

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΔΙΑΤΡΙΒΗ MASTER

**Η Μέθοδος Ιχνηλάτησης
Μετώπου
σε Συστήματα των
Νόμων Διατήρησης**

Λοΐζος Κοσμάς

Επιβλέπουσα:
Κλεοπάτρα Χριστοφόρου
16 Δεκεμβρίου 2021

Λοΐζος Κοσμάς

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Κλεοπάτρα Χριστοφόρου που μέσα από τη γόνιμη συνεργασία που είχαμε με βοήθησε να εκπονήσω τη διατριβή μου. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή Γιώργο-Σωκράτη Σμυρλή και τον Αναπληρωτή Καθηγητή Εμμανουήλ Μηλάκη για τον χρόνο που αφιέρωσαν για τη μελέτη και την αξιολόγηση της διατριβής. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου που πάντα βρίσκεται στο πλευρό μου και με στηρίζει σε κάθε μου βήμα.

Λοΐζος Κοσμάς

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	5
1 Εισαγωγή	7
2 Ασθενείς λύσεις	11
2.1 Εισαγωγή στις ασθενείς λύσεις	11
2.2 Συνθήκη Rankine-Hugoniot	14
2.3 Συνθήκες Αποδεκτικότητας	23
3 Λύση του προβλήματος Riemann	33
3.1 Κεντρικά κύματα αραιώσης (rarefaction waves)	35
3.2 Κρουστικά κύματα (shocks)	39
3.3 Γενική λύση του προβλήματος Riemann	57
4 Το πρόβλημα του Cauchy για συστήματα	63
4.1 Προσεγγίσεις μέσω ιχνηλάτησης μετώπου	64
4.2 Αλγόριθμος ιχνηλάτησης μετώπου	66
4.2.1 Ακριβής λύση Riemann	70
4.2.2 Απλοποιημένη λύση Riemann	73
4.3 Ύπαρξη ε -προσεγγιστικών front tracking λύσεων	78
4.4 Ύπαρξη λύσης στο πρόβλημα του Cauchy	119
Βιβλιογραφία	129

Λοΐζος Κοσμάς

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Σε αυτή τη διατριβή, θα ασχοληθούμε με την επίλυση του συστήματος των νόμων διατήρησης:

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (1.0.1)$$

όπου $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ μια δεδομένη ομαλή διανυσματική συνάρτηση και $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$. Το πιο πάνω σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων ονομάζεται σύστημα νόμων διατήρησης γιατί αναφέρει ότι ένα φυσικό μέγεθος ενός απομονωμένου φυσικού συστήματος δεν μεταβάλλεται καθώς το σύστημα εξελίσσεται στο χώρο και το χρόνο. Κατ' ακρίβειαν, η διατήρηση της μάζας, της ορμής και της ενέργειας στην Κλασική Φυσική μπορεί να εκφραστεί στη μορφή μερικών διαφορικών εξισώσεων που γράφονται ως:

$$u_t + f(u)_x = 0.$$

Μια λύση του πιο πάνω συστήματος λέγεται κλασική αν υπάρχουν όλες οι παραγώγοι της που εμφανίζονται στην μερική διαφορική εξίσωση. Αρκετά συχνά στην προσπάθεια μας να επιλύσουμε το πιο πάνω σύστημα στα πλαίσια μιας κλασικής λύσης, είναι πιθανόν σε πεπερασμένο χρόνο να εμφανιστούν ασυνέχειες. Γι' αυτό το λόγο ορίζουμε τις ασθενείς λύσεις, για τις οποίες όπως θα δούμε το μόνο που θα απαιτήσουμε είναι να είναι τοπικά ολοκληρώσιμες, επεκτείνοντας κατά πολύ με αυτό τον τρόπο την έννοια της λύσης. Όπως

θα δούμε, η έννοια της ασθενούς λύσης δεν είναι αρκετά αυστηρή ώστε να μας εξασφαλίσει μοναδική λύση, λόγω των ασυνεχειών που υπάρχουν. Επομένως, θα θέσουμε κριτήρια αποδεκτικότητας, ώστε να απορρίψουμε λύσεις μη-αποδεκτές στα πλαίσια της φυσικής σημασίας του προβλήματος με την ελπίδα να ξεχωρίσουμε τη μοναδική λύση που θα είναι και η φυσική λύση.

Η εντατική μελέτη αυτών των λύσεων ξεκίνησε από τον P. Lax την δεκαετία του 1950. Ο P.Lax κατέφερε να επιλύσει το πρόβλημα του Riemann στο πλαίσιο των ασθενών λύσεων στο άρθρο [5] το 1957. Το πρόβλημα του Riemann αποτελείται από το σύστημα νόμων διατήρησης (1.0.1) με τα αρχικά δεδομένα να αποτελούνται από δύο σταθερές τιμές u^-, u^+ της μορφής:

$$u(0, x) = \begin{cases} u^+, & \text{εάν } x > 0 \\ u^-, & \text{εάν } x < 0. \end{cases}$$

Με την προϋπόθεση, ότι τα χαρακτηριστικά πεδία είναι γνησίως μη-γραμμικά ή γραμμικώς εκφυλισμένα, ο Lax απέδειξε ότι υπάρχει λύση $u(x, t)$ αρκεί οι δεδομένες τιμές u^-, u^+ να είναι αρκετά κοντά. Η λύση $u(x, t)$ είναι ομογενής, δηλαδή της μορφής $g(\frac{x}{t})$ και αποτελείται από n τιμές οι οποίες σχετίζονται με ένα γεωμετρικό τρόπο. Συγκεκριμένα, αυτές οι τιμές βρίσκονται πάνω στις καμπύλες αραίωσης και κρούσεως των οποίων και πάλι ο Lax ανέπτυξε τη θεωρία. Η λύση του Lax ικανοποιεί τα κριτήρια αποδεκτικότητας και αυτό αποτέλεσε έναυσμα για την μελέτη του γενικότερου προβλήματος (1.0.1) με αρχική συνθήκη

$$u(0, x) = \bar{u}. \quad (1.0.2)$$

Η γενική θεωρία των συστημάτων (1.0.1) αναπτύχθηκε λοιπόν έχοντας τα προβλήματα Riemann ως δομικά υλικά. Το πρώτο αποτέλεσμα ύπαρξης ασθενούς αποδεκτής λύσης για όλους τους χρόνους $t > 0$ ήρθε από τον James Glimm [4] το 1965, ο οποίος κατασκεύασε την μέθοδο τυχαίας επιλογής (random choice method). Στην συνέχεια, από την ιταλική σχολή ο Alberto Bressan και οι μαθητές του ανέπτυξαν την μέθοδο ιχνηλάτησης (front tracking method) [2]. Μια διαφορετική μέθοδος η οποία επίσης μας δίνει μια

ασθενή αποδεκτή λύση είναι η μέθοδος του μηδενικού ιξώδους που παρέμεινε ανοικτή για πολλά χρόνια και επιλύθηκε από τους Bianchini-Bressan [1] το 2005.

Σε αυτή τη διατριβή θα μελετήσουμε την προσεγγιστική μέθοδο ιχνηλάτησης μετώπου. Με αυτήν θα κατασκευάσουμε μια ακολουθία από προσεγγιστικές λύσεις οι οποίες θα συγκλίνουν και θα δείξουμε ότι το όριο τους θα αποτελεί μια ασθενή λύση του συστήματος των νόμων διατήρησης και θα ικανοποιεί μια από τις συνθήκες αποδεκτικότητας που θα θέσουμε. Η μέθοδος ιχνηλάτησης μετώπου έχει αντίστοιχη φιλοσοφία με αυτήν της τυχαίας επιλογής του Glimm. Η κύρια διαφορά της είναι ότι σε κάθε σημείο που επιλύεται το πρόβλημα Riemann, η λύση προσεγγίζεται από μια τμηματικά σταθερή συνάρτηση και πιο συγκεκριμένα μονάχα τα κύματα αραιώσης αντικαθίστανται από μια συνάρτηση τμηματικά σταθερή. Το άλλο σημαντικό πλεονέκτημα της μεθόδου έναντι της μεθόδου τυχαίας επιλογής είναι η προσθήκη των τεχνητών κυμάτων (non-physical) για την επίλυση ενός ελεγχόμενου συνολικού αριθμού προβλημάτων Riemann. Αυτό έχει ως πλεονέκτημα την επίλυση αρκετά λιγότερων προβλημάτων Riemann σε σύγκριση με την μέθοδο τυχαίας επιλογής. Επίσης, η μέθοδος έχει αναπτυχθεί αρκετά από τον Bressan ώστε να εξασφαλίζει ακόμη και την L^1 ευστάθεια των ασθενών λύσεων που εξασφαλίζει. Να επισημάνουμε ότι οι ασθενείς λύσεις που κατασκευάζονται με αυτές τις δύο μεθόδους είναι ταυτόσημες.

Αυτές οι μέθοδοι χρησιμοποιούνται στην έρευνα μέχρι και σήμερα σε διάφορα προβλήματα με συστήματα νόμων διατήρησης που εμπλέκουν και άλλους μη-ομογενείς όρους $g(u)$ ακόμη και μη-τοπικούς (non-local), όπως και μη γραμμικές ροές f που εξαρτώνται άμεσα από την λύση u , δηλαδή της μορφής $f(u, x, t)$ ή περιγράφουν ροές με μνήμη, δηλαδή της μορφής $\int_0^t f(u(x, \tau)) d\tau$. Η μέθοδος ιχνηλάτησης μετώπου χρησιμοποιείται πιο ευρέως λόγω των πλεονεκτημάτων που έχουν αναφερθεί πιο πάνω. Επίσης, έχει χρησιμοποιηθεί η μέθοδος για την αριθμητική επίλυση υπερβολικών μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Η διατριβή αποτελείται από τέσσερα κεφάλαια και κυρίως βασίζεται στο βιβλίο με τίτλο *Hyperbolic Systems of Conservation Laws. The One-Dimensional Cauchy Problem* του A. Bressan [2]. Στο Κεφάλαιο 2 θα ορίσουμε τις

ασθενείς λύσεις και θα διατυπώσουμε μια αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε μια συνάρτηση να είναι ασθενής λύση του συστήματος των νόμων διατήρησης. Επίσης, θα διατυπώσουμε τις συνθήκες αποδεκτικότητας. Στο Κεφάλαιο 3 θα αναπτύξουμε δύο λύσεις του προβλήματος Riemann για δύο συγκεκριμένες περιπτώσεις και ακολούθως θα ενώσουμε αυτές τις δύο λύσεις για να ορίσουμε την ασθενή λύση για το πρόβλημα Riemann με αρχικά δεδομένα που βρίσκονται αρκετά κοντά. Στο Κεφάλαιο 4 θα περιγράψουμε την μέθοδο ιχνηλάτησης μετώπου: θα ορίσουμε την ακολουθία απο προσεγγιστικές λύσεις που θα είναι τμηματικά σταθερές συναρτήσεις. Αυτές θα προκύψουν επιλύοντας προβλήματα Riemann στα σημεία που θα συγκρούονται τα μέτωπα της λύσης. Τέλος, θα δείξουμε ότι αυτή η ακολουθία θα συγκλίνει σε μια ασθενή λύση του συστήματος των νόμων διατήρησης και θα ικανοποιεί την αρχική συνθήκη του προβλήματος. Η σύγκλιση θα ισχύει με την προϋπόθεση ότι η αρχική συνθήκη θα έχει μικρή ολική διακύμανση.

Κεφάλαιο 2

Ασθενείς λύσεις

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα ορίσουμε την ασθενή λύση σε συστήματα νόμων διατήρησης και θα αποδείξουμε τη συνθήκη Rankine-Hugoniot που ισχύει γύρω από μια ασυνέχεια ασθενών λύσεων. Τέλος, θα παρουσιάσουμε τις συνθήκες αποδεκτικότητας ασθενών λύσεων ώστε να απορρίψουμε ασθενείς λύσεις που δεν σχετίζονται με τη φυσική σημασία του προβλήματος.

2.1 Εισαγωγή στις ασθενείς λύσεις

Έστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ μια ομαλή διανυσματική συνάρτηση.

Ορισμός 2.1. Μια μειρήσιμη συνάρτηση $u = u(t, x)$ από ένα ανοικτό σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ στο \mathbb{R}^n λέγεται λύση κατανομής του συστήματος των νόμων διατήρησης:

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (2.1.1)$$

εάν για κάθε C^1 συνάρτηση $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ με συμπαγή φορέα μέσα στο Ω ισχύει:

$$\iint_{\Omega} [u\phi_t + f(u)\phi_x] dxdt = 0. \quad (2.1.2)$$

Για να πάρουμε τη (2.1.2), αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τη (2.1.1) με μια C^1 συνάρτηση δοκιμής ϕ που έχει συμπαγή φορέα που περιέχεται στο Ω και

να ολοκληρώσουμε στο Ω . Με αυτό τον τρόπο παίρνουμε

$$\iint_{\Omega} [u_t \phi + f(u)_x \phi] dx dt = 0,$$

και ισοδύναμα

$$\iint_{\Omega} [(u\phi)_t + (f(u)\phi)_x - u\phi_t - f(u)\phi_x] dx dt = 0. \quad (2.1.3)$$

Εφόσον, η ϕ έχει συμπαγή φορέα που περιέχεται στο Ω ισχύει ότι

$$\iint_{\Omega} (u\phi)_t dx dt = 0 \quad \text{και} \quad \iint_{\Omega} (f(u)\phi)_x dx dt = 0.$$

Επομένως, από τη (2.1.3) έπεται ότι

$$\iint_{\Omega} [u\phi_t + f(u)\phi_x] dx dt = 0.$$

Το πλεονέκτημα του Ορισμού 2.1 είναι ότι επιτρέπει σε ασυνεχείς συναρτήσεις $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ να είναι λύσεις του συστήματος (2.1.1), διευρύνοντας κατ' αυτόν τον τρόπο την έννοια της λύσης. Το τέχνασμα στον Ορισμό 2.1 είναι η ολοκλήρωση κατά μέρη που μας επιτρέπει να μεταφέρουμε την παραγωγή από τη u στη συνάρτηση δοκιμής ϕ . Παρατηρούμε ότι το μόνο που απαιτούμε είναι η u και η $f(u)$ να είναι τοπικά ολοκληρώσιμες στο Ω .

Ορισμός 2.2. Για δοσμένη αρχική συνθήκη

$$u(0, x) = \bar{u}(x), \quad (2.1.4)$$

με $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$, λέμε ότι η συνάρτηση $u : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι λύση κατανομής του προβλήματος του Cauchy:

$$u_t + (f(u))_x = 0$$

$$u(0, x) = \bar{u}(x)$$

εάν ισχύει:

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} [u\phi_t + f(u)\phi_x] dxdt + \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}(x)\phi(0, x)dx = 0, \quad (2.1.5)$$

για κάθε C^1 συνάρτηση ϕ με συμπαγή φορέα που περιέχεται στο σύνολο $(-\infty, T) \times \mathbb{R}$.

Όπως και στον Ορισμό 2.1, η σχέση (2.1.5) προκύπτει αφού πολλαπλασιάσουμε το σύστημα του νόμου διατήρησης (2.1.1) με μια C^1 συνάρτηση δοκιμής ϕ με συμπαγή φορέα που περιέχεται στο σύνολο $(-\infty, T) \times \mathbb{R}$ και ολοκληρώσουμε στο διάστημα στο οποίο ορίζεται η u . Με αυτό τον τρόπο θα έχουμε

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} [u_t\phi + f(u)_x\phi] dxdt = 0$$

και όπως προηγουμένως,

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} [(u\phi)_t + (f(u)\phi)_x - u\phi_t - f(u)\phi_x] dxdt = 0. \quad (2.1.6)$$

Εφόσον, η ϕ έχει συμπαγή φορέα που περιέχεται στο σύνολο $(-\infty, T) \times \mathbb{R}$, ο συμπαγής φορέας της ϕ περιέχεται σε ένα σύνολο της μορφής $(-\infty, T) \times (a, b)$, με $a, b \in \mathbb{R}$. Επομένως, ισχύει $\phi(T, x) = 0$ και $\phi(t, a) = \phi(t, b) = 0$. Επομένως, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} (u\phi)_t dxdt &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T (u\phi)_t dt dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [u(T, x)\phi(T, x) - u(0, x)\phi(0, x)] dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} u(0, x)\phi(0, x) dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}(x)\phi(0, x) dx \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} (f(u)\phi)_x dx dt &= \int_0^T \int_a^b (f(u)\phi)_x dx dt \\ &= \int_0^T [f(u(t,b))\phi(t,b) - f(u(t,a))\phi(t,a)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Επομένως, η σχέση (2.1.6) γράφεται ως

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} [u\phi_t + f(u)\phi_x] dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}(x)\phi(0,x) dx = 0.$$

Με αυτό τον τρόπο καταλήγουμε στον ορισμό ασθενούς λύσης του προβλήματος του Cauchy (2.1.1)-(2.1.4).

Ορισμός 2.3. Μια συνάρτηση $u : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι ασθενής λύση του προβλήματος του Cauchy (2.1.1)-(2.1.4) εάν η u είναι συνεχής ως συνάρτηση του χρόνου από το $[0, T]$ στο L^1_{loc} , η αρχική συνθήκη (2.1.4) ικανοποιείται και ο περιορισμός της u στο $(0, T) \times \mathbb{R}$ είναι μια λύση κατανομής του συστήματος (2.1.1).

2.2 Συνθήκη Rankine-Hugoniot

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα ασχοληθούμε με μια συνάρτηση U η οποία θεωρούμε ότι είναι κατά τμήματα Lipschitz συνεχής με άλματα ασυνέχειας πάνω σε πεπερασμένο αριθμό καμπυλών στο $t - x$ επίπεδο. Ο στόχος μας είναι να αντλήσουμε συνθήκες που θα μας εξασφαλίζουν ότι η U είναι λύση του (2.1.1). Θα ξεκινήσουμε με μια απλή περίπτωση κατά τμήματα σταθερής συνάρτησης, και πιο συγκεκριμένα θεωρούμε την

$$U(t, x) = \begin{cases} u^+, & \text{εάν } x > \lambda t \\ u^-, & \text{εάν } x < \lambda t \end{cases}, \quad (2.2.1)$$

για κάποια δεδομένα $u^-, u^+ \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Λήμμα 2.4. Η συνάρτηση U είναι λύση του συστήματος (2.1.1) εάν και μόνο εάν

$$\lambda(u^+ - u^-) = f(u^+) - f(u^-). \quad (2.2.2)$$

Άποδειξη. Έστω ότι η U είναι λύση του (2.1.1). Χωρίζουμε το Ω στις δύο περιοχές

$$\Omega^+ = [x > \lambda t], \quad \Omega^- = [x < \lambda t],$$

και θέτουμε το διάνυσμα $\Phi = (U \cdot \phi, f(U) \cdot \phi)$. Πράγματι, για κάθε συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση ϕ , δηλαδή $\forall \phi \in C^1$, με συμπαγή φορέα που περιέχεται στο Ω , έχουμε ότι

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{\Omega} [U \phi_t + f(U) \phi_x] dx dt \\ &= \iint_{\Omega^+} [U \phi_t + f(U) \phi_x] dx dt + \iint_{\Omega^-} [U \phi_t + f(U) \phi_x] dx dt. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Τώρα το ολοκλήρωμα στο Ω^+ είναι

$$\iint_{\Omega^+} [U \phi_t + f(U) \phi_x] dx dt = \iint_{\Omega^+} [(U \phi)_t + (f(U) \phi)_x - \phi(U_t + f(U)_x)] dx dt.$$

Εφόσον, η U είναι σταθερή στο Ω^+ , ισχύει ότι $U_t + f(U)_x = 0$ και επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega^+} [U \phi_t + f(U) \phi_x] dx dt &= \iint_{\Omega^+} [(U \phi)_t + (f(U) \phi)_x - \phi(U_t + f(U)_x)] dx dt \\ &= \iint_{\Omega^+} [(U \phi)_t + (f(U) \phi)_x] dx dt \\ &= \iint_{\Omega^+} \operatorname{div} \Phi dx dt \\ &= \int_{\partial \Omega^+} \Phi \cdot \eta ds, \end{aligned}$$

από το Θεώρημα της Απόκλισης με η το κάθετο διάνυσμα στο $\partial \Omega^+$. Αφού η

ϕ έχει συμπαγή φορέα μέσα στο Ω , ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\Omega^+} [U\phi_t + f(U)\phi_x] dxdt \\
 &= \int_{\partial\Omega^+} \Phi \cdot \eta ds \\
 &= \int_{\partial\Omega^+ \cap \text{ευθεία ασυνέχειας}} \Phi \cdot \eta ds \\
 &= \int_{\partial\Omega^+ \cap \text{ευθεία ασυνέχειας}} (U \cdot \phi, f(U) \cdot \phi) \cdot (\lambda, -1) dt \\
 &= \int_{\partial\Omega^+ \cap \text{ευθεία ασυνέχειας}} [u^+ \lambda - f(u^+)] \phi dt.
 \end{aligned}$$

Με τον αντίστοιχο τρόπο υπολογίζουμε τον δεύτερο όρο στην (2.2.3),

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\Omega^-} [U\phi_t + f(U)\phi_x] dxdt \\
 &= \int_{\partial\Omega^-} \Phi \cdot \eta ds \\
 &= \int_{\partial\Omega^- \cap \text{ευθεία ασυνέχειας}} \Phi \cdot (-\eta) ds \\
 &= - \int_{\partial\Omega^- \cap \text{ευθεία ασυνέχειας}} (U \cdot \phi, f(U) \cdot \phi) (\lambda, -1) dt \\
 &= \int_{\partial\Omega^- \cap \text{ευθεία ασυνέχειας}} - [u^- \lambda - f(u^-)] \phi dt
 \end{aligned}$$

Έτσι από την (2.2.3), έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 0 &= \iint_{\Omega} [U\phi_t + f(U)\phi_x] dxdt \\
 &= \int_{\partial\Omega^+ \cap \text{ευθεία ασυνέχειας}} [\lambda(u^+ - u^-) - (f(u^+) - f(u^-))] \phi(t, \lambda t) dt.
 \end{aligned}$$

(2.2.4)

Αφού η σχέση (2.2.4) ισχύει $\forall \phi \in C_c^1$, συνεπάγεται ότι

$$\lambda(u^+ - u^-) = f(u^+) - f(u^-).$$

Ακολουθώντας την αντίθετη διαδικασία εξασφαλίζουμε και την άλλη κατεύθυνση αφού σε κάθε βήμα έχουμε ισοδυναμία. \square

Η διανυσματική εξίσωση (2.2.1) ονομάζεται συνθήκη Rankine-Hugoniot και αποτελείται από n -βαθμωτές εξισώσεις που συνδέουν την αριστερή και δεξιά τιμή $u^-, u^+ \in \mathbb{R}^n$ με την ταχύτητα λ της ασυνέχειας.

Παρατήρηση 2.1. Σημειώνουμε με $A(u) = Df(u)$ τον $n \times n$ ιακωβιανό πίνακα της f στο u και υποθέτουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο τιμές u, v περιέχεται εντελώς στο πεδίο ορισμού της f . Τότε ορίζουμε τον κατά μέσο όρο πίνακα ως ακολούθως:

$$A(u, v) = \int_0^1 A(\theta u + (1 - \theta)v) d\theta \quad (2.2.5)$$

και καλούμε $\lambda_i(u, v)$, $i = 1, \dots, n$ τις ιδιοτιμές του. Αφότου, ορίσουμε τον κατά μέσο όρο πίνακα μπορούμε να γράψουμε την (2.2.2) στην ισοδύναμη μορφή:

$$\begin{aligned} \lambda(u^+ - u^-) &= f(u^+) - f(u^-) = \int_0^1 \frac{d}{d\theta} f(\theta u^+ + (1 - \theta)u^-) d\theta \\ &= \int_0^1 Df(\theta u^+ + (1 - \theta)u^-)(u^+ - u^-) d\theta \\ &= A(u^+, u^-)(u^+ - u^-). \end{aligned}$$

Με άλλα λόγια η συνθήκη Rankine-Hugoniot ισχύει εάν και μόνο εάν το άλμα $u^+ - u^-$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του κατά μέσον όρου πίνακα $A(u^+, u^-)$ και η αντίστοιχη ιδιοτιμή λ είναι η ταχύτητα του συγκεκριμένου άλματος.

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε ένα βοηθητικό λήμμα που θα μας βοηθήσει στην απόδειξη ενός σημαντικού θεωρήματος.

Λήμμα 2.5. Έστω $(u_\nu)_{\nu \geq 1}$ μια ακολουθία όπου οι όροι της αποτελούν λύσεις κατανομής του συστήματος (2.1.1). Εάν ισχύει:

$$u_\nu \rightarrow u \quad \text{και} \quad f(u_\nu) \rightarrow f(u) \quad \text{καθώς } \nu \rightarrow \infty$$

με την νόρμα L^1_{loc} , τότε και η u είναι μια λύση κατανομής.

Ἀπόδειξη. Πράγματι, λόγω της σύγκλισης στο L^1_{loc} έχουμε

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (u\phi_t + f(u)\phi_x) dx dt &= \iint_{\Omega} (\lim_{\nu \rightarrow \infty} u_\nu \phi_t + \lim_{\nu \rightarrow \infty} f(u_\nu) \phi_x) dx dt \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \iint_{\Omega} (u_\nu \phi_t + f(u_\nu) \phi_x) dx dt = 0 \end{aligned}$$

και στη τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι u_ν είναι λύση κατανομής \square

Ορισμός 2.6. Μια συνάρτηση u έχει κατά προσέγγιση άλμα ασυνέχειας σε ένα σημείο $\bar{\psi}$ εάν υπάρχουν διανύσματα $u^- \neq u^+$ και μοναδιαίο διάνυσμα $\mu \in \mathbb{R}^m$, τέτοια ώστε αν θέσουμε

$$U(\psi) = \begin{cases} u^+, & \text{εάν } \psi \cdot \mu > 0 \\ u^-, & \text{εάν } \psi \cdot \mu < 0 \end{cases},$$

τότε ισχύει

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r^m} \int_{|\psi| < r} |u(\bar{\psi} + \psi) - U(\psi)| d\psi = 0.$$

Θεώρημα 2.7. Έστω u μια φραγμένη λύση κατανομής του συστήματος (2.1.1) και σταθεροποιούμε ένα σημείο (τ, ξ) . Έστω $u^-, u^+ \in \mathbb{R}^n$ και ταχύτητα λ και θεωρούμε τη συνάρτηση U όπως την ορίσαμε στο (2.2.1):

$$U(t, x) = \begin{cases} u^+, & \text{εάν } x > \lambda t \\ u^-, & \text{εάν } x < \lambda t \end{cases}.$$

Εάν ισχύει

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \int_{-r}^r \int_{-r}^r [u(\tau + t, \xi + x) - U(t, x)] dx dt = 0, \quad (2.2.6)$$

τότε ισχύουν οι συνθήκες Rankine-Hugoniot.

Ἀπόδειξη. Για κάθε $\eta > 0$, η συνάρτηση

$$u^\eta(t, x) = u(\tau + \eta t, \xi + \eta x) \quad (2.2.7)$$

είναι επίσης λύση του συστήματος του νόμου διατήρησης (2.1.1). Για δοσμένη αυθαίρετα μεγάλη σταθερά R , ισχύει

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R \int_{-R}^R [u^\eta(t, x) - U(t, x)] dx dt &= \int_{-R}^R \int_{-R}^R [u(\tau + \eta t, \xi + \eta x) - U(t, x)] dx dt \\ &= \frac{1}{\eta^2} \int_{-\eta R}^{\eta R} \int_{-\eta R}^{\eta R} [u(\tau + t, \xi + x) - U(t, x)] dx dt \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Εφόσον, ισχύει

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \int_{-r}^r \int_{-r}^r [u(\tau + t, \xi + x) - U(t, x)] dx dt = 0,$$

παίρνοντας $\eta \rightarrow 0$ στη σχέση (2.2.8), έπεται ότι $u^\eta \rightarrow U$ με την L_{loc}^1 νόρμα. Επιπρόσθετα, εφόσον η u είναι φραγμένη, τότε και η u^η είναι φραγμένη. Επίσης, επειδή η f είναι ομοιόμορφα Lipschitz συνεχής σε φραγμένα σύνολα, έπεται ότι $f(u^\eta) \rightarrow f(U)$ με την L_{loc}^1 νόρμα. Επομένως, από το Λήμμα 2.5 ισχύει πως η U είναι λύση κατανομής του συστήματος του (2.1.1) και άρα από το Λήμμα 2.4 ισχύουν οι συνθήκες Rankine-Hugoniot. \square

Στη συνέχεια αυτού του υποκεφαλαίου θα παρουσιάσουμε μια αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε μια κατά τμήματα Lipschitz συνεχής συνάρτηση να είναι λύση του συστήματος (2.1.1). Αρχικά, πιο κάτω θα παραθέσουμε κάποιες ιδιότητες που ικανοποιεί μια κατά τμήματα Lipschitz συνεχής συνάρτηση $u = u(t, x)$, τις οποίες θα ονομάσουμε (ΤΓ) για λόγους ευκολίας:

(ΤΓ): Η συνάρτηση $u = u(t, x)$ είναι μετρήσιμη και φραγμένη. Επιπρόσθετα, υπάρχει πεπερασμένος αριθμός σημείων $P_i = (t_i, x_i)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, και πεπερασμένος αριθμός Lipschitz συνεχών καμπυλών $\gamma_j : (a_j, b_j) \rightarrow \mathbb{R}$ που δεν τέμνονται μεταξύ τους, έτσι ώστε να ισχύει:

1. Κάθε σημείο $P = (t, x)$ που δεν συμπίπτει με κάποιο $P_i = (t_i, x_i)$ και δεν βρίσκεται πάνω στις καμπύλες γ_j , έχει μια περιοχή V όπου η u είναι Lipschitz συνεχής.
2. Κάθε σημείο $Q = (t, \gamma_j(t))$ πάνω σε κάθε καμπύλη γ_j , έχει μια περιοχή V τέτοια ώστε οι περιορισμοί της u στα υποσύνολα $V^+ = V \cap \{x >$

$\gamma_j(t)$, $V^- = V \cap \{x < \gamma_j(t)\}$ είναι Lipschitz συνεχείς.

Επιπρόσθετα, με $A = Df$ θα συμβολίζουμε τον ιακωβιανό πίνακα της f . Επίσης, το όριο από δεξιά και αριστερά της $u(t, \cdot)$ κατά μήκος της καμπύλης γ_j θα συμβολίζεται ως

$$u_j^+(t) = \lim_{x \rightarrow \gamma_j^+(t)} u(t, x) \quad \text{και} \quad u_j^-(t) = \lim_{x \rightarrow \gamma_j^-(t)} u(t, x)$$

αντίστοιχα.

Προτού διατυπώσουμε αυτή την αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε μια κατά τμήματα Lipschitz συνεχής συνάρτηση να αποτελεί λύση του συστήματος του νόμου διατήρησης, θα διατυπώσουμε ένα βοηθητικό λήμμα.

Λήμμα 2.8 (Θεώρημα Rademacher). *Έστω $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ μία τοπικά Lipschitz συνεχής. Τότε η f είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμη.*

Θεώρημα 2.9. *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ένα ανοικτό σύνολο και $u : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ μια συνάρτηση με τις ιδιότητες (ΤΓ). Τότε τα πιο κάτω είναι ισοδύναμα:*

1. Η u είναι λύση κατανομής του συστήματος (2.1.1).
2. Η εξίσωση $u_t + A(u)u_x = 0$ ισχύει σχεδόν παντού, όπου $A(u) = Df(u)$.
Επιπρόσθετα, για κάθε j , σχεδόν για κάθε $t \in (a_j, b_j)$ ισχύει

$$\dot{\gamma}_j(t)(u_j^+(t) - u_j^-(t)) = f(u_j^+(t)) - f(u_j^-(t)). \quad (2.2.9)$$

Άποδειξη. Εφόσον η u ικανοποιεί τις ιδιότητες (ΤΓ), ισχύει πως οι u , $f(u)$ είναι κατά τμήματα Lipschitz συνεχείς. Επομένως, από το Λήμμα 2.8 η u και η $f(u)$ είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμες. Ομοίως, αφού οι καμπύλες γ_j είναι Lipschitz συνεχείς, λόγω του ότι η u ικανοποιεί τις ιδιότητες (ΤΓ), ισχύει πως και οι $\gamma_j : (a_j, b_j) \mapsto \mathbb{R}$ είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμες.

(1) \Rightarrow (2): Έστω ότι η u είναι μια λύση κατανομής. Εφόσον η u έχει τις ιδιότητες (ΤΓ) υπάρχει $\Omega' \subset \Omega$ ανοικτό σύνολο στο οποίο η u είναι Lipschitz συνεχής.

Τότε $\forall \phi \in C_c^1$ με συμπαγή φορέα που περιέχεται στο Ω' , έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} [u_t + A(u)u_x] \phi dxdt &= \iint_{\Omega'} [u_t + A(u)u_x] \phi dxdt \\ &= \iint_{\Omega'} [(u\phi)_t + (f(u)\phi)_x - u\phi_t - f(u)\phi_x] dxdt \\ &= - \iint_{\Omega'} [u\phi_t + f(u)\phi_x] dxdt = 0, \end{aligned}$$

$\forall \phi \in C_c^1(\Omega')$, επειδή η u είναι λύση κατανομής. Επομένως, ισχύει $u_t + A(u)u_x = 0$ σχεδόν παντού. Επιπρόσθετα, επειδή η γ_j είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμη, επιλέγουμε ένα οποιοδήποτε σημείο $(\tau, \gamma_j(\tau))$ στο οποίο η γ_j είναι παραγωγίσιμη. Τότε, η u έχει κατά προσέγγιση άλμα ασυνέχειας στο $(\tau, \gamma_j(\tau))$ και άρα εξ' ορισμού ισχύει η (2.2.6) με τον τρόπο που ορίστηκε η U , παίρνοντας $u^- = u_j^-(\tau), u^+ = u_j^+(\tau), \lambda = \dot{\gamma}_j(\tau)$. Επομένως, από το Θεώρημα 2.7 ισχύουν οι συνθήκες Rankine-Hugoniot και άρα ισχύει ότι

$$\dot{\gamma}_j(\tau)(u_j^+(\tau) - u_j^-(\tau)) = f(u_j^+(\tau)) - f(u_j^-(\tau)).$$

Αφού, η $\gamma_j : (a_j, b_j) \mapsto \mathbb{R}$ είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμη και η επιλογή του σημείου $(\tau, \gamma_j(\tau))$ ήταν τυχαία, έχουμε

$$\dot{\gamma}_j(t)(u_j^+(t) - u_j^-(t)) = f(u_j^+(t)) - f(u_j^-(t)),$$

σχεδόν για κάθε $t \in (a_j, b_j)$.

(2) \Rightarrow (1): Έστω $\phi \in C_c^1(\Omega)$. Έστω επίσης, $a : [0, \infty) \mapsto [0, 1]$ μια ομαλή βαθμωτή συνάρτηση τέτοια ώστε:

$$a(r) = \begin{cases} 1, & \text{εάν } r \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{εάν } r \geq 1 \end{cases}.$$

Επιπρόσθετα, ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$a^\varepsilon(r) = a\left(\frac{r}{\varepsilon}\right).$$

Για αρκετά μικρό $\varepsilon > 0$, οι μπάλες $B(P_i, \varepsilon)$ με κέντρα τα σημεία P_i , δεν έχουν

κοινό σημείο. Για κάθε σημείο P που δεν συμπίπτει με κάποιο P_i , ορίζουμε:

$$\tilde{\phi}^\varepsilon(P) = \phi(P) \cdot \sum_j a^\varepsilon(|P - P_j|), \quad \phi^\varepsilon(P) = \phi(P) - \tilde{\phi}^\varepsilon(P).$$

Ισχύει ότι

$$\phi^\varepsilon(P) = \phi(P) \left[1 - \sum_j a^\varepsilon(|P - P_j|) \right].$$

Για $P = P_i$, έχουμε

$$\begin{aligned} \phi^\varepsilon(P_i) &= \phi(P_i) \left[1 - \sum_j a^\varepsilon(|P_i - P_j|) \right] \\ &= \phi(P_i) [1 - [a^\varepsilon(|P_i - P_1|) + \dots + a^\varepsilon(|P_i - P_i|) + \dots + a^\varepsilon(|P_i - P_n|)]] \\ &= \phi(P_i) \left[1 - \left[a \left(\frac{|P_i - P_1|}{\varepsilon} \right) + \dots + a \left(\frac{|P_i - P_i|}{\varepsilon} \right) + \dots + a \left(\frac{|P_i - P_n|}{\varepsilon} \right) \right] \right]. \end{aligned}$$

Εφόσον, οι μπάλες $B(P_i, \varepsilon)$ με κέντρα τα P_i δεν έχουν κοινό σημείο, ισχύει $|P_i - P_j| > \varepsilon$, $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, με $i \neq j$. Άρα, έχουμε

$$\begin{aligned} \phi^\varepsilon(P_i) &= \phi(P_i) [1 - (0 + \dots + 1 + \dots + 0)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Άρα παρατηρούμε ότι κάθε P_i βρίσκεται έξω από το φορέα της ϕ^ε . Επίσης, υποθέτουμε ότι $u_t + A(u)u_x = 0$ σχεδόν παντού και ότι ισχύουν σχεδόν παντού οι συνθήκες Rankine-Hugoniot. Επομένως, για κάθε $\varepsilon > 0$, εφαρμόζοντας το Θεώρημα της Απόκλισης παίρνουμε

$$\begin{aligned} \iint [u\phi_t^\varepsilon + f(u)\phi_x^\varepsilon] dxdt &= - \iint [u_t + A(u)u_x] \phi^\varepsilon dxdt \\ &+ \sum_j \int_{a_j}^{b_j} [\dot{\gamma}_j(u_j^+ - u_j^-) - (f(u_j^+) - f(u_j^-))] \phi^\varepsilon(t, \gamma_j) dt \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Επίσης, έχουμε

$$\left| \iint [u\tilde{\phi}_t^\varepsilon + f(u)\tilde{\phi}_x^\varepsilon] dxdt \right| \leq (\|u\|_{L^\infty} + \|f(u)\|_{L^\infty}) \cdot \|\nabla\tilde{\phi}^\varepsilon\|_{L^1}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|\nabla\tilde{\phi}^\varepsilon\|_{L^1} = 0.$$

Άρα, ισχύει

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint [u\tilde{\phi}_t^\varepsilon + f(u)\tilde{\phi}_x^\varepsilon] dxdt = 0. \quad (2.2.11)$$

Από τις σχέσεις (2.2.10), (2.2.11) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \iint [u\phi_t + f(u)\phi_x] dxdt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint [u(\phi_t^\varepsilon + \tilde{\phi}_t^\varepsilon) + f(u)(\phi_x^\varepsilon + \tilde{\phi}_x^\varepsilon)] dxdt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Επομένως, η u είναι λύση κατανομής του συστήματος (2.1.1). \square

2.3 Συνθήκες Αποδεκτικότητας

Για ένα σύστημα νόμων διατήρησης με δεδομένη αρχική συνθήκη, συνήθως ο Ορισμός 2.3 της ασθενούς λύσης δεν μας δίνει κατ' ανάγκη μοναδική λύση. Σε πολλές περιπτώσεις μπορεί να βρεθούν άπειρο το πλήθος ασθενείς λύσεις στο ίδιο πρόβλημα. Πιο κάτω θα δούμε μια ολόκληρη οικογένεια ασθενών λύσεων στο ίδιο πρόβλημα που να περιγράφεται από μια παράμετρο $a \in [0, 1]$ με ένα παράδειγμα.

Θεωρούμε την εξίσωση του Burgers, με αρχική συνθήκη:

$$u(0, x) = \begin{cases} 1, & \text{εάν } x \geq 0 \\ 0, & \text{εάν } x < 0 \end{cases}.$$

Για κάθε $a \in (0, 1)$, ορίζουμε τη κατά τμήματα σταθερή συνάρτηση $u_a : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ως ακολούθως:

$$u_a(t, x) = \begin{cases} 0, & \text{εάν } x < \frac{at}{2} \\ a, & \text{εάν } \frac{at}{2} \leq x < (1+a)\frac{t}{2} \\ 1, & \text{εάν } x \geq (1+a)\frac{t}{2} \end{cases} .$$

Τότε, από το Θεώρημα 2.9 κάθε u_a είναι λύση του προβλήματος του Cauchy αφού κάθε u_a ικανοποιεί σχεδόν παντού την εξίσωση του Burgers: $u_t + uu_x = 0$ ως κατά τμήματα σταθερή συνάρτηση και ισχύει η συνθήκη Rankine-Hugoniot κατά μήκος των δύο γραμμών ασυνέχειας $\gamma_1(t) = \frac{at}{2}$, $\gamma_2(t) = (a+1)\frac{t}{2}$. Πράγματι,

$$u_t + uu_x = 0 \Rightarrow u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0$$

και άρα η εξίσωση του Burgers γράφεται στη μορφή νόμου διατήρησης $u_t + f(u)_x = 0$, με $f(u) = \frac{u^2}{2}$. Άρα, η συνθήκη Rankine-Hugoniot ισχύει κατά μήκος της γ_1 , επειδή έχουμε

$$\lambda_1(u^+ - u^-) = \frac{a}{2} \cdot a = \frac{a^2}{2}$$

και

$$f(u^+) - f(u^-) = \frac{a^2}{2} - 0 = \frac{a^2}{2}.$$

Άρα προκύπτει $\lambda_1(u^+ - u^-) = f(u^+) - f(u^-)$. Αντίστοιχα η συνθήκη Rankine-Hugoniot ισχύει και κατά μήκος της γ_2 , αφού έχουμε

$$\lambda_2(u^+ - u^-) = \frac{1+a}{2} \cdot (1-a) = \frac{1-a^2}{2}$$

και

$$f(u^+) - f(u^-) = \frac{1}{2} - \frac{a^2}{2} = \frac{1-a^2}{2}.$$

Συνεπώς ισχύει $\lambda_2(u^+ - u^-) = f(u^+) - f(u^-)$.

Από το πιο πάνω παράδειγμα είναι φανερό ότι για να εξασφαλίσουμε μοναδική λύση για το πρόβλημα του Cauchy (2.1.1)-(2.1.4), πρέπει να ενισχύσουμε την έννοια της ασθενούς λύσης με επιπρόσθετες συνθήκες τις οποίες θα ονομάσουμε συνθήκες αποδεκτικότητας, οι οποίες θα συνδέονται με την φυσική υπόθεση του προβλήματος. Πιο κάτω θα παρουσιάσουμε τρεις συνθήκες αποδεκτικότητας:

1. Η μέθοδος του μηδενικού ιξώδους (Vanishing viscosity):

Μια ασθενής λύση του (2.1.1) θα ικανοποιεί αυτή τη συνθήκη αποδεκτικότητας εάν υπάρχει μια ακολουθία ομαλών συναρτήσεων u^ε που αποτελούν λύσεις των παραβολικών συστημάτων

$$u_t^\varepsilon + A(u^\varepsilon)u_x^\varepsilon = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon, \quad (2.3.1)$$

όπου $A = Df$ και η ακολουθία αυτή να συγκλίνει στη u στον L_{loc}^1 όταν $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Δυστυχώς, τις περισσότερες φορές είναι πολύ δύσκολο να παρέχουμε ομοιόμορφες εκτιμήσεις στις λύσεις του πιο πάνω παραβολικού συστήματος και να χαρακτηρίσουμε το αντίστοιχο όριο των λύσεων u^ε όταν $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Παρόλ' αυτά, από την πιο πάνω συνθήκη αντλούμε άλλες συνθήκες οι οποίες είναι πιο εύκολο να επαληθευτούν στην πράξη.

Ορισμός 2.10. *Μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται εντροπία για το σύστημα (2.1.1), με ροή εντροπίας $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, εάν ισχύει:*

$$D\eta(u)Df(u) = Dq(u), \quad u \in \mathbb{R}^n. \quad (2.3.2)$$

Παρατηρούμε ότι η (2.3.2) υποδηλώνει ότι αν η $u = u(t, x)$ είναι μια C^1 λύση του (2.1.1), τότε

$$\begin{aligned} \eta(u)_t + q(u)_x &= D\eta(u)u_t + Dq(u)u_x \\ &= D\eta(u)(-Df(u)u_x) + Dq(u)u_x = 0. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Με άλλα λόγια, όταν έχουμε ομαλή λύση του προβλήματος (2.1.1), δεν διατη-

ρούνται μόνο οι ποσότητες u_1, \dots, u_n αλλά ισχύει και ο επιπρόσθετος νόμος διατήρησης (2.3.3). Παρόλ' αυτά όταν η u είναι ασυνεχής δεν ισχύει γενικά η (2.3.3). Έστω τώρα $\eta, q \in C^2$ όπου η κυρτή. Πολλαπλασιάζοντας και τις δύο πλευρές της ισότητας (2.3.1) με $D\eta(u^\varepsilon)$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \text{ΑΜ} : D\eta(u^\varepsilon) \cdot u_t^\varepsilon + D\eta(u^\varepsilon) \cdot Df(u^\varepsilon)u_x^\varepsilon &= [\eta(u^\varepsilon)]_t + Dq(u^\varepsilon)_x u_x^\varepsilon \\ &= [\eta(u^\varepsilon)]_t + [q(u^\varepsilon)]_x. \end{aligned}$$

Για να υπολογίσουμε το Β' Μέλος, αρχικά υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} [\eta(u^\varepsilon)]_{xx} &= (D\eta(u^\varepsilon) \cdot u_x^\varepsilon)_x \\ &= (D\eta(u^\varepsilon))_x \cdot u_x^\varepsilon + D\eta(u^\varepsilon) \cdot u_{xx}^\varepsilon \\ &= (D^2\eta(u^\varepsilon) \cdot u_x^\varepsilon) \cdot u_x^\varepsilon + D\eta(u^\varepsilon) \cdot u_{xx}^\varepsilon. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\text{Β'Μ} : \varepsilon D\eta(u^\varepsilon) \cdot u_{xx}^\varepsilon = \varepsilon [[\eta(u^\varepsilon)]_{xx} - D^2\eta(u^\varepsilon)(u_x^\varepsilon \otimes u_x^\varepsilon)].$$

Επομένως, αφού τα δύο μέλη είναι ίσα έχουμε ότι

$$[\eta(u^\varepsilon)]_t + [q(u^\varepsilon)]_x = \varepsilon [[\eta(u^\varepsilon)]_{xx} - D^2\eta(u^\varepsilon)(u_x^\varepsilon \otimes u_x^\varepsilon)]. \quad (2.3.4)$$

Παρατηρούμε ότι ο τελευταίος όρος στη (2.3.4) ικανοποιεί

$$D^2\eta(u^\varepsilon)(u_x^\varepsilon \otimes u_x^\varepsilon) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \eta(u^\varepsilon)}{\partial u_i \partial u_j} \cdot \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x} \geq 0,$$

αφού η είναι κυρτή σε κάθε σημείο. Άρα από την σχέση (2.3.4), έπεται

$$[\eta(u^\varepsilon)]_t + [q(u^\varepsilon)]_x \leq \varepsilon [\eta(u^\varepsilon)]_{xx}. \quad (2.3.5)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (2.3.5) με μια μη-αρνητική συνάρ-

τηση ϕ με συμπαγή φορέα, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \iint (\eta(u^\varepsilon)_t \cdot \phi + q(u^\varepsilon)_x \cdot \phi) dxdt &= \iint (-\eta(u^\varepsilon) \cdot \phi_t - q(u^\varepsilon) \cdot \phi_x) dxdt \\ &\leq \varepsilon \iint [\eta(u^\varepsilon)]_{xx} \phi dxdt. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\iint (\eta(u^\varepsilon) \cdot \phi_t + q(u^\varepsilon) \cdot \phi_x) dxdt \geq -\varepsilon \iint [\eta(u^\varepsilon)]_{xx} \phi dxdt.$$

Ολοκληρώνοντας δύο φορές κατά παράγοντες το δεύτερο μέλος, έχουμε

$$\iint (\eta(u^\varepsilon) \cdot \phi_t + q(u^\varepsilon) \cdot \phi_x) dxdt \geq -\varepsilon \iint \eta(u^\varepsilon) \phi_{xx} dxdt.$$

Αφού από τη 1η συνθήκη αποδεκτικότητας έχουμε υποθέσει ότι καθώς το $\varepsilon \rightarrow 0^+$ οι λύσεις u^ε παραμένουν ομοιόμορφα φραγμένες και συγκλίνουν σε μια συνάρτηση u στον L^1_{loc} , από την πιο πάνω ανισότητα προκύπτει ότι

$$\iint (\eta(u) \cdot \phi_t + q(u) \cdot \phi_x) dxdt \geq 0, \quad (2.3.6)$$

για οποιαδήποτε $\phi \geq 0$ με συμπαγή φορέα. Το πιο πάνω δείχνει ότι από τη συνθήκη του μηδενικού ιξώδους έχουμε την ανίσωση

$$\eta(u)_t + q(u)_x \leq 0,$$

υπό την έννοια των κατανομών. Η πιο πάνω ανάλυση μας ωθεί στο να ορίσουμε τη δεύτερη συνθήκη αποδεκτικότητας:

2. Η συνθήκη αποδεκτικότητας της εντροπίας:

Μια ασθενής λύση του (2.1.1) θα λέμε ότι ικανοποιεί τη συνθήκη αποδεκτικότητας της εντροπίας, εάν ισχύει:

$$\eta(u)_t + q(u)_x \leq 0, \quad (2.3.7)$$

υπό την έννοια της κατανομής, για κάθε ζεύγος (η, q) όπου η είναι μια κυρτή

εντροπία για το σύστημα (2.1.1) και q η αντίστοιχη ροή εντροπίας. Παρατηρούμε ότι αν μια ασθενής λύση ικανοποιεί τη συνθήκη αποδεκτικότητας του μηδενικού ιξώδους τότε θα ικανοποιεί και τη συνθήκη αποδεκτικότητας της εντροπίας, ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά.

Πιο κάτω θα δούμε ένα παράδειγμα ενός ζεύγους (η, q) για το σύστημα (2.1.1):

Σημειώνουμε με $\langle \cdot, \cdot \rangle$ και $\| \cdot \|$ το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο και την Ευκλείδεια νόρμα αντίστοιχα στον \mathbb{R}^n . Έστω $f = \nabla \phi(u)$, όπου $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ομαλή συνάρτηση. Τότε, η συνάρτηση $\eta(u) = \frac{\|u\|^2}{2}$ είναι μια κυρτή εντροπία για το σύστημα (2.1.1) με αντίστοιχη ροή εντροπίας $q(u) = (u, \nabla \phi) - \phi$. Πράγματι, εάν η $u = u(t, x)$ είναι μια ομαλή λύση του συστήματος (2.1.1), τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \eta(u)_t &= D\eta(u) \cdot u_t = \langle (u_1, \dots, u_n), u_t \rangle \\ &= \langle u, u_t \rangle = - \langle u, f(u)_x \rangle = - \langle u, (\nabla \phi)_x \rangle \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} q(u)_x &= \langle u_x, \nabla \phi \rangle + \langle u, (\nabla \phi)_x \rangle - \langle \nabla \phi, u_x \rangle \\ &= \langle u, (\nabla \phi)_x \rangle. \end{aligned}$$

Άρα ισχύει

$$\eta(u)_t + q(u)_x = 0.$$

Επομένως, αφού η u είναι ομαλή λύση του συστήματος (2.1.1), τότε ισχύει

$$\begin{aligned} 0 &= \eta(u)_t + q(u)_x = D\eta(u)u_t + Dq(u)u_x \\ &= D\eta(u)(-f(u)_x) + Dq(u)u_x = -D\eta(u)Df(u)u_x + Dq(u)u_x \\ &= u_x(Dq(u) - D\eta(u)Df(u)). \end{aligned}$$

Επομένως,

$$D\eta(u)Df(u) = Dq(u).$$

Άρα εξ' ορισμού η η είναι μια εντροπία για το σύστημα (2.2.1) με αντίστοιχη ροή εντροπίας q .

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι για κατά τμήματα Lipschitz λύσεις, η συνθήκη αποδεκτικότητας της εντροπίας θέτει επιπλέον περιορισμούς μόνο κατά μήκος των γραμμών ασυνέχειας.

Θεώρημα 2.11. Έστω $u = u(t, x)$ μια λύση του συστήματος (2.1.1), η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες (TΓ). Έστω η μια κυρτή εντροπία με ροή εντροπίας q . Τότε, η συνθήκη αποδεκτικότητας της εντροπίας ισχύει εάν και μόνο εάν κατά μήκος κάθε καμπύλης ασυνεχειας γ_j , ισχύει:

$$\dot{\gamma}_j(t) [\eta(u_j^+(t)) - \eta(u_j^-(t))] \geq q(u_j^+(t)) - q(u_j^-(t)), \quad \forall t \in (a_j, b_j) \quad (2.3.8)$$

Άποδειξη. Έστω $\phi \in C_c^1$ μη-αρνητική συνάρτηση, με συμπαγή φορέα στο ανοικτό ημιεπίπεδο $t > 0$. Οπότε, μπορούμε να διαλέξουμε $T > 0$, τέτοιο ώστε $\phi(t, x) = 0$ όταν $t \notin (0, T)$. Παρατηρούμε ότι οι γραμμές ασυνέχειας γ_j διαχωρίζουν το σύνολο $[0, T] \times \mathbb{R}$ σε περιοχές Γ_j , που είναι πεπερασμένες στο πλήθος. Τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & \iint [\eta(u)\phi_t + q(u)\phi_x] dx dt \\ &= \sum_j \iint_{\Gamma_j} [(\eta(u)\phi)_t + (q(u)\phi)_x - \phi(\eta(u)_t + q(u)_x)] dx dt. \end{aligned}$$

Από τις υποθέσεις μας γνωρίζουμε ότι μακριά από τις καμπύλες ασυνέχειας, δηλαδή στο εσωτερικό των Γ_j , ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \eta(u)_t + q(u)_x &= D\eta(u)u_t + Dq(u)u_x = D\eta(u)u_t + Df(u)D\eta(u)u_x \\ &= D\eta(u)(u_t + f(u)_x) = 0. \end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε

$$\iint [\eta(u)\phi_t + q(u)\phi_x] dxdt = \sum_j \iint_{\Gamma_j} [(\eta(u)\phi)_t + (q(u)\phi)_x] dxdt.$$

Θέτουμε το διάνυσμα $\Phi = (\eta(u) \cdot \phi, q(u) \cdot \phi)$ και γράφουμε

$$\begin{aligned} \iint [\eta(u)\phi_t + q(u)\phi_x] dxdt &= \sum_j \iint_{\Gamma_j} [(\eta(u)\phi)_t + (q(u)\phi)_x] dxdt \\ &= \sum_j \iint_{\Gamma_j} \operatorname{div} \Phi dxdt \\ &= \sum_j \int_{\partial\Gamma_j} \Phi \cdot \mu dxdt, \end{aligned}$$

όπου $\mu = (\dot{\gamma}_j, 1)$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα πάνω στο χωρίο Γ_j , από το Θεώρημα της Απόκλισης. Παρατηρούμε ότι εκ κατασκευής το σύνορο του χωρίου Γ_j αποτελείται από τις καμπύλες ασυνέχειας γ_j . Οπότε, ακολουθώντας την ίδια διαδικασία που χρησιμοποιήσαμε στο Λήμμα 2.4 και σημειώνοντας με u_j^- , u_j^+ τις τιμές της u αριστερά και δεξιά της καμπύλης ασυνέχειας γ_j αντίστοιχα, από την πιο πάνω σχέση βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \iint [\eta(u)\phi_t + q(u)\phi_x] dxdt &= \sum_j \int_{\partial\Gamma_j} \Phi \cdot \mu dxdt \\ &= \sum_j \int_{a_j}^{b_j} [\dot{\gamma}_j [\eta(u_j^+) - \eta(u_j^-)] - [q(u_j^+) - q(u_j^-)]] \phi(t, \gamma_j) dt, \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

για οποιαδήποτε μη-αρνητική $\phi \in C_c^1$.

Εξ ορισμού, μια λύση u του συστήματος (2.1.1) ικανοποιεί τη συνθήκη αποδεκτικότητας της εντροπίας εάν ισχύει

$$\iint (\eta(u) \cdot \phi_t + q(u) \cdot \phi_x) dxdt \geq 0.$$

Επομένως, από τη (2.3.9) έπεται άμεσα ότι η u ικανοποιεί τη συνθήκη απο-

δεκτικότητας της εντροπίας εάν και μόνο εάν ισχύει

$$\dot{\gamma}_j [\eta(u_j^+) - \eta(u_j^-)] \geq [q(u_j^+) - q(u_j^-)],$$

κατά μήκος κάθε καμπύλης ασυνέχειας γ_j . Με αυτό τον τρόπο ολοκληρώνουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 2.11. \square

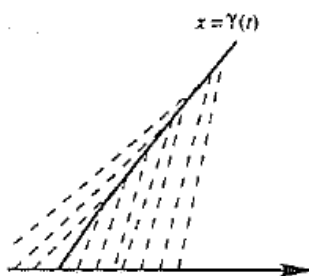
Μία τρίτη συνθήκη αποδεκτικότητας είναι ιδιαίτερα χρήσιμη γιατί μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε σύστημα και έχει μια απλή γεωμετρική ερμηνεία. Υπενθυμίζουμε ότι μια συνάρτηση u έχει κατά προσέγγιση άλμα ασυνέχειας σε ένα σημείο (τ, ξ) εάν ισχύει η (2.2.6), με τη U όπως ορίστηκε στο Θεώρημα 2.7. Σε αυτήν την περίπτωση, από το Θεώρημα 2.7 η αριστερή και η δεξιά τιμή u^-, u^+ αντίστοιχα και η ταχύτητα λ του άλματος ικανοποιούν τις συνθήκες Rankine-Hugoniot. Επομένως, η ταχύτητα λ πρέπει να είναι μια ιδιοτιμή του κατά μέσου όρου πίνακα $A(u^-, u^+)$, με $\lambda = \lambda_i(u^-, u^+)$, για κάποιο $i \in \{1, \dots, n\}$.

3. Η συνθήκη αποδεκτικότητας του Lax:

Μία ασθενής λύση $u = u(t, x)$ του συστήματος (2.1.1)-(2.1.4) είναι αποδεκτή, εάν σε κάθε σημείο (τ, ξ) που η u έχει κατά προσέγγιση άλμα ασυνέχειας, η αριστερή και η δεξιά τιμή u^-, u^+ και η ταχύτητα $\lambda = \lambda_i(u^-, u^+)$ του άλματος ικανοποιούν:

$$\lambda_i(u^-) \geq \lambda \geq \lambda_i(u^+).$$

Η γεωμετρική ερμηνεία αυτής της συνθήκης φαίνεται στο Σχήμα (2.1).



Σχήμα 2.1. Συνθήκη Lax

Λοΐζος Κοσμάς

Κεφάλαιο 3

Λύση του προβλήματος Riemann

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και έστω $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ μια ομαλή διανυσματική συνάρτηση. Το πρόβλημα Riemann για το σύστημα των νόμων διατήρησης:

$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad (3.0.1)$$

απαιτεί την εύρεση μιας ασθενούς λύσης του (3.0.1), με αρχική συνθήκη μια κατά τμήματα σταθερή συνάρτηση της μορφής:

$$u(0, x) = \begin{cases} u^-, & \text{εάν } x < 0 \\ u^+, & \text{εάν } x > 0 \end{cases} \quad (3.0.2)$$

με $u^-, u^+ \in \Omega$.

Ο ιακωβιανός πίνακας $A(u) = Df(u)$ των μερικών παραγώγων της f στο σημείο u , με u μια ομαλή λύση του (3.0.1) ικανοποιεί

$$u_t + A(u)u_x = 0.$$

Στη συνέχεια θα εισαγάγουμε δύο ορισμούς που θα χρησιμοποιηθούν στη θεωρία που θα αναπτύξουμε.

Ορισμός 3.1. Λέμε ότι το σύστημα (3.0.1) είναι αυστηρά υπερβολικό, εάν $\forall u \in \Omega$ ο πίνακας $A(u)$ έχει n -πραγματικές διακριτές ιδιοτιμές τέτοιες ώστε $\lambda_1(u) < \dots < \lambda_n(u)$.

Σε αυστηρά υπερβολικά συστήματα μπορούμε να βρούμε βάσεις δεξιών και αριστερών ιδιοδιανυσμάτων $\{r_1(u), \dots, r_n(u)\}$, $\{l_1(u), \dots, l_n(u)\}$ αντίστοιχα, οι οποίες εξαρτώνται ομαλά από το u και ισχύει

$$|r_i| = 1, \quad l_i \cdot r_j = \begin{cases} 1, & \text{εάν } i = j \\ 0, & \text{εάν } i \neq j \end{cases},$$

$\forall u \in \Omega$.

Υπενθυμίζουμε τη κατά κατεύθυνση παράγωγο $r_i \bullet \phi$ μιας συνάρτησης $\phi = \phi(u)$ στη κατεύθυνση του διανύσματος $r_i(u)$, που δίδεται από:

$$r_i \bullet \phi(u) = D\phi(u) \cdot r_i(u) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\phi(u + \epsilon r_i(u)) - \phi(u)}{\epsilon}.$$

Ορισμός 3.2. Για $i \in \{1, \dots, n\}$, λέμε ότι το i -χαρακτηριστικό πεδίο είναι γνησίως μη-γραμμικό (*genuinely non-linear*) εάν:

$$r_i \bullet \lambda_i(u) \neq 0, \quad \forall u \in \Omega,$$

ενώ αντίθετα λέμε ότι το i -χαρακτηριστικό πεδίο είναι γραμμικά εκφυλισμένο (*linearly degenerate*) εάν:

$$r_i \bullet \lambda_i(u) = 0, \quad \forall u \in \Omega.$$

Παρατηρούμε ότι λόγω της συνέχειας των πρώτων παραγώγων, στη περίπτωση του γνησίως μη-γραμμικού πεδίου η ιδιοτιμή $\lambda_i = \lambda_i(u)$ είναι γνησίως μονότονη πάνω σε κάθε ολοκληρωτική καμπύλη του διανυσματικού πεδίου r_i . Με πιθανή αλλαγή προσήμου του r_i , μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$r_i \bullet \lambda_i(u) > 0, \quad \forall u \in \Omega$$

και επομένως η $\lambda_i = \lambda_i(u)$ είναι γνησίως αύξουσα πάνω στην ολοκληρω-

τική καμπύλη του διανυσματικού πεδίου r_i . Αντίθετα, στη περίπτωση του γραμμικά εκφυλισμένου πεδίου η $\lambda_i = \lambda_i(u)$ είναι σταθερή πάνω σε κάθε ολοκληρωτική καμπύλη του r_i .

Σε αυτό το κεφάλαιο θα κατασκευάσουμε ασθενείς λύσεις του προβλήματος Riemann (3.0.1)-(3.0.2) όταν τα u^- και u^+ βρίσκονται ικανοποιητικά κοντά, κάτω από τις παρακάτω βασικές υποθέσεις :

(♣) : Το σύστημα (3.0.1) είναι αυστηρά υπερβολικό με ομαλούς συντελεστές που ορίζονται σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$ το i -χαρακτηριστικό πεδίο είναι είτε γνησίως μη-γραμμικό είτε γραμμικά εκφυλισμένο.

Οι λύσεις θα είναι λύσεις ομογενείς (self-similar), δηλαδή της μορφής $u(t, x) = \psi(\frac{x}{t})$, με $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ πιθανόν ασυνεχής. Στα επόμενα δύο υποκεφάλαια θα μελετήσουμε δύο συγκεκριμένες περιπτώσεις, όπου η λύση του προβλήματος Riemann έχει μια απλούστερη μορφή.

3.1 Κεντρικά κύματα αραιώσης (rarefaction waves)

Σε αυτήν την ενότητα, με $\sigma \mapsto R_i(\sigma)(u_0)$, θα εννοούμε τη παραμετροποιημένη ολοκληρωτική καμπύλη του διανύσματος r_i , που ξεκινά από το σημείο u_0 . Πιο συγκεκριμένα, η $R_i(\sigma)(u_0)$ είναι η τιμή της λύσης τη χρονική στιγμή $t = \sigma$ του προβλήματος του Cauchy:

$$\frac{du}{dt} = r_i(u(t)), \quad u(0) = u_0.$$

Η καμπύλη R_i ονομάζεται i -καμπύλη αραιώσης (i -rarefaction) που διέρχεται από το u_0 . Έχοντας ορίσει τη καμπύλη R_i στα πλαίσια της λύσης μιας συνήθους διαφορικής εξίσωσης, έχουμε αυτόματα τις πιο κάτω ταυτότητες:

$$\frac{d R_i(\sigma)(u_0)}{d \sigma} = r_i(R_i(\sigma)(u_0)) \quad (3.1.1)$$

και

$$R_i(\sigma')(R_i(\sigma)(u_0)) = R_i(\sigma + \sigma')(u_0), \quad \forall u_0, \sigma, \sigma'. \quad (3.1.2)$$

Έστω τώρα ότι u^- και u^+ είναι δεδομένα. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα γνησίως μη-γραμμικό χαρακτηριστικό πεδίο από ιδιοδιανύσματα r_i που ικανοποιούν $r_i \bullet \lambda_i(u) > 0 \quad \forall u \in \Omega$ και κάποιο $\bar{\sigma} \geq 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$u^+ = R_i(\bar{\sigma})(u^-).$$

Σε αυτή την περίπτωση μια λύση στο πρόβλημα Riemann μπορεί να κατασκευαστεί ως ακολούθως: Παρατηρούμε ότι, επειδή το i -χαρακτηριστικό πεδίο είναι γνησίως μη-γραμμικό, η συνάρτηση $\sigma \mapsto \lambda_i(R_i(\sigma)(u^-))$ είναι γνησίως αύξουσα, διότι

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma} [\lambda_i(R_i(\sigma)(u^-))] &= D\lambda_i((R_i(\sigma)(u^-))) \cdot \frac{d}{d\sigma}(R_i(\sigma)(u^-)) \\ &\stackrel{(3.1.1)}{=} D\lambda_i((R_i(\sigma)(u^-))) \cdot r_i(R_i(\sigma)(u^-)) \\ &= r_i \bullet \lambda_i((R_i(\sigma)(u^-))) > 0. \end{aligned}$$

Επίσης, αφού η συνάρτηση $\sigma \mapsto \lambda_i(R_i(\sigma)(u^-))$ είναι γνησίως αύξουσα, απεικονίζει το διάστημα $[0, \bar{\sigma}]$ επί του διαστήματος $[\lambda_i(u^-), \lambda_i(u^+)]$, δηλαδή:

$$\lambda_i(R_i(\sigma)(u^-)) \in [\lambda_i(u^-), \lambda_i(u^+)], \quad \text{για } \sigma \in [0, \bar{\sigma}].$$

Έτσι για κάθε $t > 0$, μπορούμε να ορίσουμε την κατά τμήματα ομαλή (C^1) συνάρτηση:

$$u(t, x) = \begin{cases} u^-, & \text{εάν } x/t < \lambda_i(u^-) \\ u^+, & \text{εάν } x/t > \lambda_i(u^-) \\ R_i(\sigma)(u^-), & \text{εάν } x/t \in [\lambda_i(u^-), \lambda_i(u^+)] \end{cases}, \quad (3.1.3)$$

δηλαδή στην τελευταία περίπτωση, $x/t \in [\lambda_i(R_i(0)(u^-)), \lambda_i(R_i(\bar{\sigma})(u^-))]$.

Ισχυριζόμαστε ότι η u είναι μια ασθενής λύση του προβλήματος (3.0.1)-

(3.0.2). Πράγματι, ισχύει ότι $\|u(t, \cdot) - u(0, \cdot)\|_{L^1_{loc}} \rightarrow 0$, όταν $t \rightarrow 0^+$. Επιπρόσθετα, η εξίσωση $u_t + A(u)u_x = 0$ ικανοποιείται τετριμμένα στις περιοχές όπου $x/t < \lambda_i(u^-)$ ή $x/t > \lambda_i(u^+)$, διότι σε αυτές τις περιοχές η u είναι σταθερή και επομένως ισχύει $u_t = u_x = 0$. Τώρα, θα εξετάσουμε αν ικανοποιείται η εξίσωση $u_t + A(u)u_x = 0$ στο ενδιάμεσο τμήμα όπου $x/t \in [\lambda_i(u^-), \lambda_i(u^+)]$. Εκ κατασκευής, η u είναι σταθερή πάνω σε κάθε ευθεία $(t, x(t))$ του επιπέδου $t - x$ που ξεκινά από το $(0, 0)$ και η κλίση της είναι

$$\lambda_i \in [\lambda_i(R_i(0)(u^-)), \lambda_i(R_i(\bar{\sigma})(u^-))].$$

Ως εκ τούτου, έχουμε ότι

$$u_t(t, x) + \frac{x}{t}u_x(t, x) = 0. \quad (3.1.4)$$

Από την (3.1.3) έχουμε $\frac{x}{t} = \lambda_i(u(t, x))$ και βρίσκουμε τη σχέση

$$\frac{1}{t} = D\lambda_i(u) \cdot u_x \quad (3.1.5)$$

παραγωγίζοντας ως προς x . Επίσης, από την (3.1.3) έχουμε ότι

$$u_x = \frac{d}{d\sigma}(R_i(\sigma)(u^-)) \frac{1}{\frac{dx}{d\sigma}} = \frac{1}{\frac{dx}{d\sigma}} r_i(u).$$

Όμως, η παράγωγος του $\lambda_i(u(t, x)) = \frac{x}{t}$ κατά μήκος μιας τέτοιας ευθείας είναι μηδέν (λόγω της σταθερής κλίσης), άρα

$$D\lambda_i \cdot u_x \cdot \frac{dx}{d\sigma} + D\lambda_i \cdot u_t = 0.$$

Από την (3.1.5) προκύπτει

$$\frac{1}{t} \frac{dx}{d\sigma} + D\lambda_i \cdot r_i = 0$$

και βρίσκουμε

$$u_x = -\frac{1}{t} (r_i \bullet \lambda_i)^{-1} \cdot r_i(u).$$

Αφού το διάνυσμα u_x είναι παράλληλο με το $r_i(u)$, συνεπάγεται ότι το u_x είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A(u)$ με αντίστοιχη ιδιοτιμή $\lambda_i(u)$. Επομένως, αφού ισχύει $A(u)u_x = \lambda_i u_x$, από τη (3.1.4) συνεπάγεται ότι

$$u_t + A(u)u_x = 0.$$

Άρα η εξίσωση ικανοποιείται και στο ενδιαμέσο τμήμα $\lambda_i(u^-) \leq x/t \leq \lambda_i(u^+)$ και έτσι η u αποτελεί μια ασθενή λύση για το πρόβλημα (3.0.1)-(3.0.2). Μια λύση του προβλήματος Riemann που θα έχει την μορφή (3.1.3), θα λέγεται κεντρικό κύμα αραιώσης (rarefaction wave).

Επιπρόσθετα, $\forall t > 0$, η συνάρτηση $u(t, \cdot)$ έτσι όπως ορίστηκε στη (3.1.3) είναι συνεχής και τμηματικά ομαλή, λόγω των υποθέσεων $r_i \bullet \lambda_i > 0$ και $\bar{\sigma} > 0$. Κατά συνέπεια, για κάθε εντροπία η με ροή εντροπίας q , έχουμε ότι

$$\iint (\eta(u)_t \phi + q(u)_x \phi) dx dt = \iint [D\eta(u)u_t + Dq(u)u_x] \phi dx dt,$$

αφού η u είναι τμηματικά ομαλή και άρα είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμη. Επίσης, αφού η είναι εντροπία για το σύστημα (3.0.1), με αντίστοιχη ροή εντροπίας q , εξ' ορισμού ισχύει $D\eta(u)Df(u) = Dq(u)$. Επομένως, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \iint (\eta(u)_t + q(u)_x) \phi dx dt &= \iint [D\eta(u)u_t + D\eta(u)Df(u)u_x] \phi dx dt \\ &= \iint [D\eta(u)(u_t + Df(u)u_x)] \phi dx dt = 0, \end{aligned}$$

επειδή ικανοποιείται παντού η εξίσωση $u_t + Df(u)u_x = 0$. Επομένως, ικανοποιείται η ανίσωση $\eta(u)_t + q(u)_x \leq 0$ σε ολοκληρωτική μορφή και έτσι η u είναι η -αποδεκτή.

Αντίθετα, αν η $u^+ = R_i(\bar{\sigma})(u^-)$ ισχύει για $\bar{\sigma} < 0$, θα είχαμε ότι $\lambda_i(u^-) > \lambda_i(u^+)$ και έτσι η συνάρτηση u όπως ορίστηκε στη (3.1.3), δεν θα ήταν καλώς ορισμένη στη περιοχή όπου $\lambda_i(u^+) < x/t < \lambda_i(u^-)$.

3.2 Κρουστικά κύματα (shocks)

Έστω ότι μας δίνεται το σύστημα (3.0.1) και μια αριστερή τιμή $u^- \in \Omega$. Επιθυμούμε να περιγράψουμε την οικογένεια όλων των τιμών u^+ για τις οποίες το πρόβλημα Riemann (3.0.1)-(3.0.2) έχει μια κατά τμήματα σταθερή λύση της μορφής:

$$u(t, x) = \begin{cases} u^-, & \text{εάν } x < \lambda t \\ u^+, & \text{εάν } x > \lambda t \end{cases}, \quad (3.2.1)$$

για κάποιο λ .

Από το Λήμμα 2.4, γνωρίζουμε ότι η $u = u(t, x)$ είναι λύση του συστήματος (3.0.1) εάν και μόνο εάν ικανοποιείται η συνθήκη Rankine-Hugoniot. Επομένως, το σύνολο των λύσεων του συστήματος (3.0.1) με τη πιο πάνω μορφή, μπορεί να καθοριστεί από τη λύση των εξισώσεων Rankine-Hugoniot:

$$f(u^+) - f(u^-) = \lambda(u^+ - u^-), \quad (3.2.2)$$

στα πλαίσια των u^+ και λ . Παρατηρούμε ότι η διανυσματική εξίσωση (3.2.2) ισοδυναμεί με ένα σύστημα που αποτελείται από n -βαθμωτές εξισώσεις με $n + 1$ άγνωστες μεταβλητές (οι n -συντεταγμένες του u^+ μαζί με τη βαθμωτή ποσότητα λ). Για u^+ αρκετά κοντά στο u^- , το σύνολο των λύσεων με την πιο πάνω μορφή περιγράφεται από το παρακάτω Θεώρημα του Lax (1957).

Θεώρημα 3.3. Έστω ότι το σύστημα (3.0.1) είναι αυστηρά υπερβολικό. Τότε, $\forall u_0 \in \Omega$, υπάρχει $\sigma_0 > 0$ και n -ομαλές καμπύλες $S_i : [-\sigma_0, \sigma_0] \rightarrow \Omega$, μαζί με n -βαθμωτές συναρτήσεις $\lambda_i : [-\sigma_0, \sigma_0] \rightarrow \mathbb{R}$, έτσι ώστε:

$$f(S_i(\sigma)) - f(u_0) = \lambda_i(\sigma)(S_i(\sigma) - u_0), \quad \text{με } \sigma \in [-\sigma_0, \sigma_0]. \quad (3.2.3)$$

Επιπρόσθετα, η παραμετρικοποίηση μπορεί να επιλεγεί τέτοια ώστε $\left| \frac{dS_i}{d\sigma} \right| = 1$

και για $\sigma = 0$, να ισχύει:

$$S_i(0) = u_0, \quad \lambda_i(0) = \lambda_i(u_0), \quad (3.2.4)$$

$$\left. \frac{dS_i(\sigma)}{d\sigma} \right|_{\sigma=0} = r_i(u_0), \quad (3.2.5)$$

$$\left. \frac{d\lambda_i(\sigma)}{d\sigma} \right|_{\sigma=0} = \frac{1}{2} r_i \bullet \lambda_i(u_0), \quad (3.2.6)$$

$$\left. \frac{d^2 S_i(\sigma)}{d\sigma^2} \right|_{\sigma=0} = r_i \bullet r_i(u_0). \quad (3.2.7)$$

Απόδειξη. Η απόδειξη θα δοθεί σε 5 βήματα.

1. Αρχικά, θα εισαγάγουμε ένα ορισμό που θα μας βοηθήσει να αναπτύξουμε τη θεωρία που χρειαζόμαστε για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη. Για οποιαδήποτε δύο σημεία $u, u' \in \Omega$ των οποίων το ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει βρίσκεται εξ' ολοκλήρου μέσα στο Ω , ορίζουμε τον κατά μέσο όρο πίνακα:

$$A(u, u') = \int_0^1 A(\theta u + (1 - \theta)u') d\theta. \quad (3.2.8)$$

Θέτοντας $w = \theta u + (1 - \theta)u'$, παίρνουμε $A(u, u') = \frac{1}{u-u'} \int_{u^-}^{u^+} A(w) dw$. Για u' αρκετά κοντά στο u , ο πίνακας $A(u, u')$ θα είναι σχεδόν ίσος με τον πίνακα $A(u)$ και γι' αυτό ο πίνακας $A(u, u')$ θα έχει και αυτός n -πραγματικές διακριτές ιδιοτιμές, αφού εξ' υποθέσεως το σύστημα (3.0.1) είναι αυστηρά υπερβολικό. Καλούμε $\lambda_i(u, u')$ τις αντίστοιχες ιδιοτιμές και $r_i(u, u'), l_i(u, u')$ τα αντίστοιχα δεξιά και αριστερά ιδιοδιανύσματα, για τα οποία ισχύει:

$$|r_i(u, u')| = 1, \quad l_i(u, u') \cdot r_i(u, u') = \begin{cases} 1, & \text{εάν } i = j \\ 0, & \text{εάν } i \neq j \end{cases}.$$

Επίσης, τετριμμένα ισχύει $A(u, u') = A(u', u)$ και $A(u, u) = A(u)$. Ε-

πιπλέον, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} f(u) - f(u_0) &= \int_0^1 [f(\theta u + (1 - \theta)u_0)]' d\theta \\ &= \int_0^1 Df(\theta u + (1 - \theta)u_0)(u - u_0) d\theta \\ &= A(u, u_0)(u - u_0). \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Από το προηγούμενο κεφάλαιο, είδαμε ότι έχουμε λύση εάν και μόνο εάν ισχύουν οι εξισώσεις Rankine-Hugoniot:

$$f(u) - f(u_0) = A(u, u_0)(u - u_0) = \lambda(u - u_0).$$

Επομένως, οι εξισώσεις Rankine-Hugoniot ισχύουν όταν το $u - u_0$ είναι ένα δεξιό ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A(u, u_0)$ και $\lambda = \lambda_i(u, u_0)$ η αντίστοιχη ιδιοτιμή, για κάποιο i .

2. Σταθεροποιούμε ένα $i \in \{1, \dots, n\}$ και απαιτούμε το $u - u_0$ να είναι δεξιό ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A(u, u_0)$ ούτως ώστε να ισχύουν οι εξισώσεις Rankine-Hugoniot. Εκ κατασκευής λοιπόν ισχύει

$$\Phi_j(u) = l_j(u, u_0) \cdot (u - u_0) = 0, \quad \forall j \neq i. \quad (3.2.10)$$

Άρα ισχύει ότι $\Phi(u) = (\Phi_1(u), \dots, \Phi_{n-1}(u)) = (0, \dots, 0) = 0$. Παρατηρούμε ότι το σύστημα (3.2.10) αποτελείται από $n - 1$ βαθμωτές εξισώσεις με n -αγνώστους ($u = (u_1, \dots, u_n)$). Μια τετριμμένη λύση της είναι η $u = u_0$. Στο σημείο αυτό θα διατυπώσουμε ένα θεώρημα που θα μας βοηθήσει να βρούμε τα u για τα οποία η $\Phi(u) = 0$ έχει μοναδική λύση.

Θεώρημα 3.4 (Θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης-Implicit function theorem). Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ μια C^1 απεικόνιση. Αν $a \in D$, τέτοιο ώστε $\det(J_{f(a)}) \neq 0$, τότε η f είναι τοπικά αντιστρέψιμη στο a , δηλαδή υπάρχουν ανοικτά σύνολα $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ με $a \in U$ και $f(a) \in V$, τέτοια ώστε ο περιορισμός της f στο U να είναι μια 1-1 συνάρτηση, με $f(U) = V$. Επομένως, αν $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n) \in V$ κοντά στο $f(a)$, τότε το

σύστημα των εξισώσεων:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= \psi_1 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) &= \psi_n \end{aligned}$$

έχει ακριβώς μια λύση $(x_1, \dots, x_n) \in U$ κοντά στο a .

Στη δική μας περίπτωση, έχουμε ότι:

$$J_{\Phi(u_0)} = D\Phi(u_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_1}(u_0) & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_n}(u_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial u_1}(u_0) & \cdots & \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial u_n}(u_0) \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι οι γραμμές του πιο πάνω πίνακα είναι τα $\nabla \Phi_j(u_0)$ για $j \neq i$. Από τη (3.2.10), ισχύει ότι $\nabla \Phi_j(u_0) = l_j(u_0)$, $\forall j \neq i$. Επιπρόσθετα, τα $l_j(u_0)$, με $j \neq i$, είναι γραμμικά ανεξάρτητα διότι είναι ιδιοδιανύσματα του πίνακα $A(u_0)$. Επομένως, ο πιο πάνω πίνακας έχει γραμμικά ανεξάρτητες γραμμές, άρα είναι αντιστρέψιμος πίνακας και άρα έχει ορίζουσα μη-μηδενική, δηλαδή ισχύει $\det(D\Phi(u_0)) \neq 0$. Από το Θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης, αν το 0 είναι κοντά στο $\Phi(u_0)$ η $\Phi(u) = 0$ λύνεται μοναδικά για u που βρίσκονται αρκετά κοντά στο u_0 . Αφού ισχύει $\Phi(u_0) = 0$, η $\Phi(u) = 0$ έχει μοναδική λύση για u που βρίσκονται αρκετά κοντά στο u_0 , τα οποία αποτελούν μια μονοδιάστατη ομαλή καμπύλη την οποία θα παραμετριοποιήσουμε κατά μήκος. Έτσι, τα u για τα οποία η $\Phi(u) = 0$ έχει μοναδική λύση, είναι τα u για τα οποία το $u - u_0$ αποτελεί δεξιό ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A(u, u_0)$ και επομένως είναι τα u για τα οποία ικανοποιούνται οι συνθήκες Rankine-Hugoniot. Διαλέγοντας την παραμετριοποίηση ως ακολούθως:

$$\sigma \mapsto S_i(\sigma), \quad \text{με } S_i(0) = u_0$$

και παίρνοντας $\lambda_i(\sigma) = \lambda_i(S_i(\sigma), u_0)$, έχουμε ότι:

$$f(S_i(\sigma)) - f(u_0) = \lambda_i(\sigma) (S_i(\sigma) - u_0), \quad \sigma \in [-\sigma_0, \sigma_0]$$

και

$$\lambda_i(0) = \lambda_i(S_i(0), u_0) = \lambda_i(u_0, u_0) = \lambda_i(u_0),$$

ικανοποιώντας έτσι τη (3.2.3) και τη (3.2.4).

3. Ένα διάνυσμα v είναι εφαπτόμενο στη καμπύλη S_i στο u_0 εάν και μόνο εάν το v είναι κάθετο στα $n - 1$ διανύσματα $\nabla\Phi_j(u_0)$ για $j \neq i$. Επειδή ισχύει

$$\nabla\Phi_j(u_0) = l_j(u_0) \quad \text{και} \quad l_i(u, u')r_i(u, u') = \begin{cases} 1, & \text{εάν } i = j \\ 0, & \text{εάν } i \neq j \end{cases},$$

το $r_i(u_0)$ είναι κάθετο στα $n - 1$ διανύσματα $\nabla\Phi_j(u_0)$ για $j \neq i$ και επομένως το $r_i(u_0)$ είναι εφαπτόμενο στη καμπύλη S_i στο u_0 . Σημειώνοντας την παραγωγή ως προς σ με μια άνω τελεία, έχουμε ότι

$$\dot{S}_i(0) = C \cdot r_i(u_0),$$

για κάποια σταθερά C . Παρατηρώντας ότι $|\dot{S}_i(0)| = |r_i(u_0)| = 1$, ισχύει $|C \cdot r_i(u_0)| = |r_i(u_0)| = 1$. Επομένως, $C = 1$ ή $C = -1$ και έτσι με πιθανή αλλαγή στον προσανατολισμό της καμπύλης S_i , παίρνουμε $\frac{dS_i(\sigma)}{d\sigma} = r_i(u_0)$ για $\sigma = 0$, εξασφαλίζοντας έτσι τη (3.2.5).

4. Θέτουμε $A_i(\sigma) = A(S_i(\sigma))$. Τώρα, παραγωγίζοντας ως προς σ τη $f(S_i(\sigma)) - f(u_0) = \lambda_i(\sigma) (S_i(\sigma) - u_0)$, παίρνουμε

$$Df(S_i(\sigma)) \cdot \dot{S}_i(\sigma) = \dot{\lambda}_i(\sigma)(S_i(\sigma) - u_0) + \lambda_i(\sigma)\dot{S}_i(\sigma).$$

Άρα, έχουμε

$$A_i \dot{S}_i = \dot{\lambda}_i (S_i - u_0) + \lambda_i \dot{S}_i.$$

Παραγωγίζοντας ξανά έχουμε

$$\dot{A}_i \dot{S}_i + A_i \ddot{S}_i = \ddot{\lambda}_i (S_i - u_0) + \dot{\lambda}_i \cdot \dot{S}_i + \dot{\lambda}_i \cdot \dot{S}_i + \lambda_i \cdot \ddot{S}_i$$

και άρα

$$\dot{A}_i \dot{S}_i + A_i \ddot{S}_i = \ddot{\lambda}_i (S_i - u_0) + 2\dot{\lambda}_i \cdot \dot{S}_i + \lambda_i \cdot \ddot{S}_i. \quad (3.2.11)$$

Από τη (3.2.5) για $\sigma = 0$, έχουμε $\dot{S}_i(0) = r_i(u_0)$. Αντικαθιστώντας στη (3.2.11) $\sigma = 0$, έχουμε

$$\dot{A}_i r_i(u_0) + A_i \ddot{S}_i = \ddot{\lambda}_i (u_0 - u_0) + 2\dot{\lambda}_i \cdot r_i(u_0) + \lambda_i \cdot \ddot{S}_i.$$

Άρα ισχύει

$$\dot{A}_i r_i(u_0) + A_i \ddot{S}_i = 2\dot{\lambda}_i \cdot r_i(u_0) + \lambda_i \cdot \ddot{S}_i. \quad (3.2.12)$$

Αφού, για $\sigma \in [-\sigma_0, \sigma_0]$ το $r_i(S_i(\sigma))$ είναι ένα δεξιό ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A_i(\sigma)$ με αντίστοιχη ιδιοτιμή $\lambda_i(S_i(\sigma))$, ισχύει

$$A_i(\sigma) \cdot r_i(S_i(\sigma)) = \lambda_i(S_i(\sigma)) \cdot r_i(S_i(\sigma)).$$

Παραγωγίζοντας την πιο πάνω σχέση παίρνουμε

$$\begin{aligned} & \dot{A}_i(\sigma) \cdot r_i(S_i(\sigma)) + A_i(\sigma) \cdot Dr_i(S_i(\sigma)) \cdot \dot{S}_i(\sigma) \\ &= D\lambda_i(S_i(\sigma)) \cdot \dot{S}_i(\sigma) \cdot r_i(S_i(\sigma)) + \lambda_i(S_i(\sigma)) \cdot Dr_i(S_i(\sigma)) \cdot \dot{S}_i(\sigma). \end{aligned}$$

Για $\sigma = 0$, παίρνουμε

$$\dot{A}_i \cdot r_i + A_i \cdot Dr_i \cdot r_i = D\lambda_i \cdot r_i \cdot r_i + \lambda_i \cdot Dr_i \cdot r_i.$$

Άρα

$$\dot{A}_i \cdot r_i = -A_i \cdot (r_i \bullet r_i) + (r_i \bullet \lambda_i) \cdot r_i + \lambda_i \cdot (r_i \bullet r_i). \quad (3.2.13)$$

Αντικαθιστώντας τώρα την (3.2.13) στην (3.2.12), έχουμε

$$-A_i \cdot (r_i \bullet r_i) + (r_i \bullet \lambda_i) \cdot r_i + \lambda_i \cdot (r_i \bullet r_i) + A_i \ddot{S}_i = 2\dot{\lambda}_i \cdot r_i + \lambda_i \cdot \ddot{S}_i.$$

Άρα

$$(\lambda_i - A_i) \cdot (r_i \bullet r_i) + (r_i \bullet \lambda_i) \cdot r_i + (A_i - \lambda_i) \ddot{S}_i = 2\dot{\lambda}_i \cdot r_i. \quad (3.2.14)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με ένα αριστερό ιδιοδιάνυσμα $l_i(u_0)$, έχουμε

$$l_i \cdot (r_i \bullet \lambda_i) \cdot r_i = 2l_i \cdot \dot{\lambda}_i \cdot r_i$$

και επομένως

$$r_i \bullet \lambda_i = 2\dot{\lambda}_i.$$

Επομένως, ισχύει

$$\left. \frac{d\lambda_i(\sigma)}{d\sigma} \right|_{\sigma=0} = \frac{1}{2} r_i \bullet \lambda_i(u_0),$$

εξασφαλίζοντας έτσι την (3.2.6).

5. Αντικαθιστώντας τώρα την (3.2.6) στην (3.2.14), ισχύει

$$\begin{aligned} (\lambda_i - A_i) \cdot (r_i \bullet r_i) + (r_i \bullet \lambda_i) \cdot r_i + (A_i - \lambda_i) \ddot{S}_i &= (r_i \bullet \lambda_i) \cdot r_i \\ \Rightarrow (\lambda_i - A_i) \cdot (r_i \bullet r_i) + (A_i - \lambda_i) \ddot{S}_i &= 0 \\ \Rightarrow (A_i - \lambda_i)(\ddot{S}_i - (r_i \bullet r_i)) &= 0. \end{aligned}$$

Άρα το διάνυσμα $\ddot{S}_i - (r_i \bullet r_i)$ είναι είτε το μηδενικό διάνυσμα είτε είναι

ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A_i(0) = A_i(S_i(0)) = A_i(u_0)$. Επομένως, για κάποιο $\beta \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$\ddot{S}_i - (r_i \bullet r_i) = \beta \cdot r_i. \quad (3.2.15)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.2.5), (3.2.7) και υπολογίζοντας το εσωτερικό γινόμενο, έχουμε

$$\begin{aligned} \beta \langle r_i, r_i \rangle &= \langle r_i, \beta \cdot r_i \rangle = \langle r_i, \ddot{S}_i \rangle - \langle r_i, r_i \bullet r_i \rangle \\ &= \langle r_i, r_i \bullet r_i \rangle - \langle r_i, r_i \bullet r_i \rangle = 0. \end{aligned}$$

Άρα $\beta = 0$ και αντικαθιστώντας στη (3.2.15), ισχύει

$$\left. \frac{d^2 S_i(\sigma)}{d\sigma} \right|_{\sigma=0} = r_i \bullet r_i(u_0),$$

εξασφαλίζοντας έτσι την (3.2.7). □

Παρατήρηση 3.1. Αν το i -χαρακτηριστικό πεδίο είναι γνησίως μη-γραμμικό, η κατεύθυνση του διανύσματος $r_i(u_0)$ καθορίζεται μοναδικά από την ανισότητα $r_i \bullet \lambda_i(u_0) > 0$. Κατά συνέπεια, καθορίζεται η παραμετρικοποίηση της καμπύλης S_i . Στη περίπτωση που το i -χαρακτηριστικό πεδίο είναι γραμμικά εκφυλισμένο, η επιλογή της κατεύθυνσης του $r_i(u_0)$ είναι αυθαίρετη.

Παρατήρηση 3.2. Αν το i -χαρακτηριστικό πεδίο είναι γραμμικά εκφυλισμένο, τότε οι i -shock και i -rarefaction καμπύλες συμπίπτουν, δηλαδή ισχύει:

$$S_i(\sigma) = R_i(\sigma)(u_0), \quad \forall \sigma.$$

Πράγματι, στην περίπτωση του γραμμικά εκφυλισμένου πεδίου η ιδιοτιμή $\lambda_i = \lambda_i(u)$ είναι σταθερή πάνω σε οποιαδήποτε ολοκληρωτική καμπύλη του r_i . Άρα, είναι σταθερή πάνω στη $R_i(\sigma)(u_0)$ και ισχύει ότι $\lambda_i(R_i(\sigma)(u_0)) = \lambda_i(R_i(0)(u_0)) =$

$\lambda_i(u_0)$ για κάθε σ . Επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned}
 f(R_i(\sigma)(u_0)) - f(u_0) &= \int_0^\sigma \frac{d}{ds} [f(R_i(s)(u_0))] ds \\
 &= \int_0^\sigma Df(R_i(s)(u_0)) r_i(R_i(s)(u_0)) ds \\
 &= \int_0^\sigma A(R_i(s)(u_0)) r_i(R_i(s)(u_0)) ds \\
 &= \int_0^\sigma \lambda_i(R_i(s)(u_0)) r_i(R_i(s)(u_0)) ds \\
 &= \int_0^\sigma \lambda_i(R_i(s)(u_0)) \frac{d}{ds} (R_i(s)(u_0)) ds \\
 &= \lambda_i(u_0) \int_0^\sigma \frac{d}{ds} (R_i(s)(u_0)) ds \\
 &= \lambda_i(u_0) [R_i(\sigma)(u_0) - R_i(0)(u_0)] \\
 &= \lambda_i(u_0) [R_i(\sigma)(u_0) - u_0].
 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το σημείο $R_i(\sigma)(u_0)$ ικανοποιεί τις εξισώσεις Rankine-Hugoniot και ως εκ τούτου βρίσκεται πάνω στη i -shock καμπύλη που περνά μέσω του u_0 . Επομένως, οι καμπύλες i -shock και i -rarefaction συμπίπτουν. Παρόλ' αυτά, αυτό δεν ισχύει γενικά όταν η απεικόνιση $\sigma \mapsto \lambda_i(R_i(\sigma)(u_0))$ δεν είναι σταθερή.

Εκ κατασκευής της S_i , επιλέγοντας $u^- = u_0$, $u^+ = S_i(\sigma)$ και $\lambda = \lambda_i(\sigma)$, για κάθε σ οι εξισώσεις Rankine-Hugoniot ικανοποιούνται. Έτσι, από το Λήμμα 2.4, ισχύει ότι η συνάρτηση:

$$u(t, x) = \begin{cases} u_0, & \text{εάν } x < t\lambda_i(\sigma) \\ S_i(\sigma), & \text{εάν } x > t\lambda_i(\sigma) \end{cases}, \quad (3.2.16)$$

είναι μια ασθενής λύση του προβλήματος (3.0.1)-(3.0.2). Εάν το i -χαρακτηριστικό πεδίο είναι γνησίως μη-γραμμικό, μια λύση της μορφής (3.2.16) με $\sigma < 0$ θα λέγεται **κρουστικό κύμα συμπίεσης** (compressive shock), ενώ με $\sigma > 0$ θα λέγεται **κρουστικό κύμα αραιώσης** (rarefaction shock). Εάν το i -χαρακτηριστικό πεδίο είναι γραμμικά εκφυλισμένο, μια λύση της μορφής (3.2.16) θα λέγεται **ασυνέχεια επαφής** (contact discontinuity).

Σε αυτό το στάδιο πρέπει να εξετάσουμε αν η ασθενής λύση (3.2.16), ικανοποιεί τις διάφορες συνθήκες αποδεκτικότητας που ορίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Με το πιο κάτω θεώρημα θα δείξουμε ότι τα κρουστικά κύματα συμπίεσης και οι ασυνέχειες επαφής ικανοποιούν τις συνθήκες αποδεκτικότητας του Lax και της εντροπίας, ενώ τα κρουστικά κύματα αραιώσης δεν ικανοποιούν καμιά από αυτές τις δύο συνθήκες αποδεκτικότητας.

Θεώρημα 3.5. Έστω ότι το σύστημα $u_t + f(u)_x = 0$ ικανοποιεί τις βασικές υποθέσεις (\clubsuit). Τότε, όλες οι ασυνέχειες επαφής και τα κρουστικά κύματα συμπίεσης ικανοποιούν τη συνθήκη αποδεκτικότητας του Lax, ενώ τα κρουστικά κύματα αραιώσης δεν την ικανοποιούν. Επιπρόσθετα, έστω η μια ομαλή εντροπία για το σύστημα $u_t + f(u)_x = 0$ με ροή εντροπίας q και έστω ότι ο πίνακας του Hesse $D^2\eta(u_0)$ είναι αυστηρά θετικά ορισμένος. Εάν το i -χαρακτηριστικό πεδίο είναι γραμμικά εκφυλισμένο, τότε, για κάθε σ , η λύση (3.2.16) ικανοποιεί τον επιπλέον νόμο διατήρησης $\eta(u)_t + q(u)_x = 0$ σε ολοκληρωτική μορφή, δηλαδή ικανοποιεί τη συνθήκη της εντροπίας. Αντίθετα, εάν το i -χαρακτηριστικό πεδίο είναι γνησίως μη-γραμμικό, τότε υπάρχει $\sigma_0 > 0$ τέτοιο ώστε η λύση (3.2.16) να ικανοποιεί τη $\eta(u)_t + q(u)_x = 0$ σε ολοκληρωτική μορφή $\forall \sigma \in [-\sigma_0, 0]$, δηλαδή, για $\sigma \in [-\sigma_0, 0]$, η u ικανοποιεί τη συνθήκη της εντροπίας, αλλά όχι για $\sigma \in [0, \sigma_0]$.

Απόδειξη. 1. Αρχικά, θα μελετήσουμε κατά πόσο μια λύση της μορφής (3.2.16) ικανοποιεί τη συνθήκη αποδεκτικότητας του Lax. Έστω λοιπόν $u = u(t, x)$ μια λύση της μορφής (3.2.16). Έστω επίσης ότι το i -χαρακτηριστικό πεδίο είναι γραμμικά εκφυλισμένο. Αφού έχουμε δείξει ότι λ_i είναι σταθερή πάνω στις ολοκληρωτικές καμπύλες του r_i , τότε είναι σταθερή πάνω στη $R_i(\sigma)(u_0)$ και επομένως ισχύει:

$$\lambda_i(R_i(\sigma)(u_0)) = \lambda_i(R_i(0)(u_0)) = \lambda_i(u_0). \quad (3.2.17)$$

Επίσης, έχουμε δείξει ότι στη περίπτωση του γραμμικά εκφυλισμένου πεδίου οι $S_i(\sigma)$ και $R_i(\sigma)(u_0)$ ταυτίζονται και άρα ισχύει

$$S_i(\sigma) = R_i(\sigma)(u_0), \quad \forall \sigma. \quad (3.2.18)$$

Επίσης, επειδή ισχύει εξ' ορισμού $\lambda_i(\sigma) = \lambda_i(S_i(\sigma), u_0)$ και αφού έχουμε δείξει ότι $S_i(\sigma) = R_i(\sigma)(u_0) \quad \forall \sigma$, τότε ισχύει $\lambda_i(\sigma) = \lambda_i(R_i(\sigma)(u_0), u_0)$. Εφόσον η λ_i είναι σταθερή πάνω στη $R_i(\sigma)(u_0)$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \lambda_i(\sigma) &= \lambda_i(R_i(\sigma)(u_0), u_0) = \lambda_i(R_i(0)(u_0), u_0) \\ &= \lambda_i(u_0, u_0) = \lambda_i(u_0). \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

Επομένως, από τις σχέσεις (3.2.17), (3.2.18) και (3.2.19), έχουμε

$$\lambda_i(u_0) = \lambda_i(\sigma) = \lambda_i(R_i(\sigma)(u_0)) = \lambda_i(S_i(\sigma)).$$

Άρα, για οποιαδήποτε τιμή του σ η ανισότητα :

$$\lambda_i(u_0) \geq \lambda_i(\sigma) \geq \lambda_i(S_i(\sigma)), \quad \text{με } \lambda_i(\sigma) = \lambda_i(S_i(\sigma), u_0),$$

ικανοποιείται ως ισότητα. Επομένως, αν η u που είναι μια λύση της μορφής (3.2.16) είναι ασυνέχεια επαφής, τότε ικανοποιεί τη συνθήκη αποδεκτικότητας του Lax.

Έστω ότι το i -χαρακτηριστικό πεδίο είναι γνησίως μη-γραμμικό. Επειδή έχουμε δείξει

$$\begin{aligned} \left. \frac{dS_i(\sigma)}{d\sigma} \right|_{\sigma=0} &= r_i(u_0), \\ \left. \frac{d\lambda_i(\sigma)}{d\sigma} \right|_{\sigma=0} &= \frac{1}{2} r_i \bullet \lambda_i(u_0), \end{aligned}$$

παραγωγίζοντας την πιο κάτω σχέση για $\sigma = 0$, από τον κανόνα της αλυσίδας παίρνουμε

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\lambda_i(S_i(\sigma))}{d\sigma} \right|_{\sigma=0} &= D\lambda_i \cdot \left. \frac{d(S_i(\sigma))}{d\sigma} \right|_{\sigma=0} \\ &= D\lambda_i \cdot r_i(u_0) = r_i \bullet \lambda_i(u_0). \end{aligned}$$

Επειδή έχουμε υποθέσει ότι $r_i \bullet \lambda_i(u_0) > 0$, έχουμε

$$\left. \frac{d\lambda_i(\sigma)}{d\sigma} \right|_{\sigma=0} = \frac{1}{2} r_i \bullet \lambda_i(u_0) > 0 \quad \text{και} \quad \left. \frac{d\lambda_i(S_i(\sigma))}{d\sigma} \right|_{\sigma=0} = r_i \bullet \lambda_i(u_0) > 0.$$

Υπενθυμίζουμε ότι εκ κατασκευής ισχύει $\lambda_i(\sigma) = \lambda_i(S_i(\sigma), u_0)$. Η λ_i είναι ομαλή ($\lambda_i \in C^1$) και άρα λόγω της συνέχειας της παραγώγου, υπάρχει $\sigma_0 > 0$ τέτοιο ώστε

$$\frac{d\lambda_i(\sigma)}{d\sigma} > 0 \quad \text{και} \quad \frac{d\lambda_i(S_i(\sigma))}{d\sigma} > 0, \quad \text{για } \sigma \in [-\sigma_0, \sigma_0].$$

Άρα, $\lambda_i(\sigma)$ και $\lambda_i(S_i(\sigma))$ αύξουσες για $\sigma \in [-\sigma_0, \sigma_0]$ και γι' αυτό ισχύει

$$\lambda_i(S_i(0), u_0) < \lambda_i(S_i(\sigma), u_0) \leq \lambda_i(S_i(\sigma_0), u_0), \quad \text{για } \sigma \in (0, \sigma_0].$$

Άρα,

$$\lambda_i(u_0) < \lambda_i(\sigma) < \lambda_i(S_i(\sigma_0), u_0), \quad \text{για } \sigma \in (0, \sigma_0].$$

Επομένως, τα κρουστικά κύματα αραιώσης δεν ικανοποιούν τη συνθήκη αποδεκτικότητας του Lax. Αντίθετα, ισχύει

$$\lambda_i(S_i(0), u_0) > \lambda_i(S_i(\sigma), u_0) \geq \lambda_i(S_i(-\sigma_0), u_0), \quad \text{για } \sigma \in [-\sigma_0, 0).$$

Άρα,

$$\lambda_i(u_0) > \lambda_i(\sigma) \geq \lambda_i(S_i(-\sigma_0), u_0), \quad \text{για } \sigma \in [-\sigma_0, 0).$$

Επομένως, τα κρουστικά κύματα συμπίεσης ικανοποιούν τη συνθήκη αποδεκτικότητας του Lax.

2. Έστω ξανά $u = u(t, x)$ μια λύση της μορφής (3.2.16). Έστω επίσης ότι $\eta : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ είναι μια ομαλή κυρτή εντροπία για το σύστημα (3.0.1) με ροή εντροπίας q . Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.11, η u ικανοποιεί τη

συνθήκη αποδεκτικότητας της εντροπίας εάν και μόνο εάν ισχύει

$$\chi(\sigma) = \lambda_i(\sigma) [\eta(S_i(\sigma)) - \eta(u_0)] - [q(S_i(\sigma)) - q(u_0)] \geq 0. \quad (3.2.20)$$

Έστω ότι το i -χαρακτηριστικό πεδίο είναι γραμμικά εκφυλισμένο. Έχουμε δει ότι $S_i(\sigma) = R_i(\sigma)(u_0)$ και $\lambda_i(\sigma) = \lambda_i(u_0) = \lambda_i(S_i(\sigma))$, $\forall \sigma$. Εφόσον, η η είναι εντροπία για το σύστημα (3.0.1) με ροή εντροπίας q , εξ' ορισμού ισχύει ότι $D\eta Df = Dq$. Τότε παίρνουμε

$$\begin{aligned} & \lambda_i(\sigma) [\eta(S_i(\sigma)) - \eta(u_0)] - [q(S_i(\sigma)) - q(u_0)] \\ &= \int_0^\sigma \left[\lambda_i(u_0) D\eta(S_i(s)) \frac{dS_i(s)}{ds} - Dq(S_i(s)) \frac{dS_i(s)}{ds} \right] ds \\ &= \int_0^\sigma [\lambda_i(u_0) D\eta(S_i(s)) - Dq(S_i(s))] \frac{dS_i(s)}{ds} ds \\ &= \int_0^\sigma [\lambda_i(u_0) D\eta(S_i(s)) - D\eta(S_i(s)) Df(S_i(s))] \frac{dS_i(s)}{ds} ds \\ &= \int_0^\sigma D\eta(S_i(s)) [\lambda_i(u_0) I - A(S_i(s))] r_i(S_i(s)) ds \\ &= \int_0^\sigma D\eta(S_i(s)) [\lambda_i(S_i(s)) I - A(S_i(s))] r_i(S_i(s)) ds \\ &= 0. \end{aligned}$$

Επομένως, οι ασυνέχειες επαφής ικανοποιούν τη συνθήκη αποδεκτικότητας της εντροπίας $\forall \sigma$.

Έστω τώρα ότι το i -χαρακτηριστικό πεδίο είναι γνησίως μη-γραμμικό. Παραγωγίζοντας την $\chi(\sigma)$ ως προς σ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \dot{\chi}(\sigma) &= \dot{\lambda}_i(\sigma) [\eta(S_i(\sigma)) - \eta(u_0)] + \lambda_i(\sigma) D\eta(S_i(\sigma)) \dot{S}_i(\sigma) \\ &\quad - Dq(S_i(\sigma)) \dot{S}_i(\sigma). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας και πάλι την σχέση $Dq = D\eta Df$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\dot{\chi}(\sigma) &= \dot{\lambda}_i(\sigma) [\eta(S_i(\sigma)) - \eta(u_0)] + \lambda_i(\sigma) D\eta(S_i(\sigma)) \dot{S}_i(\sigma) \\ &\quad - D\eta(S_i(\sigma)) Df(S_i(\sigma)) \dot{S}_i(\sigma).\end{aligned}$$

Άρα,

$$\dot{\chi}(\sigma) = \dot{\lambda}_i(\sigma) [\eta(S_i(\sigma)) - \eta(u_0)] + D\eta(S_i(\sigma)) \dot{S}_i(\sigma) [\lambda_i(\sigma) - Df(S_i(\sigma))]. \quad (3.2.21)$$

Παραγωγίζοντας ως προς σ τη $f(S_i(\sigma)) - f(u_0) = \lambda_i(\sigma)(S_i(\sigma) - u_0)$, έχουμε

$$Df(S_i(\sigma)) \cdot \dot{S}_i(\sigma) = \dot{\lambda}_i(\sigma)(S_i(\sigma) - u_0) + \lambda_i(\sigma) \dot{S}_i(\sigma).$$

Άρα, ισχύει

$$(Df(S_i(\sigma)) - \lambda_i(\sigma)) \dot{S}_i = \dot{\lambda}_i(\sigma)(S_i(\sigma) - u_0). \quad (3.2.22)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (3.2.22) στην (3.2.21) έχουμε

$$\dot{\chi}(\sigma) = \dot{\lambda}_i(\sigma) [\eta(S_i(\sigma)) - \eta(u_0)] - D\eta(S_i(\sigma)) \dot{\lambda}_i(\sigma)(S_i(\sigma) - u_0).$$

Άρα, ισχύει

$$\dot{\chi}(\sigma) = \dot{\lambda}_i(\sigma) [\eta(S_i(\sigma)) - \eta(u_0) - D\eta(S_i(\sigma))(S_i(\sigma) - u_0)].$$

Θέτουμε $\omega(\sigma) = \eta(S_i(\sigma)) - \eta(u_0) - D\eta(S_i(\sigma))(S_i(\sigma) - u_0)$ και επομένως έχουμε:

$$\dot{\chi}(\sigma) = \dot{\lambda}_i(\sigma) \omega(\sigma).$$

Τώρα ισχύει

$$\begin{aligned}\omega(0) &= \eta(S_i(0)) - \eta(u_0) - D\eta(S_i(0))(S_i(0) - u_0) \\ &= \eta(u_0) - \eta(u_0) - D\eta(u_0)(u_0 - u_0) = 0.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\dot{\chi}(0) = 0.$$

Παραγωγίζοντας ξανά παίρνουμε

$$\ddot{\chi} = \ddot{\lambda}_i \omega + \dot{\lambda}_i \dot{\omega},$$

με

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= D\eta(S_i)\dot{S}_i - D^2\eta(S_i) \left[\dot{S}_i \otimes (S_i - u_0) \right] - D\eta(S_i)\dot{S}_i \\ &= -D^2\eta(S_i) \left[\dot{S}_i \otimes (S_i - u_0) \right].\end{aligned}$$

Για $\sigma = 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\dot{\omega}(0) &= -D^2\eta(S_i(0)) \left[\dot{S}_i(0) \otimes (S_i(0) - u_0) \right] \\ &= -D^2\eta(S_i(0)) \left[\dot{S}_i(0) \otimes (u_0 - u_0) \right] = 0.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\ddot{\chi}(0) = 0.$$

Παραγωγίζοντας για ακόμη μία φορά παίρνουμε

$$\ddot{\chi} = \ddot{\lambda}_i \omega + 2\dot{\lambda}_i \dot{\omega} + \lambda_i \ddot{\omega},$$

με

$$\begin{aligned}\ddot{\omega} &= -D^3\eta(S_i) \left[(\dot{S}_i)^2 \otimes (S_i - u_0) \right] - D^2\eta(S_i) \left[\ddot{S}_i \otimes (S_i - u_0) \right] \\ &\quad - D^2\eta(S_i) \left[\dot{S}_i \otimes \dot{S}_i \right].\end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}\ddot{\omega}(0) &= -D^3\eta(S_i(0)) \left[(\dot{S}_i(0))^2 \otimes (S_i(0) - u_0) \right] \\ &\quad - D^2\eta(S_i(0)) \left[\ddot{S}_i(0) \otimes (S_i(0) - u_0) \right] - D^2\eta(S_i(0)) \left[\dot{S}_i(0) \otimes \dot{S}_i(0) \right] \\ &= -D^2\eta(u_0) \left[\ddot{S}_i(0) \otimes (u_0 - u_0) \right] - D^2\eta(u_0) [r_i(u_0) \otimes r_i(u_0)] \\ &= -D^2\eta(u_0) [r_i(u_0) \otimes r_i(u_0)].\end{aligned}$$

Άρα, έχουμε

$$\begin{aligned}\ddot{\chi}(0) &= \ddot{\lambda}_i(0)\omega(0) + 2\dot{\lambda}_i(0)\dot{\omega}(0) + \dot{\lambda}_i(0)\ddot{\omega}(0) \\ &= -\dot{\lambda}_i(0)D^2\eta(u_0) [r_i(u_0) \otimes r_i(u_0)].\end{aligned}$$

Από το Θεώρημα Taylor ισχύει:

$$\chi(\sigma) = \chi(0) + \dot{\chi}(0)(\sigma - 0) + \frac{1}{2}\ddot{\chi}(0)(\sigma - 0)^2 + \frac{1}{6}\ddot{\chi}(0)(\sigma - 0)^3 + \mathcal{O}(\sigma^4),$$

για κάποιο $\sigma \in [-\sigma_0, \sigma_0]$, όπου το σ_0 αρκετά μικρό, εκ κατασκευής της $S_i(\sigma)$. Επομένως, έχουμε

$$\chi(\sigma) = -\frac{1}{6}\dot{\lambda}_i(0)D^2\eta(u_0) [r_i(u_0) \otimes r_i(u_0)] \sigma^3 + \mathcal{O}(\sigma^4). \quad (3.2.23)$$

Εξ υποθέσεως, ο πίνακας $D^2\eta(u_0)$ είναι αυστηρά θετικά ορισμένος. Επιπρόσθετα, από τη σχέση (3.2.6) ισχύει $\dot{\lambda}_i(0) = \frac{1}{2}r_i \bullet \lambda_i(u_0)$. Επειδή έχουμε υποθέσει ότι στη περίπτωση του γνησίως μη-γραμμικού θα ισχύει $r_i \bullet \lambda_i(u_0) > 0$, τότε παίρνουμε

$$\dot{\lambda}_i(0) = \frac{1}{2}r_i \bullet \lambda_i(u_0) > 0.$$

Επομένως, από τη σχέση (3.2.23) για κάποιο αρκετά μικρό $\sigma_0 > 0$, ισχύει

$$\chi(\sigma) \geq 0, \quad \text{για } \sigma \in [-\sigma_0, 0].$$

Αφού $\chi(\sigma) = \lambda_i(\sigma) [\eta(S_i(\sigma)) - \eta(u_0)] - [q(S_i(\sigma)) - q(u_0)]$, ισχύει

$$\lambda_i(\sigma) [\eta(S_i(\sigma)) - \eta(u_0)] \geq q(S_i(\sigma)) - q(u_0), \quad \text{για } \sigma \in [-\sigma_0, 0].$$

Επομένως, η λύση $u = u(t, x)$ της μορφής (3.2.16) στη περίπτωση του γνησίως μη-γραμμικού πεδίου, ικανοποιεί τη συνθήκη αποδεκτικότητας της εντροπίας για $\sigma \in [-\sigma_0, 0]$. Άρα, τα κρουστικά κύματα συμπίεσης ικανοποιούν τη συνθήκη αποδεκτικότητας της εντροπίας. Αντίθετα, από την (3.2.23) ισχύει

$$\chi(\sigma) < 0, \quad \text{για } \sigma \in (0, \sigma_0].$$

Άρα,

$$\lambda_i(\sigma) [\eta(S_i(\sigma)) - \eta(u_0)] < q(S_i(\sigma)) - q(u_0), \quad \text{για } \sigma \in (0, \sigma_0].$$

Επομένως, η λύση $u = u(t, x)$ της μορφής (3.2.16), στη περίπτωση του γνησίως μη-γραμμικού πεδίου, δεν ικανοποιεί τη συνθήκη αποδεκτικότητας της εντροπίας για $\sigma \in (0, \sigma_0]$. Άρα, τα κρουστικά κύματα αραιώσης δεν ικανοποιούν τη συνθήκη αποδεκτικότητας της εντροπίας. \square

Από τώρα και στο εξής, θα χρησιμοποιούμε τον πιο ακριβή συμβολισμό $S_i(\sigma)(u_0)$ για να υποδεικνύουμε σημεία πάνω στη i -shock καμπύλη μέσω του u_0 . Ως αποτέλεσμα της προηγούμενης ανάλυσης, μέσω κάθε σημείου $u_0 \in \Omega$, $\forall i \in 1, \dots, n$, κατασκευάζουμε δύο ομαλές καμπύλες:

$$\sigma \mapsto R_i(\sigma)(u_0), \quad \sigma \mapsto S_i(\sigma)(u_0). \quad (3.2.24)$$

Θα αναφερόμαστε στις R_i, S_i ως τη i -rarefaction και i -shock καμπύλη αν-

τίστοιχα, μέσω του u_0 . Όταν παραμετρικοποιηθεί κατά μήκος η R_i έχουμε δει ότι ισχύει

$$\frac{dR_i(\sigma)(u_0)}{d\sigma} \stackrel{(3.1.1)}{=} r_i(R_i(\sigma)(u_0)).$$

Άρα

$$\left. \frac{dR_i(\sigma)(u_0)}{d\sigma} \right|_{\sigma=0} = r_i(u_0). \quad (3.2.25)$$

Παραγωγίζοντας ξανά την (3.1.1), παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R_i(\sigma)(u_0)}{d\sigma^2} &= D(r_i) \cdot \frac{d}{d\sigma} R_i(\sigma)(u_0) \\ &= D(r_i) \cdot r_i(R_i(\sigma)(u_0)). \end{aligned}$$

Άρα

$$\left. \frac{d^2 R_i(\sigma)(u_0)}{d\sigma^2} \right|_{\sigma=0} = r_i \bullet r_i(u_0). \quad (3.2.26)$$

Αφού, παραμετρικοποιήσουμε κατά μήκος τη καμπύλη S_i παίρνουμε και τις σχέσεις (3.2.5), (3.2.7), φτάνοντας έτσι στο συμπέρασμα ότι ισχύει

$$\left. \frac{dS_i(\sigma)(u_0)}{d\sigma} \right|_{\sigma=0} = \left. \frac{dR_i(\sigma)(u_0)}{d\sigma} \right|_{\sigma=0} = r_i(u_0) \quad (3.2.27)$$

και

$$\left. \frac{d^2 S_i(\sigma)(u_0)}{d\sigma^2} \right|_{\sigma=0} = \left. \frac{d^2 R_i(\sigma)(u_0)}{d\sigma^2} \right|_{\sigma=0} = r_i \bullet r_i(u_0). \quad (3.2.28)$$

Επομένως, η συνάρτηση :

$$\Psi_i(\sigma)(u_0) = \begin{cases} R_i(\sigma)(u_0), & \text{εάν } \sigma \geq 0 \\ S_i(\sigma)(u_0), & \text{εάν } \sigma < 0 \end{cases},$$

είναι ομαλή (C^∞), $\forall \sigma \neq 0$, αφού εκ κατασκευής οι R_i, S_i είναι ομαλές καμπύλες. Επίσης, από τις σχέσεις (3.2.25), (3.2.26), (3.2.27) και (3.2.28)

έπεται ότι η συνάρτηση Ψ_i είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $\sigma = 0$. Επιπρόσθετα, οι δεύτερες παραγώγοι της είναι Lipschitz-συνεχείς ως συναρτήσεις του σ και του u_0 .

3.3 Γενική λύση του προβλήματος Riemann

Στα προηγούμενα δύο υποκεφάλαια έχουμε κατασκευάσει λύσεις του προβλήματος Riemann, που ισχύουν στις συγκεκριμένες περιπτώσεις όπου το u^+ βρίσκεται πάνω στη i -shock καμπύλη ή την i -rarefaction καμπύλη μέσω του u^- . Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε αυτές τις περιπτώσεις ως δομικά στοιχεία για να κατασκευάσουμε τη λύση του προβλήματος Riemann με οποιαδήποτε αρχικά δεδομένα u^-, u^+ , που βρίσκονται αρκετά κοντά, χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση που είδαμε πιο πάνω:

$$\Psi_i(\sigma_i)(u^-) = \begin{cases} R_i(\sigma_i)(u^-), & \text{εάν } \sigma_i \geq 0 \\ S_i(\sigma_i)(u^-), & \text{εάν } \sigma_i < 0 \end{cases}.$$

Για $u^- \in \Omega$ και $(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^n$ σε μια περιοχή του $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε την απεικόνιση:

$$\Lambda(\sigma_1, \dots, \sigma_n)(u^-) = \Psi_n(\sigma_n) \circ \dots \circ \Psi_1(\sigma_1)(u^-). \quad (3.3.1)$$

Ισοδύναμα, αν τα σημεία w_0, \dots, w_n ορίζονται επαγωγικά ως ακολούθως:

$$w_0 = u^-, \quad w_i = \begin{cases} R_i(\sigma_i)(w_{i-1}), & \text{εάν } \sigma_i \geq 0 \\ S_i(\sigma_i)(w_{i-1}), & \text{εάν } \sigma_i < 0 \end{cases}, \quad (3.3.2)$$

τότε $\Lambda(\sigma_1, \dots, \sigma_n)(u^-) = w_n$, αφού ισχύει

$$\begin{aligned} w_n &= \Psi_n(\sigma_n)(w_{n-1}) = \Psi_n(\sigma_n) \circ \Psi_{n-1}(\sigma_{n-1})(w_{n-2}) \\ &= \Psi_n(\sigma_n) \circ \Psi_{n-1}(\sigma_{n-1}) \circ \dots \circ \Psi_1(\sigma_1)(w_0) \\ &= \Psi_n(\sigma_n) \circ \Psi_{n-1}(\sigma_{n-1}) \circ \dots \circ \Psi_1(\sigma_1)(u^-). \end{aligned}$$

Τώρα υποθέτουμε

$$u^+ = \Lambda(\sigma_1, \dots, \sigma_n)(u^-).$$

Από την ανάλυση που κάναμε στα προηγούμενα υποκεφάλαια, γνωρίζουμε ότι κάθε πρόβλημα Riemann για $i = 1, \dots, n$ με αρχική συνθήκη:

$$u(0, x) = \begin{cases} w_{i-1}, & \text{εάν } x > 0 \\ w_i, & \text{εάν } x < 0 \end{cases}, \quad (3.3.3)$$

όπου

$$w_i = \begin{cases} R_i(\sigma_i)(w_{i-1}), & \text{εάν } \sigma_i \geq 0 \\ S_i(\sigma_i)(w_{i-1}), & \text{εάν } \sigma_i < 0 \end{cases},$$

έχει λύση η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη αποδεκτικότητας της εντροπίας. Πιο συγκεκριμένα:

Περίπτωση 1: Το i -χαρακτηριστικό πεδίο είναι γνησίως μη-γραμμικό και $\sigma_i \geq 0$. Τότε η λύση του προβλήματος Riemann (3.3.3) αποτελείται από ένα κεντρικό κύμα αραίωσης, του οποίου οι χαρακτηριστικές του ταχύτητες παίρνουν τιμές στο διάστημα $[\lambda_i^-, \lambda_i^+]$, όπου τα άκρα ορίζονται ως:

$$\lambda_i^- = \lambda_i(w_{i-1}) \quad \text{και} \quad \lambda_i^+ = \lambda_i(w_i).$$

Έχουμε δείξει ότι το κεντρικό κύμα αραίωσης για $\sigma_i \geq 0$ ικανοποιεί τη συνθήκη αποδεκτικότητας της εντροπίας.

Περίπτωση 2: Το i -χαρακτηριστικό πεδίο είναι γνησίως μη-γραμμικό και $\sigma_i < 0$ ή το i -χαρακτηριστικό πεδίο είναι γραμμικά εκφυλισμένο (με σ_i αυθαίρετο). Τότε η λύση του προβλήματος Riemann (3.3.3) αποτελείται από ένα κρουστικό κύμα συμπίεσης ή μία ασυνέχεια επαφής αντίστοιχα, με χα-

ρακτηριστική ταχύτητα:

$$\lambda_i^- = \lambda_i^+ = \lambda_i(w_{i-1}, w_i).$$

Υπενθυμίζουμε ότι η $\lambda_i(w_{i-1}, w_i)$ αποτελεί την i -ιδιοτιμή του κατά μέσου όρου πίνακα $A(w_{i-1}, w_i)$ που ορίστηκε στη (3.2.8). Από το Θεώρημα 3.5 έχουμε δείξει ότι το κρουστικό κύμα για $\sigma < 0$, δηλαδή το κρουστικό κύμα συμπίεσης, όσο και η ασυνέχεια επαφής ικανοποιούν τη συνθήκη αποδεκτικότητας της εντροπίας.

Η λύση του προβλήματος Riemann (3.0.1)-(3.0.2) με οποιαδήποτε αρχικά δεδομένα $u^-, u^+ \in \Omega$ μπορεί να κατασκευαστεί από την ένωση των λύσεων των n -προβλημάτων Riemann (3.3.3), $\forall i = 1, \dots, n$, σε διαφορετικά τμήματα του επιπέδου $t-x$. Πράγματι, για $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ ικανοποιητικά μικρά, οι κλίσεις $\lambda_i^- = \lambda_i(w_{i-1})$ και $\lambda_i^+ = \lambda_i(w_i)$ παραμένουν κοντά στην αντίστοιχη ιδιοτιμή $\lambda_i(u^-)$ του πίνακα $A(u^-)$. Αφού, το σύστημα μας είναι αυστηρά υπερβολικό και λ_i ομαλή, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η τομή των n -διαστημάτων $[\lambda_i^-, \lambda_i^+]$ είναι το κενό σύνολο, αφού θα ισχύει

$$\lambda_1^- \leq \lambda_1^+ < \lambda_2^- \leq \lambda_2^+ < \dots < \lambda_n^- \leq \lambda_n^+.$$

Επομένως, γι' αυτό η κατά τμήματα σταθερή ομαλή συνάρτηση $u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ που θα κατασκευάσουμε με τον εξής τρόπο θα είναι καλά ορισμένη:

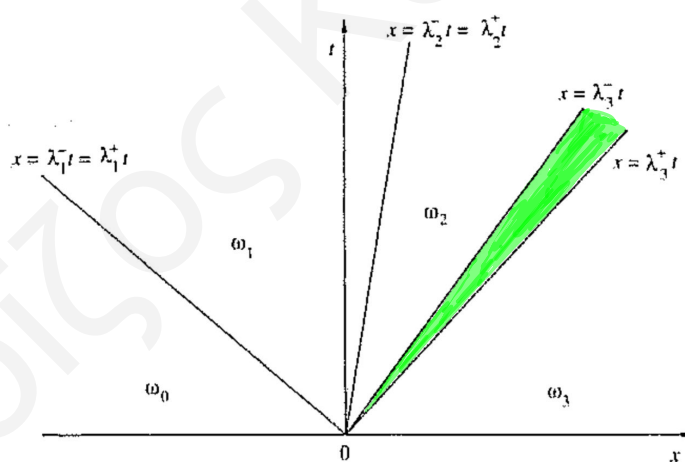
$$u(t, x) = \begin{cases} u^-, & \text{εάν } x/t \in (-\infty, \lambda_1^-) \\ u^+, & \text{εάν } x/t \in (\lambda_n^+, \infty) \\ w_i, & \text{εάν } x/t \in (\lambda_i^+, \lambda_{i+1}^-), \quad i = 1, \dots, n-1 \\ R_i(s)(w_{i-1}), & \text{εάν } x/t \in [\lambda_i^-, \lambda_i^+], \quad x/t = \lambda_i(R_i(s)(w_{i-1})) \end{cases}, \quad (3.3.4)$$

όπου

$$w_i = \begin{cases} R_i(\sigma_i)(w_{i-1}), & \text{εάν } \sigma_i \geq 0 \\ S_i(\sigma_i)(w_{i-1}), & \text{εάν } \sigma_i < 0 \end{cases}.$$

Ένα τυπικό παράδειγμα φαίνεται στο Σχήμα 3.1. Θεωρούμε ένα 3×3 σύστημα, υποθέτοντας ότι το πρώτο και το τρίτο χαρακτηριστικό πεδίο είναι γνησίως μη-γραμμικά, ενώ το δεύτερο είναι γραμμικά εκφυλισμένο. Στο Σχήμα 3.1 είναι η δομή που θα έχει η λύση $u = u(t, x)$ στη περίπτωση που $\sigma_1 < 0$, $\sigma_3 > 0$ και $\sigma_2 \neq 0$ (αφού στη περίπτωση του γραμμικά εκφυλισμένου πεδίου το σ είναι αυθαίρετο). Σε αυτή την περίπτωση, η λύση περιέχει:

- Ένα κρουστικό κύμα συμπίεσης της 1-χαρακτηριστικής οικογένειας, το οποίο ταξιδεύει με ταχύτητα $\lambda_1^- = \lambda_1^+ = \lambda_1(w_0, w_1)$.
- Μία ασυνέχεια επαφής της 2-χαρακτηριστικής οικογένειας, η οποία ταξιδεύει με ταχύτητα $\lambda_2^- = \lambda_2^+ = \lambda_2(w_1, w_2)$.
- Ένα κεντρικό κύμα αραιώσης μέσα στη περιοχή $x/t \in [\lambda_3^-, \lambda_3^+] = [\lambda_3(w_2), \lambda_3(w_3)]$.



Σχήμα 3.1. Λύση προβλήματος Riemann

Θεώρημα 3.6. Έστω ότι ισχύουν οι βασικές υποθέσεις (\clubsuit). Τότε, για κάθε συμπαγές σύνολο $K \subset \Omega$ υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε το πρόβλημα Riemann (3.0.1)-(3.0.2) να έχει μοναδική ασθενή λύση της μορφής (3.3.4), όταν $u^- \in K$ και $|u^+ - u^-| < \delta$.

Άποδειξη. Σταθεροποιούμε $u^- \in \Omega$. Η απεικόνιση Λ , όπως ορίστηκε στο (3.3.1), είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη ως σύνθεση συναρτήσεων που όπως έχουμε δει είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες. Επίσης, ισχύει

$$\left. \frac{\partial \Lambda}{\partial \sigma_i} \right|_{\sigma_1 = \dots = \sigma_n = 0} = r_i(u_0).$$

Αφού τα n ιδιοδιανύσματα $r_1(u_0), \dots, r_n(u_0)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, έπεται ότι ο πίνακας $D\Lambda$ στο $\sigma = 0$ έχει n -γραμμές γραμμικές ανεξάρτητες. Άρα ο $D\Lambda(0)$ είναι αντιστρέψιμος πίνακας και έχει ορίζουσα μη-μηδενική. Από το θεώρημα της αντίστροφης απεικόνισης, η απεικόνιση:

$$(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \mapsto \Lambda(\sigma_1, \dots, \sigma_n)(u^-), \quad (3.3.5)$$

είναι ένας C^2 ομοιομορφισμός μιας γειτονιάς του $0 \in \mathbb{R}^n$ επί μιας γειτονιάς του u^- . Επομένως, η εξίσωση $\Lambda(\sigma_1, \dots, \sigma_n)(u^-) = u^+$ για $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ αρκετά κοντά στο $(0, \dots, 0)$ έχει μοναδική λύση αν το u^+ είναι αρκετά κοντά στο $\Lambda(0)(u^-) = u^-$. Επομένως, για $u^- \in K$ με $|u^+ - u^-| < \delta$, η $\Lambda(\sigma_1, \dots, \sigma_n)(u^-) = u^+$ έχει μοναδική λύση για αρκετά μικρά $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ (δηλαδή αρκετά κοντά στο $\vec{0}$). Έτσι, η συνάρτηση που ορίστηκε στο (3.3.4) είναι μια ασθενής λύση του προβλήματος Riemann (3.0.1)-(3.0.2). \square

Έστω η μια κυρτή εντροπία για το σύστημα του νόμου διατήρησης (3.0.1) με αντίστοιχη ροή εντροπίας q . Εάν u^-, u^+ αρκετά κοντά, τότε εκ κατασκευής η λύση $u = u(t, x)$ ικανοποιεί τη συνθήκη αποδεκτικότητας της εντροπίας. Η λύση που ορίστηκε στο (3.3.4), αναμένουμε σε εφαρμογές να σχετίζεται με τη φυσική έννοια του προβλήματος.

Λοΐζος Κοσμάς

Κεφάλαιο 4

Το πρόβλημα του Cauchy για συστήματα

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την καθολική ύπαρξη λύσης του προβλήματος του Cauchy:

$$u_t + (f(u))_x = 0 \quad (4.0.1)$$

$$u(0, x) = \bar{u}, \quad (4.0.2)$$

υπό τις υποθέσεις:

(♣) Το $n \times n$ σύστημα του νόμου διατήρησης (4.0.1), είναι αυστηρά υπερβολικό με ομαλούς συντελεστές, οι οποίοι είναι ορισμένοι σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Κάθε χαρακτηριστικό πεδίο είναι είτε γνησίως μη-γραμμικό είτε γραμμικά εκφυλισμένο.

Ο απώτερος στόχος μας είναι για δοσμένη αρχική συνθήκη \bar{u} με ικανοποιητικά μικρή ολική διακύμανση, να κατασκευάσουμε μια ασθενής λύση u ορισμένη $\forall t \geq 0$, η οποία θα ικανοποιεί επίσης τη συνθήκη αποδεκτικότητας της εντροπίας. Στο σημείο αυτό υπενθυμίζουμε ότι μια συνάρτηση $u : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι ασθενής λύση του προβλήματος του Cauchy (4.0.1)-(4.0.2), εάν $t \mapsto u(t, \cdot)$ είναι συνεχής με τιμές στο L^1_{loc} , ικανοποιείται η αρχική συνθήκη και $\forall \varphi \in C^1$ με συμπαγή φορέα μέσα στο ανοικτό σύνολο $(0, T) \times \mathbb{R}$, ισχύει:

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi_t(t, x)u(t, x) + \varphi_x(t, x)f(u(t, x))] \, dxdt = 0.$$

Επιπρόσθετα για δοσμένη κυρτή εντροπία η για το σύστημα (4.0.1), με ροή εντροπίας q , λέμε ότι η u ικανοποιεί τη συνθήκη αποδεκτικότητας της εντροπίας, δηλαδή είναι η -αποδεκτή, εάν $\forall \varphi$ μη αρνητική συνάρτηση, όπου $\varphi \in C^1$ με συμπαγή φορέα μέσα στο ανοικτό σύνολο $(0, T) \times \mathbb{R}$, ισχύει:

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi_t(t, x)\eta(u(t, x)) + \varphi_x(t, x)q(u(t, x))] \, dxdt \geq 0.$$

Θεώρημα 4.1. Υπό τις βασικές υποθέσεις (\clubsuit), υπάρχει μια σταθερά $\delta_0 > 0$, τέτοια ώστε για κάθε αρχική συνθήκη $\bar{u} \in L^1$ με $Tot.Var\{\bar{u}\} \leq \delta_0$, το πρόβλημα του Cauchy (4.0.1)-(4.0.2) έχει ασθενής λύση $u = u(t, x)$ η οποία είναι ορισμένη $\forall t \geq 0$. Επιπρόσθετα, αν $\eta : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ είναι μια κυρτή εντροπία για το σύστημα (4.0.1), τότε μπορούμε να βρούμε μια λύση u η οποία είναι η -αποδεκτή.

Η απόδειξη του πιο πάνω θεωρήματος βασίζεται στη μέθοδο ιχνηλάτησης μετώπου του Bressan. Θα κατασκευάσουμε σε πρώτο στάδιο προσεγγιστικές λύσεις, παίρνοντας ως αρχική συνθήκη μια κατά τμήματα σταθερή συνάρτηση, που προσεγγίζει την αρχική συνθήκη \bar{u} . Ο λόγος που μας ωθεί να ακολουθήσουμε αυτή τη διαδικασία είναι γιατί εχούμε ήδη δείξει ότι κάθε πρόβλημα Riemann με αρχική συνθήκη της μορφής:

$$u(0, x) = \begin{cases} u^-, & \text{εάν } x < a \\ u^+, & \text{εάν } x > a \end{cases},$$

αποδέχεται λύση που να ικανοποιεί τη συνθήκη αποδεκτικότητας της εντροπίας.

4.1 Προσεγγίσεις μέσω ιχνηλάτησης μετώπου

Ορισμός 4.2. Για κάθε $\varepsilon > 0$ λέμε ότι η συνεχής συνάρτηση $u_\varepsilon : [0, \infty) \mapsto L_{loc}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ είναι ε -προσεγγιστική λύση μέσω της μεθόδου ιχνηλάτησης μετώπου (front tracking λύση) της εξίσωσης $u_t + (f(u))_x = 0$ εάν ικανοποιούνται οι ακόλουθες τέσσερις συνθήκες:

1. Η συνάρτηση $u_\varepsilon = u_\varepsilon(t, x)$ ως συνάρτηση δύο μεταβλητών είναι τμηματικά σταθερή με ασυνέχειες \mathcal{J} που υφίστανται πάνω σε ευθείες γραμμές, οι οποίες είναι πεπερασμένες στο πλήθος πάνω στο t - x επίπεδο. Τα άλματα μπορεί να είναι τριών ειδών: κρουστικό κύμα (shock) το οποίο θα συμβολίζουμε με \mathcal{S} , μέτωπο αραιώσης (rarefaction front) το οποίο θα συμβολίζουμε με \mathcal{R} και αφύσικο μέτωπο (non-physical front), το οποίο θα συμβολίζουμε με \mathcal{NP} , δηλαδή $\mathcal{J} = \mathcal{S} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{NP}$. Τα πιο πάνω άλματα ασυνέχειας θα οριστούν σε μεταγενέστερο στάδιο.
2. Κατά μήκος κάθε κρουστικού κύματος (ή ασυνέχειας επαφής) $x = x_a(t)$, $a \in \mathcal{S}$, οι τιμές $u^- = u(t, x_a^-)$ και $u^+ = u(t, x_a^+)$ συνδέονται μέσω της σχέσης:

$$u^+ = S_{k_a}(\sigma_a)(u^-),$$

για κάποιο $k_a \in \{1, \dots, n\}$ και μέγεθος σ_a του κρουστικού κύματος. Εάν επίσης η k_a -οικογένεια είναι γνησίως μη-γραμμική, τότε ισχύει η συνθήκη αποδεκτικότητας $\sigma_a < 0$. Ακόμη η ταχύτητα του κρουστικού κύματος ικανοποιεί:

$$|\dot{x}_a - \lambda_{k_a}(u^+, u^-)| \leq \varepsilon.$$

3. Κατά μήκος κάθε μετώπου αραιώσης $x = x_a(t)$, $a \in \mathcal{R}$ ισχύει:

$$u^+ = R_{k_a}(\sigma_a)(u^-), \text{ όπου } \sigma_a \in (0, \varepsilon].$$

Επιπρόσθετα, $|\dot{x}_a - \lambda_{k_a}(u^+)| \leq \varepsilon$.

4. Όλα τα αφύσικα μέτωπα $x = x_a(t)$, $a \in \mathcal{NP}$ έχουν την ίδια ταχύτητα:

$$\dot{x}_a \equiv \hat{\lambda},$$

όπου $\hat{\lambda}$ είναι μια σταθερά, μεγαλύτερη από όλες τις χαρακτηριστικές ταχύτητες.

Το συνολικό μέγεθος όλων των αφύσικων μετώπων στην $u_\varepsilon(t, \cdot)$ παραμένει ομοιομορφα μικρό, δηλαδή:

$$\sum_{a \in \mathcal{N}^P} |u_\varepsilon(t, x_a^+) - u_\varepsilon(t, x_a^-)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Τέλος, η αρχική συνθήκη της u_ε ικανοποιεί τη σχέση: $\|u_\varepsilon(0, \cdot) - \bar{u}\|_1 < \varepsilon$. Εάν λοιπόν, ικανοποιούνται οι πιο πάνω συνθήκες 1-4, τότε η u_ε θα είναι μια ε -προσεγγιστική front tracking λύση στο πρόβλημα του Cauchy:

$$\begin{aligned} u_t + (f(u))_x &= 0 \\ u(0, x) &= \bar{u}. \end{aligned}$$

Θεώρημα 4.3. [Υπαρξη ε -προσεγγιστικών front tracking λύσεων] Υπό τις βασικές υποθέσεις (\clubsuit), υπάρχει μια σταθερά $\delta_0 > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα. Για κάθε αρχική συνθήκη $\bar{u} \in L^1$ που ικανοποιεί $Tot.Var\{\bar{u}\} \leq \delta_0$, τότε $\forall \varepsilon > 0$ το πρόβλημα του Cauchy (4.0.1)-(4.0.2), έχει μια ε -προσεγγιστική front tracking λύση u_ε που είναι ορισμένη $\forall t \geq 0$.

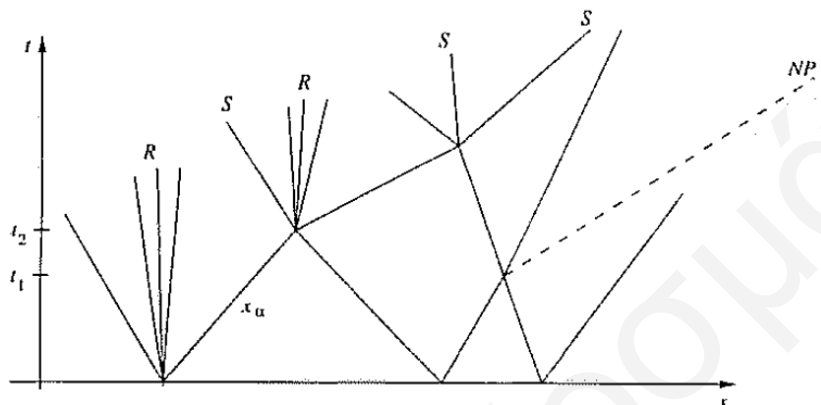
Σε πρώτο στάδιο θα περιγράψουμε τον αλγόριθμο ιχνηλάτησης μετώπου (front tracking algorithm) που θα μας δώσει τις front tracking προσεγγίσεις. Ακολούθως $\forall \varepsilon > 0$, με την κατάλληλη επιλογή κάποιων παραμέτρων (λαμβάνοντας υπόψη κάθε φορά το αντίστοιχο ε), θα αντλήσουμε μέσα από τον αλγόριθμο ε -προσεγγιστικές front tracking λύσεις u_ε . Τέλος, θα δείξουμε ότι μια κατάλληλη ακολουθία που έχει ως όρους τις ε -προσεγγιστικές front tracking λύσεις u_ε , συγκλίνει καθώς το $\varepsilon \rightarrow 0^+$ σε ένα όριο $u = u(t, x)$ το οποίο αποτελεί μια ασθενή λύση για το πρόβλημα του Cauchy και είναι επίσης η -αποδεκτή. Η διαδικασία αυτή θα αποτελέσει την κύρια ιδέα της απόδειξης του Θεωρήματος 4.1.

4.2 Αλγόριθμος ιχνηλάτησης μετώπου

Αρχικά θα περιγράψουμε ένα αλγόριθμο που θα μας δώσει μια front tracking προσέγγιση u .

Η διαδικασία ξεκινά τη χρονική στιγμή $t = 0$, παίρνοντας μια κατά τμήματα σταθερή συνάρτηση $u(0, \cdot)$ που προσεγγίζει την αρχική συνθήκη \bar{u} και ικανοποιεί:

$$Tot.Var\{u(0, \cdot)\} \leq Tot.Var\{\bar{u}\} \leq \delta_0.$$



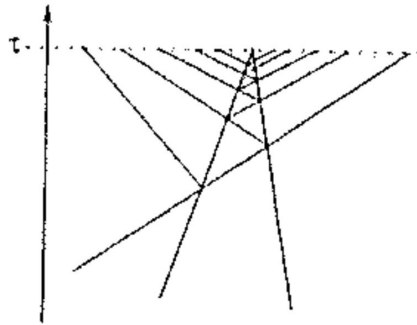
Σχήμα 4.1. Τα μέτωπα στο $t - x$ επίπεδο του αλγόριθμου ιχνηλάτησης μετώπου

Παίρνοντας τώρα ως αρχική συνθήκη τη $u(0, \cdot)$, είμαστε σε θέση να ξεκινήσουμε τη διαδικασία κατασκευής της front tracking προσέγγισης u . Έστω $x_1 < \dots < x_N$ τα σημεία όπου η $u(0, \cdot)$ είναι ασυνεχής. Τότε έχουμε N -προβλήματα Riemann, όπου το καθένα δημιουργείται από κάθε άλμα $(u(0, x_a^-), u(0, x_a^+))$ με $a = 1, \dots, N$. Όλα τα προβλήματα Riemann θα λυθούν προσεγγιστικά. Πιο συγκεκριμένα, εάν η ακριβής λύση του προβλήματος Riemann περιέχει μόνο κρουστικά κύματα συμπίεσης και ασυνέχειες επαφής, τότε επιτρέπουμε στη front tracking προσέγγιση u να συμπίπτει με την ακριβή λύση, η οποία είναι ήδη κατά τμήματα σταθερή. Διαφορετικά, εάν στην ακριβή λύση περιέχονται κύματα αραιώσης, τότε αυτά θα προσεγγιστούν από βεντάλιες αραιώσης οι οποίες θα αποτελούνται από αρκετά μικρά μέτωπα τα οποία θα ταξιδεύουν με ταχύτητα κοντά στη χαρακτηριστική ταχύτητα. Επομένως, όλα τα προβλήματα Riemann λύνονται στο πλαίσιο των κατά τμήματα σταθερών συναρτήσεων. Για λόγους ευκολίας, θα αποκαλούμε μέτωπο (wave-front) μια ασυνέχεια που είναι είτε κρουστικό κύμα συμπίεσης, είτε ασυνέχεια επαφής είτε μέτωπο αραιώσης.

Η προσεγγιστική λύση μπορεί να επεκταθεί με αυτό τον τρόπο μέχρι και κάποια χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία γίνεται η πρώτη σύγκρουση μεταξύ δύο ή περισσότερων μετώπων. Εφόσον, η $u(t_1, \cdot)$ εξακολουθεί να είναι κατά τμήματα σταθερή, επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία με προηγούμενος, παίρνοντας τώρα ως αρχική συνθήκη τη $u(t_1, \cdot)$. Ακολουθώντας, λύνουμε και πάλι προσεγγιστικά τα αντίστοιχα προβλήματα Riemann στο πλαίσιο των κατά τμήματων σταθερών συναρτήσεων. Έτσι, η προσεγγιστική λύση u επεκτείνεται μέχρι και κάποια χρονική στιγμή t_2 κατά την οποία γίνεται η δεύτερη σύγκρουση μεταξύ κάποιων μετώπων και με αυτό τον τρόπο η διαδικασία συνεχίζεται επαγωγικά.

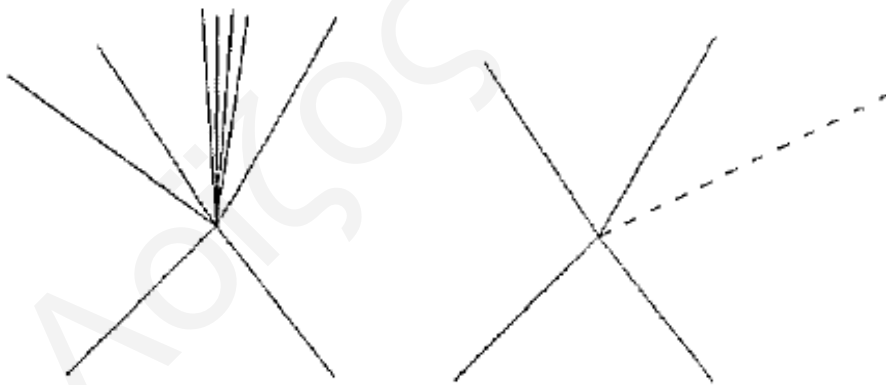
Γενικά σε $n \times n$ συστήματα είναι πιθανόν κάποιος να συναντήσει μια τεχνική δυσκολία. Ας αναλογιστούμε ότι η λύση ενός προβλήματος Riemann που προκύπτει από μια σύγκρουση δύο εισερχόμενων μετώπων, μπορεί να μας δώσει το πολύ n -εξερχόμενα μέτωπα, υπό τη προϋπόθεση ότι όλα είναι κρουστικά κύματα συμπίεσης και ασυνέχειες επαφής (Θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης). Εάν στη λύση Riemann εμφανίζονται και κύματα αραιώσης, τα οποία όπως προαναφέραμε θα αντικατασταθούν από βεντάλιες αραιώσης, τότε ο αριθμός των εξερχόμενων μετώπων θα είναι ακόμα μεγαλύτερος. Με τη σειρά τους αυτά τα μέτωπα θα συγκρουστούν γρήγορα με άλλα μέτωπα δημιουργώντας αρκετά προβλήματα Riemann που η επίλυση τους θα δώσει όλο και περισσότερες γραμμές ασυνέχειας. Με αυτόν τον τρόπο είναι πολύ πιθανόν σε πεπερασμένη χρονική στιγμή τ τα μέτωπα να απειριστούν (Δείτε Σχήμα 4.2). Σε αυτή τη περίπτωση καταρρέει ολόκληρος ο συλλογισμός μας, αφού εξ' ορισμού ένας αλγόριθμος πρέπει να ολοκληρώνεται μετά από κάποιο πεπερασμένο αριθμό βημάτων.

Κατά συνέπεια, πρέπει να τροποποιήσουμε τον αλγόριθμο μας, ούτως ώστε να εξασφαλίσουμε ότι ο αριθμός των μετώπων δεν θα απειριστεί σε πεπερασμένο χρόνο. Για να το πετύχουμε αυτό, θα υιοθετήσουμε δύο διαφορετικές διαδικασίες επίλυσης του προβλήματος Riemann στα πλαίσια της κατά τμήματα σταθερής λύσης. Η επιλογή της διαδικασίας που θα ακολουθούμε κάθε φορά θα γίνεται λαμβάνοντας υπόψη το μέγεθος των εισερχόμενων μετώπων της σύγκρουσης που παράγει το αντίστοιχο πρόβλημα Riemann. Οι δύο διαδικασίες που θα χρησιμοποιήσουμε είναι οι εξής:



Σχήμα 4.2. Σύγκρουση μετώπων

- Ακριβής λύση Riemann: Σε αυτό τον τρόπο επίλυσης του προβλήματος Riemann, θα γνωρίσουμε κάποια καινούργια μέτωπα, τα οποία όπως προαναφέραμε θα τα ορίσουμε ως μέτωπα αραιώσης (rarefaction fronts). Αρκετά μέτωπα αραιώσης θα αποτελέσουν μαζί μία βεντάλια αραιώσης η οποία θα αντικαταστήσει το κύμα αραιώσης (Σχήμα 4.3).



Σχήμα 4.3. Ακριβής και Απλοποιημένη Λύση Riemann

- Απλοποιημένη λύση Riemann: Σε αυτή την περίπτωση, όλα τα καινούργια μέτωπα συμπυκνώνονται σε ένα μέτωπο το οποίο θα ονομάσουμε αφύσικο μέτωπο (non-physical front) και θα ταξιδεύει με μια ταχύτητα $\hat{\lambda}$ που θα είναι αυστηρά μεγαλύτερη από όλες τις χαρακτηριστικές

ταχύτητες. Τα εισερχόμενα μέτωπα απλά διασταυρώνονται και εξέρχονται από τη σύγκρουση με πιθανόν ελαφρώς διαφορετική κλίση (Σχήμα 4.3).

Εάν για τη κατασκευή του αλγόριθμου μας χρησιμοποιούσαμε μόνο την ακριβής λύση Riemann, τότε ο αριθμός των εξερχόμενων μετώπων από κάθε σύγκρουση θα ήταν μεγάλος. Αυτά τα μέτωπα με τη σειρά τους θα προκαλούσαν πολλές άλλες συγκρούσεις και όπως έχουμε ήδη εξηγήσει ο αριθμός των μετώπων θα απειριζόταν σε πεπερασμένη χρονική στιγμή, γεγονός που θα κατέστρεφε την όλη διαδικασία. Ως εκ τούτου, θα χρησιμοποιούμε και τις δύο διαδικασίες. Η επιλογή της κάθε διαδικασίας θα γίνεται με βάση μια παράμετρο $\rho > 0$, η οποία θα καθορίζεται στην αρχή του αλγόριθμου.

4.2.1 Ακριβής λύση Riemann

Έστω ότι στο τυχαίο σημείο (\bar{t}, \bar{x}) γίνεται μια σύγκρουση και έχουμε το πρόβλημα Riemann:

$$v_t + (f(v))_x = 0, \quad (4.2.1)$$

$$v(\bar{t}, x) = \begin{cases} u^-, & \text{εάν } x < \bar{x} \\ u^+, & \text{εάν } x > \bar{x}. \end{cases} \quad (4.2.2)$$

Αρχικά, στην ακριβής λύση Riemann προσδιορίζουμε μέσω του Θεωρήματος της αντίστροφης απεικόνισης τις τιμές w_0, w_1, \dots, w_n και τις παραμέτρους $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ για τις οποίες ισχύει:

$$w_0 = u^-, w_n = u^+, w_i = \Psi_i(\sigma_i)(w_{i-1}), \quad \text{για } i = 1, \dots, n,$$

όπου η $\Psi_i(\sigma)(w)$ υπενθυμίζουμε πως είναι η καμπύλη που ορίσαμε στο Κεφάλαιο 3, για δεδομένο $w \in \mathbb{R}^n$:

$$\Psi_i(\sigma)(w) = \begin{cases} R_i(\sigma)(w), & \text{εάν } \sigma \geq 0 \\ S_i(\sigma)(w), & \text{εάν } \sigma < 0 \end{cases}.$$

Εάν όλα τα μέτωπα (w_{i-1}, w_i) ήταν κρουστικά κύματα συμπίεσης ή ασυνέχειες επαφής, τότε το συγκεκριμένο πρόβλημα Riemann θα είχε ως λύση μια κατά τμήματα σταθερή συνάρτηση με το πολύ n στο πλήθος γραμμές ασυνέχειας. Στη γενική περίπτωση η ακριβής λύση του (4.2.1)-(4.2.2) δεν είναι κατά τμήματα σταθερή λόγω της παρουσίας των κυμάτων αραιώσης. Αυτά τα κύματα αραιώσης θα προσεγγιστούν από βεντάλιες αραιώσης οι οποίες θα είναι κατά τμήματα σταθερές, εισάγοντας κάποιες επιπρόσθετες τιμές $w_{i,j}$ ως ακολούθως:

Έστω $\delta > 0$ μια μικρή σταθερά που δίνεται στην αρχή της κατασκευής του αλγόριθμου. Εάν το i -χαρακτηριστικό πεδίο είναι γνησίως μη-γραμμικό και $\sigma_i > 0$, τότε θεωρούμε τον ακέραιο αριθμό:

$$p_i = 1 + \lceil \sigma_i / \delta \rceil.$$

Για $j = 1, \dots, p_i$, ορίζουμε:

$$w_{i,j} = \Psi_i(j\sigma_i/p_i)(w_{i-1}),$$

$$x_{i,j}(t) = \bar{x} + (t - \bar{t})\lambda_i(w_{i,j}).$$

Εάν το i -χαρακτηριστικό πεδίο είναι γνησίως μη-γραμμικό και $\sigma_i \leq 0$ ή το i -χαρακτηριστικό πεδίο είναι γραμμικά εκφυλισμένο (με αυθαίρετο σ_i), τότε ορίζουμε:

$$p_i = 1 \quad \text{και} \quad w_{i,1} = w_i,$$

$$x_{i,1}(t) = \bar{x} + (t - \bar{t})\lambda_i(w_{i-1}, w_i).$$

Σε αυτή τη περίπτωση η $\lambda_i(w_{i-1}, w_i)$ είναι η ταχύτητα Rankine-Hugoniot ενός μετώπου που συνδέει τις τιμές w_{i-1}, w_i , έτσι ώστε να ισχύει:

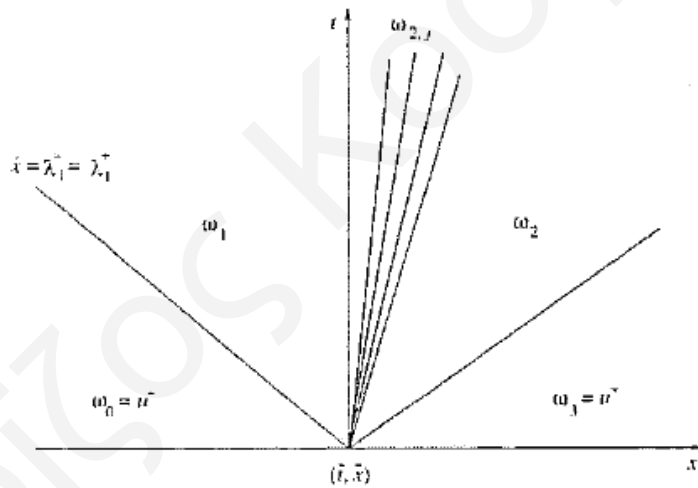
$$\lambda_i(w_{i-1}, w_i)(w_i - w_{i-1}) = f(w_i) - f(w_{i-1}).$$

Με λίγα λόγια δεν διαφοροποιούμε τα κρουστικά κύματα συμπίεσης και τις

ασυνέχειες επαφής που εμφανίζονται στην ακριβή λύση, αλλά μονάχα τα κύματα αραιώσης.

Εφόσον λοιπόν καθοριστούν οι ενδιάμεσες τιμές $w_{i,j}$ και η τοποθέτηση των μετώπων $x_{i,j}(t)$, είμαστε σε θέση να ορίσουμε μια προσεγγιστική λύση για το πρόβλημα Riemann (4.2.1)-(4.2.2) με τον εξής τρόπο :

$$v(t, x) = \begin{cases} u^-, & \text{εάν } x < x_{1,1}(t) \\ u^+, & \text{εάν } x > x_{n,p_n}(t) \\ w_i, & \text{εάν } x_{i,p_i}(t) < x < x_{i+1,1}(t) \\ w_{i,j}, & \text{εάν } x_{i,j}(t) < x < x_{i,j+1} \quad (j = 1, \dots, p_i - 1) \end{cases} \quad (4.2.3)$$



Σχήμα 4.4. Ακριβής Λύση Riemann

Παρατηρούμε ότι η διαφορά της v με την ακριβή λύση ομοιότητας του (4.2.1)-(4.2.2) είναι ότι κάθε κύμα αραιώσης αντικαθιστάται από μία βεντάλια αραιώσης η οποία χωρίζεται σε ίσα κομμάτια και αποτελείται από p_i μέτωπα τα οποία ονομάσαμε μέτωπα αραιώσης και έχουν μέγεθος μικρότερο του δ (Σχήμα 4.4).

4.2.2 Απλοποιημένη λύση Riemann

Θεωρούμε πως γίνεται γίνεται μια σύγκρουση μεταξύ δύο μετώπων στο (\bar{t}, \bar{x}) , προσδιορίζοντας έτσι ένα πρόβλημα Riemann με αρχικά δεδομένα u_l, u_r .

Περίπτωση 1: Έστω $j, j' \in \{1, \dots, n\}$ οι οικογένειες των δύο εισερχόμενων μετώπων, με $j \geq j'$.

Υποθέτουμε ότι η αριστερή, η μεσαία και η δεξιά τιμή πριν τη σύγκρουση, u_l, u_m και u_r αντίστοιχα συνδέονται ως ακολούθως:

$$u_m = \Psi_j(\sigma)(u_l), \quad u_r = \Psi_{j'}(\sigma')(u_m).$$

Το j -μέτωπο κινείται με μεγαλύτερη ταχύτητα από το j -μέτωπο όταν ισχύει $\lambda_j > \lambda_{j'}$, λόγω του ότι το σύστημα μας είναι αυστηρά υπερβολικό. Έτσι απαιτούμε στη συγκεκριμένη περίπτωση το j -μέτωπο να βρίσκεται αριστερά του j' -μετώπου, διότι διαφορετικά δεν θα συγκρούονταν τα δύο μέτωπα μεταξύ τους.

Ορίζουμε τη βοηθητική δεξιά τιμή:

$$\bar{u}_r = \begin{cases} \Psi_j(\sigma) \circ \Psi_{j'}(\sigma')(u_l), & \text{εάν } j > j' \\ \Psi_j(\sigma + \sigma')(u_l), & \text{εάν } j = j' \end{cases}. \quad (4.2.4)$$

Η λύση του προβλήματος Riemann με αρχικά δεδομένα u_l, \bar{u}_r θα είναι μια κατά τμήματα σταθερή συνάρτηση $\bar{v} = \bar{v}(t, x)$ την οποία θα τη κατασκευάσουμε όπως ακριβώς κατασκευάσαμε την (4.2.3). Έστω $u^* = \Psi_{j'}(\sigma')(u_l)$.

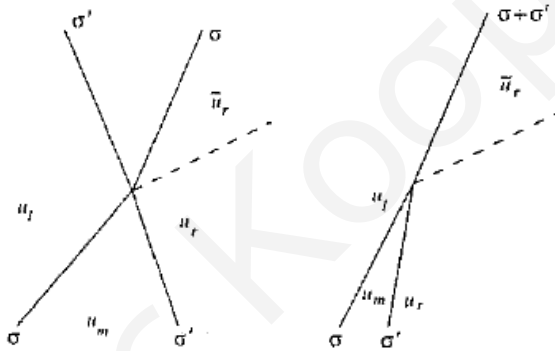
Εάν $j > j'$ (Σχήμα 4.5), λόγω της (4.2.4) η κατά τμήματα σταθερή συνάρτηση \bar{v} θα έχει 3 πιθανές μορφές:

- Θα αποτελείται από ακριβώς δύο μέτωπα, εάν και οι δύο καμπύλες $\Psi_j(\sigma)(u^*)$, $\Psi_{j'}(\sigma')(u_l)$ είναι είτε κρουστικά κύματα συμπίεσης είτε ασυνέχειες επαφής.
- Θα αποτελείται από ένα μέτωπο και μία βεντάλια αραιώσης, εάν μια από τις δύο καμπύλες $\Psi_j(\sigma)(u^*)$, $\Psi_{j'}(\sigma')(u_l)$ είναι ένα κύμα αραιώσης.
- Θα αποτελείται από δύο βεντάλιες αραιώσης, εάν και οι δύο καμπύλες

$\Psi_j(\sigma)(u^*)$, $\Psi_{j'}(\sigma')(u_l)$ είναι κύματα αραιώσης.

Εάν $j = j'$ (Σχήμα 4.5), λόγω της (4.2.4) η κατά τμήματα σταθερή συνάρτηση \bar{v} θα έχει 2 πιθανές μορφές:

- Θα αποτελείται από ένα μέτωπο, εάν η καμπύλη $\Psi_j(\sigma + \sigma')(u_l) = \Psi_{j'}(\sigma + \sigma')(u_l)$ είναι είτε κρουστικό κύμα συμπίεσης είτε ασυνέχεια επαφής.
- Θα αποτελείται από μία βεντάλια αραιώσης, εάν η καμπύλη $\Psi_j(\sigma + \sigma')(u_l) = \Psi_{j'}(\sigma + \sigma')(u_l)$ είναι ένα κύμα αραιώσης.



Σχήμα 4.5. Στα αριστερά έχουμε $j > j'$ και στα δεξιά $j = j'$

Τέλος, αφού γενικά ισχύει $\bar{u}_r \neq u_r$, για την ολοκλήρωση της διαδικασίας επιτρέπουμε στο μέτωπο (\bar{u}_r, u_r) να ταξιδεύει με ταχύτητα $\hat{\lambda}$ μεγαλύτερη από όλες τις χαρακτηριστικές ταχύτητες. Παρατηρούμε έτσι, ότι η απλοποιημένη λύση Riemann εισαγάγει την έννοια ενός καινούργιου μετώπου, το οποίο θα ονομάσουμε αφύσικο μέτωπο $x - \bar{x} < (t - \bar{t})\hat{\lambda}$ και θα τρέχει με σταθερή ταχύτητα $\hat{\lambda}$. Έτσι, ορίζουμε τη προσεγγιστική λύση v σε μια περιοχή του σημείου (\bar{t}, \bar{x}) ως ακολούθως:

$$v(t, x) = \begin{cases} \bar{v}(t, x), & \text{εάν } x - \bar{x} < (t - \bar{t})\hat{\lambda} \\ u_r, & \text{εάν } x - \bar{x} > (t - \bar{t})\hat{\lambda} \end{cases}$$

Λόγω του ότι η απλοποιημένη λύση Riemann εισαγάγει την έννοια ενός καινούργιου μετώπου, πρέπει να εξετάσουμε ακόμα ένα είδος σύγκρουσης με-

σημείου (\bar{t}, \bar{x}) :

$$v(t, x) = \begin{cases} \bar{v}(t, x), & \text{εάν } x - \bar{x} < (t - \bar{t})\hat{\lambda} \\ u_r, & \text{εάν } x - \bar{x} > (t - \bar{t})\hat{\lambda} \end{cases}. \quad (4.2.6)$$

Εκ κατασκευής όλα τα αφύσικα μέτωπα ταξιδεύουν με την ίδια ταχύτητα $\hat{\lambda}$ και γι' αυτό δεν συγκρούονται ποτέ μεταξύ τους. Επιπρόσθετα, λόγω του ότι το αφύσικο μέτωπο ταξιδεύει με ταχύτητα μεγαλύτερη από όλες τις χαρακτηριστικές ταχύτητες δεν μπορεί να κτυπήσει κάποιο φυσικό μέτωπο (κρουσικό κύμα συμπίεσης, ασυνέχεια επαφής, μέτωπο αραιώσης) από τα δεξιά. Άρα, οι πιο πάνω περιπτώσεις καλύπτουν όλες τις πιθανές συγκρούσεις μεταξύ δύο μετώπων.

Για να ολοκληρώσουμε τη περιγραφή του αλγόριθμου, απομένει να διευκρινίσουμε ποια λύση Riemann θα χρησιμοποιούμε σε κάθε σύγκρουση, ώστε να λύνουμε προσεγγιστικά το αντίστοιχο πρόβλημα Riemann που προσδιορίζει η σύγκρουση. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η επιλογή της διαδικασίας που θα ακολουθείται θα εξαρτάται από μια παράμετρο $\rho > 0$, η οποία θα καθορίζεται στην αρχή του αλγόριθμου:

- Η ακριβής λύση Riemann θα τίθεται σε εφαρμογή για χρόνο $t = 0$ και επίσης στις χρονικές στιγμές $t > 0$ για τις οποίες ισχύει $|\sigma\sigma'| \geq \rho$, όπου σ, σ' είναι τα μεγέθη των εισερχόμενων μετώπων της σύγκρουσης που προσδιορίζει το συγκεκριμένο πρόβλημα Riemann που θέλουμε να επιλύσουμε.
- Η απλοποιημένη λύση Riemann θα τίθεται σε εφαρμογή όταν στη σύγκρουση εμπλέκεται ένα αφύσικο μέτωπο και επίσης στις χρονικές στιγμές $t > 0$ για τις οποίες ισχύει $|\sigma\sigma'| < \rho$, όπου σ, σ' είναι τα μεγέθη των εισερχόμενων μετώπων.

Επιπλέον, θα υιοθετήσουμε την παρακάτω αρχή:

(P) Στην ακριβής λύση Riemann, τα μέτωπα αραιώσης που είναι της ίδιας οικογένειας με ένα από τα εισερχόμενα μέτωπα, δεν θα διαχωρίζονται ακόμη

και εάν το μέγεθος τους είναι $> \delta$. Δηλαδή, εάν ένα μέτωπο αραίωσης σ_i που προέρχεται από κάποια βεντάλια αραίωσης της i -οικογένειας συγκρουστεί με ένα μέτωπο, τότε το εξερχόμενο μέτωπο $\sigma'_i > 0$ της i -οικογένειας θα είναι μόνο ένα μέτωπο αραίωσης και δεν θα διαχωριστεί σε πολλά μέτωπα αραίωσης που αυτά με τη σειρά τους θα αποτελούσαν μία βεντάλια αραίωσης.

Καταληκτικά, η κατασκευή μιας προσεγγιστικής λύσης u μέσω του αλγόριθμου ιχνηλάτησης μετώπου περιέχει 3 παραμέτρους:

- Μια μικρή σταθερά $\delta > 0$, η οποία ελέγχει το μέγιστο μέγεθος των μετώπων αραίωσης.
- Μια παράμετρο $\rho > 0$, που καθορίζει ποια λύση Riemann θα χρησιμοποιηθεί κάθε φορά.
- Μια σταθερή ταχύτητα $\hat{\lambda}$, αυστηρά μεγαλύτερη από όλες τις χαρακτηριστικές ταχύτητες.

Αυτό ολοκληρώνει την περιγραφή του αλγόριθμου που θα μας δώσει την front tracking προσεγγιστική λύση u . Για να αποδείξουμε το Θεώρημα 4.3 θα δείξουμε ότι αν η αρχική συνθήκη \bar{u} έχει αρκετά μικρή ολική διακύμανση, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, ο αλγόριθμος που περιγράψαμε πιο πάνω θα μας δίνει μια ε -προσεγγιστική front tracking λύση u_ε , με τη κατάλληλη επιλογή των δ, ρ (λαμβάνοντας υπόψη κάθε φορά το αντίστοιχο ε). Θα δείξουμε επίσης ότι αν η αρχική συνθήκη \bar{u} έχει αρκετά μικρή ολική διακύμανση, τότε η ε -προσεγγιστική front tracking λύση u_ε θα ορίζεται $\forall t \geq 0$. Παρατηρούμε ότι για να μπορούμε να ορίσουμε την ε -προσεγγιστική front tracking λύση $u_\varepsilon \forall t \geq 0$, θα πρέπει να ικανοποιούνται δύο συνθήκες. Αρχικά, θα πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι μπορούμε να επιλύσουμε όλα τα καινούργια προβλήματα Riemann που προσδιορίζονται από τις συγκρούσεις που γίνονται. Ως εκ τούτου, θα πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι η προσεγγιστική λύση έχει αρκετά μικρή ολική διακύμανση $\forall t \geq 0$, ούτως ώστε σε κάθε πρόβλημα Riemann οι αντίστοιχες τιμές u^-, u^+ να βρίσκονται αρκετά κοντά. Τέλος, θα πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι ο συνολικός αριθμός όλων των μετώπων είναι πεπερασμένος.

Παρατήρηση 4.1. Σύμφωνα με τον αλγόριθμο μας τα κρουστικά κύματα συμπίεσης ταξιδεύουν ακριβώς με τη ταχύτητα Rankine-Hugoniot: $\dot{x}_a = \lambda_{k_a}(u^+, u^-)$, ενώ τα μέτωπα αραιώσης με τη χαρακτηριστική ταχύτητα της δεξιάς τους τιμής: $\dot{x}_a = \lambda_{k_a}(u^+)$. Παρόλ' αυτά, θα επιτρέψουμε μια εξαίρεση σε αυτόν τον κανόνα στη περίπτωση που τρία ή περισσότερα μέτωπα συγκρούονται μεταξύ τους. Για να αποφύγουμε λοιπόν αυτή την περίπτωση θα πρέπει να αλληιάξουμε τη ταχύτητα τουλάχιστον ενός από τα εισερχόμενα μέτωπα. Φυσικά, η αλληλαγή αυτή που θα μας εξασφαλίσει ότι σε κάθε σύγκρουση θα συμμετέχουν μόνο δύο μέτωπα μπορεί να είναι αυθαίρετα μικρή και γι' αυτό στον ορισμό της ε -προσεγγιστικής front tracking λύσης επιτρέπουμε στα κρουστικά κύματα συμπίεσης να ταξιδεύουν με ταχύτητα \dot{x}_a τέτοια ώστε $|\dot{x}_a - \lambda_{k_a}(u^+, u^-)| \leq \varepsilon$ και στα μέτωπα αραιώσης με ταχύτητα \dot{x}_a τέτοια ώστε $|\dot{x}_a - \lambda_{k_a}(u^+)| \leq \varepsilon$.

4.3 Ύπαρξη ε -προσεγγιστικών front tracking λύσεων

Η απόδειξη του Θεωρήματος 4.3 θα δοθεί σε έξι βήματα.

Άποδειξη. Βήμα 1: **Ένα συμπαγές σύνολο.**

Ξεκινάμε διαλέγοντας $\delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε η κλειστή μπάλα $B(0, \delta_1)$ να συμπεριλαμβάνεται εξ ολοκλήρου στο Ω . Μπορούμε να υποθέσουμε ότι με πιθανή μείωση του δ_1 , κάθε πρόβλημα Riemann που προκύπτει μέσα από τον αλγόριθμο μας με δεδομένα $u_l, u_r \in B(0, \delta_1)$, έχει μοναδική λύση ομοιότητας με τιμές μέσα στο Ω . Αυτό ισχύει διότι τα δεδομένα u_l, u_r κάθε προβλήματος Riemann για τα οποία ισχύει $u_l, u_r \in B(0, \delta_1)$, θα βρίσκονται όσο κοντά θέλουμε λόγω του ότι επιλέξαμε αυθαίρετα μικρό το δ_1 . Έτσι, από το Θεώρημα 3.6, αφού u_l, u_r βρίσκονται ικανοποιητικά κοντά, μπορούμε να λύσουμε το αντίστοιχο πρόβλημα Riemann στα πλαίσια μιας λύσης ομοιότητας.

Βήμα 2: **Εκτιμήσεις μέσω των συγκρούσεων.**

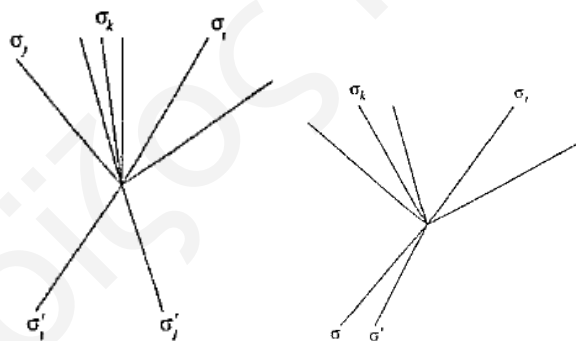
Κάθε φορά που συγκρούονται δύο μέτωπα, το καινούργιο πρόβλημα Riemann που προσδιορίζεται από τη σύγκρουση λύνεται στα πλαίσια μιας οικο-

γένειας εξερχόμενων μετώπων. Πιο κάτω θα διατυπώσουμε ένα λήμμα που μας παρέχει μια εκτίμηση της διαφοράς των μεγεθών μεταξύ των εισερχόμενων και των αντίστοιχων εξερχόμενων μετώπων. Η απόδειξη παραλείπεται.

Λήμμα 4.4. Έστω μια σύγκρουση μεταξύ δύο εισερχόμενων μετώπων.

1. Έστω σ'_i, σ'_j τα μεγέθη των δύο εισερχόμενων μετώπων, τα οποία ανήκουν στις διακριτές οικογένειες $i > j$ (Σχήμα 4.7). Η σύγκρουση τους ορίζει ένα πρόβλημα Riemann που η ακριβής του λύση αποτελείται από εξερχόμενα μέτωπα (ας πούμε n στο πλήθος) με αντίστοιχα μεγέθη $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. Τα μεγέθη των εξερχόμενων μετώπων συνδέονται με τα μεγέθη των εισερχόμενων μετώπων μέσω της πιο κάτω εκτίμησης:

$$|\sigma_i - \sigma'_i| + |\sigma_j - \sigma'_j| + \sum_{k \neq i, j} |\sigma_k| = \mathcal{O}(1)|\sigma'_i \sigma'_j|. \quad (4.3.1)$$



Σχήμα 4.7

2. Έστω σ, σ' τα μεγέθη των δύο εισερχόμενων μετώπων τα οποία ανήκουν και τα δύο στην i -χαρακτηριστική οικογένεια (Σχήμα 4.7). Όμοια με προηγουμένως, καλούμε $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ τα μεγέθη των εξερχόμενων μετώπων

που παράγονται από το αντίστοιχο πρόβλημα Riemann. Τότε ισχύει:

$$|\sigma_i - \sigma - \sigma'| + \sum_{k \neq i} |\sigma_k| = \mathcal{O}(1)|\sigma\sigma'|(|\sigma| + |\sigma'|). \quad (4.3.2)$$

3. Έστω σ, σ' τα μεγέθη των δύο εισερχόμενων μετώπων τα οποία ανήκουν στις οικογένειες i και j αντίστοιχα (Σχήμα 4.5). Έστω u_l, u_m και u_r η αριστερή, η μεσαία και η δεξιά τιμή αντίστοιχα πριν τη σύγκρουση, έτσι ώστε να ισχύει:

$$u_m = \Psi_i(\sigma)(u_l), \quad u_r = \Psi_j(\sigma')(u_m).$$

Χρησιμοποιώντας ξανά τη βοηθητική δεξιά τιμή \bar{u}_r , όπως την ορίσαμε στο (4.2.4):

$$\bar{u}_r = \begin{cases} \Psi_j(\sigma) \circ \Psi_{j'}(\sigma')(u_l), & \text{εάν } j > j' \\ \Psi_j(\sigma + \sigma')(u_l), & \text{εάν } j = j' \end{cases},$$

τότε ισχύει:

$$|\bar{u}_r - u_r| = \mathcal{O}|\sigma\sigma'|. \quad (4.3.3)$$

4. Έστω ένα αφύσικο μέτωπο που συνδέει τις τιμές u_l, u_m συγκρούεται από αριστερά με ένα φυσικό μέτωπο της i -οικογένειας μεγέθους σ , που συνδέει τις τιμές u_m, u_r (Σχήμα 4.6), έτσι ώστε να ισχύει:

$$u_r = \Psi_i(\sigma)(u_m).$$

Χρησιμοποιώντας ξανά τη βοηθητική δεξιά τιμή \bar{u}_r , όπως την ορίσαμε στο (4.2.5):

$$\bar{u}_r = \Psi_i(\sigma)(u_l),$$

τότε ισχύει:

$$|\bar{u}_r - u_r| - |u_m - u_l| = \mathcal{O}|\sigma||u_m - u_l|. \quad (4.3.4)$$

Όλες οι πιο πάνω ποσότητες παραμένουν ομοιόμορφα φραγμένες όσο ισχύει u_l, u_m και $u_r \in B(0, \delta_1)$.

Βήμα 3: Φράγμα στο Total Variation.

Έστω $u = u(t, x)$ η κατά τμήματα σταθερή front tracking προσεγγιστική λύση που κατασκευάστηκε μέσα από τον αλγόριθμο μας.

Θα αναζητήσουμε μια εκτίμηση της μορφής:

$$Tot.Var \{u(t, \cdot)\} \leq \delta_1, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.3.5)$$

Παρατηρούμε ότι εάν ισχύει η (4.3.5) $\forall t \geq 0$, τα δεδομένα u_l, u_r κάθε πρόβληματος Riemann που ορίζεται μέσα από τον αλγόριθμο μας, θα βρίσκονται μέσα στη μπάλα $B(0, \delta_1)$, δηλαδή $u_l, u_r \in B(0, \delta_1)$. Επειδή, το δ_1 έχει καθοριστεί αυθαίρετα μικρό τέτοιο ώστε κάθε πρόβλημα Riemann με δεδομένα $u_l, u_r \in B(0, \delta_1)$ να έχει ακριβή λύση ομοιότητας, θα μπορούμε να λύνουμε οποιοδήποτε πρόβλημα Riemann προκύπτει μέσα από τον αλγόριθμο. Με αυτόν τον τρόπο η προσεγγιστική λύση u μπορεί να επεκταθεί μετά από οποιαδήποτε χρονική στιγμή κατά την οποία συγκρούονται δύο μέτωπα. Υπενθυμίζουμε ότι όταν χρησιμοποιούμε την ακριβής λύση Riemann αρχικά βρίσκουμε την ακριβή λύση ομοιότητας και μετά εισάγουμε τις επιπρόσθετες τιμές $w_{i,j}$.

Για να μπορέσουμε να εξασφαλίσουμε ένα τέτοιο φράγμα της ολικής διακύμανσης (Total Variation) θα ορίσουμε δύο συναρτησοειδή, τα οποία θα οριστούν σε σχέση με τα μεγέθη των διαφορών μετώπων. Έστω $x_a, a = 1, \dots, N$, οι τοποθεσίες των μετώπων στη $u(t, \cdot)$, για σταθερή χρονική στιγμή t . Επιπρόσθετα, έστω $|\sigma_a|$ το μέγεθος του μετώπου στη θέση x_a . Στην περίπτωση ενός αφύσικου μετώπου παίρνουμε

$$|\sigma_a| = |u(t, x_a^+) - u(t, x_a^-)|.$$

Στα παρακάτω για λόγους ευκολίας θα λέμε ότι ένα αφύσικο μέτωπο ανήκει στη $(n + 1)$ -χαρακτηριστική οικογένεια.

Ορίζουμε τα δύο συναρτησοειδή ως ακολούθως:

$$V(t) = \sum_a |\sigma_a|, \quad (4.3.6)$$

το οποίο αντιστοιχεί στο συνολικό μέγεθος όλων των μετώπων της $u(t, \cdot)$ και

$$Q(t) = \sum_{(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}} |\sigma_\alpha \sigma_\beta|, \quad (4.3.7)$$

το οποίο αθροίζει το γινόμενο των μεγεθών των μετώπων που είναι πιθανόν να συγκρουστούν στο μέλλον. Η άθροιση στο (4.3.7) περιλαμβάνει τα ζεύγη του συνόλου \mathcal{A} το οποίο αποτελείται από ζεύγη που έχουν πιθανότητα να συγκρουστούν στο μέλλον. Πιο συγκεκριμένα το σύνολο \mathcal{A} περιλαμβάνει ζεύγη από δύο μέτωπα που βρίσκονται στα σημεία $x_\alpha < x_\beta$ και ανήκουν στις χαρακτηριστικές οικογένειες $k_\alpha, k_\beta \in \{1, \dots, n+1\}$ αντίστοιχα, εάν και μόνο εάν ισχύει $k_\alpha > k_\beta$ ή διαφορετικά ισχύει $k_\alpha = k_\beta$ και τουλάχιστον ένα από τα δύο μέτωπα είναι γνησίως μη-γραμμικό κρουστικό κύμα συμπίεσης (*genuinely non-linear shock*). Παρατηρούμε ότι είναι αναμενόμενο δύο μέτωπα $x_\alpha < x_\beta$ με $k_\alpha > k_\beta$ να έχουν πιθανότητα να συγκρουστούν στο μέλλον, αφού το σύστημα μας είναι αυστηρά υπερβολικό και επομένως ισχύει: $\lambda_1(u) < \lambda_2(u) < \dots < \lambda_n(u)$, $\forall u \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Αφού $\lambda_i(\cdot)$ ομαλή $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, αλλάζει ελάχιστα όταν αλλάζει λίγο το όρισμα της. Οπότε θα ισχύει $\lambda_{k_\alpha}(\cdot) > \lambda_{k_\beta}(\cdot)$, αφού τα ορίσματα των δύο θα βρίσκονται αρκετά κοντά λόγω του ότι θα ανήκουν και τα δύο στη μπάλα $B(0, \delta_1)$ λόγω της εκτίμησης (4.3.5) που θα εξασφαλίσουμε. Έτσι, τα δύο μέτωπα α και β θα έχουν πιθανότητα να συγκρουστούν στο μέλλον. Όταν $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$, θα λέμε ότι τα αντίστοιχα μέτωπα α και β προσεγγίζονται.

Τα δύο συναρτησοειδή ορίζονται μόνο σε χρονικές στιγμές κατά τις οποίες δεν γίνεται κάποια σύγκρουση μεταξύ δύο μετώπων. Επίσης, παρατηρούμε ότι τα δύο συναρτησοειδή αναφέρονται σε μια συγκεκριμένη προσεγγιστική *front tracking* λύση, που έχει προκύψει από συγκεκριμένα δ και ρ .

Έστω τώρα ότι τη χρονική στιγμή τ γίνεται μια σύγκρουση μεταξύ δύο μετώπων. Θέλουμε να εκτιμήσουμε τη διαφορά των τιμών των V και Q διά

μέσου του χρόνου τ . Αρχικά θα ασχοληθούμε με τη ποσότητα V . Έστω ότι το αντίστοιχο πρόβλημα Riemann που προσδιορίζεται από τη συγκεκριμένη σύγκρουση λύνεται στα πλαίσια της ακριβούς λύσης Riemann, τότε:

- Έστω ότι τα δύο εισερχόμενα μέτωπα ανήκουν στις διακριτές οικογένειες $i > j$ με αντίστοιχα μεγέθη σ'_i, σ'_j . Τότε ισχύει

$$V(\tau^+) = |\sigma_i| + |\sigma_j| + \sum_{k \neq i, j} |\sigma_k| + \sum_{\lambda} |\sigma_{\lambda}|$$

και

$$V(\tau^-) = |\sigma'_i| + |\sigma'_j| + \sum_{\lambda} |\sigma_{\lambda}|,$$

όπου σ_k είναι τα μεγέθη των εξερχόμενων μετώπων από τη σύγκρουση και σ_{λ} είναι τα μεγέθη των μετώπων που δεν συμμετέχουν στη συγκεκριμένη σύγκρουση. Παρατηρούμε ότι τα μεγέθη σ_{λ} δεν μεταβάλλονται δια μέσου της χρονικής στιγμής τ , λόγω του ότι δεν συμμετέχουν στη σύγκρουση που συμβαίνει τη χρονική στιγμή τ . Επίσης, λόγω της Παρατήρησης 4.1, η μικρή αλλαγή που επιτρέπουμε στη ταχύτητα των μετώπων μας εξασφαλίζει ότι τη χρονική στιγμή τ συμβαίνει το πολύ μια σύγκρουση. Επομένως, τη χρονική στιγμή τ αποκλείεται τα μέτωπα με μεγέθη σ_{λ} να συμμετέχουν σε οποιαδήποτε άλλη σύγκρουση. Άρα, ισχύει

$$\begin{aligned} V(\tau^+) - V(\tau^-) &= |\sigma_i| + |\sigma_j| + \sum_{k \neq i, j} |\sigma_k| - |\sigma'_i| - |\sigma'_j| \\ &\leq |\sigma_i - \sigma'_i| + |\sigma_j - \sigma'_j| + \sum_{k \neq i, j} |\sigma_k| \\ &= \mathcal{O}(1)|\sigma'_i \sigma'_j|. \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

Το βήμα (4.3.8) ισχύει λόγω της εκτίμησης (4.3.1) που εξασφαλίσαμε στο Λήμμα 4.4.

- Έστω ότι και τα δύο εισερχόμενα μέτωπα ανήκουν στην i -χαρακτηριστική

οικογένεια με μεγέθη σ, σ' . Τότε ισχύει ότι

$$V(\tau^+) = |\sigma_i| + \sum_{k \neq i} |\sigma_k| + \sum_{\lambda} |\sigma_{\lambda}|$$

και

$$V(\tau^-) = |\sigma| + |\sigma'| + \sum_{\lambda} |\sigma_{\lambda}|.$$

Επομένως, ισχύει:

$$\begin{aligned} V(\tau^+) - V(\tau^-) &= |\sigma_i| + \sum_{k \neq i} |\sigma_k| - |\sigma| - |\sigma'| \\ &\leq |\sigma_i - \sigma| + \sum_{k \neq i} |\sigma_k| - |\sigma'| \\ &\leq |\sigma_i - \sigma - \sigma'| + \sum_{k \neq i} |\sigma_k| \\ &= \mathcal{O}(1)|\sigma\sigma'|(|\sigma| + |\sigma'|). \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

Το βήμα (4.3.9) ισχύει λόγω της εκτίμησης (4.3.2) που εξασφαλίσαμε στο Λήμμα 4.4. Εφόσον, θα εξασφαλίσουμε τη εκτίμηση (4.3.5): $Tot.Var \{u(t, \cdot)\} \leq \delta_1, \forall t \geq 0$, όπου δ_1 θα είναι αυθαίρετα μικρό, σίγουρα θα ισχύει $|\sigma| + |\sigma'| < 1$.

Οπότε από τη (4.3.9) ισχύει

$$V(\tau^+) - V(\tau^-) = \mathcal{O}(1)|\sigma\sigma'|. \quad (4.3.10)$$

Έστω τώρα ότι το αντίστοιχο πρόβλημα Riemann που ορίζεται από τη σύγκρουση δύο μετώπων τη χρονική στιγμή τ λύνεται στα πλαίσια της απλοποιημένης λύσης Riemann, τότε:

- Έστω ότι τα δύο εισερχόμενα μέτωπα είναι φυσικά και ανήκουν στις διακριτές οικογένειες i, j με αντίστοιχα μεγέθη $|\sigma|, |\sigma'|$ και ένα αφύσικο

μέτωπο να προκύπτει μετά τη σύγκρουση. Τότε ισχύει ότι

$$V(\tau^+) = |\sigma| + |\sigma'| + |\bar{u}_r - u_r| + \sum_{\lambda} |\sigma_{\lambda}|$$

και

$$V(\tau^-) = |\sigma| + |\sigma'| + \sum_{\lambda} |\sigma_{\lambda}|.$$

Επομένως, ισχύει

$$\begin{aligned} V(\tau^+) - V(\tau^-) &= |\bar{u}_r - u_r| \\ &= \mathcal{O}(1)|\sigma\sigma'|. \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

Το βήμα (4.3.11) ισχύει λόγω της εκτίμησης (4.3.3) που εξασφαλίσαμε στο Λήμμα 4.4.

- Έστω ότι τα δύο εισερχόμενα μέτωπα είναι φυσικά και ανήκουν και τα δύο στην i -χαρακτηριστική οικογένεια με μεγέθη σ , σ' και ένα αφύσικο μέτωπο να προκύπτει μετά τη σύγκρουση. Τότε ισχύει

$$V(\tau^+) = |\sigma + \sigma'| + |\bar{u}_r - u_r| + \sum_{\lambda} |\sigma_{\lambda}|$$

και

$$V(\tau^-) = |\sigma| + |\sigma'| + \sum_{\lambda} |\sigma_{\lambda}|.$$

Επομένως, ισχύει

$$\begin{aligned} V(\tau^+) - V(\tau^-) &= |\sigma + \sigma'| - |\sigma| - |\sigma'| + |\bar{u}_r - u_r| \\ &\leq |\sigma| + |\sigma'| - |\sigma| - |\sigma'| + |\bar{u}_r - u_r| \\ &= |\bar{u}_r - u_r| \\ &= \mathcal{O}(1)|\sigma\sigma'|. \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

Το βήμα (4.3.12) ισχύει λόγω της εκτίμησης (4.3.3) που εξασφαλίσαμε

στο Λήμμα 4.4.

- Έστω ότι ένα αφύσικο μέτωπο που συνδέει τις τιμές u_l , u_m , δηλαδή μεγέθους $|u_m - u_l|$, συγκρούεται από αριστερά με ένα φυσικό μέτωπο της i -οικογένειας που συνδέει τις τιμές u_m , u_r μεγέθους σ . Τότε ισχύει

$$V(\tau^+) = |\sigma| + |\bar{u}_r - u_r| + \sum_{\lambda} |\sigma_{\lambda}|$$

και

$$V(\tau^-) = |\sigma| + |u_m - u_l| + \sum_{\lambda} |\sigma_{\lambda}|.$$

Επομένως, ισχύει

$$\begin{aligned} V(\tau^+) - V(\tau^-) &= |\bar{u}_r - u_r| - |u_m - u_l| \\ &= \mathcal{O}(1)|\sigma||u_m - u_l|. \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

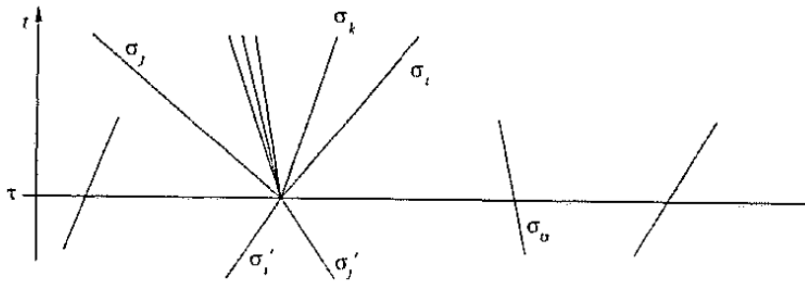
Το βήμα (4.3.13) ισχύει λόγω της εκτίμησης (4.3.4) που εξασφαλίσαμε στο Λήμμα 4.4.

Άρα καταληκτικά, αν τη χρονική στιγμή τ γίνεται μια σύγκρουση μεταξύ δύο εισερχόμενων μετώπων (οποιουδήποτε είδους) με μεγέθη $|\sigma|$, $|\sigma'|$ ισχύει

$$V(\tau^+) - V(\tau^-) = \mathcal{O}(1)|\sigma\sigma'|. \quad (4.3.14)$$

Τώρα θα μελετήσουμε τη μεταβολή της ποσότητας Q διά μέσου της χρονικής στιγμής τ , όπου γίνεται μια σύγκρουση μεταξύ δύο μετώπων. Έστω ότι λύνουμε στα πλαίσια της ακριβούς λύσης Riemann το αντίστοιχο πρόβλημα Riemann που προσδιορίζεται από τη σύγκρουση που συμβαίνει τη χρονική στιγμή τ στη θέση (\bar{x}, t) . Έστω ότι τα δύο εισερχόμενα μέτωπα ανήκουν στις διακριτές οικογένειες $i > j$ με αντίστοιχα μεγέθη σ'_i , σ'_j και έστω $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ τα μεγέθη των εξερχόμενων μετώπων (Σχήμα 4.8).

Εφόσον, θα πάρουμε αρχική συνθήκη $u(0, \cdot)$ με μικρή ολική διακύμανση ($Tot.Var\{u(0, \cdot)\} \leq \delta_0$), όλα τα μέτωπα που θα προκύψουν από τον αλγόριθμο μας θα έχουν μικρό μέγεθος, λόγω των εκτιμήσεων που έχουμε εξασφα-



Σχήμα 4.8

λίσει στο Λήμμα 4.4. Έτσι, από την εκτίμηση :

$$|\sigma_i - \sigma'_i| + |\sigma_j - \sigma'_j| + \sum_{k \neq i, j} |\sigma_k| \stackrel{(4.3.1)}{=} \mathcal{O}(1)|\sigma'_i \sigma'_j|$$

ισχύει ότι

$$|\sigma_i - \sigma'_i| = \mathcal{O}(1)|\sigma'_i \sigma'_j|,$$

όπου $|\sigma'_i \sigma'_j|$ είναι μια μικρή ποσότητα. Άρα σ_i, σ'_i θα έχουν το ίδιο πρόσημο. Ομοίως σ_j, σ'_j θα έχουν το ίδιο πρόσημο.

Ως εκ τούτου, τα μέτωπα σ_β , με $\beta \in B$, που δεν συμμετείχαν στη σύγκρουση και προσεγγίζουν το σ'_i πριν τη χρονική στιγμή τ , είναι τα ίδια μέτωπα που μετά από τη χρονική στιγμή τ προσεγγίζουν πάλι το σ_i . Αυτό ισχύει διότι :

1. Αν ισχύει $\bar{x} < x_\beta$ και $i > k_\beta$, όπου k_β η χαρακτηριστική οικογένεια των σ_β , τότε ακριβώς μετά τη χρονική στιγμή τ θα εξακολουθεί να ισχύει ότι $x_i < x_\beta$ και τετριμμένα $i > k_\beta$. Άρα το μέτωπο σ_i θα προσεγγίζεται από τα ίδια σ_β .
2. Αν ισχύει $\bar{x} < x_\beta$, $i = k_\beta$ και τουλάχιστον ένα από τα δύο πριν τη χρονική στιγμή τ ήταν γνησίως μη-γραμμικό κρουστικό κύμα συμπίεσης (δηλ. $\sigma'_i < 0$ ή $\sigma_\beta < 0$), τότε μετά τη χρονική στιγμή τ θα εξακολουθεί να ισχύει τετριμμένα ότι $x_i < x_\beta$, $i = k_\beta$. Επιπρόσθετα, τουλάχιστον ένα από τα σ_i, σ_β θα είναι γνησίως μη-γραμμικό κρουστικό κύμα συμπίεσης (δηλ. $\sigma_i < 0$ ή $\sigma_\beta < 0$), αφού σ_i και σ'_i έχουν το ίδιο πρόσημο. Άρα και πάλι το μέτωπο σ_i θα προσεγγίζεται από τα ίδια σ_β .

Ομοίως, τα μέτωπα σ_γ , με $\gamma \in \Gamma$, που δεν συμμετείχαν στη σύγκρουση και προσεγγίζουν το σ'_j πριν τη χρονική στιγμή τ , είναι τα ίδια μέτωπα που μετά τη χρονική στιγμή τ συνεχίζουν να προσεγγίζουν το σ_j .

Επιπρόσθετα, μετά τη χρονική στιγμή τ η ποσότητα Q θα περιέχει κάποιους καινούργιους όρους της μορφής $|\sigma_k \sigma_a|$ με $k \neq \{i, j\}$, όπου σ_k τα μεγέθη των εξερχόμενων μετώπων από τη σύγκρουση και $(k, a) \in \mathcal{A}$ (Σχήμα 4.8). Επίσης, παρατηρούμε ότι μετά τη χρονική στιγμή τ τα καινούργια μέτωπα σ_i , σ_j δεν προσεγγίζουν το ένα το άλλο, αφού έχουν ήδη συγκρουστεί. Επομένως, ισχύει

$$Q(\tau^+) = \sum_{(k,a) \in \mathcal{A}, k \neq i, j} |\sigma_k \sigma_a| + \sum_{\beta \in B, \beta \neq j} |\sigma_i \sigma_\beta| + \sum_{\gamma \in \Gamma, \gamma \neq i} |\sigma_j \sigma_\gamma| + \sum_{(\lambda, \mu) \in \Delta} |\sigma_\lambda \sigma_\mu|$$

και

$$Q(\tau^-) = |\sigma'_i \sigma'_j| + \sum_{\beta \in B, \beta \neq j} |\sigma'_i \sigma_\beta| + \sum_{\gamma \in \Gamma, \gamma \neq i} |\sigma'_j \sigma_\gamma| + \sum_{(\lambda, \mu) \in \Delta} |\sigma_\lambda \sigma_\mu|,$$

όπου το B περιλαμβάνει όλα τα μέτωπα μεγέθους σ_β που προσεγγίζουν το σ'_i με $\beta \neq j$ και αυτά παραμένουν τα ίδια που προσεγγίζουν το σ_i μετά τη σύγκρουση των σ'_i και σ'_j . Αντίστοιχα, το Γ περιλαμβάνει τα μέτωπα σ_γ με $\gamma \neq i$ που προσεγγίζουν το σ'_j τη χρονική στιγμή τ^- και το σ_j τη χρονική στιγμή τ^+ . Επιπρόσθετα, το Δ περιλαμβάνει όλα τα μέτωπα μεγέθους σ_λ και σ_μ που δεν συμμετέχουν στη σύγκρουση και προσεγγίζονται.

Άρα, έχουμε

$$\begin{aligned}
Q(\tau^+) - Q(\tau^-) &= \sum_{(k,a) \in A, k \neq i, j} |\sigma_k \sigma_a| + (|\sigma_i| - |\sigma'_i|) \sum_{\beta \in B, \beta \neq j} |\sigma_\beta| \\
&\quad + (|\sigma_j| - |\sigma'_j|) \sum_{\gamma \in \Gamma, \gamma \neq i} |\sigma_\gamma| - |\sigma'_i \sigma'_j| \\
&\leq \sum_{k \neq i, j} |\sigma_k| \sum_a |\sigma_a| + (|\sigma_i - \sigma'_i|) \sum_{\beta \in B, \beta \neq j} |\sigma_\beta| \\
&\quad + (|\sigma_j - \sigma'_j|) \sum_{\gamma \in \Gamma, \gamma \neq i} |\sigma_\gamma| - |\sigma'_i \sigma'_j| \\
&\stackrel{(4.3.1)}{=} \mathcal{O}(1) |\sigma'_i \sigma'_j| \sum_a |\sigma_a| + \mathcal{O}(1) |\sigma'_i \sigma'_j| \sum_{\beta \in B, \beta \neq j} |\sigma_\beta| \\
&\quad + \mathcal{O}(1) |\sigma'_i \sigma'_j| \sum_{\gamma \in \Gamma, \gamma \neq i} |\sigma_\gamma| - |\sigma'_i \sigma'_j|.
\end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε

$$Q(\tau^+) - Q(\tau^-) = -|\sigma'_i \sigma'_j| + \mathcal{O}(1) |\sigma'_i \sigma'_j| \left(\sum_a |\sigma_a| + \sum_{\beta \in B, \beta \neq j} |\sigma_\beta| + \sum_{\gamma \in \Gamma, \gamma \neq i} |\sigma_\gamma| \right).$$

Εφόσον, έχουμε

$$\sum_a |\sigma_a| + \sum_{\beta \in B, \beta \neq j} |\sigma_\beta| + \sum_{\gamma \in \Gamma, \gamma \neq i} |\sigma_\gamma| = \mathcal{O}(1) V(\tau^-),$$

τότε ισχύει

$$Q(\tau^+) - Q(\tau^-) = -|\sigma'_i \sigma'_j| + \mathcal{O}(1) |\sigma'_i \sigma'_j| V(\tau^-).$$

Διαλέγουμε μικρό $\delta_2 > 0$ τέτοιο ώστε:

$$\delta_2 \leq \delta_1 \leq \frac{1}{2C}, \quad \forall C \text{ που αντιστοιχεί σε οποιαδήποτε σύγκρουση.}$$

Εάν το $V(\tau^-)$, όπου τ^- η χρονική στιγμή πριν μια οποιαδήποτε σύγκρουση,

παραμένει ικανοποιητικά μικρό, δηλαδή $V(\tau^-) \leq \delta_2$, τότε ισχύει

$$\begin{aligned} Q(\tau^+) - Q(\tau^-) &\leq -|\sigma\sigma'| + C|\sigma\sigma'| \frac{1}{2C} \\ &= -\frac{|\sigma\sigma'|}{2}. \end{aligned}$$

Επομένως, εάν τ είναι οποιαδήποτε χρονική στιγμή κατά την οποία γίνεται μια σύγκρουση με εισερχόμενα μέτωπα μεγέθους σ , σ' και εάν ισχύει ότι $V(\tau^-) \leq \delta_2$, τότε ισχύει

$$Q(\tau^+) - Q(\tau^-) \leq -\frac{|\sigma\sigma'|}{2}. \quad (4.3.15)$$

Επιπρόσθετα, εάν $V(\tau^-) \leq \delta_2$, μπορούμε να διαλέξουμε μια σταθερά $C_0 > 0$ αρκετά μεγάλη, τέτοια ώστε η ποσότητα:

$$\Upsilon(t) = V(t) + C_0 Q(t),$$

να μειώνεται διά μέσου οποιασδήποτε χρονικής στιγμής τ κατά την οποία συμβαίνει μια σύγκρουση. Αυτό θα ισχύει διότι

$$\Upsilon(\tau^+) - \Upsilon(\tau^-) = V(\tau^+) - V(\tau^-) + C_0 [Q(\tau^+) - Q(\tau^-)].$$

Από τη σχέση (4.3.14) γνωρίζουμε ότι ισχύει $V(\tau^+) - V(\tau^-) = \mathcal{O}(1)|\sigma\sigma'|$. Επίσης, εφόσον υποθέτουμε ότι ισχύει $V(\tau^-) \leq \delta_2$, θα ισχύει η (4.3.15): $Q(\tau^+) - Q(\tau^-) \leq -\frac{|\sigma\sigma'|}{2}$.

Επομένως, $\Upsilon(\tau^+) - \Upsilon(\tau^-) \leq C|\sigma\sigma'| + C_0[-\frac{|\sigma\sigma'|}{2}]$ για οποιαδήποτε σταθερά C που αντιστοιχά σε οποιαδήποτε σύγκρουση. Έτσι, για ικανοποιητικά μεγάλη σταθερά C_0 θα ισχύει

$$\Upsilon(\tau^+) - \Upsilon(\tau^-) \leq 0$$

και άρα θα ισχύει

$$\Upsilon(\tau^+) \leq \Upsilon(\tau^-).$$

Έστω τώρα $C_1 > 0$ μια σταθερά τέτοια ώστε να ισχύει:

$$\frac{1}{C_1} Tot.Var.\{u(t, \cdot)\} \leq V(t) \leq C_1 Tot.Var.\{u(t, \cdot)\}. \quad (4.3.16)$$

Άρα ισχύει

$$Tot.Var.\{u(t, \cdot)\} \leq C_1^2 Tot.Var.\{u(t, \cdot)\}.$$

Άρα, αναγκαστικά ισχύει $C_1 \geq 1$.

Επίσης, παρατηρούμε ότι:

$$Q(t) \leq V^2(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (4.3.17)$$

Αυτό ισχύει διότι

$$Q(t) = \sum_{(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}} |\sigma_\alpha \sigma_\beta|,$$

όπου το άθροισμα περιορίζεται μόνο στα γινόμενα των μεγεθών των μετώπων που τη χρονική στιγμή t έχουν πιθανότητα να συγκρουστούν στο μέλλον, ενώ

$$V^2(t) = \sum_a |\sigma_a| \sum_a |\sigma_a|,$$

όπου αθροίζουμε όλα τα γινόμενα των μεγεθών των μετώπων τη χρονική στιγμή t .

Έστω ότι $\delta_3 > 0$ είναι τόσο μικρό ώστε:

$$C_1 [C_1^2 \delta_3 + C_0 C_1^3 \delta_3^2] \leq \delta_2. \quad (4.3.18)$$

Θέτοντας $w = C_1^2 \delta_3 + C_0 C_1^3 \delta_3^2$, ισχύει

$$C_1 w \leq \delta_2. \quad (4.3.19)$$

Υποθέτουμε επίσης ότι:

$$Tot.Var.\{u(0, \cdot)\} \leq \delta_3. \quad (4.3.20)$$

Επειδή, μέχρι τη χρονική στιγμή τ_1^- δεν έχει συμβεί ακόμα κάποια σύγκρουση, τα μέτωπα δεν έχουν αλλάξει, και γι' αυτό ισχύει

$$Tot.Var.\{u(0, \cdot)\} = Tot.Var.\{u(\tau_1^-, \cdot)\} \leq \delta_3.$$

Από τις σχέσεις (4.3.16), (4.3.18) έχουμε

$$V(\tau_1^-) \leq C_1 \delta_3 \stackrel{C_1 \geq 1}{\leq} C_1^3 \delta_3 \leq \delta_2.$$

Εφόσον, ισχύει $V(\tau_1^-) \leq \delta_2$ και η C_0 είναι αρκετά μεγάλη σταθερά, η ποσότητα Υ θα μειωθεί διά μέσου της πρώτης σύγκρουσης.

Άρα από τις σχέσεις (4.3.16), (4.3.17) ισχύει

$$\begin{aligned} Tot.Var.\{u(\tau_1^+, \cdot)\} &\leq C_1 V(\tau_1^+) \\ &\leq C_1 [V(\tau_1^+) + C_0 Q(\tau_1^+)] = C_1 \Upsilon(\tau_1^+) \\ &\leq C_1 \Upsilon(\tau_1^-) = C_1 \Upsilon(0) \\ &= C_1 [V(0) + C_0 Q(0)] \\ &\leq C_1 [V(0) + C_0 V^2(0)] \\ &\leq C_1 [C_1 Tot.Var.\{u(0, \cdot)\} + C_0 (C_1 Tot.Var.\{u(0, \cdot)\})^2] \\ &\stackrel{(4.3.20)}{\leq} C_1 [C_1 \delta_3 + C_0 (C_1 \delta_3)^2] = C_1^2 \delta_3 + C_0 C_1^3 \delta_3^2 = w. \end{aligned}$$

Άρα ισχύει $Tot.Var.\{u(\tau_1^+, \cdot)\} \leq w$. Εφόσον μέχρι τη χρονική στιγμή τ_2^- (η χρονική στιγμή λίγο πριν από τη 2η σύγκρουση) δεν γίνεται άλλη σύγκρουση, τα μέτωπα δεν αλλάζουν και γι' αυτό ισχύει

$$Tot.Var.\{u(\tau_1^+, \cdot)\} = Tot.Var.\{u(\tau_2^-, \cdot)\} \leq w.$$

Από την σχέση (4.3.16) ισχύει

$$\begin{aligned} V(\tau_2^-) &\leq C_1 \text{Tot.Var.}\{u(\tau_2^-, \cdot)\} \\ &\leq C_1 w \stackrel{(4.3.19)}{\leq} \delta_2 \end{aligned}$$

και επομένως με τον ίδιο τρόπο η ποσότητα Υ θα μειωθεί διά μέσου της δεύτερης σύγκρουσης. Άρα ισχύει

$$\begin{aligned} \text{Tot.Var.}\{u(\tau_2^+, \cdot)\} &\leq C_1 V(\tau_2^+) \\ &\leq C_1 \Upsilon(\tau_2^+) \leq C_1 \Upsilon(\tau_2^-) \\ &= C_1 \Upsilon(\tau_1^+) \leq C_1 \Upsilon(\tau_1^-) \\ &= C_1 \Upsilon(0) \leq w. \end{aligned}$$

Έτσι, δουλεύοντας επαγωγικά με τον ίδιο τρόπο, παίρνουμε

$$\text{Tot.Var.}\{u(t, \cdot)\} \leq w, \quad \forall t \geq 0.$$

Άρα, ισχύει

$$\text{Tot.Var.}\{u(t, \cdot)\} \leq w \stackrel{C_1 \geq 1}{\leq} C_1 w \stackrel{(4.3.19)}{\leq} \delta_2.$$

Εφόσον $\delta_2 \leq \delta_1$, ισχύει

$$\text{Tot.Var.}\{u(t, \cdot)\} \leq \delta_1, \quad \forall t \geq 0.$$

Επομένως, εξασφαλίζουμε το φράγμα που θέλαμε ούτως ώστε να μπορούμε να επιλύσουμε οποιοδήποτε πρόβλημα Riemann το οποίο ορίζεται από τις συγκρούσεις που προκύπτουν μέσα από τον αλγόριθμο μας. Με αυτόν τον τρόπο, η προσεγγιστική λύση u θα μπορεί να επεκταθεί μετά από οποιαδήποτε χρονική στιγμή κατά την οποία συγκρούονται δύο μέτωπα.

Βήμα 4: **Φράγμα στον αριθμό των μετώπων.**

Για να αποδείξουμε ότι ο συνολικός αριθμός των μετώπων παραμένει πεπερασμένος, υπενθυμίζουμε ότι η ακριβής λύση Riemann χρησιμοποιείται

όταν τα μεγέθη σ, σ' των εισερχόμενων μετώπων ικανοποιούν $|\sigma\sigma'| \geq \rho$. Θα δείξουμε ότι η ακριβής λύση Riemann μπορεί να χρησιμοποιηθεί πεπερασμένες το πλήθος φορές.

Έστω ότι τη χρονική στιγμή τ γίνεται μια σύγκρουση και ότι το πρόβλημα Riemann που προσδιορίζεται από τη συγκεκριμένη σύγκρουση θα λυθεί στα πλαίσια της ακριβούς λύσης Riemann. Έστω ότι ισχύει $Tot.Var.\{u(0, \cdot)\} \leq \delta_3$. Τότε ισχύει $V(\tau^-) \leq \delta_2$ και άρα από την (4.3.15) ισχύει

$$Q(\tau^+) - Q(\tau^-) \leq -\frac{|\sigma\sigma'|}{2}.$$

Εφόσον, θα χρησιμοποιηθεί η ακριβής λύση Riemann έχουμε

$$|\sigma\sigma'| \geq \rho.$$

Επομένως, ισχύει

$$Q(\tau^+) - Q(\tau^-) \leq -\frac{\rho}{2}, \quad (4.3.21)$$

σε κάθε σύγκρουση όπου θα χρησιμοποιηθεί η ακριβής λύση Riemann.

Έστω τ_1^- η χρονική στιγμή λίγο πριν να συμβεί η πρώτη σύγκρουση στην οποία θα χρησιμοποιηθεί η ακριβής λύση Riemann.

Ισχύει ότι $Q(0) \geq Q(\tau_1^-)$, διότι:

- Αν πριν τη χρονική στιγμή τ_1^- δεν προηγήθηκε κάποια σύγκρουση στην οποία χρησιμοποιήθηκε η απλοποιημένη λύση Riemann, τότε $Q(0) = Q(\tau_1^-)$ εφόσον μέχρι τη χρονική στιγμή τ_1^- δεν έχει γίνει κάποια σύγκρουση και δεν έχουν αλλάξει τα μέτωπα.
- Αν πριν τη χρονική στιγμή τ_1^- προηγήθηκε τουλάχιστον μια σύγκρουση στην οποία χρησιμοποιήθηκε η απλοποιημένη λύση Riemann, τότε ισχύει $Q(0) > Q(\tau_1^-)$, επειδή από τη (4.3.15) ισχύει: $Q(\tau^+) - Q(\tau^-) \leq -\frac{|\sigma\sigma'|}{2} < 0$, δηλαδή η ποσότητα Q μειώνεται διά μέσου οποιασδήποτε σύγκρουσης.

Από τη (4.3.21) ισχύει

$$\begin{aligned} Q(\tau_1^+) &\leq Q(\tau_1^-) - \frac{\rho}{2}, \\ Q(\tau_1^+) &\leq Q(0) - \frac{\rho}{2}. \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

Έστω τ_2^- η χρονική στιγμή λίγο πριν να συμβεί η δεύτερη σύγκρουση στην οποία θα χρησιμοποιηθεί η ακριβής λύση Riemann.

Όμοια με πριν, ισχύει ότι: $Q(\tau_1^+) \geq Q(\tau_2^-)$.

Από τη (4.3.21) ισχύει

$$\begin{aligned} Q(\tau_2^+) &\leq Q(\tau_2^-) - \frac{\rho}{2} \\ &\leq Q(\tau_1^+) - \frac{\rho}{2} \\ &\stackrel{(4.3.22)}{\leq} Q(0) - \frac{\rho}{2} - \frac{\rho}{2}. \end{aligned}$$

Μέχρι στιγμής χρησιμοποιήσαμε δύο φορές την ακριβή λύση Riemann. Παρατηρούμε ότι δεν μπορούμε να κάνουμε αυτή τη διαδικασία άπειρες φορές γιατί θα αφαιρείται άπειρες φορές το $\frac{\rho}{2}$ από το $Q(0)$ και έτσι σε κάποια χρονική στιγμή η ποσότητα Q θα γίνει αρνητική, γεγονός που μας οδηγεί σε άτοπο. Παρατηρούμε ότι εξ' ορισμού η Q είναι θετική ποσότητα. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι η ακριβής λύση Riemann μπορεί να χρησιμοποιηθεί λιγότερο από $m = \lceil \frac{2Q(0)}{\rho} \rceil + 1$ φορές, γιατί αν χρησιμοποιηθεί ακριβώς $\lceil \frac{2Q(0)}{\rho} \rceil + 1$ φορές, θα έχουμε

$$\begin{aligned} Q(\tau_m^+) &< Q(0) - \frac{2Q(0)}{\rho} \frac{\rho}{2} \\ &= Q(0) - Q(0) = 0. \end{aligned}$$

Επειδή λοιπόν, καινούργια φυσικά μέτωπα δημιουργούνται σε $< \lceil \frac{2Q(0)}{\rho} \rceil + 1$ σημεία σύγκρουσης, ο αριθμός των φυσικών μετώπων είναι πεπερασμένος. Ακολουθώντας, εφόσον ένα καινούργιο αφύσικο μέτωπο παράγεται όταν δύο φυσικά μέτωπα συγκρουστούν και δύο φυσικά μέτωπα μπορούν να διασταυρωθούν μόνο μια φορά, έπεται ότι και ο αριθμός των αφύσικων μετώπων είναι πεπερασμένος το πλήθος. Επομένως, εάν ισχύει ότι $Tot.Var.\{u(0, \cdot)\} \leq \delta_3$,

τότε ο συνολικός αριθμός όλων των μετώπων που προκύπτουν μέσα από τον αλγόριθμο μας είναι πεπερασμένος το πλήθος. Επειδή και ο αριθμός των αφύσικων μετώπων είναι πεπερασμένος, η απλοποιημένη λύση Riemann θα χρησιμοποιηθεί και αυτή πεπερασμένες το πλήθος φορές. Άρα, ο αλγόριθμος μας θα ολοκληρωθεί μετά από ένα πεπερασμένο αριθμό βημάτων και έτσι θα είναι καλά ορισμένος.

Στα πιο πάνω βήματα 1-4 έχουμε αποδείξει ότι εάν $Tot.Var.\{u(0, \cdot)\} \leq \delta_3$, τότε $Tot.Var.\{u(t, \cdot)\} \leq \delta_1, \forall t \geq 0$, και έτσι μπορούμε να επιλύσουμε οποιοδήποτε πρόβλημα Riemann προκύπτει από τις συγκρούσεις μετώπων μέσα στον αλγόριθμο. Επιπρόσθετα, αποδείξαμε ότι ο αριθμός των μετώπων είναι πεπερασμένος, γεγονός που καθιστά τον αλγόριθμο μας καλά ορισμένο. Άρα, έχουμε δείξει ότι για οποιοδήποτε τιμές δ, ρ , που θα προσδιοριστούν στη συνέχεια, εάν ισχύει $Tot.Var.\{u(0, \cdot)\} \leq \delta_3$, τότε μπορεί να κατασκευαστεί μια προσεγγιστική front tracking λύση u που θα είναι ορισμένη $\forall t \geq 0$.

Υπενθυμίζουμε ότι στο Θεώρημα 4.3 υποθέτουμε ότι έχουμε μια αρχική συνθήκη $\bar{u} \in L^1$ που ικανοποιεί $Tot.Var.\{\bar{u}\} \leq \delta_0$. Στον αλγόριθμο μας επιλέγουμε ως αρχική συνθήκη την τμηματικά σταθερή $u(0, \cdot)$ που προσεγγίζει την αρχική συνθήκη \bar{u} και για την οποία ισχύει

$$Tot.Var.\{u(0, \cdot)\} \leq Tot.Var.\{\bar{u}\} \leq \delta_0.$$

Έτσι, διαλέγουμε $\delta_0 > 0$ αρκετά μικρό ώστε $\delta_0 \leq \delta_3$ και ούτως ώστε να ισχύει

$$Tot.Var.\{u(0, \cdot)\} \leq Tot.Var.\{\bar{u}\} \leq \delta_0 \leq \delta_3$$

και επομένως να ισχύουν τα πιο πάνω αποτελέσματα.

Στα επόμενα δύο βήματα θα δείξουμε ότι, εάν $Tot.Var.\{\bar{u}\} \leq \delta_0$, για οποιοδήποτε δοσμένο $\varepsilon > 0$, εάν στην αρχή του αλγόριθμου επιλεγούν ικανοποιητικά μικρές οι παραμέτροι δ, ρ (λαμβάνοντας υπόψη κάθε φορά το αντίστοιχο ε), τότε το μέγεθος του κάθε μετώπου αραίωσης θα ικανοποιεί $\sigma_a \in (0, \varepsilon]$ και το συνολικό μέγεθος των αφύσικων μετώπων θα είναι $\leq \varepsilon$. Ως αποτέλεσμα, η προσεγγιστική front tracking λύση u που κατασκευάστηκε με τον αλγόριθμο μας, θα είναι μια ε -προσεγγιστική front tracking λύση. Αυτά

Θα είναι τα επόμενα δύο βήματα που θα ολοκληρώσουν την απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.

Βήμα 5: Το μέγεθος κάθε μετώπου αραίωσης είναι μικρό.

Ο στόχος μας σε αυτό το βήμα είναι να δείξουμε ότι για μια σταθερά C_2 , το μέγεθος κάθε μετώπου αραίωσης ικανοποιεί:

$$|\sigma_a| \leq C_2\delta, \quad a \in \mathcal{R}. \quad (4.3.23)$$

Αν καταφέρουμε να εξασφαλίσουμε ένα τέτοιο φράγμα, τότε για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ θα διαλεγούμε το δ αρκετά μικρό τέτοιο ώστε να ισχύει

$$|\sigma_a| \leq C_2\delta \leq \varepsilon.$$

Έτσι, θα έχουμε ότι κάθε μέτωπο αραίωσης θα έχει μέγεθος $\sigma_a \in (0, \varepsilon]$ όπως ακριβώς απαιτείται στον ορισμό της ε -προσεγγιστικής front tracking λύσης.

Έστω ότι τη χρονική στιγμή t_0 δημιουργείται ένα καινούργιο μέτωπο αραίωσης. Με την έννοια καινούργιο εννοούμε ότι δεν συμμετείχε κάποιο μέτωπο αραίωσης της ίδιας οικογένειας στη σύγκρουση από την οποία προέκυψε. Εκ κατασκευής, γνωρίζουμε ότι ισχύει $\sigma_a(t_0) \in (0, \delta]$. Ας δούμε πως αλλάζει το μέγεθος ενός καινούργιου μετώπου αραίωσης σε μεταγενέστερους χρόνους, μέσα από τα διάφορα είδη σύγκρουσης που μπορεί να προκύψουν.

- Δύο μέτωπα αραίωσης της ίδιας οικογένειας μεγέθους σ, σ' όταν συγκρουστούν απλά ενώνονται και έτσι το μοναδικό εξερχόμενο μέτωπο είναι ένα μέτωπο αραίωσης της ίδιας οικογένειας μεγέθους $\sigma + \sigma' < 2\delta$.
- Έστω τώρα ένα μέτωπο αραίωσης μεγέθους $\sigma > 0$, συγκρούεται με ένα κρουστικό κύμα μεγέθους $\sigma' < 0$ της ίδιας οικογένειας και χρησιμοποιούμε την ακριβή λύση Riemann. Τότε από το Λήμμα 4.4, το μέγεθος σ_i του εξερχόμενου μετώπου της i -οικογένειας θα ικανοποιεί: $|\sigma_i - \sigma - \sigma'| = \mathcal{O}(1)|\sigma\sigma'|$. Εφόσον $|\sigma\sigma'|$ είναι πολύ μικρή ποσότητα, το σ_i θα είναι σχεδόν ίσο με το $\sigma + \sigma'$ και αφού $\sigma' < 0$, θα ισχύει $\sigma_i < \sigma$. Άρα αν $\sigma_i > 0$, το εξερχόμενο μέτωπο της i -οικογένειας θα είναι ένα μέτωπο αραίωσης (δεν διασπάται σε πολλά μέτωπα αραίωσης λόγω της αρχής

(P)) με $\sigma_i < \sigma$ και έτσι το μέγεθος του εισερχόμενου μετώπου αραιώσης μειώνεται μέσα από τη σύγκρουση. Αν $\sigma_i < 0$, το εξερχόμενο μέτωπο της i -οικογένειας θα είναι κρουστικό κύμα και έτσι το μέγεθος του εισερχόμενου μετώπου αραιώσης θα μηδενιστεί μετά από τη σύγκρουση. Έστω τώρα ότι ένα μέτωπο αραιώσης μεγέθους $\sigma > 0$, συγκρούεται με ένα κρουστικό κύμα μεγέθους $\sigma' < 0$ της ίδιας οικογένειας και χρησιμοποιούμε την απλοποιημένη λύση Riemann. Εκ κατασκευής, θα έχουμε μόνο ένα εξερχόμενο φυσικό μέτωπο το οποίο θα έχει μέγεθος $\sigma + \sigma'$, όπου ισχύει ότι $\sigma + \sigma' < \sigma$. Αν $\sigma + \sigma' > 0$, τότε θα πάρουμε μία βεντάλια αραιώσης όπου τα μέτωπα αραιώσης που θα την αποτελούν θα έχουν μικρότερο μέγεθος από το σ .

- Έστω τώρα ένα μέτωπο αραιώσης μεγέθους $\sigma > 0$ συγκρούεται με ένα αφύσικο μέτωπο. Τότε εκ κατασκευής, το μέγεθος του εξερχόμενου μετώπου αραιώσης παραμένει το ίδιο.

Τώρα θα εξετάσουμε πως το αρχικό μέγεθος ενός μετώπου αραιώσης μπορεί να μεταβληθεί όταν συγκρουστεί με μέτωπα διαφορετικής οικογένειας. Θα παρατηρήσουμε ότι σε τέτοιες περιπτώσεις είναι δυνατόν να αυξηθεί το αρχικό μέγεθος του μετώπου αραιώσης. Για να μπορούμε να αναφερόμαστε στο μέγεθος του μετώπου αραιώσης οποιαδήποτε χρονική στιγμή, σημειώνουμε $\sigma_a(t)$ όπου $t > t_0$ και t_0 η χρονική στιγμή δημιουργίας του μετώπου αραιώσης.

Θεωρούμε τη ποσότητα :

$$V_a(t) = \sum_{\beta \in \mathcal{A}(a)} |\sigma_\beta|,$$

όπου η άθροιση είναι περιορισμένη στο σύνολο $\mathcal{A}(a)$ το οποίο περιλαμβάνει όλα τα μέτωπα που προσεγγίζουν το σ_a .

Έστω τ ένας χρόνος σύγκρουσης, έτσι ώστε $\tau > t_0$.

Περίπτωση 1: Το μέτωπο αραιώσης σ_a δεν συμμετέχει στη σύγκρουση.

Τότε ισχύει

$$\Delta\sigma_a(\tau) = \sigma_a(\tau^+) - \sigma_a(\tau^-) = 0, \quad (4.3.24)$$

εφόσον το μέτωπο αραίωσης σ_a δεν συμμετέχει στη σύγκρουση και έτσι το μέγεθος του δεν αλλάζει διά μέσου της συγκεκριμένης σύγκρουσης. Επίσης, έχουμε

$$\Delta V_a(\tau) + C_0 \Delta Q(\tau) = V_a(\tau^+) - V_a(\tau^-) + C_0 (Q(\tau^+) - Q(\tau^-)).$$

Σύμφωνα με τις εκτιμήσεις (4.3.1)-(4.3.4) έπεται ότι $V_a(\tau^+) - V_a(\tau^-) = \mathcal{O}(1)|\sigma\sigma'|$. Επιπρόσθετα, εφόσον υποθέτουμε ότι $Tot.Var.\{u(0, \cdot)\} \leq \delta_0$, τότε θα ισχύει ότι $Tot.Var.\{u(0, \cdot)\} \leq \delta_3$ και επομένως $V(\tau^-) \leq \delta_2$ και έτσι θα ισχύει $Q(\tau^+) - Q(\tau^-) \leq -\frac{|\sigma\sigma'|}{2}$. Έτσι, όπως έχουμε δει επιλέγουμε ικανοποιητικά μεγάλη τη σταθερά C_0 τέτοια ώστε να ισχύει

$$\Delta Y_a(\tau) = \Delta V_a(\tau) + C_0 \Delta Q(\tau) \leq 0. \quad (4.3.25)$$

Περίπτωση 2: Τη χρονική στιγμή τ το μέτωπο αραίωσης σ_a συγκρούεται με ένα μέτωπο διαφορετικής οικογένειας, μεγέθους $|\sigma_\beta|$. Επειδή $\sigma_a(\tau^-)$, $\sigma_a(\tau^+)$ έχουν το ίδιο πρόσημο και είναι της ίδιας οικογένειας, τότε τα μέτωπα σ_γ (που δεν συμμετέχουν στη σύγκρουση) τα οποία προσεγγίζουν το $\sigma_a(\tau^-)$ πριν τη χρονική στιγμή τ είναι τα ίδια μέτωπα τα οποία προσεγγίζουν το $\sigma_a(\tau^+)$ μετά τη χρονική στιγμή τ . Επομένως, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \Delta V_a(\tau) &= V_a(\tau^+) - V_a(\tau^-) \\ &= \sum_{\gamma \in \mathcal{A}(a)} |\sigma_\gamma| - \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{A}(a)} |\sigma_\gamma| + |\sigma_\beta| \right) \\ &= -|\sigma_\beta|. \end{aligned} \quad (4.3.26)$$

Επίσης, όπως προηγουμένως, εφόσον υποθέσαμε ότι $Tot.Var.\{u(0, \cdot)\} \leq \delta_0$,

συνεπάγεται ότι $V(\tau^-) \leq \delta_2$ και άρα ισχύει

$$\Delta Q(\tau) = Q(\tau^+) - Q(\tau^-) \leq -\frac{|\sigma_a(\tau^-)\sigma_\beta|}{2},$$

εφόσον στη προκειμένη σύγκρουση τα εισερχόμενα μέτωπα είναι τα $\sigma_a(\tau^-)$, σ_β . Άρα ισχύει

$$\Delta Q(\tau) < 0. \quad (4.3.27)$$

Ακόμη, εφόσον από τη (4.3.14) ισχύει ότι $V(\tau^+) - V(\tau^-) = \mathcal{O}(1)|\sigma_a(\tau^-)||\sigma_\beta|$, τότε για κάποια σταθερά $C_3 > 0$ ισχύει

$$\Delta\sigma_a(\tau) = \sigma_a(\tau^+) - \sigma_a(\tau^-) \leq C_3|\sigma_a(\tau^-)||\sigma_\beta|. \quad (4.3.28)$$

Χρησιμοποιώντας τις (4.3.24)-(4.3.28) θα δείξουμε ότι η απεικόνιση:

$$t \mapsto \sigma_a(t)e^{C_3(V_a(t)+C_0Q(t))} \quad (4.3.29)$$

είναι μη αύξουσα. Έστω $\Upsilon_a(t) = (V_a(t) + C_0Q(t))$.

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & \sigma_a(t^+)e^{C_3\Upsilon_a(t^+)} - \sigma_a(t^-)e^{C_3\Upsilon_a(t^-)} = \sigma_a(t^+)e^{C_3\Upsilon_a(t^+)} \\ & \quad - \sigma_a(t^-)e^{C_3\Upsilon_a(t^+)} + \sigma_a(t^-)e^{C_3\Upsilon_a(t^+)} - \sigma_a(t^-)e^{C_3\Upsilon_a(t^-)} \\ & = (\sigma_a(t^+) - \sigma_a(t^-))e^{C_3\Upsilon_a(t^+)} + \sigma_a(t^-) \left[e^{C_3\Upsilon_a(t^+)} - e^{C_3\Upsilon_a(t^-)} \right] \\ & = \Delta\sigma_a(t)e^{C_3\Upsilon_a(t^+)} + \sigma_a(t^-)e^{C_3\Upsilon_a(t^+)} \left[1 - e^{C_3\Upsilon_a(t^-) - C_3\Upsilon_a(t^+)} \right] \\ & = \Delta\sigma_a(t)e^{C_3\Upsilon_a(t^+)} + \sigma_a(t^-)e^{C_3\Upsilon_a(t^+)} \left[1 - e^{-C_3\Delta\Upsilon_a(t)} \right] \end{aligned} \quad (4.3.30)$$

Στη Περίπτωση 1, αντικαθιστούμε τη σχέση (4.3.24) στην (4.3.30) και έχουμε

$$\sigma_a(t^+)e^{C_3\Upsilon_a(t^+)} - \sigma_a(t^-)e^{C_3\Upsilon_a(t^-)} = \sigma_a(t^-)e^{C_3\Upsilon_a(t^+)} \left[1 - e^{-C_3\Delta\Upsilon_a(t)} \right],$$

Ισχύει ότι $\sigma_a(t^-) > 0$ και από τη σχέση (4.3.25) έπεται ότι $1 - e^{-C_3\Delta\Upsilon_a(t)} \leq 0$, εφόσον $C_3 > 0$.

Επομένως, ισχύει

$$\sigma_a(t^+)e^{C_3\Upsilon_a(t^+)} - \sigma_a(t^-)e^{C_3\Upsilon_a(t^-)} \leq 0.$$

Αντίστοιχα στη Περίπτωση 2, εφόσον από τις (4.3.26), (4.3.27) και (4.3.28) ισχύει

$$\Delta V_a(t) = -|\sigma_\beta|, \quad \Delta Q(t) < 0 \quad \text{και} \quad \Delta \sigma_a(t) \leq C_3|\sigma_a(t^-)||\sigma_\beta|,$$

άρα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \Delta \Upsilon_a(t) &= \Delta V_a(t) + C_0 \Delta Q(t) \\ &= -|\sigma_\beta| + C_0 \Delta Q(t) \\ &< -|\sigma_\beta|. \end{aligned}$$

Επομένως ισχύει

$$1 - e^{-C_3 \Delta \Upsilon_a(t)} < 1 - e^{C_3 |\sigma_\beta|}. \quad (4.3.31)$$

Εφόσον, ισχύει

$$1 - e^x \leq -x, \quad \forall x \geq 0,$$

η (4.3.31) γράφεται

$$1 - e^{-C_3 \Delta \Upsilon_a(t)} < 1 - e^{C_3 |\sigma_\beta|} \leq -C_3 |\sigma_\beta|.$$

Αντικαθιστώντας τις πιο πάνω εκτιμήσεις στην (4.3.30) έχουμε

$$\begin{aligned} \sigma_a(t^+)e^{C_3\Upsilon_a(t^+)} - \sigma_a(t^-)e^{C_3\Upsilon_a(t^-)} &< C_3|\sigma_a(t^-)||\sigma_\beta|e^{C_3\Upsilon_a(t^+)} \\ &+ \sigma_a(t^-)e^{C_3\Upsilon_a(t^+)}(-C_3|\sigma_\beta|) = 0. \end{aligned}$$

Άρα ισχύει

$$\sigma_a(t^+)e^{C_3\Upsilon_a(t^+)} - \sigma_a(t^-)e^{C_3\Upsilon_a(t^-)} < 0.$$

Επομένως, πράγματι η απεικόνιση:

$$t \mapsto \sigma_a(t)e^{C_3(V_a(t)+C_0Q(t))},$$

είναι μη αύξουσα. Έτσι, κατά συνέπεια $\forall t > t_0$, έχουμε

$$\begin{aligned} \sigma_a(t) &\leq \sigma_a(t)e^{C_3[V_a(t)+C_0Q(t)]} \\ &\leq \sigma_a(t_0)e^{C_3[V_a(t_0)+C_0Q(t_0)]} \\ &\leq \delta e^{C_3[V_a(t_0)+C_0Q(t_0)]}. \end{aligned} \quad (4.3.32)$$

Εφόσον, ισχύει ότι $V_a(t_0) \leq V(t_0)$, αφού $V_a(t_0) = \sum_{\beta \in \mathcal{A}(a)} |\sigma_\beta|$ είναι το άθροισμα όλων των μεγεθών των μετώπων σε χρόνο t_0 που προσεγγίζουν το σ_a στο μέλλον, από τη (4.3.32) έχουμε

$$\begin{aligned} \sigma_a(t) &\leq \delta e^{C_3[V(t_0)+C_0Q(t_0)]} \\ &= \delta e^{C_3\Upsilon(t_0)}. \end{aligned}$$

Έχουμε ήδη αποδείξει ότι εάν $Tot.Var.\{u(0, \cdot)\} \leq \delta_0 \leq \delta_3$, τότε ισχύει ότι $Tot.Var.\{u(t, \cdot)\} \leq \delta_2, \forall t \geq 0$ και επομένως ισχύει ότι $V(\tau^-) \leq \delta_2$. Κατά συνέπεια, η ποσότητα Υ μειώνεται διά μέσου οποιασδήποτε σύγκρουσης και έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} \sigma_a(t) &\leq \delta e^{C_3\Upsilon(t_0)} \leq \delta e^{C_3\Upsilon(0)} \\ &= \delta e^{C_3[V(0)+C_0Q(0)]}. \end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (4.3.16), (4.3.17) έχουμε

$$\begin{aligned} \sigma_a(t) &\leq \delta e^{C_3[V(0)+C_0Q(0)]} \\ &\leq \delta e^{C_3[V(0)+C_0V^2(0)]} \\ &\leq \delta e^{C_3[C_1Tot.Var.\{u(0, \cdot)\}+C_0(C_1Tot.Var.\{u(0, \cdot)\})^2]} \\ &\leq \delta e^{C_3[C_1\delta_3+C_0(C_1\delta_3)^2]}. \end{aligned}$$

Εφόσον, από τη σχέση (4.3.18) ισχύει ότι $C_1^2\delta_3 + C_0C_1^3\delta_3^2 \leq \delta_2$ και $C_1 \geq 1$,

τότε προκύπτει ότι $C_1\delta_3 + C_0C_1^2\delta_3^2 \leq \delta_2$. Άρα έχουμε

$$\sigma_a(t) \leq \delta e^{C_3\delta_2} = C_2\delta, \quad \text{όπου } C_2 = e^{C_3\delta_2}.$$

Έτσι, εξασφαλίζοντας το φράγμα που αναζητήσαμε θα μπορούμε για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ να επιλέγουμε ικανοποιητικά μικρό δ στην αρχή του αλγορίθμου, τέτοιο ώστε $C_2\delta \leq \varepsilon$ και επομένως να ισχύει ότι $\sigma_a(t) \leq \varepsilon, \forall t > t_0$.

Βήμα 6: Το συνολικό μέγεθος όλων των αφύσικων μετώπων είναι μικρό.

Αρχικά, θα δείξουμε ότι για κάποια σταθερά C_4 το μέγεθος κάθε αφύσικου μετώπου ικανοποιεί:

$$|\sigma_a| \leq C_4\rho, \quad a \in \mathcal{N}\mathcal{P}. \quad (4.3.33)$$

Όπως έχουμε δει, ένα καινούργιο αφύσικο μέτωπο δημιουργείται τη χρονική στιγμή t_0 από τη σύγκρουση δύο φυσικών μετώπων, όταν το γινόμενο των μεγεθών τους ικανοποιεί $|\sigma\sigma'| < \rho$. Εκ κατασκευής, το αφύσικο μέτωπο συνδέει τις τιμές \bar{u}_r, u_r και από τη (4.3.3) ικανοποιεί

$$|\bar{u}_r - u_r| = \mathcal{O}(1)|\sigma\sigma'|.$$

Επομένως, το αρχικό μέγεθος του αφύσικου μετώπου είναι

$$\sigma_a(t_0) = \mathcal{O}(1)|\sigma\sigma'| = \mathcal{O}(1)\rho.$$

Άρα, ισχύει

$$\sigma_a(t_0) \leq C\rho, \quad (4.3.34)$$

για κάποια σταθερά C .

Το αρχικό μέγεθος του αφύσικου μετώπου μπορεί να αυξηθεί σε μεταγενέστερους χρόνους μέσα από συγκρούσεις με άλλα μέτωπα. Για να μπορούμε να αναφερόμαστε στο μέγεθος του αφύσικου μετώπου για οποιαδήποτε στιγμή

$t > t_0$ θεωρούμε $\sigma_a(t)$, με $a \in \mathcal{N}$. Θεωρούμε ξανά τη ποσότητα:

$$V_a(t) = \sum_{\beta \in \mathcal{A}(a)} |\sigma_\beta|,$$

όπου η άθροιση είναι περιορισμένη στο σύνολο $\mathcal{A}(a)$ το οποίο περιέχει όλα τα μέτωπα που προσεγγίζουν το σ_a .

Έστω ότι τη χρονική στιγμή $\tau > t_0$ γίνεται μια σύγκρουση.

Περίπτωση 1: Η σύγκρουση δεν περιέχει το αφύσικο μέτωπο σ_a .

Όμοια με προηγουμένως στο Βήμα 5, ισχύει

$$\Delta\sigma_a(\tau) = 0 \quad \text{και} \quad \Delta V_a(\tau) + C_0\Delta Q(\tau) \leq 0.$$

Περίπτωση 2: Τη χρονική στιγμή τ , το αφύσικο μέτωπο σ_a συγκρούεται με ένα φυσικό μέτωπο $|\sigma_\beta|$.

Όμοια με προηγουμένως στο Βήμα 5, ισχύει

$$\Delta V_a(\tau) = -|\sigma_\beta|, \quad \Delta Q(\tau) < 0 \quad \text{και} \quad \Delta\sigma_a(\tau) \leq C_3|\sigma_a(\tau^-)||\sigma_\beta|.$$

Επομένως, όπως και στο Βήμα 5, η απεικόνιση:

$$t \mapsto \sigma_a(t)e^{C_3[V_a(t)+C_0Q(t)]},$$

είναι μη αύξουσα. Έτσι, κατά συνέπεια $\forall t > t_0$, έχουμε

$$\begin{aligned} \sigma_a(t) &\leq \sigma_a(t)e^{C_3[V_a(t)+C_0Q(t)]} \\ &\leq \sigma_a(t_0)e^{C_3[V_a(t_0)+C_0Q(t_0)]} \\ &\stackrel{(4.3.34)}{\leq} C\rho e^{C_3[V_a(t_0)+C_0Q(t_0)]} \\ &\leq C\rho e^{C_3[V(t_0)+C_0Q(t_0)]} \\ &= C\rho e^{C_3\Upsilon(t_0)} \\ &\leq C\rho e^{C_3\Upsilon(0)} \\ &= C\rho e^{C_3[V(0)+C_0Q(0)]}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.3.17), (4.3.16), έχουμε

$$\begin{aligned}
 \sigma_a(t) &\leq C \rho e^{C_3[V(0)+C_0Q(0)]} \\
 &\leq C \rho e^{C_3[V(0)+C_0V^2(0)]} \\
 &\leq C \rho e^{C_3[C_1Tot.Var\{u(0,\cdot)\}+C_0(C_1Tot.Var\{u(0,\cdot)\})^2]} \\
 &\leq C \rho e^{C_3[C_1\delta_3+C_0(C_1\delta_3)^2]} \\
 &\leq C \rho e^{C_3\delta_2}.
 \end{aligned}$$

Άρα, ισχύει

$$\sigma_a(t) \leq C_4\rho, \quad \text{με } C_4 = C e^{C_3\delta_2}.$$

Έτσι εξασφαλίζουμε το φράγμα (4.3.33) που αναζητήσαμε.

Στη συνέχεια, συνδέουμε κάθε μέτωπο με ένα ακέραιο αριθμό ο οποίος μετρά πόσες συγκρούσεις χρειάστηκαν για να παραχθεί το αντίστοιχο μέτωπο. Τον αριθμό αυτόν θα τον ονομάσουμε τάξη γενεάς του μετώπου και ορίζεται επαγωγικά ως ακολούθως:

- Όλα τα μέτωπα που παράγονται από τα προβλήματα Riemann τη χρονική στιγμή $t = 0$ έχουν τάξη γενεάς $k = 1$.
- Έστω ότι δύο εισερχόμενα μέτωπα συγκρούονται και έστω ότι ανήκουν στις οικογένειες $i, i' \in \{1, \dots, n+1\}$ με τάξη γενεάς k, k' αντίστοιχα. Τότε οι σειρές γενεών των εξερχόμενων μετώπων ορίζονται ως ακολούθως:

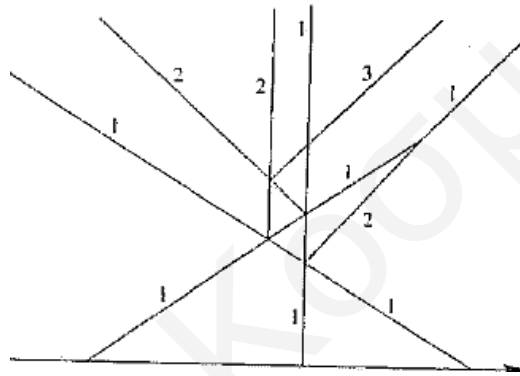
Περίπτωση 1: Εάν $i \neq i'$, τότε:

1. Το εξερχόμενο μέτωπο της i -οικογένειας και το εξερχόμενο μέτωπο της i' -οικογένειας, έχουν αντίστοιχα την ίδια τάξη γενεάς k, k' με τα εισερχόμενα.

2. Τα εξερχόμενα μέτωπα οποιασδήποτε άλλης οικογένειας $j \neq i, i'$, έχουν τάξη γενεάς $\max\{k, k'\} + 1$.

Περίπτωση 2: Εάν $i = i'$, τότε:

1. Το εξερχόμενο μέτωπο της i -οικογένειας έχει τάξη γενεάς $\min\{k, k'\}$.
2. Τα εξερχόμενα μέτωπα οποιασδήποτε άλλης οικογένειας $j \neq i$, έχουν τάξη γενεάς $\max\{k, k'\} + 1$.



Σχήμα 4.9. Τάξη γενεάς κάθε μετώπου

Για $k \geq 1$, ονομάζουμε $V_k(t)$ το άθροισμα τη χρονική στιγμή t των μεγεθών των μετώπων που έχουν τάξη γενεάς $\geq k$, δηλαδή

$$V_k(t) = \sum_{k_a \geq k} |\sigma_a|.$$

Θέλουμε να εξασφαλίσουμε ένα φράγμα για το $V_k(t)$.

Αρχικά, ορίζουμε:

$$Q_k(t) = \sum_{\max\{k_a, k_\beta\} \geq k} |\sigma_a \sigma_\beta|,$$

όπου η άθροιση περιορίζεται σε όλα τα ζεύγη (a, β) στη $u(t, \cdot)$ που έχουν πιθανότητα να συγκρουστούν στο μέλλον και έχουν τάξη γενεάς k_a, k_β με $\max\{k_a, k_\beta\} \geq k$. Δηλαδή, τουλάχιστον ένα από τα δύο μέτωπα που έχουν πιθανότητα να συγκρουστούν στο μέλλον έχει τάξη γενεάς $\geq k$.

Επιπρόσθετα, καλούμε I_k το σύνολο των χρονικών στιγμών κατά τις οποίες δύο μέτωπα συγκρούονται, με τάξη γενεάς k_a , k_β και $\max\{k_a, k_\beta\} = k$. Δηλαδή, ένα από τα εισερχόμενα μέτωπα έχει τάξη γενεάς k και το άλλο έχει τάξη γενεάς $\leq k$.

Σε πρώτο στάδιο, θα ελέγξουμε τη μεταβολή $\Delta V_k(t)$ σε χρονικές στιγμές κατά τις οποίες γίνεται μια σύγκρουση, αφού αν τη χρονική στιγμή t δεν γίνεται κάποια σύγκρουση, τετριμμένα ισχύει ότι $\Delta V_k(t) = V_k(t^+) - V_k(t^-) = 0$, εφόσον δεν αλλάζουν τα μέτωπα. Τότε ισχύει

$$\Delta V_k(t) = V_k(t^+) - V_k(t^-) = 0, \quad t \in I_1 \cup \dots \cup I_{k-2}, \quad (4.3.35)$$

διότι οι συγκρούσεις που γίνονται σε τέτοιες χρονικές στιγμές περιέχουν εισερχόμενα μέτωπα τα οποία και τα δύο έχουν τάξη γενεάς $\leq k-2$. Έτσι, επειδή εξ ορισμού η τάξη γενεάς των εξερχόμενων μετώπων αυξάνεται το πολύ κατά ένα σε σχέση με τη τάξη γενεάς των εισερχόμενων, οι συγκρούσεις που συμβαίνουν τις χρονικές στιγμές $I_1 \cup \dots \cup I_{k-2}$ έχουν εξερχόμενα μέτωπα με τάξη γενεάς $\leq k-1$. Επομένως, αφού $V_k(t)$ αθροίζει όλα τα μέτωπα τη χρονική στιγμή t που έχουν τάξη γενεάς $\geq k$, έχουμε ότι $\Delta V_k(t) = V_k(t^+) - V_k(t^-) = 0 - 0 = 0$.

Επίσης, ισχύει

$$\Delta V_k(t) + C_0 \Delta Q_{k-1}(t) \leq 0, \quad t \in I_{k-1} \cup I_k \cup \dots, \quad (4.3.36)$$

όπου οι συγκρούσεις που γίνονται σε τέτοιες χρονικές στιγμές περιέχουν εισερχόμενα μέτωπα που τουλάχιστον το ένα από τα δύο έχει τάξη γενεάς $\geq k-1$. Θα αποδείξουμε τη (4.3.36) για τη περίπτωση που χρησιμοποιούμε την ακριβής λύση Riemann και τα εισερχόμενα μέτωπα σ'_i, σ'_j ανήκουν στις οικογένειες i, j με $i \neq j$. Έστω $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ τα εξερχόμενα μέτωπα. Για τις άλλες περιπτώσεις ακολουθείται η ίδια διαδικασία.

- Έστω ότι το σ'_i έχει τάξη γενεάς $k-1$ και το σ'_j τάξη γενεάς $\leq k-1$. Τότε γνωρίζουμε ότι το σ_i έχει τάξη γενεάς $k-1$, το σ_j τάξη γενεάς $\leq k-1$ και τα εξερχόμενα μέτωπα των άλλων οικογενειών έχουν τάξη

γενεάς k . Επομένως, από τη σχέση (4.3.1) ισχύει

$$\begin{aligned}\Delta V_k(t) &= V_k(t^+) - V_k(t^-) = \sum_{a \neq i, j} |\sigma_a| \\ &= \mathcal{O}(1) |\sigma'_i \sigma'_j|.\end{aligned}$$

- Έστω ότι το σ'_i έχει τάξη γενεάς $\geq k$ και το σ'_j τάξη γενεάς $\leq k - 1$. Τότε γνωρίζουμε ότι το σ_i έχει τάξη γενεάς $\geq k$, το σ_j τάξη γενεάς $\leq k - 1$ και τα εξερχόμενα μέτωπα των άλλων οικογενειών έχουν τάξη γενεάς $\geq k$. Επομένως, ισχύει

$$\begin{aligned}\Delta V_k(t) &= V_k(t^+) - V_k(t^-) = \sum_{a \neq i, j} |\sigma_a| + |\sigma_i| - |\sigma'_i| \\ &\leq \sum_{a \neq i, j} |\sigma_a| + |\sigma_i - \sigma'_i| \\ &\stackrel{(4.3.1)}{=} \mathcal{O}(1) |\sigma'_i \sigma'_j|.\end{aligned}$$

- Έστω ότι το σ'_i έχει τάξη γενεάς $\geq k$ και το σ'_j τάξη γενεάς $\geq k$. Τότε γνωρίζουμε ότι το σ_i έχει τάξη γενεάς $\geq k$, το σ_j τάξη γενεάς $\geq k$ και τα εξερχόμενα μέτωπα των άλλων οικογενειών έχουν τάξη γενεάς $\geq k$. Επομένως, ισχύει

$$\begin{aligned}\Delta V_k(t) &= V_k(t^+) - V_k(t^-) = \sum_{a \neq i, j} |\sigma_a| + |\sigma_i| - |\sigma'_i| + |\sigma_j| - |\sigma'_j| \\ &\leq \sum_{a \neq i, j} |\sigma_a| + |\sigma_i - \sigma'_i| + |\sigma_j - \sigma'_j| \\ &\stackrel{(4.3.1)}{=} \mathcal{O}(1) |\sigma'_i \sigma'_j|.\end{aligned}$$

Άρα ισχύει ότι $\Delta V_k(t) = \mathcal{O}(1) |\sigma'_i \sigma'_j|$, για $t \in I_{k-1} \cup I_k \cup \dots$.

Αφότου εργαστούμε με τον ίδιο τρόπο όπως εργαστήκαμε για να εξασφαλίσουμε την (4.3.15), παίρνουμε

$$\Delta Q_{k-1}(t) \leq -\frac{|\sigma'_i \sigma'_j|}{2} \quad \text{για } t \in I_{k-1} \cup I_k \cup \dots$$

και έτσι για μεγάλη σταθερά $C_0 > 0$, ισχύει η (4.3.36):

$$\Delta V_k(t) + C_0 \Delta Q_{k-1}(t) \leq 0, \quad t \in I_{k-1} \cup I_k \cup \dots .$$

Δουλεύοντας με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να αντλήσουμε τις πιο κάτω σχέσεις:

$$\Delta Q_k(t) + C_0 \Delta Q(t) V_k(t^-) \leq 0, \quad t \in I_1 \cup \dots \cup I_{k-2}, \quad (4.3.37)$$

$$\Delta Q_k(t) + C_0 \Delta Q_{k-1}(t) V(t^-) \leq 0, \quad t \in I_{k-1}, \quad (4.3.38)$$

$$\Delta Q_k(t) \leq 0, \quad t \in I_k \cup I_{k+1} \cup \dots . \quad (4.3.39)$$

Παρακάτω, σημειώνουμε με $[s]_+$ και $[s]_-$ το θετικό και το αρνητικό μέρος αντίστοιχα ενός πραγματικού αριθμού s .

Για παράδειγμα:

$$[5]_+ = \max\{5, 0\} = 5, \quad [5]_- = \max\{-5, 0\} = 0,$$

$$[-5]_+ = \max\{-5, 0\} = 0, \quad [-5]_- = \max\{-(-5), 0\} = 5.$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι $V_1 = V$ και $Q_1 = Q$, εφόσον όλα τα μέτωπα έχουν τάξη γενεάς ≥ 1 . Επιπρόσθετα, παρατηρούμε ότι εάν $k \geq 2$, ισχύει ότι $V_k(0^+) = Q_k(0^+) = 0$, εφόσον μέχρι τη χρονική στιγμή $t = 0^+$ δεν έχει προηγηθεί κάποια σύγκρουση και επομένως όλα τα μέτωπα έχουν τάξη γενεάς 1. Εάν $k \geq 2$, τότε ισχύει

$$V_k(t) = \sum_{0 \leq \tau \leq t} \{[\Delta V_k(\tau)]_+ - [\Delta V_k(\tau)]_-\}, \quad (4.3.40)$$

όπου η άθροιση περιορίζεται σε χρόνους $\leq t$ κατά τους οποίους γίνεται μια σύγκρουση. Αν τη χρονική στιγμή τ δεν γίνεται κάποια σύγκρουση, τετριμμένα ισχύει $\Delta V_k(\tau) = 0$.

Οπότε εάν $k \geq 2$, τότε ισχύει

$$\begin{aligned}
 V_k(t) &= \sum_{0 \leq \tau \leq t} \{ [\Delta V_k(\tau)]_+ - [\Delta V_k(\tau)]_- \} \\
 &\leq \sum_{\substack{[\Delta V_k(\tau)]_- \geq 0 \\ 0 \leq \tau \leq t}} [\Delta V_k(\tau)]_+ \\
 &= \sum_{0 \leq \tau \leq t, \tau \in I_1 \cup \dots \cup I_{k-2}} [\Delta V_k(\tau)]_+ + \sum_{0 \leq \tau \leq t, \tau \in I_{k-1} \cup I_k \cup \dots} [\Delta V_k(\tau)]_+ \\
 &\stackrel{(4.3.35)}{=} \sum_{0 \leq \tau \leq t, \tau \in I_{k-1} \cup I_k \cup \dots} [\Delta V_k(\tau)]_+.
 \end{aligned}$$

Από τη (4.3.36), γνωρίζουμε ότι:

$$\Delta V_k(\tau) \leq -C_0 \Delta Q_{k-1}(\tau), \quad \text{για } \tau \in I_{k-1} \cup I_k \cup \dots.$$

Άρα, ισχύει

$$[\Delta V_k(\tau)]_+ \leq [-C_0 \Delta Q_{k-1}(\tau)]_+ = [C_0 \Delta Q_{k-1}(\tau)]_- ,$$

για $\tau \in I_{k-1} \cup I_k \cup \dots$.

Επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned}
 V_k(t) &\leq \sum_{0 \leq \tau \leq t, \tau \in I_{k-1} \cup I_k \cup \dots} [\Delta V_k(\tau)]_+ \\
 &\leq \sum_{0 \leq \tau \leq t, \tau \in I_{k-1} \cup I_k \cup \dots} [C_0 \Delta Q_{k-1}(\tau)]_- \\
 &\stackrel{C_0 > 0}{=} C_0 \sum_{0 \leq \tau \leq t, \tau \in I_{k-1} \cup I_k \cup \dots} [\Delta Q_{k-1}(\tau)]_- .
 \end{aligned}$$

Άρα, ισχύει

$$V_k(t) \leq C_0 \sum_{0 \leq \tau \leq t, \tau \in I_{k-1} \cup I_k \cup \dots} [\Delta Q_{k-1}(\tau)]_- , \quad \forall t > 0 \text{ και } \forall k \geq 2. \quad (4.3.41)$$

Όμοια με προηγουμένως, εάν $k \geq 2$, ισχύει

$$\begin{aligned} Q_k(t) &= \sum_{0 \leq \tau \leq t} \{ [\Delta Q_k(\tau)]_+ - [\Delta Q_k(\tau)]_- \} \\ &\leq \sum_{\substack{[\Delta Q_k(\tau)]_- \geq 0 \\ 0 \leq \tau \leq t}} [\Delta Q_k(\tau)]_+ \\ &= \sum_{0 \leq \tau \leq t, \tau \in I_1 \cup \dots \cup I_{k-2}} [\Delta Q_k(\tau)]_+ + \sum_{0 \leq \tau \leq t, \tau \in I_{k-1}} [\Delta Q_k(\tau)]_+ \\ &\quad + \sum_{0 \leq \tau \leq t, \tau \in I_k \cup I_{k+1} \cup \dots} [\Delta Q_k(\tau)]_+. \end{aligned}$$

Από τη (4.3.37), γνωρίζουμε ότι

$$\Delta Q_k(\tau) \leq -C_0 \Delta Q(\tau) V_k(\tau^-), \quad \text{για } \tau \in I_1 \cup \dots \cup I_{k-2}.$$

Άρα, ισχύει

$$[\Delta Q_k(\tau)]_+ \leq [-C_0 \Delta Q(\tau) V_k(\tau^-)]_+ = [C_0 \Delta Q(\tau) V_k(\tau^-)]_-,$$

για $\tau \in I_1 \cup \dots \cup I_{k-2}$.

Επίσης, από τη (4.3.38) γνωρίζουμε ότι

$$\Delta Q_k(\tau) \leq -C_0 \Delta Q_{k-1}(\tau) V(\tau^-), \quad \text{για } \tau \in I_{k-1}.$$

Άρα, ισχύει

$$[\Delta Q_k(\tau)]_+ \leq [-C_0 \Delta Q_{k-1}(\tau) V(\tau^-)]_+ = [C_0 \Delta Q_{k-1}(\tau) V(\tau^-)]_-,$$

για $\tau \in I_{k-1}$.

Επιπρόσθετα, από τη (4.3.39) γνωρίζουμε ότι

$$\Delta Q_k(\tau) \leq 0, \quad \text{για } \tau \in I_k \cup I_{k+1} \cup \dots.$$

Άρα, ισχύει

$$[\Delta Q_k(\tau)]_+ = 0, \quad \text{για } \tau \in I_k \cup I_{k+1} \cup \dots.$$

Επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq \tau \leq t} [\Delta Q_k(\tau)]_+ &\leq \sum_{0 \leq \tau \leq t, \tau \in I_1 \cup \dots \cup I_{k-2}} [C_0 \Delta Q(\tau) V_k(\tau^-)]_- \\ &\quad + \sum_{0 \leq \tau \leq t, \tau \in I_{k-1}} [C_0 \Delta Q_{k-1}(\tau) V(\tau^-)]_- \\ &\leq \sum_{0 \leq \tau \leq t} [C_0 \Delta Q(\tau) V_k(\tau^-)]_- + \sum_{0 \leq \tau \leq t} [C_0 \Delta Q_{k-1}(\tau) V(\tau^-)]_- \\ &= C_0 \sum_{0 \leq \tau \leq t} \{[\Delta Q(\tau)]_- V_k(\tau^-)\} + C_0 \sum_{0 \leq \tau \leq t} \{[\Delta Q_{k-1}(\tau)]_- V(\tau^-)\} \\ &\leq C_0 \sum_{0 \leq \tau \leq t} \{[\Delta Q(\tau)]_-\} \sup_{t>0} V_k(t) + C_0 \sum_{0 \leq \tau \leq t} \{[\Delta Q_{k-1}(\tau)]_-\} \sup_{t>0} V(t), \\ \forall t > 0, k \geq 2. \end{aligned} \tag{4.3.42}$$

Επιπλέον, ισχύει

$$0 \leq Q_k(t) = \sum_{0 \leq \tau \leq t} \{[\Delta Q_k(\tau)]_+ - [\Delta Q_k(\tau)]_-\}.$$

Άρα, ισχύει

$$\sum_{0 \leq \tau \leq t} [\Delta Q_k(\tau)]_- \leq \sum_{0 \leq \tau \leq t} [\Delta Q_k(\tau)]_+. \tag{4.3.43}$$

Επίσης, υπενθυμίζουμε ότι πήραμε $Tot.Var\{u(0, \cdot)\} \leq \delta_3$, όπου $\delta_3 > 0$ τόσο μικρό ώστε να ισχύει ότι $V(\tau^-) \leq \delta_2$, όπου τ^- η χρονική στιγμή πριν οποιαδήποτε σύγκρουση. Έτσι, ισχύει ότι η ποσότητα Υ μειώνεται διά μέσου οποιασδήποτε σύγκρουσης. Επομένως, έχουμε

$$V_k(t) \leq V(t) \leq \Upsilon(t) \leq \Upsilon(0). \tag{4.3.44}$$

Επίσης, επειδή για οποιοδήποτε χρόνο σύγκρουσης τ ισχύει ότι $V(\tau^-) \leq$

δ_2 , τότε $\Delta Q(\tau) = Q(\tau^+) - Q(\tau^-) \leq -\frac{|\sigma\sigma'|}{2} < 0$. Επομένως, έστω ότι στον αλγόριθμο μας γίνονται n συγκρούσεις, τότε έχουμε

$$Q(\tau_n^+) = Q(0) - \sum_{0 \leq \tau \leq \infty} [\Delta Q(\tau)]_-.$$

Αφού σίγουρα $Q(\tau_n^+) \geq 0$, έχουμε

$$0 \leq Q(\tau_n^+) = Q(0) - \sum_{0 \leq \tau \leq \infty} [\Delta Q(\tau)]_-.$$

Άρα, ισχύει

$$\sum_{0 \leq \tau \leq \infty} [\Delta Q(\tau)]_- \leq Q(0) \leq \Upsilon(0). \quad (4.3.45)$$

Καλούμε

$$\tilde{Q}_k = \sum_{t>0} [\Delta Q_k(t)]_+ \quad \text{και} \quad \tilde{V}_k = \sup_{t>0} V_k(t). \quad (4.3.46)$$

Από τις σχέσεις (4.3.41) και (4.3.43) έχουμε

$$\begin{aligned} V_k(t) &\leq C_0 \sum_{0 \leq \tau \leq t, \tau \in I_{k-1} \cup I_k \cup \dots} [\Delta Q_{k-1}(\tau)]_- \\ &\leq C_0 \sum_{0 \leq \tau \leq t} [\Delta Q_{k-1}(\tau)]_- \\ &\leq C_0 \sum_{t>0} [\Delta Q_{k-1}(\tau)]_- \\ &\leq C_0 \sum_{t>0} [\Delta Q_{k-1}(\tau)]_+ \\ &= C_0 \tilde{Q}_{k-1}, \quad \forall t > 0 \text{ και } \forall k \geq 2. \end{aligned}$$

Άρα, ισχύει

$$V_k(t) \leq C_0 \tilde{Q}_{k-1}. \quad (4.3.47)$$

Έτσι, θα αναζητήσουμε φράγμα για τη ποσότητα \tilde{Q}_{k-1} , ούτως ώστε να εξασφαλίσουμε ένα φράγμα για το $V_k(t)$.

Από τη σχέση (4.3.47) έχουμε

$$\tilde{V}_k = \sup_{t>0} V_k(t) \leq C_0 \tilde{Q}_{k-1}, \quad (4.3.48)$$

αφού \sup είναι το μικρότερο άνω φράγμα.

Επίσης, στη (4.3.42) έχουμε δείξει ότι

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq \tau \leq t} [\Delta Q_k(\tau)]_+ &\leq C_0 \sum_{0 \leq \tau \leq t} \{[\Delta Q(\tau)]_-\} \sup_{t>0} V_k(t) \\ &+ C_0 \sum_{0 \leq \tau \leq t} \{[\Delta Q_{k-1}(\tau)]_-\} \sup_{t>0} V(t), \quad \forall t > 0. \end{aligned}$$

Άρα, ισχύει

$$\begin{aligned} \sum_{t>0} [\Delta Q_k(\tau)]_+ &\leq C_0 \sum_{t>0} \{[\Delta Q(\tau)]_-\} \sup_{t>0} V_k(t) \\ &+ C_0 \sum_{t>0} \{[\Delta Q_{k-1}(\tau)]_-\} \sup_{t>0} V(t). \end{aligned}$$

Από τη σχέση (4.3.43), έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{t>0} [\Delta Q_k(\tau)]_+ &\leq C_0 \sum_{t>0} \{[\Delta Q(\tau)]_-\} \sup_{t>0} V_k(t) \\ &+ C_0 \sum_{t>0} \{[\Delta Q_{k-1}(\tau)]_+\} \sup_{t>0} V(t). \end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (4.3.46), (4.3.45) έχουμε

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_k &\leq C_0 \sum_{t>0} \{[\Delta Q(\tau)]_-\} \tilde{V}_k + C_0 \tilde{Q}_{k-1} \sup_{t>0} V(t) \\ &\leq C_0 \Upsilon(0) \tilde{V}_k + C_0 \tilde{Q}_{k-1} \sup_{t>0} V(t). \end{aligned}$$

Από τη (4.3.44) ισχύει

$$\sup_{t>0} V(t) \leq \Upsilon(0),$$

αφού \sup είναι το μικρότερο άνω φράγμα.

Επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_k &\leq C_0 \Upsilon(0) \tilde{V}_k + C_0 \tilde{Q}_{k-1} \Upsilon(0) \\ &\stackrel{(4.3.48)}{\leq} C_0 \Upsilon(0) C_0 \tilde{Q}_{k-1} + C_0 \tilde{Q}_{k-1} \Upsilon(0). \end{aligned}$$

Άρα, ισχύει

$$\tilde{Q}_k \leq (C_0^2 + C_0) \Upsilon(0) \tilde{Q}_{k-1}. \quad (4.3.49)$$

Εάν το $Tot.Var\{u(0^+, \cdot)\}$ είναι ικανοποιητικά μικρό, τότε και οι ποσότητες $V(0), Q(0)$ θα είναι πολύ μικρές και έτσι το $\Upsilon(0) = V(0) + C_0 Q(0)$ θα ικανοποιεί:

$$\gamma = (C_0^2 + C_0) \Upsilon(0) < 1. \quad (4.3.50)$$

Όμοια με τη (4.3.49) ισχύει

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{k-1} &\leq (C_0^2 + C_0) \Upsilon(0) \tilde{Q}_{k-2} \\ &\vdots \\ \tilde{Q}_2 &\leq (C_0^2 + C_0) \Upsilon(0) \tilde{Q}_1. \end{aligned}$$

Άρα έχουμε

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_k &\leq \gamma \tilde{Q}_{k-1} \\
&\leq \gamma^2 \tilde{Q}_{k-2} \leq \dots \leq \gamma^{k-1} \tilde{Q}_{k-(k-1)} \\
&= \gamma^{k-1} \tilde{Q}_1 = \gamma^{k-1} \sum_{t>0} [\Delta Q_1(t)]_+ \\
&\stackrel{Q_1=Q}{=} \gamma^{k-1} \sum_{t>0} [\Delta Q(t)]_+ \\
&\stackrel{\Delta Q(t) \leq 0}{\leq} \gamma^{k-1} \sum_{t>0} [\Delta Q(t)]_- \\
&\stackrel{(4.3.45)}{\leq} \gamma^{k-1} \Upsilon(0).
\end{aligned}$$

Ισχύει ότι $\Upsilon(0) = V(0) + C_0 Q(0) \leq C_1 \delta_3 + C_0 C_1^2 \delta_3^2$. Από τη σχέση (4.3.18) έχουμε επιλέξει το δ_3 αρκετά μικρό ώστε να ισχύει

$$C_1^2 (C_1 \delta_3 + C_0 C_1^2 \delta_3^2) \leq \delta_2.$$

Επειδή $C_1 \geq 1$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\Upsilon(0) &\leq C_1 \delta_3 + C_0 C_1^2 \delta_3^2 \\
&\leq C_1^2 (C_1 \delta_3 + C_0 C_1^2 \delta_3^2) \leq \delta_2.
\end{aligned}$$

Άρα, ισχύει

$$\tilde{Q}_k \leq \gamma^{k-1} \delta_2.$$

Επομένως, έχουμε

$$\tilde{Q}_{k-1} \leq \gamma^{k-2} \delta_2. \quad (4.3.51)$$

Άρα από τη σχέση (4.3.47) παίρνουμε

$$V_k(t) \leq C_0 \tilde{Q}_{k-1} \leq C_0 \gamma^{k-2} \delta_2, \quad (4.3.52)$$

εξασφαλίζοντας έτσι το φράγμα που αναζητήσαμε για το $V_k(t)$.

Στη συνέχεια θα κάνουμε ένα γρήγορο υπολογισμό για τον αριθμό των μετώπων στη u που έχουν μια συγκεκριμένη τάξη γενεάς.

Έστω N ο αριθμός των μετώπων στη $u(0^+, \cdot)$. Γνωρίζουμε ότι τη χρονική στιγμή $t = 0^+$ όλα τα μέτωπα έχουν τάξη γενεάς 1, εφόσον μέχρι αυτή τη χρονική στιγμή δεν έχει προκύψει κάποια σύγκρουση. Από τις συγκρούσεις που θα προκύψουν από δύο εισερχόμενα μέτωπα διαφορετικής οικογένειας με τάξη γενεάς 1, θα παραχθούν ακριβώς δύο εξερχόμενα μέτωπα τάξης γενεάς 1 και θα είναι αυτά που ανήκουν στις ίδιες αντίστοιχες οικογένειες με τα εισερχόμενα. Από τις συγκρούσεις που θα προκύψουν από δύο εισερχόμενα μέτωπα ίδιας οικογένειας με τάξη γενεάς 1, θα παραχθεί ακριβώς ένα εξερχόμενο μέτωπο τάξης γενεάς 1 που θα είναι της ίδιας οικογένειας με τα εισερχόμενα. Από τις συγκρούσεις που συμμετέχει μόνο ένα μέτωπο τάξης γενεάς 1, θα παραχθεί ακριβώς ένα εξερχόμενο μέτωπο τάξης γενεάς 1 που θα είναι της ίδιας οικογένειας με το αντίστοιχο εισερχόμενο. Άρα σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t > 0$ δεν αυξάνεται ο αριθμός των μετώπων με τάξη γενεάς 1. Επομένως, ο αριθμός των μετώπων τάξης γενεάς 1 για οποιοδήποτε $t > 0$ στη $u(t, \cdot)$ είναι $\leq N$.

Από κάθε σύγκρουση μεταξύ μετώπων τάξης γενεάς 1, ανακαλώντας ότι τα κύματα αραίωσης διαχωρίζονται σε κομμάτια μεγέθους $\leq \delta$, παράγεται ένας αριθμός $\mathcal{O}(1)\frac{1}{\delta}$ από μέτωπα τάξης γενεάς 2. Εφόσον είναι πιθανόν να γίνουν $\binom{N}{2} = \frac{N!}{(N-2)!2!} \leq N^2$ συγκρούσεις μεταξύ μετώπων τάξης γενεάς 1, ο συνολικός αριθμός των μετώπων τάξης γενεάς 2 είναι $\mathcal{O}(1)\frac{N^2}{\delta}$.

Επομένως, ο συνολικός αριθμός των μετώπων με τάξη γενεάς ≤ 2 οποιαδήποτε χρονική στιγμή είναι $\mathcal{O}(1)\frac{1}{\delta} + \mathcal{O}(1)\frac{N^2}{\delta}$. Επαγωγικά, είναι προφανές ότι ο συνολικός αριθμός των μετώπων με τάξη γενεάς $\leq k$ στη $u(t, \cdot)$ μπορεί να υπολογιστεί από μια πολυωνυμική συνάρτηση των N, δ^{-1} , ας πούμε:

$$[\text{αριθμός των μετώπων τάξης γενεάς } \leq k] \leq P_k(N, \delta^{-1}). \quad (4.3.53)$$

Για να εκτιμήσουμε το συνολικό μέγεθος όλων των αφύσικων μετώπων στη $u(t, \cdot)$ μελετάμε ξεχωριστά τα μέτωπα που έχουν τάξη γενεάς $> k$ και αυτά που έχουν τάξη γενεάς $\leq k$.

Άρα, έχουμε

$$\begin{aligned}
& [\text{συνολικό μέγεθος των αφύσικων μετώπων στη } u(t, \cdot)] \\
&= \sum_{a \in \mathcal{N}^{\mathcal{P}}, \gamma_{\text{εν}}(a) > k} |\sigma_a(t)| + \sum_{a \in \mathcal{N}^{\mathcal{P}}, \gamma_{\text{εν}}(a) \leq k} |\sigma_a(t)| \\
&\leq [\text{συνολικό μέγεθος των αφύσικων μετώπων γενεάς } > k \text{ στη } u(t, \cdot)] \\
&+ [\text{αριθμός των αφύσικων μετώπων γενεάς } \leq k \text{ στη } u(t, \cdot)] \\
&\cdot [\text{μέγιστο μέγεθος κάθε αφύσικου μετώπου}] \\
&= [\text{συνολικό μέγεθος των αφύσικων μετώπων γενεάς } \geq k + 1 \text{ στη } u(t, \cdot)] \\
&+ [\text{αριθμός των αφύσικων μετώπων γενεάς } \leq k \text{ στη } u(t, \cdot)] \\
&\cdot [\text{μέγιστο μέγεθος κάθε αφύσικου μετώπου}] \\
&= V_{k+1}(t) + [\text{αριθμός των αφύσικων μετώπων γενεάς } \leq k \text{ στη } u(t, \cdot)] \\
&\cdot [\text{μέγιστο μέγεθος κάθε αφύσικου μετώπου}].
\end{aligned}$$

Επομένως, από τις σχέσεις (4.3.33), (4.3.52) και (4.3.53), έχουμε

$$\begin{aligned}
& [\text{συνολικό μέγεθος των αφύσικων μετώπων στη } u(t, \cdot)] \\
&\leq C_0 \gamma^{k-1} \delta_2 + P_k(N, \delta^{-1}) C_4 \rho.
\end{aligned}$$

Για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$, εφόσον $\gamma < 1$, μπορούμε να επιλέξουμε το k αρκετά μεγάλο ώστε να ισχύει

$$C_0 \gamma^{k-1} \delta_2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επίσης, διαλέγουμε στη αρχή του αλγόριθμου το $\rho > 0$ αρκετά μικρό ώστε να ισχύει

$$P_k(N, \delta^{-1}) C_4 \rho < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επομένως, $\forall t \geq 0$, έχουμε

$$[\text{συνολικό μέγεθος όλων των αφύσικων μετώπων στη } u(t, \cdot)] < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος 4.3. \square

4.4 Ύπαρξη λύσης στο πρόβλημα του Cauchy

Για να αποδείξουμε το Θεώρημα 4.1, θα σταθεροποιήσουμε μια φθίνουσα ακολουθία αριθμών $(\varepsilon_\nu)_{\nu \geq 1}$ που τείνει προς το 0 όσο το $\nu \rightarrow \infty$. Από το Θεώρημα 4.3, γνωρίζουμε ότι για κάθε αρχική συνθήκη $\bar{u} \in L^1$ με $Tot.Var\{\bar{u}\} \leq \delta_0$, το πρόβλημα του Cauchy (4.0.1)-(4.0.2), $\forall \varepsilon > 0$ έχει μια ε -προσεγγιστική front tracking λύση u_ε . Επομένως, $\forall \nu \geq 1$ παίρνουμε μια ε_ν -προσεγγιστική front tracking λύση u_{ε_ν} , δημιουργώντας έτσι μια ακολουθία συναρτήσεων. Αυτές οι ε_ν -προσεγγιστικές λύσεις, $\forall \nu \geq 1$, έχουν ως αρχική συνθήκη τις κατά τμήματα σταθερές συναρτήσεις $u_{\varepsilon_\nu}(0, \cdot)$ που προσεγγίζουν τη \bar{u} και ισχύει $\|u_{\varepsilon_\nu}(0, \cdot) - \bar{u}\|_{L^1} \rightarrow 0$, όσο το $\nu \rightarrow \infty$. Θα αποδείξουμε ότι το όριο αυτών των ε_ν -προσεγγιστικών λύσεων είναι μια ασθενής λύση για το πρόβλημα του Cauchy (4.0.1)-(4.0.2) που θα είναι επίσης η -αποδεκτή. Αυτό θα ολοκληρώσει την απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε χωρίς απόδειξη ένα βοηθητικό λήμμα.

Λήμμα 4.5. Έστω μια ακολουθία συναρτήσεων $u_\nu : (0, \infty] \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$Tot.Var\{u_\nu(t, \cdot)\} \leq C, \quad |u_\nu(t, x)| \leq M, \quad \forall t, x, \forall \nu \geq 1$$

και

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_\nu(t, x) - u_\nu(s, x)| dx \leq L|t - s|, \quad \forall t, s \geq 0, \forall \nu \geq 1,$$

όπου C, M, L κάποιες σταθερές, δηλαδή οι συναρτήσεις-όροι της ακολουθίας είναι συναρτήσεις Lipschitz ως προς τη πρώτη μεταβλητή.

Τότε υπάρχει μια υπακολουθία u_{ν_μ} που συγκλίνει σε μια συνάρτηση $u \in L^1_{loc}([0, \infty) \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$. Το όριο αυτό ικανοποιεί

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t, x) - u(s, x)| dx \leq L|t - s|, \quad \forall t, s \geq 0.$$

Από την ανάλυση που κάναμε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, γνωρίζου-

με ότι οι ε_ν -προσεγγιστικές λύσεις u_{ε_ν} που κατασκευάζονται μέσα από τον αλγόριθμο μας έχουν φραγμένη ολική διακύμανση $\forall t \geq 0$, εφόσον ισχύει $Tot.Var \{u_{\varepsilon_\nu}(t, \cdot)\} \leq \delta_1 \forall t \geq 0$, ικανοποιώντας έτσι τη πρώτη συνθήκη του Λήμματος 4.5. Επιπρόσθετα, οι συναρτήσεις $u_{\varepsilon_\nu}(t, \cdot)$ είναι Lipschitz συνεχείς στον $L^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ (ως προς τη πρώτη μεταβλητή), εφόσον ισχύει

$$\begin{aligned} \|u_{\varepsilon_\nu}(t^*) - u_{\varepsilon_\nu}(s)\|_{L^1} &= \int_{-\infty}^{\infty} |u_{\varepsilon_\nu}(t^*, x) - u_{\varepsilon_\nu}(s, x)| dx \\ &= \mathcal{O}(1)(t^* - s) [\text{συνολικό μέγεθος όλων των μετώπων}] \\ &\quad \cdot [\text{μέγιστη χαρακτηριστική ταχύτητα}] \\ &\leq L(t^* - s). \end{aligned}$$

Επομένως, ικανοποιείται και η δεύτερη συνθήκη του λήμματος. Έτσι, θέτοντας σε εφαρμογή το Λήμμα 4.5, μπορούμε να αντλήσουμε μια υπακολουθία συναρτήσεων $(u_{\varepsilon_{\nu_k}})_{k \geq 1}$, ε_{ν_k} -προσεγγιστικών λύσεων που συγκλίνει (ως προς τη $\|\cdot\|_{L^1}$) σε μια συνάρτηση $u \in L^1_{loc}$. Έτσι, έχουμε

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u_{\varepsilon_{\nu_k}}(t, x) - u(t, x)| dx = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Για $t = 0$ ισχύει

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u_{\varepsilon_{\nu_k}}(0, x) - u(0, x)| dx = 0.$$

Άρα, ισχύει

$$\|u_{\varepsilon_{\nu_k}}(0) - u(0)\|_{L^1} \rightarrow 0.$$

Εφόσον, εκ κατασκευής ισχύει

$$\|u_{\varepsilon_\nu}(0) - \bar{u}\|_{L^1} \rightarrow 0,$$

αναγκαστικά ισχύει $u(0, x) = \bar{u}$, διότι εφόσον συγκλίνει το όριο της ακολουθίας, αναγκαστικά μια συγκλίνουσα υπακολουθία συγκλίνει στο όριο της ακολουθίας. Επομένως, ικανοποιείται η αρχική συνθήκη (4.0.2).

Για να αποδείξουμε ότι η u αποτελεί μια ασθενή λύση για το πρόβλημα του Cauchy (4.0.1)-(4.0.2), απομένει να δείξουμε ότι $\forall \phi \in C_c^1$ με συμπαγή φορέα που περιέχεται στο ανοικτό ημιεπίπεδο, όπου $t > 0$, ισχύει ότι:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [\phi_t(t, x)u(t, x) + \phi_x(t, x)f(u(t, x))] dxdt = 0, \quad (4.4.1)$$

δηλαδή ότι ισχύει:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \lim_{\nu \rightarrow \infty} [\phi_t(t, x)u_{\varepsilon_\nu}(t, x) + \phi_x(t, x)f(u_{\varepsilon_\nu}(t, x))] dxdt = 0.$$

Γνωρίζουμε ότι u_{ε_ν} είναι ομοιόμορφα φραγμένες, αφού παίρνουν τιμές μέσα στη μπάλα $B(0, \delta_1)$. Εφόσον, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, ισχύει ότι και $f(u_{\varepsilon_\nu})$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες. Επίσης, αφού οι συναρτήσεις u_{ε_ν} , $f(u_{\varepsilon_\nu})$ είναι σχεδόν παντού συνεχείς, δηλαδή το σύνολο των σημείων ασυνέχειας κάθε u_{ε_ν} και $f(u_{\varepsilon_\nu})$ είναι σύνολο μέτρου μηδέν, ισχύει ότι οι u_{ε_ν} και οι $f(u_{\varepsilon_\nu})$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις $\forall n \in \mathbb{N}$. Επομένως, από το θεώρημα της κυριαρχημένης σύγκλισης μας επιτρέπεται η εναλλαγή ορίου-ολοκληρώματος και έτσι είναι αρκετό να δείξουμε ότι ισχύει

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [\phi_t(t, x)u_{\varepsilon_\nu}(t, x) + \phi_x(t, x)f(u_{\varepsilon_\nu}(t, x))] dxdt = 0. \quad (4.4.2)$$

Στο σημείο αυτό θα δούμε ακόμα ένα βοηθητικό λήμμα χωρίς απόδειξη.

Λήμμα 4.6. Έστω ότι u_{ε_ν} είναι μια ε_ν -προσεγγιστική λύση. Επιπρόσθετα, έστω μια κυρτή εντροπία η με αντίστοιχη ροή εντροπίας q . Σταθεροποιούμε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t στην οποία δεν συμβαίνει κάποια σύγκρουση και θεωρούμε οποιοδήποτε μέτωπο που βρίσκεται ας πούμε στη θέση x_a με μέγεθος σ_a . Καλούμε $u^- = u(t, x_a^-)$, $u^+ = u(t, x_a^+)$ και ορίζουμε τα σφάλματα στις εξισώσεις Rankine-Hugoniot και στις συνθήκες εντροπίας αντίστοιχα ως ακολούθως:

$$E_a := f(u^+) - f(u^-) - \dot{x}_a(u^+ - u^-)$$

και

$$E'_a := q(u^+) - q(u^-) - \dot{x}_a(\eta(u^+) - \eta(u^-)).$$

1. Σε κάθε μέτωπο αραιώσης ισχύει:

$$E_a = \mathcal{O}(1)\varepsilon|\sigma_a|, \quad E'_a = \mathcal{O}(1)\varepsilon|\sigma_a|.$$

2. Σε κάθε κρουστικό κύμα συμπίεσης ισχύει:

$$E_a = \mathcal{O}(1)\varepsilon|\sigma_a|, \quad E'_a \leq \mathcal{O}(1)\varepsilon|\sigma_a|.$$

3. Σε κάθε αφύσικο μέτωπο ισχύει:

$$E_a = \mathcal{O}(1)|\sigma_a|, \quad E'_a = \mathcal{O}(1)|\sigma_a|.$$

Εφόσον, η ϕ έχει συμπαγή φορέα μέσα στο ανοικτό ημιεπίπεδο, όπου $t > 0$, μπορούμε να επιλέξουμε $T > 0$ τέτοιο ώστε $\phi(t, x) = 0$ όταν $t \notin (0, T)$. Επίσης, για σταθεροποιημένο ν (δηλ. για σταθεροποιημένη u_{ε_ν} προσεγγιστική λύση), σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t , καλούμε $x_1(t) < \dots < x_N(t)$ τα σημεία όπου η $u_{\varepsilon_\nu}(t, \cdot)$ έχει άλμα ασυνέχειας και σημειώνουμε:

$$\Delta u_{\varepsilon_\nu}(t, x_a) = u_{\varepsilon_\nu}(t, x_a^+) - u_{\varepsilon_\nu}(t, x_a^-)$$

και

$$\Delta f(u_{\varepsilon_\nu}(t, x_a)) = f(u_{\varepsilon_\nu}(t, x_a^+)) - f(u_{\varepsilon_\nu}(t, x_a^-)).$$

Παρατηρούμε ότι οι πολυγωνικές γραμμές $x = x_a(t)$ διαχωρίζουν το χωρίο $[0, T] \times \mathbb{R}$ σε πολλές (πεπερασμένες στο πλήθος) περιοχές Γ_j όπου μέσα σε αυτές τις περιοχές η u_{ε_ν} είναι σταθερή. Θέτουμε το διάνυσμα:

$$\Phi := (\phi \cdot u_{\varepsilon_\nu}, \phi \cdot f(u_{\varepsilon_\nu})).$$

Αμέσως έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_j \iint_{\Gamma_j} \operatorname{div} \Phi(t, x) \, dx dt &= \sum_j \iint_{\Gamma_j} [(\phi u_{\varepsilon_\nu})_t + (\phi f(u_{\varepsilon_\nu}))_x] \, dx dt \\ &= \sum_j \iint_{\Gamma_j} [\phi_t u_{\varepsilon_\nu} + \phi_x f(u_{\varepsilon_\nu}) + \phi [(u_{\varepsilon_\nu})_t + (f(u_{\varepsilon_\nu}))_x]] \, dx dt. \end{aligned}$$

Αφού η u_{ε_ν} είναι συνεχής και σταθερή στις περιοχές Γ_j , ισχύει ότι $[(u_{\varepsilon_\nu})_t + (f(u_{\varepsilon_\nu}))_x] = 0 + 0 = 0$.

Άρα,

$$\sum_j \iint_{\Gamma_j} \operatorname{div} \Phi(t, x) \, dx dt = \sum_j \iint_{\Gamma_j} [\phi_t u_{\varepsilon_\nu} + \phi_x f(u_{\varepsilon_\nu})] \, dx dt.$$

Επομένως, από το διπλό ολοκλήρωμα στην (4.4.2) έχουμε

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [\phi_t(t, x) u_{\varepsilon_\nu}(t, x) + \phi_x(t, x) f(u_{\varepsilon_\nu}(t, x))] \, dx dt \\ &= \int_0^T \int_{-\infty}^\infty [\phi_t(t, x) u_{\varepsilon_\nu}(t, x) + \phi_x(t, x) f(u_{\varepsilon_\nu}(t, x))] \, dx dt \\ &= \sum_j \iint_{\Gamma_j} [\phi_t(t, x) u_{\varepsilon_\nu}(t, x) + \phi_x(t, x) f(u_{\varepsilon_\nu}(t, x))] \, dx dt \\ &= \sum_j \iint_{\Gamma_j} \operatorname{div} \Phi(t, x) \, dx dt. \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα της Απόκλισης, έχουμε

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [\phi_t(t, x) u_{\varepsilon_\nu}(t, x) + \phi_x(t, x) f(u_{\varepsilon_\nu}(t, x))] \, dx dt \\ &= \sum_j \int_{\partial\Gamma_j} \Phi \cdot \eta \, dS \\ &= \sum_j \int_{\partial\Gamma_j} (\phi \cdot u_{\varepsilon_\nu}, \phi \cdot f(u_{\varepsilon_\nu})) \cdot \eta \, dS \\ &= \int_0^T \sum_a [\dot{x}_a(t) \Delta u_{\varepsilon_\nu}(t, x_a) - \Delta f(u_{\varepsilon_\nu}(t, x_a))] \phi(t, x_a(t)) \, dt. \end{aligned}$$

Επομένως, για να αποδείξουμε την (4.4.2) πρέπει αρχικά να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη του ορίου

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_0^T \sum_a [\dot{x}_a(t) \Delta u_{\varepsilon_\nu}(t, x_a) - \Delta f(u_{\varepsilon_\nu}(t, x_a))] \phi(t, x_a(t)) dt$$

και ακολούθως να δείξουμε ότι ισχύει

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_0^T \sum_a [\dot{x}_a(t) \Delta u_{\varepsilon_\nu}(t, x_a) - \Delta f(u_{\varepsilon_\nu}(t, x_a))] \phi(t, x_a(t)) dt = 0. \quad (4.4.3)$$

Χωρίζοντας τώρα την άθροιση στο (4.4.3) σε κρουστικά κύματα συμπίεσης (ή ασυνέχειες επαφής), σε μέτωπα αραιώσης και σε αφύσικα μέτωπα, από το Λήμμα 4.5 παίρνουμε

$$\begin{aligned} & \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \left| \sum_{a \in \text{SU}\mathcal{R} \cup \text{N}\mathcal{P}} [\dot{x}_a(t) \Delta u_{\varepsilon_\nu}(t, x_a) - \Delta f(u_{\varepsilon_\nu}(t, x_a))] \phi(t, x_a(t)) \right| \\ & \leq \max_{t,x} |\phi(t, x)| \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \left(\sum_{a \in \text{SU}\mathcal{R}} \mathcal{O}(1) \varepsilon_\nu |\sigma_a| + \sum_{a \in \text{N}\mathcal{P}} \mathcal{O}(1) |\sigma_a| \right). \end{aligned}$$

Εφόσον έχουμε δείξει ότι το συνολικό μέγεθος των αφύσικων μετώπων σε κάθε χρονική στιγμή είναι μικρότερο από ε_ν , ισχύει ότι

$$\begin{aligned} & \max_{t,x} |\phi(t, x)| \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \left(\sum_{a \in \text{SU}\mathcal{R}} \mathcal{O}(1) \varepsilon_\nu |\sigma_a| + \sum_{a \in \text{N}\mathcal{P}} \mathcal{O}(1) |\sigma_a| \right) \\ & \leq \max_{t,x} |\phi(t, x)| \left(\mathcal{O}(1) \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \varepsilon_\nu \sum_{a \in \text{SU}\mathcal{R}} |\sigma_a| + \mathcal{O}(1) \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \varepsilon_\nu \right). \end{aligned}$$

Εφόσον, ισχύει ότι $\text{Tot.Var}\{u_{\varepsilon_\nu}(t, \cdot)\} \leq \delta_1, \forall t > 0$, το συνολικό μέγεθος των μετώπων στη $u_{\varepsilon_\nu}(t, \cdot)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένο, $\forall t > 0$. Αυτό ισχύει διότι από τη σχέση (4.3.16) ισχύει $V(t) \leq C_1 \text{Tot.Var}\{u_{\varepsilon_\nu}(t, \cdot)\} \leq C_1 \delta_1, \forall t > 0$.

Άρα έχουμε

$$\begin{aligned}
& \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \left| \sum_{a \in \mathcal{S} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{N} \cup \mathcal{P}} [\dot{x}_a(t) \Delta u_{\varepsilon_\nu}(t, x_a) - \Delta f(u_{\varepsilon_\nu}(t, x_a))] \phi(t, x_a(t)) \right| \\
& \leq \max_{t, x} |\phi(t, x)| \left(\mathcal{O}(1) \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \varepsilon_\nu \sum_{a \in \mathcal{S} \cup \mathcal{R}} |\sigma_a| + \mathcal{O}(1) \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \varepsilon_\nu \right) \\
& \leq \max_{t, x} |\phi(t, x)| \left(\mathcal{O}(1) \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \varepsilon_\nu C_1 \delta_1 + \mathcal{O}(1) \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \varepsilon_\nu \right) \\
& = 0.
\end{aligned}$$

Θέτοντας

$$w_\nu = \sum_{a \in \mathcal{S} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{N} \cup \mathcal{P}} [\dot{x}_a(t) \Delta u_{\varepsilon_\nu}(t, x_a) - \Delta f(u_{\varepsilon_\nu}(t, x_a))] \phi(t, x_a(t)), \quad (4.4.4)$$

έχουμε δείξει ότι

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} |w_\nu| \leq 0.$$

Επίσης, λόγω της απόλυτης τιμής ισχύει τετριμμένα

$$0 \leq \liminf_{\nu \rightarrow \infty} |w_\nu| \leq \limsup_{\nu \rightarrow \infty} |w_\nu| \leq 0,$$

και επομένως υπάρχει το όριο $\lim_{\nu \rightarrow \infty} |w_\nu|$ και ισχύει

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} w_\nu = 0. \quad (4.4.5)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.4.4) και (4.4.5) βρίσκουμε

$$\int_0^T \lim_{\nu \rightarrow \infty} \sum_a [\dot{x}_a(t) \Delta u_{\varepsilon_\nu}(t, x_a) - \Delta f(u_{\varepsilon_\nu}(t, x_a))] \cdot \phi(t, x_a(t)) dt = 0.$$

Εφόσον, οι $\Delta u_{\varepsilon_\nu}, \Delta f(u_{\varepsilon_\nu})$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες ως προς ν , το θεώρημα της κυριαρχημένης σύγκλισης μας επιτρέπει την εναλλαγή ορίου-

ολοκληρώματος και επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \lim_{\nu \rightarrow \infty} \sum_a [\dot{x}_a(t) \Delta u_{\varepsilon_\nu}(t, x_a) - \Delta f(u_{\varepsilon_\nu}(t, x_a))] \cdot |\phi(t, x_a(t))| dt \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_0^T \sum_a [\dot{x}_a(t) \Delta u_{\varepsilon_\nu}(t, x_a) - \Delta f(u_{\varepsilon_\nu}(t, x_a))] \cdot |\phi(t, x_a(t))| dt. \end{aligned}$$

εξασφαλίζοντας έτσι την (4.4.3). Ως εκ τούτου, αποδεικνύουμε ότι ισχύει η (4.4.2) και κατ' επέκταση ότι η u είναι μια ασθενής λύση του προβλήματος του Cauchy (4.0.1)-(4.0.2).

Για την ολοκλήρωση της απόδειξης του Θεωρήματος 4.1 αρκεί να δείξουμε ότι η u είναι η -αποδεκτή. Έστω ότι η είναι μια κυρτή εντροπία για το σύστημα (4.0.1) με ροή εντροπίας q . Όπως γνωρίζουμε, η ασθενής λύση u είναι η -αποδεκτή εάν ικανοποιεί τη σχέση $\eta(u)_t + q(u)_x \leq 0$ σε ολοκληρωτική μορφή, δηλαδή εάν $\forall \phi \in C_c^1$ μη-αρνητική με συμπαγή φορέα που περιέχεται στο ανοικτό ημιεπίπεδο, όπου $t > 0$, ισχύει ότι:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [\eta(u)\phi_t + q(u)\phi_x] dxdt \geq 0. \quad (4.4.6)$$

Εφόσον ισχύει

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [\eta(u)\phi_t + q(u)\phi_x] dxdt \geq \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [\eta(u_{\varepsilon_\nu})\phi_t + q(u_{\varepsilon_\nu})\phi_x] dxdt,$$

αρκεί να δείξουμε ότι

$$\liminf_{\nu \rightarrow \infty} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [\eta(u_{\varepsilon_\nu})\phi_t + q(u_{\varepsilon_\nu})\phi_x] dxdt \geq 0. \quad (4.4.7)$$

Αφού η ϕ έχει συμπαγή φορέα μέσα στο ανοικτό ημιεπίπεδο, όπου $t > 0$, μπορούμε να επιλέξουμε $T > 0$ τέτοιο ώστε $\phi(t, x) = 0$ για $(t, x) \notin (0, T) \times \mathbb{R}$. Όμοια με προηγουμένως θέτουμε το διάνυσμα:

$$\Phi := (\phi \cdot \eta(u_{\varepsilon_\nu}), \phi \cdot q(u_{\varepsilon_\nu})).$$

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \sum_j \iint_{\Gamma_j} \operatorname{div} \Phi(t, x) \, dx dt &= \sum_j \iint_{\Gamma_j} [(\phi \eta(u_{\varepsilon_\nu}))_t + (\phi q(u_{\varepsilon_\nu}))_x] \, dx dt \\ &= \sum_j \iint_{\Gamma_j} [\phi_t \eta(u_{\varepsilon_\nu}) + \phi_x q(u_{\varepsilon_\nu}) + \phi [(\eta(u_{\varepsilon_\nu}))_t + (q(u_{\varepsilon_\nu}))_x]] \, dx dt. \end{aligned}$$

Αφού η u_{ε_ν} είναι τμηματικά Lipschitz συνεχής ισχύει ότι η u_{ε_ν} είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμη (ΘΜΑ Rademacher). Επίσης, αφού u_{ε_ν} είναι σταθερή στις περιοχές Γ_j ισχύει ότι $\iint_{\Gamma_j} [(\eta(u_{\varepsilon_\nu}))_t + (q(u_{\varepsilon_\nu}))_x] \, dx dt = 0$. Έτσι, από το ολοκλήρωμα στη (4.4.7) έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} [\eta(u_{\varepsilon_\nu}) \phi_t + q(u_{\varepsilon_\nu}) \phi_x] \, dx dt &= \sum_j \iint_{\Gamma_j} [\eta(u_{\varepsilon_\nu}) \phi_t + q(u_{\varepsilon_\nu}) \phi_x] \, dx dt \\ &= \sum_j \iint_{\Gamma_j} \operatorname{div} \Phi(t, x) \, dx dt \\ &= \sum_j \int_{\partial \Gamma_j} \Phi \cdot \eta \, dS \\ &= \sum_j \int_{\partial \Gamma_j} (\phi \cdot \eta(u_{\varepsilon_\nu}), \phi \cdot q(u_{\varepsilon_\nu})) \cdot \eta \, dS \\ &= \int_0^T \sum_a [\dot{x}_a \Delta \eta(u_{\varepsilon_\nu}) - \Delta q(u_{\varepsilon_\nu})] \phi \, dt, \end{aligned}$$

από το Θεώρημα της Απόκλισης.

Επομένως, για να εξασφαλίσουμε τη (4.4.7) αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\liminf_{\nu \rightarrow \infty} \int_0^T \sum_a [\dot{x}_a \Delta \eta(u_{\varepsilon_\nu}) - \Delta q(u_{\varepsilon_\nu})] \phi \, dt \geq 0.$$

Από το Λήμμα 4.5 ισχύει

$$E'_a = \Delta q(u_{\varepsilon_\nu}) - \dot{x}_a \Delta \eta(u_{\varepsilon_\nu}) \leq \mathcal{O}(1) \varepsilon_\nu |\sigma_a|, \quad \text{εάν } a \in \mathcal{S} \cup \mathcal{R}.$$

Άρα, ισχύει

$$-E'_a \geq -\mathcal{O}(1)\varepsilon_\nu|\sigma_a|.$$

Επειδή η ϕ είναι μη-αρνητική έχουμε

$$-E'_a\phi \geq -\mathcal{O}(1)\varepsilon_\nu|\sigma_a|\phi \geq -\mathcal{O}(1)\varepsilon_\nu|\sigma_a|\max_{t,x}\phi.$$

Αντίστοιχα, εάν $a \in \mathcal{N}\mathcal{P}$, ισχύει

$$E'_a \leq \mathcal{O}(1)|\sigma_a|,$$

και όπως πιο πάνω

$$-E'_a\phi \geq -\mathcal{O}(1)|\sigma_a|\phi \geq -\mathcal{O}(1)|\sigma_a|\max_{t,x}\phi.$$

Επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned} & \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \sum_{a \in \mathcal{S}\mathcal{U}\mathcal{R} \cup \mathcal{N}\mathcal{P}} [\dot{x}_a \Delta \eta(u_{\varepsilon_\nu}) - \Delta q(u_{\varepsilon_\nu})] \phi \\ & \geq (\max_{t,x} \phi) \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \left(- \sum_{a \in \mathcal{S}\mathcal{U}\mathcal{R}} \mathcal{O}(1)\varepsilon_\nu|\sigma_a| - \sum_{a \in \mathcal{N}\mathcal{P}} \mathcal{O}(1)|\sigma_a| \right) \\ & \geq (\max_{t,x} \phi) \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \left(- \sum_{a \in \mathcal{S}\mathcal{U}\mathcal{R}} \mathcal{O}(1)\varepsilon_\nu|\sigma_a| - \mathcal{O}(1)\varepsilon_\nu \right) = 0. \end{aligned}$$

Άρα, ισχύει

$$\liminf_{\nu \rightarrow \infty} \sum_a [\dot{x}_a \Delta \eta(u_{\varepsilon_\nu}) - \Delta q(u_{\varepsilon_\nu})] \phi \geq 0.$$

Επομένως, έχουμε δείξει ότι ισχύει η (4.4.7) και άρα δείξαμε ότι ισχύει η (4.4.6), αποδεικνύοντας έτσι ότι η ασθενής λύση u είναι η -αποδεκτή. Με αυτό τον τρόπο ολοκληρώνουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 4.1, το οποίο μας εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας ασθενούς και η -αποδεκτής λύσης του προβλήματος του Cauchy (4.0.1)-(4.0.2) η οποία ορίζεται $\forall t \geq 0$.

Βιβλιογραφία

- [1] S. BIANCHINI AND A. BRESSAN, *Vanishing viscosity solutions of nonlinear hyperbolic systems*. Ann. of Math. (2) 161 (2005), no.1, 223–342.
- [2] A. BRESSAN, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws. The One-Dimensional Cauchy Problem*. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 20. Oxford University Press, 2000.
- [3] C.M. DAFERMOS, *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics, Fourth Edition*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 325. Springer Verlag, Berlin, 2016.
- [4] J. GLIMM, Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **4** (1965), 697–715.
- [5] P.D. LAX, *Hyperbolic systems of conservation laws II*. Comm. Pure Appl. Math. **10** (1957), 537-566.