



Πανεπιστήμιο
Κύπρου

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΔΙΑΤΡΙΒΗ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ
ΣΤΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ

*Μέθοδοι Galerkin για προβλήματα
αρχικών τιμών με διαταραχές*

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΜΙΛΗΣ

Επιβλέπων Καθηγητής: Χρίστος Ξενοφώντος

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Εισαγωγή	3
2. Ένα πρόβλημα αρχικών τιμών με διαταραχές	5
3. Η συνεχής μέθοδος <i>Galerkin</i>	7
3.1 Η μεθοδολογία	7
3.2 Εφαρμογή σε προβλήματα με διαταραχές	11
3.2.1 Αριθμητικά αποτελέσματα	12
4. Η ασυνεχής μέθοδος <i>Galerkin</i>	16
4.1 Η μεθοδολογία	16
4.2 Εφαρμογή σε προβλήματα με διαταραχές	20
4.2.1 Αριθμητικά αποτελέσματα	20
5. Επίλογος	23
6. Βιβλιογραφία	25

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα διατριβή μάστερ εστιάζεται στην αριθμητική επίλυση βαθμωτών Προβλημάτων Αρχικών Τιμών (ΠΑΤ) της μορφής

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} \equiv y'(t) = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

όπου η συνάρτηση f , το t_0 και το y_0 είναι γνωστά. Προβλήματα αυτού του είδους εμφανίζονται παντού στις επιστήμες. Το Θεώρημα *Picard-Lindelöf* δίνει ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης, κάτω από κάποιες προϋποθέσεις για την συνάρτηση f (βλ., π.χ. [9]). Συγκεκριμένα, η f πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη *Lipschitz* ως προς τη δεύτερη μεταβλητή:

$$\max_t |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L \max_t |y_1 - y_2| \quad \forall y_1, y_2,$$

για κάποια σταθερά L , που καλείται *σταθερά Lipschitz* της f . Χωρίς έλλειψη της γενικότητας, θα υποθέσουμε ότι $t_0 = 0$ και $t \in [0, T]$ για κάποιο $T > 0$. Θα μελετήσουμε ΠΑΤ με γραμμικές (ως προς το y) συναρτήσεις, δηλ. προβλήματα της μορφής

$$\begin{cases} y'(t) = g(t) - b(t)y(t), t \in (0, T] \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

με τις g και $b > 0$ δοθείσες, επαρκώς ομαλές συναρτήσεις.

Μας ενδιαφέρει η αριθμητική επίλυση τέτοιων εξισώσεων, για την οποία θα χρησιμοποιήσουμε μεταβολικές μεθόδους *Galerkin* [5]. Μελετούμε τη **συνεχή** μέθοδο αλλά και την **ασυνεχή** μέθοδο *Galerkin*, όπως αυτές πρωτοεμφανίστηκαν στις εργασίες [10] και [7], αντίστοιχα. Το καινούργιο στοιχείο στη παρούσα διατριβή, είναι η εφαρμογή αυτών των μεθόδων σε ΠΑΤ με *διαταραχές* (βλ. [6]). Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζουμε προβλήματα αρχικών τιμών με *διαταραχές* και στα Κεφάλαια 3 και 4, μελετούμε τη συνεχή και ασυνεχή μέθοδο *Galerkin*, αντίστοιχα. Το κάθε κεφάλαιο περιέχει τη μεθοδολογία της μεθόδου αλλά και αριθμητικά αποτελέσματα. Για τα τελευταία, παρατηρούμε ότι η επιλογή του πλέγματος/βήματος είναι υψίστης σημασίας για να έχουμε ικανοποιητικά αποτελέσματα. Τέλος, στο Κεφάλαιο 5

παρουσιάζουμε ένα Επίλογο, συνοψίζοντας το τι έχει επιτευχθεί, αλλά και σημειώνοντας το πως κάποιος/α θα μπορούσε να συνεχίσει τη μελέτη τέτοιων προβλημάτων.

Σε αυτή τη διατριβή θα χρειαστούμε τα εξής προκαταρκτικά: Έστω $I \subset \mathbb{R}$ και έστω $C^0(I)$ ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων στο I . Ανακαλούμε τους εξής συναρτησιακούς χώρους:

$$C^k(I) = \left\{ u : \frac{d^\ell u}{dx^\ell}(x) \in C(I), \ell = 0, \dots, k \right\},$$

$$L^2(I) = \left\{ u : \int_I [u(x)]^2 dx < \infty \right\}, \quad H^1(I) = \{ u \in L^2(I) : u' \in L^2(I) \},$$

οι οποίοι εφοδιάζονται με τις νόρμες

$$\|u\|_{L^2(I)} = \left[\int_I [u(x)]^2 dx \right]^{1/2}, \quad \|u\|_{H^1(I)} = \left[\|u\|_{L^2(I)}^2 + \|u'\|_{L^2(I)}^2 \right]^{1/2}.$$

Ο χώρος $L^2(I)$ εφοδιάζεται, επίσης, με το εσωτερικό γινόμενο

$$(u, w)_I = \int_I u(x)w(x)dx, \quad u, w \in L^2(I),$$

και ισχύει $(u, u)_I = \|u\|_{L^2(I)}^2$, δηλ. η νόρμα παράγεται από το εσωτερικό γινόμενο. Ο χώρος των φραγμένων συναρτήσεων (*essentially bounded functions*) στο I , θα συμβολίζεται με $L^\infty(I)$, με νόρμα $\|u\|_{L^\infty(I)} = \text{ess sup} \{|u(x)| : x \in I\}$.

Τέλος, αναφέρουμε ότι το σύμβολο C (με, ή χωρίς δείκτες και διακοσμήσεις) θα χρησιμοποιηθεί σε αυτή τη διατριβή για να συμβολίζει μια γενική, θετική σταθερά, ανεξάρτητη από τις υπόλοιπες ποσότητες.

2. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΜΕ ΔΙΑΤΑΡΑΧΕΣ

Θεωρούμε το ΠΑΤ: να βρεθεί η $y(t) \in C^1([0,1])$ τέτοια ώστε

$$(1) \quad \varepsilon y'(t) + b(t)y(t) = g(t), y(0) = y_0, t \in I = [0, T]$$

όπου $\varepsilon \in (0, 1]$, y_0, T είναι δοθείσες σταθερές, και $b(t) > 0$, $g(t)$ είναι γνωστές, επαρκώς ομαλές συναρτήσεις. Το πιο πάνω πρόβλημα καλείται ΠΑΤ με **διαταραχές**, για το λόγο ότι οποιαδήποτε αλλαγή (διαταραχή) στη τιμή του ε θα επηρεάσει τη λύση του ΠΑΤ. Θέτοντας $\varepsilon = 0$ στην (1), παίρνουμε τη λύση στο λεγόμενο ανηγμένο πρόβλημα (*reduced problem*) ως

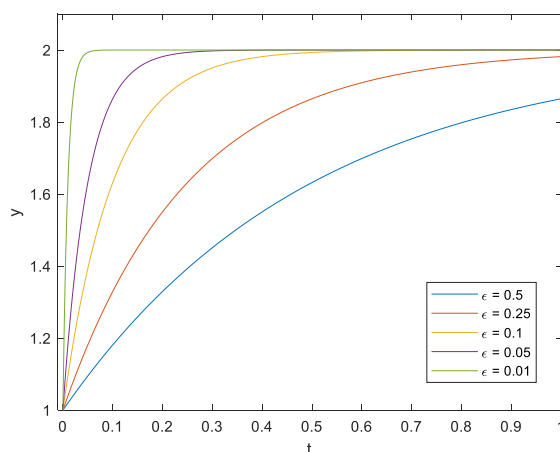
$$(2) \quad y(t) = \frac{g(t)}{b(t)}.$$

Για να ικανοποιείται η αρχική συνθήκη $y(0) = y_0$, θα πρέπει να ισχύει $g(0) = y_0 b(0)$.

Στη γενική περίπτωση δεν αναμένουμε να ισχύει κάτι τέτοιο, άρα πρέπει να συμπεριλάβουμε στη λύση συναρτήσεις διορθώσεως (*correctors*), οι οποίες δημιουργούν τα λεγόμενα **συνοριακά στρώματα** (*boundary layers*) [1]. Αυτό φαίνεται στο Σχήμα 1, όπου δείχνουμε τη λύση του ΠΑΤ

$$(3) \quad \begin{cases} \varepsilon y'(t) + y(t) = 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

δηλ., $y(t) = 2 - e^{-\frac{t}{\varepsilon}}$, για $\varepsilon = 0.5, 0.125, 0.05, 0.01$. Παρατηρούμε ότι η ανηγμένη λύση (*reduced solution*) είναι $y(t) = 2$, αλλά για να ικανοποιηθεί η αρχική συνθήκη χρειάζεται η εκθετική συνάρτηση.



Σχήμα 1: Η λύση του ΠΑΤ (3), για διάφορα ε .

Η λύση της (1) δίδεται από

$$(4) \quad y(t) = y_0 e^{-B(t)/\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} e^{-B(t)/\varepsilon} \int_0^t e^{B(s)/\varepsilon} g(s) ds, \quad B(t) = \int_0^t b(s) ds,$$

που για γενικές $b(t) > 0$, $g(t)$, τα ολοκληρώματα δεν θα μπορούν να υπολογιστούν ακριβώς. Έτσι, θεωρούμε αριθμητικές μεθόδους για τη προσέγγιση της λύσης της (1), και συγκεκριμένα, μεταβολικές μεθόδους *Galerkin* ([1, 7, 10]) όπως θα περιγράψουμε στα Κεφάλαια 3 και 4.

Η ομαλότητα της λύσης y του (1) δίδεται στην εργασία [4], με την προϋπόθεση ότι οι συναρτήσεις $b > 0$, g είναι αναλυτικές (*analytic*) και ικανοποιούν, για $n = 0, 1, 2, \dots$

$$(5) \quad \|b^{(n)}\|_{L^\infty(I)} \leq CK_b^n n!, \quad \|g^{(n)}\|_{L^\infty(I)} \leq CK_g^n n!$$

όπου C, K_b, K_g είναι θετικές σταθερές που εξαρτώνται μόνο από τη b και τη g , αντίστοιχα. Το εξής αποτέλεσμα προέρχεται από την εργασία [4].

Θεώρημα 1:

Έστω y η λύση του (1), και έστω ότι ισχύει η (5). Τότε, η y μπορεί να αναλυθεί ως ένα ομαλό μέρος, ένα συνοριακό στρώμα, και ένα υπόλοιπο, *viz.*

$$y = y_S + y_L + y_R,$$

και υπάρχουν θετικές σταθερές C, K_S, K_L, K_R τέτοιες ώστε

$$\|y_S^{(n)}\|_{L^\infty(I)} \leq CK_S^n n^n, \quad |y_L^{(n)}(t)| \leq CK_L^n n^n e^{-t/\varepsilon}, t \in [0, T], \quad \|y_R^{(k)}\|_{L^\infty(I)} \leq K_R e^{-\delta/\varepsilon}, k = 0, 1.$$

Επίσης, υπάρχει θετική σταθερά K τέτοια ώστε

$$\|y^{(n)}\|_{L^\infty(I)} \leq CK^n \max\{n, \varepsilon^{-1}\}^n.$$

Στη πράξη, το πιο πάνω θεώρημα λέει ότι η λύση y του (1) αποτελείται από ένα ομαλό μέρος y_S , το οποίο είναι αναλυτική συνάρτηση αν τα δεδομένα είναι αναλυτικά, ένα συνοριακό στρώμα y_L που συμπεριφέρεται όπως η συνάρτηση $e^{-t/\varepsilon}$, και ένα εκθετικά μικρό υπόλοιπο. Αυτά θα ληφθούν υπόψη στις αριθμητικές μεθόδους, όπως θα πρωτο-δούμε στην Ενότητα 3.2.

3. Η ΣΥΝΕΧΗΣ ΜΕΘΟΔΟΣ GALERKIN ΓΙΑ ΠΑΤ

Για να ορίσουμε τη μέθοδο, που βασίζεται στην εργασία [10], χωρίζουμε το διάστημα $[0,1]$ σε M υποδιαστήματα $T_M = \{I_k\}_{k=1}^M$, όπου $I_k = [t_k, t_{k+1}]$, $h_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 1, \dots, M$, και ορίζουμε τους εξής χώρους πολυωνύμων:

$$(6) \quad S^{p-1}(T_M, I) = \left\{ u \in H^1(I) : u|_{I_k} \in \Pi_p(I_k), 1 \leq k \leq M \right\},$$

$$(7) \quad S^{p-1,0}(T_M, I) = \left\{ u \in L^2(I) : u|_{I_k} \in \Pi_{p-1}(I_k), 1 \leq k \leq M \right\},$$

όπου

$$\Pi_p(I_k) = \left\{ \sum_{j=0}^p a_j^{[k]} x^j, a_j^{[k]} \in \mathbb{R}, x \in I_k \right\}$$

είναι ο χώρος πολυωνύμων στο I_k , βαθμού $\leq p$.

3.1 Η μεθοδολογία

Πολλαπλασιάζουμε την (1) με μια συνάρτηση ελέγχου $v(t)$, όπως καλείται και η οποία θα επιλεγεί πιο κάτω, και ολοκληρώνουμε στο διάστημα I :

$$\varepsilon \int_0^1 v(t) y'(t) dt + \int_0^1 b(t) v(t) y(t) dt = \int_0^1 v(t) g(t) dt,$$

το οποίο δίνει την εξής σχέση, αφού γράψουμε τα ολοκληρώματα ως αθροίσματα:

$$(8) \quad \varepsilon \sum_{k=1}^M \int_{t_k}^{t_{k+1}} v(t) y'(t) dt + \sum_{k=1}^M \int_{t_k}^{t_{k+1}} b(t) v(t) y(t) dt = \sum_{k=1}^M \int_{t_k}^{t_{k+1}} v(t) g(t) dt.$$

Επομένως ψάχνουμε την $y(t) \in H^1(T_M)$, έτσι ώστε να ισχύει η (8) για κάθε συνάρτηση ελέγχου $v(t) \in L^2(T_M)$. Αυτό καλείται μεταβολικό πρόβλημα και οι εμπλεκόμενοι χώροι είναι άπειρης διάστασης. Για αυτό το λόγο, προσεγγίζουμε τη λύση λύνοντας το εξής **διακριτό** (*discrete*) πρόβλημα: ψάχνουμε μια προσεγγιστική λύση $Y \in S^{p-1}(T_M) \subset H^1(T_M)$ έτσι ώστε να ισχύει

$$\varepsilon \sum_{k=1}^M \int_{t_k}^{t_{k+1}} v(t) Y'(t) dt + \sum_{k=1}^M \int_{t_k}^{t_{k+1}} b(t) v(t) Y(t) dt = \sum_{k=1}^M \int_{t_k}^{t_{k+1}} v(t) g(t) dt,$$

για κάθε $v \in S^{p-1,0}(T_M) \subset L^2(T_M)$. Σημειώνουμε ότι ο χώρος $S^{p,1}(T_M)$ αποτελείται από συνεχή πολυώνυμα, ενώ ο χώρος $S^{p-1,0}(T_M)$ αποτελείται από ασυνεχή (στους κόμβους) πολυώνυμα.

Η μέθοδος μπορεί να γραφτεί και ως μια μεθοδος **χρονοπόρευσης** (*time stepping method*): ξεκινούμε με την αρχική τιμή $Y|_{I_1}(0) = y(0) = y_0$, και βρίσκουμε διαδοχικά τις προσεγγίσεις σε κάθε υποδιάστημα, λύνοντας το μεταβολικό πρόβλημα: να βρεθεί $Y_k = Y|_{I_k} \in \Pi_p(I_k)$ έτσι ώστε

$$(9) \quad \begin{cases} \int_{t_k}^{t_{k+1}} v(t) Y_k'(t) dt + \int_{t_k}^{t_{k+1}} b(t) v(t) Y_k(t) dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} v(t) g(t) dt \\ Y_k(t_k) = Y_{k-1}(t_k) \end{cases}$$

για κάθε $v \in \Pi_{p-1}(I_k)$. Σημειώστε ότι η (καθολική) προσέγγιση $Y(t)$ θα είναι συνεχές πολυώνυμο βαθμού p στο I , δηλ. στα κομβικά σημεία θα έχουμε συνέχεια. Αυτό σημαίνει ότι στο κάθε υποδιάστημα I_k , $k = 1, \dots, M$, θα πρέπει να προσδιορίσουμε $p+1$ συντελεστές. Λόγω της συνέχειας της Y , τα πολυώνυμα πρέπει να ‘ενώνονται’ στα κομβικά σημεία και έτσι κάποιοι από τους συντελεστές θα είναι οι ίδιοι (βλ. εξ. (12) και Σχήμα 3, πιο κάτω).

Τώρα, αφού οι εμπλεκόμενοι πολυωνυμικοί χώροι είναι πεπερασμένης διάστασης τότε έχουν ο κάθε ένας μια βάση που αποτελείται από πολυώνυμα. Θα χρησιμοποιήσουμε ιεραρχικές (*hierarchical*) συναρτήσεις βάσης, δηλ. οι συναρτήσεις βάσης του $S^{p,1}(T_M)$ θα οριστούν με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε όταν προσθέτουμε μια καινούργια συνάρτηση (πολυώνυμο) στη βάση (δηλ. αυξάνουμε τη διάσταση του υπόχωρου), οι υπάρχουσες συναρτήσεις δεν θα επηρεαστούν.

Πρώτα παρατηρούμε ότι κάθε υποδιάστημα $I_k = [t_k, t_{k+1}]$ μπορεί να “μεταφερθεί” στο λεγόμενο διάστημα αναφοράς $\hat{I} = [-1, 1]$ και πίσω, μέσω των απεικονίσεων

$$(10) \quad t = Q_k(\xi) = \frac{(1-\xi)}{2} t_k + \frac{(1+\xi)}{2} t_{k+1}, \quad \xi \in \hat{I}, \quad \xi = Q_k^{-1}(t) = \frac{2t - t_k - t_{k+1}}{t_{k+1} - t_k}, \quad t \in I_k.$$

Οι ιεραρχικές συναρτήσεις βάσης για το $\Pi_p([-1, 1])$ ορίζονται ως εξής (βλ., π.χ. [8]):

$$N_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2}, N_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2},$$

$$N_j(\xi) = \sqrt{\frac{1}{2(2j-3)}} (L_{j-1}(\xi) - L_{j-3}(\xi)), j = 3, 4, \dots, p+1,$$

όπου L_j είναι το βαθμού j πολυώνυμο *Legendre*, του οποίου ο ορισμός δίδεται πιο κάτω.

Ορισμός 1:

Τα πολυώνυμα *Legendre* $\{L_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ βαθμού j , είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$(1-x^2)L_j''(x) - 2xL_j'(x) + j(j+1)L_j(x) = 0.$$

Δίδονται από τον τύπο του *Rodriguez* ως

$$L_j(x) = \frac{1}{2^j j!} \frac{d^j}{dx^j} (x^2 - 1)^j,$$

και ικανοποιούν $L_j(1) = 1, L_j(-1) = (-1)^j$, αλλά και $\int_{-1}^1 L_i(x)L_j(x)dx = \frac{2}{2j+1} \delta_{ij}$, όπου δ_{ij} το δέλτα του *Kronecker*.

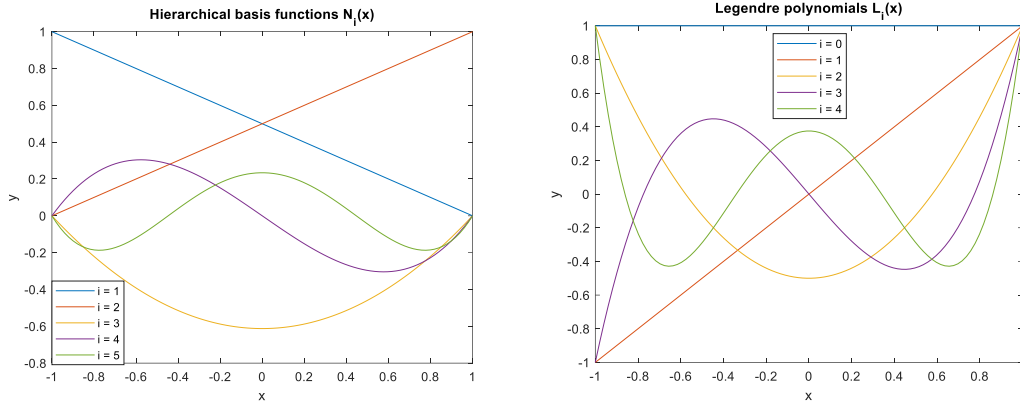
Άρα, επιλέγουμε ως βάση του χώρου $\Pi_p([-1,1])$:

$$\Pi_p([-1,1]) = \text{span}\{N_1, N_2, N_3, \dots, N_{p+1}\}.$$

Για το χώρο $\Pi_{p-1}([-1,1])$ θα χρησιμοποιήσουμε

$$\Pi_{p-1}([-1,1]) = \text{span}\{L_0, L_2, \dots, L_{p-1}\}.$$

Στο Σχήμα 2, δείχνουμε τις πρώτες 5 ιεραρχικές συναρτήσεις βάσης, αλλά και τα πρώτα 5 πολυώνυμα *Legendre*. Παρατηρούμε ότι τα πολυώνυμα $N_i(x)$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη προσέγγιση συνεχών συναρτήσεων στους κόμβους (λόγω των N_1, N_2), ενώ τα $L_i(x)$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη προσέγγιση ασυνεχών συναρτήσεων (στους κόμβους).



Σχήμα 2: Οι πρώτες 5 ιεραρχικές συναρτήσεις βάσης (αριστερά) και τα πρώτα 5 πολυώνυμα Legendre (δεξιά).

Επομένως, μεταφέρουμε την εξίσωση (8) στο διάστημα αναφοράς $[-1, 1]$ για να χρησιμοποιήσουμε τις ιεραρχικές συναρτήσεις βάσης, και αφού $Y_k \in \Pi^p(I_k)$ τότε η Y_k μπορεί να γραφτεί ως ο γραμμικός συνδυασμός

$$(11) \quad Y_k = Y(Q_k(\xi)) = \sum_{j=1}^{p+1} a_j^{[k]} N_j(\xi) \in \Pi_p([-1,1]).$$

Επιλέγουμε $v(Q_k(\xi)) = L_i(\xi) \in \Pi_{p-1}([-1,1])$, $i = 0, 1, \dots, p-1$ και έτσι φτάνουμε στο

$$\varepsilon \int_{-1}^1 Y_k'(\xi) L_i(\xi) d\xi + \frac{h_k}{2} \int_{-1}^1 Y_k(\xi) b(Q_k(\xi)) L_i(\xi) d\xi = \frac{h_k}{2} \int_{-1}^1 L_i(\xi) g(Q_k(\xi)) d\xi.$$

Από την αρχική συνθήκη παίρνουμε

$$(12) \quad y_0 = Y(-1) = \sum_{j=1}^{p+1} a_j^{[k]} N_j(-1) = \alpha_1,$$

επομένως

$$Y_k(\xi) = a_1^{[k]} N_1(\xi) + \sum_{j=2}^{p+1} a_j^{[k]} N_j(\xi),$$

$$Y_k'(\xi) = a_1^{[k]} N_1'(\xi) + \sum_{j=2}^{p+1} a_j^{[k]} N_j'(\xi).$$

Αντικαθιστούμε στο ΠΑΤ και έχουμε

$$\varepsilon \int_{-1}^1 [a_1^{[k]} N_1'(\xi) + \sum_{j=2}^{p+1} a_j^{[k]} N_j'(\xi)] L_i(\xi) d\xi - \frac{h_k}{2} \int_{-1}^1 [a_1^{[k]} N_1(\xi) + \sum_{j=2}^{p+1} a_j^{[k]} N_j(\xi)] b(Q_k(\xi)) L_i(\xi) d\xi = \frac{h_k}{2} \int_{-1}^1 g(Q_k(\xi)) L_i(\xi) d\xi.$$

Χωρίζοντας τους γνωστούς από τους αγνώστους, παίρνουμε

$$\sum_{j=2}^{p+1} a_j^{[k]} \int_{-1}^1 \left[\varepsilon N'_j(\xi) L_i(\xi) + \frac{h_k}{2} N_j(\xi) b(Q_k(\xi)) L_i(\xi) \right] d\xi = \frac{h_k}{2} \int_{-1}^1 g(Q_k(\xi)) L_i(\xi) d\xi - \varepsilon \int_{-1}^1 a_1^{[k]} N'_1(\xi) L_i(\xi) d\xi + \frac{h_k}{2} \int_{-1}^1 a_1^{[k]} N_1(\xi) b(Q_k(\xi)) L_i(\xi) d\xi, \quad j=0,1,2, \dots, p-1.$$

Εν τέλει, για να βρούμε τη προσεγγιστική λύση Y στο διάστημα I_k , έχουμε να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα (για κάθε βήμα $k = 1, 2, \dots, M$) p εξισώσεων με p αγνώστους:

$$(13) \quad A^{[k]} a^{[k]} = F^{[k]},$$

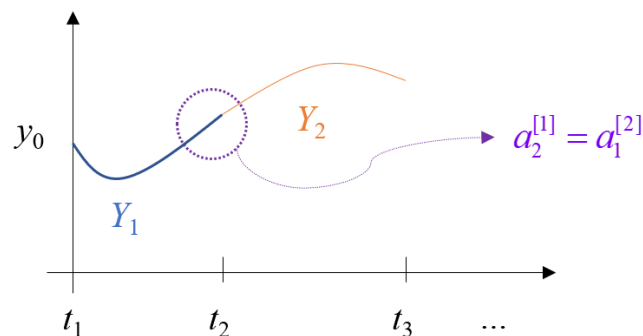
όπου για $j = 1, 2, \dots, p$, $i = 0, 1, \dots, p-1$,

$$(14) \quad A_{i+1,j}^{[k]} = \int_{-1}^1 \left[\varepsilon \cdot N'_j(\xi) L_i(\xi) + \frac{h_k}{2} N_j(\xi) b(Q_k(\xi)) L_i(\xi) \right] d\xi,$$

$$(15) \quad \vec{F}_{i+1}^{[k]} = \frac{h_k}{2} \int_{-1}^1 g(Q_k(\xi)) L_i(\xi) d\xi - \varepsilon \int_{-1}^1 a_1^{[k]} N'_1(\xi) L_i(\xi) d\xi - \frac{h_k}{2} \int_{-1}^1 a_1^{[k]} N_1(\xi) b(Q_k(\xi)) L_i(\xi) d\xi,$$

και $a^{[k]} = [a_2^{[k]}, \dots, a_{p+1}^{[k]}]^T$ είναι οι άγνωστοι συντελεστές.

Συνοπτικά, δοθέντος την αρχική συνθήκη y_0 , λύνουμε το σύστημα (13) για τους συντελεστές $a^{[1]} = [y_0, a_2^{[1]}, \dots, a_{p+1}^{[1]}]$. Στη συνέχεια, θέτουμε $a_1^{[2]} = a_2^{[1]} = y_0$ και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για να βρούμε τους συντελεστές του δεύτερου διαστήματος, κ.ο.κ. Στο τέλος, θα έχουμε ένα 'πίνακα συντελεστών', του οποίου η στήλη k θα δίνει τους συντελεστές του διαστήματος k , με τη πρώτη θέση της επόμενης στήλης να ισούται με τη δεύτερη θέση της προηγούμενης (λόγω συνέχειας). Στο Σχήμα 3, η πιο πάνω παρατήρηση φαίνεται γραφικά.



Σχήμα 3: Η συνέχεια της προσέγγισης στα κομβικά σημεία.

Στην εργασία [10] η μέθοδος αυτή χρησιμοποιήθηκε για προβλήματα των οποίων οι λύσεις είναι ομαλές (π.χ., αναλυτικές) συναρτήσεις, αλλά και για προβλήματα με λύσεις που παρουσιάζουν ιδιομορφίες (*singularities*). Στην επόμενη υπο-ενότητα θα δούμε την εφαρμογή της μεθόδου σε ΠΑΤ με διαταραχές.

3.2 Εφαρμογή της μεθόδου σε προβλήματα με διαταραχές

Για προβλήματα με διαταραχές, όπως αναφέραμε στο Κεφάλαιο 2, η λύση συμπεριφέρεται πολύ διαφορετικά σε διαφορετικά μέρη του διαστήματος: σε ένα (υπο)διάστημα μήκους $O(\varepsilon)$ η λύση συμπεριφέρεται ως τη συνάρτηση $e^{-t/\varepsilon}$, και στο υπόλοιπο διάστημα η λύση είναι όσο ομαλή όσο τα δεδομένα. Έχοντας υπόψη το λεγόμενο **Φασματικό Πλέγμα Συνοριακών Στρωμάτων** (*Spectral Boundary Layer mesh*) [2, 3], για ε μικρό κάνουμε δύο βήματα και θα δούμε ότι με αυτή την επιλογή θα έχουμε ομοιόμορφη (για όλα τα ε), εκθετική (καθώς το p αυξάνεται) σύγκλιση. Συγκεκριμένα, χωρίζουμε το διάστημα $(0, 1)$ σε 2 υποδιαστήματα $(0, p\varepsilon)$ και $(p\varepsilon, 1)$, και στο καθένα χρησιμοποιούμε πολυώνυμα βαθμού p για την προσέγγιση της λύσης. Αυτή η περίπτωση αντιστοιχεί στις επιλογές $M = 2$, $t_1 = 0$, $t_2 = p\varepsilon$, $t_3 = T$, στο Εδάφιο 3.1, και στο Σχήμα 4 το δείχνουμε γραφικά.



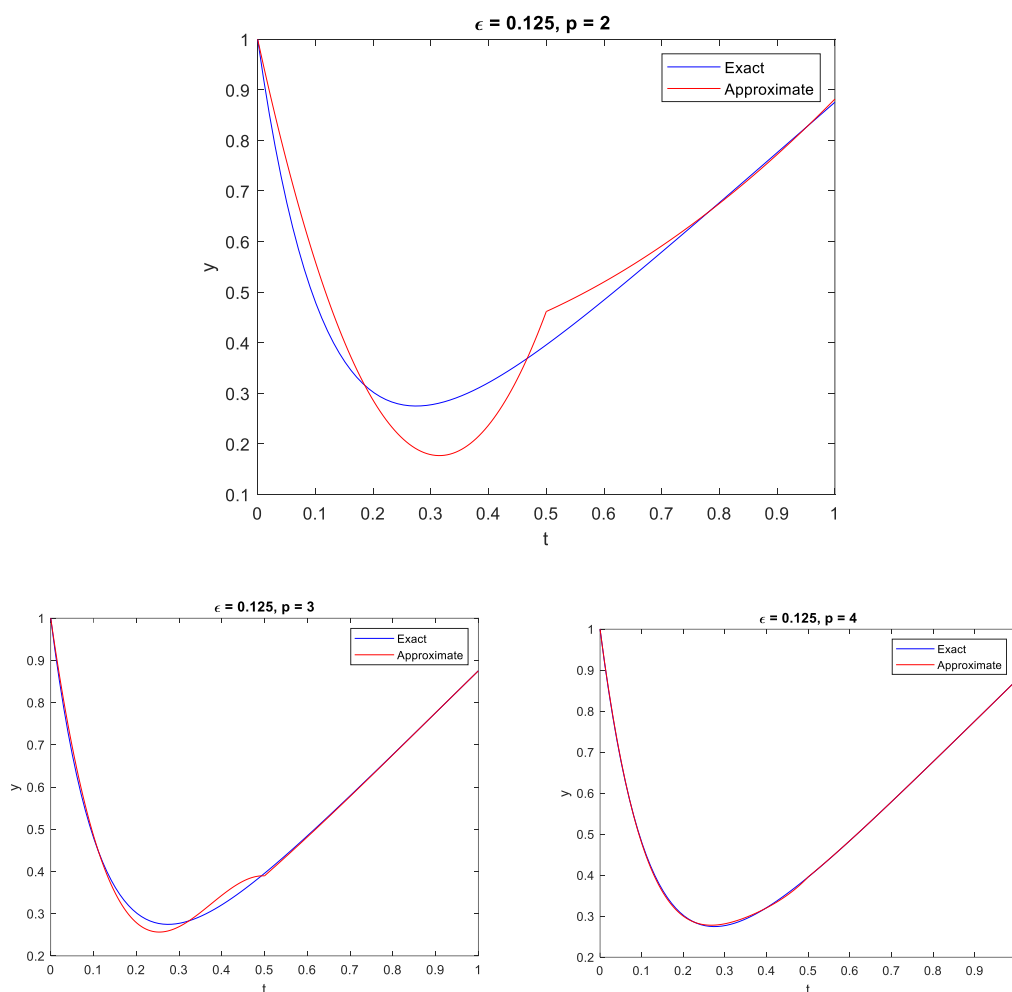
Σχήμα 4: Το Φασματικό Πλέγμα Συνοριακών Στρωμάτων.

3.2.1 Αριθμητικά Αποτελέσματα

Παράδειγμα 3.1: Θεωρούμε το εξής ΠΑΤ:

$$\varepsilon y'(t) + y(t) = t, y(0) = 1, t \in (0, 1].$$

Η ακριβής λύση είναι $y(t) = t - \varepsilon + (1 + \varepsilon)e^{-t/\varepsilon}$ και έτσι μπορούμε με βεβαιότητα να υπολογίσουμε τα σφάλματα. Πρώτα, στο Σχήμα 5 δείχνουμε την ακριβή λύση μαζί με τη προσεγγιστική λύση για $\varepsilon = 0.125$, όταν κάνουμε δύο (ομοιόμορφα) βήματα $[0, 0.5]$, $[0.5, 1]$, και χρησιμοποιούμε $p = 2, 3$ και 4 .

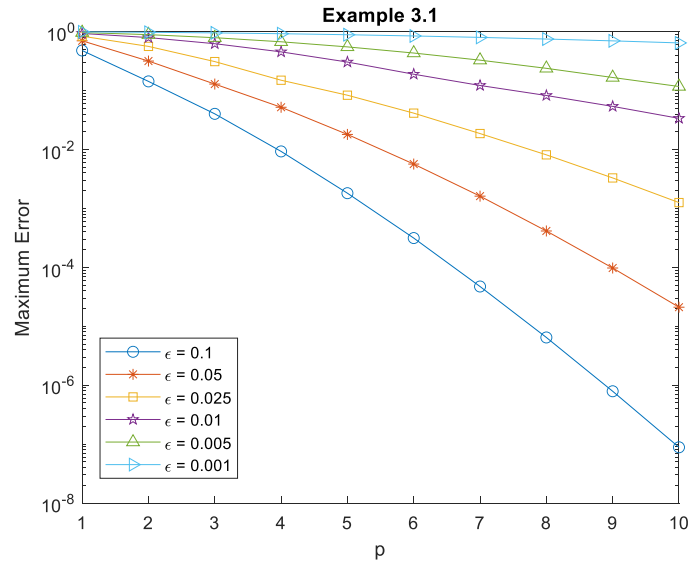


Σχήμα 5: Η ακριβής και η προσεγγιστική λύση για το Παράδειγμα 3.1

Παρατηρούμε ότι όταν $p = 4$, η προσέγγιση (με ομοιόμορφο βήμα) δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα, μια και το ϵ δεν είναι τόσο μικρό.

Αυτό δεν ισχύει για μικρότερα ϵ . Στο Σχήμα 6 δείχνουμε τη σύγκλιση της μεθόδου (με ομοιόμορφο βήμα) καθώς το p αυξάνεται, για διάφορες τιμές του ϵ .

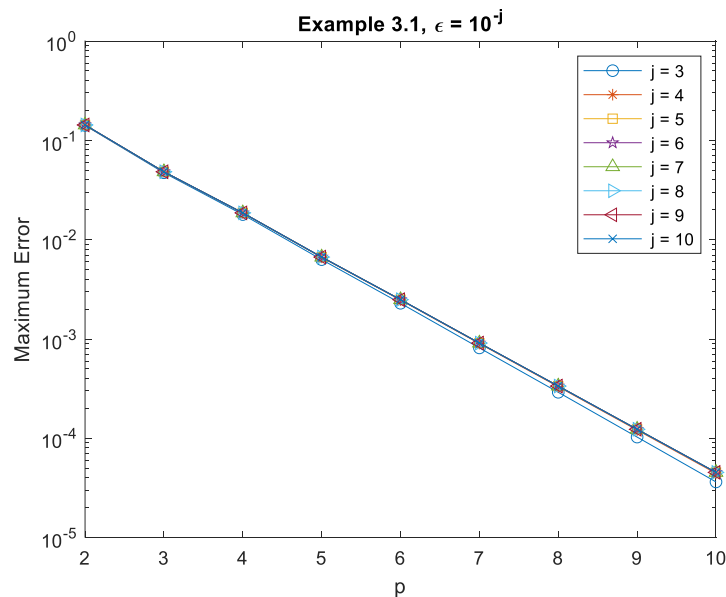
Συγκεκριμένα, δείχνουμε το μέγιστο σφάλμα μεταξύ της ακριβούς και της προσεγγιστικής λύσης έναντι του p σε ημι-λογαριθμική κλίμακα – οι ευθείες υποδεικνύουν εκθετική σύγκλιση. Είναι φανερό ότι ενώ για ϵ “μεγάλο” η μέθοδος συγκλίνει εκθετικά και δίνει πολύ μικρά σφάλματα, όταν $\epsilon \rightarrow 0$ (δυστυχώς) η μέθοδος χειροτερεύει αισθητά.



Σχήμα 6: Σύγκλιση της μεθόδου, με ομοιόμορφο βήμα.

Αυτό συμβαίνει διότι καθώς $\epsilon \rightarrow 0$, η λύση παρουσιάζει συνοριακό στρώμα κοντά στο $t = 0$, και το βήμα δεν θα έπρεπε να ήταν ομοιόμορφο, αλλά όπως αναφέραμε στην αρχή της Ενότητας 3.2, θα πρέπει, π.χ. να βασίζεται στο *Φασματικό Πλέγμα Συνοριακών Στρωμάτων*.

Στο Σχήμα 7 δείχνουμε τη σύγκλιση της μεθόδου όταν χρησιμοποιήσουμε το *Φασματικό Πλέγμα Συνοριακών Στρωμάτων*, και παρατηρούμε εκθετική σύγκλιση ανεξαρτήτως του ϵ .



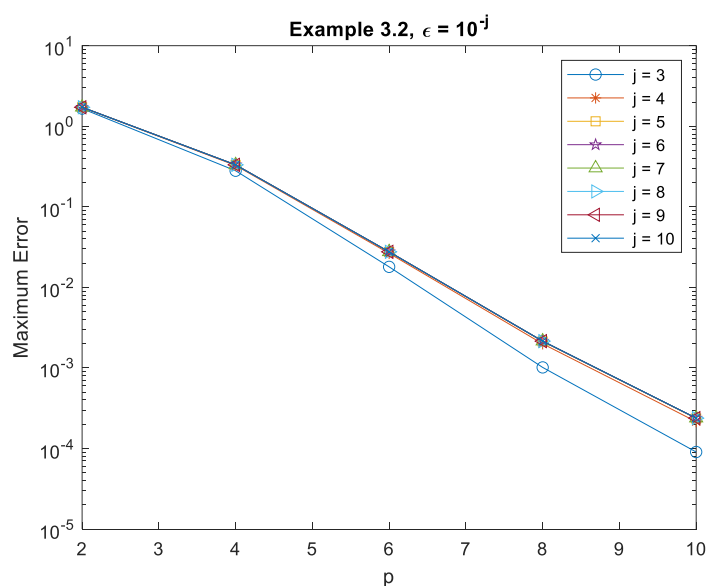
Σχήμα 7: Σύγκλιση της μεθόδου, με 2 βήματα, $[0, p \epsilon]$, $[p \epsilon, 1]$.

Παραθέτουμε ακόμη ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.2: Θεωρούμε το εξής ΠΑΤ:

$$\varepsilon y'(t) + e^{-2t^2} y(t) = \sin(\pi t), y(0) = 1, t \in (0, 1].$$

Η ακριβής λύση δεν είναι διαθέσιμη, έτσι για τον υπολογισμό των σφαλμάτων χρησιμοποιούμε μια λύση αναφοράς (*reference solution*), την οποία υπολογίσαμε με πολύ περισσότερη ακρίβεια. Στο Σχήμα 8, δείχνουμε τη σύγκλιση της μεθόδου καθώς το p αυξάνεται, για διάφορες τιμές του $\varepsilon \rightarrow 0$, όταν χρησιμοποιήσουμε δύο βήματα (όπως καθορίζει το *Φασματικό Πλέγμα Συνοριακών Στρωμάτων*). Δεν δείχνουμε αποτελέσματα για ομοιόμορφο βήμα, αφού δεν αναμένουμε ομοιόμορφη (ως προς ε) σύγκλιση.



Σχήμα 8: Σύγκλιση της μεθόδου, με 2 βήματα, $[0, p \varepsilon]$, $[p \varepsilon, 1]$.

4. Η ΑΣΥΝΕΧΗΣ ΜΕΘΟΔΟΣ GALERKIN ΓΙΑ ΠΑΤ

4.1 Η μεθοδολογία

Πολλαπλασιάζουμε την (1) με μια συνάρτηση ελέγχου $v(t)$ όπως καλείται, όπως επίσης και με $1/\varepsilon$, και ολοκληρώνουμε στο διάστημα I :

$$\int_0^1 v(t)y'(t)dt + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 b(t)v(t)y(t)dt = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 v(t)g(t)dt,$$

το οποίο δίνει την εξής σχέση, αφού γράψουμε το ολοκλήρωμα ως άθροισμα:

(16)

$$\sum_{k=1}^M \int_{t_k}^{t_{k+1}} v(t)y'(t)dt + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^M \int_{t_k}^{t_{k+1}} b(t)v(t)y(t)dt = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^M \int_{t_k}^{t_{k+1}} v(t)g(t)dt.$$

Επομένως ψάχνουμε $y(t) \in H^1(T_M)$ τέτοια ώστε να ισχύει η (16), για κάθε συνάρτηση ελέγχου $v(t) \in L^2(T_M)$.

Θα δείξουμε την μεθοδολογία για 2 βήματα επειδή το πρώτο βήμα διαφέρει από τα υπόλοιπα (τα οποία είναι εντελώς ανάλογα με το δεύτερο), έτσι το 2^ο βήμα θα μπορεί να διαμορφωθεί ως τρίτο, τέταρτο κλπ. Για την εξεύρεση της προσεγγιστικής λύσης στο πρώτο διάστημα I_1 ορίζουμε τη τιμή

$$y_0 = \lim_{t \rightarrow t_1^-} y(t) =: y_1^+.$$

Μια και η y είναι συνεχής συνάρτηση, ισχύει

$$y_0 - y_1^+ = 0.$$

Άρα πολλαπλασιάζοντας τη διαφορά τους με τη τιμή της συνάρτησης ελέγχου v_1^+ έχουμε

$$v_1^+(y_0 - y_1^+) = 0.$$

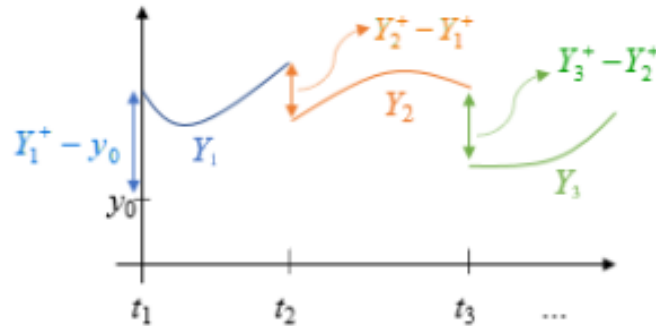
Προσθέτοντας το πιο πάνω στην εξίσωση (16), παίρνουμε το εξής πρόβλημα: να βρεθεί η $y(t) \in H^1(T_M)$ τέτοια ώστε

$$v_1^+ y_1^+ + \int_{t_1}^{t_2} v_1(t)y'(t)dt + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_1}^{t_2} b(t)v_1(t)y(t)dt = v_1^+ y_0 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_1}^{t_2} v_1(t)g(t)dt$$

Στο διακριτό επίπεδο, η μέθοδος θα είναι *ασυνεχής*, δηλαδή στα κομβικά σημεία οι συναρτήσεις $v(t)$ και $Y(t)$ θα παρουσιάζουν ασυνέχεια. Με άλλα λόγια, ψάχνουμε $Y \in S^{p-1,0}(T_M)$ έτσι ώστε να ισχύει

$$(17) \quad v_1^+ Y_1^+ + \int_{t_1}^{t_2} v_1(t) Y_1'(t) dt + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_1}^{t_2} b(t) v_1(t) Y_1(t) dt = v_1^+ y_0 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_1}^{t_2} v_1(t) g(t) dt$$

για κάθε $v \in S^{p-1,0}(T_M)$, όπου $Y_1^+ = \lim_{t \rightarrow t_1^+} Y_1(t)$. Στο πιο κάτω σχήμα δείχνουμε γραφικά τα πιο πάνω.



Σχήμα 9: Η ασυνεχής προσέγγιση.

Όπως και στη περίπτωση της συνεχούς μεθόδου *Galerkin*, παρατηρούμε ότι κάθε υποδιάστημα $I_k = [t_k, t_{k+1}]$ μπορεί να μεταφερθεί στο λεγόμενο διάστημα αναφοράς $\hat{I} = [-1, 1]$ και πίσω, μέσω των απεικονίσεων (10):

$$t = Q_k(\xi) = \frac{(1-\xi)}{2} t_k + \frac{(1+\xi)}{2} t_{k+1}, \quad \xi \in \hat{I}, \quad \xi = Q_k^{-1}(t) = \frac{2t - t_k - t_{k+1}}{t_{k+1} - t_k}, \quad t \in I_k.$$

Ακολουθώντας τα ίδια βήματα με την περίπτωση της συνεχούς μεθόδου *Galerkin*, μεταφέρουμε την εξίσωση (17) στο διάστημα αναφοράς $[-1, 1]$, και αφού $Y|_{I_k} \in \Pi_{p-1}(I_k)$ τότε η $Y|_{I_k}$ γράφεται ως

$$Y|_{I_k} = Y(Q_k(\xi)) = \sum_{j=0}^{p-1} a_{j+1}^{[k]} L_j(\xi) \in S^{p-1,0}([-1, 1]).$$

Επιλέγουμε $v(Q_k(\xi))=L_i(\xi) \in \Pi_{p-1}([-1,1])$, $i = 0,1, \dots, p-1$ και αντικαθιστώντας στην (17) έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{p-1} a_{j+1}^{[1]} L_j(-1) L_i(-1) + \sum_{j=0}^{p-1} \int_{-1}^1 a_{j+1}^{[1]} L_j'(\xi) L_i(\xi) d\xi \\ + \frac{1}{\varepsilon} \frac{h_1}{2} \sum_{j=0}^{p-1} \int_{-1}^1 a_{j+1}^{[1]} L_j(\xi) b(Q_1(\xi)) L_i(\xi) d\xi = L_i(-1) Y_0 \\ + \frac{1}{\varepsilon} \frac{h_1}{2} \int_{-1}^1 L_i(\xi) g(Q_1(\xi)) d\xi \end{aligned}$$

Από τις ιδιότητες των πολυωνύμων Legendre έχουμε ότι

$$L_j(1) = 1, \quad L_j(-1) = (-1)^j.$$

Επομένως, το πρόβλημα μετατρέπεται σε

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{p-1} \left[a_{j+1}^{[1]} (-1)^{i+j} + \int_{-1}^1 a_{j+1}^{[1]} L_j'(\xi) L_i(\xi) d\xi + \frac{1}{\varepsilon} \frac{h_1}{2} \int_{-1}^1 a_{j+1}^{[1]} L_j(\xi) b(Q_1(\xi)) L_i(\xi) d\xi \right] \\ = (-1)^i Y_0 + \frac{1}{\varepsilon} \frac{h_1}{2} \int_{-1}^1 L_i(\xi) g(Q_1(\xi)) d\xi \end{aligned}$$

για $i = 0,1, \dots, p-1$, $j = 0,1, \dots, p-1$. Εν τέλει για να βρούμε τη προσεγγιστική λύση Y , έχουμε να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα με p εξισώσεις σε p αγνώστους:

$$[A^{[1]} + S^{[1]}]a^{[1]} = F^{[1]},$$

όπου για $i = 0,1, \dots, p-1$, $j = 0,1, \dots, p-1$,

$$A_{i+1,j+1}^{[1]} = \int_{-1}^1 L_j'(\xi) L_i(\xi) d\xi + \frac{1}{\varepsilon} \frac{h_1}{2} \int_{-1}^1 L_j(\xi) b(Q_1(\xi)) L_i(\xi) d\xi,$$

$$S_{i+1,j+1}^{[1]} = (-1)^{i+j},$$

$$\vec{F}_{i+1}^{[1]} = (-1)^i Y_0 + \frac{1}{\varepsilon} \frac{h_1}{2} \int_{-1}^1 g(Q_1(\xi)) L_i(\xi) d\xi.$$

Ο πίνακας $A^{[1]}$ και το διάνυσμα $F^{[1]}$ υπολογίζονται με αριθμητική ολοκλήρωση, ενώ ο πίνακας $S^{[1]}$ δίδεται από

$$S^{[1]} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & -1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 1 & -1 & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Λύνοντας το πιο πάνω βρίσκουμε την προσεγγιστική λύση στο διάστημα I_1 .

Με ανάλογο τρόπο λειτουργούμε για το δεύτερο διάστημα I_2 . Παρατηρούμε ότι $y_2(t_2) = y_1(t_2)$. Άρα πολλαπλασιάζοντας τη διαφορά τους με τη τιμή της συνάρτησης ελέγχου v_2^+ έχουμε

$$v_1^+ y_2(t_2) = v_1^+ y_1(t_2).$$

Όμως $y_1(t_2) = \sum_{j=0}^{p-1} a_{j+1}^{[1]} L_j(1)$. Ακολουθώντας πλέον την ίδια διαδικασία παίρνουμε

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{p-1} a_{j+1}^{[2]} L_j(-1) L_i(-1) + \sum_{j=0}^{p-1} \int_{-1}^1 a_{j+1}^{[2]} L_j'(\xi) L_i(\xi) d\xi \\ + \frac{1}{\varepsilon} \frac{h_2}{2} \sum_{j=0}^{p-1} \int_{-1}^1 a_{j+1}^{[2]} L_j(\xi) b(Q_2(\xi)) L_i(\xi) d\xi = L_i(-1) \sum_{j=0}^{p-1} a_{j+1}^{[1]} L_j(1) \\ + \frac{1}{\varepsilon} \frac{h_2}{2} \int_{-1}^1 L_i(\xi) g(Q_2(\xi)) d\xi \end{aligned}$$

Από τις ιδιότητες των πολυωνύμων Legendre (βλ. Ορισμό 1), έχουμε ότι

$$L_j(1) = 1, \quad L_j(-1) = (-1)^j.$$

Επομένως, το πρόβλημα μετατρέπεται σε

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{p-1} \left[a_{j+1}^{[2]} (-1)^{i+j} + \int_{-1}^1 a_{j+1}^{[2]} L_j'(\xi) L_i(\xi) d\xi + \frac{1}{\varepsilon} \frac{h_2}{2} \int_{-1}^1 a_{j+1}^{[2]} L_j(\xi) b(Q_2(\xi)) L_i(\xi) d\xi \right] \\ = \sum_{j=0}^{p-1} a_{j+1}^{[1]} (-1)^i + \frac{1}{\varepsilon} \frac{h_2}{2} \int_{-1}^1 L_i(\xi) g(Q_2(\xi)) d\xi \end{aligned}$$

για $i = 0, 1, \dots, p-1$, $j = 0, 1, \dots, p-1$. Εν τέλει για να βρούμε τη προσεγγιστική λύση Y , έχουμε να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα με p εξισώσεις σε p αγνώστους:

$$[A^{[2]} + S^{[2]}] a^{[2]} = F^{[2]},$$

όπου για $i = 0, 1, \dots, p-1$, $j = 0, 1, \dots, p-1$,

$$A_{i+1, j+1}^{[2]} = \int_{-1}^1 L_j'(\xi) L_i(\xi) d\xi + \frac{1}{\varepsilon} \frac{h_2}{2} \int_{-1}^1 L_j(\xi) b(Q_2(\xi)) L_i(\xi) d\xi,$$

$$S_{i+1, j+1}^{[1]} = (-1)^{i+j},$$

$$\vec{F}_{i+1}^{[2]} = (-1)^i \sum_{j=0}^{p-1} a_{j+1}^{[1]} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{h_2}{2} \int_{-1}^1 g(Q_2(\xi)) L_i(\xi) d\xi.$$

Ο πίνακας $A^{[2]}$ και το διάνυσμα $F^{[2]}$ υπολογίζονται μέσω αριθμητικής ολοκλήρωσης, ενώ ο πίνακας $S^{[1]}$ δίδεται από

$$S^{[1]} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \dots\dots & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & \dots\dots & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & \dots\dots & -1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots\dots & \vdots & \vdots \\ -1 & 1 & -1 & \dots\dots & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Λύνοντας το πιο πάνω βρίσκουμε την προσεγγιστική λύση στο διάστημα I_2 . Όπως προαναφέραμε, για περισσότερα υποδιαστήματα, η διαδικασία είναι η ίδια με το διάστημα I_2 .

4.2 Εφαρμογή της μεθόδου σε προβλήματα με διαταραχές

Για προβλήματα με διαταραχές, όπως ήδη είδαμε, ομοιόμορφα βήματα δεν αναμένεται να δώσουν τη καλύτερη λύση για μικρά ε . Στην επόμενη υπο-ενότητα θα επαναλάβουμε τα προηγούμενα παραδείγματα, χρησιμοποιώντας την ασυνεχή μέθοδο, μόνο για 2 βήματα όπως περιγράφονται από το Φασματικό Πλέγμα Συνοριακών Στρωμάτων [3].

4.2.1 Αριθμητικά Αποτελέσματα

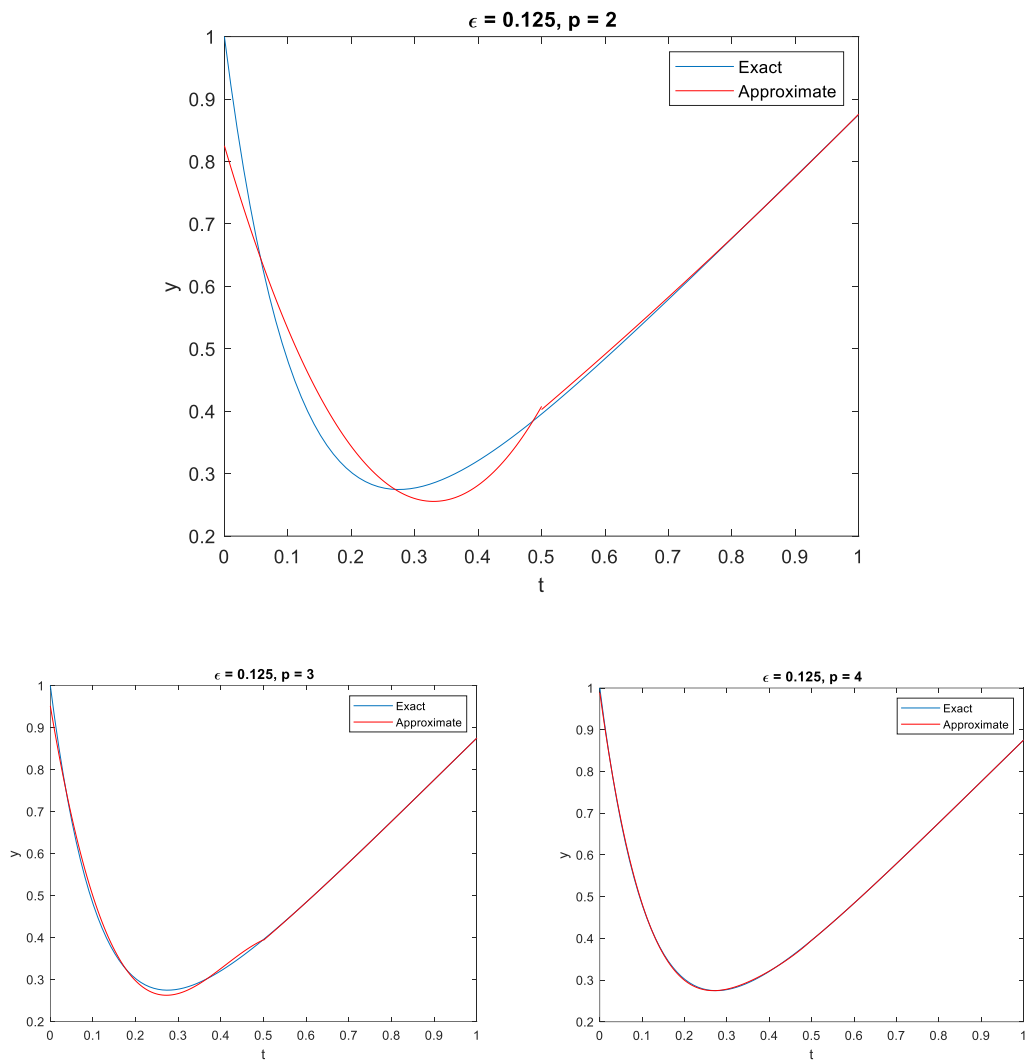
Παράδειγμα 4.1: Θεωρούμε το ίδιο ΠΑΤ με το Παράδειγμα 3.1, δηλ.

$$\varepsilon y'(t) + y(t) = t, y(0) = 1, t \in (0, 1].$$

Η ακριβής λύση είναι $y(t) = t - \varepsilon + (1 + \varepsilon)e^{-t/\varepsilon}$ και έτσι μπορούμε με βεβαιότητα να υπολογίσουμε τα σφάλματα. Πρώτα, στο Σχήμα 10, δείχνουμε την ακριβή λύση μαζί με τη προσεγγιστική λύση για $\varepsilon = 0.125$, όταν κάνουμε δύο (ομοιόμορφα) βήματα $[0, 0.5]$, $[0.5, 1]$, και χρησιμοποιούμε $p = 2, 3$ και 4.

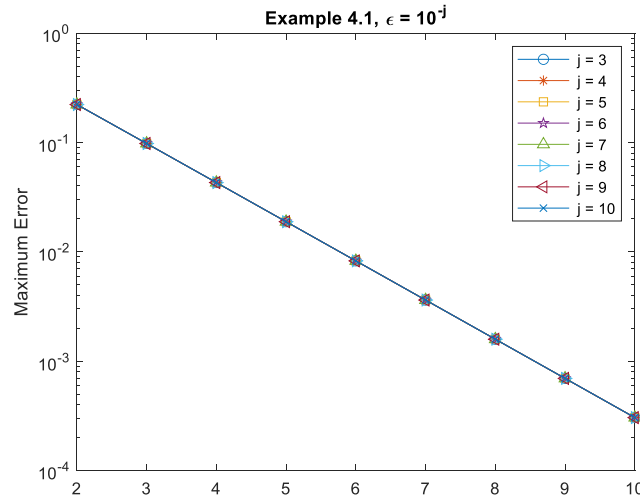
Αν και με δυσκολία, βλέπουμε την ασυνεχή φύση της προσέγγισης. Επίσης, παρατηρούμε ότι όταν $p = 4$, η προσέγγιση (με ομοιόμορφο βήμα) δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα, μια και το ε δεν είναι τόσο μικρό. Όπως και στη περίπτωση της συνεχούς μεθόδου, αυτό δεν ισχύει για μικρότερα ε και για αυτό το

λόγο δεν θα θεωρήσουμε ομοιόμορφα βήματα στους υπόλοιπους υπολογισμούς αυτού του κεφαλαίου.



Σχήμα 10: Η ακριβής και η προσεγγιστική λύση για το Παράδειγμα 4.1

Στο Σχήμα 11 δείχνουμε τη σύγκλιση της μεθόδου όταν χρησιμοποιήσουμε το *Φασματικό Πλέγμα Συνοριακών Στρωμάτων*, και παρατηρούμε εκθετική σύγκλιση ανεξαρτήτως του ϵ .

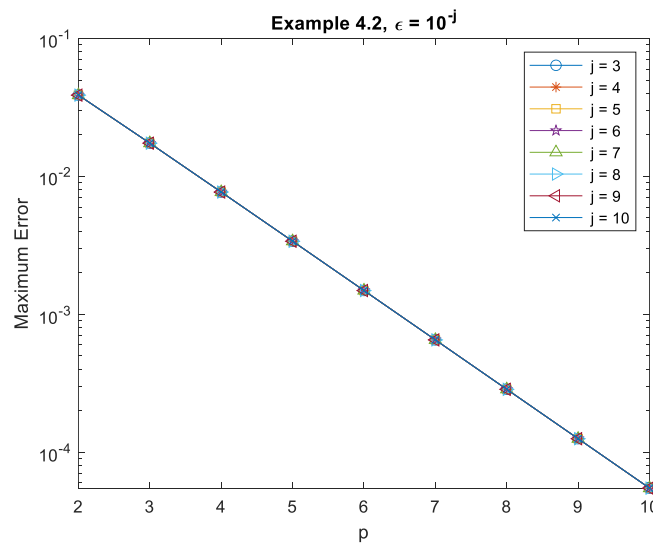


Σχήμα 11: Σύγκλιση της μεθόδου, με 2 βήματα, $[0, p \epsilon]$, $[p \epsilon, 1]$.

Παράδειγμα 4.2: Θεωρούμε το ίδιο ΠΑΤ με το Παράδειγμα 3.2, δηλ.

$$\epsilon y'(t) + e^{-2t^2} y(t) = \sin(\pi t), y(0) = 1, t \in (0, 1].$$

Η ακριβής λύση δεν είναι διαθέσιμη, έτσι για τον υπολογισμό των σφαλμάτων χρησιμοποιούμε μια λύση αναφοράς (*reference solution*), την οποία υπολογίσαμε με πολύ περισσότερη ακρίβεια. Στο Σχήμα 12, δείχνουμε τη σύγκλιση της μεθόδου καθώς το p αυξάνεται, για διάφορες τιμές του $\epsilon \rightarrow 0$, όταν χρησιμοποιήσουμε δύο βήματα (όπως καθορίζει το *Φασματικό Πλέγμα Συνοριακών Στρωμάτων*).



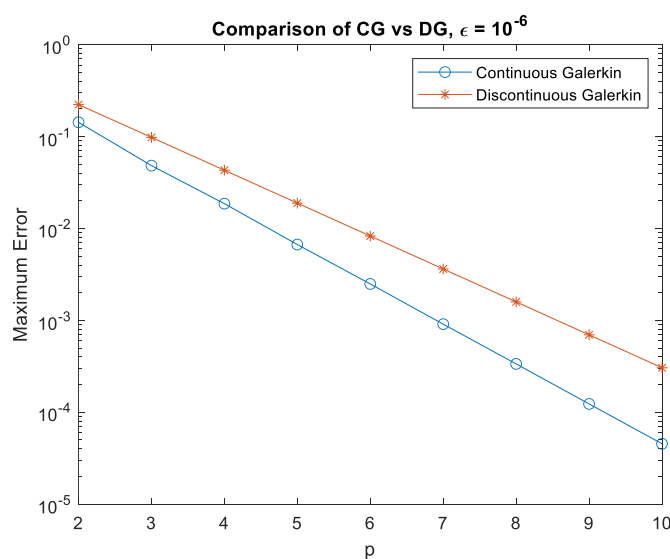
Σχήμα 12: Σύγκλιση της μεθόδου, με 2 βήματα, $[0, p \epsilon]$, $[p \epsilon, 1]$.

5. ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Σε αυτή τη διατριβή μελετήσαμε αριθμητικές μεθόδους *Galerkin* για ΠΑΤ με διαταραχές. Είδαμε ότι με τη σωστή επιλογή του πλέγματος (βημάτων), η συνεχής αλλά και η ασυνεχής μέθοδος *Galerkin* συγκλίνουν εκθετικά, καθώς το p αυξάνεται, ανεξαρτήτως του ε . Η ερώτηση “ποια από τις δύο δίνει καλύτερα αποτελέσματα”, απαντάται εδώ, για το ΠΑΤ του Παραδείγματος 3.1:

$$\varepsilon y'(t) + y(t) = t, y(0) = 1, t \in (0,1],$$

με ακριβή λύση, $y(t) = t - \varepsilon + (1 + \varepsilon)e^{-t/\varepsilon}$. Επιλέγουμε $\varepsilon = 10^{-6}$ (άλλες τιμές του ε έδωσαν τα ίδια αποτελέσματα), και στο Σχήμα 13 δείχνουμε τη σύγκλιση των δύο μεθόδων, έναντι του p . Βλέπουμε ότι, για αυτό το ΠΑΤ, η συνεχής μέθοδος είναι ελαφρώς καλύτερη.



Σχήμα 13: Σύγκλιση των 2 μεθόδων

Η μεθοδολογία που παρουσιάστηκε σε αυτή τη διατριβή εφαρμόζεται και σε *συστήματα* αρχικών τιμών (με διαταραχές), όπως το πιο κάτω:

$$\varepsilon \frac{d}{dt} \vec{y}(t) + A(t) \vec{y}(t) = \vec{F}(t), t \in (0,1]$$

$$\vec{y}(0) = \vec{y}_0$$

όπου $\vec{y}(t) = [y_1(t), \dots, y_D(t)]^T$ οι άγνωστες συναρτήσεις, $A(t) = [a_{i,j}(t)]_{i,j=1}^D \in \mathbb{R}^{D \times D}$,
 $\vec{F}(t) = [f_1(t), \dots, f_D(t)]^T$ με $a_{i,j}(t), f_j(t)$ δοθείσες, επαρκώς ομαλές συναρτήσεις, και
 D φυσικός αριθμός. Ο πίνακας A υποθέτουμε ότι είναι θετικά ορισμένος, δηλ.

$$\vec{\xi}^T A(t) \vec{\xi} > 0 \quad \forall \vec{0} \neq \vec{\xi} \in \mathbb{R}^D, t \in [0, 1].$$

Αν και η εφαρμογή της μεθόδου φαίνεται να είναι άμεση, κάποιες λεπτομέρειες όσον αφορά στην υλοποίηση πρέπει να διαλευκανθούν.

Τέλος, η απόδειξη των αποτελεσμάτων που παρατηρήσαμε οφείλει να ολοκληρωθεί. Αν και εκτός του σκοπού αυτής της διατριβής, είναι το επόμενο βήμα για όποιον/α θέλει να συνεχίσει τη μελέτη αυτών των προβλημάτων με αυτές τις μεθόδους. Βασιζόμενοι στα αριθμητικά αποτελέσματα, εικάζουμε ότι ισχύει

$$\|y - Y\|_{L^\infty(0,T)} \leq C e^{-\sigma p},$$

κάτω από τη προϋπόθεση (5), όπου C, σ θετικές σταθερές ανεξάρτητες των ε και p , και Y η προσέγγιση με οποιαδήποτε από τις δύο μεθόδους.

6. Βιβλιογραφία

- [1] R. E. O'Malley, *Thinking about ordinary differential equations*, Cambridge University Press, 1997.
- [2] J. M. Melenk, *hp FEM for singular perturbations*, Springer-Verlag, 2002.
- [3] J. M. Melenk, C. Xenophontos and L. Oberbroeckling, *Robust exponential convergence of hp-FEM for singularly perturbed systems of reaction-diffusion equations with multiple scales*, IMA J. Num. Anal., **33** (2013) 609 – 628.
- [4] K. Mustapha, *The hp- and h-versions of the discontinuous and local discontinuous Galerkin methods for one-dimensional singularly perturbed models*, App. Num. Math., **61** (2011) 1223 – 1236.
- [5] S. Repin, *One Hundred Years of the Galerkin Method*, Comp. Meth. Appl. Math., **17** (2017), 351 – 357.
- [6] H.-G. Roos, M. Stynes, and L. Tobiska, *Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations. Convection-diffusion-reaction and flow problems*. Volume 24 of Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, 2008.
- [7] D. Schötzau and C. Schwab, *An hp a priori error analysis of the DG time-stepping method for initial value problems*, Calcolo, **37** (2000) 207 – 232.
- [8] C. Schwab, *p/hp Finite Element Methods*, Oxford Science Publications, 1998.
- [9] Γ-Σ. Σμυρλής, *Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κύπρου, ISBN 978-9963-700-49-3, 2013.
- [10] T. P. Wihler, *An a-priori error analysis of the hp-version of the continuous Galerkin FEM for nonlinear initial value problems*, J. Sci. Comp., **25** (2005) 523 – 549.