Πανεπιστήμιο Κύπρου

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ

Η ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΕΝΟΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΓΙΑ ΤΗ ΦΑΝΤΑΣΙΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, ΤΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΝΟΟΤΡΟΠΙΑ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΠΑΝΑΓΙΩΤΑ Α. ΗΡΑΚΛΕΟΥΣ

2020

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ

Η ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΕΝΟΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΓΙΑ ΤΗ ΦΑΝΤΑΣΙΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, ΤΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΝΟΟΤΡΟΠΙΑ

ΠΑΝΑΓΙΩΤΑ Α. ΗΡΑΚΛΕΟΥΣ

Διατριβή η οποία υποβλήθηκε προς απόκτηση διδακτορικού τίτλου σπουδών στο Πανεπιστήμιο Κύπρου

Απρίλιος, 2020

ΣΕΛΙΔΑ ΕΓΚΥΡΟΤΗΤΑΣ

Υποψήφια Διδάκτορας: Παναγιώτα Α. Ηρακλέους

Τίτλος Διατριβής: Η ανάπτυξη ενός θεωρητικού μοντέλου για τη φαντασία στα μαθηματικά, τις μαθηματικές γνώσεις και τη μαθηματική νοοτροπία

Η παρούσα Διδακτορική Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για απόκτηση Διδακτορικού διπλώματος στο Τμήμα Επιστημών της Αγωγής και εγκρίθηκε στις 30 Απριλίου 2020 από τα μέλη της Εξεταστικής Επιτροπής.

Εξεταστική Επιτροπή:

Ερευνητικός Σύμβουλος: Κωνσταντίνος Χρίστου, Καθηγητής
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Μέλη Επιτροπής: Δήμητρα Πίττα-Πανταζή, Καθηγήτρια (Πρόεδρος)
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Λεωνίδας Κυριακίδης, Καθηγητής
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Τριαντάφυλλος Τριανταφυλλίδης, Αναπληρωτής Καθηγητής
Παιδαγωγικό Τμήμα, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Δέσποινα Δεσλή, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια
Παιδαγωγικό Τμήμα, Αριστοτέλειο Παν. Θεσσαλονίκης

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥ ΔΙΔΑΚΤΟΡΑ

Η παρούσα διατριβή υποβάλλεται προς συμπλήρωση των απαιτήσεων για απονομή Διδακτορικού Τίτλου του Πανεπιστημίου Κύπρου. Είναι προϊόν πρωτότυπης εργασίας αποκλειστικά δικής μου, εκτός των περιπτώσεων που ρητώς αναφέρονται μέσω βιβλιογραφικών αναφορών, σημειώσεων ή και άλλων δηλώσεων.

Παναγιώτα Α. Ηρακλέους

……………………………………………………..

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να εξετάσει εμπειρικά, με μαθητές ηλικίας 11-12 ετών, τη δομή καθώς και τις σχέσεις ανάμεσα στη φαντασία στα μαθηματικά, τις μαθηματικές γνώσεις και τη μαθηματική νοοτροπία. Αυτοί οι τρεις παράγοντες αποτελούν τους εσωτερικούς παράγοντες που συνεισφέρουν στη μαθηματική δημιουργικότητα, σύμφωνα με το μοντέλο της Seelig (2012). Στην έρευνα έλαβαν μέρος 217 μαθητές Στ' δημοτικού από τρία αστικά και οκτώ αγροτικά δημοτικά σχολεία της Κύπρου. Για τη συλλογή των δεδομένων, χορηγήθηκαν τα ακόλουθα εργαλεία: (α) το δοκίμιο μέτρησης της φαντασίας στα μαθηματικά, (β) το δοκίμιο μαθηματικών γνώσεων και (γ) το ερωτηματολόγιο της μαθηματικής νοοτροπίας. Συγχρόνως, λήφθηκαν ημι-δομημένες ατομικές συνεντεύξεις από 18 μαθητές, οι οποίες αποσκοπούσαν στη μελέτη των γνωστικών διαδικασιών της φαντασίας στα μαθηματικά που εμφανίζονται καθώς οι μαθητές επιλύουν ένα μαθηματικό πρόβλημα ενόρασης. Τα ποσοτικά δεδομένα αναλύθηκαν με τη μέθοδο ανάλυσης Μερικών Ελάχιστων Τετραγώνων (PLS-SEM), ενώ τα ποιοτικά δεδομένα με τη μέθοδο της αναλυτικής επαγωγής.

Τα αποτελέσματα της διατριβής έδειξαν ότι:

(α) Η φαντασία στα μαθηματικά είναι μια πολυδιάστατη εννοιολογική οντότητα, αποτελώντας έναν παράγοντα δευτέρας τάξης που ορίζεται από τρεις ικανότητες: την οπτικοποίηση, τις μετασχηματιστικές ικανότητες και την πρωτοτυπία.

(β) Συγκεκριμένες γνωστικές διαδικασίες εμφανίζονται καθώς οι μαθητές επιλύουν ένα μαθηματικό πρόβλημα ενόρασης, οι οποίες ακολουθούν τέσσερα στάδια: προετοιμασία, επώαση, φωτισμός και επαλήθευση. Κάθε στάδιο πραγματώθηκε με διαφορετικό τρόπο στους μαθητές με διαφορετική ικανότητα επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων ενόρασης.

(γ) Ανάμεσα στους τρεις εσωτερικούς παράγοντες που, σύμφωνα με το μοντέλο της Seelig (2012), συνεισφέρουν στη μαθηματική δημιουργικότητα, δηλαδή τη φαντασία στα μαθηματικά, τις μαθηματικές γνώσεις και τη μαθηματική νοοτροπία, επικρατούν συγκεκριμένες σχέσεις. Οι μαθηματικές γνώσεις μπορούν να ερμηνευθούν άμεσα και σε μέτριο βαθμό από τη μαθηματική νοοτροπία. Η φαντασία στα μαθηματικά μπορεί να επεξηγηθεί άμεσα και σε μεγάλο βαθμό από τις μαθηματικές γνώσεις, ενώ μπορεί να ερμηνευθεί έμμεσα από τις πεποιθήσεις των μαθητών για τη μαθηματική νοοτροπία.

ABSTRACT

The present study purports to empirically examine the structure and relationships among mathematical imagination, mathematical knowledge and mathematical mindset. These three factors are constituent parts of Seelig's (2012) Innovation Engine model and according to her they can influence creativity. Two hundred and seventeen sixth grade students from three urban and eight rural primary schools in Cyprus participated in the study. The following instruments were administered to students: (a) a test measuring mathematical imagination, (b) a mathematical knowledge test, (c) a questionnaire on mathematical mindset. Individual semi-structured interviews with eighteen students were conducted as well, in order to explore students' cognitive processes of mathematical imagination which emerge while solving an insight mathematical problem. The quantitative data of the study were analyzed through partial least squares structural equation modeling, while the qualitative data through analytic induction.

The study has yielded the following findings:

(a) Mathematical imagination is a multi-dimensional construct. It consists a second-order factor which is defined by three first-order factors: visualization, transformational skills and originality.

(b) Students' cognitive processes arise while solving an insight mathematical problem and can be sub-divided into four stages: Preparation, incubation, illumination and verification. Students of different ability in solving mathematical insight problems experienced each stage in a different manner.

(c) Particular relationships exist among the three factors on the inside of the Innovation Engine that influence mathematical creativity (Seelig, 2012): mathematical imagination, mathematical knowledge and mathematical mindset. Mathematical knowledge can be explained directly and moderately by mathematical mindset. Mathematical imagination can be explained directly and to a large extent by mathematical knowledge and indirectly by mathematical mindset.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η ολοκλήρωση της παρούσας διατριβής σηματοδοτεί το τέλος ενός σημαντικού κεφαλαίου της μέχρι τώρα πορείας μου. Σε αυτή την ξεχωριστή στιγμή, αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω ολόψυχα όλους όσοι βρίσκονταν στο πλευρό μου στην όμορφη αυτή διαδρομή. Πρωταρχικά, θα ήθελα να εκφράσω ιδιαίτερες ευχαριστίες στον επιβλέποντα καθηγητή μου, τον καθηγητή Δρ. Κωνσταντίνο Χρίστου. Η διαρκής καθοδήγησή του, οι καίριες εισηγήσεις του και η ενθάρρυνσή του σε όλα τα στάδια διεξαγωγής και συγγραφής της έρευνας συνέβαλαν τα μέγιστα στην ευόδωση αυτής της προσπάθειας. Η συνεισφορά του υπήρξε πολύπλευρη και καθοριστική και τον ευχαριστώ βαθύτατα. Πιστεύω ακράδαντα πως οι πολύτιμες γνώσεις και δεξιότητες που έχω αποκομίσει μέσα από τη συνεργασία μας θα λειτουργούν ως πυξίδα και οδηγός στα μελλοντικά μου βήματα.

Θερμές ευχαριστίες θα ήθελα να απευθύνω και στα υπόλοιπα μέλη της επιτροπής αξιολόγησης. Ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω στην καθηγήτρια Δρ. Δήμητρα Πίττα-Πανταζή, όχι μόνο για τις πολύτιμες συμβουλές της στα πλαίσια της διατριβής αλλά και για τα ανεκτίμητα εφόδια και τις πλούσιες ακαδημαϊκές και επαγγελματικές εμπειρίες που έχω αποκτήσει μέσα από τη συνεργασία που είχαμε όλα αυτά τα χρόνια. Ευχαριστίες θα ήθελα να εκφράσω και στον καθηγητή Δρ. Λεωνίδα Κυριακίδη για τα σημαντικά και εποικοδομητικά σχόλια που μου παρείχε για τη βελτίωση της διατριβής. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Δρ. Τριαντάφυλλο Τριανταφυλλίδη και τη Δρ. Δέσποινα Δεσλή για τη συμμετοχή τους στην αξιολόγηση της εργασίας και τη χρήσιμη ανατροφοδότησή τους.

Παράλληλα, απευθύνω πολλές ευχαριστίες σε όλους τους διευθυντές και τους εκπαιδευτικούς που δέχτηκαν να διεξαχθεί η έρευνα στα σχολεία και τις τάξεις τους, στους μαθητές που έλαβαν μέρος στην έρευνα καθώς και στους γονείς τους. Χωρίς αυτούς δε θα μπορούσε να υλοποιηθεί η έρευνα αυτή. Συγχρόνως, θα ήθελα να ευχαριστήσω τη φίλη Λουΐζα Δημητρίου για την προθυμία της να ακούει τους προβληματισμούς μου και για τη βοήθεια που μου προσέφερε όποτε εγώ της το ζητούσα. Επίσης, ευχαριστώ τον Μάριο Πιττάλη, τη Σκεύη Σοφοκλέους, την Άντρη Πετρίδου, την Κούλα Ευαγγέλου, την Έλενα Χατζηγεωργίου και τη Φλώρια Βαλανίδου, που με βοήθησαν ο καθένας με τον δικό του τρόπο στην προσπάθεια αυτή.

Καταληκτικά, ένα τεράστιο ευχαριστώ από τα βάθη της καρδίας μου αξίζουν αδιαμφισβήτητα και τα άτομα που ήταν στο πλάι μου σ’ αυτό το ταξίδι. Ευχαριστώ ιδιαίτερα τον σύζυγό μου Πασχάλη και τον γιο μας Δημήτρη. Η αγάπη και το χαμόγελό σας με ενέπνεαν και με πείσμωναν σε όλη την πορεία. Σας ευχαριστώ για την αστείρευτη υπομονή που δείχνατε συνεχώς και ζητώ συγγνώμη για τις αμέτρητες ώρες που με στερηθήκατε όλο αυτό το διάστημα. Στην οικογένειά μου, ένα απλό ευχαριστώ δεν αρκεί για να εκφράσει την ευγνωμοσύνη μου. Θα ήθελα να ευχαριστήσω τη μητέρα μου Χρυσταλλένη, τις αδελφές μου Μαρία και Ευαγγελία, τον παππού μου Στέλιο, τη γιαγιά μου Γιώτα, τον θείο μου Σάββα αλλά και τις φίλες μου. Η παρότρυνσή τους και η βοήθειά τους υπήρξαν για μένα μια ισχυρή κινητήριος δύναμη. Τέλος, δε θα μπορούσα να παραλείψω να ευχαριστήσω θερμά τον π. Βασίλειο για την ηθική του συμπαράσταση, η οποία μου έδινε έναυσμα να συνεχίζω την προσπάθεια για την πραγμάτωση των ακαδημαϊκών μου στόχων.

Στον Πασχάλη, τον Δημήτρη και την οικογένειά μου

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Κεφάλαιο 1: Το Πρόβλημα

Εισαγωγή

Η δημιουργικότητα συνιστά μια απαραίτητη ικανότητα για τον άνθρωπο στον 21ο αιώνα (Cambridge Assessment International Education, 2018; Huang, Peng, Chen, Tseng, & Hsu, 2017). Εμπερικλείει στοιχεία όπως η φαντασία, η καινοτομία και η πρωτοτυπία, τα οποία ήταν ανέκαθεν θεμελιακής σημασίας για την ατομική και κοινωνική πρόοδο του ατόμου, από τους αρχαίους χρόνους ως την κοινωνία του σήμερα (Leikin & Pitta-Pantazi, 2013a; Leikin & Sriraman, 2017).

Η μαθηματική δημιουργικότητα ειδικότερα παίζει βαρυσήμαντο ρόλο για την ομαλή διαβίωση των ατόμων στον μεταβαλλόμενο κόσμο του 21ου αιώνα (Leikin, 2013; Pitta-Pantazi, 2017) και για τη μάθηση των μαθηματικών (Levenson, 2013; Pehkonen, 1997). Σύμφωνα με τον Mann (2006), «η ουσία των μαθηματικών συνίσταται στο να σκέφτεται κανείς δημιουργικά» (σ. 239). Η μαθηματική δημιουργικότητα δύναται να βελτιώσει την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών (Leikin, 2009a) και να προωθήσει την ισότητα εντός της τάξης (Luria, Sriraman, & Kaufman, 2017). Επιπλέον, βοηθά τους μαθητές να αισθητοποιήσουν τον κόσμο (Idris & Nor, 2010). Η δημιουργική εφαρμογή της γνώσης συμβάλλει στην ανάπτυξη της ικανότητας λήψης αποφάσεων και λύσης προβλήματος (Starko, 1994). Αντίθετα, η μονομερής προσήλωση στη στείρα διδασκαλία διαδικασιών δεν παρέχει στους μαθητές ευκαιρίες να αντιληφθούν την ομορφιά των μαθηματικών (Mann, 2006). Έτσι, η παραδοσιακή διδασκαλία είναι δυνατόν να εμποδίσει την κατανόηση των μαθηματικών και τη μαθηματική δημιουργικότητα (Sriraman, 2005; Tabach & Friedlander, 2013),

Ως εκ τούτου, η ερευνητική δραστηριότητα για τη δημιουργική σκέψη στα μαθηματικά αυξήθηκε έντονα την τελευταία δεκαετία, με την έκδοση αρκετών σχετικών τόμων (Leikin, Berman, & Koichu, 2009; Leikin & Pitta-Pantazi, 2013b; Leikin & Sriraman, 2017; Singer, 2018a; Singer, Sheffield, & Leikin, 2017b). Μάλιστα, ερευνητές, διεθνείς οργανισμοί και φορείς χάραξης εκπαιδευτικής πολιτικής εγείρουν την ανάγκη ώστε η καλλιέργεια της δημιουργικής σκέψης όλων των μαθητών να αναχθεί σε κύρια προτεραιότητα της μαθηματικής παιδείας (Goldin, 2017; Leikin, 2013; Leikin & Pitta-Pantazi, 2013a; Levenson, 2013; NCTM, 2000; Pelczer & Rodríguez, 2011; Pitta-Pantazi, 2017; Sheffield, 2006; Singer, Sheffield, & Leikin, 2017a; Vale & Barbosa, 2015). Ο Mann (2009) προτείνει ότι οι εκπαιδευτικοί πρέπει να αναγνωρίσουν και να δώσουν αξία στη μαθηματική δημιουργικότητα, εμπλέκοντας τους μαθητές ενεργά στα μαθηματικά, ώστε να ανατραπεί το μοτίβο της πτώσης του ενδιαφέροντός τους για τα μαθηματικά.

Διατύπωση του Προβλήματος

Παρά το αυξημένο ερευνητικό ενδιαφέρον για τη μαθηματική δημιουργικότητα κατά τη διάρκεια της τελευταίας δεκαετίας καθώς και τη βαρύνουσα σημασία που της αποδίδουν ερευνητές, διεθνείς οργανισμοί και φορείς χάραξης εκπαιδευτικής πολιτικής, ακόμη εντοπίζονται αρκετά ερευνητικά ερωτήματα στο πεδίο της μαθηματικής δημιουργικότητας, τα οποία παραμένουν αναπάντητα.

Μια πτυχή στην οποία καλείται να εστιάσει η ερευνητική δραστηριότητα για τη μαθηματική δημιουργικότητα σχετίζεται με τους παράγοντες που επηρεάζουν την ανάπτυξη της δημιουργικής σκέψης στα μαθηματικά (Massarwe, Verner, & Bshouty, 2011). Παρά το αυξημένο ερευνητικό ενδιαφέρον για τη μαθηματική δημιουργικότητα την τελευταία δεκαετία, ακόμη δεν είναι ξεκάθαροι οι γνωστικοί παράγοντες που επηρεάζουν τη μαθηματική δημιουργική σκέψη (Pitta-Pantazi, 2017). Την ίδια στιγμή όμως υπάρχουν και κοινωνικοί και περιβαλλοντικοί παράγοντες οι οποίοι επηρεάζουν την ανάπτυξη του δημιουργικού ταλέντου των ατόμων (Leikin & Pitta-Pantazi, 2013a). Επομένως, εγείρεται η ανάγκη για διεξαγωγή περαιτέρω ερευνών που να στρέφουν την προσοχή τους προς αυτούς τους παράγοντες. Ένα θεωρητικό μοντέλο το οποίο προσδιορίζει τους παράγοντες που συνεισφέρουν στη μαθηματική δημιουργικότητα είναι το μοντέλο της Seelig (2012) («Innovation Engine model»). Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό, η δημιουργικότητα επηρεάζεται από παράγοντες που βρίσκονται στο μυαλό του ατόμου: τη φαντασία, τις γνώσεις και τις στάσεις/πεποιθήσεις και από παράγοντες του εξωτερικού κόσμου, δηλαδή την περιρρέουσα κουλτούρα τις πηγές και τον χώρο.

Εστιάζοντας στον παράγοντα της φαντασίας, η φαντασία χαρακτηρίζεται ως ένα ζωτικό στοιχείο για τη μαθηματική σκέψη (Pound & Lee, 2015) και αποτελεί τον «ακρογωνιαίο λίθο» της μαθηματικής δημιουργικότητας (Christou, 2017). Αρκετοί ερευνητές υπογραμμίζουν την αναγκαιότητα της καλλιέργειας της φαντασίας των μαθητών μέσω της εκπαίδευσης (Eckhoff & Urbach, 2008; Egan & Judson, 2016; Smith & Mathur, 2009; Sutton-Smith, 1988; Warnock, 1976; Wu & Albanese, 2013). Παρά την αναγνώριση της σπουδαιότητας της φαντασίας για τη μάθηση στα μαθηματικά, η ερευνητική κοινότητα δεν έχει ακόμη ρίξει φως στη συγκεκριμένη έννοια μέσα από εμπειρικές έρευνες (Egan, 2015). Μάλιστα, οι εμπειρικές έρευνες σχετικά με τη φαντασία στη μάθηση είναι λιγότερο εξελιγμένες από τις έρευνες στη δημιουργικότητα λόγω των ασαφών ερευνητικών ερωτημάτων που έχουν (Ren, Li , Zhang, & Wang, 2012). Ελάχιστα είναι γνωστά ως προς τους τρόπους με τους οποίους η φαντασία μπορεί να αξιοποιηθεί ως παιδαγωγικό και μαθηματικό εργαλείο για τη μάθηση των μαθηματικών (Henderson, 1995). Επομένως, δεδομένου ότι η φαντασία αποτελεί μια αρκετά περίπλοκη έννοια (Egan, 1992; van Alphen, 2011), διαπιστώνεται η ανάγκη για ανάπτυξη θεωρητικών μοντέλων που επεξηγούν τον ρόλο της φαντασίας στη μάθηση (Abrahamson, 2006; Dziedziewicz & Karwowski, 2015; Egan, 1992) και για διερεύνηση της φαντασίας σε σχέση με τη δημιουργικότητα (Tan & Sriraman, 2017; Vygotsky, 2004).

Επιπρόσθετα, είναι αξιοσημείωτο ότι δεν έχει ακόμη μελετηθεί η φαντασία μέσα από το πρίσμα των εμπειριών της ενόρασης ή του «Aha!», παρά τις θέσεις που εντοπίζονται στη βιβλιογραφία για τη στενή σχέση φαντασίας και εμπειρίας ενόρασης και παρόλο που η εμπειρία της ενόρασης είναι ένα ερευνητικό πεδίο άξιο διερεύνησης για ποικίλους λόγους (Webb, Little, & Cropper, 2018). Η μέχρι στιγμής συζήτηση σε σχέση με την εμπειρία της ενόρασης ή του «Aha!» περιορίζεται κατά βάση στις ανώτερες βαθμίδες της μαθηματικής πρακτικής, στο πλαίσιο των μεγάλων Μαθηματικών και των σπουδαίων μαθηματικών επιτευγμάτων (Liljedahl, 2005). Αντίθετα, στο επίπεδο του δημοτικού σχολείου, δεν έχουν διενεργηθεί έρευνες που να διερευνούν τον φωτισμό και την εμπειρία του «Aha!».

Σκοπός Έρευνας

Ο σκοπός της παρούσας διατριβής είναι να εξετάσει εμπειρικά με μαθητές Στ’ δημοτικού τη δομή αλλά και τις σχέσεις ανάμεσα στους τρεις εσωτερικούς παράγοντες που συνεισφέρουν στη μαθηματική δημιουργικότητα, δηλαδή τη φαντασία στα μαθηματικά, τις μαθηματικές γνώσεις και τη μαθηματική νοοτροπία.

Σημασία και Πρωτοτυπία της Διατριβής

Η σημασία της έρευνας διακρίνεται σε τρεις πτυχές: τη θεωρητική, τη μεθοδολογική και την πρακτική. Η θεωρητική σημαντικότητά της αφορά στην ανάπτυξη ενός μοντέλου ορισμού και μέτρησης της φαντασίας στα μαθηματικά που γεφυρώνει την έρευνα της δημιουργικότητας και της φαντασίας (Jankowska & Karwowski, 2015), λαμβάνοντας υπόψη την ανάγκη για ανάπτυξη θεωρητικών μοντέλων που επεξηγούν τον ρόλο της φαντασίας στη μάθηση (Abrahamson, 2006; Dziedziewicz & Karwowski, 2015; Egan, 1992). Επιπλέον, η διατριβή μελετά τη φαντασία στα μαθηματικά και μέσα από την οπτική των εμπειριών της ενόρασης ή του «Aha!», κάτι που μέχρι στιγμής δεν έχει γίνει. Επίσης, συνεισφέρει στη βιβλιογραφία με το να εξετάσει τους παράγοντες που συμβάλλουν στη μαθηματική δημιουργική σκέψη, οι οποίοι δεν έχουν διερευνηθεί επαρκώς (Massarwe et al., 2011; Pitta-Pantazi, 2017) καθώς και τις μεταξύ τους σχέσεις.

Σε μεθοδολογικό επίπεδο, η εργασία συνεισφέρει στη βιβλιογραφία με τον σχεδιασμό και την εφαρμογή ενός εργαλείου μέτρησης της φαντασίας στα μαθηματικά, των μαθηματικών γνώσεων και της μαθηματικής νοοτροπίας καθώς και ενός πρωτοκόλλου συνέντευξης για εξερεύνηση των γνωστικών διαδικασιών της φαντασίας στα μαθηματικά. Τα εργαλεία αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν είτε για ερευνητικούς σκοπούς είτε από τους εκπαιδευτικούς μέσα στην τάξη.

Από πλευράς διδακτικής πράξης, η έρευνα συνεισφέρει στη διδακτική πράξη των εκπαιδευτικών και τα προγράμματα πανεπιστημιακής και επαγγελματικής κατάρτισης των εκπαιδευτικών. Πρωταρχικά, η έρευνα εφοδιάζει τους εκπαιδευτικούς με ένα θεωρητικό μοντέλο για τη φαντασία στα μαθηματικά καθώς και ένα εργαλείο αξιολόγησής της. Τα εργαλεία αυτά επεξηγούν ενδελεχώς στους εκπαιδευτικούς τις βασικές ικανότητες στις οποίες θα πρέπει να εστιάζουν κατά τη διδακτική πράξη ώστε να αξιολογήσουν και δυνητικά να ενισχύσουν τη φαντασία των μαθητών τους στα μαθηματικά. Επιπλέον, η διατριβή υποδεικνύει τις γνωστικές διαδικασίες της φαντασίας στα μαθηματικά στις οποίες θα πρέπει να δώσουν βαρύτητα κατά τη διδασκαλία. Τέλος, καθοδηγεί τους εκπαιδευτικούς σε σχέση με τους παράγοντες (μαθηματικές γνώσεις και πεποιθήσεις για τη μαθηματική νοοτροπία) στους οποίους θα πρέπει να επικεντρωθούν ώστε να καλλιεργήσουν τη φαντασία των μαθητών στα μαθηματικά.

Η πρωτοτυπία της διατριβής αναλύεται σε δυο επιμέρους συνιστώσες: τη θεωρητική και την πρακτική. Σε θεωρητικό επίπεδο, η παρούσα διατριβή προσεγγίζει τη μαθηματική δημιουργικότητα μέσα από ένα διεπιστημονικό θεωρητικό πρίσμα. Οι Sriraman και Leikin (2017) διατείνονται ότι τα διεπιστημονικά πλαίσια μπορούν να προσφέρουν νέες δυνατότητες στην έρευνα της μαθηματικής δημιουργικότητας. Συνεπώς, η άντληση και αξιοποίηση θεωριών από το πεδίο της διδακτικής της μηχανικής και από το πεδίο της ψυχολογίας αναμένεται να επεκτείνει και να βελτιώσει τη βιβλιογραφία για τη φαντασία στα μαθηματικά και τη μαθηματική δημιουργικότητα, οικοδομώντας ένα πιο ολοκληρωμένο θεωρητικό πλαίσιο. Το θεωρητικό αυτό πλαίσιο θα αποτελέσει ένα χρήσιμο εργαλείο για την ερευνητική κοινότητα της μαθηματικής παιδείας για περαιτέρω έρευνα. Από τη σκοπιά της διδακτικής πράξης, η πρωτοτυπία της διατριβής σχετίζεται με τον σχεδιασμό εργαλείων αξιολόγησης της φαντασίας, των μαθηματικών γνώσεων και της μαθηματικής νοοτροπίας των μαθητών.

Δομή της Διατριβής

Η παρούσα διατριβή εμπερικλείει έξι συνολικά κεφάλαια. Το πρώτο κεφάλαιο αποτελεί την εισαγωγή στο υπό διερεύνηση θέμα. Περιλαμβάνει το ερευνητικό πρόβλημα με το οποίο καταπιάνεται η έρευνα, τον σκοπό που εξυπηρετεί καθώς και τη σημαντικότητα και την πρωτοτυπία της έρευνας σε θεωρητικό, μεθοδολογικό και πρακτικό επίπεδο. Επίσης, περιγράφονται οι εννοιολογικοί ορισμοί των κυριότερων εννοιών που εμπλέκονται στη διατριβή. Το δεύτερο κεφάλαιο επικεντρώνεται στην ανασκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας. Πρωτίστως, παρουσιάζεται το θεωρητικό μοντέλο που έχει προτείνει η Seelig (2012) για τη δημιουργικότητα, το οποίο καθοδηγεί τη διατριβή, προσδιορίζοντας τους εσωτερικούς και εξωτερικούς παράγοντες που συνεισφέρουν στη δημιουργικότητα και καθοδηγώντας τον ερευνητικό σχεδιασμό της διατριβής. Ορίζεται η έννοια της μαθηματικής δημιουργικότητας, περιγράφεται η αξιολόγησή της και στη συνέχεια αναλύονται λεπτομερώς οι παράγοντες που συνεισφέρουν στη δημιουργική σκέψη, με βάση υπάρχοντα θεωρητικά μοντέλα και ερευνητικά αποτελέσματα. Το τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζει τη μεθοδολογία που ακολουθήθηκε για την υλοποίηση της παρούσας έρευνας. Ειδικότερα, παρέχονται πληροφορίες σχετικά με το δείγμα της έρευνας, τη μέθοδο δειγματοληψίας, τις φάσεις διεξαγωγής της έρευνας, τα εργαλεία συλλογής δεδομένων, τα προτεινόμενα μοντέλα που εξετάζει η διατριβή, τη διαδικασία ανάλυσης των ποσοτικών και ποιοτικών δεδομένων που συλλέχθηκαν και τους μεθοδολογικούς περιορισμούς που διέπουν την έρευνα. Στο τέταρτο κεφάλαιο της διατριβής παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που ανέκυψαν μέσα από την ανάλυση των δεδομένων: τα αποτελέσματα από τις ποσοτικές αναλύσεις, που αφορούν στις επιδόσεις των μαθητών στα εργαλεία που χορηγήθηκαν και τα ποιοτικά αποτελέσματα που εξήχθηκαν από την ανάλυση των ημι-δομημένων ατομικών συνεντεύξεων. Το πέμπτο κεφάλαιο καταπιάνεται με τη συζήτηση και την ερμηνεία των αποτελεσμάτων της έρευνας, υπό το φως της υφιστάμενης βιβλιογραφίας. Τέλος, στο έκτο κεφάλαιο, συνοψίζονται τα κύρια συμπεράσματα της έρευνας, υποδεικνύοντας παράλληλα εισηγήσεις για τη διδακτική πράξη και κατευθύνσεις για περαιτέρω έρευνες.

Εννοιολογικοί Ορισμοί Κυριότερων Εννοιών

Πιο κάτω παρατίθενται οι εννοιολογικοί ορισμοί των κυριότερων εννοιών γύρω από τις οποίες περιστρέφεται η παρούσα διδακτορική διατριβή.

Μαθηματική Δημιουργικότητα

Με βάση το θεωρητικό μοντέλο της Seelig (2012) («Innovation Engine model»), η δημιουργικότητα επηρεάζεται από εσωτερικούς και εξωτερικούς παράγοντες. Οι εσωτερικοί παράγοντες της δημιουργικότητας βρίσκονται μέσα στο μυαλό του ατόμου και αποτελούνται από τη φαντασία (imagination), τις γνώσεις (knowledge) και τις στάσεις/πεποιθήσεις (attitudes). Οι εξωτερικοί παράγοντες της δημιουργικότητας άπτονται του εξωτερικού κόσμου και σε αυτούς υπάγεται η περιρρέουσα κουλτούρα (culture), οι πηγές (resources) και ο χώρος (habitat) (Seelig, 2012).

Φαντασία

Η φαντασία ορίζεται ως η ικανότητα δημιουργίας και μετασχηματισμού αναπαραστάσεων που βασίζονται σε προηγούμενες παρατηρήσεις αλλά τις υπερβαίνουν σημαντικά (Dziedziewicz & Karwowski, 2015). Ο ορισμός της φαντασίας στα μαθηματικά έχει διαμορφωθεί με βάση δυο θεωρητικά μοντέλα. Πρωτίστως, ο ορισμός της στηρίζεται στο συνδυαστικό μοντέλο της δημιουργικής ικανότητας (Conjunctional Model of Creative Imaging Ability) (Dziedziewicz & Karwowski, 2015), που έχει αντληθεί από το πεδίο της ψυχολογίας, αλλά έχει εξειδικευτεί στο πεδίο των μαθηματικών. Συγκεκριμένα, στη διατριβή αυτή η φαντασία στα μαθηματικά ορίζεται από τους ακόλουθους παράγοντες: την οπτικοποίηση (vividness), τις μετασχηματιστικές ικανότητες (transformative abilities) και την πρωτοτυπία (originality). Η οπτικοποίηση χωρικών εικόνων αναφέρεται στον νοερό χειρισμό χωρικών αντικειμένων με διαφορετικούς τρόπους (Arcavi, 1999; McGee, 1979 ; Michael, Guilford, & Zimmerman, 1957; Presmeg, 1997). Η οπτικοποίηση αλγεβρικών εικόνων αφορά στην επίλυση προβλημάτων αλγεβρικής ικανότητας, που εμπίπτουν στην κατηγορία των προβλημάτων ενόρασης (Weisberg, 1995). Οι ικανότητες μετασχηματισμού εστιάζουν στην οριζόντια μαθηματικοποίηση, δηλαδή σε μια μετασχηματιστική διαδικασία από τον πραγματικό κόσμο στον κόσμο των συμβόλων (Freudenthal, 1991). Τέλος, η πρωτοτυπία συνιστά την ικανότητα παραγωγής σπάνιων και μη τυπικών ιδεών (Guilford, 1967) και διατρέχει την οπτικοποίηση χωρικών εικόνων αλλά και τις μετασχηματιστικές ικανότητες.

Παράλληλα, ο ορισμός της φαντασίας στα μαθηματικά βασίζεται στο θεωρητικό μοντέλο του Wallas (1926) για τη δημιουργική διαδικασία και συγκεκριμένα στο στάδιο του φωτισμού και την εμπειρία του «Aha!». Ειδικότερα, στη βιβλιογραφία έχουν εντοπιστεί διάφορες θέσεις για τη στενή σχέση της φαντασίας και των εμπειριών φωτισμού. Σύμφωνα με τον Greene (2000), η φαντασία είναι άρρηκτα συνδεμένη με τα στάδια της επώασης και του φωτισμού, ο οποίος περιγράφεται ως ένα άλμα της φαντασίας. Η φαντασία στην κορύφωσή της έχει αποκαλεστεί ως η εμπειρία του «Aha!», του φωτισμού, της ενόρασης, της έμπνευσης, του άλματος (Wheeler-Brownlee, 1985). Τέλος, η διαίσθηση, που αναφέρεται στην ανάδυση νέων ιδεών ως αναλαμπή, αποτελεί συστατικό στοιχείο της φαντασίας των ατόμων (Iowa Department of Education, 1989).

Γνώσεις

Η κατοχή γνώσεων είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τη δημιουργικότητα, καθώς «η δημιουργικότητα αποτελεί μια ισορροπία ανάμεσα στην γνώση και την απελευθέρωση του ατόμου από αυτήν τη γνώση» (Johnson-Laird, 1988, σ.207 στον Sternberg, 2012, σ.4). Στην έρευνα, οι μαθηματικές γνώσεις ορίζονται με βάση τον ορισμό του Jonassen (2000) για τη βασική γνώση περιεχομένου, που αποτελεί τη γνώση που μπορεί να ανακληθεί άμεσα και εμπλέκει εννοιολογική και διαδικαστική γνώση.

Στάσεις/πεποιθήσεις

Με τον όρο στάσεις/πεποιθήσεις, η εργασία αναφέρεται στις πεποιθήσεις που ενστερνίζονται τα άτομα σχετικά με τη φύση της ευφυΐας. Οι λανθάνουσες θεωρίες για τη φύση της ευφυΐας διακρίνονται στη σταθερή και την αυξητική θεωρία (Dweck, 1999, 2006; Dweck & Leggett, 1988; Hong, Chiu, Dweck, Lin, & Wan, 1999). Τα άτομα που ασπάζονται τη σταθερή λανθάνουσα θεωρία για την ευφυΐα διακρίνονται από στατική νοοτροπία (fixed mindset), θεωρώντας ότι το επίπεδο ευφυΐας του ατόμου είναι ένα σταθερό χαρακτηριστικό (Boaler, 2015; Dweck, 2006; Dweck, Walton, & Cohen, 2014). Αντιθέτως, τα άτομα της αυξητικής λανθάνουσας θεωρίας χαρακτηρίζονται από νοοτροπία ανάπτυξης (growth mindset) και πιστεύουν ότι η ευφυΐα είναι αναπτυσσόμενη και δύναται να βελτιωθεί μέσω της προσπάθειας που καταβάλλει το άτομο και της μάθησης (Boaler, 2015; Dweck, 2006; Dweck et al., 2014).

Κεφάλαιο 2: Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

Εισαγωγή

Η βιβλιογραφική ανασκόπηση της διατριβής ενσωματώνει θεωρίες και ερευνητικά αποτελέσματα από τον τομέα της διδακτικής της μηχανικής, της ψυχολογίας και της μαθηματικής παιδείας. Η σύνθεση των θεωριών και των ερευνητικών αποτελεσμάτων από τους τρεις αυτούς τομείς αποτυπώνει τους εσωτερικούς και εξωτερικούς παράγοντες που συνεισφέρουν στην ικανότητα δημιουργικής σκέψης στα μαθηματικά.

Κατ' αρχάς, το γενικό θεωρητικό πλαίσιο που καθοδηγεί την εργασία, το θεωρητικό μοντέλο της Seelig (2012) («Innovation Engine model») έχει αντληθεί από τον τομέα της διδακτικής της μηχανικής. Το θεωρητικό αυτό μοντέλο αναλύει τους εσωτερικούς και εξωτερικούς παράγοντες που συνεισφέρουν στη δημιουργικότητα. Από τον τομέα της ψυχολογίας, επιστρατεύονται θεωρητικά μοντέλα και άρθρα με σκοπό τον ορισμό των παραγόντων της φαντασίας και των στάσεων/πεποιθήσεων. Ειδικότερα, για τον ορισμό του παράγοντα της φαντασίας έχει χρησιμοποιηθεί το συνδυαστικό μοντέλο της δημιουργικής ικανότητας (Conjunctional Model of Creative Imaging Ability) (Dziedziewicz & Karwowski, 2015), βάσει του οποίου έχουν προσδιοριστεί οι διαστάσεις της φαντασίας. Επίσης, αξιοποιούνται στοιχεία από το θεωρητικό μοντέλο του Wallas (1926) για τη δημιουργική διαδικασία, με έμφαση σε άρθρα για την εμπειρία της ενόρασης ή του «Aha!» (Aldous, 2007; Burton, 1999; Carpenter, 2019; Liljedahl, 2004, 2005, 2013; Shen et al., 2013; Sriraman, 2009; Weisberg, 2015; Yaftian, 2015). Για τον ορισμό του παράγοντα των στάσεων/πεποιθήσεων, η εργασία έχει στηριχθεί στη θεωρία της Dweck και των συνεργατών της για τις λανθάνουσες θεωρίες για τη φύση της ευφυΐας: τη σταθερή και την αυξητική θεωρία. Τέλος, έχουν αξιοποιηθεί ερευνητικά ευρήματα από το πεδίο της μαθηματικής παιδείας, με σκοπό τον ορισμό των ακόλουθων παραγόντων της δημιουργικότητας: των μαθηματικών γνώσεων, της κουλτούρας και των πηγών.

Θεωρητικό Μοντέλο της Seelig

Για τους σκοπούς της παρούσας διατριβής, υιοθετείται ως κατευθυντήριος γνώμονας το μοντέλο που έχει προταθεί από τη Seelig (2012) («Innovation Engine model») στο βιβλίο της με τίτλο «inGenius». Το μοντέλο αυτό προέρχεται από τον τομέα της διδακτικής της μηχανικής. Με βάση τους Sriraman και Leikin (2017), τα διεπιστημονικά πλαίσια μπορούν να παρέχουν νέες δυνατότητες στην έρευνα της μαθηματικής δημιουργικότητας. Η λέξη «engine» προέρχεται από τον λατινικό όρο «ingenium», που σημαίνει φυσική ικανότητα ή έμφυτο ταλέντο και υπενθυμίζει ότι κάθε άτομο έχει έμφυτη μέσα του μια δημιουργική ιδιοφυία που περιμένει να ξεκλειδωθεί. Το μοντέλο της Seelig (2012) υποδεικνύει εργαλεία που μπορούν να επιστρατευθούν για τη βελτίωση και την αξιολόγηση της δημιουργικότητας ενός ατόμου, οργανισμού ή κοινότητας.

Εκτενέστερα, σύμφωνα με το εν λόγω μοντέλο, η δημιουργικότητα απορρέει από την αλληλεπίδραση ορισμένων εσωτερικών και εξωτερικών παραγόντων. Αν βελτιστοποιηθούν οι συγκεκριμένες μεταβλητές, τότε η δημιουργικότητα του ατόμου, μιας ομάδας ή μιας κοινότητας αυξάνεται. Το Διάγραμμα 2.1 σκιαγραφεί τη δομή και τις σχέσεις των παραγόντων που εμπλέκονται στο εν λόγω μοντέλο. Οι εσωτερικοί παράγοντες της δημιουργικότητας εδράζονται μέσα στο μυαλό του ατόμου και εμπερικλείουν τρεις επιμέρους διαστάσεις: τη φαντασία (imagination), τις γνώσεις (knowledge) και τις στάσεις/πεποιθήσεις (attitudes). Οι τρεις αυτοί παράγοντες είναι εμπνευσμένοι από τη θεωρία του Bloom για τη μάθηση, που εστιάζει στο τι γνωρίζει, κάνει και αισθάνεται το άτομο, δηλαδή στις δεξιότητες, γνώσεις και στάσεις του. Από την άλλη, οι εξωτερικοί παράγοντες είναι συνυφασμένοι με τον εξωτερικό κόσμο και σε αυτούς εμπίπτουν οι εξής τρεις παράγοντες: η περιρρέουσα κουλτούρα (culture), οι πηγές (resources) και ο χώρος (habitat). Οι κοινωνικοί και περιβαλλοντικοί παράγοντες έχουν ανεκτίμητο ρόλο στην ανάπτυξη του δημιουργικού ταλέντου των ατόμων (Leikin & Pitta-Pantazi, 2013a) καθώς μπορούν είτε να διεγείρουν είτε να αναστείλουν τη δημιουργικότητα (Seelig, 2012).

Διάγραμμα 2.1. Θεωρητικό μοντέλο της Seelig (Innovation engine).

Στη συνέχεια του παρόντος κεφαλαίου, θα επεξηγηθούν ενδελεχώς οι διαφορετικές έννοιες που εμπλέκονται στο μοντέλο της Seelig (2012), παραθέτοντας ορισμούς για την έννοια της μαθηματικής δημιουργικής σκέψης αλλά και για τους έξι παράγοντες που συνεισφέρουν στη μαθηματική δημιουργικότητα.

Ορισμοί για τη Μαθηματική Δημιουργικότητα

Μέχρι στιγμής, η μαθηματική δημιουργικότητα έχει οριστεί και μετρηθεί με διάφορους τρόπους και συνεπώς είναι μια περίπλοκη εννοιολογική οντότητα (Pitta-Pantazi, 2017). Εξάλλου, μια βασική πρόκληση που εμπόδιζε τη διενέργεια ερευνών στο πεδίο ήταν η απουσία ενός ξεκάθαρου και αποδεκτού ορισμού για τη μαθηματική δημιουργικότητα (Kattou, Christou, & Pitta-Pantazi, 2016; Sriraman, Haavold, & Lee, 2014). Σύμφωνα με τον Mann (2006), στη βιβλιογραφία έχουν διατυπωθεί πάνω από 100 διαφορετικοί ορισμοί για τη δημιουργικότητα.

Ο Aiken (1973) υποδεικνύει ότι οι ορισμοί της μαθηματικής δημιουργικότητας την προσεγγίζουν είτε ως μια διαδικασία είτε ως ένα προϊόν. Στην πρώτη κατηγορία εμπίπτουν ορισμοί που εστιάζουν στη φύση των γνωστικών διαδικασιών που εμπλέκει η μαθηματική δημιουργικότητα, λαμβάνοντας υπόψη την ποιότητα της σκέψης που χαρακτηρίζει το δημιουργικό άτομο (Haylock, 1987). Ειδικότερα, ο Krutetskii (1969) ορίζει τη μαθηματική δημιουργικότητα ως την εύκολη και ελεύθερη μετάβαση από μια νοητική διαδικασία σε μια άλλη και ο Laycock (1970) ως την ικανότητα του ατόμου να αναλύει ένα πρόβλημα με πολλούς τρόπους, να παρατηρεί μοτίβα, να εντοπίζει ομοιότητες και διαφορές. Επίσης, ορίζεται ως ο συνδυασμός μαθηματικών ιδεών, τεχνικών ή προσεγγίσεων με έναν νέο τρόπο (Romey, 1970) και ως μια διαδικασία που οδηγεί σε ασυνήθιστες και έξυπνες λύσεις σε ένα δοσμένο πρόβλημα και στη διατύπωση νέων ερωτήσεων για ένα υφιστάμενο πρόβλημα (Liljedahl & Sriraman, 2006). Ο ορισμός των Leikin, Subotnik, Pitta-Pantazi, Singer και Pelczer (2013) αναφέρεται σε μια νοητική διαδικασία που περιλαμβάνει τη δημιουργία νέων ιδεών, εννοιών και προσεγγίσεων.

Στη δεύτερη κατηγορία ορισμών εμπίπτουν ορισμοί που επικεντρώνονται αποκλειστικά στο προϊόν της σκέψης που δύναται να παρατηρήσει ο εκπαιδευτικός και στα κριτήρια αναγνώρισης του προϊόντος αυτού ως δημιουργικό (Haylock, 1987). Πιο αναλυτικά, ο Poincaré (1956) υποστηρίζει ότι η δημιουργικότητα στα μαθηματικά συνίσταται στη δημιουργία, αναγνώριση και επιλογή κατάλληλων και χρήσιμων συνδυασμών μαθηματικών ιδεών. Επιπλέον, ο Jensen (1973) θεωρεί τη δημιουργικόητα ως την ικανότητα του ατόμου να δίνει πολλές, διαφορετικές και κατάλληλες ερωτήσεις για μια μαθηματική κατάσταση που δίνεται σε γραπτή ή σχηματική μορφή και οι Idris & Nor

(2010) ως την ικανότητα παραγωγής ιδεών με βάση δοσμένες πληροφορίες. Οι Leikin, Subotnik, Pitta-Pantazi, Singer, & Pelczer (2013) αναφέρονται στα πρωτότυπα και χρήσιμα αποτελέσματα που προκύπτουν μέσα από νέους συνδυασμούς υπαρχουσών ιδεών ή εννοιών.

Σε σχέση με τη μαθηματική δημιουργικότητα ως προϊόν, αρκετοί ερευνητές στηρίχθηκαν στα κριτήρια που έχουν προταθεί για την αξιολόγηση του δημιουργικού προϊόντος γενικά (Torrance, 1974): ευχέρεια, ευελιξία, πρωτοτυπία και επεξεργασία, και τα μετέφεραν στο πεδίο των μαθηματικών (Balka, 1974; Gil, Ben-Zvi & Apel, 2007; Hollands, 1972; Kattou, Christou & Pitta-Pantazi, 2015; Κάττου, 2013; Leikin, 2009a; Silver, 1997). Για παράδειγμα, σύμφωνα με την Κάττου (2013), το δημιουργικό προϊόν στα μαθηματικά ορίζεται από τις ικανότητες της ευχέρειας, της ευελιξίας και της πρωτοτυπίας. Οι τρεις ικανότητες της ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας είναι διακριτές μεταξύ τους αλλά έχουν στατιστικά σημαντικές συσχετίσεις εντός του ίδιου μαθηματικού έργου. Με άλλα λόγια, όσο πιο πολλές λύσεις προτείνει ένας μαθητής, τόσο πιο πολλές και διαφορετικές μαθηματικές ιδέες θα αξιοποιήσει και τόσο πιο πρωτότυπες απαντήσεις θα ανακύψουν (Κάττου, 2013).

Πιο αναλυτικά, η ευχέρεια αναφέρεται στον αριθμό των ιδεών που διατυπώνει ο μαθητής σε ένα έργο (Leikin, 2009b; Torrance, 1974). Η Leikin (2009b) αναφέρει ότι η ευχέρεια συνιστά «τον βηματισμό με τον οποίο κινείται η λύση προβλήματος και οι εναλλαγές που γίνονται ανάμεσα στις λύσεις του προβλήματος» (σ. 137). Για παράδειγμα, στη λύση προβλήματος η ευχέρεια αφορά στην παραγωγή πολλαπλών ιδεών και απαντήσεων (Silver, 1997). Στην κατασκευή προβλήματος, η ευχέρεια ορίζεται ως ο αριθμός των προβλημάτων ή ερωτήσεων που κατασκευάζει ο μαθητής (Balka, 1974). Η ευχέρεια σχετίζεται με τη συνοχή των ιδεών, την ύπαρξη συνδέσεων και την αξιοποίηση βασικών γνώσεων (Lev-Zamir & Leikin, 2011). Επίσης, σημαντικό ρόλο διαδραματίζει η ταχύτητα και η ακρίβεια παραγωγής διαφορετικών λύσεων (Gil et al., 2007).

Η ευελιξία αφορά στην παραγωγή διαφορετικών προσεγγίσεων ή λύσεων σε ένα συγκεκριμένο έργο (Leikin, 2009b; Torrance, 1974) και στην ικανότητα του ατόμου να επεξεργάζεται ιδέες και αντικείμενα με διαφορετικούς τρόπους (Vidal, 2005). Έτσι, η αξιολόγηση της ευελιξίας στα μαθηματικά βασίζεται στην κατηγοριοποίηση των λύσεων βάσει των στρατηγικών, των αναπαραστάσεων, των ιδιοτήτων και των μαθηματικών εννοιών που εμπλέκονται σε αυτές (Leikin, 2009a; Leikin & Lev, 2013). Στη λύση προβλήματος, η ευελιξία αναφέρεται στις «ορατές μεταβάσεις από μια προσέγγιση σε μια άλλη κατά την επίλυση ενός προβλήματος» (Silver, 1997, σ. 76). Στην κατασκευή προβλήματος, η ευελιξία σχετίζεται με τον αριθμό των διαφορετικών κατηγοριών προβλημάτων που διατυπώνει το άτομο (Balka, 1974).

Η πρωτοτυπία αναφέρεται στη «στατιστική σπανιότητα των απαντήσεων σε σχέση με την υπόλοιπη ομάδα μαθητών» (Haylock, 1997, σ. 71). Ορίζεται ως η ικανότητα παραγωγής σπάνιων και μη τυπικών ιδεών (Guilford, 1967), ασυνήθιστων, εξεζητημένων ή έξυπνων απαντήσεων (Yuan & Sriraman, 2011), «έξυπνων και μη αναμενόμενων ιδεών» (Kwon, Park, & Park, 2006, σ. 53). Στην κατασκευή προβλήματος, η πρωτοτυπία σχετίζεται με το πόσο σπάνιο ήταν το πρόβλημα που κατασκεύασε σε σχέση με τα υπόλοιπα προβλήματα (Balka, 1974).

Μια άλλη κατηγορία ορισμών που έχουν διατυπωθεί είναι ορισμοί που διασυνδέουν τη μαθηματική δημιουργικότητα με τη λύση προβλήματος. Συγκεκριμένα, ο Ervynck (1991) όρισε τη μαθηματική δημιουργικότητα ως την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων και ανάπτυξης της σκέψης σε δομές, ενώ οι Chamberlin and Moon (2005) ως μια ασυνήθιστη ικανότητα εύρεσης καινοτόμων και χρήσιμων λύσεων σε πραγματικά προβλήματα με τη χρήση μαθηματικής μοντελοποίησης. Ο Chiu (2009) συσχέτισε τη μαθηματική δημιουργικότητα με την ικανότητα επίλυσης ανοικτού-τύπου προβλημάτων. Συγχρόνως, οι Posamentier, Smith και Stepelman, (2010) ισχυρίζονται ότι η επίλυση ενός προβλήματος είναι όπως την ανακάλυψη κάτι νέου. Επίσης, οι Kwon et al. (2006) πρότειναν δυο κύριους ορισμούς: η δημιουργία νέας γνώσης και η ευέλικτη ικανότητα λύσης προβλήματος. Σύμφωνα με τον Krutetskii (1976), η μαθηματική δημιουργικότητα εμπερικλείει τη διατύπωση απλών μαθηματικών προβλημάτων, την εύρεση τρόπων επίλυσης των προβλημάτων, την ανακάλυψη αποδείξεων και θεωρημάτων, την εξαγωγή τύπων και την εύρεση πρωτότυπων μεθόδων λύσης μη τυπικών προβλημάτων.

Αξιολόγηση της Μαθηματικής Δημιουργικότητας

Οι Kattou et al. (2015) έχουν καταλήξει ότι η δημιουργικότητα πρέπει να προσεγγίζεται όχι ως μια γενική εννοιολογική κατασκευή αλλά εντός ενός συγκεκριμένου πλαισίου. Επομένως, και η αξιολόγηση της δημιουργικότητας θα πρέπει να γίνεται εντός του πλαισίου στο οποίο αναφέρεται (Singer, 2018b). Εκτός αυτού, η κύρια έμφαση της αξιολόγησης της δημιουργικότητας θα πρέπει να είναι η περιέργεια και εξερεύνηση των μαθητών (Tran, Ho, Mackenzie, & Le, 2017). Παράλληλα, σύμφωνα με τη Sheffield (2000), στα κριτήρια αξιολόγησης της δημιουργικότητας θα πρέπει να συγκαταλέγονται ο αριθμός ορθών απαντήσεων που προτείνονται, ο αριθμός των διαφορετικών κατηγοριών απαντήσεων, η σπανιότητα των απαντήσεων, η ποιότητα της έκφρασης των μαθηματικών ιδεών, ο βαθμός στον οποίο κατανοούνται οι διάφορες μαθηματικές έννοιες (Sheffield, 2000).

Στα πεδία των μαθηματικών και της επιστήμης δεν υπάρχουν αρκετά έγκυρα και αξιόπιστα εργαλεία για την αξιολόγηση της δημιουργικότητας των μαθητών (Akgul & Kahveci, 2016). Ορισμένα εργαλεία αναγνώρισης της μαθηματικής δημιουργικότητας είχαν αναπτυχθεί από τα μέσα του 20^{ου} αιώνα, (Balka, 1974; Evans, 1964; Getzels & Jackson, 1962; Jensen, 1973; Prouse, 1964). Ωστόσο, η βαθμολόγηση των εν λόγω εργαλείων ήταν ιδιαίτερα χρονοβόρα και εναπόκειτο στην ερμηνεία του βαθμολογητή (Mann, 2005). Πιο πρόσφατα, κάποιοι ερευνητές (Κάττου, 2013; Leikin, 2009b; Leikin & Lev, 2013) έχουν αναπτύξει εργαλεία τα οποία βασίζονται σε έργα πολλαπλών λύσεων, στα οποία τα δημιουργικά προϊόντα των μαθητών αξιολογούνται ως προς την ευχέρεια, την ευελιξία και την πρωτοτυπία. Η προσέγγιση αυτή συνδέεται με την έννοια του «little-c creativity», καθώς οι λύσεις αναλύονται βάσει μιας ομάδα αναφοράς με παρόμοιες προϋπάρχουσες εμπειρίες (Schindler et al., 2018). Μάλιστα, ορισμένα έργα πολλαπλών λύσεων αναφέρονται σε πιο περίπλοκα προβλήματα από διαφορετικές περιοχές των μαθηματικών (Schindler et al., 2018). Κυρίως στα συγκεκριμένα έργα είναι λογικό να λαμβάνονται υπόψη και λύσεις που είναι κατάλληλες αλλά όχι εντελώς ορθές (Leikin, 2013). Έτσι, αξιολογούνται και οι τρόποι λύσης που δυνητικά οδηγούν στην ορθή λύση του προβλήματος, ανεξαρτήτως των μικρών λαθών που μπορεί να κάνει ο μαθητής (Leikin, 2013, σ. 391).

Οι πλείστες έρευνες αξιοποιούν τον ορισμό του Torrance (1974), ο οποίος υποστηρίζει πως η δημιουργικότητα αξιολογείται με βάση την πρωτοτυπία, την ευχέρεια, την ευελιξία και την επεξεργασία (Pitta-Pantazi, Kattou, & Christou, 2018; Schindler, Joklitschke, & Rott, 2018). Ωστόσο, στις έρευνες έχουν αξιοποιηθεί κυρίως τα τρία από τα τέσσερα κριτήρια: πρωτοτυπία, ευχέρεια και ευελιξία (Pitta-Pantazi et al., 2018). Το κριτήριο της επεξεργασίας δεν αξιολογείται «λόγω της δυσκολίας καθορισμού διαφορετικών επιπέδων επεξεργασίας στα μαθηματικά έργα (Kattou, Kontoyianni, Pitta-Pantazi, Christou, 2013, σ. 174).

Φαντασία στα Μαθηματικά

Αρκετοί ερευνητές ανά τον κόσμο εισηγούνται εμφατικά ότι η φαντασία συνιστά μια από τις πιο σημαντικές ικανότητες που πρέπει να αναπτύξει η εκπαίδευση (Eckhoff & Urbach, 2008; Sutton-Smith, 1988; Wu & Albanese, 2013). Ήδη από τη δεκαετία του 1980, η Warnock (1976) έσπευσε να τονίσει πως «η καλλιέργεια της φαντασίας πρέπει να αποτελεί κορυφαίο σκοπό της εκπαίδευσης» (σ. 9) και ότι οι εκπαιδευτικοί είναι «υποχρεωμένοι να αναπτύσσουν την φαντασία πέρα από οτιδήποτε άλλο» (σ. 10). Σύμφωνα με τους Wu και Albanese (2013), οι φορείς της κοινωνίας θα πρέπει να εξετάσουν και να εφαρμόσουν εκείνες τις προσεγγίσεις που θα επιτρέψουν στην εκπαίδευση να στραφεί προς αυτό που είναι η πηγή και ο προορισμός της γνώσης: η δημιουργικότητα και η φαντασία. Θα πρέπει να ενθαρρύνεται συνεχώς σε όλα τα μαθήματα του Αναλυτικού Προγράμματος (Egan & Judson, 2016; Smith & Mathur, 2009), παρά να δίνεται υπέρμετρη σημασία στην κάλυψη της ύλης και στα τεστ (Eckhoff & Urbach, 2008). Αν η φαντασία καλλιεργηθεί επαρκώς, τότε όλοι έχουμε την δυνατότητα να καταστούμε πιο δημιουργικοί από όσο ήμασταν ως παιδιά (Eckhoff & Urbach, 2008). Βέβαια, στα προγράμματα εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών δε δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στον τρόπο εμπλοκής της φαντασίας στη μάθηση, ίσως γιατί είναι κάτι ασαφές και πολλοί εκπαιδευτικοί αισθάνονται να μην το κατέχουν αρκετά (Egan & Judson, 2016).

Η φαντασία έχει χαρακτηριστεί ως η βάση για τη δημιουργική ικανότητα και την καινοτομία (Ho, Wang, & Cheng, 2013; Lindstrand, 2010; Pound & Lee, 2015; Vygotsky, 2004) και ως η πηγή της εφεύρεσης και της καινοτομίας (Egan & Judson, 2016). Δρα ως «καταλύτης για όλες τις δημιουργικές δράσεις» (Eckhoff & Urbach, 2008, σ. 180; Seelig, 2012). Είναι χαρακτηριστικό ότι στο ενοποιημένο μοντέλο σκέψης του Iowa Department of Education (1989) η φαντασία μαζί με τη σύνθεση και την επεξεργασία συνιστούν τις τρεις διαδικασίες της δημιουργικής σκέψης. Καλλιεργώντας τη φαντασία στους μαθητές, προετοιμάζονται για να αποκτήσουν ικανότητες δημιουργικότητας και λύσης προβλήματος και να εξερευνούν προβλήματα με νέους και καινοτόμους τρόπους (Eckhoff & Urbach, 2008).

Σύμφωνα με τον Einstein, η φαντασία είναι πιο σημαντική και από την ίδια την γνώση (Ho et al., 2013). Η φαντασία μετασχηματίζει τη γνώση σε νέες ιδέες (Seelig, 2012). Είναι ένα βασικό συστατικό στοιχείο για την οικοδόμηση νέας γνώσης (Lev-Zamir & Leikin, 2011). Παράλληλα, είναι η κινητήριος δύναμη της ανθρώπινης σκέψης (Ho et al., 2013) κι επηρεάζει διαρκώς την σκέψη, τη γλώσσα και τις εμπειρίες του ατόμου (Mountain, 2007). Είναι μια ατέρμονη και συνεχώς ανανεώσιμη πηγή, που παρομοιάζεται με ένα κουτί δίχως πάτο, στο οποίο όσο και εάν σκάβει κανείς πάντα θα βρίσκει κάτι νέο (Seelig, 2012).

Ως εκ τούτου, η φαντασία θεωρείται ως ένα σπουδαίο εργαλείο για την επίτευξη αποτελεσματικής μάθησης (Egan & Judson, 2016). Έχει περιγραφεί ως το πιο σημαντικό στοιχείο που χρειάζεται για να μετασχηματιστεί η μάθηση από μια αφηρημένη προσέγγιση σε μια ουσιαστική, ανθρωποκεντρική προσέγγιση που θα οδηγεί τους μαθητές στο κατάλληλο αναπτυξιακό επίπεδο (Egan, 2005).

Εστιάζοντας στο πεδίο των μαθηματικών, η ενεργοποίηση της φαντασίας απαιτείται εξίσου στα μαθήματα των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών, και στο μάθημα της τέχνης (Egan & Judson, 2016). Η φαντασία συνιστά ένα ζωτικό στοιχείο για τη μαθηματική σκέψη (Pound & Lee, 2015) και διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην πρακτική των μαθηματικών (Abrahamson, 2006). Η φαντασία διεγείρει τις ικανότητες λύσης προβλήματος (Lindstrand, 2010). Επιπλέον, μπορεί να λειτουργήσει ως ένα εργαλείο για να ξεκλειδώσει και να ανακαλύψει κανείς μαθηματικές ιδέες (Jagals & van der Walt, 2018).

Μέχρι στιγμής, πολλοί ερευνητές έχουν υποδείξει τον σημαντικό ρόλο της φαντασίας στη μαθηματική δημιουργικότητα. Ειδικότερα, σύμφωνα με τους Levav-Waynberg και Leikin (2009), η δημιουργική σκέψη στα μαθηματικά περιγράφεται ως η «ενοποίηση της υφιστάμενης γνώσης με τη φαντασία, τη διαίσθηση και την έμπνευση στα μαθηματικά, που οδηγεί σε μια μαθηματικά αποδεκτή λύση» (σ. 778). Ο de Morgan (1866) στο Mann (2006) αναφέρει χαρακτηριστικά ότι «η κινητήριος δύναμη της μαθηματικής ευρηματικότητας δεν είναι ο συλλογισμός αλλά η φαντασία» (σ. 132). Ο Christou (2017) υπογραμμίζει ότι η φαντασία συνιστά τον «ακρογωνιαίο λίθο» της μαθηματικής δημιουργικότητας. Ταυτόχρονα, ο Ervynck (1991) ορίζει την φαντασία ως ένα από τα τέσσερα βασικά συστατικά της μαθηματικής δημιουργικότητας των μαθητών, ενώ άλλοι ερευνητές χαρακτηρίζουν τη φαντασία ως «στοιχείο-κλειδί» της δημιουργικότητας των καθηγητών Μαθηματικών και των επιστημόνων που χειρίζονται, δημιουργούν και επανασυνδυάζουν εικόνες (Abrahamson, 2006; Carlton 1959; Hadamard, 1945; Poincaré, 2003). Ο Aldous (2007) τονίζει ότι ενθαρρύνοντας τους μαθητές να χρησιμοποιούν τη φαντασία τους και τις οπτικο-χωρικές ικανότητές τους σε συνδυασμό με αναλυτική και λεκτική τεκμηρίωση τους βοηθά στην εύρεση δημιουργικών λύσεων σε μαθηματικά προβλήματα.

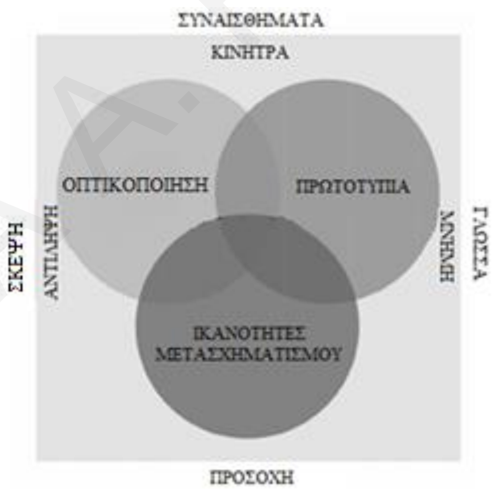
Ωστόσο, η φαντασία είναι μια περίπλοκη έννοια (Egan, 1992; van Alphen, 2011). Ο όρος αυτός μπορεί να αναφέρεται σε πολλά διαφορετικά πράγματα (Macknight, 2009), καθώς ο ορισμός της φαντασίας είναι ευρύς και ασαφής (Ho et al., 2013). Για παράδειγμα, στην έρευνα των Holman και Kumar (1983), οι ορισμοί για την έννοια της φαντασίας μπορούν να κατηγοριοποιηθούν στις ακόλουθες κατηγορίες: (α) ορισμοί γνωστικής φύσεως, (β) ορισμοί που σχετίζονται με την ονειροπόληση, (γ) ορισμοί που αφορούν στην έκφραση της προσωπικότητας και (γ) ορισμοί που την αναφέρουν ως μια ικανότητα.

Ειδικότερα, η Seelig (2012) ορίζει την φαντασία ως την ικανότητα του ατόμου να δημιουργεί κάτι νέο και είναι μια ιδιαίτερα ισχυρή δύναμη. Ο Gerard (1946) θεωρεί την φαντασία ως μια δραστηριότητα που παράγει νέες έννοιες ή νοερές πληροφορίες. Ο Lothane (2007) υπογραμμίζει ότι η φαντασία είναι μια βασική ικανότητα να σχηματοποιεί κανείς νοερές εικόνες και να συνδέει πτυχές της πραγματικότητας μέσα από οπτικές εικόνες. Ο van Alphen (2011) διατείνεται πως η φαντασία είναι η ικανότητα του ατόμου να απεικονίζει κάτι στο μυαλό του, το οποίο δημιουργεί μια σχέση με ένα φαινόμενο του πραγματικού κόσμου ή μια εμπειρία του ατόμου. Κινείται πέρα από τα όρια των φυσικών αντικειμένων, τη στερεοτυπική σκέψη και είναι ανοικτή στην εξερεύνηση σχέσεων, την ανάπτυξη ιδεών και τη δημιουργία πρωτότυπων προϊόντων. Οι Pelaprat & Cole (2011) έχουν χαρακτηρίσει την φαντασία ως μια διαδικασία δημιουργίας εικόνων που επιτρέπει τον συνεχή συντονισμό σκέψεων και δράσεων. Σύμφωνα με τους Ho και τους συνεργάτες του (2013), η φαντασία ορίζεται ως η ικανότητα κατασκευής εικόνων στο μυαλό που οπτικοποιούνται και συγκεκριμενοποιούνται περαιτέρω ώστε να δημιουργήσουν ιδέες για την επίλυση προβλημάτων.

Ο ορισμός της φαντασίας στη διατριβή αυτή έχει βασιστεί πρωτίστως στο συνδυαστικό μοντέλο της δημιουργικής ικανότητας (Conjunctional Model of Creative Imaging Ability), το οποίο έχει αντληθεί από το πεδίο της ψυχολογίας (Dziedziewicz & Karwowski, 2015), αλλά έχει εξειδικευτεί στο πεδίο των μαθηματικών. Επίσης, η εργασία έχει εκμαιεύσει στοιχεία από το θεωρητικό μοντέλο που ανέπτυξε ο Wallas (1926) για τη δημιουργική διαδικασία, με έμφαση σε άρθρα σχετικά με την εμπειρία της ενόρασης ή του «Aha!» (Aldous, 2007; Burton, 1999; Carpenter, 2019; Liljedahl, 2004, 2005, 2013; Shen et al., 2013; Sriraman, 2009; Weisberg, 2015; Yaftian, 2015).

Συνδυαστικό Μοντέλο της Δημιουργικής Ικανότητας. Μέχρι πρότινος, η ερευνητική δραστηριότητα για τη δημιουργικότητα και τη φαντασία αναπτύσσονταν παράλληλα χωρίς να αλληλεπικαλύπτονται (Jankowska & Karwowski, 2015). Έτσι, ορισμένοι ερευνητές υπογράμμισαν την ανάγκη για διερεύνηση της φαντασίας σε σχέση με τη δημιουργικότητα (Tan & Sriraman, 2017; Vygotsky, 2004). Το συνδυαστικό μοντέλο της δημιουργικής ικανότητας είναι ένα μοντέλο που έρχεται πλέον να γεφυρώσει την έρευνα της δημιουργικότητας και της φαντασίας (Jankowska & Karwowski, 2015).

Στο μοντέλο αυτό, η φαντασία ορίζεται ως η ικανότητα δημιουργίας και μετασχηματισμού αναπαραστάσεων που βασίζονται σε προηγούμενες παρατηρήσεις αλλά τις υπερβαίνουν σημαντικά (Dziedziewicz & Karwowski, 2015). Όπως διαφαίνεται και στο Διάγραμμα 2.2, η φαντασία διακρίνεται σε τρία αλληλοσχετιζόμενα στοιχεία: την οπτικοποίηση (vividness), τις μετασχηματιστικές ικανότητες (transformative abilities) και την πρωτοτυπία (originality) (Dziedziewicz & Karwowski, 2015). Η οπτικοποίηση αναφέρεται στην ικανότητα δημιουργίας ξεκάθαρων και εκφραστικών εικόνων, που χαρακτηρίζονται από υψηλή πολυπλοκότητα και λεπτομέρεια. Οι μετασχηματιστικές ικανότητες ορίζονται ως οι ικανότητες μετασχηματισμού υπαρχουσών εικόνων. Η πρωτοτυπία συνιστά την ικανότητα παραγωγής νέων και μοναδικών εικόνων. Βέβαια, για τους σκοπούς της έρευνας, οι τρεις προαναφερθείσες συνιστώσες ορίζονται με τρόπο που να συνάδει με το πεδίο των μαθηματικών, όπως περιγράφεται στις ακόλουθες υπο-ενότητες του κεφαλαίου. Οι τρεις αυτές ικανότητες εξαρτώνται από την αντίληψη, την προσοχή, τη μνήμη, τη γλώσσα, τη σκέψη καθώς και από συναισθηματικές διαδικασίες (Dziedziewicz & Karwowski, 2015). Ωστόσο, η αξιολόγηση αυτών των συνιστωσών δεν εμπίπτει στους σκοπούς της παρούσας διατριβής.



Διάγραμμα 2.2. Συνδυαστικό μοντέλο δημιουργικής ικανότητας.

Οπτικοποίηση. Μια από τις τρεις συνιστώσες της φαντασίας είναι αυτή της οπτικοποίησης. Σύμφωνα με τον White (1990), «το άτομο που διέπεται από φαντασία είναι αυτό που έχει την ικανότητα να σκέφτεται πολλές πιθανές επιλογές, με πλούσιες λεπτομέρειες» (σ. 185). Επίσης, ο Lothane (2007) αναφέρει ότι η φαντασία είναι μια βασική ικανότητα δημιουργίας νοερών εικόνων και διασύνδεσης πτυχών της πραγματικότητας μέσα από οπτικές εικόνες. Παράλληλα, ο Chen (2000) επισημαίνει πως η φαντασία χρειάζεται να είναι βασισμένη στην παρατήρηση για να επιτρέπει στα άτομα να εξαγάγουν νέες ιδέες από αυτά που έχουν μάθει. Η δημιουργική φαντασία αναφέρεται στη δημιουργία συνδέσεων για τη διαμόρφωση νέων εικόνων (Ho et al., 2013; Vygotsky, 2004), ενώ η ανα-δημιουργική φαντασία βοηθά στην ανάκληση και επαναοπτικοποίηση υφιστάμενων εικόνων (Tran et al., 2017). Τέλος, στο ενοποιημένο μοντέλο σκέψης του Iowa Department of Education (1989), η οπτικοποίηση, η οποία αναφέρεται στη διαδικασία συλλογισμού με νοερές εικόνες με σκοπό τη μεταγενέστερη επικοινωνία, προτείνεται ως συστατικό στοιχείο που προωθεί τη φαντασία των ατόμων.

Για τη διαμόρφωση του ορισμού της οπτικοποίησης στα μαθηματικά, η παρούσα διατριβή έχει αντλήσει στοιχεία από τη βιβλιογραφία για την έννοια της οπτικοποίησης, η οποία έχει οριστεί ποικιλοτρόπως στη βιβλιογραφία των τελευταίων δεκαετιών. Ειδικότερα, η χωρική οπτικοποίηση έχει οριστεί ως ο νοερός χειρισμός αντικειμένων (Michael et al., 1957) και ως η ικανότητα χειρισμού, περιστροφής ή αντιστροφής αντικειμένων ανεξάρτητα από την προοπτική τους (McGee, 1979). Σύμφωνα με την Presmeg (1997), η οπτικοποίηση περιλαμβάνει διαδικασίες δημιουργίας και μετασχηματισμού οπτικών νοητικών εικόνων και χωρικών εικόνων στα μαθηματικά. Οι χωρικές εικόνες είναι νοερές κατασκευές που απεικονίζουν χωρικές πληροφορίες (Presmeg, 1986). Παράλληλα, ο Arcavi (1999) διατείνεται πως η οπτικοποίηση είναι η ικανότητα, η διαδικασία και το προϊόν της δημιουργίας, της ερμηνείας, της χρήσης και του αναστοχασμού για εικόνες ή διαγράμματα που βρίσκονται στο μυαλό μας, στο χαρτί ή σε τεχνολογικά περιβάλλοντα.

Πέραν όμως από τις μαθηματικές περιοχές της γεωμετρίας και της τριγωνομετρίας, η οπτικοποίηση μπορεί να φανεί χρήσιμη και στην άλγεβρα, καθώς έχει περιγραφεί ως ένα όχημα για την αποτελεσματική επίλυση προβλήματος στην άλγεβρα (Parzysz, 1999; Yerushalmy, Sternberg, & Gilead, 1999). Έτσι, ορισμένοι ερευνητές εξέτασαν την οπτικοποίηση σε σχέση με την αλγεβρική ικανότητα (Terao, Koedinger, Sohn, Qin, Anderson & Carter, 2004; Tolar, Lederberg & Fletcher, 2009). Συγκεκριμένα, η Tolar και οι συνεργάτες της (2009) εντόπισαν την ύπαρξη μέτριας επίδρασης της χωρικής οπτικοποίησης στην αλγεβρική ικανότητα που εμπερικλείει χειρισμό συμβόλων, προτείνοντας ότι η οπτικοποίηση μπορεί να έχει ακόμα περισσότερη επίδραση στην αλγεβρική ικανότητα, εάν η μέτρηση της επίδοσης στην άλγεβρα περιλαμβάνει και άλλες πτυχές της αλγεβρικής σκέψης όπως η γενίκευση και η μοντελοποίηση. Επιπλέον, σύμφωνα με τον Thornton (2001), σε έργα μοτίβων οι μαθητές ενεργοποιούν έντονα την αλγεβρική τους σκέψη όταν προσδίδουν νόημα στις μεταβλητές και οπτικοποιούν τη σχέση μεταξύ των μεταβλητών με διαφορετικούς τρόπους, παρά όταν χρησιμοποιούν έναν αλγόριθμο ή μια φόρμουλα. Παράλληλα, ο Rivera (2007) βρήκε ότι οι μαθητές που αξιοποιούσαν σχηματική γενίκευση ήταν ικανοί να «δουν» τις μεταβλητές μέσα στο πλαίσιο μιας συναρτησιακής σχέσης και να τεκμηριώσουν τις γενικεύσεις τους.

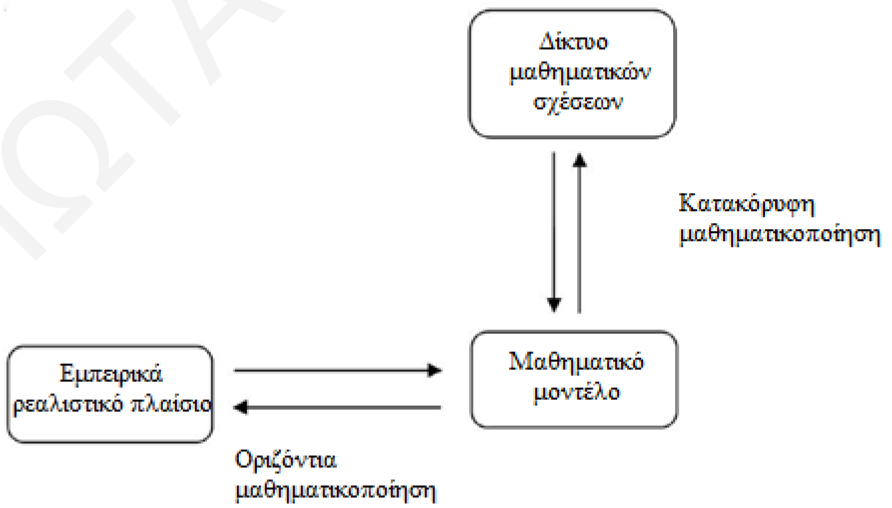
Για τους σκοπούς της παρούσας διατριβής, η συνιστώσα της οπτικοποίησης ορίζεται σε σχέση με χωρικές εικόνες και με αλγεβρικές εικόνες. Οι χωρικές εικόνες είναι νοερές κατασκευές που απεικονίζουν χωρικές πληροφορίες (Presmeg, 1986) και η οπτικοποίηση χωρικών εικόνων αναφέρεται στην ικανότητα χειρισμού νοερών αντικειμένων με διαφορετικούς τρόπους (Arcavi, 1999; McGee, 1979 ; Michael et al., 1957; Presmeg, 1997). Από την άλλη, οι αλγεβρικές εικόνες ορίζονται ως νοερές κατασκευές που αναπαριστούν αλγεβρικές πληροφορίες, έχοντας ως κατευθυντήριο γνώμονα τον ορισμό της Presmeg (1986) για τις χωρικές εικόνες. Η οπτικοποίηση αλγεβρικών εικόνων αφορά στην επίλυση προβλημάτων αλγεβρικής ικανότητας που εμπίπτουν στην κατηγορία των προβλημάτων ενόρασης (Weisberg, 1995). Εξάλλου, σύμφωνα με τους Vale και Barbosa (2018), η οπτικοποίηση σχετίζεται άμεσα με τη σύλληψη δημιουργικών ιδεών ή την βίωση της εμπειρίας της ενόρασης ή του «Aha!».

Μετασχηματιστικές Ικανότητες. Ένας τρόπος κατανόησης και εφαρμογής της φαντασίας είναι ως διαδικασία μετασχηματισμού (Macknight, 2009). Ο ορισμός της συνιστώσας των μετασχηματιστικών ικανοτήτων στα μαθηματικά απορρέει από την έννοια της μαθηματικοποίησης, η οποία ανάγει τις ρίζες της στη θεωρία των Ρεαλιστικών Μαθηματικών (Jupri & Drijvers, 2016). Συγκεκριμένα, η μαθηματικοποίηση αναφέρεται στη δραστηριότητα οργάνωσης και μελέτης της πραγματικότητας με τη χρήση μαθηματικών μέσων. Δηλαδή στη μετάφραση ενός ρεαλιστικού προβλήματος στο συμβολικό μαθηματικό κόσμο και αντίστροφα, καθώς και στην αναδιοργάνωση και ανακατασκευή εντός του μαθηματικού κόσμου (Jupri & Drijvers, 2016).

Η μαθηματικοποίηση διακρίνεται σε δυο επιμέρους τύπους: την οριζόντια και την κατακόρυφη μαθηματικοποίηση (Treffers, 1987). Η οριζόντια μαθηματικοποίηση αφορά σε μια μετασχηματιστική διαδικασία από ένα πρόβλημα σε ένα μαθηματικό μοντέλο (Jupri & Drijvers, 2016), από τον πραγματικό κόσμο στον κόσμο των συμβόλων (Freudenthal, 1991). Αντίθετα, η κατακόρυφη αφορά στην επίλυση του προβλήματος που εκφράζεται στο μοντέλο και στην ερμηνεία της λύσης (Jupri & Drijvers, 2016), στη μετακίνηση εντός του συμβολικού κόσμου (Freudenthal, 1991). Αξίζει να σημειωθεί ότι η διατριβή αυτή εστιάζει αποκλειστικά στην οριζόντια μαθηματικοποίηση, λαμβάνοντας υπόψη τη μικρή ηλικία των μαθητών του δείγματος, νοουμένου ότι τα παιδιά του δημοτικού βιώνουν την άλγεβρα με έναν πιο χειροπιαστό τρόπο, μέσα από απτά και οπτικά αντικείμενα (Lee, Collins , & Melton, 2016).

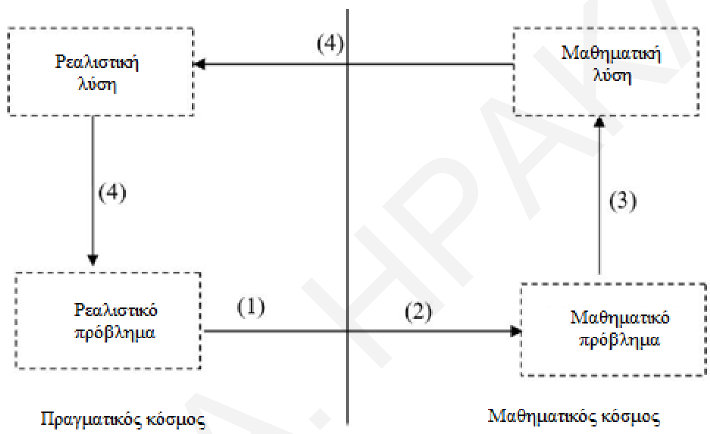
Πιο αναλυτικά, στην οριζόντια μαθηματικοποίηση, γίνεται μεταφορά ενός ρεαλιστικού προβλήματος σε ένα συμβολικό μαθηματικό πρόβλημα, μέσα από παρατήρηση, πειραματισμό και επαγωγικό συλλογισμό (Treffers, 1987). Στην οριζόντια μαθηματικοποίηση εμπίπτουν δραστηριότητες όπως η αναγνώριση συγκεκριμένων μαθηματικών ιδεών σε ένα γενικότερο πλαίσιο, η διατύπωση και η οπτικοποίηση ενός προβλήματος με διαφορετικούς τρόπους και η ανακάλυψη σχέσεων (De Lange, 1987). Από την άλλη, η κατακόρυφη μαθηματικοποίηση είναι η διαδικασία αναδιοργάνωσης και ανακατασκευής εντός του κόσμου των συμβόλων και περιλαμβάνει την επίλυση του προβλήματος, τη γενίκευση της λύσης και περαιτέρω τυποποίηση (Treffers, 1987). Τέτοιου είδους δραστηριότητες αποτελούν τον χειρισμό και τη βελτίωση μαθηματικών μοντέλων, τη χρήση διαφορετικών μοντέλων, το συνδυασμό μοντέλων και τη γενίκευση (De Lange, 1987).

Το Διάγραμμα 2.3 αποτυπώνει τη σχέση ανάμεσα στους δυο τύπους μαθηματικοποίησης. Σε όλες τις φάσεις της μαθηματικής δραστηριότητας, οι δυο τύποι μαθηματικοποίησης αλληλοσυμπληρώνονται (De Lange, 1987).



Διάγραμμα 2.3. Οριζόντια και κατακόρυφη μαθηματικοποίηση (υιοθετήθηκε από Drijvers, 2003, σ. 54).

Σύμφωνα με τον De Lange (2006), η διαδικασία της μαθηματικοποίησης έχει κυκλικό χαρακτήρα, όπως διαφαίνεται και στο Διάγραμμα 2.4. Αρχικά, κατά την επίλυση του προβλήματος ο μαθητής προσπαθεί να κατανοήσει το πρόβλημα και να αναγνωρίσει τις σχετικές μαθηματικές έννοιες εντός του προβλήματος (1). Έπειτα, με βάση τις μαθηματικές αυτές έννοιες, ο μαθητής απομονώνει όλα τα άσχετα στοιχεία του ρεαλιστικού προβλήματος και διατυπώνει το πρόβλημα σε ένα μαθηματικό μοντέλο (2). Τρίτον, το μαθηματικό πρόβλημα που εμπερικλείεται στο μοντέλο επιλύεται και ο μαθητής αναστοχάζεται για τη διαδικασία λύσης του προβλήματος (3). Τέλος, ο μαθητής ερμηνεύει τη μαθηματική λύση στα πλαίσια της αυθεντικής ρεαλιστικής κατάστασης (4).



Διάγραμμα 2.4. Ο μαθηματικός κύκλος (υιοθετήθηκε από τον De Lange, 2006, σ. 17).

Τα δυο πρώτα βήματα σχετίζονται με τον μετασχηματισμό ενός ρεαλιστικού προβλήματος σε ένα συμβολικό μαθηματικό πρόβλημα και είναι συνυφασμένα με την οριζόντια μαθηματικοποίηση. Το τρίτο βήμα συντελείται εντός του συμβολικού μαθηματικού κόσμου και συνεπώς συνδέεται με την κατακόρυφη μαθηματικοποίηση, ενώ το τέταρτο βήμα κατά το οποίο ερμηνεύεται η μαθηματική λύση στα πλαίσια της ρεαλιστικής κατάστασης συνιστά πτυχή της οριζόντιας μαθηματικοποίησης. Εάν το τέταρτο αυτό βήμα εμπλέκει την επιβεβαίωση των συνθηκών του προβλήματος, τη γενίκευση της διαδικασίας λύσης και την αναγνώριση των πιθανών εφαρμογών της διαδικασίας λύσης σε άλλα παρόμοια προβλήματα, τότε εμπλέκεται και η κατακόρυφη μαθηματικοποίηση.

Πρωτοτυπία. Η τρίτη συνιστώσα της φαντασίας στο συνδυαστικό μοντέλο της δημιουργικής ικανότητας είναι αυτή της πρωτοτυπίας (Jankowska & Karwowski, 2015). Η πρωτοτυπία θεωρούνταν αρχικά ως το μόνο μέτρο αξιολόγησης της δημιουργικότητας (Chassell, 1916), ενώ μέχρι πρόσφατα αναγνωρίζεται συχνά ως το κύριο συστατικό στους ορισμούς της δημιουργικότητας (Ervynck, 1991; Leikin, 2013; Leikin & Lev, 2013; Lev-Zamir & Leikin, 2011; Pitta-Pantazi et al., 2018). Αρκετές φορές χρησιμοποιείται ως συνώνυμο της δημιουργικότητας από τα άτομα που δεν είναι εξοικειωμένα με την έρευνα στο συγκεκριμένο πεδίο (Mann, Chamberlin, & Graefe, 2017). Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι η έρευνα των Levav-Waynberg και Leikin (2012) επιβεβαίωσε και εμπειρικά ότι η πρωτοτυπία σχετίζεται με τη δημιουργικότητα σε μεγαλύτερο βαθμό από ότι η ευχέρεια και η ευελιξία.

Η πρωτοτυπία αναφέρεται στη «στατιστική σπανιότητα των απαντήσεων σε σχέση με την υπόλοιπη ομάδα μαθητών» (Haylock, 1997, σ. 71) και στην πιθανότητα να κατέχει το άτομο παράξενες, νέες και μοναδικές ιδέες (Gil et al., 2007). Ειδικότερα, η πρωτοτυπία είναι η ικανότητα δημιουργίας ενός μοναδικού προϊόντος νοητικής ή καλλιτεχνικής δραστηριότητας ή ενός μη συνηθισμένου τρόπου σκέψης (Leikin & Lev, 2013; Torrance, 1966, 1974). Ορίζεται ως η ικανότητα παραγωγής σπάνιων και μη τυπικών ιδεών (Guilford, 1967), «ασυνήθιστων, εξεζητημένων ή έξυπνων απαντήσεων» (Yuan & Sriraman, 2011, σ. 7), «έξυπνων και μη αναμενόμενων ιδεών» (Kwon et al., 2006, σ. 53). Επομένως, συνιστά τη μετάβαση μακριά από τον συνηθισμένο τρόπο σκέψης και αποτελεί μια δημιουργική δύναμη, που είναι ένα νοητικό άλμα από το προφανές (Vidal, 2005).

Η πρωτοτυπία είναι εσωτερικό χαρακτηριστικό (Leikin, 2009b), καθώς υπόκειται σε μικρότερη αλλαγή και ανάπτυξη σε σχέση με τα άλλα συστατικά της δημιουργικότητας (Levav-Waynberg & Leikin, 2012). Οι πρωτότυπες ιδέες είναι στατιστικά σπάνιες και περιγράφονται μοναδικές, εκπληκτικές, άγριες, ασυνήθιστες, ασυμβίβαστες, καινοτόμες, περίεργες, αξιοσημείωτες ή επαναστατικές (Vidal, 2005). Επίσης, «οι πρωτότυπες ιδέες θα πρέπει να είναι και κοινωνικά χρήσιμες» (Yuan & Sriraman, 2011, σ. 7).

Αναφορικά με τη διαδικασία αξιολόγησης της πρωτοτυπίας, η αξιολόγηση της πρωτοτυπίας απαιτεί την αξιολόγηση της σχετικής (ποσοτικής) αλλά και της απόλυτης (ποιοτικής) πρωτοτυπίας των λύσεων (Leikin, 2009b; 2013). Η μέτρηση της σχετικής πρωτοτυπίας διεξάγεται σε σχέση με τη συμβατικότητα της λύσης εντός μιας συγκεκριμένης ομάδας μαθητών με παρόμοιο εκπαιδευτικό ιστορικό (Leikin, 2009b, 2013). Συγκεκριμένα, υπολογίζεται το ποσοστό των μαθητών της υπό μελέτη ομάδας που κατέληξε στη συγκεκριμένη λύση (Leikin, 2009b; 2013). Από την άλλη, η μέτρηση της απόλυτης πρωτοτυπίας λαμβάνει υπόψη το επίπεδο της ενόρασης που εμπλέκεται στη διαδικασία μιας συγκεκριμένης λύσης (Ervynck, 1991). Έτσι, μια λύση που στηρίζεται σε μια έννοια που έχουν διδαχτεί οι μαθητές σε ένα άλλο πλαίσιο μπορεί να θεωρηθεί πρωτότυπη αλλά ίσως όχι τόσο πρωτότυπη όσο μια λύση που είναι μη συμβατική και εξ ολοκλήρου στηριγμένη στην ενόραση του μαθητή (Leikin, 2009b). Για παράδειγμα, μια αλγοριθμική λύση (που προφανώς είναι μια διδαχθείσα προσέγγιση) στην απόλυτη πρωτοτυπία δεν μπορεί να προσμετρηθεί ως πρωτότυπη ακόμα και εάν έχει προταθεί μόνο από έναν μαθητή μέσα στην ομάδα αναφοράς (Leikin, 2013).

Στην παρούσα διατριβή, η πρωτοτυπία ορίζεται ως η ικανότητα παραγωγής σπάνιων και μη τυπικών λύσεων (Guilford, 1967). Θεωρείται ότι διατρέχει και τις δυο άλλες συνιστώσες της φαντασίας: οπτικοποίηση και μετασχηματιστικές ικανότητες. Η θεωρητική αυτή παραδοχή έχει διαμορφωθεί με βάση τις ακόλουθες υποδείξεις που υπάρχουν στη βιβλιογραφία για τη συνιστώσα της πρωτοτυπίας.

Πρωταρχικά, σύμφωνα με τους Leikin και Kloss (2011), η πρωτοτυπία αποτελεί μια ειδική συνιστώσα ξεχωριστής νοητικής ποιότητας. Επιπλέον, η πρωτοτυπία μπορεί να εμφανιστεί, μέσα από τις πολλές προσπάθειες για παραγωγή δημιουργικών ιδεών, καθώς όσο πιο πολλές ιδέες παράγονται τόσο πιο ψηλή είναι η πιθανότητα του να είναι μια ιδέα πρωτότυπη (Rietzschel, Nijstad, & Stroebe, 2007; Vidal, 2005).

Ταυτόχρονα, στη βιβλιογραφία διαφαίνεται η άρρηκτη σχέση που έχει η πρωτοτυπία με τη φαντασία. Ειδικότερα, ο Egan (2005) αναφέρει χαρακτηριστικά ότι η φαντασία είναι «η πηγή της ευελιξίας και της πρωτοτυπίας της ανθρώπινης σκέψης» (σ. 220), ενώ ο White (1990) υπογραμμίζει ότι η φαντασία «είναι συνδεδεμένη με την ανακάλυψη, την εφεύρεση και την πρωτοτυπία» (σ. 186). Επίσης, οι Lev-Zamir και Leikin (2011) στην έρευνά τους ταυτίζουν την πρωτοτυπία με τη φαντασία.

Επιπλέον, η πρωτοτυπία είναι εμφανής τόσο σε μαθηματικά αποτελέσματα που άπτονται της οπτικοποίησης όσο και σε αποτελέσματα σχετικά με τις μετασχηματιστικές ικανότητες. Συγκεκριμένα, σύμφωνα με τη Sheffield (2009), η πρωτοτυπία είναι εμφανής στις ερωτήσεις που διατυπώνουν τα άτομα, τις παραδοχές που κάνουν, τις αναπαραστάσεις, την τεκμηρίωση και τις μεθόδους που χρησιμοποιούν. Επίσης, η Leikin (2008) υποστηρίζει ότι οι μαθηματικές απαντήσεις θα πρέπει να είναι πρωτότυπες, σπάνιες και κατάλληλες για το μαθηματικό πρόβλημα. Η Singer (2018b) επισημαίνει πως «η εμφάνιση της πρωτότυπης σκέψης σχετίζεται με τις μαθηματικές ικανότητες της μοντελοποίησης, της αναπαράστασης, της ερμηνείας, της αντίστροφης σκέψης, της γενίκευσης, της τεκμηρίωσης και απόδειξης» (σ. 17). Συγχρόνως, ο Mann et al. (2017)

προσθέτει ότι «οι μαθηματικές διαδικασίες και αλγόριθμοι μπορούν να είναι ιδιαίτερα πρωτότυπες» (σ. 61). Τέλος, η Shriki (2010) αναφέρει ότι οι ικανότητες του να βρίσκεις μια πρωτότυπη απόδειξη ή να ανακαλύπτεις νέα θεωρήματα είναι δημιουργικά προϊόντα.

Θεωρητικό Μοντέλο του Wallas για τη Δημιουργική Διαδικασία. Ο Wallas (1926) ανέπτυξε ένα θεωρητικό μοντέλο που βασίζεται στη ψυχολογική θεωρία Gestalt (Sriraman, 2004, 2005) και περιγράφει τη δημιουργική διαδικασία ως μια σειρά από επτά διακριτά στάδια: την αναγνώριση (το άτομο αναγνωρίζει την προβληματική κατάσταση), την προετοιμασία (συλλέγονται πληροφορίες), τη συγκέντρωση (γίνεται μια προσπάθεια λύσης του προβλήματος), την επώαση (διάφορες ιδέες στριφογυρίζουν στο μυαλό του ατόμου), τον φωτισμό (εμφανίζεται η λύση στο πρόβλημα), την επιβεβαίωση (το άτομο ελέγχει τη λύση που εμφανίστηκε) και την πειστικότητα (το άτομο επιχειρεί να πείσει τους υπόλοιπους ότι η ιδέα που εντόπισε πράγματι λύνει το πρόβλημα). Με την πάροδο του χρόνου, στις πιο σύγχρονες συζητήσεις το μοντέλο του Wallas συχνά συμπτύσσεται σε τέσσερα στάδια: την προετοιμασία, την επώαση, τον φωτισμό και την επαλήθευση (Cropley & Cropley, 2013).

Στην προσπάθειά τους να μοντελοποιήσουν τη δημιουργική διαδικασία στο πεδίο των μαθηματικών, ο Hadamard (1945) και ο Poincaré (1948) υιοθέτησαν το μοντέλο των τεσσάρων σταδίων του Wallas (1926), επηρεασμένοι από την ψυχολογία Gestalt που επικρατούσε στην εποχή τους (Sriraman, 2005). Διάφοροι μεταγενέστεροι ερευνητές έχουν επιβεβαιώσει και εμπειρικά το συγκεκριμένο θεωρητικό μοντέλο στο αντικείμενο των μαθηματικών, εστιάζοντας σε μαθηματικούς (Burton, 1999; Liljedhal , 2013; Sriraman, 2004) και φοιτητές (Liljedahl, 2004, 2013).

Το σκεπτικό αξιοποίησης του θεωρητικού μοντέλου του Wallas (1926) για τη δημιουργική διαδικασία, με έμφαση στην εμπειρία της ενόρασης ή του «Aha!» (Aldous, 2007; Burton, 1999; Carpenter, 2019; Liljedahl, 2004, 2005, 2013; Shen et al., 2013; Sriraman, 2009; Weisberg, 2015; Yaftian, 2015) για τον ορισμό της έννοιας της φαντασίας στα μαθηματικά έγκειται στις ακόλουθες θέσεις που έχουν διατυπωθεί στη βιβλιογραφία. Η φαντασία είναι άρρηκτα συνδεμένη με τα στάδια της επώασης και του φωτισμού, ο οποίος μπορεί να περιγραφεί ως ένα άλμα της φαντασίας (Greene, 2000). Η φαντασία στηρίζεται έντονα στο ασυνείδητο, καθώς αυτό δημιουργεί και απορρίπτει ιδέες (Liljedahl, 2004). Στην κορύφωσή της, η φαντασία έχει αποκαλεστεί ως η εμπειρία του «Aha!», του φωτισμού, της ενόρασης, της έμπνευσης, του άλματος (Wheeler-Brownlee, 1985). Τέλος, η διαίσθηση, η οποία αναφέρεται στην ανάδυση νέων ιδεών ως αναλαμπή προτείνεται ως συστατικό στοιχείο της φαντασίας των ατόμων (Iowa Department of Education, 1989). Για τους πιο πάνω λόγους, έχει επιλεγεί το θεωρητικό μοντέλο του Wallas (1926), με έμφαση στο στάδιο του φωτισμού και την εμπειρία της ενόρασης ή του «Aha!» για τον ορισμό της έννοιας της φαντασίας στα μαθηματικά.

Ακολουθεί ενδελεχής περιγραφή των τεσσάρων σταδίων και αποσαφήνιση της σύνδεσης του μοντέλου με τη φαντασία στα μαθηματικά. Συγκεκριμένα, το πρώτο στάδιο, της προετοιμασίας, χαρακτηρίστηκε από τον Hadamard (1945) ως εναρκτήριο (initiation) και τον Poincaré (1948) ως προκαταρκτικό (preliminary). Στο στάδιο αυτό, το άτομο διακατέχεται από προθυμία και κίνητρα για να εξερευνήσει την κατάσταση και να συλλέξει πληροφορίες ώστε να λύσει το πρόβλημα (Yaftian, 2015). «Το μυαλό του ατόμου εστιάζει στο πρόβλημα και επεξεργάζεται τις διαστάσεις του» (Baker & Czarnocha, 2015, σ. 4) και επιχειρεί να επιλύσει το πρόβλημα επιστρατεύοντας προϋπάρχουσες εμπειρίες (Liljedhal, 2004, 2013). Έτσι, το στάδιο αυτό διακρίνεται από σκόπιμη και συνειδητή εργασία (Liljedhal, 2004, 2013). Η προετοιμασία είναι το πιο σημαντικό στάδιο από τα τέσσερα, αφού χωρίς αυτήν το άτομο δεν μπορεί να μεταβεί και να εμπλακεί σε κανένα από τα υπόλοιπα τρία στάδια (Savic, 2016).

Όταν το άτομο αδυνατεί για κάποιο χρονικό διάστημα να προσεγγίσει τη λύση του προβλήματος σε συνειδητό επίπεδο (Liljedhal, 2004, 2013), το αναγνωρίζει ως ένα αδιέξοδο (Savic, 2016). Βάζει το πρόβλημα κατά μέρος, κάνει ένα διάλειμμα από τη διαδικασία λύσης και εμπλέκεται σε άλλες δραστηριότητες (Yaftian, 2015). Αυτό συνιστά το στάδιο της επώασης (Baker & Czarnocha, 2015; Liljedhal, 2004, 2013; Smith, 1995; Yaftian, 2015). Το συνειδητό μέρος του μυαλού σταματά να εργάζεται (Yaftian, 2015) και «το πρόβλημα εσωτερικεύεται στο ασυνείδητο του μυαλού» (Baker & Czarnocha, 2015, σ. 4). Έτσι, το ασυνείδητο αρχίζει να εργάζεται και να επεξεργάζεται τις πληροφορίες (Hadamard, 1945; Poincaré, 1948; Yaftian, 2015). Αυτό το στάδιο μπορεί να διαρκέσει από μερικά λεπτά μέχρι και χρόνια ολόκληρα (Aldous, 2007; Liljedhal, 2004). Η μεγάλη βαρύτητα που αποδίδει το μοντέλο του Wallas (1926) στην ασυνείδητη εργασία κατά το στάδιο της επώασης αποτελεί μια βασική αιτία που οι ψυχολόγοι του άσκησαν σημαντική κριτική (Sriraman, 2009).

Στο στάδιο του φωτισμού, το άτομο βιώνει την εμπειρία της ενόρασης, η οποία συχνά συνοδεύεται από ένα επιφώνημα «Aha!» (Webb et al., 2018), και για αυτό αποκαλείται χαρακτηριστικά ως η εμπειρία του «Aha!» ή του Εύρηκα (Aldous, 2007; Burton, 1999; Carpenter, 2019; Liljedahl, 2004, 2005, 2013; Shen et al., 2013; Sriraman, 2009; Weisberg, 2015). Η εμπειρία της ενόρασης ορίζεται ως η ξαφνική, συνειδητή αλλαγή της αναπαράστασης που έχει το άτομο για ένα πρόβλημα, μια κατάσταση ή ένα ερέθισμα, η οποία οδηγεί σε μια μη εμφανή ερμηνεία του (Carpenter, 2019). Η λύση στην προβληματική κατάσταση εμφανίζεται ξαφνικά στο μυαλό, μονομιάς (Bowden, Jung-Beeman, Fleck, & Kounios, 2005; Carpenter, 2019; Liljedhal, 2004, 2013; Smith, 1995; Yaftian, 2015). Είναι η στιγμή της «μέγιστης αποσαφήνισης που φέρνει στο άτομο επίγνωση για τη λύση του προβλήματος» (Sriraman, 2009, σ. 37), της «άμεσης αντίληψης των σχέσεων» (Thorpe, 1956 στο Koestler, 1964, σ. 548) και του ξαφνικού ανάμματος ενός λαμπτήρα (Carpenter, 2019; Liljedahl, 2005).

Η εμπειρία του «Aha!» φαντάζει μυστηριώδης καθώς δεν μπορεί κανείς να έχει άμεση πρόσβαση στις νευρωνικές διαδικασίες που υφέρπουν πίσω από την εμφάνισή της (Thagart & Stewart, 2011). Ωστόσο, η σύγχρονη τεχνολογία της νευροεπιστήμης έχει επιτρέψει στους ερευνητές να εξετάσουν τις νευρωνικές συνδέσεις που επηρεάζουν τις εμπειρίες ενόρασης (Carpenter, 2019). Σύγχρονες έρευνες έδειξαν ότι η εμπειρία της ενόρασης δεν είναι μια ξαφνική αναλαμπή που έρχεται από το πουθενά. Κατ’ ακρίβεια είναι το αποτέλεσμα του ασυνείδητου μέρους του μυαλού που δημιουργεί καινούριες συνδέσεις ανάμεσα σε διαφορετικές πληροφορίες και προϋπάρχουσες γνώσεις και εμπειρίες και τις φέρνει στο συνειδητό μέρος (Carpenter, 2019). Το ασυνείδητο του μυαλού ρίχνει τη λύση μέσα στα όρια του συνειδητού και έτσι το μυαλό συλλαμβάνει τη νέα ιδέα ως μια στιγμή ενόρασης (Hadamard, 1945). Επομένως, παρατηρείται γεφύρωση ανάμεσα στο ασυνείδητο και το συνειδητό του μυαλού (Poincaré, 1952).

Εφόσον η εμπειρία της ενόρασης είναι η αλλαγή της αναπαράστασης που έχει το άτομο για ένα πρόβλημα, μια κατάσταση ή ένα ερέθισμα (Carpenter, 2019), τότε θεωρητικά θα έπρεπε να βιώνεται μόνο όταν η λύση που βρίσκει το άτομο είναι ορθή (Danek & Wiley, 2017). Γι’ αυτό και πρόσφατες εμπειρικές εργασίες εισηγούνται ότι όταν οι συμμετέχοντες αναφέρουν ότι έχουν βιώσει μια εμπειρία «Aha!» τότε η λύση που είχαν προτείνει τείνει να είναι ορθή (Salvi, Bricolo, Kounios, Bowden, & Beeman, 2016; Webb, Little, & Cropper, 2016; Danek & Wiley, 2017). Όμως, σύμφωνα με τον Ohlosson (1984), υπάρχουν και περιπτώσεις «λανθασμένης ενόρασης» (σ. 124). Το άτομο μπορεί να βιώσει μια εμπειρία «Aha!» ενώ η ιδέα που συνέλαβε κατά το στάδιο του φωτισμού να είναι εσφαλμένη (Liljedahl, 2004). Αυτό φυσικά δεν αναιρεί το γεγονός ότι το άτομο βίωσε μια εμπειρία «Aha!», παρόλο που η εμπειρία «Aha!» ήταν άκαρπη και συνεπώς η εμπειρία «Aha!» δεν σχετίζεται με την πρωτοτυπία και τη χρησιμότητα της ιδέας (Liljedahl, 2004). Ωστόσο, η ύπαρξη λανθασμένων εμπειριών ενόρασης δεν έχει λάβει τη δέουσα προσοχή από τους ερευνητές (Danek & Wiley, 2017).

Η εμπειρία του «Aha!» τόσο στις ορθές όσο και στις λανθασμένες απαντήσεις είναι πολυδιάστατη και αποτελείται από τρεις βασικές διαστάσεις: την ευχαρίστηση, την ξαφνική εμφάνιση και τη βεβαιότητα (Danek & Wiley, 2017). Όσον αφορά στην ευχαρίστηση, αυτό που διακρίνει τον φωτισμό από άλλες μαθηματικές εμπειρίες είναι η συναισθηματική πτυχή (Liljedahl, 2013). Η εμπειρία του «Aha!» συνοδεύεται από θετικά συναισθήματα και ευφορία (Burton, 1999; Thagart & Stewart, 2011). Επίσης, η εμπειρία του «Aha!» έχει τη δυνατότητα να μετασχηματίσει θετικά τις πεποιθήσεις και τις στάσεις του μαθητή για τα μαθηματικά, αφού εμπνέει, δίνει κίνητρο και ενθαρρύνει το άτομο ώστε να συνεχίζει την προσπάθεια (Liljedhal, 2005, 2013).

Αναφορικά με την ξαφνική εμφάνιση, τη στιγμή του «Aha!» το άτομο εκπλήσσεται τόσο πολύ όσο και ένας εξωτερικός παρατηρητής, καθώς δεν είχε την παραμικρή ιδέα για τη λύση του προβλήματος (Weisberg, 2015). Ωστόσο, ο ξαφνικός φωτισμός είναι ακόμη αμφιλεγόμενος (Carpenter, 2019). Σύμφωνα με τον Weisberg (1986), οι λύσεις σε καινούρια προβλήματα δεν εμφανίζονται πάντοτε μέσα από άλματα ενόρασης. Σε κάθε βήμα, η διαδικασία λύσης περιλαμβάνει μικρές μετακινήσεις μακριά από αυτά που γνωρίζει το άτομο. Ο Sawyer (2011) υποστηρίζει ότι η ενόραση φαίνεται να είναι ξαφνική επειδή δεν παρατηρούμε τα πολλά σταδιακά βήματα ή τις μικρές εμπειρίες ενόρασης που προηγήθηκαν. Εισηγείται πως η ενόραση εκφράζεται πιο κατάλληλα ως η κορυφή του παγόβουνου ή το τελικό τούβλο στον τοίχο παρά ως το ξαφνικό άναμμα ενός λαμπτήρα.

Τέλος, η εμπειρία «Aha!» χαρακτηρίζεται από ένα ισχυρό αίσθημα βεβαιότητας (Poincaré, 1952; Webb et al., 2018) και την αίσθηση ότι η απάντηση είναι προφανώς ορθή (Kizilirmak, Gomes da Silva, Imamoglu, & Richardson-Klavehn, 2016) . Η ξαφνική ενεργοποίηση του νέου σχεδίου λύσης προκαλεί στο άτομο τεράστια αυτοπεποίθηση (Smith, 1995). Μπορεί να μην μπορεί να περιγράψει πώς κατέληξε στη συγκεκριμένη απάντηση αλλά έχει αυτοπεποίθηση για την ορθότητά της, χωρίς να πρέπει να την ελέγξει νοερά (Jung-Beeman et al., 2004).

Ωστόσο, αντιπαραβάλλοντας στις ορθές και στις λανθασμένες απαντήσεις, οι εμπειρίες «Aha!» βιώνονται με διαφορετικό τρόπο στην κάθε περίπτωση (Danek & Wiley, 2017). Ειδικότερα, οι ορθές απαντήσεις εμφανίζονται πιο γρήγορα και οδηγούν σε πιο έντονες εμπειρίες «Aha!». Οδηγούν σε πιο ψηλά επίπεδα ευχαρίστησης, κάνουν πιο ξαφνική εμφάνιση και συνοδεύονται με ένα πιο έντονο αίσθημα βεβαιότητας συγκριτικά με τις λανθασμένες απαντήσεις. Επίσης, οι ορθές απαντήσεις σχετίζονται περισσότερο με το αίσθημα ανακούφισης, ένεκα της υπερπήδησης του αδιεξόδου, ενώ οι λανθασμένες συνδέονται περισσότερο με το αίσθημα της έκπληξης (Danek & Wiley, 2017) .

Από ερευνητική σκοπιά, η εμπειρία της ενόρασης είναι ένα θέμα το οποίο αξίζει διερεύνησης για διάφορους λόγους (Webb et al., 2018). Η εμπειρία της ενόρασης σχετίζεται με την καινοτόμα σκέψη (Feynman, 1999), διευκολύνει την ανάκληση (Kizilirmak, Thuerich, Folta-Schoofs, Schott, & Richardson-Klavehn, 2016), βελτιώνει τη μάθηση (Kizilirmak et al., 2016) και μετασχηματίζει θετικά τις στάσεις, τις πεποιθήσεις του ατόμου (Liljedahl, 2005, 2013). Ωστόσο, η μέχρι στιγμής συζήτηση για την εμπειρία του «Aha!» είναι μονομερώς προσηλωμένη στις ανώτερες βαθμίδες της μαθηματικής πρακτικής, στο πλαίσιο των μεγάλων Μαθηματικών και των σπουδαίων μαθηματικών επιτευγμάτων (Liljedahl, 2005). Την ίδια στιγμή, στη διδακτική πράξη η αξία της εμπειρίας του «Εύρηκα» ή του «Aha!» είναι παραμελημένη από τους εκπαιδευτικούς (Sriraman, 2005). Κατ' επέκταση, κρίνεται επιτακτική η ανάγκη για περαιτέρω μελέτη της εμπειρίας του «Aha!» στα μαθηματικά σε μαθητές δημοτικού.

Στο τελικό στάδιο της επαλήθευσης το άτομο «εξετάζει, βελτιώνει, αξιολογεί, επιβεβαιώνει, καταγράφει, ελέγχει και επικοινωνεί τη νέα ιδέα» (Yaftian, 2015, σ. 2522). Επιβεβαιώνει τη λύση και την επεξεργάζεται με περισσότερη λεπτομέρεια (Aldous, 2007; Baker & Czarnocha, 2015; Haylock, 1987), την καθιστά πιο ακριβή και αναζητεί πιθανές προεκτάσεις από την χρήση της λύσης (Sriraman, 2004). Ο Liljedahl (2004) σπεύδει να τονίσει ότι στο στάδιο αυτό το άτομο δεν εξετάζει μόνο την ορθότητα της λύσης, αλλά ασχολείται και με το πρόβλημα ξανά σε ένα πιο λεπτομερές επίπεδο. Τέλος, μετατρέπει τη λύση σε τέτοια μορφή ώστε να την κοινοποιήσει και σε άλλα άτομα (Baker & Czarnocha, 2015; Sriraman, 2004). Αν το στάδιο της επαλήθευσης καταδείξει ότι η λύση που προέκυψε δεν είναι κατάλληλη, τότε το άτομο θα επιστρέψει ξανά σε ένα από τα προηγούμενα στάδια της δημιουργικής διαδικασίας (Aldous, 2007).

Μια κατηγορία μαθηματικών προβλημάτων που σχετίζεται με το στάδιο του φωτισμού στο μοντέλο του Wallas (1926) είναι αυτή των προβλημάτων ενόρασης (Weisberg, 1995). Τρεις ιδιότητες διακρίνουν τις λύσεις ενόρασης από τις υπόλοιπες λύσεις (Bowden et al., 2005). Πρώτον, η αρχική αναπαράσταση του προβλήματος οδηγεί τον λύτη σε αδιέξοδο (Ohlsson, 1992), καθώς ο λύτης ενδεχομένως να παραπλανιέται από ασαφείς πληροφορίες στο πρόβλημα (Smith, 1995). Δεύτερον, ο λύτης συνήθως αδυνατεί να αναφέρει την ακριβή διαδικασία που τον βοήθησε να υπερπηδήσει το αδιέξοδο (Ohlsson, 1992). Τρίτον, ο λύτης βιώνει μια ξεχωριστή συναισθηματική εμπειρία που χαρακτηρίζεται από ξαφνική εμφάνιση, την εμπειρία του «Aha!» (Davidson, 1995).

Πιο αναλυτικά, στα προβλήματα αυτά η διαδικασία λύσης αρχίζει με μια σταδιακή πρόοδο σε ένα ακατάλληλο σχέδιο λύσης. Στη συνέχεια οι προσπάθειες αυτές εντατικοποιούνται αλλά στο τέλος καταλήγουν σε αποτυχία (Smith, 1995). Για να μπορέσει ο λύτης να διαφύγει από το αδιέξοδο, θα πρέπει να αλλάξει ή να αναδομήσει την αρχική αναπαράσταση του προβλήματος και να στραφεί σε πιο φρέσκες κατευθύνσεις έρευνας (Gilhooly & Murphy, 2005). Πρέπει να υπερβεί τον οικείο τρόπο θέασης του προβλήματος και να εφεύρει μια καινοτόμα προσέγγιση λύσης (Dow & Mayer, 2004). Η αναδόμηση που οδηγεί σε μια ξαφνική και ολοκληρωμένη κατανόηση του τρόπου εύρεσης της λύσης αναφέρεται συχνά ως ενόραση και συνοδεύεται από μια εμπειρία «Aha!» (Gilhooly & Murphy, 2005).

Σύμφωνα με τους Bowden et al. (2005) τα προβλήματα ενόρασης και η σχετική ερευνητική δραστηριότητα διέπονται από κάποιους σημαντικούς περιορισμούς. Παρά τη συμφωνία των ερευνητών για το πώς διαφέρουν τα προβλήματα ενόρασης από τα υπόλοιπα, δεν υπάρχει ένα σταθερό σετ κριτηρίων που να προσδιορίζει κατά πόσον ο λύτης έχει βιώσει μια εμπειρία ενόρασης (Bowden et al., 2005). Συνήθως ο λύτης δεν καλείται να επεξηγήσει κατά πόσον έχει επιλύσει ένα πρόβλημα μέσω ενόρασης, αλλά θεωρείται δεδομένο ότι εφόσον έχει επιλύσει ένα πρόβλημα αυτού του είδους, τότε έχει βιώσει μια εμπειρία ενόρασης (Bowden et al., 2005). Ένας άλλος περιορισμός είναι ότι τα προβλήματα ενόρασης δε λύνονται πάντα μέσω λύσης ενόρασης, αλλά μπορούν να λυθούν και μέσω αναλυτικών διαδικασιών ή μέσω συνδυασμού των δυο (Bowden et al., 2005).

Γνώσεις

Η δημιουργική σκέψη περιλαμβάνει την ικανότητα «του να πηγαίνει κανείς πέρα από την υφιστάμενη γνώση, ώστε να δημιουργήσει νέες γνώσεις» (Iowa Department of Education, 1989). Η δημιουργική φαντασία αλληλεπιδρά με τις υπάρχουσες δεξιότητες και γνώσεις του ατόμου και μετασχηματίζεται σε αποδεκτά προϊόντα (Tan, 2017). Έτσι, η κατοχή γνώσεων σε ένα πεδίο αποτελεί τη βάση για τη δημιουργικότητα (Huang et al., 2017; Tran et al., 2017). Μαθητές που δεν κατέχουν επαρκείς μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες μπορεί να αδυνατούν να εκδηλώσουν έντονη δημιουργική σκέψη στα μαθηματικά καθώς δεν δύνανται να εκφράσουν τις δημιουργικές τους σκέψεις με τρόπους αναγνωρίσιμους στο πεδίο των μαθηματικών (Mann, 2009). Αυτό δε σημαίνει ότι η γνώση από μόνη της είναι ικανή συνθήκη για τη δημιουργική σκέψη (Sternberg & Lubart, 1995).

Από τη μια, η γνώση παρέχει το καύσιμο για την ενεργοποίηση της φαντασίας και αποτελεί το εφαλτήριο για την αντιμετώπιση απαιτητικών προβλημάτων (Seelig, 2012). Ο μαθητής θα πρέπει να έχει επαρκή και πλούσια κατανόηση του περιεχομένου, για να μπορεί να επιδείξει δημιουργική σκέψη που εμβαθύνει και επεκτείνει τη μάθηση (CAIE, 2018; Sternberg, 2006, 2012). Μάλιστα, η Seelig (2012) επισημαίνει ότι οι γνώσεις που κατέχει το άτομο σε ένα διαφορετικό πεδίο μπορούν να το βοηθήσουν σημαντικά στην οικοδόμηση γνώσεων και στη δημιουργικότητα σε ένα άλλο πεδίο και να ρίξουν φως σε προβλήματα που προσπαθούν να επιλύσουν.

Από την άλλη, οι γνώσεις ενδέχεται να αναχαιτίσουν τη δημιουργικότητα του ατόμου (Sternberg, 2006, 2012; Wiley, 1998). Οι γνώσεις μπορεί να λειτουργήσουν ως ένα νοητικό σετ, κάνοντας το μαθητή να περιοριστεί αποκλειστικά σε στρατηγικές επίλυσης που έχουν δοκιμαστεί με επιτυχία στο παρελθόν αλλά τώρα είναι ανεπιτυχείς (Wiley, 1998). Ο μαθητής μπορεί να υιοθετήσει μια κλειστή και περιοριστική προοπτική και να μην μπορεί να ξεφύγει από τον τρόπο με τον οποίο προσέγγιζε ένα πρόβλημα στο παρελθόν (Sternberg, 2006).

Επομένως, «η δημιουργικότητα αποτελεί μια ισορροπία ανάμεσα στην γνώση και την απελευθέρωση του ατόμου από αυτήν τη γνώση» (Johnson-Laird, 1988, σ. 207 στον Sternberg, 2012, σ.4). Η δημιουργική διαδικασία δεν απαιτεί μονάχα γνώσεις και κατανόηση του αντικειμένου αλλά και προθυμία εκ μέρους του ατόμου να θέσει ερωτήσεις, να αμφισβητήσει τις υφιστάμενες γνώσεις και να μην περιοριστεί από αυτές (CAIE, 2018). Συνεπώς, είναι αναγκαίο το άτομο να αξιοποιεί την υφιστάμενη γνώση του, χωρίς να την αφήνει να καθίσταται εμπόδιο (Sternberg, 2012).

Εστιάζοντας στο πεδίο των μαθηματικών, έχει εξεταστεί και τεκμηριωθεί εμπειρικά ότι η κατοχή μαθηματικών γνώσεων διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στη δημιουργική λύση μαθηματικού προβλήματος (Mayer, 2005). Επίσης, η έρευνα των Bahar και Maker (2011) κατέληξε στο ότι η μαθηματική γνώση των μαθητών συσχετίζεται ισχυρά με την αποκλίνουσα σκέψη τους. Παράλληλα, άλλες έρευνες έχουν καταδείξει ότι η κατοχή μαθηματικών γνώσεων συνεισφέρει περισσότερο από κάθε άλλη μεταβλητή στην ερμηνεία της μαθηματικής δημιουργικότητας (Huang et al., 2017; Κάττου, 2013; Kattou et al., 2016; Mann, 2005; Sak & Maker, 2006). Όταν οι μαθητές κατέχουν περισσότερες γνώσεις στα μαθηματικά, τότε επιδεικνύουν και μεγαλύτερη μαθηματική δημιουργικότητα (Huang et al., 2017).

Για τους σκοπούς της διατριβής, ο παράγοντας της γνώσης ορίζεται με βάση τον ορισμό του Jonassen (2000) για τη βασική γνώση περιεχομένου: είναι η γνώση που μπορεί να ανακληθεί άμεσα και εμπλέκει αφενός εννοιολογική και αφετέρου διαδικαστική γνώση.

Στάσεις/πεποιθήσεις

Η κατοχή μαθηματικών γνώσεων δε συνεπάγεται κατ' ανάγκη ότι οι μαθητές θα μπορούν να επιδείξουν και δημιουργική σκέψη στα μαθηματικά, καθώς η δημιουργική τους σκέψη μπορεί να επηρεάζεται και από συναισθηματικούς παράγοντες (Huang et al., 2017). Το άτομο θα πρέπει να διακατέχεται και από μια θετική διάθεση προς το να συμπεριφερθεί δημιουργικά (CAIE, 2018). Οι στάσεις/πεποιθήσεις των μαθητών στο μοντέλο της Seelig (2012) είναι η «σπίθα» που ενεργοποιούν όλα τα μέρη του συγκεκριμένου θεωρητικού μοντέλου. Πυροδοτεί την περιέργεια του ατόμου να αποκτήσει νέες γνώσεις και ενεργοποιεί τη δημιουργικότητά του. Χωρίς την πεποίθηση ότι το άτομο μπορεί να χειριστεί πρωτοποριακές ιδέες, η διάθεσή του για καινοτομία αδρανοποιείται εντελώς. Για να αναπτυχθούν οι δημιουργικές προσεγγίσεις των μαθητών στα μαθηματικά, είναι απαραίτητη η αλλαγή των στάσεων και των παγιωμένων αντιλήψεων των μαθητών, εκπαιδευτικών και γονιών (Pound & Lee, 2015). Ωστόσο, υπάρχει ανάγκη για περαιτέρω διερεύνηση των στάσεων που μπορούν να υποστηρίξουν ή να εμποδίσουν την ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας (Goldin, 2017).

Η παρούσα έρευνα έχει προσηλωθεί στις πεποιθήσεις που αφορούν στη νοοτροπία (mindset of intelligence) (Seelig, 2012), οι οποίες έχουν ελκύσει έντονα το ερευνητικό ενδιαφέρον κατά τον 21ο αιώνα (Ng, 2018). Σύμφωνα με τους Schroder, Lin, Lo, Danovitch και Moser (2017), η διάδοση των πεποιθήσεων της νοοτροπίας ανάπτυξης σε εθνική κλίμακα μέσα από τη διδακτική πράξη έχει πλέον καταστεί προτεραιότητα. Επίσης, η διερεύνηση της νοοτροπίας (mindset of intelligence) σε σχέση με τη δημιουργικότητα ειδικότερα έχει αναγνωριστεί ως μια ερευνητική περιοχή με αρκετό ερευνητικό ενδιαφέρον (Gerlinger, 2018).

Οι πεποιθήσεις που άπτονται της νοοτροπίας υφίστανται στα άτομα ήδη από τη νηπιακή ηλικία και την Α' τάξη δημοτικού (Bempechat, London, & Dweck, 1991; Cain & Dweck, 1995). Σύμφωνα με την Dweck και τους συνεργάτες της, τα άτομα υιοθετούν δυο διαφορετικές λανθάνουσες θεωρίες για τη φύση της ευφυΐας: τη σταθερή θεωρία ή την αυξητική θεωρία (Dweck, 1999, 2006; Dweck & Leggett, 1988; Hong et al., 1999). Τα άτομα που ασπάζονται τη σταθερή λανθάνουσα θεωρία διακρίνονται από στατική νοοτροπία. Θεωρούν ότι το βασικό επίπεδο ευφυΐας του ατόμου είναι μια αμετάβλητη «οντότητα», ένα σταθερό χαρακτηριστικό που δεν μπορεί να αλλάξει παρά τις γνώσεις που αποκτά κατά καιρούς (Boaler, 2015; Dweck, 2006; Dweck et al., 2014). Αντιθέτως, τα άτομα που ενστερνίζονται την αυξητική λανθάνουσα θεωρία χαρακτηρίζονται από νοοτροπία ανάπτυξης. Πιστεύουν ότι η ευφυΐα είναι αναπτυσσόμενη και δύναται να βελτιωθεί μέσω της προσπάθειας που καταβάλλει το άτομο καθώς και της μάθησης (Boaler, 2015; Dweck, 2006; Dweck et al., 2014).

Αναλόγως της θεωρίας που υιοθετείται, επηρεάζεται και το πώς το άτομο ερμηνεύει και ανταποκρίνεται σε καταστάσεις (Seelig, 2012), και κατ' επέκταση υπάρχουν σημαντικές συνέπειες στον ακαδημαϊκό τομέα (Robins & Pals, 2002). Η κάθε θεωρία συνεπάγεται διαφορετικά μοτίβα κατανόησης, επεξήγησης και αντίδρασης απέναντι στις ακαδημαϊκές επιτυχίες και αποτυχίες (Dweck, 1999; Dweck & Leggett, 1988; Dweck & Sorich, 1999; Henderson & Dweck, 1990; Robins & Pals, 2002).

Όσον αφορά την ακαδημαϊκή επίδοση και τα συναισθήματα, έρευνες με μαθητές γυμνασίου έδειξαν ότι οι πεποιθήσεις της νοοτροπίας ανάπτυξης σχετίζονται θετικά με την ακαδημαϊκή επίδοση και τη συναισθηματική κατάσταση μαθητών γυμνασίου (Romero, Master, Paunesku, Dweck, & Gross, 2014) μαθητών λυκείου (Yeager, Johnson, Spitzer, Trzesniewski, Powers, & Dweck., 2014). Επίσης, εμπειρικές έρευνες έδειξαν ότι η διδασκαλία της νοοτροπίας ανάπτυξης είχε θετική επίδραση στα κίνητρα και την ακαδημαϊκή τους επίδοση σε μαθητές γυμνασίου (Blackwell et al., 2007) και στα επίπεδα άγχους μαθητών λυκείου (Yeager et al., 2014).

Συγχρόνως, άλλες έρευνες έχουν επιδοθεί στον εντοπισμό συμπεριφορικών ενδείξεων για την επίδραση της νοοτροπίας των ατόμων σε σημαντικές διαδικασίες των κινήτρων που έπονται των λαθών και των αποτυχιών, όπως οι μαθησιακοί στόχοι και η απόδοση αιτιών (Dweck, Chiu, & Hong, 1995; Dweck & Leggett, 1988; Hong et al., 1999; Mueller & Dweck,1998). Οι εν λόγω έρευνες εδράζονται κατά βάση στις ερευνητικές μεθόδους της αυτοαναφοράς και της παρατήρησης.

Συγκεκριμένα, έχει διαφανεί ότι οι υποστηρικτές της σταθερής θεωρίας για την ευφυΐα προσανατολίζονται κατά κύριο λόγο σε στόχους επίδοσης, στοχεύοντας στην απόδειξη των ικανοτήτων και της ευφυΐας τους. Αντίθετα, οι υποστηρικτές της αυξητικής θεωρίας προσηλώνονται κατά βάση σε μαθησιακούς στόχους, αποβλέποντας στη βελτίωση των ικανοτήτων και της ευφυΐας τους (Dweck & Leggett, 1988; Hong et al., 1999; Robins & Pals, 2002). Επίσης, η έρευνα των Hong et al. (1999) κατέδειξε ότι όσοι διέπονται από νοοτροπία ανάπτυξης αποδίδουν ιδιαίτερη βαρύτητα στη χρησιμότητα της προσπάθειας σε αντίθεση με όσους διακρίνονται από στατική νοοτροπία, που εκτιμούν την ικανότητα ως πιο χρήσιμη από την προσπάθεια.

Αναφορικά με την αντιμετώπιση των αποτυχιών, τα άτομα που κλίνουν προς τη σταθερή θεωρία αποδίδουν τις αποτυχίες τους στην έλλειψη ικανοτήτων (Henderson &

Dweck, 1990; Robins & Pals, 2002). Βιώνουν την αποτυχία με καταστροφικές σκέψεις (π.χ. είμαι χαζός), συναισθήματα (π.χ. ταπείνωση) και συμπεριφορές (π.χ. παραίτηση) (Dweck et al., 2014). Αντίθετα, με την υιοθέτηση της αυξητικής θεωρίας, τα άτομα υποδεικνύουν ως αιτία της αποτυχίας τους τη μειωμένη προσπάθεια (Henderson & Dweck, 1990; Robins & Pals, 2002). Ως εκ τούτου, στη θέα μιας αποτυχίας τα άτομα με στατική νοοτροπία είτε επιμένουν στην ίδια στρατηγική είτε παραιτούνται παντελώς από κάθε προσπάθεια (Robins & Pals, 2002) και αποθαρρύνονται από το να εμπλακούν στα έργα (Dweck, 2006). Δεν αξιοποιούν τις ευκαιρίες για να μάθουν και να αποκομίσουν γνώσεις από τα λάθη τους (Seelig, 2012). Από την άλλη, τα άτομα με νοοτροπία ανάπτυξης εν όψει μιας αποτυχίας αφιερώνουν περισσότερη προσπάθεια προκειμένου να κατακτήσουν τις δεξιότητες στις οποίες υστερούν (Hong et al., 1999) ή προβαίνουν σε τροποποίηση της στρατηγικής τους (Robins & Pals, 2002). Βλέπουν κάθε αποτυχία ως παιδαγωγική ανατροφοδότηση (Dweck, 2006), ως πρόκληση και πηγή μάθησης (Dweck et al., 2014). Έτσι, χρησιμοποιούν τις αποτυχίες παραγωγικά ως ευκαιρίες για να μάθουν από τα λάθη τους (Dweck, 2006).

Όσον αφορά στις επιτυχίες, τα άτομα με στατική νοοτροπία δεν ανάγουν την αιτία της επιτυχίας τους στην υψηλή τους ικανότητα ή προσπάθεια αλλά στον παράγοντα της τύχης (Robins & Pals, 2002). Μάλιστα, τείνουν να δίνουν δυσανάλογη έμφαση στις αποτυχίες παρά στις επιτυχίες τους (Dweck et al., 1995). Στον αντίποδα βρίσκονται τα άτομα με νοοτροπία ανάπτυξης, τα οποία θεωρούν την επιτυχία ως απότοκο της σκληρής προσπάθειας, αποκλείοντας τον παράγοντα της τύχης (Robins & Pals, 2002).

Πέραν από τις συμπεριφορικές έρευνες, πρόσφατα κάποιες μεμονωμένες ερευνητικές προσπάθειες επιστράτευσαν νευροεπιστημονικές ερευνητικές μεθόδους προκειμένου να διερευνήσουν τις νευρογνωστικούς μηχανισμούς που διασυνδέονται με τη νοοτροπία (Ng, 2018). Έτσι, κατέστη εφικτή η σκιαγράφηση των γνωστικών διεργασιών που υφέρπουν πίσω από την αποτυχία (Schroder et al., 2017).

Ειδικότερα, οι Schroder et al. (2017) αξιολόγησαν την παρακολούθηση των σφαλμάτων των βιωματικών δυναμικών (error-monitoring event-related potentials - ERPs) ανάμεσα σε 123 παιδιά ηλικίας 5-8 ετών. Βρέθηκε ότι η νοοτροπία ανάπτυξης συσχετίζεται με μεγαλύτερη προσοχή στα λάθη και ψηλότερη ακρίβεια στις απαντήσεις έπειτα από τα λάθη. Για τα παιδιά που δεν έδιναν καθόλου προσοχή στα λάθη τους, εάν είχαν υιοθετήσει νοοτροπία ανάπτυξης τότε είχαν αυξημένη ακρίβεια στις απαντήσεις τους μετά τα λάθη.

Επιπλέον, η έρευνα των Moser, Schroder, Heeter, Moran και Lee (2011) εξέτασε την παρακολούθηση της επίδοσης των βιωματικών δυναμικών (performance-monitoring event-related potentials - ERPs) αμέσως μετά την απάντηση σε ένα έργο πολλαπλής επιλογής από φοιτητές. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η νοοτροπία ανάπτυξης προέβλεπε ψηλότερη ακρίβεια στις απαντήσεις των φοιτητών έπειτα από τα λάθη σε σύγκριση με τη στατική νοοτροπία. Επομένως, συμπεραίνεται ότι στα άτομα με νοοτροπία ανάπτυξης οι νευρωνικοί μηχανισμοί που δείχνουν επίγνωση των λαθών είναι στενά συνδεδεμένοι με την ικανότητα των ατόμων να διορθώνουν τα λάθη τους και να μαθαίνουν από αυτά.

Επιπρόσθετα, οι Mangels, Butterfield, Lamb, Good και Dweck (2006) ζήτησαν από φοιτητές να συμπληρώσουν ένα δύσκολο έργο γενικών γνώσεων και τους παρείχαν ανατροφοδότηση επίδοσης (σωστό ή λάθος) καθώς και ανατροφοδότηση μάθησης (την ορθή απάντηση). Όταν δέχονταν αρνητική ανατροφοδότηση για την επίδοσή τους, οι φοιτητές της σταθερής θεωρίας επεδείκνυαν αυξημένη τιμή του πρόσθιου μετωπικού P3, που σχετίζεται θετικά με την ανάγκη τους για απόδειξη της ικανότητάς τους στους άλλους. Αναφορικά με την ανατροφοδότηση που εισέπρατταν για τη μάθησή τους, οι φοιτητές της σταθερής θεωρίας επέδειξαν λιγότερη παρατεταμένη σημασιολογική επεξεργασία (semantic processing) της ανατροφοδότησης αυτής, γεγονός που αντανακλά ότι εφιστούν λιγότερο την προσοχή τους σε αυτό το είδος ανατροφοδότησης. Όταν σε μεταγενέστερη φάση τους χορηγήθηκε ξανά το αρχικό έργο, τα συγκεκριμένα άτομα προέβηκαν σε μικρότερο βαθμό στη διόρθωση των λαθών τους σε σχέση με τους φοιτητές της αυξητικής θεωρίας.

Μια άλλη πρόσφατη έρευνα των Myers, Wang, Black, Bugescu και Hoeft (2016) εξέτασε 20 μαθητές με μέσο όρο ηλικίας τα 11,5 έτη. Μέσα από την έρευνα, φάνηκε ότι η νοοτροπία ανάπτυξης σχετίζεται με την παρακολούθηση των λαθών. Επομένως, οι μαθητές με νοοτροπία ανάπτυξης μπορούν να παρακολουθούν τα λάθη τους αποτελεσματικά και είναι δεκτικοί στη διορθωτική ανατροφοδότηση.

Αξιολόγηση της Νοοτροπίας. Αναφορικά με την αξιολόγηση της νοοτροπίας, πολλά εργαλεία έχουν μέχρι στιγμής χρησιμοποιηθεί για τον σκοπό αυτό. Παρά όμως την ευρεία απήχηση που έχει η νοοτροπία στα πεδία της ψυχολογίας και της εκπαίδευσης, ελάχιστη είναι η έρευνα σχετικά με τις ψυχομετρικές ιδιότητες των εργαλείων μέτρησης της νοοτροπίας (Midkiff, Langer, Demetriou, & Panter, 2018).

Πρωταρχικά, οι Dweck et al. (1995), δόμησαν ένα ερωτηματολόγιο για τη σταθερή και αυξητική θεωρία της ευφυΐας, που εμπεριείχε μόνο τρεις δηλώσεις σε κλίμακα Likert, καθώς «η λανθάνουσα θεωρία είναι ένας ενιαίος παράγοντας και η επαναλαμβανόμενη αναδιατύπωση της ίδιας ιδέας μπορεί να οδηγήσει τους συμμετέχοντες στη σύγχυση και την ανία» (σ. 269). Οι τρεις δηλώσεις ήταν: (α) Δεν μπορούμε να αλλάξουμε ιδιαίτερα το πόσο έξυπνοι είμαστε, (β) Η εξυπνάδα μας δεν αλλάζει και (γ) Όλοι μπορούμε να μάθουμε, αλλά δεν μπορούμε να αλλάξουμε το πόσο έξυπνοι είμαστε.

Η έρευνά τους παρείχε επίσης δεδομένα από έξι έρευνες εγκυροποίησης, τα οποία δείχνουν υψηλή εσωτερική συνέπεια (α = .94 – .98) καθώς και αξιοπιστία ελέγχου-επανελέγχου σε δυο βδομάδες (r=.80). Επιπλέον, έδειξε ότι ο παράγοντας της θεωρίας της ευφυΐας είναι ανεξάρτητος από το φύλο, την ηλικία, τις πολιτικές πεποιθήσεις και τη θρησκεία των ατόμων. Επίσης, δεν επηρεάζεται από δυνητικές συγχυτικές μεταβλητές (confounding variables), όπως την αυτό-εικόνα, την γνωστική ικανότητα, την αυτοπεποίθηση για τη διανοητική ικανότητα και την προκατάληψη του κοινωνικά αποδεκτού. Επομένως, το συγκεκριμένο εργαλείο φάνηκε να έχει καλή εγκυρότητα απόκλισης (discriminant validity) (Dweck et al., 1995).

Σε μεταγενέστερο στάδιο, η Dweck (1999) σχεδίασε ένα μεγαλύτερο ερωτηματολόγιο αποτελούμενο από 8 δηλώσεις, οι τρεις εκ των οποίων ήταν αυτές που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα των Dweck et al. (1995). Η έρευνα των Midkiff και των συνεργατών του (2018) έχει εξετάσει την εγκυρότητα και αξιοπιστία του ερωτηματολογίου αυτού, διενεργώντας αναλύσεις βασισμένες στη Θεωρία Απόκρισης Ερωτήματος (IRT) με δείγμα φοιτητών κολεγιακού επιπέδου. Οι Midkiff και οι συνεργάτους του (2018) κατέληξαν ότι το μοντέλο που περιλαμβάνει τις 8 δηλώσεις είχε χαμηλό βαθμό προσαρμογής με τα δεδομένα και επέδειξε τοπική εξάρτηση (local dependence) για πολλά ζεύγη μεταβλητών. Επίσης, εξέτασαν ένα μοντέλο που περιλάμβανε μόνο τις 4 δηλώσεις της νοοτροπίας ανάπτυξης, συμπεραίνοντας ότι ούτε το συγκεκριμένο μοντέλο δεν είχε ικανοποιητικό βαθμό προσαρμογής με τα δεδομένα. Ωστόσο, στο μοντέλο με τις 4 δηλώσεις δεν παρατηρήθηκε τοπική εξάρτηση, και ο συντελεστής εσωτερικής συνέπειας Cronbach α ήταν ίσος με .89.

Σε μεταγενέστερη φάση, η Dweck (2006) ανέπτυξε ένα ακόμα μεγαλύτερο ερωτηματολόγιο που απαρτιζόταν από 20 δηλώσεις σε κλίμακα Likert. Οι 14 από αυτές αξιολογούσαν τις πεποιθήσεις σχετικά με τη φύση της ευφυΐας (7 δηλώσεις για τη σταθερή θεωρία της ευφυΐας και 7 δηλώσεις για την αυξητική θεωρία), ενώ οι υπόλοιπες 6 δηλώσεις επικεντρώνονταν στις πεποιθήσεις σχετικά με τη φύση της προσωπικότητας του ατόμου (3 δηλώσεις για τη σταθερή θεωρία της προσωπικότητας και 3 δηλώσεις για την αυξητική θεωρία).

Κουλτούρα

Ένας εξωτερικός παράγοντας του περιβάλλοντος που μπορεί να επηρεάσει τη δημιουργικότητα είναι η κουλτούρα (Seelig, 2012). Η κουλτούρα συνιστά τους τρόπους με τους οποίους μια ομάδα ατόμων αντιλαμβάνονται, ερμηνεύουν, και κατανοούν τον κόσμο γύρω τους και περιλαμβάνει τις συλλογικές πεποιθήσεις, αξίες και συμπεριφορές που διακατέχουν την κοινότητα στην οποία ανήκουν τα άτομα (Seelig, 2012). Επομένως, κάθε άτομο, οικογένεια, σχολείο και οργανισμός συνεισφέρει στην κουλτούρα της κοινότητάς του. Εάν ένας μικρός αριθμός ατόμων αναδιαμορφώσουν τις στάσεις/πεποιθήσεις και συμπεριφορές τους, τότε με την πάροδο του χρόνου αυτές οι ιδέες διαδίδονται στην ευρύτερη κοινότητα και έτσι αλλάζει αυτόματα και η περιρρέουσα κουλτούρα όλης της κοινότητας. Για το λόγο αυτό, η κουλτούρα βρίσκεται ακριβώς έξω από τον παράγοντα των στάσεων/πεποιθήσεων στο θεωρητικό μοντέλο της Seelig (2012) (Διάγραμμα 2.1).

Η κουλτούρα της τάξης επηρεάζει σημαντικά τη δημιουργικότητα (CAIE, 2018; Idris & Nor, 2010), διαποτίζει ολόκληρο το σχολείο και επηρεάζει τον τρόπο σκέψης των μαθητών (Christou, 2017). Η ανάπτυξη καινοτομιών προαπαιτούν την ύπαρξη μιας συλλογικής κουλτούρας που να υποστηρίζει τον πειραματισμό (Seelig, 2012). Ακόμα και ο πειραματισμός που καταλήγει σε αποτυχία παρέχει σημαντικές πληροφορίες, καθότι βοηθά στον αποκλεισμό δρόμων που δεν είναι αποτελεσματικοί (Seelig, 2012). Αρκετοί ερευνητές έχουν προσδιορίσει χρήσιμες διδακτικές πρακτικές που μπορούν να υποστηρίξουν τη διαμόρφωση μιας κουλτούρας που να στοχεύει στην καλλιέργεια της νοοτροπίας ανάπτυξης των μαθητών.

Εκτενέστερα, η άμεση διδασκαλία των μαθητών για την πλαστικότητα και ελαστικότητα του εγκεφάλου μπορεί να τους εδραιώσει τη νοοτροπία ανάπτυξης (Aronson, Fried, & Good, 2002; Blackwell, Trzesniewski, & Dweck, 2007; Dweck, 2008; Ng, 2018; Good, Aronson, & Inzlicht, 2003; Paunesku et al., 2015; Yeager, Trzesniewski, & Dweck, 2013). Η πλαστικότητα του εγκεφάλου έχει πλέον τεκμηριωθεί εμπειρικά μέσα από νευροεπιστημονικές έρευνες (Boaler, 2015) και αναφέρεται στην ικανότητα του εγκεφάλου να εξελίσσεται και να μεγαλώνει με την πάροδο του χρόνου (Boaler, 2015; Ng, 2018). Μέχρι στιγμής, μια σειρά παρεμβάσεων επεδίωξαν την εγκαθίδρυση της νοοτροπίας ανάπτυξης στους μαθητές, διδάσκοντας στους μαθητές στοιχεία σχετικά με τη δομή και τη λειτουργία του εγκεφάλου. Συγκεκριμένα, παρουσιάζονται ερευνητικά αποτελέσματα και εποπτικό υλικό που δείχνουν ότι όταν μαθαίνει κανείς μια νέα ιδέα εις βάθος, στον εγκέφαλο αναπτύσσονται νέες και ισχυρές συνάψεις. Έτσι, μεταλαμπάδευσαν στους μαθητές το μήνυμα ότι ο εγκέφαλος μοιάζει με ένα μυ που ενδυναμώνεται και λειτουργεί πιο αποτελεσματικά μέσα από την εξάσκηση και την προσπάθεια (Aronson et al., 2002; Blackwell et al., 2007; Dweck, 2008; Good et al., 2003; Paunesku et al., 2015; Yeager et al., 2013).

Επιπλέον, η Boaler (2015) απαρίθμησε τις εξής κατάλληλες διδακτικές στρατηγικές: (α) ενθάρρυνση όλων των μαθητών, (β) παροχή βοήθειας και επαίνου που προσηλώνεται στην προσπάθεια, (γ) απόδοση αξίας στην αποτυχία, (δ) εμπιστοσύνη στις ικανότητες όλων των μαθητών και (ε) διδασκαλία των μαθηματικών ως ένα ανοικτό, διερευνητικό και αναπτυσσόμενο μάθημα.

Αναφορικά με την ενθάρρυνση όλων των μαθητών, η Boaler (2015) παραθέτει μια σειρά από νόρμες που χρειάζεται να εγκαθιδρύουν οι εκπαιδευτικοί στην τάξη των μαθηματικών: (1) κάθε μαθητής μπορεί να μάθει μαθηματικά σε ψηλό επίπεδο, (2) τα λάθη είναι χρήσιμα, (3) οι ερωτήσεις είναι σημαντικές, (4) τα μαθηματικά σχετίζονται με τη δημιουργικότητα και την κατανόηση, (5) τα μαθηματικά σχετίζονται με τη δημιουργία συνδέσεων και την επικοινωνία, (6) η εμβάθυνση είναι πιο σημαντική από την ταχύτητα, (7) τα μαθηματικά αφορούν στη μάθηση και όχι την επίδοση.

Σχετικά με τον έπαινο που επικεντρώνεται στην προσπάθεια των μαθητών, περιλαμβάνει ανατροφοδότηση σχετικά με τις στρατηγικές, την προσπάθεια, την επιμονή, τη βελτίωση και την αναζήτηση προκλήσεων από τον μαθητή. Αντίθετα, ο έπαινος που εστιάζει στα χαρακτηριστικά του ατόμου μεταθέτει το βάρος στα ταλέντα και τις ικανότητες του μαθητή (Kamins, & Dweck, 1999). Έξι πειραματικές έρευνες των Mueller και Dweck (1998) κατέδειξαν ότι όταν οι μαθητές επαινούνταν για την ευφυΐα τους ενδιαφέρονταν περισσότερο για στόχους επίδοσης παρά μάθησης. Επίσης, κατά την αντιμετώπιση μιας αποτυχίας, έτειναν να την αποδίδουν σε ελλιπή ευφυΐα, είχαν χαμηλότερη επίδοση και επεδείκνυαν λιγότερη επιμονή στην επίλυση του έργου σε σύγκριση με τα παιδιά που επαινούνταν για την προσπάθειά τους. Τέλος, προσανατολίστηκαν περισσότερο προς την αυξητική θεωρία της ευφυΐας, περιγράφοντας την ευφυΐα ως ένα σταθερό γνώρισμα. Επίσης, η έρευνα των Kamins και Dweck (1999) βρήκε ότι όταν τα παιδιά είχαν δεχτεί ανατροφοδότηση που επικεντρωνόταν στο άτομό τους (ακόμα κι αν αυτή ήταν θετική), διακατέχονταν εντονότερα από αισθήματα ανικανότητας και κατωτερότητας, τα οποία συνδέονται με τη στατική νοοτροπία.

Η απόδοση αξίας στην αποτυχία συνδέεται πρώτον με την εμπέδωση της πεποίθησης ότι οι αποτυχίες είναι σημαντικές (Boaler, 2015). Είναι σημαντικό να αντιληφθούν ότι μέσα στην τάξη δε δίνεται αξία στις εύκολες επιτυχίες αλλά στη σκληρή δουλειά, την αναζήτηση προκλήσεων, και τη μάθηση από τα λάθη (Dweck, 2008). Η κουλτούρα της «μιας ορθής απάντησης» αποτρέπει τους μαθητές από το να είναι πρόθυμοι να κάνουν και λάθη, αλλά τους υποχρεώνει να μάθουν να μαντεύουν την απάντηση που έχει στο κεφάλι του ο εκπαιδευτικός (CAIE, 2018). Επιπλέον, συνδέεται με την παροχή προκλήσεων στους μαθητές (Boaler, 2015), ένα συστατικό της διδασκαλίας που μπορεί να προωθήσει την κουλτούρα της νοοτροπίας ανάπτυξης (Dweck, 2008; Dweck et al., 2014). Ενδείκνυται οι μαθητές να εργάζονται σε περίπλοκα έργα και να λαμβάνουν ρίσκα, δίνοντάς τους έτσι ευκαιρίες για ανάπτυξη του εγκεφάλου τους (Boaler, 2015). Δυο επιμέρους διδακτικές πρακτικές προς την κατεύθυνση αυτή είναι: ο καθορισμός υψηλών μαθησιακών προσδοκιών καθώς και ο καθορισμός στόχων που λειτουργούν ενθαρρυντικά για τους μαθητές και να εκλαμβάνονται από αυτούς ως υλοποιήσιμοι (Dweck et al., 2014).

Μια άλλη χρήσιμη διδακτική πρακτική για τη διαμόρφωση μιας κουλτούρας που να στοχεύει στην καλλιέργεια της νοοτροπίας ανάπτυξης είναι η διδασκαλία των μαθηματικών ως ένα ανοικτό, διερευνητικό και αναπτυσσόμενο μάθημα. Σύμφωνα με τον Sanders (2016), είναι σημαντική η αξιοποίηση πλούσιων μαθηματικών έργων, που παρέχουν την ευκαιρία για συζητήσεις στην ολομέλεια, επικοινωνία των μαθηματικών ιδεών, αιτιολόγηση του συλλογισμού τους (Sharma, 2015), ενθάρρυνση της δημιουργικότητας (Sullivan, 2011). Συγχρόνως, για την υλοποίηση της εν λόγω διδακτικής πρακτικής, η Boaler (2015) διατύπωσε ορισμένες επιμέρους εισηγήσεις: να ενθαρρύνονται οι μαθητές να εργάζονται ως μικροί Μαθηματικοί, να δίνεται έμφαση στα μοτίβα και στην εξερεύνηση και εντοπισμό συνδέσεων μεταξύ εννοιών, αναπαραστάσεων, μεθόδων, να καλλιεργείται η δημιουργική σκέψη των μαθητών, να ενθαρρύνεται η διαίσθηση και η ελευθερία σκέψης, να επιβραβεύεται το βάθος σκέψης παρά η ταχύτητα, να γίνεται σύνδεση των μαθηματικών με τον πραγματικό κόσμο μέσω της μαθηματικής μοντελοποίησης, να δίνεται έμφαση στη διατύπωση ερωτήσεων, τον συλλογισμό και την τεκμηρίωση από τους μαθητές, να ενσωματώνεται η χρήση τεχνολογίας και εποπτικών μέσων. Περαιτέρω συζήτηση για τη χρήση τεχνολογίας ακολουθεί στην επόμενη ενότητα.

Πηγές

Οι πηγές είναι ένας ακόμη παράγοντας του εξωτερικού κόσμου που επηρεάζει τη δημιουργικότητα του ατόμου και περιλαμβάνουν όλα τα στοιχεία που έχει το άτομο στη διάθεσή του στο περιβάλλον του (Seelig, 2012). Στο περιβάλλον συγκαταλέγονται μεταξύ άλλων οι διδακτικές παρεμβάσεις που οργανώνει ο εκπαιδευτικός για καλλιέργεια της μαθηματικής δημιουργικότητας, ο χρόνος, τα υλικά, οι δραστηριότητες που επιλέγονται, η ενσωμάτωση τεχνολογίας, η εφαρμογή συνεργατικής μάθησης, οι μέθοδοι αξιολόγησης (Christou, 2017; Κάττου, 2013). Κάποιες από τις πηγές του περιβάλλοντος είναι εύκολα προσβάσιμες ενώ άλλες απαιτούν φυσική ή νοητική προσπάθεια. Επαφίεται στο κάθε άτομο ξεχωριστά να αναδιοργανώσει τις πηγές και να τις αξιοποιήσει αποτελεσματικά (Seelig, 2012). Οι γνώσεις του ατόμου του επιτρέπουν να αξιοποιήσει τις πηγές του περιβάλλοντός του, και αντίστροφα, οι πηγές που έχει στο περιβάλλον του το άτομο επιδρούν στις γνώσεις του ατόμου (Seelig, 2012). Η αμφίδρομη σχέση που διέπει τις πηγές και τις γνώσεις, φαίνεται και στη διαγραμματική αναπαράσταση του θεωρητικού μοντέλου, όπου οι πηγές βρίσκονται ακριβώς παράλληλα με τις γνώσεις (Διάγραμμα 2.1) (Seelig, 2012).

Η δημιουργικότητα είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με το περιβάλλον στο οποίο λαμβάνει χώρα, κάτι που αναφύεται μέσα από ορισμούς της δημιουργικότητας που έχουν προταθεί από την ερευνητική κοινότητα. Για παράδειγμα, η θεωρία του Rhodes (1961) για τα 4 Ps αναφέρθηκε στο περιβάλλον (press) εντός του οποίου παράγονται οι δημιουργικές ιδέες, ως μια από τις τέσσερις διαστάσεις που απαρτίζουν τη δημιουργικότητα. Επιπλέον, οι Plucker, Beghetto και Dow (2004) ορίζουν τη δημιουργικότητα ως «την αλληλεπίδραση ανάμεσα στην ικανότητα, τη διαδικασία και το περιβάλλον μέσω των οποίων το άτομο ή η ομάδα παράγει ένα προϊόν που είναι καινοτόμο και χρήσιμο όπως ορίζεται εντός του κοινωνικού πλαισίου (σ. 90). Ο Kampylis και οι συνεργάτες του (2009) αναφέρονται στη δημιουργικότητα ως «τη δραστηριότητα (νοητική και φυσική) που εκτυλίσσεται σε ένα χωροχρονικό πλαίσιο, κοινωνικό και πολιτισμικό συγκείμενο και οδηγεί σε απτά προϊόντα που είναι πρωτότυπα, χρήσιμα, ηθικά κι επιθυμητά από το δημιουργό» (σ. 18).

Βέβαια, το ποια μαθησιακά περιβάλλοντα είναι πιο αποτελεσματικά για την ενίσχυση της μαθηματικής δημιουργικότητας είναι ένα σημαντικό και πιεστικό ερώτημα που παραμένει ακόμη ανοικτό (Goldin, 2017; Κάττου, 2013; Pitta-Pantazi, 2017; Pitta-Pantazi et al., 2018; Sharma, 2014). Ο Goldin (2017) προτείνει ορισμένα πιο ειδικά ερωτήματα που ζητούν απάντηση: Σε ποιες μαθηματικές έννοιες και με ποια σειρά πρέπει να εστιάζουν τα μαθησιακά περιβάλλοντα; Ποιες δραστηριότητες μπορούν να υποστηρίξουν τη μαθηματική δημιουργικότητα; Ποιες κοινωνικοπολιτισμικές νόρμες είναι αποτελεσματικές και μπορούν να εγκαθιδρυθούν στην τάξη; Την ίδια στιγμή, η Pitta-Pantazi (2017) επισημαίνει ότι η χρήση τεχνολογικών εργαλείων πρέπει να παίζει σημαντικό ρόλο στην διερεύνηση των αποτελεσματικών τρόπων ανάπτυξης της μαθηματικής δημιουργικότητας. Ακολούθως, γίνεται συζήτηση της υφιστάμενης βιβλιογραφίας αναφορικά με τις διδακτικές πρακτικές που θεωρούνται αποτελεσματικές για την ανάπτυξη της δημιουργικότητας στα μαθηματικά, τις δημιουργικές δραστηριότητες στα μαθηματικά και την ενσωμάτωση της τεχνολογίας για την προώθηση της μαθηματικής δημιουργικότητας.

Διδακτικές Πρακτικές Καλλιέργειας της Μαθηματικής Δημιουργικότητας. Ο εκπαιδευτικός διαδραματίζει κρίσιμο ρόλο στην προώθηση της μαθηματικής δημιουργικότητας (Levenson, 2011; Mrayyan, 2016). Ακόμα κι αν το άτομο κατέχει όλες τις εσωτερικές πηγές για να σκεφτεί δημιουργικά, δε μπορεί να εκδηλώσει δημιουργική σκέψη χωρίς την υποστήριξη και την ενθάρρυνση των δημιουργικών ιδεών (Sternberg, 2012). Πρωταρχικά, ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να προβαίνει στην επιλογή κατάλληλων δραστηριοτήτων που ευνοούν την εμφάνιση της μαθηματικής δημιουργικότητας (Levenson, 2011; Sheffield, 2006; Vale & Barbosa, 2015). Οι δραστηριότητες που έχουν τη δυνατότητα να διεγείρουν τη μαθηματική δημιουργικότητα των μαθητών περιγράφονται αναλυτικά στην επόμενη υπο-ενότητα της ενότητας με τίτλο «Πηγές».

Όμως, οι δραστηριότητες από μόνες τους δεν είναι αρκετές για να προωθηθεί η μαθηματική δημιουργικότητα (Levenson, 2013). Ο εκπαιδευτικός πρέπει όταν εφαρμόζει τις δραστηριότητες να προσπαθεί «να αξιοποιεί όλες τις δυνατότητες που προσφέρει η δραστηριότητα» για την ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας, μέσα από μια «διερευνητική διδασκαλία όπου ο εκπαιδευτικός θα προωθεί τις συνθήκες ώστε οι μαθητές να ανακαλύπτουν και να οικοδομούν οι ίδιοι τη γνώση» (Vale & Barbosa, 2015, σ. 103). Κατά την εφαρμογή των δραστηριοτήτων, ο εκπαιδευτικός πρέπει επίσης να επιδιώκει ώστε να μη μειώνονται οι γνωστικές απαιτήσεις των έργων (Henningsen & Stein, 1997).

Επιπλέον, μια ανοικτή και ελεύθερη ατμόσφαιρα μάθησης που ενθαρρύνει και δίνει έμφαση στην καινοτομία μπορεί να διευκολύνει την ανάπτυξη της φαντασίας και την ικανότητα εμπλοκής σε δημιουργική έκφραση (Ho et al., 2013). Συνεπώς, ο ρόλος του εκπαιδευτικού εμπερικλείει τη διαμόρφωση ενός ασφαλούς περιβάλλοντος, όπου οι μαθητές μπορούν να ανατρέψουν τις νόρμες χωρίς να φοβούνται τις επιπτώσεις (Levenson, 2011). Ο εκπαιδευτικός πρέπει να παροτρύνει τους μαθητές να γίνουν αυτόνομοι στη μάθησή τους, ώστε να σκέφτονται κριτικά και να λαμβάνουν αποφάσεις (Sheffield, 2006) και να ενθαρρύνει τη λήψη ρίσκου και την περιέργεια (Mann, 2006). Πρέπει να βλέπει τα λάθη ως ευκαιρίες μάθησης (CAIE, 2018). Πρέπει να επιτρέπει στους μαθητές τα αδιέξοδα και τις παραγωγικές αποτυχίες και να τους υποστηρίζει να παίρνουν πρωτοβουλίες που ενισχύουν τα στάδια της προετοιμασίας και της επώασης (Savic, 2016).

Παράλληλα, ο εκπαιδευτικός πρέπει να δίνει αξία και επιβράβευση στη δημιουργικότητα και την καινοτομία (CAIE, 2018; Sternberg & Lubart, 1995) και να παροτρύνει τους μαθητές να ψάχνουν πολλές και διαφορετικές λύσεις (CAIE, 2018; Presmeg, 2003) και να βρίσκουν το μέγιστο εύρος πιθανών εναλλακτικών απαντήσεων (Mrayyan, 2016). Πρέπει να είναι δεκτικός σε όλες τις ιδέες των μαθητών (Mrayyan, 2016), να σέβεται τις ασυνήθιστες και «τρελές» ιδέες ή εναλλακτικές λύσεις (Vidal, 2005). Τέλος, πρέπει να ενθαρρύνει την ελεύθερη έκφραση δημιουργικών ιδεών (Tran et al., 2017), καθώς η ανάπτυξη των επικοινωνιακών δεξιοτήτων των μαθητών στα μαθηματικά είναι απαραίτητη για την αναγνώριση της μαθηματικής δημιουργικότητας (Mann, 2006).

Συγχρόνως, μια άλλη διάσταση του ρόλου του εκπαιδευτικού είναι ο καθορισμός του ρυθμού εργασίας των μαθητών, επιτρέποντας στους μαθητές να παραμείνουν για κάποιο χρονικό διάστημα στο στάδιο της επώασης (Levenson, 2011). Επίσης, πρέπει να εστιάζει κυρίως στο βάθος και όχι τόσο στο πλάτος (CAIE, 2018). Θα πρέπει να δίνει στους μαθητές και αρκετό χρόνο για να αναστοχαστούν και να λύσουν τα προβλήματα σε ατομικό επίπεδο, να εξερευνήσουν και να ανακαλύψουν στην ομάδα τους, (Sheffield, 2006), αλλά και για να εκφράσουν τις ιδέες τους (Mrayyan, 2016).

Αναφορικά με τις διδακτικές πρακτικές του εκπαιδευτικού, στη βιβλιογραφία υπάρχουν διάφορες διδακτικές τεχνικές που μπορούν να επιστρατευθούν για την καλλιέργεια της δημιουργικότητας και που μπορούν να καταστήσουν τη μάθηση πιο αποτελεσματική και τη διδασκαλία πιο ενδιαφέρουσα (Egan & Judson, 2016). To Cambridge Assessment International Education σκιαγράφησε ένα σύνολο δεξιοτήτων που πρέπει να αναπτύξει και να εφαρμόζει ένας δημιουργικός μαθητής: (α) να αποσαφηνίζει, αναλύει και επαναπροσδιορίζει ένα πρόβλημα ή μια ερώτηση για να ανακαλύψει νέους τρόπους προσέγγισής του, (β) να διατυπώνει κατάλληλες ερωτήσεις, (γ) να εντοπίζει συνδέσεις, (δ) να αλλάζει προϋπάρχουσες παραδοχές, (ε) να αναγνωρίζει εναλλακτικές πιθανές επιλογές, (στ) να βλέπει τα πράγματα από διαφορετικές προοπτικές (CAIE, 2018).

Έχοντας ως κατευθυντήρια αρχή τις πιο πάνω δεξιότητες, προκύπτουν οι εξής διδακτικές πρακτικές, που έχουν προταθεί από την ερευνητική κοινότητα ως μέσα ενίσχυσης της μαθηματικής δημιουργικότητας: σχεδιασμός και επανασχεδιασμός προβλημάτων (Voica & Singer, 2013; Seelig, 2012; Silver, 1997; Singer & Voica, 2015), διατύπωση κατάλληλων ερωτήσεων (Aiken, 1973; Assmus & Fritzlar, 2018; Haylock, 1997; Jensen, 1973; Johnsen & Sheffield, 2012; NCTM, 2000; Pound & Lee, 2015;

Sheffield, 2009; Silver, 1997; Sriraman, 2005), συνδυασμός και σύνδεση ιδεών (Krajcik & Blumenfeld, 2006; Pound & Lee, 2015; Seelig, 2012; Vale & Barbosa, n.d.), αλλαγή παραδοχών κατά τη λύση προβλήματος (Barron, 1988; Higgins, 1994; Seelig, 2012; Vale & Barbosa, n.d.), αναπαράσταση ιδεών και αλλαγή προοπτικών για κατανόηση (Higgins, 1994; Pound & Lee, 2015; Silver, 1997), επέκταση μαθηματικών προβλημάτων (Singer & Voica, 2015). Το Διάγραμμα 2.5 απεικονίζει τις διδακτικές αυτές πρακτικές.

Διάγραμμα 2.5. Διδακτικές πρακτικές ανάπτυξης της δημιουργικότητας στα μαθηματικά.

Σχεδιασμός και Επανασχεδιασμός Προβλημάτων. Η επίλυση ενός προβλήματος από μόνη της δεν είναι αρκετή, αλλά χρειάζεται και ο σχεδιασμός νέων προβλημάτων και διερευνήσεων (Sheffield, 2006). Ο σχεδιασμός προβλήματος αναφέρεται τόσο στη διατύπωση νέων προβλημάτων όσο και στην ανα-διατύπωση ή τροποποίηση υφιστάμενων προβλημάτων (Silver, 1994). Ο σχεδιασμός προβλήματος έχει υποδειχθεί ως ένα θέμα καταλυτικής σημασίας στο πεδίο των μαθηματικών και για τη μαθηματική σκέψη (Christou, Mousoulides, Pittalis, Pitta-Pantazi, & Sriraman, 2005; Silver, 1994; Silver, Mamona-Downs, Leung, & Kenney, 1996), αποτελώντας αναπόσπαστο κομμάτι της μαθηματικής δραστηριότητας (Brown & Walter, 1993; Singer, Ellerton, & Cai, 2013) και της μαθηματικής εξερεύνησης (Cai & Hwang, 2002). Μάλιστα, η διατύπωση ενός ενδιαφέροντος προβλήματος θεωρείται πιο σημαντική και από την επίλυσή του (Csikszentmihalyi, 1994; Einstein & Infeld, 1938). Ο σχεδιασμός ενός προβλήματος αποτελεί μια ισχυρή στρατηγική βελτίωσης της ικανότητας λύσης προβλήματος (Vale et al., 2012).

Τα μαθησιακά περιβάλλοντα που δίνουν ευκαιρίες για σχεδιασμό προβλήματος εμπλέκουν τους μαθητές σε πλούσιες μαθησιακές εξερευνήσεις, αυξάνουν τα κίνητρά τους και τους ενθαρρύνουν να διερευνούν, να λαμβάνουν αποφάσεις, να κάνουν γενικεύσεις, να ψάχνουν μοτίβα και συνδέσεις (Vale & Barbosa, 2015). Οι μαθητές μπορούν να συσχετίσουν το πρόβλημα με άλλα προβλήματα που έχουν λύσει, να διερευνήσουν το πρόβλημα χρησιμοποιώντας ποικιλία στρατηγικών και μοντέλων, να σκεφτούν εις βάθος και να θέσουν ερωτήσεις (Sheffield, 2018). Παράλληλα, μπορούν να επικοινωνήσουν τα αποτελέσματά τους και να βελτιώσουν τις λύσεις τους (Sheffield, 2018), να αξιολογήσουν πολλές προσεγγίσεις που έχουν αναπτυχθεί και παρουσιαστεί από τους συμμαθητές τους (Singer, Ellerton, & Cai, 2013), να εντοπίσουν νέες μεθόδους λύσης και νέες ερωτήσεις προς εξερεύνηση (Sheffield, 2018; Vale & Barbosa, 2015). Δεδομένου ότι ενσωματώνει ρεαλιστικά σενάρια, μπορεί να χρησιμοποιηθεί από τους εκπαιδευτικούς για να διδάξουν στους μαθητές τη σχέση των μαθηματικών με καθημερινές δραστηριότητες (Kopparla et al., 2018). Τέλος, οι μαθητές ενθαρρύνονται να είναι αυτόνομοι στη μάθησή τους και έχουν ευθύνη για τη διατύπωση και την επίλυση των προβλημάτων ανάλογη με αυτή του εκπαιδευτικού (Silver, 1994).

Ο σχεδιασμός προβλήματος μπορεί να λειτουργήσει ως ένα μέσο ενεργοποίησης και βελτίωσης της δημιουργικότητας στα μαθηματικά, περισσότερο και από τη λύση προβλήματος (Brown & Walter, 1993; Jay & Perkins, 1997; Silver, Kilpatrick, & Schlesinger, 1990; Singer, Ellerton, Cai, & Leung, 2011). Η διερευνητική διδασκαλία που εμπλέκει ευκαιρίες λύσης και σχεδιασμού προβλήματος μπορεί να καλλιεργήσει μια πιο δημιουργική στάση των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά αλλά και να συμβάλει στην ενίσχυση της ευχέρειας, της ευελιξίας και των δημιουργικών προσεγγίσεων των μαθητών στα μαθηματικά (Silver, 1997). Επίσης, ο σχεδιασμός προβλήματος αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο βελτίωσης της φαντασίας (Seelig, 2012). Μπορεί να ξεκλειδώσει μια τεράστια σειρά από λύσεις, ανοίγει τον δρόμο για καινοτόμα εγχειρήματα και επιτρέπει να δει κανείς τον κόσμο κάτω από ένα ολοκαίνουριο φως (Seelig, 2012).

Από την άλλη, ορισμένοι ερευνητές εκφράζουν αμφιβολίες για τη διασύνδεση της δημιουργικότητας και του σχεδιασμού προβλήματος (Singer & Voica, 2015). Για παράδειγμα, οι Yuan και Sriraman (2011) κατέληξαν ότι «μπορεί να μην υπάρχουν σταθερές συσχετίσεις ανάμεσα στη δημιουργικότητα και τις ικανότητες των μαθητών στον σχεδιασμό προβλήματος ή τουλάχιστον οι συσχετίσεις που υπάρχουν είναι πολύπλοκες» (Yuan & Sriraman, 2011, σ. 25). Την ίδια στιγμή, ο Haylock (1997) διαπίστωσε ότι δεν υπάρχει μια ξεκάθαρη σχέση ανάμεσα στην ικανότητα σχεδιασμού προβλήματος και στη μαθηματική δημιουργικότητα. Συγκεκριμένα, «μαθητές που επέδειξαν υψηλές επιδόσεις σε έργα σχεδιασμού προβλήματος ανήκαν συνήθως στην ομάδα με τις ψηλές μαθηματικές επιδόσεις, αλλά ακόμα και σε αυτή την ομάδα υπήρχαν μαθητές με πολύ χαμηλά επίπεδα δημιουργικής σκέψης στα μαθηματικά» (Haylock, 1997, σ. 73). Επομένως, οι Singer και Voica (2015) συνήγαγαν το συμπέρασμα ότι οποιαδήποτε σχέση ανάμεσα στη δημιουργικότητα και τον σχεδιασμό προβλήματος ενδεχομένως να είναι αποτέλεσμα των προηγούμενων διδακτικών μοτίβων που εφαρμόστηκαν στην τάξη.

Σε εμπειρικό επίπεδο, αρκετοί ερευνητές ανέπτυξαν διδακτικά πειράματα βασισμένα στη διδακτική πρακτική του σχεδιασμού προβλήματος, τα οποία έδωσαν στους μαθητές την ευκαιρία να ενδυναμώσουν την ευχέρεια τους, που αποτελεί ένα βασικό γνώρισμα της δημιουργικότητας (Silver, 1997). Συγκεκριμένα, ο Van den Brink (1987) παρουσίασε ένα πείραμα με μαθητές πρώτης δημοτικού όπου οι μαθητές κλήθηκαν να συγγράψουν ένα βιβλίο αριθμητικής. Παρεμφερής ήταν και η προσέγγιση του Healy (1993), την οποία ονόμασε «Build-a-book» και την εφάρμοσε σε μαθητές Μέσης εκπαίδευσης κατά τη διδασκαλία της γεωμετρίας. Η έρευνα του Skinner (1991) ενέπλεξε μαθητές δημοτικού σε δραστηριότητες σχεδιασμού προβλήματος, ενώ τα προβλήματα που διατύπωσαν οι μαθητές αποτέλεσαν στη συνέχεια τη βάση για επίλυση προβλήματος. Παράλληλα, στην έρευνα της English (1997) οι δραστηριότητες κατασκευής προβλήματος που εφαρμόστηκαν ενθάρρυναν τους μαθητές να έχουν δημιουργική, ευέλικτη και αποκλίνουσα σκέψη και να βλέπουν πέρα από το βασικό νόημα των μαθηματικών.

Ως εκ τούτου, ο σχεδιασμός προβλήματος χρειάζεται να ενσωματωθεί στα εκπαιδευτικά συστήματα ανά τον κόσμο, αφενός ως μέσο διδασκαλίας (δηλαδή να εμπλέκει τους μαθητές σε αυθεντικές δραστηριότητες που προάγουν την εις βάθος κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών) και αφετέρου ως αντικείμενο διδασκαλίας (δηλαδή να αναπτύσσει την ικανότητα των μαθητών στην αναγνώριση και διατύπωση προβλημάτων από αδόμητες καταστάσεις) (Singer, Ellerton, & Cai, 2013).

Η συγκεκριμένη διδακτική πρακτική προαπαιτεί προσπάθεια, προσοχή και εξάσκηση. Η εξάσκηση στον επανασχεδιασμό προβλημάτων μπορεί να επιτευχθεί βλέποντας μέσα από διαφορετικές οπτικές γωνίες ή ρωτώντας ερωτήσεις του «γιατί» (Seelig, 2012). Μια σχετική προσέγγιση που ανέπτυξαν οι Brown και Walter (1983) και μπορεί να ενδυναμώσει την ευελιξία των μαθητών και να υποστηρίξει μια πιο δημιουργική διάθεση απέναντι στη μαθηματική δραστηριότητα, είναι αυτή του «τι κι αν;» (Silver, 1997). Οι ερωτήσεις του «τι κι αν» μπορούν να συμβάλουν στην ανάπτυξη της φαντασίας των μαθητών (Tran et al., 2017). Η εν λόγω προσέγγιση ενθαρρύνει τους μαθητές να διατυπώσουν νέα προβλήματα με βάση ένα πρόβλημα που έχουν επιλύσει προηγουμένως, μεταβάλλοντας τους στόχους ή τις συνθήκες του αρχικού προβλήματος (Silver, 1997).

Συνδυασμός και Σύνδεση Μαθηματικών Ιδεών. Η δημιουργία συνδέσεων βασίζεται στην ικανότητα του ατόμου να σκέφτεται ευέλικτα, η οποία πηγάζει από την εμπειρία του να συνδυάζει κανείς ανόμοια πράγματα ή ιδέες μεταξύ τους είτε φυσικά είτε νοερά (Pound & Lee, 2015). Η ικανότητα σύνδεσης και συνδυασμού μη προφανών ιδεών και αντικειμένων είναι απαραίτητη για την καινοτομία και τη διαδικασία της δημιουργικής σκέψης (Seelig, 2012). Αποτελεί την ουσία της δημιουργικότητας (Pound & Lee, 2015) και έχει αναγνωριστεί ως ένα χαρακτηριστικό της δημιουργικότητας (Hermann, 1996; Vale & Barbosa, n.d.). Την ίδια στιγμή, ο Koestler (1964) περιγράφει τη δημιουργική διαδικασία ως μια συνεχή, πειραματική διαδικασία δημιουργίας νέων συνδέσεων ανάμεσα σε προϋπάρχουσες ιδέες, οι οποίες χαρακτηρίζονται ως μήτρες σκέψης, και αποβλέπουν στην εξαγωγή νέων ιδεών.

Συγχρόνως, η δημιουργία συνδέσεων είναι ένας τρόπος κατανόησης και εφαρμογής της φαντασίας (Macknight, 2009), αφού η δημιουργική φαντασία αναφέρεται στη δημιουργία συνδέσεων για τη διαμόρφωση νέων εικόνων (Ho et al., 2013; Vygotsky, 2004). Επίσης, η διασύνδεση ιδεών μπορεί να δώσει τεράστια ώθηση στη φαντασία και να ξεκλειδώσει την ικανότητα του ατόμου για καινοτομίες, καθώς επίσης να οδηγήσει σε εμπειρίες «Aha!», οι οποίες είναι ιδιαίτερα ευχάριστες για το άτομο (Seelig, 2012). Όταν ο μαθητής διασυνδέει νέες και ήδη γνωστές του έννοιες, επεξεργάζεται τις γνωστές του έννοιες ή αναπτύσσει αφηρημένες ιδέες, τότε ενεργοποιεί την φαντασία του (Lev-Zamir & Leikin, 2011) και αναπτύσσει πιο στενά συνδεδεμένη εννοιολογική κατανόηση (Krajcik & Blumenfeld, 2006).

Για τον λόγο αυτό, το NCTM (2000) τονίζει πως είναι σημαντικό να δίνεται βαρύτητα στη δημιουργία συνδέσεων από το νηπιαγωγείο ως το λύκειο. Συγκεκριμένα, πρέπει να δίνονται ευκαιρίες (α) να αναγνωρίζουν και να χρησιμοποιούν συνδέσεις μεταξύ μαθηματικών ιδεών, (β) να κατανοούν πώς οι μαθηματικές ιδέες διασυνδέονται και κτίζουν η μια πάνω στην άλλη και (γ) να αναγνωρίζουν και να εφαρμόζουν μαθηματικές ιδέες σε διαφορετικά συγκείμενα πέραν των μαθηματικών.

Ειδικότερα, για να καλλιεργηθεί η δημιουργική σκέψη των μαθητών ο εκπαιδευτικός πρέπει να επιστρατεύει διδακτικά έργα που να καλούν τους μαθητές να ανακαλύπτουν σχέσεις και μοτίβα και να κάνουν νέες και ασυνήθιστες διασυνδέσεις

(CAIE, 2018; Ofsted, 2010 στο Pound & Lee, 2015; QCDA στο Pound & Lee, 2015). Επίσης, πρέπει να τους παροτρύνει να εξερευνούν ιδέες, αλλά και να προωθεί και να ανταμείβει την φαντασία και την πρωτοτυπία (Ofsted, 2010 στο Pound & Lee, 2015).

Ένα ευέλικτο και ισχυρό διδακτικό εργαλείο που επιτρέπει την αναπαράσταση πληροφοριών και την καλλιέργεια της δημιουργικής σκέψης είναι ο εννοιολογικός χάρτης (CAIE, 2018), ο οποίος έχει αναπτυχθεί ως εργαλείο από τον Tony Buzan στη δεκαετία του 1970. Η διαδικασία οικοδόμησης εννοιολογικών χαρτών απαιτεί από τους μαθητές να σκεφτούν τι έχουν μάθει και να αναπτύξουν νέες συνδέσεις. Οι εννοιολογικοί χάρτες μπορούν να αξιοποιηθούν με ποικίλους τρόπους όπως οι εξής: αναλύοντας και επαναπροσδιορίζοντας προβλήματα ή ερωτήσεις που βοηθά τους μαθητές να ανακαλύψουν νέες προοπτικές και να φτάσουν σε πιο ψηλά επίπεδα σκέψης ή κάνοντας συνδέσεις μεταξύ ιδεών (CAIE, 2018).

Παράλληλα, ένας κατάλληλος τρόπος για τη δημιουργία συνδέσεων είναι η χρήση αναλογιών, καθώς οδηγούν σε διαφορετικούς τρόπους για να δει κανείς ένα πρόβλημα (Seelig, 2012). Η αναλογία είναι η σύγκριση δυο αντικειμένων που είναι ουσιαστικά ανόμοια, αλλά φαίνεται μέσα από την αναλογία ότι έχουν κάποια ομοιότητα (Higgins, 1994; Vidal, 2005). Μια διδακτική στρατηγική που βασίζεται σε μεγάλο βαθμό στις αναλογίες είναι η μέθοδος της συνεκτικής (synectics) (Higgins, 1994), η οποία έχει σχεδιαστεί από τον Gordon (1961). Η εν λόγω στρατηγική βοηθά την φαντασία του ατόμου να εντοπίσει σχέσεις ανάμεσα σε εκ πρώτης όψεως ασύνδετα στοιχεία, ιδέες κτλ. (Higgins, 1994). Ο σκοπός της είναι διφυής: να μάθει κανείς (το παράξενο να το κάνει οικείο) και να καινοτομήσει (το οικείο να το κάνει παράξενο). Η στρατηγική αυτή είναι εδραιωμένη πάνω σε τρεις θεμελιακές παραδοχές: (α) η δημιουργικότητα είναι ένα λανθάνον χαρακτηριστικό που ο καθένας κατέχει σε κάποιο βαθμό, (β) σχετίζεται πιο στενά με τον συναισθηματικό και εξωλογικό κόσμο παρά με τον διανοητικό και λογικό και (γ) αυτά τα συναισθηματικά στοιχεία μπορούν να αξιοποιηθούν μέσα από την εξάσκηση και την πρακτική (Higgins, 1994).

Η διαδικασία αυτή χρησιμοποιεί συνήθως επτά άτομα: τον κάτοχο του προβλήματος, έναν καθοδηγητή/διευκολυντή και άλλα πέντε μέλη. Ο καθοδηγητής/διευκολυντής θα πρέπει να μπορεί να ενθαρρύνει και να παρακινεί τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας να διευρύνουν την προοπτική και τη σκέψη τους. Ειδικότερα, ο καθοδηγητής/διευκολυντής περιγράφει το πρόβλημα στους συμμετέχοντες ακολουθώντας φθίνοντα επίπεδα αφαίρεσης. Καθώς η περιγραφή γίνεται πιο χειροπιαστή και λιγότερο αφηρημένη, τότε αναδύονται πιο συγκεκριμένες λύσεις για το πρόβλημα, αλλά όχι απαραίτητα καλύτερες. Οι λύσεις που συλλαμβάνονται στα αρχικά επίπεδα αφαίρεσης μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να γεννηθούν νέες λύσεις στα επόμενα επίπεδα (Higgins, 1994).

Αλλαγή Παραδοχών κατά τη Λύση Προβλήματος. Η αλλαγή παραδοχών υποδηλώνει την αμφισβήτηση της βάσης του διατυπωμένου προβλήματος (Vidal, 2005). Σύμφωνα με τα Επαγγελματικά Πρότυπα για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών (Professional Standards for Teaching Mathematics), «οι μαθητές θα πρέπει να έχουν ευκαιρίες να διατυπώνουν προβλήματα βάσει δοσμένων καταστάσεων και να αλλάζουν τις παραδοχές δοσμένων προβλημάτων» (NCTM, 1991, σ. 95). Η αλλαγή παραδοχών, το σπάσιμο των ορίων έχουν υποδειχθεί ως ένα εκ των συστατικών στοιχείων της δημιουργικότητας (Barron, 1988; Hermann, 1996; Vale & Barbosa, n.d.). Ειδικότερα, στον χώρο της ηγεσίας και διοίκησης, διάφοροι ερευνητές υπογραμμίζουν ότι οι μετασχηματιστικοί ηγέτες παρακινούν την καινοτομία και τη δημιουργικότητα στους υφιστάμενούς τους αμφισβητώντας παραδοχές, επανασχεδιάζοντας προβλήματα και προσεγγίζοντας παλιές καταστάσεις με νέους τρόπους (Avolio & Bass, 2001; Bass & Riggio, 2006; Sosik, Kahai, & Avolio, 1998). Τους ενθαρρύνουν να αλλάζουν και να αμφισβητούν τις αξίες και τις πεποιθήσεις τους (Den Hartog, Van Muijen, & Koopman, 1997; Hater & Bass, 1988).

Μια δημιουργική τεχνική για τη δημιουργία παραδοχών είναι η «αντιστροφή παραδοχών» (Higgins, 1994). Η τεχνική αυτή περιλαμβάνει τα εξής βήματα: το άτομο απαριθμεί τις παραδοχές του προβλήματος και έπειτα επιχειρεί να τις ανατρέψει και να λύσει το πρόβλημα. Επίσης, η διαδικασία αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί από το άτομο για να συλλάβει νέες ιδέες για την επίλυση του αυθεντικού προβλήματος (Higgins, 1994).

Η αμφισβήτηση των παραδοχών του προβλήματος μπορεί επίσης να προωθηθεί διαμέσου της διατύπωσης υποθετικών ερωτήσεων όπως «τι κι αν;» εκ μέρους των εκπαιδευτικών (DfES, 2006 στο Pound & Lee, 2015). Οι ερωτήσεις του «τι κι αν;» μπορούν να συμβάλουν στην ανάπτυξη της φαντασίας των μαθητών (Tran et al., 2017). Η διδακτική προσέγγιση «τι κι αν δεν;» των Brown και Walter (1983) δύναται να ενθαρρύνει τους μαθητές να διατυπώσουν νέα προβλήματα με γνώμονα ένα πρόβλημα που έχουν επιλύσει προηγουμένως, μεταβάλλοντας τους στόχους ή τις συνθήκες του αρχικού προβλήματος (Silver, 1997). Έτσι, μέσα από τέτοιες ερωτήσεις που προϋποθέτουν περίπλοκη νοητική επεξεργασία καλλιεργείται περαιτέρω η δημιουργική σκέψη των μαθητών (CAIE, 2018).

Μια άλλη τεχνική που επιτρέπει στο άτομο να πιέσει την φαντασία του, να αλλάξει τις παραδοχές και να μεταβεί πέραν από τις προφανείς απαντήσεις για να παραγάγει ενδιαφέρουσες και μοναδικές ιδέες είναι ο καταιγισμός ιδεών (Seelig, 2012). Ο καταιγισμός ιδεών είναι καθοριστικής σημασίας στην ενδυνάμωση της φαντασίας (Seelig, 2012), της ευχέρειας και των επικοινωνιακών δεξιοτήτων των μαθητών (Vidal, 2005). Στον καταιγισμό ιδεών, ενθαρρύνεται η ελεύθερη σύλληψη ιδεών ενός μεγάλου αριθμού ιδεών και η ανάπτυξή τους (Vidal, 2005). Γι’ αυτό και είναι μια θαυμάσια τεχνική να βρει κανείς μη προφανείς λύσεις σε προβλήματα (Seelig, 2012). Μάλιστα, είναι σημαντικό να ενθαρρύνονται οι παράξενες και «τρελές» ιδέες, ακόμα και εάν φαίνονται περίεργες (Seelig, 2012).

Ο Osborn (1953) επιχείρησε να διαχωρίσει την αξιολόγηση των ιδεών από την παραγωγή των ιδεών, καθότι θεωρούσε ότι η πρώιμη αξιολόγηση των ιδεών μειώνει την ποσότητα και ποιότητα των παραγόμενων ιδεών. Όλες οι ιδέες είναι αποδεκτές να εκφραστούν και δεν επιτρέπεται η κριτική και η απόρριψη των ιδεών που παράγουν οι μαθητές (Seelig, 2012; Vidal, 2005). Συγκεκριμένα, σε πρώτο στάδιο, τα άτομα διέρχονται από το στάδιο της «εξερεύνησης», όπου καλούνται να εξερευνήσουν όλες τις πιθανότητες, είτε είναι εμπνευσμένες είτε είναι ανούσιες (Seelig, 2012). Έπειτα, ακολουθεί το στάδιο της «αξιοποίησης» των ιδεών, όπου λαμβάνονται αποφάσεις ως προς τις ιδέες που δημιουργήθηκαν (Seelig, 2012).

Για την ομαλή διεξαγωγή της συγκεκριμένης τεχνικής, είναι χρήσιμο να υπάρχει κάποιος διευκολυντής που προετοιμάζει κατευθύνει, υποστηρίζει τον καταιγισμό ιδεών και αξιολογεί όλη τη διαδικασία (Vidal, 2005). Επίσης, είναι απαραίτητο οι συμμετέχοντες να κατέχουν διαφορετικές οπτικές γωνίες και εμπειρογνωμοσύνη ως προς το θέμα (Seelig, 2012). Το μέγεθος της ομάδας παίζει εξίσου σημαντικό ρόλο. Ομάδες των 6-8 ατόμων μπορούν να διατυπώσουν διαφορετικές προοπτικές και να αλληλεπιδράσουν με ευκολία μεταξύ τους (Seelig, 2012).

Επομένως, παρακινώντας τους μαθητές να συνεισφέρουν στη δημιουργία ιδεών τους δίνει ένα αίσθημα αξίας και καλλιεργεί μια ατμόσφαιρα για να αναδυθούν αυθεντικές δημιουργικές και φανταστικές ιδέες (Vidal, 2005). Με την εξάσκηση, το άτομο αποκτά μεγαλύτερη ευχέρεια (Vidal, 2005) και ο καταιγισμός ιδεών γίνεται όλο και πιο ρευστός και οι ιδέες που προκύπτουν γίνονται όλο και πλούσιες και ποικίλες (Seelig, 2012).

Διατύπωση Κατάλληλων Ερωτήσεων. Στα μαθηματικά, ως μια συνεχώς διευρυνόμενη επιστήμη, διαδραματίζει ζωτικό ρόλο η αναγνώριση, επέκταση, η εστίαση ή διεύρυνση νέων ερωτήσεων (Assmus & Fritzlar, 2018). Τα μαθηματικά είναι το ίδιο συνυφασμένα με τη δημιουργία ερωτημάτων όσο και με την επίλυσή τους, καθότι η ικανότητα αυτή αποτελεί και την ουσία της οικοδόμησης μαθηματικού νοήματος (Pound & Lee, 2015). Κατά συνέπεια, οι ερωτήσεις που θέτουν οι μαθητές μετά από τη λύση ενός προβλήματος σηματοδοτούν την απαρχή των ρεαλιστικών μαθηματικών (Sheffield, 2006). Ο μαθητής μπορεί να εγείρει περαιτέρω ερωτήσεις βασιζόμενος σε ήδη λυμένα προβλήματα (Assmus & Fritzlar, 2018). Οι ερωτήσεις μπορεί να αφορούν κάποιο συγκεκριμένο μαθηματικό περιεχόμενο ή πλαίσιο, συγκεκριμένους όρους ή αριθμούς του προβλήματος, στρατηγικές λύσης ή μπορεί να μη στηρίζονται σε κάποιες προκαθορισμένες προδιαγραφές (Assmus & Fritzlar, 2018).

Πλειάδα ερευνητών καθώς και φορέων χάραξης εκπαιδευτικής πολιτικής έχουν στρέψει την προσοχή τους προς τη διδακτική πρακτική της διατύπωσης ερωτήσεων εκ μέρους των μαθητών, τονίζοντας τον δεσπόζοντά της ρόλο στη μάθηση των μαθηματικών και τη μαθηματική δημιουργικότητα ειδικότερα (Aiken, 1973; CAIE, 2018; Freiman, 2018; Jensen, 1973; NCTM, 2000; Sriraman, 2005).

Πιο αναλυτικά, σύμφωνα με το NCTM (2000), οι μαθητές θα πρέπει να έχουν ευκαιρίες να θέτουν ερωτήσεις και προβλήματα που απορρέουν από τα ενδιαφέροντά τους. Επιπλέον, η δημοσίευση του NAGC/NCTM/NCSM εισηγείται ότι θα πρέπει να προστεθεί ένας ένατος στόχος μαθηματικών πρακτικών, ο οποίος αγγίζει τη μαθηματική δημιουργικότητα και καινοτομία: Οι μαθητές να επιλύουν προβλήματα με νέους τρόπους και να διατυπώνουν νέες ενδιαφέρουσες μαθηματικές ερωτήσεις προς εξερεύνηση. Έτσι, θα δοθεί υποστήριξη στους μαθητές ώστε να παίρνουν ρίσκα, να αποδέχονται τις προκλήσεις και να δείχνουν πάθος και ενθουσιασμό για τις μαθηματικές διερευνήσεις (Johnsen & Sheffield, 2012).

Την ίδια στιγμή, διάφοροι ερευνητές υπογραμμίζουν ότι η διατύπωση ερωτήσεων ενισχύει ποικιλοτρόπως τη μάθηση των μαθητών. Σύμφωνα με τον Freiman (2018), όλοι οι μαθητές μπορούν να επωφεληθούν από μια κουλτούρα στην οποία κυριαρχεί η διερεύνηση, η διατύπωση ερωτήσεων, η επικοινωνία και ο αναστοχασμός για μαθηματικές έννοιες και να αναπτύξουν το μαθηματικό τους μυαλό. Παροτρύνοντας τους μαθητές να θέτουν ερωτήσεις, αναπτύσσεται η περιέργειά τους για το αντικείμενο, ενισχύεται η εμπλοκή τους στη μάθηση και ισχυροποιείται η κατανόησή τους και τους δίνεται η δυνατότητα να δουν τα πράγματα από διαφορετικές προοπτικές (CAIE, 2018).

Συγχρόνως, μέσα από τη βιβλιογραφία αναφύεται η αλληλένδετη σχέση της διατύπωσης προβλήματος με τη μαθηματική δημιουργικότητα. Συγκεκριμένα, ο Sriraman (2005) περιγράφει τη μαθηματική δημιουργικότητα στο σχολείο ως κράμα δυο συνιστωσών: (α) η διαδικασία που οδηγεί σε ασυνήθιστες (νέες) και ουσιαστικές λύσεις σε ένα πρόβλημα, και (β) η διατύπωση νέων ερωτήσεων ώστε το πρόβλημα να ιδωθεί από μια νέα οπτική γωνία, επιστρατεύοντας φαντασία. Επίσης, ο Aiken (1973) διατείνεται πως ο εκπαιδευτικός που υποστηρίζει τη δημιουργικότητα είναι αυτός που θέτει ερωτήσεις και προβλήματα, ενθαρρύνει τη συζήτηση και παρέχει την ευκαιρία στους μαθητές να παρατηρήσουν και να εξερευνήσουν σε ένα «μαθηματικό εργαστήριο». Από την άλλη, ο δημιουργικός μαθητής στα μαθηματικά θα πρέπει να είναι ικανός να κατασκευάζει μαθηματικές ερωτήσεις που επεκτείνουν και εμβαθύνουν το αυθεντικό πρόβλημα (Jensen, 1973).

Επιπρόσθετα, ερευνητές συνηγορούν υπέρ του ότι τα έργα κατασκευής προβλήματος που μπορούν να επεκταθούν (και άρα παροτρύνουν τον μαθητή να διατυπώσει περαιτέρω μαθηματικές ερωτήσεις) μπορούν να αποτελέσουν ερέθισμα ώστε να ενεργοποιήσουν τη δημιουργική αποκλίνουσα σκέψη και να υποστηρίξουν την ανάπτυξη πιο δημιουργικών προσεγγίσεων στα μαθηματικά (Haylock, 1997; Sheffield, 2009; Silver, 1997). Μάλιστα, δεδομένων των ψηλών γνωστικών απαιτήσεων της διατύπωσης ερωτήσεων για τους μικρούς μαθητές, στο επίπεδο του δημοτικού σχολείου, η δημιουργικότητα μπορεί να διαφανεί ακόμα και μέσα από τη διατύπωση ερωτήσεων ως παραλλαγές κάποιου δοσμένου προβλήματος (Assmus & Fritzlar, 2018).

Αναπαράσταση Ιδεών και Αλλαγή Προοπτικών για Κατανόηση. Δυο άλλοι τρόποι κατανόησης και εφαρμογής της φαντασίας είναι: ως αναπαραστάσεις και ως υιοθέτηση άλλων προοπτικών σκέψης (Macknight, 2009). Αναφορικά με την αναπαράσταση ιδεών, η αναπαράσταση ιδεών ανοίγει ευκαιρίες για εξερεύνηση, βελτίωση και τροποποίηση ιδεών (Pound & Lee, 2015). Οι αναπαραστάσεις αποτελούν σημαντικά στοιχεία που μπορούν να υποστηρίξουν την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και σχέσεων από τους μαθητές, την επικοινωνία των μαθηματικών τους προσεγγίσεων κι επιχειρημάτων στον εαυτό τους και στους άλλους, την αναγνώριση συνδέσεων μεταξύ μαθηματικών εννοιών και την εφαρμογή των εννοιών σε ρεαλιστικά προβλήματα (NCTM, 2000). Η χρήση οπτικών εποπτικών μέσων βοηθά στην απλοποίηση περίπλοκων καταστάσεων, στην κατανόηση αλλά και στη δημιουργικότητα (Higgins, 1994).

Ένας τρόπος βελτίωσης της μαθηματικής δημιουργικότητας είναι όταν οι μαθητές χρησιμοποιούν πολλαπλές αναπαραστάσεις για να βελτιώσουν την κατανόησή τους (Flores, Park, & Bernhardt, 2018). Μια σημαντική δημιουργική ικανότητα είναι η ικανότητα μετάβασης από μια αναπαράσταση σε μια άλλη με ευελιξία, όπως για παράδειγμα «από έναν υπολογισμό, σε μια εικονική αναπαράσταση, σε μια συμβολική αναπαράσταση και σε μια γραφική αναπαράσταση» (Sheffield, 2003, σ. 4).

Ως εκ τούτου, είναι χρήσιμο οι μαθητές να αναπτύσσουν επαρκή εσωτερικά συστήματα αναπαραστάσεων που ανταποκρίνονται και αλληλεπιδρούν με τα εξωτερικά συστήματα αναπαραστάσεων των μαθηματικών, αλλά και να διασυνδέουν τις εσωτερικές αναπαραστάσεις των μαθηματικών εννοιών με πραγματικά φαινόμενα, ώστε να μπορούν να αναοικοδομήσουν τις γνώσεις τους (Flores et al., 2018). Σύμφωνα με το NCTM (2000), η διδασκαλία από το νηπιαγωγείο μέχρι το λύκειο πρέπει να επιτρέπει στους μαθητές (α) να δημιουργούν και να χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις για να οργανώνουν, να καταγράφουν και να επικοινωνούν μαθηματικές ιδέες, (β) να επιλέγουν, να εφαρμόζουν και να κάνουν μετάφραση αναπαραστάσεων για να επιλύουν προβλήματα και (γ) να χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις για να μοντελοποιούν και να ερμηνεύουν φυσικά, κοινωνικά και μαθηματικά φαινόμενα.

Ωστόσο, η χρήση μαθηματικών αναπαραστάσεων από μόνη της δεν αντικατοπτρίζει μια υψηλής ποιότητας διδασκαλία των μαθηματικών. Η έρευνα έχει δείξει ότι οι μαθητές κατέχουν την ικανότητα αναπαράστασης μαθηματικών εννοιών ήδη από τη νηπιακή ηλικία, αρκεί να τύχουν κατάλληλης υποστήριξης από την τάξη (diSessa, Hammer, Sherin, & Kolpakowski, 1991; Greeno & Hall, 1997; Lehrer & Schauble, 2002). Οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να διαμορφώσουν ένα μαθησιακό περιβάλλον που διευκολύνει την ανάπτυξη και την κατανόηση των διαφορετικών αναπαραστάσεων από τους μαθητές, καθώς και τη διαδικασία μετάφρασης από μια αναπαράσταση σε μια άλλη (NCTM, 2000).

Αναφορικά με την αλλαγή προοπτικών για κατανόηση, η ουσία της φαντασίας έγκειται στην ικανότητα αλλαγής προοπτικών, κατά την οποία το άτομο υιοθετεί μια νέα οπτική γωνία θέασης των πραγμάτων και μαθαίνει κάτι νέο (Christou, 2017). Η υιοθέτηση μιας νέας προοπτικής αποτελεί μέρος της ικανότητας του ατόμου να χρησιμοποιεί τη φαντασία του (Ren et al., 2012). Σύμφωνα με τους Tran et al. (2017), οι ερωτήσεις του «τι κι αν;» μπορούν να συμβάλουν στην ανάπτυξη της φαντασίας των μαθητών. Οι Pound και Lee (2015) διατείνονται ότι διατυπώνοντας ανοικτού τύπου ερωτήσεις όπως «τι κι αν;» και «πώς θα;» οι εκπαιδευτικοί μπορεί να βοηθήσουν τους μαθητές να δουν τα πράγματα από διαφορετικές οπτικές γωνίες. Αν και δεν είναι εύκολο για τους εκπαιδευτικούς να βρίσκουν τις κατάλληλες ερωτήσεις που θα προκαλέσουν τους μαθητές να σκεφτούν με δημιουργικούς τρόπους, όσο πιο πολύ θέτουν ερωτήσεις τόσο πιο πολύ τα παιδιά θα μπαίνουν στη διαδικασία να προκαλέσουν τους άλλους αλλά και τους εαυτούς τους (Pound & Lee, 2015).

Επέκταση Μαθηματικών Προβλημάτων. Ο Walter (1993) διακρίνει την επέκταση ενός δοσμένου μαθηματικού προβλήματος ως μια εκ των τεσσάρων επιμέρους καταστάσεων που προωθούν τη διατύπωση προβλήματος στα μαθηματικά. Η σημασία της παροχής ευκαιριών για επέκταση μαθηματικών προβλημάτων έχει αναδειχθεί έντονα στη μέχρι στιγμής βιβλιογραφία. Συγκεκριμένα, το NCTM (2000) προτείνει ότι οι μαθητές θα πρέπει να διατυπώνουν και να διερευνούν μαθηματικές υποθέσεις καθώς και να γενικεύουν και να επεκτείνουν προβλήματα. Επίσης, η Sheffield (2009) τονίζει πως η μαθηματική δημιουργικότητα μπορεί να καλλιεργηθεί όταν οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με προβλήματα που μπορούν να επεκταθούν μέσα από περαιτέρω ερωτήσεις. Την ίδια στιγμή, η Jensen (1973) αναφέρει ότι για να θεωρηθεί κανείς δημιουργικός μαθητής στα μαθηματικά πρέπει να είναι ικανός να κατασκευάζει μαθηματικές ερωτήσεις που επεκτείνουν και εμβαθύνουν το αυθεντικό πρόβλημα.

Μάλιστα, ορισμένοι ερευνητές κάνουν λόγο για κάποιους τύπους έργων που σχετίζονται με την επέκταση προβλήματος και μπορούν να ενδυναμώσουν τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά. Συγκεκριμένα, οι Voica και Singer εισηγούνται τα έργα τροποποίησης προβλήματος που δίνουν τη δυνατότητα παραγωγής συναφών και συνεπών δημιουργικών προβλημάτων (Voica & Singer, 2013; Singer & Voica, 2015). Ειδικότερα, οι Singer, Pelczer και Voica (2011) βρήκαν ότι εάν ο μαθητής μπορεί να δημιουργεί συνεκτικές και πρωτότυπες τροποποιήσεις αλλάζοντας κάποιες παραμέτρους του προβλήματος που σχεδιάζει και κατανοεί τις συνέπειες αυτών των αλλαγών, τότε επιδεικνύει ικανότητα για εις βάθος μεταφορά δημιουργικών προσεγγίσεων. Επιπλέον, οι Voica & Singer (2013) ανέδειξαν την ύπαρξη σύνδεσης ανάμεσα στην κατασκευή προβλήματος και στη γνωστική ευελιξία. Η ικανότητα των μαθητών να κατασκευάζουν συνεκτικά μαθηματικά προβλήματα μέσα στα πλαίσια της τροποποίησης προβλήματος μπορεί να υποδεικνύει την ύπαρξη μιας στρατηγικής για γενικεύσεις, η οποία αφορά ειδικά στη μαθηματική δημιουργικότητα.

Επιπλέον, ο Haylock (1997) προτείνει τα έργα επαναπροσδιορισμού ως έναν ακόμα τύπο που παρέχει την πιθανότητα αναγνώρισης της μαθηματικής δημιουργικότητας και συμβάλλει στο να ξεπεράσουν οι μαθητές κάποιους παγιωμένους τρόπους σκέψης για την εύρεση μαθηματικών λύσεων. Τα έργα επαναπροσδιορισμού καλούν τον μαθητή να επαναπροσδιορίσουν τα στοιχεία της κατάστασης ως προς τα μαθηματικά τους χαρακτηριστικά.

Δραστηριότητες που Προωθούν τη Μαθηματική Δημιουργικότητα. Για την ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας των μαθητών, οι εκπαιδευτικοί πρέπει να αναζητούν κατάλληλο διδακτικό υλικό (Mann, 2006) και να επιλέγουν κατάλληλες δραστηριότητες που ευνοούν την εμφάνιση μαθηματικής δημιουργικότητας (Levenson, 2013; Vale & Barbosa, 2015; Sheffield, 2006). Οι καλές δραστηριότητες που δύνανται να ενθαρρύνουν τη δημιουργική σκέψη στα μαθηματικά πρέπει να πληρούν κάποια κριτήρια (Sheffield, 2006).

Ειδικότερα, ένας κατάλληλος τύπος δραστηριοτήτων για την καλλιέργεια της δημιουργικότητας στα μαθηματικά είναι τα ανοικτά προβλήματα (Benneval, 2016; Sheffield, 2006). Τα ανοικτού τύπου προβλήματα είναι προβλήματα που ευνοούν πολλούς τρόπους προσέγγισης ή πολλαπλές λύσεις (Benneval, 2016; Sheffield, 2006). Διατυπώνονται με τρόπο που επιτρέπει τον προσδιορισμό πολλών επιμέρους στόχων και δυνητικά πολλαπλών ορθών λύσεων, ανάλογα με την ερμηνεία του λύτη (Silver, 1997). Τα ανοικτά προβλήματα πρέπει να πληρούν τρία βασικά κριτήρια (Foong, 2000). Πρώτον, πρέπει να παρέχουν σε όλους τους μαθητές τη δυνατότητα να επιδείξουν κάποια μαθηματική γνώση, δεξιότητα και κατανόηση. Επίσης, πρέπει να είναι αρκετά πλούσια ώστε να προκαλούν τους μαθητές να σκεφτούν και να συλλογιστούν. Τρίτον, πρέπει να επιτρέπουν την εφαρμογή πολλών στρατηγικών λύσης. Ο σχεδιασμός προβλήματος, τα προβλήματα χωρίς ερωτήσεις και η τροποποίηση προβλήματος με τη μέθοδο «τι κι αν;» είναι κάποιες κατηγορίες ανοικτού-τύπου προβλημάτων (Foong, 2000).

Τα ανοικτά προβλήματα μπορούν να συμβάλουν στην ανάπτυξη της ευχέρειας (Silver, 1997), της ευελιξίας και της πρωτοτυπίας των μαθητών (Kwon et al., 2006). Διεγείρουν την περιέργεια των μαθητών αλλά και τη συνεργασία τους κατά την επίλυση προβλημάτων (Kwon et al., 2006). Δίνουν σε όλους τους μαθητές αυτοπεποίθηση και την αίσθηση της ολοκλήρωσης, διότι ακόμη και οι μαθητές με περιορισμένη μαθηματική ικανότητα μπορούν να εντοπίσουν τις δικές τους λύσεις με βάση τη δική τους ικανότητα (Kwon et al., 2006). Έτσι, αποτελούν ένα σημαντικό εργαλείο με το οποίο οι εκπαιδευτικοί μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να εμπλέξουν τη φαντασία τους (Benneval, 2016).

Οι δραστηριότητες που επιδέχονται πολλές και διαφορετικές λύσεις μπορούν να επηρεάσουν θετικά την ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας των μαθητών (Fouche, 1993; Mrayyan, 2016; Levav-Waynberg & Leikin, 2012; Sheffield, 2006; Vale & Barbosa, 2018). Διαφορετικές λύσεις σε μια δραστηριότητα θεωρούνται αυτές που εμπλέκουν (α) διαφορετική στρατηγική λύσης, (β) διαφορετική αναπαράσταση, (γ) διαφορετικές ιδιότητες ή (δ) διαφορετικές μαθηματικές έννοιες (Leikin, 2009a; Leikin & Lev, 2013). Εάν ο εκπαιδευτικός θέτει ερωτήσεις που έχουν περισσότερες από μια απαντήσεις, μπορεί να αναπτύξει μια ατμόσφαιρα όπου οι μαθητές θα νιώθουν ότι οι μοναδικές τους απαντήσεις είναι ευπρόσδεκτες και έχουν αξία (CAIE, 2018). Μέσα στο ίδιο πνεύμα, οι Vale, Pimentel, Cabrita, Barbosa & Fonseca (2012) εισηγούνται την χρήση δραστηριοτήτων με μοτίβα. Τα μοτίβα είναι ένα ισχυρό εργαλείο στη διδασκαλία των μαθηματικών (Vale et al., 2012). Έχουν ένα δημιουργικό δυναμικό, καθώς μπορεί να είναι ανοικτού τύπου, να επιδέχονται πολλές στρατηγικές λύσης και να ευνοούν ένα εύρος και βάθος συνδέσεων με διάφορες μαθηματικές έννοιες (NCTM, 2000). Απαιτούν πολλαπλές αναλύσεις, δίνοντας έτσι το έναυσμα για ροή μαθηματικών ιδεών, ευελιξία σκέψης και πρωτοτυπία στις απαντήσεις (Vale et al., 2012).

Επιπρόσθετα, οι δραστηριότητες θα πρέπει να είναι πλούσιες, δίνοντας στους μαθητές ευκαιρίες να εξερευνήσουν, να αναστοχαστούν και να επεκταθούν προς νέες περιοχές (Sheffield, 2006). Πρέπει να δίνουν κίνητρα στους μαθητές να εξερευνούν τα μαθηματικά δημιουργικά και να αναπτύσσουν τις δικές τους δημιουργικές και ευρηματικές μαθηματικές διαδικασίες (Goldin, 2017). Πρέπει να ενθαρρύνουν την περιέργεια, τον πειραματισμό, τη φαντασία, τη διατύπωση ερωτήσεων από τους μαθητές και την ίδια στιγμή να τους παρέχουν επαρκή καθοδήγηση (Yushau, Mji, & Wessels, 2005). Τέλος, πρέπει να δίνουν στους μαθητές έναυσμα ώστε να «αμφισβητούν τις απαντήσεις και όχι απλώς να απαντούν στις ερωτήσεις, ώστε να αναπτύξουν βαθιά μαθηματική κατανόηση» (Sheffield, 2006, σ. 3). Εν κατακλείδι, η ουσία της διδασκαλίας των μαθηματικών με δημιουργικό τρόπο είναι να ενθαρρύνει κανείς το παιδί να μεταβεί πέρα από το οικείο και να ανιχνεύσει βαθύτερα τις σχέσεις και τις δομές του προβλήματος (Mann, 2006).

Συγχρόνως, χρειάζονται απαιτητικές δραστηριότητες που να προκαλούν τους μαθητές (Vale et al., 2012; Yushau et al., 2005), να τους καλούν να σκεφτούν εις βάθος (Sheffield, 2006) και να τους ενθαρρύνουν να βιώσουν το στάδιο της επώασης (Savic, 2016). Παράλληλα, οι δραστηριότητες πρέπει να αγγίζουν και τα ψηλά επίπεδα γνωστικών απαιτήσεων (Mrayyan, 2016). Θα πρέπει να έχουν ένα σημείο έναρξης για όλους τους μαθητές και έπειτα να μπορούν να προκαλέσουν ακόμη και τους πιο δυνατούς μαθητές στα μαθηματικά (Sheffield, 2006). Εξάλλου, η κατανόηση των μαθητών μπορεί να ενισχυθεί μόνο μέσα από απαιτητικά προβλήματα που την ίδια στιγμή όμως είναι και προσιτά στους μαθητές (Mann, 2006). Αν οι δραστηριότητες είναι πάρα πολύ απαιτητικές, τότε θα καταστούν ανιαρές για τους μαθητές (Yushau et al., 2005). Τέλος, οι δραστηριότητες χρειάζεται να έχουν ενδιαφέρον περιεχόμενο και να είναι συνδεδεμένες με τις καθημερινές εμπειρίες των μαθητών (Sheffield, 2006; Yushau et al., 2005).

Ενσωμάτωση Τεχνολογίας. Η τεχνολογία και η δημιουργικότητα χαρακτηρίζονται από μια αμφίδρομη σχέση (Henriksen, Mishra, & Fisser, 2016). Από τη μια, η τεχνολογική αλλαγή καθοδηγείται από την ανθρώπινη δημιουργικότητα και από την άλλη οι νέες τεχνολογίες παρέχουν νέα πλαίσια και εργαλεία για την παραγωγή δημιουργικών προϊόντων. Δεδομένης της αμφίδρομης σχέσης ανάμεσα στη δημιουργικότητα και την τεχνολογία, η διδασκαλία και η μάθηση πρέπει να δίνουν έμφαση στη διασύνδεσή τους (Henriksen, Hoelting, & The Deep-Play Research Group, 2016).

Η αλληλεπίδραση ανάμεσα στα χαρακτηριστικά των νέων τεχνολογιών και τα χαρακτηριστικά της δημιουργικότητας ανοίγει νέες προοπτικές για την ανάπτυξη της δημιουργικότητας στην εκπαίδευση (Loveless, 2002). Τα τεχνολογικά εργαλεία θεωρούνται αποτελεσματικά μέσα για την ανάπτυξη της δημιουργικότητας (Ferrari, Cachia, & Punie, 2009). Σύμφωνα με το National Advisory Committee on Creative and Cultural Education (1999), η τεχνολογία επιτρέπει στους μαθητές να βρουν νέες μορφές δημιουργικότητας. Ως εκ τούτου, οι εκπαιδευτικοί και οι μαθητές μπορούν να αξιοποιήσουν την τεχνολογία με σκοπό την υποστήριξη της φαντασίας, της αυτονομίας, της συνεργασίας και της πρωτοτυπίας (Loveless, 2002).

Εστιάζοντας στο πεδίο των μαθηματικών, πολλοί ερευνητές υποστηρίζουν ότι η τεχνολογία μπορεί να συμβάλει στην ενίσχυση της μαθηματικής δημιουργικής σκέψης (Dunham & Dick, 1994; Flores et al., 2018; Idris & Nor, 2010; Leikin, Levav-Waynberg, & Guberman, 2011; Sinclair et al., 2013; Sheffield, 2006; Yerushalmy, 2009; Yushau et al., 2005). Ο τόμος των Freiman και Tassell (2018) ανέδειξε τις δυνατότητες της τεχνολογίας να υποστηρίξουν τη δημιουργική και αποκλίνουσα σκέψη στα μαθηματικά και περιλαμβάνει μια σειρά από εμπειρικές έρευνες που διερευνούν τη μαθηματική δημιουργικότητα σε καινοτόμα τεχνολογικά πλαίσια, όπως τη διαδικτυακή μάθηση, τα κοινωνικά δίκτυα, τη μάθηση βασισμένη στη ρομποτική.

Πρωταρχικά, τα χαρακτηριστικά της τεχνολογίας, όπως η αλληλεπίδραση, το εύρος, η ταχύτητα και η αυτοματοποίηση, επιτρέπουν στο άτομο να κάνει πράγματα που προηγουμένως δεν μπορούσε (Loveless, 2002). Κατ' επέκταση, η ενσωμάτωση της τεχνολογίας στη διδασκαλία των μαθηματικών μπορεί να μεταμορφώσει την εμπειρία του «κάνω και μαθαίνω μαθηματικά», χάρη σε τρεις πτυχές που τη χαρακτηρίζουν (Kaput & Thompson, 1994). Η πρώτη πτυχή είναι η διαδραστικότητα, δηλαδή ο υπολογιστής παρέχει στους μαθητές αλληλεπίδραση στις δικές τους δράσεις και επιτρέπει περαιτέρω ερμηνείες, αναστοχασμό και δράσεις. Η δεύτερη πτυχή αφορά στον σχεδιασμό που παρέχει τη βάση για σκέψη και λύση προβλήματος, σε συνδυασμό με την ανατροφοδότηση. Η τρίτη πτυχή αποτελεί την συνδεσιμότητα, όπου διασυνδέονται οι εκπαιδευτικοί μεταξύ τους, οι μαθητές μεταξύ τους, οι μαθητές με τους εκπαιδευτικούς και γενικότερα ο κόσμος της εκπαίδευσης με τον εξωτερικό κόσμο.

Κατά συνέπεια, η ενσωμάτωση τεχνολογικών εργαλείων μπορεί να δημιουργήσει ένα πλούσιο περιβάλλον μάθησης των μαθηματικών (Idris & Nor, 2010) και μια ατμόσφαιρα που εμπλέκει τους μαθητές σε αυθεντικές μαθηματικές δραστηριότητες που ευνοούν τη δημιουργικότητα (Yushau et al., 2005). Ευνοεί την ανάπτυξη πιο βαθιάς κατανόησης, τον μετασχηματισμό και την ανακάλυψη της γνώσης, τον αναστοχασμό και την κριτική σκέψη, συνεισφέροντας έτσι στη μαθηματική δημιουργικότητα των μαθητών (Freiman & Tassell, 2018). Οι μαθητές μπορούν να δημιουργούν περιεχόμενο, να το εξερευνούν και να το επικοινωνούν πολύ πιο εύκολα και γρήγορα και όχι απλώς να το επαναλαμβάνουν (Henriksen et al., 2016). Η αξιοποίηση της τεχνολογίας δεν μεταφέρει τις δεξιότητες στους μαθητές, αλλά δίνει έμφαση στη διερεύνηση, τη λύση και την διατύπωση προβλήματος (Yerushalmy, 2009). Τους υποστηρίζει ώστε να γίνουν δημιουργικοί και κριτικά σκεπτόμενοι αλλά και πιο καλοί λύτες προβλημάτων (Kaput, 1992). Συνοπτικά, τα τεχνολογικά περιβάλλοντα δίνουν στους μαθητές πρόσβαση σε πιο πλούσια και ανώτερου επιπέδου μαθηματικά, που είναι συνδεδεμένα και με τον πραγματικό κόσμο (Freiman & Tassell, 2018). Επομένως, η τεχνολογία δίνει στους μαθητές έναν πιο αυτοδύναμο ρόλο στη μάθησή τους (Idris & Nor, 2010).

Συγχρόνως, η τεχνολογία δίνει τη δυνατότητα για οπτικοποίηση μαθηματικών εννοιών με πολλές αναπαραστάσεις (Idris & Nor, 2010; Yushau et al., 2005). Παρέχει πιο εύκολες και ξεκάθαρες αναπαραστάσεις από αυτές που δημιουργεί ο εκπαιδευτικός (Yushau et al., 2005) και επιτρέπει στους μαθητές να κτίσουν μια ισχυρή εικόνα για τις έννοιες αυτές (Idris & Nor, 2010). Παρέχει νέους τρόπους οικοδόμησης, αναπαράστασης και επικοινωνίας της γνώσης, προσφέροντας ευκαιρίες για την παραγωγή δημιουργικών προϊόντων από και ανάμεσα στους μαθητές, οι οποίες δεν υπήρχαν προηγουμένως (Henriksen et al., 2016). Έτσι, εξοικονομείται πολύτιμος χρόνος για τον εκπαιδευτικό (Idris & Nor, 2010).

Παράλληλα, τα τεχνολογικά περιβάλλοντα είναι πιο ελκυστικά για τους μαθητές (Freiman & Tassell, 2018). Η εκπαιδευτική τεχνολογία έχει τη δυνατότητα να σαγηνεύσει τις αισθήσεις της όρασης, της ακοής και της αφής και να αυξήσει την προσοχή των μαθητών και τη δέσμευσή τους απέναντι στο μάθημα των μαθηματικών (Yushau et al., 2005). Τα εγγενή χαρακτηριστικά των Η/Υ, όπως η άμεση ανατροφοδότηση, ο ήχος, η διαδραστικότητα και η εξατομίκευση, μπορούν να μπορούν ενισχύσουν τα κίνητρα των μαθητών για μάθηση, περισσότερο από κάθε άλλο μέσο (Yang & Chin, 1996). Οι μαθητές παρακινούνται να εξερευνήσουν, να διατυπώσουν υποθέσεις, να αναζητήσουν εξηγήσεις, να επικοινωνήσουν τις ανακαλύψεις τους με συμμαθητές και εκπαιδευτικούς και να συνεργαστούν (Freiman & Tassell, 2018). Κατά συνέπεια, τα τεχνολογικά περιβάλλοντα μπορούν να αυξήσουν τα κίνητρα και την εμπλοκή των μαθητών (Freiman & Tassell, 2018), αλλά και τον ενθουσιασμό τους για μάθηση (Idris & Nor, 2010).

Πέραν των πιο πάνω, οι Η/Υ μπορούν να διευκολύνουν τόσο την συνδυαστική όσο και τη διερευνητική-μετασχηματιστική δημιουργικότητα (Boden, 1994). Η συνδυαστική δημιουργικότητα αφορά στον συνδυασμό προηγούμενων εννοιών σε νέα μοτίβα. Η διερευνητική-μετασχηματιστική δημιουργικότητα αναφέρεται στην ανάπτυξη ενός νέου εννοιολογικού χώρου, δηλαδή τρόπου σκέψης. Επιπλέον, η δημιουργική τεχνολογία προσφέρει στους μαθητές ευκαιρίες για ευχέρεια, ευελιξία και συσχέτιση (Dodge, 1991). Οι ευκαιρίες για ευχέρεια περιλαμβάνουν τη δημιουργία πολλών ιδεών, γνωρίζοντας ότι λίγες από αυτές είναι σημαντικές. Αναφορικά με την ευελιξία, η τεχνολογία παρέχει τη δυνατότητα για μετάβαση ανάμεσα σε διαφορετικές προοπτικές και την ανταλλαγή αναπαραστάσεων ή όψεων της ίδιας έννοιας. Τέλος, η δυνατότητα για συσχέτιση αναφέρεται στην ικανότητα του να τοποθετεί διαφορετικά στοιχεία μαζί, ώστε να δημιουργήσει νέους συνδυασμούς (Dodge, 1991). Η έλλειψη της ικανότητας για αναδιοργάνωση και σύνδεση μαθηματικών εννοιών σε διαφορετικές καταστάσεις αποτελεί ένα εμπόδιο για τη μαθηματική δημιουργικότητα (Yushau et al., 2005).

Φυσικά, αν και η ψηφιακή τεχνολογία παρέχει ευκαιρίες για βελτίωση της διδασκαλίας και της μάθησης των μαθηματικών (Condie & Munro, 2007; Sutherland, 2007), η ενσωμάτωση της στη διδασκαλία των μαθηματικών δεν αποτελεί πανάκεια (Drijvers, 2015). Έρευνες έδειξαν ότι «η εκπαιδευτική τεχνολογία έχει μέτρια επίδραση στη βελτίωση της μάθησης των μαθηματικών, καθώς παρέχει μεν βοήθεια αλλά δεν είναι επανάσταση» (Cheung & Slavin, 2013, σ. 102). «Η τεχνολογία από μόνη της δεν μπορεί να επιφέρει αλλαγή στη μάθηση και τη διδασκαλία, αλλά το πώς αυτή χρησιμοποιείται και από ποιον» (Heid, 2005, σ. 348).

Ο ρόλος του εκπαιδευτικού κατά την ενσωμάτωση τεχνολογικών εργαλείων στη διδασκαλία των μαθηματικών είναι ιδιαίτερα σημαντικός (Drijvers, 2015; Laborde & Sträßer, 2010; Trigueros, Lozano, & Sandoval, 2014). Για να βελτιωθεί η μαθηματική δημιουργικότητα μέσω της τεχνολογίας, ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να αναπτύξει μια δημιουργική νοοτροπία απέναντι στη διδασκαλία και τη μάθηση, για να μπορέσει να αξιοποιήσει στο έπακρον τις δυνατότητες των νέων τεχνολογιών (Henriksen et al., 2016). Επίσης, θα πρέπει να αξιοποιεί έργα που εμπλέκουν δυναμικές εξερευνήσεις, προσομοιώσεις, μοντελοποίηση, προσομοιώσεις, λύση και σχεδιασμό προβλήματος, συζητήσεις, συνεργασία και ερωτήσεις (Freiman & Tassell, 2018). Θα πρέπει να παρέχει ευκαιρίες για εξερεύνηση και για παιχνίδι με τα υλικά, με τις πληροφορίες και με τις ιδέες, καθώς και ευκαιρίες για λήψη ρίσκου και για αναστοχασμό (Loveless, 2002). Παράλληλα, πρέπει να δίνεται αρκετός χρόνος ώστε οι μαθητές να εξερευνούν πολλές επιλογές (Edwards, 2001) και να εκδηλώνουν τα διαφορετικά στάδια της δημιουργικής τους δραστηριότητας (Loveless, 2002). Τέλος, θα πρέπει να επιλέγει κατάλληλα τεχνολογικά εργαλεία που εμπλέκουν ουσιαστικά τους μαθητές με εννοιολογική και οπτική σκέψη, τους δίνουν κίνητρα να σκέφτονται και να δημιουργούν συνδέσεις, και δεν εργάζονται πάνω σε διαδικασίες και γρήγορους υπολογισμούς (Boaler, 2015).

Στο σημείο αυτό, αξίζει να σημειωθεί ότι υπάρχει ανάγκη για σύζευξη του ερευνητικού πεδίου της δημιουργικότητας και της εκπαιδευτικής τεχνολογίας γενικά (Loveless, 2002) και ειδικότερα για πιο στενές συνδέσεις ανάμεσα στον χώρο των μαθηματικών, της δημιουργικότητας και της τεχνολογίας (Freiman & Tassell, 2018). Παρόλο που οι δυνατότητες των τεχνολογικών περιβαλλόντων μάθησης να αναπτύξουν τη μαθηματική σκέψη έχουν διερευνηθεί μέσα από πολλές έρευνες (Suh, Johnston, & Douds, 2008), ο ρόλος τους στην ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας δεν έχει ακόμα διερευνηθεί επαρκώς (Freiman & Tassell, 2018).

Χώρος

Σύμφωνα με τον Jackson (2016), η δημιουργική σκέψη είναι αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης ενός ατόμου με άλλα άτομα, ιδέες, αντικείμενα, καταστάσεις σε κάποιο «οικοσύστημα», δηλαδή χώρο. Ο χώρος περιλαμβάνει τον φυσικό χώρο που περιβάλλει το άτομο, τους κανόνες και τους περιορισμούς που αντιμετωπίζει, καθώς και τα άτομα γύρω του (Seelig, 2012). Στο θεωρητικό μοντέλο της Seelig (2012), ο χώρος τοποθετείται ακριβώς έξω από την φαντασία (Διάγραμμα 2.1). Πρώτον, διότι οι χώροι που δημιουργεί το άτομο είναι μια εξωτερίκευση της φαντασίας του και απηχούν τον τρόπο που σκέφτεται. Δεύτερον, διότι αντίστροφα ο χώρος που ζει το άτομο επηρεάζει τη φαντασία του. Εάν το περιβάλλον είναι ενθαρρυντικό τότε το μυαλό του ατόμου είναι ανοικτό σε φρέσκες και καινοτόμες ιδέες και η φαντασία ξεκλειδώνεται. Αντίθετα, εάν το περιβάλλον είναι περιοριστικό τότε καταπνίγεται και η δημιουργικότητα του ατόμου.

Σχέσεις ανάμεσα στους Παράγοντες του Θεωρητικού Μοντέλου της Seelig (2012)

Σύμφωνα με τη Seelig (2012), οι διάφοροι παράγοντες που ενυπάρχουν στο θεωρητικό μοντέλο είναι συνδεδεμένοι μεταξύ τους και επηρεάζουν ο ένας τον άλλο (Seelig, 2012). Σε σχέση με τους εσωτερικούς παράγοντες, οι στάσεις/πεποιθήσεις που διακατέχουν το άτομο διεγείρουν την περιέργειά του να αποκτήσει γνώσεις. Την ίδια στιγμή, οι γνώσεις του ατόμου παρέχουν καύσιμα στη φαντασία του, επιτρέποντάς του την παραγωγή νέων πρωτοποριακών ιδεών. Από την άλλη, η φαντασία λειτουργεί ως καταλύτης για τη δημιουργία ενός παραγωγικού περιβάλλοντος και για την αποτελεσματική αξιοποίηση των πηγών εντός του περιβάλλοντος. Το περιβάλλον αυτό σε συνδυασμό με τις στάσεις του ατόμου επηρεάζουν την ευρύτερη κουλτούρα της κοινότητας (Seelig, 2012).

Σκοπός και Ερευνητικά Ερωτήματα

Πρωταρχικά, η διατριβή αποβλέπει στο να εξετάσει εμπειρικά τη δομή και τις σχέσεις ανάμεσα στους τρεις εσωτερικούς παράγοντες που σύμφωνα με τη Seelig (2012) συνεισφέρουν στη μαθηματική δημιουργικότητα, δηλαδή τη φαντασία στα μαθηματικά, τις μαθηματικές γνώσεις και τη μαθηματική νοοτροπία.

Τα ερευνητικά ερωτήματα με τα οποία καταπιάνεται η διατριβή είναι τα εξής:

(1) Τα δεδομένα της έρευνας επιβεβαιώνουν τη δομή του προτεινόμενου μοντέλου για τη φαντασία στα μαθηματικά;

(2) Ποιες γνωστικές διαδικασίες της φαντασίας στα μαθηματικά εμφανίζονται καθώς οι μαθητές επιλύουν ένα μαθηματικό πρόβλημα ενόρασης;

(3) Τα δεδομένα της έρευνας επιβεβαιώνουν τη δομή του προτεινόμενου μοντέλου για τις σχέσεις ανάμεσα στους τρεις εσωτερικούς παράγοντες που επηρεάζουν τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά;

Κεφάλαιο 3: Μεθοδολογία

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται περιγραφή της μεθοδολογίας της έρευνας. Αρχικά, παρουσιάζονται πληροφορίες σχετικά με τα υποκείμενα που συμμετείχαν, όπως η ηλικία, το φύλο, η γεωγραφική τους προέλευση, καθώς και η μέθοδος επιλογής τους. Στη συνέχεια, περιγράφονται οι φάσεις διεξαγωγής της έρευνας. Αναφορικά με τη συλλογή δεδομένων, παρουσιάζονται τα εργαλεία συλλογής δεδομένων και η διαδικασία ανάπτυξής τους. Έπειτα, παρουσιάζονται τα προτεινόμενα μοντέλα της διατριβής για την περιγραφή της δομής της φαντασίας στα μαθηματικά καθώς και των σχέσεων ανάμεσα στη φαντασία στα μαθηματικά, τις μαθηματικές γνώσεις και τη μαθηματική νοοτροπία. Επεξηγούνται οι ποσοτικές και ποιοτικές μέθοδοι ανάλυσης των δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν και τέλος αναφέρονται οι βασικοί περιορισμοί που διέπουν την έρευνα.

Για τη μελέτη των παραγόντων της έρευνας, δηλαδή της φαντασίας στα μαθηματικά, των μαθηματικών γνώσεων και των στάσεων/πεποιθήσεων των μαθητών αξιοποιήθηκαν μικτές μεθοδολογικές προσεγγίσεις, συνδυάζοντας τη χορήγηση δυο δοκιμίων και ενός ερωτηματολογίου μαζί με ημι-δομημένες ατομικές συνεντεύξεις. Ο συγκερασμός των ποσοτικών και των ποιοτικών μεθόδων εξυπηρετεί τους ακόλουθους σκοπούς (Creswell & Clark, 2018; Greene, 2007; Teddlie & Tashakkori, 2009):

(α) να υιοθετηθεί μια καλύτερη ερευνητική προσέγγιση του προβλήματος

(β) να οικοδομηθεί πιο βαθιά κατανόηση του ερευνητικού προβλήματος

(γ) να κατοχυρωθεί μεγαλύτερη βεβαιότητα για τα συμπεράσματα που θα εξαχθούν

(δ) να ισχυροποιηθεί η αξιοπιστία της έρευνας, αξιοποιώντας τις δυνατότητες της μιας ερευνητικής μεθόδου για να αντισταθμιστούν οι αδυναμίες της άλλης μεθόδου.

Συμμετέχοντες και Μέθοδος Δειγματοληψίας

Στην έρευνα αυτή συμμετείχαν μαθητές Στ’ τάξης δημοτικού σχολείου. Το σκεπτικό εστίασης της διατριβής στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση στηρίζεται στο γεγονός ότι οι βάσεις της δημιουργικής σκέψης αρχίζουν να αναπτύσσονται από τις πρώτες τάξεις του δημοτικού (Leikin & Pitta-Pantazi, 2013a). Η επικέντρωση σε μαθητές ηλικίας 11 ετών κρίνεται αναγκαία υπό το φως των ερευνητικών αποτελεσμάτων που εντοπίζονται στη βιβλιογραφία. Αναλυτικά, η Hennesey (2007) επισημαίνει ότι ενώ μέχρι τη Β’ δημοτικού τα παιδιά είναι δημιουργικά και με ενθουσιασμό για μάθηση, 3 χρόνια αργότερα μετατρέπονται σε παθητικούς μανθάνοντες, χωρίς την έμφυτη περιέργεια που είχαν προηγουμένως και αδυνατώντας να πάρουν ρίσκα. Επίσης, ερευνητικά δεδομένα δείχνουν ότι 81% των μαθητών Δ’ δημοτικού στις ΗΠΑ έχουν θετικές στάσεις για τα μαθηματικά. Ωστόσο, 4 χρόνια αργότερα μόνο 35% των μαθητών Β’ γυμνασίου ενστερνίζονται τις ίδιες θετικές στάσεις (U.S. Department of Education & National Center for Education Statistics, 2003). Στους μαθητές 10-11 ετών έχει παρατηρηθεί στεγανοποίηση στην ευχέρεια, την ευελιξία και την πρωτοτυπία τους και στη συνέχεια ανάπτυξη των δημιουργικών ικανοτήτων τους (Sak & Maker, 2006). Επομένως, η ηλικία αυτή είναι κρίσιμη για τη δημιουργικότητα των μαθητών και παρουσιάζει ιδιαίτερο ερευνητικό ενδιαφέρον.

Ειδικότερα, κατά τη χορήγηση των εργαλείων συλλογής ποσοτικών δεδομένων έλαβαν μέρος 217 μαθητές Στ΄ τάξης. Το ποσοστό ανταπόκρισης στην παρούσα έρευνα ανήλθε στο 76%, που κρίνεται ικανοποιητικό (Babbie, 1990). Ανάμεσα στους 217 μαθητές του δείγματος, τα 94 παιδιά (43.3%) ήταν αγόρια και τα 100 παιδιά (46.1%) κορίτσια, ενώ για τα υπόλοιπα 23 παιδιά (10.6%) δεν υπήρχε πληροφόρηση για το φύλο τους. Οι συμμετέχοντες προέρχονταν από 16 διαφορετικά τμήματα και από 11 δημόσια δημοτικά σχολεία της Κύπρου (3 αστικά και 8 αγροτικά). Ειδικότερα, οι 45 μαθητές φοιτούσαν σε ένα σχολείο της αστικής Λευκωσίας, οι 50 μαθητές φοιτούσαν σε δυο σχολεία της αστικής Λεμεσού, οι 39 μαθητές φοιτούσαν σε τρία σχολεία της επαρχίας Λάρνακας και οι 83 μαθητές φοιτούσαν σε πέντε σχολεία της επαρχίας Αμμοχώστου. Η επιλογή των τμημάτων στα οποία χορηγήθηκαν τα δοκίμια έγινε με ευκαιριακή δειγματοληψία, λόγω του γεγονότος ότι θα έπρεπε να επιλεγεί ένας μεγάλος αριθμός μαθητών. Στη δειγματοληψία αυτή επιλέγονται τα πλησιέστερα άτομα για να χρησιμεύσουν ως απαντώντες (Cohen, Manion, & Morrison, 2008). Επιλέγηκαν δηλαδή τμήματα των οποίων οι εκπαιδευτικοί ήταν άτομα στα οποία η ερευνήτρια είχε εύκολη πρόσβαση.

Στις ημι-δομημένες συνεντεύξεις συμμετείχαν μαθητές 4 τμημάτων Στ’ δημοτικού ενός δημόσιου αστικού σχολείου. Σε επίπεδο τμημάτων, εφαρμόστηκε ευκαιριακή δειγματοληψία, καθότι είχε εξασφαλιστεί η σύμφωνη γνώμη των εκπαιδευτικών για συμμετοχή των μαθητών τους στις συνεντεύξεις. Σε επίπεδο μαθητών, ακολουθήθηκε δειγματοληψία μέγιστης απόκλισης, ένας τύπος σκόπιμης δειγματοληψίας (Elder, 2009). Η δειγματοληψία μέγιστης απόκλισης αποσκοπεί να «επιλέξει ετερογενείς περιπτώσεις από όλο το πιθανό φάσμα περιπτώσεων» (Patton, 2015, σ. 283) και να εξαγάγει σημαντικά κοινά μοτίβα που παρατηρούνται στις ετερογενείς αυτές περιπτώσεις (Patton, 2015).

Επιλέγοντας ένα ευρύ φάσμα διαφορετικών περιπτώσεων μπορεί να εξασφαλιστεί πιο αντιπροσωπευτικό δείγμα του πληθυσμού σε σύγκριση με την τυχαία επιλογή περιπτώσεων, ιδίως όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μικρό (Elder, 2009).

Η διαδικασία που ακολουθείται σε αυτόν τον τύπο δειγματοληψίας είναι η ακόλουθη. Αρχικά, προσδιορίζονται κάποια βασικά χαρακτηριστικά ή κριτήρια για τη διαμόρφωση του δείγματος και έπειτα επιλέγονται περιπτώσεις που διαφέρουν μεταξύ τους ως προς τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά (Patton, 2015). Συγκεκριμένα, στην έρευνα αυτή καθορίστηκαν ως κριτήρια επιλογής δείγματος τα εξής χαρακτηριστικά: το φύλο και το επίπεδο ικανότητας λύσης προβλημάτων ενόρασης (Weisberg, 1995). Για τον καθορισμό του επιπέδου ικανότητας λύσης προβλημάτων ενόρασης των μαθητών, αξιολογήθηκε η επίδοση των μαθητών σε τρία προβλήματα ενόρασης από το δοκίμιο της φαντασίας στα μαθηματικά (δείτε Παράρτημα Β, Μέρος Β του δοκιμίου). Το συγκεκριμένο δοκίμιο θα περιγραφεί με περισσότερη λεπτομέρεια στην ενότητα του παρόντος κεφαλαίου με τίτλο «Εργαλεία Συλλογής Δεδομένων». Επιλέχθηκαν συνολικά 18 περιπτώσεις μαθητών, οι οποίοι κατείχαν διαφορετικό επίπεδο ικανότητας επίλυσης προβλήματος (χαμηλό, μέτριο και υψηλό) και αντιπροσώπευαν και τα δυο φύλα. Ο Πίνακας 3.1. παρουσιάζει αναλυτικά το προφίλ των μαθητών που επιλέχθηκαν. Για σκοπούς διατήρησης της ανωνυμίας των μαθητών, για κάθε μαθητής έχει δοθεί ένας συγκεκριμένος κωδικός, από το Μ1 μέχρι το Μ18, όπως φαίνεται και στον Πίνακα 3.1.

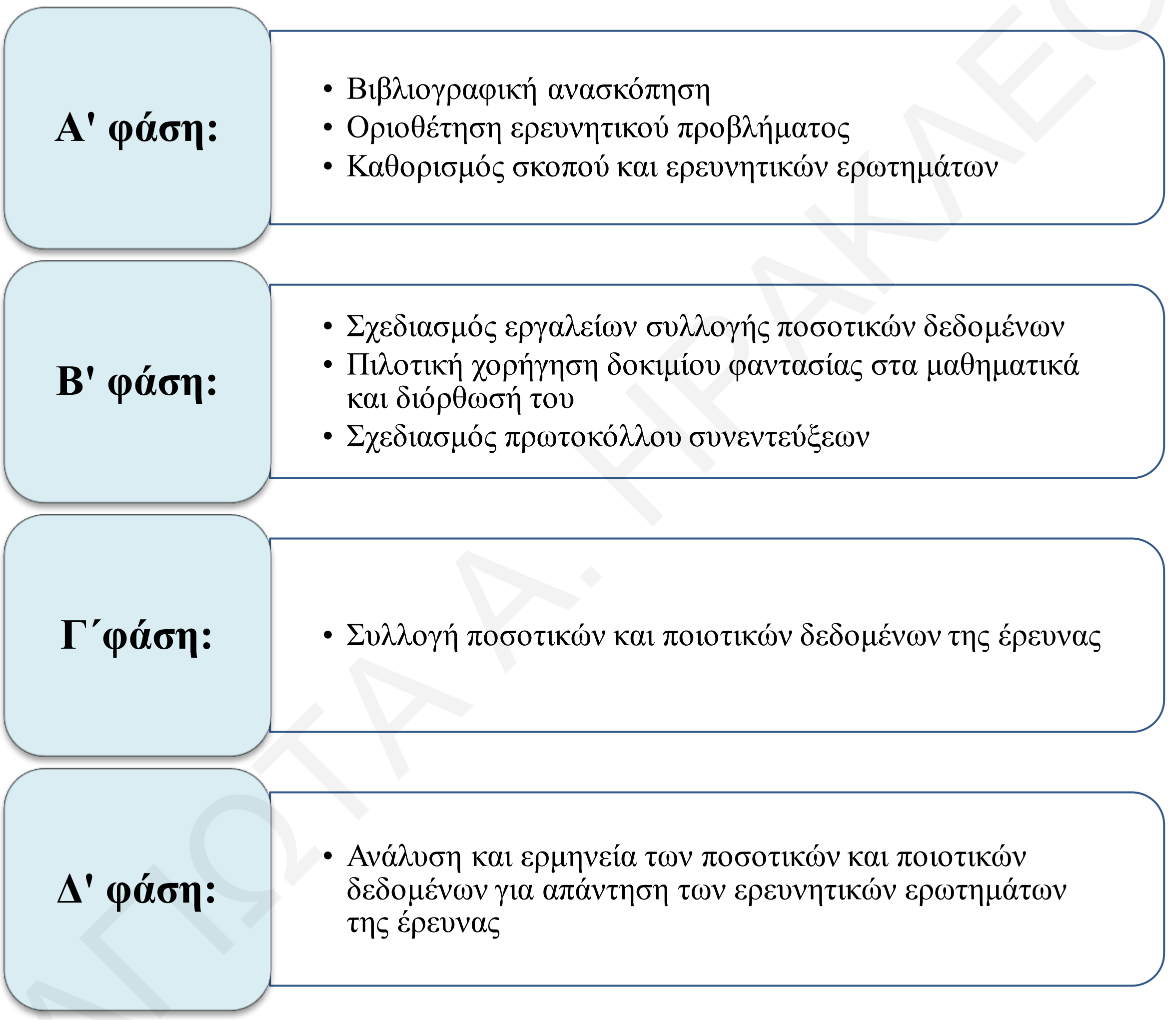
Πίνακας 3.1

Προφίλ Μαθητών που Συμμετείχαν στη Φάση των Ημι-δομημένων Συνεντεύξεων

Επίπεδο Ικανότητας Επίλυσης Προβλημάτων Ενόρασης	Φύλο	Περιπτώσεις μαθητών (κωδικοί)
Χαμηλό	Αγόρια	Μ1, Μ2, Μ3
	Κορίτσια	Μ4, Μ5, Μ6
Μέτριο	Αγόρια	Μ8, Μ9, Μ12
	Κορίτσια	Μ7, Μ10, Μ11
Υψηλό	Αγόρια	Μ14, Μ15, Μ18
	Κορίτσια	Μ13, Μ16, Μ17

Φάσεις Διεξαγωγής της Έρευνας

Η έρευνα διενεργήθηκε σε τέσσερις φάσεις, οι οποίες περιγράφονται αδρομερώς στο Διάγραμμα 3.1. και στη συνέχεια επεξηγούνται με περαιτέρω λεπτομέρειες. Η πρώτη φάση αποτελεί τη φάση της αναγνώρισης του ερευνητικού προβλήματος, η δεύτερη φάση τη φάση του σχεδιασμού, η τρίτη φάση τη φάση της συλλογής των δεδομένων και τέλος η τέταρτη φάση την φάση της ανάλυσης και ερμηνείας των δεδομένων.



Διάγραμμα 3.1. Φάσεις διεξαγωγής της έρευνας

Πρώτη Φάση

Η πρώτη φάση της έρευνας διήλθε μέσα τα ακόλουθα στάδια:

– Ανασκόπηση της βιβλιογραφίας όσον αφορά τη μαθηματική δημιουργικότητα με στόχο τον εντοπισμό ερευνητικών κενών

– Συγκεκριμενοποίηση του σκοπού και των ερευνητικών ερωτημάτων της διατριβής

- Εκτενής ανασκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας, με επικέντρωση σε σχετικά θεωρητικά μοντέλα και πρόσφατα ερευνητικά αποτελέσματα για τη φαντασία, τις γνώσεις, τις στάσεις/πεποιθήσεις και τη δημιουργικότητα στο πεδίο των μαθηματικών.
- Ανάπτυξη των προτεινόμενων μοντέλων που εξετάζει η διατριβή

Δεύτερη Φάση

Η δεύτερη φάση της έρευνας περιλάμβανε τις εξής δραστηριότητες:

- Σχεδιασμός των εργαλείων συλλογής δεδομένων για τη φαντασία και τις γνώσεις στα μαθηματικά.
- Επιλογή εργαλείου μέτρησης της μαθηματικής νοοτροπίας μέσα από ένα φάσμα υφιστάμενων εργαλείων και μετάφρασή του.
- Πιλοτική χορήγηση του δοκιμίου της φαντασίας στα μαθηματικά σε 20 μαθητές Στ’ δημοτικού, με σκοπό τη βελτίωση των έργων του: Εξετάστηκε ο βαθμός στον οποίο: (α) τα έργα και οι οδηγίες τους ήταν αναπτυξιακά κατάλληλα και κατανοητά για τους μαθητές, (β) ο χρόνος που δινόταν για την επίλυση των δυο δοκιμίων και του ερωτηματολογίου ήταν επαρκής. Η εκδοχή του δοκιμίου που χορηγήθηκε κατά την πιλοτική φάση παρουσιάζεται στο Παράρτημα Α.
- Ανάλυση των αποτελεσμάτων της πιλοτικής χορήγησης του δοκιμίου της φαντασίας.
- Διορθώσεις στα έργα του δοκιμίου μέτρησης της φαντασίας:
  (α) Έργα οπτικοποίησης χωρικών εικόνων: Όσον αφορά στο έργο 1, διαφάνηκε ότι οι μαθητές δεν μπόρεσαν να κατανοήσουν επακριβώς τις απαιτήσεις του. Γι΄ αυτό κρίθηκε χρήσιμο να προστεθεί και ένα ενδεικτικό παράδειγμα λύσης. Επίσης, φάνηκε ότι οι μαθητές δεν κατέγραφαν τους υπολογισμούς τους κατά την επίλυση του έργου. Έτσι, έγινε αναδιατύπωση της οδηγίας, ώστε να τους κατευθύνει να γράψουν ξεκάθαρα τις αριθμητικές πράξεις που εκτελούσαν. Στο έργο 2, οι μαθητές παρερμήνευσαν τις οδηγίες που δίνονταν. Θεώρησαν ότι ζητείται να μοιράζουν το σχήμα σε δυο ίσα μέρη, και δεν χρωμάτιζαν το μισό του ορθογωνίου. Έτσι, τους δόθηκε και ένα παράδειγμα λύσης. Το έργο 4 που χρησιμοποιήθηκε στην πιλοτική φάση αντικαταστάθηκε με ένα άλλο έργο (έργο 3, στην τροποποιημένη μορφή του δοκιμίου). Πιο συγκεκριμένα, το έργο της πιλοτικής φάσης ζητούσε από τους μαθητές να εντοπίσουν τετράπλευρα σε μια σύνθεση σχημάτων. Ωστόσο, τα πιθανά σχήματα που θα μπορούσαν να εντοπίσουν ήταν

μόνο ορθογώνια (εκ των οποίων και κάποια τετράγωνα) διαφορετικού μεγέθους. Ως εκ τούτου, το έργο αυτό αντικαταστήθηκε με ένα άλλο έργο, το οποίο θεωρήθηκε ότι επιδέχεται μεγαλύτερο εύρος σχημάτων ως απαντήσεις από τους μαθητές (τρίγωνα, τραπέζια, παραλληλόγραμμα διαφορετικού μεγέθους καθώς και μη συμβατικά σχήματα). Τέλος, για σκοπούς περιορισμού του μεγέθους του δοκιμίου και ενίσχυσης της πρακτικότητάς του, τα έργα 3 και 5 αφαιρέθηκαν.

(β) Οπτικοποίηση αλγεβρικών εικόνων: Έγινε προσπάθεια μείωσης του βαθμού δυσκολίας του έργου 5. Αρχικά το άθροισμα των δυο αριθμών ήταν δοσμένο συμβολικά. Ωστόσο, επειδή οι μαθητές δυσκολεύτηκαν στην επίλυσή του, προβήκαμε στην τροποποίησή του: το άθροισμα δόθηκε πλέον ως γνωστός αριθμός στους μαθητές. Επίσης, για σκοπούς περιορισμού του βαθμού δυσκολίας του δοκιμίου και ενίσχυσης της πρακτικότητάς τους, αφαιρέθηκαν τρία έργα στα οποία οι μαθητές παρουσίασαν χαμηλά ποσοστά επιτυχίας (έργα 2, 3 και 4). Τέλος, σε όλα τα έργα ζητήθηκε από τους μαθητές να δίνουν επεξηγήσεις για τον τρόπο που τα επέλυσαν, διότι προηγουμένως ο τρόπος σκέψης τους δεν ήταν πάντοτε εμφανής.

(γ) Μετασχηματιστικές ικανότητες: Αφαιρέθηκαν τα έργα 3 και 5 του δοκιμίου κατά την πιλοτική φάση, που μετρούσαν την ικανότητα γενίκευσης μοτίβων-σχέσεων συμμεταβολής (Χρυσοστόμου, 2014). Η πιλοτική χορήγηση έδειξε ότι η απαίτηση των έργων αυτών να καταλήξουν σε γενίκευση του μοτίβου με πολλούς και διαφορετικούς τρόπους καθιστά τα έργα απρόσιτα για τα παιδιά. Επίσης, αφαιρέθηκε το έργο 2, διότι μετρούσε την ίδια συνιστώσα με το έργο 6, δηλαδή την κατανόηση και οργάνωση ποσοτικών πληροφοριών (Christou et al., 2005). Στόχος των πιο πάνω αφαιρέσεων ήταν να μειωθεί ο χρόνος συμπλήρωσης του δοκιμίου.

– Σχεδιασμός πρωτοκόλλου ημι-δομημένων συνεντεύξεων, με σκοπό την πιο βαθιά διερεύνηση των γνωστικών διαδικασιών της φαντασίας των μαθητών στα μαθηματικά (Παράρτημα Ε)

Τρίτη Φάση

Κατά την τρίτη φάση της έρευνας, υλοποιήθηκαν οι πιο κάτω δραστηριότητες:

– Ενημέρωση των διευθυντών του σχολείου, των εκπαιδευτικών των τάξεων και των γονέων/κηδεμόνων των μαθητών για τον σκοπό της έρευνας, τις διαδικασίες συλλογής δεδομένων, το περιεχόμενο και τον χρόνο συμπλήρωσης των ερευνητικών εργαλείων από τους μαθητές. Επίσης, ενημερώθηκαν ότι η συμμετοχή στην έρευνα είναι εθελοντική και κάθε παιδί έχει δικαίωμα απόσυρσης από την έρευνα ανά πάσα στιγμή το επιθυμήσει, χωρίς οποιεσδήποτε συνέπειες για το ίδιο.

- Εξασφάλιση της γραπτής συγκατάθεσης των γονέων/κηδεμόνων για τη συμμετοχή του παιδιού τους στην έρευνα και την καταγραφή των δεδομένων της έρευνας.
- Ενημέρωση των παιδιών για τον σκοπό και το περιεχόμενο της έρευνας και για το ότι η συμμετοχή τους είναι εθελοντική.
- Προστασία ανωνυμίας και δεδομένων: Λήφθηκαν τα απαραίτητα μέτρα ώστε να διατηρηθεί η ανωνυμία των μαθητών και να διασφαλιστεί η άκρα εμπιστευτικότητα των πληροφοριών, χρησιμοποιώντας τις αποκλειστικά για την παρούσα έρευνα.
- Χορήγηση των εργαλείων συλλογής ποσοτικών δεδομένων (Δείγμα: 217 μαθητές Στ' δημοτικού, Διάρκεια: 4 Χ 40 λεπτά μαθήματα): Η χορήγηση των εργαλείων συλλογής ποσοτικών δεδομένων διενεργήθηκε κατά τη διάρκεια της σχολικής χρονιάς 2018-2019. Τα εργαλεία χορηγήθηκαν από την ερευνήτρια παρουσία ενός εκπαιδευτικού της τάξης. Στην πρώτη περίοδο χορήγησης, η ερευνήτρια προέβη στην περιγραφή των σκοπών της έρευνας. Εν συνεχεία, χορηγήθηκε το δοκίμιο της φαντασίας στα μαθηματικά, με μέγιστο χρόνο συμπλήρωσης τα 80 λεπτά. Ακολούθησε η χορήγηση του δοκιμίου μαθηματικών γνώσεων εντός 70 λεπτών και η συμπλήρωση του ερωτηματολογίου των στάσεων/πεποιθήσεων εντός 10 λεπτών.
- Διεξαγωγή ημι-δομημένων ατομικών συνεντεύξεων (Δείγμα: 18 μαθητές Στ' δημοτικού, Διάρκεια: 15 λεπτά περίπου): Η λήψη των συνεντεύξεων έγινε κατά τη σχολική χρονιά 2019-2020. Στις συνεντεύξεις συμμετείχαν μαθητές από τμήματα, των οποίων οι εκπιδευτικοί είχαν εκφράση τη συναίνεσή τους για συμμετοχή των μαθητών στις συνεντεύξεις. Οι συνεντεύξεις έγιναν ατομικά από την ερευνήτρια παρουσία του εκπαιδευτικού της τάξης. Επιδίωξή τους είναι να εξερευνήσουν πιο ενδελεχώς τις γνωστικές διαδικασίες της φαντασίας στα μαθηματικά κατά την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος ενόρασης (Weisberg, 1995), αναλύοντας τον τρόπο σκέψης των μαθητών μέχρι την ανακάλυψη της λύσης του.

Τέταρτη Φάση

Κατά την τέταρτη φάση της έρευνας τέθηκαν σε εφαρμογή τα εξής:

- Βαθμολόγηση των εργαλείων συλλογής δεδομένων.

- Καταχώριση των ποσοτικών δεδομένων στο στατιστικό πακέτο SPSS και εκτέλεση ποσοτικών αναλύσεων με τα στατιστικά πακέτα SPSS και SmartPLS.
- Απομαγνητοφώνηση συνεντεύξεων και διενέργεια ποιοτικών αναλύσεων.
- Συγγραφή κεφαλαίου αποτελεσμάτων και εξαγωγή συμπερασμάτων.

Εργαλεία Συλλογής Δεδομένων

Η συλλογή δεδομένων έγινε διαμέσου της χορήγησης εργαλείων συλλογής ποσοτικών δεδομένων και της διεξαγωγής ημι-δομημένων ατομικών συνεντεύξεων. Πρωταρχικά, στα εργαλεία συλλογής ποσοτικών δεδομένων συγκαταλέγονταν τα εξής: (α) το δοκίμιο αξιολόγησης της φαντασίας στα μαθηματικά, (β) το δοκίμιο των μαθηματικών γνώσεων και (γ) το εργαλείο μέτρησης της μαθηματικής νοοτροπίας. Όσον αφορά στις ημι-δομημένες συνεντεύξεις, αναπτύχθηκε ένα πρωτόκολλο συνέντευξης. Πιο κάτω περιγράφεται αναλυτικά ο σχεδιασμός, η δομή και το περιεχόμενο των μέσων συλλογής δεδομένων.

Δοκίμιο Μέτρησης της Φαντασίας στα Μαθηματικά

Το δοκίμιο αποτελείται από τρία μέρη και συνολικά εννέα έργα (δείτε Παράρτημα Β). Τα έργα του δοκιμίου δομήθηκαν βάσει του συνδυαστικού μοντέλου της δημιουργικής ικανότητας (Dziedziewicz & Karwowski, 2015) που εννοιολογεί τη φαντασία ως ένα κράμα τριών διαστάσεων: οπτικοποίηση, μετασχηματιστικές ικανότητες και πρωτοτυπία.

Το Μέρος Α΄ περιλαμβάνει τρία έργα εστιασμένα στην οπτικοποίηση χωρικών εικόνων, τα οποία επιδέχονται πολλαπλές ορθές λύσεις (Levav-Waynberg & Leikin, 2012). Τα έργα αυτά αξιολογήθηκαν με κριτήριο την ευελιξία των μαθητών (Leikin, 2009a; Leikin & Lev, 2013) κατά τον χειρισμό νοερών χωρικών αντικειμένων (Arcavi, 1999; McGee, 1979 ; Michael et al., 1957; Presmeg, 1997), νοουμένου ότι η φαντασία θεωρείται πηγή της ευελιξίας της ανθρώπινης σκέψης (Egan, 2005). Συγκεκριμένα, οι απαντήσεις των μαθητών ομαδοποιήθηκαν σε διαφορετικές κατηγορίες ανάλογα με τις μαθηματικές ιδέες που εμπλέκουν (Leikin, 2009a; Leikin & Lev, 2013).

Το Μέρος Β΄ εμπεριέχει τρία έργα αναφορικά με την οπτικοποίηση αλγεβρικών εικόνων. Τα έργα αυτά εμπίπτουν στην κατηγορία των προβλημάτων ενόρασης (Weisberg, 1995). Για την επίλυσή τους, ο μαθητής μπορεί να διέλθει μέσα από τα τέσσερα στάδια της δημιουργικής διαδικασίας (Wallas, 1926): την προετοιμασία, την επώαση, τον φωτισμό και την επαλήθευση (Cropley & Cropley, 2013). Εξάλλου, σύμφωνα με τους Vale και Barbosa (2018), η οπτικοποίηση σχετίζεται άμεσα με τη σύλληψη δημιουργικών ιδεών ή τη βίωση της εμπειρίας της ενόρασης ή του «Aha!». Για την αξιολόγηση των έργων, αποσαφηνίστηκε κατά πόσον ο μαθητής προσέγγισε τη λύση των έργων ή όχι.

Το Μέρος Γ΄ εξετάζει τις μετασχηματιστικές ικανότητες των μαθητών μέσω τριών έργων, στα οποία υπάρχουν πολλαπλές ορθές απαντήσεις (Levav-Waynberg & Leikin, 2012). Τα έργα αυτά προϋπόθεταν οριζόντια μαθηματικοποίηση (Treffers, 1987). Η αξιολόγηση της ικανότητας των μαθητών στον μετασχηματισμό έγινε με βάση και πάλι το κριτήριο της ευελιξίας (Leikin, 2009a; Leikin & Lev, 2013) κατά τη διαδικασία μαθηματικοποίησης των χαρακτηριστικών της κατάστασης. Δηλαδή, υπολογίστηκε ο αριθμός των διαφορετικών κατηγοριών απαντήσεων που κατόρθωσε να δώσει ο μαθητής στο κάθε έργο (Leikin, 2009a; Leikin & Lev, 2013).

Για τη μέτρηση της πρωτοτυπίας, η διατριβή επικεντρώθηκε στα μαθηματικά αποτελέσματα των μαθητών τόσο στα έργα οπτικοποίησης όσο και στα έργα των μετασχηματιστικών ικανοτήτων, εφόσον η πρωτοτυπία διατρέχει και τις δυο αυτές συνιστώσες της φαντασίας. Πιο αναλυτικά, η έρευνα εστίασε στα έργα του δοκιμίου της φαντασίας τα οποία επιδέχονταν πολλαπλές απαντήσεις: στα έργα οπτικοποίησης χωρικών εικόνων (έργα από το Μέρος Α΄) και στα έργα μετασχηματιστικών ικανοτήτων (έργα από το Μέρος Γ΄). Στα έργα οπτικοποίησης χωρικών εικόνων, αξιολογήθηκε ο βαθμός στον οποίο ο μαθητής χειρίστηκε τις νοερές χωρικές εικόνες με τρόπο πρωτότυπο. Από την άλλη, στα έργα που αφορούσαν στις μετασχηματιστικές ικανότητες, αξιολογήθηκε ο βαθμός στον οποίο η μαθηματικοποίηση που διενέργησε ο μαθητής ήταν μοναδική (Leikin, 2009a; Leikin & Lev, 2013).

Αναλυτική Περιγραφή του Δοκιμίου Μέτρησης της Φαντασίας στα Μαθηματικά. Το Μέρος Α΄ του δοκιμίου αποτελείται από τρία έργα, στα οποία οι μαθητές καλούνταν να χειριστούν χωρικές εικόνες με τρεις διαφορετικούς τρόπους και με έναν τρόπο που κανένας άλλος στην τάξη τους δεν θα μπορούσε να σκεφτεί. Η οδηγία αυτή διασφαλίζει ότι τα έργα αυτά παρέχουν γόνιμο έδαφος για τη μέτρηση της ικανότητας ευελιξίας (διαφορετικότητα λύσεων) και πρωτοτυπίας των μαθητών (σπανιότητα και γνωστική πολυπλοκότητα λύσεων).

Το πρώτο έργο (ΟΧΕ_1: διατάξεις κερασιών) υιοθετήθηκε αυτούσιο από την έρευνα των Vale και Barbosa (2015). Στο έργο αυτό δίνεται οπτικά η αναπαράσταση ενός πλήθους κερασιών και οι μαθητές πρέπει να προτείνουν τρεις διαφορετικούς τρόπους για τον υπολογισμό τους. Το συγκεκριμένο έργο αποτελεί έργο οπτικοποίησης χωρικών εικόνων καθώς απαιτεί από τους μαθητές να χειριστούν νοερά τα κεράσια ως οπτικές αναπαραστάσεις και μάλιστα να εναλλάσσουν τον τρόπο οπτικοποίησης των κερασιών. Για παράδειγμα, για να υπολογίσουν το πλήθος των κερασιών οι μαθητές μπορούν να επικεντρωθούν στις διαγώνιες γραμμές των κερασιών, στις οριζόντιες γραμμές, να σχηματίσουν ομάδες κερασιών κτλ.

Το δεύτερο έργο (ΟΧΕ_2: σκίαση μισού ορθογωνίου) έχει ληφθεί από τη διδακτορική διατριβή της Κάττου (2013) και ενθαρρύνει τους μαθητές να σκιάσουν το μισό του ορθογωνίου παραλληλογράμμου με τρεις διαφορετικούς τρόπους. Έτσι, δίνονται ως ερέθισμα τέσσερα ορθογώνια παραλληλόγραμμα, σε κάθε πλευρά των οποίων υπάρχουν σημεία που δηλώνουν τη μονάδα μήκους. Τα ορθογώνια δεν είναι διαχωρισμένα σε γραμμές, στήλες ή τετραγωνικές μονάδες, ώστε οι μαθητές να μην εγκλωβιστούν σε μια συγκεκριμένη στρατηγική λύσης. Το έργο επιδέχεται διαφορετικές στρατηγικές λύσης: πιο τετριμμένες στρατηγικές, όπως ο διαχωρισμός του ορθογωνίου παραλληλογράμμου σε δυο ίσα μέρη κατασκευάζοντας τον κατακόρυφο ή οριζόντιο άξονα συμμετρίας, αλλά και πιο σύνθετες στρατηγικές, όπως ο διαχωρισμός του ορθογωνίου παραλληλογράμμου με συνδυασμούς διαφορετικών γεωμετρικών σχημάτων.

Αναφορικά με το τρίτο έργο (ΟΧΕ_3: εντοπισμός σχημάτων), η ιδέα του είναι βασισμένη σε ένα μαθηματικό έργο που έχουν εισηγηθεί οι Musser και Peterson (2008) αλλά έχει μετατραπεί από κλειστού τύπου έργο σε ανοικτού τύπου. Ειδικότερα, δίνει στους μαθητές ως οπτικό ερέθισμα ένα σύνθετο σχήμα που απαρτίζεται από μικρότερα τρίγωνα και τους καλεί να αναγνωρίσουν διαφορετικά σχήματα εντός του σύνθετου αυτού σχήματος. Ως λύσεις για το έργο αυτό είναι δυνατόν να προταθούν σχήματα όπως τρίγωνο, παραλληλόγραμμο, τραπέζιο διαφορετικών μεγεθών καθώς και μη τυπικά γεωμετρικά σχήματα.

Το Μέρος Β΄ περιλαμβάνει τρία έργα που αφορούν την οπτικοποίηση αλγεβρικών εικόνων. Τα έργα αυτά εμπίπτουν στην κατηγορία των προβλημάτων ενόρασης (Weisberg, 1995). Για την επίλυσή τους, ο μαθητής μπορεί να διέλθει μέσα από τα τέσσερα στάδια της δημιουργικής διαδικασίας (Wallas, 1926): την προετοιμασία, την επώαση, τον φωτισμό και την επαλήθευση (Cropley & Cropley, 2013). Έχοντας ως στόχο τη μελέτη της εμπειρίας του «Aha!» κρίθηκε χρήσιμο να επιλεγούν προβλήματα που έχουν ψηλή πιθανότητα να πυροδοτήσουν μια εμπειρία «Aha!». Τέτοιου είδους προβλήματα είναι αυτά που δεν απαιτούν πολλαπλά βήματα για να επιλυθούν, εφόσον τα προβλήματα με πολλούς περιορισμούς δεν ενδείκνυνται για τη μελέτη της εμπειρίας του «Aha!» (Danek & Wiley, 2017). Για να εξακριβωθεί κατά πόσον όντως οι μαθητές έλυσαν το πρόβλημα μέσω ενόρασης και βίωσαν την εμπειρία του «Aha!», ζητήθηκε από αυτούς να περιγράψουν τον τρόπο με τον οποίο εργάστηκαν. Εξάλλου, ένας σημαντικός περιορισμός των προβλημάτων ενόρασης είναι ότι δε λύνονται πάντοτε μέσω μιας λύσης ενόρασης, αλλά μπορούν να επιλυθούν και μέσω αναλυτικών διαδικασιών ή μέσω συνδυασμού των δυο (Bowden et al., 2005).

Το πρώτο έργο (ΟΑΕ_1: αναγνώριση σχέσεων) είχε χρησιμοποιηθεί στις εισαγωγικές εξετάσεις του G C School of Careers στο μάθημα των Μαθηματικών (The G C School of Careers, 2015). Προϋποθέτει την αναγνώριση των σχέσεων που κρύβονται πίσω από τους αριθμούς που δίνονται στον πρώτο κύκλο, την επαλήθευσή τους στους δοσμένους όρους του δεύτερου κύκλου και την εφαρμογή τους με σκοπό τον υπολογισμό του τέταρτου όρου. Οι σχέσεις που διέπουν τους όρους του πρώτου κύκλου δεν είναι οφθαλμοφανείς για τους μαθητές. Ο μαθητής πρέπει να εξερευνήσει τις διάφορες σχέσεις ανάμεσα στους όρους του πρώτου κύκλου και να συλλάβει ποιες σχέσεις επαληθεύονται και στον δεύτερο κύκλο ως μια στιγμή ενόρασης (Hadamard, 1945).

Στο δεύτερο έργο (ΟΑΕ_2: αναγνώριση αξίας ψηφίων πρόσθεσης) δίνεται μια πρόσθεση στους μαθητές, στην οποία τα ψηφία των προσθετέων αναπαρίστανται συμβολικά και όχι αριθμητικά. Οι μαθητές καλούνται να αναγνωρίσουν την αριθμητική αξία των συμβόλων αυτών, ώστε οι προσθετέοι να δίνουν ένα συγκεκριμένο άθροισμα. Η αριθμητική αξία του κάθε συμβόλου δεν είναι εύκολα προσβάσιμη από τους μαθητές, αφού πρέπει να ελέγξει κατά πόσον επαληθεύεται το δοσμένο άθροισμα. Επομένως, η ορθή λύση του έργου εμφανίζεται ξαφνικά ως φωτισμός (Liljedhal, 2004, 2013; Yaftian, 2015).

Το τρίτο έργο (ΟΑΕ_3: αναγνώριση αριθμών διαγράμματος) είχε αξιοποιηθεί στις εισαγωγικές εξετάσεις της Αγγλικής Σχολής στο μάθημα των Μαθηματικών (Αγγλική Σχολή, 2014). Στο συγκεκριμένο έργο, υπάρχει ένα διάγραμμα με αριθμούς, τους οποίους διέπει ο κανόνας ότι οι αριθμοί δυο οποιωνδήποτε κύκλων έχουν άθροισμα ίσο με τον αριθμό που βρίσκεται στο μεταξύ τους τετράγωνο. Αναμένεται από τους μαθητές να ανακαλύψουν ποιοι αριθμοί πρέπει να τοποθετηθούν στους κύκλους του δεύτερου διαγράμματος, ώστε να επαληθεύεται ο εν λόγω κανόνας. Και πάλι, οι ζητούμενοι αριθμοί δεν είναι άμεσα ορατοί στους μαθητές, και η επίλυση του έργου απαιτεί από το άτομο την «άμεση αντίληψη των σχέσεων» (Thorpe, 1956 στο Koestler, 1964, σ. 548) που ενυπάρχουν στο σχήμα, ως εμπειρία ενόρασης.

Το Μέρος Γ΄ του δοκιμίου απαρτίζεται από τρία έργα, στα οποία οι μαθητές καλούνταν να επιδείξουν μετασχηματιστικές ικανότητες, με τρεις διαφορετικούς τρόπους και με έναν τρόπο που κανένας άλλος στην τάξη τους δεν θα μπορούσε να σκεφτεί. Τα έργα αυτά εγείρουν ευκαιρίες για αξιολόγηση της ευελιξίας (διαφορετικότητα λύσεων) και της πρωτοτυπίας των μαθητών (σπανιότητα και γνωστική πολυπλοκότητα λύσεων).

Το πρώτο έργο (MI_1: γραφική παράσταση αθλημάτων) αξιολογεί τη μετάφραση ποσοτικών πληροφοριών (Christou et al., 2005). Συγκεκριμένα, δίνεται μια γραφική παράσταση που αναπαριστά την αγαπημένη ασχολία των παιδιών ενός σχολείου. Ζητείται από τους μαθητές να μεταφράσουν τις πληροφορίες της γραφικής παράστασης σε λεκτική μορφή, διατυπώνοντας τρεις διαφορετικές ερωτήσεις που μπορούν να απαντηθούν από τις πληροφορίες αυτές. Έπειτα, καλούνται να αναλογιστούν μια ερώτηση που δεν έχει σκεφτεί κανείς άλλος συμμαθητής τους. Οι ερωτήσεις που ενδέχεται να προταθούν μπορεί να αντιστοιχούν με τα τρία ιεραρχικά επίπεδα ερωτήσεων κατανόησης γραφικών παραστάσεων (Curcio, 1989): ανάγνωση των δεδομένων, ανάγνωση ανάμεσα στα δεδομένα και ανάγνωση πέραν από τα δεδομένα. Το πρώτο επίπεδο αφορά σε ερωτήσεις που απαιτούν εκμαίευση πληροφοριών από τη γραφική παράσταση. Στο δεύτερο επίπεδο υπάγονται ερωτήσεις ερμηνείας και συσχέτισης πληροφοριών, ενώ στο τρίτο ερωτήσεις που απαιτούν επέκταση πληροφοριών, προβλέψεις ή εξαγωγή συμπερασμάτων.

Το δεύτερο έργο (MI_2: μαθηματική πρόταση) εξετάζει την ικανότητα κατανόησης και οργάνωσης ποσοτικών πληροφοριών και λήφθηκε από την ερευνητική δουλειά του Christou και των συνεργατών του (2005). Έχουν απλουστευθεί οι αριθμοί της μαθηματικής πρότασης από τετραψήφιοι και τριψήφιοι σε διψήφιοι. Στο συγκεκριμένο έργο, οι μαθητές πρέπει να εισηγηθούν τρία διαφορετικά προβλήματα που λύνονται με μια δοσμένη μαθηματική πρόταση προσθετικής δομής. Στη συνέχεια, τους ζητείται να προτείνουν ένα πρόβλημα που δεν έχει σκεφτεί κανένας άλλος συμμαθητής τους. Τα προβλήματα που δύνανται να θέσουν οι μαθητές αντιστοιχούν με τρία κύρια σχήματα προσθετικής δομής: προβλήματα αλλαγής, ομαδοποίησης και σύγκρισης (Powell & Fuchs, 2018) και τους συνδυασμούς των σχημάτων αυτών. Καθένα από τα τρία αυτά σχήματα εμπλέκει τις έννοιες και διαδικασίες της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.

Το τρίτο έργο (MI_3: πίνακας δεδομένων) εστιάζει στην ικανότητα μετάφρασης ποσοτικών πληροφοριών (Christou et al., 2005), καθώς εμπεριέχει έναν πίνακα με δεδομένα και απαιτεί τη διατύπωση ερωτημάτων που μπορούν να απαντηθούν από αυτά. Οι μαθητές καλούνται να εισηγηθούν μια ερώτηση που δεν έχει σκεφτεί κανείς άλλος συμμαθητής τους. Οι πιθανές ερωτήσεις που μπορεί να τεθούν ποικίλουν. Για παράδειγμα, μπορούν να θέσουν ερωτήσεις που απαντιούνται από ένα μόνο στοιχείο του πίνακα, όπως «Πόσα πληρώνει η οικογένεια του Μάρκου για βενζίνη;». Επίσης, μπορούν να διατυπωθούν ερωτήσεις που απαντιούνται με τη συσχέτιση δεδομένων του πίνακα, όπως «Πόσα περισσότερα λεφτά πληρώνει η οικογένεια του Μάρκου από την οικογένεια του Πασχάλη για αγορά ρούχων;». Μια πρωτότυπη ερώτηση που μπορεί να διατυπωθεί σχετίζεται με την επέκταση πληροφοριών και την εξαγωγή συμπερασμάτων, όπως για παράδειγμα: «Αν επιλέξουμε τυχαία μια συμμαθήτρια των δυο παιδιών, πού είναι πιο πιθανόν να δαπανά το μεγαλύτερο μέρος των λεφτών της η οικογένεια της;».

Δοκίμιο Μαθηματικών Γνώσεων

Το δοκίμιο εμπεριέχει 10 συνολικά έργα, τα οποία εμπίπτουν στις πέντε μαθηματικές περιοχές του Αναλυτικού Προγράμματος (Αριθμοί, Μέτρηση, Γεωμετρία, Άλγεβρα και Στατιστική-Πιθανότητες). Το δοκίμιο αναπτύχθηκε βάσει των διδακτικών εγχειριδίων που εκδίδονται από την Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων του Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού και είναι ευθυγραμμισμένα με τα Νέα Αναλυτικά Προγράμματα. Τα έργα του δοκιμίου προσιδιάζουν με έργα από τα τρέχοντα διδακτικά εγχειρίδια, ώστε να αξιολογηθεί η βασική γνώση περιεχομένου. Το δοκίμιο παρουσιάζεται αυτούσιο στο Παράρτημα Γ.

Αναλυτική Περιγραφή του Δοκιμίου Μαθηματικών Γνώσεων. Το δοκίμιο αξιολόγησης των μαθηματικών γνώσεων αποτελείται από 10 μαθηματικά έργα. Ο Πίνακας 3.2 παρουσιάζει τα έργα τα οποία εμπίπτουν σε κάθε μαθηματική περιοχή του Αναλυτικού Προγράμματος των μαθηματικών. Το πρώτο έργο (Γ1: αριθμητικές πράξεις) στοχεύει να εξετάσει την ικανότητα των μαθητών την εφαρμογή των αλγορίθμων των τεσσάρων πράξεων με ακέραιους αριθμούς. Περιλαμβάνει μια πράξη πρόσθεσης, μια πράξη αφαίρεσης, μια πράξη πολλαπλασιασμού και μια πράξη διαίρεσης. Οι πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης αφορούν τριψήφιους αριθμούς, ενώ η πράξη του πολλαπλασιασμού αφορά τριψήφιο με διψήφιο αριθμό. Τέλος, η διαίρεση αναφέρεται σε τετραψήφιο διαιρετέο με διψήφιο διαιρέτη. Το δεύτερο έργο (Γ2: λύση προβλήματος) αξιολογεί την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων με περισσότερες από μία πράξεις, μέσα από ένα πρόβλημα αναλογίας που εμπλέκει επίσης το σχήμα προσθετικής δομής της ομαδοποίησης (Powell & Fuchs, 2018). Το τρίτο έργο (Γ3: σύγκριση κλασμάτων) ασχολείται με τη σύγκριση κλασμάτων: το πρώτο ζεύγος είναι ζεύγος ομώνυμων κλασμάτων και τα άλλα τρία είναι ζεύγη ετερώνυμων κλασμάτων.

Το τέταρτο έργο (Γ4: ερμηνεία κλάσματος ως μέρος επιφάνειας) αναφέρεται στην ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος επιφάνειας, αφού οι μαθητές καλούνται να αναγνωρίσουν ένα δοσμένο κλάσμα σε μια σειρά από τρεις οπτικές αναπαραστάσεις. Το πέμπτο έργο (Γ5: σειροθέτηση δεκαδικών) προϋποθέτει ικανότητες στην ανάγνωση, γραφή, σειροθέτηση και σύγκριση δεκαδικών αριθμών μέχρι τρία δεκαδικά ψηφία. Το έκτο έργο (Γ6: περίμετρος και εμβαδόν ορθογωνίου) άπτεται της περιμέτρου και του εμβαδού δισδιάστατων σχημάτων, καθώς απαιτεί από τους μαθητές να υπολογίσουν την περίμετρο και το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου και να δείξουν τον τρόπο σκέψης τους.

Το έβδομο έργο (Γ7: αναγνώριση ιδιοτήτων δισδιάστατων σχημάτων) εστιάζει στην αναγνώριση βασικών ιδιοτήτων δισδιάστατων σχημάτων. Το όγδοο έργο (Γ8: επέκταση μοτίβου) στοχεύει στην επέκταση ενός σχηματικού μοτίβου και την περιγραφή του κανόνα του. Το ένατο έργο (Γ9: μηχανή συνάρτησης) περιστρέφεται γύρω από την έννοια της μεταβλητής και τις αλγεβρικές σχέσεις, απαιτώντας από τους μαθητές να μπορούν να κατανοούν και να ερμηνεύουν τη σχέση μεταξύ δυο μεταβλητών. Το δέκατο έργο (Γ10: ερμηνεία ραβδογράμματος) καταπιάνεται με την ικανότητα ερμηνείας ενός ραβδογράμματος, μέσα από δυο ερωτήσεις. Η πρώτη ερώτηση αντιστοιχεί με το πρώτο επίπεδο κατανόησης γραφικών παραστάσεων της Curcio (1989), δηλαδή την ανάγνωση των δεδομένων της γραφικής παράστασης. Η δεύτερη ερώτηση αγγίζει το δεύτερο επίπεδο κατανόησης γραφικών παραστάσεων, που είναι η ανάγνωση ανάμεσα στα δεδομένα.

Πίνακας 3.2

Έργα Δοκιμίου Μαθηματικών Γνώσεων ανά Μαθηματική Περιοχή

Μαθηματική περιοχή	Έργα δοκιμίου
Αριθμοί	1 – 5
Μέτρηση	6
Γεωμετρία	7
Άλγεβρα	8 & 9
Στατιστική – Πιθανότητες	10

Εργαλείο Μέτρησης των Στάσεων/πεποιθήσεων στα Μαθηματικά

Η αξιολόγηση της μαθηματικής νοοτροπίας των μαθητών έγινε με τη χορήγηση μιας τροποποιημένης εκδοχής του ερωτηματολογίου της Dweck (2006). Μέσα από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας, κρίθηκε ότι το συγκεκριμένο ερωτηματολόγιο κάλυπτε το πιο ευρύ φάσμα των ερωτήσεων που θα μπορούσαν να απαντήσουν οι μαθητές για να καθοριστεί η νοοτροπία τους. Το αυθεντικό ερωτηματολόγιο συνίσταται από 20 δηλώσεις, που αξιολογούν τις πεποιθήσεις σχετικά με τη φύση της ευφυΐας (14 δηλώσεις) καθώς και τις πεποιθήσεις για τη φύση της προσωπικότητας (6 δηλώσεις). Ωστόσο, για τους σκοπούς της παρούσας έρευνας, έχουν επιλεχθεί μόνο οι 14 δηλώσεις (Ν1 μέχρι Ν14) που καταπιάνονται με τις πεποιθήσεις για τη φύση της ευφυΐας (δείτε Παράρτημα Δ). Οι επτά δηλώσεις του ερωτηματολογίου επικεντρώνονται στη στατική νοοτροπία ενώ οι υπόλοιπες επτά νοοτροπία ανάπτυξης. Ο Πίνακας 3.3 παρουσιάζει το είδος της νοοτροπίας στο οποίο εστιάζει κάθε μια από τις δηλώσεις. Επιπλέον, οι δηλώσεις του ερωτηματολογίου έχουν προσαρμοστεί κατάλληλα ώστε να αναφέρονται ειδικά στο γνωστικό αντικείμενο των μαθηματικών. Για τις 14 δηλώσεις του ερωτηματολογίου γίνεται χρήση κλίμακας Likert με πέντε διαβαθμίσεις. Ο αριθμός 1 υποδηλώνει το «διαφωνώ απόλυτα» ενώ ο αριθμός 5 αντιστοιχεί με το «συμφωνώ απόλυτα». Η οδηγία καλεί τους μαθητές να κυκλώσουν τον κατάλληλο αριθμό που απηχεί τον βαθμό στον οποίο συμφωνούν ή διαφωνούν με τις δοθείσες δηλώσεις.

Πίνακας 3.3

Είδος Νοοτροπίας που Εξετάζεται από κάθε Δήλωση του Ερωτηματολογίου

Είδος νοοτροπίας	Δηλώσεις ερωτηματολογίου
Στατική νοοτροπία	1, 4, 5, 8, 10, 12, 13
Νοοτροπία ανάπτυξης	2, 3, 6, 7, 9, 11, 14

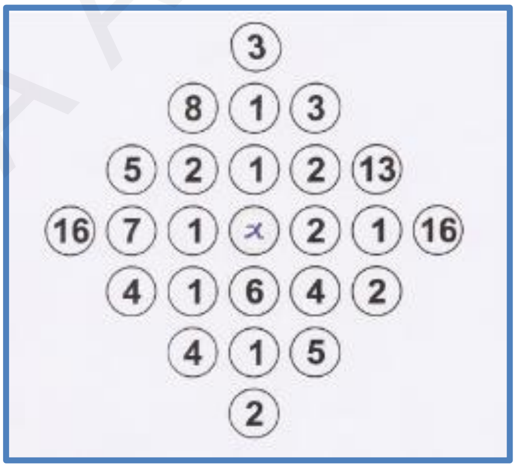
Ημι-δομημένες Ατομικές Συνεντεύξεις

Πέραν της συλλογής ποσοτικών δεδομένων, λήφθηκαν ημι-δομημένες ατομικές συνεντεύξεις από ορισμένους μαθητές. Οι ημι-δομημένες συνεντεύξεις έχουν ως βάση τους ένα πρωτόκολλο με θέματα προς συζήτηση αλλά συλλέγουν δεδομένα με έναν όχι απόλυτα προκαθορισμένο ή συστηματικό τρόπο (Cohen et al., 2008). Σκοπός των συνεντεύξεων ήταν η διερεύνηση των γνωστικών διαδικασιών της φαντασίας στα μαθηματικά από τις οποίες διέρχονται οι μαθητές κατά την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος ενόρασης (Weisberg, 1995), έχοντας ως θεωρητικό φακό το θεωρητικό μοντέλο του Wallas (1926) για τη δημιουργική διαδικασία, που είναι συμπτυγμένο σε τέσσερα στάδια: την προετοιμασία, την επώαση, τον φωτισμό και την επαλήθευση (Cropley & Cropley, 2013). Η διερεύνηση αυτή μέσα από ένα μαθηματικό πρόβλημα ενόρασης συνέβαλε στο να αποκτηθεί μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα για τη φαντασία των μαθητών στα μαθηματικά.

Οι ατομικές συνεντεύξεις πραγματοποιήθηκαν από την ερευνήτρια παρουσία ενός εκπαιδευτικού της τάξης, σε χώρο όπου δεν υπήρχαν άλλα άτομα, ώστε να διασφαλιστεί η εμπιστευτικότητα των πληροφοριών αλλά και να μείνει απερίσπαστη η προσοχή των μαθητών. Είχαν διάρκεια περίπου 15 λεπτών η κάθε μια. Κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων, δόθηκε στους μαθητές ένα μαθηματικό πρόβλημα ενόρασης (δείτε Διάγραμμα 3.2) και είχαν στη διάθεσή τους όσο χρόνο επιθυμούσαν για να το λύσουν.

Στο πιο κάτω σχήμα, οι αριθμοί συνδέονται μεταξύ τους με κάποια σχέση.

Να υπολογίσεις την τιμή του αριθμού x, που βρίσκεται στον κεντρικό κύκλο.



Απάντηση: x = ____________________

Διάγραμμα 3.2. Το μαθηματικό πρόβλημα που επιλύθηκε στη συνέντευξη.

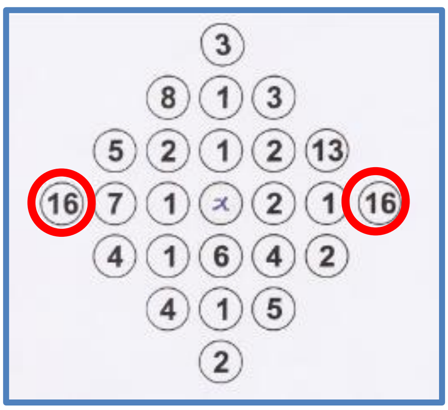
Το μαθηματικό πρόβλημα που επιλέχθηκε πληρούσε τα ακόλουθα κριτήρια. Πρωταρχικά, δεδομένου ότι ένας βασικός περιορισμός που διέπει τα προβλήματα ενόρασης έγκειται στο ότι δε λύνονται πάντοτε μέσω μιας λύσης ενόρασης, αλλά μπορούν να επιλυθούν και μέσω αναλυτικών διαδικασιών ή μέσω συνδυασμού των δυο (Bowden et al., 2005), έγινε προσπάθεια ώστε να επιλεγεί ένα πρόβλημα που δεν επιδέχεται οποιαδήποτε αναλυτική διαδικασία λύσης. Δεύτερον, ο στόχος ήταν να επιλεγεί ένα πρόβλημα που έχει ψηλή πιθανότητα να πυροδοτήσει μια εμπειρία «Aha!». Έτσι, επιλέχθηκε ένα πρόβλημα που δεν απαιτεί πολλαπλά βήματα για να λυθεί, εφόσον τα προβλήματα με πολλούς περιορισμούς δεν προσφέρονται για τη μελέτη της εμπειρίας του «Aha!» (Danek & Wiley, 2017). Το συγκεκριμένο πρόβλημα είχε χρησιμοποιηθεί στις εισαγωγικές εξετάσεις του G C School of Careers στο μάθημα των Μαθηματικών (G C School of Careers examination, 2011).

Επιπλέον, ζητήθηκε από τους μαθητές καθώς επιλύουν το πρόβλημα να ακολουθούν την τεχνική του «σκέφτομαι μεγαλόφωνα» (thinking aloud). Στην εν λόγω μέθοδο οι συμμετέχοντες λεκτικοποιούν τη σκέψη τους καθώς εκτελούν ένα δοσμένο έργο, αποφεύγοντας την ερμηνεία ή την επεξήγηση του τι κάνουν (Ericsson & Simon, 1993; Young, 2005). Συγκεντρώνονται στο έργο, χωρίς να υπάρχουν διακοπές ή να τίθενται καθοδηγητικές ερωτήσεις (Ericsson & Simon, 1993). Η μόνη μορφή εμπλοκής του ερευνητή σε όλη τη διαδικασία περιορίζεται σε προτροπές όπως «συνέχισε να μιλάς», εάν ο συμμετέχοντας μείνει σιωπηλός για ένα παρατεταμένο χρονικό διάστημα (Young, 2005). Στην περίπτωση των συνεντεύξεων της παρούσας έρευνας, η μέθοδος του «σκέφτομαι μεγαλόφωνα» έριξε άμεσα φως στον τρόπο σκέψης των μαθητών κατά τη διάρκεια της λύσης του προβλήματος, επιτρέποντας να εξερευνηθεί το πώς βίωσαν κάθε ένα από τα τέσσερα στάδια της δημιουργικής διαδικασίας.

Η μέθοδος του «σκέφτομαι μεγαλόφωνα» θεωρείται ένας έγκυρος τρόπος συλλογής λεκτικών δεδομένων (Ericsson, 2006; Ericsson & Simon, 1993). Είναι ένας πολύ αποτελεσματικός τρόπος αξιολόγησης των διαδικασιών ανώτερου επιπέδου σκέψης (Krahmer & Ummelen, 2004). Ένα από τα κύρια πλεονεκτήματα της μεθόδου αυτής είναι ότι επιτρέπει στον ερευνητή να συλλάβει άμεσα τις σκέψεις του υποκειμένου (Ericsson & Simon, 1993; Jacobse & Harskamp, 2012; Young, 2005). Επίσης, μειώνει τα προβλήματα που αφορούν τη μνήμη, τα οποία προκύπτουν όταν ο ερευνητής περιμένει να συλλέξει τα λεκτικά δεδομένα στο τέλος της δραστηριότητας (Wade, 1990). Η ικανότητα των συμμετεχόντων να θυμούνται τι σκέφτονταν σε προηγούμενες χρονικές στιγμές είναι περιορισμένη (Young, 2005). Επιπλέον, ενώ σε μια συνέντευξη που γίνεται μετά την επίλυση της δραστηριότητας ο συμμετέχοντας τείνει να απαντά με βάση το τι θεωρεί ως αποδεκτή απάντηση, η μέθοδος του «σκέφτομαι μεγαλόφωνα» δεν του αφήνει περιθώριο για κάτι τέτοιο αλλά τον αναγκάζει να διατυπώσει τις άμεσες του σκέψεις (Young, 2005).

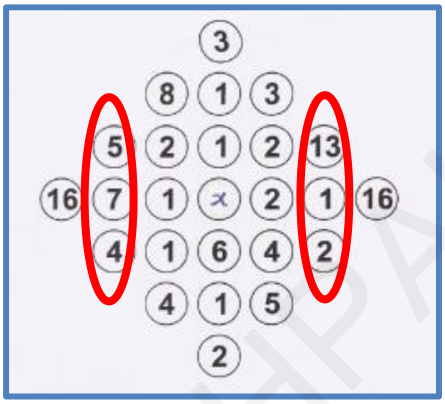
Σύμφωνα με τους Ericsson και Simon (1993), στη μέθοδο του «σκέφτομαι μεγαλόφωνα» ο ερευνητής δύναται να προβεί και σε μια αναδρομική εξέταση των συμμετεχόντων, όπου διατυπώνει ερωτήσεις μετά τη συμπλήρωση της δραστηριότητας. Κατ' επέκταση, μετά την ολοκλήρωση της εργασίας των μαθητών με το πρόβλημα, η ερευνήτρια έθετε στους μαθητές μια σειρά από ερωτήσεις βάσει ενός πρωτοκόλλου (δείτε Παράρτημα Ε). Το πρωτόκολλο δομήθηκε από την ερευνήτρια, έχοντας ως κατευθυντήριο άξονα το θεωρητικό μοντέλο του Wallas (1926) για τη δημιουργική διαδικασία, που είναι συμπτυγμένο σε τέσσερα στάδια (Cropley & Cropley, 2013). Έτσι, οι ερωτήσεις του πρωτοκόλλου επικεντρώνονταν στις διαδικασίες κατά το στάδιο: (α) της προετοιμασίας, (β) της επώασης, (γ) του φωτισμού και (δ) της επαλήθευσης της λύσης (Wallas, 1926). Ωστόσο, ανάλογα με τις απαντήσεις που λάμβανε από τον κάθε μαθητή στις διάφορες ερωτήσεις, του έκανε εξατομικευμένα και ορισμένες επιπρόσθετες ερωτήσεις.

Οι συνεντεύξεις ηχογραφήθηκαν, ώστε να καταστεί εφικτή η περαιτέρω μελέτη του τρόπου σκέψης των μαθητών. Επιπλέον, κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων, η ερευνήτρια προέβη σε παρατήρηση των παραγλωσσικών (επιτονισμός φωνής, παύσεις, ένταση φωνής) και των εξωγλωσσικών στοιχείων (κινήσεις σώματος, χειρονομίες, έκφραση προσώπου, βλέμμα και μορφασμοί) των μαθητών. Κρατούσε σημειώσεις για τα στοιχεία αυτά, αφού θα μπορούσαν να φανούν χρήσιμα για την ερμηνεία του τρόπου σκέψης των μαθητών. Επομένως, διενεργήθηκε τριγωνοποίηση μεθόδων (Patton, 1999), καθότι συνδυάστηκε η χορήγηση δοκιμίου για την αξιολόγηση της ικανότητας τους στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων ενόρασης, μαζί με τη μέθοδο της συνέντευξης και της παρατήρησης. Εάν κάποιος μαθητής εγκλωβιζόταν στο στάδιο της επώασης του δινόταν μια πρώτη έμμεση βοήθεια, όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 3.3.



Διάγραμμα 3.3. Η πρώτη έμμεση βοήθεια σε μαθητές που εγκλωβίστηκαν στην επώαση

Σκοπός της πρώτης έμμεσης αυτής βοήθειας ήταν να απεγκλωβίσει τον μαθητή από το αδιέξοδο, ώστε να προχωρήσει με τη διαδικασία λύσης και να εξεταστούν οι διαδικασίες σκέψης του στα στάδια του φωτισμού και της επαλήθευσης. Εάν η πρώτη έμμεση βοήθεια δεν φαινόταν αρκετή, τότε του προσφερόταν και μια δεύτερη έμμεση βοήθεια (δείτε Διάγραμμα 3.4.). Στην περίπτωση που ούτε και η δεύτερη έμμεση βοήθεια οδηγούσε τον μαθητή στην ανακάλυψη της σχέσης που συνδέει τους αριθμούς τους διαγράμματος, τότε αυτό μαρτυρούσε πως αδυνατούσε παντελώς να εξιχνιάσει τη λύση.



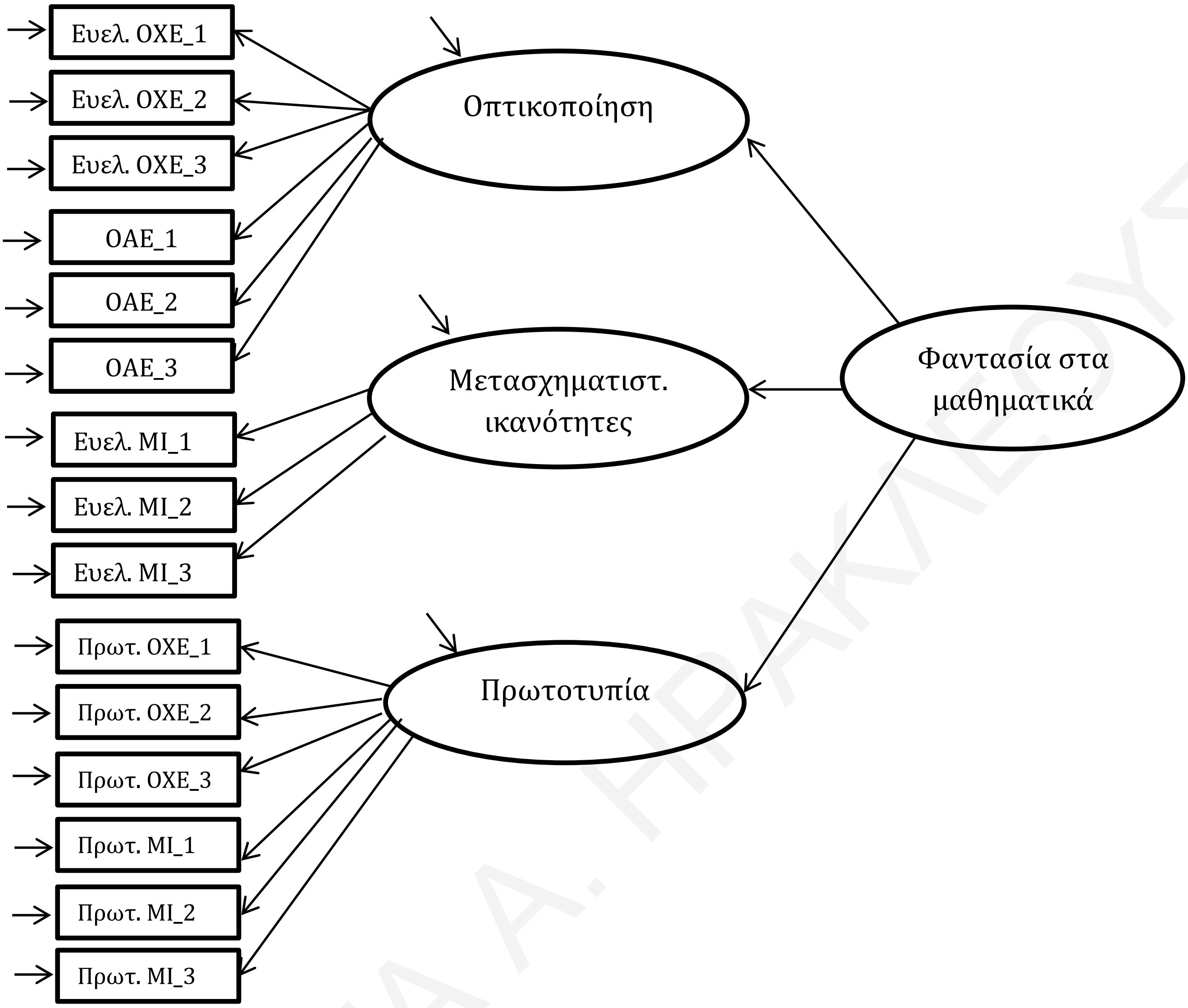
Διάγραμμα 3.4. Η δεύτερη έμμεση βοήθεια σε μαθητές που εγκλωβίστηκαν στην επώαση

Προτεινόμενα Μοντέλα Έρευνας

Προτεινόμενο Μοντέλο για τη Φαντασία στα Μαθηματικά

Το πρώτο ερευνητικό ερώτημα εστιάζει στη δομή της φαντασίας στα μαθηματικά. Το προτεινόμενο μοντέλο για τη φαντασία στα μαθηματικά έχει ως βάση του το συνδυαστικό μοντέλο της δημιουργικής ικανότητας (Conjunctional Model of Creative Imaging Ability) (Dziedziewicz & Karwowski, 2015) από το πεδίο της ψυχολογίας. Το Διάγραμμα 3.5 παρέχει μια διαγραμματική απεικόνιση του προτεινόμενου μοντέλου, ενώ πιο κάτω περιγράφεται αναλυτικά ο κάθε παράγοντας του μοντέλου.

Σύμφωνα με το προτεινόμενο μοντέλο, η φαντασία στα μαθηματικά συνιστά μια πολυδιάστατη εννοιολογική οντότητα. Αποτελεί έναν δευτέρας τάξης παράγοντα που ερμηνεύει τη διακύμανση τριών πρώτης τάξης παραγόντων: (α) οπτικοποίηση (vividness), (β) μετασχηματιστικές ικανότητες (transformative abilities) και (γ) πρωτοτυπία (originality).



Διάγραμμα 3.5. Προτεινόμενο μοντέλο για τη δομή της φαντασίας στα μαθηματικά

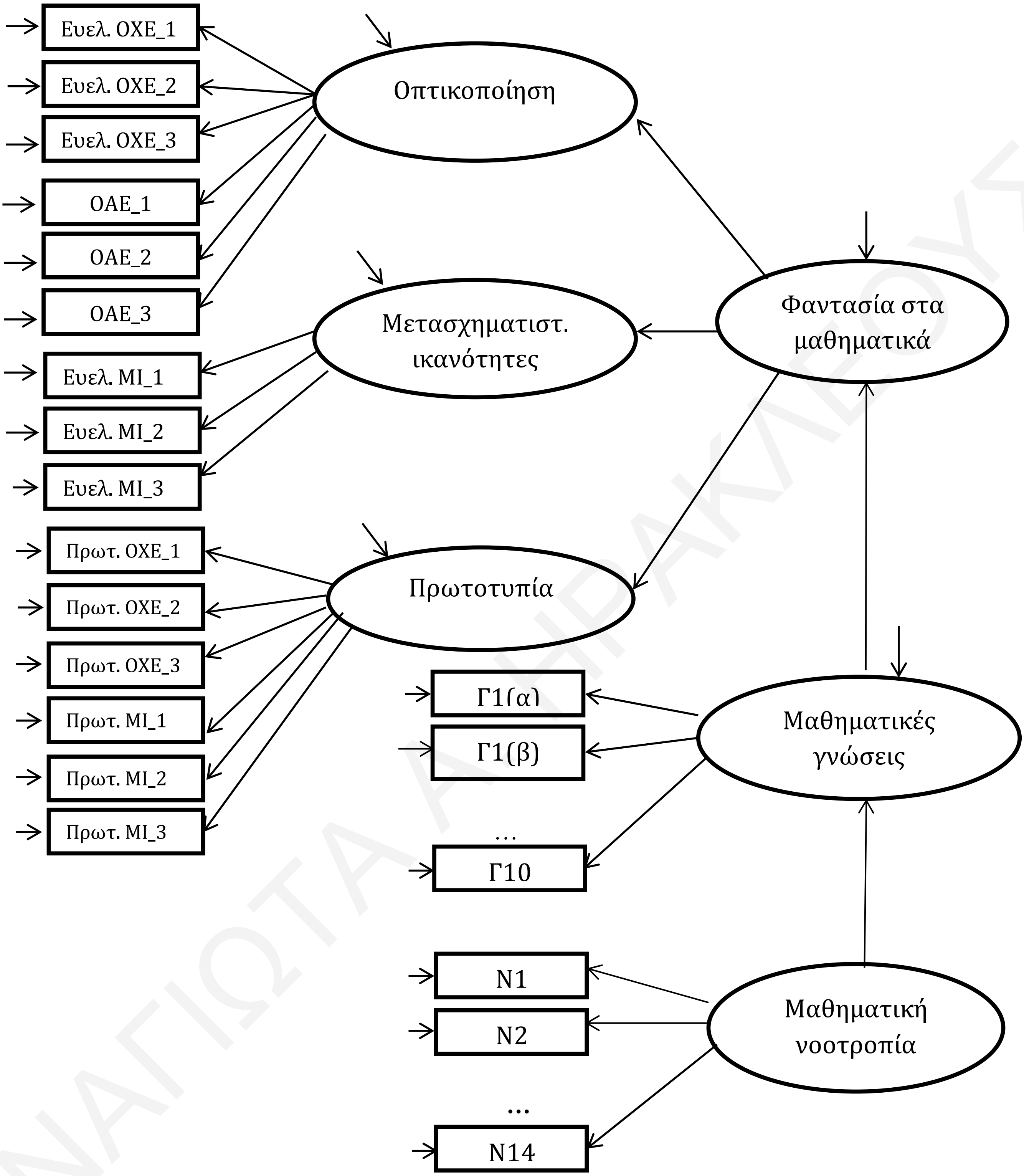
Η ικανότητα της οπτικοποίησης αποτελεί παράγοντα πρώτης τάξης που εξηγεί τη διακύμανση έξι μεταβλητών. Οι τρεις πρώτες μεταβλητές αφορούν στην ευελιξία των μαθητών στα έργα οπτικοποίησης χωρικών εικόνων, δηλαδή ΟΧΕ_1, ΟΧΕ_2 και ΟΧΕ_3, όπου ΟΧΕ_1: διατάξεις κερασιών, ΟΧΕ_2: σκίαση μισού ορθογωνίου και ΟΧΕ_3: εντοπισμός σχημάτων. Οι άλλες τρεις μεταβλητές αναφέρονται στην επίδοση των μαθητών (επιτυχία ή αποτυχία) στα έργα οπτικοποίησης αλγεβρικών εικόνων, δηλαδή ΟΑΕ_1, ΟΑΕ_2 και ΟΑΕ_3, όπου ΟΑΕ_1: αναγνώριση σχέσεων, ΟΑΕ_2: αναγνώριση αξίας ψηφίων πρόσθεσης και ΟΑΕ_3: αναγνώριση αριθμών διαγράμματος.

Η ικανότητα των μετασχηματιστικών ικανοτήτων αποτελεί παράγοντα πρώτης τάξης που επεξηγεί τη διακύμανση τριών μεταβλητών, οι οποίες αναφέρονται στην ευελιξία των μαθητών στα έργα ΜΙ_1, ΜΙ_2 και ΜΙ_3, όπου ΜΙ_1: γραφική παράσταση αθλημάτων, ΜΙ_2: μαθηματική πρόταση και ΜΙ_3: πίνακας δεδομένων. Η ικανότητα της πρωτοτυπίας αποτελεί παράγοντα πρώτης τάξης που επεξηγεί τη διακύμανση έξι μεταβλητών, οι οποίες αναφέρονται στην πρωτοτυπία των μαθητών στα έργα οπτικοποίησης χωρικών εικόνων και στα έργα μετασχηματιστικών ικανοτήτων: ΟΧΕ_1, ΟΧΕ_2, ΟΧΕ_3, ΜΙ_1, ΜΙ_2 και ΜΙ_3, όπου ΟΧΕ_1: διατάξεις κερασιών, ΟΧΕ_2: σκίαση μισού ορθογωνίου, ΟΧΕ_3: εντοπισμός σχημάτων, ΜΙ_1: γραφική παράσταση αθλημάτων, ΜΙ_2: μαθηματική πρόταση και ΜΙ_3: πίνακας δεδομένων.

Προτεινόμενο Μοντέλο για τις Σχέσεις ανάμεσα στους τρεις Εσωτερικούς Παράγοντες της Δημιουργικότητας στα Μαθηματικά

Το τρίτο ερευνητικό ερώτημα καταπιάνεται με τις σχέσεις των τριών εσωτερικών παραγόντων της δημιουργικότητας στα μαθηματικά. Το Διάγραμμα 3.6 παρουσιάζει τη δομή του προτεινόμενου μοντέλου. Το προτεινόμενο μοντέλο έχει ως γνώμονα το μοντέλο της Seelig (2012), το οποίο όμως προσαρμόστηκε στο αντικείμενο των μαθηματικών. Σύμφωνα με τη Seelig (2012), οι εσωτερικοί παράγοντες της φαντασίας, δηλαδή η φαντασία, οι γνώσεις και οι στάσεις/πεποιθήσεις, χαρακτηρίζονται από κάποιες σχέσεις ανάμεσά τους. Εστιάζοντας στα μαθηματικά, οι στάσεις/πεποιθήσεις των μαθητών, και στη συγκεκριμένη περίπτωση οι πεποιθήσεις για τη νοοτροπία στα μαθηματικά, ερμηνεύουν τη διακύμανση του παράγοντα των μαθηματικών γνώσεων. Παράλληλα, οι μαθηματικές γνώσεις των μαθητών επεξηγούν τη διακύμανση του παράγοντα της φαντασίας στα μαθηματικά.

Για τον ορισμό του παράγοντα της φαντασίας έχει υιοθετηθεί το προτεινόμενο μοντέλο για τη φαντασία στα μαθηματικά, που έχει περιγραφεί αναλυτικά στο μέρος «Προτεινόμενο μοντέλο για τη φαντασία στα μαθηματικά» του παρόντος κεφαλαίου. Οι μαθηματικές γνώσεις αποτελούν παράγοντα πρώτης τάξης που εξηγεί τη διακύμανση δεκατεσσάρων μεταβλητών, οι οποίες αναφέρονται στην επίδοση των μαθητών στα έργα του δοκιμίου των μαθηματικών γνώσεων: Γ1(α), Γ1(β), Γ1(γ), Γ1(δ), Γ2, Γ3, Γ4, Γ5, Γ6, Γ7, Γ8, Γ9, Γ10(α) και Γ10(β), όπου Γ1(α): πρόσθεση, Γ1(β): αφαίρεση, Γ1(γ): πολλαπλασιασμός, Γ1(δ): διαίρεση, Γ2: λύση προβλήματος, Γ3: σύγκριση κλασμάτων, Γ4: ερμηνεία κλάσματος ως μέρος επιφάνειας, Γ5: σειροθέτηση δεκαδικών, Γ6: περίμετρος και εμβαδόν ορθογωνίου, Γ7: αναγνώριση ιδιοτήτων δισδιάστατων σχημάτων, Γ8: επέκταση μοτίβου, Γ9: μηχανή συνάρτησης και Γ10: ερμηνεία ραβδογράμματος.



Διάγραμμα 3.6. Προτεινόμενο μοντέλο για τις σχέσεις ανάμεσα στους εσωτερικούς παράγοντες της μαθηματικής δημιουργικότητας

Η νοοτροπία αποτελεί παράγοντα πρώτης τάξης που ερμηνεύει τη διακύμανση δεκατεσσάρων μεταβλητών. Οι δεκατέσσερις αυτές μεταβλητές περιλαμβάνουν τον βαθμό συμφωνίας των μαθητών στις δηλώσεις του ερωτηματολογίου της νοοτροπίας: Ν1, Ν2,

N3, N4, N5, N6, N7, N8, N9, N10, N11, N12, N13 και N14, όπου N1: «Η εξυπνάδα μας δεν αλλάζει», N2: «Ένας λόγος που κάνω τα μαθήματά μου είναι γιατί μου αρέσει να μαθαίνω νέα πράγματα», N3: «Μου αρέσει όταν ο/η δάσκαλος/α μου μού λέει πώς τα πάω στα μαθηματικά», N4: «Κάποιοι γεννιούνται με ταλέντο στα μαθηματικά», N5: «Τα μαθηματικά είναι πιο εύκολα για τα αγόρια», N6: «Όλοι μπορούν να αποκτήσουν ταλέντο στα μαθηματικά», N7: «Όσο πιο πολύ προσπαθείς στα μαθηματικά, τόσο πιο καλός μπορείς να γίνεις», N8: «Με φοβίζει το να δοκιμάζω νέα πράγματα», N9: «Μπορούμε να αλλάξουμε το πόσο έξυπνοι είμαστε», N10: «Θυμώνω όταν οι δάσκαλοί μου μού λένε για την επίδοσή μου στα μαθηματικά», N11: «Όλα τα άτομα έχουν την ίδια ικανότητα να μάθουν μαθηματικά», N12: «Όλοι μπορούμε να μάθουμε, αλλά δεν μπορούμε να αλλάξουμε το πόσο έξυπνοι είμαστε», N13: «Όσοι είναι έξυπνοι δεν χρειάζεται να μελετήσουν πολύ» και N14: «Δεν έχει σημασία πόσο καλοί είμαστε στα μαθηματικά. Αυτό μπορούμε να το αλλάξουμε».

Ανάλυση Δεδομένων

Τεχνικές Ανάλυσης Ποσοτικών Δεδομένων

Αναφορικά με τις ποσοτικές τεχνικές ανάλυσης, χρησιμοποιήθηκε το στατιστικό πακέτο SPSS και το λογισμικό δομικής ανάλυσης SmartPLS. Ειδικότερα, για την απάντηση του πρώτου και του τρίτου ερευνητικού ερωτήματος εφαρμόστηκαν τεχνικές περιγραφικής και συσχετιστικής στατιστικής στο στατιστικό πακέτο SPSS. Υπολογίστηκαν περιγραφικά στατιστικά μέτρα για όλες τις υπό εξέταση μεταβλητές της διατριβής και συγκεκριμένα μέσοι όροι, τυπικές αποκλίσεις, μέγιστες και ελάχιστες τιμές, συντελεστές λοξότητας και κύρτωσης, συχνότητες. Οι τεχνικές συσχετιστικής στατιστικής που χρησιμοποιήθηκαν αφορούν σε συντελεστές συσχέτισης μεταξύ των μεταβλητών της έρευνας.

Επίσης, για την απάντηση του πρώτου και του τρίτου ερευνητικού ερωτήματος χρησιμοποιήθηκε η ανάλυση Μερικών Ελάχιστων Τετραγώνων (PLS-SEM), με το λογισμικό δομικής ανάλυσης SmartPLS. Αν και η Ανάλυση Μερικών Ελάχιστων Τετραγώνων αρχικά αναπτύχθηκε κυρίως για διερευνητικούς παρά επιβεβαιωτικούς σκοπούς, οι βελτιώσεις που έχει τύχει την καθιστούν κατάλληλη τόσο για επιβεβαιωτική όσο και διερευνητική έρευνα (Benitez, Henseler, Castillo, Schuberth, 2020).

Το σκεπτικό επιλογής της ανάλυσης Μερικών Ελάχιστων Τετραγώνων (PLS-SEM) ανάγεται στους εξής λόγους. Πρώτον, η συγκεκριμένη μέθοδος είναι αποτελεσματική με μικρά δείγματα (Garson, 2016; Willaby, Costa, Burns, MacCann, & Roberts, 2015). Ο αλγόριθμος της μεθόδου αυτής δεν υπολογίζει ταυτόχρονα όλες τις σχέσεις του μοντέλου. Χρησιμοποιεί ξεχωριστές παλινδρομήσεις ελάχιστων τετραγώνων (ordinary least squares regressions) για να εκτιμήσει τις σχέσεις παλινδρόμησης του μοντέλου (Sarstedt, Ringle, & Hair, 2017). Επομένως, ο συνολικός αριθμός των παραμέτρων του μοντέλου μπορεί να είναι μεγάλος σε σχέση με το μέγεθος του δείγματος, νοουμένου βέβαια ότι κάθε σχέση (partial regression relationship) βασίζεται σε ικανοποιητικό αριθμό παρατηρήσεων (Sarstedt et al., 2017). Ακόμα και με μικρά δείγματα των 100 ατόμων, η Ανάλυση Μερικών Ελάχιστων Τετραγώνων επιτυγχάνει αποδεκτά επίπεδα στατιστικής δύναμης (power) (Reinartz, Haenlein, & Henseler, 2009).

Παρόλο όμως ότι η ανάλυση αυτή δύναται να εκτιμήσει πολύπλοκα μοντέλα με μικρά δείγματα, είναι προβληματικό το να στηρίζεται κανείς σε μικρά δείγματα (Benitez et al., 2020). Καθώς το μέγεθος του δείγματος μειώνεται, το τυπικό σφάλμα για τις εκτιμώμενες παραμέτρους αυξάνεται (Benitez et al., 2020), ενώ όσο μεγαλύτερο είναι το δείγμα, τόσο πιο αξιόπιστες είναι και οι εκτιμήσεις της Ανάλυσης Μερικών Ελάχιστων Τετραγώνων (Garson, 2016). Επομένως, το μέγεθος του δείγματος μιας έρευνας θα πρέπει να διασφαλίζει επαρκή στατιστική ακρίβεια για τον εντοπισμό των υπό μελέτη επιδράσεων στον πληθυσμό (Benitez et al., 2020).

Οι Hair, Hult, Ringle και Sarstedt (2017) προτείνουν τη μέθοδο του «ελάχιστου R^2», στην οποία χρησιμοποιούν το μικρότερο R^2 του μοντέλου για να εκτιμήσουν το ελάχιστο αριθμό του δείγματος που απαιτείται για την εφαρμογή της Ανάλυσης Μερικών Ελάχιστων Τετραγώνων. Η εν λόγω μέθοδος βασίζεται στον πίνακα Cohen (1992) για τη στατιστική δύναμη στην παλινδρόμηση ελάχιστων τετραγώνων. Η δύναμη ενός στατιστικού τεστ είναι η πιθανότητα του να απορρίψει κανείς την μηδενική υπόθεση και αυτή να είναι πράγματι λανθασμένη, δηλαδή η πιθανότητα του να αναγνωρίσει μια στατιστικά σημαντική επίδραση ως στατιστικά σημαντική και να αποφύγει το σφάλμα τύπου ΙΙ (Cohen, 1992). Ειδικότερα, λαμβάνεται υπόψη το μικρότερο R^2 στο μοντέλο, το επίπεδο σημαντικότητας (η πιθανότητα του να απορρίψει κανείς τη μηδενική υπόθεση ενώ αυτή είναι ορθή) και ο μέγιστος αριθμός των βελών που κατευθύνονται προς έναν παράγοντα του μοντέλου (Hair et al., 2017). Έτσι, με βάση τον πίνακα του Cohen (1992), για τα υπό εξέταση μοντέλα της διατριβής απαιτείται δείγμα τουλάχιστον 110 ατόμων για R^2 της τάξης του .10, για στατιστική δύναμη ίση με .80 και για επίπεδο σημαντικότητας .05.

Όμως, η τεκμηρίωση της χρήσης της Ανάλυσης Μερικών Ελάχιστων Τετραγώνων απλά και μόνο στη βάση του μικρού δείγματος δεν είναι αρκετή (Benitez et al., 2020). Ο δεύτερος λόγος επιλογής της Ανάλυσης Μερικών Ελάχιστων Τετραγώνων είναι ότι η μέθοδος αυτή έχει μεγαλύτερη στατιστική δύναμη (power) σε σύγκριση με μεθόδους μοντέλων δομικών εξισώσεων βασισμένων σε παράγοντες (factor-based SEM) (Reinartz et al., 2009; Sarstedt et al., 2017). Επομένως, είναι πιο πιθανό να αναγνωρίσει μια στατιστικά σημαντική επίδραση ως στατιστικά σημαντική (Sarstedt et al., 2017).

Ένας επιπρόσθετος λόγος για τη χρήση της Ανάλυσης Μερικών Ελάχιστων Τετραγώνων είναι ότι αυτή η μέθοδος ενδείκνυται ιδιαίτερα όταν ο στόχος της ανάλυσης είναι η πρόβλεψη και η επεξήγηση μιας εννοιολογικής κατασκευής ή και η αναγνώριση των σχετικών εννοιολογικών κατασκευών που προηγούνται της εν λόγω κατασκευής (Garson, 2016; Sarstedt et al., 2017). Συγκεκριμένα, έρευνες όπως αυτή των Evermann και Tate (2016) έδειξαν ότι η συγκεκριμένη μέθοδος υπερτερεί έναντι των μοντέλων δομικών εξισώσεων βασισμένων σε παράγοντες (factor-based SEM) ως προς τις ικανότητες πρόβλεψης.

Εστιάζοντας στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα, εξετάστηκε ένα μοντέλο μέτρησης (measurement model). Το μοντέλο μέτρησης ερμηνεύει τις σχέσεις μεταξύ του κάθε παράγοντα και των μεταβλητών του, προσδιορίζοντας πώς να μετρηθούν οι διάφοροι παράγοντες (Sarstedt et al., 2017). Ειδικότερα, εξετάστηκε ένα ανακλαστικό μοντέλο μέτρησης (reflective measurement model). Στα ανακλαστικά μοντέλα μέτρησης, οι παράγοντες μετρούνται χρησιμοποιώντας δείκτες (Diamantopoulos & Siguaw, 2006). Υπάρχουν άμεσες σχέσεις που κατευθύνονται από τον παράγοντα στις παρατηρήσιμες μεταβλητές, έτσι που οι παρατηρήσιμες μεταβλητές να αντιπροσωπεύουν τον παράγοντα αλλά να επηρεάζονται και από σφάλματα μέτρησης (Sarstedt et al., 2017). Τα έργα προέρχονται από τον ίδιο τομέα, αξιολογούν την ίδια έννοια και συνεπώς έχουν υψηλές συσχετίσεις μεταξύ τους (Edwards & Bagozzi, 2000).

Η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων της ανάλυσης PLS-SEM για τα ανακλαστικά μοντέλα μέτρησης θα πρέπει να προσμετρά τα εξής κριτήρια: την αξιοπιστία των δεικτών (indicator reliability), την αξιοπιστία εσωτερικής συνέπειας (internal consistency reliability), τη συγκλίνουσα εγκυρότητα (convergent validity) και την αποκλίνουσα εγκυρότητα (Sarstedt et al., 2017).

Η αξιοπιστία των δεικτών αξιολογείται με βάση τις φορτίσεις των μεταβλητών στον αντίστοιχο παράγοντα. Φορτίσεις πάνω από .70, δείχνουν ότι ο παράγοντας επεξηγεί τουλάχιστον 50% της διασποράς των άμεσα παρατηρήσιμων μεταβλητών και άρα οι μεταβλητές επιδεικνύουν ικανοποιητικό βαθμό αξιοπιστίας (Sarstedt et al., 2017). Η αξιολόγηση της αξιοπιστίας εσωτερικής συνέπειας του παράγοντα γίνεται μέσω του composite reliability ρ_c και του Cronbach α. Το Cronbach α θεωρείται το κατώτατο όριο ενώ το ρ_c το ανώτατο όριο της αξιοπιστίας εσωτερικής συνέπειας (Sarstedt et al., 2017). Τιμές πάνω από .60 θεωρούνται αποδεκτές (Hair et al., 2017), όμως πολύ ψηλές τιμές (πάνω από .95) είναι προβληματικές καθώς υποδηλώνουν ότι τα έργα είναι σχεδόν ίδια το ένα με το άλλο (Sarstedt et al., 2017). Εναλλακτικά, μπορεί να εξεταστεί η τιμή του συντελεστή ρ_A (Dijkstra & Henseler, 2015), που συνήθως έχει τιμή ανάμεσα στην τιμή του Cronbach α και του ρ_c (Sarstedt et al., 2017). Μάλιστα, το ρ_A (Dijkstra & Henseler, 2015) είναι ο μόνος δείκτης αξιοπιστίας εσωτερικής συνέπειας που βασίζεται στις τιμές των παραγόντων (construct scores) και όχι στις αθροιστικές τιμές (sum scores) (Benitez et al., 2020). Έπειτα, η συγκλίνουσα εγκυρότητα αξιολογείται μέσω του κριτηρίου της Μέσης Εξαγόμενης Διασποράς (Average Variance Extracted-AVE) σε όλες τις μεταβλητές κάθε παράγοντα. Τιμές πάνω από .50 θεωρούνται αποδεκτές (Sarstedt et al., 2017). Η αποκλίνουσα εγκυρότητα εξακριβώνεται μέσω του κριτηρίου Fornell-Larcker σε επίπεδο παραγόντων και των cross-loadings σε επίπεδο μεταβλητών. Με βάση το κριτήριο Fornell-Larcker, η τετραγωνική ρίζα της Μέσης Εξαγόμενης Διασποράς (Average Variance Extracted-AVE) κάθε παράγοντα πρέπει να είναι μεγαλύτερη από τις συσχετίσεις του συγκεκριμένου παράγοντα με τους άλλους παράγοντες (Fornell & Larcker, 1981). Με βάση το κριτήριο των cross-loadings, κάθε μεταβλητή πρέπει να φορτίζει σε μεγαλύτερο βαθμό στον παράγοντα που επιχειρεί να μετρήσει παρά στους υπόλοιπους παράγοντες του μοντέλου (Chin, 1998).

Σχετικά με το τρίτο ερευνητικό ερώτημα, εξετάστηκε ένα μοντέλο δομικών εξισώσεων, που περιλαμβάνει δυο πτυχές: ένα μοντέλο μέτρησης (measurement model) και ένα δομικό μοντέλο (structural model). Το μοντέλο μέτρησης αναπαριστά τις σχέσεις μεταξύ του κάθε παράγοντα και των μεταβλητών του, επεξηγώντας πώς να μετρηθούν οι διάφοροι παράγοντες (Sarstedt et al., 2017). Το δομικό μοντέλο δείχνει τους παράγοντες που λαμβάνουν μέρος στην ανάλυση ενός φαινομένου και τις μεταξύ τους εξαρτήσεις (Sarstedt et al., 2017). Οι μεταξύ τους εξαρτήσεις βασίζονται στη θεωρία και την εμπειρία και τις γνώσεις του ερευνητή (Falk & Miller, 1992).

Η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων για τα μοντέλα δομικών εξισώσεων ακολουθεί δυο στάδια. Στο πρώτο στάδιο, εξετάζεται το μοντέλο μέτρησης, με τη διαδικασία που περιγράφηκε προηγουμένως. Στο δεύτερο στάδιο αξιολογείται το δομικό μοντέλο, με κάποια επιπρόσθετα κριτήρια αξιολόγησης: συγραμμικότητα (collinearity), επεξήγηση των ενδογενών παραγόντων (R^2 explanation of endogenous latent variables), προβλεπτική ικανότητα (Predictive relevance Q^2), στατιστική σημαντικότητα και δύναμη των συντελεστών διαδρομής (significance και relevance of path coefficients) και μέγεθος επίδρασης των συντελεστών διαδρομής (f^2 effect size of path coefficients).

Πρωταρχικά, για τον έλεγχο της συγραμμικότητας, αξιοποιείται ο δείκτης VIF, όπου τιμές πάνω από 5 δείχνουν την ύπαρξη συγραμμικότητας ανάμεσα στους παράγοντες πρόβλεψης (Sarstedt et al., 2017). Το επόμενο βήμα αφορά στην τιμή του R^2, που δείχνει τη διασπορά που ερμηνεύεται σε κάθε ενδογενή παράγοντα. Τιμές της τάξης του .75, .50, και .25 εκλαμβάνονται ως υψηλές, μέτριες και αδύναμες (Hair, Ringle, & Sarstedt, 2011). Βέβαια, αναλόγως του πλαισίου της έρευνας, η τιμή .10 για το R^2, μπορεί να θεωρείται ικανοποιητική (Sarstedt et al., 2017). Ακολούθως, η εξέταση της προβλεπτικής ακρίβειας του μοντέλου γίνεται με το Q^2. Τιμές μεγαλύτερες του 0 για κάθε ενδογενή παράγοντα δείχνουν ότι η προβλεπτική ακρίβεια του μοντέλου είναι αποδεκτή για αυτόν τον παράγοντα (Sarstedt et al., 2017). Παράλληλα, η δύναμη και η στατιστική σημαντικότητα των συντελεστών διαδρομής αξιολογούνται ως προς τις υποτιθέμενες σχέσεις ανάμεσα στους παράγοντες. Συντελεστές με σταθμισμένες τιμές κοντά στο +1 και -1 αναπαριστούν ισχυρές θετικές και αρνητικές σχέσεις αντίστοιχα. Η αξιολόγηση της δύναμης ενός συντελεστή θα πρέπει να γίνεται εντός του ερευνητικού πλαισίου (Sarstedt et al., 2017). Τέλος, αξιολογείται και το μέγεθος επίδρασης των συντελεστών διαδρομής, μέσω του δείκτη f^2. Τιμές της τάξης του .02, .15, and .35 αντανακλούν ότι ο παράγοντας πρόβλεψης έχει μικρή, μέτρια και μεγάλη επίδραση στον ενδογενή παράγοντα (Sarstedt et al., 2017).

Τεχνικές Ανάλυσης Ποιοτικών Δεδομένων

Τα δεδομένα που συλλέχθηκαν από τις ημι-δομημένες συνεντεύξεις αναλύθηκαν ποιοτικά, ώστε να απαντηθεί το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα της έρευνας και να εξιχνιαστούν οι γνωστικές διαδικασίες της φαντασίας στα μαθηματικά, που ενεργοποιούνται κατά την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος ενόρασης (Weisberg, 1995). Για τον σκοπό αυτό, τέθηκε σε εφαρμογή η μέθοδος της αναλυτικής επαγωγής (analytic induction). Ο στόχος της αναλυτικής επαγωγής είναι η αιτιώδης επεξήγηση ενός φαινομένου, μέσα από τον προοδευτικό ορισμό του φαινομένου και των επεξηγηματικών παραγόντων μέχρις ότου να εντοπιστεί η ακριβής σχέση ανάμεσα στους παράγοντες και το φαινόμενο (Katz, 2001).

Στην αναλυτική επαγωγή, ο ερευνητής επιλέγει έναν μικρό αριθμό περιπτώσεων προς μελέτη (Fontana, 2001). Αναλυτικά, τα στάδια που ακολουθούνται στην αναλυτική επαγωγή είναι έξι, όπως τα προσδιορίζει ο Cressey στο Robinson (1951). Αρχικά, το υπό μελέτη φαινόμενο προσδιορίζεται με έναν προσωρινό τρόπο. Στην έρευνα αυτή, το φαινόμενο που μελετάται είναι οι γνωστικές διαδικασίες της φαντασίας στα μαθηματικά, καθώς οι μαθητές επιλύουν ένα μαθηματικό πρόβλημα ενόρασης. Δεύτερο, αναπτύσσονται θεωρητικές υποθέσεις για το φαινόμενο. Οι θεωρητικές υποθέσεις της έρευνας στηρίζονται στο μοντέλο του Wallas (1926) για τη δημιουργική διαδικασία. Υποστηρίζεται, λοιπόν, ότι η διαδικασία επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος ενόρασης ακολουθεί τέσσερα στάδια: προετοιμασία, επώαση, φωτισμός και επαλήθευση, τα οποία έχουν περιγραφεί στο Κεφάλαιο 2: Βιβλιογραφική Ανασκόπηση. Οι αρχικές θεωρητικές υποθέσεις της έρευνας παρουσιάζονται επιγραμματικά στον Πίνακα 3.4.

Πίνακας 3.4

Αρχικές Θεωρητικές Υποθέσεις Έρευνας πριν από την Κωδικοποίηση των Δεδομένων σχετικά με τις Γνωστικές Διαδικασίες της Φαντασίας στα Μαθηματικά

Α) ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ:	**Περιγραφή θεωρητικών υποθέσεων:**
(i)Αναγνώριση προβλήματος:	
• Κατανόηση του προβλήματος:	
(α) Δεδομένα (ύπαρξη σχέσεων αριθμών)	Ο μαθητής αντιλαμβάνεται ότι οι αριθμοί του δοσμένου σχήματος δεν είναι τυχαίοι αλλά διέπονται από μια μη εμφανή αλλά σταθερή σχέση.
(β) Ζητούμενα (αριθμός Χ)	Υποδεικνύει ότι το ζητούμενο του προβλήματος είναι η ανακάλυψη της κρυμμένης σχέσης που διέπει τους αριθμούς του σχήματος, με σκοπό τον υπολογισμό της τιμής της μεταβλητής Χ.
• Ανάγνωση προβλήματος (μια φορά ή περισσότερες)	Διαβάζει το πρόβλημα μια ή περισσότερες φορές για να οικοδομήσει μια αναπαράσταση της προβληματικής κατάστασης.
• Επαναδιατύπωση προβλήματος	Εκφέρει το πρόβλημα με διαφορετική λεκτική διατύπωση με τρόπο που να

	φαίνεται ότι κατανόησε το πρόβλημα.
(ii)Συγκέντρωση:	
• Εντοπισμός σχέσεων μεταξύ των αριθμών του σχήματος	Αναγνωρίζει και περιγράφει σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των αριθμών του σχήματος (αθροιστικής ή πολλαπλασιαστικής δομής).
• Ανάκληση προηγούμενων εμπειριών με παρόμοια προβλήματα	Αναφέρεται ξεκάθαρα σε ομοιότητες ή διαφορές του προβλήματος με προβλήματα που έλυσε στο παρελθόν.
• Εναλλαγή τρόπου σκέψης	Καθώς προσπαθεί να επιλύσει το πρόβλημα, αλλάζει τη στρατηγική λύσης που είχε αρχικά υιοθετήσει.
Β) ΕΠΩΑΣΗ:	
• Δυσκολία επίλυσης προβλήματος	Γλωσσικά στοιχεία: Αναφέρει ότι δυσκολεύεται να προχωρήσει στην επίλυση του προβλήματος Παραγλωσσικά στοιχεία: επιτονισμός φωνής, παύσεις, αναστεναγμοί, ένταση φωνής Εξωγλωσσικά στοιχεία: κινήσεις σώματος, χειρονομίες, έκφραση προσώπου, βλέμμα και μορφασμοί
• Έκκληση για βοήθεια κατά τη διαδικασία επίλυσης	Ο μαθητής ζητά βοήθεια από την ερευνήτρια για να μπορέσει να ολοκληρώσει το πρόβλημα.
• Παραίτηση από τις προσπάθειες επίλυσης του προβλήματος	Δηλώνει πως αρνείται να συνεχίσει την προσπάθεια.
Γ) ΦΩΤΙΣΜΟΣ:	
• Εντοπισμός ορθής/λανθασμένης λύσης στο πρόβλημα	Η απάντηση που έχει προτείνει ο μαθητής είναι ορθή ή λανθασμένη.

• Συναισθήματα που δημιουργούνται κατά τον εντοπισμό λύσης	<u>Γλωσσικά στοιχεία:</u> Αναφέρεται σε συναισθήματα που έχει αισθανθεί.
• Τρόπος εμφάνισης της λύσης	<u>Γλωσσικά στοιχεία:</u> -Αναφέρεται στην ξαφνική εμφάνιση της λύσης στο μυαλό του. -Επιφώνημα «Aha!» <u>Παραγλωσσικά στοιχεία:</u> επιτονισμός φωνής, ένταση φωνής <u>Εξωγλωσσικά στοιχεία:</u> κινήσεις σώματος, χειρονομίες, έκφραση προσώπου, βλέμμα και μορφασμοί
• Βαθμός βεβαιότητας για την ορθότητα της λύσης	<u>Γλωσσικά στοιχεία:</u> Δηλώνει βέβαιος για την ορθότητα της απάντησής του.
Δ) ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ:	
(i)Επιβεβαίωση:	
• Έλεγχος εάν η σχέση που βρίσκει σε μια ομάδα αριθμών επαληθεύεται και σε άλλη ομάδα αριθμών	Ελέγχει εάν κάθε σχέση που ανακαλύπτει στους αριθμούς του σχήματος (οι αριθμοί μιας στήλης έχουν άθροισμα ίσο με 16) επαληθεύεται και στις υπόλοιπες στήλες του σχήματος.
(ii)Πειστικότητα:	
• Αιτιολόγηση των απαντήσεων	Αιτιολογεί την απάντησή του με βάση τη σχέση του σταθερού αθροίσματος που εντόπισε στις στήλες του σχήματος.

Τρίτο, μελετάται μια συγκεκριμένη περίπτωση για να εξεταστεί κατά πόσον επιβεβαιώνεται η υπόθεση που έχει προκαθοριστεί. Τέταρτο, εάν η υπόθεση δεν επιβεβαιώνεται από τη συγκεκριμένη περίπτωση, τότε το φαινόμενο επαναπροσδιορίζεται ή η υπόθεση επαναδιατυπώνεται με τρόπο που να ερμηνεύει την περίπτωση αυτή. Πέμπτο, εξετάζονται επιπρόσθετες περιπτώσεις και εάν η νέα υπόθεση επαληθεύεται συστηματικά τότε διασφαλίζεται ένας βαθμός βεβαιότητας για την υπόθεση. Τέλος, κάθε αποκλίνουσα περίπτωση απαιτεί αναδιατύπωση της υπόθεσης μέχρι να μην υπάρχει καμία εξαίρεση. Για την διενέργεια της αναλυτικής επαγωγής, χρειάστηκε να γίνει συμπύκνωση του όγκου των δεδομένων, ώστε να καθοριστεί το νόημά τους (Miles & Huberman, 1994). Τα δεδομένα κάθε συνέντευξης κωδικοποιήθηκαν, για να εντοπιστούν τα στάδια της προετοιμασίας, της επώασης, του φωτισμού και της επαλήθευσης, στη συνέντευξη κάθε υποκειμένου. Στην αναλυτική επαγωγή δεν υπάρχει μεθοδολογική αξία από το να συσσωρεύονται περιπτώσεις που επιβεβαιώνουν τις υποθέσεις (Katz, 2001). Ο ερευνητής αναζητά αποκλίνουσες περιπτώσεις που θα μπορούσαν να οδηγήσουν σε αναθεωρήσεις των αρχικών υποθέσεων, ώστε η ανάλυση να καταστεί έγκυρη και εφαρμόσιμη σε διαφορετικές περιπτώσεις. Η διερεύνηση περιπτώσεων συνεχίζεται μέχρι ο ερευνητής να μη μπορεί πλέον να εντοπίσει πρακτικά άλλες αποκλίνουσες περιπτώσεις.

Η τεχνική της αναλυτικής επαγωγής που ακολουθήθηκε ήταν αυτή της οικοδόμησης επεξηγήσεων (explanation building) (Yin, 2013). Σκοπός της συγκεκριμένης τεχνικής είναι η οικοδόμηση επεξηγήσεων για το υπό εξέταση φαινόμενο. Ωστόσο, η τελική επεξήγηση του φαινομένου μπορεί να μην έχει προβλεφθεί από την αρχή.

Βαθμολόγηση Εργαλείων Μέτρησης

Εργαλείο Μέτρησης της Φαντασίας στα Μαθηματικά. Η βαθμολόγηση των έργων παρουσιάζεται πιο κάτω με βάση την ικανότητα που εξετάζουν: οπτικοποίηση χωρικών εικόνων (έργα Μέρους Α΄ του δοκιμίου), οπτικοποίηση αλγεβρικών εικόνων (έργα Μέρους Β΄), μετασχηματιστικές ικανότητες (έργα Μέρους Γ΄) και πρωτοτυπία.

Οπτικοποίηση Χωρικών Εικόνων. Για τη βαθμολόγηση των συγκεκριμένων έργων, μετρήθηκε η ευελιξία των μαθητών. Καταγράφηκαν όλες οι απαντήσεις των σε κάθε έργο και ταξινομήθηκαν σε κατηγορίες και υποκατηγορίες, λαμβάνοντας υπόψη όχι μόνο τη διαφορετικότητα των μαθηματικών ιδεών που εμπλέκονταν στις απαντήσεις αλλά και τη γνωστική τους πολυπλοκότητα. Στον Πίνακα 3.5 περιλαμβάνονται οι κατηγορίες απαντήσεων που εμφανίστηκαν στα έργα. Στο Παράρτημα Ζ περιγράφονται αναλυτικά οι κατηγορίες και υποκατηγορίες των απαντήσεων στα έργα αυτά. Για τη βαθμολόγηση της ευελιξίας σε κάθε έργο, υιοθετήθηκε η κλείδα του Πίνακα 3.6. Ο συνολικός βαθμός της ευελιξίας του μαθητή σε κάθε έργο υπολογίστηκε ως το άθροισμα της βαθμολογίας που δόθηκε για την ευελιξία σε κάθε απάντηση του μαθητή στο συγκεκριμένο έργο.

Πίνακας 3.5

Κατηγορίες Απαντήσεων στα Έργα Οπτικοποίησης Χωρικών Εικόνων

Έργο 1 – Διατάξεις κερασιών	1. Καταμέτρηση 2. Σειριακές στρατηγικές 3. Όμοιες ομάδες και υπόλοιπο 4. Τυποποιημένες διατάξεις («Subitizing»)
Έργο 2 – Σκίαση μισού ορθογωνίου	1. Διαμοιρασμός με ένα ευθύγραμμο τμήμα 2. Διαμοιρασμός σε ίσα μικρότερα σχήματα και σκίαση των μισών σχημάτων 3. Διαμοιρασμός με άλλα είδη γραμμών 4. Διαμοιρασμός σε ίδιου τύπου αλλά διαφορετικού μεγέθους σχήματα 5. Διαμοιρασμός με συνδυασμό σχημάτων
Έργο 3 – Εντοπισμός σχημάτων	1. Τρίγωνα 2. Τραπέζια 3. Παραλληλόγραμμα 4. Μη τυπικά γεωμετρικά σχήματα

Πίνακας 3.6

Κλείδα Βαθμολόγησης Ευελιξίας

	Βαθμός
Πρώτη ορθή απάντηση	1
Και για κάθε επόμενη ορθή απάντηση:	
Απάντηση που ανήκει σε διαφορετική κατηγορία απαντήσεων	1
Απάντηση που ανήκει σε μια από τις προηγούμενες κατηγορίες απαντήσεων, αλλά αφορά διαφορετική υποκατηγορία	0.1
Απάντηση στην ίδια κατηγορία και υποκατηγορία απαντήσεων	0
Λανθασμένη ή καθόλου απάντηση	0

Οπτικοποίηση Αλγεβρικών Εικόνων. Για τη βαθμολόγηση των έργων οπτικοποίησης αλγεβρικών εικόνων (έργα από το Μέρος Β΄ του δοκιμίου), εξετάστηκε η ο βαθμός στον οποίο οι μαθητές πέτυχαν ή απέτυχαν να προσεγγίσουν τη λύση των αντίστοιχων προβλημάτων ενόρασης του δοκιμίου. Συγκεκριμένα, για κάθε ορθή απάντηση και για κάθε ορθή επεξήγηση του τρόπου σκέψης του μαθητή δινόταν μια μονάδα αντίστοιχα. Ωστόσο, σε περιπτώσεις μερικώς ορθών απαντήσεων και μερικώς ορθών επεξηγήσεων κρίθηκε αναγκαίο να δοθούν μισές μονάδες στους μαθητές. Τέλος, για κάθε λανθασμένη απάντηση/επεξήγηση ή σε περιπτώσεις που δε δόθηκε καμία απάντηση/επεξήγηση από τους μαθητές δίνονταν 0 μονάδες, δεδομένου πως κατά τη χορήγηση του εργαλείου οι μαθητές είχαν αρκετό χρόνο στη διάθεσή τους για να απαντήσουν σε όλα τα έργα. Ο συνολικός βαθμός του μαθητή σε κάθε έργο υπολογίστηκε ως το άθροισμα της βαθμολογίας που του δόθηκε για την απάντησή του και της βαθμολογίας που του δόθηκε για την επεξήγησή του στο συγκεκριμένο έργο.

Μετασχηματιστικές Ικανότητες. Για τη βαθμολόγηση των έργων των μετασχηματιστικών ικανοτήτων εξετάστηκε και πάλι η ευελιξία που επέδειξαν οι μαθητές (έργα από το Μέρος Γ΄ του δοκιμίου). Κατόπιν μελέτης όλων των απαντήσεων των μαθητών στο κάθε έργο, έγινε προσπάθεια ταξινόμησης των απαντήσεων σε κατηγορίες και υποκατηγορίες απαντήσεων. Οι κατηγορίες και οι υποκατηγορίες δημιουργήθηκαν λαμβάνοντας υπόψη τη διαφορετικότητα των μαθηματικών ιδεών που εμπλέκονταν στις απαντήσεις των μαθητών αλλά και τη γνωστική τους πολυπλοκότητα. Στον Πίνακα 3.7 φαίνονται οι διαφορετικές κατηγορίες απαντήσεων που αναδύθηκαν μέσα από τις απαντήσεις των μαθητών στα τρία έργα των μετασχηματιστικών ικανοτήτων του εργαλείου.

Στο Παράρτημα Η περιγράφονται αναλυτικά οι κατηγορίες και οι υποκατηγορίες των απαντήσεων που έχουν προκύψει μέσα από τα δεδομένα στα τρία έργα μετασχηματιστικών ικανοτήτων. Για τη βαθμολόγηση της ευελιξίας των μαθητών στα συγκεκριμένα έργα υιοθετήθηκε και πάλι η κλείδα βαθμολόγησης που παρουσιάζεται στον Πίνακα 3.6. Ο βαθμός της ευελιξίας του μαθητή σε κάθε έργο υπολογίστηκε και πάλι ως το άθροισμα της βαθμολογίας που δόθηκε για την ευελιξία σε κάθε απάντηση του μαθητή στο έργο αυτό.

Πίνακας 3.7

Κατηγορίες Απαντήσεων στα Έργα Μετασχηματιστικών Ικανοτήτων

Έργο 1 – Γραφική παράσταση αθλημάτων	1. Εμφανείς απαντήσεις 2. Σύγκριση παιδιών 3. Άθροισμα παιδιών 4. Κλάσματα-ποσοστά-λόγοι 5. Επέκταση/προσθήκη παραμέτρων
Έργο 2 – Μαθηματική πρόταση	1. Προβλήματα αλλαγής 2. Προβλήματα ομαδοποίησης 3. Προβλήματα σύγκρισης 4. Συνδυασμός δυο προσθετικών δομών
Έργο 3 – Πίνακας δεδομένων	1. Εμφανείς απαντήσεις 2. Σύγκριση εξόδων 3. Άθροισμα εξόδων 4. Ποσοστά-λόγοι-εύρος 5. Επέκταση/προσθήκη παραμέτρων

Πρωτοτυπία. Για τη βαθμολόγηση της πρωτοτυπίας χρησιμοποιήθηκαν τα έργα του δοκιμίου της φαντασίας που επιδέχονταν πολλαπλές απαντήσεις: τα έργα οπτικοποίησης χωρικών εικόνων (έργα από το μέρος Α΄ του δοκιμίου) και τα έργα μετασχηματιστικών ικανοτήτων (έργα από το μέρος Γ΄ του δοκιμίου). Κατά τη βαθμολόγηση της πρωτοτυπίας, κρίθηκε χρήσιμο να αξιολογηθεί αφενός η σχετική (ποσοτική) πρωτοτυπία των απαντήσεων και αφετέρου η απόλυτη (ποιοτική) τους πρωτοτυπία (Leikin, 2009b; 2013).

Κατ' επέκταση, η βαθμολόγηση της πρωτοτυπίας των απαντήσεων των μαθητών σε κάθε έργο έγινε στη βάση των ακόλουθων δυο κριτηρίων: (α) την ποσοστιαία συχνότητα εμφάνισης της απάντησης στο υπό μελέτη δείγμα και (β) τη γνωστική πολυπλοκότητα της κατηγορίας απαντήσεων στην οποία ανήκε η κάθε απάντηση των μαθητών. Το πρώτο κριτήριο αναφέρεται στη σχετική πρωτοτυπία, εφόσον για την αξιολόγησή της υπολογίζεται το ποσοστό των μαθητών της υπό μελέτη ομάδας που κατέληξε στη συγκεκριμένη λύση (Leikin, 2009b; 2013). Από την άλλη, το δεύτερο κριτήριο αναφέρεται στην απόλυτη πρωτοτυπία, η αξιολόγηση της οποίας λαμβάνει υπόψη το επίπεδο της ενόρασης, δηλαδή πόσο βαθιά κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, εμπλέκεται στη διαδικασία μιας συγκεκριμένης λύσης (Ervynck, 1991).

Σχετικά με το κριτήριο της ποσοστιαίας συχνότητας εμφάνισης της απάντησης, σε πρώτο στάδιο, υπολογίστηκε η ποσοστιαία συχνότητα εμφάνισης κάθε ορθής απάντησης στο υπό μελέτη δείγμα, ως ο λόγος της συχνότητας εμφάνισης της απάντησης και του συνόλου των ορθών απαντήσεων του δείγματος στο κάθε έργο. Σε δεύτερο στάδιο, κάθε ορθή απάντηση του μαθητή βαθμολογήθηκε με κάποιο βαθμό στην κλίμακα 0 μέχρι 1, με βάση μια κλείδα βαθμολόγησης. Όσο πιο χαμηλή ποσοστιαία συχνότητα εμφάνισης είχε κάθε ορθή απάντηση στο υπό μελέτη δείγμα τόσο πιο υψηλή βαθμολογία λάμβανε ο μαθητής για τη συγκεκριμένη απάντηση. Αξίζει να σημειωθεί ότι για κάθε έργο διαμορφώθηκε μια ξεχωριστή κλείδα βαθμολόγησης, προσμετρώντας το γεγονός ότι σε κάθε έργο ανταποκρίθηκαν ορθά διαφορετικά ποσοστά μαθητών. Οι κλείδες βαθμολόγησης κάθε έργου για το κριτήριο της ποσοστιαίας συχνότητας εμφάνισης παρατίθενται στο Παράρτημα Θ.

Σχετικά με το κριτήριο της γνωστικής πολυπλοκότητας, οι κατηγορίες απαντήσεων σε κάθε έργο ταξινομήθηκαν ως: χαμηλής γνωστικής πολυπλοκότητας, μέτριας γνωστικής πολυπλοκότητας και υψηλής πολυπλοκότητας. Οι κλείδες βαθμολόγησης κάθε έργου για το κριτήριο της γνωστικής πολυπλοκότητας σε κάθε κατηγορία απαντήσεων παρουσιάζονται στο Παράρτημα Ι. Συγκεκριμένα, όταν η απάντηση του μαθητή ανήκε σε κατηγορία με:

- χαμηλή γνωστική πολυπλοκότητα, τότε η απάντηση λάμβανε βαθμό 0.
- μέτρια γνωστική πολυπλοκότητα, τότε η απάντηση λάμβανε βαθμό 1.
- υψηλή γνωστική πολυπλοκότητα, τότε η απάντηση λάμβανε βαθμό 2.

Μοναδική εξαίρεση κατά την εφαρμογή της πιο πάνω διαδικασίας αποτέλεσε η βαθμολόγηση της πρωτοτυπίας στο έργο 2 («Μαθηματική πρόταση») του Μέρους Γ΄ του δοκιμίου της φαντασίας στα μαθηματικά, το οποίο εξέταζε μετασχηματιστικές ικανότητες. Το έργο φάνηκε να έχει ιδιαίτερα υψηλές γνωστικές απαιτήσεις για τους μαθητές, καθότι 41,5% των μαθητών (90 από τους 217 μαθητές) δεν μπόρεσαν να διατυπώσουν καμία ορθή απάντηση. Έτσι, θεωρήθηκε ότι η ταξινόμηση των κατηγοριών των απαντήσεων των μαθητών στο έργο αυτό σε χαμηλή, μέτρια και υψηλή γνωστική πολυπλοκότητα θα ήταν επισφαλής, αφού η εύρεση οποιασδήποτε ορθής απάντησης στο συγκεκριμένο έργο έχει ήδη αυξημένη γνωστική πολυπλοκότητα για τους μαθητές. Για τον λόγο αυτό, κρίθηκε σκόπιμο η πρωτοτυπία των απαντήσεων να βαθμολογηθεί μόνο με βάση το κριτήριο της ποσοστιαίας συχνότητας εμφάνισης τους. Η καταλληλότητα της μεθοδολογικής αυτής επιλογής επιβεβαιώνεται και μέσα από τα περιγραφικά αποτελέσματα για τη μεταβλητή της πρωτοτυπίας του εν λόγω έργου, τα οποία παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.3 στο Κεφάλαιο 4: Ανάλυση Δεδομένων-Αποτελέσματα. Η μεταβλητή αυτή παρουσίασε τον πιο χαμηλό μέσο όρο (Μ.Ο.=.17) και τον πιο υψηλό συντελεστή λοξότητας (Λοξότητα=1.46) ανάμεσα στις μεταβλητές του δοκιμίου της φαντασίας, υποδηλώνοντας ότι η κατανομή των τιμών είναι θετικά ασύμμετρη. Σύμφωνα με τους Ho & Yu (2015), τα δύσκολα έργα παρουσιάζουν χαμηλό μέσο όρο και θετική ασυμμετρία.

Ο βαθμός πρωτοτυπίας κάθε απάντησης υπολογίστηκε αθροίζοντας τον βαθμό για την ποσοστιαία συχνότητα εμφάνισης της απάντησης και τον βαθμό για τη γνωστική πολυπλοκότητα. Ο συνολικός βαθμός πρωτοτυπίας του μαθητή σε κάθε έργο υπολογίστηκε ως το άθροισμα της βαθμολογίας για την πρωτοτυπία κάθε απάντησής του στο έργο αυτό.

Εργαλείο Μέτρησης των Μαθηματικών Γνώσεων. Η μέγιστη βαθμολογία που μπορούσε να λάβει ένα μαθητής από την επίλυση των έργων του δοκιμίου είναι 23 μονάδες. Οι βαθμοί που αντιστοιχούσαν στις ορθές απαντήσεις των μαθητών σε κάθε έργο του δοκιμίου μαθηματικών γνώσεων αναγράφονται στην κάτω δεξιά μεριά κάθε έργου (δείτε Παράρτημα Β). Στο Παράρτημα Κ παρουσιάζεται η κλείδα βαθμολόγησης όλων των έργων του δοκιμίου των μαθηματικών γνώσεων. Σε συγκεκριμένα έργα, ανάλογα με τις απαντήσεις των μαθητών δίνονταν μισές μονάδες. Τέλος, οι λανθασμένες απαντήσεις καθώς και τα έργα που αφέθηκαν κενά βαθμολογήθηκαν με μηδέν μονάδες, νοουμένου ότι κατά τη χορήγηση του εργαλείου δόθηκε στους μαθητές επαρκής χρόνος για τη συμπλήρωση όλων των έργων.

Ερωτηματολόγιο των Στάσεων/πεποιθήσεων. Για κάθε δήλωση του ερωτηματολογίου, λήφθηκε υπόψη ο βαθμός συμφωνίας του μαθητή στην κλίμακα Likert. Στη συνέχεια, έγινε επανακωδικοποίηση του βαθμού συμφωνίας των μαθητών στις δηλώσεις της στατιστικής νοοτροπίας (δηλώσεις 1, 4, 5, 8, 10, 12 και 13), προκειμένου να ευθυγραμμιστούν με τις δηλώσεις της νοοτροπίας ανάπτυξης. Οι χαμηλοί βαθμοί συμφωνίας (1 και 2) στις δηλώσεις αυτές επανακωδικοποιήθηκαν ώστε να αντιστοιχούν σε υψηλούς βαθμούς συμφωνίας (5 και 4 αντίστοιχα) στη νοοτροπία ανάπτυξης. Κατ’ επέκταση, υψηλός βαθμός σε κάθε δήλωση του ερωτηματολόγιο αντικατοπτρίζει μια ισχυρή νοοτροπία ανάπτυξης.

Περιορισμοί Έρευνας

Η διατριβή διέπεται από μια σειρά μεθοδολογικών περιορισμών, οι οποίοι αφορούν (α) την επιλογή των υποκειμένων της έρευνας, (β) τη διαδικασία της συλλογής των δεδομένων και (γ) τη διαδικασία της ανάλυσης των δεδομένων.

Πρωταρχικά, η έρευνα εστίασε αποκλειστικά σε μαθητές Στ' τάξης Δημοτικού και άρα τα αποτελέσματα που εξήχθηκαν δεν ανταποκρίνονται σε όλο το ηλικιακό φάσμα της εκπαίδευσης. Επίσης, η επιλογή των υποκειμένων της έρευνας δεν έγινε διαμέσου τυχαίας δειγματοληψίας αλλά με βάση την πρόσβαση που είχε η ερευνήτρια σε σχολεία και τάξεις καθώς και το ενδιαφέρον των μαθητών να συμμετάσχουν. Έτσι, τα συμπεράσματα που έχουν προκύψει αφορούν αποκλειστικά τους μαθητές που έλαβαν μέρος και η γενίκευσή τους σε όλο τον μαθησιακό πληθυσμό της Κύπρου είναι επισφαλής.

Περιορισμοί εντοπίζονται και στη διαδικασία συλλογής των δεδομένων της έρευνας. Τα δεδομένα είχαν συλλεχθεί σε μια χρονική φάση και δεν πραγματοποιήθηκαν πολλαπλές διαχρονικές μετρήσεις των μεταβλητών της έρευνας. Επίσης, η μελέτη των γνωστικών διαδικασιών της φαντασίας των μαθητών στα μαθηματικά και συγκεκριμένα της εμπειρίας της ενόρασης έγινε μέσα από ημι-δομημένες ατομικές συνεντεύξεις. Ωστόσο, με τις παραδοσιακές ερευνητικές μεθόδους, είναι πρακτικά δύσκολο να προσδιοριστούν επακριβώς οι διαδικασίες και οι μηχανισμοί που είναι απαραίτητοι για την εμφάνιση της ενόρασης και κρύβονται πίσω από αυτήν, σε αντίθεση με τις νευροεπιστημονικές μεθόδους έρευνας (Bowden et al., 2005). Βέβαια, έγινε συστηματική προσπάθεια ώστε να εκμαιευθούν όσο το δυνατό πιο πλούσιες πληροφορίες από τα υποκείμενα για τη διαδικασία που ακολούθησαν για την επίλυση του μαθηματικού προβλήματος ενόρασης.

Όσον αφορά στην ανάλυση των δεδομένων, εντοπίζεται ο εξής περιορισμός. Για την απάντηση του πρώτου ερευνητικού ερωτήματος που αφορά στη δομή της φαντασίας στα μαθηματικά, εξετάστηκε μόνο εάν το προτεινόμενο μοντέλο επιβεβαιώνεται εμπειρικά. Θα ήταν χρήσιμο να εξεταστεί και κατά πόσον υπάρχουν και πιο απλά μοντέλα που μπορούν να περιγράψουν τη δομή της φαντασίας στα μαθηματικά. Εξάλλου στις αναλύσεις μοντέλων δομικών εξισώσεων, ο στόχος θα πρέπει να είναι η επιλογή ενός μοντέλου που να είναι όσο το δυνατό πιο απλό (να έχει τους περισσότερους βαθμούς ελευθερίας), που να προσαρμόζεται καλύτερα με τα δεδομένα και που να μπορεί να τεκμηριωθεί θεωρητικά (Kline, 2013). Κατά συνέπεια, θα μπορούσε να διερευνηθεί κατά πόσο προσαρμόζεται με τα δεδομένα ένα μοντέλο με τρεις παράγοντες πρώτης τάξης που αλληλοσυσχετίζονται (οπτικοποίηση, μετασχηματιστικές ικανότητες και πρωτοτυπία) και ένα μοντέλο που περιγράφει τη φαντασία ως μονοδιάστατη εννοιολογική οντότητα δηλαδή ένας παράγοντας πρώτης τάξης. Βέβαια, η ανάλυση των Μερικών Ελάχιστων Τετραγώνων (PLS-SEM) δεν παρέχει τη δυνατότητα εξέτασης και σύγκρισης των συγκεκριμένων μοντέλων. Λόγω της απαραμετρικής της φύσης (Garson, 2016) αλλά και της διαφορετικής της φιλοσοφίας (βασίζεται στην πρόβλεψη και όχι στην επεξήγηση) (Sarstedt et al., 2017) η Ανάλυση Μερικών Ελάχιστων Τετραγώνων είναι ακατάλληλη για τον υπολογισμό των δεικτών προσαρμογής που χρησιμοποιούνται στις μεθόδους μοντέλων δομικών εξισώσεων βασισμένων σε παράγοντες (factor-based SEM). Συλλέγοντας δεδομένα από μεγαλύτερο δείγμα θα επιτρεπόταν η χρήση μεθόδων μοντέλων δομικών εξισώσεων βασισμένων σε παράγοντες (factor-based SEM) και κατ' επέκταση η εξέταση των εν λόγω μοντέλων.

Αναφορικά με το τρίτο ερευνητικό ερώτημα, που αναφέρεται στο δομικό μοντέλο που περιγράφει τις σχέσεις ανάμεσα στους τρεις παράγοντες που συνεισφέρουν στη μαθηματική δημιουργική σκέψη, θα πρέπει να τονιστεί ότι με τη συμπερίληψη κι άλλων παραγόντων στο μοντέλο μπορεί να αλλάξει η συνεισφορά των παραγόντων που ήδη υπάρχουν στο μοντέλο.

Κεφάλαιο 4: Ανάλυση Δεδομένων - Αποτελέσματα

Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των ποσοτικών και ποιοτικών αναλύσεων των δεδομένων που συλλέχθηκαν από τη χορήγηση των ποσοτικών εργαλείων της έρευνας και των ημι-δομημένων ατομικών συνεντεύξεων. Τα αποτελέσματα είναι οργανωμένα έχοντας ως κατευθυντήριο γνώμονα τα ερευνητικά ερωτήματα που καθοδηγούν την παρούσα έρευνα.

Πρωταρχικά, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την ανάλυση των δεδομένων των μαθητών στο δοκίμιο της φαντασίας στα μαθηματικά, με σκοπό την απάντηση του πρώτου ερευνητικού ερωτήματος της διατριβής. Εν συνεχεία, παρατίθενται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση των δεδομένων των ημι-δομημένων συνεντεύξεων που διερευνούσαν τις γνωστικές διαδικασίες της φαντασίας των μαθητών κατά τη διαδικασία επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος ενόρασης, τα οποία απαντούν στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα της διατριβής.

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την ανάλυση των δεδομένων των μαθητών και στα τρία εργαλεία συλλογής ποσοτικών δεδομένων της διατριβής: το δοκίμιο της φαντασίας στα μαθηματικά, το δοκίμιο μαθηματικών γνώσεων και το ερωτηματολόγιο της νοοτροπίας στα μαθηματικά, δίνοντας έτσι απάντηση στο τρίτο ερευνητικό ερώτημα της διατριβής.

Φαντασία στα Μαθηματικά

Το πρώτο ερευνητικό ερώτημα της διατριβής είναι η παρουσίαση ενός μοντέλου ορισμού και μέτρησης της φαντασίας στα μαθηματικά. Στο μέρος αυτό, αρχικά εξετάζεται η αξιοπιστία των δεδομένων που συλλέχθηκαν μέσω του δοκιμίου της φαντασίας στα μαθηματικά καθώς και η εγκυρότητα περιεχομένου του δοκιμίου. Ακολούθως, γίνεται αναφορά στα περιγραφικά και συσχετιστικά στατιστικά μέτρα για τις μεταβλητές του δοκιμίου της φαντασίας στα μαθηματικά. Τέλος, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από τις αναλύσεις για την επιβεβαίωση του προτεινόμενου μοντέλου για την περιγραφή της δομής της φαντασίας στα μαθηματικά.

Αξιοπιστία των Δεδομένων του Δοκιμίου της Φαντασίας στα Μαθηματικά

Όταν αναπτύσσει κανείς ένα νέο ερευνητικό εργαλείο, ενδείκνυται να παρέχει εκτενή πληροφόρηση για την αξιοπιστία και την εγκυρότητά του (Polit & Beck, 2006). Η αξιοπιστία του εργαλείου ελέγχθηκε μέσω της αξιοπιστίας εσωτερικής συνέπειας, με βάση τον συντελεστή Cronbach α για το δοκίμιο και για τον κάθε παράγοντα ξεχωριστά. Ένδειξη πάνω από .80 θεωρείται υψηλός δείκτης αξιοπιστίας, ένδειξη μεγαλύτερη του .70 θεωρείται ικανοποιητική για την ύπαρξη ομοιογένειας μεταξύ των έργων ενός εργαλείου (Murphy & Davidshofer, 2001) και ένδειξη μεγαλύτερη του .60 κρίνεται αποδεκτή (Hair, Black, Babin, & Anderson, 2010). Ο Πίνακας 4.1 παρουσιάζει τις τιμές του Cronbach α.

Πίνακας 4.1

Εσωτερική Αξιοπιστία του Δοκιμίου της Φαντασίας στα Μαθηματικά

	Συντελεστής Αξιοπιστίας α (Cronbach α)
Συνολικό Δοκίμιο	.85
Οπτικοποίηση	.61
Μετασχηματιστικές Ικανότητες	.60
Πρωτοτυπία	.74

Σύμφωνα με τον Πίνακα 4.1, η τιμή του συντελεστή α (Cronbach α) για το συνολικό δοκίμιο είναι .85, η οποία κρίνεται υψηλή για την ύπαρξη ομοιογένειας μεταξύ των έργων του δοκιμίου (Murphy & Davidshofer, 2001). Μάλιστα, τα αποτελέσματα του ελέγχου εσωτερικής συνέπειας έδειξαν πως αφαιρώντας οποιαδήποτε μεταβλητή του δοκιμίου δεν παρατηρείται αύξηση της τιμής του συντελεστή α (Cronbach α) για το σύνολο του δοκιμίου. Αντίθετα, παρατηρείται μείωση του συντελεστή με την αφαίρεση οποιασδήποτε μεταβλητής, που υποδηλώνει την αξιοπιστία των μετρήσεων για τις μεταβλητές του δοκιμίου. Εστιάζοντας σε κάθε παράγοντα ξεχωριστά, η πρωτοτυπία επιδεικνύει ικανοποιητική εσωτερική συνέπεια, με συντελεστή α (Cronbach α) μεγαλύτερο του .70 (Murphy & Davidshofer, 2001). Οι τιμές για την οπτικοποίηση (α=.61) και τις μετασχηματιστικές ικανότητες (α=.60) κρίνονται αποδεκτές (Hair et al., 2010).

Εγκυρότητα Περιεχομένου του Δοκιμίου της Φαντασίας στα Μαθηματικά

Η εγκυρότητα περιεχομένου αναφέρεται στον βαθμό στον οποίο τα έργα που έχουν συμπεριληφθεί στο εργαλείο αναπαριστούν επαρκώς το περιεχόμενο που καλύπτει το εν λόγω εργαλείο (Waltz, Strickland, & Lenz, 2005). Ο πιο ευρέως χρησιμοποιημένος δείκτης της εγκυρότητας περιεχομένου είναι το Content Validity Index (CVI), ο οποίος διακρίνεται σε δυο τύπους: το CVI κάθε έργου ξεχωριστά (Item CVI ή I-CVI) και το CVI κάθε παράγοντα (Scale CVI ή S-CVI) (Polit & Beck, 2006).

Ο δείκτης CVI κάθε έργου (Item CVI ή I-CVI) μετριέται από μια επιτροπή από ειδικούς, οι οποίοι καλούνται να αξιολογήσουν τον βαθμό συνάφειας που έχει το κάθε έργο με τον παράγοντα που μετρά (Polit & Beck, 2006). Ο ενδεδειγμένος αριθμός ειδικών είναι από 3 μέχρι 10 (Lynn, 1986). Συγκεκριμένα, ζητήθηκε από τέσσερις ειδικούς (δυο εκπαιδευτικούς δημοτικής εκπαίδευσης και δυο ερευνητές της μαθηματικής παιδείας) να αξιολογήσουν τον βαθμό συνάφειας κάθε έργου με τον αντίστοιχο παράγοντα που σχεδιάστηκε να μετρήσει. Η κλίμακα βαθμολόγησης που χρησιμοποιήθηκε ήταν τετράβαθμη για να αποφευχθούν οι ουδέτερες και αμφιλεγόμενες βαθμολογίες στο ενδιάμεσο της κλίμακας (Lynn, 1986): το 1 αντιπροσωπεύει ότι το έργο είναι «μη σχετικό με τον παράγοντα», το 2 «λίγο σχετικό», το 3 «αρκετά σχετικό» και το 4 «πολύ σχετικό» (Davis, 1992).

Το I-CVI κάθε έργου υπολογίστηκε ως εξής: ο αριθμός των ειδικών που έδωσαν βαθμό 3 ή 4, ώστε το έργο να θεωρείται σχετικό με τον παράγοντα, διαιρέθηκε με τον συνολικό αριθμό των ειδικών, για να προκύψει το ποσοστό των ειδικών που βαθμολόγησαν το έργο με βαθμό 3 ή 4 (Polit & Beck, 2006). Νοουμένου ότι οι ειδικοί ήταν τέσσερις, ικανοποιητικό κρίνεται μόνο το I-CVI που είναι ίσο με 1.00, έχοντας δηλαδή όλους τους ειδικούς να συμφωνούν ότι το έργο είναι συναφές με τον παράγοντα που υποτίθεται ότι μετρά (Lynn, 1986). Σχετικά με το CVI του κάθε παράγοντα (Scale-CVI ή S-CVI), μια ερμηνεία του ορισμού του Scale-CVI είναι το S-CVI/Ave. Το S-CVI/Ave υπολογίζεται ως ο μέσος όρος των I-CVI των έργων του ίδιου παράγοντα. Αποδεκτό χαρακτηρίζεται το S-CVI/Ave που είναι μεγαλύτερο του .90 (Waltz et al., 2005). Ο Πίνακας 4.2 παρουσιάζει τις τιμές του I-CVI για τα έργα του δοκιμίου της φαντασίας καθώς και τις τιμές του S-CVI για τον κάθε παράγοντα. Τόσο οι δείκτες I-CVI όσο και οι δείκτες S-CVI είναι αποδεκτοί, και συνεπώς το δοκίμιο μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει ικανοποιητική εγκυρότητα περιεχομένου.

Πίνακας 4.2

Εγκυρότητα Περιεχομένου των Έργων και των Παραγόντων του Δοκιμίου της Φαντασίας στα Μαθηματικά

Μεταβλητή			I-CVI	S-CVI
Οπτικοπ. Χωρικών Εικόνων (ΟΧΕ)	Έργο 1	Ευελιξία	1	1
	Έργο 2	Ευελιξία	1	
	Έργο 3	Ευελιξία	1	
Οπτικοπ. Αλγεβρικών Εικόνων (ΟΑΕ)	Έργο 1	Ορθότητα	1	1
	Έργο 2	Ορθότητα	1	
	Έργο 3	Ορθότητα	1	
Μετασχημ. Ικανότητες (ΜΙ)	Έργο 1	Ευελιξία	1	1
	Έργο 2	Ευελιξία	1	
	Έργο 3	Ευελιξία	1	
Πρωτοτυπία	ΟΧΕ 1	Πρωτοτ.	1	1
	ΟΧΕ 2	Πρωτοτ.	1	
	ΟΧΕ 3	Πρωτοτ.	1	
	ΜΙ 1	Πρωτοτ.	1	
	ΜΙ 2	Πρωτοτ.	1	
	ΜΙ 3	Πρωτοτ.	1	

Περιγραφικά και Συσχετιστικά Στατιστικά Μέτρα για τις Μεταβλητές του Δοκιμίου της Φαντασίας στα Μαθηματικά

Στο μέρος αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τα περιγραφικά και συσχετιστικά στατιστικά μέτρα των μεταβλητών του δοκιμίου της φαντασίας στα μαθηματικά. Πρωταρχικά, τα τρία έργα του Μέρους Α΄ του δοκιμίου εξετάζουν την οπτικοποίηση χωρικών εικόνων και αξιολογήθηκαν με βάση τον βαθμό ευελιξίας των μαθητών, δηλαδή τον αριθμό των διαφορετικών μαθηματικών ιδεών που εμπλέκονταν στις λύσεις τους. Κατά μέσο όρο, στο έργο 1 διατυπώθηκαν απαντήσεις από περίπου δυο διαφορετικές κατηγορίες (Μ.Ο.=1.87 , Τ.Α.=.80 , Εύρος=3.10), όπως συνέβη και στο έργο 2 (Μ.Ο.=1.82, Τ.Α.=.58, Εύρος=3.10) αλλά και το έργο 3 (Μ.Ο.=1.93 , Τ.Α.=.97, Εύρος=4).

Αναφορικά με τα έργα της οπτικοποίησης αλγεβρικών εικόνων, αξιολογήθηκε η ορθότητα της λύσης τους, δηλαδή κατά πόσον οι μαθητές πέτυχαν ή απέτυχαν να προσεγγίσουν τη λύση των αντίστοιχων έργων. Ο μέσος όρος επίδοσης των μαθητών στα έργα αυτά κυμαίνονται από .87 μέχρι 1.25. Ειδικότερα, ο μέσος όρος επίδοσης στο έργο 1 ήταν .87 (Μ.Ο.=.87, Τ.Α.=.80, Εύρος = 2), στο έργο 2 ήταν 1.25 (Μ.Ο.=1.25, Τ.Α.=.64, Εύρος=2) και στο έργο 3 ήταν 1.02 (Μ.Ο.=1.02, Τ.Α.=.81, Εύρος=2).

Για την αξιολόγηση των μετασχηματιστικών ικανοτήτων, εξετάστηκε και πάλι η ευελιξία που επέδειξαν οι μαθητές στα αντίστοιχα έργα. Κατά μέσο όρο, στο έργο 1 διατυπώθηκαν απαντήσεις από σχεδόν δυο διαφορετικές κατηγορίες (Μ.Ο.=1.78, Τ.Α.=.83, Εύρος=4), στο έργο 2 από περίπου μια κατηγορία (Μ.Ο.=.77, Τ.Α.=.75, Εύρος=3) και στο έργο 3 προτάθηκαν απαντήσεις από τουλάχιστον μια κατηγορία απαντήσεων (Μ.Ο.=1.56, Τ.Α.=.79, Εύρος=3.10).

Η αξιολόγηση της πρωτοτυπίας των μαθητών έγινε εστιάζοντας στα έργα του δοκιμίου που επιδέχονταν πολλαπλές λύσεις, δηλαδή στα έργα οπτικοποίησης χωρικών εικόνων και στα έργα μετασχηματιστικών ικανοτήτων. Πιο συγκεκριμένα, μετρήθηκε ο βαθμός πρωτοτυπίας των απαντήσεων των μαθητών. Εστιάζοντας στα έργα οπτικοποίησης χωρικών εικόνων, στο έργο 1 ο μέσος όρος της πρωτοτυπίας των απαντήσεων των μαθητών ήταν 3.81 (Μ.Ο.=3.81 , Τ.Α.=2.06, Εύρος=8.80), στο έργο 2 ήταν 2.42 (Μ.Ο.=2.42, Τ.Α.=1.58, Εύρος=8.80) και στο έργο 3 ήταν 3.04 (Μ.Ο.=3.04, Τ.Α.=2.30, Εύρος=8.60). Όσον αφορά στα έργα των μετασχηματιστικών ικανοτήτων, στο έργο 1 ο μέσος όρος της πρωτοτυπίας των απαντήσεων των μαθητών ήταν 4.08 (Μ.Ο.=4.08, Τ.Α.=2.22, Εύρος=12.00), στο έργο 2 ήταν .54 (Μ.Ο.=.54, Τ.Α.=.65, Εύρος=3.20) και στο έργο 3 (Μ.Ο.=4.11, Τ.Α.=2.07, Εύρος=12).

Λαμβάνοντας υπόψη πως οι μεταβλητές που εξετάζει το δοκίμιο της φαντασίας στα μαθηματικά είχαν διαφορετικές κλίμακες μέτρησης, κρίθηκε σκόπιμο να μετατραπούν οι κλίμακες μέτρησής τους στην κλίμακα 0 μέχρι 1 προκειμένου να καταστούν συγκρίσιμες. Έτσι, διαιρέθηκε η επίδοση των μαθητών σε κάθε μεταβλητή με τη μέγιστη επίδοση που πέτυχε κάποιος μαθητής σε αυτήν. Επομένως, σε όλες τις μεταγενέστερες αναλύσεις που διενεργήθηκαν χρησιμοποιήθηκαν οι μεταβλητές στη νέα κλίμακα μέτρησης από 0 μέχρι 1.

Ο Πίνακας 4.3 συγκεντρώνει τα περιγραφικά αποτελέσματα για τις μεταβλητές του δοκιμίου της φαντασίας στα μαθηματικά σε όμοια κλίμακα μέτρησης από 0 μέχρι 1 και επιτρέπει τη σύγκριση της επίδοσης των μαθητών σε κάθε μεταβλητή. Οι μέσοι όροι των μεταβλητών του δοκιμίου της φαντασίας στα μαθηματικά κυμαίνονται από .17 μέχρι .62. Τον πιο χαμηλό μέσο όρο επίδοσης είχε η μεταβλητή της πρωτοτυπίας του έργου 2 των μετασχηματιστικών ικανοτήτων (Πρωτοτυπία_ΜΙ_2), με μέσο όρο .17. Το έργο αυτό απαιτούσε τη διατύπωση διαφορετικών προβλημάτων που λύνονται με μια δοσμένη μαθηματική πρόταση προσθετικής δομής. Τον ψηλότερο μέσο όρο είχε το έργο 2 της οπτικοποίησης αλγεβρικών εικόνων (ΟΑΕ_2), με μέσο όρο .62. Το εν λόγω έργο καλούσε τους μαθητές να αναγνωρίσουν την αριθμητική αξία των συμβόλων για τους προσθετέους μιας δοσμένης πράξης πρόσθεσης.

Όσον αφορά στους συντελεστές της λοξότητας και της κύρτωσης, σύμφωνα με τους Tabachnick και Fidell (2014), για να κριθεί κατά πόσον μια μεταβλητή ακολουθεί κανονική κατανομή μπορεί να αξιολογηθεί η στατιστική σημαντικότητα των τιμών της λοξότητας και της κύρτωσης όταν το δείγμα είναι μικρό ή μέτριο. Ο λόγος της απόλυτης τιμής της λοξότητας ή της κύρτωσης προς το τυπικό τους σφάλμα θα πρέπει να είναι μικρότερος από 1.96 ή 2.58 σε επίπεδο σημαντικότητας .05 και .01 αντίστοιχα. Ωστόσο, σε μεγάλα δείγματα είναι προτιμότερο να βλέπει κανείς το σχήμα της κατανομής και τις τιμές της λοξότητας και της κύρτωσης (να είναι όσο το δυνατό πιο κοντά στο 0), παρά τη στατιστική τους σημαντικότητα. Διότι όσο αυξάνεται το δείγμα, τόσο μειώνεται το τυπικό σφάλμα και έτσι είναι πιο πιθανό να απορριφθεί η μηδενική υπόθεση ενώ να υπάρχει ελάχιστη μόνο απόκλιση από την κανονική κατανομή (Tabachnick & Fidell, 2014).

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.3, τα αποτελέσματα για τους συντελεστές λοξότητας δείχνουν ότι οι απόλυτες τιμές των συντελεστών σε όλες τις μεταβλητές είναι μικρότερες της μονάδας και σε αρκετές περιπτώσεις πλησιάζουν το μηδέν. Μοναδική εξαίρεση αποτέλεσε η λοξότητα στη μεταβλητή της πρωτοτυπίας για το έργο 2 των μετασχηματιστικών ικανοτήτων, που ανέρχεται σε 1.46.

Αναφορικά με τους συντελεστές της κύρτωσης, οι απόλυτες τιμές των συντελεστών σε όλες τις μεταβλητές είναι μικρότερες του 2 και σε ορισμένες περιπτώσεις πλησιάζουν στο μηδέν, με μοναδική εξαίρεση την κύρτωση στη μεταβλητή της πρωτοτυπίας για το έργο 2 των μετασχηματιστικών ικανοτήτων που αγγίζει το 2.21. Οι τιμές αυτές οδηγούν στο συμπέρασμα ότι σε γενικές γραμμές οι μεταβλητές του δοκιμίου της φαντασίας στα μαθηματικά ακολουθούν την κανονική κατανομή.

Πίνακας 4.3

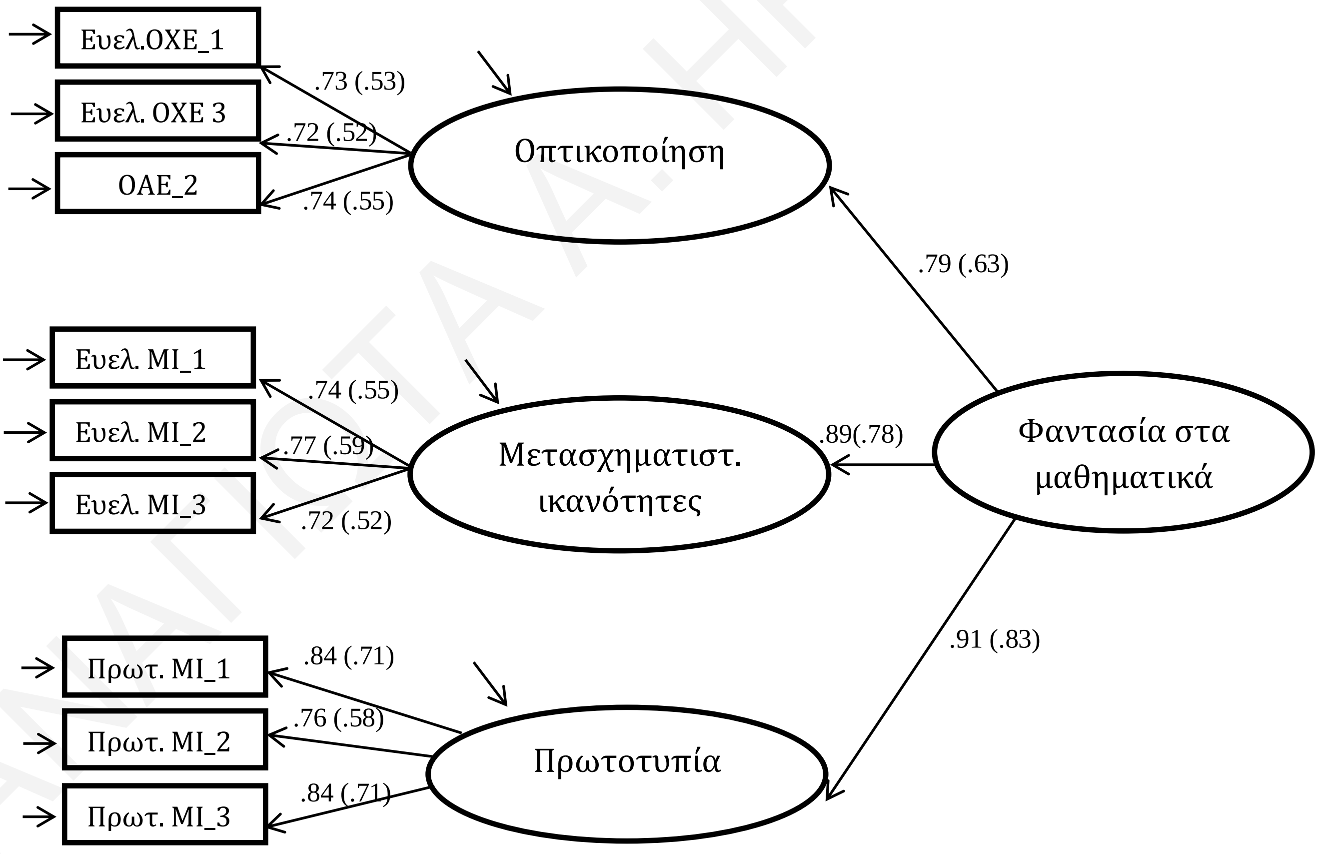
Περιγραφικά Αποτελέσματα για τις Μεταβλητές του Δοκιμίου της Φαντασίας στα Μαθηματικά σε Όμοια Κλίμακα Μέτρησης από 0 μέχρι 1

Μεταβλητή			Μέσος Όρος	Τυπική Απόκλιση	Εύρος	Λοξότητα	Κύρτωση
Οπτικοπ. Χωρικών Εικόνων (ΟΧΕ)	Έργο 1	Ευελιξία	.60	.26	1	-.32	-.33
	Έργο 2	Ευελιξία	.59	.19	1	-.13	-.09
	Έργο 3	Ευελιξία	.48	.24	1	.06	-.95
Οπτικοπ. Αλγεβρικών Εικόνων (ΟΑΕ)	Έργο 1	Ορθότητα	.44	.40	1	.18	-1.48
	Έργο 2	Ορθότητα	.62	.32	1	-.15	-1.12
	Έργο 3	Ορθότητα	.51	.40	1	.03	-1.54
Μετασχημ. Ικανότητες (ΜΙ)	Έργο 1	Ευελιξία	.45	.21	1	-.21	-.25
	Έργο 2	Ευελιξία	.26	.25	1	.48	-.82
	Έργο 3	Ευελιξία	.50	.25	1	-.22	-.33
Πρωτοτυπία	ΟΧΕ 1	Πρωτοτ.	.43	.23	1	-.06	-.61
	ΟΧΕ 2	Πρωτοτ.	.27	.18	1	.98	1.51
	ΟΧΕ 3	Πρωτοτ.	.35	.27	1	.47	-1.07
	ΜΙ 1	Πρωτοτ.	.34	.18	1	-.19	-.25
	ΜΙ 2	Πρωτοτ.	.17	.20	1	1.46	2.21
	ΜΙ 3	Πρωτοτ.	.34	.17	1	-.42	.39

Παράλληλα, εξετάστηκαν οι συσχετίσεις των επιδόσεων των μαθητών σε όλες τις μεταβλητές του δοκιμίου. Ο Πίνακας Λ1 στο Παράρτημα Λ δίνει τους συντελεστές συσχέτισης. Πρωταρχικά, οι 93 από τις 105 συσχετίσεις ήταν στατιστικά σημαντικές, γεγονός που δίνει κάποιες πρώτες ενδείξεις ότι οι μεταβλητές του δοκιμίου αποτελούν δείκτες της ίδιας ικανότητας. Οι εξαιρέσεις ήταν κάποιες συσχετίσεις της μεταβλητής ΟΧΕ_2 (έργο 2 του παράγοντα της οπτικοποίησης, που αφορά σε χωρικές εικόνες) με δείκτες του παράγοντα των μετασχηματιστικών ικανοτήτων και του παράγοντα της πρωτοτυπίας, καθώς και κάποιες συσχετίσεις της μεταβλητής ΟΑΕ_1 (έργο 1 του παράγοντα της οπτικοποίησης, που αφορά σε αλγεβρικές εικόνες) με δείκτες του παράγοντα των μετασχηματιστικών ικανοτήτων και του παράγοντα της πρωτοτυπίας. Επίσης, στις πλείστες περιπτώσεις εντοπίζονταν υψηλές συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών που αποτελούν δείκτες του ίδιου παράγοντα του προτεινόμενου μοντέλου (κυμαίνονται από .128 μέχρι .615), ενώ μεταξύ των μεταβλητών που δεν ανήκουν στον ίδιο παράγοντα οι συσχετίσεις ήταν σχετικά χαμηλές (κυμαίνονται από .092 μέχρι .872). Επομένως, με μια πρώτη ματιά, οι μεταβλητές του δοκιμίου μπορούν να ομαδοποιηθούν αποτελώντας δείκτες του εκάστοτε παράγοντα για τον οποίο σχεδιάστηκαν.

Επιβεβαίωση της Δομής του Προτεινόμενου Μοντέλου για τη Φαντασία

Η εμπειρική επιβεβαίωση του προτεινόμενου μοντέλου της φαντασίας στα μαθηματικά εξετάστηκε με την Ανάλυση Μερικών Ελάχιστων Τετραγώνων (Partial Least Squares-SEM). Τα αποτελέσματα για τις παραμέτρους του μοντέλου παρουσιάζονται στο Διάγραμμα 4.1.



Σημείωση: Ο πρώτος αριθμός αποτελεί τη φόρτιση της μεταβλητής στον παράγοντα ενώ ο αριθμός στην παρένθεση την αντίστοιχη ερμηνευόμενη διασπορά (R^2).

Διάγραμμα 4.1. Μοντέλο για τη δομή της φαντασίας στα μαθηματικά

Το Διάγραμμα 4.1. δείχνει τις φορτίσεις των μεταβλητών στους αντίστοιχους παράγοντες, τις φορτίσεις των παραγόντων πρώτης τάξης στον παράγοντα δευτέρας τάξης και την αντίστοιχη ερμηνευόμενη διασπορά. Τα αποτελέσματα για τα διάφορα κριτήρια αξιολόγησης του ανακλαστικού μοντέλου μέτρησης παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.4. Γενικά, οι τιμές των δεικτών εισηγούνται πως το προτεινόμενο μοντέλο πληροί τα κριτήρια αξιολόγησης της ανάλυσης Μερικών Ελάχιστων Τετραγώνων (PLS-SEM).

Πίνακας 4.4

Δείκτες Κριτηρίων Αξιολόγησης Μοντέλου Μέτρησης της Φαντασίας στα Μαθηματικά

Κριτήριο	Οπτικοποίηση	Μετασχηματιστικές Ικανότητες	Πρωτοτυπία	Φαντασία
Composite Reliability ρ_c	.78	.79	.85	.87
Cronbach α	.57	.60	.74	.84
ρ_A	.57	.61	.74	.85
Μέση Εξαγόμενη Διασπορά (AVE)	.54	.56	.66	.75
√AVE	.73	.75	.81	.86

Ειδικότερα, όσον αφορά στην αξιοπιστία των δεικτών του μοντέλου, έχουν αφαιρεθεί από το μοντέλο όσες μεταβλητές παρουσίαζαν φορτίσεις χαμηλότερες του .70. Έτσι, οι εναπομείνασες μεταβλητές έχουν όλες θετικές, υψηλές (πάνω από .70) και στατιστικά σημαντικές φορτίσεις στον αντίστοιχο παράγοντα. Επομένως, επιβεβαιώνεται ότι οι μεταβλητές αυτές είναι κατάλληλες για τη μέτρηση των αντίστοιχων παραγόντων πρώτης τάξης.

Στον παράγοντα της οπτικοποίησης φορτίζουν δυο μεταβλητές που σχετίζονται με χωρικές εικόνες (Ευελ.ΟΧΕ_1 και Ευελ.ΟΧΕ_3) αλλά και μια μεταβλητή που αφορά αλγεβρικές εικόνες (ΟΑΕ_2). Στον παράγοντα των μετασχηματιστικών ικανοτήτων φορτίζουν και οι τρεις μεταβλητές που υπήρχαν στο προτεινόμενο μοντέλο της διατριβής (Ευελ. ΜΙ_1, Ευελ. ΜΙ_2 και Ευελ. ΜΙ_3). Τέλος, στον παράγοντα της πρωτοτυπίας, φορτίζουν σε ικανοποιητικό βαθμό μόνο οι μεταβλητές πρωτοτυπίας στα έργα μετασχηματιστικών ικανοτήτων (Πρωτ. ΜΙ_1, Πρωτ. ΜΙ_2 και Πρωτ. ΜΙ_3), ενώ οι μεταβλητές πρωτοτυπίας στα έργα οπτικοποίησης δεν είχαν ικανοποιητικές φορτίσεις.

Επιπλέον, οι θετικές, υψηλές και στατιστικά σημαντικές φορτίσεις των τριών παραγόντων πρώτης τάξης στον παράγοντα δευτέρας τάξης της φαντασίας στα μαθηματικά επιβεβαιώνουν πως οι ικανότητες της οπτικοποίησης (λ=.79, R^2=.63), των μετασχηματιστικών ικανοτήτων (λ=.89, R^2=.78) και της πρωτοτυπίας (λ=.91, R^2=.83) συνθέτουν μια ανώτερης τάξης εννοιολογική κατασκευή, τη φαντασία στα μαθηματικά. Από τις τρεις ικανότητες, ο πιο αξιόπιστος παράγοντας για τη μέτρηση της φαντασίας στα μαθηματικά είναι η πρωτοτυπία, ένεκα της υψηλότερης φόρτισης (λ=.91, R^2=.83).

Από πλευράς αξιοπιστίας εσωτερικής συνέπειας, το composite reliability ρ_c, το Cronbach α και το ρ_A θεωρούνται ικανοποιητικά, με εξαίρεση το Cronbach α και το ρ_A για την οπτικοποίηση, που είναι .57, δηλαδή οριακά κοντά στο .60. Μια πιθανή ερμηνεία είναι ότι στον παράγοντα της οπτικοποίησης φορτίζουν δυο έργα οπτικοποίησης χωρικών εικόνων αλλά και ένα έργο οπτικοποίησης αλγεβρικών εικόνων.

Σχετικά με τη συγκλίνουσα εγκυρότητα, οι τιμές της Μέσης Εξαγόμενης Διασποράς (Average Variance Extracted-AVE) σε όλους τους παράγοντες είναι πάνω από .50. Αξίζει να σημειωθεί ότι ερευνητές εισηγούνται ότι στην Ανάλυση Μερικών Ελάχιστων Τετραγώνων η Μέση Εξαγόμενη Διασπορά δευτέρας τάξης παραγόντων πρέπει να υπολογίζεται λαμβάνοντας υπόψη τις φορτίσεις των παραγόντων πρώτης τάξης στον παράγοντα δευτέρας τάξης και όχι τις φορτίσεις των παρατηρήσιμων μεταβλητών (Becker, Klein, & Wetzels, 2012). Συγκεκριμένα, θα πρέπει να υπολογίζεται ως ο μέσος όρος των τετραγώνων των φορτίσεων των παραγόντων πρώτης τάξης στον παράγοντα δευτέρας τάξης (MacKenzie, Podsakoff, & Podsakoff, 2011).

Η αποκλίνουσα εγκυρότητα των παραγόντων κρίθηκε ικανοποιητική σε όλους τους παράγοντες του μοντέλου. Σε επίπεδο παραγόντων, η τετραγωνική ρίζα της Μέσης Εξαγόμενης Διασποράς (AVE) κάθε παράγοντα είναι μεγαλύτερη από τις συσχετίσεις του παράγοντα με τους υπόλοιπους παράγοντες. Ο Πίνακας 4.5 παρουσιάζει τους συντελεστές συσχέτισης των τριών παραγόντων που συνθέτουν τη φαντασία στα μαθηματικά. Σε επίπεδο μεταβλητών, παρατηρώντας τα cross-loadings των μεταβλητών φαίνεται ότι κάθε μεταβλητή φορτίζει σε μεγαλύτερο βαθμό στον παράγοντα που επιχειρεί να μετρήσει παρά στους υπόλοιπους παράγοντες του μοντέλου.

Πίνακας 4.5

Συσχετίσεις για τους Παράγοντες του Μοντέλου Μέτρησης της Φαντασίας στα Μαθηματικά

Παράγοντας	Οπτικοποίηση	Μετασχηματιστικές Ικανότητες	Πρωτοτυπία
Οπτικοποίηση	1	.56*	.57*
Μετασχημ. Ικανότητες	.56*	1	.73*
Πρωτοτυπία	.57*	.73*	1

Σημείωση: *Οι συσχετίσεις είναι στατιστικά σημαντικές σε επίπεδο p<.05

Με βάση τον Πίνακα 4.5, όλες οι συσχετίσεις ανάμεσα στους παράγοντες του μοντέλου της φαντασίας στα μαθηματικά είναι θετικές και στατιστικά σημαντικές. Οι συσχετίσεις ανάμεσα στην οπτικοποίηση και τις μετασχηματιστικές ικανότητες και ανάμεσα στην οπτικοποίηση και την πρωτοτυπία θεωρούνται μέτριες, ενώ η συσχέτιση της πρωτοτυπίας με τις μετασχηματιστικές ικανότητες θεωρείται ισχυρή (Franzblau, 1958).

Γνωστικές Διαδικασίες της Φαντασίας στα Μαθηματικά

Οι γνωστικές διαδικασίες της φαντασίας στα μαθηματικά διερευνήθηκαν μέσω ημι-δομημένων συνεντεύξεων από τους μαθητές κατά την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος ενόρασης (Weisberg, 1995). Η εγκυρότητα περιεχομένου του μαθηματικού προβλήματος εξακριβώθηκε μέσω του δείκτη CVI του έργου (I-CVI) (Polit & Beck, 2006). Για τον υπολογισμό του δείκτη αυτού, εφαρμόστηκε ανάλογη διαδικασία όπως τη διαδικασία αξιολόγησης της εγκυρότητας περιεχομένου του δοκιμίου της φαντασίας στα μαθηματικά, που έχει περιγραφεί προηγουμένως. Ζητήθηκε από μια επιτροπή τεσσάρων ειδικών, να αξιολογήσουν τον βαθμό στον οποίο θεωρούν ότι το πρόβλημα μπορεί να μετρήσει τις γνωστικές διαδικασίες της φαντασίας των μαθητών. Το I-CVI κάθε έργου υπολογίστηκε ως εξής: ο αριθμός των ειδικών που θεωρούσαν το έργο σχετικό διαιρέθηκε με τον συνολικό αριθμό των ειδικών (Polit & Beck, 2006). Η τιμή του δείκτη I-CVI ήταν ίση με 1, εφόσον όλοι οι ειδικοί υποστήριξαν ότι το μαθηματικό πρόβλημα είναι συναφές με τον σκοπό που επιτελούσαν οι συνεντεύξεις. Έτσι, η εγκυρότητα περιεχομένου του μαθηματικού προβλήματος ενόρασης κρίνεται ικανοποιητική (Lynn, 1986).

Τα δεδομένα από τις συνεντεύξεις αναλύθηκαν ποιοτικά μέσω της μεθόδου της αναλυτικής επαγωγής. Η βασική θεωρητική υπόθεση στην οποία επιχειρεί να κτίσει η παρούσα έρευνα είναι ότι η διαδικασία επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος ενόρασης ακολουθεί τέσσερα στάδια: προετοιμασία, επώαση, φωτισμός και επαλήθευση, με βάση το μοντέλο του Wallas (1926) για τη δημιουργική διαδικασία. Επιδίωξη της εργασίας είναι να διερευνήσει εις βάθος περιπτώσεις μαθητών και από τα δυο φύλα και με διαφορετικό επίπεδο ικανότητας επίλυσης προβλημάτων ενόρασης, ώστε με πιθανές τροποποιήσεις και βελτιώσεις της αρχικής υπόθεσης, η τελική υπόθεση να καταστεί εφαρμόσιμη και έγκυρη σε διαφορετικές περιπτώσεις μαθητών (Katz, 2001).

Η ενότητα παρουσιάζει τα αποτελέσματα που προέκυψαν για τις γνωστικές διαδικασίες της φαντασίας των μαθητών με βάση την ανάλυση των ημι-δομημένων ατομικών συνεντεύξεων. Τα αποτελέσματα είναι οργανωμένα κατά στάδιο δημιουργικής διαδικασίας και περιγράφονται ξεχωριστά για τους μαθητές που ανήκουν σε διαφορετικό επίπεδο ικανότητας επίλυσης προβλημάτων ενόρασης: χαμηλό, μέτριο και υψηλό επίπεδο. Παρατίθενται παράλληλα χαρακτηριστικά αποσπάσματα από τις συνεντεύξεις. Τέλος, συζητιούνται κάποιοι παράγοντες που ανέκυψαν από τα δεδομένα και που φαίνεται να επηρεάζουν τη διαδικασία λύσης μαθηματικών προβλημάτων ενόρασης.

Προετοιμασία

Μαθητές με Χαμηλό Επίπεδο Ικανότητας Επίλυσης Μαθηματικών Προβλημάτων Ενόρασης. Όσον αφορά στην αναγνώριση του προβλήματος, όλοι οι μαθητές με χαμηλό επίπεδο ικανότητας επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων ενόρασης φάνηκε να δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν την προβληματική κατάσταση. Συγκεκριμένα, αντιμετωπίζουν μεγαλύτερη δυσκολία κατανόησης των δεδομένων του προβλήματος παρά του ζητούμενου, δεδομένου ότι κανένας από αυτούς δεν κατόρθωσε να κατανοήσει τις πληροφορίες που τους έδινε το σχήμα του προβλήματος. Είναι χαρακτηριστικό το απόσπασμα από τη συνέντευξη του Μ3, ο οποίος αναφωνεί ότι δυσκολεύεται να κατανοήσει το πρόβλημα ακριβώς μόλις διάβασε το πρόβλημα για πρώτη φορά:

> Ε: Λοιπόν, θα σου δείξω ένα πρόβλημα. Θέλω να το διαβάσεις προσεκτικά. Να την πένα σου για να το λύσεις. Θέλω ό,τι σκέφτεσαι να το λες δυνατά.
>
> Μ3: Στο πιο κάτω σχήμα, οι αριθμοί συνδέονται μεταξύ τους με κάποια σχέση. Να υπολογίσεις την τιμή του αριθμού Χ που βρίσκεται στον κεντρικό κύκλο. [Διαβάζει το πρόβλημα μεγαλόφωνα] Δεν κατάλαβα! [Μ3, γρ.19-21].

Ωστόσο, όλοι οι μαθητές, με μία μόνο εξαίρεση, κατανόησαν ποιο είναι το ακριβές ζητούμενο του προβλήματος, δηλαδή η τιμή της μεταβλητής Χ. Για παράδειγμα, ο μαθητής Μ2 αντιλήφθηκε ότι πρέπει να υπολογίσει την τιμή της μεταβλητής Χ χωρίς όμως να μπορεί εύκολα να ξεκλειδώσει τις σχέσεις που κρύβονται μεταξύ των αριθμών του σχήματος:

Ε: Θέλω ό,τι σκέφτεσαι να μου το λες δυνατά για να ακούω τη σκέψη σου.

Μ2: Χμ βασικά για να βρούμε τον κεντρικό κύκλο του Χ θα πρέπει. Λέει ότι έχει κάποια σχέση εδώ. Χμ ναι αλλά πώς θα; Αυτό το 1, το 3, το 1, το 8; Πώς έχουν σχέση; [Μ2, γρ. 26-29]

Επίσης, ο Μ5 όταν κλήθηκε να εξηγήσει τι λέει το πρόβλημα έσπευσε να τονίσει το ζητούμενο παρά τα δεδομένα του προβλήματος, χωρίς μάλιστα να αναγνωρίζει ότι δεν έχει κατανοήσει επαρκώς το πρόβλημα:

Ε: Κατάλαβες τι λέει το πρόβλημα;

Μ5: Ναι. Λέει ας πούμε ότι πρέπει να βρούμε αυτούς τους αριθμούς. Να βρούμε τον αριθμό Χ. [Μ5, γρ. 22-24]

Μοναδική εξαίρεση στο πιο πάνω μοτίβο αποτελεί η περίπτωση του Μ1, ο οποίος αντιμετώπισε σοβαρή δυσκολία όχι μόνο στο να κατανοήσει τα δεδομένα του προβλήματος αλλά και το ζητούμενό του. Βέβαια, σε αυτό ίσως συμβάλλει και το γεγονός ότι το συγκεκριμένο παιδί δεν έχει την ελληνική γλώσσα ως τη μητρική του, γεγονός που διαφαίνεται από την ξενική προφορά του [Μ1, γρ. 26]. Συγκεκριμένα, θεωρεί ότι το ζητούμενο του προβλήματος είναι ο υπολογισμός των γινομένων διαφόρων ζευγών αριθμών του σχήματος, μπερδεύοντας το σύμβολο της μεταβλητής Χ με το σύμβολο «επί» της πράξης πολλαπλασιασμού:

Μ1: Στο πιο κάτω σχήμα, οι αριθμοί συνδέονται μεταξύ τους με κάποια σχέση. Να υπολογίσεις την τιμή του αριθμού Χ που βρίσκεται στον κεντρικό κύκλο. [ξενική προφορά, φαίνεται ότι είναι ξένος]

Χμ 6Χ8=40

Ε: Ναι

Μ1: 6Χ7=49 [Μ1, γρ. 24-29]

Ε: Θέλω να μου βρεις την απάντηση. Τι ζητά να βρεις το πρόβλημα; Κατάλαβες τι θέλει το πρόβλημα;

Μ1: Όχι [Μ1, γρ. 53-55]

Σε άμεση συνάφεια με τη δυσκολία κατανόησης του προβλήματος, οι μαθητές δυσκολεύονταν σημαντικά να εκφέρουν το πρόβλημα χρησιμοποιώντας διαφορετική λεκτική διατύπωση, όπως φανερώνουν και τα αποσπάσματα από τις συνεντεύξεις των μαθητών Μ1 και Μ3 που ακολουθούν. Ο Μ1 επαναδιατυπώνει το πρόβλημα τονίζοντας ότι το πρόβλημα του ζητά να υπολογίσει γινόμενα διάφορων αριθμών.

Ε: Πες μου το με δικά σου λόγια. Μπορείς;

Μ1: Πρέπει να διαλέξεις δυο νούμερα για να βρεις πόσα κάνει. Όπως για παράδειγμα τάδε φορές τάδε ας πούμε. Ένηξερω [παύση] [Μ1, γρ.39-41]

Ε: Θέλεις να μου πεις ξανά με δικά σου λόγια τι πρέπει να βρεις;

Μ1: Θέλω να βρω το [παύση] Ας πούμε πρέπει να [παύση] Δε μπορώ να πω κάτι. [Μ1, γρ. 68-69]

Ο Μ3 δεν έκανε καμία απολύτως νύξη στην ύπαρξη συγκεκριμένων σχέσεων που συνδέουν τους δοσμένους αριθμούς του σχήματος, αλλά εστίασε αποκλειστικά στον υπολογισμό του ζητούμενου.

Ε: Θέλεις να μου το πεις με δικά σου λόγια;

Μ3: Ότι έχει κάποιους αριθμούς και πρέπει να βρω το Χ. [Μ3, γρ.29-30]

Είναι δε αξιοσημείωτο ότι ενώ οι μαθητές με χαμηλό επίπεδο ικανότητας επίλυσης προβλημάτων ενόρασης σημείωσαν σημαντική δυσκολία κατά την αναγνώριση του προβλήματος, δεν επιδόθηκαν σε πολλαπλές αναγνώσεις του προβλήματος. Όλοι οι μαθητές ανέγνωσαν το πρόβλημα μόνο μια φορά, με μοναδική εξαίρεση τον Μ4 που το διάβασε τρεις φορές συνολικά. Είναι άξια αναφοράς η αντίδραση του Μ1, ο οποίος παρά τη δυσκολία που είχε ως προς την κατανόηση του προβλήματος, αρνούνταν πεισματικά να ξαναδιαβάσει το πρόβλημα:

Ε: Θέλεις να το ξαναδιαβάσεις;

Μ1: Όχι! [κούνημα κεφαλιού για άρνηση] Δε θέλω να το ξαναδιαβάσω. Πρέπει να προσθέσεις τα αποτελέσματα του προβλήματος; Δεν κατάλαβα.

Ε: Θέλεις να το ξαναδιαβάσεις για να καταλάβεις;

Μ1: Όχι όχι καταλαβαίνω, απλά [παύση] Μπορείς να κυκλώσεις και 3 νούμερα; [Μ1, γρ. 59-63]

Αυτό το μοτίβο που παρατηρήθηκε στα δεδομένα ίσως να ερμηνεύεται από το γεγονός ότι το συγκεκριμένο μαθηματικό πρόβλημα δε στηριζόταν τόσο έντονα στις λεκτικές πληροφορίες που διατυπώνονταν αλλά στο διάγραμμα που εμπεριείχε τις κρυμμένες σχέσεις μεταξύ των αριθμών. Επομένως, η διαδικασία των πολλαπλών αναγνώσεων σε τέτοιου είδους μαθηματικά προβλήματα δε βελτιώνει κατ' ανάγκην την κατανόηση των μαθητών για τα δεδομένα και τα ζητούμενα της προβληματικής κατάστασης.

Όσον αφορά στη συγκέντρωση, οι μαθητές του χαμηλού επιπέδου επιδόθηκαν σε ορισμένες προσπάθειες επίλυσης του προβλήματος, χωρίς όμως να επιδιώξουν να επεξεργαστούν σε βάθος τις διαστάσεις του προβλήματος. Ειδικότερα, η διαδικασία του εντοπισμού σχέσεων μεταξύ των αριθμών του σχήματος απουσίαζε από την πλειοψηφία των μαθητών με χαμηλή ικανότητα επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων ενόρασης. Οι μαθητές αυτής της ομάδας δεν μπόρεσαν να ανακαλύψουν οποιαδήποτε κρυμμένη σχέση που ενυπήρχε ανάμεσα στους αριθμούς του σχήματος. Το κυρίαρχο μοτίβο στις προσπάθειες επίλυσής τους ήταν η εκτέλεση τυχαίων πράξεων με αριθμούς του σχήματος. Επομένως, οι μαθητές εγκλωβίστηκαν σε μια επιφανειακή επεξεργασία των πληροφοριών του προβλήματος.

> Μ3: [σκέφτεται νοερά] Να προσθέσω τους άλλους αριθμούς, να δω πόσο μας κάνουν και να στρογγυλοποιήσω σε 100, 110; Κάπου εκεί. [Μ3, γρ. 54-55]
>
> Ας πούμε αυτοί οι αριθμοί κάνουν 80. Θα το πάρω στο 100. Το Χ 20 για να γίνει 100. Περίπου. [Μ3, γρ. 65-66]

> Ε: Μπορείς να μου λες δυνατά τι σκέφτεσαι; Ποιους αριθμούς σκέφτεσαι να χρησιμοποιήσεις;
>
> Μ4: Τους πλάγιους εδώ.
>
> Ε: Ποιους πλάγιους;
>
> Μ4: Το 16, το 7, το 1.
>
> Ε: Ναι και; Τι να τους κάμεις;
>
> Μ4: Να τους προσθέσω.
>
> Ε: Άρα ποιο είναι το αποτέλεσμα νομίζεις;

M4: 19; [ρωτά την ερευνήτρια] [παύση] Να τους προσθέσω αυτούς τους τρεις. [M4, γρ. 57-65]

Είναι μάλιστα χαρακτηριστική η περίπτωση του M2, ο οποίος ακόμα και μετά που είχε λάβει δυο βοήθειες από την ερευνήτρια, συνέχισε να εκτελεί τυχαίες πράξεις με τους αριθμούς του σχήματος αδυνατώντας να εντοπίσει οποιαδήποτε σχέση ανάμεσα στους δοσμένους αριθμούς:

M2: [βλέπει τη 2η βοήθεια που του δόθηκε και αναστενάζει δυνατά] Ε ναι αλλά δεν καταλάβω τι με βοηθούν αυτοί οι δυο. Ας πούμε εννά τα προσθέσω; Εννά τα προσθέσω και τούτα. Άμα τα προσθέσω όλα [παύση]

Ε: Ναι;

M2: Εννά τα προσθέσω όλα;

Ε: Ποια όλα;

M2: Όλους τους αριθμούς. Κάθετα. Και μετά εννά [παύση] διαιρέσω; Εννοώ εν ξαναείδα έτσι σχήμα. [M2, γρ. 101-108]

Συγχρόνως, πολλοί μαθητές μπέρδεψαν το σύμβολο της μεταβλητής Χ με το σύμβολο «επί» της πράξης του πολλαπλασιασμού και έτσι επιδόθηκαν στην εκτέλεση πράξεων πολλαπλασιασμού με διάφορους αριθμούς του σχήματος στην προσπάθειά τους να βρουν τη λύση στο πρόβλημα. Παρατίθενται αυτούσια αποσπάσματα από τις συνεντεύξεις των μαθητών αυτών:

M1: Χμ 6Χ8=40

Ε: Ναι

M1: 6Χ7=49

Ε: Πού βλέπεις; Ποιους αριθμούς βλέπεις; Το 6Χ8 που μου είπες πριν; Τούτο εν το 6 με το 8 πάνω; [δείχνει στο σχήμα]

M1: Ναι [παύση] 2Χ5=10. [M1, γρ. 27-33]

M2: Να τα πολλαπλασιάσω όλα.

Ε: Δηλαδή ποιους αριθμούς να πολλαπλασιάσεις;

M2: 8Χ2Χ1Χ4 και έτσι να είναι όλα φορές κάθετα και μετά να το διαιρέσω διά 16; [ερώτηση] [M2, γρ. 67-70]

Ε: Ποιους αριθμούς μπορείς να χρησιμοποιήσεις νομίζεις;

Μ3: Το 7, το 5, το 2, το 13, το 16. Να κάνω πολλαπλασιασμό [Μ3, γρ. 36-37]

Ε: Άρα το Χ πόσα θα είναι;

Μ6: Δυο!

Ε: Γιατί είναι δυο;

Μ6: Επειδή είπα 1Χ2=2.

Μ6: Ναι. Αυτό το έκανα σαν το φορές και το βρήκα.

[Μ6, γρ. 35-43]

Δυο μόνο εξαιρέσεις παρατηρήθηκαν στο πιο πάνω μοτίβο: Δυο περιπτώσεις μαθητών κατόρθωσαν να εντοπίσουν κάποιου είδους σχέση ανάμεσα στους αριθμούς του σχήματος, η Μ4 και η Μ5. Η Μ5 εντόπισε σχέσεις μεταξύ μεμονωμένων αριθμών του σχήματος. Πρώτον, ανακάλυψε μια πολλαπλασιαστική σχέση που συνδέει τους αριθμούς της κεντρικής στήλης του σχήματος: διπλασιάζοντας τον αριθμό 3 προκύπτει ο αριθμός 6, ενώ διπλασιάζοντας τον αριθμό 1 προκύπτει ο αριθμός 2. Εκτός τούτου, εντόπισε ότι οι δυο ακρινές στήλες έχουν και οι δυο τον αριθμό 16 και για αυτό υπέδειξε το 16 ως την τιμή του Χ. Ωστόσο, οι σχέσεις που εντόπισε η Μ5 αναφέρονταν σε μεμονωμένους αριθμούς του σχήματος. Δεν μπόρεσε να εισχωρήσει και σε πιο σφαιρικές σχέσεις, π.χ. ότι οι αριθμοί σε δυο τουλάχιστον στήλες του σχήματος έχουν σταθερό άθροισμα ίσο με 16.

Μ5: Νομίζω είναι 16.

Ε: Γιατί είναι 16;

Μ5: Γιατί στις άκρες είναι 16.

Ε: Άρα και στη μέση [ο άγνωστος αριθμός Χ] θα είναι 16;

Μ5: Ναι. [Μ5, γρ. 39-43]

Από την άλλη, η Μ4 κατάφερε να επικεντρωθεί σε μια πιο σφαιρική σχέση μεταξύ των αριθμών του σχήματος, εντοπίζοντας ότι οι αριθμοί σε δυο στήλες του σχήματος έχουν σταθερό άθροισμα, έχοντας όμως ήδη λάβει δυο βοήθειες από την ερευνήτρια. Ωστόσο, ακόμα και μετά τον εντοπισμό αυτής της σχέσης δεν την αξιοποίησε παραγωγικά για να μπορέσει να οδηγηθεί στην ορθή απάντηση. Παρέμεινε παγιδευμένη στην τυχαία εκτέλεση πράξεων μεταξύ των αριθμών.

Ε: Εντάξει. Θέλω τώρα να δεις αυτές τις δυο σειρές που θα σου κυκλώσω. Θέλω να τις δεις προσεκτικά και να μου πεις τι παρατηρείς και αν σε βοηθούν να βρεις τον αριθμό Χ.

Μ4: Ότι αυτά μας κάνουν 16 και αυτά μας κάνουν 16.

Ε: Δηλαδή ποιοι αριθμοί;

Μ4: Το 13, το 1 και το 2 και το 5, το 7 και το 4 μας κάνουν 16.

Ε: Αυτό μπορείς να το χρησιμοποιήσεις για να βρεις τον αριθμό Χ;

Μ4: Να κάνω -16;

Ε: Δηλαδή; Μπορείς να γράψεις κιόλας αν θες να γράψεις.

Μ4: Ας πούμε να κάνω 16-16 και να το βρω. [Μ4, γρ. 103-113]

Ε: Εκείνο το βρήκες ναι. Μπορείς να το χρησιμοποιήσεις αυτό για να βρεις το Χ; Μου είπες ότι αυτά τα δυο κάνουν 16.

Μ4: Αυτά άμα τα κυκλώσω από κάτω [το 1, το 6 και το 4] και τα προσθέσω με το 16. Να τα κυκλώσω τούτα και μετά που θα το βρω να τα προσθέσω με το 16. [Μ6, γρ. 123-126]

Παράλληλα, οι μαθητές με χαμηλό επίπεδο ικανότητας επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων ενόρασης δεν ανέτρεξαν σε προϋπάρχουσες εμπειρίες κατά την προσπάθεια εντοπισμού σχέσεων εντός του σχήματος. Εξάλλου, από τους εν λόγω μαθητές μόνο η Μ6 είχε λύσει ξανά ένα παρεμφερές πρόβλημα. Ενδεικτικό είναι το παρακάτω απόσπασμα από τη συνέντευξη του Μ3:

Ε: Ναι. Ξαναέλυσες ένα τέτοιο πρόβλημα;

Μ3: Ποττέ! [χαμηλόφωνα] [Μ3, γρ.43-44]

Η μόνη περίπτωση μαθήτριας που αναφέρθηκε στην ύπαρξη προηγούμενης εμπειρίας με παρόμοια προβλήματα ήταν η Μ6: «Κυρία ο παππούς μου ήταν μαθηματικός στην αρχή και με βοηθούσε και θυμούμαι κάτι που μου έκανε έτσι ασκήσεις» [Μ6, γρ. 60-61]. Παρόλο, όμως, που επικαλέστηκε εξάσκηση με συναφή προβλήματα εντός του οικογενειακού της περιβάλλοντος, η μαθήτρια αυτή δεν τις αξιοποίησε αποτελεσματικά για να λύσει το πρόβλημα, ούτε έκανε καμία αναφορά σε πιθανές ομοιότητες ή διαφορές με παρόμοια προβλήματα που είχε λύσει. Αυτό ενδεχομένως να ερμηνεύεται από ότι οι εμπειρίες που είχε δεν είναι από την άμεση καθημερινότητά της, αλλά είναι από «πιο παλιά» όπως ανέφερε [Μ6, γρ. 78]. Επομένως, όταν ο μαθητής δεν έχει συστηματική επαφή με παρόμοιου τύπου προβλήματα, τότε δε μπορεί να επιστρατεύσει παραγωγικά τις προϋπάρχουσες αυτές εμπειρίες για να διερευνήσει μια καινούρια προβληματική κατάσταση.

Η περιορισμένη προθυμία των μαθητών της ομάδας αυτής να εξερευνήσουν την προβληματική κατάσταση για να επιλύσουν το πρόβλημα αντανακλάται και από την ελλιπή διάθεση τους να εναλλάσσουν τον τρόπο σκέψης τους στο στάδιο της προετοιμασίας. Οι πλείστοι μαθητές της ομάδας δεν προέβηκαν σε καμία εναλλαγή του τρόπου σκέψης τους αλλά εγκλωβίστηκαν μόνο σε μια στρατηγική λύσης. Ο Μ1 περιορίστηκε στον υπολογισμό γινομένων με τους αριθμούς του σχήματος και ο Μ2 στην εκτέλεση τυχαίων πράξεων με τους αριθμούς του σχήματος, παρά τις δυο βοήθειες που έλαβε. Ο Μ3 στο άθροισμα όλων των αριθμών και στη στρογγυλοποίηση στην πλησιέστερη δεκάδα, ενώ η Μ4 στην πρόσθεση τυχαίων αριθμών του σχήματος, αν και έλαβε επίσης δυο βοήθειες από την ερευνήτρια. Τέλος, η Μ6 περιορίστηκε στον υπολογισμό γινομένων με τους αριθμούς του σχήματος. Μόνο η Μ5 επιχείρησε αυτόβουλα να τροποποιήσει τη στρατηγική σκέψης της δυο φορές κατά την προσπάθεια επίλυσης του προβλήματος, χωρίς βέβαια να μπορέσει να εστιάσει στις ορθές σχέσεις ανάμεσα στους αριθμούς του σχήματος και να το επιλύσει.

Μαθητές με Μέτριο Επίπεδο Ικανότητας Επίλυσης Μαθηματικών Προβλημάτων Ενόρασης. Σε σύγκριση με την ομάδα με χαμηλό επίπεδο ικανότητας επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων ενόρασης, η ομάδα μέτριου επιπέδου δυσκολεύτηκε σε λιγότερο βαθμό να αναγνωρίσει την προβληματική κατάσταση. Αναφορικά με την κατανόηση του ζητούμενου του προβλήματος, η ομάδα μέτριου επιπέδου δεν φάνηκε να δυσκολεύτηκε, όπως δηλαδή και οι μαθητές χαμηλού επιπέδου. Όλοι οι μαθητές της ομάδας αντιλήφθηκαν ότι το πρόβλημα τους ζητούσε να υπολογίσουν την τιμή του άγνωστου αριθμού Χ.

Όσον αφορά στην κατανόηση των δεδομένων του προβλήματος, οι πλείστοι μαθητές κατανόησαν επαρκώς τις πληροφορίες και αντιλήφθηκαν ότι πίσω από τους αριθμούς του σχήματος κρύβεται μια σχέση την οποία καλούνται να εξιχνιάσουν. Ένα παράδειγμα είναι το πιο κάτω:

Ε: Λέγε μου τι σκέφτεσαι.

Μ8: Προσπαθώ να κάμω, να βρω μια σύγκριση.

Ε: Ποιους αριθμούς σκέφτεσαι;

Μ8: Προσπαθώ να δω ποια σχέση έχουν. [Μ8, γρ. 23-26]

Μόνο δυο από τους μαθητές της ομάδας αυτής, η Μ7 και ο Μ9, δεν κατανόησαν τις πληροφορίες που τους έδινε το σχήμα. Ενδεικτική είναι συνέντευξη της Μ7:

Ε: Κατάλαβες τι λέει το πρόβλημα;

Μ7: Ναι τους αριθμούς που συνδέονται μεταξύ τους. Να βρω ποιοι συνδέονται. Το 3 και 3 να συνδέονται. [Μ7, γρ. 29-31]

Είναι εξάλλου χαρακτηριστικό ότι όταν ζητήθηκε στον Μ9 να επαναδιατυπώσει το πρόβλημα με έναν διαφορετικό τρόπο, αυτός δήλωσε ότι αδυνατεί:

Ε: Μπορείς να μου πεις το πρόβλημα ξανά με δικά σου λόγια;

Μ9: Όχι.

Ε: Δεν ξέρεις να το πεις με δικά σου λόγια; Να το ξαναπείς;

Μ9: [νεύμα με το κεφάλι ότι δεν ξέρει] [Μ9, γρ. 86-89]

Η διαδικασία της πολλαπλής ανάγνωσης φάνηκε ότι δεν ήταν εμφανής στη συμπεριφορά των μαθητών μέτριου επιπέδου, όπως ακριβώς συνέβη και στην περίπτωση των μαθητών χαμηλού επιπέδου. Πέραν από την περίπτωση του Μ12 που διάβασε δυο φορές το πρόβλημα, όλοι οι υπόλοιποι μαθητές ανέγνωσαν το πρόβλημα μία και μόνο φορά. Όπως προαναφέρθηκε, αυτό επεξηγείται από τον τύπο του μαθηματικού προβλήματος που χρησιμοποιήθηκε, εφόσον δεν εμπλέκει σε έντονο βαθμό λεκτικά διατυπωμένες πληροφορίες.

Σχετικά με τη συγκέντρωση, η διαδικασία εντοπισμού σχέσεων μεταξύ των αριθμών του σχήματος της ομάδας μέτριου επιπέδου διαφοροποιήθηκε εν μέρει από την αντίστοιχη διαδικασία της ομάδας χαμηλού επιπέδου. Σε ένα πρώτο επίπεδο ένα μοτίβο που επικρατούσε στην ομάδα αυτή ήταν η εκτέλεση τυχαίων πράξεων με τους αριθμούς του δοθέντος σχήματος. Μερικά παραδείγματα από τις συνεντεύξεις των μαθητών παρατίθενται στη συνέχεια. Για παράδειγμα, η Μ7 προτείνει ως λύσεις στο πρόβλημα τυχαίους αριθμούς που βρίσκονται κοντά στον άγνωστο αριθμό Χ εντός του σχήματος.

Μ7: Βλέπω αριθμούς. Βλέπω 1 και 1 εδώ [πάνω από το Χ].

Μπορεί να είναι 1 επειδή έχει 1 εδώ [πάνω από το Χ]

Μπορεί να είναι 2

Ε: Γιατί 2;

Μ7: Έχει 2 δυάρια. [δίπλα από το Χ] [Μ7, γρ. 22-26]

Επίσης, η Μ10 και ο Μ12 εκτελούσαν τυχαία πράξεις με τους αριθμούς της στήλης που εμπεριέχει τον άγνωστο αριθμό Χ σε μια προσπάθεια να υπολογίσουν την τιμή του Χ.

Μ10: Μπορεί να γίνει αυτό. 1+1=2 2Χ3=6. 6+2=8. [παύση] [βλέπει την $4^{η}$ κατακόρυφη γραμμή από αριστερά] [Μ10, γρ. 25-31]

Μ12: 3+1=4 4+1=5 6 6-2=4 4+1=5 [βλέπει την $4^{η}$ κατακόρυφη γραμμή από αριστερά]

Ε: Άρα το Χ πόσα είναι;

Μ12: Α! 0; [ρωτά την ερευνήτρια] [Μ12, γρ. 68-71]

Ωστόσο, πέραν από την εκτέλεση τυχαίων πράξεων, οι μαθητές με μέτρια ικανότητα επίλυσης προβλημάτων ενόρασης κατόρθωσαν να επικεντρωθούν και σε ανώτερου επιπέδου συσχετίσεις ανάμεσα στους αριθμούς του σχήματος σε αντίθεση με τους μαθητές χαμηλού επιπέδου. Ειδικότερα, ένα ακόμη μοτίβο που εμφανίστηκε έντονα ήταν όλοι οι μαθητές μέτριας ικανότητας, πλην της Μ7, κατάφεραν να αναγνωρίσουν την ύπαρξη κάποιου είδους σχέσης, αθροιστικής ή και πολλαπλασιαστικής δομής, ανάμεσα σε μεμονωμένους αριθμούς του σχήματος. Ενδεικτικά περιγράφεται η περίπτωση του Μ8. Ο Μ8 εντόπισε μια σχέση πολλαπλασιαστικής δομής που συνδέει τρεις αριθμούς από την τρίτη στήλη του σχήματος. Τελικά όμως δεν αξιοποίησε ουσιαστικά τη σχέση που εντόπισε για να υπολογίσει την τιμή του άγνωστου αριθμού Χ, αλλά προχώρησε και πάλι στην τυχαία εκτέλεση πράξεων χειριζόμενος του αριθμούς του σχήματος.

Μ8: Προσπαθώ να βρω ποιους αριθμούς να βάλω ώστε να μπορούμε να, θέλω να κάμω μια σύγκριση, να προσπαθήσω να βρω κάποιους αριθμούς που να συνδέονται με το Χ.

Ε: Ναι

Μ8: Βρήκα εδώ ότι 8 διά 2 κάνει 4, 4Χ1=4, Χ1 ξανά 4, αποτέλεσμα 4. [$3^{η}$ στήλη από αριστερά]

Ε: Μάλιστα. Ναι

M8: Εδώ για το Χ θα κάνω 3Χ1 = 3. [βλέπει την κεντρική στήλη του σχήματος]. Άρα το Χ μπορεί να είναι το 2.

Ε: Γιατί ναν το 2;

M8: Είναι 2. Επειδή τούτα τα τρία βγαίνουν 3. [δείχνει την 4η στήλη στο πάνω μέρος] Και κάνω 2 Χ 6 που βγαίνει 12. Θα μπορεί να συνδεθεί το 1 και 2, που βγαίνει 12. Άμα τους βάλεις στην ίδια σειρά αυτούς τους δυο [τον αριθμό 1 και τον αριθμό 2] ας πούμε θα βγει 12. [δείχνει την 4η στήλη τους δυο κάτω αριθμούς] [M8, γρ. 35-46]

Επιπλέον, η Μ10 εστίασε στις δυο ακρινές στήλες, επιδιώκοντας να εντοπίσει κάποια σχέση ανάμεσα στους δυο ίδιους αριθμούς 16. Δεν μπόρεσε όμως να αντιληφθεί ότι οι αριθμοί σε όλες οι στήλες του σχήματος, πλην της μεσαίας, έχουν άθροισμα 16.

Ε: Χμ Ποιες άλλες ιδέες σου ήρθαν στο μυαλό;

Μ10: Ότι το 16 μπορεί να έχει κάποια σχέση με το άλλο 16. [Μ10, γρ. 44-45]

Όπως προαναφέρθηκε, εξαίρεση αποτέλεσε η περίπτωση της Μ7. Ακόμα και αφότου έλαβε την πρώτη βοήθεια από την ερευνήτρια, δεν κατόρθωσε να επικεντρωθεί σε οποιαδήποτε σχέση που υφέρπει πίσω από τους αριθμούς του σχήματος. Εγκλωβίστηκε στη μέθοδο της τυχαίας εκτέλεσης αριθμητικών πράξεων με τους αριθμούς του σχήματος.

Ε: Αυτοί οι δυο αριθμοί είναι και οι δυο 16 [δείχνει τους αριθμούς στις δυο ακρινές στήλες, δίνοντας την 1η βοήθεια]

Μ7: Χμ [παύση] Μπορεί να κάνω μια πρόσθεση και να βρω 16;

Ε: Τι να προσθέσεις;

Μ7: Να προσθέσω τους αριθμούς και το Χ να είναι ένας αριθμός ας πούμε.

4+7=11 11+___ = 16 Άρα είναι 5. [δεύτερη στήλη από αριστερά] [Μ7, γρ.53-59]

Μάλιστα, κατά την εκτέλεση των τυχαίων πράξεων, η Μ7 πρότεινε ως λύση και την ορθή απάντηση, από τύχη. Ωστόσο, τελικά την απέρριψε, αδυνατώντας να αντιληφθεί ότι αυτή είναι η ορθή απάντηση. Αυτή της η συμπεριφορά μπορεί να ερμηνευθεί από την ικανότητά της στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων ενόρασης. Η Μ7 ήταν η μόνη μαθήτρια της ομάδας με την πιο χαμηλή επίδοση στα τρία προβλήματα ενόρασης που κλήθηκαν να λύσουν κατά την επιλογή τους στη φάση των συνεντεύξεων.

Ε: Τι δοκιμάζεις τώρα;

M7: 31 1 6 1 2 [μεσαία στήλη] 4 5 11 12 14 . Μπορεί να είναι και 2. Όχι … Ναι 14. Μπορεί να είναι και 2.

Ε: Ποιο από τα δυο;

M7: Θα πω το 5

Ε: Γιατί το 5 και όχι το 2;

M7: Ένηξερω είπα να κρατήσω το 5.

Ε: Κρατάς το 5 για ποιο λόγο;

M7: Γιατί δε μπορώ να βρω κάτι άλλο. [M7, γρ.62-72]

Ένα επιπλέον μοτίβο που παρουσιάστηκε στην ομάδα μέτριου επιπέδου είναι η διερεύνηση πιο υψηλού επιπέδου σχέσεων, πέραν από τις πολλαπλασιαστικές και αθροιστικές σχέσεις ανάμεσα σε μεμονωμένους αριθμούς του σχήματος. Δυο μαθητές της ομάδας μέτριου επιπέδου, η M11 και ο M12, διερεύνησαν σφαιρικά τις σχέσεις ανάμεσα στις στήλες και τις διαγώνιους του σχήματος. Αυτό το μοτίβο δεν παρατηρήθηκε στην ομάδα χαμηλής ικανότητας, παρά μόνο στην περίπτωση της M4 μετά από τις δυο βοήθειες που έλαβε, όπως έχει περιγραφεί προηγουμένως.

Η M11 και ο M12 αναγνώρισαν την ύπαρξη σταθερού αθροίσματος σε δυο διαγώνιες γραμμές του σχήματος, χωρίς να έχουν λάβει οποιανδήποτε βοήθεια από την ερευνήτρια. Ούτε όμως αυτή η σχέση που εντόπισαν δεν τους άνοιξε τον δρόμο για να ξεκλειδώσουν τη λύση στο μαθηματικό πρόβλημα.

Ε: Ναι. Τι άλλο σκέφτεσαι;

M11: [σκέφτεται νοερά] Α! Ότι αυτά εδώ κάνουν 16.

Ε: Ποια;

M11: Το 3, το 8 και το 5 [δείχνει την πάνω αριστερά διαγώνιο]

Ε: Ναι.

M11: Και από εδώ το 3 και το 13 κάνουν 16. Αυτό και αυτό [δείχνει την πάνω δεξιά διαγώνιο] [M11, γρ. 31-37]

Βέβαια, στη συγκεκριμένη ομάδα οι μόνες περιπτώσεις μαθητών που ανακάλυψαν το σταθερό άθροισμα των αριθμών στις στήλες του σχήματος ήταν η M11 και ο M12 που έλαβαν δυο βοήθειες από την ερευνήτρια. Η μεν M11, παρά τις δυο βοήθειες που έλαβε και την καίρια σχέση που εντόπισε μεταξύ των στηλών του σχήματος, δεν μπόρεσε να βρει την ορθή απάντηση στο πρόβλημα αλλά πρότεινε λανθασμένες απαντήσεις.

Ε: Εάν μπορεί να σε βοηθήσει [δίνεται η 2η βοήθεια]

Μ11: [σκέφτεται νοερά] Ότι αυτό με το + κάνει 16 και αυτό με το + κάνει 16. Οπότε μπορεί αυτά να τα πιάσεις και αυτά να τα πιάσεις εδώ και το Χ να είναι το αποτέλεσμά τους.

Ε: Ποιο είναι το αποτέλεσμα δηλαδή;

Μ11: Δεν ξέρω αν σχετίζεται αλλά, το 0; 16-16=0; [Μ11, γρ. 157-167]

Μ11: Άμα τα προσθέσω αυτά όπως είπα κάνουν 16, και αυτά κάνουν 16, και αυτά κάνουν 16 και αυτά κάνουν 16. Έμειναν αυτά εδώ. Βασικά το μόνο που δεν κάνει 16 είναι αυτό το κεντρικό.

Ε: Άρα τελικά ποια είναι η απάντησή σου; Για ποιο είσαι πιο σίγουρη;

Μ11: [σκέφτεται νοερά] Το 16. [Μ11, γρ. 178-183]

Από την άλλη, η Μ12 κατόρθωσε, μετά από τη δεύτερη βοήθεια που της δόθηκε, να φθάσει στη λύση: «14, 16. Αυτό βγαίνει 16. [δείχνει την 2η κάθετη γραμμή από δεξιά]. Αυτό βγαίνει [σκέφτεται νοερά] Α! 16 πάλι. Χμ [παύση] 16! Να αρχίσω να προσθέτω κάθετα. 16, 16, 16 πάλι. Α! 16! Α! 5+8+1, άρα 2!» [Μ12, γρ.189-191]

Επιπλέον, όπως και οι μαθητές χαμηλού επιπέδου, οι μαθητές μέτριου επιπέδου δεν αναλογίστηκαν προϋπάρχουσες εμπειρίες στην προσπάθειά τους να εντοπίσουν σχέσεις στους αριθμούς του σχήματος, νοουμένου ότι κανείς δεν είχε λύσει ποτέ ξανά οποιοδήποτε παρόμοιο πρόβλημα [Μ7, γρ. 40, Μ8, γρ. 87, Μ9, γρ. 106, Μ10, γρ. 41, Μ11, γρ. 79 και Μ12, γρ. 221]. Η ελλιπής τριβή των μαθητών με τον συγκεκριμένο τύπο προβλημάτων τους εμπόδισε στο να διερευνήσουν επιτυχώς την προβληματική αυτή κατάσταση.

Κατά τη διαδικασία του εντοπισμού αριθμητικών σχέσεων, η ομάδα με μέτρια ικανότητα στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων ενόρασης έδειξαν μεγαλύτερη προθυμία να εξερευνήσουν κρυμμένες σχέσεις αφού φάνηκε να εναλλάσσουν τη σκέψη τους σε μεγαλύτερο βαθμό. Συγκεκριμένα, ο Μ8, ο Μ9 και η Μ10 προέβησαν σε μια εναλλαγή της στρατηγικής λύσης τους κατά το στάδιο της προετοιμασίας. Ταυτόχρονα, η Μ11 επιδόθηκε σε δυο εναλλαγές στρατηγικής, η Μ7 σε τρεις εναλλαγές ενώ η Μ12 σε πέντε εναλλαγές. Είναι όμως αξιοσημείωτο ότι και τα τρία αυτά παιδιά που προχώρησαν σε περισσότερες από μια εναλλαγές στον τρόπο σκέψης τους είναι τα μόνα της ομάδας αυτής που είχαν λάβει βοήθεια από την ερευνήτρια κατά τη συνέντευξη: η Μ7 είχε λάβει μια βοήθεια, ενώ οι μαθητές Μ11 και Μ12 έλαβαν δυο βοήθειες.

Μαθητές με Υψηλό Επίπεδο Ικανότητας Επίλυσης Μαθηματικών Προβλημάτων Ενόρασης. Σε αντίθεση με τις άλλες δυο ομάδες μαθητών, η ομάδα υψηλού επιπέδου δεν αντιμετώπισε καμία δυσκολία ως προς την αναγνώριση της προβληματικής κατάστασης. Αναφορικά με την κατανόηση του ζητούμενου του προβλήματος, παρατηρήθηκε το ίδιο μοτίβο που παρατηρήθηκε και στις άλλες δυο ομάδες (με εξαίρεση τον Μ1): όλοι οι μαθητές της ομάδας αντιλήφθηκαν ότι το πρόβλημα τους ζητούσε να υπολογίσουν τον άγνωστο αριθμό Χ.

Όσον αφορά στην κατανόηση των δεδομένων του προβλήματος, όλοι οι μαθητές συνειδητοποίησαν ότι οι αριθμοί του σχήματος διέπονται από μια μη εμφανή σχέση που θα πρέπει να ανακαλύψουν. Μάλιστα, σε όσους μαθητές ζητήθηκε να επαναδιατυπώσουν το πρόβλημα με δικά τους λόγια ανταποκρίθηκαν επιτυχώς. Ενδεικτικό είναι το ακόλουθο απόσπασμα από τη συνέντευξη της Μ13: «Συνδέονται με κάποιο τρόπο οι αριθμοί. Ας πούμε ή κάθετα ή διαγώνια. Με κάποιο τρόπο. Και πρέπει να βρεις το αποτέλεσμα ώστε να είναι ίδιο σε όλα». [Μ13, γρ. 59-60]

Η διαδικασία της πολλαπλής ανάγνωσης δεν εμφανίστηκε καθόλου στη συμπεριφορά των μαθητών υψηλού επιπέδου, ομοίως με τις άλλες δυο ομάδες μαθητών. Όλοι οι μαθητές ανέγνωσαν το πρόβλημα μία μόνο φορά προτού προχωρήσουν στη διαδικασία επίλυσής του. Αυτό έχει αποδοθεί στο γεγονός ότι οι κύριες πληροφορίες του προβλήματος δίνονται, κατά βάση, από το διάγραμμα παρά από το κείμενο.

Σε σχέση με τη συγκέντρωση, η διαδικασία εντοπισμού σχέσεων μεταξύ των αριθμών του σχήματος διέκρινε καθοριστικά την ομάδα υψηλού επιπέδου από την ομάδα μέτριου επιπέδου. Ενεργοποιήθηκε σε σημαντικά μεγαλύτερο βαθμό στην ομάδα υψηλού επιπέδου σε σύγκριση με τις άλλες δυο ομάδες. Εκτενέστερα, ανιχνεύθηκαν τρία διαφορετικά μοτίβα. Το πρώτο μοτίβο αφορούσε δυο περιπτώσεις μαθητών, η Μ17 και ο Μ18, που επιδόθηκαν αρχικά σε τυχαίες πράξεις με αριθμούς του σχήματος. Τα δυο αυτά παιδιά είναι τα μόνα που δεν διέθεταν καμία προϋπάρχουσα εμπειρία με παρόμοια προβλήματα. Η Μ17 πρότεινε να προσθέσει όλους τους αριθμούς του σχήματος, αδυνατώντας να επεκτείνει περαιτέρω τον τρόπο σκέψης της.

Μ17: Σκέφτομαι να τα προσθέσω; [ρωτά την ερευνήτρια]

Ε: Ποια;

Μ17: Να τα προσθέσω όλα μαζί; [ρωτά την ερευνήτρια]

Ε: Και μετά;

Μ17: Χμ ένηξερω [χαμογελά αμήχανα] [Μ17, γρ. 17-41]

Ο Μ18 εισηγήθηκε να προσθέσει συγκεκριμένους αριθμούς του σχήματος και μετά να διαιρέσει διά το πλήθος τους, χωρίς ωστόσο να υπάρχει σαφής λογική πίσω από αυτή του τη στρατηγική.

Μ18: Να προσθέσουμε αυτά εδώ, που κάνουν ένα σταυρό, και να τα διαιρέσουμε.

Ε: Με τι να τα διαιρέσεις;

Μ18: Τους αριθμούς να τους διαιρέσουμε με το 12.

Ε: Το 12 πού το βρήκες; Πώς το σκέφτηκες το 12;

Μ18: Μέτρησα τους αριθμούς, είδα πόσοι είναι και είναι 12.

Ε: Α! Ναι. Και γιατί το σκέφτηκες αυτό;

Μ18: Έτσι. [χαμογελά αμήχανα] [Μ18, γρ. 32-38]

Στην πορεία όμως και οι δυο αυτοί μαθητές κατάφεραν να αντιληφθούν τη σχέση του σταθερού αθροίσματος των αριθμών κάθε στήλης (εκτός από την κεντρική) χωρίς να έχουν λάβει καθόλου βοήθεια από την ερευνήτρια.

Μ17: Ναι αλλά ένηξερω αν θα μου βγει το Χ. [παύση] Ααα ναι! Ήβρα το!

Ε: Πες μου.

Μ17: Χμ! [επιφώνημα] Ότι όλα πρέπει να μας κάνουν 16!

Ε: Ποια όλα;

Μ17: 16 16. Όταν τα προσθέσω αυτά εδώ, το 5+7+4, το 8+2+1+1+4, πρέπει να μας κάνουν όλα 16. Οπόταν εννά τα προσθέσω αυτά εδώ, 6+1=7 7+2=9 9+2=11 11+3=14 και θα μετρήσω. Ένα λεπτό. Ήβρα 14. Και μετά για να πάει στο 16 θέλει 2. Οπόταν είναι 2. [Μ17, γρ. 50-57]

Μ18: Τάχα το 16 με το 16 είναι οι ίδιοι αριθμοί. Το 5+7+4 εδώ στην άκρη μας κάνουν 16. Το 13+1+2 στην άλλη άκρη μας κάνουν πάλι 16. Το 8+2+1+1 [παύση]. Όλα μας κάνουν 16. Άμα τα προσθέσεις όλα σε μια γραμμή θα βρίσκεις 16. Τάχα άμα τα προσθέσεις αυτά θα βρεις 16, άμα τα προσθέσεις αυτά θα βρεις 16, άμα τα προσθέσεις αυτά θα βρεις 16, άμα τα προσθέσεις αυτά θα βρεις 16. Και 16. Και εγώ τώρα πρέπει να βρω το Χ. 5 11 12 14. Το Χ είναι 2! [Μ18, γρ. 103-109]

Το δεύτερο μοτίβο που εμφανίστηκε αναφερόταν σε δυο περιπτώσεις παιδιών, ο Μ15 και η Μ16, οι οποίοι επιχείρησαν κατευθείαν να εντοπίσουν κάποιου είδους σχέση ανάμεσα σε μεμονωμένους αριθμούς του σχήματος, ώστε να φτάσουν στη λύση. Τα παιδιά αυτά είχαν ήδη εξασκηθεί με παρόμοια προβλήματα και αξιοποίησαν παραγωγικά την εμπειρία τους αυτή στη διαδικασία εντοπισμού σχέσεων. Για παράδειγμα, ο Μ15 εντόπισε ότι αθροίζοντας τους αριθμούς στην τρίτη στήλη από αριστερά προκύπτει ο πρώτος αριθμός της στήλης: 4+1+1+2=8. [Μ15, γρ. 45]. Ο Μ16 αναγνώρισε ότι αθροίζοντας τους αριθμούς 2 και 2 της πέμπτης στήλης από αριστερά προκύπτει ο αριθμός 4 που βρίσκεται από κάτω τους, ενώ αθροίζοντας τους αριθμούς 2 και 1 της τέταρτης και πέμπτης στήλης από αριστερά προκύπτει ο αριθμός 3 που βρίσκεται από πάνω [Μ16, γρ. 27-30]. Πέραν από σχέσεις ανάμεσα σε μεμονωμένους αριθμούς του σχήματος, αυτές οι δυο περιπτώσεις εστίασαν και σε πιο υψηλού επιπέδου σχέσεις, διερευνώντας σφαιρικά τις σχέσεις ανάμεσα στις γραμμές, τις στήλες και τις διαγώνιους του σχήματος.

Επίσης, και οι δυο αυτοί μαθητές διαπίστωσαν ακόμα μια σχέση μεταξύ των αριθμών του σχήματος: οι άκρες του σχήματος περιέχουν τον ίδιο ακριβώς αριθμό, το 16.

Μ15: Προσπαθώ να βρω πώς γίνονται τα 16 εδώ, γιατί είναι ίδιοι αριθμοί. [Μ15, γρ. 33]

Μ16: Μάλλον για να έχει τον ίδιο αριθμό εδώ στην άκρη, μάλλον δεν είμαι σίγουρη όμως, πρέπει να προσθέσεις κάποιους αριθμούς που είναι κοντά σε κάποιον άλλο. Μπορεί ας πούμε το αποτέλεσμα να είναι κάτι σχετικό με το 16. [Μ16, γρ. 56-59]

Τελικά, κατάφεραν, χωρίς καμία βοήθεια από την ερευνήτρια, να εντοπίσουν ότι όλες οι στήλες πλην της κεντρικής έχουν σταθερό άθροισμα. Ενδεικτικά δίνεται παράδειγμα από τη συνέντευξη του Μ15: «Ναι 7 8 9 [σκέφτεται νοερά] Εδώ πάλι κάνει 16. Και εδώ κάνει 16, και εδώ. Άρα είναι το 2. Όλα τα κάθετα κάνουν 16». [Μ15, γρ. 70-71]

Το τρίτο μοτίβο που αναδύθηκε από τα δεδομένα σχετιζόταν με την περίπτωση της Μ13 και του Μ14. Τα συγκεκριμένα παιδιά ήταν πεπειραμένοι λύτες προβλημάτων ανάλογου είδους και μάλιστα είχαν συγκεντρώσει την πιο ψηλή επίδοση στα τρία προβλήματα ενόρασης που τους είχαν δοθεί προς επίλυση πριν από τις συνεντεύξεις. Έτσι, αμέσως μόλις διάβασαν το δοσμένο πρόβλημα και χωρίς καθόλου βοήθεια, κατόρθωσαν να ανακαλύψουν τη σχέση-κλειδί που θα τους οδηγούσε στην ορθή απάντηση, δηλαδή ότι όλες οι στήλες του σχήματος έχουν σταθερό άθροισμα, με εξαίρεση τη μεσαία στήλη.

Σε αντίθεση με τις άλλες δυο ομάδες μαθητών, η ομάδα υψηλού επιπέδου ήταν η μόνη που η πλειοψηφία των παιδιών επιστράτευσαν αποτελεσματικά προϋπάρχουσες εμπειρίες τους προκειμένου να εντοπίσουν αριθμητικές σχέσεις εντός του δοσμένου σχήματος. Συγκεκριμένα, τέσσερα από τα έξι παιδιά της ομάδας (Μ13, Μ14, Μ15 και Μ16) είχαν στο παρελθόν εξασκηθεί σε παρόμοιου τύπου μαθηματικά προβλήματα στο οικογενειακό τους περιβάλλον [Μ13, γρ. 98, Μ14, γρ. 34, Μ15, γρ. 94 και Μ16, γρ.63]. Επίσης, η Μ13, ο Μ14, ο Μ15 έχουν συμμετάσχει σε μαθηματικούς διαγωνισμούς και συγκεκριμένα ολυμπιάδες Μαθηματικών [Μ13, γρ. 62 και Μ15, γρ. 86-87] και σε επαρχιακούς, παγκύπριους και παγκόσμιους διαγωνισμούς Μαθηματικών [Μ14, γρ. 36-37], όπου έλυσαν παρόμοια προβλήματα.

Ως εκ τούτου, τα τέσσερα αυτά παιδιά προσπάθησαν στοχευμένα να βρουν ομοιότητες και διαφορές με προβλήματα που έλυσαν στο παρελθόν. Για παράδειγμα, ανέφεραν ότι και στα άλλα παρόμοια προβλήματα η διάταξη των αριθμών ήταν σε σχήμα τετραγώνου ή τριγώνου [Μ13, γρ. 66 και Μ14, γρ. 44] αντί ρόμβου, έμπλεκαν είτε άθροισμα [Μ14, γρ. 44-46] είτε πολλαπλασιασμό [Μ15, γρ. 110]. Επίσης, και τα άλλα προβλήματα ζητούσαν από τους μαθητές να υπολογίσουν την τιμή μιας άγνωστης μεταβλητής [Μ15, γρ. 108]. Η πείρα τους με παρόμοια προβλήματα τους διευκόλυνε στη διαδικασία εντοπισμού σχέσεων εντός του σχήματος. Ο Μ14 σημείωσε: «Ήξερα τι πρέπει να κοιτάξω για να βρω τη σχέση» [Μ14, γρ.51], ενώ η Μ16 ανέφερε ότι αξιοποίησε τη στρατηγική λύσης που εφάρμοζε και σε άλλα προβλήματα: «Συνδυάζω τους αριθμούς και δοκιμάζω να δω αν έχουν κάτι κοινό αυτοί που είναι κοντά κοντά» [Μ16, γρ.122-123].

Εστιάζοντας στις εναλλαγές που έκαναν οι μαθητές στις στρατηγικές λύσης τους προκύπτουν και πάλι τρία διαφορετικά μοτίβα. Οι μεν Μ17 και Μ18 προέβησαν σε μια εναλλαγή της στρατηγικής λύσης τους κατά το στάδιο της προετοιμασίας. Οι Μ15 και Μ16 ενάλλαξαν τρεις και δυο φορές αντίστοιχα τον τρόπο σκέψης τους μέχρι να οδηγηθούν εν τέλει στην ορθή απάντηση. Τέλος, στην περίπτωση της Μ13 και του Μ14, δεν χρειάστηκε να προχωρήσουν σε καμία εναλλαγή του τρόπου σκέψης τους μέχρι να εντοπίσουν τη σχέση των αριθμών που θα τους οδηγούσε στην ορθή λύση.

Επώαση

Μαθητές με Χαμηλό Επίπεδο Ικανότητας Επίλυσης Μαθηματικών Προβλημάτων Ενόρασης. Το στάδιο αυτό εμφανίστηκε με το εξής μοτίβο: όλοι οι μαθητές της ομάδας χαμηλής ικανότητας βίωσαν σημαντική δυσκολία κατά τη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος. Η δυσκολία τους εκδηλώθηκε με ποικίλες συμπεριφορές. Πρωταρχικά, οι πλείστοι εξέφρασαν την αβεβαιότητά τους για την αριθμητική πράξη που πρέπει να εκτελέσουν για να καταλήξουν στην ορθή απάντηση, όπως διαφαίνεται στα ακόλουθα αποσπάσματα. Μάλιστα, ο Μ3 ισχυρίστηκε ότι τα δεδομένα του προβλήματος ήταν ελλιπή, καθιστώντας αδύνατο τον υπολογισμό της τιμής της μεταβλητής Χ.

Μ2: Χμ. Θα πρέπει να [παύση]. Είναι με φορές ή με συν; [Μ2, γρ.36]

Μ3: [Δεν καταλαβαίνω] το πώς θα το βρω. Αφού έχει διάφορους αριθμούς. [Μ3, γρ. 49]. Δεν θα έπρεπε να λέει ας πούμε ότι ο συνολικός αριθμός που βγαίνει είναι ας πούμε 100 και να ψάξω να βρω ποιο είναι αυτό; [Μ3, γρ. 39-40]

Μ5: Στην αρχή όταν το διάβαζες απλώς, το έβλεπες και δεν ήξερες από πού να αρχίσεις. [Μ5, γρ. 75-76]

Συγχρόνως, δυο περιπτώσεις μαθητών, ο Μ2 και η Μ4, αδυνατώντας να βρουν λύση στο πρόβλημα, αποδέχτηκαν τις δυο βοήθειες που τους προσφέρθηκαν από την ερευνήτρια [Μ2, γρ. 73 και Μ4, γρ. 80-84]. Όμως, ακόμα και έχοντας λάβει τις δυο βοήθειες, δυσκολεύονταν να αντιληφθούν πώς να την αξιοποιήσουν αποτελεσματικά και ποια πράξη να εκτελέσουν ώστε να οδηγηθούν στην ορθή απάντηση.

Ε: [Της δίνεται η πρώτη βοήθεια από την ερευνήτρια].

Μ4: Με συν;

Ε: Δηλαδή;

Μ4: 16+16 [παύση]

Ε: Και ποια είναι η απάντηση;

Μ4: [σκέφτεται] Δεν ξέρω. [Μ4, γρ. 92-94, 99-100]

Ε: Λοιπόν, θα σου κυκλώσω δυο αριθμούς και θέλω να μου πεις αν μπορούν να σε βοηθήσουν αυτοί οι δυο αριθμοί να βρεις την απάντηση. [δίνεται η 1η βοήθεια]

Μ2: Μπορούν.

Ε: Δηλαδή;

Μ2: Χμ να τα προσθέσω; [παύση] Χμ [αναστενάζει] Μπορούν να με βοηθήσουν αλλά [παύση] ένηξερω πώς. [Μ2, γρ. 76-82]

Εξαίρεση στα πιο πάνω μοτίβα ήταν το εξής: Οι μαθητές Μ1 και Μ2 ήταν οι μόνοι που παραιτήθηκαν εντελώς από την προσπάθεια λύσης του προβλήματος χωρίς να προτείνουν τελικά καμία λύση στο πρόβλημα. Ειδικότερα, ο Μ1 έστρεφε διαρκώς το βλέμμα του προς τις σημειώσεις της ερευνήτριας θεωρώντας ότι θα εντόπιζε εκεί τη λύση στο πρόβλημα [Μ1, γρ. 74, 79]. Έπειτα, δήλωσε ότι επιθυμεί να σταματήσει την προσπάθεια [Μ1, γρ. 85, 91], απορρίπτοντας τη βοήθεια και τον επιπλέον χρόνο που του προσφέρθηκε από την ερευνήτρια [Μ1, γρ. 87, 89].

Συγχρόνως, ο μαθητής Μ2 ακόμα και μετά που πήρε δυο βοήθειες από την ερευνήτρια ζήτησε να διακόψει την προσπάθεια επίλυσης, δηλώνοντας «Δε θέλω να το κάνω αυτό το τεστ [αφήνει το μολύβι κάτω] [Μ2, γρ. 82]. Αυτή τους η συμπεριφορά ενδεχομένως να οφείλεται στις χαμηλές πεποιθήσεις επάρκειας των μαθητών αυτών στα Μαθηματικά. Οι μαθητές αυτοί, καλούμενοι να δηλώσουν πόσο καλοί πιστεύουν ότι είναι στα Μαθηματικά, απάντησαν ότι αισθάνονται «λίγο καλοί στα μαθηματικά». Συνεπώς, διαφαίνεται ότι οι πεποιθήσεις επάρκειας των μαθητών διαδραματίζουν καθοριστικό ρόλο ώστε οι μαθητές να μεταβούν από το στάδιο της επώασης στο στάδιο του φωτισμού.

Μαθητές με Μέτριο Επίπεδο Ικανότητας Επίλυσης Μαθηματικών Προβλημάτων Ενόρασης. Το στάδιο της επώασης στην ομάδα μέτριας ικανότητας δε διαφοροποιήθηκε ιδιαίτερα από το αντίστοιχο στάδιο στην ομάδα χαμηλής ικανότητας. Και σε αυτήν την ομάδα, οι μαθητές εξέφρασαν δυσκολία στην προσπάθειά τους να προσεγγίσουν τη λύση του προβλήματος. Πρώτον, τρεις περιπτώσεις μαθητών, η Μ7, η Μ11 και ο Μ12, δέχτηκαν να πάρουν βοήθεια από την ερευνήτρια προκειμένου να μπορέσουν να βρουν κάποια λύση στο πρόβλημα. Η Μ7 έλαβε μια βοήθεια, ενώ η Μ11 και ο Μ12 πήραν δυο βοήθειες [Μ7, γρ. 52, Μ11, γρ. 152 και Μ12, γρ. 121]. Ακόμα και μετά τη βοήθεια όμως, δεν μπορούσαν να συλλάβουν με ποιο τρόπο η βοήθεια που τους δόθηκε θα μπορούσε να τους διευκολύνει να βρουν τη λύση. Ήταν αβέβαιοι για την ακριβή πράξη που θα έπρεπε να εκτελέσουν.

M7: Χμ [παύση] Μπορεί να κάνω μια πρόσθεση και να βρω 16; [M7, γρ. 55]

M11: Μπορεί να είναι το αποτέλεσμα [το 16]; Δεν ξέρω. [σκέφτεται νοερά] Μπορεί να πρέπει να τα ενώσω [το 16 και το 16] και να βρω 32; Όχι. [M11, γρ. 155-156]. Δεν ξέρω αν πρέπει να κάνω – ή +. [M11, γρ. 192-193]

M12: Αυτό εδώ πώς θα το βρω; [χαμογελά αμήχανα] [δείχνει τον αριθμό Χ, στην 4η διαγώνιο πάνω δεξιά] [M12, γρ. 140-141]

Η μόνη διαφορά της ομάδας μέτριας ικανότητας ήταν ότι κανείς από τους μαθητές δεν παραιτήθηκε από την προσπάθεια επίλυσης του μαθηματικού προβλήματος, σε αντίθεση με την ομάδα χαμηλής ικανότητας όπου δυο περιπτώσεις μαθητών, ο M1 και ο M2, αρνήθηκαν να συνεχίσουν τη διαδικασία λύσης. Όλοι οι μαθητές της ομάδας μέτριας ικανότητας επεδίωξαν να προτείνουν κάποια λύση στο μαθηματικό πρόβλημα.

Μαθητές με Υψηλό Επίπεδο Ικανότητας Επίλυσης Μαθηματικών Προβλημάτων Ενόρασης. Το στάδιο της επώασης στην ομάδα υψηλής ικανότητας παρουσίασε κάποιες ομοιότητες αλλά και διαφορές με το αντίστοιχο στάδιο στην ομάδα μέτριας ικανότητας. Τέσσερις από τις έξι περιπτώσεις μαθητών φάνηκε να αντιμετώπισαν δυσκολία κατά τη διαδικασία λύσης του προβλήματος. Η M15 σημείωσε: «Στην αρχή με δυσκόλεψε» [M15, γρ. 117] και «ήξερα ότι μπορεί να μην βρω τη λύση» [M15, γρ. 138]. Η M16 ανέφερε: «Μπορεί ίσως να χωρίζεται σε ένα σταυρό και όταν χωριστεί στον σταυρό, μπορεί αυτά εδώ να είναι 16 [δείχνει στο σχήμα]. Ή μπορεί να έχει κάποια σειρά; Ακόμα δεν κατάλαβα [με απογοήτευση]» [M16, γρ. 38-40]. Η M17 επεσήμανε: «Έτσι όπως το είδα στην αρχή, σκεφτόμουν, σκεφτόμουν. Βασικά δεν το σκεφτόμουν κάθετα, το σκεφτόμουν οριζόντια. Αλλά δεν μου έβγαινε ποτέ κάτι. Σκεφτόμουν να τα προσθέσω αλλά δεν μου έβγαινε πάλι. Και μετά το βρήκα κάθετα» [M17, γρ. 86-88].

Επιπλέον, η M17 και ο M18 δήλωσαν την αβεβαιότητά τους για την πράξη που θα έπρεπε να εκτελούσαν για να οδηγηθούν στη λύση του προβλήματος.

M17: Να τα προσθέσω όλα μαζί; [ρωτά την ερευνήτρια]

Ε: Και μετά;

M17: Χμ δεν ξέρω [χαμογελά αμήχανα]. Δεν μπορώ να σκεφτώ κάτι. [M17, γρ. 39-43]

Μ18: Δεν ξέρω τι πράξη να κάνω. [Μ18, γρ. 30]. Με σύγχυσε [Μ18, γρ. 55].

Φυσικά, η δυσκολία της ομάδας αυτής κατά τη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος δεν ήταν στον ίδιο βαθμό όσο της ομάδας μέτριας ικανότητας. Σε αντίθεση με την ομάδα μέτριας ικανότητας, σε καμία περίπτωση η ερευνήτρια δεν έκρινε αναγκαίο να παραχωρήσει βοήθεια στον μαθητή. Όλοι οι μαθητές παρέμειναν δεσμευμένοι στο πρόβλημα και επεδίωξαν χωρίς καμία βοήθεια να βρουν κάποια απάντηση σε αυτό.

Όμως, ανιχνεύθηκε η ακόλουθη εξαίρεση στην ομάδα υψηλής ικανότητας. Η Μ13 και ο Μ14 ήταν οι μόνοι μαθητές που δε διήλθαν καθόλου μέσα από το στάδιο της επώασης κατά τη διαδικασία λύσης του προβλήματος. Με την πρώτη ανάγνωση, μετέβηκαν κατευθείαν από το στάδιο της προετοιμασίας στο στάδιο του φωτισμού, χωρίς να αντιμετωπίσουν οποιαδήποτε δυσκολία ή να βιώσουν κάποιο αίσθημα αβεβαιότητας. Αυτή η απόκλιση μπορεί να αποδοθεί στην ικανότητα επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων ενόρασης. Τα δυο αυτά παιδιά είχαν κατακτήσει την πιο ψηλή επίδοση στα τρία μαθηματικά προβλήματα ενόρασης που τους είχαν δοθεί προς επίλυση κατά την επιλογή του δείγματος των συνεντεύξεων. Επομένως, στην περίπτωση μαθητών με υψηλή ικανότητα λύσης προβλήματος, το στάδιο της επώασης ίσως να μην εκδηλωθεί καθόλου.

Φωτισμός

Μαθητές με Χαμηλό Επίπεδο Ικανότητας Επίλυσης Μαθηματικών Προβλημάτων Ενόρασης. Κατά το στάδιο του φωτισμού εντοπίστηκαν μια σειρά από μοτίβα στις συνεντεύξεις των μαθητών με χαμηλή ικανότητα στην λύση προβλημάτων ενόρασης. Συγκεκριμένα, φάνηκε ότι η συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών, δηλαδή ο Μ3, η Μ4, η Μ5 και η Μ6, κατέληξαν σε μια εσφαλμένη λύση στο πρόβλημα, ενώ ο Μ1 και ο Μ2 δεν εισηγήθηκαν οποιαδήποτε απάντηση.

Όσον αφορά στα συναισθήματα που βιώσαν κατά την εύρεση της απάντησής τους, προέκυψε το μοτίβο ότι όλοι οι μαθητές της ομάδας, πλην της Μ6, δεν έκαναν αναφορά σε οποιοδήποτε συναίσθημα. Εντύπωση αφήνει η δήλωση του Μ3: «Δεν ένιωσα κάτι, αφού Μαθηματικά είναι» [Μ3, γρ. 92]. Μικρή απόκλιση παρουσίασε η περίπτωση της Μ6, η οποία ανέφερε το εξής: «ένιωσα λίγη χαρά γιατί μπορεί να ήταν σωστό, μπορεί και όχι» [Μ6, γρ. 75], εκφράζοντας έτσι δειλά ένα θετικό συναίσθημα. Αυτή η απόκλιση μπορεί να επεξηγηθεί από την εξάσκηση που δήλωσε ότι έκανε στο παρελθόν με τη βοήθεια του παππού της που ήταν Μαθηματικός [Μ6, γρ. 78]. Κατ' επέκταση, οι λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών δεν οδηγούν σε έντονες συναισθηματικά εμπειρίες ενόρασης.

Σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο εμφανίστηκαν οι απαντήσεις των μαθητών, ο Μ3 και η Μ4 ισχυρίζονται ότι η απάντηση δεν εμφανίστηκε στο μυαλό τους ξαφνικά αλλά καθώς σκέφτονταν [Μ3, γρ. 86, Μ4, γρ. 158], ενώ οι μαθήτριες Μ5 και Μ6 δήλωσαν ότι εμφανίστηκε ξαφνικά [Μ5, γρ. 83, Μ6, γρ. 71]. Ωστόσο, από την εξωτερική παρατήρηση της συμπεριφοράς των μαθητών φάνηκε ότι κανένας από τους μαθητές της ομάδας αυτής δεν είχε βιώσει εμπειρία «Aha!» κατά την εύρεση της απάντησής τους. Ούτε σε γλωσσικό επίπεδο (υπό τη μορφή κάποιου χαρακτηριστικού επιφωνήματος), ούτε σε παραγλωσσικό επίπεδο (επιτονισμός φωνής, ένταση φωνής) αλλά ούτε και σε εξωγλωσσικό επίπεδο (έκφραση προσώπου, βλέμμα, μορφασμοί, χειρονομίες) δεν υπήρξε οποιαδήποτε ένδειξη μιας τέτοιας εμπειρίας από κάποιον μαθητή της ομάδας. Συνδυάζοντας την οπτική των συμμετεχόντων με την ερευνητική οπτική, συνάγεται το συμπέρασμα ότι η Μ5 και η Μ6 ίσως να βίωσαν μια εμπειρία «Aha!», η οποία όμως να μην ήταν τόσο έντονη και ξαφνική που να καταστεί αναγνωρίσιμη από την ερευνήτρια. Επομένως, όταν το άτομο καταλήγει σε μια λανθασμένη απάντηση κάποτε μπορεί να μη βιώνει εμπειρία ενόρασης, αλλά κάποτε μπορεί να βιώνει πιο ήπιες εμπειρίες ενόρασης.

Τέλος, ο βαθμός βεβαιότητας των μαθητών για την ορθότητα των απαντήσεών τους ήταν περιορισμένος. Ο Μ3 και η Μ5 δεν ένιωθαν βέβαιοι για την απάντησή τους [Μ3, γρ. 94 και Μ5, γρ. 137]. Διστακτική ήταν και η Μ6, που δήλωνε ότι δεν είναι αρκετά σίγουρη για την ορθότητα της απάντησής της [Μ6, γρ. 47]. Έτσι, μαθητές που προτείνουν λανθασμένες απαντήσεις δεν αισθάνονται αυτοπεποίθηση για τις λύσεις τους.

Η μόνη περίπτωση που δήλωσε σταθερά ότι είναι βέβαιη για την απάντησή της ήταν η Μ4 [Μ4, γρ. 153]. Αυτό ίσως να οφείλεται στο ότι η Μ4 ήταν η μόνη μαθήτρια της ομάδας αυτής που έλαβε δυο βοήθειες από την ερευνήτρια και κατόρθωσε να προτείνει κάποια λύση. Ενδέχεται η παραχώρηση βοήθειας από την ερευνήτρια να της παρείχε κάποια περισσότερη αυτοπεποίθηση για την ορθότητα της λύσης.

Μαθητές με Μέτριο Επίπεδο Ικανότητας Επίλυσης Μαθηματικών Προβλημάτων Ενόρασης. Ανάλογα μοτίβα με την ομάδα χαμηλής ικανότητας ανιχνεύθηκαν και στην ομάδα μέτριας ικανότητας. Πιο συγκεκριμένα, όλοι οι μαθητές εκτός από τη Μ10 και τον Μ12 δεν βρήκαν την ορθή απάντηση του προβλήματος. Μάλιστα, η Μ7 και η Μ11 κατέληξαν σε λανθασμένη απάντηση, έχοντας λάβει και καθοδήγηση από την ερευνήτρια. Εξαίρεση αποτέλεσε ο Μ12 και η Μ10. Ο Μ12 μπόρεσε να βρει την ορθή απάντηση αφότου έλαβε δυο βοήθειες από την ερευνήτρια. Από την άλλη, η Μ10 κατέληξε στην ορθή λύση χωρίς να λάβει οποιανδήποτε βοήθεια, όμως τα λεγόμενά της αναδεικνύουν ότι την βρήκε κάπως τυχαία. Κατέληξε στην ορθή απάντηση επειδή επικέντρωσε την προσοχή της στον κοινό αριθμό 16 στις άκρες του σχήματος και όχι επειδή εντόπισε τα σταθερά αθροίσματα των αριθμών σε κάθε στήλη. Ανέφερε αυτολεξεί τα εξής: «2, γιατί σκέφτηκα ότι πρέπει να βγει 16. Επειδή έχει 16 στις δυο άκρες του σχήματος. Και ίσως πρέπει τα αποτελέσματα να μας βγουν 16 γιατί δεν έχει άλλους αριθμούς πάνω ή κάτω του 16 για να προσθέσεις» [Μ10, γρ. 66-68].

Από πλευράς συναισθημάτων, κανένας δεν έκανε νύξη σε κάποιο θετικό συναίσθημα κατά την εύρεση της λύσης στο πρόβλημα. Για παράδειγμα, ο Μ9 ανέφερε:

> Μ9: Πρώτα απ' όλα δεν ξέρω αν το βρήκα. Άρα δεν θα νιώσω κάτι. Ούτε μετά που θα βρω, γιατί είναι ένα πρόβλημα. Μπορεί να χαρείς λίγο, έτσι απλώς επειδή το βρήκες αλλά όχι τόσο πολύ που θα κρατήσει μέρες. Και αν δεν το βρήκα εντάξει, δεν είναι κάτι. [Μ9, γρ. 123-125]

Εξαίρεση συνιστά η περίπτωση του Μ8, ο οποίος έκανε αναφορά σε αισθήματα αυτοπεποίθησης. Αν και η απάντηση που έδωσε για το πρόβλημα ήταν λανθασμένη, τόνισε ότι ένιωσε «πιο δυνατός». [Μ8, γρ. 127]. «Ένιωσα ότι μπορώ να κάνω και άλλα προβλήματα όπως αυτό που θα με δυσκολέψουν το ίδιο και ότι άμα ξέρω να τα κάνω αυτά θα μπορώ να φτάσω πιο ψηλά. [Μ8, γρ. 123-124]. Άρα, στις πλείστες περιπτώσεις οι λανθασμένες απαντήσεις δε γεννούν έντονα θετικά συναισθήματα στα άτομα.

Εστιάζοντας στον τρόπο εμφάνισης των απαντήσεων των μαθητών, όλοι οι μαθητές με εξαίρεση τον Μ9 διατείνονταν ότι η απάντησή τους δεν ήρθε ξαφνικά στο μυαλό τους. «Ήρθε μετά που το είδα λίγο [το πρόβλημα]» [Μ11, γρ. 97], «δεν ήταν ξαφνικά, αλλά μετά από σκέψη» [Μ10, γρ. 88], «σκεφτόμουν διάφορα και μετά» [Μ8, γρ. 181] είναι μερικές ενδεικτικές δηλώσεις που αναδεικνύουν το εν λόγω μοτίβο. Μόνο ο Μ9 υποστηρίζει ότι η απάντηση του ήρθε στο μυαλό ξαφνικά [Μ9, γρ. 119]. Όμως, σε κανέναν από τους μαθητές της ομάδας δεν παρατηρήθηκαν ενδείξεις στα γλωσσικά, τα παραγλωσσικά και τα εξωγλωσσικά στοιχεία της επικοινωνίας τους που να μαρτυρούν ότι βίωσαν μια εμπειρία «Aha!» κατά την εύρεση της απάντησής τους. Αυτό συνεπάγεται ότι τις πλείστες φορές οι λανθασμένες απαντήσεις δεν κάνουν ξαφνική εμφάνιση. Όμως, ορισμένες φορές μπορεί να εμφανιστούν ξαφνικά χωρίς να είναι έκδηλες σε έναν εξωτερικό παρατηρητή διότι δε γεννούν έντονα θετικά συναισθήματα.

Κλείνοντας, οι μαθητές της ομάδας αυτής εξέφρασαν την αβεβαιότητά τους για την ορθότητα των απαντήσεών τους [Μ9, γρ. 78, Μ11, γρ. 101, Μ12, γρ. 105]. «Ακόμα δε νιώθω σίγουρη ότι το βρήκα, γιατί βρήκα δυο διαφορετικούς αριθμούς» ανέφερε η Μ7 [Μ7, γρ. 87, 93]. Ακόμα και η Μ10 που κατέληξε σε ορθή λύση, δήλωσε ότι νιώθει αμήχανα γιατί δεν είναι πολύ σίγουρη [Μ10, γρ. 94-96]. Η Μ11 ήταν τόσο αβέβαιη για την ορθότητα της απάντησής της που μέχρι και το τέλος της συνέντευξης πρότεινε διαφορετικές απαντήσεις, αδυνατώντας να καταλήξει σε μια οριστική απάντηση, όπως αποτυπώνεται και στο ακόλουθο απόσπασμα.

Μ11: Δεν ξέρω. Είπα 16, το 1 και το 0.

Ε: Η τιμή του Χ;

Μ11: Ναι.

Ε: Άρα είσαι μεταξύ αυτών των απαντήσεων;

Μ11: Ναι. [Μ11, γρ. 169-173]

Μπορεί να είναι το αποτέλεσμα [το 16]; Δεν ξέρω. [σκέφτεται νοερά] Μπορεί να πρέπει να τα ενώσω [το 16 και το 16] και να βρω 32; Όχι.» [Μ11, γρ. 155-156].

Δεν ξέρω αν πρέπει να κάνω – ή +. [Μ11, γρ. 192-193]

Νομίζω κυρία είναι το 0. [Μ11, γρ. 205]

Μάλιστα, παρουσιάστηκε και το ακόλουθο μοτίβο. Οι μαθητές ισχυρίζονταν ότι θα ένιωθαν βέβαιοι για τις απαντήσεις τους μόνο όταν τους δινόταν η ορθή απάντηση, φανερώνοντας την ανάγκη τους για επικύρωση της γνώσης από τον εκπαιδευτικό.

Μ9: Όταν θα έρθει το αποτέλεσμα. [Μ9, γρ. 128]

Μ11: Όταν ας πούμε, δεν ξέρω όταν το είχαμε για σπίτι ας πούμε στο σχολείο. Και να το ελέγχαμε το πρωί στην τάξη. Για να δω τι έκανα λάθος. [Μ11, γρ. 108-109]

Η μόνη περίπτωση όπου εκφράστηκε βεβαιότητα ήταν αυτή του Μ8 [Μ8, γρ. 79], παρά τη λανθασμένη απάντηση που είχε δώσει. Αυτή του η βεβαιότητα μπορεί να πηγάζει από τις υψηλές πεποιθήσεις επάρκειάς που έχει για τα μαθηματικά, αφού καλούμενος να δηλώσει πόσο καλός πιστεύει ότι είναι στα Μαθηματικά, δήλωσε ότι είναι «πολύ καλός». Συνοπτικά, συνήθως η λανθασμένη απάντηση οδηγεί το άτομο σε αίσθημα αβεβαιότητας, εκτός αν το άτομο έχει υψηλές πεποιθήσεις επάρκειας στο γνωστικό αντικείμενο.

Μαθητές με Υψηλό Επίπεδο Ικανότητας Επίλυσης Μαθηματικών Προβλημάτων Ενόρασης. Το στάδιο του φωτισμού διαφοροποίησε σημαντικά την ομάδα υψηλού επιπέδου από τις άλλες δυο ομάδες μαθητών. Πρωτίστως, σε αντίθεση με τους μαθητές των άλλων ομάδων, στην ομάδα υψηλού επιπέδου όλοι οι μαθητές έφτασαν στην ορθή απάντηση. Μάλιστα, η μαθήτρια Μ13 και ο μαθητής Μ14 βρήκαν την ορθή απάντηση αμέσως μόλις ανέγνωσαν για μια μόνο φορά το πρόβλημα.

Όσον αφορά στη συναισθηματική πτυχή του σταδίου του φωτισμού, κατέστη ορατό το ακόλουθο μοτίβο: η πλειοψηφία των μαθητών ανέφερε ξεκάθαρα ότι αισθάνθηκαν θετικά συναισθήματα, και συγκεκριμένα συναισθήματα χαράς και ικανοποίησης, όταν κατόρθωσαν να βρουν τη λύση. Αισθάνθηκα «καλά διότι αν βρεις τη λύση σε ένα πρόβλημα είναι κάτι θετικό [χαμογελά]» [Μ15, γρ. 134], «τώρα είμαι ευχαριστημένη [γελά]» [Μ16, γρ. 131], «ένιωσα χαρά [χαμογελά]» [Μ17, γρ. 83], αισθάνθηκα «έτσι ικανοποιημένος» [Μ18, γρ. 124] είναι οι δηλώσεις που το αναδεικνύουν. Χαρακτηριστική είναι επίσης η αντίδραση του Μ18 κατά την εύρεση της λύσης, ο οποίος δεν μπορεί να κρύψει τον ενθουσιασμό του: «Νομίζω ήβρα ποια σχέση έχουν! [δυνατά και με ενθουσιασμό] Ήβρα! [χαμογελά]» [Μ18, γρ. 102-103].

Μοναδική εξαίρεση στο προαναφερθέν μοτίβο ήταν η περίπτωση της Μ13 και του Μ14. Στους μαθητές αυτούς η εύρεση της λύσης δεν συνοδεύτηκε από κανένα απολύτως συναίσθημα, όπως απηχούν και οι δηλώσεις τους. Η απουσία οποιουδήποτε συναισθήματος ίσως να απορρέει από την εξοικείωση που έχουν οι μαθητές αυτοί με παρόμοιας φύσεως μαθηματικά προβλήματα λόγω της εξάσκησης που έτυχαν στο σπίτι [Μ13, γρ. 98 και Μ14, γρ. 34] και τα συμμετοχής τους σε μαθηματικούς διαγωνισμούς [Μ13, γρ. 62 και Μ14, γρ. 36-37].

> Μ13: Χμ [χαμογελά] Τίποτε δε νιώθω βασικά [παύση]Βρίσκω το και ύστερα πάω στο επόμενο πρόβλημα. [Μ13, γρ. 77-78]
>
> Μ14: Ότι ήταν λίγο εύκολο το πρόβλημα. Δεν ένιωσα κάτι. [Μ14, γρ. 66]

Καταληκτικά, στις πλείστες περιπτώσεις οι ορθές απαντήσεις δημιουργούν έντονα θετικά συναισθήματα στα άτομα. Σε κάποιες όμως περιπτώσεις, όπου το άτομο είναι εντελώς εξοικειωμένο με ανάλογα προβλήματα, οι ορθές απαντήσεις μπορεί να μην προκαλούν καμία συναισθηματική αντίδραση στο άτομο.

Αναφορικά με τον τρόπο που εμφανίστηκε η απάντηση στο μυαλό κάθε μαθητή της ομάδας αυτής, ήταν εύκολα παρατηρήσιμο από την ερευνήτρια που λάμβανε τις συνεντεύξεις ότι η ορθή απάντηση εμφανίστηκε ξαφνικά στο μυαλό τους. Σε γλωσσικό επίπεδο, η αναπαράσταση που είχαν για το πρόβλημα άλλαξε απότομα. Σε γλωσσικό και παραγλωσσικό επίπεδο, κατά τη στιγμή του εντοπισμού της λύσης όλοι οι μαθητές φώναξαν δυνατά με ένα επιφώνημα, που προσιδίαζε με το χαρακτηριστικό «Aha!» [Μ13, γρ. 24, Μ14, γρ. 25, Μ15, γρ. 58, Μ16, γρ. 101, Μ17, γρ. 50, Μ18, γρ. 102]: «Χμ! Α! [επιφώνημα] Το Χ είναι 2» [Μ15, γρ. 58], «Ααα ναι! Ήβρα το! Χμ! [επιφώνημα] Ότι όλα πρέπει να μας κάνουν 16!» [Μ17, γρ. 50-52]. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσίασε η αντίδραση του Μ18, όπου η απότομη εύρεση της λύσης εκφράστηκε και σε εξωγλωσσικό επίπεδο, με το βλέμμα και την έκφραση του προσώπου του:

> Μ18: Μισό λεπτό [σκέφτεται νοερά και ξαφνικά γουρλώνει τα μάτια]. Νομίζω ήβρα ποια σχέση έχουν! [δυνατά και με ενθουσιασμό] Ήβρα! [χαμογελά] Τάχα το 16 με το 16 είναι οι ίδιοι αριθμοί. Το 5+7+4 εδώ στην άκρη μας κάνουν 16. Το 13+1+2 στην άλλη άκρη μας κάνουν πάλι 16. Το 8+2+1+1 [παύση]. Όλα μας κάνουν 16! [Μ18, γρ. 102-105]

Για ξαφνική εμφάνιση των απαντήσεών μέσα στο μυαλό τους έκαναν λόγο και οι ίδιοι οι μαθητές σε σχετική ερώτηση που δέχθηκαν στη διάρκεια της συνέντευξης [Μ14, γρ. 54, Μ15, γρ. 126 και Μ16, γρ. 143, Μ17, γρ. 81 και Μ18, γρ. 118- 120]. Είναι ενδεικτικά τα πιο κάτω αποσπάσματα.

> Μ17: Όχι ήρθε μου ξαφνικά, έτσι όπως σκεφτόμουν πριν ήρθε μου. [Μ17, γρ. 81]

> Μ18: Άξιππα όπως λαλούμε [χαμογελά]. [Μ18, γρ. 118- 120]

Μόνη εξαίρεση στο πιο πάνω μοτίβο ήταν η περίπτωση της Μ13, η οποία ανέφερε αυτολεξεί: «Σκέφτηκα το καμπόσο στο μυαλό μου απλά σκέφτομαι λίγο γρήγορα» [Μ13, γρ. 75]. Μπορεί να φάνηκε ότι η απάντηση εμφανίστηκε απότομα στο μυαλό της, αλλά κατ΄ ακρίβειαν της ήρθε μετά από αρκετή σκέψη. Περιληπτικά, στην πλειοψηφία των περιπτώσεων, οι ορθές απαντήσεις κάνουν ιδιαίτερα ξαφνική εμφάνιση στο μυαλό του ατόμου. Υπάρχει όμως και το ενδεχόμενο η ενόραση να φαίνεται εξωτερικά μια αναπάντεχη εμπειρία, αλλά ουσιαστικά να επισυμβαίνει σταδιακά στο μυαλό του ατόμου.

Τέλος, η ομάδα υψηλού επιπέδου διακατεχόταν από πολύ μεγαλύτερη βεβαιότητα για την ορθότητα της απάντησής τους σε αντίθεση με τις άλλες δυο ομάδες μαθητών [Μ13, γρ. 82, Μ14, γρ. 72, Μ15, γρ. 142, Μ16, γρ. 120, Μ17, γρ. 74-76 και Μ18, γρ. 126]. Μερικά παραδείγματα από τις δηλώσεις τους το τεκμηριώνουν: «Το κοίταξα και δεν πιστεύω να υπάρχει άλλη λύση» [Μ14, γρ. 74] και «Πιστεύω είναι σωστό γιατί όλα μου κάνουν 16» [Μ17, γρ. 74-76]. Κατά συνέπεια, οι ορθές απαντήσεις δημιουργούν έντονα αισθήματα βεβαιότητας σε αντίθεση με τις λανθασμένες.

Επαλήθευση

Μαθητές με Χαμηλό Επίπεδο Ικανότητας Επίλυσης Μαθηματικών Προβλημάτων Ενόρασης. Στην ομάδα χαμηλής ικανότητας δεν εντοπίστηκε καμία απολύτως ένδειξη σχετικά με τον έλεγχο των υποθέσεών των παιδιών μέχρι να καταλήξουν στην απάντησή τους. Συγκεκριμένα, όπως λέχθηκε και πιο πάνω, τα παιδιά Μ1, Μ2, Μ3 και Μ6, δεν κατάφεραν καν να εντοπίσουν οποιασδήποτε μορφής σχέση ανάμεσα σε αριθμούς του δοσμένου σχήματος αλλά περιορίστηκαν στην τυχαία εκτέλεση αριθμητικών πράξεων με υφιστάμενους αριθμούς.

Οι μόνες περιπτώσεις παιδιών που ανακάλυψαν κάποια σχέση ανάμεσα στους αριθμούς ήταν η Μ4 και η Μ5. Ωστόσο, ούτε και αυτές οι μαθήτριες επιχείρησαν να ελέγξουν κατά πόσον οι σχέσεις που εντόπιζαν επιβεβαιώνονταν και με άλλους αριθμούς του σχήματος. Για παράδειγμα, η Μ4 λαμβάνοντας δυο βοήθειες από την ερευνήτρια, διαπίστωσε ότι οι δυο κυκλωμένες στήλες είχαν άθροισμα ίσο με 16. Δεν προχώρησε όμως σε περαιτέρω έλεγχο για να εξακριβώσει κατά πόσον και οι άλλες στήλες του σχήματος έχουν άθροισμα 16.

Ε: Εντάξει. Θέλω τώρα να δεις αυτές τις δυο σειρές που θα σου κυκλώσω. Θέλω να τις δεις προσεκτικά και να μου πεις τι παρατηρείς και αν σε βοηθούν να βρεις τον αριθμό Χ.

Μ4: Ότι αυτά μας κάνουν 16 και αυτά μας κάνουν 16.

Ε: Δηλαδή ποιοι αριθμοί;

Μ4: Το 13, το 1 και το 2 και το 5, το 7 και το 4 μας κάνουν 16. [Μ4, γρ. 103-109]

Αξιοπρόσεκτη είναι, δε, η περίπτωση της Μ6, η οποία επέδειξε περιορισμένο ενδιαφέρον για να βελτιώσει την απάντησή της, όπως δείχνει και το πιο κάτω απόσπασμα.

Ε: Πριν λίγο μου είπες ότι δεν είσαι τελείως σίγουρη.

Μ6: Εντάξει, τώρα όμως σιγουρεύτηκα. Μπορεί να είναι.

Ε: Θέλεις να το ελέγξεις;

Μ6: Δε θέλω. [Μ6, γρ. 81-82, 88-89]

Σχετικά με την πειστικότητα των επιχειρημάτων που προέβαλαν οι μαθητές της ομάδας αυτής για τις απαντήσεις τους, οι μαθητές χαρακτηρίζονται από σοβαρή αδυναμία να οικοδομήσουν εύστοχες αιτιολογήσεις. Ειδικότερα, όλοι οι μαθητές της ομάδας που είχαν καταλήξει σε κάποια απάντηση, δηλαδή ο Μ3, η Μ4, η Μ5 και η Μ6, διατύπωσαν άστοχες αιτιολογήσεις. Χαρακτηριστικά είναι τα ακόλουθα αποσπάσματα.

Μ3: Ξεκίνησα ότι έπρεπε να κάνω πολλαπλασιασμό όλους τους αριθμούς, επειδή το Χ ισούται με πολλαπλασιασμό. [Μ3, γρ. 100-101]

Μ4: Αυτά τα δυο μας κάνουν 16 [δείχνει τις δυο στήλες της $2^{ης}$ βοήθειας στο σχήμα]

Ε: Εκείνο το βρήκες ναι. Μπορείς να το χρησιμοποιήσεις αυτό για να βρεις το Χ; Μου είπες ότι αυτά τα δυο κάνουν 16.

Μ4: Να τα κυκλώσω αυτά από κάτω και να τα προσθέσω με το 16. 16+11, επειδή αυτά τα δυο είναι 11.

Ε: Ποια;

Μ4: Αυτά [δείχνει στο σχήμα, στην $3^{η}$ γραμμή από κάτω προς τα πάνω]

Ε: Το 1, το 6 και το 4;

Μ4: Ναι. 16+11 μας κάνει 27. [Μ4, γρ. 122-141]

Μ6: Δυο!

Ε: Γιατί είναι δυο;

Μ6: Επειδή είπα 1Χ2=2.

Ε: Α λες ότι είναι το φορές πάνω;

Μ6: Ναι.

Ε: Ωραία. Είσαι σίγουρη;

Μ6: Ναι. Αυτό το έκανα σαν το φορές και το βρήκα. [Μ6, γρ. 37-43]

Επιπλέον, η Μ4 σε ορισμένες περιπτώσεις αδυνατούσε παντελώς να αιτιολογήσει το σκεπτικό που κρυβόταν πίσω από τις απαντήσεις που έδινε για το μαθηματικό πρόβλημα της συνέντευξης.

Ε: Πες μου τι σκέφτηκες.

Μ4: Να τα προσθέσω αυτά;

Ε: Ποιους αριθμούς να προσθέσεις;

Μ4: Το 3, το 1 και το 1.

Ε: Γιατί;

Μ4: Ένηξερω.[Μ4, γρ. 39-44]

Συμπερασματικά, η ομάδα χαμηλής ικανότητας επέδειξε φτωχή ικανότητα αφενός στο να επιβεβαιώνει την ορθότητα των απαντήσεών της και αφετέρου στο να εκθέτει ισχυρά μαθηματικά επιχειρήματα για να πείθει για την ορθότητα των απαντήσεων που διατυπώνει.

Μαθητές με Μέτριο Επίπεδο Ικανότητας Επίλυσης Μαθηματικών Προβλημάτων Ενόρασης. Τα μοτίβα που αναδύθηκαν στις συνεντεύξεις της ομάδας μέτριας ικανότητας προσιδίαζαν αρκετά με αυτά που εξιχνιάστηκαν στην ομάδα χαμηλής ικανότητας, αλλά διαπιστώθηκαν και ορισμένες διαφορές. Μια βασική ομοιότητα αναφέρεται στη δυσκολία των μαθητών να επιβεβαιώσουν τις απαντήσεις τους. Όπως και στην ομάδα χαμηλής ικανότητας, αρκετοί μαθητές ανακάλυπταν σχέσεις εντός του σχήματος χωρίς όμως να ελέγχουν κατά πόσον οι σχέσεις αυτές επιβεβαιώνονται και με άλλους αριθμούς του σχήματος.

Μ8: Βρήκα εδώ ότι 8 διά 2 κάνει 4, 4Χ1=4, Χ1 ξανά 4, αποτέλεσμα 4. [3η στήλη από αριστερά]

Ε: Μάλιστα. Ναι

Μ8: Εδώ για το Χ θα κάνω 3Χ1 = 3. Άρα το Χ μπορεί να είναι το 2. [Μ8, γρ. 39-42]

Μ9: Όπως το 8 με το 2. Το 2 όταν το πολλαπλασιάσεις με το 4 βγάζει 8. 8:4=2. Έτσι δηλαδή.

Ε: Άρα αυτό εδώ; Το 4 με το 2 και το 8;

Μ9: Ναι. Εδώ πάλι το 4 μπορεί με το 16 και αυτό το 4 και αυτό με 16. Γιατί 4Χ4=16, 16:4=4. Το 3, άμα το πολλαπλασιάσεις με το 2 κάνει 6. Το ίδιο και το 6 άμα το διαιρέσεις με το 2 κάνει 3. Με το 3 κάνει 2. Και το 2 με το 2, 2Χ2=4, 4:2=2. [Μ9, γρ. 28-33]

Η Μ10 ανακάλυψε μια σχέση ανάμεσα σε δυο στήλες του σχήματος: ότι οι ακρινές στήλες έχουν και οι δυο τον αριθμό 16 και έτσι κατέληξε στην ορθή απάντηση. Όμως, δεν είχε εξακριβώσει προηγουμένως εάν η σχέση αυτή επιβεβαιωνόταν και στις υπόλοιπες στήλες του σχήματος. Συνεπώς, θα μπορούσε να λεχθεί ότι η εύρεση της ορθής απάντησης από τη Μ10 δεν ήταν τόσο αποτέλεσμα ενός εμπεριστατωμένου τρόπου σκέψης όσο της τύχης.

Από την άλλη, υπήρξαν και ορισμένες διαφορές ανάμεσα στην ομάδα μέτριας ικανότητας και την ομάδα χαμηλής ικανότητας Για παράδειγμα, δυο περιπτώσεις, η Μ11 και ο Μ12, εντόπισαν το σταθερό άθροισμα ανάμεσα σε δυο στήλες του σχήματος και έπειτα επιχείρησαν να επιβεβαιώσουν εάν και οι υπόλοιπες στήλες του σχήματος ικανοποιούσαν αυτή τη σχέση. Βέβαια, οι δυο περιπτώσεις ήταν και οι δυο μαθητές που έλαβαν δυο βοήθειες από την ερευνήτρια και γι' αυτό μπόρεσαν να αναγνωρίσουν την ύπαρξη σταθερού αθροίσματος.

> Μ11: Ότι άμα τα προσθέσω αυτά όπως είπα κάνουν 16, και αυτά κάνουν 16, και αυτά κάνουν 16 και αυτά κάνουν 16. Έμειναν αυτά εδώ. Βασικά το μόνο που δεν κάνει 16 είναι αυτό το κεντρικό. [Μ11, γρ. 178-180]

> Μ12: 14, 16. Αυτό βγαίνει 16. [δείχνει την $2^{η}$ κάθετη γραμμή από δεξιά]. Αυτό βγαίνει [σκέφτεται νοερά] Α! 16 πάλι. Χμ [παύση] 16! Να αρχίσω να προσθέτω κάθετα. 16, 16, 16 πάλι. Α! 16! Α! 5+8+1, άρα 2! [Μ12, γρ. 189-191]

Ένα επιπρόσθετο μοτίβο που διαφοροποίησε την ομάδα μέτριας ικανότητας από την ομάδα χαμηλής ικανότητας είχε ως εξής: κάποιοι μαθητές, ο Μ8, ο Μ9 και η Μ10, καταλήγοντας σε διαφορετικές απαντήσεις, προσπάθησαν να αξιολογήσουν την καταλληλότητα κάθε απάντησης και να επιλέξουν την πλέον ιδανική [Μ8, γρ. 131-139, Μ9, γρ. 61-70 και Μ10, γρ. 31-32, 59-64 και 73-76]. Δίνεται ενδεικτικά το ακόλουθο απόσπασμα από τη συνέντευξη της Μ10.

> Μ10: Άρα μπορεί να γίνει αυτό. 1+1=2 2Χ3=6. 6+2=8. [παύση] [βλέπει την $4^{η}$ κατακόρυφη γραμμή από αριστερά]
>
> Ε: Πες μου τι σκέφτεσαι. Σκέφτεσαι κάτι άλλο;
>
> Μ10: Τα πρόσθεσα αυτά.
>
> Ε: Ποια;
>
> Μ10: Το 6+1+2=9 και το 3+1+1=5. Χμ 5+9=14 Ίσως πρέπει να είναι 2 αυτός ο αριθμός.
>
> Ε: Άρα ποια από τις δυο λύσεις θα κρατήσεις;
>
> Μ10: Το 2 είναι πιο σωστό.
>
> Ε: Γιατί;

Μ10: Γιατί βλέπω ότι το 16 υπάρχει δυο φορές.

Αναφορικά με την πειστικότητα των απαντήσεών τους, η συγκεκριμένη ομάδα βρισκόταν στο ίδιο περίπου επίπεδο με την ομάδα χαμηλής ικανότητας με μόνο δυο αποκλίσεις. Όλοι οι μαθητές της ομάδας έθεσαν άστοχες αιτιολογήσεις προκειμένου να εξηγήσουν το σκεπτικό πίσω από τις απαντήσεις τους. [Μ7, γρ. 58-73, Μ8, γρ. 138-139, Μ9, γρ. 54-57, Μ10, γρ. 31-32, Μ11, γρ. 74-75, Μ12, γρ. 156-159]. Χαρακτηριστικό είναι το ακόλουθο απόσπασμα.

Μ9: [σκέφτεται χαμηλόφωνα] Νομίζω ότι είναι το 3.

Ε: Γιατί;

Μ9: Επειδή 3Χ2=6 και το 6 έχει διαιρετέο το 2 και έχει και πολλαπλάσιο το 2. Ας πούμε το 12 άμα το κάμεις δια 2 κάνει 6. [Μ9, γρ. 54-57]

Μάλιστα, η Μ11 παρά τις δυο βοήθειες που της παραχώρησε η ερευνήτρια άλλαζε διαρκώς την απάντησή της για το πρόβλημα, προτείνοντας διαφορετικές και άστοχες μαθηματικά αιτιολογήσεις για την εκάστοτε απάντησή της.

Μ11: Μπορεί αυτά εδώ επειδή είναι 1+1+4 να κάνουν 6 και αυτά εδώ [δείχνει τον αριθμό Χ] να είναι 1, για να κάνει 7; [Μ11, γρ. 51-52]

Μπορεί να είναι το αποτέλεσμα [το 16]; Δεν ξέρω. [σκέφτεται νοερά] Μπορεί να πρέπει να τα ενώσω και να βρω 32; Όχι. [σκέφτεται νοερά] [Μ11, γρ. 155-156]

Ένα λεπτό. Μπορεί να πιάσεις το 6 με το 4 και το 2 με το 2 που κάνει 14. Δεν ξέρω, θέλω να βρω ίσο αποτέλεσμα. 4 8. Ότι αυτά εδώ κάνουν 8, αυτά και αυτά κάνουν 8, 8 χμ και μπορεί αυτό εδώ που κάνει 8 και αυτό που κάνει 8. Δεν ξέρω αν σχετίζεται αλλά, το 0; 16-16=0; [Μ11, γρ. 164-167]

Επίσης, η Μ7 η οποία κατέληξε σε δυο διαφορετικές απαντήσεις δεν ήταν σε θέση να τεκμηριώσει γιατί επέλεξε τη μια εκ των δυο απαντήσεων ως την οριστική της απάντηση.

Μ7: Να προσθέσω τους αριθμούς και το Χ να είναι ένας αριθμός ας πούμε.

4+7=11 11+___ = 16 Άρα είναι 5. [δεύτερη στήλη από αριστερά]

Μ7: 31 1 6 1 2 [μεσαία στήλη] 4 5 11 12 14 . Μπορεί να είναι και 2. Όχι … Ναι 14. Μπορεί να είναι και 2.

Ε: Ποιο από τα δυο;

Μ7: Θα πω το 5

Ε: Γιατί το 5 και όχι το 2;

Μ7: Ένηξερω είπα να κρατήσω το 5.

Ε: Κρατάς το 5 για ποιο λόγο;

Μ7: Γιατί δε μπορώ να βρω κάτι άλλο. [Μ7, γρ. 58-73]

Απόκλιση σε αυτό το μοτίβο παρουσίασε η Μ10 και ο Μ12, τα μόνα παιδιά που είχαν ανακαλύψει την ορθή λύση του προβλήματος. Συγκεκριμένα, η Μ10 αιτιολόγησε την ορθή της απάντηση βάσει της σχέσης που ανακάλυψε ανάμεσα σε δυο στήλες του σχήματος: ο κοινός αριθμός 16 στις ακρινές στήλες αλλά και βάσει του πλήθους των αριθμών που περιλαμβάνει η κάθε στήλη: «Γιατί σκέφτηκα ότι πρέπει να βγει 16, επειδή το 16 είναι και οι δυο στην άκρη του σχήματος. Και ίσως πρέπει τα αποτελέσματα να μας βγουν 16 γιατί δεν έχει άλλους αριθμούς πάνω ή κάτω του 16 για να προσθέσεις». [Μ10, γρ. 66-68]

Συγχρόνως, ο Μ12 επιχειρηματολόγησε επαρκώς για την ορθή του απάντηση αξιοποιώντας τη σχέση που εντόπισε σε όλες τις στήλες του σχήματος μετά που έλαβε δυο βοήθειες από την ερευνήτρια: το σταθερό άθροισμα των αριθμών κάθε στήλης πλην της κεντρικής: «Άρχισα και πρόσθετα έτσι και στην αρχή δεν το έβρισκα πολύ. Αλλά ύστερα που το έκανα κάθετα, βρήκα ότι όλες οι απαντήσεις τους ήταν 16 και βρήκα πόσα θέλει για να γίνει και αυτό 16». [δείχνει τη μεσαία στήλη] [Μ12, γρ. 230-232]. Καταλήγοντας, η ομάδα μέτριας ικανότητας παρουσίασε πολύ περιορισμένες ενδείξεις για επιβεβαίωση των απαντήσεων εκ μέρους των μαθητών καθώς και για παροχή πειστικών αιτιολογήσεων.

Μαθητές με Υψηλό Επίπεδο Ικανότητας Επίλυσης Μαθηματικών Προβλημάτων Ενόρασης. Η ομάδα υψηλής ικανότητας επέδειξε έντονα παραδείγματα όπου επιβεβαίωναν τις σχέσεις που ανακάλυπταν με άλλους αριθμούς του σχήματος. Συγκεκριμένα, όλοι οι μαθητές αφού βρήκαν ότι το άθροισμα των αριθμών δυο στηλών είναι ίσο με 16 επεδίωξαν να ελέγξουν εάν αυτή η σχέση ικανοποιείται και από τις υπόλοιπες στήλες του σχήματος [Μ13, γρ. 25-34, Μ14, γρ. 25-27, Μ15, γρ. 70-71, Μ16, γρ. 101-104, Μ17, γρ. 52-56 και Μ18, γρ. 103-109]. Παρατίθενται τα πιο κάτω αποσπάσματα που καταδεικνύουν το συγκεκριμένο μοτίβο.

Μ13: 16 [$1^{η}$ στήλη από δεξιά]

13+3=16 [$2^{η}$ στήλη από δεξιά]

3+2=5 5+11 [2+4+5]=16 [$3^{η}$ στήλη από δεξιά]

3 4 5 6 7 ξανά [4η στήλη από δεξιά]

5 [3+1+1] 11 [5+6] 12 [11+1] 14 [12+2] [4η στήλη από δεξιά]. Άρα τούτο [δείχνει τον αριθμό Χ] μπορεί να είναι το 2, αν είναι και τα άλλα 16.

8+2=10 12 16

7+4=11 16 16

Άρα τούτο εν το 2! 2! [κοφτά] [Μ13, γρ. 25-34]

Μ14: Πρόσεξα ότι το 5+7+4 κάνουν 16. Και 8+2=10 10+1=11 11+1=12 12+4=16 και αυτό. Και αυτό πρέπει να κάνει 16. 2+1=3 3+6=9 10 11 11+3=14 Άρα έμειναν 2. [Μ14, γρ. 25-27]

Μ15: Ναι 7 8 9 [σκέφτεται νοερά] Εδώ πάλι κάνει 16. Και εδώ κάνει 16, και εδώ. Άρα είναι το 2. Όλα τα κάθετα κάνουν 16. [Μ15, γρ. 70-71]

Ένα ακόμα μοτίβο που κατέστη ορατό στην ομάδα υψηλής ικανότητας αφορούσε την προσπάθεια των μαθητών που είχαν βρει διαφορετικές απαντήσεις να τις αξιολογήσουν και να επιλέξουν την πιο κατάλληλη [Μ13, γρ. 39-46 και Μ16, γρ. 109].

Μ13: Πρώτα τα είδα έτσι, τα σκέφτηκα έτσι [δείχνει διαγώνια]

Ε: Διαγώνια;

Μ13: Διαγώνια. Αλλά δεν έβγαιναν επειδή είδα ότι είχε μικρούς αριθμούς και επειδή είχε τον αριθμό 16. Μετά το έκανα κάθετα και το βρήκα.

Ε: Είδες ότι είχε μικρούς αριθμούς μου είπες;

Μ13: Ναι επειδή ας πούμε είχε 16+5 [1η διαγώνια γραμμή πάνω αριστερά]. Ενώ 7+2+1 ούτε καν 16 δεν κάνει [2η διαγώνια γραμμή πάνω αριστερά] [Μ13, γρ. 39-46]

Άξιο σχολιασμού είναι επίσης το ενδιαφέρον που έδειξε η Μ16 για να βελτιώσει την απάντησή της. Αρχικά, είχε προτείνει ως λύση τον αριθμό 5, όμως στην πορεία επεσήμανε ότι η απάντησή αυτή δεν την ικανοποιούσε αρκετά και επιθυμούσε να επεξεργαστεί σε μεγαλύτερο βάθος τις πληροφορίες που της δόθηκαν.

Μ16: Είναι ο αριθμός 5.

Ε: Γιατί;

Μ16: Γιατί αν τα προσθέσω αυτά οριζόντια μας κάνουνε 11.

Ε: Ποια να προσθέσεις οριζόντια;

Μ16: 7+1+5+2+1 [αριθμοί κοντά στον αριθμό 16 στην αριστερή άκρη του σχήματος]=16.

Ε: Ναι και γιατί θέλεις να κάνει 16;

Μ16: Γιατί έτσι είναι στην άκρη. Για να έχει τον ίδιο αριθμό εδώ, πρέπει (δεν είμαι σίγουρη όμως) να προσθέσεις κάποιους αριθμούς που είναι κοντά σε κάποιον άλλο. Μπορεί ας πούμε το αποτέλεσμα να είναι κάτι σχετικό με το 16. [Μ16, γρ. 48-59]

Μ16: Δεν ξέρω αν είναι σωστό όμως. Δεν είμαι πολύ ευχαριστημένη.

Ε: Δεν είσαι πολύ ευχαριστημένη. Γιατί δεν είσαι πολύ ευχαριστημένη;

Μ16: Γιατί είχε πάρα πολλούς αριθμούς και μπορεί να σήμαιναν κάτι οι αριθμοί αυτοί. Αλλά αφοσιώθηκα μόνο σε μια στήλη. [Μ16, γρ. 77-82]

Στρέφοντας την προσοχή στην πειστικότητα των απαντήσεών τους, στην ομάδα υψηλής ικανότητας παρατηρήθηκαν πιο στοιχειοθετημένες αιτιολογήσεις για τις απαντήσεις τους. Πιο αναλυτικά, όλοι οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας τεκμηρίωσαν την τελική τους απάντηση βασιζόμενοι στη σχέση που εντόπισαν σε όλες τις στήλες του δοθέντος σχήματος: δηλαδή όλες οι στήλες εκτός της κεντρικής έχουν άθροισμα ίσο με 16.

Μ13: Έκανα τα όλα κάθετα και όλα έβγαιναν 16. Και τα πρόσθεσα τούτα και ήβρα 14 δαμέ. 14+2=16. [Μ13, γρ. 36-37]

Μ14: Κοίταξα τις στήλες και είδα ότι κάθε στήλη βγάζει το ίδιο αποτέλεσμα [Μ14, γρ. 57-58].

Μ15: Βρήκα ποιο είναι το μοτίβο που λειτουργεί σε όλες τις κάθετες γραμμές. [Μ15, γρ. 84]

Ε: Γιατί μένουν 2;

Μ16: Γιατί υπέθεσα ότι αφού τα υπόλοιπα όταν τα προσθέσεις κάθετα είναι 16, μάλλον και αυτό θα έπρεπε όταν τα προσθέσουμε να μας κάνουν 16. [Μ16, γρ. 110-113]

Μ17: Πιστεύω είναι σωστό γιατί όλα μου κάνουν 16. [Μ17, γρ. 75]

Μ18: Όλα μας κάνουν 16. Άμα τα προσθέσεις όλα σε μια γραμμή θα βρίσκεις 16. [Μ18, γρ. 105-106]

Ταυτόχρονα, αρκετοί μαθητές στηρίχθηκαν και στο μέγεθος των αριθμών κάθε στήλης για να επιχειρηματολογήσουν για το σκεπτικό πίσω από την απάντησή τους. Με άλλα λόγια, διαπίστωσαν το σταθερό άθροισμα ανάμεσα στις στήλες καθώς επικέντρωσαν την προσοχή τους στο μέγεθος των αριθμών σε κάθε στήλη. Παρατίθενται πιο κάτω δυο χαρακτηριστικά αποσπάσματα από τις συνεντεύξεις δυο μαθητών.

Μ13: Πρώτα τα είδα έτσι, τα σκέφτηκα έτσι [δείχνει διαγώνια]

Ε: Διαγώνια;

Μ13: Διαγώνια αλλά δεν έβγαιναν επειδή είδα ότι είχε μικρούς αριθμούς και επειδή είχε 16. Μετά το έκανα κάθετα και το βρήκα.

Ε: Είδες ότι είχε μικρούς αριθμούς μου είπες;

Μ13: Ναι επειδή ας πούμε είχε 16+5 [$1^{η}$ διαγώνια γραμμή πάνω αριστερά]. Ενώ 7+2+1 ούτε καν 16 δεν κάνει [$2^{η}$ διαγώνια γραμμή πάνω αριστερά]. [Μ13, γρ. 39-46]

Μ15: Διότι είχε και αριθμούς 16 ήδη, και είναι μεγάλοι αριθμοί, ενώ οι άλλοι είναι πιο μικροί εκτός το 13.

Ε: Άρα σε βοήθησε ότι ήταν πιο μεγάλοι οι αριθμοί 16;

Μ15: Ναι. [Μ15, γρ. 128-131]

Εν κατακλείδι, το στάδιο της επαλήθευσης ήταν ένα στάδιο που διέκρινε με βαρυσήμαντο τρόπο τους μαθητές της ομάδας υψηλού επιπέδου από τους μαθητές των άλλων δυο ομάδων, αφού η επιβεβαίωση της ορθότητας των απαντήσεων και η προσπάθεια για πειστικές απαντήσεις εκ μέρους των μαθητών αυτών ήταν ξεκάθαρα πιο έκδηλη συγκριτικά με τις άλλες δυο ομάδες.

Παράγοντες που Επηρεάζουν την Επίλυση Μαθηματικών Προβλημάτων Ενόρασης

Η ανάλυση των δεδομένων από τις συνεντεύξεις έφερε στην επιφάνεια κάποιους παράγοντες, οι οποίοι φαίνεται να επηρεάζουν τη διαδικασία λύσης προβλημάτων ενόρασης. Ένας τέτοιος παράγοντας είναι οι προϋπάρχουσες εμπειρίες των μαθητών. Οι μαθητές των ομάδων χαμηλής και μέτριας ικανότητας και δύο μαθητές της ομάδας υψηλής ικανότητας (Μ17 και Μ18) δεν είχαν προηγούμενη εμπειρία με τον συγκεκριμένο τύπο προβλημάτων και έτσι δεν ήταν εξοικειωμένοι. Αρκετοί, εξάλλου, ανέφεραν ότι η σχολική διδασκαλία των μαθηματικών δεν ενσωματώνει τέτοιου είδους μαθηματικά προβλήματα.

Μ8: Στο σχολείο δεν υπάρχουν έτσι προβλήματα [Μ8, γρ. 96]

Μ9: Μόνο στο Γυμνάσιο μαθαίνεις έτσι προβλήματα από ό,τι ξέρω [Μ9, γρ.107]

Ε: Στο σχολείο έλυσες έτσι παρόμοιες [ασκήσεις];

Μ15: Νομίζω πως όχι. Θυμούμαι μόνο σε διαγωνισμούς. [Μ15, γρ. 112-113]

Παράλληλα, οι μαθητές υπέδειξαν μια σειρά από διαφορές ανάμεσα στα προβλήματα του σχολικού πλαισίου και το συγκεκριμένο είδος προβλήματος. Πρώτον, επεσήμαναν ότι τα σχολικά προβλήματα δίνουν ξεκάθαρα τους αριθμούς που πρέπει να χρησιμοποιηθούν και την ακριβή πράξη που πρέπει να εκτελεστεί για να εξευρεθεί η λύση.

Μ8: Και στο σχολείο κάποιες φορές πρέπει να βρούμε το άγνωστο Χ αλλά είναι πιο εύκολο να το βρεις επειδή σου έχει έτοιμη την πράξη, έτοιμους τους αριθμούς που πρέπει και το κάνεις [Μ8, γρ. 98-100]

Μ9: Και στις τάξεις τις άλλες έμαθες 2-3 αριθμοί με πολλά ψηφία, να τους πολλαπλασιάζεις, να τους προσθέτεις, να τους διαιρείς, να τους αφαιρείς [Μ9, γρ. 99-101].

Μ11: Κάνουμε πράξεις, μας έχει ότι ο Γιάννης έχει τάδε, η Κωστούλα τάδε και πρέπει να τα προσθέσουμε. Έπιασε άλλα τόσα, πρέπει να τα προσθέσουμε. Μας λέει τι πράξη βασικά πρέπει να κάνουμε [Μ11, γρ. 200-202].

Επίσης, τα σχολικά προβλήματα εμπλέκουν λιγότερους αριθμούς, τους οποίους θα πρέπει να χειριστούν οι μαθητές, όπως αποτυπώνεται στα πιο κάτω αποσπάσματα.

M9: Εδώ πρέπει να βρεις ένα ψηφίο μέσα σε πολλούς αριθμούς [Μ9, γρ. 103-104]

Ε: Άρα δεν έλυσες κάποιο παρόμοιο πρόβλημα ξανά;

Μ12: Έλυσα αλλά δεν ήταν έτσι. Ήταν στο βιβλίο των Μαθηματικών. Ήταν κύκλοι και έπρεπε για παράδειγμα να προσθέσω τους δυο για να βρω το κάτω, τους άλλους δυο για να βρω τον άλλο.

Ε: Άρα δεν ήταν παρόμοιο με αυτό;

Μ12: Όχι δεν είχε τόσους αριθμούς. [Μ12, γρ. 223-228]

Πέραν τούτου, το συγκεκριμένο μαθηματικό πρόβλημα χρησιμοποιεί με διαφορετικό τρόπο την έννοια της μεταβλητής σε σύγκριση με τη διδακτική πράξη των εκπαιδευτικών. Μέσα από τα λεγόμενα του Μ12 φάνηκε ότι στη σχολική διδασκαλία η μεταβλητή ως άγνωστος αριθμός συναντάται κυρίως ως αποτέλεσμα μιας πράξης:

Ε: Έλυσες ξανά έτσι πρόβλημα;

Μ12: Χμ όχι. Μόνο σε οριζόντιες πράξεις, για παράδειγμα βάζουμε την πράξη=ν, που δεν ξέρουμε ακόμα το αποτέλεσμα.

Ε: Εννοείς για τον άγνωστο;

Μ12: Ναι.

Ε: Άρα λες ότι 12+2=ν

Μ12: Πρέπει να κάνουμε την πράξη από κάτω για να το βρούμε. [Μ12, γρ. 41-47]

Γι΄ αυτό και οι μαθητές θεωρούσαν το πρόβλημα πιο δύσκολο από άλλα προβλήματα που επιλύουν στο σχολικό περιβάλλον [Μ1, γρ. 50, Μ2, γρ. 53, Μ3, γρ. 89, Μ4, γρ. 150, Μ6, γρ. 56, Μ7, γρ. 42, Μ8. γρ. 89, Μ9, γρ. 99, Μ10, γρ. 43, Μ11, γρ. 81, Μ12, γρ. 49, Μ17, γρ. 67 και Μ18, γρ. 55], δηλώνοντας προτίμηση προς τα σχολικά προβλήματα [Μ8, γρ. 102]. Χαρακτηριστικές είναι οι ακόλουθες δηλώσεις.

Μ2: Πρώτη φορά κάνω έτσι πρόβλημα! Δε μπορώ να το βρω [Μ2, γρ. 53-55]

Μ4: Βασικά δεν το κατάλαβα. Επειδή δεν ξαναέκανα έτσι πρόβλημα, δεν το κατάλαβα. [Μ4, γρ. 72-73]

Μ7: Νομίζω ότι θέλει πολλή ώρα. [Μ17, γρ. 79]

M9: Νομίζω ότι είναι πιο δύσκολο γιατί θέλει και παραπάνω σκέψη [M9, γρ. 99]

M11: Λίγο μπερδευτικό [M11, γρ. 81]

M17: Ναι είναι πιο περίεργο. [M17, γρ. 67] Έχει πάρα πολλή διαφορά. Με δυσκόλεψε λίγο τούτο το πρόβλημα, ενώ τα άλλα προβλήματα δεν με δυσκολεύουν ποτέ» ανέφερε η M17 [M17, γρ. 71-72]

M18: Με σύγχυσε! [M18, γρ. 55]

Μόνο η M5 χαρακτήρισε πιο εύκολο το πρόβλημα [M5, γρ. 49] ενώ δε διέθετε καμία προϋπάρχουσα εμπειρία με σχετικά προβλήματα, ενδεχομένως διότι κατόρθωσε να εντοπίσει κάποιες σχέσεις μεταξύ των αριθμών, χωρίς να έχει λάβει καμία βοήθεια.

Αντιθέτως, τα τέσσερα παιδιά της ομάδας υψηλής ικανότητας (M13, M14, M15 και M16) είχαν εμπειρία με παρόμοια προβλήματα, μέσα από εξάσκηση στο οικογενειακό τους περιβάλλον [M13, γρ. 98, M14, γρ. 34, M15, γρ. 94 και M16, γρ.63] και συμμετοχές σε διαγωνισμούς [M13, γρ. 62, M14, γρ. 36-37 και M15, γρ. 86-87]. Ως εκ τούτου, όλα αυτά τα παιδιά είχαν την πεποίθηση ότι το δοθέν πρόβλημα ήταν εύκολο. Σύμφωνα με τον M15, «οι Ολυμπιάδες ήταν πιο δύσκολες» [M15, γρ. 96], ενώ ο M14 εξέφρασε ότι θα ήθελε να ήταν λίγο πιο δύσκολο το συγκεκριμένο πρόβλημα και ότι του άρεσε [M14, γρ. 101-104]. Η M16 εξήγησε ότι «τα άλλα προβλήματα μου παίρνει μια ώρα να τα βρω. Είναι και για πιο μεγάλες τάξεις. Είναι για το Γυμνάσιο» [M16, γρ. 72-73]. Έτσι, οι εμπειρίες τους με παρόμοια προβλήματα τους χρησίμευσαν προκειμένου να εξερευνήσουν και να αποκαλύψουν τις κρυμμένες αριθμητικές σχέσεις εντός του σχήματος.

M14: Επειδή εγώ πάω σε διάφορους διαγωνισμούς ξαναέκανα έτσι είδους και ξέρω. [M14, γρ. 33].

Ήξερα τι πρέπει να κοιτάξω για να βρω τη σχέση [M14, γρ.51].

Μόλις το είδα κατάλαβα [M14, γρ. 55].

M16: Επειδή και άλλα προβλήματα που κάνω τα βρίσκω έτσι. Συνδυάζω τους αριθμούς και δοκιμάζω να δω αν έχουν κάτι κοινό αυτοί που είναι κοντά κοντά» [M16, γρ.120-123].

Σε μια, φυσικά, περίπτωση, στην περίπτωση της μαθήτριας Μ6, οι προηγούμενες της εμπειρίες με συναφή προβλήματα δεν τη βοήθησαν στο να αποκαλύψει τις κρυμμένες σχέσεις του σχήματος. Παρόλο που είχε έρθει ξανά σε επαφή με ανάλογα προβλήματα, όπως ανέφερε: «Κυρία ο παππούς μου ήταν μαθηματικός στην αρχή και με βοηθούσε και θυμούμαι κάτι που μου έκανε έτσι ασκήσεις» [Μ6, γρ. 60-61], παρέμεινε παγιδευμένη στην τυχαία εκτέλεση πράξεων με τους αριθμούς του σχήματος.

Ε: Άρα το Χ πόσα θα είναι;

Μ6: Δυο!

Ε: Γιατί είναι δυο;

Μ6: Επειδή είπα 1Χ2=2.

Μ6: Ναι. Αυτό το έκανα σαν το φορές και το βρήκα.

[Μ6, γρ. 35-43]

Αυτό οφειλόταν στο ότι οι εμπειρίες της δεν ήταν συστηματικές και πρόσφατες, αλλά από «πιο παλιά» [Μ6, γρ. 78]. Συμπερασματικά, προκύπτει ότι οι προϋπάρχουσες εμπειρίες με παρόμοιου τύπου προβλήματα μπορούν να επηρεάσουν θετικά τη διαδικασία λύσης μαθηματικών προβλημάτων ενόρασης μόνο εάν αυτές παρέχονται στοχευμένα και συστηματικά, τόσο στο σχολικό όσο και στο οικογενειακό περιβάλλον.

Συγχρόνως, τα δεδομένα έδειξαν ότι οι μαθηματικές γνώσεις των μαθητών μπορούν να επηρεάσουν με διττό τρόπο τη διαδικασία λύσης μαθηματικών προβλημάτων. Από τη μια, η κατοχή επαρκούς σώματος μαθηματικών γνώσεων μπορεί να διευκολύνει τον μαθητή να ρίξει φως σε ένα νέο μαθηματικό πρόβλημα, ενώ η ύπαρξη παρανοήσεων για συγκεκριμένες έννοιες τους οδηγεί σε εσφαλμένες μεθόδους λύσης. Για παράδειγμα, αρκετοί μαθητές, μπερδεύοντας το σύμβολο της μεταβλητής Χ με το σύμβολο «επί» της πράξης του πολλαπλασιασμού, κατέφυγαν στην εκτέλεση πράξεων πολλαπλασιασμού με διάφορους αριθμούς του σχήματος προκειμένου να βρουν τη λύση στο πρόβλημα:

Μ2: Να τα πολλαπλασιάσω όλα.

Ε: Δηλαδή ποιους αριθμούς να πολλαπλασιάσεις;

M2: 8X2X1X4 και έτσι να είναι όλα φορές κάθετα και μετά να το διαιρέσω διά 16; [ερώτηση] [M2, γρ. 67-70]

E: Ποιους αριθμούς μπορείς να χρησιμοποιήσεις νομίζεις;

M3: Το 7, το 5, το 2, το 13, το 16. Να κάνω πολλαπλασιασμό [M3, γρ. 36-37]

Επίσης, ο M9 παρουσίασε δυσκολία κατανόησης της έννοιας του διαιρέτη και του πολλαπλασίου, με αποτέλεσμα να δυσκολευτεί να προσεγγίσει τη λύση: «Επειδή 3X2=6 και το 6 έχει διαιρετέο το 2 και έχει και πολλαπλάσιο το 2. Ας πούμε το 12 άμα το κάνεις δια 2 κάνει 6. Το ίδιο και το 3». [M9, γρ. 56-57]

Ο M8 και ο M12 είχαν παρανόηση για την έννοια της μεταβλητής ως άγνωστος. Ο M8 πίστευε ότι θα μπορούσε να βάλει τον άγνωστο στη θέση του αριθμού 5 αντί στη θέση της μεταβλητής Χ: «Έκανα 2 Χ 6 κάνει 12. Σκέφτηκα να βάλω το 2 εκεί που είναι η θέση του 5 απλά δε μπορεί να μπει στο ίδιο κουτάκι [5η στήλη από αριστερά]» [M8, γρ. 52-53]. Επίσης, ο M12 θεωρούσε εσφαλμένα πως η μεταβλητή μπορεί να λαμβάνει ως τιμή μόνο μονοψήφιους αριθμούς, καθώς διερωτούνταν «Γίνεται να είναι διψήφιος;» [M12, γρ. 94-95]. Κατά συνέπεια, αρκετές φορές οι μαθηματικές γνώσεις μπορούν να συμβάλουν στην αποτελεσματική διερεύνηση των σχέσεων του προβλήματος και την εύρεση της λύσης.

Από την άλλη, σε κάποιες περιπτώσεις οι γνώσεις μπορεί να καταστούν τροχοπέδη στη δημιουργική επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Ειδικότερα, σε κάποιες περιπτώσεις, οι μαθητές περιορίστηκαν μονομερώς σε δοκιμασμένες στρατηγικές λύσης από άλλα προβλήματα που είχαν συναντήσει στο παρελθόν, με αποτέλεσμα να μην είναι σε θέση να επιλύσουν ορθά το πρόβλημα. Για παράδειγμα, ο M18, επηρεαζόμενος από τα προβλήματα αναλογίας στα οποία είχε διαγώνισμα στο σχολείο εκείνη την περίοδο, κατέφυγε στη μέθοδο του «χιαστί» ως στρατηγική λύσης στο πρόβλημα.

E: Έχεις λύσει κάποιο παρόμοιο πρόβλημα;

M18: Νομίζω στο διαγώνισμα έπρεπε να βρω ένα. Η μια ήταν ένα παιδάκι και είχε έναν μέσο όρο έξι διαγωνισμάτων με βαθμούς. Μας έδινε τους 5 βαθμούς, sorry τα 5 διαγωνίσματα και έπρεπε να βρούμε το 6ο, το τελευταίο. Και το έκανα λάθος εγώ αλλά ύστερα πήγα σπίτι και μου το εξήγησε λίγο ο παπάς μου και κάναμε χιαστί και βρήκαμε τη σωστή απάντηση.

M18: Σκέφτομαι και τη «χιαστί», να προσθέσουμε όλους τους αριθμούς και ύστερα να κάνουμε «χιαστί». [M18, γρ. 47-59]

Ως εκ τούτου, κάποιες φορές οι μαθηματικές γνώσεις των μαθητών αναχαιτίζουν την επιτυχή πρόσβαση στην ορθή λύση των μαθηματικών προβλημάτων ενόρασης.

Ένας άλλος παράγοντας που προέκυψε ότι έχει κρίσιμο ρόλο είναι το επίπεδο της γλωσσικής επάρκειας του μαθητή. Συγκεκριμένα, ο μαθητής Μ1 συνάντησε σημαντική δυσκολία στο να αντιληφθεί επακριβώς την προβληματική κατάσταση, καθώς δεν ήταν μητρικός ομιλητής της ελληνικής γλώσσας όπως πρόδιδε η ξενική του προφορά. Έτσι, μπερδεύοντας το σύμβολο της μεταβλητής Χ με το σύμβολο «επί» της πράξης του πολλαπλασιασμού, θεώρησε ότι το ζητούμενο του προβλήματος ήταν να υπολογίσει γινόμενα διαφόρων ζευγών του προβλήματος.

> Μ1: Στο πιο κάτω σχήμα, οι αριθμοί συνδέονται μεταξύ τους με κάποια σχέση. Να υπολογίσεις την τιμή του αριθμού Χ που βρίσκεται στον κεντρικό κύκλο. [ξενική προφορά, φαίνεται ότι είναι ξένος]
>
> Χμ 6Χ8=40
>
> Ε: Ναι
>
> Μ1: 6Χ7=49 [Μ1, γρ. 24-29]
>
> Ε: Θέλω να μου βρεις την απάντηση. Τι ζητά να βρεις το πρόβλημα; Κατάλαβες τι θέλει το πρόβλημα;
>
> Μ1: Όχι [Μ1, γρ. 53-55]

Συνεπώς, δεν κρίνεται αναγκαία μόνο η μαθηματική επάρκεια των μαθητών αλλά και η γλωσσική τους επάρκεια, ώστε να κατανοήσουν την προβληματική κατάσταση.

Άλλοι παράγοντες που έχουν αναδυθεί στο προσκήνιο αφορούν τον συναισθηματικό τομέα του ατόμου. Πρωταρχικά, οι πεποιθήσεις επάρκειας των μαθητών στο αντικείμενο των μαθηματικών φαίνεται να έχουν καίρια συμβολή κατά τη διαδικασία επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων ενόρασης. Ειδικότερα, από όλους τους μαθητές που συμμετείχαν στη διαδικασία των συνεντεύξεων, μόνο δυο μαθητές είχαν αποσυρθεί εντελώς από τη διαδικασία λύσης, χωρίς να έχουν προτείνει καμία απολύτως λύση: οι μαθητές Μ1 και Μ2 από την ομάδα χαμηλής ικανότητας. Δυσκολευόμενος να αντιληφθεί και να διερευνήσει αποτελεσματικά την προβληματική κατάσταση, ο Μ1 επεσήμανε την επιθυμία του να σταματήσει την προσπάθεια [Μ1, γρ. 85, 91], απορρίπτοντας τη βοήθεια και τον επιπλέον χρόνο που του προσφέρθηκε από την ερευνήτρια [Μ1, γρ. 87, 89]. Από την άλλη, ο Μ2 αφότου έλαβε δυο βοήθειες από την ερευνήτρια προκειμένου να λύσει το πρόβλημα, θέλησε να σταματήσει: «Δε θέλω να το κάνω αυτό το τεστ [αφήνει το μολύβι κάτω] [Μ2, γρ. 82]. Έτσι, παρέμειναν παγιδευμένοι στο στάδιο της επώασης, ανίκανοι να προχωρήσουν στο στάδιο του φωτισμού. Για να διερευνηθεί πιο επισταμένα η περίπτωση των δυο μαθητών, τους ζητήθηκε να δηλώσουν σε μια κλείδα βαθμολόγησης πόσο καλοί θεωρούν ότι είναι στα μαθηματικά. Και οι δυο αυτοί μαθητές υπέδειξαν ότι είναι «λίγο καλοί στα μαθηματικά». Κατ' επέκταση, έχοντας χαμηλές πεποιθήσεις επάρκειας των μαθητών στα μαθηματικά, το άτομο επιδεικνύει περιορισμένη δέσμευση στο έργο και έτσι δεν είναι σε θέση να μεταβεί από το στάδιο της επώασης στο στάδιο του φωτισμού.

Επιπλέον, τα δεδομένα των συνεντεύξεων κατέδειξαν ότι όταν οι μαθητές διακατέχονται από ενδιαφέρον για τη διαδικασία της επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων είναι πιο πιθανό να οδηγηθούν και στην ορθή επίλυση του προβλήματος. Το συμπέρασμα αυτό διαμορφώθηκε έχοντας ως γνώμονα τις συνεντεύξεις τριών μαθητών: του Μ1, του Μ2 και του Μ18. Από τη μια, Ο Μ1 και ο Μ2 χαρακτηριζόταν από περιορισμένο ενδιαφέρον απέναντι στην επίλυση τέτοιου είδους προβλημάτων. Ενδεικτικό είναι το γεγονός ότι μόλις κάθισε στην καρέκλα, ρώτησε την ερευνήτρια: «θα πάρει πολλή ώρα το πρόβλημα;» [Μ2, γρ. 14-15]. Επίσης, ενόσω προσπαθούσε να επιλύσει το πρόβλημα, ανέφερε απογοητευμένος: «Δεν μπορώ. Δεν θέλω, δε θέλω να σκεφτώ» [Μ2, γρ. 32]. Ο Μ1, ενώ δεν ήταν σε θέση να επιλύσει το πρόβλημα, επεσήμανε ότι δε θέλει ούτε περισσότερο χρόνο να σκεφτεί αλλά ούτε και βοήθεια από την ερευνήτρια [Μ1, γρ. 86-89]. Ο συγκεκριμένοι μαθητές, ένεκα του μειωμένου ενδιαφέροντός τους, τελικά παραιτήθηκαν εντελώς από τη διαδικασία λύσης [Μ1, γρ. 84 και Μ2, γρ. 82]. Αντιθέτως, ο Μ18 επέδειξε υψηλό ενδιαφέρον για την επίλυση του μαθηματικού προβλήματος, τονίζοντας: «Ούτε τώρα πιστεύω ότι θα βρω έτσι το αποτέλεσμα αλλά θέλω να δοκιμάσω». [Μ18, γρ. 94-95]. Το υψηλό του ενδιαφέρον τον ώθησε στο να εντείνει την προσπάθειά του και τελικά να καταλήξει στην ορθή λύση του προβλήματος [Μ18, γρ. 109]. Εν κατακλείδι, το ενδιαφέρον των μαθητών για τα μαθηματικά προβλήματα μπορεί να τους ενθαρρύνει στο να παραμείνουν δεσμευμένοι στην επίλυσή του προβλήματος.

Το άγχος μπορεί να λειτουργήσει αρνητικά στη διαδικασία λύσης μαθηματικών προβλημάτων. Για παράδειγμα, η Μ4 υπογράμμισε ότι η κύρια αιτία στην οποία ανάγεται η δυσκολία της κατά την λύση του συγκεκριμένου προβλήματος ήταν το άγχος:

Ε: Σε δυσκόλεψε;

Μ4: Όχι τώρα που το είδα, ήταν λίγο δύσκολο. Απλώς άμα αγχωθώ πάντα έτσι παθαίνω. [Μ4, γρ. 149-151]

Παράλληλα, διαφάνηκε ότι και οι πεποιθήσεις των μαθητών απέναντι στα λάθη και τις αποτυχίες μπορεί να αποτελέσουν εμπόδιο κατά τη λύση μαθηματικών προβλημάτων.

Ενδεικτικά, κατά τη διάρκεια της συνέντευξης, ο Μ12 απέφευγε να εξωτερικεύσει τις σκέψεις του προς την ερευνήτρια, κυριευμένος από τον φόβο της αποτυχίας και θεωρώντας ότι οι ιδέες του δε θα είναι αποδεκτές.

Ε: Άρα τώρα τι προσπαθείς να βρεις;

Μ12: Τα αποτελέσματα εδώ και να το λύσω.

Ε: Να μου λες τι σκέφτεσαι;

Μ12: Ε μα είναι λάθος! [χαμογελά]

Ε: Δεν έχει σχέση. Πες μου το. [Μ12, γρ. 62-66]

Ως εκ τούτου, συνάγεται εύλογα το συμπέρασμα ότι οι πεποιθήσεις που ενστερνίζονται τα άτομα σχετικά με την αποτυχία στη μαθησιακή διαδικασία μπορούν να αναχαιτίσουν τη διάθεση που έχουν για να λαμβάνουν ρίσκα και να εξερευνούν μια προβληματική κατάσταση.

Σχέσεις ανάμεσα στους Εσωτερικούς Παράγοντες της Δημιουργικότητας στα Μαθηματικά

Το τρίτο ερευνητικό ερώτημα αφορούσε στο να αναπτυχθεί και να επιβεβαιωθεί ένα θεωρητικό μοντέλο που αποσαφηνίζει τις σχέσεις ανάμεσα στους τρεις εσωτερικούς παράγοντες της δημιουργικής σκέψης στα μαθηματικά, όπως έχουν προσδιοριστεί από το μοντέλο της Seelig (2012): φαντασία, γνώσεις και νοοτροπία. Για την εξέταση των παραγόντων αυτών στο γνωστικό πεδίο των μαθηματικών χορηγήθηκαν ακόμη δυο εργαλεία συλλογής ποσοτικών δεδομένων, τα οποία εξειδικεύονταν στα μαθηματικά.

Στο μέρος αυτό, αρχικά εξετάζεται η αξιοπιστία των δεδομένων που συλλέχθηκαν μέσω του δοκιμίου αξιολόγησης των γνώσεων στα μαθηματικά και η εγκυρότητα του δοκιμίου. Παρατίθενται περιγραφικά και συσχετιστικά στατιστικά μέτρα για τις μεταβλητές του δοκιμίου μαθηματικών γνώσεων. Στη συνέχεια, εξετάζεται η αξιοπιστία των δεδομένων που συλλέχθηκαν μέσω του ερωτηματολογίου της μαθηματικής νοοτροπίας και παρουσιάζονται περιγραφικά και συσχετιστικά στατιστικά μέτρα για τις μεταβλητές του συγκεκριμένου ερωτηματολογίου. Το μέρος αυτό κλείνει παρουσιάζοντας τα αποτελέσματα από τις αναλύσεις για την επιβεβαίωση του μοντέλου για τις μεταξύ σχέσεις των εσωτερικών παραγόντων της δημιουργικής σκέψης στα μαθηματικά.

Αξιοπιστία των Δεδομένων του Δοκιμίου των Μαθηματικών Γνώσεων

Η αξιοπιστία του δοκιμίου αξιολόγησης των μαθηματικών γνώσεων ελέγχθηκε μέσα από τον έλεγχο αξιοπιστίας εσωτερικής συνέπειας, υπολογίζοντας την τιμή του συντελεστή Cronbach α. Η τιμή του συντελεστή α (Cronbach α) ήταν .85, η οποία θεωρείται ως υψηλή (Murphy & Davidshofer, 2001). Επιπρόσθετα, διαφάνηκε ότι αφαιρώντας οποιαδήποτε μεταβλητή του δοκιμίου δεν προκαλείται αύξηση της τιμής του συντελεστή α (Cronbach α). Αντιθέτως, παρατηρείται στα πλείστα έργα μείωση του συγκεκριμένου συντελεστή με την αφαίρεση τους, ενώ σε ορισμένα ο συντελεστής παραμένει σταθερός με την αφαίρεσή τους. Αυτό το εύρημα υποδηλώνει την αξιοπιστία των μετρήσεων για τις μεταβλητές του δοκιμίου.

Εγκυρότητα Περιεχομένου του Δοκιμίου των Μαθηματικών Γνώσεων

Η εγκυρότητα περιεχομένου του δοκιμίου εξακριβώθηκε μέσω των τιμών του δείκτη CVI και συγκεκριμένα του CVI κάθε έργου ξεχωριστά (I-CVI) και του CVI κάθε παράγοντα (S-CVI) (Polit & Beck, 2006). Για τον υπολογισμό των συγκεκριμένων δεικτών, ακολουθήθηκε η διαδικασία βαθμολόγησης από τέσσερις ειδικούς, όπως και στο δοκίμιο της φαντασίας στα μαθηματικά. Οι τιμές του I-CVI ήταν για όλα τα έργα ίσες με 1, και έτσι θεωρούνται αποδεκτές (Lynn, 1986), εφόσον όλοι οι ειδικοί συνηγορούσαν υπέρ του ότι τα έργα είναι συναφή με τις μαθηματικές γνώσεις που θα πρέπει να κατέχουν οι μαθητές Στ’ δημοτικού. Έτσι, η τιμή του S-CVI για τον παράγοντα των μαθηματικών γνώσεων είναι επίσης ίση με 1 και άρα αποδεκτή (Waltz et al., 2005). Ως εκ τούτου, η εγκυρότητα περιεχομένου του δοκιμίου μαθηματικών γνώσεων χαρακτηρίζεται επαρκής.

Περιγραφικά και Συσχετιστικά Στατιστικά Μέτρα των Μεταβλητών του Δοκιμίου των Μαθηματικών Γνώσεων

Οι μαθηματικές γνώσεις των μαθητών εξετάστηκαν μέσω χορήγησης ενός δοκιμίου με 10 έργα, αξιολογώντας την ορθότητα των απαντήσεων σ’ αυτά. Ο Πίνακας 4.6 παρουσιάζει αναλυτικά τις τιμές για τα περιγραφικά στατιστικά μέτρα του μέσου όρου, της τυπικής απόκλισης, της ελάχιστης και μέγιστης τιμής, της λοξότητας και της κύρτωσης για κάθε μεταβλητή του δοκιμίου. Στο Παράρτημα Λ, ο Πίνακας Λ2 παραθέτει τους συντελεστές συσχέτισης των μεταβλητών του δοκιμίου των μαθηματικών γνώσεων με όλες τις μεταβλητές της έρευνας.

Πίνακας 4.6

Περιγραφικά Αποτελέσματα για τις Μεταβλητές του Δοκιμίου των Μαθηματικών Γνώσεων

Έργο	Μέσος Όρος	Τυπική Απόκλιση	Ελάχιστη Τιμή	Μέγιστη τιμή	Λοξότητα	Κύρτωση
1(α)	.96	.18	.00	1.00	-4.56	20.27
1(β)	.95	.20	.00	1.00	-4.17	16.68
1(γ)	.77	.39	.00	1.00	-1.30	-.12
1(δ)	.72	.42	.00	1.00	-.997	-.81
2	.80	.37	.00	1.00	-1.53	.60
3	3.01	1.12	.00	4.00	-.95	.003
4	.75	.44	.00	1.00	-1.14	-.70
5	.74	.30	.00	1.00	-.75	-.63
6	.95	.71	1.00	2.00	-.13	-1.49
7	3.70	.79	.00	4.00	-2.66	5.87
8	.74	.40	.00	1.00	-1.11	-.50
9	2.30	1.12	.00	3.00	-1.35	.19
10(α)	.65	.48	.00	1.00	-.61	-1.64
10(β)	.61	.46	.00	1.00	-.47	-1.68

Για σκοπούς σύγκρισης της επίδοσης των μαθητών στα έργα των μαθηματικών γνώσεων, διαιρέθηκε η επίδοση των μαθητών σε κάθε έργο δια τον μέγιστο αριθμό μονάδων που μπορούσε να λάβει κάποιος μαθητής από αυτό. Έτσι, όλα τα έργα του δοκιμίου απέκτησαν κλίμακα μέτρησης που κυμαίνεται από το 0 μέχρι το 1. Ο Πίνακας 4.7 παρουσιάζει τα περιγραφικά αποτελέσματα για τις μεταβλητές του δοκιμίου των γνώσεων σε όμοια κλίμακα. Αντιπαραβάλλοντας την επίδοση σε κάθε έργο, προκύπτει πως τα έργα 1(α) και 1(β), που αφορούσαν πρόσθεση και αφαίρεση τριψήφιων αριθμών παρουσιάζει τον πιο ψηλό μέσο όρο (Μ.Ο.=.96, Τ.Α.=.18 για το έργο 1(α) και Μ.Ο.=.95, Τ.Α.=.20 για το έργο 1(β)). Αντιθέτως, το έργο 6, που αναφερόταν στον υπολογισμό περιμέτρου και εμβαδού ορθογωνίου είχε τον πιο χαμηλό μέσο όρο (Μ.Ο.=.48, Τ.Α.=.36).

Πίνακας 4.7

Περιγραφικά Αποτελέσματα για τις Μεταβλητές του Δοκιμίου των Γνώσεων στα Μαθηματικά σε Όμοια Κλίμακα Μέτρησης από 0 μέχρι 1

Έργο	Μέσος Όρος	Τυπική Απόκλιση	Ελάχιστη Τιμή	Μέγιστη τιμή	Λοξότητα	Κύρτωση
1(α)	.96	.18	.00	1.00	-4.56	20.27
1(β)	.95	.20	.00	1.00	-4.17	16.68
1(γ)	.77	.39	.00	1.00	-1.30	-.12
1(δ)	.72	.42	.00	1.00	-.997	-.81
2	.80	.37	.00	1.00	-1.53	.60
3	.75	.28	.00	1.00	-.95	.003
4	.75	.44	.00	1.00	-1.14	-.70
5	.74	.30	.00	1.00	-.75	-.63
6	.48	.36	.00	1.00	-.13	-1.49
7	.92	.20	.25	1.00	-2.66	5.87
8	.74	.40	.00	1.00	-1.11	-.50
9	.77	.37	.00	1.00	-1.35	.19
10(α)	.65	.48	.00	1.00	-.61	-1.64
10(β)	.61	.46	.00	1.00	-.47	-1.68

Αξιοπιστία των Δεδομένων του Ερωτηματολογίου της Μαθηματικής Νοοτροπίας

Ο έλεγχος της εσωτερικής συνέπειας του ερωτηματολογίου διερευνά κατά πόσον παρατηρείται ομοιογένεια στον βαθμό συμφωνίας των μαθητών στις δηλώσεις του ερωτηματολογίου. Ο συντελεστής Cronbach α ανήλθε στο .735, που αξιολογείται ικανοποιητικό (Murphy & Davidshofer, 2001). Συγχρόνως, από τον έλεγχο φάνηκε πως αφαιρώντας κάθε μεταβλητή του ερωτηματολογίου παρατηρείται μείωση του συντελεστή α (Cronbach α), με εξαίρεση τις δηλώσεις 3 («Μου αρέσει όταν ο/η δάσκαλος/α μου μού λέει πώς τα πάω στα μαθηματικά»), 4 («Κάποιοι γεννιούνται με ταλέντο στα μαθηματικά») και 11 («Όλα τα άτομα έχουν την ίδια ικανότητα να μάθουν μαθηματικά»).

Όμως, στην περίπτωση των δηλώσεων 3, 4 και 11, φάνηκε ότι η αφαίρεσή τους θα οδηγούσε σε αύξηση του συντελεστή α (Cronbach α) του ερωτηματολογίου στο επίπεδο του .737, .742 και .742 αντίστοιχα. Θεωρούμε ότι ενδεχομένως οι συγκεκριμένες δηλώσεις να διακρίνονταν από κάποια πολυπλοκότητα για τους μαθητές ως προς τη λεκτική τους διατύπωση, καθότι το ερωτηματολόγιο είναι προϊόν μετάφρασης. Επομένως, προβήκαμε στην αφαίρεση των τριών αυτών μεταβλητών από τις μετέπειτα αναλύσεις. Κατοπινός έλεγχος εσωτερικής συνέπειας που διενεργήθηκε με τις υπόλοιπες 11 δηλώσεις έδειξε ότι ο συντελεστής Cronbach α για το ερωτηματολόγιο αυξήθηκε στο .754.

Εγκυρότητα Περιεχομένου του Ερωτηματολογίου της Μαθηματικής Νοοτροπίας

Η εγκυρότητα περιεχομένου του ερωτηματολογίου της μαθηματικής νοοτροπίας εξετάστηκε λαμβάνοντας υπόψη τις τιμές του δείκτη CVI: του CVI κάθε δήλωσης ξεχωριστά (I-CVI) και του CVI κάθε παράγοντα (S-CVI) (Polit & Beck, 2006). Η μέθοδος υπολογισμού των δεικτών αυτών είναι η ίδια με τη μέθοδο που εφαρμόστηκε στα δοκίμια της φαντασίας στα μαθηματικά και των μαθηματικών γνώσεων. Οι τιμές του I-CVI είναι για όλες τις δηλώσεις του ερωτηματολογίου ίσες με 1, και κρίνονται ικανοποιητικές (Lynn, 1986). Ο δείκτης S-CVI για τον παράγοντα της μαθηματικής νοοτροπίας έχει τιμή 1, που θεωρείται αποδεκτή (Waltz et al., 2005). Συμπερασματικά, το ερωτηματολόγιο της μαθηματικής νοοτροπίας επιδεικνύει ικανοποιητική εγκυρότητα περιεχομένου.

Περιγραφικά και Συσχετιστικά Στατιστικά Μέτρα των Μεταβλητών του Ερωτηματολογίου της Μαθηματικής Νοοτροπίας

Στα πλαίσια της παρούσας διατριβής. οι στάσεις/πεποιθήσεις των μαθητών επικεντρώθηκαν αποκλειστικά στις πεποιθήσεις τους για τη νοοτροπία, οι οποίες αξιολογήθηκαν μέσω του αντίστοιχου ερωτηματολογίου, το οποίο εμπεριείχε 14 δηλώσεις. Πιο αναλυτικά, λήφθηκε υπόψη ο βαθμός συμφωνίας των μαθητών με κάθε δήλωση του ερωτηματολογίου σε κλίμακα Likert με πέντε διαβαθμίσεις. Οι μαθητές συμφώνησαν πιο έντονα με τη δήλωση 3 («Μου αρέσει όταν ο/η δάσκαλος/α μου μού λέει πώς τα πάω στα μαθηματικά») και 7 («Όσο πιο πολύ προσπαθείς στα μαθηματικά, τόσο πιο καλός μπορείς να γίνεις»), που ήταν διατυπωμένες υπέρ της νοοτροπίας ανάπτυξης, καθώς επέδειξαν τους πιο υψηλούς μέσους όρους ως προς τον βαθμό συμφωνίας των μαθητών. Από την άλλη, διαφώνησαν πιο έντονα με τη δήλωση 5 («Τα μαθηματικά είναι πιο εύκολα για τα αγόρια») και 10 («Θυμώνω όταν οι δάσκαλοί μου μού λένε για την επίδοσή μου στα μαθηματικά»), που ήταν διατυπωμένες υπέρ της στατικής νοοτροπίας.

Για σκοπούς ομοιομορφίας των δηλώσεων, οι δηλώσεις που ήταν διατυπωμένες υπέρ της στατικής νοοτροπίας (1, 4, 5, 8, 10, 12 και 13) έχουν τύχει επανακωδικοποίησης, ώστε να αντιπροσωπεύουν τη νοοτροπία ανάπτυξης. Ο Πίνακας 4.8 δείχνει τα περιγραφικά αποτελέσματα για τις δηλώσεις του ερωτηματολογίου, περιλαμβανομένων και των επανακωδικοποιημένων δηλώσεων. Παρουσιάζονται οι μέσοι όροι, οι τυπικές αποκλίσεις, το εύρος, η λοξότητα και η κύρτωση της κάθε δήλωσης του ερωτηματολογίου.

Πίνακας 4.8

Περιγραφικά Αποτελέσματα για τις Μεταβλητές του Ερωτηματολογίου Μαθηματικής Νοοτροπίας

Δήλωση	Μέσος Όρος	Τυπική Απόκλιση	Ελάχιστη Τιμή	Μέγιστη τιμή	Λοξότητα	Κύρτωση
1(επανακωδ.)	3.36	1.43	1	5	-.35	-1.20
2	3.68	1.04	1	5	-.73	.23
3	4.27	.86	1	5	-1.31	1.98
4(επανακωδ.)	2.43	1.31	1	5	.60	-.71
5(επανακωδ.)	4.09	1.17	1	5	-1.06	.14
6	4.15	1.16	1	5	-1.43	1.23
7	4.54	.87	1	5	-2.24	5.05
8(επανακωδ.)	3.98	1.17	1	5	-1.04	.21
9	3.53	1.23	1	5	-.61	-.51
10(επανακωδ.)	3.99	1.15	1	5	-.99	.08
11	3.09	1.46	1	5	-.05	-1.37
12(επανακωδ.)	3.05	1.34	1	5	-.12	-1.15
13(επανακωδ.)	3.91	1.28	1	5	-1.01	-.08
14	3.88	1.18	1	5	-.86	-.15

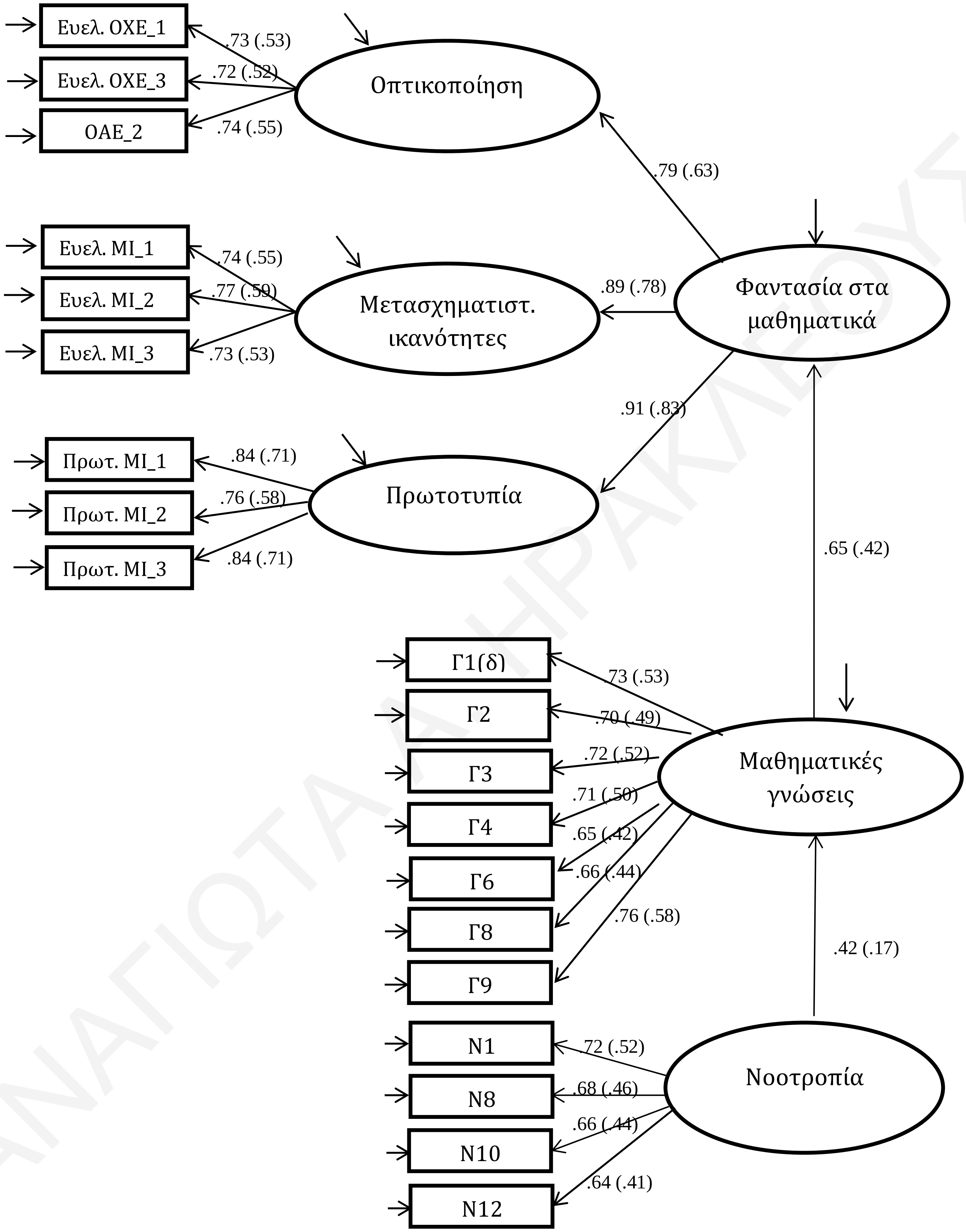
Με βάση τους μέσους όρους του βαθμού συμφωνίας σε κάθε δήλωση, ο βαθμός συμφωνίας των μαθητών στις δηλώσεις του Πίνακα 4.8 κυμαινόταν από 2.43 μέχρι 4.54 σε κλίμακα 1 μέχρι 5. Επιπλέον, ο Πίνακας Λ3 στο Παράρτημα Λ περιλαμβάνει τους συντελεστές συσχέτισης των μεταβλητών του ερωτηματολογίου της μαθηματικής νοοτροπίας που χρησιμοποιήθηκαν στις αναλύσεις με όλες τις μεταβλητές της διατριβής.

Επιβεβαίωση της Δομής του Προτεινόμενου Μοντέλου για τις Σχέσεις ανάμεσα στους τρεις Εσωτερικούς Παράγοντες της Μαθηματικής Δημιουργικότητας

Για να εξεταστεί εάν επιβεβαιώνεται εμπειρικά το προτεινόμενο μοντέλο διενεργήθηκε ανάλυση Μερικών Ελάχιστων Τετραγώνων (PLS-SEM). Τα αποτελέσματα για τις παραμέτρους του μοντέλου παρουσιάζονται στο Διάγραμμα 4.2. Παρουσιάζονται οι φορτίσεις των μεταβλητών στους αντίστοιχους παράγοντες, οι φορτίσεις των παραγόντων πρώτης τάξης στον παράγοντα δευτέρας τάξης και η αντίστοιχη ερμηνευόμενη διασπορά τους καθώς και οι συντελεστές διαδρομής. Τα αποτελέσματα για τα κριτήρια αξιολόγησης του δομικού μοντέλου συνοψίζονται στον Πίνακα 4.9. Γενικά, από τις τιμές των δεικτών φαίνεται πως το προτεινόμενο μοντέλο ικανοποιεί τα κριτήρια αξιολόγησης των δομικών μοντέλων στην ανάλυση Μερικών Ελάχιστων Τετραγώνων (PLS-SEM).

Σχετικά με την αξιοπιστία των δεικτών του μοντέλου, όσες μεταβλητές είχαν φορτίσεις κάτω από .65 αφαιρέθηκαν από το μοντέλο. Επομένως, οι υπόλοιπες μεταβλητές έχουν θετικές, υψηλές (πάνω από .65) και στατιστικά σημαντικές φορτίσεις στον αντίστοιχο παράγοντα. Έτσι, οι μεταβλητές αυτές κρίνονται κατάλληλες για την μέτρηση των αντίστοιχων παραγόντων πρώτης τάξης. Ως προς την αξιοπιστία εσωτερικής συνέπειας, οι τιμές του composite reliability ρ_c, του Cronbach α και του ρ_A για τις μαθηματικές γνώσεις και τη μαθηματική νοοτροπία είναι πάνω από .60 και άρα αποδεκτές.

Από πλευράς της συγκλίνουσας εγκυρότητας η τιμή της Μέσης Εξαγόμενης Διασποράς (AVE) είναι αποδεκτή για τον παράγοντα των γνώσεων, ενώ για τον παράγοντα της νοοτροπίας είναι ελάχιστα κάτω από .50 (AVE=.46). Η χαμηλή αυτή τιμή του AVE προκύπτει από τη χαμηλή φόρτιση της δήλωσης Ν12 (λ=.64, R^2=.41), η οποία όμως θεωρείται δικαιολογημένη. Επειδή η δήλωση Ν12 συγκαταλέγεται στις τελευταίες δηλώσεις του ερωτηματολογίου, είναι πιθανό οι μαθητές να κουράστηκαν, με αποτέλεσμα να αυξηθεί το σφάλμα μέτρησης. Επομένως, η χαμηλή τιμή του AVE για τη μαθηματική νοοτροπία δεν εγείρει οποιονδήποτε προβληματισμό.



Σημείωση: Ο πρώτος αριθμός είναι η φόρτιση και στην παρένθεση η ερμηνευόμενη διασπορά (R^2).

Διάγραμμα 4.2. Μοντέλο για τις σχέσεις των εσωτερικών παραγόντων της δημιουργικής σκέψης στα μαθηματικά

Πίνακας 4.9

Δείκτες Κριτηρίων Αξιολόγησης Δομικού Μοντέλου για τις Σχέσεις ανάμεσα στη Φαντασία, τις Γνώσεις και τη Μαθηματική Νοοτροπία

Κριτήριο	Οπτικοποίηση	Μετασχ. Ικανότητες	Πρωτοτυπία	Φαντασία	Γνώσεις	Νοοτροπία
Composite Reliability ρ_c	.78	.79	.85	.87	.87	.77
Cronbach α	.57	.60	.74	.84	.83	.61
ρ_A	.57	.61	.74	.85	.83	.61
Μέση Εξαγόμενη Διασπορά (AVE)	.54	.56	.66	.75	.50	.46
√AVE	.73	.75	.81	.86	.71	.68
Q^2	.33	.42	.54	.18	.08	_

Η αποκλίνουσα εγκυρότητα των παραγόντων κρίθηκε ικανοποιητική σε όλους τους παράγοντες του δομικού μοντέλου που εξετάστηκε. Πιο συγκεκριμένα, σε επίπεδο παραγόντων, η τετραγωνική ρίζα της Μέσης Εξαγόμενης Διασποράς (AVE) κάθε παράγοντα είναι μεγαλύτερη από τις συσχετίσεις του συγκεκριμένου παράγοντα με τους υπόλοιπους παράγοντες του μοντέλου. Ο Πίνακας 4.10 παρουσιάζει τους συντελεστές συσχέτισης μεταξύ των παραγόντων του δομικού μοντέλου. Συχρόνως, σε επίπεδο μεταβλητών, με βάση τα cross-loadings των μεταβλητών προκύπτει ότι η κάθε παρατηρήσιμη μεταβλητή του δομικού μοντέλου φορτίζει σε μεγαλύτερο βαθμό στον παράγοντα που επιχειρεί να μετρήσει παρά στους υπόλοιπους παράγοντες του δομικού μοντέλου.

Πίνακας 4.10

Συσχετίσεις για τους Παράγοντες του Δομικού Μοντέλου για τις Σχέσεις ανάμεσα στη Φαντασία, τις Γνώσεις και τη Μαθηματική Νοοτροπία

Παράγοντας	Μαθηματικές γνώσεις	Μαθηματική νοοτροπία
Οπτικοποίηση	.50*	.27*
Μετασχηματιστ. Ικανότητες	.58*	.34*
Πρωτοτυπία	.61*	.33*
Φαντασία	.65*	.36*
Μαθηματικές γνώσεις	1	.42*
Μαθηματική νοοτροπία	.42*	1

Σημείωση: *Οι συσχετίσεις είναι στατιστικά σημαντικές σε επίπεδο p<.05

Όσον αφορά στη συγραμμικότητα, οι τιμές του VIF είναι χαμηλότερες του 5 για όλες τις μεταβλητές του μοντέλου, δείχνοντας την απουσία θεμάτων συγραμμικότητας ανάμεσα στους παράγοντες πρόβλεψης. Οι τιμές του R^2 , που δείχνουν τη διασπορά που ερμηνεύεται σε κάθε ενδογενή παράγοντα φαίνονται στο Διάγραμμα 4.2. για τον παράγοντα. Για τον παράγοντα της φαντασίας, το ποσοστό ερμηνευόμενης διασποράς (R^2) είναι ίσο με 42%, ενώ για τον παράγοντα των μαθηματικών γνώσεων είναι ίσο με 17%. Αναφορικά με την προβλεπτική ακρίβεια του μοντέλου, οι τιμές του Q^2 για όλους τους ενδογενείς παράγοντες του μοντέλου είναι μεγαλύτερες του 0, που σημαίνει ότι η προβλεπτική ακρίβεια του μοντέλου είναι αποδεκτή για τους συγκεκριμένους παράγοντες.

Σχετικά με τους συντελεστές διαδρομής του μοντέλου, όλοι οι συντελεστές είναι θετικοί και στατιστικά σημαντικοί. Οι μαθηματικές γνώσεις επεξηγούν άμεσα τη διακύμανση της φαντασίας στα μαθηματικά με συντελεστή διαδρομής ίσο με .65. Η μαθηματική νοοτροπία επεξηγεί άμεσα τη διακύμανση του παράγοντα των μαθηματικών γνώσεων, με συντελεστή διαδρομής ίσο με .42. Η μαθηματική νοοτροπία επεξηγεί έμμεσα τη διακύμανση του παράγοντα της φαντασίας στα μαθηματικά, με συντελεστή διαδρομής ίσο με .27.

Τέλος, όσον αφορά στο μέγεθος επίδρασης των συντελεστών διαδρομής του δομικού μοντέλου, η επίδραση των μαθηματικών γνώσεων στην ερμηνεία της διακύμανσης της φαντασίας στα μαθηματικά είναι μεγάλη και στατιστικά σημαντική (f^2=.74), ενώ η επίδραση της μαθηματικής νοοτροπίας στην ερμηνεία των μαθηματικών γνώσεων χαρακτηρίζεται ως μέτρια και στατιστικά σημαντική (f^2=.21).

Κεφάλαιο 5: Συζήτηση Αποτελεσμάτων

Εισαγωγή

Η μαθηματική δημιουργικότητα έχει βαρύνουσα σημασία για την ομαλή διαβίωση του ατόμου στον κόσμο του 21ου αιώνα (Leikin, 2013; Pitta-Pantazi, 2017) καθώς και για τη μάθηση των μαθηματικών (Levenson, 2013; Pehkonen, 1997). Κατά συνέπεια, ερευνητές, διεθνείς οργανισμοί και φορείς χάραξης εκπαιδευτικής πολιτικής θέτουν την καλλιέργεια της δημιουργικής σκέψης όλων των μαθητών ως κύρια προτεραιότητα της μαθηματικής παιδείας (Goldin, 2017; Leikin, 2013; Leikin & Pitta-Pantazi, 2013a; Levenson, 2013; NCTM, 2000; Pelcszer & Rodríguez, 2011; Pitta-Pantazi, 2017; Sheffield, 2006; Singer et al., 2017a; Vale & Barbosa, 2015).

Ο σκοπός της εργασίας είναι η εμπειρική εξέταση της δομής και των σχέσεων ανάμεσα στους τρεις εσωτερικούς παράγοντες, που σύμφωνα με τη Seelig (2012) συνεισφέρουν στη μαθηματική δημιουργικότητα, δηλαδή τη φαντασία στα μαθηματικά, τις μαθηματικές γνώσεις και τη μαθηματική νοοτροπία.

Το πρώτο ερευνητικό ερώτημα της διατριβής είναι η παρουσίαση και η επιβεβαίωση μέσω εμπειρικών δεδομένων ενός μοντέλου για τη δομή της φαντασίας στα μαθηματικά, το οποίο στηρίζεται στο συνδυαστικό μοντέλο της δημιουργικής ικανότητας (Conjunctional Model of Creative Imaging Ability) από τον χώρο της ψυχολογίας (Dziedziewicz & Karwowski, 2015). Αρκετοί ερευνητές αναγνωρίζουν τον βαρυσήμαντο ρόλο της φαντασίας στη μάθηση των μαθηματικών (Abrahamson, 2006; Egan & Judson, 2016; Jagals & van der Walt, 2018; Lindstrand, 2010; Pound & Lee, 2015) και τονίζουν την αναγκαιότητα για ανάπτυξη της φαντασίας των μαθητών μέσω της εκπαίδευσης (Eckhoff & Urbach, 2008; Egan & Judson, 2016; Smith & Mathur, 2009; Sutton-Smith, 1988; Warnock, 1976; Wu & Albanese, 2013). Ωστόσο, στη βιβλιογραφία παρατηρείται έλλειψη από εμπειρικές έρευνες σχετικά με τη φαντασία (Egan, 1992) και εγείρεται από τους ερευνητές η ανάγκη για ανάπτυξη θεωρητικών μοντέλων που περιγράφουν και ερμηνεύουν τον ρόλο της φαντασίας στη μάθηση (Abrahamson, 2006; Dziedziewicz & Karwowski, 2015; Egan, 1992). Είναι μάλιστα χαρακτηριστικό ότι οι έρευνες σε σχέση με τη φαντασία είναι λιγότερο εξελιγμένες από τις έρευνες στη δημιουργικότητα λόγω των ασαφών ερευνητικών ερωτημάτων που έχουν (Ren et al., 2012).

Το δεύτερο ερώτημα της διατριβής εστιάζει στις γνωστικές διαδικασίες της φαντασίας των μαθητών Στ’ δημοτικού στα μαθηματικά, που εμφανίζονται κατά την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος ενόρασης. Αυτό το ερώτημα προέκυψε από τη διαπίστωση ότι ακόμη δεν έχει μελετηθεί η φαντασία μέσα από το πρίσμα των εμπειριών του «Aha!». Παρά το γεγονός πως η εμπειρία της ενόρασης είναι ένα αξιόλογο θέμα προς διερεύνηση για σωρεία λόγων (Webb et al., 2018), η συζήτηση για την εμπειρία του «Aha!» περιορίζεται στις ανώτερες βαθμίδες της μαθηματικής πρακτικής, στο πλαίσιο των μεγάλων Μαθηματικών και των σπουδαίων μαθηματικών επιτευγμάτων (Liljedahl, 2005).

Το τρίτο ερευνητικό ερώτημα της διατριβής περιλαμβάνει τον εμπειρικό έλεγχο ενός μοντέλου που προσδιορίζει τις σχέσεις ανάμεσα στους τρεις εσωτερικούς παράγοντες της μαθηματικής δημιουργικότητας: τη φαντασία στα μαθηματικά, τις μαθηματικές γνώσεις και τη μαθηματική νοοτροπία. Ο στόχος αυτός διαμορφώθηκε ένεκα της ανάγκης που εγείρεται από ερευνητές προκειμένου να διερευνηθούν περαιτέρω οι παράγοντες που συνεισφέρουν στην ανάπτυξη της δημιουργικής σκέψης στα μαθηματικά (Massarwe et al., 2011; Pitta-Pantazi, 2017). Το παρόν κεφάλαιο καταπιάνεται με τη συζήτηση των αποτελεσμάτων της έρευνας για κάθε ερευνητικό ερώτημα. Γίνεται προσπάθεια ώστε να ερμηνευτούν τα αποτελέσματα της εργασίας υπό το φως της υφιστάμενης σχετικής βιβλιογραφίας.

Πρώτο Ερευνητικό Ερώτημα – Περιγραφή της Δομής της Φαντασίας στα Μαθηματικά

Η εργασία αυτή έδειξε ότι η επίδοση των μαθητών Στ' δημοτικού στο δοκίμιο της φαντασίας στα μαθηματικά υποστηρίζει τη δομή του συνδυαστικού μοντέλου της δημιουργικής ικανότητας (Conjunctional Model of Creative Imaging Ability), το οποίο υιοθετήθηκε από τον χώρο της ψυχολογίας (Dziedziewicz & Karwowski, 2015), αλλά προσαρμόστηκε στο αντικείμενο των μαθηματικών. Σύμφωνα με αυτό το μοντέλο, η φαντασία στα μαθηματικά είναι μια έννοια με πολυδιάστατη φύση και αποτελεί έναν δευτέρας τάξης παράγοντα που ορίζεται από τρεις συνιστώσες: την οπτικοποίηση, τις μετασχηματιστικές ικανότητες και την πρωτοτυπία.

Η εμπειρική επιβεβαίωση του συνδυαστικού μοντέλου της δημιουργικής ικανότητας (Conjunctional Model of Creative Imaging Ability) (Dziedziewicz & Karwowski, 2015) στο πεδίο των μαθηματικών, το οποίο περιγράφει την έννοια της φαντασίας στα μαθηματικά, αποτελεί μια σημαντική καινοτομία της εργασίας. Στη μέχρι στιγμής βιβλιογραφία, η φαντασία ήταν μια πολύπλοκη έννοια (Egan, 1992; van Alphen, 2011) και ορισμός της ήταν ευρύς και ασαφής (Ho et al., 2013). Την ίδια στιγμή, υπήρχε έλλειψη εμπειρικών ερευνών σχετικών με τη φαντασία (Egan, 1992) αλλά και έντονη ανάγκη για διαμόρφωση θεωρητικών μοντέλων που περιγράφουν και ερμηνεύουν τον ρόλο της φαντασίας στη μάθηση (Abrahamson, 2006; Dziedziewicz & Karwowski, 2015; Egan, 1992). Έτσι, επιβεβαιώνοντας τη δομή του συνδυαστικού μοντέλου της δημιουργικής ικανότητας (Conjunctional Model of Creative Imaging Ability) (Dziedziewicz & Karwowski, 2015) στα μαθηματικά, η εργασία αυτή παρουσιάζει στον χώρο της μαθηματικής παιδείας ένα ολοκληρωμένο, αναλυτικό, βασισμένο στη θεωρία και κατάλληλο μοντέλο για τη φαντασία στα μαθηματικά, το οποίο μάλιστα γεφυρώνει την έρευνα της δημιουργικότητας και της φαντασίας (Jankowska & Karwowski, 2015). Το μοντέλο αυτό είναι θεωρητικά τεκμηριωμένο, εφόσον πηγάζει από τους παράγοντες που έχει εισηγηθεί το συνδυαστικό μοντέλο της δημιουργικής ικανότητας (Conjunctional Model of Creative Imaging Ability): οπτικοποίηση, μετασχηματιστικές ικανότητες και πρωτοτυπία. Παράλληλα, είναι ολοκληρωμένο, διότι καλύπτει ένα ευρύ φάσμα της έννοιας, εστιάζοντας σε τρεις διακριτές ικανότητες. Πέραν τούτου, είναι αναλυτικό, αφού η κάθε ικανότητα είναι ορισμένη με σαφήνεια και ακρίβεια με βάση τη βιβλιογραφία. Τέλος, το μοντέλο είναι και κατάλληλο, διότι η δομή του έχει επιβεβαιωθεί βάσει εμπειρικών δεδομένων μέσω ανάλυσης Μερικών Ελάχιστων Τετραγώνων (PLS-SEM).

Μια άλλη σημαντική συμβολή της εργασίας είναι ότι έδειξε ότι στον παράγοντα της οπτικοποίησης δεν φορτίζουν ικανοποιητικά μόνο μεταβλητές σχετικές με χωρικές εικόνες αλλά και μια μεταβλητή που αφορά αλγεβρικές εικόνες. Συνεπώς, επιβεβαιώθηκε εμπειρικά ότι η οπτικοποίηση δεν χρησιμεύει μόνο στις περιοχές της γεωμετρίας και της τριγωνομετρίας (Arcavi, 1999; McGee, 1979 ; Michael et al., 1957; Presmeg, 1997) αλλά σχετίζεται και με το πεδίο της άλγεβρας (Parzysz, 1999; Yerushalmy et al., 1999).

Επιπλέον, διαπιστώθηκε ότι στον παράγοντα της πρωτοτυπίας, φόρτιζαν σε ικανοποιητικό βαθμό μόνο οι μεταβλητές πρωτοτυπίας στα έργα μετασχηματιστικών ικανοτήτων, ενώ οι μεταβλητές πρωτοτυπίας στα έργα οπτικοποίησης δεν είχαν ικανοποιητικές φορτίσεις. Αν και η πρωτοτυπία εμφανίζεται και σε μαθηματικά αποτελέσματα οπτικοποίησης, όπως υποστηρίζει και η Sheffield (2009), η εύρεση πρωτότυπων λύσεων στα έργα μετασχηματιστικών ικανοτήτων είναι πιο αξιόπιστος δείκτης μέτρησης της πρωτοτυπίας από ότι η εύρεση πρωτότυπων απαντήσεων στα έργα οπτικοποίησης χωρικών εικόνων. Μια πιθανή ερμηνεία είναι ότι η πρωτοτυπία των μαθητών στα έργα οπτικοποίησης χωρικών εικόνων ίσως να επηρεάστηκε και από κάποιον άλλον παράγοντα εκτός από την πρωτοτυπία, ενδεχομένως το γνωστικό στυλ

(Blazhenkova, Becker, & Kozhevnikov, 2011), κάτι που δεν ίσχυε τόσο στην περίπτωση των έργων των μετασχηματιστικών ικανοτήτων.

Ένα άλλο σημαντικό εύρημα της διατριβής αφορά στο ότι η πρωτοτυπία είναι ο πιο αξιόπιστος παράγοντας μέτρησης της φαντασίας, ανάμεσα στις ικανότητες που την αποτελούν: οπτικοποίηση, μετασχηματιστικές ικανότητες και πρωτοτυπία. Αυτό το αποτέλεσμα συνάδει με τις εισηγήσεις ερευνητών που υπογραμμίζουν τη στενή σχέση που έχει η πρωτοτυπία με τη φαντασία. Με βάση τον White (1990), η φαντασία «είναι συνδεδεμένη με την ανακάλυψη, την εφεύρεση και την πρωτοτυπία» (σ. 186), ενώ οι Lev-Zamir και Leikin (2011) στην έρευνά τους ταυτίζουν την πρωτοτυπία με τη φαντασία.

Δεύτερο Ερευνητικό Ερώτημα – Γνωστικές Διαδικασίες Φαντασίας στα Μαθηματικά

Ένας άλλος στόχος της διατριβής είναι να διερευνήσει και να αποκρυσταλλώσει τις γνωστικές διαδικασίες που εκδηλώνουν μαθητές δημοτικής εκπαίδευσης κατά την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος ενόρασης (Weisberg, 1995), δεδομένου ότι η μέχρι στιγμής συζήτηση αναφορικά με την εμπειρία της ενόρασης περιορίζεται στις ανώτερες βαθμίδες της μαθηματικής πρακτικής (Liljedahl, 2005). Τον κατευθυντήριο γνώμονα για τη μελέτη και την ανάλυση των γνωστικών αυτών διαδικασιών αποτέλεσε το θεωρητικό μοντέλο του Wallas (1926) για τη δημιουργική διαδικασία, το οποίο έχει συμπυκνωθεί σε τέσσερα στάδια: την προετοιμασία, την επώαση, τον φωτισμό και την επαλήθευση (Cropley & Cropley, 2013). Ακολουθεί περιγραφή των διαδικασιών κάθε σταδίου της δημιουργικής διαδικασίας στις τρεις ομάδες μαθητών από τους οποίους λήφθηκαν ημι-δομημένες συνεντεύξεις: ομάδα χαμηλής, μέτριας και υψηλής ικανότητας επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων ενόρασης.

Πρωταρχικά, το στάδιο της προετοιμασίας διακρίνεται από την προθυμία και τα κίνητρα του ατόμου για να εξερευνήσει την κατάσταση και να συλλέξει πληροφορίες ώστε να λύσει το πρόβλημα (Yaftian, 2015). Σύμφωνα με τους Baker & Czarnocha (2015), το άτομο εστιάζει στο πρόβλημα και επιδίδεται στο να επεξεργαστεί τις διαστάσεις του. Οι διαστάσεις του συγκεκριμένου μαθηματικού προβλήματος στις οποίες έπρεπε να επικεντρώσουν την προσοχή τους οι μαθητές ήταν οι αριθμοί του σχήματος και οι σχέσεις ανάμεσά τους. Αναφορικά με τους αριθμούς, οι μαθητές έπρεπε να διερευνήσουν τους διαφορετικούς συνδυασμούς αριθμών, αναλογιζόμενοι το μέγεθος και τη θέση τους εντός του δοσμένου διαγράμματος. Σχετικά με τις σχέσεις των αριθμών, έπρεπε να πειραματιστούν με διαφορετικά είδη πράξεων, είτε αθροιστικής είτε πολλαπλασιαστικής δομής και να εξερευνήσουν την επίδραση της κάθε πράξης στο μέγεθος του αποτελέσματος που προκύπτει κάθε φορά.

Αντιπαραβάλλοντας τις τρεις ομάδες μαθητών ως προς την αναγνώριση της προβληματικής κατάστασης, κοινό μοτίβο ανάμεσα στις ομάδες ήταν ότι όλες είχαν αντιληφθεί ποιο είναι το ακριβές ζητούμενο της προβληματικής κατάστασης. Ανομοιογένεια όμως εντοπίστηκε ως προς την κατανόηση των δεδομένων. Οι μαθητές με υψηλή ικανότητα στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων ενόρασης κατανόησαν πιο εύκολα τις πληροφορίες που δίνονταν, σε σύγκριση με την ομάδα μέτριας ικανότητας, στην οποία υπήρξαν περιπτώσεις μαθητών που δεν ήταν σε θέση να αντιληφθούν ότι πίσω από τους αριθμούς του σχήματος κρύβεται μια συγκεκριμένη σχέση. Τέλος, η ομάδα χαμηλής ικανότητας παρουσίασε την πιο σοβαρή δυσκολία στο να συλλάβει τις πληροφορίες του προβλήματος. Αυτή η ανομοιογένεια ανάμεσα στις τρεις ομάδες μαθητών ενδεχομένως να οφείλεται στο διαφορετικό γνωσιολογικό υπόβαθρο που μπορεί να έχουν στα μαθηματικά, αφού η γνώση αποτελεί το εφαλτήριο για την αντιμετώπιση απαιτητικών προβλημάτων (Seelig, 2012).

Συγχρόνως, η διαδικασία εντοπισμού σχέσεων από τους μαθητές κατά το στάδιο της προετοιμασίας μπορεί να ερμηνευθεί έχοντας ως κατευθυντήριο γνώμονα την ταξινομία SOLO (Structure of Observed Learning Outcomes) (Biggs & Collis, 1982). Η ταξινομία SOLO κάνει λόγο σε πέντε στάδια κατανόησης:

(α) Προ-δομικό: ο μαθητής αποτυγχάνει να ανταποκριθεί στο έργο

(β) Μονο-δομικό: ο μαθητής λαμβάνει υπόψη μια σχετική πτυχή του έργου

(γ) Πολύ-δομικό: λαμβάνει υπόψη πολλές σχετικές αλλά ανεξάρτητες πτυχές

(δ) Συσχετιστικό: διασυνδέει τις πτυχές σε μια ενιαία δομή

(ε) Εκτεταμένη Αφαίρεση: γενικεύει σε νέες καταστάσεις.

Έτσι, κάθε μοτίβο που ανιχνεύθηκε στις συμπεριφορές των μαθητών κατά τη διαδικασία εντοπισμού αριθμητικών σχέσεων εντός του σχήματος μπορεί να αντιστοιχηθεί με ένα στάδιο κατανόησης της ταξινομίας SOLO, όπως δείχνει και ο Πίνακας 5.1.

Ο Πίνακας 5.2 αναλύει τα στάδια κατανόησης που εμφανίστηκαν σε κάθε ομάδα κατά τη διαδικασία του εντοπισμού σχέσεων στο πρόβλημα των συνεντεύξεων. Συνοψίζονται τα κυρίαρχα μοτίβα και οι αποκλίσεις που παρατηρήθηκαν στις συνεντεύξεις κάθε ομάδας. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 5.2, οι τρεις ομάδες διαφορετικής ικανότητας κινήθηκαν σε μια εξελικτική τροχιά ως προς τη διαδικασία εντοπισμού σχέσεων, εφόσον ανιχνεύθηκαν διαφορετικά μοτίβα συμπεριφοράς ανάμεσά τους.

Πίνακας 5.1

Αντιστοίχιση Μοτίβων Συμπεριφοράς της Διαδικασίας Εντοπισμού Σχέσεων με τα Στάδια Κατανόησης της Ταξινομίας SOLO

Μοτίβα Συμπεριφοράς Μαθητών	Στάδια Κατανόησης Ταξινομίας SOLO
Τυχαία εκτέλεση πράξεων	Μονο-δομικό
Σχέση μεταξύ μεμονωμένων αριθμών του σχήματος: -αθροιστικής/πολλαπλασιαστικής δομής ή -εντοπισμός κοινού 16 στις άκρες του σχήματος	Πολύ-δομικό
Σχέσεις ανάμεσα σε στήλες/ διαγώνιους	Συσχετιστικό
Σχέσεις ανάμεσα σε στήλες/ διαγώνιους ΚΑΙ ξεκάθαρη σύγκριση προβλήματος με άλλα παρόμοια προβλήματα	Εκτεταμένης αφαίρεσης

Η ομάδα χαμηλής ικανότητας περιορίστηκε στο μονοδομικό στάδιο κατανόησης κατά την αναγνώριση σχέσεων εντός του σχήματος, με την τυχαία εκτέλεση πράξεων να αποτελεί την επικρατούσα στρατηγική λύσης ανάμεσα στους μαθητές. Μεμονωμένες εξαιρέσεις εντοπίστηκαν από το πολυδομικό και το συσχετιστικό στάδιο κατανόησης. Η ομάδα μέτριας ικανότητας, πέραν από το μονοδομικό στάδιο, μετέβηκε και στο πολυδομικό στάδιο κατανόησης, καθότι οι πλείστοι μαθητές της ομάδας κατόρθωσαν να ανακαλύψουν και αθροιστικές ή πολλαπλασιαστικές σχέσεις μεταξύ μεμονωμένων αριθμών του σχήματος. Μόνο δυο μαθητές απέκλιναν, παρουσιάζοντας ενδείξεις για κατάκτηση του συσχετιστικού σταδίου, που όμως είχαν και οι δυο λάβει δυο βοήθειες από την ερευνήτρια. Τέλος, η ομάδα υψηλής ικανότητας ήταν η μόνη ομάδα που έφτασε το στάδιο της εκτεταμένης αφαίρεσης, νοουμένου ότι οι πλείστοι μαθητές της ομάδας μπόρεσαν χωρίς καμία βοήθεια να βρουν τη σχέση του σταθερού αθροίσματος στις στήλες του σχήματος, αξιοποιώντας τις εμπειρίες τους από την επίλυση συναφών προβλημάτων.

Πίνακας 5.2

Στάδια Κατανόησης Ταξινομίας SOLO κατά τη Διαδικασία Εντοπισμού Σχέσεων στις Τρεις Ομάδες Μαθητών

	Χαμηλής ικανότητας	**Μέτριας ικανότητας**	**Υψηλής ικανότητας**
Μονοδομικό	<u>Κυρίαρχο μοτίβο:</u> M1-M6	<u>Κυρίαρχο μοτίβο:</u> M7,M8,M10,M11,M12	M17 και M18
Πολυδομικό	<u>Απόκλιση</u>: M5	<u>Κυρίαρχο μοτίβο:</u> M8,M9,M10,M12	M15 και M16
Συσχετιστικό	<u>Απόκλιση</u>: M4 (ερμηνεία: λήψη δυο βοηθειών)	<u>Αποκλίσεις:</u> M11 και M12 (ερμηνεία: λήψη δυο βοηθειών)	M17και M18
Εκτεταμένης αφαίρεσης	---	---	<u>Κυρίαρχο μοτίβο:</u> M13, M14, M15, M16 (χωρίς βοήθεια)

Επομένως, ο βαθμός διερεύνησης των σχέσεων της προβληματικής κατάστασης ήταν ανάλογος της ικανότητας των μαθητών στην λύση προβλημάτων ενόρασης. Όσο πιο υψηλή ικανότητα έχουν οι μαθητές στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων ενόρασης τόσο πιο ευέλικτα και εις βάθος διερευνούν τις διαστάσεις μιας νέας προβληματικής κατάστασης με την οποία έρχονται αντιμέτωποι. Αυτό το συμπέρασμα συνάδει με τη θέση ότι «τα άτομα που χαρακτηρίζονται από φαντασία μπορούν να σκέφτονται πολλές πιθανές επιλογές, με πλούσιες λεπτομέρειες» (White, 1990, σ. 185) και ότι η φαντασία επιτρέπει στα άτομα να εξάγουν νέες ιδέες από αυτά που έχουν μάθει (Chen, 2000).

Επιπλέον, η έρευνα αυτή επιβεβαίωσε εμπειρικά την αναφορά του Savic (2016) ότι η προετοιμασία είναι το πιο σημαντικό στάδιο από τα τέσσερα στάδια της δημιουργικής διαδικασίας, αφού χωρίς αυτό το στάδιο το άτομο δεν μπορεί να μεταβεί και να εμπλακεί σε κανένα από τα υπόλοιπα τρία στάδια. Συγκεκριμένα, οι μαθητές που κατόρθωσαν χωρίς καμία βοήθεια να επιλύσουν ορθά το μαθηματικό πρόβλημα ήταν οι μαθητές της ομάδας υψηλής ικανότητας. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως οι μαθητές αυτοί ήταν οι μόνοι που κατά την προετοιμασία είχαν κατακτήσει το στάδιο της εκτεταμένης αφαίρεσης, διερευνώντας σε βάθος τις σχέσεις ανάμεσα στις στήλες του σχήματος. Αντίθετα, οι υπόλοιποι μαθητές, που δεν είχαν εξετάσει σε βάθος τις διαστάσεις της προβληματικής κατάστασης, αντιμετώπισαν σοβαρές δυσκολίες κατά τη λύση του προβλήματος , οι οποίες τους εμπόδισαν τελικά να προσεγγίσουν την ορθή λύση.

Το στάδιο της επώασης πραγματώθηκε με διαφορετικό τρόπο στις τρεις ομάδες μαθητών. Αυτή η διαπίστωση συγκλίνει με τις ερευνητικές θέσεις που υποστηρίζουν ότι η επώαση μπορεί να διαρκέσει από μερικά λεπτά μέχρι και χρόνια ολόκληρα (Aldous, 2007; Liljedhal, 2004). Ο Πίνακας 5.3 παρουσιάζει τα κυρίαρχα μοτίβα και τις αποκλίνουσες περιπτώσεις που αναδύθηκαν κατά το στάδιο της επώασης στις ομάδες των τριών επιπέδων ικανότητας λύσης μαθηματικών προβλημάτων ενόρασης.

Από τη μια, στην ομάδα με χαμηλή και μέτρια ικανότητα στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων ενόρασης η επώαση εκφράστηκε ως δυσκολία κατά την προσπάθεια επίλυσης του μαθηματικού προβλήματος, κάτι που φάνηκε από την αβεβαιότητά τους για την αριθμητική πράξη που θα έπρεπε να εκτελέσουν και από το αίτημά τους για παραχώρηση βοήθειας από την ερευνήτρια. Έτσι επιβεβαιώθηκε και εμπειρικά ότι στο στάδιο της επώασης οι μαθητές δημοτικού αδυνατούν για κάποιο χρονικό διάστημα να προσεγγίσουν τη λύση του προβλήματος σε συνειδητό επίπεδο (Liljedhal, 2004, 2013) και φτάνουν σε ένα αδιέξοδο (Savic, 2016).

Μάλιστα, στην ομάδα με χαμηλή ικανότητα σε δυο περιπτώσεις η επώαση εκδηλώθηκε ως τελειωτική παραίτηση από τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος και πλήρης αδυναμία να υπερπηδήσουν το αδιέξοδο που βίωναν. Το εν λόγω φαινόμενο μπορεί να αποδοθεί στις χαμηλές πεποιθήσεις επάρκειας που διακατείχαν τους συγκεκριμένους μαθητές στα Μαθηματικά, δεδομένου πως οι πεποιθήσεις επάρκειας του ατόμου για ένα έργο είναι ο πιο αξιόπιστος παράγοντας πρόβλεψης της συμπεριφοράς του στο στάδιο ανάληψης και εκτέλεσης του έργου (Bandura, 1995; Pajares, 1996). Συμπερασματικά, οι πεποιθήσεις επάρκειας των μαθητών για το γνωστικό αντικείμενο είναι ένας παράγοντας που μπορεί είτε να διευκολύνει είτε να αναστείλει τη μετάβασή τους από το στάδιο της επώασης στο στάδιο του φωτισμού.

Από την άλλη, οι μαθητές της ομάδας με υψηλή ικανότητα στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων ενόρασης βίωσαν πιο ανώδυνα το στάδιο της επώασης. Παρά το ότι οι πλείστοι μαθητές αντιμετώπισαν μια μικρότερου βαθμού δυσκολία μέχρι να προσεγγίσουν τη λύση, κανείς τους δε χρειάστηκε τη βοήθεια της ερευνήτριας κατά τη διαδικασία της επίλυσης του προβλήματος. Επίσης, οι δυο μαθητές της ομάδας με την πιο υψηλή επίδοση στα τρία μαθηματικά προβλήματα ενόρασης που τους είχαν δοθεί προς επίλυση κατά την επιλογή του δείγματος των συνεντεύξεων δε βίωσαν καν το στάδιο της επώασης. Επομένως, έχοντας ανεπτυγμένη τη μια εκ των τριών ικανοτήτων της φαντασίας στα μαθηματικά, μπόρεσαν να διέλθουν απευθείας από το στάδιο της προετοιμασίας στο στάδιο του φωτισμού. Εξάλλου, η φαντασία στην κορύφωσή της θεωρείται ως η εμπειρία του φωτισμού, της ενόρασης, της έμπνευσης και του άλματος (Wheeler-Brownlee, 1985).

Πίνακας 5.3

Συνοπτική Παρουσίαση του Σταδίου της Επώασης

Χαμηλής και μέτριας ικανότητας	**Υψηλής ικανότητας**
<u>Κυρίαρχο μοτίβο:</u> Σημαντική δυσκολία • αβεβαιότητα για αριθμητική πράξη • αίτημα για βοήθεια	<u>Κυρίαρχο μοτίβο:</u> Μικρότερη δυσκολία • δε χρειάστηκαν βοήθεια
<u>Αποκλίσεις:</u> Μ1 και Μ2: οριστική παραίτηση (ερμηνεία: χαμηλές πεποιθήσεις επάρκειας στα Μαθηματικά)	<u>Αποκλίσεις:</u> Μ13 και Μ14: απευθείας μετάβαση στο στάδιο του φωτισμού (ερμηνεία: η πιο ψηλή ικανότητα επίλυσης προβλημάτων ενόρασης)

Το στάδιο του φωτισμού σηματοδοτείται από την εμπειρία της ενόρασης, τη λεγόμενη εμπειρία του «Aha!» ή του Εύρηκα (Aldous, 2007; Burton, 1999; Carpenter, 2019; Liljedahl, 2004, 2005, 2013; Shen et al., 2013; Sriraman, 2009; Weisberg, 2015), όταν η λύση στην προβληματική κατάσταση εμφανίζεται στο μυαλό (Bowden et al., 2005; Carpenter, 2019; Liljedhal, 2004, 2013; Smith, 1995; Yaftian, 2015). Ο Πίνακας 5.4 παραθέτει τα κυρίαρχα μοτίβα και τις αποκλίνουσες περιπτώσεις κατά το στάδιο του φωτισμού ως προς την ορθότητα των απαντήσεων που έδωσαν οι τρεις ομάδες.

Πίνακας 5.4

Συνοπτική Παρουσίαση της Ορθότητας των Απαντήσεων κατά το Στάδιο του Φωτισμού

Χαμηλής ικανότητας	**Μέτριας ικανότητας**	**Υψηλής ικανότητας**
Κυρίαρχο μοτίβο: Μ3-Μ6: εσφαλμένη απάντηση Αποκλίσεις: Μ1 και Μ2: καμία απάντηση	Κυρίαρχο μοτίβο: Μ7, Μ8, Μ9, Μ11: εσφαλμένη απάντηση Αποκλίσεις: Μ10: ορθή απάντηση (ερμηνεία: τυχαία εύρεση ορθής απάντησης) Μ12: ορθή απάντηση (ερμηνεία: λήψη δυο βοηθειών)	Κυρίαρχο μοτίβο: Μ13-Μ18: ορθή απάντηση

Ανάμεσα στις τρεις ομάδες μαθητών, μόνο οι μαθητές της ομάδας που είχαν ανεπτυγμένη ικανότητα στην επίλυση προβλημάτων ενόρασης διερεύνησαν εις βάθος τις σχέσεις εντός του σχήματος, βρίσκοντας την ορθή λύση, χωρίς να λάβουν εξωτερική βοήθεια. Μάλιστα, δυο από τους μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας βρήκαν την ορθή απάντηση αμέσως μόλις ανέγνωσαν το πρόβλημα μια και μόνο φορά. Την ίδια στιγμή, υπήρξαν και δυο περιπτώσεις μαθητών από την ομάδα μέτριας ικανότητας που βρήκαν την ορθή απάντηση. Ωστόσο, αυτό αποδόθηκε σε άλλους παράγοντες και συγκεκριμένα στον παράγοντα της τύχης, στην πρώτη περίπτωση, και στη λήψη βοήθειας από την ερευνήτρια, στη δεύτερη περίπτωση. Το συμπέρασμα αυτό ευθυγραμμίζεται με το ότι η φαντασία είναι άρρηκτα συνδεμένη με το στάδιο του φωτισμού (Greene, 2000). Η φαντασία διεγείρει τις ικανότητες λύσης προβλήματος (Lindstrand, 2010) και λειτουργεί ως ένα εργαλείο για να ξεκλειδώσει και να ανακαλύψει κανείς μαθηματικές ιδέες (Jagals & van der Walt, 2018).

Αντιπαραβάλλοντας το στάδιο του φωτισμού ανάμεσα στους μαθητές που κατέληξαν στην ορθή απάντηση και αυτούς που βρήκαν εσφαλμένες απαντήσεις, το στάδιο του φωτισμού βιώθηκε με πιο έντονο τρόπο από τους μαθητές που βρήκαν ορθή απάντηση, συμφωνώντας με τους Danek και Wiley (2017). Ο Πίνακας 5.5 περιγράφει το πώς διαφοροποιήθηκαν οι τρεις διαστάσεις της εμπειρίας ενόρασης στις δυο περιπτώσεις.

Πίνακας 5.5

Συνοπτική Παρουσίαση της Εμπειρίας της Ενόρασης κατά το Στάδιο του Φωτισμού

Μαθητές με λανθασμένη απάντηση	**Μαθητές με ορθή απάντηση**
Συναισθηματική διάσταση: Κυρίαρχο μοτίβο: καμία αναφορά σε θετικά συναισθήματα Αποκλίσεις: Μ6: λίγη χαρά (ερμηνεία: εξάσκηση με παρόμοια προβλήματα) Μ8: Αυτοπεποίθηση (ερμηνεία: η εμπειρία του «Aha!» μπορεί να μετασχηματίσει θετικά τις πεποιθήσεις για τα μαθηματικά (Liljedhal, 2013))	**Συναισθηματική διάσταση:** Κυρίαρχο μοτίβο: θετικά συναισθήματα: χαρά, ικανοποίηση Αποκλίσεις: Μ13 και Μ14: κανένα συναίσθημα (ερμηνεία: εξοικείωση με συναφή προβλήματα)
Τρόπος εμφάνισης απάντησης: Κυρίαρχο μοτίβο: Όχι ξαφνική εμφάνιση Αποκλίσεις: Μ5, Μ6 και Μ9 Οπτική ερευνήτριας: όχι ξαφνική εμφάνιση Οπτική μαθητών: ξαφνική εμφάνιση (ερμηνεία: -ήπιες, μη εμφανείς εμπειρίες ενόρασης -λανθασμένη ενόραση (Ohlosson, 1984))	**Τρόπος εμφάνισης απάντησης:** Κυρίαρχο μοτίβο: Πιο ξαφνική εμφάνιση Αποκλίσεις: Μ13 Οπτική ερευνήτριας: ξαφνική εμφάνιση Οπτική μαθήτριας: σταδιακή εμφάνιση μετά από σκέψη (ερμηνεία: μικρές εμπειρίες ενόρασης (Sawyer, 2011))
Βαθμός βεβαιότητας για ορθότητα απάντησης: Κυρίαρχο μοτίβο: Αβεβαιότητα Αποκλίσεις: Μ4: βεβαιότητα (ερμηνεία: λήψη δυο βοηθειών) Μ8: βεβαιότητα (ερμηνεία: υψηλές πεποιθήσεις επάρκειας στα μαθηματικά)	**Βαθμός βεβαιότητας για ορθότητα απάντησης:** Κυρίαρχο μοτίβο: Βεβαιότητα

Αναφορικά με τη συναισθηματική διάσταση της εμπειρίας της ενόρασης, οι μαθητές που ανακάλυψαν την ορθή απάντηση στο πρόβλημα αισθάνθηκαν θετικά συναισθήματα, και συγκεκριμένα χαρά και ικανοποίηση, όταν βρήκαν τη λύση. Από την άλλη, οι λανθασμένες απαντήσεις δεν προκάλεσαν ως επί το πλείστον έντονα θετικά συναισθήματα. Το συγκεκριμένο συμπέρασμα συνάδει με τον ισχυρισμό των Danek και Wiley (2017) ότι οι ορθές απαντήσεις οδηγούν σε πιο ψηλά επίπεδα ευχαρίστησης σε σύγκριση με τις λανθασμένες. Στο πιο πάνω συμπέρασμα παρατηρήθηκαν όμως και δυο αποκλίσεις. Πρώτον, δυο περιπτώσεις μαθητών που βρήκαν ορθή απάντηση δεν βίωσαν κανένα απολύτως συναίσθημα, ίσως λόγω της πολλής εξοικείωσης που είχαν με συναφή προβλήματα. Μια άλλη εξαίρεση ήταν η περίπτωση ενός μαθητή, που ενώ είχε βρει εσφαλμένη απάντηση στο πρόβλημα, δήλωσε ότι η εύρεση της λύσης του δημιούργησε αυτοπεποίθηση. Αυτή η περίπτωση έρχεται να επιβεβαιώσει και στο πεδίο των μαθηματικών ότι η εμπειρία του «Aha!» μπορεί να μετασχηματίσει θετικά τις πεποιθήσεις και τις στάσεις του μαθητή για τα μαθηματικά (Liljedhal, 2005, 2013).

Αναφορικά με τη διάσταση του τρόπου εμφάνισης της απάντησης, οι ορθές απαντήσεις εμφανίστηκαν πολύ πιο ξαφνικά από ότι οι λανθασμένες, κάτι που είχαν υποστηρίξει και οι Danek & Wiley (2017). Η ξαφνική εμφάνιση των ορθών απαντήσεων διαπιστώθηκε από τα γλωσσικά στοιχεία της επικοινωνίας των μαθητών, δηλαδή το επιφώνημα «Aha!» που έκαναν κατά την εύρεση της λύσης (Webb et al., 2018) καθώς και την απότομη αλλαγή της αναπαράστασης που είχαν για το πρόβλημα (Carpenter, 2019). Εκτός από τα γλωσσικά στοιχεία, τα παραγλωσσικά (αυξημένη ένταση φωνής) αλλά και τα εξωγλωσσικά στοιχεία (γούρλωμα ματιών) της επικοινωνίας τους παρείχαν επίσης ισχυρές ενδείξεις περί ξαφνικής εμφάνισης των ορθών απαντήσεων.

Εξαίρεση αποτέλεσε μια μαθήτρια που κατόρθωσε να βρει την ορθή απάντηση. Αν και εξωτερικά η εμπειρία της ενόρασης που βίωσε φάνηκε να εκδηλώθηκε ξαφνικά, σύμφωνα με τη μαθήτρια η λύση εμφανίστηκε στο μυαλό της μετά από σκέψη. Επιβεβαιώνονται, λοιπόν, ο Sawyer (2011) και ο Weisberg (1986). Ο Sawyer (2011) θεωρεί την ενόραση όχι ως το ξαφνικό άναμμα ενός λαμπτήρα αλλά ως την κορυφή του παγόβουνου, καθώς φαίνεται να είναι ξαφνική επειδή δεν παρατηρούμε τα σταδιακά βήματα ή τις μικρές εμπειρίες ενόρασης που προηγούνται στο μυαλό του ατόμου. Επιπλέον, σύμφωνα με τον Weisberg (1986), οι λύσεις σε καινούρια προβλήματα δεν εμφανίζονται πάντοτε μέσα από άλματα ενόρασης, αλλά απαιτούν μικρές μετακινήσεις μακριά από αυτά που γνωρίζει το άτομο.

Από την άλλη, οι εσφαλμένες απαντήσεις δεν έκαναν ξαφνική εμφάνιση στη συντριπτική τους πλειοψηφία, όπως φάνηκε από τις δηλώσεις των μαθητών και από την εξωτερική παρατήρηση των γλωσσικών, παραγλωσσικών και εξωγλωσσικών στοιχείων της επικοινωνίας τους. Σε κάποιες εξαιρετικές περιπτώσεις οι λανθασμένες απαντήσεις εμφανίστηκαν ξαφνικά, χωρίς όμως να καταστούν εξωτερικά αναγνωρίσιμες , καθότι δεν ήταν ιδιαίτερα έντονες εμπειρίες. Επαληθεύτηκε έτσι η ύπαρξη περιπτώσεων «λανθασμένης ενόρασης» (Ohlosson, 1984, σ. 124)

Σχετικά με τον βαθμό βεβαιότητας των μαθητών για την ορθότητα των απαντήσεών τους, τα δεδομένα της έρευνας έδειξαν ότι οι ορθές απαντήσεις συνοδεύονταν από πιο δυνατό αίσθημα βεβαιότητας σε σύγκριση με τις λανθασμένες απαντήσεις, συμφωνώντας με τους Danek και Wiley (2017) . Σε δυο μόνο περιπτώσεις οι λανθασμένες απαντήσεις δημιούργησαν βεβαιότητα στα άτομα, γεγονός που αποδόθηκε στη βοήθεια που είχε λάβει η πρώτη από την ερευνήτρια κατά τη διαδικασία της λύσης και στις υψηλές πεποιθήσεις επάρκειας που διακατείχαν τη δεύτερη για το αντικείμενο των μαθηματικών.

Τέλος, το στάδιο της επαλήθευσης εμπλέκει τους μαθητές σε μια προσπάθεια εξέτασης, βελτίωσης, αξιολόγησης, επιβεβαίωσης, καταγραφής, ελέγχου και επικοινωνίας της νέας ιδέας (Yaftian, 2015). Ο Πίνακας 5.6 παρουσιάζει και αντιπαραβάλλει τα κυρίαρχα μοτίβα και τις αποκλίσεις που παρατηρήθηκαν κατά τη διαδικασία επιβεβαίωσης και της πειστικότητας στο στάδιο της επαλήθευσης, ανάμεσα στις τρεις ομάδες μαθητών με διαφορετικό επίπεδο ικανότητας επίλυσης προβλημάτων ενόρασης.

Οι μαθητές χαμηλής ικανότητας στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων ενόρασης δεν παρείχαν καθόλου ενδείξεις εκδήλωσης διαδικασιών επαλήθευσης της ορθότητας της απάντησής τους. Οι μαθητές μέτριας ικανότητας επέδειξαν σε κάποιο βαθμό διάθεση για έλεγχο της ορθότητας της απάντησης και προσπάθεια εύρεσης της πιο κατάλληλης λύσης. Από την άλλη, για τους μαθητές υψηλής ικανότητας το στάδιο της επαλήθευσης είχε ιδιαίτερο ρόλο, καθότι ενεπλάκησαν πολύ πιο ενεργά στη διαδικασία ελέγχου της απάντησής τους. Στις πλείστες των περιπτώσεων, επεδίωκαν να ελέγχουν εάν η σχέση που εντόπιζαν επαληθευόταν και με τους υπόλοιπους αριθμούς του σχήματος. Παράλληλα, παρατηρήθηκαν αρκετές ενδείξεις όπου οι μαθητές έβλεπαν κριτικά κάθε λύση που έβρισκαν ώστε να κρατήσουν την πλέον κατάλληλη. Συγχρόνως, είχαν κίνητρο για να επεξεργάζονται σε περισσότερο βάθος τις μαθηματικές τους ιδέες και να αναλογίζονται πώς θα μπορούσαν να τις βελτιώσουν.

Πίνακας 5.6

Συνοπτική Παρουσίαση του Σταδίου της Επαλήθευσης

Χαμηλής ικανότητας	**Μέτριας ικανότητας**	**Υψηλής ικανότητας**
(i) Επιβεβαίωση:		
Κυρίαρχο μοτίβο: M4 και M5: Μη έλεγχος αν οι σχέσεις επιβεβαιώνονται και με άλλους αριθμούς M6: Μειωμένο ενδιαφέρον για βελτίωση λύσης	Κυρίαρχο μοτίβο: M8, M9, M10: Μη έλεγχος αν οι σχέσεις επιβεβαιώνονται και με άλλους αριθμούς Αποκλίσεις: M11 και M12: Έλεγχος αν οι σχέσεις επιβεβαιώνονται σε όλες τις στήλες (ερμηνεία: λήψη δυο βοηθειών) M8, M9, M10: Αξιολόγηση λύσεων και επιλογή της πιο κατάλληλης	Κυρίαρχο μοτίβο: M13-M18: Έλεγχος αν οι σχέσεις επιβεβαιώνονται σε όλες τις στήλες M13 και M16: Αξιολόγηση λύσεων και επιλογή της πιο κατάλληλης M16: Ενδιαφέρον για βελτίωση λύσης
(ii) Πειστικότητα:		
Κυρίαρχο μοτίβο: M4: Δυσκολία αιτιολόγησης M3-M6: Άστοχες αιτιολογήσεις	Κυρίαρχο μοτίβο: M7: Δυσκολία αιτιολόγησης M7-M12: Άστοχες αιτιολογήσεις Αποκλίσεις: M10: Αιτιολόγηση βάσει: -σχέσης που εντοπίστηκε σε δυο στήλες -πλήθους αριθμών κάθε στήλης M12: Αιτιολόγηση βάσει σχέσης του σταθερού αθροίσματος όλων των στηλών του σχήματος (ερμηνεία: λήψη δυο βοηθειών)	Κυρίαρχο μοτίβο: Πιο εύστοχες αιτιολογήσεις: M13-M18: Αιτιολόγηση βάσει σχέσης του σταθερού αθροίσματος όλων των στηλών του σχήματος M13, M14, M15: Αιτιολόγηση βάσει μεγέθους αριθμών κάθε στήλης

Πέραν τούτου, το στάδιο της επαλήθευσης περιλαμβάνει και την πειστικότητα των απαντήσεων, όπου το άτομο μετατρέπει τη λύση σε μορφή τέτοια που να μπορεί να την κοινοποιήσει και σε άλλα άτομα (Baker & Czarnocha, 2015; Sriraman, 2004). Με βάση τα δεδομένα των συνεντεύξεων, οι μαθητές με υψηλή ικανότητα στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων ενόρασης έτειναν να προβάλλουν πιο εύστοχες αιτιολογήσεις για τις μαθηματικές τους ιδέες σε σύγκριση με τους υπόλοιπους μαθητές. Όλοι μαθητές της ομάδας με υψηλή ικανότητα έλαβαν υπόψη τη σχέση του σταθερού αθροίσματος όλων των στηλών του σχήματος στην προσπάθειά τους να πείσουν για τη λογικότητα των μαθηματικών τους ιδεών. Σε κάποιες περιπτώσεις, βασίστηκαν και στο μέγεθος των αριθμών κάθε στήλης. Αντίθετα, οι μαθητές της ομάδας με χαμηλή και μέτρια ικανότητα διατύπωναν κυρίως άστοχες μαθηματικές αιτιολογήσεις για τις εκάστοτε μαθηματικές ιδέες τους. Μεμονωμένες εξαιρέσεις για πιο καίριες αιτιολογήσεις ανιχνεύθηκαν στην ομάδα με μέτρια ικανότητα, οι οποίες βασίζονταν στο πλήθος των αριθμών κάθε στήλης ή στη σχέση του σταθερού αθροίσματος των στηλών του σχήματος.

Ένα άλλο συμπέρασμα που προέκυψε από την ανάλυση των δεδομένων ήταν ότι το πρόβλημα ενόρασης που αξιοποιήθηκε στις συνεντεύξεις ήταν κατάλληλο για την εκδήλωση των διαδικασιών της φαντασίας στα μαθηματικά (Weisberg, 1995). Δεδομένου ότι το πρόβλημα δεν είχε πολλούς περιορισμούς και δεν απαιτούσε πολλά βήματα για να επιλυθεί (Danek & Wiley, 2017), ευνοούσε την ενεργοποίηση των τεσσάρων σταδίων της δημιουργικής διαδικασίας (Wallas, 1926). Οι μαθητές μπόρεσαν να επιλύσουν ορθά το πρόβλημα μόνο όταν αναδόμησαν την αρχική αναπαράσταση του προβλήματος και στράφηκαν σε νέες στρατηγικές (Gilhooly & Murphy, 2005).

Παρόλα αυτά, η έρευνα επιβεβαίωσε ότι και στο πεδίο των μαθηματικών τα προβλήματα ενόρασης διέπονται από περιορισμούς (Bowden et al., 2005). Για παράδειγμα, από τη συνέντευξη μιας μαθήτριας φάνηκε ότι η ορθή επίλυση των προβλημάτων ενόρασης δεν είναι κατ' ανάγκην αποτέλεσμα βίωσης μιας εμπειρίας ενόρασης αλλά μπορεί να οφείλεται στον παράγοντα της τύχης. Επίσης, σε άλλη περίπτωση, η εξωτερική παρατήρηση της συμπεριφοράς της μαθήτριας οδήγησε εσφαλμένα στο συμπέρασμα ότι η μαθήτρια είχε βιώσει ξαφνικά μια εμπειρία ενόρασης, χωρίς αυτό να υφίσταται στην πραγματικότητα. Ως εκ τούτου, είναι κριτικής σημασίας η εξωτερίκευση των μύχιων σκέψεων των μαθητών κατά τη διερεύνηση των γνωστικών διαδικασιών της φαντασίας στα μαθηματικά για να μπορεί να διαλευκανθεί κατά πόσον οι μαθητές έχουν πράγματι βιώσει μια εμπειρία ενόρασης.

Η μελέτη των δεδομένων της έρευνας ανέδειξε και μια σειρά από παράγοντες που φαίνεται να παρεμβαίνουν στη διαδικασία επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων ενόρασης: οι προϋπάρχουσες εμπειρίες, οι γνώσεις, η γλωσσική επάρκεια και ο συναισθηματικός τομέας του μαθητή. Αναφορικά με τις προϋπάρχουσες εμπειρίες, φάνηκε ότι οι μαθητές που είχαν ήδη έρθει σε επαφή και εξασκηθεί με προβλήματα που ενεργοποιούν τη φαντασία στα μαθηματικά ήταν σε θέση να ανταποκριθούν πιο αποδοτικά σε μια νέα προβληματική κατάσταση. Επιβεβαιώθηκε έτσι και εμπειρικά ότι εάν η φαντασία καλλιεργηθεί επαρκώς στους μαθητές τότε προετοιμάζονται ώστε να εξερευνούν προβλήματα με νέους και καινοτόμους τρόπους (Eckhoff & Urbach, 2008) και να βρίσκουν δημιουργικές λύσεις σε μαθηματικά προβλήματα (Aldous, 2007).

Σχετικά με την κατοχή γνώσεων, η ανάλυση των δεδομένων των συνεντεύξεων κατέδειξε ότι οι γνώσεις που διαθέτει το άτομο μπορούν είτε να υποστηρίξουν τη δημιουργική λύση προβλημάτων, όπως υπογραμμίζει μια σημαντική μερίδα ερευνητών (CAIE, 2018; Seelig, 2012; Sternberg, 2006, 2012), είτε να ορθώσουν εμπόδια. Επιβεβαιώνεται έτσι και μια άλλη μερίδα ερευνητών που θεωρούν ότι οι γνώσεις μπορούν να αναχαιτίσουν τη δημιουργικότητα του ατόμου (Sternberg, 2006, 2012; Wiley, 1998), εγκλωβίζοντας το άτομο σε ανεπιτυχείς στρατηγικές λύσης (Wiley, 1998).

Η γλωσσική επάρκεια ήταν ακόμη ένας παράγοντας που φάνηκε να διαδραματίζει κρίσιμο ρόλο στη διαδικασία επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων ενόρασης. Αυτό το συμπέρασμα ευθυγραμμίζεται με τα συμπεράσματα άλλων ερευνών που έχουν δείξει ότι η μάθηση των μαθηματικών σε μια ξένη γλώσσα είναι μια σημαντική πρόκληση για πολλούς μαθητές (Van Rinsveld, Schiltz, Brunner, Landerl, & Ugen, 2016) και πως οι μαθητές μπορούν να κατανοούν και να επιλύσουν πιο εύκολα προβλήματα στη μητρική τους γλώσσα (Bernardo, 2002).

Τέλος, συναισθηματικές πτυχές του ατόμου φάνηκε να έχουν καταλυτική συμβολή στη διαδικασία επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων ενόρασης. Αυτό το συμπέρασμα συγκλίνει με την αναφορά της Seelig (2012) ότι οι στάσεις/πεποιθήσεις είναι η «σπίθα» που θέτει σε κίνηση όλα τα μέρη του μοντέλου. Μάλιστα, στις συνεντεύξεις φάνηκε ότι κεντρικό ρόλο έχουν και οι πεποιθήσεις του ατόμου για την αποτυχία και το λάθος, συμφωνώντας με την Boaler (2015) ότι είναι απαραίτητη η ενθάρρυνση όλων των μαθητών και η απόδοση αξίας στην αποτυχία. Μελλοντικές έρευνες μπορούν να διερευνήσουν σε βάθος τον τρόπο με τον οποίο οι προαναφερθέντες παράγοντες συνεισφέρουν στη διαδικασία επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων ενόρασης.

Τρίτο Ερευνητικό Ερώτημα – Περιγραφή των Σχέσεων ανάμεσα στους τρεις Εσωτερικούς Παράγοντες της Δημιουργικής Σκέψης στα Μαθηματικά

Τα αποτελέσματα κατέδειξαν ότι το μοντέλο που περιγράφει τις μεταξύ σχέσεις των εσωτερικών παραγόντων της μαθηματικής δημιουργικότητας σύμφωνα με το μοντέλο της Seelig (2012) επιβεβαιώνεται με βάση τα δεδομένα της διατριβής. Συγκεκριμένα, επιβεβαιώθηκε εμπειρικά πως οι μαθηματικές γνώσεις μπορούν σε μεγάλο βαθμό να ερμηνεύσουν τη διακύμανση της φαντασίας στα μαθηματικά, τεκμηριώνοντας έτσι την αναφορά της Seelig (2012) πως η γνώση είναι το καύσιμο για την ενεργοποίηση της φαντασίας, ανοίγοντας ευκαιρίες για δημιουργία νέων πρωτοποριακών ιδεών. Το πόρισμα αυτό βρίσκεται σε συμφωνία και με τις θέσεις άλλων ερευνητών. Ειδικότερα, αρκετοί ερευνητές τονίζουν πως ο μαθητής πρέπει να έχει πλούσια κατανόηση του περιεχομένου, για να μπορεί να επιδείξει δημιουργική σκέψη που εμβαθύνει και επεκτείνει τη μάθηση (CAIE, 2018; Sternberg, 2006, 2012).

Παράλληλα, επιβεβαιώθηκε εμπειρικά ότι η μαθηματική νοοτροπία επεξηγεί σε μέτριο βαθμό τη διακύμανση του παράγοντα των μαθηματικών γνώσεων, επεξηγώντας έτσι έμμεσα και τη διακύμανση του παράγοντα της φαντασίας στα μαθηματικά. Με άλλα λόγια, η μαθηματική νοοτροπία που διακατέχει τους μαθητές επηρεάζει τη διάθεσή τους να αποκτήσουν νέες μαθηματικές γνώσεις. Το αποτέλεσμα αυτό συμφωνεί και υποστηρίζει εμπειρικά ισχυρισμούς άλλων ερευνητών για τον ρόλο που διαδραματίζουν οι στάσεις/πεποιθήσεις του ατόμου και ειδικά οι πεποιθήσεις για τη φύση της ευφυΐας. Συγκεκριμένα, η Seelig (2012) υπογραμμίζει πως οι στάσεις/πεποιθήσεις που ενστερνίζεται το άτομο πυροδοτούν την περιέργειά του να αποκτήσει γνώσεις. Αναφορικά με τις πεποιθήσεις για τη φύση της ευφυΐας, σύμφωνα με τους Robins και Pals (2002), αναλόγως του ποια θεωρία για τη φύση της ευφυΐας ασπάζεται κάθε άτομο, τη σταθερή θεωρία ή την αυξητική, υπάρχουν και διαφορετικές επιπτώσεις στον ακαδημαϊκό του τομέα. Η κάθε θεωρία συνεπάγεται διαφορετικά μοτίβα κατανόησης, επεξήγησης και αντίδρασης απέναντι στις ακαδημαϊκές επιτυχίες και αποτυχίες (Dweck, 1999; Dweck & Leggett, 1988; Dweck & Sorich, 1999; Henderson & Dweck, 1990; Robins & Pals, 2002).

Κεφάλαιο 6: Συμπεράσματα

Εισαγωγή

Στο τρέχον κεφάλαιο, παρουσιάζονται συνοπτικά τα συμπεράσματα που έχουν εξαχθεί μέσα από τη συζήτηση των αποτελεσμάτων της διατριβής. Εν συνεχεία, αναλύονται οι προεκτάσεις που εγείρονται από τα συμπεράσματα της διατριβής αυτής από θεωρητικής, αλλά και πρακτικής πλευράς. Τέλος, έχοντας υπόψη τους περιορισμούς που διέπουν την παρούσα διατριβή, διατυπώνονται εισηγήσεις για μελλοντικές έρευνες με σκοπό την περαιτέρω βελτίωση και εμβάθυνση των ερευνητικών αποτελεσμάτων της διατριβής.

Συνοπτική Περιγραφή

Τα βασικά συμπεράσματα της εργασίας θα συνοψιστούν με βάση τα ερευνητικά ερωτήματα που καθοδηγούν τη διατριβή. Το πρώτο ερευνητικό ερώτημα της διατριβής αποτελούσε η παρουσίαση και η εμπειρική εξέταση ενός μοντέλου της φαντασίας στα μαθηματικά μέσα από δεδομένα από μαθητές Στ’ δημοτικού. Η ανάλυση των δεδομένων οδήγησε στο συμπέρασμα ότι τα δεδομένα των μαθητών του δείγματος επιβεβαιώνουν τη δομή του μοντέλου που περιγράφει τη φαντασία στα μαθηματικά ως έναν παράγοντα δευτέρας τάξης που ορίζεται από τρεις ικανότητες: την οπτικοποίηση, τις μετασχηματιστικές ικανότητες και την πρωτοτυπία. Η οπτικοποίηση ορίζεται ως ο νοερός χειρισμός χωρικών αντικειμένων με διαφορετικούς τρόπους (Arcavi, 1999; McGee, 1979 ; Michael et al., 1957; Presmeg, 1997) καθώς και η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων αλγεβρικής ικανότητας από την κατηγορία των προβλημάτων ενόρασης (Weisberg, 1995). Οι ικανότητες μετασχηματισμού επικεντρώνονται στην οριζόντια μαθηματικοποίηση, δηλαδή σε μια μετασχηματιστική διαδικασία από τον πραγματικό κόσμο στον κόσμο των συμβόλων (Freudenthal, 1991). Τέλος, η πρωτοτυπία αποτελεί την ικανότητα παραγωγής σπάνιων και μη τυπικών ιδεών (Guilford, 1967) σε έργα μετασχηματιστικών ικανοτήτων. Κατά συνέπεια, η ανάπτυξη της φαντασίας των μαθητών στα μαθηματικά προϋποθέτει επικέντρωση των εκπαιδευτικών στην παράλληλη καλλιέργεια των τριών αυτών συνιστωσών.

Ακόμη ένα κύριο συμπέρασμα της διατριβής σχετίζεται με τις γνωστικές διαδικασίες της φαντασίας των μαθητών στα μαθηματικά κατά τη διαδικασία επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος ενόρασης. Η ανάλυση των δεδομένων κατέληξε στο ότι οι διαδικασίες αυτές μπορούν να περιγραφούν με βάση τέσσερα στάδια: προετοιμασία, επώαση, φωτισμός και επαλήθευση. Ειδικότερα, στο στάδιο της προετοιμασίας, το άτομο προβαίνει σε εξερεύνηση της κατάστασης και τη συλλογή πληροφοριών ώστε να λύσει το πρόβλημα, αξιοποιώντας προϋπάρχουσες εμπειρίες. Ο βαθμός διερεύνησης των σχέσεων της προβληματικής κατάστασης φάνηκε να είναι ανάλογος της ικανότητας των μαθητών στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων ενόρασης.

Η επώαση αναφέρεται στην αδυναμία το ατόμου να ανακαλύψει τη λύση του προβλήματος για χρονικό διάστημα και στην αντιμετώπιση ενός αδιεξόδου. Στην ομάδα με χαμηλή και μέτρια ικανότητα η επώαση εκφράστηκε ως δυσκολία κατά την προσπάθεια επίλυσης του μαθηματικού προβλήματος και σε κάποιες περιπτώσεις μαθητών με χαμηλές πεποιθήσεις επάρκειας, εκδηλώθηκε ως τελειωτική παραίτηση. Αντίθετα, οι μαθητές με υψηλή ικανότητα στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων ενόρασης βίωσαν πιο ήπια το στάδιο της επώασης. Μάλιστα, ορισμένοι μαθητές που ήταν ιδιαίτερα ικανοί στην επίλυση τέτοιους είδους προβλημάτων δεν διήλθαν καν από το συγκεκριμένο στάδιο.

Το στάδιο του φωτισμού αναφέρεται στην ξαφνική εμφάνιση της λύσης στην προβληματική κατάσταση ως αναλαμπή και συνδέεται με την εμπειρία του «Aha!», η οποία φορτίζει το άτομο με συναισθήματα ευφορίας και έκπληξης. Το εν λόγω στάδιο βιώθηκε με πιο έντονο τρόπο από τους μαθητές που βρήκαν ορθή απάντηση παρά από αυτούς που βρήκαν εσφαλμένη, λαμβάνοντας υπόψη τις συναισθηματικές τους αντιδράσεις, τον τρόπο εμφάνισης της απάντησης καθώς και τον βαθμό βεβαιότητάς τους για την ορθότητα της απάντησης.

Η επαλήθευση εμπλέκει διαδικασίες αξιολόγησης, περαιτέρω επεξεργασίας και βελτίωσης της λύσης καθώς και επικοινωνίας των ιδεών σε άλλα άτομα. Ανάμεσα στις τρεις ομάδες μαθητών, οι μαθητές υψηλής ικανότητας ενεπλάκησαν πιο ενεργά στη διαδικασία αξιολόγησης και αιτιολόγησης των μαθηματικών τους ιδεών. Τέλος, ανιχνεύθηκαν και μια σειρά από παράγοντες που φαίνεται να παρεμβαίνουν στη διαδικασία επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων ενόρασης: οι προϋπάρχουσες εμπειρίες, οι μαθηματικές γνώσεις, η γλωσσική επάρκεια και πτυχές του συναισθηματικού κόσμου του μαθητή.

Το τρίτο ερώτημα της διατριβής στόχευε να ελέγξει ένα μοντέλο που επεξηγεί τις σχέσεις ανάμεσα στους τρεις εσωτερικούς παράγοντες της μαθηματικής δημιουργικότητας, σύμφωνα με το μοντέλο της Seelig (2012). Στο μοντέλο αυτό, οι μαθηματικές γνώσεις αναφέρονται στη βασική γνώση περιεχομένου, δηλαδή τη γνώση που μπορεί να ανακληθεί άμεσα και περιλαμβάνει την εννοιολογική και διαδικαστική γνώση (Jonassen, 2000). Η νοοτροπία αφορά στις πεποιθήσεις που ενστερνίζονται τα άτομα σχετικά με τη φύση της ευφυΐας και διακρίνεται στη στατική νοοτροπία (fixed mindset) και στη νοοτροπία ανάπτυξης (growth mindset) (Boaler, 2015; Dweck, 2006; Dweck et al., 2014). Το συμπέρασμα που εξήχθηκε ήταν ότι οι μαθηματικές γνώσεις μπορούν να ερμηνευθούν άμεσα και σε μέτριο βαθμό από τη μαθηματική νοοτροπία. Επίσης, η φαντασία στα μαθηματικά μπορεί να επεξηγηθεί άμεσα και σε μεγάλο βαθμό από τις μαθηματικές γνώσεις, ενώ την ίδια στιγμή ερμηνεύεται έμμεσα από τη μαθηματική νοοτροπία.

Εφαρμογές της Διατριβής σε Θεωρητικό, Μεθοδολογικό και Πρακτικό Επίπεδο

Από τα αποτελέσματα που εξήχθηκαν στην παρούσα διατριβή αναφύονται σημαντικές θεωρητικές, μεθοδολογικές και πρακτικές εφαρμογές.

Εφαρμογές της Διατριβής σε Θεωρητικό Επίπεδο

Αρκετοί ερευνητές έχουν εισηγηθεί την ανάπτυξη θεωρητικών μοντέλων που επεξηγούν τον ρόλο της φαντασίας στη μάθηση (Abrahamson, 2006; Dziedziewicz & Karwowski, 2015; Egan, 1992), λαμβάνοντας υπόψη ότι η φαντασία είναι μια περίπλοκη έννοια (Egan, 1992; van Alphen, 2011) και ο ορισμός της είναι ευρύς και ασαφής (Ho et al., 2013). Επίσης, ορισμένοι ερευνητές υπέδειξαν την ανάγκη για διερεύνηση της φαντασίας σε σχέση με τη δημιουργικότητα (Tan & Sriraman, 2017; Vygotsky, 2004), νοουμένου ότι για δεκαετίες η ερευνητική δραστηριότητα για τη δημιουργικότητα και τη φαντασία αναπτύσσονταν παράλληλα χωρίς να αλληλεπικαλύπτονται (Jankowska & Karwowski, 2015).

Η παρούσα διατριβή παρουσιάζει ένα ολοκληρωμένο και λεπτομερές μοντέλο της φαντασίας στο πεδίο των μαθηματικών που έχει ως κατευθυντήριο γνώμονα το συνδυαστικό μοντέλο της δημιουργικής ικανότητας (Conjunctional Model of Creative Imaging Ability) από τον χώρο της ψυχολογίας (Dziedziewicz & Karwowski, 2015), το οποίο γεφυρώνει την έρευνα της δημιουργικότητας και της φαντασίας (Jankowska & Karwowski, 2015). Επομένως, η διατριβή αυτή επιβεβαίωσε με εμπειρικά δεδομένα από μαθητές Στ’ δημοτικού ότι η φαντασία στα μαθηματικά είναι μια πολυδιάστατη εννοιολογική κατασκευή που προσδιορίζεται από τρεις ικανότητες: την οπτικοποίηση, τις μετασχηματιστικές ικανότητες και την πρωτοτυπία. Το μοντέλο αυτό μπορεί να αξιοποιηθεί από τους ερευνητές της μαθηματικής παιδείας για μελλοντική έρευνα.

Επιπλέον, για τον ορισμό της φαντασίας στα μαθηματικά η παρούσα διατριβή έχει εκμαιεύσει στοιχεία και από το θεωρητικό μοντέλο που ανέπτυξε ο Wallas (1926) για τη δημιουργική διαδικασία, με έμφαση σε άρθρα σε σχέση με την εμπειρία του «Aha!» (Aldous, 2007; Burton, 1999; Carpenter, 2019; Liljedahl, 2004, 2005, 2013; Shen et al., 2013; Sriraman, 2009; Weisberg, 2015; Yaftian, 2015). Δεδομένου ότι μέχρι στιγμής δεν έχει εξεταστεί η φαντασία μέσα από το πρίσμα των εμπειριών της ενόρασης ή του «Aha!», η ενσωμάτωση των εν λόγω στοιχείων στα πλαίσια του ορισμού της φαντασίας στα μαθηματικά ενισχύει την υφιστάμενη βιβλιογραφία για τη φαντασία στα μαθηματικά, διαμορφώνοντας ένα πιο ολοκληρωμένο θεωρητικό πλαίσιο για τη συγκεκριμένη έννοια.

Αναφορικά με τις γνωστικές διαδικασίες της φαντασίας στα μαθηματικά, τα πορίσματα της έρευνας επιβεβαιώνουν στο πεδίο των μαθηματικών τα τέσσερα στάδια που ορίστηκαν στο θεωρητικό μοντέλο του Wallas (1926), μιας και τα στάδια έχουν εμφανιστεί κατά την επίλυση του μαθηματικού προβλήματος ενόρασης (Weisberg, 1995).

Παράλληλα, μια ακόμη πτυχή της θεωρητικής συνεισφοράς της διατριβής αφορά στο ότι επιχείρησε να καλύψει το ερευνητικό κενό που παρατηρούνταν ως προς τους τη μελέτη των παραγόντων που συνεισφέρουν στη μαθηματική δημιουργική σκέψη (Massarwe et al., 2011; Pitta-Pantazi, 2017). Ειδικότερα, η εργασία έχει βασιστεί στο μοντέλο της Seelig (2012) από τον τομέα της διδακτικής της μηχανικής, αντλώντας επίσης θεωρίες και ερευνητικά αποτελέσματα από το πεδίο της ψυχολογίας και της μαθηματικής παιδείας. Έτσι, επιβεβαίωσε ένα θεωρητικό πλαίσιο για τις σχέσεις ανάμεσα στους τρεις εσωτερικούς παράγοντες της δημιουργικότητας στα μαθηματικά: τη φαντασία στα μαθηματικά, τις μαθηματικές γνώσεις και τη μαθηματική νοοτροπία.

Εφαρμογές της Διατριβής σε Μεθοδολογικό Επίπεδο

Από μεθοδολογική σκοπιά, η εργασία παρέχει ένα εργαλείο αξιολόγησης της φαντασίας στα μαθηματικά, που είναι βασισμένο στη θεωρία, είναι ολοκληρωμένο, αναλυτικό και κατάλληλο. Κατ' αρχάς, το εργαλείο αυτό είναι τεκμηριωμένο θεωρητικά αφού ο σχεδιασμός του στηρίζεται στους παράγοντες που προτείνει το συνδυαστικό μοντέλο της δημιουργικής ικανότητας (Conjunctional Model of Creative Imaging Ability): οπτικοποίηση, μετασχηματιστικές ικανότητες και πρωτοτυπία. Παράλληλα, το εργαλείο είναι ολοκληρωμένο, διότι καλύπτει ποικίλες πτυχές της έννοιας, οργανώνοντάς τις σε τρεις ικανότητες. Την ίδια στιγμή, είναι αναλυτικό, καθώς ορίζει ξεκάθαρα την κάθε ικανότητα, επιτρέποντας στον καθένα να ελέγξει κατά πόσον το κάθε έργο του εργαλείου αξιολογεί τη συγκεκριμένη ικανότητα που σχεδιάστηκε να μετρήσει. Συγχρόνως, το εργαλείο κρίνεται και ως κατάλληλο, εφόσον η δομή του έχει επιβεβαιωθεί στη βάση εμπειρικών δεδομένων. Επιπρόσθετα, η διατριβή προσφέρει και ένα εργαλείο αξιολόγησης για τις μαθηματικές γνώσεις αλλά και για τη μαθηματική νοοτροπία καθώς και ένα πρωτόκολλο συνέντευξης για εξερεύνηση των γνωστικών διαδικασιών της φαντασίας στα μαθηματικά. Τα προαναφερθέντα εργαλεία δύνανται να αξιοποιηθούν αφενός για ερευνητικούς σκοπούς και αφετέρου από τους εκπαιδευτικούς μέσα στην τάξη.

Εφαρμογές της Διατριβής σε Επίπεδο Διδακτικής Πράξης

Από πλευράς διδακτικής πράξης, η φαντασία αποτελεί μια από τις πιο βασικές ικανότητες που πρέπει να καλλιεργήσει η εκπαίδευση (Eckhoff & Urbach, 2008; Sutton-Smith, 1988; Wu & Albanese, 2013) και θα πρέπει να ενθαρρύνεται συνεχώς σε όλα τα μαθήματα του Αναλυτικού Προγράμματος (Egan & Judson, 2016; Smith & Mathur, 2009). Τα αποτελέσματα της διατριβής μπορούν να φανούν χρήσιμα για τη διδακτική πράξη των εκπαιδευτικών αλλά και για την αναδιαμόρφωση των προγραμμάτων πανεπιστημιακής και επαγγελματικής κατάρτισης των εκπαιδευτικών, λαμβάνοντας υπόψη ότι στα προγράμματα αυτά δε δίνεται ιδιαίτερη προσοχή στον τρόπο εμπλοκής της φαντασίας στη μάθηση διότι είναι κάτι ασαφές (Egan & Judson, 2016).

Πρωτίστως, το θεωρητικό μοντέλο της φαντασίας στα μαθηματικά και το εργαλείο αξιολόγησής της που εισηγείται και εγκυροποιεί η έρευνα μπορούν να αποτελέσουν αξιόλογα διδακτικά και διαγνωστικά εργαλεία για τους εκπαιδευτικούς. Ειδικότερα, ο εκπαιδευτικοί μπορούν να αποκομίσουν μια σαφή εικόνα για τις συνιστώσες που περιλαμβάνει η έννοια της φαντασίας στα μαθηματικά. Επίσης, τα εργαλεία αυτά τους προτείνουν κατευθύνσεις για το περιεχόμενο των δραστηριοτήτων που θα πρέπει να ενσωματώνουν στη διδακτική πράξη, ώστε να μπορούν να αξιολογούν και να βελτιώνουν τη φαντασία των μαθητών στα μαθηματικά.

Η διερεύνηση των γνωστικών διαδικασιών από τις οποίες διέρχονται οι μαθητές κατά την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος ενόρασης κατέδειξε και επιβεβαίωσε τα στάδια και τις επιμέρους διαδικασίες που μπορούν να διευκολύνουν τη φαντασία των μαθητών στα μαθηματικά. Επομένως, οι εκπαιδευτικοί καθώς και τα προγράμματα εκπαίδευσής τους θα πρέπει να δώσουν βαρύτητα στα στάδια της προετοιμασίας, της επώασης, του φωτισμού και της επαλήθευσης κατά την επίλυση μαθηματικών δημιουργικών προβλημάτων.

Συγχρόνως, η διατριβή καθοδηγεί τους εκπαιδευτικούς ως προς τους παράγοντες στους οποίους θα πρέπει να εστιάσουν την προσοχή τους προκειμένου να αναπτύξουν τη φαντασία των μαθητών στα μαθηματικά. Ειδικότερα, με βάση τα συμπεράσματα της έρευνας για τις σχέσεις ανάμεσα στους τρεις εσωτερικούς παράγοντες που συνεισφέρουν στη μαθηματική δημιουργικότητα, ενδείκνυται οι εκπαιδευτικοί να επικεντρωθούν στο να αναπτύξουν τις μαθηματικές γνώσεις των μαθητών και να τους μεταδώσουν τη μαθηματική νοοτροπία ανάπτυξης, νοουμένου ότι οι μαθηματικές γνώσεις συνεισφέρουν σε σημαντικό βαθμό στη φαντασία των μαθητών στα μαθηματικά, ενώ σε μικρότερο βαθμό συνεισφέρει η μαθηματική νοοτροπία.

Εισηγήσεις για Μελλοντικές Έρευνες

Εστιάζοντας στις αναλύσεις για την επιβεβαίωση του μοντέλου της φαντασίας στα μαθηματικά, είναι χρήσιμο να διερευνηθεί κατά πόσον επιβεβαιώνονται εμπειρικά και πιο απλά μοντέλα που περιγράφουν τη δομή της φαντασίας στα μαθηματικά, συλλέγοντας δεδομένα από μεγαλύτερο δείγμα. Συγκεκριμένα, θα πρέπει να εξεταστεί ένα μοντέλο με τρεις παράγοντες πρώτης τάξης που αλληλοσυσχετίζονται (οπτικοποίηση, μετασχηματιστικές ικανότητες και πρωτοτυπία) και ένα μοντέλο που ορίζει τη φαντασία ως έναν παράγοντα πρώτης τάξης. Εξάλλου, σύμφωνα με τον Kline (2013), ο στόχος των αναλύσεων μοντέλων δομικών εξισώσεων θα πρέπει να είναι η επιλογή ενός μοντέλου που να είναι όσο το δυνατό πιο απλό (να έχει τους περισσότερους βαθμούς ελευθερίας), που να προσαρμόζεται καλύτερα με τα δεδομένα και που να μπορεί να τεκμηριωθεί θεωρητικά.

Πέραν τούτου, είναι σημαντικό να εξεταστεί και ένα ακόμη μοντέλο, στο οποίο η οπτικοποίηση χωρικών εικόνων και η οπτικοποίηση αλγεβρικών εικόνων αποτελούν διακριτούς παράγοντες, λαμβάνοντας υπόψη τις οριακά χαμηλές τιμές της αξιοπιστίας εσωτερικής συνέπειας (Cronbach α και ρ_A) στον παράγοντα της οπτικοποίησης. Εάν αποτελούσαν δυο ξεχωριστούς παράγοντες, ενδεχομένως η εσωτερική συνέπεια των παραγόντων αυτών να βελτιωνόταν. Για τον σκοπό αυτό, χρειάζεται να χορηγηθούν περισσότερα έργα για τη μέτρηση των δυο ξεχωριστών αυτών παραγόντων.

Αναφορικά με το μοντέλο της φαντασίας στα μαθηματικά, σύμφωνα με τους Dziedziewicz και Karwowski (2015) η αντίληψη, η προσοχή, η μνήμη, η γλώσσα, η σκέψη και οι συναισθηματικές διαδικασίες επηρεάζουν τους τρεις επιμέρους παράγοντες της φαντασίας: οπτικοποίηση, μετασχηματιστικές ικανότητες και πρωτοτυπία. Για πρακτικούς λόγους η παρούσα διατριβή δεν προέβη στη διερεύνηση αυτών των μεταβλητών, όμως χρήζουν εξέτασης μέσα από μελλοντικές έρευνες.

Όσον αφορά στη μελέτη των γνωστικών διαδικασιών της φαντασίας των μαθητών στα μαθηματικά, ο συνδυασμός των ημι-δομημένων ατομικών συνεντεύξεων με νευροεπιστημονικές μεθόδους έρευνας θα έδινε την ευκαιρία για πιο βαθιά διερεύνηση των διαδικασιών και των μηχανισμών που κρύβονται πίσω από την εμφάνιση της εμπειρίας της ενόρασης (Bowden et al., 2005). Επιπλέον, μελλοντικές έρευνες μπορούν να μελετήσουν πιο στοχευμένα τους παράγοντες που επηρεάζουν τη διαδικασία επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων ενόρασης, αφού η παρούσα έρευνα παρείχε απλώς ενδείξεις για την ύπαρξη και τη συμβολή ορισμένων τέτοιων παραγόντων.

Συγχρόνως, η διατριβή επεδίωξε να επικεντρωθεί αποκλειστικά στις σχέσεις ανάμεσα στους τρεις εσωτερικούς παράγοντες που συνεισφέρουν στη μαθηματική δημιουργικότητα με βάση τη Seelig (2012): φαντασία, γνώσεις και πεποιθήσεις για τη νοοτροπία. Η συλλογή δεδομένων σχετικά με τους εξωτερικούς παράγοντες του θεωρητικού μοντέλου αλλά και τη μαθηματική δημιουργικότητα των μαθητών δεν ήταν μέρος του σκοπού της παρούσας διατριβής. Ωστόσο, κρίνεται σημαντικό να εξεταστεί σε ποιο βαθμό και με ποιον ακριβώς τρόπο επηρεάζουν τη μαθηματική δημιουργικότητα των μαθητών καθένας από τους εσωτερικούς και εξωτερικούς παράγοντες του θεωρητικού μοντέλου. Για τον σκοπό αυτό, θα πρέπει να διενεργηθεί μια πιο ευρείας κλίμακας έρευνα που να συλλέξει δεδομένα σε διαφορετικά επίπεδα: τάξη, σχολική μονάδα και επαρχία.

Επίσης, η έρευνα επικεντρώθηκε σε μαθητές που φοιτούσαν στη Στ’ Δημοτικού και δεν επιλέγηκαν με τυχαία δειγματοληψία. Συνεπώς, η διεξαγωγή παρόμοιων ερευνών με μαθητές: (α) από ένα ευρύτερο ηλικιακό φάσμα, όπως από πιο μικρές τάξεις του δημοτικού ή από τη μέση εκπαίδευση και (β) που θα επιλεγούν με τυχαία δειγματοληψία μπορεί να αποτυπώσει πιο σφαιρική κατανόηση για το ερευνητικό πρόβλημα.

Επιπλέον, δεδομένου ότι τα δεδομένα της διατριβής είχαν συλλεχθεί σε μια χρονική φάση, θα ήταν χρήσιμη η διενέργεια διαχρονικών ερευνών με το ίδιο δείγμα μαθητών, ώστε να εξεταστεί κατά πόσον η δομή των μοντέλων που εξετάστηκαν παραμένει σταθερή σε βάθος χρόνου.

Τέλος, ερευνητικό ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη της επίδρασης διαφορετικών εκπαιδευτικών περιβαλλόντων στη μαθηματική δημιουργικότητα των μαθητών, λαμβάνοντας υπόψη ότι ακόμη δεν έχει αποσαφηνιστεί το ερώτημα «ποια μαθησιακά περιβάλλοντα είναι πιο αποτελεσματικά για την ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας» (Goldin, 2017; Κάττου, 2013; Pitta-Pantazi, 2017; Pitta-Pantazi et al., 2018; Sharma, 2014). Μια ενδιαφέρουσα πρόταση για μελλοντική έρευνα είναι ο σχεδιασμός και η εφαρμογή ενός παρεμβατικού προγράμματος, που να επικεντρώνεται στους τρεις παράγοντες του εξωτερικού κόσμου με βάση το μοντέλο της Seelig (2012): την περιρρέουσα κουλτούρα, τις πηγές του περιβάλλοντος και τον χώρο. Η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας που έχει διενεργήσει η διατριβή για τους συγκεκριμένους παράγοντες μπορεί να καθοδηγήσει σημαντικά τον σχεδιασμό μιας τέτοιας διδακτικής παρέμβασης.

Βιβλιογραφία

Abrahamson, D. (2006, June). *The three M's: Imagination, embodiment, and mathematics*. Paper presented at the annual meeting of the Jean Piaget Society. Baltimore, MD.

Αγγλική Σχολή (2014). *Αγγλική Σχολή: Εισαγωγικές Εξετάσεις 2014*. Ανάκληση από https://www.englishschool.ac.cy/udata/contents//files/docs/Entrance_Exams/2014_Mathematics%20Entrance%20Exam%20(Greek).pdf

Adelson, J. L., & McCoach, D. B. (2011). Development and psychometric properties of the math and me survey: Measuring third through sixth graders' attitudes toward mathematics. *Measurement and Evaluation in Counseling and Development*, *44*(4), 225-247. doi:10.1177/0748175611418522

Aiken, L. R. (1973). Ability and creativity in mathematics. *Review of Educational Research*, *43*(4), 405-432. doi:10.3102/00346543043004405

Akgul, S., & Kahveci, N. G. (2016). A study on the development of a mathematics creativity scale. *Eurasian Journal of Educational Research*, *62*, 57-76. doi:10.14689/ejer.2016.62.5

Aldous, C. R. (2007). Creativity, problem solving and innovative science: Insights from history, cognitive psychology and neuroscience. *International Education Journal*, *8*(2), 176-186.

Arcavi, A. (1999). The role of visual representations in the learning of mathematics. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st North American PME Conference*, (Vol. 1, pp. 55-80). Morelos, México: PME.

Aronson, J., Fried, C., & Good, C. (2002). Reducing the effects of stereotype threat on African American college students by shaping theories of intelligence. *Journal of Experimental Social Psychology*, *38*(2), 113-125. doi:10.1006/jesp.2001.1491

Assmus, D., & Fritzlar, T. (2018). Mathematical giftedness and creativity in primary grades. In F. M. Singer (Ed.), *Mathematical creativity and mathematical giftedness* (pp. 55-81). New York, NY: Springer.

Avolio, B. J., & Bass, B. M. (2001). *Developing potential across a full range of Leadership Tm: Cases on transactional and transformational leadership*. New York, NY: Psychology Press.

Babbie, E. (1990). *Survey research methods* (2nd ed.). Belmont, CA: Wadsworth Publishing

Bahar, A. K., & Maker, C. J. (2011). Exploring the relationship between mathematical creativity and mathematical achievement. *Asia Pacific Journal of Gifted and Talented Education, 3*, 33-48. doi:10.1111/j.1467-8624.2007.00995.x

Baker, W., & Czarnocha, B. (2015). Aha! moment, bisociation and simultaneity of attention. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Prague, Czech Republic: Charles University.

Balka, D. S. (1974). Creative ability in mathematics. *Arithmetic Teacher*, *21*, 633-636.

Bandura, A. (1995). Exercise of personal and collective efficacy in changing societies. In A. Bandura (Ed.), *Self-efficacy in changing societies* (pp. 1-45). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Barron, F. (1988). Putting creativity to work. In R. J. Sternberg (Ed.), *The nature of creativity: Contemporary psychological perspectives* (pp. 76-98). New York, NY: Cambridge University Press.

Bass, B. M., & Riggio, R. E. (2006). *Transformational leadership*. Mahwah, NJ: Psychology Press.

Beck, C. T., & Gable, R. K. (2001). Ensuring content validity: An illustration of the process. *Journal of Nursing Measurement*, *9*(2), 201-215. doi:10.1891/1061-3749.9.2.201

Becker, J. M., Klein, K., & Wetzels, M. (2012). Hierarchical latent variable models in PLS-SEM: Guidelines for using reflective-formative type models. *Long Range Planning*, *45*(5-6), 359-394. doi:10.1016/j.lrp.2012.10.001

Bempechat, J., London, P., & Dweck, C. (1991). Children's conceptions of ability in major domains: An interview and experimental study. *Child Study Journal*, *21*(1), 11-36.

Benitez, J., Henseler, J., Castillo, A., & Schuberth, F. (2020). How to perform and report an impactful analysis using partial least squares: guidelines for confirmatory and explanatory IS research. *Information & Management*, *57*(2), 103168. doi:10.1016/j.im.2019.05.003

Bennevall, M. (2016). *Cultivating creativity in the mathematics classroom using open-ended tasks: A systematic review* (Independent thesis Advanced level (professional degree)). Linköping University, Department of Mathematics. Ανάκληση από DiVA. (Accession No. diva2:909145)

Bernardo, A. B. (2002). Language and mathematical problem solving among bilinguals. *The Journal of Psychology*, *136*(3), 283-297. doi:10.1080/00223980209604156

Biggs, J. B., & Collis, K. F. (1982). *Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy (Structure of the Observed Learning Outcome)*. New York, NY: Academic Press.

Blackwell, L. S., Trzesniewski, K. H., & Dweck, C. S. (2007). Implicit theories of intelligence predict achievement across an adolescent transition: A longitudinal study and an intervention. *Child Development*, *78*(1), 246-263. doi:10.1111/j.1467-8624.2007.00995.x

Blazhenkova, O., Becker, M., & Kozhevnikov, M. (2011). Object–spatial imagery and verbal cognitive styles in children and adolescents: Developmental trajectories in relation to ability. *Learning and Individual Differences*, *21*(3), 281-287. doi:10.1016/j.lindif.2010.11.012

Boaler, J. (2015). *Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching*. San Fransisco, CA: John Wiley & Sons.

Boden, M. A. (1994). Agents and creativity. *Communications of the ACM*, *37*(7), 117-121. doi:10.1145/176789.176802

Bowden, E. M., Jung-Beeman, M., Fleck, J., & Kounios, J. (2005). New approaches to demystifying insight. *Trends in Cognitive Sciences*, *9*(7), 322-328. doi:10.1016/j.tics.2005.05.012

Brown, S. I., & Walter, M. I. (1993). Problem posing in mathematics education. In S. I. Brown & M. I. Walter (Eds.), *Problem posing: Reflection and applications* (pp. 16-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Burton, L. (1999). The practices of mathematicians: What do they tell us about coming to know mathematics? *Educational Studies in Mathematics*, *37*, 121-143.

Cai, J., & Hwang, S. (2002). Generalized and generative thinking in US and Chinese students' mathematical problem solving and problem posing. *The Journal of Mathematical Behavior*, *21*(4), 401-421. doi:10.1016/S0732-3123(02)00142-6

Cain, K. M., & Dweck, C. S. (1995). The relation between motivational patterns and achievement cognitions through the elementary school years. *Merrill-Palmer Quarterly*, *41*(1), 25-52.

Cambridge Assessment International Education (CAIE). (2018). *Developing the Cambridge learner attributes*. Cambridge, UK: UCLES.

Carlton, V. L. (1959). An analysis of the educational concepts of fourteen outstanding mathematicians, 1790-1940, in the areas of mental growth and development, creative thinking, and symbolism and meaning, *Dissertation Abstracts*, *20*(06), 2131. (UMI No. AAT 5904782)

Carpenter, W. (2019). The Aha! moment: The science behind creative insights. In S. M. Brito (Ed.), *Toward super-creativity - Improving creativity in humans, machines, and human - machine collaborations* (pp. 17-32). doi:10.5772/intechopen.84973

Chamberlin, S. A., & Moon, S. (2005). Model-eliciting activities: An introduction to gifted education. *Journal of Secondary Gifted Education*, *17*(1), 33-47. doi:10.4219/jsge-2005-393

Chassell, L. M. (1916). Tests for originality. *Journal of Educational Psychology, 7*(6), 317-328. doi:10.1037/h0070310

Chen, C. Y. (2000). Personality traits and creation process of distinguished scientists in Taiwan. *Journal of National Taiwan Normal University*, *45*, 27-45.

Cheung, A. C., & Slavin, R. E. (2013). The effectiveness of educational technology applications for enhancing mathematics achievement in K-12 classrooms: A meta-analysis. *Educational Research Review*, *9*, 88-113. doi:10.1016/j.edurev.2013.01.001

Chin, W. W. (1998). The partial least squares approach for structural equation modeling. In G. A. Macoulides (Ed.), *Modern methods for business research* (pp. 295-336). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Chiu, M. S. (2009). Approaches to the teaching of creative and non-creative mathematical problems. *International Journal of Science and Mathematics Education, 7*(1), 55-79. doi:10.1007/s10763-007-9112-9

Christou, C. (2017). Creativity and imagination in mathematics. In D. Pitta-Pantazi (Ed.), *Proceedings of the 10th International Conference of Mathematical Creativity and Giftedness* (pp. 17-24). Nicosia, Cyprus: Department of Education, University of Cyprus.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *37*(3), 149-158. doi:10.1007/s11858-005-0004-6

Cohen, J. (1992). A power primer. *Psychological Bulletin*, *112*(1), 155–159. doi:10.1037/0033-2909.112.1.155

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2008). *Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας* (1η έκδ.) (μτφρ. Σ. Κυρανάκης, Μ. Μαυράκη, Χ. Μητσοπούλου, Π. Μπιθάρα & Μ. Φιλοπούλου). Αθήνα: Έκφραση/Μεταίχμιο.

Condie, R., & Munro, B. (2007). *The impact of ICT in schools - A landscape review*. Report: Becta.

Creswell, J. W., & Clark, V. L. P. (2018). *Designing and conducting mixed methods research* (3rd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Cropley, D. H., & Cropley, A. J. (2013). *Creativity and crime: A psychological analysis*. New York, NY: Cambridge University Press.

Csikszentmihalyi, M. (1994). The domain of creativity. In D. H. Feldman, M. Csikszentmihalyi, & H. Gardner (Eds.), *Changing the world: A framework for the study of creativity* (pp. 135-158). Westport, CT: Praeger.

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension*. Reston, VA: NCTM.

Danek, A. H., & Wiley, J. (2017). What about false insights? Deconstructing the Aha! experience along its multiple dimensions for correct and incorrect solutions separately. *Frontiers in Psychology, 7*(2077). doi:10.3389/fpsyg.2016.02077

Davidson, J. E. (1995). The suddenness of insight. In R. J. Sternberg & J. E. Davidson (Eds.), *The nature of insight* (pp. 125-155). Cambridge, MA: MIT Press.

Davis, L. L. (1992). Instrument review: Getting the most from your panel of experts. *Applied Nursing Research*, *5*(4), 194-197. doi:10.1016/S0897-1897(05)80008-4

De Lange, J. (1987). *Mathematics insight and meaning.* Dissertation. Utrecht, The Netherlands: OW & OC.

De Lange, J. (2006). Mathematical literacy for living from OECD-PISA perspective. *Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics. Special Issue on The APEC-TSUKUBA International Conference "Innovative Teaching Mathematics through Lesson Study"* (Vol. 25, pp. 13-35). Tokyo, Japan: University of Tsukuba.

Den Hartog, D. N., Van Muijen, J. J., & Koopman, P. L. (1997). Transactional versus transformational leadership: An analysis of the MLQ. *Journal of Occupational and Organizational Psychology*, *70*(1), 19-34.

Diamantopoulos, A., & Siguaw, J. A. (2006). Formative versus reflective indicators in organizational measure development: A comparison and empirical illustration. *British Journal of Management*, *17*(4), 263-282. doi:10.1111/j.1467-8551.2006.00500.x

Dijkstra, T. K., & Henseler, J. (2015). Consistent partial least squares path modeling. *MIS Quarterly, 39*(2), 297–316.

diSessa, A., Hammer, D., Sherin, B., & Kolpakowski, T. (1991). Inventing graphing: Children's meta-representational expertise. *Journal of Mathematical Behavior*, *10*(2), 117-160.

Dodge, B. (1991). Computers and creativity: Tools, tasks, and possibilities. *Communicator: The Journal of the California Association for the Gifted, 21*(1), 5-8.

Dow, G. T., & Mayer, R. E. (2004). Teaching students to solve insight problems: Evidence for domain specificity in creativity training. *Creativity Research Journal*, *16*(4), 389-398. doi:10.1080/10400410409534550

Drijvers, P. H. M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding of the concept of parameter*. Dissertation. Utrecht, The Netherlands: CD-B Press.

Drijvers, P. H. M. (2015). Digital technology in mathematics education: Why it works (or doesn't). In S. J. Cho (Ed.), *Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 135-151). Switzerland: Springer, Cham. doi:10.1007/978-3-319-17187-6_8

Dunham, P., & Dick, T. (1994). Research on graphing calculators. *Mathematics Teacher*, *87*(6), 440-445. Ανάκληση από http://www.nctm.org/eresources/journal_home.asp?journal_id = 2

Dweck, C. S. (1999). *Self-theories: Their role in motivation, personality, and development*. Philadelphia, PA: Psychology Press.

Dweck, C. S. (2006). *Mindset: The new psychology of success*. New York, NY: Random House Incorporated.

Dweck, C. S., Chiu, C., & Hong, Y. (1995). Implicit theories and their role in judgments and reactions: A world from two perspectives. *Psychological Inquiry*, *6*(4), 267-285. doi:10.1207/s15327965pli0604_1

Dweck, C. S., & Leggett, E. L. (1988). A social-cognitive approach to motivation and personality. *Psychological Review*, *95*(2), 256-273.

Dweck, C. S., & Sorich, L. A. (1999). Mastery-oriented thinking. In C. R. Snyder (Ed.), *Coping: The psychology of what works*. New York, NY: Oxford University Press.

Dweck, C. S., Walton, G. M., & Cohen, G. L. (2014). *Academic tenacity: Mindsets and skills that promote longterm learning*. Bill and Melinda Gates Foundation.

Dziedziewicz, D., & Karwowski, M. (2015). Development of children's creative visual imagination: A theoretical model and enhancement programmes, *Education 3-13*, *43*(4), 382-392. doi:10.1080/03004279.2015.1020646

Eckhoff, A., & Urbach, J. (2008). Understanding imaginative thinking during childhood: Sociocultural conceptions of creativity and imaginative thought. *Early Childhood Education Journal*, *36*(2), 179-185. doi:10.1007/s10643-008-0261-4

Edwards, J. R., & Bagozzi, R. P. (2000). On the nature and direction of relationships between constructs and measures. *Psychological Methods*, *5*(2), 155-174. doi:10.1037/1082-989X.5.2.155

Edwards, S. M. (2001). The technology paradox: Efficiency versus creativity. *Creativity Research Journal*, *13*(2), 221-228. doi:10.1207/S15326934CRJ1302_9

Egan, K. (1992). *Imagination in teaching and learning: Ages 8 to 15*. London, UK: Routledge.

Egan, K. (2005). *An imaginative approach to teaching*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Egan, K. (2015). Preface to the first edition. In K. Egan, G. Juddon, & K. Madej (Eds.). (2015). *Engaging imagination and developing creativity in education* (pp. ix-x). Newcastle, UK: Cambridge Scholars Publishing.

Egan, K., & Judson, J. (2016). *Imagination and the engaged learner: Cognitive tools for the classroom*. New York, NY: Teachers College Press.

Einstein, A., & Infeld, L. (1938). *The evolution of physics*. New York, NY: Simon & Schuster.

Elder, S. (2009). *ILO school-to-work transition survey: A methodological guide*. Geneva, Switzerland: International Labour Office.

English, L. D. (1997). The development of fifth-grade children's problem-posing abilities. *Educational Studies in Mathematics*, *34*(3), 183-217. doi:10.1023/A:1002963618

Ericsson, K. A. (2006). Protocol analysis and expert thought: Concurrent verbalizations of thinking during experts' performance on representative tasks. In K. A. Ericsson, N. Charness, P. J. Feltovich, & R. Hoffman (Eds.), *Handbook of expertise and expert performance* (pp. 223-241). New York, NY: Cambridge University Press.

Ericsson, K. A., & Simon, H. A. (1993). *Protocol analysis: Verbal reports as data*. A Bradford Book. Cambridge, MA: MIT Press.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education.* London, UK: Falmer Press.

Ervynck, G. (1991). Mathematical creativity. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 42-53). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Evans, E. W. (1964). Measuring the ability of students to respond in creative mathematical situations at the late elementary and early junior high school level. *Dissertation Abstracts, 25(12)*, 7107. (UMI No. AAT 6505302)

Evermann, J., & Tate, M. (2016). Assessing the predictive performance of structural equation model estimators. *Journal of Business Research*, *69*(10), 4565–4582. doi:10.1016/j.jbusres.2016.03.050

Falk, R. F., & Miller, N. B. (1992). *A primer for soft modeling*. Akron, OH: University of Akron Press.

Ferrari, A., Cachia, R., & Punie, Y. (2009). ICT as a driver for creative learning and innovative teaching. In E. Villalba (Ed.), *Measuring creativity* (pp. 345-367). Luxemburg: OPOCE.

Feynman, R. P. (1999). The value of science. In J. Robbins (Ed.), *The pleasure of finding things out: The best short works of Richard, P. Feynman* (pp. 141-150). Cambridge, MA: Perseus Publishing.

Flores, A., Park, J., & Bernhardt, S. A. (2018). Interactive technology to foster creativity in future mathematics teachers. In V. Freiman & J. L. Tassell (Eds.), (2018). *Creativity and technology in mathematics education* (Vol. 10, pp.149-180). Switzerland: Springer.

Fontana, A. (2001). Symbolic interaction: Methodology. In N. J. Smelser & P. B. Baltes (Eds.), *International encyclopedia of the social and behavioral sciences* (pp. 15347-15350). London, UK: Elsevier. doi:10.1016/B0-08-043076-7/00772-5

Fornell, C. G., & Larcker, D. F. (1981). Evaluating structural equation models with unobservable variables and measurement error. *Journal of Marketing Research*, *18*(1), 39–50.

Fouche, K. K. (1993). *Problem solving and creativity: Multiple solution methods in a cross-cultural study in middle level mathematic*. Unpublished doctoral dissertation, University of Florida, Gainesville.

Franzblau, A. N. (1958). *A primer of statistics for non-statisticians*. Oxford, England: Harcourt, Brace.

Freiman, V. (2018). Complex and open-ended tasks to enrich mathematical experiences of kindergarten students. In F. M. Singer (Ed.), *Mathematical creativity and mathematical giftedness* (pp. 373-404). New York, NY: Springer.

Freiman, V., & Tassell, J. L. (Eds.). (2018). *Creativity and technology in mathematics education* (Vol. 10). Switzerland: Springer.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Kluwer Academic Publishers.

Garson, G. D. (2016). *Partial Least Squares: Regression and Structural Equation Models*. Asheboro, NC: Statistical Associates Publishers.

Gerard, R. W. (1946). The biological basis of imagination. *The Science Monthly*, *62*(6), 477-499.

Gerlinger, T. (2018). *Growth mindset and persistence in children's creative performance* (Doctoral dissertation, University of Mississippi). Ανάκληση από http://thesis.honors.olemiss.edu/id/eprint/1233

Getzels, J. W., & Jackson, P. W. (1962). *Creativity and intelligence: Explorations with gifted students*. New York, NY: Wiley.

Gil, E., Ben-Zvi, D., & Apel, N. (2007). What is hidden beyond the data? Helping young students to reason and argue about some wider universe. In D. Pratt & J. Ainley (Eds.), *Proceedings of the Fifth International Research Forum on Statistical Reasoning, Thinking and Literacy: Reasoning about Statistical Inference: Innovative Ways of Connecting Chance and Data* (pp. 1-26). UK: University of Warwick. Ανάκληση από http://srtl.stat.auckland.ac.nz/srtl5/presentations

Gilhooly, K. J., & Murphy, P. (2005). Differentiating insight from non-insight problems. *Thinking & Reasoning*, *11*(3), 279-302. doi:10.1080/13546780442000187

Goldin, G. A. (2017). Mathematical creativity and giftedness: Perspectives in response. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *49*(1), 147-157. doi:10.1007/s11858-017-0837-9

Good, C., Aronson, J., & Inzlicht, M. (2003). Improving adolescents' standardized test performance: An intervention to reduce the effects of stereotype threat. *Journal of Applied Developmental Psychology*, *24*(6), 645-662. doi:10.1016/j.appdev.2003.09.002

Gordon, W. J. (1961). *Synectics: The development of creative capacity*. New York, NY: Harper and Row.

Greene, J. (2007). *Mixed methods in social inquiry*. San Francisco, CA: Jossey-Bass & Wiley.

Greene, M. (2000). *Releasing the imagination: Essays on education, the arts, and social change*. San Fransisco, CA: Jossey-Bass Publishers.

Greeno, J. G., & Hall, R. P. (1997). Practicing representation: Learning with and about representational forms. *Phi Delta Kappan, 78*(5), 361-367.

Guilford, J. P. (1967). Creativity: Yesterday, today and tomorrow. *The Journal of Creative Behavior*, *1*(1), 3-14.

Hadamard, J. (1945). *The psychology of invention in the mathematical field*. New York, NY: Dover.

Hair, J. F., Black, W. C., Babin, B. J., & Anderson, R. E. (2010). *Multivariate Data Analysis* (7th ed.). Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey.

Hair, J. F., Hult, G. T. M., Ringle, C. M., & Sarstedt, M. (2017). *A primer on partial least squares structural equation modeling* (PLS-SEM) (2nd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Hair, J. F., Ringle, C. M., & Sarstedt, M. (2011). PLS-SEM: Indeed a silver bullet. *Journal of Marketing Theory and Practice*, *19*(2), 139-151. doi:10.2753/MTP1069-6679190202

Hater, J. J., & Bass, B. M. (1988). Superiors' evaluations and subordinates' perceptions of transformational and transactional leadership. *Journal of Applied Psychology*, *73*(4), 695-702.

Haylock, D. W. (1987). A framework for assessing mathematical creativity in school children. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(1), 59-74.

Haylock, D. W. (1997). Recognizing mathematical creativity in school children. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *29*(3), 68-74.

Healy, C. C. (1993). *Creating miracles: A story of student discovery*. Berkeley, CA: Key Curriculum Press.

Heid, M. K. (2005). Technology in mathematics education: Tapping into visions of the future. In W. J. Masalski (Ed.), *Technology-supported mathematics learning environments* (67th yearbook) (Vol. 67, pp. 345-366). NCTM. Ανάκληση από http://my.nctm.org/ebusiness/ProductCatalog/product.aspx?ID012850

Henderson, D. W. (1995). *Geometric proof and knowledge without axioms at all levels*. Paper presented at the conference on Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: An ICMI study, Catania, Italy.

Henderson, V. L., & Dweck, C. S. (1990). Achievement and motivation in adolescence: A new model and data. In S. Feldman & G. Elliott (Eds.), *At the threshold: The developing adolescent (pp. 308-329)*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Hennesey, B. A. (2007). Creativity and motivation in the classroom: A social psychology and multi-cultural perspective. In A. G. Tan (Ed.), *Creativity: A handbook for teachers* (pp. 27-45). Singapore: World Scientific.

Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(5), 524-549.

Henriksen, D., Hoelting, M., & the Deep-Play Research Group. (2016). Rethinking creativity and technology in the 21st century: Creativity in a YoutTube world. *TechTrends*. *2*(60), 102-106.

Henriksen, D., Mishra, P., & Fisser, P. (2016). Infusing creativity and technology in 21st century education: A systemic view for change. *Educational Technology & Society*, *19*(3), 27-37.

Higgins, J. M. (1994). *101 creative problem solving techniques: The handbook of new ideas for business*. New York, NY: New Management Publishing Company, Inc.

Ho, H. C., Wang, C. C., & Cheng, Y. Y. (2013). Analysis of the scientific imagination process. *Thinking Skills and Creativity*, *10*, 68-78. doi:10.1016/j.tsc.2013.04.003

Hollands, R. (1972). Educational technology: Aims and objectives in teaching mathematics. *Mathematics in School*, *1*(6), 22-23.

Holman, E. R., & Kumar, K. (1983, February). *Imagination: Teachers' perceptions of what it is*. Paper presented at the Sixth Eastern Educational Research Conference: Baltimore, MD.

Hong, Y. Y., Chiu, C. Y., Dweck, C. S., Lin, D., & Wan, W. (1999). Implicit theories, attributions, and coping: A meaning system approach. *Journal of Personality and Social Psychology*, *77*, 588-599.

Huang, P. S., Peng, S. L., Chen, H. C., Tseng, L. C., & Hsu, L. C. (2017). The relative influences of domain knowledge and domain-general divergent thinking on scientific creativity and mathematical creativity. *Thinking Skills and Creativity*, *25*, 1-9. doi:10.1016/j.tsc.2017.06.001

Idris, N., & Nor, N. M. (2010). Mathematical creativity: Usage of technology. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *2*(2), 1963-1967. doi:10.1016/j.sbspro.2010.03.264

Iowa Department of Education. (1989). *A guide to developing higher order thinking across the curriculum*. Des Moines, IA: Department of Education. Ανάκληση από ERIC database (ED 306 550).

Jackson, N. J. (2016). Exploring creative pedagogies & learning ecologies. *Creative Academic Magazine*, 7. Ανάκληση από http://www.creativeacademic.uk/uploads/1/3/5/4/13542890/discussion_paper.pdf

Jacobse, A. E., & Harskamp, E. G. (2012). Towards efficient measurement of metacognition in mathematical problem solving. *Metacognition Learning*, *7*(2), 133-149. doi:10.1007/s11409-012-9088-x

Jagals, D., & van der Walt, M. (2018). Metacognitive awareness and visualisation in the imagination: The case of the invisible circles. *Pythagoras*, *39*(1), 1-10. doi:10.4102/pythagoras.v39i1.396

Jankowska, D. M., & Karwowski, M. (2015). Measuring creative imagery abilities. *Frontiers in Psychology*, *6*(1591). doi:10.3389/fpsyg.2015.01591

Jay, E. S., & Perkins, D. N. (1997). Problem finding: The search for mechanism. In M. Runco (Ed.), *The creativity research handbook* (pp. 257-293). New Jersey: Hampton Press.

Jensen, L. R. (1973). *The relationships among mathematical creativity, numerical aptitude and mathematical achievement* (Doctoral dissertation). The University of Texas at Austin.

Johnsen, S., & Sheffield, L. J. (Eds.). (2012). *Using the common core state standards for mathematics with gifted and advanced learners*. Washington, DC: National Association for Gifted Children.

Jonassen, D. H. (2000). *Computers as mindtools for schools: Engaging critical thinking*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Jung-Beeman, M., Bowden, E. M., Haberman, J., Frymiare, J. L., Arambel-Liu, S., Greenblatt, R., ... & Kounios, J. (2004). Neural activity when people solve verbal problems with insight. *PLoS Biology*, *2*(4), 0500-0510.

Jupri, A., & Drijvers, P. H. M. (2016). Student difficulties in mathematizing word problems in algebra. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *12*(9), 2481-2502. doi:10.12973/eurasia.2016.1299a

Kamins, M., & Dweck, C. S. (1999). Person vs. process praise and criticism: Implications for contingent self-worth and coping. *Developmental Psychology*, *35*(3), 835-847.

Kampylis, P., Berki, E., & Saariluoma, P. (2009). In-service and prospective teachers' conceptions of creativity. *Thinking Skills and Creativity*, *4*(1), 15-29. doi:10.1016/j.tsc.2008.10.001

Kaput, J. J. (1992). Technology and mathematics education. In D. A. Grows (Ed.), *Handbook for research in mathematics education* (pp. 515-556). New York, NY: McMillan.

Kaput, J. J., & Thompson, P. W. (1994). Technology in mathematics education research: The first 25 years in JRME. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(6), 676-684. doi:10.2307/749579

Κάττου, Μ. (2013). *Μαθηματική δημιουργικότητα: Η ανάπτυξη ενός θεωρητικού μοντέλου* (Διδακτορική διατριβή, Πανεπιστήμιο Κύπρου). Ανάκληση από https://gnosis.library.ucy.ac.cy/handle/7/39179

Kattou, M., Christou, C., & Pitta-Pantazi, D. (2015). Mathematical creativity or general creativity? In K. Krainer & Naďa Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1016-1023). Prague, Czech Republic: Faculty of Education, Charles University in Prague.

Kattou, M., Christou, C., & Pitta-Pantazi, D. (2016). Characteristics of the creative person in mathematics. In G. B. Moneta & J. Rogaten (Eds.) *Psychology of creativity: Cognitive, emotional and social processes* (pp. 99-123). New York, NY: Nova Science Publishers.

Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2013). Connecting mathematical creativity to mathematical ability. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *45*(2), 167-181. doi:10.1007/s11858-012-0467-1

Katz, J. (2001). Analytic induction. In N. J. Smelser & P. B. Baltes (Eds.), *International encyclopedia of the social and behavioral sciences* (pp. 480-484). London, UK: Elsevier. doi:10.1016/B0-08-043076-7/00774-9

Kizilirmak, J. M., Gomes da Silva, J. G., Imamoglu, F., & Richardson-Klavehn, A. (2016). Generation and the subjective feeling of “Aha!” are independently related to learning from insight. *Psychological Research*, *80*(6), 1059-1074. doi:10.1007/s00426-015-0697-2

Kizilirmak, J. M., Thuerich, H., Folta-Schoofs, K., Schott, B. H., & Richardson-Klavehn, A. (2016). Neural correlates of learning from induced insight: A case for reward-based episodic encoding. *Frontiers in Psychology*, *7*, 1-16. doi:10.3389/fpsyg.2016.01693

Kline, R. B. (2013). Exploratory and confirmatory factor analysis. In Y. Petscher & C. Schatschneider (Eds.), *Applied quantitative analysis in the social sciences* (pp. 171-207). New York, NY: Routledge.

Koestler, A. (1964). *The act of creation*. London, UK: Hutchinson & Co, LTD.

Kopparla, M., Bicer, A., Vela, K., Lee, Y., Bevan, D., Kwon, H., ... & Capraro, R. M. (2018). The effects of problem-posing intervention types on elementary students' problem-solving. *Educational Studies*, 1-18. doi:10.1080/03055698.2018.1509785

Krahmer, E., & Ummelen, N. (2004). Thinking about thinking aloud: A comparison of two verbal protocols for usability testing. *Professional Communication, IEEE Transactions on*, *47*(2), 105-117. doi:10.1109/tpc.2004.828205

Krajcik, J. S., & Blumenfeld, P. C. (2006). Chap. 19. Project-based learning. In R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge handbook of the learning sciences* (pp. 317-333). New York, NY: Cambridge University Press.

Krutetskii, V. A. (1969). An analysis of the individual structure of mathematical abilities in school children. In J. Kilpatrick & I. Wirszup (Eds.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics* (Vol. 2, pp. 59-104). Standford, CA: School Mathematics Study Group.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. Chicago, IL: The University of Chicago Press.

Kwon, O. N., Park, J. S., & Park, J. H. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. *Asia Pacific Education Review*, *7*(1), 51-61.

Laborde, C., & Sträßer, R. (2010). Place and use of new technology in the teaching of mathematics: ICMI activities in the past 25 years. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *42*(1), 121-133. doi:10.1007/s11858-009-0219-z

Laycock, M. (1970). Creative mathematics at Nueva. *The Arithmetic Teacher*, *17*(4), 325-328.

Lee, J., Collins, D., & Melton, J. (2016). What does algebra look like in early childhood?. *Childhood Education*, *92*(4), 305-310. doi:10.1080/00094056.2016.1208009

Leikin, R. (2008). Teaching mathematics with and for creativity: An intercultural perspective. In P. Ernest, B. Greer, & B. Sriraman (Eds.), *Critical issues in mathematics education* (pp. 39-43). USA: Information Age Publishing Inc. & The Montana Council of Teachers of Mathematics.

Leikin, R. (2009a). Bridging research and theory in mathematics education with research and theory in creativity and giftedness. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 385-411). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publisher.

Leikin, R. (2009b). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 129-145). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Leikin, R. (2013). Evaluating mathematical creativity: The interplay between multiplicity and insight. *Psychological Test and Assessment Modeling*, *55*(4), 385-400.

Leikin, R., Berman, A., & Koichu, B. (Eds.). (2009). *Creativity in mathematics and the education of gifted students*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publisher.

Leikin, R., & Kloss, Y. (2011). Mathematical creativity of 8th and 10th grade students. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1084-1094). Rzeszów, Poland: ERME.

Leikin, R., & Lev, M. (2013). Mathematical creativity in generally gifted and mathematically excelling adolescents: What makes the difference?. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *45*(2), 183-197. doi:10.1007/s11858-012-0460-8

Leikin, R., & Levav-Waynberg, A. (2007). Exploring mathematics teacher knowledge to explain the gap between theory-based recommendations and school practice in the use of connecting tasks. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(3), 349-371. doi:10.1007/s10649-006-9071-z

Leikin, R., Levav-Waynberg, A., & Guberman, R. (2011). Employing multiple-solution-tasks for the development of mathematical creativity: Two comparative studies. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1094-1103). Rzeszów, Poland: ERME.

Leikin, R., & Pitta-Pantazi, D. (2013a). Creativity and mathematics education: The state of the art. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *45*(2), 159-166. doi:10.1007/s11858-012-0459-1

Leikin, R., & Pitta-Pantazi, D. (Eds.) (2013b). Creativity and mathematics education. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *45*(2).

Leikin, R., & Sriraman B. (Eds.). (2017). *Creativity and giftedness: Interdisciplinary perspectives from mathematics and beyond. Advances in Mathematics Education Series*. Switzerland: Springer.

Leikin, R., Subotnik, R., Pitta-Pantazi, D., Singer, F. M., & Pelczer, I. (2013). Teachers' views on creativity in mathematics education: An international survey. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *45*(2), 309-324. doi:10.1007/s11858-012-0472-4

Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2009). Multiple solutions for a problem: A tool for evaluation of mathematical thinking in geometry. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 776-785). Lyon, France: Institut National de Recherche Pédagogique.

Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2012). The role of multiple solution tasks in developing knowledge and creativity in geometry. *Journal of Mathematical Behavior*, *31*(1), 73-90. doi:10.1016/j.jmathb.2011.11.001

Levenson, E. (2011). Exploring collective mathematical creativity in elementary school. *Journal of Creative Behavior*, *45*(3), 215-234. doi:10.1002/j.2162-6057.2011.tb01428.x

Levenson, E. (2013). Tasks that may occasion mathematical creativity: Teachers' choices. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(4), 269-291. doi:10.1007/s10857-012-9229-9

Lev-Zamir, H., & Leikin, R. (2011). Creative mathematics teaching in the eye of the beholder: Focusing on teachers' conceptions. *Research in Mathematics Education*, *13*(1), 17-32. doi:10.1080/14794802.2011.550715

Liljedahl, P. (2004). *The Aha! experience: Mathematical contexts, pedagogical implications*, Unpublished doctoral dissertation, Simon Fraser University, Burnaby, British Columbia, Canada.

Liljedahl, P. (2005). Mathematical discovery and affect: The effect of Aha! experiences on undergraduate mathematics students. *International Journal of*

Mathematical Education in Science and Technology, *36*(2-3), 219-234. doi:10.1080/00207390412331316997

Liljedahl, P. (2013). Illumination: An affective experience?. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *45*(2), 253-265. doi:10.1007/s11858-012-0473-3

Liljedahl, P., & Sriraman, B. (2006). Musings on mathematical creativity. *For The Learning of Mathematics*, *26*(1), 20-23.

Loveless, A. (2002). *Literature review in creativity, new technologies and learning*. A NESTA. Futurelab Research report 4.

Lothane, Z. (2007). Imagination as reciprocal process and its role in the psychoanalytic situation. *International Forum of Psychoanalysis*, *16*(3), 152-163. doi:10.1080/08037060701278636

Luria, S. R., Sriraman, B., & Kaufman, J. C. (2017). Enhancing equity in the classroom by teaching for mathematical creativity. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *49*(7), 1033-1039. doi:10.1007/s11858-017-0892-2

Lynn, M. R. (1986). Determination and quantification of content validity. *Nursing Research*, *35*(6), 382-385. doi:10.1097/00006199-198611000-00017

MacKenzie, S. B., Podsakoff, P. M., & Podsakoff, N. P. (2011). Construct measurement and validation procedures in MIS and behavioral research: Integrating new and existing techniques. *MIS quarterly*, *35*(2), 293-334. doi:10.5555/2017507.2017510

MacKinnon, D. W. (1978). *In search of human effectiveness: Identifying and developing creativity.* Buffalo, NY: Bearly Limited.

Macknight, V. S. (2009). *Teaching imagination* (PhD thesis, The University of Melbourne). Ανάκληση από http://hdl.handle.net/11343/35286

Mangels, J. A., Butterfield, B., Lamb, J., Good, C., & Dweck, C. S. (2006). Why do beliefs about intelligence influence learning success? A social cognitive neuroscience model. *Social Cognitive and Affective Neuroscience*, *1*(2), 75-86. doi:10.1093/scan/nsl013

Mann, E. L. (2005). *Mathematical creativity and school mathematics: Indicators of mathematical creativity in middle school students* (Doctoral dissertation, University of Connecticut). Ανάκληση από http://www.fisme.science.uu.nl/publicaties/literatuur/2005_mann_creativity.pdf

Mann, E. L. (2006). Creativity: The essence of mathematics. *Journal for the Education of the Gifted, 30*(2), 236-260.

Mann, E. L. (2009). The search for mathematical creativity: Identifying creative potential in middle school students. *Creativity Research Journal, 21*(4), 338-348. doi:10.1080/10400410903297402

Mann, E., Chamberlin, S. A., & Graefe, A. K. (2017). The prominence of affect in creativity: Expanding the conception of creativity in mathematical problem solving. In R. Leikin & B. Sriraman (Eds.), *Creativity and giftedness: Interdisciplinary perspectives from mathematics and beyond* (pp. 57-76). Switzerland: Springer.

Mayer, R. E. (2005). The role of domain knowledge in creative problem solving. In J. C. Kaufman & J. Baer (Eds.), *Creativity and reason in cognitive development* (pp. 145-158). New York, NY: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9781139941969.008

Massarwe, K., Verner, I., & Bshouty, D. (2011). Fostering creativity through geometrical and cultural inquiry into ornaments. In B. Sriraman & K. H. Lee (Eds.), *The elements of creativity and giftedness in mathematics* (pp. 217-231). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers. doi:10.1007/978-94-6091-439-3_14

McGee, M. G. (1979). Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences. *Psychological Bulletin, 86*(5), 889-918.

Michael, W. B., Guilford, J. P., Fruchter, B., & Zimmerman, W. S. (1957). The description of spatial-visualization abilities. *Educational and Psychological Measurement, 17*, 185-199. doi:10.1177/001316445701700202

Midkiff, B., Langer, M., Demetriou, C., & Panter, A. T. (2018). An IRT Analysis of the Growth Mindset Scale. In M. Wiberg, S. Culpepper, R. Janssen, J. González, & D. Molenaar (Eds.), *Quantitative Psychology, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics* (Vol. 233, pp. 163-174). Springer, Cham. doi:10.1007/978-3-319-77249-3_14

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook* (2nd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Moser, J. S., Schroder, H. S., Heeter, C., Moran, T. P., & Lee, Y. H. (2011). Mind your errors: Evidence for a neural mechanism linking growth mind-set to adaptive posterror adjustments. *Psychological Science, 22*(12), 1484-1489. doi:10.1177/0956797611419520

Mountain, V. (2007). Educational contexts for the development of children's spirituality: Exploring the use of imagination. *International Journal of Children's Spirituality*, *12*(2), 191-205. doi:10.1080/13644360701467535

Mrayyan, S. (2016). Investigating mathematics teachers' role to improve students' creative thinking. *American Journal of Educational Research*, *4*(1), 82-90. doi:10.12691/education-4-1-13

Mueller, C. M., & Dweck, C. S. (1998). Intelligence praise can undermine motivation and performance. *Journal of Personality and Social Psychology*, *75*(1), 33-52. doi:10.1.1.477.4297&rep=rep1&type=pdf

Murphy, K. R., & Davidshofer, C. O. (2001). *Psychological testing principles and applications* (5th ed.). Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Musser, G. L., & Peterson, B. E. (2011). *Mathematics for elementary teachers: A contemporary approach* (8th ed.). USA: John Willey & Sons.

Myers, C. A., Wang, C., Black, J. M., Bugescu, N., & Hoeft, F. (2016). The matter of motivation: Striatal resting-state connectivity is dissociable between grit and growth mindset. *Social Cognitive and Affective Neuroscience*, *11*(10), 1521-1527. doi:10.1093/scan/nsw065

National Advisory Committee on Creative and Cultural Education (NACCCE). (1999). *All our futures: Creativity, culture and education*. London: DfES.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Ng, B. (2018). The neuroscience of growth mindset and intrinsic motivation. *Brain Sciences*, *8*(2), 20-29. doi:10.3390/brainsci8020020

Ohlsson, S. (1984). Restructuring revisited: II. An information processing theory of restructuring and insight. *Scandinavian Journal of Psychology*, *25*(2), 117-129. doi:10.1111/j.1467-9450.1984.tb01005.x

Ohlsson, S. (1992). Information processing explanations of insight and related phenomena. In M. T. Keane & K. J. Gilhooly (Eds.), *Advances in the psychology of thinking* (Vol. 1, pp. 1-44). London: Harvester-Wheatsheaf.

Osborn, A. F. (1953). *Applied imagination*. New York, NY: Charles Scribner's Sons.

Pajares, F. (1996). Self-efficacy beliefs in academic settings. *Review of Educational Research*, *66*(4), 543-578. doi:10.2307/1170653

Παπαναστασίου, Κ., & Παπαναστασίου, Ε. (2005). *Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας*. Λευκωσία: Καΐλας.

Park, S., Callahan, C. M., & Ryoo, J. H. (2016). Assessing gifted students' beliefs about intelligence with a psychometrically defensible scale. *Journal for the Education of the Gifted*, *39*(4), 288-314.

Parzysz, B. (1999). Visualization and modeling in problem solving: From algebra to geometry and back. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd PME International Conference* (pp. 212-219). Haifa, Israel: PME.

Patton, M. Q. (1999). Enhancing the quality and credibility of qualitative analysis. *Health Services Research*, *34*(5), 1189-1208.

Patton, M. Q. (2015). *Qualitative research & evaluation methods: Integrating theory and practice* (4th ed.). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Paunesku, D., Walton, G. M., Romero, C., Smith, E. N., Yeager, D. S., & Dweck, C. S. (2015). Mind-set interventions are a scalable treatment for academic underachievement. *Psychological Science*, *26*(6), 784-793. doi:10.1177/0956797615571017

Pehkonen, E. (1997). The state-of-art in mathematical creativity. *International Reviews on Mathematical Education*, *29*, 63-66. Ανάκληση από http://www.fiz-karlsruhe.de/ fix/publications/zdm/adm97

Pelaprat, E., & Cole, M. (2011). "Minding the gap": Imagination, creativity and human cognition. *Integrative Psychological and Behavioral Science*, *45*(4), 397-418. doi:10.1007/s12124-011-9176-5

Pelczer, I., & Rodríguez, F. G. (2011). Creativity assessment in school settings through problem posing tasks. *The Montana Mathematics Enthusiast*, *8*(1&2), 383-398.

Pitta-Pantazi, D. (2017). What have we learned about giftedness and creativity? An overview of a five years journey. In R. Leikin & B. Sriraman (Eds.), *Creativity and giftedness* (pp. 201-223). Springer, Cham. doi:10.1007/978-3-319-38840-3_13

Pitta-Pantazi, D., Kattou, M., & Christou, C. (2018). Mathematical creativity: Product, person, process and press. In F. M. Singer (Ed.), *Mathematical creativity and mathematical giftedness* (pp. 27-53). New York, NY: Springer.

Plucker, J. A., Beghetto, R. A., & Dow, G. T. (2004). Why isn't creativity more important to educational psychologists? Potentials, pitfalls, and future directions in creativity research. *Educational Psychologist*, *39*(2), 83-96. doi:10.1207/s15326985ep3902_1

Poincaré, H. (1948). *Science and method*. New York, NY: Dover.

Poincaré, H. (1952). *Mathematical discovery. Science and method*. New York, NY: Dover Publications Inc.

Poincaré, H. (1956). Mathematical creation. In J. R. Newman (Ed.), *The world of mathematics* (Vol.4, pp. 2041-2050), New York, NY: Simon and Schuster.

Poincaré, H. (2003). *Science and method* (F. Maitland, Trans.). New York, NY: Dover.

Polit, D. F., & Beck, C. T. (2006). The content validity index: are you sure you know what's being reported? Critique and recommendations. *Research in Nursing & Health, 29*(5), 489-497. doi:10.1002/nur.20147

Posamentier, A. S., Smith, B., & Stepelman, J. (2010). *Teaching secondary mathematics: Techniques and enrichment units* (8th ed.). Boston: Allyn & Bacon.

Pound, L., & Lee, T. (2015). *Teaching mathematics creatively*. New York, NY: Routledge.

Powell, S. R., & Fuchs, L. S. (2018). Effective word-problem instruction: Using schemas to facilitate mathematical reasoning. *Teaching Exceptional Children*, *51*(1), 31-42. doi:10.1177/0040059918777250

Presmeg, N. C. (1986). Visualisation in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *6*(3), 42-46.

Presmeg, N. C. (1997). Generalization using imagery in mathematics. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images* (pp. 299-312). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Presmeg, N. C. (2003). Creativity, mathematizing, and didactizing: Leen Streefland's work continues. *Educational Studies in Mathematics*, *54*(1), 127-137. doi:10.1023/B:EDUC.0000005255.04769.89

Prouse, H. L. (1964). The construction and use of a test for the measure of certain aspects of creativity in seventh-grade mathematics. *Dissertation Abstracts*, *26*(01), 394. (UMI No AAT 6500500)

Reinartz, W., Haenlein, M., & Henseler, J. (2009). An empirical comparison of the efficacy of covariance-based and variance-based SEM. *International Journal of research in Marketing*, *26*(4), 332-344. doi:10.1016/j.ijresmar.2009.08.001

Ren, F., Li, X., Zhang, H., & Wang, L. (2012). Progression of Chinese students' creative imagination from elementary through high school. *International Journal of Science Education*, *34*(13), 2043-2059. doi:10.1080/09500693.2012.709334

Rhodes, M. (1961). An analysis of creativity, *Phi Delta Kappan*, *42*(7), 305-310.

Rietzschel, E., Nijstad, B., & Stroebe, W. (2007). Relative accessibility of domain knowledge and creativity: The effects of knowledge activation on the quantity and originality of generated ideas. *Journal of Experimental Social Psychology, 43(6)*, 933-946. doi:10.1016/j.jesp.2006.10.014

Rivera, F. (2007). Visualizing as a mathematical way of knowing: Understanding figural generalization. *Mathematics Teacher*, *101*(1), 69-75.

Robinson, W. S. (1951). The logical structure of analytic induction. *American Sociological Review*, *16*(6), 812-818. doi:10.2307/2087508

Robins, R. W., & Pals, J. L. (2002). Implicit self-theories in the academic domain: Implications for goal orientation, attributions, affect, and self-esteem change. *Self and Identity*, *1*(4), 313-336. doi:10.1080/15298860290106805

Romero, C., Master, A., Paunesku, D., Dweck, C. S., & Gross, J. J. (2014). Academic and emotional functioning in middle school: The role of implicit theories. *Emotion*, *14*(2), 227-234. doi:10.1037/a0035490

Romey, W. D. (1970). What is your creativity quotient? *School Science and Mathematics*, *70*(1), 3-8. doi:10.1111/j.1949-8594.1970.tb08557.x

Sak, U., & Maker, C. J. (2006). Developmental variation in children's creative mathematical thinking as a function of schooling, age, and knowledge. *Creativity Research Journal*, *18*(3), 279-291. doi:10.1207/s15326934crj1803_5

Salvi, C., Bricolo, E., Kounios, J., Bowden, E., & Beeman, M. (2016). Insight solutions are correct more often than analytic solutions. *Thinking & Reasoning*, *22*(4), 443-460. doi:10.1080%2F13546783.2016.1141798

Sanders, S. (2016). Critical and creative thinkers in mathematics classrooms. *Journal of Student Engagement: Education Matters*, *6*(1), 19-27.

Sarstedt, M., Ringle, C. M., & Hair, J. F. (2017). Partial least squares structural equation modeling. In C. Homburg, M. Klarmann, & A. Vomber (Eds.), *Handbook of market research* (pp. 1-40). Springer International Publishing. doi:10.1007/978-3-319-05542-8_15-1

Savic, M. (2016). Mathematical problem-solving via Wallas' four stages of creativity: Implications for the undergraduate classroom. *The Mathematics Enthusiast*, *13*(3), 255-278.

Sawyer, K. (2011). The cognitive neuroscience of creativity: A critical review. *Creativity Research Journal*, *23*(2), 137-154. doi:10.1080/10400419.2011.571191

Schindler, M., Joklitschke, J., & Rott, B. (2018). Mathematical creativity and its subdomain-specificity. Investigating the appropriateness of solutions in multiple solution tasks. In F. M. Singer (Ed.), *Mathematical creativity and mathematical giftedness* (pp. 115-142). Springer, Cham. doi:10.1007/978-3-319-73156-8

Schroder, H. S., Fisher, M. E., Lin, Y., Lo, S. L., Danovitch, J. H., & Moser, J. S. (2017). Neural evidence for enhanced attention to mistakes among school-aged children with a growth mindset. *Developmental Cognitive Neuroscience*, *24*, 42-50. doi:10.1016/j.dcn.2017.01.004

Seelig, T. (2012). *inGenius: A Crash course on creativity*. New York, NY: HarperOne.

Sharma, S. (2015). Promoting risk taking in mathematics classrooms: The importance of creating a safe learning environment. *Mathematics Enthusiast, 12*(2), 290-306.

Sharma, Y. (2014). The effects of strategy and mathematics anxiety on mathematical creativity of school students. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *9*(1/2), 25-37.

Sheffield, L. J. (2000). Creating and developing promising young mathematicians. *Teaching Children Mathematics*, *6*(6), 416-419.

Sheffield, L. J. (2003). *Extending the challenge in mathematics: Developing mathematical promise in K-8 children*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

Sheffield, L. J. (2006). Developing mathematical promise and creativity. *Research in Mathematical Education*, *10*(1), 1-11.

Sheffield, L. J. (2009). Developing mathematical creativity-Questions may be the answer. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 87-100). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Sheffield, L. J. (2018). Commentary paper: A reflection on mathematical creativity and giftedness. In F. M. Singer (Ed.), *Mathematical creativity and mathematical giftedness* (pp. 405-423). New York, NY: Springer.

Shen, W., Liu, C., Zhang, X., Zhao, X., Zhang, J., Yuan, Y., & Chen, Y. (2013). Right hemispheric dominance of creative insight: An event-related potential study. *Creativity Research Journal*, *25*(1), 48-58. doi:10.1080/10400419.2013.752195

Shriki, A. (2010). Working like real mathematicians: Developing prospective teachers' awareness of mathematical creativity through generating new concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(2), 159-179. doi:10.1007/sl0649-009-9212-2

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 19-28.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, *3*, 75-80. doi:10.1007/s11858-997-0003-x

Silver, E. A., Kilpatrick, J., & Schlcsingcr, B. (1990). *Thinking through mathematics: Fostering inquiry and communication in mathematics classrooms*. New York, NY: The College Board.

Silver, E. A., Mamona-Downs, J., Leung, S. S., & Kenney, P. A. (1996). Posing mathematical problems: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(3), 293-309. doi:10.2307/749366

Sinclair, N., de Freitas, E., & Ferrara, F. (2013). Virtual encounters: The murky and furtive world of mathematical inventiveness. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *45*(2), 239-252. doi:10.1007/s11858-012-0465-3.

Singer, F. M. (Ed.) (2018a). *Mathematical creativity and mathematical giftedness*. Switzerland: Springer.

Singer, F. M. (2018b). Enhancing creative capacities in mathematically-promising students: Challenges and limits. In F. M. Singer (Ed.), *Mathematical creativity and mathematical giftedness* (pp. 1-23). Switzerland: Springer.

Singer, F. M., Ellerton, N., & Cai, J. (2013). Problem-posing research in mathematics education: New questions and directions. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 1-7. doi:10.1007/s 10649-013-9478-2

Singer, F. M., Ellerton, N., Cai, J., & Leung, E. (2011). Problem posing in mathematics learning and teaching: A research agenda. In B. Ubuz (Ed.), *Developing mathematical thinking. Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 137-166). Ankara, Turkey: PME.

Singer, F. M., Pelczer, I., & Voica, C. (2011). Problem posing and modification as a criterion of mathematical creativity. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1133-1142). Rzeszów, Poland: University of Rzeszów, ERME.

Singer, F. M., Sheffield, L. J., & Leikin, R. (2017a). Advancements in research on creativity and giftedness in mathematics education: Introduction to the special issue. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *49*(1), 5-12. doi:10.1007/s11858-017-0836-x

Singer, F. M., Sheffield, L. J., & Leikin, R. (Eds.) (2017b). Mathematical creativity and giftedness in mathematics education. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *49*(1).

Singer, F. M., & Voica, C. (2015). Is problem posing a tool for identifying and developing mathematical creativity? In F. M. Singer, N. F. Ellerton, & J. Cai, (Eds.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (pp. 141-174). New York, NY: Springer.

Skinner, P. (1991). *What's your problem? Posing and solving mathematical problems, K-2*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Smith, M., & Mathur, R. (2009). Children's imagination and fantasy: Implications for development, education, and classroom activities. *Research in the Schools*, *16*(1), 52-63.

Smith, S. M. (1995). Fixation, incubation, and insight in memory and creative thinking. In S. M. Smith, T. B. Ward, & R. A. Finke (Eds.), *The creative cognition approach* (pp. 135-156). Cambridge, MA: MIT Press.

Sosik, J. J., Kahai, S. S., & Avolio, B. J. (1998). Transformational leadership and dimensions of creativity: Motivating idea generation in computer-mediated groups. *Creativity Research Journal*, *11*(2), 111-121. doi:10.1207/s15326934crj1102_3

Sriraman, B. (2004). The characteristics of mathematical creativity. *Mathematics Educator*, *14*(1), 19-34.

Sriraman, B. (2005). Are giftedness and creativity synonyms in mathematics? *Journal of Secondary Gifted Education*, *17*(1), 20-36.

Sriraman, B. (2009). Aha! experiences. In B. Kerr (Ed.), *Encyclopedia of giftedness, creativity and talent* (Vol. 1, pp. 37-39). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Sriraman, B. (2017). Mathematical creativity: Psychology, progress and caveats. *ZDM – The International Journcal of Mathematics Education*, *49*(7), 971-975. doi:10.1007/s11858-017-0886-0

Sriraman, B., Haavold, P., & Lee, K. (2014). Creativity in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 109-115). Dordrecht, The Netherlands: Springer. doi:10.1007/978-94-007-4978-8_33

Sriraman, B., & Leikin, R. (2017). Commentary on interdisciplinary perspectives to creativity and giftedness. In R. Leikin & B. Sriraman (Eds.), *Creativity and giftedness* (pp. 259-264). Switzerland: Springer, Cham.

Starko, A. J. (1994). *Creativity in the classroom*. New York, NY: Longman.

Sternberg, R. J. (2006). The nature of creativity. *Creativity Research Journal*, *18*(1), 87-98. doi:10.1207/s15326934crj1801_10

Sternberg, R. J. (2012). The assessment of creativity: An investment-based approach. *Creativity Research Journal*, *24*(1), 3-12. doi:10.1080/10400419.2012.652925

Sternberg, R. J., & Lubart, T. I. (1995). *Defying the crowd: Cultivating creativity in a culture of conformity*. New York, NY: Free Press.

Suh, J. M., Johnston, C. J., & Douds, J. (2008). Enhancing mathematical learning in a technology-rich environment. *Teaching Children Mathematics*, *15*(4), 235-241.

Sullivan, P. (2011). *Teaching mathematics: Using research - informed strategies.* Camberwell, VIC: ACER Press. Ανάκληση από http://research.acer.edu.au/cgi/viewcontent.cgi?article=1022&context=aer

Sutherland, R. (2007). *Teaching for learning mathematics*. Maidenhead: Open University Press.

Sutton-Smith, B. (1988). In search of the imagination. In K. Egan & D. Nadaner (Eds.), *Imagination and education* (pp. 3-29). New York, NY: Teachers College Press.

Tabach, M., & Friedlander, A. (2013). School mathematics and creativity at the elementary and middle-grade levels: How are they related? *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 45*(2), 227-238. doi:10.1007/s11858-012-0471-5

Tabachnick, B. G., & Fidell, L. S. (2014*), Using multivariate statistics: Pearson new international edition* (6th ed.). Essex, UK: Pearson Education Limited.

Tan, A. G. (2017). Creative imagination in memorization in mathematics learning. In R. A. Beghetto & B. Sriraman (Eds.), *Creative contradictions in education* (pp. 249-264). Springer, Cham.

Tan, A. G., & Sriraman, B. (2017). Convergence in creativity development for mathematical capacity. In R. Leikin & B. Sriraman (Eds.), *Creativity and giftedness* (pp. 117-133). Springer, Cham.

Teddlie, C., & Tashakkori, A. (2009). *Foundations of mixed methods research: Integrating quantitative and qualitative approaches in the social and behavioral sciences*. Los Angeles, CA: Sage Publications.

Terao, A., Koedinger, K. R., Sohn, M. H., Qin, Y., Anderson, J. R., & Carter, C. S. (2004). An fMRI study of the interplay of symbolic and visuo-spatial systems in mathematical reasoning, *Proceedings of the 26th Annual Conference of the Cognitive Science Society* (pp. 1327-1332). Chicago, USA.

Thagard, P., & Stewart, T. C. (2011). The Aha! experience: Creativity through emergent binding in neural networks. *Cognitive Science*, *35*(1), 1-33. doi:10.1111/j.1551-6709.2010.01142.x

The G C School of Careers examination. (2011). *The G C School of Careers: Εισαγωγικές εξετάσεις*. Ανάκληση από https://www.gcsc.ac.cy/wp-content/uploads/2018/09/EntranceMathsInGreekSample1.pdf

The G C School of Careers examination. (2015). *The G C School of Careers: Εισαγωγικές εξετάσεις*. Ανάκληση από https://www.gcsc.ac.cy/wp-content/uploads/2018/09/MathsGreekSample5.pdf

Thornton, S. (2001). *A picture is worth a thousand words*. Ανάκληση από http://math.unipa.it/~grim/AThornton251.PDF

Tolar, T. D., Lederberg, A. R., & Fletcher, J. M. (2009). A structural model of algebra achievement: Computational fluency and spatial visualization as mediators of the effect of working memory on algebra achievement. *Educational Psychology*, *29*, 39-266. doi:10.1080/01443410802708903.

Torrance, E. P. (1966). *Torrance test on creative thinking: Norms - Technical Manual Research Edition*. Princeton, NJ: Personnel Press.

Torrance, E. P. (1974). *The Torrance tests of creative thinking-norms-technical manual research edition-verbal tests, forms A and B- figural tests, forms A and B.* Princeton, NJ: Personnel Press.

Tran, T. B. L., Ho, T. N., Mackenzie, S. V., & Le, L. K. (2017). Developing assessment criteria of a lesson for creativity to promote teaching for creativity. *Thinking Skills and Creativity*, *25*, 10-26. doi:10.1016/j.tsc.2017.05.006

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics instruction - The Wiskobas project*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Trigueros, M., Lozano, M. D., & Sandoval, I. (2014). Integrating technology in the primary school mathematics classroom: The role of the teacher. In N. Sinclair, A. Clark-Wilson & O. Robutti (Eds.), *The mathematics teacher in the digital era: An international perspective on technology focused professional development* (pp. 111-138). The Netherlands: Springer.

U.S. Department of Education, National Center for Education Statistics. (2003). *Comparative indicators of education in the United States and other G-8 countries: 2002* (NCES Publication No. 2003-26). Washington, DC: Author.

Vale, I., & Barbosa, A. (n.d.). *Creativity through challenging learning tasks.* Ανάκληση από http://directorymathsed.net/montenegro/Vale.pdf

Vale, I., & Barbosa, A. (2015). Mathematics creativity in elementary teacher training. *Journal of the European Teacher Education Network*, *10*, 101-109.

Vale, I., & Barbosa, A. (2018). Mathematical problems: The advantages of visual strategies. *Journal of the European Teacher Education Network*, *13*, 23-33.

Vale, I., Pimentel, T., Cabrita, I., & Barbosa, A. (2012). Pattern problem solving tasks as a mean to foster creativity in mathematics. In T. Y. Tso, (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 171-178). Taipei, Taiwan: PME.

van Alphen, P. (2011). Imagination as a transformative tool in primary school education. *RoSE - Research on Steiner Education, 2(2)*, ISSN 1891-6511.

Van den Brink, J. F. (1987). Children as arithmetic book authors. *For the Learning of Mathematics*, 7(2), 44-48.

Van Rinsveld, A., Schiltz, C., Brunner, M., Landerl, K., & Ugen, S. (2016). Solving arithmetic problems in first and second language: Does the language context matter?. *Learning and Instruction*, *42,* 72-82. doi:10.1016/j.learninstruc.2016.01.003

Vidal, R. V. V. (2005). Creativity for operational researchers. *Investigação Operacional*, *25*(1), 1-24.

Voica, C., & Singer, F. M. (2013). Problem modification as a tool for detecting cognitive flexibility in school children. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *45*(2), 267-279. doi:10.1007/s11858-013-0492-8

Vygotsky, L. S. [y1930] 2004. Imagination and creativity in childhood, *Journal of Russian and East European Psychology*, *1*(42), 7-97.

Wade, S. E. (1990). Using think alouds to assess comprehension. *The Reading Teacher*, *43*(7), 442-451.

Wallas, G. (1926). *The art of thought*. London, UK: Jonathan Cape.

Walter, M. I. (1993). Generating problems from almost anything. In S. Brown & M. Walter (Eds.), *Problem posing: Reflections and applications* (pp. 302-316). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Waltz, C. F., Strickland, O. L., & Lenz, E. R. (2005). *Measurement in nursing and health research* (3rd ed.). New York, NY: Springer Publishing Co.

Warnock, M. (1976). *Imagination*. London, UK: Faber and Faber.

Webb, M. E., Little, D. R., & Cropper, S. J. (2016). Insight is not in the problem: Investigating insight in problem solving across task types. *Frontiers in Psychology*, *7*, 1424. doi:10.3389/fpsyg.2016.01424

Webb, M. E., Little, D. R., & Cropper, S. J. (2018). Once more with feeling: Normative data for the aha experience in insight and noninsight problems. *Behavior Research Methods*, *50*(5), 2035-2056. doi:10.3758/s13428-017-0972-9

Weisberg, R. W. (1986). *Creativity: Genius and other myths*. New York, NY: W H Freeman & Co.

Weisberg, R. W. (1995). Prolegomena to theories of insight in problem solving: A taxonomy of problems. In R. J. Sternberg & J. E. Davidson (Eds.), *The nature of insight* (pp. 157-196). Cambridge, MA: MIT Press.

Weisberg, R. W. (2015). Toward an integrated theory of insight in problem solving. *Thinking & Reasoning*, *21*(1), 5-39. doi:10.1080/13546783.2014.886625

Wheeler-Brownlee, G. (1985). Imagination: The connection enigma. *The Journal of Creative Behavior*, *19*(4), 255-269.

White, A. R. (1990). *The language of imagination*. Oxford, UK: Blackwell.

Wiley, J. (1998). Expertise as mental set: The effects of domain knowledge in creative problem solving. *Memory & Cognition*, *26*(4), 716-730.

Willaby, H. W., Costa, D. S. J., Burns, B. D., MacCann, C., & Roberts, R. D. (2015). Testing complex models with small sample sizes: A historical overview and empirical demonstration of what partial least squares (PLS) can offer differential psychology. *Personality and Individual Differences*, *84*, 73–78. doi:10.1016%2Fj.paid.2014.09.008

Wu, J. J., & Albanese, D. L. (2013). Imagination and creativity: Wellsprings and streams of education – The Taiwan experience. *Educational Psychology*, *33*(5), 561-581. doi:10.1080/01443410.2013.813689

Χρυσοστόμου, Μ. (2014). *Η δομή και η ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης* (Διδακτορική διατριβή, Πανεπιστήμιο Κύπρου). Ανάκληση από https://gnosis.library.ucy.ac.cy/handle/7/39217?locale-attribute=el

Yaftian, N. (2015). The outlook of the mathematicians' creative processes. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *191*, 2519-2525. doi:10.1016/j.sbspro.2015.04.617

Yang, Y., & Chin, W. (1996). Motivational analyses on the effects of type of instructional control on learning from computer-based instruction. *Journal of Educational Technology System, 25*(1), 25-35.

Yeager, D. S., Johnson, R., Spitzer, B. J., Trzesniewski, K. H., Powers, J., & Dweck, C. S. (2014). The far-reaching effects of believing people can change: Implicit theories of personality shape stress, health, and achievement during adolescence. *Journal of Personality and Social Psychology*, *106*(6), 867. doi:10.1037/a0036335

Yeager, D. S., Trzesniewski, K. H., & Dweck, C. S. (2013). An implicit theories of personality intervention reduces adolescent aggression in response to victimization and exclusion. *Child Development*, *84*(3), 970-988. doi:10.1111/cdev.12003

Yerushalmy, M. (2009). Educational technology and curricular design: Promoting mathematical creativity for all students. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 101-113). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Yerushalmy, M., Sternberg, B., & Gilead, S. (1999). Visualization as a vehicle for meaningful problem solving in algebra, In O. Zaslaysky (Ed.), *Proceedings of the 23th PME Conference* (pp. 197-211). Haifa, Israel: PME.

Yin, R. K. (2013). *Case study research: Design and methods* (5th ed.). Los Angeles, CA: Sage Publications.

Young, K. A. (2005). Direct from the source: The value of 'think aloud' data in understanding learning. *The Journal of Educational Enquiry*, *6*(1), 19-33.

Yuan, X., & Sriraman, B. (2011). An exploratory study of relationships between students' creativity and mathematical problem posing abilities: Comparing Chinese and U.S. students. In B. Sriraman & K. Lee (Eds.), *The elements of creativity and giftedness in mathematics* (pp. 5-28). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Yushau, B., Mji, A., & Wessels, D. C. J. (2005). The role of technology in fostering creativity in the teaching and learning of mathematics. *Pythagoras, 62,* 12-22. doi:10.4102/pythagoras.v0i62.110

Παράρτημα Α:

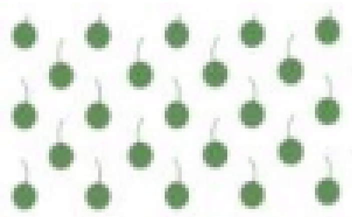
Πιλοτική Μορφή του Δοκιμίου της Φαντασίας στα Μαθηματικά

ΜΕΡΟΣ Α΄

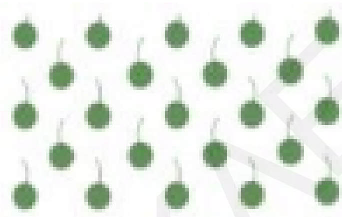
Όνομα μαθητή: ____ Τάξη: ___________

1.Ο Βασίλης μάζεψε τα κεράσια που φαίνονται στο σχήμα. Να βρεις ένα γρήγορο τρόπο να υπολογίσεις πόσα κεράσια μάζεψε. Να βρεις όσο το δυνατό πιο πολλούς και διαφορετικούς τρόπους μπορείς.

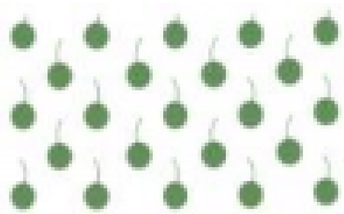
$1^{ος}$ τρόπος



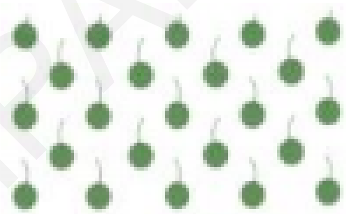
$2^{ος}$ τρόπος



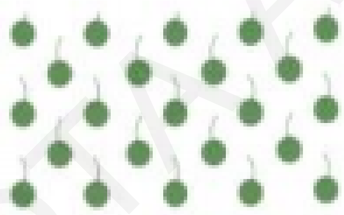
$3^{ος}$ τρόπος



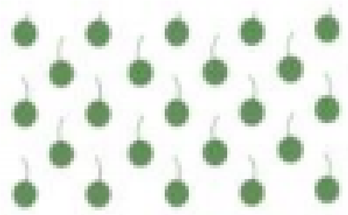
$4^{ος}$ τρόπος



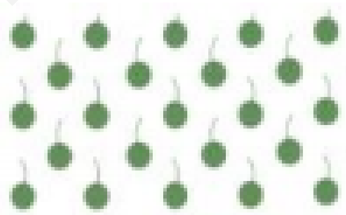
$5^{ος}$ τρόπος



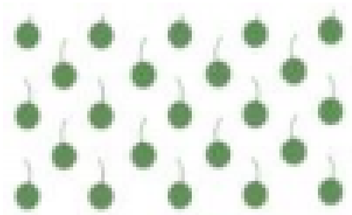
$6^{ος}$ τρόπος



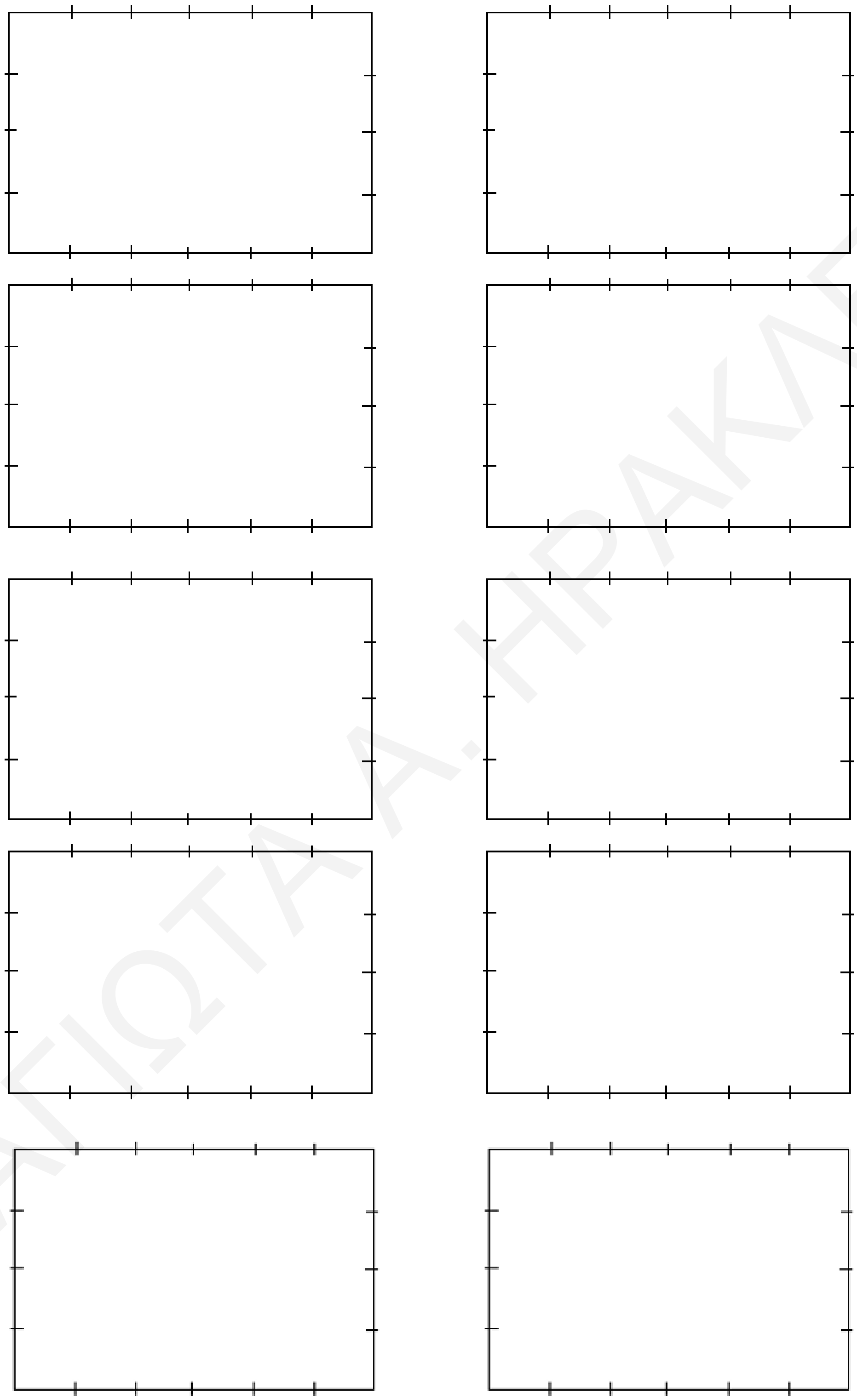
$7^{ος}$ τρόπος



$8^{ος}$ τρόπος

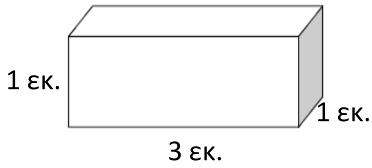


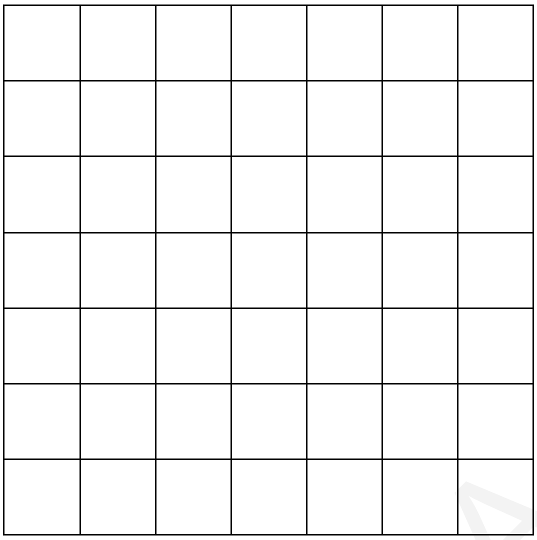
2.Να χρωματίσεις το $\frac{1}{2}$ του ορθογωνίου με όσο το δυνατόν περισσότερους και διαφορετικούς τρόπους.

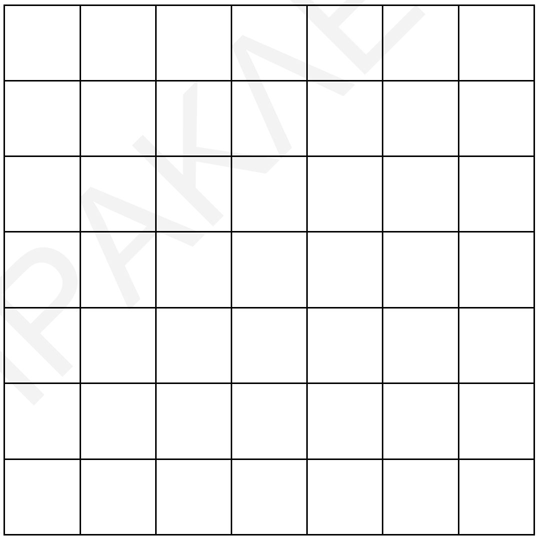


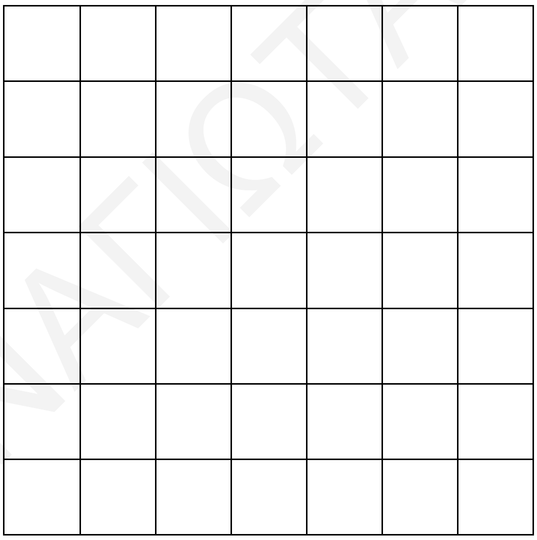
3. Στο μάθημα του Σχεδιασμού, ο Κώστας πρέπει να κατασκευάσει ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, αρχίζοντας από την κατασκευή του αναπτύγματος.

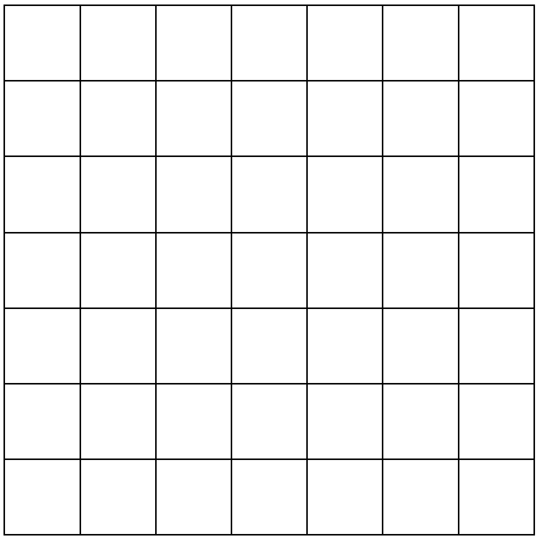
Πόσα διαφορετικά αναπτύγματα μπορεί να κατασκευάσει ώστε να σχηματίζει ορθογώνια παραλληλεπίπεδα; Να σχεδιάσεις όσο πιο πολλά και διαφορετικά αναπτύγματα μπορείς.



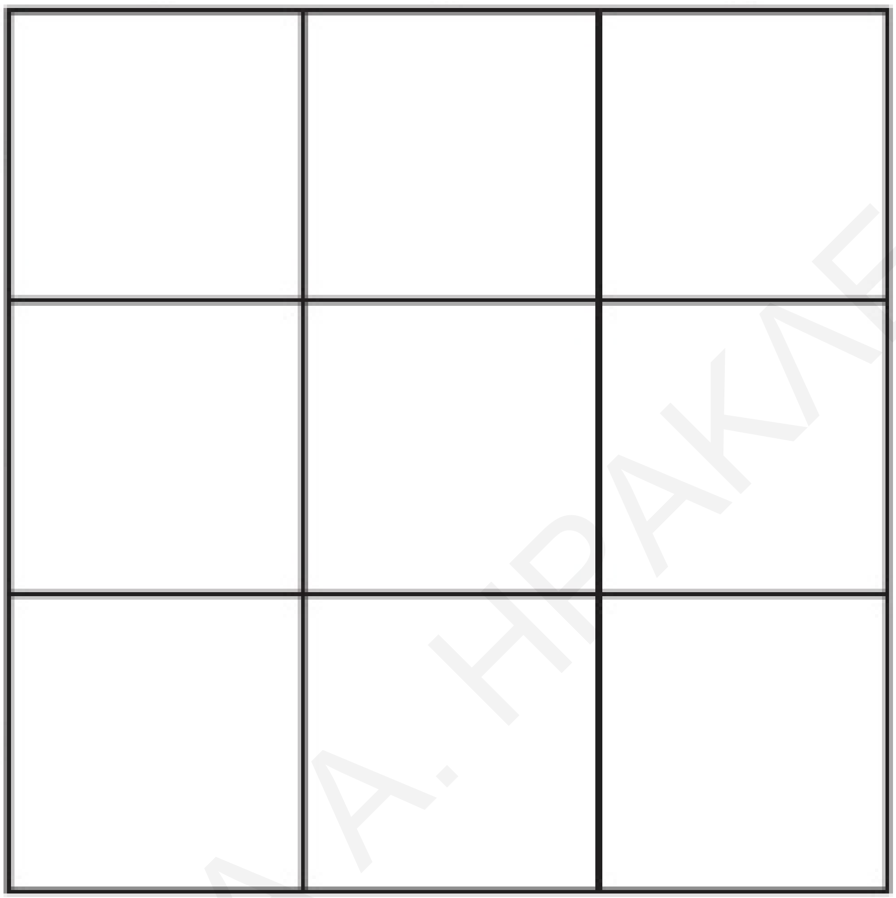








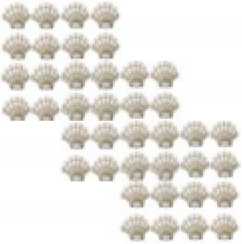
4. Στο πιο κάτω σχήμα, να εντοπίσεις και να σχεδιάσεις με διαφορετικό χρώμα όσο πιο πολλά και διαφορετικά τετράπλευρα μπορείς.



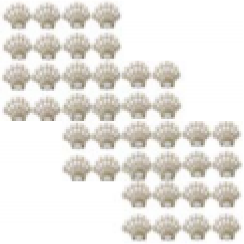
5. Η Μαρία οργάνωσε τα κοχύλια που μάζεψε χθες όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.

Να υπολογίσεις πόσα κοχύλια μάζεψε, με κάποιο γρήγορο τρόπο. Να βρεις όσο το δυνατό πιο πολλούς και διαφορετικούς τρόπους μπορείς.

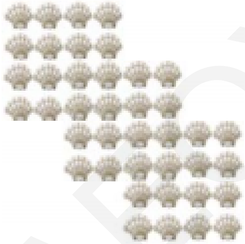
1ος τρόπος



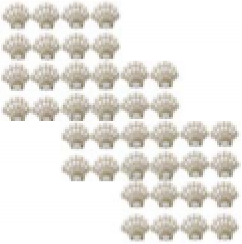
2ος τρόπος



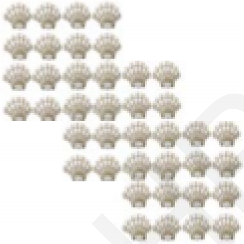
3ος τρόπος



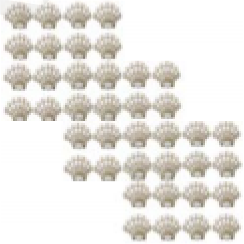
4ος τρόπος



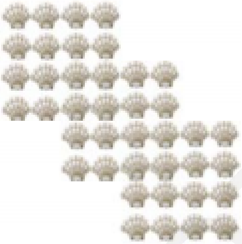
5ος τρόπος



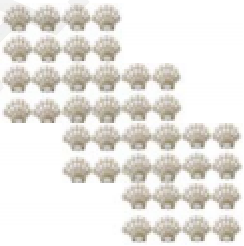
6ος τρόπος



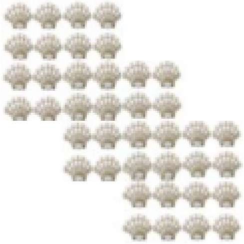
7ος τρόπος



8ος τρόπος



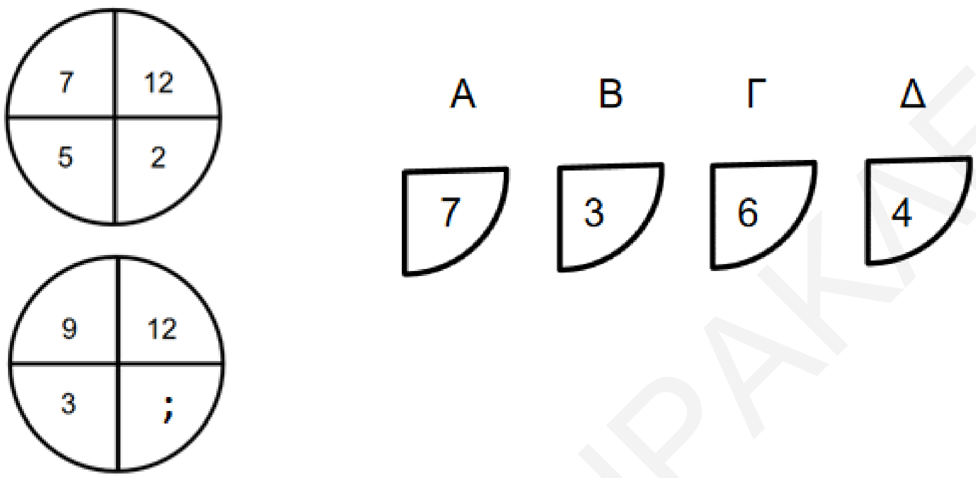
9ος τρόπος



ΜΕΡΟΣ Β΄

Όνομα μαθητή: _______________________________________ Τάξη: ___________

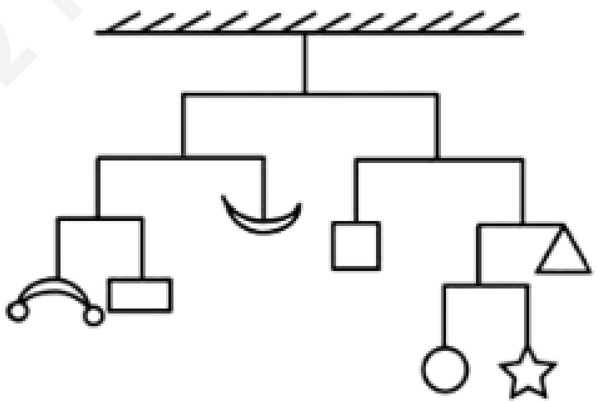
1. Να βρεις το σωστό κομμάτι που λείπει, επιλέγοντας μία από τις πιο κάτω πιθανές απαντήσεις.



2. Τα πιο κάτω αντικείμενα ισορροπούν πάνω σε σχοινιά όπως φαίνεται στην εικόνα πιο κάτω. Τα σχοινιά και οι οριζόντιες ράβδοι έχουν πολύ μικρή μάζα.

Η μάζα όλων των αντικειμένων μαζί είναι 112 γραμμάρια.

Πόσα γραμμάρια ζυγίζει το αστέρι;

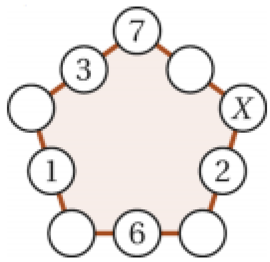


(Α) 6　　(Β) 7　　(Γ) 12　　(Δ) 16　　(Ε) δεν μπορούμε να γνωρίζουμε

3. Η Χριστίνα έγραψε αριθμούς σε 5 από τους 10 κύκλους, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Θέλει να γράψει έναν αριθμό σε κάθε ένα από τους υπόλοιπους 5 κύκλους, έτσι ώστε τα αθροίσματα των 3 αριθμών σε κάθε πλευρά του πενταγώνου να είναι ίσα.

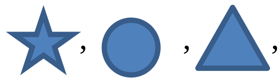
Ποιον αριθμό θα πρέπει να γράψει στον κύκλο με το σύμβολο Χ;



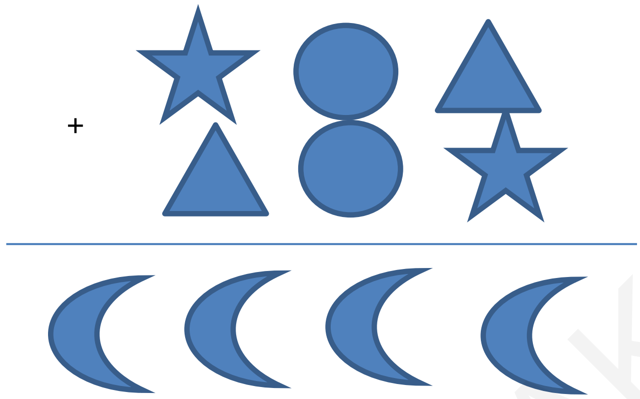
(Α) 7 (Β) 8 (Γ) 11 (Δ) 13 (Ε) 15

4. Αφού βρεις τη σχέση μεταξύ των αριθμών, να βρεις τον αριθμό x που βρίσκεται στο κέντρο.

Απάντηση: x = ____________________

5. Ο Γιάννης κάνει έναν υπολογισμό χρησιμοποιώντας τα ψηφία  και  .

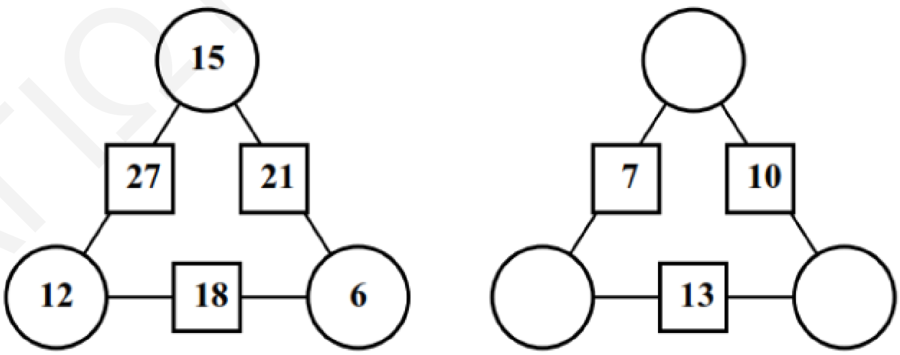
Ποιο ψηφίο αντιπροσωπεύεται από το  ;



(Α) 0 (Β) 2 (Γ) 4 (Δ) 5 (Ε) 6

6. Στο κάθε διάγραμμα οι αριθμοί οποιωνδήποτε δυο κύκλων έχουν άθροισμα ίσο με τον αριθμό που βρίσκεται στο τετράγωνο που είναι ανάμεσά τους. Ένα συμπληρωμένο παράδειγμα δίνεται στο αριστερό διάγραμμα.

Να συμπληρώσεις το διάγραμμα στα δεξιά.

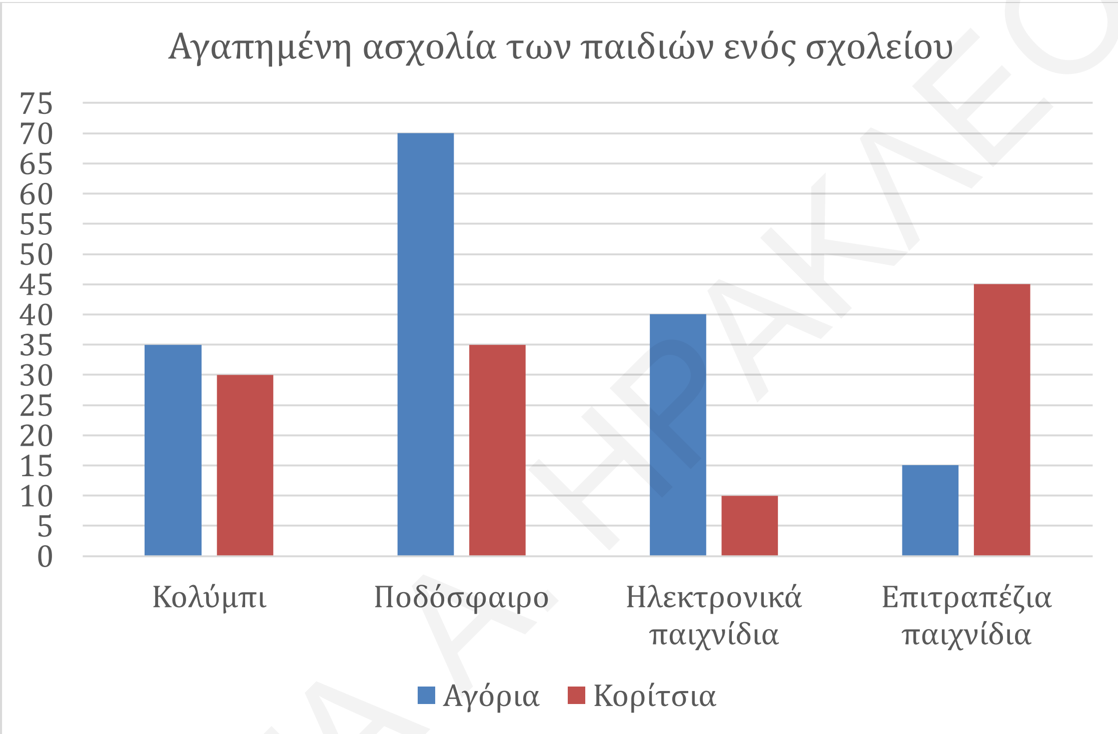


ΜΕΡΟΣ Γ΄

Όνομα μαθητή: ____ Τάξη: ___________

1.Να γράψεις όσο το δυνατό περισσότερες και διαφορετικές ερωτήσεις που μπορούν να απαντηθούν από τις πληροφορίες της γραφικής παράστασης.

Να προσπαθήσεις να σκεφτείς ερωτήσεις που δεν θα έχει σκεφτεί κάποιος άλλος.



____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

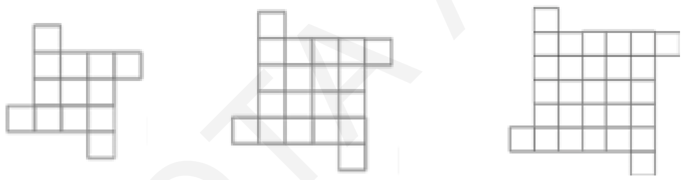
____

2. Να φανταστείς ότι είσαι δάσκαλος δημοτικού σχολείου και θέλεις να γράψεις προβλήματα για τους μαθητές σου που μπορούν να λυθούν με τη μαθηματική πρόταση:

$$3x5+2 = \square$$

Να γράψεις όσο πιο πολλά και διαφορετικά προβλήματα μπορείς.

3. (α) Να σχεδιάσεις το επόμενο σχήμα στο πιο κάτω μοτίβο.



1ο σχήμα 2ο σχήμα 3ο σχήμα 4ο σχήμα

(β) Να περιγράψεις πώς μπορούμε να υπολογίζουμε γρήγορα πόσα τετράγωνα θα έχει κάθε σχήμα του μοτίβου, εάν γνωρίζουμε τη θέση του.

Να το περιγράψεις με όσο πιο πολλούς και διαφορετικούς τρόπους μπορείς.

1ος τρόπος:

4ο σχήμα

Περιγραφή:

Μαθηματική έκφραση:

2ος τρόπος:

4^{ο} σχήμα

Περιγραφή:

Μαθηματική έκφραση:

3^{ος} τρόπος:

4^{ο} σχήμα

Περιγραφή:

Μαθηματική έκφραση:

4ος τρόπος:

4ο σχήμα

Περιγραφή:

Μαθηματική έκφραση:

4.Ο πιο κάτω πίνακας δείχνει τα μηνιαία έξοδα δυο οικογενειών. Να γράψεις όσο το δυνατό περισσότερες και διαφορετικές ερωτήσεις που μπορούν να απαντηθούν από τις πληροφορίες του πίνακα.

Να προσπαθήσεις να σκεφτείς ερωτήσεις που δεν θα έχει σκεφτεί κάποιος άλλος.

Έξοδα	**Ποσό (ευρώ)**	
	Οικογένεια Μάρκου	**Οικογένεια Πασχάλη**
Φαγητό	450	350
Ενοίκιο	0	300
Βενζίνη	350	150
Νερό & Ρεύμα & Τηλέφωνο	150	160
Ένδυση	200	180

5. Το πιο κάτω σχήμα είναι το πρώτο σχήμα σε ένα μοτίβο.

(α) Να σχεδιάσεις ποια μπορεί να είναι τα επόμενα τρία σχήματα του μοτίβου.

1^{o} σχήμα 2^{o} σχήμα 3^{o} σχήμα 4^{o} σχήμα

(β) Να περιγράψεις με λόγια πώς μπορούμε να υπολογίζουμε γρήγορα πόσους κύκλους θα έχει κάθε σχήμα του μοτίβου, εάν γνωρίζουμε τη θέση του.

Να το περιγράψεις με όσο πιο πολλούς και διαφορετικούς τρόπους μπορείς.

1ος τρόπος:

1^{o} σχήμα 2^{o} σχήμα 3^{o} σχήμα 4^{o} σχήμα

Περιγραφή:

Μαθηματική έκφραση:

2ος τρόπος:

1ο σχήμα 2ο σχήμα 3ο σχήμα 4ο σχήμα

Περιγραφή:

Μαθηματική έκφραση:

3ος τρόπος:

1ο σχήμα 2ο σχήμα 3ο σχήμα 4ο σχήμα

Περιγραφή:

Μαθηματική έκφραση:

$4^{ος}$ τρόπος:

$1^{ο}$ σχήμα $2^{ο}$ σχήμα $3^{ο}$ σχήμα $4^{ο}$ σχήμα

Περιγραφή:

____

____

____

____

Μαθηματική έκφραση:

____

6. Να γράψεις όσο πιο πολλά και διαφορετικά προβλήματα μπορείς που μπορούν να λυθούν με τη μαθηματική πρόταση:

$$4900-(1600+750) = \boxed{}$$

Παράρτημα Β:

Δοκίμιο της Φαντασίας στα Μαθηματικά

Φαντάζομαι στον κόσμο των μαθηματικών

Όνομα: ____ **Τάξη:** ___________

ΟΔΗΓΙΕΣ

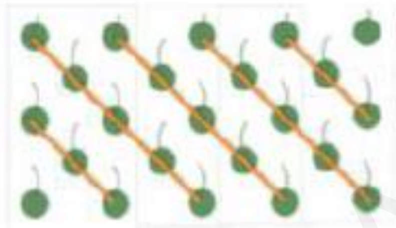
- Να απαντήσετε όλες τις ερωτήσεις.
- Δεν επιτρέπεται υπολογιστική μηχανή.
- Ο χρόνος που έχετε στη διάθεσή σας είναι **80 λεπτά**.
- Η έρευνα σκοπεύει να μελετήσει τη φαντασία και τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά, που είναι πολύ σημαντικές ικανότητες για τη μάθηση στα μαθηματικά και την καθημερινή ζωή.
- Θα διατηρηθεί η ανωνυμία σας.
- Η συμμετοχή σας στην έρευνα είναι εθελοντική. Μπορείτε να αποχωρήσετε από την έρευνα οποιαδήποτε στιγμή χωρίς συνέπειες.
- Οι πληροφορίες που θα συλλεχθούν θα χρησιμοποιηθούν μόνο για αυτή την έρευνα.

Μέρος Α΄

1 Ο Βασίλης μάζεψε τα κεράσια που φαίνονται στο σχήμα. Θέλει να βρει κάποιο γρήγορο τρόπο για να υπολογίσει πόσα κεράσια μάζεψε.

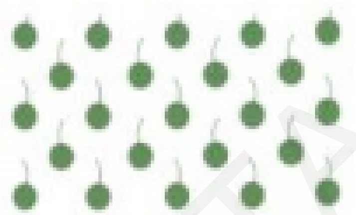
(α) Να βρεις **τρεις διαφορετικούς τρόπους** υπολογισμού των κερασιών και να τους δείξεις στο σχήμα. Για κάθε τρόπο που θα βρεις, να γράψεις τους υπολογισμούς που έκανες.

Παράδειγμα:



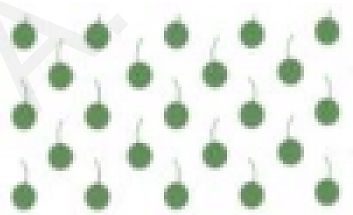
Υπολογισμοί: $2+(2\times3)+(3\times5)$

1ος τρόπος



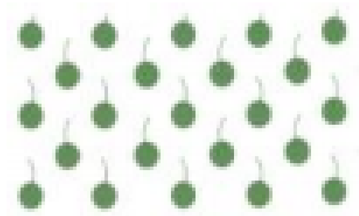
Υπολογισμοί:____________

2ος τρόπος



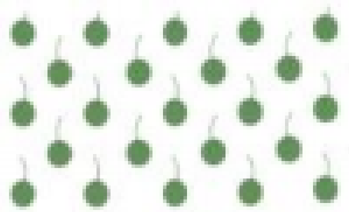
Υπολογισμοί:_________

3ος τρόπος



Υπολογισμοί:______________

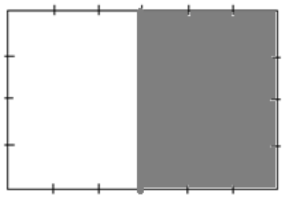
(β) Να βρεις έναν τρόπο υπολογισμού των κερασιών που δεν τον σκέφτηκε κανένας άλλος συμμαθητής σου. Να γράψεις τους υπολογισμούς που έκανες.

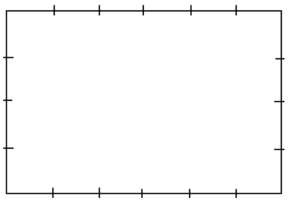


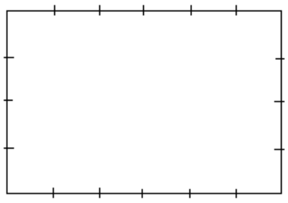
Υπολογισμοί:________________________

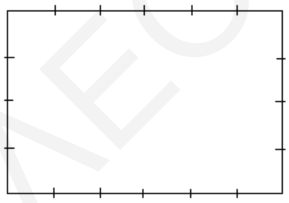
2 (α) Να χρωματίσεις το $\frac{1}{2}$ του ορθογωνίου, με **τρεις διαφορετικούς τρόπους**.

Παράδειγμα:

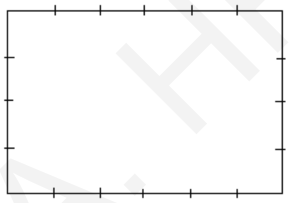




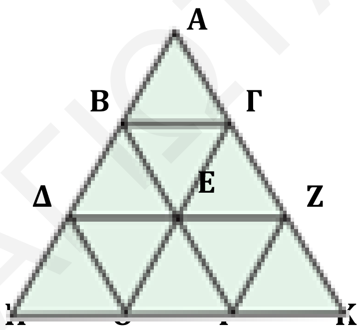




(β) Να βρεις έναν τρόπο που δεν τον σκέφτηκε κανένας άλλος συμμαθητής σου.



3 (α) Να βρεις **τρία διαφορετικά σχήματα** που υπάρχουν στο πιο κάτω σχήμα και να τα ονομάσεις.



Σχήματα:

1.ΑΒΓ

2. _________

3. _________

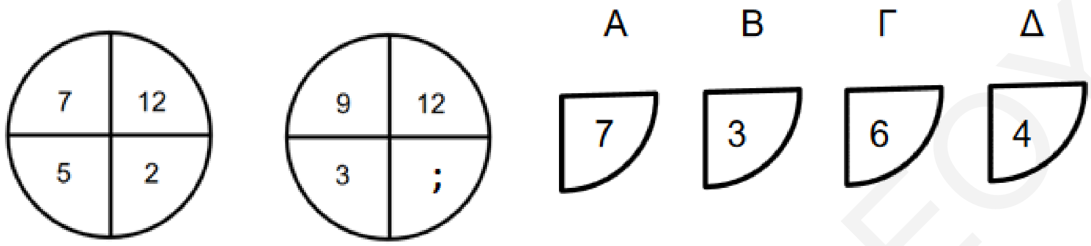
4. _________

(β) Να βρεις ένα σχήμα που δε βρήκε κανένας άλλος συμμαθητής σου και να το ονομάσεις.

Σχήμα: _____________

Μέρος Β΄

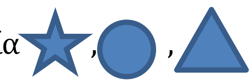
1 Να βρεις το σωστό κομμάτι που λείπει, επιλέγοντας μία από τις πιο κάτω πιθανές απαντήσεις.



Να εξηγήσεις τον τρόπο που σκέφτηκες:

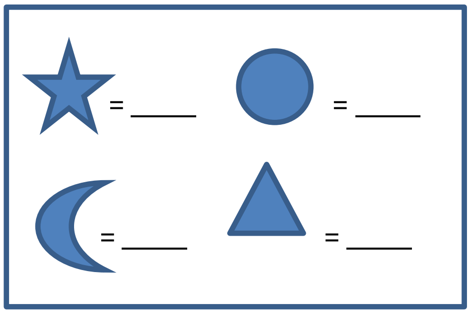
____

____

2 Ο Γιάννης κάνει έναν υπολογισμό χρησιμοποιώντας τα ψηφία 
και  .

Ποιο ψηφίο αναπαριστά κάθε σχήμα ;

3 2 5 4



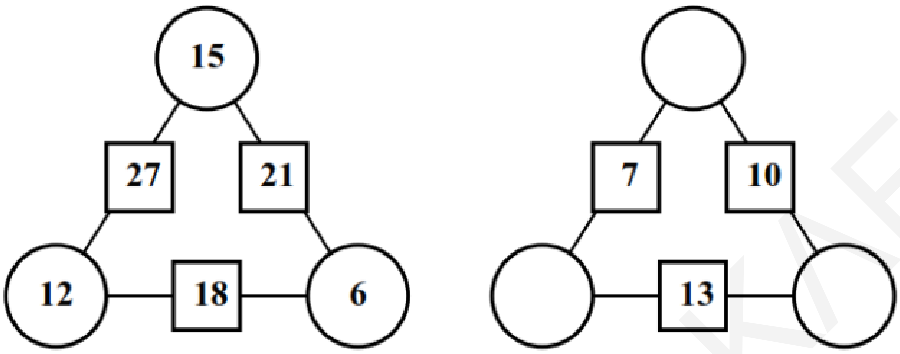
Να εξηγήσεις τον τρόπο που σκέφτηκες:

____

____

3 Στο κάθε διάγραμμα οι αριθμοί οποιωνδήποτε δυο κύκλων έχουν άθροισμα ίσο με τον αριθμό που βρίσκεται στο τετράγωνο που είναι ανάμεσά τους. Ένα συμπληρωμένο παράδειγμα δίνεται στο αριστερό διάγραμμα.

Να συμπληρώσεις το διάγραμμα στα δεξιά.

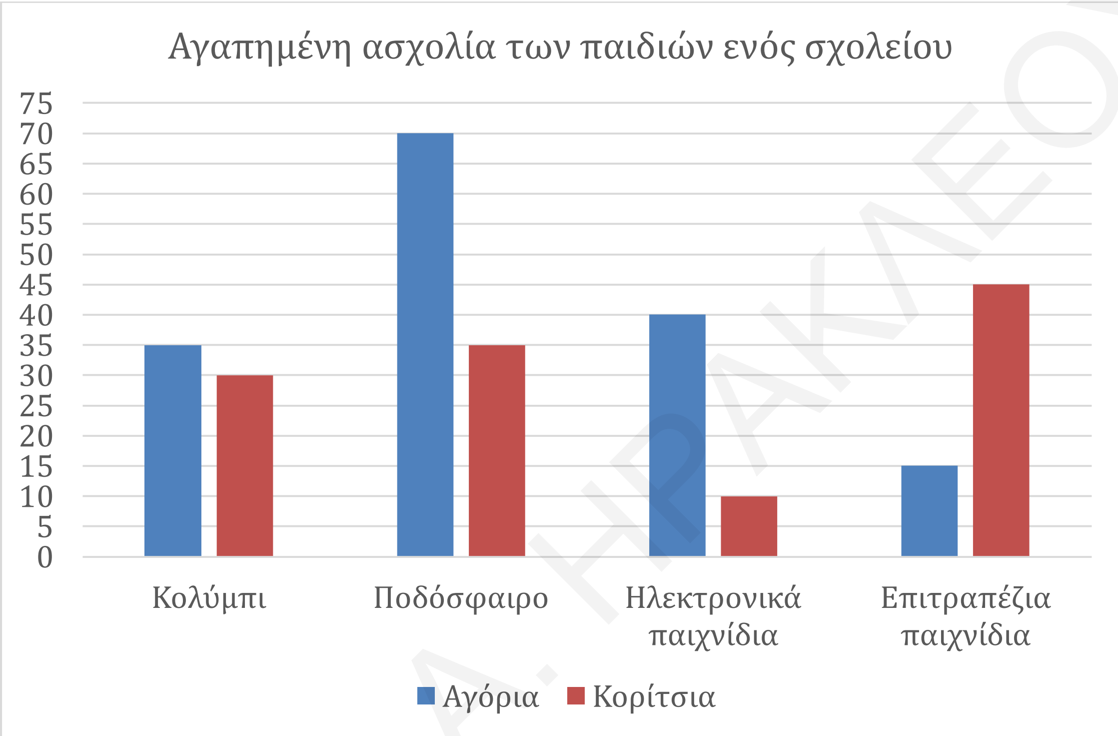


Να εξηγήσεις τον τρόπο που σκέφτηκες:

Μέρος Γ΄

1

(α) Να γράψεις **τρεις διαφορετικές ερωτήσεις** που μπορούν να απαντηθούν από τις πληροφορίες της γραφικής παράστασης.



ΕΡΩΤΗΣΗ 1:

____

____

ΕΡΩΤΗΣΗ 2:

____

____

ΕΡΩΤΗΣΗ 3:

____

____

(β) Να γράψεις μια ερώτηση που δεν τη σκέφτηκε κανένας άλλος συμμαθητής σου.

____

____

2 Να φανταστείς ότι είσαι δάσκαλος δημοτικού σχολείου και θέλεις να γράψεις προβλήματα για τους μαθητές σου που μπορούν να λυθούν με τη μαθηματική πρόταση:

$$75-(16+49) = \square$$

(α) Να γράψεις **τρία διαφορετικά προβλήματα**.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1:

____

____

____

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2:

____

____

____

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3:

____

____

____

(β) Να γράψεις ένα πρόβλημα που δεν το σκέφτηκε κανένας άλλος συμμαθητής σου.

____

____

____

3 Ο πιο κάτω πίνακας δείχνει τα έξοδα δυο οικογενειών τον μήνα Νοέμβριο.

(α) Να γράψεις **τρεις διαφορετικές ερωτήσεις** που μπορούν να απαντηθούν από τις πληροφορίες του πίνακα.

Έξοδα	Οικογένεια Μάρκου	Οικογένεια Πασχάλη
Φαγητό	€450	€350
Ενοίκιο	€0	€300
Βενζίνη	€350	€150
Ρεύμα	€150	€160
Ρούχα	€200	€180

ΕΡΩΤΗΣΗ 1:

____

____

ΕΡΩΤΗΣΗ 2:

____

____

ΕΡΩΤΗΣΗ 3:

____

____

(β) Να γράψεις μια ερώτηση που δεν σκέφτηκε κανένας άλλος συμμαθητής σου.

____

____

Παράρτημα Γ:

Δοκίμιο Μαθηματικών Γνώσεων

Οι γνώσεις μου στα μαθηματικά

Όνομα: ____ Τάξη: ________

ΟΔΗΓΙΕΣ

- Να απαντήσετε όλες τις ερωτήσεις.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.
- Ο χρόνος που έχετε στη διάθεσή σας είναι **70 λεπτά**.
- Η έρευνα σκοπεύει να μελετήσει τη φαντασία και τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά, που είναι πολύ σημαντικές ικανότητες για τη μάθηση στα μαθηματικά και την καθημερινή ζωή.
- Θα διατηρηθεί η ανωνυμία σας.
- Η συμμετοχή σας στην έρευνα είναι εθελοντική. Μπορείτε να αποχωρήσετε από την έρευνα οποιαδήποτε στιγμή χωρίς συνέπειες.
- Οι πληροφορίες που θα συλλεχθούν θα χρησιμοποιηθούν μόνο για αυτή την έρευνα.

1

Να κάνετε τις πράξεις.

(α) $746 + 232 =$

1 βαθμός

(β) $698 - 345 =$

1 βαθμός

(γ)

			4	**1**	**4**
	×			**2**	**3**

1 βαθμός

(δ)	6 1 0 9 2 5	1 βαθμός

2 Να λύσετε το πρόβλημα.

Η Μαρία αγόρασε 3 παντελόνια και 2 φούστες. Κάθε παντελόνι κόστιζε €30 και κάθε φούστα κόστιζε €25. Πόσα πλήρωσε συνολικά; Να δείξετε τον τρόπο σκέψης σας.

3 Να συμπληρώσετε, χρησιμοποιώντας τα σύμβολα <, >, =.

(α) $\frac{9}{20}$ ☐ $\frac{14}{20}$

(γ) $\frac{3}{5}$ ☐ $\frac{6}{10}$

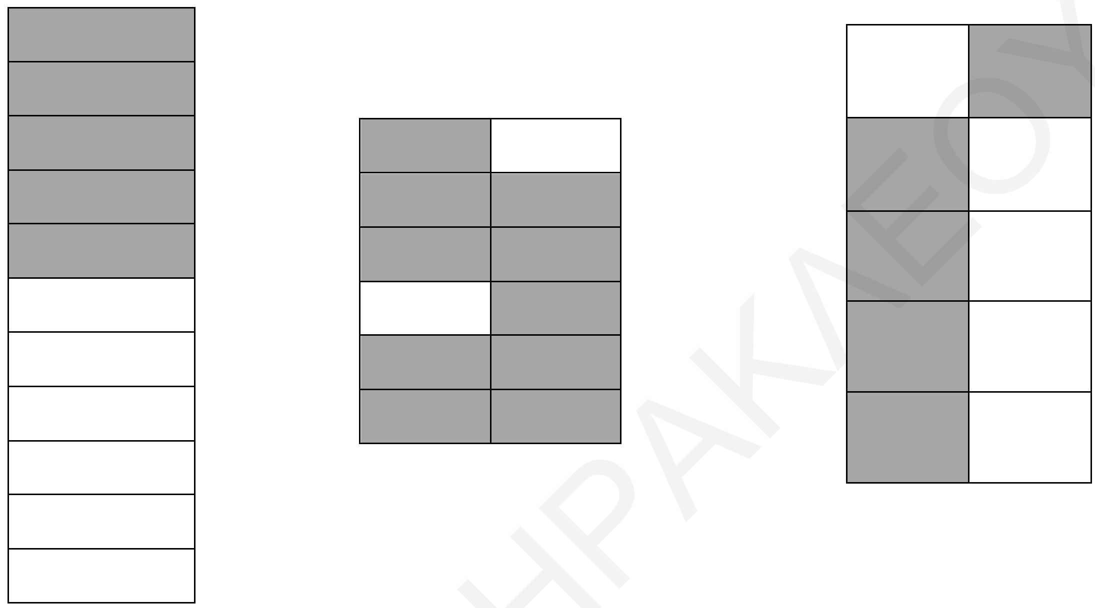
(β) $\frac{8}{7}$ ☐ $\frac{8}{9}$

(δ) $\frac{5}{12}$ ☐ $\frac{2}{8}$

4 βαθμοί

4

Να βάλεις σε κύκλο την επιφάνεια στην οποία είναι σκιασμένα τα $\frac{5}{6}$.



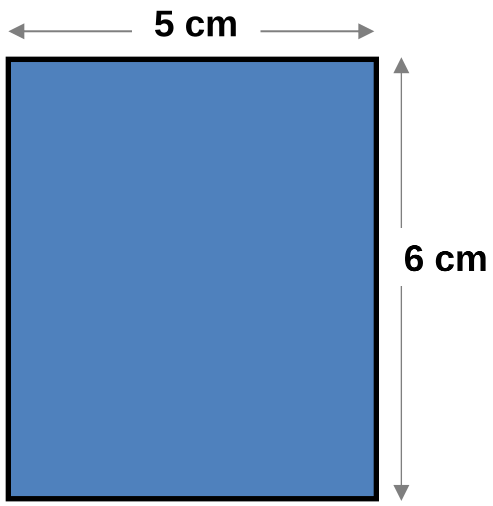
1 βαθμός

Να γράψετε με τη σειρά τους δεκαδικούς αριθμούς, αρχίζοντας από τον μικρότερο.

0,68 **0,432** **2,007** **0,076**

1 βαθμός

6 Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του σχήματος. Να δείξετε τον τρόπο σκέψης σας.

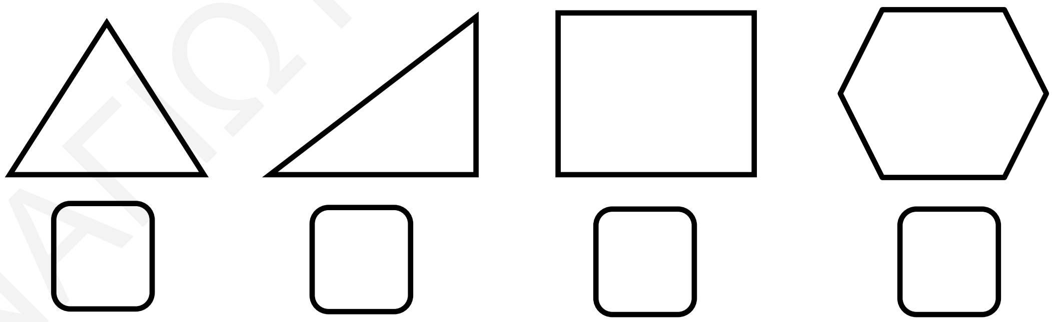


Περίμετρος:____________________

Εμβαδόν: ______________________

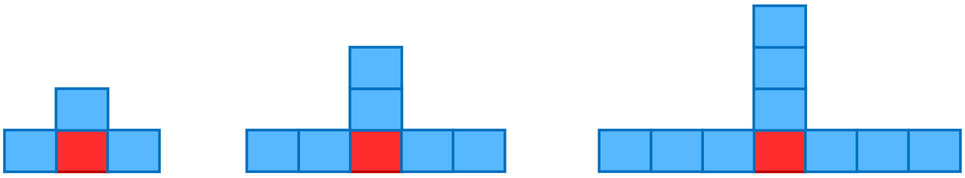
2 βαθμοί

7 Να σημειώσετε με  τα σχήματα που έχουν τουλάχιστον μια ορθή γωνία.



4 βαθμοί

8 **Η Μόνικα κατασκεύασε το πιο κάτω μοτίβο, χρησιμοποιώντας χρωματιστές ψηφίδες. Να δείξετε τον τρόπο σκέψης σας.**



Σχήμα 1 Σχήμα 2 Σχήμα 3

Ποιος είναι ο συνολικός αριθμός των ψηφίδων στο Σχήμα 4;

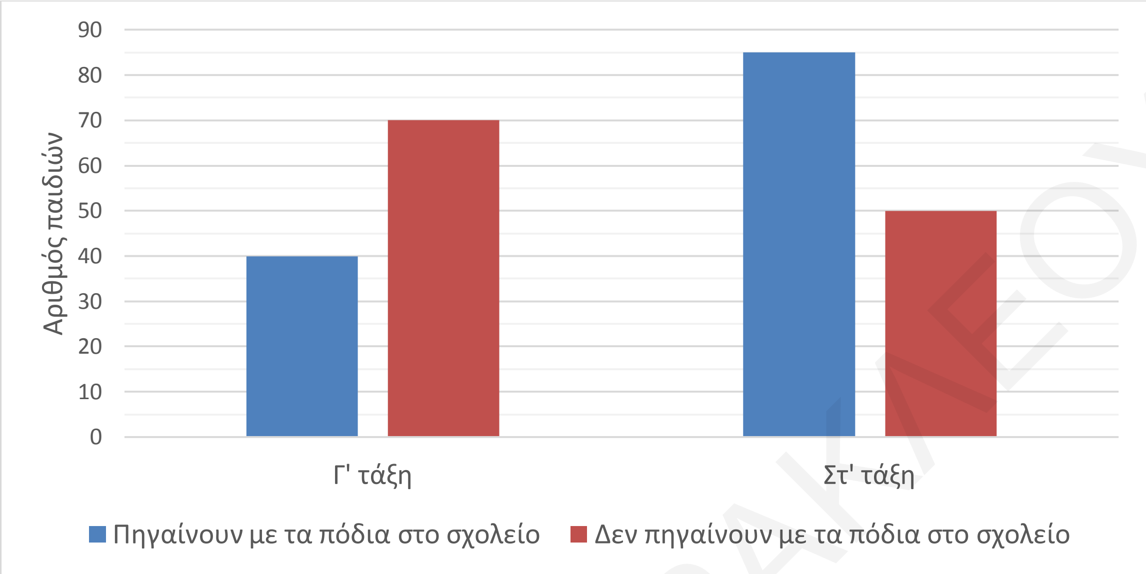
1 βαθμός

9 **Ο Πίνακας δείχνει τα αποτελέσματα που δίνει μια αριθμομηχανή. Στην πρώτη στήλη φαίνεται ο αριθμός που μπαίνει στην αριθμομηχανή και στη δεύτερη στήλη ο αριθμός που βγαίνει. Να συμπληρώσετε τα κενά.**

Είσοδος	Έξοδος
121	146
104	129
	80
110	
243	

3 βαθμοί

10 **Το ραβδόγραμμα δείχνει πώς πηγαίνουν στο σχολείο τα παιδιά της Γ’ και Στ’ τάξης ενός δημοτικού σχολείου.**



(α) Πόσα παιδιά της Στ’ τάξης πηγαίνουν με τα πόδια; Να εξηγήσετε.

1 βαθμός

(β) Πόσοι λιγότεροι είναι οι μαθητές της Γ’ τάξης που πηγαίνουν με τα πόδια από αυτούς που δεν πηγαίνουν με τα πόδια; Να εξηγήσετε πώς το βρήκατε.

1 βαθμός

Παράρτημα Δ:

Ερωτηματολόγιο για τη Μαθηματική Νοοτροπία

Η άποψή μου για τα μαθηματικά

Όνομα: ______________________________________ **Τάξη:** ______________

ΟΔΗΓΙΕΣ

- Να κυκλώσετε τον κατάλληλο αριθμό, για να δείξετε πόσο συμφωνείτε ή διαφωνείτε με τις πιο κάτω προτάσεις.
- Ο χρόνος που έχετε στη διάθεσή σας είναι 10 λεπτά.
- Η έρευνα έχει σκοπό να μελετήσει τη φαντασία και τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά, που είναι πολύ σημαντικές ικανότητες για τη μάθηση στα μαθηματικά και τη σύγχρονη εποχή.
- Θα διατηρηθεί η ανωνυμία σας.
- Η συμμετοχή σας στην έρευνα είναι εθελοντική. Μπορείτε να αποχωρήσετε από την έρευνα οποιαδήποτε στιγμή χωρίς συνέπειες.
- Οι πληροφορίες που θα συλλεχθούν θα χρησιμοποιηθούν μόνο για αυτή την έρευνα.

1 = Διαφωνώ πολύ

2 = Διαφωνώ

3 = Ούτε συμφωνώ ούτε διαφωνώ

4 = Συμφωνώ

5 = Συμφωνώ πολύ

1	Η εξυπνάδα μας δεν αλλάζει.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
2	Ένας λόγος που κάνω τα μαθήματά μου είναι γιατί μου αρέσει να μαθαίνω νέα πράγματα.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
3	Μου αρέσει όταν ο/η δάσκαλος/α μου μού λέει πώς τα πάω στα μαθηματικά.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
4	Κάποιοι γεννιούνται με ταλέντο στα μαθηματικά.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
5	Τα μαθηματικά είναι πιο εύκολα για τα αγόρια.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
6	Όλοι μπορούν να αποκτήσουν ταλέντο στα μαθηματικά.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
7	Όσο πιο πολύ προσπαθείς στα μαθηματικά, τόσο πιο καλός μπορείς να γίνεις.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
8	Με φοβίζει το να δοκιμάζω νέα πράγματα.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
9	Μπορούμε να αλλάξουμε το πόσο έξυπνοι είμαστε.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
10	Θυμώνω όταν οι δάσκαλοί μου μού λένε για την επίδοσή μου στα μαθηματικά.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
11	Όλα τα άτομα έχουν την ίδια ικανότητα να μάθουν μαθηματικά.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
12	Όλοι μπορούμε να μάθουμε, αλλά δεν μπορούμε να αλλάξουμε το πόσο έξυπνοι είμαστε.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
13	Όσοι είναι έξυπνοι δεν χρειάζεται να μελετήσουν πολύ.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
14	Δεν έχει σημασία πόσο καλοί είμαστε στα μαθηματικά. Αυτό μπορούμε να το αλλάξουμε.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**

Παράρτημα Ε:

Πρωτόκολλο Ημι-δομημένων Συνεντεύξεων

Το πρωτόκολλο περιλαμβάνει τις ερωτήσεις που τέθηκαν στους μαθητές μετά το πέρας των ημι-δομημένων συνεντεύξεων στα τέσσερα στάδια της δημιουργικής διαδικασίας. Κάτω από τις ερωτήσεις, παρουσιάζονται τα σημεία εστίασης της προσοχής της ερευνήτριας κατά τη διάρκεια της συνέντευξης, ως λίστα με κουκκίδες.

Α) Προετοιμασία:

1. Έχεις καταλάβει τι λέει το πρόβλημα;

- Διάβασε αρκετές φορές το πρόβλημα;
- Υπογράμμισε λέξεις-κλειδιά;

2. Μπορείς να μου ξαναπείς το πρόβλημα με δικά σου λόγια;

- Εκφέρει ορθά το πρόβλημα με δικά του λόγια που να φαίνεται ότι το κατανόησε ή απλώς το ξαναδιαβάζει;
- Δίνει παραδείγματα σχέσεων;

3. Έχεις λύσει ξανά κάποιο παρόμοιο πρόβλημα;

- Σκέφτεται αν έχει λύσει ξανά παρόμοιο πρόβλημα;
- Αναφέρει ομοιότητες ή διαφορές με άλλα προβλήματα;
- Θεωρεί ότι το πρόβλημα είναι πιο δύσκολο από τα σχολικά προβλήματα;
- Αναφέρει ομοιότητες ή διαφορές με τα σχολικά προβλήματα;

4. Ποιες ιδέες σου ήρθαν στο μυαλό;

- Παρουσιάζει εννοιολογικές παρανοήσεις;
- Εντοπίζει σχέσεις μεταξύ των αριθμών;
- Επικεντρώνεται συνεχώς ή σε ένα είδος μαθηματικής σχέσης ή προσπαθεί να εναλλάσσει τον τρόπο σκέψης του;
- Χρειάζεται καθοδήγηση για να αλλάξει τρόπο σκέψης ή το κάνει αυτόβουλα;

Β) Επώαση:

1. Σε δυσκόλεψε το πρόβλημα;

- Φαίνεται ή αναφέρει ότι δυσκολεύεται να βρει λύση στο πρόβλημα;
- Παραιτείται από τις προσπάθειες επίλυσης του προβλήματος;
- Δέχτηκε να πάρει βοήθεια όταν του προσφέρθηκε;

- Ζήτησε επιπλέον χρόνο;
- Δέχτηκε να πάρει επιπλέον χρόνο όταν του προσφέρθηκε;

Γ) Φωτισμός:

- Βρήκε λύση στο πρόβλημα; Είναι ορθή ή λανθασμένη;

1.Πώς ένιωσες όταν βρήκες λύση στο πρόβλημα;

- Δείχνει ενθουσιασμένος που τα κατάφερε;

2. Ανέμενες ότι θα βρεις λύση;

- Φαίνεται έκπληκτος που βρήκε τη λύση;

3. Πώς σου ήρθε στο μυαλό η λύση;

- Η λύση ήταν λογική συνέπεια των προηγούμενων ιδεών του μαθητή;
- Τη βρήκε ενώ σκεφτόταν συνειδητά για το πρόβλημα ή ξαφνικά;

4. Είσαι βέβαιος ότι η απάντησή σου είναι σωστή;

Δ) Επαλήθευση:

- Ελέγχει εάν η σχέση που βρίσκει σε μια ομάδα αριθμών επαληθεύεται και σε άλλη ομάδα αριθμών;
- Αιτιολογεί τις απαντήσεις του;

1. Μπορείς να εξηγήσεις ξανά πώς εργάστηκες για να βρεις τη λύση;
    - Εξηγεί ξεκάθαρα τον τρόπο σκέψης του, με ορθή μαθηματική ορολογία;

Παράρτημα Ζ:

Αναλυτική Περιγραφή των Κατηγοριών και των Υποκατηγοριών των Απαντήσεων στα Έργα Οπτικοποίησης Χωρικών Εικόνων

Πίνακας Ζ1

Κατηγορίες και Υποκατηγορίες Απαντήσεων στο Έργο ΟΧΕ_1

	Έργο 1 – Διατάξεις κερασιών
Κατηγορία Απαντήσεων	**Απαντήσεις**
1.Καταμέτρηση	✓ Καταμέτρηση 1-1 ✓ Μεγάλες ομάδες: (ομάδες ανά 11 και υ=1) (ομάδες ανά 10 και υ=3)
	✓ Τυχαίες ομάδες χωρίς συστηματική στρατηγική
2.Σειριακές στρατηγικές	✓ Κατακόρυφα ευθύγραμμα τμήματα
	✓ Οριζόντια ευθύγραμμα τμήματα
	✓ Διαγώνια ευθύγραμμα τμήματα
	✓ Ζικ-ζακ (σκάλα)
	✓ Συνδυασμός 2 σειριακών στρατηγικών ✓ Συνδυασμός σειριακών στρατηγικών με ομάδες
	✓ Οριζόντιες ομάδες
	✓ Κατακόρυφες ομάδες (των 5 ή 8)
	✓ Κατακόρυφες ομάδες (ανά 5 ή 8) και μετά αφαίρεση
3.Όμοιες ομάδες και υπόλοιπο	✓ Ομάδες ανά 2 ✓ Ομάδες ανά 3 ✓ Ομάδες ανά 4 (διάσπαρτες) ✓ Ομάδες ανά 5 (διάσπαρτες)
4. Τυποποιημένες διατάξεις («Subitizing»)	✓ Διατάξεις σε σχήμα ορθογώνιο
	✓ Τυποποιημένες διατάξεις ζαριού του 5 (dice patterns)
	✓ Διατάξεις των 5 της μορφής <<<<

	✓ Διατάξεις σε μορφή μεγάλων ζικ-ζακ (και ομάδες ή μόνο ζικ-ζακ)
	✓ Μεγάλο και μικρό <
	✓ Μεγάλο και μικρό τρίγωνο
	✓ Τυποποιημένες διατάξεις του 4 (π.χ. ζαριού ή τρίγωνα)

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ:

- Αν προτάθηκε ακριβώς ο ίδιος τρόπος με το δοθέν παράδειγμα → 0 βαθμοί
- Αν προτάθηκε δυο φορές ο ίδιος τρόπος από τον μαθητή → 0 βαθμοί (στη $2^{η}$ απάντηση)
- Αν δεν ήταν ξεκάθαρη η απάντηση (βλέποντας συνδυαστικά το σχήμα και τους υπολογισμούς) → 0 βαθμοί
- Αν σχεδιάστηκε ορθό σχήμα και υπήρχαν λάθη μόνο στους υπολογισμούς → θεωρούνταν ορθή απάντηση

Πίνακας Ζ2

Κατηγορίες και Υποκατηγορίες Απαντήσεων στο Έργο ΟΧΕ_2

	Έργο 2 – Σκίαση μισού ορθογωνίου
Κατηγορία απαντήσεων	**Απαντήσεις**
1.Διαμοιρασμός με ένα ευθύγραμμο τμήμα	✓ Κατακόρυφος διαμοιρασμός
	✓ Οριζόντιος διαμοιρασμός
	✓ Διαγώνιος διαμοιρασμός
	✓ Διαγώνιος διαμοιρασμός (όχι από κορυφή του σχήματος)
2.Διαμοιρασμός ορθογωνίου σε ίσα μικρότερα σχήματα (ορθογώνια, τετράγωνα, τρίγωνα) και σκίαση των μισών σχημάτων	✓ Διαμοιρασμός σε κατακόρυφες ή οριζόντιες λωρίδες
	✓ Διαμοιρασμός σε ορθογώνια
	✓ Διαμοιρασμός σε τετραγωνάκια
	✓ Διαμοιρασμός σε τριγωνάκια
3.Διαμοιρασμός με άλλα είδη γραμμών	✓ Διαμοιρασμός με απλή ανοιχτή τεθλασμένη γραμμή (ορθές γωνίες)
	✓ Διαμοιρασμός με απλή ανοιχτή τεθλασμένη γραμμή (οξείες γωνίες)
	✓ Διαμοιρασμός με καμπύλη γραμμή
4.Διαμοιρασμός σε ίδιου τύπου αλλά διαφορετικού μεγέθους σχήματα	✓ Διαμοιρασμός σε 3 τραπέζια
	✓ Διαμοιρασμός σε 2 μικρά και 1 μεγάλο τρίγωνο
	✓ Διαμοιρασμός σε 4 μικρά και 2 μεγάλα τρίγωνα
5.Διαμοιρασμός με συνδυασμό σχημάτων	✓ Διαμοιρασμός σε ορθογώνια και τρίγωνα
	✓ Διαμοιρασμός σε τραπέζια και τρίγωνα
	✓ Διαμοιρασμός σε πεντάγωνα και τρίγωνα

	✓ Διαμοιρασμός σε δυο μισά ορθογώνια, προσθήκη ενός τεταρτοκυκλίου στο ένα μισό και αφαίρεση ενός τεταρτοκυκλίου από το άλλο μισό

Πίνακας Ζ3

Κατηγορίες και Υποκατηγορίες Απαντήσεων στο Έργο ΟΧΕ_3

Έργο 3 – Εντοπισμός σχημάτων	
Κατηγορία Απαντήσεων	**Απαντήσεις**
1.Τρίγωνα	✓ Μικρά
	✓ Μέτρια
	✓ Μεγάλα
2.Τραπέζια	✓ Μικρά
	✓ Μέτρια
	✓ Μεγάλα
3.Παραλληλόγραμμα	✓ Μικρά
	✓ Μέτρια
4.Μη τυπικά γεωμετρικά σχήματα	✓ Εξάγωνο
	✓ Πεντάγωνο (π.χ. ΒΔΘΚΓ, ΑΔΘΙΖ)
	✓ Έλικας (π.χ. ΒΓΕΖΙΘΔ)
	✓ Διπλό τρίγωνο (π.χ.ΒΓΕΙΘ, ΔΕΘΖΙ)
	✓ Επτάγωνο (π.χ. ΗΘΕΙΖΓΒΔ)

Παράρτημα Η:

Αναλυτική Περιγραφή των Κατηγοριών και των Υποκατηγοριών των Απαντήσεων στα Έργα Μετασχηματιστικών Ικανοτήτων

Πίνακας Η1

Κατηγορίες και Υποκατηγορίες Απαντήσεων στο Έργο ΜΙ_1

Έργο 1 – Γραφική παράσταση αθλημάτων	
Κατηγορία Απαντήσεων	**Απαντήσεις**
1.Εμφανείς απαντήσεις	✓ Ερωτήσεις που απαιτούν ανάγνωση των δεδομένων της γραφικής παράστασης, αντιστοιχώντας στο πρώτο επίπεδο κατανόησης γραφικών παραστάσεων της Curcio (1989)
2.Σύγκριση παιδιών	✓ Σύγκριση αγοριών και κοριτσιών που προτιμούν μια συγκεκριμένη ασχολία
	✓ Σύγκριση αγοριών ή κοριτσιών μεταξύ δυο ασχολιών
	✓ Σύγκριση συνολικού αριθμού αγοριών και κοριτσιών
	✓ Σύγκριση συνολικού αριθμού παιδιών μεταξύ δυο ασχολιών
	✓ Εύρεση ασχολίας που προτιμούν περισσότερο/λιγότερο τα αγόρια ή και τα κορίτσια ή τα παιδιά
	✓ Εύρεση της ασχολίας με τη μεγαλύτερη/μικρότερη διαφορά ανάμεσα στα αγόρια και τα κορίτσια
	✓ Εύρεση ασχολίας με συγκεκριμένη πολλαπλασιαστική σχέση ανάμεσα στον αριθμό αγοριών και κοριτσιών (διπλάσια/τριπλάσια)
3.Άθροισμα παιδιών	✓ Συνολικός αριθμός παιδιών για μια ασχολία
	✓ Συνολικός αριθμός αγοριών ή κοριτσιών ή παιδιών που προτιμούν 2 ή 3 ασχολίες
	✓ Συνολικός αριθμός αγοριών ή κοριτσιών ή παιδιών
4.Κλάσματα-ποσοστά-λόγοι	✓ Υπολογισμού κλάσματος αγοριών ή κοριτσιών ή παιδιών μιας συγκεκριμένης ασχολίας σε σχέση με σύνολο ή σε σχέση με το σύνολο παιδιών μιας ασχολίας
	✓ Υπολογισμός λόγου (μέρος:μέρος ή μέρος:όλο)

	✓ Υπολογισμός ποσοστού αγοριών ή κοριτσιών ή παιδιών μιας συγκεκριμένης ασχολίας σε σχέση με σύνολο
5.Επέκταση/προσθήκη παραμέτρων	✓ Υπόθεση για τις προτιμήσεις των παιδιών, δεδομένου ότι θα φύγει κάποια επιλογή (π.χ. των ηλεκτρονικών παιχνιδιών/ποδοσφαίρου)
	✓ Υποθέσεις για τους αριθμούς, δεδομένου ότι θα φύγει ένα μέρος των παιδιών από την έρευνα ή θα αλλάξει την αγαπημένη του ασχολία
	✓ Υπολογισμός του ποσοστού μεταβολής των προτιμήσεων των παιδιών, δεδομένου ότι έφευγε ένα μέρος των παιδιών από την έρευνα
	✓ Εύρεση διαφορετικού αριθμού για τα αγόρια ή κορίτσια σε μια ασχολία με δεδομένο κάποιο διαφορετικό αριθμό για τα κορίτσια ή τα αγόρια αντίστοιχα

Πίνακας Η2

Κατηγορίες και Υποκατηγορίες Απαντήσεων στο Έργο ΜΙ_2

Έργο 2 – Μαθηματική πρόταση	
Κατηγορία Απαντήσεων	**Απαντήσεις**
1.Προβλήματα αλλαγής	✓ Αλλαγή (Άγνωστη η τελική κατάσταση), με σειριακή εκτέλεση των πράξεων: 75 – 16 – 49 =
	✓ Αλλαγή (Άγνωστη η τελική κατάσταση), με εφαρμογή της προτεραιότητας των πράξεων: 75 – (16 + 49) =
	✓ Αλλαγή (Άγνωστος ο μετασχηματισμός): (16+49) + □ = 75
2.Προβλήματα ομαδοποίησης	✓ Ομαδοποίηση (Άγνωστο ένα υποσύνολο)
3.Προβλήματα σύγκρισης	✓ Σύγκριση (Άγνωστη η διαφορά ανάμεσα στο Α και το Β+Γ)
	✓ Σύγκριση (Άγνωστη η συγκρινόμενη ποσότητα)
4.Συνδυασμός δυο προσθετικών δομών	✓ Αλλαγή: (16+49) και Σύγκριση (Άγνωστη η διαφορά): 75 – (16+49)
	✓ Ομαδοποίηση: (16+49) και Σύγκριση (Άγνωστη η διαφορά): 75 – (16+49)

ΣΗΜΕΙΩΣΗ:

- Αν το πρόβλημα που προτάθηκε αντιστοιχούσε στη μαθηματική πρόταση 75-65 = → 0 βαθμοί

Πίνακας Η3

Κατηγορίες και Υποκατηγορίες Απαντήσεων στο Έργο ΜΙ_3

Έργο 3 – Πίνακας δεδομένων	
Κατηγορία Απαντήσεων	**Απαντήσεις**
1.Εμφανείς απαντήσεις	✓ Ερωτήσεις που απαιτούν ανάγνωση των δεδομένων του πίνακα
2.Σύγκριση εξόδων	✓ Σύγκριση εξόδων των δυο οικογενειών για μια συγκεκριμένη κατηγορία
	✓ Σύγκριση συνολικών εξόδων των δυο οικογενειών
	✓ Εύρεση της οικογένειας με τα περισσότερα/λιγότερα έξοδα σε μια κατηγορία ή δυο κατηγορίες ή συνολικά
	✓ Εύρεση κατηγορίας εξόδων με το μεγαλύτερο/μικρότερο ποσό για την οικογένεια Μάρκου ή Πασχάλη ή και των δυο
	✓ Εύρεση της κατηγορίας εξόδων με τη μεγαλύτερη/μικρότερη/συγκεκριμένη διαφορά ανάμεσα στην οικογένεια Μάρκου και οικογένεια Πασχάλη
3.Άθροισμα εξόδων	✓ Άθροισμα εξόδων δυο οικογενειών για μια συγκεκριμένη κατηγορία ή για δυο κατηγορίες
	✓ Άθροισμα εξόδων μιας οικογένειας για δυο ή τρεις ή τέσσερις κατηγορίες
	✓ Συνολικά έξοδα της οικογένειας Μάρκου ή της οικογένειας Πασχάλη ή και των δυο οικογενειών μαζί
4.Ποσοστά-λόγοι-εύρος	✓ Υπολογισμός λόγου
	✓ Υπολογισμός ποσοστού εξόδων της οικογένειας Μάρκου ή της οικογένειας Πασχάλη ή και των δυο οικογενειών σε σχέση με συνολικά έξοδα
	✓ Υπολογισμός εύρους κόστους

5.Επέκταση/προσθήκη παραμέτρων	✓ Υπολογισμός ποσοστού μιας κατηγορίας εξόδων της οικογένειας Μάρκου ή της οικογένειας Πασχάλη ή και των δυο οικογενειών σε σχέση με συνολικά έξοδα, δεδομένου ενός διαφορετικού ποσού ως το σύνολο (100%)
	✓ Επέκταση για τα έξοδα άλλων μηνών ή ολόκληρου του χρόνου ή μιας εβδομάδας
	✓ Υποθέσεις για τα έξοδα, με δεδομένο ένα διαφορετικό ποσό για μια κατηγορία εξόδων
	✓ Υπολογισμός εξόδων της μιας οικογένειας, με δεδομένο ένα διαφορετικό ποσό για την άλλη οικογένεια σε μια συγκεκριμένη κατηγορία
	✓ Υπολογισμός του αριθμού των φανέλων του Μάρκου, δεδομένου του αριθμού των φανέλων που αγόρασε ο Πασχάλης
	✓ Υπολογισμός εξόδων, με δεδομένο το ποσοστό μείωσής τους

Παράρτημα Θ:

Βαθμολόγηση της Πρωτοτυπίας με βάση την Ποσοστιαία Συχνότητα Εμφάνισης των Απαντήσεων

Πίνακας Θ1

Βαθμολόγηση Πρωτοτυπίας με βάση την Ποσοστιαία Συχνότητα Εμφάνισης των Απαντήσεων στο Έργο ΟΧΕ_1

Έργο 1-Διατάξεις κερασιών	
	Βαθμός πρωτοτυπίας
Απάντηση που εμφανίζεται σε ποσοστό μικρότερο του 1% των ορθών απαντήσεων του δείγματος	1
Απάντηση που εμφανίζεται σε ποσοστό 1-3% των ορθών απαντήσεων του δείγματος	0.8
Απάντηση που εμφανίζεται σε ποσοστό 3-6% των ορθών απαντήσεων του δείγματος	0.6
Απάντηση που εμφανίζεται σε ποσοστό 6-10% των ορθών απαντήσεων του δείγματος	0.4
Απάντηση που εμφανίζεται σε ποσοστό μεγαλύτερο του 10% των ορθών απαντήσεων του δείγματος	0.2
Λανθασμένη ή καθόλου απάντηση	0

Πίνακας Θ2

Βαθμολόγηση Πρωτοτυπίας με βάση την Ποσοστιαία Συχνότητα Εμφάνισης των Απαντήσεων στο Έργο ΟΧΕ_2

Έργο 2-Σκίαση μισού ορθογωνίου	
	Βαθμός πρωτοτυπίας
Απάντηση που εμφανίζεται σε ποσοστό μικρότερο του 1% των ορθών απαντήσεων του δείγματος	1
Απάντηση που εμφανίζεται σε ποσοστό 1-3% των ορθών απαντήσεων του δείγματος	0.8
Απάντηση που εμφανίζεται σε ποσοστό 3-5% των ορθών απαντήσεων του δείγματος	0.6
Απάντηση που εμφανίζεται σε ποσοστό 5-10% των ορθών απαντήσεων του δείγματος	0.4
Απάντηση που εμφανίζεται σε ποσοστό μεγαλύτερο του 10% των ορθών απαντήσεων του δείγματος	0.2
Λανθασμένη ή καθόλου απάντηση	0

Πίνακας Θ3

Βαθμολόγηση Πρωτοτυπίας με βάση την Ποσοστιαία Συχνότητα Εμφάνισης των Απαντήσεων στο Έργο ΟΧΕ_3

Έργο 3- Εντοπισμός σχημάτων	
	Βαθμός πρωτοτυπίας
Απάντηση που εμφανίζεται σε ποσοστό μικρότερο του .5% των ορθών απαντήσεων του δείγματος	1
Απάντηση που εμφανίζεται σε ποσοστό .5-5% των ορθών απαντήσεων του δείγματος	0.8
Απάντηση που εμφανίζεται σε ποσοστό 5-10% των ορθών απαντήσεων του δείγματος	0.6
Απάντηση που εμφανίζεται σε ποσοστό 10-15% των ορθών απαντήσεων του δείγματος	0.4
Απάντηση που εμφανίζεται σε ποσοστό μεγαλύτερο του 15% των ορθών απαντήσεων του δείγματος	0.2
Λανθασμένη ή καθόλου απάντηση	0

Πίνακας Θ4

Βαθμολόγηση Πρωτοτυπίας με βάση την Ποσοστιαία Συχνότητα Εμφάνισης των Απαντήσεων στο Έργο MI_1

Έργο 1-Γραφική παράσταση αθλημάτων	
	Βαθμός πρωτοτυπίας
Απάντηση που εμφανίζεται σε ποσοστό μικρότερο του 1% των ορθών απαντήσεων του δείγματος	1
Απάντηση που εμφανίζεται σε ποσοστό 1-5% των ορθών απαντήσεων του δείγματος	0.8
Απάντηση που εμφανίζεται σε ποσοστό 5-10% των ορθών απαντήσεων του δείγματος	0.6
Απάντηση που εμφανίζεται σε ποσοστό 10-15% των ορθών απαντήσεων του δείγματος	0.4
Απάντηση που εμφανίζεται σε ποσοστό μεγαλύτερο του 15% των ορθών απαντήσεων του δείγματος	0.2
Λανθασμένη ή καθόλου απάντηση	0

Πίνακας Θ5

Βαθμολόγηση Πρωτοτυπίας με βάση την Ποσοστιαία Συχνότητα Εμφάνισης των Απαντήσεων στο Έργο ΜΙ_2

Έργο 2-Μαθηματική πρόταση	
	Βαθμός πρωτοτυπίας
Απάντηση που εμφανίζεται σε ποσοστό μικρότερο του 2% των ορθών απαντήσεων του δείγματος	1
Απάντηση που εμφανίζεται σε ποσοστό 2-5% των ορθών απαντήσεων του δείγματος	0.8
Απάντηση που εμφανίζεται σε ποσοστό 5-10% των ορθών απαντήσεων του δείγματος	0.6
Απάντηση που εμφανίζεται σε ποσοστό 10-15% των ορθών απαντήσεων του δείγματος	0.4
Απάντηση που εμφανίζεται σε ποσοστό μεγαλύτερο του 15% των ορθών απαντήσεων του δείγματος	0.2
Λανθασμένη ή καθόλου απάντηση	0

Πίνακας Θ6

Βαθμολόγηση Πρωτοτυπίας με βάση την Ποσοστιαία Συχνότητα Εμφάνισης των Απαντήσεων στο Έργο ΜΙ_3

Έργο 3-Πίνακας δεδομένων	
	Βαθμός πρωτοτυπίας
Απάντηση που εμφανίζεται σε ποσοστό μικρότερο του 2% των ορθών απαντήσεων του δείγματος	1
Απάντηση που εμφανίζεται σε ποσοστό 2-5% των ορθών απαντήσεων του δείγματος	0.8
Απάντηση που εμφανίζεται σε ποσοστό 5-10% των ορθών απαντήσεων του δείγματος	0.6
Απάντηση που εμφανίζεται σε ποσοστό 10-15% των ορθών απαντήσεων του δείγματος	0.4
Απάντηση που εμφανίζεται σε ποσοστό μεγαλύτερο του 15% των ορθών απαντήσεων του δείγματος	0.2
Λανθασμένη ή καθόλου απάντηση	0

Παράρτημα Ι:

Βαθμολόγηση της Πρωτοτυπίας με βάση την Γνωστική Πολυπλοκότητα κάθε Κατηγορίας Απαντήσεων

Πίνακας Ι1

Βαθμολόγηση Πρωτοτυπίας με βάση τη Γνωστική Πολυπλοκότητα ανά Κατηγορία Απαντήσεων στα Έργα Οπτικοποίησης Χωρικών Εικόνων

	Κατηγορίες Απαντήσεων	Βαθμός
Έργο 1 – Διατάξεις κερασιών	1. Καταμέτρηση	0
	2. Σειριακές στρατηγικές	1
	3. Όμοιες ομάδες και υπόλοιπο	1
	4. Τυποποιημένες διατάξεις («Subitizing»)	2
Έργο 2 – Σκίαση μισού ορθογωνίου	1. Διαμοιρασμός με ένα ευθύγραμμο τμήμα	0
	2. Διαμοιρασμός σε ίσα μικρότερα σχήματα και σκίαση των μισών σχημάτων	1
	3. Διαμοιρασμός με άλλα είδη γραμμών	1
	4. Διαμοιρασμός σε ίδιου τύπου αλλά διαφορετικού μεγέθους σχήματα	1
	5. Διαμοιρασμός με συνδυασμό σχημάτων	2
Έργο 3 – Εντοπισμός σχημάτων	1. Τρίγωνα	0
	2. Τραπέζια	1
	3. Παραλληλόγραμμα	1
	4. Μη τυπικά γεωμετρικά σχήματα	2

Πίνακας Ι2

Βαθμολόγηση Πρωτοτυπίας με βάση τη Γνωστική Πολυπλοκότητα ανά Κατηγορία Απαντήσεων στα Έργα Μετασχηματιστικών Ικανοτήτων

	Κατηγορίες Απαντήσεων	Βαθμός
Έργο 1 – Γραφική παράσταση αθλημάτων	1. Εμφανείς απαντήσεις 2. Σύγκριση παιδιών 3. Άθροισμα παιδιών 4. Κλάσματα-ποσοστά-λόγοι 5. Επέκταση/προσθήκη παραμέτρων	0 1 1 2 2
Έργο 2 – Μαθηματική πρόταση	1. Προβλήματα αλλαγής 2. Προβλήματα ομαδοποίησης 3. Προβλήματα σύγκρισης 4. Συνδυασμός δυο προσθετικών δομών	0 0 0 0
Έργο 3 - Πίνακας δεδομένων	1. Εμφανείς απαντήσεις 2. Σύγκριση εξόδων 3. Άθροισμα εξόδων 4. Ποσοστά-λόγοι-εύρος 5. Επέκταση/προσθήκη παραμέτρων	0 1 1 2 2

Παράρτημα Κ:

Κλείδα Βαθμολόγησης των Έργων του Δοκιμίου Μαθηματικών Γνώσεων

Πίνακας Κ1

Κλείδα Βαθμολόγησης των Έργων του Δοκιμίου Μαθηματικών Γνώσεων

Α/Α Έργου		Μονάδες
1 (α), (β), (γ)	Απάντηση με ένα μικρό αριθμητικό λάθος (π.χ. στις μονάδες)	0.5
1 (δ)	-Απάντηση με ορθό πηλίκο αλλά λάθος υπόλοιπο	0.5
	-Απάντηση με ορθή διαδικασία αλλά ένα μικρό αριθμητικό λάθος στην πορεία (π.χ. π=2440 και υ=9)	0.5
2	-Απάντηση με ορθή διαδικασία αλλά ένα μικρό αριθμητικό λάθος	0.5
	-Απάντηση με λανθασμένη πράξη (π.χ. 90-50 αντί 90+50)	0
	-Ανολοκλήρωτη επίλυση του έργου (π.χ. 30Χ30 = 90 25Χ2=50)	0
	-Ορθή απάντηση χωρίς καθόλου επεξήγηση	0
3	-Για κάθε ορθό σύμβολο	1
4	-Απάντηση με κυκλωμένη την ορθή επιφάνεια αλλά με λανθασμένα κλάσματα	0
	-Απάντηση με τουλάχιστον μια λανθασμένη επιφάνεια κυκλωμένη	0
5	-Ορθή σειροθέτηση όλων των δεκαδικών αριθμών	1
	-Δύο λανθασμένες τοποθετήσεις αριθμών στην κατάλληλη θέση	0.67
	-Τρεις λανθασμένες τοποθετήσεις αριθμών στην κατάλληλη θέση	0.33
	-Τέσσερις λανθασμένες τοποθετήσεις αριθμών στην κατάλληλη θέση	0
6	Απάντηση στην οποία αναγράφεται ορθά η πράξη αλλά με λανθασμένο/καθόλου αποτέλεσμα	0.5 για Περίμετρο

		0.5 για Εμβαδόν
	Απάντηση στην οποία αναγράφεται το ορθό αποτέλεσμα χωρίς να φαίνεται η πράξη που εκτελέστηκε	0.25 για Περίμετρο 0.25 για Εμβαδόν
	Ορθή απάντηση αλλά με λανθασμένη ή καθόλου μονάδα μέτρησης	Αφαιρείται 0.25 από Περίμετρο και Εμβαδόν αντίστοιχα
7	Για κάθε ορθή απάντηση σε κάθε σχήμα	1
8	Λανθασμένη απάντηση αλλά ορθή επεξήγηση του τρόπου σκέψης (με σχέδιο, λεκτικά ή αριθμητικά)	0.5
	Ορθή απάντηση αλλά με λανθασμένη/καθόλου επεξήγηση του τρόπου σκέψης	0.5
9	Για κάθε ορθή απάντηση σε κάθε κουτάκι	1
10 (α)	Ορθή απάντηση	1
10 (β)	Ορθή απάντηση αλλά με λανθασμένη/καθόλου επεξήγηση	0.5

Παράρτημα Λ:

Στοιχεία Συσχετιστικής Στατιστικής για τις Μεταβλητές της Έρευνας

Πίνακας Λ1

Συσχετίσεις μεταξύ των Μεταβλητών του Δοκιμίου της Φαντασίας στα Μαθηματικά

		Οπτικοποίηση						Μετασχηματιστικές Ικανότητες (ΜΙ)			Πρωτοτυπία					
		OXE_1	OXE_2	OXE_3	OAE_1	OAE_2	OAE_3	MI_1	MI_2	MI_3	OXE_1	OXE_2	OXE_3	MI_1	MI_2	MI_3
Οπτικοποίηση	OXE_1	1	.204**	.370**	.149*	.277**	.214**	.256**	.373**	.181**	.634**	.319**	.375**	.316**	.372**	.259**
	OXE_2	.204**	1	.149*	.233**	.164*	.157*	.114	.103	.127	.179**	.591**	.123	.126	.092	.126
	OXE_3	.370**	.149*	1	.128	.271**	.273**	.279**	.371**	.211**	.419**	.265**	.872**	.343**	.311**	.189**
	OAE_1	.149*	.233**	.128	1	.190**	.238**	.232**	.251**	.093	.177**	.287**	.117	.107	.276**	.148*
	OAE_2	.277**	.164*	.271**	.190**	1	.318**	.363**	.344**	.318**	.376**	.168*	.277**	.435**	.335**	.467**
	OAE_3	.214**	.157*	.273**	.238**	.318**	1	.312**	.396**	.260**	.292**	.255**	.266**	.348**	.329**	.370**
M.I.	MI_1	.256**	.114	.279**	.232**	.363**	.312**	1	.308**	.399**	.328**	.217**	.262**	.485**	.252**	.336**
	MI_2	.373**	.103	.371**	.251**	.344**	.396**	.308**	1	.303**	.459**	.161*	.401**	.474**	.814**	.431**
	MI_3	.181**	.127	.211**	.093	.318**	.260**	.399**	.303**	1	.268**	.107	.182**	.305**	.257**	.550**
Πρωτοτυπία	OXE_1	.634**	.179**	.419**	.177**	.376**	.292**	.328**	.459**	.268**	1	.211**	.472**	.402**	.458**	.325**
	OXE_2	.319**	.591**	.265**	.287**	.168*	.255**	.217**	.161*	.107	.211**	1	.234**	.158*	.168*	.159*
	OXE_3	.375**	.123	.872**	.117	.277**	.266**	.262**	.401**	.182**	.472**	.234**	1	.318**	.369**	.198**
	MI_1	.316**	.126	.343**	.107	.435**	.348**	.485**	.474**	.305**	.402**	.158*	.318**	1	.425**	.615**
	MI_2	.372**	.092	.311**	.276**	.335**	.329**	.252**	.814**	.257**	.458**	.168*	.369**	.425**	1	.432**
	MI_3	.259**	.126	.189**	.148*	.467**	.370**	.336**	.431**	.550**	.325**	.159*	.198**	.615**	.432**	1

Σημείωση:

**Οι συσχετίσεις είναι στατιστικά σημαντικές σε επίπεδο $p<.01$ (αμφίπλευρος)

*Οι συσχετίσεις είναι στατιστικά σημαντικές σε επίπεδο $p<.05$ (αμφίπλευρος)

Πίνακας Λ2

Συσχετίσεις των Μεταβλητών του Δοκιμίου των Μαθηματικών Γνώσεων με όλες τις Μεταβλητές της Έρευνας

	Μαθηματικές γνώσεις													
	Γ1_α	Γ1_β	Γ1_γ	Γ1_δ	Γ2	Γ3	Γ4	Γ5	Γ6	Γ7	Γ8	Γ9	Γ10_α	Γ10_β
Ε_ΟΧΕ_1	.010	.088	.099	.190**	.163*	.230**	.337**	.294**	.281**	.219**	.253**	.232**	.119	.176**
Ε_ΟΧΕ_2	-.012	.060	.128	.124	.130	.068	.159*	.096	.139*	.059	.141*	.141*	.120	.056
Ε_ΟΧΕ_3	.073	.044	.253**	.154*	.108	.184**	.300**	.178**	.254**	.158*	.192**	.217**	.199**	.142*
ΟΑΕ_1	.043	.093	.146*	.067	.165*	.059	.152*	.094	.235**	.117	.129	.128	.086	.130
ΟΑΕ_2	.000	.179**	.243**	.275**	.328**	.292**	.374**	.180**	.366**	.285**	.274**	.306**	.205**	.320**
ΟΑΕ_3	-.019	.119	.201**	.345**	.345**	.338**	.334**	.242**	.365**	.257**	.329**	.389**	.286**	.233**
Ε_ΜΙ_1	.099	.108	.240**	.368**	.219**	.247**	.301**	.247**	.299**	.222**	.303**	.330**	.218**	.285**
Ε_ΜΙ_2	-.036	.177**	.268**	.314**	.278**	.318**	.403**	.345**	.400**	.286**	.226**	.382**	.183**	.274**
Ε_ΜΙ_3	.070	.174*	.227**	.287**	.236**	.256**	.301**	.255**	.307**	.238**	.251**	.302**	.082	.271**
Π_ΟΧΕ_1	.052	.168*	.168*	.247**	.205**	.177**	.397**	.281**	.391**	.222**	.268**	.290**	.109	.262**
Π_ΟΧΕ_2	.022	.040	.181**	.153*	.137*	.086	.257**	.134*	.190**	.086	.215**	.199**	.195**	.083
Π_ΟΧΕ_3	.029	.019	.252**	.193**	.111	.191**	.312**	.177**	.282**	.183**	.201**	.221**	.219**	.137*
Π_ΜΙ_1	.061	.082	.270**	.350**	.327**	.302**	.407**	.223**	.376**	.168*	.353**	.335**	.257**	.298**
Π_ΜΙ_2	.021	.144*	.233**	.278**	.217**	.263**	.346**	.306**	.353**	.216**	.231**	.320**	.162*	.283**
Π_ΜΙ_3	.071	.172*	.260**	.408**	.430**	.381**	.463**	.319**	.386**	.233**	.391**	.403**	.223**	.355**
Γ1_α	1	.269**	.158*	.184**	.154*	.127	.130	.168*	.088	.041	.237**	.097	.069	.125
Γ1_β	.269**	1	.187**	.191**	.221**	.171*	.290**	.296**	.092	.188**	.152*	.269**	.137*	.164*
Γ1_γ	.158*	.187**	1	.306**	.201**	.267**	.201**	.106	.341**	.236**	.260**	.300**	.158*	.156*
Γ1_δ	.184**	.191**	.306**	1	.475**	.521**	.403**	.282**	.367**	.256**	.346**	.465**	.283**	.303**

Γ2	.154*	.221**	.201**	.475**	1	.474**	.438**	.363**	.306**	.294**	.342**	.448**	.299**	.335**
Γ3	.127	.171*	.267**	.521**	.474**	1	.374**	.315**	.369**	.383**	.367**	.455**	.204**	.317**
Γ4	.130	.290**	.201**	.403**	.438**	.374**	1	.315**	.412**	.378**	.371**	.482**	.321**	.373**
Γ5	.168*	.296**	.106	.282**	.363**	.315**	.315**	1	.322**	.265**	.286**	.488**	.207**	.314**
Γ6	.088	.092	.341**	.367**	.306**	.369**	.412**	.322**	1	.347**	.380**	.403**	.316**	.308**
Γ7	.041	.188**	.236**	.256**	.294**	.383**	.378**	.265**	.347**	1	.335**	.522**	.153*	.379**
Γ8	.237**	.152*	.260**	.346**	.342**	.367**	.371**	.286**	.380**	.335**	1	.467**	.309**	.346**
Γ9	.097	.269**	.300**	.465**	.448**	.455**	.482**	.488**	.403**	.522**	.467**	1	.332**	.434**
Γ10_α	.069	.137*	.158*	.283**	.299**	.204**	.321**	.207**	.316**	.153*	.309**	.332**	1	.298**
Γ10_β	.125	.164*	.156*	.303**	.335**	.317**	.373**	.314**	.308**	.379**	.346**	.434**	.298**	1
Ν1	.058	.162*	.023	.238**	.218**	.270**	.274**	.171*	.066	.097	.229**	.204**	.282**	.265**
Ν2	.089	.095	.014	.063	-.048	-.081	.087	.082	.091	.000	.070	.092	.079	.069
Ν5	.126	.120	.136*	.166*	.186**	.140*	.127	.082	.141*	.110	.133	.109	.050	.106
Ν6	.141*	.012	-.015	.016	.005	-.023	-.006	.058	.027	.025	.113	.021	-.028	-.009
Ν7	.128	.210**	.037	.056	.194**	.000	.082	.173*	.030	-.016	.186**	.112	.095	.103
Ν8	.127	.179**	.041	.209**	.303**	.166*	.073	.175**	.067	.059	.172*	.232**	.079	.135*
Ν9	.046	.183**	.029	.081	.049	.060	.077	.145*	.123	.088	.178**	.125	.137*	.101
Ν10	.175**	.193**	.111	.258**	.278**	.205**	.076	.217**	.156*	.092	.284**	.216**	.075	.134*
Ν12	.141*	.141*	.094	.247**	.200**	.242**	.147*	.115	.093	.157*	.220**	.188**	.133*	.209**
Ν13	.164*	.131	.080	.072	.204**	.142*	.035	.076	.082	.069	.058	.113	-.006	.035
Ν14	.129	.127	-.022	.015	.076	.053	.105	.066	.098	.131	.147*	.118	.108	.092

Σημείωση:

**Οι συσχετίσεις είναι στατιστικά σημαντικές σε επίπεδο p<.01 (αμφίπλευρος) *Οι συσχετίσεις είναι στατιστικά σημαντικές σε επίπεδο p<.05 (αμφίπλευρος)

Πίνακας Λ3

Συσχετίσεις των Μεταβλητών του Ερωτηματολογίου της Μαθηματικής Νοοτροπίας με όλες τις Μεταβλητές της Έρευνας

	Μαθηματική νοοτροπία										
	N1	N2	N5	N6	N7	N8	N9	N10	N12	N13	N14
Ε_ΟΧΕ_1	.142*	.068	.019	-.121	.011	.053	.127	.101	.147*	.057	.023
Ε_ΟΧΕ_2	.136*	.023	-.051	-.135*	-.025	-.038	.035	.021	.201**	.000	-.047
Ε_ΟΧΕ_3	.151*	.103	.146*	-.088	.116	.126	.043	.095	.017	.032	.006
ΟΑΕ_1	.046	.057	.048	-.189**	-.045	.040	-.074	.100	.029	.126	-.029
ΟΑΕ_2	.184**	.112	.089	-.060	.165*	.173*	.088	.205**	.137*	.100	.121
ΟΑΕ_3	.119	.127	.111	.004	.201**	.185**	.069	.162*	.098	.150*	.042
Ε_ΜΙ_1	.204**	.095	.186**	.034	.074	.192**	.133	.245**	.131	.070	-.004
Ε_ΜΙ_2	.164*	.073	.070	-.105	.112	.182**	.148*	.149*	.085	.069	.077
Ε_ΜΙ_3	.149*	.088	.246**	.015	.114	.183**	.083	.208**	.181**	.141*	.049
Π_ΟΧΕ_1	.126	.093	.084	-.110	.006	.081	.135*	.083	.148*	-.016	.029
Π_ΟΧΕ_2	.158*	.160*	.088	-.087	.001	.079	.008	.082	.160*	.077	.000
Π_ΟΧΕ_3	.148*	.132	.121	-.062	.108	.117	.032	.071	.060	.013	.030
Π_ΜΙ_1	.173*	.081	.079	.011	.120	.232**	.129	.202**	.045	.054	.050
Π_ΜΙ_2	.178**	.128	.087	-.071	.137*	.190**	.171*	.122	.069	.069	.131
Π_ΜΙ_3	.264**	.120	.194**	.053	.182**	.209**	.149*	.313**	.151*	.122	.146*
Γ1_α	.058	.089	.126	.141*	.128	.127	.046	.175**	.141*	.164*	.129
Γ1_β	.162*	.095	.120	.012	.210**	.179**	.183**	.193**	.141*	.131	.127
Γ1_γ	.023	.014	.136*	-.015	.037	.041	.029	.111	.094	.080	-.022
Γ1_δ	.238**	.063	.166*	.016	.056	.209**	.081	.258**	.247**	.072	.015

Γ2	.218**	-.048	.186**	.005	.194**	.303**	.049	.278**	.200**	.204**	.076
Γ3	.270**	-.081	.140*	-.023	.000	.166*	.060	.205**	.242**	.142*	.053
Γ4	.274**	.087	.127	-.006	.082	.073	.077	.076	.147*	.035	.105
Γ5	.171*	.082	.082	.058	.173*	.175**	.145*	.217**	.115	.076	.066
Γ6	.066	.091	.141*	.027	.030	.067	.123	.156*	.093	.082	.098
Γ7	.097	.000	.110	.025	-.016	.059	.088	.092	.157*	.069	.131
Γ8	.229**	.070	.133	.113	.186**	.172*	.178**	.284**	.220**	.058	.147*
Γ9	.204**	.092	.109	.021	.112	.232**	.125	.216**	.188**	.113	.118
Γ10_α	.282**	.079	.050	-.028	.095	.079	.137*	.075	.133*	-.006	.108
Γ10_β	.265**	.069	.106	-.009	.103	.135*	.101	.134*	.209**	.035	.092
N1	1	-.010	.168*	.045	.243**	.238**	.416**	.181**	.477**	.248**	.177**
N2	-.010	1	.062	.276**	.336**	.152*	.229**	.221**	-.069	.209**	.163*
N5	.168*	.062	1	.205**	.169*	.221**	-.024	.306**	.141*	.252**	.179**
N6	.045	.276**	.205**	1	.381**	.284**	.178**	.270**	.028	.191**	.262**
N7	.243**	.336**	.169*	.381**	1	.331**	.310**	.361**	.158*	.285**	.253**
N8	.238**	.152*	.221**	.284**	.331**	1	.300**	.504**	.178**	.359**	.208**
N9	.416**	.229**	-.024	.178**	.310**	.300**	1	.152*	.329**	.229**	.323**
N10	.181**	.221**	.306**	.270**	.361**	.504**	.152*	1	.090	.349**	.181**
N12	.477**	-.069	.141*	.028	.158*	.178**	.329**	.090	1	.191**	.191**
N13	.248**	.209**	.252**	.191**	.285**	.359**	.229**	.349**	.191**	1	.181**
N14	.177**	.163*	.179**	.262**	.253**	.208**	.323**	.181**	.191**	.181**	1

Σημείωση:

**Οι συσχετίσεις είναι στατιστικά σημαντικές σε επίπεδο p<.01 (αμφίπλευρος)

*Οι συσχετίσεις είναι στατιστικά σημαντικές σε επίπεδο p<.05 (αμφίπλευρος)