



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ

Ο ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΤΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΤΙΚΩΝ ΙΚΑΝΟΤΗΤΩΝ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΚΑΙ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΣΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΕΛΕΝΗ ΔΕΛΗΓΙΑΝΝΗ

2009

Ο ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΤΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΤΙΚΩΝ ΙΚΑΝΟΤΗΤΩΝ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΚΑΙ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΣΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Ελένη Δεληγιάννη

Υποβλήθηκε στο Τμήμα Επιστημών της Αγωγής

ως μέρος των υποχρεώσεων για απόκτηση

Διδακτορικού τίτλου

στη Μαθηματική Παιδεία,

Τμήμα Επιστημών της Αγωγής

Πανεπιστήμιο Κύπρου

Φεβρουάριος, 2009

Η παρούσα διδακτορική διατριβή παρουσιάστηκε δημόσια σε πενταμελή εξεταστική επιτροπή και εγκρίθηκε στις 10 Φεβρουαρίου 2009.

Αποτελεί μέρος των υποχρεώσεων του Τμήματος Επιστημών της Αγωγής για απόκτηση διδακτορικού τίτλου στη Μαθηματική Παιδεία.

Ερευνητικός Σύμβουλος: Αθανάσιος Γαγάτσης, Καθηγητής,
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Συμβουλευτική Επιτροπή: Κωνσταντίνος Χρίστου, Καθηγητής,
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου
Λεωνίδα Κυριακίδης, Αναπληρωτής Καθηγητής,
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

.....
Αθανάσιος Γαγάτσης

.....
Κωνσταντίνος Χρίστου

.....
Λεωνίδα Κυριακίδης

Εξεταστική Επιτροπή:

- Κωνσταντίνος Χρίστου (Πρόεδρος),
Καθηγητής, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου
- Αθανάσιος Γαγάτσης,
Καθηγητής, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου
- Λεωνίδα Κυριακίδης,
Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου
- Ευγένιος Αυγερινός,
Καθηγητής, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
- Γεώργιος Δημάκος,
Αναπληρωτής Καθηγητής, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Στο σύζυγό μου, Γιώργο
και στους γονείς μου,
Άννα και Κωνσταντίνο

ΕΛΕΝΗ ΔΕΛΗΓΙΑΝΝΗ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα τελευταία χρόνια μεγάλος αριθμός ερευνητικών εργασιών ασχολήθηκε με το ρόλο των πολλαπλών πεδίων αναπαράστασης και της επίλυσης προβλήματος στην κατανόηση σύνθετων μαθηματικών εννοιών (Cramer, Post, & DeMas, 2002; Gagatsis & Shiakalli, 2004). Ένα θέμα που λαμβάνει επίσης ιδιαίτερη προσοχή από την εκπαιδευτική και ερευνητική κοινότητα είναι οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε κρίσιμες μεταβατικές περιόδους (Mullins & Irvin, 2000). Εντούτοις, απουσιάζουν έρευνες μεγάλης κλίμακας που να περιγράφουν τον τρόπο με τον οποίο οι μαθησιακές εμπειρίες στα πλαίσια της μαθηματικής εκπαίδευσης όσον αφορά τα πολλαπλά πεδία αναπαράστασης και την επίλυση προβλήματος, αποκτούν δομή εξελικτικά κατά τη μετάβαση των μαθητών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Η παρούσα εργασία εξετάζει τις γνωστικές δομές και την επίδοση των μαθητών όσον αφορά την έννοια της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων κατά την περίοδο μετάβασης εντός και μεταξύ της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, με άξονες την ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και την ικανότητα επίλυσης προβλήματος με ποικιλία πεδίων αναπαράστασης. Στην πρώτη ερευνητική φάση λαμβάνουν μέρος 1701 μαθητές Ε΄ δημοτικού, Στ΄ δημοτικού, Α΄ γυμνασίου και Β΄ γυμνασίου. Στη δεύτερη ερευνητική φάση, η οποία έχει χρονική διάρκεια δώδεκα μηνών, συμμετέχουν 388 μαθητές Ε΄ δημοτικού, Στ΄ δημοτικού και Α΄ γυμνασίου, οι οποίοι μεταβαίνουν στη Στ΄ δημοτικού, Α΄ γυμνασίου και Β΄ γυμνασίου, αντίστοιχα.

Τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας επιβεβαιώνουν και συνθέτουν τα ευρήματα προηγούμενων ερευνών επισημαίνοντας την αλληλεπίδραση τόσο της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων όσο και της ικανότητας επίλυσης προβλήματος στην κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων. Η ανάλυση των επιμέρους γνωστικών διαστάσεων υποδεικνύει ότι η ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων αποτελεί μια πολυδιάστατη έννοια στην οποία εμπλέκονται και αλληλεπιδρούν τα πεδία αναπαράστασης, οι μεταβολές εντός και μεταξύ πεδίων αναπαράστασης και ο τύπος της πρόσθεσης κλασμάτων. Επισημαίνεται επίσης η επίδραση τόσο του πεδίου αναπαράστασης όσο και της μαθηματικής δομής στην ικανότητα επίλυσης προβλήματος. Η συγκεκριμένη δόμηση διατηρείται εξελικτικά κατά την περίοδο μετάβασης. Συνεπώς, υπογραμμίζεται η ανάγκη ανάπτυξης των σχετικών γνωστικών διαδικασιών των μαθητών για επίτευξη συνέχειας και συνέπειας στο

αναλυτικό πρόγραμμα των δύο εκπαιδευτικών βαθμίδων. Αξίζει επίσης να σημειωθεί το γεγονός ότι στην παρούσα έρευνα επιχειρείται η διαμόρφωση ενός λειτουργικού ορισμού της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων, ο οποίος δεν επικεντρώνεται στην παρουσία ή την απουσία ευελιξίας αλλά στην ύπαρξη ιεραρχικών επιπέδων ανάπτυξής της.

Παρά το γεγονός ότι η δόμηση της κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων παραμένει αναλλοίωτη, επισημαίνεται η σημαντική επίδραση της ηλικίας στην επίδοση των μαθητών. Συγκεκριμένα, η επίδοση των μαθητών βελτιώνεται στις επιμέρους διαστάσεις της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος κατά τη μετάβασή τους από τη μια τάξη στην άλλη εντός της ίδιας εκπαιδευτικής βαθμίδας, πρωτοβάθμιας ή δευτεροβάθμιας. Αντίθετα, εντοπίζεται στασιμότητα ή μείωση της επίδοσης των μαθητών που μεταβαίνουν από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Στο δυναμικό μοντέλο δόμησης των γνωστικών διαστάσεων κατανόησης πρόσθεσης κλασμάτων επισημαίνεται η ύπαρξη εδραιωμένων προϋπάρχουσων γνώσεων, οι οποίες επηρεάζουν την επίδοση των μαθητών στη συγκεκριμένη έννοια εξελικτικά. Ειδικότερα, τα αποτελέσματα υποδεικνύουν τον καθοριστικό ρόλο της αρχικής κατάστασης ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων τόσο στην μετέπειτα ανάπτυξη του βαθμού ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων όσο και της ικανότητας επίλυσης προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων. Εντούτοις, σύμφωνα με τα αποτελέσματα των αναπτυξιακών μοντέλων, οι αναπαραστατικές ικανότητες αναπτύσσονται κυρίως εντός της ίδιας εκπαιδευτικής βαθμίδας και λιγότερο κατά τη μετάβαση των μαθητών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

ABSTRACT

Recently, a number of studies investigated the role multiple representations and problem solving play in mathematical concept understanding (Cramer, Post, & DelMas, 2002; Gagatsis & Shiakalli, 2004). Besides, an issue that has received major attention from the education and research community over the past years refers to students' difficulties when moving from one educational level to another (Mullins & Irvin, 2000). However, there is a need for large-scale longitudinal research studies which investigate the way students' experiences in mathematics education are structured as far as multiple-representation flexibility and problem-solving ability are concerned.

The aim of the present study was to examine students' cognitive structure and performance on similar and dissimilar fraction addition at the phase of transition from primary to secondary school on the basis of representational flexibility and problem solving. In the first research phase, 1701 students at Grade 5 to 8 took part. The second research phase was conducted among 388 students at Grade 5, 6 and 7 during their transition to Grade 6, 7 and 8, respectively, and lasted for twelve months.

Confirmatory factor analysis results provide evidence for the strong interrelation between representational flexibility and problem-solving ability in fraction-addition understanding. Furthermore, the present study reveals that flexibility in multiple representations constitutes a multifaceted construct in which inter- and intra-representation alterations interact with the various modes of representation and the relative concepts involved. Concerning problem-solving ability, the differential effect of both problem modes of representation and mathematical structure, is indicated. The structure of the processes underlying the fraction-addition understanding is invariant across students' transition from one educational level to the other. The significance of developing the corresponding cognitive processes in both primary and secondary stages of schooling for attaining curriculum continuity between them is thus stressed.

It is also worth mentioning that the present study based on the fact that students' understanding of a concept is not related to whether they display representational flexibility or not, but to a hierarchy of flexible representational thinking related to the concept. Therefore, it

determines hierarchical levels in students' thinking and identifies their characteristics, as far as fraction addition is concerned.

Even though, the results suggested the invariance of fraction-addition structure during the transition period, interesting variations in students' performance regarding multiple-representation flexibility and problem-solving ability are revealed. Particularly, the students' performance improved within the same educational level, while a hiatus in performance progress during the transition to secondary school was found.

The dynamic model of fraction-addition structural dimensions indicates the deep-rooted prior knowledge, which affects the students' fraction-addition performance across the ages. Specifically, the findings indicate that the initial condition of multiple-representation flexibility has an effect on both multiple-representation flexibility and problem-solving ability development. However, growth modeling reveals that the rate of change in the various multiple-representational flexibility dimensions is higher during students' transition in the same educational level in relation to the respective rate of change during students' transition to secondary school.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η εκπόνηση της παρούσας διδακτορικής διατριβής αποτέλεσε μια πνευματική μου αναζήτηση, η οποία απαιτούσε χρόνο και κόπο. Με την ολοκλήρωσή της αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω όλους όσους συνέβαλαν στη διεκπεραίωσή της.

Τις πιο θερμές και ειλικρινείς μου ευχαριστίες για τη βοήθεια, τη στήριξη, την καθοδήγηση και το προσωπικό του ενδιαφέρον σε όλη τη διάρκεια των προπτυχιακών και μεταπτυχιακών σπουδών μου εκφράζω στον ερευνητικό μου σύμβουλο, καθηγητή Αθανάσιο Γαγάτση. Το άρτιο θεωρητικό υπόβαθρο, η επιστημονική κατάρτιση, η πλούσια ερευνητική εμπειρία, τα πάντα εύστοχα σχόλια, οι παρατηρήσεις, οι προβληματισμοί και οι εισηγήσεις του συνέβαλαν με τον πιο ουσιαστικό τρόπο σε κάθε στάδιο εκπόνησης της διατριβής.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες εκφράζω στον αναπληρωτή καθηγητή Λεωνίδα Κυριακίδη, ο οποίος βοήθησε σημαντικά στο στάδιο της ανάλυσης των αποτελεσμάτων. Οι εισηγήσεις και οι επισημάνσεις του είχαν επίσης ουσιαστική συμβολή στην ολοκλήρωση της διατριβής. Επιθυμώ επίσης να εκφράζω τις ευχαριστίες μου στον καθηγητή Κωνσταντίνο Χρίστου, ο οποίος με τις εύστοχες παρατηρήσεις και τις συμβουλές του συνέβαλε στη διαμόρφωση του τελικού κειμένου της διατριβής. Ευχαριστίες εκφράζω ακόμη στον καθηγητή Ευγένιο Αυγερινό και στον αναπληρωτή καθηγητή Γεώργιο Δημάκο για τα χρήσιμα σχόλια και τις παρατηρήσεις τους. Θα ήθελα να ευχαριστήσω επίσης το λέκτορα Γεώργιο Σπανούδη για τη διδασκαλία και την καθοδήγηση σε θέματα που σχετίζονται με την επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση.

Ένα θερμό ευχαριστώ οφείλω στους διευθυντές των σχολείων και τους εκπαιδευτικούς που πρόθυμα συνεργάστηκαν στη χορήγηση των δοκιμίων στους μαθητές τους. Χωρίς τη δική τους συνεργασία θα ήταν αδύνατη η υλοποίηση του ερευνητικού σχεδιασμού. Επιπλέον, εκφράζω τις ειλικρινείς μου ευχαριστίες στη Δρ. Ιλιάδα Ηλία και την επίκουρη καθηγήτρια Αρετή Παναούρα για την προθυμία τους να συζητήσουν μαζί μου θέματα που αφορούσαν τη διατριβή μου, την ενθάρρυνση, τη βοήθεια, το προσωπικό ενδιαφέρον και τις εισηγήσεις τους σε κάθε στάδιο της εκπόνησής της. Ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω επίσης στην υποψήφια διδάκτορα Αννίτα Μονογιού για την εποικοδομητική ανταλλαγή ιδεών και τη στήριξή της.

Τέλος, εκφράζω τις θερμές ευχαριστίες και την ευγνωμοσύνη μου στην οικογένειά μου. Στο σύζυγό μου Γιώργο για την αγάπη, την κατανόηση, την υπομονή και την αμέριστη

συμπράστασή του κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών μου. Στους γονείς μου, Άννα και Κωνσταντίνο, οι οποίοι με έμαθαν να αγαπώ από μικρό παιδί το γοητευτικό κόσμο των μαθηματικών, με ενθάρρυναν σε όλες μου τις επιλογές, πίστεψαν σε εμένα και με στηρίζουν πάντα ηθικά και πρακτικά.

Ένα θερμό ΕΥΧΑΡΙΣΤΩ σε όλους.

ΕΛΕΝΗ ΔΕΛΗΓΙΑΝΝΗ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

	Σελίδες
Κατάλογος Πινάκων	i
Κατάλογος Διαγραμμάτων	iv
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	
ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΡΕΥΝΑ	
Εισαγωγή	1
Το πρόβλημα και ο σκοπός της έρευνας	4
Ερευνητικά ερωτήματα	6
Σημασία του θέματος	7
Περιορισμοί της έρευνας	10
Δομή της εργασίας	11
Ορισμοί βασικών εννοιών	13
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2	
ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ	
Εισαγωγή	15
Η έννοια της αναπαράστασης	15
Ο ρόλος των αναπαραστάσεων στη μάθηση και διδασκαλία των	26

μαθηματικών	
Οι εικονικές αναπαραστάσεις στη μάθηση και διδασκαλία των μαθηματικών	32
Το γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής στη μάθηση και διδασκαλία των μαθηματικών	34
Ο ρόλος των πολλαπλών αναπαραστάσεων στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών	40
Ο ρόλος των πολλαπλών αναπαραστάσεων στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος	45
Χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων στη μάθηση και διδασκαλία των ρητών αριθμών	56
Η μετάβαση από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση στα μαθηματικά	70
Ανακεφαλαίωση	74
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3	
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ	
Εισαγωγή	78
Δείγμα	78
Διαδικασία συλλογής δεδομένων	79
<i>Πρώτη φάση έρευνας</i>	79
<i>Δεύτερη φάση έρευνας</i>	80

Μέσα συλλογής δεδομένων	80
Κωδικοποίηση μεταβλητών της έρευνας	83
Βαθμολόγηση έργων	84
Μέθοδοι ανάλυσης δεδομένων	87
Ανακεφαλαίωση	90

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Εισαγωγή	92
Τα αποτελέσματα της πρώτης ερευνητικής φάσης	94
<i>Ανάλυση σχολικών εγχειριδίων</i>	95
<i>Επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση και ανάπτυξη δομικού μοντέλου εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων</i>	103
<i>Η επίδραση της ηλικίας στην εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων</i>	117
<i>Ιεραρχική διαβάθμιση των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων με βάση το βαθμό δυσκολίας τους</i>	122
<i>Σχέσεις ομοιότητας και συνεπαγωγής μεταξύ των απαντήσεων των μαθητών στα έργα πρόσθεσης κλασμάτων</i>	127
<i>Περιγραφική ανάλυση των λανθασμένων τρόπων επίλυσης των έργων του δοκιμίου</i>	150

<i>Περιγραφική ανάλυση των πεδίων αναπαράστασης και των στρατηγικών επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων</i>	169
<i>Επίπεδα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων</i>	177
<i>Αποτελέσματα της δεύτερης ερευνητικής φάσης</i>	186
<i>Επιβεβαίωση του δομικού μοντέλου εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων κατά την περίοδο μετάβασης εντός και μεταξύ πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης</i>	187
<i>Ιεραρχική διαβάθμιση των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων με βάση το βαθμό δυσκολίας τους</i>	189
<i>Η επίδραση της ηλικίας και του χρόνου μετάβασης στην εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων</i>	194
<i>Σχέσεις ομοιότητας των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων κατά την πρώτη και δεύτερη φάση της έρευνας</i>	204
<i>Η ανάπτυξη της εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων</i>	231
<i>Ανάλυση αναπτυξιακού μοντέλου ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων</i>	235
<i>Ανακεφαλαίωση</i>	248

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

<i>Εισαγωγή</i>	254
-----------------	-----

Σύγκριση σχολικών εγχειριδίων πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης ως προς τα πεδία αναπαράστασης και τις αναπαραστατικές λειτουργίες	256
Η επίδραση της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της επίλυσης προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων στην εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων	258
Η επίδραση της ηλικίας στην εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων σε σχέση με την ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και την επίλυση προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων	266
Μελλοντική κατεύθυνση της έρευνας	276
ΑΝΑΦΟΡΕΣ	278
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	297

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

		Σελίδα
1	Ποσοστά Αναπαραστάσεων στις Ασκήσεις Κλασμάτων των Σχολικών Εγχειριδίων κατά Πεδίο και Τάξη	96
2	Ποσοστά Λειτουργιών κατά Τύπο Μεταβολής και Πεδίο Αναπαράστασης στο Εγχειρίδιο της Ε΄ Δημοτικού	97
3	Ποσοστά Λειτουργιών κατά Τύπο Μεταβολής και Πεδίο Αναπαράστασης στο Εγχειρίδιο της Στ΄ Δημοτικού	98
4	Ποσοστά Λειτουργιών κατά Τύπο Μεταβολής και Πεδίο Αναπαράστασης στο Εγχειρίδιο της Α΄ Γυμνασίου	99
5	Ποσοστά Λειτουργιών κατά Τύπο Μεταβολής και Πεδίο Αναπαράστασης στο Εγχειρίδιο της Β΄ γυμνασίου	101
6	Ποσοστά Διαγραμμάτων κατά Τύπο Αναπαράστασης και Τάξη	102
7	Οι Τιμές των Δεικτών Προσαρμογής των Μοντέλων της Α΄ Ερευνητικής Φάσης	114
8	Ποσοστά Επιτυχίας των Μαθητών στο Δοκίμιο Πρόσθεσης Κλασμάτων κατά Τάξη και Έργο στην Α΄ Ερευνητική Φάση	118
9	Μέσοι Όροι και Τυπικές Αποκλίσεις της Επίδοσης των Μαθητών κατά Διάσταση της Εννοιολογικής Κατανόησης της Πρόσθεσης Κλασμάτων και Τάξη στην Α΄ Ερευνητική Φάση	120
10	Στατιστικά Στοιχεία για τις Κλίμακες των Έργων Ευελιξίας Χρήσης Πολλαπλών Αναπαραστάσεων του Δοκιμίου (L=19) και των Ικανοτήτων των Μαθητών (N=1701) στην Α΄ Ερευνητική Φάση	123
11	Ποσοστά Λανθασμένων Απαντήσεων Αναγνώρισης της Πρόσθεσης Ομώνυμων Κλασμάτων κατά Τάξη και Έργο στην Α΄ Ερευνητική	151

	Φάση	
12	Ποσοστά Λανθασμένων Απαντήσεων Αναγνώρισης της Πρόσθεσης Ετερόνυμων Κλασμάτων κατά Τάξη και Έργο στην Α΄ Ερευνητική Φάση	152
13	Ποσοστά Λανθασμένων Απαντήσεων Χειρισμού της Πρόσθεσης Ομώνυμων και Ετερόνυμων Κλασμάτων κατά Τάξη και Έργο στην Α΄ Ερευνητική Φάση	154
14	Ποσοστά Λανθασμένων Απαντήσεων Μετάφρασης από Συμβολική σε Διαγραμματική Αναπαράσταση της Πρόσθεσης Κλασμάτων κατά Τάξη και Έργο στην Α΄ Ερευνητική Φάση	155
15	Ποσοστά Λανθασμένων Απαντήσεων Μετάφρασης από Διαγραμματική σε Συμβολική Αναπαράσταση της Πρόσθεσης Κλασμάτων κατά Τάξη και Έργο στην Α΄ Ερευνητική Φάση	158
16	Ποσοστά Απαντήσεων των Μαθητών στο Πρόβλημα Λεκτικής Αιτιολόγησης κατά Τάξη και Τύπο στην Α΄ Ερευνητική Φάση	161
17	Ποσοστά Λανθασμένων Απαντήσεων στα Προβλήματα Πρόσθεσης Κλασμάτων κατά Τάξη και Έργο στην Α΄ Ερευνητική Φάση	166
18	Ποσοστά Χρήσης Αναπαραστάσεων από Μαθητές στα Προβλήματα Πρόσθεσης Κλασμάτων κατά Τάξη και Πεδίο στην Α΄ Ερευνητική Φάση	171
19	Ποσοστά Χρήσης Στρατηγικών Επίλυσης του Λεκτικού Προβλήματος Πρόσθεσης Κλασμάτων από Μαθητές κατά Τάξη στην Α΄ Ερευνητική Φάση	172
20	Ποσοστά Χρήσης Στρατηγικών Επίλυσης των Προβλημάτων Πρόσθεσης Κλασμάτων με Κύρια ή Βοηθητική Διαγραμματική Αναπαράσταση κατά Τάξη και Έργο στην Α΄ Ερευνητική Φάση	174

21	Μέσοι Όροι και Τυπικές Αποκλίσεις των Επιδόσεων των Μαθητών Κατά Ομάδα Ευελιξίας Χρήσης Πολλαπλών Αναπαραστάσεων και Διάσταση Εννοιολογικής Κατανόησης της Πρόσθεσης Κλασμάτων στην Α΄ Ερευνητική Φάση	178
22	Ποσοστά Μαθητών κατά Ομάδα Ευελιξίας Χρήσης Πολλαπλών Αναπαραστάσεων και Τάξη στην Α΄ Ερευνητική Φάση	181
23	Οι Τιμές των Δεικτών Προσαρμογής των Μοντέλων κατά την Περίοδο Μετάβασης των Μαθητών εντός και μεταξύ Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης	188
24	Στατιστικά Στοιχεία για τις Κλίμακες των Έργων Ευελιξίας Χρήσης Πολλαπλών Αναπαραστάσεων του Δοκιμίου (L=19) και των Ικανοτήτων των Μαθητών (N=388) στη Δεύτερη Χορήγηση	189
25	Στατιστικά Στοιχεία για τις Κλίμακες των Έργων Ευελιξίας Χρήσης Πολλαπλών Αναπαραστάσεων του Δοκιμίου (L=19) και των Ικανοτήτων των Μαθητών (N=388) στην Τρίτη Χορήγηση	190
26	Μέσοι Όροι και Τυπικές Αποκλίσεις των Επιδόσεων των Μαθητών στην Πρόσθεση Κλασμάτων κατά Διάσταση της Εννοιολογικής Κατανόησης της Πρόσθεσης Κλασμάτων και Ηλικιακή Ομάδα στη Β΄ Ερευνητική Φάση	203

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

		Σελίδα
1	Οι πέντε συνιστώσες της αναπαράστασης σύμφωνα με τον Brousseau (2004)	17
2	Συστήματα εξωτερικών αναπαραστάσεων (Lesh et al., 1987b, σ. 33-34)	23
3	Ταξινόμηση των σημειωτικών αναπαραστάσεων που ενεργοποιούνται στις μαθηματικές διαδικασίες (Duval, 2006)	25
4	Οπτικοί μετασχηματισμοί (Duval, 2006)	40
5	Η διαδικασία αναπαράστασης- Ερμηνεία 1 (Lesh et al., 1987b)	48
6	Η διαδικασία αναπαράστασης – Ερμηνεία 2 (Lesh et al., 1987b)	49
7	Θεωρητικό μοντέλο το οποίο συνδέει τις πέντε ερμηνείες του κλάσματος με τις διάφορες πράξεις κλασμάτων και την επίλυση προβλήματος (Behr et al., 1983)	65
8	Πρότυπο μοντέλο δόμησης της εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων	108
9	Μοντέλο εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων για το σύνολο των μαθητών και κάθε βαθμίδα ξεχωριστά (Α' ερευνητική φάση)	115
10	Μοντέλο εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων για κάθε ηλικιακή ομάδα ξεχωριστά (Α' ερευνητική φάση)	116
11	Ισοδιαστημική κλίμακα του βαθμού δυσκολίας των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων σε αντιπαραβολή με τις ικανότητες των μαθητών στην Α' ερευνητική φάση	125

12	Συνάφεια των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων με το μοντέλο Rasch στην Α΄ ερευνητική φάση (item fit map).	126
13	Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών της Ε΄ και Στ΄ δημοτικού στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων (Α΄ ερευνητική φάση)	128
14	Συνεπαγωγικό διάγραμμα των απαντήσεων των μαθητών της Ε΄ και Στ΄ δημοτικού στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων (Α΄ ερευνητική φάση)	131
15	Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών Α΄ και Β΄ γυμνασίου στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων (Α΄ ερευνητική φάση)	132
16	Συνεπαγωγικό διάγραμμα των απαντήσεων των μαθητών Α΄ και Β΄ γυμνασίου στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων (Α΄ ερευνητική φάση)	135
17	Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών της Ε΄ δημοτικού στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων (Α΄ ερευνητική φάση)	137
18	Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών της Στ΄ δημοτικού στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων (Α΄ ερευνητική φάση)	139
19	Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών της Α΄ γυμνασίου στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων (Α΄ ερευνητική φάση)	141

20	Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών της Β΄ γυμνασίου στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων (Α΄ ερευνητική φάση)	142
21	Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών της Ε΄ δημοτικού, Στ΄ δημοτικού, Α΄ γυμνασίου και Β΄ γυμνασίου στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων (Α΄ ερευνητική φάση)	145
22	Συνεπαγωγικά διαγράμματα των απαντήσεων των μαθητών της Ε΄ και της Στ΄ δημοτικού στα έργα του δοκιμίου (Α΄ ερευνητική φάση)	148
23	Συνεπαγωγικά διαγράμματα των απαντήσεων των μαθητών της Α΄ και Β΄ γυμνασίου στα έργα του δοκιμίου (Α΄ ερευνητική φάση)	149
24	Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών κάθε επιπέδου ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων στα έργα του δοκιμίου στην Α΄ ερευνητική φάση	184
25	Συνεπαγωγικά διαγράμματα των απαντήσεων των μαθητών στα έργα του δοκιμίου κατά επίπεδο ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων στην Α΄ ερευνητική φάση	185
26	Ισοδιαστημική κλίμακα του βαθμού δυσκολίας των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων του δοκιμίου σε αντιπαραβολή με τις ικανότητες των μαθητών στη δεύτερη χορήγηση (Β΄ φάση έρευνας)	191
27	Ισοδιαστημική κλίμακα του βαθμού δυσκολίας των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων του δοκιμίου σε αντιπαραβολή με τις ικανότητες των μαθητών στην τρίτη χορήγηση (Β΄ φάση έρευνας)	192
28	Συνάφεια των έργων του δοκιμίου με το μοντέλο Rasch στη δεύτερη χορήγηση (Β΄ ερευνητική φάση).	193

29	Συνάφεια των έργων του δοκιμίου με το μοντέλο Rasch στην τρίτη χορήγηση (B' ερευνητική φάση).	194
30	Μέσος όρος επίδοσης των μαθητών στα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων ανά ηλικιακή ομάδα κατά τη μεταβατική περίοδο.	196
31	Μέσος όρος επίδοσης των μαθητών στα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων ανά ηλικιακή ομάδα κατά τη μεταβατική περίοδο.	197
32	Μέσος όρος επίδοσης των μαθητών στα έργα χειρισμού της πρόσθεσης κλασμάτων ανά ηλικιακή ομάδα κατά τη μεταβατική περίοδο.	198
33	Μέσος όρος επίδοσης των μαθητών στα έργα μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων ανά ηλικιακή ομάδα κατά τη μεταβατική περίοδο.	199
34	Μέσος όρος επίδοσης των μαθητών στα έργα μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης κλασμάτων ανά ηλικιακή ομάδα κατά τη μεταβατική περίοδο.	200
35	Μέσος όρος επίδοσης των μαθητών στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων πρόσθεσης κλασμάτων ανά ηλικιακή ομάδα κατά τη μεταβατική περίοδο.	201
36	Μέσος όρος επίδοσης των μαθητών στην επίλυση διαγραμματικών προβλημάτων πρόσθεσης κλασμάτων ανά ηλικιακή ομάδα κατά τη μεταβατική περίοδο.	202
37	Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών της πρώτης ηλικιακής ομάδας στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων κατά την πρώτη χορήγηση (A' ερευνητική φάση)	204

38	Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών της πρώτης ηλικιακής ομάδας στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων κατά τη δεύτερη χορήγηση (B' ερευνητική φάση)	206
39	Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών της πρώτης ηλικιακής ομάδας στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων κατά την τρίτη χορήγηση (B' ερευνητική φάση)	208
40	Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών της δεύτερης ηλικιακής ομάδας στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων κατά την πρώτη χορήγηση (A' ερευνητική φάση)	210
41	Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών της δεύτερης ηλικιακής ομάδας στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων κατά τη δεύτερη χορήγηση (B' ερευνητική φάση)	211
42	Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών της δεύτερης ηλικιακής ομάδας στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων κατά την τρίτη χορήγηση (B' ερευνητική φάση)	213
43	Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών της τρίτης ηλικιακής ομάδας στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων κατά την πρώτη χορήγηση (A' ερευνητική φάση)	215
44	Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών της τρίτης ηλικιακής ομάδας στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων κατά τη δεύτερη χορήγηση (B' ερευνητική φάση)	217
45	Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών της τρίτης ηλικιακής ομάδας στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων κατά την τρίτη χορήγηση (B' ερευνητική φάση)	218
46	Συνεπαγωγικά διαγράμματα των απαντήσεων των μαθητών της πρώτης ηλικιακής ομάδας στα έργα του δοκιμίου στις τρεις χορηγήσεις	223

47	Συνεπαγωγικά διαγράμματα των απαντήσεων των μαθητών της δεύτερης ηλικιακής ομάδας στα έργα του δοκιμίου στις τρεις χορηγήσεις	226
48	Συνεπαγωγικά διαγράμματα των απαντήσεων των μαθητών της τρίτης ηλικιακής ομάδας στα έργα του δοκιμίου στις τρεις χορηγήσεις	229
49	Πρότυπο δυναμικό μοντέλο δόμησης των γνωστικών διαστάσεων εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων κατά τη διάρκεια των τριών χορηγήσεων	232
50	Δυναμικό μοντέλο δόμησης των γνωστικών διαστάσεων εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων κατά τη διάρκεια των τριών χορηγήσεων	233
51	Αναπτυξιακό μοντέλο της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων για την ομάδα μαθητών που μεταβαίνουν από την Ε΄στη Στ΄ δημοτικού	245
52	Αναπτυξιακό μοντέλο της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων για την ομάδα μαθητών που μεταβαίνουν στην Α΄ γυμνασίου	246
53	Αναπτυξιακό μοντέλο της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων για την ομάδα μαθητών που μεταβαίνουν από την Α΄ στη Β΄ γυμνασίου	247

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΡΕΥΝΑ

Εισαγωγή

Από επιστημολογικής άποψης τα μαθηματικά παρουσιάζουν μια ιδιαιτερότητα σε σχέση με τα άλλα γνωστικά αντικείμενα λόγω του ότι η μαθηματική γνώση δεν μπορεί να γίνει κατανοητή μέσα από τις αισθήσεις (Duvall, 2006). Συγκεκριμένα, τα μαθηματικά αποτελούν μια εξειδικευμένη γλώσσα, η οποία διαθέτει ένα ιδιαίτερο σύνολο από εκφράσεις, μεταφορές και συμβολικά συστήματα (Pimm, 1995). Ο μόνος τρόπος να αποκτήσουμε πρόσβαση και να εκφράσουμε αντικείμενα, προτάσεις, έννοιες και θεωρήματα στα μαθηματικά είναι με τη χρήση σημειωτικών αναπαραστάσεων (Dreyfus & Eisenberg, 1996; Duvall, 2006). Αυτός είναι και ο βασικός λόγος που τα τελευταία χρόνια γίνεται αποδεκτό από την εκπαιδευτική και ερευνητική κοινότητα ότι οι αναπαραστάσεις κατέχουν κεντρική θέση στη διδασκαλία και στη μάθηση των μαθηματικών (Cai & Wang, 2006; Elia, Gagatsis, Demetriou, 2007; Fennell & Rowan, 2001; Gagatsis & Elia, 2005; Gagatsis, Kyriakides, & Panaoura, 2004; NCTM, 2000).

Ενδεικτικά, ένα από τα κριτήρια που περιλήφθηκε στα Principles and Evaluation Standards for School Mathematics (NCTM, 2000) σχετίζεται αποκλειστικά με τη χρήση αναπαραστάσεων κατά τη μαθησιακή διαδικασία. Σε αυτό επισημαίνεται ότι είναι σημαντικό οι μαθητές να χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις για τις μαθηματικές έννοιες, οι οποίες να έχουν νόημα για τους ίδιους έστω και αν δεν είναι οι συμβατικές. Ταυτόχρονα, θα πρέπει να είναι ικανοί να χρησιμοποιούν τις συμβατικές μορφές αναπαράστασης κατά τρόπο που να διευκολύνεται η μάθηση των μαθηματικών και η επικοινωνία σχετικά με τις μαθηματικές έννοιες (NCTM, 2000).

Ο σημαντικός ρόλος που διαδραματίζουν τα διάφορα συστήματα αναπαράστασης και η αλλαγή πεδίου αναπαράστασης στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης επισημαίνεται από το μεγάλο αριθμό ερευνών που εξετάζουν το συγκεκριμένο θέμα. Οι έρευνες στο χώρο των αναπαραστάσεων ταξινομούνται σε πέντε κύριες κατηγορίες ανάλογα με το περιεχόμενό τους:

- α) Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει έρευνες που εστιάζονται στην έννοια της αναπαράστασης (π.χ. Duval, 2006; Kaput, 1987)
- β) Η δεύτερη κατηγορία περιλαμβάνει έρευνες που προτείνουν μια θεωρία αναπαράστασης (π.χ. Δημητρίου, 1993; Goldin, 1998; Roth & McGinn, 1998).
- γ) Η τρίτη κατηγορία περιλαμβάνει έρευνες που συσχετίζουν τις αναπαραστάσεις με την ικανότητα επίλυσης προβλήματος (π.χ. Cifarelli, 1998; Elia & Gagatsis, 2006; Elia, Gagatsis, & Demetriou, 2007; Hitt, 1998; Lesh, Behr, & Post, 1987a; Lesh, Post, & Behr, 1987b; Niemi, 1996).
- δ) Η τέταρτη κατηγορία περιλαμβάνει έρευνες που εξετάζουν τις αναπαραστάσεις σε σχέση με συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες (π.χ. Ασβεστά & Γαγάτσης, 1995; Elia, Panaoura, Eracleous, & Gagatsis, 2007; Michaelidou, Gagatsis, & Pitta-Pantazi, 2004).
- ε) Η πέμπτη κατηγορία περιλαμβάνει έρευνες που εξετάζουν τις αναπαραστάσεις και τη μετάβαση από ένα πεδίο αναπαράστασης σε άλλο (π.χ. Gagatsis, Elia, & Mougí, 2002; Gagatsis & Shiakalli, 2004).

Ο όρος «αναπαράσταση» αναφέρεται σε ένα νοητικό σύμβολο ή έννοια (signified and referenced concept), το οποίο αντιπροσωπεύει ένα συγκεκριμένο υλικό σύμβολο (signifier and referent material sign) (Kaput, 1987). Με άλλα λόγια, η αναπαράσταση αποτελεί ένα σύνολο συμβόλων, χαρακτήρων ή αντικειμένων, το οποίο αναφέρεται σε μια άλλη οντότητα (Goldin & Shteingold, 2001). Μια βασική διάκριση που επισημαίνεται στην περιοχή των αναπαραστάσεων είναι ανάμεσα στις εσωτερικές/ νοητικές και τις εξωτερικές αναπαραστάσεις (DeWindt-King & Goldin, 2003; Goldin & Kaput, 1996; Goldin & Shteingold, 2001). Οι εσωτερικές αναπαραστάσεις αναφέρονται στους πιθανούς νοητικούς σχηματισμούς ή εικόνες που οικοδομούν τα υποκείμενα για να αναπαραστήσουν την εξωτερική πραγματικότητα (Hiebert & Carpenter, 1988). Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις αντιπροσωπεύουν τους εξωτερικούς συμβολικούς φορείς, οι οποίοι αποσκοπούν στην αναπαράσταση μιας συγκεκριμένης πραγματικότητας (Dufour-Janvier, Bednarz, & Belanger, 1987).

Η εξωτερική αναπαράσταση μαθηματικών ιδεών είναι αναγκαία για την παρουσίαση και την επικοινωνία μαθηματικών ιδεών και μπορεί να έχει μια ή περισσότερες μορφές (Hiebert & Carpenter, 1992). Συγκεκριμένα, επισημαίνονται από τους Lesh κ.α. (1987b) πέντε διαφορετικά είδη συστημάτων εξωτερικών αναπαραστάσεων σε σχέση με τη μάθηση των

μαθηματικών και την επίλυση προβλήματος: κείμενα, χειριστικά μοντέλα/αντικείμενα, στατικές εικόνες ή διαγράμματα, γλώσσες και γραπτά κείμενα. Σύμφωνα με το Schnotz (2002) τα εξωτερικά συστήματα αναπαράστασης διακρίνονται σε περιγραφικά (descriptive) και εικονικά (depictive). Τα κείμενα, οι μαθηματικές εξισώσεις και τα μαθηματικά σύμβολα εντάσσονται στα περιγραφικά συστήματα αναπαράστασης, ενώ τα οπτικά εκθέματα στα εικονικά συστήματα αναπαράστασης. Τα περιγραφικά συστήματα αναπαράστασης έχουν αυθαίρετη δομή και σχετίζονται με τα αντικείμενα στα οποία αναφέρονται με βάση ένα σύνολο συμβάσεων. Από την άλλη, τα εικονικά συστήματα αναπαράστασης σχετίζονται με το αντικείμενο που αναπαριστούν με βάση ένα σύνολο κοινών δομικών στοιχείων, όπως η ομοιότητα, σε συγκεκριμένο ή αφηρημένο επίπεδο (Schnotz, 2002; Schnotz & Bannert, 2003).

Η εννοιολογική κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας, για την οποία απαιτείται η συμπερίληψη όλων των οντολογικών, λειτουργικών και δομικών χαρακτηριστικών της (Cheng, 1999), μπορεί να γίνει αντιληπτή με αναφορά σε εσωτερικά συνεχώς αναπτυσσόμενα και δομημένα δίκτυα αναπαραστάσεων (Hiebert & Carpenter, 1992). Οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται στη μαθησιακή διαδικασία καθορίζουν σε σημαντικό βαθμό τα όσα μαθαίνει ο μαθητής και το πόσο εύκολα επιτυγχάνεται η κατανόηση των εννοιών στα μαθηματικά (Cheng, 1999). Λειτουργούν δηλαδή ως χρήσιμα εργαλεία για την οικοδόμηση της μαθηματικής γνώσης, την εννοιολογική κατανόηση και την επικοινωνία μαθηματικών εννοιών (Greeno & Hall, 1997).

Ειδικότερα, η ανάγκη χρήσης ποικιλίας αναπαραστάσεων συνδέεται με την οικονομία επεξεργασίας, τη συμπληρωματικότητα των πεδίων αναπαράστασης και τη δομή της αναπαράστασης σε σχέση με την κατανόηση (Duval, 1987; Duval, 1993; Gagatsis, 1997). Λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι κάθε αναπαράσταση είναι γνωστικά μερική ως προς αυτό που παριστάνει, η όσο το δυνατόν πληρέστερη κατανόηση μιας έννοιας βασίζεται στο συνδυασμό τουλάχιστον δύο πεδίων αναπαράστασης (Duval, 2006; Γαγάτσης, Μιχαηλίδου, & Σιακαλλή, 2001). Οι μαθητές που είναι σε θέση να συνδέουν τα διάφορα πεδία αναπαράστασης δε συγχέουν τα μαθηματικά αντικείμενα με τις αναπαραστάσεις τους και έχουν τη δυνατότητα να μεταφέρουν τις γνώσεις τους σε νέες καταστάσεις (Duval, 2006).

Για την κατανόηση μέσω πολλαπλών αναπαραστάσεων απαιτείται από το μαθητή η δημιουργία συσχετίσεων μεταξύ αντίστοιχων στοιχείων και σχετικών δομών σε διαφορετικές αναπαραστάσεις (Greer & Harel, 1998; Seufert, 2003). Ωστόσο, αυτή η πολλαπλότητα των αναπαραστάσεων αυξάνει τη δυσκολία και την πολυπλοκότητα της μάθησης των

μαθηματικών αφού αναμένεται από το μαθητή να αντιληφθεί τις κοινές ιδιότητες των διαφορετικών αναπαραστάσεων που αναφέρονται στην ίδια υποκείμενη μαθηματική έννοια (Γαγάτσης et al., 2001). Η τάση των μαθητών να αντιμετωπίζουν τις διάφορες αναπαραστάσεις αποσπασματικά (Ainsworth, 2006; Duval, 2002) αποτελεί ένδειξη του φαινομένου της στεγανοποίησης. Το φαινόμενο αυτό υποδηλώνει τη γνωστική δυσκολία που προκύπτει από την ανάγκη ευέλικτης μετάβασης από ένα πεδίο αναπαράστασης μιας μαθηματικής έννοιας σε ένα άλλο (Duval, 2002).

Συγκεκριμένα, ο Duval (2006) επισημαίνει ότι η μαθησιακή δραστηριότητα στα μαθηματικά αναλύεται σε δύο είδη μετασχηματισμών των σημειωτικών αναπαραστάσεων: τους χειρισμούς και τις μεταφράσεις. Η ικανότητα αναγνώρισης της έννοιας όταν αυτή παρουσιάζεται με μια ποικιλία ποιοτικά διαφορετικών συστημάτων αναπαράστασης (αναγνώριση), η ικανότητα ευέλικτου χειρισμού της έννοιας μέσα στα συγκεκριμένα συστήματα αναπαράστασης (χειρισμός) και η ικανότητα μετάφρασης της έννοιας από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο (μετάφραση) αποτελούν απαραίτητες προϋποθέσεις για την κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας (Lesh et al., 1987b).

Από την άλλη, η επίλυση προβλήματος αναγνωρίζεται ως ο πρωταρχικός σκοπός της διδασκαλίας και της διαδικασίας μάθησης των μαθηματικών (Φιλίππου & Χρίστου, 1995; NCTM, 2000; Reys, Lindquist, Lambdin, Smith, & Suydam, 2001). Διάφοροι ερευνητές (π.χ. Cramer, Post, & DelMas, 2002; Gagatsis & Shiakalli, 2004; Hitt, 1998; Lesh et al., 1987b) επισημαίνουν ότι η ικανότητα μετασχηματισμού στο ίδιο σύστημα αναπαράστασης και από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο σχετίζεται με την ικανότητα επίλυσης προβλήματος και την εννοιολογική κατανόηση εννοιών. Παρόλα αυτά δεν έχει εξεταστεί συστηματικά η αλληλεπίδραση της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της ικανότητας επίλυσης προβλήματος με διαφορετικά πεδία αναπαράστασης όσον αφορά στην κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας, όταν οι μαθητές βρίσκονται σε ένα κρίσιμο στάδιο μετάβασης.

Το Πρόβλημα και ο Σκοπός της Έρευνας

Γενικός σκοπός της παρούσας έρευνας ήταν η εξέταση των γνωστικών δομών και της επίδοσης των μαθητών όσον αφορά την έννοια της πρόσθεσης κλασμάτων κατά την περίοδο μετάβασης εντός και μεταξύ της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Βασικούς άξονες διερεύνησης αποτέλεσαν η ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και η ικανότητα επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων.

Αναλυτικά, πρώτος στόχος της παρούσας έρευνας ήταν να συγκρίνει τα πεδία αναπαράστασης και τις αναπαραστατικές λειτουργίες (αναγνώριση, χειρισμός, μετάφραση) στα έργα που περιλαμβάνονται στα κυπριακά εγχειρίδια των μαθηματικών στην Ε΄ δημοτικού, Στ΄ δημοτικού, Α΄ γυμνασίου και Β΄ γυμνασίου όσον αφορά τα κλάσματα.

Δεύτερος στόχος ήταν η διαμόρφωση και η επιβεβαίωση ενός δομικού μοντέλου το οποίο να προσδιορίζει και να τεκμηριώνει τη σημασία της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και την αλληλεπίδρασή της με την ικανότητα επίλυσης προβλήματος με ποικιλία πεδίων αναπαράστασης, στην εννοιολογική κατανόηση της έννοιας της πρόσθεσης κλασμάτων. Μέσα από το συγκεκριμένο δομικό μοντέλο εξετάστηκαν επίσης οι επιμέρους συνιστώσες της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της ικανότητας επίλυσης προβλήματος με ποικιλία πεδίων αναπαράστασης πρόσθεσης κλασμάτων. Συγκεκριμένα, διερευνήθηκε η θέση ότι η ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων αποτελεί μια πολυδιάστατη έννοια στην οποία εμπλέκονται και αλληλεπιδρούν τρεις συνιστώσες: α) τα πεδία αναπαράστασης (περιγραφικό-συμβολικό, εικονικό-διαγραμματικό σύμφωνα με το Schnotz, 2002), β) οι ενδο- και δια- αναπαραστατικές μεταβολές (αναγνώριση, χειρισμός, μετάφραση) και γ) ο τύπος της πρόσθεσης κλασμάτων (πρόσθεση ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων). Επιπλέον, στα πλαίσια του δομικού μοντέλου μελετήθηκε ο ρόλος που διαδραματίζουν τα πεδία αναπαράστασης όσον αφορά την ικανότητα επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων. Ακολούθως διερευνήθηκε κατά πόσο η δομή των προαναφερθέντων ικανοτήτων είναι η ίδια ή παρουσιάζει διαφορές ανάμεσα στους μαθητές των τεσσάρων ηλικιακών ομάδων (Ε΄ δημοτικού – 11 χρονών, Στ΄ δημοτικού – 12 χρονών, Α΄ γυμνασίου- 13 χρόνων, Β΄ γυμνασίου – 14 χρονών).

Τρίτος στόχος της έρευνας ήταν ο καθορισμός ιεραρχικών επιπέδων ανάπτυξης των αναπαραστατικών ικανοτήτων των μαθητών λαμβάνοντας υπόψη την επίδοσή τους στις επιμέρους συνιστώσες της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων.

Ο τέταρτος στόχος της έρευνας ήταν η σύγκριση της επίδοσης των μαθητών Ε΄ δημοτικού, Στ΄ δημοτικού, Α΄ γυμνασίου και Β΄ γυμνασίου όσον αφορά τις διαστάσεις ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και την ικανότητα επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων, οι οποίες προέκυψαν από το δομικό μοντέλο κατανόησης της έννοιας της πρόσθεσης κλασμάτων.

Πέμπτος στόχος ήταν η επιβεβαίωση ενός δυναμικού μοντέλου που να εξετάζει σχέσεις αλληλεπίδρασης μεταξύ της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων πρόσθεσης κλασμάτων κατά τη μετάβαση από μια τάξη σε άλλη στην ίδια εκπαιδευτική βαθμίδα, δηλαδή από την Ε΄ στη Στ΄ δημοτικού και από την Α΄ στη Β΄ γυμνασίου, αλλά και κατά τη μετάβαση από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, δηλαδή από τη Στ΄ δημοτικού στην Α΄ γυμνασίου.

Τέλος, η παρούσα έρευνα ασχολήθηκε με την εύρεση του ρυθμού μεταβολής της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων στην πρόσθεση κλασμάτων κατά τη μετάβαση των μαθητών από την Ε΄ στη Στ΄ δημοτικού, από τη Στ΄ δημοτικού στην Α΄ γυμνασίου και από την Α΄ στη Β΄ γυμνασίου.

Ερευνητικά Ερωτήματα

Τα κύρια ερευνητικά ερωτήματα της εργασίας όπως απορρέουν από το σκοπό και τους στόχους της έρευνας είναι τα εξής:

1. Υφίστανται διαφορές όσον αφορά στα πεδία αναπαράστασης και στις αναπαραστατικές μεταβολές των έργων κλασμάτων που παρουσιάζονται στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Ε΄ δημοτικού, Στ΄ δημοτικού, Α΄ γυμνασίου και Β΄ γυμνασίου;
2. Η ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων αποτελεί μια πολυδιάστατη έννοια, στην οποία εμπλέκονται πέραν από τις διάφορες αναπαραστατικές μεταβολές (αναγνώριση, μετάφραση, χειρισμός) και άλλες συνιστώσες;
3. Η παρουσία διαγραμματικών αναπαραστάσεων επηρεάζει την επίλυση προβλημάτων πρόσθεσης κλασμάτων;
4. Ποιος από τους δύο παράγοντες, η ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων ή η ικανότητα επίλυσης προβλήματος, διαδραματίζει σημαντικότερο ρόλο στην εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων;
5. Σε ποιο βαθμό μπορεί να αναπτυχθεί μοντέλο για την εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων, το οποίο αναδεικνύει την αλληλεπίδραση της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων με και την ικανότητα επίλυσης προβλήματος με ποικιλία πεδίων αναπαράστασης;
6. Σε ποιο βαθμό η ηλικία σχετίζεται με την ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων με διαφορετικά πεδία αναπαράστασης;

7. Είναι δυνατός ο καθορισμός ιεραρχικών επιπέδων ανάπτυξης της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων όσο αφορά την πρόσθεση κλασμάτων;
8. Υφίσταται διαφορά στο ρυθμό ανάπτυξης της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων των μαθητών κατά τη μετάβαση από την πρωτοβάθμια και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση σε σχέση με το ρυθμό ανάπτυξης των μαθητών εντός της ίδιας εκπαιδευτικής βαθμίδας, πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας;

Σημασία του Θέματος

Μέσα από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας είναι φανερό ότι ο ρόλος των αναπαραστάσεων στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών έχει γίνει αντικείμενο εκτενούς μελέτης (Duvai, 2006; Elia, Gagatsis, & Demetriou, 2007). Εντούτοις εντοπίζεται έλλειψη ερευνών μεγάλης κλίμακας στο χώρο των αναπαραστάσεων και πολλά ερωτήματα σχετικά με το θέμα παραμένουν ακόμη αναπάντητα. Λαμβάνοντας υπόψη τις πιθανές ευκαιρίες για μάθηση που παρέχουν τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών (Mesa, 2004; Valverde, Bianchi, Wolfe, Schimdt, & Houwng, 2002), ένα σημαντικό ερώτημα που προκύπτει είναι κατά πόσο οι μαθητές ανταποκρίνονται θετικά στα διάφορα πεδία αναπαράστασης, τα οποία παρουσιάζονται στα σχολικά εγχειρίδια, έτσι ώστε να διευκολύνεται η μαθησιακή διαδικασία και η προσπάθειά τους για αντιμετώπιση των διαφόρων γνωστικών εμποδίων στα μαθηματικά.

Προηγούμενες έρευνες χρησιμοποιούσαν μόνο μια παράμετρο της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων, όπως είναι η αναγνώριση (π.χ. Niemi, 1996) ή η μετάφραση (π.χ. Gagatsis & Shiakalli, 2004), για εξέταση της επίδρασης της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων στην επίλυση προβλήματος με διαφορετικά πεδία αναπαράστασης. Λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι η ικανότητα αναγνώρισης και αναπαράστασης μιας μαθηματικής έννοιας σε ποικιλία πεδίων αναπαράστασης, όπως επίσης και η ικανότητα ευέλικτης μετάβασης από ένα πεδίο αναπαράστασης σε άλλο επιτρέπει τον εντοπισμό των μεταξύ τους σχέσεων, συμβάλλει στην εννοιολογική κατανόηση και βελτιώνει την ικανότητα των μαθητών στην επίλυση προβλήματος (Even, 1998), προκύπτει η ανάγκη εξέτασης της συγκεκριμένης σχέσης χρησιμοποιώντας το σύνολο των προαναφερθεισών ικανοτήτων. Επιπλέον, τόσο το γεγονός ότι η ικανότητα επίλυσης προβλήματος εξετάστηκε με προβλήματα των οποίων τα δεδομένα παρουσιάζονταν με διαφορετικές αναπαραστάσεις όσο και το γεγονός ότι η μαθηματική δομή που εξετάζονταν στα προβλήματα διαφέρει από αυτήν

των έργων χειρισμού, αναγνώρισης και μετάφρασης, αποτελούν δύο ακόμη όψεις του θέματος που δεν έχουν χρησιμοποιηθεί στο παρελθόν.

Η διερεύνηση του θέματος με άξονα την κατανόηση κλασμάτων δεν είναι επίσης τυχαία. Τα κλάσματα αποτελούν μια από τις πιο σημαντικές (Behr, Lesh, Post, & Silver, 1983; Harrison & Greer, 1993; Pickett, 1996) αλλά περίπλοκες (Behr, Harel, Post, & Lesh, 1993; Cramer et al., 2002; Moss, 2005) μαθηματικές έννοιες που συναντούν οι μαθητές τόσο στην πρωτοβάθμια όσο και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Συνεπώς, η κατανόηση τους αποτέλεσε τις τελευταίες δεκαετίες το επίκεντρο του ενδιαφέροντος πολλών ερευνητών (π.χ. Cramer et al., 2002; Lamon, 2001; Mack, 2000; Ni & Zhou, 2005), οι οποίοι προσέγγισαν το θέμα από διάφορες οπτικές γωνίες. Ειδικότερα, η αναγκαιότητα χρήσης ποικιλίας αναπαραστάσεων ή μοντέλων για εντοπισμό του τρόπου οικοδόμησης της έννοιας του κλάσματος από τους μαθητές, επισημαίνεται από διάφορους ερευνητές (Boulet, 1998; Cramer et al., 2002; De Windt-King & Goldin, 2001; Kyriakides & Charalambous, 2002; Lamon, 2001). Εντούτοις, οι Verschaffel, Greer και Torbeyns (2006) αναφέρουν ότι ο αριθμός των ερευνών που ασχολείται με την κατανόηση των πράξεων με κλασματικούς αριθμούς, όπως η πρόσθεση ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, είναι περιορισμένος.

Ένα θέμα που λαμβάνει επίσης ιδιαίτερη προσοχή από την εκπαιδευτική κοινότητα τα τελευταία χρόνια και απασχόλησε ένα σημαντικό αριθμό ερευνητών αναφέρεται στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά τη μετάβασή τους από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Οι πλείστες από τις έρευνες αναφέρονται στο συναισθηματικό τομέα όπου παρουσιάζεται αρνητική μεταβολή των αντιλήψεων των μαθητών για το σχολείο, των στάσεων τους απέναντι στα διάφορα μαθήματα, των κινήτρων τους, των πεποιθήσεων επάρκειας και της αυτοπεποίθησής τους κατά τη μετάβασή τους στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Anderson, Jacobs, Schramm, & Splittgerber, 2000; Anderman & Midgley, 1997; McGee, Ward, Gibbons, & Harlow, 2004; Middleton, Kaplan, & Midgley, 2004; Mullins & Irvin, 2000). Παρά το γεγονός ότι ο αριθμός των σχετικών ερευνητικών εργασιών είναι περιορισμένος, η δυσκολία προσαρμογής των μαθητών στο νέο περιβάλλον είναι εμφανής και στην επίδοσή τους (Anderman & Midgley, 1997; Galton, Morrison, & Pell, 2000; Mullins & Irvin, 2000; Whitley, Lupart, & Beran, 2007).

Όσον αφορά την έννοια του κλάσματος, ο Niemi (1996) επισημαίνει σχετικά ότι η διδασκαλία στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση προσανατολίζεται προοδευτικά στη διαδικαστική γνώση, δίνοντας κυρίως έμφαση σε αλγοριθμικούς υπολογισμούς παρά στην εννοιολογική

κατανόηση. Οι μαθητές που δεν επιτυγχάνουν να οικοδομήσουν τη συγκεκριμένη έννοια μέχρι το τέλος της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης είναι δύσκολο να επιτύχουν την κατανόησή της στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Niemi, 1996). Επιπρόσθετα, τα Principles and Evaluation Standards for School Mathematics (NCTM, 2000) υποστηρίζουν ότι η μάθηση στις τελευταίες τάξεις της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης είναι καθοριστικής σημασίας για ανάπτυξη ενός στέρεου εννοιολογικού υπόβαθρου των ρητών αριθμών. Μάλιστα γίνεται εισήγηση στους εκπαιδευτικούς για υιοθέτηση εννοιολογικά προσανατολισμένων στόχων και μαθησιακών εμπειριών, οι οποίες να ενθαρρύνουν τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων και χειριστικών μοντέλων (NCTM, 2000).

Η έκθεση της Επιτροπής για τη Μεταρρύθμιση του Εκπαιδευτικού Συστήματος (2005) στην Κύπρο επισήμανε χάσμα μεταξύ πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης όσον αφορά στο αναλυτικό πρόγραμμα, τις μεθόδους, τα υλικά και μέσα που χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία των μαθηματικών. Η δυσκολία προσαρμογής στο νέο σχολικό περιβάλλον έχει επιπτώσεις στην επίδοσή τους στα πλείστα θέματα διδασκαλίας και ειδικότερα στα μαθηματικά (π.χ. Meletiou-Mavrotheris & Stylianou, 2003). Η ενότητα των κλασμάτων με την οποία ασχολείται η παρούσα έρευνα αποτελεί μία από τις ενότητες που διδάσκονται τόσο στην πρωτοβάθμια όσο και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Συνεπώς, ένας παράγοντας ο οποίος πιθανόν να σχετίζεται με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση της συγκεκριμένης έννοιας είναι η μετάβαση από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση λαμβάνοντας υπόψη τις σχετικές αλλαγές που αυτή περιλαμβάνει όσον αφορά τη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών.

Παρά τη βαρύτητα που δίνεται ερευνητικά στην έννοια του κλάσματος μέχρι σήμερα δεν έχει γίνει συστηματική προσπάθεια διερεύνησης των γνωστικών δομών κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων των μαθητών πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης με άξονες την ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και την ικανότητα επίλυσης προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων. Ο εντοπισμός της γνωστικής δομής ενός μαθηματικού περιεχομένου κρίνεται ιδιαίτερα σημαντικός αφού παρέχει δυνατότητες για μάθηση και κατανόηση (Duvall, 2000). Επιπλέον, οι ερευνητές δεν έχουν προβεί σε σύγκριση της επίδοσης των μαθητών των δύο τελευταίων τάξεων της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και των δύο πρώτων τάξεων της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης όσον αφορά τις επιμέρους διαστάσεις της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της ικανότητας επίλυσης

προβλήματος με διαφορετικά πεδία αναπαράστασης για την έννοια της πρόσθεσης κλασμάτων.

Διαπιστώνεται εξάλλου έλλειψη ερευνών που να εξετάζουν τις γνωστικές δομές και την επίδοση των ίδιων μαθητών εξελικτικά κατά τη μετάβασή τους από μια τάξη σε άλλη εντός της ίδιας βαθμίδας ή μεταξύ διαφορετικών βαθμίδων και τον τρόπο που η διαδικασία μετάβασης επιδρά στην ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και στην ικανότητα επίλυσης προβλημάτων με διαφορετικά πεδία αναπαράστασης πρόσθεσης κλασμάτων. Επιπρόσθετα, δεν έχει ακόμη προσδιοριστεί ερευνητικά ο ρυθμός μεταβολής των αναπαραστατικών ικανοτήτων πρόσθεσης κλασμάτων των μαθητών κατά τη μετάβασή τους από μια τάξη σε άλλη εντός και μεταξύ πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Με βάση τα παραπάνω είναι φανερό ότι η επίδραση της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της ικανότητας επίλυσης προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών δεν έχει γίνει αντικείμενο συστηματικής διερεύνησης ειδικότερα όταν οι μαθητές βρίσκονται στο κρίσιμο μεταβατικό στάδιο εντός και μεταξύ πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Η συγκεκριμένη γνώση σε σχέση με την σύνθετη έννοια του κλάσματος συμβάλλει στην ερμηνεία των πιθανών ακαδημαϊκών διαφορών μεταξύ των μαθητών πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Με βάση τα αποτελέσματα που προκύπτουν προτείνονται επίσης χρήσιμες εφαρμογές όσον αφορά την ενίσχυση της μάθησης και της διδασκαλίας της πρόσθεσης κλασμάτων σε μια κρίσιμη μεταβατική περίοδο στη σχολική ζωή. Ανώτερος στόχος της παρούσας έρευνας είναι η επίτευξη συνέχειας στο αναλυτικό πρόγραμμα και η ομαλή μετάβαση των μαθητών από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Περιορισμοί της Έρευνας

Ο πρώτος περιορισμός της έρευνας σχετίζεται με το γεγονός ότι τα υποκείμενα που έλαβαν μέρος στην πρώτη φάση προέρχονται μόνο από δύο τάξεις της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (Ε' και Στ' δημοτικού) και δύο τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Α' και Β' γυμνασίου). Επιπλέον, στη δεύτερη φάση η μετάβαση εντός της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης εξετάστηκε μόνο σε σχέση με τη μετάβαση από την Ε' στη Στ' δημοτικού και από την Α' στη Β' γυμνασίου, αντίστοιχα. Η συγκεκριμένη επιλογή έγινε γιατί ένας από τους στόχους της έρευνας ήταν ο προσδιορισμός της κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων κατά τη κρίσιμη μετάβαση των μαθητών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και η

σύγκρισή της με την αντίστοιχη κατά τη μετάβαση εντός της ίδιας βαθμίδας, πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας. Έχοντας ως ομάδες αναφοράς τους μαθητές, οι οποίοι στην πρώτη φάση φοιτούν στη Στ' δημοτικού και Α' γυμνασίου και στη δεύτερη φάση τους μαθητές που μεταβαίνουν από τη Στ' δημοτικού στην Α' γυμνασίου, αποφασίστηκε η συμμετοχή μαθητών ένα χρόνο πριν και ένα χρόνο μετά την κρίσιμη μετάβαση.

Ο δεύτερος περιορισμός σχετίζεται με το γεγονός ότι έγινε ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών που χρησιμοποιούνται μόνο σε δύο τάξεις της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (Ε' και Στ' δημοτικού) και δύο τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Α' και Β' γυμνασίου). Η συγκεκριμένη επιλογή είναι συμβατή με την επιλογή των τάξεων στις οποίες φοιτούν τα υποκείμενα της έρευνας.

Ο τρίτος περιορισμός σχετίζεται με την επιλογή των διαγραμματικών αναπαραστάσεων που περιλαμβάνονται στο γραπτό δοκίμιο. Συγκεκριμένα, οι διαγραμματικές αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται για εξέταση της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων είναι η κυκλική και η ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού (συνεχή μοντέλα) και η αριθμητική γραμμή (γεωμετρικό μοντέλο). Η επιλογή των συγκεκριμένων διαγραμματικών αναπαραστάσεων στηρίχθηκε στη συχνότητα χρήσης τους στα σχολικά μαθηματικά στις συγκεκριμένες ηλικίες των μαθητών που εξετάζονται. Όσον αφορά το γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής λήφθηκε επίσης υπόψη το γεγονός ότι θεωρείται κατάλληλο εργαλείο για αξιολόγηση του βαθμού στον οποίο οι μαθητές έχουν αναπτύξει την ερμηνεία του κλάσματος ως μέτρου και την ικανότητα πρόσθεσης με κλασματικούς αριθμούς (Keijzer & Terwel, 2003), θέματα στα οποία επικεντρώνεται η παρούσα εργασία. Ως προς τις διαγραμματικές αναπαραστάσεις που περιλαμβάνονται στην επίλυση προβλήματος, η παρούσα έρευνα χρησιμοποιεί κυρίως προσχεδιασμένα διαγράμματα ορθογώνιας επιφάνειας εμβαδού. Η επιλογή των συγκεκριμένων διαγραμματικών αναπαραστάσεων έγινε για διευκόλυνση του υπολογισμού της επιφάνειας εμβαδού σε περίπτωση επιλογής διαγραμματικού τρόπου λύσης από τους μαθητές.

Δομή της Εργασίας

Βασικό άξονα παρουσίασης της ερευνητικής προσπάθειας που αναπτύχθηκε αποτελούν οι πτυχές που εξετάστηκαν και αφορούσαν το ρόλο της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της ικανότητας επίλυσης προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων στην εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων κατά τη

μετάβαση των μαθητών εντός και μεταξύ της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Τα πορίσματα των ερευνών και οι θεωρίες που σχετίζονται με το θέμα, η μεθοδολογία που σχεδιάστηκε, η ανάλυση των αποτελεσμάτων και η καταγραφή των συμπερασμάτων της παρούσας έρευνας ανταποκρίνονται στα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν.

Στο δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας παρουσιάζεται η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας για τα κύρια θέματα που εξέτασε η παρούσα έρευνα. Αναλύεται η έννοια της αναπαράστασης, οι ορισμοί που προτείνονται για αυτή με βάση διαφορετικές θεωρίες και ο ρόλος των αναπαραστάσεων στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών. Ιδιαίτερη αναφορά γίνεται στο ρόλο των εικονικών αναπαραστάσεων και του γεωμετρικού μοντέλου της αριθμητικής γραμμής στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών έτσι όπως προκύπτει από τα αποτελέσματα των σχετικών με το θέμα ερευνητικών εργασιών. Παρουσιάζονται επίσης τα ερευνητικά πορίσματα για το ρόλο των πολλαπλών αναπαραστάσεων στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών και την επίλυση προβλήματος, και ειδικότερα για τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων στη μάθηση και διδασκαλία των ρητών αριθμών. Επιπλέον, σχολιάζεται το πρόβλημα της μετάβασης από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση σε τοπικό και παγκόσμιο επίπεδο.

Στο τρίτο κεφάλαιο περιγράφεται ο ερευνητικός σχεδιασμός, ο οποίος περιλαμβάνει δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση, διερευνήθηκε γενικά η σχέση αλληλεπίδρασης της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της ικανότητας επίλυσης προβλήματος με διαφορετικά πεδία αναπαράστασης ως προς την εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων, στις δύο τελευταίες τάξεις της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και στις δύο πρώτες τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Η δεύτερη φάση της έρευνας αποσκοπεί στην εύρεση των δυναμικών αλληλεπιδράσεων μεταξύ της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της επίλυσης προβλήματος κατά τη μετάβαση εντός και μεταξύ της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται επίσης στον καθορισμό του ρυθμού μεταβολής της επίδοσης των ίδιων μαθητών όσον αφορά στις δύο διαστάσεις εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων, κατά τις συγκεκριμένες περιόδους μετάβασης. Παρουσιάζεται το δοκίμιο μέτρησης των επιμέρους παραμέτρων της εννοιολογικής κατανόησης κλασμάτων και το σκεπτικό της κατασκευής του. Καταγράφονται επίσης τα απαραίτητα στοιχεία για τη διαδικασία διεξαγωγής της έρευνας που ακολουθήθηκε στις δύο ερευνητικές φάσεις και περιγράφεται η στατιστική επεξεργασία των δεδομένων.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας με βάση τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν στις δύο ερευνητικές φάσεις. Αρχικά, συγκρίνονται τα πεδία αναπαράστασης και οι αναπαραστατικές μεταβολές των ασκήσεων κλασμάτων στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Ε΄ δημοτικού, Στ΄ δημοτικού, Α΄ γυμνασίου και Β΄ γυμνασίου. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται το δομικό μοντέλο που επιβεβαιώνει το σημαντικό ρόλο της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της ικανότητας επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων στην εννοιολογική κατανόηση της συγκεκριμένης έννοιας. Επιπλέον, επισημαίνεται η σταθερότητα του συγκεκριμένου μοντέλου αλλά και η διαφοροποίηση της επίδοσης των μαθητών στις επιμέρους διαστάσεις του μεταξύ των τεσσάρων ηλικιακών ομάδων (Ε΄ δημοτικού, Στ΄ δημοτικού, Α΄ γυμνασίου, Β΄ γυμνασίου). Με βάση τη δόμηση των γνωστικών ικανοτήτων των μαθητών προτείνεται μια σειρά ιεραρχικών επίπεδων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων.

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της δεύτερης ερευνητικής φάσης. Δίνεται ιδιαίτερη σημασία στη διερεύνηση της σταθερότητας του δομικού μοντέλου της εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων κατά τη μετάβαση των μαθητών από την Ε΄ στη Στ΄ δημοτικού, από τη Στ΄ δημοτικού στην Α΄ γυμνασίου και από την Α΄ στη Β΄ γυμνασίου. Εξετάζεται η δυναμική αλληλεπίδραση των δύο διαστάσεων εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων, της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της επίλυσης προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων, στο χρονικό διάστημα μετάβασης εντός και μεταξύ των δύο βαθμίδων. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στη διερεύνηση της επίδρασης της ηλικίας στις επιμέρους ικανότητες της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της επίλυσης προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων.

Στο πέμπτο κεφάλαιο ερμηνεύονται και σχολιάζονται τα αποτελέσματα σε σχέση με στοιχεία του θεωρητικού πλαισίου της εργασίας και με αντίστοιχα ευρήματα άλλων ερευνητικών εργασιών. Καταγράφονται και συζητούνται τα συμπεράσματα της έρευνας και παρατίθενται απόψεις για τη μελλοντική κατεύθυνση που μπορεί να έχει η διερεύνηση του συγκεκριμένου θέματος στα πλαίσια της Μαθηματικής Παιδείας.

Ορισμοί Βασικών Εννοιών

Ευελιξία Χρήσης Πολλαπλών Αναπαραστάσεων

Η ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων ορίζεται ως η ικανότητα του μαθητή να μεταβαίνει από ένα νοητικό σύνολο σε ένα άλλο ανταποκρινόμενος στις μεταβολές που

λαμβάνουν χώρα εντός και μεταξύ πεδίων αναπαράστασης (αναγνώριση, χειρισμός, μετάφραση σύμφωνα με τους Duval, 2006 και Lesh et al., 1987b) για την ίδια μαθηματική έννοια. Αναφέρεται στην ενδο-αναπαραστατική ευελιξία (intra-representation flexibility), δηλαδή την ικανότητα των μαθητών για αναγνώριση και χειρισμό μιας μαθηματικής έννοιας σε ποικιλία αναπαραστάσεων, και την δια-αναπαραστατική ευελιξία (inter-representation flexibility) που σχετίζεται με τη μετάβαση μεταξύ διαφορετικών αναπαραστατικών συστημάτων.

Επίλυση Μαθηματικού Προβλήματος

Η επίλυση προβλήματος ορίζεται ως η διαδικασία συσχετισμού από το άτομο των προηγούμενων εμπειριών, των γνώσεων, των πληροφοριών και της διαίσθησής του για το καθορισμό ενός αποτελέσματος ή μιας λύσης για την εύρεση της οποίας η πορεία που θα ακολουθεί δεν είναι άμεσα γνωστή (Charles, Lester, & O' Daffer, 1987; Φιλίππου & Χρίστου, 1995; Reys et al., 2001; Schoenfeld, 1987). Συνεπώς, για κατανόηση της προβληματικής κατάστασης και την επίλυσής της δεν απαιτείται μόνο την εφαρμογή οικείων διαδικασιών ρουτίνας (Carlson & Bloom, 2005), αλλά μια συγκεκριμένη στρατηγική ή συνδυασμός στρατηγικών (English, 1996; Pantziara, Gagatsis, & Pitta-Pantazi, 2004).

Εννοιολογική Κατανόηση Μαθηματικών Εννοιών

Η εννοιολογική κατανόηση στα μαθηματικά ορίζεται με αναφορά σε εσωτερικά δίκτυα αναπαραστάσεων. Εμφανίζεται όταν οι αναπαραστάσεις συνδέονται σε συνεχώς αναπτυσσόμενα και δομημένα δίκτυα. Οι σχέσεις μεταξύ των διαφόρων αναπαραστάσεων μπορεί να είναι ομοιότητας, διαφοράς ή συμπερίληψης (Hiebert & Carpenter, 1992). Η εννοιολογική κατανόηση μπορεί να θεωρηθεί ως ένα δίκτυο σχέσεων μεταξύ: α) ήδη υπάρχουσών γνώσεων και πληροφοριών και β) υπάρχουσας γνώσης και γνώσης που μόλις προσλαμβάνεται (Hiebert & Lefevre, 1986).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται επισκόπηση της βιβλιογραφίας, η οποία σχετίζεται με το ρόλο που διαδραματίζει η ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και η επίλυση προβλήματος στην εννοιολογική κατανόηση των κλασμάτων. Αρχικά, παρουσιάζεται η έννοια της αναπαράστασης και η προσπάθεια ορισμού της από διάφορους ερευνητές. Στη συνέχεια, αναλύονται τα ερευνητικά δεδομένα σχετικά με το ρόλο αναπαραστάσεων γενικά και ειδικότερα των εικονικών αναπαραστάσεων και του γεωμετρικού μοντέλου της αριθμητικής γραμμής, στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών εννοιών. Ιδιαίτερη αναφορά γίνεται στο ρόλο των πολλαπλών αναπαραστάσεων στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Επιχειρείται επίσης ταξινόμηση των ερευνών που σχετίζονται με τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων στη διδασκαλία και μάθηση των ρητών αριθμών. Τέλος, επιχειρείται μια σύντομη παρουσίαση ερευνητικών ευρημάτων όσον αφορά στη μετάβαση από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση στα μαθηματικά.

Η Έννοια της Αναπαράστασης

Ο όρος «αναπαράσταση» είναι ασαφής και ως τέτοιος επιδέχεται πολλαπλές ερμηνείες (Goldin & Kaput, 1996; Roth & McGinn, 1998; Seeger, 1998). Τη βάση μελέτης του θέματος των αναπαραστάσεων αποτέλεσαν διαφορετικές θεωρίες ψυχολογίας. Επομένως, ανάλογα με την αφετηρία μελέτης της έννοιας διαμορφώθηκαν διαφορετικοί ορισμοί.

Ο Kaput (1987) επισημαίνει την ανάγκη ύπαρξης ενός συστηματικού θεωρητικού πλαισίου για τα συστήματα αναπαράστασης, το οποίο να μπορεί να συμβάλλει στην ουσιαστική αντιμετώπιση διάφορων πρακτικών προβλημάτων σε σχέση με τις αναπαραστάσεις. Συγκεκριμένα, ο Kaput (1987) υποστηρίζει ότι πρέπει να δοθεί προσοχή στους τρόπους χρήσης των συμβόλων και των συνδυασμών τους μέσα στα μαθηματικά συστήματα αναπαράστασης, καθώς επίσης στον τρόπο με τον οποίο τα συστήματα αυτά σχετίζονται μεταξύ τους. Γενικά, η προσπάθεια του για την ανάπτυξη μιας θεωρίας

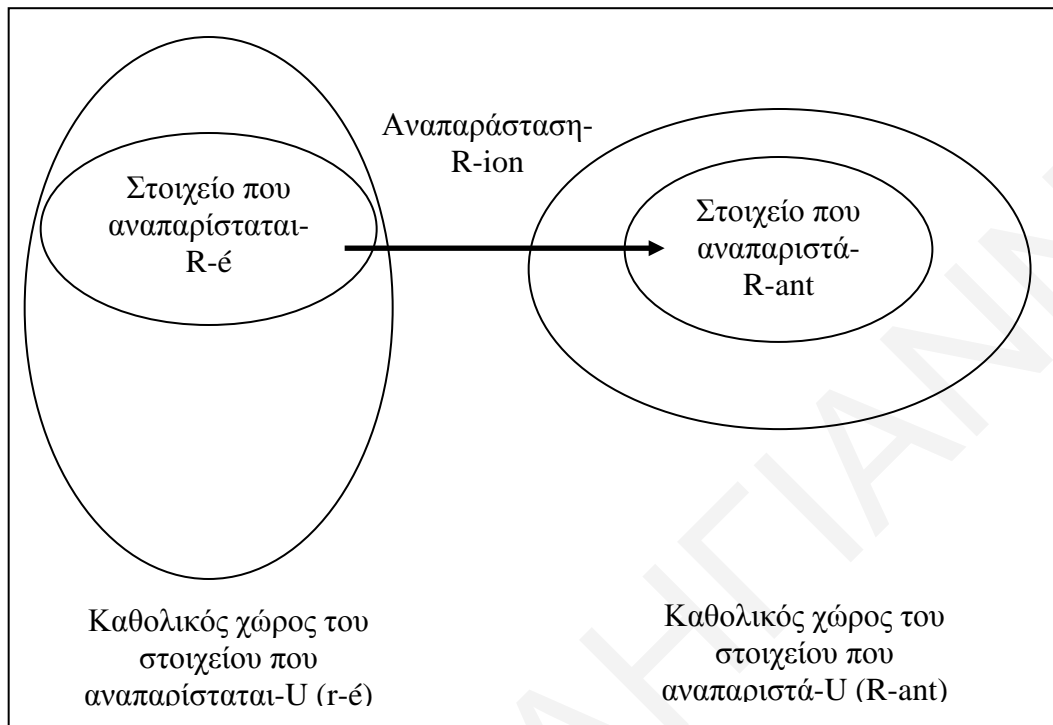
αναπαράστασης βασίζεται στην υπόθεση ότι η συγκεκριμένη θεωρία «θα πρέπει να θεμελιώνει την ψυχολογική/γλωσσική πραγματικότητα των κατασκευών, η οποία συνδέεται με τη δημιουργία εξωτερικών συμβόλων και να τη συνδέει με τις εσωτερικές γνωστικές δομές και διαδικασίες» (Karut, 1987, σ.22). Σύμφωνα με τον ορισμό του Karut (1987), η έννοια της αναπαράστασης περιλαμβάνει τις ακόλουθες πέντε ολότητες:

- α) την ολότητα που αναπαρίσταται
- β) την ολότητα που αναπαριστά
- γ) τις συγκεκριμένες πτυχές της ολότητας της αναπαράστασης που αναπαρίστανται
- δ) τις συγκεκριμένες πτυχές της ολότητας που αναπαριστά, οι οποίες σχηματίζουν την αναπαράσταση και
- ε) την αντιστοιχία ανάμεσα τις δύο ολότητες.

Ο ορισμός αυτός είναι αρκετά λειτουργικός και μπορεί να εφαρμοστεί σε ικανοποιητικό βαθμό στα έργα της έρευνας ως εξής:

- α) Η ολότητα που αναπαρίσταται είναι η έννοια της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων.
- β) Οι ολότητες που αναπαριστούν είναι τα διαγράμματα (ορθογώνιες και κυκλικές επιφάνειες, η αριθμητική γραμμή), το γραπτό κείμενο και η συμβολική γραφή.
- γ) Οι συγκεκριμένες πτυχές των ολοτήτων που αναπαρίστανται σχετίζονται με τα χαρακτηριστικά των προσθετών και το άθροισμά τους.
- δ) Οι συγκεκριμένες πτυχές της ολότητας που αναπαριστά είναι τα συστατικά στοιχεία των ορθογώνιων και κυκλικών διαγραμμάτων, της αριθμητικής γραμμής, του γραπτού κειμένου και της συμβολικής γραφής. Τα στοιχεία της αριθμητικής γραμμής που χρησιμοποιούνται για την εξεικόνιση μιας πρόσθεσης, είναι τα σημεία σε αυτή, οι υποδιαίρεσεις, το τόξο και το βέλος. Αντίστοιχα, τα στοιχεία των ορθογώνιων ή κυκλικών διαγραμμάτων σχετίζονται με την επιφάνεια του ορθογωνίου ή του κύκλου, η οποία χρησιμοποιείται για την εξεικόνιση της πρόσθεσης, δηλαδή τα τμήματα στα οποία διαμοιράζεται και αυτά που σκιάζονται.
- ε) Τέλος για να αποδώσουν οι μαθητές την ορθή σημασία στα διαγράμματα και στη χρήση της αριθμητικής γραμμής ώστε να χρησιμοποιηθούν αποτελεσματικά στην πρόσθεση κλασματικών αριθμών πρέπει να γίνει η αντιστοιχία ανάμεσα στο γραπτό κείμενο, στη

συμβολική γραφή και στα διαγράμματα (ορθογώνια και κυκλική επιφάνεια εμβადού, αριθμητική γραμμή).



Διάγραμμα 1. Οι πέντε συνιστώσες της αναπαράστασης σύμφωνα με τον Brousseau (2004).

Άμεση σχέση με τον ορισμό του Karut παρουσιάζει ο ορισμός του Brousseau (2004) σύμφωνα με τον οποίο μια αναπαράσταση συνίσταται από πέντε στοιχεία (βλ. Διάγραμμα 1):

- α) το στοιχείο που αναπαρίσταται
- β) τον καθολικό χώρο του στοιχείου που αναπαρίσταται
- γ) το στοιχείο που αναπαριστά,
- δ) τον καθολικό χώρο του στοιχείου που αναπαριστά
- ε) τη σχέση ανάμεσα στα τέσσερα προηγούμενα στοιχεία.

Μια αναπαράσταση πρέπει να ικανοποιεί την εξής αντιμεταθετική ιδιότητα: η απεικόνιση μιας σχέσης R μεταξύ δύο στοιχείων α και β του καθολικού χώρου που αναπαρίσταται πρέπει να συνάδει με τη σχέση της απεικόνισης fR που εφαρμόζεται στις απεικονίσεις $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ των στοιχείων α και β . Αυτή η ιδιότητα σημαίνει ότι μπορούμε χωρίς καμία διαφορά να μελετήσουμε αρχικά τις σχέσεις στον καθολικό χώρο που αναπαρίσταται, ακολούθως να τις μεταφράσουμε στον καθολικό χώρο που αναπαριστά ή να ξεκινήσουμε από τη μετάφραση των στοιχείων και των σχέσεων στο χώρο που αναπαριστά και να μελετήσουμε τις σχέσεις

των απεικονίσεων στο χώρο που αναπαρίσταται. Αυτή η συνθήκη διαδραματίζει θεμελιώδη ρόλο στη μελέτη και στην έρευνα των αναπαραστάσεων γιατί επιτρέπει την επαναφορά ενός νοήματος ή ενός αποτελέσματος που προκύπτει από τον καθολικό χώρο που αναπαριστά στον καθολικό χώρο που αναπαρίσταται, και άρα τη χρήση της αναπαράστασης.

Από την άλλη, οι McKendree, Small, Stenning και Conlon (2002) δίνοντας ένα πιο απλό ορισμό για την έννοια της αναπαράστασης αναφέρουν ότι η αναπαράσταση είναι ένα δομικό στοιχείο το οποίο αντιπροσωπεύει κάτι άλλο, όπως μια λέξη για ένα αντικείμενο, μια πρόταση για μια κατάσταση, ένα διάγραμμα για μια διευθέτηση αντικειμένων, μια εικόνα για μια σκηνή. Η συγκεκριμένη σημασία που αποδίδεται στην έννοια της αναπαράστασης συνδέεται άμεσα με τη λειτουργία της αναπαράστασης την οποία επισημαίνει ο Piaget (1968), ως ένα απλό υποκατάστατο του αντικειμένου που αναπαριστά όταν το τελευταίο απουσιάζει. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι McKendree κ.α. (2002) δίνουν ιδιαίτερη έμφαση στο μετασχηματισμό των αναπαραστάσεων εντός του ίδιου συστήματος αναπαράστασης. Η ικανότητα χειρισμού και τροποποίησης ενός αντικειμένου σε ένα σύστημα αναπαράστασης, ώστε το νέο αντικείμενο να διατηρεί το νόημα της αρχικής αναπαράστασης ή να συνδέεται άμεσα με αυτή βρίσκεται στο επίκεντρο της ανθρώπινης επεξεργασίας πληροφοριών. Ενδεικτικά, ένα παράδειγμα μετασχηματισμού με νόημα είναι ο μετασχηματισμός του $\chi+3\chi=12$ σε $\chi=3$ (McKendree et al., 2002).

Ο von Glasersfeld (1987) προσεγγίζει το ζήτημα των αναπαραστάσεων από την προοπτική της επιστημολογίας του οικοδομισμού, σύμφωνα με την οποία η μάθηση είναι μια ενεργητική διαδικασία οικοδόμησης. Επιχειρώντας να ορίσει με τη μεγαλύτερη δυνατή σαφήνεια το περιεχόμενο του όρου «αναπαράσταση», επισημαίνει ότι ο όρος «αναπαράσταση» είναι δυνατό να αναφέρεται: (α) στις εικονικές αναπαραστάσεις, (β) στα σύμβολα και (γ) στις νοητικές αναπαραστάσεις. Οι πρώτες δύο έννοιες αφορούν τις εξωτερικές αναπαραστάσεις, ενώ η τρίτη τις εσωτερικές αναπαραστάσεις. Η εικονική αναπαράσταση είναι μια ανακατασκευή ενός εμπειρικού αντικειμένου. Η ερμηνεία της δεν είναι μέρος του εξωτερικού κόσμου, αλλά επέρχεται από το συνδυασμό προϋπαρχόντων στοιχείων στο ρεπερτόριο των εμπειριών του ατόμου. Το κάθε άτομο αντιλαμβάνεται και ερμηνεύει μια εξωτερική αναπαράσταση με βάση τις νοητικές αναπαραστάσεις που έχει ήδη οικοδομήσει ως αποτέλεσμα προηγούμενων γνώσεων και εμπειριών. Οι συμβολικές αναπαραστάσεις αφορούν τα σημεία, τα σύμβολα και άλλα σημειωτικά αντικείμενα όπως τα γράμματα του αλφαβήτου, τις λέξεις, τις γραφικές παραστάσεις και άλλα τεχνητά σημεία. Οι

νοητικές αναπαραστάσεις παράγονται εσωτερικά και οργανώνονται, εμπλουτίζονται ή απορρίπτονται ανάλογα με το βαθμό χρήσης και εφαρμογής τους στο πλαίσιο της καθημερινής εμπειρίας. Ο von Glasersfeld (1987) επισημαίνει ότι μια νοητική αναπαράσταση αποτελείται από στοιχεία που αρχικά προήλθαν από το αισθησιοκινητικό επίπεδο της εμπειρίας. Δεν αποκλείονται, ωστόσο, οι πρωτότυποι συνδυασμοί επιμέρους στοιχείων της εμπειρίας ή κάποιος βαθμός αφαίρεσης σε σχέση με τα αρχικά αισθησιοκινητικά στοιχεία με αποτέλεσμα να προκύπτουν νέες νοητικές αναπαραστάσεις. Σύμφωνα με τις αρχές του οικοδομισμού, οι νοητικές αναπαραστάσεις έχουν δυναμικό χαρακτήρα αφού δεν πρόκειται για καταχωρήσεις που ανακαλούνται από κάποιο αρχείο, αλλά για παραγωγικές διαδικασίες οι οποίες ενεργοποιούνται (von Glasersfeld, 1987).

Η θεωρία των Roth και McGinn (1998) για την έννοια της αναπαράστασης επικεντρώνεται στην έννοια της «εγγραφής» (inscriptions) (Roth & McGinn, 1998, σ. 35). Ο όρος «εγγραφές» χρησιμοποιείται για να γίνει διάκριση ανάμεσα στις εξωτερικές αναπαραστάσεις (γραφικές παραστάσεις, πίνακες τιμών, φωτογραφίες, διαγράμματα, εξισώσεις), οι οποίες είναι γραμμένες σε κάποιο υλικό μέσο (χαρτί ή οθόνη του ηλεκτρονικού υπολογιστή) και τις νοητικές/εσωτερικές αναπαραστάσεις. Οι εγγραφές, εξαιτίας της φύσης τους, αποτελούν «κοινωνικά αντικείμενα» (Roth & McGinn, 1998, σ. 37) υπό την έννοια ότι μπορούν να κοινοποιηθούν σε πολλά άτομα. Αντίθετα, οι νοητικές αναπαραστάσεις, τις οποίες οικοδομεί το κάθε άτομο με βάση τις προηγούμενες γνώσεις και εμπειρίες του δεν είναι δυνατόν να προσεγγιστούν από κάποιο άλλο άτομο. Σύμφωνα με τους Roth και McGinn (1998), η σχέση ανάμεσα στην εγγραφή και την ολότητα στην οποία αυτή αναφέρεται μπορεί να εκφραστεί με τη χρήση του διπόλου του Wilson ανάμεσα στη φύση και στη μαθηματική δομή, το οποίο υποδηλώνει την αντιστοιχία ανάμεσα στα επιμέρους στοιχεία των δύο διαφορετικών πεδίων. Οι εγγραφές, ωστόσο, είναι σημειωτικά αντικείμενα οντολογικά ανεξάρτητα από την ολότητα στην οποία αναφέρονται. Η σχέση ανάμεσα σε μια εγγραφή και σε ένα φυσικό αντικείμενο ή φαινόμενο είναι αποτέλεσμα συγκεκριμένης κοινωνικής αλληλεπίδρασης και εξαρτάται από το πλαίσιο μέσα στο οποίο χρησιμοποιείται. Με βάση αυτή τη θεωρητική προσέγγιση οι δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές αναφορικά με την κατασκευή, χρήση και ερμηνεία εγγραφών συχνά πηγάζουν από την έλλειψη εμπειριών όσον αφορά το συσχετισμό συγκεκριμένων φυσικών φαινομένων και των εγγραφών (Roth & McGinn, 1998). Συνεπώς, ο στόχος της διαδικασίας αναπαράστασης δεν πρέπει να περιορίζεται στην απλή δημιουργία νοητικών εικόνων, αλλά στην κατανόηση της σχέσης

ανάμεσα στις νοητικές εικόνες και τις διαδικασίες εγγραφής που τις δημιουργήσαν. Ιδιαίτερη σημασία αποδίδεται στην παροχή ευκαιριών στους μαθητές ώστε να χρησιμοποιούν τις εγγραφές με ευελιξία σε καταστάσεις ανοιχτού προβλήματος για την επίτευξη συγκεκριμένου στόχου, παρά να εφαρμόζουν αλγοριθμικές διαδικασίες για τη χρήση τους.

Το θεωρητικό μοντέλο που προτείνεται από το Goldin (1998) διακρίνει τα συστήματα αναπαράστασης σε εσωτερικά και εξωτερικά. Τα συστήματα αυτά περιλαμβάνουν επιμέρους στοιχεία που ονομάζονται χαρακτήρες ή σύμβολα, τα οποία βρίσκονται σε μια «πρωτόγονη» μορφή, αφού δεν αναπαριστούν και δε συμβολίζουν κάτι άλλο και δεν μπορούν να αναλυθούν σε επιμέρους χαρακτήρες και σημεία. Τα συστήματα αναπαράστασης περιλαμβάνουν και κανόνες, οι οποίοι αποσκοπούν στο συνδυασμό των πρωταρχικών σημείων σε επιτρεπτούς συνδυασμούς όπως τα γράμματα του αλφαβήτου που συνδυάζονται με ένα συγκεκριμένο τρόπο για να σχηματίσουν ορθογραφημένες λέξεις. Η δομή ενός συστήματος αναπαράστασης περιλαμβάνει και κανόνες που αναφέρονται στη μετάβαση από ένα σχηματισμό σε άλλο μέσα στο ίδιο το σύστημα ή σε διαφορετικά συστήματα δημιουργώντας έτσι ένα είδος δικτύου. Ο Goldin (1998) προτείνει ένα ενοποιημένο θεωρητικό μοντέλο εξωτερικών και εσωτερικών αναπαραστάσεων στο οποίο οι εσωτερικές αναπαραστάσεις έχουν συμβολικές σχέσεις τόσο με τις εξωτερικές αναπαραστάσεις όσο και με άλλες εσωτερικές αναπαραστάσεις. Η δράση στα εξωτερικά συστήματα αναπαράστασης εξαρτάται από τα εσωτερικά συστήματα αναπαράστασης, τα οποία μπορούν να έχουν ή να μην έχουν δομική ομοιότητα με τα εξωτερικά συστήματα αναπαράστασης. Διαφορετικές κατηγορίες εσωτερικών συστημάτων αναπαράστασης συνιστούν ένα μοντέλο για την ικανότητα επίλυσης μαθηματικού προβλήματος: το γλωσσικό/συντακτικό σύστημα, το εικονιστικό σύστημα, το τυπικό σημειωτικό σύστημα των μαθηματικών, το σύστημα σχεδιασμού, παρακολούθησης και εκτελεστικού ελέγχου και το σύστημα συναισθηματικής αναπαράστασης. Το γλωσσικό/συντακτικό σύστημα περιγράφει την ικανότητα του ατόμου στο χειρισμό της φυσικής γλώσσας σε επίπεδο λέξεων, φράσεων και προτάσεων. Το εικονιστικό σύστημα περιλαμβάνει μη γλωσσικά, μη συμβολικά γνωστικά συστήματα όπως το οπτικό/χωρικό, το ακουστικό/ρυθμικό και το απτικό/κιναισθητικό σύστημα και την ικανότητα επεξεργασίας τους. Το τυπικό/σημειωτικό σύστημα αφορά τον τυπικό συμβολισμό στα μαθηματικά και είναι καλά δομημένο. Σχετίζεται με την κατανόηση και την ικανότητα κατασκευής και επεξεργασίας τυπικών συμβολικών συστημάτων. Το σύστημα σχεδιασμού, παρακολούθησης και εκτελεστικού ελέγχου περιλαμβάνει α) την ικανότητα παρατήρησης και ελέγχου της

κατάστασης στην οποία βρίσκονται τα άλλα συστήματα αναπαράστασης, β) την ικανότητα λήψης αποφάσεων για τα βήματα που θα γίνουν στα άλλα συστήματα και στο ίδιο και γ) την ικανότητα αλλαγής των άλλων συστημάτων καθώς και του ιδίου. Τέλος, το σύστημα συναισθηματικής αναπαράστασης αναφέρεται στα συναισθήματα (π.χ. στάσεις, πεποιθήσεις) που βιώνουν οι μαθητές στην προσπάθεια επίλυσης μαθηματικού προβλήματος. Το θεωρητικό μοντέλο του Goldin (1998) έχει πρακτικές συνέπειες στη μαθηματική εκπαίδευση εφόσον υποδεικνύει ότι βασική επιδίωξη της μαθηματικής εκπαίδευσης πρέπει να είναι η οικοδόμηση και ανάπτυξη ισχυρών και διαφορετικών εσωτερικών συστημάτων αναπαράστασης στους μαθητές και όχι μόνο η μετάδοση μαθηματικών γνώσεων και διαδικασιών. Επομένως πρέπει να αποδίδεται σημασία σε όλους τους τύπους αναπαράστασης: εικονιστική αναπαράσταση, λεκτική αναπαράσταση, τυπική αναπαράσταση, μεταγνωστικός έλεγχος, συναισθηματικός τομέας.

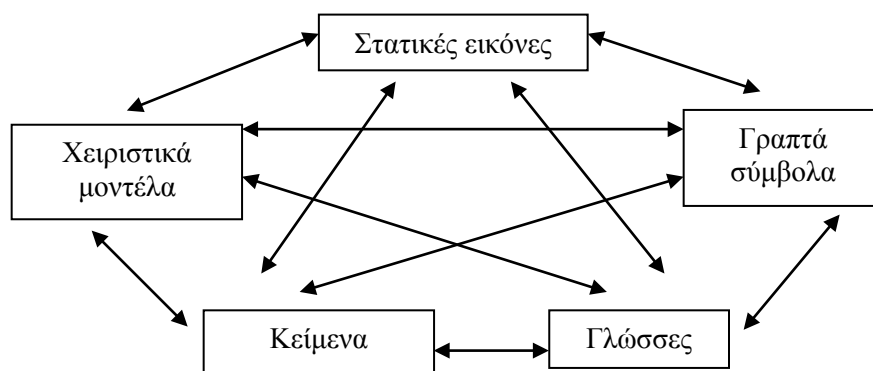
Μια κοινή βασική διάκριση που επισημαίνεται από την πλειοψηφία των διαφορετικών τρόπων προσέγγισης της έννοιας της αναπαράστασης, όπως παρουσιάζονται παραπάνω, είναι ανάμεσα στις εσωτερικές/ νοητικές και τις εξωτερικές αναπαραστάσεις (DeWindt-King & Goldin, 2003; Goldin & Kaput, 1996; Goldin & Shteingold, 2001; Roth & McGinn, 1998). Οι εσωτερικές αναπαραστάσεις αναφέρονται στους πιθανούς νοητικούς σχηματισμούς ή εικόνες που οικοδομούν τα υποκείμενα για να αναπαραστήσουν την εξωτερική πραγματικότητα. Η εσωτερική αναπαράσταση μαθηματικών ιδεών είναι αναγκαία για την κατανόησή τους (Hiebert & Carpenter, 1988). Από την άλλη, οι εξωτερικές αναπαραστάσεις αντιπροσωπεύουν τους εξωτερικούς συμβολικούς φορείς, οι οποίοι αποσκοπούν στην αναπαράσταση μιας συγκεκριμένης πραγματικότητας (Dufour-Janvier et al., 1987). Η εξωτερική αναπαράσταση μαθηματικών ιδεών είναι αναγκαία για την παρουσίαση και την επικοινωνία μαθηματικών ιδεών και μπορεί να έχει μία ή περισσότερες μορφές. Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις δεν μπορούν να γίνουν κατανοητές και να λειτουργήσουν αποσπασματικά. Για παράδειγμα, μια εξίσωση, μια συγκεκριμένη διάταξη των κύβων Dienes ή μια γραφική παράσταση σε καρτεσιανές συντεταγμένες μπορεί να έχει νόημα μόνο αν αποτελεί μέρος ενός ευρύτερου συστήματος. Μέσα στο κάθε σημειωτικό σύστημα αποδίδεται αξία στην αναπαράσταση σε αντιδιαστολή με άλλες αναπαραστάσεις του συγκεκριμένου συστήματος (Duval, 2006; Goldin & Shteingold, 2001). Τα αναπαραστατικά συστήματα έχουν καθορισμένη δομή με αποτέλεσμα οι διάφορες αναπαραστάσεις μέσα στο ίδιο σύστημα να συνδέονται στενά μεταξύ τους (Goldin & Shteingold, 2001). Εξάλλου το περιεχόμενο μιας αναπαράστασης καθορίζεται

περισσότερο σε σχέση με το σύστημα αναπαράστασης στο οποίο ανήκει, παρά σε σχέση με το αντικείμενο προς αναπαράσταση (Duval, 2006).

Ειδικότερα, τα εξωτερικά συστήματα αναπαράστασης περιλαμβάνουν συμβατικά συμβολικά συστήματα των μαθηματικών, όπως το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, ο τυπικός αλγεβρικός συμβολισμός, η αριθμητική γραμμή και το καρτεσιανό σύστημα αναπαράστασης, και δομημένα μαθησιακά περιβάλλοντα, όπως τα χειριστικά αντικείμενα και τα λογισμικά προγράμματα (Goldin & Shteingold, 2001). Οι Lesh κ.α. (1987b) διακρίνουν τους εξής πέντε διαφορετικούς τύπους συστημάτων εξωτερικών αναπαραστάσεων σε σχέση με τη μάθηση των μαθηματικών και την επίλυση μαθηματικού προβλήματος:

- (α) Κείμενα, στα οποία η γνώση είναι οργανωμένη με βάση γεγονότα της καθημερινής ζωής και τα οποία αποτελούν το πλαίσιο για την ερμηνεία και επίλυση προβληματικών καταστάσεων.
- (β) Χειριστικά αντικείμενα/μοντέλα, όπως είναι οι κύβοι αριθμητικής, οι ράβδοι κλασμάτων, η αριθμητική γραμμή, οι κύβοι Dienes, όπου τα επιμέρους στοιχεία του συστήματος/μοντέλου δεν έχουν νόημα αυτά κάθε αυτά, ωστόσο οι σχέσεις και οι λειτουργίες που προκύπτουν από το χειρισμό και το συνδυασμό των επιμέρους στοιχείων ταιριάζουν με πολλές καταστάσεις της καθημερινής ζωής.
- (γ) Εικόνες ή διαγράμματα, τα οποία χαρακτηρίζονται ως στατικά εικονικά μοντέλα και είναι δυνατό να εσωτερικευθούν ως «νοητικές εικόνες», όπως και τα χειριστικά μοντέλα.
- (δ) Γλώσσες, συμπεριλαμβανομένων και των εξειδικευμένων γλωσσών, που σχετίζονται με τα διάφορα επιμέρους πεδία (π.χ. μαθηματική λογική).
- (ε) Γραπτά σύμβολα, τα οποία όπως και οι γλώσσες είναι δυνατό να περιλαμβάνουν εξειδικευμένες προτάσεις και φράσεις (π.χ. $x + 3 = 8$, $A' \cup B' = (A \cap B)'$), καθώς επίσης συνηθισμένες προτάσεις και φράσεις στην ομιλούμενη γλώσσα.

Το Διάγραμμα 2 παρουσιάζει τους πέντε τύπους συστημάτων εξωτερικών αναπαραστάσεων και τις μεταξύ τους σχέσεις. Με βάση το Διάγραμμα 2 φαίνεται ότι όλα τα συστήματα αναπαράστασης είναι εξίσου σημαντικά για την κατανόηση και τη μάθηση μιας πληροφορίας. Κάποια όμως συστήματα αναπαράστασης είναι κύρια (κείμενα, γλώσσες, γραπτά σύμβολα), ενώ άλλα είναι βοηθητικά (στατικές εικόνες, χειριστικά μοντέλα). Μια δεύτερη διάκριση που χρειάζεται να γίνει είναι μεταξύ αναπαραστάσεων και γεωμετρικών μοντέλων. Οι δύο αυτές διακρίσεις θα αναλυθούν περαιτέρω στη συνέχεια.



Διάγραμμα 2. Συστήματα εξωτερικών αναπαραστάσεων (Lesh et al., 1987b, σ. 33-34)

Ιδιαίτερα σημαντική για αποτελεσματική διδασκαλία και μάθηση είναι η αμφίδρομη σχέση αλληλεπίδρασης ανάμεσα στις εσωτερικές και τις εξωτερικές αναπαραστάσεις. Οι Goldin και Shteingold (2001) θεωρούν ότι η ανάπτυξη αποτελεσματικών εσωτερικών συστημάτων αναπαράστασης των μαθητών, που ανταποκρίνονται με συνέπεια και αλληλεπιδρούν αποδοτικά με τα εξωτερικά συμβατικά καθορισμένα μαθηματικά συστήματα, αποτελεί θεμελιώδη στόχο της διδασκαλίας των μαθηματικών. Από τη μια, το άτομο εξωτερικεύει ενέργειες που πηγάζουν από εσωτερικές δομές. Άλλωστε εξαιτίας της φύσης τους οι εσωτερικές αναπαραστάσεις δεν είναι άμεσα παρατηρήσιμες. Η ύπαρξη και η δομή τους υποδηλώνεται από την εξωτερική συμπεριφορά των υποκειμένων, κυρίως με βάση την αλληλεπίδρασή τους με εξωτερικές αναπαραστάσεις (Hiebert & Carpenter, 1992). Από την άλλη, το άτομο εσωτερικεύει πράξεις μέσα από την αλληλεπίδραση με εξωτερικές φυσικές δομές ενός συμβολικού συστήματος. Ο τρόπος με τον οποίο το άτομο αντιλαμβάνεται και ερμηνεύει μια εξωτερική αναπαράσταση βασίζεται στις νοητικές αναπαραστάσεις που έχει ήδη οικοδομήσει ως αποτέλεσμα προηγούμενων εμπειριών και γνώσεων (Γαγάτσης et al., 2001).

Σχετικά, οι Pape και Tchoshanov (2001) επισημαίνουν ότι η αναπαραστατική σκέψη (representational thinking) αποτελεί την ικανότητα του μαθητή να ερμηνεύει, να οικοδομεί και να χειρίζεται αποτελεσματικά εσωτερικές και εξωτερικές αναπαραστάσεις, σε ατομικό ή κοινωνικό πλαίσιο. Η ανάπτυξη δηλαδή της αναπαραστατικής σκέψης αποτελεί μια διαδικασία δύο όψεων - την αλληλεπίδραση της εσωτερίκευσης των εξωτερικών αναπαραστάσεων και της εξωτερίκευσης των νοητικών εικόνων. Μάλιστα, η αλληλεπίδραση εσωτερικών και εσωτερικών αναπαραστάσεων χαρακτηρίζεται από τους Pape και Tchoshanov (2001) ως γνωστική αναπαράσταση. Η γνωστική αναπαράσταση αντικατοπτρίζει δηλαδή τόσο

τη διαδικασία (εσωτερίκευση) όσο και τα προϊόντα (εξωτερίκευση) της αναπαραστατικής σκέψης.

Ο Duval (2006) αναφέρει ότι ορισμένα σημειωτικά συστήματα μπορούν να εκπληρώσουν μόνο μία γνωστική λειτουργία - τη μαθηματική επεξεργασία. Αντίθετα, άλλα σημειωτικά συστήματα μπορούν να εκπληρώσουν ένα εύρος γνωστικών λειτουργιών: επικοινωνία, επεξεργασία πληροφοριών, ενημερότητα. Αυτή η λειτουργική διαφοροποίηση μεταξύ των διαφόρων σημειωτικών αναπαραστατικών συστημάτων είναι απαραίτητη αφού συνδέεται με τον τρόπο χρήσης των μαθηματικών διαδικασιών (βλ. Διάγραμμα 3). Συγκεκριμένα, στα μονολειτουργικά συστήματα αναπαράστασης οι περισσότερες διαδικασίες παίρνουν τη μορφή αλγορίθμων, ενώ μέσα στα πολυλειτουργικά συστήματα αναπαράστασης οι διαδικασίες δεν μπορούν να μετατραπούν σε αλγόριθμους. Για παράδειγμα, στη γεωμετρία, δεν υπάρχουν αλγόριθμοι χρήσης των σχημάτων με ευρετικό τρόπο. Από την άλλη, ο τρόπος που μια μαθηματική απόδειξη δομείται στη φυσική γλώσσα δεν μπορεί να τυποποιηθεί παρά μόνο με τη χρήση του συμβολικού συστήματος, αφού οι αποδείξεις με τη χρήση της φυσικής γλώσσας δεν γίνονται κατανοητές από τους περισσότερους μαθητές.

Ιδιαίτερα σημαντικό για την κατανόηση των διαδικασιών που περιλαμβάνονται σε κάθε μαθηματική δραστηριότητα είναι η προσοχή να εστιάζεται στο επίπεδο των σημειωτικών συστημάτων αναπαράστασης και όχι στις μεμονωμένες περιπτώσεις των αναπαραστάσεων που παράγονται. Βασική ιδιότητα των σημειωτικών αναπαραστάσεων είναι ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μια αντί της άλλης, διατηρώντας το ίδιο αντικείμενο προς αναφορά. Επιπλέον, ένας συμβολισμός δεν μπορεί να λειτουργήσει σαν σύμβολο εκτός του συμβολικού συστήματος μέσα στο οποίο του δίνεται νόημα σε σχέση με τα άλλα σύμβολα του συστήματος. Συνεπώς, οι αναπαραστάσεις σε κάθε σημειωτικό σύστημα παράγονται με βάση κάποιους κανόνες. Αυτό μπορεί να γίνει κατανοητό παίρνοντας ως παράδειγμα τα διάφορα συστήματα αρίθμησης ή τις καρτεσιανές γραφικές παραστάσεις (Duval, 2006).

	Οι ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ προκύπτουν από τις εξής ΔΙΑΛΟΓΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ: 1. Αναφορά αντικειμένων (ονόματα, σημάδια). 2. Δήλωση σχέσεων ή ιδιοτήτων. 3. Εξαγωγή συμπεράσματος (επαγωγή, υπολογισμός)	ΜΗ ΔΙΑΛΟΓΙΚΕΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ (Διαμόρφωση σχημάτων 1Δ/2Δ, 2Δ/2Δ, 3Δ/2Δ)
ΠΟΛΥΛΕΙΤΟΥΡΓΙΚΑ ΣΗΜΕΙΩΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ: <i>Οι διαδικασίες δεν μπορούν να μετατραπούν σε αλγόριθμους.</i>	Στη ΦΥΣΙΚΗ ΓΛΩΣΣΑ: 1. ΠΡΟΦΟΡΙΚΕΣ επεξηγήσεις 2. ΓΡΑΠΤΑ (οπτικά): θεωρήματα, αποδείξεις... ↓ ↑	ΕΙΚΟΝΙΚΕΣ: σχέδια, σκίτσα, πρότυπα ΜΗ ΕΙΚΟΝΙΚΕΣ: γεωμετρικά σχήματα τα οποία κατασκευάζονται με εργαλεία.
	ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΕΣ ΒΟΗΘΗΤΙΚΕΣ αναπαραστάσεις Δεν υπάρχουν κανόνες συνδυασμού	
ΜΟΝΟΛΕΙΤΟΥΡΓΙΚΑ ΣΗΜΕΙΩΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ: <i>Οι περισσότερες διαδικασίες είναι αλγοριθμικές</i>	Στα ΣΥΜΒΟΛΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ: Μόνο γραπτά (εκτός αν απλά υπαγορεύονται) ↓ ↑ Υπολογισμός, απόδειξη	Δ2 συνδυασμός Δ1 και Δ0 σχημάτων, κατευθυνόμενα ή όχι ↑ ↓ Διαγράμματα, γραφικές παραστάσεις

Διάγραμμα 3. Ταξινόμηση των σημειωτικών αναπαραστάσεων που ενεργοποιούνται στις μαθηματικές διαδικασίες (Duval, 2006).

Στα μαθηματικά χρησιμοποιούνται επίσης αναπαραστάσεις οι οποίες δεν βασίζονται σε κάποιο σημειωτικό σύστημα, όπως για παράδειγμα τα σπирτόξυλα τα οποία χρησιμοποιούνται σε μικρές τάξεις για αναπαράσταση των ακέραιων αριθμών. Οι αναπαραστάσεις αυτές αναφέρονται ως μεταβατικές βοηθητικές αναπαραστάσεις αφού δεν υπακούουν σε κανόνες κατασκευής και δεν μπορούν να μετασχηματιστούν (Duval, 2006). Στη συγκεκριμένη έρευνα χρησιμοποιείται συνδυασμός τόσο πολυλειτουργικών (γραπτό κείμενο) όσο και μονολειτουργικών συστημάτων αναπαράστασης (συμβολικές και διαγραμματικές αναπαραστάσεις), λαμβάνοντας υπόψη ότι κάθε μια από τις σημειωτικές αναπαραστάσεις μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη θέση μίας άλλης.

Ο Ρόλος των Αναπαραστάσεων στη Μάθηση και Διδασκαλία των Μαθηματικών

Μέσα από τη μελέτη της ιστορίας των μαθηματικών εύκολα διαπιστώνει κανείς το γεγονός ότι η ανάπτυξη των σημειωτικών αναπαραστάσεων αποτέλεσε απαραίτητη προϋπόθεση για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης (Duvall, 2006). Οι αναπαραστάσεις αποτελούν χρήσιμα εργαλεία για τη μαθηματική σκέψη αφού επιτρέπουν τη συγκεκριμενοποίηση των μαθηματικών εννοιών, τον αναστοχασμό, την οικοδόμηση της κατανόησης και την επικοινωνία πληροφοριών. Επιπλέον, ενισχύουν το μαθηματικό συλλογισμό βοηθώντας τους μαθητές να εστιάσουν την προσοχή τους στις βασικές ιδιότητες μιας μαθηματικής κατάστασης (Greeno & Hall, 1997). Άλλωστε, κανένα είδος μαθηματικής επεξεργασίας δεν θα μπορούσε να επιτευχθεί χωρίς τη χρήση των σημειωτικών αναπαραστάσεων, αφού η μαθηματική επεξεργασία πάντα περιλαμβάνει την αντικατάσταση μιας σημειωτικής αναπαράστασης από κάποια άλλη. Σύμφωνα με το Duvall (2006), αυτό που ουσιαστικά ενδιαφέρει στη μάθηση των μαθηματικών δεν είναι οι ίδιες οι αναπαραστάσεις αλλά οι μετασχηματισμοί τους.

Από επιστημολογικής άποψης, τα μαθηματικά διακρίνονται από τις άλλες θετικές επιστήμες λόγω του γεγονότος ότι δεν είναι δυνατή η πρόσβαση στα μαθηματικά αντικείμενα μέσω της αντίληψης ή ειδικών οργάνων (Duvall, 2006). Ο μόνος τρόπος πρόσβασης στα μαθηματικά αντικείμενα παρέχεται μέσα από τις διάφορες σημειωτικές αναπαραστάσεις (Dreyfus & Eisenberg, 1996; Duvall, 2006). Αξίζει να σημειωθεί ότι στα μαθηματικά υπάρχει η δυνατότητα χρήσης μια μεγάλης ποικιλίας σημειωτικών αναπαραστάσεων. Ορισμένα από αυτά είναι κοινά και σε άλλες επιστήμες, όπως είναι για παράδειγμα, η φυσική γλώσσα, ενώ άλλα χρησιμοποιούνται αποκλειστικά στα μαθηματικά, όπως είναι για παράδειγμα, οι αλγεβρικοί συμβολισμοί (Duvall, 2006).

Τα μαθηματικά αντικείμενα δεν θα πρέπει να συγχέονται όμως με τις σημειωτικές αναπαραστάσεις (Duvall, 2006). Με βάση ερευνητικά αποτελέσματα (Dufour-Janvier et al., 1987) έχει διαφανεί ότι παρόλο που οι μαθητές χρησιμοποιούν διάφορες αναπαραστάσεις στα μαθηματικά, όταν τους ζητηθεί, δεν αντιλαμβάνονται τις αναπαραστάσεις ως μέσα που θα τους βοηθήσουν στην επίλυση προβλημάτων, αλλά ως μαθηματικά αντικείμενα. Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές αναφορικά με την κατανόηση της σχέσης που υπάρχει ανάμεσα στην αναπαράσταση και την ολότητα στην οποία αυτή αναφέρεται οφείλονται πιθανόν στην ανάγκη για διπλή αναπαράσταση (DeLoache, 2000; DeLoache, Uttal, & Pierroutsakos, 1998). Οι μαθητές πρέπει να αντιμετωπίζουν μια αναπαράσταση ως ολότητα με

δική της υπόσταση, χαρακτηριστικά και ιδιότητες και ταυτόχρονα ως αναπαράσταση μιας άλλης ολότητας στην οποία αναφέρεται και για την οποία παρέχει πληροφορίες (DeLoache, 2000), η οποία στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι μια μαθηματική έννοια. Ωστόσο, όπως επισημαίνεται από τους DeLoache κ.α. (1998), μια αναπαράσταση μπορεί να χρησιμοποιηθεί με επιτυχία αρκεί να πληρούνται τρεις συνθήκες. Αρχικά, οι μαθητές πρέπει να αντιληφθούν ότι μια αναπαράσταση αναφέρεται σε κάποια άλλη ολότητα, για την οποία παρέχει πληροφορίες. Δεύτερο, πρέπει να κατανοήσουν πώς η αναπαράσταση και τα επιμέρους στοιχεία της σχετίζονται με τα επιμέρους στοιχεία της ολότητας στην οποία αναφέρεται. Τέλος, η χρήση αναπαραστάσεων απαιτεί την ικανότητα υπολογισμού συγκεκριμένων σχέσεων ανάμεσα στην αναπαράσταση και στην ολότητα στην οποία αυτή αναφέρεται.

Σχετική με τη θέση των DeLoache κ.α. (1998) είναι και η άποψη του εκφράζει ο Ainsworth (2006) αναφορικά με τις γνωστικές λειτουργίες που θα πρέπει να εμπλέκονται στη μάθηση με εξωτερικές αναπαραστάσεις. Συγκεκριμένα, ο Ainsworth (2006) επισημαίνει ότι οι μαθητές πρέπει να καταλαβαίνουν τη μορφή της αναπαράστασης, δηλαδή τον τρόπο σύμφωνα με τον οποίο η αναπαράσταση κωδικοποιεί και παρουσιάζει πληροφορίες. Όσον αφορά, για παράδειγμα, τις γραφικές παραστάσεις η μορφή σχετίζεται με στοιχεία όπως οι ευθείες, οι άξονες και η ονομασία των αξόνων. Επιπλέον, οι μαθητές χρειάζεται να γνωρίζουν κάποιες λειτουργίες των συγκεκριμένων αναπαραστάσεων. Ενδεικτικά, στην περίπτωση των γραφικών παραστάσεων απαραίτητες λειτουργίες είναι η εύρεση της κλίσης των ευθειών, το μέγιστο και το ελάχιστο και τα σημεία τομής. Πολύ σημαντική είναι όπως επισημαίνουν και οι DeLoache κ.α. (1998), η σχέση αναπαράστασης και πεδίου προς αναπαράσταση. Οι μαθητές καλούνται να αντιληφθούν τη σχέση αναπαράστασης και του πεδίου προς αναπαράσταση (Ainsworth, 2006) αφού η ερμηνεία μιας αναπαράστασης αποτελεί μια δραστηριότητα, η οποία από την αρχή ερμηνεύεται σύμφωνα με ένα περιεχόμενο (Roth & Bowen, 2001). Μια σχετική διάκριση, η οποία επισημαίνεται από τους Lesh κ.α. (1987a), είναι ανάμεσα σε διαφανή και αδιαφανή συστήματα αναπαράστασης. Από τη μια, τα διαφανή συστήματα αναπαράστασης έχουν ακριβώς το ίδιο νόημα με την έννοια ή τη δομή που αναπαριστούν. Από την άλλη, τα αδιαφανή συστήματα αναπαράστασης δίνουν έμφαση σε ορισμένες πτυχές της έννοιας ή της δομής που αναπαριστούν (Lesh et al., 1987a).

Ως αποτέλεσμα αυτής της αλληλεπίδρασης των ατόμων με την αναπαράσταση, οι σχέσεις εντός της αναπαράστασης αποκτούν νόημα για αυτά και αναπτύσσεται η αφηρημένη μαθηματική γνώση που αναφέρεται στις συγκεκριμένες σχέσεις και δομές (Steinbring, 1997).

Άλλωστε η χρήση εξωτερικών αναπαραστάσεων αποσκοπεί κατά κύριο λόγο στη δημιουργία εσωτερικών ενεργειών. Οι εσωτερικές ενέργειες, οι οποίες πρέπει να αναπτυχθούν στο μυαλό του μαθητή, προϋποθέτουν μια μορφή αφαίρεσης από το περιεχόμενο της αναπαράστασης. Όσο πιο ενδιαφέρον και ελκυστικό είναι όμως αυτό το περιεχόμενο τόσο πιο δύσκολα επιτυγχάνεται η αφαίρεση (DeLoache et al., 1998; Seeger, 1998). Σύμφωνα με τους DeLoache κ.α. (1998), ενισχυτικό της πιο πάνω άποψης είναι το γεγονός ότι στην Ιαπωνία, όπου οι μαθητές σημειώνουν εξαιρετικές επιδόσεις στα μαθηματικά, χρησιμοποιείται ένας μικρός αριθμός χειριστικών αντικειμένων κατά τη διάρκεια της φοίτησης στο δημοτικό σχολείο. Αντίθετα, οι εκπαιδευτικοί στην Αμερική χρησιμοποιούν ποικιλία αντικειμένων, γεγονός που ίσως έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να εστιάζουν την προσοχή τους στα ίδια τα αντικείμενα και όχι στην έννοια την οποία αναπαριστούν (DeLoache et al., 1998).

Ιδιαίτερη σημασία θα πρέπει να αποδίδεται επίσης στην ικανότητα των μαθητών να κατασκευάσουν ή να ανακαλύψουν αναπαραστάσεις αντί να ερμηνεύουν μόνο αναπαραστάσεις που τους παρουσιάζονται (Ainsworth, 2006). Ενδεικτικά, στα Principles and Evaluation Standards for School Mathematics (NCTM, 2000) επισημαίνεται ότι οι μαθητές θα πρέπει να ενθαρρύνονται να χρησιμοποιούν αλλά και να δημιουργούν αναπαραστάσεις για σκοπούς οργάνωσης και επικοινωνίας στα μαθηματικά. Οι μαθητές θα πρέπει επίσης να προτρέπονται να αναπαριστούν τις μαθηματικές έννοιες με τρόπο που να έχει νόημα για τους ίδιους έστω και αν οι αναπαραστάσεις που πιθανόν να χρησιμοποιήσουν να μην είναι οι συμβατικές. Παράλληλα, χρειάζεται να μάθουν να χρησιμοποιούν τις συμβατικές μορφές αναπαράστασης κατά τρόπο που να διευκολύνεται η μάθηση των μαθηματικών και η επικοινωνία σχετικά με τις μαθηματικές έννοιες (NCTM, 2000).

Επιπλέον οι μαθητές πρέπει να ενθαρρύνονται να επιλέγουν την κατάλληλη αναπαράσταση λαμβάνοντας υπόψη κάποιους παράγοντες όπως τα χαρακτηριστικά του έργου και της αναπαράστασης, αλλά και τις ατομικές τους προτιμήσεις (Ainsworth, 2006), κάτι το οποίο προϋποθέτει μετά-αναπαραστατική επάρκεια. Οι McKendree κ.α. (2002) επισημαίνουν σχετικά ότι η ίδια η διαδικασία της αναπαράστασης συμβάλλει στην εξωτερίκευση του συλλογισμού ενός ατόμου. Το γεγονός αυτό αποτελεί το πρώτο σημαντικό βήμα στην ικανότητα να προβαίνει κανείς σε κριτική θεώρηση τόσο του δικού του συλλογισμού όσο και των άλλων. Η κριτική σκέψη σχετικά με τα διάφορα αναπαραστατικά συστήματα μπορεί να επιτευχθεί τόσο στο επίπεδο μετασχηματισμού των πληροφοριών εντός των αναπαραστατικών συστημάτων όσο και στο μεταγνωστικό επίπεδο της επιλογής μιας αναπαράστασης για

επίλυση ενός προβλήματος. Επιπλέον, οι δεξιότητες αναπαράστασης είναι ιδιαίτερα σημαντικές αφού παρέχουν τη δυνατότητα στο άτομο να μεταφέρει τη γνώση του σε νέες καταστάσεις όπως επίσης και να μετασχηματίσει τις πληροφορίες που δίνονται ώστε να έχουν νόημα για το ίδιο (McKendree et al., 2002).

Σύμφωνα με το diSessa (2004) οι μαθητές διαθέτουν συχνά μια μετά-αναπαραστατική επάρκεια η οποία περιλαμβάνει ικανότητες αξιολόγησης της αξίας μιας αναπαράστασης σε σχέση με διαστάσεις όπως η επιστημονική ακρίβεια, η συμπύκνωση, η οικονομία, η συστηματικότητα και η οικειότητα. Οι McKendree κ.α. (2002), επισημαίνουν ωστόσο ότι κατά τη διδασκαλία δε δίνεται αρκετή έμφαση σε αναπαραστατικές δεξιότητες όπως η επιλογή της κατάλληλης αναπαράστασης, η κατασκευή αναπαραστάσεων και ο συλλογισμός σχετικά με τα διάφορα αναπαραστατικά συστήματα. Οι ίδιοι υποστηρίζουν ότι με διδακτικό εργαλείο τη συζήτηση βασικών αρχών και τον τρόπο εφαρμογής τους σε ποικιλία περιεχομένων με τη χρήση αναπαραστάσεων, οι δεξιότητες κριτικής σκέψης μπορούν να διδαχτούν ρητά χωρίς να έρχονται σε σύγκρουση ούτε με τη θέση εξουσίας που κατέχει ο εκπαιδευτικός αλλά ούτε και με τις βασικές δεξιότητες που ήδη κατέχει ο μαθητής. Κατά τη διδασκαλία ένας καλός διάλογος για τη διαδικασία της μάθησης και για τη σημασία της αναπαράστασης ενθαρρύνει τους μαθητές να κατευθύνουν και να αξιολογήσουν τη μάθησή τους (McKendree et al., 2002).

Οι αναπαραστάσεις συμβάλλουν θετικά στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών και στην επίλυση προβλήματος με την προϋπόθεση ότι οι μαθητές έχουν κατανοήσει τη λειτουργία τους και είναι σε θέση να τις χειριστούν με ευχέρεια. Όπως επισημαίνουν οι Dufour-Janvier κ.α. (1987), η πρόωπη εισαγωγή ορισμένων αναπαραστάσεων αποτελεί πηγή δυσκολιών για τους μαθητές. Η χρήση αναπαραστάσεων που είναι εξίσου αφηρημένες για τους μαθητές όσο και η έννοια προς διδασκαλία έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να χειρίζονται κανόνες και σύμβολα που δεν έχουν κανένα νόημα. Κατά συνέπεια, εστιάζεται η προσοχή τους στην κατανόηση της λειτουργίας της αναπαράστασης με αποτέλεσμα να υποβαθμίζονται οι μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες που αποτελούν στόχο της διδασκαλίας. Με άλλα λόγια, η διδασκαλία της αναπαράστασης γίνεται αυτοσκοπός παύοντας να είναι το μέσο που θα βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν και να οργανώσουν τις μαθηματικές έννοιες.

Με βάση αποτελέσματα ερευνών (π.χ. Dufour-Janvier et al., 1987) έχει διαφανεί ότι η εφαρμογή μιας αναπαράστασης σε ακατάλληλο περιεχόμενο είναι δυνατό να οδηγήσει στη δημιουργία παρανοήσεων, οι οποίες δυσχεραίνουν τη μάθηση σε μετέπειτα στάδια. Ένα

παράδειγμα αποτελεί η χρήση της αριθμητικής γραμμής για τη διδασκαλία των θετικών ακεραίων. Οι μαθητές αντιλαμβάνονται την αριθμητική γραμμή ως μια ακολουθία βημάτων, όπου κάθε βήμα είναι μια πέτρα και ανάμεσα σε δύο διαδοχικές πέτρες υπάρχει κενό. Αυτή η αντίληψη, ωστόσο, δε συνάδει με την έννοια της πυκνότητας της ευθείας των πραγματικών αριθμών.

Τέλος, είναι σημαντικό οι εξωτερικές αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία να σχετίζονται με τις προηγούμενες γνώσεις και εμπειρίες των μαθητών, να σχετίζονται δηλαδή με τις ήδη υπάρχουσες εσωτερικές αναπαραστάσεις (DeLoache et al., 1998; Dufour-Janvier et al., 1987; von Glasersfeld, 1987). Ωστόσο, συχνά δε λαμβάνεται υπόψη το χάσμα που πιθανόν να υπάρχει ανάμεσα στις εξωτερικές αναπαραστάσεις, τις οποίες καλούνται να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές, και στην αναπαραστάση που έχουν οι ίδιοι δημιουργήσει για την κατάσταση του προβλήματος ως αποτέλεσμα προσωπικών βιωμάτων και προηγούμενων εμπειριών. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να τίθενται εμπόδια στην κατανόηση, η οποία αναφέρεται σε εσωτερικά συνεχώς αναπτυσσόμενα και δομημένα δίκτυα αναπαραστάσεων (Hiebert & Carpenter, 1992).

Για τη χρήση των κατάλληλων αναπαραστάσεων κατά τη διδασκαλία από τους εκπαιδευτικούς ουσιαστικό ρόλο διαδραματίζει η εκπαίδευσή τους. Οι Ward, Anhalt και Vinson (2003) εξέτασαν μέσα από τα σχέδια μαθήματος μελλοντικών εκπαιδευτικών της δημοτικής εκπαίδευσης τις διάφορες μορφές αναπαραστάσης μαθηματικών εννοιών που επιλέγουν να χρησιμοποιήσουν, ώστε οι μαθηματικές έννοιες να γίνουν ευκολότερα κατανοητές από τους μαθητές. Εμπλέκεται έτσι η έννοια της γνώσης παιδαγωγικού περιεχομένου που διαθέτει ένας εκπαιδευτικός, η οποία αποτελεί την ικανότητά του να αναπαριστά έννοιες με τρόπο που να γίνονται κατανοητές από τους μαθητές. Στην έρευνα χρησιμοποιήθηκε η διάκριση των εξωτερικών αναπαραστάσεων που προτείνεται από τους Lesh κ.α.(1987b). Αξίζει να σημειωθεί ότι οι γλωσσικές αναπαραστάσεις διακρίνονται στη συγκεκριμένη έρευνα σε αυτές οι οποίες χρησιμοποιούνται: α) για αναφορά σε μαθηματικές διαδικασίες και ορισμό μαθηματικών όρων και β) για μαθηματικό διάλογο, ο οποίος ενθαρρύνει την ανωτέρου επιπέδου σκέψη, αιτιολόγηση και ερμηνεία. Το μάθημα το οποίο παρακολουθούσαν οι φοιτητές περιλάμβανε διδασκαλία με βάση τις αρχές του οικοδομισμού (π.χ. χρήση εποπτικών υλικών, τεχνολογίας, επίλυσης προβλήματος, διασύνδεση με πραγματικές καταστάσεις, συζήτηση) ενώ είχαν την ευκαιρία καθημερινά να παρακολουθήσουν διδασκαλία σε σχολική τάξη. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν

βελτίωση της παιδαγωγικού περιεχομένου γνώσης των φοιτητών, η οποία παρουσιάζεται μέσα από τις επιλογές των διαφόρων αναπαραστάσεων στα σχέδια μαθήματος. Συγκεκριμένα, οι φοιτητές χρησιμοποιούσαν σταδιακά με μεγαλύτερη ευχέρεια και ευελιξία ποικιλία αναπαραστάσεων. Επιπλέον, τα ευρήματα υποδεικνύουν ότι δεν υπάρχει ένας ιδανικός αριθμός αναπαραστάσεων για αποτελεσματικά σχέδια μαθήματος ενώ επισημαίνεται ότι σημασία δεν έχει ποια αναπαράσταση θα χρησιμοποιηθεί αλλά πώς θα χρησιμοποιηθεί και αν θα χρησιμοποιηθεί από τον εκπαιδευτικό ή το μαθητή (Ward et al., 2003).

Η Ball (1993) επισημαίνει σχετικά ότι οι υποθέσεις που κάνουν οι εκπαιδευτικοί όσον αφορά τον τρόπο που οι μαθητές κατανοούν έννοιες στα μαθηματικά διαμορφώνουν το αναπαραστατικό περιβάλλον που χρησιμοποιούν. Ο τρόπος σκέψης τους καθοδηγεί τις αποφάσεις που παίρνουν κατά τη διδασκαλία και πιθανόν να μην συγκλίνουν με την επιλογή ενός παραγωγικού αναπαραστατικού περιβάλλοντος, το οποίο βοηθά στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Για παράδειγμα, αν ο εκπαιδευτικός εστιάζει την προσοχή του στο να κάνει το μάθημα των μαθηματικών ευχάριστο πιθανόν να χρησιμοποιήσει αναπαραστάσεις οι οποίες δεν ανταποκρίνονται στις μαθηματικές έννοιες που εξετάζονται, δεν ενθαρρύνουν τη διερεύνηση ή τη διασύνδεση εννοιών. Από την άλλη, ο προσανατολισμός και η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών ως κανόνων και αλγορίθμων δεν ενθαρρύνει τη χρήση ενός αναπαραστατικού περιβάλλοντος, το οποίο συμβάλλει στην εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών (Ball, 1993).

Σε μια προσπάθεια διερεύνησης της παιδαγωγικού περιεχομένου γνώσης για την κατανόηση, οικοδόμηση και χρήση κατάλληλων αναπαραστάσεων, η Ball (1993) παρουσιάζει την από κοινού, μεταξύ εκπαιδευτικών και μαθητών, κατασκευή αναπαραστατικών περιβαλλόντων για τη μάθηση πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων σε μια τρίτη τάξη δημοτικού σχολείου. Οι μαθητές κατά τη διαδικασία χρήσης του αναπαραστατικού περιβάλλοντος, το οποίο προτείνεται από τον εκπαιδευτικό για επίλυση μιας προβληματικής κατάστασης, δημιούργησαν εναλλακτικούς τρόπους αναπαράστασης και ελέγχου της κατανόησής τους. Επιπλέον, μαθητές και εκπαιδευτικοί ανέπτυξαν από κοινού τη γλώσσα και τους περιορισμούς που είναι απαραίτητοι για τη διασύνδεση και χρήση συγκεκριμένων αναπαραστάσεων σε διάφορες μαθησιακές καταστάσεις, κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας κλασμάτων. Η Ball (1993) επισημαίνει ότι για να βοηθήσει ο εκπαιδευτικός το μαθητή να κατανοήσει μια μαθηματική έννοια, θα πρέπει να είναι σε θέση να πάρει σοβαρές αποφάσεις για τις αναπαραστάσεις που θα χρησιμοποιηθούν – την οικοδόμηση, τη χρήση και την

προσαρμογή τους- οι οποίες θα πρέπει να είναι αποτέλεσμα, μια διαδικασία συλλογισμού που απαιτεί κατανόηση της συγκεκριμένης έννοιας αλλά και άλλων εμπλεκόμενων εννοιών, όπως επίσης και γνώση του μαθηματικού συλλογισμού των μαθητών σε μια συγκεκριμένη ηλικία (Ball, 1993).

Στην παρούσα έρευνα, επιχειρείται μια προσπάθεια για εντοπισμό του τρόπου με τον οποίο ανταποκρίνονται οι μαθητές στα διάφορα πεδία αναπαράστασης, τα οποία χρησιμοποιούνται από τους εκπαιδευτικούς στη διδασκαλία ή παρουσιάζονται στα σχολικά εγχειρίδια στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση, για διευκόλυνση της εννοιολογικής κατανόησης στην πρόσθεση κλασμάτων και της προσπάθειάς τους για αντιμετώπιση σχετικών με την έννοια γνωστικών εμποδίων.

Οι Εικονικές Αναπαραστάσεις στη Μάθηση και Διδασκαλία των Μαθηματικών

Ο Schnotz (2002) κατηγοριοποιεί τα εξωτερικά συστήματα αναπαράστασης σε περιγραφικά και εικονικά. Τα περιγραφικά συστήματα αναπαράστασης έχουν αυθαίρετη δομή και σχετίζονται με τα αντικείμενα στα οποία αναφέρονται βάσει συμβάσεων (Mitchell, 1986; Schnotz, 2002). Τα κείμενα, οι μαθηματικές εξισώσεις και τα μαθηματικά σύμβολα εντάσσονται στα περιγραφικά συστήματα αναπαράστασης. Τα εικονικά συστήματα αναπαράστασης δεν έχουν αυθαίρετη δομή αλλά σχετίζονται με το αντικείμενο που αναπαριστούν βάσει κοινών δομικών στοιχείων, όπως η ομοιότητα, σε συγκεκριμένο ή αφηρημένο επίπεδο (Schnotz, 2002). Στα εικονικά συστήματα αναπαράστασης περιλαμβάνονται οπτικά εκθέματα (visual displays) (Schnotz, 2002; Vekiri, 2002), εικόνες (icons), εικονικά σημεία (iconic signs), εικονογραφικές πληροφορίες (pictorial information) (Schnotz, 2002), γραφικές αναπαραστάσεις (graphic representations) (Vekiri, 2002).

Οι Schnotz και Bannert (2003) έχουν ερευνητικά εντοπίσει ότι η δομή των εικονικών αναπαραστάσεων επηρεάζει τη δομή του νοητικού μοντέλου το οποίο θα σχηματίσει ο μαθητής. Επισημαίνουν επίσης ότι η παρουσία εικονικών αναπαραστάσεων δε δρα πάντα βοηθητικά στην απόκτηση της γνώσης. Συγκεκριμένα, ενώ οι εικονικές αναπαραστάσεις οι οποίες είναι κατάλληλες για ένα συγκεκριμένο έργο υποστηρίζουν της μαθησιακή διαδικασία, η χρήση ακατάλληλων εικονικών αναπαραστάσεων πιθανόν να παρεμποδίσει τη συγκεκριμένη διαδικασία (Schnotz & Bannert, 2003).

Η σημασία των εικονικών και διαγραμματικών αναπαραστάσεων όσον αφορά στη μάθηση των μαθηματικών και πιο συγκεκριμένα στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος

υποστηρίζεται από τα πορίσματα πολλών ερευνών (Arcavi, 2003; Booth & Thomas, 2000; Brown & Wheatly, 1997; Presmeg, 1986; Presmeg, 2006). Οι χωρικές και οπτικές δεξιότητες ενσωματώνονται σε πολλές πτυχές των μαθηματικών με τη χρήση διαγραμμάτων, πινάκων και του οπτικού χαρακτήρα της γεωμετρίας. Η γνώση χωρικών συμβάσεων αποτελεί βασικό στοιχείο κατανόησης των αριθμών και των πράξεων με αυτούς. Οι χωρικές δεξιότητες είναι επίσης σημαντικές για το χειρισμό πληροφοριών κατά τη διάρκεια νοητικών υπολογισμών και για την οργάνωση πληροφοριών κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος (Booth & Thomas, 2000).

Στο πλαίσιο της επίλυσης μαθηματικού προβλήματος η εξεικόνιση περιλαμβάνει τη δημιουργία εσωτερικών εικόνων ή/και εξωτερικών εικόνων και την αποτελεσματική χρήση τους με σκοπό τη μαθηματική διερεύνηση, την κατανόηση του προβλήματος και την επίλυσή του (Zimmerman & Cunningham, 1991). Η εξεικόνιση συμβάλλει δηλαδή στη διαδικασία μαθηματοποίησης, αφού αποτελεί ένα από τα ενδιάμεσα στάδια μετάβασης των μαθητών από την πραγματικότητα στο θεωρητικό μαθηματικό σχήμα. Οι ερευνητές επισημαίνουν ότι η επίλυση ενός προβλήματος μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας εξεικόνιση ή αναλυτικές μεθόδους, ή συνδυασμό των δύο διαδικασιών (Zazkis, Dubinsky, & Dautermann, 1996).

Με βάση την ταξινόμηση για τη λειτουργία των εικόνων στα λογοτεχνικά κείμενα (Carney & Levin, 2002), πρόσφατες έρευνες προσπάθησαν να εξετάσουν το ρόλο συγκεκριμένων ειδών εικόνων στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος (π.χ. Δεληγιάννη, Γαγάτσης, & Κουκούφης, 2003). Συγκεκριμένα, διάφορες έρευνες εισηγούνται ότι οι εικόνες έχουν τις εξής τέσσερις λειτουργίες στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος: (α) διακοσμητικές, (β) βοηθητικές - αναπαραστατικές, (γ) βοηθητικές- οργανωτικές και (δ) πληροφοριακές. Οι Elia, Gagatsis και Deliyianni (2004) σε μια ανασκόπηση διαφόρων ερευνών, οι οποίες εξέταζαν το ρόλο της εικόνας στην επίλυση αριθμητικών προβλημάτων με μαθητές δημοτικού σχολείου, εντόπισαν κάποια κοινά συμπεράσματα. Συγκεκριμένα, σύμφωνα με τα αποτελέσματά τους οι έρευνες καταλήγουν στο ότι οι διακοσμητικές και οι βοηθητικές-αναπαραστατικές εικόνες δεν επηρεάζουν τη συμπεριφορά των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων, ενώ η παρουσία πληροφοριακών εικόνων φαίνεται να τους δυσκολεύει. Αντίθετα, οι οργανωτικές εικόνες έχουν ως επί το πλείστον θετική επίδραση (Elia et al., 2004).

Μια άλλη ομάδα ερευνών ασχολήθηκε με τις διαγραμματικές αναπαραστάσεις που κατασκευάζουν οι ίδιοι οι μαθητές κατά τη διαδικασία επίλυσης λεκτικών προβλημάτων.

Ενδεικτικά, οι Hegarty και Kozhevnikov (1999) και van Garderen και Montague (2003) διερεύνησαν τη σχέση των οπτικο-χωρικών αναπαραστάσεων που κατασκευάζουν οι μαθητές κατά την επίλυση προβλήματος και την επιτυχία σε αυτά. Διακρίνοντας δύο είδη οπτικο-χωρικών αναπαραστάσεων, τις σχηματικές και τις εικονικές, οι οποίες κωδικοποιούν αντίστοιχα τις χωρικές σχέσεις και την οπτική εμφάνιση των αντικειμένων που περιγράφονται στο πρόβλημα, βρήκαν ότι ενώ το πρώτο είδος σχετίζεται θετικά με την επιτυχία επίλυσης προβλήματος το δεύτερο είδος σχετίζεται αρνητικά.

Η έρευνα των Booth και Thomas (2000) διακρίνει επίσης τις οπτικοχωρικές αναπαραστάσεις που συνοδεύουν τα λεκτικά προβλήματα, τα οποία παρουσιάζονται σε μαθητές υψηλής και χαμηλής χωρικής ικανότητας, σε εικονικές και διαγραμματικές αναπαραστάσεις. Τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης έρευνας έδειξαν ότι οι διαγραμματικές αναπαραστάσεις βοήθησαν μόνο τους μαθητές με υψηλή χωρική ικανότητα, οι οποίοι ήταν σε θέση να τις ερμηνεύσουν σωστά, να τις χρησιμοποιήσουν με μαθηματικό τρόπο και να χειριστούν τα δεδομένα τους κατάλληλα (Booth & Thomas, 2000).

Στη συγκεκριμένη έρευνα οι εικονικές αναπαραστάσεις, δηλαδή οι κυκλικές και ορθογώνιες επιφάνειες, οι οποίες χρησιμοποιούνται στα έργα αναγνώρισης, μετάφρασης και επίλυσης προβλήματος με κλασματικούς αριθμούς αποτελούν προκατασκευασμένα διαγράμματα, τα οποία απαιτούν μαθηματική γνώση και ερμηνεία.

Το Γεωμετρικό Μοντέλο της Αριθμητικής Γραμμής στη Μάθηση και Διδασκαλία των Μαθηματικών

Συχνά στη βιβλιογραφία δεν υπάρχει σαφής διάκριση ανάμεσα σε μια γεωμετρική ή εικονική αναπαράσταση και στην αναπαράσταση που λειτουργεί ως γεωμετρικό μοντέλο (Σιακαλλή, 2004). Η έννοια του γεωμετρικού μοντέλου ορίζεται από τους Γαγάτση και Πατρώνη (1993) ως εξής: Έστω μια συλλογή S από σημεία, ευθείες ή σχήματα στο n -διαστάσεων ευκλείδειο χώρο, που αναπαριστά ένα σύστημα Σ αντικειμένων, ή μια κατάσταση ή μια διαδικασία. Η συλλογή S είναι γεωμετρικό μοντέλο του Σ , αν οι εγγενείς γεωμετρικές ιδιότητες των στοιχείων της συλλογής S , δηλαδή οι γεωμετρικές ιδιότητες των σημείων, των ευθειών και των διαγραμμάτων της συλλογής S , ανεξάρτητα από το Σ , μας δίνουν όλες κάποια πληροφορία για το Σ , δηλαδή αντιστοιχούν στις πραγματικές ιδιότητες του συστήματος Σ . Αν αυτή η συνθήκη ικανοποιείται μόνο από τις τοπολογικές ιδιότητες των

σχημάτων της συλλογής S , τότε λέμε ότι η συλλογή S είναι μοντέλο με πλατιά (ή τοπολογική) σημασία (Γαγάτσης & Πατρώνης, 1993, σ.201).

Οι Μιχαηλίδου (2004) και Σιακαλλή (2004) επισημαίνουν ότι αν και η έννοια του γεωμετρικού μοντέλου σχετίζεται με την έννοια της αναπαράστασης μεταξύ των δύο εννοιών υπάρχει μια σαφής διάκριση. Μια απλή αναπαράσταση είναι πιθανόν να περιλαμβάνει περισσότερα στοιχεία από τα στοιχεία της ολότητας προς αναπαράσταση ή να παραλείπει να αναπαραστήσει κάποια από αυτά τα στοιχεία. Αντίθετα, στο γεωμετρικό μοντέλο όλα τα στοιχεία αναπαριστούν κάποια ή όλα τα στοιχεία της ολότητας προς αναπαράσταση, ποτέ όμως δεν περιλαμβάνει επιπλέον στοιχεία. Στην περίπτωση που αναπαρίστανται όλα τα στοιχεία της ολότητας προς αναπαράσταση, υπάρχει μια ένα προς ένα αντιστοιχία ανάμεσα στα στοιχεία του γεωμετρικού μοντέλου και στα στοιχεία της ολότητας προς αναπαράσταση (Μιχαηλίδου, 2004; Σιακαλλή, 2004). Συνεπώς, η χρήση ενός γεωμετρικού μοντέλου παρέχει μια ολοκληρωμένη εικόνα της ολότητας προς αναπαράσταση (Γαγάτσης & Πατρώνης, 1993; Fischbein, 1987).

Η ευκλείδεια ευθεία αποτελεί γεωμετρικό μοντέλο το οποίο μπορεί να αναπαραστήσει τους ρητούς αριθμούς και τις ιδιότητές τους. Συγκεκριμένα, έστω ότι Σ είναι ο δακτύλιος των ακεραίων ή το σώμα των ρητών αριθμών – ή ένα σώμα, που περιλαμβάνει το σώμα των ρητών αριθμών – με τις εξής πράξεις: πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός και διαίρεση. Επιπλέον, έστω ότι S είναι μια βαθμολογημένη ευθεία, δηλαδή μια ευθεία με ένα διακριτό σύνολο σημείων, τα οποία αντιστοιχούν στους ακέραιους ή τους ρητούς αριθμούς. Το γεγονός ότι το S είναι ένα γεωμετρικό μοντέλο για το Σ φαίνεται από το γεγονός ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός $\Sigma \xleftrightarrow{\quad} S$, έτσι ώστε οι πράξεις ανάμεσα στους αριθμούς, που ανήκουν στο Σ , να αντιστοιχούν στις πράξεις ανάμεσα σε προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα ή στις πράξεις ανάμεσα σε αριθμούς και προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα που ανήκουν στο S , όπως για παράδειγμα, το γινόμενο ενός αριθμού με ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα (Μιχαηλίδου, 2004, σ.22).

Η αριθμητική γραμμή διαφέρει από τα άλλα μοντέλα, που χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά όσον αφορά τα εξής: (α) η μονάδα αναπαρίσταται από ένα μήκος και η αριθμητική γραμμή υποβάλλει την ιδέα όχι μόνο της επανάληψης της μονάδας, αλλά και της υποδιαίρεσης όλων των επαναλαμβανόμενων μονάδων – δηλαδή η αριθμητική γραμμή έχει τη μορφή χάρακα, (β) στην αριθμητική γραμμή δεν υπάρχει διαχωρισμός μεταξύ μονάδων – το μοντέλο είναι συνεχές και (γ) ένα σημείο στην αριθμητική γραμμή δεν έχει αριθμητικό νόημα

μέχρι τη στιγμή που θα καθοριστεί το νόημα δύο άλλων τουλάχιστον σημείων αναφοράς. Επομένως, η χρήση της αριθμητικής γραμμής προϋποθέτει το συνδυασμό δύο μορφών αναπαράστασης, της εικονικής και της συμβολικής αναπαράστασης. Η δυσκολία χρήσης της αριθμητικής γραμμής πιθανόν να οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στο συνδυασμό της πληροφορίας που περιέχεται σε αυτές τις δυο μορφές αναπαράστασης (Bright, Behr, Post, & Wachsmuth, 1988).

Σύμφωνα με το Herbst (1997) το γεωμετρικό μοντέλο της γραμμής ως μέσο αναπαράστασης αριθμών είναι μια μεταφορά, διότι αποτελεί πρωταρχική έννοια της γεωμετρίας και όχι της αριθμητικής. Υπέρ της χρήσης της γραμμής για την αναπαράσταση των αριθμών συνηγορεί το γεωμετρικό αξίωμα, το οποίο αναφέρεται στη σειρά των σημείων στην ευθεία, κάτι το οποίο εξασφαλίζει αντιπροσώπευση όλων των αριθμών στη γραμμή. Ο Pimm (αναφορά στο Herbst, 1997) επισημαίνει ότι η αριθμητική γραμμή είναι μια μεταφορά, αφού η χρήση της στηρίζεται στην αναλογία ανάμεσα σε δύο σχέσεις: τη σχέση ανάμεσα σε ένα αριθμό και στο αριθμητικό σύστημα και τη σχέση ανάμεσα σε ένα σημείο και στην ευθεία γραμμή. Σύμφωνα με τους Tapia, Bibiloni και Tapia (αναφορά στο Herbst, 1997) η αριθμητική γραμμή ως μέσο αναπαράστασης των αριθμών αποδίδει ιδιότητες του συνόλου των φυσικών αριθμών, όπως είναι το άπειρο και η μοναδικότητα του κάθε φυσικού αριθμού. Επιπλέον, η αριθμητική γραμμή έχει αναπτυχθεί με τέτοιο τρόπο στα διδακτικά εγχειρίδια, ώστε οι αριθμοί και οι ιδιότητές τους να βρίσκονται σε αντιστοιχία με τα σημεία, τα διαστήματα και τις γεωμετρικές ιδιότητες που ισχύουν στην αριθμητική γραμμή. Το συγκεκριμένο γεωμετρικό μοντέλο μπορεί να αναπαραστήσει την ακολουθία των αριθμών, να δικαιολογήσει τους κανόνες, που αφορούν τα πρόσημα στον πολλαπλασιασμό των ακεραίων και να αναπαραστήσει την πυκνότητα των ρητών αριθμών (Herbst, 1997).

Ερευνητικές εργασίες έχουν δείξει ότι η χρήση της αριθμητικής γραμμής, ως μέσου αναπαράστασης των ρητών αριθμών, συμβάλλει στην κατανόηση της έννοιας του αριθμού και στην ανάπτυξη της τυπικής λογικής σκέψης, κυρίως λόγω της οπτικοποίησης που παρέχει. Ενδεικτικά, τα υποκείμενα της διαχρονικής έρευνας των Keijzer και Terwel (2003) δέχθηκαν διδασκαλία διαφόρων εννοιών των κλασμάτων σε δύο διαφορετικές διδακτικές συνθήκες. Στην ομάδα ελέγχου η εισαγωγή των κλασματικών αριθμών επιτυγχάνεται μέσα από τη διαδικασία του δίκαιου διαμοιρασμού και του μοντέλου της κυκλικής επιφάνειας. Στην πειραματική ομάδα η εισαγωγή των κλασματικών αριθμών γίνεται με τη χρήση ραβδόμορφων μοντέλων και της αριθμητικής γραμμής μέσα από το διάλογο και τη συζήτηση

στην τάξη. Αντίθετα, οι μαθητές της ομάδας ελέγχου εργάζονται περισσότερο σε ατομικό επίπεδο. Τα ευρήματα της έρευνας έδειξαν ότι η χρήση της αριθμητικής γραμμής βοήθησε στην ανάπτυξη της έννοιας του κλάσματος ως αριθμού αφού οι μαθητές της πειραματικής ομάδας παρουσίασαν μεγαλύτερη ευχέρεια στην επίλυση μη τυπικών προβλημάτων στα κλάσματα. Παράλληλα, επιτεύχθηκε όσον αφορά τους πιο ικανούς μαθητές στα μαθηματικά, μεταφορά της γνώσης σε γενικές μαθηματικές δεξιότητες. Γενικά, η χρήση της αριθμητικής γραμμής ως μοντέλου διδασκαλίας των κλασματικών αριθμών σε συνδυασμό με ένα διδακτικό περιβάλλον το οποίο ενθαρρύνει την αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών, φαίνεται όπως επισημαίνουν οι Keijzer και Terwel (2003), ότι διευκολύνει τη μάθηση των τυπικών εννοιών όσον αφορά στα κλάσματα.

Παρά το γεγονός ότι η αριθμητική γραμμή αναπαριστά, για παράδειγμα, τα κλάσματα και τις θεμελιώδεις ιδιότητές τους - μοναδικότητα, διαδοχικότητα, άπειρο, πυκνότητα, ισοδυναμία - αρκετές έρευνες (π.χ. Behr et al., 1983; Bright et al., 1988; Michaelidou, 2003; Ni, 2001) έχουν δείξει ότι προκαλεί επιπλέον δυσκολίες στους μαθητές αναφορικά με την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος. Σε πρόσφατη έρευνα που εξέτασε το ρόλο της αριθμητικής γραμμής στην αναπαράσταση της ισοδυναμίας και πρόσθεσης κλασμάτων παρατηρήθηκε μια στεγανοποίηση, συνολικά: α) των πεδίων αναπαράστασης, β) των έργων ισοδυναμίας και πρόσθεσης κλασμάτων, στα οποία ζητείται η μετάφραση από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική έκφραση, σε σχέση με τα ίδια έργα στα οποία ζητείται η μετάφραση από τη συμβολική έκφραση στην αριθμητική γραμμή και γ) των έργων ανάλογα με το γνωστικό αντικείμενο το οποίο εξετάζουν (Μιχαηλίδου, 2004). Η ύπαρξη της στεγανοποίησης υποδεικνύει μια γνωστική δυσκολία στην επίτευξη ευέλικτης μετάβασης μεταξύ διαφορετικών μαθηματικών αναπαραστάσεων (Duvall, 2002). Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην προσπάθειά τους να αναπαραστήσουν κλάσματα στην αριθμητική γραμμή, οφείλονται συχνά στο γεγονός ότι η υπό-έννοια του ρητού αριθμού ως μέρος – όλο, στην οποία δίνεται ιδιαίτερη έμφαση κατά τη διάρκεια της εισαγωγής και διδασκαλίας του κλάσματος, είναι κυρίαρχη στη σκέψη των μαθητών. Κατά συνέπεια, οι μαθητές εκλαμβάνουν την αριθμητική γραμμή ως ένα ευθύγραμμο τμήμα, μια ολότητα, από την οποία θα επιλέξουν ένα μέρος και όχι ως ένα συνεχές μοντέλο πάνω στο οποίο ένα σημείο δεν έχει αριθμητικό νόημα μέχρι τη στιγμή που θα καθοριστεί το νόημα δύο άλλων, τουλάχιστον, σημείων αναφοράς (Μιχαηλίδου, 2004).

Ο Hannula (2003) υποθέτει ότι αφού η ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος – όλο είναι θεμελιώδης στην κατανόηση των ρητών αριθμών, η ικανότητα των μαθητών να τοποθετήσουν ένα κλάσμα στην αριθμητική γραμμή μπορεί να θεωρηθεί ένδειξη σύγκλησης μεταξύ των άλλων ερμηνειών του κλάσματος. Μελετώντας τα αποτελέσματα της σχετικής έρευνας φαίνεται ότι ακόμη και μαθητές γυμνασίου παρουσιάζουν δυσκολίες στην τοποθέτηση κλασμάτων μικρότερων της μονάδας ως αριθμών στην αριθμητική γραμμή πιθανόν λόγω της κυρίαρχης ερμηνείας του κλάσματος ως μέρος- όλο. Ενδεικτικά, σημειώνεται ότι αρκετοί μαθητές πριν να τοποθετήσουν το κλάσμα στην αριθμητική γραμμή προσπαθούσαν να καθορίσουν το όλο από το οποίο θα υπολόγιζαν το συγκεκριμένο κλάσμα (Hannula, 2003). Σχετικά, η Ni (2000) αναφέρει οι μαθητές βασίζονται στην οικεία ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος – όλο ώστε να δώσουν νόημα στο αφηρημένο μοντέλο της αριθμητικής γραμμής. Συνεπώς, θεωρούν ολόκληρη την αριθμητική γραμμή ως μονάδα και όχι το ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο 0 μέχρι το σημείο 1. Η ανάγκη καθορισμού της μονάδας στην αριθμητική γραμμή φαίνεται να διακρίνει το μοντέλο αυτό από αυτά των γεωμετρικών επιφανειών ή του συνόλου αντικείμενων (Ni, 2000). Η δυσκολία επίσης των μαθητών να χειριστούν το κλάσμα ως μια οντότητα και όχι ως δύο αριθμούς (Behr et al., 1993) και να αντιληφθούν την πυκνότητα των ρητών αριθμών (Doufour-Janvier et al., 1987) προκαλούν επιπλέον δυσκολίες στους μαθητές. Η απαραίτητη αν και όχι άμεση χρήση των γραμμών για καθορισμό των διαστημάτων σε μια αριθμητική γραμμή μπορεί εξάλλου να λειτουργήσει αρνητικά σε αντιληπτικό επίπεδο (Behr et al., 1983).

Παρόμοια αποτελέσματα προέκυψαν και στην έρευνα των Michaelidou κ.α. (2004) όσον αφορά στους δεκαδικούς αριθμούς. Τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης έρευνας έδειξαν ότι οι μαθητές δεν είναι σε θέση να αναγνωρίσουν δεκαδικούς αριθμούς σε διάφορα συστήματα αναπαράστασης και δυσκολεύονται ιδιαίτερα στην αναγνώριση δεκαδικών μεγαλύτερων της μονάδας, λόγω της επιρροής της ερμηνείας των ρητών αριθμών ως μέρος – όλο. Όσον αφορά στα έργα μετάφρασης φαίνεται ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν τα δύο αναπαραστατικά πεδία που λαμβάνουν μέρος σαν δύο διαφορετικές έννοιες. Στην επίλυση προβλήματος η ανάγκη χειρισμού και ερμηνείας της αριθμητικής γραμμής και των χαρακτηριστικών της, υπερφόρτωσε γνωστικά τους μαθητές και οδήγησε σε λανθασμένη προσέγγιση των προβλημάτων. Παρουσιάστηκε επίσης μια στεγανοποίηση μεταξύ των έργων αναγνώρισης, αναπαράστασης και μετάφρασης κάτι που υποδηλώνει την έλλειψη

συντονισμού μεταξύ τους και την αποσπασματικότητα της γνώσης των μαθητών όσον αφορά στους δεκαδικούς αριθμούς (Michaelidou et al., 2004).

Σχετικά οι Martinie και Bay- Williams (2003) επισημαίνουν ότι οι περισσότεροι μαθητές αντιλαμβάνονται την αριθμητική γραμμή σε σχέση με τους ακέραιους αριθμούς, αλλά δυσκολεύονται να τοποθετήσουν σε αυτήν τους δεκαδικούς αριθμούς, ειδικότερα αυτούς που είναι μικρότεροι της μονάδας. Η δυσκολία των μαθητών να χειριστούν την αριθμητική γραμμή πιθανόν να υποδηλώνει την αδυναμία τους να εκτιμήσουν τη θέση δύο δεκαδικών αριθμών έστω και αν μπορούν να δώσουν την ακριβή αναπαράστασή τους (Martinie & Bay- Williams, 2003). Η χρήση της αριθμητικής γραμμής για εκτίμηση του μεγέθους των δεκαδικών αριθμών, των κλασμάτων και των ποσοστών είναι όμως ένα αποτελεσματικό εργαλείο για αισθητοποίηση του αριθμού (Bay, 2001). Λαμβάνοντας υπόψη το ρόλο των γραμμικών μοντέλων σε καταστάσεις της καθημερινής ζωής όπως το θερμόμετρο και η ρίγα, επιβάλλεται πιο συστηματικά η συμπερίληψή τους στη διδασκαλία των δεκαδικών αριθμών (Martinie & Bay-Williams, 2003).

Η Ni (2000) θεωρεί ότι το μοντέλο της αριθμητικής γραμμής παρέχει μεν τη δυνατότητα αναπαράστασης των ρητών αριθμών όμως δεν αποτελεί έγκυρο εργαλείο αξιολόγησης της ερμηνείας του κλάσματος ως μέτρου, για τους μαθητές στο δημοτικό σχολείο. Συγκεκριμένα, στην έρευνά της βρέθηκε ότι η επίδοση σε έργα τοποθέτησης των κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή δε σχετίζεται με την επίδοση των μαθητών σε έργα κατανόησης κλασμάτων τα οποία απαιτούσαν υπολογισμούς, εφαρμογές και επεξηγήσεις (Ni, 2000).

Ωστόσο, είναι πιθανόν η αποτυχία σε έργα αριθμητικής γραμμής να οφείλεται στην έλλειψη συστηματικής διδασκαλίας χρήσης του μοντέλου και όχι στην ακαταλληλότητά του (Σιακαλλή, 2004). Η θέση αυτή επιβεβαιώνεται με τα αποτελέσματα παρεμβατικού προγράμματος το οποίο περιλάμβανε χρήση του μοντέλου της αριθμητικής γραμμής. Η εφαρμογή του συγκεκριμένου παρεμβατικού προγράμματος είχε σαν αποτέλεσμα να αρθεί η στεγανοποίηση των έργων με βάση το γνωστικό αντικείμενο για τους μαθητές της πειραματικής ομάδας (Μιχαηλίδου, 2004). Επιπλέον, η έρευνα των Elia και Gagatsi (2006), η οποία περιλάμβανε παρεμβατική διδασκαλία για ένα σύνολο μαθητών όσον αφορά στη χρήση της πληροφοριακής εικόνας και για ένα άλλο σύνολο μαθητών όσον αφορά στη χρήση της αριθμητικής γραμμής στην επίλυση προβλημάτων με ακέραιους αριθμούς, έδειξε ότι οι μαθητές των πειραματικών ομάδων παρουσίασαν σημαντική βελτίωση της επίδοσής τους

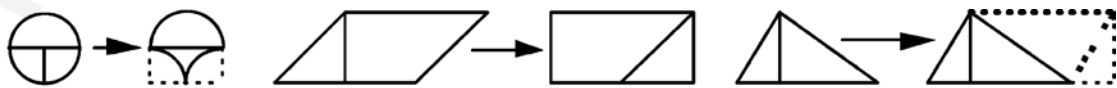
στην επίλυση προβλημάτων τα οποία περιλάμβαναν την αναπαράσταση στην οποία έδινε έμφαση η παρεμβατική διδασκαλία.

Οι Doritou και Gray (2007) επισημαίνουν εξάλλου ότι οι εκπαιδευτικοί οι οποίοι έλαβαν μέρος στη δική τους έρευνα, έδιναν έμφαση στη χρήση της αριθμητικής γραμμής μόνο ως εργαλείο παραλείποντας να λάβουν υπόψη την εννοιολογική δομή της όπως επισημαίνεται από το Herbst (1997). Το γεγονός ότι εκπαιδευτικοί και μαθητές δεν κατανοούσαν τη δυναμική της αριθμητικής γραμμής ως μεταφοράς, είχε σαν αποτέλεσμα να οδηγήσει σε παρανοήσεις εκ μέρους των μαθητών, οι οποίοι δεν ήταν σε θέση να αναδιοργανώσουν τη γνώση τους σχετικά με το σύστημα των ακεραίων αριθμών ώστε να συμπεριλάβουν και τα κλάσματα. Οι μαθητές αφού δεν ήταν σε θέση να εκτιμήσουν τη συμβολή της αριθμητικής γραμμής προτιμούσαν να καταφεύγουν σε αλγορίθμους επίλυσης των πράξεων με ακέραιους και κλάσματα.

Κατά συνέπεια, τα ερευνητικά αποτελέσματα υποδηλώνουν τη σημασία της κατάλληλης διδασκαλίας ώστε η αριθμητική γραμμή να χρησιμοποιηθεί αποτελεσματικά στη μάθηση των μαθηματικών.

Ο Ρόλος των Πολλαπλών Αναπαραστάσεων στην Κατανόηση των Μαθηματικών Εννοιών

Η μαθησιακή δραστηριότητα στα μαθηματικά μπορεί να αναλυθεί σε δύο τύπους μετασχηματισμών των σημειωτικών αναπαραστάσεων: τους χειρισμούς και τις μεταφράσεις. Οι χειρισμοί αποτελούν μετασχηματισμούς των αναπαραστάσεων που λαμβάνουν χώρα μέσα στο ίδιο το σύστημα αναπαράστασης, όπως είναι η επίλυση ενός συστήματος εξισώσεων και η συμπλήρωση ενός γεωμετρικού σχήματος λαμβάνοντας υπόψη αντιληπτικά κριτήρια ή την έννοια της συμμετρίας. Η επίλυση και η ευρετική αιτιολόγηση πολλών προβλημάτων γεωμετρίας απαιτεί για παράδειγμα οπτικούς χειρισμούς (βλ. Διάγραμμα 4). Οι μαθηματικοί χειρισμοί εξαρτώνται τόσο από το σύστημα αναπαράστασης όσο και από τους μαθηματικούς κανόνες (Duvall, 2006).



Διάγραμμα 4. Οπτικοί μετασχηματισμοί (Duvall, 2006).

Οι μεταφράσεις αφορούν τους μετασχηματισμούς οι οποίοι περιλαμβάνουν αλλαγή του συστήματος αναπαράστασης. Κατά τη διαδικασία μετάφρασης όλο ή μέρος του νοήματος της αρχικής αναπαράστασης διατηρείται χωρίς να μεταβάλλεται το αντικείμενο στο οποίο

αναφέρεται (Duvall, 2006). Παράδειγμα μετάφρασης είναι η μεταφορά από την αλγεβρική μορφή μιας εξίσωσης στη γραφική της αναπαράσταση. Στο Διάγραμμα 3, το οποίο παρουσιάζεται σε προηγούμενο υποκεφάλαιο, οι μετασχηματισμοί των αναπαραστάσεων δηλώνονται ως εξής: χειρισμοί (με καμπύλα βέλη) και μεταφράσεις (με κάθετα ή οριζόντια βέλη). Οι Lesh κ.α. (1987b) επισημαίνουν ότι οι χειρισμοί και οι μεταφράσεις βρίσκονται στην πραγματικότητα σε σχέση αλληλεξάρτησης. Αν και ο χειρισμοί στα πλαίσια του ίδιου συστήματος αναπαράστασης είναι πιο σημαντικοί από μαθηματικής σκοπιάς, οι μεταφράσεις αποτελούν αποφασιστικό παράγοντα μάθησης (Duvall, 2006).

Η μετάφραση περιλαμβάνει δυο μορφές αναπαράστασης: την πηγή (αρχική αναπαράσταση) και το στόχο (τελική αναπαράσταση). Οι διαδικασίες μετάφρασης αναπτύσσονται αποτελεσματικότερα όταν οι μαθητές καλούνται να κάνουν μεταφράσεις τόσο από την πηγή στο στόχο όσο και από το στόχο στην πηγή κατά τρόπο συμμετρικό (Janvier, 1987). Συνεπώς, για επίτευξη της διάκρισης του τι είναι μαθηματικά σχετικό και τι όχι σε οποιοδήποτε μαθηματικό περιεχόμενο πρέπει ο μαθητής να είναι σε θέση να διερευνήσει τη μεταβολή των αναπαραστάσεων τόσο στο σημειωτικό σύστημα που αποτελεί την πηγή όσο και στο σημειωτικό σύστημα που αποτελεί το στόχο της μετάφρασης (Duvall, 2006).

Η επιτυχία των μαθητών στα έργα μετάφρασης εξαρτάται από τη γνωστική απόσταση που δημιουργείται μεταξύ αρχικής και τελικής αναπαράστασης. Σε κάποιες περιπτώσεις υπάρχει ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ αρχικής και τελικής αναπαράστασης, οπότε η διαδικασία μετάφρασης δεν είναι τίποτα περισσότερο από μια απλή κωδικοποίηση. Όμως κατά τη διαδικασία μετάφρασης μεταξύ δύο ασύμφωνων αναπαραστάσεων παρουσιάζεται σύγκρουση αφού η μετάφραση μεταξύ αναπαραστάσεων απαιτεί γνωστικό διαχωρισμό του αντικειμένου προς αναπαράσταση και του περιεχομένου μιας συγκεκριμένης σημειωτικής αναπαράστασης. Από την άλλη, είναι γνωστικά αδύνατη η αποσύνδεση του περιεχομένου οποιασδήποτε σημειωτικής αναπαράστασης από τη στιγμή που δεν υπάρχει άλλος τρόπος πρόσβασης στα μαθηματικά αντικείμενα. Πολλές φορές η σύγκρουση αυτή οδηγεί τους μαθητές στη θεώρηση των δύο αναπαραστάσεων του ίδιου αντικειμένου σαν δύο διαφορετικά μαθηματικά αντικείμενα. Συνεπώς, οι μαθητές αντιμετωπίζουν αδυναμίες στην αλλαγή του συστήματος αναπαράστασης και στη χρήση μιας μαθηματικής γνώσης που δεν βρίσκεται σε στενό μαθησιακό περιεχόμενο. Τα συστήματα αναπαράστασης παραμένουν στεγανοποιημένα και η κατανόηση αποσπασματική (Duvall, 2006). Οι Vinner και Dreyfus (1989) χρησιμοποιούν τον όρο της στεγανοποίησης όχι μόνο όσον αφορά στις αναπαραστάσεις αλλά

με μια πιο διευρυμένη ερμηνεία. Συγκεκριμένα, οι ερευνητές αυτοί επισημαίνουν ότι η στεγανοποίηση προκύπτει όταν ένα άτομο διαθέτει δύο διαφορετικά, πιθανόν αντίθετα σχήματα μίας γνωστικής δομής. Η ασυνέπεια στη συμπεριφορά του αποτελεί ένδειξη του συγκεκριμένου φαινομένου.

Γενικά, η ανάγκη χρήσης ποικιλίας αναπαραστάσεων συνδέεται με την οικονομία επεξεργασίας, τη συμπληρωματικότητα των πεδίων αναπαράστασης και τη δομή της αναπαράστασης σε σχέση με την κατανόηση (Duval, 1987; Duval, 1993; Gagatsis, 1997). Ο Duval (1987) επισημαίνει ότι κάθε πεδίο αναπαράστασης χαρακτηρίζεται από διαφορετικές δυνατότητες. Κάθε αναπαράσταση είναι γνωστικά μερική ως προς αυτό που παριστάνει αφού το κάθε πεδίο αναπαριστά διαφορετικές πτυχές του περιεχομένου μιας κατάστασης (Γαγάτσης et al., 2001). Τα σχήματα και γενικότερα όλες οι αναλογικές αναπαραστάσεις παριστάνουν μόνο καταστάσεις, σχηματισμούς ή αποτελέσματα πράξεων, χωρίς να μπορούν να αναπαραστήσουν πράξεις ή μετασχηματισμούς. Για την αναπαράσταση πράξεων απαιτείται ένα πεδίο, το οποίο να έχει τις ιδιότητες μιας γλώσσας, φυσικής ή αλγεβρικής. Αντίθετα, τα σχήματα επιτρέπουν την αναπαράσταση της ολότητας των σχέσεων που υπάρχουν ανάμεσα στα επιμέρους στοιχεία, τα οποία συνθέτουν ένα αντικείμενο ή μια κατάσταση. Η όσο το δυνατόν πληρέστερη κατανόηση μιας έννοιας βασίζεται στο συνδυασμό δύο τουλάχιστον πεδίων αναπαράστασης, ο οποίος επιτυγχάνεται από την ταχύτητα και τον αυθόρμητο χαρακτήρα της γνωστικής δραστηριότητας της μετάφρασης (Duval, 1987).

Αναφορικά με τη χρήση ποικιλίας αναπαραστάσεων που αναφέρονται στην ίδια έννοια αναμένεται ότι ο μαθητής θα αντιληφθεί τις κοινές ιδιότητες των διαφορετικών αναπαραστάσεων, την κοινή υποκείμενη μαθηματική δομή και θα κατορθώσει να οικοδομήσει την έννοια που αποτελεί το στόχο της διδασκαλίας (Γαγάτσης et al., 2001). Για την κατανόηση μέσω πολλαπλών αναπαραστάσεων απαιτείται δηλαδή από το μαθητή η δημιουργία συσχετίσεων μεταξύ αντίστοιχων στοιχείων και σχετικών δομών σε διαφορετικές αναπαραστάσεις (Seufert, 2003). Όπως επισημαίνουν οι Greer και Harel (1998) η αναγνώριση και αξιοποίηση των σχέσεων δομής ανάμεσα σε καταστάσεις που διαφέρουν όσον αφορά τα εξωτερικά χαρακτηριστικά είναι σύμφυτη με τη μαθηματική γνώση. Ο συντονισμός των διαφόρων σημειωτικών συστημάτων δεν αποτελεί δηλαδή συνέπεια αλλά προϋπόθεση της κατανόησης στα μαθηματικά (Duval, 2006).

Οι Pape και Tchoshanov (2001) για την κατανόηση της σημασίας των πολλαπλών αναπαραστάσεων στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, λαμβάνουν υπόψη ευρήματα

από τη γνωστική θεωρία και τη διερεύνηση του ανθρώπινου νου (Caine & Caine; Chambris & Kosslyn, αναφορά στους Pape & Tchoshanov, 2001). Από αυτά προκύπτει ότι ο ανθρώπινος νους εργάζεται πιο αποτελεσματικά χρησιμοποιώντας πολλαπλά αναπαραστατικά μοτίβα για την εσωτερική και την εξωτερική πληροφοριών. Εφόσον η γλώσσα του ανθρώπινου νου περιλαμβάνει πολλαπλές αναπαραστάσεις προκύπτει ότι και η ανάπτυξη των δεξιοτήτων σκέψης των μαθητών απαιτεί προσέγγιση μέσω πολλαπλών αναπαραστάσεων (Pape & Tchoshanov, 2001).

Για το σχεδιασμό πολλαπλών εξωτερικών αναπαραστατικών συστημάτων σε εκπαιδευτικά λογισμικά λαμβάνονται υπόψη ορισμένα χαρακτηριστικά, όπως είναι ο αριθμός των αναπαραστάσεων, ο τρόπος κατανομής των πληροφοριών στις διάφορες αναπαραστάσεις, η μορφή των αναπαραστάσεων, η σειρά παρουσίασης των αναπαραστάσεων και ο βαθμός ενθάρρυνσης μεταφράσεων μεταξύ των αναπαραστάσεων (Ainsworth, 2006). Ωστόσο οι διαστάσεις αυτές μπορούν να λαμβάνονται υπόψη και στο σχεδιασμό οποιασδήποτε δραστηριότητας στα μαθηματικά που εμπλέκει τη χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων.

Σύμφωνα με τον Janvier (1987) τα περισσότερα σχολικά εγχειρίδια σήμερα χρησιμοποιούν ποικιλία μορφών αναπαράστασης για ενίσχυση της κατανόησης. Παρόλα αυτά συγκεκριμένες χρήσεις του συμβολισμού, όπως είναι οι διαδικασίες μετάφρασης, φαίνεται συχνά να αγνοούνται (Janvier, 1987). Η χρήση διαφορετικών μορφών αναπαράστασης και οι συνδέσεις μεταξύ τους έχουν όμως κεντρική θέση στη μαθηματική παιδεία όπου οι μαθητές χρησιμοποιούν ένα συμβολικό σύστημα για να επεκτείνουν και να κατανοήσουν ένα άλλο (Leinhardt, Zaslavsky, & Stain, 1990). Κατά συνέπεια, η αναγνώριση της ίδιας έννοιας σε ποικίλα συστήματα αναπαράστασης, η ικανότητα χειρισμού της έννοιας στο πλαίσιο αυτών των συστημάτων αναπαράστασης όπως επίσης και η ικανότητα ευέλικτης μετάφρασης μιας έννοιας από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο είναι απαραίτητα για την κατανόησή της (Lesh et al., 1987) και επιτρέπουν τον εντοπισμό ποικίλων σχέσεων μεταξύ των διαφόρων αναπαραστάσεων (Even, 1998).

Η ταξινόμια του Hitt (1998) προχωρεί ένα βήμα πάρα πέρα διακρίνοντας τα εξής επίπεδα οικοδόμησης της έννοιας:

Επίπεδο 1: Τα υποκείμενα έχουν ανακριβείς ιδέες για την έννοια (μη συναφές μείγμα διαφόρων αναπαραστάσεων της έννοιας).

Επίπεδο 2: Τα υποκείμενα είναι σε θέση να εντοπίζουν διαφορετικές αναπαραστάσεις της έννοιας.

Επίπεδο 3: Τα υποκείμενα είναι σε θέση να κάνουν μετάφραση με διατήρηση του νοήματος από το ένα σύστημα αναπαράστασης σε άλλο.

Επίπεδο 4: Τα υποκείμενα είναι σε θέση να συνδυάζουν δύο συστήματα αναπαράστασης.

Επίπεδο 5: Τα υποκείμενα είναι σε θέση να συνδυάζουν διάφορα συστήματα αναπαράστασης με στόχο την επίλυση προβλήματος.

Με βάση τα προαναφερθέντα επίπεδα η ικανότητα μετάφρασης από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο αποτελεί προϋπόθεση για το συνδυασμό διαφόρων συστημάτων αναπαράστασης με στόχο την επίλυση προβλήματος.

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιείται ο όρος της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων. Η ευελιξία αποτελεί την ικανότητα του ατόμου για εισαγωγή διαφοροποιήσεων σε έννοιες και νοητικές λειτουργίες τις οποίες κατέχει. Η βελτίωση της κατανόησης, της μάθησης, του συλλογισμού και της επίλυσης προβλήματος (ή της ευφυΐας ενός ατόμου σε σχέση με άλλα άτομα και τη γενική ιεραρχία ανάπτυξης), σχετίζεται σε μεγάλο βαθμό με τη βελτίωση της ευελιξίας του (Demetriou, 2004). Σχετικά, οι Chevalier και Blaye (2008) ορίζουν την γνωστική ευελιξία ως την ικανότητα μεταβολής των νοητικών συνόλων ενός ατόμου σε σχέση με τη μεταβολή των στοιχείων που δέχεται από το περιβάλλον. Ο Shafir (1999) προτείνει τον όρο «αναπαραστατική επάρκεια», ο οποίος στην παρούσα εργασία θεωρείται ότι σχετίζεται στενά με την έννοια της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών νοητικών αναπαραστάσεων. Συγκεκριμένα, διακρίνονται δύο ιεραρχικά επίπεδα όσον αφορά την αναπαραστατική επάρκεια. Το πρώτο επίπεδο αναπαραστατικής επάρκειας αναφέρεται στην ικανότητα του ατόμου να αντιλαμβάνεται την ίδια έννοια στο πλαίσιο πολλαπλών αναπαραστάσεων, τα οποία ανήκουν στο ίδιο ή σε διαφορετικά συμβολικά συστήματα. Στο δεύτερο επίπεδο αναπαραστατικής επάρκειας το άτομο έχει την ικανότητα να ανα-αναπαριστά την ίδια έννοια συμπεριλαμβάνοντας ψηλού επιπέδου σχέσεις στο ίδιο ή σε διαφορετικά συμβολικά συστήματα (Shafir, 1999).

Προσαρμόζοντας τους πιο πάνω ορισμούς στα πλαίσια της μαθησιακής διαδικασίας στα μαθηματικά, η ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων αποτελεί την ικανότητα του μαθητή να μεταβαίνει από ένα νοητικό σύνολο σε ένα άλλο ανταποκρινόμενος στις μεταβολές που λαμβάνουν χώρα εντός και μεταξύ πεδίων αναπαράστασης (αναγνώριση, χειρισμός,

μετάφραση σύμφωνα με τους Duval, 2006 και Lesh et al., 1987b) για την ίδια μαθηματική έννοια. Με άλλα λόγια, η ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων αναφέρεται στην ενδο-αναπαραστατική ευελιξία, δηλαδή την ικανότητα των μαθητών για αναγνώριση και χειρισμό μιας μαθηματικής έννοιας σε ποικιλία αναπαραστάσεων και στην δια-αναπαραστατική ευελιξία, η οποία σχετίζεται με τη μετάβαση μεταξύ διαφορετικών αναπαραστατικών συστημάτων. Επομένως, η ευελιξία όσον αφορά τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων για την ίδια έννοια σχετίζεται με το φαινόμενο της «από-στεγανοποίησης» (Duval, 2002) και της «αναπαραστατικής μεταβλητότητας» (Hong & Thomas, 2002). Η από-στεγανοποίηση αναφέρεται στην ευέλικτη μετάβαση μεταξύ αναπαραστατικών συστημάτων (Duval, 2002), ενώ η αναπαραστατική μεταβλητότητα περιλαμβάνει τόσο την ικανότητα αλληλεπίδρασης διαδικαστικά και εννοιολογικά με ποικιλία αναπαραστάσεων όσο και την ευκολία μετάβασης μεταξύ των διαφόρων αναπαραστάσεων (Hong & Thomas, 2002).

Ο Ρόλος των Πολλαπλών Αναπαραστάσεων στην Επίλυση Μαθηματικού Προβλήματος

Η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να επιλύουν προβλήματα αναγνωρίζεται ως πρωταρχικός σκοπός της διδασκαλίας των μαθηματικών από όλους τους παιδαγωγούς, ανεξάρτητα από τη θεωρία μάθησης που ακολουθούν. Είναι η ικανότητα που αντανακλά το επίπεδο της μαθηματικής σκέψης και θεωρείται ότι περιλαμβάνει τόσο δημιουργική όσο και κριτική σκέψη. Βέβαια η επίλυση προβλήματος ή η «αντιμετώπιση προβληματικής κατάστασης» έχει υπερβεί τα όρια της μαθηματικής επιστήμης και αναφέρεται σήμερα και σε θέματα από τις κοινωνικές επιστήμες (Φιλίππου & Χρίστου, 1995, σ. 128).

Στα μαθηματικά παρατηρείται συχνά σύγχυση μεταξύ άσκησης και προβλήματος. Ο Polya (1957) προβαίνει σε μία σαφή και σκόπιμη διάκριση ανάμεσα στα προβλήματα ρουτίνας και στα πρωτότυπα προβλήματα. Συγκεκριμένα, αναφέρει ότι το ενδιαφέρον των μαθητών χάνεται και η νοητική τους ανάπτυξη παρεμποδίζεται όταν ο εκπαιδευτικός δίνει σε αυτούς προβλήματα ρουτίνας. Αντίθετα, δίνοντας στους μαθητές προβλήματα ανάλογα με τις γνώσεις τους προκαλείται η περιέργειά τους και αναπτύσσεται η αυτόνομη κριτική τους σκέψη (Polya, 1957). Με κάποιες επουσιώδεις παραλλαγές και άλλοι ερευνητές (π.χ. Reys, Suydam & Lindquist, 1989; Schoenfeld, 1985) συμφωνούν ότι ένα πρόβλημα αναφέρεται σε μια κατάσταση στην οποία το άτομο αναζητά κάτι ή θέτει ένα στόχο και δεν γνωρίζει αμέσως την πορεία που θα ακολουθήσει για την ανακάλυψη ή την επίτευξή του. Όταν η διαδικασία που οδηγεί στην επίλυση είναι γνωστή από προηγούμενη εμπειρία, τότε δεν πρόκειται για πρόβλημα αλλά για άσκηση (Φιλίππου & Χρίστου, 1995). Η διαδικασία επίλυσης

προβλήματος απαιτεί από το μαθητή τη σύνδεση της προϋπάρχουσας γνώσης με την παρούσα προβληματική κατάσταση. Όταν οι μαθητές καλούνται να λύσουν προβλήματα τα οποία απαιτούν συλλογισμό, εκτεταμένες συνδέσεις και επεξεργασία λαμβάνοντας υπόψη την προϋπάρχουσα γνώση, τα νοητικά σχήματα των μαθητών γίνονται πιο σύνθετα. Συνεπώς, η μάθηση μέσω καταστάσεων επίλυσης προβλήματος ενθαρρύνει την κατανόηση μαθηματικών εννοιών (Lambdin, 2003).

Η επίλυση προβλήματος αποτελεί μια περίπλοκη διαδικασία, συνίσταται σε μια σειρά σταδίων και απαιτεί τη σύνθεση μια πορείας σκέψης, πολλές φορές πρωτότυπης. Για το λόγο αυτό διάφοροι ερευνητές πρότειναν στρατηγικές διευκόλυνσης της διαδικασίας επίλυσης προβλήματος. Κλασική θεωρείται η πιο κάτω διαδικασία τεσσάρων φάσεων για την επίλυση προβλήματος που ανέπτυξε ο Polya (1957):

1^η φάση: Κατανόηση του προβλήματος η οποία απαιτεί την περιγραφή του προβλήματος από το λύτη και τον εντοπισμό των δεδομένων και των ζητούμενων.

2^η φάση: Σχεδιασμός της επίλυσης ο οποίος περιλαμβάνει την ανάλυση, την καταγραφή και την οργάνωση των στοιχείων του προβλήματος, την κατασκευή σχεδίου, καταλόγου ή πίνακα, τη σύνδεση με ένα προηγούμενο πρόβλημα, το οποίο λύνεται με την ίδια στρατηγική, την απλοποίηση ή τον επιμερισμό ενός προβλήματος, την επιλογή της στρατηγικής για την επίλυση του προβλήματος.

3^η φάση: Εκτέλεση του σχεδίου η οποία περιλαμβάνει την εκτέλεση όλων των πράξεων ή διαδικασιών που προβλέπονται στο σχέδιο επίλυσης και τον έλεγχο των βημάτων καθώς προχωρεί ο σχεδιασμός.

4^η φάση: Αναδρομική διερεύνηση κατά την οποία πραγματοποιείται έλεγχος του αποτελέσματος, η εύρεση άλλων πιο αποδοτικών τρόπων επίλυσης του ίδιου προβλήματος, η επέκταση του προβλήματος και η γενίκευσή του.

Παρά την πολυπλοκότητα που χαρακτηρίζει τη δραστηριότητα επίλυσης προβλήματος μπορεί να γίνει αναφορά σε τρεις μεγάλες κατηγορίες ανεξάρτητες κατηγορίες μεταβλητών, οι οποίες βρίσκονται σε σχέση αλληλεξάρτησης και επηρεάζουν τη επίλυση προβλήματος. Πρόκειται για μεταβλητές που σχετίζονται με το άτομο που επιλύει το πρόβλημα, με το έργο προς επίλυση και με το περιβάλλον στο οποίο πραγματοποιείται η διαδικασία επίλυσης του προβλήματος (Kilpatric, αναφορά στον Kulm, 1984). Αναφορικά με το υποκείμενο, οι μεταβλητές που επηρεάζουν τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος διακρίνονται σε:

1. Σταθερές-εξωτερικές μεταβλητές που αναφέρονται στα προσωπικά χαρακτηριστικά του υποκειμένου, όπως η ηλικία και το φύλο.
2. Μεταβλητές που μπορούν να τύχουν τροποποίησης από διαδικασίες, όπως η διδασκαλία (π.χ. γνωστικό στιλ, ενδιαφέρον, κίνητρα, πεποιθήσεις).
3. Μεταβλητές που αναφέρονται στο εκπαιδευτικό υπόβαθρο του υποκειμένου, όπως το είδος του σχολείου που φοιτά και μαθήματα που παρακολουθεί.

Ως προς το έργο (πρόβλημα), οι μεταβλητές που παρεμβαίνουν στην επίλυση προβλήματος είναι οι ακόλουθες:

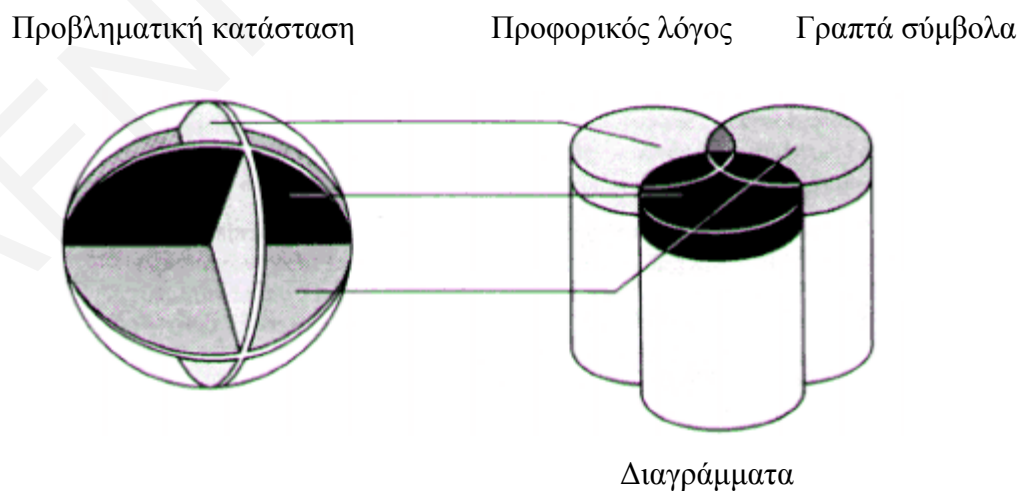
1. Περιεχόμενο του προβλήματος, το οποίο αναφέρεται στις μαθηματικές έννοιες που περιλαμβάνονται στο πρόβλημα.
2. Πλαίσιο του προβλήματος, το οποίο αναφέρεται στα μη μαθηματικά στοιχεία του προβλήματος.
3. Σύνταξη του προβλήματος, η οποία αφορά τη διάταξη των λέξεων και των συμβόλων στο πρόβλημα.
4. Δομή του προβλήματος, η οποία αναφέρεται στις μαθηματικές σχέσεις ανάμεσα σε όλα τα στοιχεία του προβλήματος και στις μαθηματικές πράξεις που απαιτούνται για την επίλυσή του.

Ιδιαίτερα σημαντική κρίνεται και η επίδραση των μεταβλητών περιβάλλοντος στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος, οι οποίες σχετίζονται με το φυσικό, ψυχολογικό και κοινωνικό πλαίσιο στο οποίο πραγματοποιείται η συγκεκριμένη διαδικασία (D' Amore & Zan, 1996).

Στο στάδιο της μετάβασης, στο οποίο βρίσκονται τα υποκείμενα της παρούσας έρευνας, πέραν από την ηλικία υποθέτουμε ότι θα υπάρξουν αλλαγές σε χαρακτηριστικά που μπορούν να μεταβληθούν με τη διδασκαλία, της οποίας η μορφή διαφέρει μεταξύ πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Επιπλέον, τόσο το φυσικό όσο και το κοινωνικό περιβάλλον του σχολείου διαφέρει σε κάθε βαθμίδα.

Οι αναπαραστάσεις μέσα από τις οποίες παρουσιάζονται τα δεδομένα των προβλημάτων σχετίζονται με τις μη μαθηματικές έννοιες που περιλαμβάνονται σε ένα έργο. Πολλοί ερευνητές ασχολήθηκαν τις τελευταίες δεκαετίες με το ρόλο που διαδραματίζουν τα διάφορα συστήματα αναπαράστασης στην επίλυση προβλήματος στα μαθηματικά.

Ενδεικτικά, οι Lesh κ.α.(1987a) και Lesh κ.α. (1987b), λαμβάνοντας υπόψη πορίσματα προηγούμενων ερευνών (π.χ. Behr et al., 1983; Lesh, Landau, & Hamilton, 1983), εστίασαν την προσοχή τους στο ρόλο των αναπαραστατικών πεδίων και της διαδικασίας μετάφρασης κατά την επίλυση προβλήματος. Συγκεκριμένα, επισήμαναν το διευκολυντικό ρόλο που διαδραματίζει ο προφορικός λόγος και τα χειριστικά μοντέλα στην επίλυση προβλήματος και στην ανάπτυξη του αναλογικού συλλογισμού και των ρητών αριθμών. Σύμφωνα με την έρευνα των Lesh κ.α. (1983), στην οποία χρησιμοποιήθηκαν συγκεκριμένες/ ρεαλιστικές εκδοχές τυπικών λεκτικών προβλημάτων, οι μαθητές σπάνια χρησιμοποιούσαν κατά τη λύση τους ένα μόνο πεδίο αναπαράστασης. Αντίθετα, συχνά χρησιμοποιούσαν διάφορα συστήματα αναπαράστασης σειριακά ή παράλληλα, καθένα από τα οποία αναπαριστούσε μέρος της προβληματικής κατάστασης. Στην πραγματικότητα τα πλείστα ρεαλιστικά/ καθημερινά προβλήματα περιλαμβάνουν από τη φύση τους πολλαπλά πεδία αναπαράστασης οπότε δεν αναπαριστώνται με απλή αντιστοίχιση μεταξύ της προβληματικής κατάστασης και του μοντέλου λύσης. Για παράδειγμα, στη συγκεκριμένη έρευνα περιλαμβάνονταν προβλήματα των οποίων τα δεδομένα περιλάμβαναν ένα πραγματικό αντικείμενο (π.χ. ένα κομμάτι πίτσας) και τον προφορικό λόγο. Με ανάλογο τρόπο και η επίλυση των προβλημάτων μεταφέρεται σε διάφορα συστήματα αναπαράστασης, καθένα από τα οποία περιγράφει μόνο μέρος της κατάστασης. Ο μαθητής μπορεί, για παράδειγμα, να σκέφτεται τις στατικές ποσότητες με συγκεκριμένο τρόπο, χρησιμοποιώντας εικόνες αλλά μπορεί να μεταβεί στον προφορικό λόγο ή στα γραπτά σύμβολα με σκοπό τη διεκπεραίωση δυναμικών «συνδυαστικών» δράσεων (Lesh et al., 1983).

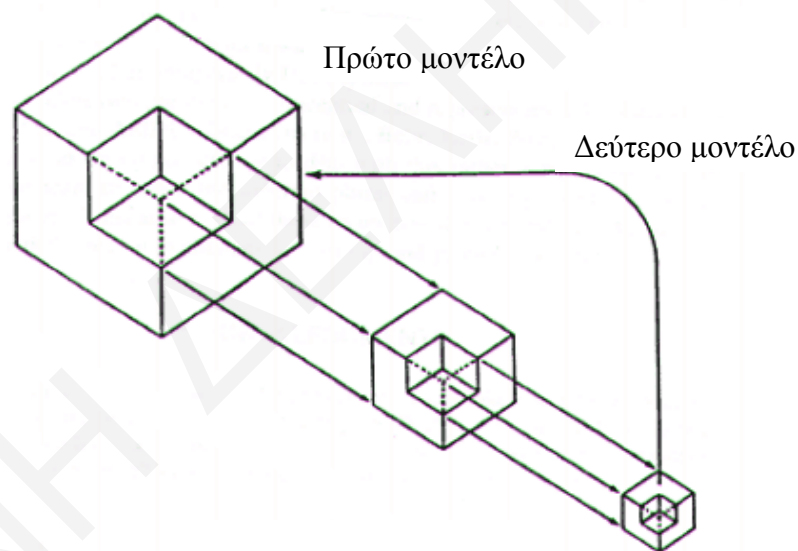


Διάγραμμα 5. Η διαδικασία αναπαράστασης- Ερμηνεία 1 (Lesh et al., 1987b).

Συνεπώς, οι Lesh κ.α. (1987b) κατέληξαν στη θέση ότι η δράση της αναπαράστασης είναι πλουραλιστική, ασταθής και σε εξέλιξη - χαρακτηριστικά που διαδραματίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη εννοιών και αναπαραστάσεων κατά την επίλυση προβλήματος.

Το Διάγραμμα 5 παρουσιάζει την πρώτη ερμηνεία της διαδικασίας αναπαράστασης ως πλουραλιστικής σύμφωνα με την οποία οι λύσεις χαρακτηρίζονται από διάφορες επιμέρους αντιστοιχίσεις μερών της δοσμένης κατάστασης σε μέρη διαφορετικών συχνά ασύμφωνων αναπαραστατικών συστημάτων. Κάθε μερική αντιστοίχιση αποτελεί μέρος της προβληματικής κατάστασης και χρησιμοποιεί μόνο μέρος του διαθέσιμου αναπαραστατικού συστήματος. Δεν συντελείται δηλαδή αντιστοίχιση συνολικά της δεδομένης κατάστασης σε ένα μόνο αναπαραστατικό σύστημα. (Lesh et al., 1987b).

Προβληματική κατάσταση



Διάγραμμα 6. Η διαδικασία αναπαράστασης – Ερμηνεία 2 (Lesh et al., 1987b).

Η διαδικασία αναπαράστασης μπορεί να θεωρηθεί πλουραλιστική και υπό την έννοια ότι ένας μαθητής μπορεί να αρχίσει την επίλυση προβλήματος μεταφράζοντας από τη δοσμένη κατάσταση σε ένα σύστημα αναπαράστασης και κατόπιν να συνεχίσει την επίλυση μεταφράζοντας σε ένα διαφορετικό σύστημα αναπαράστασης, σύμφωνα με το Διάγραμμα 6. Κατά συνέπεια, οι καλοί λύτες προβλημάτων είναι ευέλικτοι στη χρήση ποικιλίας σχετικών αναπαραστατικών συστημάτων, ώστε να μεταβαίνουν διαισθητικά σε αυτή που είναι πιο κατάλληλη σε κάθε στάδιο της διαδικασίας επίλυσης (Lesh et al., 1987b).

Οι Gagatsis και Shiakalli (2004) ασχολήθηκαν με τη σχέση της ικανότητας μετάφρασης και επίλυσης προβλήματος μελλοντικών εκπαιδευτικών στην έννοια της συνάρτησης, δηλαδή με τη σχέση της ικανότητας άμεσης και έμμεσης μετάφρασης. Στα έργα άμεσης μετάφρασης αρχική αναπαράσταση ήταν είτε η λεκτική είτε η διαγραμματική και οι μαθητές καλούνταν να μεταφράσουν σε γραφική και αλγεβρική αναπαράσταση ή αλγεβρική και λεκτική αναπαράσταση, αντίστοιχα. Στη συγκεκριμένη έρευνα χρησιμοποιήθηκαν λεκτικά προβλήματα τα οποία απαιτούσαν έμμεση μετάφραση σε αλγεβρική και διαγραμματική μορφή συναρτήσεων που χρησιμοποιήθηκαν στα έργα άμεσης μετάφρασης. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι δεν μπορεί να θεωρηθεί συνεπαγωγική η σχέση μεταξύ της ικανότητας μετάφρασης και της επίλυσης προβλήματος, κάτι αναμενόμενο αφού η επίλυση προβλήματος επηρεάζεται και από άλλους παράγοντες, οι οποίοι αναφέρθηκαν προηγουμένως. Παρόλα αυτά η έρευνα έδειξε ότι η ικανότητα μετάφρασης από τη μια αναπαράσταση στην άλλη για την έννοια της συνάρτησης ενθαρρύνει την επιτυχή επίλυση προβλήματος. Επιπλέον, επισημαίνεται ότι η παρουσία διαγραμματικών αναπαραστάσεων στα έργα μετάφρασης επηρέαζε αρνητικά την επίδοση των φοιτητών, πιθανόν λόγω της ολιστικής φύσης τους (Gagatsis & Shiakalli, 2004).

Ο Niemi (1996) προσπάθησε να κατασκευάσει ένα δοκίμιο αξιολόγησης της εννοιολογικής κατανόησης των μαθητών στα κλάσματα σε σχέση με την ικανότητα χρήσης αναπαραστάσεων, επίλυσης προβλήματος, επεξήγησης και αιτιολόγησης. Το επίπεδο αναπαραστατικής ευχέρειας, το οποίο καθοριζόταν από την επίδοση των μαθητών σε έργα αναγνώρισης κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων (αριθμητική γραμμή, επιφάνεια εμβαδού, σύνολο αντικειμένων) φάνηκε ότι μπορεί να προβλέψει την επιτυχία στην επίλυση και αιτιολόγηση της διαδικασίας λύσης συμβολικών προβλημάτων και έργων επεξήγησης. Οι μαθητές με υψηλό επίπεδο αναπαραστατικής ευχέρειας έδωσαν σε σχέση με τους μαθητές με χαμηλό επίπεδο γνώσεων όσον αφορά στις αναπαραστάσεις, όχι μόνο περισσότερες σωστές λύσεις στα προβλήματα αλλά και πιο πολλές διαγραμματικές και λεκτικές επεξηγήσεις. Γενικά, τα αποτελέσματα έδειξαν όμως ότι οι μαθητές είχαν πολύ χαμηλή επίδοση στα έργα αναγνώρισης ποικιλίας αναπαραστάσεων των κλασμάτων λόγω έλλειψης επαρκούς κατανόησης της έννοιας (Niemi, 1996).

Επιπλέον, σε έρευνά τους οι Stenning, Cox και Oberlander (1995) με υποκείμενα φοιτητές πανεπιστημίου διαπίστωσαν ότι οι φοιτητές που ήταν σε θέση να χειρίζονται διαφορετικές αναπαραστάσεις και να μεταφράζουν ανάμεσα σε αυτές, είχαν καλύτερα

αποτελέσματα σε μετρήσεις ικανότητας συλλογισμού από τους φοιτητές με περιορισμένη ικανότητα χρήσης αναπαραστάσεων. Ευρήματα επίσης της έρευνας των Monaghan, Stenning, Oberlander και Sontrod (1999), υποδεικνύουν ότι ο ψηλός βαθμός επιτυχίας στην επίλυση προβλήματος είχε άμεση σχέση με την ευελιξία χρήσης των αναπαραστάσεων. Πρόσφατα, οι Μονογιού και Gagatsis (2008) έδειξαν ότι οι φοιτητές που είναι σε θέση να συνδυάσουν την αλγεβρική και τη διαγραμματική αναπαράσταση στην επίλυση έργων στις συναρτήσεις κατανοούν σε μεγαλύτερο βαθμό την έννοια της συνάρτησης και επιτυγχάνουν στην επίλυση σύνθετων προβλημάτων.

Αξίζει να σημειωθεί ότι ένας από τους τρόπους που μπορούν να βοηθηθούν οι μαθητές να αντιληφθούν καταστάσεις μαθηματικού προβλήματος, σύμφωνα με τους Lesh κ.α. (1987b) είναι με την παροχή συναφών προβλημάτων τα οποία είναι πλούσια σε πολλαπλές αναπαραστάσεις των μαθηματικών εννοιών. Χρησιμοποιώντας διαφορετικές αναπαραστάσεις δίνονται στους μαθητές πολλές ευκαιρίες να αναπτύξουν διαισθητική, διαδικαστική και εννοιολογική γνώση στα μαθηματικά (Moyer, 2001). Η Cifarelli (1998) επισημαίνει επίσης ότι οι ικανοί λύτες προβλημάτων οικοδομούν κατάλληλες αναπαραστάσεις για την κάθε κατάσταση μαθηματικού προβλήματος και χρησιμοποιούν τις αναπαραστάσεις αυτές σαν βοηθητικά εργαλεία κατανόησης των πληροφοριών και των σχέσεων της συγκεκριμένης κατάστασης. Άλλωστε η αναπαράσταση ενός προβλήματος ή μιας κατάστασης με τρόπο που να έχει νόημα για τους μαθητές τους βοηθά να οργανώσουν τον τρόπο σκέψης τους και ενθαρρύνει πολλαπλούς τρόπους προσέγγισης των προβλημάτων κάτι που οδηγεί σε καλύτερη κατανόηση και επίλυσή τους (Fennell & Rowan, 2001).

Παρά την αναμφισβήτητη σημασία της ικανότητας μετάφρασης, οι Presmeg και Nenduradu (2005) υποστηρίζουν ότι η ευελιξία μετάφρασης από μια αναπαράσταση σε άλλη δεν αποτελεί προϋπόθεση εννοιολογικής κατανόησης. Η θέση τους στηρίζεται στη μελέτη περίπτωσης ενός μελλοντικού εκπαιδευτικού που ενώ μπορούσε με ευκολία να χρησιμοποιήσει πίνακα, αλγεβρική και γραφική αναπαράσταση για επίλυση ενός αλγεβρικού προβλήματος δεν εντόπισε την εκθετική σχέση που περιλάμβανε και έδωσε μια γραμμική ερμηνεία σε αυτό.

Οι Elia κ.α.(2007) σχετικά με την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης εξέτασαν τη σχέση μεταξύ της διατύπωσης ορισμού, της επιτυχίας σε έργα αναγνώρισης της έννοιας της συνάρτησης διαγραμματικά, γραφικά και αλγεβρικά και της επίλυσης προβλημάτων, τα οποία απαιτούσαν την ικανότητα ευέλικτου χειρισμού και μετάφρασης μεταξύ αναπαραστάσεων. Τα

αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στη διατύπωση ορισμού για την έννοια της συνάρτησης και στην επίλυση προβλημάτων, τα οποία περιλαμβάνουν μετάφραση σε διάφορα πεδία αναπαράστασης. Έντονο παρουσιάζεται επίσης το φαινόμενο της στεγανοποίησης αφού οι μαθητές αντιμετωπίζουν τις διαφορετικές αναπαραστάσεις της έννοιας της συνάρτησης σαν διαφορετικά μαθηματικά αντικείμενα. Οι μαθητές φαίνεται να ανταποκρίνονται με συνέπεια σε έργα του ίδιου γνωστικού τύπου. Εντοπίζεται όμως ασυνέπεια στη συμπεριφορά τους κατά την επίλυση έργων με διαφορετικά γνωστικά χαρακτηριστικά της ίδιας έννοιας, δηλαδή στην διατύπωση ορθού ορισμού, αναγνώριση της έννοιας της συνάρτησης σε διαφορετικά πεδία αναπαράστασης και στην επίλυση προβλήματος.

Σχετικά με τα πιο πάνω αποτελέσματα για την έννοια της συνάρτησης είναι και τα ευρήματα της έρευνας του Hitt (1998), ο οποίος διαπιστώνει ότι οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί παρόλο που επιτυγχάνουν σε έργα που εμπλέκουν αλγεβρικές αναπαραστάσεις της έννοιας της συνάρτησης, φαίνεται ότι δεν χρησιμοποιούν τον ορισμό της. Επιπλέον, σημειώνεται η αδυναμία τους να συνδυάσουν με ευελιξία πολλαπλές αναπαραστάσεις όταν καλούνται να αντιμετωπίσουν ασυνήθιστες μαθησιακές καταστάσεις όσον αφορά στην έννοια της συνάρτησης. Συγκεκριμένα, οι φοιτητές φαίνεται να δυσκολεύονται να συνδυάσουν την έννοια της συνάρτησης όταν αυτή παρουσιάζεται σε πραγματικό περιεχόμενο με τη γραφική και αλγεβρική αναπαράσταση της, με αποτέλεσμα να προβαίνουν σε εικονικές μεταφράσεις (iconic translations σύμφωνα με το Monk, 1992).

Άλλοι ερευνητές ασχολήθηκαν με το ρόλο που διαδραματίζουν οι εξωτερικές αναπαραστάσεις όταν χρησιμοποιούνται στην επίλυση προβλήματος (π.χ. Ainsworth, 1999; Scaife & Rogers, 1996). Ενδεικτικά, οι Scaife και Rogers (1996) υποστηρίζουν ότι οι εξωτερικές αναπαραστάσεις διαφέρουν όσον αφορά τη συνεισφορά τους στην επίλυση προβλήματος και στη μάθηση ανάλογα με το βαθμό που ενθαρρύνουν την αποφόρτιση από υπολογισμούς, την επαναπαράσταση και τη γραφική διευκόλυνση. Συγκριμένα, η αποφόρτιση από υπολογισμούς αναφέρεται στο βαθμό που οι διάφορες εξωτερικές αναπαραστάσεις περιορίζουν το μέγεθος της γνωστικής προσπάθειας η οποία απαιτείται για επίλυση ισόμορφων προβλημάτων. Ενδεικτικά, οι Larkin και Simon (1987) επισημαίνουν ότι είναι πιο εύκολη η επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων των οποίων τα δεδομένα δίνονται διαγραμματικά σε σχέση με αυτά που δίνονται λεκτικά λόγω του γεγονότος ότι τα διαγράμματα παρέχουν άμεση αντιληπτική αναγνώριση των γεωμετρικών σχέσεων. Αντίθετα,

η λεκτική περιγραφή των δεδομένων είναι συνήθως έμμεση, απαιτεί νοητική διαμόρφωση οπότε χρειάζεται μεγαλύτερη γνωστική προσπάθεια. Η επαναπαράσταση, σχετίζεται με τον τρόπο που διαφορετικές εξωτερικές αναπαραστάσεις, οι οποίες έχουν την ίδια αφηρημένη δομή, διευκολύνουν ή δυσχεραίνουν την επίλυση προβλήματος. Τέλος, η γραφική διευκόλυνση αναφέρεται στον τρόπο που τα διάφορα στοιχεία μιας διαγραμματικής αναπαράστασης επιτρέπουν την εξαγωγή συμπερασμάτων όσον αφορά στην έννοια προς αναπαράσταση. Τα τρία αυτά χαρακτηριστικά των εξωτερικών αναπαραστάσεων έχουν συμπληρωματικό χαρακτήρα αφού η αποφόρτιση από υπολογισμούς αναφέρεται στα γνωστικά πλεονεκτήματα των εξωτερικών αναπαραστάσεων, η επαναπαράσταση στις δομικές τους ιδιότητες και η διαγραμματική διευκόλυνση σε πιθανούς μηχανισμούς επεξεργασίας (Scaife & Rogers, 1996).

Συνοψίζοντας τις θέσεις διαφόρων ερευνητών, οι Pape και Tchoshanov (2001) επισημαίνουν ότι οι διάφορες εξωτερικές αναπαραστάσεις επιτρέπουν στους μαθητές να εντοπίσουν ενδιάμεσα αποτελέσματα και να εξάγουν συμπεράσματα. Επιτρέποντας στους μαθητές να αντιληφθούν ορισμένες σημαντικές σχέσεις, οι οποίες παρουσιάζονται σε ένα πρόβλημα, αποφορτώνουν γνωστικά το μαθητή και τον βοηθούν να οργανώσει τον τρόπο επίλυσης του προβλήματος. Ανάλογα με την δοσμένη αναπαράσταση ο μαθητής μπορεί να εργαστεί σε διαφορετικά μέρη του προβλήματος. Οι αναπαραστάσεις μπορούν τότε να χρησιμοποιηθούν για διευκόλυνση της επιχειρηματολογίας και της εξαγωγής συμπερασμάτων. Κατά συνέπεια, σε περιπτώσεις οι οποίες μπορούν να χαρακτηριστούν ως τυπικές σχολικές δραστηριότητες, στις οποίες οι αναπαραστάσεις αντιμετωπίζονται σαν τελικά αποτελέσματα αντί σαν εργαλεία επεξήγησης, οι μαθητές συχνά παράγουν αναπαραστάσεις φτωχές σε νόημα από τις οποίες δεν μπορούν να εξαχθούν συσχετίσεις (Pape & Tchoshanov, 2001).

Ο Ainsworth (1999) ασχολήθηκε εκτενώς με τους διαφορετικούς τρόπους που οι πολλαπλές εξωτερικές αναπαραστάσεις υποστηρίζουν τις γνωστικές διαδικασίες στη μάθηση και στην επίλυση προβλήματος με τους ηλεκτρονικούς υπολογιστές και εντόπισε τις εξής λειτουργίες των πολλαπλών αναπαραστάσεων:

1. Χρήση πολλαπλών εξωτερικών αναπαραστάσεων σε συμπληρωματικούς ρόλους.

1.1. *Χρήση πολλαπλών εξωτερικών αναπαραστάσεων για ενίσχυση συμπληρωματικών διαδικασιών:* Η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων υπακούει στη λογική ότι η

χρήση περισσότερων από μια αναπαραστάσεων παρέχει το πλεονέκτημα ποικίλων διαδικασιών υπολογισμού, οι οποίες υποστηρίζονται από τις διάφορες αναπαραστάσεις. Για παράδειγμα, η ποσοτική σχέση που εκφράζεται συνοπτικά με την εξίσωση $\psi = x^2 + 5x + 3$ δεν επιτυγχάνει να δείξει τη μεταβολή και την αλληλεπίδραση των μεταβλητών η οποία παρουσιάζεται στην πληροφοριακά ισοδύναμη γραφική παράσταση. Συνοπτικά, οι μαθητές χρησιμοποιούν πολλαπλές αναπαραστάσεις, οι οποίες υποστηρίζουν διαφορετικές υπολογιστικές ιδιότητες, όταν:

- α) επιδεικνύουν προτίμηση σε ορισμένες αναπαραστάσεις ανάλογα με τις εμπειρίες και τις δυνατότητές τους, β) επιτελούν ποικιλία έργων και γ) βελτιώνεται η επίδοσή τους χρησιμοποιώντας πέραν της μιας στρατηγικής.

1.2. *Χρήση πολλαπλών εξωτερικών αναπαραστάσεων για ενίσχυση συμπληρωματικών πληροφοριών:* Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις τείνουν να χρησιμοποιούνται για αυτό το σκοπό είτε στην περίπτωση όπου μια αναπαράσταση είναι δύσκολο να παρουσιάσει όλες τις πληροφορίες σχετικά με ένα πεδίο, είτε σε περιπτώσεις όπου η προσπάθεια συγκερασμού όλων των σχετικών πληροφοριών σε μια αναπαράσταση θα περιέπλεκε το έργο που καλείται να λύσει ο μαθητής. Για κάθε περίπτωση εντοπίζονται δύο υποκατηγορίες: α) κάθε αναπαράσταση κωδικοποιεί ορισμένες όψεις ενός πεδίου και παρουσιάζει διαφορετικές πληροφορίες και β) ένα μέρος των πληροφοριών παρουσιάζονται με περισσότερες από μια αναπαραστάσεις.

2. Χρήση πολλαπλών εξωτερικών αναπαραστάσεων για διευκόλυνση ερμηνείας.

2.1. *Μια οικεία αναπαράσταση διευκολύνει την ερμηνεία μιας δεύτερης λιγότερο οικείας αναπαράστασης:* Ο κύριος σκοπός της οικείας αναπαράστασης δεν είναι η παροχή καινούριων πληροφοριών αλλά η υποστήριξη του τρόπου σκέψης του μαθητή σχετικά με τη λιγότερο οικεία αναπαράσταση.

2.2. *Οι έμφυτες ιδιότητες μιας αναπαράστασης διευκολύνουν την ερμηνεία μιας άλλης αναπαράστασης:* Οι δύο αναπαραστάσεις παρουσιάζονται ταυτόχρονα έτσι ώστε η ερμηνεία της αμφιλεγόμενης αναπαράστασης να διευκολύνεται από μια άλλη πιο συγκεκριμένη αναπαράσταση ανεξάρτητα από ζητήματα οικειότητας ή εμπειρίας.

3. Χρήση πολλαπλών εξωτερικών αναπαραστάσεων για οικοδόμηση κατανόησης.

3.1. *Χρήση πολλαπλών εξωτερικών αναπαραστάσεων για υποστήριξη αφαίρεσης:* Η αφαίρεση διακρίνεται στην: α) στην εξαγωγή μόνο ενός συνόλου χαρακτηριστικών

από την αρχική αναπαράσταση, β) στην ανα-οντολογία και γ) στην πραγμάτωση. Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις προωθούν την αφαίρεση μέσα από μεταφράσεις και την εξαγωγή συμπερασμάτων που προκύπτουν από αυτές. Η γνώση που εξάγεται χρησιμοποιείται για τον εντοπισμό της υποκείμενης δομής του πεδίου προς αναπαράσταση.

3.2. *Χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων για επέκταση:* Η επέκταση ή η γενίκευση θεωρείται ο τρόπος σύμφωνα με τον οποίο ο μαθητής μεταφέρει κάτι το οποίο ήδη γνωρίζει σε νέες καταστάσεις, αλλά χωρίς να υφίσταται αλλαγή η φύση της γνώσης. Δεν απαιτείται δηλαδή αναδιοργάνωση της γνώσης σε υψηλότερο επίπεδο.

3.3. *Χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων για εντοπισμό συσχετίσεων ανάμεσα σε αναπαραστάσεις:* Δύο ή περισσότερες αναπαραστάσεις παρουσιάζονται παράλληλα και η μάθηση προκύπτει από τη μετάφραση μεταξύ των διαφόρων αναπαραστάσεων.

Ο Ainsworth (1999) επισημαίνει επίσης το διαφορετικό ρόλο της διαδικασίας μετάφρασης σε κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση που οι πολλαπλές εξωτερικές αναπαραστάσεις σχεδιάζονται για να υποστηρίξουν διαφορετικές πληροφορίες και διαδικασίες τότε θα πρέπει να αποθαρρύνονται οι μαθητές από τη διαδικασία μετάφρασης. Όταν οι πολλαπλές αναπαραστάσεις χρησιμοποιούνται για διευκόλυνση της ερμηνείας τότε η μετάφραση θα πρέπει να αυτοματοποιείται. Τέλος, εάν οι πολλαπλές αναπαραστάσεις χρησιμοποιούνται για επίτευξη βαθύτερης κατανόησης, τότε οι μαθητές επιβάλλεται να προβαίνουν σε μεταφράσεις μεταξύ των αναπαραστάσεων (Ainsworth, 1999).

Στο πλαίσιο της χρήσης των αναπαραστάσεων στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος, μια σημαντική διάκριση που πρέπει να αποσαφηνιστεί είναι ανάμεσα στις κύριες-αυτόνομες αναπαραστάσεις και στις βοηθητικές αναπαραστάσεις. Οι κύριες αναπαραστάσεις είναι απαραίτητες για την επίλυση του προβλήματος εφόσον μέσα από αυτές εκφράζεται οποιαδήποτε πληροφορία σε σχέση με το πρόβλημα. Είναι αυτόνομες και ανεξάρτητες από το αντικείμενο που αναπαριστούν και το άτομο μπορεί να τις τροποποιήσει και να τις επεξεργαστεί χωρίς περιορισμούς. Οι βοηθητικές αναπαραστάσεις δεν είναι απαραίτητες για την επίλυση του προβλήματος, αλλά μπορούν να βοηθήσουν σημαντικά τη διαδικασία αυτή. Στις βοηθητικές αναπαραστάσεις για την επίλυση προβλήματος εντάσσονται τα σχεδιαγράμματα Vergnaud (1982) και Marshall (1995), η αριθμητική γραμμή, οι εικόνες, οι γραφικές παραστάσεις, οι πίνακες, τα δένδροδιαγράμματα, κ.ά. (Ηλία & Γαγάτσης, 2004)

Παρόλο που η σχέση αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος έχει διερευνηθεί από ορισμένους ερευνητές, κυρίως σε σχέση με την έννοια της συνάρτησης, παρουσιάζεται η ανάγκη εξέτασης της αλληλεπίδρασης μεταξύ της επίδοσης των μαθητών σε έργα αναγνώρισης, χειρισμού και άμεσης μετάφρασης της ίδιας μαθηματικής έννοιας, σύμφωνα με τους Lesh κ.α. (1987b), με την επίλυση προβλημάτων στα οποία τα δεδομένα παρουσιάζονται είτε λεκτικά είτε/ και διαγραμματικά όσον αφορά την εννοιολογική κατανόηση μιας έννοιας. Στο πρόβλημα της παρούσας έρευνας στο οποίο τα δεδομένα παρουσιάζονται λεκτικά και διαγραμματικά, οι προκατασκευασμένες διαγραμματικές αναπαραστάσεις που παρουσιάζονται μπορούν να χαρακτηριστούν ως σχηματικές σύμφωνα με τους Hegarty και Kozhevnikov (1999), αφού περιλαμβάνουν πληροφορίες που βοηθούν το μαθητή να αντιληφθεί τις σχέσεις που περιγράφονται στη λεκτική διατύπωση του προβλήματος. Παράλληλα, ο ρόλος των διαγραμματικών αναπαραστάσεων είναι βοηθητικός, σύμφωνα με τους Ηλία και Γαγάτση (2004), και χρησιμοποιείται για διευκόλυνση της ερμηνείας, λαμβάνοντας υπόψη την ταξινομία του Ainsworth (1999). Στα προβλήματα όμως στα οποία τα δεδομένα παρουσιάζονται είτε λεκτικά είτε διαγραμματικά, οι συγκεκριμένες αναπαραστάσεις έχουν κύριο ρόλο.

Χρήση Πολλαπλών Αναπαραστάσεων στη Μάθηση και Διδασκαλία των Ρητών Αριθμών

Οι ρητοί αριθμοί αποτελούν μια από τις πιο σημαντικές μαθηματικές έννοιες: α) από πρακτικής άποψης, αφού η ικανότητα αποτελεσματικού χειρισμού των ρητών αριθμών βελτιώνει την ικανότητα κατανόησης και χειρισμού προβλημάτων της καθημερινής ζωής, β) από ψυχολογικής άποψης, λόγω του γεγονότος ότι οι ρητοί αριθμοί παρέχουν στους μαθητές τη δυνατότητα να αναπτύξουν και να επεκτείνουν νοητικές δομές, οι οποίες είναι απαραίτητες για τη συνεχή πνευματική ανάπτυξη και γ) από μαθηματικής άποψης, αφού η κατανόηση των ρητών αριθμών αποτελεί το θεμέλιο πάνω στο οποίο βασίζονται οι στοιχειώδεις αλγεβρικές πράξεις (Behr et al., 1983). Σχετικά με τη μαθηματική σημασία της έννοιας του κλάσματος, οι Harrison και Greer (1993) επισημαίνουν ότι οι κλασματικοί αριθμοί αποτελούν το υπόβαθρο σύνθετων μαθηματικών εννοιών όπως η ισοδυναμία, οι δεκαδικοί αριθμοί, οι πιθανότητες, οι αναλογίες και τα ποσοστά. Επιπλέον, επισημαίνεται ότι οι μαθητές που δεν έχουν κατανοήσει τη φύση των κλασματικών αριθμών αποτυγχάνουν στην κατανόηση σε ανώτερο επίπεδο των ρητών αριθμών (Pikethly & Hunting, 1996). Λόγω της σημαντικότητάς τους η κατανόηση των ρητών αριθμών αποτέλεσε τις τελευταίες δεκαετίες το επίκεντρο του ενδιαφέροντος των

ερευνητών (π.χ. Cramer et al., 2002; Lamon, 2001; Mack, 2000; Ni & Zhou, 2005), οι οποίοι προσέγγισαν το θέμα από διάφορες οπτικές γωνίες.

Εντούτοις, η έννοια του κλάσματος αποτελεί, όπως επισημαίνεται ερευνητικά (π.χ. Boulet, 1998; Moss, 2005; Niemi, 1996), μια από τις πιο περίπλοκες μαθηματικές έννοιες που συναντούν οι μαθητές τόσο στην πρωτοβάθμια όσο και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Κάποιες από τις δυσκολίες των μαθητών όσον αφορά στα κλάσματα και τους ρητούς αριθμούς σχετίζονται με τη γνώση των ακέραιων αριθμών (Lamon, 1999; Ni & Zhou, 2005). Συγκεκριμένα, η Lamon (1999) επισημαίνει ότι οι μαθητές καλούνται να υπερβούν ένα ποιοτικό χάσμα όταν στη διδασκαλία εισάγονται πέραν των ακεραίων οι κλασματικοί αριθμοί. Τα κλάσματα αρχικά δε γίνονται αποδεκτά ως αριθμοί επειδή δεν αποτελούν μέρος της σειράς μέτρησης με την οποία είναι εξοικειωμένοι οι μαθητές (Lamon, 1999). Οι μαθητές καλούνται να υπερπηδήσουν την έννοια του ακεραίου αριθμού, που εκφράζεται ως συγκεκριμένη ποσότητα, και να κατανοήσουν αριθμούς οι οποίοι εκφράζονται σε σχέση με άλλους αριθμούς. Αυτές οι νέες αναλογικές σχέσεις στηρίζονται σε πολλαπλασιαστικές δομές και διαφέρουν από το συλλογισμό προσθετικών δομών που χαρακτηρίζει τους ακεραίους αριθμούς (Moss, 2005). Η άρνηση των μαθητών να αποδεχτούν τα κλάσματα ως αριθμούς οδηγεί τους μαθητές στην αντίληψη του κλάσματος ως δύο διαφορετικών αριθμών (Behr et al., 1993). Κατά συνέπεια, ο προσδιορισμός του κλάσματος ως αριθμού θεωρείται θεμελιώδες βήμα για αναθεώρηση της έννοιας του αριθμού από τους μαθητές και της ευχέρειάς τους σε πράξεις πρόσθεσης στα κλάσματα (Brousseau, Brousseau, & Warfield, 2004; Stafylidou & Vosniadou, 2004), με τις οποίες ασχολείται η παρούσα έρευνα.

Η χρήση αναπαραστάσεων στη μάθηση και διδασκαλία των ρητών αριθμών έχουν γίνει αντικείμενο μελέτης διαφόρων ερευνητών, οι οποίοι εξετάζουν το θέμα από διάφορες οπτικές γωνίες.

Αρχικά, μια ομάδα ερευνών εξέτασε τη σημασία της ικανότητας μετάφρασης ανάμεσα στα διάφορα πεδία αναπαράστασης και χρήσης ποικιλίας αναπαραστάσεων για επίλυση προβλημάτων με ρητούς αριθμούς. Ενδεικτικά, οι Lesh κ.α. (1987a) και Lesh κ.α. (1987b) διερεύνησαν τη σχέση ανάμεσα στην κατανόηση της έννοιας των ρητών αριθμών και στην ικανότητα μετάφρασης ανάμεσα στα διάφορα είδη αναπαράστασης της έννοιας. Επιπρόσθετα, εντόπισαν τα είδη μετάφρασης που δυσκολεύουν περισσότερο τους μαθητές στην επίλυση προβλημάτων με ρητούς αριθμούς. Οι ερευνητικές αυτές προσπάθειες έδειξαν ότι οι μαθητές φαίνεται να αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην αναπαράσταση των ρητών

αριθμών, ενώ η ικανότητα μετάφρασης από ένα είδος αναπαράστασης σε άλλο φάνηκε να επηρεάζει την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων με ρητούς αριθμούς (Lesh et al., 1987a; Lesh et al., 1987b).

Σχετικά, οι Lesh κ.α.(1983) μέσα από συνεντεύξεις που πραγματοποίησαν με μαθητές βρήκαν ότι υπήρχαν σημαντικές διαφορές στην επίδοση των μαθητών στα λεκτικά προβλήματα και σε ισομορφικά προβλήματα, τα οποία παρουσιάζονταν με τη χρήση χειριστικών μοντέλων ή εικόνων. Τα προβλήματα τα οποία παρουσιάζονταν με τη χρήση χειριστικών υλικών δεν ήταν κατά ανάγκη ευκολότερα για τους μαθητές σε σχέση με προβλήματα που παρουσιάζονταν προφορικά ή με τη χρήση γραπτού κειμένου και συμβόλων. Από την άλλη, η έρευνα έδειξε ότι οι μαθητές χρησιμοποιούσαν διαφορετικό είδος αναπαράστασης ανάλογα με την πράξη που απαιτούσε η επίλυση του προβλήματος. Κάποιες επίσης επιτυχημένες στρατηγικές των μαθητών ήταν στενά συνυφασμένες με προβλήματα που παρουσιάζονται με συγκεκριμένο είδος αναπαράστασης και δεν εφαρμόστηκαν σε ισομορφικά προβλήματα, τα οποία παρουσιάστηκαν με άλλο είδος αναπαράστασης. Οι μαθητές φαίνεται ότι δεν αναγνώριζαν το ίδιο πρόβλημα, όταν αυτό παρουσιαζόταν με διαφορετικό είδος αναπαράστασης. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να επιτυγχάνουν στην επίλυση ενός προβλήματος, το οποίο παρουσιαζόταν με ένα είδος αναπαράστασης, και να αποτυγχάνουν όταν το ίδιο πρόβλημα παρουσιαζόταν με διαφορετικό είδος αναπαράστασης. Τέλος, φάνηκε ότι τα έργα μετάφρασης τα οποία απαιτούσαν μετάφραση σε εικονική αναπαράσταση δυσκόλεψαν περισσότερο τους μαθητές και συγκέντρωσαν τα χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας (Lesh et al., 1983).

Οι Brenner, Herman, Ho και Zimmer (1999) σε μια προσπάθεια διερεύνησης των χαμηλών ποσοστών επιτυχίας των μαθητών στην Αμερική σε σχέση με τους μαθητές τριών ασιατικών χωρών, Ιαπωνίας, Κίνας και Ταϊβάν, στην έρευνα TIMSS που διεξάχθηκε το 1995, εστίασαν την προσοχή τους στην ικανότητα χρήσης ποικιλίας αναπαραστάσεων των ρητών αριθμών. Συγκεκριμένα, η έρευνα εξέτασε την ικανότητα: α) ευχέρειας χειρισμού της έννοιας των ρητών αριθμών στο ίδιο πεδίο αναπαράστασης, β) μετασχηματισμού στο ίδιο πεδίο αναπαράστασης αλλά μεταξύ διαφορετικών τυπικών συμβολισμών και γ) μετάφρασης από ένα είδος αναπαράστασης των ρητών αριθμών σε άλλο. Μελέτησαν επίσης τα είδη αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούνται στα σχολικά εγχειρίδια κατά τη διδασκαλία των ρητών αριθμών σε κάθε ένα από τα τέσσερα έθνη. Με βάση τα αποτελέσματα της έρευνας, οι Ασιάτες μαθητές είχαν ψηλότερα ποσοστά επιτυχίας από τους Αμερικάνους μαθητές στα έργα

τα οποία καλούσαν τους μαθητές να αξιολογήσουν την ισοδυναμία διαφορετικών κλασματικών αναπαραστάσεων, μετασχηματισμού κλασματικού αριθμού σε δεκαδικό και ποσοστό, και μετάφρασης, με εξαίρεση τα έργα που περιλάμβαναν εικονικές αναπαραστάσεις. Σημειώνεται επίσης το γεγονός ότι στις ασιατικές χώρες χρησιμοποιείται μεγάλη ποικιλία χειριστικών μοντέλων και δίνεται έμφαση στη σύνδεσή τους με τις τυπικές συμβολικές ή αλγεβρικές αναπαραστάσεις των ρητών αριθμών αλλά και γενικά στη διασύνδεση των διαφόρων αναπαραστάσεων. Τα αποτελέσματα αυτά, σύμφωνα με τους Brenner κ.α. (1999), υποδεικνύουν την αναγκαιότητα χρήσης ποικιλίας αναπαραστάσεων για την κατανόηση μαθηματικών εννοιών, όπως είναι οι ρητοί αριθμοί και τονίζουν τη σημασία της μετάφρασης ανάμεσα στα διαφορετικά πεδία αναπαράστασης.

Πρόσφατες έρευνες (π.χ. Delaney, Charalambous, Hsu, & Mesa, 2007; Watanabe, 2007) έχουν ασχοληθεί με τα πεδία αναπαράστασης που περιλαμβάνονται στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών όσον αφορά στα κλάσματα σε διάφορες χώρες. Ενδεικτικά, ο Watanabe (2007) εξετάζει τις διαφορές που υφίστανται ανάμεσα στα σχολικά εγχειρίδια των Ηνωμένων Πολιτειών Αμερικής και της Ιαπωνίας όσον αφορά τα διαγραμματικά πεδία αναπαράστασης που χρησιμοποιούνται για εισαγωγή των κλασματικών αριθμών. Συγκεκριμένα, επισημαίνεται ότι στα ιαπωνικά εγχειρίδια των μαθηματικών κυρίαρχη θέση κατέχουν τα γραμμικά μοντέλα αναπαράστασης των κλασμάτων. Επιπλέον, ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην κατανόηση της έννοιας του κλάσματος ως αριθμού με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής. Με τον τρόπο αυτό επιδιώκεται συνέχεια και συνέπεια στο αναλυτικό πρόγραμμα λόγω της εξοικείωσης των μαθητών με την αναπαράσταση στην αριθμητική γραμμή των ακέραιων και των δεκαδικών αριθμών. Αντίθετα, τα αμερικανικά εγχειρίδια κυρίως παρουσιάζουν τα κλάσματα σε διαγράμματα επιφανειών εμβαδού δίνοντας αρχικά έμφαση στην ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος – όλο. Οι Delaney κ.α. (2007) επισημαίνουν ότι στην Ταϊβάν εντοπίζεται μεγαλύτερη ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων (γραμμικά μοντέλα, επιφάνεια εμβαδού, μοντέλα όγκου, διακριτά σύνολα αντικειμένων) σε σχέση με την Κύπρο και την Ιρλανδία στα σχολικά εγχειρίδια της Δ΄ δημοτικού όσον αφορά την πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων. Λαμβάνοντας υπόψη τα ψηλότερα ποσοστά επιτυχίας μαθητών στην Ιαπωνία και την Ταϊβάν στην έρευνα TIMSS σε σχέση με την αντίστοιχη επίδοση των Αμερικανών και των Κύπριων και Ιρλανδών μαθητών, αντίστοιχα στις δύο έρευνες, τίθενται ερωτήματα από τους ερευνητές όσον αφορά τη σύνδεση επίδοσης, αναλυτικού προγράμματος και σχολικών εγχειριδίων με σκοπό τη βελτίωση της κατανόησης της συγκεκριμένης έννοιας.

Άλλοι ερευνητές ασχολήθηκαν με τα αποτελέσματα της εφαρμογής δραστηριοτήτων οι οποίες εμπλέκουν πολλαπλές αναπαραστάσεις στη διδασκαλία των ρητών αριθμών. Συγκεκριμένα, οι Bezuk και Armstrong (1992) κατασκεύασαν και εφάρμοσαν δραστηριότητες, οι οποίες βοήθησαν τους μαθητές που αντιμετώπιζαν δυσκολίες στον πολλαπλασιασμό ρητών αριθμών, να επιλύσουν προβλήματα πολλαπλασιασμού ρητών αριθμών με τη χρήση ποικιλίας αναπαραστάσεων. Στην έρευνα των Middleton, van den Heuvel-Panhuizen και Shew (1998) φάνηκε εξάλλου ότι η χρήση αναπαραστάσεων, όπως τα χειριστικά ραβδόμορφα μοντέλα, και η συσχέτισή τους με τη λεκτική διατύπωση ενίσχυσε την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων με ρητούς αριθμούς. Από την άλλη, επισημαίνεται από ερευνητές (π.χ. Boulet, 1999) η ανάγκη χρήσης τόσο συνεχών όσο και διακριτών συνόλων αντικειμένων για διδασκαλία των κλασμάτων. Σχετικά, οι Pitkethy και Hunting (1996) επισημαίνουν ότι οι γνώσεις των μαθητών όσον αφορά στα κλάσματα διαφοροποιούνται αν περιορίζονται στη χρήση μόνο διακριτών ή συνεχών μοντέλων.

Σε αντίθεση με τις προηγούμενες έρευνες, οι οποίες χαρακτηρίζονται ως νατουραλιστικές, ο Taber (2001) εφάρμοσε ένα παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας για τη διδασκαλία του πολλαπλασιασμού κλασμάτων το οποίο έδινε έμφαση στη διασύνδεση των πέντε αναπαραστατικών συστημάτων όπως αναφέρονται από τους Lesh κ.α. (1987b). Εξετάζοντας τις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούν οι μαθητές για να επιλύσουν προβλήματα που περιλαμβάνουν το πολλαπλασιασμό μεταξύ ενός κλασματικού αριθμού και ενός κλασματικού τελεστή, και εντοπίζοντας τις συνδέσεις μεταξύ των αναπαραστάσεων, φάνηκε ότι οι μαθητές ανέπτυξαν το μοντέλο του διπλού μερισμού ως μια αναπαράσταση με νόημα του γινομένου δύο κλασματικών αριθμών (Taber, 2001).

Οι Thomson και Walker (1996) περιγράφουν μια σειρά διδακτικών δραστηριοτήτων με τους δεκαδικούς αριθμούς οι οποίες επιτρέπουν διασύνδεση των διαφόρων αναπαραστάσεων και έχουν νόημα για τους μαθητές. Συγκεκριμένα, οι έννοιες των δεκαδικών αριθμών και ο συμβολισμός τους συνδέεται με τις κλασματικές έννοιες και το συμβολισμό τους, όπως επίσης και με την αξία θέσης ψηφίου. Γίνεται εξάλλου χρήση χειριστικών μοντέλων, διαγραμμάτων και αριθμητικών γραμμών. Σκοπός των ερευνητών ήταν να βοηθήσουν τους μαθητές να αναπτύξουν την έννοια των δεκαδικών ως μέρος ενός ενοποιημένου συστήματος της έννοιας του αριθμού κατανοώντας ότι: α) οι δεκαδικοί είναι κλασματικοί αριθμοί με διαφορετικό συμβολισμό και β) οι δεκαδικοί μπορεί να συγκριθούν,

να σειροθετηθούν, και να συσχετιστούν με τα κλάσματα χρησιμοποιώντας έννοιες των κλασματικών αριθμών και της αξίας θέσης ψηφίου.

Στην έρευνα των Cramer κ.α. (2002) γίνεται σύγκριση της επίδοσης μαθητών Δ' και Ε' δημοτικού, οι οποίοι δέχθηκαν την συνηθισμένη διδασκαλία εισαγωγικών εννοιών στα κλάσματα με την επίδοση των μαθητών που δέχθηκαν τη διδασκαλία με βάση το αναλυτικό πρόγραμμα ενός ερευνητικού σχεδίου για τους ρητούς αριθμούς. Το ερευνητικό σχέδιο έδινε ιδιαίτερη έμφαση στη χρήση πολλαπλών φυσικών μοντέλων και στις μεταφράσεις εντός και μεταξύ των διαφόρων πεδίων αναπαράστασης, όπως προτείνονται από τους Lesh κ.α. (1987b) – εικονική, χειριστική, λεκτική, πραγματικού κόσμου και συμβολική αναπαράσταση. Οι μαθηματικές έννοιες οι οποίες αναπτύσσονται αναπαρίστανται στα πέντε πεδία αναπαράστασης με ιδιαίτερη έμφαση στο χειρισμό των φυσικών μοντέλων και στον εντοπισμό ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ των μοντέλων αυτών όπως προτείνει ο Dienes (1969) σύμφωνα με τις αρχές αντιληπτικής ποικιλίας.

Οι μαθητές που δέχθηκαν τη διδασκαλία με το πειραματικό αναλυτικό πρόγραμμα είχαν καλύτερη βαθμολογία σε τέσσερις από τις έξι υποκλίμακες των δοκιμίων αξιολόγησης: έννοιες, σειροθέτηση, μεταφορά και εκτίμηση. Αξίζει να σημειωθεί ότι δεν βρέθηκαν ιδιαίτερες διαφορές μεταξύ των δύο ομάδων στα έργα ισοδυναμίας και συμβολικών πράξεων, κάτι που υποδεικνύει ότι η εστίαση της προσοχής του πειραματικού σχεδίου σε εννοιολογικές εμπειρίες έδωσε τις βάσεις στους μαθητές για να ασχοληθούν με επιτυχία στα διαδικαστικά έργα παρά το γεγονός ότι αφιερώθηκε περιορισμένος διδακτικός χρόνος στη μάθηση διαδικαστικών δεξιοτήτων. Στα δεδομένα από τις συνεντεύξεις παρουσιάζονται διαφορές στην ποιότητα του τρόπου σκέψης των μαθητών κατά την επίλυση έργων σειροθέτησης και εκτίμησης στα κλάσματα ανάλογα με τη διδασκαλία που έχουν δεχθεί. Συγκεκριμένα, οι μαθητές που διδάχτηκαν τα κλάσματα με βάση το πειραματικό αναλυτικό πρόγραμμα προσέγγιζαν τα έργα αυτά εννοιολογικά με βάση τις νοητικές εικόνες που είχαν οικοδομήσει για τα κλάσματα, ενώ οι μαθητές οι οποίοι δέχτηκαν διδασκαλία με βάση το συνηθισμένο αναλυτικό πρόγραμμα στηρίζονταν σε τυπικές, συχνά από μνήμης διαδικασίες (Cramer et al., 2002).

Πρόσφατα αρκετές έρευνες (π.χ. Kong & Kwok, 2003, Suh & Heo, 2005) ασχολήθηκαν επίσης με τις δυναμικές αναπαραστάσεις της έννοιας του κλάσματος σε δυναμικό περιβάλλον μάθησης. Ενδεικτικά, οι Kong & Kwok (2003) σχεδίασαν και ανέπτυξαν ένα γραφικό μοντέλο, το οποίο δίνει τη δυνατότητα μερισμού και ελέγχου

υποθέσεων με σκοπό την ενίσχυση της εννοιολογικής κατανόησης και της διαδικαστικής γνώσης των μαθητών στην πρόσθεση ετερόνυμων κλασμάτων. Οι Suh και Heo (2005) ασχολήθηκαν με την αξιοποίηση ψηφιακών εποπτικών μέσων στη διδασκαλία της ισοδυναμίας και πρόσθεσης κλασμάτων. Ο σχεδιασμός των ψηφιακών εποπτικών μέσων που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα τους, ένα κράμα οπτικών και συμβολικών αναπαραστάσεων, πιθανόν να είναι ένας από τους λόγους που ενθάρρυνε τους μαθητές να δημιουργήσουν συνδέσεις ανάμεσα στα διάφορα είδη αναπαραστάσεων και να τις χειρίζονται με ευελιξία, ειδικά όσοι από αυτούς χαρακτηρίζονται ως οπτικοί τύποι. Παράλληλα, η σύνδεση οπτικής και συμβολικής αναπαράστασης μέσα από τη χρήση των ψηφιακών εποπτικών μέσων φαίνεται να εμπόδιζε τους μαθητές από συνηθισμένα λάθη στην υπό εξέταση έννοια (Suh & Heo, 2005).

Ο τρόπος αξιολόγησης της κατανόησης των μαθητών όσον αφορά στους ρητούς αριθμούς απασχόλησε ένα σύνολο ερευνών (π.χ. Kyriakides & Charalambous, Niemi, 1996; 2002; Yang & Huang, 2004). Με βάση τα αποτελέσματα της έρευνας του Niemi (1996) προκύπτει ότι τα έργα αναγνώρισης της έννοιας τους κλάσματος σε ποικιλία αναπαραστάσεων, επεξήγησης και αιτιολόγησης παρέχουν σημαντικές και έγκυρες πληροφορίες όσον αφορά τις γνώσεις των μαθητών για τη συγκεκριμένη έννοια. Επομένως, τα συγκεκριμένα έργα θα πρέπει να θεωρούνται αναπόσπαστο μέρος για πολυδιάστατη προσέγγιση αξιολόγησης της εννοιολογικής γνώσης τόσο στα κλάσματα όσο και σε άλλες μαθηματικές έννοιες (Niemi, 1996).

Οι Martinie και Bay- Williams (2003) στην έρευνά τους συγκρίνουν την επίδοση των μαθητών σε ένα έργο αναπαράστασης δύο δεκαδικών αριθμών σε ποικιλία αναπαραστατικών μοντέλων (αριθμητική γραμμή, τετραγωνισμένο χαρτί, χρήμα, αξία θέσης ψηφίου). Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι μόνο ένα μικρό ποσοστό μαθητών είναι σε θέση να αναπαραστήσει σωστά τους δεκαδικούς αριθμούς σε όλα τα αναπαραστατικά πεδία, ενώ φάνηκε ότι η αναπαράσταση στην αριθμητική γραμμή δυσκόλεψε περισσότερο τους μαθητές. Το γεγονός ότι οι μαθητές μπορούν να αναπαραστήσουν τους δεκαδικούς αριθμούς σωστά σε κάποια μοντέλα ενώ σε άλλα όχι υποδεικνύει ότι δεν υπάρχει πλήρης κατανόηση των δεκαδικών αριθμών. Κατά συνέπεια, τόσο στη διδασκαλία όσο και στην αξιολόγηση θα πρέπει να περιλαμβάνονται ποικίλες αναπαραστάσεις ώστε να υπάρχει βαθύτερη κατανόηση των εννοιών αυτών (Martinie & Bay- Williams, 2003).

Οι De Windt- King και Goldin (2001) χρησιμοποίησαν μια ποικιλία εννοιολογικών μοντέλων όσον αφορά στα κλάσματα, όπως διακριτά μοντέλα (σύνολο), συνεχή μοντέλα (εμβαδόν ή όγκος), μοντέλα που δίνουν έμφαση στη σχέση μέρους- όλου, μοντέλα σύγκρισης και σχέσεων λόγου, για εντοπισμό των νοητικών αναπαραστάσεων των μαθητών όσον αφορά στην έννοια του κλάσματος. Επιπλέον, οι Kyriakides και Charalambous (2002) εστίασαν την προσοχή τους στην κατασκευή ενός δοκιμίου αξιολόγησης μαθητών δημοτικού όσον αφορά στην ικανότητά τους να αντιλαμβάνονται την ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος - όλο. Το δοκίμιο αναπτύχθηκε λαμβάνοντας υπόψη τις διάφορες εξωτερικές αναπαραστάσεις - μοντέλα, τα οποία χρησιμοποιούνται στη διδακτική πράξη και την έννοια της ισοδυναμίας. Περιλάμβανε έργα μετάφρασης από διαγραμματικές σε συμβολικές αναπαραστάσεις, από συμβολικές σε διαγραμματικές αναπαραστάσεις και μεταξύ διαφορετικών διαγραμματικών αναπαραστάσεων. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν μια σύγκλιση της επίδοσης των μαθητών στους τρεις τύπους έργων πολλαπλών αναπαραστάσεων αποκαλύπτοντας δύο διακριτά επίπεδα (έργα με ή χωρίς ισοδυναμία). Συνεπώς, συνιστάται από τους ερευνητές ότι οποιαδήποτε προσπάθεια αξιολόγησης της έννοιας του κλάσματος θα πρέπει να βασίζεται σε ένα πολυδιάστατο εργαλείο το οποίο περιλαμβάνει πολλαπλές αναπαραστάσεις και μετασχηματισμούς αναπαραστάσεων, αφού μόνο ένα τέτοιο εργαλείο μπορεί να δώσει επαρκείς πληροφορίες για την κατανόηση των μαθητών. Από την άλλη, επισημαίνεται η ανάγκη χρήσης στη διδασκαλία πολλαπλών αναπαραστάσεων – μοντέλων, τα οποία μπορεί να λειτουργήσουν συμπληρωματικά στην οικοδόμηση της έννοιας του κλάσματος (Kyriakides & Charalambous, 2002).

Τα αποτελέσματα της έρευνας των Yang και Huang (2004) επιβεβαιώνουν την άποψη των ερευνητών που υποστηρίζουν ότι θα πρέπει να χρησιμοποιείται ποικιλία εργαλείων αξιολόγησης της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών. Οι συγκεκριμένοι ερευνητές βρήκαν ότι οι μαθητές στην Ταϊβάν ήταν ιδιαίτερα επιδέξιοι στην εκτέλεση γραπτών υπολογισμών, συμπεριλαμβανομένου υπολογισμών με κλάσματα και δεκαδικούς. Η γνώση τους όμως για υπολογισμούς δεν μεταφέρεται σε παρόμοια έργα τα οποία περιλαμβάνουν συμβολικές και εικονικές αναπαραστάσεις. Η ευχέρεια δηλαδή στην εκτέλεση πράξεων δεν ισοδυναμεί με την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Άλλωστε σύμφωνα με τους Brenner κ.α. (1999), η υψηλού επιπέδου μαθηματική σκέψη βασίζεται στην εννοιολογική γνώση και στην ευελιξία χρήσης διάφορων μαθηματικών αναπαραστάσεων.

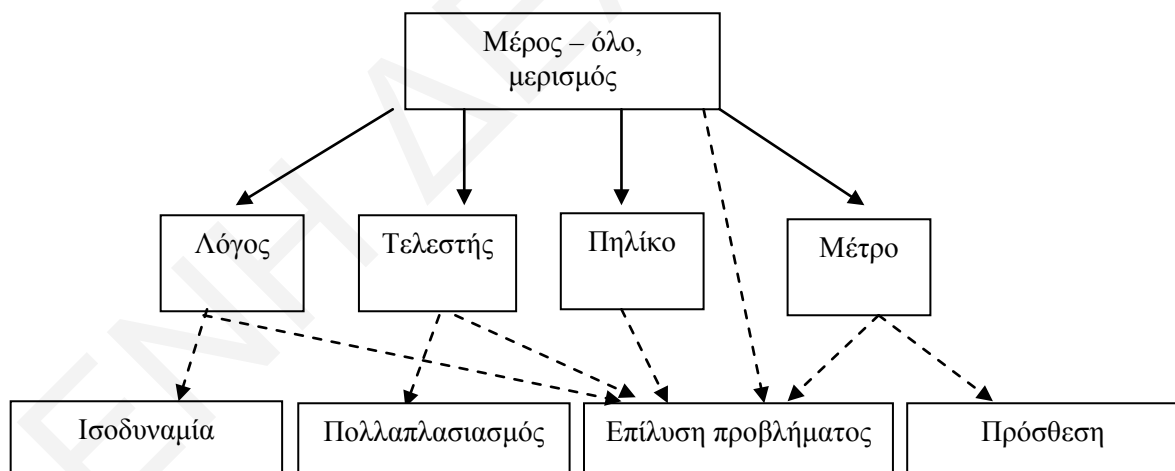
Οι Reeve και Pattison (1996) ζήτησαν από μαθητές δευτεροβάθμια εκπαίδευσης να σχεδιάσουν διαγράμματα για αναπαράσταση απλών και καταχρηστικών κλασμάτων, να αιτιολογήσουν την καταλληλότητα προσχεδιασμένων διαγραμμάτων για αναπαράσταση τους και να επιλύσουν εξισώσεις πρόσθεσης κλασμάτων. Μέσα από τις απαντήσεις που έδωσαν οι μαθητές στα έργα αιτιολόγησης της καταλληλότητας των διαγραμμάτων για αναπαράσταση κλασμάτων εντοπίστηκαν συστηματικοί τρόποι αντιμετώπισης που παραπέμπουν σε πιθανά ιεραρχικά διαμορφωμένα νοητικά μοντέλα όσον αφορά στην κατανόηση των κλασμάτων (μέρος-όλο, πολλαπλών μονάδων, συσχετισμού, μέτρο). Τα ερευνητικά ευρήματα έδειξαν ότι η επίδοση των μαθητών στα έργα επίλυσης εξισώσεων πρόσθεσης κλασμάτων και η εφαρμογή ιδιοτήτων των κλασμάτων για την κατασκευή διαγραμμάτων μπορεί να προβλεφθεί από το επίπεδο των διαμορφωμένων νοητικών μοντέλων των μαθητών. Γενικά, οι Reeve και Pattison (1996) υποστηρίζουν ότι η κατασκευή διαγραμμάτων ή η αιτιολόγηση προσχεδιασμένων διαγραμμάτων αναπαράστασης κλασμάτων υποδηλώνει την εννοιολογική επάρκεια των μαθητών. Επιπλέον, η ικανότητα χειρισμού συμβολικών αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων δείχνει τόσο την εννοιολογική όσο και τη διαδικαστική τους επάρκεια.

Άλλες έρευνες επισημαίνουν τη σύνδεση της έννοιας των αφηρημένων – συμβολικών αναπαραστάσεων των ρητών αριθμών με αναπαραστάσεις οι οποίες πηγάζουν από τις άτυπες γνώσεις των μαθητών. Ενδεικτικά, η Mack (1993) αναφέρει ότι η άτυπη γνώση των μαθητών όσον αφορά στους ρητούς αριθμούς δε συνδέεται με τη γνώση των συμβολικών αναπαραστάσεων και των διαδικασιών που ακολουθούνται στους ρητούς αριθμούς. Αυτή η αναντιστοιχία αρχικά θέτει περιορισμούς στην κατανόηση των ρητών αριθμών. Όμως με την κατάλληλη διδασκαλία οι μαθητές μπορούν σταδιακά να συνδέσουν τις συμβολικές αναπαραστάσεις και την άτυπη τους γνώση, ενισχύοντας έτσι την κατανόηση συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών (Mack, 1993). Σχετικά, στην έρευνα των Kamii και Clark (1995) φάνηκε ότι οι μαθητές αντιμετώπιζαν δυσκολία στην κατανόηση της έννοιας της ισοδυναμίας κλασμάτων. Οι δυσκολίες αυτές αποδόθηκαν κυρίως στη διδασκαλία και στη χρήση ακατάλληλων αναπαραστάσεων, οι οποίες δημιουργούν παρανοήσεις στους μαθητές. Συνεπώς, οι Kamii και Clark (1995) επισήμαναν τη σημασία χρήσης αναπαραστάσεων που να έχουν νόημα για τους μαθητές και την ανάγκη ενθάρρυνσης των μαθητών για επινόηση δικών τους αναπαραστάσεων, οι οποίες παρουσιάζουν ισοδύναμα κλάσματα.

Η Mack (2000) εξέτασε, για χρονικό διάστημα δύο χρόνων, την ανάπτυξη της κατανόησης του πολλαπλασιασμού κλασμάτων τεσσάρων μαθητών πρωτοβάθμιας

εκπαίδευσης. Οι μαθητές κατά τη διάρκεια των δύο χρόνων δέχτηκαν εξατομικευμένη διδασκαλία, η οποία ενθάρρυνε την κατανόηση και επίλυση προβλημάτων που περιλαμβάνουν πολλαπλασιασμό κλασμάτων λαμβάνοντας υπόψη την άτυπη γνώση τους στο μερισμό. Το δεύτερο χρόνο οι μαθητές δέχθηκαν διδασκαλία στη σχολική τάξη, η οποία περιλάμβανε τις αλγοριθμικές διαδικασίες πολλαπλασιασμού κλασμάτων. Σε ορισμένες περιπτώσεις ο τρόπος σκέψης των μαθητών φάνηκε να καθορίζεται από τις αλγοριθμικές διαδικασίες πολλαπλασιασμού τις οποίες διδάχτηκαν. Τα αποτελέσματα όμως έδειξαν επίσης ότι οι μαθητές βασίζονταν στις γνώσεις τους στο μερισμό για αιτιολόγηση του τρόπου επίλυσης των προβλημάτων πολλαπλασιασμού (Mack, 2000).

Μια άλλη ομάδα ερευνητών (π.χ. Behr et al., 1983; Charalambous & Pitta- Pantazi, 2007; Hannula, 2003; Kieren, 1976; Lamon, 1999; Lamon, 2001) ασχολείται με τις διάφορες ερμηνείες – προσωπικότητες του κλάσματος, οι οποίες με έμμεσο τρόπο αναφέρονται στις διάφορες αναπαραστάσεις μέσα από τις οποίες εκφράζονται. Μάλιστα, πολλοί ερευνητές (π.χ. Behr et al., 1983; Hannula, 2003; Lamon, 1999; Ni, 2001) θεωρούν ότι ο πολυδιάστατος χαρακτήρας της έννοιας του κλάσματος σχετίζεται με τις δυσκολίες που παρουσιάζονται στη διδασκαλία και μάθηση της έννοιας.



Διάγραμμα 7. Το θεωρητικό μοντέλο το οποίο συνδέει τις πέντε ερμηνείες του κλάσματος με τις διάφορες πράξεις κλασμάτων και την επίλυση προβλήματος (Behr et al., 1983).

Συγκεκριμένα, ο Kieren (1976) πρότεινε ότι η έννοια του κλάσματος περιλαμβάνει τέσσερις αλληλένδετες υποκατηγορίες: λόγος, τελεστής, πηλίκο και μέτρο. Η ερμηνεία του κλάσματος σαν μέρος- όλο, σύμφωνα με τον Kieren (1976) περιλαμβάνεται σε όλες τις υπόλοιπες και δεν αποτελεί ανεξάρτητη ερμηνεία. Οι Behr κ.α.(1983) στην προσπάθεια τους

να επεκτείνουν τις ιδέες που προτάθηκαν από τον Kieren (1976), εισηγούνται ότι η σχέση μέρος – όλο αποτελεί ένα διακριτό τρόπο ερμηνείας του κλάσματος που συνδέεται με τη διαδικασία του μερισμού. Επιπλέον, προτείνουν ένα θεωρητικό μοντέλο σύμφωνα με το οποίο οι διάφορες ερμηνείες του κλάσματος συνδέονται με τις βασικές πράξεις κλασμάτων, την ισοδυναμία κλασμάτων και την επίλυση προβλήματος, όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 7.

Το θεωρητικό μοντέλο που προτάθηκε από τους Behr κ.α. (1983) παραπέμπει στο ότι:

- α) η ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος- όλο σε συνδυασμό με τη διαδικασία μερισμού είναι θεμελιώδης για την κατανόηση των υπόλοιπων κατηγοριών ερμηνείας του κλάσματος,
- β) η ερμηνεία του κλάσματος ως λόγου αποτελεί την πιο φυσική οδό για κατανόηση της έννοιας της ισοδυναμίας και της διαδικασίας εύρεσης ισοδύναμων κλασμάτων,
- γ) η ερμηνεία του κλάσματος ως τελεστή είναι ιδιαίτερα βοηθητική για ανάπτυξη της κατανόησης του πολλαπλασιασμού κλασμάτων,
- δ) η ερμηνεία του κλάσματος ως μέτρου είναι απαραίτητη για ευχέρεια στην εκτέλεση προσθετικών πράξεων στα κλάσματα και
- ε) η κατανόηση των πέντε ερμηνειών του κλάσματος αποτελεί αναγκαία προϋπόθεση για επίλυση προβλημάτων στα κλάσματα (Charalambous & Pitta- Pantazi, 2007).

Κάθε μια από τις ερμηνείες των κλασμάτων, όπως αναφέρει η Lamou (2001), διαθέτει το δικό της σύνολο αναπαραστάσεων, λειτουργιών και μοντέλων, τα οποία αφορούν μόνο ένα μέρος των χαρακτηριστικών του πεδίου των ρητών αριθμών. Ακόμη όμως και μέσα στο ίδιο πεδίο αναπαράστασης, το οποίο αντιστοιχεί με ένα είδος ερμηνείας όπως είναι για παράδειγμα το εικονικό πεδίο αναπαράστασης, μπορεί να εμπερικλείονται διαφορετικά νοήματα ανάλογα με το αν χρησιμοποιούνται διακριτά ή συνεχή μοντέλα. Η Ni (2001) επισημαίνει επίσης ότι οι διάφορες εικονικές αναπαραστάσεις, οι οποίες χρησιμοποιούνται για κατανόηση της έννοιας του κλάσματος, διαφέρουν όχι μόνο όσον αφορά στα οπτικά τους χαρακτηριστικά αλλά και στην έμφαση που δίνουν στις συγκεκριμένες ερμηνείες του κλάσματος. Συγκεκριμένα, οι επιφάνειες εμβαδού και τα σύνολα αντικειμένων αντιστοιχούν κυρίως με την ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος- όλο, ενώ οι αριθμητικές γραμμές αναδεικνύουν περισσότερο την ερμηνεία του κλάσματος ως μέτρου (Ni, 2000). Κατά συνέπεια, όταν η διδασκαλία βασίζεται σε μια μόνο ερμηνεία και χρησιμοποιούνται επιλεκτικά ορισμένες αναπαραστάσεις οι μαθητές παρουσιάζουν ελλείψεις όσον αφορά την κατανόηση των ρητών αριθμών (Lamou, 2001).

Τα ευρήματα της έρευνας των Charalambous και Pitta- Pantazi (2007) επιβεβαιώνουν το θεωρητικό μοντέλο των Behr κ.α. (1983) υποδεικνύοντας ότι η σε βάθος κατανόηση των διαφόρων ερμηνειών των κλασμάτων βοηθά την επίδοση των μαθητών σε έργα που

σχετίζονται με τις πράξεις κλασματικών αριθμών και την ισοδυναμία κλασμάτων. Συνεπώς, συμφωνούν με τα ευρήματα άλλων ερευνητών (π.χ. Lamon, 1999; Brousseau et al., 2004), οι οποίοι εισηγούνται ότι θα πρέπει οι εκπαιδευτικοί να δίνουν περισσότερη έμφαση την εννοιολογική κατανόηση των κλασμάτων αποφεύγοντας τη βεβιασμένη παρουσίαση προς τους μαθητές των αλγόριθμων για εκτέλεση πράξεων. Οι Cramer κ.α. (2002) επισημαίνουν σχετικά ότι στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση οι μαθητές θα πρέπει να αναπτύξουν ένα στέρεο εννοιολογικό πλαίσιο για τους ρητούς αριθμούς. Η ευκολία διεκπεραίωσης πράξεων με τους ρητούς αριθμούς αρχίζει μεν από την πρωτοβάθμια εκπαίδευση αλλά αποτελεί το επίκεντρο της προσοχής στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Οι εκπαιδευτικοί καλούνται να προσεγγίσουν εννοιολογικούς στόχους στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση παρέχοντας στους μαθητές πλούσιες εμπειρίες με διάφορα πεδία αναπαράστασης και ποικίλα χειριστικά μοντέλα (Cramer et al., 2002; NCTM, 2000).

Επιπλέον, οι Charalambous και Pitta- Pantazi (2007) υποστηρίζουν ότι η διασύνδεση των ερμηνειών του κλάσματος με την ισοδυναμία και τις πράξεις των κλασμάτων θα πρέπει να επισημαίνεται ρητά στη διδασκαλία. Στη συγκεκριμένη έρευνα βρέθηκε όμως ότι η ερμηνεία του κλάσματος ως μέτρου δεν σχετίζεται με την επίδοση των μαθητών στην εκτέλεση προσθέσεων και αφαιρέσεων κλασμάτων. Από την άλλη, ούτε η ερμηνεία του κλάσματος σαν μέρος – όλο δεν ερμηνεύει σε μεγάλο βαθμό την επίδοση των μαθητών σε πράξεις πρόσθεσης κλασματικών αριθμών. Επομένως, οι Charalambous και Pitta-Pantazi (2007) επισημαίνουν ότι πιθανόν η έμφαση της παραδοσιακής διδασκαλίας στην εισαγωγή της πρόσθεσης και αφαίρεσης κλασμάτων κυρίως μέσα από τη χρήση συνεχών μοντέλων επιφάνειας εμβαδού θα πρέπει να αναθεωρηθεί.

Η Batturo (2004), από την άλλη, ασχολήθηκε με την ενίσχυση της διδασκαλίας της ερμηνείας του κλάσματος ως μέρος – όλο δίνοντας έμφαση σε δραστηριότητες μερισμού ποικιλίας πρωτοτυπικών και μη πρωτοτυπικών αναπαραστάσεων του όλου και κατόπιν την εύρεση μονάδων σε συνεχή, διακριτά και γραμμικά μοντέλα όπως και δραστηριότητες μερισμού όταν δίνεται το όλο. Τα ευρήματα της συγκεκριμένης έρευνας ήταν ιδιαίτερα ενθαρρυντικά όσον αφορά στα μαθησιακά αποτελέσματα για τη συγκεκριμένη ερμηνεία του κλάσματος.

Η διαχρονική έρευνα της Lamon (2001) συγκρίνει τα διδακτικά αποτελέσματα όσον αφορά στην κατανόηση των ρητών αριθμών που προκύπτουν με την παραδοσιακή διδασκαλία, η οποία βασίζεται στην ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος- όλο, με τα

αποτελέσματα όταν ακολουθούνται μη συμβατικοί τρόποι προσέγγισης της έννοιας του κλάσματος, δηλαδή όταν τα κλάσματα εισάγονται με την ερμηνεία του κλάσματος ως μέτρο, πηλίκο, λόγο ή τελεστή. Τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης έρευνας έδειξαν ότι οι μη παραδοσιακές προσεγγίσεις επιτρέπουν στους μαθητές να κατανοήσουν περισσότερους τρόπους ερμηνείας του κλάσματος, να αναπτύξουν σε μεγαλύτερο βαθμό τον αναλογικό συλλογισμό αλλά και την ευχέρεια εκτέλεσης υπολογισμών. Μέσα από τις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούσαν οι μαθητές φαίνεται ότι αν και δεν είχαν διδαχτεί τον τυπικό τρόπο εκτέλεσης πράξεων, ήταν σε θέση να εκτελέσουν πράξεις κλασμάτων σωστά με πρωτότυπο τρόπο, που να έχει νόημα για τους ίδιους. Άλλωστε, σύμφωνα με τη Lamon (2001), ο εκπαιδευτικός μπορεί να κρίνει αν ο μαθητής έχει κατανοήσει μια έννοια με βάση τις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιεί. Όταν ο μαθητής κατανοεί μια έννοια, με τρόπο ώστε να τη συνδέει ή να την προσαρμόζει με άλλες πληροφορίες, γνώσεις και εμπειρίες, μπορεί να αναπαραστήσει τις ιδέες αυτές με ένα πρωτότυπο τρόπο, ο οποίος υποδηλώνει την ευχέρεια χειρισμού τους (Lamon, 2001).

Η Lamon (2001) επισημαίνει όμως ότι δεν είναι όλες οι ερμηνείες του κλάσματος κατάλληλες για εισαγωγή των κλασματικών αριθμών. Η ίδια εισηγείται ότι η εισαγωγή στην έννοια του κλάσματος πρέπει να γίνεται συνδυάζοντας την ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος-όλο με την έννοια της εύρεσης μονάδων και την ερμηνεία του κλάσματος ως μέτρο. Η εύρεση μονάδων και η ερμηνεία του κλάσματος ως μέτρο με τις αντίστοιχες αναπαραστάσεις τους πιθανόν να βοηθήσουν τη μετάβαση των μαθητών από τους ακεραίους στους ρητούς αριθμούς αφού βασίζονται και διευρύνουν αρχές της μέτρησης με τις οποίες είναι ήδη εξοικειωμένοι οι μαθητές (Lamon, 2001). Η Lamon (1999) υποστηρίζει ότι οι μαθητές κατανοούν την ερμηνεία του κλάσματος ως μέτρο όταν είναι σε θέση να προβαίνουν σε μερισμούς πέραν του μισού, αντιλαμβάνονται την πυκνότητα των ρητών αριθμών και είναι σε θέση να χρησιμοποιούν ένα δοσμένο μοναδιαίο διάστημα για μέτρηση μιας απόσταση από το ένα αρχικό σημείο. Ο Smith (2002) επισημαίνει επίσης την ανάγκη ευχέρειας στη σειροθέτηση και την ισοδυναμία κλασμάτων.

Τα έργα που προτάθηκαν στους μαθητές στα πλαίσια της παρούσας έρευνας εμπειρικλείουν και τις πέντε ερμηνείες του κλάσματος οι οποίες προτάθηκαν από τους Behr κ.α. (1983). Συγκεκριμένα, όλα τα έργα στα οποία περιλαμβάνονται ορθογώνιες ή κυκλικές επιφάνειες εμβαδού αντιστοιχούν με την ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος-όλο. Τα έργα αναγνώρισης, χειρισμού και μετάφρασης που εμπλέκουν πρόσθεση ετερόνυμων κλασμάτων ή

ομώνυμων κλασμάτων στα οποία τα μέρη των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούνται είναι πολλαπλάσια του παρονομαστή των προσθετών παραπέμπουν στην ερμηνεία του κλάσματος ως λόγου. Σύμφωνα με την ερμηνεία αυτή οι μαθητές πρέπει να αντιληφθούν ότι δύο ποσότητες σε σχέση λόγου μεταβάλλονται μαζί έτσι ώστε η σχέση μεταξύ τους να διατηρείται αμετάβλητη (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Η κατανόηση της ισοδυναμίας προκύπτει μέσα από την διεκπεραίωση μερισμών από τους οποίους προκύπτουν οι ίδιες σχετικές ποσότητες (Lamon, 1999).

Η ερμηνεία του κλάσματος ως μέτρου είναι εμφανής σε όλα τα έργα στα οποία χρησιμοποιούνται αριθμητικές γραμμές, αφού ο μαθητής θα πρέπει να είναι σε θέση να χρησιμοποιεί ένα δοσμένο μοναδιαίο διάστημα για τη μέτρηση των αποστάσεων από το μηδέν (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007) στην αναπαράσταση εξισώσεων πρόσθεσης κλασμάτων. Επιπλέον, η ερμηνεία του κλάσματος ως μέτρου απαιτείται και για την αναπαράσταση των προσθετών στις κυκλικές και ορθογώνιες επιφάνειες με τη χρήση εμβαδού, οι οποίες παρουσιάζονται στην παρούσα έρευνα. Άλλωστε στην ερμηνεία του κλάσματος ως μέτρου, ο ρητός αριθμός αποτελεί το μέτρο που αντιστοιχεί σε ένα διάστημα ή εμβαδόν ανάλογα με το αν πρόκειται να χρησιμοποιηθεί μονοδιάστατο ή δισδιάστατο μοντέλο (Lamon, 2001).

Από την άλλη, η ονομασία των αποστάσεων από το μηδέν στην αριθμητική γραμμή, στο πλαίσιο των έργων της έρευνας, απαιτεί τη διαδικασία μερισμού, η οποία αποτελεί σύμφωνα με τη Lamon (1999) το μηχανισμό που παρέχει τις εμπειρίες κατανόησης της ερμηνείας του κλάσματος ως πηλίκου. Αξίζει να σημειωθεί ότι η έννοια του μερισμού βρίσκεται στο επίκεντρο της κατανόησης των ρητών αριθμών (Izaak, Tillema, & Tunk-Pekkan, 2008; Siemon, 2004). Η τοποθέτηση ειδικότερα ενός κλάσματος στην αριθμητική γραμμή βασίζεται στην διαίρεση μιας μονάδας σε ισοδύναμα μέρη. Πέραν από αυτό, ο μερισμός βασίζεται στην καθημερινή εμπειρία των μαθητών όσον αφορά στο δίκαιο διαμοιρασμό (Lamon, 1999). Η μελέτη περίπτωσης των Izaak κ.α. (2008) έδειξε ότι οι διαφορές που εντοπίζονται στον τρόπο μερισμού της μονάδας μεταξύ εκπαιδευτικού και μαθητή και τα αντίστοιχα γνωστικά σχήματα ερμηνείας που δημιουργούνται θέτουν εμπόδια στην κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής. Από την άλλη, διάφοροι ερευνητές (π.χ. Delaney et al., 2007) επισημαίνουν ότι παρόλο που αναγνωρίζεται η σημασία της διαδικασίας μερισμού, τα σχολικά εγχειρίδια περιορίζονται στη χρήση κυρίως διαγραμματικών αναπαραστάσεων με δοσμένο σύνολο υποδιαιρέσεων. Σχετικά

με την ερμηνεία του κλάσματος ως τελεστή αυτή εμφανίζεται τόσο στις αριθμητικές γραμμές όσο και στις κυκλικές και ορθογώνιες επιφάνειες σε έργα στα οποία απαιτείται η σύνθεση επιμέρους τελεστών για τον καθορισμό του αποτελέσματος διαδοχικών μερισμών σε ένα διάστημα.

Επομένως, η ερμηνεία του κλάσματος ως μέτρου, η οποία κατά κύριο λόγο σχετίζεται με την πρόσθεση ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, παραπέμπει έμμεσα και στις υπόλοιπες ερμηνείες του κλάσματος. Επιπλέον, οι μαθητές για επίλυση των προβλημάτων που προτείνονται στην έρευνα απαιτείται να συνδυάσουν ευέλικτα και τις πέντε ερμηνείες του κλάσματος.

Η Μετάβαση από την Πρωτοβάθμια στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση στα Μαθηματικά

Η μετάβαση από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση συνοδεύεται από ένα σύνολο πνευματικών, ηθικών, κοινωνικών, συναισθηματικών και φυσικών αλλαγών (Schumacher, 1998). Στο μάθημα των μαθηματικών φαίνεται ότι η μετάβαση στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση δεν ευοδώνει τις προσδοκίες των μαθητών (Ellerton & Clements, 1989). Έτσι, ενώ οι περισσότεροι μαθητές μεταβαίνουν στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση με θετικές στάσεις όσον αφορά το μάθημα των μαθηματικών και θετικές προσδοκίες όσον αφορά στην επίδοσή τους (transition opportunity), στο τέλος του πρώτου χρόνου στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση αρκετοί από αυτούς πιστεύουν ότι η επίδοσή τους στα μαθηματικά είναι χαμηλή και ότι ποτέ δεν θα καταφέρουν να επιτύχουν στο συγκεκριμένο μάθημα (transition problem) (Ellerton & Clements, 1989).

Όσον αφορά στα κίνητρα των μαθητών στο μάθημα των μαθηματικών, τα αποτελέσματα της έρευνας των Anderman και Midgley (1996) έδειξαν ότι οι στόχοι αντικειμένου (task goals) των μαθητών παρουσιάζουν μείωση κατά τα πρώτα χρόνια της μετάβασης στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, ενώ οι στόχοι επίδοσης (ability goals) δεν μεταβάλλονται σημαντικά. Επιπλέον, οι πεποιθήσεις επάρκειας των μαθητών που έλαβαν μέρος στην έρευνα φαίνεται ότι μειώνονται κατά τη διάρκεια του πρώτου χρόνου μετάβασης, ενώ παρουσιάζεται αύξησή τους το δεύτερο χρόνο φοίτησης στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Η μείωση των πεποιθήσεων επάρκειας των μαθητών κατά τη μετάβαση στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση είναι ιδιαίτερα ανησυχητική αφού το αίσθημα της επάρκειας συνδέεται με θετικά μαθησιακά αποτελέσματα. Συγκεκριμένα, στην έρευνα παρουσιάζεται μείωση του μέσου όρου βαθμολογίας των μαθητών στο τέλος του πρώτου χρόνου μετάβασης στη δευτεροβάθμια

εκπαίδευση. Οι βαθμοί διαφέρουν τόσο κατά φύλο όσο και ανάλογα με την επίδοση των μαθητών- τα αγόρια και οι μαθητές με χαμηλή επίδοση έχουν τη μεγαλύτερη πτώση όσον αφορά στον τελικό βαθμό τους στα μαθηματικά (Anderman & Midgley, 1996).

Σχετικά με την έρευνα των Anderman και Midgley (1996) ήταν τα ευρήματα της έρευνας των Pajares και Graham (1999), οι οποίοι διερεύνησαν τη μεταβολή των αυτοαναφορικών πεποιθήσεων των μαθητών στα μαθηματικά κατά τη μετάβαση στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Στο τέλος της ακαδημαϊκής χρονιάς βρέθηκε ότι οι μαθητές θεωρούν ότι τα μαθηματικά δεν είναι και τόσο χρήσιμα και παρατηρείται πτώση στην προσπάθεια που καταβάλλουν κατά την εμπλοκή τους με μαθηματικά έργα (Pajares & Graham, 1999).

Από την άλλη, οι Mullins και Irvin (2000) μέσα από μια ανασκόπηση προηγούμενων ερευνών που ασχολήθηκαν με τη μετάβαση στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, επισημαίνουν όσον αφορά στα μαθηματικά μείωση των θετικών στάσεων των μαθητών κατά τη διάρκεια της πρώτης σχολικής χρονιάς στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Μάλιστα πολλοί μαθητές που κατέτασσαν τα μαθηματικά σαν ένα από τα αγαπημένα τους μαθήματα στο δημοτικό σχολείο, το κατατάσσουν σαν ένα από τα χειρότερα τους στο γυμνάσιο (Schulenberg, Asp, & Peterson, αναφορά στους Mullins & Irvin, 2000).

Ο Alsbaugh (1998) επισημαίνει στατιστικά σημαντική διαφορά όσον αφορά τη μείωση της επίδοσης των μαθητών στα διάφορα ακαδημαϊκά θέματα (γλώσσα, μαθηματικά, φυσική, κοινωνικές επιστήμες), οι οποίοι μεταβαίνουν σε διαφορετικά σχολεία κατά τη μετάβαση στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση σε σύγκριση με τους μαθητές που φοιτούν σε ενιαίου τύπου δημοτικό – γυμνάσιο. Αντίθετα, οι Whitley, Lupart και Beran (2007) εντοπίζουν στατιστικά σημαντική μείωση της επίδοσης των μαθητών κατά τη μετάβασή τους στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση στο μάθημα των μαθηματικών, ανεξάρτητα από τον τύπο του σχολείου φοίτησης.

Η έκθεση της Επιτροπής για τη Μεταρρύθμιση του Εκπαιδευτικού Συστήματος στη Κύπρο (2005) επισήμανε χάσμα μεταξύ πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης όσον αφορά στο αναλυτικό πρόγραμμα, τις μεθόδους, τα υλικά και μέσα που χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία των διαφόρων μαθημάτων. Συγκεκριμένα, η Επιτροπή για την Μεταρρύθμιση του Εκπαιδευτικού Συστήματος ανάγει τη δυσλειτουργία του θεσμού της εννιάχρονης εκπαίδευσης στην Κύπρο σε διάφορους παράγοντες, μεταξύ των οποίων μπορούν να συμπεριληφθούν και οι εξής:

- α) Τα αναλυτικά προγράμματα για το δημοτικό και το γυμνάσιο σχεδιάζονται από διαφορετικές διευθύνσεις του Υπουργείου Παιδείας και δε διέπονται από τις αρχές της ενιαίας εκπαίδευσης.
- β) Επικαλύψεις στα θέματα και την ύλη που διδάσκονται στο δημοτικό και το γυμνάσιο, ιδιαίτερα στο μάθημα των μαθηματικών.
- γ) Τα σχολικά εγχειρίδια που χρησιμοποιούνται στο δημοτικό και το γυμνάσιο δε διέπονται, στην πλειοψηφία τους, από τις αρχές της εννιάχρονης ενιαίας εκπαίδευσης, της οποίας βασικό στοιχείο θα έπρεπε να είναι η αρχή της συνέχειας και της ομαλής μετάβασης.
- δ) Διαφορές στην παιδαγωγική – διδακτική διαδικασία μεταξύ δημοτικού και γυμνασίου, δηλαδή στην οργάνωση της διδασκαλίας και του περιβάλλοντος μάθησης, στην αξιολόγηση και στις «ευρύτερες επιστημολογικές αντιλήψεις» των εκπαιδευτικών των δύο βαθμίδων.
- ε) Έλλειψη μιας ενιαίας διεύθυνσης ή αρχής στο Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού για το εννιάχρονο σχολείο.

Το γεγονός ότι οι μαθητές στη Κύπρο βιώνουν μια ιδιαίτερα δύσκολη μετάβαση από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, επισημαίνεται και από περιορισμένο αριθμό ερευνητικών εργασιών που εστιάζουν την προσοχή τους στο συγκεκριμένο θέμα (π.χ. Φιλίππου, Πίττα- Πανταζή, & Χρίστου, 2003; Meletiou-Mavrotheris & Stylianou, 2003). Η δυσκολία προσαρμογής στο νέο σχολικό περιβάλλον φαίνεται μάλιστα ότι έχει επιπτώσεις στην επίδοσή τους στα πλείστα θέματα διδασκαλίας, ιδιαίτερα στα μαθηματικά (Meletiou-Mavrotheris & Stylianou, 2003).

Οι Φιλίππου, Πίττα – Πανταζή και Χρίστου (2005) επισημαίνουν ότι κάποιοι από τους παράγοντες που φαίνεται να συμβάλλουν στη δημιουργία αυτής της δυσκολίας είναι πέραν από το αναλυτικό πρόγραμμα, τα σχολικά εγχειρίδια και τη διδασκαλία στις δύο βαθμίδες, παράγοντες που επισημαίνονται και από την Επιτροπή για τη Μεταρρύθμιση του Εκπαιδευτικού Συστήματος στη Κύπρο (2005), η αλλαγή στο κοινωνικό περιβάλλον, η εκπαίδευση των εκπαιδευτικών και η διοικητική οργάνωση των δύο βαθμίδων. Στη σχετική με τη μετάβαση από το δημοτικό στο γυμνάσιο έρευνα τους, οι Φιλίππου κ.α. (2005) εξέτασαν επίσης την επίδοση μαθητών Στ΄ τάξης δημοτικού και Α΄ τάξης γυμνασίου στα κλάσματα. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν στασιμότητα όσον αφορά στην επίδοση των μαθητών. Οι ερευνητές υποστηρίζουν ότι μπορούν να δοθούν διάφορες ερμηνείες στο γεγονός ότι δεν υπήρχε στατιστική διαφορά στην επίδοση των μαθητών στις δύο βαθμίδες. Από τη μια, μπορεί

να ισχυριστεί κανείς ότι οι μαθητές του δημοτικού φαίνεται να μην έχουν εμπλουτίσει τις γνώσεις τους στο θέμα αυτό μετά από τη διδασκαλία ενός χρόνου στο γυμνάσιο. Μια άλλη εκδοχή θα ήταν ότι οι γνώσεις που αποκτήσαν οι μαθητές στο δημοτικό δεν είχαν εμπεδωθεί με αποτέλεσμα μετά το χρονικό διάστημα των δέκα μηνών που μεσολάβησαν μέχρι να συναντήσουν ξανά τη συγκεκριμένη έννοια στο γυμνάσιο πολλά πράγματα είχαν πια ξεχαστεί. Έτσι, η διδασκαλία στο γυμνάσιο για τη συγκεκριμένη έννοια αντί να βοηθήσει τους μαθητές να βελτιώσουν την επίδοσή τους απλά τους επανέφερε στο σημείο που βρίσκονταν την προηγούμενη χρονιά (Φιλίππου et al., 2005). Μια έρευνα, η οποία θα αποτελούσε συνέχεια της συγκεκριμένης προσπάθειας θα μπορούσε, σύμφωνα με τους Φιλίππου κ.α. (2005), να ελέγξει το βαθμό διατήρησης της γνώσης με ένα δοκίμιο πριν τη διδασκαλία της ενότητας στο γυμνάσιο. Με τον τρόπο αυτό είναι δυνατόν να μετρηθεί κατά πόσο οι μαθητές έχουν ξεχάσει αρκετά από τα όσα διδάχθηκαν στο δημοτικό, λόγω μη ικανοποιητικής εμπέδωσης του θέματος ή κατά πόσο ο τρόπος με τον οποίο παρουσιάζεται το θέμα στο γυμνάσιο δε συντελεί σε περαιτέρω εννοιολογική κατανόηση, με αποτέλεσμα τη στασιμότητα που παρουσιάζεται στην επίδοσή τους.

Η εθνογραφικού χαρακτήρα έρευνα των Meletiou-Mavrotheris και Stylianou (2003) προσπάθησε επίσης να εντοπίσει παράγοντες οι οποίοι επηρεάζουν τη μετάβαση των μαθητών από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση στην Κύπρο. Συγκεκριμένα, ασχολείται με διάφορες όψεις της κουλτούρας: α) του σχολείου (οργάνωση τάξης, μορφή διδασκαλίας, πρακτικές αξιολόγησης, προετοιμασία εκπαιδευτικού) σε κάθε βαθμίδα και β) της τάξης κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας του μαθήματος των μαθηματικών (φύση διδασκαλίας, χρήση τεχνολογίας), με βάση κυρίως απαντήσεις εκπαιδευτικών, των οποίων οι μαθητές συμμετείχαν σε διεθνείς έρευνες (TIMSS, TIMSS- R), σε ερωτηματολόγια και μικρής ομάδας εκπαιδευτικών των δύο βαθμίδων. Στην έρευνα γίνεται επίσης αναφορά στις πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών όσον αφορά: α) τι είναι μαθηματικά, β) ποια είναι η φύση της διδασκαλίας και γ) τη γνώση των μαθηματικών ως χρήσιμη ή απαραίτητη προϋπόθεση για τη διδασκαλία, με βάση τις απαντήσεις εκπαιδευτικών στις διεθνείς έρευνες και μικρής ομάδας εκπαιδευτικών των δύο βαθμίδων. Επιπλέον, γίνεται από τις ερευνήτριες μια συνοπτική ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων της Στ' δημοτικού και της Α' γυμνασίου στην ενότητα των δεκαδικών αριθμών με βάση τέσσερις τύπους έργων: α) έργα απομνημόνευσης, β) έργα που εστιάζουν το ενδιαφέρον τους στη χρήση κανόνων, αλγορίθμων και διαδικασιών χωρίς οποιαδήποτε σύνδεση με έννοιες ή νοήματα, γ) έργα τα οποία απαιτούν τη χρήση αλγορίθμων και

διαδικασιών σε συσχετισμό με σχετικές έννοιες και δ) έργα σύνθετης μαθηματικής σκέψης και δραστηριότητες αιτιολόγησης, με σκοπό να εντοπιστούν οι γνωστικές απαιτήσεις των έργων που προτείνονται στους μαθητές στα συγκεκριμένα εγχειρίδια (Meletiou-Mavrotheris & Stylianou, 2003).

Τα αποτελέσματα της έρευνας των Meletiou-Mavrotheris και Stylianou (2003) έδειξαν ότι το περιβάλλον της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης είναι αποκομμένο από αυτό της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Οι δυσκολίες μάλιστα που φαίνεται να αντιμετωπίζουν οι μαθητές δεν οφείλονται μόνο στο μαθηματικό περιεχόμενο που διδάσκεται σε κάθε βαθμίδα αλλά και στις διαφορετικές κουλτούρες τους, οι οποίες εμφανίζονται σε κάθε όψη της σχολικής ζωής των μαθητών. Κατά συνέπεια, οι ερευνήτριες επισημαίνουν την ανάγκη συντονισμού των δύο βαθμίδων ώστε η διδασκαλία στο δημοτικό σχολείο να βοηθά τους μαθητές να οικοδομήσουν μια στέρεη βάση πάνω στην οποία θα στηριχτεί ο πιο τυπικός τρόπος μελέτης των μαθητών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Meletiou-Mavrotheris & Stylianou, 2003). Σχετικά, ο Schumacher (1998) επισημαίνει ότι οι εκπαιδευτικοί των δύο βαθμίδων θα πρέπει να συνεργαστούν και να συζητήσουν τόσο το περιεχόμενο της διδακτέας ύλης και το αναλυτικού προγράμματος όσο και τις αντίστοιχες διδακτικές πρακτικές. Οι Meletiou-Mavrotheris και Stylianou (2003) διακρίνουν επίσης την ανάγκη έρευνας σε συστηματική βάση των αναλυτικών προγραμμάτων των δύο βαθμίδων καθώς και των σχολικών εγχειριδίων, της φιλοσοφίας και του περιεχομένου τους κάτι το οποίο θα βοηθήσει μελλοντικές προσπάθειες συντονισμού του αναλυτικού προγράμματος πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Η παρούσα έρευνα επιχειρεί να δώσει μια νέα διάσταση του θέματος της μετάβασης των μαθητών από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση στο μάθημα των μαθηματικών. Μέσα από τη βιβλιογραφία φαίνεται να απουσιάζουν μεγάλης κλίμακας διαχρονικές ερευνητικές προσπάθειες, οι οποίες συσχετίζουν το θέμα λαμβάνοντας υπόψη τις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται κατά τη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών στις δύο βαθμίδες.

Ανακεφαλαίωση

Από επιστημολογικής άποψης τα μαθηματικά διακρίνονται από τις άλλες θετικές επιστήμες λόγω του γεγονότος ότι ο μόνος τρόπος πρόσβασης στα μαθηματικά αντικείμενα παρέχεται μέσα από τις διάφορες σημειωτικές αναπαραστάσεις (Duval, 2006). Ο όρος

«αναπαράσταση» είναι ασαφής και επιδέχεται πολλαπλές ερμηνείες. Τη βάση του θέματος των αναπαραστάσεων αποτέλεσαν διαφορετικές θεωρίες ψυχολογίας με αποτέλεσμα τη διαμόρφωση από τους ερευνητές διαφορετικών ορισμών (Brousseau, 2004; Kaput, 1987; Goldin, 1998; Roth & McGinn, 1998). Ένας από τους ευρέως αποδεκτούς ορισμούς, ο οποίος θεωρείται λειτουργικός στα πλαίσια της παρούσας έρευνας αναφέρει ότι η αναπαράσταση είναι ένα σύνολο συμβόλων, χαρακτήρων ή αντικειμένων που αναφέρονται μια άλλη οντότητα (Goldin & Shteingold, 2001).

Μια κοινή βασική διάκριση που επισημαίνεται από την πλειοψηφία των διαφορετικών τρόπων προσέγγισης της έννοιας της αναπαράστασης είναι ανάμεσα στις εσωτερικές/νοητικές και τις εξωτερικές αναπαραστάσεις (DeWindt-King & Goldin, 2003). Εντούτοις, ιδιαίτερα σημαντική για αποτελεσματική διδασκαλία και μάθηση είναι η αμφίδρομη σχέση αλληλεπίδρασης ανάμεσα στις εσωτερικές και τις εξωτερικές αναπαραστάσεις (Goldin & Shteingold, 2001).

Οι εσωτερικές αναπαραστάσεις αναφέρονται στους πιθανούς νοητικούς σχηματισμούς ή εικόνες που οικοδομούν τα υποκείμενα για να αναπαραστήσουν την εξωτερική πραγματικότητα (Hiebert & Carpenter, 1988). Από την άλλη, οι εξωτερικές αναπαραστάσεις αντιπροσωπεύουν τους εξωτερικούς συμβολικούς φορείς, οι οποίοι αποσκοπούν στην αναπαράσταση μιας συγκεκριμένης πραγματικότητας (Dufour-Janvier et al., 1987). Οι Lesh κ.α. (1987b) επισημαίνουν πέντε διαφορετικούς τύπους συστημάτων εξωτερικών αναπαραστάσεων σε σχέση με τη μάθηση των μαθηματικών και την επίλυση προβλήματος: κείμενα, χειριστικά αντικείμενα/μοντέλα, εικόνες ή διαγράμματα, γλώσσες και γραπτά σύμβολα. Ο Schnotz (2002) κατηγοριοποιεί τα εξωτερικά συστήματα αναπαράστασης σε περιγραφικά και εικονικά. Τα περιγραφικά συστήματα αναπαράστασης έχουν αυθαίρετη δομή και σχετίζονται με τα αντικείμενα στα οποία αναφέρονται βάσει συμβάσεων, ενώ τα εικονικά συστήματα αναπαράστασης σχετίζονται με το αντικείμενο που αναπαριστούν βάσει κοινών δομικών στοιχείων (Schnotz, 2002; Schnotz & Bannert, 2002). Η σημασία των εικονικών και διαγραμματικών αναπαραστάσεων όσον αφορά στη μάθηση των μαθηματικών και πιο συγκεκριμένα στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος υποστηρίζεται από τα πορίσματα πολλών ερευνών (Arcavi, 2003; Booth & Thomas, 2000; Brown & Wheatly, 1997; Presmeg, 1986; Presmeg, 2006). Επιπλέον, πολλοί ερευνητές ασχολήθηκαν με το γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής και την θετική ή αρνητική επίδρασή του στην κατανόηση

μαθηματικών εννοιών (Elia & Gagatsis, 2006; Herbst, 1997; Keijzer & Terwel, 2003; Michaelidou, 2003; Ni, 2001).

Η ανάγκη χρήσης πολλαπλών πεδίων αναπαράστασης μια μαθηματικής έννοιας προκύπτει λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι κάθε πεδίο αναπαράστασης χαρακτηρίζεται από διαφορετικές δυνατότητες και παριστάνει ορισμένες πτυχές μιας μαθηματικής έννοιας (Duvall, 2002). Ο Ainsworth (1999) υποστηρίζει ότι η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων ενθαρρύνει τη μαθησιακή διαδικασία με την ενίσχυση συμπληρωματικών διαδικασιών και πληροφοριών, τη διευκόλυνση της ερμηνείας και την οικοδόμηση της κατανόησης. Για την κατανόηση μέσω πολλαπλών αναπαραστάσεων απαιτείται από το μαθητή η δημιουργία συσχετίσεων μεταξύ αντίστοιχων στοιχείων και σχετικών δομών σε διαφορετικές αναπαραστάσεις (Seufert, 2003). Η τάση των μαθητών να αντιμετωπίζουν τις διάφορες αναπαραστάσεις αποσπασματικά (Ainsworth, 2006; Duvall, 2002) αποτελεί ένδειξη του φαινομένου της στεγανοποίησης. Το φαινόμενο αυτό υποδηλώνει τη γνωστική δυσκολία που προκύπτει από την ανάγκη ευέλικτης μετάβασης από ένα πεδίο αναπαράστασης μια μαθηματικής έννοιας σε ένα άλλο (Duvall, 2002).

Συγκεκριμένα, ο Duvall (2006) επισημαίνει ότι η μαθησιακή δραστηριότητα στα μαθηματικά αναλύεται σε δύο είδη μετασχηματισμών των σημειωτικών αναπαραστάσεων: τους χειρισμούς και τις μεταφράσεις. Η ικανότητα αναγνώρισης της έννοιας, όταν αυτή παρουσιάζεται με μια ποικιλία ποιοτικά διαφορετικών συστημάτων αναπαράστασης, την ικανότητα ευέλικτου χειρισμού της έννοιας μέσα στα συγκεκριμένα συστήματα αναπαράστασης και την ικανότητα μετάφρασης της έννοιας από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο αποτελούν απαραίτητες προϋποθέσεις για την κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας (Lesh et al., 1987b). Προχωρώντας ένα βήμα παραπέρα ο εντοπίζει τα εξής επίπεδα κατανόησης μια έννοιας τα οποία συνδέονται στενά με τις σημειωτικές αναπαραστάσεις: α) μη συναφές μείγμα διαφόρων αναπαραστάσεων της έννοιας, β) αναγνώριση διαφορετικών αναπαραστάσεων της έννοιας, γ) μετάφραση με διατήρηση του νοήματος από το ένα σύστημα αναπαράστασης σε άλλο, δ) συνδυασμός δύο συστημάτων αναπαράστασης, ε) συνδυασμός διαφόρων συστημάτων αναπαράστασης με στόχο την επίλυση προβλήματος.

Ο ρόλος των πολλαπλών αναπαραστάσεων στη διαδικασία επίλυσης προβλήματος επισημαίνεται ευρέως από διάφορους ερευνητές (Gagatsis & Shiakalli, 2004; Hitt, 1998; Lesh et al., 1987b). Ενδεικτικά, τα αποτελέσματα τα έρευνας του Niemi (1996) έδειξαν ότι το

επίπεδο αναπαραστατικής ευχέρειας μπορεί να προβλέψει την επίδοση των μαθητών σε έργα επίλυσης προβλήματος, αιτιολόγησης και επεξήγησης στα κλάσματα. Οι Gagatsis και Shiakalli (2004) επισημαίνουν επίσης ότι η ικανότητα μετάφρασης από μία αναπαράσταση σε άλλη ενθαρρύνει την επιτυχή επίλυση προβλημάτων στις συναρτήσεις.

Ειδικότερα, η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων στη μάθηση και διδασκαλία των ρητών αριθμών έχει γίνει αντικείμενο μελέτης διαφόρων ερευνητών, οι οποίοι προσεγγίζουν το θέμα από διάφορες οπτικές γωνίες. Ενδεικτικά, απασχόλησε τους ερευνητές ο ρόλος της ικανότητας μετάφρασης ανάμεσα στα διάφορα πεδία αναπαράστασης και η χρήση ποικιλίας αναπαραστάσεων στην επίλυση προβλημάτων με ρητούς αριθμούς (Brenner et al., 1999; Lesh et al., 1987a; Lesh et al., 1987b), τα πεδία αναπαράστασης που περιλαμβάνονται στα σχολικά εγχειρίδια διαφόρων χωρών όσον αφορά την ενότητα των κλασμάτων (Delaney et al., 2007; Watanabe, 2007), η εφαρμογή δραστηριοτήτων οι οποίες εμπλέκουν πολλαπλές αναπαραστάσεις στη διδασκαλία των ρητών αριθμών (Cramer et al., 2002; Taber, 2001), η αξιολόγηση της κατανόησης των ρητών αριθμών (Kyriakides & Charalambous, 2002; Niemi, 1996; Yang & Huang, 2004), η σύνδεση της έννοιας των αφηρημένων – συμβολικών αναπαραστάσεων των ρητών αριθμών και αναπαραστάσεων που πηγάζουν από άτυπες γνώσεις των μαθητών (Kamii & Clark, 1995; Mack, 2000) και οι διάφορες ερμηνείες – προσωπικότητες του κλάσματος και τα πεδία αναπαράστασης μέσα από τις οποίες εκφράζονται (Behr et al., 1983; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Hannula, 2003; Kieren, 1976; Lamon, 1999; Lamon, 2001).

Από την άλλη, το πρόβλημα της μετάβασης από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και το χάσμα που παρατηρείται όσον αφορά στο αναλυτικό πρόγραμμα, τις μεθόδους, τα υλικά και τα μέσα που χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία αποτελεί ένα θέμα στο οποίο επικεντρώνεται το ενδιαφέρον της εκπαιδευτικής κοινότητας τα τελευταία χρόνια. Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την προσαρμογή τους στο νέο σχολικό περιβάλλον είναι εμφανείς στα κίνητρα, τις πεποιθήσεις επάρκειας αλλά και την επίδοσή τους στο μάθημα των μαθηματικών σε παγκόσμιο επίπεδο (Anderman & Midgley, 1997; Φιλίππου, Πίττα-Πανταζή, & Χρίστου, 2003; Mullins & Irvin, 2000; Pajares & Graham, 1999).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Εισαγωγή

Το ερευνητικό σχέδιο της παρούσας εργασίας διακρίνεται σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση, διερευνήθηκαν οι γνωστικές δομές και η επίδοση των μαθητών όσον αφορά την έννοια της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων στις δύο τελευταίες τάξεις της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και στις δύο πρώτες τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, με άξονες την ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και την ικανότητα επίλυσης προβλήματος με διαφορετικά πεδία αναπαράστασης. Η δεύτερη φάση της έρευνας αποσκοπεί κυρίως στον εντοπισμό των αλληλεπιδράσεων μεταξύ της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων κατά τη μετάβαση από μια τάξη στην άλλη μέσα στην ίδια εκπαιδευτική βαθμίδα και μεταξύ πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Επιπλέον, στη δεύτερη ερευνητική φάση εξετάζεται ο ρυθμός μεταβολής των αναπαραστατικών ικανοτήτων των μαθητών κατά τη μεταβατική περίοδο.

Στη συνέχεια, παρουσιάζεται ο τρόπος μέτρησης των παραμέτρων που εξέτασε η έρευνα, το δείγμα, η διαδικασία που ακολουθείται και οι μέθοδοι ανάλυσης των δεδομένων που εφαρμόζονται.

Δείγμα

Το δείγμα της πρώτης φάσης της έρευνας περιλάμβανε 1701 μαθητές ηλικίας 10 μέχρι 14 ετών. Συγκεκριμένα, συμμετείχαν όλοι οι μαθητές 83 τμημάτων από 10 δημοτικά και 8 γυμνάσια διαφορετικών επαρχιών της Κύπρου. Πήραν μέρος 414 μαθητές από την Ε' δημοτικού, 415 μαθητές από τη Στ' δημοτικού, 406 μαθητές από την Α' γυμνασίου και 466 μαθητές από τη Β' γυμνασίου. Στη δεύτερη φάση της έρευνας, έγινε επιλογή ενός μέρους του δείγματος της πρώτης φάσης, το οποίο περιλάμβανε 388 μαθητές, οι οποίοι κατά την προηγούμενη σχολική χρονιά φοιτούσαν στην Ε' δημοτικού (108 μαθητές), Στ' δημοτικού (132 μαθητές) και Α' γυμνασίου (148 μαθητές). Για την επιλογή του δείγματος κατά την πρώτη φάση της έρευνας ακολουθήθηκε η μέθοδος της τυχαίας δειγματοληψίας, ενώ η επιλογή του δείγματος στη δεύτερη φάση έγινε με βάση της μέθοδο της σκόπιμης

δειγματοληψίας. Στόχος η διερεύνηση για διάστημα ενός χρόνου της ευελιξίας των συγκεκριμένων μαθητών όσον αφορά στη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων και της ικανότητας επίλυσης προβλήματος με διαφορετικές αναπαραστάσεις πρόσθεσης κλασμάτων. Επιπλέον, εξετάστηκε ο ρυθμός μεταβολής της επίδοσης των μαθητών στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων εντός της ίδιας εκπαιδευτικής βαθμίδας και μεταξύ πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Στη δεύτερη φάση της έρευνας επιλέγηκαν εύκολες – «βολικές» περιπτώσεις ως προς τη δυνατότητα συγκέντρωσης των δεδομένων (convenience sample). Συγκεκριμένα, λόγω αντικειμενικών δυσκολιών στη δεύτερη φάση της έρευνας έλαβαν μέρος σχολεία στα οποία ο εντοπισμός των μαθητών κατά τη μετάβαση στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση ήταν εφικτός. Η επιλογή των τάξεων στα οποία η μετάβαση επιτυγχάνεται εντός της ίδιας βαθμίδας έγινε με βάση την προθυμία των συγκεκριμένων σχολείων να συμμετέχουν για δεύτερη συνεχόμενη χρονιά στη συγκεκριμένη έρευνα αλλά και λαμβάνοντας υπόψη την αστική ή αγροτική περιοχή στην οποία βρίσκονταν. Επομένως, στο δείγμα της δεύτερης φάσης περιλαμβάνονται σε όλες τις ηλικιακές ομάδες μαθητές σχολείων που βρίσκονται στις ίδιες αστικές ή αγροτικές περιοχές.

Διαδικασία Συλλογής Δεδομένων

Πρώτη Ερευνητική Φάση

Αρχικά μελετήθηκαν τα εγχειρίδια των μαθηματικών της Ε' και Στ' δημοτικού, καθώς και τα αντίστοιχα εγχειρίδια της Α' και Β' γυμνασίου. Με τον τρόπο αυτό επιτεύχθηκε η συλλογή πληροφοριών σχετικά με τα πεδία αναπαράστασης, τις αναπαραστατικές λειτουργίες (αναγνώριση, χειρισμός, μετάφρασης) και τα είδη των διαγραμματικών αναπαραστάσεων που περιλαμβάνονται στις ασκήσεις που βρίσκονται στα σχολικά εγχειρίδια των δύο βαθμίδων, όσον αφορά την έννοια του κλάσματος.

Στην πρώτη φάση της έρευνας, η οποία έλαβε χώρα το τέλος της σχολικής χρονιάς 2006-2007, χορηγήθηκε στους μαθητές ένα δοκίμιο το οποίο εξέταζε: α) την ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων των μαθητών του δείγματος όσον αφορά στην πρόσθεση ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων και β) την ικανότητά τους για επίλυση προβλήματος με διαφορετικές αναπαραστάσεις. Για τους μαθητές του δείγματος που θα χρησιμοποιηθούν στη δεύτερη φάση της έρευνας, η χορήγηση αυτή αποτέλεσε την πρώτη μέτρηση της επίδοσης τους στις δύο διαστάσεις εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων

Δεύτερη Ερευνητική Φάση

Κατά τη δεύτερη φάση της έρευνας πραγματοποιήθηκαν δύο χορηγήσεις σε μαθητές που την προηγούμενη σχολική χρονιά φοιτούσαν σε τμήματα της Ε΄ και Στ΄ δημοτικού και της Α΄ γυμνασίου. Η πρώτη χορήγηση πραγματοποιήθηκε στην αρχή και η δεύτερη χορήγηση στο τέλος της σχολικής χρονιάς, ώστε να διερευνηθεί η μεταβολή στην επίδοση των μαθητών σε διάστημα ενός χρόνου. Συνεπώς, η πρώτη και η δεύτερη χορήγηση στη δεύτερη φάση της έρευνας, αντιστοιχεί με τη δεύτερη και τρίτη μέτρηση των δύο διαστάσεων εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων, σύμφωνα με την παρούσα έρευνα.

Μέσα Συλλογής Δεδομένων

Για τη διερεύνηση της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της ικανότητας επίλυσης προβλήματος με διαφορετικές αναπαραστάσεις στην πρόσθεση κλασμάτων αναπτύχθηκε ένα δοκίμιο το οποίο περιλάμβανε είκοσι τέσσερα έργα (βλ. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ). Η επιλογή των έργων έγινε προσαρμόζοντας τις θέσεις που διατυπώνονται από το Duval (2006), το Hitt (1998) και τους Lesh κ.α. (1987b) για την κατανόηση μαθηματικών εννοιών στην έννοια της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων. Τα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων διακρίνονται λαμβάνοντας υπόψη τρεις επιμέρους διαστάσεις: την αναπαραστατική μεταβολή που επιτελείται (αναγνώριση, χειρισμός, μετάφραση), το εμπλεκόμενο πεδίο αναπαράστασης (συμβολική και διαγραμματική αναπαράσταση) και την υπό-έννοια της πρόσθεσης κλασμάτων (πρόσθεση ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων). Από την άλλη, τα έργα επίλυσης προβλήματος με ποικιλία πολλαπλών αναπαραστάσεων διαφέρουν ως προς τις ακόλουθες δύο διαστάσεις: το πεδίο αναπαράστασης (λεκτική και διαγραμματική αναπαράσταση) και τη σχετική μαθηματική δομή.

Η ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων στην πρόσθεση ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων διερευνάται μέσα από είκοσι έργα του δοκιμίου. Συγκεκριμένα, στο δοκίμιο για εξέταση της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων περιλαμβάνονται τα εξής έργα:

1. Δύο έργα χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και δύο έργα χειρισμού της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων, τα οποία παρουσιάζονται και επιλύονται συμβολικά, με άγνωστη ποσότητα το άθροισμα. Στη μια πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων το άθροισμα που προκύπτει είναι μικρότερο από τη μονάδα, ενώ στην άλλη πρόσθεση ομώνυμων

κλασμάτων το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι ίσο με τη μονάδα. Όσον αφορά την πρόσθεση ετερόνυμων κλασμάτων, η μια πρόσθεση επιτρέπει στο μαθητή εφαρμόζοντας την ισοδυναμία κλασμάτων να τη χειριστεί ως πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων. Στις δύο προσθέσεις ετερόνυμων κλασμάτων το άθροισμα, το οποίο αναμένεται να προκύψει είναι μικρότερο από τη μονάδα.

2. Τρία έργα αναγνώρισης της έννοιας της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων σε τρεις διαγραμματικές αναπαραστάσεις: την κυκλική και ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού και το γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής. Καθένα από τα έργα αυτά αποτελείται από τρία υπό-μέρη, τα οποία βαθμολογούνται ξεχωριστά. Το πρώτο έργο αναγνώρισης αφορά την πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων. Οι μαθητές καλούνται να επισημάνουν σε ποιο διάγραμμα ή διαγράμματα το σκιασμένο μέρος αντιστοιχεί με μια συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων. Στο έργο αυτό η σωστή απάντηση είναι αυτή που παρουσιάζεται στην αριθμητική γραμμή. Η σκίαση στα άλλα δύο διαγράμματα λειτουργεί ως εκτροπέας (distractor), υποδεικνύοντας τη λάθος αντίληψη των μαθητών όσον αφορά τη σχέση μέρος - όλο, αλλά και τη σχέση μεταξύ των μερών του όλου. Η αντίληψη των μαθητών όσον αφορά στη σχέση μέρος - όλο επισημαίνεται χρησιμοποιώντας διπλάσιο αριθμό υποδιαιρέσεων από τον παρονομαστή, ενώ η αντίληψη όσον αφορά στη σχέση των μερών του όλου εξετάζεται με τη χρήση άνισων επιφανειών εμβαδού. Το δεύτερο έργο αναγνώρισης αφορά την πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων λαμβάνοντας υπόψη σε όλες τις περιπτώσεις και την έννοια της ισοδυναμίας. Έτσι, χρησιμοποιούνται πολλαπλάσια ή υποπολλαπλάσια του παρονομαστή στις υποδιαιρέσεις των διαγραμμάτων του έργου. Στο έργο αυτό η σωστή απάντηση είναι αυτή που παρουσιάζεται στην αριθμητική γραμμή. Η σκίαση στα άλλα δύο διαγράμματα λειτουργεί ως εκτροπέας, υποδεικνύοντας λάθος αντίληψη των μαθητών για τη σχέση μέρος – όλο, λόγω αντιμετώπισης του αριθμητή και του παρονομαστή σαν δύο διαφορετικούς αριθμούς. Τέλος, το τρίτο έργο αναγνώρισης αφορά την πρόσθεση ετερόνυμων κλασμάτων λαμβάνοντας επίσης υπόψη την έννοια της ισοδυναμίας. Σε αυτό το έργο η σωστή απάντηση παρουσιάζεται σε κυκλική και ορθογώνια επιφάνεια ενώ η σκίαση στην αριθμητική γραμμή δρα σαν εκτροπέας επισημαίνοντας λάθος αντίληψη στη σχέση μέρος-όλο.
3. Τέσσερα έργα μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση, δύο από τα οποία αφορούν την πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων ενώ τα άλλα δύο την πρόσθεση

ετερώνυμων κλασμάτων. Ως αρχική αναπαράσταση χρησιμοποιείται στην πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων η αριθμητική γραμμή και η κυκλική επιφάνεια, ενώ στην πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων η αριθμητική γραμμή και η ορθογώνια επιφάνεια.

4. Τέσσερα έργα μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση, δύο από τα οποία αφορούν πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων και άλλα δύο πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων. Στην πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων χρησιμοποιείται ως τελική αναπαράσταση η κυκλική επιφάνεια και η αριθμητική γραμμή, με αριθμό υποδιαϊρέσεων ίσο με το παρονομαστή. Στην πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων χρησιμοποιείται ως τελική αναπαράσταση η αριθμητική γραμμή και η ορθογώνια επιφάνεια με αριθμό υποδιαϊρέσεων το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών των δύο προσθετέων.

Η άγνωστη ποσότητα βρίσκεται σε όλα τα έργα μετάφρασης στη θέση του αθροίσματος, το οποίο είναι πάντα μικρότερο ή ίσο της μονάδας. Επιπλέον και τα οκτώ έργα μετάφρασης περιλαμβάνουν δύο προσθετέους. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι στο δοκίμιο δεν περιλαμβάνονται έργα διαγραμματικού χειρισμού επειδή η ικανότητα των μαθητών να χειρίζονται διαγραμματικά έργα πρόσθεσης ομώνυμων και ετερώνυμων κλασμάτων εξετάζεται μέσα από τα έργα μετάφρασης στα οποία χρησιμοποιείται ως τελική αναπαράσταση το διάγραμμα.

Το δοκίμιο περιλαμβάνει επίσης τέσσερα προβλήματα τα οποία παρουσιάζονται με διαφορετικά πεδία αναπαράσταση ως εξής:

1. Στο πρώτο πρόβλημα τα δεδομένα παρουσιάζονται διαγραμματικά σε ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα η γνωστή ποσότητα είναι το άθροισμα και άγνωστη ποσότητα αποτελεί το σύνολο τριών προσθετέων.
2. Στο δεύτερο πρόβλημα τα δεδομένα παρουσιάζονται λεκτικά αλλά χρησιμοποιείται βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση για διευκόλυνση της ερμηνείας, σύμφωνα με την ταξινόμια του Ainsworth (1999) για τις λειτουργίες των πολλαπλών αναπαραστάσεων στην επίλυση προβλήματος. Η διαγραμματική αναπαράσταση είναι η ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού. Οι δύο αναπαραστάσεις παρουσιάζουν το σύνολο των δεδομένων του προβλήματος κατά τρόπο που οι έμφυτες ιδιότητες καθεμίας να διευκολύνουν την ερμηνεία της άλλης, ανεξάρτητα από ζητήματα οικειότητας ή εμπειρίας. Η γνωστή ποσότητα βρίσκεται, όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα, στη θέση του αθροίσματος και το ζητούμενο είναι το σύνολο των τεσσάρων προσθετέων.

3. Στο τρίτο πρόβλημα τα δεδομένα παρουσιάζονται λεκτικά (Evarmib, 2007). Η έννοια της πρόσθεσης εμπερικλείεται έμμεσα στο πρόβλημα, ενώ η άγνωστη ποσότητα απαιτεί γνώση της ερμηνεία του κλάσματος ως λόγου, σύμφωνα με τους Behr κ.α. (1983).
4. Στο τέταρτο πρόβλημα τα δεδομένα παρουσιάζονται λεκτικά. Σε αυτό οι μαθητές καλούνται να αιτιολογήσουν αν το άθροισμα δύο προσθετέων με αριθμητή μικρότερο από τον παρονομαστή μπορεί να είναι μεγαλύτερο από τη μονάδα.

Η δομή των δύο πρώτων προβλημάτων είναι κοινή για σκοπούς σύγκρισης και το άθροισμα των προσθετέων που δίνεται στους μαθητές είναι μικρότερο από τη μονάδα. Στο τρίτο πρόβλημα η έμμεση αναφορά στην πρόσθεση κλασμάτων περιλαμβάνει ένα προσθετέο και κατά συνέπεια το άθροισμα μεγαλύτερο από τη μονάδα. Από την άλλη, το τέταρτο πρόβλημα σχετίζεται άμεσα με την πρόσθεση ομώνυμων ή/και ετερόνυμων κλασμάτων μικρότερων και μεγαλύτερων από τη μονάδα. Στα προβλήματα που περιλαμβάνονται στην έρευνα η μαθηματική δομή διαφέρει από αυτήν των έργων τα οποία εξετάζουν την ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων ώστε ο μαθητής να εμπλακεί συνολικά με τα διάφορα στάδια της σύνθετης διαδικασίας επίλυσης προβλήματος. Παράλληλα, με τον τρόπο αυτό διακρίνεται η ικανότητα των μαθητών για μεταφορά γνώσης σε νέες καταστάσεις με την εμπλοκή τους στην επίλυση τόσο του σύνθετου λεκτικού προβλήματος όσο και του λεκτικού προβλήματος αιτιολόγησης της πρόσθεσης κλασμάτων με άθροισμα μεγαλύτερο της μονάδας. Από την άλλη, η συμπερίληψη διαγραμμάτων στα έργα επίλυσης προβλήματος έλαβε υπόψη το γεγονός ότι η οπτικοποίηση αποτελεί βασικό συστατικό της επίλυσης προβλήματος (Arcavi, 2003).

Αξίζει να σημειωθεί ότι χρησιμοποιήθηκαν τέσσερις διαφορετικές εκδοχές του δοκιμίου, στις οποίες διαφέρει η σειρά εμφάνισης των έργων. Με τον τρόπο αυτό περιορίζεται η επίδραση της σειράς εμφάνισης των έργων στην επίδοση των μαθητών σε αυτά.

Κωδικοποίηση Μεταβλητών της Έρευνας

Τα αποτελέσματα που αφορούν στις απαντήσεις που έδωσαν οι μαθητές στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων κωδικοποιούνται αρχικά με δύο κεφαλαία γράμματα, τα οποία αναφέρονται στην λειτουργία που επιτελείται από τις αναπαραστάσεις: «RE», «TR» και «CO» για τις λειτουργίες της αναγνώρισης (recognition), χειρισμού (treatment) και μετάφρασης (conversion) της πρόσθεσης κλασμάτων, αντίστοιχα. Ακολούθως σημειώνεται με κεφαλαίο γράμμα το πεδίο αναπαράστασης που

χρησιμοποιείται: το «S» αντιστοιχεί στη συμβολική αναπαράσταση (symbolic), το «C» στην κυκλική επιφάνεια εμβαδού (circular), το «R» στην ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού (rectangular) και το «L» στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής (number line). Αξίζει να σημειωθεί ότι στα έργα μετάφρασης σημειώνονται δύο κεφαλαία γράμματα όσον αφορά το πεδίο αναπαράστασης. Το πρώτο αναφέρεται στο αρχικό πεδίο αναπαράστασης (πηγή), ενώ το δεύτερο στο τελικό πεδίο αναπαράστασης (στόχος). Στη συνέχεια, με μικρό γράμμα συμβολίζεται η αρίθμηση της άσκησης στα έργα αναγνώρισης και χειρισμού, ενώ στα έργα μετάφρασης με το μικρό γράμμα που ακολουθεί σημειώνεται η σχετική υπό-έννοια της πρόσθεσης κλασμάτων: «s» και «d» για την πρόσθεση ομώνυμων (similar) και ετερόνυμων (dissimilar) κλασμάτων, αντίστοιχα.

Οι απαντήσεις των μαθητών στο λεκτικό πρόβλημα αιτιολόγησης κωδικοποιούνται με δύο κεφαλαία γράμματα (JV). Το πρώτο αναφέρεται στη γνωστική διαδικασία της αιτιολόγησης (justification) που απαιτείται για την επίλυσή του και το δεύτερο στο πεδίο αναπαράστασης που εμπλέκεται στο συγκεκριμένο έργο (verbal). Τα αποτελέσματα που αφορούν στις απαντήσεις που έδωσαν οι μαθητές στα έργα επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων κωδικοποιούνται αρχικά με ένα κεφαλαίο γράμμα: «P» το οποίο αναφέρεται στον τύπο έργων επίλυσης προβλήματος (problem solving) και στη συνέχεια σημειώνεται το πεδίο αναπαράστασης που εμπλέκεται: «S» και «D» για το συμβολικό (symbolic) και διαγραμματικό (diagrammatic) πεδίο αναπαράστασης αντίστοιχα.

Βαθμολόγηση Έργων

Η βαθμολόγηση των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων διακρίνεται σε βαθμολόγηση της ορθής ή λανθασμένης απάντησης των μαθητών σε αυτά και στους πιθανούς τύπους λάθους που εντοπίζονται στην απάντηση. Συγκεκριμένα, στα έργα χειρισμού η ορθή απάντηση βαθμολογείται με 1 ενώ η λάθος απάντηση βαθμολογείται με 0. Τα λάθη στο αποτέλεσμα βαθμολογούνται χρησιμοποιώντας κατηγορική κλίμακα βαθμολόγησης ως εξής: με 1 το λάθος στη σχέση μέρος-όλο, με 2 το λάθος στη μετατροπή σε ομώνυμα κλάσματα, με 9 οποιοδήποτε άλλο λάθος.

Στα έργα μετάφρασης από διάγραμμα σε συμβολική αναπαράσταση βαθμολογείται με 1 η σωστή συμβολική αναπαράσταση και 0 η λανθασμένη συμβολική αναπαράσταση. Για ταυτοποίηση της λάθους συμβολικής αναπαράστασης χρησιμοποιείται κατηγορική κλίμακα ως εξής: με 1 η συμβολική αναπαράσταση που υποδηλώνει ότι δεν αντιλαμβάνονται τη σχέση

μέρος-όλο, με 3 η συμβολική αναπαράσταση που υποδηλώνει ότι μετρούν γραμμές στην αριθμητική γραμμή και όχι διαστήματα, με 5 η συμβολική αναπαράσταση που υποδηλώνει ότι δεν αντιλαμβάνονται τη σχέση μεταξύ των μερών του όλου, με 6 η συμβολική αναπαράσταση ακεραίων ή δεκαδικών, με 8 η συμβολική αναπαράσταση που υποδηλώνει συνδυασμό λαθών από τα προαναφερθέντα, με 9 οποιαδήποτε άλλη λάθος συμβολική αναπαράσταση. Σε περίπτωση που ο μαθητής γράφει το αποτέλεσμα, παρόλο που δε ζητείται, βαθμολογείται με 1 η ορθή απάντηση και με 0 η λανθασμένη απάντηση.

Στα έργα μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση η ορθή ένδειξη βαθμολογείται με 1, ενώ η λανθασμένη ένδειξη με 0. Τα λάθη ένδειξης βαθμολογούνται με τη χρήση κατηγορικής κλίμακας ως εξής: με 1 η ένδειξη που υποδηλώνει ότι δεν αντιλαμβάνονται τη σχέση μέρος-όλο, με 3 η ένδειξη που υποδηλώνει ότι στον πρώτο ή δεύτερο προσθετέο μετρούν γραμμές και όχι διαστήματα, με 4 η ένδειξη που υποδηλώνει ότι οι μαθητές δε λαμβάνουν υπόψη τη διαδοχικότητα, με 7 η ένδειξη ορθού αποτελέσματος, με 8 η ένδειξη που καταδεικνύει συνδυασμό λαθών από τα προαναφερθέντα, με 9 οποιαδήποτε άλλη λάθος ένδειξη.

Στα έργα αναγνώρισης βαθμολογείται με 1 η επιλογή της σωστής αναπαράστασης αλλά και η μη επιλογή λανθασμένης αναπαράστασης, ενώ με 0 η λάθος επιλογή ή η μη επιλογή σωστής αναπαράστασης της πρόσθεσης ομώνυμων ή ετερόνυμων κλασμάτων.

Η βαθμολόγηση των έργων επίλυσης προβλήματος διακρίνεται σε βαθμολόγηση της ορθής ή λανθασμένης απάντησης, των στρατηγικών και των πεδίων αναπαράστασης που χρησιμοποιούνται και στους τύπους λανθασμένων στρατηγικών επίλυσης. Συγκεκριμένα, στο διαγραμματικό πρόβλημα και στο λεκτικό πρόβλημα με βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση βαθμολογείται με 1 η σωστή απάντηση και με 0 η λάθος απάντηση. Με 1 βαθμολογείται η επιλογή μιας στρατηγικής ενώ με 0 η μη επιλογή της συγκεκριμένης στρατηγικής. Οι στρατηγικές που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στο συγκεκριμένο πρόβλημα είναι οι εξής: χρήση κλασμάτων και εύρεση της απάντησης με πρόσθεση (1^η στρατηγική), χρήση κλασμάτων και εύρεση της απάντησης με αφαίρεση (2^η στρατηγική), επιμερισμός με πρόσθεση (3^η στρατηγική), επιμερισμός με αφαίρεση/συμπλήρωμα (4^η στρατηγική), υπολογισμός εμβαδού και εύρεση της απάντησης με πρόσθεση (5^η στρατηγική), υπολογισμός εμβαδού και εύρεση της απάντησης με αφαίρεση/ συμπλήρωμα (6^η στρατηγική), μετατροπή σε ομώνυμα κλάσματα χωρίς να σημειώνεται η συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων ή χρήση μόνο των αριθμητών (7^η στρατηγική), μετατροπή σε ομώνυμα κλάσματα

και πρόσθεση όλων των μερών (8^η στρατηγική), αναδιοργάνωση του σχήματος (9^η στρατηγική), άλλη στρατηγική (10^η στρατηγική). Επιπλέον, βαθμολογείται με 1 η επιλογή χρήσης μιας συγκεκριμένης αναπαράστασης (συμβολική, διαγραμματική, λεκτική) στη λύση των προβλημάτων ενώ με 0 η μη επιλογή της. Τέλος, οι μαθητές βαθμολογούνται με 1 αν έκαναν ένα συγκεκριμένο λάθος κατά την εφαρμογή μιας στρατηγικής λύσης. Ο πρώτος τύπος λάθους αφορά στη μη κατανόηση του τι αντιπροσωπεύει ο τελεστής που αντιστοιχεί με το άθροισμα (π.χ. τι σημαίνει $\frac{3}{4}$ του κήπου), ο δεύτερος τύπος λάθους αντιστοιχεί σε μικρό υπολογιστικό λάθος στην πρόσθεση κλασμάτων ή στη μετατροπή σε ομώνυμα κλάσματα, ο τρίτος τύπος λάθους αντιστοιχεί στη μη ολοκληρωμένη ή ελλιπή στρατηγική (π.χ. μετατροπή σε ομώνυμα και προσθέσεις χωρίς επιτυχή έκβαση, πρόσθεση όλων των μερών), ο τέταρτος τύπος λάθους αναφέρεται σε διαφορετικό σωστό συνδυασμό με τον οποίο προκύπτει το ίδιο άθροισμα αλλά με διαφορετικό αριθμό προσθετέων και ο πέμπτος τύπος λάθους αντιστοιχεί σε οποιοδήποτε άλλο λάθος ή σε άσχετο συσχετισμό δεδομένων.

Στο λεκτικό πρόβλημα ο μαθητής βαθμολογείται με 1 αν δώσει τη σωστή απάντηση και με 0 αν δώσει λανθασμένη απάντηση. Η βαθμολόγηση για το είδος της στρατηγικής, της αναπαράστασης λύσης και του λάθους στη στρατηγική γίνεται με ανάλογο τρόπο όπως το διαγραμματικό πρόβλημα ή το λεκτικό πρόβλημα με βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση. Οι στρατηγικές που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στο συγκεκριμένο πρόβλημα είναι οι εξής: μετατροπή σε λεπτά/ ώρες για εύρεση της συνολικής διάρκειας της παράστασης και μετά προσπάθεια εύρεσης του μέρους (1^η στρατηγική), μετατροπή ετερόνυμων κλασμάτων σε ομώνυμα, συμβολική αναπαράσταση για εύρεση της συνολικής διάρκειας της παράστασης και στη συνέχεια προσπάθεια εύρεσης του μέρους (2^η στρατηγική), μετατροπή και εύρεση της συνολικής διάρκειας της παράστασης σε ώρες/ λεπτά/ κλάσμα (3^η στρατηγική), εύρεση μόνο της διάρκειας του μουσικοχορευτικού προγράμματος (ή και των υπόλοιπων προγραμμάτων) σε ώρες ή λεπτά ή κλάσμα (4^η στρατηγική), κατασκευή σχήματος όπως ρολόγια ή κυκλική γραφική παράσταση (5^η στρατηγική), οποιαδήποτε άλλη στρατηγική (6^η στρατηγική). Ο πρώτος τύπος λάθους στο λεκτικό πρόβλημα σχετίζεται με λάθος στον τελεστή, ο δεύτερος τύπος λάθους με λάθος υπολογισμού στη μετατροπή ή πρόσθεση σε ομώνυμα κλάσματα ή στην πρόσθεση λεπτών ή ωρών, ο τρίτος τύπος λάθους αναφέρεται σε εφαρμογή μη ολοκληρωμένης ή ελλιπούς στρατηγικής (π.χ. εύρεση μόνο της συνολικής διάρκειας της παράστασης) και ο πέμπτος τύπος λάθους σχετίζεται με οποιοδήποτε άλλο λάθος ή με άσχετο συσχετισμό δεδομένων.

Το λεκτικό πρόβλημα αιτιολόγησης βαθμολογείται χρησιμοποιώντας κατηγορική κλίμακα ως εξής: με 1 η ορθή ολοκληρωμένη λεκτική αιτιολόγηση με ή χωρίς παραδείγματα, η οποία δεν αναφέρεται στον αλγόριθμο της πρόσθεσης κλασμάτων, με 2 η ορθή λεκτική αιτιολόγηση, η οποία αναφέρεται στον αλγόριθμο της πρόσθεσης κλασμάτων με ή χωρίς παράδειγμα, με 3 η ορθή μη ολοκληρωμένη αιτιολόγηση, με 4 το ορθό μεμονωμένο παράδειγμα συμβολική αναπαράστασης πρόσθεσης κλασμάτων, με 5 η ορθή απάντηση χωρίς αιτιολόγηση ή με επανάληψη εκφώνησης, με 6 η ορθή απάντηση με λάθος ή μη σχετική αιτιολόγηση ή ορθή απάντηση χωρίς αντιστοιχία εκφώνησης και αιτιολόγησης/ παραδείγματος, με 7 η ορθή απάντηση με αιτιολόγηση, η οποία φανερώνει λάθος αντιλήψεις για την πρόσθεση κλασμάτων, με 8 η λάθος απάντηση με λάθος ή μη σχετική αιτιολόγηση, με 9 η λάθος απάντηση με αιτιολόγηση που φανερώνει λάθος αντιλήψεις για την πρόσθεση κλασμάτων, με 10 η λάθος απάντηση χωρίς αιτιολόγηση/ παράδειγμα ή με επανάληψη εκφώνησης. Για την εφαρμογή ορισμένων στατιστικών αναλύσεων έγινε προσαρμογή της κατηγορικής κλίμακας που χρησιμοποιήθηκε στο συγκεκριμένο πρόβλημα σε ισοδιαστημική κλίμακα 0 έως 1.

Μέθοδοι Ανάλυσης των Δεδομένων

Όσον αφορά τα δεδομένα της πρώτης φάσης της έρευνας, αρχικά πραγματοποιήθηκε περιγραφική ανάλυση των δεδομένων με το στατιστικό πακέτο SPSS. Η περιγραφική ανάλυση έδωσε σε αρχικό στάδιο σημαντικές πληροφορίες όσον αφορά στην ορθότητα των απαντήσεων στα διάφορα έργα, τα λάθη που παρουσιάζονται κατά την επίλυσή τους, τις διάφορες αναπαραστάσεις και τις στρατηγικές που χρησιμοποιούνται στην επίλυση προβλήματος από τους μαθητές των τεσσάρων ηλικιακών ομάδων.

Επιπλέον, εφαρμόστηκε η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση για ολόκληρο το δείγμα, ενώ για τους μαθητές κάθε βαθμίδας και ηλικιακής ομάδας εφαρμόστηκε μια εξειδικευμένη μορφή της, η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση πολλαπλών ομάδων (multiple-group analysis). Η εφαρμογή των συγκεκριμένων μεθόδων ανάλυσης αποβλέπει:

1. Στη διερεύνηση της θεωρητικής υπόθεσης ότι η ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και η ικανότητα επίλυσης προβλήματος με διαφορετικές αναπαραστάσεις επηρεάζουν την εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων.
2. Οι δομικές σχέσεις μεταξύ της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της ικανότητας επίλυσης προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων όσον αφορά στην

εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων παραμένουν αναλλοίωτες στις δύο βαθμίδες.

3. Οι δομικές σχέσεις μεταξύ της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της ικανότητας επίλυσης προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων όσον αφορά στην εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων παραμένουν αναλλοίωτες στις τέσσερις ηλικιακές ομάδες που χρησιμοποιούνται στην παρούσα έρευνα.

Για την εξέταση των προτεινόμενων μοντέλων χρησιμοποιήθηκε ένα διαδομένο πρόγραμμα δομικών και δυναμικών μοντέλων εξίσωσης, το EQS (Bentler, 1995). Για να διακριβωθεί ο βαθμός στον οποίο τα μοντέλα συμφωνούν με τα δεδομένα, εξετάστηκαν τρεις δείκτες: η αναλογία χ^2 προς τους βαθμούς ελευθερίας (χ^2/df), το Comparative Fit Index (CFI) και το Root Mean Square Error of Approximation (RMSEA).

Με το στατιστικό πακέτο SPSS πραγματοποιήθηκε επίσης η πολυμεταβλητή ανάλυση διασποράς (multivariate analysis of variance) ώστε να διαφανούν οι διαφορές των τεσσάρων ηλικιακών ομάδων στις υπό εξέταση διαστάσεις κατανόησης της έννοιας της πρόσθεσης κλασμάτων: α) την ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και β) την ικανότητα επίλυσης προβλήματος με διαφορετικές αναπαραστάσεις. Με το ίδιο στατιστικό πακέτο πραγματοποιήθηκε επίσης η ιεραρχική ανάλυση (cluster analysis) για εντοπισμό ομάδων μαθητών που αντιμετώπισαν συστηματικά με παρόμοιο τρόπο τα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων. Σε συνδυασμό με την πολυμεταβλητή ανάλυση διασποράς, με την οποία εξετάστηκαν οι διαφορές των συγκεκριμένων ομάδων μαθητών στις υπό εξέταση διαστάσεις κατανόησης της έννοιας της πρόσθεσης κλασμάτων, έγινε δυνατή η διαμόρφωση ιεραρχικών επιπέδων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων.

Στα δεδομένα που προέκυψαν από τη δεύτερη φάση της έρευνας πραγματοποιήθηκε η περιγραφική ανάλυση και η πολυμεταβλητή ανάλυση διασποράς επαναλαμβανόμενων μετρήσεων (repeated measures multivariate analysis of variance) με το στατιστικό πακέτο SPSS. Σκοπός των συγκεκριμένων αναλύσεων ήταν η σύγκριση των επιδόσεων και ο εντοπισμός των διαφορών στην επίδοση των μαθητών όσον αφορά την ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και την ικανότητα επίλυσης προβλήματος με διαφορετικά πεδία αναπαραστάσεων στην πρόσθεση κλασμάτων, οι οποίες προκύπτουν κατά τη μετάβαση μεταξύ βαθμίδων και εντός βαθμίδας.

Πραγματοποιήθηκαν επίσης αναλύσεις με τη χρήση του προγράμματος EQS για να διαφανούν οι δυναμικές σχέσεις αλληλεπίδρασης μεταξύ της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της ικανότητας επίλυσης προβλήματος με διαφορετικές αναπαραστάσεις των μαθητών στην πρόσθεση κλασμάτων κατά τη μετάβαση από την Ε΄ στη Στ΄ δημοτικού, από τη Στ΄ δημοτικού στην Α΄ γυμνασίου και από την Α΄ στη Β΄ γυμνασίου. Για τη διερεύνηση του ρυθμού μεταβολής κάθε διάστασης που σχετίζεται με την ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων των μαθητών κάθε ηλικιακής ομάδας έγινε έλεγχος μιας σειράς αναπτυξιακών μοντέλων (latent growth curve model) με το πρόγραμμα EQS. Το βασικό μοντέλο περιλάμβανε δύο παράγοντες για κάθε διάσταση. Ο πρώτος παράγοντας αναπαριστούσε την αρχική κατάσταση της μεταβλητής (intercept) και ο δεύτερος παράγοντας το ρυθμό μεταβολής κάθε μεταβλητής (slope).

Για να προσδιοριστεί ο σχετικός βαθμός δυσκολίας των έργων του δοκιμίου χρησιμοποιήθηκε στα αποτελέσματα και των δύο φάσεων το μοντέλο στατιστικής μέτρησης Rasch (Andrich, 1988) με τη χρήση του λογιστικού προγράμματος QUEST (Adams & Khoo, 1996). Επιπλέον, εφαρμόστηκε στα δεδομένα τόσο της πρώτης όσο και της δεύτερης ερευνητικής φάσης η ανάλυση ομοιότητας (Lerman, 1981) και η στατιστική συνεπαγωγική ανάλυση του R. Gras χρησιμοποιώντας το λογισμικό πρόγραμμα CHIC (Gras, Peter, Briand, & Philippe, 1997). Με την εφαρμογή αυτών των αναλύσεων γίνονται εμφανείς οι σχέσεις ομοιότητας και συνεπαγωγής μεταξύ των μεταβλητών (απαντήσεων των μαθητών στα έργα) μέσα από τα διαγράμματα ομοιότητας και συνεπαγωγής που δημιουργούνται.

Στο διάγραμμα ομοιότητας τα έργα κατανέμονται σε ομάδες ανάλογα με την ομοιογένεια με την οποία έχουν αντιμετωπιστεί από τους μαθητές. Με άλλα λόγια, στο διάγραμμα ομοιότητας σχηματίζονται ομάδες έργων, τα οποία οι μαθητές αντιμετωπίζουν με όμοιο τρόπο. Στα διαγράμματα συνεπαγωγής παρουσιάζονται συνεπαγωγικές σχέσεις οι οποίες υποδεικνύουν κατά πόσο και σε ποιο βαθμό η επιτυχία σε ένα έργο ή μια ομάδα έργων, αντίστοιχα, συνεπάγεται την επιτυχία σε ένα άλλο σχετικό έργο ή σε μια ομάδα έργων (Elia & Gagatsis, 2008). Στην ανάλυση ομοιότητας αξιοποιήθηκε επίσης η έννοια των συμπληρωματικών μεταβλητών. Ως συμπληρωματική μεταβλητή χρησιμοποιήθηκε η ηλικία των μαθητών. Εντοπίστηκε έτσι η ηλικία που συμβάλλει περισσότερο στο σχηματισμό ομοιογενών ομάδων απαντήσεων. Η συνεπαγωγική ανάλυση επέτρεψε τη σύγκριση των σχέσεων όσον αφορά την επίδοση των μαθητών στις δύο διαστάσεις κατανόησης της

πρόσθεσης κλασμάτων. Λόγω του αριθμού των μαθητών στην πρώτη ερευνητική φάση η ανάλυση ομοιότητας και η συνεπαγωγική ανάλυση έγινε με τη χρήση εντροπίας.

Ανακεφαλαίωση

Το ερευνητικό σχέδιο που ακολουθήθηκε στην παρούσα έρευνα διακρίνεται σε δύο φάσεις. Για τη συλλογή των δεδομένων στις δύο ερευνητικές φάσεις αναπτύχθηκε ένα δοκίμιο, το οποίο περιλάμβανε έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων με σκοπό τη μέτρηση της εννοιολογικής κατανόησης της συγκεκριμένης έννοιας. Η επιλογή των έργων έγινε προσαρμόζοντας τις θέσεις που διατυπώνονται από το Duval (2006), το Hitt (1998) και τους Lesh κ.α. (1987b) για την κατανόηση μαθηματικών εννοιών στην πρόσθεση ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων. Τα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων διακρίνονται λαμβάνοντας υπόψη τρεις επιμέρους διαστάσεις: την αναπαραστατική λειτουργία που επιτελείται (αναγνώριση, χειρισμός, μετάφραση), το εμπλεκόμενο πεδίο αναπαράστασης (συμβολική και διαγραμματική αναπαράσταση) και την υπό-έννοια της πρόσθεσης κλασμάτων (πρόσθεση ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων). Από την άλλη, τα έργα επίλυσης προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων διαφέρουν ως προς τις ακόλουθες δύο διαστάσεις: το πεδίο αναπαράστασης (λεκτική και διαγραμματική αναπαράσταση) και τις απαιτούμενες γνωστικές διαδικασίες.

Το δοκίμιο χορηγήθηκε κατά την πρώτη φάση της έρευνας σε 1701 μαθητές Ε' δημοτικού, Στ' δημοτικού, Α' γυμνασίου και Β' γυμνασίου (11- 14 χρόνων). Στη δεύτερη φάση της έρευνας, έγινε επιλογή ενός μέρους του δείγματος της πρώτης φάσης, το οποίο περιλάμβανε 388 μαθητές, οι οποίοι κατά την προηγούμενη σχολική χρονιά φοιτούσαν στην Ε' δημοτικού, Στ' δημοτικού και Α' γυμνασίου. Η πρώτη φάση της έρευνας περιλάμβανε μια μόνο χορήγηση στο τέλος της σχολικής χρονιάς, ενώ κατά τη δεύτερη φάση της έρευνας έλαβαν χώρα δύο χορηγήσεις, στην αρχή και στο τέλος της σχολικής χρονιάς.

Η μέτρηση και η ανάλυση των απαντήσεων που δόθηκαν από τους μαθητές που συμμετέχουν στις δύο ερευνητικές φάσεις ως προς τις προαναφερθείσες διαστάσεις επιτρέπει τον εντοπισμό της δομής των γνωστικών διαδικασιών που ενεργοποιούνται κατά την επίλυση έργων εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων, τις δυναμικές σχέσεις αλληλεπίδρασή τους κατά τη μεταβατική περίοδο και τον καθορισμό ιεραρχικών επίπεδων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων. Με τη σύγκριση της επίδοσης των μαθητών

ηλικίας 11 μέχρι 14 χρόνων κατά τη διαδικασία μετάβασης εντός και μεταξύ πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στα έργα πρόσθεσης κλασμάτων εντοπίζεται η επίδραση της ηλικίας στην ορθότητα των απαντήσεων που δίνονται και ο ρυθμός ανάπτυξης των αναπαραστατικών ικανοτήτων τους σε διάστημα ενός χρόνου.

Για την ανάλυση των δεδομένων που συγκεντρώθηκαν χρησιμοποιήθηκε το στατιστικό πακέτο SPSS (στοιχεία περιγραφικής στατιστικής, πολυμεταβλητή ανάλυση διασποράς, ιεραρχική ανάλυση), το πρόγραμμα EQS (δομικά μοντέλα, δυναμικά μοντέλα, αναπτυξιακά μοντέλα), το μοντέλο στατιστικής μέτρησης Rasch (ιεραρχική διαβάθμιση έργων με βάση το βαθμό δυσκολίας τους) και το πρόγραμμα CHIC (αναλύσεις ομοιότητας και αναλύσεις συνεπαγωγής).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τις στατιστικές αναλύσεις που διενεργήθηκαν για να απαντηθούν τα ερωτήματα που τέθηκαν στην παρούσα εργασία. Το πρώτο υποκεφάλαιο περιλαμβάνει τα αποτελέσματα της πρώτης ερευνητικής φάσης. Αρχικά εντοπίζονται τα πεδία αναπαράστασης που χρησιμοποιούνται στις ασκήσεις κλασμάτων, οι οποίες περιλαμβάνονται στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών στην Ε΄ δημοτικού, Στ΄ δημοτικού, Α΄ γυμνασίου και Β΄ γυμνασίου. Επιπλέον, επισημαίνονται οι λειτουργίες των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούνται στα συγκεκριμένα εγχειρίδια με βάση τον τρόπο που αναφέρονται στην κατανόηση εννοιών ο Duval (2006), ο Hitt (1998) και ο Lesh κ.α. (1987b). Στη συνέχεια, παρουσιάζεται το δομικό μοντέλο που υποδεικνύει το σημαντικό ρόλο της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της επίλυσης προβλημάτων με διαφορετικά πεδία αναπαράστασης στην εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων στις ομάδες μαθητών πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που εξετάζονται στην παρούσα έρευνα. Κύρια συστατικά σε αυτό το μοντέλο είναι η επίδοση των μαθητών των τεσσάρων ηλικιακών ομάδων στις δύο εκπαιδευτικές βαθμίδες σε έργα αναγνώρισης, χειρισμού, μετάφρασης και επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων.

Παρουσιάζονται επίσης οι διαφορές στην επίδοση των μαθητών των τεσσάρων ηλικιακών ομάδων στην επίλυση έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος με ποικιλία πεδίων αναπαράστασης όσον αφορά την πρόσθεση κλασμάτων. Επιπρόσθετα, επιχειρείται η ιεράρχηση των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων με βάση το βαθμό δυσκολίας τους και η εξέταση της επίδρασης του τρόπου αναπαράστασης, της αναπαραστατικής λειτουργίας και της υπό-έννοιας της πρόσθεσης ομώνυμων ή ετερόνυμων κλασμάτων σε αυτή διαβάθμιση. Παράλληλα, εντοπίζονται ομάδες έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων, τα οποία οι μαθητές αντιμετωπίζουν με όμοιο τρόπο σε κάθε μια από τις τέσσερις ηλικιακές ομάδες. Επιπλέον, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τις σχέσεις συνεπαγωγής τόσο των έργων ευελιξίας

χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων όσο και των έργων επίλυσης προβλήματος με ποικιλία πεδίων αναπαράστασης. Στο συγκεκριμένο υποκεφάλαιο παρουσιάζονται επίσης στοιχεία περιγραφικής στατιστικής τα οποία αφορούν την ποσοστιαία κατανομή: α) των λανθασμένων απαντήσεων και τρόπων επίλυσης και β) των πεδίων αναπαράστασης και των στρατηγικών που χρησιμοποιήθηκαν από τους μαθητές κατά την επίλυση των έργων επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων. Τέλος, εντοπίζονται τέσσερα ιεραρχικά επίπεδα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων και αναφέρονται τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα των μαθητών που εντάσσονται σε αυτά.

Στο δεύτερο υποκεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της δεύτερης ερευνητικής φάσης. Αρχικά, εντοπίζονται οι δομικές σχέσεις μεταξύ της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της επίλυσης προβλήματος στην εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων κατά τη διάρκεια των τριών χορηγήσεων του δοκιμίου στους ίδιους μαθητές. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται οι διαφορές που προκύπτουν στην επίδοση των μαθητών των τριών ηλικιακών ομάδων που συμμετέχουν στη δεύτερη ερευνητική φάση σε αλληλεπίδραση με το χρόνο χορήγησης. Η πρώτη, δεύτερη και τρίτη ηλικιακή ομάδα αναφέρεται στους μαθητές, οι οποίοι κατά την πρώτη χορήγηση φοιτούσαν στην Ε΄ δημοτικού, Στ΄ δημοτικού και Α΄ γυμνασίου. Ως εκ τούτου, η πρώτη και η τρίτη ηλικιακή ομάδα μεταβαίνουν από μία τάξη σε άλλη εντός της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, αντίστοιχα. Αντίθετα, η δεύτερη ηλικιακή ομάδα μεταβαίνει από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Επιχειρείται επιπλέον ο εντοπισμός συνέπειας ως προς την ιεράρχηση των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων με βάση το βαθμό δυσκολίας τους και επισημαίνεται η επίδραση του τρόπου αναπαράστασης, της αναπαραστατικής λειτουργίας και της υπό-έννοιας της πρόσθεσης ομώνυμων ή ετερόνυμων κλασμάτων σε αυτή τη διαβάθμιση στις τρεις χορηγήσεις του δοκιμίου.

Παρουσιάζονται επίσης οι διαφορές που προκύπτουν στις σχέσεις ομοιότητας και συνεπαγωγής των απαντήσεων που δόθηκαν από τους μαθητές στα έργα πρόσθεσης κλασμάτων κατά τη μετάβασή τους εντός της ίδιας εκπαιδευτικής βαθμίδας, πρωτοβάθμιας ή δευτεροβάθμιας, και από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Επιπλέον, παρουσιάζονται οι δυναμικές σχέσεις αλληλεπίδρασης μεταξύ της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων κατά τη διάρκεια των τριών χορηγήσεων. Τέλος, λαμβάνοντας υπόψη την αλληλεπίδραση της ηλικιακής ομάδας και του χρόνου μετάβασης στην επίδοση των μαθητών στα έργα πρόσθεσης

κλασμάτων παρουσιάζεται ο ρυθμός μεταβολής των ικανοτήτων που σχετίζονται με την ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων σε χρονικό διάστημα δώδεκα μηνών για κάθε μια από τις ηλικιακές ομάδες που συμμετέχουν στην έρευνα.

Τα Αποτελέσματα της Πρώτης Ερευνητικής Φάσης

Αρχικά παρουσιάζεται η ανάλυση και σύγκριση των σχολικών εγχειριδίων που χρησιμοποιούνται στην Ε΄ και Στ΄ δημοτικού και Α΄ και Β΄ γυμνασίου όσον αφορά τα κλάσματα, με κύριο άξονα τα πεδία αναπαράστασης που εμπλέκονται και τις λειτουργίες που επιτελούν οι αναπαραστάσεις στις ασκήσεις που περιέχονται σε αυτά. Στη συνέχεια, επιχειρείται μια προκαταρκτική διερεύνηση του ρόλου της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της επίλυσης προβλήματος με ποικιλία πεδίων αναπαράστασης στην εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων. Συγκεκριμένα, πραγματοποιήθηκε η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση στα δεδομένα των μαθητών των δύο βαθμίδων και των τεσσάρων ηλικιακών ομάδων που συμμετέχουν στην πρώτη ερευνητική φάση τόσο συνολικά όσο και ξεχωριστά. Στόχος ήταν η εμπειρική τεκμηρίωση ενός μοντέλου που υποστηρίζει τη σημαντική επίδραση της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της επίλυσης προβλήματος με ποικιλία πεδίων αναπαράστασης στην εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων. Εξετάστηκε επίσης η πιθανότητα διαφοροποίησης στη δομή του μοντέλου μεταξύ των μαθητών πρωτοβάθμιας (Ε΄ και Στ΄ δημοτικού) και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Α΄ και Β΄ γυμνασίου) ή μεταξύ των μαθητών κάθε μιας από τις τέσσερις ηλικιακές ομάδες που συμμετέχουν στην έρευνα. Τα αποτελέσματα αυτών των αναλύσεων που έγιναν στο στατιστικό πρόγραμμα EQS παρουσιάζονται στη συνέχεια στο δεύτερο μέρος του υποκεφαλαίου. Για τον εντοπισμό των διαφορών της επίδοσης στα έργα πρόσθεσης κλασμάτων ως προς την ηλικία, παρουσιάζονται στο τρίτο μέρος τα αποτελέσματα της πολυμεταβλητής ανάλυσης διασποράς (MANOVA) για την επίδοση των μαθητών στις τέσσερις τάξεις. Το τέταρτο μέρος παρουσιάζει την ιεράρχηση των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων με βάση το βαθμό δυσκολίας τους από την εφαρμογή του μοντέλου Rasch και την εξέταση της επίδρασης των παραγόντων που επηρεάζουν αυτή τη διαβάθμιση. Η διερεύνηση των σχέσεων ομοιότητας και συνεπαγωγής μεταξύ των απαντήσεων των μαθητών των τεσσάρων τάξεων στα έργα του δοκιμίου παρουσιάζεται στο πέμπτο μέρος. Στο έκτο μέρος του πρώτου υποκεφαλαίου παρουσιάζονται στοιχεία περιγραφικής στατιστικής, τα οποία αφορούν την ποσοστιαία κατανομή των

διαφόρων τύπων λανθασμένων απαντήσεων των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων κατά τάξη.

Παρουσιάζονται επίσης στοιχεία περιγραφικής στατιστικής, τα οποία σχετίζονται με τα πεδία αναπαραστάσεων και τις στρατηγικές που χρησιμοποιήθηκαν από τους μαθητές των τεσσάρων ηλικιακών ομάδων για την επίλυση των προβλημάτων πρόσθεσης κλασμάτων. Τέλος, στο έβδομο μέρος του πρώτου υποκεφαλαίου, παρουσιάζονται και αναλύονται τα ιεραρχικά επίπεδα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων.

Ο συντελεστής αξιοπιστίας Cronbach alpha για το δοκίμιο ήταν 0.86 για το σύνολο των μαθητών. Ο συντελεστής αξιοπιστίας για τη μέτρηση της επίδοσης των μαθητών της Ε΄ δημοτικού ήταν 0.82, της Στ΄ δημοτικού 0.86, της Α΄ γυμνασίου 0.87 και της Β΄ γυμνασίου 0.87. Ως εκ τούτου, διαπιστώνεται ότι τα έργα του δοκιμίου σε όλες τις ηλικιακές ομάδες είχαν αποδεκτά επίπεδα αξιοπιστίας.

Ανάλυση Σχολικών Εγχειριδίων

Η ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων των δύο τελευταίων τάξεων της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και των δύο πρώτων τάξεων της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στόχευε στον εντοπισμό των πεδίων αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούνται και στη μεταξύ τους σύγκριση. Επιπλέον, επισημαίνονται οι λειτουργίες των αναπαραστάσεων που εμπλέκονται στις ασκήσεις κλασμάτων με βάση τον τρόπο που αναφέρονται στην κατανόηση εννοιών ο Duval (2006), ο Hitt (1998) και ο Lesh κ.α. (1987b).

Ο Πίνακας 1 παρουσιάζει τα ποσοστά αναπαραστάσεων στις ασκήσεις κλασμάτων των σχολικών εγχειριδίων κατά πεδίο και τάξη.

Πίνακας 1

Ποσοστά Αναπαραστάσεων στις Ασκήσεις Κλασμάτων των Σχολικών Εγχειριδίων κατά Πεδίο και Τάξη

ΤΑΞΗ	ΠΕΔΙΟ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ					
	Λεκτικό (%)	Συμβολικό (%)	Διαγραμματικό (%)	Πίνακας (%)	Αλγεβρικό (%)	N
Ε΄ δημοτικού	25.9	94.8	21.2	3.0	0.7	576
Στ΄ δημοτικού	26.3	96.4	22.3	0.8	0.0	391
Α΄ γυμνασίου	18.3	85.8	3.4	0.0	13.2	295
Β΄ γυμνασίου	16.1	38.6	13.4	1.9	67.5	328

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στον Πίνακα 1 στην Ε΄ δημοτικού, Στ΄ δημοτικού και στην Α΄ γυμνασίου χρησιμοποιείται σε μεγάλη κλίμακα η συμβολική αναπαράσταση, ενώ στη Β΄ γυμνασίου χρησιμοποιείται κυρίως η αλγεβρική αναπαράσταση στα κλάσματα. Στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση πέραν από τις συμβολικές αναπαραστάσεις χρησιμοποιούνται αρκετές λεκτικές και διαγραμματικές αναπαραστάσεις όπως επίσης και πίνακες. Αντίθετα, στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση η παρουσία άλλων αναπαραστάσεων πέραν της συμβολικής στην Α΄ γυμνασίου και της αλγεβρικής στη Β΄ γυμνασίου, είναι περιορισμένη. Σημειώνεται επίσης ότι ορισμένες μορφές αναπαράστασης απουσιάζουν εντελώς από τα εγχειρίδια κάποιων τάξεων. Για παράδειγμα, στο εγχειρίδιο της Στ΄ δημοτικού δεν παρουσιάζεται καθόλου αλγεβρική μορφή αναπαράστασης της έννοιας του κλάσματος και στο εγχειρίδιο της Α΄ γυμνασίου οι ασκήσεις που προτείνονται στους μαθητές δεν παρουσιάζονται υπό μορφή πίνακα.

Οι Πίνακες 2 μέχρι 5 παρουσιάζουν τα ποσοστά των λειτουργιών κατά τύπο μεταβολής και πεδίο αναπαράστασης στα εγχειρίδια της Ε΄ δημοτικού, Στ΄ δημοτικού, Α΄ γυμνασίου και Β΄ γυμνασίου.

Πίνακας 2

Ποσοστά Λειτουργιών κατά Τύπο Μεταβολής και Πεδίο Αναπαράστασης στο Εγχειρίδιο της Ε΄ Δημοτικού

ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ	ΠΕΔΙΟ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ				
	Λεκτικό (%)	Συμβολικό (%)	Διαγραμματικό (%)	Πίνακας (%)	Αλγεβρικό (%)
Χειρισμός	2.7	65.0	4.7	88.2	100.0
Μετάφραση (πηγή)	26.2	1.8	37.2	5.9	0.0
Μετάφραση (στόχος)	0.0	12.3	17.4	0.0	0.0
Επίλυση προβλήματος (πηγή)	54.4	0.5	12.8	0.0	0.0
Επίλυση προβλήματος (στόχος)	2.0	16.3	2.3	5.9	0.0
Επίλυση προβλήματος (συνδυασμός αναπαραστάσεων)	14.8	4.0	25.8	0.0	0.0
N	149	546	122	17	4

Τα αποτελέσματα του Πίνακα 2 δείχνουν ότι οι λεκτικές αναπαραστάσεις χρησιμοποιούνται κυρίως στα εγχειρίδια της Ε΄ δημοτικού ως αρχική αναπαράσταση σε έργα επίλυσης προβλήματος (54.4%). Σε μικρότερο ποσοστό οι λεκτικές αναπαραστάσεις εμφανίζονται και σε έργα άμεσης μετάφρασης ως αρχική αναπαράσταση (26.2%), στην επίλυση προβλήματος με συνδυασμό αναπαραστάσεων (14.8%), σε έργα χειρισμού (2.7%) και ως τελική αναπαράσταση στην επίλυση προβλήματος (2.0%). Όσον αφορά τις συμβολικές αναπαραστάσεις, το μεγαλύτερο μέρος τους χρησιμοποιείται σε έργα χειρισμού (65%). Συμβολικές αναπαραστάσεις χρησιμοποιούνται επίσης σε έργα άμεσης μετάφρασης (14.1%) και επίλυσης προβλήματος (20.8%). Οι διαγραμματικές αναπαραστάσεις, σύμφωνα με το Πίνακα 2 χρησιμοποιούνται περισσότερο σε έργα άμεσης μετάφρασης (54.6%) και επίλυσης προβλήματος με συνδυασμό αναπαραστάσεων (25.8%). Εμφανίζονται όμως σε μικρότερο βαθμό και ως αρχική και τελική αναπαράσταση σε έργα επίλυσης προβλήματος σε ποσοστό που ανέρχεται στο 12.8% και 16.3%, αντίστοιχα, και σε έργα χειρισμού σε ποσοστό 4.7%.

Όσον αφορά τη μορφή πίνακα εμφανίζεται κυρίως σε έργα χειρισμού (88.2%). Οι αλγεβρικές αναπαραστάσεις που παρουσιάζονται στο εγχειρίδιο της Ε΄ δημοτικού είναι περιορισμένες σε αριθμό και συναντώνται σε έργα χειρισμού.

Πίνακας 3

Ποσοστά Λειτουργιών κατά Τύπο Μεταβολής και Πεδίο Αναπαράστασης στο Εγχειρίδιο της Στ΄ Δημοτικού

ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ	ΠΕΔΙΟ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ			
	Λεκτικό (%)	Συμβολικό (%)	Διαγραμματικό (%)	Πίνακας (%)
Χειρισμός	0.0	64.5	9.9	66.7
Μετάφραση (πηγή)	9.7	1.1	45.1	0.0
Μετάφραση (στόχος)	1.0	9.5	9.9	0.0
Αναγνώριση (πηγή)	0.0	0.0	1.4	0.0
Αναγνώριση (στόχος)	0.0	0.3	0.0	0.0
Επίλυση προβλήματος (πηγή)	70.9	0.0	2.8	0.0
Επίλυση προβλήματος (στόχος)	0.0	19.6	1.4	0.0
Επίλυση προβλήματος (συνδυασμός αναπαραστάσεων)	18.4	5.0	29.6	33.3
N	103	377	92	3

Στον Πίνακα 3, ο οποίος αφορά τις ασκήσεις των κλασμάτων στο εγχειρίδιο της Στ' δημοτικού, επισημαίνεται ότι οι λεκτικές αναπαραστάσεις εμπλέκονται σε έργα επίλυσης προβλήματος ως αρχική αναπαράσταση (70.6%) και λιγότερο συχνά στην επίλυση προβλημάτων με συνδυασμό αναπαραστάσεων (18.4%) ή σε έργα άμεσης μετάφρασης (10.7%). Οι συμβολικές αναπαραστάσεις χρησιμοποιούνται κυρίως σε έργα χειρισμού (64.5%) και πιο σπάνια στην επίλυση έργων άμεσης (10.6%) και έμμεσης μετάφρασης (19.6%). Από την άλλη, οι διαγραμματικές αναπαραστάσεις περιλαμβάνονται συχνά σε έργα άμεσης μετάφρασης (55%), κυρίως ως αρχική αναπαράσταση (45.1%), και στην επίλυση προβλήματος που απαιτεί συνδυασμό αναπαραστάσεων (29.6%). Η χρήση διαγραμματικών αναπαραστάσεων σε έργα χειρισμού (9.9%), αναγνώρισης (1.4%) και έμμεσης μετάφρασης (4.2%) είναι περιορισμένη. Από την άλλη, ο μικρός αριθμός πινάκων που περιλαμβάνεται συναντάται σε έργα χειρισμού ή επίλυσης προβλήματος με πολλαπλές αναπαραστάσεις.

Πίνακας 4

Ποσοστά Λειτουργιών κατά Τύπο Μεταβολής και Πεδίο Αναπαράστασης στο Εγχειρίδιο της Α' Γυμνασίου

ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ	ΠΕΔΙΟ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ			
	Λεκτικό (%)	Συμβολικό (%)	Διαγραμματικό (%)	Αλγεβρικό (%)
Χειρισμός	0.0	77.1	0.0	100.0
Μετάφραση (πηγή)	38.9	1.6	33.3	0.0
Μετάφραση (στόχος)	0.0	8.3	0.0	0.0
Επίλυση προβλήματος (πηγή)	61.0	0.0	0.0	0.0
Επίλυση προβλήματος (στόχος)	0.0	13.0	66.7	0.0
N	54	253	10	39

Σύμφωνα με τον Πίνακα 4, στον οποίο παρουσιάζονται τα ποσοστά των διαφόρων λειτουργιών στις ασκήσεις κλασμάτων στο εγχειρίδιο της Α΄ γυμνασίου, στις ασκήσεις που περιλαμβάνονται στο συγκεκριμένο εγχειρίδιο οι λεκτικές αναπαραστάσεις χρησιμοποιούνται ως αρχική αναπαράσταση σε έργα άμεσης (38.9%) και έμμεσης μετάφρασης (61.0%). Οι συμβολικές αναπαραστάσεις χρησιμοποιούνται στην Α΄ γυμνασίου κυρίως σε έργα χειρισμού (77.1%) και λιγότερο συχνά σε έργα άμεσης (8.3%) και έμμεσης μετάφρασης (13.0%) ως η τελική αναπαράσταση. Οι διαγραμματικές αναπαραστάσεις αποτελούν κυρίως την τελική αναπαράσταση σε έργα επίλυσης προβλήματος (66.7%) και σε πιο μικρό ποσοστό την αρχική αναπαράσταση σε έργα άμεσης μετάφρασης (33.3%). Από την άλλη, οι αλγεβρικές αναπαραστάσεις χρησιμοποιούνται μόνο σε έργα χειρισμού. Στην Α΄ γυμνασίου δεν προτείνονται στους μαθητές προβλήματα που παρουσιάζονται με πολλαπλές μορφές αναπαράστασης.

Ο Πίνακας 5 παρουσιάζει τα ποσοστά των διαφόρων λειτουργιών στις ασκήσεις κλασμάτων στο εγχειρίδιο της Β΄ γυμνασίου. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του Πίνακα 5 οι λεκτικές αναπαραστάσεις χρησιμοποιούνται στο εγχειρίδιο της Β΄ γυμνασίου κυρίως σε καταστάσεις επίλυσης προβλήματος (66.7%) και σε μικρότερο ποσοστό σε έργα μετάφρασης (22.6%) ως η αρχική αναπαράσταση. Λεκτικές αναπαραστάσεις χρησιμοποιούνται επίσης σε προβλήματα που απαιτούν συνδυασμό πολλαπλών αναπαραστάσεων, σε ποσοστό που ανέρχεται στο 7.7%. Η βασική χρήση των συμβολικών αναπαραστάσεων στη Β΄ γυμνασίου εντοπίζεται σε έργα χειρισμού (86.6%). Οι υπόλοιπες λειτουργίες στο συμβολικό πεδίο αναπαράστασης είναι περιορισμένες. Οι διαγραμματικές αναπαραστάσεις χρησιμοποιούνται περισσότερο σε έργα μετάφρασης (75%) και λιγότερο συχνά σε έργα χειρισμού (25%). Από την άλλη, οι πίνακες χρησιμοποιούνται στην επίλυση έργων που περιλαμβάνουν συνδυασμό αναπαραστάσεων. Τέλος, οι αλγεβρικές αναπαραστάσεις περιλαμβάνονται κυρίως σε έργα χειρισμού (59.5%).

Πίνακας 5

Ποσοστά Λειτουργιών κατά Τύπο Μεταβολής και Πεδίο Αναπαράστασης στο Εγχειρίδιο της Β΄ γυμνασίου

ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ	ΠΕΔΙΟ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ				
	Λεκτικό (%)	Συμβολικό (%)	Διαγραμματικό (%)	Πίνακας (%)	Αλγεβρικό (%)
Χειρισμός	0.0	86.6	25.0	0.0	59.5
Μετάφραση (πηγή)	22.6	0.0	25.0	0.0	9.9
Μετάφραση (στόχος)	0.0	5.5	50.0	0.0	7.7
Επίλυση προβλήματος (πηγή)	69.7	0.0	0.0	0.0	0.0
Επίλυση προβλήματος (στόχος)	0.0	2.4	0.0	0.0	15.3
Επίλυση προβλήματος (συνδυασμός αναπαραστάσεων)	7.7	5.5	0.0	100.0	7.7
N	53	127	44	6	222

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα στους Πίνακες 2 μέχρι 5 που έχουν παρουσιαστεί, το μεγαλύτερο ποσοστό των λεκτικών αναπαραστάσεων αποτελούν την αρχική αναπαράσταση σε έργα επίλυσης προβλήματος τόσο στην πρωτοβάθμια όσο και δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Το μεγαλύτερο ποσοστό των συμβολικών αναπαραστάσεων περιλαμβάνεται σε έργα χειρισμού και στις δύο εκπαιδευτικές βαθμίδες, ενώ οι διαγραμματικές αναπαραστάσεις αποτελούν κυρίως την αρχική αναπαράσταση σε έργα μετάφρασης. Στην Ε΄ δημοτικού οι πίνακες χρησιμοποιούνται κυρίως σε έργα χειρισμού, ενώ στην Στ΄ δημοτικού περιλαμβάνονται σε έργα χειρισμού και επίλυσης προβλήματος με πολλαπλές

αναπαραστάσεις. Στην Α΄ γυμνασίου το συγκεκριμένο πεδίο αναπαράστασης δεν περιλαμβάνεται στις ασκήσεις κλασμάτων, ενώ στη Β΄ γυμνασίου περιλαμβάνεται κυρίως σε έργα που απαιτούν συνδυασμό αναπαραστάσεων. Από την άλλη, με βάση τους παραπάνω πίνακες σημειώνεται ότι όλες οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται στην Α΄ γυμνασίου και οι πλείστες από τις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται στην Β΄ γυμνασίου εμπλέκονται σε έργα χειρισμού.

Ο Πίνακας 6 παρουσιάζει τα ποσοστά των διαφόρων τύπων διαγραμματικών αναπαραστάσεων όπως παρουσιάζονται στις ασκήσεις που περιλαμβάνουν την έννοια του κλάσματος, στα σχολικά εγχειρίδια των τεσσάρων τάξεων.

Πίνακας 6

Ποσοστά Διαγραμμάτων κατά Τύπο Αναπαράστασης και Τάξη

Διαγραμματική αναπαράσταση	Ε΄ δημοτικού (%)	Στ΄ δημοτικού (%)	Α΄ γυμνασίου (%)	Β΄ γυμνασίου (%)
Εικόνα	14.5	31.8	0.0	0.0
Γραφική παράσταση	16.7	4.5	0.0	0.0
Λογικό διάγραμμα	0.0	2.3	0.0	0.0
Μαγικά τετράγωνα	6.5	0.0	0.0	0.0
Γεωμετρικό σχήμα	7.2	12.5	0.0	25.0
Σχέδιο/ Σχεδιάγραμμα	4.3	11.4	10.0	0.0
Αριθμητική γραμμή	9.4	8.0	10.0	0.0
Ορθογώνια επιφάνεια	21.0	4.5	50.0	0.0
Κύκλοι κλασμάτων/ Επιφάνεια κύκλου	10.8	2.3	0.0	0.0
Διαγράμματα Ε.Π.	7.2	5.7	0.0	0.0
Άξονας ρητών	0.0	0.0	0.0	75.0
Διακριτά αντικείμενα	2.2	17.0	0.0	0.0
Ευθύγραμμο τμήμα	0.0	0.0	30.0	0.0
N	122	92	10	44

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στον Πίνακα 6 στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση παρουσιάζεται μεγάλη ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων. Αντίθετα, στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση χρησιμοποιείται ένα περιορισμένο σύνολο διαγραμματικών αναπαραστάσεων- γεωμετρικό σχήμα, ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού, αριθμητική γραμμή και άξονας των ρητών αριθμών. Αξίζει να σημειωθεί ότι χρησιμοποιούνται διαφορετικές διαγραμματικές αναπαραστάσεις σε κάθε εκπαιδευτική βαθμίδα. Ενδεικτικά αναφέρεται ότι στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση απουσιάζουν οι γραφικές παραστάσεις και οι εικόνες, ενώ στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση ο άξονας των ρητών αριθμών και το ευθύγραμμο τμήμα.

Επιβεβαιωτική Παραγοντική Ανάλυση και Ανάπτυξη Δομικού Μοντέλου Εννοιολογικής Κατανόησης της Πρόσθεσης Κλασμάτων

Για να διερευνηθεί η δομική οργάνωση των διαφόρων διαστάσεων που αφορούν στην ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και την επίλυση προβλημάτων με ποικιλία αναπαραστάσεων όσον αφορά στην πρόσθεση κλασμάτων, εφαρμόστηκε στα δεδομένα η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση και επιχειρήθηκε η ανάπτυξη του σχετικού μοντέλου. Για να εξεταστεί η πιθανότητα διαφοροποίησης στη δομή του συγκεκριμένου μοντέλου μεταξύ των μαθητών Ε΄ δημοτικού, Στ΄ δημοτικού, Α΄ γυμνασίου και Β΄ γυμνασίου με βάση τη βαθμίδα εκπαίδευσης, πραγματοποιήθηκε ανάλυση πολλαπλών ομάδων με την οποία έγινε ο έλεγχος του μοντέλου για τα δεδομένα των μαθητών κάθε βαθμίδας ξεχωριστά. Επιπλέον, πραγματοποιήθηκε ανάλυση πολλαπλών ομάδων με την οποία έγινε έλεγχος του μοντέλου για τα δεδομένα κάθε μιας από τις τέσσερις ηλικιακές ομάδες ξεχωριστά.

Η αποδοχή ενός μοντέλου καθορίζεται από τους ακόλουθους δείκτες προσαρμογής: χ^2 , CFI (Comparative Fit Index) and RMSEA (Root Mean Square Error of Approximation). Συγκεκριμένα, για να θεωρηθεί κατάλληλο ένα μοντέλο απαιτείται οι δείκτες αυτοί να έχουν συγκεκριμένες τιμές: το πηλίκο $\chi^2/\beta.ε.$ θα πρέπει να έχει τιμή μικρότερη του 2, οι τιμές για το δείκτη CFI θα πρέπει να είναι μεγαλύτερες από 0.9 και για το δείκτη RMSEA οι τιμές θα πρέπει να είναι πιο χαμηλές από 0.06 (Bentler, 1990).

Για να εξεταστεί ότι το θεωρητικό μοντέλο που προτείνεται ταιριάζει καλύτερα στα δεδομένα από άλλα, ελέγχθηκαν τέσσερα μοντέλα για την εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων. Στο πρώτο μοντέλο ελέγχθηκε η υπόθεση ότι η εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων επηρεάζεται μόνο από ένα παράγοντα. Με άλλα λόγια, το μοντέλο αυτό υποθέτει ότι οι διάφορες αναπαραστάσεις (συμβολική, λεκτική,

διαγραμματική), οι λειτουργίες που επιτελούνται από τις αναπαραστάσεις (αναγνώριση, χειρισμός, μετάφραση, επίλυση προβλήματος) και οι επιμέρους υπό-έννοιες της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων δε διαδραματίζουν οποιοδήποτε διαφοροποιητικό ρόλο στην κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων. Ως εκ τούτου, σε αυτό το μοντέλο όλες οι μεταβλητές ορίστηκαν να φορτίζουν ένα μόνο παράγοντα.

Το δεύτερο μοντέλο ελέγχθηκε με βάση την υπόθεση εργασίας ότι η ικανότητα αναγνώρισης, χειρισμού, μετάφρασης και επίλυσης προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων έχουν καθοριστικό ρόλο στην πρόσθεση ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, με βάση τον τρόπο που αναφέρεται στην κατανόηση εννοιών ο Hitt (1998). Οι μεταβλητές της έρευνας φορτίζουν σε τέσσερις παράγοντες πρώτης τάξης, οι οποίοι συνθέτουν ένα παράγοντα δεύτερης τάξης που αναφέρεται στην εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων. Συγκεκριμένα, σε καθένα από τους τέσσερις παράγοντες φορτίζουν αντίστοιχα τα έργα αναγνώρισης, συμβολικού χειρισμού, μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση και το αντίστροφο, και επίλυσης προβλημάτων πρόσθεσης κλασμάτων με ποικιλία αναπαραστάσεων. Στο συγκεκριμένο μοντέλο οι διάφορες αναπαραστάσεις (συμβολική, λεκτική και διαγραμματική αναπαράσταση) και οι σχετικές υπό-έννοιες της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων δε διαδραματίζουν διακριτό ρόλο στην εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων.

Το τρίτο μοντέλο το οποίο ελέγχθηκε αποτελεί την υπόθεση εργασίας ότι οι διάφορες αναπαραστάσεις (συμβολική, λεκτική και διαγραμματική αναπαράσταση), οι λειτουργίες που αυτές επιτελούν (αναγνώριση, χειρισμός, μετάφραση, επίλυση προβλήματος) και οι επιμέρους υπό-έννοιες της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων έχουν καθοριστικό ρόλο στην κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων. Με άλλα λόγια, το τρίτο μοντέλο βασίζεται στον τρόπο που αναφέρεται στην κατανόηση εννοιών ο Hitt (1998) με έμφαση όμως στην έννοια της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων και στο ρόλο των πολλαπλών πεδίων αναπαράστασης. Η βασική διάκριση επιτελείται όπως και στο δεύτερο μοντέλο μεταξύ των ικανοτήτων αναγνώρισης, χειρισμού, μετάφρασης και επίλυσης προβλήματος.

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχετική βιβλιογραφία όσον αφορά τους ρητούς αριθμούς, τέθηκε επίσης η υπόθεση ότι υπάρχει γνωστική διάκριση (Kong & Kwok, 2003) μεταξύ των έργων πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων. Επομένως, η υπό-έννοια της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων θεωρείται ότι επιδρά με διαφορετικό τρόπο στην ικανότητα αναγνώρισης της πρόσθεσης κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών

αναπαραστάσεων. Όμως, η υπό-έννοια της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων αναμένεται ότι δεν επηρεάζει την ικανότητα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης κλασμάτων λόγω της αλγοριθμικής προσέγγισης του τρόπου επίλυσης των σχετικών έργων από τους μαθητές των δύο τελευταίων τάξεων του δημοτικού και των δύο πρώτων τάξεων του γυμνασίου. Επιπλέον, τα διαφορετικά πεδία αναπαράστασης θεωρείται ότι επηρεάζουν με διαφορετικό τρόπο τη διαδικασία επίλυσης των έργων μετάφρασης και επίλυσης προβλήματος λόγω της ενεργοποίησης διαφορετικών νοητικών διαδικασιών κατά την επίλυσή τους με βάση τη διάκριση των αναπαραστατικών συστημάτων σε περιγραφικά και εικονικά (Schnotz, 2002). Συνεπώς, η ικανότητα μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων διακρίνεται από την ικανότητα μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων, σχηματίζοντας δύο ξεχωριστούς παράγοντες. Παράλληλα, η ικανότητα επίλυσης προβλήματος με κύρια ή βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση διακρίνεται από την ικανότητα επίλυσης λεκτικών προβλημάτων πρόσθεσης κλασμάτων.

Σε αυτό το μοντέλο η ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και η επίλυση προβλήματος με διαφορετικά πεδία αναπαράστασης πρόσθεσης κλασμάτων δε διαδραματίζουν διακριτό ρόλο στην κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων. Δεν λαμβάνεται δηλαδή υπόψη η διάκριση μεταξύ προβλήματος και άσκησης (D' Amore & Zan, 1996; Φιλίππου & Χρίστου, 1995; Jonassen, 2000; Polya, 1957;). Συνεπώς, οι μεταβλητές της έρευνας ορίστηκαν να φορτίζουν εφτά παράγοντες πρώτης τάξης, οι οποίοι συνθέτουν ένα παράγοντα δεύτερης τάξης που αναφέρεται στην εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων. Συγκεκριμένα, σε καθένα από τους εφτά παράγοντες φορτίζουν αντίστοιχα τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων, αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων, χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, μετάφρασης της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση, μετάφρασης της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση, επίλυσης λεκτικού προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων και επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων με κύρια ή βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση.

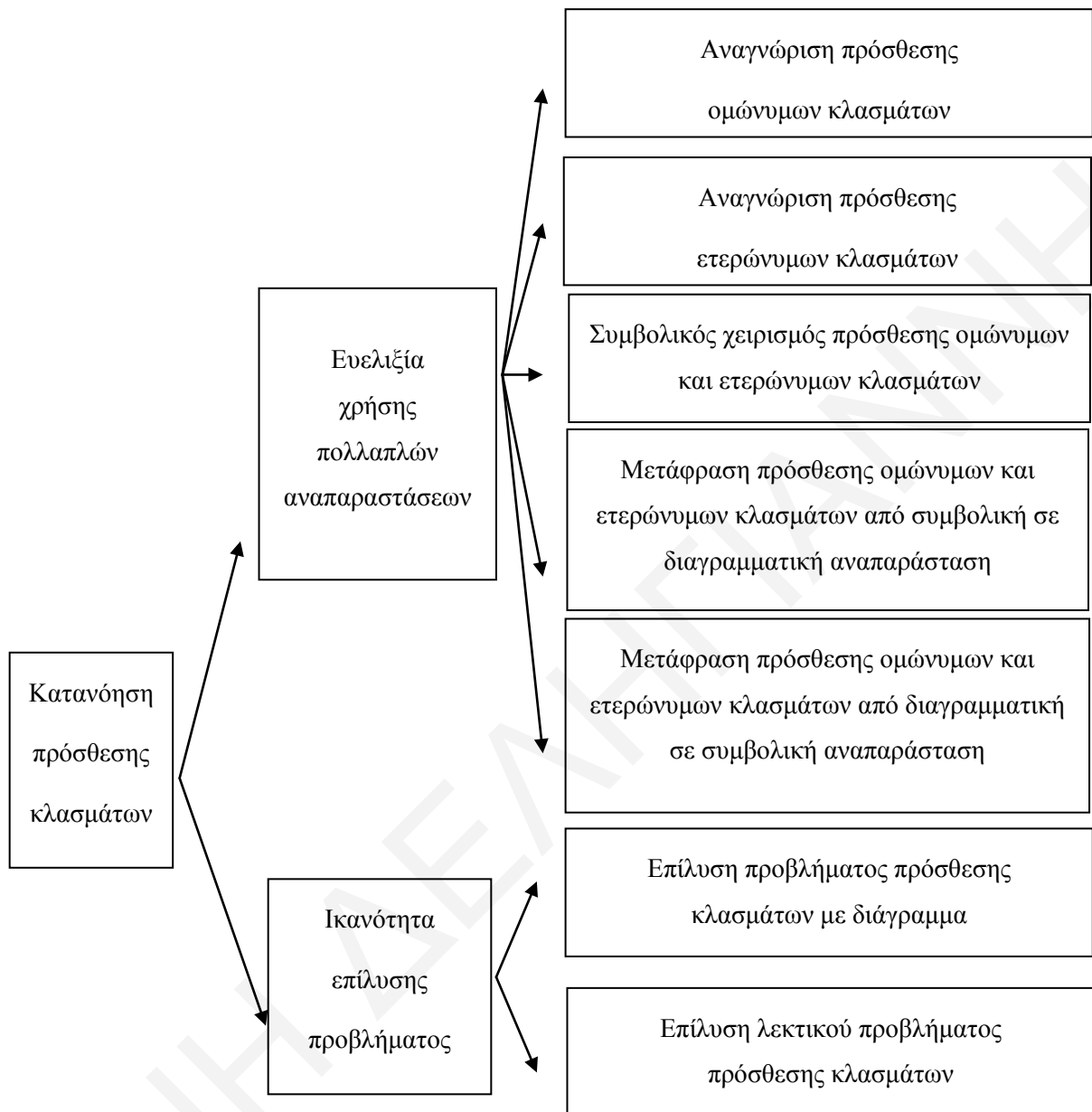
Το τέταρτο μοντέλο το οποίο ελέγχθηκε και αποτελεί την υπόθεση εργασίας ότι καθοριστικό ρόλο στην εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων διαδραματίζει

τόσο η ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων όσο και η επίλυση προβλήματος με διαφορετικά πεδία αναπαράστασης (βλ. Διάγραμμα 8) περιλαμβάνει τα ακόλουθα στοιχεία:

1. Οι μέσοι όροι της επίδοσης στα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων στην ορθογώνια και κυκλική επιφάνεια εμβαδού, καθώς επίσης και στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής φορτίζουν στον παράγοντα πρώτης τάξης που αντιπροσωπεύει την ικανότητα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων.
2. Οι μέσοι όροι της επίδοσης στα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων στην ορθογώνια και κυκλική επιφάνεια εμβαδού, καθώς επίσης και στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής φορτίζουν στον παράγοντα πρώτης τάξης που αντιπροσωπεύει την ικανότητα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων.
3. Οι μέσοι όροι της επίδοσης στα έργα εύρεσης του αθροίσματος συμβολικών αναπαραστάσεων της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων φορτίζουν στον παράγοντα πρώτης τάξης που αντιπροσωπεύει την ικανότητα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων.
4. Οι μέσοι όροι της επίδοσης στα έργα μετάφρασης από συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων σε ορθογώνια και κυκλική επιφάνεια εμβαδού, όπως επίσης και στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής φορτίζουν στον παράγοντα πρώτης τάξης που αντιπροσωπεύει την ικανότητα μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων.
5. Οι μέσοι όροι της επίδοσης στα έργα μετάφρασης από ορθογώνια και κυκλική επιφάνεια εμβαδού και το γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής σε συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων φορτίζουν στον παράγοντα πρώτης τάξης που αντιπροσωπεύει την ικανότητα μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων.
6. Οι μέσοι όροι της επίδοσης στα έργα επίλυσης διαγραμματικού προβλήματος και λεκτικού προβλήματος με βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση και άγνωστη ποσότητα τους προσθετέους φορτίζουν στον παράγοντα πρώτης τάξης που αντιπροσωπεύει την ικανότητα

επίλυση προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων με κύρια ή βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση.

7. Οι μέσοι όροι επίδοσης στο λεκτικό πρόβλημα αιτιολόγησης και στο λεκτικό πρόβλημα του οποίου η επίλυση απαιτεί γνώση της ερμηνείας του κλάσματος ως λόγου φορτίζουν στον παράγοντα πρώτης τάξης που αντιπροσωπεύει την ικανότητα επίλυσης λεκτικού προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων.
8. Οι πρώτης τάξης παράγοντες των ικανοτήτων αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων, αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων, συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων και μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων φορτίζουν σε ένα δεύτερης τάξης παράγοντα που εκφράζει την ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων.
9. Οι πρώτης τάξης παράγοντες των ικανοτήτων επίλυσης προβλήματος με κύρια ή βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση και επίλυσης λεκτικού προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων φορτίζουν σε ένα δεύτερης τάξης παράγοντα που εκφράζει την ικανότητα επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων με ποικιλία αναπαραστάσεων.
10. Οι δύο δεύτερης τάξης παράγοντες που αναφέρονται στην ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και στην ικανότητα επίλυσης προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων φορτίζουν σε ένα τρίτης τάξεως παράγοντα που εκφράζει την εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων.



Διάγραμμα 8. Πρότυπο μοντέλο δόμησης της εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων.

Η προσαρμογή του πρώτου μοντέλου στα δεδομένα της έρευνας, με τη φόρτιση των μεταβλητών σε ένα παράγοντα πρώτης τάξης, ήταν μη αποδεκτή [CFI= 0.61, χ^2 (209)= 4591.21, RMSEA= 0.11, με 90% διάστημα εμπιστοσύνης για το RMSEA=0.118-0.114] και έτσι το μοντέλο δε θεωρήθηκε κατάλληλο για την ερμηνεία της εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων. Μη αποδεκτή ήταν επίσης η προσαρμογή του δεύτερου μοντέλου, με τη φόρτιση των μεταβλητών σε τέσσερις παράγοντες πρώτης τάξης και ένα παράγοντα δεύτερης τάξης [CFI= 0.79, χ^2 (185)= 2163.17, RMSEA= 0.08, με 90% διάστημα εμπιστοσύνης για το RMSEA=0.076-0.082]. Ο υπολογισμός όμως της διαφοράς των χ^2 του

πρώτου και του δεύτερου μοντέλου έδειξε ότι η προσθήκη του παράγοντα δεύτερης τάξης είχε σαν αποτέλεσμα τη στατιστικά σημαντική βελτίωση προσαρμογής του [$\Delta x^2 (24) = 2428.04$, $p < 0.001$]. Χαμηλή εξάλλου ήταν και η προσαρμογή του τρίτου μοντέλου, με τη φόρτιση των μεταβλητών σε επτά παράγοντες πρώτης τάξης και ένα παράγοντα δεύτερης τάξης [CFI= 0.84, $x^2 (202) = 1999.18$, RMSEA= 0.07, με 90% διάστημα εμπιστοσύνης για το RMSEA=0.069-0.075]. Ωστόσο, ο υπολογισμός της διαφοράς των x^2 του δεύτερου και τρίτου μοντέλου έδειξε ότι η προσθήκη των επιπλέον παραγόντων πρώτης τάξης είχε σαν αποτέλεσμα τη στατιστικά σημαντική βελτίωση προσαρμογής του [$\Delta x^2 (17) = 428.87$, $p < 0.001$].

Όσον αφορά στο τέταρτο μοντέλο η προσαρμογή του ήταν ικανοποιητική [CFI= 0.98, $x^2 (162) = 307.06$, RMSEA= 0.02, με 90% διάστημα εμπιστοσύνης για το RMSEA=0.019-0.027] επιβεβαιώνοντας τις υποθέσεις που τέθηκαν. Επιπλέον, ο υπολογισμός της διαφοράς των x^2 με το τρίτο μοντέλο έδειξε ότι η προσθήκη του παράγοντα τρίτης τάξης είχε σαν αποτέλεσμα τη στατιστικά σημαντική βελτίωση προσαρμογής του [$\Delta x^2 (40) = 1692.12$, $p < 0.001$]. Συγκρίνοντας επίσης το τέταρτο με το τρίτο μοντέλο παρατηρείται μείωση του δείκτη RMSEA και αύξηση της τιμής του δείκτη CFI (βλ. Πίνακα 7). Η δομή και οι φορτίσεις του τελικού μοντέλου παρουσιάζονται στο Διάγραμμα 9.

Αξίζει να σημειωθεί ότι στο συγκεκριμένο τελικό μοντέλο οι διακυμάνσεις των σφαλμάτων ορισμένων μεταβλητών που ανήκουν στον ίδιο παράγοντα θεωρήθηκαν ότι σχετίζονται, λαμβάνοντας υπόψη τις υποδείξεις του LMTEST. Ως εκ τούτου υποδεικνύεται ο συσχετισμός ορισμένων μεταβλητών του ίδιου παράγοντα. Σχετικά, ο Bentler (1995) σημειώνει ότι ο συσχετισμός δύο εξαρτημένων μεταβλητών μπορεί να επιτευχθεί μέσα από το συσχετισμό των μεταβλητών που αναφέρονται στο υπόλοιπο των διακυμάνσεών τους. Ενδεικτικά, συσχετίστηκαν τα υπόλοιπα των διακυμάνσεων των σφαλμάτων των μεταβλητών που αναφέρονται στα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων στην κυκλική και ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού. Ο συσχετισμός των συγκεκριμένων μεταβλητών ακολουθήθηκε λαμβάνοντας υπόψη τις εξής παραμέτρους: α) τη λειτουργία που επιτελείται (αναγνώριση), β) το πεδίο αναπαράστασης (επιφάνεια εμβαδού) και γ) το είδος της πρόσθεσης κλασμάτων (πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων).

Αξίζει να σημειωθεί ότι η μη συμπερίληψη ορισμένων έργων στο συγκεκριμένο μοντέλο οφείλεται είτε στην ακαταλληλότητά τους, σύμφωνα με το μοντέλο Rasch, είτε στη χαμηλή φόρτιση που παρουσιάζουν ως προς τους παράγοντες πρώτης τάξης. Στην πρώτη

περίπτωση ανήκει το έργο μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων και δύο έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε ορθογώνια και κυκλική επιφάνεια εμβαδού με αριθμό υποδιαιρέσεων διαφορετικό του παρονομαστή, ενώ στη δεύτερη περίπτωση το έργο χειρισμό της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων με άθροισμα μικρότερο της μονάδας.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης, οι δύο παράγοντες δεύτερης τάξης που αντιστοιχούν στην ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και στην ικανότητα επίλυσης προβλημάτων με διαφορετικά πεδία αναπαράστασης της πρόσθεσης κλασμάτων συνθέτουν τον τρίτης τάξης παράγοντα που ορίζει την εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων. Οι φορτίσεις των δύο παραγόντων δεύτερης τάξης ως προς τον παράγοντα τρίτης τάξης κυμαίνονται σε ψηλά επίπεδα και έχουν σχεδόν την ίδια ισχύ, γεγονός που επιβεβαιώνει την υπόθεση ότι στην εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων σημαντικό ρόλο διαδραματίζουν τόσο η ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων όσο και η ικανότητα επίλυσης προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων.

Στο δεύτερης τάξης παράγοντα ο οποίος ορίζει την ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων φορτίζουν οι παράγοντες Π1 μέχρι Π5. Ο παράγοντας πρώτης τάξης Π1 αναφέρεται στα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων, ο παράγοντας Π2 στα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων, ο παράγοντας Π3 στα έργα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, ο παράγοντας Π4 στα έργα μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων και ο παράγοντας Π5 στα έργα μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων. Τα αποτελέσματα υποδεικνύουν δηλαδή το γεγονός ότι η ικανότητα αναγνώρισης, χειρισμού και μετάφρασης επηρεάζουν με διαφορετικό τρόπο την ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων. Το γεγονός επίσης ότι η ικανότητα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων και η ικανότητα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων εμφανίζονται σαν δύο διαφορετικοί παράγοντες υποδηλώνει τις διαφορετικές νοητικές λειτουργίες που ενεργοποιούνται κατά την επίλυση των έργων που αναφέρονται σε αυτές λόγω της γνωστικής διάκρισης μεταξύ ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων. Επιπλέον, οι διαμόρφωση των παραγόντων Π4 και Π5, οι οποίοι

αναφέρονται σε έργα μετάφρασης με διαφορετική αρχική αναπαράσταση υποδεικνύει το ρόλο που διαδραματίζει το πεδίο αναπαράστασης στον καθορισμό της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η υψηλή τιμή φόρτισης του παράγοντα που αναφέρεται στα έργα μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση υποδεικνύει ότι η σχέση του συγκεκριμένου παράγοντα, και κατά επέκταση της σχετικής ικανότητας που εμπλέκεται, με την ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων είναι στενότερη σε σχέση με τους άλλους παράγοντες. Παρόλα αυτά, οι ψηλές φορτίσεις των υπόλοιπων παραγόντων που συνθέτουν το παράγοντα δεύτερης τάξης που αναφέρεται στην ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων επιβεβαιώνουν την υπόθεση ότι η ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων αποτελεί μια πολυδιάστατη έννοια στην οποία εμπλέκονται: α) τα πεδία αναπαράστασης (συμβολική και διαγραμματική αναπαράσταση), β) οι ενδό- και δια-αναπαραστατικές μεταβολές (αναγνώριση, χειρισμός, μετάφραση) και γ) οι σχετικές έννοιες (πρόσθεση ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, ισοδυναμία κλασμάτων).

Η πλειοψηφία των έργων που περιλάμβαναν αριθμητική γραμμή παρουσίαζαν ψηλότερες φορτίσεις ως προς τους αντίστοιχους παράγοντες πρώτης τάξης σε σχέση με άλλα έργα. Το αποτέλεσμα αυτό υποδεικνύει ότι το γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής συνδέεται στενότερα με την ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων σε σχέση με τις διαγραμματικές αναπαραστάσεις της ορθογώνιας ή κυκλικής επιφάνειας εμβαδού. Επιπλέον, οι φορτίσεις των έργων που αφορούν την πρόσθεση ετερόνυμων κλασμάτων είναι ψηλότερες από τις αντίστοιχες των έργων πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων, υποδηλώνοντας ότι για την επίλυσή τους απαιτούνται διαφορετικές νοητικές διαδικασίες λόγω της εμπλοκής της έννοιας της ισοδυναμίας κλασμάτων. Η κατανόηση της ισοδυναμίας κλασμάτων απαιτείται εξάλλου για την επίλυση των έργων αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε διαγραμματικές αναπαραστάσεις με αριθμό υποδιαιρέσεων το διπλάσιο του παρονομαστή (RELb, RERb). Επομένως και στα έργα αυτά παρατηρούνται ψηλότερες φορτίσεις σε σχέση με τα υπόλοιπα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων.

Ο παράγοντας δεύτερης τάξης που αναφέρεται στην επίλυση προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων με ποικιλία αναπαραστάσεων σχηματίζεται από τους παράγοντες πρώτης τάξης Π6 και Π7. Από τη μια, ο πρώτης τάξεως παράγοντας Π6 περιλαμβάνει δύο προβλήματα τα

οποία έχουν ένα διάγραμμα ως κύρια ή βοηθητική αναπαράσταση. Επιπλέον, τα δύο προβλήματα έχουν την ίδια μαθηματική δομή με άγνωστη ποσότητα τους προσθετέους. Από την άλλη, το λεκτικό πρόβλημα του οποίου η λύση απαιτεί γνώση της ερμηνείας του κλάσματος ως λόγου και το λεκτικό πρόβλημα αιτιολόγησης διαμορφώνουν το παράγοντα πρώτης τάξης Π7. Ο σχηματισμός των δύο παραγόντων πρώτης τάξεως Π6 και Π7 οφείλεται στο γεγονός ότι για την επίλυση των προβλημάτων που εμπλέκονται σε κάθε παράγοντα ενεργοποιούνται διαφορετικές γνωστικές διαδικασίες. Ως εκ τούτου, τα αποτελέσματα επιβεβαιώνουν ότι τόσο το πεδίο αναπαράστασης των δεδομένων του προβλήματος όσο και οι απαιτούμενες γνωστικές διαδικασίες έχουν σημαντικό ρόλο στην διαδικασία επίλυσης προβλημάτων πρόσθεσης κλασμάτων.

Για να εξεταστεί η πιθανότητα διαφοροποίησης στη δομή που περιγράφηκε πιο πάνω, μεταξύ των δύο ομάδων μαθητών, με βάση την εκπαιδευτική βαθμίδα φοίτησής τους και την ηλικία τους, πραγματοποιήθηκε η ανάλυση πολλαπλών ομάδων με την οποία έγινε έλεγχος του μοντέλου για τα δεδομένα α) της πρωτοβάθμιας (Ε' και Στ' δημοτικού) και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Α' και Β' γυμνασίου) και β) της κάθε τάξης (Ε' δημοτικού, Στ' δημοτικού, Α' γυμνασίου, Β' γυμνασίου), ξεχωριστά. Το μοντέλο εξετάστηκε αρχικά με βάση την υπόθεση ότι οι φορτίσεις των παρατηρούμενων μεταβλητών με τους παράγοντες πρώτης τάξης, οι φορτίσεις των παραγόντων πρώτης τάξης με τους παράγοντες δεύτερης τάξης και οι φορτίσεις των παραγόντων δεύτερης τάξης με τον παράγοντα τρίτης τάξης θα είναι ίσες μεταξύ των μαθητών πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που λαμβάνουν μέρος στην έρευνα. Η προσαρμογή του συγκεκριμένου «αυστηρού» μοντέλου κρίθηκε αποδεκτή [$CFI= 0.97$, $\chi^2(357) = 651.338$, $RMSEA= 0.03$, με 90% διάστημα για το $RMSEA = 0.027$, 0.035]. Τα αποτελέσματα επιβεβαιώνουν δηλαδή την υπόθεση ότι υφίσταται η ίδια δομή του γνωστικού συστήματος τόσο στους μαθητές πρωτοβάθμιας όσο και στους μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης όσον αφορά στην κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων. Στο συγκεκριμένο μοντέλο, στις πλείστες των περιπτώσεων τόσο οι φορτίσεις των παρατηρούμενων μεταβλητών στους παράγοντες πρώτης τάξης όσο και οι φορτίσεις των παραγόντων πρώτης τάξης στους παράγοντες δεύτερης τάξης και οι φορτίσεις των παραγόντων δεύτερης τάξης στον παράγοντα τρίτης τάξης ήταν πιο ψηλές για τους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης από τις αντίστοιχες φορτίσεις για τους μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (βλ. Διάγραμμα 9).

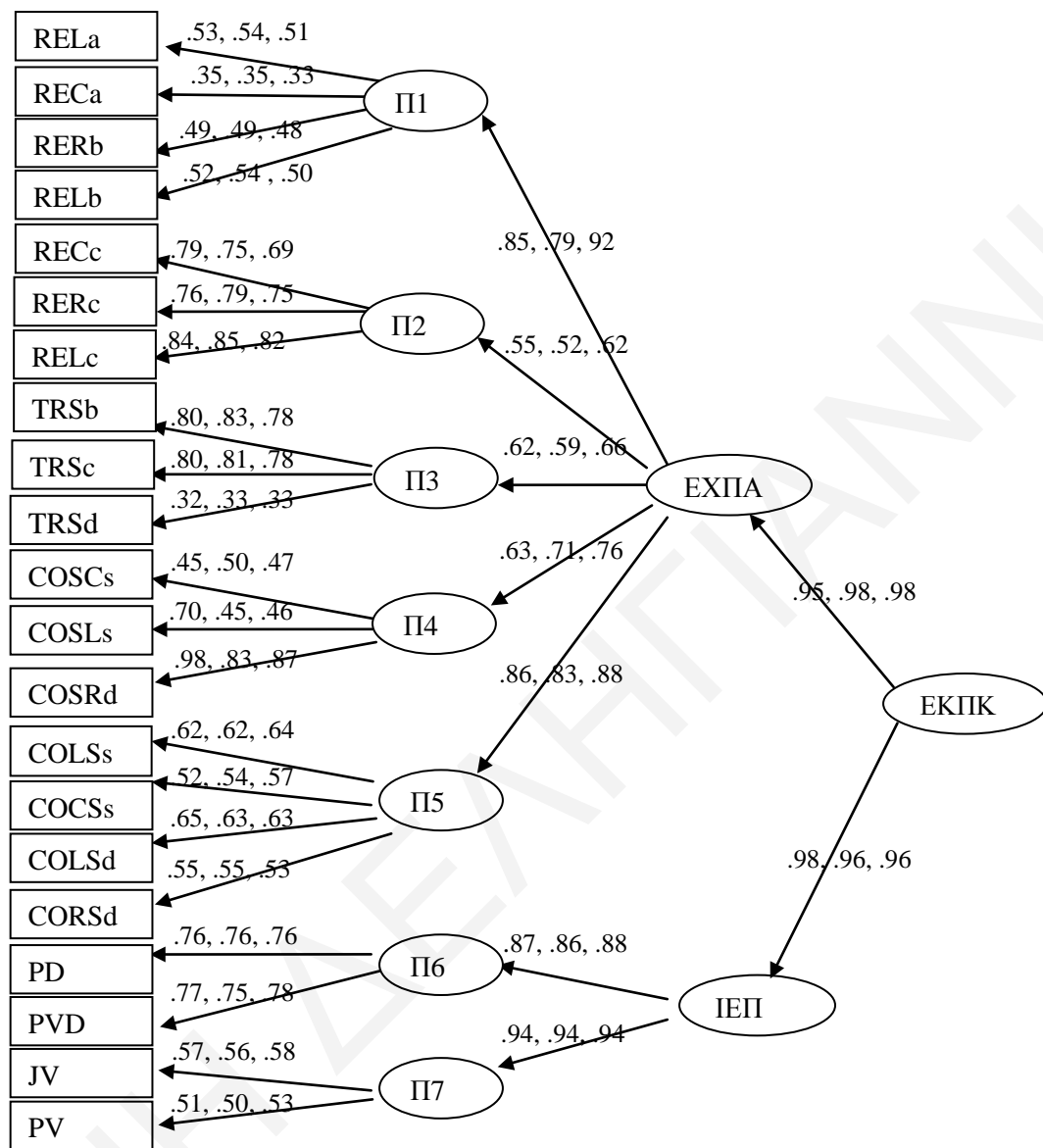
Στη συνέχεια, το μοντέλο εξετάστηκε με βάση την υπόθεση ότι οι φορτίσεις των παρατηρούμενων μεταβλητών με τους παράγοντες πρώτης τάξης, οι φορτίσεις των παραγόντων πρώτης τάξης με τους παράγοντες δεύτερης τάξης και οι φορτίσεις των παραγόντων δεύτερης τάξης με τον παράγοντα τρίτης τάξης θα είναι ίσες μεταξύ των μαθητών Ε΄ δημοτικού, Στ΄ δημοτικού, Α΄ γυμνασίου και Β΄ γυμνασίου. Η προσαρμογή του συγκεκριμένου «αυστηρού» μοντέλου κρίθηκε επίσης ικανοποιητική [CFI= 0.96, χ^2 (739) = 1144.34, RMSEA= 0.04, με 90% διάστημα για το RMSEA = 0.032, 0.040]. Στις πλείστες των περιπτώσεων τόσο οι φορτίσεις των παρατηρούμενων μεταβλητών στους παράγοντες πρώτης τάξης όσο και οι φορτίσεις των παραγόντων πρώτης τάξης στους παράγοντες δεύτερης τάξης και οι φορτίσεις των παραγόντων δεύτερης τάξης στον παράγοντα τρίτης τάξης ήταν πιο ψηλές για τους μαθητές της Στ΄ δημοτικού, Α΄ και Β΄ γυμνασίου από τις αντίστοιχες φορτίσεις για τους μαθητές της Ε΄ δημοτικού (βλ. Διάγραμμα 10).

Αυτά τα αποτελέσματα υποδεικνύουν ότι παρά την κοινή δόμηση της εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων, οι σχέσεις στις υπό εξέταση ικανότητες σταθεροποιούνται με την ηλικία και άρα η συγκεκριμένη δομή ισχυροποιείται. Με άλλα λόγια, η δυναμική της συγκεκριμένης δομικής οργάνωσης όσον αφορά στην εννοιολογική κατανόηση κλασμάτων βελτιώνεται με την ηλικία. Οι δείκτες όλων των υπό εξέταση μοντέλων που προαναφέρθηκαν παρουσιάζονται στον Πίνακα 7.

Πίνακας 7

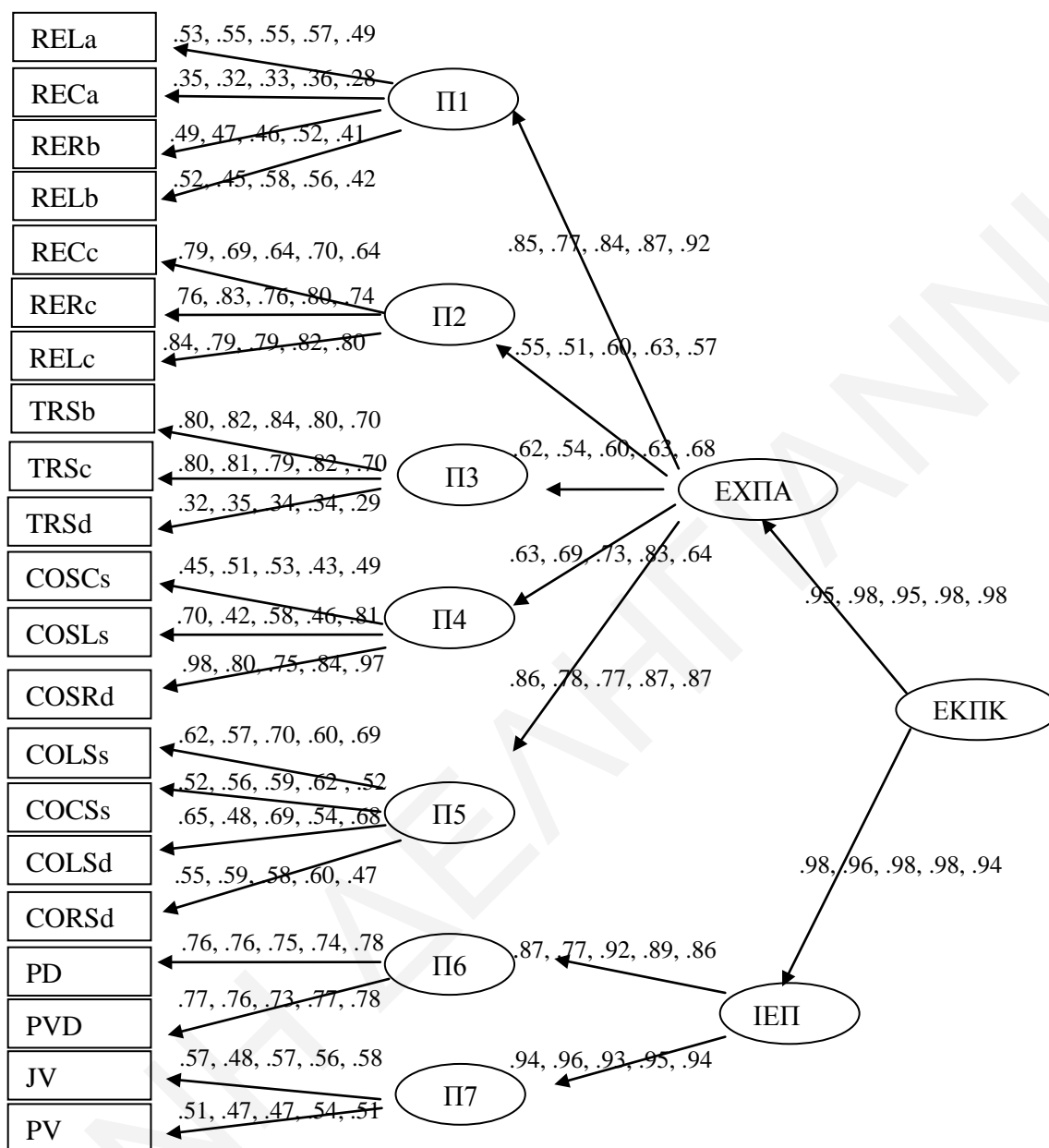
Οι Τιμές των Δεικτών Προσαρμογής των Μοντέλων της Α΄ Ερευνητικής Φάσης

Μοντέλο	χ^2	df	χ^2/df	CFI	RMSEA
Μοντέλο με ένα παράγοντα πρώτης τάξης για το σύνολο των μαθητών	4591.21 p= 0.001	209	21.69	0.61	0.11
Μοντέλο με τέσσερις παράγοντες πρώτης τάξης και ένα παράγοντα δεύτερης τάξης για το σύνολο των μαθητών	2163.17 p= 0.001	185	11.69	0.79	0.08
Μοντέλο με επτά παράγοντες πρώτης τάξης και ένα παράγοντα δεύτερης τάξης για το σύνολο των μαθητών	1999.18 p=0.001	202	9.90	0.84	0.07
Μοντέλο με επτά παράγοντες πρώτης τάξης, δύο παράγοντες δεύτερης τάξης και ένα παράγοντα τρίτης τάξης για το σύνολο των μαθητών	307.06 p=0.001	162	1.90	0.98	0.02
«Αυστηρό» μοντέλο με επτά παράγοντες πρώτης τάξης, δύο παράγοντες δεύτερης τάξης και ένα παράγοντα τρίτης τάξης για την κάθε βαθμίδα	651.34 p=0.001	357	1.82	0.97	0.03
«Αυστηρό» μοντέλο με επτά παράγοντες πρώτης τάξης, δύο παράγοντες δεύτερης τάξης και ένα παράγοντα τρίτης τάξης για την κάθε τάξη	1144.34 p=0.001	739	1.55	0.96	0.04



Εξήγηση συμβολισμού: RELa, RECa, RERa, RERb, RELb, RECc, RERc, RELc, TRSb, TRSc, TRSd, COSCs, COSLs, COSRd, COLSs, COCSs, COLSd, CORSd, PD, PVD, JV, PV= τα έργα του δοκιμίου, Π1= αναγνώριση πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων, Π2=αναγνώριση πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων, Π3= συμβολικός χειρισμός πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, Π4=μετάφραση από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, Π5=μετάφραση από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, Π6=ικανότητα επίλυση προβλήματος με κύρια ή βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση πρόσθεσης κλασμάτων, Π7=ικανότητα επίλυση λεκτικού προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων, EXPIA=ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων, ΙΕΠ=ικανότητα επίλυσης προβλήματος, ΕΚΠΚ= εννοιολογική κατανόηση πρόσθεσης κλασμάτων. Σημείωση: 1. Οι τρεις αριθμοί δηλώνουν τις τιμές για το συνολικό δείγμα, την πρωτοβάθμια και τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, αντίστοιχα 2. Οι μετρήσιμες μεταβλητές και οι παράγοντες σε αυτό το μοντέλο καθώς και στα υπόλοιπα μοντέλα αυτού του κεφαλαίου έχουν σφάλματα.

Διάγραμμα 9. Μοντέλο εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων για το σύνολο των μαθητών και κάθε βαθμίδα ξεχωριστά (Α' ερευνητική φάση).



Εξήγηση συμβολισμού: RELa, RECa, RERa, RERb, RELb, RECc, RERc, RELc, TRSb, TRSc, TRSd, COSCs, COSLs, COSRd, COLSs, COCSs, COLSd, CORSd, PD, PVD, JV, PV= τα έργα του δοκιμίου, Π1= αναγνώριση πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων, Π2=αναγνώριση πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων, Π3= συμβολικός χειρισμός πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, Π4=μετάφραση από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, Π5=μετάφραση από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, Π6=ικανότητα επίλυση προβλήματος με κύρια ή βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση πρόσθεσης κλασμάτων, Π7=ικανότητα επίλυση λεκτικού προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων, ΕΧΠΑ=ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων, ΙΕΠ=ικανότητα επίλυσης προβλήματος, ΕΚΠΚ= εννοιολογική κατανόηση πρόσθεσης κλασμάτων. Σημείωση: Οι πέντε αριθμοί δηλώνουν τις τιμές για το συνολικό δείγμα, την Ε' δημοτικού, Στ' δημοτικού, Α' γυμνασίου και Β' γυμνασίου, αντίστοιχα.

Διάγραμμα 10. Μοντέλο εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων για κάθε ηλικιακή ομάδα ξεχωριστά (Α' ερευνητική φάση).

Η Επίδραση της Ηλικίας στην Εννοιολογική Κατανόηση της Πρόσθεσης Κλασμάτων

Στον Πίνακα 8 παρουσιάζονται τα ποσοστά επιτυχίας στα έργα του δοκιμίου για το σύνολο των μαθητών και για τους μαθητές κάθε τάξης ξεχωριστά. Ψηλότερα ποσοστά επιτυχίας εντοπίζονται τόσο για το σύνολο των μαθητών όσο και για κάθε τάξη ξεχωριστά στα έργα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων (TRSa, TRSd) γεγονός που υποδεικνύει την ευκολία των συγκεκριμένων έργων για όλες τις ηλικιακές ομάδες. Από την άλλη, τα έργα επίλυσης λεκτικών προβλημάτων πρόσθεσης κλασμάτων (JV, PV) είναι τα δυσκολότερα έργα του δοκιμίου αφού σε αυτά οι μαθητές τόσο ως σύνολο όσο και σε κάθε τάξη ξεχωριστά παρουσιάζουν τα χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας. Ιδιαίτερες δυσκολίες αντιμετωπίζουν επίσης οι μαθητές κατά την επίλυση των έργων μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων (COLSd, CORSd), όπως επισημαίνεται από τα χαμηλά ποσοστά επιτυχίας των μαθητών των τεσσάρων ηλικιακών ομάδων στα συγκεκριμένα έργα, όπως επίσης και κατά την επίλυση του έργου αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή με αριθμό υποδιαίρέσεων το διπλάσιο του παρονομαστή (RELb). Ως εκ τούτου, η εμπλεκόμενη αναπαράσταση, η λειτουργία που επιτελείται και οι απαιτούμενες γνωστικές διαδικασίες φαίνεται να επηρεάζουν την επίδοση των μαθητών στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων.

Αξίζει να σημειωθεί ότι σύμφωνα με τα αποτελέσματα του Πίνακα 8 σε όλα τα έργα του δοκιμίου, τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών της Στ' δημοτικού και της Β' γυμνασίου ήταν ψηλότερα από τα αντίστοιχα ποσοστά των μαθητών της Ε' δημοτικού και Α' γυμνασίου. Υποδεικνύεται δηλαδή η επίδραση της ηλικίας στην επίδοση των μαθητών εντός της ίδιας εκπαιδευτικής βαθμίδας.

Πίνακας 8

Ποσοστά Επιτυχίας των Μαθητών στο Δοκίμιο Πρόσθεσης Κλασμάτων κατά Τάξη και Έργο στην Α΄ Ερευνητική Φάση

Έργα	Σύνολο (%)	Ε΄ δημοτικού (%)	Στ΄ δημοτικού (%)	Α΄ γυμνασίου (%)	Β΄ γυμνασίου (%)
TRSa	95.5	94.7	96.4	94.8	95.9
TRSb	76.7	77.8	82.2	63.1	82.8
TRSc	71.0	72.0	76.6	53.2	80.7
TRSD	89.9	89.6	90.1	88.7	91.2
COSCs	67.0	59.4	70.1	68.0	70.0
COSLs	52.3	47.3	54.2	51.5	56.6
COSRd	41.3	35.7	46.0	34.7	47.9
COLSs	35.7	25.6	38.6	34.2	43.6
COCSs	52.1	42.8	56.1	51.0	57.7
COLSd	30.7	17.6	34.2	29.1	40.8
CORSd	30.5	23.9	34.0	30.8	32.8
RELa	61.4	55.1	63.9	58.6	67.2
RECa	58.8	50.5	62.9	56.9	64.4
RERa	69.7	60.4	73.0	68.5	76.0
RERb	46.9	37.4	54.9	41.1	53.2
RELb	31.2	21.7	38.1	28.8	35.6
RECC	45.6	40.8	44.8	45.1	50.9
RERc	55.5	55.1	59.0	49.5	57.9
RELC	68.4	63.8	72.8	63.5	73.0
JV	20.0	15.0	26.0	17.0	23.0
PD	45.4	37.4	55.7	36.5	51.1
PVD	47.7	42.3	58.3	36.9	52.6
PV	20.3	12.1	28.0	17.0	23.8
N	1701	414	415	406	466

Εξήγηση συμβολισμού: TRSa, TRSD: έργα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων, TRSb, TRSc: έργα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων, COSCs, COSLs: έργα μετάφρασης από συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε κυκλική επιφάνεια εμβαδού και αριθμητική γραμμή, αντίστοιχα, COSRd: έργα μετάφρασης από συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων σε ορθογώνια επιφάνεια

εμβαδού, COLSs, COCSs: έργα μετάφρασης από αριθμητική γραμμή και κυκλική επιφάνεια εμβαδού σε συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων, COLSd, CORSD: έργα μετάφρασης από αριθμητική γραμμή και ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού σε συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων, RELa, RECa, RERa, RERb, RELb: έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων, RECc, RERc, RELc: έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων, JV: λεκτικό έργο αιτιολόγησης, PD: διαγραμματικό πρόβλημα πρόσθεσης κλασμάτων, PVD: λεκτικό πρόβλημα με βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση πρόσθεσης κλασμάτων, PV: λεκτικό πρόβλημα πρόσθεσης κλασμάτων.

Για τη σύγκριση της επίδοσης των μαθητών της Ε΄ δημοτικού, Στ΄ δημοτικού, Α΄ γυμνασίου και Β΄ γυμνασίου και τον εντοπισμό στατιστικά σημαντικών διαφορών στην επίδοση όσον αφορά τις επιμέρους διαστάσεις που συνθέτουν την ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων (Π1 μέχρι Π5) και την επίλυση προβλήματος με πολλαπλά πεδία αναπαράστασης (Π6, Π7) χρησιμοποιήθηκε η πολυμεταβλητή ανάλυση διασποράς (MANOVA). Τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης ανάλυσης υποδεικνύουν τη στατιστικά σημαντική επίδραση της ηλικίας όσον αφορά στην επίδοση των μαθητών στα έργα εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων [Pillai's $F(21, 5079)=9.42, p<0.001$]. Συγκεκριμένα, βρέθηκε ότι ο μέσος όρος επίδοσης των μαθητών στα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων [$F(3, 1691)=19.88, p<0.01$], στα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων [$F(3, 1691)=4.72, p<0.001$], χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων [$F(3, 1691)=25.43, p<0.001$], μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων [$F(3, 1691)=7.21, p<0.001$], μετάφραση από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων [$F(3, 1691)=17.82, p<0.001$], επίλυσης προβλημάτων πρόσθεσης κλασμάτων με κύρια ή βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση [$F(3, 1691)=20.30, p=0.001$] και επίλυσης λεκτικών προβλημάτων πρόσθεσης κλασμάτων [$F(3, 1691)=23.01, p<0.001$] διαφέρει ανάλογα με την ηλικία των μαθητών.

Ο Πίνακας 9 δείχνει τους μέσους όρους επίδοσης των μαθητών των τεσσάρων ηλικιακών ομάδων στις επιμέρους διαστάσεις ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος.

Πίνακας 9

Μέσοι Όροι και Τυπικές Αποκλίσεις της Επίδοσης των Μαθητών κατά Διάσταση της Εννοιολογικής Κατανόησης της Πρόσθεσης Κλασμάτων και Τάξη στην Α΄ Ερευνητική Φάση

Διαστάσεις	Ε΄ δημοτικού		Στ΄ Δημοτικού		Α΄ γυμνασίου		Β΄ Γυμνασίου	
	\bar{X}	T.A.	\bar{X}	T.A.	\bar{X}	T.A.	\bar{X}	T.A.
Π1	0.45	0.32	0.59	0.32	0.51	0.31	0.59	0.31
Π2	0.53	0.39	0.59	0.36	0.53	0.40	0.61	0.37
Π3	0.79	0.31	0.83	0.29	0.68	0.34	0.85	0.26
Π4	0.48	0.37	0.57	0.37	0.51	0.36	0.58	0.38
Π5	0.28	0.31	0.41	0.37	0.36	0.35	0.44	0.36
Π6	0.40	0.43	0.57	0.44	0.37	0.43	0.52	0.45
Π7	0.13	0.22	0.27	0.28	0.17	0.25	0.24	0.28

Επεξήγηση συμβολισμού: Π1= αναγνώριση πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων, Π2=αναγνώριση πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων, Π3= συμβολικός χειρισμός πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, Π4=μετάφραση από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, Π5=μετάφραση από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, Π6=ικανότητα επίλυσης προβλήματος με κύρια ή βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση πρόσθεσης κλασμάτων, Π7=ικανότητα επίλυση λεκτικού προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων

Με την ανάλυση post hoc επισημαίνονται οι ηλικιακές ομάδες στις οποίες ο μέσος όρος επίδοσης όσον αφορά τις διαστάσεις ευελιξίας χρήσης πολλαπλών παραγόντων και επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων παρουσιάζει στατιστικά σημαντική διαφορά ($p < 0.05$). Συγκεκριμένα, ο μέσος όρος επίδοσης των μαθητών της Στ΄ δημοτικού στα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων είναι στατιστικά σημαντικά ψηλότερος από τον αντίστοιχο μέσο όρο επίδοσης των μαθητών στην Ε΄ δημοτικού και Α΄ γυμνασίου. Ο μέσος όρος επίδοσης των μαθητών Ε΄ δημοτικού και Α΄ γυμνασίου δε διαφέρει σημαντικά στα συγκεκριμένα έργα. Το ίδιο ισχύει και στην περίπτωση των μέσων όρων επίδοσης των μαθητών Στ΄ δημοτικού και Β΄ γυμνασίου στα συγκεκριμένα έργα. Όμως, ο μέσος όρος επίδοσης των μαθητών της Β΄ γυμνασίου στα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων είναι σημαντικά ψηλότερος από τον αντίστοιχο μέσο όρο επίδοσης των μαθητών της Α΄ γυμνασίου. Παρόμοιο μοτίβο παρουσιάζει ο μέσος όρος επίδοσης των μαθητών των τεσσάρων τάξεων στα έργα επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων (Π6, Π7).

Ο μέσος όρος επίδοσης των μαθητών στην Ε΄ δημοτικού στα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων διαφέρει σημαντικά από τον αντίστοιχο μέσο όρο επίδοσης των μαθητών στη Β΄ γυμνασίου. Αντίθετα, δεν παρατηρείται στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ του μέσου όρου επίδοσης των μαθητών ούτε μεταξύ Ε΄ και Στ΄ δημοτικού ούτε μεταξύ Ε΄ δημοτικού και Α΄ γυμνασίου στα συγκεκριμένα έργα. Ο μέσος όρος επίδοσης όμως των μαθητών Β΄ γυμνασίου είναι στατιστικά σημαντικά ψηλότερος από τον αντίστοιχο μέσο όρο επίδοσης στην Α΄ γυμνασίου στα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων.

Στα έργα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων ο πιο χαμηλός μέσος όρος επίδοσης παρατηρείται στην Α΄ γυμνασίου. Αντίθετα, δεν παρατηρείται στατιστικά σημαντική διαφορά στο μέσο όρο επίδοσης στα έργα χειρισμού της πρόσθεσης κλασμάτων μεταξύ των μαθητών στην Ε΄ και Στ΄ δημοτικού αλλά ούτε και των μαθητών Ε΄ δημοτικού και Β΄ γυμνασίου.

Στα έργα μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση πρόσθεσης κλασμάτων ο μέσος όρος επίδοσης των μαθητών στη Στ΄ δημοτικού και Β΄ γυμνασίου είναι στατιστικά σημαντικά ψηλότερος από τον αντίστοιχο μέσο όρο επίδοσης των μαθητών στην Ε΄ δημοτικού. Δεν παρατηρούνται όμως στατιστικά σημαντικές διαφορές του μέσου όρου επίδοσης στα συγκεκριμένα έργα μεταξύ των μαθητών της Στ΄ δημοτικού και Α΄ γυμνασίου αλλά ούτε μεταξύ των μαθητών Α΄ και Β΄ γυμνασίου. Ο μέσος όρος επίδοσης των μαθητών της Ε΄ δημοτικού στα έργα μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση είναι στατιστικά σημαντικά χαμηλότερος σε σχέση με τον αντίστοιχο μέσο όρο επίδοσης των τριών άλλων ηλικιακών ομάδων. Δεν παρατηρούνται όμως σημαντικές διαφορές μεταξύ του μέσου όρου επίδοσης των μαθητών της Στ΄ δημοτικού και των μαθητών που φοιτούν στην Α΄ και Β΄ γυμνασίου. Όμως ο μέσος όρος επίδοσης των μαθητών της Β΄ γυμνασίου είναι σημαντικά ψηλότερος από τον αντίστοιχο μέσο όρο επίδοσης των μαθητών της Α΄ γυμνασίου.

Γενικά, η επίδοση των μαθητών στα πλείστα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων είναι ψηλότερη στη Στ΄ δημοτικού και στη Β΄ γυμνασίου σε σχέση με την επίδοση των μαθητών στην Ε΄ δημοτικού και Α΄ γυμνασίου, αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, ο μέσος όρος επίδοσης των μαθητών στη Στ΄ δημοτικού είναι σημαντικά ψηλότερος από τον αντίστοιχο μέσο όρο επίδοσης των μαθητών της Ε΄ δημοτικού στα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων (Π1),

μετάφρασης (Π4, Π5) και επίλυσης προβλήματος (Π6, Π7) πρόσθεσης κλασμάτων. Παράλληλα, ο μέσος όρος επίδοσης των μαθητών της Β΄ γυμνασίου είναι σημαντικά υψηλότερος από τον αντίστοιχο μέσο όρο των μαθητών της Α΄ γυμνασίου σε όλες τις διαστάσεις που συνθέτουν την κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων (Π1, Π2, Π3, Π5, Π6, Π7), με εξαίρεση τα έργα μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων (Π4).

Εντούτοις, δεν παρατηρείται οποιαδήποτε στατιστικά σημαντική βελτίωση στο μέσο όρο επίδοσης από τη Στ΄ δημοτικού στην Α΄ γυμνασίου όσον αφορά τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων (Π2) και μετάφρασης (Π4, Π5). Σύμφωνα με τα αποτελέσματα ο μέσος όρος επίδοσης των μαθητών της Α΄ γυμνασίου στα συγκεκριμένα έργα δε διαφέρει σημαντικά σε σχέση με το μέσο όρο επίδοσης των μαθητών στη Στ΄ δημοτικού. Μάλιστα, ο μέσος όρος επίδοσης των μαθητών της Α΄ γυμνασίου είναι στατιστικά σημαντικά χαμηλότερος στα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων (Π1), συμβολικού χειρισμού (Π3) και επίλυσης προβλήματος (Π6, Π7) της πρόσθεσης κλασμάτων συγκριτικά με τον αντίστοιχο μέσο όρο επίδοσης των μαθητών της Στ΄ δημοτικού στα συγκεκριμένα έργα.

Θα πρέπει εξάλλου να σημειωθεί ότι παρόλο που βρέθηκε ότι η επίδοση των μαθητών βελτιώνεται μέσα στην ίδια εκπαιδευτική βαθμίδα, γενικά ο μέσος όρος επίδοσης των μαθητών στα έργα αναγνώρισης, μετάφρασης και επίλυσης προβλήματος κυμαίνεται σε χαμηλά επίπεδα υποδεικνύοντας τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές όσον αφορά στην εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων.

Ιεραρχική Διαβάθμιση των Έργων Ευελιξίας Χρήσης Πολλαπλών Αναπαραστάσεων με Βάση το Βαθμό Δυσκολίας τους

Με βάση την εφαρμογή του μοντέλου Rasch (Andrich, 1988) έγινε δυνατός ο προσδιορισμός του σχετικού βαθμού δυσκολίας των έργων που αναφέρονται στην ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων με βάση τις απαντήσεις των μαθητών σε αυτά. Συγκεκριμένα, αναπτύχθηκαν ισοδιαστημικές κλίμακες των έργων με βάση το βαθμό δυσκολίας τους και των απαντήσεων των μαθητών με βάση τις ικανότητές τους. Επιπλέον, η ανάλυση Rasch επισήμανε την καταλληλότητα της πλειοψηφίας των έργων για τη μέτρηση της επίδοσης των μαθητών όσον αφορά την ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων. Εξαίρεση, αποτελούν δύο έργα: το έργο

μετάφρασης από συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή και το έργο αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε κυκλική επιφάνεια εμβαδού με αριθμό υποδιαιρέσεων διαφορετικό του παρονομαστή. Ως εκ τούτου, τα συγκεκριμένα έργα δεν περιλαμβάνονται στις αναλύσεις που περιγράφονται στο κεφάλαιο. Η ακαταλληλότητα των συγκεκριμένων έργων πιθανόν να πηγάζει τόσο από τη δυσκολία τους όσο και από το γεγονός ότι οι μαθητές δεν ήταν εξοικειωμένοι με παρόμοια έργα.

Ο Πίνακας 10 παρουσιάζει συνοπτικά τα στατιστικά στοιχεία των κλιμάκων που προέκυψαν από την ανάλυση για τα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων του δοκιμίου και τις απαντήσεις των μαθητών στην πρώτη φάση της έρευνας.

Πίνακας 10

Στατιστικά Στοιχεία για τις Κλίμακες των Έργων Ευελιξίας Χρήσης Πολλαπλών Αναπαραστάσεων του Δοκιμίου (L=19) και των Ικανοτήτων των Μαθητών (N=1701) στην Α΄ Ερευνητική Φάση

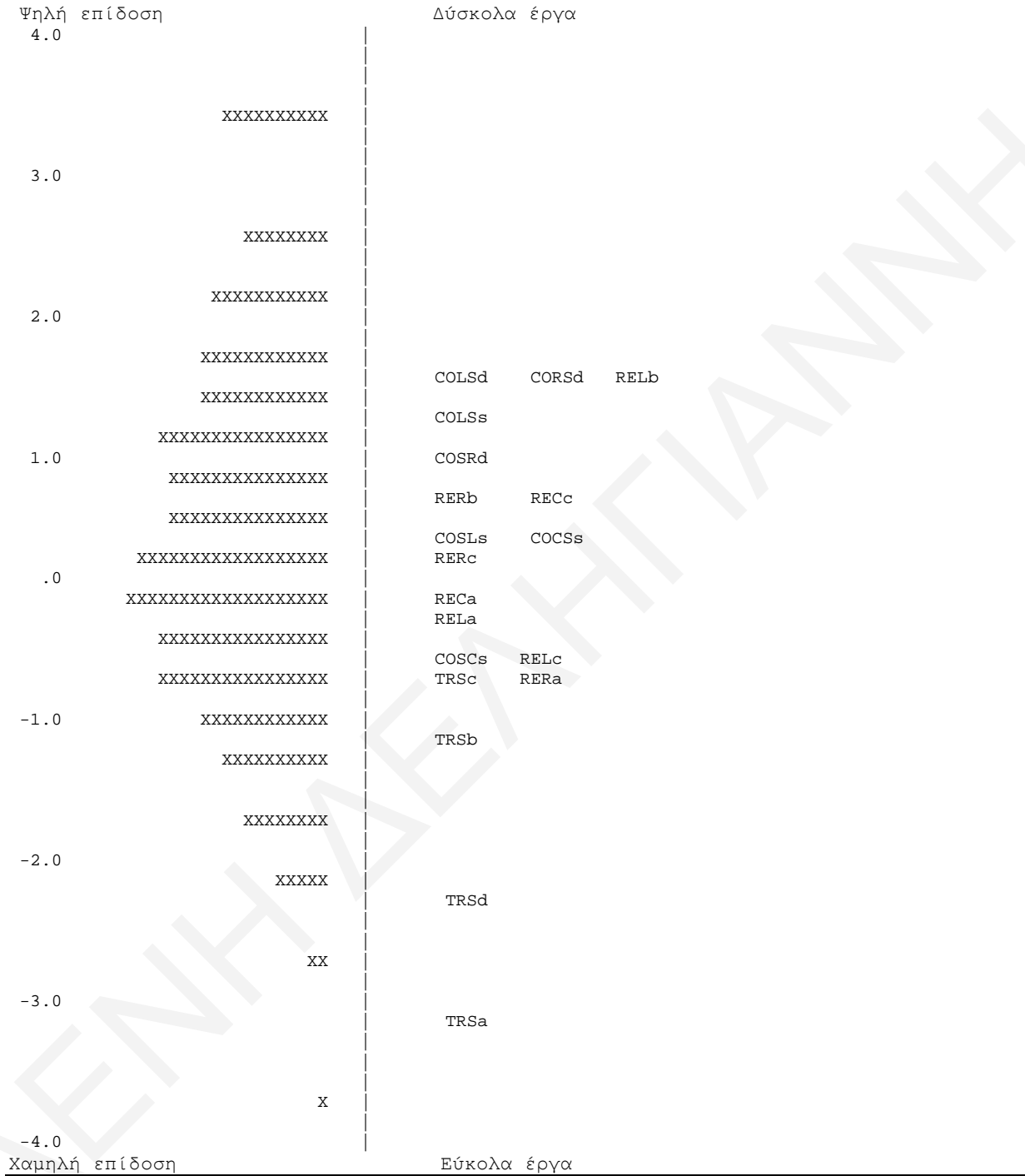
Στατιστικά στοιχεία		
Mean	Έργα	0.00
	Μαθητές	0.40
Standard Deviation	Έργα	1.26
	Μαθητές	1.21
Reliability of estimate	Έργα	0.99
	Μαθητές	0.80
Mean infit mean square	Έργα	1.00
	Μαθητές	1.00
Mean outfit mean square	Έργα	1.02
	Μαθητές	1.02
Infit t	Έργα	-0.05
	Μαθητές	0.03
Outfit t	Έργα	-0.04
	Μαθητές	0.13

Παρατηρείται ότι, για το συγκεκριμένο δοκίμιο ο δείκτης για τους μαθητές είναι 0.80 και για τα έργα 0.99. Οι τιμές αυτές υποδηλώνουν ότι η αξιοπιστία της κλίμακας, η οποία αντιπροσωπεύει το ποσοστό της παρατηρούμενης διασποράς που θεωρείται έγκυρη, είναι ικανοποιητική (Wright, 1985). Επιπλέον, οι τιμές των Mean infit square και Mean outfit square προσεγγίζουν τη μονάδα, ενώ οι τιμές των Infit t και των Outfit t προσεγγίζουν το 0 τόσο στις περιπτώσεις των ατόμων όσο και των έργων.

Το Διάγραμμα 11 παρουσιάζει την ισοδιαστημική κλίμακα του βαθμού δυσκολίας των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων σε αντιδιαστολή με τις ικανότητες των μαθητών. Στο Διάγραμμα 12 (item fit item) φαίνεται ο βαθμός στον οποίο τα έργα παρουσιάζουν συνάφεια με το μοντέλο.

Τόσο από το Διάγραμμα 11 όσο και από το Διάγραμμα 12 είναι εμφανές ότι τα έργα έχουν ικανοποιητική προσαρμογή με το μοντέλο μέτρησης. Ο βαθμός δυσκολίας των έργων επεκτείνεται από -3.19 μέχρι 1.58 logits, καλύπτοντας σε ικανοποιητικό βαθμό το προσδοκώμενο εύρος. Από την άλλη, η επίδοση των μαθητών βρίσκεται μεταξύ -3.66 και 4 logits, γεγονός που υποδηλώνει την ύπαρξη μεγάλων αποκλίσεων στις ικανότητες ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων. Οι αποκλίσεις αιτιολογούνται λαμβάνοντας υπόψη ότι οι μαθητές που λαμβάνουν μέρος στην έρευνα εντάσσονται σε τέσσερις διαφορετικές ηλικιακές ομάδες. Σε γενικές γραμμές οι διάφοροι δείκτες υποδηλώνουν την ύπαρξη μιας συστηματικής και συνεπούς διαβάθμισης των έργων ως προς το βαθμό δυσκολίας τους.

N =1701 L = 19 Probability Level= .50, Κάθε X αντιστοιχεί σε 8 μαθητές



Διάγραμμα 11. Ισοδιαστημική κλίμακα του βαθμού δυσκολίας των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων σε αντιπαραβολή με τις ικανότητες των μαθητών στην Α' ερευνητική φάση.

N =1701 L = 19 Probability Level= .50

INFINIT	.63	.71	.83	1.00	1.20	1.40
MNSQ						
1.60						
1 TRSa				*		
2 TRSb			*			
3 TRSc			*			
4 TRSd				*		
5 COSCs					*	
6 COSLs				*		
7 COSRd			*			
8 COLSs			*			
9 COCSs				*		
10 COLSd			*			
11 CORSD				*		
12 RELa			*			
13 RECa					*	
14 RERa					*	
15 RERb				*		
16 RELb				*		
17 RECc					*	
18 RERC					*	
19 RELc			*			

Διάγραμμα 12. Συνάφεια των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων με το μοντέλο Rasch στην Α' ερευνητική φάση (item fit map).

Από την εξέταση των δύο διαγραμμάτων προκύπτει ότι τα έργα μετάφρασης από αριθμητική γραμμή και ορθογώνια επιφάνεια σε συμβολική αναπαράσταση (COLSd, CORSD) όπως επίσης και το έργο αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή με αριθμό υποδιαιρέσεων διπλάσιο του παρονομαστή (RELb) είχαν μεγαλύτερο βαθμό δυσκολίας σε σχέση με τα υπόλοιπα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων. Χαμηλότερα στο ίδιο άκρο της διαβάθμισης παρουσιάζεται το έργο μετάφρασης από την αριθμητική γραμμή στην συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων (COLSs) και το έργο μετάφρασης από συμβολική αναπαράσταση ετερόνυμων κλασμάτων σε ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού (COSRd). Τα υπόλοιπα έργα μετάφρασης (COSLs, COCSs, COSCs) και αναγνώρισης (RERb, RECc, RERc, RECa, RELa, RELc, RERa) είναι ανάμεικτα κατανομημένα σε μεγάλο εύρος της κλίμακας αλλά με μικρότερο βαθμό δυσκολίας. Ωστόσο, τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης κλασμάτων φαίνεται να έχουν μικρότερο βαθμό δυσκολίας από τα έργα μετάφρασης. Τα έργα χειρισμού της πρόσθεσης κλασμάτων αποτελούν τα ευκολότερα έργα του δοκιμίου (TRSc, TRSb, TRSd, TRSa). Από τα συγκεκριμένα έργα, αυτά του χειρισμού της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων παρουσιάζουν, όπως είναι αναμενόμενο, μεγαλύτερο βαθμό δυσκολίας (TRSc,

TR5b). Αξίζει να σημειωθεί ότι τα αποτελέσματα της ιεραρχικής διαβάθμιση των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων με βάση το βαθμό δυσκολίας τους βρίσκονται σε συμφωνία με τους μέσους όρους επίδοσης των μαθητών στα συγκεκριμένα έργα, οι οποίοι παρουσιάζονται στον Πίνακα 8.

Η ιεράρχηση αυτή υποδηλώνει ότι ο βαθμός δυσκολίας των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων είναι αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης τριών παραγόντων: του πεδίου αναπαράστασης του έργου (συμβολική ή διαγραμματική αναπαράσταση), της ενδο- και δια- αναπαραστατικής μεταβολής που επιτελείται (χειρισμός, αναγνώριση, μετάφραση) και των σχετικών εννοιών της πρόσθεσης κλασμάτων (ομώνυμα και ετερόνυμα κλάσματα). Συγκεκριμένα, ως προς το πεδίο αναπαράστασης φαίνεται ότι τα έργα με αριθμητική γραμμή ήταν δυσκολότερα από τα έργα στα οποία εμπλέκεται άλλη διαγραμματική αναπαράσταση. Η εμπλοκή του πεδίου αναπαράστασης επισημαίνεται και στα έργα μετάφρασης αφού τα έργα μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων δυσκόλεψαν περισσότερο τους μαθητές σε σχέση με τα έργα μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση. Από την άλλη, τα έργα πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων είχαν μεγαλύτερο βαθμό δυσκολίας σε σχέση με τα έργα πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων.

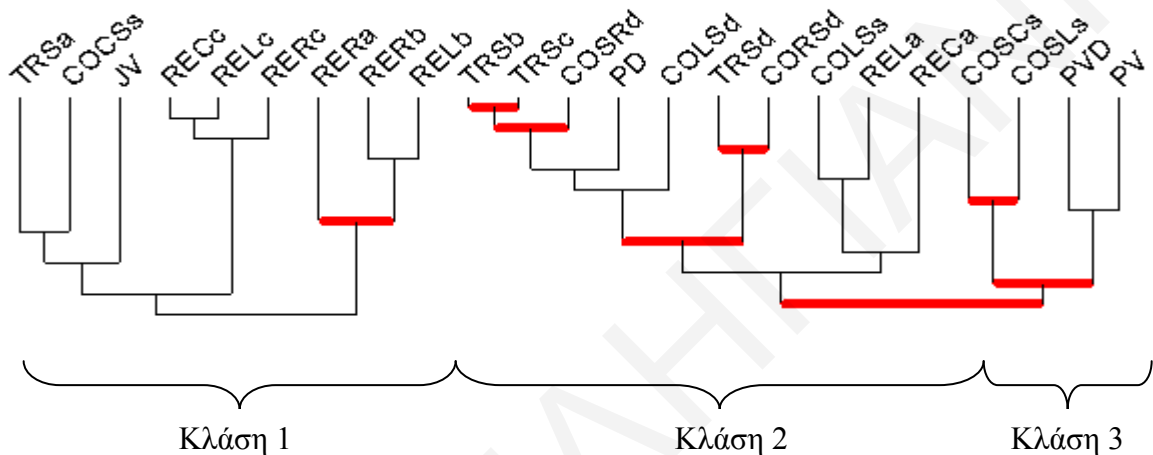
Όσον αφορά τις ενδο- και δια-αναπαραστατικές μεταβολές τα έργα συμβολικού χειρισμού ήταν αυτά που δυσκόλεψαν λιγότερο τους μαθητές. Πιθανή εξήγηση η εξοικείωση των μαθητών με τα συγκεκριμένα έργα λόγω της έμφασης που δίνεται σε αυτά κατά τη διδασκαλία στις συγκεκριμένες ηλικιακές ομάδες. Οι μαθητές ηλικίας 10 μέχρι 14 χρόνων που συμμετέχουν στην παρούσα έρευνα πιθανόν να εκτελούν τις συμβολικούς χειρισμούς πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων μέσα από αλγοριθμικούς κανόνες και να έχουν αυτοματοποιήσει τη συγκεκριμένη διαδικασία.

Σχέσεις Ομοιότητας και Συνεπαγωγής Μεταξύ των Απαντήσεων των Μαθητών στα Έργα Πρόσθεσης Κλασμάτων

Για να διερευνηθούν οι σχέσεις ομοιότητας και συνεπαγωγής μεταξύ των έργων του δοκιμίου του δοκιμίου με βάση τις λύσεις που έδωσαν οι μαθητές της Ε΄ και Στ΄ δημοτικού και Α΄ και Β΄ γυμνασίου σε αυτά πραγματοποιήθηκε ανάλυση των δεδομένων με το στατιστικό πρόγραμμα CHIC. Με την ανάλυση ομοιότητας επισημαίνονται τα έργα στα οποία οι μαθητές επιδεικνύουν όμοιο τρόπο συμπεριφοράς κατά την επίλυσή τους, ενώ η

συνεπαγωγική ανάλυση επιτρέπει τον εντοπισμό του βαθμού δυσκολίας των έργων που χρησιμοποιήθηκαν μέσω των σχέσεων συνεπαγωγής που δημιουργούνται.

Τα Διαγράμματα 13 και 14 παρουσιάζουν τις σχέσεις ομοιότητας και συνεπαγωγής μεταξύ των μεταβλητών που αφορούν τις απαντήσεις των μαθητών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (Ε' και Στ' δημοτικού) που λαμβάνουν μέρος στην έρευνα στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων του δοκιμίου.



Διάγραμμα 13. Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών της Ε' και Στ' δημοτικού στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων (Α' ερευνητική φάση).

Στο Διάγραμμα 13 εντοπίζονται τρεις κλάσεις ομοιότητας. Η πρώτη κλάση ομοιότητας περιλαμβάνει τρεις υπό-ομάδες έργων. Στην πρώτη υπό-ομάδα περιλαμβάνονται έργα χειρισμού και μετάφρασης από κυκλική επιφάνεια εμβαδού σε συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης κλασμάτων και το λεκτικό πρόβλημα αιτιολόγησης (TRSa, COCSs, JV). Στη δεύτερη υπό-ομάδα περιλαμβάνονται τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων (RECc, RELc, RERc), ενώ στην τρίτη υπό-ομάδα τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομόνυμων κλασμάτων με αριθμό υποδιαίρέσεων το διπλάσιο του παρονομαστή (RERa, RERb, RELb). Ο όμοιος τρόπος συμπεριφοράς των μαθητών κατά την επίλυση των έργων χειρισμού και μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομόνυμων κλασμάτων υποδηλώνει ότι οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι παρόλο που τα έργα αυτά επιτελούν διαφορετικές λειτουργίες εμπλέκουν την υποκείμενη έννοια της πρόσθεσης ομόνυμων κλασμάτων, η οποία φαίνεται ότι διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στον

τρόπο αντιμετώπισης του λεκτικού προβλήματος αιτιολόγησης. Ο σχηματισμός της δεύτερης και τρίτης υποομάδας υποδεικνύει ότι για την αναγνώριση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων απαιτούνται διαφορετικές νοητικές διαδικασίες. Εντούτοις, η παρουσία των δύο υποομάδων στην ίδια κλάση ισοδυναμίας υπογραμμίζει το σημαντικό ρόλο που διαδραματίζει η έννοια της ισοδυναμίας κλασμάτων στην ικανότητα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων.

Η δεύτερη κλάση ομοιότητας περιλαμβάνει τρεις υποομάδες. Στην πρώτη υποομάδα περιλαμβάνονται κυρίως έργα που αναφέρονται στην πρόσθεση ετερόνυμων κλασμάτων, τα έργα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων, το έργο μετάφρασης από συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων σε ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού, το διαγραμματικό πρόβλημα πρόσθεσης κλασμάτων, τα έργα μετάφρασης από ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού και αριθμητική γραμμή σε συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης κλασμάτων και το έργο συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων (TRSB, TRSc, COSRd, PD, COLSd, TRSd, CORSD). Ο όμοιος τρόπος συμπεριφοράς των μαθητών του δημοτικού σχολείου κατά την επίλυση των έργων της συγκεκριμένης υποομάδας αιτιολογείται λαμβάνοντας υπόψη την υποκείμενη έννοια της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων, παρόλο που τα έργα επιτελούν δύο διαφορετικές αναπαραστατικές λειτουργίες. Επιπλέον, είναι εμφανής η σύνδεση του τρόπου αντιμετώπισης των έργων χειρισμού και μετάφρασης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων με την επίλυση του διαγραμματικού προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων.

Η δεύτερη και η τρίτη υποομάδα ομοιότητας της δεύτερης κλάσης περιλαμβάνει κυρίως έργα πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων. Συγκεκριμένα, στη δεύτερη υποομάδα περιλαμβάνονται ένα έργο μετάφρασης από αριθμητική γραμμή σε συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων και δύο έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων με αριθμό υποδιαίρεσεων τον ίδιο με τον παρονομαστή (COLSs, RELa, RECa). Από την άλλη, στην τρίτη υποομάδα περιλαμβάνονται έργα μετάφρασης από συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή και την ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού, το λεκτικό πρόβλημα πρόσθεσης κλασμάτων με βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση και το λεκτικό πρόβλημα πρόσθεσης κλασμάτων (COSCs, COSLs, PVD, PV). Πέραν από την επίδραση της υποκείμενης έννοιας της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων ο όμοιος τρόπος συμπεριφοράς στα έργα των δύο υποομάδων

καθορίζεται και από το εμπλεκόμενο πεδίο αναπαράστασης. Συγκεκριμένα, στα έργα της δεύτερης υποομάδας περιλαμβάνονται έργα μετάφρασης με αρχική διαγραμματική αναπαράσταση, ενώ στην τρίτη υποομάδα τα έργα μετάφρασης με αρχική συμβολική αναπαράσταση. Επιπλέον, παρατηρείται όμοιος τρόπος συμπεριφοράς των μαθητών στα λεκτικά έργα επίλυσης προβλήματος. Παρόλο που τα έργα που αναφέρονται στην πρόσθεση ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων εντοπίζονται σε διαφορετικές υποομάδες, η διασύνδεση που παρατηρείται μεταξύ των συγκεκριμένων υποομάδων υποδηλώνει ότι οι μαθητές των δύο τελευταίων τάξεων του δημοτικού σχολείου έχουν αρχίσει να αντιμετωπίζουν «από-στεγανοποιημένα» τα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων.

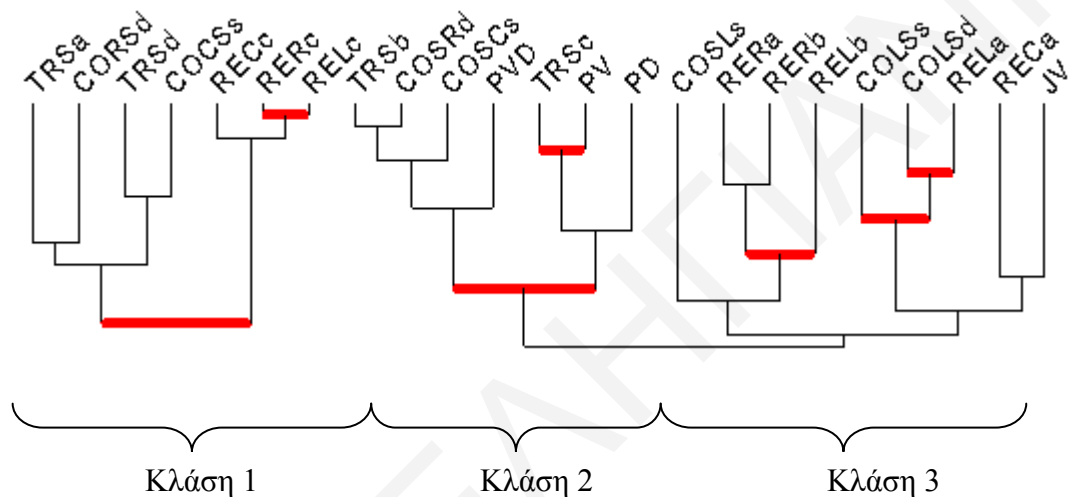
Εντούτοις, το φαινόμενο της στεγανοποίησης εξακολουθεί να υφίσταται λαμβάνοντας υπόψη τις δύο κλάσεις ομοιότητας που σχηματίζονται και οι οποίες δε συνδέονται μεταξύ τους. Επομένως, οι μαθητές της Ε' και Στ' δημοτικού αντιμετωπίζουν με διαφορετικό τρόπο ορισμένα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων υποδηλώνοντας ότι δεν είναι σε θέση να αντιληφθούν κατά τρόπο συνολικό ότι παρά το γεγονός ότι τα έργα αυτά επιτελούν διαφορετικές λειτουργίες αναφέρονται στην ίδια υποκείμενη έννοια της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων. Αξίζει να σημειωθεί όμως ότι η επίλυση προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων δεν αντιμετωπίζεται με τρόπο διαφορετικό από τα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων. Ως εκ τούτου, υποδηλώνεται η αλληλεπίδραση των δύο διαστάσεων εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων - της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της επίλυσης προβλήματος με ποικιλία πεδίων αναπαράστασης.

Ο σχηματισμός διαφορετικών συνεπαγωγικών αλυσίδων για τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων στο Διάγραμμα 14 επιβεβαιώνει το διαφοροποιητικό ρόλο που διαδραματίζει η έννοια της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων στην ικανότητα αναγνώρισης της πρόσθεσης κλασμάτων.

Όσον αφορά τα έργα μετάφρασης, η επιτυχής επίλυση του έργου μετάφρασης από συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων σε ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού συνεπάγεται την επιτυχία στο έργο μετάφρασης από συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε κυκλική επιφάνεια εμβαδού. Επιπλέον, η επιτυχής επίλυση του έργου μετάφρασης από την αριθμητική γραμμή στην συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων, συνεπάγεται την επιτυχία στο έργο μετάφρασης από την

υποδηλώνει ότι οι μαθητές της Ε' και Στ' δημοτικού βασίζονται κατά κύριο λόγο στην εκτέλεση συμβολικών χειρισμών για επίλυσή τους.

Τα Διαγράμματα 15 και 16 παρουσιάζουν τις σχέσεις ομοιότητας και συνεπαγωγής μεταξύ των μεταβλητών που αφορούν τις απαντήσεις των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Α' και Β' γυμνασίου) που λαμβάνουν μέρος στην έρευνα στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων του δοκιμίου.



Διάγραμμα 15. Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών Α' και Β' γυμνασίου στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων (Α' ερευνητική φάση).

Στο Διάγραμμα 15 εντοπίζονται τρεις κλάσεις ομοιότητας. Στην πρώτη κλάση ομοιότητας περιλαμβάνονται δύο υποομάδες. Η πρώτη υποομάδα περιλαμβάνει τα έργα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων και τα έργα μετάφρασης από ορθογώνια και κυκλική επιφάνεια εμβαδού σε συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ετερόνυμων και ομώνυμων κλασμάτων, αντίστοιχα (TRSa, CORSD, TRSD, COCSs). Ο όμοιος τρόπος συμπεριφοράς των μαθητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στα συγκεκριμένα έργα υποδηλώνει ότι η επιτυχία στα έργα μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση σχετίζεται με την ευχέρεια χειρισμού της συμβολικής αναπαράστασης της πρόσθεσης κλασμάτων. Η δεύτερη υποομάδα περιλαμβάνει τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων (RECCc, RERc, RELc). Οι μαθητές συμπεριφέρονται με όμοιο τρόπο κατά την επίλυση το συγκεκριμένων έργων τόσο λόγω του γεγονότος ότι περιλαμβάνουν την υπό-έννοια της

πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων όσο και γιατί επιτελούν την ίδια αναπαραστατική λειτουργία.

Στην δεύτερη κλάση ομοιότητας εντοπίζονται επίσης δύο υποομάδες. Η πρώτη υποομάδα περιλαμβάνει ένα έργο συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων, ένα έργο μετάφρασης από τη συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων σε ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού, ένα έργο μετάφρασης από τη συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε κυκλική επιφάνεια εμβαδού και το λεκτικό πρόβλημα με βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων (TRSb, COSRd, COSCs, PVD). Ο όμοιος τρόπος συμπεριφοράς των μαθητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στα συγκεκριμένα έργα υποδεικνύει ότι η επιτυχία της μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση σχετίζεται με την ευχέρεια χειρισμού της συμβολικής αναπαράστασης όσον αφορά την πρόσθεση κλασμάτων. Στη δεύτερη υποομάδα εντοπίζεται ένα έργο συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων, το λεκτικό πρόβλημα και το διαγραμματικό πρόβλημα πρόσθεσης κλασμάτων (TRSc, PV, PD). Συνεπώς, οι σχέσεις ομοιότητας που εντοπίζονται στη δεύτερη κλάση υποδεικνύουν την ομοιότητα στον τρόπο αντιμετώπισης των έργων συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων και μετάφρασης από συμβολική αναπαράσταση σε επιφάνεια εμβαδού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων με τα έργα επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων.

Η τρίτη κλάση ομοιότητας περιλαμβάνει δύο υποομάδες. Η πρώτη υποομάδα περιλαμβάνει το έργο μετάφρασης από συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε αριθμητική γραμμή και τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε διαγραμματικές αναπαραστάσεις με αριθμό υποδιαίρέσεων το διπλάσιο του παρονομαστή (COSLs, RERa, RERb, RELb). Ο όμοιος τρόπος συμπεριφοράς των μαθητών κατά την επίλυση των συγκεκριμένων έργων αιτιολογείται λαμβάνοντας υπόψη τις εμπλεκόμενες έννοιες της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων και την ισοδυναμία κλασμάτων όπως επίσης και τη λειτουργία της αναγνώρισης που επιτελείται. Στη δεύτερη υποομάδα περιλαμβάνονται έργα μετάφρασης από αριθμητική γραμμή στην συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε αριθμητική γραμμή και κυκλική επιφάνεια εμβαδού και το λεκτικό πρόβλημα αιτιολόγησης (COLSs, COLSd, RELa, RECa, JV). Για την ομοιότητα στον τρόπο

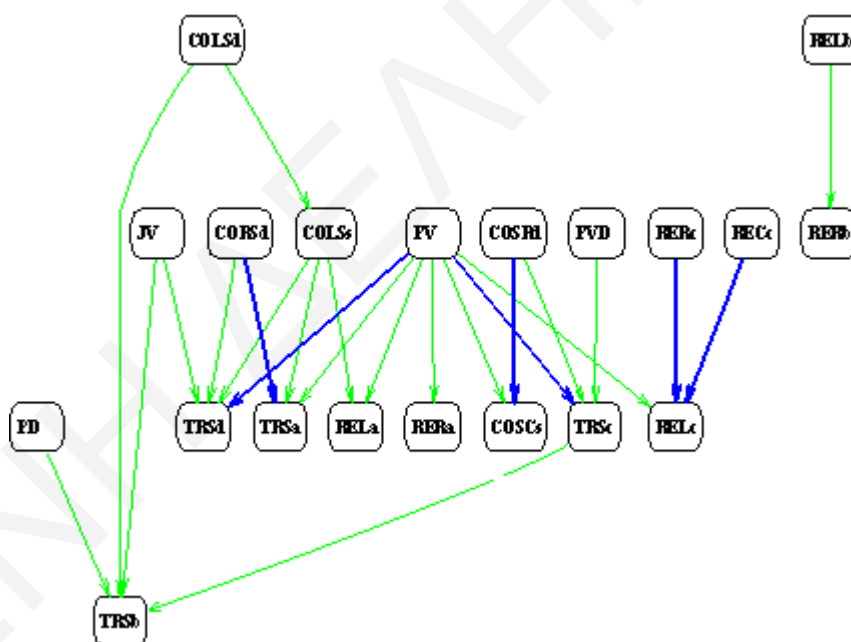
αντιμετώπισης των συγκεκριμένων έργων σημαντικό ρόλο διαδραματίζει το γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής.

Όπως και στην περίπτωση των μαθητών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (Ε' και Στ' δημοτικού) έτσι και στις απαντήσεις των μαθητών που φοιτούν στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Α' και Β' γυμνασίου) δεν εντοπίζεται το φαινόμενο της στεγανοποίησης ως προς την λειτουργία που επιτελούν οι διάφορες αναπαραστάσεις. Τα έργα χειρισμού, αναγνώρισης και μετάφρασης δεν αντιμετωπίζονται δηλαδή με τρόπο αποσπασματικό. Αξίζει άλλωστε να σημειωθεί ότι ούτε η επίλυση προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων αντιμετωπίζεται μεμονωμένα από τους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης επιβεβαιώνοντας τη δομική αλληλεπίδραση της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της επίλυσης προβλήματος με πολλαπλά πεδία αναπαράστασης πρόσθεσης κλασμάτων. Παρόλα αυτά δημιουργούνται τρεις διακριτές κλάσεις ομοιότητας γεγονός που υποδεικνύει ότι οι μαθητές δεν έχουν κατανοήσει ότι τα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων αναφέρονται στην υποκείμενη έννοια της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων. Αντίθετα, οι μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης φαίνεται ότι αντιμετωπίζουν τα συγκεκριμένα έργα με τρόπο αποσπασματικό είτε με βάση τις υπό-έννοιες της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων είτε βάση το εμπλεκόμενο πεδίο αναπαράστασης. Στις απαντήσεις δηλαδή των μαθητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης παρατηρείται ασυνέπεια στην επίλυση των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων.

Ενισχυτικό της προαναφερθείσας θέσης είναι το γεγονός ότι στα έργα μετάφρασης παρατηρείται συστηματικά το φαινόμενο της στεγανοποίησης αφού εντοπίζονται σε διαφορετικές κλάσεις ομοιότητας ανάλογα με την αρχική τους αναπαράσταση. Το γεγονός αυτό υποδεικνύει την επίδραση του αρχικού πεδίου αναπαράστασης στην επίλυση των συγκεκριμένων έργων. Οι μαθητές δηλαδή δεν κατανοούν ότι παρά το γεγονός ότι τα έργα αυτά έχουν διαφορετική αρχική αναπαράσταση αναφέρονται στην ίδια υποκείμενη έννοια. Αξίζει άλλωστε να σημειωθεί ότι η συμπεριφορά των μαθητών κατά την επίλυση των έργων μετάφρασης διαφοροποιείται και ανάλογα με τη διαγραμματική αναπαράσταση που εμπλέκεται. Έτσι, τα έργα στα οποία περιλαμβάνεται το γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής αντιμετωπίζονται με διαφορετικό τρόπο από τους μαθητές σε σχέση με τα υπόλοιπα έργα μετάφρασης.

Ο σχηματισμός της τρίτης κλάσης ομοιότητας υποδεικνύει επίσης τη σημαντική επίδραση των υπό-εννοιών της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων αφού σε αυτήν εντοπίζονται η πλειοψηφία των έργων αναγνώρισης και μετάφρασης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων. Ο διαφοροποιητικός ρόλος των υπό-εννοιών της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων όσον αφορά την ικανότητα αναγνώρισης επιβεβαιώνεται και από το γεγονός ότι τα έργα αναγνώρισης ετερόνυμων κλασμάτων εντοπίζονται στην πρώτη κλάση ομοιότητας ενώ τα έργα αναγνώρισης ομώνυμων κλασμάτων στην τρίτη κλάση ομοιότητας.

Ο σχηματισμός διαφορετικών συνεπαγωγικών αλυσίδων για τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων στο Διάγραμμα 16 επιβεβαιώνει το διαφοροποιητικό ρόλο που διαδραματίζει η έννοια της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων στην ικανότητα αναγνώρισης της πρόσθεσης κλασμάτων των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που λαμβάνουν μέρος στην έρευνα.



Διάγραμμα 16. Συνεπαγωγικό διάγραμμα των απαντήσεων των μαθητών Α΄ και Β΄ γυμνασίου στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων (Α΄ ερευνητική φάση).

Όσον αφορά τα έργα μετάφρασης, η επιτυχής επίλυση του έργου μετάφρασης από συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων σε ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού συνεπάγεται την επιτυχία στο έργο μετάφρασης από συμβολική αναπαράσταση

πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε κυκλική επιφάνεια εμβαδού. Επιπλέον, η επιτυχής επίλυση του έργου μετάφρασης από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων, συνεπάγεται την επιτυχία στο έργο μετάφρασης από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων, το οποίο με τη σειρά του συνεπάγεται την επιτυχία στο έργο αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε αριθμητική γραμμή και στο έργο συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων. Με βάση τα αποτελέσματα αυτά υποδεικνύεται ότι οι συνεπαγωγικές σχέσεις διαμορφώνονται κυρίως μεταξύ μεταβλητών που αντιστοιχούν σε έργα μετάφρασης με την ίδια αρχική αναπαράσταση. Οι μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης δηλαδή παρά τη γνωστική ανάπτυξη και τη διδασκαλία αντιμετωπίζουν αποστασιοποιημένα τα έργα με διαφορετική αρχική αναπαράσταση επιβεβαιώνοντας τα αποτελέσματα της ανάλυσης ομοιότητας που παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 15.

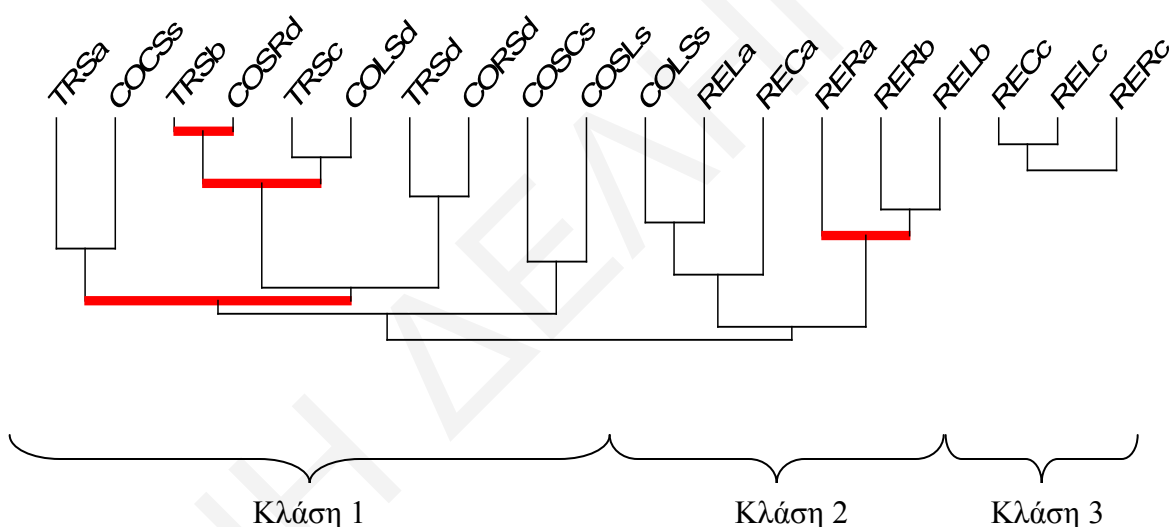
Επιπλέον, επισημαίνονται οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές Α΄ και Β΄ γυμνασίου όταν επιλύουν έργα που εμπλέκουν την πρόσθεση ετερόνυμων κλασμάτων, τα οποία εντοπίζονται στην κορυφή των συνεπαγωγικών αλυσίδων που τα περιέχουν. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι συνεπαγωγικές αλυσίδες που εμπλέκουν έργα μετάφρασης ακολουθούν το ίδιο μοτίβο στις απαντήσεις των μαθητών τόσο της πρωτοβάθμιας όσο και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που λαμβάνουν μέρος στην έρευνα.

Από την άλλη, το γεγονός ότι τα έργα χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων εντοπίζονται στις καταλήξεις των συνεπαγωγικών αλυσίδων υποδεικνύει ότι οι συγκεκριμένες διαδικασίες έχουν αυτοματοποιηθεί από τους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που λαμβάνουν μέρος στην έρευνα, κάτι το οποίο παρατηρήθηκε και στις αντίστοιχες συνεπαγωγικές αλυσίδες που αφορούν τους μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Αξίζει επίσης να σημειωθεί, ότι η επιτυχία στα προβλήματα πρόσθεσης κλασμάτων συνεπάγεται την επιτυχία στα έργα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων κάτι που υποδηλώνει ότι οι μαθητές της Α΄ και Β΄ γυμνασίου βασίζονται κατά κύριο λόγο στην εκτέλεση συμβολικών χειρισμών για την επίλυσή τους.

Όσον αφορά το λεκτικό πρόβλημα πρόσθεσης κλασμάτων, η επιτυχία στην επίλυση του συνεπάγεται την επιτυχία στα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων, στο έργο μετάφρασης από συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης κλασμάτων σε κυκλική επιφάνεια

εμβადού και στα έργα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης κλασμάτων. Οι συγκεκριμένες συνεπαγωγικές σχέσεις υποδεικνύουν το σημαντικό ρόλο που διαδραματίζει η ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων στην ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων για τους μαθητές που φοιτούν στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Τα Διαγράμματα 17 μέχρι 20 παρουσιάζουν τις σχέσεις ομοιότητας μεταξύ των μεταβλητών που αφορούν τις απαντήσεις των μαθητών στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων του δοκιμίου για κάθε τάξη ξεχωριστά. Από την άλλη, στο Διάγραμμα 21 φαίνονται οι σχέσεις ομοιότητας για το σύνολο του δείγματος. Η συμπερίληψη ως συμπληρωματικής μεταβλητής της ηλικιακής ομάδας των μαθητών δίνει τη δυνατότητα εντοπισμού της ηλικιακής ομάδας που συνεισφέρει σε μεγαλύτερο βαθμό στη διαμόρφωση του όμοιου τρόπου αντιμετώπισης των ομάδων έργων που παρατηρούνται.



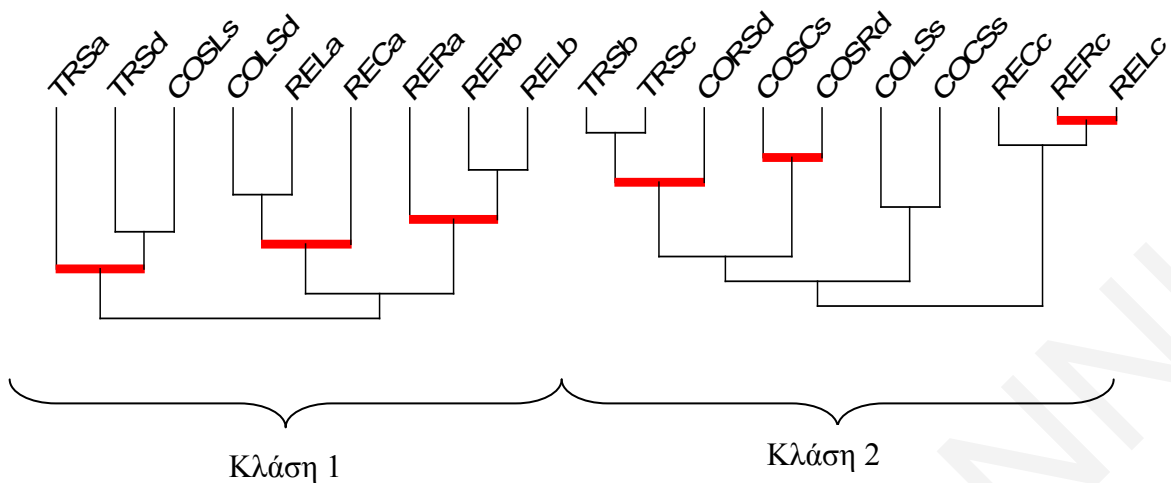
Διάγραμμα 17. Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών της Ε΄ δημοτικού στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων (Α΄ ερευνητική φάση).

Σύμφωνα με το Διάγραμμα 17 στην Ε΄ δημοτικού σχηματίζονται τρεις κλάσεις ομοιότητας. Η πρώτη κλάση ομοιότητας, η οποία φαίνεται να είναι και η πιο ισχυρή, αποτελείται από έργα μετάφρασης και χειρισμού ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων. Στην κλάση αυτή διακρίνονται τρεις υποομάδες, οι οποίες σχηματίζονται ανάλογα με τη σχετική υπό-έννοια της πρόσθεσης κλασμάτων που εμπλέκεται. Συγκεκριμένα, η πρώτη υποομάδα περιλαμβάνει ένα έργο χειρισμού ομώνυμων κλασμάτων και το έργο μετάφρασης

από διαγραμματική αναπαράσταση σε συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων (TRSa, COCSs). Η δεύτερη υποομάδα περιλαμβάνει τα δύο έργα χειρισμού ετερόνυμων κλασμάτων (TRSB, TRSc) και δύο έργα μετάφρασης ετερόνυμων κλασμάτων (COSRd, COLSd). Το ένα έργο απαιτεί τη μετάφραση από συμβολική σε ορθογώνια αναπαράσταση της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων και το δεύτερο τη μετάφραση από την αριθμητική γραμμή σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων. Η τρίτη υποομάδα περιλαμβάνει τα δύο έργα μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων (COSCs, COSLs).

Η δεύτερη κλάση περιλαμβάνει κυρίως τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων. Στην πρώτη υποομάδα της δεύτερης κλάσης περιλαμβάνονται τα δύο έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή και σε κυκλική επιφάνεια με αριθμό υποδιαιρέσεων τον ίδιο με τον παρονομαστή και ένα έργο μετάφρασης από αριθμητική γραμμή σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων ((RELa, RECa, COLSs). Η συμπερίληψη του συγκεκριμένου έργου μετάφρασης επεξηγείται λαμβάνοντας υπόψη την εμπλεκόμενη αναπαράσταση – το γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής. Από την άλλη, τα έργα αναγνώρισης ομώνυμων κλασμάτων στην ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού και στην αριθμητική γραμμή με αριθμό υποδιαιρέσεων το διπλάσιο από τον παρονομαστή σχηματίζουν τη δεύτερη υποομάδα της δεύτερης κλάσης ομοιότητας (RERa, RERb, RELb). Τέλος, στην τρίτη κλάση ομοιότητας ομαδοποιούνται τα έργα αναγνώρισης ετερόνυμων κλασμάτων (RECC, REIc, RERc).

Με βάση τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στο Διάγραμμα 17 οι μαθητές της Ε΄ δημοτικού δεν αντιμετωπίζουν τα έργα αναγνώρισης με όμοιο τρόπο όπως τα υπόλοιπα έργα πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων. Παρατηρείται λοιπόν στεγανοποίηση ως προς τη συγκεκριμένη αναπαραστατική λειτουργία, ιδιαίτερα όσον αφορά την αναγνώριση της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων.



Διάγραμμα 18. Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών της Στ' δημοτικού στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων (Α' ερευνητική φάση).

Στο Διάγραμμα 18, το οποίο παρουσιάζει τις σχέσεις ομοιότητας των απαντήσεων που έδωσαν οι μαθητές της Στ' δημοτικού στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων, σχηματίζονται δύο κλάσεις ομοιότητας. Στην πρώτη κλάση ομοιότητας διακρίνονται δύο υποομάδες στις οποίες περιλαμβάνονται κυρίως τα έργα πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων. Συγκεκριμένα, στην πρώτη υποομάδα ανήκουν τα δύο έργα χειρισμού ομώνυμων κλασμάτων και ένα έργο μετάφρασης από συμβολική αναπαράσταση σε αριθμητική γραμμή της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων (TRSa, TRSd, COSLs). Στη δεύτερη υποομάδα περιλαμβάνονται έργα αναγνώρισης ομώνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων και ένα έργο μετάφρασης από αριθμητική γραμμή σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων (COLSd, RELa, RECa, RERa, RERb, RELb).

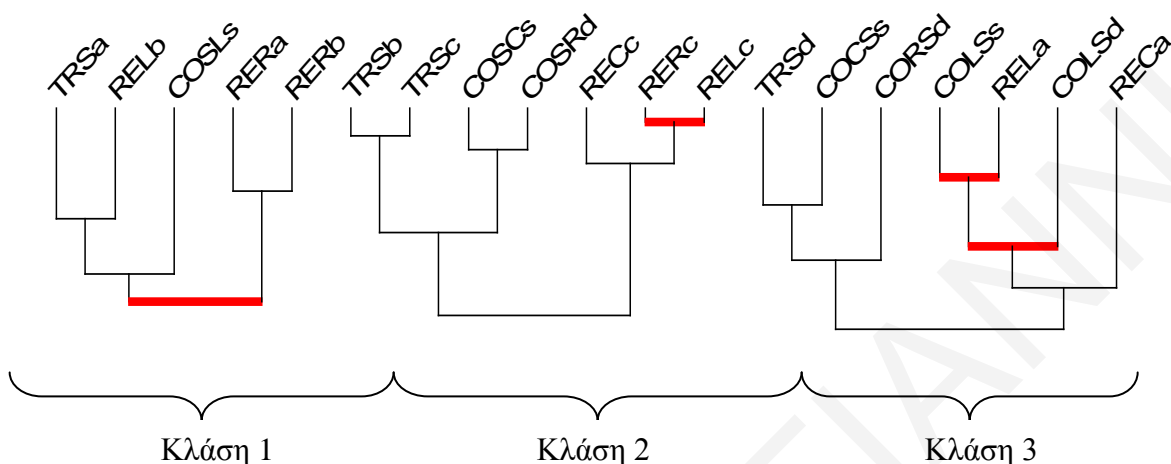
Στη δεύτερη κλάση ομοιότητας διακρίνονται τέσσερις υποομάδες. Στην πρώτη υποομάδα βρίσκονται τα έργα χειρισμού ετερόνυμων κλασμάτων και το έργο μετάφρασης από ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού σε συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων (TRSb, TRSc, CORSD). Οι μαθητές συμπεριφέρονται με όμοιο τρόπο κατά την επίλυσή τους λόγω της υποκείμενης έννοιας της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων. Στη δεύτερη υποομάδα περιλαμβάνονται τα έργα μετάφρασης με αρχική αναπαράσταση την συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων και τελική αναπαράσταση την κυκλική και ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού (COSCs, COSRd). Ο όμοιος

τρόπος αντιμετώπισής τους από τους μαθητές αιτιολογείται λαμβάνοντας υπόψη τόσο την εμπλεκόμενη αρχική αναπαράσταση όσο και τη λειτουργία που επιτελείται. Τα έργα μετάφρασης με αρχική αναπαράσταση την αριθμητική γραμμή και την κυκλική επιφάνεια εμβαδού και τελική αναπαράσταση την συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σχηματίζουν την τρίτη υποομάδα ομοιότητας (COLSs, COCSs). Οι μαθητές παρουσιάζουν όμοιο τρόπο συμπεριφοράς κατά την επίλυσή τους αφού αποτελούν έργα μετάφρασης με τελική συμβολική αναπαράσταση της ίδιας υποκείμενης έννοιας. Οι τρεις υποομάδες της δεύτερης κλάσης ομοιότητας συνδέονται μεταξύ τους κάτι που υποδηλώνει ότι οι μαθητές δεν αντιμετωπίζουν τα έργα μετάφρασης με διαφορετική αρχική αναπαράσταση στεγανοποιημένα. Στη τέταρτη υποομάδα ανήκουν τα έργα αναγνώρισης ετερόνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων (RECC, RERC, RELC) οπότε οι μαθητές τα αντιμετωπίζουν με παρόμοιο τρόπο λόγω της λειτουργίας της αναγνώρισης και της υποκείμενης έννοιας της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων.

Σύμφωνα με τις σχέσεις ομοιότητας που παρουσιάζονται στο Διάγραμμα 18, οι μαθητές στη Στ' δημοτικού αντιμετωπίζουν τα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων με βάση την υπό-έννοια της πρόσθεσης κλασμάτων στην οποία αναφέρονται. Έτσι συμπεριφέρονται ως επί το πλείστον με όμοιο τρόπο στα έργα αναγνώρισης, χειρισμού και μετάφρασης της πρόσθεσης ομώνυμων ή ετερόνυμων κλασμάτων. Αντιλαμβάνονται δηλαδή ότι παρά τη διαφορετική λειτουργία ή αναπαράσταση εκφράζεται η ίδια υπό-έννοια της πρόσθεσης κλασμάτων. Εντούτοις, το γεγονός ότι οι δύο κλάσεις ομοιότητας δεν συνδέονται υποδηλώνει ότι οι μαθητές δεν έχουν αντιληφθεί στην ολότητά της την έννοια της πρόσθεσης κλασμάτων.

Στο Διάγραμμα 19, το οποίο παρουσιάζει τις σχέσεις ομοιότητας των απαντήσεων που έδωσαν οι μαθητές της Α' γυμνασίου στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων σχηματίζονται τρεις κλάσεις ομοιότητας. Στην πρώτη υποομάδα της πρώτης κλάσης ομοιότητας ομαδοποιούνται ένα έργο χειρισμού πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων, ένα έργο αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε αριθμητική γραμμή με αριθμό υποδιαίρέσεων διπλάσιο από τον παρονομαστή και ένα έργο μετάφρασης από συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή (TRSa, RELb, COSLs). Στη δεύτερη υποομάδα της συγκεκριμένης κλάσης περιλαμβάνονται δύο έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού με αριθμό υποδιαίρέσεων διπλάσιο από τον παρονομαστή (RERa, RERb).

Επομένως, τα έργα που περιλαμβάνονται στην πρώτη κλάση ομοιότητας αντιμετωπίζονται από τους μαθητές της Α΄ γυμνασίου με όμοιο τρόπο λόγω της υποκείμενης έννοιας της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων.



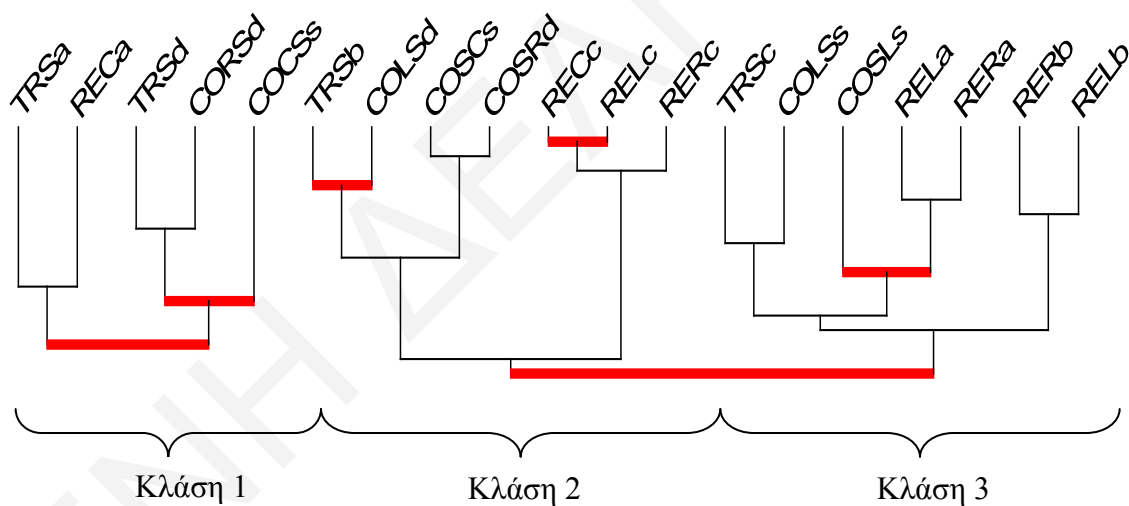
Διάγραμμα 19. Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών της Α΄ γυμνασίου στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων (Α΄ ερευνητική φάση).

Στη δεύτερη κλάση ομοιότητας σχηματίζονται δύο υποομάδες. Στην πρώτη υποομάδα ανήκουν τα έργα χειρισμού της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων και μετάφρασης από συμβολική αναπαράσταση σε κυκλική και ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, αντίστοιχα (TRSβ, TRSγ, COSCς, COSRδ). Η δεύτερη υποομάδα περιλαμβάνει τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων σε ποικιλία αναπαραστάσεων (RECc, RERc, RELc).

Η τρίτη κλάση περιλαμβάνει δύο υποομάδες κυρίως με έργα πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων. Συγκεκριμένα, στην πρώτη υποομάδα βρίσκονται ένα έργο χειρισμού πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων και τα δύο έργα μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων (TRSδ, COCSς, CORSD). Στη δεύτερη υποομάδα περιλαμβάνονται τα έργα μετάφρασης από αριθμητική γραμμή σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων και δύο έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή και στην κυκλική επιφάνεια εμβαδού με αριθμό υποδιαίρέσεων ίσο με τον παρονομαστή (COLSς, RELα, COLSδ, RECα).

Οι μαθητές της Α΄ γυμνασίου σύμφωνα με το Διάγραμμα 19 αντιμετωπίζουν με τρόπο αποσπασματικό τα έργα πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων. Συγκεκριμένα,

παρόλο που συμπεριφέρονται με όμοιο τρόπο έργα διαφορετικών λειτουργιών τα οποία εμπλέκουν την ίδια υπό-έννοια της πρόσθεσης κλασμάτων δημιουργούνται δύο κλάσεις ομοιότητας με έργα πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων. Σε μερικές περιπτώσεις επίσης εντοπίζεται όμοιος τρόπος αντιμετώπισης έργων με βάση την εμπλεκόμενη αναπαράσταση ανεξάρτητα από τη σχετική υπό-έννοια. Τα έργα αυτά αποτελούν τις εξαιρέσεις στη δεύτερη και τρίτη κλάση ομοιότητας. Πρόκειται για το έργο πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων που περιλαμβάνεται στη δεύτερη κλάση, η οποία σχηματίζεται με έργα κυρίως πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων και τα έργα μετάφρασης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων που εντοπίζονται στην τρίτη κλάση, η οποία αποτελείται κυρίως από έργα πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων. Επιπλέον, οι μαθητές της Α΄ γυμνασίου αντιμετωπίζουν τα έργα μετάφρασης ανάλογα με την αρχική τους αναπαράσταση. Συγκεκριμένα, τα έργα μετάφρασης με αρχική αναπαράσταση την συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης κλασμάτων εντοπίζονται στις δύο πρώτες κλάσεις ομοιότητας, ενώ τα έργα μετάφρασης με αρχική αναπαράσταση την αριθμητική γραμμή ή επιφάνεια εμβαδού βρίσκονται στην τρίτη κλάση ομοιότητας.



Διάγραμμα 20. Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών της Β΄ γυμνασίου στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων (Α΄ ερευνητική φάση).

Στο Διάγραμμα 20, το οποίο παρουσιάζει τις σχέσεις ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών της Β΄ γυμνασίου στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων σχηματίζονται τρεις κλάσεις ομοιότητας. Στην πρώτη κλάση διακρίνονται δύο υποομάδες στις οποίες περιλαμβάνονται κυρίως έργα πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων. Συγκεκριμένα, στην πρώτη υποομάδα βρίσκεται ένα έργο συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων

κλασμάτων και αναγνώρισης της πρόσθεσης κλασμάτων σε κυκλική επιφάνεια εμβαδού με αριθμό υποδιαιρέσεων τον ίδιο με τον παρονομαστή (TRSa, RECa). Στη δεύτερη υποομάδα ανήκει ένα έργο συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων και τα δύο έργα μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων ((TRSD, CORSD, COCSs). Στη δεύτερη κλάση σχηματίζονται τρεις υποομάδες με έργα κυρίως πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων. Στην πρώτη υποομάδα ανήκουν ένα έργο χειρισμού της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων και ένα έργο μετάφρασης από αριθμητική γραμμή σε συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων (TRSB, COLSD). Στη δεύτερη υποομάδα εντοπίζονται τα έργα μετάφρασης με αρχική αναπαράσταση τη συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων (COSCs, COSRD). Στη δεύτερη υποομάδα βρίσκονται όλα τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων (RECC, RELC, RERC).

Τα έργα της τρίτης κλάσης αναφέρονται κυρίως στην πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων. Συγκεκριμένα, στην κλάση αυτή εντοπίζονται τρεις υποομάδες. Στην πρώτη υποομάδα ανήκει ένα έργο συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων και ένα έργο μετάφρασης από αριθμητική γραμμή σε συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων (TRSc, COLSs). Στη δεύτερη υποομάδα εντοπίζεται ένα έργο μετάφρασης από συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων και τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού και στην αριθμητική γραμμή με αριθμό υποδιαιρέσεων τον ίδιο ή διπλάσιο του παρονομαστή (COSLs, RELa, RERa). Η τρίτη υποομάδα περιλαμβάνει τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε ορθογώνια επιφάνεια και στην αριθμητική γραμμή με αριθμό υποδιαιρέσεων το διπλάσιο του παρονομαστή (RERb, RELb).

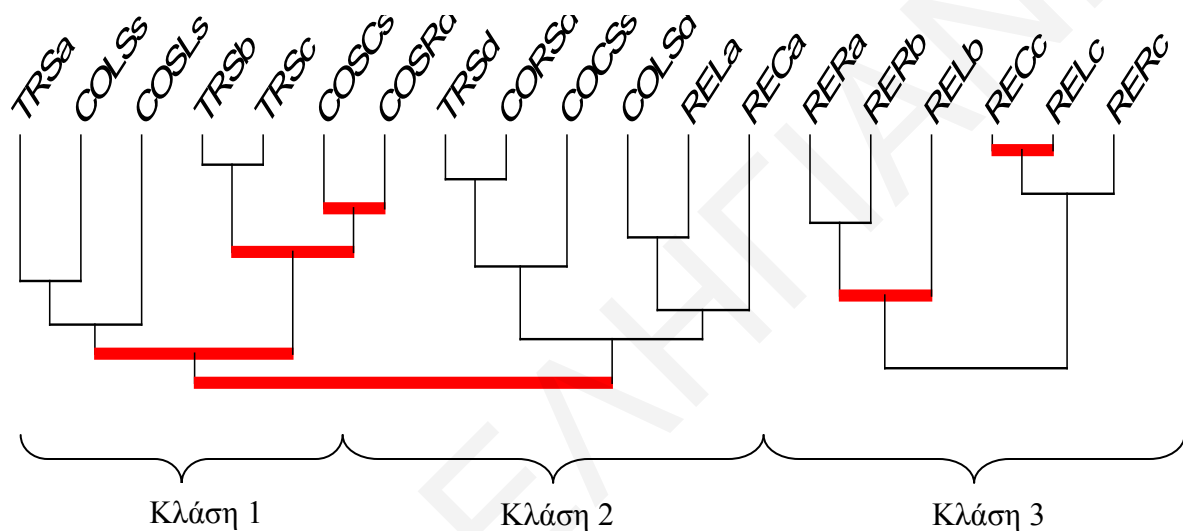
Σύμφωνα με τα αποτελέσματα στο Διάγραμμα 20 το φαινόμενο της στεγανοποίησης εξακολουθεί να υφίσταται εν μέρει ακόμη και στη Β΄ γυμνασίου. Ενδεικτικό είναι το γεγονός ότι οι μαθητές δεν αντιμετωπίζουν με όμοιο τρόπο όλα τα έργα πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων. Ως εκ τούτου, σχηματίζονται δύο κλάσεις ομοιότητας με έργα πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων. Επιπλέον, η συμπερίληψη στην πρώτη κλάση του έργου μετάφρασης από ορθογώνια σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων και στην δεύτερη κλάση του έργου μετάφρασης από συμβολική σε κυκλική αναπαράσταση της

πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων υποδηλώνει εν μέρει στεγανοποίηση και ως προς την αρχική αναπαράσταση στα έργα μετάφρασης. Ωστόσο αξίζει να σημειωθεί η στενή σχέση της δεύτερης και της τρίτης κλάσης ομοιότητας που υποδηλώνει τη γνωστική ανάπτυξη των μαθητών, οι οποίοι αντιλαμβάνονται τη διασύνδεση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων.

Μέσα από τα Διαγράμματα 17 μέχρι 20 παρατηρείται στασιμότητα στον τρόπο αντιμετώπισης των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων από τους μαθητές των δύο τελευταίων τάξεων του δημοτικού και τις δύο πρώτες τάξεις του γυμνασίου. Μάλιστα, ορισμένες ομάδες έργων διατηρούνται αναλλοίωτες και στις τέσσερις ηλικιακές ομάδες. Ενδεικτικό παράδειγμα είναι ο τρόπος αντιμετώπισης των έργων αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων. Γενικά, οι μαθητές που συμμετέχουν στην έρευνα δεν αντιμετωπίζουν με τον ίδιο τρόπο όλα τα έργα αναγνώρισης, χειρισμού και μετάφρασης της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων. Ο αποσπασματικός τρόπος αντιμετώπισης των έργων υποδηλώνει δυσκολίες στην κατανόηση των συγκεκριμένων υπό-έννοιών της πρόσθεσης κλασμάτων. Οι δυσκολίες αυτές γίνονται αντιληπτές από το γεγονός ότι ορισμένα έργα που αναφέρονται στην ίδια υπό-έννοια περιλαμβάνονται σε διαφορετικές κλάσεις. Οι μαθητές επικεντρώνονται συχνά στην εμπλεκόμενη αναπαράσταση στα έργα μετάφρασης και αναγνώρισης αντί στη σχετική υπό-έννοια της πρόσθεσης κλασμάτων. Το φαινόμενο της στεγανοποίησης στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων είναι εντονότερο στην Ε' δημοτικού και Α' γυμνασίου. Σύμφωνα με τις σχέσεις ομοιότητας, στη Στ' δημοτικού οι μαθητές αντιλαμβάνονται σε μεγαλύτερο βαθμό την υποκείμενη υπό-έννοια της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων. Παρόλα αυτά αντιμετωπίζουν την πρόσθεση ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων στεγανοποιημένα σαν δύο διαφορετικές έννοιες. Αντίθετα, στη Β' γυμνασίου παρά το γεγονός ότι η επίλυση των έργων πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων γίνεται αποσπασματικά, οι μαθητές αντιλαμβάνονται σε μεγαλύτερο βαθμό την ευρύτερη υποκείμενη έννοια της πρόσθεσης κλασμάτων.

Στο Διάγραμμα 21 παρουσιάζονται οι σχέσεις ομοιότητας στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων για το σύνολο των μαθητών που συμμετέχουν στην πρώτη ερευνητική φάση. Συγκεκριμένα σχηματίζονται τρεις κλάσεις ομοιότητας. Στην πρώτη κλάση περιλαμβάνονται δύο υποομάδες έργων. Η πρώτη υποομάδα περιλαμβάνει ένα έργο συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων και έργα

μετάφρασης από συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε αριθμητική γραμμή και το αντίστροφο (TRSa, COLSs, COSLs). Ως εκ τούτου, η συγκεκριμένη ομάδα έργων σχηματίζεται με άξονα την υπό-έννοια της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων. Η δεύτερη υποομάδα περιλαμβάνει δύο έργα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων και δύο έργα μετάφρασης από συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων σε κυκλική και ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού, αντίστοιχα (TRSc, TRSd, COSCs, COSRd). Στη διαμόρφωση της συγκεκριμένης ομάδας καθοριστικό ρόλο διαδραματίζει η αρχική συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων.



Διάγραμμα 21. Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών της Ε΄ δημοτικού, Στ΄ δημοτικού, Α΄ γυμνασίου και Β΄ γυμνασίου στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων (Α΄ ερευνητική φάση).

Η δεύτερη κλάση, η οποία συνδέεται με την πρώτη κλάση, περιλαμβάνει δύο υποομάδες. Στην πρώτη υποομάδα, περιλαμβάνονται ένα έργο συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων και δύο έργα μετάφρασης από ορθογώνια και κυκλική επιφάνεια εμβαδού σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων (TRSc, TRSd, CORSc, COCSs). Από την άλλη, η δεύτερη υποομάδα σχηματίζεται από ένα έργο μετάφρασης από αριθμητική γραμμή σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων και δύο έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε κυκλική επιφάνεια εμβαδού και στην αριθμητική γραμμή (COLSd, RELa, RECa). Στην δεύτερη κλάση περιλαμβάνονται δηλαδή όλα τα έργα μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων και έργα αναγνώρισης και χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων. Το γεγονός ότι τα έργα

μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση βρίσκονται σε διαφορετική κλάση ομοιότητας από τα έργα μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση υποδηλώνει ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν τους δύο τύπους έργων αποσπασματικά παρόλο που αναφέρονται στη ίδια μαθηματική έννοια. Εντούτοις η σχέση ομοιότητας που παρατηρείται μεταξύ της πρώτης και δεύτερης κλάσης υποδεικνύει ότι παρουσιάζονται ομοιότητες στον τρόπο αντιμετώπισης των έργων που περιλαμβάνονται σε αυτές.

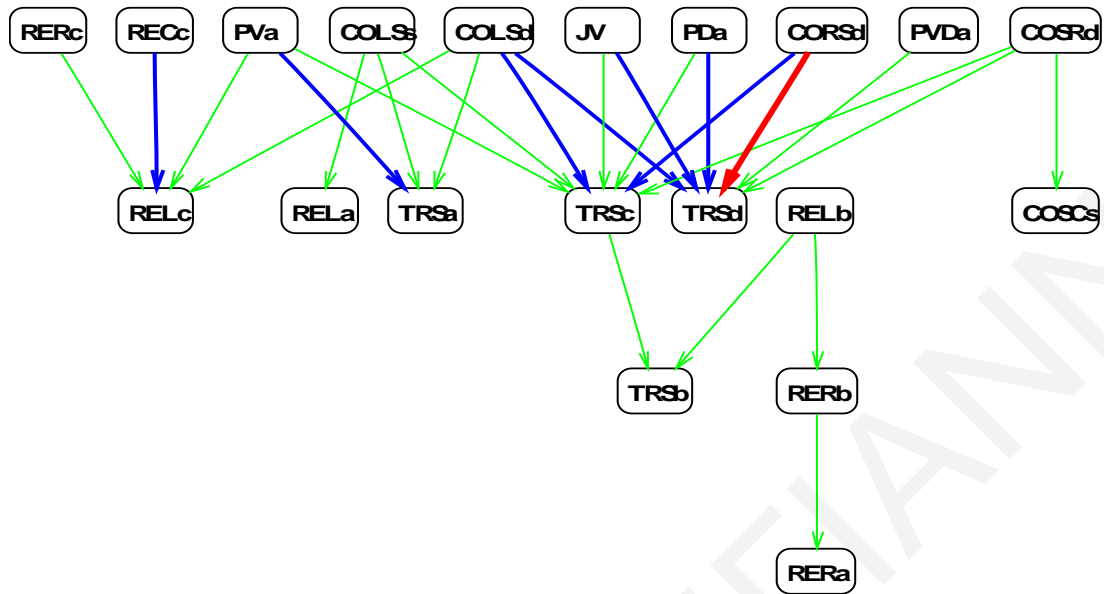
Από την άλλη, η τρίτη κλάση περιλαμβάνει δύο υποομάδες με έργα αναγνώρισης. Στην πρώτη υποομάδα εντοπίζονται έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε διαγραμματικές αναπαραστάσεις με αριθμό υποδιαιρέσεων διπλάσιο από τον παρονομαστή (RERa, RERb, RELb), ενώ στη δεύτερη υποομάδα τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων (RECa, RELc, RERc). Οι μαθητές συμπεριφέρονται με όμοιο τρόπο κατά την επίλυση των συγκεκριμένων έργων τόσο λόγω της λειτουργίας της αναγνώρισης που επιτελείται όσο και λόγω της εμπλεκόμενης έννοιας της ισοδυναμίας κλασμάτων. Παρόλα αυτά, τα έργα που περιλαμβάνονται στην τρίτη κλάση αντιμετωπίζονται από τους μαθητές αποσπασματικά σε σχέση με τα υπόλοιπα έργα πρόσθεσης κλασμάτων υποδεικνύοντας ότι οι μαθητές δεν εντοπίζουν στο σύνολο των έργων την κοινή υποκείμενη μαθηματική έννοια.

Με τη βοήθεια της έννοιας των συμπληρωματικών μεταβλητών εντοπίστηκε ότι η ηλικιακή ομάδα που συντελεί στην διαμόρφωση των ομάδων ομοιότητας που αναφέρονται στο Διάγραμμα 21 είναι στις πλείστες των περιπτώσεων οι μαθητές της Β΄ γυμνασίου. Ως εκ τούτου, σημειώνεται ότι οι μαθητές ακόμη και στη Β΄ γυμνασίου παρουσιάζουν δυσκολίες στον εντοπισμό της κοινής υποκείμενης έννοιας της πρόσθεσης κλασμάτων σε έργα που επιτελούν διαφορετικές λειτουργίες. Εντούτοις, αξίζει να σημειωθεί ότι επιβεβαιώνεται η εν μέρει άρση της στεγανοποίησης ως προς το πεδίο αναπαράστασης και τη σχετική υπό-έννοια της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων.

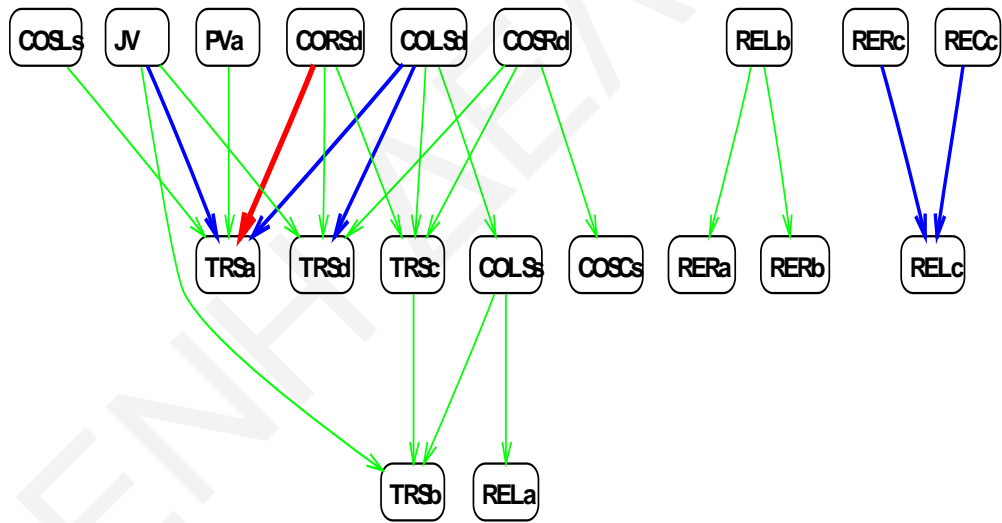
Τα Διαγράμματα 22 και 23 περιλαμβάνουν τα συνεπαγωγικά διαγράμματα των απαντήσεων των μαθητών των τεσσάρων τάξεων στο δοκίμιο. Η μορφή των συνεπαγωγικών αλυσίδων των απαντήσεων των μαθητών στα συγκεκριμένα διαγράμματα παρουσιάζει ως επί το πλείστον κοινά χαρακτηριστικά, γεγονός που υποδηλώνει ότι τα έργα του δοκιμίου έχουν τον ίδιο βαθμό δυσκολίας και για τις τέσσερις ηλικιακές ομάδες.

Συγκεκριμένα, εντοπίζονται στα διαγράμματα δύο διακριτές αλυσίδες όσον αφορά τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης κλασμάτων. Στη μια αλυσίδα εντοπίζονται τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων με αριθμό υποδιαιρέσεων το διπλάσιο του παρονομαστή, ενώ η άλλη αλυσίδα περιλαμβάνει τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων. Ως εκ τούτου, επιβεβαιώνεται η επίδραση της έννοιας των ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων στην ικανότητα αναγνώρισης της πρόσθεσης κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων. Από την άλλη, η εξοικείωση των μαθητών των τεσσάρων τάξεων με τα έργα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων επιβεβαιώνεται λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι τα συγκεκριμένα έργα εντοπίζονται στις καταλήξεις των συνεπαγωγικών αλυσίδων που τα περιλαμβάνουν.

Όσον αφορά τα έργα μετάφρασης, οι συνεπαγωγικές αλυσίδες περιλαμβάνουν έργα μετάφρασης τα οποία έχουν την ίδια αρχική αναπαράσταση υποδηλώνοντας μιας μορφής στεγανοποίηση, η οποία εντοπίζεται και στις τέσσερις ηλικιακές ομάδες. Επιπλέον, οι διαμορφωμένες συνεπαγωγικές αλυσίδες στα Διαγράμματα 22 και 23 υποδεικνύουν ότι: α) η ικανότητα μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων και το αντίστροφο συνεπάγεται την ικανότητα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων και την ικανότητα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή και β) η επιτυχία στα έργα πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων συνεπάγεται την επιτυχία στα έργα πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων. Η επιτυχία επίσης στα προβλήματα πρόσθεσης κλασμάτων συνεπάγεται την επιτυχία στα έργα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων γεγονός που υποδηλώνει ότι οι μαθητές των τεσσάρων τάξεων βασίζονται κατά κύριο λόγο στην εκτέλεση συμβολικών χειρισμών για επίλυσή τους.

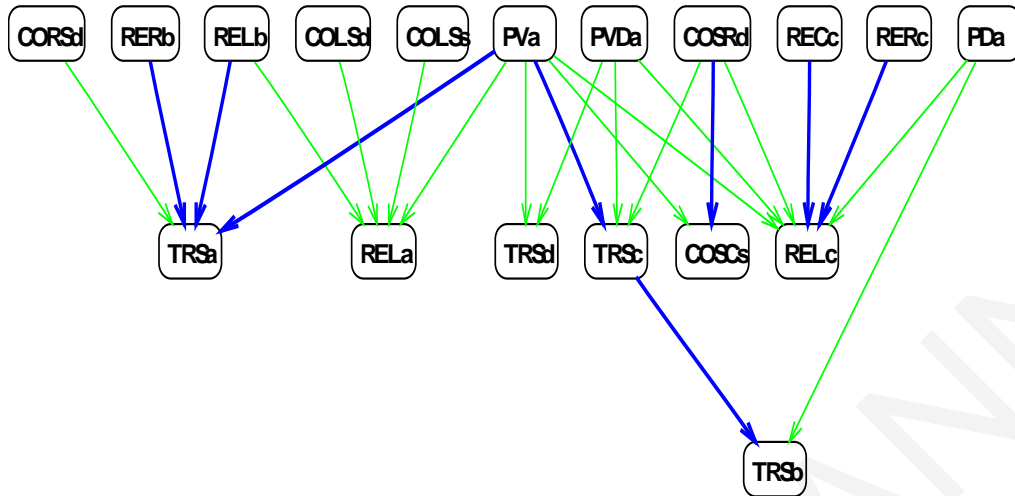


Ε' δημοτικού

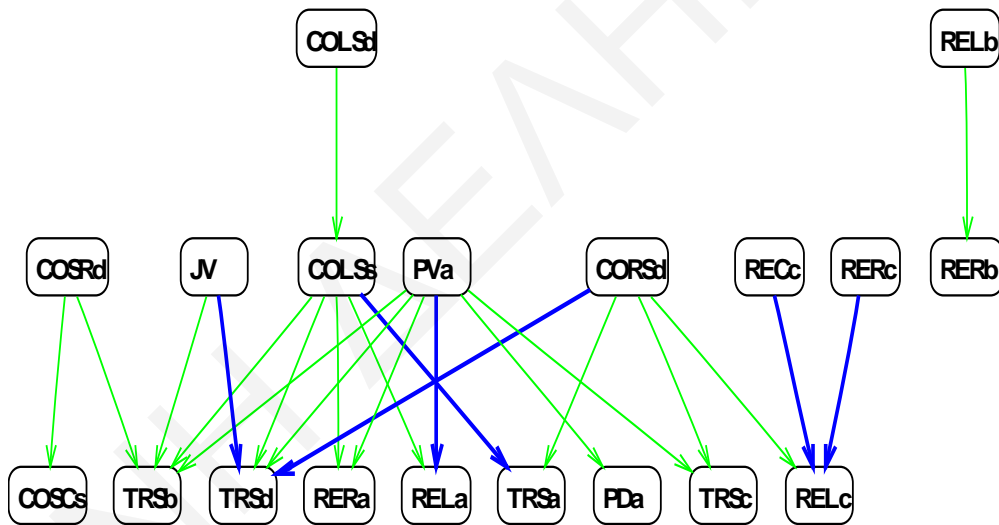


Στ' δημοτικού

Διάγραμμα 22. Συνεπαγωγικά διαγράμματα των απαντήσεων των μαθητών της Ε' και της Στ' δημοτικού στα έργα του δοκιμίου (Α' ερευνητική φάση).



A' γυμνασίου



B' γυμνασίου

Διάγραμμα 23. Συνεπαγωγικά διαγράμματα των απαντήσεων των μαθητών της Α' και Β' γυμνασίου στα έργα του δοκιμίου (Α' ερευνητική φάση).

Εντούτοις, παρά το γεγονός ότι σε γενικές γραμμές τα συνεπαγωγικά διαγράμματα παρουσιάζουν κοινή μορφή, στις επιμέρους συνεπαγωγικές αλυσίδες των απαντήσεων των μαθητών κάθε τάξης εντοπίζονται ορισμένες διαφοροποιήσεις. Συγκεκριμένα, η επίλυση του λεκτικού προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων συνεπάγεται την επιτυχία σε έργα συμβολικού

χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων και αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή όσον αφορά τους μαθητές της Α΄ γυμνασίου. Για τους μαθητές της Β΄ γυμνασίου η επίλυση του λεκτικού προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων συνεπάγεται την επιτυχία στα έργα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού και στην αριθμητική γραμμή και την ορθή επίλυση του διαγραμματικού προβλήματος. Ως εκ τούτου, υποδεικνύεται η ανάγκη ανάπτυξης της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων και της ικανότητας επίλυσης διαγραμματικών προβλημάτων στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση για τη βελτίωση της ικανότητας των μαθητών να επιλύουν σύνθετα λεκτικά προβλήματα πρόσθεσης κλασμάτων.

Επιπλέον, σύμφωνα με το Διάγραμμα 22 η επιτυχία των μαθητών της Ε΄ δημοτικού στο έργο μετάφρασης από αριθμητική γραμμή σε συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων συνεπάγεται την επιτυχία σε έργα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης κλασμάτων και αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή. Η επιτυχία των μαθητών της Α΄ γυμνασίου στο έργο μετάφρασης από συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων σε ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού συνεπάγεται την επιτυχία στο έργο συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων, στο έργο μετάφρασης από συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε κυκλική επιφάνεια εμβαδού και στο έργο αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων. Τέλος, η επιτυχία των μαθητών στο έργο μετάφρασης από ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού σε συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων συνεπάγεται την επιτυχία στα έργα συμβολικού χειρισμού και αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή. Ως εκ τούτου, οι συνεπαγωγικές σχέσεις υποδεικνύουν ότι η ικανότητα αναγνώρισης και χειρισμού της πρόσθεσης κλασμάτων αποτελεί προϋπόθεση για την ικανότητα μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων, και το αντίστροφο.

Περιγραφική Ανάλυση των Λανθασμένων Τρόπων Επίλυσης των Έργων του Δοκιμίου

Οι χαμηλοί μέσοι όροι επιτυχίας στις γνωστικές διαστάσεις που σχετίζονται με την ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και την ικανότητα επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων υποδεικνύουν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές όσον αφορά στην εννοιολογική κατανόηση της συγκεκριμένης έννοιας.

Στις διαστάσεις ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων επισημαίνονται συνολικά εννέα διαφορετικοί τύποι λανθασμένων απαντήσεων.

Πίνακας 11

Ποσοστά Λανθασμένων Απαντήσεων Αναγνώρισης της Πρόσθεσης Ομώνυμων Κλασμάτων κατά Τάξη και Έργο στην Α΄ Ερευνητική Φάση

Έργο	Τάξη	Τύπος λανθασμένης απάντησης		
		Τύπος 1 (%)	Τύπος 5 (%)	Ασυμπλήρωτο Έργο (%)
RELa	Ε΄ δημοτικού	26.6	0.0	39.5
	Στ΄ δημοτικού	22.9	0.0	22.1
	Α΄ γυμνασίου	27.0	0.0	16.3
	Β΄ γυμνασίου	23.5	0.0	22.1
N		571	0	86
RECa	Ε΄ δημοτικού	0.0	27.9	39.5
	Στ΄ δημοτικού	0.0	22.0	22.1
	Α΄ γυμνασίου	0.0	26.2	16.3
	Β΄ γυμνασίου	0.0	23.9	22.1
N		0	614	86
RERa	Ε΄ δημοτικού	30.2	0.0	39.5
	Στ΄ δημοτικού	21.6	0.0	22.1
	Α΄ γυμνασίου	26.5	0.0	16.3
	Β΄ γυμνασίου	21.6	0.0	22.1
N		430	0	86
RERb	Ε΄ δημοτικού	26.2	0.0	44.9
	Στ΄ δημοτικού	21.7	0.0	14.4
	Α΄ γυμνασίου	28.5	0.0	12.7
	Β΄ γυμνασίου	23.6	0.0	28.0
N		785	0	118
RELb	Ε΄ δημοτικού	25.8	0.0	44.9
	Στ΄ δημοτικού	22.8	0.0	14.4
	Α΄ γυμνασίου	26.0	0.0	12.7
	Β΄ γυμνασίου	25.4	0.0	28.0
N		1052	0.0	118

Επεξήγηση συμβολισμού: Τύπος 1: Μη αντίληψη της σχέσης μέρος-όλο, Τύπος 5: Μη αντίληψη της σχέσης μεταξύ των μερών του όλου, RELa, RECa, RERa, RERb, RELb: έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων

Οι Πίνακες 11 και 12 παρουσιάζουν τα ποσοστά λανθασμένων απαντήσεων αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων, αντίστοιχα, κατά τάξη και έργο. Στα συγκεκριμένα έργα η λανθασμένη

απάντηση των μαθητών υποδεικνύει κυρίως τη μη αντίληψη της σχέσης μέρος-όλο (Τύπος 1) και τη μη αντίληψη της σχέσης μεταξύ των μερών του όλου (Τύπος 5).

Πίνακας 12

Ποσοστά Λανθασμένων Απαντήσεων Αναγνώρισης της Πρόσθεσης Ετερόνυμων Κλασμάτων κατά Τάξη και Έργο στην Α΄ Ερευνητική Φάση

Έργο	Τάξη	Τύπος λανθασμένης απάντησης		
		Τύπος 1 (%)	Τύπος 5 (%)	Ασυμπλήρωτο Έργο (%)
RECC	Ε΄ δημοτικού	24.5	0.0	36.7
	Στ΄ δημοτικού	25.5	0.0	20.7
	Α΄ γυμνασίου	25.0	0.0	19.3
	Β΄ γυμνασίου	25.0	0.0	23.3
N		776	0	150
RERC	Ε΄ δημοτικού	21.5	0.0	37.1
	Στ΄ δημοτικού	22.9	0.0	20.5
	Α΄ γυμνασίου	29.0	0.0	19.2
	Β΄ γυμνασίου	26.6	0.0	23.2
N		606	0	151
RELC	Ε΄ δημοτικού	24.5	0.0	36.7
	Στ΄ δημοτικού	21.2	0.0	20.7
	Α΄ γυμνασίου	30.7	0.0	19.3
	Β΄ γυμνασίου	23.5	0.0	23.3
N		387	0	150

Επεξήγηση συμβολισμού: Τύπος 1: Μη αντίληψη της σχέσης μέρος-όλο, Τύπος 5: Μη αντίληψη της σχέσης μεταξύ των μερών του όλου, RECC, RERC, RELC: έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαράστασεων.

Οι πλείστες περιπτώσεις λανθασμένων απαντήσεων εντοπίζονται στα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων στην ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού και την αριθμητική γραμμή με αριθμό υποδιαίρεσεων το διπλάσιο του παρονομαστή και στα έργα

αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων σε κυκλική και ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού. Η δυσκολία των συγκεκριμένων έργων επιβεβαιώνεται τόσο από τη συνεπαγωγική ανάλυση όσο και από τα αποτελέσματα που προκύπτουν από το μοντέλο Rasch, τα οποία παρουσιάστηκαν προηγουμένως. Σε όλες τις περιπτώσεις, το μεγαλύτερο ποσοστό εμφάνισης των συγκεκριμένων λαθών επισημαίνεται σε απαντήσεις μαθητών της Ε΄ δημοτικού και Α΄ γυμνασίου. Εντούτοις, παρατηρείται μεγάλο ποσοστό εμφάνισης των συγκεκριμένων λαθών και στις άλλες δύο ηλικιακές ομάδες, κάτι το οποίο υποδεικνύει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές όσον αφορά στην ικανότητα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων.

Ο Πίνακας 13 παρουσιάζει τα ποσοστά των λανθασμένων απαντήσεων συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων κατά τάξη και έργο. Συγκεκριμένα, επισημαίνονται τρεις τύποι λαθών. Ο πρώτος τύπος λάθους (Τύπος 1) υποδεικνύει τη μη αντίληψη της σχέσης μέρος - όλο. Οι μαθητές δηλαδή θεωρούν τον αριθμητή και τον παρονομαστή σαν δύο ξεχωριστούς αριθμούς οπότε επιλύουν την συμβολική αναπαράσταση αθροίζοντας τους δύο αριθμητές και τους δύο παρονομαστές. Ενδεικτικό παράδειγμα είναι ο εξής τρόπος επίλυσης του έργου συμβολικού χειρισμού πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων: $7/13 + 4/13 = 11/26$. Ο συγκεκριμένος τύπος λάθους εμφανίζεται στις απαντήσεις όλων των ηλικιακών ομάδων. Το ποσοστό εμφάνισής του όμως στην Α΄ γυμνασίου είναι μεγαλύτερο κάτι το οποίο δεν ήταν αναμενόμενο λαμβάνοντας υπόψη την έμφαση που δίνεται στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση στην ευχέρεια συμβολικού χειρισμού του αλγορίθμου της πρόσθεσης κλασμάτων. Ο δεύτερος τύπος λάθους (Τύπος 2) φανερώνει τις δυσκολίες των μαθητών στη μετατροπή από ετερόνυμα σε ομώνυμα κλάσματα όταν καλούνται να επιλύσουν έργα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων. Ενδεικτικά παραδείγματα του συγκεκριμένου τύπου λάθους είναι τα εξής: $1/6 + 4/12 = 6/72 + 48/72 = 54/72$, $1/6 + 2/5 = 3/30$. Το μεγαλύτερο ποσοστό εμφάνισης του συγκεκριμένου λάθους παρουσίασαν και στην περίπτωση αυτή οι μαθητές της Α΄ γυμνασίου. Τα αριθμητικά ή άλλα λάθη που δεν εμπίπτουν στους δύο προαναφερθέντες τύπους λαθών αναφέρονται ως ο ένατος τύπος λάθους (Τύπος 9).

Πίνακας 13

Ποσοστά Λανθασμένων Απαντήσεων Χειρισμού της Πρόσθεσης Ομώνυμων και Ετερόνυμων Κλασμάτων κατά Τάξη και Έργο στην Α΄ Ερευνητική Φάση

Έργο	Τάξη	Τύπος λανθασμένης απάντησης			Ασυμπλήρωτο έργο (%)
		Τύπος 1 (%)	Τύπος 2 (%)	Τύπος 9 (%)	
TRSa	Ε΄ δημοτικού	23.1	0.0	35.3	7.7
	Στ΄ δημοτικού	15.4	0.0	11.8	53.8
	Α΄ γυμνασίου	46.2	0.0	25.5	15.4
	Β΄ γυμνασίου	15.4	0.0	27.5	23.1
N		13	0	51	13
TR Sb	Ε΄ δημοτικού	18.4	28.0	22.1	26.7
	Στ΄ δημοτικού	19.1	14.0	26.0	16.7
	Α΄ γυμνασίου	44.1	34.4	28.6	40.0
	Β΄ γυμνασίου	18.4	23.7	23.4	16.7
N		136	93	77	90
TR Sc	Ε΄ δημοτικού	19.3	28.3	25.5	22.0
	Στ΄ δημοτικού	17.2	20.8	24.5	16.9
	Α΄ γυμνασίου	46.2	32.5	30.9	42.4
	Β΄ γυμνασίου	17.2	18.3	19.1	18.6
N		145	120	110	118
TR Sd	Ε΄ δημοτικού	40.7	0.0	20.6	25.5
	Στ΄ δημοτικού	18.5	0.0	25.8	23.4
	Α΄ γυμνασίου	33.3	0.0	24.7	27.7
	Β΄ γυμνασίου	7.4	0.0	28.9	13.4
N		27	0	97	47

Επεξήγηση συμβολισμού: Τύπος 1: Μη αντίληψη της σχέσης μέρος-όλο, Τύπος 2: Λάθος στο σχηματισμό ομώνυμων κλασμάτων, Τύπος 9: Άλλο λάθος, TRSa, TR Sb, TR Sc, TR Sd: έργα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων.

Αξίζει να σημειωθεί ότι παρατηρήθηκε μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης λανθασμένων τρόπων επίλυσης των έργων συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων σε σχέση με τα αντίστοιχα έργα της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων. Επιπλέον, ένα μεγάλο ποσοστό των μαθητών της Ε΄ δημοτικού και της Α΄ γυμνασίου άφησε ασυμπλήρωτα τα έργα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων. Το

γεγονός αυτό επιβεβαιώνει τα αποτελέσματα προηγούμενων αναλύσεων για την επίδραση της σχετικής υπό-έννοιας της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων όσον αφορά στον καθορισμό του βαθμού δυσκολίας των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων.

Πίνακας 14

Ποσοστά Λανθασμένων Απαντήσεων Μετάφρασης από Συμβολική σε Διαγραμματική Αναπαράσταση της Πρόσθεσης Κλασμάτων κατά Τάξη και Έργο στην Α Έρευνητική Φάση

Έργο	Τάξη	Τύπος λανθασμένης απάντησης						Ασυμπλήρωτο έργο (%)
		Τύπος 1 (%)	Τύπος 3 (%)	Τύπος 4 (%)	Τύπος 7 (%)	Τύπος 8 (%)	Τύπος 9 (%)	
COSCs	Ε΄ δημοτικού	0.0	0.0	0.0	30.3	0.0	26.0	34.3
	Στ΄ δημοτικού	0.0	0.0	0.0	21.2	0.0	29.9	17.1
	Α΄ γυμνασίου	0.0	0.0	0.0	22.7	0.0	24.7	22.9
	Β΄ γυμνασίου	0.0	0.0	0.0	25.8	0.0	19.5	25.7
N		0	0	0	449	0	77	35
COSLs	Ε΄ δημοτικού	0.0	25.3	22.2	26.2	33.3	27.7	29.1
	Στ΄ δημοτικού	0.0	24.0	27.8	21.4	20.4	23.1	25.5
	Α΄ γυμνασίου	0.0	22.6	20.8	28.3	27.8	25.0	18.2
	Β΄ γυμνασίου	0.0	28.1	29.2	24.1	18.5	24.2	27.3
N		0	221	72	145	54	264	55
COSRd	Ε΄ δημοτικού	25.0	0.0	0.0	29.9	0.0	25.4	28.4
	Στ΄ δημοτικού	25.0	0.0	0.0	24.1	0.0	20.5	19.3
	Α΄ γυμνασίου	28.6	0.0	0.0	19.8	0.0	29.4	25.0
	Β΄ γυμνασίου	21.4	0.0	0.0	26.2	0.0	24.8	27.3
N		332	0	0	187	0	303	176

Επεξήγηση συμβολισμού: Τύπος 1: Μη αντίληψη της σχέσης μέρος-όλο, Τύπος 3: Μέτρηση γραμμών στην αριθμητική γραμμή, Τύπος 4: Μη αντίληψη της διαδοχικότητας στην αριθμητική γραμμή, Τύπος 7: Ορθό αποτέλεσμα, Τύπος 8: Συνδυασμός λαθών, Τύπος 9: Άλλο λάθος, COSCs, COSLs, COSRd: έργα μετάφρασης από συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων

Τα ποσοστά των λανθασμένων απαντήσεων στα έργα μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων κατά έργο και τάξη

παρουσιάζονται στον Πίνακα 14. Συγκεκριμένα, στα έργα μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση εντοπίζονται έξι τύποι λαθών. Ο πρώτος τύπος λάθους (Τύπος 1) αναφέρεται στη μη αντίληψη της σχέσης μέρος – όλο. Για παράδειγμα, στο έργο μετάφρασης από τη συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων $2/9 + 1/6 = v$ σε ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού με αριθμό υποδιαίρεσεων το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών των δύο προσθετέων η ένδειξη των μαθητών, οι οποίοι δεν αντιλαμβάνονται τη σχέση μέρος- όλο αντιστοιχούσε στο έργο συμβολικού χειρισμού $2/18 + 1/18 = v$. Αν και η διαφορά στο ποσοστό εμφάνισης είναι μικρή μεταξύ των τεσσάρων ηλικιακών ομάδων, ο συγκεκριμένος τύπος λάθους παρατηρείται σε μεγαλύτερο βαθμό στις λανθασμένες απαντήσεις που δόθηκαν από μαθητές της Α΄ γυμνασίου.

Ο τρίτος τύπος λάθους (Τύπος 3) στα συγκεκριμένα έργα μετάφρασης καταδεικνύει ότι οι μαθητές στην ένδειξη τους στην αριθμητική γραμμή μετρούσαν είτε στο πρώτο είτε/και στο δεύτερο προσθετέο γραμμές και όχι διαστήματα. Ο συγκεκριμένος τύπος λάθους εμφανίζεται κυρίως στις απαντήσεις μαθητών της Β΄ γυμνασίου, κάτι το οποίο αιτιολογείται λαμβάνοντας υπόψη ότι το γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής δεν χρησιμοποιείται στα εγχειρίδια της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Όμως παρά το γεγονός ότι το συγκεκριμένο μοντέλο εντοπίζεται συχνά στα σχολικά εγχειρίδια του δημοτικού σχολείου και οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι με τη χρήση του, το ποσοστό εμφάνισης του συγκεκριμένου λάθους στις απαντήσεις των μαθητών της Ε΄ (25.3%) και Στ΄ (24%) δημοτικού είναι ιδιαίτερα ψηλό.

Οι απαντήσεις των μαθητών που εμπίπτουν στον τέταρτο τύπο λάθους (Τύπος 4) δεν λαμβάνουν υπόψη τη διαδοχικότητα των αριθμών στην αριθμητική γραμμή. Για παράδειγμα, οι μαθητές σχηματίζουν το τόξο που αναφερόταν στον πρώτο προσθετέο, στη συνέχεια αφήναν διάστημα και κατόπιν σχημάτιζαν το τόξο που αναφερόταν στο δεύτερο προσθετέο ή ξεκινούσαν τα δύο τόξα από το μηδέν. Ο συγκεκριμένος τύπος λάθους εμφανίζεται κυρίως στις απαντήσεις των μαθητών της Β΄ γυμνασίου (29.2%). Παρατηρείται όμως σε μεγάλο ποσοστό και στις απαντήσεις των μαθητών της Στ΄ δημοτικού (27.8%), υποδεικνύοντας ότι ούτε οι μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης είναι σε θέση να χειριστούν με ευχέρεια το γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής κατά τη διαδικασία μετάφρασης.

Ο έβδομος τύπος λάθους (Τύπος 7) αναφέρεται στις περιπτώσεις εκείνες των μαθητών που δεν σχηματίζουν στη διαγραμματική αναπαράσταση τη συμβολική αναπαράσταση που απαιτείται αλλά δείχνουν το αποτέλεσμα της πρόσθεσης. Ο συγκεκριμένος τύπος λάθους

εμφανίζεται σε μεγάλο βαθμό και στις τέσσερις ηλικιακές ομάδες και πιθανόν να οφείλεται σε μη κατανόηση των οδηγιών της άσκησης ή σε βιαστική αντιμετώπισή της από τους μαθητές.

Ο όγδοος τύπος λάθους (Τύπος 8) αποτελεί συνδυασμό των προαναφερθέντων τύπων, όπως είναι για παράδειγμα απαντήσεις που υποδεικνύουν ότι οι μαθητές στην ένδειξη που δίνουν μετρούν γραμμές και δε λαμβάνουν υπόψη ούτε τη διαδοχικότητα. Ο συγκεκριμένος τύπος λάθους εντοπίζεται σε μεγάλο βαθμό στις απαντήσεις των μαθητών της Ε΄ δημοτικού (33.3%) και Α΄ γυμνασίου (27.8%). Οι λάθος ενδείξεις που δεν εμπίπτουν στους προαναφερθέντες τύπους λαθών όσον αφορά στα συγκεκριμένα έργα μετάφρασης περιλαμβάνονται στον ένατο τύπο λάθους (Τύπος 9).

Ο Πίνακας 15 παρουσιάζει τα ποσοστά των λανθασμένων απαντήσεων μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων κατά τάξη και έργο.

Στα συγκεκριμένα έργα μετάφρασης εντοπίζονται έξι τύποι λανθασμένων απαντήσεων. Ο πρώτος τύπος (Τύπος 1) αναφέρεται στη δυσκολία των μαθητών να αντιληφθούν τη σχέση μέρος-όλο. Στο έργο μετάφρασης από αριθμητική γραμμή σε συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων ενδεικτικά παραδείγματα του συγκεκριμένου τύπου λάθους είναι οι εξής συμβολικές αναπαραστάσεις: $3/7 + 2/4 = v$, $3/7 + 5/7 = v$, $3/5 + 2/5 = v$. Από την άλλη, στο αντίστοιχο έργο μετάφρασης από ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού σε συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων ενδεικτικά παραδείγματα του συγκεκριμένου τύπου λάθους είναι οι συμβολικές αναπαραστάσεις: $2/3 + 1/2 = v$, $1/3 + 2/3 = v$. Τα ποσοστά εμφάνισης του συγκεκριμένου τύπου λάθους στις απαντήσεις των μαθητών ποικίλει ανάλογα με το έργο. Συγκεκριμένα, στο έργο μετάφρασης από αριθμητική γραμμή σε συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων ο συγκεκριμένος τύπος λάθους εμφανίζεται κυρίως σε απαντήσεις μαθητών της Στ΄ δημοτικού (36.6%), ενώ στο έργο μετάφρασης από ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού σε συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων το μεγαλύτερο ποσοστό εμφάνισης του συγκεκριμένου τύπου λάθους παρατηρείται σε απαντήσεις μαθητών Β΄ γυμνασίου (30.3%). Στα έργα μετάφρασης από κυκλική επιφάνεια εμβαδού και αριθμητική γραμμή σε συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων πιο συχνά συναντάται ο πρώτος τύπος λάθους στις απαντήσεις των μαθητών της Ε΄ δημοτικού. Τα συγκεκριμένα ευρήματα υποδεικνύουν δηλαδή ότι οι μαθητές πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης

αντιμετωπίζουν στον ίδιο περίπου βαθμό δυσκολίες στα έργα μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων.

Πίνακας 15

Ποσοστά Λανθασμένων Απαντήσεων Μετάφρασης από Διαγραμματική σε Συμβολική Αναπαράσταση της Πρόσθεσης Κλασμάτων κατά Τάξη και Έργο στην Α΄ Ερευνητική Φάση

Έργο	Τάξη	Τύπος λανθασμένης απάντησης						Ασυμπλήρωτο έργο (%)
		Τύπος 1 (%)	Τύπος 3 (%)	Τύπος 5 (%)	Τύπος 6 (%)	Τύπος 8 (%)	Τύπος 9 (%)	
COLSs	Ε΄ δημοτικού	29.3	26.8	0.0	35.8	33.3	23.4	24.4
	Στ΄ δημοτικού	24.1	22.0	0.0	33.8	33.3	21.6	15.4
	Α΄ γυμνασίου	22.4	29.7	0.0	11.8	22.8	22.5	28.0
	Β΄ γυμνασίου	24.1	21.5	0.0	18.6	10.5	32.4	32.1
N		58	418	0	204	57	111	246
COCSs	Ε΄ δημοτικού	38.5	0.0	0.0	41.4	0.0	24.4	26.6
	Στ΄ δημοτικού	15.4	0.0	0.0	30.3	0.0	24.4	16.4
	Α΄ γυμνασίου	25.0	0.0	0.0	9.2	0.0	27.0	29.3
	Β΄ γυμνασίου	21.2	0.0	0.0	19.1	0.0	24.2	27.7
N		52	0	0	152	0	356	256
COLSd	Ε΄ δημοτικού	26.8	24.6	0.0	38.1	43.2	26.6	25.9
	Στ΄ δημοτικού	36.6	19.5	0.0	31.7	19.3	23.7	19.5
	Α΄ γυμνασίου	15.9	29.9	0.0	10.6	27.3	24.3	28.4
	Β΄ γυμνασίου	20.7	26.0	0.0	19.6	10.2	25.4	26.2
N		82	334	0	189	88	173	313
CORSD	Ε΄ δημοτικού	24.6	0.0	24.1	43.5	28.1	20.9	26.5
	Στ΄ δημοτικού	22.7	0.0	20.6	32.1	40.6	25.3	18.7
	Α΄ γυμνασίου	22.4	0.0	25.5	6.9	25.0	29.7	27.4
	Β΄ γυμνασίου	30.3	0.0	29.8	17.6	6.3	27.4	27.4
N		353	0	141	131	32	182	347

Επεξήγηση συμβολισμού: Τύπος 1: Μη αντίληψη της σχέσης μέρος-όλο, Τύπος 3: Μέτρηση γραμμών στην αριθμητική γραμμή, Τύπος 5: Μη αντίληψη της σχέσης μεταξύ των μερών του όλου, Τύπος 6: Συμβολική αναπαράσταση ακεραίων ή δεκαδικών, Τύπος 8: Συνδυασμός λαθών, Τύπος 9: Άλλο λάθος, COLSs, COCSs, CORSD: έργα μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης κλασμάτων

Ο τρίτος τύπος λάθους (Τύπος 3) υποδεικνύει όπως και στην περίπτωση των έργων μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων ότι οι μαθητές μετρούν στην αριθμητική γραμμή τις γραμμές αντί τα διαστήματα. Για παράδειγμα, στο έργο μετάφρασης από αριθμητική γραμμή σε συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων ενδεικτικές απαντήσεις των μαθητών που έκαναν το συγκεκριμένο τύπο λάθος είναι οι εξής συμβολικές αναπαραστάσεις: $4/8 + 2/8 = v$, $3/8 + 3/8 = v$. Το συγκεκριμένο λάθος εντοπίζεται σε μεγαλύτερο ποσοστό στις απαντήσεις των μαθητών της Α΄ γυμνασίου. Όμως, ο τρίτος τύπος λάθους (Τύπος 3) εντοπίζεται έντονα και στις υπόλοιπες ηλικιακές ομάδες.

Ο πέμπτος τύπος λάθους (Τύπος 5) εμφανίζεται στο έργο μετάφρασης από ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού σε συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων και αναφέρεται σε συμβολικές αναπαραστάσεις που έδωσαν οι μαθητές, οι οποίες καταδεικνύουν ότι αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην κατανόηση της σχέσης μεταξύ των μερών του όλου. Ενδεικτικό παράδειγμα είναι για το συγκεκριμένο έργο η εξής συμβολική αναπαράσταση που δόθηκε από ένα σημαντικό αριθμό μαθητών: $1/4 + 2/4 = v$. Ο συγκεκριμένος τύπος λάθους παρατηρείται κυρίως σε απαντήσεις μαθητών Α΄ και Β΄ γυμνασίου σε ποσοστό 25.5% και 29.8%, αντίστοιχα. Εμφανίζεται όμως σε μεγάλο ποσοστό και σε λανθασμένες απαντήσεις μαθητών που φοιτούν στην Ε΄ και Στ΄ δημοτικού σε ποσοστό 24.1% και 20.6%, αντίστοιχα. Οι απαντήσεις των μαθητών στις οποίες δινόταν ως συμβολική αναπαράσταση η πρόσθεση ακεραίων ή δεκαδικών αποτελεί τον έκτο τύπο λάθους (Τύπος 6) που εντοπίστηκε στις απαντήσεις των μαθητών των τεσσάρων ηλικιακών ομάδων στα συγκεκριμένα έργα. Μεγαλύτερο ποσοστό εμφάνισης του συγκεκριμένου τύπου λάθους παρατηρείται στις απαντήσεις των μαθητών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Ο όγδοος τύπος λάθους (Τύπος 8) αποτελεί συνδυασμό των προαναφερθέντων τύπων λαθών. Για παράδειγμα, στο έργο μετάφρασης από αριθμητική γραμμή σε συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων πολλοί μαθητές έδωσαν συμβολική αναπαράσταση που καταδείκνυε ότι δεν αντιλαμβάνονταν τη σχέση μέρος-όλο αλλά επίσης και ότι μετρούσαν γραμμές στην αριθμητική γραμμή αντί διαστήματα. Ενδεικτικό παράδειγμα είναι για το συγκεκριμένο έργο οι εξής συμβολικές αναπαραστάσεις: $2/12 + 4/12 = v$, $1/10 + 3/5 = v$, $1/10 + 4/10 = v$, $1/1 + 4/1 = v$. Ο βαθμός εμφάνισης του συγκεκριμένου τύπου λάθους κατά τάξη ποικίλει αφού σε ορισμένα έργα παρατηρείται μεγαλύτερο ποσοστό απαντήσεων με συνδυασμό λαθών από μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευση, ενώ σε άλλες περιπτώσεις από μαθητές της δευτεροβάθμιας

εκπαίδευσης. Οι λάθος συμβολικές αναπαραστάσεις που δεν εμπίπτουν στους προαναφερθέντες τύπους λαθών εμπίπτουν στον ένατο τύπο λάθους (Τύπος 9).

Συνεπώς, με βάση τα αποτελέσματα στους Πίνακες 11 μέχρι 15, το μεγαλύτερο ποσοστό εμφάνισης των πλείστων τύπων λανθασμένων απαντήσεων δόθηκαν από μαθητές της Α΄ γυμνασίου. Εντούτοις, η διαφορά στο ποσοστό εμφάνισης των λαθών αυτών στις απαντήσεις των μαθητών των υπόλοιπων τριών ηλικιακών ομάδων είναι μικρή. Το αποτέλεσμα αυτό υποδηλώνει ότι οι μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης παρόλο που έρχονται σε επαφή με ποικιλία αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων δεν ήταν σε θέση να τις χειριστούν με ευελιξία. Ιδιαίτερα μη αναμενόμενη ήταν η εμφάνιση σε μεγάλο ποσοστό ορισμένων τύπων λαθών που σχετίζονται με την αριθμητική γραμμή στις απαντήσεις των μαθητών της Στ΄ δημοτικού στα έργα μετάφρασης. Από την άλλη, τα ψηλά ποσοστά εμφάνισης των διαφόρων τύπων λαθών από μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης πιθανόν να σχετίζονται με το γεγονός ότι τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών δεν εμπλέκουν πολλαπλά πεδία αναπαράστασης για τη συγκεκριμένη έννοια.

Όσον αφορά στο λεκτικό πρόβλημα αιτιολόγησης διακρίνονται δέκα διαφορετικοί τύποι απαντήσεων. Ο Πίνακας 16 παρουσιάζει τα ποσοστά των διάφορων τύπων απαντήσεων κατά τάξη στο συγκεκριμένο έργο.

Πίνακας 16

Ποσοστά Απαντήσεων των Μαθητών στο Πρόβλημα Λεκτικής Αιτιολόγησης κατά Τάξη και Τύπο στην Α΄ Ερευνητική Φάση

Τύπος απάντησης	Ε΄ δημοτικού	Στ΄ δημοτικού	Α΄ γυμνασίου	Β΄ γυμνασίου	N
Τύπος 1 (%)	25.0	25.0	20.8	29.2	24
Τύπος 2 (%)	9.5	28.6	28.1	23.8	21
Τύπος 3 (%)	21.1	22.8	13.2	43.0	114
Τύπος 4 (%)	15.2	35.4	20.2	29.1	381
Τύπος 5 (%)	20.2	27.3	23.1	29.3	242
Τύπος 6 (%)	29.5	21.0	30.8	18.8	224
Τύπος 7 (%)	43.5	30.4	26.1	0.0	23
Τύπος 8 (%)	25.8	21.2	23.5	29.5	132
Τύπος 9 (%)	34.5	9.2	27.6	28.7	87
Τύπος 10 (%)	29.7	13.2	26.4	30.8	91
Ασυμπλήρωτο (%)	29.8	20.4	25.1	29.5	132

Εξήγηση συμβολισμού: Τύπος 1: Ολοκληρωμένη αιτιολόγηση, Τύπος 2: Ορθή αιτιολόγηση με αναφορά στον αλγόριθμο της πρόσθεσης κλασμάτων, Τύπος 3: Ορθή μη ολοκληρωμένη αιτιολόγηση, Τύπος 4: Ορθό μεμονωμένο παράδειγμα συμβολική αναπαράστασης πρόσθεσης κλασμάτων, Τύπος 5: Ορθή απάντηση χωρίς αιτιολόγηση, Τύπος 6: Ορθή απάντηση με λάθος ή μη σχετική αιτιολόγηση, Τύπος 7: Ορθή απάντηση με αιτιολόγηση που φανερώνει λάθος αντιλήψεις για την πρόσθεση κλασμάτων, Τύπος 8: Λάθος απάντηση με λάθος ή μη σχετική αιτιολόγηση, Τύπος 9: Λάθος απάντηση με αιτιολόγηση που φανερώνει λάθος αντιλήψεις για την πρόσθεση κλασμάτων, Τύπος 10: Λάθος απάντηση χωρίς αιτιολόγηση

Ο πρώτος τύπος απάντησης (Τύπος 1) περιλαμβάνει τις ολοκληρωμένες λεκτικές αιτιολογήσεις με ή χωρίς παραδείγματα αντίστοιχων συμβολικών αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων. Ενδεικτικές απαντήσεις που δόθηκαν από τους μαθητές και περιλαμβάνονται στο συγκεκριμένο τύπο είναι οι εξής:

«Ναι, γιατί μπορεί οι δύο αριθμητές να έχουν άθροισμα μεγαλύτερο από τον παρονομαστή»
 «Συμφωνώ. Μπορεί το αποτέλεσμα να είναι είτε μικρότερο από μονάδα (π.χ. $5/10 + 4/10 = 9/10$) είτε μεγαλύτερο (π.χ. $6/10 + 9/10 = 15/10$) είτε ίσο ($4/10 + 6/10 = 10/10 = 1$). Εξαρτάται αν το άθροισμα των αριθμητών είναι μεγαλύτερο, μικρότερο ή ίσο από τον παρονομαστή».

Ο αριθμός των μαθητών που απάντησαν ολοκληρωμένα στο συγκεκριμένο έργο είναι ιδιαίτερα μικρός αφού ανέρχεται μόνο στο 1.4 % του συνόλου των μαθητών (24 μαθητές). Από τους μαθητές που χρησιμοποίησαν τον πρώτο τύπο απάντησης το 25% φοιτούσε στην Ε΄ δημοτικού, το 25% στη Στ΄ δημοτικού, το 20.8% στην Α΄ γυμνασίου και το 29.2% στη Β΄ γυμνασίου. Ως εκ τούτου, περίπου το ίδιο ποσοστό από κάθε ηλικιακή ομάδα δίνει ολοκληρωμένη λεκτική αιτιολόγηση με ή χωρίς παραδείγματα αντίστοιχων συμβολικών αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων.

Οι ορθές λεκτικές αιτιολογήσεις, οι οποίες αναφέρονται στον αλγόριθμο της πρόσθεσης με ή χωρίς παραδείγματα σχετικών συμβολικών αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων αποτελούν το δεύτερο τύπο απάντησης (Τύπος 2). Ενδεικτικές απαντήσεις του συγκεκριμένου τύπου που δόθηκαν από μαθητές του δείγματος είναι οι εξής:

«Ναι γιατί όταν προσθέσεις δύο κλάσματα ο παρονομαστής μένει ο ίδιος ενώ ο αριθμητής αυξάνεται».

«Συμφωνώ γιατί αν οι παρονομαστές είναι οι ίδιοι τότε οι αριθμητές θα προστεθούν».

Το ποσοστό εμφάνισης του συγκεκριμένου τύπου απάντησης είναι μικρό, ανέρχεται στο 1.2% (21 μαθητές), και εντοπίζεται κυρίως σε απαντήσεις μαθητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (38, 1 % στην Α΄ γυμνασίου και 23, 8% στη Β΄ γυμνασίου). Το γεγονός αυτό αιτιολογείται λαμβάνοντας υπόψη την έμφαση που δίνεται στον αλγόριθμο της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Ο τρίτος τύπος απαντήσεων (Τύπος 3) αναφέρεται σε ορθές αλλά μη ολοκληρωμένες λεκτικές επεξηγήσεις ή παραδείγματα συμβολικών αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων, όπως είναι για παράδειγμα οι παρακάτω απαντήσεις:

«Το αποτέλεσμα μπορεί να είναι μεγαλύτερο από τη μονάδα ή μπορεί να είναι και μικρότερο».

«Ούτε συμφωνώ ούτε διαφωνώ επειδή μπορεί να είναι $3/8 + 7/8$ ή $4/8 + 3/8$ ».

Το ποσοστό εμφάνισης του συγκεκριμένου τύπου απάντησης για το σύνολο των μαθητών ανέρχεται στο 6.7% (114 μαθητές) και εντοπίζεται κυρίως στις απαντήσεις μαθητών της Β΄ γυμνασίου (43%). Παρόλο δηλαδή που οι μαθητές της Β΄ γυμνασίου ήταν σε θέση να αντιληφθούν την ορθότητα της δήλωσης δεν έδωσαν μια επαρκή λεκτική αιτιολόγηση για αυτήν.

Ο τέταρτος τύπος απαντήσεων (Τύπος 4) αναφέρεται στις περιπτώσεις που οι μαθητές έδωσαν ως απάντηση μια μεμονωμένη συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης κλασμάτων, όπως για παράδειγμα την συμβολική αναπαράσταση: « $3/4 + 3/4 = 6/4$ ». Ο συγκεκριμένος τύπος απάντησης χρησιμοποιείται σε ποσοστό 22.4% από το σύνολο των μαθητών (381 μαθητές) που λαμβάνουν μέρος στην έρευνα, ενώ εντοπίζεται κυρίως στις απαντήσεις των μαθητών της Στ' δημοτικού (35.4%) και Β' γυμνασίου (29.1%).

Οι απαντήσεις των μαθητών που ανέφεραν ότι συμφωνούν με τη δήλωση που διατυπωνόταν χωρίς αιτιολόγηση ή ενδεικτικό παράδειγμα συμβολική αναπαράστασης πρόσθεσης κλασμάτων ή με επανάληψη της εκφώνησης αποτελούν τον πέμπτο τύπο απαντήσεων (Τύπος 5). Ο συγκεκριμένος τύπος απάντησης χρησιμοποιήθηκε από το 14.2% των μαθητών (242 μαθητές) και παρατηρείται στον ίδιο βαθμό στις απαντήσεις των μαθητών των τεσσάρων ηλικιακών ομάδων. Ο έκτος τύπος απάντησης (Τύπος 6) αναφέρεται στις περιπτώσεις που οι μαθητές συμφώνησαν με τη δήλωση που διατυπωνόταν δίνοντας όμως λάθος ή μη σχετική αιτιολόγηση. Ενδεικτικά παραδείγματα του συγκεκριμένου τύπου απάντησης είναι τα εξής:

«Συμφωνώ γιατί τα κλάσματα αυτά ονομάζονται καταχρηστικά έτσι όταν ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή σημαίνει ότι είναι μεγαλύτερος από την ακέραια μονάδα».

« $4/1 + 5/1=9/1$ ».

Το ποσοστό εμφάνισης του συγκεκριμένου τύπου απάντησης ανέρχεται στο 13.2 % στο σύνολο των μαθητών (224 μαθητές), ενώ εντοπίζεται κυρίως σε απαντήσεις μαθητών της Ε' δημοτικού (29.5 %) και Α' γυμνασίου (30.8%). Οι μαθητές που χρησιμοποίησαν τον έκτο τύπο απάντησης είναι εμφανές ότι δεν κατανόησαν τη λεκτική εκφώνηση του έργου και ως εκ τούτου η απάντησή τους δεν ανταποκρινόταν σε αυτό.

Οι απαντήσεις των μαθητών που συμφώνησαν με τη δήλωση που διατυπωνόταν αλλά μέσα από την αιτιολόγησή τους εντοπίζονται λάθος αντιλήψεις για την πρόσθεση κλασμάτων εντάσσονται στον έβδομο τύπο αιτιολόγησης (Τύπος 7). Ενδεικτικό παράδειγμα είναι η εξής απάντηση:

«Συμφωνώ με το αγόρι γιατί όταν προσθέσεις δύο κλάσματα που έχουν αριθμητή μικρότερο από τον παρονομαστή το αποτέλεσμα θα βγει μεγαλύτερο από τη μονάδα».

Ο συγκεκριμένος τύπος απάντησης χρησιμοποιείται από μικρό ποσοστό των μαθητών που λαμβάνουν μέρος στην έρευνα, το οποίο ανέρχεται στο 1.4% (23 μαθητές) και εντοπίζεται κυρίως στις απαντήσεις μαθητών της Ε΄ δημοτικού (43.5%).

Το 7.8% του συνόλου των μαθητών (132 μαθητές) χρησιμοποιεί τον όγδοο τύπο απάντησης (Τύπος 8), ο οποίος αναφέρεται στις λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών στις οποίες η αιτιολόγηση που δίνεται είναι λανθασμένη ή μη αντίστοιχη με την εκφώνηση ή αποτελεί μεμονωμένο παράδειγμα συμβολική αναπαράστασης πρόσθεσης κλασμάτων.

Ενδεικτικό παράδειγμα του συγκεκριμένου τύπου απάντησης είναι το εξής:

«Διαφωνώ γιατί αν προσθέσεις $5/12 + 5/12 = 10/12$, το αποτέλεσμα είναι μικρότερο από τη μονάδα».

«Ναι, γιατί όταν τα προσθέσουμε θα μας βγάλουν κλάσμα που ο αριθμητής θα είναι μικρότερος και ο παρονομαστής μεγαλύτερος και για αυτό θα έχουμε μεικτό».

Ο συγκεκριμένος τύπος απάντησης εντοπίζεται σε μεγάλο βαθμό στις απαντήσεις μαθητών της Β΄ γυμνασίου (29.5%), αλλά χρησιμοποιείται και από τις υπόλοιπες ηλικιακές ομάδες σε ποσοστό που ανέρχεται σε 25.8 % για τους μαθητές της Ε΄ δημοτικού, 21.2 % για τους μαθητές της Στ΄ δημοτικού και 23.5 % για τους μαθητές της Α΄ γυμνασίου.

Ο ένατος τύπος απάντησης (Τύπος 9) αναφέρεται στις απαντήσεις μαθητών οι οποίοι διαφωνούν με τη δήλωση που διατυπώνεται δίνοντας αιτιολόγηση, η οποία φανερώνει λάθος αντιλήψεις για τα κλάσματα. Ενδεικτικές απαντήσεις του συγκεκριμένου τύπου είναι οι εξής:

«Διαφωνώ γιατί πάντα ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή».

«Διαφωνώ. Μόνο μονάδα μπορούν να σχηματίσουν όχι όμως κλάσμα μεγαλύτερο από τη μονάδα».

«Διαφωνώ γιατί αν προσθέσεις δύο κλάσματα που έχουν αριθμητή μικρότερο από τον παρονομαστή το αποτέλεσμα είναι μικρότερο από τη μονάδα».

Ο ένατος τύπος απάντησης (Τύπος 9) συναντάται σε ποσοστό 5.1% στις απαντήσεις των μαθητών (87 μαθητές). Αξίζει να σημειωθεί ότι εντοπίζεται μόνο σε ποσοστό 9.2% στις απαντήσεις των μαθητών στη Στ΄ δημοτικού, ενώ χρησιμοποιείται σε ποσοστό 34.5% από μαθητές της Ε΄ δημοτικού, 27.6% από μαθητές της Α΄ γυμνασίου και 28.7% από μαθητές της Β΄ γυμνασίου.

Οι μαθητές που σημειώνουν μόνο τη διαφωνία τους με τη δήλωση που διατυπώνεται χωρίς οποιαδήποτε αιτιολόγηση, παράδειγμα ή επαναλαμβάνοντας τη διατύπωση του έργου χρησιμοποιούν το δέκατο τύπο απάντησης (Τύπος 10). Ο συγκεκριμένος τύπος απάντησης εντοπίζεται σε ποσοστό 5.3% στις απαντήσεις του συνόλου των μαθητών (91 μαθητές). Όπως και στην περίπτωση του ένατου τύπου απάντησης οι μαθητές της Στ' δημοτικού χρησιμοποιούν το δέκατο τύπο απάντησης σε μικρό ποσοστό (13, 2%). Από τους μαθητές που δίνουν το συγκεκριμένο τύπο απάντησης το 29.7% είναι μαθητές της Ε' δημοτικού, το 26.4% είναι μαθητές της Α' γυμνασίου και το 30.8% είναι μαθητές της Β' γυμνασίου. Αξίζει να σημειωθεί ότι ένα μεγάλο μέρος του συνόλου των μαθητών, το οποίο ανέρχεται στο 21.3% (362 μαθητές), δε δίνουν οποιαδήποτε απάντηση στο συγκεκριμένο έργο.

Λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα της περιγραφικής ανάλυσης για τους τύπους των απαντήσεων που εμφανίζονται κατά την επίλυση του λεκτικού προβλήματος αιτιολόγησης πρόσθεσης κλασμάτων είναι εμφανές ότι παρατηρείται μια μεγάλη ποικιλία απαντήσεων στο συγκεκριμένο έργο από τους μαθητές των τεσσάρων ηλικιακών ομάδων. Ένα μεγάλο ποσοστό των απαντήσεων που δίνονται από το σύνολο των μαθητών χαρακτηρίζονται ως λανθασμένες (29.8%). Το συγκεκριμένο αποτέλεσμα έρχεται σε συμφωνία με τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών στα έργα του δοκιμίου που παρουσιάζονται στον Πίνακα 8 σύμφωνα με τα οποία το πρόβλημα λεκτικής αιτιολόγησης αποτελεί το δυσκολότερο έργο του δοκιμίου. Αξίζει να σημειωθεί όμως ότι συγκριτικά με τις υπόλοιπες ηλικιακές ομάδες οι μαθητές της Στ' δημοτικού έδωσαν το μικρότερο ποσοστό λανθασμένων τύπων απαντήσεων. Οι υπόλοιπες ηλικιακές ομάδες χρησιμοποίησαν στον ίδιο περίπου βαθμό τους λανθασμένους τρόπους απαντήσεων. Από την άλλη, εντοπίζεται ένα ιδιαίτερα μικρό ποσοστό μαθητών σε κάθε τάξη οι οποίοι δίνουν ολοκληρωμένη λεκτική αιτιολόγηση με ή χωρίς σχετικά παραδείγματα συμβολικών αναπαραστάσεων (1.4%) κάτι που υποδεικνύει τις δυσκολίες εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων. Η πλειοψηφία των μαθητών (44.5%) χρησιμοποιούν τύπους απαντήσεων (Τύπος 2 μέχρι 5), οι οποίοι υποδηλώνουν αποσπασματική εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων. Οι συγκεκριμένοι τύποι σωστών αλλά με ανεπαρκή αιτιολόγηση απαντήσεων εντοπίζονται κυρίως στις απαντήσεις μαθητών Στ' δημοτικού και Β' γυμνασίου. Το συγκεκριμένο είδος έργου γενικά φάνηκε να δυσκόλεψε τους μαθητές, οι οποίοι τόσο στην πρωτοβάθμια όσο ούτε και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση δεν είναι εξοικειωμένοι με την επίλυση λεκτικών προβλημάτων αιτιολόγησης.

Πίνακας 17

Ποσοστά Λανθασμένων Απαντήσεων στα Προβλήματα Πρόσθεσης Κλασμάτων κατά Τάξη και Έργο στην Α΄ Ερευνητική Φάση

Έργο	Τάξη	Λανθασμένος τρόπος επίλυσης					Ασυμπλήρωτο έργο
		Τύπος	Τύπος	Τύπος	Τύπος	Τύπος	
		1	2	3	4	5	
PD	Ε΄ δημοτικού	19.7	31.1	23.0	31.3	23.6	30.2
	Στ΄ δημοτικού	21.3	24.6	23.7	12.5	19.9	21.1
	Α΄ γυμνασίου	27.9	32.8	22.7	18.8	39.3	24.0
	Β΄ γυμνασίου	31.1	11.5	30.7	37.5	17.3	24.7
N		61	61	300	16	191	530
PVD	Ε΄ δημοτικού	33.3	19.5	23.8	36.4	20.5	30.7
	Στ΄ δημοτικού	20.8	18.3	24.7	15.2	22.6	21.1
	Α΄ γυμνασίου	33.3	32.9	25.3	15.2	36.3	25.1
	Β΄ γυμνασίου	12.5	29.3	26.3	33.3	19.9	23.2
N		24	82	320	33	146	522
PV	Ε΄ δημοτικού	20.7	26.1	24.4	0	24.8	31.0
	Στ΄ δημοτικού	37.0	26.8	25.9	0	25.6	18.5
	Α΄ γυμνασίου	30.4	25.4	21.2	0	33.1	27.6
	Β΄ γυμνασίου	12.0	21.8	28.5	0	16.5	22.9
N		92	142	765	0	121	525

Επεξήγηση συμβολισμού: Τύπος 1: Λάθος τελεστή, Τύπος 2: Λάθος στη μετατροπή σε ομώνυμα κλάσματα ή στην πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων, Τύπος 3: Μη ολοκληρωμένη στρατηγική επίλυσης, Τύπος 4: Διαφορετικός σωστός συνδυασμός, Τύπος 5: Άλλο λάθος/ Άσχετος συσχετισμός, PD, PVD, PV: πρόβλημα με κύρια διαγραμματική αναπαράσταση, λεκτικό πρόβλημα με βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση και λεκτικό πρόβλημα.

Στα υπόλοιπα τρία προβλήματα πρόσθεσης κλασμάτων εμφανίζονται πέντε τύποι λανθασμένου τρόπου επίλυσής τους των οποίων τα ποσοστά παρουσιάζονται στον Πίνακα 17. Ο πρώτος τύπος λάθους (Τύπος 1) σχετίζεται με τη δυσκολία των μαθητών στην εύρεση του τελεστή στο λεκτικό πρόβλημα (PV). Πολλοί μαθητές σημειώνουν για παράδειγμα ότι τα 2/1 των 60 λεπτών είναι 30 λεπτά. Ο συγκεκριμένος τύπος λάθους εντοπίζεται σε μεγάλο ποσοστό κυρίως στις απαντήσεις των μαθητών της Στ΄ δημοτικού (37%) και της Α΄

γυμνασίου (30.4%). Παρόλο που ο συγκεκριμένος τύπος λάθους δε συνδέεται άμεσα με την πρόσθεση κλασμάτων, η εύρεση του τελεστή ήταν απαραίτητη για την επίλυση του συγκεκριμένου σύνθετου προβλήματος. Γενικά η επίλυση του προβλήματος αυτού έδινε τη δυνατότητα σύνθεσης προϋπαρχουσών γνώσεων των μαθητών όσον αφορά στα κλάσματα.

Στην περίπτωση των προβλημάτων με κύρια ή βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση, στα οποία δίνεται το άθροισμα και άγνωστη ποσότητα είναι οι τρεις προσθετέοι, ο πρώτος τύπος λάθους παραπέμπει στη δυσκολία μετατροπής του αθροίσματος στο κατάλληλο ισοδύναμο κλάσμα. Ενδεικτικό παράδειγμα στο λεκτικό πρόβλημα με βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση είναι η περίπτωση στην οποία οι μαθητές θεωρούν ότι το $1/2$ της παραγωγής χυμών είναι ισοδύναμο με τα $19/36$ της παραγωγής χυμών. Σε αυτή την περίπτωση οι μαθητές εντοπίζουν τα είδη χυμών που αντιστοιχούν στο συγκεκριμένο άθροισμα και ως εκ τούτου δίνουν λανθασμένη απάντηση. Ο πρώτος τύπος λάθους εντοπίζεται σε μικρό ποσοστό που ανέρχεται στο 3.6% (61 μαθητές) όσον αφορά την επίλυση του προβλήματος με κύρια διαγραμματική αναπαράσταση και 1.4% (24 μαθητές) όσον αφορά το λεκτικό πρόβλημα με βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση. Το γεγονός ότι ο συγκεκριμένος τύπος λάθους εντοπίζεται σε μικρότερο ποσοστό βαθμό στο λεκτικό πρόβλημα με βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση αιτιολογείται λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι οι μαθητές λόγω εξοικείωσης είναι πιο εύκολο να σχηματίσουν ισοδύναμα κλάσματα με το $1/2$. Αν και ο πρώτος τύπος λάθους στα προβλήματα με κύρια ή βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση δεν συνδέεται άμεσα με την πρόσθεση κλασμάτων, η έννοια της ισοδυναμίας κλασμάτων απαιτείται έμμεσα για την εννοιολογική κατανόηση της συγκεκριμένης έννοιας. Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι ο συγκεκριμένος τύπος λάθους εμφανίζεται στο διαγραμματικό πρόβλημα κυρίως στον τρόπο επίλυσης του από τους μαθητές της Α' γυμνασίου (27.9%) και Β' γυμνασίου (31.1%), στο λεκτικό πρόβλημα με βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση στον τρόπο επίλυσης του από τους μαθητές της Ε' δημοτικού (33.3%) και Α' γυμνασίου (33.3%) και στο λεκτικό πρόβλημα στον τρόπο επίλυσης του από τους μαθητές της Στ' δημοτικού (37.0%) και Α' γυμνασίου (30.4%).

Ο δεύτερος τύπος λάθους (Τύπος 2) αναφέρεται σε λάθη στη μετατροπή από ετερόνυμα σε ομώνυμα κλάσματα ή στην πρόσθεση κλασμάτων. Ενδεικτικό παράδειγμα του δεύτερου τύπου λάθους για το λεκτικό πρόβλημα είναι η εξής συμβολική αναπαράσταση: « $1/2 + 1/6 + 1/3 + 2/1 + 1 = 3/6 + 1/6 + 2/6 + 12/6 + 1/6 = 19/6$ ». Ο συγκεκριμένος τύπος λάθους εντοπίζεται κυρίως στο λεκτικό πρόβλημα πρόσθεσης κλασμάτων σε ποσοστό που ανέρχεται

στα 8.3% (142 μαθητές) και εμφανίζεται σε παρόμοιο ποσοστό στις απαντήσεις των μαθητών των τεσσάρων ηλικιακών ομάδων (26.1% για τους μαθητές της Ε΄ δημοτικού, 26.8% για τους μαθητές της Στ΄ δημοτικού, 25.4% για τους μαθητές της Α΄ γυμνασίου, 21.8% για τους μαθητές της Β΄ γυμνασίου). Στα προβλήματα με κύρια ή βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση ο δεύτερος τύπος λάθους ανέρχεται σε ποσοστό 3.6% (61 μαθητές) και 4.8% (82 μαθητές), αντίστοιχα. Στο πρόβλημα με κύρια διαγραμματική αναπαράσταση εντοπίζεται κυρίως στις απαντήσεις των μαθητών της Ε΄ δημοτικού (31.1%) και Α΄ γυμνασίου (32.8%), ενώ στο λεκτικό πρόβλημα με βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση εντοπίζεται κυρίως στον τρόπο επίλυσης των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (32.9% στην Α΄ γυμνασίου, 29.3% στις Β΄ γυμνασίου). Συνεπώς, τα αποτελέσματα υποδεικνύουν ότι παρά την έμφαση που δίνεται στο συμβολικό χειρισμό της ισοδυναμίας και πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων τόσο στην πρωτοβάθμια όσο και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, ένα μεγάλο μέρος των μαθητών των δυο τελευταίων τάξεων του δημοτικού και των δύο πρώτων τάξεων του γυμνασίου αντιμετωπίζει δυσκολίες στη χρήση τους κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος.

Ο μη ολοκληρωμένος τρόπος επίλυσης των προβλημάτων αντιστοιχεί στον τρίτο τύπο λάθους (Τύπος 3). Στα προβλήματα με κύρια ή βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση ο συγκεκριμένος τύπος λάθους αντιστοιχεί σε ελλιπής στρατηγικές επίλυσης όπως η μετατροπή σε ομώνυμα κλάσματα χωρίς την εκτέλεση πρόσθεσης κλασμάτων, η πρόσθεση όλων των μερών και η μετατροπή σε ομώνυμα με την εκτέλεση προσθέσεων κλασμάτων χωρίς επιτυχή έκβαση. Από την άλλη, στο λεκτικό πρόβλημα ο μη ολοκληρωμένος τρόπος επίλυσης είναι για παράδειγμα η εύρεση μόνο της συνολικής διάρκειας της παράστασης. Ο συγκεκριμένος τύπος λανθασμένης στρατηγικής επίλυσης ανέρχεται στο 17.6% (300 μαθητές) για το διαγραμματικό έργο, στο 18.8% (320 μαθητές) για το λεκτικό πρόβλημα με βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση και στο 45% (765 μαθητές) για το λεκτικό πρόβλημα πρόσθεσης κλασμάτων υποδεικνύοντας την αποσπασματική ικανότητα των μαθητών για επίλυση προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων. Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι το λάθος αυτό εντοπίζεται σε παρόμοιο βαθμό στον τρόπο επίλυσης των προβλημάτων από τις τέσσερις ηλικιακές ομάδες.

Ο τέταρτος τύπος λανθασμένης στρατηγικής επίλυσης (Τύπος 4) αντιστοιχεί σε διαφορετικό από το ζητούμενο συνδυασμό προσθετών με το δεδομένο άθροισμα στα προβλήματα με κύρια ή βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση. Ο συγκεκριμένος τύπος

λάθους εντοπίζεται σε μικρό ποσοστό, το οποίο ανέρχεται στο 0.9% (16 μαθητές) όσον αφορά στον τρόπο επίλυσης του προβλήματος με κύρια διαγραμματική αναπαράσταση και στο 1.9% (33 μαθητές) στον τρόπο επίλυσης του λεκτικού προβλήματος με βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση. Αξίζει να σημειωθεί ότι το λάθος αυτό παρατηρείται κυρίως στις απαντήσεις των μαθητών της Ε΄ δημοτικού και Β΄ γυμνασίου και ο εντοπισμός του πιθανόν να οφείλεται στο γεγονός ότι οι μαθητές δεν έδωσαν την απαιτούμενη προσοχή στην εκφώνηση της του έργου. Τα λάθη που έκαναν οι μαθητές στην επίλυση των έργων επίλυσης προβλήματος, τα οποία δεν εμπίπτουν στους πιο πάνω τύπους αντιστοιχούν στον πέμπτο τύπο λάθους (Τύπος 5). Στο συγκεκριμένο τύπο λάθους περιλαμβάνονται για παράδειγμα οι τρόποι επίλυσης που αποτελούν απλά το συσχετισμό των δεδομένων του προβλήματος. Αξίζει να σημειωθεί ότι ένας μεγάλος αριθμός μαθητών που ανέρχεται σε ποσοστό 31.2% (530 μαθητές) για το διαγραμματικό πρόβλημα, 30.7% (522 μαθητές) για το λεκτικό πρόβλημα με βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση και 30.9% (525 μαθητές) για το λεκτικό πρόβλημα δεν συμπληρώνουν τα συγκεκριμένα έργα, κάτι το οποίο υποδηλώνει την αποσπασματική ικανότητα των μαθητών για την επίλυση προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων με ποικιλία αναπαραστάσεων.

Περιγραφική Ανάλυση των Πεδίων Αναπαράστασης και των Στρατηγικών Επίλυσης Προβλήματος Πρόσθεσης Κλασμάτων

Ο Πίνακας 18 παρουσιάζει τα ποσοστά χρήσης αναπαραστάσεων από τους μαθητές στα προβλήματα πρόσθεσης κλασμάτων κατά τάξη και πεδίο. Συγκεκριμένα, στο διαγραμματικό πρόβλημα το ποσοστό των μαθητών Ε΄ δημοτικού, Στ΄ δημοτικού, Α΄ γυμνασίου και Β΄ γυμνασίου που χρησιμοποιεί συμβολικό τρόπο αναπαράστασης για την επίλυσή του ανέρχεται στο 66.7% (1135 μαθητές). Αξίζει να σημειωθεί ότι ο συμβολικός τρόπος αναπαράστασης της λύσης του διαγραμματικού προβλήματος παρατηρείται σε παρόμοιο βαθμό στις τέσσερις ηλικιακές ομάδες. Από την άλλη, μόνο 0.8% (14 μαθητές) του συνόλου των μαθητών αξιοποιεί το διάγραμμα στο οποίο παρουσιάζονται τα δεδομένα του προβλήματος, ενώ ποσοστό 3.5% (60 μαθητές) χρησιμοποιεί λεκτικό τρόπο αναπαράστασης της επίλυσης του προβλήματος. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι διαγραμματικές και λεκτικές αναπαραστάσεις εντοπίζονται κυρίως στον τρόπο επίλυσης του προβλήματος που δίνεται από τους μαθητές της Ε΄ δημοτικού σε ποσοστό που ανέρχεται στο 64.3% και 35.0%, αντίστοιχα. Παρόμοια αποτελέσματα εντοπίζονται σύμφωνα με τον Πίνακα 18 και στον τρόπο επίλυσης του λεκτικού προβλήματος με βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης

κλασμάτων. Συγκεκριμένα, το ποσοστό συμβολικού, διαγραμματικού και λεκτικού τρόπου αναπαράστασης της λύσης του προβλήματος ανέρχεται στο 66.5% (1132 μαθητές), 1.2% (20 μαθητές) και 4.6% (79 μαθητές), αντίστοιχα. Τέλος, στο λεκτικό πρόβλημα πρόσθεσης κλασμάτων το ποσοστό συμβολικού, διαγραμματικού και λεκτικού τρόπου αναπαράστασης της λύσης του προβλήματος ανέρχεται στο 68.0% (1157 μαθητές), 0.5% (9 μαθητές) και 3.2% (55 μαθητές).

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του Πίνακα 18, η πλειοψηφία των μαθητών χρησιμοποιεί συμβολικό τρόπο αναπαράστασης της λύσης των προβλημάτων γεγονός που αιτιολογείται λαμβάνοντας υπόψη την έμφαση που δίνεται στα εγχειρίδια και των δύο βαθμίδων στο συγκεκριμένο πεδίο αναπαράστασης στα έργα επίλυσης προβλήματος. Μόνο ένα μικρό μέρος των μαθητών, κυρίως της Ε΄ δημοτικού, χρησιμοποιεί διαγραμματικό και λεκτικό τρόπο αναπαράστασης παρά το γεγονός ότι η εκφώνηση των προβλημάτων παρουσιάζεται λεκτικά ή/και διαγραμματικά.

Ιδιαίτερα, μη αναμενόμενο ήταν το μικρό ποσοστό των μαθητών που χρησιμοποίησε διαγραμματικό τρόπο επίλυσης στα προβλήματα με κύρια ή βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση. Οι μαθητές τόσο της πρωτοβάθμιας όσο και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης δεν ήταν σε θέση δηλαδή να αξιοποιήσουν και να χειριστούν με ευχέρεια το διαγραμματικό πεδίο αναπαράστασης στο οποίο παρουσιάζονταν τα δεδομένα των συγκεκριμένων έργων. Μια άλλη ερμηνεία είναι ότι πιθανόν να μη θεωρούν ως αποδεκτό το διαγραμματικό τρόπο επίλυσης ενός προβλήματος. Ως εκ τούτου, χρησιμοποιήθηκε η διαδικασία της έμμεσης μετάφρασης σε συμβολική αναπαράσταση, η οποία είναι γνωστικά πιο σύνθετη, για την επίλυση των προβλημάτων. Το γεγονός αυτό πιθανόν να αιτιολογεί και το χαμηλό μέσο όρο επίδοσης των μαθητών των τεσσάρων ηλικιακών ομάδων στην επίλυση προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων.

Πίνακας 18

Ποσοστά Χρήσης Αναπαραστάσεων από Μαθητές στα Προβλήματα Πρόσθεσης Κλασμάτων κατά Τάξη και Πεδίο στην Α΄ Ερευνητική Φάση

Έργο	Τάξη	ΠΕΔΙΑ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ		
		Συμβολική Αναπαράσταση (%)	Διαγραμματική Αναπαράσταση (%)	Λεκτική Αναπαράσταση (%)
PD	Ε΄ δημοτικού	20.5	64.3	35.0
	Στ΄ δημοτικού	26.1	14.3	23.3
	Α΄ γυμνασίου	24.1	14.3	23.3
	Β΄ γυμνασίου	29.3	7.1	18.3
N		1135	14	60
PVD	Ε΄ δημοτικού	20.2	50.0	29.1
	Στ΄ δημοτικού	26.2	25.0	27.8
	Α΄ γυμνασίου	23.9	15.0	19.0
	Β΄ γυμνασίου	29.7	10.0	24.1
N		1132	20	79
PV	Ε΄ δημοτικού	20.7	22.2	45.5
	Στ΄ δημοτικού	27.5	22.2	16.4
	Α΄ γυμνασίου	22.3	44.4	16.4
	Β΄ γυμνασίου	29.5	11.1	21.8
N		1157	9	55

Επεξήγηση συμβολισμού: PDs, PVDs, PVs: πρόβλημα με κύρια διαγραμματική αναπαράσταση, λεκτικό πρόβλημα με βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση, λεκτικό πρόβλημα πρόσθεσης κλασμάτων

Ο Πίνακας 19 παρουσιάζει τα ποσοστά των στρατηγικών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές στα έργα επίλυσης λεκτικού προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων κατά τάξη.

Πίνακας 19

Ποσοστά Χρήσης Στρατηγικών Επίλυσης του Λεκτικού Προβλήματος Πρόσθεσης Κλασμάτων από Μαθητές κατά Τάξη στην Α΄ Ερευνητική Φάση

Τάξη	ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ					
	Σ1 (%)	Σ2 (%)	Σ3 (%)	Σ4 (%)	Σ5 (%)	Σ6 (%)
Ε΄ δημοτικού	11.8	15.0	22.2	27.2	50.0	34.4
Στ΄ δημοτικού	36.6	18.9	26.2	26.2	0.0	31.1
Α΄ γυμνασίου	18.8	21.1	25.3	21.8	50.0	19.7
Β΄ γυμνασίου	32.8	45.0	26.4	24.8	0.0	14.8
N	186	180	455	294	4	61

Επεξήγηση συμβολισμού: Σ1: Μετατροπή σε ώρες/λεπτά, εύρεση συνολικής διάρκειας και λόγου, Σ2: Μετατροπή ετερόνυμων κλασμάτων σε ομώνυμα, εύρεση συνολικής διάρκειας και λόγου, Σ3: Εύρεση συνολικής διάρκειας, Σ4: Εύρεση διάρκειας επιμέρους προγραμμάτων, Σ5: Κατασκευή σχήματος, Σ6: Άλλη στρατηγική

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του Πίνακα 19 διακρίνονται έξι είδη στρατηγικών. Η πρώτη στρατηγική (Σ1) περιλαμβάνει τη μετατροπή σε λεπτά ή ώρες των επιμέρους προγραμμάτων για εύρεση της συνολικής διάρκειας της παράστασης και την προσπάθεια εύρεσης του μέρους της συνολικής διάρκειας της παράστασης που αντιστοιχεί στο μουσικοχορευτικό πρόγραμμα. Η συγκεκριμένη στρατηγική χρησιμοποιείται σε ποσοστό που ανέρχεται στο 10.9% (186 μαθητές) του συνόλου των μαθητών και χρησιμοποιείται κυρίως από τους μαθητές της Στ΄ δημοτικού (36.6%) και Β΄ γυμνασίου (32.8%). Η δεύτερη στρατηγική επίλυσης (Σ2) του λεκτικού προβλήματος αναφέρεται στην μετατροπή των ετερόνυμων κλασμάτων που αναφέρονται στα επιμέρους προγράμματα σε ομώνυμα κλάσματα, το σχηματισμό συμβολική αναπαράστασης πρόσθεσης κλασμάτων για εύρεση της συνολικής διάρκειας της παράστασης και την εύρεση του μέρους της συνολικής διάρκειας της παράστασης που αποτελεί το μουσικοχορευτικό πρόγραμμα. Η συγκεκριμένη στρατηγική χρησιμοποιείται από ποσοστό 10.6% του συνόλου των μαθητών (180 μαθητές) και

εντοπίζεται κυρίως στον τρόπο επίλυσης του λεκτικού προβλήματος από μαθητές της Α΄ γυμνασίου (21.1%) και Β΄ γυμνασίου (45.0%).

Το τρίτο είδος στρατηγικής επίλυσης (Σ3) αναφέρεται στην εύρεση της συνολικής διάρκειας της παράστασης και αντιστοιχεί στον μη ολοκληρωμένο τρόπο επίλυσης του λεκτικού προβλήματος. Εντοπίζεται σε ποσοστό 26.7% (455 μαθητές) στον τρόπο επίλυσης του λεκτικού προβλήματος από τους μαθητές του δείγματος. Αξίζει να σημειωθεί ότι το συγκεκριμένο είδος στρατηγικής χρησιμοποιείται από τον ίδιο περίπου αριθμό μαθητών των τεσσάρων ηλικιακών ομάδων. Η εύρεση της διάρκειας του μουσικοχορευτικού προγράμματος ή και των υπόλοιπων προγραμμάτων σε ώρες ή λεπτά (π.χ. 2 ώρες, 120 λεπτά) ή κλάσμα (π.χ. 2/1, 120/60) αντιστοιχούν στην τέταρτη στρατηγική (Σ4), οι οποία χρησιμοποιείται από το σύνολο των μαθητών σε ποσοστό που ανέρχεται στο 17.3% (294 μαθητές). Η τέταρτη στρατηγική χρησιμοποιείται και από τις τέσσερις ηλικιακές ομάδες στον ίδιο περίπου βαθμό. Οι μαθητές που χρησιμοποίησαν την πέμπτη στρατηγική (Σ5) έλυσαν με διαγραμματικό τρόπο το πρόβλημα χρησιμοποιώντας για παράδειγμα κυκλική γραφική παράσταση ή σχεδιάζοντας ρολόγια. Η συγκεκριμένη στρατηγική χρησιμοποιήθηκε μόνο από δύο μαθητές Ε΄ δημοτικού και δύο μαθητές Α΄ γυμνασίου. Τέλος, ποσοστό 3.6% (61 μαθητές) του συνόλου των μαθητών επιλύουν το λεκτικό πρόβλημα χρησιμοποιώντας διαφορετικές από τις προαναφερθείσες στρατηγικές (Σ6).

Ο μεγάλος αριθμός των μαθητών που επιλέγει την τρίτη και τέταρτη στρατηγική επίλυσης του λεκτικού προβλήματος καταδεικνύει τη δυσκολία αντίληψης του κλάσματος ως λόγου. Αν και η συγκεκριμένη ερμηνεία του κλάσματος δε συνδέεται άμεσα με την πρόσθεση κλασμάτων η κατανόησή της ήταν απαραίτητη για την επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος. Ως εκ τούτου, η χαμηλή επίδοσή τους στο συγκεκριμένο πρόβλημα αιτιολογείται λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι δεν επιλέγουν στρατηγικές επίλυσης που να υποδεικνύουν την ικανότητα συνδυασμού της προϋπάρχουσας γνώσης τους όσον αφορά στα κλάσματα με την έννοια της πρόσθεσης κλασμάτων.

Ο Πίνακας 20 παρουσιάζει τα ποσοστά των στρατηγικών που χρησιμοποιήθηκαν κατά την επίλυση προβλημάτων πρόσθεσης κλασμάτων με κύρια και βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση. Κατά την επίλυση των προβλημάτων εντοπίστηκαν δέκα είδη στρατηγικών, τα οποία χρησιμοποιήθηκαν από τους μαθητές των τεσσάρων ηλικιακών ομάδων. Τα πλείστα είδη στρατηγικών αντιστοιχούν στη χρήση συγκεκριμένων πεδίων αναπαράστασης. Ενδεικτικά, η χρήση της πρώτης (Σ1), δεύτερης (Σ2), έβδομης (Σ7) και όγδοης (Σ8)

στρατηγικής υποδεικνύει κυρίως τη χρήση της συμβολικής αναπαράστασης από τους μαθητές κατά την επίλυση των συγκεκριμένων προβλημάτων. Αντίθετα, στην τρίτη (Σ3), τέταρτη (Σ4) και ένατη (Σ9) στρατηγική εμπλέκεται κυρίως η χρήση διαγραμματικής αναπαράστασης.

Πίνακας 20

Ποσοστά Χρήσης Στρατηγικών Επίλυσης των Προβλημάτων Πρόσθεσης Κλασμάτων με Κύρια ή Βοηθητική Διαγραμματική Αναπαράσταση κατά Τάξη και Έργο στην Α΄ Ερευνητική Φάση

		ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ									
Έργο	Τάξη	Σ1 (%)	Σ2 (%)	Σ3 (%)	Σ4 (%)	Σ5 (%)	Σ6 (%)	Σ7 (%)	Σ8 (%)	Σ9 (%)	Σ10 (%)
PD	Ε΄ δημοτικού	19.3	6.7	63.6	50.0	0.0	0.0	26.8	18.8	100.0	23.7
	Στ΄ δημοτικού	27.4	33.3	9.1	50.0	0.0	0.0	21.3	18.8	0.0	33.9
	Α΄ γυμνασίου	23.9	13.3	9.1	0.0	0.0	0.0	25.1	27.1	0.0	27.1
	Β΄ γυμνασίου	29.4	46.7	18.2	0.0	0.0	0.0	26.8	35.3	0.0	15.3
N		771	15	11	2	0	0	183	218	4	59
PVD	Ε΄ δημοτικού	17.6	14.3	35.7	0.0	0.0	100.0	33.3	17.4	71.4	28.1
	Στ΄ δημοτικού	27.3	28.6	28.6	100.0	100.0	0.0	25.0	18.3	14.3	17.5
	Α΄ γυμνασίου	23.2	0.0	21.4	0.0	0.0	0.0	21.1	27.7	14.3	35.1
	Β΄ γυμνασίου	31.9	57.1	14.3	0.0	0.0	0.0	20.6	36.6	0.0	19.3
N		772	7	14	1	1	1	204	213	7	57

Επεξήγηση συμβολισμού: Σ1: Πρόσθεση κλασμάτων, Σ2: Αφαίρεση κλασμάτων, Σ3: Επιμερισμός και πρόσθεση, Σ4: Επιμερισμός και αφαίρεση/ συμπλήρωμα, Σ5: Πρόσθεση επιφανειών εμβαδού, Σ6: Αφαίρεση από τη συνολική επιφάνεια επιφανειών εμβαδού, Σ7: Μετατροπή σε ομώνυμα κλάσματα, Σ8: Πρόσθεση όλων των μερών, Σ9: Αναδιοργάνωση σχήματος, Σ10: Άλλη στρατηγική

Οι περισσότεροι μαθητές κατά την επίλυση των προβλημάτων με κύρια ή βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση χρησιμοποιούν την πρώτη στρατηγική (Σ1). Συγκεκριμένα, η πρώτη στρατηγική εντοπίζεται σε ποσοστό 45.3 % (771 μαθητές) στο διαγραμματικό πρόβλημα και 45.4% (772 μαθητές) στο λεκτικό πρόβλημα με βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση, αντίστοιχα. Η χρήση της συγκεκριμένης στρατηγικής στο λεκτικό πρόβλημα

με βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση περιλάμβανε την μετατροπή των ετερόνυμων κλασμάτων που αντιστοιχούν στα είδη χυμού σε ομώνυμα κλάσματα και την πρόσθεση των τεσσάρων κλασμάτων με άθροισμα $1/2$. Αξιίζει να σημειωθεί ότι η πρώτη στρατηγική εντοπίζεται κυρίως στον τρόπο επίλυσης των προβλημάτων από τους μαθητές της Στ' δημοτικού και Α' γυμνασίου.

Από την άλλη, η δεύτερη στρατηγική (Σ2) χρησιμοποιήθηκε από ένα πολύ μικρό αριθμό μαθητών, ο οποίος ανέρχεται στο 0.9% (15 μαθητές) και 0.4% (7 μαθητές) για το πρόβλημα με κύρια ή βοηθητική αναπαράσταση, αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, περιλαμβάνει για το λεκτικό πρόβλημα με βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση την εύρεση των δύο ειδών χυμών με άθροισμα $1/2$ και με τη χρήση της αντίστοιχης συμβολική αναπαράστασης αφαίρεσης κλασμάτων εντοπίζονται τα ζητούμενα τέσσερα είδη χυμών. Όπως και στην περίπτωση της πρώτης στρατηγικής, η δεύτερη στρατηγική χρησιμοποιείται κυρίως από τους μαθητές της Ε' δημοτικού και Α' γυμνασίου.

Στην περίπτωση της έβδομης (Σ7) και όγδοης (Σ8) στρατηγικής οι μαθητές δεν επιλύουν με ολοκληρωμένο τρόπο το πρόβλημα. Συγκεκριμένα, οι μαθητές που ακολούθησαν τη έβδομη στρατηγική (Σ7) περιορίστηκαν στη μετατροπή των ετερόνυμων κλασμάτων που αντιστοιχούν στα είδη χυμού ή λουλουδιών σε ομώνυμα κλάσματα χωρίς όμως τη συγγραφή συμβολική αναπαράστασης πρόσθεσης ή αφαίρεσης κλασμάτων. Η συγκεκριμένη στρατηγική χρησιμοποιείται από το σύνολο των μαθητών σε ποσοστό που ανέρχεται το 10.8% (183 μαθητές) και 12.0% (204 μαθητές) στο διαγραμματικό και λεκτικό πρόβλημα με βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση, αντίστοιχα. Μάλιστα αξίζει να σημειωθεί ότι εντοπίζεται σε παρόμοιο βαθμό στις απαντήσεις όλων των ηλικιακών ομάδων. Από την άλλη, οι μαθητές που χρησιμοποίησαν την όγδοη στρατηγική (Σ8) μετέτρεψαν τα ετερόνυμα κλάσματα που αντιστοιχούν στα είδη χυμού ή λουλουδιών σε ομώνυμα κλάσματα και στη συνέχεια πρόσθεσαν όλα τα είδη χυμών ή λουλουδιών. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα να μη διακρίνονται τα ζητούμενα τέσσερα είδη χυμών ή τα τρία είδη λουλουδιών, τα οποία έδιναν άθροισμα $3/4$ και $1/2$, αντίστοιχα. Αξιίζει να σημειωθεί ότι η όγδοη στρατηγική χρησιμοποιείται από ένα μεγάλο ποσοστό μαθητών κυρίως της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Η πέμπτη (Σ5) και έκτη (Σ6) στρατηγική αναφέρονται στον τρόπο επίλυσης με υπολογισμό του εμβαδού της ορθογώνιας επιφάνειας με πρόσθεση επιμέρους επιφανειών ή αφαίρεση από τη συνολική επιφάνεια του διαγράμματος, αντίστοιχα. Η πέμπτη στρατηγική χρησιμοποιήθηκε από ένα μαθητή της Στ' δημοτικού, με την εμπλοκή του συμβολικού πεδίου

αναπαράστασης, και η έκτη στρατηγική από ένα μαθητή της Ε΄ δημοτικού, με την εμπλοκή του λεκτικού πεδίου αναπαράστασης, κατά την επίλυση του λεκτικού προβλήματος με βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση.

Η τρίτη (Σ3), τέταρτη (Σ4) και ένατη (Σ9) στρατηγική αποτελούν στρατηγικές ως επί το πλείστον διαγραμματικής επίλυσης των προβλημάτων. Συγκεκριμένα, η τρίτη στρατηγική αναφέρεται στην επίλυση του προβλήματος με επιμερισμό της διαγραμματικής αναπαράστασης και πρόσθεση, ενώ η τέταρτη στρατηγική με επιμερισμό της διαγραμματικής αναπαράστασης και αφαίρεση. Το ποσοστό των μαθητών που χρησιμοποιούν την τρίτη στρατηγική ανέρχεται σε ποσοστό 0.6% (11 μαθητές) για το διαγραμματικό πρόβλημα και σε ποσοστό 0.8% (14 μαθητές) για το λεκτικό πρόβλημα με βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση πρόσθεσης κλασμάτων. Αξίζει να σημειωθεί ότι η συγκεκριμένη στρατηγική χρησιμοποιείται κυρίως από τους μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Η τέταρτη στρατηγική χρησιμοποιείται μεμονωμένα από δύο μαθητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης κατά την επίλυση του διαγραμματικού προβλήματος και από ένα μαθητή Στ΄ δημοτικού κατά την επίλυση του λεκτικού προβλήματος με βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση. Η ένατη στρατηγική αναφέρεται στην επίλυση των προβλημάτων μέσα από αναδιοργάνωση της διαγραμματικής αναπαράστασης και χρησιμοποιείται από ένα ιδιαίτερα μικρό αριθμό μαθητών που ανέρχεται στο 0.2% (4 μαθητές) για το διαγραμματικό πρόβλημα και 0.4% (7 μαθητές) για το λεκτικό πρόβλημα με βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση. Η επίλυση των προβλημάτων μέσα από αναδιοργάνωση του διαγράμματος χρησιμοποιείται κυρίως από μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Οι τρόποι επίλυσης των προβλημάτων που δεν περιλαμβάνονται στις προαναφερθείσες στρατηγικές επίλυσης περιλαμβάνοντας στο δέκατο είδος στρατηγικής (Σ10).

Με βάση τα αποτελέσματα του Πίνακα 19 και 20 επισημαίνεται ότι οι μαθητές επιλέγουν κυρίως συμβολικές στρατηγικές επίλυσης των προβλημάτων με κύρια και βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση. Η επιλογή των συγκεκριμένων στρατηγικών πιθανόν να οφείλεται στην έμφαση που δίνεται σε αυτές στα σχολικά εγχειρίδια που χρησιμοποιούνται. Από την άλλη, θα πρέπει να σημειωθεί ότι τα σχολικά εγχειρίδια τόσο στη πρωτοβάθμια αλλά ειδικότερα στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση περιλαμβάνουν περιορισμένο αριθμό προβλημάτων που παρουσιάζονται διαγραμματικά ή με συνδυασμό αναπαραστάσεων. Εντούτοις οι μαθητές χρησιμοποιούν ακόμη και στα προβλήματα με κύρια ή βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση συμβολικές στρατηγικές επίλυσης με τις οποίες είναι

εξοικειωμένοι χωρίς ωστόσο να καταλήγουν στις πλείστες περιπτώσεις στην ορθή απάντηση. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνεται από τα χαμηλά ποσοστά επιτυχία των μαθητών στα έργα επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων. Οι διαγραμματικές στρατηγικές επίλυσης των προβλημάτων χρησιμοποιήθηκαν από ένα μικρό αριθμό μαθητών κυρίως της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, πιθανόν λόγω του γεγονότος ότι οι συγκεκριμένοι μαθητές είναι πιο εξοικειωμένοι από τους μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης με τη χρήση διαγραμματικών αναπαραστάσεων. Παρόλα αυτά, το μικρό ποσοστό χρήσης των στρατηγικών του επιμερισμού και της αναδιοργάνωσης διαγράμματος υποδεικνύει ότι οι μαθητές και στις δύο βαθμίδες δεν είναι σε θέση να χειριστούν με ευχέρεια το συγκεκριμένο είδος αναπαράστασης και τις σχετικές στρατηγικές στην επίλυση προβλήματος. Η ευελιξία χρήσης της διαγραμματικής αναπαράστασης και η αξιοποίηση της στρατηγικής του επιμερισμού ή της αναδιοργάνωσης διαγράμματος στην επίλυση των συγκεκριμένων προβλημάτων πιθανόν να διευκόλυνε τους μαθητές να καταλήξουν στην ορθή απάντηση αφού δεν θα εμπλέκονταν σε ένα σύνολο περίπλοκων συμβολικών χειρισμών.

Επίπεδα Ευελιξίας Χρήσης Πολλαπλών Αναπαραστάσεων της Πρόσθεσης Κλασμάτων

Με την εφαρμογή της ιεραρχικής ανάλυσης (cluster analysis) προκύπτει ότι οι μαθητές πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που συμμετείχαν στην πρώτη ερευνητική φάση απαντούν με συστηματικό τρόπο στα έργα του δοκιμίου σχηματίζοντας πέντε διακριτές ομάδες μαθητών, οι οποίες αντιστοιχούν σε επίπεδα ανάπτυξης της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων.

Ο Πίνακας 21 παρουσιάζει τους μέσους όρους επίδοσης στα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων, αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων, χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, επίλυσης λεκτικών προβλημάτων και προβλημάτων με κύρια ή βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων των μαθητών που ανήκουν στις πέντε ομάδες ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων.

Πίνακας 21

Μέσοι Όροι και Τυπικές Αποκλίσεις των Επιδόσεων των Μαθητών Κατά Ομάδα Ευελιξίας Χρήσης Πολλαπλών Αναπαράστασεων και Διάσταση Εννοιολογικής Κατανόησης της Πρόσθεσης Κλασμάτων στην Α΄ Ερευνητική Φάση

Διαστάσεις	Ομάδα 1		Ομάδα 2		Ομάδα 3		Ομάδα 4		Ομάδα 5	
	\bar{x}	T.A.	\bar{x}	T.A.	\bar{x}	T.A.	\bar{x}	T.A.	\bar{x}	T.A.
Π1	0.38	0.30	0.44	0.28	0.55	0.30	0.62	0.28	0.78	0.26
Π2	0.37	0.38	0.49	0.37	0.66	0.33	0.63	0.36	0.77	0.31
Π3	0.62	0.36	0.73	0.32	0.89	0.23	0.84	0.28	0.95	0.15
Π4	0.26	0.26	0.29	0.25	0.84	0.21	0.32	0.27	0.92	0.16
Π5	0.00	0.00	0.35	0.15	0.33	0.25	0.68	0.27	0.81	0.21
Π6	0.19	0.33	0.31	0.41	0.60	0.42	0.57	0.43	0.78	0.37
Π7	0.01	0.17	0.11	0.19	0.25	0.27	0.22	0.26	0.40	0.31
N	489		263		221		416		312	

Επεξήγηση συμβολισμού: Π1= αναγνώριση πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων, Π2=αναγνώριση πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων, Π3= συμβολικός χειρισμός πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, Π4=μετάφραση από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, Π5=μετάφραση από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, Π6=ικανότητα επίλυση προβλήματος με κύρια ή βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση πρόσθεσης κλασμάτων, Π7=ικανότητα επίλυση λεκτικού προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων

Με βάση την πολυμεταβλητή ανάλυση διασποράς εντοπίζονται σημαντικές διαφορές μεταξύ των πέντε ομάδων στα έργα πρόσθεσης κλασμάτων (Pillai's $F(28, 6772)= 113.26$, $p<0.001$). Συγκεκριμένα, βρέθηκε ότι ο μέσος όρος επίδοσης των μαθητών στα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων (Pillai's $F(4, 1690)= 8.46$, $p<0.01$), στα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων (Pillai's $F(4, 1690)= 9.31$, $p<0.001$), χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων (Pillai's $F(4, 1690)=7.03$, $p=0<001$), μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράστασης της πρόσθεσης κλασμάτων (Pillai's $F(4, 1690)=36.93$, $p<0.001$), μετάφραση από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων (Pillai's $F(4, 1690)=37.34$, $p<0.001$), επίλυσης προβλημάτων με κύρια ή βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση (Pillai's $F(4, 1690)=20.71$, $p=0.001$) και επίλυσης λεκτικών προβλημάτων πρόσθεσης κλασμάτων (Pillai's $F(4, 1690)=5.60$, $p<0.001$) διαφέρει ανάλογα με την ομάδα ευελιξίας

χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων στην οποία εντάσσονται οι μαθητές. Παράλληλα, επισημαίνεται συστηματική βελτίωση της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων από την πρώτη στην πέμπτη ομάδα γεγονός που υποδηλώνει την ύπαρξη ιεραρχικών επιπέδων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων.

Συγκεκριμένα, η πρώτη και δεύτερη ομάδα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων αναφέρεται στο Πρώιμο Αναπαραστατικό Επίπεδο και στο Συμβολικό Επίπεδο, αντίστοιχα, στα οποία οι μαθητές είναι σε θέση να αναγνωρίζουν στοιχειώδεις αναπαραστάσεις και να χειρίζονται συμβολικές αναπαραστάσεις πρόσθεσης κλασμάτων. Οι μαθητές στο Πρώιμο Αναπαραστατικό Επίπεδο παρουσιάζουν τη χαμηλότερη επίδοση στα έργα αναγνώρισης, χειρισμού και μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, ενώ δεν επιτυγχάνουν σε κανένα από τα έργα μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων. Επιπλέον, ο μέσος όρος επίδοσης των συγκεκριμένων μαθητών στα έργα επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων είναι πιο χαμηλός από τον αντίστοιχο μέσο όρο επίδοσης στις υπόλοιπες ομάδες.

Παρά το γεγονός ότι και οι μαθητές στο Συμβολικό Επίπεδο παρουσιάζουν χαμηλή επίδοση σε όλα τα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων, ο μέσος όρος επίδοσής τους στα συγκεκριμένα έργα είναι στατιστικά σημαντικά πιο υψηλός από την πρώτη ομάδα μαθητών. Εξαιρέση αποτελούν τα έργα μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων στα οποία οι μαθητές της πρώτης και της δεύτερης ομάδας παρουσιάζουν παρόμοια επίδοση. Οι μαθητές του Συμβολικού Επιπέδου έχουν επίσης χαμηλή επίδοση στα έργα επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων. Όμως ο μέσος όρος επίδοσής τους στα έργα επίλυσης προβλήματος με κύρια ή βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση είναι σημαντικά υψηλότερος σε σχέση με τον αντίστοιχο μέσο όρο επίδοσης των μαθητών του Πρώιμου Αναπαραστατικού Επιπέδου.

Η τρίτη και η τέταρτη ομάδα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων αναφέρονται στο Μεταβατικό Επίπεδο Πολλαπλών Αναπαραστάσεων, το οποίο διακρίνεται αντίστοιχα στο Συμβολικό Μεταβατικό Επίπεδο και στο Διαγραμματικό Μεταβατικό Επίπεδο. Αν και ο συνολικός μέσος όρος επίδοσης στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων των δύο ομάδων μαθητών δε διαφέρει σημαντικά εντούτοις η επίδοσή τους στα έργα μετάφρασης παρουσιάζει

σημαντικές διαφορές ανάλογα με την αρχική αναπαράσταση που εμπλέκεται στα έργα μετάφρασης. Συγκεκριμένα, οι μαθητές της τρίτης ομάδας (Συμβολικό Μεταβατικό Επίπεδο) παρουσιάζουν χαμηλή επίδοση στα έργα μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση όπως και οι μαθητές του Συμβολικού Επιπέδου. Αν και η επίδοσή τους στα έργα μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση και στα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων είναι μέτρια, ο μέσος όρος επίδοσής τους είναι στατιστικά σημαντικά υψηλότερος από τον αντίστοιχο μέσο όρο επίδοσης των μαθητών του Συμβολικού Επιπέδου. Από την άλλη, η επίδοση των συγκεκριμένων μαθητών είναι ιδιαίτερα υψηλή στα έργα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων. Στα έργα επίλυσης προβλήματος οι μαθητές του Συμβολικού Μεταβατικού Επιπέδου παρουσιάζουν μέτρια επίδοση, η οποία είναι όμως είναι στατιστικά σημαντικά υψηλότερη από την αντίστοιχη επίδοση των μαθητών του Συμβολικού Επιπέδου. Οι μαθητές της τέταρτης ομάδας, η οποία αναφέρεται στο Διαγραμματικό Μεταβατικό Επίπεδο, παρουσιάζουν χαμηλή επίδοση στα έργα μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση και μέτρια επίδοση στα έργα μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων.

Η πέμπτη ομάδα, η οποία αναφέρεται στο Επίπεδο Πολλαπλών Αναπαραστάσεων παρουσιάζει στατιστικά υψηλότερο μέσο όρο επίδοσης σε όλες τις διαστάσεις ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων σε σχέση με τις υπόλοιπες ομάδες.

Ο Πίνακας 22 παρουσιάζει τα ποσοστά των μαθητών κατά ομάδα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και τάξη. Η πλειοψηφία των μαθητών εντάσσεται στα χαμηλότερα ιεραρχικά επίπεδα. Συγκεκριμένα, το 44.2 % του συνόλου των μαθητών στην πρώτη ερευνητική φάση εντάσσεται στο Πρώμο Αναπαραστατικό Επίπεδο και στο Συμβολικό Επίπεδο. Στο Μεταβατικό Επίπεδο Πολλαπλών Αναπαραστάσεων (Συμβολικό Μεταβατικό Επίπεδο, Διαγραμματικό Μεταβατικό Επίπεδο) βρίσκεται ποσοστό 37.5% των μαθητών, ενώ στο Επίπεδο Πολλαπλών Αναπαραστάσεων εντοπίζεται το 18.3% του συνόλου των μαθητών. Σύμφωνα με τον Πίνακα 22, η πλειοψηφία των μαθητών που ανήκουν στο Πρώμο Αναπαραστατικό Επίπεδο και στο Συμβολικό Επίπεδο είναι μαθητές της Ε΄ δημοτικού και Α΄ γυμνασίου. Στο Συμβολικό Μεταβατικό Επίπεδο το ποσοστό των μαθητών της Ε΄ δημοτικού, Στ΄ δημοτικού και Β΄ γυμνασίου είναι περίπου το ίδιο, ενώ η πλειοψηφία των μαθητών που ανήκουν στο Διαγραμματικό Μεταβατικό Επίπεδο είναι μαθητές της Β΄

γυμνασίου. Τέλος, στο Επίπεδο Πολλαπλών Αναπαραστάσεων εντοπίζονται κυρίως μαθητές της Στ' δημοτικού και Β' γυμνασίου.

Πίνακας 22

Ποσοστά Μαθητών κατά Ομάδα Ευελιξίας Χρήσης Πολλαπλών Αναπαραστάσεων και Τάξη στην Α' Ερευνητική Φάση

Τάξη	Ομάδα 1 (%)	Ομάδα 2 (%)	Ομάδα 3 (%)	Ομάδα 4 (%)	Ομάδα 5 (%)
Ε' δημοτικού	30.9	26.6	26.2	17.2	14.7
Στ' δημοτικού	20.7	23.2	26.9	25.3	27.2
Α' γυμνασίου	26.6	27.4	20.0	24.9	16.3
Β' γυμνασίου	21.9	22.8	26.9	32.6	24.7
N	489	263	416	221	312

Το Διάγραμμα 24 παρουσιάζει τις σχέσεις ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών των πέντε ομάδων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων στα έργα του δοκιμίου.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι διαφορές στον τρόπο που αντιμετωπίζουν τα έργα πρόσθεσης κλασμάτων οι μαθητές των διαφόρων επιπέδων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων. Συγκεκριμένα, υπάρχει μια σαφής διάκριση στον τρόπο αντιμετώπισης των έργων μετάφρασης από τους μαθητές του Πρώιμου Αναπαραστατικού Επιπέδου σε σχέση με τις υπόλοιπες ομάδες μαθητών. Στις σχέσεις ομοιότητας που σχηματίζονται από τις απαντήσεις των συγκεκριμένων μαθητών συμμετέχουν μόνο έργα μετάφρασης από συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε κυκλική επιφάνεια εμβადού και στην αριθμητική γραμμή. Αυτό αιτιολογείται λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι οι μαθητές της πρώτης ομάδας ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων επιλύουν ανεπιτυχώς τα υπόλοιπα έργα μετάφρασης.

Επιπλέον, οι μαθητές που ανήκουν σε κάθε ένα από τα ιεραρχικά επίπεδα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων αντιμετωπίζουν με διαφορετικό τρόπο την επίλυση προβλημάτων με κύρια ή βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων. Οι μαθητές που ανήκουν στο Πρώιμο Αναπαραστατικό Επίπεδο και στο Συμβολικό Επίπεδο συμπεριφέρονται με όμοιο τρόπο όταν επιλύουν τα έργα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων και τα

έργα επίλυσης προβλήματος με κύρια ή βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση. Οι μαθητές που ανήκουν όμως στο Μεταβατικό Επίπεδο Πολλαπλών Αναπαραστάσεων και στο Επίπεδο Πολλαπλών Αναπαραστάσεων αντιλαμβάνονται τη σημασία της λειτουργίας της μετάφρασης για την επίλυση προβλημάτων με κύρια ή βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση οπότε συμπεριφέρονται με όμοιο τρόπο όταν επιλύουν έργα συμβολικού χειρισμού, αναγνώρισης, μετάφρασης και επίλυσης προβλήματος με κύρια ή βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση πρόσθεσης κλασμάτων. Στο Συμβολικό Μεταβατικό Επίπεδο τα έργα μετάφρασης που εμπλέκονται στις συγκεκριμένες σχέσεις ομοιότητας έχουν τη συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης κλασμάτων ως αρχική αναπαράσταση, ενώ στο Διαγραμματικό Μεταβατικό Επίπεδο και στο Επίπεδο Πολλαπλών Αναπαραστάσεων η αρχική αναπαράσταση που εμπλέκεται είναι η επιφάνεια εμβαδού ή το γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής.

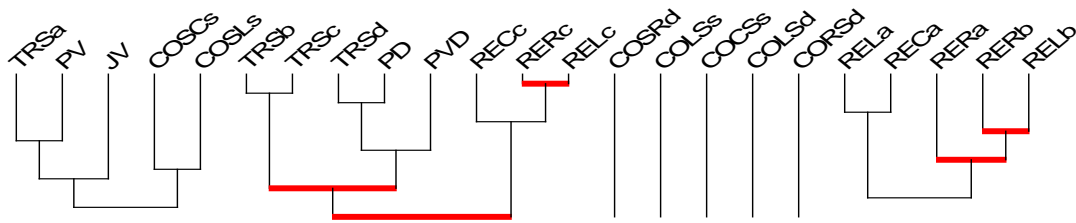
Το Διάγραμμα 25 παρουσιάζει τα συνεπαγωγικά διαγράμματα των απαντήσεων των μαθητών κάθε επιπέδου ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων της πρώτης ερευνητικής φάσης στα έργα του δοκιμίου. Οι συνεπαγωγικές σχέσεις επιβεβαιώνουν την ύπαρξη ιεραρχίας στα επίπεδα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων. Συγκεκριμένα, στο Πρώιμο Αναπαραστατικό Επίπεδο και στο Συμβολικό Επίπεδο η πλειοψηφία των έργων εντοπίζεται στην αρχή των συνεπαγωγικών αλυσίδων. Σταδιακά αρκετά από τα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων αντιμετωπίζονται ως μέτριας δυσκολίας (Μεταβατικό Επίπεδο Πολλαπλών Αναπαραστάσεων), ενώ στο Επίπεδο Πολλαπλών Αναπαραστάσεων η πλειοψηφία των έργων του δοκιμίου βρίσκεται στις καταλήξεις των συνεπαγωγικών αλυσίδων.

Επιπλέον, σύμφωνα με τις συνεπαγωγικές σχέσεις οι μαθητές που βρίσκονται στο Πρώιμο Αναπαραστατικό Επίπεδο και στο Συμβολικό Επίπεδο αντιμετωπίζουν δυσκολίες στα περισσότερα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων. Εξάιρεση αποτελούν τα έργα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης κλασμάτων και ορισμένα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων. Οι μαθητές που ανήκουν στο Συμβολικό Επίπεδο αντιμετωπίζουν δυσκολίες στα έργα μετάφρασης ανεξάρτητα από το αρχικό πεδίο αναπαράστασης που εμπλέκεται σε αυτά. Επιπλέον, τα έργα που εμπλέκουν το γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής είναι δυσκολότερα τόσο για τους μαθητές τόσο του Πρώιμου Αναπαραστατικού Επιπέδου όσο και για τους μαθητές του Συμβολικού

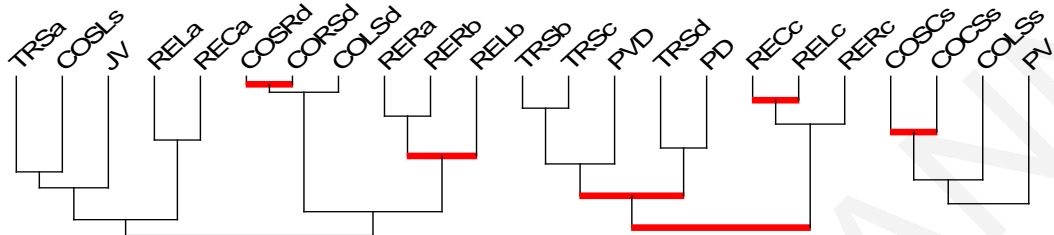
Επιπέδου. Στο Μεταβατικό Επίπεδο Πολλαπλών Αναπαραστάσεων διακρίνεται ο βαθμός δυσκολίας των έργων μετάφρασης σε σχέση με το αρχικό πεδίο αναπαράστασης.

Συγκεκριμένα, στο Συμβολικό Μεταβατικό Επίπεδο τα έργα μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση ανήκουν στα δυσκολότερα έργα του δοκιμίου, ενώ τα έργα μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση είναι τα ευκολότερα έργα του δοκιμίου για τη συγκεκριμένη ομάδα μαθητών. Αντίθετα, στο Διαγραμματικό Μεταβατικό Επίπεδο τα έργα μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση αποτελούν τα δυσκολότερα έργα του δοκιμίου, ενώ τα έργα αναπαράστασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση είναι τα ευκολότερα έργα του δοκιμίου.

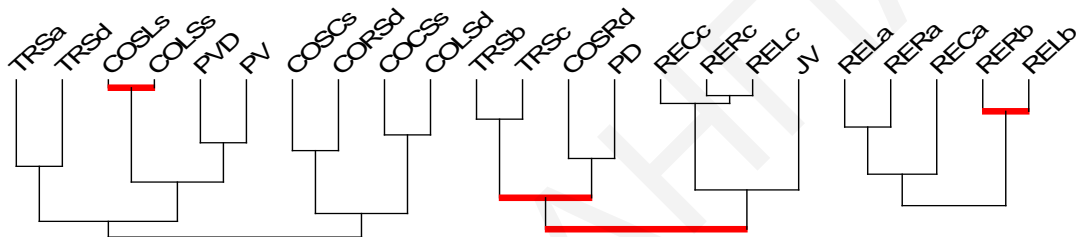
Στο Επίπεδο Πολλαπλών Αναπαραστάσεων οι μαθητές είναι σε θέση να χρησιμοποιήσουν ποικιλία πεδίων αναπαράστασης, τα οποία επιτελούν τις λειτουργίες της αναγνώρισης, του χειρισμού και της μετάφρασης. Οι συγκεκριμένοι μαθητές δεν αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην επίλυση της πλειοψηφίας των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων. Το γεγονός αυτό φαίνεται να επηρεάζει και την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων με κύρια ή βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων. Επιπλέον, είναι φανερό ότι λόγω της ευελιξίας των συγκεκριμένων μαθητών για χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων οι συνεπαγωγικές σχέσεις διαμορφώνονται με βάση την εμπλεκόμενη υπό-έννοια της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων ή των γνωστικών διαδικασιών που απαιτούνται για την επίλυση των έργων.



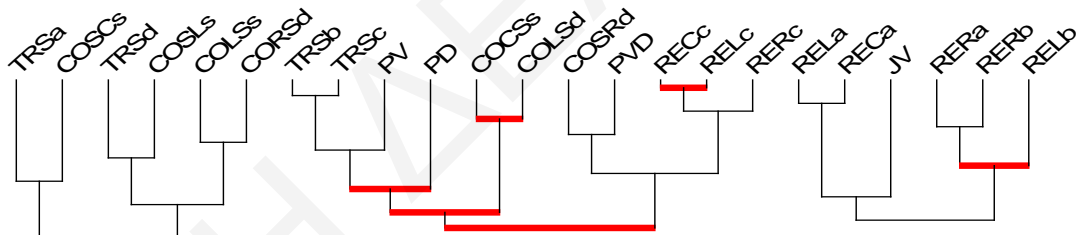
Ομάδα 1- Πρώμο Αναπαραστατικό Επίπεδο



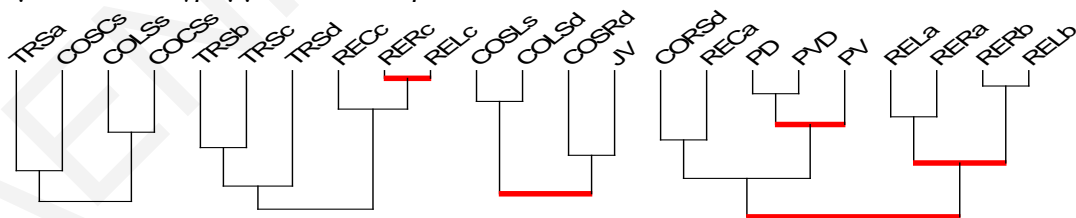
Ομάδα 2- Συμβολικό Επίπεδο



Ομάδα 3- Συμβολικό Μεταβατικό Επίπεδο

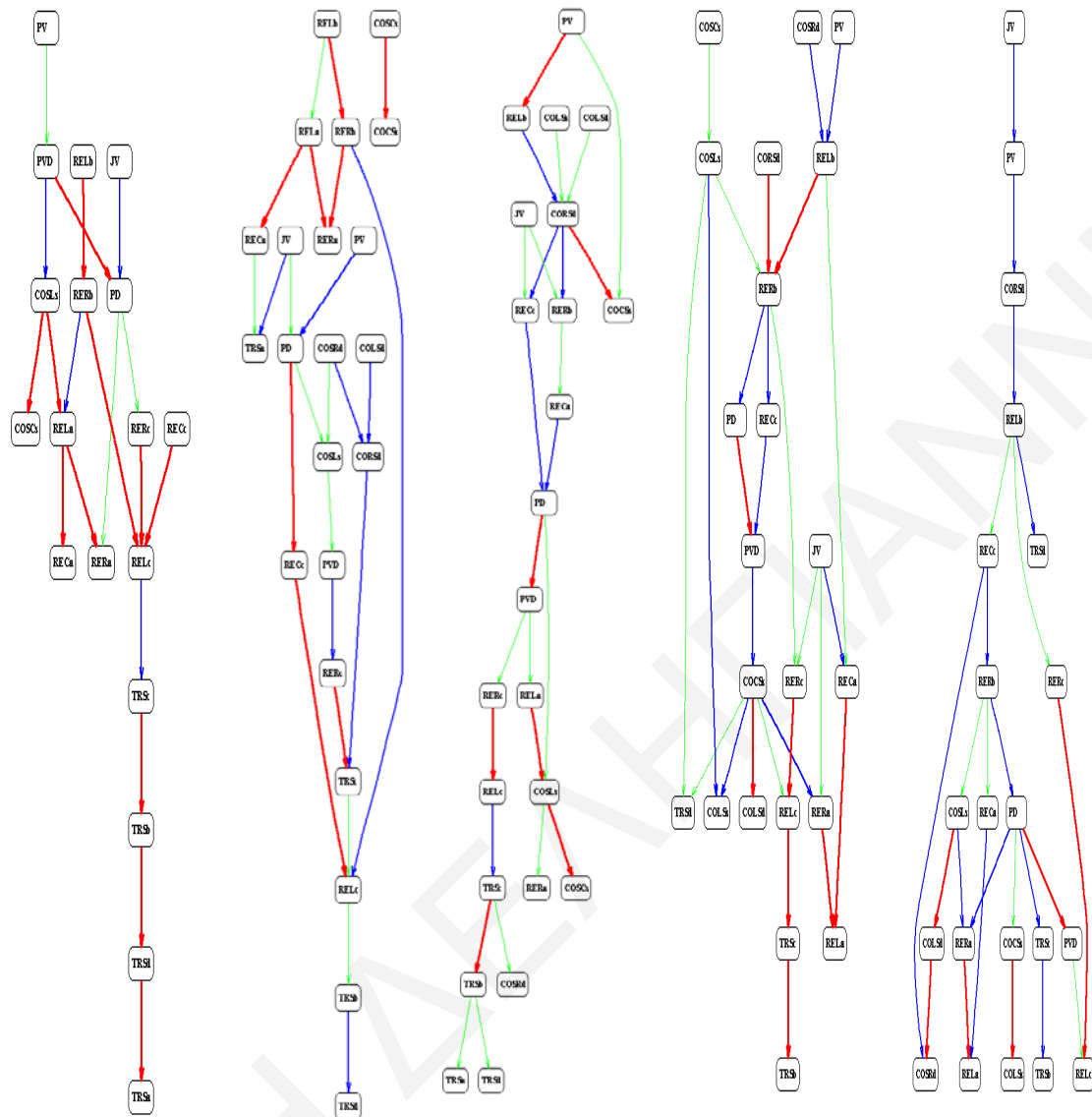


Ομάδα 4- Διαγραμματικό Μεταβατικό Επίπεδο



Ομάδα 5 – Επίπεδο Πολλαπλών Αναπαραστάσεων

Διάγραμμα 24. Διαγράμματα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών κάθε επιπέδου ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων στα έργα του δοκιμίου στην Α΄ ερευνητική φάση.



Πρώμο
 Αναπαραστατικό
 Επίπεδο

Συμβολικό
 Επίπεδο

Συμβολικό
 Μεταβατικό
 Επίπεδο

Διαγραμματικό
 Μεταβατικό
 Επίπεδο

Επίπεδο
 Πολλαπλών
 Αναπαραστάσεων

Διάγραμμα 25. Συνεπαγωγικά διαγράμματα των απαντήσεων των μαθητών στα έργα του δοκιμίου κατά επίπεδο ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων στην Α' ερευνητική φάση.

Αποτελέσματα της Δεύτερης Ερευνητικής Φάσης

Στη δεύτερη ερευνητική φάση συμμετέχουν τρεις ηλικιακές ομάδες. Η πρώτη ηλικιακή ομάδα μεταβαίνει εντός της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (από την Ε΄ στη Στ΄ δημοτικού), η δεύτερη ηλικιακή ομάδα από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (από τη Στ΄ δημοτικού στην Α΄ γυμνασίου) και η τρίτη ηλικιακή ομάδα εντός της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (από την Α΄ στη Β΄ γυμνασίου). Στη δεύτερη ερευνητική φάση πραγματοποιούνται δύο επιπλέον χορηγήσεις του δοκιμίου, οι οποίες αντιστοιχούν στη δεύτερη και τρίτη χορήγηση του δοκιμίου για τους συγκεκριμένους μαθητές. Αρχικά, παρουσιάζονται τα μοντέλα που επισημαίνουν τη διατήρηση των δομικών σχέσεων της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της επίλυσης προβλήματος με ποικιλία πεδίων αναπαράστασης όσον αφορά την εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων μεταξύ πρώτης, δεύτερης και τρίτης χορήγησης. Στη συνέχεια, η εφαρμογή της κλίμακας Rasch επισημαίνει τη συνέπεια του τρόπου που απαντούν συνολικά οι μαθητές στη δεύτερη και τρίτη χορήγηση του δοκιμίου στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων. Στο συγκεκριμένο υποκεφάλαιο παρουσιάζεται επίσης η μεταβολή που υφίσταται η επίδοση των μαθητών των τριών ηλικιακών ομάδων όσον αφορά στις διαστάσεις της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος με διάφορα πεδία αναπαράστασης κατά τη διάρκεια των τριών χορηγήσεων.

Επιπλέον, επισημαίνονται οι σχέσεις ομοιότητας και συνεπαγωγής μεταξύ των απαντήσεων των μαθητών των τριών ηλικιακών ομάδων κατά τη μετάβασή τους εντός της ίδιας εκπαιδευτικής βαθμίδα αλλά και μεταξύ πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Για την εξέταση της αλληλεπίδρασης μεταξύ της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της επίλυσης προβλήματος με πολλαπλά πεδία αναπαραστάσεων στην πρόσθεση κλασμάτων στις τρεις μετρήσεις κρίθηκε σκόπιμη η διαμόρφωση και η επιβεβαίωση μιας σειράς δυναμικών μοντέλων. Τέλος, εξετάζεται ο ρυθμός μεταβολής των επιμέρους διαστάσεων της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων κάθε ηλικιακής ομάδας κατά την περίοδο μετάβασης από την Ε΄ δημοτικού στην Στ΄ δημοτικού, από την Α΄ γυμνασίου στη Β΄ γυμνασίου και από τη Στ΄ δημοτικού στην Α΄ γυμνασίου.

Επιβεβαίωση του Δομικού Μοντέλου Εννοιολογικής Κατανόησης της Πρόσθεσης Κλασμάτων κατά την Περίοδο Μετάβασης Εντός και Μεταξύ Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης

Αρχικά, διερευνήθηκε ο ρόλος της ευελιξίας χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων και της επίλυσης προβλήματος με ποικιλία πεδίων αναπαράστασης στην εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων κατά τη μετάβαση των μαθητών από την Ε΄ δημοτικού στη Στ΄ δημοτικού, από τη Στ΄ δημοτικού στην Α΄ γυμνασίου και από την Α΄ γυμνασίου στη Β΄ γυμνασίου. Αρχικά, εφαρμόστηκε η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση για τα δεδομένα των τριών χορηγήσεων ξεχωριστά. Στη συνέχεια, με την επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση πολλαπλών ομάδων για επαναλαμβανόμενες μετρήσεις έγινε έλεγχος του μοντέλου για τα δεδομένα της πρώτης και της δεύτερης χορήγησης, της πρώτης και της τρίτης χορήγησης και της δεύτερης και τρίτης χορήγησης, ξεχωριστά. Τα μοντέλα εξετάστηκαν με βάση την υπόθεση ότι οι φορτίσεις των παρατηρούμενων μεταβλητών με τους παράγοντες πρώτης τάξης, οι φορτίσεις των παραγόντων πρώτης τάξης με τους παράγοντες δεύτερης τάξης και οι φορτίσεις των παραγόντων δεύτερης τάξης με τον παράγοντα τρίτης τάξης θα είναι ίσες μεταξύ των δύο χορηγήσεων που εξετάζονται κάθε φορά.

Η προσαρμογή των συγκεκριμένων «αυστηρών» μοντέλων κρίθηκε αποδεκτή σε όλες τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν. Οι δείκτες όλων των υπό εξέταση μοντέλων που προαναφέρθηκαν παρουσιάζονται στον Πίνακα 23. Τα αποτελέσματα επιβεβαιώνουν δηλαδή την υπόθεση ότι υφίσταται η ίδια γνωστική δομή όσον αφορά στην εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων μετά τη μετάβαση των μαθητών από μία τάξη σε άλλη εντός της ίδιας εκπαιδευτικής βαθμίδας, πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας, και από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Πίνακας 23

Οι Τιμές των Δεικτών Προσαρμογής των Μοντέλων κατά την Περίοδο Μετάβασης των Μαθητών εντός και μεταξύ Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης

Μοντέλο	χ^2	df	χ^2/df	CFI	RMSEA
Μοντέλο με επτά παράγοντες πρώτης τάξης, δύο παράγοντες δεύτερης τάξης και ένα παράγοντα τρίτης τάξης για την πρώτη χορήγηση	302.12	193	1.57	0.96	0.04
Μοντέλο με επτά παράγοντες πρώτης τάξης, δύο παράγοντες δεύτερης τάξης και ένα παράγοντα τρίτης τάξης για τη δεύτερη χορήγηση	265.45	194	1.37	0.97	0.03
Μοντέλο με επτά παράγοντες πρώτης τάξης, δύο παράγοντες δεύτερης τάξης και ένα παράγοντα τρίτης τάξης για την τρίτη χορήγηση	322.51	194	1.66	0.95	0.04
«Αυστηρό» μοντέλο με επτά παράγοντες πρώτης τάξης, δύο παράγοντες δεύτερης τάξης και ένα παράγοντα τρίτης τάξης για την πρώτη και τη δεύτερη χορήγηση	1337.07	882	1.52	0.91	0.04
«Αυστηρό» μοντέλο με επτά παράγοντες πρώτης τάξης, δύο παράγοντες δεύτερης τάξης και ένα παράγοντα τρίτης τάξης για την πρώτη και την τρίτη χορήγηση	1432.21	885	1.62	0.90	0.04
«Αυστηρό» μοντέλο με επτά παράγοντες πρώτης τάξης, δύο παράγοντες δεύτερης τάξης και ένα παράγοντα τρίτης τάξης για τη δεύτερη και την τρίτη χορήγηση	1425.62	885	1.611	0.904	0.04

Ιεραρχική Διαβάθμιση των Έργων Ευελιξίας Χρήσης Πολλαπλών Αναπαραστάσεων με Βάση το Βαθμό Δυσκολίας τους

Το μοντέλο Rasch (Andrich, 1988) εφαρμόστηκε επίσης στα δεδομένα της δεύτερης και της τρίτης χορήγησης του δοκιμίου με σκοπό τη διερεύνηση της συνέπειας του σχετικού βαθμού δυσκολίας των έργων με βάση τις απαντήσεις των μαθητών σε αυτά. Οι ισοδιαστημικές κλίμακες των έργων με βάση το βαθμό δυσκολίας τους κυμαίνονται περίπου στα ίδια επίπεδα με αυτά της πρώτης χορήγησης. Παράλληλα, η ανάλυση με το μοντέλο Rasch υποδεικνύει την καταλληλότητα όλων των έργων για τη μέτρηση της ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων.

Πίνακας 24

Στατιστικά Στοιχεία για τις Κλίμακες των Έργων Ευελιξίας Χρήσης Πολλαπλών Αναπαραστάσεων του Δοκιμίου (L=19) και των Ικανοτήτων των Μαθητών (N=388) στη Δεύτερη Χορήγηση

Στατιστικά στοιχεία		
Mean	Έργα	0.00
	Μαθητές	0.57
Standard Deviation	Έργα	1.20
	Μαθητές	1.12
Reliability of estimate	Έργα	0.99
	Μαθητές	0.78
Mean Infit mean square	Έργα	1.00
	Μαθητές	1.00
Mean Outfit mean square	Έργα	1.08
	Μαθητές	1.08
Infit t	Έργα	-0.12
	Μαθητές	0.02
Outfit t	Έργα	0.03
	Μαθητές	0.12

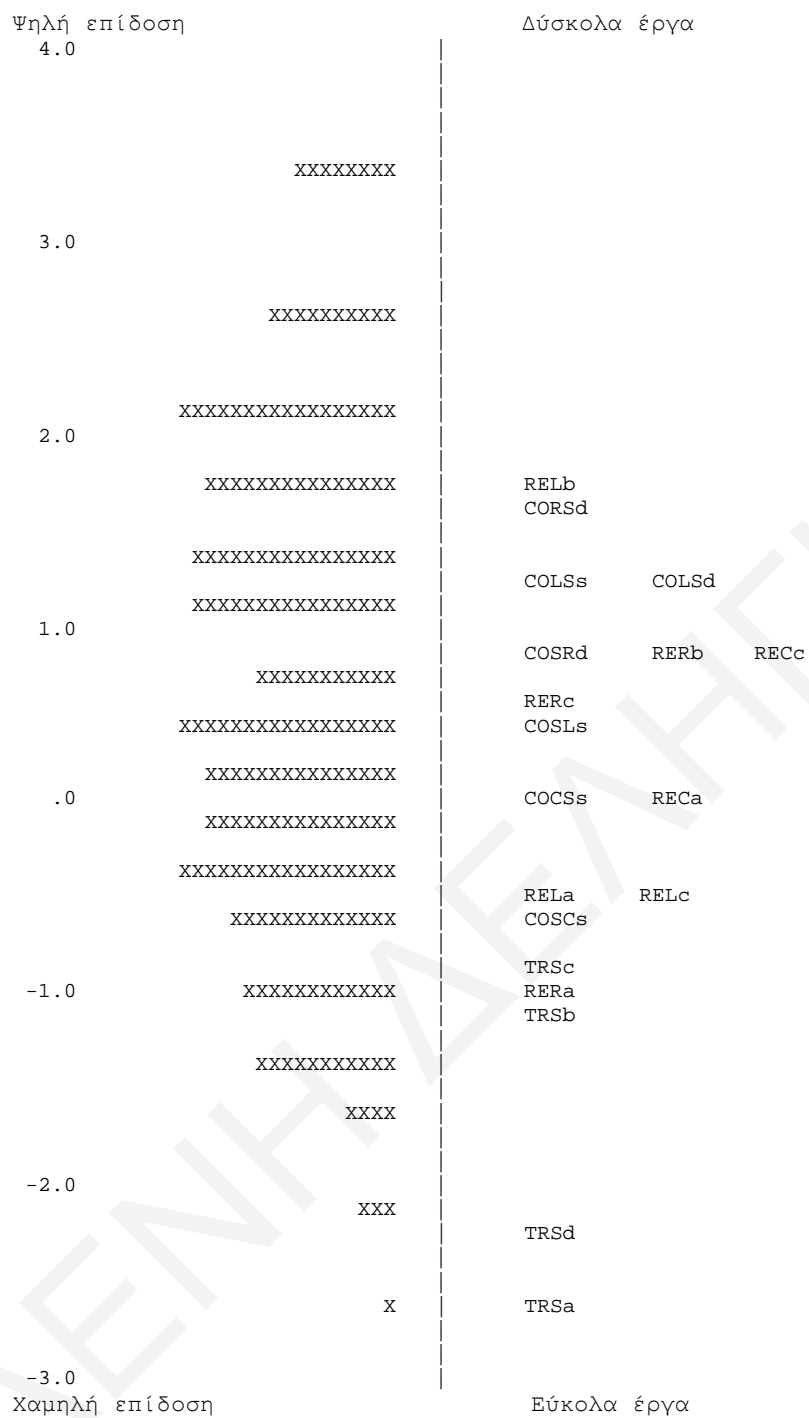
Οι Πίνακες 24 και 25 παρουσιάζουν συνοπτικά τα στατιστικά στοιχεία των κλιμάκων που προέκυψαν από την ανάλυση για τα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων στη δεύτερη χορήγηση του δοκιμίου. Παρατηρείται ότι, για το συγκεκριμένο δοκίμιο ο δείκτης για τους μαθητές είναι 0.78 και για τα έργα 0.99 όσον αφορά την δεύτερη χορήγηση. Στην τρίτη χορήγηση ο δείκτης για τους μαθητές είναι 0.79 και για τα έργα 0.99. Οι συγκεκριμένες τιμές υποδηλώνουν ότι η αξιοπιστία της κλίμακας, η οποία αντιπροσωπεύει το ποσοστό της παρατηρούμενης διασποράς που θεωρείται έγκυρη, είναι ικανοποιητική στη δεύτερη και στην τρίτη χορήγηση του δοκιμίου. Επιπλέον, οι τιμές των Mean infit square και των Mean outfit square προσεγγίζουν τη μονάδα, ενώ οι τιμές των Infit t και των Outfit t προσεγγίζουν το 0, κάτι το οποίο συνέβαινε και στην πρώτη χορήγηση.

Πίνακας 25

Στατιστικά Στοιχεία για τις Κλίμακες των Έργων Ευελιξίας Χρήσης Πολλαπλών Αναπαραστάσεων του Δοκιμίου (L=19) και των Ικανοτήτων των Μαθητών (N=388) στην Τρίτη Χορήγηση

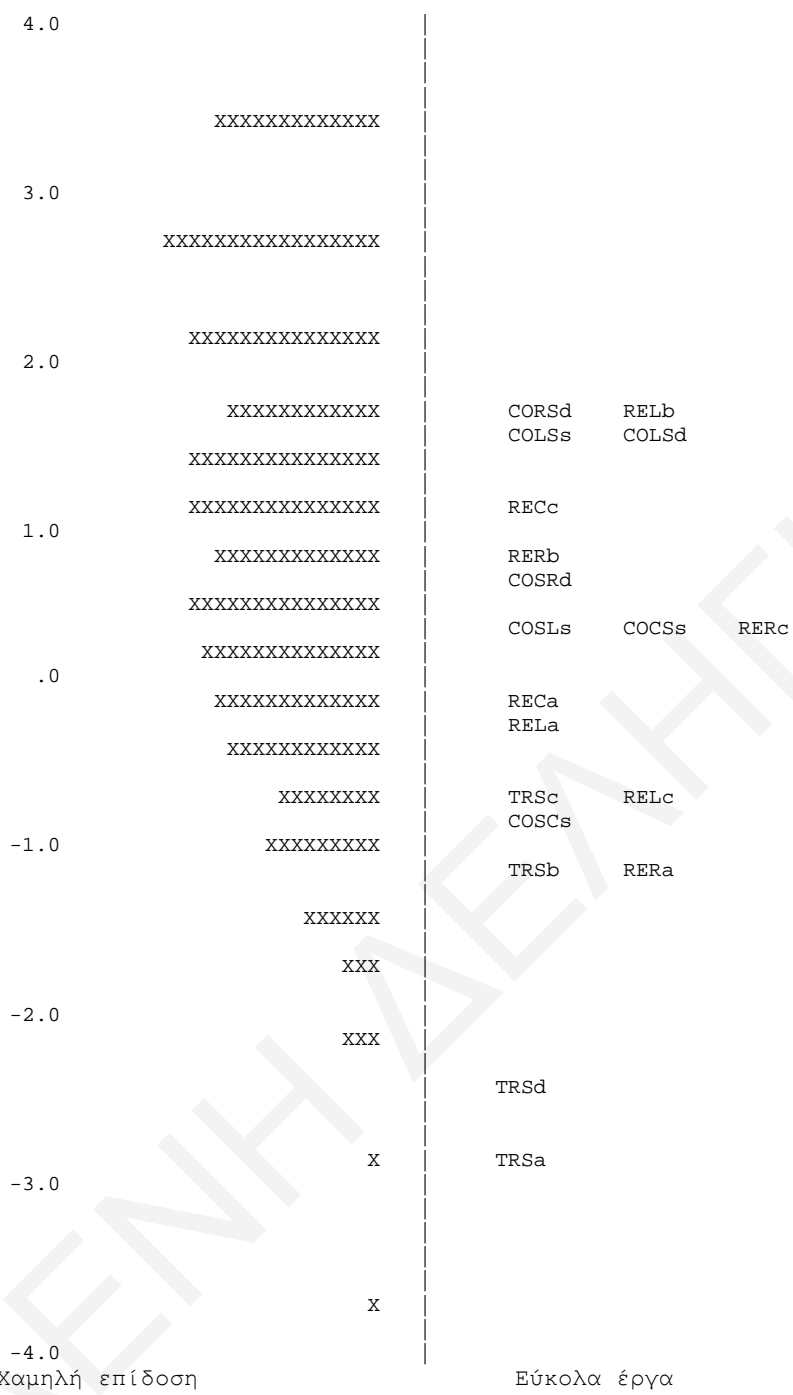
Στατιστικά στοιχεία		
Mean	Έργα	0.00
	Μαθητές	0.87
Standard Deviation	Έργα	1.32
	Μαθητές	1.39
Reliability of estimate	Έργα	0.99
	Μαθητές	0.79
Mean Infit mean square	Έργα	1.00
	Μαθητές	1.00
Mean Outfit mean square	Έργα	1.12
	Μαθητές	1.12
Infit t	Έργα	-0.13
	Μαθητές	0.01
Outfit t	Έργα	0.10
	Μαθητές	0.17

N = 388 L = 19 Probability Level= .50, Κάθε X αντιστοιχεί σε 2 μαθητές



Διάγραμμα 26. Ισοδιαστημική κλίμακα του βαθμού δυσκολίας των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων του δοκιμίου σε αντιπαραβολή με τις ικανότητες των μαθητών στη δεύτερη χορήγηση (B' φάση έρευνας).

N = 388 L = 19 Probability Level= .50), Κάθε X αντιστοιχεί σε 2 μαθητές



Διάγραμμα 27. Ισοδιαστημική κλίμακα του βαθμού δυσκολίας των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων του δοκιμίου σε αντιπαραβολή με τις ικανότητες των μαθητών στην τρίτη χορήγηση (B' φάση έρευνας).

Τα Διαγράμματα 26 και 27 παρουσιάζουν την ισοδιαστημική κλίμακα του βαθμού δυσκολίας των έργων του δοκιμίου σε αντιδιαστολή με τις ικανότητες των μαθητών που συμμετέχουν στη δεύτερη και στην τρίτη χορήγησή του, αντίστοιχα. Τα Διαγράμματα 28 και 29 δείχνουν το βαθμό στον οποίο τα έργα παρουσιάζουν συνάφεια με το μοντέλο στη δεύτερη και στην τρίτη χορήγηση του δοκιμίου.

N = 388 L = 19 Probability Level= .50

INFIT						
MNSQ	.63	.71	.83	1.00	1.20	1.40
1.60						
1 TRSa		.			*	.
2 TRSb		.		*		.
3 TRSc		.	*			.
4 TRSd		.			*	.
5 COSCs		.			*	.
6 COSLs		.			*	.
7 COSRd		.	*			.
8 COLSs		.	*			.
9 COCSs		.		*		.
10 COLSd		.	*			.
11 CORSD		.		*		.
12 RELa		.	*			.
13 RECa		.			*	.
14 RERa		.			*	.
15 RERb		.		*		.
16 RELb		.		*		.
17 RECc		.			*	.
18 RERc		.		*		.
19 RELc		.	*			.

Διάγραμμα 28. Συνάφεια των έργων του δοκιμίου με το μοντέλο Rasch στη δεύτερη χορήγηση (Β'ερευνητική φάση).

Τόσο από το Διάγραμμα 26 όσο και από το Διάγραμμα 27 είναι εμφανές ότι όλα τα έργα του δοκιμίου έχουν ικανοποιητική προσαρμογή με το μοντέλο μέτρησης. Η επίδοση των μαθητών στη δεύτερη χορήγηση βρίσκεται μεταξύ -2.68 και 4 logits και ο βαθμός δυσκολίας των έργων επεκτείνεται από το -2.64 μέχρι 1.53. Όσον αφορά την τρίτη χορήγηση η επίδοση των μαθητών βρίσκεται μεταξύ -4 και 4 logits, ενώ ο βαθμός δυσκολίας των έργων επεκτείνεται από το -2.92 μέχρι 1.68. Συνεπώς, σε γενικές γραμμές οι διάφοροι δείκτες επιβεβαιώνουν και στα αποτελέσματα της δεύτερης και της τρίτης χορήγησης την ύπαρξη μιας συστηματικής και συνεπούς διαβάθμισης των έργων ως προς το βαθμό δυσκολίας τους.

N = 388 L = 19 Probability Level= .50

INFINIT	.63	.71	.83	1.00	1.20	1.40
MNSQ						
1.60						
1 TRSa	*	.
2 TRSb	.	*
3 TRSc	.	.	*	.	.	.
4 TRSd	.	.	.	*	.	.
5 COSCs	*	.
6 COSLs	.	.	.	*	.	.
7 COSRd	.	.	*	.	.	.
8 COLSs	.	*
9 COCSs	.	.	.	*	.	.
10 COLSd	.	.	.	*	.	.
11 CORSD	.	.	.	*	.	.
12 RELa	.	*
13 RECa	*
14 RERa	.	.	.	*	.	.
15 RERb	.	.	.	*	.	.
16 RELb	.	.	.	*	.	.
17 RECc	*	.
18 RERC	.	.	.	*	.	.
19 RELc	.	*

Διάγραμμα 29. Συνάφεια των έργων του δοκιμίου με το μοντέλο Rasch στην τρίτη χορήγηση (Β' ερευνητική φάση).

Η ιεράρχηση των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων με βάση το βαθμό δυσκολίας παρουσιάζεται σχεδόν όμοια με την αντίστοιχη ιεράρχηση στην πρώτη χορήγηση επιβεβαιώνοντας το γεγονός ότι ο βαθμός δυσκολίας των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων είναι αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης του πεδίου αναπαράστασης του έργου (συμβολική ή διαγραμματική αναπαράσταση), της λειτουργίας που επιτελείται (χειρισμός, αναγνώριση, μετάφραση) και των σχετικών εννοιών της πρόσθεσης κλασμάτων (πρόσθεση ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων).

Η Επίδραση της Ηλικίας και του Χρόνου Μετάβασης στην Εννοιολογική Κατανόηση της Πρόσθεσης Κλασμάτων

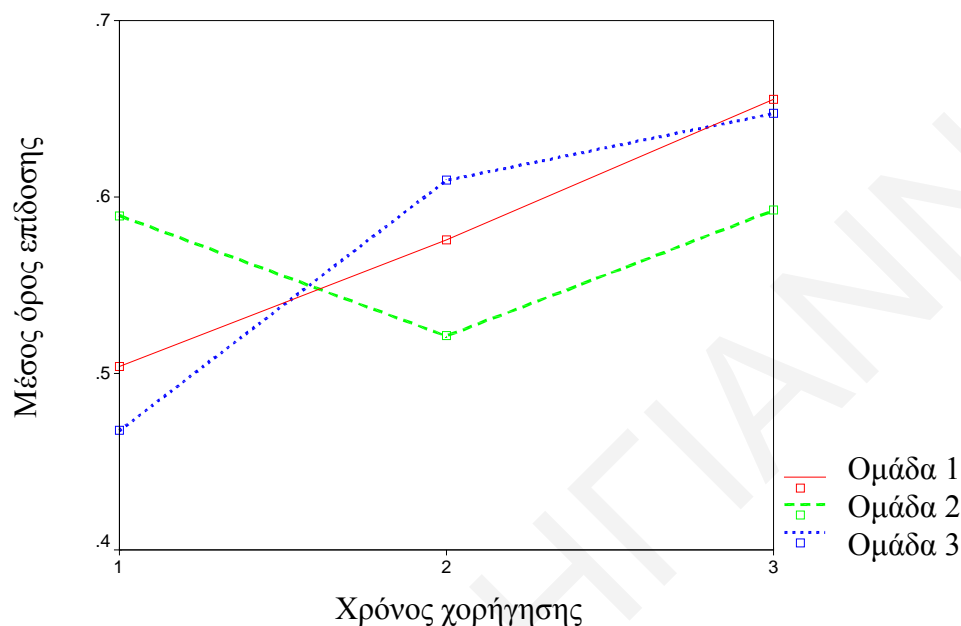
Με την πολυμεταβλητή ανάλυση διασποράς επαναλαμβανόμενων μετρήσεων έγινε σύγκριση του μέσου όρου επίδοσης των μαθητών που κατά την προηγούμενη σχολική χρονιά φοιτούσαν στην Ε' δημοτικού, Στ' δημοτικού και Α' γυμνασίου σε τρεις διαφορετικές χρονικές περιόδους κατά τη διάρκεια δώδεκα μηνών. Στον Πίνακα 26 παρουσιάζονται οι μέσοι όροι επίδοσης των μαθητών στις τρεις ηλικιακές ομάδες όσον αφορά τις διαστάσεις

ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος με διάφορα πεδία αναπαράστασης στις τρεις χορηγήσεις του δοκιμίου.

Τα αποτελέσματα της έρευνας υποδηλώνουν ότι ο χρόνος μετάβασης [Pillai's $F(14, 372)= 7.91, p<0.001$] είχε σημαντική επίδραση στην επίδοση των μαθητών. Συγκεκριμένα, μέσα στο χρονικό διάστημα των δώδεκα μηνών η συνολική επίδοση των μαθητών στις διαστάσεις ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της ικανότητας επίλυσης προβλήματος βελτιώθηκε σημαντικά. Το συγκεκριμένο εύρημα αιτιολογείται λαμβάνοντας υπόψη τη γνωστική ανάπτυξη και τη διδασκαλία που λαμβάνει χώρα σε διάστημα ενός χρόνου στο σύνολο του δείγματος κατά τη δεύτερη ερευνητική φάση. Αξίζει να σημειωθεί ότι η συνολική επίδοση των μαθητών των τριών ηλικιακών ομάδων στις συγκεκριμένες διαστάσεις κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων δε διέφερε σημαντικά [Pillai's $F(14, 760)=1.28, p=0.213$]. Διαπιστώνεται όμως σημαντική αλληλεπίδραση του χρόνου με την ηλικία των μαθητών [Pillai's $F(28, 746)=5.25, p<0.001$] όσον αφορά στην ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και την ικανότητα επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων. Συγκεκριμένα, βρέθηκε ότι η επίδοση των μαθητών στα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων [$F(4, 379)=7.51, p<0.001$], χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων [$F(4, 379)=16.68, p<0.001$], μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων [$F(4, 379)=3.41, p<0.01$], επίλυσης λεκτικών προβλημάτων πρόσθεσης κλασμάτων [$F(4, 379)= 5.33, p<0.001$] και προβλημάτων με κύρια ή βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση πρόσθεσης κλασμάτων [$F(4, 379)= 10.71, p<0.001$] διαφέρει ανάλογα με το αν οι μαθητές μεταβαίνουν εντός της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και εντός της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Στα Διαγράμματα 30, 31, 33, 34, 35 και 36 παρουσιάζεται η μεταβολή του μέσου όρου επίδοσης στις επιμέρους διαστάσεις της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος με ποικιλία πεδίων αναπαράστασης της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων κάθε ηλικιακής ομάδας ξεχωριστά κατά τη διάρκεια των τριών χορηγήσεων. Η πρώτη ηλικιακή ομάδα αναφέρεται στους μαθητές οι οποίοι μεταβαίνουν από την Ε' στη Στ' δημοτικού, η δεύτερη ηλικιακή ομάδα στους μαθητές που μεταβαίνουν από την Στ' δημοτικού στην Α' γυμνασίου και η τρίτη ηλικιακή ομάδα στους μαθητές οι οποίοι μεταβαίνουν από την Α' στη Β' γυμνασίου.

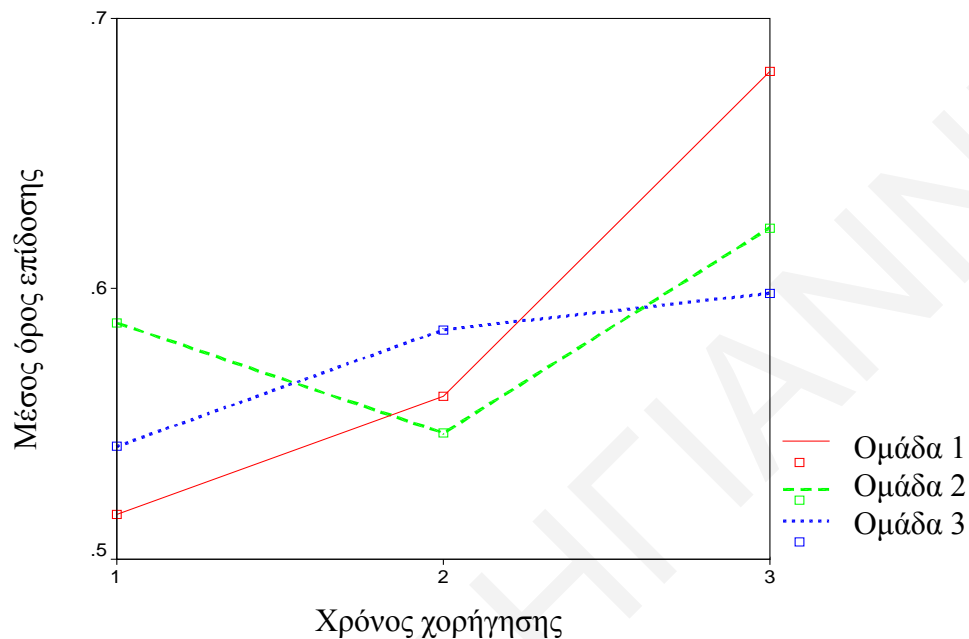
Συγκεκριμένα, στο Διάγραμμα 30 παρουσιάζεται ο μέσος όρος επίδοσης των μαθητών στα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων των τριών ηλικιακών ομάδων κατά τη διάρκεια ενός χρόνου.



Διάγραμμα 30. Μέσος όρος επίδοσης των μαθητών στα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων ανά ηλικιακή ομάδα κατά τη μεταβατική περίοδο.

Οι μαθητές της πρώτης ηλικιακής ομάδας, οι οποίοι μεταβαίνουν από την Ε' στη Στ' δημοτικού βελτιώνουν σταθερά και σταδιακά την επίδοσή τους στο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα στα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων. Οι μαθητές της δεύτερης ηλικιακής ομάδας στην πρώτη χορήγηση είχαν τη ψηλότερη επίδοση στα συγκεκριμένα έργα. Κατά τη μετάβαση όμως στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση η επίδοσή τους μειώνεται. Μάλιστα, η συγκεκριμένη ηλικιακή ομάδα έχει τη χαμηλότερη επίδοση στη δεύτερη χορήγηση σε σχέση με τις άλλες δύο ηλικιακές ομάδες. Παρόλα αυτά, στην τελευταία χορήγηση η επίδοση της ομάδας αυτής βελτιώνεται φτάνοντας στο ίδιο σημείο που βρισκόταν την προηγούμενη σχολική χρονιά. Ως εκ τούτου, στο χρονικό διάστημα μεταξύ της πρώτης και της τρίτης χορήγησης παρατηρείται στασιμότητα στην ικανότητα των μαθητών της δεύτερης ηλικιακής ομάδας να αναγνωρίζουν την πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων. Η τρίτη ηλικιακή ομάδα αρχικά έχει τη χαμηλότερη επίδοση στα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων. Η επίδοση της συγκεκριμένης ομάδας βελτιώνεται σημαντικά στη δεύτερη χορήγηση, με αποτέλεσμα να παρουσιάζει τη ψηλότερη επίδοση σε σχέση με τις υπόλοιπες ηλικίες ομάδες στα

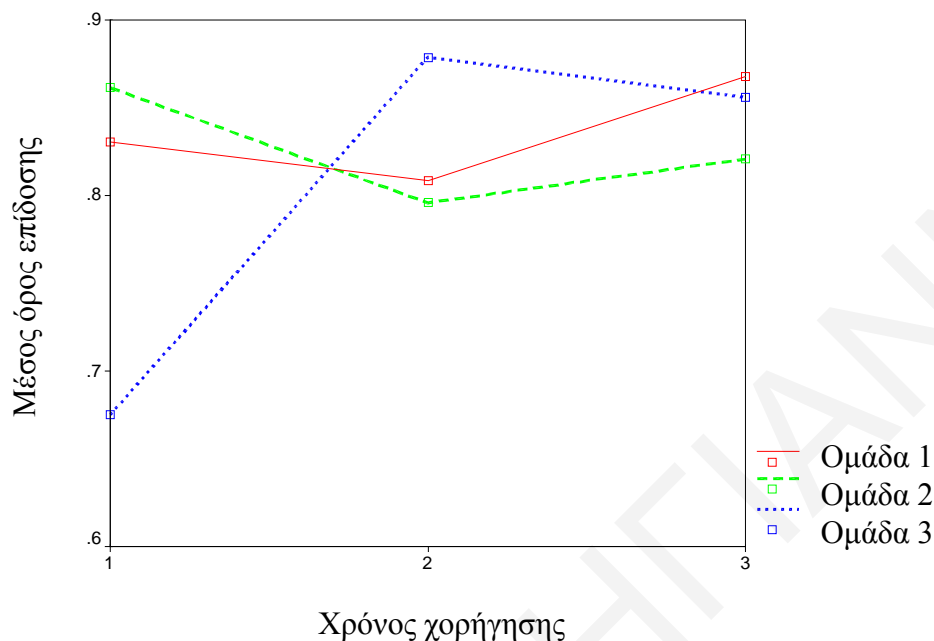
συγκεκριμένα έργα αναγνώρισης. Όμως μεταξύ δεύτερης και τρίτης χορήγησης η ικανότητα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων της τρίτης ηλικιακής ομάδας παρουσιάζει μικρή βελτίωση.



Διάγραμμα 31. Μέσος όρος επίδοσης των μαθητών στα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων ανά ηλικιακή ομάδα κατά τη μεταβατική περίοδο.

Το Διάγραμμα 31 παρουσιάζει το μέσο όρο επίδοσης των μαθητών στα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων των τριών ηλικιακών ομάδων κατά τη διάρκεια των τριών χορηγήσεων. Ο μέσος όρος επίδοσης στα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων αυξάνεται για την πρώτη ηλικιακή ομάδα κατά τη διάρκεια ενός χρόνου. Ιδιαίτερα σημαντική είναι η βελτίωση της ικανότητας αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων κατά τη διάρκεια φοίτησης στη Στ' δημοτικού, δηλαδή μεταξύ δεύτερης και τρίτης χορήγησης. Αντίθετα, στη δεύτερη ηλικιακή ομάδα παρουσιάζεται μείωση του μέσου όρου επίδοσης στα συγκεκριμένα έργα αναγνώρισης κατά τη μετάβαση από την Στ' δημοτικού στην Α' γυμνασίου. Η επίδοση των συγκεκριμένων μαθητών βελτιώνεται όμως μεταξύ δεύτερης και τρίτης χορήγησης του δοκιμίου δηλαδή εντός της σχολικής χρονιάς φοίτησης στην Α' γυμνασίου. Όσον αφορά την τρίτη ηλικιακή ομάδα είναι ιδιαίτερα εμφανής η βελτίωση της επίδοσης των μαθητών από την πρώτη στη δεύτερη χορήγηση στα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων. Παρόλα αυτά, παρατηρείται στασιμότητα στο μέσο όρο

επίδοσης των μαθητών της Β΄ γυμνασίου κατά τη διάρκεια της σχολικής χρονιάς, δηλαδή μεταξύ δεύτερης και τρίτης χορήγησης.

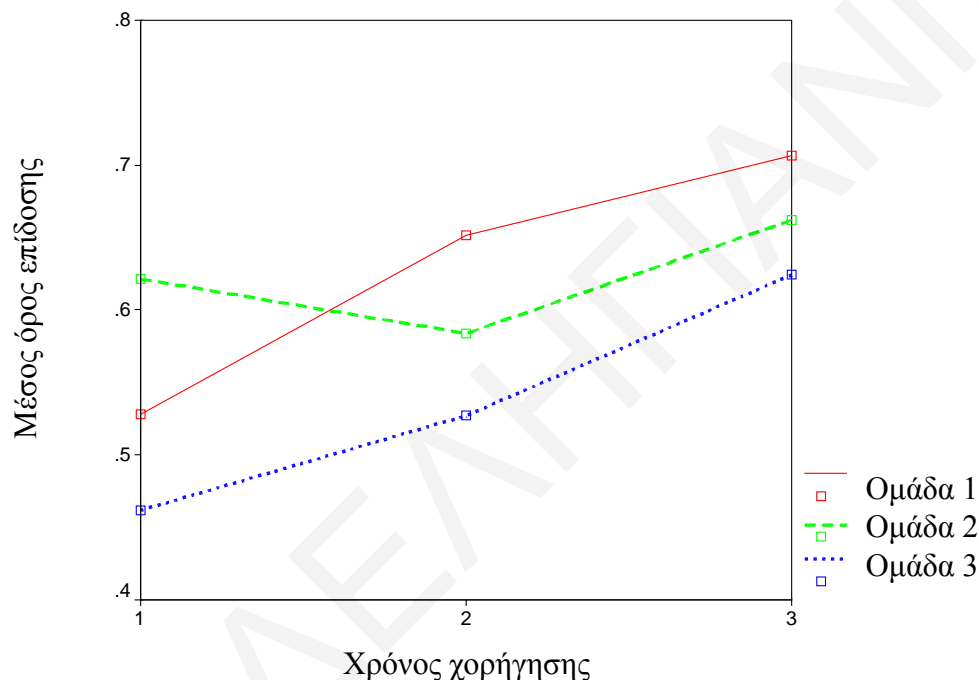


Διάγραμμα 32. Μέσος όρος επίδοσης των μαθητών στα έργα χειρισμού της πρόσθεσης κλασμάτων ανά ηλικιακή ομάδα κατά τη μεταβατική περίοδο.

Το Διάγραμμα 32 παρουσιάζει το μέσο όρο επίδοσης των μαθητών στα έργα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων των τριών ηλικιακών ομάδων κατά τη διάρκεια των τριών χορηγήσεων. Η πρώτη ηλικιακή ομάδα παρουσιάζει μικρή μείωση της επίδοσης στα έργα χειρισμού κατά τη μετάβαση στην επόμενη τάξη. Κατά τη διάρκεια όμως της σχολικής χρονιάς η ικανότητα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων βελτιώνεται. Αντίθετα, παρά την έμφαση που δίνεται στις συμβολικές αναπαραστάσεις στα σχολικά εγχειρίδια του γυμνασίου η επίδοση των μαθητών της δεύτερης ηλικιακής ομάδας κατά τη μετάβαση στην Α΄ γυμνασίου μειώνεται. Μάλιστα, παρά τη μικρή βελτίωση της επίδοσης στα έργα χειρισμού των συγκεκριμένων μαθητών κατά τη διάρκεια της σχολικής χρονιάς, ο μέσος όρος επίδοσης των μαθητών στην τρίτη χορήγηση είναι μικρότερος από τον αντίστοιχο μέσο όρο της ίδιας ηλικιακής ομάδας κατά την προηγούμενη σχολική χρονιά. Από την άλλη, ο μέσος όρος επίδοσης των μαθητών της τρίτης ηλικιακής ομάδας βελτιώνεται σημαντικά κατά τη μετάβαση στη Β΄ γυμνασίου. Κατά τη διάρκεια όμως της σχολικής χρονιάς παρατηρείται

μικρή μείωση του μέσου όρου επίδοσης της συγκεκριμένης ηλικιακής ομάδας στα έργα χειρισμού.

Το Διάγραμμα 33 παρουσιάζει το μέσο όρο επίδοσης των μαθητών στα έργα μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων των τριών ηλικιακών ομάδων κατά τη διάρκεια των τριών χορηγήσεων.

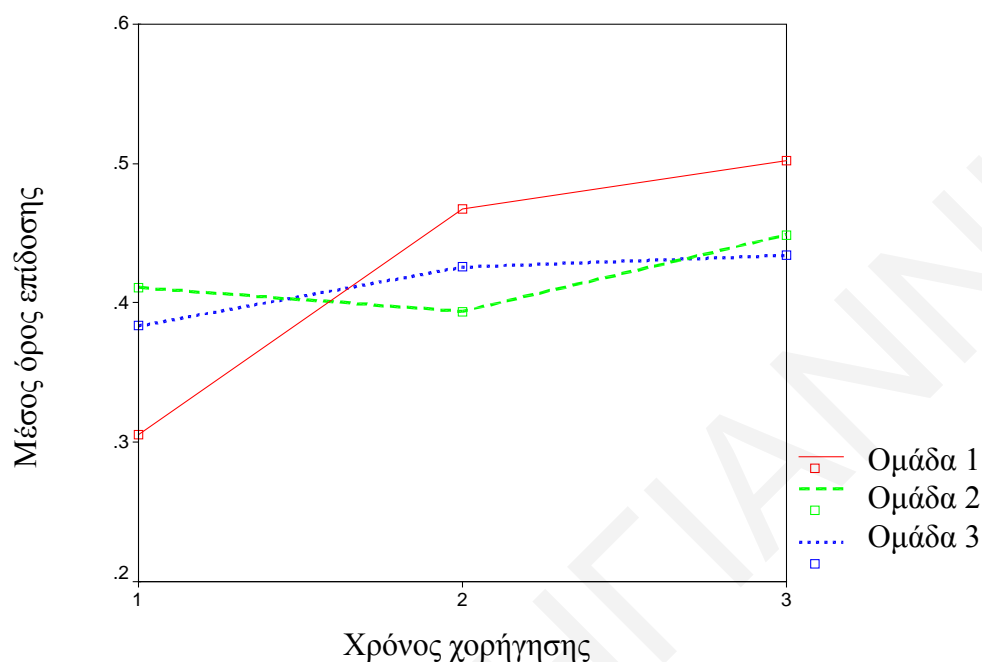


Διάγραμμα 33. Μέσος όρος επίδοσης των μαθητών στα έργα μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων ανά ηλικιακή ομάδα κατά τη μεταβατική περίοδο.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του Διαγράμματος 33 είναι εμφανής η γραμμική βελτίωση της επίδοσης του μέσου όρου των μαθητών στα έργα μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων για τους μαθητές της πρώτης και της τρίτης ηλικιακής ομάδας, οι οποίοι μεταβαίνουν εντός της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, αντίστοιχα. Αντίθετα, ο μέσος όρος επίδοσης των μαθητών, οι οποίοι μεταβαίνουν από τη Στ' δημοτικού στην Α' γυμνασίου, στα συγκεκριμένα έργα μετάφρασης μειώνεται στη δεύτερη χορήγηση και αυξάνεται σταδιακά στην τρίτη χορήγηση.

Ο μέσος όρος επίδοσης των μαθητών στα έργα μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων των τριών

ηλικιακών ομάδων κατά τη διάρκεια των τριών χορηγήσεων παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 34.

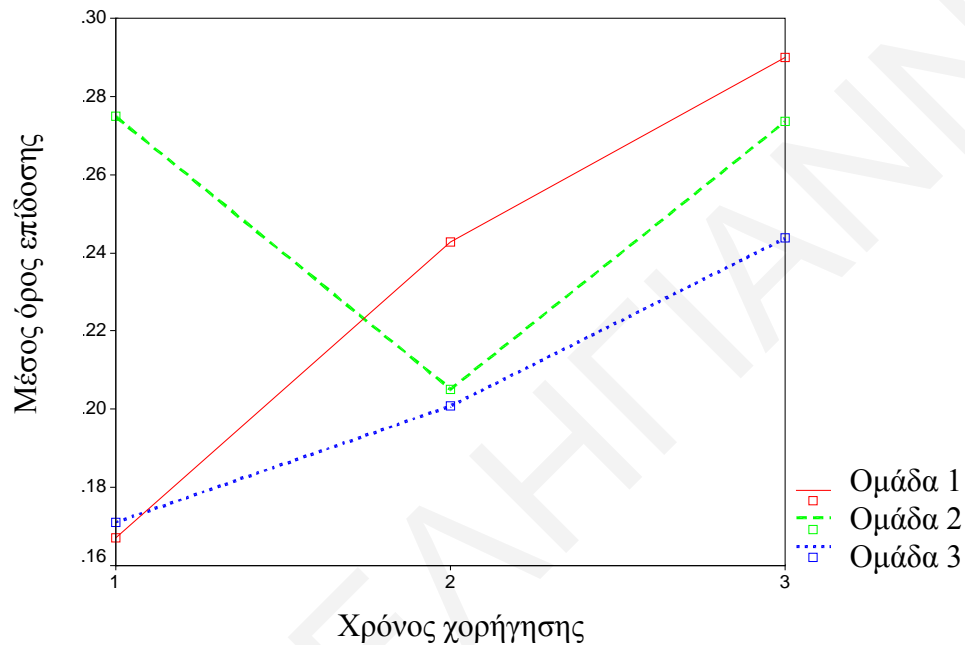


Διάγραμμα 34. Μέσος όρος επίδοσης των μαθητών στα έργα μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης κλασμάτων ανά ηλικιακή ομάδα κατά τη μεταβατική περίοδο.

Ο μέσος όρος επίδοσης των μαθητών της πρώτης ηλικιακής ομάδας βελτιώνεται σημαντικά τόσο στην δεύτερη όσο και στην τρίτη χορήγηση σε σχέση με το μέσο όρο επίδοσης στα συγκεκριμένα έργα στην πρώτη χορήγηση. Αξίζει να σημειωθεί μάλιστα ότι ο μέσος όρος επίδοσης στα έργα μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρώτης ηλικιακής ομάδας στη δεύτερη και στην τρίτη χορήγηση είναι ψηλότερος από τον αντίστοιχο μέσο όρο επίδοσης για τις άλλες δύο ηλικιακές ομάδες. Από την άλλη, ο μέσος όρος επίδοσης της δεύτερης και της τρίτης ηλικιακής ομάδας κατά τη χρονική διάρκεια των τριών χορηγήσεων κυμαίνεται περίπου στα ίδια επίπεδα.

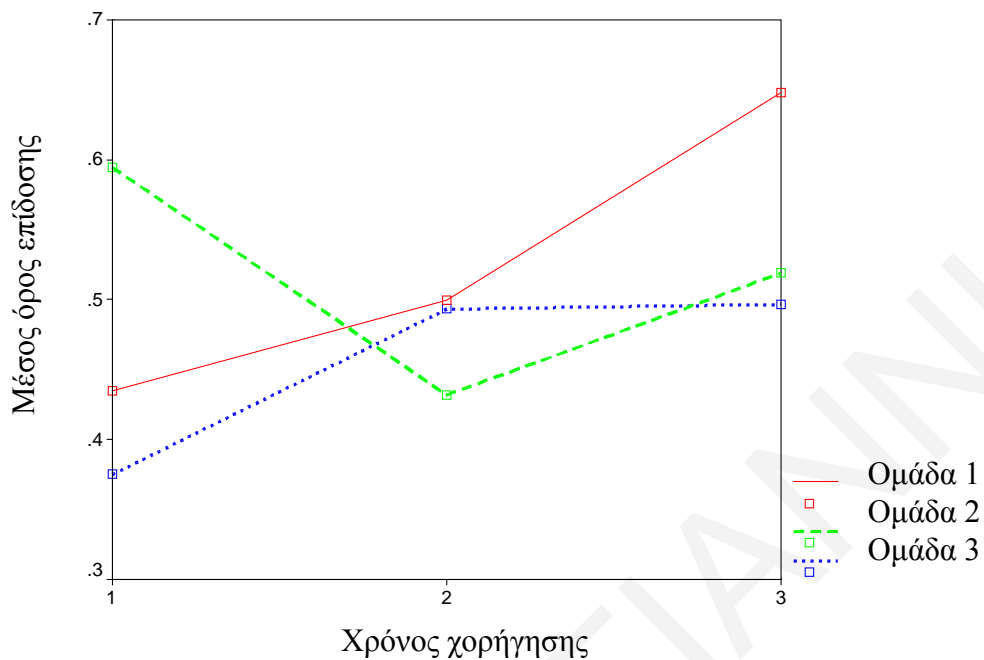
Στο Διάγραμμα 35 παρουσιάζεται ο μέσος όρος επίδοσης των μαθητών στα έργα επίλυσης λεκτικών προβλημάτων πρόσθεσης κλασμάτων των τριών ηλικιακών ομάδων κατά τη διάρκεια ενός χρόνου. Ο μέσος όρος επίδοσης στα λεκτικά προβλήματα πρόσθεσης κλασμάτων των μαθητών της πρώτης ηλικιακής ομάδας βελτιώνεται γραμμικά κατά τη μετάβαση εντός της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης τόσο στη δεύτερη όσο και στην τρίτη χορήγηση. Γραμμική βελτίωση παρουσιάζει επίσης η επίδοση των μαθητών και της τρίτης ηλικιακής ομάδας κατά τη μετάβαση εντός της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στα

συγκεκριμένα έργα. Αντίθετα, ο μέσος όρος επίδοσης των μαθητών της δεύτερης ηλικιακής μετάβασης μειώνεται αρχικά με τη μετάβαση από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Στην τρίτη χορήγηση ο μέσος όρος επίδοσης στα λεκτικά προβλήματα αυξάνεται σημαντικά χωρίς ωστόσο να βελτιώνεται σε σχέση με την πρώτη χορήγηση όσον αφορά τους συγκεκριμένους μαθητές.



Διάγραμμα 35. Μέσος όρος επίδοσης των μαθητών στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων πρόσθεσης κλασμάτων ανά ηλικιακή ομάδα κατά τη μεταβατική περίοδο.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του Διαγράμματος 36, το οποίο παρουσιάζει το μέσο όρο επίδοσης των μαθητών στην επίλυση διαγραμματικών προβλημάτων πρόσθεσης κλασμάτων των τριών ηλικιακών ομάδων στις τρεις χορηγήσεις, ο μέσος όρος επίδοσης των μαθητών της πρώτης ηλικιακής ομάδας βελτιώνεται κατά τη διάρκεια ενός χρόνου στα συγκεκριμένα έργα. Αντίθετα, στη δεύτερη ηλικιακή ομάδα παρουσιάζεται πτώση του μέσου όρου επίδοσης σε σχέση με την πρώτη χορήγηση τόσο στη δεύτερη όσο και στην τρίτη χορήγηση του δοκιμίου, παρόλο που από τη δεύτερη στην τρίτη χορήγηση του δοκιμίου η επίδοση των μαθητών στα συγκεκριμένα έργα βελτιώνεται. Κατά τη μετάβαση της τρίτης ομάδας μαθητών εντός της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης ο μέσος όρος επίδοσης των μαθητών στα προβλήματα με κύρια ή βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση αρχικά βελτιώνεται ενώ στη συνέχεια παρατηρείται στασιμότητα.



Διάγραμμα 36. Μέσος όρος επίδοσης των μαθητών στην επίλυση διαγραμματικών προβλημάτων πρόσθεσης κλασμάτων ανά ηλικιακή ομάδα κατά τη μεταβατική περίοδο.

Με βάση τα αποτελέσματα στα Διαγράμματα 30 μέχρι 36 και στον Πίνακα 26, ο οποίος παρουσιάζει τους μέσους όρους και τις τυπικές αποκλίσεις των επιδόσεων των μαθητών στις επιμέρους διαστάσεις της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της ικανότητας επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων, σε όλες τις γνωστικές διαστάσεις η επίδοση της δεύτερης ηλικιακής ομάδας παρουσιάζεται υψηλή στην πρώτη φάση της έρευνας. Με τη μετάβαση όμως στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση η επίδοση των μαθητών της συγκεκριμένης ομάδας στη δεύτερη χορήγηση μειώνεται ενώ στη τρίτη χορήγηση φτάνει στα ίδια περίπου επίπεδα που βρισκόταν ένα χρόνο πριν κατά την πρώτη χορήγηση. Ως εκ τούτου, η επίδοση των μαθητών της δεύτερης ηλικιακής ομάδας χαρακτηρίζεται από μια στασιμότητα.

Πίνακας 26

Μέσοι Όροι και Τυπικές Αποκλίσεις των Επιδόσεων των Μαθητών στην Πρόσθεση Κλασμάτων κατά Διάσταση της Ενωσιολογικής Κατανόησης της Πρόσθεσης Κλασμάτων και Ηλικιακή Ομάδα στη Β' Ερευνητική Φάση

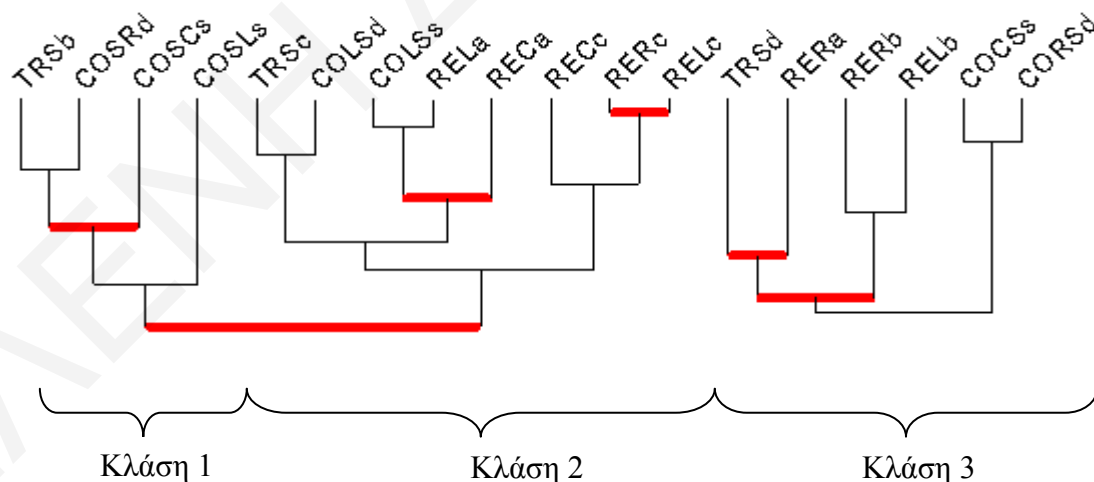
Χορήγηση	Γνωστική διάσταση	Ομάδα μαθητών					
		Ομάδα 1		Ομάδα 2		Ομάδα 3	
		\bar{X}	SD	\bar{X}	SD	\bar{X}	SD
Χορήγηση 1	Π1	0.50	0.31	0.59	0.30	0.47	0.31
	Π2	0.52	0.38	0.59	0.36	0.54	0.39
	Π3	0.83	0.27	0.86	0.28	0.68	0.34
	Π4	0.53	0.37	0.62	0.38	0.46	0.35
	Π5	0.31	0.30	0.41	0.38	0.38	0.35
	Π6	0.17	0.26	0.27	0.29	0.17	0.25
	Π7	0.44	0.44	0.59	0.44	0.37	0.43
Χορήγηση 2	Π1	0.58	0.29	0.52	0.31	0.61	0.33
	Π2	0.56	0.37	0.55	0.40	0.59	0.35
	Π3	0.81	0.29	0.80	0.30	0.88	0.24
	Π4	0.65	0.33	0.57	0.36	0.53	0.41
	Π5	0.47	0.36	0.39	0.35	0.43	0.37
	Π6	0.24	0.26	0.21	0.26	0.20	0.26
	Π7	0.50	0.44	0.43	0.41	0.49	0.44
Χορήγηση 3	Π1	0.66	0.29	0.59	0.32	0.65	0.31
	Π2	0.68	0.35	0.62	0.35	0.60	0.36
	Π3	0.87	0.24	0.82	0.28	0.86	0.28
	Π4	0.71	0.35	0.66	0.34	0.62	0.37
	Π5	0.50	0.38	0.45	0.37	0.43	0.36
	Π6	0.29	0.28	0.27	0.28	0.25	0.28
	Π7	0.65	0.42	0.52	0.43	0.50	0.46
N		108		132		148	

Αντίθετα, η πρώτη και η τρίτη ομάδα μαθητών παρουσιάζει βελτίωση της επίδοσης σε όλες σχεδόν τις διαστάσεις της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της επίλυσης προβλήματος με διάφορα πεδία αναπαράστασης. Κατά τη μετάβαση δηλαδή εντός

της ίδιας βαθμίδας, πρωτοβάθμιας ή δευτεροβάθμιας, η επίδοση των μαθητών βελτιώνεται σημαντικά. Στην περίπτωση της μετάβασης εντός της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης παρατηρείται βελτίωση της επίδοσης των μαθητών κυρίως από την πρώτη στη δεύτερη χορήγηση του δοκιμίου. Στα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων, συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων και επίλυσης διαγραμματικών προβλημάτων πρόσθεσης κλασμάτων η επίδοση των μαθητών της τρίτης ηλικιακής ομάδας παρουσιάζει στασιμότητα μεταξύ δεύτερης και τρίτης χορήγησης. Στην περίπτωση της μετάβασης εντός της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, η βελτίωση της επίδοσης στις γνωστικές διαστάσεις της πρόσθεσης κλασμάτων είναι σχεδόν γραμμική. Παρά τη βελτίωση της επίδοσης λόγω της επίδρασης του χρόνου, ο μέσος όρος επίδοσης παραμένει σε χαμηλά επίπεδα σε όλες τις ηλικιακές ομάδες όσον αφορά τις διάφορες διαστάσεις της κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων. Εξαιρέση αποτελεί η διάσταση που αναφέρεται στα έργα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης κλασμάτων.

Σχέσεις Ομοιότητας των Έργων Ευελιξίας Χρήσης Πολλαπλών Αναπαραστάσεων Πρόσθεσης Κλασμάτων κατά την Πρώτη και Δεύτερη Φάση της Έρευνας

Τα Διαγράμματα 37 μέχρι 39 παρουσιάζουν τις σχέσεις ομοιότητας των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων στην πρώτη, δεύτερη και τρίτη χορήγηση, αντίστοιχα για την ομάδα των μαθητών που μεταβαίνει από την Ε΄ στη Στ΄ δημοτικού.



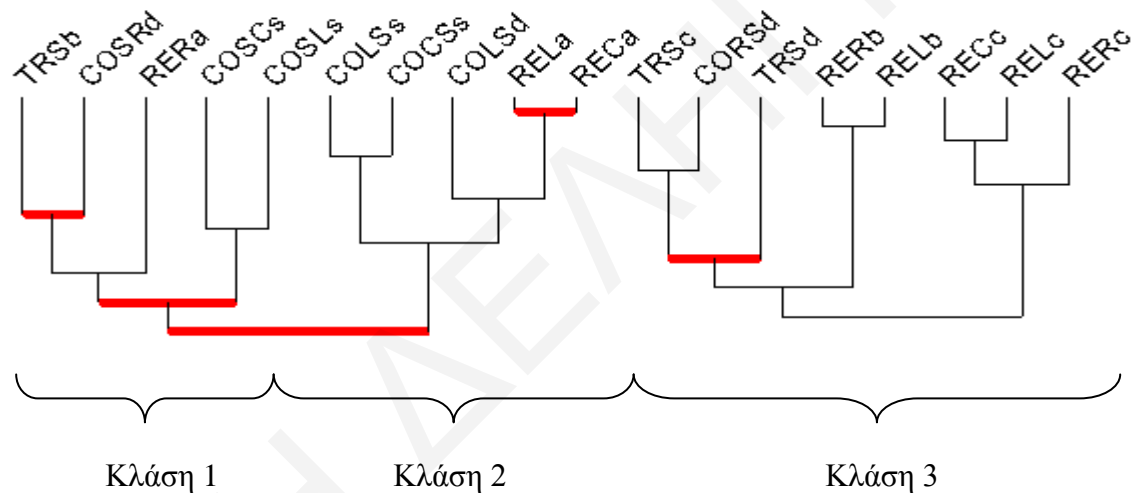
Διάγραμμα 37. Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών της πρώτης ηλικιακής ομάδας στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων κατά την πρώτη χορήγηση (Α΄ ερευνητική φάση).

Στο Διάγραμμα 37 σχηματίζονται τρεις κλάσεις ομοιότητας. Στην πρώτη κλάση περιλαμβάνονται ένα έργο συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων και τα έργα μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερώνυμων κλασμάτων (TRSc, COLSd). Το γεγονός ότι οι μαθητές συμπεριφέρονται με όμοιο τρόπο κατά την επίλυση των συγκεκριμένων έργων δικαιολογείται λαμβάνοντας ότι όλα τα έργα έχουν ως αρχική αναπαράσταση την συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων και ετερώνυμων κλασμάτων. Η δεύτερη κλάση αποτελείται από τρεις υποομάδες. Η πρώτη υποομάδα περιλαμβάνει ένα έργο συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων και ένα έργο μετάφρασης από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων (TRSc, COLSd). Οι μαθητές αντιμετωπίζουν με όμοιο τρόπο δηλαδή δύο έργα που επιτελούν διαφορετικές λειτουργίες αλλά αναφέρονται στην υποκείμενη έννοια της πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων. Στη δεύτερη υποομάδα ανήκουν ένα έργο μετάφρασης από το γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής σε συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων και δύο έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή και σε κυκλική επιφάνεια με αριθμό υποδιαιρέσεων τον ίδιο με τον παρονομαστή (COLSs, RELa, RECa). Οι μαθητές στη συγκεκριμένη ομάδα συμπεριφέρονται με όμοιο τρόπο στα συγκεκριμένα έργα λαμβάνοντας υπόψη τόσο το πεδίο αναπαράστασης που στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι το γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής, όσο και την σχετική υπό-έννοια της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων. Η τρίτη ομάδα της δεύτερης κλάσης ομοιότητας περιλαμβάνει έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων (RECC, RERc, RELc). Ως εκ τούτου, οι μαθητές αντιμετωπίζουν τα έργα αυτά με παρόμοιο τρόπο λόγω του ότι εμπλέκουν τόσο την ίδια λειτουργία όσο και την ίδια υπό-έννοια της πρόσθεσης κλασμάτων.

Από την άλλη, η τρίτη κλάση περιλαμβάνει κυρίως έργα τα οποία αναφέρονται στην πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων. Το γεγονός αυτό αιτιολογεί τον όμοιο τρόπο αντιμετώπισής τους από τους μαθητές. Αναλυτικά, στην πρώτη υποομάδα της τρίτης κλάσης περιέχονται ένα έργο συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων και τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων με αριθμό υποδιαιρέσεων το διπλάσιο από τον παρονομαστή (TRSc, RERa, RERb, RELb). Στη δεύτερη υποομάδα της τρίτης κλάσης εντοπίζονται τα έργα μετάφρασης από ορθογώνια και

κυκλική επιφάνεια εμβαδού στην συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων (COCSs, CORSD).

Ως εκ τούτου, οι μαθητές της πρώτης ηλικιακής ομάδας στην πρώτη χορήγηση αντιμετωπίζουν με όμοιο τρόπο τα έργα μετάφρασης με την ίδια αρχική αναπαράσταση κάτι το οποίο υποδεικνύει ότι δεν αντιλαμβάνονται με ολοκληρωμένο τρόπο την κοινή υποκείμενη έννοια της πρόσθεσης κλασμάτων. Παρατηρείται μάλιστα διαφοροποίηση του τρόπου αντιμετώπισης των έργων μετάφρασης στα οποία η αρχική αναπαράσταση αποτελεί διάγραμμα. Συγκεκριμένα, όλα τα έργα με αρχική συμβολική αναπαράσταση εντοπίζονται στην πρώτη κλάση, όλα τα έργα με αρχική αναπαράσταση το γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής στη δεύτερη κλάση και όλα τα έργα με αρχικό πεδίο αναπαράσταση την κυκλική και ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού στην τρίτη κλάση.



Διάγραμμα 38. Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών της πρώτης ηλικιακής ομάδας στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων κατά τη δεύτερη χορήγηση (B' ερευνητική φάση).

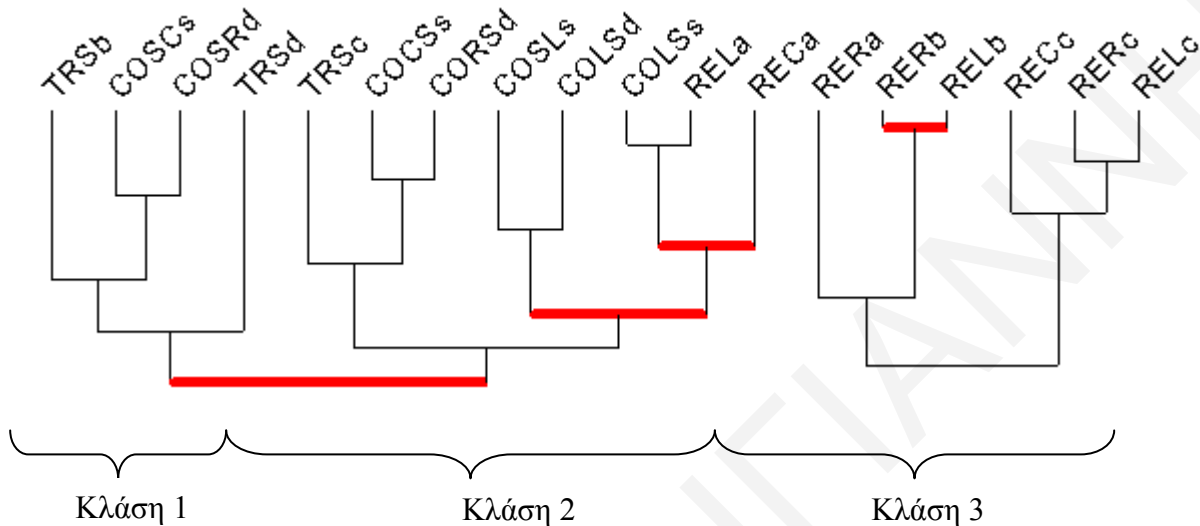
Το Διάγραμμα 38 περιλαμβάνει τρεις κλάσεις ομοιότητας. Στην πρώτη κλάση ομοιότητας περιλαμβάνονται τα ίδια έργα με την πρώτη κλάση ομοιότητας στην πρώτη χορήγηση για την ίδια ηλικιακή ομάδων. Εξάιρεση αποτελεί η συμπερίληψη στη δεύτερη χορήγηση ενός έργου αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού με διπλάσιο αριθμό υποδιαιρέσεων από τον αριθμητή. Συγκεκριμένα, η πρώτη κλάση περιλαμβάνει δύο υποομάδες έργων. Στην πρώτη υποομάδα εντοπίζονται τα έργα χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων και μετάφρασης από συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων σε ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού με

αριθμό υποδιαιρέσεων το διπλάσιο του παρονομαστή (TRSb, COSRd, RERa). Οι μαθητές αντιμετωπίζουν τα έργα αυτά με παρόμοιο τρόπο λόγω της εμπλεκόμενης αναπαράστασης αλλά και της σχετικής έννοιας της ισοδυναμίας κλασμάτων που απαιτείται για την επίλυσή τους. Στη δεύτερη υποομάδα εντοπίζονται τα έργα μετάφρασης από συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε κυκλική επιφάνεια εμβαδού και στην αριθμητική γραμμή (COSCs, COSLs).

Στη δεύτερη κλάση εντοπίζονται δύο υποομάδες. Η πρώτη υποομάδα περιλαμβάνει τα έργα μετάφρασης από αριθμητική γραμμή και κυκλική επιφάνεια εμβαδού σε συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων (COLSs, COCSs), ενώ η δεύτερη υποομάδα περιλαμβάνει το έργο μετάφρασης από αριθμητική γραμμή σε συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων και τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή και στην κυκλική επιφάνεια εμβαδού (COLSd, RELa, RECa). Ως εκ τούτου, ιδιαίτερη επίδραση στο σχηματισμό της συγκεκριμένης κλάσης ομοιότητας διαδραματίζει το εμπλεκόμενο πεδίο αναπαράστασης και η λειτουργία που επιτελείται. Η τρίτη κλάση ομοιότητας περιέχει τρεις υποομάδες. Στην πρώτη υποομάδα ανήκουν τα έργα χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων και το έργο μετάφρασης από ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού σε συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων (TRSc, CORSd, TRSd). Ο όμοιος τρόπος συμπεριφοράς των μαθητών κατά την επίλυση των συγκεκριμένων έργων υποδεικνύει το σημαντικό ρόλο της ευχέρειας συμβολικών χειρισμών της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων στην επίλυση έργων μετάφρασης. Η δεύτερη υποομάδα σχηματίζεται από τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού και στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής με αριθμό υποδιαιρέσεων το διπλάσιο του παρονομαστή (RERb, RELb). Στη δεύτερη και τρίτη υποομάδα περιλαμβάνονται δηλαδή έργα των οποίων η επίλυση απαιτεί τη γνώση της έννοιας της ισοδυναμίας κλασμάτων. Συγκεκριμένα, στην τρίτη κλάση ομοιότητας εντοπίζονται τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων (RECC, RELc, RERc). Γενικά, οι μαθητές συμπεριφέρονται με παρόμοιο τρόπο στα έργα της τρίτης κλάσης ομοιότητας λαμβάνοντας υπόψη τόσο την έννοια της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων όσο και της ισοδυναμίας κλασμάτων.

Αξίζει να σημειωθεί ότι και στη δεύτερη χορήγηση του δοκιμίου οι μαθητές της πρώτης ηλικιακής ομάδας αντιμετωπίζουν τα έργα μετάφρασης ανάλογα με την αρχική

αναπαράσταση, συμβολική ή διαγραμματική. Εντούτοις, η διασύνδεση της πρώτης και δεύτερης κλάσης ομοιότητας υποδεικνύει ότι οι μαθητές δεν αντιμετωπίζουν τα έργα αυτά αποσπασματικά.



Διάγραμμα 39. Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών της πρώτης ηλικιακής ομάδας στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων κατά την τρίτη χορήγηση (Β' ερευνητική φάση).

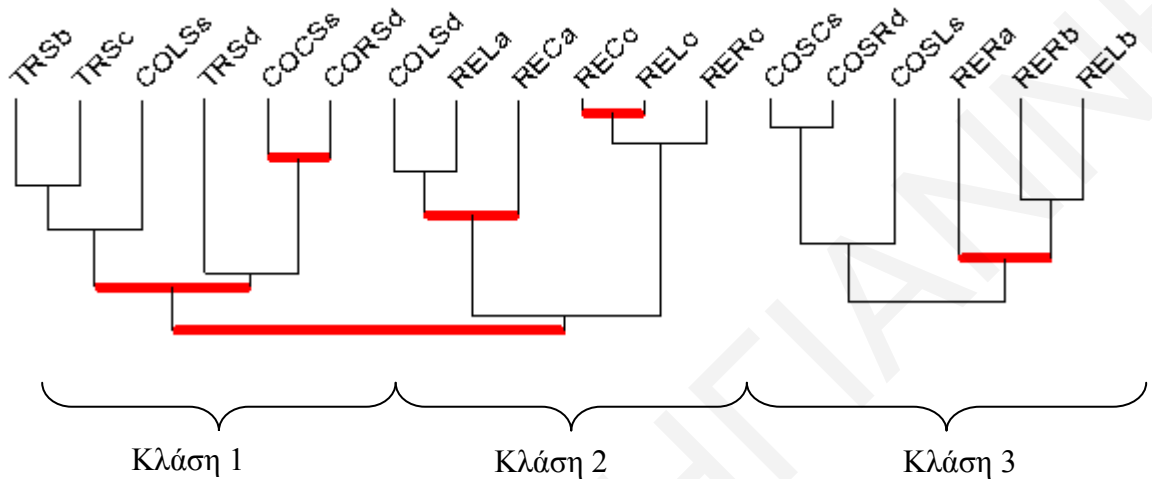
Από την άλλη, στο Διάγραμμα 39 σχηματίζονται τρεις κλάσεις ομοιότητας. Η πρώτη κλάση περιλαμβάνει έργα συμβολικού χειρισμού και μετάφρασης από συμβολική σε κυκλική και ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων (TRSb, COSCs, COSRd, TRSd). Ως εκ τούτου, ο όμοιος τρόπος συμπεριφοράς των μαθητών στα συγκεκριμένα έργα στηρίζεται κυρίως στην εμπλεκόμενη συμβολική αναπαράσταση αλλά και στις λειτουργίες του χειρισμού και της μετάφρασης που επιτελούνται. Στην δεύτερη κλάση σχηματίζονται δύο υποομάδες. Στην πρώτη υποομάδα περιλαμβάνεται το έργο συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων και τα έργα μετάφρασης από κυκλική και ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού στη συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων (TRSc, COCSs, CORSD). Οι μαθητές αντιμετωπίζουν τα έργα αυτά με όμοιο τρόπο λόγω της εμπλεκόμενης αναπαράστασης και των λειτουργιών που επιτελούνται. Από την άλλη, η δεύτερη υποομάδα περιλαμβάνει κυρίως έργα μετάφρασης και αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων στα οποία εμπλέκεται το γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής (COSLs, COLSd, COLSs, RELa, RECa). Οι μαθητές αντιμετωπίζουν με όμοιο τρόπο τα έργα της συγκεκριμένης

υποομάδας λαμβάνοντας υπόψη τόσο τη λειτουργία που επιτελείται όσο και το εμπλεκόμενο πεδίο αναπαράστασης που στην περίπτωση αυτή είναι το γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής.

Τέλος, η τρίτη κλάση αποτελείται από έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων με αριθμό υποδιαίρεσεων πολλαπλάσιο του παρονομαστή (RERa, RERb, RELb, RERc, RECc, RELc). Ως εκ τούτου, οι μαθητές συμπεριφέρονται με όμοιο τρόπο στα συγκεκριμένα έργα λόγω της λειτουργία της αναγνώρισης που επιτελείται αλλά και της σχετικής έννοιας της ισοδυναμίας κλασμάτων που εμπλέκεται.

Κατά τη διάρκεια των τριών μετρήσεων στην πρώτη ηλικιακή ομάδα που μεταβαίνει εντός της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης επισημαίνονται τόσο ομοιότητες όσο και διαφορές στην αντιμετώπιση των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων. Συγκεκριμένα, οι μαθητές παρουσιάζουν όμοιο τρόπο συμπεριφοράς σε έργα στα οποία εμπλέκεται η ίδια μορφή αναπαράστασης παρόλο που επιτελούν διαφορετική λειτουργία ή εμπλέκουν διαφορετική υπό-έννοια της πρόσθεσης κλασμάτων. Εντούτοις το φαινόμενο της στεγανοποίησης ως προς την εμπλεκόμενη αναπαράσταση υπερπηδάται κατά τη διάρκεια των τριών χορηγήσεων σε σημαντικό βαθμό. Αξίζει άλλωστε να σημειωθεί ότι παρόλο που τα έργα μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση βρίσκονται κυρίως στην πρώτη κλάση, ενώ τα έργα μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων ως επί το πλείστον ανήκουν στη δεύτερη κλάση, οι δύο συγκεκριμένες κλάσεις ομοιότητας συνδέονται μεταξύ τους. Ως εκ τούτου, οι μαθητές δεν αντιμετωπίζουν, κυρίως στην τρίτη χορήγηση, αποσπασματικά τα έργα μετάφρασης ανάλογα με την αρχική τους αναπαράσταση. Αντίθετα, τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων με αριθμό υποδιαίρεσεων πολλαπλάσιο του παρονομαστή αντιμετωπίζονται στην τρίτη χορήγηση με διαφορετικό τρόπο από τα υπόλοιπα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων. Οι μαθητές δηλαδή της πρώτης ηλικιακής ομάδας εξακολουθούν παρά τη διδασκαλία και τη γνωστική ανάπτυξη που λαμβάνει χώρα κατά τη διάρκεια της μετάβασής τους από την Ε΄ στη Στ΄ δημοτικού να αντιμετωπίζουν αποσπασματικά τα συγκεκριμένα έργα παρόλο που αναφέρονται στην ίδια μαθηματική έννοια. Ως εκ τούτου, δεν έχουν αντιληφθεί το σύνολο των διαστάσεων που αναφέρονται στην υπό εξέταση έννοια της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων.

Τα Διαγράμματα 40 μέχρι 42 παρουσιάζουν τις σχέσεις ομοιότητας των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων στην πρώτη, δεύτερη και τρίτη χορήγηση, αντίστοιχα για την ομάδα των μαθητών που μεταβαίνει από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

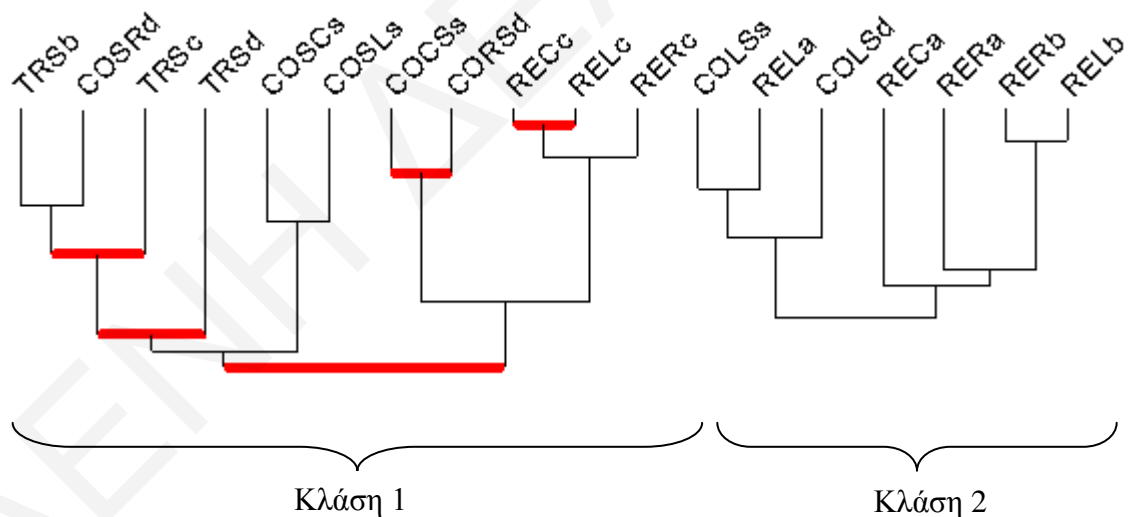


Διάγραμμα 40. Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών της δεύτερης ηλικιακής ομάδας στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων κατά την πρώτη χορήγηση (Α' ερευνητική φάση).

Στο Διάγραμμα 40 σχηματίζονται τρεις κλάσεις ομοιότητας. Η πρώτη κλάση περιλαμβάνει τα έργα συμβολικού χειρισμού και μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων (TRSb, TRSc, COLSs, TRSd, COCSs, CORSD). Ο όμοιος τρόπος αντιμετώπισης των συγκεκριμένων έργων από τους μαθητές της δεύτερης ηλικιακής ομάδας υποδεικνύει το σημαντικό ρόλο που διαδραματίζει η ευχέρεια συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης κλασμάτων στη διαδικασία μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων. Η πρώτη υποομάδα της δεύτερης κλάσης αποτελείται από ένα έργο μετάφρασης από αριθμητική γραμμή σε συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων και δύο έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή και στην κυκλική επιφάνεια εμβαδού (COLSd, RELa, RECa). Από την άλλη, η δεύτερη ομάδα ομοιότητας σχηματίζεται από τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων (RECc, RELc, RERc). Ως εκ τούτου, η δεύτερη κλάση περιλαμβάνει κυρίως έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων. Η πρώτη και η

δεύτερη κλάση ομοιότητας συνδέονται μεταξύ τους κάτι που υποδεικνύει ότι οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι τα έργα χειρισμού, μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση και αναγνώρισης παρόλο που επιτελούν διαφορετικές λειτουργίες αναφέρονται στην ίδια μαθηματική έννοια.

Παρόλα αυτά, η κατανόηση φαίνεται να είναι αποσπασματική αφού οι μαθητές της δεύτερης ηλικιακής ομάδας δεν αντιμετωπίζουν με όμοιο τρόπο και τα έργα μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων. Συγκεκριμένα, τα έργα μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων σχηματίζουν την πρώτη υποομάδα της τρίτης κλάσης (COSC_s, COSR_d, COSL_s). Από την άλλη, η δεύτερη υποομάδα της τρίτης κλάσης περιλαμβάνει τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων με αριθμό υποδιαϊρέσεων τον διπλάσιο του παρονομαστή (RER_a, RER_b, REL_b). Ως εκ τούτου, οι μαθητές συμπεριφέρονται με όμοιο τρόπο στα συγκεκριμένα έργα λαμβάνοντας υπόψη τόσο την έννοια της ισοδυναμίας κλασμάτων που απαιτεί η επίλυσή τους όσο και την εμπλεκόμενη λειτουργία της αναγνώρισης που επιτελείται.



Διάγραμμα 41. Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών της δεύτερης ηλικιακής ομάδας στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων κατά τη δεύτερη χορήγηση (B' ερευνητική φάση).

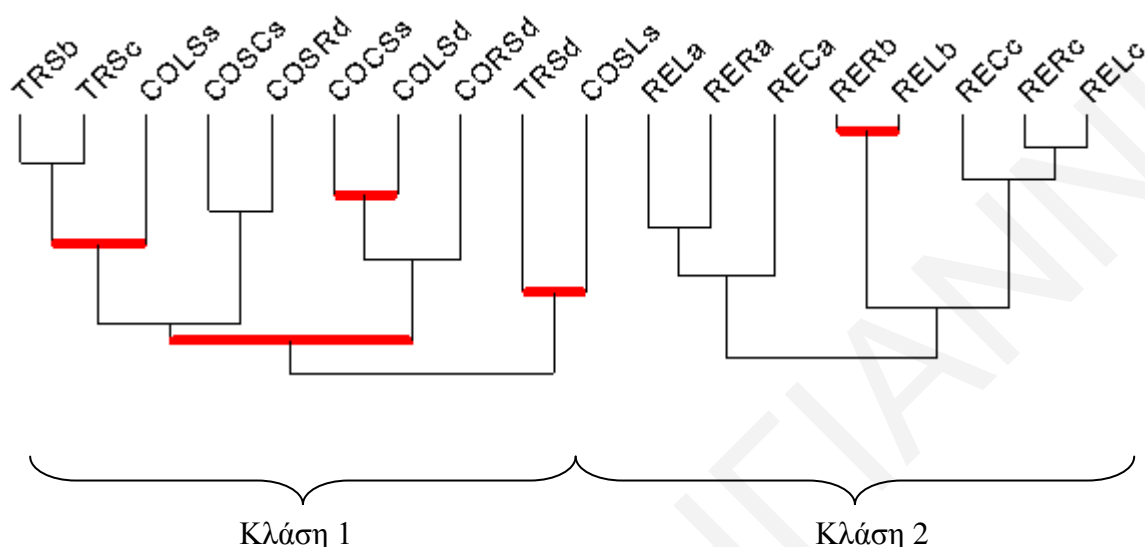
Στο Διάγραμμα 41 παρουσιάζονται οι σχέσεις ομοιότητας των μαθητών της δεύτερης ηλικιακής ομάδας στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων στη δεύτερη

χορήγηση του δοκιμίου. Συγκεκριμένα, σχηματίζονται τρεις κλάσεις ομοιότητας. Στην πρώτη υποομάδα της πρώτης κλάσης περιλαμβάνονται τα έργα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων και το έργο μετάφρασης από συμβολική αναπαράσταση σε ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού (TRSB, COSRd, TRSd). Στη δεύτερη υποομάδα εντοπίζονται τα έργα μετάφρασης από τη συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε κυκλική επιφάνεια εμβαδού και στην αριθμητική γραμμή (COSCs, COSLs). Ως εκ τούτου, υποδεικνύεται ο όμοιος τρόπος αντιμετώπισης των έργων συμβολικού χειρισμού και μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων.

Στη δεύτερη κλάση εντοπίζονται δύο υποομάδες έργων. Η πρώτη υποομάδα περιλαμβάνει τα έργα μετάφρασης από ορθογώνια και κυκλική επιφάνεια εμβαδού στη συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων (COCSs, CORSD), ενώ η δεύτερη υποομάδα τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων (REcC, RELc, RERc).

Τέλος, στην τρίτη κλάση ομοιότητας περιλαμβάνονται δύο υποομάδες. Η πρώτη υποομάδα περιλαμβάνει τα έργα μετάφρασης από αριθμητική γραμμή σε συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων και ένα έργο αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή (COLSs, RELa, COLSd). Οι μαθητές συμπεριφέρονται δηλαδή με όμοιο τρόπο στα έργα λαμβάνοντας υπόψη το εμπλεκόμενο πεδίο αναπαράστασης. Η δεύτερη υποομάδα της τρίτης κλάσης ομοιότητας περιλαμβάνει τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων (RECa, RERa, RERb, RELb), τα οποία οι μαθητές αντιμετωπίζουν με όμοιο τρόπο λόγω της εμπλεκόμενης λειτουργίας της αναγνώρισης και της υπό-έννοιας της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων. Το γεγονός ότι η πρώτη και η δεύτερη κλάση συνδέονται με σχέσεις ομοιότητας υποδεικνύει ότι δεν εντοπίζεται το φαινόμενο της στεγανοποίησης όσον αφορά στα έργα μετάφρασης τα οποία εμπλέκουν ως διαγραμματική αναπαράσταση την ορθογώνια ή κυκλική επιφάνεια εμβαδού. Όμως τα έργα μετάφρασης από αριθμητική γραμμή σε συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης κλασμάτων, αντιμετωπίζονται αποσπασματικά από τους μαθητές της δεύτερης ηλικιακής ομάδας κάτι που αιτιολογείται λαμβάνοντας υπόψη τη μη συμπερίληψη του γεωμετρικού μοντέλου της αριθμητικής γραμμής στα σχολικά εγχειρίδια της Α΄ γυμνασίου. Τα αποτελέσματα επισημαίνουν επίσης το φαινόμενο της στεγανοποίησης ως προς τη λειτουργία που επιτελείται. Οι μαθητές δηλαδή

δεν αντιμετωπίζουν την επίλυση των έργων αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων με όμοιο τρόπο όπως τα υπόλοιπα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων που αναφέρονται στην πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων.



Διάγραμμα 42. Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών της δεύτερης ηλικιακής ομάδας στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων κατά την τρίτη χορήγηση (Β' ερευνητική φάση).

Στο Διάγραμμα 42, το οποίο παρουσιάζει τις σχέσεις ομοιότητας των μαθητών της δεύτερης ηλικιακής ομάδας στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων στην τρίτη χορήγηση του δοκιμίου, διακρίνονται δύο κλάσεις ομοιότητας. Η πρώτη κλάση αποτελείται από τρεις υποομάδες. Στην πρώτη υποομάδα περιλαμβάνονται τα έργα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων, το έργο μετάφρασης από αριθμητική γραμμή σε συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων και δύο έργα μετάφρασης από συμβολική αναπαράσταση ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων σε κυκλική και ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού (TRSb, TRSc, COLSs, COSCs, COSRd). Από την άλλη, στη δεύτερη υποομάδα περιλαμβάνονται τα υπόλοιπα έργα μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων (COCSs, COLSd, CORSD), ενώ στην τρίτη υποομάδα ένα έργο συμβολικού χειρισμού και μετάφρασης από συμβολική αναπαράσταση σε αριθμητική γραμμή της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων (TRSd, COSLs). Η συγκεκριμένη κλάση ομοιότητας περιλαμβάνεται δηλαδή το σύνολο των έργων συμβολικού χειρισμού και μετάφρασης της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων. Ως εκ τούτου, οι μαθητές δεν

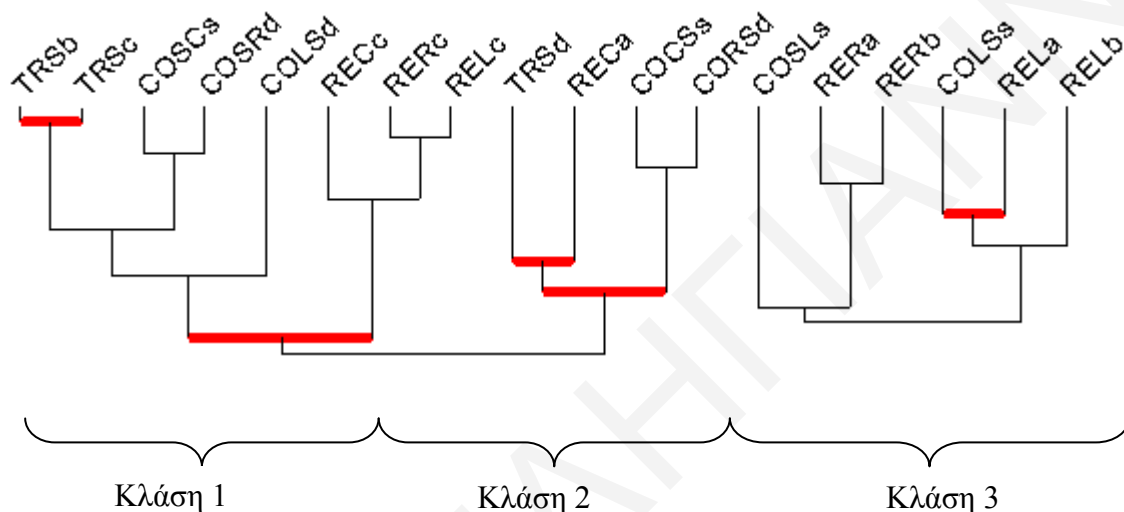
αντιμετωπίζουν αποσπασματικά τα έργα που επιτελούν τις συγκεκριμένες λειτουργίες. Το γεγονός ότι συμπεριφέρονται με όμοιο τρόπο κατά την επίλυση των συγκεκριμένων έργων υποδεικνύει ότι αντιλαμβάνονται ότι τα έργα αυτά παρόλο ότι επιτελούν διαφορετικές λειτουργίες και εμπλέκουν διαφορετικά πεδία αναπαράστασης αναφέρονται στην ίδια μαθηματική έννοια.

Εντούτοις, οι μαθητές της δεύτερης ηλικιακής ομάδας στην τρίτη χορήγηση αντιμετωπίζουν αποσπασματικά τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων τα οποία σχηματίζουν τη δεύτερη κλάση ομοιότητας. Συγκεκριμένα, στη δεύτερη κλάση εντοπίζονται τρεις υποομάδες έργων. Στην πρώτη υποομάδα περιλαμβάνονται τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε διαγραμματικές αναπαραστάσεις με αριθμό υποδιαιρέσεων τον ίδιο με τον παρονομαστή (RELA, RERa, RECa), στη δεύτερη υποομάδα τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε διαγραμματικές αναπαραστάσεις με αριθμό υποδιαιρέσεων το διπλάσιο του παρονομαστή (RERb, RELb) και στην τρίτη υποομάδα τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων (RECc, RERc, RERc).

Με βάση τα αποτελέσματα των Διαγραμμάτων 40 μέχρι 42 οι μαθητές της δεύτερης ηλικιακής ομάδας παρουσιάζουν μια στασιμότητα στον τρόπο που αντιμετωπίζουν την επίλυση ορισμένων έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων. Ορισμένες υποομάδες έργων παραμένουν αναλλοίωτες και στις τρεις χορηγήσεις παρά τη διδασκαλία και τη γνωστική ανάπτυξη που λαμβάνει χώρα κατά τη διάρκεια των τριών χορηγήσεων. Ενδεικτικό παράδειγμα είναι τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων με αριθμό υποδιαιρέσεων το διπλάσιο του παρονομαστή. Αξίζει μάλιστα να σημειωθεί ότι τα συγκεκριμένα έργα αντιμετωπίζονται σε όλες τις χορηγήσεις με διαφορετικό τρόπο από τα υπόλοιπα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων τα οποία αναφέρονται στην πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων. Στις απαντήσεις των μαθητών της δεύτερης ηλικιακής ομάδας εντοπίζεται το φαινόμενο της στεγανοποίησης και σε άλλες περιπτώσεις έργων που επιτελούν συγκεκριμένη λειτουργία ή εμπλέκουν την ίδια αναπαράσταση κάτι που υποδηλώνει ότι οι μαθητές παρουσιάζουν δυσκολίες στην κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων, οι οποίες δεν υπερπηδώνται κατά τη διάρκεια των τριών χορηγήσεων. Ενδεικτικό είναι το γεγονός ότι στην τρίτη χορήγηση όλα τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων

αντιμετωπίζονται αποσπασματικά σε σχέση με τα έργα χειρισμού και μετάφρασης παρόλο που αναφέρονται στην ίδια μαθηματική έννοια.

Στα Διαγράμματα 43 μέχρι 45 παρουσιάζονται οι σχέσεις ομοιότητας στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων της ομάδας των μαθητών που μεταβαίνει από την Α΄ στη Β΄ γυμνασίου κατά την πρώτη, δεύτερη και τρίτη χορήγηση των δοκιμίων, αντίστοιχα.



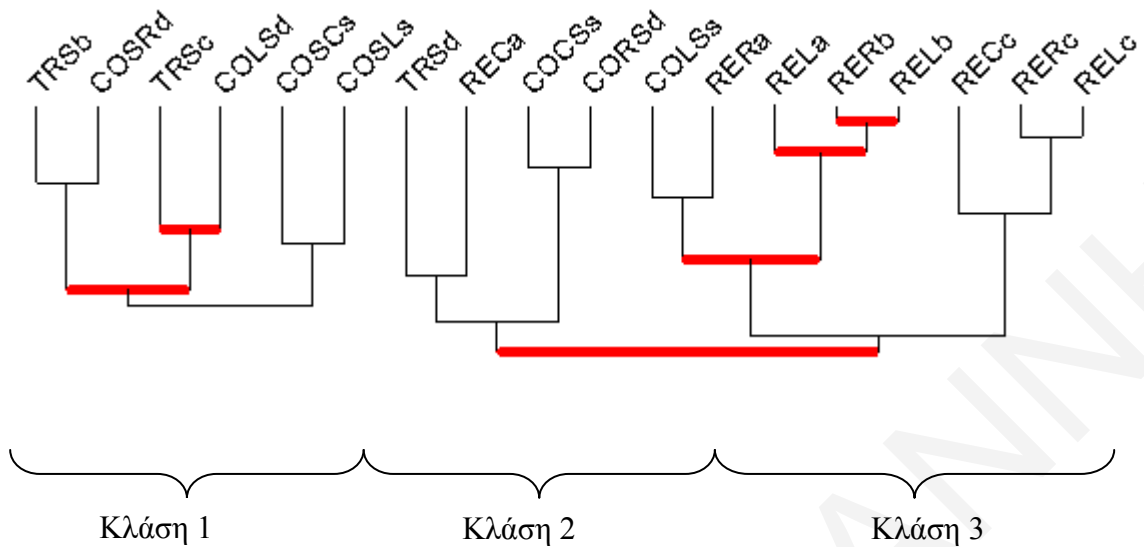
Διάγραμμα 43. Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών της τρίτης ηλικιακής ομάδας στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων κατά την πρώτη χορήγηση (Α΄ ερευνητική φάση).

Στο Διάγραμμα 43 διακρίνονται τρεις κλάσεις ομοιότητας. Η πρώτη κλάση αποτελείται από δύο υποομάδες στις οποίες περιλαμβάνονται κυρίως έργα πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων. Συγκεκριμένα, στην πρώτη υποομάδα περιλαμβάνονται τα έργα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων και έργα μετάφρασης από συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων σε ορθογώνια και κυκλική επιφάνεια εμβαδού και ένα έργο μετάφρασης από την αριθμητική γραμμή σε συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων (TRSb, TRSc, COSCs, COSRd, COLSd). Από την άλλη, η δεύτερη υποομάδα της πρώτης κλάσης περιλαμβάνει έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων (RECc, RERc, RELc). Το γεγονός ότι τα έργα αυτά εμπλέκουν την ίδια υπό-έννοια της πρόσθεσης κλασμάτων αιτιολογεί τον όμοιο τρόπο αντιμετώπισης τους από τους μαθητές της τρίτης ηλικιακής ομάδας.

Η δεύτερη κλάση περιλαμβάνει ένα έργο συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων, ένα έργο αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε κυκλική επιφάνεια εμβαδού και δύο έργα μετάφρασης από ορθογώνια και κυκλική επιφάνεια εμβαδού σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων (TRSD, RECa, COCSs, CORSD). Ο όμοιος τρόπος συμπεριφοράς των μαθητών της τρίτης ηλικιακής ομάδας κατά την επίλυσή τους αιτιολογείται λαμβάνοντας υπόψη την επίδραση τόσο της σχετικής υπό-έννοιας της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων όσο και την εμπλεκόμενη αρχική αναπαράσταση της κυκλικής και ορθογώνιας επιφάνεια εμβαδού για τα έργα μετάφραση. Από την άλλη, η τρίτη κλάση σχηματίζεται από έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων και μετάφρασης από την αριθμητική γραμμή σε συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων και το αντίστροφο (COSLs, RERa, RERb, COLSs, RELa, RELb). Ως εκ τούτου, η σχετική υποέννοια της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων αλλά και το γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στον τρόπο που οι μαθητές διαμορφώνουν τη συγκεκριμένη ομάδα ομοιότητας.

Οι τρεις κλάσεις ομοιότητας που σχηματίζονται στο Διάγραμμα 43 με βάση τις απαντήσεις των μαθητών της τρίτης ηλικιακής ομάδας κατά την πρώτη χορήγηση υποδεικνύουν τη σημαντική επίδραση που ασκεί στη διαμόρφωσή τους η σχετική υπό-έννοια της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων. Το γεγονός όμως ότι τα έργα της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων περιλαμβάνονται σε δύο διαφορετικές κλάσεις ομοιότητας υποδεικνύει τον αποσπασματικό τρόπο αντιμετώπισής τους από τους συγκεκριμένους μαθητές παρόλο που τα έργα αυτά αφορούν στην ίδια υπό-έννοια της πρόσθεσης κλασμάτων.

Το Διάγραμμα 44 αποτελείται από τρεις κλάσεις ομοιότητας. Η πρώτη κλάση αποτελείται από δύο υποομάδες. Στην πρώτη υποομάδα βρίσκονται έργα συμβολικού χειρισμού και μετάφρασης από συμβολική αναπαράσταση σε ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού και από αριθμητική γραμμή σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων (TRSB, COSRD, TRSc, COLSD), ενώ στη δεύτερη υποομάδα περιλαμβάνονται έργα μετάφρασης από συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε κυκλική επιφάνεια εμβαδού και στην αριθμητική γραμμή (COSCs, COSLs). Ως εκ τούτου, οι μαθητές αντιμετωπίζουν τα συγκεκριμένα έργα με παρόμοιο τρόπο λόγω του γεγονότος ότι εμπλέκουν την ίδια υπό-έννοια της πρόσθεσης κλασμάτων.

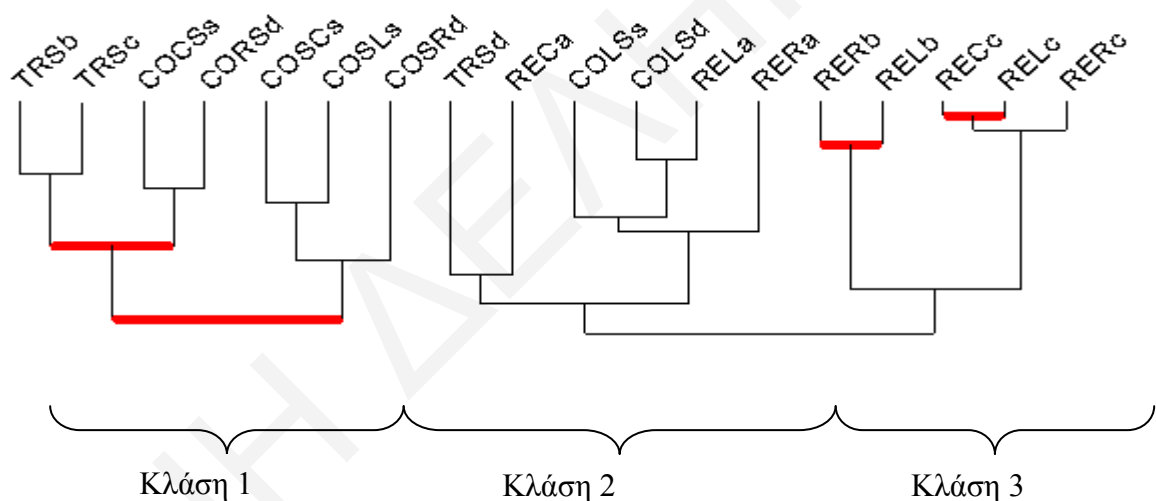


Διάγραμμα 44. Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών της τρίτης ηλικιακής ομάδας στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων κατά τη δεύτερη χορήγηση (B' ερευνητική φάση).

Η δεύτερη κλάση περιλαμβάνει ένα έργο συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων, ένα έργο αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε κυκλική επιφάνεια εμβαδού και δύο έργα μετάφρασης από κυκλική και ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού σε συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων (TRSD, RECa, COCSs, CORSD). Οι μαθητές παρουσιάζουν τον ίδιο τρόπο συμπεριφοράς κατά την επίλυση των συγκεκριμένων έργων λόγω του ότι αναφέρονται στην ίδια υπό-έννοια της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων αλλά και του γεγονότος ότι τα έργα μετάφρασης έχουν την ίδια αρχική αναπαράσταση. Από την άλλη, η τρίτη κλάση, η οποία συνδέεται με τη δεύτερη κλάση, περιλαμβάνει δύο υποομάδες στις οποίες περιέχονται κυρίως έργα αναγνώρισης. Συγκεκριμένα, η πρώτη υποομάδα περιλαμβάνει έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων (COLSs, RERa, RELa, RERb, RELb) και η δεύτερη υποομάδα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων (RECc, RERC, RELc). Εξάιρεση αποτελεί η συμπερίληψη του έργου μετάφρασης από αριθμητική γραμμή σε συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης κλασμάτων στην πρώτη υποομάδα.

Η διαμόρφωση και των τριών κλάσεων ομοιότητας υποδεικνύει την σημαντική επίδραση της σχετικής υπό-έννοιας της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων. Ως εκ τούτου, οι μαθητές επιλύουν έργα που επιτελούν την ίδια ή διαφορετική λειτουργία

αλλά εμπλέκουν την ίδια υπό-έννοια. Ορισμένα έργα πρόσθεσης ομώνυμων και ετερώνυμων κλασμάτων αντιμετωπίζονται με όμοιο τρόπο, όπως για παράδειγμα τα έργα της τρίτης κλάσης ομοιότητας, λόγω του γεγονότος ότι επιτελούν την ίδια λειτουργία. Παρόμοιος τρόπος συμπεριφοράς κατά την επίλυση έργων πρόσθεσης ομώνυμων και ετερώνυμων κλασμάτων υφίσταται όμως και σε περιπτώσεις έργων που επιτελούν διαφορετικές λειτουργίες. Παρά το γεγονός ότι οι μαθητές της τρίτης ηλικιακής ομάδας στη δεύτερη χορήγηση επιλύουν με παρόμοιο τρόπο ορισμένα έργα που αναφέρονται στην ίδια υποκείμενη έννοια αυτό δε γίνεται κατά τρόπο συνολικό. Σύμφωνα, με το Διάγραμμα 44 τα έργα μετάφρασης με αρχική διαγραμματική αναπαράσταση και τα έργα μετάφρασης με αρχική αναπαράσταση την συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων και ετερώνυμων κλασμάτων εντοπίζονται σε δύο διαφορετικές και διακριτές κλάσεις ομοιότητας. Παρατηρείται δηλαδή στεγανοποίηση ως προς την αρχική αναπαράσταση των έργων μετάφρασης αφού οι μαθητές δεν ήταν σε θέση να επισημάνουν την κοινή υποκείμενη έννοια στα διάφορα έργα μετάφρασης.



Διάγραμμα 45. Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών της τρίτης ηλικιακής ομάδας στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων κατά την τρίτη χορήγηση (Β' ερευνητική φάση)

Το Διάγραμμα 45, το οποίο παρουσιάζει τις σχέσεις ομοιότητας των μαθητών της τρίτης ηλικιακής ομάδας στην τρίτη χορήγηση περιλαμβάνει τρεις κλάσεις ομοιότητας. Η πρώτη υποομάδα της πρώτης κλάσης περιλαμβάνει έργα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων (TRSb, TRSc). Η δεύτερη υποομάδα περιλαμβάνει έργα μετάφρασης από ορθογώνια και κυκλική επιφάνεια εμβαδού σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερώνυμων κλασμάτων (COCSs, CORSc). Από την άλλη, η

δεύτερη υποομάδα της πρώτης κλάσης περιέχει τα έργα μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων (COSCs, COSLs, COSRd). Οι μαθητές συμπεριφέρονται με παρόμοιο τρόπο δηλαδή στα έργα μετάφρασης με αρχική ή τελική αναπαράσταση την ορθογώνια ή κυκλική επιφάνεια εμβαδού της πρόσθεσης κλασμάτων.

Στη δεύτερη κλάση βρίσκονται κυρίως έργα αναγνώρισης, χειρισμού και μετάφρασης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων, ως εκ τούτου στη διαμόρφωση της συγκεκριμένης κλάσης σημαντικό ρόλο έχει η σχετική υπό-έννοια της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων. Συγκεκριμένα, στη δεύτερη κλάση περιλαμβάνονται ένα έργο συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων, έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων και δύο έργα μετάφρασης από αριθμητική γραμμή σε συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων (TRSD, RECa, COLSs, COLSd, RELa, RERa). Η συμπερίληψη του έργου μετάφρασης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων στη δεύτερη κλάση αιτιολογείται λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι περιλαμβάνει το ίδιο πεδίο αναπαράστασης, το γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής, όπως και δύο άλλα έργα στη συγκεκριμένη κλάση ομοιότητας. Από την άλλη, στην τρίτη κλάση περιλαμβάνονται έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων με αριθμό υποδιαιρέσεων πολλαπλάσιο του παρονομαστή (RERb, RELb, RECc, RELc, RERc). Οι μαθητές αντιμετωπίζουν τα συγκεκριμένα έργα με παρόμοιο τρόπο λαμβάνοντας υπόψη τόσο τη λειτουργία που επιτελούν όσο και την απαραίτητη για την επίλυσή τους έννοια της ισοδυναμίας κλασμάτων.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα στα Διαγράμματα 43 μέχρι 45, οι μαθητές της τρίτης ηλικιακής ομάδας επικεντρώνονται κυρίως στην υποκείμενη υπό-έννοια της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων για την επίλυση των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων. Παρόλα αυτά, δεν είναι σε θέση να επισημάνουν την κοινή υποκείμενη έννοια σε όλα τα έργα ευελιξίας πολλαπλών αναπαραστάσεων της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων κάτι που υποδεικνύει ότι η κατανόηση της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων είναι αποσπασματική. Εντούτοις, το φαινόμενο της στεγανοποίησης όσον αφορά στα έργα μετάφρασης με διαφορετική αρχική αναπαράσταση φαίνεται να αντιμετωπίζεται από τους μαθητές της συγκεκριμένης ηλικιακής ομάδας αφού στην τρίτη

χορήγηση συμπεριφέρονται με ίδιο τρόπο κατά την επίλυση έργων μετάφρασης με διαφορετικό πεδίο αρχικής αναπαράστασης.

Τα Διαγράμματα 37 μέχρι 45 παρουσιάζουν τις σχέσεις ομοιότητας μεταξύ των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων κατά τη διάρκεια των τριών χορηγήσεων του δοκιμίου για τις τρεις ηλικιακές ομάδες μαθητών. Με τον τρόπο αυτό επισημαίνονται οι ομοιότητες και οι διαφορές στη διαμόρφωση ομάδων έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων που οι μαθητές αντιμετωπίζουν με τον ίδιο τρόπο κατά τη διάρκεια της μετάβασής τους εντός και μεταξύ της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Σε όλες τις ηλικιακές ομάδες κατά τη διάρκεια των τριών χορηγήσεων είναι εμφανής η αλληλεπίδραση επίδραση του πεδίου αναπαράστασης, της λειτουργίας που επιτελείται και της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, κάτι το οποίο επιβεβαιώνεται και από τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης, του μοντέλου Rasch αλλά και την ανάλυση ομοιότητας και συνεπαγωγής στην πρώτη φάση της έρευνας.

Στην πρώτη ηλικιακή ομάδα είναι εμφανές ότι κατά τη διάρκεια των τριών χορηγήσεων βελτιώνεται σταδιακά ο τρόπος αντιμετώπισης των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων. Συγκεκριμένα, οι μαθητές της συγκεκριμένης ηλικιακής ομάδας κατά την περίοδο μετάβασής τους εντός της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης επισημαίνουν σε μεγάλο βαθμό την κοινή υποκείμενη έννοια της πρόσθεσης κλασμάτων στην οποία αναφέρονται τα έργα παρόλο ότι εμπλέκουν ποικιλία αναπαραστάσεων και επιτελούν διαφορετικές λειτουργίες. Επιβεβαιώνονται δηλαδή τα αποτελέσματα της πολλαπλής ανάλυσης διασποράς για επαναλαμβανόμενες μετρήσεις σύμφωνα με τα οποία οι μέσοι όροι επίδοσης των μαθητών της συγκεκριμένης ηλικιακής ομάδας σε όλες τις διαστάσεις που αφορούν έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων βελτιώνονται σημαντικά κατά τη μετάβασή τους από την Ε' στη Στ' δημοτικού. Σε μικρότερο βαθμό βελτίωση παρατηρείται και στην ομάδα των μαθητών που μεταβαίνει από την Α' στη Β' γυμνασίου όσον αφορά τον τρόπο που συμπεριφέρονται κατά την επίλυση των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων κατά τη διάρκεια των τριών χορηγήσεων του δοκιμίου. Παρόλο όμως που οι μαθητές της πρώτης και τρίτης ηλικιακής ομάδας επισημαίνουν στα περισσότερα έργα την κοινή υποκείμενη μαθηματική έννοια, η κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων δε γίνεται με τρόπο συνολικό. Συγκεκριμένα, ορισμένα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων περιλαμβάνονται σε κλάσεις ομοιότητας που δεν συνδέονται με τις

υπόλοιπες υποδεικνύοντας τον αποσπασματικό τρόπο επίλυσής τους από τους μαθητές. Στις περιπτώσεις αυτές οι μαθητές επικεντρώνονται κυρίως στη λειτουργία που επιτελούν οι διάφορες αναπαραστάσεις παραβλέποντας την κοινή υποκείμενη έννοια.

Πιο έντονα παρατηρείται το φαινόμενο της στεγανοποίησης ως προς την λειτουργία που επιτελείται στην περίπτωση της ομάδας των μαθητών που μεταβαίνει από τη Στ' δημοτικού στην Α' γυμνασίου. Οι μαθητές της συγκεκριμένης ηλικιακής ομάδας φαίνεται ότι αντιμετωπίζουν ορισμένες ομάδες έργων με διαφορετικό τρόπο σε σχέση με τα υπόλοιπα έργα της ίδιας υποκείμενης έννοιας κατά τη διάρκεια των τριών χορηγήσεων. Το αποτέλεσμα αυτό επιβεβαιώνεται από τη μείωση του μέσου όρου επίδοσης των μαθητών στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων στη δεύτερη χορήγηση του δοκιμίου και τη στασιμότητα που παρατηρείται συγκρίνοντας την επίδοσή τους στην πρώτη και τρίτη χορήγηση του δοκιμίου.

Γενικά, μέσα από την ανάλυση των διαγραμμάτων ομοιότητας επισημαίνονται οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές και των τριών ηλικιακών ομάδων όσον αφορά στην κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων. Άλλωστε όπως φαίνεται στον Πίνακα 26 παρά τη βελτίωση του μέσου όρου επίδοσης της πρώτης και τρίτης ηλικιακής ομάδας κατά τη διάρκεια ενός χρόνου στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων αυτή παραμένει σε χαμηλά επίπεδα. Μόνη εξαίρεση αποτελούν τα έργα συμβολικού χειρισμού στα οποία φαίνεται να επικεντρώνεται η διδασκαλία τόσο στην πρωτοβάθμια όσο και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Το αποτέλεσμα αυτό συμφωνεί ως εκ τούτου με το γεγονός ότι καμία από τις ηλικιακές ομάδες δεν ήταν σε θέση να επισημάνει την κοινή υποκείμενη έννοια κατά τρόπο συνολικό στα έργα αναγνώρισης, χειρισμού και μετάφρασης της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων.

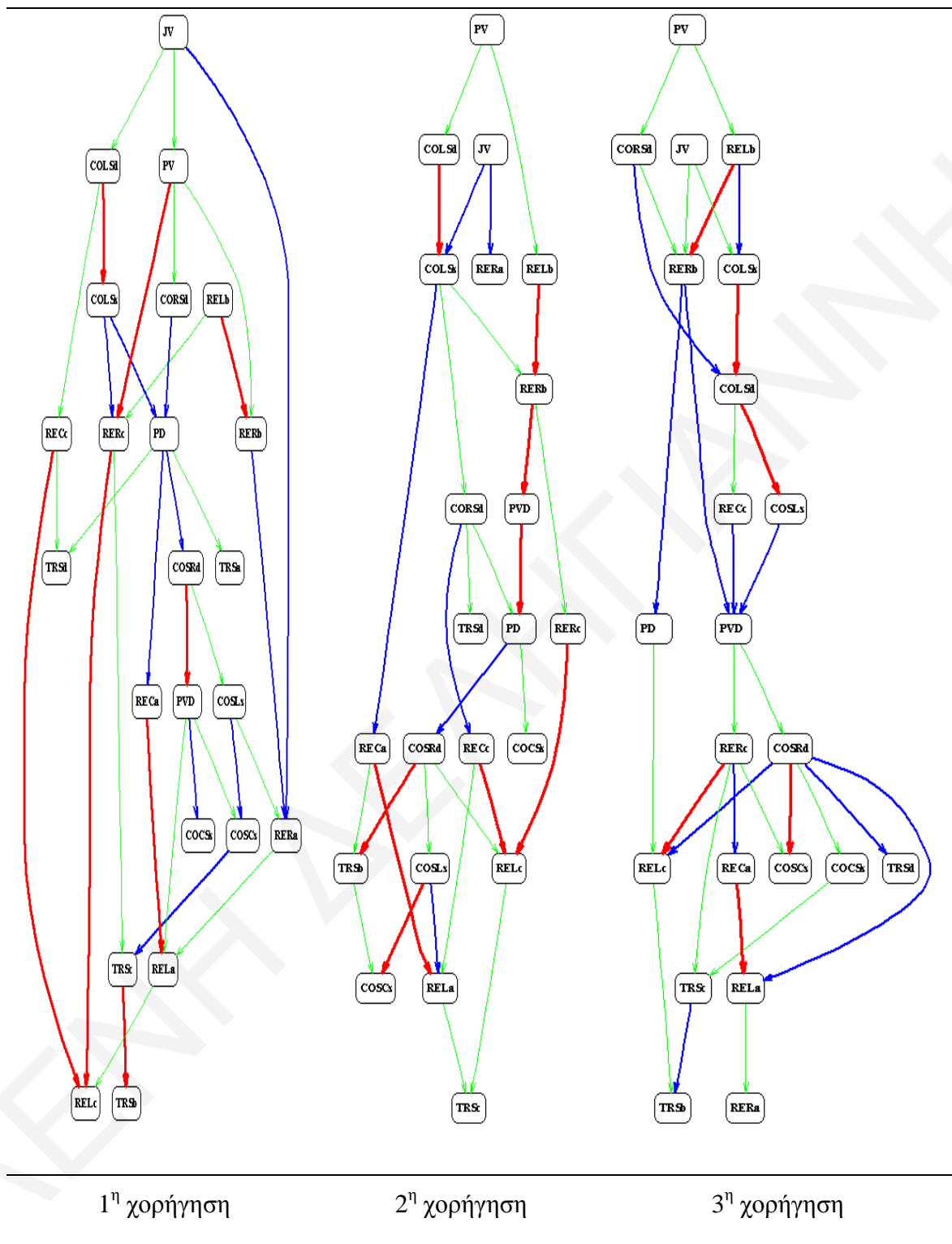
Σχέσεις Συνεπαγωγής των Έργων Ευελιξίας Χρήσης Πολλαπλών Αναπαραστάσεων και Επίλυσης Προβλήματος με Ποικιλία Αναπαραστάσεων της Πρόσθεσης Κλασμάτων κατά την Πρώτη και Δεύτερη Φάση της Έρευνας

Τα Διαγράμματα 46, 47 και 48 περιλαμβάνουν τα συνεπαγωγικά διαγράμματα των απαντήσεων των μαθητών κάθε ηλικιακής ομάδας στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων στις τρεις χορηγήσεις του δοκιμίου. Η συγκεκριμένη ανάλυση επιτρέπει τον εντοπισμό μεταβολής του βαθμού

δυσκολίας μέσω των σχέσεων συνεπαγωγής όλων των έργων του δοκιμίου κατά τη μετάβαση εντός και μεταξύ της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Στο Διάγραμμα 46 παρουσιάζονται οι σχέσεις συνεπαγωγής μεταξύ των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος με διάφορα πεδία αναπαράστασης πρόσθεσης κλασμάτων στην πρώτη, δεύτερη και τρίτη χορήγηση, αντίστοιχα, για τους μαθητές της πρώτης ηλικιακής ομάδας, οι οποίοι μεταβαίνουν από την Ε΄ στη Στ΄ δημοτικού.

Στην αρχή κάθε συνεπαγωγικής αλυσίδας παρουσιάζονται τα έργα που δυσκόλεψαν περισσότερο τους μαθητές της συγκεκριμένης ηλικιακής ομάδας. Συγκεκριμένα, στην πρώτη χορήγηση τα λεκτικά προβλήματα, τα έργα μετάφρασης από την αριθμητική γραμμή στη συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων και το έργο αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού με αριθμό υποδιαίρέσεων το διπλάσιο του παρονομαστή αποτέλεσαν τα έργα με το μεγαλύτερο βαθμό δυσκολίας. Κατά τη μετάβαση των μαθητών στη Στ΄ δημοτικού τόσο στην δεύτερη όσο και στην τρίτη χορήγηση τα έργα αυτά εξακολουθούν να είναι τα δυσκολότερα. Καθοριστικό ρόλο στην συγκεκριμένη ιεράρχηση του βαθμού δυσκολίας διαδραματίζει η αλληλεπίδραση τόσο του είδους του έργου (επίλυση προβλήματος, μετάφραση) όσο και της εμπλεκόμενης αρχικής αναπαράστασης (λεκτική αναπαράσταση, αριθμητική γραμμή) και της σχετικής υπό-έννοιας (πρόσθεση ετερόνυμων κλασμάτων, ισοδυναμία κλασμάτων).



Διάγραμμα 46. Συνεπαγωγικά διαγράμματα των απαντήσεων των μαθητών της πρώτης ηλικιακής ομάδας στα έργα του δοκιμίου στις τρεις χορηγήσεις.

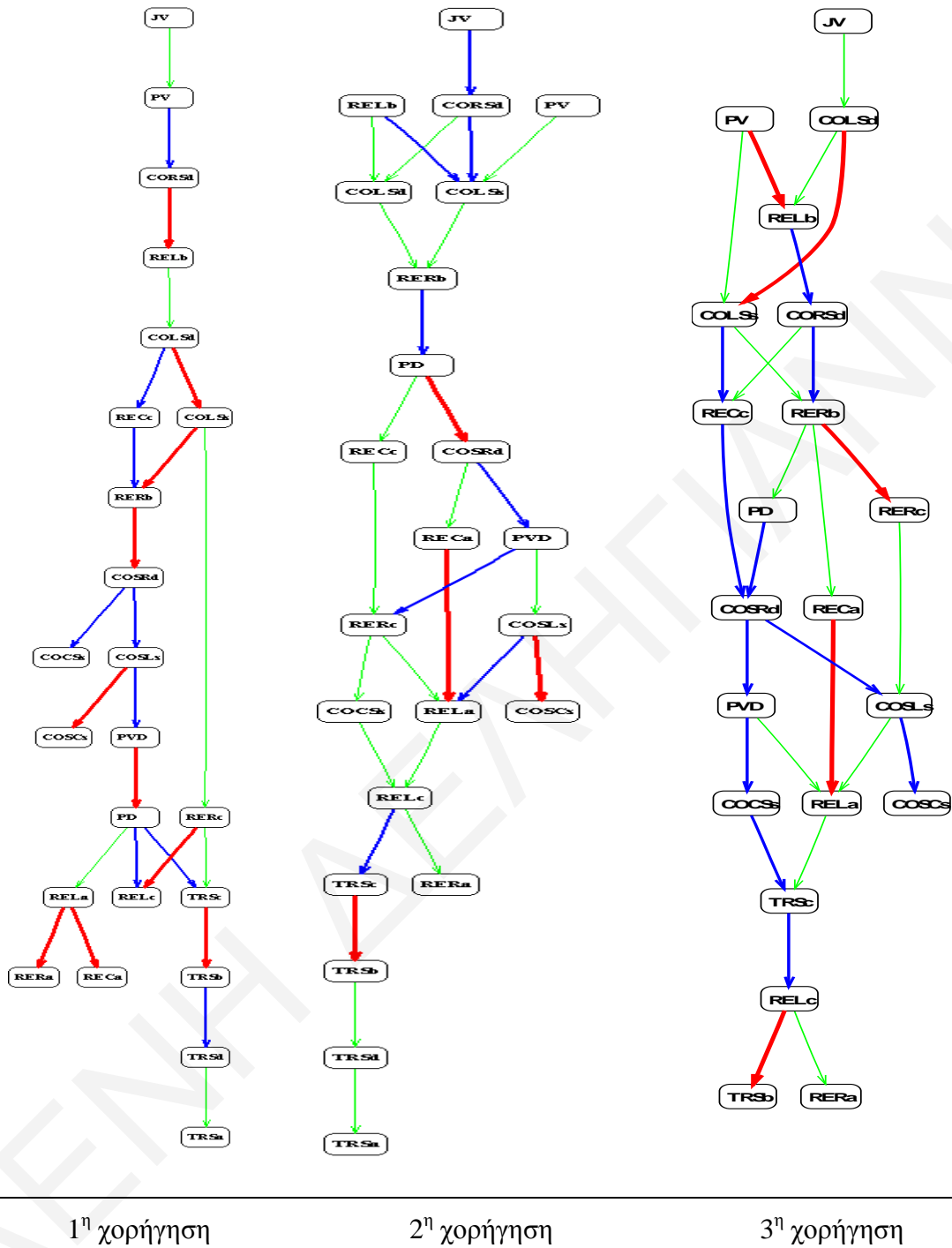
Από την άλλη, στην κατάληξη των συνεπαγωγικών αλυσίδων για κάθε χορήγηση βρίσκονται τα ευκολότερα έργα. Στην πρώτη χορήγηση τα έργα με το μικρότερο βαθμό

δυσκολίας είναι τα έργα χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή και το έργο μετάφρασης από την κυκλική επιφάνεια εμβαδού στη συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων. Στη δεύτερη χορήγηση στην κατάληξη της συνεπαγωγικής αλυσίδας συναντώνται τα ίδια έργα όπως επίσης και τα έργα μετάφρασης από συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή και στην κυκλική επιφάνεια εμβαδού και το έργο αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού. Ο αριθμός των έργων με μικρό βαθμό δυσκολίας αυξάνεται στην τρίτη χορήγηση του δοκιμίου. Στα έργα αυτά περιλαμβάνονται όλα τα έργα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε ποικιλία αναπαραστάσεων, τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή και τα έργα μετάφρασης από συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης κλασμάτων σε κυκλική επιφάνεια εμβαδού και το αντίστροφο.

Γενικά, κατά τη μετάβαση των μαθητών από την Ε' στη Στ' δημοτικού αυξάνεται ο αριθμός των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων με μικρό βαθμό δυσκολίας για τους μαθητές. Ως εκ τούτου, ορισμένα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων, τα οποία αντιμετωπίζονται στην πρώτη χορήγηση ως μέτριου βαθμού δυσκολίας από τους μαθητές της συγκεκριμένης ηλικιακής ομάδας, λόγω της διδασκαλίας και τη γνωστικής ανάπτυξης που λαμβάνει χώρα θεωρούνται εύκολα από τους μαθητές στη δεύτερη και την τρίτη χορήγηση. Το αποτέλεσμα αυτό επιβεβαιώνεται και από τη βελτίωση του μέσου όρου επίδοσης των μαθητών κατά τη διάρκεια ενός χρόνου στις γνωστικές διαστάσεις ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων, σύμφωνα με τα αποτελέσματα της πολλαπλής ανάλυσης διασποράς. Όμως παρά την επίδραση της διδασκαλίας και τη γνωστική ανάπτυξη κατά τη χρονική διάρκεια των τριών χορηγήσεων ο αριθμός και το είδος των έργων με αυξημένο βαθμό δυσκολίας δε μεταβάλλεται. Πιθανόν αυτός να είναι και ο λόγος που παρά τη βελτίωση της επίδοσης στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων από την πρώτη στην τρίτη χορήγηση, ο μέσος όρος της συγκεκριμένης ηλικιακής ομάδας βρίσκεται σε χαμηλά επίπεδα. Εξαιρέση αποτελούν τα έργα χειρισμού, τα οποία και στις τρεις χορηγήσεις θεωρούνται πολύ εύκολα έργα.

Το Διάγραμμα 47 παρουσιάζει τα συνεπαγωγικά διαγράμματα των απαντήσεων των μαθητών της δεύτερης ηλικιακής ομάδας, η οποία μεταβαίνει από τη Στ' δημοτικού στην Α' γυμνασίου, στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων στην πρώτη, δεύτερη και τρίτη χορήγηση, αντίστοιχα. Στην πρώτη χορήγηση μεγάλο βαθμό δυσκολίας έχουν τα έργα επίλυσης λεκτικού προβλήματος, μετάφρασης από αριθμητική γραμμή και ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού σε συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων και αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή με αριθμό υποδιαίρέσεων το διπλάσιο του παρονομαστή. Στη δεύτερη και στην τρίτη χορήγηση μεγάλο βαθμό δυσκολίας φαίνεται να έχουν τα ίδια έργα όπως επίσης και το έργο μετάφρασης από αριθμητική γραμμή σε συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων και αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού με αριθμό υποδιαίρέσεων το διπλάσιο του παρονομαστή.

Σύμφωνα με το Διάγραμμα 47, στην πρώτη χορήγηση για τη συγκεκριμένη ομάδα ένας μεγάλος αριθμός έργων είχαν σχετικά μικρό βαθμό δυσκολίας. Στα συγκεκριμένα έργα περιλαμβάνονται τα έργα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε ορθογώνια και κυκλική επιφάνεια εμβαδού και στην αριθμητική γραμμή, τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή και σε ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού, τα έργα μετάφρασης από συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε κυκλική επιφάνεια εμβαδού και το αντίστροφο και τα προβλήματα με κύρια ή βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση. Στη δεύτερη και στην τρίτη χορήγηση ο αριθμός των έργων με μικρό βαθμό δυσκολίας μειώνεται. Συγκεκριμένα στην κατάληξη της συνεπαγωγικής αλυσίδας παραμένει ένα μέρος των έργων που θεωρούνται εύκολα στην πρώτη χορήγηση- τα έργα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης κλασμάτων, τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων στην ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού και στην αριθμητική γραμμή, αντίστοιχα, και το έργο μετάφρασης από τη συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων στην κυκλική επιφάνεια εμβαδού.



Διάγραμμα 47. Συνεπαγωγικά διαγράμματα των απαντήσεων των μαθητών της δεύτερης ηλικιακής ομάδας στα έργα του δοκιμίου στις τρεις χορηγήσεις.

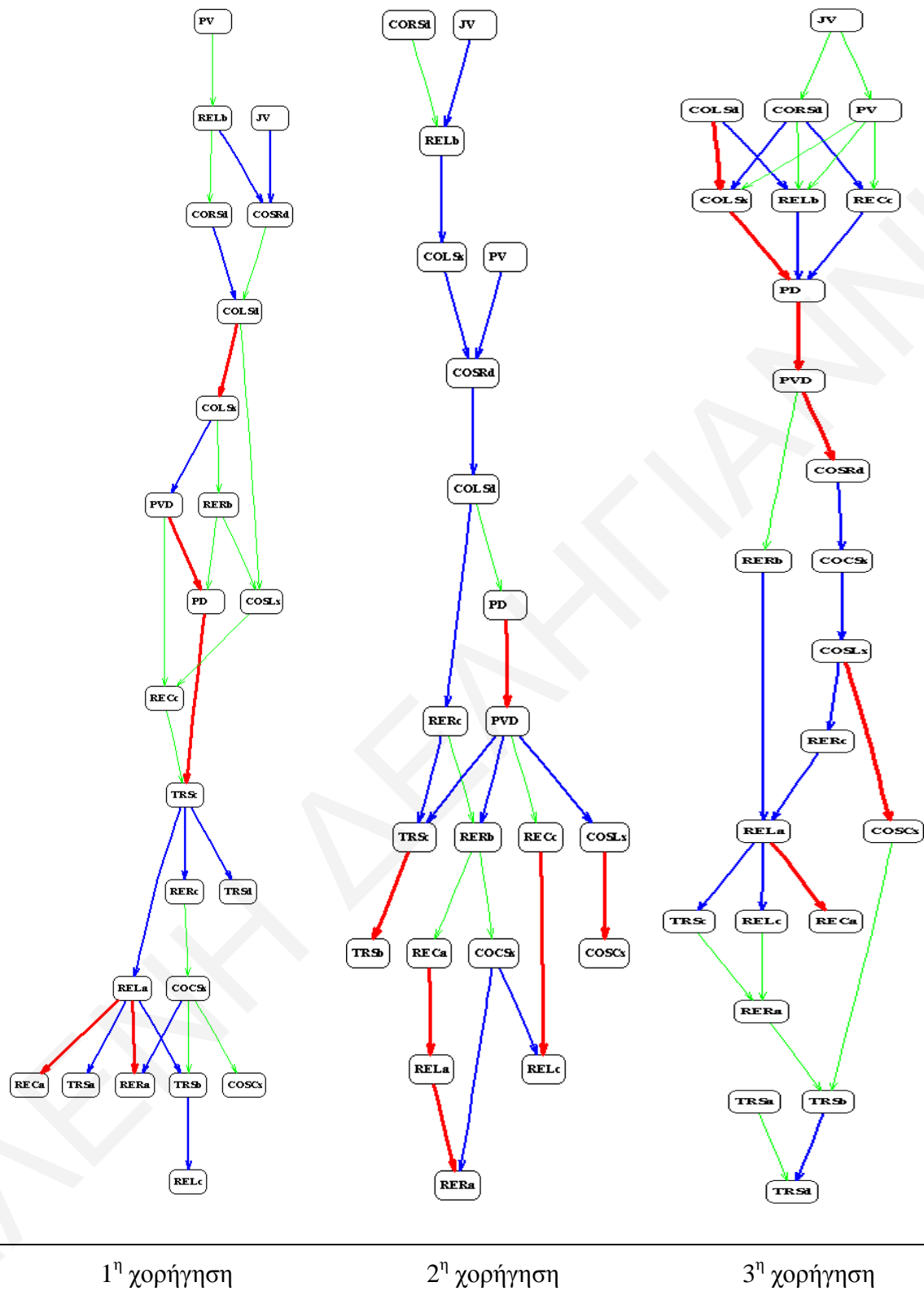
Οι ίδιοι μαθητές ενώ δηλαδή την προηγούμενη χρονιά αντιμετώπιζαν με μεγάλη ευκολία ορισμένα έργα αναγνώρισης, μετάφρασης και επίλυσης προβλήματος κατά τη μετάβαση τους στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση αντιμετώπιζαν τα ίδια έργα ως μέτριου

βαθμού δυσκολίας. Από την άλλη, ορισμένα έργα που οι ίδιοι μαθητές αντιμετώπιζαν ως μέτριου βαθμού δυσκολίας στη Στ' δημοτικού κατά τη μετάβασή τους στην Α' γυμνασίου τα αντιμετωπίζουν ως δύσκολα έργα των οποίων η ορθή επίλυση συνεπάγεται την επιτυχία σε άλλα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος. Γενικά, στις δύο τελευταίες χορηγήσεις φαίνεται να αυξάνεται ο αριθμός των έργων που χαρακτηρίζονται ως δύσκολα ή μέτριας δυσκολίας από τους ίδιους μαθητές με βάση τον τρόπο που τα επιλύουν. Το αποτέλεσμα αυτό έρχεται σε συμφωνία με τη στασιμότητα της επίδοσης των μαθητών που μεταβαίνουν στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων. Ο τρόπος επίσης αντιμετώπισης των προβλημάτων με κύρια ή βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση είναι ιδιαίτερα χαρακτηριστικός του μοτίβου που ακολουθείται. Συγκεκριμένα, ενώ τα συγκεκριμένα έργα στην πρώτη χορήγηση βρίσκονται στην ομάδα των έργων που αντιμετωπίζονται από τους μαθητές ως εύκολα, στη δεύτερη και τρίτη χορήγηση το διαγραμματικό πρόβλημα περιλαμβάνεται στα έργα με μεγάλο βαθμό δυσκολίας ενώ το λεκτικό πρόβλημα με βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση αντιμετωπίζεται ως πρόβλημα με μέτριο βαθμό δυσκολίας. Εντούτοις, είναι εμφανές ότι και στις τρεις χορηγήσεις η αλληλεπίδραση του πεδίου αναπαράστασης, της λειτουργίας που επιτελείται και της σχετικής υπό-έννοιας της πρόσθεσης κλασμάτων διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στον καθορισμό του βαθμού δυσκολίας των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων.

Το Διάγραμμα 48 παρουσιάζει τις σχέσεις συνεπαγωγής των απαντήσεων των μαθητών της τρίτης ηλικιακής ομάδας, οι οποίοι μεταβαίνουν από την Α' γυμνασίου στη Β' γυμνασίου, στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος στην πρώτη, δεύτερη και τρίτη χορήγηση του δοκιμίου, αντίστοιχα. Στην πρώτη χορήγηση τα λεκτικά προβλήματα, το έργο αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή με αριθμό υποδιαίρέσεων το διπλάσιο του παρονομαστή και τα έργα μετάφρασης από ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού και την αριθμητική γραμμή σε συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων και μετάφρασης από συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων σε ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού αποτελούν τα δυσκολότερα έργα για τους μαθητές της τρίτης ηλικιακής ομάδας. Τα έργα αυτά συνεπάγονται την επιτυχία των μαθητών στα υπόλοιπα έργα του δοκιμίου τόσο στην δεύτερη όσο και στην τρίτη χορήγηση. Αξίζει όμως να σημειωθεί ότι στην τρίτη χορήγηση τα έργα στα οποία εμπλέκεται η αριθμητική γραμμή έχουν αυξημένο βαθμό

δυσκολίας πιθανόν λόγω του ότι το συγκεκριμένο γεωμετρικό μοντέλο χρησιμοποιείται σε περιορισμένο βαθμό στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Από την άλλη, τα έργα χειρισμού της πρόσθεσης κλασμάτων, αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων, αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή και μετάφρασης από συμβολική αναπαράσταση πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων στην κυκλική επιφάνεια εμβαδού και το αντίστροφο αποτελούν τα έργα με το μικρότερο βαθμό δυσκολίας στην πρώτη και τρίτη χορήγηση. Ο αριθμός των εύκολων έργων αυξάνεται στη δεύτερη χορήγηση. Πολλά δηλαδή έργα πρόσθεσης κλασμάτων, τα οποία αντιμετωπίστηκαν από τους μαθητές της τρίτης ηλικιακής ομάδας ως μέτριας δυσκολίας στην πρώτη χορήγηση θεωρούνται ως εύκολα έργα στη δεύτερη χορήγηση. Ορισμένα από τα έργα αυτά αντιμετωπίζονται όμως και πάλι ως μέτριου βαθμού δυσκολίας στην τρίτη χορήγηση. Ενδεικτικά, αναφέρεται το έργο αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων σε κυκλική επιφάνεια εμβαδού αλλά και το έργο αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού με αριθμό υποδιαιρέσεων το διπλάσιο του παρονομαστή. Παρόλα αυτά, στην τρίτη χορήγηση ο αριθμός των έργων εύκολων έργων εξακολουθεί να είναι μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο αριθμό στην πρώτη χορήγηση. Το γεγονός ότι στη δεύτερη και στην τρίτη χορήγηση ο αριθμός των έργων μικρότερης δυσκολίας αυξάνεται επιβεβαιώνει τα αποτελέσματα της πολλαπλής ανάλυσης διασποράς στην οποία επισημαίνεται αύξηση του μέσου όρου επίδοσης της δεύτερης ηλικιακής ομάδας κατά τη μετάβαση εντός της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.



Διάγραμμα 48. Συνεπαγωγικά διαγράμματα των απαντήσεων των μαθητών της τρίτης ηλικιακής ομάδας στα έργα του δοκιμίου στις τρεις χορηγήσεις.

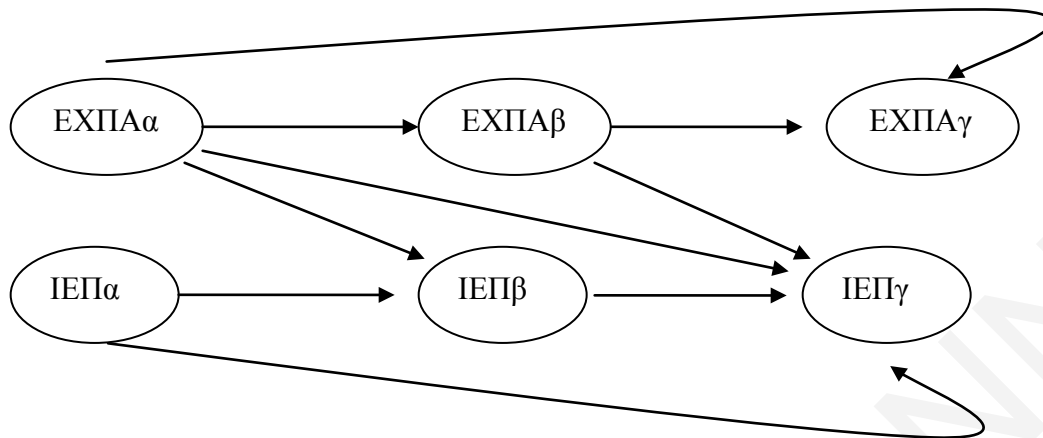
Σύμφωνα με τα αποτελέσματα στα Διαγράμματα 46 μέχρι 48 η αλληλεπίδραση του πεδίου αναπαράστασης, της λειτουργίας που κάθε επιτελείται από κάθε αναπαράσταση και της σχετικής υπό-έννοιας της πρόσθεσης κλασμάτων διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο στο βαθμό δυσκολίας των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος με πολλαπλά πεδία αναπαράστασης πρόσθεσης κλασμάτων σε όλες τις χορηγήσεις του δοκιμίου για κάθε ηλικιακή ομάδα. Ο αριθμός όμως των έργων με μεγαλύτερο ή μικρότερο βαθμό δυσκολίας, λαμβάνοντας υπόψη τον τρόπο που απάντησαν οι μαθητές σε αυτά, διαφέρει σε κάθε ηλικιακή ομάδα και χορήγηση. Συγκεκριμένα, κατά τη μετάβαση από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση ο αριθμός των έργων μεγάλης ή μέτριας δυσκολίας αυξάνεται. Αντίθετα, στην περίπτωση μετάβασης εντός της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης ο αριθμός των έργων μέτριας δυσκολίας μειώνεται ενώ αυξάνονται τα έργα τα οποία αντιμετωπίζονται από τους μαθητές ως εύκολα. Τα συγκεκριμένα αποτελέσματα έρχονται σε συμφωνία με τα αποτελέσματα της πολλαπλής ανάλυσης διασποράς σύμφωνα με την οποία ο μέσος όρος επίδοσης εντός της ίδιας εκπαιδευτικής βαθμίδας, πρωτοβάθμιας ή δευτεροβάθμιας, βελτιώνεται. Αντίθετα, παρατηρείται μείωση του μέσου όρου επίδοσης κατά τη μετάβαση από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση όσον αφορά τα έργα εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων.

Το γεγονός ότι τα έργα τα οποία οι μαθητές της πρώτης και τρίτης ηλικιακής ομάδας τα αντιμετωπίζουν ως δύσκολα εξακολουθούν να έχουν τον ίδιο βαθμό δυσκολίας κατά τη διάρκεια των τριών χορηγήσεων υποδεικνύει ότι παρά τη διδασκαλία και τη γνωστική ανάπτυξη, οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων. Ως εκ τούτου, τα αποτελέσματα των συνεπαγωγικών σχέσεων έρχονται σε συμφωνία με τους χαμηλούς μέσους όρους που παρατηρούνται παρά τη βελτίωση της επίδοσης στην πρώτη και τρίτη ηλικιακή ομάδα στα έργα αναγνώρισης, μετάφρασης και επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων. Επιπλέον, οι δυσκολίες στην κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων υποδηλώνονται και από τις σχέσεις ομοιότητας στα Διαγράμματα 37 μέχρι 45 αφού καμία από τις ηλικιακές ομάδες δεν ήταν σε θέση να επισημάνει την κοινή υποκείμενη έννοια της πρόσθεσης κλασμάτων κατά τρόπο συνολικό στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος με ποικιλία πεδίων αναπαράστασης της πρόσθεσης κλασμάτων.

Η Ανάπτυξη της Εννοιολογικής Κατανόησης της Πρόσθεσης Κλασμάτων

Για την εξέταση των αλληλεπιδράσεων μεταξύ της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της επίλυσης προβλήματος με πολλαπλά πεδία αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων στις τρεις χορηγήσεις κρίθηκε σκόπιμη η διαμόρφωση και η επιβεβαίωση μιας σειράς δυναμικών μοντέλων. Η βασική υπόθεση που ελέγχθηκε ήταν ότι κάθε γνωστική παράμετρος της εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων στη δεύτερη χορήγηση επηρεάζεται από την αντίστοιχί της στην πρώτη χορήγηση και κάθε διάσταση στην τρίτη χορήγηση επηρεάζεται από αντίστοιχη στην πρώτη χορήγηση και από το υπόλοιπο της διακύμανσης της ίδιας διάστασης στη δεύτερη χορήγηση. Για παράδειγμα, η ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων στη δεύτερη χορήγηση επηρεάζεται από την ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων που καταγράφηκε στην πρώτη χορήγηση, ενώ η ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων στην τρίτη χορήγηση επηρεάζεται από την αντίστοιχη ικανότητα στην πρώτη χορήγηση και το υπόλοιπο της διακύμανσης της στη δεύτερη χορήγηση. Χρησιμοποιώντας, το υπόλοιπο των διακυμάνσεων της δεύτερης μέτρησης διασφαλίζεται η μη συμπίληψη στο συγκεκριμένο παράγοντα του μέρους εκείνου της πρώτης μέτρησης που περιλαμβάνεται σε αυτόν. Ως εκ τούτου, με τον τρόπο αυτό επισημαίνεται η σχέση μόνο της δεύτερης με την τρίτη μέτρηση (Panaoura, 2007; Panaoura & Philippou, 2007).

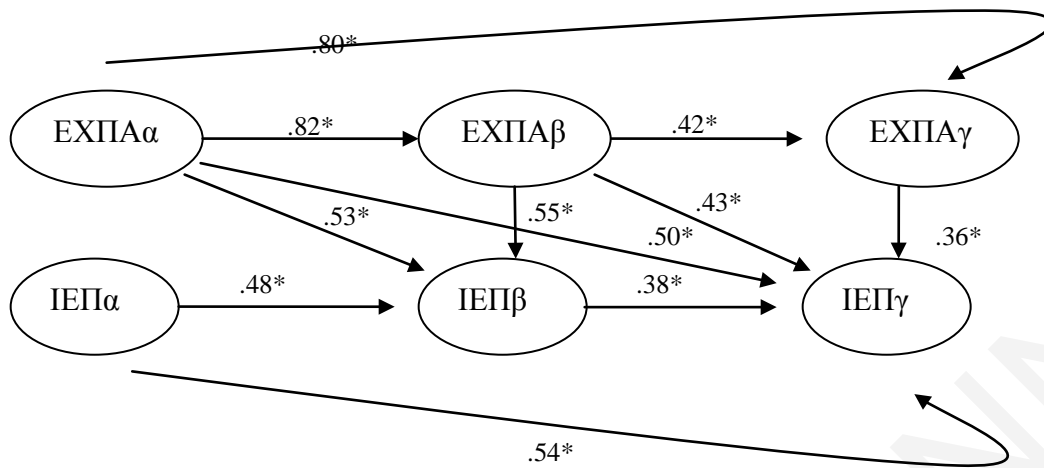
Επιπλέον, εξετάστηκε η υπόθεση ότι η ικανότητα επίλυσης προβλήματος με πολλαπλά πεδία αναπαράστασης στη δεύτερη χορήγηση επηρεάζεται από την ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων στην πρώτη χορήγηση. Αναμένεται επίσης ότι η ικανότητα επίλυσης προβλήματος με πολλαπλά πεδία αναπαράστασης στην τρίτη χορήγηση επηρεάζεται από την ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων στην πρώτη χορήγηση και το υπόλοιπο των διακυμάνσεων της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων στη δεύτερη χορήγηση. Στο Διάγραμμα 49 παρουσιάζεται σε γενικές γραμμές η λογική του δυναμικού μοντέλου που εξετάστηκε.



Διάγραμμα 49. Πρότυπο δυναμικό μοντέλο δόμησης των γνωστικών διαστάσεων εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων κατά τη διάρκεια των τριών χορηγήσεων.

Επεξήγηση συμβολισμού: EXΠΑ=ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων, ΙΕΠ=ικανότητα επίλυσης προβλήματος, $\alpha=1^{\text{η}}$ χορήγηση, $\beta=2^{\text{η}}$ χορήγηση, $\gamma=3^{\text{η}}$ χορήγηση

Η προσαρμογή του αρχικού μοντέλου που ελέγχθηκε χωρίς οποιεσδήποτε συσχετίσεις μεταξύ των δύο διαστάσεων δεν ήταν ικανοποιητική [CFI= 0.64, $\chi^2(2058) = 5180.14$, RMSEA=0.06, με 90% διάστημα εμπιστοσύνης για το RMSEA=0.060, 0.065]. Η συμπερίληψη συσχετίσεων μεταξύ των δύο διαστάσεων της εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων στις τρεις χορηγήσεις οδήγησε σε σημαντική βελτίωση του αρχικού μοντέλου [$\Delta\chi^2(11) = 1043.06$, $p < 0.001$]. Παρόλα αυτά η προσαρμογή και του δεύτερου δυναμικού μοντέλου δεν ήταν πλήρως ικανοποιητική για το σύνολο των δεικτών [CFI= 0.76, $\chi^2(2047) = 4137.08$, RMSEA=0.05, με 90% διάστημα για το RMSEA=0.049, 0.054]. Το τελικό μοντέλο, του οποίου η προσαρμογή θεωρήθηκε ικανοποιητική, προέκυψε μετά τη συσχέτιση του υπολοίπου των διακυμάνσεων ορισμένων μεταβλητών [CFI= 0.91, $\chi^2(2004) = 2785.67$, RMSEA=0.03, με 90% διάστημα για το RMSEA=0.029, 0.034]. Η βελτίωση του συγκεκριμένου τελικού δυναμικού μοντέλου ήταν στατιστικά σημαντική σε σχέση με το δεύτερο δυναμικό μοντέλο που εξετάστηκε [$\Delta\chi^2(43) = 1351.41$, $p < 0.001$].



Διάγραμμα 50. Το δυναμικό μοντέλο δόμησης των γνωστικών διαστάσεων εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων κατά τη διάρκεια των τριών χορηγήσεων.

Επεξήγηση συμβολισμού: EXΠΑ=ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων, ΙΕΠ=ικανότητα επίλυσης προβλήματος, α= 1^η χορήγηση, β= 2^η χορήγηση, γ=3^η χορήγηση, * στατιστικά σημαντική σχέση σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05. Σημείωση: 1. Τα σφάλματα των παραγόντων δεν περιλαμβάνονται.

Στο Διάγραμμα 50 παρουσιάζονται οι φορτίσεις και οι συσχετίσεις μεταξύ της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της ικανότητας επίλυσης προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων του τελικού δυναμικού μοντέλου στις τρεις χορηγήσεις. Οι παράγοντες πρώτης τάξης και οι μετρημένες μεταβλητές δεν περιλαμβάνονται για σκοπούς απλούστευσης της ερμηνείας. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα τόσο η ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων όσο και η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων με πολλαπλές αναπαραστάσεις της πρόσθεσης κλασμάτων επηρεάζονται στη δεύτερη και στην τρίτη χορήγηση από την αρχική κατάσταση του μαθητή στις αντίστοιχες διαστάσεις, όπως αυτή καταγράφηκε στην πρώτη μέτρηση. Από τη μια, οι μαθητές με μεγάλο βαθμό ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και υψηλή ικανότητα επίλυσης προβλήματος με διάφορα πεδία αναπαράστασης όσον αφορά στην πρόσθεση κλασμάτων στην πρώτη μέτρηση έχουν μεγάλο βαθμό ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και υψηλή ικανότητα επίλυσης προβλήματος με διάφορα πεδία αναπαράστασης τόσο στη δεύτερη όσο και στην τρίτη μέτρηση. Από την άλλη, το αντίθετο υφίσταται στην περίπτωση των μαθητών με μικρή ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και περιορισμένη ικανότητα επίλυσης προβλήματος με ποικιλία πεδίων αναπαράστασης στην πρώτη χορήγηση.

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι φορτίσεις της πρώτης χορήγησης στην τρίτη χορήγηση όσον αφορά στις δύο διαστάσεις της εννοιολογικής κατανόησης κλασμάτων ήταν ψηλότερες σε σχέση με τις αντίστοιχες φορτίσεις της δεύτερης χορήγησης στην τρίτη χορήγηση. Συγκεκριμένα, οι φορτίσεις της πρώτης χορήγησης στην τρίτη χορήγηση όσον αφορά την ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και την επίλυση προβλήματος ήταν αντίστοιχα 0.80 και 0.54, ενώ της δεύτερης χορήγησης στην τρίτη χορήγηση όσον αφορά τις δύο διαστάσεις ήταν αντίστοιχα 0.42 και 0.38. Τα αποτελέσματα υποδηλώνουν δηλαδή τις εδραιωμένες προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών όσον αφορά στην πρόσθεση κλασμάτων.

Παράλληλα, οι ατομικές διαφορές των μαθητών στην πρώτη χορήγηση όσον αφορά στην ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και την ικανότητα επίλυσης προβλήματος με πολλαπλά πεδία αναπαράστασης υφίστανται τόσο στη δεύτερη όσο και στην τρίτη χορήγηση παρά τη διδασκαλία και την γνωστική ανάπτυξη των μαθητών κατά τη διάρκεια ενός χρόνου. Παρατηρούνται δηλαδή στατιστικά σημαντικές συσχετίσεις της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της ικανότητας επίλυσης προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων μεταξύ της πρώτης και της δεύτερης χορήγησης του δοκιμίου και μεταξύ των δύο πρώτων χορηγήσεων του δοκιμίου και της τρίτης χορήγησης. Ενδεικτικά, στο Διάγραμμα 50 φαίνεται ότι η φόρτιση όσον αφορά στην ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων της πρώτης χορήγησης στην δεύτερη χορήγηση ήταν 0.82. Παρόμοια, η φόρτιση όσον αφορά στην ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων της πρώτης και της δεύτερης χορήγησης στην τρίτη χορήγηση ήταν αντίστοιχα 0.80 και 0.42.

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων υποδηλώνει επίσης το σημαντικό ρόλο που διαδραματίζει η ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων στην ικανότητα επίλυσης προβλήματος με ποικιλία πεδίων αναπαράστασης όσον αφορά στην πρόσθεση κλασμάτων. Συγκεκριμένα, η ικανότητα επίλυσης προβλήματος με πολλαπλά πεδία αναπαράστασης στην πρόσθεση κλασμάτων επηρεάζεται σημαντικά από την ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων κατά την ίδια χορήγηση όσο και σε προηγούμενες χορηγήσεις. Πιο αναλυτικά, η ικανότητα επίλυσης προβλήματος με ποικιλία πεδίων αναπαράστασης της πρόσθεσης κλασμάτων στη δεύτερη χορήγηση επηρεάζεται σημαντικά τόσο από την αρχική κατάσταση ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων στην πρώτη χορήγηση (0.53) όσο και από το υπόλοιπο της διακύμανσης της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων στην δεύτερη χορήγηση (0.55). Από την άλλη, οι φορτίσεις της πρώτης, της δεύτερης και της

τρίτης χορήγησης όσον αφορά στην ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων στην ικανότητα επίλυσης προβλήματος της τρίτης χορήγησης ήταν 0.50, 0.43 και 0.36, αντίστοιχα.

Από διδακτικής άποψης τα αποτελέσματα υποδεικνύουν ιδιαίτερα τον καθοριστικό ρόλο που φαίνεται να διαδραματίζει η προϋπάρχουσα κατάσταση ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων ενός μαθητή. Οι ατομικές διαφορές που παρατηρούνται δηλαδή στην αρχική κατάσταση της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων ενός μαθητή επιδρούν και καθορίζουν τόσο τη μετέπειτα κατάσταση του όσον αφορά την ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων όσο και την ικανότητα επίλυσης προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων. Ως εκ τούτου, κατά τη διδακτική πράξη χρειάζεται να δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στην βελτίωση των επιμέρους ικανοτήτων που εμπλέκονται με την ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων, σύμφωνα με το δομικό μοντέλο της εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων. Οι στατιστικά σημαντικές σχέσεις που καταγράφονται στο μοντέλο μεταξύ των δύο διαστάσεων εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων υποδηλώνουν επίσης τη συνοχή του γνωστικού συστήματος αφού οι ατομικές διαφορές που καταγράφονται στην ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων μεταφέρονται ως ατομικές διαφορές και διατηρούνται και στην ικανότητα επίλυσης προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων τόσο στη δεύτερη όσο και στην τρίτη χορήγηση.

Ανάλυση Αναπτυξιακού Μοντέλου Ευελιξίας Χρήσης Πολλαπλών Αναπαραστάσεων της Πρόσθεσης Κλασμάτων

Για τη διερεύνηση του ρυθμού ανάπτυξης κάθε παραμέτρου της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων έγινε έλεγχος μιας σειράς μοντέλων (latent growth curve models) με το πρόγραμμα EQS. Βασική υπόθεση ήταν η γραμμική ανάπτυξη διαμέσου του χρόνου σε όλες τις παραμέτρους στην πρώτη και τρίτη ομάδα μαθητών, οι οποίοι μεταβαίνουν εντός της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, αντίστοιχα. Περιλήφθηκαν στο μοντέλο πέντε μεταβλητές σε κάθε μια από τις τρεις χορηγήσεις: ικανότητα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων, ικανότητα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων, ικανότητα χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, ικανότητα μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων και ικανότητα μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράστασης της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων. Το βασικό μοντέλο αποτελείται από δύο παράγοντες.

Ο πρώτος παράγοντας αναπαριστά την αρχική κατάσταση της μεταβλητής (intercept) και ο δεύτερος παράγοντας το ρυθμό ανάπτυξης της μεταβλητής (slope).

Ο ρυθμός ανάπτυξης σταθεροποιήθηκε όσον αφορά στους μαθητές που μεταβαίνουν εντός της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στο 0, 1 και 2 για τις τρεις μετρήσεις, αντίστοιχα. Για την ομάδα των μαθητών που μεταβαίνουν όμως από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση ο ρυθμός ανάπτυξης σταθεροποιήθηκε αρχικά στο 2, 1 και 2 για τις τρεις μετρήσεις, αντίστοιχα. Στη συνέχεια, για την καλύτερη προσαρμογή του μοντέλου της δεύτερης ηλικιακής ομάδας οι τιμές σταθεροποίησης τροποποιήθηκαν μερικώς για να εκφράζουν καλύτερα τις διαφορές που διαπιστώθηκαν στους μέσους όρους με βάση τα αποτελέσματα της πολυμεταβλητής ανάλυσης διασποράς για επαναλαμβανόμενες μετρήσεις.

Επιπλέον, λήφθηκε υπόψη το γεγονός ότι η ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων αναφέρεται τόσο στην ενδο-αναπαραστατική όσο και δια-αναπαραστατική ευελιξία αναμένεται ότι υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ της αρχικής κατάστασης ή/ και του ρυθμού ανάπτυξης των επιμέρους ικανοτήτων της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων, δηλαδή της ικανότητας αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων, της ικανότητας αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων, της ικανότητας συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, της ικανότητας μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων και της ικανότητας μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση. Για παράδειγμα, αναμένεται ότι η αρχική κατάσταση της ικανότητας αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων στην πρώτη ηλικιακή ομάδα αλληλεπιδρά τόσο με την αρχική κατάσταση όσο και με το ρυθμό ανάπτυξης της ικανότητας μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση. Επομένως, οι μαθητές που στην Ε΄ δημοτικού επιτυγχάνουν ψηλό μέσο όρο επίδοσης στα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων, έχουν επίσης ψηλό μέσο όρο επίδοσης στα έργα μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση στην Ε΄ δημοτικού αλλά και μεγαλύτερο ρυθμό ανάπτυξης στη διάρκεια της μεταβατικής περιόδου στη Στ΄ δημοτικού από τους μαθητές που έχουν χαμηλό μέσο όρο στα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων.

Οι δείκτες προσαρμογής του μοντέλου όσον αφορά την ομάδα των μαθητών που μεταβαίνει εντός της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης [CFI= 0.95, χ^2 (86)= 118.77, RMSEA=

0.057, με 90% διάστημα εμπιστοσύνης για το RMSEA=0.023-0.084], εντός της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης [CFI= 0.96, χ^2 (86)= 134.92, RMSEA= 0.046, με 90% διάστημα εμπιστοσύνης για το RMSEA=0.014-0.068] και μεταξύ πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης [CFI= 0.91, χ^2 (85)= 131.54, RMSEA= 0.069, με 90% διάστημα εμπιστοσύνης για το RMSEA=0.046-0.090] είναι ικανοποιητικοί και αποδεκτοί. Τα Διαγράμματα 51, 52 και 53 παρουσιάζουν τα αναπτυξιακά μοντέλα της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων για την ομάδα μαθητών που μεταβαίνει από την Ε' στη Στ' δημοτικού, από τη Στ' δημοτικού στην Α' γυμνασίου και από την Α' στη Β' γυμνασίου, αντίστοιχα.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα των αναπτυξιακών μοντέλων ο αρχικός μέσος όρος στα έργα που εξετάζουν την ικανότητα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων (Π1) είναι 0.50, 0.45 και 0.48 για την πρώτη, δεύτερη και τρίτη ομάδα μαθητών, αντίστοιχα. Ο ρυθμός ανάπτυξης για τη συγκεκριμένη ικανότητα ανέρχεται στο 0.08, 0.07 και 0.09 για την πρώτη, δεύτερη και τρίτη ομάδα μαθητών. Ως εκ τούτου, οι μαθητές που μεταβαίνουν από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση έχουν το χαμηλότερο αρχικό μέσο όρο επίδοσης στα έργα που αναφέρονται στην ικανότητα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων αλλά και το μικρότερο ρυθμό ανάπτυξης της συγκριμένης ικανότητας.

Ο αρχικός μέσος όρος επίδοσης των μαθητών της πρώτης, δεύτερης και τρίτης ομάδας όσον αφορά τα έργα που εξετάζουν την ικανότητα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων (Π2) είναι 0.50, 0.45 και 0.55, αντίστοιχα. Ο ρυθμός ανάπτυξης ανέρχεται στο 0.09, 0.07 και 0.03 για την πρώτη, δεύτερη και τρίτη ομάδα μαθητών. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα, η ομάδα των μαθητών που μεταβαίνει από την Α' στη Β' γυμνασίου σημειώνει τον ψηλότερο αρχικό μέσο όρο επίδοσης στα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων, αλλά το μικρότερο ρυθμό ανάπτυξης της συγκεκριμένης ικανότητας. Από την άλλη, ο ψηλότερος ρυθμός ανάπτυξης της ικανότητας αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων παρατηρείται στην ομάδα των μαθητών που μεταβαίνουν από την Ε' στη Στ' δημοτικού.

Ο αρχικός μέσος όρος επίδοσης στα έργα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης κλασμάτων είναι 0.82, 0.72 και 0.73 για την πρώτη, δεύτερη και τρίτη ομάδα μαθητών,

αντίστοιχα. Από την άλλη, ο ρυθμός ανάπτυξης της ικανότητας συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης κλασμάτων ανέρχεται στο 0.02, 0.06 και 0.07 για την πρώτη, δεύτερη και τρίτη ομάδα μαθητών. Με βάση τα αποτελέσματα, ο υψηλότερος αρχικός μέσος όρος επίδοσης στα έργα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης κλασμάτων εντοπίζεται στην ομάδα των μαθητών που μεταβαίνει από την Ε΄ στη Στ΄ δημοτικού. Αξίζει όμως να σημειωθεί ότι η συγκεκριμένη ομάδα μαθητών παρουσιάζει το πιο μικρό ρυθμό ανάπτυξης της ικανότητας συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων. Αντίθετα, ο ρυθμός ανάπτυξης κατά τη μετάβαση στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και εντός της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης κυμαίνεται σε πιο υψηλά επίπεδα, επιβεβαιώνοντας την έμφαση που δίνεται στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση στην ανάπτυξη της συγκεκριμένης ικανότητας.

Όσον αφορά στην ικανότητα μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων ο αρχικός μέσος όρος επίδοσης είναι 0.54, 0.52 και 0.46 για την πρώτη, δεύτερη και τρίτη ομάδα μαθητών, αντίστοιχα. Ο ρυθμός ανάπτυξης για τη συγκεκριμένη ικανότητα ανέρχεται στο 0.09, 0.06 και 0.08 για την πρώτη, δεύτερη και τρίτη ομάδα μαθητών. Ως εκ τούτου, οι μαθητές που μεταβαίνουν εντός της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης έχουν τον πιο υψηλό μέσο όρο επίδοσης στις τρεις μετρήσεις και τον υψηλότερο ρυθμό ανάπτυξης της συγκεκριμένης ικανότητας. Ο ρυθμός ανάπτυξης της ικανότητας μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων κυμαίνεται στα ίδια περίπου επίπεδα για τους μαθητές που μεταβαίνουν εντός της ίδιας βαθμίδας, πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας, ενώ είναι μικρότερος για τους μαθητές που μεταβαίνουν από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Όσον αφορά την ικανότητα μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων, ο μέσος όρος επίδοσης στις τρεις χορηγήσεις είναι 0.32, 0.31 και 0.39 για την πρώτη, δεύτερη και τρίτη ομάδα μαθητών, αντίστοιχα. Από την άλλη, ο ρυθμός ανάπτυξης της συγκεκριμένης ικανότητας είναι 0.11, 0.05 και 0.03 για την πρώτη, δεύτερη και τρίτη ομάδα μαθητών, αντίστοιχα. Λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα, είναι εμφανές ότι ο ρυθμός ανάπτυξης της ικανότητας μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση για τους μαθητές που φοιτούν στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση κυμαίνεται σε πιο χαμηλά επίπεδα σε σχέση με τον αντίστοιχο ρυθμό ανάπτυξης για τους μαθητές που μεταβαίνουν από την Ε΄ στη Στ΄ δημοτικού.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα, ο μεγαλύτερος ρυθμός ανάπτυξης για την ομάδα των μαθητών που μεταβαίνει από την Ε΄ στη Στ΄ δημοτικού εντοπίζεται στην ικανότητα μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων. Από την άλλη, για την ομάδα των μαθητών που μεταβαίνει από την Στ΄ δημοτικού στην Α΄ γυμνασίου ο μεγαλύτερος ρυθμός ανάπτυξης εντοπίζεται στην ικανότητα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων, ενώ για την ομάδα των μαθητών που μεταβαίνει από την Α΄ στη Β΄ γυμνασίου ο μεγαλύτερος ρυθμός ανάπτυξης εντοπίζεται στην ικανότητα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων.

Γενικά, οι αρχικοί μέσοι όροι επίδοσης στις πέντε διαστάσεις ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων κυμαίνονται σε χαμηλά επίπεδα. Εξαιρέση αποτελεί η επίδοση των μαθητών στα έργα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων. Αξίζει μάλιστα να σημειωθεί ότι ο χαμηλότερος αρχικός μέσος όρος επίδοσης εντοπίζεται στην ικανότητα μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων. Ιδιαίτερα χαμηλός είναι και ο ρυθμός ανάπτυξης των ικανοτήτων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων κατά τη διάρκεια των τριών μετρήσεων και για τις τρεις ομάδες μαθητών κάτι που υποδεικνύει τη μικρή έμφαση που δίνεται στη συστηματική ανάπτυξη των συγκεκριμένων ικανοτήτων κατά τη διδασκαλία. Αξίζει άλλωστε να σημειωθεί ότι και για τις τρεις ομάδες μαθητών ο ρυθμός ανάπτυξης κυμαίνεται περίπου στα ίδια χαμηλά επίπεδα.

Αναλυτικά, ο πιο χαμηλός ρυθμός ανάπτυξης όσον αφορά την ικανότητα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων παρουσιάζεται στην ομάδα των μαθητών που μεταβαίνουν από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, ενώ ο πιο χαμηλός ρυθμός ανάπτυξης όσον αφορά στην ικανότητα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων εντοπίζεται στην ομάδα των μαθητών που μεταβαίνουν από την Α΄ στη Β΄ γυμνασίου. Όσον αφορά στην ικανότητα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης κλασμάτων, ο χαμηλότερος ρυθμός ανάπτυξης εντοπίζεται στην ομάδα των μαθητών που μεταβαίνουν από την Ε΄ στη Στ΄ δημοτικού. Στην ομάδα των μαθητών που μεταβαίνει από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση εντοπίζεται ο χαμηλότερος ρυθμός ανάπτυξης της ικανότητας μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων, ενώ ο χαμηλότερος ρυθμός ανάπτυξης της ικανότητας μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων εντοπίζεται στην ομάδα των μαθητών

που μεταβαίνουν από την Α΄ στη Β΄ γυμνασίου. Από την άλλη, ο ψηλότερος ρυθμός ανάπτυξης για τις ικανότητες αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων, μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση και μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομόνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων εντοπίζεται στην ομάδα των μαθητών που μεταβαίνουν από την Ε΄ στη Στ΄ δημοτικού, ενώ για τις ικανότητες αναγνώρισης της πρόσθεσης ομόνυμων κλασμάτων και συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης κλασμάτων ο ψηλότερος ρυθμός ανάπτυξης εντοπίζεται στην ομάδα των μαθητών που μεταβαίνουν από την Α΄ στη Β΄ γυμνασίου.

Ως εκ τούτου, οι ικανότητες ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων αναπτύσσονται κυρίως εντός της ίδια βαθμίδας εκπαίδευσης, ενώ ο ρυθμός ανάπτυξης των συγκεκριμένων ικανοτήτων είναι μικρότερος κατά τη μετάβαση των μαθητών από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Όμως, αξίζει να σημειωθεί ότι κατά τη μετάβαση στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση ο ρυθμός ανάπτυξης κυμαίνεται στα ίδια επίπεδα σε όλες τις διαστάσεις ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων, με εξαίρεση την ικανότητα συμβολικού χειρισμού. Κατά τη μετάβαση στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση ο ρυθμός ανάπτυξης κυμαίνεται και πάλι στα ίδια επίπεδα σε όλες τις επιμέρους ικανοτήτων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων αλλά μειώνεται. Εξαίρεση αποτελεί ο ρυθμός ανάπτυξης της ικανότητας συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης κλασμάτων, ο οποίος τριπλασιάζεται. Αντίθετα, κατά τη μετάβαση εντός της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης εντοπίζεται διαφοροποίηση του ρυθμού ανάπτυξης της ικανότητας αναγνώρισης και μετάφρασης με βάση τον τύπο της πρόσθεσης κλασμάτων και του πεδίου αναπαράστασης, αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, ο ρυθμός ανάπτυξης της ικανότητας αναγνώρισης της πρόσθεσης ομόνυμων κλασμάτων και της ικανότητας μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση είναι τριπλάσιος της ικανότητας αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων και μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση, αντίστοιχα. Το γεγονός αυτό έρχεται σε συμφωνία με δυσκολία επίτευξης από-στεγανοποίησης όσον αφορά τη συμπεριφορά των μαθητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Επιπλέον, ο ρυθμός ανάπτυξης στις ικανότητες αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων και μετάφρασης από διαγραμματική αναπαράσταση είναι διπλάσιος στην ομάδα που μεταβαίνει από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση σε σχέση με την ομάδα που μεταβαίνει εντός της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Τα ευρήματα αυτά υποδεικνύουν την αποσπασματική

ανάπτυξη των επιμέρους ικανοτήτων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση πιθανόν λόγω της έλλειψης συστηματικής διδασκαλίας στο θέμα.

Αξίζει να σημειωθεί ότι εντοπίζονται στατιστικά σημαντικές ατομικές διαφορές στην αρχική ικανότητα των μαθητών των τριών ομάδων στις ικανότητες ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων, οι οποίες όμως δε εντοπίζονται στον αντίστοιχο ρυθμό ανάπτυξης κατά τη διάρκεια των τριών μετρήσεων. Επιπλέον, εντοπίζονται στατιστικά σημαντικές συσχετίσεις μεταξύ των αρχικών ικανοτήτων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων των μαθητών αλλά και του ρυθμού ανάπτυξής τους.

Στα Διαγράμματα 51, 52 και 53 παρουσιάζονται οι στατιστικά σημαντικές συσχετίσεις σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05 μεταξύ των αρχικών ικανοτήτων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και του ρυθμού ανάπτυξης τους για την ομάδα των μαθητών που μεταβαίνει από την Ε' στη Στ' δημοτικού, από τη Στ' δημοτικού στην Α' γυμνασίου και από την Α' στη Β' γυμνασίου, αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, η αρχική ικανότητα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων της ομάδας των μαθητών που μεταβαίνουν εντός της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης συνδέεται σημαντικά με την αρχική κατάσταση των ικανοτήτων τους για αναγνώριση της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων ($r=0.69$), μετάφραση από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων ($r=0.74$) και μετάφραση από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων ($r=0.60$). Σημαντική συσχέτιση των προαναφερθέντων ικανοτήτων εντοπίζεται και στην περίπτωση της ομάδας των μαθητών που μεταβαίνει από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση ($r=0.76$, $r=0.49$, $r=0.57$) και της ομάδας των μαθητών που μεταβαίνει από τη Α' στη Β' γυμνασίου ($r=0.80$, $r=0.72$, $r=0.78$). Παρατηρείται επίσης στατιστικά σημαντική σχέση μεταξύ της αρχικής ικανότητας αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων και του συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων στην ομάδα των μαθητών που μεταβαίνουν από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση ($r=0.34$) και στην ομάδα των μαθητών που μεταβαίνει εντός της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης ($r=0.72$). Ο ρυθμός ανάπτυξης της ικανότητας αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων συνδέεται σημαντικά με την αρχική ικανότητα για μετάφραση από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων όσον αφορά την ομάδα των μαθητών που μεταβαίνουν εντός της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης ($r=0.76$). Όσον αφορά την τρίτη ομάδα μαθητών ο ρυθμός ανάπτυξης της ικανότητας αναγνώρισης της πρόσθεσης

ετερόνυμων κλασμάτων συνδέεται σημαντικά με το ρυθμό ανάπτυξης της ικανότητας για μετάφραση από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων ($r=0.76$).

Η αρχική ικανότητα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων των μαθητών που μεταβαίνουν από την Ε΄ στη Στ΄ δημοτικού συνδέεται σημαντικά με την αρχική ικανότητα των μαθητών για μετάφραση από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση ($r=0.75$). Όσον αφορά στην ομάδα των μαθητών που μεταβαίνουν από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση η αρχική ικανότητά τους για αναγνώριση της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων συνδέεται με την αρχική κατάσταση ($r=0.90$) και το ρυθμό ανάπτυξης ($r=0.76$) της ικανότητας συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης κλασμάτων και την αρχική ικανότητα μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση ($r=0.92$). Η αρχική ικανότητα αναγνώρισης της πρόσθεσης κλασμάτων όσον αφορά στους μαθητές που μεταβαίνουν από την Α΄ στη Β΄ γυμνασίου συνδέεται με την αρχική ικανότητά τους για συμβολικό χειρισμό ($r=0.80$) και την ικανότητα μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων ($r=0.77$) και το αντίστροφο ($r=0.74$). Από την άλλη, ο ρυθμός ανάπτυξης της ικανότητας αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων των μαθητών που μεταβαίνουν από την Ε΄ στη Στ΄ δημοτικού συνδέεται σημαντικά με το ρυθμό ανάπτυξης της ικανότητάς τους για συμβολικό χειρισμό της πρόσθεσης κλασμάτων ($r=0.63$). Όσον αφορά τους μαθητές που μεταβαίνουν από τη Στ΄ δημοτικού στην Α΄ γυμνασίου, ο ρυθμός ανάπτυξης της ικανότητας αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων συνδέεται σημαντικά με την αρχική ικανότητά τους για μετάφραση από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων ($r=0.76$) και για μετάφραση από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων ($r=0.76$).

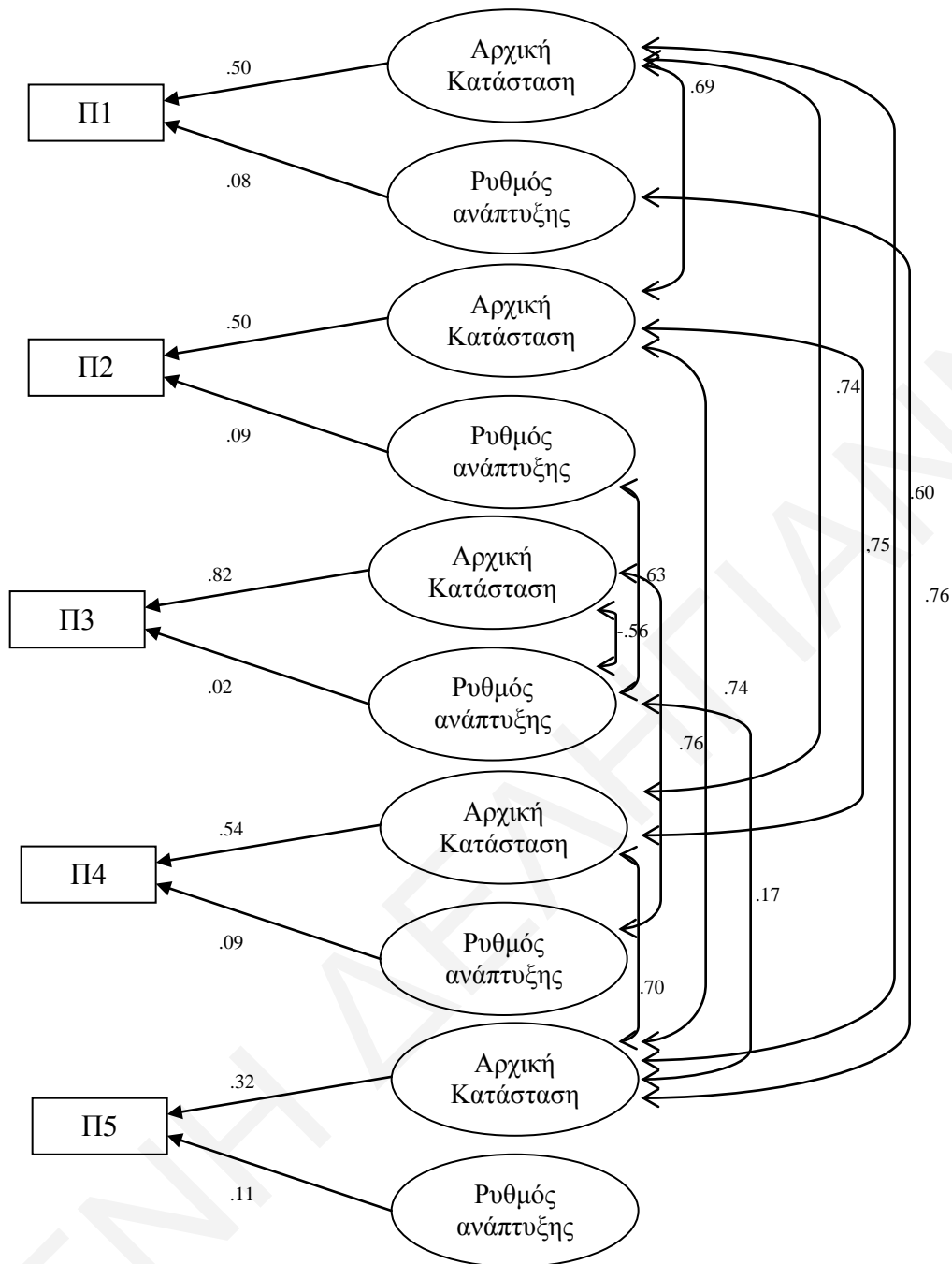
Η αρχική ικανότητα για συμβολικό χειρισμό της πρόσθεσης κλασμάτων των μαθητών που μεταβαίνουν από την Ε΄ στη Στ΄ δημοτικού συνδέεται σημαντικά με το ρυθμό ανάπτυξης της συγκεκριμένης ικανότητας ($r=-0.56$). Η αρνητική συσχέτιση υποδεικνύει ότι οι μαθητές που στην Ε΄ δημοτικού επιτυγχάνουν ψηλά ποσοστά επιτυχίας στα έργα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης κλασμάτων έχουν μικρότερο ρυθμό ανάπτυξης στην διάρκεια ενός χρόνου από τους μαθητές που επιτυγχάνουν αρχικά μικρά ποσοστά επιτυχίας στα συγκεκριμένα έργα. Το συγκεκριμένο εύρημα υποδεικνύει δηλαδή ότι οι μαθητές αυτοί έχουν ήδη αυτοματοποιήσει τις διαδικασίες συμβολικού χειρισμού, οπότε η αλγοριθμική πλέον

προσέγγισή τους δεν επιτρέπει ψηλό ρυθμό ανάπτυξης. Η αρχική ικανότητα για συμβολικό χειρισμό της πρόσθεσης κλασμάτων των μαθητών που μεταβαίνουν εντός της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σχετίζεται επίσης με το ρυθμό ανάπτυξης της ικανότητας για μετάφραση από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων ($r=0.76$, $r=0.43$). Όσον αφορά στους μαθητές που μεταβαίνουν από την Στ' δημοτικού στην Α' γυμνασίου και τους μαθητές που μεταβαίνουν από την Α' στη Β' γυμνασίου, η αρχική ικανότητά τους για συμβολικό χειρισμό της πρόσθεσης κλασμάτων συνδέεται με την αρχική ικανότητά τους για μετάφραση από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων ($r=0.68$, $r=0.65$) και την αρχική ικανότητά τους για μετάφραση από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων ($r=0.58$, $r=0.72$).

Ο ρυθμός ανάπτυξης της ικανότητας συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης κλασμάτων των μαθητών που μεταβαίνουν από την Ε' στη Στ' δημοτικού συνδέεται σημαντικά με την αρχική ικανότητά τους για μετάφραση από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων ($r=0.17$). Τέλος, η αρχική ικανότητα των μαθητών των τριών ομάδων για μετάφραση από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων σχετίζεται σημαντικά με την αρχική ικανότητα των συγκεκριμένων μαθητών για μετάφραση από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων ($r=0.70$, $r=0.73$, $r=0.63$).

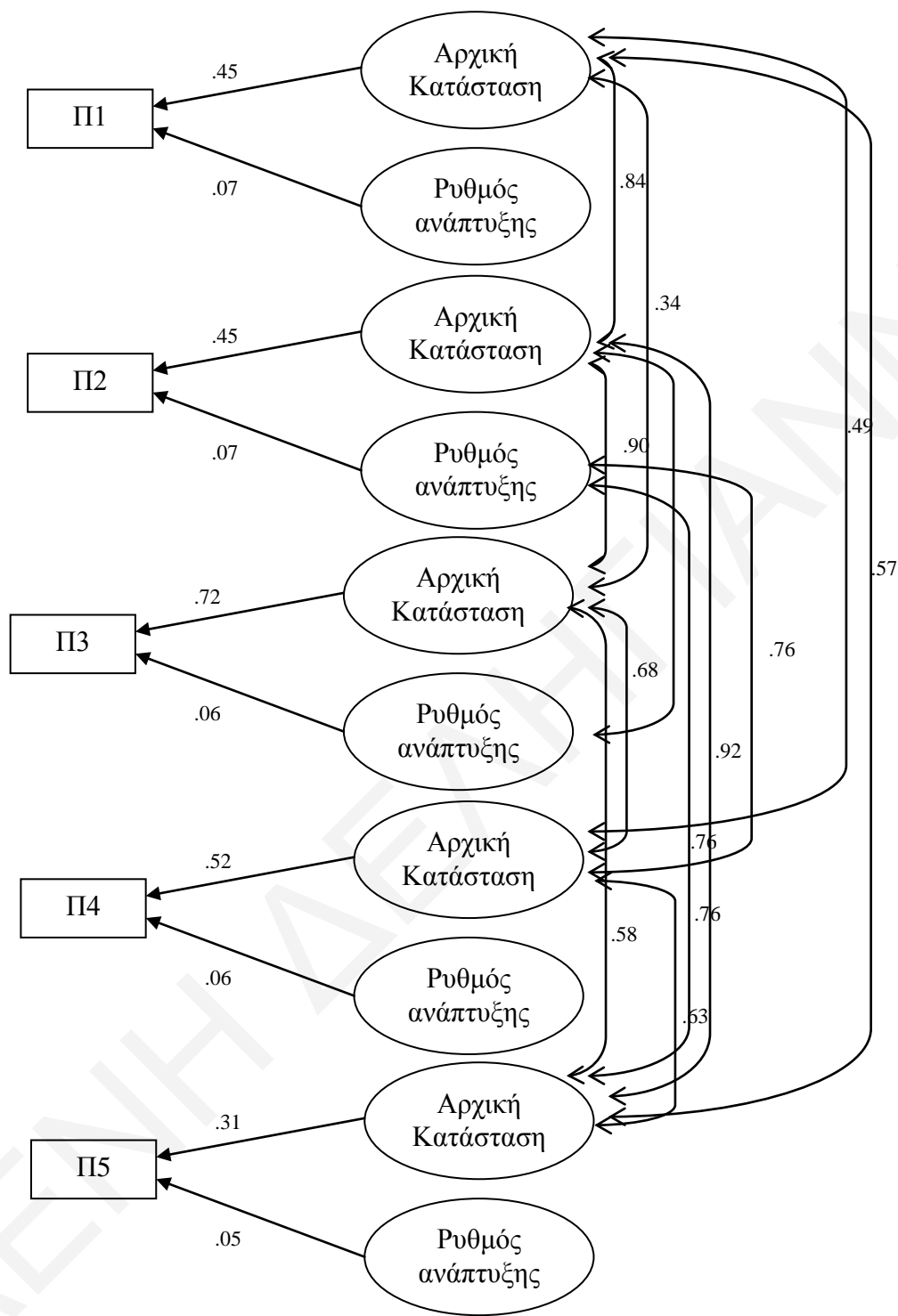
Οι προαναφερθείσες συσχετίσεις μεταξύ της αρχικής κατάστασης ή/και του ρυθμού ανάπτυξης των ικανοτήτων αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων, αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων, συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση και μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων, υποδεικνύουν τη γνωστική συνοχή και τη σημαντική αλληλεπίδρασή τους για την ανάπτυξη της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων. Αξίζει άλλωστε να σημειωθεί ότι η αλληλεπίδραση των ικανοτήτων αυτών επισημαίνεται και από το γεγονός ότι ο ρυθμός ανάπτυξης μιας ικανότητας ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων σχετίζεται σημαντικά με την αρχική επίδοση ή το ρυθμό ανάπτυξης των μαθητών σε άλλη ικανότητα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων. Επιπλέον, συγκρίνοντας τα Διαγράμματα 51, 52 και 53 διαπιστώνεται ότι σε γενικές γραμμές παρατηρούνται και στις τρεις ομάδες μαθητών οι ίδιες συσχετίσεις μεταξύ της αρχικής κατάστασης ή/και του ρυθμού ανάπτυξης των ικανοτήτων ευελιξίας

χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων. Επομένως, κατά τη διδασκαλία τόσο στην πρωτοβάθμια όσο και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση πρέπει να δίνεται έμφαση στην ανάπτυξη όλων των διαστάσεων της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων για την επίτευξη εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων.



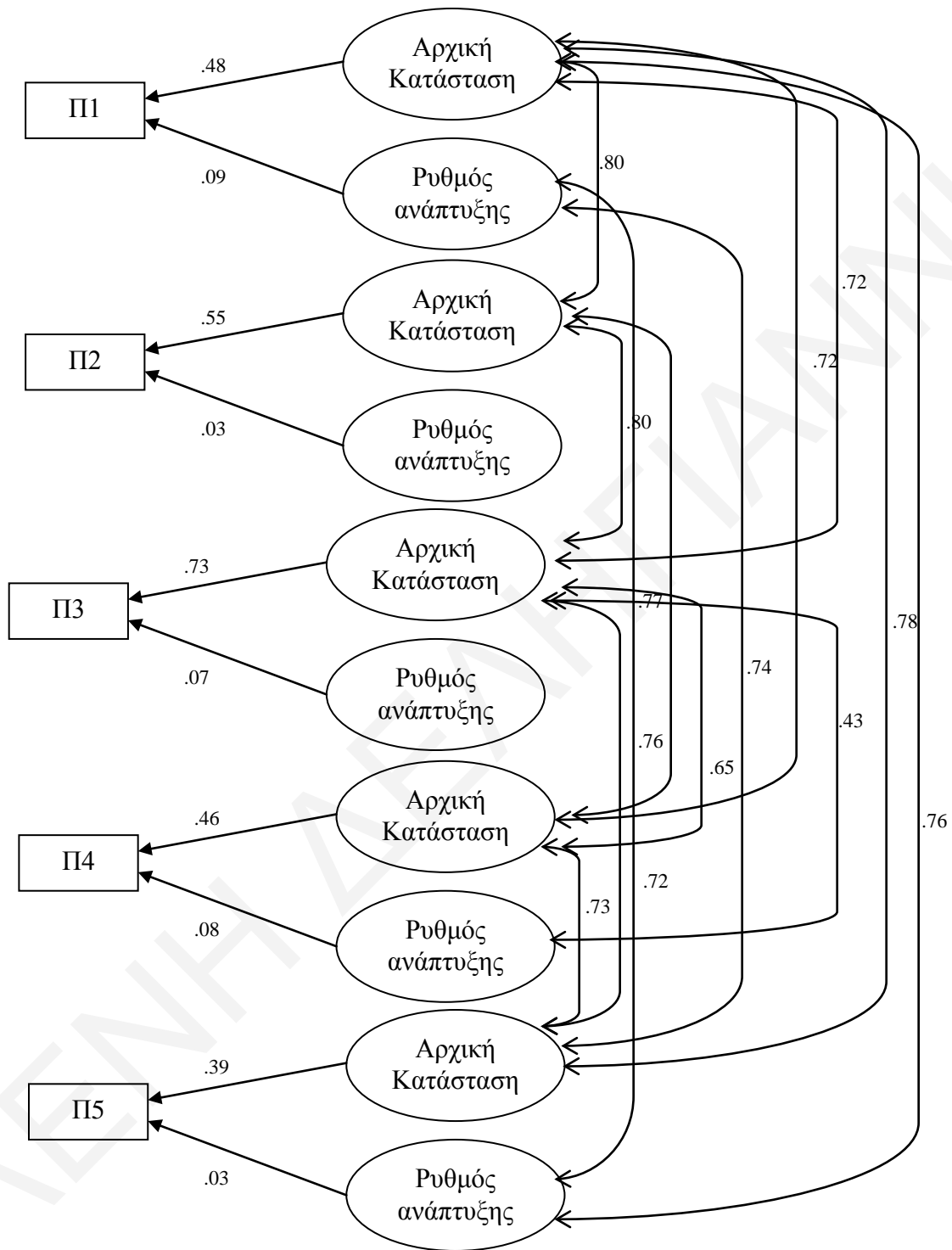
Επεξήγηση συμβολισμού: Π1: Ικανότητα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομόνυμων κλασμάτων, Π2: Ικανότητα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων, Π3= αναγνώριση πρόσθεσης ομόνυμων κλασμάτων, Π4=αναγνώριση πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων, Π5= συμβολικός χειρισμός πρόσθεσης ομόνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, Π6=μετάφραση από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομόνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, Π7=μετάφραση από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομόνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, Π8=ικανότητα επίλυση προβλήματος με κύρια ή βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση πρόσθεσης κλασμάτων, Π9=ικανότητα επίλυση λεκτικού προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων

Διάγραμμα 51. Αναπτυξιακό μοντέλο της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων για την ομάδα μαθητών που μεταβαίνουν από την Ε΄ στη Στ΄ δημοτικού.



Διάγραμμα 52.

Αναπτυξιακό μοντέλο της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων για την ομάδα μαθητών που μεταβαίνουν στην Α΄ γυμνασίου.



Διάγραμμα 53. Αναπτυξιακό μοντέλο της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων για την ομάδα μαθητών που μεταβαίνουν από την Α' στη Β' γυμνασίου.

Ανακεφαλαίωση

Για την εξέταση των ερωτημάτων της έρευνας η παρουσίαση των αποτελεσμάτων έγινε σε δύο υποκεφάλαια. Παρουσιάστηκαν αρχικά τα αποτελέσματα της πρώτης ερευνητικής φάσης. Με την ανάλυση των σχολικών εγχειρίδιων της Ε΄ δημοτικού, Στ΄ δημοτικού, Α΄ γυμνασίου και Β΄ γυμνασίου επισημαίνονται οι διαφορές πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης όσον αφορά στα πεδία αναπαράστασης και τις αναπαραστατικές λειτουργίες των ασκήσεων κλασμάτων που περιέχονται σε αυτά.

Το μοντέλο που προέκυψε από την επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση των δεδομένων της πρώτης ερευνητικής φάσης κατέδειξε το σημαντικό ρόλο της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της επίλυσης προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων στην εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων. Η ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων διακρίνεται στην ικανότητα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων, αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων, συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων και μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων. Συνεπώς, αποτελεί μια πολυδιάστατη έννοια στην οποία εμπλέκονται πέραν από τις αναπαραστατικές λειτουργίες της αναγνώρισης, του χειρισμού και της μετάφρασης, οι σχετικές υπό-έννοιες της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων και το εμπλεκόμενο πεδίο αναπαράστασης. Επιπλέον, εντοπίζεται η επίδραση του πεδίου αναπαράστασης και των απαιτούμενων γνωστικών διαδικασιών στην ικανότητα επίλυσης προβλημάτων με ποικιλία αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων. Η συγκεκριμένη ικανότητα διακρίνεται στην ικανότητα επίλυσης λεκτικού προβλήματος και στην ικανότητα επίλυσης προβλήματος με κύρια ή βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων. Επιβεβαιώνεται επίσης η κοινή δόμηση του γνωστικού συστήματος της εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων για τους μαθητές της Ε΄ δημοτικού, Στ΄ δημοτικού, Α΄ γυμνασίου και Β΄ γυμνασίου.

Η ιεραρχική διαβάθμιση των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων με βάση το βαθμό δυσκολίας έρχεται σε συμφωνία με τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης αφού υποδηλώνει ότι ο βαθμός δυσκολίας των έργων είναι αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης τριών παραγόντων: του πεδίου αναπαράστασης του έργου (συμβολική ή διαγραμματική αναπαράσταση), της λειτουργίας που επιτελείται (χειρισμός,

αναγνώριση, μετάφραση) και των σχετικών εννοιών της πρόσθεσης κλασμάτων (ομώνυμα και ετερόνυμα κλάσματα).

Από την άλλη, εντοπίζονται σημαντικές διαφορές όσον αφορά την επίδοση των μαθητών των τεσσάρων ηλικιακών ομάδων στους επιμέρους παράγοντες της εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων. Συγκεκριμένα, η επίδοση των μαθητών στη Στ' δημοτικού είναι ψηλότερη από την αντίστοιχη επίδοση των μαθητών της Ε' δημοτικού στα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων, μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων και το αντίστροφο και επίλυσης προβλημάτων με ποικιλία αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων. Παράλληλα, η επίδοση των μαθητών της Β' γυμνασίου είναι ψηλότερη από την αντίστοιχη επίδοση των μαθητών της Α' γυμνασίου σε όλες τις διαστάσεις που συνθέτουν την κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων, με εξαίρεση τα έργα μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση. Δεν παρατηρείται όμως οποιαδήποτε στατιστικά σημαντική βελτίωση της επίδοσης των μαθητών από τη Στ' δημοτικού στην Α' γυμνασίου όσον αφορά τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων και μετάφρασης της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση και το αντίστροφο. Αντίθετα, ο μέσος όρος επίδοσης των μαθητών της Α' γυμνασίου είναι χαμηλότερος στα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων, συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων και επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων συγκριτικά με την επίδοση των μαθητών της Στ' δημοτικού στα συγκεκριμένα έργα.

Παρόλο που βρέθηκε ότι η επίδοση των μαθητών βελτιώνεται μέσα στην ίδια εκπαιδευτική βαθμίδα, γενικά ο μέσος όρος επίδοσης των μαθητών στα έργα αναγνώρισης, μετάφρασης και επίλυσης προβλήματος κυμαίνεται σε χαμηλά επίπεδα υποδεικνύοντας τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές όσον αφορά στην εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης ομοιότητας επιβεβαιώνουν τις δυσκολίες αυτές. Οι μαθητές που συμμετέχουν στην έρευνα δεν αντιμετωπίζουν με τον ίδιο τρόπο όλα τα έργα αναγνώρισης, χειρισμού και μετάφρασης της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων. Αντίθετα, οι μαθητές επικεντρώνονται συχνά στην εμπλεκόμενη αναπαράσταση στα έργα μετάφρασης και αναγνώρισης αντί στη σχετική υπό-έννοια της πρόσθεσης κλασμάτων. Το φαινόμενο της στεγανοποίησης στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων είναι εντονότερο στην Ε' δημοτικού και Α' γυμνασίου.

Σύμφωνα με τις σχέσεις ομοιότητας, στη Στ' δημοτικού οι μαθητές αντιλαμβάνονται σε μεγαλύτερο βαθμό την υποκείμενη υπό-έννοια της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων. Παρόλα αυτά αντιμετωπίζουν την πρόσθεση ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων σαν δύο διαφορετικές έννοιες. Στη Β' γυμνασίου παρά το γεγονός ότι η επίλυση των έργων πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων γίνεται αποσπασματικά, οι μαθητές αρχίζουν να αντιλαμβάνονται την ευρύτερη υποκείμενη έννοια της πρόσθεσης κλασμάτων.

Ο σχηματισμός δύο διακριτών συνεπαγωγικών αλυσίδων όσον αφορά τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης κλασμάτων επιβεβαιώνει την επίδραση της έννοιας της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων στην ικανότητα αναγνώρισης της πρόσθεσης κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων. Από την άλλη, η εξοικείωση των μαθητών των τεσσάρων τάξεων με τα έργα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων επιβεβαιώνεται λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι τα συγκεκριμένα έργα εντοπίζονται στις καταλήξεις των συνεπαγωγικών αλυσίδων που τα περιλαμβάνουν. Όσον αφορά τα έργα μετάφρασης, οι συνεπαγωγικές αλυσίδες περιλαμβάνουν έργα μετάφρασης τα οποία έχουν την ίδια αρχική αναπαράσταση υποδηλώνοντας μια μορφή στεγανοποίηση που εντοπίζεται στις απαντήσεις και των τεσσάρων ηλικιακών ομάδων. Επιπλέον, οι διαμορφωμένες συνεπαγωγικές αλυσίδες υποδεικνύουν ότι: α) η ικανότητα μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων και το αντίστροφο συνεπάγεται την ικανότητα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων και την ικανότητα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή και β) η επιτυχία στα έργα πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων συνεπάγεται την επιτυχία στα έργα πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων. Η επιτυχία επίσης στα προβλήματα πρόσθεσης κλασμάτων συνεπάγεται την επιτυχία στα έργα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων γεγονός που υποδηλώνει ότι οι μαθητές των τεσσάρων τάξεων βασίζονται κατά κύριο λόγο στην εκτέλεση συμβολικών χειρισμών για την επίλυσή τους.

Σύμφωνα με τα στοιχεία της περιγραφικής στατιστικής το μεγαλύτερο ποσοστό εμφάνισης λανθασμένων απαντήσεων δόθηκαν από τους μαθητές της Α' γυμνασίου. Εντούτοις, η διαφορά του ποσοστού εμφάνισης των λαθών αυτών στις απαντήσεις των μαθητών των υπόλοιπων τριών ηλικιακών ομάδων είναι μικρή. Οι μαθητές δηλαδή της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης παρόλο που έρχονται σε επαφή με ποικιλία αναπαραστάσεων

πρόσθεσης κλασμάτων δεν ήταν σε θέση να τις χειριστούν με ευελιξία. Ιδιαίτερα μη αναμενόμενη ήταν η εμφάνιση σε μεγάλο ποσοστό ορισμένων τύπων λαθών που σχετίζονται με την αριθμητική γραμμή στις απαντήσεις των μαθητών της Στ' δημοτικού στα έργα μετάφρασης. Από την άλλη, τα ψηλά ποσοστά εμφάνισης των διαφόρων τύπων λαθών από μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης πιθανόν να σχετίζονται με το γεγονός ότι τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών δεν εμπλέκουν πολλαπλά πεδία αναπαράστασης για τη συγκεκριμένη έννοια. Αξιοσημείωτο είναι ότι η πλειοψηφία των μαθητών χρησιμοποιεί συμβολικό τρόπο αναπαράστασης της λύσης των προβλημάτων γεγονός που αιτιολογείται λαμβάνοντας υπόψη την έμφαση που δίνεται στα εγχειρίδια και των δύο βαθμίδων στο συγκεκριμένο πεδίο αναπαράστασης στα έργα επίλυσης προβλήματος. Μόνο ένα μικρό μέρος των μαθητών, κυρίως της Ε' δημοτικού, χρησιμοποιεί διαγραμματικό και λεκτικό τρόπο αναπαράστασης παρά το γεγονός ότι η εκφώνηση των προβλημάτων παρουσιάζεται λεκτικά ή/και διαγραμματικά. Οι μαθητές τόσο της πρωτοβάθμιας όσο και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης δεν ήταν σε θέση δηλαδή να αξιοποιήσουν και να χειριστούν με ευχέρεια το διαγραμματικό πεδίο αναπαράστασης στο οποίο παρουσιάζονταν τα δεδομένα των συγκεκριμένων έργων.

Επιπλέον με βάση τον τρόπο που απάντησαν οι μαθητές στα έργα αναγνώρισης, χειρισμού και μετάφρασης της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων εντοπίζονται με την ιεραρχική ανάλυση τα εξής ιεραρχικά επίπεδα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων: Πρώμο αναπαραστατικό επίπεδο, Συμβολικό Επίπεδο, Μεταβατικό Επίπεδο Πολλαπλών Αναπαραστάσεων, Επίπεδο Πολλαπλών Αναπαραστάσεων.

Στο δεύτερο υποκεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της δεύτερης ερευνητικής φάσης. Αρχικά, επιβεβαιώνεται η κοινή δόμηση των γνωστικών διαδικασιών εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων κατά τη μετάβαση των μαθητών από την Ε' δημοτικού στη Στ' δημοτικού, από τη Στ' δημοτικού στην Α' γυμνασίου και από την Α' γυμνασίου στη Β' γυμνασίου. Με την πολυμεταβλητή ανάλυση διασποράς επαναλαμβανόμενων μετρήσεων επισημαίνεται η βελτίωση της επίδοσης των μαθητών στις επιμέρους διαστάσεις της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων κατά τη μετάβαση από την Ε' δημοτικού στη Στ' δημοτικού και από την Α' γυμνασίου στη Β' γυμνασίου, δηλαδή εντός της ίδιας εκπαιδευτικής βαθμίδας. Από την άλλη, η επίδοση των μαθητών κατά τη μετάβαση από την Στ' δημοτικού στην Α' γυμνασίου αρχικά μειώνεται στα έργα πρόσθεσης

κλασμάτων και στη συνέχεια βελτιώνεται εντός της σχολικής χρονιάς φτάνοντας στο ίδιο επίπεδο που βρισκόταν στο τέλος της προηγούμενης χρονιάς. Το φαινόμενο της στασιμότητας στην επίδοση των μαθητών που μεταβαίνουν από τη Στ' δημοτικού στην Α' γυμνασίου επιβεβαιώνεται από τα αποτελέσματα της ανάλυσης ομοιότητας και της συνεπαγωγικής ανάλυσης.

Παρά το γεγονός ότι η επίδοση βελτιώνεται κατά τη μετάβαση των μαθητών εντός της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης οι μαθητές δεν είναι σε θέση να αντιληφθούν συνολικά την έννοια της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων όσον αφορά την ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και την ικανότητα επίλυσης προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων. Επομένως, παρατηρείται το φαινόμενο της στεγανοποίησης είτε ως προς τη λειτουργία που επιτελείται είτε ως προς την εμπλεκόμενη αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων σε ορισμένες περιπτώσεις έργων. Επιπλέον, οι χαμηλοί μέσοι όροι επίδοσης στα έργα πρόσθεσης κλασμάτων και το γεγονός ότι τα έργα τα οποία οι μαθητές της πρώτης και τρίτης ηλικιακής ομάδας αντιμετωπίζουν ως δύσκολα εξακολουθούν να έχουν τον ίδιο βαθμό δυσκολίας κατά τη διάρκεια των τριών χορηγήσεων υποδεικνύει ότι παρά τη διδασκαλία και τη γνωστική ανάπτυξη, οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων.

Στο δυναμικό μοντέλο ανάπτυξης της εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων με άξονες της ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και την ικανότητα επίλυσης προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων επισημαίνονται οι εδραιωμένες προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών των τριών ηλικιακών ομάδων όσον αφορά την πρόσθεση κλασμάτων. Παράλληλα, οι ατομικές διαφορές των μαθητών στην πρώτη χορήγηση όσον αφορά τις δύο επιμέρους διαστάσεις της πρόσθεσης κλασμάτων υφίστανται τόσο στη δεύτερη όσο και στην τρίτη χορήγηση παρά τη διδασκαλία και την γνωστική ανάπτυξη των μαθητών κατά τη μεταβατική περίοδο. Τα αποτελέσματα υποδεικνύουν επίσης τον καθοριστικό ρόλο που διαδραματίζει η προϋπάρχουσα κατάσταση ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων ενός μαθητή. Οι ατομικές διαφορές που παρατηρούνται δηλαδή στην αρχική κατάσταση ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων ενός μαθητή επιδρούν και καθορίζουν τόσο τη μετέπειτα κατάσταση του όσον αφορά την ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων όσο και την ικανότητα επίλυσης προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων.

Τα αποτελέσματα των αναπτυξιακών μοντέλων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων κατά τη μεταβατική περίοδο εντός και μεταξύ πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης έδειξαν ότι ο ψηλότερος ρυθμός ανάπτυξης για τις ικανότητες αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων, μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση και μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων εντοπίζεται στην ομάδα των μαθητών που μεταβαίνουν από την Ε΄ στη Στ΄ δημοτικού. Από την άλλη, ο ψηλότερος ρυθμός ανάπτυξης για τις ικανότητες αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων και συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης κλασμάτων εντοπίζεται στην ομάδα των μαθητών που μεταβαίνουν από την Α΄ στη Β΄ γυμνασίου. Συνεπώς, οι ικανότητες ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων αναπτύσσονται κυρίως εντός της ίδια βαθμίδας εκπαίδευσης, ενώ ο ρυθμός ανάπτυξης των συγκεκριμένων ικανοτήτων είναι συγκριτικά μικρότερος κατά τη μετάβαση των μαθητών από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Οι συσχετίσεις που εντοπίζονται μεταξύ της αρχικής κατάστασης ή/και του ρυθμού ανάπτυξης των ικανοτήτων αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων, αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων, συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση και μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων, υποδεικνύουν επίσης τη σημαντική αλληλεπίδρασή τους για την ανάπτυξη της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων. Επιπλέον, διαπιστώνεται ότι σε γενικές γραμμές παρατηρούνται οι ίδιες συσχετίσεις μεταξύ της αρχικής κατάστασης ή/και του ρυθμού ανάπτυξης των ικανοτήτων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων στους τρεις τύπους μετάβασης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό συζητούνται τα συμπεράσματα της παρούσας έρευνας. Παρουσιάζονται σε συντομία τα βασικά αποτελέσματα της έρευνας, με βασικό σκοπό την ερμηνεία των ευρημάτων και τη συζήτησή τους σε αναφορά με τα ευρήματα προηγούμενων ερευνών. Πέραν από τη συζήτηση των αποτελεσμάτων και την εξαγωγή των συμπερασμάτων σημειώνονται εισηγήσεις για περαιτέρω μελλοντική διερεύνηση ορισμένων σχετικών θεμάτων.

Η οργάνωση του κεφαλαίου αντιστοιχεί στα ερευνητικά ερωτήματα που έθεσε η παρούσα εργασία με βάση τους ακόλουθους άξονες διερεύνησης:

1. Η σύγκριση των πεδίων αναπαράστασης και των αναπαραστατικών λειτουργιών όσον αφορά στα κλάσματα, οι οποίες χρησιμοποιούνται στα σχολικά εγχειρίδια της Ε΄ δημοτικού, Στ΄ δημοτικού, Α΄ γυμνασίου και Β΄ γυμνασίου.
2. Η δομή της εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων μαθητών Ε΄ δημοτικού, Στ΄ δημοτικού, Α΄ γυμνασίου και Β΄ γυμνασίου σε σχέση με την ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και την ικανότητα επίλυσης προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων.
3. Τα ιεραρχικά επίπεδα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των μαθητών Ε΄ δημοτικού, Στ΄ δημοτικού, Α΄ γυμνασίου και Β΄ γυμνασίου που εντάσσονται σε αυτά.
4. Η σύγκριση των ικανοτήτων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων μαθητών Ε΄ δημοτικού, Στ΄ δημοτικού, Α΄ γυμνασίου και Β΄ γυμνασίου.
5. Οι δυναμικές σχέσεις αλληλεπίδρασης της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της ικανότητας επίλυσης προβλήματος μαθητών Ε΄ δημοτικού, Στ΄ δημοτικού και Α΄

γυμνασίου κατά τη μετάβασή τους εντός και μεταξύ της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

6. Ο ρυθμός ανάπτυξης των ικανοτήτων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων μαθητών Ε΄ δημοτικού, Στ΄ δημοτικού και Α΄ γυμνασίου κατά τη μετάβασή τους εντός και μεταξύ της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Συγκεκριμένα, στο πρώτο υποκεφάλαιο συγκρίνονται τα πεδία αναπαράστασης και οι αναπαραστατικές λειτουργίες που εντοπίζονται στις ασκήσεις κλασμάτων οι οποίες περιέχονται στα σχολικά εγχειρίδια Ε΄ δημοτικού, Στ΄ δημοτικού, Α΄ γυμνασίου και Β΄ γυμνασίου. Το δεύτερο υποκεφάλαιο αναφέρεται στην επίδραση της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων, της ικανότητας επίλυσης προβλήματος και των επιμέρους διαστάσεων τους στην εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων. Συζητείται η δομή του συστήματος της εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων, όπως έχει προκύψει από την ανάλυση των δεδομένων που συγκεντρώθηκαν, και γίνεται ιδιαίτερη αναφορά στις παραμέτρους του συγκεκριμένου γνωστικού συστήματος. Λαμβάνοντας υπόψη τη δομή του συστήματος εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων και την επίδοση των μαθητών στα έργα που χρησιμοποιήθηκαν για τους σκοπούς της παρούσας έρευνας διερευνάται σε βάθος η έννοια της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων. Συγκεκριμένα, η παρούσα έρευνα συμβάλλει στη διαμόρφωση του θεωρητικού και λειτουργικού ορισμού της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων στα πλαίσια της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων.

Στο τρίτο κεφάλαιο συζητούνται τα αποτελέσματα που σχετίζονται με την επίδραση της ηλικίας στην εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων. Γίνεται ιδιαίτερη αναφορά στη διατήρηση της δομής του γνωστικού συστήματος στις διαφορετικές ηλικιακές ομάδες μαθητών. Παράλληλα, συζητείται η κοινή γνωστική δομή των μαθητών κατά τη μετάβαση από την Ε΄ στη Στ΄ δημοτικού, από τη Στ΄ δημοτικού στην Α΄ γυμνασίου και από την Α΄ στη Β΄ γυμνασίου.

Σχολιάζονται επίσης τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη σύγκριση της επίδοσης των μαθητών Ε΄ δημοτικού, Στ΄ δημοτικού, Α΄ γυμνασίου και Β΄ γυμνασίου αναφορικά με τις ικανότητες ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων με ποικιλία αναπαραστάσεων. Επιπλέον, συγκρίνεται η επίδοση των μαθητών εξελικτικά στις συγκεκριμένες διαστάσεις της εννοιολογικής κατανόησης της

πρόσθεσης κλασμάτων σε διάστημα ενός χρόνου κατά τη μετάβαση από την Ε΄ στη Στ΄ δημοτικού, από τη Στ΄ δημοτικού στην Α΄ γυμνασίου και από την Α΄ στη Β΄ γυμνασίου. Πέραν από την αναφορά στις επιδόσεις των μαθητών στα διαφορετικά είδη έργων ιδιαίτερη σημασία δίνεται σε αριθμό φαινομένων που σχετίζονται με τον τρόπο αντιμετώπισης των έργων πρόσθεσης κλασμάτων από τους μαθητές στα πλαίσια της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, μέσα από τις σχέσεις ομοιότητας και συνεπαγωγής που διαμορφώνονται. Παράλληλα, σχολιάζονται συνοπτικά οι λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος όπως επίσης και τα πεδία αναπαράστασης και οι στρατηγικές που επιλέγουν οι μαθητές των τεσσάρων ηλικιακών ομάδων.

Βασικό θέμα συζήτησης του τρίτου υποκεφαλαίου αποτελούν επίσης οι δυναμικές σχέσεις αλληλεπίδρασης της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της ικανότητας επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων των μαθητών της Ε΄ δημοτικού, Στ΄ δημοτικού και Α΄ γυμνασίου κατά τη μετάβασή τους εντός και μεταξύ της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Παράλληλα, στο συγκεκριμένο υποκεφάλαιο γίνεται αναφορά στο ρυθμό ανάπτυξης των ικανοτήτων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων των μαθητών κατά τη μετάβασή τους εντός και μεταξύ της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Σύγκριση Σχολικών Εγχειριδίων Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης ως προς τα

Πεδία Αναπαράστασης και τις Αναπαραστατικές Λειτουργίες

Τα σχολικά εγχειρίδια διαδραματίζουν σε παγκόσμιο επίπεδο σημαντικό ρόλο στη διδασκαλία των μαθηματικών (Johansson, 2006; Meletiou-Mavrotheris & Stylianos, 2003). Για την πλειοψηφία των εκπαιδευτικών αποτελούν την κύρια πηγή οργάνωσης της διδασκαλίας τους στο μάθημα των μαθηματικών (Schmidt, McKnight, Houang, Wang, Wiley, Cogan, & Wolfe, 2001). Οι Valverde κ.α. (2002) πέραν από το προτεινόμενο (intended curriculum), το υλοποιημένο (implemented curriculum) και το επιτυγχανόμενο αναλυτικό πρόγραμμα (attained curriculum) (Robitaille, Schmidt, Raizen, McKnight, Britton, & Nicol, 1993), διακρίνουν ένα τέταρτο επίπεδο που αναφέρεται στο εν δυνάμει υλοποιημένο (potentially implemented) αναλυτικό πρόγραμμα. Συγκεκριμένα, το εν δυνάμει υλοποιημένο αναλυτικό πρόγραμμα αναφέρεται στα σχολικά εγχειρίδια και τα άλλα υλικά ή μέσα που χρησιμοποιούνται κατά τη διδασκαλία και ενθαρρύνουν την επίτευξη των στόχων που τίθενται με το προτεινόμενο αναλυτικό πρόγραμμα (Johansson, 2006).

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης των σχολικών εγχειριδίων της Ε΄ δημοτικού, Στ΄ δημοτικού, Α΄ γυμνασίου και Β΄ γυμνασίου υποδεικνύουν την ύπαρξη συνέπειας στη χρήση συγκεκριμένων πεδίων αναπαράστασης και των λειτουργιών που εμπλέκονται στις ασκήσεις κλασμάτων εντός της πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Αντίθετα, εντοπίζονται σημαντικές διαφορές όσον αφορά τις δύο διαστάσεις μεταξύ των εγχειριδίων των μαθηματικών των δύο βαθμίδων. Συγκεκριμένα, στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση πέραν από τις συμβολικές αναπαραστάσεις, οι οποίες περιλαμβάνονται κυρίως στα σχολικά εγχειρίδια, έμφαση δίνεται και σε άλλες μορφές αναπαράστασης όπως είναι η λεκτική και η διαγραμματική αναπαράσταση. Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση η χρήση άλλων πεδίων αναπαράστασης πέραν από τις συμβολικές και αλγεβρικές αναπαραστάσεις είναι περιορισμένη. Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση περιλαμβάνεται όμως ένα εισαγωγικό θεωρητικό μέρος για κάθε έννοια στα σχολικά εγχειρίδια, του οποίου η εξέταση δεν αποτέλεσε αντικείμενο μελέτης στην παρούσα έρευνα. Στο θεωρητικό μέρος για επεξήγηση της έννοιας του κλάσματος περιλαμβάνονται παραδείγματα τα οποία συχνά συνοδεύονται από διαγραμματικές αναπαραστάσεις. Επιπλέον, επισημαίνεται ότι σε αντίθεση με την πρωτοβάθμια εκπαίδευση στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση εισάγονται και χρησιμοποιούνται σε ευρεία κλίμακα οι αλγεβρικές αναπαραστάσεις.

Εντοπίζονται επίσης διαφορές μεταξύ των εγχειριδίων των δύο βαθμίδων ως προς τις λειτουργίες που επιτελούν οι ασκήσεις που προτείνονται στους μαθητές, δηλαδή ως προς τις αναπαραστατικές μεταβολές εντός και μεταξύ διαφορετικών πεδίων αναπαράστασης αλλά και στην επίλυση προβλήματος. Τόσο στην πρωτοβάθμια όσο και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση κάθε πεδίο αναπαράστασης χρησιμοποιείται κυρίως σε έργα τα οποία επιτελούν μια συγκεκριμένη λειτουργία. Ενδεικτικά, οι συμβολικές αναπαραστάσεις χρησιμοποιούνται κυρίως σε έργα χειρισμού. Όμως, στα εγχειρίδια της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης κάθε είδος αναπαράστασης εντοπίζεται επίσης σε ασκήσεις που επιτελούν και άλλες λειτουργίες. Αντίθετα, στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση κάθε πεδίο αναπαράστασης κλασμάτων χρησιμοποιείται σε περιορισμένο αριθμό λειτουργιών.

Επιπλέον, εμφανίζονται ποικίλες διαγραμματικές αναπαραστάσεις στα σχολικά εγχειρίδια της Ε΄ και Στ΄ δημοτικού. Αντίθετα, στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση χρησιμοποιείται μόνο ένας μικρός αριθμός διαγραμματικών αναπαραστάσεων, οι οποίες διαφέρουν από αυτές που παρουσιάζονται στα εγχειρίδια της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Εντούτοις, σε άλλες χώρες (π.χ. Ταϊβάν, Ιαπωνία) χρησιμοποιείται μεγαλύτερη ποικιλία

αναπαραστάσεων ειδικότερα γραμμικών μοντέλων στα σχολικά εγχειρίδια της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (Delaney et al., 2007; Watanabe, 2008) όσον αφορά τα κλάσματα. Το γεγονός αυτό σε συσχετισμό με τις ψηλές επιδόσεις των μαθητών στις συγκεκριμένες χώρες σε διεθνείς έρευνες θέτει ερωτήματα αναφορικά με το ρόλο των αναπαραστάσεων που περιλαμβάνονται στα σχολικά εγχειρίδια στη μάθηση των μαθηματικών εννοιών. Στην παρούσα έρευνα έγινε μια προσπάθεια εντοπισμού κατά πόσο οι μαθητές ανταποκρίνονται θετικά στα διάφορα πεδία αναπαράστασης, τα οποία χρησιμοποιούνται στα σχολικά εγχειρίδια, έτσι ώστε να διευκολύνεται η μαθησιακή διαδικασία και η προσπάθεια τους για αντιμετώπιση διαφόρων γνωστικών εμποδίων στα μαθηματικά. Η ερμηνεία των αποτελεσμάτων γίνεται λαμβάνοντας υπόψη ότι η συνεισφορά των διδακτικών υλικών και μέσων μεταβάλλεται με βάση τον τρόπο που χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία και μάθηση από εκπαιδευτικούς και μαθητές (Doyle & Carter, 1984; Johansson, 2005). Επομένως, το εν δυνάμει υλοποιημένο και το υλοποιημένο αναλυτικό πρόγραμμα, τα οποία αναφέρονται αντίστοιχα στο επίπεδο των σχολικών εγχειριδίων και του εκπαιδευτικού κατά τη διδασκαλία πιθανόν να παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές. Η εξέταση όμως του τρόπου με τον οποίο χρησιμοποιούνται τα σχολικά εγχειρίδια στη διδακτική πράξη δεν εμπίπτει μέσα στους στόχους της παρούσας έρευνας.

Η Επίδραση της Ευελιξίας Χρήσης Πολλαπλών Αναπαραστάσεων και της Επίλυσης Προβλήματος με Ποικιλία Αναπαραστάσεων στην Εννοιολογική Κατανόηση της Πρόσθεσης Κλασμάτων

Η παρούσα έρευνα εξέτασε την επίδραση της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της επίλυσης προβλήματος στην εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, διερευνώντας παράλληλα τις αντίστοιχες γνωστικές δομές και διαδικασίες. Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης επισημαίνουν την ύπαρξη δύο παραγόντων δεύτερης τάξης, οι οποίοι αναφέρονται αντίστοιχα στην ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και στην ικανότητα επίλυσης προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων. Οι τιμές των συντελεστών φόρτισης των δύο παραγόντων δεύτερης τάξης ως προς τον παράγοντα τρίτης τάξης, ο οποίος αντιστοιχεί στην εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, είναι ιδιαίτερα ψηλές. Η συγκεκριμένη δομή υποδεικνύει ότι τόσο η ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων όσο και η ικανότητα επίλυσης προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων αποτελούν βασικές παραμέτρους της εννοιολογικής κατανόησης

κλασμάτων. Τα συγκεκριμένα ευρήματα συμφωνούν με αντίστοιχα προηγούμενων ερευνών που επισημαίνουν το σημαντικό ρόλο που διαδραματίζουν οι πολλαπλές αναπαραστάσεις (Ainsworth, 1999; Cheng, 1999; Cramer et al., 2002; Even, 1998; Lesh et al., 1987b) και η επίλυση προβλήματος (Lambdin, 2003; Reys et al., 2001; Schoenfeld, 1992) στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών.

Από την άλλη, επιβεβαιώνεται η σημαντική αλληλεπίδραση της αναπαραστατικής ευελιξίας και της ικανότητας επίλυσης προβλήματος κάτι το οποίο συμβαδίζει με αποτελέσματα προηγούμενων ερευνών (Elia et al., 2007; Gagatsis & Shiakalli, 2004; Hitt, 1998; Monoyiou & Gagatsis, 2008; Niemi, 1996). Συγκεκριμένα, ο Niemi (1996) έδειξε ότι η ικανότητα αναγνώρισης κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων προβλέπει την επιτυχία σε έργα επίλυσης προβλήματος στη συγκεκριμένη έννοια. Επιπλέον, οι Gagatsis και Shiakalli (2004) και ο Hitt (1998) υποστηρίζουν ότι η ικανότητα μετάφρασης από ένα πεδίο αναπαράστασης σε άλλο ή ο συντονισμός διαφορετικών αναπαραστάσεων συνδέεται με την επιτυχία στην επίλυση προβλήματος στις συναρτήσεις. Συνεπώς, τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας επιβεβαιώνουν και συνθέτουν τα ευρήματα προηγούμενων ερευνών επισημαίνοντας την αλληλεπίδραση τόσο της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων όσο και της ικανότητας επίλυσης προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων στην εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων.

Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης συμφωνούν επίσης με τη διάκριση άσκησης και προβλήματος, η οποία επισημαίνεται από διάφορους ερευνητές στο χώρο της μαθηματικής παιδείας (D' Amore & Zan, 1996, Jonassen, 2000; Φιλίππου & Χρίστου, 1995; Polya, 1957). Παρόλο που η επίλυση των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων αποτελεί μια περίπλοκη διαδικασία σύμφωνα με την οποία οι μαθητές καλούνται να αντιληφθούν τον τρόπο που η κάθε αναπαράσταση κωδικοποιεί πληροφορίες, τον τρόπο σύνδεσής της με το μαθηματικό αντικείμενο που αναπαρίσταται (Ainsworth, 2006) και τα κοινά δομικά στοιχεία ή τις διαφορές με άλλα πεδία αναπαράστασης που αναφέρονται στην ίδια έννοια (Dufour-Janvier et al., 1987), οι «κανόνες» χρήσης κάθε πεδίου αναπαράστασης είναι γνωστοί εκ των προτέρων και οικείοι στους μαθητές λόγω της διδασκαλίας. Οι μαθητές για την επίλυση των έργων αναγνώρισης, χειρισμού και μετάφρασης απαιτείται να ερμηνεύσουν κατάλληλα μια δοσμένη αναπαράσταση πρόσθεσης κλασμάτων χρησιμοποιώντας οικείες διαδικασίες ρουτίνας (Carlson & Bloom, 2005) και να δώσουν ή να επιλέξουν μια απάντηση στο ίδιο ή σε διαφορετικό σύστημα αναπαράστασης. Από την άλλη,

στα έργα επίλυσης προβλημάτων οι μαθητές δε γνωρίζουν ένα άμεσο τρόπο επίτευξης του σκοπού τους (Schoenfeld, 1983). Πέραν δηλαδή από την εφαρμογή υπολογισμών ρουτίνας απαιτείται η εύρεση μιας συγκεκριμένης στρατηγικής ή ενός συνδυασμού στρατηγικών για κατανόηση της προβληματικής κατάστασης και επίλυσης του έργου (English, 1996).

Η ικανότητα επίλυσης προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων δομείται από δύο επιμέρους παράγοντες, την ικανότητα επίλυσης λεκτικών προβλημάτων και την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων με κύρια ή βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση. Λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι τα λεκτικά προβλήματα είχαν διαφορετική μαθηματική δομή από τα προβλήματα με κύρια ή βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση και η επίλυσή τους ενεργοποιούσε διαφορετικές γνωστικές διαδικασίες, τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας υποδεικνύουν την επίδραση τόσο του πεδίου αναπαράστασης όσο και των σχετικών απαιτούμενων γνωστικών διαδικασιών στην επίλυση προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων. Σε πρόσφατη έρευνά τους οι Elia κ.α. (2007) κατέληξαν σε παρόμοια αποτελέσματα επισημαίνοντας το σημαντικό ρόλο που διαδραματίζει η αλληλεπίδραση του πεδίου αναπαράστασης και της μαθηματικής δομής στην επίλυση προσθετικών προβλημάτων.

Από την άλλη, η ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων δομείται από πέντε επιμέρους παράγοντες, την ικανότητα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων, την ικανότητα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων, την ικανότητα ευέλικτου χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, την ικανότητα μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων και την ικανότητα μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων. Με βάση τα αποτελέσματα, η ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων διακρίνεται κυρίως με βάση τις αναπαραστατικές λειτουργίες της αναγνώρισης, του χειρισμού και της μετάφρασης, οι οποίες αποτελούν απαραίτητες ικανότητες για την κατανόηση μιας έννοιας (Duval, 2006; Even, 1998; Lesh et al., 1987b). Το δομικό μοντέλο επιβεβαιώνει επίσης τη γνωστική διάκριση μεταξύ ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων όσον αφορά την ικανότητα της αναγνώρισης της πρόσθεσης κλασμάτων. Σύμφωνα με τη σχετική με το θέμα βιβλιογραφία για την επίλυση των έργων πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων απαιτείται η γνώση της ισοδυναμίας κλασμάτων για εύρεση του κοινού κλασματικού μέρους. Οι συγκεκριμένες γνωστικές

διαδικασίες δεν ενεργοποιούνται όμως στην περίπτωση της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων (Kong & Kwok, 2003).

Παράλληλα, τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης υποδεικνύουν ότι τα περιγραφικά και εικονικά συστήματα αναπαράστασης (Schnotz, 2002; Schnotz & Bannert, 2003), επηρεάζουν με διαφορετικό τρόπο όχι μόνο τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος αλλά τη διαδικασία επίλυσης έργων μετάφρασης. Επομένως, η ικανότητα μετάφρασης διακρίνεται σε δύο επιμέρους διαστάσεις με αρχικό πεδίο αναπαράστασης το συμβολικό (περιγραφικό σύστημα) ή τη διαγραμματική αναπαράσταση (εικονικό σύστημα) της πρόσθεσης κλασμάτων, αντίστοιχα. Το εύρημα αυτό έρχεται σε συμφωνία με τους Demetriou, Efklides και Platsidou (1993), οι οποίοι έδειξαν ότι η φύση της αναπαράστασης και του συμβολικού συστήματος που χρησιμοποιείται για τη διατύπωση πληροφοριών αποτελεί ανεξάρτητη διάσταση για την οργάνωση της γνωστικής επίδοσης σε συσχετισμό με τις νοητικές λειτουργίες και τους τύπους των σχέσεων που εμπλέκονται.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας, η ικανότητα μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων μπορεί να προβλέψει σε μεγαλύτερο βαθμό την ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων σε σχέση με τους υπόλοιπους παράγοντες επιβεβαιώνοντας την άποψη του Duval (2006) ότι η αλλαγή πεδίων αναπαράστασης αποτελεί τη βάση κατανόησης των μαθηματικών εννοιών για τους μαθητές όλων των εκπαιδευτικών βαθμίδων. Εντούτοις, οι μικρές διαφορές στις παραγοντικές φορτίσεις υποδεικνύουν ότι η ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων αποτελεί μια πολυδιάστατη έννοια στην οποία εμπλέκονται και αλληλεπιδρούν τα πεδία αναπαράστασης, οι μεταβολές εντός και μεταξύ πεδίων αναπαράστασης και οι σχετικές υπό-έννοιες της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων. Συνεπώς, η παρούσα έρευνα εισηγείται ότι η ικανότητα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων, η ικανότητα αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων, η ικανότητα ευέλικτου χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, η ικανότητα μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση, η ικανότητα μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων και η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων πρόσθεσης κλασμάτων με ποικιλία αναπαραστάσεων τα οποία απαιτούν διαφορετικές γνωστικές διαδικασίες είναι απαραίτητες για την κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων. Επομένως, θα πρέπει να δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην ανάπτυξη των

συγκεκριμένων ικανοτήτων κατά τη διδασκαλία και τη μαθησιακή διαδικασία της πρόσθεσης κλασμάτων.

Ο σχηματισμός σχέσεων ομοιότητας και συνεπαγωγής μεταξύ των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος επιβεβαιώνουν τη δομική αλληλεπίδραση των δύο διαστάσεων εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων. Από την άλλη, η διαμόρφωση διαφορετικών συνεπαγωγικών αλυσίδων για τα έργα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων υπογραμμίζει το διαφοροποιητικό ρόλο που διαδραματίζει η έννοια της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων στην ικανότητα αναγνώρισης της πρόσθεσης κλασμάτων των μαθητών των τεσσάρων ηλικιακών ομάδων. Ο εντοπισμός των έργων χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων στις καταλήξεις των συνεπαγωγικών αλυσίδων υποδεικνύει ότι οι συγκεκριμένες διαδικασίες έχουν αυτοματοποιηθεί από τους μαθητές που λαμβάνουν μέρος στην έρευνα λόγω της έμφασης που δίνεται σε αυτές κατά τη διδασκαλία. Το αποτέλεσμα αυτό έρχεται σε συμφωνία με την αρχική υπόθεση που τέθηκε στο δομικό μοντέλο ότι η έννοια της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων δεν επηρεάζει την ικανότητα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης κλασμάτων των μαθητών 11 μέχρι 14 χρόνων. Αξίζει να σημειωθεί επίσης ότι οι συνεπαγωγικές σχέσεις διαμορφώνονται κυρίως μεταξύ μεταβλητών που αντιστοιχούν σε έργα μετάφρασης με την ίδια αρχική αναπαράσταση υποδηλώνοντας ότι η έννοια της πρόσθεσης κλασμάτων δεν έχει γίνει αντιληπτή στην ολότητά της από τους συγκεκριμένους μαθητές. Τα ευρήματα προηγούμενων ερευνών (Duval, 2002; Gagatsis et al., 2002) επιβεβαιώνουν τον αποσπασματικό τρόπο σκέψης των μαθητών κατά την επίλυση έργων που περιλαμβάνουν διαφορετικά πεδία αναπαράστασης. Οι διαμορφωμένες συνεπαγωγικές αλυσίδες υποδεικνύουν επίσης ότι: α) η ικανότητα μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων και το αντίστροφο συνεπάγεται την ικανότητα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων και την ικανότητα αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή και β) η επιτυχία στα έργα πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων συνεπάγεται την επιτυχία στα έργα πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων.

Οι ψηλές τιμές φόρτισης του δομικού μοντέλου στα έργα που περιλαμβάνουν αριθμητική γραμμή υπογραμμίζουν τη σημασία του συγκεκριμένου μοντέλου στην κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων και τις διαφορετικές γνωστικές διαδικασίες που ενεργοποιούνται κατά την επίλυση έργων με αριθμητική γραμμή σε σχέση με τις υπόλοιπες

διαγραμματικές αναπαραστάσεις. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης ομοιότητας και συνεπαγωγής έρχονται σε συμφωνία με το εύρημα αυτό. Συγκεκριμένα, η συμπεριφορά των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης κατά την επίλυση των έργων μετάφρασης στην πρώτη φάση της έρευνας διαφοροποιείται ανάλογα με τη διαγραμματική αναπαράσταση που εμπλέκεται. Έτσι, τα έργα στα οποία περιλαμβάνεται αριθμητική γραμμή αντιμετωπίζονται με διαφορετικό τρόπο από τους συγκεκριμένους μαθητές σε σχέση με τα υπόλοιπα έργα αναγνώρισης ή μετάφρασης. Επιπλέον, οι συνεπαγωγικές αλυσίδες που εμπλέκουν έργα μετάφρασης διαμορφώνονται μεταξύ έργων με την ίδια διαγραμματική αναπαράσταση, επιφάνεια εμβαδού ή αριθμητική γραμμή, τόσο στην πρωτοβάθμια όσο και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση κατά την πρώτη ερευνητική φάση. Από την άλλη, οι χαμηλοί μέσοι όροι επιτυχίας των μαθητών τόσο στην πρώτη όσο και στη δεύτερη ερευνητική φάση σε ορισμένα έργα αναγνώρισης και μετάφρασης με αριθμητική γραμμή, ο σχετικά αυξημένος βαθμός δυσκολίας των συγκεκριμένων έργων κατά τη εφαρμογή του μοντέλου Rasch στα δεδομένα των δύο ερευνητικών φάσεων και το γεγονός ότι η επίλυσή τους από τους μαθητές στη δεύτερη ερευνητική φάση συνεπάγεται στις πλείστες περιπτώσεις την επίλυση αντίστοιχων έργων που εμπλέκουν κυκλική ή ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού υποδηλώνουν ότι οι μαθητές δεν ήταν σε θέση να χειριστούν με ευχέρεια την αριθμητική γραμμή.

Τα πιο πάνω ευρήματα ερμηνεύονται λαμβάνοντας υπόψη ότι η αριθμητική γραμμή αποτελεί ένα γεωμετρικό μοντέλο, το οποίο περιλαμβάνει τη συνεχή αλληλεπίδραση μεταξύ γεωμετρικής και αριθμητικής αναπαράστασης. Οι αριθμητικές πράξεις αναπαρίστανται στην αριθμητική γραμμή σαν ευθύγραμμα τμήματα (Michaelidou, Gagatsis, & Pitta-Pantazi, 2004). Αυτός είναι και ο λόγος που η αριθμητική γραμμή αναγνωρίζεται ως κατάλληλο εργαλείο αξιολόγησης του βαθμού ανάπτυξης της ερμηνείας του κλάσματος ως μέτρου από τους μαθητές και της ικανότητας εκτέλεσης προσθετικών πράξεων με κλασματικούς αριθμούς (Keijzer & Terwel, 2003). Εντούτοις, τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης υποδεικνύουν ότι η πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων μπορεί να αναπαρασταθεί με επάρκεια όχι μόνο στην αριθμητική γραμμή αλλά και στην ορθογώνια και κυκλική επιφάνεια εμβαδού. Το αποτέλεσμα αυτό έρχεται σε συμφωνία με τη Lamou (1999), η οποία επισημαίνει ότι η ερμηνεία του κλάσματος ως μέτρου αντιστοιχεί σε κάποιο διάστημα ή σε μια επιφάνεια εμβαδού, ανάλογα με το αν χρησιμοποιείται μονοδιάστατο ή δισδιάστατο μοντέλο αναπαράστασης.

Επιπλέον, στο δομικό μοντέλο επισημαίνονται οι διαφορετικές γνωστικές διαδικασίες που ενεργοποιούνται κατά την επίλυση έργων με ετερόνυμα κλάσματα λόγω της εμπλοκής της έννοιας της ισοδυναμίας κλασμάτων. Οι ψηλότερες τιμές φόρτισης των έργων με ετερόνυμα κλάσματα ως προς τους παράγοντες πρώτης τάξης σε σχέση με τα έργα πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων υποδηλώνουν ότι οι επιμέρους ικανότητες ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων ερμηνεύονται σε μεγαλύτερο βαθμό από τα συγκεκριμένα έργα. Η γνώση της ισοδυναμίας κλασμάτων απαιτείται και κατά την επίλυση των έργων αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων σε ποικιλία διαγραμματικών αναπαραστάσεων με αριθμό υποδιαίρέσεων το διπλάσιο του παρονομαστή. Τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας υπογραμμίζουν δηλαδή τη στενή σχέση της ισοδυναμίας κλασμάτων και της κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων. Άλλωστε, σύμφωνα με το Smith (2002) για την ολοκληρωμένη ανάπτυξη της ερμηνεία του κλάσματος ως μέτρου, οι μαθητές απαιτείται να κατανοήσουν την έννοια της ισοδυναμίας κλασμάτων.

Μέσα από την παρούσα έρευνα δίνεται η δυνατότητα περαιτέρω εμβάθυνσης στην έννοια της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων. Προσαρμόζοντας τους ορισμούς όσον αφορά την έννοια της ευελιξίας από το χώρο της ψυχολογίας (Chevalier & Blaye, 2008; Demetriou, 2004) στα πλαίσια της μαθησιακής διαδικασίας στα μαθηματικά, η ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων θεωρείται ότι αναφέρεται στην ικανότητα μετάβασης μεταξύ νοητικών συνόλων λαμβάνοντας υπόψη τους μετασχηματισμούς που λαμβάνουν χώρα εντός και μεταξύ πεδίων αναπαράστασης (αναγνώριση, χειρισμός, μετάφραση σύμφωνα με τους Duval, 2006 και Lesh et al., 1987b) για την ίδια μαθηματική έννοια. Με άλλα λόγια, η ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων αναφέρεται στην ενδο-αναπαραστατική ευελιξία, δηλαδή την ικανότητα των μαθητών για αναγνώριση και χειρισμό μιας μαθηματικής έννοιας σε ποικιλία αναπαραστάσεων, και στην δια-αναπαραστατική ευελιξία που αναφέρεται στη μετάβαση μεταξύ διαφορετικών αναπαραστατικών συστημάτων. Επομένως, η αναπαραστατική ευελιξία σχετίζεται με το φαινόμενο της «από-στεγανοποίησης» (Duval, 2002) και της «αναπαραστατικής μεταβλητότητας» (Hong & Thomas, 2002).

Παράλληλα με το θεωρητικό ορισμό επιχειρείται η διαμόρφωση ενός λειτουργικού ορισμού της έννοιας της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων στα πλαίσια της πρόσθεσης κλασμάτων. Ο συγκεκριμένος ορισμός δεν επικεντρώνεται στην παρουσία ή την απουσία ευελιξίας αλλά στην ύπαρξη ιεραρχικών επιπέδων ανάπτυξής της. Με βάση την έννοια της πρόσθεσης κλασμάτων προκύπτουν τέσσερα ιεραρχικά επίπεδα ανάπτυξης της

ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων καθένα από τα οποία διαθέτει ένα σύνολο διακριτών χαρακτηριστικών: α) το Πρώιμο Αναπαραστατικό Επίπεδο, β) το Συμβολικό Επίπεδο, γ) το Μεταβατικό Επίπεδο Πολλαπλών Αναπαραστάσεων και δ) το Επίπεδο Πολλαπλών Αναπαραστάσεων.

Συγκεκριμένα, στο Πρώιμο Αναπαραστατικό Επίπεδο και στο Συμβολικό Επίπεδο ανήκουν οι μαθητές που είναι σε θέση να αναγνωρίζουν στοιχειώδεις αναπαραστάσεις και να χειρίζονται συμβολικά την πρόσθεση κλασμάτων. Αναλυτικά, οι μαθητές του Πρώιμου Αναπαραστατικού Επιπέδου παρουσιάζουν χαμηλή επίδοση στα έργα αναγνώρισης, συμβολικού χειρισμού και μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, ενώ δεν επιτυγχάνουν σε κανένα από τα έργα μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων. Επιπλέον, ο μέσος όρος επίδοσής τους στα έργα επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων, ειδικότερα των λεκτικών προβλημάτων, είναι χαμηλός. Η ομάδα μαθητών που ανήκει στο Συμβολικό Επίπεδο διαφέρει από το προηγούμενο επίπεδο λόγω του παρουσιάζει χαμηλή επίδοση στα έργα μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική και μέτρια επίδοση στα έργα συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων.

Το τρίτο επίπεδο (Μεταβατικό Επίπεδο Πολλαπλών Αναπαραστάσεων) διακρίνεται στο Συμβολικό Μεταβατικό Επίπεδο και στο Διαγραμματικό Μεταβατικό Επίπεδο, με βάση τον τρόπο επίλυσης των έργων μετάφρασης από τους μαθητές. Οι μαθητές που ανήκουν στις δύο επιμέρους ομάδες του Μεταβατικού Επιπέδου Πολλαπλών Αναπαραστάσεων έχουν μέτρια επίδοση στα έργα αναγνώρισης και επίλυσης προβλήματος και υψηλή επίδοση στα έργα συμβολικού χειρισμού. Στο Συμβολικό Μεταβατικό Επίπεδο οι μαθητές παρουσιάζουν χαμηλή επίδοση στα έργα μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση, ενώ έχουν μέτρια επίδοση στα έργα μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων. Από την άλλη, οι μαθητές που ανήκουν στο Διαγραμματικό Μεταβατικό Επίπεδο παρουσιάζουν χαμηλή επίδοση στα έργα μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση και μέτρια επίδοση στα έργα μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων. Τέλος, στο Επίπεδο Πολλαπλών Αναπαραστάσεων ανήκουν οι μαθητές με υψηλή επίδοση στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων.

Συνοπτικά, οι μαθητές κάθε επιπέδου διαθέτουν ένα ιδιαίτερο σύνολο χαρακτηριστικών όσον αφορά τις απαντήσεις που έδωσαν στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων. Παρά το γεγονός ότι οι πιο εμφανείς διαφορές εντοπίζονται μεταξύ του Πρώιμου Αναπαραστατικού Επιπέδου και του Επιπέδου Πολλαπλών Αναπαραστάσεων, επισημαίνεται συστηματικά βελτίωση της επίδοσης των μαθητών στις επιμέρους διαστάσεις της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της επίλυσης προβλήματος από το ένα επίπεδο σε άλλο. Τα αποτελέσματα μπορεί να έχουν πρακτική σημασία στη σχολική πραγματικότητα αφού διευκολύνουν τον εκπαιδευτικό στην διαβαθμισμένη οργάνωση των δραστηριοτήτων που χρησιμοποιεί για τη διδασκαλία της πρόσθεσης κλασμάτων με βάση το βαθμό δυσκολίας τους. Το γεγονός αυτό είναι ιδιαίτερα ενισχυτικό κατά τη μαθησιακή διαδικασία σε τάξεις μεικτής ικανότητας.

Η Επίδραση της Ηλικίας στην Εννοιολογική Κατανόηση της Πρόσθεσης Κλασμάτων σε Σχέση με την Ευελιξία Χρήσης Πολλαπλών Αναπαραστάσεων και την Επίλυση Προβλήματος με Ποικιλία Αναπαραστάσεων

Η δομή των γνωστικών διαδικασιών της εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων διατηρείται στις τέσσερις ηλικιακές ομάδες που συμμετέχουν στην πρώτη φάση της έρευνας. Επιπρόσθετα, η συγκεκριμένη δόμηση του γνωστικού συστήματος παραμένει αναλλοίωτη κατά τη μετάβαση μαθητών Ε΄ δημοτικού, Στ΄ δημοτικού και Α΄ γυμνασίου σε χρονικό διάστημα δώδεκα μηνών στη Στ΄ δημοτικού, Α΄ γυμνασίου και Β΄ γυμνασίου, αντίστοιχα. Το γεγονός αυτό υποδηλώνει το σημαντικό ρόλο που διαδραματίζει η ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων, η ικανότητα επίλυσης προβλήματος και οι επιμέρους διαστάσεις τους τόσο στην πρωτοβάθμια όσο και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση για την εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων. Επιπλέον, σύμφωνα με τα ευρήματα της έρευνας υπογραμμίζεται η ανάγκη ανάπτυξης των σχετικών γνωστικών διαδικασιών των μαθητών για επίτευξη συνέχειας και συνέπειας στο αναλυτικό πρόγραμμα των δύο εκπαιδευτικών βαθμίδων.

Παρά το γεγονός ότι η δόμηση της εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων των μαθητών ηλικίας 11 μέχρι 14 χρόνων στις δύο ερευνητικές φάσεις παραμένει κοινή και σταθερή, η σύγκριση της επίδοσης των μαθητών επισημαίνει τη σημαντική επίδραση της ηλικίας στις επιμέρους διαστάσεις της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της επίλυσης προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων της

πρόσθεσης κλασμάτων. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα επισημαίνεται βελτίωση της επίδοσης των μαθητών κατά τη μετάβασή τους εντός της ίδιας εκπαιδευτικής βαθμίδας. Συγκεκριμένα, στην πρώτη ερευνητική φάση η επίδοση των μαθητών της Στ' δημοτικού και της Β' γυμνασίου στα έργα πρόσθεσης κλασμάτων ήταν στατιστικά σημαντικά ψηλότερη από την αντίστοιχη επίδοση των μαθητών της Ε' δημοτικού και Α' γυμνασίου. Ανάλογα αποτελέσματα προκύπτουν και στη δεύτερη ερευνητική φάση όπου η επίδοση των μαθητών που μεταβαίνουν από την Ε' δημοτικού στη Στ' δημοτικού και από την Α' γυμνασίου στη Β' γυμνασίου βελτιώνεται σταδιακά στα συγκεκριμένα έργα. Συνεπώς, τα αποτελέσματα της έρευνας συμφωνούν με προηγούμενες ερευνητικές εργασίες, οι οποίες υποστηρίζουν ότι επίδοση των μαθητών βελτιώνεται με την αύξηση της ηλικίας λόγω της διδασκαλίας, της μάθησης και της σχετικής γνωστικής ανάπτυξης (Case & Okamoto, 1996; Demetriou et al., 1993; Demetriou, Christou, Spanoudis & Platsidou, 2002; Elia et al., 2007).

Από την άλλη, σύμφωνα με τα αποτελέσματα της πρώτης ερευνητικής φάσης ο μέσος όρος επίδοσης των μαθητών στην Α' γυμνασίου παραμένει ο ίδιος ή είναι πιο χαμηλός στις επιμέρους διαστάσεις της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της ικανότητας επίλυσης προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων σε σχέση με τον αντίστοιχο μέσο όρο επίδοσης των μαθητών που φοιτούν στη Στ' δημοτικού. Στη δεύτερη ερευνητική φάση η επίδοση στα συγκεκριμένα έργα της ομάδας μαθητών που μεταβαίνει από τη Στ' δημοτικού στην Α' γυμνασίου στην αρχή της σχολικής χρονιάς μειώνεται και στη συνέχεια βελτιώνεται φτάνοντας στο ίδιο επίπεδο που βρισκόταν στο τέλος της προηγούμενης σχολικής χρονιάς. Στο χρονικό διάστημα των δώδεκα μηνών στο οποίο πραγματοποιείται η παρούσα έρευνα, παρατηρείται δηλαδή στασιμότητα ως προς την ανάπτυξη των ικανοτήτων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων για την ομάδα των μαθητών που μεταβαίνει από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Η στασιμότητα ή η μείωση του μέσου όρου επίδοσης των μαθητών που παρατηρείται κατά τη μετάβαση στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση συναντάται και στα ευρήματα προηγούμενων σχετικών ερευνών στα μαθηματικά (Alsbaugh, 1998; Γαγάτσης & Καφίδας, 1995; Galton et al., 2000; Mullins & Irvin, 2000; Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens, & Verschaffel, 2005; Whitley et al., 2007). Συνεπώς, οι μαθητές κατά τη μετάβασή τους στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση αντιμετωπίζουν δυσκολίες όσον αφορά τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων και την επίλυση προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων.

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την πολυμεταβλητή ανάλυση διασποράς επιβεβαιώνονται από την ανάλυση ομοιότητας και τη συνεπαγωγική ανάλυση, οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν για ανάλυση των δεδομένων της έρευνας. Κατά την πρώτη φάση της έρευνας, η διατήρηση αναλλοίωτων ομάδων έργων στις σχέσεις ομοιότητας που διαμορφώνονται από τις απαντήσεις των μαθητών των δύο τελευταίων τάξεων της πρωτοβάθμιας και των δύο πρώτων τάξεων της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, υποδεικνύει μια μορφή στασιμότητας της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων. Το εύρημα αυτό ενισχύεται και από το γεγονός ότι η μορφή των συνεπαγωγικών αλυσίδων των απαντήσεων των μαθητών παρουσιάζει ως επί το πλείστον κοινά χαρακτηριστικά, κάτι που υποδηλώνει ότι τα έργα του δοκιμίου έχουν παρόμοιο βαθμό δυσκολίας και για τις τέσσερις ηλικιακές ομάδες.

Το φαινόμενο της στεγανοποίησης ως προς το πεδίο αναπαράστασης, την εμπλεκόμενη ενδό- και δια- αναπαραστατική μεταβολή ή τις υπό-έννοιες της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων δεν παρατηρείται κατά τρόπο απόλυτο στις σχέσεις ομοιότητας που διαμορφώνονται από τις απαντήσεις που έδωσαν οι τέσσερις ηλικιακές ομάδες μαθητών που λαμβάνουν μέρος στην πρώτη ερευνητική φάση στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων του δοκιμίου. Εντούτοις παρουσιάζονται δυσκολίες στην επίτευξη πλήρους «από-στεγανοποίησης», οι οποίες γίνονται αντιληπτές από το γεγονός ότι οι μαθητές δεν αντιμετωπίζουν με συνέπεια την επίλυση του συνόλου των έργων που αναφέρονται στην πρόσθεση ομώνυμων ή ετερόνυμων κλασμάτων. Αντίθετα, σε ορισμένες περιπτώσεις οι απαντήσεις τους υποδεικνύουν ότι επικεντρώνονται στην εμπλεκόμενη αναπαράσταση στα έργα μετάφρασης και αναγνώρισης αντί στη σχετική υπό-έννοια της πρόσθεσης κλασμάτων. Το γεγονός επίσης ότι οι διαμορφωμένες συνεπαγωγικές αλυσίδες και στις τέσσερις ηλικιακές ομάδες περιλαμβάνουν έργα μετάφρασης τα οποία έχουν την ίδια αρχική αναπαράσταση επιβεβαιώνουν τον ισχυρισμό ότι οι μαθητές δεν έχουν διαμορφώσει μια ολοκληρωμένη εικόνα της έννοιας της πρόσθεσης κλασμάτων (concept image, Vinner & Dreyfus, 1989).

Το φαινόμενο της αποσπασματικής αντιμετώπισης των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων είναι εντονότερο στην Ε' δημοτικού και Α' γυμνασίου. Άλλωστε σύμφωνα με την κατανομή των μαθητών της πρώτης ερευνητικής φάσης στα ιεραρχικά επίπεδα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων μόνο ένα μικρό ποσοστό των μαθητών της Ε' δημοτικού και Α' γυμνασίου ανήκει στο Επίπεδο Πολλαπλών Αναπαραστάσεων. Στη Στ' δημοτικού οι μαθητές επιλύουν τα έργα ευελιξίας χρήσης

πολλαπλών αναπαραστάσεων λαμβάνοντας υπόψη την υποκείμενη υπό-έννοια της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων. Εντούτοις, οι περιορισμένες σχέσεις ομοιότητας μεταξύ των έργων της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων υποδηλώνουν ότι αντιμετωπίζουν τις υπό-έννοιες της πρόσθεσης κλασμάτων σαν δύο διαφορετικές υποκείμενες έννοιες. Στη Β΄ γυμνασίου παρά το γεγονός ότι η επίλυση των έργων πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων γίνεται αποσπασματικά, οι μαθητές αρχίζουν να αντιλαμβάνονται την ευρύτερη υποκείμενη έννοια της πρόσθεσης κλασμάτων. Το αποτέλεσμα αυτό επιβεβαιώνεται και από το γεγονός ότι η πλειοψηφία των μαθητών που ανήκει στο Επίπεδο Πολλαπλών Αναπαραστάσεων φοιτούν στη Β΄ γυμνασίου.

Στη δεύτερη ερευνητική φάση οι μαθητές που μεταβαίνουν από την Ε΄ δημοτικού στη Στ΄ δημοτικού παρουσιάζουν μια σταδιακή βελτίωση ως προς τον τρόπο αντιμετώπισης των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων. Η συγκεκριμένη ηλικιακή ομάδα κατά την περίοδο μετάβασης εντός της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης επισημαίνει σε μεγάλο βαθμό την κοινή υποκείμενη έννοια της πρόσθεσης κλασμάτων στην οποία αναφέρονται τα έργα παρόλο ότι εμπλέκουν ποικιλία αναπαραστάσεων και επιτελούν διαφορετικές αναπαραστατικές λειτουργίες. Επιβεβαιώνονται συνεπώς τα αποτελέσματα της πολυμεταβλητής ανάλυση διασποράς για επαναλαμβανόμενες μετρήσεις σύμφωνα με τα οποία ο μέσος όρος επίδοσης των μαθητών της συγκεκριμένης ηλικιακής ομάδας σε όλες τις διαστάσεις που αφορούν έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων βελτιώνονται σημαντικά κατά τη μετάβασή τους από την Ε΄ στη Στ΄ δημοτικού. Σε μικρότερο βαθμό βελτίωση παρατηρείται και στην ομάδα των μαθητών που μεταβαίνει από την Α΄ στη Β΄ γυμνασίου όσον αφορά στον τρόπο που συμπεριφέρονται κατά την επίλυση των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων κατά τη διάρκεια των τριών χορηγήσεων του δοκιμίου. Παρόλο όμως που εξελικτικά αποδυναμώνεται το φαινόμενο της στεγανοποίησης για τους μαθητές που μεταβαίνουν εντός της ίδιας βαθμίδας, η κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων και ο εντοπισμός της κοινής υποκείμενης έννοιας δε γίνεται με τρόπο συνολικό. Πιο έντονα παρατηρείται το φαινόμενο της στεγανοποίησης στην περίπτωση της ομάδας των μαθητών που μεταβαίνει από τη Στ΄ δημοτικού στην Α΄ γυμνασίου. Ενδεικτικά, οι συγκεκριμένοι μαθητές αντιμετωπίζουν αποσπασματικά το σύνολο των έργων αναγνώρισης της πρόσθεσης κλασμάτων ακόμη και στην τελευταία χορήγηση του δοκιμίου.

Συγκρίνοντας τις συνεπαγωγικές σχέσεις των απαντήσεων των μαθητών των τεσσάρων ηλικιακών ομάδων στη δεύτερη ερευνητική φάση είναι εμφανές ότι η

αλληλεπίδραση του πεδίου αναπαράστασης, της ενδο- και δια- αναπαραστατικής μεταβολής που επιτελείται και της σχετικής υπό-έννοιας της πρόσθεσης κλασμάτων στον καθορισμό του βαθμού δυσκολίας των έργων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος με πολλαπλά πεδία αναπαράστασης πρόσθεσης κλασμάτων διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο και διατηρείται εξελικτικά. Ο αριθμός όμως των έργων με μεγαλύτερο ή μικρότερο βαθμό δυσκολίας, λαμβάνοντας υπόψη τον τρόπο που απάντησαν οι μαθητές, διαφέρει σε κάθε ηλικιακή ομάδα. Συγκεκριμένα, κατά τη μετάβαση από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση ο αριθμός των έργων μεγάλης ή μέτριας δυσκολίας αυξάνεται. Αντίθετα, στην περίπτωση μετάβασης εντός της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης ο αριθμός των έργων μέτριας δυσκολίας μειώνεται ενώ αυξάνονται τα έργα πρόσθεσης κλασμάτων τα οποία αντιμετωπίζονται από τους μαθητές ως εύκολα.

Από την άλλη, το γεγονός ότι τα έργα τα οποία οι μαθητές που μεταβαίνουν εντός της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης αντιμετωπίζουν ως δύσκολα εξακολουθούν να έχουν τον ίδιο βαθμό δυσκολίας κατά τη διάρκεια των τριών χορηγήσεων υποδεικνύει ότι παρά τη διδασκαλία και τη γνωστική ανάπτυξη, οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων. Επομένως, τα αποτελέσματα των συνεπαγωγικών σχέσεων έρχονται σε συμφωνία με τους χαμηλούς μέσους όρους που παρατηρούνται στα έργα αναγνώρισης, μετάφρασης και επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων παρά τη βελτίωση της επίδοσης στις δύο ομάδες μαθητών που μεταβαίνουν εντός της ίδιας βαθμίδας. Επιπλέον, οι δυσκολίες στην κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων υποδηλώνονται και από τις σχέσεις ομοιότητας που διαμορφώνονται αφού καμία από τις ηλικιακές ομάδες δεν ήταν σε θέση να επισημάνει την κοινή υποκείμενη έννοια της πρόσθεσης κλασμάτων κατά τρόπο συνολικό στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος με διάφορα πεδία αναπαράστασης της πρόσθεσης κλασμάτων.

Τα στοιχεία της περιγραφικής ανάλυσης συμφωνούν με τα πιο πάνω αποτελέσματα. Το μεγαλύτερο ποσοστό εμφάνισης των πλείστων τύπων λανθασμένων απαντήσεων δόθηκε από τους μαθητές Α΄ γυμνασίου. Όμως η διαφορά εμφάνισης των λαθών αυτών στις απαντήσεις των μαθητών των υπόλοιπων ηλικιακών ομάδων είναι μικρή. Η επαφή δηλαδή των μαθητών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης με ποικιλία αναπαραστάσεων κλασμάτων στα σχολικά εγχειρίδιων δεν είναι ανάλογη του βαθμού ευελιξίας χρήσης των αναπαραστάσεων αυτών. Από την άλλη, τα ψηλά ποσοστά εμφάνισης των διαφόρων τύπων λαθών των μαθητών της Α΄ και Β΄ γυμνασίου πιθανόν να σχετίζονται με το γεγονός ότι τα σχολικά εγχειρίδια που

διδάσκονται στις συγκεκριμένες τάξεις δεν εμπλέκουν ποικιλία πεδίων αναπαράστασης για τη συγκεκριμένη έννοια. Τα σχολικά εγχειρίδια αποτελούν όμως το εν δυνάμει υλοποιημένο αναλυτικό πρόγραμμα το οποίο παρέχει ευκαιρίες μάθησης στους μαθητές (Valverde et al, 2002). Η πιθανή προοπτική μάθησης δεν συνδέεται σε σχέση αιτίας και αποτελέσματος με την επίδοση των μαθητών. Το γεγονός αυτό επεξηγεί το μη αναμενόμενο μεγάλο ποσοστό εμφάνισης ορισμένων τύπων λανθασμένων απαντήσεων των μαθητών της Στ' δημοτικού στα έργα μετάφρασης με αρχική ή τελική αναπαράσταση το γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής, παρά τη συμπερίληψη του συγκεκριμένου γεωμετρικού μοντέλου στα αντίστοιχα σχολικά εγχειρίδια.

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι η πλειοψηφία των μαθητών χρησιμοποιεί συμβολικό τρόπο αναπαράστασης της λύσης των προβλημάτων κάτι που αιτιολογείται λαμβάνοντας υπόψη την έμφαση που δίνεται στα σχολικά εγχειρίδια των δύο βαθμίδων στο συγκεκριμένο είδος αναπαράστασης στα έργα επίλυσης προβλήματος. Μόνο ένα μικρό ποσοστό μαθητών, κυρίως της Ε' δημοτικού, χρησιμοποιεί διαγραμματικό και λεκτικό τρόπο αναπαράστασης ακόμη και στα προβλήματα με κύρια ή βοηθητική διαγραμματική αναπαράσταση. Μια πιθανή ερμηνεία αποτελεί το γεγονός ότι οι μαθητές τόσο της πρωτοβάθμιας όσο και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης δεν ήταν σε θέση να αξιοποιήσουν και να χειριστούν με ευχέρεια το διαγραμματικό πεδίο αναπαράστασης στο οποίο παρουσιάζονται τα δεδομένα των συγκεκριμένων έργων. Από την άλλη, οι μαθητές των συγκεκριμένων ηλικιακών ομάδων πιθανόν υπακούοντας στους όρους του διδακτικού συμβολαίου (Brousseau, 1997) να θεωρούν μη αποδεκτό το συγκεκριμένο τρόπο παρουσίασης της διαδικασίας επίλυσης προβλήματος, κάτι το οποίο χρήζει περαιτέρω διερεύνησης.

Η παρούσα έρευνα συμπληρώνει τα ευρήματα προηγούμενων ερευνών που επισημαίνουν την αλληλεπίδραση της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος (Elia et al., 2007; Gagatsis & Shiakalli, 2004; Hitt, 1998, Monoyiou & Gagatsis, 2008; Niemi, 1996) εξετάζοντας τη συγκεκριμένη σχέση εξελικτικά. Συγκεκριμένα, επιβεβαιώνονται οι σχέσεις αλληλεπίδρασης που αναπτύσσονται μεταξύ της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της επίλυσης προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων σε χρονικό διάστημα δώδεκα μηνών κατά τη μετάβαση των συγκεκριμένων μαθητών εντός και μεταξύ της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Στο τελικό δυναμικό μοντέλο επισημαίνεται η ύπαρξη εδραιωμένων προϋπάρχουσων γνώσεων των μαθητών όσον αφορά τις επιμέρους διαστάσεις εννοιολογικής

κατανόησης κλασμάτων, οι οποίες επηρεάζουν την επίδοσή τους στη συγκεκριμένη έννοια εξελικτικά. Παράλληλα, οι ατομικές διαφορές των μαθητών όσον αφορά την ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και την ικανότητα επίλυσης προβλήματος διατηρούνται στο χρονικό διάστημα που λαμβάνει χώρα η παρούσα έρευνα παρά τη διδασκαλία και τη γνωστική ανάπτυξή τους. Ειδικότερα, τα αποτελέσματα υποδεικνύουν τον καθοριστικό ρόλο της αρχικής κατάστασης ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων τόσο στην μετέπειτα ανάπτυξη του βαθμού ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων όσο και της ικανότητας επίλυσης προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων. Οι στατιστικά σημαντικές σχέσεις αλληλεπίδρασης των δύο διαστάσεων εξελικτικά υποδηλώνουν επίσης τη συνοχή του γνωστικού συστήματος. Συνεπώς, υπογραμμίζεται η ανάγκη να δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στη διδακτική πράξη στα αρχικά στάδια ανάπτυξης των επιμέρους ικανοτήτων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων, οι οποίες υποδεικνύονται στο δομικό μοντέλο της εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων. Η αποσπασματική διαμόρφωση των συγκεκριμένων ικανοτήτων στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση επισημαίνεται ότι δρα ανασταλτικά στην μετέπειτα ανάπτυξη της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων αλλά και στην ικανότητα επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων.

Λαμβάνοντας υπόψη το καθοριστικό ρόλο που διαδραματίζει εξελικτικά η ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων στην εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων κρίθηκε σκόπιμη η σύγκριση του ρυθμού ανάπτυξης των επιμέρους αναπαραστατικών ικανοτήτων μαθητών που μεταβαίνουν εντός και μεταξύ της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης όσον αφορά την πρόσθεση κλασμάτων. Τα αναπτυξιακά μοντέλα για τους μαθητές οι οποίοι μεταβαίνουν εντός της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και εντός της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης επιβεβαιώνουν και συμπληρώνουν τα αποτελέσματα των προαναφερθείσων αναλύσεων. Συγκεκριμένα, οι μαθητές που μεταβαίνουν από την Ε΄ στη Στ΄ δημοτικού παρουσιάζουν μεγαλύτερο ρυθμό ανάπτυξης όσον αφορά στις ικανότητες αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων, μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση και μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης ομόνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων σε σχέση με τις άλλες δύο ηλικιακές ομάδες. Οι συγκεκριμένες διαστάσεις περιλαμβάνουν τα δυσκολότερα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και συνδέονται στενά με το Επίπεδο Πολλαπλών Αναπαραστάσεων. Το

γεγονός αυτό υποδηλώνει ότι οι μαθητές κατά τη διάρκεια της δεύτερης ερευνητικής φάσης ανταποκρίθηκαν θετικά στα διάφορα πεδία αναπαράστασης και τις εμπλεκόμενες αναπαραστατικές λειτουργίες οι οποίες περιλαμβάνονται στα σχολικά εγχειρίδια της Στ' δημοτικού.

Όσον αφορά το ρυθμό ανάπτυξης των ικανοτήτων αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων και συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, οι οποίες συνδέονται κυρίως με το Συμβολικό Μεταβατικό Επίπεδο, ο ψηλότερος ρυθμός ανάπτυξης εντοπίζεται στην ομάδα μαθητών που μεταβαίνει από την Α' στη Β' γυμνασίου. Το εύρημα αυτό αιτιολογείται λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι το εν δυνάμει υλοποιημένο αναλυτικό πρόγραμμα στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση δίνει κυρίως έμφαση στις συμβολικές και αλγεβρικές αναπαραστάσεις. Γενικά, τα αποτελέσματα του αναπτυξιακού μοντέλου υποδεικνύουν ότι οι επιμέρους ικανότητες ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων αναπτύσσονται κυρίως κατά τη μετάβαση των μαθητών εντός της ίδιας εκπαιδευτικής βαθμίδας. Αντίθετα, ο ρυθμός ανάπτυξης της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων είναι μικρότερος κατά τη μετάβαση των μαθητών από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Οι συσχετίσεις μεταξύ της αρχικής κατάστασης ή/και του ρυθμού ανάπτυξης των ικανοτήτων αναγνώρισης της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων, αναγνώρισης της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων, συμβολικού χειρισμού της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων, μετάφρασης από συμβολική σε διαγραμματική αναπαράσταση και μετάφρασης από διαγραμματική σε συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων, υπογραμμίζουν τη σημαντική αλληλεπίδρασή τους για την ανάπτυξη της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων. Αξίζει άλλωστε να σημειωθεί ότι η αλληλεπίδραση των ικανοτήτων αυτών επισημαίνεται και από το γεγονός ότι ο ρυθμός ανάπτυξης μιας ικανότητας ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων σχετίζεται σημαντικά με την αρχική επίδοση ή το ρυθμό ανάπτυξης των μαθητών σε άλλη ικανότητα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων. Επιπλέον, διαπιστώνεται ότι σε γενικές γραμμές παρατηρούνται και στους τρεις τύπους μετάβασης οι ίδιες συσχετίσεις μεταξύ της αρχικής κατάστασης ή/και του ρυθμού ανάπτυξης των ικανοτήτων ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων. Συνεπώς, υποδεικνύεται η έμφαση που θα πρέπει να δίνεται κατά τη διδασκαλία τόσο στην πρωτοβάθμια όσο και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση στην ανάπτυξη όλων των επιμέρους διαστάσεων της ευελιξίας

χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων για την επίτευξη εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων.

Παρόλο που η διερεύνηση των αιτιών για τη μη γραμμική βελτίωση της επίδοσης των μαθητών στα έργα πρόσθεσης κλασμάτων κατά τη μετάβασή τους στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση δεν εμπίπτει στους στόχους της παρούσας ερευνητικής εργασίας επιχειρείται μια προσπάθεια διατύπωσης ορισμένων υποθέσεων, οι οποίες θα μπορούσαν να αποτελέσουν αντικείμενο μελέτης μελλοντικών εργασιών. Μια υποθετική ερμηνεία είναι ότι η ανάπτυξη της κατανόησης της έννοιας της πρόσθεσης κλασμάτων ακολουθεί την αναπτυξιακή καμπύλη U (Strauss & Stavy, 1982). Η αναπτυξιακή καμπύλη U αποτέλεσε αντικείμενο διερεύνησης πριν δύο δεκαετίες σε διάφορους τομείς περιεχομένου (π.χ. ανάπτυξη εννοιών στις φυσικές επιστήμες) και επισημαίνεται πρόσφατα από τους Van Dooren κ.α. (2005) στην επίδοση των μαθητών σε σύνθετα προσθετικά προβλήματα. Ο όρος αναφέρεται στην εμφάνιση ενός τύπου συμπεριφοράς στην Φάση 1, στην εξασθένηση του συγκεκριμένου τύπου συμπεριφοράς στη Φάση 2 και στην επανεμφάνιση της συγκεκριμένης συμπεριφοράς στη Φάση 3 (Strauss & Stavy, 1982).

Όσον αφορά την πρώτη φάση της παρούσας έρευνας θεωρείται ότι η ανάπτυξη των μαθητών ακολουθεί την καμπύλη U λόγω του ότι οι μαθητές της Στ' δημοτικού παρουσιάζουν υψηλότερη επίδοση από τους μαθητές της Α' γυμνασίου στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων πρόσθεσης κλασμάτων, αλλά οι μαθητές της Β' γυμνασίου έχουν καλύτερη επίδοση στα συγκεκριμένα έργα από τους μαθητές της Α' γυμνασίου. Στη δεύτερη φάση, η επίδοση των μαθητών στις επιμέρους διαστάσεις ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων ακολουθεί την καμπύλη U εφόσον η επίδοση των μαθητών που στην πρώτη χορήγηση φοιτούσαν στη Στ' δημοτικού, στη δεύτερη χορήγηση, δηλαδή κατά τη μετάβασή τους στην Α' γυμνασίου μειώνεται, ενώ στην τρίτη χορήγηση επανέρχεται στο σημείο που βρισκόταν κατά την πρώτη χορήγηση του δοκιμίου.

Μια πιθανή εξήγηση που δίνεται είναι ότι η στασιμότητα ή η μείωση στην επίδοση των μαθητών οφείλεται στις διαφορές που εντοπίστηκαν στα σχολικά εγχειρίδια όσον αφορά τα πεδία αναπαράστασης και τις αναπαραστατικές λειτουργίες στα κλάσματα, δηλαδή στο εν δυνάμει υλοποιημένο αναλυτικό πρόγραμμα (Valverde et al., 2002), μεταξύ πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Σύμφωνα με τη θεωρία προσαρμογής επιπέδου ανάπτυξης – περιβάλλοντος (stage-environment fit theory), τα κίνητρα και η επίδοση των μαθητών

παρουσιάζουν μείωση αν το εκπαιδευτικό περιβάλλον δεν ενθαρρύνει το επίπεδο ανάπτυξης στο οποίο βρίσκονται και δεν ενισχύει τη συνεχή γνωστική και συναισθηματική τους ανάπτυξη (Eccles, Midgley, Wigfield, Buchanan, Reuman, Flanagan, & Mac Iver, 1993, Whitley et al., 2007). Συνεπώς, μια εξήγηση που δίνεται είναι ότι αλλαγή πεδίων αναπαράστασης και αναπαραστατικών λειτουργιών κατά τη μετάβαση των μαθητών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση πιθανόν να μην ενδείκνυται για τη συγκεκριμένη ηλικιακή ομάδα. Ως αποτέλεσμα οι μαθητές αναπτύσσονται σε μικρότερο βαθμό όσον αφορά την ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και την ικανότητα επίλυσης προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων της πρόσθεσης κλασμάτων.

Επιπλέον, η γενικά χαμηλή επίδοση των μαθητών των τεσσάρων ηλικιακών ομάδων στα έργα αναγνώρισης και μετάφρασης της πρόσθεσης κλασμάτων σε σχέση με την αντίστοιχη επίδοσή τους στα έργα χειρισμού υποδεικνύει την αποσπασματική κατανόηση της έννοιας της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων και συνεπώς τη μη ολοκληρωμένη διαμόρφωση της εικόνας της έννοιας της πρόσθεσης κλασμάτων. Αν και οι μαθητές ήταν σε θέση να χειριστούν με ευχέρεια την πρόσθεση κλασμάτων στο συμβολικό σύστημα αναπαράστασης, αντιμετώπιζαν δυσκολίες στην αναγνώριση της ίδιας έννοιας σε ποικιλία αναπαραστάσεων, στην ευέλικτη μετάφραση από ένα πεδίο αναπαράστασης σε άλλο και στην επίλυση προβλημάτων με ποικιλία πεδίων αναπαράστασης. Οι δυσκολίες αυτές αυξήθηκαν στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση λόγω του γεγονότος ότι στη συγκεκριμένη βαθμίδα δεν δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στη μάθηση μέσω πολλαπλών πεδίων αναπαράστασης. Συνεπώς, τα αποτελέσματα επιβεβαιώνουν τον ισχυρισμό των Schoenfeld, Smith και Arcavi (1993) ότι η ικανότητα χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων αποτελεί μια μακροχρόνια, μη γραμμική και περίπλοκη διαδικασία για τους μαθητές. Για το λόγο αυτό η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων στη μάθηση των μαθηματικών και στην συγκεκριμένη περίπτωση στη μαθησιακή διαδικασία κατανόησης της έννοιας της πρόσθεσης κλασμάτων, η σύνδεση, ο συντονισμός, η μεταξύ τους σύγκριση και η μετάβαση από ένα πεδίο αναπαράστασης στο άλλο θα πρέπει να αποτελεί αντικείμενο συστηματικής διδασκαλίας και μάθησης τόσο στην πρωτοβάθμια όσο και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές θα είναι σε θέση να αναπτύξουν δεξιότητες αναπαράστασης και ευέλικτου χειρισμού μιας μαθηματικής έννοιας σε ποικιλία μορφών.

Μελλοντική Κατεύθυνση της Έρευνας

Βασικός σκοπός της παρούσας έρευνας ήταν η διερεύνηση της επίδρασης της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της ικανότητας επίλυσης προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων στην εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων κατά τη μετάβαση των μαθητών εντός και μεταξύ της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Παρόλο που η δόμηση των επιμέρους ικανοτήτων της εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων παραμένει κοινή και σταθερή σε όλες τις ηλικιακές ομάδες που συμμετέχουν στην παρούσα ερευνητική εργασία, η επίδοση των μαθητών παρουσιάζει διαφοροποιήσεις ανάλογα με το αν η μετάβαση υφίσταται εντός ή μεταξύ της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η διερεύνηση των υποθέσεων που τέθηκαν από την παρούσα διερευνητικού χαρακτήρα έρευνα για τη στασιμότητα ή τη μείωση της επίδοσης στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος με ποικιλία μορφών αναπαράστασης πρόσθεσης κλασμάτων κατά τη μετάβαση των μαθητών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Επομένως, είναι σημαντικό να πραγματοποιηθούν έρευνες στο μέλλον που να περιλαμβάνουν ποιοτικές μεθόδους συλλογής δεδομένων, όπως κλινική συνέντευξη και παρατήρηση, ώστε να εξεταστεί σε βάθος και πιο ολοκληρωμένα η σχέση του εν δυνάμει υλοποιημένου, του υλοποιημένου και του επιτυγχανόμενου αναλυτικού προγράμματος σε σχέση με το ρόλο των πολλαπλών αναπαραστάσεων στη κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων αλλά και όσον αφορά άλλες μαθηματικές έννοιες.

Στο μέλλον θα ήταν ενδιαφέρουσα επίσης η διεξαγωγή διαχρονικών ερευνών με μαθητές οι οποίοι μεταβαίνουν σε περίοδο τεσσάρων χρόνων εντός και μεταξύ της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Η επιλογή των μαθητών θα μπορούσε να γίνει με βάση τα επίπεδα ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων οπότε να χρησιμοποιηθεί αντιπροσωπευτικό δείγμα μαθητών που κατά την Ε΄ δημοτικού ανήκουν στο Πρώιμο Αναπαραστατικό Επίπεδο, στο Συμβολικό Επίπεδο, στο Μεταβατικό Επίπεδο Πολλαπλών Αναπαραστάσεων και στο Επίπεδο Πολλαπλών Αναπαραστάσεων. Με τον τρόπο αυτό θα είναι δυνατή η εξέταση της σταθερότητας της δόμησης των γνωστικών ικανοτήτων στα διάφορα επίπεδα εξελικτικά όσον αφορά την έννοια της πρόσθεσης κλασμάτων ή άλλων μαθηματικών εννοιών κατά τους τρεις τύπους μετάβασης. Επιπλέον, η σύγκριση της επίδοσης των μαθητών στα έργα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και επίλυσης

προβλήματος με ποικιλία αναπαραστάσεων θα οδηγούσε σε πιο ασφαλή συμπεράσματα αφού οι ίδιοι μαθητές θα λάμβαναν μέρος και στους τρεις τύπους μετάβασης.

Χρειάζεται επίσης ο σχεδιασμός ερευνών οι οποίες θα περιλαμβάνουν την εφαρμογή παρεμβατικών προγραμμάτων που θα δίνουν έμφαση στις επιμέρους διαστάσεις του δομικού μοντέλου της εννοιολογικής κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων τόσο στην πρωτοβάθμια όσο και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Με τον τρόπο αυτό θα διερευνηθεί η αποτελεσματικότητά τους στη διδακτική πράξη λαμβάνοντας υπόψη τα επίπεδα ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων όπως έχουν προκύψει με βάση τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας.

Στην παρούσα εργασία έγινε προσπάθεια εμβάθυνσης στην έννοια της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων όσον αφορά την πρόσθεση ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων. Η διατύπωση όμως ενός ολοκληρωμένου θεωρητικού και λειτουργικού ορισμού της ευελιξίας χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων απαιτεί τη διεξαγωγή περαιτέρω ερευνών που θα εξετάζουν τη γενικευσιμότητα των συγκεκριμένων επιπέδων και σε άλλες μαθηματικές έννοιες.

- Adams, R.J., & Khoo, S.T. (1996). *Quest: The interactive test analysis system*. Camberwell, Victoria: ACER.
- Ainsworth, S. (1999). The functions of multiple representations. *Computer and Education*, 33, 131- 152.
- Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction*, 16, 183 – 198.
- Alsbaugh, J. W. (1998). Achievement loss associated with the transition to middle school and high school. *The Journal of Educational Research*, 92(1), 20-25.
- Anderman, E., & Midgley, C. (1996). *Changes in achievement goal orientations after the transition to middle school*. Retrieved July 10, 2007 from ERIC.
- Anderman, E., & Midgley, C. (1997). Changes in achievement goal orientations, perceived academic competence, and grades across the transition to middle-level schools. *Contemporary Educational Psychology*, 22, 269–298.
- Anderson, L., Jacobs, J., Schramm, S., & Splittgerber, F. (2000). School transitions: Beginning of the end or a new beginning? *International Journal of Educational Research*, 33, 325 – 339.
- Andrich, D. (1988). A general form of Rasch's extended logistic model for partial credit scoring. *Applied Measurement in Education*, 1(4), 363-378.
- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215-241.
- Ασβεστά, Α., & Γαγάτσης, Α. (1995). Προβλήματα ερμηνείας και η έννοια της συνάρτησης. Στου Α. Γαγάτση (Εκδ.), *Διδακτική και ιστορία των μαθηματικών* (σσ. 19-38). Θεσσαλονίκη: Erasmus ICP-94-G-2011/11.
- Ball, D. L. (1993). Halves, pieces, and twos: Constructing and using representational contexts in teaching fractions. In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 157-196). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, Associates.

- Baturo, R. A. (2004). Empowering Andrea to help year 5 students construct fraction understanding, In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol.2, pp. 95- 102). Norway: Bergen University College.
- Bay, J. M. (2001). Development number sense on the number line. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 6, 448 -452.
- Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, L. (1993). Rational numbers: Towards a semantic analysis – emphasis on the operator construct. In T.P. Carpenter, E. Fennema & T.A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 13- 47). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91- 125). New York: Academic Press.
- Bentler, M.P. (1990). Comparative fit indexes in structural models. *Psychological Bulletin*, 107, 301 – 245.
- Bentler, M. P. (1995). *EQS Structural equations program manual*. Encino, CA: Multivariate Software Inc.
- Bezuk, N. S., & Armstrong, B. E. (1992). Understanding fraction multiplication. *Mathematics Teacher*, 85(9), 729-733.
- Booth, D.L.R., & Thomas, O.J.M. (2000). Visualization in mathematics learning: Arithmetic problem – solving and student difficulties. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(2), 169- 190.
- Boulet, G. (1998). Didactical implications of children’s difficulties in learning the fraction concept. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 20(4), 19- 24.
- Boulet, G. (1999). Large halves, small halves: Accounting for children’s ordering of fractions. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 21(3), 48- 66.
- Brenner, M. E., Herman, S., Ho, H., & Zimmer, J.M. (1999). Cross- national comparison of representational competence. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(5), 541- 557.

- Bright, G., Behr, M., Post, T., & Wachsmuth, I. (1988). Identifying fractions on number lines. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(3), 215-232.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: The Netherlands, Kluwer.
- Brousseau, G. (2004). Les représentations: étude en théorie des situations didactiques. *Revue des Sciences de l' Education*, 30(2), 499-536.
- Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2004). Rational and decimals as required in the school curriculum. Part 1: Rationals as measurements. *Journal of Mathematical Behavior*, 23, 1- 20.
- Brown, D., & Wheatly, G. (1997). Components of imagery and mathematical understanding. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 19(1), 45-70.
- Cai, J., & Wang, T. (2006). U.S. and Chinese teachers' conceptions and constructions of representations: A case of teaching ratio concept. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 4(1), 145 – 186.
- Carlson, M., & Bloom, I. (2005). The cyclic nature of problem solving: An emergent multidimensional problem-solving framework. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 45-75.
- Carney, R. N., & Levin, J. R. (2002). Pictorial illustrations still improve students' learning from text. *Educational Psychology Review*, 14(1), 101-120.
- Case, R., & Okamoto, Y. (1996). The role of conceptual structures in the development of children's thought. In: *Monographs of the Society for Research in Child Development*, Vol. 61(1-2). (Serial no. 246).
- Charalambous, C., & Pitta- Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understanding of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 64, 293- 316.
- Charles, R., Lester, F., & O' Daffer, P. (1987). *How to evaluate progress in problem solving*. Reston, VA: NCTM.
- Cheng, P.C.H. (1999). Unlocking conceptual learning in mathematics and science with effective representational systems. *Computers and Education*, 33, 109-130.

- Chevalier, N., & Blaye, A. (2008). Cognitive flexibility in preschoolers: The role of representation activation and maintenance. *Developmental Science*, 11(3), 339- 353.
- Cifarelli, V. (1998). The development of mental representations as a problem solving activity. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 238-264.
- Cox, R. (1999). Representation construction, externalized cognition and individual differences. *Learning and Instruction*, 9, 343-363.
- Cramer, K., Post, T., & delMas, R. (2002). Initial fraction learning by fourth- and fifth- grade students: A comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational number project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(2), 111- 144.
- D' Amore, B., & Zan, R. (1996). *Mathematical problem solving*. Retrieved August 22, 2007 from <http://ued.uniandes.edu.co/servidor/em/recinf/libros/italian/problemsolving.html>
- Delaney, S., Charalambous, C., Hsu, A., & Mesa, V. (2007). The treatment of addition and subtraction of fractions in Cypriot, Irish, and Taiwanese textbooks. In J.H. Woo, H.C. Lew, K.S. Park & D.Y. Seo (Eds.). *Proceedings of the 31st conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 2, pp. 193-200). Seoul: PME.
- Δεληγιάννη Ε., Γαγάτσης Α., & Κουκκούφης Α. (2003). Η επίδραση των εικόνων στην επίλυση προβλημάτων πολλαπλασιασμού στη Γ' τάξη δημοτικού σχολείου. Στων Α. Γαγάτση & Ι. Ηλία (Εκδ), *Οι αναπαραστάσεις και τα γεωμετρικά μοντέλα στη μάθηση των μαθηματικών* (Τόμος Ι, σσ. 87-104). Λευκωσία: Intercollege και Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία.
- DeLoache, J. (2000). Dual representation and young children's use of scale models. *Child Development*, 71(2), 329-338.
- DeLoache, J. S., Uttal, D. H., & Pierroutsakos, S. L. (1998). The development of early symbolization: Educational implications. *Learning and Instruction*, 8(4), 325-339.
- Demetriou, A. (2004). Mind, intelligent and development: A cognitive, differential and developmental theory of intelligence. In A. Demetriou & A. Raftopoulos (Eds.). *Cognitive developmental change. Theories, models and measurement* (pp. 21-73). Cambridge: Cambridge University Press.

- Demetriou, A., Christou, C., Spanoudis, G., & Platsidou, M. (2002). The development of mental processing: efficiency, working memory, and thinking. In: *Monographs of the Society of Research in Child Development, Vol. 67*. (Serial no. 268).
- Demetriou, A., Efklides, A., & Platsidou, M. (1993). The architecture and dynamics of developing mind: experiential structuralism as a frame for unifying cognitive developmental theories. In: *Monographs of the Society for Research in Child Development, Vol. 58(5-6)*. (Serial no. 234).
- DeWindt-King, A.M., & Goldin, G. A. (2003). Children's visual imagery: Aspects of cognitive representation in solving problems with fractions. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 2*(1), 1-42.
- De Windt-King, A.M., & Goldin, G. A. (2001). A study of children's visual imagery in solving problems with fractions. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 2, pp. 345-352). Utrecht: Freudenthal Institute.
- Δημητρίου, Α. (1993). *Γνωστική ανάπτυξη: Μοντέλα – Μέθοδοι – Εφαρμογές*. Θεσσαλονίκη: Art of Text.
- Diaz- Obando, E., Plasencia- Cruz, I., & Solano- Alvarado, A. (2003). The impact of beliefs in students' learning: an investigation with students of two different contexts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 34* (2), 161 – 173.
- Dienes, Z. (1969). *Building up mathematics*. London: Hutchinson Educational
- Doritou, M., & Gray, E. (2007). *The number line as metaphor of the number system: A case study of a primary school*. Retrieved March 1, 2007 from <http://www.cyprusisland.com/cerme/>
- Doyle, W. and Carter, K. (1984). Academic tasks in classrooms. *Curriculum Inquiry, 14*, 129-149.
- Dreyfus, T. & Eisenberg, T. (1996). On different facets of mathematical thinking. In R.J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.), *The nature of mathematical thinking* (pp. 253–284). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation*

- in the teaching and learning of mathematics* (pp. 109-122). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Duval, R. (1987). Ο ρόλος της ερμηνείας στη μάθηση των μαθηματικών. *Διάσταση*, 2, 56-74.
- Duval, R. (1993). Registres de representation semiotique et fonctionnement cognitif de la pensee. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, 37-65.
- Duval, R. (2000). Basic Issues for Research in Mathematics Education. In Nakahara T. & Koyama M. (eds.), *Proceedings of the 24th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol.1, pp.55-69). Hiroshima: Nishiki
- Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 1(2), 1-16.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103- 131.
- Eccles, J. S., Midgley, C., Wigfield, A., Buchanan, C. M., Reuman, D., Flanagan, C., & MacIver, D. (1993). Development during adolescence: The impact of stage-environment fit on young adolescents' experiences in schools and in families. *American Psychologist*, 48, 90-101.
- Ηλία, Ι., & Γαγάτσης, Α. (2004). *Η εικόνα στην επίλυση προβλήματος: Αρωγός ή εμπόδιο; Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου-Ίδρυμα Προώθησης Έρευνας.*
- Elia, I., & Gagatsis, A. (2006). The effects of different modes of representations on mathematical problem solving: Two experimental programs. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka, & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 3, pp. 25- 32). Prague: Charles University.
- Elia, I., & Gagatsis, A. (2008). A comparison between the hierarchical clustering of variables, implicative statistical analysis and confirmatory factor analysis. In R. Gras, E. Suzuki, F. Guillet, & F. Spagnolo (Eds.), *Studies in computational intelligence 127: Statistical implicative analysis* (pp. 131-163). Heidelberg: Springer-Verlag.
- Elia, I., Gagatsis, A., & Deliyianni E. (2005). A review of the effects of different modes of representations in mathematical problem solving. In A. Gagatsis, F. Spagnolo, Gr. Makrides & V. Farmaki (Eds), *Proceedings of the 4th Mediterranean conference on*

mathematics education (Vol. I, pp. 271-286), Palermo: University of Palermo, Cyprus Mathematical Society & MATHEU project (Socrates-Comenius).

Elia, I., Gagatsis, A., & Demetriou, A. (2007). The effects of different modes of representation on the solution of one step additive problems, *Learning and Instruction*, 17, 658-672.

Elia, I., Panaoura, A., Eracleous, A., & Gagatsis, A. (2007). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 5, 533 – 556.

Ellerton, N. F., & Clements, M. A. (1989). Towards a theory of transition. *Proceedings of the 13th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 1, pp. 236-243). Retrieved February 11, 2007, from ERIC.

English, L. (1996). Children's construction of mathematical knowledge in solving novel isomorphic problems in concrete and written form. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 81-112.

Επιτροπή Εκπαιδευτικής Μεταρρύθμισης (2005). *Έκθεση επιτροπής για την εκπαιδευτική μεταρρύθμιση*. Κυπριακή Δημοκρατία - Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού. Ανακτήθηκε στις Οκτώβρη 14, 2006, από http://www.paideia.org.cy/upload/ekthesi_epitropis.pdf

Evapmib (2007.). *Une base se questions d' evaluations en mathématiques*. Retrieved March 25, 2007 from <http://ctug48.univ-comte.fr/evapmib/siteEvapmib/accueil.php>

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 105-121.

Fennell, F., & Rowan, T. (2001). Representation: An important process for teaching and learning mathematics. *Teaching Children Mathematics*, 7(5), 288-292.

Φιλίππου, Γ., Πίττα- Πανταζή, & Χρίστου, Κ. (2003). Από το δημοτικό στο γυμνάσιο: Η περίπτωση των μαθηματικών. 2^ο Συνέδριο για τα μαθηματικά στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση «Τα Μαθηματικά στο γυμνάσιο». Ανακτήθηκε στις Σεπτέμβρη 2, 2007 από <http://www.math.uoa.gr/me/conf2/papers/filip.pdf>

Φιλίππου, Γ., Πίττα- Πανταζή, & Χρίστου, Κ. (2005). Από το δημοτικό στο γυμνάσιο: Η περίπτωση των μαθηματικών. *Θέματα στην Εκπαίδευση*, 6(1). 81 – 103.

- Φιλίππου, Γ., & Χρίστου, Κ. (1995). *Διδακτική των μαθηματικών*. Αθήνα: Δαρδάνος.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.
- Gagatsis, A. (1997). Problemi di interpretazione connessi con il concetto di funzione. *La Matematica e la sua Didattica*, 2, 132-149.
- Gagatsis, A., & Elia, I. (2005). Il concetto di funzione e le sue rappresentazioni nell'educazione secondaria. *Bollettino dei Docenti di Matematica*, 50, 41-54.
- Gagatsis, A., Elia, I., & Mougi, A. (2002). The nature of multiple representations in developing mathematical relations. *Scientia Paedagogica Experimentalis*, 39(1), 9-24.
- Γαγάτσης, Α., & Καφίδης, Α. (1995). Λάθη μαθητών δημοτικού και γυμνασίου σε προβλήματα αναλογιών. Στο Α. Γαγάτση (Εκδ.), *Διδακτική και ιστορία των μαθηματικών* (σσ. 67 – 94). Θεσσαλονίκη: ERASMUS.
- Gagatsis, A., Kyriakides, L., & Panaoura, A. (2004). Assessing the cross-cultural applicability of number lines in conducting arithmetic operations using structural equation modeling: A comparative study between Cypriot, Italian and Greek primary pupils. *World Studies in Education*, 5(1), 85-101.
- Γαγάτσης, Α., Μιχαηλίδου, Ε., & Σιακαλλή, Μ. (2001). *Θεωρίες αναπαράστασης και μάθηση των μαθηματικών*. Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου, ERASMUS IP.
- Γαγάτσης, Α. & Πατρώνης, Τ. (1993). Η χρήση των γεωμετρικών μοντέλων στη διδασκαλία των μαθηματικών. Στο Α. Γαγάτση (Εκδ.), *Θέματα διδακτικής των μαθηματικών* (σσ. 195-209). Θεσσαλονίκη: Α/φοι Κυριακίδη.
- Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology*, 24(5), 645-657.
- Galton, M., Morrison, I., & Pell, T. (2000). Transfer and transition in English schools: reviewing the evidence. *International Journal of Educational Research*, 33, 341- 363.
- Goldin, G.A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 137-165.

- Goldin, G. A., & Kaput, J. J. (1996). A joint perspective of the idea of representation in learning and doing mathematics. In von L. P. Steffe & Mahwah (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 397-430). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representation and the development of mathematical concepts. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The role of representation in school mathematics* (pp. 1-23). Boston, Virginia: NCTM.
- Gras, R., Peter, P., Briand, H., & Philippe, J. (1997). Implicative statistical analysis. In C. Hayashi, N. Ohsumi, N. Yajima, Y. Tanaka, H. Bock, & Y. Baba (Eds.), *Proceedings of the 5th conference of the international federation of classification societies* (Vol. 2, pp. 412-419). Tokyo, Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.
- Greer, B., & Harel, G. (1998). The role of isomorphism in mathematical cognition. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 5- 24.
- Greeno, J., G. & Hall, R.P. (1997). Practicing representation: Learning with and about representational forms, *Phi Delta Kappan*, 78, 361-367.
- Hannula, M. (2003). Locating fractions on a number line. In N.A. Pateman, B.J. Dougherty & J. Zilliox (Eds), *Proceedings of the 2003 joint meeting of the PME and PMENA* (Vol.3, pp.17-24). Hawaii: CRDG, College of Education, University of Hawaii.
- Harrison, J., & Greer, B. (1993). Children's understanding of fractions in Hong Kong and Northern Ireland. In I. Hirabayashi and N. Nohda (Eds.), *Proceedings of the 17th conference for the psychology of mathematics education* (Vol. 3, pp. 146-153). Tsukuba: University of Tsukuba.
- Hegarty, M., & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology*, 19, 684-689.
- Herbst, P. (1997). The number-line metaphor in the discourse of a textbook series. *For the Learning of Mathematics*, 17(3), 36 – 45.
- Hiebert, J., & Carpenter, T. (1988). Learning and teaching with understanding. In D.A. Grouws, & T.J. Cooney (Eds.), *Effective mathematics teaching* (pp. 65-97). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

- Hiebert, J., & Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65- 97). New York: Macmillan Publishing Company.
- Hiebert, J., & LeFevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 123-134.
- Hong, Y. Y., & Thomas, M. O. J. (2002). Representational versatility and linear algebraic equations. In Kinshuk, R. Lewis, K. Akahori, R. Kemp, T. Okamoto, L. Henderson & C-H. Lee (Eds.) *Proceedings of the international conference on computers in education* (pp. 1002–1006). Auckland: The Institute of electrical and electronics engineers, Inc.
- Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 27-32). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Johansson, M. (2006). *Teaching mathematics with textbooks: a classroom and curricular perspective*. Retrieved from August 5, 2008 from <http://epubl.ltu.se/1402-1544/2006/23/index-en.html>
- Jonassen, D. (2000). Toward a design theory of problem solving. *Educational Technology Research and Development*, 48(4), 63-85.
- Izaak, A., Tillema, E., & Tunc-Pekkan, Z. (2008). Teaching and learning fraction addition on number lines. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(1), 22-62.
- Kamii, C., & Clark, F. B. (1995). Equivalent fractions: Their difficulty and educational implications. *Journal of Mathematical Behavior*, 14, 365 – 378.
- Kaput, J. J. (1987). Representation systems and mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 19-26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Keijzer, R., & Terwel, J. (2003). Learning for mathematical insight: a longitudinal comparative study on modeling. *Learning and Instruction*, 13, 285 – 304.

- Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational Numbers. In R. Lesh (Ed.), *Number and measurement: Papers from a research workshop*. Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC.
- Kong, S. C., & Kwok, L. F. (2003). A graphical partitioning model for learning common fraction: designing affordances on a web-supported learning environment. *Computers and Education*, 40, 137–155.
- Kulm, G. (1984). The classification of problem-solving research variables. In G.A. Goldin & C.E. McClintock (Eds.), *Task variables in mathematical problem solving* (pp. 1-22). Philadelphia, Pennsylvania: The Franklin Institute Press.
- Kyriakides, L., & Charalambous, C. (2002). Developmental assessment of primary students's skill on multiple representations: Construct validity of a test of fractions, *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 1(1), 79 – 104.
- Lambdin, D. (2003). Benefits of teaching trough problem solving. In F. Lester (Ed.), *Teaching mathematics through problem solving: Prekindergarten-Grade 6* (pp. 3-13). Reston, VA: NCTM.
- Lamon, S. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lamon, S. (2001). Presenting and representing. From fractions to rational numbers. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The role of representation in school mathematics* (pp. 146-165). Boston, Virginia: NCTM.
- Larkin, J.H., & Simon, H.A. (1987). Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words? *Cognitive Science*, 11, 65-99.
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M.K. (1990). Functions, graphs and graphing: Tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research*, 60, 1-64.
- Lerman, I.C. (1981). *Classification et analyse ordinale des données*. Paris: Dunod.
- Lesh, R., Landau, M., & Hamilton, E. (1983). Conceptual models and applied mathematical problem-solving research. In R. Lesh & M. Hamilton (Eds), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91-126). New York: Academic Press.

- Lesh, R., Behr, M., & Post, T. (1987a). Rational number relations and proportions. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 41-58). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987b). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, (pp. 33-40). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Mack, N. (1993). Learning rational numbers with understanding: The case of informal knowledge. In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research*. (pp. 85- 105). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Mack, N. K. (2000). Long term effects on building on informal knowledge in a complex content domain: The case of multiplication of fractions. *Journal of Mathematical Behavior*, 19(3), 307-332.
- Marshall, S.P. (1995). *Schemas in problem solving*. New York: Cambridge University Press.
- Martinie, S. L., & Bay –Williams, J.M. (2003). Investigating students' conceptual understanding of decimal fractions using multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 8(5), 244 – 247.
- McGee, C., Ward, R., Gibbons, & Harlow, A. (2004). *Transition to secondary school: A literature review*. Retrieved from August 15, 2007 from <http://www.educationcounts.edcentre.govt.nz/publications/downloads/transition.pdf>
- McKendree, J., Small, C., Stenning, K., & Conlon, T. (2002). The role of representation in teaching and learning critical thinking. *Educational Review*, 54(1), 57-67.
- Meletiou-Mavrotheris, M., & Stylianou, D. (2003). Advancing from elementary to secondary school mathematics in Cyprus: a step or a leap? In L. Rogers & J. Novotná (Eds.), *Effective learning and teaching of mathematics from primary to secondary school* (pp.53-81). Bologna: Pitagora.
- Mesa, V. (2004). Characterizing practices associated with functions in middle school textbooks: An empirical approach. *Educational Studies in Mathematics*, 56, 255-286.
- Michaelidou, E. (2003). The articulation of different representations of the concept of fraction and the operations with fractions: A study with elementary school. In A. Gagatsis & S.

Papastavridies (Eds.), *Proceedings of the 3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education* (pp. 163 – 174). Athens: Hellenic Mathematical Society, Cyprus Mathematical Society.

Michaelidou, N., Gagatsis, A., & Pitta- Pantazi, D. (2004). The number line as a representation of decimal numbers: A research with sixth grade students. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 3, pp. 305 – 312). Norway: Bergen University College.

Middleton, M., Kaplan, A., & Midgley, C. (2004). The change in middle school students' achievement goals in mathematics over time. *Social Psychology of Education*, 7, 289–311.

Middleton, J. A., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Shew, J.A. (1998). Using bar representations as a model for connecting concepts of rational numbers. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4), 302-312.

Mitchell, W. J. T. (1986). *The language of images*. Chicago: University of Chicago Press.

Μιχαηλίδου, Ε. (2004). Η χρήση του γεωμετρικού μοντέλου της αριθμητικής γραμμής για την αναπαράσταση της ισοδυναμίας και της πρόσθεσης κλασμάτων: Εφαρμογή σε μαθητές της πέμπτης δημοτικού. Στων Α. Γαγάτσης, Α. Ευαγγελίδου, Ι. Ηλία & Π. Σπύρου (Εκδ.), *Αναπαραστάσεις και μάθηση των μαθηματικών: Επίλυση προβλημάτων, μοντέλα και συναρτήσεις* (Τόμος Ι, σ. 21- 50). Λευκωσία: Intercollege Press.

Monaghan, P., Stenning, K., Oberlander, J., & Sontrod, C. (1999). Integrating psychometric and computational approaches to individual differences in multimodal reasoning. *Proceedings of the 21st annual conference of the cognitive science society* (pp. 405-410). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Monk, S. (1992). Students' understanding of a function given by a physical model. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 175-194). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Monoyiou, A., & Gagatsis, A. (2008). A coordination of different representations in function problem solving. *Proceedings of the 11th international congress of mathematics*

education. Monterrey, Mexico: ICME. Retrieved July 12, 2008, from <http://tsg.icme11.org/tsg/show/21>

- Moss, J. (2005). Pipes, tubes, and beakers: New approaches to teaching rational-number system. In M. S. Donovan & J. D. Bransford (Eds.), *How students learn: History, mathematics, and science in the classroom* (pp.309- 349). Washington, D. C.: The National Academies Press.
- Moyer, P.S. (2001). Using representations to explore perimeter and area. *Teaching Children Mathematics*, 8 (1), 52 – 59.
- Mullins, E., & Irvin, J. (2000). Transition into middle school. *Middle School Journal*, 31(3), 57-60.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: Va, NCTM.
- Ni, Y. (2001). Semantic domains of rational number and the acquisition of number equivalence. *Contemporary Educational Psychology*, 26, 400-417.
- Ni, Y. (2000). How valid is it to use number lines to measure children's conceptual knowledge about rational number? *Educational Psychology*, 20(2), 139-152.
- Ni, Y., & Zhou, Y. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, 40(1), 27 – 52.
- Niemi, D.(1996). Assessing conceptual understanding in mathematics: Representations, problem solutions, justifications, and explanations. *The Journal of Educational Research*, 89(6), 351- 363.
- Panaoura, A. (2007). The interplay of processing efficiency and working memory with the development of metacognitive performance in mathematics. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 4(1), 31-52.
- Panaoura, A., & Philippou, G. (2007). The developmental change of young pupils' metacognitive ability in mathematics in relation to their cognitive abilities. *Cognitive Development*, 22, 149–164.
- Pantziara, M., Gagatsis, A., & Pitta-Pantazi, D. (2004). The use of diagrams in solving non-routine problems. In M. Johnsen-Hoines & A. Berit-Fuglestad (Eds.), *Proceedings of*

- the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 3, pp. 489-496). Bergen, Norway: Bergen University College.
- Pape, S., & Tchoshanov, M. (2001). The role of representation(s) in developing mathematical understanding. *Theory into Practice*, 40(2), 118-127.
- Piaget, J. (1968). *La formation du symbole de l'enfant*. Neuchatel: Delachaux et Niestle.
- Pimm, D. (1995). *Symbols and meanings in school mathematics*. London: Routledge.
- Pitkethy, A., & Hunting, R. (1996). A review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 5- 38.
- Polya, G. (1957). *How to solve it*. New York: Doubleday.
- Presmeg, N. (1986). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6(3), 42-46.
- Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Post, past and future* (pp. 205-235). Rotterdam: Sense Publishers.
- Presmeg, N., & Nenduradu, R. (2005). An investigation of a preservice teacher's use of representations in solving algebraic problems involving exponential relationships. In H.L. Chick & J.L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th conference of the international group of the psychology of mathematics education* (Vol. 4, pp. 105 - 112). Melbourne: PME.
- Reeve, R., A., & Pattison, P. E. (1996). The referential adequacy of students' visual analogies of fractions. *Mathematical Cognition*, 2(2), 137 – 169.
- Reys, R. E., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V., Smith, N. L., & Suydam, M. N. (2001). *Helping children learn mathematics* (6th ed.). New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Reys, R. E., Suydam, M. N., & Lindquist, M. M. (1989). *Helping children learn mathematics*. Prentice Hall: Englewood Cliffs.
- Robitaille, D. F., Schmidt, W. H., Raizen, S. A., McKnight, C. C., Britton, E. D., & Nicol, C. (1993). *Curriculum frameworks for mathematics and science* (Vol. TIMSS Monograph No.1). Vancouver: Pacific Educational Press.

- Roth, W.M., & Bowen, G. M. (1996). Professionals read graphs: A semiotic analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32, 159- 194.
- Roth, W. M., & McGinn, M. K. (1998). Inscriptions: Towards a theory of representing as social practice. *Review of Educational Research*, 68(1), 35-59.
- Scaife, M., & Rogers, Y. (1996). External cognition: How do graphical representations work? *International Journal of Human Computer Studies*, 45, 185-213.
- Schmidt, W.H., McKnight, C.C., Houang, R.T., Wang, H.C., Wiley, D.E., Cogan, L.S., & Wolfe, R.G. (2001). *Why schools matter: A cross-national comparison of curriculum and learning*. San Francisco: Jossey-Bass.
- Schoenfeld, A.H. (1983). The wild, wild, wild, wild, wild world of problem solving: A review of sorts. *For the Learning of Mathematics*, 3, 40–47.
- Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical problem solving*. London: Academic Press.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In A.D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334 - 370). New York: Macmillan Publishing Company.
- Schoenfeld, A.H., Smith, J.P, & Arcavi, A. (1993). Learning: The microgenetic analysis of one student's evolving understanding of a complex subject matter domain. In R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology* (Vol. 4, pp. 55–176). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Schnotz, W. (2002). Towards an integrated view of learning from text and visual displays. *Educational Psychology Review*, 14(1), 101-120.
- Schnotz, W., & Bannert, M. (2003). Construction and inferences in learning from multiple representation. *Learning and Instruction*, 13, 141 – 156.
- Schumacher, D. (1998). The Transition to Middle School. *Clearinghouse on Elementary and Early Childhood Education*. Retrieved June 10, 2007 from ERIC.
- diSessa, A.A. (2004). Metarepresentation: Native competence and targets for instruction. *Cognition and Instruction*, 22(3), 293 – 331.

- Seeger, F. (1998). Representations in the mathematical classroom: Reflections and constructions. In von F. Seeger, J. Voigt & U. Waschescio (Eds.), *The culture of the mathematics classroom* (pp. 308-343). Cambridge: Cambridge UP.
- Seufert, T. (2003). Supporting coherence formation in learning from multiple representations. *Learning and Instruction, 13*, 227 – 237.
- Shafir, U. (1999). Representational competence. In I. E. Sigel (Ed.), *Development of mental Representation: Theories and applications* (pp. 371-390). New Jersey: Lawrence Erlbaum.
- Σιακαλλή, Μ. (2004). Η αριθμητική γραμμή ως γεωμετρικό μοντέλο για τη διδασκαλία πρόσθεσης και αφαίρεσης ακεραίων: Εφαρμογή σε μαθητές πρώτης και δεύτερης τάξης δημοτικού. Στων Α. Γαγάτση, Α. Ευαγγελίδου, Ι. Ηλία, & Π. Σπύρου (Εκδ.), *Αναπαραστάσεις και γεωμετρία: Επίλυση προβλημάτων, μοντέλα και συναρτήσεις* (Τόμος Ι, σσ. 51-78). Λευκωσία: Intercollege Press.
- Siemon, D. (2004). Partitioning- The missing link in building fraction knowledge and confidence. Retrieved September 19, 2007, from http://www.decs.sa.gov.au/learninginclusion/files/pages/Expo/Siemen/AAMT_04_Partitioning.pdf
- Smith, J.P. (2002). The development of students' knowledge of fractions and ratios. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.). *Making sense of fractions, ratios and proportions* (pp. 3 – 17). Reston, Va: NCTM.
- Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fraction. *Learning and Instruction, 14*(5), 503 – 518.
- Steinbring, H. (1997). Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics, 32*, 49-92.
- Stenning, K., Cox, R., & Oberlander, J. (1995). Contrasting the cognitive effects of graphical and sentential logic teaching: reasoning, representation and individual differences. *Language and Cognitive Processes, 10*, 333-354.
- Strauss, S., & Stavy, R. (1982). *U-shaped behavioral growth*. New York: Academic.

- Suh, J., & Heo, H. (2005). Examining technology uses in the classroom: Developing fraction sense using virtual manipulative concept tutorials. *Journal of Interactive Online Learning*, 3 (4). Retrieved September 19, 2005, from <http://www.ncolr.org/jiol/issues/PDF/3.4.2.pdf>
- Taber, S. (2001). Making connections among different representations: The case of multiplications of fractions. *Annual Meeting of the American Educational Research Association*. Retrieved January 10, 2007 from ERIC.
- Thomson, C.S., & Walker, V. (1996). Connecting decimals and other mathematical content. *Teaching Children Mathematics*, 8(2), 496 – 502.
- Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. *Cognition and Instruction*, 23(1), 57-86.
- Van Garderen, D., & Montague, M. (2003). Visual-spatial representation mathematical problem solving, and students of varying abilities. *Learning Disabilities Research & Practice*, 18(4), 246-254.
- Vekiri, I. (2002). What is the value of graphical displays in learning? *Educational Psychology Review*, 14(3), 261-311.
- Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H., & Houang, R. T. (2002). *According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice in the world of textbooks*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In J.P. Carpenter, J.M. Moser & T.A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 39-59). Hillsdale, NJ: Laurence Erlbaum Associates.
- Verschaffel, G., Greer, B., & Torbeyns, J. (2006). Numerical thinking. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present, and future* (pp. 51-82). Rotterdam: Sense Publishers.
- Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 356 – 366.

- von Glaserfeld, E. (1987). Preliminaries to any theory of representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 215-225). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Ward, R., Anhalt, C., & Vinson, K. (2003). *Mathematics representations and pedagogical content knowledge: An investigation of prospective teachers' development*. Retrieved 10 April, 2007 from ERIC.
- Watanabe, T. (2007). Initial treatment of fractions in Japanese textbooks. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 29(2), 41-60.
- Whitley, J., Lupart, J., & Beran, T. (2007). Differences in achievement between adolescents who remain in a K-8 school and those who transition to a junior high school. *Canadian Journal of Education*, 30(3), 649- 669.
- Yang, D., & Huang, F. (2004). Relationships among computational performance, pictorial representation, symbolic representation and number sense of sixth- grade students in Taiwan. *Educational Studies*, 30(4), 373- 389.
- Zazkis, R., Dubinsky, E., & Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: A study of students' understanding of the group D4. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 435-437.
- Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). Editor's introduction: What is mathematical visualization? In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 1-8). Washington, DC: Mathematical Association of America.

ΔΟΚΙΜΙΟ

Συμπλήρωσε τα στοιχεία σου.

Όνοματεπώνυμο:.....
Τάξη:.....
Σχολείο:.....
Ημερομηνία:.....

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Διάβασε προσεκτικά τις οδηγίες κάθε άσκησης και απάντησε σε αυτό που σου ζητείται.
2. Προσπάθησε να λύσεις όλες τις ασκήσεις ακόμη και αυτές που αρχικά φαίνονται δύσκολες.
3. Όπου ζητείται, δείξε τον τρόπο που εργάστηκες για να βρεις τη λύση.

Καλή επιτυχία!

1. Βρες το αποτέλεσμα.

α) $\frac{7}{13} + \frac{4}{13} = \dots\dots\dots$

β) $\frac{1}{6} + \frac{4}{12} = \dots\dots\dots$

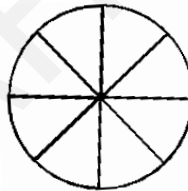
γ) $\frac{1}{6} + \frac{2}{5} = \dots\dots\dots$

δ) $\frac{17}{41} + \frac{24}{41} = \dots\dots\dots$

ε) $4 : \frac{1}{2} = \dots\dots\dots$

2. Δείξε καθεμιά από τις πιο κάτω συμβολικές αναπαραστάσεις πρόσθεσης κλασμάτων στο διάγραμμα που είναι δίπλα.

α) $\frac{1}{8} + \frac{5}{8} = v$



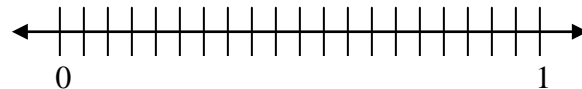
β)



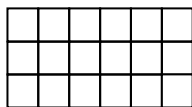
$\frac{1}{12} + \frac{7}{12} = v$

γ)

$\frac{3}{5} + \frac{1}{4} = v$



δ)



$\frac{2}{9} + \frac{1}{6} = v$

3. Λύσε τα πιο κάτω προβλήματα δείχνοντας τον τρόπο που εργάστηκες.

α) Ο υπεύθυνος ενός τσίρκου προετοιμάζει την παράσταση που θα δοθεί σε λίγες μέρες. Στις σημειώσεις του έγραψε τη χρονική διάρκεια κάθε προγράμματος:

Πρόγραμμα με παλιάτσους:	$\frac{1}{2}$ της ώρας
Πρόγραμμα με ακροβάτες:	$\frac{1}{6}$ της ώρας
Πρόγραμμα ταχυδακτυλουργού:	$\frac{1}{3}$ της ώρας
Μουσικοχορευτικό πρόγραμμα:	$\frac{2}{1}$ της ώρας
Πρόγραμμα με ζώα:	1 ώρα

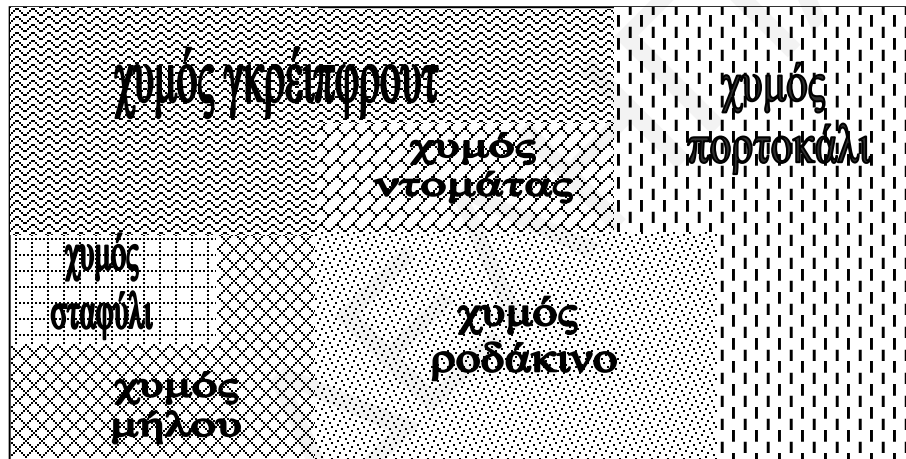
Γράψε σε μορφή κλάσματος, τι μέρος της συνολικής χρονικής διάρκειας της παράστασης αποτελεί το μουσικοχορευτικό πρόγραμμα.

Τρόπος λύσης:

Απάντηση:

β) Ένα εργοστάσιο χυμού παράγει διαφορετικά είδη φυσικού χυμού ως εξής:

- Τα $\frac{5}{18}$ της παραγωγής είναι χυμός πορτοκάλι.
- Τα $\frac{3}{36}$ της παραγωγής είναι χυμός ντομάτας.
- Τα $\frac{2}{9}$ της παραγωγής είναι χυμός ροδάκινο.
- Το $\frac{1}{4}$ της παραγωγής είναι χυμός γκρέιπφρουτ.
- Το $\frac{1}{18}$ της παραγωγής είναι χυμός σταφύλι.
- Τα $\frac{4}{36}$ της παραγωγής είναι χυμός μήλου.



Ποια τέσσερα είδη χυμών αποτελούν το $\frac{1}{2}$ της παραγωγής;

Τρόπος λύσης:

Απάντηση:

.....

γ) Κάθε είδος λουλουδιού είναι φυτεμένο στο μέρος του ορθογώνιου κήπου που φαίνεται στο πιο κάτω διάγραμμα.



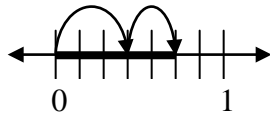
Με ποια τρία είδη λουλουδιών είναι φυτεμένα τα $\frac{3}{4}$ του κήπου;

Τρόπος λύσης:

Απάντηση:

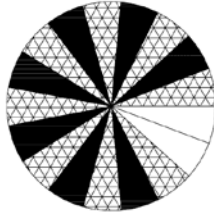
4. Γράψε την συμβολική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων που αντιστοιχεί στο σκιασμένο μέρος των πιο κάτω διαγραμμάτων.

α)



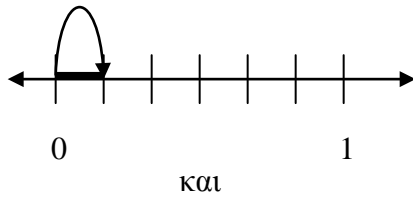
Συμβολική αναπαράσταση:

β)

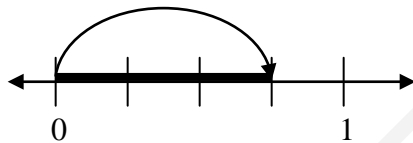


Συμβολική αναπαράσταση:

γ)



Συμβολική αναπαράσταση:



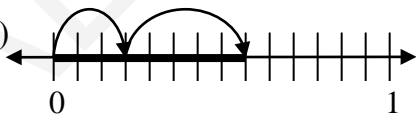
δ)



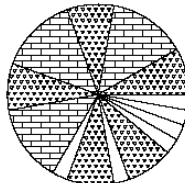
Συμβολική αναπαράσταση:

5. Βάλε σε κύκλο το διάγραμμα ή τα διαγράμματα στα οποία το σκιασμένο μέρος αντιστοιχεί στη συμβολική αναπαράσταση $\frac{3}{14} + \frac{5}{14} = v$

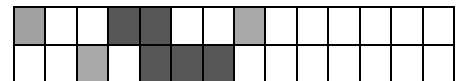
α)



β)



γ)

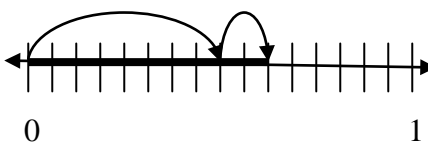


6. Βάλε σε κύκλο το διάγραμμα ή τα διαγράμματα στα οποία το σκιασμένο μέρος αντιστοιχεί στη συμβολική αναπαράσταση $\frac{4}{8} + \frac{1}{8} = v$

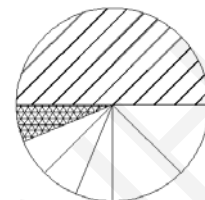
α)



β)

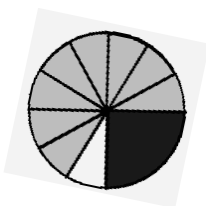


γ)



7. Βάλε σε κύκλο το διάγραμμα ή τα διαγράμματα στα οποία το σκιασμένο μέρος αντιστοιχεί στη συμβολική αναπαράσταση $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = v$

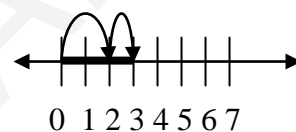
α)



β)



γ)



8. Συμφωνείς ή διαφωνείς με την άποψη που εκφράζει παρακάτω το αγόρι; Δικαιολόγησε την απάντησή σου.



Όταν προσθέσεις δύο κλάσματα που έχουν αριθμητή μικρότερο από τον παρονομαστή, το αποτέλεσμα μπορεί να είναι μεγαλύτερο από τη μονάδα.

.....

.....

.....

.....

.....

.....