Πανεπιστήμιο Κύπρου

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Η ΚΑΤΑΚΤΗΣΗ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΥ
ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΡΧΑΙΟΤΗΤΑ ΩΣ ΣΗΜΕΡΑ

ΔΙΑΤΡΙΒΗ MASTER

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2021

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΔΙΑΤΡΙΒΗ MASTER

Η ΚΑΤΑΚΤΗΣΗ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΥ
ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΡΧΑΙΟΤΗΤΑ ΩΣ ΣΗΜΕΡΑ

Άντρεα Νικολέττη

Επιβλέπων:

Δρ. Νικόλαος Στυλιανόπουλος

7 Δεκεμβρίου 2021

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

Ευχαριστίες

Η παρούσα Διατριβή Μάστερ, εκπονήθηκε στο πλαίσιο του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών «Μάστερ στις Μαθηματικές Επιστήμες», του Τμήματος Μαθηματικών και Στατιστικής του Πανεπιστημίου Κύπρου, υπό την επίβλεψη του Καθηγητή Δρ. Νικόλαου Στυλιανόπουλου του Τμήματος Μαθηματικών και Στατιστικής του Πανεπιστημίου Κύπρου.

Ολοκληρώνοντας τη διατριβή του Μάστερ μου, θα ήθελα εν συντομία να ευχαριστήσω τα άτομα που βοήθησαν στην διεκπεραίωση του έργου αυτού.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες εκφράζω προς τον επιβλέποντα Καθηγητή μου Δρ. Νικόλαο Στυλιανόπουλο, για το ενδιαφέρον αυτό θέμα που πρότεινε προς διερεύνηση, την άρτια καθοδήγηση και τη συμβολή του στην ολοκλήρωση της Διατριβής του Μάστερ μου. Επίσης, θα ήθελα να τον ευχαριστήσω για την εμπιστοσύνη που έδειξε στο πρόσωπό μου, το συνεχές ενδιαφέρον που επέδειχνε, ώστε η εργασία μου να ολοκληρωθεί έγκαιρα και με σαφήνεια, καθώς και για τη βοήθεια και τις συμβουλές του σε όλο το διάστημα εκπόνησης αυτής της εργασίας. Ήταν για εμένα πολύτιμος σύμβουλος και αρωγός, στην όλη μου προσπάθεια και άνοιξε για μένα ένα νέο παράθυρο στη γνώση.

Επιπλέον, θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στην εξεταστική επιτροπή, τον Καθηγητή Δρ. Αλέκο Βίδρα και την Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Δρ. Κλεοπάτρα Χριστοφόρου του Τμήματος Μαθηματικών και Στατιστικής του Πανεπιστημίου Κύπρου, για το ενδιαφέρον και τον χρόνο που αφιέρωσαν για τη μελέτη και την αξιολόγηση της παρούσας εργασίας.

Ακόμη, δεν θα μπορούσα να μην ευχαριστήσω την οικογένειά μου και όλους όσους με στήριξαν σ’ αυτήν μου την προσπάθεια. Η ανιδιοτελής αγάπη, η αμείωτη συμπαράσταση, η ενθάρρυνση, η κατανόηση και η πολύπλευρη στήριξή τους κατά τη διάρκεια των σπουδών μου, μου έδινε δύναμη να συνεχίσω και να προσπαθώ πάντα για το καλύτερο.

Τέλος, επιθυμώ να τονίσω το πόσο τυχερή και ικανοποιημένη ένιωσα ολοκληρώνοντας τη μελέτη μου γύρω από το θέμα αυτό και για τις γνώσεις που αποκόμισα κατά την εκπόνησή της.

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΗ

Περίληψη

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή, έχει ως κύριο σκοπό της την ανάδειξη του τρόπου με τον οποίο μαθηματικοί και φιλόσοφοι προσπάθησαν να προσεγγίσουν την έννοια του απείρου, να συμφιλιωθούν μαζί της, να τη δαμάσουν και να τη χρησιμοποιήσουν ως εργαλείο επίλυσης προβλημάτων και ερμηνείας φαινομένων. Η έννοια του απείρου, κέντρισε το ενδιαφέρον πολλών επιστημόνων και διαδραμάτισε κεντρικό ρόλο στην εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης. Αποτελεί μία από τις μεγαλύτερες προκλήσεις για την ανθρώπινη νόηση και ένα από τα μεγαλύτερα ζητήματα, που κλήθηκαν να αντιμετωπίσουν οι μαθηματικοί. Κάθε πνευματικό ον, αντιλαμβάνεται την έννοια του απείρου στο πλαίσιο της δικής του φαντασίας και εμπειρίας.

Οι προσπάθειες να εδραιωθεί η έννοια του απείρου στα Μαθηματικά, άρχισαν από νωρίς, περίπου από το 400 π.Χ., κάτι το οποίο δεν επιτεύχθηκε μέχρι το τέλος του $19^{ου}$ αιώνα. Βαθιά ριζωμένη, είναι η σύγκρουση του απείρου και του πεπερασμένου, κατά την προσπάθεια προσέγγισης και κατανόησης της ιδέας του απείρου. Πολλοί ήταν αυτοί, που εισηγήθηκαν την αποφυγή χρήσης του απείρου στα Μαθηματικά.

Αρχικά, στην εργασία αυτή παρουσιάζεται η γέννηση της ορθολογικής σκέψης και η τεράστια συμβολή των αρχαίων Ελλήνων στη δημιουργία της Φιλοσοφίας. Έπειτα, γίνεται αναφορά στα πιστεύω σπουδαίων Ελλήνων φιλοσόφων, μεταξύ άλλων, του Αναξίμανδρου και του Αριστοτέλη, οι οποίοι ασχολήθηκαν με την έννοια του απείρου. Μάλιστα, ο Αριστοτέλης διαχώρισε το άπειρο σε δύο είδη: το εν δυνάμει και το εν ενεργεία. Εν συνεχεία, η παρούσα μελέτη πραγματεύεται και θέτει ορισμένα ερωτήματα σε σχέση με το άπειρο και τη σημασία του στα Μαθηματικά, ως κάτι το ανεξάντλητο και το θαυματουργό. Ακολούθως, μελετιούνται ορισμένες δυσκολίες που εμφανίστηκαν τον $15^{ο}$ αιώνα σε σχέση με τα αθροίσματα, καθώς επίσης και τον $18^{ο}$ αιώνα σε σχέση με τα απειροστά.

Η εργασία προχωρά, κάνοντας μια ιστορική αναδρομή σε μαθηματικούς σταθμούς, καίριους για την ανάπτυξη του απείρου και γενικότερα την καλλιέργεια των Μαθηματικών στην οποία οι Έλληνες έχουν εξέχουσα θέση. Η αναδρομή ξεκινά με μια αναφορά στη Γεωμετρία του Θαλή και στη συνέχεια, επικεντρώνεται στο έργο του Πυθαγόρα και πως από τη θεώρησή του ότι τα πάντα στο σύμπαν είναι ρητοί αριθμοί, κατέληξε στην αποκάλυψη της ασσυμετρίας. Επίσης, παρουσιάζονται τα παράδοξα του Ζήνωνα σε σχέση με το άπειρο, τα οποία οδήγησαν πολλούς μαθηματικούς στην περεταίρω και ουσιαστικότερη άνοδο των Μαθηματικών. Μετέπειτα, καταγράφονται οι αξιόλογες παρακαταθήκες του Ευδόξου και του Ευκλείδη. Δίνεται έμφαση, ακόμα, στον θρίαμβο του Αρχιμήδη, που αποτελεί ορόσημο για τα σημερινά Μαθηματικά.

Επιπλέον, μελετιούνται οι άπειρες σειρές και η σύγκλισή τους. Παρατίθενται οι αντιλήψεις και η σχέση σπουδαίων μαθηματικών με το άπειρο και η θεμελίωση του Απειροστικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού. Παράλληλα, συζητιέται η επική προσπάθεια επίλυσης του διασημότερου Μαθηματικού Γρίφου, που δεν είναι άλλος από «Το Τελευταίο Θεώρημα του Fermat».

Κατόπιν, παρουσιάζεται διεξοδικά η συμβολή του Cantor, ο οποίος είναι υπεύθυνος για την αυστηρή θεμελίωση του απείρου στα Μαθηματικά. Στην προσπάθειά του αυτή, δημιούργησε τον αξιοσημείωτο κλάδο των Μαθηματικών, τη Θεωρία Συνόλων. Συγχρόνως, προβάλλεται η θεμελίωση των συνόλων, καθώς και οι αντινομίες τους. Επιπρόσθετα, γίνεται λόγος για την αξιωματική θεωρία των Zermelo-Fraenkel και για την Υπόθεση του Συνεχούς.

Στη συνέχεια, η διατριβή εστιάζει στην ανακούφιση που προκάλεσε ο Peano, με την απάντηση που έδωσε σ’ ένα εύλογο ερώτημα που ταλάνιζε τη μαθηματική κοινότητα και το οποίο θα κλόνιζε όλες τις μέχρι τότε ανακαλύψεις. Ακολούθως, γίνεται μελέτη μιας επαναστατικής δημιουργίας των Μαθηματικών σε σχέση με τη Γεωμετρία, οι Μη-Ευκλείδειες Γεωμετρίες. Τέλος, η εργασία ολοκληρώνεται με μια πρόσφατη κατάκτηση σε σχέση με το άπειρο, η οποία δόθηκε από τον Dirac.

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

Λέξεις-Κλειδιά

- ορθολογισμός
- εν ενεργεία/εν δυνάμει άπειρο
- αθροίσματα
- απειροστά/αδιαίρετα
- Γεωμετρία
- Θεώρημα του Θαλή
- Πυθαγόρειο Θεώρημα
- άρρητοι αριθμοί
- εις άτοπον απαγωγή
- παράδοξα/αντινομίες
- Μέθοδος της Εξάντλησης
- Τετραγωνισμός της παραβολής
- Αιτήματα/Αξιώματα/Αξιωματική Θεωρία
- πρώτοι αριθμοί
- άπειρες σειρές/σύγκλιση
- «Το Τελευταίο Θεώρημα του Fermat»
- Διαγώνιο Επιχείρημα του Cantor
- Θεωρία Συνόλων ZF
- μη-πληρότητα
- Υπόθεση του Συνεχούς
- Καμπύλη του Peano
- Μη-Ευκλείδειες Γεωμετρίες
- Κατανομή του Dirac

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

Abstract

The main purpose of this Master's Thesis, is to try to give an insight regarding the way, in which mathematicians and philosophers have tried to approach the notion of infinity, to reconcile with it, to tame it and to use it as a tool for solving problems and interpreting of phenomena. The notion of infinity has attracted the interest of many scientists and have played a central role in the development of mathematical thought. It is one of the greatest challenges for human intellect and one of the greatest challenges that mathematicians were called upon to deal with. Every spiritual human being perceives the meaning of infinity in the context of its own imagination and experience.

The efforts to establish the meaning of the infinity in Mathematics, began around 400 b.C. if not before, something that was not achieved until the end of the 19th century. Deeply rooted, is the conflict of the infinity and the finite, in the effort to approach and understand the ideal of the infinity. There were many notable (if not great) mathematicians, who tried to avoid the notion of infinity from Mathematics.

This study begins with the birth of rational thinking and the paramount contribution of the ancient Greeks to the creation of Philosophy. Next, a reference to the works of great philosophers follows, including Anaximander and Aristotle. In fact, Aristotle divided the infinity into two types: the potential and the actual. Then, the study presents and, in particular, poses some questions about the infinity and its importance in Mathematics, as something inexhaustible and miraculous. Some difficulties that appeared in the 15th century in relation to sums are studied, followed by the 18th century in relation to infinities.

The study continues by making a historical review to mathematical peaks in motivating development, crucial for the development of the infinity and the cultivation of the Mathematics in general in which Greeks have made enormous contributions. The historical review begins with a reference to the Geometry of Thales and then focuses on the work of Pythagoras, who based his philosophy in the belief that everything in the universe is rational numbers, but he concluded to the revealing of the asymmetry. Also, the Zeno's paradoxes related to infinity are presented, which led many mathematicians to the further and substantial rise of Mathematics. The remarkable achievements of Eudoxus and Euclid are also recorded. Emphasis is placed upon the triumph of Archimedes, which is a milestone in the history of Mathematics.

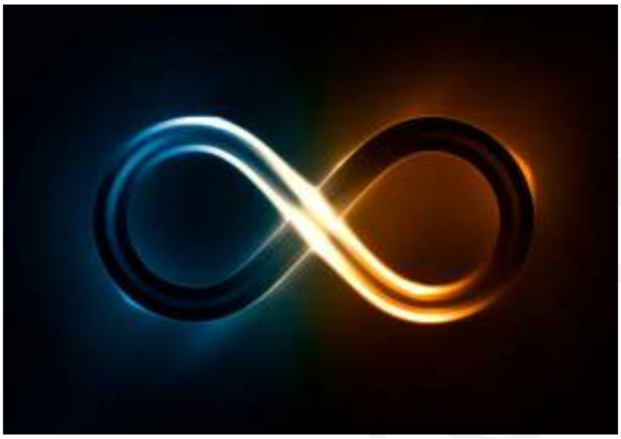
In addition, the infinite series and their convergence are studied. The perception and the relation of Mathematics with infinity are presented including the (Infinitesimal and Integral Calculus). At the same time, the epic attempt to solve the most famous mathematical riddle is discussed, which is no other than "The Fermat's Last Theorem".

Next, the great contributions of Cantor, who is responsible for the correct perception of infinity in Mathematics, is presented in detail. In this endeavor, he created a remarkable branch of Mathematics, called the Cantorian Set Theory. Alongside, the foundation of the sets, as well as their antinomies are mentioned. Furthermore, a

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

reference to the Zermelo-Fraenkel axiom theory and the Continuum Hypothesis is made.

The thesis then focuses on the relief caused by Peano, who answered a reasonable question that bewildered the mathematical community back then. Next, a revolutionary creation of Mathematics is studied in relation to Geometry, the Non-Euclidean Geometries. Finally, the study is completed with the latest conquest regarding the infinity, which was given by Dirac.



ANTPEA NIKOΛETTH

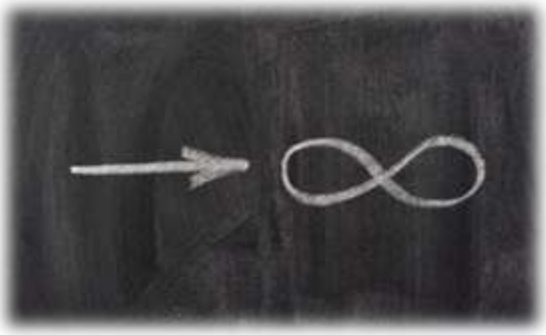
Keywords

- rationalization
- actual/potentially infinity
- sums
- infinites/indivisibles
- Geometry
- Thales' Theorem
- Pythagorean Theorem
- irrational numbers
- reductio ad absurdum
- paradoxes/antinomies
- Method of Exhaustion
- Squared property of parabola
- Requests/Axioms/Axiom Theory
- prime numbers
- infinite series/convergence
- "The Fermat's Last Theorem"
- Cantor's diagonal argument
- Zermelo-Fraenkel set theory
- incompleteness
- Continuum Hypothesis
- Peano's curve
- Non-Euclidean Geometries
- Dirac distribution

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

Περιεχόμενα:

Σελ.



ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

1. Εισαγωγή

Το άπειρο, καίτοι απολύτως καθορισμένο σήμερα στον κόσμο των Μαθηματικών, για το ευρύ κοινό αποτελεί μια αφηρημένη έννοια που περιγράφει κάτι χωρίς κανένα όριο και είναι εξαιρετικής σημασίας σε μια σειρά από επιστήμες. Η λέξη άπειρο, προέρχεται από το στερητικό πρόθεμα «α-» και τη λέξη «πέρας», που σημαίνει τέλος. Στην καθομιλουμένη, με τον όρο άπειρο, εννοούμε συνήθως κάτι το οποίο αντίκειται στο πεπερασμένο, κάτι χωρίς πέρας, κάτι έξω από το οποίο δεν επιδέχεται περαιτέρω αύξηση. Από την αρχή, το άπειρο προκάλεσε αντινομίες, πολλές από τις οποίες αποτελούν μέχρι και σήμερα αντικείμενο μελέτης.

Η έννοια του απείρου, αποτελεί ακρογωνιαίο λίθο στην επιστήμη των Μαθηματικών και απασχολούσε ανέκαθεν την ανθρώπινη νόηση. Η ύπαρξη του απείρου ως πραγματικό μέγεθος ή όχι, απασχόλησε φιλόσοφους και μαθηματικούς έντονα από την εποχή των Πυθαγορείων και αποδείχτηκε ένα από τα δυσκολότερα προβλήματα που κλήθηκε να αντιμετωπίσει η Μαθηματική Επιστήμη.

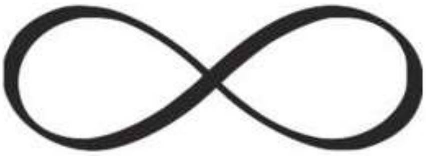
Αρκετοί μαθηματικοί κατά καιρούς αναγκάστηκαν να το αρνηθούν, για να αποφύγουν τις δυσκολίες και τα παράδοξά του. Ένας από αυτούς, ήταν για παράδειγμα ο περίφημος Γερμανός μαθηματικός Gauss (1777-1855), ο οποίος ήταν ένας από τους τρεις μεγαλύτερους μαθηματικούς όλων των εποχών. Οι μαθηματικοί και οι φιλόσοφοι, παλεύουν με την έννοια του απείρου και των απειροσυνόλων από τον καιρό των αρχαίων Ελλήνων. Οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί, κατανόησαν σε μεγάλο βαθμό την έννοια αυτή. Μια κορυφαία ελληνική πραγματεία, είναι τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη (300 π.Χ.). Ο Πυθαγόρας (569-475 π.Χ.), υπήρξε ένας από τους σπουδαιότερους μαθηματικούς όλων των εποχών. Αυτός είναι που εισήγαγε τον όρο Μαθηματικά. Πριν από αυτόν, ο Θαλής ο Μιλήσιος (640-546 π.Χ.) πήρε φυσικά σχήματα και τα έκανε νοητικά. Οι γραμμές για τον Θαλή δεν ήταν κάτι που μπορείς να δεις στην άμμο, αλλά ήταν αντικείμενα σκέψης στην φαντασία μας. Ο Θαλής, ήταν ο πρώτος που αισθάνθηκε την ανάγκη της μαθηματικής απόδειξης. Ήταν ο πρώτος, ο οποίος εισήγαγε την απόδειξη στα Μαθηματικά για να επικυρώσει τους μαθηματικούς του συλλογισμούς.

Ο τρόπος με τον οποίο ελλοχεύει η έννοια του απείρου στο πεπερασμένο και στο καθημερινό και που προβάλλεται ανάγλυφα στα Παράδοξα του Ζήνωνα (490-430 π.Χ.) - το παράδοξο της διχοτόμησης, το παράδοξο του Αχιλλέα και της χελώνας, το παράδοξο του βέλους, το παράδοξο του σταδίου - είναι ο τρόπος που το άπειρο δοκιμάζει τα όρια, τις αντοχές και τις ανοχές του νου. Τα Παράδοξα του Ζήνωνα, είναι μία από τις πρώτες ενδείξεις για τις δυσκολίες που κλήθηκαν να αντιμετωπίσουν αρκετοί Έλληνες, ανάμεσά τους ο Αριστοτέλης (384-322 π.Χ.), ο οποίος αποδέχτηκε ότι ένα σύνολο μπορεί να είναι απεριόριστα μεγάλο. Ωστόσο, αρνήθηκαν την ύπαρξη ενός ολοκληρωμένου απειροσυνόλου. Κατά τον Μεσαίωνα, συζητήθηκαν και προβλημάτισαν οι έννοιες του εν δυνάμει και του εν ενεργεία απείρου.

Έννοιες όπως το άπειρο, τα παράδοξα, η μη-πληρότητα και άλλες, αποτελούν τα θεμέλια των Μαθηματικών. Ο Γερμανός μαθηματικός Cantor (1845-1918),

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

αποκαλύπτει τον αναπάντεχο πλούτο που έκρυβε η έννοια του απείρου, ανοίγοντας τον ασκό του Αιόλου με συνέπειες απρόβλεπτες τόσο για τα Μαθηματικά όσο και για τον ίδιο. Το σύμβολο του απείρου ∞, εισήχθη από τον Βρετανό μαθηματικό John Wallis (1616-1703).



Εικόνα 1.1: Το σύμβολο του απείρου

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

2. Η γέννηση της ορθολογικής και θετικής σκέψης

Από τις αρχές του $7^{ου}$ αιώνα π.Χ. και για εκατό περίπου χρόνια, η Φιλοσοφία υπήρξε αντικείμενο προς αναζήτηση και διερεύνηση. Η ορθολογική σκέψη πρωτοεμφανίστηκε σε ελληνικές πόλεις της Μικράς Ασίας κατά τον $6^{ο}$ αιώνα π.Χ., από Ίωνες φιλόσοφους. Οι Ίωνες, ήταν ένα από τα αρχαία ελληνικά φύλα και ζούσαν κυρίως στην Αττική, στα νησιά του Αιγαίου και στη Μικρά Ασία. Αυτοί δημιούργησαν την τέχνη της Επιστήμης και της Φιλοσοφίας. Ο τρόπος σκέψης, διαχωρίστηκε για πρώτη φορά από τη δοξασία, εφόσον για πρώτη φορά ο λόγος διαχωρίστηκε από τον μύθο. Αυτό έγινε στην Ελλάδα. Οι ανατολικοί λαοί σε αντίθεση με τους Έλληνες που έδωσαν βάση στην καλλιέργεια του πνεύματος, εστίαζαν μόνο σε πρακτικές γνώσεις. Το μεγάλο επίτευγμα των αρχαίων Ελλήνων, ήταν ότι αντικατέστησαν τις εμπειρικές μεθόδους με επιστημονικές.

Οι αρχαίοι Έλληνες με το ανήσυχό τους πνεύμα, αμφισβητούσαν οτιδήποτε δεν είχε λογική εξήγηση και επιχειρηματολογία (ορθολογισμό). Η αρχαία ελληνική Φιλοσοφία γέννησε την Επιστήμη, αφού οι απαντήσεις σε φιλοσοφικά ερωτήματα σε σχέση με τη φύση του ανθρώπου και την ουσία του κόσμου, δίνονται μέσω ενός φιλοσοφικού τρόπου σκέψης.

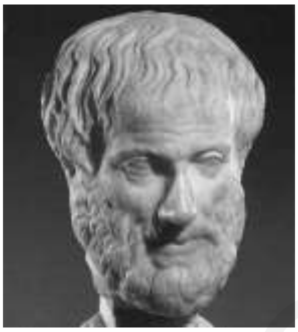
Η δίψα για γνώση και λογική απάντηση σε οτιδήποτε αφορά τη φύση και τα μυστικά της, καθώς και για τη θέση του ανθρώπου μέσα στον κόσμο, οδήγησε στην ανάπτυξη της θετικής σκέψης με γενέτειρα την αρχαία Ελλάδα. Η ελληνική Φιλοσοφία, λοιπόν, δημιούργησε έννοιες πολύτιμες για τις μετέπειτα εποχές, όπως η έννοια της ύλης, του αριθμού, του μεγέθους, της δύναμης, της κίνησης, του χώρου, του χρόνου, αλλά και του ατόμου.

Η Φιλοσοφία και η διδασκαλία της, επιζητούσε να ανοίξει καινούργιους δρόμους και να διαφοροποιήσει το άτομο από τις τότε καθιερωμένες πεποιθήσεις. Η αιρετική κοινότητα της οποίας τον δρόμο άνοιξε ο Πυθαγόρας, απαιτούσε από τον άνθρωπο να εγκαταλείψει την ελεύθερη αναζήτηση και τη διαφωτιστική διάθεση των πρώτων Ιώνων φιλόσοφων και να κατανοήσει ότι η Φιλοσοφία είναι μια θρησκευτική μεταστροφή.

Γύρω στο 600 π.Χ., ο Θαλής ο Μιλήσιος, τον οποίο θα μελετήσουμε στην Ενότητα 6, ίδρυσε στη Μιλητό της Ιωνίας την πρώτη φιλοσοφική σχολή, τη Σχολή της Ιωνίας, της οποίας η συμβολή στα Μαθηματικά ήταν τεράστια. Πουθενά στα προελληνικά Μαθηματικά των Αιγυπτίων και των Βαβυλωνίων δεν υπήρχε απόδειξη, παρά μόνο συστήματα αρίθμησης, αριθμητικά δεδομένα για λογιστική χρήση, γεωμετρικά σχήματα και μετρήσεις μηκών, εμβαδών και όγκων. Οι γνώσεις τους, περιορίζονταν μόνο στην εμπειρία. Στις βαβυλωνιακές πινακίδες και τους αιγυπτιακούς παπύρους, σημειώνονταν μόνο αριθμητικές τιμές των δεδομένων του προβλήματος. Η Σχολή της Ιωνίας με «αρχηγό» τον Θαλή, εισήγαγε, έστω και σε πρώιμη μορφή την απόδειξη, δηλαδή την αιτιολόγηση προς τον συνομιλητή με τη μορφή ενός λόγου. Η έννοια του απείρου, είναι τόσο αρχαία όσο και η Ιόνιος Φιλοσοφία, με το οποίο ασχολήθηκε πρώτη.

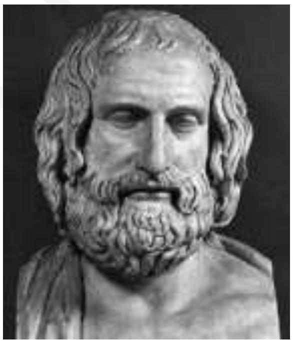
ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

Ο Αναξίμανδρος ο Μιλήσιος (611-547 π.Χ.), χαρακτηρίζεται ως ο φιλόσοφος του απείρου και του αέναου σύμπαντος. Ήταν ο πρώτος που εισήγαγε στην Φιλοσοφία, την έννοια του απείρου. Ήταν ένας από τους φυσικούς φιλόσοφους και φυσιολόγους της Ιωνίας και υπήρξε μαθητής του Θαλή. Είχε την άποψη ότι η αρχή των όντων του κόσμου ήταν το άπειρο, το οποίο είναι παντοτινό και ανεξάντλητο. Ακόμη, εξέλαβε το άπειρο ως κοσμογονική αρχή και υποστήριξε ότι το άπειρο «περιέχει τα πάντα και κυβερνά τα πάντα». Γι' αυτόν, το αλεξιμάνδρειο άπειρο ήταν κάτι το υλικό και λόγω της εποχής του, με τη λέξη άπειρο δεν είχε στο νου του το μαθηματικό άπειρο, αλλά κάτι αιώνιο, αθάνατο και «θείο» («Φυσικά», 203b7, Αριστοτέλης).



Εικόνα 2.1: Αναξίμανδρος ο Μιλήσιος (611-547 π.Χ.)

Ο Αναξαγόρας ο Κλαζομένιος (500-428 π.Χ.), ασχολήθηκε με τη μαθηματική έννοια του απείρως μικρού. Κατά τον ίδιο, ισχύει ότι: «Ούτε στα μικρά πράγματα υπάρχει κάτι ελάχιστο, ούτε στα μεγάλα κάτι μέγιστο. Πάντα όμως υπάρχει κάτι ακόμα μικρότερο ή ακόμα μεγαλύτερο» («Άπειρο: Τα μαθηματικά της αθανασίας», John D. Barrow, Αθήνα 2007, σελ. 48).



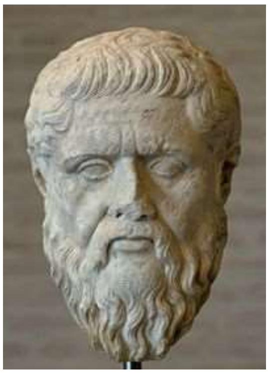
Εικόνα 2.2: Αναξαγόρας ο Κλαζομένιος (500-428 π.Χ.)

Η αρχαία ελληνική νόηση, ήταν αυτή που ανήγαγε το άπειρο σε καίριο μαθηματικό ζήτημα. Πριν από τους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς και φιλόσοφους, οι Ινδοί, οι Κινέζοι, οι Βαβυλώνιοι και οι Αιγύπτιοι, ασχολούνταν μόνο με προβλήματα πρακτικής φύσεως.

Σήμερα, οι περισσότεροι μαθηματικοί, είναι πλατωνιστές. Ο όρος «πλατωνισμός», αναφέρεται στις ιδέες του Πλάτωνα (427-347 π.Χ.). Θεωρείται ο μεγαλύτερος φιλόσοφος όλων των εποχών και όλη η σύγχρονη Φιλοσοφία, είναι σχολιασμός στον Πλάτωνα. Χαρακτηριστικά, ο Βρετανός φιλόσοφος και μαθηματικός Alfred North Whitehead (1861-1947) είχε δηλώσει στις αρχές του 20ου αιώνα ότι: «Οι μαθηματικές

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

αλήθειες, είναι δημιούργημα του Θεού και οι μαθηματικοί απλώς τις ξεσκεπάζουν, τις αποκαλύπτουν, δεν τις ανακαλύπτουν».



Εικόνα 2.3: Πλάτωνας (427-347 π.Χ.)

Ο φιλόσοφος και επιστήμονας Αριστοτέλης (384-322 π.Χ.), ήταν μαθητής του Πλάτωνα. Ο Μέγας Αλέξανδρος (356-323 π.Χ.), ήταν μαθητής του Αριστοτέλη.

Ο Αριστοτέλης, υποστήριζε ότι το σύμπαν είναι φραγμένο και πεπερασμένο, με μορφή τεράστιας σφαίρας, κάτι που δεν απέχει πολύ από τη σημερινή επικρατούσα άποψη της Φυσικής.

Εικόνα 2.4: Αριστοτέλης (384-322 π.Χ.)

Σύμφωνα με τον Διονύσιο Α. Αναπολιτάνο, καθηγητή του γνωστικού αντικειμένου Μεθοδολογίας και Φιλοσοφίας των Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών στο βιβλίο του με τίτλο: «Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών», Αθήνα 2005 (σελ. 61), αναφέρει ότι:

Ο Αριστοτέλης, πίστευε πως η περιέργεια για το άπειρο πηγάζει από:

1. την πίστη πως ο χρόνος είναι άπειρος
2. την αέναη παρουσία της γέννησης και της φθοράς ενός αντικειμένου
3. την αντίληψη ότι η ολότητα των πραγμάτων δεν έχει όρια
4. το απεριόριστο της ανθρώπινης σκέψης, των αριθμών και των γεωμετρικών σχημάτων
5. τη δυνατότητα τμήσης εκτεταμένων μεγεθών, όπου ο αριθμός τμήσης, χωρίς να μπορεί να είναι άπειρος, δεν είναι άνω φραγμένος.

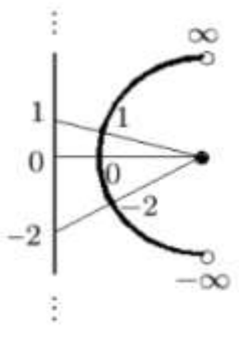
ΑΝΤΡΕΑ ΚΟΛΕΤΤΗ

Η αθροιστική και η διαιρετική διαδικασία του Αριστοτέλη, μας εξοικείωσαν με την έννοια του απείρου. Η πρώτη, μας οδηγεί στη θεώρηση πεπερασμένων αντικειμένων οσοδήποτε μεγάλων διαστάσεων και η δεύτερη, σχετίζεται με τη δυνατότητα άπειρης διαίρεσης πεπερασμένων μεγεθών.

Ο Αριστοτέλης, έγραφε: «…το να είναι κάτι άπειρο είναι μειονέκτημα, δεν είναι πλεονέκτημα, το όριο απουσιάζει...» («Το άπειρο και ο νους», Rucker R., Ηράκλειο 2004). Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη, υπάρχουν δύο είδη απείρων, το εν δυνάμει (ή δυνητικό άπειρο) και το εν ενεργεία (ή πραγματικό άπειρο). Το πρώτο, είναι μια διανοητική κατασκευή για να μπορούμε να επιλύουμε μαθηματικά προβλήματα και το δεύτερο, υπάρχει πραγματικά. Το εν δυνάμει άπειρο, εκφράζει μια αενάως επαναλαμβανόμενη διαδικασία και το εν ενεργεία άπειρο, εκφράζει τη διαδικασία αυτή ως ολότητα. Διαχωρίζει το άπειρο του χωρικού μεγέθους και το άπειρο της κίνησης και του χρόνου («Φυσικά», 207b, 16-20, Αριστοτέλης). Η άποψή του για το άπειρο, συνοψίζεται στη θέση ότι: «Το άπειρο υπάρχει δυνάμει…Ενεργεία άπειρο δεν μπορεί να υπάρξει.» («Άπειρο: Τα μαθηματικά της αθανασίας», John D. Barrow, Αθήνα 2007, σελ. 49).

Το δυνητικό άπειρο, προσεγγίζει το άπειρο, αλλά δεν φτάνει ποτέ στο τέλος του. Για παράδειγμα, η ακολουθία αριθμών: $1, 2, 3, \ldots$, ναι μεν γίνεται όλο και μεγαλύτερη, ωστόσο δεν τελειώνει και δεν φτάνει ποτέ στο άπειρο. Γεωμετρικά, αυτό το άπειρο μπορεί να θεωρηθεί ως αυτό που απολείπεται από το πέρας μιας άπειρης εκτεινόμενης ευθείας. Στον Απειροστικό Λογισμό για παράδειγμα, με το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, εννοούμε ότι επιλέγοντας τιμές ολοένα και πιο κοντά στο 0 για το x (όχι όμως ίσες με 0), τότε ο λόγος $\frac{\sin x}{x}$ πηγαίνει όλο και πιο κοντά στο 1.

Στο πραγματικό άπειρο, πεπερασμένες και άπειρες ποσότητες, υπάγονται κάτω από την ίδια θεώρηση. Η άπειρη ποσότητα είναι μεγαλύτερη από την πεπερασμένη. Στο δυνητικό άπειρο, το άπειρο είναι σχήμα λόγου. Η άπειρη ποσότητα είναι αυθαίρετα μεγάλη και απροσδιόριστη. Το πραγματικό άπειρο, είναι κάτι που μπορούμε να φτάσουμε με μια περατωμένη διαδικασία. Για παράδειγμα, παίρνουμε το σύνολο: $\{1, 2, 3, \ldots\}$, δηλαδή το σύνολο των θετικών ακέραιων αριθμών, το οποίο είναι ένα σύνολο με απείρως πολλά στοιχεία. Γεωμετρικά, αυτό το άπειρο διακρίνεται στο ακόλουθο Σχήμα 2.1:



Σχήμα 2.1: 1-1 αντιστοίχιση σημείων ημικυκλίου στο $\mathbb{R}$

Έχουμε μια 1-1 αντιστοίχιση μεταξύ των σημείων ενός ημικυκλίου και μιας άπειρης ευθείας. Για το $-\infty$ και το ∞, δεν υπάρχουν σημεία. Όμως, «ταυτίζει» κανείς τους αριθμούς αυτούς στα άκρα του ημικυκλίου.

Στην πραγματεία του με τίτλο: «Φυσικά», η οποία αποτελείται από οκτώ βιβλία, υποστήριζε ότι ο χώρος είναι διαιρετός επ’ άπειρον, αλλά και πεπερασμένος, όπως το σύμπαν. Το συνεχές, βρίσκεται στο επίκεντρο του έργου του και μπορεί να διαιρεθεί σε επ’ άπειρον διαιρετά τμήματα. Επίσης, δέχεται ότι ο χρόνος είναι δυνητικά άπειρος, με την έννοια ότι κυλά συνεχώς.


ΦΥΣΙΚΗΣ ΑΚΡΟΑΣΕΩΣ Α.

Εικόνα 2.5: Πρώτη σελίδα της πραγματείας «Φυσικά» του Αριστοτέλη

Ο Αριστοτέλης, δέχεται δύο δυνητικά άπειρα, της πρόσθεσης και της διαίρεσης. Οι αριθμοί ανήκουν στο δυνητικό άπειρο της πρόσθεσης. Ο ένας αριθμός, διαδέχεται τον άλλο χωρίς τέλος. Αυτό, γίνεται μόνο δυνητικά, αφού απαιτείται άπειρος χρόνος για να μετρηθούν άπειροι αριθμοί.

Σε αντίθεση με τους πλατωνιστές, ο Αριστοτέλης θεωρούσε ότι κανένα συνεχές σώμα δεν μπορεί να είναι αδιαίρετο και ισχυρίστηκε ότι το μέγεθος του κόσμου και ο χρόνος δεν είναι άπειρα. Γι’ αυτόν, η άπειρη διαιρετότητα του χώρου και του χρόνου, στηρίζεται στη συνέχεια. Όμως, η κίνηση έχει την ιδιότητα της άπειρης διαιρετότητας δυνητικά.

Στηρίζει το έργο του στην πλήρη συμβατότητα του απείρου και του πεπερασμένου και στο ότι τα χρονικά σημεία δεν αποτελούν διαιρέσεις του χρόνου. Είχε την άποψη, ότι: «η νομοτέλεια αποτελεί εσωτερικό κανόνα της φύσης».

Για τον Αριστοτέλη, λοιπόν, κανένα αισθητό σώμα δεν μπορεί να είναι απείρως μεγάλο. Παράλληλα, όμως, δεν ήθελε να αποκλείσει την ύπαρξη άπειρων χρονικών ακολουθιών, διότι τότε θα έπρεπε να δεχτεί ότι ο χρόνος έχει αρχή και τέλος, ότι οι ακολουθίες των αρνητικών και των θετικών αριθμών έχουν έναν πρώτο και έναν τελευταίο αριθμό και ότι υπάρχει κάποιο ελάχιστο μόριο ύλης που δεν επιδέχεται περαιτέρω διαίρεση, κάτι εξίσου αδιανόητο με την ύπαρξη ενός μέγιστου αριθμού.

ΑΝΔΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

Τέλος, τα συμπεράσματα που έχουν προκύψει από το Γ’ Βιβλίο των «Φυσικών» για το άπειρο από τις Αριστοτελικές θέσεις, είναι τα εξής:

1. Το άπειρο, αποτελεί ύλη του σωματικού μεγέθους, δεν είναι ενεργητικά πραγματωμένο, αλλά είναι αποδεκτό δυνητικά.
2. Το άπειρο, μπορεί να διαιρεθεί ως προς την κατεύθυνση του εξαντλητικού αφανισμού.
3. Το άπειρο, υπάρχει ως ένα πεπερασμένο όλον.
4. Το άπειρο, δεν περιέχει αλλά περιέχεται.

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

3. Το άπειρο ως το ανεξάντλητο και θαυμαστό δοχείο των Μαθηματικών

Στην Ενότητα αυτή, θα μελετήσουμε το άπειρο, όπως παρουσιάζεται στο βιβλίο με τίτλο: "The Mathematical Experience" των Philip J. Davis και Reuben Hersh, Boston 1981 (σελ. 152-157).

Τα Μαθηματικά από μια σκοπιά, είναι η επιστήμη του απείρου. Ενώ, παραδείγματος χάρη, οι εκφράσεις: «$2+3=5$», «$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$», «το 5 είναι ένας πρώτος αριθμός», είναι περιπτώσεις πεπερασμένων αριθμών, τα «σημαντικά» Μαθηματικά, αναδύονται όταν εμπεριέχεται στον κόσμο των Μαθηματικών η έννοια του απείρου. Το σύγχρονο απόθεμα των Μαθηματικών αντικειμένων, είναι γεμάτο από το άπειρο. Το άπειρο, είναι δύσκολο να το κατανοήσεις, να το ερμηνεύσεις και να το εξηγήσεις.

Ας σκεφτούμε μερικές τυπικές προτάσεις, όπως: «Υπάρχει ένας άπειρος αριθμός σημείων στο ευθύγραμμο τμήμα $[0,1]$.», «$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$», «$\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$», «$\aleph_0+1=\aleph_0$», «Αληθεύει ότι υπάρχουν άπειροι δίδυμοι πρώτοι αριθμοί;».

Το απλούστερο από όλα τα άπειρα φαινόμενα, είναι το σύστημα των θετικών ακέραιων αριθμών: $1,2,3,4,5,\ldots$. Οι τελείες εδώ, δείχνουν ότι η λίστα συνεχίζεται για πάντα και δεν σταματάει ποτέ. Το σύστημα αυτό, είναι πολύ χρήσιμο και έχει το δικό του σύμβολο. Συμβολίζεται με το σύμβολο $\mathbb{N}$. Το σύνολο $\mathbb{N}$, έχει την ιδιότητα ότι κάθε αριθμός έχει επόμενο και ότι δεν περιέχει μέγιστο αριθμό, διότι πάντα μπορούμε να προσθέσουμε ένα και να πάρουμε έναν ακόμη μεγαλύτερο αριθμό. Ακόμη μια ιδιότητα του, είναι ότι δεν μπορούμε να εξαντλήσουμε όλο το σύνολο $\mathbb{N}$ αποκλείοντας κάθε φορά μέλη του. Για παράδειγμα, αν διαγράψουμε τους ζυγούς αριθμούς, τότε το υπόλοιπο παραμένει απειροσύνολο. Το $\mathbb{N}$, είναι ένα ανεξάντλητο, ένα θαυματουργό δοχείο, με όλες τις «μαγικές» ιδιότητες, ιδιότητες που φαίνεται να έρχονται σε αντίθεση με όλες τις εμπειρίες της πεπερασμένης ζωής μας. Τα Μαθηματικά, μας παροτρύνουν να πιστέψουμε την ύπαρξη αυτού του δοχείου, διότι αν δεν το πράξουμε δεν θα φτάσουμε μακριά. Ένα τέτοιο παράδειγμα, που είναι γνωστό ως «Το Ξενοδοχείο του Hilbert», θα μελετήσουμε στην Ενότητα 15.

Ποια είναι, όμως, η προέλευσή του απείρου; Η αντίληψη μεγάλων χρονικών διαστημάτων ή η αντίληψη μεγάλων αποστάσεων; Άραγε, θα μπορούσε να είναι η προσπάθεια της ψυχής του ανθρώπου για αυτοπραγμάτωση; Το άπειρο, είναι αυτό που δεν έχει τέλος, το αιώνιο, το αθάνατο.

Έστω η εξίσωση:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots=1$$

ή με άλλα σύμβολα:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1.$$

Παρατηρούμε ότι στο αριστερό μέλος, έχουμε μια άπειρη παράσταση, ενώ στο δεξί μέλος έχουμε κάτι το πεπερασμένο. Αυτή η αντίφαση μεταξύ των δύο μελών, αποτελεί ταυτόχρονα πηγή ισχύος και παράδοξο (υπό μίαν έννοια απαντάει στο παράδοξο της διχοτόμησης του Ζήνωνα, που θα δούμε στην Ενότητα 8). Υπάρχει μια τεράστια μαθηματική επιθυμία να γεφυρωθεί το χάσμα μεταξύ πεπερασμένου και απείρου. Θέλουμε να συμπληρώσουμε το ημιτελές, να το εγκλωβίσουμε και να το δαμάσουμε. Οι μαθηματικοί, το έχουν ήδη πετύχει αυτό. Είναι, λοιπόν, τα Μαθηματικά μια άπειρη απάτη; Αντιπροσωπεύουν κάτι που δεν είναι πραγματικά άπειρο; Τα Μαθηματικά, εκφράζονται στη γλώσσα που χρησιμοποιεί έναν πεπερασμένο αριθμό συμβόλων, τα οποία ενώνονται σε προτάσεις πεπερασμένου μήκους. Μερικές από αυτές τις προτάσεις, εκφράζουν γεγονότα για το άπειρο. Πρόκειται για ένα απλό τέχνασμα της γλώσσας, όπου απλώς προσδιορίζουμε ορισμένους τύπους προτάσεων όταν μιλούμε για «άπειρα πράγματα».

Ο Cantor, το σπουδαίο έργο του οποίου θα μελετηθεί ενδελεχώς στην Ενότητα 15, εισήγαγε το σύμβολο $\aleph_0$ (Aleph μηδέν, τιμώντας την Εβραϊκή καταγωγή του) για τον άπειρο πληθικό αριθμό, που αντιπροσωπεύεται από το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$. Έδειξε ότι ο αριθμός αυτός, υπακούει στους νόμους της αριθμητικής, λίγο διαφορετικά από αυτούς των πεπερασμένων αριθμών. Για παράδειγμα, έδειξε ότι:

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0, \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \text{ κ.τ.λ..}$$

Η άπειρη αριθμητική, δεν είναι απλά ίδια με την πεπερασμένη. Το $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$ είναι μια αληθής πρόταση, κανένας δεν έχει εξουσιοδότηση να αντιμετωπίζει το $\aleph_0$ ως πεπερασμένη ποσότητα, αφαιρώντας το και από τα δύο μέλη της εξίσωσης, καταλήγοντας στο παράδοξο $1 = 0$! Επομένως, το $\aleph_0$ δεν είναι πραγματικός αριθμός.

Τα Μαθηματικά, μας ζητούν να πιστέψουμε σ’ ένα αόριστο σύνολο; Τι σημαίνει ότι υπάρχει ένα άπειρο σύνολο; Γιατί θα έπρεπε να το πιστέψει κανείς; Τα μαθηματικά αξιώματα (βλέπε Ενότητα 17), έχουν τη φήμη ότι είναι αυτονόητα. Αυτό, μας οδηγεί στην ιδέα ότι ένα αξίωμα, είναι απλώς μια διαλλακτική θέση πάνω στην οποία θα χτιστεί περαιτέρω επιχειρηματολογία. Είναι η αφετηρία ενός παιχνιδιού, που αν δεν υπήρχε το παιχνίδι δεν θα μπορούσε να ξεκινήσει. Το πέμπτο από αυτά, όπως θα δούμε στην Ενότητα 17, απαιτεί την ύπαρξη απειροσυνόλων. Δεν μπορούμε να αποδείξουμε ότι υπάρχουν απειροσύνολα, αλλά αιτούμαστε την ύπαρξή τους, όπως ακριβώς ο Ευκλείδης στα «Στοιχεία», αιτήθηκε την ύπαρξη κύκλου με σταθερό κέντρο και σταθερή ακτίνα.

Όπου υπάρχει δύναμη, υπάρχει και κίνδυνος. Αυτό, ισχύει εξίσου και στα Μαθηματικά. Όλα τα επιχειρήματα που αφορούν το άπειρο, πρέπει να ελεγχθούν με ιδιαίτερη προσοχή. Για το άπειρο, αποδείχθηκε ότι τα μυστικά του οδηγούν σε παράδοξα, πολλά από τα οποία θα διαπραγματευτούμε στην πορεία της μελέτης αυτής, όπως το παράδοξο του Αχιλλέα και της χελώνας. Η επανάσταση στη μαθηματική σκέψη, θεωρείται ότι άρχισε από τα παράδοξα του Ζήνωνα και γενικότερα από την αρχαία Ελλάδα. Έπειτα, υπήρξαν και άλλοι εκπρόσωποι της μαθηματικής ευημερίας και προσπάθειας αντιμετώπισης των δυσκολιών που προέκυπταν.

Ένα εύλογο ερώτημα που θα μπορούσε να θέσει ακόμα και ένα μικρό παιδί και που όλοι ανεξαρτήτως σπουδών λίγο πολύ έχουμε σκεφτεί, θα ήταν το εξής: «Υπάρχει αριθμός μεγαλύτερος από το άπειρο;». Η απάντηση είναι πολύ πιο περίπλοκη από όσο θα μπορούσε κανείς να φανταστεί. Συνήθως, οι βασικές ερωτήσεις συνοδεύονται από δύσκολες απαντήσεις. Το πρώτο πράγμα που έρχεται στο μυαλό κάποιου, είναι ότι ο λόγος που η έννοια του απείρου εισήχθη είναι ότι κανείς αριθμός δεν είναι μεγαλύτερος από αυτό και ότι είναι μια μαθηματική οντότητα μεγαλύτερη από κάθε πραγματικό αριθμό. Η απάντηση στο ερώτημα αυτό, είναι ότι σίγουρα υπάρχει κάτι μετά το άπειρο, κάτι το οποίο θα μας επέτρεπε να κάνουμε ένα ταξίδι με ή χωρίς προορισμό και που ίσως με αυτό το ταξίδι «αγγίζαμε» το Θεό. Το μόνο σίγουρο, είναι ότι θα φτάναμε στα σύνορα μεταξύ Μαθηματικών και Φιλοσοφίας.

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

4. Δυσκολίες με το άπειρο: Αθροίσματα ($15^{ος}$ αιώνας)

Η προσεταιριστική ιδιότητα, είναι ευρέως γνωστή και αποτελεί μια βασική ιδιότητα των πραγματικών αριθμών. Είναι ιδιότητα της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού των πραγματικών αριθμών. Λέμε ότι μία πράξη είναι προσεταιριστική όταν στην περίπτωση που τελείται δύο φορές σε συνέχεια, η σειρά με την οποία εκτελούνται οι πράξεις δεν επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα. Πιο απλά, το αποτέλεσμα δεν επηρεάζεται από την επιλογή των παρενθέσεων στην έκφραση των δύο πράξεων.

Σε σύμβολα έχουμε:

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Επομένως,

$$a + \big((b + c) + d\big) = \big(a + (b + c)\big) + d = \big((a + b) + c\big) + d,$$

όπου θεωρούμε το $(b + c)$ και το $(a + b)$ ως έναν αριθμό.

Επαγωγικά, μπορούμε να δείξουμε ότι αν έχουμε άθροισμα αριθμών «αυθαιρέτου πλήθους», δεν έχει σημασία η σειρά αθροίσεως.

Με βάση τα παραπάνω, παραθέτουμε τον ακόλουθο συλλογισμό:

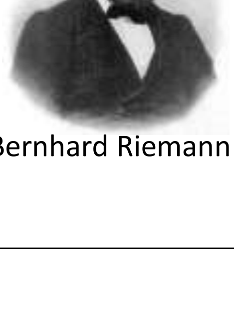
$$\begin{aligned} 0 &= \big(1 + (-1)\big) + \big(1 + (-1)\big) + \big(1 + (-1)\big) + \cdots \\ &= 1 + \big(1 + (-1)\big) + \big(1 + (-1)\big) + \big(1 + (-1)\big) + \cdots \\ &= 1, \end{aligned}$$

ο οποίος αποτελεί προφανώς αντινομία.

Ο παραπάνω συλλογισμός είναι αναληθής, διότι ο όρος «αυθαίρετο πλήθος», χρησιμοποιήθηκε σε άπειρο πλήθος αθροισμάτων, ενώ αναφέρεται σε πεπερασμένο.

Αξίζει να σημειωθεί ότι Γάλλοι θεολόγοι του $18^{ου}$ αιώνα, χρησιμοποίησαν τον παραπάνω συλλογισμό ως απόδειξη ύπαρξης του Θεού, αφού το άθροισμα είναι 1 αλλά και του Διαβόλου σε σχέση με το 0!

Την εξήγηση για το παραπάνω φαινόμενο, έδωσε ο Γερμανός μαθηματικός Bernhard Riemann (1826-1866). Η προϋπόθεση για να εφαρμοστεί ο συλλογισμός αυτός σε άπειρο πλήθος αθροισμάτων, είναι η άπειρη σειρά να συγκλίνει απόλυτα.



Εικόνα 4.1: Bernhard Riemann (1826-1866)

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

<u>Πρόταση:</u> (Bernhard Riemann)

Αν μια άπειρη σειρά συγκλίνει απόλυτα και έχει άθροισμα s, τότε κάθε άπειρη σειρά που προκύπτει από αναδιάταξη όρων της, έχει το ίδιο άθροισμα. Αν, όμως, δεν συγκλίνει απόλυτα, τότε οι όροι της μπορούν να αθροιστούν με τέτοιο τρόπο ώστε να αθροίζουν σε οποιονδήποτε αριθμό.

Η απόδειξη αυτής της άκρως ενδιαφέρουσας πρότασης, παρουσιάζεται στο βιβλίο "Principles of Mathematical Analysis" του Walter Rudin, United States 2006, 3η Έκδοση (σελ. 76-77).

<u>Παράδειγμα:</u>

Θεωρήστε τη συγκλίνουσα σειρά:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots=ln\,2\,, \qquad (1)$$

η οποία προκύπτει από το ανάπτυγμα Taylor του:

$$ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\,, \qquad x\in(-1,1]$$

και μια αναδιάταξή της:

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots \quad (2)$$

στην οποία δύο θετικοί όροι πάντα ακολουθούνται από έναν αρνητικό όρο (άπειρο άθροισμα αρμονικής προόδου).

Είναι γνωστό ότι η σειρά (1) δεν συγκλίνει απόλυτα, αφού $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots=\infty$.

Αν s είναι το άθροισμα (1), τότε: $\quad s<1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$.

Επειδή:

$$\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{2k}>0$$

για $k\geq 1$*, έχουμε ότι* $s_3'<s_6'<s_9'<\cdots$*, όπου* s_n' *είναι το* n*-οστό μερικό άθροισμα του αθροίσματος (2).*

Επομένως:

$$\lim_{n\to\infty}\sup s_n' > s_3' = \frac{5}{6}$$

και άρα η (2) ασφαλώς δεν συγκλίνει στο s.

(Σημειώνουμε ότι η (2) συγκλίνει και μάλιστα:

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots=\frac{3}{2}ln\,2). \blacksquare$$

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

5. Δυσκολίες με το άπειρο: Απειροστά (18ος αιώνας)

Η έννοια της απειροστής αλλαγής χρησιμοποιήθηκε από τον Γερμανό μαθηματικό και φιλόσοφο Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Επομένως, ο Leibniz χρησιμοποιούσε την ύπαρξη μη μηδενικών θετικών ποσοτήτων με την ιδιότητα να είναι μικρότερες από κάθε άλλη θετική ποσότητα.

Εικόνα 5.1: Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Πολλοί ήταν αυτοί που δεν αποδέχονταν την ύπαρξη τέτοιων ποσοτήτων, ιδίως ο Αγγλο–Ιρλανδός φιλόσοφος, μαθηματικός και επίσκοπος της Αγγλικανικής εκκλησίας George Berkeley (1665-1753). Μάλιστα στην Ενότητα 16 του βιβλίου του με τίτλο: "The Analyst", London 1734, αναφέρει ότι: «…ο εσφαλμένος τρόπος για να προχωρήσουμε σ' ένα συγκεκριμένο σημείο στην υπόθεση μιας αύξησης και στη συνέχεια να μετατοπίσουμε αμέσως την υπόθεσή μας σ' εκείνη της μη αύξησης…Όμως, παρόλα αυτά το σφάλμα δεν καλύπτεται και η αδυναμία παραμένει η ίδια.».

Εικόνα 5.2: George Berkeley (1665-1753)

Είναι εύκολο σήμερα να δείξουμε με χρήση αξιωμάτων των πραγματικών αριθμών, ότι δεν υπάρχουν απειροστά.

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

<u>Πρόταση:</u>

Έστω $\alpha \geq 0$*, με την ιδιότητα «Για κάθε* $\varepsilon > 0$*, έχουμε* $\alpha < \varepsilon$*.». Τότε* $\alpha = 0$*.*

<u>Απόδειξη:</u> (Με εις άτοπον απαγωγή)

Έστω $\alpha \neq 0$*. Αφού* $\alpha \geq 0$ *(από το αξίωμα της τριχοτομίας), τότε* $\alpha > 0$*.*

Επομένως, από την υπόθεση $\alpha < \varepsilon$*, για κάθε* $\varepsilon > 0$*, η επιλογή* $\varepsilon = \alpha$*, δίνει* $\alpha < \alpha$*.*

Άτοπο.

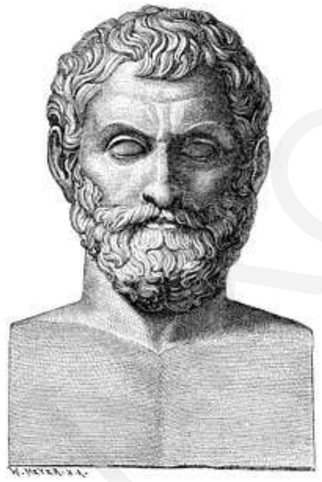
Επομένως, $\alpha = 0$*.* ■

Με χρήση της παραπάνω πρότασης, αποδεικνύεται η μοναδικότητα του ορίου.

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

6. Η Γεωμετρία του Θαλή

Ο Θαλής ο Μιλήσιος (640-546 π.Χ.), ήταν φιλόσοφος, μαθηματικός, φυσικός, αστρονόμος, μηχανικός και μετεωρολόγος. Ήταν ο ένας από τους εφτά σοφούς της αρχαιότητας. Ο Θαλής, εισήγαγε τη Γεωμετρία στην Ελλάδα και ίδρυσε την Ιωνική Σχολή, η οποία πλουτίζει την επιστήμη με πολλά θεωρήματα του ισοσκελούς τριγώνου, της εγγεγραμμένης γωνίας και των όμοιων τριγώνων με βάση το σπουδαιότερο θεώρημα του Βιβλίου III των «Στοιχείων» του Ευκλείδη, Πρόταση 33, το Θεώρημα του Θαλή. Ο Θαλής ο Μιλήσιος, με τους συντοπίτες του Αναξίμανδρο (611-547 π.Χ.), Αναξιμένη (585-528 π.Χ.) και Ηράκλειτο (554-484 π.Χ.), αποτελούν την Ιωνική Σχολή, που συνέλαβε και εξέφρασε το πρώτο φιλοσοφικό ερώτημα της απαρχής των πάντων. Με τον Θαλή, το σχήμα γίνεται για πρώτη φορά αντικείμενο μελέτης και στοχασμού και παίρνει καθοριστικό ρόλο στην Επιστήμη της Γεωμετρίας.



Εικόνα 6.1: Θαλής ο Μιλήσιος (640-546 π.Χ.)

Κατά τον Νίτσε: «Ο Θαλής διείδε την ενότητα του όντος και θέλοντας να την εκφράσει, μίλησε για το νερό.». Στον Θαλή, ανήκει το δημιουργικό κίνημα: «Η Αρχή των Πάντων», το οποίο εξέφρασε μ' ένα στοιχείο της φύσης, το νερό. Από το νερό, εκπορεύτηκαν όλες οι άλλες παραλλαγές των όντων. Ο ισχυρισμός αυτός, δεν είναι τόσο παράλογος όσο φαίνεται, αφού σύμφωνα με τον Αριστοτέλη η τροφή όλων των όντων είναι υγρή. Η θερμότητα δημιουργείται από το νερό και συντηρείται από αυτό. Επίσης, το νερό είναι το βασικό συστατικό κάθε υγρού στοιχείου («Μετά τα Φυσικά», Α 3.983 b 22). Υπερασπίστηκε ότι, όλα έχουν κοινή αφετηρία. Επιπλέον, θεωρούσε τη φύση του νερού άπειρη.

Οι γεωμετρικές γνώσεις, τις οποίες αποδίδει ο φιλόσοφος Πρόκλος (412-485) στον Θαλή, είναι: ("The History of Mathematics", David M. Burton, New York 2011, 7^{η} Έκδοση, σελ.87)

- Ο κύκλος διχοτομείται από τη διάμετρο.
- Η γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.
- Οι παρά βάσει γωνίες ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.

- Σε τεμνόμενες ευθείες, οι κατά κορυφήν γωνίες είναι ίσες.
- Δύο τρίγωνα με μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες σ' αυτήν γωνίες ίσες μία προς μία είναι ίσα. Έτσι, υπολόγισε την απόσταση του πλοίου από το λιμάνι.
- Τα όμοια τρίγωνα έχουν πλευρές ανάλογες. Έτσι, παρατηρώντας το μήκος της σκιάς των πυραμίδων της Αιγύπτου, κατά τη στιγμή που η σκιά μιας ράβδου ήταν ίδια με το ύψος της, κατάφερε να μετρήσει το ύψος τους.

Σημειώνουμε στο σημείο αυτό, ότι η πρόταση: «Ο κύκλος διχοτομείται από τη διάμετρο», θεωρείται από του ιστορικούς μαθηματικούς, ως το πρώτο Θεώρημα που αποδείχθηκε.

Μεταξύ άλλων, όπως προαναφέραμε, ο Θαλής είναι γνωστός για το θεώρημα που φέρει το όνομά του σχετικά με τα τμήματα τα οποία τέμνονται από παράλληλες ευθείες του επιπέδου, πάνω σε άλλες δύο ευθείες του και το ανάλογό του στη Γεωμετρία του χώρου. Η διατύπωση και η απόδειξή του (όπως αναφέραμε), βρίσκεται στο βιβλίο III των «Στοιχείων», Πρόταση 33.

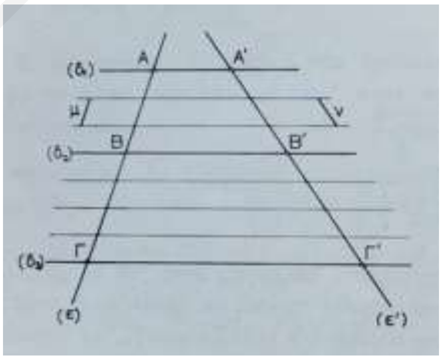
Παρακάτω, παραθέτουμε τη διατύπωση και την απόδειξη του Θεωρήματος του Θαλή, όπως παρουσιάζεται στο εγχειρίδιο: «Ευκλείδειος Γεωμετρία», Γ' Γυμνασίου, Χρ. Γ. Παπανικολάου, Αθήνα 1976 (σελ. 12-13):

Θεώρημα του Θαλή:

Αν δύο ευθείες (ε) και (ε') τέμνονται από τρεις τουλάχιστον παράλληλες ευθείες, τα τμήματα της (ε) που περιέχονται μεταξύ των παραλλήλων, είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα της (ε') που περιέχονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων.

Απόδειξη:

Ας θεωρήσουμε δύο οποιεσδήποτε ευθείες (ε) και (ε') του επιπέδου που τέμνονται από τρεις παράλληλες ευθείες (δ_1), (δ_2) και (δ_3) στα σημεία A και A', B και B', Γ και Γ', όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.1.



Σχήμα 6.1: Θεώρημα του Θαλή/Περίπτωση (i)

Θα δείξουμε ότι ισχύει:

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'}.$$

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΗ

Έπειτα, παραθέτουμε την απόδειξη για σύμμετρα μεγέθη από το εγχειρίδιο: «Ευκλείδειος Γεωμετρία», Γ' Γυμνασίου, Χρ. Γ. Παπανικολάου, Αθήνα 1976 (σελ. 12):

(i) Αν τα τμήματα AB και $B\Gamma$ πάνω στην ευθεία (ε) είναι σύμμετρα, υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα μ και δύο φυσικοί αριθμοί κ και λ τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$$AB = \kappa\mu \text{ και } B\Gamma = \lambda\mu \quad (1).$$

Διαιρούμε τα τμήματα AB σε κ τμήματα ίσα με το μ και το $B\Gamma$ σε λ τμήματα ίσα με το μ. Από τα διαιρετικά σημεία φέρουμε ευθείες παράλληλες προς τις δεδομένες παράλληλες. Αυτές τέμνουν την ευθεία (ε') και ορίζουν πάνω σ' αυτήν $\kappa + \lambda$ ίσα τμήματα που το μήκος του καθενός ας είναι ν. Τότε, θα ισχύει:

$$A'B' = \kappa\nu \text{ και } B'\Gamma' = \lambda\nu \quad (2).$$

Τώρα, από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε:

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\kappa\mu}{\lambda\mu} = \frac{\kappa}{\lambda} \text{ και } \frac{A'B'}{B'\Gamma'} = \frac{\kappa\nu}{\lambda\nu} = \frac{\kappa}{\lambda}.$$

Άρα, αποδείχθηκε ότι:

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'}.$$

Στο ίδιο εγχειρίδιο (σελ. 13), υπάρχει η παρακάτω «απόδειξη» για ασύμμετρα μεγέθη, η οποία δυστυχώς, είναι ανεπαρκής:

(ii) Αν τα τμήματα AB και $B\Gamma$ είναι ασύμμετρα, ο λόγος $\frac{AB}{B\Gamma}$ θα είναι ασύμμετρος αριθμός και η προσεγγιστική τιμή του οποιασδήποτε τάξεως, που θα είναι ρητός αριθμός, θα είναι ίση με την προσεγγιστική τιμή του λόγου $\frac{A'B'}{B'\Gamma'}$ της ίδιας τάξεως.

Παίρνουμε τα όρια των ίσων λόγων, όταν η προσέγγιση γίνει άπειρης τάξεως, οπότε θα έχουμε την ακριβή τιμή των λόγων αυτών και βρίσκουμε:

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'} \quad (3).$$

Η ορθή απόδειξη για ασύμμετρα μεγέθη, είναι αρκετά περίπλοκη και βρίσκεται στα «Στοιχεία». Για τον λόγο αυτό, παραθέτουμε τους ακόλουθους ορισμούς του Ευδόξου από το βιβλίο: «Ευκλείδη «Στοιχεία»: Σύγχρονη απόδοση με εισαγωγή, επεξηγήσεις και σχολιασμό, Τόμος ΙΙ: Θεωρία Αριθμών, Βιβλία VII, VIII, IX, X», Αθήνα 2001 (σελ. 182), οι οποίοι χρησιμοποιούνται στην απόδειξη:

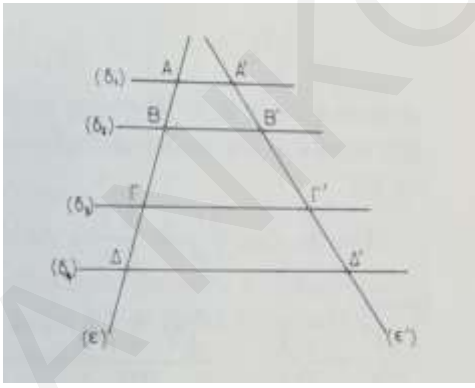
1. ***Σύμμετρα*** *λέγονται τα μεγέθη που μετριούνται από τι ίδιο μέτρο, ενώ* ***ασύμμετρα*** *εκείνα για τα οποία δεν υπάρχει κοινό μέτρο.*
2. *Ευθύγραμμα τμήματα λέγονται* ***σύμμετρα ως προς το τετράγωνο****, όταν τα τετράγωνα των μηκών τους μετριούνται από το ίδιο εμβαδόν, ενώ λέγονται* ***ασύμμετρα ως προς το τετράγωνο*** *όταν τα τετράγωνα των μηκών τους δεν μπορούν να μετρηθούν από κοινό εμβαδόν.*

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΗ

3. *Έστω ένα δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα το οποίο καλούμε* ***ρητή μονάδα****. Τότε, θα υπάρχουν άπειρα ευθύγραμμα τμήματα, τα οποία* (α) *είτε θα είναι σύμμετρα ως προς το μήκος και το τετράγωνο με το δοσμένο, ή σύμμετρα μόνο ως προς το τετράγωνο* (β) *είτε ασύμμετρα μόνο ως προς το μήκος ή ως προς το μήκος και το τετράγωνο με το δοσμένο. Στην πρώτη περίπτωση τα ευθύγραμμα τμήματα θα ονομάζονται* ***ρητά****, ενώ στη δεύτερη* ***άρρητα****.*
4. *Το τετράγωνο της ρητής μονάδας καλείται* ***ρητό*** *και τα σύμμετρα σχήματα ως προς αυτό θα καλούνται επίσης* ***ρητά****, ενώ τα ασύμμετρα σχήματα ως προς αυτό θα καλούνται* ***άρρητα****. Αν τα σχήματα αυτά γίνουν ισοδύναμα με άρρητα τετράγωνα, τότε και τα ευθύγραμμα τμήματα που παράγουν αυτά τα τετράγωνα (δηλαδή οι πλευρές τους), θα λέγονται* ***άρρητα****.*

(iii) *Αν οι ευθείες* (ε) *και* (ε') *τέμνονται από τέσσερις παράλληλες ευθείες* $(\delta_1)//(\delta_2)//(\delta_3)//(\delta_4)$ *στα σημεία* A *και* A', B *και* B', Γ *και* Γ', Δ *και* Δ' *αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.2, τότε θα ισχύει:*

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'} \text{ και } \frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{B'\Gamma'}{\Gamma'\Delta'}.$$



Σχήμα 6.2: Περίπτωση (iii)

Πολλαπλασιάζουμε αυτές τις σχέσεις κατά μέλη και έχουμε:

$$\frac{AB}{B\Gamma} \cdot \frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'} \cdot \frac{B'\Gamma'}{\Gamma'\Delta'}.$$

Άρα, αποδείχθηκε ότι:

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'}.$$

<u>Παρατήρηση:</u>

Από την αναλογία (3)*, παίρνουμε:*

$$\frac{AB + B\Gamma}{B\Gamma} = \frac{A'B' + B'\Gamma'}{B'\Gamma'}$$

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

ή

$$\frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{A'\Gamma'}{B'\Gamma'}.$$

Με τον ίδιο τρόπο, βρίσκουμε:

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{A'\Gamma'}{\Gamma'\Delta'}, \frac{A\Delta}{AB} = \frac{A'\Delta'}{A'B'}$$

και γενικά οποιαδήποτε τμήματα που ορίζονται από τις παράλληλες πάνω στην ευθεία (ε)*, είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα της ευθείας* (ε')*.*

<u>Θεώρημα:</u> (αντίστροφο του προηγούμενου)

Ας θεωρήσουμε δύο παράλληλες ευθείες $(\delta_1)//(\delta_2)$ *και δύο άλλες ευθείες* (ε) *και* (ε') *που τέμνουν τις παράλληλες ευθείες στα σημεία* A *και* A', B *και* B' *αντίστοιχα. Αν* Γ *και* Γ' *είναι σημεία των τμημάτων* AB *και* $A'B'$ *αντίστοιχα τέτοια ώστε να ισχύει:*

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma B} = \frac{A'\Gamma'}{\Gamma'B'},$$

τότε η ευθεία $\Gamma\Gamma'$ *είναι παράλληλη προς τις* (δ_1) *και* (δ_2)*.* ■

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

7. Η αγωνία και η δικαίωση του Πυθαγόρα

Ο Πυθαγόρας ο Σάμιος (569-475 π.Χ.), ήταν φιλόσοφος, μαθηματικός, γεωμέτρης και θεωρητικός της μουσικής. Συγκαταλέγεται στους πιο σημαντικούς επιστήμονες, αφού θεωρείται ο κατεξοχήν θεμελιωτής των ελληνικών μαθημάτων. Ίδρυσε την Πυθαγόρειο Αδελφότητα με περίπου εξακόσιους οπαδούς, οι οποίοι κατανοούσαν τη διδασκαλία του και ανακάλυπταν νέες ιδέες. Περίπου 80 μέλη της Αδελφότητας, ήταν γυναίκες. Εξού και το προσωνύμιό του «θηλυκός φιλόσοφος». Ας μη ξεχνάμε ότι οι γυναίκες στην αρχαία Ελλάδα, είχαν υψηλή θέση στον κοινωνικό ιστό. Μία από τις ομορφότερες και εξυπνότερες ήταν η Θεανώ η Θουρία (6ος αιώνας π.Χ.), η οποία ήταν κόρη του Μίλωνα, άρχοντα του Κρότωνα της Μεγάλης Ελλάδας και η πρώτη επώνυμη γυναίκα μαθηματικός, την οποία παντρεύτηκε αργότερα ο Πυθαγόρας. Ένα άλλο διάσημο παράδειγμα, είναι η ωραιότερη εταίρα της Μιλήτου, η Ασπασία (470-400 π.Χ.), η οποία υπήρξε σύζυγος του Περικλή (495-429 π.Χ.). Η προτομή της, κοσμεί τα προπύλαια της Ακαδημίας Αθηνών. Επέλεγαν με μεγάλη προσοχή τα μέλη που απάρτιζαν την Αδελφότητα και όταν κάποιο μέλος έμπαινε στην Αδελφότητα, έδινε όλη του την περιουσία. Όταν έφευγε, όμως, έπαιρνε πίσω τη διπλάσια περιουσία από αυτή που είχε δώσει αρχικά. Είναι γνωστό, ότι σε ισχυρά πρόσωπα του Κρότωνα και των γύρω περιοχών, τους αρνήθηκε η είσοδος και αυτό εξηγεί την εχθρότητα μεγάλου μέρους των κατοίκων των γύρω περιοχών, η οποία στην αποκορύφωσή της οδήγησε στην καταστροφή της Αδελφότητας.

Εικόνα 7.1: Πυθαγόρας ο Σάμιος (569-475 π.Χ.)

Εικόνα 7.2: Θεανώ η Θουρία (6ος αιώνας π.Χ.)

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

Ο Πυθαγόρας, κατάλαβε ότι οι αριθμοί βρίσκονταν κρυμμένοι παντού, από την αρμονία της μουσικής μέχρι τις τροχιές των πλανητών. Έτσι, η Φιλοσοφία του Πυθαγόρα, είχε βασιστεί στην αρχή ότι τα πάντα είναι (ρητοί) αριθμοί.

Ο Πυθαγόρας έβλεπε το άπειρο, ως κάτι ακατανόητο και αόριστο. Έλεγε πως οι μορφές και οι ιδέες διέπονται από αριθμούς, δηλαδή τα πάντα στο σύμπαν διέπονται από μαθηματικούς κανόνες και λόγους και άρα αν κατανοήσουμε τις αριθμητικές και μαθηματικές σχέσεις, τότε θα κατανοήσουμε τη δομή του σύμπαντος («Η Φιλοσοφία με απλά λόγια», Συλλογικό έργο, Αθήνα 2015, σελ.27).

Οι αριθμοί, υπάρχουν ανεξάρτητα από τον αισθητό κόσμο και άρα η μελέτη τους, δεν επηρεάζεται από την ανακρίβεια των αισθήσεων. Έτσι, τα Μαθηματικά αποτελούν βασικό μοντέλο για τη φιλοσοφική σκέψη. Πολλά από όσα δίδασκε, τα έλεγε με συμβολικό τρόπο. Η ανακάλυψη της ασυμμετρίας από τους Πυθαγόρειους, δηλαδή η ανακάλυψη των άρρητων αριθμών, διαχώρισε τα Μαθηματικά σε δύο κλάδους, την Αριθμητική και τη Γεωμετρία. Ο διαχωρισμός αυτός, ουσιαστικά διαχώριζε το άπειρο ως το γεωμετρικό συνεχές, με το πεπερασμένο ως την αριθμητική των φυσικών αριθμών (“Nicholas of Cusa and the Infinite”, McFarlane T.J., 1999).

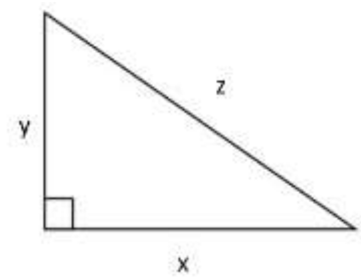
Το Πυθαγόρειο Θεώρημα, είναι αυτό που καθιέρωσε τον Πυθαγόρα στον χώρο των Μαθηματικών και χάριν αυτού είναι γνωστός στους περισσότερους ανθρώπους σήμερα. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι οι Κινέζοι και οι Βαβυλώνιοι, χρησιμοποιούσαν το θεώρημα 1000 χρόνια πριν από τον Πυθαγόρα. Οι πολιτισμοί, όμως, αυτοί δεν γνώριζαν αν το θεώρημα ισχύει για κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, αλλά μπορούσαν να πουν με βεβαιότητα ότι ίσχυε για κάθε ορθογώνιο τρίγωνο που είχαν δοκιμάσει. Έτσι, η παγκόσμια ιστορία αποδίδει το θεώρημα αυτό στον Πυθαγόρα, ακριβώς γιατί ήταν ο πρώτος που απέδειξε την παγκόσμια αλήθεια του.

<u>Το Πυθαγόρειο Θεώρημα:</u>

Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο της υποτείνουσας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών.

Σε μαθηματικά σύμβολα:

$$x^2 + y^2 = z^2.$$



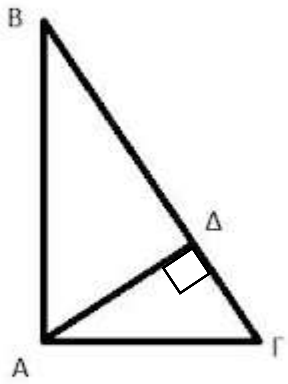
Σχήμα 7.1: Ορθογώνιο Τρίγωνο

Η διατύπωση της πρότασης του εν λόγω Θεωρήματος, περιέχεται στο Βιβλίο I των «Στοιχείων», Πρόταση 47 με σχετική απόδειξη που αποδίδεται στον Πυθαγόρα.

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΗ

Ωστόσο, αργότερα δόθηκαν διαφορετικές αποδείξεις του Θεωρήματος τόσο γεωμετρικές όσο και αλγεβρικές. Πιθανότατα, το Πυθαγόρειο Θεώρημα να έχει τον μεγαλύτερο αριθμό αποδείξεων από κάθε άλλο μαθηματικό θεώρημα. Παρακάτω, παραθέτουμε μια από τις αποδείξεις του Πυθαγόρειου Θεωρήματος, βασισμένη σε όμοια τρίγωνα.

Απόδειξη:



Σχήμα 7.2: Ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ορθή γωνία την Α

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με ορθή γωνία την A. Θεωρούμε ότι το ύψος της υποτείνουσας, την τέμνει στο σημείο Δ. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔBA, είναι όμοια μεταξύ τους ως ορθογώνια τρίγωνα με ίδια τη γωνία B. Παρόμοια, τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta\Gamma A$, είναι όμοια μεταξύ τους ως ορθογώνια τρίγωνα με ίδια τη γωνία Γ. Τότε, ισχύει:

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\Delta B}{AB} \Rightarrow (AB)^2 = (B\Gamma)(\Delta B).$$

Παρόμοια, ισχύει:

$$(A\Gamma)^2 = (B\Gamma)(\Delta\Gamma).$$

Προσθέτουμε τις δύο αυτές εξισώσεις και έχουμε:

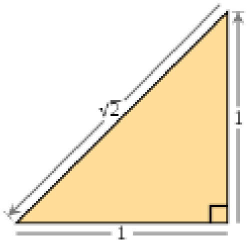
$$(AB)^2 + (A\Gamma)^2 = (B\Gamma)(\Delta B) + (B\Gamma)(\Delta\Gamma) = (B\Gamma)(\Delta B + \Delta\Gamma) = (B\Gamma)^2. \blacksquare$$

Η τετραγωνική ρίζα του 2, μερικές φορές αποκαλείται «ο αριθμός του Πυθαγόρα» ή «η Πυθαγόρεια σταθερά» αριθμός (όπως για παράδειγμα στο βιβλίο: “The book of Numbers”, Conway John H. & Guy Richard K., United States 1996, σελ. 25) και ήταν ο πρώτος γνωστός άρρητος.

Πυθαγόρειοι μαθηματικοί, ανακάλυψαν ότι η διαγώνιος ενός τετραγώνου, είναι ασύμμετρη ή σε σύγχρονα Μαθηματικά η $\sqrt{2}$ είναι άρρητη. Η ανακάλυψη αυτή, προξένησε στον Πυθαγόρα μια τεράστια αγωνία, αφού όπως αναφέραμε η βάση της Φιλοσοφίας του στηριζόταν στην αρχή ότι «όλα είναι (ρητοί) αριθμοί». Η ειρωνεία, είναι ότι το $\sqrt{2}$ προκύπτει με χρήση του ομώνυμου θεωρήματός του, ως η υποτείνουσα ισοσκελούς ορθογώνιου τριγώνου με κάθετες πλευρές μονάδα.

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

Λίγα είναι γνωστά με τον χρόνο ή τις συνθήκες αυτής της ανακάλυψης. Μεταξύ των μελών της Αδελφότητας, επικρατούσε τεράστια πειθαρχία και εχεμύθεια. Είχαν ορκιστεί ότι οτιδήποτε έλεγαν ή ανακάλυπταν, θα παρέμενε μεταξύ τους και δεν θα το μαρτυρούσαν, αλλιώς το αντίτιμο θα το πλήρωναν με τη ζωή τους. Λέγεται ότι η ασσυμετρία, ανακαλύφθηκε και μαρτυρήθηκε από τον Πυθαγόρειο φιλόσοφο και μαθηματικό Ίππασο από το Μεταπόντιο (6ος αιώνας π.Χ.), ο οποίος για την προδοσία αυτή, σύμφωνα με τον μύθο, δολοφονήθηκε. Επιπλέον, σύμφωνα με την παράδοση, η ανακάλυψη αυτή σηματοδότησε την αρχή της καταστροφής της Αδελφότητας των Πυθαγορείων στον Κρότωνα της Μεγάλης Ελλάδας και οδήγησε πιθανότατα στον θάνατο του ίδιου του Πυθαγόρα.



Σχήμα 7.3: Η τετραγωνική ρίζα του 2 είναι ίση με το μήκος της υποτείνουσας του ορθογωνίου τριγώνου με πλευρές μήκους 1

Εικόνα 7.3: Ίππασος ο Μεταποντίνος (6ος αιώνας π.Χ.)

Σε βαβυλωνιακές πινακίδες του 2000 π.Χ., συναντάμε υπολογισμούς τετραγωνικών ριζών. Μια από αυτές, περιέχει τον υπολογισμό του $\sqrt{2}$, με ακρίβεια τριών εξηνταδικών ψηφίων. Οι ασύμμετροι αριθμοί, εντοπίστηκαν στην προσπάθεια των Πυθαγορείων να υπολογίσουν τη διαγώνιο του τετραγώνου, χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Κατέληξαν ότι $\delta^2 = 2\alpha^2$, όπου δ και α η διαγώνιος και η πλευρά του τετραγώνου αντίστοιχα. Έτσι, συμπέραναν ότι η διαγώνιος του τετραγώνου είναι ασύμμετρη με την πλευρά του, εφόσον σχηματίζουν λόγο $\frac{\delta}{\alpha} = \sqrt{2}$, ο οποίος δεν είναι ρητός. Η αντίφαση αυτή, παραβίαζε τη θεώρηση των Πυθαγορείων, καθώς όπως αναφέραμε προηγουμένως είχαν την πεποίθηση ότι οτιδήποτε στο σύμπαν εκφράζεται ως αναλογία και σε καθετί αντιστοιχεί ένας αριθμός, ο οποίος εκφράζεται ως κλάσμα δύο ακεραίων. Ονόμασαν τους αριθμούς αυτούς «άρρητους», δηλαδή αυτούς που δεν λέγονται (μυστικούς).

ΑΝΤΡΕΑ ΚΟΛΕΤΤΗ

Η απόδειξη του θεωρήματος ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος, όπως θα αποδεικνυόταν και σήμερα βρίσκεται στο Βιβλίο X των «Στοιχείων», Πρόταση 117, η οποία είναι μια μεταγενέστερη προσθήκη. Η αρχική απόδειξη του Πυθαγόρα, δίνεται χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο της ανθυφαίρεσης. Στο Βιβλίο $VIII$ των «Στοιχείων», που αποδίδεται στον φιλόσοφο, μαθηματικό πολιτικό, στρατηγό, μηχανικό και εφευρέτη Αρχύτα τον Ταραντίνο (428-347 π.Χ.) στις Προτάσεις 7,8 και 14, δίνεται η απόδειξη αλλά όχι ακριβώς. Χρησιμοποιώντας, ωστόσο, μια από τις προτάσεις αυτές, μπορεί να αποδειχτεί η ασυμμετρία του $\sqrt{2}$. Αξίζει να σημειωθεί ότι μελετώντας το βιβλίο «Αναλυτικά» του Αριστοτέλη, συμπεραίνουμε ότι ο Αριστοτέλης ήξερε την απόδειξη για την αρρητότητα του $\sqrt{2}$, εφόσον έλεγε ότι για να γίνει ρητός ο $\sqrt{2}$, πρέπει οι άρτιοι να γίνουν περιττοί. («Ιστορία Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών», Πρώτος Τόμος, Νεγρεπόντης Σ.,Φαρμάκη Β., Φεβρουάριος 2019)

Εικόνα 7.4: Αρχύτας ο Ταραντίνος (428-347 π.Χ.)

<u>Θεώρημα:</u>

Ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

<u>Απόδειξη:</u> (Με απαγωγή εις άτοπον)

Έστω ότι ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός.

Τότε, υπάρχουν κ και λ φυσικοί αριθμοί, πρώτοι μεταξύ τους (ανάγωγο κλάσμα) έτσι ώστε.:

$$\sqrt{2} = \frac{\kappa}{\lambda}.$$

Συνεπώς, $\kappa^2 = 2\lambda^2$.

Άρα, το κ^2 είναι άρτιος και επομένως το κ είναι άρτιος.

Ήτοι, $\kappa = 2\mu$.

Άρα, $2\lambda^2 = (2\mu)^2 = 4\mu^2 \Rightarrow \lambda^2 = 2\mu^2$.

Άρα, το λ^2 είναι άρτιος και επομένως το λ είναι άρτιος.

Άτοπο, διότι κ και λ είναι πρώτοι μεταξύ τους. ■

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

Στην αρχαιότητα, ο υπολογισμός ενός μη τετράγωνου φυσικού αριθμού, γινόταν με τον τύπο του Ήρωνα (βλέπε παρακάτω).

Για ορισμένους μελετητές, η πρώτη δικαίωση του Πυθαγόρα ήρθε αργότερα με τον μαθηματικό, αστρονόμο και φιλόσοφο Εύδοξο τον Κνίδιο (407-335 π.Χ.), ο οποίος έδειξε ότι οι ασύμμετροι αριθμοί προκύπτουν από τους ρητούς. Η συμβολή του Ευδόξου στην κατάκτηση του απείρου θα μελετηθεί στην Ενότητα 9.

Σίγουρα η τελική δικαίωση του Πυθαγόρα, ήρθε τον 19ο αιώνα μ.Χ. και από τον Γερμανό μαθηματικό Georg Cantor (1845-1918), ο οποίος χωρίς να αναφέρει τον Εύδοξο, όρισε τους άρρητους ως όρια ακολουθιών ρητών αριθμών. Η συμβολή του Cantor στην κατάκτηση του απείρου θα μελετηθεί στην Ενότητα 15.

Ο Πυθαγόρας, λοιπόν, αποτελεί το γνωστότερο παράδειγμα φιλόσοφου που έχει συλλάβει μια μεγάλη αλήθεια, που όμως η γνώση της εποχής του δεν του επέτρεπε την τεκμηρίωσή της.

Πρόταση: (Ήρων ο Αλεξανδεύς, «Μετρικά I», Πρόβλημα 8)

Το $\sqrt{2}$ προκύπτει ως όριο της ακολουθίας των ρητών αριθμών που ορίζεται από αυτήν την αναδρομική σχέση:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right),$$

με $x_1 = 1$.

Εικόνα 7.5: Ήρων ο Αλεξανδεύς (10-75 μ.Χ.)

Ο μηχανικός, γεωμέτρης και εφευρέτης Ήρων ο Αλεξανδρεύς (10-75 μ.Χ.), επιχειρηματολογούσε ότι σε κάθε νέο υπολογισμό, το σφάλμα βαίνει μειούμενο.

Μια απόδειξη που θα μπορούσε κανείς να δώσει, θα ήταν η ακόλουθη:

Έστω ότι το όριο της ακολουθίας $\{x_n\}$ είναι κάποιος αριθμός x.

Αφού όλοι οι όροι είναι ≥ 1, τότε $x > 0$.

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

Έχουμε:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} x_n + \frac{2}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right),$$

όπου κάναμε χρήση της συνέχειας της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$ *στο* $[1, +\infty)$.

Άρα, $2x^2 = x^2 + 2 \Rightarrow x^2 = 2$.

Συνεπώς, λόγω θετικότητας του x, $x = \sqrt{2}$. ■

Η παραπάνω απόδειξη δεν είναι πλήρης, διότι υποθέτει χωρίς να έχει αποδειχθεί προηγουμένως, την ύπαρξη του ορίου της ακολουθίας. Η πλήρης απόδειξη, απαιτεί την εξασφάλιση της ύπαρξης του ορίου.

Η ίδια πρόταση, μπορεί να διατυπωθεί και για οποιοδήποτε άλλο μη τετράγωνο αριθμό με τετραγωνική ρίζα α, που δεν είναι ρητός και όχι μόνο για το $\sqrt{2}$. Δηλαδή, έχουμε την προσεγγιστική μέθοδο του Ήρωνα, που είναι η εφαρμογή της ακολουθίας με αναδρομικό τύπο:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right),\ x_1 = 1.$$

Η ακολουθία αυτή, είναι γνησίως μονότονη, φραγμένη και επομένως συγκλίνουσα.

Η μέθοδος αυτή για τον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας ενός μη τετράγωνου αριθμού, ήταν η μόνη «κλασσική» μέθοδος που δόθηκε για την εύρεση ανώτερων προσεγγίσεων της τιμής της ρίζας ενός αριθμού.

Πιο κάτω, δίνεται μια πλήρης απόδειξη για την παραπάνω πρόταση στη γενική της μορφή.

<u>Απόδειξη:</u>

Θα δείξουμε ότι ο αλγόριθμος:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right), n = 1,2,3, \ldots,$$

με α *θετικό αριθμό και για κάθε αρχική προσέγγιση* $x_0 > 0$*, παράγει ακολουθία που συγκλίνει στη* $\sqrt{\alpha}$.

Εφόσον $x_0 > 0$*, τότε επαγωγικά και* $x_n > 0, n = 1,2,3, \ldots$.

Τώρα,

$$x_{n+1} - \sqrt{\alpha} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right) - \sqrt{\alpha} = \frac{1}{2}\left(x_n - 2\sqrt{\alpha} + \frac{\alpha}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x_n} - \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x_n}}\right)^2 \geq 0.$$

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

Άρα, $x_n \geq \sqrt{\alpha}, n = 1,2,3, \ldots$

Επίσης,

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right) = \frac{2{x_n}^2 - {x_n}^2 - \alpha}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{{x_n}^2 - \alpha}{x_n}\right) \geq 0.$$

Άρα, $x_n \geq x_{n+1}, n = 1,2,3, \ldots.$

Επομένως, η ακολουθία των προσεγγίσεων $\{x_n\}, n = 1,2,3, \ldots$ *έχει θετικούς όρους, είναι φθίνουσα (άρα μονότονη) και κάτω φραγμένη από τη* $\sqrt{\alpha}$*.*

Από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass, συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία συγκλίνει. Αφού $x_n > 0,$ *εργαζόμενοι ομοίως με την περίπτωση όπου* $\alpha = 2$*, βρίσκουμε ότι* $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{\alpha}$*.* ■

Σήμερα, η μέθοδος του Ήρωνα για την εύρεση τετραγωνικής ρίζας ενός θετικού αριθμού α, θεμελιώνεται από τη μέθοδο εύρεσης ριζών πραγματικών αριθμών του Newton. Η ακολουθία των προσεγγίσεων $\{x_n\}, n = 1,2,3,$ παράγεται κατά την εφαρμογή της Μεθόδου του Newton.

Ο διασημότερος άρρητος αριθμός είναι το π, ο οποίος δεν μπορεί να υπολογιστεί με ακρίβεια, γιατί τα δεκαδικά ψηφία συνεχίζονται επ' άπειρο χωρίς συγκεκριμένο τύπο. Ωστόσο, μπορεί να υπολογιστεί, παραδείγματος χάρη, χρησιμοποιώντας τη σχέση:

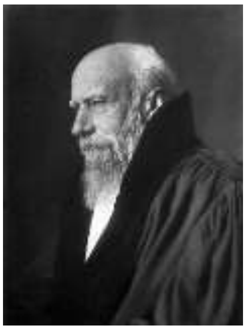
$$\pi = 4\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \cdots\right),$$

που προκύπτει από το ανάπτυγμα Taylor του $\tan^{-1}(x)$, για $x = \frac{\pi}{4}$.

<u>*Ορισμός:*</u>

Οι αριθμοί που είναι λύσεις μη τετριμμένων πολυωνιμικών εξισώσεων με ακέραιους συντελεστές, λέγονται ***αλγεβρικοί****. Αν ένας αριθμός δεν είναι αλγεβρικός, τότε είναι* ***υπερβατικός****.*

Οι πιο γνωστοί υπερβατικοί αριθμοί, είναι το π και το e. Η απόδειξη ότι ο αριθμός π είναι υπερβατικός αριθμός, αποδίδεται στον Γερμανό μαθηματικό Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1857-1939).



Εικόνα 7.6: Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1857-1939)

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΗ

Σημειώνουμε ότι για πρώτη φορά μια άπειρη διαδικασία, εκφράστηκε ως μαθηματική φόρμουλα από τον Γάλλο μαθηματικό François Viète (1540-1603) και αφορούσε τον υπολογισμό του π. Ο τύπος είναι ο εξής:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}.$$

Εικόνα 7.7: François Viète (1540-1603)

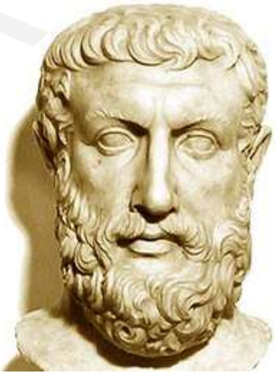
Σύντομα, ακολούθησαν και άλλοι τύποι με άπειρη εφαρμογή αριθμητικών πράξεων.

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

8. Παράδοξα του Ζήνωνα σε σχέση με το άπειρο

Ο φιλόσοφος Ζήνων ο Ελεάτης (490-430 π.Χ.), υπήρξε μαθητής του φιλόσοφου Παρμενίδη (515-470 π.Χ.). Ο Ζήνων, επινόησε μια σειρά φιλοσοφικών προβλημάτων, γνωστά ως τα Παράδοξα του Ζήνωνα. Με τα παράδοξα αυτά, ήθελε να δείξει ότι ο κόσμος των αισθήσεων και των φαινομένων δεν μπορεί παρά να έρχεται σε αμηχανία μπροστά στον νου. Οι αρχαίοι Έλληνες, έφτασαν πολύ κοντά στο να δεχτούν το άπειρο στο μαθηματικό τους σύστημα, ποτέ ωστόσο δεν το υιοθέτησαν απόλυτα. Τους ενδιέφεραν από φιλοσοφική άποψη οι αέναες διαδικασίες, όμως επηρεάστηκαν από τα περίφημα Παράδοξα του Ζήνωνα, ο οποίος έκρουε τον κώδωνα του κινδύνου για τις αντιφάσεις που συνεπάγεται η πλήρης αποδοχή της έννοιας του απείρου.

Εικόνα 8.1: Ζήνων ο Ελεάτης (490-430 π.Χ.)



Εικόνα 8.2: Παρμενίδης (515-470 π.Χ.)

Ο Russell, τον οποίο θα δούμε στην Ενότητα 16, χαρακτήρισε τα παράδοξα αυτά ως ασύγκριτα διακριτικά και βαθιά ("The Principles of Mathematics", Bertrand Russell, New York 1903, Έκδοση 1996, σελ. 347). Πουθενά, όμως, δεν καταγράφεται να δίνει ο ίδιος ο Ζήνων λύσεις σ' αυτά τα παράδοξα. Ωστόσο, πολλά από αυτά έχουν σήμερα μόνο ιστορική σημασία, διότι απασχόλησαν, δοκίμασαν και ενέπνευσαν πολλούς μαθηματικούς και φιλοσόφους ανά τους αιώνες μέχρι και σήμερα. Στον Ζήνωνα, αποδίδονται σαράντα παράδοξοι συλλογισμοί. Τα παράδοξα αυτά, διαβεβαιώθηκαν στην πραγματεία «Φυσικά» του Αριστοτέλη. Όλο το τελευταίο τμήμα του Ζ' βιβλίου

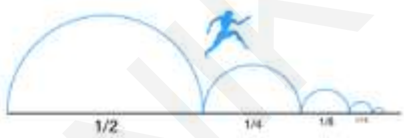
ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

των «Φυσικών», είναι αφιερωμένο στα Παράδοξα του Ζήνωνα και την προσεκτική αντιμετώπισή τους. Τα πιο γνωστά παράδοξα του Ζήνωνα σε σχέση με το άπειρο είναι το παράδοξο της διχοτόμησης, το παράδοξο του Αχιλλέα και της χελώνας, το παράδοξο του βέλους και το παράδοξο του σταδίου.

Στην παρούσα μελέτη, θα αρκεστούμε και θα παρουσιάσουμε κάποια γνωστά και σημαντικά σοφίσματα του Ζήνωνα σε σχέση με το άπειρο (Απόσπασμα της διάλεξης του κ. Γ.Κ. Μαυρικάκη: «Οι σύγχρονες απόψεις περί του απείρου» στην Ε.Μ.Ε έτους 1964 και «Προσωκρατική Φιλοσοφία», περιοδικό Δευκαλίων, τεύχος 11^{o}).

- *Το παράδοξο της διχοτόμησης:*

Ένας δρομέας θέλει να φτάσει στο τέρμα του στίβου. Για να το πετύχει αυτό, χρειάζεται να τρέξει άπειρο αριθμό διαδρομών που προστίθενται η μία στην άλλη. Αρχικά, πρέπει να φτάσει στο μέσο της διαδρομής ως το τέρμα και στη συνέχεια να φτάσει στο ενδιάμεσο σημείο μεταξύ του μέσου του τέρματος, μετά στο μέσο του δεύτερου μέσου κ.ο.κ.. Τελικά, οι διαδρομές όλο και προστίθενται και έτσι φτάνουν να είναι άπειρες. Είναι αδύνατον κανείς να τρέξει άπειρο αριθμό διαδρομών. Συμπεραίνουμε ότι «η κίνηση είναι αδύνατη», αφού ό,τι κινείται, πριν φτάσει στο τέρμα του πρέπει να φτάσει στη μέση της πορείας του.

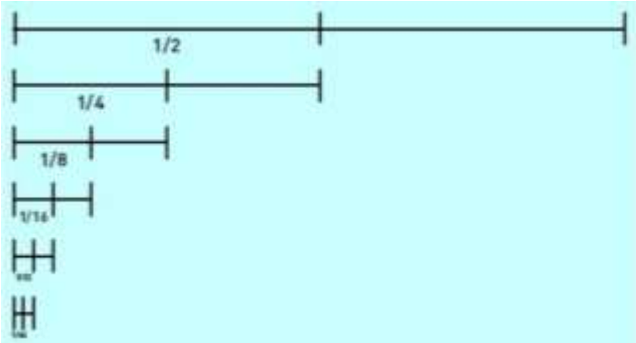


Σχήμα 8.1: Η διχοτόμηση

Για να μεταβεί κανείς από μια θέση Α σε μια θέση Β, οφείλει να διανύσει το μισό της απόστασης ΑΒ, μετά το μισό του υπολοίπου, αργότερα το μισό του νέου υπολοίπου κ.ο.κ.. Ο Ζήνων κατέληξε στο εξής: «Το άθροισμα ενός άπειρου αριθμού ορισμένων χρονικών διαστημάτων, οφείλει να είναι άπειρο.».

Το παράδοξο αυτό, παρουσιάζεται σ' ένα απλό παράδειγμα ως ακολούθως:

Υποθέτουμε ότι ο Νικόλας, θέλει να προλάβει ένα σταθμευμένο λεωφορείο και πριν να φτάσει σ΄ αυτό, πρέπει να φτάσει στα μισά του δρόμου. Όμως, πριν φτάσει στα μισά του δρόμου, πρέπει να φτάσει στο $\frac{1}{4}$ *του δρόμου και πριν από αυτό πρέπει να φτάσει στο* $\frac{1}{8}$ *και προηγουμένως στο* $\frac{1}{16}$ *κ.ο.κ.. Έτσι, δημιουργείται μια άπειρη ακολουθία, η οποία παρουσιάζεται ως:* $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right\}$.



Σχήμα 8.2: Το παράδοξο της διχοτόμησης

Υπάρχουν αρκετές θεωρίες και λύσεις για το συγκεκριμένο παράδοξο. Μια από αυτές, όπως αναφέραμε, στηρίζεται στην πρόταση: «το άθροισμα ενός απείρου αριθμού ορισμένων χρονικών διαστημάτων, είναι άπειρο», η οποία ναι μεν ισχύει αλλά όχι πάντοτε.

Για παράδειγμα, έστω ότι η διαδρομή $AB = 2\ km$ *και η ταχύτητα του κινητού είναι* $u = 1\ km/min$*. Προφανώς, το μισό της απόστασης* AM_1 *θα διανυθεί σε χρόνο* $t_1 = 1\ min$*, το μισό του υπολοίπου απόστασης το* M_1M_2 *σε χρόνο* $t_2 = \frac{1}{2}\ min$*, το μισό του υπολοίπου το* M_2M_3 *σε χρόνο* $t_3 = \frac{1}{4}\ min$ *κ.ο.κ.. Επομένως, ο απαιτούμενος χρόνος δίνεται από τη σειρά:*

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n + \cdots$$

Δηλαδή:

$$t = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

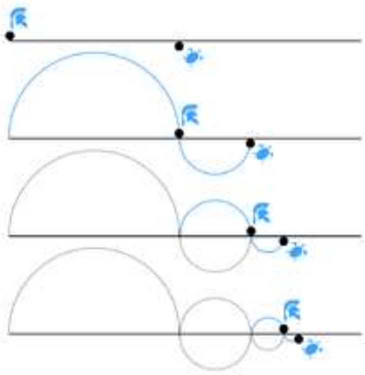
Όμως, το άθροισμα είναι 2 και επομένως όχι άπειρο.

Ένα ανάλογο παράδοξο με αυτό της διχοτόμησης, είναι το ακόλουθο:

- *Το παράδοξο του Αχιλλέα και της χελώνας:*

Σε έναν αγώνα δρόμου έχουμε δύο δρομείς, τον Αχιλλέα και τη χελώνα. Ο πρώτος τρέχει γρηγορότερα από τη χελώνα, η οποία λόγω της αργής της κίνησης έχει ένα ουσιαστικό προβάδισμα. Το προβάδισμα αυτό, όσο μικρό κι αν είναι και όσο μεγάλη κι αν είναι η απόσταση, επιτρέπει στη χελώνα να νικά πάντα. Για να προσπεράσει ο Αχιλλέας τη χελώνα, αρχικά θα πρέπει να φτάσει στο σημείο εκκίνησης της χελώνας, πράγμα αδύνατον όσο η χελώνα συνεχίζει τη διαδρομή της, διότι μέχρι ο Αχιλλέας να καλύψει την απόσταση αυτή, η χελώνα θα έχει πάει πιο μακριά, με αποτέλεσμα ο Αχιλλέας να πρέπει να καλύψει και άλλη απόσταση και μέχρι να το πετύχει αυτό η χελώνα θα έχει διανύσει και άλλη απόσταση, την οποία και πάλι πρέπει να καλύψει ο Αχιλλέας κ.ο.κ.. Η απόσταση που τους χωρίζει θα γίνεται όλο και μικρότερη, δηλαδή ο χώρος που τους χωρίζει μπορεί να διαιρείται σε όλο και πιο μικρά μέρη.

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ



Σχήμα 8.3: Ο Αχιλλέας και η χελώνα

Το παράδοξο αυτό, παρουσιάζεται σε ένα απλό παράδειγμα ως ακολούθως:

Έστω ότι ο Αχιλλέας και η χελώνα βρίσκονται σ' ένα αγώνα δρόμου, με $100\,m$ *προβάδισμα για τη χελώνα. Έστω επίσης, η ταχύτητα του Αχιλλέα να είναι* $u_1 = 10\,m/sec$ *και της χελώνας είναι* $u_2 = 1\,m/sec$*. Οι δύο δρομείς τρέχουν με σταθερή ταχύτητα. Ο Αχιλλέας σε χρόνο* $t_1 = 10\,sec$*, διανύει την απόσταση των* $100\,m$ *που είχε προβάδισμα η χελώνα. Όμως, στον χρόνο αυτό η χελώνα θα διανύσει απόσταση ίση με* $10\,m$*. Ο Αχιλλέας για να καλύψει την απόσταση αυτή, θα χρειαστεί χρόνο* $t_2 = 1\,sec$*. Στον χρόνο αυτό, η χελώνα θα διανύσει απόσταση ίση με είναι* $1\,m$ *και ο Αχιλλέας για να το καλύψει, θα χρειαστεί χρόνο* $t_3 = \frac{1}{10}\,sec$ *και αυτό θα συνεχίζεται επ' άπειρο.*

Σχήμα 8.4: Το παράδοξο του Αχιλλέα και της χελώνας

Συμπεραίνουμε κατά τον Ζήνωνα ότι εφόσον υπάρχει ένας άπειρος αριθμός σημείων που ο Αχιλλέας προσπαθεί να φτάσει και η χελώνα έχει ήδη πάει, «ο βραδύτερος ουδέποτε θα προσπεραστεί από τον ταχύτερο», πράγμα το οποίο καταρρίπτεται. Ο χρόνος t, δίνεται από την εξής σχέση:

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n + \cdots$$

Δηλαδή:

$$t = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^n} + \cdots$$

Όμως, η σειρά αυτή έχει πεπερασμένο άθροισμα ίσο με $t = \frac{100}{9}\ sec.$

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

Για να λυθούν τα παραπάνω παράδοξα, δεν αρκεί μόνο να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα. Χρειάζεται να δοθεί και κάποιο τεκμηριωμένο επιχείρημα. Όπως προαναφέραμε, δεν καταγράφεται πουθενά να δίνει ο ίδιος ο Ζήνων λύσεις στα παράδοξά του, αλλά ούτε και να τα εισάγει σε κάποιο θεωρητικό πλαίσιο. Ο Αριστοτέλης και ο Αρχιμήδης, μεταξύ άλλων, πρότειναν λύσεις στα παράδοξα αυτά.

Ο Αριστοτέλης, παρατήρησε ότι όσο η απόσταση μειώνεται, ο απαιτούμενος χρόνος για να καλυφθεί η απόσταση μειώνεται και διέκρινε «άπειρα πράγματα σε σχέση διαιρετότητας», από τα πράγματα που είναι άπειρα σε έκταση. Στην πραγματεία «Φυσικά» $Z_2, 233a21$, ο Αριστοτέλης αναφέρεται στα επιχειρήματα του Ζήνωνα λέγοντας ότι αν υποθέσουμε πως ο χώρος είναι άπειρα διαιρετός και επομένως κάθε πεπερασμένη απόσταση περιέχει πεπερασμένο αριθμό σημείων, είναι αδύνατο να φτάσουμε στο τέλος μιας άπειρης διαδρομής σε πεπερασμένο χρόνο. Όμως, ο χρόνος μπορεί να διαιρεθεί επ' άπειρο. (“The Presocratic Philosophers”, G.S Kirk, J.E. Raven, Cambridge at the University of Press 1971, σελ. 293). Υποστήριζε ότι ο χρόνος δεν αποτελείται από αδιαίρετα τμήματα σε σχέση με οποιοδήποτε άλλο μέγεθος που αποτελείται από αδιαίρετα. Ο Αριστοτέλης, θεωρεί τον Ζήνωνα πατέρα της Διαλεκτικής, εξ' αιτίας των παραδόξων του. Διαλεκτική, είναι ο κλάδος της Φιλοσοφίας που προσπαθεί να φτάσει στην αλήθεια με την εξέταση αντικρουόμενων παραδειγμάτων.

Ο Αρχιμήδης, για τον οποίο κάνουμε λόγο στην Ενότητα 11, ανέπτυξε μια μέθοδο για τη δημιουργία μιας πεπερασμένης απάντησης για το άθροισμα των άπειρα πολλών όρων που παίρνουν σταδιακά μικρότερους, ο λεγόμενος τετραγωνισμός της παραβολής, ο οποίος θα μελετηθεί στην Ενότητα 11.

Ο Russell, τον οποίο θα δούμε στην Ενότητα 16, έγραφε για τον Ζήνωνα: «Τα επιχειρήματα του Ζήνωνα σε κάποια τους μορφή έχουν δώσει τις βάσεις για όλες σχεδόν τις θεωρίες του χώρου και του απείρου που προτάθηκαν από την εποχή του έως τις ημέρες μας.» και «Σ' αυτόν τον κόσμο γεμάτο καπρίτσια, τίποτα δεν είναι χειρότερο από τη μετά θάνατον φήμη. Ένα από τα πιο διάσημα θύματα της έλλειψης σωστής υστεροφημίας, είναι ο Ζήνων ο Ελεάτης. Μετά από χιλιάδες χρόνια συνεχούς ανυποληψίας, αυτοί οι σοφισμοί αναδιατυπώθηκαν ξανά και έγιναν τα θεμέλια της μαθηματικής αναγέννησης». Μέσα από αυτά τα παράδοξα, εκφράστηκε για πρώτη φορά η ιδέα της άπειρης διαδικασίας και τα προβλήματά της.

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΗ

9. Η συμβολή του Ευδόξου

Ο μαθηματικός, αστρονόμος και φιλόσοφος Εύδοξος ο Κνίδιος (407-335 π.Χ.), θεωρείται ο δεύτερος μετά τον Αρχιμήδη σπουδαιότερος μαθηματικός της ελληνικής αρχαιότητας. Είναι υποψήφιος, όπως και ο Αρχιμήδης, για την κατασκευή του Μηχανισμού των Αντικυθήρων.

Εικόνα 9.1: Εύδοξος ο Κνίδιος (407-335 π.Χ.)

Ο Εύδοξος, σπούδασε στην Ακαδημία του Πλάτωνα και έγινε γνωστός για την ανακάλυψη της θεωρίας των αναλογιών, η οποία είναι συνοψισμένη στο Βιβλίο V των «Στοιχείων». Με τη θεωρία αυτή, αντιμετωπίστηκε το πρόβλημα που προέκυψε με την ανακάλυψη της ασυμμετρίας.

Μια μεγάλη συνεισφορά του Ευδόξου, ήταν η Μέθοδος της Εξάντλησης, που είχε άμεση εφαρμογή στον υπολογισμό εμβαδών και όγκων διάφορων γεωμετρικών σχημάτων. Η Μέθοδος της Εξάντλησης, βρίσκεται στο Βιβλίο X των «Στοιχείων», Πρόταση 1. Η μέθοδος αυτή, αποτελεί μια εφαρμογή της αρχής της συνέχειας και είναι μέγιστης σημασίας για τη γένεση των άπειρων διαδικασιών. Με τη μέθοδο αυτή, δεν είναι απαραίτητο να υποθέσουμε την «ύπαρξη» απείρως μικρών ποσοτήτων και έτσι, αποφεύγονται οι παγίδες των απειροστών. Ο Αρχιμήδης, για τον οποίο θα γίνει αναφορά στην Ενότητα 11, έλεγε για την ανακάλυψη της μεθόδου αυτής, αλλά με άλλο όνομα.

Ακολούθως, παραθέτουμε τη Μέθοδο της Εξάντλησης σε μετάφραση στη νέα ελληνική από τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη.

Η Μέθοδος της Εξάντλησης:

Έστω δύο άνισα μεγέθη. Αν από το μεγαλύτερο αφαιρέσουμε ένα μέγεθος μεγαλύτερο από το μισό του και από αυτό που μένει ένα μέγεθος μεγαλύτερο από το μισό του και αν αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται συνεχώς, θα μένει ένα μέγεθος το οποίο θα είναι μικρότερο από το μικρότερο αρχικό μέγεθος.

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

Με σύγχρονη ορολογία, αποδεικνύεται ότι αν για μια ακολουθία α_ν θετικών όρων ισχύει $\alpha_{\nu+1} \leq \frac{1}{2}\alpha_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$, τότε για οποιονδήποτε θετικό αριθμό $\varepsilon, \exists\ \rho \in \mathbb{N}$, ώστε $\alpha_\rho < \varepsilon$. Μάλιστα, η σχέση $\alpha_{\nu+1} \leq \frac{1}{2}\alpha_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$, δίνεται έμμεσα ως εξής:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - \omega_\nu$$

με $\omega_\nu \geq \frac{1}{2}\alpha_\nu\ \forall \nu \in \mathbb{N}$. Τότε, ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} \leq \alpha_\nu - \frac{\alpha_\nu}{2} = \frac{1}{2}\alpha_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$$

Επαγωγικά, αποδεικνύεται ότι:

$$\alpha_\nu \leq \frac{1}{2^{\nu-1}}\alpha_1 \leq \frac{\alpha_\nu}{\nu}, \forall \nu \in \mathbb{N}$$

Οπότε, για να είναι $\alpha_\rho < \varepsilon$ αρκεί $\frac{\alpha_1}{\rho} < \varepsilon$ ή $\rho \cdot \varepsilon > \alpha_1$, που εξασφαλίζεται από το Αξίωμα του Αρχιμήδη, το οποίο παρουσιάζεται στην Ενότητα 11.

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

10. Ευκλείδης: «Δεν υπάρχει βασιλική οδός στη Γεωμετρία»

Ο μαθηματικός Ευκλείδης (325-270 π.Χ.), είναι σήμερα γνωστός ως ο «πατέρας» της Γεωμετρίας και δίδασκε στην Αλεξάνδρεια. Επίσης, ήταν διευθυντής στη βιβλιοθήκη της Αλεξάνδρειας. Σ' αυτόν αποδίδεται το μαθηματικό σύστημα της «Ευκλείδειας Γεωμετρίας». Όταν ο στρατηγός Πτολεμαίος Α' (323-283 π.Χ.), βασιλιάς της Αιγύπτου, του ζήτησε έναν πιο εύκολο τρόπο από τα «Στοιχεία» του, για να μάθει τη Γεωμετρία, ο Ευκλείδης του απάντησε ότι: «δεν υπάρχει βασιλική οδός στη Γεωμετρία».

Εικόνα 10.1: Ευκλείδης (325-270 π.Χ.)

Τα «Στοιχεία», είναι το αρχαιότερο σωζόμενο ολοκληρωμένο επιστημονικό και πιο διαδεδομένο σύγγραμμα στον κόσμο, που αποτελείται από 13 βιβλία και συγγράφηκε από τον Ευκλείδη. Περιέχει 121 Ορισμούς, 5 Αιτήματα, 9 Κοινές Έννοιες και 465 Προτάσεις. Το διδακτικό περιεχόμενο του βιβλίου αυτού, περιλαμβάνει πολλά χρήσιμα θεωρήματα και προβλήματα των Μαθηματικών. Είναι, λοιπόν, βασισμένο σ' ένα μικρό σύνολο αξιωμάτων και στην εξαγωγή πολλών προτάσεων και θεωρημάτων από αυτά. Στα «Στοιχεία», συναντώνται αποδεικτικές μέθοδοι γνωστές μέχρι και σήμερα, όπως η Συνθετική, η Εις Άτοπον Απαγωγή και η Αναλυτική. Ο Ευκλείδης, χρησιμοποίησε αρκετά την απόδειξη διά της εις άτοπον απαγωγής. Κάθε απόδειξη θεωρήματος, ολοκληρώνεται με τη φράση «όπερ έδει δείξαι», ενώ κάθε λύση προβλήματος, ολοκληρώνεται με τη φράση «όπερ έδει ποιήσαι».

Στο βιβλίο με τίτλο: «Τα Σχόλια του Πρόκλου στο Α' βιβλίο των «Στοιχείων» του Ευκλείδου» του Ευάγγελου Σπανδάγου, ο Πρόκλος αναφέρει για τον Ευκλείδη ότι: «Πολλοί τον θαυμάζουν για τη συγγραφή των «Στοιχείων», για τη διάταξη και την επιλογή των θεωρημάτων και των προβλημάτων. Γιατί δεν καταχώρησε κάθε τι που ήταν γνωστό, αλλά κάθε απαραίτητο για την οικοδόμηση της γεωμετρίας, επίσης χρησιμοποίησε όλους τους τρόπους των συλλογισμών που είναι και οικείοι στην επιστήμη, ακόμη χρησιμοποίησε όλες τις αποδεικτικές μεθόδους».

Τα πέντε αιτήματα του Ευκλείδη, βρίσκονται στο πρώτο βιβλίο των «Στοιχείων του Ευκλείδη» («Ευκλείδη «Στοιχεία»: Σύγχρονη απόδοση με εισαγωγή, επεξηγήσεις και σχολιασμό, Τόμος Ι: Η Γεωμετρία του επιπέδου, Βιβλία I, II, III, IV, V, VI», Αθήνα 2001, σελ. 20-21).

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

<u>Τα πέντε αιτήματα (αξιώματα) του Ευκλείδη:</u>

1. *Μπορούμε να φέρουμε μια ευθεία γραμμή από οποιοδήποτε σημείο προς οποιοδήποτε σημείο.*
2. *Κάθε πεπερασμένη ευθεία, μπορεί να προεκτείνεται συνεχώς και ευθυγράμμως.*
3. *Μπορούμε να γράψουμε έναν κύκλο με οποιοδήποτε κέντρο και ακτίνα.*
4. *Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες.*
5. *Αν μια ευθεία που τέμνει δύο άλλες γραμμές σχηματίζει εντός και επί τα αυτά γωνίες συνολικά λιγότερες από δύο ορθές, οι εν λόγω ευθείες, προεκτεινόμενες απεριόριστα, συναντώνται σε εκείνη την μεριά όπου σχηματίζονται οι γωνίες που είναι λιγότερες από δύο ορθές.*

Το Βιβλίο X των «Στοιχείων», περιέχει αποδείξεις για τους άρρητους αριθμούς. Ο διασημότερος άρρητος αριθμός, όπως αναφέραμε στην Ενότητα 7, είναι το π. Ο Ευκλείδης, δεν προσπάθησε να αποδείξει ότι το π είναι άρρητος, αλλά να αποδείξει ότι υπάρχει αριθμός, που δεν μπορούσε να γραφτεί ως κλάσμα.

<u>Ορισμός:</u>

*Κάθε φυσικός αριθμός $p \neq 1$, λέγεται **πρώτος αριθμός**, αν οι μόνοι θετικοί διαιρέτες του είναι η μονάδα και ο εαυτός του.*

Μεταξύ άλλων, στα «Στοιχεία», περιλαμβάνονται δύο από τα σημαντικότερα αποτελέσματα σχετικά με τους πρώτους αριθμούς:

- Στο Βιβλίο IX, Πρόταση 14, εμφανίζεται το γεγονός ότι κάθε ακέραιος αριθμός αναλύεται ως γινόμενο πρώτων παραγόντων με μοναδικό τρόπο (γνωστό σήμερα ως το Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής). «Εάν ελάχιστος αριθμός υπό πρώτων αριθμών μετρήται, υπ' ουδενός άλλου πρώτου αριθμού μετρηθήσεται παρέξ των εξ αρχής μετρούντων.».
- Στο ίδιο Βιβλίο IX, Πρόταση 20, εμφανίζεται το θεώρημα ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί. «Οι πρώτοι αριθμοί πλείους εισί παντός του προτεθέντος πλήθους αριθμών.».

<u>Πρόταση:</u>

Οι πρώτοι αριθμοί είναι περισσότεροι από οποιοδήποτε πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

<u>Απόδειξη:</u> (με εις άτοπον απαγωγή)

Έστω ότι είναι πεπερασμένοι. Δηλαδή, έστω $p_1, p_2, p_3, \dots, p_N$.

Θεωρούμε τον αριθμό $p = p_1 p_2 p_3 \dots p_N + 1$.

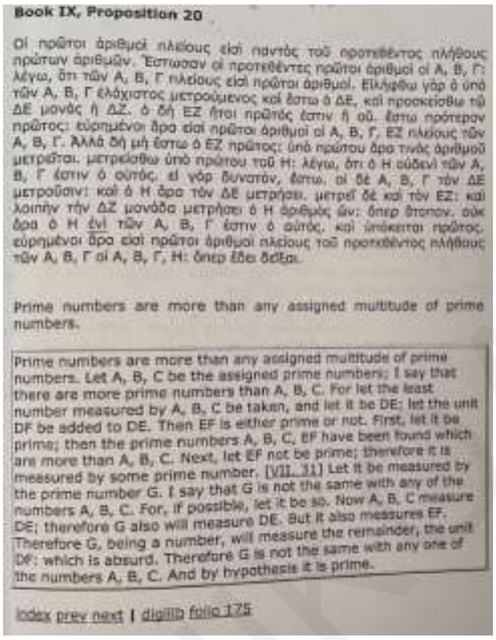
Ο p δεν είναι μέρος της λίστας, αφού είναι μεγαλύτερος από κάθε έναν από αυτούς.

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΗ

Ο p είναι πρώτος, εφόσον δεν διαιρείται από τον p_1, αφού η διαίρεση p διά p_1, δίνει υπόλοιπο 1. Ομοίως, δεν διαιρείται από τον p_2,…, δεν διαιρείται από τον p_N, αφού η διαίρεση p διά $p_k, k = 1, \dots, N$, δίνει υπόλοιπο 1.

Συνεπώς, ο p είναι πρώτος αφού δεν έχει πρώτο διαιρέτη.

Άτοπο. ■



Book IX, Proposition 20

Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους εἰσὶ παντὸς τοῦ προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν. Ἔστωσαν οἱ προτεθέντες πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ· λέγω, ὅτι τῶν Α, Β, Γ πλείους εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοί. Εἰλήφθω γὰρ ὁ ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ ἐλάχιστος μετρούμενος καὶ ἔστω ὁ ΔΕ, καὶ προσκείσθω τῷ ΔΕ μονὰς ἡ ΔΖ. ὁ δὴ ΕΖ ἤτοι πρῶτός ἐστιν ἢ οὔ. ἔστω πρότερον πρῶτος· εὑρημένοι ἄρα εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, ΕΖ πλείους τῶν Α, Β, Γ. Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ὁ ΕΖ πρῶτος· ὑπὸ πρώτου ἄρα τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. μετρείσθω ὑπὸ πρώτου τοῦ Η· λέγω, ὅτι ὁ Η οὐδενὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστιν ὁ αὐτός. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω. οἱ δὲ Α, Β, Γ τὸν ΔΕ μετροῦσιν· καὶ ὁ Η ἄρα τὸν ΔΕ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΕΖ· καὶ λοιπὴν τὴν ΔΖ μονάδα μετρήσει ὁ Η ἀριθμὸς ὤν· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ Η ἑνὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστιν ὁ αὐτός. καὶ ὑπόκειται πρῶτος. εὑρημένοι ἄρα εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους τοῦ προτεθέντος πλήθους τῶν Α, Β, Γ οἱ Α, Β, Γ, Η· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prime numbers are more than any assigned multitude of prime numbers.

Prime numbers are more than any assigned multitude of prime
numbers. Let A, B, C be the assigned prime numbers; I say that
there are more prime numbers than A, B, C. For let the least
number measured by A, B, C be taken, and let it be DE; let the unit
DF be added to DE. Then EF is either prime or not. First, let it be
prime; then the prime numbers A, B, C, EF have been found which
are more than A, B, C. Next, let EF not be prime; therefore it is
measured by some prime number. [VII, 31] Let it be measured by
the prime number G. I say that G is not the same with any of the
numbers A, B, C. For, if possible, let it be so. Now A, B, C measure
DE; therefore G also will measure DE. But it also measures EF.
Therefore G, being a number, will measure the remainder, the unit
DF: which is absurd. Therefore G is not the same with any one of
the numbers A, B, C. And by hypothesis it is prime.

index prev next | digilib folio 175

Εικόνα 10.2: «Στοιχεία», Βιβλίο IX, Πρόταση 20

Στα «Στοιχεία», η παραπάνω πρόταση όπως είδαμε, δεν περιλαμβάνει την έννοια του απείρου. Το ίδιο και στην απόδειξη, η έννοια του απείρου αποφεύγεται. Αξίζει να σημειωθεί ότι η ίδια ακριβώς απόδειξη, περιέχεται ακόμη και σήμερα στα διδακτικά βιβλία των Μαθηματικών.

Ανοικτό παραμένει ακόμη, παρά τις προσπάθειες απόδειξης, το ερώτημα για τους δίδυμους πρώτους αριθμούς της μορφής: $p, p+2$, εάν είναι άπειρα αυτά τα ζευγάρια. Σήμερα, ο μεγαλύτερος γνωστός πρώτος αριθμός είναι ο $2^{82589933} - 1$ με 24862048 ψηφία, ο οποίος βρέθηκε τον Δεκέμβριου του 2018.

11. Ο θρίαμβος του Αρχιμήδη

Ο Αρχιμήδης ο Συρακούσιος (287-212 π.Χ.), ήταν μαθηματικός, μηχανικός, φυσικός, εφευρέτης και αστρονόμος. Κανείς δεν μπορεί να αμφισβητήσει το γεγονός ότι αποτέλεσε τον δημιουργικότερο μαθηματικό της αρχαιότητας. Θεωρείται ως μία από τις μεγαλύτερες μαθηματικές ιδιοφυΐες, μαζί με τον Newton και τον Gauss και ένας από τους λαμπρότερους επιστήμονες όλων των εποχών. Επιπλέον, θεωρείται ο μεγαλύτερος μαθηματικός όλων των εποχών. Απόδειξη αυτού, η απεικόνισή του στο σπουδαιότερο μέχρι πρότινος βραβείο των Μαθηματικών, το μετάλλιο Fields.

Εικόνα 11.1: Αρχιμήδης ο Συρακούσιος (287-212 π.Χ.)

<u>*Σημείωση:*</u>

Το βραβείο Fields, το οποίο χαρακτηρίζεται από πολλούς ως «βραβείο Νόμπελ των Μαθηματικών», απονέμεται σε νέους μαθηματικούς κάτω των 40 ετών στο συνέδριο της Διεθνούς Μαθηματικής Ένωσης, το οποίο διεξάγεται κάθε τέσσερα χρόνια.

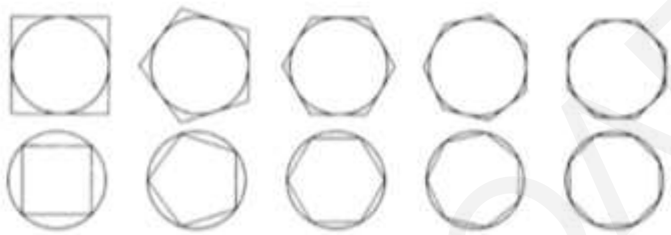
Εικόνα 11.2: Μετάλλιο Fields

Ήταν γνωστός περισσότερο για τις πρακτικές μεθόδους που χρησιμοποιούσε. Κατανοούσε και πίστευε ακράδαντα στη δύναμη των μοχλών. Έλεγε χαρακτηριστικά: «Δώστε μου ένα μέρος να σταθώ και θα μετακινήσω τη Γη.». Οι μελέτες του στη μηχανική και την υδροστατική, τον κατατάσσουν ως τον «Πατέρα της Μαθηματικής Φυσικής».

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

Η φράση: «μη μου τους κύκλους τάραττε», την οποία είπε ο Αρχιμήδης στον Ρωμαίο στρατιώτη την ώρα που μελετούσε κάποιο γεωμετρικό πρόβλημα γράφοντας στην άμμο και που έκανε τον στρατιώτη να βγάλει σπαθί και να σκοτώσει τον Αρχιμήδη, έμεινε στην ιστορία και χρησιμοποιείται ακόμη και σήμερα, όταν θέλουμε ευγενικά να ζητήσουμε από κάποιον να μη μας ενοχλεί και να μας αφήσει να κάνουμε τη δουλειά μας.

Ο Αρχιμήδης, ήταν ο πρώτος που προσέγγισε το π με μια άπειρη διαδικασία, τη Μέθοδο των κανονικών πολυγώνων, εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων σε κύκλο. Έτσι, αυτό που κατάφερε με τη μέθοδο του ο Αρχιμήδης, ήταν η ακρίβεια που θα μπορούσε κανείς να πάρει την τιμή του π, επιλέγοντας την ακριβή τάξη δεκαδικής προσέγγισης, ενώ οι Αιγύπτιοι γνώριζαν το π με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.



Σχήμα 11.1: Εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα σε κύκλο πολύγωνα

Ήταν ο πρώτος που υπολόγισε άπειρο άθροισμα. Χρειάστηκε να περάσουν 20 αιώνες για να ξαναγίνει κάτι τέτοιο (Riemann).

Μία σημαντική παρακαταθήκη του στα Μαθηματικά είναι, μεταξύ άλλων, η απόδειξη με διπλή απαγωγή εις άτοπον της ισότητας:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots=\frac{4}{3}.$$

Η απόδειξη παρουσιάζεται στο βιβλίο: “The works of Archimedes” του T.L. Heath, Cambridge at the University of Press 1897.

Το πως προέκυψε ο αριθμός $\frac{4}{3}$ περιέχεται στο έργο του με τίτλο «Μέθοδος», που περιλαμβάνεται στο παλίμψηστο του Αρχιμήδη (περιλαμβάνει μεταξύ άλλων το έργο «Περί της Μεθόδου των Μηχανικών Θεωρημάτων προς Ερατοσθένη έφοδος», που είναι γνωστό ως «Μέθοδος»).

Εικόνα 11.3: Το παλίμψηστο του Αρχιμήδη

Σήμερα βέβαια, το άπειρο άθροισμα υπολογίζεται ως άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου με λόγο $\lambda = \frac{1}{4}$.

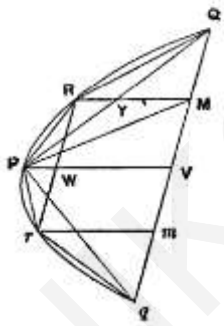
Ο Αρχιμήδης, όμως, για να καταλήξει σ’ αυτό το συμπέρασμα, χωρίς να χρησιμοποιήσει την έννοια του ορίου που ήταν άγνωστη στην εποχή του, επινόησε το εξής τέχνασμα εργαζόμενος μέχρι το:

$$S_n := 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{4^n}, n \geq 3.$$

<u>Πρόταση 21:</u>

Αν Qq είναι η βάση και P η κορυφή οποιουδήποτε παραβολικού τμήματος και αν R η κορυφή του τμήματος που αποκόπτεται από την PQ, τότε:

$$(PQq) = 8(PRQ).$$



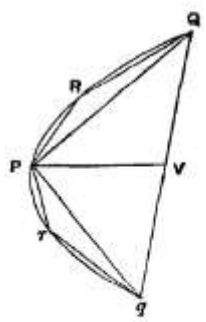
Σχήμα 11.2: Παραβολικό τμήμα με βάση Qq και κορυφή P

<u>Πρόταση 22:</u>

Εάν δίνεται μια σειρά μεγεθών $A, B, C, D, \ldots, Z$ με λόγο τέσσερα κι αν το μεγαλύτερο, το A είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου PQq εγγεγραμμένο στο παραβολικό τμήμα PQq με την ίδια βάση με αυτό και ίσο ύψος, τότε:

$$A + B + C + D + \cdots + Z < \text{Εμβαδόν παραβολικού τμήματος } PQ).$$

<u>Απόδειξη:</u>



Σχήμα 11.3: Τρίγωνο ΡQq εγγεγραμμένο στο παραβολικό τμήμα PQq με την ίδια βάση με αυτό και ίσο ύψος

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

Από την Πρόταση 21, $(PQq) = 8(PRQ) = 8(Pqr)$, *όπου* R, r *είναι οι κορυφές των τμημάτων που αποκόπτονται από τις* PQ, Pq, *έχουμε:*

$$(PQq) = 4[(PRQ) + (Pqr)].$$

Τότε, αφού $(PQq) = A$,

$$(PQR) + (Pqr) = B.$$

Ομοίως, αποδεικνύουμε ότι τα τρίγωνα ομοίως εγγεγραμμένα στα υπόλοιπα τμήματα είναι μαζί ίσα με το μέγεθος C *κ.ο.κ..*

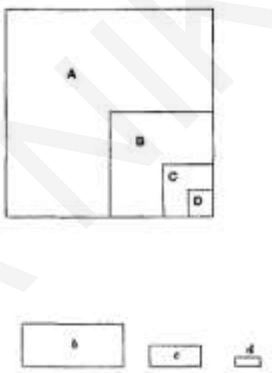
Τότε $A + B + C + D + \cdots Z$ *είναι ίσο με το εμβαδόν του εγγεγραμμένου πολυγώνου και επομένως μικρότερο από το εμβαδόν του τμήματος.* ■

<u>Πρόταση 23:</u>

Δίνεται μια ακολουθία μεγεθών $A, B, C, D, \dots Z$, *όπου* A *είναι το μεγαλύτερο και με λόγο τέσσερα. Τότε:*

$$A + B + C + \cdots + Z + \frac{1}{3}Z = \frac{4}{3}A.$$

<u>Απόδειξη:</u>



Σχήμα 11.4: Ακολουθία μεγεθών A, B, C, D, … , Y, Z , όπου A είναι το μεγαλύτερο και με λόγο τέσσερα

Παίρνουμε τα μεγέθη $b, c, d, \dots$ *τέτοια ώστε:*

$$b = \tfrac{1}{3}B, c = \tfrac{1}{3}C, d = \tfrac{1}{3}D, \dots.$$

Τότε:

$$b = \tfrac{1}{3}B,\ B = \tfrac{1}{4}A.$$

Έχουμε:

$$B + b = \frac{1}{3}A, C + c = \frac{1}{3}B, \dots, Z + z = \frac{1}{3}Y.$$

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

Συνεπώς,

$$B + C + D + \cdots + Z + b + c + d + \cdots + y + z = \frac{1}{3}(A + B + C + \cdots + Y).$$

Όμως,

$$b + c + d + \cdots + y = \frac{1}{3}(B + C + D + \cdots + Y).$$

Επομένως, αφαιρώντας κατά μέλη:

$$B + C + D + \cdots + Z + z = \frac{1}{3}A$$

ή

$$A + B + C + \cdots + Z + \frac{1}{3}Z = \frac{4}{3}A. \blacksquare$$

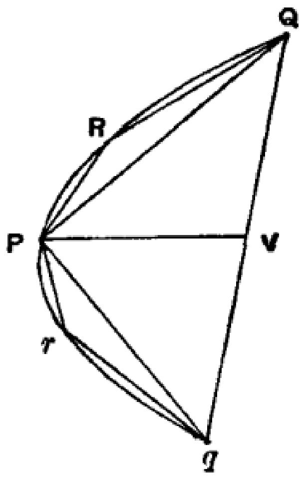
Το αλγεβρικό ισοδύναμο αυτού του αποτελέσματος, είναι βεβαίως το εξής:

$$1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}}.$$

<u>Πρόταση 24:</u>

Κάθε τμήμα φραγμένο από παραβολή και χορδή Qq, είναι ίσο με τα $\frac{4}{3}$ του τριγώνου που έχει την ίδια βάση με το τμήμα και ίσο ύψος.

<u>Απόδειξη:</u>



Σχήμα 11.5: Τμήμα φραγμένο από παραβολή και χορδή Qq

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

Υποθέτουμε ότι:

$$K = \frac{4}{3}(PQq),$$

όπου P*, κορυφή του τμήματος. Τότε, πρέπει να αποδείξουμε ότι το εμβαδόν του τμήματος είναι ίσο με* K.

Έστω ότι δεν είναι ίσο με K*, τότε πρέπει να είναι είτε μεγαλύτερο είτε μικρότερο του* K.

<u>1η περίπτωση:</u> Υποθέτουμε ότι το εμβαδόν του τμήματος είναι μεγαλύτερο του K.

Αν εγγράψουμε στα τμήματα που αποκόπτονται από τα PQ, Pq *τρίγωνα, τα οποία έχουν ίδια βάση και ίσο ύψος και τα οποία είναι τα τρίγωνα με τις ίδιες κορυφές* R, r *με αυτά τα τμήματα και αν στα εναπομείναντα τρίγωνα εγγράψουμε τρίγωνα ομοίως κ.ο.κ., τότε εν τέλει θα μας μείνουν τμήματα, που το άθροισμά τους είναι μικρότερο από το εμβαδόν του οποίου το τμήμα* PQq *υπερβαίνει το* K.

Συνεπώς, το πολύγωνο αυτό που κατασκευάσαμε πρέπει να είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν K. *Άτοπο, αφού από την Πρόταση 23:*

$$A + B + C + \cdots + Z < K.$$

Επομένως, το εμβαδόν του τμήματος δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο του K.

<u>2η περίπτωση:</u> Υποθέτουμε ότι το εμβαδόν του τμήματος είναι μικρότερο του K.

Αν τότε $(PQq) = A, B = \frac{1}{4}A, C = \frac{1}{4}B$ *κ.ο.κ. μέχρι να φτάσουμε στο εμβαδόν του* X *τέτοιο ώστε* X *είναι μικρότερο από τη διαφορά μεταξύ του* K *και του τμήματος, έχουμε από την Πρόταση 23 ότι:*

$$A + B + C + \cdots + X + \frac{1}{3}X = K.$$

Επειδή, το K *υπερβαίνει το* $A + B + C + \cdots + X$ *κατά ένα εμβαδόν μικρότερο του* X *και το εμβαδόν του τμήματος κατά ένα εμβαδόν μεγαλύτερο του* X*, έχουμε τότε ότι:*

$$A + B + C + \cdots + X > \text{το τμήμα}.$$

Άτοπο, από την Πρόταση 23.

Άρα, το εμβαδόν του τμήματος δεν μπορεί να είναι μικρότερο του K.

Επομένως, αφού το τμήμα δεν είναι ούτε μεγαλύτερο ούτε μικρότερο του K*,*

$$\text{Εμβαδόν του τμήματος } PQq = K = \tfrac{4}{3}(PQq). \ \blacksquare$$

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

Επομένως, καταλήγουμε στο παρακάτω σπουδαίο αποτέλεσμα.

<u>Θεώρημα:</u> (Αρχιμήδη)

Το εμβαδόν παραβολικού χωρίου, είναι ίσο με $\frac{4}{3}$ του τριγώνου που αντιστοιχεί στην ίδια χορδή και έχει το ίδιο ύψος.

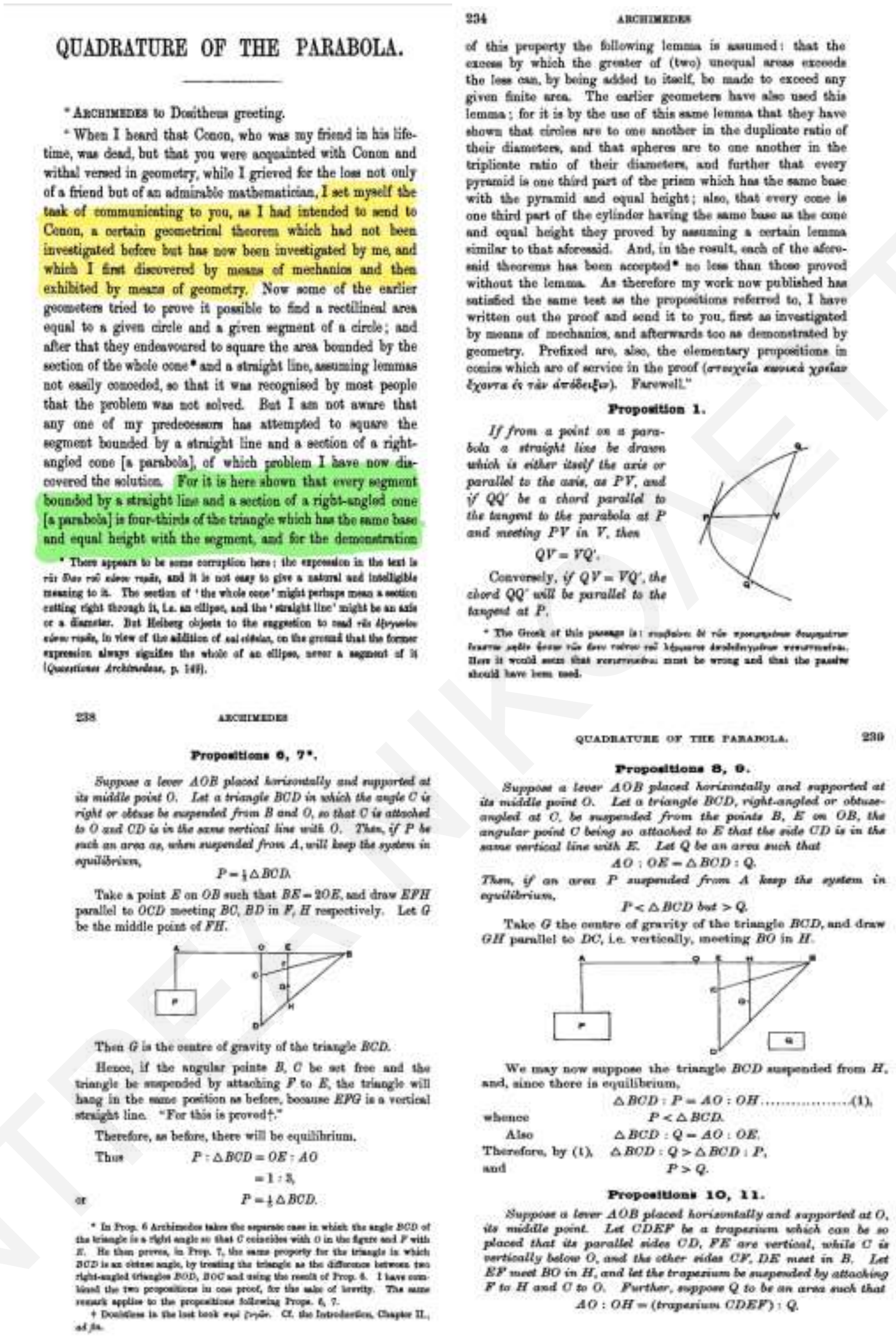
Με χρήση, λοιπόν, της ισότητας $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{3}\frac{1}{4^n}=\frac{4}{3}$, υπολόγισε την περιοχή κάτω από το τόξο παραβολής. Δηλαδή, τετραγώνισε την παραβολή.

Ο Αρχιμήδης, πέτυχε μια πρώτη απόδειξη του Θεωρήματος, χρησιμοποιώντας τη Μηχανική και τη μέθοδο των ροπών, την οποία ο ίδιος εισήγαγε, όμως δεν ήταν ικανοποιημένος και έτσι ανέπτυξε μια δεύτερη (Γεωμετρική) απόδειξη (επιστολή προς Δοσίθεο-υπογραμμισμένο με κίτρινο χρώμα στην Εικόνα 11.4). Όλη η μαθηματική κοινότητα, αναρωτιόταν που είχε βρει τον κρίσιμο αριθμό $\frac{4}{3}$. Αυτό, απαντούσε στο ερώτημα.

Υπολόγισε το εμβαδόν πλήρους έλλειψης, όχι όμως μέρους έλλειψης ή υπερβολής. Ο λόγος που απέτυχε, είναι ότι ενώ ο τετραγωνισμός της παραβολής (σε μοντέρνα ορολογία) είναι ένα αλγεβρικό πρόβλημα που περιλαμβάνει πολυώνυμα, ο τετραγωνισμός κωνικών τομών περιλαμβάνει υπερβατικές και αναλυτικές συναρτήσεις που δεν ικανοποιούν πολυωνυμική εξίσωση, σε αντίθεση με μια αλγεβρική εξίσωση (‘‘elliptic integrals’’).

Για λόγους πληρότητας, παραθέτουμε τα ακόλουθα αποσπάσματα που αφορούν τη μηχανική απόδειξη με τη Μέθοδο των ροπών, όπως αναγράφονται στο σύγγραμμα επιλεγμένων έργων του Αρχιμήδη, ‘‘The works of Archimedes’’ του T.L. Heath, Cambridge at the University of Press 1897.

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΗ



QUADRATURE OF THE PARABOLA.

"ARCHIMEDES to Dositheus greeting.

"When I heard that Conon, who was my friend in his lifetime, was dead, but that you were acquainted with Conon and withal versed in geometry, while I grieved for the loss not only of a friend but of an admirable mathematician, I set myself the task of communicating to you, as I had intended to send to Conon, a certain geometrical theorem which had not been investigated before but has now been investigated by me, and which I first discovered by means of mechanics and then exhibited by means of geometry. Now some of the earlier geometers tried to prove it possible to find a rectilineal area equal to a given circle and a given segment of a circle; and after that they endeavoured to square the area bounded by the section of the whole cone* and a straight line, assuming lemmas not easily conceded, so that it was recognised by most people that the problem was not solved. But I am not aware that any one of my predecessors has attempted to square the segment bounded by a straight line and a section of a right-angled cone [a parabola], of which problem I have now discovered the solution. For it is here shown that every segment bounded by a straight line and a section of a right-angled cone [a parabola] is four-thirds of the triangle which has the same base and equal height with the segment, and for the demonstration

* There appears to be some corruption here; the expression in the text is [illegible], and it is not easy to give a natural and intelligible meaning to it. The section of 'the whole cone' might perhaps mean a section cutting right through it, i.e. an ellipse, and the 'straight line' might be an axis or a diameter. But Heiberg objects to the suggestion to read [illegible], in view of the addition of [illegible], on the ground that the former expression always signifies the whole of an ellipse, never a segment of it (*Quaestiones Archimedeae*, p. 149).

234 ARCHIMEDES

of this property the following lemma is assumed: that the excess by which the greater of (two) unequal areas exceeds the less can, by being added to itself, be made to exceed any given finite area. The earlier geometers have also used this lemma; for it is by the use of this same lemma that they have shown that circles are to one another in the duplicate ratio of their diameters, and that spheres are to one another in the triplicate ratio of their diameters, and further that every pyramid is one third part of the prism which has the same base with the pyramid and equal height; also, that every cone is one third part of the cylinder having the same base as the cone and equal height they proved by assuming a certain lemma similar to that aforesaid. And, in the result, each of the aforesaid theorems has been accepted* no less than those proved without the lemma. As therefore my work now published has satisfied the same test as the propositions referred to, I have written out the proof and send it to you, first as investigated by means of mechanics, and afterwards too as demonstrated by geometry. Prefixed are, also, the elementary propositions in conics which are of service in the proof (στοιχεῖα κωνικὰ χρείαν ἔχοντα ἐς τὰν ἀπόδειξιν). Farewell."

Proposition 1.

If from a point on a parabola a straight line be drawn which is either itself the axis or parallel to the axis, as PV, and if QQ' be a chord parallel to the tangent to the parabola at P and meeting PV in V, then

$$QV = VQ'.$$

Conversely, *if $QV = VQ'$, the chord QQ' will be parallel to the tangent at P.*

* The Greek of this passage is: [illegible]. Here it would seem that [illegible] must be wrong and that the passive should have been used.

238 ARCHIMEDES

Propositions 6, 7*.

Suppose a lever AOB placed horizontally and supported at its middle point O. Let a triangle BCD in which the angle C is right or obtuse be suspended from B and O, so that C is attached to O and CD is in the same vertical line with O. Then, if P be such an area as, when suspended from A, will keep the system in equilibrium,

$$P = \tfrac{1}{3}\triangle BCD.$$

Take a point E on OB such that $BE = 2OE$, and draw EFH parallel to OCD meeting BC, BD in F, H respectively. Let G be the middle point of FH.

Then G is the centre of gravity of the triangle BCD.

Hence, if the angular points B, C be set free and the triangle be suspended by attaching F to E, the triangle will hang in the same position as before, because EFG is a vertical straight line. "For this is proved†."

Therefore, as before, there will be equilibrium.

Thus $P : \triangle BCD = OE : AO$

$= 1 : 3,$

or $P = \tfrac{1}{3}\triangle BCD.$

* In Prop. 6 Archimedes takes the separate case in which the angle BCD of the triangle is a right angle so that C coincides with O in the figure and F with E. He then proves, in Prop. 7, the same property for the triangle in which BCD is an obtuse angle, by treating the triangle as the difference between two right-angled triangles BOD, BOC and using the result of Prop. 6. I have combined the two propositions in one proof, for the sake of brevity. The same remark applies to the propositions following Props. 6, 7.

† Doubtless in the lost book περὶ ζυγῶν. Cf. the Introduction, Chapter II., ad fin.

QUADRATURE OF THE PARABOLA. 239

Propositions 8, 9.

Suppose a lever AOB placed horizontally and supported at its middle point O. Let a triangle BCD, right-angled or obtuse-angled at C, be suspended from the points B, E on OB, the angular point C being so attached to E that the side CD is in the same vertical line with E. Let Q be an area such that

$$AO : OE = \triangle BCD : Q.$$

Then, if an area P suspended from A keep the system in equilibrium,

$$P < \triangle BCD \text{ but } > Q.$$

Take G the centre of gravity of the triangle BCD, and draw GH parallel to DC, i.e. vertically, meeting BO in H.

We may now suppose the triangle BCD suspended from H, and, since there is equilibrium,

$\triangle BCD : P = AO : OH$ ....(1),

whence $P < \triangle BCD$.

Also $\triangle BCD : Q = AO : OE$.

Therefore, by (1), $\triangle BCD : Q > \triangle BCD : P$,

and $P > Q$.

Propositions 10, 11.

Suppose a lever AOB placed horizontally and supported at O, its middle point. Let $CDEF$ be a trapezium which can be so placed that its parallel sides CD, FE are vertical, while C is vertically below O, and the other sides CF, DE meet in B. Let EF meet BO in H, and let the trapezium be suspended by attaching F to H and C to O. Further, suppose Q to be an area such that

$$AO : OH = (\text{trapezium } CDEF) : Q.$$

Εικόνα 11.4: Τετραγωνισμός της παραβολής, μέθοδος των ροπών, σύγγραμμα επιλεγμένων έργων του Αρχιμήδη, ‘‘The works of Archimedes’’ του T.L. Heath, Cambridge at the University of Press 1897

Στην Εισαγωγή του Τετραγωνισμού της παραβολής, βρίσκουμε το ακόλουθο αίτημα το οποίο είναι γνωστό αργότερα ως το περίφημο «Αξίωμα του Αρχιμήδη» (επιστολή προς Δοσίθεο-υπογραμμισμένο με πράσινο χρώμα στην Εικόνα 11.4).

<u>*Αίτημα:*</u>

Το επιπλέον με το οποίο το μεγαλύτερο εμβαδόν υπερβαίνει του μικρότερου, αν προστεθεί επαναληπτικά του εαυτού του, μπορεί να αυξηθεί έτσι ώστε να υπερβαίνει δοθέν πεπερασμένο εμβαδόν.

Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι σήμερα το παραπάνω αίτημα, που είναι γνωστό ως Αξίωμα του Αρχιμήδη, προκύπτει ως θεώρημα με χρήση του Αξιώματος της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών.

<u>*Αξίωμα της Πληρότητας:*</u>

Κάθε μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών, έχει ελάχιστο άνω φράγμα (supremum).

<u>*Αξίωμα του Αρχιμήδη:*</u>

Για κάθε θετική ποσότητα Μ και για κάθε $\varepsilon > 0$*, υπάρχει φυσικός αριθμός* n_0*, τέτοιος ώστε,* $n_0\varepsilon > M$.

Ως πόρισμα του παραπάνω αξιώματος, προκύπτει η ύπαρξη του ακέραιου μέρους.

Εντούτοις, η σπουδαιότητα του Αξιώματος του Αρχιμήδη έγκειται στο γεγονός ότι με τη χρήση του και μόνο μπορούμε να συμπεράνουμε το παρακάτω αποτέλεσμα, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ως Αφετηρία της Μαθηματικής Ανάλυσης:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

<u>*Ορισμός:*</u> *(Weierstrass)*

Μια ακολουθία a_n, ***συγκλίνει*** *στον πραγματικό αριθμό* l*, σε σύμβολα:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l.$$

αν:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \tau.\omega. \forall n \geq n_0\ \nu\alpha\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\text{: } |a_n - l| < \varepsilon.$$

<u>*Πρόταση:*</u>

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

<u>*Απόδειξη:*</u>

Έστω $\varepsilon > 0$. *Από το Αξίωμα του Αρχιμήδη, υπάρχει* $n_0 \in \mathbb{N}$ *, με* $n_0\varepsilon > 1$ $(M = 1)$.

Συνεπώς, αν $n \geq n_0 \Rightarrow n\varepsilon \geq n_0\varepsilon > 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$.

Επομένως, με βάση τον ορισμό του ορίου, έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.\ \blacksquare$$

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΗ

12. Άπειρες σειρές και σύγκλιση

Ορισμός:

Ακολουθία*, είναι κάθε συνάρτηση με πεδίο ορισμού το* $\mathbb{N}$ *και πεδίο τιμών το* $\mathbb{R}$. *Συμβολίζεται είτε ως* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, *είτε με αναγραφή των όρων της:* $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$.

Ορισμός:

Σειρά, *λέγεται το άθροισμα των όρων μιας ακολουθίας και μπορεί να είναι το άπειρο.*

Παράδειγμα:

Στο παράδοξο της διχοτόμησης του Ζήνωνα, που έχουμε αναλύσει στην Ενότητα 8, είδαμε τη σειρά:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots.$$

Ο Αρχιμήδης, όπως είδαμε, παρουσίασε την πρώτη γνωστή σύνοψη μιας απειροσειράς, με τη Μέθοδο της Εξάντλησης για τον υπολογισμό του εμβαδού κάτω από ένα παραβολικό τόξο, με το άθροισμα μιας απειροσειράς.

Ορισμός:

Ο όρος $s_n = \sum_{\kappa=1}^{n} a_\kappa$, *καλείται* ***n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς****.*

Πρόταση:

Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, ***συγκλίνει*** *στο όριο* L *αν και μόνο αν η αντίστοιχη ακολουθία μερικών αθροισμάτων συγκλίνει στο* L.

Σε σύμβολα:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Leftrightarrow L = \lim_{n \to \infty} s_n.$$

Διαφορετικά, η σειρά ***αποκλίνει****.*

Μια άπειρη σειρά, είναι δυνατόν να δώσει πεπερασμένο αποτέλεσμα, δηλαδή να συγκλίνει σε πεπερασμένο αριθμό, κάτι το οποίο οι αρχαίοι Έλληνες δεν μπορούσαν να αποδεχτούν.

Ορισμός:

Δυναμοσειρά, *καλείται μια σειρά της μορφής:*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots.$$

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

Στο σημείο αυτό, ας αναφερθούμε σε ορισμένα παραδείγματα άπειρων σειρών:

- *<u>Γεωμετρική σειρά:</u>*

Έχει τη μορφή:

$$1 + r + r^2 + \cdots, \text{ όπου } r \text{ είναι μια πραγματική σταθερά.}$$

Εάν $|r| < 1$*, τότε η σειρά συγκλίνει στο* $\frac{1}{1-r}$.

Εάν $r \geq 1$*, τότε η σειρά αποκλίνει (*$1 + r + r^2 + \cdots = \infty$*).*

Εάν $r = -1$*, τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε.*

Για παράδειγμα, παραθέτουμε τον ακόλουθο συλλογισμό:

$$\begin{aligned} 0 &= \big(1 + (-1)\big) + \big(1 + (-1)\big) + \big(1 + (-1)\big) + \cdots \\ &= 1 + \big(1 + (-1)\big) + \big(1 + (-1)\big) + \big(1 + (-1)\big) + \cdots \\ &= 1, \end{aligned}$$

ο οποίος αποτελεί προφανώς αντινομία.

Αυτό, αποτελεί μια από τις δυσκολίες στην κατανόηση του απείρου, η οποία επιλύθηκε από τον Riemann (βλέπε Ενότητα 4).

- *<u>Αρμονική σειρά:</u>*

Είναι η σειρά:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots.$$

Ο Γάλλος φιλόσοφος, συγγραφέας και μαθηματικός Nicolae Oresme (1323-1382), ήταν ο πρώτος που απέδειξε ότι η αρμονική σειρά αποκλίνει.

Εικόνα 12.1: Nicolae Oresme (1323-1382)

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

<u>Απόδειξη:</u>

Ομαδοποιούμε τους όρους της σειράς ως εξής:

$$\begin{aligned}\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{1}{\kappa} = 1 & \\ &+\frac{1}{2}\\ &+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\\ &+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\\ &+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\\ &+\cdots\end{aligned}$$

Παρατηρούμε, ότι το άθροισμα των όρων κάθε γραμμής (εκτός από τη δεύτερη), είναι μεγαλύτερο του $\frac{1}{2}$.

Υπάρχουν άπειρες τέτοιες γραμμές, που μπορούμε να δημιουργήσουμε.

Άρα, η σειρά δεν είναι φραγμένη, διότι αν υπήρχε κάποιο φράγμα M, τότε αρκεί να περιλάβουμε $2(\lfloor M \rfloor + 1)$ τέτοιες γραμμές, διότι τότε θα είχαμε:

$$1+\frac{1}{2}+\cdots < M$$

και εφόσον το άθροισμα των όρων της κάθε γραμμής είναι μεγαλύτερο του $\frac{1}{2}$, θα είχαμε:

$$2(\lfloor M \rfloor + 1) \geq \frac{1}{2}\big(2(\lfloor M \rfloor + 1)\big) = M + 1.$$

Επομένως,

$$M \; > \lfloor M \rfloor + 1.$$

Άτοπο.

Έτσι, η αρμονική σειρά αποκλίνει. ■

Μια σημαντική παρατήρηση, είναι το γεγονός ότι όταν το $n \to \infty$, η παράσταση:

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\ln n,$$

τείνει σε πεπερασμένο όριο, γνωστό ως «σταθερά του Euler» και συμβολίζεται με «γ». Παραμένει ακόμα άγνωστο, εάν η σταθερά του Euler είναι ρητός ή άρρητος αριθμός.

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

- *p-σειρές:*

Είναι γενίκευση της αρμονικής σειράς και έχουν τη μορφή:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

Αποκλίνουν για $p \leq 1$ *και συγκλίνουν για* $p > 1$.

Το γνωστότερο αποτέλεσμα, είναι για $p = 2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ως συνάρτηση του s, το άθροισμα αυτής της σειράς, συμπίπτει με τον περιορισμό της Ζήτα συνάρτησης του Riemann στο διάστημα $(1, \infty)$:

Για $s > 1$:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Η ζ, είναι μερομορφική στο $\mathbb{C}$.

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

13. Η σχέση σπουδαίων μαθηματικών με το άπειρο και η θεμελίωση του Απειροστικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού

Ο Άγγλος κληρικός και μαθηματικός John Wallis (1616-1703), ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε το σύμβολο ∞ για το άπειρο στο έργο του «De sectionibus conicis», το 1655. Η τριάδα 0, 1 και ∞, έχει πρωταρχικό ρόλο στα Μαθηματικά.

Εικόνα 13.1: John Wallis (1616-1703)

Ο Ιταλός φυσικός, μαθηματικός, αστρονόμος και φιλόσοφος Galileo Galilei (1564-1642), εισήγαγε την έννοια του απειροστού, της συνέχειας και του αδιαίρετου. Το 1638, δημοσίευσε το έργο “Discourses and Mathematical Demonstrations Concerning Two New Sciences pertaining to Mechanics and Local Motions”, στο οποίο χρησιμοποιεί απειροστά και αδιαίρετα. Γι’ αυτόν, τα απειροστά ήταν μη ποσότητες (non-quanta) και όχι απείρως μικρές ποσότητες. Συνάντησε δυσκολίες στη μελέτη των απειροσυνόλων και υποστήριξε ότι πρέπει να απορριφθεί η ύπαρξη του εν ενεργεία απείρου.

Εικόνα 13.2: Galileo Galilei (1564-1642)

Το παράδοξο του Galileo: (“The Mathematical Experience”, Philip J. Davis, Reuben Hersh, Boston 1981, σελ. 155-156)

Αφορά το συσχετισμό μεταξύ δύο διαφορετικών ομάδων αριθμών. Το παράδοξο του Galileo για το άπειρο, παρατηρεί ότι υπάρχουν τόσα τετράγωνα αριθμών όσοι είναι και οι ακέραιοι αριθμοί αλλά και το αντίστροφο. Αυτό, δηλώνεται με την εξής αντιστοιχία:

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & \ldots \end{array}$$

Πώς συμβαίνει αυτό, όταν δεν είναι κάθε αριθμός τετράγωνος; Το παράδοξο, εξηγήθηκε, όπως θα δούμε παρακάτω, για πρώτη φορά από τον Γερμανό μαθηματικό Georg Cantor (1845-1918) στα 1870, τον οποίο θα μελετήσουμε στην Ενότητα 15. Ο Cantor, χρησιμοποίησε αυτή την ιδιότητα ως διακριτό χαρακτηριστικό των απειροσυνόλων. Ένα άπειρο σύνολο, είναι απλά ένα σύνολο το οποίο μπορεί να μπει σε μια 1-1 αντιστοιχία με ένα κατάλληλο γνήσιο υποσύνολό του.

Έχουμε, δηλαδή, τους αριθμούς που υψώνονται στο τετράγωνο (1, 4, 9, 16, κτλ.) και τους αριθμούς που δεν υψώνονται στο τετράγωνο (2, 3, 5, 6, 7 κτλ.). Όταν ενωθούν αυτές οι δύο ομάδες, νομίζουμε ότι το σύνολο των αριθμών είναι μεγαλύτερο από το σύνολο των αριθμών που υψώνεται στο τετράγωνο. Τοποθετούμε μαζί τις δύο ομάδες και θα έχουμε μια μεγαλύτερη ομάδα. Ωστόσο, αυτό δεν ισχύει αφού όλοι οι θετικοί αριθμοί έχουν τετραγωνική ρίζα και έτσι, είναι αδύνατον να είναι είτε το ένα είτε το άλλο μεγαλύτερο. Ο Galileo, ήθελε να αποδείξει ότι έννοιες όπως το «περισσότερο» ή το «λιγότερο», ισχύουν και εφαρμόζονται μόνο στους πεπερασμένους αριθμούς.

Ο Γερμανός αστρονόμος, μαθηματικός και συγγραφέας Johannes Kepler (1571-1630), επηρεάστηκε από τους Πυθαγορείους και τον Αρχιμήδη. Χρησιμοποιώντας την τεχνική του Γερμανού φιλόσοφου, θεολόγου, επισκόπου, νομικού και αστρονόμου Nicholas of Cusa (1401-1464), θεωρούσε ότι οι επιφάνειες και οι όγκοι δημιουργούνται από απειροστά στοιχεία ίσων διαστάσεων, αλλά αναφέρεται και στα αδιαίρετα, χωρίς ωστόσο να διευκρινίζει τη σημασία της έννοιας αυτής.

Εικόνα 13.3: Johannes Kepler (1571-1630)

Ο Ιταλός μαθηματικός Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647), ήταν μαθητής του Galileo Galilei. Κεντρική ιδέα στο έργο του, είναι ότι κάθε αδιαίρετο παράγει με την κίνησή του ένα ανώτερο συνεχές. Το κινούμενο σημείο παράγει μία γραμμή, η κινούμενη γραμμή μία επιφάνεια (που αποτελείται από ένα άπειρο πλήθος παράλληλων ευθειών) και η κινούμενη επιφάνεια ένα στερεό. Σε σχέση με το άπειρο, διαφωνούσε με την Αριστοτελική αντίληψη του δυνητικού απείρου, ότι το άπειρο

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

είναι μια διανοητική κατασκευή για να μπορούμε να επιλύουμε μαθηματικά προβλήματα και χρησιμοποιούσε το άπειρο σαν βοηθητική έννοια, εφόσον θεωρούσε ότι από τη φύση του το άπειρο δεν ήταν αναγκαίο να έχει ξεκάθαρη φύση.

Εικόνα 13.4: Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647)

Τα παράδοξα του απείρου, επηρέασαν την ανάπτυξη του Απειροστικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού, οι οποίοι αποτέλεσαν επανάσταση για την εξέλιξη των Μαθηματικών. Κύριοι αντιπρόσωποι του Απειροστικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού, ήταν ο Άγγλος φυσικός, μαθηματικός, αστρονόμος, φιλόσοφος, αλχημιστής και θεολόγος Sir Isaac Newton (1643-1727) και ο Γερμανός μαθηματικός και φιλόσοφος Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

Ο Newton, δεν θεωρούσε τα απειροστά μετρήσιμα (πεπερασμένα), αλλά ούτε και ακριβώς ίσα με μηδέν. Δέχτηκε κι αυτός, όπως και ο Leibniz, αυστηρή κριτική από τον George Berkeley στο βιβλίο του με τίτλο “The Analyst”, London 1734, για τη χρήση των απειροστών ποσοτήτων.

Εικόνα 13.5: Sir Isaac Newton (1643-1727)

Ο Leibniz, το 1675 στην εργασία του με τίτλο “On Arithmetical Quadrature of the Circle, the Ellipse and the Hyperbola”, η οποία δημοσιεύτηκε το 1693, χρησιμοποιεί με αυστηρό τρόπο τα απειροστά. Θεωρούσε, σε αντίθεση με τον Galileo, ότι τα απειροστά δεν είναι μη ποσότητες. Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, πίστευε ότι τα απειροστά είναι απείρως μικρές θετικές ποσότητες, που είναι μικρότερες από

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

οποιαδήποτε δοσμένη ποσότητα και απείρως μεγάλες ποσότητες, είναι μεγαλύτερες από οποιαδήποτε άλλη ποσότητα. Γι' αυτόν, το άπειρο είναι αποδεκτό και ως πραγματικό, αλλά και ως δυνητικό, με την έννοια της άπειρης διαιρετότητας εκτεταμένων αντικειμένων. Ο Δ. Αναπολιτάνος στο βιβλίο του με τίτλο: «Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών», Αθήνα 2005 , αναφέρει ότι ο Leibniz σε κάποιο σημείο του έργου του ισχυρίζεται ότι: «Τα άπειρα, αποτελούνται από πεπερασμένα με τον ίδιο τρόπο, που τα πεπερασμένα αποτελούνται από απειροστά.».

Εικόνα 13.6: Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Ο Γερμανός μαθηματικός Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), χρησιμοποίησε το πραγματικό άπειρο στις αριθμοθεωρητικές εργασίες του, μολονότι αρχικά, διαμαρτυρόταν έντονα και αντιτάχθηκε σ' αυτό, για να αποφύγει τις δυσκολίες και τα παράδοξά του. Επιπλέον, απέρριπτε την ιδέα του ολοκληρωμένου απειροσυνόλου. Σε μια επιστολή προς τον αστρονόμο μαθητή του H. Shumacher στις 12 Ιουλίου του 1831, ο Gauss έγραψε: «Διαμαρτύρομαι για τη χρήση μιας άπειρης ποσότητας ως πραγματικής. Αυτό στα Μαθηματικά δεν επιτρέπεται ποτέ. Το άπειρο είναι μόνο ένας τρόπος του λέγειν κατά τον οποίο μπορεί κανείς να μιλάει για τα όρια στα οποία ορισμένοι λόγοι μπορούν να πλησιάζουν όσο κοντά θέλουμε, ενώ άλλοι μπορούν να αυξάνονται απεριόριστα.».

Με πρώτον τον Gauss, άρχισαν να μελετιούνται οι άπειρες σειρές και η σύγκλισή τους. Ένα άλλο σπουδαίο του επίτευγμα, ήταν η ανακάλυψη ότι κάθε μη σταθερή πολυωνυμική εξίσωση, έχει τουλάχιστον μία ρίζα. Αυτό, έγινε στη διδακτορική του διατριβή. Έτσι, έγινε ο πρώτος που έδωσε (ορθή) απόδειξη στο Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας: «Κάθε πολυώνυμο βαθμού $n \geq 1$, έχει ακριβώς n ρίζες.».

Τέλος, έδωσε μια εξήγηση στο παράδοξο του Ζήνωνα με τον Αχιλλέα και τη χελώνα, δίνοντας ένα παράδειγμα μ' ένα χαρτί, το οποίο το κόβουμε στη μέση, κρατάμε το μισό και το άλλο μισό το ξανακόβουμε στη μέση, κρατάμε πάλι το μισό και το άλλο μισό το ξανακόβουμε στη μέση. Αν αυτή η διαδικασία συνεχιζόταν επ' άπειρο, θα είχαμε εν τέλει όλο το χαρτί κομμένο σε άπειρα κομμάτια και το άθροισμά τους θα ήταν ίσο με ένα. Ισχυρίστηκε, λοιπόν, ότι το λάθος του Ζήνωνα, ήταν ότι θεωρούσε πεπερασμένη την έκταση του δρόμου με πεπερασμένο χρόνο. Αν, όμως, ο χρόνος ήταν άπειρος, ο Αχιλλέας θα νικούσε τη χελώνα. (Επιχείρημα στα «Μετά τα Φυσικά», βιβλίο "The Presocratic Philosophers", G.S Kirk, J.E. Raven, Cambridge at the University of Press 1971)

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

Εικόνα 13.7: Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Ο Τσέχος μαθηματικός, λογικός, φιλόσοφος και θεολόγος Bernardus Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781-1848), όρισε τις συνεχείς συναρτήσεις. Σε σχέση με το άπειρο, συμφώνησε με τον Galileo, αλλά δεν ασπάστηκε την άποψη ύπαρξης απείρως μεγάλων και μικρών ποσοτήτων. Επιπλέον, μελέτησε τις ιδιότητες του εν ενεργεία απείρου. Ήταν ο πρώτος που στο έργο του με τίτλο: «Paradoxes of the infinite», το οποίο δημοσιεύτηκε το 1851 (τρία χρόνια μετά τον θάνατό του), έκανε θετικά βήματα προς την παραδοχή του απείρου. Τέλος, εισήγαγε μια πρώιμη έννοια για το σύνολο και ειδικότερα των απειροσυνόλων, μέσω της μεθόδου της σύγκρισης, όμως απέτυχε. Σήμερα, το όνομά του είναι συνυφασμένο κυρίως με την ανάλυση και ειδικότερα είναι γνωστός για τα Θεωρήματα Bolzano-Weierstrass και Bolzano της συνέχειας.

<u>Θεώρημα Bolzano -Weierstrass:</u>

Κάθε φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}^n$, έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

<u>Θεώρημα Bolzano της συνέχειας:</u>

Έστω $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και $f(a)f(b) < 0$. Τότε, η f έχει ρίζα στο (a, b).

Εικόνα 13.8: Bernardus Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781-1848)

Ο Γάλλος μαθηματικός, μηχανικός και φυσικός Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) και ο Γερμανός μαθηματικός Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897), εδραίωσαν τον 19ο αιώνα τον Απειροστικό και Ολοκληρωτικό Λογισμό. Συγκεκριμένα στον Weierstrass, οφείλουμε τον πρώτο ορθό ορισμό του ορίου. Η χρήση των ε −ορισμών, έφεραν στο προσκήνιο το δυνητικό άπειρο.

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΗ

Εικόνα 13.9: Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Ο Weierstrass, χρησιμοποίησε πολύ την έννοια του πραγματικού αριθμού στο έργο του. Όρισε τους άρρητους αριθμούς, ως μια βασική ακολουθία ή μια κλάση ισοδυναμίας της και όχι ως όριο ακολουθίας.

Εικόνα 13.10: Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897)

Η αυστηροποίηση του Απειροστικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού, απομάκρυνε την έννοια του εν ενεργεία απείρου και προσέλκυσε την έννοια του εν δυνάμει απείρου.

Στο σημείο αυτό, θα δούμε ορισμένες πληροφορίες για τον Γερμανό μαθηματικό Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916), όπως παρουσιάζονται στο βιβλίο με τίτλο: «Απειροστικός Λογισμός, Πρόχειρες Σημειώσεις» του Σ.Κ. Πηχωρίδης, Κρήτη 1986-Αθήνα 1996-Σάμος 2006 (σελ. 159-160).

Εικόνα 13.11: Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916)

ΑΝΤΡΕΑ ΠΟΛΕΤΤΗ

Οι άρρητοι αριθμοί , όπως είδαμε στην Ενότητα 7, είχαν ανακαλυφθεί ήδη από την αρχαιότητα. Ήταν κατανοητό ότι οι ρητοί αφήνουν «κάποια κενά», των οποίων η συμπλήρωση δημιουργεί το σύνολο των πραγματικών αριθμών, το «συνεχές». Ο ορισμός της ισότητας δύο πραγματικών αριθμών (δηλαδή ρητών και άρρητων), ο οποίος δίνεται στα «Στοιχεία» και αποδίδεται στον Εύδοξο, ήταν η καλύτερη πληροφορία που είχαμε μέχρι το τέλος του 19ου αιώνα.

Ορισμός:

$x = y$ αν και μόνο αν κάθε ρητός μικρότερος του x είναι και μικρότερος του y και κάθε ρητός μεγαλύτερος του x είναι και μεγαλύτερος του y.

Ο Dedekind, ήταν αυτός που εισήγαγε το άπειρο του συνεχούς. Για κάθε δύο σημεία της ευθείας, υπάρχει σίγουρα σημείο ανάμεσά τους. Το ίδιο, συμβαίνει και για δύο ρητούς αριθμούς. Ανάμεσα σε δύο ρητούς, υπάρχει άρρητος αριθμός.

Το 1872, έγινε για πρώτη φορά μια σωστή τοποθέτηση των πραγμάτων από τον Dedekind στο βιβλίο του με τίτλο: «Συνέχεια και άρρητοι αριθμοί». Η έννοια του πραγματικού αριθμού ή το «συνεχές» των πραγματικών, υπήρχε φυσικά στο μυαλό των ανθρώπων και η διατύπωση ακριβούς ορισμού πρέπει ίσως να συγκριθεί με την ανακάλυψη και διατύπωση ενός βασικού νόμου της Φυσικής (π.χ. ανακάλυψη του Θαλή για τον ηλεκτρισμό ή ανακάλυψη του Newton για τη βαρύτητα). Στο παραπάνω βιβλίο, έγραφε ότι: «Οι πιο πολλοί άνθρωποι θα θεωρήσουν αυτή την ανακάλυψη κοινοτυπία. Η ανακάλυψη αυτή συνίσταται στο εξής: Είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο ότι κάθε σημείο p της ευθείας παράγει έναν διαχωρισμό της ευθείας σε δύο μέρη.».

Ο Dedekind, θεμελίωσε τους άρρητους αριθμούς, ορίζοντας την τομή. Χώριζε τους ρητούς αριθμούς σε δύο κλάσεις, έτσι ώστε κάθε αριθμός της μιας κλάσης, να είναι μικρότερος από κάθε αριθμό της άλλης κλάσης και αυτόν τον διαχωρισμό τον ονόμασε τομή. Η κεντρική ιδέα, λοιπόν, του Dedekind ήταν να ταυτίσει τους πραγματικούς αριθμούς με «τομές» των ρητών (τις λεγόμενες τομές του Dedekind).

Ορισμός:

*Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{Q}$ λέγεται **τομή** αν:*

1. *$\emptyset \neq A \subsetneq \mathbb{Q}$*
2. *$x \in A$ και $y < x$ συνεπάγεται $y \in A$*
3. *Το A δεν έχει μέγιστο στοιχείο (δηλαδή δεν υπάρχει $x_0 \in A$ ώστε $x_0 \geq x$ για όλα τα $x \in A$).*

Το επόμενο βήμα, είναι να ορίσουμε πράξεις και σχέση διατάξεως στο σύνολο των τομών και να δείξουμε ότι ικανοποιούνται όλα τα αξιώματα των πραγματικών αριθμών.

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

14. Η επική προσπάθεια επίλυσης του διασημότερου Μαθηματικού Γρίφου

Στην Ενότητα αυτή, θα παρουσιάσουμε εν συντομία, ορισμένα σημαντικά στοιχεία του έργου του Γάλλου νομικού και μαθηματικού Pierre de Fermat (1601-1665) και της προσπάθειας επίλυσης του διασημότερου Μαθηματικού Γρίφου, που δεν είναι άλλος από το «Τελευταίο Θεώρημα του Fermat», όπως καταγράφονται στο βιβλίο με τίτλο: "Fermat's Last Theorem" του Simon Singh, 1997, μεταφρασμένο στην ελληνική γλώσσα από την Ανδρομάχη Σπανού, Αθήνα 1998.

Ο Γάλλος νομικός και μαθηματικός Pierre de Fermat (1601-1665), είναι γνωστός για τη συμβολή του στην ανάπτυξη του Απειροστικού Λογισμού, τη Θεωρία Αριθμών, τη Θεωρία Πιθανοτήτων και τον Διαφορικό Λογισμό.

Εικόνα 14.1: Pierre de Fermat (1601-1665)

Το 1637, ανακάλυψε το διασημότερο μαθηματικό πρόβλημα, όπως έχει χαρακτηριστεί, το οποίο για πάνω από 300 χρόνια, ήταν ένας άλυτος Μαθηματικός Γρίφος. Το πρόβλημα αυτό, είναι γνωστό ως: «Το Τελευταίο Θεώρημα του Fermat» και σημειώθηκε στο περιθώριο της σελίδας από τον Fermat, μελετώντας τον δεύτερο τόμο από τα 13 βιβλία που αποτελούν τα «Αριθμητικά» (6 μόνο επέζησαν από τις ταραχές του Μεσαίωνα) του μαθηματικού Διόφαντου του Αλεξανδρεύς (210-290 μ.Χ.), ο οποίος θεωρείται από πολλούς ως «πατέρας» της Άλγεβρας. Ο Διόφαντος, είναι γνωστός για τις Διοφαντικές Εξισώσεις, οποιεσδήποτε πολυνωνιμικές εξισώσεις με ακέραιους συντελεστές, για τις οποίες θέλουμε να βρούμε ακέραιες λύσεις.

Εικόνα 14.2: Διόφαντος ο Αλεξανδρεύς (210-290 μ.Χ.)

Ο γιος του Fermat, ο Clément-Samuel Fermat, το 1670, δημοσίευσε στην Τουλούζη τα σχόλια που σημείωνε στο περιθώριο ο Fermat σε μια ειδική έκδοση του βιβλίου «Αριθμητικά», σ' ένα βιβλίο με τίτλο: «Αριθμητικά του Διόφαντου με παρατηρήσεις του P. de Fermat».

Όλες οι παρατηρήσεις του Fermat αποδείχθηκαν, καθώς οι αιώνες κυλούσαν. Εντούτοις, το «Τελευταίο Θεώρημα του Fermat», ονομάστηκε «τελευταίο», επειδή ήταν το τελευταίο από τις παρατηρήσεις, το οποίο αρνιόταν να αποδειχθεί. Η φήμη του θεωρήματος αυτού, έγκειται από τη δυσκολία του να αποδειχθεί.

Τώρα, ας δούμε το προαναφερόμενο «Τελευταίο Θεώρημα του Fermat». Ο Fermat, στάθηκε στο Πυθαγόρειο Θεώρημα και ισχυρίστηκε ότι είναι αδύνατον να συμβαίνει:

$$x^n + y^n = z^n, \text{ για } n \text{ μεγαλύτερο του 2 και } x, y, z \text{ θετικοί ακέραιοι.}$$

Δηλαδή,

$$x^n + y^n = z^n\text{: καμία λύση για } n \text{ μεγαλύτερο του 2 και } x, y, z \text{ θετικοί ακέραιοι.}$$

Το πρόβλημα αυτό, λοιπόν, έχει αρχαία ελληνική προέλευση και αποτελεί την κορυφή των Ιμαλαΐων, για τη Θεωρία Αριθμών. Έχει, δηλαδή, τις ρίζες του δύο χιλιάδες χρόνια πριν ο Fermat το διατυπώσει.

Μολονότι, το πρόβλημα είναι πολύ απλό και ξεκάθαρα διατυπωμένο, η απόδειξη του θεωρήματος αυτού, απασχόλησε πάρα πολύ τη μαθηματική κοινότητα και ήταν μια τεράστια πρόκληση. Ο ίδιος ο Fermat, έγραψε: «Έχω ανακαλύψει μια πραγματικά θαυμάσια απόδειξη, όμως το περιθώριο της σελίδας είναι πολύ στενό για να την αναπτύξω.».

Στην προσπάθεια εύρεσης απόδειξης για το πρόβλημα αυτό, πολλοί μαθηματικοί ήρθαν αντιμέτωποι με σπουδαία σ' εμάς τώρα ευρήματα στα Μαθηματικά, διευρύνοντας τα όρια των Μαθηματικών. Μάλιστα, όποιος κατάφερνε να λύσει το πρόβλημα αυτό, που αποτελεί ορόσημο για τα Μαθηματικά, θα απολάμβανε την αίγλη και τη δόξα. Αργότερα, τέθηκε και μια σειρά από βραβεία, συμπεριλαμβανομένου ενός χρυσού μεταλλίου και 3000 γαλλικών φράγκων, για όποιον έλυνε το μυστήριο και μετέπειτα ο Γερμανός γιατρός και φιλομαθηματικός Paul Friedrich Wolfskehl (1856-1906), κληροδότησε 100,000 μάρκες (βραβείο Wolfskehl), σε όποιον κατάφερνε να το αποδείξει. Πολλοί ήταν οι ερασιτέχνες που έστελναν εσφαλμένες λύσεις, για να κερδίσουν το τελευταίο βραβείο.

Εικόνα 14.3: Paul Friedrich Wolfskehl (1856-1906)

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

Οι Πυθαγόρειες τριάδες, αποτελούν συνδυασμούς τριών ακέραιων αριθμών x, y, z, οι οποίοι επαληθεύουν την εξίσωση του Πυθαγόρα:

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Ο Ευκλείδης, διατύπωσε μια απόδειξη, που έδειχνε την απειρία των πυθαγορείων τριάδων.

Ο Άγγλος μαθηματικός Andrew John Wiles (1953), ήταν αυτός που έμελλε να λύσει το 1993 μια για πάντα το κατά αιώνες άλυτο αίνιγμα, για το οποίο του απονεμήθηκε το 1997 το βραβείο Wolfskehl και το 2016 βραβείο Abel. Ήταν πολύ δύσκολο να πιστέψει η μαθηματική κοινότητα, ότι το έργο του δεν θα κατέληγε και αυτό στο μαθηματικό κοιμητήριο μαζί με τις άλλες αποτυχημένες προσπάθειες επίλυσης του «Τελευταίου Θεωρήματος του Fermat».

Εικόνα 14.4: Andrew John Wiles (1953)

Σημείωση:

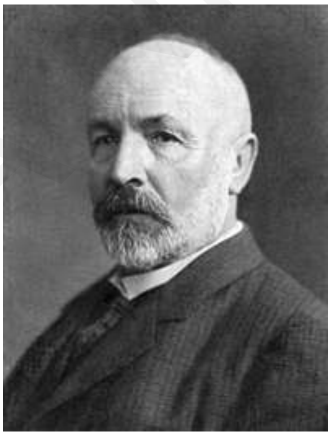
Το βραβείο Abel, είναι ένα διεθνές βραβείο που απονέμεται κάθε χρόνο από το 2003 σ' έναν ή περισσότερους μαθηματικούς από τον Βασιλιά της Νορβηγίας και φέρει το όνομα του Νορβηγού μαθηματικού Niels Henrik Abel (1802-1829). Ο νικητής του βραβείου, επιλέγεται από τη Νορβηγική Ακαδημία των Επιστημών και των Γραμμάτων. Συχνά, χαρακτηρίζεται από πολλούς ως «βραβείο Νόμπελ των Μαθηματικών». Επιπλέον, συνοδεύεται με χρηματικό έπαθλο ύψους 7.5 εκατομμυρίων Νορβηγικών κορόνων, δηλαδή περίπου €1,000,000.

Εικόνα 14.5: Niels Henrik Abel (1802-1829)

15. Η κατάρα της Κασσάνδρας: Georg Cantor

Ο Γερμανός μαθηματικός Georg Cantor (1845-1918), είναι αυτός που έλυσε μια για πάντα τον γρίφο του απείρου για τους μαθηματικούς. Είναι υπεύθυνος, για την αυστηρή κατανόηση του απείρου. Θεωρείται ο μαθηματικός που κατάφερε να κατακτήσει το άπειρο και κατέληξε σε ψυχιατρείο παθαίνοντας κατάθλιψη, εξαιτίας της σφοδρής κριτικής που δέχτηκε από σχεδόν ολόκληρο το σύνολο της μαθηματικής κοινότητας, που αμφέβαλε για την εγκυρότητα των θεωρημάτων του. Ήταν το αντίτιμο που πλήρωσε ο ανθρώπινος νους του, εισβάλλοντας στο επικίνδυνο βασίλειο του απείρου και της ολότητας. Κατάφερε να χαλιναγωγήσει την έννοια του απείρου και να βγάλει νόημα από τα παράδοξά του. Οι απόψεις του, ήρθαν να ανατρέψουν όλες τις καθιερωμένες αντιλήψεις περί απείρου που ίσχυαν πριν από αυτόν.

Η όμορφη Κασσάνδρα στην ελληνική μυθολογία, ήταν κόρη του βασιλιά της Τροίας, Πρίαμου. Ο θεός Απόλλων με αντάλλαγμα τον έρωτά της, της έδωσε το χάρισμα της μαντικής. Όμως, ενώ η Κασσάνδρα δέχτηκε το χάρισμα αυτό, στη συνέχεια αρνήθηκε το κάλεσμα του θεού Απόλλων. Έτσι, ο θεός Απόλλων εξοργίστηκε και για να την εκδικηθεί της έδωσε την κατάρα του να μην πίστευε κανένας στις προφητείες της. Επομένως, είχε το χάρισμα να προβλέπει το μέλλον, χωρίς ωστόσο να έχει το χάρισμα της πειθούς. Έτσι, μπορούμε να παρομοιάσουμε την ιστορία αυτή με την ιστορία του Cantor, ο οποίος ενώ είχε αποκαλύψει σπουδαία μαθηματικά επιτεύγματα, κανένας δεν τον πίστευε.



Εικόνα 15.1: Georg Cantor (1845-1918)

Ο Cantor, υπήρξε αρνητής των απειροστών ως αριθμών και υπερασπιζόταν το πραγματικό άπειρο. Διέλυσε την άποψη περί διάκρισης μεταξύ δυνητικού και πραγματικού απείρου. Έστω $x \in \mathbb{R}$, τότε το κλάσμα $\frac{1}{x}$ μειώνεται όταν το x αυξάνεται και μπορούμε να βρούμε μια τιμή του x τέτοια ώστε το $\frac{1}{x}$ να διαφέρει από το μηδέν από κάθε προκαθορισμένη ποσότητα που είναι όσο μικρή θέλουμε και καθώς το x συνεχίζει να αυξάνεται, η διαφορά παραμένει μικρότερη από την προκαθορισμένη ποσότητα. Δηλαδή, όπως είδαμε και στην Ενότητα 11: $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$. Το σύμβολο του απείρου, είναι το ∞. Ο ισχυρισμός: $\frac{1}{\infty} = 0$, είναι ανούσιος για δύο λόγους. Πρώτον, «η διαίρεση με το άπειρο», είναι μια απροσδιόριστη ενέργεια. Δεύτερον, σύμφωνα με τον Gauss, το $\frac{1}{0} = \infty$ δεν έχει κανένα νόημα. Το 1886, μελετώντας το πρόβλημα του πραγματικού απείρου (που ο Gauss ονόμαζε πλήρες), ο Cantor έλεγε ότι «παρά την ουσιώδη διαφορά μεταξύ του δυνητικού και του πραγματικού απείρου, το πρώτο σημαίνει ένα μεταβλητό πεπερασμένο μέγεθος που αυξάνεται πέρα από όλα τα πεπερασμένα όρια (όπως το x με το $\frac{1}{x}$), ενώ το δεύτερο είναι ένα καθορισμένο, σταθερό μέγεθος που βρίσκεται πέρα απ' όλα τα πεπερασμένα όρια».

Στην προσπάθειά του να διασαφηνίσει την έννοια του απείρου, δημιούργησε έναν ολοκαίνουργιο κλάδο των Μαθηματικών, τη Θεωρία Συνόλων. Η Θεωρία Συνόλων, είναι η «γλώσσα» που επέτρεψε στους μαθηματικούς, να αναπαράγουν την έννοια του απείρου. Η έννοια του συνόλου υπήρχε από παλαιότερα στα Μαθηματικά, όμως το περιεχόμενο ενός συνόλου δεν θα μπορούσε παρά να ήταν πεπερασμένο σε πλήθος. Η όλη του θεωρία, στηρίζεται στο παράδοξο ερώτημά του: «Υπάρχει σύνολο που περιέχει όλα τα σύνολα;». Ο Cantor, δημιούργησε σύνολα που περιείχαν άπειρα στοιχεία και εργάστηκε πολλά χρόνια ώστε να ολοκληρώσει τη θεωρία του. Μέσω αυτής της θεωρίας, απέδειξε ότι δεν υπάρχει μόνο ένα είδος απείρου, αλλά διαφορετικές τάξεις απείρου. Ήτοι, υπάρχει μια ολόκληρη ιεραρχία μεταξύ των τάξεων του απείρου που έχουν τα σύνολα.

Μετρώντας τα στοιχεία του απείρου, ο Cantor σ' ένα από τα τελευταία κομμάτια της εργασίας του, επιχείρησε να διαμελίσει την έννοια του απείρου. Κατέληξε, χρησιμοποιώντας τη Θεωρία Συνόλων, σε δύο διαφορετικές όψεις της ίδιας έννοιας. Για παράδειγμα, εάν πάρουμε στη σειρά όλους τους φυσικούς αριθμούς $\{1,2,3,4,\ldots\}$, τότε προφανώς θα φτάσουμε ως το άπειρο. Όμως, και πάλι, εάν προσπαθήσουμε να μετρήσουμε τα σημεία μιας ευθείας θα φτάσουμε στο άπειρο. Για παράδειγμα, στο σύνολο των φυσικών αριθμών, υπάρχει μια συγκεκριμένη και σαφής πορεία προς το άπειρο. Κάθε αριθμός, απέχει απόσταση «1» από τον προηγούμενό του και κάθε στοιχείο του συνόλου μπορεί να αντιστοιχηθεί μ' έναν πεπερασμένο αριθμό. Εντούτοις, τα σημεία μιας ευθείας δεν μπορούν να μετρηθούν με καμία τεχνική. Συνεπώς, καταλήγουμε στο γεγονός ότι πολύ πιο ισχυρή είναι η έννοια του απείρου στην ευθεία και αντίστοιχα πάνω στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Υπάρχουν αμέτρητοι τρόποι για να φτάσει κανείς στο άπειρο. Σε κάθε περίπτωση, όμως, διαφέρει η «ταχύτητα» με την οποία μπορούμε να το προσεγγίσουμε. Σημαντική απόδειξή του είναι το γεγονός ότι υπάρχουν άπειρα σύνολα, τα οποία είναι απείρως μεγαλύτερα από μικρότερα άπειρα σύνολα. Έτσι, η έννοια του απείρου διαιρέθηκε σε δύο ξεχωριστές υποκατηγορίες. Ένα σύνολο που περιέχει άπειρα στοιχεία, μπορεί να είναι είτε αριθμήσιμο είτε υπεραριθμήσιμο.

Ο Cantor, εισήγαγε την έννοια της πληθικότητας, για να συγκρίνει τα μεγέθη των άπειρων συνόλων. Τα μεγέθη των άπειρων συνόλων, περιγράφονται από τους άπειρους πληθικούς αριθμούς.

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΗ

<u>*Ορισμός:*</u>

Το πλήθος των στοιχείων που περιέχει ένα σύνολο A, λέγεται ***πληθικός αριθμός*** *και συμβολίζεται με $\aleph(\mathrm{A})$ ή με $|A|$ ή με $\#A$.*

$$\aleph_0 = \#(\mathbb{N})$$

Εικόνα 15.2: Aleph μηδέν, ο μικρότερος άπειρος πληθικός

<u>*Ορισμός:*</u>

Δύο σύνολα A και B, λέγονται ***ισοδύναμα*** *ή ότι έχουν τον ίδιο πληθάριθμο, αν υπάρχει 1-1 και επί συνάρτηση $f\colon A \to B$. Γράφουμε $A \sim B$.*

<u>*Ορισμός:*</u>

Ένα σύνολο Α, λέγεται ***αριθμήσιμο*** *αν είναι είτε πεπερασμένο είτε ισοδύναμο με το $\mathbb{N}$.*

<u>*Ορισμός:*</u>

Ένα σύνολο Α, λέγεται ***υπεραριθμήσιμο*** *αν δεν είναι αριθμήσιμο.*

Μια χρονική αναδρομή σε σημαντικούς σταθμούς του έργου και της ζωής του Cantor, είναι η ακόλουθη:

<u>1872:</u> Ορίζει τους πραγματικούς αριθμούς ως όρια ρητών αριθμών.

<u>1873:</u> Αποδεικνύει ότι οι ρητοί αριθμοί είναι αριθμήσιμοι (και οι αλγεβρικοί είναι αριθμήσιμοι).

<u>1874:</u> Αποδεικνύει ότι οι πραγματικοί αριθμοί δεν είναι αριθμήσιμοι (και οι υπερβατικοί δεν είναι αριθμήσιμοι). Πρώτη φορά εμφανίζεται η ιδέα της 1-1 αντιστοιχίας.

<u>1874:</u> Αποδεικνύει ότι $[0,1] \sim [0,1] \times [0,1]$ (επιστολή προς τον Dedekind «Το βλέπω με τα μάτια μου, αλλά δεν το πιστεύω.»).

<u>1879-1884:</u> Εισαγωγή στη Θεωρία Συνόλων.

<u>1884:</u> Τα πρώτα συμπτώματα μελαγχολίας.

Ακολούθως, παρατίθενται σημαντικά αποτελέσματα που έδειξε ο Cantor τη δεκαετία του 1870.

<u>*Πρόταση:*</u>

Το πλήθος των φυσικών αριθμών $1,2,3,4,5,6,\dots$ είναι ισοδύναμο με το πλήθος των άρτιων αριθμών $2,4,6,\dots$. Δηλαδή, το $S = \{2,4,6,\dots\}$ είναι αριθμήσιμο.

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

<u>Απόδειξη:</u>

Παίρνουμε $f: \mathbb{N} \to S$

$$x \to 2x.$$

Προφανώς, η f είναι αμφιμονοσήμαντη. ■

<u>Πρόταση:</u>

Το πλήθος των πραγματικών αριθμών ανάμεσα στο 0 *και το* 1*, είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των φυσικών αριθμών. Δηλαδή, το* $(0,1)$ *είναι υπεραριθμήσιμο.*

<u>Απόδειξη:</u>

Το S=(0,1) είναι άπειρο, αφού περιέχει $\left\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\right\}$.

Έστω ότι είναι αριθμήσιμο με στοιχεία $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$.

Θα βρούμε ένα στοιχείο b του S που δεν είναι σ' αυτήν τη λίστα.

Να σημειωθεί ότι κάθε $x \in (0,1)$ *μπορεί να γραφτεί στη μορφή:*

$$x = 0.x_1x_2x_3, \ldots$$

όπου $x_i \in \{0,1,2, \ldots ,9\}$.

Άρα, η λίστα μας είναι:

$$\begin{gathered}
\alpha_1 = 0.\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13} \ldots \\
\alpha_2 = 0.\alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23} \ldots \\
\alpha_3 = 0.\alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33} \ldots \\
\alpha_4 = 0.\alpha_{41}\alpha_{42}\alpha_{43} \ldots \\
\vdots \\
\alpha_n = 0.\alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3} \ldots \\
\vdots
\end{gathered}$$

όπου $a_{ij} \in \{0,1,2, \ldots ,9\}$.

Τότε, διαλέγουμε $b, 0 < b < 1$ *με* $b = 0.b_1b_2b_3, \ldots$*, όπου* $b_i \in \{1,2, \ldots ,8\}$ *και* $b_i \neq \alpha_{ii}$.

Άρα, $b \neq \alpha_\kappa, \kappa \in \mathbb{N}$*, αφού* $b \neq a_1$ *επειδή διαφέρει στο πρώτο δεκαδικό ψηφίο,…,* $b \neq a_2$ *επειδή διαφέρει στο δεύτερο δεκαδικό ψηφίο κ.ο.κ..*

Άτοπο.

Επομένως, το S είναι αριθμήσιμο. ■

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

Η απόδειξη αυτή, έχει μείνει στην ιστορία των Μαθηματικών ως «η διαγώνιος μέθοδος του Cantor».

Η απόδειξη του αποκαλούμενου διαγώνιου επιχειρήματος από τον ίδιο τον Cantor, προδημοσιεύτηκε στην εφημερίδα της γερμανικής μαθηματικής ένωσης το 1890: "Uber ein elementare Frage der Mannigfalitigkeitlehre", Deutsche Mathematiker Vereinigung, Bib 1, 1830-1, Cantor G. (σελ.75-78).

<u>Πρόταση:</u>

Το σύνολο $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(m, n) | m, n \in \mathbb{N}\}$*, είναι αριθμήσιμο.*

<u>Απόδειξη:</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *με:*

$$f(m, n) = 2^{m-1}(2n - 1).$$

Η f *είναι 1-1 και επί.*

Πράγματι, έστω ότι:

$$f(m, n) = f(l, k).$$

Ισοδύναμα:

$$2^{m-1}(2n - 1) = 2^{l-1}(2k - 1) \textit{ (Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής)}$$

Συνεπώς, από τη μοναδικότητα στο Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής, έχουμε:

$$m - 1 = l - 1 \Leftrightarrow m = l \quad \textit{και} \quad 2n - 1 = 2k - 1 \Leftrightarrow n = k.$$

Επομένως, η f *είναι 1-1.*

Έστω $k \in \mathbb{N}$*. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής:*

$$k = 2^{k_1} k_2 \dots k_l,$$

όπου $k_2 \dots k_l$ *δεν είναι πολλαπλάσια του 2.*

Θέτοντας:

$$m - 1 = k_1 \Leftrightarrow m = k_1 + 1$$

και

$$2n - 1 = k_2 \dots k_l$$

έχουμε ότι:

$$f(m, n) = k.$$

Επομένως, η f *είναι επί.* ■

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

<u>*$2^{ος}$ τρόπος:*</u>

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
 & (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4)\ \dots \\
 & (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4)\ \dots \\
 & (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4)\ \dots \\
 & (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4)\ \dots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
\quad \blacksquare
$$

Επομένως, το σύνολο των θετικών ρητών είναι αριθμήσιμο και όπως στην περίπτωση όπου το σύνολο των άρτιων (ή περιττών) είναι ισοδύναμο με τους φυσικούς, συμπεραίνουμε ότι και το σύνολο όλων των ρητών $\mathbb{Q}$ είναι ισοδύναμο με το $\mathbb{N}$, συνεπώς αριθμήσιμο.

<u>*Πρόταση:*</u>

Το πλήθος των σημείων ενός ευθύγραμμου τμήματος, είναι ίσο με το πλήθος των σημείων ενός τετραγώνου και ίσο με το πλήθος των σημείων ενός κύβου.

Η απόδειξη της πιο πάνω πρότασης, είναι αρκετά σύνθετη και περίπλοκη και γι' αυτό παραλείπεται.

<u>*Πρόταση:*</u>

Το $[\alpha, \beta], (\alpha < \beta)$ *είναι υπεραριθμήσιμο.*

<u>*Απόδειξη:*</u>

Το $[\alpha, \beta] \sim [0,1]$.

Παίρνουμε τη συνάρτηση:

$$f(t) = (\beta - \alpha)t + \alpha.$$

Η συνάρτηση αυτή είναι γραμμική, 1-1 και επί. $\blacksquare$

<u>*Πρόταση:*</u>

Το σύνολο όλων των ακολουθιών πραγματικών αριθμών, δεν είναι αριθμήσιμο σύνολο.

<u>*Απόδειξη:*</u>

Η απόδειξη θα γίνει, χρησιμοποιώντας τη διαγώνια διαδικασία του Cantor και την εις άτοπον απαγωγή.

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

Έστω ότι είναι αριθμήσιμο. Τότε, υπάρχει κατάλογος/λίστα:

$$f_1 \colon f_1(1), f_1(2), f_1(3), \dots$$
$$f_2 \colon f_2(1), f_2(2), f_2(3), \dots$$
$$f_3 \colon f_3(1), f_3(2), f_3(3), \dots$$
$$\vdots$$
$$f_n \colon f_n(1), f_n(2), f_n(3), \dots$$
$$\vdots$$

που περιέχει όλες τις ακολουθίες.

Θεωρούμε την ακολουθία με όρους:

$$f_1(1) + 1, f_2(2) + 1, f_3(3) + 1, \dots.$$

Από την πιο πάνω υπόθεση, θα έπρεπε να είναι κάποια από τις ακολουθίες της λίστας.

Έστω ότι είναι η f_κ. Ήτοι:

$$f_\kappa \colon f_1(1) + 1, f_2(2) + 1, f_3(3) + 1, \dots.$$

Δηλαδή:

$$f_\kappa(1) = f_1(1) + 1, f_\kappa(2) = f_2(2) + 1, \dots.$$

Επομένως, για κάποιο $\kappa \in \mathbb{N}$ θα έχουμε:

$$f_\kappa(\kappa) = f_\kappa(\kappa) + 1.$$

Ισοδύναμα:

$$0 = 1.$$

Άτοπο. ■

<u>Ορισμός:</u>

Το $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, είναι το σύνολο που περιέχει ως στοιχεία όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{N}$.

π.χ. το $\emptyset$ και το $\mathbb{N}$

<u>Πρόταση:</u>

Το $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ είναι υπεραριθμήσιμο.

<u>Απόδειξη:</u>

Η απόδειξη, θα γίνει χρησιμοποιώντας τη διαγώνια διαδικασία και την εις άτοπο απαγωγή.

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

Προφανώς, το $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *έχει άπειρα στοιχεία, αφού περιέχει τα μονοσύνολα* $\{1\},\{2\},\{3\},\ldots$

Έστω ότι είναι αριθμήσιμο.

Τότε, υπάρχει κατάλογος που περιέχει όλα τα στοιχεία του.

Ήτοι, $\mathcal{P}(\mathbb{N}) : A_1, A_2, A_3, \ldots$

Θεωρούμε το σύνολο D*, που ορίζεται από τη σχέση:*

$$D = \{n \in \mathbb{N}: n \notin A_n\}.$$

Προφανώς, $D \subseteq \mathbb{N}$.

Άρα, $D \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Όμως, $D \neq A_1$. *Πράγματι, αν* $1 \in A_1 \Rightarrow 1 \notin D$ *και αν* $1 \notin A_1 \Rightarrow 1 \in D$.

Συνεπώς, $D \neq A_1$. *Ομοίως,* $D \neq A_2, D \neq A_3$ *, ….*

Άρα, το D *δεν ανήκει στον κατάλογο. Άτοπο.*

Άρα, το $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *δεν είναι αριθμήσιμο.* ■

Πρόταση:

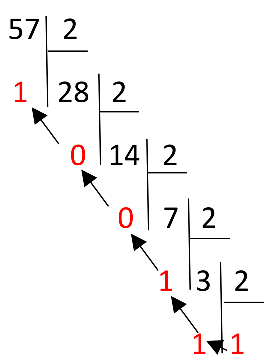
Το $[0,1]$ *είναι ισοδύναμο με το* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Αρχικά, θα δούμε ένα παράδειγμα όσον αφορά την αριθμητική κινητής υποδιαστολής, το δεκαδικό και το δυαδικό σύστημα.

Για να μετατρέψουμε έναν ακέραιο αριθμό στο δυαδικό σύστημα, κάνουμε συνεχείς διαιρέσεις με το 2, ενώ για να μετατρέψουμε έναν δεκαδικό στο δυαδικό σύστημα, κάνουμε συνεχείς πολλαπλασιασμούς με το 2.

Θα αναφέρουμε ένα παράδειγμα μετατροπής ενός αριθμού στο δυαδικό σύστημα, χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο, όπως παρουσιάζεται στο βιβλίο: "Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach" των Samuel D. Corte και Carl de Boor, 1980, 3η Έκδοση.

Έστω ότι θέλουμε να μετατρέψουμε τον αριθμό 57 στο δυαδικό σύστημα. Ακολουθούμε την εξής διαδικασία:



ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

Άρα, στο δυαδικό σύστημα ο αριθμός 57 γράφεται ως 111001.

Δηλαδή, $(57)_{10} = (111001)_2$.

(Επαλήθευση: 32+16+8+4+2+1=57).

Έστω ότι θέλουμε να μετατρέψουμε τον αριθμό 0.625 στο δυαδικό σύστημα. Ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

$$2 \times (0.625) = 1.25$$

$$2 \times (0.25) = 0.50$$

$$2 \times (0.50) = 1.00$$

$$2 \times (0.00) = 0$$

Άρα, στο δυαδικό σύστημα ο αριθμός 0.625 γράφεται ως 0.101.

Δηλαδή, $(0.625)_{10} = (0.101)_2$.

(Επαλήθευση: $1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = 0.5 + 0.125 = 0.625$).

Άρα, $(57.625)_{10} = (\underbrace{111001}_{\text{πεπερασμένο}}.\underbrace{101000\ldots}_{\text{άπειρο}})_2$.

Η αναγραφή αυτή, δεν είναι μοναδική.

Για παράδειγμα:

$$(1)_{10} = (1.00\ldots0\ldots)_2 = (0.11111\ldots)_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

Συμπεραίνουμε ότι, κάθε πραγματικός αριθμός $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$, γράφεται στο δυαδικό σύστημα με τη μορφή $\mathrm{x} = \mathrm{d}_1\mathrm{d}_2 \ldots \mathrm{d}_\mathrm{n}.\mathrm{d}_{\mathrm{n}+1}\mathrm{d}_{\mathrm{n}+2} \ldots$ με $\mathrm{d}_\mathrm{i} \in \{0,1\}$.

Επομένως, ως Λήμμα έχουμε το εξής:

Αν $x \in [0,1]$, τότε $x = 0.d_1d_2 \ldots d_n \ldots$, όπου $d_i \in \{0,1\}$.

<u>Απόδειξη:</u>

Όπως είδαμε και προηγουμένως, το (0,1) είναι υπεραριθμήσιμο.

Τώρα, ορίζουμε την εξής συνάρτηση:

$$F: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,1]$$

με $F(A) = 0.d_1d_2 \ldots d_n \ldots$, *όπου* $d_i = \begin{cases} 1, & i \in A \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

Η F είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

Για παράδειγμα, αν έχουμε τα σύνολα $A = \{1,3,5\}$ *και* $B = \{2,4\}$, *τότε* $F(A) = 0.101010 \ldots.$ *και* $F(B) = 0.010101 \ldots.$

Έτσι, $F(\acute{\alpha}\rho\tau\iota o\iota) = 0.010101 \ldots$ *και* $F(\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau o\acute{\iota}) = 0.101010 \ldots.$

Επίσης, $F(\mathbb{N}) = 0.1111 \ldots$ *και* $F(\emptyset) = 0.0000 \ldots.$

Προκύπτει ότι η F*,είναι επί.*

Επιπλέον, είναι 1-1 αν κρατήσουμε τη συμβατική αναγραφή του αριθμού, δηλαδή την αναγραφή όπου το 0 δεν αντικαθίσταται από άπειρες μονάδες (π.χ. στο δεκαδικό σύστημα το $\frac{2}{10}$*, γράφεται ως 0.20000… και όχι ως 1.99999…).*

Άρα, το $[0,1]$ *είναι ισοδύναμο με το* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. ■

<u>Ορισμός:</u>

$\{0,1\}^{\mathbb{N}} =$ *το σύνολο των ακολουθιών με στοιχεία* $\{0,1\}$.

<u>Πρόταση:</u>

Το $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$*, είναι ισοδύναμο με το* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

<u>Απόδειξη:</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

με

$$f(A) = x_A, A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

Η f *είναι 1-1 και επί.* ■

Ο Cantor, απέδειξε ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι υπεραριθμήσιμο, ήτοι $\aleph_0 < 2^{\aleph_0} = C$.

<u>Σημείωση:</u>

C *ο πληθικός αριθμός του* $[0,1]$ *και επομένως του* $\mathbb{R}$*, αφού* $[0,1] \sim \mathbb{R}$.

Ο Cantor, ολοκλήρωσε τις αποδείξεις του μέσα στο χρονικό διάστημα από το 1874—1897. Όπως είδαμε παραπάνω, αυτά που «ανακάλυψε», τα αποτελέσματα της δουλείας του, τον άφησαν τόσο εμβρόντητο ώστε να γράψει μια επιστολή στον φίλο του Dedekind, λέγοντας: «Το βλέπω με τα μάτια μου και δεν το πιστεύω.». Κοίταξε βαθιά μέσα στο άπειρο κι αυτό που αντίκρισε τον έκανε να το αναφωνήσει αυτό.

Οι ρηξικέλευθες θεωρίες του Cantor, οδήγησαν το μαθηματικό κατεστημένο της εποχής του (με αρχηγό τον Γερμανό μαθηματικό Leopold Kronecker (1823-1891)) σε σφοδρές επιθέσεις προς το πρόσωπό του και στην κατάθλιψη και τελικά στον πρόωρο θάνατό του, το 1918 σε ηλικία 73 ετών. Του ασκήθηκε έντονη κριτική, σαν πραγματική καταιγίδα με μανία, η οποία έμελλε να επηρεάσει την υγεία του. Παρόλα

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

αυτά, υπήρχαν σπουδαίοι μαθηματικοί, όπως για παράδειγμα ο Γερμανός μαθηματικός David Hilbert (1862-1943), οι οποίοι στήριξαν τις ιδέες του από την αρχή. Σχετικό είναι το μαθηματικό παράδοξο «Το Ξενοδοχείο του Hilbert». Ο Hilbert, υπερασπιζόμενος το έργο του Cantor έγραψε ότι: «κανείς δεν πρόκειται να μας στερήσει τον παράδεισο που δημιούργησε ο Cantor για μας». Με τις θεωρίες του Cantor, συμφωνούσε επίσης ο Γερμανός Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) και ο Γάλλος μαθηματικός Jules Henri Poincaré (1854-1913).

Εικόνα 15.3: Leopold Kronecker (1823-1891)

Εικόνα 15.4: David Hilbert (1862-1943),

Εικόνα 15.5: Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)

Εικόνα 15.6: Jules Henri Poincaré (1854-1913)

ΑΝΤΡΕΑ ΚΟΛΕΤΤΗ

Τη δεκαετία του 1920, ο Hilbert επινόησε ένα νοητικό πείραμα ώστε να αποδειχθεί το πόσο δύσκολο είναι να αντιληφθούμε την έννοια του απείρου.

<u>Το Ξενοδοχείο του Hilbert:</u>

«Το Ξενοδοχείο του Hilbert», είναι ένα ξενοδοχείο με αριθμήσιμο πλήθος δωματίων, τα οποία είναι όλα γεμάτα. Δηλαδή, έχει για κάθε φυσικό αριθμό $\{1,2,3,\dots,n,\dots\}$ *ένα δωμάτιο μ' αυτόν τον αριθμό αναρτημένο στην εξώπορτα. Το παράδοξο που δημιουργεί το ξενοδοχείο αυτό, είναι το γεγονός ότι από τη μια είναι πλήρες και από την άλλη αν έρθει ένας νέος επισκέπτης, μπορεί και αυτός να τοποθετηθεί σε δωμάτιο.*

Όταν ένας νέος επισκέπτης έρχεται, ενημερώνεται ότι όλα τα δωμάτια είναι γεμάτα. Ο διευθυντής παρεμβαίνει και δίνει λύση. Βγαίνουν όλοι οι ένοικοι από τα δωμάτια, βλέπουν τον αριθμό του δωματίου τους n *και μπαίνουν στο επόμενο δωμάτιο με το νούμερο* $n+1$*. Έτσι, όλοι έχουν δωμάτιο και το δωμάτιο με αριθμό* 1 *μένει άδειο. Έτσι, ο επισκέπτης μπαίνει στο δωμάτιο με τον αριθμό 1 και επομένως, στο ξενοδοχείο χώρεσαν όλοι οι υφιστάμενοι ένοικοι και ο νέος επισκέπτης.*

Όταν ένα λεωφορείο με άπειρους επιβάτες φτάνει στο ξενοδοχείο, ενημερώνονται οι επιβάτες ότι όλα τα δωμάτια είναι γεμάτα. Ο διευθυντής παρεμβαίνει και δίνει λύση. Βγαίνουν όλοι οι ένοικοι από τα δωμάτια, βλέπουν τον αριθμό του δωματίου τους n *και μπαίνουν στο δωμάτιο με το νούμερο* $2n$*. Έτσι, όλοι έχουν δωμάτιο και τα δωμάτια με περιττό αριθμό* $2n-1$ *μένουν άδεια. Έτσι, οι επιβάτες του λεωφορείου μπαίνουν στα δωμάτια με περιττό αριθμό και επομένως, στο ξενοδοχείο χώρεσαν όλοι οι υφιστάμενοι ένοικοι και οι επιβάτες του λεωφορείου.*

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

16. Η θεμελίωση των συνόλων και οι αντινομίες τους

Η Θεωρία Συνόλων, είναι μια αξιωματική θεωρία. Αφετηρία της, όπως είδαμε, είναι το 1870 με δημιουργούς τον Γερμανό μαθηματικό Georg Cantor (1845-1918) και τον επίσης Γερμανό μαθηματικό Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916). Αργότερα, στις αρχές του $20^{ου}$ αιώνα, όταν εντοπίστηκαν οι αντινομίες και τα παράδοξα με καθοριστική τη συμβολή του Βρετανού μεγάλου μαθηματικού και φιλόσοφου Bertrand Arthur William Russell (1872-1970) (ο οποίος βραβεύτηκε το 1950 με βραβείο Νόμπελ Λογοτεχνίας), προτάθηκαν καινούργια συστήματα αξιωμάτων, με δημοφιλέστερο το Σύστημα Zermelo-Fraenkel, μαζί με το Αξίωμα της Επιλογής που θα δούμε στην Ενότητα 17.

Εικόνα 16.1: Bertrand Arthur William Russell (1872-1970)

Ο Γερμανός μαθηματικός και φιλόσοφος Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925), στις αρχές του 1900, έχοντας μελετήσει τις θεωρίες του Cantor, εξέδωσε ένα δίτομο έργο, το οποίο περιείχε όλα τα μέχρι τότε γνωστά Μαθηματικά, με αποδείξεις στηριζόμενες στα εξής δύο αξιώματα:

1. *Δύο σύνολα, είναι ίσα αν και μόνο αν, περιέχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία.*
2. *Σύνολο, είναι οτιδήποτε ορίζεται με τη μορφή:*
   $\{x: x \text{ ικανοποιεί μια ιδιότητα}\}$, *δηλαδή* $A = \{x: p(x)\}, p$ *ιδιότητα.*

Εικόνα 16.2: Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925)

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

Λίγο πριν την εκτύπωση του 2ου τόμου, ο Frege έλαβε στις 16 Ιουνίου του 1902 μια επιστολή από τον Russell, στην οποία τον καλούσε να μελετήσει το σύνολο των συνόλων που δεν περιέχει τον εαυτό του. Ήτοι, με μαθηματικό συμβολισμό, έστω:

$$A = \{x: x \notin A\}.$$

Τότε:

$$\text{αν } x \in A \Rightarrow x \notin A \text{ και αν } x \notin A \Rightarrow x \in A$$

Επομένως:

$$A \in A \; αν \; A \notin A, \text{ αντινομία.}$$

Ο Frege, μετά από ανταλλαγή πληθώρας επιστολών με τον Russell και το πλήγμα που δέχτηκε, ανέφερε χαρακτηριστικά τα εξής: «Δεν υπάρχει μεγαλύτερη ατυχία που μπορεί να συμβεί σ’ έναν συγγραφέα επιστημονικού συγγράμματος απ’ αυτήν του να δει κάποιο από τα θεμέλια του οικοδομήματος του να τρέμει μετά το τέλος της οικοδόμησης. Αυτή ήταν η θέση στην οποία περιήλθα μετά από ένα γράμμα του κύριου Russell ακριβώς τη στιγμή που το τύπωμα αυτού του τόμου ήταν κοντά στο τέλος του.».

Σύμφωνα με τον Russell, δεν υπάρχει οπωσδήποτε για κάθε ιδιότητα ένα σύνολο. Τα σύνολα αυτά, δηλαδή «τα σύνολα που περιέχουν τον εαυτό τους», είναι γνωστά ως Russell σύνολα (R-set). Ο Russell, παραδέχτηκε ότι εμπνεύστηκε τα R-set από το περίφημο παράδοξο του Κρητικού, που αποδίδεται στον θρησκευτικό δάσκαλο προφήτη και μάντη Επιμενίδη (7ος – 6ος αιώνας π.Χ.).

Εικόνα 16.3: Επιμενίδης (7ος – 6ος αιώνας π.Χ.)

<u>Το παράδοξο του Κρητικού:</u>

Ο Επιμενίδης, σ’ ένα ποίημά του υποστήριζε ότι: «Όλοι οι Κρητικοί ψεύδονται.». Το παράδοξο, είναι ότι ο ίδιος ο Επιμενίδης ήταν Κρητικός. Αν η προηγούμενη θέση αληθεύει, τότε όλοι οι Κρητικοί είναι ψεύτες και συνεπώς και ο Επιμενίδης ψεύδεται, εφόσον κατάγεται από την Κρήτη. Όμως, εάν είπε ψέματα, τότε οι Κρητικοί λένε αλήθεια και άρα και ο Επιμενίδης δεν λέει ψέματα. Είναι δυνατόν, κάποιος να λέει ταυτόχρονα και αλήθεια και ψέματα;

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

Το παράδοξο αυτό, λοιπόν, χρησιμοποιήθηκε από τον Russell για τα δικά του παράδοξα. Ας παραθέσουμε, την άποψη του Russell για τα Μαθηματικά: «Τα Μαθηματικά μπορεί να οριστούν ως το αντικείμενο στο οποίο δεν γνωρίζουμε ποτέ για τι μιλάμε, ούτε αν αυτό που λέμε είναι αλήθεια.».

Έτσι, το 1901 ο Russell ανακάλυψε μια αντινομία στο 2^o αξίωμα του Frege.

<u>Το παράδοξο του Russell:</u>

Έστω S, ιδιότητα του στοιχείου x αν και μόνο αν x είναι σύνολο με $x \notin x$. Τότε, το S είναι το σύνολο όλων των συνόλων που δεν ανήκουν στον εαυτό τους. Σε σύμβολα: $S = \{x | x \notin x\}$. Δηλαδή, έχουμε το παράδοξο: $S \in S \Leftrightarrow S \notin S$.

Το παράδοξο αυτό, είναι γνωστό και ως το παράδοξο του αξύριστου κουρέα. Σε μια απλή μη μαθηματική ιστορία, το παράδοξο αποδίδεται ως εξής:

<u>Το παράδοξο του αξύριστου κουρέα:</u>

Σε μια πόλη υπάρχει ένας μόνο κουρέας, ο οποίος ξυρίζει όλους τους άντρες που δεν ξυρίζονται μόνοι τους. Όλοι οι άντρες, είναι καθημερινά ξυρισμένοι. Το ερώτημα είναι ποιος ξυρίζει τον κουρέα. Δεν μπορεί να ξυρίζεται μόνος του, αφού αυτός ξυρίζει μόνο όσους δεν ξυρίζονται μόνοι τους. Δεν μπορεί ούτε να τον ξυρίζει κάποιος άλλος, αφού μόνο ο κουρέας ξυρίζει όσους δεν ξυρίζονται μόνοι τους.

Το 1908, προτάθηκαν δύο τρόποι απόρριψης του παράδοξου του Russell. Η Θεωρία των τύπων του Russell και η Θεωρία Συνόλων ZF. Επικράτησε η Θεωρία Συνόλων του ZF, η οποία συμπληρώθηκε, σχηματίζοντας σήμερα το Σύστημα ZFC, όπως θα δούμε στην Ενότητα 17.

Ο Russell, στην προσπάθειά του να εξηγήσει το φαινόμενο αυτό και να αίρει την αντινομία, δημοσίευσε μια ανάλυση του παράδοξου στο έργο του, με τον Άγγλο μαθηματικό και φιλόσοφο Alfred North Whitehead (1861-1947), με τίτλο: "Principia Mathematica", Cambridge at the University of Press 1996. Στο ίδιο έργο, αποδεικνύεται μετά από 223 σελίδες ότι όταν ορίζουμε την πράξη της πρόσθεσης στους φυσικούς, τότε $1 + 1 = 2$. Είχε γίνει αποδεκτό, ως το εξαιρετικό παράδειγμα ενός αδιάβαστου αριστουργήματος (an unreadable masterpiece). ("The Mathematical Experience", Philip J. Davis, Reuben Hersh, Boston 1981, σελ. 138)

Εικόνα 16.4: Alfred North Whitehead (1861-1947)

Εντούτοις το μετέπειτα αποτέλεσμα, το 1ο Θεώρημα της μη-πληρότητας του Gödel, που θα δούμε στην Ενότητα 17, ότι δηλαδή όλοι οι συνεπείς μετασχηματισμοί περιλαμβάνουν αναποφάσιστες για την αλήθεια ή το ψεύδος μαθηματικές προτάσεις, αποτέλεσε πλήγμα για την προσέγγιση του έργου του. Έβαλε τέλος, στα όνειρα των μαθηματικών της λογικής. Καταλήγουμε και πάλι, στο συμπέρασμα ότι στα Μαθηματικά έχουμε προτάσεις (π.χ. η Υπόθεση του Συνεχούς, που θα δούμε στην Ενότητα 18), οι οποίες ούτε αληθεύουν αλλά ούτε διαψεύδονται. Έτσι, καταλήγουμε στο 2ο Θεώρημα της μη-πληρότητας του Gödel, το οποίο θα δούμε και αυτό στην Ενότητα 17, το οποίο ουσιαστικά δηλώνει ότι η συνέπεια των αξιωμάτων, δεν μπορεί να αποδειχθεί μέσα στο ίδιο το σύστημα.

Το λάθος του Frege, που για κάποιο λόγο δεν το έκανε ο Ευκλείδης στα αξιώματά του, ήταν ότι όρισε αξιωματικά την έννοια του συνόλου.

Αξίζει να σημειωθεί, ότι ο Russell όσον αφορά τα παράδοξα του Ζήνωνα, γράφει: «Τα επιχειρήματα του Ζήνωνα, σε κάποια τους μορφή, έχουν δώσει τις βάσεις για όλες σχεδόν τις θεωρίες του χώρου και του απείρου που έχουν προταθεί από την εποχή του, έως τις ημέρες μας.».

Επιπλέον, ο Russell έδειξε ότι το Αξίωμα της Επιλογής, που θα δούμε στην Ενότητα 17, είναι απαραίτητο με τη λεγόμενη Σοφίτα του Russell.

<u>*Η Σοφίτα του Russell:*</u>

Έστω ότι μια σοφίτα, περιέχει αριθμήσιμο πλήθος ζευγών υποδημάτων (αριστερών και δεξιών). Το ερώτημα, είναι πόσα μονά υποδήματα έχει η σοφίτα. Η απάντηση είναι αριθμήσιμα, εφόσον μπορούμε να εφαρμόσουμε την τεχνική της ετικέτας. Έστω ένα σύνολο υποδημάτων A. Έστω η συνάρτηση:

$$f: \mathbb{N} \to A$$

τέτοια ώστε:

$f(1)$: *αριστερό 1ου ζευγαριού*

$f(2)$: *δεξιό 1ου ζευγαριού*

$f(3)$: *αριστερό 2ου ζευγαριού*

$f(4)$: *δεξιό 2ου ζευγαριού*

$\vdots$

Όμως, αν έχουμε ένα αριθμήσιμο πλήθος από ζευγάρια κάλτσες και θέλουμε να δούμε πόσες μονές κάλτσες έχουμε, τότε δεν μπορούμε να ορίσουμε συνάρτηση που να διαλέγει ακριβώς μία κάλτσα από κάθε ζευγάρι, αφού ένα ζευγάρι από κάλτσες αποτελείται από δύο τελείως όμοια πράγματα. Η απάντηση, αναμένεται να είναι όπως προηγουμένως αριθμήσιμα. Ωστόσο, αυτό δύναται να αποδειχθεί μόνο με τη χρήση του Αξιώματος της Επιλογής. Με το Αξίωμα της Επιλογής, μπορούμε να

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

ξεχωρίσουμε από πανομοιότυπα πράγματα, έναν αντιπρόσωπο. Άρα, από τις δύο κάλτσες, διαλέγουμε την μία και τις αριθμούμε.

Εικόνα 16.5: Συλλογή υποδημάτων Imelda Marcos (ήταν πρώτη Κυρία των Φιλιππίνων) στο Μουσείο υποδημάτων της Marikina των Φιλιππίνων

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

17. Τα Αξιώματα Zermelo-Fraenkel

Το αξιωματικό σύστημα της Θεωρίας των Συνόλων Zermelo-Fraenkel (ZF), προτάθηκε το 1923 από τους Γερμανούς μαθηματικούς Ernst Zermelo (1871-1953) και Abraham Fraenkel (1891-1965), με σκοπό τη διαμόρφωση μιας Θεωρίας Συνόλων απαλλαγμένων από παράδοξα. Από αυτό, απορρέουν όλα τα γνωστά σ' εμάς Μαθηματικά. Αργότερα, επισυνάφθηκε ένα επιπλέον αξίωμα, το Αξίωμα της Επιλογής, οδηγώντας στην επαυξημένη Θεωρία ZFC. Είναι σημαντικό, να αναφερθεί ότι ο Νορβηγός μαθηματικός Thoralf Albert Skolem (1887-1963), το 1908 πρότεινε αρχικά το σύστημα αυτό, το οποίο μετέπειτα συμπληρώθηκε. Είναι εκπληκτικό το γεγονός, ότι όλα τα γνωστά Μαθηματικά στηρίζονται στα αξιώματα αυτά. Οι κανόνες αυτοί ως αξιώματα, ισχύουν άνευ αποδείξεως και ότι είναι ο θεμέλιος λίθος των Μαθηματικών. Η αξιωματική μέθοδος, μια μεγάλη προσφορά της αρχαίας Ελλάδας, αποτελεί σπουδαία διαδικασία θεμελίωσης των Μαθηματικών.

Εικόνα 17.1: Ernst Zermelo (1871-1953)

Εικόνα 17.2: Abraham Fraenkel (1891-1965)

Εικόνα 17.3: Thoralf Albert Skolem (1887-1963)

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

Στη συνέχεια, αναφέρονται τα Αξιώματα της Θεωρίας ZFC.

Τα Αξιώματα ZFC:

1. *Αξίωμα της επεκτασιμότητας:*

   Δύο σύνολα είναι ίσα αν και μόνο αν, έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.

2. *Αξίωμα του κενού συνόλου:*

   Υπάρχει σύνολο χωρίς στοιχεία.

3. *Αξίωμα των μη διατεταγμένων ζευγών:*

   Για οποιαδήποτε σύνολα x και y, υπάρχει σύνολο z που έχει ακριβώς τα x και y.

4. *Αξίωμα της ένωσης:*

   Αν έχουμε δύο σύνολα, τότε η ένωσή τους είναι ένα νέο σύνολο.

5. *Αξίωμα του απείρου:*

   Ζητούμε να υπάρχουν απειροσύνολα.

6. *Αξίωμα της αντικατάστασης:*

   Κάθε «λογική» πρόταση, ορίζει νέο σύνολο.

7. *Αξίωμα του δυναμοσυνόλου:*

   Το δυναμοσύνολο ενός συνόλου, ορίζει ένα νέο σύνολο.

8. *Αξίωμα της επιλογής:*

   Αν α είναι οποιαδήποτε συλλογή από σύνολα $\{A, B, \dots\}$ και αν κανένα από αυτά τα σύνολα δεν είναι κενό, τότε υπάρχει σύνολο Z, το οποίο σχηματίζεται έτσι ώστε να έχει ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε σύνολο $A, B, \dots$.

9. *Αξίωμα της κανονικότητας:*

   Για οποιοδήποτε μη κενό σύνολο X, υπάρχει $Y \in X$ τέτοιο ώστε $X \cap Y = \emptyset$. Απόρροια, είναι το γεγονός ότι δεν υπάρχει σύνολο X τέτοιο ώστε $X \in X$. Συνεπώς, δεν υπάρχει υπερσύνολο, δηλαδή σύνολο που να περιέχει όλα τα σύνολα, διότι τότε θα περιείχε τον εαυτό του.

Τα πιο πάνω αξιώματα, ήταν καταλυτικά για τη μαθηματική κοινότητα.

Σε κάθε σύστημα αξιωμάτων, ζητάμε:

- *Ανεξαρτησία:*

  Δεν πρέπει κανένα αξίωμα, να προκύπτει από τα υπόλοιπα.

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

- <u>*Πληρότητα:*</u>

  Τα αξιώματα πρέπει να είναι αρκετά ισχυρά, έτσι ώστε να μπορούν να αποφασίζουν για κάθε μαθηματική πρόταση αν είναι αληθής ή ψευδής.

- <u>*Συνέπεια:*</u>

  Τα αξιώματα, δεν πρέπει να οδηγούν σε αντινομίες.

Όταν, λοιπόν, μελετάμε ένα αξιωματικό σύστημα μας ενδιαφέρει να δούμε αν τα αξιώματα είναι συνεπή, δηλαδή ότι δεν προκύπτει καμία αντίφαση από αυτά. Επίσης, μας ενδιαφέρει να δούμε αν τα αξιώματα είναι ανεξάρτητα, δηλαδή ότι κανένα από αυτά δεν προκύπτει ως απόρροια των υπολοίπων. Είναι προφανές ότι, αν υπάρχει ένα γνωστό σύνολο στο οποίο ικανοποιούνται όλα τα αξιώματα εκτός από ένα, τότε το αξίωμα αυτό είναι ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα.

Σχετικά με τα παραπάνω, ο Γερμανός επιστήμονας της λογικής και μαθηματικός Kurt Friedrich Gödel (1906-1978), το 1931 διατύπωσε και απέδειξε περίφημα δύο Θεωρήματα της μη-πληρότητας.

<u>*Θεωρήματα της μη-πληρότητας:*</u>

1. *Αν ένα μη τετριμμένο σύστημα είναι συνεπές, τότε δεν είναι πλήρες. Δηλαδή, αν είναι συνεπές θα υπάρχουν προτάσεις για τις οποίες δεν θα μπορούμε να αποφανθούμε αν είναι αληθής ή ψευδής (1ο Θεώρημα μη-πληρότητας).*
2. *Αν ένα σύστημα είναι συνεπές, τότε αυτό δεν μπορεί να αποδειχθεί με χρήση μόνο των αξιωμάτων του ίδιου συστήματος (2ο Θεώρημα μη-πληρότητας).*

Συνεπώς, δεν υπάρχει καμία κατασκευαστική διαδικασία, που να αποδεικνύει ότι η αξιωματική θεωρία είναι συνεπής. Η συνέπεια του συστήματος ZFC, δεν μπορεί να αποδειχθεί με χρήση των αξιωμάτων 1-9, αλλά χρειάζονται άλλα καινούργια, τα οποία, όμως, δεν πρέπει να οδηγούν σε αντινομίες.

Εικόνα 17.4: Kurt Friedrich Gödel (1906-1978)

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

Τα Θεωρήματα της μη-πληρότητας του Gödel, αποτελούν αξιοσημείωτα κατορθώματα του 20ου αιώνα και ακρογωνιαίο λίθο στη θεμελίωση της θεωρητικής επιστήμης των υπολογιστών μέσω των εργασιών του Άγγλου μαθηματικού, καθηγητή της λογικής και κρυπτογράφου Alan Mathison Turing (1912-1954).

Εικόνα 17.5: Alan Mathison Turing (1912-1954)

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

18. Η Υπόθεση του Συνεχούς

Ο Cantor το 1878, έψαχνε να βρει σύνολο με πληθάριθμο μεγαλύτερο του $\aleph_0$ και μικρότερο του $C = 2^{\aleph_0}$. Έτσι, το 1874 προέκυψε η περίφημη Υπόθεση του Συνεχούς (Εικασία του Cantor).

Η Υπόθεση του Συνεχούς:

Δεν υπάρχει υποσύνολο του $[0,1]$ *με πληθάριθμο μεγαλύτερο του* $\aleph_0$ *και μικρότερο του* $C = 2^{\aleph_0}$. *Δηλαδή, κάθε άπειρο υποσύνολο του* $[0,1]$ *είναι ισοδύναμο με το* $\mathbb{N}$ *ή με το* $[0,1]$.

Η εξακρίβωση για το κατά πόσον η υπόθεση αυτή είναι αληθής ή ψευδής, αποτελεί το πρώτο από τα 23 μεγαλύτερα άλυτα προβλήματα των Μαθηματικών, τα οποία παρουσιάστηκαν στο Διεθνές Συνέδριο των Μαθηματικών του Παρισιού στις 8 Αυγούστου του 1900 στο Παρίσι από τον Γερμανό μαθηματικό David Hilbert (1862-1943).

Ο Kurt Friedrich Gödel, πίστευε ότι η υπόθεση αυτή δεν αληθεύει για όλα τα σύνολα, αλλά αληθεύει στο κατασκευαστικό σύμπαν. Έδειξε ότι στο σύμπαν των κατασκευαστικών συνόλων, η Υπόθεση του Συνεχούς είναι Θεώρημα. Ο Gödel, πήρε τα αξιώματα της Θεωρίας Συνόλων και έδειξε ότι στα σύνολα που προκύπτουν από την αξιωματική θεωρία, είναι πράγματι σωστή η Υπόθεση του Συνεχούς.

Η τελική απάντηση, δόθηκε το 1963 από τον Αμερικανό μαθηματικό Paul Cohen (1934-2007). Έδειξε ότι η Υπόθεση του Συνεχούς, είναι ανεξάρτητη από τη Θεωρία των Συνόλων ZF και γι' αυτό του απονεμήθηκε το βραβείο Fields το 1966.

Εικόνα 18.1: Paul Cohen (1934-2007)

Συμπερασματικά, η Υπόθεση του Συνεχούς είναι ανεξάρτητη από τη Θεωρία των Συνόλων ZF και τα Αξιώματα ZF δεν είναι ισχυρά, για να αποφασίσουν για την αλήθεια ή το ψεύδος της Υπόθεσης του Συνεχούς. Η Υπόθεση του Συνεχούς ή η άρνησή της, προστίθενται ως Αξίωμα στη Θεωρία Συνόλων ZF και η θεωρία που προκύπτει είναι ορθή αν και μόνο αν, η θεωρία ZFC είναι ορθή. Επομένως, η Υπόθεση του Συνεχούς δεν μπορεί να δειχθεί ούτε ως αληθής, αλλά ούτε ως ψευδής στο σύστημα ZF ή ZFC και έτσι δεν μπορούμε να αποφασίσουμε.

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

Συνοψίζοντας, ο Gödel και ο Cohen, έδειξαν ότι τα Αξιώματα ZF δεν είναι αρκετά για να αποφασίσουν για την αλήθεια ή το ψεύδος της Υπόθεσης του Συνεχούς. Άρα, είναι πρόταση μη αποδείξιμη στο ZF. Αν πιστεύουμε ότι τα σύνολα είναι πραγματικά, τότε αναμένουμε ότι η Υπόθεση του Συνεχούς θα είναι αληθής ή ψευδής. Επομένως, πρέπει να ανακαλυφθεί ένα καινούργιο αξίωμα, το οποίο θα είναι διαισθητικά προφανές και αρκετά ισχυρό για να αποφασίσει. Μέχρι τώρα, κανείς δεν έχει προτείνει τέτοιο αξίωμα και είναι, λοιπόν, στο χέρι μας να δεχόμαστε την αλήθεια ή το ψεύδος της.

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

19. Η ανακούφιση από τον Peano

Ο Georg Cantor, εκτός από την απόδειξη ότι τα σύνολα του $[0,1]$ και $[0,1]^2$ έχουν τον ίδιο πληθάριθμο, το 1878 κατέγραψε ένα από τα σπουδαιότερα αποτελέσματα των Μαθηματικών. Κατάφερε να δείξει, ότι μπορούμε να ορίσουμε μια 1-1 και επί συνάρτηση $f\colon [0,1] \to [0,1]^2$.

Η ανακάλυψη αυτή, προξένησε τεράστια ανησυχία στη μαθηματική κοινότητα και δημιουργήθηκε πληθώρα αναπάντητων ερωτημάτων. Το κύριο ερώτημα που δημιουργήθηκε, ήταν το εξής: «Είναι δυνατό να υπάρχει μια 1-1 και επί συνάρτηση $f\colon [0,1] \to [0,1]^2$, η οποία μάλιστα να είναι και συνεχής;». Αν υπήρχε, τότε αυτό θα δημιουργούσε πρόβλημα στη Φυσική π.χ. στους Νόμους του Νεύτωνα.

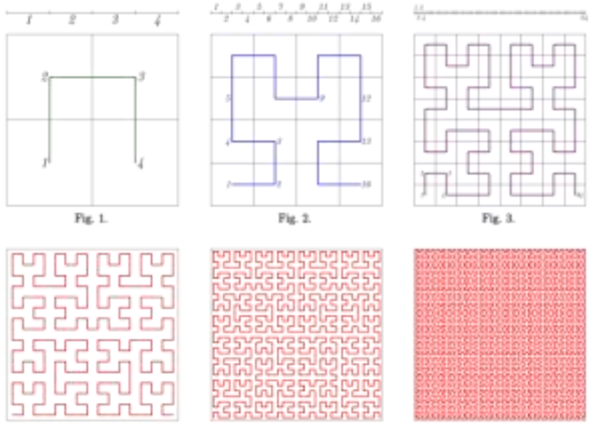
Το 1890, ο Ιταλός μαθηματικός Giuseppe Peano (1858-1932) έδωσε την απάντηση στο καίριο αυτό πρόβλημα, που ταλάνιζε τη μαθηματική κοινότητα. Η συνάρτηση του Cantor, ήταν 1-1 και επί, όμως σύμφωνα με τον Peano δεν ήταν συνεχής. Ο Peano, έφτιαξε καμπύλες που γεμίσουν τον χώρο, δηλαδή ήταν επί και συνεχείς, αλλά όχι 1-1 (“A Jordan curve of positive area”, William F. Osgood, σελ. 108).

Εικόνα 19.1: Giuseppe Peano (1858-1932)

Αξίζει να σημειωθεί, ότι παρά το γεγονός ότι ο Peano ήταν ο πρώτος που ανακάλυψε καμπύλη που να γεμίζει το χώρο, ο Hilbert ήταν αυτός που το 1891 ισχυρίστηκε την ύπαρξη μιας γενικής γεωμετρικής διαδικασίας, πράγμα που οδηγεί στην κατασκευή μιας ολόκληρης οικογένειας καμπυλών, που γεμίζουν τον χώρο.

Αυτή η γεωμετρική διαδικασία, βασιζόταν στο γεγονός ότι εφόσον μπορούμε να βρούμε επί και συνεχή συνάρτηση από το $[0,1]$ στο $[0,1]^2$, χωρίζοντας το $[0,1]$ σε τέσσερα ίσα υποδιαστήματα και το $[0,1]^2$ σε τέσσερα ίσα τετράγωνα κάθε ένα από τα υποδιαστήματα αυτά, απεικονίζεται επί και συνεχώς σ’ ένα από τα υποτετράγωνα αυτά. Η διαδικασία αυτή, επαναλαμβάνεται επ’ άπειρο. Τότε, το $[0,1]$ χωρίζεται σε 2^{2n} ίσα διαστήματα και το $[0,1]^2$ σε 2^{2n} ίσα τετράγωνα. Τα υποτετράγωνα, κατασκευάζονται έτσι ώστε διαδοχικά διαστήματα να απεικονίζονται σε γειτονικά τετράγωνα με μια κοινή πλευρά και να διατηρούνται οι σχέσεις εγκλεισμού.

ΑΝΤΡΕΑ ΚΟΝΕΤΗ



Σχήμα 19.1: Κατασκευή της Καμπύλης του Hilbert

Ακόμη, ένα επίτευγμα του Peano, ήταν η αξιωματική θεμελίωση των φυσικών αριθμών τον $19^{ο}$ αιώνα. Βεβαίως, τα αξιώματα αυτά περιγράφουν τους φυσικούς αριθμούς, ωστόσο δεν αποδεικνύουν την ύπαρξή τους. Έφτιαξε τους φυσικούς αριθμούς, ως εξής:

$$1 \leftarrow \{\emptyset\}$$

$$2 \leftarrow \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$3 \leftarrow \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

$$\vdots$$

Μέσω της Θεωρίας Συνόλων, απέδειξε τις ιδιότητες των φυσικών αριθμών.

<u>Τα Αξιώματα του Peano:</u>

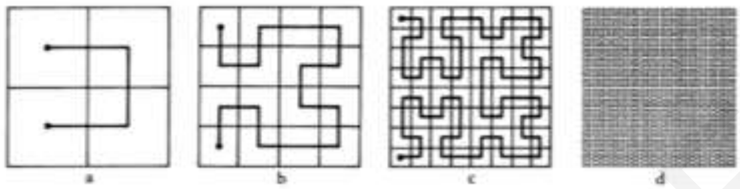
1. *Υπάρχει ένας τουλάχιστον φυσικός αριθμός, το* 1.
2. *Για κάθε φυσικό αριθμό n, υπάρχει ο επόμενός του, ο* $n+1$.
3. *Δεν υπάρχει φυσικός αριθμός, που να έχει επόμενο τον 1.*
4. *Δεν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί διαφορετικοί μεταξύ τους, που να έχουν τον ίδιο επόμενο. Ήτοι, αν x, y δύο φυσικοί αριθμοί με $x+1=y+1$ τότε $x=y$.*
5. *Αν ένα σύνολο X, που περιέχει το στοιχείο 1 και για κάθε φυσικό αριθμό x περιέχει και τον επόμενό του, τότε το X περιέχει όλους τους φυσικούς αριθμούς.*

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

20. Μη-Ευκλείδειες Γεωμετρίες

Στα μέσα του 19ου αιώνα, μια από τις πιο επαναστατικές δημιουργίες στα Μαθηματικά, οι Μη-Ευκλείδειες Γεωμετρίες, προήλθε από την ιδέα της απεριόριστης ευθείας γραμμής.

Η έννοια του «γεωμετρικού απείρου», γέννησε διάφορα παράδοξα από γεωμετρικά σχήματα. Όπως είδαμε στην Ενότητα 19, ο Peano εισήγαγε τη γνωστή Καμπύλη του Peano.

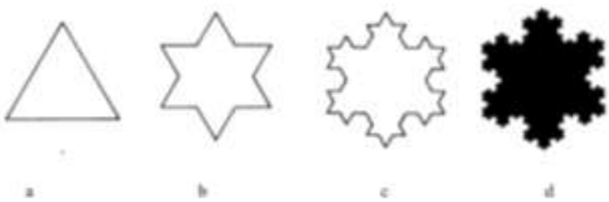


Σχήμα 20.1: Η Καμπύλη του Peano

Στο Σχήμα 20.1 (a), το αρχικό τετράγωνο, χωρίστηκε σε τέσσερα τετράγωνα και ενώθηκαν τα κέντρα των τεσσάρων τετραγώνων. Στο (b), τα τετράγωνα είναι $4 \cdot 4 = 16$, στο (c), είναι $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ και στο (d) είναι $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4096$. Η τεθλασμένη γραμμή, καθώς τα τετράγωνα τείνουν στο άπειρο, θα περάσει από όλα τα σημεία του αρχικού τετραγώνου και θα έχει άπειρο μήκος, όμως το παράδοξο, είναι ότι θα είναι περιορισμένη σε τετράγωνο το οποίο έχει πεπερασμένο εμβαδόν.

Ένα άλλο παράδοξο του απείρου που σχετίζεται με τη Γεωμετρία, είναι η λεγόμενη Χιονοστιβάδα του Koch, που αποκάλυψε ο Σουηδός μαθηματικός Niels Fabian Helge von Koch (1870-1924).

Εικόνα 20.1: Niels Fabian Helge von Koch (1870-1924)

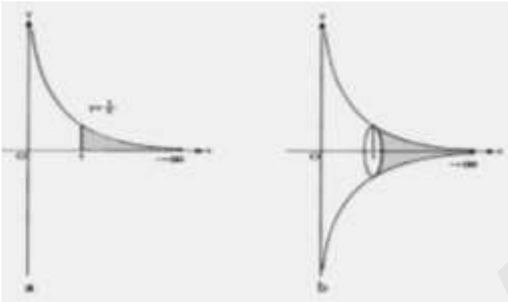


Σχήμα 20.2: Η Χιονοστιβάδα του Koch

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

Στο Σχήμα 20.2 (a), έχουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο, το οποίο μετασχηματίζεται στο (b), στο (c) έχουμε τι γίνεται μετά από τρία βήματα και στο (d) έχουμε τι γίνεται μετά από πολλές επαναλήψεις. Το μήκος της συνοριακής γραμμής της χιονοστιβάδας του Koch, καθώς ο αριθμός των βημάτων τείνει στο άπειρο είναι άπειρη, όμως το παράδοξο, είναι ότι το εμβαδόν της είναι θετικό.

Ακόμη, ένα άλλο παράδοξο του απείρου που σχετίζεται με τη Γεωμετρία, είναι το εξής:



Σχήμα 20.3: Υπερβολοειδές εκ περιστροφής

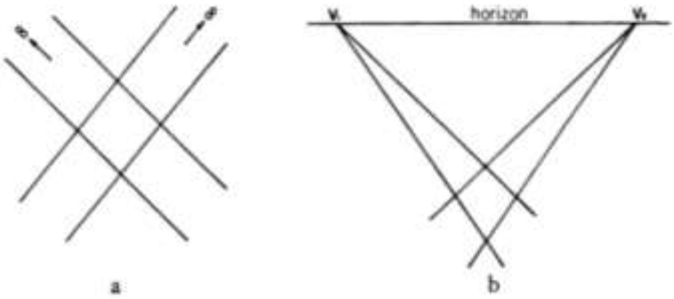
Στο Σχήμα 20.3 (a), έχουμε τον θετικό κλάδο της υπερβολής $y = \frac{1}{x}$, για $x \geq 1$. Στο (b), έχουμε το στερεό που προκύπτει από την στροφή του (a) με άξονα περιστροφής τον άξονα των x. Το εμβαδόν του σκιαγραφημένου χωρίου, είναι άπειρο $\left(\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \infty\right)$. Το παράδοξο, είναι ότι ο όγκος που προκύπτει από την περιστροφή είναι πεπερασμένος $\left(\int_1^\infty \pi \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi\right)$. Το παράδοξο αυτό, είναι γνωστό ως Παράδοξο του Γαβριήλ και επινοήθηκε από τον Ιταλό φυσικό και μαθηματικό Evangelista Torricelli (1608-1647). Το στερεό που δημιουργείται από την περιστροφή, ονομάζεται Σάλπιγγα του Γαβριήλ ή Τρομπέτα Torricelli.

Σχήμα 20.4: Σάλπιγγα του Γαβριήλ/Τρομπέτα Torricelli

Εικόνα 20.2: Evangelista Torricelli (1608-1647)

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

Ένα εύλογο ερώτημα που προκύπτει, είναι τι γίνεται στο άπειρο με δύο παράλληλες ευθείες.



Σχήμα 20.5: Κάτοψη και προοπτική δύο παράλληλων ευθειών

Δύο παράλληλες ευθείες στο επίπεδο, καθορίζουν ένα σημείο στο άπειρο. Οι δύο ευθείες συγκλίνουν και το σύνολο όλων των σημείων στο άπειρο αποτελεί τον ορίζοντα. Η Γεωμετρία αυτή, γνωστή ως παραβολική Γεωμετρία, ασχολείται με το άπειρο και προτάθηκε, μεταξύ άλλων, από τον Γάλλο μαθηματικό και στρατηγό Jean-Victor Poncelet (1788-1867) και έναν αιώνα πριν από αυτόν, από τον Γάλλο μαθηματικό και μηχανικό Girard Desargues (1591-1661). Το έργο όμως του τελευταίου, δεν εκτιμήθηκε και τόσο.

Εικόνα 20.3: Jean-Victor Poncelet (1788-1867)

Εικόνα 20.4: Girard Desargues (1591-1661)

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

Η συνάντηση δύο μη παράλληλων ευθειών, δηλώνει καθορισμένο σημείο του πεπερασμένου χώρου. Σε αντίθεση μ’ αυτό, η συνάντηση δύο παράλληλων ευθειών στο άπειρο, δηλώνει κατεύθυνση. Έτσι, είναι εύλογο να θεωρήσει κανείς ότι κάθε δύο παράλληλες ευθείες, έχουν το δικό τους σημείο συνάντησης στο άπειρο.

Στην Ενότητα 10, έχουμε δει τα Αξιώματα του Ευκλείδη. Αυτό που δεν αναφέραμε, ήταν η μεγάλη αμφισβήτηση και κριτική που δέχτηκε το πέμπτο αξίωμα ανεξάρτητα. Πολλοί ήταν οι μαθηματικοί που πίστευαν ότι μπορούσε να αποδειχτεί ως θεώρημα, ως απόρροια των άλλων τεσσάρων αξιωμάτων. Πρώτος απ’ όλους ο Ευκλείδης, ο οποίος προσπάθησε να το αποδείξει. Κάποιο άλλοι, επινόησαν ισοδύναμες εκδοχές του αξιώματος αυτού.

Ο Ρώσος μαθηματικός και γεωμέτρης Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1793-1856) και ο Ούγγρος μαθηματικός János Bolyai (1802-1860), θεμελίωσαν μια μη-Ευκλείδεια Γεωμετρία, την υπερβολική γεωμετρία.

Εικόνα 20.5: Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1793-1856)

Εικόνα 20.6: János Bolyai (1802-1860)

Στην υπερβολική Γεωμετρία, όλα τα αξιώματα του Ευκλείδη είναι τα ίδια, εκτός από το πέμπτο αξίωμα του Ευκλείδη, το οποίο αντικαταστάθηκε με το ακόλουθο:

Από ένα σημείο P, που δεν ανήκει σε ευθεία l, υπάρχουν τουλάχιστον δύο ευθείες m και n, στο επίπεδο των P και l, που δεν τέμνουν την l. Δηλαδή, από σημείο εκτός ευθείας, υπάρχουν άπειρες παράλληλες ευθείες προς αυτή.

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

Σχήμα 20.6: Το πέμπτο αξίωμα του Ευκλείδη στην υπερβολική Γεωμετρία

Στην υπερβολική Γεωμετρία, το άθροισμα των μοιρών ενός τριγώνου είναι μικρότερο των $180°$. Όσο μεγαλύτερο είναι το μέγεθος του τριγώνου, τόσο μικρότερο είναι το άθροισμα των μοιρών.

Ο Γερμανός μαθηματικός Bernhard Riemann (1826-1866), επινόησε τη δική του μη-Ευκλείδεια γεωμετρία, τη σφαιρική ή ελλειπτική Γεωμετρία.

Εικόνα 20.7: Bernhard Riemann (1826-1866)

Στη Γεωμετρία Riemann, όλα τα αξιώματα του Ευκλείδη είναι τα ίδια, εκτός από το δεύτερο αξίωμα του Ευκλείδη, το οποίο αντικαταστάθηκε με το ακόλουθο:

Δεν υπάρχει παράλληλος.

Η ασύνορη και πεπερασμένη ευθεία, αναφέρεται στην ευθεία που όταν προεκταθεί δεν είναι άπειρη, αλλά ξανασυναντιέται με το αρχικό σημείο εκκίνησης, αφού έχει κάνει έναν κύκλο γύρω από τη σφαίρα. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχουν παράλληλες ευθείες στη σφαίρα.

Στη σφαιρική Γεωμετρία, το άθροισμα των μοιρών ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερο των $180°$ και επηρεάζεται από το μέγεθος του τριγώνου.

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

21. Μια πρόσφατη κατάκτηση του απείρου

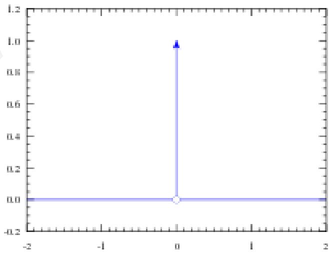
Ο Άγγλος θεωρητικός φυσικός, μαθηματικός και μηχανικός Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984), στον οποίο απονεμήθηκε το 1933 βραβείο Νόμπελ Φυσικής για την ατομική θεωρία, έμελλε να δώσει την τελευταία μέχρι σήμερα κατάκτηση που είχε σχέση με το άπειρο, τη λεγόμενη Κρουστική Συνάρτηση ή αλλιώς Συνάρτηση Δέλτα ή πιο γενικά Συνάρτηση του Dirac.

Εικόνα 21.1: Paul A. M. Dirac (1902-1984)

Είναι μια μαθηματική αναπαράσταση μιας ποσότητας, που μοιάζει με το φαινόμενο της κρούσης. Ο Dirac, επιθυμούσε να μοντελοποιήσει ένα «ακραίο» φαινόμενο, το οποίο ακαριαία χτυπά και εξαφανίζεται. Δηλαδή, έχει όσο θέλουμε μικρή διάρκεια, ωστόσο δεν έχει όσο μικρό εμβαδόν θέλουμε.

Η «Συνάρτηση» του Dirac, δεν είναι συνάρτηση υπό την αυστηρή μαθηματική έννοια. Σε μη αυστηρά Μαθηματικά, ορίζεται με τις εξής δύο ιδιότητες:

1. $\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$



Σχήμα 21.1: «Συνάρτηση» του Dirac

Εναλλακτικά, θα μελετήσουμε τη «Συνάρτηση» του Dirac ως έναν τελεστή που δρα σε ομαλές συναρτήσεις στο σημείο 0, οι οποίες καλούνται Συναρτήσεις Δοκιμής. Η «Συνάρτηση του Dirac», εκφράζεται ως:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$$

όπου $\varphi(x)$ είναι μια Συνάρτηση Δοκιμής.

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

Τα εισαγωγικά στη λέξη συνάρτηση, σημαίνουν ότι η παραπάνω σχέση ισχύει, χωρίς η $\delta(x)$ να είναι συνάρτηση, αλλά γενικευμένη συνάρτηση ή κατανομή.

Για $\varphi(x) = 1$, έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1.$$

Σημαντικό, είναι το γεγονός ότι καθώς η χρονική διάρκεια τείνει στο μηδέν, το εμβαδόν παραμένει ίσο με τη μονάδα.

Η «Συνάρτηση» του Dirac, λοιπόν, ανήκει στις γενικευμένες συναρτήσεις ή κατανομές.

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

22. Σύνοψη

«Από την αρχαιότητα, το άπειρο συγκινούσε τη ψυχή του ανθρώπου περισσότερο από οποιοδήποτε άλλο ζήτημα. Είναι δύσκολο να βρει κανείς μια ιδέα που να έχει ερεθίσει τόσο γόνιμα τη νόηση όσο η ιδέα του απείρου. Αλλά και καμία άλλη έννοια δεν χρήζει οριστικής διασάφησης περισσότερο από αυτήν» («Περί του απείρου», David Hilbert). Η κατάκτηση του απείρου, αποτέλεσε κινητήριο μοχλό της μαθηματικής σκέψης, αναθερμαίνοντας τις παλαιές θεωρίες και δίνοντας τροφή για νέες.

Ήδη από την αρχαιότητα, η αντιφατική φύση του απείρου αποτέλεσε αντικείμενο μελέτης για τους μαθηματικούς και τους φιλόσοφους της εποχής. Η πραγματικότητα του απείρου, υπήρξε η πηγή πολλών διαφωνιών και αντιθέσεων μεταξύ φιλοσόφων και μαθηματικών σ' όλους τους αιώνες.

Η μελέτη του απείρου, οδήγησε σε εντυπωσιακά παράδοξα, η ανάλυση των οποίων έχει συμβάλλει στην κατανόηση του ανθρώπινου νου. Το άπειρο απασχολεί συνεχώς, από την ανακάλυψή του, το ανθρώπινο πνεύμα και είναι η αιτία αρκετών μαθηματικών σοφισμάτων, παραδόξων και αντινομιών. Αυτά δεν είναι, όμως, μαθηματικά παράλογα.

Οι μαθηματικοί, περιγράφουν τις σχέσεις με τύπους και αλγόριθμους και ερευνούν την αλήθεια τους με αποδεικτική διαδικασία λογικών βημάτων, που στηρίζονται σε αξιώματα και θεωρήματα. Η Μαθηματική Λογική, ως επέκταση της συμβολικής λογικής σε πεδία, όπως η Θεωρία Αποδείξεων, η Θεωρία Συνόλων, η Θεωρία Μοντέλων και η Θεωρία της Αναδρομής, χρονολογείται από τους αρχαίους Έλληνες. Παρότι, θεμέλια της Μαθηματικής Λογικής, αποτελούν η Θεωρία της Απόδειξης και η Θεωρία των Μοντέλων, η Θεωρία των Συνόλων προέρχεται από τη μελέτη του απείρου από τον Georg Cantor και αποτέλεσε τη βάση για πολλά δύσκολα, αλλά άκρως σημαντικά ζητήματα της επιστήμης των Μαθηματικών.

Ο Γερμανός φιλόσοφος Friedrich Wilhelm Nietzsche (1844-1900), προβάλλει ένα ισχυρό παράδειγμα της απόρριψης της συνήθους βάσης και λογικής. Ο ίδιος αδυνατεί να αποδείξει το βάσιμο των ισχυρισμών του και απλώς τους ισχυρίζεται ρητορικά: «…η λογική άρχισε να λειτουργεί στον ανθρώπινο εγκέφαλο έξω από το παράλογο, του οποίου το πεδίο κανονικά θα έπρεπε να ήταν απέραντο.

Η μελέτη των Μαθηματικών, ανάγεται στους πρώτους αιώνες της ανθρώπινης ύπαρξης, ενώ η πρόοδός τους υπήρξε σημαντικός αρωγός τόσο στην άνοδο του βιοτικού επιπέδου όσο και στη γενικότερη ανάπτυξη. Τα Μαθηματικά, έχουν χαρακτηριστεί από πολλούς ως «Η βασίλισσα των επιστημών» και είναι μία από τις πιο καθαρές μορφές σκέψης, έχοντας ως στόχο την «απόλυτη» απόδειξη. Η έννοια της απόδειξης, αποτελεί τον πυρήνα των Μαθηματικών και τα διαχωρίζει από τις υπόλοιπες επιστήμες. Ο Ιταλός φυσικός, μαθηματικός, αστρονόμος και φιλόσοφος Galileo Galilei (1564-1642), έχει γράψει ότι: «Το σύμπαν δεν μπορεί να διαβαστεί παρά μόνο αφού μαθευτεί η γλώσσα του και έχει γίνει εξοικείωση με τους χαρακτήρες με τους οποίους η γλώσσα του είναι γραμμένη. Η γλώσσα του είναι τα

ΑΝΤΙΓΡΑΦΗ ΑΠΑΓΟΡΕΥΕΤΑΙ

Μαθηματικά, και τα γράμματα είναι τρίγωνα, κύκλοι και άλλα γεωμετρικά σχήματα, χωρίς τα οποία είναι ανθρωπίνως αδύνατο να κατανοηθεί, έστω και μια λέξη. Χωρίς αυτά, κάποιος που ασχολείται με την έρευνα για το σύμπαν είναι σαν να περιπλανιέται σε ένα σκοτεινό λαβύρινθο.».

Αναντίρρητα, τα Μαθηματικά αποτελούν κρηπίδωμα πάνω στο οποίο στηρίχθηκαν σύγχρονες επιστήμες. Χωρίς αμφιβολία, δεν θα μπορούσαν ποτέ να πραγματοποιηθούν οι μεγάλες κατακτήσεις στη Φυσική, την Χημεία, τη Μηχανική και την Πληροφορική, εάν δεν υπήρχαν τα Μαθηματικά. Για παράδειγμα, οι αρχαίοι Έλληνες δεν θα έφτιαχναν ποτέ τα αρχιτεκτονικά τους αριστουργήματα, χωρίς την Χρυσή Τομή. Επιπλέον, δεν θα είχαμε σήμερα τους υπολογιστές, αν δεν είχαμε το δυαδικό σύστημα και δεν θα είχαμε σήμερα το εναλλασσόμενο ρεύμα, αν δεν ανακαλύπταμε τους μιγαδικούς αριθμούς. Επίσης, αν δεν είχαν μελετηθεί προηγουμένως οι τροχιές των διαστημοπλοίων με μαθηματικές εξισώσεις, ο άνθρωπος δεν θα μπορούσε να εξερευνήσει το διάστημα και πολλά ακόμη παραδείγματα εφαρμογής των Μαθηματικών σε πολλούς τομείς.

Αξίζει να μάθουμε για την αρχαία ελληνική προέλευση της επιστήμης των αριθμών, των σχημάτων και των φυσικών μεγεθών, η οποία μελετά τις μεταξύ τους σχέσεις καθώς και τις σχέσεις τους στον χρόνο και στον χώρο και να μυηθούμε στην αισθητική ομορφιά των Μαθηματικών. Δηλαδή, να αρχίσουμε να εκτιμούμε την αξία που έχει η περιγραφή των Μαθηματικών σαν να πρόκειται για μια γλώσσα της φύσης. Στο βιβλίο "A Mathematician's Apology" του G. H. Hardy (σελ. 80-81), αναφέρεται ότι: «Οι Έλληνες ήταν μαθηματικοί, οι οποίοι είναι «πραγματικοί» σ' εμάς σήμερα…. Τα ανατολικά Μαθηματικά, μπορεί να ήταν μια ενδιαφέρουσα περιέργεια, όμως τα ελληνικά Μαθηματικά είναι πραγματικά. Οι Έλληνες μιλούσαν μια γλώσσα μαθηματική, που και οι σύγχρονοι μαθηματικοί μπορούν να καταλάβουν. Τα ελληνικά μαθηματικά είναι μόνιμα, πιο μόνιμα από την ελληνική λογοτεχνία. Θα θυμόμαστε τον Αρχιμήδη όταν θα έχουμε ξεχάσει τον Αισχύλο, επειδή οι γλώσσες πεθαίνουν, οι μαθηματικές όμως ιδέες όχι.».

Εν κατακλείδι, παραθέτουμε την άποψη του Αμερικάνου μαθηματικού Eugene P. Northrop (1908-1969), ο οποίος πίστευε ότι «το άπειρο, είναι ένας από τους καθαρούς εχθρούς της ησυχίας του πνεύματος των Μαθηματικών». Ο άνθρωπος, τροφοδοτείται συνεχώς από την ανάγκη του για μάθηση. «Πρέπει να γινόμαστε εραστές της μάθησης, εραστές του απέραντου» και όχι ουραγοί του πολιτικού, πολιτιστικού και κοινωνικού γίγνεσθαι. Ας μην ξεχνάμε ότι τα Μαθηματικά, είναι πρόκληση και πρόκληση ίσον ζωή!

Βιβλιογραφία-Πηγές

[1] Αναπολιτάνος Διονύσιος Α., «Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών», Αθήνα 2005

[2] Αλεξανδρεύς Ήρων, «Μετρικά I»

[3] Αριστοτέλης, «Αναλυτικά»

[4] Αριστοτέλης, «Μετά τα Φυσικά»

[5] Αριστοτέλης , «Φυσικά»

[6] Ευκλείδης, «Στοιχεία»

[7] Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης, «Ευκλείδη «Στοιχεία»: Σύγχρονη απόδοση με εισαγωγή, επεξηγήσεις και σχολιασμό, Τόμος I: Η Γεωμετρία του επιπέδου, Βιβλία I, II, III, IV, V, VI», Αθήνα 2001

[8] Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης, «Ευκλείδη «Στοιχεία»: Σύγχρονη απόδοση με εισαγωγή, επεξηγήσεις και σχολιασμό, Τόμος II: Θεωρία Αριθμών, Βιβλία $\mathrm{VII}, \mathrm{VIII}, \mathrm{IX}, \mathrm{X}$», Αθήνα 2001

[9] Μαυρικάκη Γ.Κ., Απόσπασμα της διάλεξης: «Οι σύγχρονες απόψεις περί του απείρου», Ε.Μ.Ε 1964

[10] Νεγρεπόντης Σ., Φαρμάκη Β., «Ιστορία Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών», Πρώτος Τόμος, Φεβρουάριος 2019

[11] Παπανικολάου Χρ. Γ., «Ευκλείδειος Γεωμετρία», Γ' Γυμνασίου, Αθήνα 1976

[12] Περιοδικό Δευκαλίων, «Προσωκρατική Φιλοσοφία», τεύχος 11^{ο}

[13] Πηχωρίδης Σ.Κ., «Απειροστικός Λογισμός, Πρόχειρες Σημειώσεις», Κρήτη 1986-Αθήνα 1996-Σάμος 2006

[14] Συλλογικό έργο, «Η Φιλοσοφία με απλά λόγια», Αθήνα 2015

[15] Σπανδάγος Ευάγγελος, «Τα Σχόλια του Πρόκλου στο Α' βιβλίο των «Στοιχείων» του Ευκλείδου», 2001-2002

[16] Στυλιανόπουλος Νικόλαος, Παρουσίαση με τίτλο: «Η Κατάκτηση του Απείρου από την Αρχαιότητα ως Σήμερα», Νοέμβριος 2016

Ανακτημένο από την ιστοσελίδα: www.mas.ucy.ac.cy/~nikos/MATH-Nov2016.pdf

[17] Στυλιανόπουλος Νικόλαος, Σημειώσεις μαθήματος επί σειρά ετών «Η Ιστορία των Μαθηματικών», Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

[18] Barrow John D., «Άπειρο: Τα Μαθηματικά της αθανασίας», Αθήνα 2007

[19] Bell E. T., "Men of Mathematics", Melbourne-London-Baltimore 1938

[20] Berkeley George, "The Analyst", London 1734

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ

[21] Burton David M., "The History of Mathematics", New York 2011,7^{η} Έκδοση

[22] Conway John H. & Guy Richard K., "The book of Numbers", Unites States 1996

[23] Corte Samuel D., Carl de Boor, "Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach", 1980, 3^{η} Έκδοση

[24] Davis Philip J, Hersh Reuben, "The Mathematical Experience", Boston 1981

[25] Hardy G. H., "A Mathematician's Apology", Canada 1940

[26] Heath T.L., "The works of Archimedes", Cambridge at the University of Press, 1897

[27] Hollingdale Stuart, "Makers of mathematics", 1989

[28] Kirk G.S, Raven J.E., "The Presocratic Philosophers", Cambridge at the University of Press 1971

[29] Levy Joel, "A curious history of Mathematics: The big ideas from primitive numbers", 2013

[30] McFarlane T.J., "Nicholas of Cusa and the Infinite", 1999

Ανακτημένο από την ιστοσελίδα στις 9/11/2009:

http://www.cogsci.ucsd.edu/∼nunez/web/publications.html

[31] Mückenheim Wolfgang, "Transfinity, A Source Book", October 2018

[32] Osgood William F., "A Jordan curve of positive area"

[33] Rucker R, «Το άπειρο και ο νους», Ηράκλειο 2004

[34] Rudin Walter, "Principles of Mathematical Analysis", United States 2006, 3^{η} Έκδοση

[35] Russell Bertrand, "The Principles of Mathematics", New York 1903, Έκδοση 1996

[36] Russo Lucio, "The Forgotten Revolution: How science was born in 300 BC and why it had to be reborn", Silvio Levy (translator), 2004

[37] Schechter Ernst, "Georg Cantor: The man who tamed the infinity"

[38] Singh Simon, "Fermat's Last Theorem", 1997, μεταφρασμένο στην ελληνική γλώσσα από την Ανδρομάχη Σπανού, Αθήνα 1998

[39] Whitehead Alfred North, Russell Bertrand, "Principia Mathematica", Cambridge at the University of Press 1996

[40] https://www.evprattein.gr/el/thales-o-milesios

ΑΝΤΡΕΑ ΝΙΚΟΛΕΤΤΗ