονικού διαστήματος από το τέλος της διδασκαλίας, διενεργήθηκε πολυμεταβλητή ανάλυση διακύμανσής δύο ανεξάρτητων και τριών εξαρτημένων μεταβλητών (two-way MANOVA) στα αποτελέσματα των μαθητών της δεύτερης μέτρησης, που εφαρμόστηκε ένα μήνα μετά τη διδασκαλία της παραγώγου στην Ανάλυση. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι σε αυτή τη μέτρηση υπήρχε στατιστικά σημαντική διαφορά της αλληλεπίδρασης της κατηγορίας και της ομάδας των μαθητών με το συνδυασμό των τριών μεταβλητών (στοχαστική, συστημική, αναλυτική γνώση) (πολυμεταβλητή επίδραση $F(6, 350) = 1.58$, $p < .05$, Wilks' Lambda = .93).

Όταν τα αποτελέσματα των εξαρτημένων μεταβλητών διερευνήθηκαν ξεχωριστά βρέθηκε ότι η αλληλεπίδραση της κατηγορίας και της ομάδας των μαθητών στα αποτελέσματα των μαθητών στους τρεις παράγοντες που συνθέτουν την θεωρητική γνώση για την παράγωγο ήταν στατιστικά σημαντική για τη στοχαστική γνώση ($F(2, 177) = 2.82$) και τη συστημική γνώση ($F(2, 177) = 2.64$)σε επίπεδο $\alpha = 0.1$. Ως εκ τούτου, διενεργήθηκε ανάλυση διασποράς μιας ανεξάρτητης μεταβλητής με 6 ομάδες (Κατηγορία x Ομάδα), η οποία έδειξε ότι υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των ομάδων αυτών για τη στοχαστική γνώση ($F(5, 177) = 22.14$, $p < .001$) και για την συστημική γνώση ($F(5, 177) = 26.15$, $p < .001$).

Στη συνέχεια χρησιμοποιήθηκε το τεστ Scheffe, για να διαπιστωθεί μεταξύ ποιων κατηγοριών υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές. Στους Πίνακες 18 και 19 που ακολουθούν παρουσιάζονται οι μέσοι όροι και οι τυπικές αποκλίσεις των αποτελεσμάτων των μαθητών στη στοχαστική γνώση και στη συστημική γνώση αντίστοιχα για κάθε μία από τις 6 ομάδες που έχουν δημιουργηθεί.

Πίνακας 18

Μέσος Όρος και Τυπική Απόκλιση των Αποτελεσμάτων των Μαθητών στον Παράγοντα Στοχαστική Γνώση σε Σχέση με την Κατηγορία και την Ομάδα που Ανήκουν στη Δεύτερη Μέτρηση

	Κατηγορία 1	Κατηγορία 2	Κατηγορία 3
Ομάδα	Μ.Ο. (Τ.Α.)	Μ.Ο. (Τ.Α.)	Μ.Ο. (Τ.Α.)
Ομάδα Ελέγχου	.60 (.23)	.46 (.13)	.22 (.15)
Πειραματική Ομάδα	.73 (.26)	.35 (.27)	.18 (.17)

Μ.Ο.: Μέσος Όρος
Τ.Α.: Τυπική Απόκλιση

Με τη χρήση του ελέγχου Scheffe φαίνεται ότι υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές των μέσων όρων των μαθητών στα αποτελέσματα στη στοχαστική γνώση στις 9 από τις 15 περιπτώσεις που συγκρίνονται. Εξαίρεση αποτελούσαν έξι περιπτώσεις. Της $2^{ης}$ κατηγορίας μαθητών της πειραματικής ομάδας σε σχέση με την $2^{η}$ κατηγορία της ομάδας ελέγχου, την $3^{η}$ κατηγορία της πειραματικής και την $3^{η}$ κατηγορία της ομάδας ελέγχου, οι οποίες μεταξύ τους δεν φαίνεται να έχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές, καθώς και η $1^{η}$ κατηγορία μαθητών της ομάδας ελέγχου σε σχέση με την $1^{η}$ κατηγορία της πειραματικής ομάδας και τη $2^{η}$ κατηγορία της ομάδας ελέγχου δεν φαίνεται να έχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές, όπως και η $3^{η}$ κατηγορία μαθητών της πειραματικής και της ομάδας ελέγχου.

Πίνακας 19

Μέσος Όρος και Τυπική Απόκλιση των Αποτελεσμάτων των Μαθητών στον Παράγοντα Συστημική Γνώση σε Σχέση με την Κατηγορία και την Ομάδα που Ανήκουν στη Δεύτερη Μέτρηση

	Κατηγορία 1	Κατηγορία 2	Κατηγορία 3
Ομάδα	Μ.Ο. (Τ.Α.)	Μ.Ο. (Τ.Α.)	Μ.Ο. (Τ.Α.)
Ομάδα Ελέγχου	.48 (.18)	.33 (.19)	.08 (.12)
Πειραματική Ομάδα	.62 (.22)	.27 (.24)	.20 (.29)

Μ.Ο.: Μέσος Όρος
Τ.Α.: Τυπική Απόκλιση

Με τη χρήση του ελέγχου Scheffe φαίνεται ότι υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές των μέσων όρων των μαθητών στα αποτελέσματα στη συστημική γνώση στις 8 από τις 15 περιπτώσεις που συγκρίνονται. Εξαίρεση αποτελούσαν εφτά περιπτώσεις. Της $2^{ης}$ κατηγορίας μαθητών της πειραματικής ομάδας σε σχέση με την $2^{η}$ κατηγορία της ομάδας ελέγχου, την $3^{η}$ κατηγορία της πειραματικής και την $1^{η}$ κατηγορία της ομάδας ελέγχου, οι οποίες μεταξύ τους δεν φαίνεται να έχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές, καθώς και η $2^{η}$ κατηγορία μαθητών της ομάδας ελέγχου σε σχέση με την $1^{η}$ κατηγορία της ομάδας ελέγχου και την $3^{η}$ κατηγορία της πειραματικής ομάδας δεν φαίνεται να έχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές, όπως και η $1^{η}$ κατηγορία μαθητών της πειραματικής και της ομάδας ελέγχου καθώς επίσης και η $3^{η}$ κατηγορία μαθητών της πειραματικής και της ομάδας ελέγχου.

Όσον αφορά στα αποτελέσματα των μαθητών στον παράγοντα αναλυτική γνώση που συνθέτει τη θεωρητική γνώση διερευνήθηκε κατά πόσο υπήρχε στατιστικά σημαντική διαφορά σε σχέση με την κατηγορία και την ομάδα των μαθητών ξεχωριστά. Από τα αποτελέσματα φαίνεται ότι στην αναλυτική γνώση ($F(2, 177) = 62.73$, $p < .001$) τα αποτελέσματα των μαθητών είχαν στατιστική διαφορά σε σχέση με ποια κατηγορία ανήκουν. Παρόμοιο αποτέλεσμα φαίνεται να ισχύει και σε σχέση με την ομάδα που ανήκουν οι μαθητές, με τα αποτελέσματα των μαθητών στην αναλυτική γνώση ($F(1, 203) = 2.93$) να είναι στατιστικά σημαντικά σε επίπεδο $\alpha = 0.1$.

Για να εξεταστεί κατά πόσον υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μαθητών των τριών κατηγοριών ως προς την αναλυτική γνώση, έγινε ανάλυση διασποράς μιας ανεξάρτητης μεταβλητής (one-way ANOVA) με εξαρτημένη μεταβλητή τα αποτελέσματα των μαθητών για την αναλυτική γνώση στη δεύτερη μέτρηση και ανεξάρτητη μεταβλητή την κατηγορία στην οποία ανήκαν οι μαθητές. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης διασποράς έδειξαν ότι υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μαθητών των τριών κατηγοριών και στα αποτελέσματά τους για την αναλυτική γνώση ($F(2, 180) = 73.56$, $p < .001$). Στη συνέχεια χρησιμοποιήθηκε το τεστ Scheffe, για να διαπιστωθεί μεταξύ ποιων κατηγοριών υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές. Στον Πίνακα 20 που ακολουθεί παρουσιάζονται οι μέσοι όροι και οι τυπικές αποκλίσεις των αποτελεσμάτων των μαθητών στην αναλυτική γνώση για κάθε μία από τις 3 κατηγορίες μαθητών.

Πίνακας 20

Μέσος Όρος και Τυπική Απόκλιση των Τριών Κατηγοριών των Μαθητών ως προς τα Αποτελέσματα τους στην Αναλυτική Γνώση

Κατηγορία	Μέσος Όρος	Τυπική Απόκλιση
Κατηγορία 1	.61	.24
Κατηγορία 2	.34	.21
Κατηγορία 3	.14	.18

Από τον έλεγχο Scheffe φαίνεται ότι στατιστικά σημαντικές διαφορές υπάρχουν μεταξύ και των τριών κατηγοριών των μαθητών στα αποτελέσματά για τον παράγοντα αναλυτική γνώση, με την Κατηγορία 1 να παρουσιάζει σημαντικά ψηλότερους μέσους όρους από τις άλλες δύο κατηγορίες και τη Κατηγορία 2 να παρουσιάζει σημαντικά ψηλότερο μέσο όρο από την Κατηγορία 3. Επομένως, οι μαθητές της Κατηγορίας 1 είναι εκείνοι με τα ψηλότερα αποτελέσματα σε αυτόν τον παράγοντα, εκείνοι της Κατηγορίας 3 παρουσιάζουν τα χαμηλότερα αποτελέσματα ενώ οι μαθητές της Κατηγορίας 2 βρίσκονται σε μια μέση κατάσταση σε σχέση με τα αποτελέσματά τους στον παράγοντα αναλυτική γνώση στη δεύτερη μέτρηση.

Για να εξεταστεί κατά πόσον υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μαθητών των δύο ομάδων (ελέγχου, πειραματική) ως προς τα αποτελέσματά τους στην αναλυτική γνώση, έγινε έλεγχος με το *t*-τεστ για ανεξάρτητα δείγματα ώστε να συγκριθούν οι δύο ομάδες μαθητών ως προς τα αποτελέσματά τους στο συγκεκριμένο παράγοντα που μελετούμε.

Πίνακας 21

Διαφορές Μεταξύ Μέσων Όρων των Δύο Ομάδων των Μαθητών ως προς τα Αποτελέσματα τους στην Αναλυτική Γνώση

	Ελέγχου		Πειραματική				
Παράγοντας	$\overline{X}$	*SD*	$\overline{X}$	*SD*	*t*	*df*	*p*
Αναλυτική	.21	.25	.37	.27	3.97	181	.000

Από τον Πίνακα 21 φαίνεται ότι υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές στους μέσους όρους της ομάδας ελέγχου και της πειραματικής ομάδας στον παράγοντα αναλυτική γνώση που εξετάζουμε.

Συζήτηση Αποτελεσμάτων

Εισαγωγή

Σκοπός της ερευνητικής εργασίας ήταν η ανάπτυξη και η εμπειρική εγκυροποίηση ενός θεωρητικού μοντέλου που να λαμβάνει υπόψη τους παράγοντες που συνθέτουν τη θεωρητική γνώση των μαθητών, η οποία οδηγεί στην κατανόηση της έννοιας της παραγώγου στα πλαίσια της διδασκαλία της Ανάλυσης. Η επίτευξη του σκοπού αυτού είχε ως προϋπόθεση το σχεδιασμό και την εφαρμογή ενός παρεμβατικού προγράμματος για τη διδασκαλία, στο οποίο να εμπλέκονται και να χρησιμοποιούνται οι δυνατότητες της τεχνολογίας τόσο στη διδασκαλία όσο και στην ανάπτυξη της αντίληψης και της ικανότητάς εφαρμογής των μαθητών, σε διαφορετικά πλαίσια της έννοιας της παραγώγου. Συγκεκριμένα, για την επίτευξη του σκοπού της εργασίας ερευνήθηκαν τα εξής: (α) η προσαρμογή του προτεινόμενου μοντέλου σε εμπειρικά δεδομένα, (β) ο βαθμός συνεισφοράς του κάθε παράγοντα στη διαμόρφωση της θεωρητικής γνώσης των μαθητών για την έννοια της παραγώγου στην Ανάλυση, (γ) κατά πόσο το μοντέλο παραμένει σταθερό με την πάροδο ενός χρονικού διαστήματος, (δ) η ύπαρξη κατηγοριών μαθητών με παρόμοια συμπεριφορά ως προς τη θεωρητική γνώση για την υπό εξέταση έννοια, (ε) κατά πόσο επηρεάζονται τα αποτελέσματά στους παράγοντες που συνθέτουν τη θεωρητική γνώση για την έννοια της παραγώγου της κάθε κατηγορίας μαθητών όταν συμμετέχει ή όχι στο παρεμβατικό πρόγραμμα και (στ) κατά πόσο επηρεάζονται τα αποτελέσματά στους παράγοντες που συνθέτουν τη θεωρητική γνώση για την έννοια της παραγώγου της κάθε κατηγορίας μαθητών όταν συμμετέχει ή όχι στο παρεμβατικό πρόγραμμα μετά την πάροδο ενός χρονικού διαστήματος. Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται συζήτηση των αποτελεσμάτων, ώστε να δοθούν απαντήσεις στα ερευνητικά ερωτήματα της εργασίας.

Το Προτεινόμενο Μοντέλο Θεωρητικής Γνώσης

Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης έδειξαν ότι με την προσθήκη της συσχέτισης μεταξύ της στοχαστικής γνώσης και των άλλων δύο παραγόντων, συστημικής και αναλυτικής γνώσης, η προσαρμογή των δεδομένων του δείγματος στο προτεινόμενο μοντέλο θεωρητικής γνώσης ήταν πολύ καλή. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν επίσης ότι οι συσχετίσεις των τριών παραγόντων ήταν στατιστικά σημαντικές. Ερμηνεύοντας την προσθήκη αυτή μπορούμε να πούμε ότι οι μαθητές είναι δυνατόν να έχουν καλύτερα ή χειρότερα αποτελέσματα σε έργα που αφορούν τη στοχαστική γνώση και ταυτόχρονα τα αποτελέσματά τους αυτά να επηρεάζουν ανάλογα την επίδοσή τους στους άλλους δύο παράγοντες (συστημική και στοχαστική γνώση) και αντίστροφα.

Η πιο πάνω αναφερόμενη προσαρμογή των δεδομένων επιβεβαιώνει την καταλληλότητα του μοντέλου για να περιγράψει τη θεωρητική γνώση των μαθητών στην έννοια της παραγώγου κατά τη διδασκαλία της Ανάλυσης. Η προσαρμογή του μοντέλου ήταν πολύ καλή τόσο στη πρώτη μέτρηση, αμέσως μετά τη διδασκαλία της έννοιας όσο και στη δεύτερη μέτρηση, μετά την πάροδο ενός χρονικού διαστήματος. Το μοντέλο δηλαδή επιβεβαιώθηκε από τις μετρήσεις της έρευνας δύο φορές.

Επιπρόσθετα, τα αποτελέσματα επιβεβαιώνουν την υπόθεσή μας ότι η στοχαστική, η συστημική και η αναλυτική γνώση συνθέτουν τη θεωρητική γνώση των μαθητών για την έννοια της παραγώγου στην Ανάλυση. Οι τρεις αυτοί παράγοντες φαίνεται να εξηγούν ένα αρκετά μεγάλο ποσοστό της διασποράς της θεωρητικής γνώσης των μαθητών για την έννοια της παραγώγου. Ειδικότερα, στην πρώτη μέτρηση η αναλυτική γνώση (r^2=.86) ερμηνεύει ένα πολύ μεγάλο ποσοστό της διασποράς του γενικού παράγοντα «θεωρητική γνώση» των μαθητών για την έννοια της παραγώγου στη διδασκαλία της Ανάλυσης, και η συστημική γνώση (r^2=.52) ένα ικανοποιητικό ποσοστό, γεγονός που βελτιώνεται στη δεύτερη μέτρηση όπου η συστημική (r^2=.74) και η αναλυτική γνώση (r^2=.90) ερμηνεύουν ένα πολύ μεγάλο ποσοστό και η στοχαστική γνώση (r^2=.67) ερμηνεύει ένα ικανοποιητικό ποσοστό της διασποράς του γενικού παράγοντα.

Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι ένας μαθητής για να κατανοήσει την έννοια της παραγώγου στην Ανάλυση πρέπει να έχει αναπτύξει όλες τις δομές της θεωρητικής γνώσης. Δεν αρκεί δηλαδή η στοχαστική γνώση ή και η συστημική γνώση, οι οποίες αναπτύσσονται κυρίως κατά την παραδοσιακή διδασκαλία. Όπως αναφέρεται από τον Dubinsky (2010), η μάθηση διευκολύνεται εάν το άτομο κατέχει τις κατάλληλες νοητικές δομές για μια δεδομένη μαθηματική έννοια. Εάν οι κατάλληλες νοητικές δομές δεν υπάρχουν, τότε η μάθηση της έννοιας είναι σχεδόν αδύνατη. Οι συνήθεις μέθοδοι και τεχνικές διδασκαλίας, όπως επίσης και η μονομερής επικέντρωση κατά τη διδασκαλία της Ανάλυσης είτε σε αλγοριθμικούς και αλγεβρικούς υπολογισμούς είτε σε θεωρητικά θέματα δημιουργούν προβλήματα στην κατανόηση των μαθητών (Cornu, 1991).

Βασική δομή για την κατανόηση της έννοιας που εξετάζουμε όπως έχει παρουσιαστεί από τα αποτελέσματα και των δύο μετρήσεων αποτελεί η αναλυτική γνώση, η οποία μαζί με τις άλλες δύο δομές οδηγεί στην κατάκτηση της θεωρητικής γνώσης της έννοιας της παραγώγου στη διδασκαλία της Ανάλυσης. Τα πιο πάνω επιβεβαιώνουν την αναφορά των Sierpinska et al. (2002) ότι η αναλυτική γνώση αποτελεί την αναλυτική προσέγγιση των συμβόλων και βοηθά στην αποφυγή συντακτικών και λογικών λαθών και αυξάνει την προσοχή στο τεχνικό νόημα των μαθηματικών όρων, για τους οποίους η επιλογή των κατάλληλων διαδικασιών και η μεταφορά τους ενισχύονται από τη συστημική γνώση. Αυτό τεκμηριώνεται και μέσα από τη θεωρία της Sfard (1991, 1992), η οποία αναφέρει χαρακτηριστικά ότι οι διαδικασίες μάθησης και επίλυσης προβλήματος συνίστανται σε μια περίπλοκη αλληλεπίδραση μεταξύ των λειτουργικών και δομικών συλλήψεων των ίδιων εννοιών. Η λειτουργική κατανόηση είναι, για τους περισσότερους ανθρώπους, το πρώτο βήμα στην απόκτηση των νέων μαθηματικών εννοιών. Η μετάβαση όμως, από τις υπολογιστικές διαδικασίες στα αφηρημένα αντικείμενα είναι μια ενυπάρχουσα δύσκολη διαδικασία, που ολοκληρώνεται με εσωτερίκευση, συμπύκνωση, και πραγμάτωση, με τη λεπτομερή ανάλυση και δόμηση δηλαδή των σταδίων για το σχηματισμό της έννοιας (Sfard & Linchevsky, 1994). Δίνοντας ερμηνεία με βάση το μοντέλο, η οποία αποτελεί και αντιστοιχία των εμπειρικών αποτελεσμάτων της παρούσας έρευνας, είναι δυνατόν να αναφερθεί ότι η ολοκλήρωση της θεωρητικής γνώσης για την έννοια της παραγώγου κατά τη διαδικασία μάθησης αρχίζει μέσα από την ανάπτυξη της στοχαστικής γνώσης και επιτυγχάνεται με την κατάκτηση της συστημικής και κυρίως της αναλυτικής γνώσης.

Όσον αφορά στη δομή του μοντέλου, από τα αποτελέσματα φαίνεται ότι όχι μόνο παραμένει αμετάβλητη με την πάροδο του χρόνου αλλά και βελτιώνεται σε κάποια σημεία όπως δείχνουν ο συντελεστής φόρτισης και η ερμηνευόμενη διασπορά των τριών παραγόντων στον παράγοντα ανώτερης τάξης, δείκτες, οι οποίοι παρουσιάζουν βελτιωμένα αποτελέσματα στη δεύτερη μέτρηση σε σχέση με την πρώτη. Το μοντέλο έχει την ίδια δομή για τις δύο μετρήσεις και τα έργα που χρησιμοποιήθηκαν έχουν σημαντικές φορτίσεις που οδηγούν στη διαμόρφωση των άδηλων παραγόντων με τέτοιο τρόπο που αυτοί με τη σειρά τους παρουσιάζουν στατιστικά σημαντικούς συντελεστές φόρτισης στον παράγοντα ανώτερης τάξης. Η σταθερότητα της δομής του προτεινόμενου μοντέλου με την πάροδο του χρόνου ενισχύει την καταλληλότητα του να περιγράψει τη θεωρητική γνώση των μαθητών για την έννοια της παραγώγου στην Ανάλυση καθώς και τη σημασία των παραγόντων που προτείνονται για την εξήγηση της θεωρητικής γνώσης των μαθητών.

Τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας μπορούν να χρησιμοποιηθούν για σκοπούς μέτρησης και αξιολόγησης του παράγοντα «θεωρητική γνώση των μαθητών για την έννοια της παραγώγου στην Ανάλυση», αφού με βάση τα πιο πάνω αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης επιτεύχθηκε η ανάπτυξη ενός κατάλληλου εργαλείου μέτρησης του συγκεκριμένου παράγοντα που εξετάζουμε. Η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αξιολόγηση του οργάνου μέτρησης ελέγχοντας το βαθμό επιτυχίας του, στη μέτρηση των άδηλων παραγόντων που καλείται να αξιολογήσει (Marcoulides, & Kyriakides, 2010). Η επιβεβαίωση του μοντέλου φανερώνει ότι το όργανο που αναπτύχθηκε είναι κατάλληλο για να μετρήσει τους άδηλους παράγοντες που εξετάζει καθώς και τη θεωρητική γνώση των μαθητών για την έννοια της παραγώγου στην Ανάλυση.

Από τα αποτελέσματα της έρευνας φαίνεται ότι οι προτεινόμενοι παράγοντες διαμορφώνουν 3 κατηγορίες μαθητών, οι οποίες μπορούν να διακριθούν με βάση τα αποτελέσματά τους σε κάθε παράγοντα στη μέτρηση που έγινε αμέσως μετά τη διδασκαλία. Μέσα από αυτή την κατηγοριοποίηση ήταν δυνατή η ανίχνευση ομάδων μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα με παρόμοια συμπεριφορά και η διακρίβωση της επίδρασης του παρεμβατικού προγράμματος και της διδασκαλίας της Ανάλυσης σε κάθε κατηγορία μαθητών ξεχωριστά, στην πορεία του χρόνου.

Το Παρεμβατικό Πρόγραμμα

Για την εξέταση της αποτελεσματικότητας του παρεμβατικού προγράμματος έχουν συγκριθεί τα αποτελέσματα στους τρεις παράγοντες που συνθέτουν τη θεωρητική γνώση για την παράγωγο των μαθητών της κάθε κατηγορίας, οι οποίοι συμμετείχαν ή όχι στο παρεμβατικό πρόγραμμα, τόσο αμέσως μετά τη διδασκαλία της έννοιας όσο και μετά την πάροδο ενός χρονικού διαστήματος.

Από τα αποτελέσματα της πρώτης μέτρησης φαίνεται ότι μόνο στη στοχαστική γνώση υπάρχει αλληλεπίδραση της κατηγορίας (διάκριση 3 κατηγοριών μαθητών με παρόμοια συμπεριφορά) και της ομάδας (ομάδα ελέγχου και πειραματική ομάδα) στα αποτελέσματα των μαθητών. Από την αλληλεπίδραση της κατηγορίας των μαθητών και της ομάδας στην οποία ανήκαν κατά τη διδασκαλία δημιουργούνται 6 ομάδες (Κατηγορία x Ομάδα). Για την εξέταση των σχέσεων μεταξύ των 6 αυτών ομάδων πήραμε 15 διαφορετικές περιπτώσεις σχέσεων.

Με εξαίρεση τις σχέσεις μεταξύ της 1^{ης} κατηγορίας μαθητών της πειραματικής ομάδας, της 1^{ης} κατηγορίας μαθητών της ομάδας ελέγχου και της 2^{ης} κατηγορίας μαθητών της ομάδας ελέγχου καθώς και τη σχέση της 3^{ης} κατηγορίας μαθητών της πειραματικής και της ομάδας ελέγχου, φαίνεται ότι στις υπόλοιπες 11 περιπτώσεις υπάρχει διαφοροποίηση των αποτελεσμάτων των μαθητών σε σχέση με την κατηγορία και την ομάδα στην οποία ανήκουν. Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάζονται η $1^{η}$ κατηγορία της ομάδας ελέγχου και της πειραματικής ομάδας και η $2^{η}$ κατηγορία μαθητών της ομάδας ελέγχου να έχουν μεταξύ τους τον ίδιο μέσο όρο και μεγαλύτερο μέσο όρο με στατιστικά σημαντική διαφορά σε σχέση με όλους τους άλλους μαθητές, ενώ η $3^{η}$ κατηγορία μαθητών της πειραματικής και η $3^{η}$ κατηγορία μαθητών της ομάδας ελέγχου παρουσιάζονται να έχουν το μικρότερο μέσο όρο με στατιστικά σημαντική διαφορά σε σχέση με τους υπόλοιπους μαθητές.

Συμπερασματικά, μπορούμε να πούμε ότι η στοχαστική γνώση των μαθητών δεν επηρεάστηκε από το παρεμβατικό πρόγραμμα τη δεδομένη στιγμή, αφού φαίνεται ότι στην πρώτη και την τρίτη κατηγορία μαθητών δεν υπάρχει στατιστική διαφορά στα αποτελέσματά τους σε σχέση με την ομάδα (ελέγχου ή πειραματική) στην οποία ανήκουν ενώ ταυτόχρονα φαίνεται η $2^{η}$ κατηγορία μαθητών της ομάδας ελέγχου να έχει τα ίδια αποτελέσματα με την $1^{η}$ κατηγορία μαθητών της πειραματικής και της ομάδας ελέγχου και καλύτερα αποτελέσματα με στατιστικά σημαντική διαφορά σε σχέση με την αντίστοιχη $2^{η}$ κατηγορία μαθητών της πειραματικής ομάδας. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το παρεμβατικό εστιάζεται περισσότερο στην ανάπτυξη τέτοιων περιβαλλόντων με τη βοήθεια των τεχνολογικών εργαλείων που οδηγούν στην απόκτηση κυρίως αναλυτικής αλλά και συστημικής γνώσης. Η στοχαστική γνώση οικοδομείται μέσα από την παραδοσιακή διδασκαλία η οποία δίνει έμφαση κυρίως σε αυτή τη δομή της γνώσης καθώς και στη συστημική γνώση (Tall, 1991).

Όσον αφορά στα αποτελέσματα των μαθητών στους άλλους δύο παράγοντες κατά τη μέτρηση αμέσως μετά τη διδασκαλία φαίνεται ότι υπάρχει στατιστικά σημαντική διάκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων των τριών κατηγοριών των μαθητών σε σχέση τόσο με τη συστημική όσο και με την αναλυτική γνώση. Φαίνεται δηλαδή ότι οι μαθητές της $1^{ης}$ κατηγορίας έχουν σημαντικά ψηλότερους μέσους όρους και στους δύο παράγοντες σε σχέση με τις άλλες δύο κατηγορίες και οι μαθητές της $2^{ης}$ κατηγορίας παρουσιάζουν σημαντικά ψηλότερους μέσους όρους από αυτούς της $3^{ης}$ κατηγορίας και στους δύο παράγοντες.

Εδώ να σημειωθεί ότι παρόλο που κατά τις βαθμολογίες τους στα δύο τρίμηνα οι μαθητές της $2^{ης}$ και της $3^{ης}$ κατηγορίας δεν διαφοροποιούνται εντούτοις μετά τη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου φαίνεται ότι υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά στα αποτελέσματά τους σε σχέση με τη συστημική και την αναλυτική γνώση κάτι που δεν ανταποκρίνεται στο βαθμό των δύο τριμήνων. Αυτό μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι κατά την πορεία διδασκαλίας γίνεται προσπάθεια να καλυφτεί συγκεκριμένη ύλη, με τη διδασκαλία σε ενότητες, όπου κάθε ενότητα περιέχει ορισμούς, θεωρήματα, αποδείξεις και εφαρμογές, τα οποία μπαίνουν στη σειρά ώστε να υπάρχει μια λογική δομή. Τα Μαθηματικά διδάσκονται στην παραδοσιακή διδασκαλία ως ένα ολοκληρωμένο και τελειωμένο προϊόν, με τη διδασκαλία να έχει ένα χαρακτήρα καθαρά διεκπεραιωτικό και το μαθητή απλό ακροατή, ο οποίος μαθαίνει να ανταποκρίνονται σε τυποποιημένες ερωτήσεις με προβλέψιμο τρόπο και παρουσιάζει δυσκολίες να ανταποκριθεί σε μη τυποποιημένες καταστάσεις (Tall, 1991). Με αυτό τον τρόπο που έχει περιγραφεί γίνεται και η αξιολόγηση των μαθητών στα τρίμηνα με αποτέλεσμα όπως έχει δείξει η ανάλυση να διακρίνεται η ομάδα των καλύτερων με βάση τα αποτελέσματά τους μαθητών, οι οποίοι πολλές φορές μπορούν να ανταποκριθούν σε διάφορα περιβάλλοντα και μια μεγάλη ομάδα μαθητών να ομαδοποιείται σε μια μέτρια απόδοση χωρίς να μπορεί να διακριθούν οι μέτριοι από τους αδύνατους μαθητές.

Κατά την εξέταση των αποτελεσμάτων των μαθητών στη συστημική και στην αναλυτική γνώση σε σχέση με την ομάδα (πειραματική ή ελέγχου) στην οποία ανήκουν φάνηκε ότι υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στους μέσους όρους της ομάδας ελέγχου και της πειραματικής ομάδας και στους δύο παράγοντες που εξετάστηκαν. Τόσο στη συστημική όσο και στην αναλυτική γνώση η πειραματική ομάδα καταφέρνει να έχει καλύτερα αποτελέσματα. Αυτό φανερώνει την αποτελεσματικότητα και τη θετική επίδραση του παρεμβατικού προγράμματος στους δύο αυτούς παράγοντες που διαμορφώνουν τη θεωρητική γνώση των μαθητών για την παράγωγο, αφού οι δύο ομάδες με βάση τις βαθμολογίες τους στο πρώτο και στο δεύτερο τρίμηνο φοίτησής τους πριν από τη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου ήταν ισοδύναμες, όπως φάνηκε και από τα αποτελέσματα των αναλύσεων.

Με τη χρήση της αποδοτικότητας που παρέχουν τα CAS, φαίνεται ότι δόθηκε η δυνατότητα στους μαθητές να εστιάσουν την προσοχή τους στην εννοιολογική κατανόηση και στην επίλυση προβλήματος, γεγονός που παρατηρείται και σε άλλες έρευνες (Gerny & Alpers, 2004; Gray & Tall, 1994; Heid, 1988; Hillel, 1993). Στην παρούσα έρευνα χρησιμοποιήθηκε η αναλυτική δυνατότητά των CAS όπως αναφέρεται και από τους Hershkowitz et al. (2002), για γρήγορη και εύκολη δημιουργία μεγάλου αριθμού συμβολικών, αριθμητικών και γραφικών παραδειγμάτων και παροχής κατάλληλων περιβαλλόντων που μπορούν να υποστηρίξουν τους μαθητές στη διάκριση των σχέσεων των εννοιών που διδάσκονται και στην ανάπτυξη γενικεύσεων. Στην διαμόρφωση δηλαδή των κατάλληλων δομών για την ανάπτυξη συστημικής και αναλυτικής σκέψης, η οποία επιτυγχάνεται με την υποστήριξη διαφορετικών στρατηγικών γενίκευσης, παρέχοντας ευκαιρίες στους μαθητές για χρησιμοποίηση μιας σειράς εναλλακτικών εξωτερικών αναπαραστάσεων, οι οποίες μπορούν να μεσολαβήσουν στη διαμόρφωση της αντίληψης των μαθητών διαφορετικών όψεων της ίδιας μαθηματικής έννοιας που αναπαριστάται (Heid, Zbiek, Blume & Choate, 2004; Nachmias & Arcavi,1990).

Το Παρεμβατικό Πρόγραμμα Μετά την Πάροδο Ενός Χρονικού Διαστήματος

Για την εξέταση της αποτελεσματικότητας του παρεμβατικού προγράμματος και για την επίδρασή του μετά την πάροδο ενός χρονικού διαστήματος έχουν συγκριθεί τα αποτελέσματα στους τρεις παράγοντες που συνθέτουν τη θεωρητική γνώση για την παράγωγο των μαθητών της κάθε κατηγορίας, οι οποίοι συμμετείχαν ή όχι στο παρεμβατικό πρόγραμμα στη δεύτερη μέτρηση, η οποία διενεργήθηκε ένα μήνα μετά τη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου στην Ανάλυση.

Από τα αποτελέσματα αυτής μέτρησης φαίνεται ότι αρχικά υπάρχει αλληλεπίδραση της κατηγορίας στην οποία ανήκουν οι μαθητές σε σχέση με την ομάδα στην οποία ανήκουν με το συνδυασμό των τριών παραγόντων που συνθέτουν τη θεωρητική γνώση των μαθητών για την έννοια. Δηλαδή στο συνολικό αποτέλεσμα των μαθητών σε αυτή τη μέτρηση παρουσιαζόταν μια στατιστικά σημαντική διαφορά σε σχέση με την κατηγορία και την ομάδα στην οποία ανήκαν οι μαθητές. Εξετάζοντας ξεχωριστά αυτή την αλληλεπίδραση με τα αποτελέσματα των μαθητών για κάθε παράγοντα φαίνεται ότι αυτή η στατιστική σημαντικότητα ισχύει για τη στοχαστική και τη συστημική γνώση. Όπως και στην πρώτη μέτρηση, από την αλληλεπίδραση της κατηγορίας των μαθητών και της ομάδας στην οποία ανήκαν κατά τη διδασκαλία δημιουργούνται 6 ομάδες (Κατηγορία x Ομάδα). Για την εξέταση των σχέσεων μεταξύ των 6 ομάδων για τους παράγοντες στοχαστική και συστημική γνώση πήραμε 15 διαφορετικές περιπτώσεις σχέσεων για κάθε παράγοντα.

Όσον αφορά στη στοχαστική γνώση, αυτές οι σημαντικές διαφορές μεταξύ ατόμων σε σχέση με την κατηγορία και την ομάδα στην οποία ανήκαν υπήρχαν και στην αρχική μέτρηση. Εξετάζοντας όμως για ποιους μαθητές ισχύει φαίνεται ότι συνεχίζει να μην ισχύει για την $1^{η}$ κατηγορία μαθητών της πειραματικής ομάδας σε σχέση με την $1^{η}$ κατηγορία μαθητών της ομάδας ελέγχου, καθώς και την $3^{η}$ κατηγορία μαθητών της πειραματικής ομάδας σε σχέση με την $3^{η}$ κατηγορία μαθητών της ομάδας ελέγχου, οι οποίες παρουσιάζονται να έχουν τα ίδια αποτελέσματα και στη δεύτερη μέτρηση. Παρουσιάζεται αρχικά διαφοροποίηση στη σχέση της $1^{ης}$ κατηγορίας μαθητών της πειραματικής σε σχέση με τη $2^{η}$ κατηγορία μαθητών της ομάδας ελέγχου, οι οποίες ενώ στη πρώτη μέτρηση δεν φαίνεται να έχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές, στη δεύτερη μέτρηση φαίνεται ότι η $1^{η}$ κατηγορία μαθητών της πειραματική ομάδα έχει σημαντικά βελτιωμένα αποτελέσματα που οδηγούν σε σημαντικά καλύτερα αποτελέσματα από τη $2^{η}$ κατηγορία μαθητών της ομάδας ελέγχου. Η $2^{η}$ κατηγορία μαθητών της ομάδας ελέγχου συνεχίζει να παρουσιάζει τα ίδια αποτελέσματα με την $1^{η}$ κατηγορία μαθητών της ομάδας ελέγχου, ενώ ταυτόχρονα δεν διαφοροποιούνται τα αποτελέσματά της από αυτά της αντίστοιχης $2^{ης}$ κατηγορίας της πειραματικής ομάδας κάτι που δεν ίσχυε στην πρώτη μέτρηση. Ταυτόχρονα, παρουσιάζεται διαφοροποίηση στα αποτελέσματα της $3^{ης}$ κατηγορίας μαθητών τόσο της πειραματικής όσο και της ομάδας ελέγχου, τα οποία φαίνεται να μη διαφοροποιούνται από την $2^{η}$ κατηγορία μαθητών της πειραματικής ομάδας.

Συμπερασματικά, μπορούμε να πούμε ότι όσον αφορά στη στοχαστική γνώση για την έννοια της παραγώγου ενώ το παρεμβατικό δεν φάνηκε να επηρεάζει άμεσα τα αποτελέσματα των μαθητών, φαίνεται ότι με την πάροδο ενός χρονικού διαστήματος παρουσιάζει θετική επίδραση κυρίως στην ομάδα των μαθητών που ανήκουν στην $1^{η}$ κατηγορία, σε αυτούς δηλαδή που έχουν αρχικά τα καλύτερα αποτελέσματα. Ταυτόχρονα, παρουσιάζεται μετά την πάροδο ενός χρονικού διαστήματος βελτίωση των αποτελεσμάτων της $3^{ης}$ κατηγορίας μαθητών τόσο της πειραματικής όσο και της ομάδας ελέγχου, ενώ η δεύτερη κατηγορία μαθητών φαίνεται να επηρεάζεται αρνητικά από αυτό το χρονικό διάστημα που έχει περάσει όσον αφορά στα αποτελέσματά τους στη στοχαστική γνώση. Αυτό τεκμηριώνεται με το γεγονός ότι βελτιώνονται αισθητά τα αποτελέσματα της $1^{ης}$ κατηγορίας μαθητών που έχουν παρακολουθήσει το παρεμβατικό πρόγραμμα με τέτοιο τρόπο που τους διαφοροποιεί από τη $2^{η}$ κατηγορία μαθητών που δεν έχουν παρακολουθήσει το παρεμβατικό, κάτι που δεν ίσχυε αρχικά, ενώ τα αποτελέσματα της $1^{ης}$ και της $2^{ης}$ κατηγορίας μαθητών που δεν έχουν παρακολουθήσει το παρεμβατικό πρόγραμμα φαίνεται να συνεχίζουν να μην διαφοροποιούνται. Ταυτόχρονα, ενώ αρχικά υπήρχε διαφορά στα αποτελέσματα των μαθητών της $3^{ης}$ κατηγορίας σε σχέση με αυτά της $2^{ης}$ κατηγορίας μαθητών της πειραματικής ομάδας, σε αυτή τη μέτρηση φαίνεται ότι τα αποτελέσματα τους δεν έχουν σημαντική διαφορά. Αυτό δείχνει ότι η $3^{η}$ κατηγορία μαθητών έχει βελτιώσει τα αποτελέσματά της καλύτερα από ό,τι παρουσιάζεται στους μαθητές της $2^{ης}$ κατηγορίας της πειραματικής ομάδας, οι οποίοι όμως καταφέρνουν να μην διαφοροποιούνται τα αποτελέσματά τους σε σχέση με αυτά των μαθητών της $2^{ης}$ κατηγορίας της ομάδας ελέγχου, που οι τελευταίοι φαίνεται να έχουν αισθητά μειωμένα αποτελέσματα.

Με βάση τις αναλύσεις φαίνεται ότι στη δεύτερη μέτρηση παρουσιάζεται αλληλεπίδραση της κατηγορίας των μαθητών και της ομάδας στην οποία ανήκουν και στη συστημική γνώση. Παρουσιάζεται με την πάροδο ενός χρονικού διαστήματος να υπάρχει διαφοροποίηση των αποτελεσμάτων των μαθητών σε σχέση με την κατηγορία και την ομάδα στην οποία ανήκουν σε 8 από τις 15 περιπτώσεις. Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάζονται η $1^{η}$ κατηγορία μαθητών της πειραματικής ομάδας να έχει μεγαλύτερο μέσο όρο, με εξαίρεση τη σχέση της με την $1^{η}$ κατηγορία μαθητών της ομάδας ελέγχου, με στατιστικά σημαντική διαφορά σε σχέση με όλους τους άλλους μαθητές, ενώ η $3^{η}$ κατηγορία μαθητών της ομάδας ελέγχου παρουσιάζεται να έχει, με εξαίρεση τη σχέση της με την $3^{η}$ κατηγορία μαθητών της πειραματικής ομάδας, το μικρότερο μέσο όρο με στατιστικά σημαντική διαφορά σε σχέση με τους υπόλοιπους μαθητές. Ταυτόχρονα, τα αποτελέσματα της $1^{ης}$ κατηγορίας μαθητών της ομάδας ελέγχου και της $3^{ης}$ κατηγορίας μαθητών της πειραματικής ομάδας δεν φαίνεται να διαφοροποιούνται σε σχέση με αυτά της $2^{ης}$ κατηγορίας μαθητών τόσο της ομάδας ελέγχου όσο και της πειραματικής ομάδας, οι οποίες ($2^{η}$ κατηγορία πειραματική και $2^{η}$ κατηγορία ομάδα ελέγχου) μεταξύ τους παρουσιάζουν ίσους μέσους όρους.

Συμπερασματικά, μπορούμε να πούμε ότι στη συστημική γνώση των μαθητών είναι φανερά τα αποτελέσματα του παρεμβατικού προγράμματος με την πάροδο του χρόνου, από τη θετική επίδραση στις ομάδες των μαθητών που ανήκουν στην $1^{η}$ και στην $3^{η}$ κατηγορία, σε αυτούς δηλαδή που έχουν αρχικά τα καλύτερα και τα χειρότερα αποτελέσματα. Ενώ αρχικά τα αποτελέσματα των μαθητών της πρώτης κατηγορίας ήταν σημαντικά καλύτερα σε σχέση με τις άλλες κατηγορίας, στη δεύτερη μέτρηση αυτό παρουσιάζεται μόνο για τους μαθητές της πειραματικής ομάδας. Οι μαθητές της $1^{ης}$ κατηγορίας της ομάδας ελέγχου παρουσιάζουν τα ίδια αποτελέσματα με αυτά των μαθητών της $2^{ης}$ κατηγορίας. Η ίδια συμπεριφορά παρουσιάζεται αντίστοιχα και στα αποτελέσματα της $3^{ης}$ κατηγορίας μαθητών, οι οποίοι ενώ στην πρώτη μέτρηση είχαν τα χειρότερα αποτελέσματα με στατιστικά σημαντική διαφορά, στη δεύτερη μέτρηση φαίνεται ότι οι μαθητές της πειραματικής ομάδας διαφοροποιούνται και έχουν τα ίδια αποτελέσματα με αυτά της $2^{ης}$ κατηγορίας μαθητών.

Μέσα από τα αποτελέσματα τεκμηριώνεται για άλλη μια φορά η άποψη των ερευνητών ότι οι εκπαιδευτικοί μπορούν να χρησιμοποιήσουν την αποδοτικότητα που παρέχουν τα CAS, για να εστιάσουν την προσοχή των μαθητών στην εννοιολογική κατανόηση και στην επίλυση προβλήματος (Heid, 1988; Hillel, 1993), γεγονός που έχει θετικά αποτελέσματα στην πορεία του χρόνου, αφού οι μαθητές εστιάζουν την προσοχή του κυρίως στην ερμηνεία και την απεικόνιση των εννοιών παρά στην εκτέλεση διαδικασιών (Arnold, 2004; Pierce & Stacey, 2007). Επιπλέον, τεκμηριώνονται μέσα από την παρούσα έρευνα η θέση του Kuzler (2000), ότι οι αδύνατοι μαθητές μπορούν να ωφεληθούν από την άμεση ανατροφοδότηση που παρέχουν τα CAS, αφού είναι δυνατόν να ξεπεράσουν τις στερεότυπες διαδικασίες και να οδηγηθούν σε πιο σύνθετους στόχους όπως την ανάπτυξη συνδέσεων μεταξύ μιας αλγεβρικής έκφρασης και μιας γραφικής παράστασης.

Όσον αφορά στα αποτελέσματα των μαθητών στον παράγοντα αναλυτική γνώση κατά τη δεύτερη μέτρηση, μετά δηλαδή την πάροδο ενός χρονικού διαστήματος από τη διδασκαλία φαίνεται ότι συνεχίζει να υπάρχει στατιστικά σημαντική διάκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων των τριών κατηγοριών των μαθητών. Φαίνεται δηλαδή ότι οι μαθητές της $1^{ης}$ κατηγορίας έχουν σημαντικά ψηλότερους μέσους όρους σε σχέση με τις άλλες δύο κατηγορίες και οι μαθητές της $2^{ης}$ κατηγορίας παρουσιάζουν σημαντικό ψηλότερους μέσους όρους από αυτούς της $3^{ης}$ κατηγορίας. Συνεχίζει να υπάρχει και σε αυτή τη μέτρηση η διαφορά στα αποτελέσματα των μαθητών, η οποία δεν ανταποκρίνεται στους βαθμούς των δύο τριμήνων που φέρουν τη δεύτερη και την τρίτη κατηγορία μαθητών να μην διαφοροποιούνται πριν από τη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου στην Ανάλυση.

Κατά την εξέταση των αποτελεσμάτων των μαθητών στην αναλυτική γνώση σε σχέση με την ομάδα στην οποία ανήκουν φάνηκε ότι συνεχίζουν να υπάρχουν και μετά την πάροδο ενός χρονικού διαστήματος στατιστικά σημαντικές διαφορές στους μέσους όρους της ομάδας ελέγχου και της πειραματικής ομάδας, σε αντιδιαστολή με τα αποτελέσματα των μαθητών με βάση τους βαθμούς τους στα δύο προηγούμενα τρίμηνα φοίτησής τους. Η πειραματική ομάδα καταφέρνει να συνεχίζει να έχει καλύτερα αποτελέσματα, γεγονός που φανερώνει τη μονιμοποίηση της διαφοράς που παρουσιάστηκε αρχικά στους μαθητές, την αποτελεσματικότητα και τη θετική επίδραση στην αναλυτική γνώση του παρεμβατικού προγράμματος με τη χρήση των δυνατοτήτων της τεχνολογίας, και μετά το πέρας ενός χρονικού διαστήματος.

Συμπεράσματα

Εισαγωγή

Βασικός σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν η ανάπτυξη ενός θεωρητικού μοντέλου για τη μάθηση και τη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου στην Ανάλυση και η ανάπτυξη ενός παρεμβατικού προγράμματος διδασκαλίας για την έννοια. Το μοντέλο βασίστηκε στη θεωρία της Sierpinska και των συνεργατών της (Sierpinska, 2005; Sierpinska et al., 2002) για τη θεωρητική γνώση, σε συνδυασμό με στοιχεία από τις υπάρχουσες θεωρίες μάθησης που χρησιμοποιήθηκαν στο σχεδιασμό του παρεμβατικού προγράμματος, το οποίο ενέπλεκε ταυτόχρονα τη χρήση και τις δυνατότητες που δίνει η τεχνολογία στη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου στην Ανάλυση.

Συγκεκριμένα, η εργασία αποσκοπούσε στην ανάπτυξη και την εμπειρική επιβεβαίωση του θεωρητικού μοντέλου για τη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου το οποίο λάμβανε υπόψη τις μεθόδους που αναπτύσσουν οι μαθητές για την οικοδόμηση της έννοιας, τις δυνατότητες που δίνει η τεχνολογία στους μαθητές και τις δυνατότητες που διαμορφώνει η τεχνολογία στη διδασκαλία. Αυτό έγινε μέσα από την αναγνώριση και την περιγραφή των θεωρητικών μοντέλων διδασκαλίας των μαθηματικών καθώς και μέσα από τη διερεύνηση της επίδρασης της τεχνολογίας στην ανάπτυξη της αντίληψης των μαθητών για την έννοια της παραγώγου και στην ανάπτυξη της ικανότητάς εφαρμογής της έννοιας σε διαφορετικά πλαίσια.

Καινοτομία του προτεινόμενου θεωρητικού μοντέλου αποτέλεσε η δυνατότητα εντοπισμού και περιγραφής τόσο των παραγόντων που συνθέτουν τη θεωρητική γνώση των μαθητών, όσο και του βαθμού συνεισφοράς τους στην απόκτηση της θεωρητικής γνώσης για την έννοια της παραγώγου στην Ανάλυση. Είναι δηλαδή εφικτή η ποσοτική ανάλυση των παραγόντων που συνθέτουν τη θεωρητική γνώση της έννοιας, ώστε να είναι μετρήσιμη η συνεισφορά του κάθε παράγοντα στην απόκτηση της θεωρητικής γνώσης των μαθητών για την έννοια της παραγώγου στην Ανάλυση. Έτσι εντοπίζονται οι αναγκαίοι παράγοντες που πρέπει να αναπτύξουν οι μαθητές, ώστε να εστιαστεί η διδασκαλία σε αυτούς με βάση και την επίδρασή που παρουσιάζουν στην απόκτηση της θεωρητικής γνώσης των μαθητών για την έννοια της παραγώγου στην Ανάλυση. Παράλληλα, με την ένταξη της τεχνολογίας στη διδασκαλία έγινε προσπάθεια για υπερπήδηση των προβλημάτων που συνδέονται με τη δυσκολία κατανόησης βασικών εννοιών της Ανάλυσης.

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της εργασίας με έμφαση στη σημασία του θεωρητικού μοντέλου και του παρεμβατικού προγράμματος που διαμορφώθηκε για τη θεωρητική γνώση των μαθητών για την έννοια της παραγώγου στην Ανάλυση. Στη συνέχεια συζητείται η παιδαγωγική αξία της χρήσης του μοντέλου και της εφαρμογής του παρεμβατικού προγράμματος στη διδασκαλία και προτείνονται εκπαιδευτικές εφαρμογές. Τέλος, γίνονται εισηγήσεις για ανάπτυξη περαιτέρω έρευνας με στόχο την επέκταση των αποτελεσμάτων της παρούσας έρευνας και σε άλλους τομείς της Ανάλυσης και τη βελτίωση των μαθησιακών αποτελεσμάτων και της διδασκαλίας της Ανάλυσης.

Το Θεωρητικό Μοντέλο

Στην παρούσα εργασία το προτεινόμενο θεωρητικό μοντέλο με την προσθήκη της συσχέτισης μεταξύ της στοχαστικής γνώσης και των άλλων δύο παραγόντων, συστημικής και αναλυτικής γνώσης, επιβεβαιώθηκε σε δύο μετρήσεις σε ένα ικανοποιητικό δείγμα μαθητών της Β' Λυκείου. Οι τρεις παράγοντες του μοντέλου, στοχαστική, συστημική και αναλυτική γνώση, παρουσιάζονται να εξηγούν ένα μεγάλο ποσοστό της διασποράς της θεωρητικής γνώση των μαθητών για την έννοια της παραγώγου στην Ανάλυση. Αυτά τα αποτελέσματα υποδεικνύουν ότι το προτεινόμενο μοντέλο παρέχει ένα ολοκληρωμένο πλαίσιο περιγραφής της κατανόησης της έννοιας της παραγώγου από τους μαθητές της Β' Λυκείου. Ταυτόχρονα, με την επιβεβαίωση του μοντέλου είναι εφικτή η ανάλυση της θεωρητικής γνώσης των μαθητών για την έννοια της παραγώγου σε 3 μετρήσιμους παράγοντες, πράγμα που ανταποκρίνεται στην επίτευξη του σκοπού της παρούσας εργασίας. Η ανάλυση αυτή αντιστοιχίζεται με τη θεωρία της Sierpinska (2005), η οποία αναφέρεται στη θεωρητική γνώση ως τη γνώση στην οποία ο τρόπος σκέψης και τα αντικείμενά του ανήκουν σε διακριτά επίπεδα δράσης. Επίσης, είναι εφικτή η μέτρηση της επίδρασής που παρουσιάζει ο κάθε παράγοντας στην απόκτηση της θεωρητικής γνώσης των μαθητών για την έννοια της παραγώγου στην Ανάλυση ενώ παράλληλα δίνεται η δυνατότητα αντίληψης της κατανόησης των μαθητών για την έννοια της παραγώγου με βάση την ικανότητα και την επάρκειά τους στον κάθε παράγοντα.

Η διαμόρφωση του θεωρητικού μοντέλου βασίστηκε στη θεωρία της Sierpinska και των συνεργατών της για τη θεωρητική γνώση των φοιτητών στη γραμμική άλγεβρα. Ο ορισμός που δίνουν στη θεωρητική γνώση έχει αξιωματικό χαρακτήρα (Sierpinska et al., 2002). Είναι εμπνευσμένος από την εμπειρική έρευνα στη μαθηματική γνώση μαθητών και φοιτητών αλλά δεν διαχωρίζεται από τις άλλες λειτουργίες του ανθρώπινου οργανισμού.

Θέτουν τη θεωρητική γνώση ως αξίωμα, ως ένα συγκεκριμένο θεωρητικό εργαλείο το οποίο θεωρούν χρήσιμο ως μεθοδολογικό ή αναλυτικό εργαλείο. Η επιβεβαίωση του προτεινόμενου μοντέλου στα πλαίσια αυτής της εμπειρικής έρευνας υποδεικνύει ότι το θεωρητικό μοντέλο της Sierpinska και των συνεργατών της υφίσταται με την τροποποίηση που έχει γίνει και την επεξήγηση που δόθηκε στους παράγοντες σε σχέση με την έννοια της παραγώγου, και για τους μαθητές της Β' Λυκείου.

Το Παρεμβατικό Πρόγραμμα

Η εξέταση των αποτελεσμάτων από την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος σε σχέση με τους 3 διακριτούς παράγοντες της θεωρητικής γνώσης των μαθητών μπορεί να συμβάλει στην εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων.

Όσον αφορά στη στοχαστική γνώση, αρχικά (στην πρώτη μέτρηση, αμέσως μετά τη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου) φαίνεται ότι οι μαθητές που επιτυγχάνουν καλύτερα και χειρότερα αποτελέσματα δεν διαφοροποιούνται σε σχέση με τον τρόπο διδασκαλίας που έτυχαν για την έννοια και οι μαθητές της ενδιάμεσης κατηγορίας που δεν συμμετείχαν στο παρεμβατικό παρουσιάζουν καλύτερα αποτελέσματα από τους αντίστοιχους μαθητές που συμμετείχαν στο παρεμβατικό. Εντούτοις μετά την πάροδο ενός χρονικού διαστήματος φαίνεται ότι επηρεάζονται θετικά οι μαθητές του παρεμβατικού προγράμματος που είχαν κατά την πρώτη μέτρηση τα καλύτερα και τα χειρότερα αποτελέσματα (σε σχέση με τις 3 κατηγορίες), ενώ οι μαθητές που δεν παρακολούθησαν το παρεμβατικό με τα καλύτερα αποτελέσματα φαίνεται να έχουν λίγο μειωμένα αποτελέσματα, τα οποία οδηγούν στη μη διαφοροποίησή τους από τα αποτελέσματά των μαθητών της ενδιάμεσης ομάδας που δεν παρακολούθησαν το παρεμβατικό, οι οποίοι φαίνεται να έχουν αισθητά μειωμένα αποτελέσματα στη στοχαστική γνώση.

Από τα πιο πάνω φαίνεται ότι παρόλο που η στοχαστική γνώση οικοδομείται κυρίως μέσα από την παραδοσιακή διδασκαλία, η οποία δίνει έμφαση κυρίως σε αυτή τη δομή της γνώσης (Tall, 1991), εντούτοις με την πάροδο ενός χρονικού διαστήματος οι μαθητές που παρακολούθησαν το παρεμβατικό πρόγραμμα είχαν βελτιωμένα αποτελέσματα κάτι που δεν ίσχυσε για τους μαθητές που διδάχτηκαν με τον παραδοσιακό τρόπο. Λόγω του ότι το παρεμβατικό πρόγραμμα εστιάστηκε περισσότερο στην ανάπτυξη τέτοιων περιβαλλόντων που οδηγούν στην απόκτηση κυρίως αναλυτικής αλλά και συστημικής γνώσης, είναι πιθανόν η βελτίωση των αποτελεσμάτων που παρουσιάζουν οι μαθητές του παρεμβατικού σε αυτούς τους δύο παράγοντες της θεωρητικής γνώσης να επηρέασαν και τη στοχαστική γνώση, ειδικά αν ληφθεί υπόψη και η συσχέτιση μεταξύ των τριών ειδών γνώσεων που περιλάμβανε στην τελική του μορφή το μοντέλο.

Όσον αφορά στη συστημική γνώση, φαίνεται ότι αρχικά δεν υπάρχει αλληλεπίδραση της κατηγορίας των μαθητών και της ομάδας στην οποία ανήκουν, η οποία διακρίνεται από τον τρόπο που έτυχαν διδασκαλίας. Στην πρώτη μέτρηση παρουσιάζεται διάκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων των μαθητών των τριών κατηγοριών και ταυτόχρονα οι μαθητές που παρακολούθησαν το παρεμβατικό πρόγραμμα παρουσιάζουν καλύτερα αποτελέσματα (με στατιστικά σημαντική διαφορά) από αυτούς που διδάχτηκαν με τον παραδοσιακό τρόπο. Μετά την πάροδο ενός χρονικού διαστήματος φαίνεται ότι παρουσιάζεται αλληλεπίδραση της κατηγορίας των μαθητών και της ομάδας στην οποία ανήκαν, με τους μαθητές του παρεμβατικού προγράμματος που είχαν τα καλύτερα και τα χειρότερα αποτελέσματα να διαφοροποιούνται θετικά.

Όσον αφορά στη αναλυτική γνώση, φαίνεται ότι δεν παρουσιάζεται καθόλου αλληλεπίδραση της κατηγορίας των μαθητών και της ομάδας στην οποία ανήκουν. Τόσο στην πρώτη μέτρηση όσο και στη δεύτερη μέτρηση παρουσιάζεται διάκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων των μαθητών των τριών κατηγοριών και ταυτόχρονα οι μαθητές που παρακολούθησαν το παρεμβατικό πρόγραμμα παρουσιάζουν καλύτερα αποτελέσματα (με στατιστικά σημαντική διαφορά) από αυτούς που διδάχτηκαν με τον παραδοσιακό τρόπο.

Μέσα από τις πιο πάνω επισημάνσεις, ενισχύεται ο ισχυρισμός για τα θετικά αποτελέσματα που μπορεί να επιφέρει η χρήση των CAS, που εστιάζουν την προσοχή των μαθητών κυρίως στην ερμηνεία και την απεικόνιση των εννοιών παρά στην εκτέλεση χρονοβόρων διαδικασιών (Arnold, 2004; Hillel, 1993; Pierce & Stacey, 2007). Ταυτόχρονα, επισημαίνεται ότι η ομάδα των μαθητών που παρακολούθησε το παρεμβατικό πρόγραμμα επιτυγχάνει μονιμοποίηση της θετικής διαφοράς της που παρουσιάστηκε στην αρχική μέτρηση στη συστημική και την αναλυτική γνώση, μετά και την πάροδο ενός χρονικού διαστήματος. Να σημειωθεί ότι η αναλυτική γνώση αποτελεί παράγοντα που, όπως φαίνεται από τις αναλύσεις ερμηνεύει ένα πολύ μεγάλο ποσοστό της διασποράς της θεωρητικής γνώσης των μαθητών για την παράγωγο, διαδραματίζει δηλαδή τον κυριότερο ρόλο στην κατανόηση της έννοιας της παραγώγου κατά τη διδασκαλία της Ανάλυσης και η συστημική γνώση ακολουθεί με ένα σημαντικό ποσοστό της διασποράς.

Παιδαγωγική Αξία

Τα αποτελέσματα της εργασίας μπορούν να αξιοποιηθούν από τους καθηγητές των μαθηματικών ώστε να ξεπεράσουν τις ανησυχίες που συχνά εκφράζουν για την επιτυχία στην οικοδόμηση εννοιολογικής και συσχετιστικής κατανόησης των εννοιών της Ανάλυσης από τους μαθητές τους. Η μονιμοποίηση της θετικής διαφοράς που παρουσιάζουν οι μαθητές που παρακολούθησαν το παρεμβατικό πρόγραμμα σε σχέση με αυτούς που παρακολούθησαν παραδοσιακή διδασκαλία ενισχύει την άποψη ότι οι εκπαιδευτικοί μπορούν να χρησιμοποιήσουν τις δυνατότητες που παρέχει η τεχνολογία για την επίλυση των προβλημάτων των μαθητών που παρουσιάζονται στην εννοιολογική κατανόηση των εννοιών και στην επίλυση προβλήματος κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών που τεκμηριώνεται και σε άλλες έρευνες (Fuchs, 2001; Heid, 1988; Hillel, 1993).

Επίσης, η επιβεβαίωση του μοντέλου δίνει μετρήσιμους παράγοντες στους εκπαιδευτικούς, τους οποίους πρέπει να λάβουν υπόψη ώστε να επιτύχουν στη βελτίωση της αντίληψης των μαθητών για την έννοια της παραγώγου. Είναι σημαντικό να επισημανθεί ότι η θεωρητική γνώση για την έννοια της παραγώγου στην Ανάλυση επηρεάζεται περισσότερο από την αναλυτική γνώση, αρκετά από τη συστημική και λιγότερο από τη στοχαστική γνώση που μπορεί να αναπτύξουν οι μαθητές για την έννοια. Είναι για αυτό που για μια επιτυχημένη διδασκαλία πρέπει να προάγονται και τα τρία είδη γνώσεων και να δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην αναλυτική γνώση, η οποία παραγνωρίζεται στην παραδοσιακή διδασκαλία.

Επιπλέον, μέσα από τα αποτελέσματα φαίνεται ότι μπορεί να εντοπίσουμε διαφοροποίηση των μαθητών σε τρεις κατηγορίες ενώ κατά τη διδασκαλία στα προηγούμενα τρίμηνα φοίτησής τους παρουσιάζονται μόνο δύο κατηγορίες κάτι που δεν διαχωρίζει ουσιαστικά τους μαθητές που έχουν χειρότερα αποτελέσματα ώστε να υπάρχει επικέντρωση στις ανάγκες τους. Ταυτόχρονα, φαίνεται να επωφελούνται όλες οι κατηγορίες μαθητών θετικά κάτι που αποτελεί υπέρβαση στην υφιστάμενη κατάσταση που παρουσιάζεται στο σχολείο, όπου η διδασκαλία ουσιαστικά στοχεύει στο μέσο μαθητή. Είναι σημαντικό να μην μένουν στάσιμοι οι καλοί μαθητές σε μία μέση κατάσταση και ταυτόχρονα να μην παραγνωρίζονται οι ανάγκες των αδύνατων μαθητών, δίνοντας σε όλους ευκαιρίες.

Πέραν από τα προβλήματα που παρουσιάζουν οι μαθητές στην κατανόηση εννοιών της Ανάλυσης, είναι δυνατόν να ξεπεραστούν και τα προβλήματα που παρατηρούνται στις μεθόδους και τεχνικές διδασκαλίας, όπως επίσης και στη μονομερή επικέντρωση κατά τη διδασκαλία της Ανάλυσης είτε σε αλγοριθμικούς και αλγεβρικούς υπολογισμούς είτε σε θεωρητικά θέματα. Όπως τεκμηριώνεται από τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας τα οποία συμφωνούν και με άλλους ερευνητές (Gür & Barak, 2007; Heid & Blume, 2008; Kendal, 2001; Kuzler, 2000), η άμεση ανατροφοδότηση που παρέχουν τα CAS, δίνει τη δυνατότητα υπέρβασης των στερεότυπων διαδικασιών, ανάπτυξης της διερεύνησης και αλλαγής στη φύση των ευκαιριών που δίνονται για δημιουργία μαθηματικών δραστηριοτήτων. Με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές παρουσιάζουν μεγαλύτερη επιτυχία σε σχέση με αυτούς που παρακολούθησαν παραδοσιακή διδασκαλία (Asiala et al., 1997; Lehtinen & Repo, 1996; Watson & Tall, 2002).

Τα αποτελέσματα της εφαρμογής του παρεμβατικού προγράμματος μπορούν να αποτελέσουν εφαλτήριο για αναθεώρηση των διδακτικών μεθόδων και βιβλίων των μαθηματικών στη βάση των νέων αναλυτικών προγραμμάτων του Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού της Κύπρου (ΥΠΠ, ΠΙ & ΥΑΠ, 2010α). Η ορθότητα της επιλογής για να δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στην ενσωμάτωση της σύγχρονης τεχνολογίας με τρόπο που να συμβάλλει αποτελεσματικά στην επίτευξη των στόχων της μαθηματικής εκπαίδευσης στο νέο Αναλυτικό Πρόγραμμα των Μαθηματικών (ΥΠΠ, ΠΙ & ΥΑΠ, 2010β) τεκμηριώνεται και εμπειρικά.

Οι αρχές του νέου αυτού αναλυτικού προγράμματος αναφέρονται στο ότι: (α) οι μαθηματικές έννοιες διερευνούνται με τρόπο που υποκινεί το ενδιαφέρον και την περιέργεια των μαθητών, (β) το Αναλυτικό Πρόγραμμα δίνει έμφαση στη λύση προβλήματος, (γ) η τεχνολογία αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της μαθηματικής εκπαίδευσης και (δ) όλοι οι μαθητές πρέπει να αποκτήσουν εμπειρίες μέσα από ένα ποιοτικό πρόγραμμα μαθηματικών. Η διδακτική πρόταση που δίνεται μέσα από το παρεμβατικό πρόγραμμα αποτελεί εφαρμογή όλων των αρχών που διαγράφονται στο νέο Αναλυτικό Πρόγραμμα των Μαθηματικών, για την έννοια της παραγώγου στην Ανάλυση. Είναι για αυτό το λόγο που τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας μπορούν να αποτελέσουν εργαλείο τεκμηρίωσης, ως εμπειρική έρευνα, για την επιλογή των αρχών που διέπουν το νέο Αναλυτικό Πρόγραμμα των Μαθηματικών.

Εισηγήσεις για Περαιτέρω Έρευνα

Στην παρούσα εργασία εξετάζεται η έννοια της παραγώγου στην Ανάλυση μέσα από ένα προτεινόμενο θεωρητικό μοντέλο μάθησης για τη θεωρητική γνώση της έννοιας. Η Ανάλυση αποτελεί το βασικό πυρήνα για τις θετικές επιστήμες, την εφαρμοσμένη μηχανική και τις οικονομικές και διοικητικές επιστήμες και ένα από τα δυσκολότερα κεφάλαια που αναπτύσσονται στη Μέση και στην Ανώτερη εκπαίδευση, σε προπτυχιακό επίπεδο (Bezuidenhout, 2001). Είναι για αυτό που σε μια μελλοντική έρευνα μπορεί να εξεταστεί το προτεινόμενο μοντέλο και για τις υπόλοιπες έννοιες της Ανάλυσης ώστε να επιτευχθεί η οικοδόμηση εννοιολογικής και συσχετιστικής κατανόησης των εννοιών της Ανάλυσης από τους μαθητές τους. Για την επιτυχία αυτού του στόχου μπορούν να σχεδιαστούν και να εφαρμοστούν αντίστοιχα παρεμβατικά προγράμματα για τη διδασκαλία των υπό εξέταση εννοιών της Ανάλυσης. Τα παρεμβατικά προγράμματα μπορούν να βασιστούν στις υπάρχουσες θεωρίες μάθησης που χρησιμοποιήθηκαν για το σχεδιασμό του προτεινόμενου παρεμβατικού προγράμματος αυτής της έρευνας, και να εμπλέξουν αντίστοιχα, τη χρήση και τις δυνατότητες που δίνει η τεχνολογία στη διδασκαλία των υπό εξέταση εννοιών. Τόσο οι θεωρίες μάθησης όσο και οι δυνατότητες της τεχνολογίας που επισημαίνονται στην παρούσα έρευνα μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως βάση για όλες τις έννοιες της Ανάλυσης. Η εφαρμογή και άλλων παρεμβατικών προγραμμάτων μπορεί να αποτελέσει εργαλείο στην ανάπτυξη των Αναλυτικών Προγραμμάτων και των κατάλληλων εγχειριδίων των Μαθηματικών της Β’ και της Γ’ Λυκείου για τις έννοιες της Ανάλυσης.

Βιβλιογραφία

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

Ainley, J. (2000). Transparency in graphs and graphing tasks: an iterative design process. *Journal of Mathematical Behavior, 19(3),* 365-384. Retrieved from www.researchgate.net

Altiparmak, K. (2014). Impact of computer animations in cognitive learning: differentiation. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 45*(8), 1146-1166. doi: 10.1080/0020739X.2014.914256

Amit, M., & Vinner, S. (1990). Some misconceptions in calculus: Anecdotes or tip of an iceberg. In G. Brooker et al. (Eds.), *Proceedings of 14th International Conference for the Psychology of Mathematics Education 14* (Vol.1, pp.3-10). Oaxtepec, Mexico: Cinvestav.

Anderson, J. R. (1976). *Language, Memory, and Thought.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Arnold, S. (2004). Classroom computer algebra: Some issues and approaches. *Australian Mathematics Teacher, 60*(2), 17-21. Retrieved from http://eric.ed.gov

Artigue, M. (1991). Analysis. In D. Tall (ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp 167-198). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. doi: 10.1007/0-306-47203-1_11

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7,* 245-274. doi: 10.1023/A:1022103903080

Artigue, M., Batanero, C., & Kent, P. (2007). Mathematics thinking and learning at post-secondary level. In F. K. Lester (Ed.), *The second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1011–1049). USA: NCTM.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education* (Vol 2, pp.1-32). American Mathematical Society. doi: 10.1.1.47.8763

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *Journal of Mathematical*

Behavior, 16(4), 399-431. Retrieved from http://www.math.kent.edu/~edd/SlopeStudy.pdf

Barak, M. & Dory, Y. (2011). Science education in primary schools: is an animation worth a thousand pictures? *Journal of Science Education and Technology, 20*(5), 608–620. doi: 10.1007/s10956-011-9315-2

Beckmann, C. E. (1988). Effect of computer graphics use on student understanding of calculus concepts. *Dissertation Abstracts International,50*(05), 1974. (UMI No. 8910117)

Belenky, M., Clinchy, B. M., Goldberger, N. R., & Tarule, J. M. (1997). *Women's ways of knowing. The development of self, voice and mind.* New York: Basic Books.

Bezuidenhout, J. (2001). Limits and Continuity: Some Conceptions of First-year Student. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32*(4), 487-500. doi: 10.1080/00207390010022590

Biggs, J., & Collis, K. (1982). *Evaluating the Quality of Learning: the SOLO Taxonomy*. Academic Press, New York.

Bills, L., Ainley, J., & Wilson, K. (2006). Modes of algebraic communication: moving from spreadsheets to standard notation. *For the Learning of Mathematics, 26*(1), 36-41. Retrieved from http://flmjournal.org/Articles/57DDD565D71A3D110182 56D915E8C5.pdf

Biza, I. (2010). Evolution of Mathematical Discourse with the Mediation of Electronic Environment: The case of Tangent Line. *Online Proceedings for the Thirteenth SIGMAA on Research in Undergraduate Mathematics Education Conference*. Marriott Raleigh City Center - Raleigh, North Carolina. Retrieved from http://sigmaa.maa.org/rume/crume2010/Abstracts2010.htm

Biza, I. (2011). Students' evolving meaning about tangent line with the mediation of a Dynamic Geometry Environment and an instructional example space. *Technology, Knowledge and Learning, 16,* 125-151. doi: 10.1007/s10758-011-9180-3

Biza, I., Christou, C., & Zachariades, T. (2008). Student perspectives on the relationship between a curve and its tangent in the transition from Euclidean Geometry to Analysis. *Research in Mathematics Education, 10*(1), 53–70. doi: 10.1080/147948 00801916457

Biza, I. & Giraldo, V. (2011). Integrating potentialities and limitations of electronic environments: The case of derivative. In *Proceedings of the 7th Conference of European Research in Mathematics Education (CERME)*. (pp. 1981-1991). Rzeszów, Poland. Retrieved from https://ueaeprints.uea.ac.uk/id/eprint/45026

Biza, I., Nardi, E., & Zachariades, T. (2009). Teacher beliefs and the didactic contract on visualisation. *For the Learning of Mathematics, 29*(3), 31–36. Retrieved from https://dspace.lboro.ac.uk/2134/9034

Biza, I. & Zachariades, T. (2010). First year mathematics undergraduates' settled images of tangent line. *The Journal of Mathematical Behavior, 29*(4), 218-229. doi: 10.10 16/j.jmathb.2010.11.001

Borba, M. C., & Villarreal, M. E. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: Information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization.* New York, NY: Springer. doi: 10.1007/b105001

Boyd, A., & Rubin, A. (1996). Interactive video: A bridge between motion and math. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 1,* 57-93. Retrieved from http://www.primaryaccess.org/community/IES Science Visualization/ Visualization Articles/RBoydRubin1996Math.pdf

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dortrecht: Kluwer Academic Publishers. doi: 10.1007/0-306-47211-2

Bruner, J. S. (1966). *Towards a Theory of Instruction*. New York: Norton.

Butterworth, B. (1999). *The Mathematical Brain*. London: MacMillan.

Caballero-Gonzalez, C., & Bernal-Rodriguez, J. (2011). New technologies and education: Constructive, geometric and dynamic introduction of the derivative concept. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 18*(4), 203–208.

Castela, C. (1995). Apprendre avec et contre ses connaissances ante´rieures: Un example concret, celui de la tangente. *Recherches en Didactiques des mathe´matiques, 15*(1), 7–47.

Cipra, B. (1989). *Mistakes*. New York: Academic Press.

Confrey, J., & Smith, E. (1992). Revised accounts of the function concept using multi-representational software, contextual problems and student paths. In W. Geeslin & K. Graham (Eds.), *Proceedings of the sixteenth annual conference of the*

International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. I, pp.153-160). Durham, NH: Program Committee of the Sixteenth PME Conference.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. doi: 10.1007/0-306-47203-1_10

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior, 15*(2), 167-192. Retrieved from http://www.math.kent.edu/~edd/Limit.pdf

Crouch, R., & Haines, C. (2004). Mathematical modelling: transitions between the real world and the mathematical model. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology, 35*(2), 197–206. doi:10.1080/00207390310001638322

Czarnocha, B., Dubinsky, E., Prabhu, V., & Vidakovic, D. (1999). One theoretical perspective in undergraduate mathematics education research. *Proceedings of PME 23*(I), 95–110.

Damarin, S., & White, C. (1986). Examining a Model for Courseware Development. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 6*(1), 38-43.

Davis, R. B. (1975). Cognitive processes involved in solving simple algebraic equations. *Journal of Children' s Mathematical Behavior, 1*(3), 7-35.

Davis, R. B., & Vinner, S. (1986). The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *Journal of Mathematical Behavior, 5*(3), 281–303.

Dehaene, S. (1997). *The Number Sense*. New York: Oxford University Press.

Dienes, Z. P. (1960). *Building Up Mathematics*. London: Hutchinson Educational Press.

Doerr, H. M., & Zangor, R. (2000). Creating meaning for and with the graphing calculator. *Educational Studies in Mathematics, 41*, 143-163. doi: 10.1023/A:1003905929557

Donaldson, M. (1963). *A study of children's thinking*. London: Tavistock Publications.

Doorman, M. (2005). Modelling motion: from trace graphs to instantaneous change. Utrecht, NL: CD-β Press. Retrieved from http://dspace.library.uu.nl/handle/1874/1727

Dowey, T. (n.d). *Introduction to calculus applets.* Retrieved from http://www.calculusapplets.com/

Downs, M., & Mamona-Downs, J. (2000). On graphic representation of differentiation of real functions. *Themes in Education, 1*(2), 173–198.

Dreyfus, T., & Halevi, T. (1991). QuadFun-A case Study of Pupil Computer Interaction. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *10*(2), 43-48.

Dreyfus, T., & Hillel, J. (1998). Reconstruction of meanings for function approximation. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3,* 93-112. doi: 10.1023/A:1009783831945

Drijvers, P. (2000). Students encountering obstacles using a CAS. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5,* 189-209. doi:10.1023/A:1009825629417

Drijvers, P. & van Herwaarden, O. (2001). Instrumentation of ICT-tools: The case of algebra in a computer algebra environment. *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education, 7(4)*, 255-275. Retrieved from www.fi.uu.nl/ publicaties/literatuur/3972.doc

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-126). Dordrecht, NL: Kluwer Academic Publishers. doi: 10.1007/0-306-47203-1_7

Dubinsky, E. (1994). A theory and practice of learning college mathematics. In A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving* (pp. 221-243). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Dubinsky, E. (1997). Some thoughts on a first course in linear algebra at the college level. In D. Carlson, C.R. Johnson, D.C. Lay, A. Duane Porter, A. Watkins, & W. Watkins (Eds.). *Resources for Teaching Linear Algebra* (MAA Notes, 42, pp.85-105). Mathematical Association of America. Retrieved from http://www.math.kent .edu /~edd/LinearAlgebra.pdf

Dubinsky, E. (2010). The APOS Theory of Learning Mathematics: Pedagogical Applications and Results. *Plenary speech*, in Programme of Proceedings of the Eighteenth Annual Meeting of the Southern African Association for Research in Mathematics, Science and Technology Education. Durban: SAARMSTE.

Dubinsky, E., & Lewin, P. (1986). Reflective abstraction and mathematics education: The genetic decomposition of induction and compactness. *Journal of Mathematical Behavior 5,* 55-92. Retrieved from http://www.math.kent.edu/~edd/RAMED.pdf

Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In Derek Holton, et al. (Eds.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (pp. 273-280). Dordrechet: Kluwer Academic Publishers. Retrieved from http://www. math.wisc.edu/~wilson/Courses/Math903/ICMIPAPE.PDF

Dubinsky, E., & Schwingendorf, E. K. (1991). Constructing calculus concepts: cooperation in a computer laboratory. In C. Leinbach (Ed.), *The laboratory approach to teaching calculus.* Mathematical Association of America, Notes and Reports, 20.

Elia, I., Gagatsis, A., Panaoura, A., Zachariades, T., & Zoulinaki, F. (2009). Geometric and algebraic approaches in the concept of “limit” and the impact of the “didactic contact”. *International Journal of Science and Mathematics Education, 7*(4), 765–790. doi: 10.1007/s10763-009-9149-z

Ferrini-Mundy, J., & Graham, K. (1991). An overview of the calculus curriculum reform effort: Issues for learning, teaching, and curriculum development. *American Mathematical Monthly*, *98*(7), 627-635. doi: 10.2307/2324931

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Dordrecht, Holland: Kluwer Academic Publishers. doi: 10.1007/0-306-47237-6

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Reidel, Dortrecht. doi: 10.1007/978-94-010-2903-2

Freudenthal, H. (1978). Change in mathematics education since the late 1950s—ideas and realisation: The Netherlands. *Educational Studies in Mathematics, 9*(3), 261–270.

Fuchs, K.J. (2001). Computer algebra systems in mathematics education. Teacher training programs, challenges and new aims. *ZDM, 35*(1), 20-23. Retrieved from http://subs. emis.de/journals/ZDM/zdm031a5.pdf

Ganter, S. L. (2001). *Changing calculus: A report on evaluation efforts and national impact from 1988 to 1998* (MAA Notes No. 56). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Gerny, M., & Alpers, B. (2004). Formula 1—A mathematical microworld with CAS: Analysis of learning opportunities and experiences with students. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9*(1), 25-57. doi: 10.1023/B:IJ CO.0000038245.60482.24

Giaquinto, M. (2007). *Visual thinking in mathematics.* New York: OUP.

Giraldo, V., & Carvalho, L. M. (2006). Generic Organizer for the Enrichment of the Concept Image of Derivative. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of PME30* (Vol. 3, pp. 185-192). Prague, Czech Republic.

Giraldo, V., Carvalho, L., & Tall, D. (2003). Using theoretical-computational conflicts to enrich the concept image of derivative. *Research in Mathematics Education, 5*, 63-78.

Goldenberg, E. P. (1988). Mathematics, metaphors, and human factors: Mathematical, technical, and pedagogical challenges in the educational use of graphical representation of functions. *Journal of Mathematical Behavior, 7*(2)*,* 135-173.

Gravemeijer, K. (1997). Developmental research as a research method. In A. Sierpinska and J. Kilpatrick (Eds.). *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity. An ICMI Study book* (pp. 277-295). Dortrecht: Kluwer Academic Publishers. doi: 10.1007/978-94-011-5470-3_18

Gray, E., Pinto, M., Pitta, D., & Tall, D. (1999). Knowledge construction and diverging thinking in elementary and advanced mathematics. *Educational Studies in Mathematics 38,* 111-133. doi: 10.1023/A:1003640204118

Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple Arithmetic. *Journal of Research in Mathematics Education, 26*(2), 115-141. Retrieved from http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1994a-gray-jrme.pdf

Gray, E., & Tall, D. (2001). Relationships between embodied objects and symbolic procepts: an explanatory theory of success and failure in mathematics. In M. van den Heuval-Panhuizen (Ed.) *Proceedings of the 25th conference of the international group for the psychology of mathematics education (PME)* (Vol.3, pp.65-72). Utrecht. Retrieved from http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/ pdfs/dot2001i-pme25-gray-tall.pdf

Günter, T., Potari, D., & Zachariades, T. (2014). Calculus in European classrooms: curriculum and teaching in different educational and cultural contexts. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 46*(4), 549-560. doi: 10.1007/s11858-014-0612-0

Gür, H., & Barak, B. (2007). The Erroneous Derivative Examples of Eleventh Grade Students. *Eductional Sciences: Theory & Practice, 7*(1), 473-480.

Habre, S., & Abboud, M. (2006). Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *The Journal of Mathematical Behavior, 25*(1), 57–72. doi:10.1016/j.jmathb.2005.11.004

Hähkiöniemi, M. (2004). Perceptual and symbolic representations as a starting point of the acquisition of the derivative. In M. Høines & A. Fuglestad (Eds.) *Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education (PME)*, (Vol. 3, pp.73-80). Bergen.

Hähkiöniemi, M. (2005). The role of different representations in teaching and learning of the derivative through open approach. In E. Pehkonen (Ed.) *Problem solving in mathematics education*. *Proceedings of the ProMath meeting*. (Research Report 261, pp. 71-82). University of Helsinki, Department of Applied Sciences of Education.

Hähkiöniemi, M. (2006a). Associative and reflective connections between the limit of the difference quotient and limiting process. *Journal of Mathematical Behavior, 25*(2), 170-184. doi: 10.1016/j.jmathb.2006.02.002

Hähkiöniemi, M. (2006b). *The role of representations in learning the derivative*. University of Jyväskylä. Department of Mathematics and Statistics. Report 104. (Doctoral dissertation.)

Halmos, P. R. (1985). Pure thought is better yet… *The College Mathematics Journal, 16,* 14-16. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/2686622

Hammer, D. (1996). Misconceptions or P-primes: How may alternative perspectives of cognitive structure influence instructional perceptions and intentions?. *The Journal of the learning science 5*, 97-127. Retrieved from http://www.psychology. nottingham.ac.uk/staff/dmr/c8ccde/Readings for Learning about science/hammer_ 1996.pdf

Harel, G., Selden, A., & Selden, J. (2006). Advanced mathematical thinking. Some PME perspectives. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 147–172). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Haspekian, M. (2005). An "instrumental approach" to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: The case of spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 10*(2), 109-141. doi: 10.1007/s10758-005-0395-z

Heid, M. K. (1988). Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. *Journal for Research in Mathematics Education,19*(1), 3-25. doi: 10.2307/749108

Heid, M. K. (1989). How symbolic mathematical systems could and should affect precollege mathematics. *The Mathematics Teacher, 82*(6), 410-419.

Heid, M. K., & Blume, G. W. (2008). Technology and the development of algebraic understanding. In M. K. Heid & G. W. Blume (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Syntheses, cases, and perspectives: Vol. 1. Research syntheses (*pp. 55–108). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Heid, M. K., Zbiek, R. M., Blume, G. W., & Choate, J. (2004). Technology-intensive mathematics [CD]. Unpublished materials.

Henning, A., & Hoffkamp, A. (2013). Developing an intuitive concept of limit when approaching the derivative function. *Proceedings of CERME 8.* Antalya, Turkey.

Henrici, P. (1974). The influence of computing on mathematical research and education. In *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Vol. 20*. American Mathematical Society. Retrieved from http://www.ams.org/books/psapm/020/psapm020-ndmatter .pdf

Hershkowitz, R., Dreyfus, T., Ben-Zvi, D., Friedlander, A., Hadas, N., Resnick, T., et al. (2002). Mathematics curriculum development for computerized environments: A designer – researcher – teacher - learner activity. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp.657-694). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Hillel, J. (1993). Computer algebra systems as cognitive technologies: Implications for the practice of mathematics education. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds.), *Learning from computers: Mathematics education and technology* (pp.18-47). Berlin: Springer-Verlag. doi: 10.1007/978-3-642-78542-9_2

Hillel, J., Lee, L., Laborde, C., & Linchevski, L. (1992). Basic functions through the lens of computer algebra systems. *Journal of Mathematical Behavior, 11,* 119-158.

Houdé, O., Zago, L., Mellet, E., Moutier, S., Pineau, A., Mazoyer, B., & Tzourio-Mazoyer, N. (2000). Shifting from the perceptual brain to the Logical Brain: The Neural Impact of Cognitive Inhibition Training. *Journal of Cognitive Neuroscience*, *12*(4), 712–728. doi:10.1162/089892900562525

Hoyos, V. (1999). Connections between different mathematical domains using technological tools: The analytical character of the algebraic task-resolution. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the twenty-first annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 370-377). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Hsaio, F. S., (1984/85). A New CAI Approach to Teaching Calculus. *Computers in Mathematics and Science Teaching*, *4*(2), 29-36.

Hughes-Hallett, D., McCallum, W., Gleason, A., Connally, E., Flath, D., … Tucker, T. (Eds). (2012). *Calculus: Single Variable. 6th Edition International Student Version.* Wiley.

Hurley, J. F., Koehn, U., & Ganter, S. L. (1999). Effects of calculus reform: Local and national. *American Mathematical Monthly, 106*(9), 800-811. doi: 10.2307/2589613

Kaput, J. (1979). Mathematics and learning: Roots of epistemological status. In J. Lochhead & J. Clement (Eds.), *Cognitive Process Instruction: Research on Teaching Thinking Skills* (pp. 289-304). Franklin Institute Press.

Kaput, J. (1994). Democratizing access to calculus: New routes to old roots. In A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp. 77-156). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kaput, J. (1996). Algebra and technology: New semiotic continuities and referential connectivity. In F. Hitt, T. Rojano, & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the PME-NA XXI Annual Meeting*. Cuernavaca, Mexico. Retrieved from http://www. kaputcenter.umassd.edu/downloads/products/publications/algebratechnology.pdf

Kaput, J. & Thompson, P. (1994). Technology in Mathematics Education Research: The First 25 Years in the JRME, *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(6), 676-684. Retrieved from http://www.pucrs.br/famat/viali/tic_literatura/ artigos/tics/749579.pdf

Kendal, M. (2001). *Teaching and learning introductory differential calculus with a computer algebra system.* Unpublished doctorate dissertsation. The University of Melbourne. Retrieved from https://minerva-access.unimelb.edu.au/bitstream/handle/11343/39021/66477_00001525_01_Margaret_Kendal.pdf?sequence=1

Kendal, M., & Stacey, K. (2000). Acquiring the concept of the derivative: Teaching and learning with multiple representations and CAS. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.)*, Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the psychology of mathematics education (PME)* (Vol. 3, pp.127-134). Hiroshima.

Kidron, I., Lenfant, A., Bikner-Ahsbahs, A., Artigue, M., & Dreyfus, T. (2008). Toward networking three theoretical approaches: The case of social interactions. *ZDM, 40*(2), 247–264. doi: 10.1007/s11858-008-0079-y

Kidron, I., & Zehavi, N. (2002). The role of animation in teaching the limit concept. *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education, 9*(3), 205–227.

Kieran, C., Boileau, A., & Garançon, M. (1996). Introducing algebra by means of a technology-supported, functional approach. In C. Kieran, N. Bednarz, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp.257-293). Dordrech, Hollandt: Kluwer Academic Publishers. doi: 10.1007/978-94-009-1732-3_19

Kilpatrick, J. (1992). A history of research in mathematics education. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 3–37). New York: Macmillan.

Krutetski, V. A. (1980). *The psychology of mathematical abilities in school children*. Chicago: University of Chicago Press.

Kuzler, B. (2000). The algebraic calculator as a pedagogical tool for teaching mathematics. *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education, 7*(1), 5-23.

Lakoff, G., & Nunez, R. (2000). *Where Mathematics Comes From.* New York: Basic Books.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation.* Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Lehtinen, E., & Repo, S. (1996). Activity, social interaction, and reflective abstraction: Learning advanced mathematical concepts in a computer environment. In E. De Corte, R. Glaser, H. Mandl, & S. Vosniadou (Eds.), *International perspectives on the design of technology-supported learning environments* (pp. 105-128). *Mahwah, NJ: Erlbaum.*

Lesh, R., & Landau, M. (Eds.), (1983). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes.* New York: Academic Press.

Li, X. (2006). *Cognitive Analysis of students' errors and misconceptions in variables, equations and functions.* Unpublished doctorate dissertation. Texas A&M University. Retrieved from http://repository.tamu.edu/bitstream/handle/1969.1/ETD-TAMU-1098/LI-DISSERTATION.pdf?sequence=1

Maharaj, A. (2013). An APOS analysis of natural science students' understanding of derivative. *South African Journal of Education, 33*(1).

Marcoulides, G. A., & Schumacker, R. E. (1996). *Advanced structural equation modeling Issues and techniques.* NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Martinovic, D., & Karadag, Z. (2012). Dynamic and interactive mathematics learning environments: The case of teaching the limit concept. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA, 31*(1), 41–48. doi: 10.1093/team at/hrr029

Maschietto, M. (2008). Graphic calculators and micro-straightness: Analysis of a didactic engineering. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 13*(3), 207–230. doi: 10.1007/s10758-008-9141-7

Maurer, S. B. (1987). New knowledge about errors and new views about learners: What they mean to educators and more educators would like to know. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 165-188). Hillsdale NJ: Erlbaum.

Meira, L. (1998). Making sense of instructional devices: The emergence of transparency in mathematical activity. *Journal for Research in Mathematics Education, 29,* 121-143. doi: 10.2307/749895

Muthén, L., & Muthén, B. (2004). *Mplus User's Guide*. Third Edition. Los Angeles, CA: Muthén & Muthén.

Muzangwa, J., & Chifamba, P. (2012). Analysis of errors and misconceptions in the learning of calculus by undergraduate students. *Acta Didacta Napocensia Journal, 5*(2). Retrieved from http://dppd.ubbcluj.ro/adn/article_5_2_1.pdf

Nachmias, R., & Arcavi, A. (1990). A parallel representation of linear functions using a microcomputer-based environment. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 9*(4), 79-88.

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Noble, T., & Nemirovsky, R. (1997). On mathematical visualization and the place where we live. *Educational Studies in Mathematics, 33*(2)*,* 99-131. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/3482640

Noble, T., Nemirovsky, R., Wright, T., & Tierney, C. (2001). Experiencing change: the mathematics of change in multiple environments. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(1), 85–108.

Norman, F. A., & Pritchard, M. K. (1994). Cognitive obstacles to the learning of calculus: a krutetskiian perspective. In J. J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research issues in undergraduate mathematics learning*. Mathematical Association of America.

Orton, A. (1983a). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(3), 235-250. doi: 10.1007/BF00410540

Orton, A. (1983b). Students' understanding of integration. *Educational studies in mathematics,14*(1), 1-18. doi: 10.1007/BF00704699

Pierce, R. & Stacey, K. (2007) Developing algebraic insight. *Mathematics Teaching, 203*, 12-16.

Pegg, J., & Tall, D. (2005). The fundamental cycle of concept construction underlying various theoretical frameworks. *ZDM*, *37*(6), 468-475. Retrieved from http://subs. emis.de/journals/ZDM/zdm056a3.pdf

Piaget, J. (1964). Development and learning. *Journal of Research in Science Teaching, 2,* 176-180.

Piaget, J., (1965). *The Child's Conception of a Number*. New York: Norton.

Piaget, J. (1970), *Genetic Epistemology.* W. W. Norton, New York.

Piaget, J. (1985). *The Equilibration of Cognitive Structures*. Cambridge MA: Harvard.

Porzio, D. (1999). Effects of differing emphases in the use of multiple representations and technology on students' understanding of calculus concepts. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 21*(3), 1-29.

Potari, D., Zachariades, T., Christou, C., Kyriazis, G., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Teachers' mathematical knowledge and pedagogical practices in the teaching of derivative. In D. Pitta & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the 4th conference on European research in mathematics education* (pp. 1955–1964). Larnaca, Cyprus. Retrieved from: http://ermeweb.free.fr/CERME5b/WG12.pdf.

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 205–235). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 10*(3), 163-172. doi: 10.2307/748804

Rasmussen, C., Marrongelle, K., & Borba, M. (2014). Research on calculus: what do we know and where do we need to go? *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 46*(4), 507-515. doi: 10.1007/s11858-014-0615-x

Ruthven, K. (2002). Instrumenting mathematical activity: Reflections on key studies of the educational use of computer algebra systems. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*(3), 275-291. doi: 10.1023/A:1022108003988

Sabella, M. S., & Redish, E. F. (n.d.). Student Understanding of Topics in Calculus. Retrieved from University of Maryland web site: http://www.physics.umd.edu/ rgroups/ripe/perg/plinks/calc.htm.

Schwarz, B., & Hershkowitz, R. (1999). Prototypes: Brakes or levers in learning the function concept? The role of computer tools. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(4)*,* 362-389. doi: 10.2307/749706

Schwartz, J. L., & Yerushalmy, M. (1995). On the need for a bridging language for mathematical modeling. *For the Learning of Mathematics, 15*(2), 29-35.

Seeger, F., & Steinbring, H. (1992). The myth of mathematics. In F. Seeger and H. Steinbring (Eds.), *The Dialogue between Theory and Practice in Mathematics Education: Overcoming the Broadcast Metaphor. Proceedings of the Fourth Conference on Systematic Cooperation between Theory and Practice in*

Mathematics Education (SCTP) (September 16-21, 1990, pp.69-90). *Brakel, Germany*.

Serhan, D. (2006). The effect of graphing calculators use on students' understanding of the derivative at a Point. Retrieved from http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/ serhan.pdf.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics, 18*(4), 371–397. doi: 10.1007/BF00240986

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics, 10*(3), 24-36. Retrieved from http://www.academia.edu/6988639/ Some_remarks_on_understanding_in_mathematics

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.). *The Concept of Function, Aspects of Epistemology and Pedagogy*, (MAA Notes, 25, pp. 25-58). Mathematical Association of America. Retrieved from http://www.academia.edu/5091752/On_understanding_the_notion_of_function

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. The Falmer Press Ltd., London.

Sierpinska, A. (1995). Mathematics: "in context", "pure" or "with applications"? A contribution to the question of transfer in the learning of mathematics. *For the Learning of Mathematics, 15*(1), 2-15.

Sierpinska, A. (2005). On practical and theoretical thinking and other false dichotomies in mathematics education. In M. Hoffmann, J. Lenhard and F. Seeger (Eds). *Activity and Sign-Grounding Mathematics Education* (pp. 117-135). Dortrecht , The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. doi: 10.1007/0-387-24270-8_11

Sierpinska, A., Bobos, A., & Pruncut, A. (2011). Teaching absolute value inequalities to mature students. *Educational Studies in Mathematics*, *78*(3), 275–305. doi: 10.1007 /s10649-011-9325-2

Sierpinska A., Nnadozie A., & Okta A. (2002). A study of relationships between theoretical thinking and high achievement in linear algebra. Concordia University. Retrieved from http://annasierpinska.rowebca.net/pdf/Sierpinska-TT-Report.pdf

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1-36. doi: 10.1007/BF00302715

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification- the case of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.). *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (MAA Notes, 25, pp. 59-84). Mathematical Association of America. Retrieved from http://www.researchgate.net/publication/242490242_Operational_origins_of_mathematical_objects_and_the_quandary_of_reification_-_the_case_of_function

Sfard, A. & Linchevsky, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification. The case of Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2-3), 191-228. Doi: 10.1007/BF01273663

Skemp, R. R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics*. London: Penguin.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teacher* 77, 20-26. Retrieved from http://www.grahamtall.co.uk/skemp/pdfs/instrumental-relational.pdf

Skemp, R. R. (1979), *Intelligence, Learning and Action*. London: Wiley.

Soares, D. S. (2012). *Uma abordagem pedago´gica baseada na ana´lise de modelos para alunos de biologia: qual o papel do software?* Doctoral Dissertation, UNESP, Brazil.

Spivak, M. (1993). *Διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός-Μια εισαγωγή στην ανάλυση.* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Steinbring, H. (1991). The concept of chance in everyday teaching: Aspects of a social epistemology of mathematical knowledge. *Educational Studies in Mathematics 22*(6)*,* 503-522. doi: 10.1007/BF00312713

Swidan, O. & Yerushalmy, M. (2014). Learning the indefinite integral in a dynamic and interactive technological environment. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 46*(4), 517-531. doi: 10.1007/s11858-014-0583-1

Tall, D. (1986a). *Building and testing a cognitive approach to the calculus using interactive computer graphics*. Unpublished doctorate dissertation, University of Warwick. Retrieved from http://wrap.warwick.ac.uk/2409/

Tall, D. (1986b). *Graphic calculus I, II, III, (3 packs of computer programs, with accompanying texts)*. London: Glentop Publishers.

Tall, D. (1987). Constructing the concept image of a tangent. In: J. C. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th PME international conference* (Vol. 3, pp. 69–75). Montréal, Canada.

Tall, D. (Ed), (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands. doi: 10.1007/0-306-47203-1

Tall, D. (2002). Differing Modes of Proof and Belief in Mathematics. *International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand*, 91–107. National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan. Retrieved from http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2002k-proof-3worlds.pdf

Tall, D. (2003). Using technology to support an embodied approach to learning concepts in mathematics. In L. Carvalho & L. Guimarães (Eds.), *História e tecnologia no ensino da matemática* (Vol. 1, pp. 1–28). Rio de Janeiro. Retrieved from http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2003a-rio-plenary.pdf

Tall, D. (2004). Thinking Through Three Worlds of Mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4,* 281–288. Bergen, Norway. Retrieved from http://www.emis.de/proceedings/PME28/RR/RR213_Tall.pdf

Tall, D. (2010). Perceptions, Operations and Proof in Undergraduate Mathematics. *CULMS Newsletter* (*Community for Undergraduale Learning in the Mathematical Sciences) 2,* November 2010, 21-28. University of Auckland, New Zealand. Retrieved from http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2010d-undergraduate-math.pdf

Tall, D., Gray, E., Bin Ali, M., Crowley, L., DeMarois, P., McGowen, M., Pitta, D., Pinto, M.,Thomas, M., & Yusof, Y. (2001). Symbols and the bifurcation between procedural and conceptual thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 1*(1), 81-104. doi**:** 10.1080/14926150109556452

Tall, D., Smith, D., & Piez, C. (2008). Technology and calculus. In M. K. Heid & G. W. Blume (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Vol. 1. Research synthesis* (pp. 207–258). USA: NCTM, Information Age Publishing.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12,* 151-169. Retrieved from http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1981a-concept-image.pdf

Tinker, R. F., & Thornton, R. K. (1992). Constructing student knowledge in science, In E. Scanlon & T. O'Shea (Eds.), *New directions in educational technology* (pp. 153-170). Berlin, Germany: Springer-Verlag. doi: 10.1007/978-3-642-77750-9_13

Thompson, P. W. (1985). Experience, problem solving, and learning mathematics: considerations in developing mathematical curricula'. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives* (pp. 189-243). Hillsdale, NJ: Erlbaum. Retrieved from http://www.pat-thompson.net/PDFversions/1985Experience-Curricula.pdf

Thompson, P. W., Byerley, C., & Hatfield, N. (2013). A conceptual approach to calculus made possible by technology. *Computers in the Schools, 30*(1–2), 124–147. doi: 10.1 080/07380569.2013.768941.

Tsamir, P. (2002). When "the same" is not perceived as such: The case of infinite sets. *Educational Studies in Mathematics, 48*(2-3), 289–307. doi: 10.1023/A:101603491 7992

Ubuz, B. (2001). First year engineering students' learning of point of tangency, numerical calculation of gradients, and the approximate value of a function at a point through computers. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 20*(1), 113-137.

Ubuz, B. (2007). Interpreting a graph and constructing its derivative graph: stability and change in students' conceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38*(5), 609–637. doi:10.1080/00207390701359313

Van Hiele, P. M. (1959), 'La pensée de l'enfant et la géometrie', *Bulletin de l'Associationdes Professeurs Mathématiques de L'Enseignement Public*, 198.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight*. Orlando: Academic Press.

Vygotsky, L. S. (1987). The Collected Works of L. S. Vygotsky 1. Problems of General Psychology, including the volume *Thinking and Speech.* New York and London: Plenum Press.

Watson, A., Spirou, P., & Tall, D. (2003). The Relationship between Physical Embodiment and Mathematical Symbolism: The Concept of Vector. *The Mediterranean Journal* of Mathematics Education*, *1*(2), 73–97. Retrieved from http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2003c-watson-spirou.pdf

Watson, A. & Tall, D. (2002). Embodied action, effect, and symbol in mathematical growth. In Anne D. Cockburn & Elena Nardi (Eds), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol.4, pp.369–376). Norwich: UK. Retrieved from http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2002j-pme26-watson.pdf

Weigand, H. (2014). A discrete approach to the concept of derivative. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 46*(4), 603-619. doi: 10.1007/s11858-014-0595-x

Weller, K., Arnon, I., & Dubinsky, E. (2009). Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 9*(1), 5-28. doi: 10.1080/14926150902817381

Weller K, Clark J, Dubinsky E, Loch S, McDonald M., & Merkovsky R. (2003). Student performance and attitudes in courses based on APOS Theory and the ACE Teaching Cycle. In A Selden, E Dubinsky, G Harel & F Hitt (eds). Research in Collegiate Mathematics Education V. Providence, RI: American Mathematical Society.

Wertsch, J. V. (1998). *Mind as action*. Oxford: Oxford University Press.

Wynn, K. (1992). Addition and subtraction by human infants. *Nature*, *358,* 749–750. doi:10.1038/358749a0

Yerushalmy, M. (1997). Mathematizing verbal descriptions of situations: a language to support modeling. *Cognition and Instruction, 15*(2), 207–264. doi: 10.1207/s1532690xci1502_3

Yerushalmy, M., & Swidan, O. (2012). Signifying the accumulation graph in a dynamic and multirepresentation environment. *Educational Studies in Mathematics, 80*(3), 287–306. doi:10.1007/s10649-011-9356-8

Yiasoumis, N., Mattheou, K., & Christou, C. (2009). Theoretical Thinking on the concept of limit: The effect of computers. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, C. (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Thessaloniki, Greece: PME.

Young Digital Planet (2010). *Professional resources for today's teachers.* Retrieved from http://www.yteach.co.uk/

Yusof, J. (2003). *Mathematical errors in fractions work: A longitudinal study of primary lever pupils in Brunei*. Unpublished doctorate dissertation. Curtin University of Technology. Retrieved from http://espace.library.curtin.edu.au/R/?func=dbin-jump-full&object_id=15027&local_base=GEN01-ERA02

Zazkis, R., Liljedahl, P., & Chernoff, E. (2008). The role of examples in forming and refuting generalizations. *ZDM, 40*(1), 131–141. doi: 10.1007/s11858-007-0065-9

Zbiek, R. M. (1998). Prospective secondary school mathematics teachers' strategies for developing and validating functions as mathematical models in the presence of computing tools. *Journal for Research in Mathematics Education, 29,* 184-201. doi: 10.2307/749898

Zbiek, R., Heid, K., Blume, G., & Dick, Th. (2007). Research on technology in mathematics education—A perspective of constructs. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1169–1207). Charlotte, NC: Information Age.

Zeller, M. & Barzel, B. (2010). Influences of CAS and GS in early algebra. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education,42*(7), 775-778. doi: 10.1007/s11858-010-0287-0

Ελληνόγλωσση Βιβλιογραφία

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Μέτης, Σ., Μπρουχούτας, Κ., Παπασταυρίδης, Σ., & Πολύζος, Γ. (1999). *Μαθηματικά Γ' Τάξης Ενιαίου Λυκείου – Θετική κατεύθυνση.* Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Ιγνατίου Κ., & Ζώτος, Ε. (Επιμελ. Εκδ.) (2007). *Άλγεβρα – Ανάλυση Β' Ενιαίου Λυκείου (Μάθημα Κατεύθυνσης).* Λευκωσία: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο – Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων.

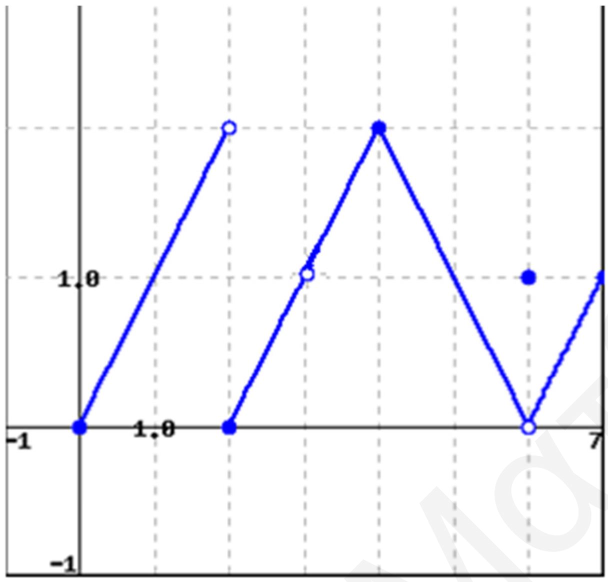
Ματθαίου, Κ., Γιασουμής, Ν., & Χρίστου, Κ. (2009). Απόκτηση και ανάπτυξη θεωρητικής γνώσης για την έννοια της συνέχειας. *Πρακτικά 3ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών* (σσ. 689-698). Ρόδος, Ελλάδα.

Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, & Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων (2010α) (Εκδ.). *Αναλυτικά προγράμματα Προδημοτικής, Δημοτικής* *και Μέσης εκπαίδευσης.* Ανακτήθηκε από http://www.moec.gov.cy/analytika_programmata/programmata_spoudon.html

Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, & Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων (2010β) (Εκδ.). *Πρόγραμμα σπουδών Μαθηματικών.* Ανακτήθηκε από http://www.moec.gov.cy/analytika_programmata/ekteni_programmata_spoudon .html

Παράρτημα

Πιλοτική έρευνα - Δοκίμιο 1



1. Στο πιο πάνω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να απαντήσετε τα πιο κάτω ερωτήματα:

Α. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $y = f(x)$;

Β. Για ποιες τιμές του x η συνάρτηση δεν είναι συνεχής;

Γ. Να βρείτε αν υπάρχουν τα πιο κάτω όρια:

α) $\lim_{x \to 1} f(x) =$

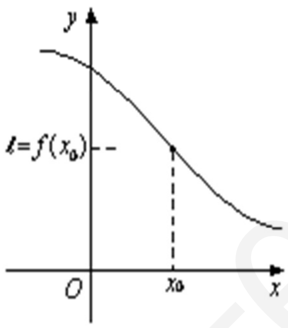
β) $\lim_{x \to 2} f(x) =$

γ) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) =$

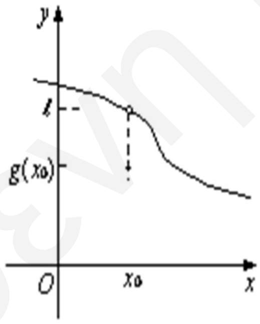
δ) $\lim\limits_{x \to 4} f(x) =$

ε) $\lim\limits_{x \to 6} f(x) =$

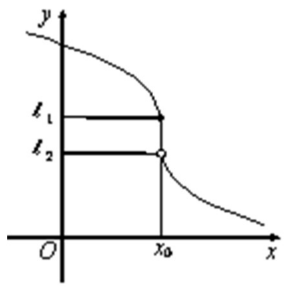
2. Στα πιο κάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις πέντε διαφορετικών συναρτήσεων. Ποιες από τις συναρτήσεις αυτές είναι συνεχείς στο x_0; (Να βάλετε σε κύκλο το αντίστοιχο γράμμα Α, Β, …)



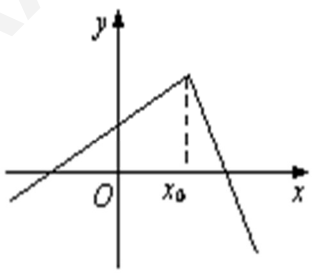
Α.



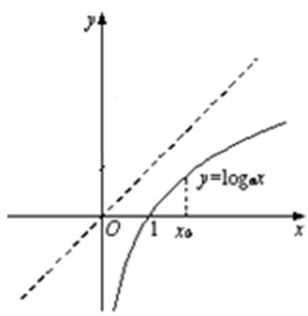
Β.



Γ.

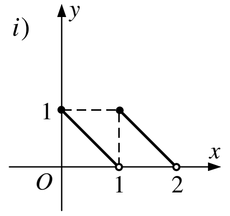


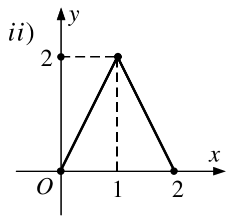
Δ.

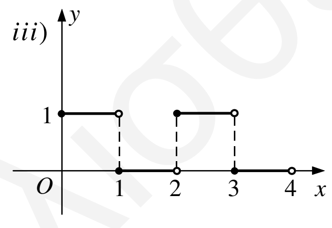


Ε.

3. Να γράψετε τον τύπο και το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων που αντιστοιχούν στις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις.

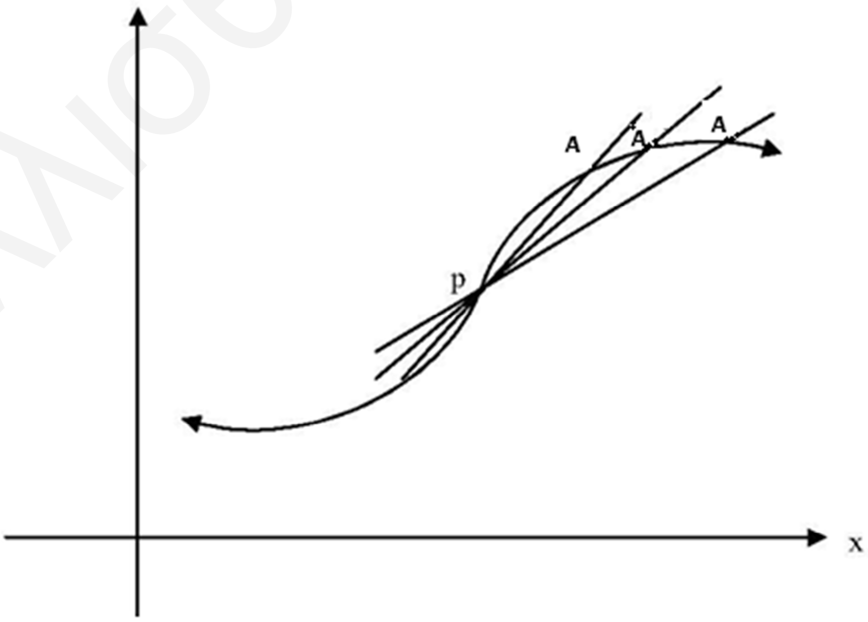




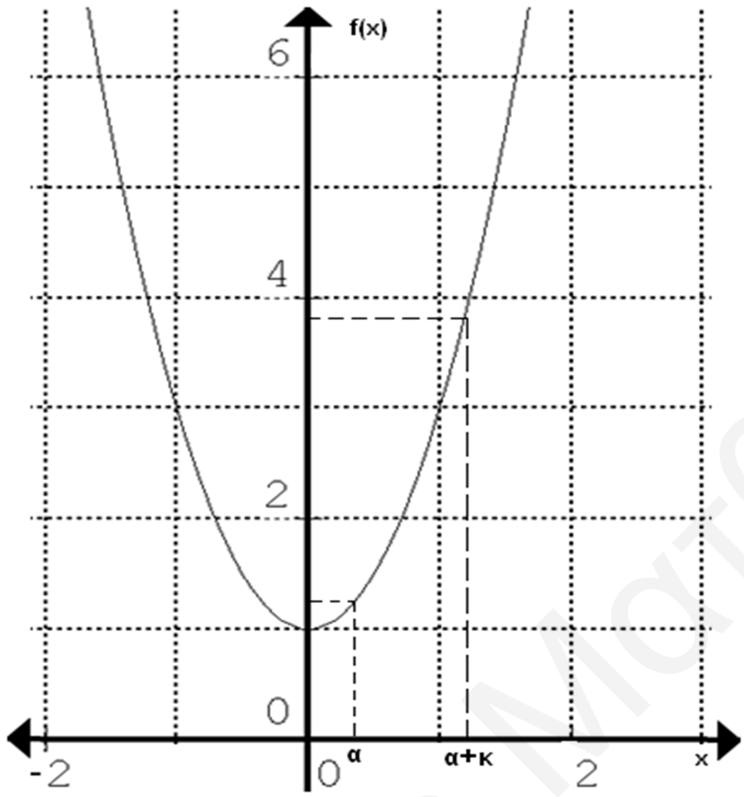


4. Να απλοποιήσετε την παράσταση: $\dfrac{(x+y)^2 - x^2}{y}$

5. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$ και τα σημεία Α και Ρ που βρίσκονται πάνω στην $y = f(x)$. Να εξηγήσετε με όσο το δυνατόν περισσότερες λεπτομέρειες, πώς μεταβάλλεται η κλίση της ευθείας ΡΑ που περνά από τα Ρ και Α, όταν το σημείο Α κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της $y = f(x)$ με κατεύθυνση το σημείο Ρ.



6. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3x^2 + 1$, για x ∈ (-∞,+∞).



6.α.) Ποια είναι η αριθμητική τιμή της συνάρτησης $y = f(x)$ όταν το x=α;

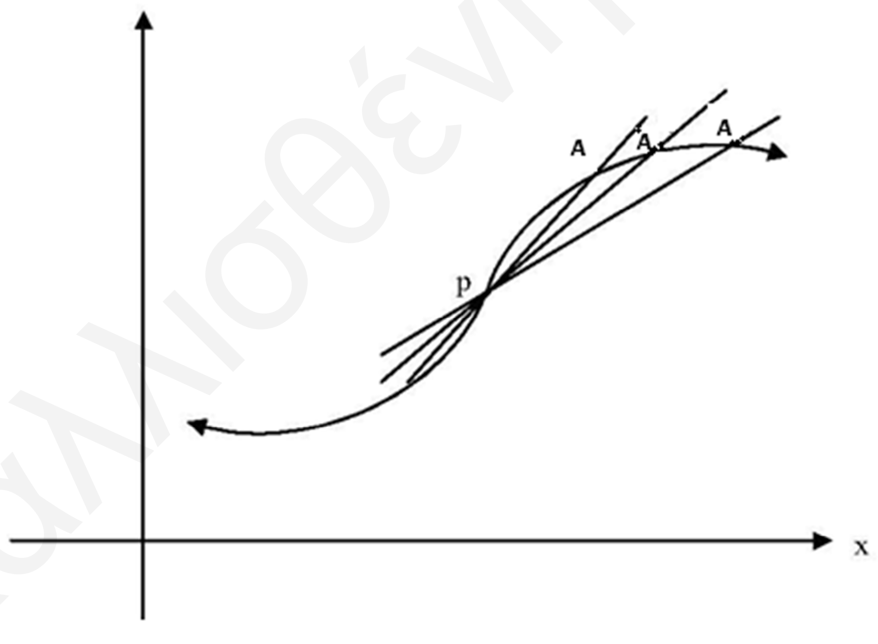
6.β.) Ποια είναι η αριθμητική τιμή της συνάρτησης $y = f(x)$, όταν το x=α+κ;

6.γ.) Πως μεταβάλλεται η συνάρτηση $y = f(x)$, όταν το x αυξάνεται από α σε α+κ;

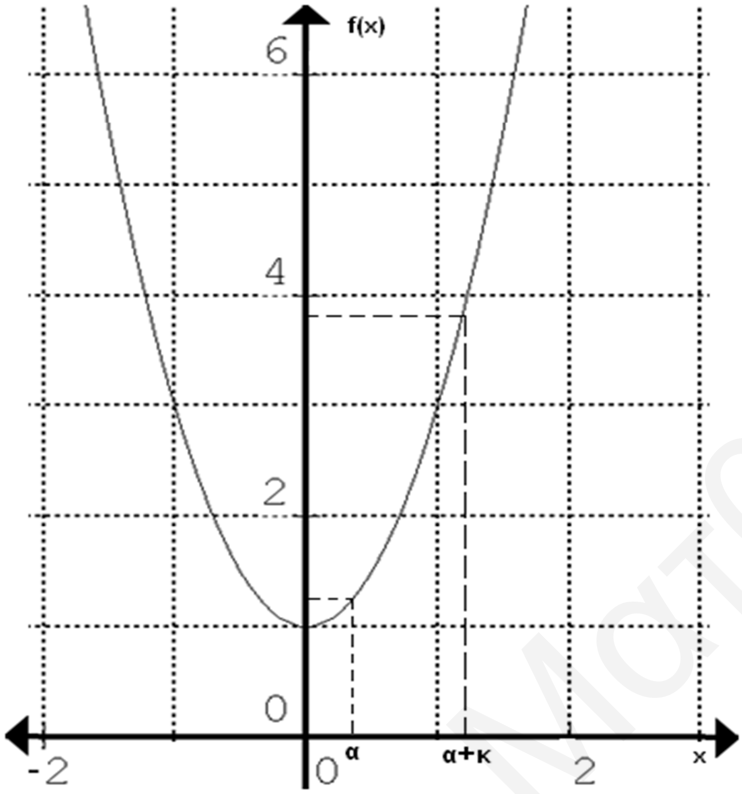
6.δ.) Να βρείτε τη μέση τιμή της συνάρτησης $y = f(x)$, όταν το *x* ∈ [α, α+κ];

Πιλοτική έρευνα - Δοκίμιο 2

1. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$ και τα σημεία Α και Ρ που βρίσκονται πάνω στην $y = f(x)$. Να εξηγήσετε με όσο το δυνατόν περισσότερες λεπτομέρειες, πώς μεταβάλλεται η κλίση της ευθείας ΡΑ που περνά από τα Ρ και Α, όταν το σημείο Α κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της $y = f(x)$ με κατεύθυνση το σημείο Ρ.



2. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=3x^2+1$, για x ∈ (-∞,+∞).



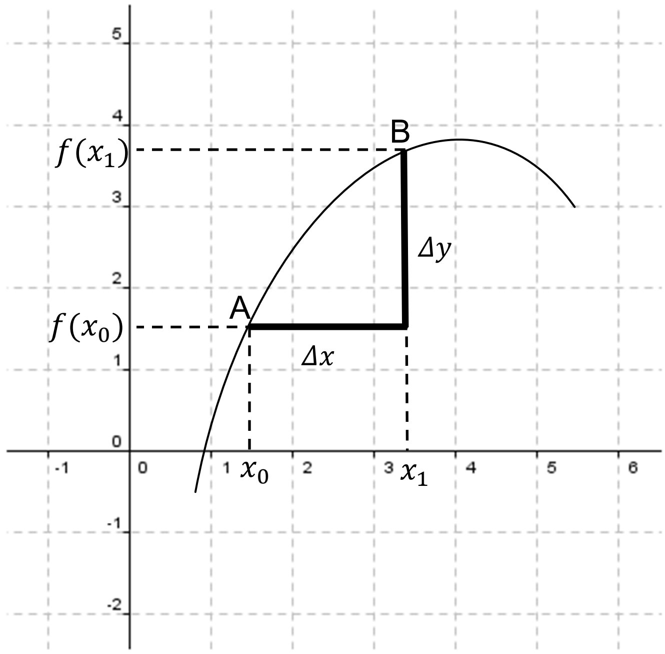
2.α.) Ποια είναι η αριθμητική τιμή της συνάρτησης $y=f(x)$ όταν το x=α;

2.β.) Ποια είναι η αριθμητική τιμή της συνάρτησης $y=f(x)$*, όταν το x=α+κ;*

2.γ.) Πως μεταβάλλεται η συνάρτηση $y=f(x)$, όταν το x αυξάνεται από α σε α+κ;

2.δ.) Να βρείτε τη μέση τιμή της συνάρτησης $y=f(x)$*, όταν το* *x* ∈ [α, α+κ];

3. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$.



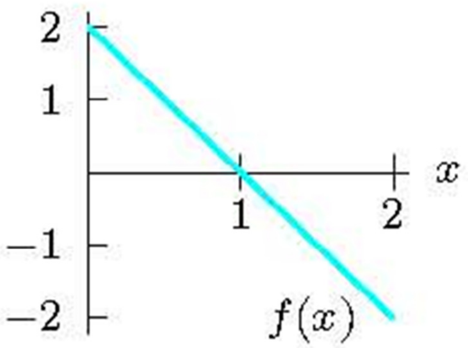
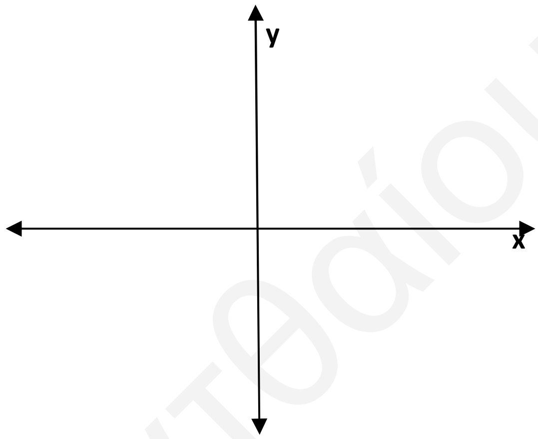
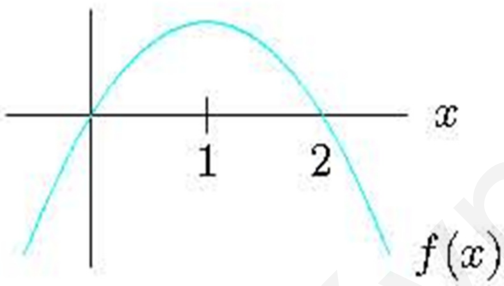
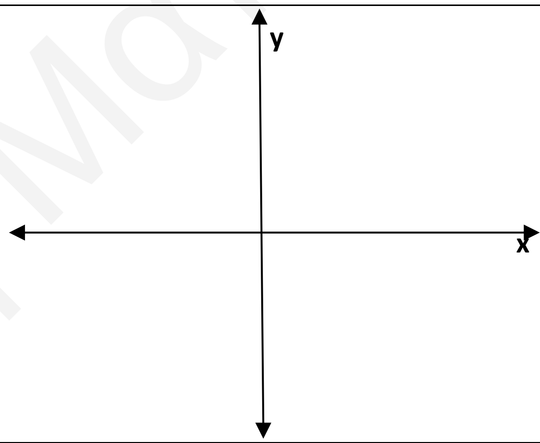
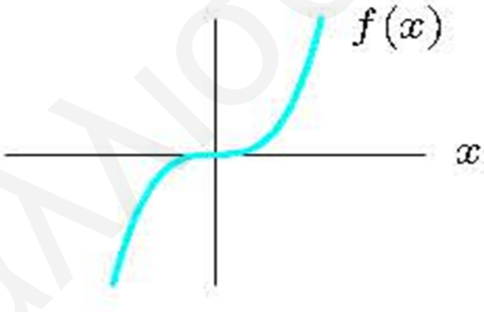
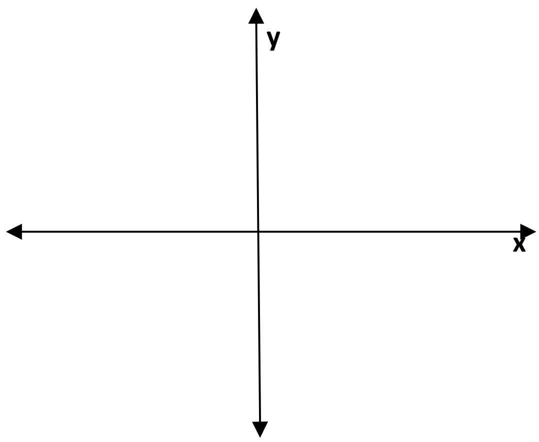
3α) Να βρείτε τη κλίση της χορδής ΑΒ.

3β) Αν το σημείο Β κινείται πάνω στη καμπύλη, με κατεύθυνση το σημείο Α, να βρείτε ένα μαθηματικό τύπο που να συνδέει την κλίση της χορδής ΑΒ και της εφαπτομένης στο σημείο Α.

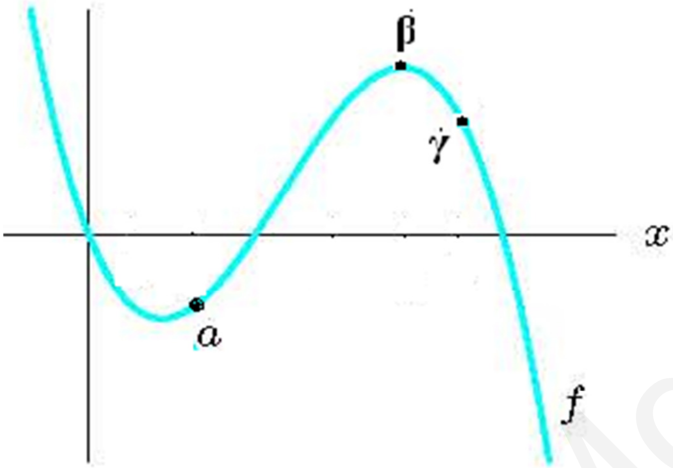
3γ) Να περιγράψετε τι παριστάνουν τα Δx και Δy;

3δ) Πότε μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη;

4. Στην στήλη Α βλέπετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$. Να παραστήσετε γραφικά την παράγωγο της $f(x)$, στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων που υπάρχει στη στήλη Β. (όχι με απόλυτη ακρίβεια).

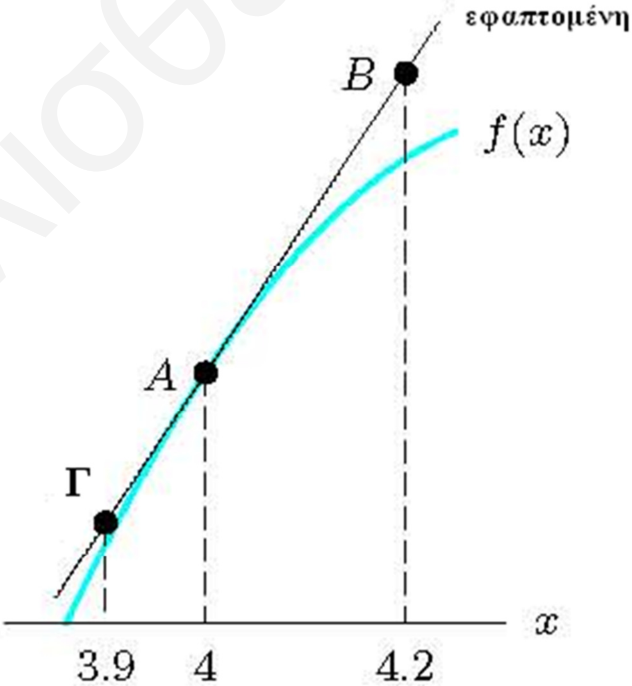
Α	Β
	
	
	

5. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$. Να αντιστοιχίσετε τις παραγώγους που φαίνονται στον πίνακα με τα σημεία α, β και γ στη γραφική παράσταση.



Σημειο	$f'(x)$
	0
	0.5
	-2

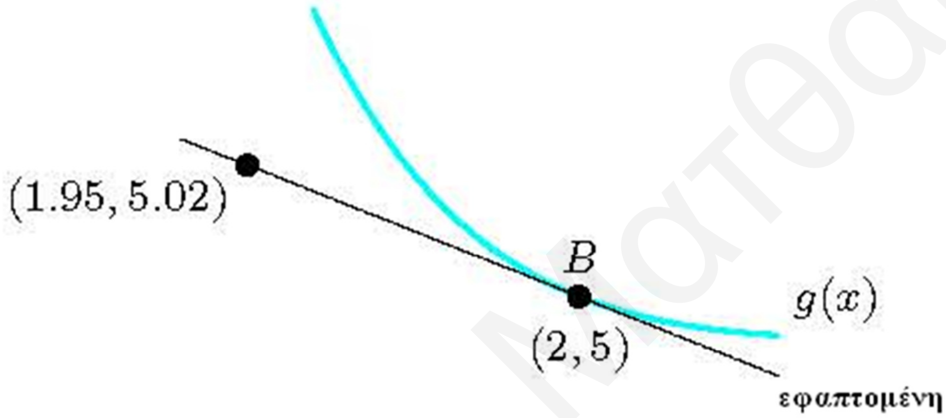
6. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$. Ισχύει ότι $f(4) = 25$ και $f'(4) = 1{,}5$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β και Γ.



7. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = g(x)$. Με τη βοήθεια του σχήματος να συμπληρώσετε τα κενά στις πιο κάτω ισότητες αν αναφερόμαστε στο σημείο Β.

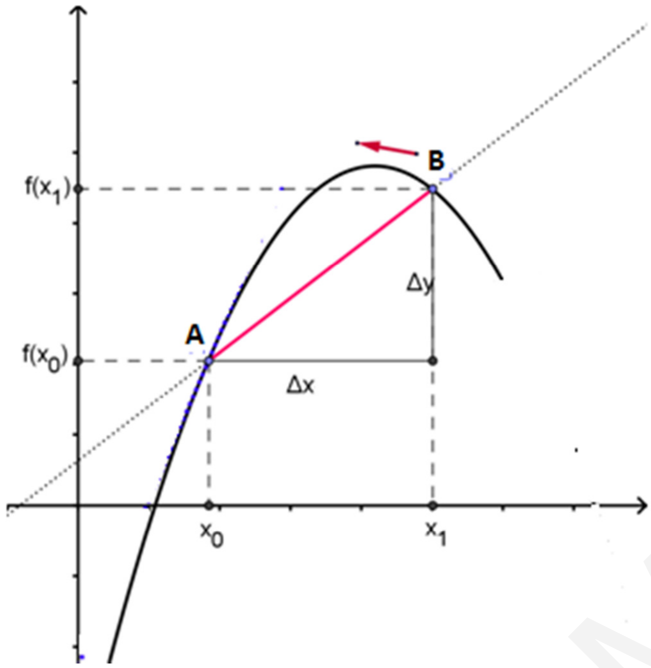
α) g(___) = ______

β) g΄(___) = ______



Κυρίως Έρευνα - Δοκίμιο 1

1. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$.



α) Να βρείτε τη κλίση της χορδής ΑΒ.

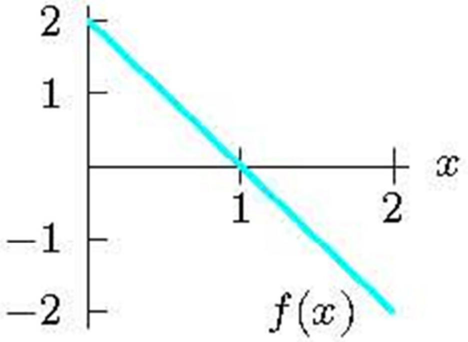
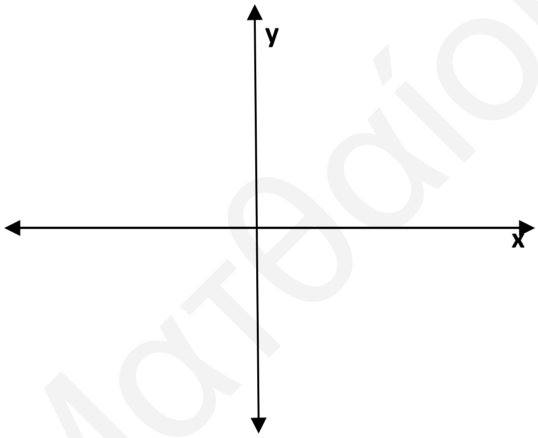
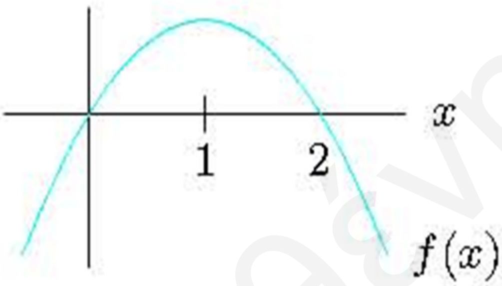
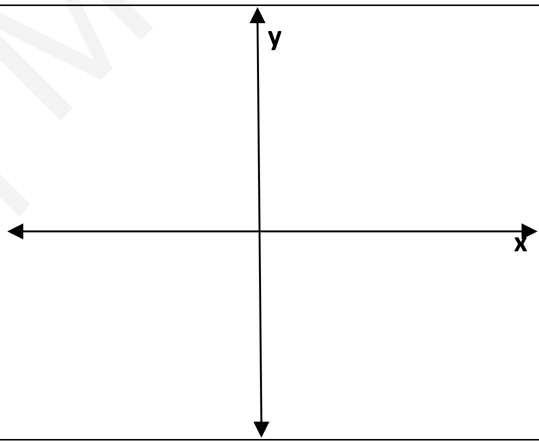
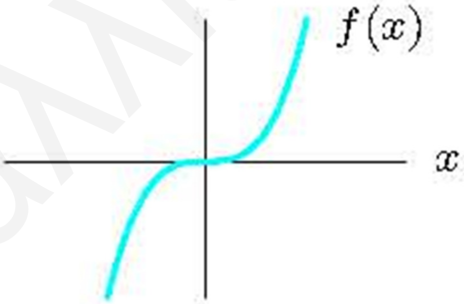
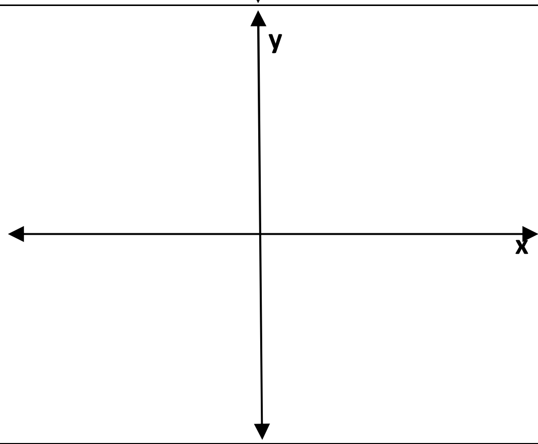
β) Να περιγράψετε τι παριστάνουν τα Δx και Δy;

γ) Τι θα συμβεί με τη χορδή ΑΒ αν θεωρήσουμε ότι το σημείο Β κινείται πάνω στην καμπύλη και πλησιάζει συνεχώς το σημείο Α;

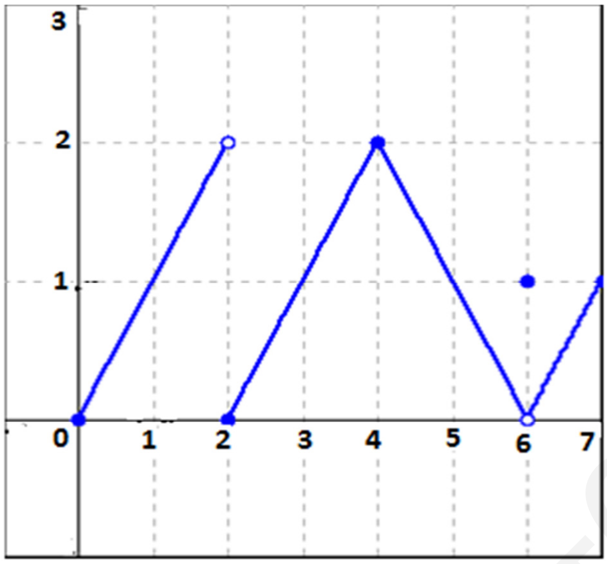
δ) Αν θεωρήσουμε ότι το σημείο Β κινείται πάνω στην καμπύλη και πλησιάζει συνεχώς το σημείο Α, να βρείτε ένα μαθηματικό τύπο που να συνδέει την κλίση της χορδής ΑΒ και της εφαπτομένης στο σημείο Α.

ε) Πότε μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη;

2. Στην στήλη Α βλέπετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$. Να παραστήσετε γραφικά την παράγωγο της $f(x)$, στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων που υπάρχει στη στήλη Β. (όχι με απόλυτη ακρίβεια).

Α $f(x)$	**Β** $f'(x)$
	
	
	

3. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$, που βλέπετε πιο κάτω, να απαντήσετε στα ερωτήματα:



Να βρείτε την τιμή της παραγώγου της συνάρτησης $f(x)$ στα διάφορα σημεία, αν υπάρχει. Αν δεν υπάρχει παράγωγος σημειώστε «δεν υπάρχει»:

α) $f'(1) =$

β) $f'(2) =$

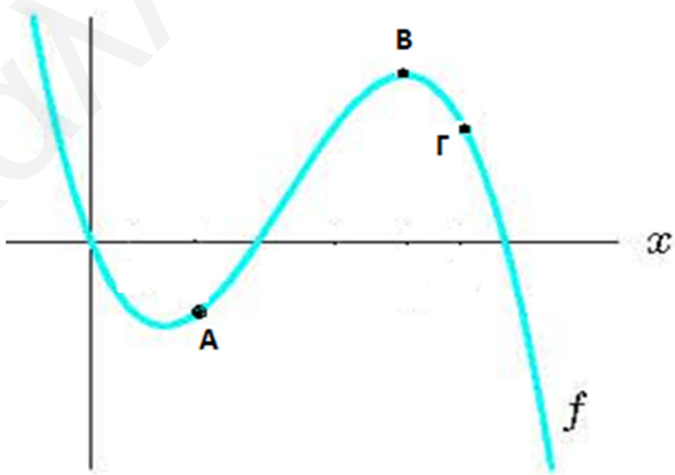
γ) $f'(3) =$

δ) $f'(4) =$

ε) $f'(5) =$

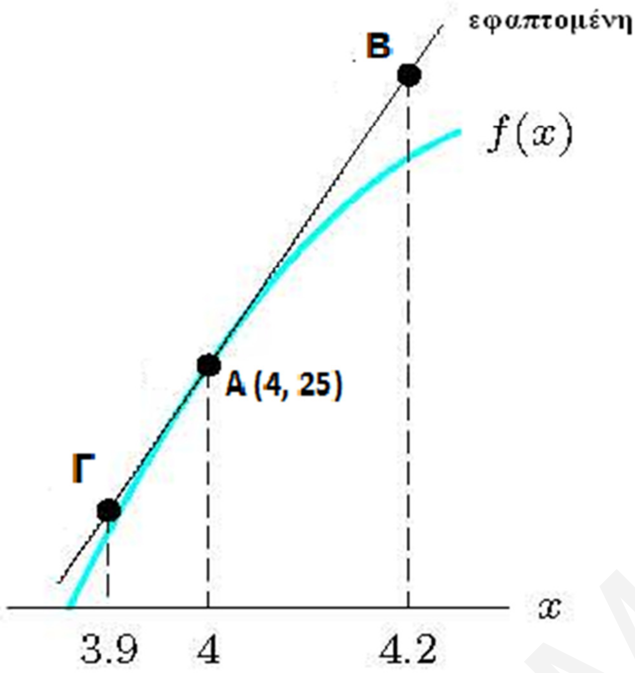
στ) $f'(6) =$

4. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$. Να αντιστοιχίσετε τις παραγώγους που φαίνονται στον πίνακα με τα σημεία Α, Β και Γ στη γραφική παράσταση.



Σημείο	$f'(x)$
	0
	0.5
	-2

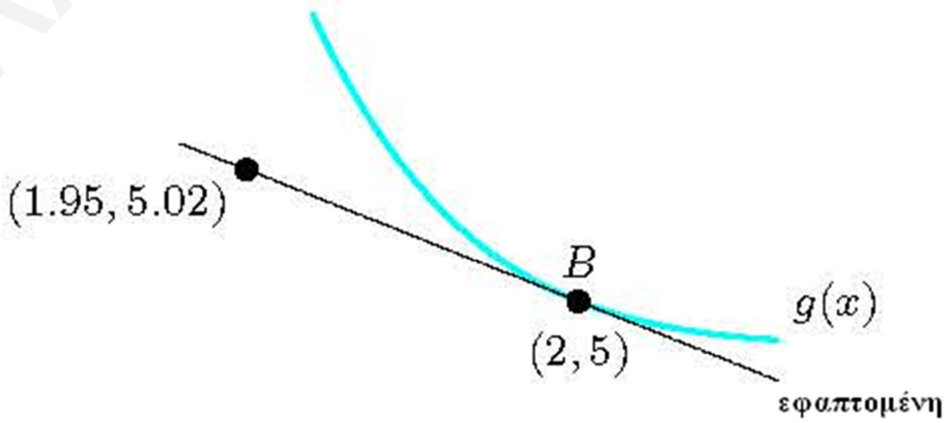
5. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$. Ισχύει ότι $f(4) = 25$ και $f'(4) = 1{,}5$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Β και Γ.



6. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = g(x)$. Με τη βοήθεια του σχήματος να συμπληρώσετε τα κενά στις πιο κάτω ισότητες αν αναφερόμαστε στο σημείο Β.

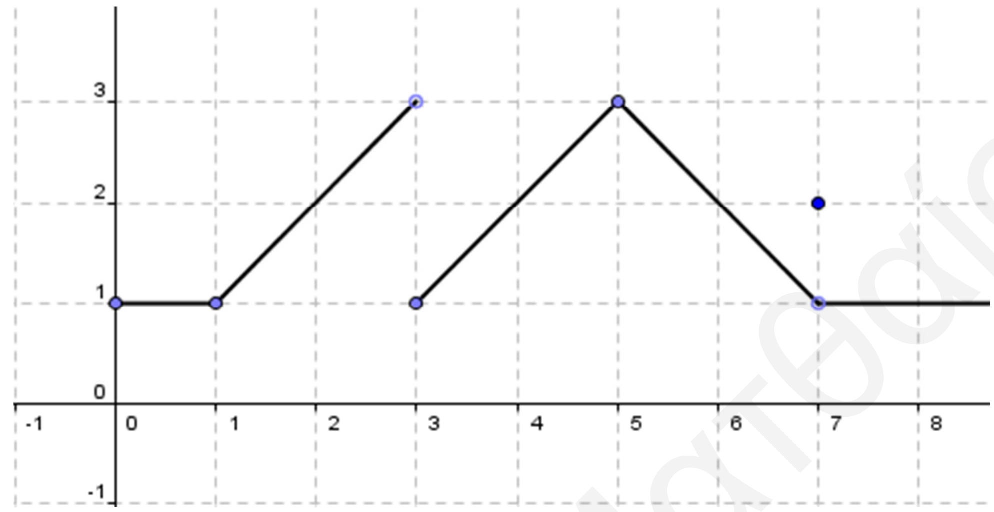
α) g(2) = ______

β) g΄(2) = ______



Κυρίως Έρευνα - Δοκίμιο 2

1. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$, που βλέπετε πιο κάτω, να απαντήσετε στα ερωτήματα:



Να βρείτε την τιμή της παραγώγου της συνάρτησης $f(x)$ στα διάφορα σημεία, αν υπάρχει. Αν δεν υπάρχει παράγωγος σημειώστε «δεν υπάρχει»:

α) $f'(1) =$

β) $f'(2) =$

γ) $f'(3) =$

δ) $f'(4) =$

ε) $f'(6) =$

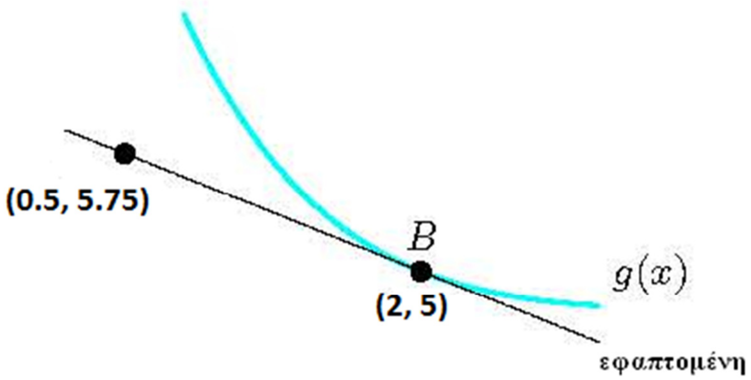
στ) $f'(7) =$

ε) $f'(8) =$

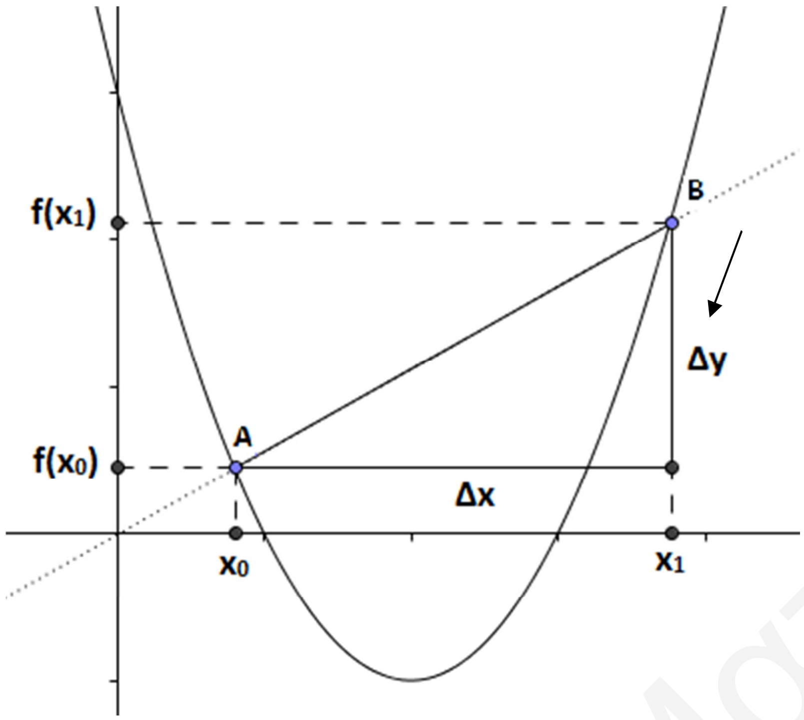
2. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = g(x)$. Με τη βοήθεια του σχήματος να συμπληρώσετε τα κενά στις πιο κάτω ισότητες αν αναφερόμαστε στο σημείο Β.

α) g(2) = ______

β) g΄(2) = ______



3. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$.



α) Να βρείτε την κλίση της χορδής ΑΒ.

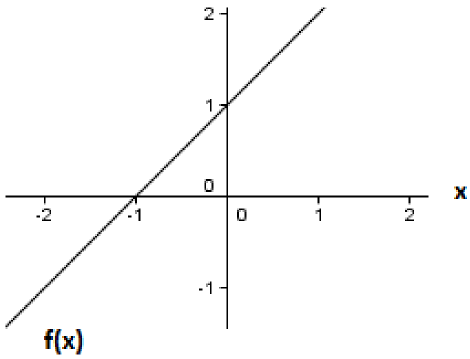
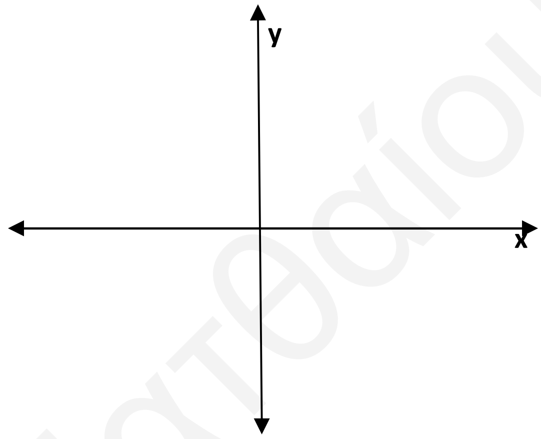
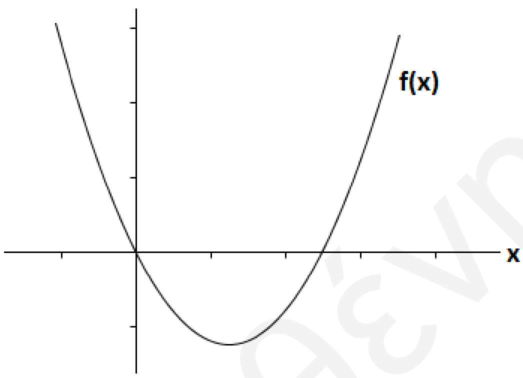
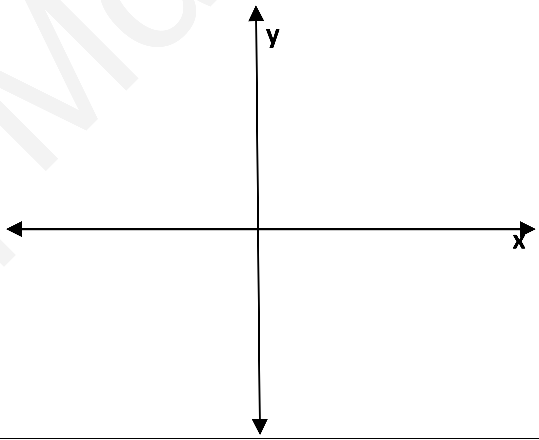
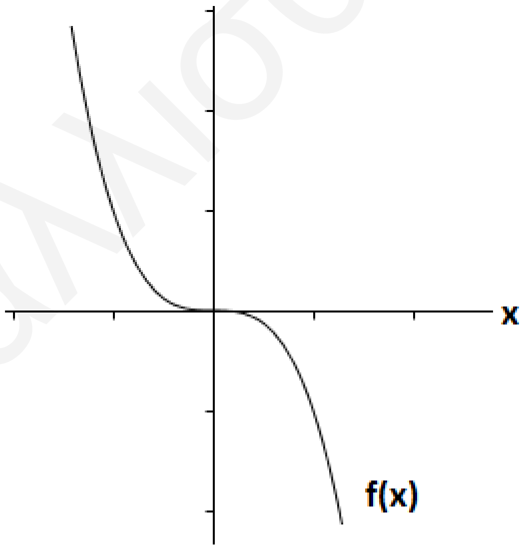
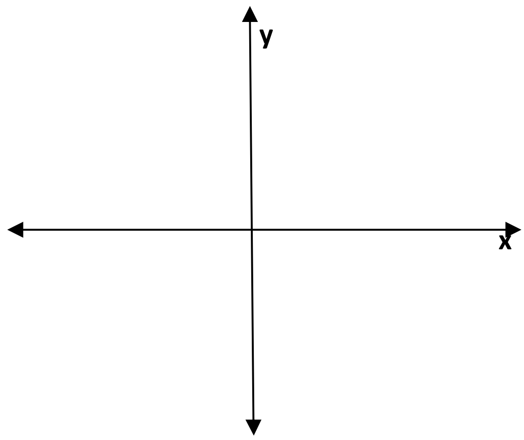
β) Να περιγράψετε τι παριστάνουν τα Δx και Δy;

γ) Τι θα συμβεί με τη χορδή ΑΒ αν θεωρήσουμε ότι το σημείο Β κινείται πάνω στην καμπύλη και πλησιάζει συνεχώς το σημείο Α;

δ) Αν θεωρήσουμε ότι το σημείο Β κινείται πάνω στην καμπύλη και πλησιάζει συνεχώς το σημείο Α, να βρείτε ένα μαθηματικό τύπο που να συνδέει την κλίση της χορδής ΑΒ και της εφαπτομένης στο σημείο Α.

ε) Πότε μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη;

4. Στην στήλη Α βλέπετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$. Να παραστήσετε γραφικά την παράγωγο της $f(x)$, στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων που υπάρχει στη στήλη Β. (όχι με απόλυτη ακρίβεια).

Α $f(x)$	**Β** $f'(x)$
	
	
	

5. Από τη γραφική παράσταση $y = f(x)$ που δίνεται στο σχήμα, να βάλετε σε σειρά τους πιο κάτω αριθμούς από τον μικρότερο στο μεγαλύτερο (π.χ. Ε<Στ):

Α) Η κλίση της γραφικής παράστασης στο σημείο Α

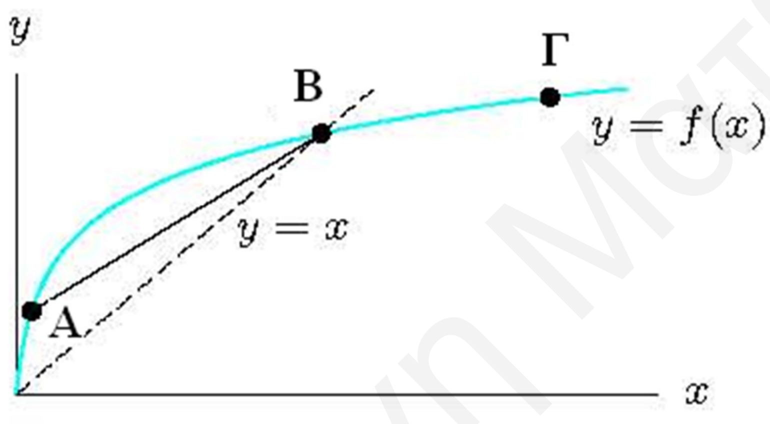
Β) Η κλίση της γραφικής παράστασης στο σημείο Β

Γ) Η κλίση της γραφικής παράστασης στο σημείο Γ

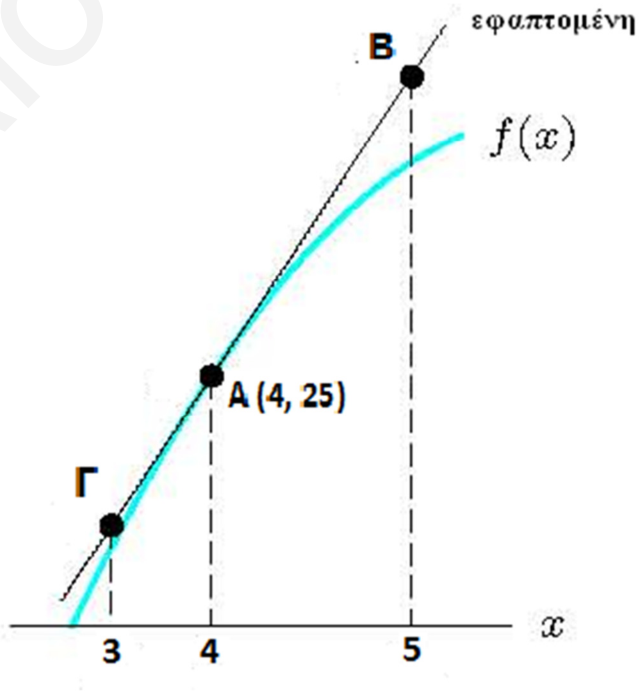
Δ) Η κλίση της ευθείας ΑΒ

Ε) Ο αριθμός 0

Στ) Ο αριθμός 1



6. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$. Ισχύει ότι $f(4) = 25$ και $f'(4) = 1{,}5$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Β και Γ.

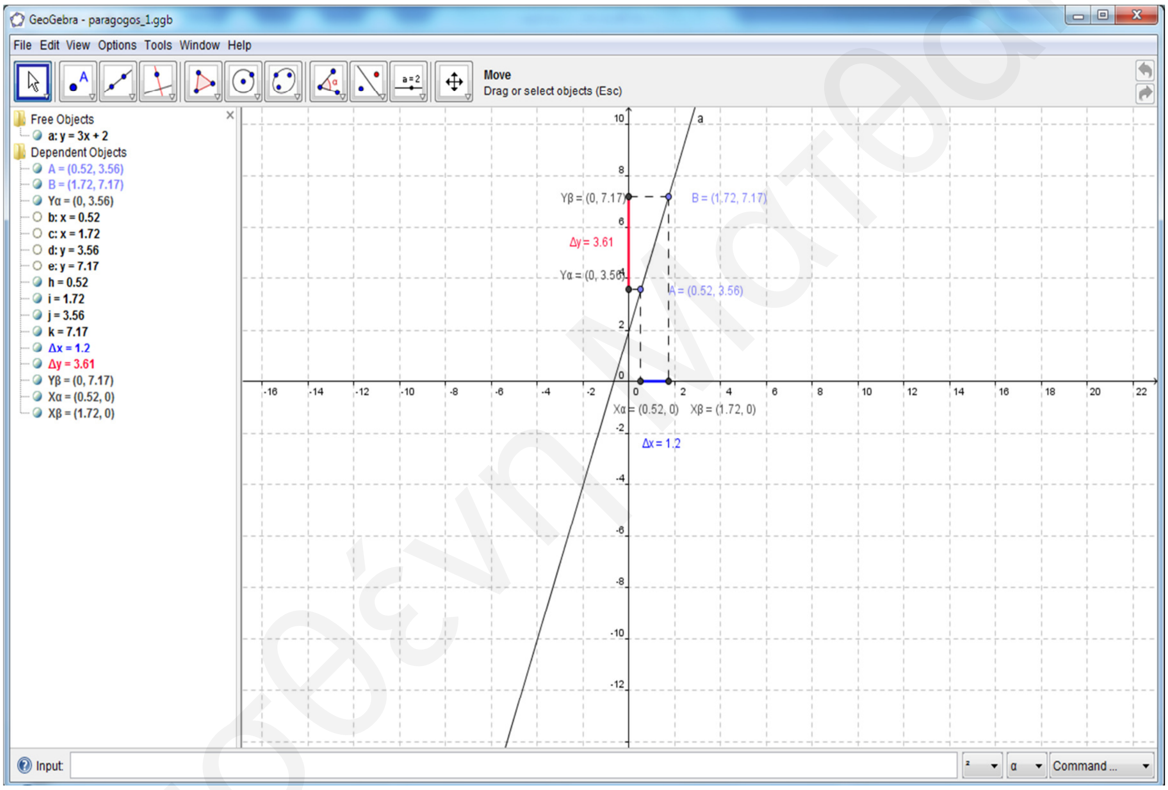


Διδασκαλία 1

Οι Συμβολισμοί Δx και Δy

Δραστηριότητα 1:

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «παράγωγος_1». Στο σχήμα βλέπετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = 3x + 2$. Τα σημεία Α και Β βρίσκονται πάνω στην ευθεία.

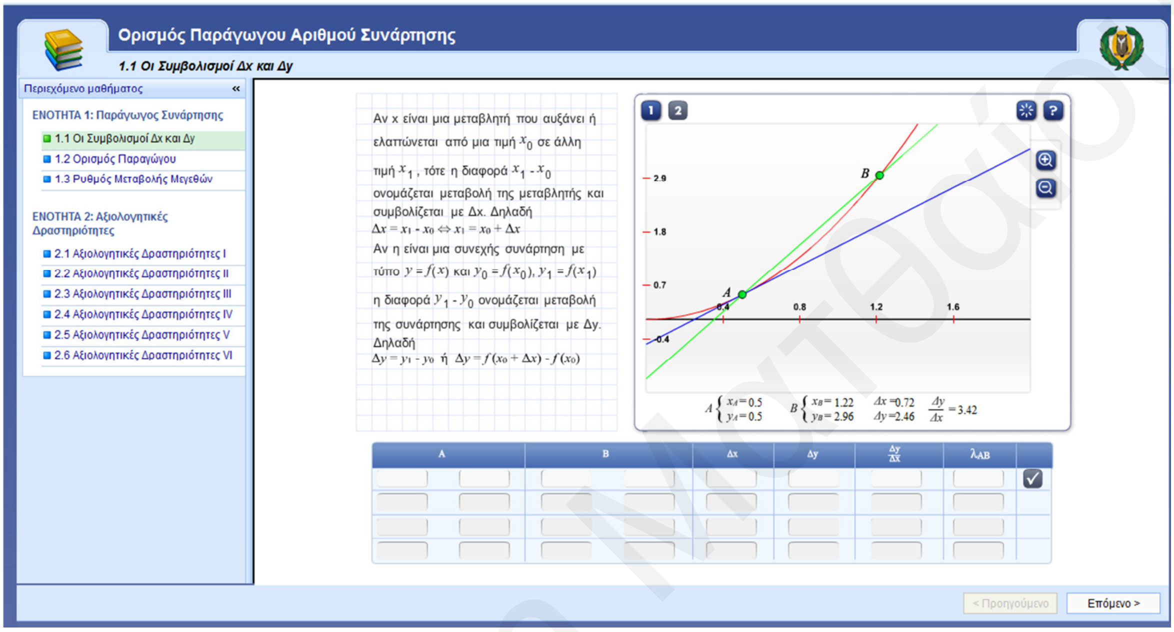


Να μετακινήσετε τα σημεία Α και Β σε διάφορες θέσεις πάνω στην ευθεία και να συμπληρώσετε το πίνακα.

$A(x_α, y_α)$	$B(x_β, y_β)$	$x_β - x_α$	$y_β - y_α$	Δx	Δy

Δραστηριότητα 2:

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «Ορισμός Παραγώγου Αριθμού Συνάρτησης – υποενότητα 1.1». Να επιλέξετε την εφαρμογή . Να μετακινήσετε τα σημεία Α και Β σε διάφορες θέσεις πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης και να συμπληρώσετε το πίνακα.



$A(x_\alpha, y_\alpha)$	$B(x_\beta, y_\beta)$	$x_\beta - x_\alpha$	$y_\beta - y_\alpha$	Δx	Δy

Να παρατηρήσετε τις τιμές των $x_\beta - x_\alpha$, $y_\beta - y_\alpha$, Δx και Δy στους πίνακες που συμπληρώσατε στις δραστηριότητες 1 και 2 .

Με βάση τις παρατηρήσεις σας να περιγράψετε τι είναι τα Δx και Δy;

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

Δραστηριότητα 3:

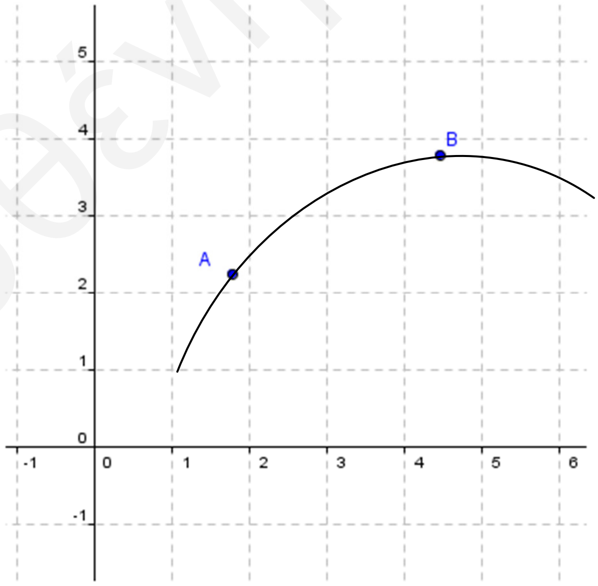
1. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $y = x^2 + 4$. Να βρείτε τη μεταβολή Δy, αν η μεταβλητή x παίρνει τιμές:
   από 3 ως 4 …………………………………………………………………
   από -5 ως -1………………………………………………………………..
   από α ως β…………………………………………………………………
2. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $y = f(x)$. Να βρείτε τη μεταβολή Δy, αν η μεταβλητή x παίρνει τιμές από α ως β με α<β.
   ………………………………………………………………………………………
   ………………………………………………………………………………………

Δραστηριότητα 4:

Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $y = f(x)$. Αν η τετμημένη του σημείου Α είναι η x_0, ποια είναι η τεταγμένη του; ……………………………………………………………………………………………..

Αν η τετμημένη του σημείου Β είναι η $x_0 + \Delta x$, ποια είναι η τεταγμένη του; ……………………………………………………………………………………………..

Να σημειώσετε πάνω στους άξονες των x και y τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β.



Να βρείτε τη μεταβολή Δy, όταν η μεταβλητή x από x_0 γίνει $x_0 + \Delta x$.

……………………………………………………………………………………………..

Δραστηριότητα 5:

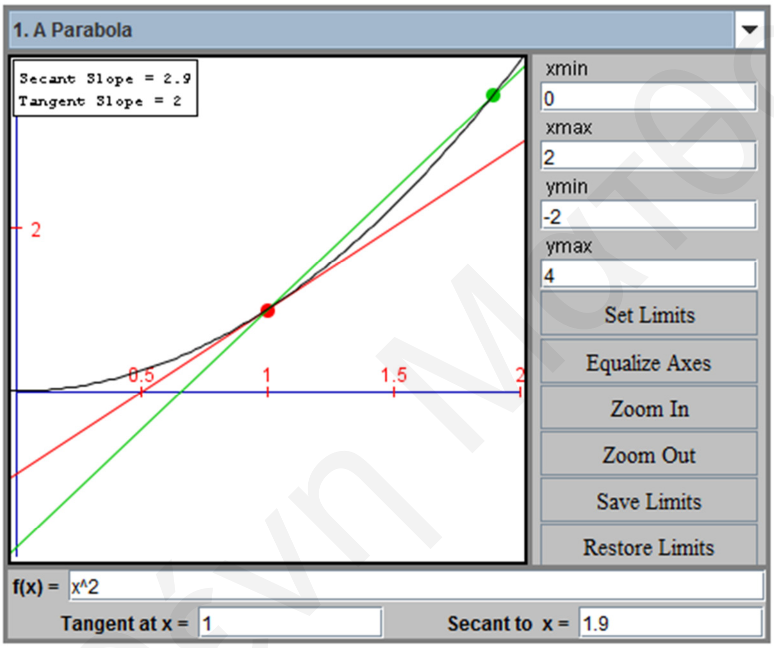
Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $y = x^2$. Να βρείτε τη μεταβολή Δy, όταν η μεταβλητή x από x_0 γίνει $x_0 + \Delta x$.

Διδασκαλία 2

Η έννοια της παραγώγου

Δραστηριότητα 1:

Να μπείτε στην ιστοσελίδα http://www.calculusapplets.com/ και να ανοίξετε το εφαρμογίδιο “derivative at a point”.



Στην οθόνη σας βλέπετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2$. Να σύρετε το πράσινο σημείο πάνω στη καμπύλη και να παρατηρήσετε τη συμβαίνει με τη κλίση της χορδής που ενώνει το πράσινο και το κόκκινο σημείο και τη κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης στο κόκκινο σημείο. Να επαναλάβετε τη διαδικασία τοποθετώντας το κόκκινο σημείο και σε άλλες θέσεις.

………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

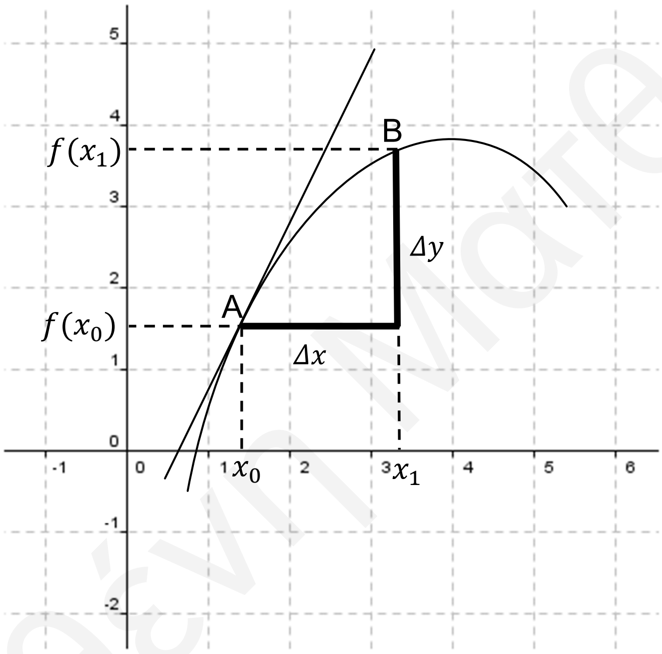
Να ενεργοποιήσετε το πλήκτρο , για να επιλέξετε και άλλες συναρτήσεις. Να επαναλάβετε τη προηγούμενη διαδικασία.

Τι παρατηρείτε;

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

Δραστηριότητα 2:

Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$.



Να βρείτε τη κλίση της χορδής ΑΒ. …………………………………………………

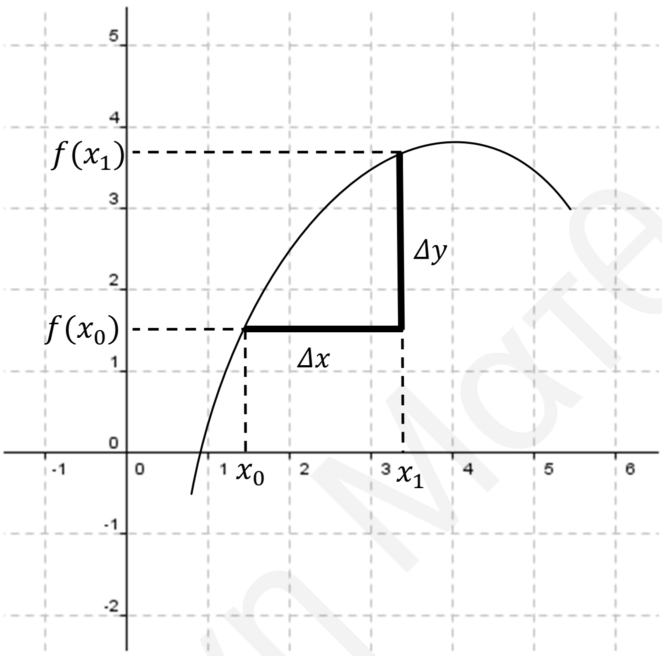
Αν το σημείο Β κινείται πάνω στη καμπύλη, με κατεύθυνση το σημείο Α, να βρείτε ένα μαθηματικό τύπο που να συνδέει τη κλίση της χορδής ΑΒ και της εφαπτομένης στο σημείο Α. (Να μελετήσετε τις παρατηρήσεις σας στη δραστηριότητα 1)

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

Θεωρία που δόθηκε μετά τη 2η διδασκαλία

Η έννοια της παραγώγου

- Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$.



- Η μεταβλητή x αυξάνεται ή ελαττώνεται από μια τιμή x_0 σε μια τιμή x_1. Η διαφορά $\Delta x = x_1 - x_0$, ονομάζεται μεταβολή της μεταβλητής.
- Η εξαρτημένη μεταβλητή y μεταβάλλεται από $y_0 = f(x_0)$ σε $y_1 = f(x_1)$. Η διαφορά $\Delta y = y_1 - y_0$, ονομάζεται μεταβολή της συνάρτησης.
- Ο λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ λέγεται μέση τιμή του ρυθμού μεταβολής της συνάρτησης ως προς x.

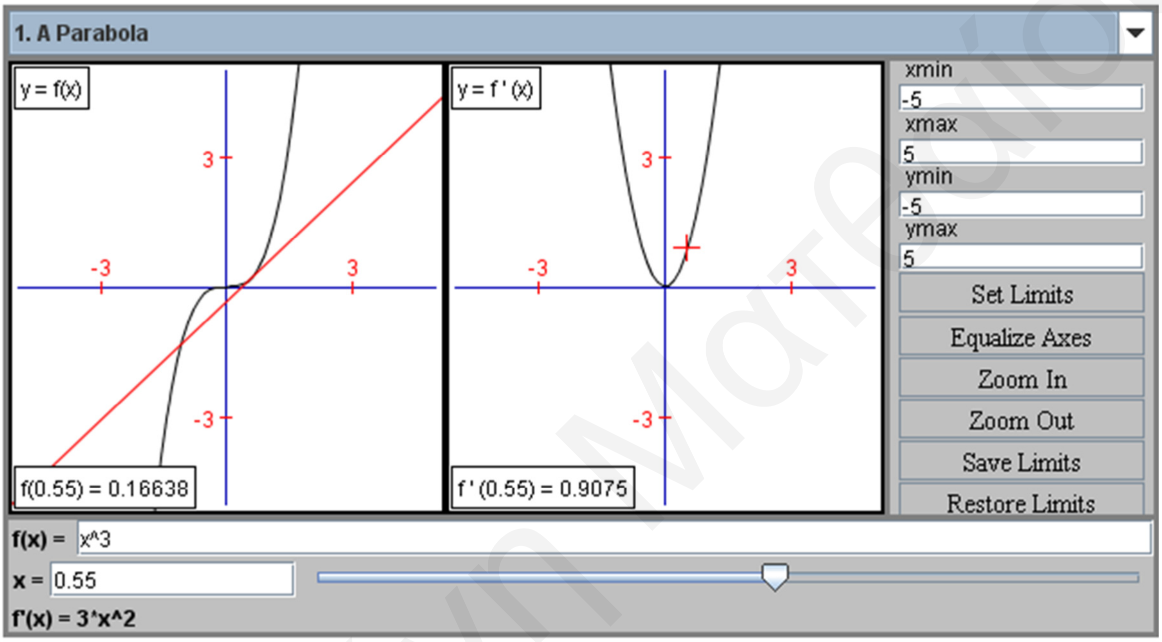
- Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ και συμβολίζεται $f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Διδασκαλία 3

Παράγωγος Βασικών Συναρτήσεων

Να μπείτε στην ιστοσελίδα http://www.calculusapplets.com/ και να ανοίξετε το εφαρμογίδιο “derivative function”.



Δραστηριότητα 1:

Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3$, γράφοντας τον τύπο στη συνάρτησης στο **f(x) =** . Στο αριστερό μέρος της οθόνης βλέπετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και στο δεξιό τη γραφική παράσταση της παραγώγου της συνάρτησης.

Ποια μορφή έχει η γραφική παράσταση της $f(x)$;

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

Ποια μορφή έχει η γραφική παράσταση της παραγώγου της $f(x)$;

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

Να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό για τον υπολογισμό της παραγώγου, για να βρείτε τη παράγωγο της $f(x) = 3$.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό για τον υπολογισμό της παραγώγου, για να βρείτε τη παράγωγο της $f(x) = c$, όπου c είναι σταθερός αριθμός.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Δραστηριότητα 2:

Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x$, γράφοντας τον τύπο στη συνάρτησης στο **f(x) =** . Στο αριστερό μέρος της οθόνης βλέπετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και στο δεξιό τη γραφική παράσταση της παραγώγου της συνάρτησης.

Ποια μορφή έχει η γραφική παράσταση της $f(x)$;

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Ποια μορφή έχει η γραφική παράσταση της παραγώγου της $f(x)$;

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό για τον υπολογισμό της παραγώγου, για να βρείτε τη παράγωγο της $f(x) = x$.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Δραστηριότητα 3:

Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2$, γράφοντας τον τύπο στη συνάρτησης στο **f(x) =** . Στο αριστερό μέρος της οθόνης βλέπετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και στο δεξιό τη γραφική παράσταση της παραγώγου της συνάρτησης.

Ποια μορφή έχει η γραφική παράσταση της $f(x)$;

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Ποια μορφή έχει η γραφική παράσταση της παραγώγου της $f(x)$;

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό για τον υπολογισμό της παραγώγου, για να βρείτε τη παράγωγο της $f(x) = x^2$.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Δραστηριότητα 4:

Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3$, γράφοντας τον τύπο στη συνάρτησης στο **f(x) =** . Στο αριστερό μέρος της οθόνης βλέπετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και στο δεξιό τη γραφική παράσταση της παραγώγου της συνάρτησης.

Ποια μορφή έχει η γραφική παράσταση της $f(x)$;

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Ποια μορφή έχει η γραφική παράσταση της παραγώγου της $f(x)$;

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό για τον υπολογισμό της παραγώγου, για να βρείτε τη παράγωγο της $f(x) = x^3$.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Δραστηριότητα 5:

Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^4$, γράφοντας τον τύπο στη συνάρτησης στο **f(x) =** . Στο αριστερό μέρος της οθόνης βλέπετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και στο δεξιό τη γραφική παράσταση της παραγώγου της συνάρτησης.

Ποια μορφή έχει η γραφική παράσταση της $f(x)$;

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Ποια μορφή έχει η γραφική παράσταση της παραγώγου της $f(x)$;

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό για τον υπολογισμό της παραγώγου, για να βρείτε τη παράγωγο της $f(x) = x^4$.

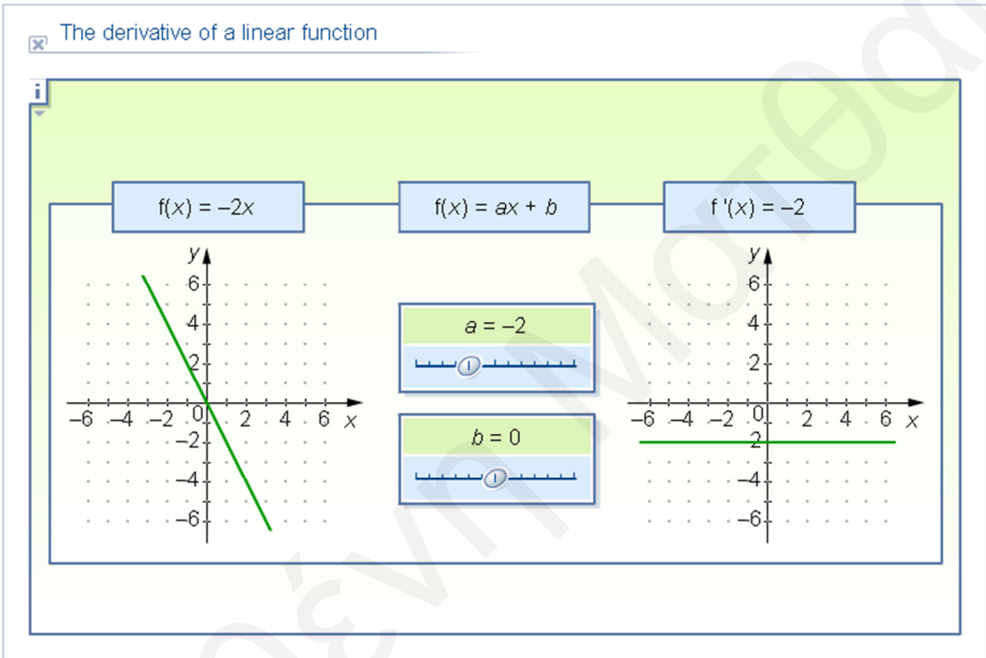
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Διδασκαλία 4

Κανόνες Παραγώγισης

Να μπείτε στην ιστοσελίδα:

http://www.yteach.co.uk/page.php/resources/view_all?id=differentiation_function_gradient_function_t_page_1&from=search.



Στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων που βλέπετε στο αριστερό μέρος της οθόνη σας κατασκευάζεται η γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha x + \beta$ και στο δεξιό της παραγώγου $f'(x)$ της $f(x)$.

Δραστηριότητα 1:

Να δώσετε κατάλληλες τιμές στα a και b, για να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων που βρίσκονται στη πρώτη στήλη του πιο κάτω πίνακα. Να παρατηρήσετε τις γραφικές παραστάσεις της $f(x)$ και της $f'(x)$, για να συμπληρώσετε τον πίνακα.

$f(x)$	$f'(x)$
x	
$2x$	
$3x$	
$5x$	

$-x$	
$-2x$	
$-3x$	
$-6x$	

Τι παρατηρείται για την $f'(x)$;

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

Μπορείτε να βρείτε ποια θα είναι η παράγωγος της $f(x) = \alpha x$, $\alpha \epsilon \mathbb{R}$;

………………………………………………………………………………………………..

Να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό για τον υπολογισμό της παραγώγου, για να βρείτε τη παράγωγο της $f(x) = \alpha x$, $\alpha \epsilon \mathbb{R}$.

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

Δραστηριότητα 2:

Να δώσετε κατάλληλες τιμές στα a και b, για να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων που βρίσκονται στη πρώτη στήλη του πιο κάτω πίνακα. Να παρατηρήσετε τις γραφικές παραστάσεις της $f(x)$ και της $f'(x)$, για να συμπληρώσετε τον πίνακα.

$f(x)$	$f'(x)$
x	
$x+1$	
$x+3$	
$x+5$	
$x-1$	
$x-2$	
$x-3$	
$x-6$	

Τι παρατηρείται για την $f'(x)$;

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

Μπορείτε να βρείτε ποια θα είναι η παράγωγος της $f(x) = x + \alpha$, $\alpha \epsilon \mathbb{R}$;

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

Να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό για τον υπολογισμό της παραγώγου, για να βρείτε τη παράγωγο της $f(x) = x + \alpha$, $\alpha \epsilon \mathbb{R}$.

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

Δραστηριότητα 3:

Να δώσετε κατάλληλες τιμές στα a και b, για να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων που βρίσκονται στη πρώτη στήλη του πιο κάτω πίνακα. Να παρατηρήσετε τις γραφικές παραστάσεις της $f(x)$ και της $f'(x)$, για να συμπληρώσετε τον πίνακα.

$f(x)$	$f'(x)$
x	
$2x + 1$	
$3x + 3$	
$-2x + 5$	
$-3x - 1$	
$3x - 2$	
$4x - 3$	
$-5x + 1$	

Τι παρατηρείται για την $f'(x)$;

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

Μπορείτε να βρείτε ποια θα είναι η παράγωγος της $f(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha \epsilon \mathbb{R}$;

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

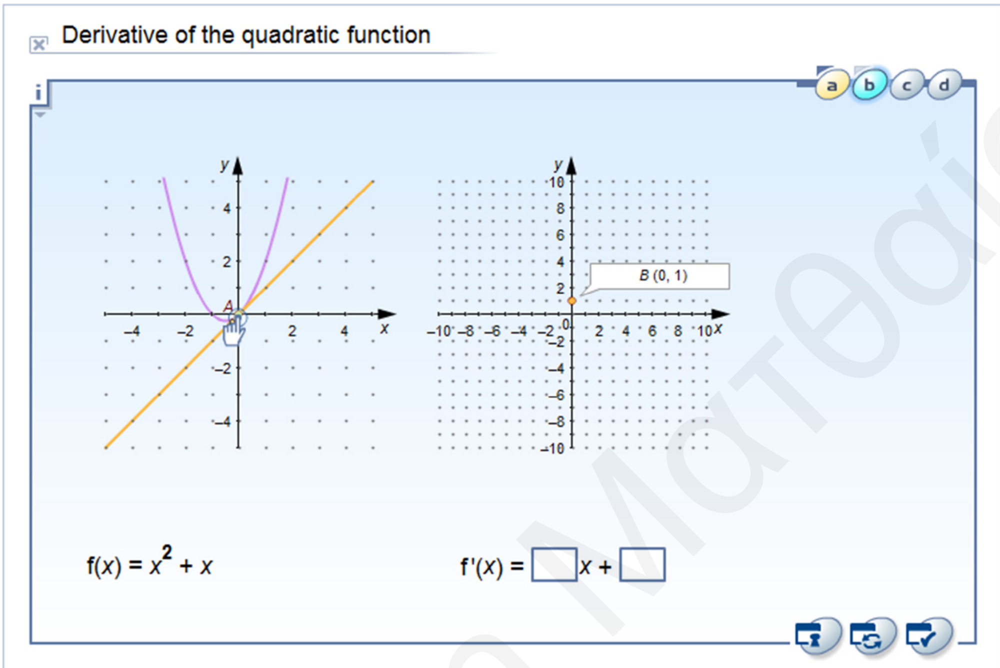
Να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό για τον υπολογισμό της παραγώγου, για να βρείτε τη παράγωγο της $f(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha \epsilon \mathbb{R}$.

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

Δραστηριότητα 4:

Να μπείτε στην ιστοσελίδα:

http://www.yteach.co.uk/page.php/resources/view_all?id=differentiation_function_gradient_polynomial_binomial_derivative_t_page_6&from=search



Στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων που βλέπετε στο αριστερό μέρος της οθόνης σας κατασκευάζεται η γραφική παράσταση της $f(x)$. Στο δεξιό φαίνονται τα διάφορα σημεία που ανήκουν στη γραφική παράσταση της $f'(x)$.

Να επιλέξετε διαδοχικά τα a, b, c, d και να μετακινήσετε το σημείο Α πάνω στη γραφική παράσταση της $f(x)$. Να παρατηρήσετε τις συντεταγμένες του σημείου Β για τις διάφορες θέσεις του σημείου Α και να βρείτε το τύπο της παραγώγου $f'(x)$ της $f(x)$.

Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

$f(x)$	$f'(x)$
$x^2 + x$	
$-x^2 + 4$	
$2x^2 - 3x$	
$3x^2 - x + 1$	

Τι παρατηρείται για την $f'(x)$ σε κάθε περίπτωση;

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Μπορείτε να βρείτε ποια θα είναι η παράγωγος της $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \epsilon \mathbb{R}$;

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό για τον υπολογισμό της παραγώγου, για να βρείτε τη παράγωγο της $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \epsilon \mathbb{R}$.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Δραστηριότητα 5:

Με βάση τις παρατηρήσεις στις προηγούμενες δραστηριότητες να απαντήσετε τα πιο κάτω ερωτήματα:

- Αν $f(x) = c \cdot u$, όπου u είναι συνάρτηση του x, τότε η παράγωγος $f'(x)$ της $f(x)$ θα είναι η …………………………………………………………...
- Αν $f(x) = u + v$, όπου u και v είναι συναρτήσεις του x, τότε η παράγωγος $f'(x)$ της $f(x)$ θα είναι η……………………………………….................

Να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό για τον υπολογισμό της παραγώγου, για να βρείτε τη παράγωγο της $f(x) = c \cdot u(x)$.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

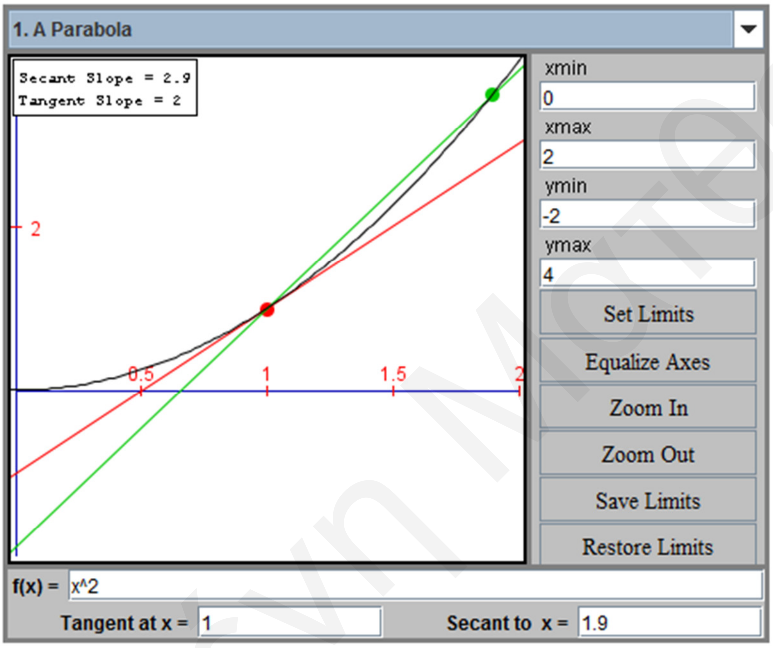
Να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό για τον υπολογισμό της παραγώγου, για να βρείτε τη παράγωγο της $f(x) = u(x) + v(x)$.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Διδασκαλία 5

Εφαρμογές των παραγώγων – Κλίση εφαπτομένης καμπύλης

Να μπείτε στην ιστοσελίδα http://www.calculusapplets.com/ και να ανοίξετε το εφαρμογίδιο “derivative at a point”.



- Στην οθόνη σας βλέπετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2$. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης.
  $f'(x) =$.................................

  Να δώσετε τις κατάλληλες τιμές στο x, για να συμπληρώσετε τον πίνακα.

x	$f'(x)$	$\lambda_{\varepsilon\varphi}$
-2		
-1		
0		
1		
2		

- Να επιλέξετε την καμπύλη $f(x) = ημx$. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης. $f'(x) =$………………………

  Να δώσετε τις κατάλληλες τιμές στο x, για να συμπληρώσετε τον πίνακα.

x	$f'(x)$	$λ_{εφ}$
-2		
-1		
0		
1		
2		

- Να επιλέξετε την καμπύλη $f(x) = 2^x$. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης. $f'(x) =$………………………

  Να δώσετε τις κατάλληλες τιμές στο x, για να συμπληρώσετε τον πίνακα.

x	$f'(x)$	$λ_{εφ}$
-2		
-1		
0		
1		
2		

- Να επιλέξετε την καμπύλη $f(x) = \frac{1}{x}$. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης. $f'(x) =$………………………

  Να δώσετε τις κατάλληλες τιμές στο x, για να συμπληρώσετε τον πίνακα.

x	$f'(x)$	$λ_{εφ}$
-2		
-1		
0		
1		
2		

Να παρατηρήσετε τα αποτελέσματα στους πιο πάνω πίνακες.

Τι παρατηρείται για τη σχέση της κλίσης της εφαπτομένης και της αριθμητικής τιμής της παραγώγου για τις διάφορες τιμές του x.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………...................

Να δώσετε ένα γενικό κανόνα για τη κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης σε οποιοδήποτε σημείο της καμπύλης.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

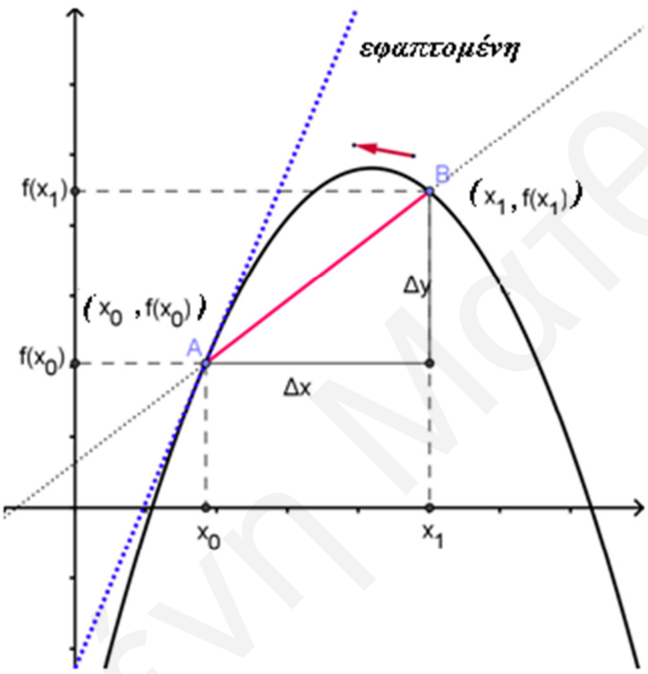
Να αιτιολογήσετε τη σχέση της κλίσης της εφαπτομένης της καμπύλης σε ένα σημείο και της παραγώγου της συνάρτησης σε αυτό το σημείο.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Διδασκαλία 1

Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου

- Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$,τα σημεία $A(x_0, f(x_0))$ και $B(x_1, f(x_1))$, η χορδή ΑΒ και η εφαπτομένη της καμπύλης στο Α.



➢ Να υπολογίσετε την κλίση της χορδής ΑΒ.

$\lambda_{AB} =$ …………………

➢ Αν Δx και Δy είναι αντίστοιχα οι διαφορές των τετμημένων και των τεταγμένων των σημείων Α και Β, τότε: $\Delta x =$………….. και $\Delta y =$…………... Η κλίση της ΑΒ θα δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda_{AB} = = \frac{\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Τι θα συμβεί με την χορδή ΑΒ αν θεωρήσουμε ότι το σημείο Β κινείται πάνω στην καμπύλη και πλησιάζει συνεχώς το σημείο Α;

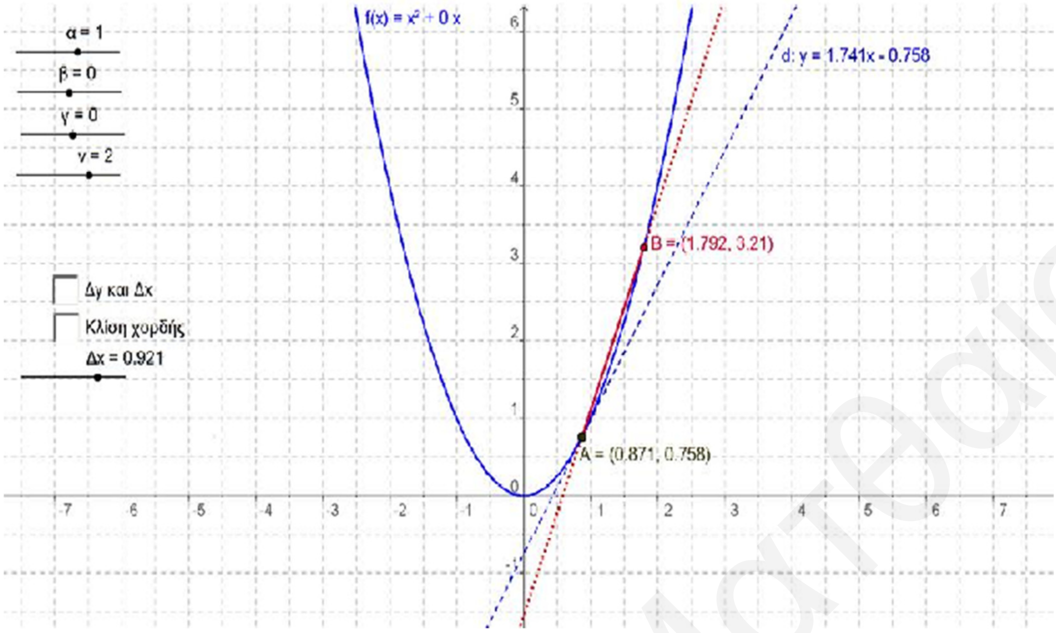
………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

Δραστηριότητα 1:

Να ανοίξετε το αρχείο “paragogos.ggb”.



Στην οθόνη σας βλέπετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2$. Με τη βοήθεια του δρομέα Δx **να σύρετε το σημείο Β προς το Α** πάνω στην καμπύλη.

Να παρατηρήσετε τι συμβαίνει **με τη χορδή ΑΒ** και την κλίση της, σε σχέση **με την εφαπτομένη της καμπύλης στο Α** και την κλίση της. Να επαναλάβετε τη διαδικασία τοποθετώντας το σημείο Α και σε άλλες θέσεις και να γράψετε τις παρατηρήσεις σας.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Πώς μπορούμε να ορίσουμε την κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης στο Α σε σχέση με την κλίση της τέμνουσας $\lambda_{AB} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ που ορίσαμε πιο πάνω;

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \lambda_{AB} = \lambda_{\varepsilon\varphi\alpha\pi\tau.}$ Άρα $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} = \lambda_{\varepsilon\varphi\alpha\pi\tau.}$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u>

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε και μόνο τότε, αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Αυτό το όριο λέγεται **παράγωγος της f στο x_0** και συμβολίζεται με:

$$f'(x_0) \qquad \text{ή} \qquad \frac{df(x_0)}{dx} \qquad \text{ή} \qquad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} .$$

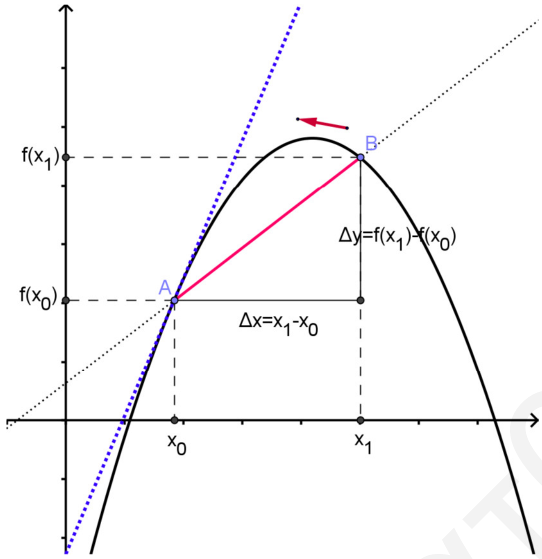
Να γράψετε ένα γενικό συμπέρασμα για την παράγωγο της συνάρτησης f στο x_0
.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

- Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$.



ΟΡΙΣΜΟΣ:

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε και μόνο τότε, αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Αυτό το όριο λέγεται **παράγωγος της f στο x_0** και συμβολίζεται με:

$$f'(x_0) \qquad \text{ή} \qquad \frac{df(x_0)}{dx} \qquad \text{ή} \qquad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} .$$

Παρατήρηση: Η παράγωγος της f στο x_0 μπορεί να θεωρηθεί ως η κλίση της εφαπτομένης της f στο x_0.

Διδασκαλία 2 – Παράγωγος Βασικών Συναρτήσεων

Παράγωγος Συνάρτησης

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 1:</u>

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε και μόνο τότε, αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Αυτό το όριο λέγεται **παράγωγος της f στο x_0** και συμβολίζεται με $f'(x_0)$.

<u>Παρατήρηση</u>: Η παράγωγος της f στο $\boldsymbol{x_0}$ μπορεί να θεωρηθεί ως η κλίση της εφαπτομένης της f στο $\boldsymbol{x_0}$.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 2:</u>

Έστω μια συνάρτηση f που ορίζεται σε ένα σύνολο Α$\subseteq R$. Η συνάρτηση $f'(x)$ η οποία ορίζεται με τον τύπο:

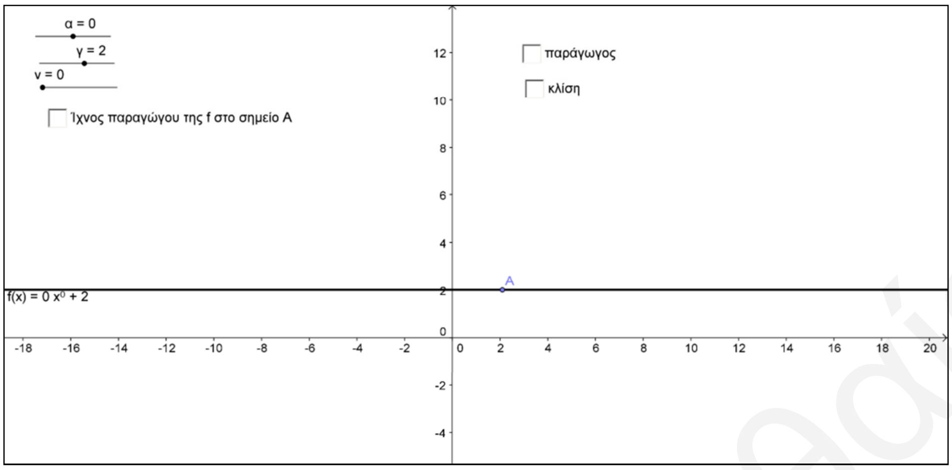
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ονομάζεται **παράγωγος** της συνάρτησης $f(x)$ ως προς x. Η $f'(x)$ ορίζεται σε όλα τα σημεία $x \in A$ στα οποία το πιο πάνω όριο υπάρχει.

<u>Παρατήρηση</u>: Η παράγωγος $f'(x)$ της f ως προς είναι ο γεωμετρικός τόπος όλων των σημείων $(x, f'(x))$, $x \in A$ στα οποία το πιο πάνω όριο υπάρχει. Σημειώστε ότι η τεταγμένη των σημείων αυτών μπορεί να θεωρηθεί ως η κλίση της εφαπτομένης της f στο αντίστοιχο $x \in A$.

Δραστηριότητα 1:

Να ανοίξετε το αρχείο “paragogos_1.ggb”.



Στην οθόνη σας βλέπετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^{\nu} + \gamma$. Με τη βοήθεια των δρομέων α, γ και ν, να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3$.

Επιλέγοντας το κουτί επιλογής για εμφάνιση του ίχνους της παραγώγου, μπορείτε να δείτε την τιμή της παραγώγου της f στο σημείο Α. Μετακινώντας το σημείο Α, μπορείτε να διαγράψετε τη γραφική παράσταση της παραγώγου.

Ποια μορφή έχει η γραφική παράσταση της $f(x)$;

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Να επαναλάβετε τη διαδικασία για τις συναρτήσεις $f(x) = 4$ και $f(x) = -2$

Ποια μορφή έχει η γραφική παράσταση της παραγώγου της $f(x)$; Μπορείτε να γράψετε την εξίσωση της παραγώγου της συνάρτησης $f(x)$;

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

(Να επαληθεύσετε τις απαντήσεις σας επιλέγοντας το κουτί επιλογής «παράγωγος»).

Να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό για τον υπολογισμό της παραγώγου, για να βρείτε την παράγωγο της $f(x) = 3$.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό για τον υπολογισμό της παραγώγου, για να βρείτε την παράγωγο της $f(x) = c$, όπου c είναι σταθερός αριθμός.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Δραστηριότητα 2:

Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x$ και να επαναλάβετε τα στάδια της δραστηριότητας 1, για να παρατηρήσετε την παράγωγο της συνάρτησης.

Ποια μορφή έχει η γραφική παράσταση της $f(x)$;

……………………………………………………………………………………………

Ποια μορφή έχει η γραφική παράσταση της παραγώγου της συνάρτησης $f(x)$; Μπορείτε να γράψετε την εξίσωση της παραγώγου της συνάρτησης $f(x)$; (Με το κουμπί επιλογής «κλίση» εμφανίζεται η κλίση της συνάρτησης στο σημείο Α).

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό για τον υπολογισμό της παραγώγου, για να βρείτε τη παράγωγο της $f(x) = x$.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Δραστηριότητα 3:

Να επαναλάβετε την ίδια διαδικασία για τη συνάρτηση $f(x) = x^2$, για να παρατηρήσετε την παράγωγο της συνάρτησης.

Ποια μορφή έχει η γραφική παράσταση της $f(x)$;

……………………………………………………………………………………………

Ποια μορφή έχει η γραφική παράσταση της παραγώγου της $f(x)$; Μπορείτε να γράψετε την εξίσωση της παραγώγου της συνάρτησης $f(x)$;

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Δραστηριότητα 4:

Να επαναλάβετε την ίδια διαδικασία για τη συνάρτηση $f(x) = x^3$.

Ποια μορφή έχει η γραφική παράσταση της παραγώγου της $f(x)$; Μπορείτε να γράψετε την εξίσωση της παραγώγου της συνάρτησης $f(x)$;

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Από τις παρατηρήσεις σας στις πιο πάνω δραστηριότητες, μπορείτε να δώσετε ένα γενικό τύπο για την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = x^\nu$;

……………………………………………………………………………………………

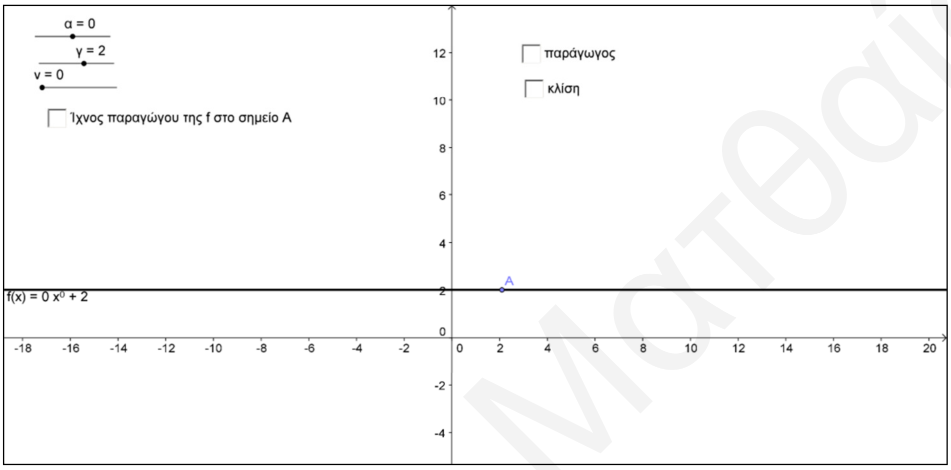
……………………………………………………………………………………………

Διδασκαλία 3

Κανόνες παραγώγισης

Δραστηριότητα 1:

Να ανοίξετε το αρχείο “paragogos_1.ggb”.



Στην οθόνη σας βλέπετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^{\nu}+\gamma$. Με τη βοήθεια των δρομέων, να δώσετε κατάλληλες τιμές στις παραμέτρους α, γ και ν, για να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων που βρίσκονται στην πρώτη στήλη του πιο κάτω πίνακα.

Επιλέγοντας το κουτί επιλογής για εμφάνιση του ίχνους της παραγώγου, μπορείτε να δείτε την τιμή της παραγώγου της f στο σημείο Α. Μετακινώντας το σημείο Α, μπορείτε να διαγράψετε τη γραφική παράσταση της παραγώγου.

(Μπορείτε να επαληθεύσετε τις απαντήσεις σας επιλέγοντας το κουτί επιλογής «παράγωγος»).

Να παρατηρήσετε τις γραφικές παραστάσεις της $f(x)$ και της $f'(x)$, για να συμπληρώσετε τον πίνακα.

$f(x)$	$f'(x)$
x	
$3x$	
$-x$	
$x+2$	
$-2x+3$	
$3x-1$	

Τι παρατηρείτε για την $f'(x)$;

………………………………………………………………………………………

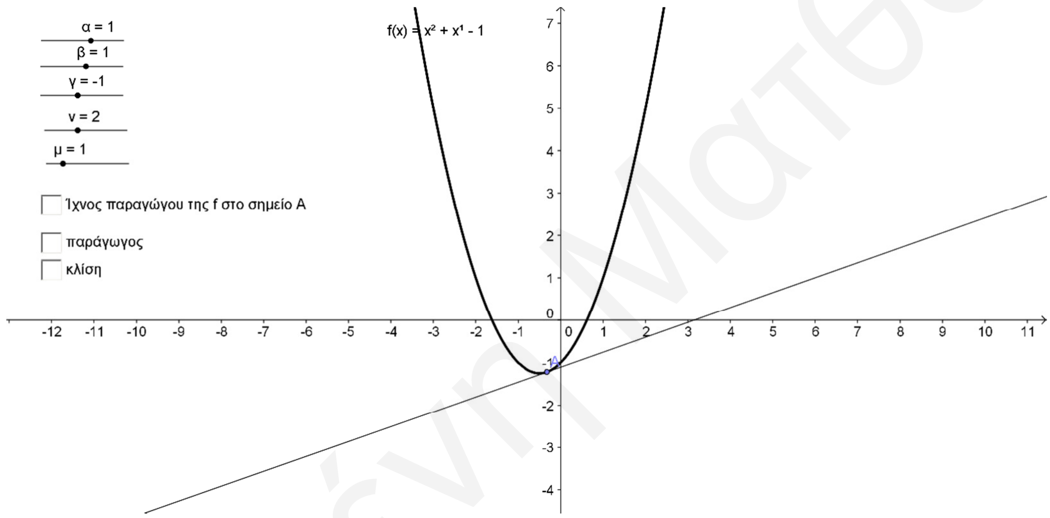
………………………………………………………………………………………

Μπορείτε να βρείτε ποια θα είναι η παράγωγος της $f(x) = \alpha x + \gamma$, $\alpha, \gamma \in R$;

………………………………………………………………………………………..

Δραστηριότητα 2:

Να ανοίξετε το αρχείο “paragogos_1a.ggb”.



Στην οθόνη σας βλέπετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^{\nu} + \beta x^{\mu} + \gamma$. Να δώσετε κατάλληλες τιμές στους δρομείς α, β, γ, ν και μ, για να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων που βρίσκονται στην πρώτη στήλη του πιο κάτω πίνακα. Να παρατηρήσετε τις γραφικές παραστάσεις της $f(x)$ και της $f'(x)$, για να συμπληρώσετε τον πίνακα.

$f(x)$	$f'(x)$
x^2	
$x^2 + x$	
$-x^2 + 4$	
$2x^2 - 3x$	
$3x^2 - x + 1$	

Τι παρατηρείτε για την $f'(x)$ σε κάθε περίπτωση;

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Μπορείτε να βρείτε ποια θα είναι η παράγωγος της $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$;

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Δραστηριότητα 3:

Να δώσετε κατάλληλες τιμές στους δρομείς α, β, γ, ν και μ, για να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων που βρίσκονται στην πρώτη στήλη του πιο κάτω πίνακα. Να παρατηρήσετε τις γραφικές παραστάσεις της $f(x)$ και της $f'(x)$, για να συμπληρώσετε τον πίνακα.

$f(x)$	$f'(x)$
$2x^3$	
$-2x^4$	
$2x^4 - 3x^2$	
$2x^5 - 3x^3$	

Μπορείτε να βρείτε ποια θα είναι η παράγωγος της $f(x) = \alpha x^\nu + \beta x^\mu$, αν $\alpha, \beta \in R$ και $\mu, \nu \in N$;

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Δραστηριότητα 4:

Με βάση τις παρατηρήσεις στις προηγούμενες δραστηριότητες να απαντήσετε τα πιο κάτω ερωτήματα:

- Αν $f(x)=c\cdot u(x)$, τότε η παράγωγος $f'(x)=$ ……………………
- Αν $f(x)=u(x)+v(x)$, τότε η παράγωγος $f'(x)=$ ……………………

Να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό για τον υπολογισμό της παραγώγου, για να βρείτε τη παράγωγο της $f(x)=c\cdot u(x)$.

………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………

Να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό για τον υπολογισμό της παραγώγου, για να βρείτε τη παράγωγο της $f(x)=u(x)+v(x)$.

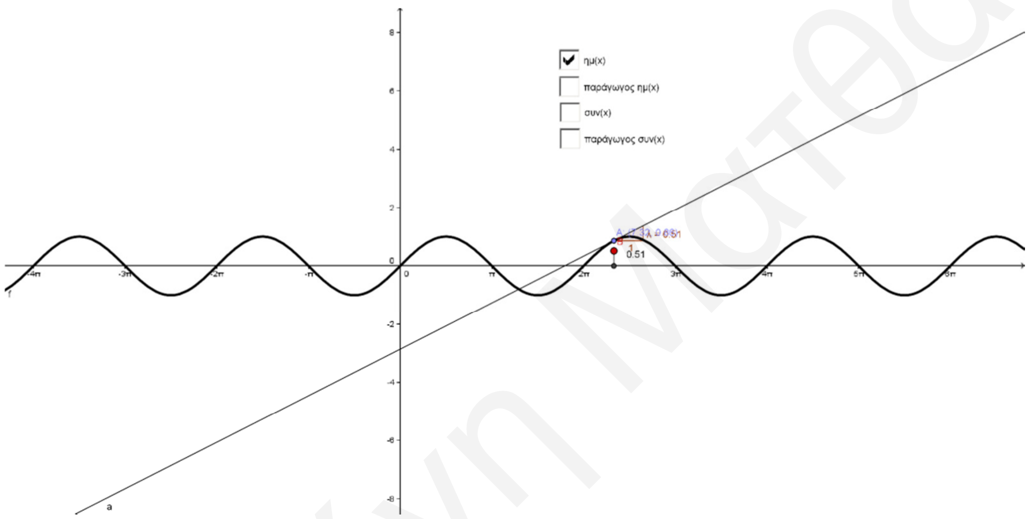
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………

Διδασκαλία 4

Παράγωγος τριγωνομετρικών συναρτήσεων και εκθετικής συνάρτησης e^x - Εφαρμογές των παραγώγων

Δραστηριότητα 1:

Να ανοίξετε το αρχείο “sinxcosx.ggb”.



Να επιλέξετε το κουτί επιλογής για εμφάνιση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$. Μετακινώντας το σημείο A μπορείτε να δείτε την κλίση της εφαπτομένης της συνάρτησης στο σημείο A και να παρατηρήσετε το ίχνος της παραγώγου που δίνει την τιμή της παραγώγου της f στο σημείο A.

Ποια μορφή έχει η γραφική παράσταση της παραγώγου της $f(x) = \eta\mu x$; Μπορείτε να γράψετε την εξίσωση της παραγώγου της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$;

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

(Να επαληθεύσετε την απάντησή σας επιλέγοντας το κουτί επιλογής «παράγωγος $\eta\mu x$»).

Δραστηριότητα 2:

Να επιλέξετε **μόνο** το κουτί επιλογής για εμφάνιση της συνάρτησης $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και να επαναλάβετε τα στάδια της δραστηριότητας 1, για να παρατηρήσετε την παράγωγο της συνάρτησης.

Ποια μορφή έχει η γραφική παράσταση της παραγώγου της συνάρτησης $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$; Μπορείτε να γράψετε την εξίσωση της παραγώγου της συνάρτησης $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$;

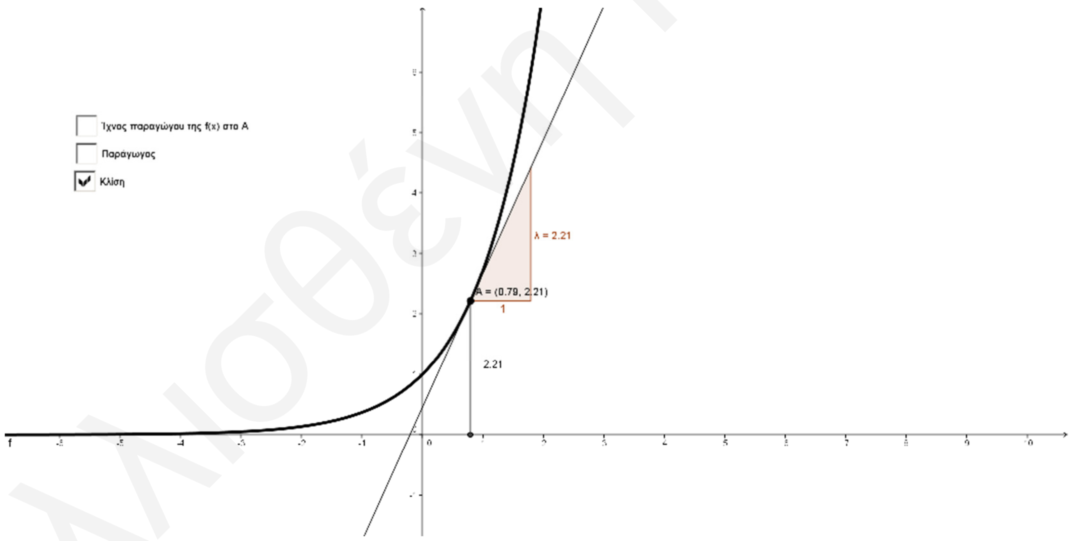
………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

(Να επαληθεύσετε την απάντησή σας επιλέγοντας το κουτί επιλογής «παράγωγος $\sigma\upsilon\nu x$»).

Δραστηριότητα 3:

Να ανοίξετε το αρχείο "paragogos3.ggb".



Στην οθόνη σας βλέπετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = e^x$.

Επιλέγοντας το κουτί επιλογής για εμφάνιση του ίχνους της παραγώγου, μπορείτε να δείτε την τιμή της παραγώγου της $f(x) = e^x$ στο σημείο Α. Μετακινώντας το σημείο Α μπορείτε να διαγράψετε τη γραφική παράσταση της παραγώγου.

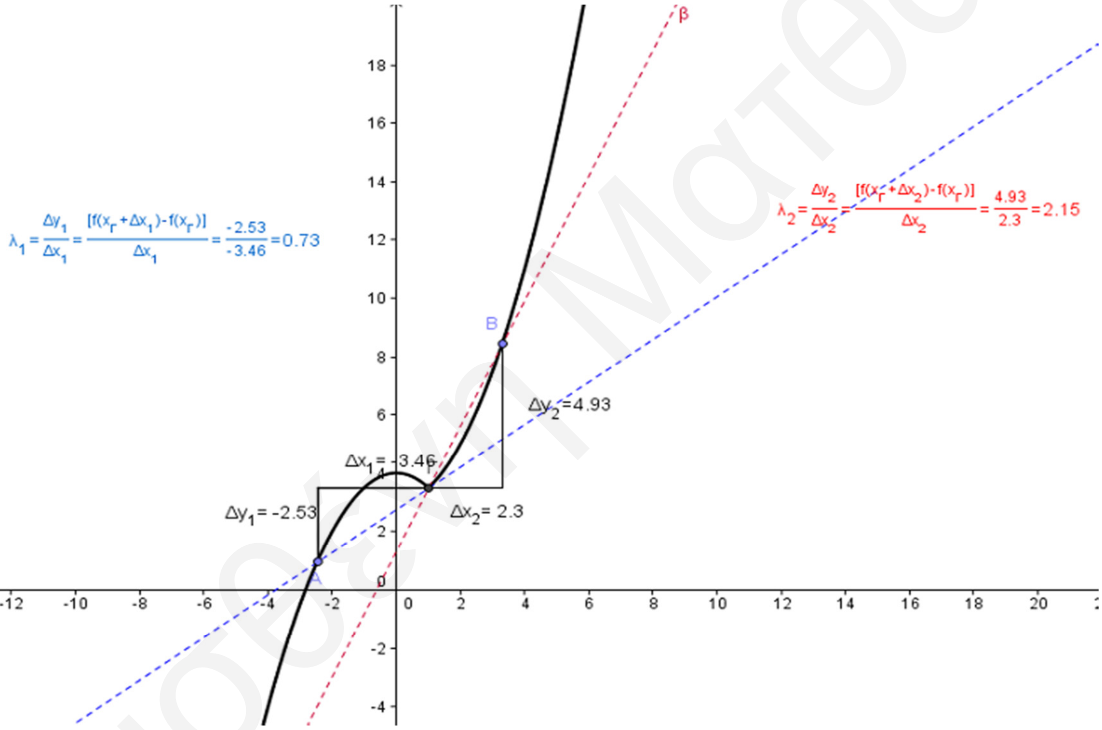
Ποια μορφή έχει η γραφική παράσταση της παραγώγου της συνάρτησης $f(x)$; Μπορείτε να γράψετε την εξίσωση της παραγώγου της συνάρτησης $f(x)$; (Με το κουμπί επιλογής «κλίση» εμφανίζεται η κλίση της συνάρτησης στο σημείο Α).

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

(Να επαληθεύσετε την απάντησή σας επιλέγοντας το κουτί επιλογής «παράγωγος»).

Δραστηριότητα 4:



Να ανοίξετε το αρχείο “goniako1.ggb”

Στην οθόνη σας βλέπετε τη γραφική παράσταση μιας καμπύλης $f(x)$. Μετακινώντας τα σημεία Α και Β μπορείτε να παρατηρήσετε πως μεταβάλλονται οι κλίσεις των ευθειών ΑΓ και ΒΓ.

Καθώς πλησιάζει το Α στο Γ η κλίση της ΑΓ τείνει προς την παράγωγο της συνάρτησης στο Γ από αριστερά.

Καθώς πλησιάζει το Β στο Γ η κλίση της ΒΓ τείνει προς την παράγωγο της συνάρτησης στο Γ από δεξιά.

Να μετακινήσετε τα σημεία ώστε να συμπίπτουν με το σημείο Γ και να συμπληρώσετε τις πιο κάτω τιμές:

$f'\,(x_{\Gamma}^{-}) = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$f'\,(x_{\Gamma}^{+}) = \lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{\Delta y_2}{\Delta x_2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$

Τι παρατηρείτε για την παράγωγο της f από αριστερά ($f'\,(x_{\Gamma}^{-})$) σε σχέση με την παράγωγο της f από δεξιά ($f'\,(x_{\Gamma}^{+})$) ;

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Υπάρχει η παράγωγος της $f(x)$ στο σημείο Γ; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Υπάρχει η εφαπτομένη της $f(x)$ στο σημείο Γ;

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Ορισμός:

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 και υπάρχουν τα όρια $f'\,(x_0^{-}) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{[f(x_0+\Delta x) - f(x_0)]}{\Delta x}$ και $f'\,(x_0^{+}) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{[f(x_0+\Delta x) - f(x_0)]}{\Delta x}$, αλλά διαφέρουν, τότε το σημείο $(x_0, f(x_0))$ λέγεται γωνιακό σημείο και η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Παρατήρηση:

Στο γωνιακό σημείο δεν ορίζεται εφαπτομένη της συνάρτησης.